

ISSN 0321—4796

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 13

Межвузовский сборник

Калининград — 1982

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ Р С Ф С Р

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 13

Межвузовский сборник

Калининград - 1982

Печатается по решению Редакционно-издательского
совета Калининградского государственного университета.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим
разделам дифференциальной геометрии: многообразия квад-
риков в многомерных и трехмерных пространствах, связности,
ассоциированные с многообразиями фигур, теория гиперпо-
лос, теория сетей, теория дифференцируемых отображений
многообразий фигур.

Сборник рассчитан на научных работников, аспиран-
тов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Темплан 1982г., поз. 568.

Редакционная коллегия: профессор В.Т.Базылев (Моск-
ва), профессор В.И.Елизникас (Вильнюс), профессор В.С.Ма-
лаховский (отв. редактор, Калининград), доцент Ю.И.Попов
(Калининград), профессор А.С.Феденко (Минск).

© Калининградский государственный университет,

1982

С о д е р ж а н и е

А.В.Абрамов (Тобольский пединститут) Об одном классе поверхностей, несущих ∇ -сопряженную сеть	5
Н.В.Амишева (Кемеровский ун-т). Два класса комплекса коник в аффинном пространстве.	9
Б.А.Андреев (Калининградский техн.ин-т). Не- которые типы 2-скоростей в пространстве с фундамен- тальной группой.	16
Е.В.Бухарина, Е.В.Скрыдлова (Калининградский ун-т) О вырожденных конгруэнциях, порожденных квадратикой и плоскостью.	21
И.С.Григорьева (Казанский ун-т). Мера мно- жества гиперплоскостей в E_n	27
С.В.Киреева (Московский автодорожн.ин-т). Геометрия сетей Σ_n^k в пространстве R_n	30
Л.Г.Корсакова (Калининградский ун-т). О кон- груэнции пар коник, инцидентных одномерному многообразию квадрик.	34
М.Ф.Косаренко (Калининград, АтлантНИРО). Поля геометрических объектов регулярной гипер- полосы $SH_2 \subset \ell S_N$	38
М.В.Кретов (Калининградский ун-т). Свойства связностей, порожденных комплексами центральных квадрик в аффинном пространстве.	45
М.К.Кузьмин (МОПИ им.Н.К.Крупской). R -сети в евклидовом пространстве E_n	50
Н.Н.Локотков (МГПИ им.В.И.Ленина). О спе- циальном расслоении p -поверхности в евклидовом p -пространстве.	54
С.В.Малаховская (Калининградский ун-т). Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков	60
П.Н.Михайлов (Стерлитамакский пединститут) О поверхностях постоянной средней кривизны.	65
Ж.Нурпейсов (Казахский пединститут) К гео- метрии интегрируемых распределений в E_n	71
Е.В.Опольская (Черновицкий ун-т). О почти контактном погружении в многообразии почти контактной структуры.	76

Н.Д.Поляков (Чувашский пединститут) Об $N(\sigma)$ - антиинвариантных поверхностях в почти контактном многообразии. 81

Е.В.Силаев (МПИ им В.И.Ленина). О скалярной кривизне поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве. 87

Е.Н.Сосов (Казанский ун-т). Замечание о релятивной линейчатой геометрии. 91

А.В.Столяров (Чувашский пединститут) Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения. 95

В.Н.Худенко (Калининградский ун-т). Об одном классе двумерных многообразий коник в R_4 103

В.П.Цапенко (Калининградский ун-т). Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P, Q) 107

Ю.И.Шевченко (Калининградский техн.ин-т). Нормализация полосы. 112

Н.М.Шейдорова (Калининградский ун-т). К теории одномерных регулярных гиперполос проективного пространства. 118

А.В.Абрамов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ,
НЕСУЩИХ ∇ -СОПРЯЖЕННУЮ СЕТЬ.

В работе изучаются поверхности евклидова пространства, несущие ∇ -сопряженную сеть, векторы вынужденных кривизн линий относительно друг друга которой равны нулю, кроме одного вектора.

1. На p -мерной поверхности V_p вещественного n -мерного евклидова пространства E_n рассмотрим сеть $\Sigma_p = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, т.е. p семейств $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ линий таких, что через каждую точку x некоторой области $\mathcal{U} \subset E_n$ проходит только по одной линии каждого семейства, причем векторы, касательные к линиям сети, образуют линейно независимую систему векторов. К поверхности V_p присоединяем подвижной полуортогональный репер $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in \mathcal{U}$, \vec{e}_i - единичные векторы, касательные к линиям сети, \vec{e}_α - единичные попарно ортогональные векторы нормали $N_{n-p}(x)$. Имеют место следующие деривационные формулы:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j + \omega_\alpha^i \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta,$$

где $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2, \dots, u^p)$ - радиус-вектор точки $x \in \mathcal{U}$, ω^i - 1-формы от дифференциалов криволинейных координат u^i точки x ;

$$i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, p; \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = p+1, \dots, n.$$

Продолжение системы дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p приводит к равенствам:

$$\omega_i^\alpha = \theta_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \theta_{ij}^\alpha = \theta_{ji}^\alpha.$$

где \bar{v}_{ij}^α - пучок вторых основных тензоров поверхности. I-формы $\omega_i^\alpha, \omega_\alpha^i, \omega_j^\alpha, \omega_\alpha^j$ и метрический тензор $g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$ поверхности V_p связаны соотношениями:

$$dg_{ij} = g_{ik} \omega_j^\alpha + g_{kj} \omega_i^\alpha, \quad \omega_\alpha^i + g^{ij} \omega_j^\alpha = 0, \quad \omega_\beta^\alpha + \omega_\alpha^\beta = 0$$

и удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства. В нормальной плоскости $V_{n-p}^{(x)}$ можно рассмотреть систему векторов $\bar{v}_{ij} = \bar{v}_{ij}^\alpha \bar{e}_\alpha$. Метрический тензор g_{ij} индуцирует на поверхности V_p риманову связность ∇ без кручения. Тензор R_{jke} кривизны поверхности V_p (как риманова пространства) связан с векторами \bar{v}_{ij} равенствами [2]:

$$R_{j.kel}^i = g^{it} (\bar{v}_{jk} \bar{v}_{et} - \bar{v}_{je} \bar{v}_{kt}).$$

Сеть Σ_p называется ∇ -сопряженной [1], если для всех $i \neq j$ выполняется условие: $\nabla_i \bar{e}_j \in \Delta_2(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$, где $\nabla_i \bar{e}_j$ - ковариантная производная векторного поля \bar{e}_j вдоль векторного поля \bar{e}_i , $\Delta_2(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ - 2-мерное распределение, натянутое на векторные поля \bar{e}_i и \bar{e}_j . Как известно [1], уравнения ∇ -сопряженной сети в репере, построенном на касательных к линиям сети, имеют вид:

$$\omega_j^i = a_{ji}^i \omega^i + a_{jj}^j \omega^{j(i+j)}. \text{ Дифференцирование последних уравнений приводит к системе конечных соотношений:}$$

$$R_{jke}^i = g^{it} (\bar{v}_{jk} \bar{v}_{et} - \bar{v}_{je} \bar{v}_{kt}) = 0 \quad (i, j, k, l \neq) \quad (1)$$

2. Сеть Σ_p назовем почти сопряженной, если все ее направления сопряжены относительно конусов $\bar{v}_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j = 0$, кроме, быть может, двух направлений. Пусть $\bar{e}_{i_0}, \bar{e}_{j_0}$ - пара, вообще говоря, не сопряженных направлений. Для почти сопряженной сети имеют место равенства: $\bar{v}_{\lambda i} = \vec{0}, \bar{v}_{j\mu} = \vec{0} \quad (i \neq j)$, где $i, j, k, \dots \neq i_0, j_0; \lambda, \mu = i_0, j_0$.

Уравнения поверхности, несущей почти сопряженную сеть, имеют вид:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_\lambda^a = \bar{v}_{\lambda\mu}^a \omega^\mu, \quad \omega_i^\xi = \omega_\lambda^\xi = 0, \quad (2)$$

где $a = p+1, \dots, p+q; \xi = p+q+1, \dots, n; g$ -ранг системы векторов

$\bar{v}_{ii}, \bar{v}_{\lambda\mu}$. Дифференцирование системы уравнений (2) приводит к системе конечных соотношений:

$$\bar{v}_{jj} a_{i\mu}^j + \bar{v}_{ii} (a_{j\mu}^i - a_{\mu j}^i) - \bar{v}_{\lambda\mu} a_{ij}^\lambda = \vec{0} \quad (i \neq j),$$

$$\bar{v}_{jj} a_{ik}^j + \bar{v}_{ii} (a_{jk}^i - a_{kj}^i) - \bar{v}_{kk} a_{ij}^k = \vec{0} \quad (i, j, k \neq), \quad (3)$$

$$\bar{v}_{i_0 j_0} a_{i_0 j_0}^{i_0} - \bar{v}_{j_0 j_0} a_{i_0 i_0}^{j_0} + \bar{v}_{i_0 j_0} (a_{i_0 j_0}^{i_0} - a_{j_0 i_0}^{i_0}) + \bar{v}_{ii} (a_{i_0 j_0}^i - a_{j_0 i_0}^i) = \vec{0}.$$

Из последних равенств следует утверждение: почти сопряженная сеть является ∇ -сопряженной, если каждая система векторов $(\bar{v}_{i_0 i_0}, \bar{v}_{j_0 j_0}, \bar{v}_{i_0 j_0}, \bar{v}_{ii}), (\bar{v}_{ii}, \bar{v}_{jj}, \bar{v}_{kk}), (\bar{v}_{jj}, \bar{v}_{ii}, \bar{v}_{kk}, \bar{v}_{i_0 j_0})$ является линейно независимой и направления \bar{e}_{i_0} и \bar{e}_{j_0} ∇ -сопряжены. При этом псевдофокусы [3] $F_{i_0}^{i_0}$ и $F_{j_0}^{j_0}$ на прямых $[x, \bar{e}_i]$ совпадают.

3. Пусть сеть Σ_p является почти сопряженной ∇ -сопряженной. Равенства (3) принимают вид: $\bar{v}_{i_0 j_0} (a_{i_0 j_0}^{i_0} - a_{i_0 i_0}^{j_0}) = \vec{0}$. Отсюда следует предположение: почти сопряженная ∇ -сопряженная сеть является сопряженной сетью, если псевдофокусы $F_{i_0}^{i_0}$ и $F_{j_0}^{j_0}$ не совпадают хотя бы на одной прямой $[x, \bar{e}_i]$. Если направления $\bar{e}_{i_0}, \bar{e}_{j_0}$ не сопряжены ($\bar{v}_{i_0 j_0} \neq \vec{0}$), то псевдофокусы совпадают на всех прямых $[x, \bar{e}_i]$.

Равенства (1) принимают вид: $g^{ij} \bar{v}_{i_0 j_0} \bar{v}_{ii} = 0$ (не суммировать). Следовательно, если поверхность несет почти сопряженную ∇ -сопряженную сеть, то для пары различных индексов i и j выполняется по крайней мере одно из следующих условий: а/ векторы $\bar{E}_i = g^{iu} \bar{e}_u$ и $\bar{E}_j = g^{ju} \bar{e}_u$ ($u = 1, 2, \dots, p$) - ортогональны; б/ векторы \bar{v}_{ii} и \bar{v}_{jj} ортогональны; вектору $\bar{v}_{i_0 j_0}$.

Поверхность $V_p \subset E_n$, несущая почти сопряженную ∇ -сопряженную ортогональную сеть, лежащая в своей соприкасающейся плоскости, существует и определяется с произвольном $g + \frac{p^2 - 3p + 4}{2}$ функций двух аргументов.

4. ∇ -сеть Фосса называется ∇ -сопряженной геодезической сетью [1]. Дифференциальные уравнения такой сети имеют вид: $\omega_j^i = a_{ji}^i \omega^i \quad (i \neq j)$. Дифференцирование последних уравнений в случае почти сопряженной сети при-

водит к равенствам: $R_{\lambda\mu}^i = 0$ ($\mu \neq \lambda$).

Можно доказать утверждение: поверхность $V_p \subset E_n$, несущая почти сопряженную ∇ -сеть Фосса, или является ортогональным произведением [4] 2-мерной поверхности V_2 на сопряженную систему V_{p-2} , или расслаивается на 2-мерные поверхности нулевой скалярной кривизны и $(p-2)$ -мерные сопряженные системы.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Сети на многообразиях. - Тр. геометрич. семинара, т.6, ВИНТИ АН СССР, 1974, с.189-205.
2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.
3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит.матем.сб., 1966, №4, с.475-492.
4. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, М., 1960.

Н.В.Амишева

ДВА КЛАССА КОМПЛЕКСА КОНИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается в трехмерном аффинном пространстве комплекс невырожденных коник. Деривационные формулы репера $\{A, e_2\}$ в аффинном пространстве имеют вид:

$$dA = \omega^2 e_2, \quad de_2 = \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} e_{\hat{\beta}} \quad (\hat{\alpha}, \hat{\beta} = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

причем формы Пфаффа $\omega^{\hat{\alpha}}, \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства. Помещая начало репера $\{A, e_2\}$ в центр коники Q_2 и направляя векторы так, что e_{α} компланарны плоскости L_2 коники, а e_3 - произвольный вектор пространства, не компланарный с $\{e_{\alpha}\}$, запишем уравнения коники в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 1, \quad x^3 = 0, \quad \det \|a_{\alpha\beta}\| \neq 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2). \quad (1.2)$$

Исключая из рассмотрения комплексы коник, у которых многообразие центров вырождается, примем $\omega^{\hat{\alpha}}$ ($\hat{\alpha} = 1, 2, 3$) за независимые формы семейства коник. Тогда система уравнений Пфаффа указанного семейства принимает вид:

$$\Theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta} \omega_{\alpha}^{\gamma} - a_{\alpha\gamma} \omega_{\beta}^{\gamma} = \theta_{\alpha\beta\hat{\alpha}} \omega^{\hat{\alpha}}, \quad (1.3)$$

$$\omega_{\alpha}^{\beta} = \Lambda_{\alpha\hat{\alpha}}^{\beta} \omega^{\hat{\alpha}}.$$

Основные прямые [5] комплекса коник в построенном репере определяются системой уравнений:

$$(\Lambda_{\alpha 1}^{\beta} a_{\beta 2} - \Lambda_{\alpha 2}^{\beta} a_{\beta 1}) x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^3 = 0. \quad (1.4)$$

В общем случае в плоскости коники имеется две различные основные прямые. Однако, могут иметь место выро-

денные случаи: случай двойных основных прямых и случай неопределенных основных прямых. Этим классам коник посвящается настоящая работа.

§2. СЛУЧАЙ ДВОЙНЫХ ОСНОВНЫХ ПРЯМЫХ КОМПЛЕКСА КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Направим вектор e_1 по двойному основному направлению, e_2 — по сопряженному с ним направлению относительно коники. Нормировку вектора e_1 проведем таким образом, что конец его лежит на конике при совмещении начала вектора с центром коники. При такой фиксации векторов выполняются соотношения:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad (2.1)$$

$$\Lambda_{12}^3 = 0, \quad (2.2)$$

$$\Lambda_{11}^3 a_{22} - \Lambda_{22}^3 = 0, \quad (2.3)$$

$$a_{22} \neq 0, \quad \Lambda_{21}^3 \neq 0. \quad (2.4)$$

Неравенство $a_{22} \neq 0$ исключает случай вырожденности коники, а неравенство $\Lambda_{21}^3 \neq 0$ исключает случай голономности распределения, определенного соответствием: каждой точке пространства соответствует плоскость коники. При такой фиксации формы $\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1$ стали главными. Их выражаем через базисные $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ по формулам:

$$\omega_1^1 = \Lambda_{12}^1 \omega^2, \quad \omega_2^1 = \Lambda_{22}^1 \omega^2, \quad \omega_3^1 = \Lambda_{12}^2 \omega^2 \quad (2.5)$$

Образующим элементом неголономного многообразия V_n^{n-1} является пара (M_0, μ) , где M_0 — точка пространства, а μ — инцидентная ей гиперплоскость [3]. С комплексом коник в трехмерном пространстве ассоциируется неголономное V_3^2 , элементом которого является (A, L_2) , где A — центр коники, L_2 — плоскость коники. В работе [4] неголономное V_3^2 называют неголономной поверхностью.

Т е о р е м а I. Для того, чтобы основная прямая имела асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2 , необходимо и достаточно, чтобы аффинная нормаль V_3^2 являлась прямой, сопряженной относительно коники двойной основной прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Аффинная нормаль V_3^2 есть касательная к линии, вдоль которой плоскость многообразия ($x^3=0$) остается параллельной сама себе [4], т.е. к линии:

$$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = a_{22} \Lambda_{11}^3 \Lambda_{13}^3 : \quad (2.6)$$

$$(\Lambda_{13}^3 \Lambda_{21}^3 - \Lambda_{11}^3 \Lambda_{23}^3) : a_{22} (\Lambda_{11}^3)^2.$$

Асимптотические линии на неголономном многообразии V_3^2 в рассматриваемом классе определяются уравнениями:

$$\omega^3 = 0, \quad \Lambda_{11}^3 (\omega^1)^2 + \Lambda_{21}^3 \omega^1 \omega^2 + \Lambda_{22}^3 (\omega^2)^2 = 0. \quad (2.7)$$

Если двойная основная прямая с направляющим вектором e_1 имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2 , то

$$\Lambda_{11}^3 = 0. \quad (2.8)$$

Тогда в силу соотношений (2.3) имеет место равенство:

$$\Lambda_{22}^3 = 0. \quad (2.9)$$

При условии (2.8) уравнения (2.6) принимают вид:

$\omega^1 = \omega^3 = 0$. Касательная к этой линии — аффинная нормаль неголономного многообразия V_3^2 — есть прямая AA_2 , которая сопряжена относительно коники прямой AA_1 — двойной основной прямой.

Достаточность. Если аффинная нормаль является прямой, сопряженной относительно коники двойной основной прямой, т.е. касательной к линии $\omega^1 = \omega^3 = 0$, то, как видно из (2.6), учитывая неравенство $a_{22} \neq 0$, получим $\Lambda_{11}^3 = 0$, при котором линия $\omega^2 = \omega^3 = 0$ с касательной AA_1 — асимптотическая линия неголономного многообразия V_3^2 .
Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Так как из равенства (2.8) вытекает (2.9), то уравнения (2.7) принимают вид: $\omega^3=0$, $\omega^1\omega^2=0$, т.е. асимптотические линии на неголономном многообразии V_3^2 координатные. Следовательно, аффинная нормаль, касательная к линии $\omega^1=\omega^3=0$, является в то же время асимптотической линией неголономного многообразия V_3^2 .

З а м е ч а н и е 2. Из уравнений (2.6) и неравенства $a_{22} \neq 0$ заключаем, что аффинная нормаль неголономного многообразия V_3^2 может лежать в плоскости коники тогда и только тогда, когда $\Lambda_{11}^3=0$. Но если обращается в нуль Λ_{11}^3 , то уравнения (2.6) принимают вид $\omega^1=\omega^3=0$, откуда следует, что в плоскости коники аффинной нормалью может быть только прямая, сопряженная относительно коники сдвоенному диаметру. Соответствие, устанавливаемое между точками пространства и плоскостями коник, инцидентными точкам, задает в пространстве распределение Δ_2 . Существуют интегральные кривые распределения Δ_2 , вдоль которых коника и смежная к ней пересекаются. Точки пересечения назовем фокусами коники вдоль распределения Δ_2 . Заметим, что в работах [1] и [2] эти точки называются фокусами неголономной конгруэнции коник.

Т е о р е м а 2. Если сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2 , то сдвоенная основная точка A_1 является фокусом коники вдоль распределения Δ_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения, определяющие фокусы коники вдоль Δ_2 , имеют вид:

$$x^3=0, \quad (x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2=1, \quad (2.10)$$

$$\{ \varrho_{221}(x^2)^2 - 2\Lambda_{11}^1(x^1)^2 - 2(\Lambda_{21}^1 + a_{22}\Lambda_{11}^2)x^1x^2 - 2x^1 \} \Lambda_{22}^3 x^2 -$$

$$- \{ \varrho_{222}(x^2)^2 - 2\Lambda_{22}^1(x^1)^2 - 2a_{22}x^2 - 2(\Lambda_{22}^1 + a_{22}\Lambda_{12}^2) \} (\Lambda_{11}^3 x^1 + \Lambda_{21}^3 x^2) = 0.$$

Если сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2 , то выполняются соотношения (2.8), (2.9), при которых, как видно из системы (2.10), точка $A_1(1,0,0)$ является фокусом коники вдоль распределения Δ_2 . Теорема доказана.

Легко заметить, что в этом случае касательной плоскостью многообразия V_3^2 является плоскость коники.

Напомним, что конус Малюса [4] для асимптотического направления данного элемента многообразия есть геометрическое место касательных к линиям, при движении вдоль которых асимптотическая касательная описывает торс.

Т е о р е м а 3. Если сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2 , то конус Малюса для этого направления распадается на пару плоскостей, одна из которых является плоскостью коники.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2 , если выполняются условия (2.2), (2.8) и (2.9). При этих условиях конус Малюса для направления e_1 , которое является сдвоенным основным направлением и асимптотическим направлением неголономного многообразия V_3^2 , определяется уравнением $x^3(\Lambda_{11}^2 x^1 + \Lambda_{12}^2 x^2 + \Lambda_{13}^2 x^3 - \Lambda_{13}^3 x^3) = 0$, откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

§3. СЛУЧАЙ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ОСНОВНЫХ ПРЯМЫХ КОМПЛЕКСА КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Основные диаметры коники связаны с характеристикой плоскости $x^3=0$ вдоль распределения Δ_2 .

Т е о р е м а 4. Если основные прямые не определены, то характеристикой плоскости коники вдоль распределения Δ_2 является либо точка, либо вся плоскость.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть основные диаметры коники не определены. Тогда выполняются соотношения:

$$a_{11}\Lambda_{12}^3 = \Lambda_{11}^3 a_{12}, \quad (3.1)$$

$$a_{22} \Lambda_{21}^3 = \Lambda_{22}^3 a_{21}, \quad (3.2)$$

$$a_{12} \Lambda_{21}^3 + a_{22} \Lambda_{11}^3 - a_{11} \Lambda_{22}^3 - a_{21} \Lambda_{12}^3 = 0. \quad (3.3)$$

Характеристика плоскости коники $x^3=0$ вдоль распределения Δ_2 при условиях (3.1)-(3.3) находится из системы:

$$x^3=0, \quad a_{11} \Lambda_{22}^3 x^1 - a_{12} \Lambda_{22}^3 x^2 = 0, \quad (3.4)$$

$$a_{12} \Lambda_{22}^3 x^1 - a_{22} \Lambda_{22}^3 x^2 = 0.$$

определитель которой равен

$$(\Lambda_{22}^3)^2 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2). \quad (3.5)$$

Если выражение (3.5) не равно нулю, то ранг системы (3.4) равен трем, и характеристикой плоскости $x^3=0$ вдоль Δ_2 является точка - центр коники. Если выражение (3.5) равно нулю, то, так как коника невырождена и $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, обращается в нуль величина Λ_{22}^3 . Обращение в нуль величины Λ_{22}^3 приводит, как видно из (3.4), к тому, что характеристика плоскости $x^3=0$ вдоль Δ_2 определяется одним уравнением $x^3=0$. Следовательно, плоскость коники вдоль Δ_2 в этом случае неподвижна.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Для того, чтобы основные прямые были неопределены, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1/уравнение $\omega^3=0$ вполне интегрируемо; 2/асимптотические направления коники совпадают с асимптотическими направлениями голономной поверхности центров $\omega^3=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если основные прямые не определены, то из (3.1)-(3.3) вытекают соотношения:

$$\frac{a_{11}}{\Lambda_{11}^3} = \frac{a_{12}}{\Lambda_{12}^3} = \frac{a_{21}}{\Lambda_{21}^3} = \frac{a_{22}}{\Lambda_{22}^3}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует: 1/ $\Lambda_{12}^3 = \Lambda_{21}^3$, что дает вполне интегрируемость уравнения $\omega^3=0$; 2/пропорциональность квадратичных форм коники $(a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta)$ и поверхности центров

$(\Lambda_{\alpha\beta}^3 \omega^\alpha \omega^\beta)$. Наоборот, условия 1/ и 2/ теоремы дают соотношения (3.6), которые означают неопределенность основных прямых. Теорема доказана.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Комплексы кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геом. сб., в. 4, Тр. Томского ун-та, 176, 1964, с. 28-36.
2. М а л а х о в с к и й В.С. Многообразия алгебраических элементов в n -мерном проективном пространстве. Геом. сб., в. 3, Тр. Томского ун-та, 168, с. 28-42.
3. Р о г о в о й М.Р. О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V^{n-1} в R_n . Украинский геом. сб., в. 10, Изд-во Харьковского ун-та, 1971.
4. Щ е р б а к о в Р.Н., Р а х у л а М.О. К эквивалентной теории неголономного многообразия. Геом. сб., в. 1, Тр. Томского ун-та, 160, 1962.
5. А м и ш е в а Н.В. Комплексы центральных кривых второго порядка в трехмерном эквивалентном пространстве. Геом. сб., в. 9, Изд-во Томского ун-та, 202, 1972.

