大學叢書

統計學大綱

下册

金國寶著

原國立上海商學院叢書
商務印書館發行

第十一章 長期趨勢

第一節 長期趨勢之意義及其測定

經濟現象變動不絕，其甚者常至一日而數變。欲盡取此微小變動而一一研究之，勢有所不能，故吾人祇得就變動之大者作一精密之分析。使經濟現象生此大變動之原因不一，其原動力：或爲季節之影響，是曰季節變動；或爲世界經濟盛衰之起伏，是曰循環變動；或爲一時期內繼續增減之趨勢，是曰長期趨勢；或爲戰爭，罷工，災荒等之影響，是曰意外變動。研究一時期內時間數列之變動，自當先設法除去此意外變動之影響；惟意外變動之原因不一，測定之時無一般適用之方法，祇得隨時隨地研究，故本書所論僅以前三種之變動爲限。測定此三種變動之方法將分述於第十一章，第十二章，第十三章三章。

長期趨勢者，一種變量在一長時期內，逐漸向上或向下變動之傾向也。此種傾向或受外界之影響，或依自然之趨勢。保持此傾向之時期或短至數年，或長至數十年，數百年。人口誕生率高於其死亡率，故人口之變動常有向上之趨勢；五穀種植之法逐漸改良，故每年收穫之量亦逐漸增加；房屋之建築與豫防火災之設備逐漸改善，故每年火災之數亦逐漸[illegible]愈掘愈少，故鑛區之繁榮亦漸呈退化之勢；此皆長期趨勢之

測定長期趨勢最簡單之方法爲極大極小法，即取時間數列中之極大數值與極小數值而分別比較之：若極大值與極小值之趨勢均爲上漲，則全部數列之趨勢亦爲上漲；反之，若均爲下落，則全部數列之趨勢亦爲下落。試以民國元年至十六年上海每年粳米指數爲例：

第七十九表　民國元年至十六年上海粳米指數

(基年：民國十五年)

民國	指數	民國	指數
元年	50	九年	61
二年	46	十年	61
三年	41	十一年	71
四年	47	十二年	71
五年	45	十三年	65
六年	42	十四年	69
七年	42	十五年	100
八年	44	十六年	94

〔註〕表中指數係根據上海特別市社會局在社會月刊第一卷第二號所發表之粳米平均價編製。

極大值：	極小值：
47(民國四年)	41(民國三年)
71(民國十一年，十二年)	42(民國六年，七年)
100(民國十五年)	65(民國十三年)

極大值與極小值之趨勢均爲上漲，故可知民國元年至十六年上海粳米之市價有上漲之趨勢；惟上漲之趨勢有種種，吾人所欲研究者，不特其趨勢之上漲或下落，且欲明其如何上漲，或如何下落。故此法雖

簡，所能指示吾人者，祇一空虛之概念，無大用處也。

長期趨勢大別之可分為直線趨勢與曲線趨勢二種。其測定之方法將分述於以下二節。

第二節 直線趨勢之測定

直線趨勢者，變量之長期趨勢可以直線表示者也。吾人已知繫聯直線可以表示兩數列之繫聯，若其中一數列代表時間，則此直線即表示其他一數列與時間之繫聯。換言之，即此其他數列之長期趨勢也。故趨勢直線實即為繫聯直線之一種。第十章所論測定繫聯直線之方法均可適用於趨勢直線，惟應用最小平方法時趨勢直線之測定較之繫聯直線更為簡易。

若年數為奇數，則中間一年適為時期之中點。以時間數列之算術平均數作為中間一年之數值而繪之於圖，則得P點。依數學原理最小平方直線必經過此點（參看附錄甲 22），則最小平方直線之一點已可確定為P。至其斜度則可自下列二公式之一求得。

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{\Sigma(Xy)}{\Sigma X^2} && (1) \\ b &= \frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2} && (2) \end{aligned}\right\}\text{（證明參看附錄甲 22）}$$

b 斜度

X 各年與中間一年相差之年數

Y 時間數列之各項

y 時間數列之各項與其算術平均數之差

斜度b亦卽爲每年增減之量，若爲正數則爲每年增加之量，若爲負數則爲每年減少之量。玆將最小平方直線計算之程序依次分述於下：

(第一法)應用公式(1)

A. 求時間數列之算術平均數。

B. 求各年與中間一年相差之年數X。

C. 求各項與算術平均數之差y。

D. 求X與y相乘之積，再以所得各乘積相加，而得$\Sigma(Xy)$。

E. 求X之平方，再以所得各平方相加，而得ΣX^2。

F. 以ΣX^2除$\Sigma(Xy)$，卽得斜度b。

G. 以時間數列之算術平均數，作爲中間一年之數量。

H. 後半期各年，依次遞加b，前半期各年，依次遞減b，卽得研究時期內，長期趨勢之各年數量。

(第二法)應用公式(2)

A. 求各年與中間一年相差之年數X。

B. 求時間數列之各項Y與X相乘之積，再以所得各乘積相加，而得$\Sigma(XY)$。

C. 求X之平方，再以所得各平方相加，而得ΣX^2。

D. 以ΣX^2除$\Sigma(XY)$，卽得斜度b。

E. 求時間數列之算術平均數，並以之作爲中間一年之數量。

F. 後半期各年，依次遞加b，前半期各年，依次遞減b，卽得研究時期內長期趨勢之各年數量。

無論用第一法或第二法，b之數值與長期趨勢之各年數量均無不

同。茲就民國元年至十五年上海粳米指數依第一第二兩法分別計算其長期趨勢，如下列兩表：

第八十表　用最小平方法求長期趨勢直線(年數爲奇數)
(第一法)應用公式(1)

民國	粳米指數Y	X	y	Xy	X²	長期趨勢
元　年	50	—7	— 7	49	49	36
二　年	46	—6	—11	66	36	39
三　年	41	—5	—16	80	25	42
四　年	47	—4	—10	40	16	45
五　年	45	—3	—12	36	9	48
六　年	42	—2	—15	30	4	51
七　年	42	—1	—15	15	1	54
八　年	44	0	—13	0	0	57
九　年	61	1	4	4	1	60
十　年	61	2	4	8	4	63
十一年	71	3	14	42	9	66
十二年	71	4	14	56	16	69
十三年	65	5	8	40	25	72
十四年	69	6	12	72	36	75
十五年	100	7	43	103	49	78
$\bar{y}=57$				839	280	

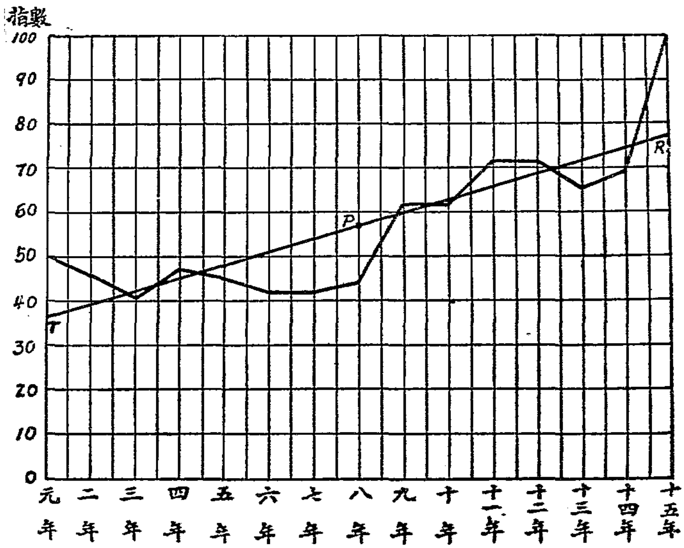
$$b=\frac{839}{280}=3$$

第八十一表　用最小平方法求長期趨勢直線(年數爲奇數)
(第二法)應用公式(2)

民國	粳米指數Y	X	XY		X²	長期趨勢
			−	+		
元　年	50	—7	350		49	36
二　年	46	—6	276		36	39
三　年	41	—5	205		25	42
四　年	47	—4	188		16	45
五　年	45	—3	135		9	48
六　年	42	—2	84		4	51
七　年	42	—1	42		1	54
八　年	44	0	0		0	57
九　年	61	1		61	1	60
十　年	61	2		122	4	63
十一年	71	3		213	9	66
十二年	71	4		284	16	69
十三年	65	5		325	25	72
十四年	69	6		414	36	75
十五年	100	7		700	49	78
	$\bar{y}=57$		1280	2119	280	
			839			

$$b=\frac{839}{280}=3$$

第二十五圖　民國元年至十五年上海粳米指數之長期趨勢



若年數爲偶數，假定爲十六年，則時期之中點，在第八年之末，第九年之始。故在長期趨勢中，第八年之數量，當自算術平均數，減去半年增加之量；第九年之數量，當以半年增加之量，加於算術平均數。故須以半年爲一單位，而公式中之b，亦即爲半年間增減之量。其計算之程序，可分述如下：

(第一法)應用公式(1)

A．　求時間數列之算術平均數。

B．　求各年與時期中點，相差半年之數X，故X當爲……－5,－3,－1,＋1,＋3,＋5………………。

C．　求各項與算術平均數之差 y。

D．　求 X 與 y 相乘之積，再以所得各乘積相加而得 $\Sigma(Xy)$。

E．　求 X 之平方，再以所得各平方相加，而得 ΣX^2。

F．　以 ΣX^2 除 $\Sigma(Xy)$，卽得斜度 b。

G．　以時間數列之算術平均數加 b，卽得時期中點後半年之數量，在其後之各年，依次遞加 2b，在其前之各年，依次遞減 2b，卽得研究時期內，長期趨勢之各年數量。

(第二法)應用公式(2)

A．　求各年與時期中點，相差半年之數 X，故 X 當爲……$-5, -3, -1, +1, +3, +5$……………。

B．　求時間數列之各項 Y 與 X 相乘之積，再以所得各乘積相加，而得 $\Sigma(XY)$。

C．　求 X 之平方，再以所得各平方相加，而得 ΣX^2。

D．　以 ΣX^2 除 $\Sigma(XY)$，卽得斜度 b。

E．　求時間數列之算術平均數。

F．　以時間數列之算術平均數加 b，卽得時期中點後半年之數量在其後之各年，依次遞加 2b，在其前之各年，依次遞減 2b，卽得研究時期內長期趨勢之各年數量。

茲依第一第二兩法，分別計算民國元年至十六年上海粳米指數之長期趨勢。

第八十二表　用最小平方法求長期趨勢直線(年數爲偶數)

(第一法)應用公式(1)

民國	粳米指數Y	X	y	Xy	X^2	長期趨勢
元　年	50	—15	— 9.3	139.5	225	34.70
二　年	46	—13	—13.3	172.9	169	37.98
三　年	41	—11	—18.3	201.3	121	41 26
四　年	47	— 9	—12.3	110.7	81	44.54
五　年	45	— 7	—14.3	100.1	49	47.82
六　年	42	— 5	—17.3	86.5	25	51.10
七　年	42	— 3	—17.3	51.9	9	54.38
八　年	44	— 1	—15.3	15.3	1	57.66
九　年	61	1	1.7	1.7	1	60.94
十　年	61	3	1.7	5.1	9	64.22
十一年	71	5	11.7	58.5	25	67.50
十二年	71	7	11.7	81.9	49	70.78
十三年	65	9	5.7	51.3	81	74.06
十四年	69	11	9.7	106.7	121	77.34
十五年	100	13	40.7	529.1	169	80.62
十六年	94	15	34.7	520.5	225	83.90
$\bar{y}=59.3$				2233.0	1360	

第八十三表　用最小平方法求長期趨勢直線(年數爲偶數)

(第二法)應用公式(2)

民國	粳米指數Y	X	XY		X^2	長期趨勢
			−	+		
元　年	50	—15	750		225	34.70
二　年	46	—13	598		169	37.98
三　年	41	—11	451		121	41.26
四　年	47	— 9	423		81	44.54
五　年	45	— 7	315		49	47.82
六　年	42	— 5	210		25	51.10
七　年	42	— 3	126		9	54.38
八　年	44	— 1	44		1	57.66
九　年	61	1		61	1	60.94
十　年	61	3		183	9	64.22
十一年	71	5		355	25	67.50
十二年	71	7		497	49	70.78
十三年	65	9		585	81	74.06
十四年	69	11		759	121	77.34
十五年	100	13		1300	169	80.62
十六年	94	15		1410	225	83.90
	$\bar{y}=59.3$		2917	5150	1360	
			2233			

$$b=\frac{2233}{1360}=1.64$$

$$2b=3.28$$

不論年數爲奇數，偶數，第一第二兩法所得之結果均相同。故實際計算，可應用第二法；蓋由時間數列之各項，直接計算 XY ，可少一減法之手續故也。

以十二除每年增加之量，或以六除半年增加之量，即得每月增加之量。若年數爲奇數，例如十五年，則時期之中點，適在第八年六月之末，七月之初。故以算術平均數，加上半月增加之量，即爲第八年七月之數量，在其後之各月，依次遞加每月增加之量，在其前之各月，依次遞減每月增加之量。若年數爲偶數，例如十六年，則時期之中點，適在第八年十二月之末，第九年一月之初。故以算術平均數，加上半月增加之量，即得第九年一月之數量，在其後之各月，依次遞加每月增加之量，在其前之各月，依次遞減每月增加之量。今試先計算第七十七表中，民國八年各月之長期趨勢數量(餘類推)。

$$\frac{3}{12}=0.25 \quad \text{每月增加量}$$

$$\frac{0.25}{2}=0.13 \quad \text{每半月增加量}$$

民國八年	長期趨勢	民國八年	長期趨勢
一月	55.63	七月	57.13
二月	55.88	八月	57.38
三月	56.13	九月	57.63
四月	56.38	十月	57.88
五月	56.63	十一月	58.13
六月	56.88	十二月	58.38

茲再計算第八十三表中民國八年七月至民國九年六月之長期趨勢數量。(餘可類推)

$$\frac{1.64}{6}=0.27 \text{ 每月增加量}$$

$$\frac{0.27}{2}=0.14 \text{ 每半月增加量}$$

民國八年	長期趨勢	民國九年	長期趨勢
七月	57.82	一月	59.44
八月	58.09	二月	59.71
九月	58.36	三月	59.98
十月	58.63	四月	60.25
十一月	58.90	五月	60.52
十二月	59.17	六月	60.79

斜度 b 乃以 ΣX^2 除 $\Sigma(XY)$ 而得，但此二數均可用簡捷法求得，故實際計算不必如第八十表至第八十三表之繁。

ΣX^2 可用下列二公式之一求之卽得：

若年數 n 為奇數，則：

$$\Sigma X^2=\frac{n(n-1)\ (n+1)}{12} \qquad \text{(3)(證明參看附錄甲27)}$$

若年數 n 為偶數，則：

$$\Sigma X^2=\frac{n(n+1)\ (n-1)}{3} \qquad \text{(4)(證明參看附錄甲28)}$$

但實際計算年數不至甚多，故可預製一表，以備應用。

第八十四表　計算長期趨勢中 ΣX^2 之數值

年數	ΣX^2	年數	ΣX^2
5	10	6	70
7	28	8	168
9	60	10	330
11	110	12	572
13	182	14	910
15	280	16	1360
17	408	18	1938
19	570	20	2660
21	770	22	3542
23	1012	24	4600
25	1300	26	5850
27	1638	28	7308
29	2030	30	8990

所需注意者年數爲奇數之時以一年爲單位，年數爲偶數之時以半年爲單位。至於 $\Sigma(XY)$ 之計算亦甚簡易，其程序分述如下（證明參看附錄甲29）：

(甲)年數爲奇數：

A．將各年之數量分成兩行，中間一年可略而不書，前半期各年自上而下書於第一行，後半期各年自下而上書於第二行。

B．自第二行各項數量減去第一行各項數量而書其差數於第三行。

C．於第四行自下而上書 1,2,3,4,5,……………………。

D．將第三行與第四行各項兩兩相乘而書其乘積於第五行。

E．將第五行各項相加即得 $\Sigma(XY)$。

第八十五表 用簡捷法計算 Σ(XY) (年數爲奇數)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
50	100	50	7	350
46	69	23	6	138
41	65	24	5	120
47	71	24	4	96
45	71	26	3	78
42	61	19	2	38
42	61	19	1	19
				839

與第八十一表所得之結果相同。

(乙)年數爲偶數:

A. 將各年之數量分成兩行，前半期各年自上而下書於第一行，後半期各年自下而上書於第二行。

B. 自第二行各項數量減去第一行各項數量而書其差數於第三行。

C. 於第四行自下而上書 1,3,5,7,9,………………。

D. 將第三行與第四行各項兩兩相乘而書其乘積於第五行。

E. 將第五行各項相加卽得 Σ(XY)。

第八十六表 用簡捷法計算 Σ(XY) (年數爲偶數)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
50	94	44	15	660
46	100	54	13	702
41	69	28	11	308
47	65	18	9	162
45	71	26	7	182
42	71	29	5	145
42	61	19	3	57
44	61	17	1	17
				2233

與第八十三表所得之結果相同。

最小平方直線，不能表示長期趨勢之變動，此其缺點也。此種變動須觀圖上曲線，方能發見，研究時期之選擇亦可藉此確定。吾人用最小平方法求長期趨勢直線時關於研究時期之確定，應注意下列各點：

(一)研究時期內不應包含趨勢相反之兩時期。例如 1873 年至 1913 年間法國之物價指數實包含兩個不同之時期：前半期之指數自 144 跌至 82，後半期之指數自 82 漲至 116。若貿然在此四十一年間求法國物價指數之長期趨勢，則求得之最小平方直線將幾與橫坐標軸平行，其為謬誤不待言矣。故吾人須分別研究前後兩時期法國物價指數之長期趨勢，前期自 1873 年至 1896 年，後期自 1896 年至 1913年，必若是方能發見實際之長期趨勢。茲依最小平方法分別計算長期趨勢於下（見第八十七表）。

(二) 研究時期亦不能過短，過短則其結果將受循環變動之影響；蓋若僅有三四年而此三四年或全為循環變動中之興盛期或衰落期，則變量之上升或下降並非為長期趨勢之結果。

(三) 研究時期之始末亦須特別注意。吾人之測定長期趨勢原欲在可能範圍內盡除循環變動之影響，故研究時期之始末須擇其略能相似者。若以興盛期之末始而以衰落期之末終，或以衰落期之末始而以興盛期之末終，則其結果將有過低或過高之弊；蓋前者多一衰落期，而後者則多一興盛期，均足使循環變動影響於長期趨勢也。但若研究時期內包含循環甚多，則過高過低之弊稍減。

第八十七表 1873—1913年法國之物價指數及其長期趨勢

年份	指數	全時期趨勢 算術平均數 105 每年增加量—0.57	前半期趨勢 算術平均數 107.8 每年增加量—2.31	後半期趨勢 算術平均數 100 每年增加量1.95
1873	144	116.4	134.4	
1874	132	115.8	132.1	
1875	129	115.3	129.7	
1876	130	114.7	127.4	
1877	131	114.1	125.1	
1878	120	113.6	122.8	
1879	117	113.0	120.5	
1880	120	112.4	118.2	
1881	117	111.8	115.9	
1882	114	111.3	113.6	
1883	110	110.7	111.3	
1884	101	110.1	109.0	
1885	99	109.6	106.6	
1886	95	109.0	104.3	
1887	92	108.4	102.0	
1888	96	107.9	99.7	
1889	100	107.3	97.4	
1890	100	106.7	95.1	
1891	98	106.1	92.8	
1892	95	105.6	90.5	
1893	94	105.0	88.2	
1894	87	104.4	85.9	
1895	85	103.9	83.5	
1896	82	103.3	81.2	83.4
1897	83	102.7		85.4
1898	86	102.2		87.3
1899	93	101.6		89.3
1900	99	101.0		91.2
1901	95	100.4		93.2
1902	94	99.9		95.1
1903	96	99.3		97 1
1904	94	98.7		99.0
1905	98	98.2		101.0
1906	104	97.6		102.9
1907	109	97.0		104.9
1908	101	96.5		106.8
1909	101	95.9		108.8
1910	118	95.3		110.7
1911	113	94.7		112.7
1912	118	94.2		114.6
1913	116	93.6		116.6

〔註一〕 指數來源：經濟學季刊第三卷第四期第85-7頁。

〔註二〕 1901—1910年＝100

第三節　曲線趨勢之測定

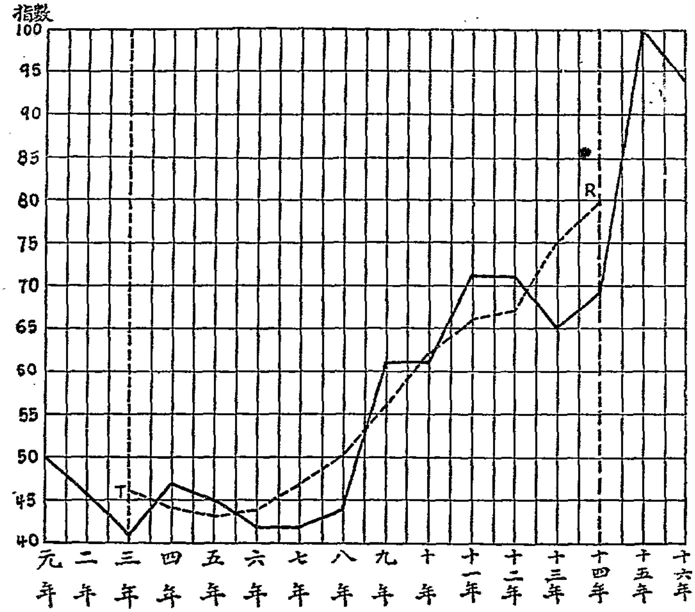
曲線趨勢者可以曲線表示長期變動之趨勢也。其測定之方法甚多，最簡單者曰移動平均數法。此法乃以若干年之移動平均數代替原有時間數列之各項，而表示此新數列之曲線卽為原有數列之趨勢曲線也。計算移動平均數之年數無一定之限制，但通常為奇數，卽三年，五年，七年是也。設欲求上海粳米指數之五年移動平均數，則先求民國元年至五年之平均數得 46，卽書於民國三年（中間一年）之旁以代替原有之指數 41；然後將年份移下一年，卽求民國二年至六年之平均數得 44，卽書於民國四年（中間一年）之旁以代替原有之指數 47；以下各年之移動平均數可依同法計算，如下表。

第八十八表　移動平均數

民國	指數	五年移動平均數
元年	50	
二年	46	
三年	41	46
四年	47	44
五年	45	43
六年	42	44
七年	42	47
八年	44	50
九年	61	56
十年	61	62
十一年	71	66
十二年	71	67
十三年	65	75
十四年	69	80
十五年	100	
十六年	94	

試以原有之指數與求得之移動平均數各繪一曲線，則前者之起伏甚多而後者甚少，故可以後者測定前者之趨勢。

第二十六圖　用移動平均數法測定長期趨勢



上圖中之虛線TR卽爲移動平均曲線。

移動平均數法計算甚易，且能測定趨勢方向之變動，此爲其優點。惟用移動平均數代替原有數列之各項，則研究之時期兩端各縮短若干年，此其不便一；計算移動平均數之年數隨統計家之主觀而定，五年移動平均數與九年移動平均數所得之結果或致相差甚遠，此其不便二；由移動平均數法求得之長期趨勢不能盡除循環變動之影響，設循環變動之時期爲九年，則用九年移動平均數求得之長期趨勢受循環變動之影

響甚微，惟循環變動之時期有長有短，設有一循環其時期僅有七年，則用九年移動平均數求得之長期趨勢受循環變動之影響尚大，蓋九年之中可有兩個極大值與一個極小值或兩個極小值與一個極大值故也，此其不便三；故統計學家有聯合移動平均數與最小平方法以測定長期趨勢者。其法先求移動平均數組成一新數列，然後由此新數列依最小平方法測定長期趨勢直線。此法兼具二者之長，既能表示趨勢方向之變動，又能免除循環變動之影響，故較單用移動平均數法爲優。

應用最小平方法以測定長期趨勢不以直線爲限，二次拋物線，三次拋物線與四次，五次拋物線均可應用此法求得。惟除二次，三次拋物線外，高次拋物線鮮有用以測定長期趨勢者。應用最小平方法以確定趨勢拋物線之位置，卽欲使由拋物線公式求得之數值與原有數值相差平方之和爲最小。二次拋物線與三次拋物線之公式如下：

$$Y=a_1+b_1X+c_1X^2 \qquad (5)$$

$$Y=a_2+b_2X+c_2X^2+d_2X^3 \quad (6)$$

以上兩式中 a_1,b_1,c_1 與 a_2,b_2,c_2,d_2 之數值求得後，拋物線之位置卽能確定。依最小平方法求得 a_1,b_1,c_1 與 a_2,b_2,c_2,d_2 之數值如下：

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{\Sigma X^4\Sigma Y-\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}\\ b_1&=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}\\ c_1&=\frac{n\Sigma(X^2Y)-\Sigma X^2\Sigma Y}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}\end{aligned}\right\}(7)\text{證明參看附錄甲(30)}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_2&=\frac{\Sigma X^4\Sigma Y-\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}\\[1em]
b_2&=\frac{\Sigma X^6\Sigma(XY)-\Sigma X^4\Sigma(X^3Y)}{\Sigma X^2\Sigma X^6-(\Sigma X^4)^2}\\[1em]
c_2&=\frac{n\Sigma(X^2Y)-\Sigma X^2\Sigma Y}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}\\[1em]
d_2&=\frac{\Sigma X^2\Sigma(X^3Y)-\Sigma X^4\Sigma(XY)}{\Sigma X^2\Sigma X^6-(\Sigma X^4)^2}
\end{aligned}\right\}\text{(8)(證明參看附錄甲31)}$$

X　若年數爲奇數，則爲各年與中間一年相差之年數；若年數爲偶數，則X爲各年與時期中點相差半年之數。

Y　時間數列之各項

n　年數

有時時間數列之散佈在算術圖中不能用趨勢直線或拋物線配合，但在單對數圖中則其趨勢可用直線或拋物線表示。例如各期末之複利終價在算術圖中爲一複利曲線，而在單對數圖中則爲一直線。故若時間數列之趨勢與複利終價相似，則可先求各項之對數，然後應用最小二乘法確定其在單對數圖中之趨勢直線。茲述其計算之程序於下：

A．　求時間數列各項之對數。

B．　應用最小平方直線求對數數列之長期趨勢。

C．　由求得之長期趨勢再求反對數，卽得時間數列在算術圖中之長期趨勢。

若時間數列之趨勢在單對數圖中爲二次或三次拋物線，則其在算術圖中之趨勢曲線可用同法測定。

玆就1887年至1911年美國之產鋅量計算其長期趨勢於下。

第八十九表　美國國內鋅鑛之產鋅量及其長期趨勢

（單位一千短噸）

年　份	產鋅量 Y	log Y	長期趨勢之對數 log Yc	長期趨勢 Yc
1887	50.3	1.70157	1.72244	52.8
1888	55.9	1.74741	1.75234	56.5
1889	58.9	1.77012	1.78224	60.6
1890	63.7	1.80414	1.81214	64.9
1891	80.9	1.90795	1.84204	69.5
1892	87.3	1.94101	1.87194	74.5
1893	78.8	1.89653	1.90184	79.8
1894	75.3	1.87679	1.93174	85.5
1895	89.7	1.95279	1.96164	91.5
1896	81.5	1.91116	1.99154	98.1
1897	100.0	2.00000	2.02144	105.1
1898	115.4	2.06221	2.05134	112.5
1899	129.1	2.11093	2.08124	120.6
1900	123.9	2.09307	2.11114	129.2
1901	140.8	2.14860	2.14104	138.4
1902	156.9	2.19562	2.17094	148.2
1903	159.2	2.20194	2.20084	158.8
1904	186.7	2.27114	2.23074	170.1
1905	203.8	2.30920	2.26064	82.2
1906	199.7	2.30038	2.29054	195.2
1907	223.7	2.34967	2.32044	209.1
1908	190.7	2.28035	2.35034	224.0
1909	230.2	2.36211	2.38024	240.0
1910	252.5	2.40226	2.41014	257.1
1911	271.6	2.43393	2.44004	275.5
		52.03088		

〔註一〕資料來源：經濟統計雜誌第二卷。

〔註二〕第四行係應用最小平方法自 logY 數列中求得。

本章應用公式

$$b=\frac{\Sigma(Xy)}{\Sigma X^2} \qquad (1)$$

$$b=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2} \qquad (2)$$

$$\Sigma X^2 = \frac{n(n-1)(n+1)}{12} \tag{3}$$

$$\Sigma X^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \tag{4}$$

$$Y = a_1 + b_1 X + c_1 X^2 \tag{5}$$

$$Y = a_2 + b_2 X + c_2 X^2 + d_2 X^3 \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Sigma X^4 \Sigma Y - \Sigma X^2 \Sigma(X^2 Y)}{n\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2} \\ b_1 &= \frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2} \\ c_1 &= \frac{n\Sigma(X^2 Y) - \Sigma X^2 \Sigma Y}{n\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{\Sigma X^4 \Sigma Y - \Sigma X^2 \Sigma(X^2 Y)}{n\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2} \\ b_2 &= \frac{\Sigma X^6 \Sigma(XY) - \Sigma X^4 \Sigma(X^3 Y)}{\Sigma X^2 \Sigma X^6 - (\Sigma X^4)^2} \\ c_2 &= \frac{n\Sigma(X^2 Y) - \Sigma X^2 \Sigma Y}{n\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2} \\ d_2 &= \frac{\Sigma X^2 \Sigma(X^3 Y) - \Sigma X^4 \Sigma(XY)}{\Sigma X^2 \Sigma X^6 - (\Sigma X^4)^2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

第十二章　季節變動

第一節　季節變動之性質及其效用

季節變動者，時間數列受季節之影響而生之變動也。草帽與皮貨之營業均受顯著之季節影響，他若牛油與鷄蛋之生產，建築業與旅行之活動，戲館公園顧客之多少，以及煤電之消費，靡不受季節之影響；凡此皆因氣候之寒暖，雨量之多少以及其他自然現象之變動而使時間數列發生變動，卽米乞爾教授所謂自然因子是也。米氏謂自然因子之外尙有人爲因子，有時亦爲造成季節變動之原因。我國舊歷新年與歐美復活聖誕等節之習俗，我國三節還賬與歐美十二月雙薪之制度，均足使各種營業發生季節之變動，此則人爲因子影響於季節變動之例也。雖然，人爲因子有時亦能緩和季節之變動。羊毛衣襪祇能銷售於秋冬二季，然其生產全年不絕，煤商常於夏季以廉價之煤出售於消費者，使其夏季營業得維持相當之數量，此皆人爲因子足以緩和季節變動之例也。

阿富塔里翁教授謂自然與人爲因子之外各月日數之不同亦爲季節變動原因之一。每月之日數多至三十一日少至二十八日，除二月外每月之日數或爲三十一日或爲三十日，故每月之中或有五個星期日或僅有四個星期日，凡此皆可造成季節之變動。惟此種不規則變動消除尙易。若能代以工作日之平均統計，則此種不規則之變動卽能完全消滅。

季節變動之性質已如上述。茲更論其效用於次：

一.季節變動能示吾人以季節性工業之失業程度,並使吾人對於某種變動得一正確之觀念。例如某種工業產品盛銷於夏,則該工業之失業人數苟在冬季增加,不能卽謂爲由於經濟之衰落;一國之通貨在淸賬季節需用較多,則一時之多量通貨不能卽謂爲通貨膨脹,更無所謂提高物價之危險。

二.季節變動之硏究能使吾人確定非季節性之變動。例如每年冬季某種工業之失業人數常較其他各季爲多，設民國二十年十二月之失業人數多於同年六月,則此種失業人數之增加究僅受季節變動之影響?抑於季節變動之外尙有其他變動？此其他變動之測定非自時間數列中消除季節變動不可。

三.季節變動之硏究能使吾人確定循環變動之時日。例如季節變動未除去以前物價之下降始自一月，但在循環變動中物價之下降或在十二月已開始，或至二月方開始。故欲確定循環變動之時日,非先硏究季節變動而設法消除之不可。

四.季節變動之硏究能使吾人對於經濟定理之價値與以正當之評判。有時經濟定理似與事實相反,但不能遽以爲定理謬誤之證;蓋此事理之相反或由於季節變動未消除之故亦未可知。故欲評論經濟定理之價値,亦非先硏究季節變動而設法消除之不可。

第二節 季節變動存在之確定

季節變動雖爲時間數列變動原因之一，然此非謂一切時間數列均

有季節變動存在；故吾人在分析季節變動之前須先將原有數列作圖以斷定季節變動之有無。此項斷定之方法亦有數種。第一法則以此數列繪於單對數紙上，若某月常升，某月常降，則季節變動即可斷定其必然存在。所以必用單對數紙者，則以小數值之小差量與大數值之大差量從比例尺度上觀之初無二致。故用單對數紙作圖，則長期趨勢之性質與季節變動之有無皆可一覽而知。但此法有時亦不適用，則須用更精密之方法。可用透明紙作圖，每年數字各繪一圖，然後將此各圖疊而觀之，如其各年起伏升降之情形略相符合，則季節變動之存在可以斷言。

決定季節變動最適當之方法曰環比法。此法係美國哈佛大學潘蓀教授所倡，哈佛大學之經濟研究所即用此法。其第一步辦法即在計算各月之環比，環比之意義及其計算已詳述於指數一章。茲就上海雞蛋價(第九十表)計算其環比如下表。(第九十一表)

第九十表　上海雞蛋每打之平均躉售價(規元)

(民國八年十二月至十五年十二月)

月份	八年	九年	十年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年
一月		0.1615	0.196	0.1625	0.198	0.1975	0.238	0.177
二月		0.161	0.208	0.2075	0.198	0.198	0.235	0.205
三月		0.1395	0.162	0.236	0.198	0.2025	0.210	0.171
四月		0.125	0.128	0.1635	0.1985	0.161	0.199	0.155
五月		0.1025	0.138	0.162	0.154	0.162	0.153	0.163
六月		0.116	0.138	0.1615	0.162	0.160	0.141	0.159
七月		0.135	0.137	0.1615	0.162	0.160	0.140	0.169
八月		0.138	0.137	0.162	0.198	0.161	0.143	0.186
九月		0.1605	0.137	0.198	0.1625	0.164	0.165	0.188
十月		0.148	0.158	0.1965	0.199	0.237	0.174	0.192
十一月		0.1445	0.163	0.200	0.1995	0.238	0.183	0.227
十二月	0.139	0.158	0.164	0.200	0.1985	0.239	0.174	0.237
各年平均價格		0.1408	0.1555	0.1843	0.1857	0.1900	0.1796	0.1858

〔註〕　上表數字錄自前財政部駐滬貨價調查處之報告。惟調查處之調查方法中間

稍有變更，民國十四年三月以前每月調查四次或五次，自此以後則每月調查改爲初一及十五兩次。此表在民國十四年三月以前用中間一星期或兩星期之平均數，調查五次者則取中間一星期卽第三星期之報告，如其調查四次則取第二第三兩星期之平均數，民國十四年三月以後則用十五日之價格。價格之單位亦有變更，最初之單位爲一打，至民國十五年五月始改用千個爲單位。茲爲便於比較起見，均化作每打之價。

第九十一表　上海鷄蛋價格之環比

月　份	九　年	十　年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年
一　月	116	124	99	99	99	100	102
二　月	100	103	128	100	100	99	116
三　月	87	78	114	100	102	89	83
四　月	90	79	69	100	80	95	91
五　月	82	108	99	78	101	77	105
六　月	113	100	100	105	99	92	98
七　月	116	99	100	100	100	99	106
八　月	102	100	100	122	101	102	110
九　月	116	100	122	82	102	115	101
十　年	92	115	99	122	145	106	102
十一月	98	103	102	100	100	105	118
十二月	109	101	100	99	100	95	104

上表中第一橫行卽表示歷年一月對於其上年十二月之關係，第二橫行則爲二月對一月之關係，就此種種吾人可用平均數求得其平均關係；但一月之環比有七，二月之環比亦七，各月之環比各自成一數列，吾人究用何種平均數，須視此各數列分配之性質與其集散偏態之程度而定。欲解決此問題非將此十二數列各各組成頻數分配表不可，並爲便於比較起見須將此十二數列合成一表如下列之第九十二表。表中組距爲1%，而組中點定爲整數，但有時季節變動甚微，則此表組距非用0.1%不可。至於百分尺度之起訖須視環比兩端之情形而定，要必使「以上」「以下」兩組中之頻數極少爲歸。此表將十二數列合在一起，故曰多項頻數表。

第九十二表　上海鷄蛋價格環比之多項頻數表
（民國九年一月至十五年十二月）

環比	一月 十二月	二月 一月	三月 二月	四月 三月	五月 四月	六月 五月	七月 六月	八月 七月	九月 八月	十月 九月	十一月 十月	十二月 十一月
120以上	|	|						|	|	||		
120												
119												
118											|	
117												
116	|	|					|		|			
115									|	|		
114			|									
113						|						
112												
111												
110								|				
109												|
108					|							
107												
106		|					|			|		
105					|	|					|	
104												|
103											|	
102	|		|					||	|	|	|	
101					|			|	|			|
100	|	|||	|	|		||	|||	||	|		||	||
99	|||	|			|	|	||			|		|
98						|					|	
97												
96												
95				|								|
94												
93												
92						|				|		
91				|								
90				|								
89			|									
88												
87			|									
86												
85												
84												
83			|									
82					|				|			
81												
80				|								
80以下			|	||	||							

此多項頻數表之所表示者有三點：(一)各月離中之方向可以表示季節變動之有無；(二)各行間中心之轉換可以表示季節變動之程度；(三)環比之集散可以表示季節指數正確之程度。有時季節變動明知存在，但不能正確測定者，則多項頻數表中之組距單位不必用1%，即用2%或5%亦無不可。

第三節　季節指數之計算

季節變動之存在既已確定，其次則須從事於季節指數之計算。其計算之方法亦有數種，玆分別詳述於下。

(一)環比中位數法。環比中位數法之計算可分下列各步：

A.環比中位數。上表之環比每月各有七個，故第一步之計算須就各月之環比而各求其平均數。然而平均數有多種，究以何者為適宜？據統計學家之意見以中位數為最善，蓋各月之價格容有例外之變化，吾人所求者乃其通常的變化非例外的變化，而一切極端的不規則之影響必須除去，故環比之平均數以中位數為最適當。例如一月之環比依數值之大小順次排列則有 124,116,102,100,99,99,99，取其中間一數(100)為平均數，是曰環比中位數；如其環比之數為偶數，則取其中間二數之算術平均數。但有時環比分配甚為散漫，則此環比中位數之意義不妨稍稍變通。如其環比之數為奇數，吾人可取中間三數或五數之算術平均數為環比中位數；如其環比之數為偶數，則可取中間四數或六數之平均數為環比中位數。本例環比不甚集中，故環比中位數不用中間之一數而取中間三數之算術平均數。

B.鎖比。各月之環比中位數雖已求得，但尚不能作爲季節指數。何則？環比之所表示者不過上一月與下一月之關係。欲使十二月之價格能互相比較，非將此等環比改至同一標準不可；換言之卽先擇特定一月(十二月或一月)爲標準，然後計算其他十一月對此一月之百分比，是卽各月之鎖比。鎖比之意義及其計算方法已詳指數一章。第九十三表中第三行卽求得之各月鎖比。惟求得十一月之鎖比後再乘以十二月之環比，此鎖比按之理論亦當爲 100%，與第一次所得之十二月鎖比相同。然今 $0.913 \times 1.00 = 0.913$ 與 1.00 相差 0.087 卽 8.7%；此項差誤半由於他種勢力之影響，半由於計算之不能絕對正確所致。環比稍有差誤，則以環比中位數與鎖比相乘之故愈積而愈大，至十二月而相差有 8.7% 之多。欲求季節指數必先將此項差誤校正，故環比中位數法之第三步卽爲累積差誤之校正。

C.校誤。 校正差誤之法共有兩種：一則假定此項差誤之增加與算術定律相同，換言之卽單利公式是也。一則假定與幾何定律相同，換言之卽複利公式是也。但其根本目的初無二致，無非欲使十二月之鎖比等於 100%，如是而已。

設每環比中位數之差誤爲 d% 則依第一法。

$$d = \frac{8.7}{12} = 0.725$$

欲校正差誤可就一月之鎖比加上 1d，二月之鎖比加上 2d，三月之鎖比加上 3d，餘可依次類推，所得結果爲校正鎖比，卽第九十三表中之第(5)行。

第二法之假定較爲合理，蓋差誤之增加由於連乘而來，故應與複利

公式相近。設每環比中位數之差誤爲d，而第二次所得之十二月鎖比爲A，則

$$A=100(1+d)^{12} \qquad (1)$$

$$即\log(1+d)=\frac{\log\frac{A}{100}}{12} \qquad (2)$$

代以本例之數字則得

$$\log(1+d)=\frac{\log\frac{91.3}{100}}{12}=\frac{\overline{1}.96047}{12}=\overline{1}.9967058$$

$$1+d=0.9924$$

既求得$(1+d)$則上項差誤不難校正，卽以0.9924卽$(1+d)$除一月之鎖比，以0.9924^2卽$(1+d)^2$除二月之鎖比，以0.9924^3卽$(1+d)^3$除三月之鎖比，餘類推，至十二月之鎖比則以0.9924^{12}卽$(1+d)^{12}$除之，是爲各月之校正鎖比，卽九十四表中之第(4)行。

第九十三表　用環比中位數法計算季節指數(第一法)

(1) 月份	(2) 環比中位數	(3) 鎖比	(4) 校正數	(5) 校正鎖比	(6) 季節指數
一月	100	100.0	0.7	100.7	110
二月	102	102.0	1.5	103.5	113
三月	92	93.8	2.2	96.0	105
四月	87	81.6	2.9	84.5	92
五月	94	76.7	3.6	80.3	88
六月	100	76.7	4.4	81.1	89
七月	100	76.7	5.1	81.8	89
八月	102	78.2	5.8	84.0	92
九月	106	82.9	6.5	89.4	98
十月	108	89.5	7.3	96.8	106
十一月	102	91.3	8.0	99.3	109
十二月	100	91.3	8.7	100.0	109
				1097.4	

$$1097.4\div12=91.5$$

第九十四表　用環比中位數法計算季節指數(第二法)

(1) 月份	(2) 環比中位數	(3) 鎖比	(4) 校正鎖比	(5) 季節指數
一月	100	100.0	100.8	111
二月	102	102.0	103.6	114
三月	92	93.8	96.0	105
四月	87	81.6	84.1	92
五月	94	76.7	79.7	87
六月	100	76.7	80.3	88
七月	100	76.7	80.9	89
八月	102	78.2	83.1	91
九月	106	82.9	88.8	97
十月	108	89.5	96.6	106
十一月	102	91.3	99.3	109
十二月	100	91.3	100.0	110
			1093.2	

$$1093.2\div12=91.1$$

D.季節指數。 校正鎖比爲各月對於十二月之百分比。環比中位數法之最後一步,須將其化爲各月對其一年平均數之百分比。故校正鎖比算出後,即求十二個百分比之算術平均數,再以此算術平均數除各月之校正鎖比,所得之結果即爲季節指數。上二表中最後一行所書之數字即所謂季節指數是也。

以上兩法固以第二法爲較善,但實際計算之時往往不用此法,因計算鎖比之時累次相乘,改正錯誤之時累次相除,均極繁重,故不得不另覓更簡捷之法以便計算。第二法之簡捷法名曰對數法,蓋應用對數以便計算之法也。

任何一月之鎖比即等於以前各月環比之乘積,十二月之鎖比即將十二個環比相乘之積,故十二月鎖比之對數即將十二個環比對數相加之總和。鎖比之計算既以十二月爲標準,則第一次十二月之鎖比爲 100%,如其環比中位數完全無誤,而鷄蛋價格變動之原因祇有季節變動一

種，別無他種影響參雜其間，則十二個環比相乘之後所得第二次十二月之鎖比仍當為100%。換言之各環比中位數之對數相加之總數當為零。(log100%＝log1＝0)但觀第九十五表第(3)行之總和為－0.03903，故當就十二個環比之對數各加上(若對數之總和為正數，則須減去)0.03903之十二分之一，是為校正對數；然後乃將此等對數累積相加，是即各月鎖比之對數，故求其反對數即得各月之鎖比，即表中之第(7)行是也。

第九十五表　用對數法計算季節指數

(1) 月份	(2) 環比中位數	(3) 對數	(4) 校正數之對數	(5) 校正對數	(6) 累積對數	(7) 鎖比	(8) 季節指數
一月	100	0.00000	0.00325	0.00325	0.00325	100.75	111
二月	102	0.00860	0.00325	0.01185	0.01510	103.54	114
三月	92	$\bar{1}.96379$	0.00325	$\bar{1}.96704$	$\bar{1}.98214$	95.97	105
四月	87	$\bar{1}.93952$	0.00325	$\bar{1}.94277$	$\bar{1}.92491$	84.12	92
五月	94	$\bar{1}.97313$	0.00325	$\bar{1}.97638$	$\bar{1}.90129$	79.67	87
六月	100	0.00000	0.00325	0.00325	$\bar{1}.90454$	80.27	88
七月	100	0.00000	0.00325	0.00325	$\bar{1}.90779$	80.87	89
八月	102	0.00860	0.00325	0.01185	$\bar{1}.91964$	83.11	91
九月	106	0.02531	0.00325	0.02856	$\bar{1}.94820$	88.76	97
十月	108	0.03342	0.00325	0.03667	$\bar{1}.98487$	96.58	106
十一月	102	0.00860	0.00325	0.01185	$\bar{1}.99672$	99.25	109
十二月	100	0.00000	0.00328	0.00328	0.00000	100.00	110
		－0.03903				1092.89	

－0.03903÷12＝－0.00325　　　1092.89÷12＝91.074

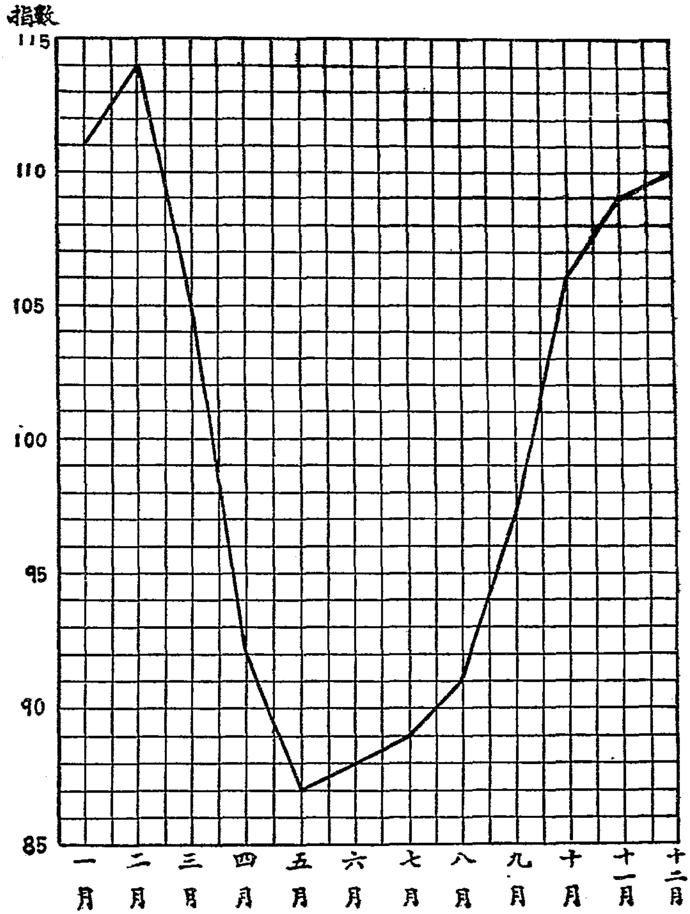
〔註一〕 環比中位數 100，102，……實為 100%，102%，……之縮寫，故其對數為 0.00000，0.00860，……而非2.00000，2.00860，……。

〔註二〕 －0.03903不能以12除盡，故十二月校正數之對數較其他各月略大。

十二個鎖比求得後，以其算術平均數除各月之鎖比，即為季節指數

，與第九十四表所得之結果完全相同。以此等季節指數作圖，則爲第二十七圖。

第二十七圖 上海雞蛋價格之季節變動



(二)平均法。 環比中位數法之計算稍覺繁複。據美國北達古塔大學教授戴維斯之經濟統計學緒論，凡年復一年無劇烈之變動者可用平均法，計算之簡易遠出環比中位數法之上。其法先求歷年各月之平均數，然後再除以長期趨勢之各項，所得之百分比即季節指數也。

茲仍就鷄蛋價格之一例用平均法計算其季節指數。觀第九十表可見雞蛋價格自民國九年至十五年大有增加，此由於長期趨勢之故。單就長期趨勢而論，二月之價平均必大於一月，而三月又大於二月，欲測季節變動，此項長期趨勢不可不先分析。設就此七年之平均價格配以一直線，而用最小平方法（參看第十一章第二節）計算其每年之平均增加，則得

0.1408	0.1858	0.0450	3	0.1350
0.1555	0.1796	0.0241	2	0.0482
0.1843	0.1900	0.0057	1	0.0057
				0.1889

$$b=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}=\frac{0.1889}{28}=0.00675$$

即每年之平均增加有規元0.00675兩，而每月之平均增加則爲0.00675之十二分之一即規元0.00056兩。各月價格皆受此長期趨勢之影響，故欲求季節指數，非將此長期趨勢之各項除每月之平均數不可。第九十六表中第(3)行即在長期趨勢中各月之價格，而第(4)行即爲季節指數。

第九十六表　用平均法計算季節指數(甲)