Б.А.А н д р е е в

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ 2-СКОРОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ
 С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Определены 2 специальных типа элементов p -го касательного расслоения многообразия M , являющегося G -пространством. Введенные понятия изучаются для $p=2$ в случаях, когда M является: точечным проективным пространством P_N , пространством $R(p, \pi)$ неинцидентных нуль-пар проективного пространства и в некоторых других случаях. Полученные результаты применяются к исследованию дифференцируемого отображения $\varphi: P_N \rightarrow R(p, \pi)$. Все рассуждения имеют локальный характер.

I. Пусть M -пространство представления группы Ли G , а C_m -множество кривых $l: R \rightarrow M$, таких, что $l(0) = m \in M$ и $\text{rang } l$ в $0 \in R$ равен 1. Обозначим символом $(l)_p$ струю $j_0^p \in T_m^p(M)$ порядка p в точке 0 отображения l , т.е. p -скорость на M [1, §5], а символом $\{l\}_p$ -множество кривых $\bar{l} \in C_m$, представимых в виде $\bar{l} = \bar{l} \circ \varepsilon$, где $\bar{l} \in (l)_p$, ε -элемент дифференциальной группы \mathcal{D}_1^p порядка p [1, с.44]. Пусть, далее

$$S(l)_p = \{g \in G \mid g \circ l \in (l)_p\}, S\{l\}_p = \{g \in G \mid g \circ l \in \{l\}_p\}.$$

Легко показать, что $S(l)_p$ и $S\{l\}_p$ являются подгруппами группы G , причем выполняется:

$$S(l)_p \subset S(l)_{p-1}, S\{l\}_p \subset S\{l\}_{p-1}, S(l)_p \subset S\{l\}_p.$$

О п р е д е л е н и е 1. p -скорость $(l)_p$ называется p -фиксатором (p -квазификсатором), если выполняется: $S\{l\}_{p-1} \subset S\{l\}_p$, ($S(l)_{p-1} \subset S\{l\}_p$).

П р е д л о ж е н и е 1. Каждый p -фиксатор является p -квазификсатором.

Доказательство следует из соотношения $S(l)_{p-1} \subset S\{l\}_{p-1}$.

Рассмотрим 2-квазификсаторы и 2-фиксаторы в некоторых пространствах фигур [2].

2. Пусть $M = P_N$ ($N > 1$). При соответствующем выборе репера уравнения преобразования, определяемого элементом g подгруппы стационарности $S(l)_0$, точки $P^0 = l(0)$ имеют в неоднородных координатах следующий вид:

$$y^i = a_j^i x^j (1 - p_\kappa x^\kappa), (\det \{a_j^i\} \neq 0) \quad (1)$$

Обозначив символом $\langle \kappa \rangle$ сумму членов порядка малости $p \geq \kappa$ относительно $t \in R$ и записав разложения отображений ε и l в ряды Тейлора

$$\varepsilon(t) = \beta t + \frac{1}{2} c t^2 + \langle 3 \rangle, \quad x^i = l^i t + \frac{1}{2} m^i t^2 + \langle 3 \rangle, \quad (2)$$

для кривых $l \circ \varepsilon$ и $g \circ l$ получаем соответственно

$$y^i = \beta l^i t + \frac{1}{2} (\beta^2 m^i + c l^i) t^2 + \langle 3 \rangle, \quad (3)$$

$$y^i = a_j^i l^j t + \frac{1}{2} (a_j^i m^j + 2 a_j^i p_\kappa l^j l^\kappa) t^2 + \langle 3 \rangle. \quad (4)$$

Условие $l \circ \varepsilon \in (g \circ l)_2$ означает:

$$a_j^i l^j = \beta l^i, \quad a_j^i m^j + 2 a_j^i p_\kappa l^j l^\kappa = \beta^2 m^i + c l^i \quad (5)$$

П р е д л о ж е н и е 2. Для P_N ($N > 1$) следующие 3 утверждения эквивалентны: 1/ 2-скорость $(l)_2$ является 2-фиксатором; 2/ $(l)_2$ является 2-квазификсатором; 3/ $(l)_2$ состоит из кривых, имеющих в $l(0)$ инфлекссионную точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 3/ \Rightarrow 1/. Пусть l имеет в $l(0)$ инфлекссионную точку. Тогда

$$m^i = \beta l^i. \quad (6)$$

условие $g \in S\{l\}_1$ означает: $a_j^i l^j = a l^i$, поэтому 2-е равенство из (5) сводится к соотношению

$$\beta a + 2 a p_\kappa l^\kappa = \beta^2 \beta + c. \quad (7)$$

Положив $\vartheta = a$, $c = \sigma(a - \vartheta^2) + 2\alpha r_\kappa \ell^\kappa$, получим такое ε , что $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$, откуда $g \in S\{\ell\}_2$. $2/ \Rightarrow 3/$. Условие $g \in S(\ell)_1$ означает: $A_j^i \ell^j = \ell^i$, при этом условие $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$ сводится к соотношениям:

$$\vartheta = 1, \quad A_j^i m^j = (c - 2r_\kappa \ell^\kappa) \ell^i + m^i. \quad (8)$$

Предположим $m^i \neq \sigma \ell^i$. Тогда существуют такие A_j^i , что система (8) не удовлетворяется ни при каком c (например, в случае, когда матрица $\{A_j^i\}$ имеет m^i своим собственным вектором с не равным 1 собственным значением). Наконец $1/ \Rightarrow 2/$ вытекает из предложения 1.

3. Пусть M является пространством $R(p, \pi)$ неинцидентных нуль-пар (p, π) проективного пространства P_n . В репере нулевого порядка уравнения преобразования, определяемого элементом g из подгруппы стационарности $S(\ell)_0$, пары $(p^\circ, \pi^\circ) = \ell(0)$ имеют вид

$$y^i = A_j^i x^j, \quad \eta_i = B_i^j \xi_j, \quad (B_j^i A_k^j = \delta_k^i), \quad (9)$$

где y^i, x^i - неоднородные координаты точек p, ξ_i, η_i - неоднородные тангенциальные координаты гиперплоскостей π . Для кривой ℓ имеем:

$$x^i = \ell^i t + \frac{1}{2} m^i t^2 + \langle 3 \rangle, \quad \xi_i = \lambda_i t + \frac{1}{2} \mu_i t^2 + \langle 3 \rangle. \quad (10)$$

Условия $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$ принимают вид

$$\begin{cases} A_j^i \ell^j = \vartheta \ell^i, & B_i^j \lambda_j = \vartheta \lambda_i, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} A_j^i m^j = c \ell^i + \vartheta^2 m^i, & B_i^j \mu_j = c \lambda_i + \vartheta^2 \mu_i \end{cases} \quad (12)$$

Предложение 3. В $R(p, \pi)$ 2-скорость является 2-фиксатором в том и только в том случае, если она состоит из инфлекссионных в элементе $\ell(0)$ кривых (см. [3, с.10]).

Доказательство. Для $g \in S\{\ell\}_1$ получаем $A_j^i \ell^j = a \ell^i$, $B_i^j \lambda_j = a \lambda_i$. Из (II) при этом вытекает $\vartheta = a$. Пусть ℓ инфлекссионна в $\ell(0)$:

$$m^i = \sigma \ell^i, \quad \mu_i = \sigma \lambda_i. \quad (13)$$

(см. [3, с.10]). (12) принимают вид: $c + \sigma a^2 = \sigma a$.

Итак, взяв $\vartheta = a$, $c = \sigma(a - a^2)$, получим ε , для которого $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$, т.е. $g \in S\{\ell\}_2$. Пусть (13) не выполняется. Возьмем в качестве $\{A_j^i\}$ матрицу, имеющую m^i собственным вектором с не равным ϑ^2 собственным значением; тогда (12) не выполняется ни при каких c .

Предложение 4. В $R(p, \pi)$ 2-скорость является 2-квазификсатором в том и только в том случае, если она состоит из слабо инфлекссионных в $\ell(0)$ кривых [3, с.10].

Доказательство. Условие $g \in S(\ell)_1$ означает: $A_j^i \ell^j = \ell^i$, $B_i^j \lambda_j = \lambda_i$. Пусть ℓ слабо инфлекссионна в $\ell(0)$: $m^i = \sigma_1 \ell^i$, $\mu_i = \sigma_2 \lambda_i$. Положив $\vartheta = 1$, $c = 0$, получим ε , для которого $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$. Вторая часть предложения доказывается так же, как $2) \Rightarrow 3)$ в предложении 2.

Из последних двух предложений вытекает

Следствие I. Для $R(p, \pi)$ понятие 2-квазификсатора является W -инвариантным [3, с.9], а понятие 2-фиксатора этим свойством не обладает.

В статье [3] доказано геометрическое свойство 2-фиксаторов, выделяющее их из множества 2-квазификсаторов в $R(p, \pi)$ (теорема 2.1).

Одна геометрическая характеристика 2-фиксаторов и 2-квазификсаторов в $R(p, \pi)$ связана с существованием в нем инвариантной невырожденной метрики [4], которая определяет в $R(p, \pi)$ структуру псевдориманова пространства. Известно, что в псевдоримановом пространстве существует единственная аффинная связность без кручения, сохраняющая скалярные произведения при параллельном переносе. Обозначим ее символом ∇ . Имеют место следующие два предложения.

Предложение 5. 2-скорость $(\ell)_2$ в $R(p, \pi)$ является 2-фиксатором в том и только в том случае, если она содержит геодезическую связности ∇ .

Предложение 6. 2-скорость $(\ell)_2$ в $R(p, \pi)$ является 2-квазификсатором в том и только в том случае, если она содержит кривую, W -эквивалентную геодезической связности ∇ .

4. Можно показать, что для пространств E_n ($n > 2$) и A_n ($n > 1$) справедливы утверждения, аналогичные предложению 2. Для пространства пар точек аффинного пространства A_n ($n > 2$) в общем случае имеют место аналоги предложений 3 и 4.

5. Применим понятия 2-фиксатора и 2-квазификсатора к изучению дифференцируемого отображения $\varphi: P_M \rightarrow R(p, \pi)$ [3, с. II]. Из предложений 2, 3, 4 и теоремы 3.1 работы [3] вытекает

Предложение 7. Чтобы вектор $(\ell)_1$ определял в $\ell(0)$ характеристическое (слабо характеристическое) направление отображения φ , необходимо и достаточно, чтобы 2-фиксатору $(\ell)_2 \subset (\ell)_1$ пространства P_M при отображении φ соответствовал 2-фиксатор (2-квазификсатор) $(\varphi \circ \ell)_2$ пространства $R(p, \pi)$.

Список литературы

1. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - В кн.: Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979, с. 5-246.
2. Малаховский В. С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. - Тр. геом. семинара ВИНТИ АН СССР, 1969, с. 179-206.
3. Андреев Б. А. Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 8-12.
4. Розенфельд Б. А. Проективная геометрия как метрическая геометрия. Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 6, с. 328-354.
5. Рыжков В. В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. - Геометрия. 1963. Итоги науки. ВИНТИ АН СССР, 1965, с. 65-107.

Е. В. Бухарина, Е. В. Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрен частный класс вырожденных конгруэнций $(Q_p)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q , описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью p , описывающей двухпараметрическое семейство (конгруэнции). Каждой плоскости p конгруэнции $(Q_p)_{1,2}$ ставится в соответствие единственная квадрика Q , полным прообразом которой является однопараметрическое семейство плоскостей p . Исследованы проективно-дифференциальные свойства некоторых геометрических образов, ассоциированных с выделенным классом конгруэнции $(Q_p)_{1,2}$.

Пусть C - линия пересечения плоскости p с соответствующей ей квадрикой Q . Проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором A_3 совмещена с характеристической точкой плоскости p , A_1 и A_2 расположены в точках пересечения коники C с полярной точкой A_3 относительно этой коники, A_4 совпадает с полюсом плоскости p относительно квадрики Q . Уравнения квадрики Q и коники C относительно построенного репера с учетом соответствующей нормировки его вершин примут соответственно вид

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0;$$

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0.$$

Дальнейшую нормировку вершин репера осуществим так,

чтобы точка пересечения прямой $[A_1, A_2]$ с касательной плоскостью к поверхности (A_4) совпала с единичной точкой $E_{1,2} = A_1 + A_2$ этой прямой.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $(Q_p)_{1,2}^0$ назовем конгруэнцию $(Q_p)_{1,2}$, для которой выполняются следующие условия: 1/ конгруэнция коник C расщеляема к прямолинейной конгруэнции (A_3, A_4) ; 2/ асимптотическая сеть на поверхности (A_3) огибаются прямыми $[A_1, A_3], [A_2, A_3]$; 3/ поверхность $(E_{1,2})$ вырождается в линию.

С учетом всех условий определения система пфаффовых уравнений конгруэнции $(Q_p)_{1,2}^0$ записывается в виде

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^i \frac{1}{2\ell} \omega_4^3 + \omega_j^3, \quad \omega_3^i = \ell \omega_j^i,$$

$$\omega_4^i = (-1)^j \frac{1}{2} \omega_4^3 + \omega_j^3, \quad \omega_4^3 = (3\ell^2 + 1)(\omega^1 - \omega^2), \quad (1)$$

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 0, \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = -\ell \omega_4^3,$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 2\ell(\omega_1 + \omega_2), \quad d\ell = -\ell^2 \omega_4^3,$$

где формы $\omega_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i$ приняты в качестве базисных, $i, j, k = 1, 2$, причем $i \neq j$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система уравнений (I) является вполне интегрируемой.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция $(Q_p)_{1,2}^0$ обладает следующими геометрическими свойствами: 1/ прямолинейная конгруэнция (A_3, A_4) расщеляема к прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2) ; 2/ фокусы F^1 и F^2 прямой $[A_1, A_2]$ гармонически разделяют вершины репера A_1 и A_2 ; 3/ фокальными точками коники C являются точки A_1, A_2 , а также точки пересечения коники с прямыми $[F^1, A_3]$ и $[F^2, A_3]$; 4/ асимптотическая сеть невырождающейся фокальной поверхности прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2) соответствует асимптотической сети поверхности (A_3) ; 5/ поверхности $(A_1), (A_2), (A_3)$ являются одной и той же инвариантной квадратикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Условия одностороннего расщеления от прямолинейной конгруэнции (A_3, A_4) к пря-

молинейной конгруэнции (A_1, A_2) в силу системы уравнений (I) удовлетворяются тождественно. 2/ Фокусы $F^{1,2} = sA_1 + tA_2$ прямой $[A_1, A_2]$ задаются уравнением $s^2 - t^2 = 0$, т.е. фокальными являются точки $F^1 = E_{1,2}$ и $F^2 = E_{1,2}^*$, где $E_{1,2}^* = A_1 - A_2$ — четвертая гармоническая к $E_{1,2}$ относительно A_1 и A_2 . 3/ Фокальные точки коники C , ассоциированной с конгруэнцией $(Q_p)_{1,2}^0$, определяются системой уравнений

$$x^1 x^2 ((x^1)^2 - (x^2)^2)^2 = 0, \quad (x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0,$$

решая которую, убеждаемся в справедливости утверждения 3 теоремы I. 4/ Фокальная поверхность $(F^2) \equiv (E_{1,2}^*)$ прямолинейной конгруэнции (A_1, A_2) является невырождающейся. Асимптотическая сеть на поверхностях $(E_{1,2}^*)$ и (A_3) задается одним и тем же уравнением $\omega_1 \omega_2 = 0$.

5/ Рассмотрим квадратик Φ , определяемому уравнением

$$\Phi \equiv (\ell^2 - 1)(x^4)^2 + 2x^1 x^2 - 2\ell x^3 x^4 = 0.$$

Имеем $d\Phi = (\dots)\Phi$, т.е. квадратика Φ инвариантна. Так как точки A_1, A_2, A_3 принадлежат этой квадратике, то поверхности $(A_1), (A_2), (A_3)$ совпадают с ней.

Т е о р е м а 2. Прямая $[E_{1,2}^*; A_3]$ является директрисой Вильчинского поверхности $(E_{1,2}^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совершим замену репера R репером $R_1 = \{B_0, B_1, B_2, B_3\}$, в котором

$$B_0 \equiv E_{1,2}^*, \quad B_3 \equiv A_4,$$

$$B_1 \equiv 2\ell A_1 - \frac{1}{\ell} (2\ell^2 + 1) A_3 + A_4,$$

$$B_2 \equiv 2\ell A_2 + \frac{1}{\ell} (2\ell^2 + 1) A_3 - A_4,$$

(B_1 и B_2 являются точками пересечения асимптотических касательных поверхности $(E_{1,2}^*)$ в точке $E_{1,2}^*$ соответственно с плоскостями $[A_1, A_3, A_4]$ и $[A_2, A_3, A_4]$). Система пфаффовых уравнений конгруэнции $(Q_p)_{1,2}^0$ в репере R_1 запишется в виде:

$$\omega_0^0 = \frac{3}{4} \ell(\ell^2-1)(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_3^3 = -\frac{\ell(3\ell^2+1)(6\ell^2-1)}{4(2\ell^2+1)}(\omega^1-\omega^2),$$

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^i = \frac{1}{4\ell}(\omega^1+\omega^2) + (-1)^i \frac{3\ell^2+1}{2(2\ell^2+1)}(\omega^1-\omega^2),$$

$$\omega_3^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{(3\ell^2+1)(4\ell^2+1)}{2\ell^2+1} - 1 \right) (\omega^1-\omega^2), \quad \omega_3^j = \frac{2\ell(3\ell^2+1)}{2\ell^2+1} \omega^j, \quad (2)$$

$$\omega_i^j = (-1)^i \ell \omega^i + (-1)^j \frac{\ell(3\ell^2+1)}{2\ell^2+1} \omega^j, \quad d\ell = -\ell^2(3\ell^2+1)(\omega^1-\omega^2),$$

$$\omega_i^0 = \frac{(3\ell^2+1)(2\ell^2-1)}{2(2\ell^2+1)} \omega^j + \frac{1}{2} (3\ell^2+1) \omega^i,$$

$$\omega_i^i = -\frac{\ell(6\ell^2-1)(3\ell^2+1)}{4(2\ell^2+1)}(\omega^1-\omega^2) + (-1)^i \frac{\ell^3}{2\ell^2+1} \omega^i,$$

где в качестве базисных взяты формы $\omega_0^i \stackrel{\text{def}}{=} \omega^i$.

Находя директрисы Вильчинского поверхности $(E_{1,2}^*)$, убеждаемся, что они имеют плюккерovy координаты $(-1, 1, 2, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, т.е. совпадают с прямыми $d_1 = [B_0, -B_1 + B_2 + 2B_3]$ и $d_2 = [B_1, B_2]$. В репере R

$d_1 = [E_{1,2}^*; A_3]$, что и доказывает теорему.

С л е д с т в и е. Вторая директриса Вильчинского поверхности $(E_{1,2}^*)$ совпадает с прямой $[B_1, B_2]$.

Квадрика Ли поверхности $(E_{1,2}^*)$ относительно репера R_1 задается уравнением

$$-\frac{2\ell^2+1}{\ell(3\ell^2+1)} x^0 x^3 + 2x^1 x^2 - x^1 x^3 + x^2 x^3 - \frac{2\ell^4+2\ell^2+1}{4\ell^2(3\ell^2+1)} (x^3)^2 = 0. \quad (3)$$

Перейдем в пространстве P_3 к нормальному [1] реперу $R_0 = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$ поверхности $(E_{1,2}^*)$, где

$$C_0 \equiv B_0, \quad C_1 \equiv B_1, \quad C_2 \equiv B_2,$$

$$C_3 \equiv \frac{2\ell^2-1}{2\ell} B_0 - B_1 + B_2 + 2B_3,$$

(C_3 является точкой пересечения первой директрисы Вильчинского d_1 с квадратикой Ли).

Система пфаффовых уравнений (2) конгруэнции $(Q_p)_{1,2}^0$ и уравнение (3) квадратки Ли относительно нормального репера запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} \omega_0^0 &= \frac{3}{4} \ell(\ell^2-1)(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_0^3 = 0, \quad \omega_i^3 = \frac{\ell(3\ell^2+1)}{2\ell^2+1} \omega^j, \\ \omega_i^j &= (-1)^i \ell \omega^i, \quad \omega_i^i = (-1)^i \frac{\ell}{4} (9\ell^2-1) \omega^i + (-1)^j \frac{3\ell}{4} (3\ell^2+1) \omega^j, \\ \omega_i^0 &= \frac{1}{2} (3\ell^2+1) \omega^i, \quad \omega_3^i = \frac{2\ell^2+1}{2\ell} \omega^j, \quad \omega_3^0 = -\frac{1}{2} (2\ell^2+1) (\omega^1-\omega^2), \\ \omega_3^3 &= -\frac{\ell(3\ell^2+1)(6\ell^2-5)}{4(2\ell^2+1)} (\omega^1-\omega^2), \quad d\ell = -\ell^2(3\ell^2+1) (\omega^1-\omega^2); \\ F &\equiv (2\ell^2+1) x^0 x^3 - \ell(3\ell^2+1) x^1 x^2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Имеем

$$dF = (\dots) F + \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2,$$

где

$$F_i \equiv (-1)^j \frac{1}{2} (2\ell^2+1) (x^3)^2 + (-1)^j \ell^2 (3\ell^2+1) (x^i)^2.$$

Система уравнений $F_1 = 0, F_2 = 0$ определяет характеристическое многообразие [2] квадратки Ли поверхности $(E_{1,2}^*)$. Разрешая данную систему уравнений, находим характеристические прямые

$$[C_0, C_1 + C_2 \pm \frac{\ell\sqrt{2(3\ell^2+1)}}{2\ell^2+1} C_3] \quad \text{и} \quad [C_0, C_1 - C_2],$$

причем последняя прямая является одвоенной.

Фокальное многообразие [2] конгруэнции квадратки Ли поверхности $(E_{1,2}^*)$ определяется системой уравнений

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (6)$$

Т е о р е м а 3. Точка $E_{1,2}^*$ является шестикратным фокусом квадратки Ли поверхности $(E_{1,2}^*)$. Несовпадающие с $E_{1,2}^*$ фокусы квадратки Ли принадлежат прямой $[E_{1,2}, A_3]$ и гармонически разделяют точки $E_{1,2}$ и A_3 .

Доказательство. Анализируя систему уравнений (6), находим восемь фокальных точек квадрики Ли, шесть из которых совпадают с точкой $C_0 \equiv E_{1,2}^*$, а два других определяются формулой

$$F_{7,8} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(3\ell^2+1)} C_0 + C_1 + C_2 \pm \frac{\ell \sqrt{2(3\ell^2+1)}}{2\ell^2+1} C_3.$$

Возвращаясь к исходному реперу R , получим

$$F_{7,8} = 2\ell E_{1,2} \pm 2\sqrt{2(3\ell^2+1)} A_3,$$

откуда $(E_{1,2}, A_3; F_7, F_8) = -1$, что и доказывает утверждение теоремы.

Список литературы

1. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1937.
2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n -мерном проективном пространстве. - Тр. геометр. семинара. ВИНТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

И.С.Григорьева

МЕРА МНОЖЕСТВА ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В E_n .

В работе изучается мера множества гиперплоскостей в E_n , инвариантная относительно группы движений. Отыскивается выражение этой меры через геометрические характеристики не голономного образа, а также дивергентный вид получаемой при этом гауссовой кривизны.

1. Семейство гиперплоскостей в E_n зависит от n параметров. Мету обычно ищут в виде интеграла $\int_{\Omega} f d\mu$, где μ - мера Лебега в пространстве параметров, а f - положительная интегрируемая функция.

Если за параметры взять расстояние P до гиперплоскости от начала координат и единичный вектор нормали \bar{n} , то с точностью до постоянного множителя, (ср. [1])

$$\pm \Omega = dP \wedge d\sigma, \quad (1)$$

где $d\sigma$ - элемент сферического отображения. Знак выбирается так, чтобы \int_{Ω} был положителен для любой области U .

Если рассмотреть в какой-либо области $V \subset E_n$ не голономный образ X_n^{n-1} , то можно говорить о мере множества составляющих его гиперплоскостей. Элемент меры Ω отыскивается с помощью введения поля ортонормированных реперов $\{e_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1, n}$, где e_n - вектор нормали к гиперплоскости. Будем считать это поле гладким. Тогда

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i + \omega^n \bar{e}_n,$$

$$d\bar{e}_i = \omega_i^s \bar{e}_s + \omega_i^n \bar{e}_n, \quad i, s = \overline{1, n-1},$$

$$d\bar{e}_n = \omega_n^s \bar{e}_s.$$

Формы ω_β^α -кососимметричны в орторепере и разлагаются по основным формам $\omega^\alpha: \omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma$, где $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ - коэффициенты евклидовой связности.

Подставляя в (1) выражение для $d\rho$ и $d\sigma$, получим

$$\pm\Omega = \omega^n \wedge \omega_n^1 \wedge \dots \wedge \omega_n^{n-1},$$

или, подставляя выражение для ω_n^i ,

$$\pm\Omega = \Gamma_{n[s_1]}^1 \cdot \Gamma_{[n]s_2}^2 \cdot \dots \cdot \Gamma_{[n]s_{n-1}}^{n-1} \omega^n \wedge \omega_{s_1}^1 \wedge \dots \wedge \omega_{s_{n-1}}^{n-1},$$

т. е. есть $\pm\Omega = \kappa dV$, где κ -определитель матрицы Γ_{nj}^i , а dV -элемент объема в E_n .

При преобразовании орторепера, сохраняющем \bar{e}_n ; $-\Gamma_{nj}^i = \Gamma_{ij}^n = \mathcal{C}_{ij}$ является тензором, а в голономном случае переходит в матрицу второй квадратичной формы интегральной гиперповерхности. Следовательно, в последнем случае κ -гауссова кривизна соответствующей гиперповерхности [2]. Можно назвать κ гауссовой кривизной и в общем случае (тем более, что для $n=3$ это определение совпадает с определением Д.Н.Синцова [3]).

2.Можно рассмотреть $(n-1)$ -форму Θ .

$$\Theta = \omega^1 \wedge \omega_n^2 \wedge \dots \wedge \omega_n^{n-1} + \omega_n^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega_n^{n-1} + \dots + \omega_n^1 \wedge \omega_n^2 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1}.$$

Ее внешний дифференциал $d\Theta = (n-1)(\pm\Omega)$. Следовательно, в области V , где κ сохраняет знак,

$$\int_V \Omega = \frac{1}{n-1} \int_{\partial V} \Theta.$$

Форму Θ можно представить в виде

$$\Theta = \alpha^1 \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n - \alpha^2 \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \dots \wedge \omega^n + \dots + (-1)^{n-1} \alpha^n \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1}$$

Тогда $d\kappa = \text{div} \bar{a}$, а вектор \bar{a} можно найти из соотношения $\omega^i \wedge \Theta = \alpha^i \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n$. Произведя необходимые преобразования, получим

$$\frac{1}{n(n-1)} \alpha^i = -\nabla_{s_1} e_n^{[2} \dots \nabla_{s_{n-2}} e_n^{n-1} e_n^n \varepsilon^{i] s_1 \dots s_{n-2}},$$

где $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ -дискриминантный n -вектор в E_n . С помощью этого векторного поля интеграл от K по V можно свести к интегралу по границе ∂V .

3.Можно усмотреть некоторую связь Ω с тензором кривизны Схоутена неголономного образа. Он определяется (см.[4]) из соотношения

$$\nabla_{[i} \nabla_{j]} v^l = \frac{1}{2} K_{ijk}^l v^k + M_{ij}^n \nabla_n v^l,$$

где K_{ijk}^l -тензор кривизны, а M_{ij}^n характеризует неголономность образа.

В нашем частном случае, в ортонормированном репере тензор кривизны Схоутена представляется в виде

$$K_{ijkl} = \mathcal{C}_{kj} \mathcal{C}_{li} - \mathcal{C}_{ki} \mathcal{C}_{lj},$$

где $\mathcal{C}_{ij} = \Gamma_{ij}^n$ -как раз та матрица, определитель которой участвует в определении элемента меры. Значит, тензор кривизны определяет миноры второго порядка этой матрицы, а следовательно (с точностью до знака) и определитель ее.

Список литературы

- 1.Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. Наука, М., 1972.
- 2.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд-во Моск.ун-та, 1980.
- 3.Синцов Д.Н. О системах интегральных кривых Пфаффа уравнения.- Вища школа, Киев, 1972.
- 4.Вагнер В.В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. Казань., 1939.

С.В.К и р е е в а

ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ Σ_n^{n-1} В ПРОСТРАНСТВЕ P_n .

Данная статья посвящена изучению сетей Σ_n^{n-1} индекса $n-1$ в проективном пространстве P_n . Рассмотрена геометрия гармонической плоскости $\Pi(A)$, корреляции K_ψ , K_φ , связанные с асимптотической квадрикой K_ψ^2 поверхности V_{n-1} и квадрикой Риччи $K_\varphi = \{\varphi=0\} \cap \Pi(A)$.

1. Рассмотрим плоскую сеть Σ_n^{n-1} индекса $(n-1)$ [1], заданную в проективном пространстве P_n . С точкой $A \in \Sigma_n^{n-1}$ свяжем проективный репер $\mathcal{K} = \{A, A_\alpha | A_\alpha = F_\alpha, \alpha, \beta = \overline{1, n}\}$, где F_α — гармонический полюс точки A относительно псевдофокусов F_α^β , $\alpha \neq \beta$ [1]. Имеем $dA = \omega^\alpha A + \omega_\alpha A_\alpha$; $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A + \omega_\alpha^\beta A_\beta$, где формы ω удовлетворяют известным уравнениям структуры проективного пространства. Так как индекс сети Σ_n^{n-1} равен $n-1$, то формы ω_α^β линейно зависимые. Будем считать, что форма ω_n^α является линейной комбинацией предыдущих форм:

$$\omega_n^\alpha = \lambda_n^i \omega_i^\alpha \quad (i, j, \kappa = \overline{1, n}),$$

$$d\lambda_n^i = \lambda_n^i (\tilde{\omega}_n^\alpha - \tilde{\omega}_i^\alpha) + \omega_n^i - \lambda_n^\kappa \omega_\kappa^i - \lambda_n^\kappa \lambda_n^i \omega_\kappa^n + \lambda_n^j \omega_j^i; \lambda_n^j = \lambda_n^i. \quad (1)$$

Произвол существования такой сети известен [4]: $S_n = n(n-1) - 1$ функций n аргументов. Для них существует особое I-распределение Δ_1 . Множество гармонических плоскостей [3] $\Pi(A) = (F_1 F_2 \dots F_n)$ огибает некоторую гиперповерхность V_{n-1} , которая описывается точкой $B_n = A_n - \lambda_n^i A_i$. Каждая прямая особого I-распределения Δ_1 определяет на плоскости $\Pi(A)$ точку Q , координаты

$(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ которой удовлетворяют системе уравнений $\omega_\beta^\alpha = 0$. Дифференциал точки B_n определяется следующим образом: $dB_n = (\omega_n^\alpha - \lambda_n^i \omega_i^\alpha) B_n - \lambda_n^i \omega_i^\alpha A_i$.

Рассмотрим точки $M_\alpha: M_\alpha = \lambda_n^{j_i} a_{i\alpha}^\alpha A_j$, $(\omega_i^\alpha = a_{i\alpha}^\alpha \omega^\alpha)$, (2) Индексы принимают следующие значения: $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta = \overline{1, n}$; $i, j, \kappa = \overline{1, n-1}$. Теперь дифференциал dB_n точки B_n можно записать иначе:

$$dB_n = (\omega_n^\alpha - \lambda_n^i \omega_i^\alpha) B_n - \omega^\alpha M_\alpha. \quad (3)$$

Если точка A описывает линию ω^α n -мерной сети Σ_n^{n-1} , то точка B_n в общем случае описывает линию θ^α n -мерной ткани \mathcal{M}_n на поверхности V_{n-1} с касательными $(B_n M_\alpha)$. Из формул (2) следует, что точки M_α линейно зависимые. Можно показать, что коэффициентами их линейной зависимости являются координаты $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ точки Q

$$d^\xi M_\xi = 0. \quad (*)$$

Если особое направление (AQ) совпадает с направлением (AF_{ξ_0}) (F_{ξ_0} — гармонический полюс, ξ_0 — фиксировано, $\xi_0 = 1, \dots, n$), то ткань \mathcal{M}_n вырождается в сеть с касательными $(B_n M_\gamma)$ ($\gamma = \overline{1, n}$; $\gamma \neq \xi_0$). Это следует из того, что при смещении точки A в особое направление $(AQ) = (AF_{\xi_0})$ точка B_n остается неподвижной. Показано, что особое направление — единственное направление смещения точки A , при котором точка B_n неподвижна. Только какие-нибудь две линии $\theta^{\beta_0}, \theta^{\gamma_0}$ на поверхности V_{n-1} могут совпадать между собой. При этом точка Q особого направления лежит на прямой $(F_{\beta_0}, F_{\gamma_0})$, соединяющей гармонические полюсы $F_{\beta_0}, F_{\gamma_0}$. Обратное утверждение тоже справедливо. Три или большее число линий совпадать между собой не могут, так как это приведет к понижению индекса сети.

2. Если в равенстве (*) $\alpha^n \neq 0$, то $M_n = -\frac{\alpha^i}{\alpha^n} M_i$, $dB_n = \varphi B_n - \tilde{\omega}^i M_i$, где $\tilde{\omega}^i = \omega^i - \frac{\alpha^i}{\alpha^n} \omega^n$. Пусть точка B_n перемещается в направлении $(B_n N)$, где

$$N = m^i M_i. \quad (4)$$

Тогда

$$\tilde{\omega}^i = \theta m^i. \quad (5)$$

В системе (5) $(n-1)$ уравнение с $n+1$ неизвестными ω^{α}, θ .

Она определяет на гармонической плоскости $\Pi(A)$ прямую ℓ . Координаты $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ точки Q и точки

$$M^* = m^i A_i \quad (6)$$

удовлетворяют системе (5).

Итак, прямой $(B_n M)$ можно поставить в соответствие прямую $(Q M^*)$, причем точки M, M^* имеют одинаковые координаты в реперах $\{M_i\}, \{A_i\}$. Для сетей Σ_3^2 в 2-мерной гармонической плоскости это привело к образованию новой кривой второго порядка \bar{K}^2 и введению нового класса сетей: биоавтополярных сетей [5]. В случае $n > 3$ прямые $(B_n M), (Q M^*)$ в общем случае скрещиваются, поэтому можно рассмотреть семейство прямых $(M M^*)$.

Уравнение поверхности V_{n-1} в репере $\mathcal{R}_{V_{n-1}} = \{B_n, A_i\}$ принимает вид $\varphi_n^0 = 0, \varphi_n^0 = \omega_n^0 - \lambda_n^i \omega_i^0$. Продолжив это уравнение, находим: $\varphi_i^0 = \theta_{ij}^0 \varphi_n^0; \theta_{ij}^0 = \theta_{ji}^0$. Пусть $\|\tilde{\lambda}_{ij}^n\| = \|\lambda_{ij}^n\|^{-1}$, тогда $\theta_{ij}^0 = -\tilde{\lambda}_{ij}^n$. Уравнение асимптотического конуса поверхности V_{n-1} в репере $\mathcal{R}_{V_{n-1}}$ следующее: $\tilde{\lambda}_{ij}^n y^i y^j = 0$. В плоскости $(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ асимптотический конус высекает квадрику K_{ψ}^2 , которую будем называть асимптотической. Пусть M_1^*, M_2^* — точки пересечения асимптотической квадрики и прямой $(M M^*)$. Справедлива теорема:

Т е о р е м а. Если точка M^* лежит на пересечении квадрики Риччи $K_{\varphi} = \{\omega^{\alpha} \omega_{\alpha}^0 = 0\} \cap \Pi(A)$ и плоскости $(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$, то четверка точек M, M^*, M_1^*, M_2^* — гармоническая.

Это утверждение верно и при $\alpha^n = 0$. Этой теореме можно придать другой вид.

Т е о р е м а. Если точка M^* лежит на пересечении квадрики Риччи и плоскости $(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$, то точка M принадлежит полюре точки M^* относительно асимптотической квадрики K_{ψ}^2 .

3. Рассмотрим $(n-2)$ -плоскость $(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$, содержащую точки M_1, M_2, \dots, M_n . Образы $K_{\psi}(M_{\alpha})$ точек M_{α} в корреляции K_{ψ} относительно асимптотической квадрики K_{ψ}^2 будут иметь следующие уравнения:

$$\tilde{\lambda}_{ij}^n x_{\alpha}^j x^i = 0, \quad x_{\alpha}^j = \lambda_n^{jk} a_{k\alpha}^0 \quad (7)$$

Так как матрицы $\|\tilde{\lambda}_{ij}^n\|, \|\lambda_n^{jk}\|$ взаимно обратные, то уравнения (7) принимают вид:

$$a_{i\alpha}^0 x^i = 0.$$

Т е о р е м а. Пересечение $(n-2)$ -плоскости $(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ с образами гармонических полюсов F_{α} в корреляции K_{ψ} относительно квадрики Риччи K_{φ} совпадает с образами точек M_{α} в корреляции K_{ψ} относительно асимптотической квадрики K_{ψ}^2 .

Список литературы

1. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей. — Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина, 1965, № 243, с. 29-37.
2. Базылев В.Т. О многообразиях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью. — Лит. матем. сб., 1966, вып. 6, № 3, с. 313-322.
3. Чахтура А.И. Об одной конгруэнции, связанной с трехмерной сетью. — Тезисы докл. II Всесоюзной геометрич. конф. Харьков, 1964, с. 307-310.
4. Гоцацук С.В. (Киреева). Теорема существования сетей Σ_n^q ($q < n$) в пространстве P_n . Корреляции, связанные с сетью Σ_{n-1}^q . — 84м. Современная геометрия, ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1978, с. 46-48.
5. Гоцацук С.В. (Киреева) Геометрия некоторых классов сетей пониженного индекса в P_n . — В кн.: Геометрия, ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1975, № 3, с. 15-25.

Л. Г. К о р с а к о в а

О КОНГРУЭНЦИИ ПАР КОНИК, ИНЦИДЕНТНЫХ
 ОДНОМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ КВАДРИК

В трехмерном проективном пространстве рассматривается невырожденная конгруэнция K пар коник C_1, C_2 , не лежащих в одной плоскости и имеющих две общие точки A_1 и A_2 , причем коники принадлежат квадрике Q , описывающей одномерное многообразие. Плоскости коник образуют двухпараметрические семейства. Исследованы 2 частных класса конгруэнций K .

Отнесем конгруэнцию K к реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершины A_3 и A_4 помещены в полюсы прямой A_1A_2 соответственно относительно коник C_1 и C_2 . При надлежащей нормировке вершин репера R уравнения коник C_1, C_2 и квадрики Q будут иметь вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0;$$

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0;$$

$$F = (x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2cx^3x^4 = 0, \quad dc = 0.$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции K приводится к виду:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_1^3, \quad \omega_3^2 - \omega_1^3 - c\omega_1 = \alpha\omega_1^3, \quad \omega_3^1 - \omega_2^3 - c\omega_2 = \beta\omega_1^3,$$

$$\omega_4^2 - c\omega_1^3 - \omega_1 = \gamma\omega_1^3, \quad \omega_4^1 - c\omega_2^3 - \omega_2 = \lambda\omega_1^3,$$

$$\Omega_1 - 2c\omega_3^4 = \mu\omega_1^3, \quad \Omega_2 - 2c\omega_4^3 = \eta\omega_1^3,$$

$$2c(\omega_1^1 + \omega_2^2) - \omega_3^4 - \omega_4^3 = \xi\omega_1^3, \quad (1)$$

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa} \omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa} \omega_\kappa.$$

Здесь ω_a^ℓ ($a, \ell = 1, 2, 3, 4$) - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R , $\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i^4$,

$$\Omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}; \quad i, j, \kappa = 1, 2; \quad i \neq j \quad \text{и}$$

по индексам i, j суммирование не производится.

Из анализа системы (1) следует, что конгруэнции K существуют и определяются с произволом 3-х функций 2-х аргументов.

Фокальное многообразие [1] ранга 1 квадрики Q определяется системой уравнений

$$F = 0, \quad F_1 = 0,$$

где

$$F_1 = \mu(x^3)^2 + \eta(x^4)^2 + 2\xi x^3x^4 + 2\alpha x^3x^1 + 2\beta x^2x^3 + 2\gamma x^4x^1 + 2\lambda x^2x^4 + 2\Gamma_1^2(x^1)^2 + 2\Gamma_2^1(x^2)^2.$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K_1 называется такая конгруэнция K , ассоциированная инвариантная квадрика F_1 которой представляет собой сдвоенную плоскость $x^2 = 0$.

Конгруэнция K_1 определяется системой пфаффовых уравнений

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^1 \omega_1^3, \quad \omega_3^2 = \omega_1^3 + c\omega_1, \quad \omega_3^1 = \omega_2^3 + c\omega_2, \\ \omega_4^2 = c\omega_1^3 + \omega_1, \quad \omega_4^1 = c\omega_2^3 + \omega_2, \quad \Omega_1 = 2c\omega_3^4, \quad \Omega_2 = 2c\omega_4^3, \\ \omega_3^4 + \omega_4^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{31} \omega_1, \quad \omega_2^3 = \Gamma_2^{3\kappa} \omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa} \omega_\kappa. \quad (2)$$

и их замыканиями и существует с произволом двух функций двух аргументов.

Конгруэнции K_1 обладают следующими геометрическими свойствами: 1/множество точек (A_1) является линией; 2/конгруэнции (A_1, A_3) и (A_1, A_4) - параболические со сдвоенным фокусом в точке A_1 ; 3/многообразие плоскостей (A_1, A_3, A_4) - однопараметрическое; 4/если точка A_3 является характеристической точкой плоскости (A_1, A_2, A_3) , то поверхность (A_4) будет огибающей для семейства плоскостей

тей $(A_1 A_2 A_4)$; 5/ точка A_1 является пятикратным фокусом коник C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) ; 6/фокальное многообразие квадрики Q представляет из себя пару сдвоенных прямых.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K_0 называется конгруэнция K_1 для которой: 1/точка A_3 является характеристической точкой плоскости $(A_1 A_2 A_3)$; 2/линии, огибаемые прямыми $A_3 A_i$ на поверхности (A_3) , являются асимптотическими линиями.

Система пфаффовых уравнений конгруэнции K_0 приводится к виду:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^1 \omega_1^3, \quad \omega_3^i = (\gamma + c) \omega_j, \quad \omega_4^i = (\gamma c + 1) \omega_j, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0, \quad \omega_i^3 = \gamma \omega_i, \quad (3) \\ \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad d\gamma = 0, \end{aligned}$$

из анализа которой следует произвол существования конгруэнции K_0 — одна функция одного аргумента.

Конгруэнции K_0 обладают следующими свойствами: 1/поверхность (A_2) является плоскостью; 2/конгруэнции $(A_2 A_3)$, $(A_2 A_4)$ являются параболическими; 3/прямые $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ описывают линейчатые поверхности; 4/характеристическая точка плоскости $(A_2 A_3 A_4)$ инцидентна прямой $A_3 A_4$; 5/прямолинейная конгруэнция $(A_3 A_4)$ является связкой.

Для характеристических поверхностей (A_3) и (A_4) найдены трехпараметрические семейства соприкасающихся квадрик соответственно в виде:

$$\begin{aligned} a_{44} (x^4)^2 + 2x^1 x^2 + 2a_{14} x^1 x^4 + 2a_{24} x^2 x^4 - (\gamma + c) x^3 x^4 = 0, \\ a_{33} (x^3)^2 + 2x^1 x^2 + 2a_{13} x^1 x^3 + 2a_{23} x^2 x^3 - 2 \frac{c\gamma + 1}{\gamma} x^3 x^4 = 0 \end{aligned}$$

и квадрики Ли

$$\begin{aligned} (\gamma^2 - 1) (x^4)^2 + 2x^1 x^2 - 2(\gamma + c) x^3 x^4 = 0, \\ (1 - \gamma^2) (x^3)^2 + 2\gamma^2 x^1 x^2 - 2(c\gamma + 1) x^3 x^4 = 0, \end{aligned}$$

причем квадрики Ли обеих поверхностей (A_3) и (A_4) описывают однопараметрические семейства.

Получено уравнение соприкасающегося линейного комплекса асимптотической линии $\omega_2 = 0$ поверхности (A_3) в виде

$$P_{12} - (\gamma + c) P_{43} = 0.$$

Список литературы

1. Махоркин В.В. Однопараметрические семейства квадрик в трехмерном проективном пространстве. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 7. Калининград, 1976, с. 61–63.

М.Ф.Косаренко

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛЯРНОЙ
 ГИПЕРПОЛОСЫ $H_z \subset {}^{\ell}S_N$.

В данной работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [1] строятся основные поля фундаментальных геометрических объектов регулярной гиперполосы H_z в неевклидовом N -мерном пространстве ${}^{\ell}S_N$ ранга ℓ . В дальнейшем будем обозначать такую гиперполосу символом SH_z . С помощью построенных полей фундаментальных геометрических объектов удается присоединить внутренним инвариантным образом точечный репер $\{M_j\}$ и тангенциальный репер θ^x в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_z .

В окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_z найдены дупараметрическая связка инвариантно присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик и ∞^1 инвариантных двойственных нормализаций гиперполосы SH_z .

Обозначения и замечания:

а/ во всей работе используется следующая схема индексов:

$$i, j, k = 1, 2, \dots, z; \quad \alpha, \beta, \gamma = z+1, \dots, N-1; \\
 \tau, \zeta, \kappa = 0, 1, \dots, N; \quad \hat{j}, \hat{j}, \hat{x} = 1, 2, \dots, N;$$

б/ оператор дифференцирования ∇_d действует по закону:

$$\nabla_d T_{\alpha i}^k = dT_{\alpha i}^k - T_{\beta i}^k \omega_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha j}^k \omega_i^j + T_{\alpha i}^j \omega_j^k;$$

в/ символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω_{τ}^x при фиксированных главных параметрах через π_{τ}^x . В этом случае оператор дифференцирования обозначается символом ∇_{δ} .

1. Пусть в проективном пространстве P_N задана невырожденная гиперквадрика

$$g'_{\tau\zeta} x^{\tau} x^{\zeta} = 0, \quad g'_{\tau\zeta} = g'_{\zeta\tau}, \quad \det \|g'_{\tau\zeta}\| \neq 0, \quad (1)$$

и пусть в каноническом виде ее уравнения меньше из чисел коэффициентов одного знака равно ℓ . Тогда можно определить подгруппу коллинеаций пространства P_N , сохраняющих эту гиперквадрику, а следовательно, и соответствующую проективную метрику. Получаемое проективное пространство с этой фундаментальной группой называется расширенным неевклидовым пространством ${}^{\ell}S_N$ индекса ℓ [2], а гиперквадрика (1) называется его абсолютном.