(1) 月別	(2) 各月平均數	(3) 長期趨勢	(4) 季節指數 (2)÷(3)
一月	0.1901	0.17144	111
二月	0.2018	0.17200	117
三月	0.1884	0.17256	109
四月	0.1614	0.17312	93
五月	0.1478	0.17368	85
六月	0.1482	0.17424	85
七月	0.1521	0.17480	87
八月	0.1607	0.17536	92
九月	0.1679	0.17592	95
十月	0.1864	0.17648	106
十一月	0.1936	0.17704	109
十二月	0.1958	0.17760	110
	2.0942	0.17452	100

$$2.0942 \div 12 = 0.17452$$

依米爾斯之統計方法,將此法稍變,其意亦同。先求各月之平均數,然後以任何一月爲標準月份而將其他各月之平均數依次校正,然後再以十二月之平均數除各月校正之平均數,即得季節指數。例如上海之鷄蛋價格每月平均增加有規元 0.00056 兩,假以一月爲標準月份,則從二月之平均數減去 0.00056,從三月之平均數減去 0.00112,從四月減去0.00168,餘類推。設以十二月爲標準月份,則十一月之平均數須加上0.00056,十月之平均數須加0.00112,九月須加0.00168,餘類推。但實際計算之時標準以中間六七等月爲便,若以六月爲標準月份,則七月須減 0.00056,八月須減 0.00112,九月須減 0.00168,至於五月須加上 0.00056,四月須加 0.00112,餘類推,其結果即第九十七表中之第(3)行是也。

第九十七表　用平均法計算季節指數(乙)

(1) 月　別	(2) 每月平均數	(3) 校正平均數	(4) 季節指數
一　月	0.1901	0.1929	111
二　月	0.2018	0.2040	117
三　月	0.1884	0.1901	109
四　月	0.1614	0.1625	93
五　月	0.1478	0.1484	85
六　月	0.1482	0.1482	85
七　月	0.1521	0.1515	87
八　月	0.1607	0.1596	92
九　月	0.1679	0.1662	95
十　月	0.1864	0.1842	106
十一月	0.1936	0.1908	110
十二月	0.1958	0.1924	110
		2.0908	

$2.0908 \div 12 = 0.1742$

〔註〕若統計時期祇有三四年，則可先求各月之平均數，以全年之平均數除之，即得季節指數。

(三)移動平均數法。 環比中位數法與平均法之外尚有一法，用十二月移動平均數以測定季節變動者，是曰移動平均數法。季節變動既爲一年十二月中之變動，故求十二月之移動平均數則季節變動可以除去，然後將原有數列除以各月相當之移動平均數可得季節指數。但季節變動之程度至不一定，故原有數字對於移動平均數之百分比亦須求其平均數，方得正確之季節指數。

但原有數字與移動平均數相比之時必須時日相當。例如上海雞蛋之價格民國十四年三月以前用第二第三兩星期之平均數或第三星期之報告，民國十四年三月以後則用每年十五日之報告，故此雞蛋價格約略均可稱爲每月十五日之價。但就民國九年一月至十二月之平均數而言，其中心在七月初一日，從民國九年二月至民國十年一月之十二月平均

數，中心在八月初一日，欲與原有數值（七月之0.135）相比，必須將此二月之移動平均數再求其平均數。換言之，即先求十二月移動平均數，繼求二月平均數。其結果見第九十八表。

第九十八表　上海雞蛋價格之移動平均數
（十二月移動平均數以二月移動平均數校正）

民國／月份	九　年	十　年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年
一　月		0.1546	0.1668	0.1856	0.1833	0.1971	0.1686
二　月		0.1546	0.1688	0.1871	0.1816	0.1955	0.1716
三　月		0.1536	0.1724	0.1871	0.1802	0.1948	0.1744
四　月		0.1530	0.1766	0.1857	0.1818	0.1922	0.1761
五　月		0.1542	0.1797	0.1858	0.1850	0.1873	0.1786
六　月		0.1553	0.1828	0.1857	0.1883	0.1823	0.1831
七　月	0.1422	0.1541	0.1857	0.1856	0.1917	0.1770	
八　月	0.1456	0.1527	0.1868	0.1856	0.1949	0.1732	
九　月	0.1485	0.1558	0.1848	0.1858	0.1968	0.1704	
十　月	0.1496	0.1603	0.1847	0.1844	0.1986	0.1669	
十一月	0.1512	0.1623	0.1858	0.1832	0.1999	0.1655	
十二月	0.1536	0.1648	0.1855	0.1834	0.1987	0.1666	

於是乃就雞蛋之原來價格而求其對於十二月移動平均數之百分比。例如民國九年七月之價爲0.135，而十二月移動平均數爲 0.1422，以後者除前者即得94.9%，餘類推。其結果詳第九十九表。

第九十九表　雞蛋之實際價格對十二月移動平均數之百分比

民國／月份	九　年	十　年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年
一　月		126.8	97.4	106.7	107.7	120.8	105.0
二　月		134.5	122.9	105.8	109.0	120.2	119.5
三　月		105.5	136.9	105.8	112.4	107.8	98.1
四　月		83.7	92.6	106.9	88.6	103.5	88.0
五　月		89.5	90.2	82.9	87.6	81.7	91.3
六　月		88.9	88.3	87.2	85.0	77.3	86.8
七　月	94.9	88.9	87.0	87.3	83.5	79.1	
八　月	94.8	89.7	86.7	106.7	82.6	82.6	
九　月	108.1	87.9	107.1	87.5	83.3	96.8	
十　月	98.9	98.6	106.4	107.9	119.3	104.3	
十一月	95.6	100.1	107.6	108.9	119.1	110.6	
十二月	102.9	99.5	107.8	108.2	120.3	104.4	

然而此項百分比各年稍有出入。例如一月最高至 126.8 而最小則僅 97.4，又如二月雖其百分比常在一百以上，然最小祇105.8最大則至134.5。欲求季節指數非將此等百分比先求平均數不可。至於平均之方法或用算術平均數或用中位數均無不可，但此十二月平均數之平均數不必等於 100，故須設法校正。校正之道維何？即以全年之平均數除各月即得。下表中之第二第三兩行即其實際之算術平均數與中位數，而第四第五兩行則其校正之算術平均數與中位數也。

第一百表 用移動平均數法計算季節指數

(1) 月別	(2) 算術平均數(原來的)	(3) 中位數(原來的)	(4) 算術平均數(校正的)	(5) 中位數(校正的)
一月	110.7	107.2	110.7	108.3
二月	118.7	119.9	118.7	121.1
三月	111.1	106.8	111.1	107.9
四月	93.9	90.6	93.9	91.5
五月	87.2	88.6	87.2	89.5
六月	85.6	87.0	85.6	87.9
七月	86.8	87.2	86.8	88.1
八月	90.5	88.2	90.5	89.1
九月	95.1	92.4	95.1	93.4
十月	105.9	105.4	105.9	106.5
十一月	107.0	108.3	107.0	109.4
十二月	107.2	106.1	107.2	107.2
算術平均數	99.975	98.975	100.0	100.0

(四)混合法。 季節指數之計算必須有極長之時期方爲妥善，然若使時期甚短而季節變動又不能漠視者則將何如？據美國電話電報公司稽核部之主張，此類數列可先求十二月移動平均數，以之除相當之各月數字而得百分比，然後以此等百分比用環比中位數法計算之即得。此法係將移動平均數法及環比中位數法二者合併而成，故可曰混合法。

設以民國九年至民國十四年之上海食糧指數爲例，以十二月移動平均數置於第七月下而計算其百分比，則得下表。

第一百零一表　食糧指數對十二月移動平均數之百分比

月別	食糧指數	十二月移動平均數	食糧指數對移動平均數之百分比	月別	食糧指數	十二月移動平均數	食糧指數對移動平均數之百分比
九年一月	126.9			十二年一月	148.5	145.7	101.9
二月	128.5			二月	153.5	146.3	104.9
三月	129.9			三月	149.2	147.3	101.3
四月	125.4			四月	150.1	148.3	101.2
五月	122.9			五月	154.1	149.0	103.4
六月	135.0			六月	153.7	149.5	102.8
七月	134.2	126,2	106.3	七月	152.8	149.6	102.1
八月	127.1	124.9	101.8	八月	150.9	148.8	101.4
九月	128.6	123.6	104.0	九月	153.2	148.1	103.4
十月	118.3	122.4	96.7	十月	146.1	147.5	99.1
十一月	118.2	121.6	97.2	十一月	141.5	145.9	97.0
十二月	119.2	121.6	98.0	十二月	141.2	144.2	97.9
十年一月	111.3	120.9	92.1	十三年一月	139.1	142.9	97.3
二月	113.4	120.4	94.2	二月	145.6	142.1	102.5
三月	115.4	121.1	95.3	三月	141.2	141.6	99.7
四月	115.5	122.1	94.6	四月	131.9	141.1	93.5
五月	123.5	123.5	100.0	五月	132.7	141.1	94.0
六月	126.6	125.0	101.3	六月	138.6	142.0	97 6
七月	127.4	126.7	100.6	七月	143.1	142.5	100.4
八月	136.1	129.6	105.0	八月	144.6	143.3	100.9
九月	139.7	132.9	105.1	九月	148.1	143.3	103.3
十月	135.9	136.4	99.6	十月	145.6	144.3	100.9
十一月	135.8	139.8	97.1	十一月	151.8	146.9	103.3
十二月	139.3	141.9	98.2	十二月	148.1	149.2	99.3
十一年一月	146.3	143.5	102.0	十四年一月	147.9	150.6	98.2
二月	153.2	144.9	105.7	二月	145 7	152.0	95.9
三月	157.9	145.2	108.7	三月	152 9	152.8	100.1
四月	156.3	145.3	107.6	四月	163.7	153.1	106 9
五月	148.1	145.5	101.8	五月	160.3	153.7	104.3
六月	145.6	145.4	100.1	六〜	155.0	153.5	101.0
七月	144.8	145.5	99.5	七月	160.8	154.0	104.4
八月	139.7	145.7	95.9	八月	153.8		
九月	140.3	145.7	96.3	九月	151.5		
十月	138.5	145.0	95.5	十月	152.4		
十一月	134.9	144.5	93.4	十一月	150 0		
十二月	140.7	145.0	97.0	十二月	153.9		

[註]　資料來源：前財政部駐滬貨價調查處上海貨價季刊

將上表中之百分比求其環比則得下表。

第一百零二表　百分比之環比

年別 \ 月別	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
	十二月	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月
九年								95.8	102.2	93.0	100.5	100.8
十年	94.0	102.3	101.2	99.3	105.7	101.3	99.3	104.4	100.1	94.8	97.5	101.1
十一年	103.9	103.6	102.8	99.0	94.6	98.3	99.4	96.4	100.4	99.2	97.8	103.9
十二年	105.1	102.9	96.6	99.9	102.2	99.4	99.3	99.3	102.0	95.8	97.9	100.9
十三年	99.4	105.3	97.3	93.8	100.5	103.8	102.9	100.5	102.4	97.7	102.4	96.1
十四年	98.9	97.7	104.4	106.8	97.6	96.8	103.4					
中間三數	302.2	308.8	301.3	298.2	300.3	299.0	301.6	296.2	304.6	288.3	296.2	302.8
平均數	100.7	102.9	100.4	99.4	100.1	99.7	100.5	98.7	101.5	96.1	98.7	100.9

既得環比中位數，乃仍用前法可得季節指數如下表。

第一百零三表　食糧指數之季節指數

月別	環比中位數	對數	校正數之對數	校正對數	累積對數	鏈比	季節指數
一月	100.7	0.00303（註）	0.00020	0.00323	0.00323	100.7	98.2
二月	102.9	0.01242	0.00020	0.01262	0.01585	103.7	101.2
三月	100.4	0.00173	0.00020	0.00193	0.01778	104.2	101.6
四月	99.4	$\bar{1}.99739$	0.00020	$\bar{1}.99759$	0.01537	103.6	101.1
五月	100.1	0.00043	0.00020	0.00063	0.01600	103.8	101.3
六月	99.7	$\bar{1}.99870$	0.00020	$\bar{1}.99890$	0.01490	103.5	101.0
七月	100.5	0.00217	0.00020	0.00237	0.01727	104.1	101.6
八月	98.7	$\bar{1}.99432$	0.00020	$\bar{1}.99452$	0.01179	102.8	100.3
九月	101.5	0.00647	0.00020	0.00667	0.01846	104.3	101.7
十月	96.1	$\bar{1}.98272$	0.00020	$\bar{1}.98292$	0.00138	100.3	97.8
十一月	98.7	$\bar{1}.99432$	0.00020	$\bar{1}.99452$	$\bar{1}.99590$	99.1	96.7
十二月	100.9	0.00389	0.00021	0.00410	0.00000	100.0	97.6
		$\bar{1}.99759$				102.51	100.0

〔註〕 參看第九十五表註一。

（五）配線比例法。此外尙有一法則先配合直線或曲線，次求各月數值對於直線或曲線各項之百分比，然後再求各月之平均百分比，其意與上述之移動平均數相近。此法爲法爾克南及哈爾二人同時求得。至於季節變動之有無與如何平均之方法亦可用上述之多項頻數表決定之。

設就雞蛋一例用此法求其季節指數，則先配以直線，其始點在民國十二年七月一日，而其方程式則爲

$$Y=0.1745+0.00675X$$

於是求得各月之標準價格，然後再就各月之實際價格而求其對於標準價格之百分比；如是吾人共得一月之百分比七，二月之百分比亦七，其他各月亦然，因吾人之統計本有七年故也。但一月之七個百分比大小不一，最大者至128.7，最小者僅92.3；二月亦然，最大者至131.2，最小者僅 106.1；下列之多項頻數表即根據此等百分比而成，其作法與前節所論者同，惟其組距較大，爲5%而非1%。

第一百零四表 雞蛋之實際價格對長期趨勢之百分比

月別	實際價格	長期趨勢	百分比
九年一月	0.1615	0.1512	106.8
二月	0.161	0.1517	106.1
三月	0.1395	0.1523	91.6
四月	0.125	0.1528	81.8
五月	0.1025	0.1534	66.8
六月	0.116	0.1540	75.3
七月	0.135	0.1545	87.4
八月	0.138	0.1551	89.0
九月	0.1605	0.1557	103.1
十月	0.148	0.1562	94.8
十一月	0.1445	0.1568	92.2
十二月	0.158	0.1573	100.4
十年一月	0.196	0.1579	124.1
二月	0.208	0.1585	131.2
三月	0.162	0.1590	101.9
四月	0.128	0.1596	80.2
五月	0.138	0.1602	86.1
六月	0.138	0.1607	85.9
七月	0.137	0.1613	84.9
八月	0.137	0.1618	84.7
九月	0.137	0.1624	84.4
十月	0.158	0.1630	96.9
十一月	0.163	0.1635	99.7
十二月	0.164	0.1641	99.9
十一年一月	0.1625	0.1647	98.7
二月	0.2075	0.1652	125.6
三月	0.236	0.1658	142.3
四月	0.1635	0.1663	98.3
五月	0.162	0.1669	97.1
六月	0.1615	0.1675	96.4
七月	0.1615	0.1680	96.1
八月	0.162	0.1686	96.1
九月	0.198	0.1692	117.0
十月	0.1965	0.1697	115.8
十一月	0.200	0.1703	117.4
十二月	0.200	0.1708	117.1
十二年一月	0.198	0.1714	115.5
二月	0.198	0.1720	115.1
三月	0.198	0.1725	114.8
四月	0.1985	0.1731	114.7
五月	0.154	0.1737	88.7
六月	0.162	0.1742	93.0
十二年七月	0.162	0.1748	92.7
八月	0.198	0.1753	113.0
九月	0.1625	0.1759	92.4
十月	0.199	0.1765	112.7
十一月	0.1995	0.1770	112.7
十二月	0.1985	0.1776	111.8
十三年一月	0.1975	0.1782	110.8
二月	0.198	0.1787	110.8
三月	0.2025	0.1793	112.9
四月	0.161	0.1798	89.5
五月	0.162	0.1804	89.8
六月	0.160	0.1810	88.4
七月	0.160	0.1815	88.2
八月	0.161	0.1821	88.4
九月	0.164	0.1827	89.8
十月	0.237	0.1832	129.4
十一月	0.238	0.1838	129.5
十二月	0.239	0.1843	129.7
十四年一月	0.238	0.1849	128.7
二月	0.235	0.1855	126.7
三月	0.210	0.1860	112.9
四月	0.199	0.1866	106.6
五月	0.153	0.1872	81.7
六月	0.141	0.1877	75.1
七月	0.140	0.1883	74.4
八月	0.143	0.1888	75.7
九月	0.165	0.1894	87.1
十月	0.174	0.1900	91.6
十一月	0.183	0.1905	96.1
十二月	0.174	0.1911	91.1
十五年一月	0.177	0.1917	92.3
二月	0.205	0.1922	106.7
三月	0.171	0.1928	88.7
四月	0.155	0.1933	80.2
五月	0.163	0.1939	84.1
六月	0.159	0.1945	81.7
七月	0.169	0.1950	86.7
八月	0.186	0.1956	95.1
九月	0.188	0.1962	95.8
十月	0.192	0.1967	97.6
十一月	0.227	0.1973	115.1
十二月	0.237	0.1978	119.8

第一百零五表　雞蛋實際價格對長期趨勢百分比之多項頻數表

百分比	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
130— 以上		丨	丨									
125—129.9	丨	丨丨								丨	丨	丨
120—124.9	丨											
115—119.9	丨	丨							丨	丨	丨丨	丨丨
110—114.9	丨	丨	丨丨丨	丨				丨		丨	丨	丨
105—109.9	丨	丨丨		丨								
100—104.9			丨						丨			丨
95— 99.9	丨			丨	丨	丨	丨	丨丨	丨	丨丨	丨丨	丨
90— 94.9	丨		丨			丨	丨		丨	丨丨	丨	丨
85— 89.9			丨	丨	丨丨丨	丨丨	丨丨丨	丨丨	丨丨			
80— 84.9				丨丨丨	丨丨	丨	丨	丨	丨			
75— 79.9						丨丨		丨				
75 以下					丨		丨					

從此多項頻數表觀之，季節變動之存在彰彰明甚，冬季各月之百分比常較夏季各月爲高。旣得此表，然後再求各月百分比之平均數。但從此多項頻數表而觀，算術平均數不甚合宜。何則？極大極小之百分比足以影響此平均數之數值。中位數亦不甚善。何則？一兩項之增減足以大變平均數之面目。然則究須用何種平均數方爲妥善？此問題一時頗難解答。不如多用幾個方法計算，然後再將其結果互相比較而取其最善之一法。例如第一百零三表共用四個方法：先用中間之一年作爲平均數，次用中間三年之平均數，再次中間五年之平均數，復次則用全體七年之平均

數。該表右半則將此等平均數經過一度之校正，即將各月之平均數除各月所得之結果，故此各組校正指數之平均數各等於100。

第一百零六表　未校正與已校正之季節指數

月別	未校正指數（中間各數之平均數）				校正指數（中間各數之平均數）			
	1	3	5	7	1	3	5	7
一　月	110.8	111.0	111.2	111.0	111.6	111.8	112.0	111.0
二　月	115.1	117.2	117.0	117.5	115.9	118.1	117.9	117.5
三　月	112.9	109.2	106.8	109.3	113.7	110.0	107.6	109.3
四　月	89.5	89.9	91.3	93.0	90.2	90.6	92.0	93.0
五　月	86.1	86.3	86.1	84.9	86.7	86.9	86.7	84.9
六　月	85.9	85.3	84.9	85.1	86.5	85.9	85.5	85.1
七　月	87.4	87.4	88.0	87.2	88.0	88.0	88.6	87.2
八　月	89.0	90.8	90.7	91.7	89.7	91.5	91.4	91.7
九　月	92.4	92.7	93.6	95.7	93.1	93.4	94.3	95.7
十　月	97.6	102.4	103.6	105.5	98.3	103.2	104.4	105.5
十一月	112.7	109.2	108.2	109.0	113.5	110.0	109.0	109.0
十二月	111.8	109.8	109.8	110.0	112.6	110.6	110.6	110.0
平　均	99.27	99.27	99.27	99.99	100.0	100.0	100.0	100.0

觀上表各種指數尙無顯著之差異，惟雞蛋價格除第四法外均以六月爲最低，而第四法之結果則以五月爲最低，就此表而觀，似以第二法爲最善，即中間三項之平均數是也。大概平均之時取中間幾項，須視頻數分配集散之程度而定。頻數分配愈集中，則根據之項數愈少，如其分配不甚集中，則不得不多取幾項。如逢奇數則取中間三項，如逢偶數則取中間四項。

計算季節指數之方法已分別詳述於上。然則究以何法爲最善？茲將雞蛋價格之四種季節指數彙列一表如下。

第一百零七表　根據各種方法所得季節指數之比較

月　別	環比中位數法	平均法	移動平均數法（算術平均數）	移動平均數法（中位數）	配線比例法（三項平均）
一　月	111	111	110.7	108.3	111.8
二　月	114	117	118.7	121.1	118.1
三　月	105	109	111.1	107.9	110.0
四　月	92	93	93.9	91.5	90.6
五　月	87	85	87.2	89.5	86.9
六　月	88	85	85.6	87.9	85.9
七　月	89	87	86.8	88.1	88.0
八　月	91	92	90.5	89.1	91.5
九　月	97	95	95.1	93.4	93.4
十　月	106	106	105.9	106.5	103.2
十一月	109	109	107.0	109.4	110.0
十二月	110	110	107.2	107.2	110.6

以上各組之指數計算方法雖異而結果相差無多。至以何者爲最優，何者爲最劣，並無若何一定之標準。但有幾點可得而言者：(一)平均法計算便利，遠勝於環比中位數法，但有劇烈之變動或長期變化甚著之時不宜用之；(二)環比之計算手續甚繁，故於逐年變動不大或性質單純之數列，此法亦未必優於平均法；(三)移動平均數法與配線比例法二者通常最爲適用；(四)時期甚短者宜用混合法，但若祇有兩三年者則取各月對於平均數之百分比亦足矣。

潘蓀氏對於環比中位數法主張最力。據潘氏之說，環比中位數法之優點有三：(一)環比之頻數分配可以表示季節變動之程度；(二)極大的非季節的變動之影響可以因中位數而免去；(三) 若用環比中位數法則不單純的統計數列亦可以測定其季節變動，例如一時期用五十城市之銀行票據交換數，另一時期則用一百城市，並無妨礙。但據米爾斯之說，此三點之中(一)(二)兩點移動平均數法與配線比例法亦有之。

但計算季節指數，時期愈長愈妙，至少不得少於十年，其有六七年者祇能作短期數列論。例題中雞蛋價格所以僅取七年者，以其便於計算故也。

本章應用公式

$$A=100(1+d)^{12} \qquad (1)$$

$$\log(1+d)=\frac{\log\frac{A}{100}}{12} \qquad (2)$$

第十三章　循環變動

第一節　循環變動之意義及其起因

寒暑溫涼相繼不息，此天時之循環變動也。繁榮衰落相替不絕，此經濟之循環變動也。天時之循環變動有春夏秋冬之別。經濟之循環變動亦可分爲四大時期，卽極盛期，清理期，衰落期與復興期是也。惟天時之循環有一定之時期，各期之始末亦略有一定之時日。經濟之循環則不然，其時期可短至三四年，亦可長至七八年或十一二年，各期之始末亦不能確定爲何年何月。然察往知來，苟能應用精密之統計方法，亦未始不可作種種之預測以爲經營事業之指南，此吾人於長期趨勢與季節變動之後所以不得不更研究循環變動也。

抑猶有進者，長期趨勢與季節變動非爲其本身而求，循環變動則不然。吾人之所以計算長期趨勢與季節變動者，蓋欲自時間數列之變動中除去此二種變動之影響以確定其循環變動，所謂將欲去之必先知之卽指長期趨勢與季節變動而言也。故以長期趨勢與季節變動之計算爲研究循環變動之準備亦無不可。

然則經濟現象何以有循環變動？其起因安在？關於此點衆說紛紜莫衷一是。茲就維廉斯麥脫之學說略譯其大意於下（錄自拙著統計新論中華書局出版），蓋取其較近事理且又通俗易解也。

維氏以爲吾人若信歷史爲不謬，則盛衰循環之變遷乃產業之常態耳。欲考其原亦至易明。近世產業之特點爲分工，而分工之結果有不可避免者三事：(一)一切物品之價値全恃乎需要，而此物品之需要完全與製造者之意志無干。製造者之所能爲者物品耳，非價値也。價値之決定全恃乎他人之欲望與購買力。故製造者千方百計以求一適當之需要，而社會上事物之足以影響此需要者又層出不窮，其危險爲何如。富力愈增，文明程度愈高，則需要之變化亦愈速。需要一變則產業亦必有隨之而衰落不振者。貧乏之社會欲望簡單，需要之變化亦少，然在富足之社會則欲望時變，至不定也。每一變遷則其影響之所屆不僅一兩項產業而已，而其他互相關聯之諸產業亦無不受其影響者也。(二)每一產業之成功必有待於其他產業。何則？物品之製成由原料至商品必經許多產業。故方其製造也，每一產業必須仰給於前一產業之製品以爲之原料；及其成也，又必有待於下一產業之購求以爲之收容。此等產業前前後後成一聯環。此聯環中一節失其所，全體均有瓦解之虞。(三)一產業之成功與他產業所得之購買力亦有關係。任何一產業之失敗或由供給之無常，或由需要之變化，要必影響於其他諸產業；蓋一業失敗，此業失其購買力，於是而零售商，而批發商，而工廠，而他產業，轉輾影響以至無窮。

二三兩項所以明產業傳染之現象，而傳染現象乃盛衰循環之樞紐也。一業之衰往往引起他業之衰，此等現象吾人固熟知之。然健康之傳染不若疾病傳染之令人注意。其實產業衰落之極，向上運動漸生之時，一業之購買力增加，影響他業，轉輾影響以至全社會，其傳染之勢與衰落時初無二致也。

第二節　循環變動之測定

時間數列之變動吾人已知其有四大原因。除不規則變動難以確定姑置不論外，其餘三種均可用統計方法測定。長期趨勢與季節變動之測定已詳述於前兩章，本節請論循環變動之測定。若吾人能自時間數列之變動中除去長期趨勢與季節變動之影響，則所得結果即爲循環變動。故欲測定循環變動祇須設法除去長期趨勢與季節變動可也。

若時間數列祇由按年統計組成，則季節變動之影響本已消除，故僅須除去長期趨勢即得循環變動。其法卽自時間數列之各項減去長期趨勢之各項，所得之差量有正有負，此卽表示循環變動之變差也，是曰循環變差。茲就1896年至1913年英國之物價指數而求其循環變差於下。

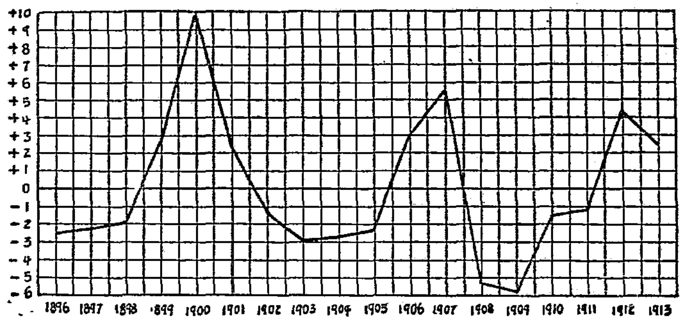
第一百零八表　1896年至1913年英國物價指數之循環變差

年份	物價指數	長期趨勢	循環變差
1896	83	85.5	−2.5
1897	85	87.2	−2.2
1898	87	88.8	−1.8
1899	93	90.4	+2.6
1900	102	92.1	+9.9
1901	96	93.7	+2.3
1902	94	95.4	−1.4
1903	94	97.0	−3.0
1904	96	98.7	−2.7
1905	98	100.3	−2.3
1906	105	102.0	+3.0
1907	109	103.6	+5.4
1908	100	105.3	−5.3
1909	101	106.9	−5.9
1910	107	108.6	−1.6
1911	109	110.2	−1.2
1912	116	111.8	+4.2
1913	116	113.5	+2.5

〔註一〕資料來源：中國經濟學社經濟學季刊第三卷第四期第86—7頁。

〔註二〕長期趨勢係用最小平方法求得。

第二十八圖　1896-1913年英國物價指數之循環變動



第一百零五表中之循環變差乃時間數列之各項與長期趨勢之各項相差之量。但若長期趨勢之變動甚大，則此相差之量尙不足表示循環變動。欲測定循環變動須視此等差量在長期趨勢中所佔百分比之大小，故須再以長期趨勢之各項除此等差量，由是求得之百分比卽可繪之於圖以示時間數列之循環變動。

例如甲乙兩年之物價指數，甲年爲106，乙年爲306，在長期趨勢中甲年爲100，乙年爲300，若僅就實際數值與長期趨勢之差量而論，則兩年之循環變差均爲6。但若就其百分比而論，則甲年之循環變動較甚於乙年，蓋前者之循環變差爲百分之六而後者僅有百分之二故也。

若時間數列由按月統計組成，則季節變動之影響亦須消除，故測定循環變動之方法較爲複雜。除去長期趨勢與季節變動之方法有二，其公式如下：

$$\frac{Y-so}{so}=\frac{Y}{so}-1 \qquad (1)$$

$$\frac{Y-so}{o}=\frac{Y}{o}-s \qquad (2)$$

Y　原有數值。

o　長期趨勢之各項。

s　季節指數(以小數表示)。

以長期趨勢各月之數字乘以季節指數,(即 so)是爲各月之標準數值。原有數值旣以 Y 表示，則 Y－so 爲對於標準值之離中差,而$\frac{Y-so}{so}$則表示其相對的離中差；若僅以長期趨勢爲標準值，則$\frac{Y-so}{so}$可以改爲$\frac{Y-so}{o}$;如其季節指數之上落不出百分之十或百分之十五,則此兩法相差極微。

就理論而言,第一公式較爲合理;就實際而論,第二公式較爲通行。若吾人單欲除去季節變動,則祇須將季節指數除原有數值足矣,其式爲$\frac{Y}{s}$，而其單位仍爲原有事項之單位,非百分比也。

茲就 1903 年至 1916 年之生鐵產量應用第二法測定其循環變動於下表:

第一百零九表　1903至1916年生鐵產量之循環變差

年(1)	月(2)	產量(3)單位千噸	長期趨勢(4)單位千噸	$\frac{Y}{O}$ (5) (3)÷(4)	季節指數(6)	循環變差(7) (5)—(6)	循環變差(單位標準差) (7)÷σ
1903	一月	1472	1416	104.0	98.9	5	0.3
	二月	1390	1424	97.6	93.9	4	0.2
	三月	1590	1432	111.0	105.9	5	0.3
	四月	1608	1440	111.7	102.6	9	0.5
	五月	1713	1448	118.3	104.0	14	0.7
	六月	1673	1456	114.9	97.7	17	0.9
	七月	1546	1463	105.7	96.6	9	0.5
	八月	1571	1471	106.8	98.4	8	0.5
	九月	1553	1479	105.0	98.3	7	0.4
	十月	1425	1487	95.8	104.5	—9	—0.5
	十一月	1039	1495	69.5	99.2	—30	—1.6
	十二月	846	1503	56.3	100.0	—44	—2.3
1904	一月	921	1511	61.0	98.9	—38	—2.0
	二月	1205	1519	79.3	93.9	—15	—0.8
	三月	1447	1527	94.8	105.9	—11	—0.6
	四月	1555	1535	101.3	102.6	—1	—0.1
	五月	1534	1543	99.4	104.0	—5	—0.3
	六月	1292	1551	83.3	97.7	—14	—0.8
	七月	1106	1559	70.9	96.6	—26	—1.4
	八月	1167	1567	74.5	98.4	—24	—1.3
	九月	1352	1575	85.8	98.3	—12	—0.6
	十月	1450	1583	91.6	104.5	—13	—0.7
	十一月	1486	1591	93.4	99.2	—6	—0.3
	十二月	1616	1598	101.1	100.0	1	0.1
1905	一月	1781	1606	110.9	98.9	12	0.6
	二月	1597	1614	98.9	93.9	5	0.3
	三月	1936	1622	119.4	105.9	13	0.7
	四月	1922	1630	117.9	102.6	15	0.8
	五月	1963	1638	118.2	104.0	16	0.8
	六月	1793	1646	108.9	97.7	11	0.6
	七月	1741	1654	105.3	96.6	9	0.5
	八月	1843	1662	110.9	98.4	13	0.7
	九月	1899	1670	113.7	98.3	15	0.8
	十月	2053	1678	122.3	104.5	18	0.9
	十一月	2014	1686	121.1	99.2	20	1.0
	十二月	2045	1694	120.7	100.0	21	1.1
1906	一月	2068	1702	121.5	98.9	23	1.2
	二月	1904	1710	111.3	93.9	17	0.9
	三月	2155	1718	125.4	105.9	20	1.0
	四月	2073	1726	120.1	102.6	18	0.9
	五月	2098	1733	121.1	104.0	17	0.9
	六月	1976	1741	113.5	97.7	16	0.8
	七月	2013	1749	115.1	96.6	18	0.9
	八月	1926	1757	109.6	98.4	11	0.6
	九月	1960	1765	111.0	98.3	13	0.7
	十月	2196	1773	123.9	104.5	19	1.0
	十一月	2187	1781	122.8	99.2	24	1.3
	十二月	2235	1789	124.9	100.0	25	1.3

年(1)	月(2)	產量(3)單位千噸	長期趨勢(4)單位千噸	$\frac{Y}{o}$ (5) (3)÷(4)	季節指數(6)	循環變差(7) (5)—(6)	循環變差(單位標準差) (7)÷σ
1907	一月	2205	1797	122.7	98.9	24	1.3
	二月	2045	1805	113.3	93.9	19	1.0
	三月	2226	1813	122.8	105.9	17	0.9
	四月	2216	1821	121.7	102.6	19	1.0
	五月	2295	1829	125.5	104.0	21	1.1
	六月	2234	1837	121.6	97.7	24	1.3
	七月	2255	1845	122.2	96.6	26	1.4
	八月	2250	1853	121.4	98.4	23	1.2
	九月	2183	1861	117.3	98.3	19	1.0
	十月	2336	1868	125.1	104.5	20	1.1
	十一月	1828	1876	97.4	99.2	—2	—0.1
	十二月	1234	1884	65.5	100.0	—34	—1.8
1908	一月	1045	1892	55.2	98.9	—44	—2.3
	二月	1077	1900	56.7	93.9	—37	—2.0
	三月	1228	1908	64.4	105.9	—42	—2.2
	四月	1149	1916	60.0	102.6	—43	—2.2
	五月	1165	1924	60.6	104.0	—44	—2.3
	六月	1092	1932	56.5	97.7	—41	—2.1
	七月	1218	1940	62.8	96.6	—34	—1.8
	八月	1348	1948	69.2	98.4	—29	—1.5
	九月	1418	1956	72.5	98.3	—26	—1.4
	十月	1563	1964	79.6	104.5	—25	—1.3
	十一月	1577	1972	80.0	99.2	—19	—1.0
	十二月	1740	1980	87.9	100.0	—12	—0.6
1909	一月	1801	1988	90.6	98.9	—8	—0.4
	二月	1703	1996	85.3	93.9	—8	—0.4
	三月	1832	2003	91.5	105.9	—14	—0.8
	四月	1738	2011	86.4	102.6	—16	—0.8
	五月	1880	2019	93.1	104.0	—11	—0.6
	六月	1929	2027	95.2	97.7	—3	—0.2
	七月	2101	2035	103.2	96.6	7	0.4
	八月	2246	2043	109.9	98.4	12	0.6
	九月	2385	2051	116.3	98.3	18	0.9
	十月	2600	2059	126.3	104.5	22	1.1
	十一月	2547	2067	123.2	99.2	24	1.3
	十二月	2635	2075	127.0	100.0	27	1.4
1910	一月	2608	2083	125.2	98.9	26	1.4
	二月	2397	2091	114.6	93.9	20	1.1
	三月	2617	2099	124.7	105.9	19	1.0
	四月	2483	2107	117.8	102.6	15	0.8
	五月	2390	2115	113.0	104.0	9	0.5
	六月	2265	2123	106.7	97.7	9	0.5
	七月	2148	2131	100.8	96.6	4	0.2
	八月	2106	2138	98.5	98.4	0	0.0
	九月	2056	2146	95.8	98.3	—3	—0.2
	十月	2093	2154	97.2	104.5	—7	—0.4
	十一月	1909	2162	88.3	99.2	—11	—0.6
	十二月	1777	2170	81.9	100.0	—18	—0.9

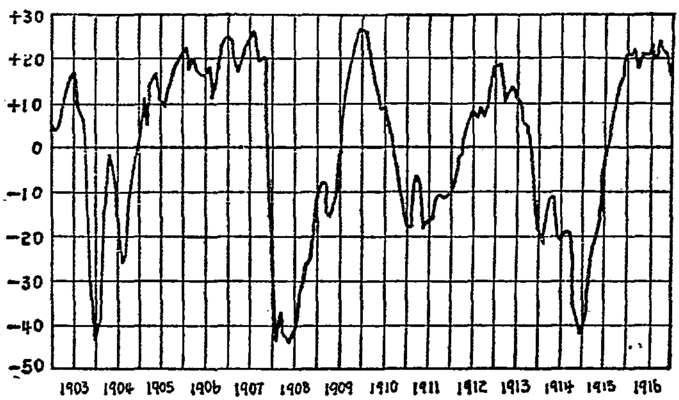
年(1)	月(2)	產量(3)單位千噸	長期趨勢(4)單位千噸	$\frac{Y}{O}$ (5) (3)÷(4)	季節指數(6)	循環變差(7) (5)—(6)	循環變差(單位標準差) (7)÷σ
	一月	1759	2178	80.8	98.9	—18	—0.9
	二月	1794	2186	82.1	93.9	—12	—0.6
	三月	2188	2194	99.7	105.9	— 6	—0.3
	四月	2065	2202	93.8	102.6	— 9	—0.5
	五月	1893	2210	85.7	104.0	—18	—0.9
1911	六月	1787	2218	80.6	97.7	—17	—0.9
	七月	1793	2226	80.5	96.6	—16	—0.8
	八月	1926	2234	86.2	98.4	—12	—0.6
	九月	1977	2242	88.2	98.3	—10	—0.5
	十月	2102	2250	93.4	104.5	—11	—0.6
	十一月	1999	2258	88.5	99.2	—11	—0.6
	十二月	2043	2266	90.2	100.0	—10	—0.5
	一月	2057	2273	90.5	98.9	— 8	—0.5
	二月	2100	2281	92.1	93.9	— 2	—0.1
	三月	2405	2289	105.1	105.9	— 1	—0.1
	四月	2375	2297	103.4	102.6	1	0.1
	五月	2512	2305	109.0	104.0	5	0.3
1912	六月	2440	2313	105.5	97.7	8	0.4
	七月	2410	2321	103.8	96.6	7	0.4
	八月	2512	2329	107.9	98.4	9	0.5
	九月	2463	2337	105.4	98.3	7	0.4
	十月	2689	2345	114.7	104.5	10	0.5
	十一月	2630	2353	111.8	99.2	13	0.7
	十二月	2782	2361	117.8	100.0	18	0.9
	一月	2795	2369	118.0	98.9	19	1.0
	二月	2586	2377	108.8	93.9	15	0.8
	三月	2763	2385	115.8	105.9	10	0.5
	四月	2752	2393	115.0	102.6	12	0.7
	五月	2822	2401	117.5	104.0	14	0.7
1913	六月	2628	2408	109.1	97.7	11	0.6
	七月	2560	2416	106.0	96.6	9	0.5
	八月	2543	2424	104.9	98.4	6	0.4
	九月	2505	2432	103.0	98.3	5	0.3
	十月	2546	2440	104.4	104.5	0	0.0
	十一月	2233	2448	91.2	99.2	— 8	—0.4
	十二月	1983	2456	80.7	100.0	—19	—1.0
	一月	1885	2464	76.5	98.9	—22	—1.2
	二月	1888	2472	76.4	93.9	—18	—0.9
	三月	2348	2480	94.7	105.9	—11	—0.6
	四月	2270	2488	91.2	102.6	—11	—0.6
	五月	2093	2496	83.9	104.0	—20	—1.0
1914	六月	1918	2504	76.6	97.7	—21	—1.1
	七月	1958	2512	78.0	96.6	—19	—1.0
	八月	1995	2520	79.2	98.4	—19	—1.0
	九月	1883	2528	74.5	98.3	—24	—1.3
	十月	1778	2536	70.1	104.5	—34	—1.8
	十一月	1518	2543	59.7	99.2	—40	—2.1
	十二月	1516	2551	59.4	100.0	—41	—2.1

年(1)	月(2)	產量(3)單位千噸	長期趨勢(4)單位千噸	$\frac{Y}{O}$ (5) (3)÷(4)	季節指數(6)	循環變差(7) (5)—(6)	循環變差(單位標準差)(7)÷σ
1915	一月	1601	2559	62.6	98.9	—36	—1.9
	二月	1675	2567	65.3	93.9	—29	—1.5
	三月	2064	2575	80.2	105.9	—25	—1.3
	四月	2116	2583	81.9	102.6	—21	—1.1
	五月	2263	2591	87.3	104.0	—17	—0.9
	六月	2381	2599	91.6	97.7	— 6	—0.3
	七月	2563	2607	98.3	96.6	2	0.1
	八月	2780	2615	106.3	98.4	8	0.4
	九月	2853	2623	108.8	98.3	10	0.5
	十月	3125	2631	118.8	104.5	14	0.7
	十一月	3037	2639	115.1	99.2	16	0.8
	十二月	3203	2647	121.0	100.0	21	1.1
1916	一月	3185	2655	120.0	98.9	21	1.1
	二月	3087	2663	115.9	93.9	22	1.1
	三月	3338	2671	125.0	105.9	19	1.0
	四月	3228	2678	120.5	102.6	18	0.9
	五月	3351	2686	124.8	104.0	21	1.1
	六月	3212	2694	119.2	97.7	21	1.1
	七月	3226	2702	119.4	96.6	23	1.2
	八月	3204	2710	118.2	98.4	20	1.0
	九月	3202	2718	117.8	98.3	20	1.0
	十月	3509	2726	128.7	104.5	24	1.3
	十一月	3312	2734	121.1	99.2	22	1.1
	十二月	3171	2742	115.6	100.0	16	0.8

〔註一〕　上表自西克利斯脫之統計方法轉載。

〔註二〕　長期趨勢係用最小平方法直線求得，季節指數係用環比中位數法求得。

第二十九圖　1903－1916年生鐵產量之循環變動



吾人之目的如在研究一單獨數列，則上表中之計算可至第七行爲止；但若欲將二三數列比較其變化之同異，則第七行之循環變差尚不適用。何則？各數列變化之範圍各各不同，有上落甚大者，有變動極微者，雖其升降之趨勢完全符合，而其升降之範圍迥乎不同。如欲互相比較，非將此等數列之循環變差改用標準差單位不可。至於標準差之記算，則可將第七行之各項各各平方然後求其算術平均數即得 σ 之平方。

即 $$\sigma^2=\frac{61664}{168}$$

∴ $$\sigma=19.16$$

〔註〕 西氏書中作爲 19.1，蓋未應用四捨五入法之故。

本章應用公式

$$\frac{Y-so}{so}=\frac{Y}{so}-1 \qquad (1)$$

$$\frac{Y-so}{o}=\frac{Y}{o}-s \qquad (2)$$

第十四章　時間數列之繫聯

第一節　時間數列繫聯之特性

以上三章均論時間數列變動之分析，本章則研究兩個時間數列之繫聯。直線繫聯已詳於第十章，但前所論者係非時間數列之繫聯，不能應用於時間數列；蓋時間數列有其特有之性質，某種變動原因消除以後之繫聯係數與其未消除以前之繫聯係數逈然不同，故時間數列之繫聯有特別討論之必要。

時間數列之變動有各種不同之原因，如長期趨勢，季節變動，循環變動等等前三章已詳言之矣。凡此種種混合一起，如不先行分析清楚，則繫聯係數亦無意義。然則所謂二數列之繫聯者，乃就二數列之長期趨勢而言乎？抑就其季節變動而言乎？抑須除去長期趨勢與季節變動之影響而就其循環變動而言乎？長期趨勢之不能為計算繫聯之根據顯而易見。何則？渺不相涉之二數列若其長期趨勢均可用一直線表示，則根據長期趨勢而得之繫聯係數絕對值常甚大，然此不能即謂兩數列間之繫聯甚大。至於兩數列之季節變動雖非不可求其繫聯係數，然此等係數之效用如何，尚屬疑問。且普通可用簡易方法即能知之，固不必用極繁重之公式也。

故二數列之繫聯者，非指長期趨勢，亦非指季節變動，乃指循環變

動。此外尚有一種變動，月與月間或年與年間之變動，亦可以繫聯方法而計算其繫聯程度。吾人於以下二節將分別討論此二種繫聯之計算。惟在計算繫聯以前其他一切不相干之影響須先除去，然後繫聯係數乃有意義之可言也。

第二節　循環變動繫聯之測定

第十章中公式(8)

$$r=\frac{\Sigma(XY)-n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma X^2-n\bar{x}^2)(\Sigma Y^2-n\bar{y}^2)}}$$

係根據甲乙兩數列之實際數值而計算其繫聯係數，式中 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 乃甲乙兩數列之算術平均數。但在循環變動中 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 之數值均等於零，蓋其各項之和均等於零故也。(若時間數列由按月統計組成，則循環變差之和與零略有差異，然相差無幾，故可略而不計。)故計算繫聯係數之公式不若上式之繁，茲列其公式於下：

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}} \qquad (1)$$

r　循環變動之繫聯係數。

x　x 數列之循環變差。

y　y 數列之循環變差。

若循環變差已改用標準差單位，則計算繫聯係數之公式可改作如下：

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{n} \qquad (2)$$

r 循環變動之繫聯係數。

x x 數列之循環變差(單位標準差)。

y y 數列之循環變差(單位標準差)。

n 月數。

茲就 1896 年至 1913 年英法兩國物價指數之循環變差應用公式(1)計算其繫聯係數於下:

第一百十表 1896年至1913年英法物價指數間繫聯係數之計算

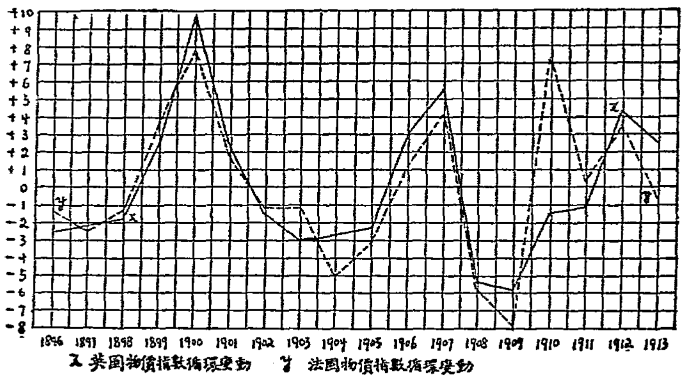
年份	英國物價指數之循環變差 x	法國物價指數之循環變差 y	x^2	y^2	xy
1896	−2.5	−1.4	6.25	1.96	3.50
1897	−2.2	−2.4	4.84	5.76	5.28
1898	−1.8	−1.3	3.24	1.69	2.34
1899	+2.6	+3.7	6.76	13.69	9.62
1900	+9.9	+7.8	98.01	60.84	77.22
1901	+2.3	+1.8	5.29	3.24	4.14
1902	−1.4	−1.1	1.96	1.21	1.54
1903	−3.0	−1.1	9.00	1.21	3.30
1904	−2.7	−5.0	7.29	25.00	13.50
1905	−2.3	−3.0	5.29	9.00	6.90
1906	+3.0	+1.1	9.00	1.21	3.30
1907	+5.4	+4.1	29.16	16.81	22.14
1908	−5.3	−5.8	28.09	33.64	30.74
1909	−5.9	−7.8	34.81	60.84	46.02
1910	−1.6	+7.3	2.56	53.29	−11.68
1911	−1.2	+0.3	1.44	0.09	− 0.36
1912	+4.2	+3.4	17.64	11.56	14.28
1913	+2.5	−0.6	6.25	0.36	− 1.50
合計	0	0	276.88	301.40	230.28

[註] 參看第八十七表及第一百零貳表。

代入公式(1)則得

$$r=\frac{230.28}{\sqrt{276.88\times301.4}}=0.797$$

第三十圖　1896—1913年英法物價指數循環變動之比較



茲再就 1903 年一月至 1916 年十二月生鐵之產量與紐約短期商業票據(60—90日)之利率應用公式(2)計算其繫聯係數於下:

第一百十一表　1903 年一月至 1916 年十二月生鐵之產量與紐約短期商業票據(60—90日)之利率間繫聯係數之計算

年	月	生鐵產量之循環變差(單位標準差)x	票據利率之循環變差(單位標準差)y	xy	年	月	生鐵產量之循環變差(單位標準差)x	票據利率之循環變差(單位標準差)y	xy
1903	一月	0.3	—0.1	—0.03	1904	一月	—2.0	—0.3	0.60
	二月	0.2	0.1	0.02		二月	—0.8	0.0	0.00
	三月	0.3	0.5	0.15		三月	—0.6	—0.3	0.18
	四月	0.5	0.2	0.10		四月	—0.1	—0.7	0.07
	五月	0.7	—0.1	—0.07		五月	—0.3	—0.8	0.24
	六月	0.9	0.5	0.45		六月	—0.8	—1.0	0.80
	七月	0.5	0.4	0.20		七月	—1.4	—1.3	1.82
	八月	0.5	0.5	0.25		八月	—1.3	—1.5	1.95
	九月	0.4	0.3	0.12		九月	—0.6	—1.4	0.84
	十月	—0.5	—0.1	0.05		十月	—0.7	—1.3	0.91
	十一月	—1.6	0.3	—0.48		十一月	—0.3	—1.4	0.42
	十二月	—2.3	0.0	0.00		十二月	0.1	—1.4	—0.14