Если отнести пространство ${}^{\ell}S_N$ к подвижному автополярному нормированному реперу $\mathcal{K} = \{M_0, M_1, \dots, M_N\}$, т.е. к реперу, при котором

$$|g_{\tau\kappa}| = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \neq \kappa, \\ 1, & \text{если } \tau = \kappa, \end{cases} \quad (2)$$

где $g_{\tau\kappa} = \frac{1}{g'_{\tau\kappa}} g'_{\tau\kappa}$, то формы ω_{τ}^x удовлетворяют уравнениям

$$\omega_{\tau}^{\zeta} = -\varepsilon_{\tau\kappa} \omega_{\tau}^{\kappa}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{\tau\kappa} = g'^{\tau\tau} g_{\kappa\kappa} - g'^{\tau\zeta} g_{\zeta\kappa} = g_{\kappa\kappa} g'^{\tau\tau}$.

В пространстве ${}^{\ell}S_N$ гиперполоса SH_z относительно репера \mathcal{K} задается следующим образом:

$$\omega_0^N = 0, \quad \omega_{\alpha}^N = 0, \quad \omega_0^{\alpha} = 0, \quad (6)$$

$$\omega_M^0 = 0, \quad \omega_M^{\alpha} = 0, \quad \omega_{\alpha}^M = 0, \quad (7)$$

$$\omega_i^N = a_{ij} \omega_j^i, \quad \nabla a_{ij} = -a_{ij} \omega_M^N - a_{ijk} \omega^k, \quad (8)$$

$$\omega_{\alpha}^i = b_{\alpha j}^i \omega_j^{\alpha}, \quad \nabla b_{\alpha j}^i = b_{\alpha jk}^i \omega^k, \quad (9)$$

$$\omega_i^{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha i} b_{\alpha j}^i \omega_j^{\alpha}, \quad \omega_i^0 = -\varepsilon_{0i} \omega_i^0, \quad \omega_M^i = -\varepsilon_{iN} a_{ij} \omega_j^i, \quad (10)$$

при этом $b_{\alpha j}^i a_{i\ell} = b_{\alpha\ell}^i a_{ij}$, $a_{ij} = a_{ji}$,

а функции a_{ijk} , $b_{\alpha jk}^i$ симметричны по индексам j, k .

Системы величин $\Gamma_2 = \{a_{ij}, \theta_{\alpha j}^i\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_{ijk}, \theta_{ij}^k\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы SH_τ . Дальнейшее продолжение системы уравнений (6) - (10) вводит геометрические объекты четвертого и более порядков, определяемые гиперполосой SH_τ . Полученная таким образом последовательность геометрических объектов $\Gamma_2 \subset \Gamma_3 \subset \Gamma_4 \subset \dots$ называется фундаментальной последовательностью геометрических объектов гиперполосы SH_τ .

2. Следуя работам [4]-[5], последовательно строим следующие объекты гиперполосы SH_τ :

а/тензоры второго порядка

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \frac{1}{\tau} \theta_{\alpha i}^i, & \nabla_\delta B_\alpha &= 0; \\ B^\alpha &= -\frac{1}{\tau} \sum \epsilon_{\alpha i} \theta_{\alpha j}^i a^{ij}, & \nabla_\delta B^\alpha &= B^\alpha \pi_N^N; \\ C_\alpha^{ij} &= \theta_{\alpha l}^i a^{jl} - B_\alpha a^{ij}, & \nabla_\delta C_\alpha^{ij} &= C_\alpha^{ij} \pi_N^N; \\ C_{ij}^\alpha &= -(\epsilon_{\alpha i} \theta_{\alpha j}^i + B^\alpha a_{ij}), & \nabla_\delta C_{ij}^\alpha &= 0; \\ d_i &= \frac{1}{\tau+2} a_{jki} a^{jk}, & \nabla_\delta d_i &= 0; \\ d^i &= \frac{1}{\tau+2} a^{jki} a_{jk}, & \nabla_\delta d^i &= d^i \pi_N^N; \\ l_{ijk} &= a_{ijk} - a_{cij} d_k, & \nabla_\delta l_{ijk} &= -l_{ijk} \pi_N^N; \\ l^{ijk} &= a^{ijk} - a^{ij} d^k, & \nabla_\delta l^{ijk} &= 2 l^{ijk} \pi_N^N; \\ \lambda_i &= a^{jk} a^{lp} l_{kpi} c_{je}^\alpha B_\alpha, & \nabla_\delta \lambda_i &= \lambda_i \pi_N^N; \\ \mathcal{L}_{ij} &= a^{kl} a^{mp} l_{ikm} l_{jep}, & \nabla_\delta \mathcal{L}_{ij} &= 0; \\ \mathcal{L}_{ij} \mathcal{L}^{jk} &= \delta_i^k, & \nabla_\delta \mathcal{L}^{jk} &= 0; \\ l_{\alpha j}^i &= c_\alpha^{ik} a_{kj}, & \nabla_\delta l_{\alpha j}^i &= 0; \\ l_\beta^\alpha &= \frac{1}{\tau} c_\beta^{ij} c_{ij}^\alpha, & \nabla_\delta l_\beta^\alpha &= l_\beta^\alpha \pi_N^N; \\ l_{\alpha\beta} &= l_{\alpha j}^i l_{\beta i}^j, & \nabla_\delta l_{\alpha\beta} &= 0; \\ \tilde{l}_\beta^\alpha l_\gamma^\beta &= \delta_\gamma^\alpha, & \nabla_\delta \tilde{l}_\beta^\alpha &= -\tilde{l}_\beta^\alpha \pi_N^N; \\ \mathcal{L}_{\alpha\beta} &= \tilde{l}_\alpha^\gamma l_{\gamma\beta}, & \nabla_\delta \mathcal{L}_{\alpha\beta} &= -\mathcal{L}_{\alpha\beta} \pi_N^N; \\ l_\alpha &= -(\mathcal{L}_{\alpha\beta} B^\beta + B_\alpha), & \nabla_\delta l_\alpha &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

б/относительные инварианты второго порядка

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= l_\alpha^\alpha, & \delta \kappa_\alpha &= \kappa_\alpha \pi_N^N, \\ h &= \mathcal{L}_{ij} a^{ij}, & \delta \ln h &= \omega_N^N + h_i \omega^i, \\ l_\alpha &= l_{ijk} l^{ijk}, & \delta \ln l_\alpha &= \omega_N^N + l_i \omega^i; \end{aligned} \quad (13)$$

в/относительный инвариант третьего порядка

$$T = \frac{1}{\tau} (d_j - d_i d_j) a^{ij}, \quad \delta T = T \pi_N^N; \quad (14)$$

г/тензоры третьего порядка

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij} &= d_{ij} - d_i d_j - T a_{ij}, & \nabla_\delta \hat{T}_{ij} &= 0; \\ \hat{T}_i &= a^{jk} a^{lm} \hat{T}_{jle} l_{kmi} + \lambda_i, & \nabla_\delta \hat{T}_i &= \hat{T}_i \pi_N^N; \\ T^i &= \mathcal{L}^{ij} \hat{T}_j, & \nabla_\delta T^i &= T^i \pi_N^N, \\ S^i &= a^{ik} (h_k - d_k), & \nabla_\delta S^i &= S^i \pi_N^N; \end{aligned} \quad (15)$$

Наконец, по аналогии с работой [3] строим относительные инварианты третьего порядка

$$\Lambda^\circ = \frac{\alpha \tilde{X} + \beta \tilde{X}}{\alpha + \beta}, \quad \Lambda_N = \frac{\alpha \tilde{Y} + \beta \tilde{Y}}{\alpha + \beta}, \quad (16)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^\circ = \Lambda^\circ \pi_N^N, \quad \nabla_\delta \Lambda_N = \Lambda_N \pi_N^N, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \frac{1}{2} (-B_\alpha B^\alpha + T + a_{ij} d^i d^j) + d^i d_i, & \tilde{X} &= -(\tilde{Y} + B_\alpha B^\alpha + d_i d^i), \\ \tilde{Y} &= \frac{1}{2} (-B_\alpha B^\alpha + T + a^{ij} d_i d_j) + d^i d_i, & \tilde{Y} &= -(\tilde{X} + B_\alpha B^\alpha + d_i d^i), \end{aligned}$$

α и β - произвольные действительные числа, не равные одновременно нулю, и $\alpha \neq -\beta$.

3. Внутренние инвариантные реперы $\{M_\tau\}$ и $\{\sigma^\kappa\}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} M_\alpha &= A_\alpha, & \sigma^\circ &= \tau^\circ - x_i \tau^i - x_\alpha \tau^\alpha + x_N \tau^N, \\ M_\alpha &= A_\alpha + x_\alpha A_\alpha, & \sigma^\alpha &= \tau^\alpha + y^\alpha \tau^N, \\ M_i &= A_i + x_i A_\alpha, & \sigma^i &= \tau^i + y^i \tau^N, \\ M_N &= A_N - y^\alpha A_\alpha - y^i A_i + y^\circ A_\alpha, & \sigma^N &= \tau^N, \end{aligned}$$

где оснащающие объекты $\{x_\alpha\}, \{y^\alpha\}, \{x_i\}, \{y^i\}, \{x_N, x_\alpha, x_M\}, \{y^i, y^\alpha, y^0\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям относительно стационарной группы образующего элемента гиперполосы SH_τ :

$$\begin{aligned} \nabla_\delta x_\alpha &= 0, & \nabla_\delta y^\alpha &= y^\alpha \pi_N^N, \\ \nabla_\delta x_i &= 0, & \nabla_\delta y^i &= y^i \pi_N^N, \\ \nabla_\delta x_M &= x_M \pi_N^N, & \nabla_\delta y^0 &= y^0 \pi_N^N. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, оснащающие объекты связаны соотношением

$$x_M + y^0 + x_\alpha y^\alpha + x_i y^i = 0, \quad (19)$$

полученным из условия инцидентности точки M_M и гиперплоскости σ^0 .

Если положить

$$x_\alpha = B_\alpha, \quad y^\alpha = B^\alpha, \quad x_i = d_i, \quad y^i = d^i, \quad y^0 = \Lambda^0, \quad x_M = \Lambda_M,$$

то в силу (12), (16) дифференциальные уравнения (18) удовлетворяются, и соотношение (19) выполняется.

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_τ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0, & \sigma^0 &= \tau^0 - d_i \tau^i - B_\alpha \tau^\alpha + \Lambda_M \tau^N, \\ M_i &= A_i + d_i A_0, & \sigma^i &= \tau^i + d^i \tau^N, \\ M_\alpha &= A_\alpha + B_\alpha A_0, & \sigma^\alpha &= \tau^\alpha + B^\alpha \tau^N, \\ M_M &= A_M - d^i A_i - B^\alpha A_\alpha + \Lambda^0 A_0, & \sigma^M &= \tau^M. \end{aligned}$$

4. По аналогии с [6] гиперквадрику Q_{M-1} назовем соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы SH_τ , если она имеет касание второго порядка с базисной поверхностью V_τ данной гиперполосы. В дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_τ найдена двухпараметрическая связка инвариантно присоединенных к гиперполосе полей сопри-

касающихся гиперквадрик, уравнения которых в точечном репере записываются в виде

$$a_{ij} x^i x^j + 2d_i x^i x^M + \mathcal{L}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2\ell_\alpha x^\alpha x^M + (T + u_1 \kappa_0 + u_2 \ell_0) (x^M)^2 = 2x^0 x^M, \quad (20)$$

где u_1, u_2 - инвариантные параметры.

Заметим, что относительно этого поля соприкасающихся гиперквадрик касательная плоскость $T_\tau(A)$ базисной поверхности V_τ и характеристика $T_{M-\tau-1}(A)$ главной касательной гиперплоскости являются сопряженными.

5. Регулярная гиперполоса SH_τ называется двойственно нормализованной [7], если ее базисная поверхность V_τ нормализована в смысле А.П. Нордена [8], причем ее нормаль первого рода $N_{M-\tau}(A)$ в каждой точке $A \in V_\tau$ содержит характеристику $T_{M-\tau-1}(A)$ главной касательной гиперплоскости.

В дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_τ внутренним инвариантным образом получено поле инвариантных нормалей первого рода $\mathcal{N} = [T_{M-\tau-1}, k]$, где $k = [M_0 P]$,

$$P = B^\alpha M_\alpha + [-T^i + \tau(T^i + S^i)] M_i + M_M,$$

τ - инвариантный параметр.

Если взять в качестве инвариантных нормалей второго рода поле плоскостей $T_{\tau-1}(A) \subset T_\tau(A)$, полярно сопряженное относительно соприкасающихся гиперквадрик (20), то для гиперполосы SH_τ внутренним образом будет построено ∞^1 инвариантных двойственных нормализаций.

Список литературы

1. Л а п т е в Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. об-ва, 1953, №2, с. 275-382.
2. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Неевклидовы геометрии. М. Гостехиздат, 1955.
3. П о п о в Ю. И. Внутренние оснащения вырожденной

m -мерной гиперполосы H_m^z ранга z многомерного проективного пространства. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 6, Калининград, 1975, с. 102-142.

4. В а с и л я н М. А. Проективная теория многомерных гиперполос. — ДАН Арм. ССР. Матем., 1971, т. 6, № 6, с. 477-481.

5. С т о л я р о в А. В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. — Изв. вузов. Матем., 1975, № 10, с. 97-99.

6. О л о н и ч е в П. И. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. ДАН СССР, т. 80, № 2, 1951, с. 165-168.

7. Ч а к м а з я н А. В. Двойственная нормализация. Докл. АН Арм. ССР, 1959, 28, № 4, с. 151-157.

8. Н о р д е н А. П. Пространства аффинной связности. М. — Л., Гостехиздат, 1957.

М. В. К р е т о в

СВОЙСТВА СВЯЗНОСТЕЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОМПЛЕКСАМИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n -мерном аффинном пространстве A_n продолжается изучение комплексов (n -параметрических семейств) K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q [1]. Распространяется понятие ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности расслоения линейных реперов [2], [3] на случай главного расслоения $G_{n^2-n+1}(K_n)$, базой которого является комплекс K_n , а типовым слоем (n^2-n+1) -членная подгруппа стационарности центрированной диаметральной гиперплоскости P [4]. С его помощью геометрически охарактеризованы связности, индуцированные полем одномерных направлений \mathcal{N}_n , не параллельных гиперплоскости P , которые рассмотрены в работе [1]. Показана также эквивалентность геометрических характеристик объектов касательной и нормальной линейных связностей с помощью конструкций центрального проектирования и параллельного перенесения ([5], [6]).

Отнесем комплекс K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q к реперу $R = \{A, \vec{e}_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{1, n})$, где A — центр гиперквадрики.

Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа комплекса K_n [1], соответственно имеют вид:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 1 = 0, \quad (1)$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma \quad (2)$$

Диаметральные гиперплоскости P [1] описывают комплекс W_n , система дифференциальных уравнений которого в специализированном репере R [1] записывается следующим образом:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij} \omega_j^i + \Lambda_i \omega^n, \quad (i, j, \kappa = \overline{1, n-1}), \quad (3)$$

где компоненты Λ_{ij} и Λ_i фундаментального объекта первого порядка комплекса W_n являются функциями компонент фундаментального объекта второго порядка многообразия K_n .

Показано, что с комплексом K_n ассоциируется главное расслоение $G_{n^2-n+1}(K_n)$, базой которого является многообразие K_n , а типовым слоем — (n^2-n+1) -членная подгруппа стационарности центрированной диаметральной гиперплоскости P . В главном расслоении

$G_{n^2-n+1}(K_n)$ задается фундаментально-групповая связность по Г.Ф. Лаптеву [7]. На основании теоремы Картана-Лаптева [8] доказано, что связность в ассоциированном расслоении задается с помощью поля объекта связности:

$$\tilde{\Gamma} = \{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_j^i, L_j^i, \Gamma^i, \Gamma_i, \Gamma \} \quad (4)$$

на базе K_n .

Рассмотрим поле одномерных направлений \mathcal{N} , не параллельных гиперплоскости P , которое индуцируется комплексом K_n и задается следующим уравнением:

$$\bar{E} = \bar{e}_n + \lambda^i \bar{e}_i. \quad (5)$$

Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор $\lambda = \{ \lambda^i \}$ позволяют охватить компоненты объекта связности $\tilde{\Gamma}$ по формулам:

$$\Gamma_{jk}^i = \Lambda_{jk} \lambda^i, \quad \Gamma_j^i = \Lambda_j \lambda^i, \quad L_j^i = -\lambda^i \lambda^k \Lambda_{kj}, \quad (6)$$

$$\Gamma_i = -\lambda^i \Lambda_{ji}, \quad \Gamma = -\lambda^i \Lambda_i, \quad \Gamma^i = -\lambda^i \lambda^j \Lambda_j,$$

то есть в ассоциированном расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$ возникает внутренняя связность [9].

Т е о р е м а 1. Подобъект $\{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_j^i \}$ объекта связности $\tilde{\Gamma}$ определяет проекцию $(n-1)$ -мерных направлений $P + dP$ смежных [7] к P , на исходные направления P , параллельно направлению \bar{E} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $d\bar{e}_i = \omega_j^i \bar{e}_j + \omega_i^n \bar{e}_n$. Из §3 работы [1] следует, что $\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \lambda^i \omega_j^n$. Используя уравнение направления \bar{E} , получаем $d\bar{e}_i = \omega_i^n \bar{E} + \tilde{\omega}_j^i \bar{e}_j$, откуда следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Подобъект $\{ \Gamma_i, \Gamma \}$ объекта связности $\tilde{\Gamma}$ определяет проекцию одномерных направлений $\bar{E} + d\bar{E}$, смежных к \bar{E} на направление \bar{E} , параллельно $(n-1)$ -мерным направлениям.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя внешним образом уравнение (5), получим:

$$d\bar{E} = (d\lambda^i + \lambda^j \omega_j^i + \omega_i^n) \bar{e}_i + (\omega_n^n + \lambda^i \omega_i^n) \bar{e}_n. \quad (7)$$

Из §3 работы [1] вытекает, что $\tilde{\omega}_n^n = \omega_n^n + \lambda^i \omega_i^n$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Подобъект $\{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_j^i \}$ объекта связности $\tilde{\Gamma}$ характеризуется таким параллельным переносом вектора $\bar{e} = \mu^i \bar{e}_i$, при котором он смещается в направлении \bar{E} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\delta \bar{e} = (\delta \mu^i + \mu^j \pi_j^i) \bar{e}_i + \mu^i \pi_i^n \bar{e}_n.$$

Из последней формулы и условия инвариантности вектора \bar{e} следует: $d\mu^i = \mu_j^i \omega^j - \mu^j \omega_j^i$. Выражая формы ω_j^i через формы связности $\tilde{\omega}_j^i$ и используя формулы (6), получаем:

$$d\bar{e} = \mu^i \omega_i^n \bar{E} + (d\mu^i + \mu^j \tilde{\omega}_j^i) \bar{e}_i,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 4. Подобъект $\{ \Gamma_i, \Gamma \}$ объекта связности $\tilde{\Gamma}$ характеризуется таким параллельным переносом вектора $\bar{E} = \mu \bar{E}$, при котором он смещается параллельно гиперплоскости P .

Доказательство теоремы вытекает из § 3 работы [1], формул (7) и условия инвариантности вектора \bar{E}_1 .

Итак, показана эквивалентность геометрических характеристик объектов касательной и нормальной линейных связностей с помощью конструкций центрального проектирования и параллельного перенесения ([5], [6]).

Т е о р е м а 5. Направление \mathcal{N} инвариантно относительно преобразования параллельного переноса в связности $\bar{\Gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем формы связности $\tilde{\omega}_j^i$, $\tilde{\omega}_n^i$ и $\tilde{\omega}_n^n$ в уравнения оснащающего объекта $\{\lambda^i\}$. Тогда они принимают вид: $\Delta\lambda^i = \tilde{\lambda}_j^i \omega^j + \tilde{\lambda}^i \omega^n$, где ковариантный дифференциал [2] объекта $\{\lambda^i\}$ относительно связности $\bar{\Gamma}$ имеет вид:

$$\Delta\lambda^i = d\lambda^i + \tilde{\omega}_n^i + \lambda^j \tilde{\omega}_j^i - \lambda^i \tilde{\omega}_n^n, \quad (8)$$

а ковариантные производные $\tilde{\lambda}_j^i$, $\tilde{\lambda}^i$ определяются, соответственно, следующими формулами:

$$\tilde{\lambda}_j^i = \lambda_j^i - \lambda_j^k - \lambda^k \Gamma_{kj}^i + \lambda^i \Gamma_j^i; \quad \tilde{\lambda}^i = \lambda^i - \Gamma^i - \lambda^j \Gamma_j^i + \lambda^i \Gamma. \quad (9)$$

Одномерные направления \mathcal{N} , не параллельные гиперплоскости P , определяются вектором \bar{E} , дифференциал которого можно привести к виду:

$$d\bar{E} = \Delta\lambda^i \bar{e}_i + (\omega_n^n + \lambda^i \omega_i^n) \bar{E}, \quad (10)$$

откуда следует, что обращение ковариантного дифференциала $\Delta\lambda^i$ в ноль соответствует рассматриваемому в условии теоремы параллельному переносу направления \mathcal{N} .

Список литературы

1. К р е т о в М.В. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадрик в аффинном пространстве. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 35-39.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - В кн.: Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979, с. 5-246.

3. Ш е в ч е н к о Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 126-130.

4. М а л а х о в с к и й В.С. Индуцированно оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве. - Тр. геометрич. семинара ВИНТИ АН СССР, 1974, 5, с. 319-334.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях: Уч. зап. Тартуского ун-та, 1965, 177, с. 6-42.

6. Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельные перенесения на поверхности: В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10, Калининград, 1979, 154-158.

7. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. общ-ва, 1953, т. 2, с. 275-382.

8. М а л а х о в с к и й В.С., Остиану Н.М. Поля геометрических объектов в однородных и обобщенных пространствах. - Деп. ВИНТИ АН СССР, М., 1979, № 3640-79 ДРП.

9. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей. - Матем. сб., 1973, т. 91, № 2, с. 211-233.

М.К.Кузьмин

R-СЕТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n

В евклидовом пространстве E_n вводится понятие **R-сети**. Приводятся достаточные условия (которые являются также необходимыми) для того, чтобы ортогональная сеть $\Sigma_n \subset E_n$ была **R-сетью**. Указывается верхняя граница произвола существования **R-сетей** в E_n . Рассматривается пример **R-сети**, определяющей с максимальным произволом.

1. Пусть собственно евклидово пространство E_n отнесено к подвижному ортонормированному реперу (x, \vec{e}_i) ($i, j, k = \overline{1, n}$). Девриационные формулы имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j.$$

Пфаффовы формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \\ \omega_i^j + \omega_j^i &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Рассмотрим в E_n m -распределение $\Delta_m = \Lambda(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$. Запишем его дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \omega_a^\alpha &= \Lambda_{ai}^\alpha \omega^i \\ (a, b, c, d &= \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{m+1, n}). \end{aligned} \quad (2)$$

Форму кривизны распределения $\Delta_m(\vec{e}_a)$ [1]

$$\Omega_a^\beta = \mathcal{D}\omega_a^\beta - \omega_a^c \wedge \omega_c^\beta \quad (3)$$

можно записать также в виде

$$\Omega_a^\beta = R_{aij}^\beta \omega^i \wedge \omega^j,$$

где

$$R_{aij}^\beta = -\delta^{bc} \sum_\alpha (\Lambda_{ai}^\alpha \Lambda_{cj}^\alpha - \Lambda_{aj}^\alpha \Lambda_{ci}^\alpha).$$

Легко убедиться, что система функций R_{aij}^β образует тензор — тензор кривизны распределения $\Delta_m(\vec{e}_a)$.

О п р е д е л е н и е. Распределение $\Delta_m(\vec{e}_a)$ с нулевой формой кривизны, т.е. все компоненты тензора кривизны R_{aij}^β которого равны нулю, назовем **R-плоским**.

3. Рассмотрим в E_n ортогональную сеть Σ_n . Пусть единичные векторы \vec{e}_i подвижного репера направлены по касательным к линиям сети в точке x , при этом имеем [1]:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k \quad (i \neq j). \quad (4)$$

Из уравнений (2), (4) находим

$$a_{ak}^\alpha = \Lambda_{ak}^\alpha.$$

О п р е д е л е н и е. Если все распределения, порожденные ортогональной сетью Σ_n , **R-плоские**, то такую сеть назовем **R-сетью**.

4. Т е о р е м а. Ортогональная сеть Σ_n в E_n является **R-сетью**, если все n распределений Δ_{n-1} , порожденных этой сетью, **R-плоские**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим распределения $\Delta_{n-1}(\vec{e}_a), \Delta_r(\vec{e}_a)$ ($1 \leq r < n-1$), порожденные данной ортогональной сетью Σ_n . Запишем форму кривизны распределения $\Delta_{n-1}(\vec{e}_a)$: $\Omega_a^\beta = -\omega_a^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta$ (по α нет суммирования). Отсюда тензор кривизны этого распределения имеет вид $R_{aij}^\beta = -\delta^{bc} (\Lambda_{ai}^\alpha \Lambda_{cj}^\alpha - \Lambda_{aj}^\alpha \Lambda_{ci}^\alpha)$.

Для распределения $\Delta_r(\vec{e}_a)$ имеем

$$R_{a'ij}^{\beta'} = \sum_{\alpha'} R_{a'ij}^{\alpha'}. \quad (5)$$

По условию

$$\Omega_a^\beta = -\omega_a^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta = 0, \quad (6)$$

или можно записать равносильное этому равенство $R_{a'ij}^e = 0$ ($R_{a'ij}^e = 0$), откуда согласно соотношению (5) имеем $R_{a'ij}^e = 0$. Мы показали, что произвольное распределение $\Delta_\alpha(\vec{e}_\alpha)$, порожденное сетью Σ_n , R -плоское. Сеть Σ_n является R -сетью.

З а м е ч а н и е. Так как все n распределений Δ_{n-1} R -плоские, то объединяя все равенства вида (6), можно записать

$$\omega_i^k \wedge \omega_j^k = 0 \quad (k \neq i, j). \quad (7)$$

Т е о р е м а. В ортонормированном репере (x, \vec{e}_i) , построенном на касательных к линиям R -сети, каждое из уравнений $\omega_i^j = 0$ вполне интегрируемо.

В самом деле, в силу (1)

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (k \neq i, j), \quad (8)$$

а в силу (7) все слагаемые в сумме (8) равны нулю, следовательно, $D\omega_i^j = 0$.

Т е о р е м а. Произвол существования R -сетей в E_n не превышает $[\frac{n}{2}]$ функций n аргументов.

В силу равенств (1) и (7) имеем, что число линейно независимых форм Пфаффа ω_i^j не превышает $[\frac{n}{2}]$, следовательно, старший характер системы уравнений, определяющей R -сеть, удовлетворяет условию $s_n \leq [\frac{n}{2}]$. Теорема доказана.

Рассмотрим ортогональную сеть Σ_n в E_n , порождающую параллельные $[2][\frac{n}{2}]$ 2-распределения и одно 1-распределение в случае нечетном n , размерность пересечения любой пары из которых равна нулю. Не нарушая общность рассуждений, распределения

$$\Delta_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2), \dots, \Delta_2(\vec{e}_{2[\frac{n}{2}-1]}, \vec{e}_{2[\frac{n}{2}]}); \Delta_1(\vec{e}_n)$$

можно считать параллельными. Рассматриваемая ортогональная сеть Σ_n является R -сетью, ибо имеют место равенства

$$\omega_{2\ell-1}^j = 0 \quad (j \neq 2\ell-2; 2\ell; \ell=1, [\frac{n}{2}]) \quad (9_1)$$

и при n нечетном к ним добавляются следующие равенства

$$\omega_n^i = 0; \quad (9_2)$$

в результате удовлетворяются равенства (7). На формы $\omega_1^2, \omega_3^4, \dots, \omega_{2[\frac{n}{2}-1]}^{2[\frac{n}{2}]}$ мы не накладываем никаких условий, кроме требования их линейной независимости.

С учетом равенств (1), (9) и (7) видим, что для нахождения произвола существования рассматриваемого класса сетей в E_n достаточно исследовать систему уравнений

$$\omega_{2\ell-1}^{2\ell} = a_{2\ell-1, k}^{2\ell} \omega^k \quad (\ell=1, [\frac{n}{2}]).$$

Система ковариантов имеет вид

$$\Delta a_{2\ell-1, k}^{2\ell} \wedge \omega^k = 0.$$

Легко убедиться, что исследуемая нами система уравнений находится в инволюции с характеристиками $s_1 = s_2 = \dots = s_n = [\frac{n}{2}]$. Рассматриваемый класс R -сетей в E_n определяется с произволом $[\frac{n}{2}]$ функций n аргументов.

Список литературы

1. Б а з и л е в В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В., Сети на многообразиях. - В сб.: Проблемы геометрии. Т.12. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М., 1981, 97-125.

2. Ш и р о к о в А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях. - В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия 1967. Итоги науки. ВИНТИ АН СССР. М., 1969, с.127-168.

Н.Н.Локотков

О СПЕЦИАЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ p -ПОВЕРХНОСТИ
 В ЕВКЛИДОВОМ n -ПРОСТРАНСТВЕ.

1. Дана гладкая p -мерная поверхность V_p в евклидовом n -пространстве E_n . Пусть на поверхности V_p задано нормальное векторное поле \vec{e} . В работах [1],[3]-[5] изучается параллельный перенос нормального векторного поля \vec{e} в нормальной связности вдоль всей поверхности. В частности, в [4],[5] изучается этот вопрос, когда \vec{e} - поле вектора средней нормали. Мы будем исследовать случай, когда векторное поле \vec{e} - единичное и переносится параллельно вдоль некоторого q -мерного ($q \leq p$) распределения Δ_q . В общем случае распределение Δ_q не интегрируемо, однако любое одномерное подраспределение $\Delta_1 \subset \Delta_q$ интегрируемо. В работе рассматривается случай, когда существует интегрируемое подраспределение $\Delta_\tau \subset \Delta_q$ ($2 \leq \tau \leq q$) и выясняется строение возникающей поверхности $V_\tau \subset V_p$.

2. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R = \{x, \vec{e}_\gamma, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in V_p$, векторы \vec{e}_γ ($\gamma, j, \dots = 1, p$) лежат в касательном пространстве T_x к поверхности V_p в точке x , векторы \vec{e}_α ($\alpha, \beta, \dots = p+1, n$) образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в пространстве E_n . Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^\gamma \vec{e}_\gamma, d\vec{e}_\gamma = \omega^\delta \vec{e}_\delta + \omega^\alpha \vec{e}_\alpha, d\vec{e}_\alpha = \omega^\gamma \vec{e}_\gamma + \omega^\beta \vec{e}_\beta. \quad (1)$$

Дифференциальные формы ω удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства.

Поверхность V_p в репере R определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$. Продолжая эту систему, получим:

$$\omega^\alpha_\gamma = \vartheta^\alpha_{\gamma\delta} \omega^\delta, \quad \vartheta^\alpha_{\gamma\delta} = \vartheta^\alpha_{\delta\gamma}. \quad (2)$$

Величины $\vartheta^\alpha_{\gamma\delta}$ образуют второй фундаментальный тензор поверхности V_p . Легко проверить, что

$$d\vartheta^\alpha_{\gamma\delta} = \vartheta^\alpha_{\gamma\delta\kappa} \omega^\kappa + \vartheta^\alpha_{\delta\gamma\kappa} \omega^\kappa - \vartheta^\alpha_{\gamma\delta} \omega^\beta + \vartheta^\alpha_{\delta\gamma\kappa} \omega^\kappa, \quad (3)$$

$\vartheta^\alpha_{\gamma\delta\kappa}$ - симметричны по всем нижним индексам.

Мы можем взять $\vec{e}_n = \vec{e}$, тогда формы ω^α_n главные, то есть $\omega^\alpha_n = \lambda^\alpha_\gamma \omega^\gamma$ коэффициенты λ^α_γ образуют тензор. Можно найти, что

$$d\lambda^\alpha_\gamma = \lambda^\alpha_{\gamma\delta} \omega^\delta + \vartheta^\alpha_{\gamma\delta} \omega^\delta - \lambda^\alpha_\gamma \omega^\beta + \lambda^\alpha_{\delta\gamma} \omega^\delta. \quad (4)$$

Векторное поле \vec{e}_n называется параллельным в нормальной связности вдоль распределения Δ_q , если $d\vec{e}_n \in T_x$ при смещении точки x вдоль распределения Δ_q , то есть,

$$\omega^\alpha_n = \lambda^\alpha_\gamma \omega^\gamma \quad \text{при } d\vec{x} \in \Delta_q. \quad (*)$$

3. Предположим, что на поверхности V_p существует сеть Σ_p линий кривизны относительно векторного поля \vec{e}_n [2] такая, что первые τ линий лежат в распределении Δ_τ , следующие $q-\tau$ линий лежат в распределении Δ_q , остальные $p-q$ линий лежат в ортогонально-дополнительном к Δ_q распределению Δ_{p-q} в касательном расслоении. В дальнейшем индексы пробегает значения:

$$\varepsilon, \delta, \dots = 1, \tau; \quad i_1, j_1, \dots = \tau+1, q; \quad i_2, j_2, \dots = q+1, p.$$

Векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ будем брать единичными и касательными к линиям сети Σ_p . Тогда в выбранном репере $\omega^\alpha_n = \lambda^\alpha_\gamma \omega^\gamma$. Так как распределение Δ_τ интегрируемо, то из тождеств

$$\lambda^\alpha_\varepsilon = 0 \quad \text{с учетом равенств (4) получаем:}$$

$$\vartheta^\alpha_{\varepsilon\delta} (\vartheta^\alpha_{\varepsilon\varepsilon} - \vartheta^\alpha_{\delta\delta}) = 0, \quad \text{суммирования нет.} \quad (5)$$

При необходимости мы можем линии сети Σ_p перенумеровать так, что система уравнений (5) выполняется, если на распределении Δ_τ существуют S ℓ_i -мерных распределений

$\Delta_{l_i}^i (i, j, \dots = \overline{1, s}; l_i \geq 2)$ и $\kappa (l_1 + \dots + l_s + \kappa = \tau)$

одномерных распределений $\Delta_{l_i}^a (a = \overline{l_i + \dots + l_s + 1, \tau})$ таких, что

$$\begin{aligned} \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n &= \vartheta_{\delta_i \delta_i}^n; \quad \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n \neq \vartheta_{\varepsilon_j \varepsilon_j}^n \quad (i \neq j); \quad \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_j}^a = 0 \quad (i \neq j); \\ \vartheta_{\varepsilon_i \delta_a}^a &= 0; \quad \vartheta_{\delta_a \delta_a}^a = 0; \quad \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n \neq \vartheta_{\varepsilon_a \varepsilon_a}^n, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_i, \delta_i, \dots = \overline{l_1 + \dots + l_{i-1} + 1, l_1 + \dots + l_i}$.

При $i=1$ полагаем $l_{i-1} = 0$. Следовательно, все распределения $\Delta_{l_i}^i$ и $\Delta_{l_i}^a$ попарно ортогональны и сопряжены на поверхности V_p . Так как Σ_p сеть линий кривизны относительно нормали \vec{e}_n , то

$$\vartheta_{\varepsilon_i \delta_i}^n = 0, \quad \varepsilon_i \neq \delta_i. \quad (7)$$

Продифференцировав тождества (7), с учетом тождеств (3), (6), получим

$$-\vartheta_{\varepsilon_i \delta_i}^a \omega_a^n + \vartheta_{\varepsilon_i \delta_i}^a \omega_a^\kappa = 0.$$

Так как ω_a^n выражаются только через ω^{i2} , то

$$\vartheta_{\varepsilon_i \delta_i i_1}^n = 0, \quad \vartheta_{\varepsilon_i \delta_i \varepsilon}^n = 0 \quad (\varepsilon_i \neq \delta_i), \quad (8)$$

откуда, в частности, следует

$$\vartheta_{\varepsilon_i \delta_i \varepsilon_a}^n = \vartheta_{\varepsilon_i \delta_i \varepsilon_j}^n = \vartheta_{\varepsilon_i \delta_i \varepsilon_i}^n = 0 \quad (\varepsilon_i \neq \delta_i). \quad (9)$$

Из тождеств $\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_a}^n = 0$, учитывая тождества (3), (6), находим

$$\omega_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_a} = \frac{\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_a \kappa}^n \omega^\kappa}{\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n - \vartheta_{\varepsilon_a \varepsilon_a}^n}.$$

Учитывая (9), получим

$$\omega_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_a} = \frac{1}{\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n - \vartheta_{\varepsilon_a \varepsilon_a}^n} \cdot (\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_a i_1}^n \omega^{i_1} + \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_a i_2}^n \omega^{i_2} + \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_a \varepsilon}^n \omega^\varepsilon + \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_a \delta_j}^n \omega^{\delta_j} + \vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i \varepsilon_a}^n \omega^{\varepsilon_i}), \quad (10)$$

по ε_i нет суммирования и $\delta_j \neq \varepsilon_i$.

Аналогично можно найти

$$\omega_{\varepsilon_i}^{\delta_j} = \frac{1}{\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n - \vartheta_{\delta_j \delta_j}^n} (\vartheta_{\varepsilon_i \delta_j i_1}^n \omega^{i_1} + \vartheta_{\varepsilon_i \delta_j i_2}^n \omega^{i_2} + \vartheta_{\varepsilon_i \delta_j \varepsilon_a}^n \omega^{\varepsilon_a} + \vartheta_{\varepsilon_i \delta_j \delta_m}^n \omega^{\delta_m} + \vartheta_{\varepsilon_i \delta_j \varepsilon_i}^n \omega^{\varepsilon_i}), \quad (\delta_m \neq \varepsilon_i). \quad (11)$$

Возьмем распределение $\Delta_{l_i}^i$. Оно интегрируемо тогда и только тогда, когда интегрируема система уравнений

$$\begin{cases} \omega^a = 0, & \text{I} \\ \omega^{i_1} = 0, & \text{II} \\ \omega^{i_2} = 0, & \text{III} \\ \omega^{\varepsilon_a} = 0, & \text{IV} \\ \omega^{\delta_j} = 0, \quad j \neq i & \text{V} \end{cases} \quad (12)$$

Подсистема системы (12), состоящая из уравнений I, II, III, интегрируема, так как распределение Δ_{l_i} интегрируемо. Проверим интегрируемость подсистемы IV, V. Имеем

$$D\omega^{\varepsilon_a} = \omega^{\varepsilon_i} \wedge \omega_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_a}.$$

С учетом (10) получим

$$D\omega^{\varepsilon_a} = \omega^{\varepsilon_i} \wedge \frac{\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i \varepsilon_a}^n \omega^{\varepsilon_i}}{\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n - \vartheta_{\varepsilon_a \varepsilon_a}^n} = 0.$$

Таким образом, система IV вполне интегрируема. Аналогично, с учетом равенства (11), можно показать, что система V вполне интегрируема. Тогда распределение $\Delta_{l_i}^i$ интегрируемо. Поэтому справедлива

Т е о р е м а. Пусть на поверхности V_p в E_n существует распределение $\Delta_q \supset \Delta_{l_i}$ вдоль которого переносится параллельно в нормальной связности нормаль \vec{e}_n , причем распределение Δ_q содержит q линий кривизны относительно \vec{e}_n и τ из этих линий лежат в распределении Δ_{l_i} . Если распределение Δ_{l_i} интегрируемо, то поверхность V_{l_i} расслаивается на ортогонально-сопряженную на поверхности V_p систему S поверхностей $V_{l_i}^i$ и κ семейств линий.

4. Т е о р е м а. Каждая поверхность $V_{l_i}^i$ лежит на гиперсфере с радиусом $\frac{1}{|\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n|}$ и центром C_i , где $\vec{C}_i = \vec{x} + (1/\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n) \vec{e}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Было показано, что $\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i \delta_i}^n = 0$ ($\varepsilon_i \neq \delta_i$). Используя равенство $\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n = \vartheta_{\delta_i \delta_i}^n$ ($\varepsilon_i \neq \delta_i$) и равенства (8), можно показать, что $\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i \varepsilon_i}^n = 0$. Тогда $\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i \delta_i}^n = 0$ для любого δ_i . Поэтому $d\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n = 0$ на поверхности $V_{l_i}^i$, т.е. $\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n = \text{const}$ и $1/|\vartheta_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n| = \text{const}$ вдоль поверхности $V_{l_i}^i$. Рассмотрим точку C_i , определяемую

вектором $\vec{c}_i = \vec{x} + (1/\varrho_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n) \vec{e}_n$. Находим

$$d\vec{c}_i = \omega^j \vec{e}_j + d(1/\varrho_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n) \vec{e}_n + (1/\varrho_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n) (\omega_n^j \vec{e}_j + \omega_n^\alpha \vec{e}_\alpha). \quad (13)$$

Вдоль поверхности $V_{e_i}^i$ имеем

$$d\vec{c}_i = \omega^{\delta_i} \vec{e}_{\delta_i} - (1/\varrho_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n) \sum_{\delta_i} \varrho_{\delta_i \delta_i}^n \omega^{\delta_i} \vec{e}_{\delta_i} = 0.$$

Поэтому точка C_i неподвижна при смещении точки по поверхности $V_{e_i}^i$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Все центры C_i лежат на одной нормали $[x, \vec{e}_n]$.

Когда точка x описывает поверхность V_p , точка C_i описывает некоторую поверхность \tilde{V}^i . Если $d\vec{x} \in \Delta_q$, то в касательном пространстве к поверхности \tilde{V}^i в точке

C_i выделяется подпространство T^i . Так как выполняется (*), то из равенства (13) следует, что выполняется

Т е о р е м а. Подпространство T^i касательного пространства к поверхности \tilde{V}^i в точке C_i ортогонально $(n-p-1)$ -мерному подпространству, ортогонально-дополнительному к \vec{e}_n в N_x .

5. Допустим, что на поверхности V_p существуют распределения $\Delta_\tau \subset \Delta_q$, такие, что выполняются условия:

а/распределение Δ_τ расслаивается на ортогонально-сопряженную систему S поверхностей $V_{e_i}^i$ и K семейств линий сети Σ_p ,

б/каждая поверхность $V_{e_i}^i$ лежит на гиперсфере с радиусом $1/|\varrho_{\varepsilon_i \varepsilon_i}^n|$ и центром C_i ,

в/все центры C_i лежат на нормали $[x, \vec{e}_n]$,

г/подпространство T^i ортогонально $(n-p-1)$ -мерному векторному пространству, ортогонально-дополнительному к \vec{e}_n в N_x .

Тогда из условия г/ следует $\omega_n^\alpha = 0$ вдоль распределения Δ_q . Из условий а/-в/ следует, что выполняются равенства (10), следовательно, распределение Δ_τ интегрируемо. Поэтому верна

Т е о р е м а. Если на поверхности V_p в E_n существуют распределения $\Delta_\tau \subset \Delta_q$, такие, что выполняются усло-

вия а/-г/, то вдоль распределения Δ_q нормальное векторное поле \vec{e}_n переносится параллельно, и распределение Δ_τ интегрируемо.

З а м е ч а н и е 2. В работе [3] рассмотрен случай $\tau=q=p$ для риманова пространства постоянной кривизны.

Список литературы

1. А к и в и с М.А., Чакмазян А.В. Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле. - ДАН АССР, 1975, 60, № 3, с. 137-143.

2. Б а з и л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит. матем. сб., 1966, № 4, 6, с. 475-490.

3. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем. - Известия вузов. Математика, 1974, № 5, с. 148-157.

4. Kentaro Y. Submanifolds with parallel mean curvature vector of a eucliden space or a sphere. Kodai math. sem. rep., 1971, V. 23, № 1.

5. Chen Bang-Yen. On the surface with parallel mean curvature vector. Indiana University mathematics journal. 1973, V. 22, № 7.

С.В.М а л а х о в с к а я

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция \mathcal{L}_m линейчатых невырожденных квадратик Q , имеющих невырожденное фокальное многообразие порядка $m \geq 2$. Доказано, что фокальная точка второго порядка квадратика Q является ее четырехкратной фокальной точкой.

Конгруэнция линейчатых квадратик тогда и только тогда является конгруэнцией \mathcal{L}_3 , когда прямолинейные образующие квадратик, проходящие через фокальную точку третьего порядка, являются фокальными прямыми.

§1. КОНГРУЭНЦИИ \mathcal{L}_2 .

Отнесем конгруэнцию \mathcal{K} линейчатых квадратик к реперу $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0, A_3 -фокальные точки квадратик $Q \in \mathcal{K}$, не принадлежащие одной прямолинейной образующей, A_0 -фокальная точка порядка $m \geq 2$ [1], а $A_0 A_i, A_3 A_i$ ($i, j, k, \kappa = 1, 2$) -прямолинейные образующие квадратик Q .

Пфаффа система уравнений конгруэнции \mathcal{K} запишется в виде:

$$\begin{aligned} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik} \omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = m_{ik} \omega_3^k, \quad \omega_3^i = \ell_k^i \omega^k, \quad \Omega = h_k \omega^k, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ω_α^β ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) -компоненты деривационных формул репера \mathcal{R} ,

$$\omega_0^i = \omega^i, \quad c_{12} = c_{21}, \quad m_{12} = m_{21}, \quad \Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3, \quad (1.2)$$

$i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Квадрика Q и ассоциированные квадратик Q_i [2] определяются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F} \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 \equiv 0, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{F}_i \equiv h_i x^1 x^2 - a_{ii}^j (x^i)^2 - a_{ji}^i (x^j)^2 + \lambda_{ki} x^k x^3 + c_{ki} x^k x^0 = 0, \quad (1.4)$$

где $\lambda_{ii} = m_{ik} \ell_i^k$, $\lambda_{ij} = m_{ik} \ell_j^k$. (1.5)

Точка A_0 тогда и только тогда является фокальной точкой порядка m , когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathcal{F} = 0, \quad d\mathcal{F} = 0, \quad d^2\mathcal{F} = 0, \quad \dots, \quad d^m\mathcal{F} = 0 \quad (1.6)$$

вдоль любого направления $\omega^i = t^i \tau$ (τ -параметрическая форма [3]).

Рассмотрим сначала случай $m = 2$.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} d\mathcal{F} &= \mathcal{V}_0 \mathcal{F} + \mathcal{F}_k \omega^k, \\ d^2\mathcal{F} &= \mathcal{V}_{00} \mathcal{F} + \mathcal{V}^k \mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{kk} \omega^k \omega^k \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где \mathcal{V}_0 -форма Пфаффа, $\mathcal{V}^i, \mathcal{V}_{00}$ -квадратичные дифференциальные формы

$$\mathcal{F}_{kk} = c_{kk} (x^0)^2 + \dots, \quad (1.8)$$

а многоточием обозначены члены, не содержащие $(x^0)^2$. Из (1.7) следует, что A_0 тогда и только тогда является фокальной точкой второго порядка, когда

$$c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.1), (1.9) характеризуют конгруэнции \mathcal{M} [2]. Мы приходим к следующим теоремам.

Т е о р е м а 1.1. Конгруэнция линейчатых квадратик тогда и только тогда обладает невырождающимся фокаль-

ным многообразием второго порядка, когда она является конгруэнцией \mathcal{N} .

Т е о р е м а 1.2. Невырождающееся фокальное многообразие второго порядка конгруэнции квадратик является четырехкратной фокальной поверхностью конгруэнции.

Т е о р е м а 1.3. Конгруэнция \mathcal{K} линейчатых квадратик тогда и только тогда является конгруэнцией \mathcal{L}_2 , когда обе ассоциированные квадратики Q_i являются конусами с вершинами в фокальной точке A_0 .

Анализируя систему уравнений (1.1), (1.9) убеждаемся, что конгруэнции \mathcal{L}_2 существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Так как произвольная конгруэнция квадратик имеет в общем случае восемь фокальных поверхностей, то она не может иметь более двух различных фокальных многообразий второго порядка.