年	月	生鐵產量之循環變差（單位標準差）x	票據利率之循環變差（單位標準差）y	xy	年	月	生鐵產量之循環變差（單位標準差）x	票據利率之循環變差（單位標準差）y	xy
1905	一月	0.6	—1.1	—0.66	1909	一月	—0.4	—1.1	0.44
	二月	0.3	—0.9	—0.27		二月	—0.4	—0.9	0.36
	三月	0.7	—1.0	—0.70		三月	—0.8	—1.1	0.88
	四月	0.8	—0.8	—0.64		四月	—0.8	—1.0	0.80
	五月	0.8	—0.7	—0.56		五月	—0.6	—1.0	0.60
	六月	0.6	—0.8	—0.48		六月	—0.2	—1.0	0.20
	七月	0.5	—0.7	—0.35		七月	0.4	—1.2	—0.48
	八月	0.7	—1.0	—0.70		八月	0.6	—0.9	—0.54
	九月	0.8	—0.9	—0.72		九月	0.9	—1.0	—0.90
	十月	0.9	—0.8	—0.72		十月	1.1	—0.3	—0.33
	十一月	1.0	0.1	0.10		十一月	1.3	0.0	0.00
	十二月	1.1	0.2	0.22		十二月	1.4	—0.2	—0.28
1906	一月	1.2	0.1	0.12	1910	一月	1.4	0.2	0.28
	二月	0.9	0.4	0.36		二月	1.1	0.2	0.22
	三月	1.0	0.5	0.50		三月	1.0	0.0	0.00
	四月	0.9	0.8	0.72		四月	0.8	0.4	0.32
	五月	0.9	0.8	0.72		五月	0.5	0.5	0.25
	六月	0.8	0.8	0.64		六月	0.5	0.8	0.40
	七月	0.9	0.8	0.72		七月	0.2	1.1	0.22
	八月	0.6	0.9	0.54		八月	0.0	0.7	0.00
	九月	0.7	1.1	0.77		九月	—0.2	0.5	—0.10
	十月	1.0	0.8	0.80		十月	—0.4	0.5	—0.20
	十一月	1.3	0.9	1.17		十一月	—0.6	0.6	—0.36
	十二月	1.3	0.8	1.04		十二月	—0.9	—0.5	0.45
1907	一月	1.3	1.3	1.69	1911	一月	—0.9	—0.6	0.54
	二月	1.0	1.4	1.40		二月	—0.6	—0.2	0.12
	三月	0.9	1.5	1.35		三月	—0.3	—0.6	0.18
	四月	1.0	1.3	1.30		四月	—0.5	—0.7	0.35
	五月	1.1	0.9	0.99		五月	—0.9	—0.6	0.54
	六月	1.3	1.2	1.56		六月	—0.9	—0.4	0.36
	七月	1.4	1.1	1.54		七月	—0.8	—0.6	0.48
	八月	1.2	1.3	1.56		八月	—0.6	—0.6	0.36
	九月	1.0	1.5	1.50		九月	—0.5	—0.5	0.25
	十月	1.1	1.7	1.87		十月	—0.6	—0.8	0.48
	十一月	—0.1	2.2	—0.22		十一月	—0.6	—1.1	0.66
	十二月	—1.8	2.7	—4.86		十二月	—0.5	—0.5	0.25
1908	一月	—2.3	1.9	—4.37	1012	一月	—0.5	—0.6	0.30
	二月	—2.0	0.6	—1.20		二月	—0.1	—0.4	0.04
	三月	—2.2	1.0	—2.20		三月	—0.1	—0.1	0.01
	四月	—2.2	—0.2	0.44		四月	0.1	—0.1	—0.01
	五月	—2.3	—0.5	1.15		五月	0.3	0.1	0.03
	六月	—2.1	—0.7	1.47		六月	0.4	0.1	0.04
	七月	—1.8	—0.9	1.62		七月	0.4	0.4	0.16
	八月	—1.5	—1.4	2.10		八月	0.5	0.5	0.25
	九月	—1.4	—1.5	2.10		九月	0.4	0.8	0.32
	十月	—1.3	—1.3	1.69		十月	0.5	1.1	0.55
	十一月	—1.0	—1.2	1.20		十一月	0.7	1.1	0.77
	十二月	—0.6	—1.6	0.96		十二月	0.9	1.3	1.17

年	月	生鐵產量之循環變差(單位標準差)x	票據利率之循環變差(單位標準差)y	xy	年	月	生鐵產量之循環變差(單位標準差)x	票據利率之循環變差(單位標準差)y	xy
1913	一月	1.0	0.7	0.70	1915	一月	—1.9	—0.4	0.76
	二月	0.8	1.0	0.80		二月	—1.5	—0.2	0.30
	三月	0.5	1.8	0.90		三月	—1.3	—0.8	1.04
	四月	0.7	1.6	1.12		四月	—1.1	—0.4	0.44
	五月	0.7	1.5	1.05		五月	—0.9	—0.2	0.18
	六月	0.6	2.3	1.38		六月	—0.3	—0.1	0.03
	七月	0.5	2.2	1.10		七月	0.1	—0.9	—0.09
	八月	0.4	1.7	0.68		八月	0.4	—1.0	—0.40
	九月	0.3	1.2	0.36		九月	0.5	—1.6	—0.80
	十月	0.0	1.0	0.00		十月	0.7	—1.8	—1.26
	十一月	—0.4	1.0	—0.40		十一月	0.8	—1.8	—1.44
	十二月	—1.0	1.0	—1.00		十二月	1.1	—1.8	—1.98
1914	一月	—1.2	0.3	—0.36	1916	一月	1.1	—1.2	—1.32
	二月	—0.9	—0.2	0.18		二月	1.1	—0.8	—0.88
	三月	—0.6	—0.3	0.18		三月	1.0	—1.0	—1.00
	四月	—0.6	—0.4	0.24		四月	0.9	—0.9	—0.81
	五月	—1.0	—0.1	0.10		五月	1.1	—0.8	—0.88
	六月	—1.1	0.1	—0.11		六月	1.1	—0.1	—0.11
	七月	—1.0	0.4	—0.40		七月	1.2	0.1	0.12
	八月	—1.0	2.3	—2.30		八月	1.0	—0.6	—0.60
	九月	—1.3	2.4	—3.12		九月	1.0	—1.4	—1.40
	十月	—1.8	2.0	—3.60		十月	1.3	—1.5	—1.95
	十一月	—2.1	1.1	—2.31		十一月	1.1	—1.1	—1.21
	十二月	—2.1	—0.5	1.05		十二月	0.8	—0.8	—0.64

〔註一〕 參看第一百零九表。

〔註二〕 票據利率之循環變差(單位標準差)自西克利斯脫之統計方法轉載。

$$\Sigma(xy)=18.48$$

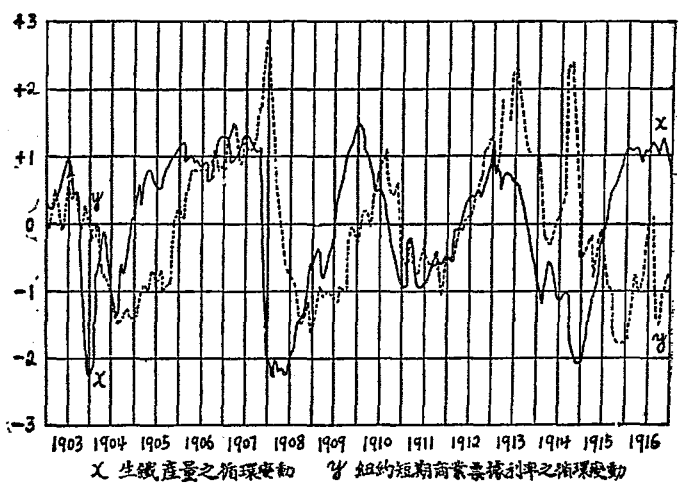
$$n=168$$

$$\therefore \qquad r=\frac{18.48}{168}=0.11$$

上例中求得之繫聯係數甚微，然不能即據此斷定生鐵之產量與紐約短期商業票據之利率間無多大之關係，常有兩循環變動曲線之起伏

甚相似而其繫聯係數甚微者。此無他，兩循環變動曲線之起伏雖甚相似，而其起伏之時期則有先後之別，故計算繫聯係數中之 xy 時不可以同月之二循環變差相乘。若曲線甲之升降平均較曲線乙之升降早四月，則計算繫聯係數中之 xy 時須以甲數列之一月與乙數列之五月相乘，甲數列之二月與乙數列之六月相乘，餘類推。由是求得之繫聯名曰落後繫聯，甲數列名曰前引數列，乙數列名曰落後數列。然而落後時間各月間亦稍有參差，不能完全一致，吾人所欲知者乃平均落後若干月耳。

第三十一圖　1903－1916年生鐵產量與紐約短期商業票據之利率兩循環變動之比較



欲確定落後月數最簡捷方法可將兩循環變動曲線分別繪於透明之紙上，以一紙置於他紙之上，將上圖向左右移動至上圖之曲線略與下圖之曲線符合時爲止，然後在圖上察視兩曲線相差若干月，此即平均落後之月數。

此法雖簡捷，然僅憑目力，不能謂爲十分正確。欲言正確，吾人可就落後不同之月數各試算其繫聯係數。如上例，票據利率落後四月則得繫聯係數+0.50，落後五月則得 +0.52，落後六月則得 +0.57，落後七月則得+0.58，落後八月則得+ 0.57，落後九月則得+0.57，落後十月則得+0.55，故最大之繫聯係數當在落後七月。

第三節　短期變動之繫聯

上文已言短期變動亦可以計算繫聯程度。所謂短期變動者，乃逐年逐月甚至逐週逐日之變動，此與長期趨勢不同，與季節變動亦異，讀者幸勿混爲一談。

計算短期變動之繫聯可用種種不同之方法，或就二數列而計算相鄰兩項之絕對差額，即所謂第一差額是也，或將此等差額改爲百分比亦無不可。茲就 1901 年至 1923 年美國棉花產量與紐約棉價說明運算之方法如下：

第一百十二表　短期變動繫聯之計算

年別	美國棉花產量（單位一百萬包）	紐約每磅棉價（單位分）	棉花產量之第一差 X	棉價之第一差 Y	X^2	Y^2	XY
1900－01	10.123	11.30					
1901－02	9.510	10.02	－0.613	－1.28	0.375769	1.6384	＋0.78464
1902－03	10.631	10.56	＋1.121	＋0.54	1.256641	0.2916	＋0.60534
1903－04	9.851	14.90	－0.780	＋4.34	0.608400	18.8356	－3.38520
1904－05	13.438	9.73	＋3.587	－5.17	12.866569	26.7289	－18.54479
1905－06	10.575	12.35	－2.863	＋2.62	8.196769	6.8644	－7.50106
1906－07	13.274	11.10	＋2.699	－1.25	7.284601	1.5625	－3.37375
1907－08	11.107	12.24	－2.167	＋1.14	4.695889	1.2996	－2.47038
1908－09	13.242	10.74	＋2.135	－1.50	4.558225	2.2500	－3.20250
1909－10	10.005	14.53	－3.237	＋3.79	10.478169	14.3641	－12.26823
1910－11	11.609	15.13	＋1.604	＋0.60	2.572816	0.3600	＋0.96240
1911－12	15.693	10.34	＋4.084	－4.79	16.679056	22.9441	－19.56236
1912－13	13.703	11.78	－1.990	＋1.44	3.960100	2.0736	－2.86560
1913－14	14.156	13.40	＋0.453	＋1.62	0.205209	2.6244	＋0.73386
1914－15	16.135	8.20	＋1.979	－5.20	3.916441	27.0400	－10.29080
1915－16	11.192	9.93	－4.943	＋1.73	24.433249	2.9929	－8.55139
1916－17	11.450	12.11	＋0.258	＋2.18	0 066564	4.7524	＋0.56244
1917－18	11.302	15.14	－0.148	＋3.03	0.021904	9.1809	－0.44844
1918－19	12.041	14.80	＋0.739	－0.34	0.546121	0.1156	－0.25126
1919－20	11.421	17.07	－0.620	＋2.27	0.384400	5.1529	－1.40740
1920－21	13.440	11.05	＋2.019	－6.02	4.076361	36.2404	－12.15438
1921－22	7.954	14.68	－5.486	＋3.63	30.096196	13.1769	－19.91418
1922－23	9.762	17.54	＋1.808	＋2.86	3.268864	8.1796	＋5.17088
			－0.361	＋6.24	140.548313	208.6688	－117.37216

〔註一〕　上表自米爾斯之統計方法轉載。

〔註二〕　紐約每磅棉價乃將勃拉特斯脫里物價指數除棉花實際價格而得，故貨幣購買力變動之影響業已除去。

兩數列之算術平均數不等於零，故計算繫聯係數時須應用第十章中之公式(8)，即

$$r=\frac{\Sigma(XY)-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma X^2-n\bar{x}^2)(\Sigma Y^2-n\bar{y}^2)}}$$

$$\Sigma(XY)=-117.37216$$

$$\Sigma X^2=140.548313$$

$$\Sigma Y^2=208.6688$$

$$n=22$$

$$\bar{x}=-\frac{0.361}{22}$$

$$\bar{y}=\frac{6.24}{22}$$

$$\therefore \quad r=\frac{-117.37216+\frac{0.361\times6.24}{22}}{\sqrt{\left(140.548313-\frac{0.361^2}{22}\right)\left(208.6688-\frac{6.24^2}{22}\right)}}$$

$$=-0.69$$

求得之繫聯係數爲負數，故知產量增則棉價跌，產量減則棉價漲。但此係短期變動之繫聯係數。若欲測定全時期內之繫聯，則須依第二節方法計算。兩法所得之繫聯係數迥然不同，蓋其目的相異故也。

本章應用公式

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}} \qquad (1)$$

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{n} \qquad (2)$$

第十五章　非直線繫聯

第一節　直線繫聯與非直線繫聯之比較

吾人已知長期趨勢實爲繫聯之一種，吾人又知長期趨勢有直線趨勢與非直線趨勢之分，故繫聯亦有直線繫聯與非直線繫聯之別。直線繫聯已詳述於第十章，本章請論非直線繫聯。所謂非直線繫聯，即 xy 兩事項之關係不能以直線而須以曲線表示之謂也。若用直線則繫聯之值甚微而離中差必致極大，如遇此等情形非用曲線不可；下表之事項卽其一例也。

第一百十三表　苜蓿之收成與灌溉量之關係

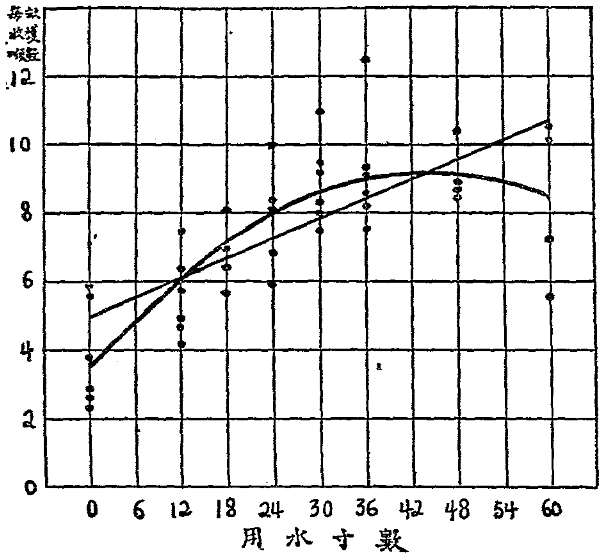
用水吋數	每畝收穫噸數						平均
	1910	1911	1912	1913	1914	1915	
0	3.85	5.94	5.52	2.75	2.89	2.35	3.88
12	4.78	7.52	6.51	4.31	5.83	4.84	5.63
18	–	–	7.02	5.69	8.02	6.46	6.80
24	6.00	8.38	8.32	6.89	9.96	7.96	7.92
30	7.53	9.54	9.43	7.97	11.06	8.32	8.98
36	7.58	9.33	9.38	8.22	12.48	8.63	9.27
48	8.45	9.52	8.63	8.83	10.62	8.05	9.02
60	–	–	10.17	7.25	10.70	5.55	8.42

〔註一〕　此表自米爾斯之統計方法轉載。

〔註二〕　“–”無報告之記號。

上表爲美國加利福尼亞大學農業試驗之結果。以此事項繪之於圖並配以直線與曲線二種則如第三十二圖。

第三十二圖　苜蓿之收成與灌溉量之散佈及繫聯直線與繫聯曲線之比較



上圖中繫聯直線之方程式爲:

$$Y=5.038+0.0886\,X$$

式中Y代表每畝收穫量而X爲灌溉所用水量也。此x與y間之繫聯係數r等於+0.68。

然就第三十二圖觀之,直線尙非配合最佳之線,故r之値亦不能爲表示繫聯程度之適當標準。圖中共有二線,一爲直線,一爲拋物線。以此直線與拋物線較,似以拋物線爲勝。此拋物線之方程式爲:

$$Y=3.55+0.252\,X-0.002816\,X^2$$

拋物線之所以異於直線者有最重要之一點在,卽水量漸增,收穫亦

隨之而多，但有一定之限度，過此以往，水量增而收穫反減。此點在拋物線上一覽而知，但直線則無此表示也。故表示苜蓿收穫與水量之關係宜用拋物線而不宜用直線。

第二節　繫聯拋物線方程式之計算

上圖中之拋物線為二次拋物線，用以表示苜蓿收穫量與灌溉水量之繫聯，吾人已知其為較勝於繫聯直線。然則吾人何以知此二次拋物線之方程式為：

$$Y=3.55+0.252\,X-0.002816\,X^2$$

其計算之方法如何？此則本節所欲討論者也。

依最小平方法定理欲使由二次拋物線方程式計算而得之收穫量與實際收穫量相差平方之和為最小，此二次拋物線之方程式當如下所示：

$$Y=a_1+b_1X+c_1X^2$$

$$a_1=\frac{\Sigma X^2\Sigma X^4\Sigma Y+\Sigma X\Sigma X^3\Sigma(X^2Y)+\Sigma X^2\Sigma X^3\Sigma(XY)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^3)^2\Sigma Y-\Sigma X\Sigma X^4\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$b_1=\frac{n\Sigma X^4\Sigma(XY)+\Sigma X^2\Sigma X^3\Sigma Y+\Sigma X\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(XY)-n\Sigma X^3\Sigma(X^2Y)-\Sigma X\Sigma X^4\Sigma Y}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$c_1=\frac{n\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)+\Sigma X\Sigma X^2\Sigma(XY)+\Sigma X\Sigma X^3\Sigma Y-(\Sigma X^2)^2\Sigma Y-n\Sigma X^3\Sigma(XY)-(\Sigma X)^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

（1）（證明參看附錄甲30）

X　第一變量。

Y　第二變量。

n　項數。

故確定方程式以前須先計算 $\Sigma X,\Sigma X^2,\Sigma X^3,\Sigma X^4,\Sigma Y,\Sigma(XY)$ 與

$\Sigma(X^2Y)$，此七數值求得後方可確定 a_1, b_1 與 c_1 之數值。玆就前例以示此七數之計算於下：

第一百十四表　二次拋物線繫聯之計算

灌溉量X	收穫量Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
0	3.85	0	0	0	0	0
0	5.94	0	0	0	0	0
0	5.52	0	0	0	0	0
0	2.75	0	0	0	0	0
0	2.89	0	0	0	0	0
0	2.35	0	0	0	0	0
12	4.78	144	1728	20736	57.36	688.32
12	7.52	144	1728	20736	90.24	1082.88
12	6.51	144	1728	20736	78.12	937.44
12	4.31	144	1728	20736	51.72	620.64
12	5.83	144	1728	20736	69.96	839.52
12	4.84	144	1728	20736	58.08	696.96
18	7.02	324	5832	104976	126.36	2274.48
18	5.69	324	5832	104976	102.42	1843.56
18	8.02	324	5832	104976	144.36	2598.48
18	6.46	324	5832	104976	116.28	2093.04
24	6.00	576	13824	331776	144.00	3456.00
24	8.38	576	13824	331776	201.12	4826.88
24	8.32	576	13824	331776	199.68	4792 32
24	6.89	576	13824	331776	165.36	3968.64
24	9.96	576	13824	331776	239.04	5736.96
24	7.96	576	13824	331776	191.04	4584.96
30	7.53	900	27000	810000	225.90	6777.00
30	9.54	900	27000	810000	286.20	8586.00
30	9.43	900	27000	810000	282.90	8487.00
30	7.97	900	27000	810000	239.10	7173.00
30	11.06	900	27000	810000	331.80	9954.00
30	8.32	900	27000	810000	249.60	7488.00
36	7.58	1296	46656	1679616	272.88	9823.68
36	9.33	1296	46656	1679616	335.88	12091.68
36	9.38	1296	46656	1679616	337.68	12156.48
36	8.22	1296	46656	1679616	295.92	10653.12
36	12.48	1296	46656	1679616	449.28	16174.08
36	8.63	1296	46656	1679616	310.68	11184.48
48	8.45	2304	110592	5308416	405.60	19468.80
48	9.52	2304	110592	5308416	456.96	21934.08
48	8.63	2304	110592	5308416	414.24	19883.52
48	8 83	2304	110592	5308416	423.84	20344.32
48	10.62	2304	110592	5308416	509.76	24468.48
48	8.05	2304	110592	5308416	386.40	18547.20
60	10.17	3600	216000	12960000	610.20	36612.00
60	7.25	3600	216000	12960000	435.00	26100.00
60	10.70	3600	216000	12960000	642.00	38520.00
60	5.55	3600	216000	12960000	333.00	19980.00
1212	329.03	47016	2086128	101163168	10269.96	107448.00

$$\Sigma X = 1212$$

$$\Sigma X^2 = 47016$$

$$\Sigma X^3 = 2086128$$

$$\Sigma X^4 = 101163168$$

$$\Sigma Y = 329.03$$

$$\Sigma(XY) = 10269.96$$

$$\Sigma(X^2Y) = 407448$$

$$n = 44$$

以之代入公式(1)則得：

$$a_1 = 3.5468$$

$$b_1 = 0.2520$$

$$c_1 = -0.0028162$$

故此二次拋物線之方程式爲：

$$Y = 3.55 + 0.252\,X - 0.002816\,X^2$$

應用最小平方法亦可計算三次，四次拋物線之方程式，惟計算甚繁，實際上鮮有應用之者。

第三節　繫聯指數之意義及其測定

吾人既確定拋物線之方程式，然後可計算標準誤 S_y 之數值。此 S_y 仍可依前法求之，即就各項之實際數值 Y 與計算數值 Yc 各差量平方之算術平均數而求其平方根是也。

第一百十五表 苜蓿之實際收穫與標準收穫

灌溉用水量 X	實際收穫 Y	標準收穫（依拋物線方程式計算而得）Yc	v=Y−Yc	v^2
0	3.85	3.55	+0.30	0.0900
0	5.94	3.55	+2.39	5.7121
0	5.52	3.55	+1.97	3.8809
0	2.75	3.55	−0.80	0.6400
0	2.89	3.55	−0.66	0.4356
0	2.35	3.55	−1.20	1.4400
12	4.78	6.16	−1.38	1.9044
12	7.52	6.16	+1.36	1.8496
12	6.51	6.16	+0.35	0.1225
12	4.31	6.16	−1.85	3.4225
12	5.83	6.16	−0.33	0.1089
12	4.84	6.16	−1.32	1.7424
18	7.02	7.17	−0.15	0.0225
18	5.69	7.17	−1.48	2.1904
18	8.02	7.17	+0.85	0.7225
18	6.46	7.17	−0.71	0.5041
24	6.00	7.97	−1.97	3.8809
24	8.38	7.97	+0.41	0.1681
24	8.32	7.97	+0.35	0.1225
24	6.89	7.97	−1.08	1.1664
24	9.96	7.97	+1.99	3.9601
24	7.96	7.97	−0.01	0.0001
30	7.53	8.57	−1.04	1.0816
30	9.54	8.57	+0.97	0.9409
30	9.43	8.57	+0.86	0.7396
30	7.97	8.57	−0.60	0.3600
30	11.06	8.57	+2.49	6.2001
30	8.32	8.57	−0.25	0.0625
36	7.58	8.97	−1.39	1.9321
36	9.33	8.97	+0.36	0.1296
36	9.38	8.97	+0.41	0.1681
36	8.22	8.97	−0.75	0.5625
36	12.48	8 97	+3.51	12.3201
36	8.63	8.97	−0.34	0.1156
48	8.45	9.15	−0.70	0.4900
48	9.52	9.15	+0.37	0.1369
48	8.63	9.15	−0.52	0 2704
48	8.83	9.15	−0.32	0.1024
48	10.62	9.15	+1.47	2 1609
48	8.05	9.15	−1.10	1.2100
60	10.17	8.53	+1.64	2.6896
60	7.25	8.53	−1.28	1 6384
60	10 70	8.53	+2.17	4.7089
60	5.55	8.53	−2.98	8.8804
				80.9871

〔註〕 上表自米爾斯之統計方法轉載。

$$S_y=\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}=\sqrt{\frac{80.9871}{44}}=1.36$$

吾人既得拋物線之方程式與標準誤之數値，乃須求一表示繫聯程度之抽象數量。繫聯係數之名詞既限於直線繫聯，則非直線繫聯當另立一名詞以免混淆，統計學家乃稱之曰繫聯指數，以 ρ (讀如 rho) 表之。計算繫聯指數之公式如下：

$$\rho_{yx}^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2} \tag{2}$$

ρ_{yx}　y 對 x 之繫聯指數。

S_y　y 數列之標準誤。

σ_y　y 數列之標準差。

上式中 ρ 旁之二字母，第一字母常指因變數，而第二字母則指自變數。故在上式中 x 爲自變數，y 爲因變數；反之，在 ρ_{xy} 中則 y 爲自變數，x 爲因變數。ρ_{xy} 通常與 ρ_{yx} 不同，故 x 與 y 二字母之次序有區別之必要。至於直線繫聯之係數 r 則不論何者爲自變數其數値常相等，此亦繫聯係數與繫聯指數之異點也。

若 y 爲自變數，x 爲因變數，則繫聯指數之公式當改作如下：

$$\rho_{xy}^2=1-\frac{S_x^2}{\sigma_x^2} \tag{3}$$

ρ_{xy}　x 對 y 之繫聯指數。

S_x　x 數列之標準誤。

σ_x　x 數列之標準差。

σ_y 之數值依常法求得爲 2.27，以之代入公式(2)則得：

$$\rho_{yx}=\sqrt{1-\frac{1.8496}{5.1529}}=0.80$$

苜蓿之事項前已用直線計算 r 之值爲 +0.68，今配以拋物線，則繫聯指數之值遠在繫聯係數之上，足見此項關係爲非直線之關係，要無疑義矣。

然則繫聯指數之意義與其數值之限度如何？是亦吾人所不可不知者也。繫聯指數之數值視原有事項對所配曲線之差量與對算術平均數離中程度之關係而定。所配之線如爲直線，則 ρ 與 r 合而爲一。r 實爲 ρ 之特別情形。ρ 之數值不出 0 與 1 之間，如其爲 0，則謂兩事項間苟有關係存在，此關係不能以所用方程式表示；如其爲 1，則謂此方程式所表示之關係完全無缺。r 之前可有正負符號，而在二次以上之曲線則 ρ 之前不必附以正負符號，蓋此項關係在曲線之一部爲正而在其他一部爲負，如上述之拋物線卽其例也。

計算繫聯指數時又不可不將曲線之形態說明，蓋離開曲線，繫聯指數便無意義。r 之義最爲明白，蓋所配之線必爲直線故也。但在繫聯指數則何種曲線非加說明不然必致混淆。故就一方面言，繫聯指數亦可作某種曲線可否表示某種關係之標準也。

上文之計算按步就班，所以便學者研習耳；但實際計算時標準誤與繫聯指數皆可用簡捷法求之，其計算之公式如下：

$$S_y{}^2=\frac{\Sigma Y^2-a_1\Sigma Y-b_1\Sigma(XY)-c_1\Sigma(X^2Y)}{n}. \qquad (4)$$

$$\rho^2_{yx}=\frac{a_1\Sigma Y+b_1\Sigma(XY)+c_1\Sigma(X^2Y)-n\bar{y}^2}{\Sigma Y^2-n\bar{y}^2} \qquad (5)$$

(證明參看附錄甲 30)

上兩式中除 ΣY^2 與 $\bar{y}^2$($\bar{y}$ 係 y 數列之算術平均數) 須另行計算外，其餘 ΣY, $\Sigma(XY)$, $\Sigma(X^2Y)$, n, a_1, b_1與 c_1 諸數均已求得，其數值如下：

$$\Sigma Y=329.03$$

$$\Sigma(XY)=10269.96$$

$$\Sigma(X^2Y)=407448$$

$$n=44$$

$$a_1=3.5468$$

$$b_1=0.2520$$

$$c_1=-0.0028162$$

玆再求 $\bar{y}^2$ 與 ΣY^2 如下：

$$\bar{y}=\frac{329.03}{44}=7.48$$

$$\bar{y}^2=7.48^2=55.9504$$

$$\Sigma Y^2=2688.3129$$

代入公式(4)與(5)則得：

$$S_y^2=\frac{2688.3129-3.5468\times329.03-0.252\times10269.96+0.0028162\times407448}{44}$$

$$=\frac{80.7345}{44}=1.8349$$

$S_y = 1.36$

$$\rho_{yx}^2 = \frac{3.5468 \times 329.03 + 0.252 \times 10269.96 - 0.0028162 \times 407448 - 44 \times 55.9504}{2688.3129 - 44 \times 55.9504}$$

$$= \frac{145.7608}{226.4953} = 0.6435$$

$\rho_{yx} = 0.80$

與以上所得之結果完全相同。

第四節　繫聯比

表示繫聯程度之數量上文已述 r 與 ρ 兩種，此外尚有一種名曰繫聯比，爲皮爾生教授所創，吾人常以 η (讀如 eta)表之。此項數量亦可作爲 ρ 之一種，但其計算方法稍有不同耳。

吾人已知兩變量之繫聯程度均可以下式求之：

$$繫聯之數量 = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

若 S_y 表示對於一直線之標準誤，則此數量爲繫聯係數 r，而繫聯指數 ρ 則爲此項數量之一般的表示。繫聯比與此亦同，所不同者 S_y 之性質耳。在繫聯係數 S_y 爲對於直線之標準差，在繫聯指數 S_y 爲對於曲線之標準差，而在繫聯比則 S_y 與此稍異。吾人先就繫聯表中各行之平均數，連以一線，然後再計各項對此線之標準差，而 S_y 即此標準差也。表中各行之中點如在一直線上，則繫聯比與繫聯係數合而爲一，各行中

點如其不在一直線上，則繫聯比大於繫聯係數。

故兩變量之相互關係如能以直線表示者可用繫聯係數，如其不能以直線表示者則可用繫聯比，此項關係可以通過各行中點之曲線表示之，而繫聯比則其關係之程度也。此項關係如其完全而對此曲線一無差量者，則 η 之值爲一；如其兩變量間無甚關係而對此曲線之差量與對於 y 數列平均數之差量相等者，則 η 之值爲零。

但此通過各行中點之線之標準差通常不用 S_y 而以 σ_{ay} 表示，其意義與 S_y 初無二致，所不同者 σ_{ay} 常對繫聯表而言也，故得計算 η 之公式如下：

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}} \tag{6}$$

η_{yx}　y 對 x 之繫聯比。

σ_y　y 數列之標準差。

σ_{ay}　y 數列中各項對於各行算術平均數之標準差。

η_{yx} 與 η_{xy} 之區別在自變數與因變數之互換而已，正與 ρ_{yx} 與 ρ_{xy} 之區別相同。

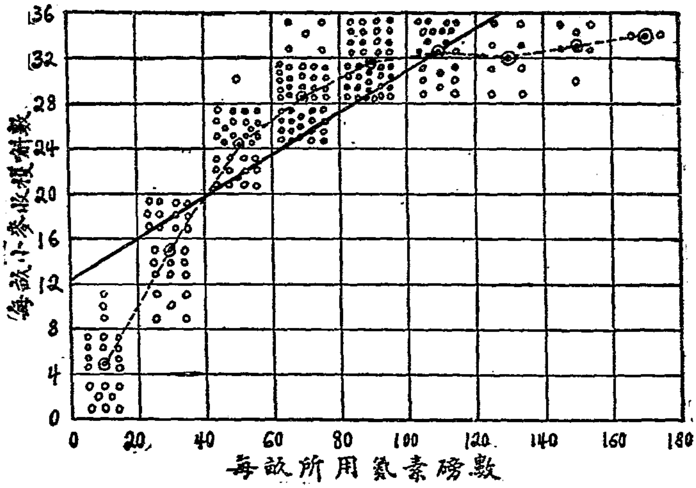
茲據美國達文博氏農業試驗所得之結果將每畝所用氮素磅數與每畝小麥收穫量製成繫聯表以示繫聯比之計算。

第一百十六表 氮素肥料與小麥收成之繫聯表

		X——每畝所用氮素磅數										
		0–19.9	20–39.9	40–59.9	60–79.9	80–99.9	100–119.9	120–139.9	140–159.9	160–179.9	合計	各列算術平均數
Y——每畝小麥收穫蒲數	32–35.9				5	16	12	4	5	2	44	107.27
	28–31.9			1	20	21	8	4	1		55	88.91
	24–27.9			16	19						35	60.86
	20–23.9			13							13	50.0
	16–19.9		12								12	30.0
	12–15.9		8								8	30.0
	8–11.9	3	5								8	22.50
	4–7.9	10									10	10.0
	0–3.9	8									8	10.0
	合計	21	25	30	44	37	20	8	6	2	193	
	各行算術平均數	5.05	15.12	24.4	28.73	31.73	32.4	32.0	33.33	34.0		

〔註〕 上表自米爾斯之統計方法轉載。

第三十三圖 氮素肥料與小麥收成之散佈及繫聯直線與通過各行中點線之比較



欲計算 η_{yx} 須先求 σ_y 與 σ_{ay} 之值，σ_y 之算法上文已屢屢言之，無待贅述。至於 σ_{ay} 則爲對於連絡各行算術平均數一線之標準差，故計算之時先求各項對於各行算術平均數之離中差，求其平方相加而除以項數，再開平方卽得。茲示其計算於下表。

第一百十七表　σ_{ay} 之計算

每畝小麥收穫斛數	$\overline{m}$	f	d	d^2	fd^2
0－3.9	2	8	－3.05	9.3025	74.4200
4－7.9	6	10	0.95	0.9025	9.0250
8－11.9	10	3	4.95	24.5025	73.5075
8－11.9	10	5	－5.12	26.2144	131.0720
12－15.9	14	8	－1.12	1.2544	10.0352
16－19.9	18	12	2.88	8.2944	99.5328
20－23.9	22	13	－2.40	5.7600	74.8800
24－27.9	26	16	1.60	2.5600	40.9600
28－31.9	30	1	5.60	31.3600	31.3600
24－27.9	26	19	－2.73	7.4529	141.6051
28－31.9	30	20	1.27	1.6129	32.2580
32－35.9	34	5	5.27	27.7729	138.8645
28－31.9	30	21	－1.73	2.9929	62.8509
32－35.9	34	16	2.27	5.1529	82.4464
28－31.9	30	8	－2.40	5.7600	46.0800
32－35.9	34	12	1.60	2.5600	30.7200
28－31.9	30	4	－2.00	4.0000	16.0000
32－35.9	34	4	2.00	4.0000	16.0000
28－31.9	30	1	－3.33	11.0889	11.0889
32－35.9	34	5	0.67	0.4489	2.2445
32－35.9	34	2	0	0	0
		193			1124.9508

$$\sigma_{ay}=\sqrt{\frac{1124.9508}{193}}=2.420$$

以 σ_{ay} 與 σ_y (9.188)之值代入公式(6)則得：

$$\eta_{yx}^2=1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}=1-\frac{2.42^2}{9.188^2}$$

$$=1-0.0694=0.9306$$

$$\eta_{yx}=0.965$$

但上法計算太繁，不合實用，玆另述一簡捷法，可得相同之結果，其公式如下：

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y} \qquad (7)(證明參看附錄甲32)$$

η_{yx} y 對 x 之繫聯比

σ_y y 數列之標準差

σ_{my} 各行算術平均數對於 $\bar{y}$ (y 數列之算術平均數)之標準差

σ_{my} 之計算較易，故實際上每用公式(7)以求繫聯比。玆仍就前例述其計算於下：

第一百十八表 繫聯比之簡捷法

x 各組中點	y 各項之算術平均數	對 y 總平均數之離中差 d	d^2	頻數 f	fd^2
10	5.05	−19.955	398.202	21	8362.242
30	15.12	−9.885	97.713	25	2442.825
50	24.40	−0.605	0.366	30	10.980
70	28.73	+3.725	13.876	44	610.544
90	31.73	+6.725	45.226	37	1673.362
110	32.40	+7.395	54.686	20	1093.720
130	32.00	+6.995	48.930	8	391.440
150	33.33	+8.325	69.306	6	415.836
170	34.00	+8.995	80.910	2	161.820
	y 總平均數 25.005			193	15162.769

〔註〕 上表自米爾斯之統計方法轉載。

$$\sigma_{my}=\sqrt{\frac{15162.769}{193}}=8.864$$

代入公式(7)則得：

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}=\frac{8.864}{9.188}=0.965$$

依照簡捷法求得繫聯比之計算程序如下:

(一)將所有事項作成繫聯表。

(二)就各行之 y 數值而求其算術平均數。

(三)計算 y 數列全體之算術平均數。

(四)就各行算術平均數而求其對於全體算術平均數之離中差,求其平方乘以各行之頻數而求其總和。

(五)求得之總和以總項數除之,再開平方卽得 σ_{my}。

(六)計算 σ_y。

(七)以 σ_y 除 σ_{my} 卽得 η_{yx}。

如求 x 對 y 之繫聯比,則公式(7)可改作下式:

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x} \tag{8}$$

η_{xy}　x 對 y 之繫聯比。

σ_x　x 數列之標準差。

σ_{mx}　各列算術平均數對於 $\bar{x}$ (x 數列之算術平均數)之標準差。

此 σ_{mx} 則爲各列算術平均數對於 x 數列全體算術平均數之標準差,而 η_{xy} 之值則隨各項對於連絡各列中點之線之差量而定。其值,常與 y 對 x 之繫聯比不同。本例之 η_{yx} 等於 0.965 而 η_{xy} 則等於 0.824。連絡此各行中點與各列中點之線愈近於直線,則此二繫聯比亦愈相近。

η 與 r 相同,其値斷不能大於一。若等於一,卽謂對於連絡各行(或

各列)算術平均數之線全無離中差也。由公式(7)吾人可見若σ_{my}等於零則繫聯比亦等於零；σ_{my}等於零者卽各行算術平均數之值均與y數列全體之算術平均數相等。換言之，x變量或增或減而y變量絕無任何變化同時發生，然則繫聯表中各行之分配均與y數列全體之分配相同，而此二變量間絕無關係之可言也。

繫聯比之數值斷不能爲負數，但兩變量間之關係爲正爲負或正負二者均有，則於繫聯表中一覽可知也。

繫聯比之適用祇限於項數甚多而能排列成繫聯表之時。若項數不多而在繫聯表中每行祇有一項，則σ_{my}與σ_y之數值完全相同而繫聯比之數值當然爲一。故由項數甚少分組甚多之繫聯表計算而得之繫聯比將無意義可言。皮爾生教授爲欲糾正因分組太多而生之錯誤起見，乃創下列之校正公式：

$$\eta'^2=\frac{\eta^2-\frac{t-3}{n}}{1-\frac{t-3}{n}} \tag{9}$$

η' 校正繫聯比。

η 未校正繫聯比。

n 項數。

t 行數。

應用於上例則得：

$$\eta'^2=\frac{0.965^2-\frac{9-3}{193}}{1-\frac{9-3}{193}}=0.929$$

$$\eta'=0.964$$

與未校正繫聯比相差甚微。但若項數甚少或行數甚多，則兩者相差往往甚大。

本章應用公式

$$Y=a_1+b_1X+c_1X^2$$

$$a_1=\frac{\Sigma X^2\Sigma X^4\Sigma Y+\Sigma X\Sigma X^3\Sigma(X^2Y)+\Sigma X^2\Sigma X^3\Sigma(XY)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^3)^2\Sigma Y-\Sigma X\Sigma X^4\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$b_1=\frac{n\Sigma X^4\Sigma(XY)+\Sigma X^2\Sigma X^3\Sigma Y+\Sigma X\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(XY)-n\Sigma X^3\Sigma(X^2Y)-\Sigma X\Sigma X^4\Sigma Y}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$c_1=\frac{n\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)+\Sigma X\Sigma X^2\Sigma(XY)+\Sigma X\Sigma X^3\Sigma Y-(\Sigma X^2)^2\Sigma Y-n\Sigma X^3\Sigma(XY)-(\Sigma X)^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4} \qquad (1)$$

$$\rho_{yx}{}^2=1-\frac{S_y{}^2}{\sigma_y{}^2} \qquad (2)$$

$$\rho_{xy}{}^2=1-\frac{S_x{}^2}{\sigma_x{}^2} \qquad (3)$$

$$S_y{}^2=\frac{\Sigma Y^2-a_1\Sigma Y-b_1\Sigma(XY)-c_1\Sigma(X^2Y)}{n} \qquad (4)$$

$$\rho_{yx}{}^2=\frac{a_1\Sigma Y+b_1\Sigma(XY)+c_1\Sigma(X^2Y)-n\bar{y}^2}{\Sigma Y^2-n\bar{y}^2} \qquad (5)$$

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{sy}{}^2}{\sigma_y{}^2}} \qquad (6)$$

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y} \qquad (7)$$

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x} \tag{8}$$

$$\eta'^2=\frac{\eta^2-\frac{t-3}{n}}{1-\frac{t-3}{n}} \tag{9}$$

第十六章　他種繫聯

第一節　等級繫聯

有時統計數列並非事物之實際數值，乃事物之等級，則其繫聯之決定方法與以前所論者稍稍不同。例如吾人就上海會考各中學中取其兼設高中部與初中部者而研究其成績之繫聯，吾人可就教育局所發表各校各部之名次而計算其繫聯係數。根據事物之等級而計算之繫聯名曰等級繫聯，其公式如下：

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(v_x-v_y)^2}{n(n^2-1)}\quad(1)$$(證明參看附錄甲38)

ρ　等級繫聯係數。

v_x　x 數列中各項之等級。

v_y　y 數列中各項之等級。

n　項數。

設前例上海中學會考之結果各校高中部與初中部之名次相等，即高中部之成績若爲第一初中部之成績亦爲第一，高中部之成績若爲第二初中部之成績亦爲第二等等，則兩數列相對兩項等級之差均等於零，而公式(1)右邊之第二項亦等於零，ρ 之數值將等於一。此即表示高中部之成績與初中部之成績有一完全之正繫聯存在。換言之，某校高中

部之成績優其初中部之成績亦優，高中部之成績劣其初中部之成績亦劣。反之若某校高中部之成績優其初中部之成績反劣，高中部之成績劣其初中部之成績反優，則 ρ 之數值將等於 -1。(證明參看附錄甲 34)設共有十校會考，則依此假定其成績如下所示：

	高中部(v_x)	初中部(v_y)
甲校	1	10
乙校	2	9
丙校	3	8
丁校	4	7
戊校	5	6
己校	6	5
庚校	7	4
辛校	8	3
壬校	9	2
癸校	10	1

$$\Sigma(v_x-v_y)^2=81+49+25+9+1+1+9+25+49+81=330$$

代入公式(1)則得：

$$\rho=1-\frac{6\times330}{10\times99}=1-2=-1$$

茲更就我國各電區所轄局數及所用職工人數之等級而計算其繫聯係數如下表：

第一百十九表　等級繫聯之計算

電　區	等級		v_x-v_y	$(v_x-v_y)^2$
	局數v_x	人數v_y		
江　蘇	2	1	1	1
浙　江	10	13	−3	9
安　徽	11	12	−1	1
江　西	12	10	2	4
湖　北	7	5	2	4
湖　南	9	9	0	0
山　東	4	3	1	1
河　北	5	2	3	9
河　南	13	11	2	4
山　西	21	21	0	0
陝　西	16	18	−2	4
甘　甯	17	16	1	1
福　建	19	14	5	25
廣　東	3	4	−1	1
廣　西	8	8	0	0
雲　南	14	15	−1	1
貴　州	18	19	−1	1
遼吉黑	1	6	−5	25
川　藏	6	7	−1	1
新　青	20	20	0	0
熱察綏蒙	15	17	−2	4
				96

〔註〕　資料來源：交通統計簡報(民國二十一年一月至六月)。

$$\Sigma(v_x-v_y)^2=96$$

$$n=21$$

代入公式(1)則得

$$\rho=1-\frac{6\times96}{21\times440}=1-0.062=.938$$

等級中往往有相同者。例如上例中安徽與江西各有四十五局，陝西與甘寧各有三十一局，應屬同一等級，上表中列爲兩級乃欲使學者易於瞭解耳。實際計算之時須列爲一級。然則究應列入何級？解決此問題共有二法：一曰括弧法，一曰中級法。括弧法以較前一級爲相同事項之

等級。例如第十一第十二兩級爲安徽與江西，但因兩區各有四五局，故以較前一級卽第十一級爲此相同事項之等級。又如第十六第十七兩級爲陝西與甘寧，但因兩區各有三一局，故以較前一級卽第十六級爲此相同事項之等級。中級法則不以較前一級而以各級之平均等級爲相同事項之等級，故依中級法安徽與江西應列入 11.5 級，而陝西與甘寧則應列入 16.5 級，此兩法之異點也。

等級繫聯計算雖簡，然究不能完全可恃。例如下之二數列：

100	80	70	65	62	60	55	50	40	20
100	99	98	97	96	95	10	9	8	7

其等級相同，卽 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，但二者之分配大不相同。故除繫聯極高者外其繫聯係數必須十分審愼也。

此種分配如其爲正態或近似正態之形式，則 r 之數值可依皮爾生氏之改正公式求之。

$$r = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right) \qquad (2)$$

r　繫聯係數。

ρ　等級繫聯係數。

π　$=180^\circ$

若　$$\rho=1,$$

則　$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$r=1。$$

若　$\rho=-1$,

則　$\sin(-30^\circ)=-\frac{1}{2}$,

$r=-1$。

若　$\rho=0$,

則　$\sin 0^\circ=0$,

$r=0$。

對於其他數值 ρ 與 r 略有差異，其數值大小之關係可查附錄己第七表。

計算等級繫聯係數尙有司佩蒙氏公式較公式(1)更爲簡單，惟以其更爲疏略，故不足恃。茲列其公式於下：

$$R=1-\frac{6L_p}{n^2-1} \tag{3}$$

R　司佩蒙氏等級繫聯係數

n　項數

L_p　等級正差之和

若應用公式(3)計算第一百十九表中之等級繫聯係數，則得：

$$L=17$$

$$n=21$$

$$R=1-\frac{6\times17}{440}=1-0.232=0.768$$

依皮爾生氏之分析，r 與 R 之關係略如下式：

$$r=2\cos\left[\frac{\pi}{3}(1-R)\right]-1 \tag{4}$$

r 繫聯係數

R 司佩蒙氏等級繫聯係數

$\pi=180°$

若 $R=1,$

則 $\cos 0°=1,$

$r=2-1=1$。

若 $R=0,$

則 $\cos 60°=\frac{1}{2},$

$r=2\times\frac{1}{2}-1=0$。

若 $R=-\frac{1}{2},$

則 $\cos 90°=0,$

$r=-1$。

r 與 R 之其他關係可查三角表應用公式(4)求得。

第二節 相應增減法

吾人已知繫聯有正負與大小之別。若吾人不計其量祇欲知其正負之方向，則應用相應增減法已可求得。至其計算當分別時間數列與非時間數列而論之。若屬前者則須比較本期與上期之數量，若屬後者則須將

兩數列之各項與其平均數比較。設吾人欲研究民國元年至十年我國輸出入貿易之關係，則須以民國二年之輸出入額與民國元年之輸出入額相較，民國三年之輸出入額與民國二年之輸出入額相較等等。若民國二年之輸出與輸入均較民國元年爲多或均較民國元年爲少，則此二年爲相應，應記「相應一分」；若自民國元年至二年輸出額增加而輸入額減少或輸出額減少而輸入額增加，則此二年爲不相應，應記「不相應一分」；若自民國元年至二年輸出額不變或輸入額不變或輸出與輸入額均無變動，則此二年介於相應與不相應之間，應記「相應與不相應各半分」。又設吾人欲比較吾國各電區所轄局數與所用職工人數，則先計算各區之平均局數與平均人數。若江蘇之局數與人數均在平均數之上或均在其下，則爲相應，當記「相應一分」；若江蘇之局數較多於平均局數而其人數較少於平均人數或前者較少而後者較多，則爲不相應，當記「不相應一分」；若江蘇之局數與人數有一或兩者與平均數相等，則介於相應與不相應之間，當記「相應與不相應各半分」。相應與不相應分數記畢後相加，然後應用下列公式計算之：

$$R'=\pm\sqrt{\pm\frac{2l'-n}{n}} \tag{5}$$

R'　相應繫聯係數

l'　相應分數

n　相應分數與不相應分數之和

若　$\frac{2l'-n}{n}$ 爲正數則取正號，若爲負數則取負號。

若　$l'=n$，

則 $R'=+\sqrt{+\frac{2n-n}{n}}=+1$。

若 $l'=0$,

則 $R'=-\sqrt{-\frac{0-n}{n}}=-1$。

若 $l'=\frac{n}{2}$,

則 $R'=\pm\sqrt{\pm\frac{n-n}{n}}=0$。

茲取時間數列與非時間數列應用公式(5)分別計算其相應繫聯於下列兩表:

第一百二十表 時間數列相應繫聯之計算

年份	由日本輸入我國棉織品值		由日本輸入我國棉紗值		相應分數	不相應分數
	單位一百萬海關兩	較上年增(+)或減(−)	單位一百萬海關兩	較上年增(+)或減(−)		
民國元年	15		23			
二年	23	+	32	+	1	
三年	26	+	36	+	1	
四年	26	0	34	−	0.5	0.5
五年	30	+	34	0	0.5	0.5
六年	54	+	31	−		1
七年	57	+	33	+	1	
八年	88	+	29	−		1
九年	79	−	33	+		1
十年	63	−	31	−	1	
十一年	72	+	39	+	1	
十二年	69	−	25	−	1	
十三年	81	+	21	−		1
十四年	103	+	27	+	1	
十五年	121	+	17	−		1
十六年	96	−	8	−	1	
十七年	117	+	6	−		1
十八年	116	−	6	0	0.5	0.5
十九年	101	−	4	−	1	
二十年	81	−	2	−	1	
					11.5	7.5

〔註〕資料來源:中日貿易統計(中國經濟學社中日貿易研究所)

$l'=11.5$

$n=11.5+7.5=19$

代入公式(5)則得

$$R'=+\sqrt{+\frac{23-19}{19}}=+\sqrt{\frac{4}{19}}=+0.46$$

即棉織品與棉紗之輸入額間之繫聯為正繫聯。

第一百卄一表　非時間數列相應繫聯之計算

學生	英文成績		數學成績		相應分數	不相應分數
	分數	較平均分數大(+)或小(−)	分數	較平均分數大(+)或小(−)		
甲	75	−	95	+		1
乙	80	0	96	+	0.5	0.5
丙	85	+	80	+	1	
丁	82	+	85	+	1	
戊	90	+	75	−		1
己	94	+	82	+	1	
庚	78	−	84	+		1
辛	76	−	65	−	1	
壬	72	−	62	−	1	
癸	68	−	66	−	1	
	平均 80		平均 79		6.5	3.5

$l'=6.5$

$n=6.5+3.5=10$

代入公式(5)則得

$$R'=+\sqrt{+\frac{13-10}{10}}=+0.55$$

即英文成績與數學成績之繫聯為正繫聯。

第三節 異號成對法

此法與前法相似，惟前法以相應者爲主而此法則以不相應者爲主，前法中遇有零差時相應分數與不相應分數各記半分，而在異號成對法則另記零差分數。茲列其公式於下：

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{u' + \frac{d_0}{2}\left(\frac{u'}{u'+l'} + \frac{1}{2}\right)}{n} \\ r &= \cos(\pi U') \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

U' 異號成對繫聯係數

r 繫聯係數

u' 不相應分數

l' 相應分數

d_0 零差分數

n 項數

$\pi=180^\circ$

若 $l'=n$,

則 $u'=0$,

$d_0=0$,

$U'=0$,

$r=\cos 0^\circ=+1$。

若 $u'=n$,

則　$l'=0,$

$d_0=0,$

$U'=1,$

$r=\cos 180^\circ=-1$。

若　$l'=u'$

則　$n=2u'+d_\circ$

$$U'=\frac{u'+\frac{d_\circ}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{n}=\frac{u'+\frac{d_\circ}{2}}{2u'+d_\circ}=\frac{1}{2}$$

$$r=\cos 90^\circ=0$$

U'與 r 之其他關係可查三角表應用公式(6)求得。

應用公式(6)以計算第一百卄一表中之繫聯則得:

$u'=3$

$l'=6$

$d_\circ=1$

$n=10$

$$U'=\frac{3+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\right)}{10}=\frac{3+\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}}{10}=0.34$$

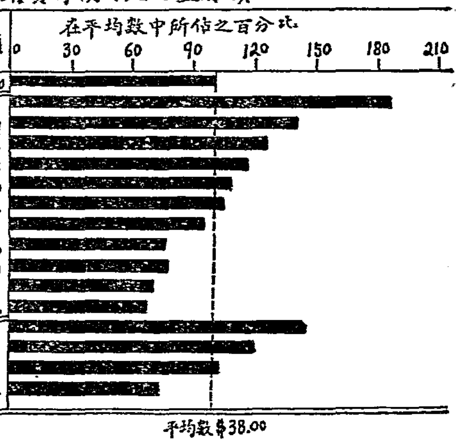
$$r=+0.48$$

第四節 圖表法

圖表法者將圖表並列以橫條之長短表示繫聯之正負之法也。例如第三十四圖爲一種負繫聯之表示，第三十五圖爲一種正繫聯之表示，第三十六圖爲一種零繫聯之表示。

第三十四圖 銷貨淨額與每單位銷貨額之盤存額之繫聯

銷貨淨額(單位千元)	商店數	每銷貨淨額百元之盤存額 金額
合計(平均)	920	$38.00
0—20	50	70.67
20—40	239	53.29
40—60	209	46.73
60—80	126	44.53
80—100	80	41.40
100—140	95	39.43
140—180	43	36.67
180—220	21	29.00
220—300	23	29.49
300—500	22	26.57
500以上	12	25.75
0—40	289	54.97
40—80	335	45.74
80—180	218	39.24
180以上	78	27.24

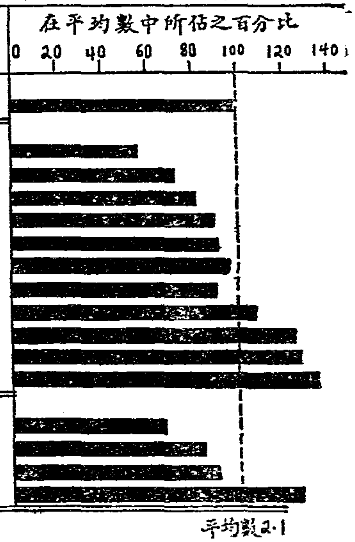


［註］上圖自西克利斯脫之統計方法轉載。

第三十四圖中銷貨淨額之分組由小而大，但表示盤存額之橫條則除第九組外均由長而短，故兩者之間顯然有一負繫聯存在。

第三十五圖　銷貨淨額與每年存貨銷售率之繫聯

銷貨淨額(單位千元)	商店數	每年存貨銷售率 銷售率
合計(平均)	314	2.1
0——20	3	1.2
20——40	43	1.5
40——60	77	1.7
60——80	45	1.9
80——100	34	1.9
100——140	45	2.0
140——180	22	1.9
180——220	12	2.3
220——300	12	2.6
300——500	14	2.7
500以上	7	2.9
0——40	46	1.4
40——80	122	1.8
80——180	101	1.9
180以上	45	2.7

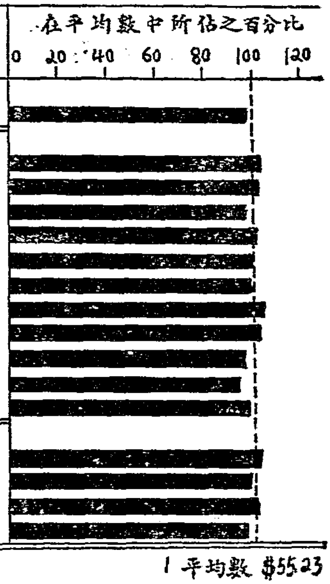


〔註〕上圖自西克利斯脫之統計方法轉載。

第三十五圖中銷貨淨額之分組由小而大，表示銷售率之橫條除第七組外均由短而長，故知兩者之間必有一正繫聯存在。

第三十六圖　銷貨淨額與每百元營業費中薪資額之繫聯

銷貨淨額(單位千元)	商店數	每百元營業費中之薪資額 金額
合計(平均)	929	$55.23
0——20	48	56.30
20——40	244	55.87
40——60	214	54.54
60——80	130	55.85
80——100	82	55.22
100——140	90	54.96
140——180	44	58.26
180——220	23	57.22
220——300	23	53.75
300——500	21	53.20
500以上	10	54.87
0——40	292	55.92
40——80	344	55.17
80——180	216	55.97
180以上	77	54.50



〔註〕上表自西克利斯脫之統計方法轉載。

第三十六圖中橫條之長短相差甚微，且無一定之標準，足見銷貨淨額與每百元營業費中薪資額實無關係之可言。

本章應用公式

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(v_x-v_y)^2}{n(n^2-1)} \tag{1}$$

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right) \tag{2}$$

$$R=1-\frac{6\,Lp}{n^2-1} \tag{3}$$

$$r=2\cos\left[\frac{\pi}{3}(1-R)\right]-1 \tag{4}$$

$$R'=\pm\sqrt{\pm\frac{2l'-n}{n}} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{u'+\frac{d}{2}\left(\frac{u'}{u'+l'}+\frac{1}{2}\right)}{n} \\ r &= \cos(\pi U') \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

第十七章　偏繫聯

第一節　偏繫聯之意義及其符號

上文所論之繫聯均限於兩個變量。然世間現象常與其他無數現象有關。物價之決定與物品之需要與供給均有密切之關係。米之收穫與雨量之多少溫度之高低有關。棉花之種植面積除與棉價有直接關係外與其他農產物價格之高低亦有間接之關係。故一變量之變化不僅受他一變量之影響，實受許多其他變量之共同影響；換言之，一個因變量之數值爲許多自變量所左右。今測量兩變量間之繫聯即測量一因變量與一自變量之繫聯而忽略此因變量與其他自變量之繫聯，若此被測量之自變量爲因變量變動之主要原因而其他自變量均無顯著之影響，則求得之結果與事實相差無幾。反之在此被忽略之許多自變量中若有一二變量亦爲此因變量變動之主要原因，則忽視此一二自變量而得之繫聯實非眞正之繫聯。故僅知兩變量間繫聯之計算猶未足以資應用，此吾人所以不得不另求更精密之方法也。

經濟學中有所謂供求定律者，所謂供求定律即謂供給不變時物價與需要成正比例，需要不變時物價與供給成反比例。可見欲測定物價與需要之關係，須先假定供給不變；欲測定物價與供給之關係，須先假定需要不變。若吾人僅求物價與需要之單繫聯（即前所論之繫聯），是將供

給忽視而非假定其不變之法也。欲計算其眞正繫聯，須先假定供給不變，然後求物價與需要之繫聯，即所謂偏繫聯是也。故偏繫聯者假定 $n-1$ 個 (n 代表自變量之總數) 自變量不變而計算因變量與一個自變量之繫聯也。依此定義則物價與供給之偏繫聯即假定需要不變而計算物價與供給之繫聯也。

爲便於說明起見，統計學家常以 $X_1,X_2,X_3\cdots\cdots X_n$ 代表各變量，$r_{12\cdot34\cdots\cdots n}$ 代表 X_1 與 X_2 之偏繫聯係數，書於 r 右下角之數字以一小點分爲前後二部，前部數字祇有兩個，第一字代表因變量，第二字代表計算偏繫聯之自變量，後部數字則代表假定不變之自變量。故 $r_{34\cdot125}$ 乃 X_3 與 X_4 之偏繫聯係數，X_3 爲因變量，X_4 爲自變量之一，X_1,X_2 與 X_5 均假定不變之自變量也。

繫聯係數有零次，一次，二次……等之分。觀後部數字之多少即可決定繫聯係數之次數。故 $r_{12\cdot345}$ 爲三次繫聯係數，$r_{12\cdot34567}$ 爲五次繫聯係數，而 r_{12} 爲零次繫聯係數，即以前所論之單繫聯係數也。

第二節　偏繫聯係數之效用

零次繫聯係數吾人已知其效用，偏繫聯係數則除此效用之外尙能發見單繫聯係數所不能發見之事；蓋僅計算零次繫聯係數則兩事項間之眞實關係常爲所蔽而無由表現，故偏繫聯之探討實無異於在理化試驗室中所作分析之試驗。在理化試驗中常覺某種因子對於某現象具有若干作用，但此作用不能立即表現；化學家欲使其表現，須先隔離其他因子之作用而使此因子單獨表現其作用。偏繫聯之探討亦然，惟所用之

方法係計算上之隔離方法而非實際之隔離方法耳。

有時兩變量間似有密切之關係，但此關係實受第三因子之影響，故極高之繫聯係數並非為兩變量間眞正繫聯程度之表示。偏繫聯係數卽可藉以發見此混入不當之繫聯也。

夫日中之星視之不見，苟永無黑暗之夜吾人幾不知星之存在，星光已為日光所蔽，吾人烏能感知。欲知星之存在，須先將日光隔離，此固人力所不能及，然自然已代吾人行此隔離方法矣；地球之轉動使太陽之光有時而能隔離，吾人遂得發見天上之星也。

吾人在月光之夜幾疑月之能自發光，然月固不能發光，吾人所見者乃日光反射之光耳。然則此眞理吾人又何由得知？欲證明此眞理，又須隔離太陽之光以察月之究能發光與否，此亦人力所不能及，然自然又代吾人行此隔離方法矣；太陽因月蝕而被遮蔽，吾人遂得知月之固不能發光也。

自然眞理之發見固須借重隔離方法，經濟現象之研究何獨不然。法國阿富塔里翁教授在其所著之生產過剩之恐慌時期一書中研究麥價與需要循環之關係，初見需要循環似無甚影響於麥價，其後將供給之作用隔離，則見麥價在繁榮之期較高而在衰落之期較低，此卽需要循環影響於麥價之證也。

美國馬爾教授在其所著之經濟循環一書中嘗謂農產品之價格與其供給成反比例而製造品之價格則與其供給成正比例。馬氏之結論似與經濟學中之供求定律相抵觸，其實製造品之產量增加時因其需要亦同時增加故其價格亦增加，製造品之產量減少時因其需要亦同時減少故

其價格亦減少。馬氏之結論實爲需要循環所蔽。若能使之隔離，則製造品之價格固亦與其供給成反比例也。偏繫聯係數之效用於此可見。

第三節　偏繫聯係數之計算

一次繫聯係數可由零次繫聯係數求得，其公式如下：

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{(1-r_{13}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1}$$

二次繫聯係數可由一次繫聯係數求得，三次繫聯係數可由二次繫聯係數求得。簡言之，高次繫聯係數可由低次繫聯係數依次求得，其一般公式如下：

$$r_{12\cdot345\cdots n}=\frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}{[1-r^2_{1n\cdot345\cdots(n-1)}]^{\frac{1}{2}}[1-r^2_{2n\cdot345\cdots(n-1)}]^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

故 $$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}\,r_{24\cdot3}}{(1-r^2_{14\cdot3})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{24\cdot3})^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot2}-r_{14\cdot2}\,r_{34\cdot2}}{(1-r^2_{14\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{34\cdot2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot2}-r_{13\cdot2}\,r_{43\cdot2}}{(1-r^2_{13\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{43\cdot2})^{\frac{1}{2}}}$$

前部數字得任意互易，其值不變，故：

$$r_{12\cdot4}=r_{21\cdot4}$$

$$r_{13\cdot24}=r_{31\cdot24}$$

玆就下表中玉蜀黍之收穫與七八九三個月之溫度而計算其偏繫聯係數如下：

第一百二十二表 1890–1922 年美國開痕撒斯玉蜀黍之收穫與溫度之比較

年份	每畝所產蒲數	長期趨勢	實際產量在長期趨勢中所佔之百分比 X_1	六月之平均溫度 X_2	七月之平均溫度 X_3	八月之平均溫度 X_4
1890	15.6	22.4	69.6	77.6	83.1	76.1
1891	26.7	22.2	120.3	70.7	74.0	75.1
1892	24.5	22.1	110.9	73.4	77.5	76.5
1893	21.3	21.9	97.3	74.7	79.5	73.8
1894	11.2	21.8	51.4	74.2	77.8	78.0
1895	24.3	21.6	112.5	71.7	74.9	76.0
1896	28.0	21.5	130.2	74.1	78.1	78.7
1897	18.0	21.3	84.5	76.6	80.2	76.0
1898	16.0	21.2	75.5	75.0	77.7	78.2
1899	27.0	21.0	128.6	73.9	76.2	80.6
1900	19.0	20.9	90.9	74.9	77.9	81.0
1901	7.8	20.7	37.7	77.3	85.0	79.1
1902	29.9	20.6	145.1	70.9	76.8	78.2
1903	25.6	20.4	125.5	67.2	78.3	75.3
1904	20.9	20.3	103.0	70.4	75.6	74.6
1905	27.7	20.1	137.8	75.5	74.5	78.7
1906	28.9	20.0	144.5	71.8	73.8	76.3
1907	22.1	19.8	111.6	72.0	78.4	78.1
1908	22.0	19.7	111.7	72.1	75.8	76.2
1909	19.9	19.5	102.1	73.1	78.1	80.1
1910	19.0	19.4	97.9	72.2	79.5	75.7
1911	14.5	19.2	75.5	80.5	78.6	76.4
1912	23.0	19.1	120.4	69.3	79.9	77.4
1913	3.2	18.9	16.9	74.2	82.1	84.2
1914	18.5	18.8	98.4	78.2	79.9	78.2
1915	31.0	18.6	166.7	69.2	74.0	70.1
1916	10.0	18.5	54.1	70.3	81.2	79.6
1917	13.0	18.3	71.0	72.8	80.8	73.4
1918	7.1	18.2	39.0	78.4	78.3	82.3
1919	15.2	18.0	84.4	72.3	80.2	78.3
1920	26.5	17.9	148.0	72.8	77.6	72.9
1921	22.2	17.7	125.4	74.4	79.2	78.6
1922	19.3	17.6	109.7	75.2	77.0	80.1

〔註〕 上表自米爾斯之統計方法轉載。

玉蜀黍產量與六月溫度之偏繫聯係數爲 $r_{12\cdot34}$，產量與七月溫度之偏繫聯係數爲 $r_{13\cdot24}$，產量與八月溫度之偏繫聯係數爲 $r_{14\cdot23}$。欲求此二次繫聯係數，須先求下之一次繫聯係數：

$$r_{12\cdot3},\quad r_{14\cdot3},\quad r_{24\cdot3},\quad r_{13\cdot2},\quad r_{14\cdot2},\quad r_{34\cdot2};$$

欲求以上之一次繫聯係數，須先求以下之零次繫聯係數：

$$r_{12},\quad r_{13},\quad r_{23},\quad r_{14},\quad r_{24},\quad r_{34}。$$

依單繫聯係數之計算，吾人得：

$$r_{12}=-0.4814$$

$$r_{13}=-0.6968$$

$$r_{23}=+0.3737$$

$$r_{14}=-0.4937$$

$$r_{24}=+0.3633$$

$$r_{34}=+0.2862$$

此諸數求得後然後依下表之方式依次計算一次繫聯係數與二次繫聯係數。

第一百二十三表　二次繫聯係數之計算

符　號	繫聯係數	$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	分子中之乘積	全部分子	分　母	符　號	繫聯係數
r_{12} r_{13} r_{23}	−0.4814 −0.6968 +0.3737	 0.7173 0.9275	−0.2604	−0.2210	0.6653	$r_{12\cdot3}$	−0.3322
r_{14} r_{13} r_{43}	−0.4937 −0.6968 +0.2862	 0.7173 0.9582	−0.1994	−0.2943	0.6873	$r_{14\cdot3}$	−0.4282
r_{24} r_{23} r_{43}	+0.3633 +0.3737 +0.2862	 0.9275 0.9582	+0.1070	+0.2563	0.8887	$r_{24\cdot3}$	+0 2884
r_{13} r_{12} r_{32}	−0.6968 −0.4814 +0.3737	 0.8765 0.9275	−0.1799	−0.5169	0.8130	$r_{13\cdot2}$	−0.6358
r_{14} r_{12} r_{42}	−0.4937 −0.4814 +0.3633	 0.8765 0.9317	−0.1749	−0.3188	0.8166	$r_{14\cdot2}$	−0.3904

r_{34} r_{32} r_{42}	+0.2862 +0.3737 +0.3633	 0.9275 0.9317	+0.1358	+0.1504	0.8642	$r_{34\cdot2}$	+0.1740
$r_{12\cdot3}$ $r_{14\cdot3}$ $r_{24\cdot3}$	−0.3322 −0.4282 +0.2884	 0.9037 0.9575	−0.1235	−0.2087	0.8653	$r_{12\cdot34}$	−0.2412
$r_{13\cdot2}$ $r_{14\cdot2}$ $r_{34\cdot2}$	−0.6358 −0.3904 +0.1740	 0.9206 0.9847	−0.0679	−0.5679	0.9065	$r_{13\cdot24}$	−0.6265
$r_{14\cdot2}$ $r_{13\cdot2}$ $r_{43\cdot2}$	−0.3904 −0.6358 +0.1740	 0.7719 0.9847	−0.1106	−0.2798	0.7601	$r_{14\cdot23}$	−0.3681

上表之計算須稍加說明。玆述其程序如下:

(一)分全表爲九格,每格各分三列,上六格乃由零次繫聯係數計算一次繫聯係數,下三格乃由一次繫聯係數計算二次繫聯係數。

(二)分全表爲八行,將必須計算之六個一次繫聯係數與三個二次繫聯係數之符號記於第七行,上六格記一次係數符號,下三格記二次係數符號。

(三)計算第七行各繫聯係數所需用之低次繫聯係數分別記其符號於第一行,公式(2)之分子中第一項之低次繫聯係數記於每格之第一列,第二項之兩低次繫聯係數分別記於第二第三兩列。

(四)將已求得之零次繫聯係數填寫於第二行之上六格。

(五)將第二行每格中第二第三兩列數值分別代入$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$中之 r 而記其結果於第三行之第二第三兩列。

(六)將第二行每格中第二第三兩列數值相乘而記其乘積於第四行之第一列。

(七)自第二行每格中第一列數值減去第四行每格中第一列數值而

記其差於第五行之第一列。

(八)將第三行每格中第二第三兩列數值相乘而記其乘積於第六行之第一列。

(九)以第六行每格中第一列數值除第五行每格中第一列數值而記其商於第八行之第一列。

(十)將第八行中已求得之一次繫聯係數填寫於第二行之下三格，自第三行至第八行之計算與上六格同。

本章應用公式

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{(1-r^2_{13})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{23})^{\frac{1}{2}}} \tag{1}$$

$$r_{12\cdot345\cdots n}=\frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}{[1-r^2_{1n\cdot345\cdots(n-1)}]^{\frac{1}{2}}[1-r^2_{2n\cdot345\cdots(n-1)}]^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

第十八章　響應

第一節　響應直線

兩現象間若有一整繫聯，即其繫聯係數之絕對值若等於一，則吾人可得以下之結論：

(一)一數列隨他一數列而變動，其變動有一定之方向。

(二)由一數列變動之數量吾人可確定他一數列變動之數量。

(三)由一數列各項之大小吾人即可確定他一數列各項之大小。

設煤價與鑛工工資之間有一完全之正繫聯，則由煤價之增減吾人即可推知鑛工工資之增減，由鑛工工資之增減吾人即可推知煤價之增減，且由煤之價值或其增減之額吾人即可推知鑛工之工資及其增減之額；反之亦然。故煤價隨鑛工工資而變，鑛工工資隨煤價而變，二者之變動如響斯應，故曰響應。煤價隨鑛工工資而變，是曰煤價對工資之響應。鑛工工資隨煤價而變，是曰工資對煤價之響應。

兩數列之各項既有一定之關係，則此關係即可用一方程式表示，此方程式即名曰響應方程式。在此方程式中若 X_1 爲因變量，X_2 爲自變量，則此方程式爲 X_1 對 X_2 之響應方程式。反之若 X_2 爲因變量，X_1 爲自變量，則爲 X_2 對 X_1 之響應方程式。若 X_1 與 X_2 之間有一整繫聯，則由 X_1 對 X_2 之響應方程式可化爲 X_2 對 X_1 之響應方程式，或

由後者化爲前者。蓋自 X_1 對 X_2 之響應方程式

$$X_1=a+bX_2,$$

可化爲

$$X_2=-\frac{a}{b}+\frac{1}{b}X_1。$$

以上兩式中 a 爲 X_2 等於零時 X_1 之數值，$-\frac{a}{b}$ 爲 X_1 等於零時 X_2 之數值，b 與 $\frac{1}{b}$ 爲兩方程式之響應係數。

$$b\times\frac{1}{b}=1$$

故 X_1 與 X_2 之間有一整繫聯時，X_1 對 X_2 之響應係數與 X_2 對 X_1 之響應係數相乘之積必等於一。

上所論者均指整繫聯而言。然通常 X_1 與 X_2 之間不能有此完全繫聯，故不能以 X_1 與 X_2 兩數列中任意兩數確定響應方程式。吾人在第十章中應用最小平方法確定繫聯方程式，此方程式表示 X_1 (在第十章中爲 Y)與 X_2(在第十章中爲 X)之平均關係，亦即表示 X_1 對X_2 之平均響應，故第十章之繫聯方程式卽爲 X_1 對 X_2 之響應方程式，以新符號記之，其式如下：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{12}x_2 \\ b_{12} &= \frac{\Sigma(x_1x_2)}{\Sigma x_2^2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

x_1　　X_1之各項與其算術平均數之差

x_2 X_2之各項與其算術平均數之差

b_{12} X_1對X_2之響應係數

但依第十章公式(5)

$$r=\frac{\Sigma(x_1x_2)}{n\sigma_1\sigma_2}$$

而

$$\Sigma x_2^2=n\sigma_2^2$$

故X_1對X_2之響應係數亦可自繫聯係數與標準差求得，其式如下：

$$b_{12}=r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}。 \tag{2}$$

b_{12} X_1對X_2之響應係數。

r X_1與X_2之繫聯係數。

σ_1 X_1之標準差。

σ_2 X_2之標準差。

吾人應用最小平方法確定X_1對X_2之響應方程式時使X_1之實際數值與由方程式計算而得之數值相差平方之和爲最小。故欲確定X_2對X_1之響應方程式亦須使X_2之實際數值與由方程式計算而得之數值相差平方之和爲最小。依最小平方法定理X_2對X_1之響應方程式當如下

$$\left.\begin{aligned} x_2&=b_{21}x_1\\ b_{21}&=\frac{\Sigma(x_1x_2)}{\Sigma x_1^2}\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

x_1　X_1之各項與其算術平均數之差

x_2　X_2之各項與其算術平均數之差

b_{21}　X_2對 X_1 之響應係數

X_2對 X_1 之響應係數亦可自繫聯係數與標準差求得，其式如下：

$$b_{21}=r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}。\tag{4}$$

b_{21}　X_2 對 X_1 之響應係數。

r　X_1 與 X_2 之繫聯係數。

σ_1　X_1 之標準差。

σ_2　X_2 之標準差。

表示響應方程式之直線名曰響應直線。X_1 對 X_2 之響應直線通常與 X_2 對 X_1 之響應直線不同，但若 r 等於一，則兩直線合而爲一。蓋

若 $r=1$，

則
$$b_{12}b_{21}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\times\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=1。$$

故可由 X_1 對 X_2 之響應方程式化爲 X_2 對 X_1 之響應方程式，亦可由後者化爲前者。換言之，實際上祇有一方程式，故響應直線亦祇有表示此方程式之一直線。

繫聯係數亦可自響應係數求得，其公式如下：

$$r=\sqrt{b_{12}b_{21}}。\tag{5}$$

r　繫聯係數。

b_{12} X_1對 X_2 之響應係數。

b_{21} X_2對 X_1 之響應係數。

公式(5)中之數字 1 與 2 互易 r 之數值不變,故 X_1 與 X_2 不論何者爲自變量,何者爲因變量,其繫聯係數常相等,換言之,卽 r_{12} 與 r_{21} 相等。

最初硏究響應直線與響應方程式者爲生物學家葛爾登。葛氏硏究父子身長之關係,發見兒子與一族平均高度之差小於其父親;換言之,若其祖若父之高度在平均高度之上或下,則其子若孫之高度必將回歸至平均高度。故表示此兩變量間平均關係之直線,葛氏卽名之曰回歸直線,而其方程式卽名之曰回歸方程式。我國統計學書中尙多沿用此名。惟當代統計學中響應直線之應用及其意義與葛氏初發見時迥異,故回歸二字實已不復適用。民國二十二年中國統計學社社務會議有鑒於此,故於討論統計譯名時改回歸爲回應,回應二字能將響應之義表出,固遠勝於回歸二字,然於應字之上仍冠以回字,究未能完全脫離葛氏定名之束縛,故余擬改爲響應。吾人在下章將討論響應在商情預測中之應用,響應二字之意義益加明顯。能響應故能預測,名不正則言不順,區區之意卽在於斯。

玆據第七十一表之結果以計算 X_1 對 X_2 之響應係數與 X_2 對 X_1 之響應係數(第七十一表中之 Y 卽爲 X_1,其中之 X 卽爲 X_2)。

$$\Sigma(x_1x_2)=40757.91$$

$$\Sigma x_1^2=47200.87$$

$$\Sigma x_2^2=37376.63$$

代入公式(1)則得：

$$b_{12}=\frac{40757.91}{37376.63}=1.090$$

代入公式(3)則得：

$$b_{21}=\frac{40757.91}{47200.87}=0.863$$

故 X_1 對 X_2 之響應方程式爲：

$$x_1=1.090x_2$$

X_2 對 X_1 之響應方程式爲：

$$x_2=0.863x_1$$

下圖(第三十七圖)中之直線 L_1 爲 X_1 對 X_2 之響應直線，L_2 爲 X_2 對 X_1 之響應直線。

$$r^2=1.090\times0.863=0.94067$$

$$r=0.97$$

與前所得之結果相同。

公式(1)與公式(3)中之 x_1 與 x_2 均指各項與其算術平均數之差，即：

$$X_1-\bar{x}_1=x_1$$

$$X_2-\bar{x}_2=x_2$$

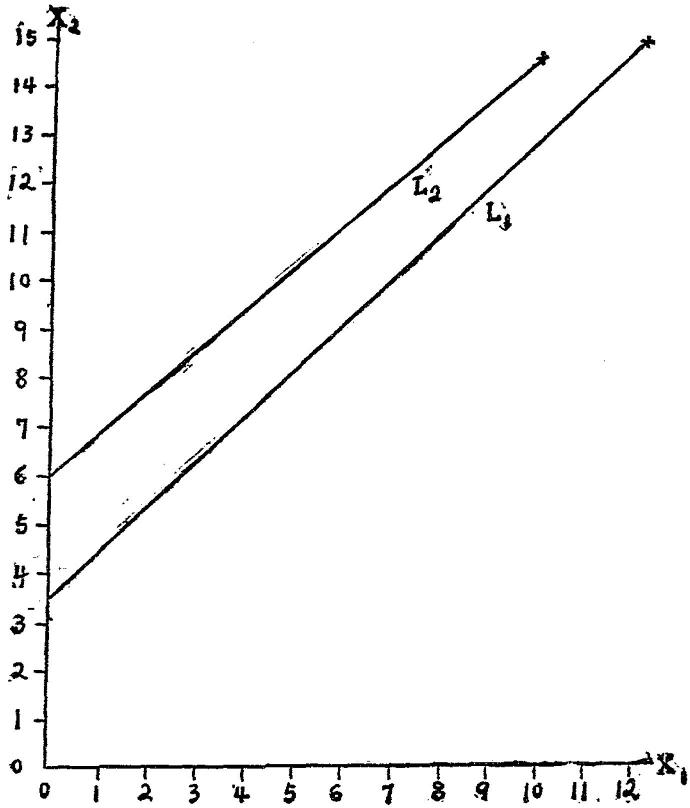
故響應方程式可改作下式：

$$X_1-\bar{x}_1=b_{12}(X_2-\bar{x}_2) \tag{6}$$

$$X_2-\bar{x}_2=b_{21}(X_1-\bar{x}_1) \tag{7}$$

X_1　　X_1 數列之各項。

第三十七圖 響應直線



X_2 X_2 數列之各項。

$\bar{x}_1$ X_1 數列之算術平均數。

$\bar{x}_2$ X_2 數列之算術平均數。

b_{12} X_1 對 X_2 之響應係數。

b_{21}　　X_2 對 X_1 之響應係數。

第二節　偏響應係數與複繫聯係數

兩變量之繫聯係數與兩變量之響應係數其間有密切之關係，上節已言之矣，本節所論乃就兩個以上變量之繫聯與響應而言。吾人在第十七章已就玉蜀黍之產量與六七八三個月之平均溫度而計算三種偏繫聯係數，吾人現將進而討論玉蜀黍之產量與六七八三個月溫度之響應方程式。此方程式中有因變量一自變量三，據此方程式則已知三自變量之數值便可確定因變量之數值也。

若因變量與三自變量之間各有直線關係，則其響應方程式可書之如下：

$$X_1=a+b_{12\cdot34}X_2+b_{13\cdot24}X_3+b_{14\cdot23}X_4 \tag{8}$$

上式中 X_1 爲因變量，X_2,X_3 與 X_4 爲自變量，a 爲三自變量均等於零時因變量之數值，$b_{12\cdot34}$, $b_{13\cdot24}$ 與 $b_{14\cdot23}$ 名曰偏響應係數，$b_{12\cdot34}$ 爲 X_1 對 X_2 之偏響應係數，$b_{13\cdot24}$ 爲 X_1 對 X_3 之偏響應係數，$b_{14\cdot23}$ 爲 X_1 對 X_4 之偏響應係數，後部數字仍指暫時假定不變之變量，故 $b_{12\cdot34}$ 卽假定 X_3 與 X_4 暫時不變 X_1 對 X_2 之偏響應係數也。

依最小平方法定理得 a,$b_{12\cdot34}$,$b_{13\cdot24}$ 與 $b_{14\cdot23}$ 之數值如下：

$$b_{12\cdot34}=\frac{\Delta_{12\cdot34}}{\Delta}$$

$$b_{13\cdot24}=\frac{\Delta_{13\cdot24}}{\Delta}$$

$$
\left.\begin{aligned}
& b_{14\cdot23}=\frac{\Delta_{14\cdot23}}{\Delta} \\
& \Delta=\sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2+2p_{23}p_{34}p_{24}-\sigma_3^2p_{24}^2-\sigma_2^2p_{34}^2 \\
& \qquad -\sigma_4^2p_{23}^2 \\
& \Delta_{12\cdot34}=\sigma_3^2\sigma_4^2p_{12}+p_{23}p_{34}p_{14}+p_{24}p_{13}p_{34} \\
& \qquad -\sigma_3^2p_{14}p_{24}-p_{12}p_{34}^2-\sigma_4^2p_{13}p_{23} \\
& \Delta_{13\cdot24}=\sigma_2^2\sigma_4^2p_{13}+p_{12}p_{34}p_{24}+p_{24}p_{23}p_{14} \\
& \qquad -p_{13}p_{24}^2-\sigma_2^2p_{34}p_{14}-\sigma_4^2p_{23}p_{12} \\
& \Delta_{14\cdot23}=\sigma_2^2\sigma_3^2p_{14}+p_{23}p_{13}p_{24}+p_{12}p_{23}p_{34} \\
& \qquad -\sigma_3^2p_{12}p_{24}-\sigma_2^2p_{13}p_{34}-p_{14}p_{23}^2 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(證明參看附錄甲35)} \\
& a=\bar{x}_1-\bar{x}_2b_{12\cdot34}-\bar{x}_3b_{13\cdot24}-\bar{x}_4b_{14\cdot23}
\end{aligned}\right\}(9)
$$

上式中 σ_2,σ_3 與 σ_4 爲 X_2,X_3 與 X_4 之標準差，p_{12} 爲 x_1(X_1 之各項與其算術平均數之差) 與 x_2(X_2 之各項與其算術平均數之差) 各乘積之平均數，即

$$p_{12}=\frac{\Sigma(x_1x_2)}{n}$$

同理

$$p_{13}=\frac{\Sigma(x_1x_3)}{n}$$

$$p_{14}=\frac{\Sigma(x_1x_4)}{n}$$

$$p_{23}=\frac{\Sigma(x_2x_3)}{n}$$

$$p_{24}=\frac{\Sigma(x_2x_4)}{n}$$

$$p_{34}=\frac{\Sigma(x_3x_4)}{n}$$

x_1　X_1 之各項與其算術平均數 $\bar{x}_1$ 之差

x_2　X_2 之各項與其算術平均數 $\bar{x}_2$ 之差

x_3　X_3 之各項與其算術平均數 $\bar{x}_3$ 之差

x_4　X_4 之各項與其算術平均數 $\bar{x}_4$ 之差

n　項數

茲就第一百廿二表中玉蜀黍之產量與六七八三個月之平均溫度而求響應方程式如下:

$\Sigma X_1=3298.1$　　$\Sigma X_1^2=368846.67$

$\Sigma X_2=2426.9$　　$\Sigma X_2^2=178755.75$

$\Sigma X_3=2581.5$　　$\Sigma X_3^2=202163.79$

$\Sigma X_4=2553.8$　　$\Sigma X_4^2=197890.32$

$\Sigma(X_1X_2)=240967.22$

$\Sigma(X_1X_3)=255954.11$

$\Sigma(X_1X_4)=253664.85$

$\Sigma(X_2X_3)=189941.83$

$\Sigma(X_2X_4)=187909.38$

$\Sigma(X_3X_4)=199845.00$

$\bar{x}_1=99.9424$　　$\bar{x}_1^2=9988.4833$

$\bar{x}_2=73.5424$　　$\bar{x}_2^2=5408.4846$

$\bar{x}_3=78.2273$　　$\bar{x}_3^2=6119.5105$

$\bar{x}_4=77.3879 \qquad \bar{x}_4^2=5988.8871$

$\sigma_1^2=\frac{\Sigma X_1^2}{n}-\bar{x}_1^2=1188.688$

$\sigma_2^2=8.3564$

$\sigma_3^2=6.6645$

$\sigma_4^2=7.7893$

$p_{12}=\frac{\Sigma(X_1X_2)}{n}-\bar{x}_1\bar{x}_2=-47.967$

$p_{13}=-62.039$

$p_{14}=-47.519$

$p_{23}=2.790$

$p_{24}=2.932$

$p_{34}=2.063$

以此數值代入公式(9)則得:

$$\begin{aligned}\Delta=&8.3564\times6.6645\times7.7893+2\times2.79\times2.063\times2.932\\&-6.6645\times2.932^2-8.3564\times2.063^2-7.7893\times2.79^2\\&=314.058\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12\cdot34}=&6.6645\times7.7893\times(-47.967)\\&+2.79\times2.063\times(-47.519)\\&+2.932\times(-62.039)\times2.063\\&-6.6645\times(-47.519)\times2.932\\&-(-47.967)\times2.063^2-7.7893\times(-62.039)\times2.79\\&=-657.894\end{aligned}$$

$$\Delta_{13\cdot24}=8.3564\times7.7893\times(-62.039)+(-47.967)\times2.063\times2.932$$
$$+2.932\times2.79\times(-47.519)-(-62.039)\times2.932^2$$
$$-8.3564\times2.063\times(-47.519)-7.7893\times2.79\times(-47.967)$$
$$=-2322.028$$

$$\Delta_{14\cdot23}=8.3564\times6.6645\times(-47.519)+2.79\times(-62.039)\times2.932$$
$$+(-47.967)\times2.79\times2.063-6.6645\times(-47.967)$$
$$\times2.932-8.3564\times(-62.039)\times2.063-(-47.519)$$
$$\times2.79^2=-1053.304$$

$$b_{12\cdot34}=\frac{-657.894}{314.058}=-2.095$$

$$b_{13\cdot24}=\frac{-2322.028}{314.058}=-7.394$$

$$b_{14\cdot23}=\frac{-1053.304}{314.058}=-3.354$$

$$a=99.9424+73.5424\times2.095+78.2273\times7.394+77.3879\times3.354=1091.99$$

故得響應方程式如下:

$$X_1=1091.99-2.095\,X_2-7.394\,X_3-3.354\,X_4$$

或 $\quad x_1=-2.095\,x_2-7.394\,x_3-3.354\,x_4$

X_1,X_2,X_3 與 X_4 爲四數列中之各項,而 x_1,x_2,x_3 與 x_4 則爲各項

與其算術平均數之差也。

欲確定響應方程式之價值,須計算其標準誤。X_1 對X_2,X_3 與 X_4 之標準誤以 $S_{1\cdot234}$ 表示,前部數字表示因變量,後部數字表示自變量,$S_{1\cdot234}$ 之數值可自下列公式求得:

$$S_{1\cdot234}^2=\sigma_1^2-b_{12\cdot34}p_{12}-b_{13\cdot24}p_{13}-b_{14\cdot23}p_{14} \qquad (10)$$

(證明參看附錄甲35)

$S_{1\cdot234}$　X_1 對X_2,X_3 與 X_4 之標準誤。

σ_1　X_1 之標準差。

$b_{12\cdot34}$　X_1 對 X_2 之偏響應係數。

$b_{13\cdot24}$　X_1 對 X_3 之偏響應係數。

$b_{14\cdot23}$　X_1 對 X_4 之偏響應係數。

$$p_{12}=\frac{\Sigma(x_1x_2)}{n}$$

$$p_{13}=\frac{\Sigma(x_1x_3)}{n}$$

$$p_{14}=\frac{\Sigma(x_1x_4)}{n}$$

x_1,x_2,x_3,x_4　四數列中各項與算術平均數之差。

n　項數。

以求得各數值代入公式(10)則得:

$$S_{1\cdot234}^2=1188.688-2.095\times47.967-7.394\times62.039-3.354\times47.519=470.1020$$

$$S_{1\cdot234}=21.68$$

兩變量之繫聯係數愈大則其響應方程式愈可靠。兩個以上變量之響應方程式之可靠程度亦可用一種繫聯係數測定，此種係數名曰複繫聯係數。複繫聯係數與標準誤之關係如下：

$$R_{1\cdot234}{}^2 = 1 - \frac{S^2{}_{1\cdot234}}{\sigma_1{}^2} \tag{11}$$

$R_{1\cdot234}$　X_1 對 X_2, X_3 與 X_4 之複繫聯係數

$S_{1\cdot234}$　X_1 對 X_2, X_3 與 X_4 之標準誤

σ_1　　X_1 之標準差

以 $S_{1\cdot234}$ 之數值代入公式(11)則得：

$$R_{1\cdot234}{}^2 = \frac{b_{12\cdot34}p_{12} + b_{13\cdot24}p_{13} + b_{14\cdot23}p_{14}}{\sigma_1{}^2} \tag{12}$$

以上例中之數值代入則得：

$$R_{1\cdot234} = 0.778$$

r有正負之別而R則否。在本例中因 $r_{12\cdot34}$, $r_{13\cdot24}$ 與 $r_{14\cdot23}$（參看第一百廿三表）均爲負數，故可冠以負號，但有時諸偏繫聯中正負均有，則複繫聯之符號卽無由確定，故 R 之前常不置符號。

上所論者係三個自變量之響應方程式，若自變量祇有二個，則其計算甚爲簡捷。其公式如下：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{12\cdot3}x_2 + b_{13\cdot2}x_3 \\ b_{12\cdot3} &= \frac{\sigma_3{}^2 p_{12} - p_{13}p_{23}}{\sigma_2{}^2\sigma_3{}^2 - p_{23}{}^2} \\ b_{13\cdot2} &= \frac{\sigma_2{}^2 p_{13} - p_{12}p_{23}}{\sigma_2{}^2\sigma_3{}^2 - p_{23}{}^2} \end{aligned}\right\} \quad (13)\text{(證明參看附錄甲35)}$$

x_1 X_1 之各項與其算術平均數之差。

x_2 X_2 之各項與其算術平均數之差。

x_3 X_3 之各項與其算術平均數之差。

$b_{12\cdot3}$ X_1 對 X_2 之偏響應係數。

$b_{13\cdot2}$ X_1 對 X_3 之偏響應係數。

σ_2 X_2 之標準差。

σ_3 X_3 之標準差。

$p_{12}=\frac{\Sigma(x_1x_2)}{n}$。

$p_{13}=\frac{\Sigma(x_1x_3)}{n}$。

$p_{23}=\frac{\Sigma(x_2x_3)}{n}$。

n 項數。

標準誤與複繫聯係數則可自下列公式求得:

$$S_{1\cdot23}^2=\sigma_1^2-b_{12\cdot3}p_{12}-b_{13\cdot2}p_{13} \quad (14)$$ (證明參看附錄甲35)

$$R_{1\cdot23}^2=\frac{b_{12\cdot3}p_{12}+b_{13\cdot2}p_{13}}{\sigma_1^2} \quad (15)$$

$S_{1\cdot23}$ X_1對X_2與X_3之標準誤

$R_{1\cdot23}$ X_1對X_2與X_3之複繫聯係數

σ_1 X_1 之標準差

其他符號與公式(13)同。

吾人在第一節中已知繫聯係數 r 可自響應係數 b_{12} 與 b_{21} 求得,

此項關係可推及於偏繫聯係數與偏響應係數，其一般公式如下：

$$r_{12\cdot3456\cdots n}=\sqrt{b_{12\cdot3456\cdots n}b_{21\cdot3456\cdots n}} \quad (16)$$

$r_{12\cdot3456\cdots n}$ X_1對X_2之偏繫聯係數。

$b_{12\cdot3456\cdots n}$ X_1對X_2之偏響應係數。

$b_{21\cdot3456\cdots n}$ X_2對X_1之偏響應係數。

公式(16)中之數字1與2互易後r之數值不變，故 X_1 與 X_2 不論何者爲因變量，何者爲自變量，其偏繫聯係數相等，即

$$r_{12\cdot3456\cdots n}=r_{21\cdot3456\cdots n}$$

本 章 應 用 公 式

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{12}x_2 \\ b_{12} &= \frac{\Sigma(x_1x_2)}{\Sigma x_2^2}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$b_{12}=r\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= b_{21}x_1 \\ b_{21} &= \frac{\Sigma(x_1x_2)}{\Sigma x_1^2}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$b_{21}=r\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (4)$$

$$r=\sqrt{b_{12}b_{21}} \quad (5)$$

$$X_1-\bar{x}_1=b_{12}(X_2-\bar{x}_2) \quad (6)$$

$$X_2-\bar{x}_2=b_{21}(X_1-\bar{x}_1) \quad (7)$$

$$X_1=a+b_{12\cdot34}X_2+b_{13\cdot24}X_3+b_{14\cdot23}X_4 \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_{12\cdot34} &= \frac{\Delta_{12\cdot34}}{\Delta} \\
b_{13\cdot24} &= \frac{\Delta_{13\cdot24}}{\Delta} \\
b_{14\cdot23} &= \frac{\Delta_{14\cdot23}}{\Delta} \\
\Delta &= \sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2 + 2p_{23}p_{34}p_{24} - \sigma_3^2p_{24}^2 - \sigma_2^2p_{34}^2 \\
&\quad -\sigma_4^2p_{23}^2 \\
\Delta_{12\cdot34} &= \sigma_3^2\sigma_4^2p_{12} + p_{23}p_{34}p_{14} + p_{24}p_{13}p_{34} - \sigma_3^2p_{14}p_{24} \\
&\quad - p_{12}p_{34}^2 - \sigma_4^2p_{13}p_{23} \\
\Delta_{13\cdot24} &= \sigma_2^2\sigma_4^2p_{13} + p_{12}p_{34}p_{24} + p_{24}p_{23}p_{14} - p_{13}p_{24}^2 \\
&\quad - \sigma_2^2p_{34}p_{14} - \sigma_4^2p_{23}p_{12} \\
\Delta_{14\cdot23} &= \sigma_2^2\sigma_3^2p_{14} + p_{23}p_{13}p_{24} + p_{12}p_{23}p_{34} - \sigma_3^2p_{12}p_{24} \\
&\quad - \sigma_2^2p_{13}p_{34} - p_{14}p_{23}^2 \\
a &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2b_{12\cdot34} - \bar{x}_3b_{13\cdot24} - \bar{x}_4b_{14\cdot23}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$S^2_{1\cdot234} = \sigma_1^2 - b_{12\cdot34}p_{12} - b_{13\cdot24}p_{13} - b_{14\cdot23}p_{14} \quad (10)$$

$$R^2_{1\cdot234} = 1 - \frac{S^2_{1\cdot234}}{\sigma_1^2} \quad (11)$$

$$R^2_{1\cdot234} = \frac{b_{12\cdot34}p_{12} + b_{13\cdot24}p_{13} + b_{14\cdot23}p_{14}}{\sigma_1^2} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= b_{12\cdot3}x_2 + b_{13\cdot2}x_3 \\
b_{12\cdot3} &= \frac{\sigma_3^2p_{12} - p_{13}p_{23}}{\sigma_2^2\sigma_3^2 - p_{23}^2} \\
b_{13\cdot2} &= \frac{\sigma_2^2p_{13} - p_{12}p_{23}}{\sigma_2^2\sigma_3^2 - p_{23}^2}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$S^2_{1\cdot 23} = \sigma_1^2 - b_{12\cdot 3}p_{12} - b_{13\cdot 2}p_{13} \tag{14}$$

$$R^2_{1\cdot 23} = \frac{b_{12\cdot 3}p_{12} + b_{13\cdot 2}p_{13}}{\sigma_1^2} \tag{15}$$

$$r_{12\cdot 3456\cdots n} = \sqrt{b_{12\cdot 3456\cdots n}b_{21\cdot 3456\cdots n}} \tag{16}$$

第十九章　商情預測

第一節　商情預測之意義及其方法

商情預測者，就已往之統計預測未來變化之法也。世間現象雖千變萬化，然經濟連鎖各現象間常有相互之關係，其升降起伏或有時間之先後；苟能循其變動之跡而察其已往之關係，則可用先引數列之變動預測落後數列之變動，雖不中不遠矣。

商情預測爲統計學中最重要方法之一，或竟可稱爲統計學之冠冕。吾人研究科學不特爲求知，且欲支配吾人所研究之現象，而最能表現此支配能力者卽爲預測。統計學中預測之成效雖較遜於理化中之預測，然經驗與事實已證明其可能性。雖然，學者中仍有持懷疑之態度者，反對商情預測之主要理由約有三點。玆先列舉於下，然後討論其是非。