Т е о р е м а 1.4. Точка поверхности является фокальной точкой второго порядка квадратики Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция квадратик Ли поверхности определяется пфаффовыми уравнениями (1) и конечными соотношениями

$$a_{ji}^i = 0, c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, h_i = 0, \lambda_{ij} = 0, \quad (1.10)$$

которые включают в себя соотношения (1.9), характеризующие конгруэнции \mathcal{L}_2 .

§ 2. КОНГРУЭНЦИИ \mathcal{L}_3 .

Рассмотрим теперь случай, когда A_0 является фокальной точкой третьего порядка. Учитывая (1.9), получаем:

$$d^3\mathcal{F} = v_{00}\mathcal{F} + v_0^k\mathcal{F}_k + v_0^{kl}\mathcal{F}_{kl} + (-2a_{11}^2(\omega^1)^3 + 2(h_1 - a_{12}^2)(\omega^1)^2\omega^2 + 2(h_2 - a_{12}^2)\omega^1(\omega^2)^2 - 2a_{22}^1(\omega^2)^3(x^0)^2 + \dots, \quad (2.1)$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие $(x^0)^2$. Для конгруэнций \mathcal{L}_3 кубическая дифференциальная форма

$$\text{при } (x^0)^2 \text{ тождественно обращается в нуль. Следовательно, } h_i - a_{ij}^j = 0, a_{ii}^i = 0. \quad (2.2)$$

Замыкая уравнение $\omega_i^3 - \omega^i = 0$, получаем

$$h_i + 2a_{ij}^j = 0. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует:

$$h_i = 0, a_{ii}^i = 0, a_{ij}^j = 0. \quad (2.4)$$

Учитывая (1.9), (2.4) в (1.1), получаем:

$$\lambda_{ii} = 0, \theta_1^1 = \theta_2^2, \lambda_{12} = \lambda_{21}, d\lambda_{12} - \lambda_{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0) = 0. \quad (2.5)$$

Система (1.1), (2.4), (2.5) - в инволюции и определяет конгруэнции \mathcal{L}_3 с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2.1. Конгруэнция линейчатых квадратик тогда и только тогда является конгруэнцией \mathcal{L}_3 , когда прямолинейные образующие квадратики, проходящие через фокальную точку третьего порядка, являются ее фокальными прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть конгруэнция \mathcal{K} линейчатых квадратик является конгруэнцией \mathcal{L}_3 . Тогда, в силу (2.4), (2.5), получаем:

$$\mathcal{F}_1 = \lambda_{12} x^1 x^3, \quad \mathcal{F}_2 = \lambda_{12} x^2 x^3. \quad (2.6)$$

Следовательно, прямые $A_0 A_i$ - фокальные.

Наоборот, если $A_0 A_i$ - фокальные прямые квадратики $Q \in \mathcal{K}$, то они принадлежат и квадратику Q и обоим ассоциированным квадратам. Это возможно лишь в случае, когда выполняются соотношения (1.9), (2.4), характеризующие конгруэнцию \mathcal{L}_3 . Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. Если фокальная точка A_0 третьего порядка описывает невырождающуюся поверхность, то она является фокальной точкой произвольного порядка $m \geq 3$

$$\text{Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как } dx^3 = -x^1 \omega_1^3 - x^2 \omega_2^3 + (\theta - \omega_3^3)x^3, \quad (2.7)$$

где O — форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, то из (2.6) следует, что $d^m \mathcal{F}_i$ ($m = 1, 2, \dots$) не могут содержать члена с $(x^0)^2$.

Значит, координаты точки A_0 удовлетворяют системе уравнений (1.6) при любом натуральном m . Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что введенное в [1] понятие ранга в случае невырождающихся фокальных многообразий содержательно только для рангов 1, 2, 3.

Список литературы

1. Махоркин В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик: В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с. 50-59.

2. Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью. — В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып. 12, Калининград, 1981, с. 44-47.

3. Лаптев Г.Ф. Распределение касательных элементов. — В кн.: Тр. геометр. семинара, М., 1971, т. 3, с. 29-48.

П. Н. Михайлов

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В работе рассмотрены поверхности постоянной средней кривизны $V_p \in E_n$ и общего вида. Выделены необходимые и достаточные условия постоянства средней кривизны на V_p . Дана сетевая характеристика поверхностей, отличных от поверхности постоянной средней кривизны. Рассмотрены случаи расслоения гиперповерхности V_p на поверхности постоянной средней кривизны.

1. Пусть задана немнимальная поверхность $V_p \subset E_n$. Отнесем поверхность V_p к подвижному полуортогональному реперу $\{x, \vec{e}_i\}$, где орты \vec{e}_i ($i = 1, \dots, p$) принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности в точке x , а векторы \vec{e}_α ($\alpha, \beta = \overline{p+1, n}$) образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $\mathcal{N}_{n-p}(x)$ касательной плоскости, причем первые q векторов \vec{e}_α ($\alpha, \beta = \overline{p+1, p+q}$) из системы $\{\vec{e}_\alpha\}$ расположены в главной нормали $\mathcal{N}_q(x) \subset \mathcal{N}_{n-p}(x)$ поверхности [1].

Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^i \vec{e}_i, & d\vec{e}_i &= \omega_j^i \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_\alpha &= \omega_a^i \vec{e}_i + \omega_a^\beta \vec{e}_\beta + \omega_a^\sigma \vec{e}_\sigma, & (1) \\ d\vec{e}_\sigma &= \omega_\sigma^\alpha \vec{e}_\alpha + \omega_\sigma^\delta \vec{e}_\delta & (\sigma, \delta = \overline{p+q+1, n}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega^\alpha = 0$, что при продолжении приводит к уравнениям:

$$\omega_i^\alpha = \vartheta_{ij}^\alpha, \quad \vartheta_{ij}^\alpha = \vartheta_{ji}^\alpha, \quad (2)$$

где функции θ_{ij}^α определяют поле второго основного тензора поверхности V_p , причем $\theta_{ij}^\sigma = 0$. В силу выбора репера имеем:

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad (3)$$

$$\omega_i^a + \gamma^{ki} \omega_k^a = 0, \quad (4)$$

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik} \omega_j^k + \gamma_{kj} \omega_i^k, \quad (5)$$

где γ^{ki} -контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$. Продолжение системы (2) имеет вид:

$$d\theta_{ij}^a - \theta_{ik}^a \omega_j^k - \theta_{kj}^a \omega_i^k + \theta_{ij}^b \omega_b^a = \theta_{ijk}^a \omega_k^a. \quad (6)$$

С каждой точкой $x \in V_p$ инвариантным образом связан вектор средней кривизны

$$\vec{M} = \frac{1}{p} \gamma^{ij} \theta_{ij}^a \vec{e}_a. \quad (7)$$

2. Если l произвольная линия поверхности $V_p \subset E_n$, то система ее дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\omega^i = l^i \theta, \quad (8)$$

где θ -параметрическая форма, $\partial\theta = \theta \wedge \theta_1$ и

$$dl^i + l^j \omega_j^i - l^i \theta_1 = l_1^i \theta.$$

Определим на поверхности $V_p \subset E_{p+q}$ ($q \geq 1$) линии, вдоль которых вектор \vec{M} переносится параллельно в связности нормального расслоения. Дифференцируя (7), получим, что направления, вдоль которых вектор \vec{M} переносится параллельно, определяются из системы

$$\lambda_i^a e^i = 0, \quad (9)$$

где $\lambda_i^a = \gamma^{kj} \theta_{kji}^a$. Система (9) является однородной системой q уравнений от p переменных. В общем случае она имеет $(p-q)$ линейно независимых решений. В работе 6 показано, что система величин λ_i^a образует тензор, и поверхность $V_p \subset E_{p+q}$ является поверхностью постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда

$$\sum_a \gamma^{ij} \theta_{ij}^a \lambda_k^a = 0. \quad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что справедлива

Т е о р е м а 1. На поверхности постоянной ненулевой средней кривизны $V_p \subset E_{p+q}$ существует по крайней мере $(p-q+1)$ -мерное распределение, вдоль которого вектор средней кривизны \vec{M} переносится параллельно.

3. Пусть на $V_p \subset E_n$ задано некоторое одномерное распределение Δ_1 . Подвижной репер $\{x, \vec{e}_\gamma\}$ на V_p в точке x выберем так, чтобы $\vec{e}_{k_0} \in \Delta_1(x)$. Тогда

$$\omega_{k_0}^i = a_{k_0 j}^i \omega^j, \quad (i \neq k_0). \quad (11)$$

Рассмотрим вектор $\vec{M}'_{k_0} = \gamma^{ij} \theta_{ijk_0}^a \vec{e}_a$. В силу (11) можно показать, что $\delta \vec{M}'_{k_0} = 0$ (δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам). Таким образом, каждому одномерному распределению Δ_1 на поверхности V_p соответствует некоторое инвариантное нормальное векторное поле.

Можно показать, что $\vec{M}'_{k_0} = 0$ тогда и только тогда, когда вектор \vec{M} на поверхности V_p переносится параллельно в направлении $\{\omega^{k_0}\}$.

Если на поверхности V_p задана некоторая сеть Σ_p , то в каждой точке поверхности инвариантным образом определяются p векторов \vec{M}'_i . Тогда в силу (10) справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_p \subset E_{p+q}$, отнесенная к произвольной сети Σ_p , есть поверхность постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда векторы \vec{M}'_i , определенные для одномерных направлений, определенных сетью Σ_p , удовлетворяют условию

$$\vec{M}'_i \cdot \vec{M}'_i = 0. \quad (12)$$

Из теоремы 2 вытекают:

С л е д с т в и е 1. Поверхность $V_p \subset E_{p+2}$ есть поверхность постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда векторы \vec{M}'_i коллинеарны направляющему вектору нормали, ортогональной к средней.

С л е д с т в и е 2. Гиперповерхность V_p есть поверхность постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда все векторы \vec{M}'_i равны нулю.

Пусть на поверхности $V_p \subset E_n$ существует $(p-q+1)$ -мерное распределение, вдоль которого \bar{M}_n переносится параллельно. Допустим, что поверхность V_p допускает каноническую сеть распределения Δ_{p-q+1} [4]. Обозначим эту сеть $\Sigma_p(\Delta_{p-q+1})$. Тогда в силу теоремы 2 справедливо

С л е д с т в и е 3. Поверхность $V_p \subset E_n$, несущая сеть $\Sigma_p(\Delta_{p-q+1})$, где Δ_{p-q+1} — распределение, вдоль которого вектор средней кривизны переносится параллельно, есть поверхность постоянной кривизны тогда и только тогда, когда векторы \bar{M}'_{ξ} , определенные для линий сети, принадлежащих распределению Δ_{p-q+1} — ортогонально-дополнительному распределению Δ_{p-q+1} , ортогональны вектору средней кривизны.

4. Рассмотрим произвольную поверхность $V_p \subset E_n$ не являющуюся поверхностью постоянной кривизны.

Вектор \bar{e}_{p+1} репера $\{x, \bar{e}_\gamma\}$ направим по средней нормали. Тогда система величин λ^{p+1}_k образует ковектор. Распределение Δ_{p-1} , определенное на V_p ковектором λ^{p+1}_k , вполне интегрируемо. Поверхность V_p в направлении Δ_1 , ортогональном Δ_{p-1} , расслаивается на поверхности V_{p-1} поверхности уровня средней кривизны M). Аналогично, если поверхность V_{p-1} не является поверхностью постоянной средней кривизны, то в некотором направлении $\tilde{\Delta}_1$ поверхность V_{p-1} расслаивается на поверхности V_{p-2} поверхности уровня средней кривизны M_1 поверхности V_{p-1}) и т.д.

Таким образом, на поверхности $V_p \subset E_n$ выделяются p ортогональных векторных полей. Интегральные кривые этих векторных полей определяют на поверхности V_p ортогональную сеть, которую обозначим Σ'_p .

Из сказанного выше видно, что справедлива

Т е о р е м а 3. Любая поверхность $V_p \subset E_n$ либо является поверхностью постоянной средней кривизны, либо расслаивается на поверхности постоянной средней кривизны, либо несет сеть Σ'_p .

Сравним сеть Σ'_p на гиперповерхностях V_p с некоторыми известными сетями.

Т е о р е м а 4. Если гиперповерхность V_p несет сеть Σ'_p , совпадающую с сетью линий кривизны, то поверхность есть либо p -ортогонально-сопряженная система, либо векторы вынужденных кривизн некоторых линий сети совпадают и поверхность в направлении остальных линий расслаивается на гиперболы.

Т е о р е м а 5. Если на гиперповерхности V_p сеть Σ'_p является геодезической сетью, то векторы средних кривизн подповерхностей и вектор средней кривизны поверхности V_p коллинеарны.

Выясним, в каком случае гиперповерхность V_p расслаивается в выделенном выше направлении на поверхности постоянной средней кривизны.

Т е о р е м а 6. Пусть на $V_p \subset E_{p+1}$ распределение Δ_{p-1} , определенное ковектором λ^{p+1}_k , является T -минимальным [4]. Тогда V_p в направлении Δ_1 , ортогональном к Δ_{p-1} , расслаивается на поверхности постоянной ненулевой средней кривизны тогда и только тогда, когда вынужденная кривизна интегральных линий распределения Δ_1 постоянна в направлении Δ_{p-1} .

Т е о р е м а 7. Поверхность $V_p \subset E_{p+1}$ расслаивается в направлении Δ_1 на минимальные поверхности тогда и только тогда, когда распределение Δ_{p-1} T -минимально и вынужденная кривизна интегральных линий распределения Δ_1 равна p -кратной средней кривизне поверхности V_p .

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. — Лит. матем. сб., 1966, 6, №4, с. 475–491.
2. Г р и г о р ь е в И.П. Асимптотические преобразования p -ортогонально-сопряженных систем в n -мерном пространстве. — ДАН СССР, 1954, 97, с. 765–767.
3. К у з ь м и н М.К. О канонических сетях распределений на поверхностях евклидова пространства. — Проблемы

4. Л а п т е в Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Труды Моск. матем. об-ва, 1953, 2, с. 275-382.

5. М и х а й л о в П. Н. К геометрии поверхностей постоянной средней кривизны. - В сб.: Геометрия погруженных многообразий. М., 1980, с. 62-66.

Ж. Н у р п е и с о в

К ГЕОМЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В E_n

В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические свойства $(n-1)$ -распределения в евклидовом пространстве E_n .

Пусть n -мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $R^x = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, инфинитезимальное перемещение которого определяется дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x} = \omega^j \vec{e}_j, \quad d\vec{e}_j = \omega_k^j \vec{e}_k, \quad (1)$$

($j, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n; i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n-1$).

Формы ω^j и ω_k^j удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^j = \omega^k \wedge \omega_k^j, \quad D\omega_k^j = \omega_l^j \wedge \omega_l^k. \quad (2)$$

Пусть в некоторой области $G \subset E_n$ задана вещественная функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Условие $f = const$ раскладывает область G на ω^1 поверхностей V_{n-1} (поверхностей уровня этого инварианта), касательные пространства к этим поверхностям задают в области G $(n-1)$ -распределение Δ_{n-1} .

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ репера расположим в площадке $\Delta_{n-1}(x)$. Тогда дифференциальные уравнения распределения будут:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ix}^n \omega^x, \quad (\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ji}^n). \quad (3)$$

Вектор \vec{e}_n репера R^x направим по направлению X , ортогональному площадке $\Delta_{n-1}(x)$. Получим $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_n = 0$,

следовательно,

$$\omega_i^n + \gamma_{ij} \omega_n^j = 0, \quad (4)$$

где $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.

Продолжив систему уравнений (3), перенеся все слагаемые, содержащие главные формы, в правую часть, находим:

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{it}^n \omega_j^t - \Lambda_{tj}^n \omega_i^t = \Lambda_{ijx}^n \omega^x,$$

$$d\Lambda_{in}^n - \Lambda_{kn}^n \omega_i^k = \Lambda_{inx}^n \omega^x.$$

Система величин Λ_{ij}^n образует тензор; мы будем предполагать $\det \|\Lambda_{ij}^n\| \neq 0$; Λ_{in}^n образуют геометрический объект типа ковектора.

В силу равенства (4) скалярная кривизна гиперповерхности V_{n-1} представится в виде:

$$R_{jprq}^i = \gamma^{ik} (\Lambda_{kr}^n \Lambda_{jq}^n - \Lambda_{kq}^n \Lambda_{jr}^n),$$

отсюда:

$$R_{sjprq} = \Lambda_{sp}^n \Lambda_{jq}^n - \Lambda_{sq}^n \Lambda_{jr}^n. \quad (5)$$

Пусть площадки $\Delta_{n-1}(x) = \Delta(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ параллельно переносятся вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(y)$, $y \notin \Delta_{n-1}(x)$. Если $\vec{H} \in \Delta_{n-1}(x)$ и точка x смещается вдоль интегральной кривой распределения $\Delta(y)$, то

$$(d\vec{H})/y \in \Delta_{n-1}(x). \quad (6)$$

Пусть $\vec{H} = h^i \vec{e}_i$, $y = \eta^x \vec{e}_x$. Учитывая соотношения (3) и (6), получим:

$$\eta^x h^i \Lambda_{ix}^n = 0. \quad (7)$$

В частности, условию (7) удовлетворяют базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$, тогда $h^i = \delta^{ij}$ и

$$\eta^x \Lambda_{ix}^n = 0. \quad (8)$$

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы выполнялось соотношение $y = tX$, необходимо и достаточно, чтобы геометрический объект Λ_{in}^n был нулевым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = tX$, тогда $\eta^i = 0$, $\eta^n \neq 0$. Из соотношения (8) следует $\Lambda_{in}^n = 0$. Обратно, если положим $\Lambda_{in}^n = 0$, то так как $\det \|\Lambda_{ij}^n\| \neq 0$ система $\eta^i \Lambda_{ij}^n = 0$ имеет единственное нулевое решение, $\eta^i = 0$, значит, $y = tX$.

Имеем направление X , ортогональное распределению Δ_{n-1} , тогда в E_n возникает двумерное распределение $\Delta_2 = \Delta(X, Y)$, где вдоль интегральной кривой 1-распределения $\Delta(y)$ имеем параллельное перенесение площадок $\Delta_{n-1}(x) = \Delta(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1})$.

Это распределение и $(n-1)$ -распределение $\Delta_{n-1} = \Delta(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ пересекаются по однородному распределению Δ_1 :

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cap \Delta_{n-1}.$$

Пусть векторное поле \vec{u} порождает это 1-распределение Δ_1 : $\Delta_1 = \Delta(\vec{u})$. Тогда $\vec{u} \in \Delta_2$ и имеем

$$\vec{u} = \lambda \vec{e}_n + \mu Y = \mu \eta^i \vec{e}_i + (\lambda + \mu \eta^n) \vec{e}_n,$$

$$\vec{u} = u^i \vec{e}_i.$$

Отсюда находим:

$$u^i = \mu \eta^i, \quad \lambda + \mu \eta^n = 0,$$

то есть

$$u^i = (-1)^{i-1} \mu \det \|\Lambda_{kj}^n\|$$

$$(\mathcal{I}_i \neq i; \mathcal{I}_i = 1, 2, \dots, n).$$

Когда точка x смещается вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(\vec{u})$ на поверхности $V_{n-1}(\omega^n = 0)$ имеем: $\omega^i = \theta_1 u^i$, где θ_1 параметрическая форма, $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \theta_1$. Для точки $\vec{F} = \vec{x} + \lambda \vec{e}_n$ ортогонального направления $\Delta(X)$ находим

$$d\vec{F} = (\omega^i + \lambda \omega_n^i) \vec{e}_i + d\lambda \vec{e}_n.$$

Чтобы имело место соотношение: $d\vec{F} \in \Delta(X)$, смещение точки x вдоль интегральной кривой $\Delta(\vec{u})$ должно удовлетворять условию [1]:

$$\omega^i + \lambda \omega_n^i = \theta_1 u^i + \lambda \omega_n^i = 0$$

или в силу (3) и (4):

$$(\Lambda_{ki}^n - \rho \gamma_{ki}) u^i = 0,$$

где $\rho = \frac{1}{\lambda}$. Допустим, что корни ρ_i уравнения

$$\det \|\Lambda_{ki}^n - \rho \gamma_{ki}\| = 0$$

простые, тогда уравнения

$$(\Lambda_{tk}^n - \rho_i \gamma_{tk}) u^k = 0$$

определяют в точке x $n-1$ попарно ортогональных направлений (главные направления тензора Λ_{tk}^n [2]). Отсюда следует:

Т е о р е м а 2. Интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются линиями кривизны относительно $\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_k (-1)^{k-1} (\Lambda_{jk}^n - \rho \gamma_{jk}) \det \|\Lambda_{iL_k}^n\| = 0 \quad (L_k \neq k),$$

где ρ - корень уравнения $\det \|\Lambda_{ik}^n - \rho \gamma_{ik}\| = 0$.

Выясним, когда интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются геодезическими. При смещении точки x вдоль интегральной кривой этого распределения имеем:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i = \theta_1 u^i \vec{e}_i = \theta_1 \vec{u}. \quad (9)$$

Находим

$$d^2\vec{x} = d\theta_1 \vec{u} + \theta_1 (du^i + u^j \omega_j^i) \vec{e}_i + \theta_1 u^i \omega_i^n \vec{e}_n.$$

Соприкасающаяся плоскость в точке x этой кривой

$$\Pi_2(\vec{u}) = [x, d\vec{x}, d^2\vec{x}].$$

Чтобы линия была геодезической ($\Pi_2(\vec{u}) \supset \Delta(X)$), должно быть:

$$du^i + u^j \omega_j^i = 0. \quad (10)$$

Положим $\vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$, тогда из соотношения (10) следует:

$$\omega_1^i = 0. \quad (11)$$

Продолжив уравнение (11), находим:

$$2\omega_1^i = 2\gamma^{ij} (\Lambda_{jp}^n \Lambda_{iq}^n - \Lambda_{jq}^n \Lambda_{ip}^n) \omega^p \Lambda \omega^q = 0, \quad p < q$$

то есть

$$\gamma^{ij} (\Lambda_{jp}^n \Lambda_{iq}^n - \Lambda_{jq}^n \Lambda_{ip}^n) = 0;$$

умножив на γ_{ti} и суммируя по i , получим

$$\Lambda_{tp}^n \Lambda_{iq}^n - \Lambda_{tq}^n \Lambda_{ip}^n = 0.$$

Поэтому верна

Т е о р е м а 3. Если интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$, $\vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$ являются геодезическими, то $\det \|\Lambda_{iL_k}^n\| = 0$ и тензор кривизны гиперповерхности V_{n-1} удовлетворяет условию: $R_{stpq} = 0$, если хотя бы один из индексов равен единице ($L_k \neq k$; $k \neq 1$).

Аналогично убеждаемся, что справедлива

Т е о р е м а 4. Чтобы геодезическая линия $\Delta(\vec{u})$, $\vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma^{ik} \Lambda_{k1}^n = 0 \quad (i \neq 1).$$

Список литературы

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. Лит. матем. сб., УІ, 4, 1966, 475-491.

2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. Изд.-во иностр. лит., М.-Л., 1948.

Е.В.О польская

О ПОЧТИ КОНТАКТНОМ ПОГРУЖЕНИИ В МНОГООБРАЗИИ
 ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ.

1. Пусть дано нечетномерное дифференцируемое многообразии M_{n+1} . Локальные координаты текущей точки $x \in M_{n+1}$ в некоторой окрестности U обозначим x^j ($j, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n+1$). Формы $\omega^j = x^j dx^k$, где x^j новые независимые переменные, образуют вполне интегрируемую систему форм, называемых структурными формами многообразия M_{n+1} .

Известно [2], что над окрестностью U многообразия M_{n+1} можно ввести последовательность линейных линейно независимых форм Пфаффа $\omega^j_x, \omega^j_{x^2}, \dots, \omega^j_{x^k}$, обладающих расслоенной структурой по отношению к формам ω^j .

О п р е д е л е н и е 1. Многообразии M_{n+1} называют многообразии почти контактной структуры, если на нем заданы поля геометрических объектов $\{\varphi_x^j\}, \{\xi^j\}, \{\eta_x^j\}$, компоненты которых удовлетворяют следующим конечным соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi_x^j \varphi_l^x &= -\delta_l^j + \xi^j \eta_l, \\ \varphi_x^j \xi^x &= 0, \quad \varphi_x^j \eta_j = 0, \quad \xi^j \eta_j = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Объекты φ, ξ, η называются структурными объектами почти контактной структуры. Дифференциальные уравнения полей структурных объектов имеют вид:

$$d\varphi_x^j - \varphi_l^j \omega_x^l + \varphi_x^l \omega_l^j = \varphi_{xl}^j \omega^l, \quad (2)$$

$$d\xi^j + \xi^l \omega_l^j = \xi_l^j \omega^l, \quad (3)$$

$$d\eta_j - \eta_l \omega_j^l = \eta_{jl} \omega^l. \quad (4)$$

Для такого многообразия будем пользоваться обозначением $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

2. В многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ зададим нечетномерную m -мерную поверхность M_m следующими параметрическими уравнениями:

$$\omega^j = \Lambda_i^j \theta^i, \quad (5)$$

где θ^i - структурные формы многообразия параметров S_m ($i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, m$). В каждой точке $x \in M_m$ касательную плоскость определим системой линейно независимых векторов:

$$\vec{\Lambda}_i = \Lambda_i^j \vec{e}_j, \quad (6)$$

где $\{\vec{e}_j\}$ - векторный репер в $T_x(M_{n+1})$.

Поверхности M_m в M_{n+1} оснастим полем нормалей $N_x(M_m)$, каждая плоскость которой определена системой $(n-m+1)$ векторов:

$$\vec{N}_\alpha = N_\alpha^j \vec{e}_j, \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots = m+1, m+2, \dots, n+1$.

Так как векторы $\{\vec{\Lambda}_i, \vec{N}_\alpha\}$ образуют репер в $T_x(M_{n+1})$, то матрица $\|\Lambda_i^j, N_\alpha^j\|$ невырождена. Обратная к ней матрица имеет вид $\|\Lambda_j^i, N_j^\alpha\|$.

3. Н.М.Остиану и Н.Д.Поляков в работе [3] доказали, что на поверхности M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, оснащенной полем нормалей $N_x(M_m)$, естественным образом возникает индуцированная $(\xi\eta\varphi)$ -структура (см. [3], стр.38). Структурными объектами индуцированной $(\xi\eta\varphi)$ -структуры на M_m служат следующие объекты:

$$\begin{aligned} \xi_i^j, \eta_i^j &= \{\eta_i^\alpha, \eta_i^{n+2}\}, \quad \xi_B^i = \{\xi_\alpha^i, \xi_{n+2}^i\}, \\ \varphi_B^A &= \{\varphi_\beta^\alpha, \varphi_{n+2}^\alpha, \varphi_\beta^{n+2}, \varphi_{n+2}^{n+2} = 0\}. \end{aligned}$$

Компоненты индуцированной $(\xi\eta\varphi)$ -структуры на M_m получены с помощью следующих охватов [3]:

$$\begin{aligned}
 f_i^j &= \Lambda_i^\gamma \varphi_\gamma \Lambda^{\alpha j}, & \eta_i^\alpha &= \Lambda_i^\gamma \varphi_\gamma N_x^{\alpha*}, \\
 \xi_\alpha^j &= -\Lambda_j^\gamma \varphi_\gamma N_x^{\alpha*}, & \rho_\alpha^\beta &= N_j^\gamma \varphi_\gamma N_x^{\alpha*}, \\
 \xi_{n+2}^i &= \xi_j^\gamma \Lambda_j^i, & \eta_i^{n+2} &= \eta_j^\gamma \Lambda_j^i, \\
 \rho_{n+2}^\alpha &= -N_j^\gamma \xi_j^\alpha, & \rho_\alpha^{n+2} &= \eta_j^\gamma N_j^\alpha.
 \end{aligned} \quad (8)$$

и удовлетворяют известным конечным соотношениям (см. формулу (5.24) из [3]):

$$\begin{aligned}
 1/ & f_j^i \rho_e^j = -\delta_e^i + \xi_A^i \eta_e^A, \\
 2/ & f_j^i \eta_i^A = -\rho_B^A \eta_j^B, \\
 3/ & f_j^i \xi_B^j = -\rho_B^A \xi_A^i, \\
 4/ & \rho_B^A \rho_C^B = -\delta_C^A + \xi_a^A \eta_a^A, \text{ где } A, B, C, \dots = m+1, \dots, n+2.
 \end{aligned} \quad (9)$$

4.0 п р е д е л е н и е. Будем говорить, что уравнения (5) определяют почти контактное погружение, если на M_m индуцируется почти контактная структура (т.е. M_m является почти контактным многообразием).

Найдем аналитические условия, при выполнении которых на M_m в $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$ возникает почти контактная структура со структурными объектами $f_j^i, \xi_{n+2}^i, \bar{\eta}_j^{n+2}$, где $\xi_{n+2}^i = \rho \xi_{n+2}^i, \bar{\eta}_j^{n+2} = \rho \eta_j^{n+2}$, а ρ, φ - ненулевые абсолютные инварианты

Т е о р е м а. Подмногообразие M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$ будет многообразием почти контактной структуры со структурными объектами $f_j^i, \xi_{n+2}^i, \bar{\eta}_j^{n+2}$, если выполнены следующие конечные соотношения:

$$\begin{aligned}
 1/ & \eta_i^{n+2} \xi_{n+2}^i = \alpha = \text{const} \neq 0, \\
 2/ & \xi_\alpha^i = \frac{1}{\alpha} \rho_\alpha^\gamma \rho_\gamma^\beta \xi_{n+2}^i, \\
 3/ & \eta_i^\alpha = \frac{1}{\alpha} \rho_\gamma^\alpha \rho_{n+2}^\gamma \eta_i^{n+2}, \\
 4/ & \rho_\alpha^\beta \rho_\beta^{n+2} \rho_{n+2}^\alpha = 0, \quad 5). \alpha \rho \varphi = 1.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть соотношения (11) выполнены. Объекты $f_j^i, \xi_{n+2}^i, \bar{\eta}_j^{n+2}$ определяют на M_m почти контактную структуру, если их компоненты удовлет-

воряют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
 d f_k^i - f_e^i \theta_k^e + f_k^e \theta_e^i &= f_{ie}^i \theta^e, \\
 d \bar{\xi}_{n+2}^i + \bar{\xi}_{n+2}^k \theta_k^i &= \bar{\xi}_{n+2}^i \theta^k, \\
 d \bar{\eta}_i^{n+2} - \bar{\eta}_k^{n+2} \theta_i^k &= \bar{\eta}_{ik}^{n+2} \theta^k
 \end{aligned} \quad (12)$$

и конечным соотношениям вида (1). В уравнениях (12) формы θ_j^i при $\theta^k = 0$ являются инвариантными формами полной линейной группы, действующей в $T_x(M_m)$.

Используя формулы охвата (8) и дифференциальные уравнения охватывающих объектов, убеждаемся в том, что компоненты $f_j^i, \bar{\xi}_{n+2}^i, \bar{\eta}_i^{n+2}$ действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям (12).

Из (9₄) следует: $f_j^i \rho_e^j = -\delta_e^i + \xi_\alpha^i \eta_e^\alpha + \xi_{n+2}^i \eta_e^{n+2}$. Подставляя вместо $\xi_\alpha^i, \eta_i^\alpha$ их значения из (11), получим:

$$f_j^i \rho_e^j = -\delta_e^i + \frac{1}{\alpha^2} \eta_e^{n+2} \xi_{n+2}^i (\rho_\alpha^\gamma \rho_\gamma^\beta \rho_{n+2}^\alpha \rho_\beta^\gamma + \alpha^2).$$

Заменив свертку $\rho_\alpha^\gamma \rho_\gamma^\beta$ ее выражением по формуле (9₄) и применив формулы (9₄) к свертке $\rho_{n+2}^\alpha \rho_\beta^\gamma$ (9₂) - для свертки $\rho_\beta^\gamma \eta_j^{n+2}$, получим:

$$f_j^i \rho_e^j = -\delta_e^i + \frac{1}{\alpha^2} \xi_{n+2}^i \eta_e^{n+2} (\alpha - \rho_\beta^j f_j^k \eta_k^{n+2}).$$

Далее, воспользовавшись формулами (11₂) и учитывая равенства (11₄), получим

$$f_j^i \rho_e^j = -\delta_e^i + \bar{\eta}_e^{n+2} \bar{\xi}_{n+2}^i. \quad (13)$$

Из соотношений (9), (11) следует, что

$$f_i^j \bar{\eta}_j^{n+2} = 0, \quad f_i^j \bar{\xi}_{n+2}^i = 0, \quad \bar{\xi}_{n+2}^i \eta_i^{n+2} = 1. \quad (14)$$

Таким образом, в силу (12), (13) и (14) объекты $f_j^i, \bar{\xi}_{n+2}^i, \bar{\eta}_j^{n+2}$ определяют почти контактную структуру на M_m . Теорема доказана.

Условия (11₁)-(11₃) допускают следующую геометрическую интерпретацию.

а/Условие (11₁) означает, что вектор $\bar{\xi}_{n+2}^i = \xi_{n+2}^i \bar{\Lambda}_i$ не принадлежит $(m-1)$ -мерной плоскости, определенной в

$T_x(M_m)$ ковектором η_i^{n+2} .
 б/Условия (II₂) означают, что все векторы $\vec{\xi}_\alpha = \xi_\alpha^i \vec{\Lambda}_i$ коллинеарны структурному вектору $\vec{\xi}_{n+2}$.

в/Условия (II₃) означают, что пучок плоскостей $\eta_i^\alpha x^i = 0$, принадлежащий $T_x(M_m)$, вырождается в $(m-1)$ -мерную плоскость, совпадающую с плоскостью $\eta_i^{n+2} x^i = 0$. Почти контактное погружение возможно, если ранги матриц $\|\xi\|$ и $\|\eta\|$ индуцированной на $M_m(\xi, \eta, \rho)$ -структуры равны, соответственно, $(m-1)$ и $(n+1-m)$.

Задача контактного погружения в контактное метрическое пространство рассматривалась в работе [4].

Список литературы

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - В сб.: Проблемы геометрии. Т. 9. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. М., 1979, с. 5-246
 2. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. - В сб.: Труды геом. семинара. Т. 1. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. М., 1966, с. 139-190.
 3. Остиану Н.М., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. - В сб.: Проблемы геометрии. Т. 11. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР, М., 1980, с. 3-66.
 4. Okumura M., Contact Riemannian submanifolds. „J. Different. Geom.“, 1970, 4, №1, 21-35.

Н.Д. Поляков
 ОБ $\mathcal{N}(\sigma)$ -АНТИИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

1. Рассмотрим $n+1$ -мерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} ($n=2q$). Известно [1], что над каждой окрестностью U можно построить последовательность форм $\omega_x, \omega_{x_1 x_2}, \dots$, обладающих расслоенной структурой по отношению к базовым формам ω^j ($j, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n+1$).

Пусть на M_{n+1} задана почти контактная структура со структурными объектами φ, ξ, η :

$$\begin{aligned} \varphi_x^j \varphi_z^k &= -\delta_z^j + \xi^j \eta_z, \\ \varphi_x^j \xi^k &= 0, \varphi_x^j \eta_j = 0, \xi^j \eta_j = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим m -мерное дифференцируемое подмногообразие M_m , вложенное в $M_{n+1}(\varphi, \xi, \eta)$:

$$\omega^j = \Lambda_i^j \theta^i, \quad (2)$$

где θ^i - структурные формы многообразия параметров $S_m(i, j, \dots = 1, \dots, m)$. В каждой точке $x \in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ определяется системой m -линейно независимых векторов $\vec{\Lambda}_i = \Lambda_i^j \vec{e}_j$. Оснастим теперь поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi, \xi, \eta)$ полем нормально оснащающих плоскостей N_x . В каждой плоскости N_x зададим $(n+1-m)$ -линейно независимых векторов $\vec{N}_\sigma = N_\sigma^j \vec{e}_j$, где

$$\sigma, \tau, \dots = m+1, \dots, n+1$$

2. В работе [2] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а (см. [2], §5). Если поверхность M_m , погруженная в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi, \xi, \eta)$, нормально оснащена полем плоскостей N_x , то на M_m естественным образом возникает $(f \xi \eta \rho)$ -структура.

Структурные объекты индуцированной $(\{ \xi \eta \rho \})$ -структуры на M_m $f_j^i, \eta_j^A = \{ \eta_j^\sigma, \eta_j^{(n+2)} \}, \xi_B^i = \{ \xi_\tau^i, \xi_{(n+2)}^i \},$

$$\rho_B^A = \{ \rho_\tau^\sigma, \rho_{(n+2)}^\sigma, \rho_\tau^{(n+2)}, \rho_{(n+2)}^{(n+2)} = 0 \}$$

определяются из разложения векторов $\varphi \vec{\Lambda}_i, \varphi \vec{N}_\sigma, \vec{\xi}$ по векторам $\vec{\Lambda}_j, \vec{N}_\sigma$:

$$\varphi \vec{\Lambda}_i = f_j^i \vec{\Lambda}_j + \eta_i^\sigma \vec{N}_\sigma, \quad (3)$$

$$\varphi \vec{N}_\sigma = -\xi_\sigma^j \vec{\Lambda}_j + \rho_\sigma^\tau \vec{N}_\tau, \quad (4)$$

$$\vec{\xi} = \xi_{(n+2)}^j \vec{\Lambda}_j - \rho_{(n+2)}^\tau \vec{N}_\tau, \quad (5)$$

а также из формул

$$\eta_i^{(n+2)} = \eta_j^\sigma \Lambda_i^\sigma, \quad (6)$$

$$\rho_\sigma^{(n+2)} = \rho_\sigma^\tau N_\sigma^\tau.$$

З а м е ч а н и е. Максимальные значения ранга и коранга индуцированной $(\{ \xi \eta \rho \})$ -структуры на M_m равны соответственно m и $(n+2-m)$.

3. В этой работе будем считать, что $m \leq \frac{n}{2} + 1$.

При этом поверхность M_m допускает оснащение полем σ -параметрических пучков $N(\sigma)$ плоскостей $N_x(\sigma)$ (размерность ρ оси каждого пучка равна m или $m-1$ и $\sigma = n-\rho$).

О п р е д е л е н и е 1. [3] Подмногообразие M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$ будем называть подмногообразием $N(\sigma)$ -антиинвариантным, если образ касательной плоскости $T_x(M_m)$, полученный под действием структурного аффинора φ , совпадает с осью σ -параметрического пучка нормалей $N_x(\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 2. [3] Распределение l -мерных линейных элементов Λ в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$ ($m \leq \frac{n}{2} + 1$) будем называть $N(\sigma)$ -антиинвариантным распределением, если образ элемента Λ_x , полученный под действием аффинора φ , совпадает с осью пучка нормалей $N_x(\sigma)$.

Понятие $N(\sigma)$ -антиинвариантности в многообразии

почти контактной структуры обобщает известное понятие антиинвариантности в многообразии метрической почти контактной структуры (см. [4]).

Из определения 1 следует, что если поверхность M_m $N(\sigma)$ -антиинвариантна, то образ касательной плоскости $\varphi T_x(M_m)$ принадлежит каждой плоскости N_x пучка $N_x(\sigma)$ ($\varphi T_x(M_m) \subset N_x$). Следовательно, для $N(\sigma)$ -антиинвариантной поверхности M_m в разложении (3) компоненты f_j^i структурного объекта $(\{ \xi \eta \rho \})$ -структуры на M_m тождественно обращаются в нуль:

$$f_j^i = 0. \quad (8)$$

Верно и обратное утверждение, т.е. если для некоторой поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$, нормально оснащенной полем σ -параметрических пучков $N(\sigma)$, выполняются условия (8), то M_m $N(\sigma)$ -антиинвариантная поверхность. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$ $N(\sigma)$ -инвариантна тогда и только тогда, когда выполняются условия (8).

При выполнении условий (8) $\text{rang } \{ f \} = 0$, а $\text{rang } \{ \rho \} = (n+2-2m)$. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 2. Ранг и коранг индуцированной $(\{ \xi \eta \rho \})$ -структуры на $N(\sigma)$ -антиинвариантной поверхности M_m принимают минимально возможные значения для данного подмногообразия (ранг равен нулю, коранг $-(n+2-2m)$).

При доказательстве теоремы о существовании $N(\sigma)$ -антиинвариантных подмногообразий в многообразии почти контактной структуры различаем три типа поверхностей:

$$1. \vec{\xi}_x \notin T_x(M_m), T_x(M_m) \not\subset \eta_x;$$

$$2. \vec{\xi}_x \in T_x(M_m);$$

$$3. T_x(M_m) \subset \eta_x.$$

З а м е ч а н и е. Размерность ρ оси пучка нормалей $N(\sigma)$ равна m , если поверхность M_m -типа 1 или 3 и ρ равна $m-1$, если поверхность M_m -типа 2.

Введем понятие $N(\sigma)$ -антиинвариантных распределений в многообразии почти комплексной структуры со структурным тензором F .

О п р е д е л е н и е 3 [3]. Распределение m -мерных линейных элементов Λ в многообразии почти комплексной структуры M_m ($m \leq \frac{n}{2}$) будем называть $N(\sigma)$ -антиинвариантным распределением, если образ элемента Λ_x полученный под действием аффинора F , совпадает с осью пучка нормалей $N(\sigma)$.

Т е о р е м а 3. Поверхность M_m ($m \leq \frac{n}{2}$) типа 1 в $M_{n+1}(\varphi \xi, \eta)$ $N(\sigma)$ -антиинвариантна тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in M_m$ распределение плоскостей $\lambda_x = \eta_x \cap T_x(M_m)$ - $N(\sigma)$ -антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η , плоскость α_x , натянутая на плоскость $\varphi \lambda_x$ и вектор $\bar{\xi}_x$, не пересекается с $T_x(M_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Необходимость. Пусть в $M_{n+1}(\varphi \xi, \eta)$ поверхность M_m первого типа и $N(\sigma)$ -антиинвариантна, а следовательно, плоскость $\varphi T_x(M_m)$ является осью пучка нормальных плоскостей $N_x(\sigma)$ и $\lambda_x \cap \varphi \lambda_x = \{x\}$. Это означает, что распределение λ

$N(\sigma)$ -антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η . Очевидно, что плоскость $\varphi \lambda_x$ является гиперплоскостью плоскости $\varphi T_x(M_m)$, а плоскость α_x , натянутая на плоскость $\varphi \lambda_x$ и вектор $\bar{\xi}_x$, является подплоскостью нормальной плоскости $N_x \subset N_x(\sigma)$. Следовательно, $\alpha_x \cap T_x(M_m) = \{x\}$.

2/Достаточность. Пусть в $M_{n+1}(\varphi \xi, \eta)$ для некоторой поверхности M_m первого типа ($m \leq \frac{n}{2}$) выполнены условия: 1/распределения плоскостей λ_x - $N(\sigma)$ -инвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η ; 2/в каждой точке $x \in M_m$ плоскость α_x , натянутая на плоскость $\varphi \lambda_x$ и вектор $\bar{\xi}_x$, не пересекаются с касательной плоскостью $T_x(M_m)$. Докажем, что при выполнении этих условий M_m является $N(\sigma)$ -антиинвариантной. Для этого докажем, что плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ не имеют общих направлений. Так как λ_x -

$N(\sigma)$ -антиинвариантно в η , то $\lambda_x \cap \varphi \lambda_x = \{x\}$, а следовательно, плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ могут пересекаться только по одномерному подпространству. Плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ пересекутся, если в $T_x(M_m)$ существует вектор \vec{x} такой, что $\varphi \vec{x} \in \lambda_x$. Под действием аффинора φ двумерная плоскость β_x , натянутая на векторы \vec{x}_x и $\vec{\xi}_x$, преобразуется в образ вектора $\vec{\varphi}_x$, определяющего прямую пересечения t плоскости β_x с η_x . Очевидно, $\varphi \vec{\varphi}_x \in \lambda_x$. Последнее означает, что прямая t_x принадлежит плоскости $\varphi \lambda_x$, а следовательно, плоскость β_x пересекается с $\varphi \lambda_x$ по прямой t_x . Так как β_x есть подплоскость m -мерной плоскости α_x . Из этого следует, что α_x пересекается с $T_x(M_m)$ по прямой, определенной вектором \vec{x}_x . А это противоречит условию.

Итак, мы доказали, что плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ не имеют общих направлений. Поэтому $\varphi T_x(M_m)$ можно принять за ось пучка $(n+1-m)$ -мерных нормалей $N_x(\sigma)$, относительно которого поверхность M_m является $N(\sigma)$ -антиинвариантной.

Справедливы также следующие теоремы.

Т е о р е м а 4. Поверхность M_m ($m \leq \frac{n}{2} + 1$) типа 2 в $M_{n+1}(\varphi \xi, \eta)$ $N(\sigma)$ -антиинвариантна тогда и только тогда, когда распределение плоскостей $\lambda_x = T_x(M_m) \cap \eta_x$ $N(\sigma)$ -антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η .

Т е о р е м а 5. Поверхность типа 3 в $M_{n+1}(\varphi \xi, \eta)$ $N(\sigma)$ -антиинвариантна тогда и только тогда, когда она $N(\sigma)$ -антиинвариантна относительно почти комплексной структуры, действующей в η .

Список литературы

Г. Л а п т е в Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. - В сб.: Тр. геометрич. семинара Т. I. ВИНТИ АН СССР, М., 1966, 139-190.

2. О с т и а н у Н.М., Поляков Н.Д., Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. - В сб.: Проблемы геометрии. Т. II. ВИНТИ АН СССР. М., 1980, с. 3-64.

3. П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $M(\sigma)$ -антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры. - В сб.: Проблемы геометрии. Т. I3, ВИНТИ АН СССР, М., 1982.

4. Yano Kentaro, Kon Masahiro, Anti-invariant submanifolds. Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 21, Marcel Dekker. New York - Basel, 1976, v111, 182 pp.

Е. В. С и л а е в

О СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ,
ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе получены неравенства, которым удовлетворяет скалярная кривизна поверхности, лежащей на гиперсфере евклидова пространства E_n .

Пусть поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O, r)$ с центром в точке O и радиусом r евклидова пространства E_n . Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R = \{x, \bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}$ ($i, j, \dots = 1, \dots, p; \alpha, \beta, \dots = p+1, \dots, n$) так, чтобы векторы \bar{e}_i лежали в касательном пространстве T_x , а векторы \bar{e}_α составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в точке x .

Так как для любой точки x поверхности V_p , лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O, r) \subset E_n$, вектор \bar{x} принадлежит пространству N_x , то $\bar{x} = r^\alpha \bar{x}_\alpha$, где $\bar{x} = O\bar{x}$, $\sum (x^\alpha)^2 = r^2$. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \omega^i \bar{e}_i, \\ d\bar{e}_i &= \omega_j^i \bar{e}_j + \omega_\alpha^i \bar{e}_\alpha, \\ d\bar{e}_\alpha &= \omega_i^\alpha \bar{e}_i + \omega_\beta^\alpha \bar{e}_\beta. \end{aligned}$$

При смещении точки x вдоль поверхности V_p имеем $\omega^\alpha = 0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим $\omega_i^\alpha = \vartheta_j^\alpha \omega^j$, $\vartheta_j^\alpha = \vartheta_{ji}^\alpha$.

Пусть \bar{M} - вектор средней кривизны поверхности V_p [1] и $\vartheta_{ij}^\alpha = \vartheta_{ij}^\alpha \bar{e}_\alpha$.

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O, r)$ евклидова пространства E_n , то в подвижном ортонормированном репере скалярная кривизна R поверхности V_p удовлетворяет неравенству

$$\frac{p^2}{r^2} - \sum_{i,j} \bar{e}_{ij}^2 \leq R \leq (p\bar{M})^2 - \frac{p}{r^2}.$$

Причем: 1/ $R = \frac{p^2}{r^2} - \sum_{i,j} \bar{e}_{ij}^2$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in V_p$ средняя нормаль (x, \bar{M}) проходит через центр O гиперсферы $S_{n-1}(O, r)$. 2/ $R = (p\bar{M})^2 - \frac{p}{r^2}$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in V_p$ плоскость главной нормали $N_q(x)$ совпадает с прямой Ox .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для поверхности V_p , лежащей на гиперсфере евклидова пространства E_n , имеют место [5] равенства:

$$\sum_{\alpha} x^{\alpha} \bar{e}_{ij}^{\alpha} + \gamma_{ij} = 0, \quad (1)$$

где $\gamma_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$ — метрический тензор поверхности V_p .