(一)自然現象與經濟現象有一極大異點，卽前者與人慾無關而後者則至少受其一大部影響；故前者之變動循一定不變之規律，而支配人類現象之規律則不能固定而不變。吾人在人類現象中所發見之常態，當然不能如自然現象無絲毫之變動，人類事實無一能與他一事實完全相似，蓋在經過時期內已受新因子之影響故也。尤其在商情預測中常有影響於預測事實之新因子，此新因子非他，卽預測自己是也。故預測卽爲變動原因之一。預測之事實常因人之預測而其出現不能悉如預測，或竟

因此預測而絕不出現。使人能於一九一四年之初預測歐戰之爆發，則歐戰或竟可避免；即不幸而不能避免，其時期之久暫與戰爭之經過亦必與吾人所經歷之歐戰逈異；此無他，預測影響於所測事實之變動故也。

(二)經濟現象變動之原因甚多，換言之，即有許多自變量影響於一因變量之變動。吾人雖可應用響應方程式預測此因變量之變動，然所含自變量太多，計算太繁，事實上實爲不可能。

(三)統計預測根據數字上之關係。吾人分析之結果雖能確定一統計常態，但此常態祇能描寫過去，非謂未來之事實亦必將循此常態而變動也。

以上三點爲反對論者之主要理由。然據吾人見解，此三大理由均不足爲預測之病。第一理由且可藉此反證預測之效用。何則?歐戰之爆發苟因預測而能避免，是乃預測之效用而非預測之無能。生產者若因生產過剩之預測減少其生產而使生產不致過剩，是亦預測之效用而非預測之無能。預測之事實果不利於吾人，則預測之目的原欲設法避免而冀其不至。衞生家預測瘟疫之將至，原欲預籌防疫之法以免瘟疫之流行，故預測之言不驗，有時即可反證預測之價値及其必要。至於人類之慾望志願與行爲固能影響於經濟現象之變動，然大部統計預測係指集合事實而言，故支配現象之規律不易避免，保險公司之能預測人口死亡率與火災率即其例也。以上所論係就第一點而言，茲請進而討論第二點。經濟現象變動之原動力雖有種種，然就二個，三個或四個自變量預測因變量之變動，所得之結果已與事實相差無幾。統計預測本非謂未來事實必與預測事實完全一致，然根據少數主要自變量預測經濟現象之近似變動，

固爲吾人能力之所及。至於第三點亦不難答辯。吾人根據已往事實預測未來事實，本當有所保留。所謂保留卽假定未來之環境與過去環境相同之謂也。例如吾人根據已往之火災可預測未來之火災，然此預測必先假定未來之房屋建築與防火設備與以前相同。上海天文臺預測颶風若不改變方向必將經過上海，是天文臺之預測亦有所保留也。統計預測亦然。至於諸現象間之因果關係雖不能得之於統計數字，然苟能利用嚴密之經濟分析，則其間因果關係亦不難確定。僅憑統計數字之關係而誤測經濟現象之變動，雖不能謂爲必無，然此乃預測者之無能而非預測方法之無能也。

預測經濟變動之方法有二：一曰經濟法，一曰統計法。前者先觀察事實漸推及現象之原因，然後就已得之原因分析其現在之狀況而推測未來之結果。後者則就統計數字研究諸現象間之繫聯響應，或就曲線之升降起伏研究諸現象盛衰時期之先後而推測未來之結果。經濟法依現象之原因推測未來之事實，故能知研究現象之確實變動；惟所謂現象之原因無客觀之標準，經濟學家預測之根據乃其對於現象原因之意見；故預測之結果隨預測者之主觀而異。社會主義者與資本主義者對於經濟恐慌之原因各有絕不相同之見解，憑各人之主觀預測未來之經濟恐慌，其結果必不相同，此則經濟法之缺點也。統計法雖不能確定原因，然因不爲預測者主觀所蔽，故其結果常較勝於經濟法。有時亦可兼用經濟分析以補統計法之不足。

統計學中預測商情之方法甚多。研究現象之長期趨勢，季節變動與循環變動均可用作預測之根據。惟較完善之預測方法則必先詳察諸現

象在過去之關係然後預測未來之結果，其最著者有哈佛法與響應法二種。茲分別詳論於以下二節。

第二節 哈佛法

哈佛法爲美國哈佛大學經濟研究委員會所創，其預測之根據爲各種經濟現象變動方向與關係，預測方法及其結果曾詳載於經濟統計雜誌（哈佛大學季刊 1919 年初次發行）。其主要目的乃欲探討處理商業統計之方法，使能確定各項之重要程度，指示現在狀況，並於可能範圍內預測最近將來之趨勢。

委員會選取時間數列中之最可靠而最重要者，先用統計方法消除各數列之長期趨勢及其季節變動。再以標準差除之，然後比較各數列之變動。比較之結果發見各數列之極大值與極小值相隔之時期幾相等，但極大值與極小值出現之時日則未能盡同，各數列中有同時變動者，有先後變動者。故依委員會之分析，各數列得就其變動先後之次序分爲三大類。

第一爲與投機有關之各數列：若十種鐵路債券之平均價，工業股票之平均價，紐約之票據交換額等不論向上或向下常在首先變動之列，是爲投機類。其次爲工商業有關之各數列：若生鐵之生產，躉售物價等其變動常在投機類各數列之後，是爲商業類。至於與銀行金融有關之各數列：若紐約銀行之貼現率，放款利率，存款利率等則變動最後，是爲金融類。各類數列雖同受商業循環之影響而變動，然其變動非絕對同時，故依前引數列之變動即可預測落後數列之變動，此即哈佛大學經濟研究委員

會之重要貢獻也。

將上述三大類中各數列之指數平均而繪之於圖，則得曲線三，是曰組合曲線。投機類之組合曲線名曰曲線A，商業類之組合曲線名曰曲線B，金融類之組合曲線名曰曲線C。1923年五月以前各組合曲線由下列諸數列組成：

A. 投機類：

1. 紐約銀行票據交換額。
2. 紐約證劵交易所成交股數。
3. 工業股票之市價。

B. 商業類：

1. 紐約以外各地銀行票據交換額。
2. 勃拉特斯脫里蘊售物價指數。

C. 金融類：

1. 四月至六月期商業票據之貼現率。
2. 六十日至九十日商業票據之貼現率。

約紐證劵交易所成交股數之變動太無規則，故經1923年五月修正以後曲線A已將此數列删除，其他數列亦略有修正。此次修正以後各組合曲線由下列諸數列組成：

A. 投機類：

1. 紐約市各銀行往來帳之支取額。
2 工業股票之市價。

B. 商業類：

1. 紐約市以外一百四十大城銀行往來帳之支取額。

2. 十種變動靈敏商品之物價指數。

C. 金融類:

1. 四月至六月期商業票據之貼現率。

2. 六十日至九十日商業票據之貼現率。

曲線A首先變動,故曲線A實爲其他兩曲線變動之指標。當A開始下降即交易所中股票開始跌價之時,吾人即可預測恐慌之將至。反之,當A開始上升即股票開始漲價之時,吾人即可預測繁榮之將至。據哈佛大學經濟研究委員會研究 1903—1914 年之循環變動所得之結果,經濟循環得分爲下列五大時期:

(一)衰落期: A開始上升,B與C繼續下降。

(二)復興期: A繼續上升,B開始上升,C至期末開始上升。

(三)興盛期: A略再上升,但不久即停止前進,B與C繼續上升。

(四)緊張期: A下降,B上升甚少,C上升甚多。

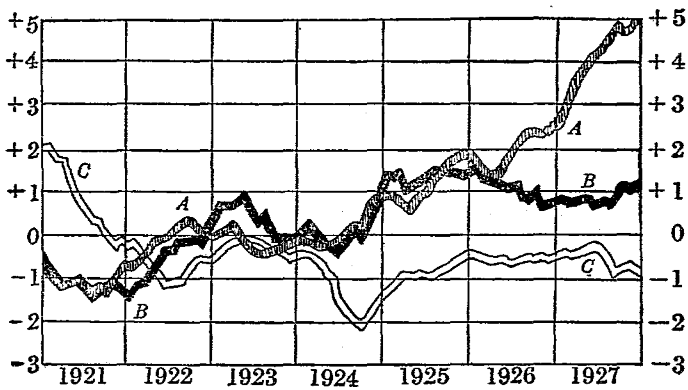
(五)恐慌期: A達到極小值,B開始下降,C達到極大值。

據哈佛委員會之意見,吾人須研究A B C三曲線之整個關係。曲線A固能預測曲線B,而曲線C亦能預測曲線A。蓋三曲線之次序爲ABC ABC ABC……,依次連續而無終止。故若C已下降,則吾人可預測一新循環不久即將開始而A即將上升。但僅知C之下降,吾人猶未能斷定A之上升時期。據潘蓀教授在經濟統計雜誌(1926 年一月)中所發表之意見,由曲線C預測曲線A時吾人不可僅僅注意曲線C之下降與下期曲線A之上升在圖上相隔之橫的距離,吾人亦須研究曲線C自極小

值上升或自極大值下降之縱的距離，必如是吾人方能預測曲線A變動方向之時期。設當工商業衰落之時貼現率已自其極大值跌下 $1\frac{1}{4}\%$，則吾人卽可推知曲線A不久卽將上升或正在上升。反之，若貼現率已自其極小值上漲 $1\frac{1}{4}\%$，則吾人卽可推知曲線A不久卽將下降或正在下降。故若投機者在貼現率跌下 $1\frac{1}{4}\%$（自其極大值）時購入股票而於貼現率上漲 $1\frac{1}{4}\%$（自其極小值）時重行售出，則必能獲利，蓋其購入之價幾爲最低之價而其售出之價幾爲最高之價也。惟此關係哈佛委員會僅能證實於 1884 年至 1913 年之時期中，當其發見之時此關係已不復生效。

第三十八圖　哈佛委員會之三組合曲線

(1921 年至 1927 年)



曲線A 投機類　曲線B 商業類　曲線C 金融類

自一九二九年大恐慌以後，三曲線均趨下流，直至一九三三年春間爲止。其三曲線編製方法，一九三二年又有一度之修正。目下辦法，投機

曲線用紐約證券交易所列名之一切股票市價，商業曲線用紐約市以外二百四十一大城之銀行往來賬支取額，金融曲線則用短期利率，單位仍爲標準差。

第三節　響應法

響應法者，根據自變量之變動應用響應方程式預測因變量變動之方法也。哈佛法預測之根據爲各種經濟現象變動方向之關係，響應法則以其數量大小之關係爲預測之根據。哈佛法祇能示吾人以變動之方向，響應法則於變動方向外且能示吾人以變動之範圍。故後者實較前者爲優。近年美國農業預測常應用響應法預測農產物之產量及其價格，所得結果往往與事實相去無幾，誠商情預測中最有效之方法也。

雖然，響應方程式非均能爲預測之根據。方程式中之因變量與自變量若同時變動，則知自變量卽知因變量，不知因變量卽亦不知自變量，故無預測之必要與可能。欲使響應方程式能爲預測之根據，自變量之變動必須在因變量變動之前，必若是然後能就自變量之變動預測因變量之變動。例如溫度與雨量之變動在先，米麥產量之變動在後，故由溫度與雨量可用響應法預測米麥產量；米麥產量之變動在先，米麥價格之變動在後，故由米麥產量可用響應法預測米麥價格。預測之結果自不能悉如事實。繫聯係數愈大則所得結果愈近事實，故亦不可不計算繫聯係數。

馬爾教授爲首先應用響應法者之一人。馬氏在其所著之經濟循環與棉花產量及其價格之預測二書中屢用響應方程式爲預測之工具。均收顯著之成效，而於棉花產量之預測爲尤著。美國爲產棉之國，故甚重視棉花之生產。每年農業部就植棉狀況而作棉產之預測，〔註〕各產棉區

域均派觀察員前往調查，年需調查費甚巨；然農業部之預測遠不如馬氏應用響應法所得之結果，響應法之價值於此可見。

〔註〕 農業部之預測方法，見拙作統計新論。

馬氏依據玉蜀黍之產量推算其價格得響應方程式如下；

$$y=7.8-0.89x$$

上式中 x 爲玉蜀黍產量增加百分比，y 爲玉蜀黍價格增加百分比。馬氏又計算 x 與 y 之繫聯係數得：

$$r=-0.79$$

例如 1911 年美國玉蜀黍產量爲 2,531 百萬斛，1911 年十二月一日玉蜀黍價格爲 0.618 元；1912 年產量爲 3,125 百萬斛，依響應方程式預測 1912 年十二月一日之價格則得：

$$\frac{3125-2531}{2531}=\frac{594}{2531}=23.47\%$$

$$y=7.8-0.89\times 23.47=-13.09$$

$$0.618\times\frac{100-13.09}{100}=0.618\times\frac{86.91}{100}=0.537 \text{ 元}$$

故 1912 年十二月一日玉蜀黍之預測價格爲 0.537 元，與其實在價格（0.487 元）僅差 5 分。

馬爾教授在其棉花產量預測中選取溫度與雨量爲自變量，棉花產量爲因變量，故其響應方程式爲三元方程式。馬氏先將溫度，雨量與產量化作百分比（每年對前三年平均數之百分比）。例如 1892-1893-1894 年之平均產量爲每畝 150 磅，1895 年之產量爲 152 磅，則 1895 年之數字爲$\frac{152}{150}$即 101.3%

馬氏選取 1892－1914 年爲研究時期，調查區域僅限於較重要之產棉區域。

馬氏計算每畝產量與六月溫度之繫聯係數得 $r=+0.55$，故知棉花在六月所需之溫度爲高溫度。馬氏又計算每畝產量與五月雨量之繫聯係數得 $r=-0.41$，故又知五月之雨有害於棉之收穫。換言之，棉花需要乾燥之五月與炎熱之六月。

馬氏分析之結果得響應方程式如下：

$$x_0=-95.12-45x_1+2.033x_2$$

上式中 x_0 爲每畝產量。x_1 爲五月之雨量，x_2 爲六月之溫度（應用公式時 x_0, x_1 與 x_2 均須依上法化作百分比），複繫聯係數爲 0.58。

馬氏欲改善其響應方程式，又取八月之溫度作爲第三自變量，得複繫聯係數 0.73，較前增加，惟此預測須俟諸八月之末，距收穫期已不遠。不能在早期應用。

馬氏在六月所得之結果與農業部在九月所作之預測報告略同。至馬氏在八月所得之結果，則遠勝農業部之九月報告。馬氏之預測經費遠在農業部之下，而所得結果反在其上，謂非響應法之功用可乎！

第二十章　統計資料之搜集與整理

第一節　統計資料之搜集方法

統計資料之搜集對於研究結果之影響甚大。何則?所選資料若不適於研究之用,或不甚準確,則雖有精密之統計方法亦屬徒然。以精密之統計方法應用於不適當或不準確之資料,不特浪費金錢時間與精力,且常能導入極乖謬之結論。故統計資料之搜集不可不有適當之方法。惟適當方法之確定,大抵須賴常識之應用,而常識須得之於經驗。然所謂經驗非一蹴可幾,非經長時期之實際工作難得盡善盡美之經驗,故又不得不利用他人已得之經驗以為實際工作之指南,此即本章所欲討論者也。

搜集資料以前須先預定調查之目的,否則搜得之資料或殘缺不全,或一部無用,或謬誤百出。例如吾人欲調查工人家庭之兒女人數,吾人須先自問調查之目的安在?設欲研究工人家庭之誕生率,則已死兒女亦須在調查之列。反之,設欲研究工人家庭之生活費用,則已死兒女與生活費用無關,即無庸調查。研究工人家庭之誕生率而不調查已死兒女,則搜得資料即殘缺不全,由是而得之結論必較實在誕生率為低。研究工人家庭之生活費用而調查已死兒女,則搜得資料即有一部無用,而多搜一部無用資料即多浪費一部有用之金錢時間與精力。又如吾人欲研究工人工資率之大小,則工人每週或每月收入額之多少,吾人可以不問。

蓋工人之工作時間非均相等，收入額之多少不能爲工資率大小之標準，若貿然搜集卽犯謬誤不當之弊。由是觀之，搜集資料以前非先確定調查目的不可。

其次須確定調查之範圍。設吾人欲編製全國物價指數，則何城物價須在調查之列？何城物價可無庸調查？不可不先確定。又設吾人欲研究全國產米之量，吾人可先調查重要產米區域之產量，然後估計全國之產量；然所謂重要產米區域究何所指？年產若干石米之區域方得謂爲重要產米區域？搜集資料以前不可不先規定一種界限。規定重要產米區域之界限卽確定產米調查之範圍。

調查之目的及其範圍確定後，吾人方可進行資料之搜集。有時吾人所欲搜集之資料他人已搜集在前，若此資料準確可靠而又適合吾人之用，則吾人不必再行調查，應用他人已搜集之資料加以編製可也。此種資料在統計學上名曰次級資料。若他人已搜集之資料不甚可靠，或雖可靠而不適吾人之用，則吾人須自行調查，由是而得之資料名曰原始資料，以與次級資料相別。設吾人欲調查甲乙丙丁四城之生產狀況，甲乙二城應用他人已搜集之資料，丙丁二城則自行搜集一切資料，前者之資料爲次級資料，後者之資料爲原始資料。抑原始資料與次級資料之分係隨主觀而異。甲乙二城之資料在吾人爲次級資料，但在最初直接搜集者爲原始資料。丙丁二城之資料在吾人爲原始資料，但在應用吾人資料者爲次級資料。此亦學者所不可不知者也。

原始資料與次級資料之分旣明，今請更舉數例以示資料選擇之標準。設吾人欲調查全國棉花種植面積，吾人已知前立法院統計處與紗廠

聯合會各有種植面積之估計，惟兩者之估計面積相差甚大，若兩者之估計俱不可靠，或吾人不能斷定孰是孰非，則吾人須設法搜集原始資料。設吾人欲調查全國工人工資，假定上海市社會局所搜集之工資資料爲準確可靠，則關於上海一地之工人工資吾人可用次級原料。但設吾人欲調查上海棉紡業工人之工資，則社會局所搜集之工資資料卽絕對準確，亦不能應用。何則？社會局所搜集之工資資料爲一般工人之工資，而吾人所欲研究者，則爲棉紡業工人之工資，故不能應用次級資料，吾人不可不另行搜集原始資料。有時次級資料雖不甚可靠，然吾人不能搜集更可靠之原始資料，或相差甚微，不值巨大調查經費之代價，則須捨原始資料而取次級資料。例如海關報告册上之資料不甚可靠，吾人固可向輸出入商人直接調查，惟由是求得之結果未必能較勝於次級資料，故海關報告册仍不失爲調查國際貿易者最適當之次級資料。

資料來源亦有原始與次級之分。登載原始資料之刋物名曰原始來源，登載次級資料之來源名曰次級來源。例如國際貿易局所編之國際貿易導報，其資料取自海關報告册，故海關報告册爲原始來源，國際貿易導報爲次級來源。

第二節　次級資料之編製

次級資料之來源常不止一種，吾人須選擇原始來源；蓋自原始來源輾轉至次級來源，數字易有錯誤而表下之註亦易脫落。惟原始來源所發表之數字若係根據臨時消息而尙非確定之數字，則編製次級資料時須採用最後更正之數字。

各級政府之報告，各職業團體與研究機關之刊物以及各種年鑑雜誌與日報均可爲次級資料之來源。本書中重要資料來源將載於書末附錄。

次級資料未必均能適用，編製之時須先加以測驗。玆就應注意各點列舉於下，以免誤用：

(一)供給次級資料之機關。任何統計機關均有其設立之目的與特殊之使命，有政府設立之機關，亦有私人組織之機關，有聲譽卓著之老機關，亦有創立未久之新機關，有經費充裕得向適當來源搜集資料之機關，亦有經費拮据祇能在可能來源搜集資料之機關，有可使用強迫權力以搜集資料之機關，有僅賴被詢人之善意合作以搜集資料之機關，凡此種種均與次級資料之價值有關。故發表次級資料統計機關之組織如何？其聲譽如何？其搜集資料之方法又如何？均爲編製次級資料者所不可不知。

(二)次級資料之性質。資料有無偏誤與是否抽樣而得？亦不可不詳加考察。資料之偏誤或由於調查者故意剔除一部之事實，或由於資料過少不能代表全部，或由於環境或時期選擇之不當。資料若係抽樣而得，則抽查樣本可有種種限制，或限於某時某地，或限於某類某特性。次級資料之價值隨規定限制之當否而異。

(三)次級資料之單位。各時各地或各類所用之單位是否一致？亦不可忽視。例如我國前立法院統計處與紗廠聯合會對於全國棉花種植面積之估計均以各地估計面積之畝數相加而得。惟各地一畝之大小不同，即所用之單位不等，故此種次級資料應用時亦須注意。

(四)資料之準確程度。社會經濟變動之測量常不能絕對準確。統計學上所謂準確乃指相對準確而言。吾人編製次級資料時雖不能期其絕對準確，然須考察其準確程度之大小。準確程度過小則不可輕意應用。計算有無錯誤?資料如何報告?答案有無標準?估計有何依據?均與準確程度之大小有關，編製次級資料者不可不詳加分析。

(五)資料是否同質?資料若非同質，則不能作異地異時之比較。例如歐戰後德法之境域俱有變更，故戰前與戰後德法之人口已非同質。歐戰後德國貨幣膨脹，馬克暴跌，戰前與戰後德國之物價亦非同質，故均不能比較。編製次級資料時對於資料之同質異質務須審愼分析，以免謬誤。

(六)次級資料是否適用?有時次級資料雖甚準確可靠，然不適於吾人之用，若貿然應用，卽得極不準確之結論。故次級資料是否切合吾人之研究問題，亦爲編製次級資料者所不可不知。

第三節 原始資料之搜集與整理

資料之搜集必有其目的，必有一研究之問題。此問題之性質如何?能否適用統計方法?吾人在搜集原始資料以前須先詳細考察。研究問題已明，統計方法已知其能適用，吾人尤須探討何種資料適於吾人之用?吾人需要之資料能否在適宜之形式取得?取得之資料能否達到預期之準確程度?能否保持一致而有比較之可能?搜集之資料能否於規定時期內取得以免明日黃花之譏?搜集資料時需否行使強迫權力以助調查之進行?凡此種種問題均爲搜集原始資料者所不可不預事籌謀者也。

原始資料之搜集須依一定程序進行，惟搜集程序隨調查之目的及其計劃而異，故事前須將研究問題澈底考慮，自始至終均須在計劃內規定。統計工作不能急進，須逐漸進步方能達到最後之成功。完善之計劃乃成功之基礎，

資料須自其來源搜集。惟同一資料常有無數來源。例如工人之工資資料可向工人搜集，亦可向工廠搜集，又可向工會搜集。各種來源所供給之資料常有極大之出入。又若用抽樣法搜集資料，則何者須包含在內，何者須擯除在外，對於調查之結果影響甚大。故搜集原始資料者須先決定向何人或何處搜集資料。主持調查者須先列舉可能來源，然後研究其所供給資料之可能偏誤以爲選擇來源之標準。至於樣本之選擇則須使主要各部均有代表在樣本之內，且能保持適當之比例而無畸輕畸重之弊。

原始資料之搜集或賴資料來源之記錄，或憑被詢人之估計，或須由調查者一一計數。工廠之產銷狀況，職工人數均有詳細記錄，故此種資料可由原始記錄抄寫。明年營業狀況之預測，未來一般商業之趨勢，無記錄可資依據，故須憑推銷員之意見或其估計而取得資料。至於全國人口清查，上海市小學校清查則須一一計數方能取得所需資料。

搜集原始資料之途徑不一，或由主持調查者親往訪問，或令其代表前往訪問，或用私人信件探詢消息，或用調查表格答覆問題。應依何種途徑須視研究問題之性質與統計機關之財力而異。

訪問法之成功全恃訪問者之幹練，故主持調查者若不親往訪問，對於訪問者之選擇須詳加考慮。茲略舉選擇之標準於下；

(一)訪問者須智勇機警,富好奇心而有交際手腕。

(二)訪問者須能了解研究問題之內容與被詢人之心理。

(三)訪問者須能解釋被詢人所供給之消息。

(四)訪問者須有健全之記憶力。

用私人信件探詢消息時須遵守下列各點,然後有成功之希望:

(一)須向能供給消息者搜集資料。

(二)明白規定所需資料。

(三)問題中所用單位須單純通俗,不致誤解。

(四)不可要求供給難於搜集或需費甚大之資料。

(五)保證不供競爭者之利用,以免被詢人之猜疑。

調查表格或由調查員分發,或由郵局寄去。若由調查員分發,則答案可由調查員填寫,或由被詢人填寫而受調查員之指導。調查之目的,問題之性質以及所用術語均可由調查員詳細解釋。被詢人猜疑可以消除。答案有疑義時調查員可用反證方法探詢究竟,故問題不妨稍多。

調查之成敗常繫於調查員之得力與否,故主持調查者對於調查員之人選務須特別注意。未出發前尤當預擬調查須知,俾調查員知所遵循。茲就調查員應知各項略舉其重要者如下:

(一)調查員於未調查前,須先將應調查事項悉心研究;調查時被詢人如有疑問,須詳細解釋。

(二)調查員調查時對於被調查機關職員須謙恭有禮,態度務須鎮靜,語言須簡單扼要。被詢人如有謊言或錯誤,切不可直接加以辯論,務須用間接方法,糾正其謬誤。

(三)調查員與被詢人約定時間，切不可失信。

(四)調查員調查時如遇被詢人談話敷衍，不着邊際，切不可隨之作泛論，應即提出調查事項，以取得必要消息。

(五)任何消息調查員不得洩漏。

(六)調查時期須遵守調查表上規定時期，不得任意更改。其因被詢人無法供給規定時期內資料而不得不更改時，亦須將更改原因與更改時期，詳細註明表上，以便查考。

(七)調查員填表務須精細準確，由計算或抄錄而得之數字，須加覆核，以免錯誤。

(八)調查員須各備一日記簿，凡非表上所載而與調查有關之消息，均須記入。

調查表格若由郵局寄去，則被詢人填寫時無人指導，一切疑點即無由解釋。此種調查欲收成效，須嚴守下列各點：

(一)調查若依法律規定進行，則須在調查表格內說明。若係私人調查，則亦須說明所欲研究問題之重要。

(二)信內須附回信信封與郵票。

(三)問題不可太多，且須簡單而切合調查之目的。

(四)單位須明確規定，單純而通俗，定義與解釋須置於表中，蓋填寫者對於表之上下不甚注意。

(五)分格劃線須簡單明確，以免誤填。

(六)每一答案須予以充分地位，相關問題須互相接近。

(七)用反證問題以防錯誤或不準確之答案。

(八)各種計算如合計百分比等須留待統計機關自作。

(九)問題之意義務須簡明而能人人了解，以防誤解雙關或有意掩飾之答案。問題語調須婉轉客氣，切忌命令式之問題。問題之排列須合邏輯而使被詢人易於答覆。問題須能用「是」「否」二字或簡單數字答覆。

調查表格以同時寄出為原則，蓋被詢人常因接到表格之先後而生猜疑，且同時寄出，收回時亦不致相距過遠；否則截止時期難於確定，遲到答案亦不易處理。調查表格發出後若無答案寄回，則可去函催索，惟語氣須特別客氣，以促進被詢人之好感。

調查表格寄回後須分別歸類。填寫各項須辨別其正誤。發見矛盾錯誤之處如能自行改正則改正之，若有懷疑而不能決其正誤，則須致函被詢人探詢究竟；若填寫各項太不可靠，則棄而不用。調查表格經一次淘汰後，其留存者比較可靠而能適合調查者之用，然後依其性質應用活葉卡片分別歸類以便編製圖表。

附錄甲　數學原理

第四章　平均數

1.任何數列之各項對於算術平均數離中差之總和等於零，即：

$$\Sigma(X-\bar{x})=0$$

X　變量之數值

$\bar{x}$　算術平均數

〔證〕設 n 爲項數，則依算術平均數之定義，

$$\bar{x}=\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

或 $n\bar{x}=X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_n$

$n\bar{x}$ 爲 n 個 $\bar{x}$ 相加之和，故

$$\underbrace{\bar{x}+\bar{x}+\bar{x}+\cdots\cdots+\bar{x}}_{n\text{個}}=\underbrace{X_1+X_2+X_3\cdots\cdots+X_n}_{n\text{個}}$$

移項得

$$0=(X_1-\bar{x})+(X_2-\bar{x})+(X_3-\bar{x})+\cdots\cdots+(X_n-\bar{x})$$

即 $\Sigma(X-\bar{x})=0$

2.任何數列之算術平均數等於假定平均數與各項對於假定平均數所有離中差之平均數之和，即：

$$\bar{x} = \bar{x}' + \frac{\Sigma(X - \bar{x}')}{n}$$

$\bar{x}$ 算術平均數。

$\bar{x}'$ 假定平均數。

X 變量之數值。

n 項數。

〔證〕$\Sigma(X-\bar{x}') = \Sigma[(X-\bar{x}) + (\bar{x}-\bar{x}')] = \Sigma(X-\bar{x}) + n(\bar{x}-\bar{x}')$

但 $\Sigma(X - \bar{x}) = 0$

故 $\Sigma(X - \bar{x}') = n(\bar{x} - \bar{x}')$

或 $\dfrac{\Sigma(X - \bar{x}')}{n} = \bar{x} - \bar{x}'$

移項得

$$\bar{x} = \bar{x}' + \frac{\Sigma(X - \bar{x}')}{n}$$

3.分組頻數表之組距若不相等,則應用公式8:

$$\bar{x} = \bar{x}' + \frac{\Sigma(fd')}{\Sigma f} \times i$$

以求算術平均數時須注意 d'之數值。

例由下列分組頻數表求算術平均數。

I. 由組距不等之分組頻數表求算術平均數

G	f	d'	d' −	d' +
$10——12	5	−3	15	
12——14	12　17	−2	24	
14——16	23　40	−1	23	
16——18	35	0	0	
18——22	22　75	+1.5		33
22——26	10	+3.5		35
26——32	8	+6		48
	115		62	116

上表中之組距有大小之別，前四組之組距爲二元，第五第六兩組之組距爲四元，末一組之組距爲六元，故若以 17 元爲假定平均數而以二元爲標準組距，則在 d' 一行中，前四組爲 −3，−2，−1，0，但在後三組中，不能仍作爲 +1，+2，+3。蓋第五組之中點爲 20，與假定平均數相差 3，合之標準組距當爲 1.5 組而非 1 組；第六組之中點爲 24，與假定平均數相差 7，合之標準組距當爲 3.5 組而非 2 組；第七組之中點爲 29，與假定平均數相差 12，合之標準組距當爲 6 組而非 3 組；故公式(8)中之 i 與 d' 所代表之數值須改正如下：

i　標準組距。

d'　各組與假定平均數所在組相差之組數（合成標準組距之組數）。

計算 d' 時不必先求中點與假定平均數相差之量。譬自第四組至第五組，組距自二元增至四元，計算第五組之 d' 時不必先求中點 20 與假定平均數相差之量，祇須求第四組組距與第五組組距之平均數，再由此平均數計算合成標準組距之組數，第四組之組距爲二，第五組之組距爲四，其平均數爲三，合之標準組距則得 1.5 組，以之與第四組之 d' 相加

即得第五組之 d'；第五第六兩組之組距相等，故祇須以此相等之組距合成標準組距之組數即得二組，以之與第五組之 d' 相加即得第六組之 d'；第六組之組距為四，第七組之組距為六，其平均數為五，合之標準組距則得 2.5 組，以之與第六組之 d' 相加即得第七組之 d'。既求得 d' 再計算 fd' 然後代入公式 (8) 即得。

$$\bar{x} = 17 + \frac{116-62}{115} \times 2 = 17.94$$

4. 由分組頻數表求算術平均數可應用累積頻數法，其公式如下：

$$\bar{x} = \bar{x}' \pm \frac{i\,\Sigma f'}{n}$$

$\bar{x}$　算術平均數。

$\bar{x}'$　假定平均數。

f'　累積頻數。

n　項數，即頻數之總和。

i　組距。

〔註〕應用上列公式時各組之排列若由大而小，則取正號而 $\bar{x}' = \bar{m}_1 - i$；若由小而大，則取負號而 $\bar{x}' = \bar{m}_t + i$。

〔證〕設 $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3 \cdots\cdots \bar{m}_t$ 為各組之中點，$\bar{m}_1$，為 t 組中最小一組之中點，$\bar{m}_t$，為最大一組之中點，又設各組之組距均為 i。各組排列若由

大而小，則取 $\bar{m}_1-i$ 作爲假定平均數，並以組距爲單位，而各組之 d' 爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots t$。

各組排列由大而小 ($\bar{x}'=\bar{m}_1-i$) $\bar{m}$	d'	各組排列由小而大 ($\bar{x}'=\bar{m}_t+i$) $\bar{m}$	d'	f	f'
$\bar{m}_t$	t	$\bar{m}_1$	$-t$	f_1	f_1
$\bar{m}_{t-1}$	$t-1$	$\bar{m}_2$	$-(t-1)$	f_2	f_1+f_2
$\bar{m}_{t-2}$	$t-2$	$\bar{m}_3$	$-(t-2)$	f_3	$f_1+f_2+f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{m}_3$	3	$\bar{m}_{t-2}$	-3	f_{t-2}	$f_1+f_2+\cdots\cdots+f_{t-2}$
$\bar{m}_2$	2	$\bar{m}_{t-1}$	-2	f_{t-1}	$f_1+f_2+\cdots\cdots+f_{t-2}+f_{t-1}$
$\bar{m}_1$	1	$\bar{m}_t$	-1	f_t	$f_1+f_2+\cdots\cdots+f_{t-2}+f_{t-1}+f_t$

依公式 (8) 得算術平均數：

$$\bar{x}=\bar{x}'+\frac{tf_1+(t-1)f_2+(t-2)f_3+\cdots+3f_{t-2}+2f_{t-1}+1f_t}{n}\times i$$

若各組排列由小而大，則取 $\bar{m}_t+i$ 爲假定平均數，而各組之 d' 爲 $-1, -2, -3, \cdots -t$，而

$$\bar{x}=\bar{x}'-\frac{tf_1+(t-1)f_2+(t-2)f_3+\cdots+3f_{t-2}+2f_{t-1}+1f_t}{n}\times i$$

但 $\Sigma f'=tf_1+(t-1)f_2+(t-2)f_3+\cdots+3f_{t-2}+2f_{t-1}+1f_t$

$$\therefore \bar{x}=\bar{x}'\pm\frac{i\Sigma f}{n}$$

5. 由分組頻數表求中位數可用下之插補公式:

$$M=L+\frac{\frac{n}{2}-l}{f}\times i$$

M　中位數。

n　項數。

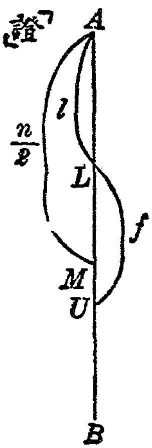
f　中位數所在組之頻數。

i　組距。

l　小於中位數各組頻數之和。

L　中位數所在組之下限。

證



設以直線 AB 之長代表項數,則中位數 M 分全線爲 AM 與 MB 二等分。

$$AM=MB=\frac{n}{2}$$

設中位數所在組之頻數爲 f, 而其下限與上限爲 L 與 U, 則 LU=f

但 LM=AM−AL

而 AL 即代表小於中位數各組頻數之和, 故等即於 l。

$$\therefore LM=\frac{n}{2}-l$$

中位數離下限之距離等於全組距離之 $\frac{\frac{n}{2}-l}{f}$, 故中位數值與下限數值相差之量即爲:

$$M-L=\frac{\frac{n}{2}-l}{f}\times i$$

移項卽得：

$$M=L+\frac{\frac{n}{2}-l}{f}\times i$$

6.任何數列之中位數與各項相差絕對值之和爲最小。

〔證〕$\overline{P\quad A\quad B\quad C\quad M\quad D\quad E\quad F}$

設 PM 爲數列

PA PB PC PM PD PE PF 之中位數，令 d 爲中位數與各項相差絕對值之和，則

$$d=(PM-PA)+(PM-PB)+(PM-PC)+(PM-PM)$$
$$+(PD-PM)+(PE-PM)+(PF-PM)$$
$$=AM+BM+CM+MD+ME+MF$$

任取一數 PD，令 d′ 爲 PD 與各項相差絕對值之和，則

$$d'=(PD-PA)+(PD-PB)+(PD-PC)+(PD-PM)$$
$$+(PD-PD)+(PE-PD)+(PF-PD)$$
$$=AD+BD+CD+MD+DE+DF$$
$$=AM+MD+BM+MD+CM+MD+MD+ME-MD$$
$$+MF-MD$$
$$=(AM+BM+CM+MD+ME+MF)+MD$$
$$=d+MD$$

但 $MD>0$

$\therefore d<d'$

7.已知第一期之人口爲 P_1，第二期之人口爲 P_2，而每年之增加率相等，則兩時期中間一年之人口 P_0 卽爲 P_1 與 P_2 之幾何平均數。

〔證〕設第一期與第二期相距 n 年，則其中間一年卽在第一期後 $\frac{n}{2}$ 年。令每年之增加率爲 r，則：

$$P_2=P_1(1+r)^n$$

$$P_0=P_1(1+r)^{\frac{n}{2}}$$

$$P_1P_2=P_1\times P_1(1+r)^n=P_1^2(1+r)^n$$

$$P_0^2=[P_1(1+r)^{\frac{n}{2}}]^2=P_1^2(1+r)^n$$

$$\therefore\ P_0^2=P_1P_2$$

兩邊開方則得：

$$P_0=\sqrt{P_1P_2}$$

卽 P_0 爲 P_1 與 P_2 之幾何平均數。

8.任何二數(限於不等於零之正數)之幾何平均數卽等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數。

〔證〕設 $X_1>0$

$X_2>0$

X_1 與 X_2 之幾何平均數算術平均數與倒數平均數爲 G,x 與 H,則依平均數之定義,得:

$$G=\sqrt{X_1X_2}$$

$$\bar{x}=\frac{X_1+X_2}{2}$$

$$H=\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{X_1}+\dfrac{1}{X_2}}{2}}$$

$$\bar{x}H=\frac{X_1+X_2}{2}\times\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{X_1}+\dfrac{1}{X_2}}{2}}=\frac{X_1+X_2}{2}\times\frac{2}{\dfrac{1}{X_1}+\dfrac{1}{X_2}}$$

$$=\frac{X_1+X_2}{\dfrac{X_2+X_1}{X_1X_2}}=X_1X_2$$

$$\therefore\sqrt{\bar{x}H}=\sqrt{X_1X_2}=G$$

第五章　離中趨勢

9. 由分組頻數表求平均差可應用下列公式:

$$A.D=\frac{i\Sigma(f\bar{d}')+(a-b)\bar{c}}{n}$$

A.D.　平均差。

n　項數。

i　組距。

f　頻數。

$\bar{d}'$　各組與假定平均數所在組相差組數之絕對值。

$\bar{c}$　改正數,卽中位數與假定平均數相差之絕對值。

b　若中位數大於假定平均數,則 b 爲大於中位數各組頻數之和;若中位數小於假定平均數,則 b 爲小於中位數各組頻數之和。

$a=n-b$

〔證〕設M爲中位數。

M′爲中位數所在組之中點。

$\bar{m}_1,\bar{m}_2,\bar{m}_3\cdots\cdots\bar{m}_r$ 爲小於中位數各組之中點,而 $f_1,f_2,f_3\cdots\cdots f_r$ 爲此各組之頻數。

$\bar{m}_{r+1}$, $\bar{m}_{r+2}$, $\bar{m}_{r+3}$ …… $\bar{m}_t$ 爲大於中位數各組之中點,而 f_{r+1}, f_{r+2},$f_{r+3}\cdots\cdots f_t$ 爲此各組之頻數。

$A.D.=\frac{\Sigma(f\bar{d})}{n}$ ($\bar{d}$ 爲各項與中位數相差之絕對值)

$$=\frac{f_1(M-\bar{m}_1)+f_2(M-\bar{m}_2)+f_3(M-\bar{m}_3)+\cdots\cdots+f_r(M-\bar{m}_r)}{n}$$

$$+\frac{f_{r+1}(\bar{m}_{r+1}-M)+f_{r+2}(\bar{m}_{r+2}-M)+f_{r+3}(\bar{m}_{r+3}-M)+\cdots\cdots+f_t(\bar{m}_t-M)}{n}$$

若 $M=M'+\bar{c}$ ($\bar{c}$ 爲改正數)，則

$$\text{A.D.}=\frac{f_1(M'-\bar{m}_1+\bar{c})+f_2(M'-\bar{m}_2+\bar{c})+f_3(M'-\bar{m}_3+\bar{c})+\cdots\cdots+f_r(M'-\bar{m}_r+\bar{c})}{n}$$

$$+\frac{f_{r+1}(\bar{m}_{r+1}-M'-\bar{c})+f_{r+2}(\bar{m}_{r+2}-M'-\bar{c})+f_{r+3}(\bar{m}_{r+3}-M'-\bar{c})+\cdots+f_t(\bar{m}_t-M'-\bar{c})}{n}$$

$M > M'$

$b = \cancel{m_1+m_2+\cdots+m_r} = f_{r+1}+f_{r+2}+\cdots+f_t$

$$=\frac{i\Sigma(f\bar{d}')}{n}+\frac{a\,\bar{c}}{n}-\frac{b\,\bar{c}}{n}=\frac{i\Sigma(f\bar{d}')+(a-b)\bar{c}}{n}$$

若 $M=M'-\bar{c}$ ($\bar{c}$ 爲改正數)，則

$$\text{A.D.}=\frac{f_1(M'-\bar{m}_1-\bar{c})+f_2(M'-\bar{m}_2-\bar{c})+f_3(M'-\bar{m}_3-\bar{c})+\cdots\cdots+f_r(M'-\bar{m}_r-\bar{c})}{n}$$

$$+\frac{f_{r+1}(\bar{m}_{r+1}-M'+\bar{c})+f_{r+2}(\bar{m}_{r+2}-M'+\bar{c})+f_{r+3}(\bar{m}_{r+3}-M'+\bar{c})+\cdots+f_t(\bar{m}_t-M'+\bar{c})}{n}.$$

$$=\frac{i\Sigma(f\bar{d}')}{n}-\frac{b\,\bar{c}}{n}+\frac{a\,\bar{c}}{n}=\frac{i\Sigma(f\bar{d}')+(a-b)\bar{c}}{n}$$

$M < M'$

$b = f_1+\cdots+f_r$

10. 標準差之數值以從算術平均數計算者爲最小，即

$$\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{n}}<\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x}')^2}{n}}$$

X 變量。

n 項數。

$\bar{x}$ 算術平均數。

$\bar{x}'$ 任意一數，但不等於算術平均數。

〔證〕$\Sigma(X-\bar{x}')^2=\Sigma[(X-\bar{x})+(\bar{x}-\bar{x}')]^2$

$=\Sigma[(X-\bar{x})^2+2(X-\bar{x})(\bar{x}-\bar{x}')+(\bar{x}-\bar{x}')^2]$

$=\Sigma(X-\bar{x})^2+2(\bar{x}-\bar{x}')\Sigma(X-\bar{x})+n(\bar{x}-\bar{x}')^2$

但 $\Sigma(X-\bar{x})=0$

$$n(\bar{x}-\bar{x}')^2>0$$

$$\therefore \Sigma(X-\bar{x})^2<\Sigma(X-\bar{x}')^2$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{n}}<\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x}')^2}{n}}$$

又設 $\bar{x}'$ 爲假定平均數，

c 爲 $\bar{x}$ 與 $\bar{x}'$ 之差，

σ 爲標準差，

則 $\Sigma(X-\bar{x}')^2=\Sigma(X-\bar{x})^2+nc^2$

或 $\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma(X-\bar{x}')^2-nc^2$

$$\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{n}=\frac{\Sigma(X-\bar{x}')^2}{n}-c^2$$

$$\therefore \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x}')^2}{n}-c^2}$$

此即計算標準差簡捷法之公式。

若 $\bar{x}'=0$，

則 $c=\bar{x}$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}-\bar{x}^2}$$

11. 由分組頻數表計算標準差時，可用薛立愛氏校核法稽核計算之正誤，其公式如下：

$$\Sigma[f(d'+1)^2]=\Sigma(fd'^2)+2\Sigma(fd')+n$$

f　頻數。

n　項數。

d′　假定平均數所在組與各組相差之組數。

〔證〕$\Sigma[f(d'+1)^2]=\Sigma(fd'^2+2fd'+f)$

$=\Sigma(fd'^2)+2\Sigma(fd')+n$

12. 由分組頻數表求標準差可應用累積頻數法依照下列公式計算：

$$\sigma=i\sqrt{\frac{2}{n}\Sigma f''-\frac{\Sigma f'}{n}\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)}$$

σ　標準差。

f′　第一累積頻數。

f″　第二累積頻數。

n　項數。

i　組距。

〔註〕應用上列公式時各組之排列得由大而小或由小而大，兩者之結果相等。(參看甲4與甲18。)

〔證〕設 $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \cdots\cdots \bar{m}_t$ 爲各組之中點，$\bar{m}_1$ 爲 t 組中最小一組之中點，又設各組之組距均爲 i。

各組排列由大而小 $(\bar{x}'=\bar{m}_1-i)$ $\bar{m}$	d'	各組排列由小而大 $(\bar{x}'=\bar{m}_t+i)$ $\bar{m}$	d'	f	f	f''
$\bar{m}_t$	t	$\bar{m}_1$	$-t$	f_1	f_1	f_1
$\bar{m}_{t-1}$	$t-1$	$\bar{m}_2$	$-(t-1)$	f_2	f_1+f_2	$2f_1+f_2$
$\bar{m}_{t-2}$	$t-2$	$\bar{m}_3$	$-(t-2)$	f_3	$f_1+f_2+f_3$	$3f_1+2f_2+f_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\bar{m}_3$	3	$\bar{m}_{t-2}$	-3	f_{t-2}	$f_1+f_2+\cdots+f_{t-2}$	$(t-2)f_1+(t-3)f_2+\cdots+f_{t-2}$
$\bar{m}_2$	2	$\bar{m}_{t-1}$	-2	f_{t-1}	$f_1+f_2+\cdots+f_{t-2}+f_{t-1}$	$(t-1)f_1+(t-2)f_2+\cdots+2f_{t-2}+f_{t-1}$
$\bar{m}_1$	1	$\bar{m}_t$	-1	f_t	$f_1+f_2+\cdots+f_{t-2}+f_{t-1}+f_t$	$tf_1+(t-1)f_2+\cdots+3f_{t-2}+2f_{t-1}+f_t$

$$
\begin{aligned}
\Sigma f'' = & [1+2+3+\cdots+(t-2)+(t-1)+t]f_1 \\
& +[1+2+3+\cdots+(t-3)+(t-2)+(t-1)]f_2 \\
& +[1+2+3+\cdots+(t-3)+(t-2)]f_3+\cdots \\
& +(1+2+3)f_{t-2}+(1+2)f_{t-1}+1f_t
\end{aligned}
$$

式中 $f_1, f_2, +f_3, \cdots f_t$ 之係數均為等差級數之和，故

$$
\Sigma f'' = \frac{t(t+1)}{2}f_1+\frac{(t-1)t}{2}f_2+\frac{(t-2)(t-1)}{2}f_3+\cdots
$$

$$
\cdots+\frac{3.4}{2}f_{t-2}+\frac{2.3}{2}f_{t-1}+\frac{1.2}{2}f_t
$$

但 $t(t+1)=t^2+t$

$$(t-1)t=(t-1)^2+(t-1)$$

$$(t-2)(t-1)=(t-2)^2+(t-2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\cdot3=2^2+2$$

$$1\cdot2=1^2+1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 2\Sigma f''&=(t^2+t)f_1+[(t-1)^2+(t-1)]f_2+[(t-2)+(t-2)]f_3+\cdots\cdots\\&\quad+(3^2+3)f_{t-2}+(2^2+2)f_{t-1}+(1^2+1)f_t\\&=[t^2f_1+(t-1)^2f_2+(t-2)^2f_3+\cdots\cdots+3^2f_{t-2}+2^2f_{t-1}+1^2f_t]\\&\quad+[tf_1+(t-1)f_2+(t-2)f_3+\cdots\cdots+3f_{t-2}+2f_{t-1}+1f_t]\\&=\Sigma(d'^2f)+\Sigma f'\end{aligned}$$

卽　$\Sigma(d'^2f)=2\Sigma f''-\Sigma f'$

依第五章公式(9),得

$$\sigma^2=\frac{i\Sigma(d'^2f)}{n}-c^2$$

$$\begin{aligned}c^2&=\left[\frac{i\Sigma(d'f)}{n}\right]^2\\&=\frac{i^2(\Sigma d'f)^2}{n^2}\\&=\frac{i^2(\Sigma f')^2}{n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\sigma^2&=i^2\left[\frac{2}{n}\Sigma f''-\frac{\Sigma f'}{n}-\left(\frac{\Sigma f'}{n}\right)^2\right]\\&=i^2\left[\frac{2}{n}\Sigma f''-\frac{\Sigma f'}{n}\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\right]\end{aligned}$$

卽　$\sigma=i\sqrt{\frac{2}{n}\Sigma f'-\frac{\Sigma f'}{n}\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)}$

13. 由不分組之數列求相互平均差，可應用下列公式計算：

$$\text{M.D.}=\frac{(n-1)(X_n-X_1)+(n-3)(X_{n-1}-X_2)+(n-5)(X_{n-2}-X_3)+\cdots\cdots+(n-2r+1)(X_{n-r+1}-X_r)}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

M.D.　相互平均差。

n　項數。

$X_1, X_2, X_3\cdots\cdots X_{n-1}, X_n$ 由小而大排列之變量。

$r=\frac{n}{2}$(若 n 為偶數)

$r=\frac{n-1}{2}$(若 n 為奇數)

〔證〕各項相互之差離可排列如下表：

X_n-X_1	X_n-X_2 $X_n-X_3\cdots\cdots X_n-X_{n-3}$ X_n-X_{n-2} X_n-X_{n-1}		
$X_{n-1}-X_1$	$X_{n-1}-X_2$ $X_{n-1}-X_3\cdots\cdots X_{n-1}-X_{n-3}$ $X_{n-1}-X_{n-2}$		
$X_{n-2}-X_1$	$X_{n-2}-X_2$	$X_{n-1}-X_3\cdots\cdots X_{n-2}-X_{n-3}$	
…………	…………	…………	…………
X_4-X_1	X_4-X_2	X_4-X_3	
X_3-X_1	X_3-X_2		
X_2-X_1			

以直角若干將上表分成數部，自外而內，行列中項數遞減二項，第一部行列中共有 $n-1$ 項，第二部 $n-3$ 項，第三部 $n-5$ 項，至最後一部僅有 $n-2r+1$ 項。

以第一部中橫行之末項與其縱行之第二項加，得：

$$X_n - X_{n-1} + X_{n-1} - X_1 = X_n - X_1$$

以第一部中橫行之末二項與其縱行之第三項相加，得：

$$X_n - X_{n-2} + X_{n-2} - X_1 = X_n - X_1$$

以第一部中橫行之末三項與其縱行之第四項相加，或橫行之末四項與縱行之第五項相加，均等於 $X_n - X_1$，故第一部中各數之和，當爲：

$$(n-1)(X_n - X_1)$$

同理，第二部中各數之和爲 $(n-3)(X_{n-1} - X_2)$

第三部中各數之和爲 $(n-5)(X_{n-2} - X_3)$

第 r 部中各數之和爲 $(n-2r+1)(X_{n-r+1} - X_r)$

而 n 項中共有 ${}_nC_2$ 種差離，但

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

〔註〕n 物中每兩物組合之種類，代数學中用 ${}_nC_2$ 表之。

$$\therefore \text{M.D.} = \frac{(n-1)(X_n - X_1) + (n-3)(X_{n-1} - X_2) + (n-5)(X_{n-2} X_3) + \cdots\cdots + (n-2r+1)(X_{n-r+1} - X_r)}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

14. 由分組頻數表求相互平均差，可應用下列公式計算：

$$\text{M.D.} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$S_1 = d_1f_1(n - f_1) + d_2f_2(n - 2f_1 - f_2) + d_3f_3(n - 2f_1 - 2f_2 - f_3) + \cdots\cdots$$

$$S_2=d'_1f'_1(n-f'_1)+d'_2f'_2(n-2f'_1-f'_2)+d'_3f'_3(n-2f'_1-2f'_2-f'_3)+\cdots$$

M.D. 相互平均差

n 項數

d_1,d_2,d_3……中位數組之中點減去小於中位數各組(第一組，第二組，第三組……)(由小而大排列)之中點所餘之數，f_1,f_2,f_3……為第一組，第二組，第三組……之頻數。

d'_1,d'_2,d'_3……大於中位數各組(第一組，第二組，第三組……)(由大而小排列)之中點減去中位數組之中點所餘之數，f'_1,f'_2,f'_3……為第一組，第二組，第三組……之頻數。

〔證〕設$\bar{m}$為中位數組之中點，f為中位數組之頻數，$\bar{m}_1,\bar{m}_2,\bar{m}_3$，……為小於中位數各組(第一組，第二組，第三組……)(由小而大排列)之中點，$\bar{m}'_1$, $\bar{m}'_2$ $\bar{m}'_3$……為大於中位數各組(第一組，第二組，第三組……)(由大而小排列)之中點，依相互平均差之定義，得：

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2}(M.D.)=&\left[\{f_1f'_1(\bar{m}'_1-\bar{m}_1)+f_2f'_1(\bar{m}'_1-\bar{m}_2)+f_3f'_1(\bar{m}'_1-\bar{m}_3)\right.\\&+\cdots\cdots\}+\{ff'_1(\bar{m}'_1-\bar{m})\}+\{f'_2f'_1(\bar{m}'_1-\bar{m}'_2)+f'_3f'_1(\bar{m}'_1-\bar{m}'_3)\\&\left.+f'_4f'_1(\bar{m}'_1-\bar{m}'_4)+\cdots\cdots\}\right]+\left[\{f_1f'_2(\bar{m}'_2-\bar{m}_1)+f_2f'_2(\bar{m}_2'-\bar{m}_2)\right.\\&+f_3f'_2(\bar{m}'_2-\bar{m}_3)+\cdots\cdots\}+\{ff'_2(\bar{m}'_2-\bar{m})\}+f'_3f'_2(\bar{m}'_2-\bar{m}'_3)\\&\left.+f'_4f'_2(\bar{m}'_2-\bar{m}'_4)+\cdots\cdots\}\right]+\cdots\cdots+\left[f_1f(\bar{m}-\bar{m}_1)+f_2f(\bar{m}-\bar{m}_2)\right.\\&\left.+f_3f(\bar{m}-\bar{m}_3)+\cdots\cdots\right]+\cdots\cdots+\left[f_1f_3(\bar{m}_3-\bar{m}_1)+f_2f_3(\bar{m}_3-\bar{m}_2)\right]\\&+\left[f_1f_2(\bar{m}_2-\bar{m}_1)\right]\end{aligned}$$

但$\bar{m}'_1-\bar{m}_1=(\bar{m}'_1-\bar{m})+(\bar{m}-\bar{m}_1)=d'_1+d_1$

$\bar{m}'_1-\bar{m}'_3=(\bar{m}'_1-\bar{m})-(\bar{m}'_3-\bar{m})=d'_1-d'_3$

$\bar{m}_3-\bar{m}_1=(\bar{m}-\bar{m}_1)-(\bar{m}-\bar{m}_3)=d_1-d_3$

$\bar{m}'_1-\bar{m}=d'_1$

$\bar{m}-\bar{m}_1=d_1$

(餘可依此類推)

$$\therefore\frac{n(n-1)}{2}(M.D.)=[\{f_1f'_1(d'_1+d_1)+f_2f'_1(d'_1+d_2)+f_3f'_1(d'_1+d_3)+\cdots\}$$
$$+\{ff'_1d'_1\}+\{f'_2f'_1(d'_1-d'_2)+f'_3f'_1(d'_1-d'_3)+f'_4f'_1(d'_1-d'_4)$$
$$+\cdots\cdots\}]+[\{f_1f'_2(d'_2+d_1)+f_2f'_2(d'_2+d_2)+f_3f'_2(d'_2+d_3)$$
$$+\cdots\cdots\}\ +\{ff'_2d'_2\}+\{f'_3f'_2(d'_2-d'_3)+f'_4f'_2(d'_2-d'_4)+\cdots\}]$$
$$+\cdots\cdots[f_1fd_1+f_2fd_2+f_3fd_3+\cdots\cdots]+\cdots\cdots[f_1f_3(d_1-d_3)$$
$$+f_2f_3(d_2-d_3)]+[f_1f_2(d_1-d_2)]$$

若將上式之右邊依照 $d'_1f'_1$, $d'_2f'_2$, $d_3'f'_3\cdots\cdots$ 與 d_1f_1, d_2f_2, d_3f_3 ……排列,則得:

$$\frac{n(n-1)}{2}(M.D.)=d'_1f'_1[(f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots)+(f)+(f'_2+f'_3+f'_4$$
$$+\cdots\cdots)]+d'_2f'_2[(f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots)+(f)+(-f'_1+f'_3+f'_4$$
$$+\cdots\cdots)]+d'_3f'_3[(f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots)+(f)+(-f'_1-f'_2+f'_4+f'_5$$
$$+\cdots\cdots)]+\cdots\cdots+d_1f_1[(f'_1+f'_2+f'_3+\cdots\cdots)+f+(f_2+f_3+f_4$$
$$+\cdots\cdots)]+d_2f_2[(f'_1+f'_2+f'_3+\cdots\cdots)+(f)+(-f_1+f_3+f_4+\cdots)]$$
$$+d_3f_3[(f'_1+f'_2+f'_3+\cdots\cdots)+(f)+(-f_1-f_2+f_4+f_5+\cdots\cdots)]$$

但$(f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots)+(f)+(f'_1+f'_2+f'_3+\cdots\cdots)=n$

$$\frac{n(n-1)}{2}(\mathrm{M.D.})=d'_1f'_1(n-f'_1)+d'_2f'_2(n-2f'_1-f'_2)$$

$$+d'_3f'_3(n-2f_1'-2f'_2-f'_3)+\cdots\cdots+d_1f_1(n-f_1)$$

$$+d_2f_2(n-2f_1-f_2)+d_3f_3(n-2f_1-2f_2-f_3)+\cdots\cdots=S_2+S_1$$

即 $\mathrm{M.D.}=\dfrac{S_2+S_1}{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

第六章　機率與差誤正態曲線

15. 已知獨立單純事件之總數與成功之機率，則理論頻數分配之算術平均數及其標準差可自下列二式求得：

$$\bar{x}=np$$

$$\sigma=\sqrt{npq}$$

$\bar{x}$　算術平均數

σ　標準差

n　獨立單純事件之總和

p　成功之機率

q　失敗之機率

[證]依$(p+q)^n$之展開式可知 n 個俱實現之機率爲p^n，而$(n-1)$個實現 1 個不實現之機率爲$np^{n-1}q$，簡言之$(n-r)$個實現 r 個不實現之機率爲$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}p^{n-r}q^r$。

以實現之個數爲變量，其機率爲頻數，則得頻數表如下，即表中之第一第二兩行是也，第三行爲第一第二兩行相乘之積，第四行爲第一第三兩行相乘之積。

II. 由理論頻數分配計算算術平均數與標準差

實現個數 X	機率 f	Xf	X^2f
n	p^n	np^n	n^2p^n
$n-1$	$np^{n-1}q$	$n(n-1)p^{n-1}q$	$n(n-1)^2p^{n-1}q$
$n-2$	$\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}p^{n-2}q^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)^2}{2}p^{n-2}q^2$
$n-3$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}p^{n-3}q^3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3}p^{n-3}q^3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2\times3}p^{n-3}q^3$
……	……	……	……
……	……	……	……
2	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$	$n(n-1)p^2q^{n-2}$	$2n(n-1)p^2q^{n-2}$
1	npq^{n-1}	npq^{n-1}	npq^{n-1}
0	q^n	0	0

$$
\begin{aligned}
\sum(Xf) &= np^n+n(n-1)p^{n-1}q+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}p^{n-2}q^2 \\
&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3}p^{n-3}q^3+\cdots\cdots \\
&\quad+n(n-1)p^2q^{n-2}+npq^{n-1} \\
&= np\Big[p^{n-1}+(n-1)p^{n-2}q+\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^{n-3}q^2 \\
&\quad+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3}p^{n-4}q^3+\cdots\cdots \\
&\quad+(n-1)pq^{n-2}+q^{n-1}\Big] \\
&= np(p+q)^{n-1} \\
&= np\times1^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}
$$

而$\sum f=1$

$$\therefore\quad \bar{x}=np$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X^2f)}{\Sigma f}-\bar{x}^2}=\sqrt{\Sigma(X^2f)-n^2p^2}$$

$$\sum(X^2f)=n^2p^n+n(n-1)^2p^{n-1}q+\frac{n(n-1)(n-2)^2}{2}p^{n-2}q^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2\times3}p^{n-3}q^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+2n(n-1)p^2q^{n-2}+npq^{n-1}$$

$$=np[np^{n-1}+(n-1)^2p^{n-2}q+\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}p^{n-3}q^2$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2\times3}p^{n-4}q^3+\cdots+2(n-1)pq^{n-2}+q^{n-1}]$$

設括弧中之數值爲 y,則:

$$\sum(X^2f)=npy$$

但 $y=(p+q)^{n-1}=(n-1)p^{n-1}+(n-1)[(n-1)-1]p^{n-2}q$

$$+(n-1)\,[\frac{(n-2)^2}{2}-\frac{n-2}{2}]p^{n-3}q^2$$

$$+(n-1)\,[\frac{(n-2)(n-3)^2}{2\times3}-\frac{(n-2)(n-3)}{2\times3}]p^{n-4}q^3+\cdots\cdots$$

$$+(n-1)(2-1)pq^{n-2}$$

$$=(n-1)p[p^{n-2}+(n-2)\,p^{n-3}q+\frac{(n-2)(n-3)}{2}p^{n-4}q^2$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2\times3}p^{n-5}q^3+\cdots\cdots q^{n-2}]$$

$$=(n-1)p(p+q)^{n-2}$$

但 $p+q=1$

$\therefore\ y-1=(n-1)p$

即 $y=1+(n-1)p$

$$\therefore\ \sigma=\sqrt{\Sigma(X^2f)-n^2p^2}=\sqrt{npy-n^2p^2}=\sqrt{np+n^2p^2-np^2-n^2p^2}$$

$$=\sqrt{np-np^2}=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{npq}$$

16． 差誤正態曲線之特性

差誤正態曲線可用下之方程式表示：

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\qquad\left(y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

x 對於算術平均數之離中差(橫坐標)

y 頻數(縱坐標)

y_0 最大之縱坐標

σ 標準差

e $=2.7182818$

π $=3.14159$

N 頻數之和

就此曲線之性質而研究之，x 等於零時 $y=y_0$，此為 y 之最大值，蓋

$$x=0,\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=e^0=1$$

$$x\neq0,\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}<1$$

故此曲線之衆數與算術平均數合而爲一。

x 之絕對値相同而符號相反時 y 之數値相等，故此曲線之兩邊對中心之縱線（此縱線之長名曰中縱坐標）而對稱，頻數在此縱線之左右各有一半，換言之，中位數亦與算術平均數合一。

不論 x 之數値多少，y 不能等於零，但 x 在 $\pm3\sigma$ 以外時，y 之値已甚小。

設 $y_1=\frac{y}{N}$

卽以 y_1 表示頻數與頻數總和之比，

則 $y_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

單純事件實現數介於 x_1 與 x_2 間之機率當爲

$$\int_{x_1}^{x_2}y_1dx$$

令 $Z=\frac{x}{\sigma}$

則 $dZ=\frac{dx}{\sigma}$

卽 $dx=\sigma dZ$

$$\int_{x_1}^{x_2}y_1dx=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}Z^2}\ dZ$$

其數値可自附錄乙第四表求得。

在平均數之左右取相等之距離，在其兩端中所包含之頻數若爲總頻數之半，則此距離名曰機差，其數値與四分位差相等，蓋 Q_1 與 Q_3 間所包含之頻數適爲總頻數之半。設 Q.D. 爲四分位差（或卽機差），則：

$$\int_0^{\frac{Q.D.}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ = \frac{1}{4}$$

查附錄乙第四表,得:

$$0.67 < \frac{Q.D.}{\sigma} < 0.68$$

在較詳計算表中,可得:

$$\frac{Q.D.}{\sigma} = 0.67449$$

即 $Q.D. = 0.67449\sigma$

設 A.D. 爲平均差,則

$$A.D. = 2\int_0^{\infty} y_1 x dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x\,dx$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}Z^2} ZdZ \quad (Z = \frac{x}{\sigma})$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-\frac{1}{2}Z^2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}(0+1)$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$= 0.7979\sigma$$

第七章　偏態與轉矩

17. 算術平均數若非整數，則可先任取一整數作爲假定平均數，然後應用下列公式以計算偏態較爲簡捷：

$$K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma x'^3-3c\Sigma x'^2}{n}+2c^3}$$

K　偏態

x'　各項與假定平均數之差

c　算術平均數與假定平均數之差

n　項數

〔證〕令 x 爲各項與算術平均數之差

$\because \quad x'=x+c$

$\therefore \quad \Sigma x'^3=\Sigma(x+c)^3=\Sigma x^3+3c\Sigma x^2+3c^2\Sigma x+nc^3$

但　$\Sigma x^2=\Sigma x'^2-nc^2$（甲10）

$\Sigma x=0$　　　　（甲1）

$\therefore \quad \Sigma x'^3=\Sigma x^3+3c\Sigma x'^2-3nc^3+nc^3$

即　$\Sigma x^3=\Sigma x'^3-3c\Sigma x'^2+2nc^3$

$$K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma x^3}{n}}$$

$$\therefore \quad K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma x'^3-3c\Sigma x'^2}{n}+2c^3}$$

若 $\bar{x}=0$ 則 $x'=X$ (X 爲變量)

$$c=\bar{x}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma X^3-3\bar{x}\Sigma X^2}{n}+2\bar{x}^3}$$

18. 由分組頻數表求偏態,可應用累積頻數法依照下列公式計算:

$$K=\pm\sqrt[3]{\frac{6}{n}\left[\Sigma f'''-\Sigma f''\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\right]+\frac{\Sigma f'}{n}\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\left(1+\frac{2\Sigma f'}{n}\right)}\times i$$

K 偏態

n 項數

f' 第一累積頻數

f'' 第二累積頻數

f''' 第三累積頻數

i 組距

〔註〕 應用上列公式時,各組排列若由大而小,則取正號;若由小而大,則取負號。

〔證〕 依 (甲 12) 之證明得:

$$2\Sigma f''=(t^2+t)f_1+[(t-1)^2+(t-1)]f_2+[(t-2)^2+(t-2)]f_3+\cdots\cdots+(2^2+2)f_{t-1}+(1^2+1)f_t$$

即 $t=1$ 時, $2f_1''=(1^2+1)f_1$

$t=2$ 時, $2(f_1''+f_2'')=(2^2+2)f_1+(1^2+1)f_2$

$t=3$ 時, $2(f_1''+f_2''+f_3'')=(3^2+3)f_1+(2^2+2)f_2+(1^2+1)f_3$

$t=t$時　$2(f_1''+f_2''+f_3''+\cdots\cdots+f_t'')=(t^2+t)f_1$

$+[(t-1)^2+(t-1)]f_2+[(t-2)^2+(t-2)]f_3$

$+\cdots\cdots(2^2+2)f_{t-1}+(1^2+1)f_t$

上列諸式中之左邊爲 f'' 之累積頻數之二倍，即：

$2f_1'''=(1^2+1)f_1$

$2f_2'''=(2^2+2)f_1+(1^2+1)f_2$

$2f_3'''=(3^2+3)f_1+(2^2+2)f_2+(1^2+1)f_3$

……………………………………………………

$2f_t'''=(t^2+t)f_1+[(t-1)^2+(t-1)]f_2+[t-2)^2+(t-2)]f_3+\cdots$

$\cdots+(2^2+2)f_{t-1}+(1^2+1)f_t$

左右兩邊各自相加，則得：

$$2\Sigma f'''=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+t^2)f_1+(1^2+2^2+3^2+\cdots+\overline{t-1}^2)f_2$$

$$+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+\overline{t-2}^2)f_3+\cdots+(1^2+2^2)f_{t-1}+1^2f_t$$

$$+(1+2+3+\cdots\cdots+t)f_1+(1+2+3+\cdots+\overline{t-1})f_2$$

$$+(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{t-2})f_3+\cdots\cdots+(1+2)f_{t-1}+1f_t$$

但　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+t^2=\frac{t}{6}(2t+1)\ (t+1)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+\frac{t}{6}$

$$1+2+3+\cdots\cdots+t=\frac{t(t+1)}{2}=\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}$$

$$\therefore\quad 2\Sigma f'''=f_1\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+\frac{t}{6}\right)+f_2\left(\frac{\overline{t-1}^3}{3}+\frac{\overline{t-1}^2}{2}+\frac{t-1}{6}\right)$$

$$+f_3\left(\frac{\overline{t-2}^3}{3}+\frac{\overline{t-2}^2}{2}+\frac{t-2}{6}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+f_{t-1}\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+\frac{2}{6}\right)+f_t\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$+f_1\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}\right)+f_2\left(\frac{\overline{t-1}^2}{2}+\frac{t-1}{2}\right)+f_3\left(\frac{\overline{t-2}^2}{2}+\frac{t-2}{2}\right)$$

$$+\cdots\cdots+f_{t-1}\left(\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2}\right)+f_t\left(\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\pm\frac{1}{3}\Sigma(d'^3f)+\frac{1}{2}\Sigma(d'^2f)+\frac{1}{6}\Sigma f'+\frac{1}{2}\Sigma(d'^2f)$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma f'=\pm\frac{1}{3}\Sigma(d'^3f)+\Sigma(d'^2f)+\frac{2}{3}\Sigma f'$$

即 $\Sigma(d'^3f)=\pm[6\Sigma f'''-3\Sigma(d'^2f)-2\Sigma f']$

依公式 (9), $K=\sqrt[3]{\frac{\Sigma x'^3-3c\Sigma x'^2}{n}+2c^3}$

但 $\Sigma(d'^3f)=\pm[6\Sigma f'''-3\Sigma(d'^2f)-2\Sigma f']$

$\Sigma(d'^2f)=2\Sigma f''-\Sigma f'$ (甲 12)

$$c'=\pm\frac{\Sigma f'}{n}$$

$$\therefore\ \left(\frac{K}{i}\right)^3=\pm\left[\frac{6}{n}\Sigma f'''-\frac{6}{n}\Sigma f''+\frac{3}{n}\Sigma f'-\frac{2}{n}\Sigma f'-\frac{6}{n}\frac{\Sigma f'}{n}\Sigma f''\right.$$

$$\left.+\frac{3}{n}\frac{\Sigma f'}{n}\Sigma f'+2\left(\frac{\Sigma f'}{n}\right)^3\right]$$

即 $\left(\frac{K}{i}\right)^3=\pm\left\{\frac{6}{n}\left[\Sigma f'''-\Sigma f''\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\right]+\frac{\Sigma f'}{n}\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\left(1+\frac{2\Sigma f'}{n}\right)\right\}$

$$\therefore\quad K=\pm\sqrt[3]{\frac{6}{n}\left[\Sigma f'''-\Sigma f''\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\right]+\frac{\Sigma f'}{n}\left(1+\frac{\Sigma f'}{n}\right)\left(1+\frac{2\Sigma f'}{n}\right)}\times i$$

19. 由補助轉矩計算主要轉矩可應用下列諸公式:

$$m_1'=c$$

$$m_2=m_2'-c^2$$

$$m_3=m_3'-3m_2'c+2c^3$$

$$m_4=m_4'-4m_3'c+6m_2'c^2-3c^4$$

m_2　第二主要轉矩

m_3　第三主要轉矩

m_4　第四主要轉矩

m_1'　第一補助轉矩

m_2'　第二補助轉矩

m_3'　第三補助轉矩

m_4'　第四補助轉矩

c　算術平均數與假定平均數之差

〔證〕 設 x 爲各項與算術平均數之差, x' 爲各項與假定平均數之差, f 爲頻數, n 爲項數,則依轉矩之定義:

$$m_1'=\frac{\Sigma(fx')}{n}$$

但　$x'=x+c$

$$\therefore \quad m_1' = \frac{\Sigma(fx)+c\Sigma f}{n} = \frac{0+nc}{n} = c$$

$$m_2' = \frac{\Sigma(fx'^2)}{n}$$

但 $\Sigma(fx'^2) = \Sigma[f(x+c)^2] = \Sigma(fx^2) + 2c\Sigma(fx) + c^2\Sigma f = nm_2 + nc^2$

$$\therefore \quad m_2' = m_2 + c^2$$

即 $\quad m_2 = m_2' - c^2$

$$m_3' = \frac{\Sigma(fx'^3)}{n}$$

但 $\Sigma(fx'^3) = \Sigma[f(x+c)^3] = \Sigma(fx^3) + 3c\Sigma(fx^2) + 3c^2\Sigma(fx) + c^3\Sigma f$

$$= nm_3 + 3ncm_2 + nc^3$$

$$\therefore \quad m_3' = m_3 + 3cm_2 + c^3$$

即 $\quad m_3 = m_3' - 3cm_2 - c^3$

$$= m_3' - 3cm_2 + 3c^3 - c^3$$

$$= m_3' - 3cm_2' + 2c^3$$

$$m_4' = \frac{\Sigma(fx'^4)}{n}$$

但 $\Sigma(fx'^4) = \Sigma[f(x+c)^4] + \Sigma(fx^4) + 4c\Sigma(fx^3) + 6c^2\Sigma(fx^2)$

$$+ 4c^3\Sigma(fx) + c^4\Sigma f = nm_4 + 4ncm_3 + 6nc^2m_2 + nc^4$$

$$\therefore \quad m_4' = m_4 + 4cm_3 + 6c^2m_2 + c^4$$

即 $\quad m_4 = m_4' - 4cm_3 - 6c^2m_2 - c^4 = m_4' - 4cm_3' + 12c^2m_2'$

$$-8c^4 - 6c^2m_2 + 6c^4 - c^4 = m_4' - 4cm_3' + 6c^2m_2' - 3c^4$$

第八章　指數

20. 定基指數與連鎖指數之研究

關於定基指數與連鎖指數之差異，潘蓀氏嘗就數理上探討其必然性。依潘蓀氏之研究，於理想公式與幾何平均數二公式，結果相同。茲節錄其關於理想公式之一節，以供參考。

假令 n 年之連鎖指數與定基指數之比爲 R_n，則

$$R_2 = \frac{P_{21}}{P_{21}} = 1$$

$$R_3 = \frac{P_{32} \cdot P_{21}}{P_{31}} = \left(\frac{\Sigma p_3 q_2}{\Sigma p_2 q_3} \cdot \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_2} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_3}{\Sigma p_3 q_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_4 = \left(\frac{\Sigma p_4 q_3}{\Sigma p_3 q_4} \cdot \frac{\Sigma p_3 q_2}{\Sigma p_2 q_3} \cdot \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_2} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_4}{\Sigma p_4 q_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

………………………………………………

………………………………………………

$$R_n = \left(\frac{\Sigma p_n q_{n-1}}{\Sigma p_{n-1} q_n} \cdot \frac{\Sigma p_{n-1} q_{n-2}}{\Sigma p_{n-2} q_{n-1}} \cdots\cdots \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_2} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_n}{\Sigma p_n q_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_{n+1} = \left(\frac{\Sigma p_{n+1} q_n}{\Sigma p_n q_{n+1}} \cdot \frac{\Sigma p_n q_{n-1}}{\Sigma p_{n-1} q_n} \cdots\cdots \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_2} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_{n+1}}{\Sigma p_{n+1} q_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

以 R_n 除 R_{n+1}，則

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}=\left(\frac{\Sigma p_{n+1}q_n}{\Sigma p_n q_{n+1}}\cdot\frac{\Sigma p_1 q_{n+1}}{\Sigma p_{n+1}q_1}\cdot\frac{\Sigma p_n q_1}{\Sigma p_1 q_n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

此乃表示任何連續二年間連鎖指數與定基指數之變化率。其值或大於一,或小於一,或等於一,視 p 與 q 之數值而定。

$\frac{R_{n+1}}{R_n}\gtreqless 1$, 亦可改用三個加權平均數表示如下:

$$\frac{\Sigma\frac{p_{n+1}}{p_1}(p_1q_n)}{\Sigma p_1q_n}\Bigg/\frac{\Sigma\frac{p_n}{p_1}(p_1q_{n+1})}{\Sigma p_1q_{n+1}}\gtreqless\frac{\Sigma\frac{p_{n+1}}{p_n}(p_nq_1)}{\Sigma p_nq_1}$$

固然有許多特殊情形, $\frac{R_{n+1}}{R_n}=1$, 即連鎖指數與定基指數有相同之變化。然通常而論,此二指數常不相同。即使在 n 與 n+1 兩時期之物價完全相同,此二指數亦往往不同。

據潘蓀氏之研究,如其重要物品大漲過於其平均數,而下一時期生產雖增,物價仍高,或重要物品大跌過於其平均數,而下一時期生產雖減物價仍詆 (即謂如其通常生產,一年之時間尙不能調整,其時以高價之故生產增加,但尙不足以壓低物價,其他物品以詆價之故生產減少,但尙不足以抬高物價) 則

$$\frac{\Sigma\frac{p_{n+1}}{p_1}(p_1q_n)}{\Sigma p_1q_n}$$ 常較小於

$$\frac{\Sigma\frac{p_n}{p_1}(p_1q_{n+1})}{\Sigma p_1q_{n+1}}$$

蓋前式中之權數 q_n 常小於後式中之權數 q_{n+1} 故也。而

$$\frac{\Sigma \frac{p_{n+1}}{p_n}(p_n q_1)}{\Sigma p_n q_1}$$ 幾等於 1，蓋 p_{n+1} 與 p_n 之值相近也。

換言之，$\frac{R_{n+1}}{R_n}$ 常 <1，而定基指數常大於連鎖指數也。

如其上述之狀態在連續幾年中反覆不已，則此二指數將愈走而愈遠。其差異之程度依照複息定律而進行。

例如有 1, 2, 3 三年，並令其第三年之連鎖指數對定基指數之比爲 R_3，即

$$R_3 = \frac{P_{21} \cdot P_{32}}{P_{31}}$$

假定第四年 p 與 q 之值與第一年相同，第五年之值與第二年相同，第六年之值與第三年相同，則

$$R_6 = \frac{P_{21} \cdot P_{32} \cdot P_{43} \cdot P_{54} \cdot P_{65}}{P_{61}}$$

依上述之假定，$P_{43} = P_{13}$，$P_{54} = P_{21}$，$P_{65} = P_{32}$，

$$P_{61} = P_{31},\ P_{13} = \frac{1}{P_{31}}$$

$$\therefore\ R_6 = \left(\frac{P_{21} \cdot P_{32}}{P_{31}}\right)^2 = (R_3)^2$$

故依潘蓀氏之結論，連鎖指數不甚可靠，除非權數爲常數外，不宜使用。權數如爲常數，則指數可適合循環測驗，而連鎖指數與定基指數合一。

21. 設以 P_{21} 代表時期 1 爲基期而計算時期 2 之物價指數，P_{31} 代表時期 1 爲基期而計算時期 3 之指數，P_{32} 代表時期 2 爲基期而計算時期 3 之指數，若能滿足循環測驗，則 P_{31}/P_{21} 應等於 P_{32}。但在 P_{31}、P_{21} 及 P_{32} 三數值中權數不相同時，一切指數均不能適合此條件。換言之，要使 $P_{31}/P_{21}=P_{32}$，其中權數必相同。例如理想公式，如能適合循環測驗，則應得下列之關係：

$$\left(\frac{\Sigma p_3q_1}{\Sigma p_1q_1}\cdot\frac{\Sigma p_3q_3}{\Sigma p_1q_3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\Sigma p_2q_1}{\Sigma p_1q_1}\cdot\frac{\Sigma p_2q_2}{\Sigma p_1q_2}\cdot\frac{\Sigma p_3q_2}{\Sigma p_2q_2}\cdot\frac{\Sigma p_3q_3}{\Sigma p_2q_3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

即
$$\frac{\Sigma p_3q_1}{\Sigma p_3q_2}=\frac{\Sigma p_2q_1}{\Sigma p_2q_3}\cdot\frac{\Sigma p_1q_3}{\Sigma p_1q_2}$$

此式二邊通常不能相等，故知理想公式不能適合循環測驗。祇有 $q_1=q_2=q_3$ 之時，方可滿足上式之關係。換言之，祇有權數不變之時，始能適合循環測驗。其他各公式亦然。

第十章　直線繫聯

22. 最小平方直線之測定

設有 n 點 $P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots P_n$，其橫坐標為 $X_1, X_2, X_3 \cdots\cdots X_n$，組成 x 數列，其縱坐標為 $Y_1, Y_2, Y_3 \cdots\cdots Y_n$，組成 y 數列，設有直線 L，其方程式為：

$$Y=a+bX$$

令 Yc 為根據上式計算而得之縱坐標，又令 $v=Yc-Y$，則

$$\Sigma v^2=(Yc_1-Y_1)^2+(Yc_2-Y_2)^2+(Yc_3-Y_3)^2+\cdots\cdots+(Yc_n-Y_n)^2$$

Σv^2 之數值隨直線 L 之位置而異，若 Σv^2 為最小，則直線 L 卽為最小二乘直線。欲確定直線 L 之位置，須求 a 與 b 之數值。

$$\Sigma v^2=\Sigma(Yc-Y)^2=\Sigma(a+bX-Y)^2$$

依微積分上極大極小定理：若 Σv^2 為最小，則其對於 a 與 b 之偏引伸函數當均等於零，卽：

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial a}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b}=0$$

但

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial a}=2\Sigma(a+bX-Y)$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b}=2\Sigma(aX+bX^2-XY)$$

$$\therefore \quad \Sigma(a+bX-Y)=0$$

$$\Sigma(aX+bX^2-XY)=0$$

即 $$na+b\Sigma X=\Sigma Y$$

$$a\Sigma X+b\Sigma X^2=\Sigma(XY)$$

依行列式法解之則得:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma Y & \Sigma X\\ \Sigma(XY) & \Sigma X^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \Sigma X\\ \Sigma X & \Sigma X^2\end{vmatrix}}=\frac{\Sigma X^2\Sigma Y-\Sigma X\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}n & \Sigma Y\\ \Sigma X & \Sigma(XY)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \Sigma X\\ \Sigma X & \Sigma X^2\end{vmatrix}}=\frac{n\Sigma(XY)-\Sigma X\Sigma Y}{n\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$

故得 x 數列與 y 數列之繫聯直線方程式如下:

$$Y=\frac{\Sigma X^2\Sigma Y-\Sigma X\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}+\frac{n\Sigma(XY)-\Sigma X\Sigma Y}{n\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}X$$

上式中之 X 與 Y 爲兩數列之各項,若代以 x (x 數列之各項與算術平均數 $\bar{x}$ 之差) 與 y (y 數列之各項與算術平均數 $\bar{y}$ 之差),則可得更簡之方程式如下:

$$y=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}x$$

蓋 $$\Sigma X=n\bar{x}$$

$$\Sigma X^2=\Sigma(\bar{x}+x)^2=n\bar{x}^2+\Sigma x^2$$

$$\Sigma Y=n\bar{y}$$

$$\Sigma(XY)=\Sigma[(\bar{x}+x)(\bar{y}+y)]=n\bar{x}\bar{y}+\Sigma(xy)$$

$$\bar{y}+y=\frac{n\bar{y}(n\bar{x}^2+\Sigma x^2)-n\bar{x}[n\bar{x}\bar{y}+\Sigma(xy)]}{n(n\bar{x}^2+\Sigma x^2)-n^2\bar{x}^2}$$

$$+\frac{n[n\bar{x}\bar{y}+\Sigma(xy)]-n^2\bar{x}\bar{y}}{n(n\bar{x}^2+\Sigma x^2)-n^2\bar{x}^2}(\bar{x}+x)$$

卽　$$\bar{y}+y=\frac{\bar{y}\Sigma x^2-\bar{x}\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}+\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}(\bar{x}+x)$$

卽　$$y=-\frac{\bar{x}\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}+\frac{\bar{x}\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}+\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}x$$

$\therefore$　$$y=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}x$$

x 等於零時 y 亦等於零，故此繫聯直線必經過 $P\left(\frac{\Sigma X}{n},\frac{\Sigma Y}{n}\right)$點。

設 x 數列代表時間，又設 X 爲各年與中間一年相差之年數，(若年數爲奇數)或各年與時期中點相差半年之數(若年數爲偶數)，則

$$\Sigma X=0$$

$$a=\frac{\Sigma X^2\Sigma Y}{n\Sigma X^2}=\frac{\Sigma Y}{n}$$

$$b=\frac{n\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2}=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}$$

而繫聯直線卽變爲長期趨勢直線，故得長期趨勢直線之方程式如下：

$$Y=\frac{\Sigma Y}{n}+\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}X$$

設 $\bar{y}$ 爲 y 數列之算術平均數，而 y 爲 y 數列中各項與 $\bar{y}$ 之差，則

$$\Sigma(XY)=\Sigma[X(\bar{y}+y)]=\bar{y}\Sigma X+\Sigma(Xy)$$

$$\because \quad \Sigma X=0$$

$$\therefore \quad \Sigma(XY)=\Sigma(Xy)$$

故長期趨勢直線之方程式亦可改作如下：

$$Y=\frac{\Sigma Y}{n}+\frac{\Sigma(Xy)}{\Sigma X^2}X$$

23. 根據標準誤求得之繫聯係數與由皮爾生公式求得之繫聯係數其絕對值相同，即：

$$1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}=\frac{[\Sigma(xy)]^2}{n^2\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

x　x 數列之各項與算術平均數之差

y　y 數列之各項與算術平均數之差

n　項數

σ_x　x 數列之標準差

σ_y　y 數列之標準差

S_y　y 數列之標準誤

〔證〕　令 $v=a+bX-Y$

$$\Sigma v^2=\Sigma[v(a+bX-Y)]$$

$$=a\Sigma v+b\Sigma(vX)-\Sigma(vY)$$

但
$$\left.\begin{aligned}\Sigma v&=0\\ \Sigma(vX)&=0\end{aligned}\right\}\text{(甲20)}$$

∴ $$\Sigma v^2=-\Sigma(vY)=-a\Sigma Y-b\Sigma(XY)+\Sigma Y^2$$

∵ $$a=\bar{y}-\frac{\bar{x}\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}$$

$$\Sigma Y=n\bar{y}$$

$$b=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}$$

$$\Sigma(XY)=n\bar{x}\bar{y}+\Sigma(xy)$$

$$\Sigma Y^2=n\bar{y}^2+\Sigma y^2$$

∴ $$\Sigma v^2=-n\bar{y}^2+\frac{n\bar{x}\bar{y}\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}-\frac{n\bar{x}\bar{y}\Sigma(xy)}{\Sigma x^2}-\frac{[\Sigma(xy)]^2}{\Sigma x^2}$$

$$+n\bar{y}^2+\Sigma y^2$$

$$=-\frac{[\Sigma(xy)]^2}{\Sigma x^2}+\Sigma y^2$$

$$\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}=\frac{\frac{\Sigma v^2}{n}}{\frac{\Sigma y^2}{n}}=\frac{\Sigma v^2}{\Sigma y^2}=-\frac{[\Sigma(xy)]^2}{\Sigma x^2\Sigma y^2}+1$$

∴ $$1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}=\frac{[\Sigma(xy)]^2}{\Sigma x^2\Sigma y^2}=\frac{[\Sigma(xy)]^2}{n^2\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

24. 計算繫聯係數可用簡捷法，其公式如下：

$$r=\frac{\Sigma(x'y')-nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-nc_x^2)(\Sigma y'^2-nc_y^2)}}$$

r 繫聯係數

x' x數列之各項與假定平均數之差

y' y數列之各項與假定平均數之差

c_x x數列之算術平均數$\bar{x}$與假定平均數$\bar{x}'$之差

c_y y數列之算術平均數$\bar{y}$與假定平均數$\bar{y}'$之差

n 項數

〔證〕 $\Sigma(x'y')=\Sigma[(x+c_x)(y+c_y)]=\Sigma(xy)+nc_xc_y$

$$\Sigma x'^2=\Sigma x^2+nc_x^2$$

$$\Sigma y'^2=\Sigma y^2+nc_y^2$$

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}=\frac{\Sigma(x'y')-nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-nc_x^2)(\Sigma y'^2-nc_y^2)}}$$

若 $\bar{x}'=\bar{y}'=0$

則 $x'=X$

$y'=Y$

$c_x=\bar{x}$

$c_y=\bar{y}$

$$r=\frac{\Sigma(XY)-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma X^2-n\bar{x}^2)(\Sigma Y^2-n\bar{y}^2)}}$$

若以d'_x與d'_y代表x與y數列之各組與假定平均數所在組相差之組數，i_x與i_y代表x與y數列之組距，c'_x與c'_y代表x與y數列之

算術平均數與假定平均數之差(以組距爲單位),則:

$$\Sigma(x'y')=i_xi_y\Sigma(d'_xd'_y)$$

$$c_xc_y=i_xi_yc'_xc'_y$$

$$c_x^2=i_x^2c'^2_x$$

$$c_y^2=i_y^2c'^2_y$$

$$\Sigma x'^2=i_x^2\Sigma d'^2_x$$

$$\Sigma y'^2=i_y^2\Sigma d'^2_y$$

$$r=\frac{\Sigma(x'y')-nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-nc_x^2)(\Sigma y'^2-nc_y^2)}}$$

$$=\frac{i_xi_y[\Sigma(d'_xd'_y)-nc'_xc'_y]}{i_xi_y\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

$$=\frac{\Sigma(d'_xd'_y)-nc'_xc'_y}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

25. 由繫聯表計算繫聯係數可應用對角線法,其公式如下:

I. 對角線自左下角引至右上角

$$r=\frac{\Sigma d'^2_x+\Sigma d'^2_y-\Sigma d'^2_z+n(c'^2_z-c'^2_x-c'^2_y)}{2\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

II. 對角線自右下角引至左上角

$$r=\frac{\Sigma d'^2_z-\Sigma d'^2_x-\Sigma d'^2_y+n(c'^2_x+c'^2_y-c'^2_z)}{2\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

r　繫聯係數

d'_x x 數列之各組與假定平均數所在組相差之組數

d'_y y 數列之各組與假定平均數所在組相差之組數

d'_z z 數列之各組與假定平均數所在組相差之組數

c'_x x 數列之算術平均數與假定平均數之差(以組距爲單位)

c'_y y 數列之算術平均數與假定平均數之差(以組距爲單位)

c'_z z 數列之算術平均數與假定平均數之差(以組距爲單位)

n 項數

〔註〕 應用對角線法計算聚聯係數時，x與y數列之組距須相等。

〔證〕 I. $Z=Y-X$

$$P_1=\Sigma d'^2_x+\Sigma d'^2_y-\Sigma d'^2_z+n(c'^2_z-c'^2_x-c'^2_y)$$

$$=(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)+(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)-(\Sigma d'^2_z-nc'^2_z)$$

$$=\frac{1}{i^2}(\Sigma x^2+\Sigma y^2-\Sigma z^2)$$

但 $\Sigma z^2=\Sigma x^2+\Sigma y^2-2\Sigma(xy)$

$\therefore$ $P_1=\frac{1}{i^2}\times 2\Sigma(xy)=2[\Sigma(d'_xd'_y)-nc'_xc'_y]$

依(甲24)：

$$r=\frac{\Sigma(d'_xd'_y)-nc'_xc'_y}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

$$=\frac{\frac{P_1}{2}}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

$$=\frac{\Sigma d'^2_x+\Sigma d'^2_y-\Sigma d'^2_z+n(c'^2_z-c'^2_x-c'^2_y)}{2\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

II.　$Z=X+Y$

$$P_2=\Sigma d'^2_z-\Sigma d'^2_x-\Sigma d'^2_y+n(c'^2_x+c'^2_y-c'^2_z)$$

$$=\frac{1}{i^2}(\Sigma z^2-\Sigma x^2-\Sigma y^2)=\frac{1}{i^2}\times 2\Sigma(xy)$$

以下與(I)相似。

26. 計算繫聯係數之時通常以適中一組之中點爲假定平均數，以組距爲單位，故 d' 等於 $-p, -(p-1), \cdots\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots q-1, q$。但用累積頻數法計算繫聯係數之時，則以最小組之下一組中點爲假定平均數。故 x 各組之 d' 爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots s$，y 各組之 d' 爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots t$。設以 $f_{x,y}$ 表示繫聯各組之頻數，則普通之繫聯表當如下列之形式：

d'_y \ d'_x	s	......	......	2	1
t	$f_{s,t}$	......	......	$f_{2,t}$	$f_{1,t}$
......	......	......	......	......	......
......	......	......	......	......	......
2	$f_{s,2}$	......	......	$f_{2,2}$	$f_{1,2}$
1	$f_{s,1}$	......	......	$f_{2,1}$	$f_{1,1}$

由上表可知

$$\Sigma d'_y f_y = \Sigma d'_y f_{x,y} = 1f_{1,1} + 1f_{2,1} + \cdots\cdots + 1f_{s,1}$$
$$+ 2f_{1,2} + 2f_{2,2} + \cdots\cdots + 2f_{s,2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ tf_{1,t} + tf_{2,t} + \cdots\cdots + tf_{s,t}$$

式中 $1f_{1,1}+2f_{1,2}+\cdots\cdots+tf_{1,t}$ 爲第 s 行累積頻數之和，

$1f_{2,1}+2f_{2,2}+\cdots\cdots+tf_{2,t}$ 爲第(s－1)行累積頻數之和，

……………………………………………………

$1f_{s,1}+2f_{s,2}+\cdots\cdots+tf_{s,t}$ 爲第一行累積頻數之和。

∴ $\Sigma d'_y f_y$＝各行累積頻數之和。

同理， $\Sigma d'_x f_x$＝各列累積頻數之和。

而 $$\Sigma d'_x d'_y f_{x,y} = (1\times 1f_{1,1} + 2\times 1f_{2,1} + \cdots\cdots + s\times 1f_{s,1})$$
$$+ (1\times 2f_{1,2} + 2\times 2f_{2,2} + \cdots\cdots + s\times 2f_{s,2})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (1\times tf_{1,t} + 2\times tf_{2,t} + \cdots\cdots + s\times tf_{s,t})$$
$$= 1\times\begin{Bmatrix} 1f_{1,1}+ \\ 2f_{1,2}+ \\ \cdots\cdots+ \\ tf_{1,t} \end{Bmatrix} + 2\times\begin{Bmatrix} 1f_{2,1}+ \\ 2f_{2,2}+ \\ \cdots\cdots+ \\ tf_{2,t} \end{Bmatrix} + \cdots\cdots + s\times\begin{Bmatrix} 1f_{s,1}+ \\ 2f_{s,2}+ \\ \cdots\cdots+ \\ tf_{s,t} \end{Bmatrix}$$
$$= 1\times\boxed{\text{第s行累積頻數和}} + 2\times\boxed{\text{第s－1行累積頻數和}} + \cdots\cdots + s\times\boxed{\text{第一行累積頻數和}}$$

＝行之累積頻數再依列之累積頻數之和。

上法累積係由大而小。若由小而大則以最大組之上一組中點爲假定平均數，故 d'_x 爲 $-1, -2, \cdots\cdots -s$，而 d'_y 爲 $-1, -2, \cdots\cdots -t$。d'_x 與 d'_y 相乘仍爲正號，故上述之方程式仍然適合。依公式 (9)

$$r=\frac{\Sigma(d'_x d'_y)-nc'_x c'_y}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x-nc'^2_x)(\Sigma d'^2_y-nc'^2_y)}}$$

而
$$c'_x=\frac{\Sigma d'_x f_x}{n}=\pm\frac{\Sigma f'_x}{n}\ (\text{附錄甲 } 4)$$

$$c'_y=\frac{\Sigma d'_y f_y}{n}=\pm\frac{\Sigma f'_y}{n}$$

$$\Sigma d'^2_x=2\Sigma f''_x-\Sigma f'_x\ (\text{甲 } 12)$$

$$\Sigma d'^2_y=2\Sigma f''_y-\Sigma f'_y$$

設以 $\Sigma f''_{x,y}$ 表示各行之累積頻數再依各列累積頻數之和，則上式可以變爲

$$r=\frac{\Sigma f''_{x,y}-\dfrac{\Sigma f'_x\Sigma f'_y}{n}}{\sqrt{\left[2\Sigma f''_x-\Sigma f'_x-\dfrac{(\Sigma f'_x)^2}{n}\right]\left[2\Sigma f''_y-\Sigma f'_y-\dfrac{(\Sigma f'_y)^2}{n}\right]}}$$

第十一章 長期趨勢

27. t 個連續自然數(自 1 起)平方之和等於 $\frac{t}{6}(2t+1)(t+1)$。

〔證〕 $\Sigma t^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+t^2$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & \cdots\cdots \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & & \cdots\cdots \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & \cdots\cdots
\end{array}
$$

依數學上定理得:

$$\Sigma t^2=1t+3\times\frac{t(t-1)}{2}+2\times\frac{t(t-1)(t-2)}{2\times3}$$

$$=\frac{t}{6}(6+9t-9+2t^2-6t+4)$$

$$=\frac{t}{6}(2t^2+3t+1)=\frac{t}{6}(2t+1)(t+1)$$

長期趨勢直線之斜度 b 乃以 ΣX^2 除 $\Sigma(XY)$ 而得。若年數 n 爲奇數,則

$$\Sigma X^2=2\Sigma t^2 \qquad \left(t=\frac{n-1}{2}\right)$$

以 t 之值代入 Σt^2,則得

$$\Sigma X^2=2\Sigma t^2=\frac{n-1}{6}\times n\times\frac{n+1}{2}=\frac{n(n-1)(n+1)}{12}$$

28.　t 個連續奇數(自 1 起)平方之和等於$\frac{t}{3}(2t+1)(2t-1)$

〔證〕 $\Sigma t^2=1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+\cdots\cdots\cdots+(2t-1)^2$

1	9	25	49	81	………………
8	16	24	32		………………
8	8	8			………………

依數學上定理得:

$$\Sigma t^2=1t+8\times\frac{t(t-1)}{2}+8\times\frac{t(t-1)(t-2)}{2\times 3}$$

$$=\frac{t}{3}(3+12t-12+4t^2-12t+8)$$

$$=\frac{t}{3}(2t+1)(2t-1)$$

長期趨勢直線之斜度 b 乃以 ΣX^2 除 $\Sigma(XY)$ 而得。若年數 n 為偶數，則

$$\Sigma X^2=2\Sigma t^2 \qquad \left(t=\frac{n}{2}\right)$$

以 t 之值代入 Σt^2，則得

$$\Sigma X^2=2\Sigma t^2=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

29.　求長期趨勢直線之斜度 b 時須先計算 $\Sigma(XY)$。設年數 n 為奇數，$t=\frac{n-1}{2}$，則

$$\Sigma(XY)=t(Y_n-Y_1)+(t-1)(Y_{n-1}-Y_2)$$

$$+(t-2)(Y_{n-2}-Y_3)+\cdots\cdots+2(Y_{\frac{n+5}{2}}-Y_{t-1})$$

$$+1(Y_{\frac{n+3}{2}}-Yt)$$

設年數 n 爲偶數，$t=\frac{n}{2}$，則

$$\Sigma(XY)=(2t-1)(Y_n-Y_1)+(2t-3)(Y_{n-1}-Y_2)$$

$$+(2t-5)\ (Y_{n-2}-Y_3)+\cdots\cdots+3\ (Y_{\frac{n+4}{2}}-Y_{t-1})$$

$$+1\ (Y_{\frac{n+2}{2}}-Y_t)$$

〔證〕 (甲)年數n爲奇數$t=\frac{n-1}{2}$

Y_1	$-t$
Y_2	$-(t-1)$
Y_3	$-(t-2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
Y_{t-1}	-2
Y_t	-1
Y_{t+1}	
$Y_{t+2}=Y_{\frac{n+3}{2}}$	1

$Y_{t+3}=Y_{\frac{n+5}{2}}$	2
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
Y_{n-2}	$t-2$
Y_{n-1}	$t-1$
Y_n	t

$$\Sigma(XY)=tY_n-tY_1+(t-1)Y_{n-1}-(t-1)Y_2$$
$$+(t-2)Y_{n-2}-(t-2)Y_3+\cdots\cdots$$
$$+2Y_{\frac{n+5}{2}}-2Y_{t-1}+1Y_{\frac{n+3}{2}}-1Y_t$$
$$=t(Y_n-Y_1)+(t-1)(Y_{n-1}-Y_2)$$
$$+(t-2)(Y_{n-2}-Y_3)+\cdots\cdots+2\left(Y_{\frac{n+5}{2}}-Y_{t-1}\right)$$
$$+1\left(Y_{\frac{n+3}{2}}-Y_t\right)$$

(乙)年數n為偶數$t=\frac{n}{2}$

Y_1	$-(2t-1)$
Y_2	$-(2t-3)$
Y_3	$-(2t-5)$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
Y_{t-1}	-3

Y_t	-1
$Y_{t+1}=Y_{\frac{n+2}{2}}$	1
$Y_{t+2}=Y_{\frac{n+4}{2}}$	3
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
Y_{n-2}	$2t-5$
Y_{n-1}	$2t-3$
Y_n	$2t-1$

$$\begin{aligned}\Sigma(XY)=&(2t-1)Y_n-(2t-1)Y_1+(2t-3)Y_{n-1}-(2t-3)Y_2\\&+(2t-5)Y_{n-2}-(2t-5)Y_3\\&+\cdots\cdots+3Y_{\frac{n+4}{2}}-3Y_{t-1}+1\,Y_{\frac{n+2}{2}}-1Y_t\\&=(2t-1)(Y_n-Y_1)+(2t-3)(Y_{n-1}-Y_2)\\&+(2t-5)(Y_{n-2}-Y_3)+\cdots\cdots\\&+3(Y_{\frac{n+4}{2}}-Y_{t-1})+1(Y_{\frac{n+2}{2}}-Y_t)\end{aligned}$$

80. 最小平方法二次拋物線之測定

設有n點$P_1,P_2,P_3,\cdots\cdots P_n$，其橫坐標爲$X_1,X_2,X_3,\cdots\cdots X_n$，組成x數列，其縱坐標爲$Y_1,Y_2,Y_3,\cdots\cdots Y_n$，組成y數列，設有二次拋物線R，其方程式爲：

$$Y=a_1+b_1X+c_1X^2$$

令Yc爲根據上式計算而得之縱坐標，又令$v=Yc-Y$，則

$$\Sigma v^2=(Yc_1-Y_1)^2+(Yc_2-Y_2)^2+(Yc_3-Y_3)^2+\cdots\cdots+(Yc_n-Y_n)^2$$

Σv^2 之數值隨拋物線R之位置而異，若Σv^2爲最小，則拋物線R即爲最小平方法二次拋物線。欲確定拋物線R之位置，須求a_1，b_1與c_1之數值。

$$\Sigma v^2=\Sigma(Yc-Y)^2=\Sigma(a_1+b_1X+c_1X^2-Y)^2$$

依微積分上極大極小定理：若Σv^2爲最小，則其對於a_1，b_1與c_1之偏引伸函數當均等於零，即：

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial a_1}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b_1}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial c_1}=0$$

但 $$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial a_1}=2\Sigma(a_1+b_1X+c_1X^2-Y)$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b_1}=2\Sigma(a_1X+b_1X^2+c_1X^3-XY)$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial c_1}=2\Sigma(a_1X^2+b_1X^3+c_1X^4-X^2Y)$$

$$\therefore\Sigma(a_1+b_1X+c_1X^2-Y)=0$$

$$\Sigma(a_1X+b_1X^2+c_1X^3-XY)=0$$

$$\Sigma(a_1X^2+b_1X^3+c_1X^4-X^2Y)=0$$

即 $$na_1+b_1\Sigma X+c_1\Sigma X^2=\Sigma Y$$

$$a_1\Sigma X+b_1\Sigma X^2+c_1\Sigma X^3=\Sigma(XY)$$

$$a_1\Sigma X^2+b_1\Sigma X^3+c_1\Sigma X^4=\Sigma(X^2Y)$$

依行列式法解之,則得:

$$a_1=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma Y & \Sigma X & \Sigma X^2\\ \Sigma(XY) & \Sigma X^2 & \Sigma X^3\\ \Sigma(X^2Y) & \Sigma X^3 & \Sigma X^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \Sigma X & \Sigma X^2\\ \Sigma X & \Sigma X^2 & \Sigma X^3\\ \Sigma X^2 & \Sigma X^3 & \Sigma X^4\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\Sigma X^2\Sigma X^4\Sigma Y+\Sigma X\Sigma X^3\Sigma(X^2Y)+\Sigma X^2\Sigma X^3\Sigma(XY)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^3)^2\Sigma Y-\Sigma X\Sigma X^4\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$b_1=\frac{\begin{vmatrix}n & \Sigma Y & \Sigma X^2\\ \Sigma X & \Sigma(XY) & \Sigma X^3\\ \Sigma X^2 & \Sigma(X^2Y) & \Sigma X^4\end{vmatrix}}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$=\frac{n\Sigma X^4\Sigma(XY)+\Sigma X^2\Sigma X^3\Sigma Y+\Sigma X\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(XY)-n\Sigma X^3\Sigma(X^2Y)-\Sigma X\Sigma X^4\Sigma Y}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}n & \Sigma X & \Sigma Y\\ \Sigma X & \Sigma X^2 & \Sigma(XY)\\ \Sigma X^2 & \Sigma X^3 & \Sigma(X^2Y)\end{vmatrix}}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

$$=\frac{n\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)+\Sigma X\Sigma X^2\Sigma(XY)+\Sigma X\Sigma X^3\Sigma Y-(\Sigma X^2)^2\Sigma Y-n\Sigma X^3\Sigma(XY)-(\Sigma X)^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4+2\Sigma X\Sigma X^2\Sigma X^3-(\Sigma X^2)^3-n(\Sigma X^3)^2-(\Sigma X)^2\Sigma X^4}$$

設 x 數列代表時間,又設X爲各年與中間一年相差之年數,(若年數爲奇數)或各年與時期中點相差半年之數(若年數爲偶數),則:

$\Sigma X=0$

$\Sigma X^3=0$

$$a_1=\frac{\Sigma X^2\Sigma X^4\Sigma Y-(\Sigma X^2)^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^3}=\frac{\Sigma X^4\Sigma Y-\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}$$

$$b_1=\frac{n\Sigma X^4\Sigma(XY)-(\Sigma X^2)^2\Sigma(XY)}{n\Sigma X^2\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^3}=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}$$

$$c_1=\frac{n\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)-(\Sigma X^2)^2\Sigma Y}{n\Sigma X^2\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^3}=\frac{n\Sigma(X^2Y)-\Sigma X^2\Sigma Y}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}$$

設S_y爲標準誤，則

$$S_y^2=\frac{\Sigma v^2}{n}=\frac{\Sigma[v(a_1+b_1X+c_1X^2-Y)]}{n}$$

$$=\frac{a_1\Sigma v+b_1\Sigma(vX)+c_1\Sigma(vX^2)-\Sigma(vY)}{n}$$

但　$\Sigma v=0$

$\Sigma(vX)=0$

$\Sigma(vX^2)=0$

$$\therefore S_y^2=\frac{-\Sigma(vY)}{n}=\frac{-\Sigma(a_1Y+b_1XY+c_1X^2Y-Y^2)}{n}$$

$$=\frac{\Sigma Y^2-a_1\Sigma Y-b_1\Sigma(XY)-c_1\Sigma(X^2Y)}{n}$$

設ρ_{yx}爲y對x之繫聯指數，則

$$\rho_{yx}{}^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}=1-\frac{\frac{\Sigma v^2}{n}}{\frac{\Sigma y^2}{n}}=1-\frac{\Sigma v^2}{\Sigma y^2}$$

(y爲y數列之各項與其算術平均數$\bar{y}$之差)

但$\Sigma y^2=\Sigma Y^2-n\bar{y}^2$

$$\therefore \rho_{yx}^2 = 1 - \frac{\Sigma v^2}{\Sigma Y^2 - n\bar{y}^2} = \frac{\Sigma Y^2 - n\bar{y}^2 + \Sigma(vY)}{\Sigma Y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$= \frac{\Sigma Y^2 - n\bar{y}^2 + a_1\Sigma Y + b_1\Sigma(XY) + c_1\Sigma(X^2Y) - \Sigma Y^2}{\Sigma Y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$= \frac{a_1\Sigma Y + b_1\Sigma(XY) + c_1\Sigma(X^2Y) - n\bar{y}^2}{\Sigma Y^2 - n\bar{y}^2}$$

31.　最小平方法三次拋物線之測定

若(甲30)中之拋物線爲三次拋物線,而其方程式爲:

$Y = a_2 + b_2X + c_2X^2 + d_2X^3$

則$\Sigma v^2 = \Sigma(Yc - Y)^2 = \Sigma(a_2 + b_2X + c_2X^2 + d_2X^3 - Y)^2$

依微積分上極大極小定理:若Σv^2爲最小,則

$$\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial b_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial c_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial d_2} = 0$$

$\therefore$　$\Sigma(a_2 + b_2X + c_2X^2 + d_2X^3 - Y) = 0$

$\Sigma(a_2X + b_2X^2 + c_2X^3 + d_2X^4 - XY) = 0$

$\Sigma(a_2X^2 + b_2X^3 + c_2X^4 + d_2X^5 - X^2Y) = 0$

$\Sigma(a_2X^3 + b_2X^4 + c_2X^5 + d_2X^6 - X^3Y) = 0$

即　$na_2 + b_2\Sigma X + c_2\Sigma X^2 + d_2\Sigma X^3 = \Sigma Y$

$$a_2\Sigma X+b_2\Sigma X^2+c_2\Sigma X^3+d_2\Sigma X^4=\Sigma(XY)$$

$$a_2\Sigma X^2+b_2\Sigma X^3+c_2\Sigma X^4+d_2\Sigma X^5=\Sigma(X^2Y)$$

$$a_2\Sigma X^3+b_2\Sigma X^4+c_2\Sigma X^5+d_2\Sigma X^6=\Sigma(X^3Y)$$

設 x 數列代表時間，又設 X 爲各年與中間一年相差之年數（若年數爲奇數）或各年與時期中點相差半年之數（若年數爲偶數），則

$$\Sigma X=0$$

$$\Sigma X^3=0$$

$$\Sigma X^5=0$$

以上四式將化如下式：

$$na_2+c_2\Sigma X^2=\Sigma Y$$

$$b_2\Sigma X^2+d_2\Sigma X^4=\Sigma(XY)$$

$$a_2\Sigma X^2+c_2\Sigma X^4=\Sigma(X^2Y)$$

$$b_2\Sigma X^4+d_2\Sigma X^6=\Sigma(X^3Y)$$

依行列式法解之，則得：

$$a_2=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma Y & \Sigma X^2\\ \Sigma(X^2Y) & \Sigma X^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \Sigma X^2\\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4\end{vmatrix}}=\frac{\Sigma X^4\Sigma Y-\Sigma X^2\Sigma(X^2Y)}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}n & \Sigma Y\\ \Sigma X^2 & \Sigma(X^2Y)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \Sigma X^2\\ \Sigma X^2 & \Sigma X^4\end{vmatrix}}=\frac{n\Sigma(X^2Y)-\Sigma X^2\Sigma Y}{n\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2}$$

$$b_2=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma(XY) & \Sigma X^4\\ \Sigma(X^3Y) & \Sigma X^6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma X^2 & \Sigma X^4\\ \Sigma X^4 & \Sigma X^6\end{vmatrix}}=\frac{\Sigma X^6\Sigma(XY)-\Sigma X^4\Sigma(X^3Y)}{\Sigma X^2\Sigma X^6-(\Sigma X^4)^2}$$

$$d_2=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma X^2 & \Sigma(XY)\\ \Sigma X^4 & \Sigma(X^3Y)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma X^2 & \Sigma X^4\\ \Sigma X^4 & \Sigma X^6\end{vmatrix}}=\frac{\Sigma X^2\Sigma(X^3Y)-\Sigma X^4\Sigma(XY)}{\Sigma X^2\Sigma X^6-(\Sigma X^4)^2}$$

第十五章　非直線繫聯

82. 從x繫聯比可自下之公式求得:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

η_{yx}　從x繫聯比。

σ_y　y數列之標準差。

σ_{my}　各行算術平均數對於$\bar{y}$(y數列之算術平均數)之標準差。

〔證〕 分全部數列爲二部,令n_1,$\bar{y}_1$與σ_1爲第一部之項數,算術平均數與標準差,n_2,$\bar{y}_2$與σ_2爲第二部之項數,算術平均數與標準差,設

$$n=n_1+n_2$$

$$c_1=\bar{y}-\bar{y}_1$$

$$c_2=\bar{y}-\bar{y}_2$$

又設S_1與S_2爲第一部各項與第二部各項對於$\bar{y}$之標準差,則

$$S_1^2=\sigma_1^2+c_1^2$$

$$S_2^2=\sigma_2^2+c_2^2$$

但　$n\sigma^2_y=n_1S_1^2+n_2S_2^2$

$\therefore$　$n\sigma_y^2=n_1(\sigma_1^2+c_1^2)+n_2(\sigma_2^2+c_2^2)$

同理,設分全部數列爲t部,則

$$n\sigma_y^2=n_1(\sigma_1^2+c_1^2)+n_2(\sigma_2^2+c_2^2)+n_3(\sigma_3^2+c_3^2)+\cdots\cdots +n_t(\sigma_t^2+c_t^2)=\Sigma(n\sigma^2)+\Sigma(nc^2)$$

在繫聯表中$\Sigma(n\sigma^2)$即爲y數列中各項與各行算術平均數相差各平方之和，故設σ_{ay}爲y數列中各項對於各行算術平均數之標準差，則

$$\Sigma(n\sigma^2)=n\sigma_{ay}^2$$

σ_{my}爲各行算術平均數（即$\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3,,\cdots\cdots\bar{y}_t$）對於$\bar{y}$之標準差，

故　$\Sigma(nc^2)=n\sigma^2_{my}$

$\therefore$　$n\sigma^2_y=n\sigma^2_{ay}+n\sigma^2_{my}$

即　$\sigma^2_y-\sigma^2_{ay}=\sigma^2_{my}$

$$\therefore\quad \eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}}$$

$$\therefore\quad \eta_{yx}=\sqrt{\frac{\sigma_y^2-\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}}=\sqrt{\frac{\sigma^2_{my}}{\sigma_y^2}}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

第十六章 他種繫聯

33. 等級繫聯係數可自下列公式求得:

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(v_x-v_y)^2}{n(n^2-1)}$$

ρ 等級繫聯係數

v_x x 數列中各項之等級

v_y y 數列中各項之等級

n 項數

〔證〕 設 $\bar{v}_x$ 與 σv_x 爲 x 數列中各項等級之算術平均數與標準差，$\bar{v}_y$ 與 σv_y 爲 y 數列中各項等級之算術平均數與標準差，則

$$\bar{v}_x=\bar{v}_y=\frac{n+1}{2}$$

$$\sigma v_x=\sigma v_y$$

$$n\sigma^2 v_x=\Sigma(v_x-\bar{v}_x)^2=\Sigma v^2{}_x-2\bar{v}_x\Sigma v_x+n\bar{v}^2{}_x$$

但 $\Sigma v^2{}_x=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$(參看甲 27)

$\Sigma v_x=\frac{n(n+1)}{2}$ (等差級數之和)

$$\therefore\ n\sigma^2 v_x=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)^2}{4}=\frac{1}{12}(n^3-n)$$

即 $\sigma^2 v_x=\frac{1}{12}(n^2-1)$

設 σ_x, σ_y 與 $\sigma_{(x-y)}$ 爲 x 數列, y 數列與 (x−y) 數列之標準差而 r 爲 x 數列與 y 數列之繫聯係數，則

$$r=\frac{\sigma^2{}_x+\sigma^2{}_y{}^2-\sigma_{(x-y)}}{2\sigma_x\sigma_y}$$ (證明與甲 25 相似)

但在等級繫聯其繫聯係數常以 ρ 表之，故

$$\rho=\frac{\sigma^2 v_x+\sigma^2 v_y-\frac{\Sigma(v_x-v_y)^2}{n}}{2\sigma v_x \sigma v_y}$$

$\because$　$\sigma v_x=\sigma v_y$

$$\therefore\quad \rho=\frac{2\sigma^2 v_x}{2\sigma^2 v_x}-\frac{\Sigma(v_x-v_y)^2}{2n\sigma^2 v_x}=1-\frac{6\Sigma(v_x-v_y)^2}{n(n^2-1)}$$

34. 如其兩數列之等級完全相同，則 $\Sigma(v_x-v_y)^2=0$，是爲絕對正槃聯。但亦有絕對負槃聯，在一數列之等級適與他一數列之等級相反，而 $\rho=-1$。

〔證〕 若n爲奇數，則

$$\begin{aligned}\Sigma(v_x-v_y)^2&=2[(n-1)^2+(n-3)^2+\cdots\cdots+4^2+2^2+0]\\&=8\left[\frac{(n-1)^2}{4}+\frac{(n-3)^2}{4}+\cdots\cdots+9+4+1+0\right]\\&=8\left[1+2^2+3^2+\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]\\&=8\times\frac{1}{6}\times\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(2\times\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{1}{3}n(n^2-1)\end{aligned}$$

若n爲偶數，則

$$\begin{aligned}\Sigma(v_x-v_y)^2&=2[(n-1)^2+(n-3)^2+\cdots\cdots+25+9+1]\\&=2[(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+\cdots\cdots+25+16+9\\&\qquad+4+1]-2[(n-2)^2+\cdots\cdots+36+16+4]\\&=2\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-8\left[1+4+9+\cdots+\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{3}n(n-1)(2n-1)-\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)=\frac{1}{3}n(n^2-1)\end{aligned}$$

無論n爲奇數或偶數，$\Sigma(v_x-v_y)^2=\frac{1}{3}n(n^2-1)$

$$\therefore\quad \rho=1-\frac{6\times\frac{1}{3}n(n^2-1)}{n(n^2-1)}=-1.$$

第十八章　響應

35. 若因變量 X_1 與自變量 X_2, X_3, X_4 各有直線關係，則其響應方程式可書之如下:

$$X_1 = a + b_{12.34}\ X_2 + b_{13.24}\ X_3 + b_{14.23}\ X_4$$

$$b_{12.34} = \frac{\Delta_{12\cdot 34}}{\Delta}$$

$$b_{13.24} = \frac{\Delta_{13\cdot 24}}{\Delta}$$

$$b_{14.23} = \frac{\Delta_{14\cdot 23}}{\Delta}$$

$$\Delta = \sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2 + 2p_{23}p_{34}p_{24} - \sigma_3^2 p^2_{24} - \sigma_2^2 p^2_{34} - \sigma_4^2 p^2_{23}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12\cdot 34} &= \sigma_3^2\sigma_4^2 p_{12} + p_{23}p_{34}p_{14} + p_{24}p_{13}p_{34} \\ &\quad - \sigma_3^2 p_{14}p_{24} - p_{12}p^2_{34} - \sigma_4^2 p_{13}p_{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{13\cdot 24} &= \sigma_2^2\sigma_4^2 p_{13} + p_{12}p_{34}p_{24} + p_{24}p_{23}p_{14} \\ &\quad - p_{13}p^2_{24} - \sigma_2^2 p_{34}p_{14} - \sigma_4^2 p_{23}p_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{14\cdot 23} &= \sigma_2^2\sigma_3^2 p_{14} + p_{23}p_{13}p_{24} + p_{12}p_{23}p_{34} \\ &\quad - \sigma_3^2 p_{12}p_{24} - \sigma_2^2 p_{13}p_{34} - p_{14}p^2_{23}\end{aligned}$$

$$a = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 b_{12.34} - \bar{x}_3 b_{13.24} - \bar{x}_4 p_{14.23}$$

$\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 爲 X_2, X_3, X_4 之標準差

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ 爲 $X_1, X_2 X_3, X_4$ 之算術平均數

$$p_{12}=\frac{\Sigma(x_1x_2)}{n}$$

$x_1=X_1-\bar{x}_1$

$x_2=X_2-\bar{x}_2$

n 項數

$p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ 之定義與 p_{12} 相似

〔證〕 令 $v=X_1-(a+b_{12.34}X_2+b_{13.24}X_3+b_{14.23}X_4)$

依最小平方法定理 Σv^2 若爲最小，則

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial a}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b_{12.34}}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b_{13.24}}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma v^2}{\partial b_{14.23}}=0$$

卽 $\Sigma X_1-\Sigma(a+b_{12.34}X_2+b_{13.24}X_3+b_{14.23}X_4)=0$

$$\Sigma(X_1X_2)-\Sigma(aX_2+b_{12.34}X_2{}^2+b_{13.24}X_2X_3+b_{14.23}X_2X_4)=0$$

$$\Sigma(X_1X_3)-\Sigma(aX_3+b_{12.34}X_2X_3+b_{13.24}X_3{}^2+b_{14.23}X_3X_4)=0$$

$$\Sigma(X_1X_4)-\Sigma(aX_4+b_{12.34}X_2X_4+b_{13.24}X_3X_4+b_{14.23}X_4{}^2)=0$$

即　$na+b_{12.34}\Sigma X_2+b_{13.24}\Sigma X_3+b_{14.23}\Sigma X_4=\Sigma X_1$

$a\Sigma X_2+b_{12.34}\Sigma X_2^2+b_{13.24}\Sigma(X_2X_3)$

$\quad+b_{14.23}\Sigma(X_2X_4)=\Sigma(X_1X_2)$

$a\Sigma X_3+b_{12.34}\Sigma(X_2X_3)+b_{13.24}\Sigma X_3^2$

$\quad+b_{14.23}\Sigma(X_3X_4)=\Sigma(X_1X_3)$

$a\Sigma X_4+b_{12.34}\Sigma(X_2X_4)+b_{13.24}\Sigma(X_3X_4)$

$\quad+b_{14.23}\Sigma X_4^2=\Sigma(X_1X_4)$

但　$\Sigma X_1=n\bar{x}_1$

$\Sigma X_2=n\bar{x}_2$

$\Sigma X_3=n\bar{x}_3$

$\Sigma X_4=n\bar{x}_4$

$\Sigma X_2^2=n(\sigma_2^2+\bar{x}_2^2)$

$\Sigma X_3^2=n(\sigma_3^2+\bar{x}_3^2)$

$\Sigma X_4^2=n(\sigma_4^2+\bar{x}_4^2)$

$\Sigma(X_1X_2)=\Sigma(x_1x_2)+n\bar{x}_1\bar{x}_2=n(p_{12}+\bar{x}_1\bar{x}_2)$

$\Sigma(X_1X_3)=n(p_{13}+\bar{x}_1\bar{x}_3)$

$\Sigma(X_1X_4)=n(p_{14}+\bar{x}_1\bar{x}_4)$

$\Sigma(X_2X_3)=n(p_{23}+\bar{x}_2\bar{x}_3)$

$\Sigma(X_2X_4)=n(p_{24}+\bar{x}_2\bar{x}_4)$

$\Sigma(X_3X_4)=n(p_{34}+\bar{x}_3\bar{x}_4)$

以之代入上式則得:

$a=\bar{x}_1-\bar{x}_2b_{12.34}-\bar{x}_3b_{13.24}-\bar{x}_4b_{14.23}$

$$\sigma_2^2 b_{12.34} + p_{23} b_{13.24} + p_{24} b_{14.23} = p_{12}$$

$$p_{23} b_{12.34} + \sigma_3^2 b_{13.24} + p_{34} b_{14.23} = p_{13}$$

$$p_{24} b_{12.34} + p_{34} b_{13.24} + \sigma_4^2 b_{14.23} = p_{14}$$

令 $b_{12.34} = \dfrac{\Delta_{12.34}}{\Delta}$

$$b_{13.24} = \frac{\Delta_{13.24}}{\Delta}$$

$$b_{14.23} = \frac{\Delta_{14.23}}{\Delta}$$

依行列式法解之則得

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & p_{23} & p_{24} \\ p_{23} & \sigma_3^2 & p_{34} \\ p_{24} & p_{34} & \sigma_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2 + 2p_{23}p_{34}p_{24} - \sigma_3^2 p_{24}^2 - \sigma_2^2 p_{34}^2 - \sigma_4^2 p_{23}^2$$

$$\Delta_{12.34} = \begin{vmatrix} p_{12} & p_{23} & p_{24} \\ p_{13} & \sigma_3^2 & p_{34} \\ p_{14} & p_{34} & \sigma_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_3^2\sigma_4^2 p_{12} + p_{23}p_{34}p_{14} + p_{24}p_{13}p_{34}$$

$$- \sigma_3^2 p_{14}p_{24} - p_{12}p_{34}^2 - \sigma_4^2 p_{13}p_{23}$$

$$\Delta_{13.24} = \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & p_{12} & p_{24} \\ p_{23} & p_{13} & p_{34} \\ p_{24} & p_{14} & \sigma_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_2^2\sigma_4^2 p_{13} + p_{12}p_{34}p_{24} + p_{24}p_{23}p_{14}$$

$$-p_{13}p_{24}^{2}-\sigma_2^{2}p_{34}p_{14}-\sigma_4^{2}p_{23}p_{12}$$

$$\Delta_{14.23}=\begin{vmatrix}\sigma_2^2 & p_{23} & p_{12}\\ p_{23} & \sigma_3^2 & p_{13}\\ p_{24} & p_{34} & p_{14}\end{vmatrix}$$

$$=\sigma_2^2\sigma_3^2p_{14}+p_{23}p_{13}p_{24}+p_{12}p_{23}p_{34}$$

$$-\sigma_3^2p_{12}p_{24}-\sigma_2^2p_{13}p_{34}-p_{14}p^2_{23}$$

設 $S_{1.234}$ 爲 X_1 對 X_2,X_3 與 X_4 之標準誤，則

$$S^2_{1.234}=\frac{\Sigma v^2}{n}=\frac{\Sigma[v(X_1-a-b_{12.34}X_2-b_{13.24}X_3-b_{14.23}X_4)]}{n}$$

$$=\frac{\Sigma(vX_1)-a\Sigma v-b_{12.34}\Sigma(vX_2)-b_{13.24}\Sigma(vX_3)-b_{14.23}\Sigma vX_4)}{n}$$

$\because$ $\Sigma v=0$

$\Sigma(vX_2)=0$

$\Sigma(vX_3)=0$

$\Sigma(vX_4)=0$

$$\therefore S^2_{1.234}=\frac{\Sigma(vX_1)}{n}=\frac{\Sigma[X_1(X_1-a-b_{12.34}X_2-b_{13.24}X_3-b_{14.23}X_4)]}{n}$$

$$=\frac{\Sigma X_1^2-a\Sigma X_1-b_{12.34}\Sigma(X_1X_2)-b_{13.24}\Sigma(X_1X_3)-b_{14.23}\Sigma(X_1X_4)}{n}$$

$$=\sigma_1^2+\bar{x}_1^2-\bar{x}_1(\bar{x}_1-\bar{x}_2b_{12.34}-\bar{x}_3b_{13.24}-\bar{x}_4b_{14.23})-p_{12}b_{12.34}$$

$$-\bar{x}_1\bar{x}_2b_{12.34}-p_{13}b_{13.24}-\bar{x}_1\bar{x}_3b_{13.24}-p_{14}b_{14.23}-\bar{x}_1\bar{x}_4b_{14.23}$$

$$=\sigma_1^2-p_{12}b_{12.34}-p_{13}b_{13.24}-p_{14}b_{14.23}$$

若自變量祇有二個，則

$$X_1=a+b_{12.3}X_2+b_{13.2}X_3$$

$$a=\bar{x}_1-\bar{x}_2b_{12.3}-\bar{x}_3b_{13.2}$$

$$b_{12.3}=\frac{\Delta 12.3}{\Delta}$$

$$b_{13.2}=\frac{\Delta 13.2}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sigma_2^2 & p_{23}\\ p_{23} & \sigma_3^2\end{vmatrix}=\sigma_2^2\sigma_3^2-p^2_{23}$$

$$\Delta 12.3=\begin{vmatrix}p_{12} & p_{23}\\ p_{13} & \sigma_3^2\end{vmatrix}=\sigma_3^2p_{12}-p_{13}p_{23}$$

$$\Delta 13.2=\begin{vmatrix}\sigma_2^2 & p_{12}\\ p_{23} & p_{13}\end{vmatrix}=\sigma_2^2p_{13}-p_{12}p_{23}$$

以 x_1 與 x_2 代入響應方程式則得:

$$x_1=b_{12.3}x_2+b_{13.2}x_3$$

設 $S_{1.23}$ 爲 X_1 對 X_2 與 X_3 之標準誤,則

$$S^2_{1.23}=\frac{\Sigma[X_1(X_1-a-b_{12.3}X_2-b_{13.2}X_3)]}{n}$$

$$=\sigma_1^2+\bar{x}_1^2-\bar{x}_1^2+\bar{x}_1\bar{x}_2b_{12.3}+\bar{x}_1\bar{x}_3b_{13.2}$$

$$-p_{12}b_{12.3}-\bar{x}_1\bar{x}_2b_{12.3}-p_{13}b_{13.2}-\bar{x}_1\bar{x}_3b_{13.2}$$

$$=\sigma_1^2-p_{12}b_{12.3}-p_{13}b_{13.2}$$

附錄乙　統計習題

第一章　緒論

1. 試述統計學之定義!
2. 試述統計方法之程序!
3. 解釋下列各名詞:
   a. 計數。
   b. 估量。
   c. 抽樣。
4. 解釋下列各法則:
   a. 統計常態之法則。
   b. 小數永存之法則。
   c. 大量惰性之法則。
5. 試述統計學之應用及其誤用!

第二章 統計表

6. 統計表有何功用?

7. 區別下列各名詞:

 a. 科學的分類與非科學的分類。

 b. 歷史的分類,地理的分類,性質的分類與數量的分類。

 c. 總表與摘要表。

 d. 時間數列,空間數列與質量數列。

 e. 連續數列,非連續數列與近似連續數列。

 f. 普通頻數表與分組頻數表。

 g. 外表組限與實際組限。

 h. 簡單頻數表與累積頻數表。

 i. 較小制累積頻數表與較大制累積頻數表。

8. 解釋下列各名詞:

 a. 特性。

 b. 變量。

 c. 統計數列。

 d. 頻數。

 e. 頻數分配。

 f. 組距。

g. 組限。

h. 上限。

i. 下限。

j. 組中點。

9. 組距應否相等?試論之!

10. 組限之選擇應以何者爲標準?其表示之方法如何?

11. 累積頻數表中各組之累積頻數有何意義?試舉例以明之!

12. 試製三項表!

13. 就上星期上海金業交易所之標金行情製一分組頻數表!

14. 由A表中之上海小麥按月平均價編製分組頻數表:

a. 組距爲半元。

b. 組距爲二角。

A. 民國元年至十七年上海小麥按月平均價(單位爲一元)

年別＼月別	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
元　年	4.56	4.65	4.50	4.34	4.53	4.39	4.22	4.13	4.23	4.01	4.06	4.21
二　年	4.93	4.81	5.10	5.17	4.43	4.53	3.63	3.67	4.07	4.50	4.87	4.80
三　年	4.35	5.05	4.98	4.87	4.60	3.75	4.75	4.95	5.10	5.50	6.00	5.95
四　年	5.85	5.93	6.26	6.05	5.42	5.22	5.17	5.26	5.74	5.59	4.54	4.71
五　年	5.15	4.32	4.30	4.16	4.14	3.74	4.00	4.05	3.97	3.98	3.85	3.76
六　年	4.34	3.91	5.65	5.65	5.85	4.21	3.53	3.70	4.54*	5.37	3.72	5.10
七　年	5.10	5.00	4.43*	4.43*	3.86	4.45	4.58*	4.70	4.73	4.63	4.50	4.50
八　年	4.55	4.55	4.53	4.37	3.05	3.18	3.40	3.40	3.59	3.52	3.82	3.77
九　年	4.50	4.48	4.38	4.70	3.97	3.97	4.29	4.00	4.37	3.94	3.72	3.87
十　年	4.82	4.86	5.13	4.94	3.91	4.55	4.41	4.49	5.21	5.42	5.13	5.31
十一年	5.12	5.07	5.97	5.02	4.72	4.53	4.90	4.54	4.96	5.33	5.53	5.50
十二年	5.73	6.01	5.76	5.19	4.03	5.02	4.92	5.00	5.41	5.08	4.85	4.66
十三年	5.56	4.80	4.37	3.99	4.28	4.41	4.58	4.91	4.74	4.90	5.12	5.40
十四年	5.60	5.83	6.02	6.34	5.85	5.20	5.11	5.38	5.60	5.63	6.16	6.35
十五年	6.67	6.81	6.67	6.49	5.93	5.76	5.81	5.84	5.79	6.61	6.74	6.52
十六年	6.51	6.59	6.49	6.45	6.68	6.46	5.82	6.06	6.13	5.83	5.84	5.83
十七年	5.85	6.30	6.60	6.35	6.01	5.22	4.91	4.79	5.25	5.77	5.66	6.05

[註一] *該月無市,用前後兩月平均價代之。

〔註二〕 資料來源：上海特別市社會局所編社會月刊第一卷第三號。

15. 由第13題中之分組頻數表製：

 a. 較小制累積頻數表。

 b. 較大制累積頻數表。

16. 由第14題中之分組頻數表製累積頻數表！

第三章　統計圖

17. 試述統計圖之功用及製圖之主要原則!

18. 統計圖如何分類?

19. 解釋下列各名詞:

    a. 度點。

    b. 指線。

    c. 像形圖。

    d. 角曲線。

    e. 修勻曲線。

    f. 四分點統計地圖。

20. 區別下列各名詞:

    a. 算術圖與單對數圖。

    b. 歷史線圖與頻數線圖。

21. 修勻曲線與角曲線之最高點應否一致?試論之!

22. 頻數曲線之修勻有何規則?

23. 統計地圖有何效用?

24. 根據B表中之統計製民國十九年及二十年我國輸入貨值按國比較圖!

B. 民國十九年及二十年由各國輸入我國貨值總額按國比較表(單位:1000海關兩)

國別	民國十九年	民國二十年
美國	232,406	321,342
日本及臺灣	327,165	295,727
香港	218,370	222,077
英國	108,258	119,986
印度	132,168	85,186
德國	69,105	83,514
其他各國	240,760	320,355

[註] 資料來源:民國二十年海關中外貿易統計年刊下卷卷一。

25. 製民國二十一年我國輸往外國茶量按國按類比較圖!(查民國二十一年海關中外貿易統計年刊下卷卷二。)

26. 根據C表中之統計製民國二十年各省棉花種植面積比較圖!

a. 條形圖。

b. 圓形圖。

C. 民國二十年各省棉花種植面積表

省別	單位千畝
遼寧	1145
河北	2953
山東	5219
山西	359
河南	1821
陝西	1424
江蘇	8336
浙江	1818
安徽	531
江西	266
湖北	10424
湖南	1173

[註] 資料來源:上海紗廠聯合會報告。

27. 根據D表中之統計，製最近二十年(民國元年至二十年)由外國輸入我國貨值淨額按年比較圖！

D. 最近二十年(民國元年至二十年)我國輸出入值按年比較表(單位:百萬海關兩)

年別	輸出值總額	輸入值淨額
元年	371	473
二年	403	570
三年	356	569
四年	419	454
五年	482	516
六年	463	550
七年	486	555
八年	631	647
九年	542	762
十年	601	906
十一年	655	945
十二年	753	923
十三年	772	1,018
十四年	776	948
十五年	864	1,124
十六年	919	1,013
十七年	991	1,196
十八年	1,016	1,266
十九年	895	1,310
二十年	909	1,433

[註] 資料來源：最近中國對外貿易統計圖解(中國銀行出版)及民國二十年海關中外貿易統計月刊上卷。

28. 根據第十三題中之分組頻數表製：

a. 頻數線圖。

b. 累積頻數曲線圖。

29. 根據第十四題中之分組頻數表製：

a. 直方圖。

b. 頻數線圖。

c. 修勻曲線。

〔註〕須畫在同一圖上。

30. 根據E表中之統計製最近二十年（民國元年至二十年）我國輸往外國蛋產品量按年比較圖！

a. 算術圖。

b. 單對數圖。

E. 最近二十年（民國元年至二十年）我國輸往外國蛋產品量按年比較表

年別	輸出量(千擔)	年別	輸出量(千擔)
元年	125	十一年	432
二年	156	十二年	378
三年	132	十三年	458
四年	191	十四年	1,004
五年	288	十五年	994
六年	405	十六年	756
七年	289	十七年	951
八年	606	十八年	1,135
九年	423	十九年	1,150
十年	393	二十年	995

〔註〕資料來源：與D表同。

31. 根據F表中之統計製最近二十年（民國元年至二十年）我國由荷屬東印度與日本(包含臺灣)輸入糖量按年比較圖！

F. 最近二十年(民國元年至二十年)我國由荷屬東印度及日本(包含臺灣)輸入糖量按年比較表(單位:千擔)

年　別	由荷屬東印度輸入	由日本(包含臺灣)輸入
元　年	436	880
二　年	809	1,670
三　年	601	1,346
四　年	373	1,013
五　年	164	1,382
六　年	53	2,260
七　年	290	2,434
八　年	372	1,355
九　年	109	663
十　年	516	938
十一年	676	1,674
十二年	435	1,210
十三年	1,290	2,350
十四年	3,821	2,829
十五年	2,941	3,050
十六年	2,791	2,694
十七年	5,180	3,559
十八年	6,070	2,918
十九年	4,181	3,176
二十年	3,339	2,812

〔註〕資料來源:與D表同。

32. 根據G表中之統計製最近二十年(民國二年至二十一年)華北香片茶葉與香片茶末之平均批發物價按年比較圖!

G. 最近二十年(民國二年至二十一年)華北香片茶葉與香片茶末之平均批發物價按年比較表

年別	香片茶葉 (百斤)	香片茶末 (百斤)
二年	$ 43.20	$ 7.20
三年	44.30	7.55
四年	45.68	7.83
五年	43.67	7.13
六年	46.50	7.99
七年	46.89	8.37
八年	47.35	8.61
九年	49.23	8.98
十年	50.61	9.40
十一年	52.16	10.14
十二年	53.76	10.90
十三年	49.57	10.21
十四年	54.99	11.57
十五年	58.36	13.13
十六年	60.81	15.20
十七年	68.98	13.46
十八年	96.15	18.00
十九年	119.03	19.83
二十年	125.00	21.02
廿一年	115.33	30.74

[註] 資料來源:經濟統計季刊第二卷第一期(南開大學出版)。

第四章　平均數

33. 試述平均數之定義及其分類！

34. 單純平均數與加權平均數有何區別？

35. 算術平均數中位數與衆數有何關係？

36. 有時一數列之衆數不止一個，其故安在？

37. 求證：

$$\Sigma(X-\bar{x})=0$$

X　變量之數值

$\bar{x}$　算術平均數

38. 幾何平均數與倒數平均數有何效用？

39. 由第十三題中之分組頻數表求算術平均數！

a. 應用簡捷法

b. 應用累積頻數法

40. 由第十四題中之分組頻數表求：

a. 算術平均數。

b. 中位數。

c. 第一四分位數。

d. 第三四分位數。

e. 第五十分位數。

f. 第三十七百分位數。

41. 求昨日上海金業交易所所開標金行情之算術平均數與中位數！(不必製成分組頻數表)

42. 由第二十八題中之累積頻數曲線圖求：

a. 中位數。

b. 第一四分位數。

c. 第三四分位數。

43. 由下表求算術平均數：

a. 應用簡捷法。

b. 應用累積頻數法。

AA. 上海三百零五家工人家庭每年收入分配表

每年收入	家數
$ 200——300	62
300——400	95
400——500	80
500——600	31
600——700	25
700——800	8
800——900	4

〔註〕 資料來源：民國十五年至二十年上海市工人生活費指數（上海市政府社會局出版）。

44. 由下表求：

a. 衆數。

b. 算術平均數。

c． 中位數。

A B． 美國某鞋廠工人每週收入分配表

每週收入	工人人數
$　0 —— 2.49	3
2.50—— 4.99	12
5.00—— 7.49	17
7.50—— 9.99	48
10.00——12.49	61
12.50——14.99	76
15.00——17.49	103
17.50——19.99	118
20.00——22.49	99
22.50——24.99	84
25.00——27.49	85
27.50——29.99	61
30.00——32.49	53
32.50——34.99	47
35.00——37.49	50
37.50——39.99	26
40.00——42.49	15
42.50——44.99	8
45.00——47.49	4
47.50——49.99	1
50.00——52.49	1

［註］ 資料來源：郤獨克所編之統計方法習題。

45. 將A B表之組距改爲五元(第一組定爲$0－4.99)重製一分組頻數表,並由此表求：

a． 衆數。

b． 算術平均數。

c． 中位數。

d. 第一四分位數。

46. 某校分甲,乙,丙三級,甲級學生七十八人,平均成績七十五分,乙級學生六十九人,平均成績六十八分,丙級學生八十四人,平均成績六十五分,求全校學生之平均成績!

47. 求下列十數之幾何平均數與倒數平均數:

58,56,54,58,63,65,68,62,59,60.

第五章　離中趨勢

48. 試略述離中趨勢之意義及其測定之方法!

49. 試略述各種離中差之關係!

50. 解釋下列名詞:

  a. 全距。

  b. 四分位差。

  c. 相互平均差。

51. 離中差與離中係數有何區別?

52. 求證:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}-c^2}$$

  σ 標準差。

  n 項數。

  x' 各項與假定平均數之差。

  c 算術平均數與假定平均數之差。

53. 由昨日上海金業交易所所開之標金行情,求:

  a. 平均差與平均差係數;

  b. 標準差與標準差係數;

  c. 相互平均差與相互平均差係數。

54. 由第十三題中之分組頻數表,求:

a. 四分位差與四分位差係數;

b. 平均差與平均差係數;

c. 標準差與標準差係數;

d. 相互平均差與相互平均差係數。

55. 由第十四題中之分組頻數表,求標準差與標準差係數!

a. 應用簡捷法。

b. 應用累積頻數法。

56. 由AA.表,求:

a. 四分位差與四分位差係數;

b. 平均差與平均差係數;

c. 標準差與標準差係數;

d. 相互平均差與相互平均差係數。

57. 由AB.表:

a. 用普通法求平均差;

b. 用簡捷法求平均差;

c. 用簡捷法求標準差;

d. 用累積頻數法求標準差。

第六章　機率與差誤正態曲線

58. 解釋下列各名詞：

a. 機率。

b 互相排斥事件。

c. 獨立事件。

d. 差誤正態曲線。

e. 機差。

f. 標準誤。

59. 何謂機率之加法與乘法?試各舉二例以明之!

60. 區別下列各名詞：

a. 單純事件與繁複事件。

b. 實在頻數與理論頻數。

61. 擲骰三粒，求各點之機率!

62. 擲骰四粒，求各點之機率!

63. 今有二囊，甲囊內有紅球十個黑球七個，乙囊內有紅球八個黑球六個，設自甲乙二囊各取一球，求下列各種之機率：

a. 兩個紅球。

b. 一紅一黑。

c. 兩個黑球。

64. 今有三囊,甲囊內有紅球十個黑球七個白球六個,乙囊內有紅球八個黑球六個白球三個,丙囊內有紅球四個黑球五個,設自甲乙丙三囊各取一球,求下列各種之機率:

a. 三個紅球。

b. 三個黑球。

c. 三個白球。

d. 兩個紅球。

e. 兩個黑球。

f. 兩個白球。

g. 一紅一黑一白。

65. 求 ${}_nC_r$:

a. $n=10 \quad r=1$

b. $n=10 \quad r=5$

c. $n=10 \quad r=10$

d. $n=11 \quad r=5$

e. $n=11 \quad r=6$

66. 求:

a. ${}_{12}C_4$

b. ${}_{12}C_8$

c. ${}_{14}C_3$

d. ${}_{14}C_{11}$

67. 今有獨立單純事件五,其機率爲 p_1, p_2, p_3, p_4,與p_5,求下列各

種之機率：

a.　五件均實現。

b.　第一件實現其他四件不實現。

c.　第二第四兩件實現其他三件不實現。

d.　五件均不實現。

68. 擲骰四粒，求至少擲得六點之機率！

69. 若平均一百商船中能有九十九船平安返埠，求十隻商船中至少有兩隻平安返埠之機率！

70. 籃內有小球十個，各編以號碼(自一號至十號)，茲欲同時取二球而得第三號球與第五號球，問其機率幾何？

71. 籃中有白球三個黑球五個，茲欲同時取二球，求：

a.　二白球之機率；

b.　二黑球之機率；

c.　一白一黑之機率。

72. 以同一算題令甲乙二生各自演算，甲生演出之機率爲$\frac{1}{4}$，乙生演出之機率爲$\frac{1}{3}$，問若二人合演此題，則其演出之機率幾何？

73. 甲乙二人參加賽跑，甲奪得錦標(第一名)之機率爲$\frac{1}{4}$，乙奪得錦標之機率爲$\frac{1}{3}$，求甲或乙奪得錦標之機率！

74. 擲幣五枚連續六十次，求下列各種出現之次數：

a.　五面。

b.　四面一背。

c. 三面二背。

d. 二面三背。

e. 一面四背。

f. 五背。

75. 由下表配合差誤正態曲線及確定理論頻數:

a. 以差誤正態曲線配合於男孩體重之頻數分配。每間隔0.25σ豎一縱線。

b. 繪實在曲線與配合曲線。

c. 年齡自一月至二月之一般白種男孩其體重爲九磅或九磅以下之比例約有幾何?

d. 確定各組之理論頻數。

AC. 美國1431白種男孩之體重(年齡自一月至二月)

體重 (磅)	男孩數
$5\frac{1}{4}$—$6\frac{1}{4}$	12
$6\frac{1}{4}$—$7\frac{1}{4}$	31
$7\frac{1}{4}$—$8\frac{1}{4}$	87
$8\frac{1}{4}$—$9\frac{1}{4}$	136
$9\frac{1}{4}$—$10\frac{1}{4}$	254
$10\frac{1}{4}$—$11\frac{1}{4}$	314
$11\frac{1}{4}$—$12\frac{1}{4}$	282
$12\frac{1}{4}$—$13\frac{1}{4}$	186
$13\frac{1}{4}$—$14\frac{1}{4}$	81
$14\frac{1}{4}$—$15\frac{1}{4}$	36
$15\frac{1}{4}$—$16\frac{1}{4}$	10
$16\frac{1}{4}$—$17\frac{1}{4}$	0
$17\frac{1}{4}$—$18\frac{1}{4}$	0
$18\frac{1}{4}$—$19\frac{1}{4}$	0
$19\frac{1}{4}$—$20\frac{1}{4}$	1
$20\frac{1}{4}$—$21\frac{1}{4}$	0
$21\frac{1}{4}$—$22\frac{1}{4}$	1
	1431

(註) 上表自鄧獨克之[統計方法習題]轉載。

第七章　偏態與轉矩

76. 何謂偏態？

77. 問任何數列之各項與其算術平均數相差立方之和是否等於零？試舉二例以說明之！

78. 區別主要轉矩與補助轉矩！

79. 求證：

$$m_4 = m_4' - 4m_3'c + 6m_2'c^2 - 3c^4$$

m_4　第四主要轉矩

m_2'　第二補助轉矩

m_3'　第三補助轉矩

m_4'　第四補助轉矩

c　算術平均數與假定平均數之差

80. 根據 AD. 表中之統計繪製線圖！

AD. 1887年至1906年美國離婚人數依照結婚年齡分配表

結　婚　年　齡	離　婚　人　數
不滿五年	255085
5——10	282504
10——15	162407
15——20	91176
20——25	54578
25——30	29245
30——35	15035
35——40	6555
40——45	2507
45——50	805
50年以上	287

［註］ 資料來源：1913年美國統計摘要。

81. 由第四十三題中之分組頻數表求偏態與偏態係數！

a. 應用公式(1)與(2)

b. 應用公式(3)與(4)

c. 應用公式(5)與(6)

d. 應用公式(10)與(8)

e. 應用公式(11)與(8)

82. 由下列十數：

85	86	82	78	79
76	94	91	90	86

求m_2,m_3,m_4,σ與K！

第八章　指數

83. 試述指數之意義!

84. 解釋下列各名詞:

a. 價比

b. 基期

c. 變換基期

85. 區別下列各名詞:

a. 固定基期與變動基期。

b. 定基價比環比與鎖比。

c. 定基指數連環指數與連鎖指數。

d. 單純指數與加權指數。

e. 前進指數與後退指數。

f. 型偏誤與權偏誤。

86. 簡單總值式指數是否為良指數?試論之!

87. 價比之上升下落有無限制?

88. 倒數式連鎖指數何以通常小於倒數式定基指數? 試舉例詳細說明之!

89. 問加權方法有幾種?試舉例說明各種加權指數之編製!

90. 何謂時間互換測驗與因子互換測驗? 試就費暄氏理想公式說明之!

91. 何謂交义公式?其作用何在?

92. 根據第五十表之統計計算民國十二年至二十一年小麥之定基價比(基期:民國十二年)環比與鎖比!

93. 根據第五十表之統計編製民國十二年至二十一年之定基指數(基期:民國十二年)與連鎖指數!

a. 算術式指數。

b. 幾何式指數。

c. 倒數式指數。

d. 中位數式指數。

e. 總值式指數。

第九章　吾國重要指數之編製

94. 試述下列各種指數之效用:

a. 物價指數。

b. 生活費指數。

c. 工資指數。

d. 外滙指數。

e. 證劵指數。

f. 國外貿易指數。

95. 解釋下列各名詞:

a. 增補權數。

b. 紬工。

c. 替工。

d. 工資率。

96. 區別下列各名詞:

a. 總合支出法與模範家計調查法。

b. 工資率與實入額。

c. 件工與時工。

d. 常工工資與溢工工資。

e. 總交易率指數與淨交易率指數。

97. 依工廠法之規定,工廠與童工之定義如何?

98. 編製外滙指數,應以何者爲基價?

99. 試論調查工資之時期及其區域!

第十章　直線繫聯

100．試述直線繫聯之意義！

101．解釋下列各名詞：

a．標準誤。

b．繫聯表。

c．隨手畫法。

102．區別下列各名詞：

a．正繫聯負繫聯與零繫聯。

b．直線繫聯與非直線繫聯。

103．設有學生十人，其考試成績如下：

學生	國文	英文	數學
甲	80	100	20
乙	50	40	50
丙	38	16	62
丁	65	70	35
戊	75	90	25
己	40	20	60
庚	45	30	55
辛	55	50	45
壬	70	80	30

癸	78	96	22

求繫聯直線方程式，標準誤與繫聯係數！

a. 國文與英文。

b. 國文與數學。

c. 數學與英文。

104. 根據 AE.表中之統計應用公式(6)，(7)，(8)計算繫聯係數：

a. 錠子數目與布機臺數。

b. 錠子數目與用花包數。

AE. 各國紗布廠內紡錠織機與用花量：

國別	錠子數目（單位一百萬錠）	布機臺數（單位一百萬臺）	用花包數（單位一百萬包）
英國	50.2	69.3	2.4
美國	31.3	69.9	4.8
法國	10.2	20.0	0.9
德國	9.8	22.4	1.2
俄國	9.2	15.9	1.5
印度	9.5	18.0	2.7
日本	8.0	7.9	2.8
意大利	5.4	14.7	0.8
中國	4.5	3.0	2.3
捷克	3.6	12.5	0.3
巴西	2.6	7.8	0.5
比利時	2.1	5.4	0.3
西班牙	2.1	8.1	0.4
波蘭	1.8	4.1	0.2

[註] 資料來源：1933年萬國棉紡織業總聯合會報告。

105. 由下表計算繫聯係數：

a. 應用公式(9)。

b. 應用公式(10)。

c. 應用公式(11)。

AF. 民國十九年天津紗廠內男工身長與年齡之分配

年齡＼身長	4—4'2"	4'2"—4'4"	4'4"—4'6"	4'6'—4'8"	4'8"—4'10"	4'10"—5'	5'—5'2"	5'2"—5'4"	5'4"—5'6"	5'6"—5'8"	5'8"—5'10"	5'10"—6'	人數
10—12	6	3											9
12—14	5	16	9	6	1								37
14—16	37	59	54	50	29	7	6	2	1	1		1	247
16—18	11	25	46	40	49	34	50	17	12	5	1	1	291
18—20	2	4	16	15	31	16	62	34	48	20	5	1	254
20—22		1	9	8	17	1	43	29	42	31	11	1	193
22—24			2	4	5	4	16	25	32	37	4	1	130
24—26					7	1	14	14	27	25	6		94
26—28					1		12	6	22	15	7		63
28—30				1	2		4	8	9	14	5	1	44
30—32							1	7	11	5	4		28
32—34			1		1		1	6	6	6	1		22
34—36							3	3	8	5	4		23
36—38					1		3	1	5	3	3		16
38—40					1		3	1	3	4	2		14
人數	61	108	137	124	145	63	218	153	226	171	53	6	1465

〔註一〕 資料來源：方顯廷編中國棉業及其貿易第二冊。

〔註二〕 年齡在四十歲以上或身長不滿四呎與高出六呎以上之男工均不包含在內。

第十一章　長期趨勢

106. 試述經濟現象變動之原因！

107. 試述長期趨勢之意義！

108. 試舉例說明極大極小法！

109. 試述移動平均數法之利弊！

110. 用最小二乘法求長期趨勢直線，研究時期應如何選擇？試論之！

111. 由下表求美國印度埃及（1909－10年至1929－30年）中國(1916－17年至1929－30年)皮棉產量之長期趨勢並製長期趨勢圖！

a. 應用最小二乘法。

I. 應用公式(1)。

II. 應用公式(2)。

III. 應用簡捷法。

b. 應用移動平均數法。

I. 三年移動平均數。

II. 五年移動平均數。

c. 求二次拋物線長期趨勢。

d. 求複利曲線長期趨勢。

AG. 中國美國印度埃及每年皮棉產量（單位—百萬包@純重 478 磅）1909—10年至1929—30年:

收穫年度	中國	美國	印度	埃及
1909—10		10.0	4.0	1.0
1910—11		11.6	3.3	1.6
1911—12		15.7	2.7	1.5
1912—13		13.7	3.7	1.6
1913—14		14.2	4.2	1.6
1914—15		16.1	4.4	1.3
1915—16		11.2	3.1	1.0
1916—17	1.5	11.5	3.8	1.0
1917—18	2.1	11.3	3.4	1.3
1918—19	3.1	12.0	3.3	1.0
1919—20	2.5	11.4	4.9	1.2
1920—21	1.9	13.4	3.0	1.3
1921—22	1.5	8.0	3.8	0.9
1922—23	2.3	9.8	4.2	1.4
1923—24	2.0	10.1	4.3	1.4
1924—25	2.2	13.[illegible]	5.1	1.5
1925—26	2.2	16.1	5.2	1.6
1926—27	1.7	18.0	4.2	1.6
1927—28	1.9	13.0	5.0	1.3
1928—29	1.8	14.5	4.9	1.7
1929—30	2.0	14.8	4.4	1.7

〔註〕資料來源：全國經濟委員會棉業統制委員會編棉花統計。

112. 由上題中 a 再求各月之長期趨勢！

第十二章 季節變動

113. 試述季節變動之意義及其起因!

114. 季節變動有何效用?試論之!

115. 季節變動如何確定?試論之!

116. 試舉例說明混合法與配線比例法!

117. 由下表計算季節指數並製季節變動圖!

a. 應用環比中位數法;

b. 應用平均法;

c. 應用移動平均數法。

BA. 上海雞蛋每月平均躉售價

(民國十六年一月至二十二年九月)

月份＼民國	十六年 規元	十七年 規元	十八年 規元	十九年 規元	二十年 規元	二十一年 規元	二十二年 國幣
一月	20.862	18.561	18.875	24.634	20.382	20.835	25.200
二月	19.048	18.910	18.886	27.072	20.382		26.900
三月	19.706	17.213	18.420	19.011	20.244	19.415	23.500
四月	16.165	17.354	17.086	18.223	19.124	17.678	21.700
五月	17.261	16.877	16.319	18.026	18.251	17.287	20.000
六月	16.661	16.378	15.539	17.288	18.881	17.410	20.000
七月	15.972	16.594	15.211	18.892	18.607	16.890	20.350
八月	15.711	16.166	15.760	17.135	19.060	17.192	20.000
九月	16.290	16.740	16.155	17.330	19.569	18.644	22.700
十月	18.662	17.443	17.148	18.715	19.372	18.443	
十一月	19.777	18.565	17.627	19.717	20.102	19.597	
十二月	19.173	18.994	22.028	20.287	20.048	17.967	

〔註一〕 資料來源:國定稅則委員會編貨價季刊。

〔註二〕 參看第九十表。

〔註三〕 表中數字係雞蛋千枚之價,二十一年十二月以前用規元價,二十二年一月以後用國幣價。

第十三章　循環變動

118. 試述循環變動之意義及其起因!

119. 由 AG 表求美國印度埃及皮棉產量之循環變動，並製循環變動圖!

120. 根據第一百零九表求 1903 年至 1915 年生鐵產量之循環變動,並製循環變動圖!

第十四章 時間數列之繫聯

121. 時間數列之繫聯與其他數列之繫聯有何區別?試論之!

122. 根據 AG 表計算美印埃皮棉產量之繫聯係數:

a. 美國皮棉產量與印度皮棉產量;

b. 美國皮棉產量與埃及皮棉產量;

c. 印度皮棉產量與埃及皮棉產量。

123. 試由下列兩表比較 1918–1927 生鐵產量與紐約 4-6 月商業票據之利率兩循環變動,並計算其繫聯係數!

BB. 美國每月生鐵產量(單位一千長噸)

(1916—1927)

月別＼年別	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927 *
一 月	3185	3151	2412	3302	3015	2416	1645	3230	3019	3370	3316	3104
二 月	3087	2645	2319	2940	1979	1937	1630	2994	3075	3214	2923	2941
三 月	3338	3251	3213	3090	3376	1596	2036	3524	3466	3564	3442	3483
四 月	3228	3335	3288	2478	2740	1193	2072	3550	3233	3259	3450	3422
五 月	3361	3417	3146	2188	2986	1221	2307	3868	2615	2931	3481	3391
六 月	3212	3270	3324	2115	3044	1065	2361	3676	2026	2673	3235	3090
七 月	3225	3342	3421	2429	3067	865	2405	3678	1785	2664	3223	2951
八 月	3204	3248	3390	2743	3147	954	1816	3449	1887	2704	3200	2947
九 月	3202	3134	3418	2488	3129	986	2034	3126	2053	2726	3136	2775
十 月	3509	3303	3487	1864	3293	1247	2638	3149	2477	3023	3334	2784
十一月	3312	3206	3354	2392	2935	1415	2850	2894	2510	3023	3237	2648
十二月	3179	2883	3434	2633	2704	1649	3087	2921	2962	3250	3091	2696

〔註一〕 資料來源:卻獨克編統計習題。

〔註二〕 參看第一百零九表。

* 暫定數。

BC. 紐約 4-6 月商業票據每月利率

(1918—1927)

月別＼年別	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927
一　月	% 5.58	5.19	6.00	7.83	4.88	4.63	4.88	3.63	4.31	4.13
二　月	5.69	5.19	6.41	7.75	4.88	4.69	4.78	3.65	4.19	3.88
三　月	5.88	5.38	6.68	7.63	4.78	5.00	4.59	3.94	4.28	4.00
四　月	5.90	5.38	6.81	7.55	4.60	5.13	4.63	3.95	4.19	4.09
五　月	5.88	5.38	7.16	6.88	4.25	5.13	4.23	3.88	4.00	4.13
六　月	5.88	5.53	7.72	6.63	4.05	4.88	3.91	3.88	3.88	4.13
七　月	5.88	5.42	7.84	6.28	3.94	4.94	3.53	3.93	3.97	4.06
八　月	5.94	5.38	8.00	6.00	3.91	5.03	3.23	4.00	4.25	3.90
九　月	6.00	5.38	8.00	5.90	4.25	5.16	3.13	4.25	4.43	3.91
十　月	6.00	5.38	8.00	5.65	4.38	5.13	3.13	4.44	4.50	4.00
十一月	5.97	5.50	7.94	5.13	4.63	5.09	3.28	4.38	4.44	3.94
十二月	5.86	5.88	7.88	5.13	4.63	4.98	3.56	4.38	4.38	3.95

〔註〕 資料來源:鄒獨克編統計習題。

124. 由 AG 表求美印埃皮棉產量短期變動之繫聯:

a. 美國皮棉產量與印度皮棉產量;

b. 美國皮棉產量與埃及皮棉產量;

c. 印度皮棉產量與埃及皮棉產量。

第十五章 非直線繫聯

125. 解釋下列各名詞：

a. 非直線繫聯。

b. 繫聯指數。

c. 繫聯比。

d. 自變數。

e. 因變數。

126. 由 AE 表中錠子數目（自變量）與用花包數（因變量）計算繫聯拋物線方程式，標準誤與繫聯指數！

127. 由 AF 表中男工年齡（自變量）與男工身長（因變量）求繫聯比！

第十六章　他種繫聯

128. 括弧法與中級法有何區別?試舉例以明之!

129. 試舉例說明下列各種繫聯計算:

   a. 等級繫聯;

   b. 相應增減法;

   c. 異號成對法;

   d. 圖表法。

第十七章 偏繫聯

130. 試述偏繫聯之意義!

131. 偏繫聯係數有何效用?試詳論之!

132. 何謂 n 次繫聯係數?試舉例以明之!

133. 由第一百二十二表求 1890 年至 1920 年下列各種偏繫聯係數:

  a. 玉蜀黍產量與六月溫度;

  b. 玉蜀黍產量與七月溫度;

  c. 玉蜀黍產量與八月溫度。

第十八章　響應

134. 解釋下列各名詞；

a. 響應。

b. 響應係數。

c. 響應方程式。

d. 偏響應係數。

e. 複繫聯係數。

135. X_1 對 X_2 之響應係數與 X_2 對 X_1 之響應係數有何區別？試論之！

136. 由AE表求用花量對錠子數之響應方程式並繪響應直線！

137. 根據第一百二十二表中 1890 年至 1920 年之統計，求玉蜀黍之產量與六七八三個月溫度之響應方程式，並計算其標準誤與複繫聯係數！

138. 根據第一百二十二表中 1890 年至 1922 年之統計，求玉蜀黍之產量與六七兩月溫度之響應方程式，並計算其標準誤與複繫聯係數！

第十九章　商情預測

139. 試述商情預測之意義!

140. 反對商情預測者之理由安在?試詳論其得失!

141. 經濟預測法與統計預測法之區別安在?試論之!

142. 哈佛法與響應法有何區別?試論之!

143. 試詳述哈佛法之三曲線及其預測之作用!

144. 試述應用響應法之必要條件!

第二十章　統計資料之搜集與整理

145. 區別下列各名詞：

a. 原始資料與次級資料。

b. 原始來源與次級來源。

146. 試述選擇資料之標準！

147. 試述次級資料之編製！

148. 試略述原始資料之搜集及其整理！

149. 試擬調查須知以供調查員之參考！

150. 試擬調查中國絲業計畫及其進行程序！

附錄丙

英華對照統計名詞

(附人名地名索引)

下列統計譯名係根據民國二十二年中國統計學社社務會議初讀通過統計名詞。其未經社務會議通過而新增補名詞則用括弧以示區別。

例: (Cumulative frequency method) (累積頻數法) 爲新添入之名詞。至於吾人認爲譯名尙有更正之必要者則置括弧於提議改正譯名之兩端以示區別。

例 Regression 回應(響應),上字中[回應]爲社務會議通過之譯名,[響應]爲吾人提議改正之譯名。

民國二十三年七月統計譯名經中國統計學社第四屆年會通過。大體上與上次社務會議初讀通過者相同,但亦有不少變更。例如「轉矩」之改爲「動差」等等。本書暫不照改,有下列三種原因:(一)版已排就修改困難;(二)尙有德法日各國名詞,正由本屆理事會另組委員會設法補入,故不如俟全部編成後,再行修正;(三)本屆所通過之名詞亦尙有應商榷者。例如 trend 譯爲「趨向」,而 secular trend 譯爲「長期趨勢」。bias 譯爲「偏性」而 formula bias 譯爲「公式之偏誤」。同一 trend,一曰趨向,一曰趨勢。同一 bias,一曰偏性,一曰偏誤。似尙有討論之餘地。至於 type bias 譯爲「型偏」,而 weight bias 譯爲「偏權」而不作「權偏」,恐係手民之誤。因此種種故本書暫照上屆社務會議通過之稿。最後修正姑待來日。

A

Abscissa, 橫坐標
Absolute dispersion, 絕對離中趨勢
Absolute variation, 絕對離中趨勢
Accidental fluctuation, 無規則變動
Actual frequency, 實在頻數
(Actual limits), (實際組限)
Aggregative index number, 總値式指數
Alignment chart, 直線圖
All over, 以上
All under, 以下
Alphabetic order, 依字母次序
Amplitude, 變幅
(Analysis chart), (分析圖)
(Angular curve), (角曲線)
Anisotrapic distribution, 異向異質分配
Annual increment, 年增量
Anti-logarithm, 反對數
(Approximately continuous series), (近似連續數列)
(Arbitrary average), 假定平均數
Arbitrary mean, 假定中數
(Area chart), (面積圖)
Arithmetic average, 算術平均數
Arithmetic index number, 算術式指數
Arithmetic series, 算術級數
(Arithmetic triangle), (算術三角形)
Array, 序列, 列
Ascending order, 遞升次序
Associated variates, 相聯變量
Association, 伴聯
(Assumed average), (假定平均數)
Assumed mean, 假定中數
Asymmetrical distribution, 非對稱分配
Asymmetry, 非對稱
Asymptote, 漸近線
Attenuation, 減弱
Attribute, 屬性
Average, 平均數
Average deviation, 平均差
Axis, 軸

B

Bar chart, 條形圖
Bar diagram, 條形圖
Base, 基, 基期
Base period, 基期
Bias, 偏誤
Bimodal, 雙峯
Binomial distribution, 二項分配
Binomial equation, 二項方程式
Binomial expansion, 二項展開式
Binomial series, 二項級數
Biometry, 生物統計學
Blank form, 調查表式
Block diagram, 直方圖
(Book chart), (書圖)
(Bracket rank method), (括弧法)
Broadened base, 擴張基期
Broken series, 非聯續數列
Broken trend, 斷線長期趨勢
Business barometer, 商情指標
Business cycles, 商情循環
Business forecasting, 商情預測

C

Caption, 縱標目
Cartogram, 統計地圖
Case method, 個案法
Case work, 個案調查
Categorical series, 類別數列
(Census), (人口清查)
Central ordinate, 中縱坐標
Central tendency, 集中趨勢
Central value, 集中値
Chain base, 連鎖基期
Chain index numbers, 連鎖指數
Chain relatives, 鎖比
Chance, 機
Characteristic, 首數; (特性)
Charlier check, 薛立愛氏校核法
Chart, 圖
Chart field, 圖位
Charting, 製圖
(Chi-square test of goodness of fit), (配合適度之 χ^2 測驗法)
Chronological order, 依時次序
(Circle chart), (圓形圖)
Circular test, 循環測驗法
Class, 組
Classification, 分類
Classified frequency series, 分組頻數數列
Class index number, 類指數

Class interval, 組距
Class limit, 組限
Class mark, 組中點
Class *mid-value*, 組中點
Class weight, 類權數
Code, 分類記號
Coefficient, 係數
Coefficient of association, 伴聯係數
Coefficient of contingency, 列聯係數
Coefficient of correlation, 繫聯係數
Coefficient of disturbancy, 反常係數
Coefficient of first order, 一次係數
Coefficient of multiple correlation, 複繫聯係數
Coefficient of partial correlation, 偏繫聯係數
Coefficient of pth order, p 次係數
Coefficient of regression, 回應係數 (響應係數)
Coefficient of second order, 二次係數
Coefficient of skewness, 偏態係數
Coefficient of variation, 離中係數
Coefficient of zero order, 零次係數
Colored map, 彩色統計地圖
Column, 縱行; (行)
Column diagram, 直方圖
Commodity weight, 物品權數
Compartment, 局部
Compensating fluctuations, 補償變動
Compilation, 編製
Component part bar diagram. 條形成分圖
Component part diagram, 成分圖
Component part pie diagram, 圓形成分圖
Composite bar diagram, 組合條形圖
(Composite curve), (組合曲線)
Composite unit, 組合單位
Compound event, 繁複事件
(Computation chart), (計算圖)
Computed value, 計算價值
Concentration, 集中
Concurrent deviations method, 符號同異法 (相應增減法)
(Condition series), (質量數列)
Constant, 常數
Constant weight, 固定權數
Contingency, 列聯
Continuous series, 連續數列
Contrary classes, 反組
Contrary frequencies, 反組頻數
Coordinate classes, 同等類
Correlation, 繫聯
Correlation ratio, 繫聯比
Correlation ratio of x on y, 從 y 繫聯比 (x 對 y 之繫聯比)
Correlation ratio of y on x, 從 x 繫聯比 (y 對 x 之繫聯比)
Correlation surface, 繫聯面
Correlation table, 繫聯表
Costing index number, 成本指數
Cost of living index number, 生活費指數
(Counting), (計數)
Covariation. 同變
Crest, 峯
Cross check, 互校
Cross-hatched map, 交叉線統計地圖
Crossing formula, 交叉公式
Cross moment method, 乘積率法
Crude mode, 近似衆數
Crude moment, 補助轉矩; 補助動矩
Cumulative block diagram, 累積直方圖
Cumulative frequency curve, 累積頻數圖
(Cumulative frequency method), (累積頻數法)
(Cumulative frequency of first order), (第一累積頻數)
(Cumulative frequency of second order), (第二累積頻數)
(Cumulative frequency of third order), (第三累積頻數)
Cumulative frequency polygon, 累積多邊圖
Cumulative frequency table, 累積頻數表
(Cumulative frequency table on the "less than" basis), (較小制累積頻數表)
(Cumulative frequency table on the "more than" basis), (較大制累積頻數表)
Cumulative table, 累積表
Curve, 曲線
Curve fitting, 曲線配合
Curvilinear regression, 曲線回應 (曲線響應)
Curvilinear trend, 曲線長期趨勢
(Cyclical deviation), 循環變差)
(Cyclical fluctuation), (循環變動)

D

Data, 資料
Decile, 十分位數
Decrement rate, 減率
Dependent variable, 因變數
Descending order, 遞降次序
(Desk chart), (桌圖)
Determinant, 行列式

Deviation, 差離; 離中差
Diagonal method, 對角線法
Dichotomy, 二分類法
Direct correlation, 正繫聯
(Discontinuous series), (非連續數列)
Discrete series, 非連續數列
Dispersion, 離中趨勢
Distribution, 分配
Doolittle method, 杜立特氏計算方程式法
Dot map, 點式統計地圖
Double frequency table, 二項頻數表
Double logarithmic scale, 雙對數尺度
Double table, 雙項表
Downward bias, 向下偏誤

E

Edit, 校勘
Elimination of trend, 消除長期趨勢
Empirical mode, 近似衆數
Empirical probability, 試驗機率
Enquiry, 詢問
Enumeration method, 點查法
Enumerator, 查點人
Episodic movement, 特出變動
Equation, 方程式
Equation of normal curve of error, 差誤正態曲線方程式
Error of sampling, 抽樣的差誤
Estimation, 估量
Event, 事件
Exponent, 冪數
Exponential average, 變冪平均數
Expontial series, 變冪級數
(Expressed limits), (外表組限)
Extrapolation, 外推法

F

Foctor reversal test, 因子互換測驗法
Failure, 敗
(Field method), (實地調查法)
First moment, 一次轉矩; 一次動矩
First quartile, 第一四分位數
Fisher's ideal formula, 費暄氏理想公式
Fit, 配合
Fixed base, 固定基期
Fixed base index numbers, 定基指數
Fixed base relatives, 固定價比
Fixed weighting, 固定加權法
Fixed weights, 固定權數
Forecasting sequence, 預測順序
Freehand method, 隨手畫法
Frequency, 頻數
Frequency curve, 頻數曲線
Frequency distribution, 頻數分端
Frequency histogram, 頻數直方圖
Frequency polygon, 頻數多邊形
Frequency series, 頻數數列
Frequency surface, 頻數面
Frequency table, 頻數表
Function, 函數

G

Gamperg curve, 甘佩氏曲線
Gantt progress chart, 甘悌氏進行圖
Gaussian curve, 高斯式曲線
General index number, 總指數
General table, 總表
(Geographical classification), (地理的分類)
Geographical order, 依地次序
Geometric average, 幾何平均數
Geometric index number, 幾何式指數
Geometric series, 幾何級數
Given period, 計算期
Goodness of fit, 配合的適度
Grand total, 共計
Graph, 線圖
Grouped frequency series, 分組頻數數列
(Grouped frequency table), (分組頻數表)
Group index number, 類指數

H

Hand card, 手片
Harmonic average, 倒數平均數
Harmonic index number, 倒數式指數
Heading, 標目
Heterogeneity, 異質
Histogram, 直方圖
(Historical classification), (歷史的分類)
Historical series, 時間數列
Homogeneity, 同質
Horizontal axis, 橫軸
Horizontal bar diagram, 橫條形圖
Horizontal scale, 橫尺度
Hyperbola, 雙曲線

I

(Illustration chart), (說明圖)
Increment rate, 增率
Independent event, 獨立事件
Independent variable, 自變數
Index number, 指數
Index number of imports and exports, 進出口貨指數

Index number of physical production, 生產數量指數
Index number of prices, 物價指數
Index number of retail prices, 零售物價指數
Index number of volume of trade, 貿易量指數
Index number of wages, 工資指數
Index number of wholesale prices, 躉售物價指數; 批發物價指數
Index of correlation, 繫聯指數
(Inertia of large numbers), (大量惰性)
Informant, 被詢人
Intercept, 截數
Interpolation, 內推法
Inverse correlation, 負繫聯
Inverse exponential average, 倒變冪平均數
Investigation, 調查
Investigator, 考查人
Investment index number, 投資指數
Irregular fluctuations, 無規則變動
Isotrapic distribution, 異向同質分配
Item, 項目

J

J-shaped distribution, J 形分配

K

Key, 圖說明
Kurtosis, 峯態

L

Lag, 落後
Lagging correlation, 落後繫聯
Law of great numbers, 大數定律
(Law of statistical regularity), (統計常態之法則)
Lead, 前引
Legend, 圖說明
Leptokurtic, 尖峯態的
Linear correlation, 直線繫聯
Linear regression, 直線回應 (直線響應)
Linear trend, 直線長期趨勢
Line of regression, 回應線 (響應線)
Line of regression of x on y, 從 y 回應線 (x 對 y 之響應線)
Line of regression of y on x, 從 x 回應線 (y 對 x 之響應線)
Line of trend, 長期趨勢線
Link index numbers, 連環指數
Link relatives, 環比
(Location of mode by grouping), (併組法)
Logarithm, 對數
Logarithmic average, 對數平均數
Logarithmic scale, 對數尺度
Logistic curve, S 形曲線
Long-time trend, 長期趨勢
Lorenz curve, 羅倫氏曲線
Lower limit, 下限
Lower limit inclusive, 下限包含
Lower quartile, 下四分位數

M

Machine card, 機器片
Magnitude, 量
Major heading, 大標目
Mantissa, 尾數
Maximum ordinate, 最大縱坐標
Mean, 中數
Mean deviation, 平均差
Measure of characteristics, 特性的計量
Measure of reliability, 可靠量
Median, 中位數
Median class, 中位數所在組
Median index number, 中位數式指數
Median-link-relative method, 環比中位數法
Meso kurtic, 正峯態的
Method of least squares, 最小平方法
(Method of maxima and minima), (極大極小法)
Method of moving averages, 移動平均數法
Method of moving medians, 移動中位數法
Method of rank correlation, 等級繫聯法
(Method of unlike signed pairs), (異號成對法)
(Mid-rank method), (中級法)
Minor heading, 小標目
Miscellaneous, 雜項
Modal class, 衆數所在組; 密集組
Modal group, 衆數所在組; 密集組
Mode, 衆數
Mode index number, 衆數式指數
Modulus, 根率
Moment, 轉矩; 動矩
Monthly increment, 月增量
Multimodal, 多峯
Multiple contingency, 複列聯
Multiple correlation, 複繫聯
(Multiple-dot map), (密點統計地圖)
Multiple frequency table, 多項頻數表

Mutual deviation, 相互平均差
Mutually exclusive event, 互相排斥事件

N

Natural scale, 實數尺度
Negative correlation, 負繫聯
Net correlation, 偏繫聯
Non-linear correlation, 非直線繫聯
Non-linear regression, 曲線回應 (曲線響應)
Non-linear trend, 曲線長期趨勢
(Non-scientific classification), (非科學的分類)
Normal correlation, 正態繫聯
Normal correlation surface, 正態繫聯面
Normal curve of error, 差誤正態曲線
Normal equations, 正則方程式
Normal frequency distribution, 正態頻數分配
Normal histogram, 正態直方圖
Normal law of error, 差誤正態定律
Normal values, 正則價值

O

Observed frequencies, 觀察頻數
Observed values, 觀察價值
Ogive, 累積頻數圖
Open ends, 餘空兩端
Order, 次序
Ordinate, 縱坐標
Origin, 原點
Original table, 原表
Original values, 原來價值

P

Parabola, 拋物線
Parameter, 參數
Part correlation, 部分繫聯
Partial association, 偏件聯
Partial contingency, 偏列聯
Partial correlation, 偏繫聯
Partial regression, 偏回應 (偏響應)
Partial regression coefficient, 偏回應係數 (偏響應係數)
Pearsonian coefficient, 皮爾生氏係數
Percentile, 百分位數
Perfect correlation, 整繫聯
Period, 期
Periodicity, 週期
Periodogram analysis, 週期循環分析
Permanence of small numbers, 小數永存
Personal enquiry, 訪問
Pictogram 像形圖
(Pie), (圓形圖)
Pin map, 插針統計地圖
Platy kurtic, 平峯態的
Point of inflection, 折形點
Population, 人口, 全域
Positive correlation, 正繫聯
Potential series, 定冪級數
Price relative, 價比
Primary data, 原始資料
Primary investigation, 原始調查
Primary source, 原始來源
Primary statistics, 原始資料
Primary survey, 原始調查
Principal moment, 主要轉矩; 主要動矩
Probability, 機率
Probability a priori, 先定機率
Probability integral, 機率積分
Probable error, 機差
Product moment method, 乘積率法
Pth degree parabola, p 次拋物線
Pth moment, p 次轉矩; p 次動矩
Publication table, 刊佈表
Punch, 打點
Punching machine, 打點機
Purposive sampling, 計劃抽樣

Q

Quadrature method, 積分法
Quadruple table, 四項表
(Qualitative classification), (性質的分類)
(Quantitative classification), (數量的分類)
Quantity index number, 數量指數
(Quartered-dot-map), (四分點統計地圖)
Quartile, 四分位數
Quartile coefficient, 四分位係數
Quartile deviation, 四分位差
Questionnaire, 調查表式

R

Random fluctuation, 無規則變動
Random sampling, 簡單抽樣
Range, 全距
Ratio, 比; 比率
Ratio-actual-to-ordinate method, 比率平均計算法
Ratio scale, 比例尺度
Reciprocal, 倒數

Rectangular coordinates, 直縱橫坐標
Rectilinear trend, 垂直線長期趨勢
Registration method, 登記法
Regression, 回應, (響應)
Regression coefficient, 回應係數, (響應係數)
Relative dispersion, 相對離中趨勢
Relative price, 價比
Relatives, 比
Relative variation, 相對離中趨勢
Residual movement, 淨餘變動
Returns, 答案
Root-mean-square deviation, 標準差
Row, 橫行; (列)
Ruling, 行格

S

Sample, 樣; 樣本
Sampling, 抽樣
Sampling by chance, 機遇抽樣
Sampling by design, 計劃抽樣
Scale, 尺度
(Scale guide line), (指線)
(Scale point), (度點)
Scatter, 散佈
Scatter diagram, 散佈圖
(Scientific classification), (科學的分類)
Seasonal fluctuation, 季節變動
Seasonal index numbers, 季節指數
Seasonal variation, 季節變動
Secondary data, 次級資料
Secondary source, 次級來源
Secondary statistics, 次級資料
Secondary table, 次級表
Second degree parabola, 二次拋物線
Second moment, 二次轉矩; 二次動矩
Sector diagram, 扇形圖
Secular trend, 長期趨勢
Semi-inter-quartile range, 四分位差
Semi-invariant, 變動數
Semi-logarithmic scale, 單對數尺度
Seperate event, 單純事件
Shaded map, 濃淡線統計地圖
Sheppard's correction, 薛伯氏校正數
Shifting base, 變換基期
Short method of computation, 簡捷計算法, (簡捷法)
(Short term fluctuation), (短期變動)
Simple average, 單純平均數
Simple correlation, 單繫聯
(Simple frequency table), (簡單頻數表)
Simple index number, 單純指數
Simple sampling, 簡單抽樣
Simple unit, 單純單位
(Single-dot map), (單點統計地圖)
Single table, 單項表
Size, 大小
Skelton method of computation, 簡捷計算法 (簡捷法)
Skew 偏
Skewed histogram, 偏態直方圖
Skewness, 偏態
Slope, 斜度
Smoothing, 修勻
Sort, 分類
Sorting machine, 分類機
Source, 來源
Space series, 空間數列
Spacing, 位列
Spearman's footrule formula, 司佩蒙氏簡便公式
Spurious correlation, 假引繫聯
Staircase chart, 直方圖
Standard deviation, 標準差
Standard error of arithmetic mean, 算術中數標準誤
Standard error of coefficient of correlation, 繫聯係數標準誤
Standard error of coefficient of regression, 回應係數標準誤 (響應係數標準誤)
Standard error of coefficient of variation, 離中係數標準誤
Standard error of correlation ratio, 繫聯比標準誤
Standard error of distance between two means, 二中數距離標準誤
Standard error of median, 中位數標準誤
Standard error of quartile, 四分位數標準誤
Standard error of sampling, 抽樣的標準誤
Standard error of standard variation, 標準差的標準誤
Standard error of test for linearity of regression, 直線回應試驗標準誤 (直線響應試驗標準誤)
Standard unit, 標準單位
Statistical analysis, 統計分析
Statistical chart, 統計圖
Statistical data, 統計資料
Statistical deflation, 統計消漲法
Statistical induction, 統計歸納
Statistical inference, 統計歸納
Statistical map, 統計地圖
Statistical mass, 統計大量
Statistical material, 統計材料
Statistical method, 統計方法
Statistical series, 統計數列
Statistical table, 統計表
Statistics, 統計; 統計學

Straight line, 直線
Stub, 橫標目
Sub-class, 小組
Sub-classification, 分目
Sub-heading, 小標目
Subordinate class, 附屬類
Subsidiary class, 附屬類
Success, 成
Summary number, 總括數
Summary table, 摘要表
Symmetrical distribution, 對稱分配
Symmetry 對稱
System of coordinates, 縱橫坐標制

T

Table, 表
Table of first order, 單項表
Table of fourth order, 四項表
Table of second order, 雙項表
Table of third order, 三項表
Tabulating machine, 製表機
Tabulation, 製表
Tabulation card, 表片
Tetrad, 四項組
Theoretical frequency, 理論頻數
Third quartile, 第三四分位數
Time reversal test, 時間互換測驗法
Time series, 時間數列
Title, 標題
Total, 合計
Total association, 全伴聯
Total correlation, 全聚聯
Total index number, 總指數
Total regression, 全回應 (全迴應)
Transcription, 謄錄
Transcription form, 謄錄表式
Trend, 長期趨勢
Trial, 試
Triple table, 三項表
Trough, 谷
True mean, 眞實中數
Type, 型, 式
Type bias, 型偏誤
Type of averages, 平均數的型類
Type of index numbers, 指數的型類
Typical value, 範值

U

Ultimate class, 極組
Ultimate frequency, 極組頻數
Uniformity, 劃一
Unimodal, 單峯
Unit, 單位
Universe, 域
Unweighted average, 單純平均數
Upper limit, 上限
Upper limit inclusive, 上限包含
Upper quartile, 上四分位數
Upward bias, 向上偏誤
U-shaped distribution, U 形分配

V

Value index number, 價值指數
Variable, 變數
Variable weighting, 變動加權法
Variable weights, 變動權數
Variance, 二次轉矩; 二次動矩
Variate, 變量
Variate differences correlation, 變差聚聯法
Variation, 離中趨勢
Vertical axis, 縱軸
Vertical bar diagrrm, 縱條形圖
Vertical scale, 縱尺度
Vital statistics, 人口統計學
(Volume chart), (體積圖)

W

(Wall chart), (壁圖)
Weight, 權數
Weight bias, 權偏誤
Weighted average, 加權平均數
Weighted index number, 加權指數
Weighting, 加權
Working table, 工作表

Z

Zero correlation, 零聚聯
Zero line, 零線

附人名地名索引

Mitchell, W. C., 米乞爾
Moore, H. L., 馬爾

N

New Engineering and Shipbuilding Works, Ltd., 瑞鎔船廠
New England, 新英蘭
New York State Department of Health. 紐約衞生局
New York Stock Exchange, 紐約證券交易所
North Dakota, 北達古塔

P

Pacific Ocean, 太平洋
Pearson, Karl, 皮爾生
Persons, W. M., 潘蓀
Philippine, 菲列濱

R

Riggleman, J. R., 李格爾孟

S

Sauerbeck, 薩安貝克
Say, Leon, 雷翁袞
Secrist, H., 西克里斯脫
Shanghai Cotton Manufacturing Co., Ltd., 上海紡織株式會社
Shanghai Dock and Engineering Co., Ltd., 耶松船廠
Shanghai Electric Construction Co., Ltd., 上海電車公司
Shanghai Land Investment Co., Ltd., 業廣地產公司
Shanghai Stock Exchange, 上海股票交易所
Shanghai Telephone Co., 上海電話公司
Shanghai Waterworks Co., Ltd., 上海自來水公司
Sheppard, U. F., 薛伯
Smart, William, 維廉斯麥脫
Spearman, C., 司佩蒙
Standard Statistics Corporation, 標準統計公司
Swan Culbertson, and Fritz, 新豐洋行

W

Washington, 華盛頓
Weldon, W. F. R., 維爾屯
Wester, C. J., 威斯脫
Wisconsin, 威士康辛

Y

Yantsze Finance Co., Ltd., 揚子銀公司
Young, A. A., 楊氏
Yule, G. U., 游爾

附錄丁 統計符號

A	單純算術式指數
A_1	第一種加權算術式指數
A_2	第二種加權算術式指數
A_3	第三種加權算術式指數
A_4	第四種加權算術式指數
Ag	單純總值式指數
Ag_1	第一種加權總值式指數
Ag_2	第二種加權總值式指數
A.D.	平均差
A'.D'.	平均差係數
b_{12}	X_1 對 X_2 之響應係數
b_{21}	X_2 對 X_1 之響應係數
$b_{12\cdot34}$	X_3 與 X_4 假定不變 X_1 對 X_2 之偏響應係數
C	眞正平均數與假定平均數之差
C'	眞正平均數與假定平均數之差(以組距爲單位)
$\bar{C}$	眞正平均數與假定平均數相差之絕對值
C_x	x 數列之算術平均數與假定平均數之差
C_y	y 數列之算術平均數與假定平均數之差
C'_x	x 數列之算術平均數與假定平均數之差 (以組距爲單位)
C'_y	y 數列之算術平均數與假定平均數之差 (以組距爲單位)
nCm	n 物中每 m 物組合之種類
d'	各組與假定平均數所在組相差之組數
$\bar{d}$	各項與平均數相差之絕對值
$\bar{d}'$	各組與假定平均數所在組相差組數之絕對值
d'_x	x 數列中各組與假定平均數所在組相差之組數
d'_y	y 數列中各組與假定平均數所在組相差之組數
d_0	零差分數
D_m	第 m 十分位數
f	頻數
f'	第一累積頻數
f''	第二累積頻數
f'''	第三累積頻數
$f''_{x,y}$	依行累積並依列累積之頻數
f_t	理論頻數
f_0	實在頻數
G	幾何平均數；單純幾何式指數
G_1	第一種加權幾何式指數
G_2	第二種加權幾何式指數
G_3	第三種加權幾何式指數
G_4	第四種加權幾何式指數
H	倒數平均數；單純倒數式指數
H_1	第一種加權倒數式指數
H_2	第二種加權倒數式指數
H_3	第三種加權倒數式指數
H_4	第四種加權倒數式指數
i	組距
i_x	x 數列之組距
i_y	y 數列之組距
I	指數
K	偏態
K'	偏態係數
l	小於 M, Qm, Dm 或 Pm 各組頻數之和
ν	相應分數
L	下限
L_p	等級正差之和
m	組中點
m_1	第一主要轉矩
m_2	第二主要轉矩
m_3	第三主要轉矩
m_4	第四主要轉矩
m'_1	第一補助轉矩
m'_2	第二補助轉矩
m'_3	第三補助轉矩
m'_4	第四補助轉矩
M	中位數
M'	假定中位數
M.D.	相互平均差
M'.D'.	相互平均差係數
n	項數
o	長期趨勢
O_M	中位數在數列中之項次
O_{Dm}	第 m 十分位數在數列中之項次
O_{Pm}	第 m 百分位數在數列中之項次
O_{Qm}	第 m 四分位數在數列中之項次
p_0	基期之物價
p_1	計算期之物價
p_{12}	x_1 (X_1 之各項與其算術平均數之差) 與 x_2 (X_2 之各項與其算術平均數之差) 相乘積之平均數
Pm	第 m 百分位數
q_0	基期之貿易量
q_1	計算期之貿易量
Qm	第 m 四分位數
Q.D.	四分位差

$Q'.D'.$	四分位係數
r	繫聯係數
r_{12}	零次繫聯係數
$r_{12\cdot3}$	一次繫聯係數
$r_{12\cdot34}$	二次繫聯係數
$r_{12\cdot345}$	三次繫聯係數
$r_{12\cdot345\ldots n}$	X_1 與 X_2 之偏繫聯係數
R	司佩蒙氏等級繫聯係數
R'	相應繫聯係數
$R_{1\cdot234}$	X_1 對 X_2, X_3 與 X_4 之複繫聯係數
s	季節指數
S	標準誤
S_x	x 數列之標準誤
S_y	y 數列之標準誤
$S_{1\cdot234}$	X_1 對 X_2, X_3 與 X_4 之標準誤
t	組數
u	大於 M, Qm, Dm 或 Pm 各組頻數之和
u'	不相應分數
U	上限
U'	異號成對繫聯係數
v_x	x 數列中各項之等級
v_y	y 數列中各項之等級
$\bar{v}_x$	x 數列中各項等級之算術平均數
$\bar{v}_y$	y 數列中各項等級之算術平均數
W.	權數
W.A.	加權算術平均數
W.G.	加權幾何平均數
x	x 數列之各項與其算術平均數之差
x'	x 數列之各項與其假定平均數之差
$\bar{x}$	x 數列之算術平均數
$\bar{x}'$	x 數列之假定平均數
$\bar{x}_1$	X_1 之算術平均數
$\bar{x}_2$	X_2 之算術平均數
X	x 數列之各項
y	y 數列之各項與其算術平均數之差
y'	y 數列之各項與假定平均數之差
$\bar{y}$	y 數列之算術平均數
$\bar{y}'$	y 數列之假定平均數
Y	y 數列之各項
Z	乘數
Σ	總和之記號
σ	標準差
σ'	標準差係數
σ_1	X_1 之標準差
σ_2	X_2 之標準差
σ_c	校正標準差
σ_c'	校正標準差係數
σ_x	x 數列之標準差
σ_y	y 數列之標準差
σ_{ay}	y 數列中各項對於各行算術平均數之標準差
σ_{my}	各行算術平均數對於 $\bar{y}$ (y 數列之算術平均數) 之標準差
σ_{vx}	x 數列中各項等級之標準差
σ_{vy}	y 數列中各項等級之標準差
ρ	等級繫聯係數；繫聯指數
ρ_{xy}	y 對 x 之繫聯指數
ρ_{yx}	y 對 x 之繫聯指數
η	繫聯比
η'	校正繫聯比

附錄戊　本書重要參考書

Fisher (I.) The Making and Use of Index Numbers

Secrist (H.) An Introduction to Statistical Methods

Readings and Problems in Statistical Methods

Bowley (A.L.) Elements of Statistics

Chaddock (R.E.) Statistical Method

Exercises in Statistical Methods

Yule (G.U.) An Introduction to the Theory of Statistics

Jerome (H.) Statistical Method

King (W. I.) Elements of Statistical Method

Crum (W. L.) An Introduction to the Methods of Economic Statistics

Moore (H. L.) Forecasting the Yield and the Price of Cotton

Mills (F. C.) Statistical Methods Applied to Economics and Business

Riggleman (J.R.) Business Statistics

Rabson (R. W.) Business Barometers used in the Management of Business and Investment of Money

Davies (G. R.) Introduction to Economic Statistics

Persons (W. M.) Correlation of Time Series

The Construction of Index Numbers

Mitchell (W. C.) Index Numbers of Wholesale Prices in the United States and Foreign Countries (U. S. Department of Labour)

Journal of the Royal Statistical Society

Journal of the American Statistical Association

Darmois (G) Statistique Mathématique

Julin (G) Principes de Statistique théorique et appliquée

Aftalion (A) Cours de Statistique

Zizek (F) Grundrisz der Statistik

Meerwarth (F) Nationalökonomie und Statistik

Charlier (C. V. L.) Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik

Fläskamper (P) Statistik Theorie der Indexzahlen

社會月刊 (上海市社會局)

海關中外貿易統計年刊 (海關)

上海市工人生活費指數 (上海市社會局)

最近中國對外貿易統計圖解 (中國銀行)

經濟統計季刊 (南開大學經濟學院)

上海生活費指數 (國定稅則委員會)

棉花統計 (棉業統制委員會)

上海特別市工資和工作時間(上海市社會局)

交通統計簡報 (交通部)

中國棉業及其貿易 (方顯廷)

經濟學季刊 (中國經濟學社)

中日貿易統計(中國經濟學社中日貿易研究所)

統計月報 (立法院統計處及主計處統計局)

貨價季刊 (國定稅則委員會)

試辦句容縣人口農業總調查報告(張心一等)

附錄己　計算應用表

(一) 連續自然數各平方之總和表

n	$\Sigma(n^2)$	n	$\Sigma(n^2)$	n	$\Sigma(n^2)$	n	$\Sigma(n^2)$
1	1	26	6,201	51	45,526	76	149,226
2	5	27	6,930	52	48,230	77	155,155
3	14	28	7,714	53	51,039	78	161,239
4	30	29	8,555	54	53,955	79	167,480
5	55	30	9,455	55	56,980	80	173,880
6	91	31	10,416	56	60,116	81	180,441
7	140	32	11,440	57	63,365	82	187,165
8	204	33	12,529	58	66,729	83	194,054
9	285	34	13,685	59	70,210	84	201,110
10	385	35	14,910	60	73,810	85	208,335
11	506	36	16,206	61	77,531	86	215,731
12	650	37	17,575	62	81,375	87	223,300
13	819	38	19,019	63	85,344	88	231,044
14	1,015	39	20,540	64	89,440	89	238,965
15	1,240	40	22,140	65	93,665	90	247,065
16	1,496	41	23,821	66	98,021	91	255,346
17	1,785	42	25,585	67	102,510	92	263,810
18	2,109	43	27,434	68	107,134	93	272,459
19	2,470	44	29,370	69	111,895	94	281,295
20	2,870	45	31,395	70	116,795	95	290,320
21	3,311	46	33,511	71	121,836	96	299,536
22	3,795	47	35,720	72	127,020	97	308,945
23	4,324	48	38,024	73	132,349	98	318,549
24	4,900	49	40,425	74	137,825	99	328,350
25	5,525	50	42,925	75	143,450	100	338,350

(二)連續奇數自然數各平方之總和表

n_o	$\Sigma(n_o^2)$	n_o	$\Sigma(n_o^2)$	n_o	$\Sigma(n_o^2)$	n_o	$\Sigma(n_o^2)$
1	1	26	23,426	51	176,851	76	585,276
2	10	27	26,235	52	187,460	77	608,685
3	35	28	29,260	53	198,485	78	632,710
4	84	29	32,509	54	209,934	79	657,359
5	165	30	35,990	55	221,815	80	682,640
6	286	31	39,711	56	234,136	81	708,561
7	455	32	43,680	57	246,905	82	735,130
8	680	33	47,905	58	260,130	83	762,355
9	969	34	52,394	59	273,819	84	790,244
10	1,330	35	57,155	60	287,980	85	818,805
11	1,771	36	62,196	61	302,621	86	848,046
12	2,300	37	67,525	62	317,750	87	877,975
13	2,925	38	73,150	63	333,375	88	908,600
14	3,654	39	79,079	64	349,504	89	939,929
15	4,495	40	85,320	65	366,145	90	971,970
16	5,456	41	91,881	66	383,306	91	1,004,731
17	6,545	42	98,770	67	400,995	92	1,038,220
18	7,770	43	105,995	68	419,220	93	1,072,445
19	9,139	44	113,564	69	437,989	94	1,107,414
20	10,660	45	121,485	70	457,310	95	1,143,135
21	12,341	46	129,766	71	477,191	96	1,179,616
22	14,190	47	138,415	72	497,640	97	1,216,865
23	16,215	48	147,440	73	518,665	98	1,254,890
24	18,424	49	156,849	74	540,274	99	1,293,699
25	20,825	50	166,650	75	562,475	100	1,333,300

(三) 差誤 態曲線下之縱坐標表

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

(四) 差誤正態曲線下之面積表

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4758	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989	4990
3.1	4990.3	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4990.966									
5.0	4999.997133									

(五) ρ 與 r 之關係

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(v_x-v_y)^2}{n(n^2-1)}$$

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	2507	.49	.5075	.74	.7557	99	.9909
.25	2611	.50	.5176	.75	.7654	1 00	1.0000

中〇二六一八

中華民國二十四年八月初版

(82073·1平)

大學叢書(教本) 統計學大綱二冊

(平裝)每部定價大洋貳元叁角

外埠酌加運費匯費

著作者 金國寶

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者 徐仲盤 王養吾 胡達聰 陳忠杰)