Пусть векторы \bar{e}_i образуют ортонормированный репер базис касательного пространства T_x в точке x , тогда $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Следовательно, $\bar{x} \cdot \bar{e}_{ij} + \delta_{ij} = 0$. На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$|\bar{x} \cdot \bar{e}_{ij}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{e}_{ij}|,$$

откуда следует, что

$$|\bar{e}_{ij}| \geq \frac{\delta_{ij}}{r}. \quad (2)$$

Известно [2], что в подвижном ортонормированном репере скалярная кривизна R поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n удовлетворяет условию:

$$(p\bar{M})^2 = R + \sum_{i,j} \bar{e}_{ij}^2. \quad (*)$$

Учитывая неравенства (2), получим

$$(p\bar{M})^2 \geq R + \frac{1}{r^2} p.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{e}_{ij} \parallel \bar{x}$,

т.е. тогда и только тогда, когда плоскость главной нормали $N_q(x) = [x, \bar{e}_{ij}]$ поверхности V_p совпадает с прямой Ox , $\forall x \in V_p$. Можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а. 1/ Средняя кривизна $|\bar{M}|$ поверхности $V_p \subset S_{n-1}(O, r) \subset E_n$, как поверхности в E_n , не превосходит $\frac{1}{r}$. 2/ $\forall x \in V_p$ средняя нормаль (x, \bar{M}) проходит через неподвижную точку O тогда и только тогда, когда поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O, r) \subset E_n$ и имеет постоянную среднюю кривизну $|\bar{M}| = \frac{1}{r}$, как поверхность в E_n .

Следовательно, используя равенство (*), для скалярной кривизны R поверхности $V_p \subset S_{n-1}(O, r) \subset E_n$ имеем:

$$\frac{p^2}{r^2} \leq R + \sum_{i,j} \bar{e}_{ij}^2$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда средняя нормаль (x, \bar{M}) проходит через центр O гиперсферы $S_{n-1}(O, r)$, $\forall x \in V_p$.

З а м е ч а н и е. 1. Пусть поверхность $V_p \subset S_{n-1}(O, r) \subset E_n$ несет сопряженную сеть, тогда в репере, построенном на касательных к линиям сопряженной сети, имеем: $\bar{e}_{ij}^{\alpha} = 0$ ($i \neq j$) и по формуле (1) $\gamma_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Таким образом, сопряженная сеть на поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n , всегда является ортогональной [3].

З а м е ч а н и е 2. Покажем, что поверхность $V_p \subset S_{p+1}(O, r) \subset E_{p+2}$ всегда несет сопряженную ортогональную сеть.

Для такой поверхности имеются только две асимптотические формы $\Phi^{p+1} = \bar{e}_{ij}^{p+1} \omega^i \omega^j$ и $\Phi^{p+2} = \bar{e}_{ij}^{p+2} \omega^i \omega^j$.

Направим вектор \bar{e}_{p+2} коллинеарно вектору \bar{x} , тогда $\bar{x} = r \bar{e}_{p+2}$. Формулы (1) в этом случае примут вид: $r \bar{e}_{ij}^{p+2} + \gamma_{ij} = 0$.

Следовательно, $\Phi^{p+2} = -\frac{1}{r} \gamma_{ij} \omega^i \omega^j$. Известно [4], если из двух квадратичных форм Φ^{p+1} и $-\Phi^{p+2}$ одна $-\Phi^{p+2}$ является положительно определенной, то существует невырожденное линейное преобразование, одновременно приводящее эти формы к каноническому виду. Это же преобразование приведет к каноническому виду и пару форм

φ^{r+1} и φ^{r+2}

Это значит, что на поверхности $\mathcal{V}_p \subset S_{p+1}(0, r) \subset E_{p+2}$ всегда существует такое семейство реперов $\{x, \vec{e}_i\}$, направления векторов \vec{e}_i которого попарно сопряжены. Таким образом, на такой поверхности всегда существует сопряженная сеть, которая по замечанию 1 будет ортогональной.

Из доказанной теоремы и замечаний вытекает

С л е д с т в и е. Если поверхность \mathcal{V}_p , принадлежащая гиперсфере $S_{n-1}(0, r)$ евклидова пространства E_n несет сопряженную сеть, то в подвижном репере, построенном на касательных к линиям этой сети, скалярная кривизна R поверхности \mathcal{V}_p удовлетворяет неравенству:

$$\frac{r^2}{r^2} - \sum_i \vec{e}_{ii}^2 \leq R \leq (r\vec{M})^2 - \frac{r}{r^2}.$$

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит. матем. сб., 1966, №4, с. 475-492.
2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи р-поверхности евклидова пространства. - Сибирск. матем. журнал, 1966, №3, с. 499-511.
3. Г е й д е л ь м а н Р.М. Об одном свойстве квадратичных сопряженных сетей. - Изв. вузов. Матем., 1968, №11, с. 48-50.
4. К у р о ш А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.
5. С и л а е в Е.В. О р-сопряженных системах на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n . - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12, Калининград, 1981, с. 84-87.

Е.Н. С о с о в

ЗАМЕЧАНИЕ О РЕЛЯТИВНОЙ ЛИНЕЙЧАТОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой статье изучается геометрия множества ориентированных прямых аффинного пространства \mathcal{D}_3 методом, предложенным в статье [1]. Кратко напомним сущность этого метода. В аффинном пространстве \mathcal{D}_{n+1} выбирается индикатриса $\mathcal{M}_n: \vec{a} = \vec{a}(x^1, \dots, x^n)$. В качестве оснащающего берется радиус-вектор \vec{a} точки \mathcal{M}_n , при этом возникают следующие дериационные уравнения:

$$\partial_i a_j = \Gamma_{ij}^k \vec{a}_k + \nu_{ij} \vec{a}, \quad (i, j, k = \overline{1, n}),$$

где связность Γ_{ij}^k эквипроективна. Элементы касательного расслоения индикатрисы $T(\mathcal{M}_n)$ отождествляются с ориентированными прямыми \mathcal{D}_{n+1} следующим образом: точке $T(\mathcal{M}_n)$ с локальными индуцированными координатами (x^i, x^{n+1}) ставится в соответствие ориентированная прямая с направляющим вектором \vec{a} , проходящая через точку:

$\vec{z}_0 = \vec{a} + x^{n+1} \vec{a}_s$. В $T(\mathcal{M}_n)$ существует аффинная связность $\overset{\circ}{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma}(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 2n})$, инвариантная относительно преобразования $T(\mathcal{M}_n)$, индуцированных параллельными переносами в \mathcal{D}_{n+1} :

$$\overset{\circ}{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} - T_{\alpha\beta}^{\gamma},$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ - полный лифт связности Γ_{ij}^k .

$T_{\alpha\beta}^{\gamma} = B_{\alpha\sigma} \omega^{\sigma} \vec{f}_{\beta}^{\gamma} + B_{\beta\sigma} \omega^{\sigma} \vec{f}_{\alpha}^{\gamma} - B_{\alpha\sigma} \vec{f}_{\beta}^{\sigma} \omega^{\gamma} -$
тензор деформации. $B_{\beta\gamma}$ - полный лифт тензора ν_{ij} , ω^{α} - векторное поле слоевой гомотетии, которые в локальных

координатах имеют вид:

$$\omega^i = 0, \omega^{n+i} = x^{n+i}, [f_{ij}^{\alpha}] = \begin{bmatrix} 0 & \delta_j^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [B_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} x^{n+s} \partial_s \theta_{ij} & \theta_{ij} \\ \theta_{ij} & 0 \end{bmatrix}.$$

Получены следующие результаты.

Л е м м а 1. $\nabla_{\alpha}^{\beta} R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = 0$ тогда и только тогда, когда $\nabla_{\kappa} \theta_{ij} = 0$ (критерий симметричности $T(\mathcal{M}_n)$).

Пусть ξ^a ($a = \overline{1, n+1}$) - аффинные координаты в \mathcal{D}_{n+1} .

Л е м м а 2. Инфинитезимальным операторам проективной группы в \mathcal{D}_{n+1} соответствуют в $T(\mathcal{M}_n)$ следующие операторы (обозначаем соответствие стрелой).

$$(*) X = (A^a + A_{\beta}^a \xi^{\beta} + B_{\beta}^a \xi^{\beta} \xi^a) \frac{\partial}{\partial \xi^a} \rightarrow u = (q^s + \mu x^{n+s}) \frac{\partial}{\partial x^s} +$$

$$+ (x^{n+k} \partial_{\kappa} q^s + p x^{n+s} + v^s + x^{n+k} [x^{n+s} \partial_{\kappa} \mu - \Gamma_{\kappa\rho}^s x^{n+p} \mu]) \frac{\partial}{\partial x^{n+s}},$$

где $A^a, A_{\alpha}^a, B_{\beta}^a = \text{const}$,

$$A^a = v a^a + v^s \partial_s a^a, A_{\beta}^a a^{\beta} = p a^a + q^s \partial_s a^a, B_{\beta}^a = \mu a_{\beta}^a + \mu_i \alpha_{\beta}^i$$

разложения векторов и ковекторов по взаимным локальным базисам $\{\vec{a}, \vec{a}_s\}$ и $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^s\}$.

Особенно интересен случай $n=2$, когда в $T(\mathcal{M}_n)$ можно задать линейный элемент:

$$ds^2 = 2 \varepsilon_{ij} dx^i dx^{j+2} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

(δ -абсолютный дифференциал в связности Γ_{ij}^k , ε_{ij} - бивектор, ковариантно постоянный в этой связности).

Л е м м а 3. $T(\mathcal{M}_2)$ со связностью $\tilde{\zeta}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ является конформно-евклидовым римановым пространством (связность $\tilde{\zeta}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ можно получить на квадрике Пюккера-Клейна, нормализованной автополярно по методу А.П.Нордена).

Л е м м а 4. Конформные преобразования $T(\mathcal{M}_2)$ индуцируются проективными преобразованиями \mathcal{D}_3 , причем

$$(**) \mathcal{L}_{\vec{u}} g_{\alpha\beta} = (p + \nabla_{\kappa} q^{\kappa} + 2 \mu_{\kappa} x^{2+\kappa}) g_{\alpha\beta}$$

(где \vec{u} определено формулой (*)). Из (***) следует, что параллельные переносы \mathcal{D}_3 индуцируют движения в

$T(\mathcal{M}_2)$, а гомотетия \mathcal{D}_3 -слоевую гомотетию $T(\mathcal{M}_2)$.

Л е м м а 5. Пусть \mathcal{M}_2 -торс, $T(\mathcal{M}_2)$ -будет симметрическим пространством тогда и только тогда, когда \mathcal{M}_2 -цилиндр, построенный на конике с центром в начале координат.

Рассмотрим цилиндрическую индикатрису

$$\mathcal{M}_2: \vec{a}(x^1, x^2) = x^1 \vec{e}_1 + f(x^1) \vec{e}_2 + x^2 \vec{e}_3, (f'(x^1) \neq 0).$$

Л е м м а 6. Группа движений $T(\mathcal{M}_2)$ зависит в общем случае от 6 параметров и от 7 параметров, когда плоское центральное вложение индикатрисы является W -кривой центральноаффинной группы.

Л е м м а 7. Геодезические линии в $T(\mathcal{M}_2)$ (со связностью $\tilde{\zeta}_{\alpha\beta}^{\gamma}$), которым в \mathcal{D}_3 соответствуют некоторые линейчатые поверхности, задаются уравнениями:

$$1/ x^1 = c_1, x^2 = c_2 t + c_3, x^3 = c_4 t + c_5, x^4 = c_6 t + c_7,$$

$$2/ x^2 = d_1 x^1 + d_2 f(x^1), x^3 = \frac{d_3 x^1 + d_4 f}{x^1 f' - f},$$

$$x^4 = d_5 \int (x^1 f' - f) dx^1 + \frac{1}{x^1 f' - f} (d_1 x^1 + d_2 f)(d_3 + d_4 f') + d_6,$$

где t - канонический параметр,

$$d_7 t + d_8 = \int (x^1 f' - f) dx^1, (d_1, c_2 = \text{const}).$$

1/ -изображаются в \mathcal{D}_3 плоскостями или гиперболическими параболоидами.

2/-стрикционная линия для этой линейчатой поверхности (она ищется из того условия, что прямая, параллельная образующей цилиндра, пересекает две бесконечно близкие образующие линейчатой поверхности) есть прямая, параллельная \vec{e}_3 , с уравнением:

$$\vec{R}(x^1) = -d_4 \vec{e}_1 + d_5 \vec{e}_2 + (d_5 \int (x^1 f' - f) dx^1 + d_6) \vec{e}_3.$$

Итак, все образующие линейчатой поверхности проходят через прямую, параллельную \vec{e}_3 ; каждая образующая поворачивается вокруг этой прямой, оставаясь параллельной радиусу-вектору $\mathcal{M}_2: \vec{a}(x^1, x^2)$, который движется по гео-

дезической \mathcal{M}_2 (плоскому центральному сечению).
 В то же время образующая поднимается по прямой пропорционально изменению эквицентроаффинной дуги $S_{\mathcal{M}_2}$ плоского центрального сечения \mathcal{M}_2 ($S_{\mathcal{M}_2} = \kappa \int (x^2 \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2) dx^2, \kappa = \text{const}$).

Рассмотрим, наконец, индикатрису \mathcal{M}_2 , являющуюся поверхностью касательных к W -кривой центроаффинной группы.

Л е м м а 8. В общем случае группа движений в $T(\mathcal{M}_2)$ зависит от трех параметров. Если же центроаффинное кручение W -кривой равно нулю, то эта группа зависит от четырех параметров.

Список литературы

1. Ш и р о к о в А. П. К вопросу о релятивной линейчатой геометрии. — В кн.: Дифференциальная геометрия. Саратов, 1976.

2. Н о р д е н А. П. Пространства аффинной связности. М. Наука, 1976.

3. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. М. Физматгиз, 1959.

А. В. С т о л я р о в

ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Проективно-дифференциальная геометрия регулярно гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ m -мерных линейных элементов ($m < n-1$) автором изучалась в работе [7]. В настоящей статье геометрия указанного многообразия в n -мерном пространстве проективной связности $P_{n,n}$ строится с привлечением теории двойственности, что позволило вскрыть новые аспекты теории указанного многообразия и привело к ее обогащению новыми геометрическими фактами; найдены также некоторые приложения двойственной теории распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\bar{j}, \bar{k}, \bar{l} = \overline{0, n}; \quad \gamma, \kappa, \ell, \rho, q = \overline{1, n};$$

$$i, j, k, \ell, s, t = \overline{1, m}; \quad u, v, \omega = \overline{m+1, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n};$$

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0, m}; \quad \bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega} = 0, m+1, \dots, n-1.$$

2. Рассмотрим классическое n -мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, определенное Э. Картаном [2], [11] с помощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\bar{j}}^{\bar{k}}$, подчиненных структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar{j}}^{\bar{k}} = \omega_{\bar{j}}^{\bar{l}} \wedge \omega_{\bar{l}}^{\bar{k}} + \frac{1}{2} R_{\bar{j}\bar{l}q}^{\bar{k}} \omega_0^p \wedge \omega_0^q, \quad \omega_{\bar{l}}^{\bar{l}} = 0. \quad (1)$$

При этом независимые первые интегралы u^1, u^2, \dots, u^n вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega_0^{\bar{j}} = 0$ являются локальными координатами точки $A(u)$ базы

B_n ; с текущей точкой $A(u)$ связывается n -мерное проективное пространство P_n , отнесенное к точечному реперу $\{A_{\bar{\tau}}(\omega)\}$, причем $A_0(u) \equiv A(u)$.

Система дифференциальных уравнений движения репера $\{A_{\bar{\tau}}\}$ в слое имеет вид:

$$\delta A_{\bar{\tau}} = \pi_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}, \quad \pi_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} = \omega_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} \Big|_{\omega_0^{\bar{\alpha}} = 0},$$

где δ - символ дифференцирования по параметрам центро-проективной группы фиксированного слоя, т.е. при $\omega_0^{\bar{\alpha}} = 0$.

3. В пространстве проективной связности $P_{n,n}$ ($n > 2$) рассмотрим регулярное гиперполосное распределение H [7] m -мерных линейных элементов ($m < n-1$); в репере первого порядка дифференциальные уравнения многообразия $H \subset P_{n,n}$ имеют вид (см. [7]):

$$\begin{aligned} \omega_i^n &= \Lambda_{i\bar{\alpha}}^n \omega_0^{\bar{\alpha}}, & \omega_i^{\bar{\nu}} &= M_{i\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}} \omega_0^{\bar{\alpha}}, \\ \omega_{\bar{\nu}}^n &= A_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^n \omega_0^{\bar{\alpha}}, & \omega_{\bar{\nu}}^i &= N_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^i \omega_0^{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В силу регулярности распределения тензор Λ_{ij}^n первого порядка является невырожденным: $\Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$; ниже предполагаем, что тензор A_{uv}^n первого порядка также является невырожденным: $A = |A_{uv}^n| \neq 0$ (геометрический смысл этого см. в [7]). Каждая из функций Λ и A является относительным инвариантом первого порядка:

$$d \ln \Lambda + m (\omega_0^{\bar{\alpha}} + \omega_n^{\bar{\alpha}}) - 2 \omega_i^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\bar{\alpha}} \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

$$d \ln A + (n-m-1) (\omega_0^{\bar{\alpha}} + \omega_n^{\bar{\alpha}}) - 2 \omega_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

где $\Lambda_{\bar{\alpha}} = \Lambda_n^{ji} \Lambda_{ij}^n$, $A_{\bar{\alpha}} = A_n^{vu} A_{uv}^n$.

Продолжая уравнения системы (2), имеем поля фундаментальных геометрических объектов второго, третьего и т.д. порядков распределения $H \subset P_{n,n}$; в частности, каждая из систем функций $\{\Lambda_{ij\bar{\alpha}}^n, \Lambda_{i\bar{\alpha}}^n, A_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^n\}$, $\{A_{uv\bar{\alpha}}^n, A_{u\bar{\alpha}}^n, \Lambda_{i\bar{\alpha}}^n\}$ образует геометрический объект второго порядка.

4. Возьмем новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}$:

$$\bar{\omega}_0^{\bar{\alpha}} = \omega_0^{\bar{\alpha}} - \frac{1}{n+1} (\Lambda_{\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}}) \omega_0^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_n^{\bar{\alpha}} = \omega_n^{\bar{\alpha}} - \frac{1}{n+1} (\Lambda_{\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}}) \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

$$\bar{\omega}_0^i = \omega_0^i + \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\bar{\alpha}}^n \omega_0^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_0^{\bar{\nu}} = \omega_0^{\bar{\nu}} + A_{u\bar{\alpha}}^n A_n^{vu} \omega_0^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_0^{\bar{\alpha}} = \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

$$\bar{\omega}_i^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{ki}^n \omega_n^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_i^{\bar{\nu}} = -\Lambda_{ki}^n A_n^{vu} \omega_u^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_i^{\bar{\alpha}} = -\Lambda_{ki}^n \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

$$\bar{\omega}_n^{\bar{\alpha}} = \omega_n^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_n^i = -\Lambda_n^{ik} \omega_k^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_n^{\bar{\nu}} = -A_n^{vu} \omega_u^{\bar{\alpha}}, \quad (3)$$

$$\bar{\omega}_i^{\bar{\alpha}} = \omega_i^{\bar{\alpha}} + (\Lambda_n^{js} \Lambda_{si\bar{\alpha}}^n - \delta_i^j \cdot \frac{1}{n+1} (\Lambda_{\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}})) \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

$$\bar{\omega}_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} = A_{u\bar{\alpha}}^n \omega_n^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_{\bar{\nu}}^i = -A_{u\bar{\alpha}}^n \Lambda_n^{ik} \omega_k^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\omega}_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} = -A_{u\bar{\alpha}}^n \omega_0^{\bar{\alpha}},$$

$$\bar{\omega}_{\bar{\nu}}^{\bar{\omega}} = \omega_{\bar{\nu}}^{\bar{\omega}} + (A_n^{vu} A_{uv\bar{\alpha}}^n - \delta_{\bar{\nu}}^v \cdot \frac{1}{n+1} (\Lambda_{\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}})) \omega_0^{\bar{\alpha}}.$$

Формы $\bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям Картана-Лаптева [3], [1]:

$$d \bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} = \bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\beta}} \wedge \bar{\omega}_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{2} \bar{R}_{\bar{\tau}\bar{\rho}\bar{q}}^{\bar{\alpha}} \omega_0^{\bar{\rho}} \wedge \bar{\omega}_0^{\bar{q}}, \quad \bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} = 0; \quad (4)$$

следовательно, формы $\bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}$ являются формами связности нового пространства проективной связности $\bar{P}_{n,n}$. Нами показано, что преобразование $\mathcal{J}: \omega_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}$ форм проективной связности по закону (3) является инволютивным, т.е. $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}^{-1}$.

Таким образом, регулярное гиперполосное распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ m -мерных линейных элементов во 2-й дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, двойственное $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования форм связности по закону (3); дифференциальные уравнения геометрического образа $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_{n,n}$ двойственного данному распределению $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, имеют вид, аналогичный (2):

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i^n &= \bar{\Lambda}_{i\alpha}^n \bar{\omega}_\alpha^x, & \bar{\omega}_i^v &= \bar{M}_{i\alpha}^v \bar{\omega}_\alpha^x, \\ \bar{\omega}_v^n &= \bar{A}_{v\alpha}^n \bar{\omega}_\alpha^x, & \bar{\omega}_v^i &= \bar{N}_{v\alpha}^i \bar{\omega}_\alpha^x.\end{aligned}\quad (5)$$

З а м е ч а н и е. Справедливо: $R_{\bar{\mathcal{T}}\bar{\mathcal{T}}\bar{\mathcal{T}}\bar{\mathcal{T}}}^{\bar{x}} = 0 \Leftrightarrow \bar{R}_{\bar{\mathcal{T}}\bar{\mathcal{T}}\bar{\mathcal{T}}\bar{\mathcal{T}}}^{\bar{x}} = Q$, т.е. $\{P_{n,n} \equiv P_n\} \Leftrightarrow \{\bar{P}_{n,n} \equiv \bar{P}_n\}$; при этом формы $\omega_{\bar{\mathcal{T}}}^{\bar{x}}$ служат формами инфинитезимального перемещения точечного репера $\{A_{\bar{\mathcal{T}}}\}$, а формы $\bar{\omega}_{\bar{\mathcal{T}}}^{\bar{x}}$ — формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\bar{\xi}_{\bar{\mathcal{T}}}\}$: $d\bar{\xi}_{\bar{\mathcal{T}}} = \bar{\omega}_{\bar{\mathcal{T}}}^{\bar{x}} \bar{\xi}_{\bar{\mathcal{T}}}$, где

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_0^n &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda A}} [A_0 A_1 \dots A_{n-1}], & \bar{\xi}_n &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda A}} [A_n A_1 \dots A_{n-1}], \\ \bar{\xi}_i &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda A}} \sum_{j=1}^m \Lambda_{ji}^n [A_0 A_1 \dots A_{j-1} A_n A_{j+1} \dots A_m A_{m+1} \dots A_{n-1}],\end{aligned}\quad (6)$$

$$\bar{\xi}_v = \frac{1}{\sqrt{\Lambda A}} \sum_{u=m+1}^{n-1} A_{uv}^n [A_0 A_1 \dots A_m A_{m+1} \dots A_{u-1} A_n A_{u+1} \dots A_{n-1}].$$

5. В работе [7] в третьей дифференциальной окрестности элемента распределения \mathcal{H} найдено поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в репере первого порядка записываются в виде

$$2x^0 x^n = a_{ij}^n x^i x^j + \frac{2\bar{\theta}_i}{m+2} x^i x^n + B_{uv}^n x^u x^v + 2\bar{\theta}_v^x x^v x^n + T_n (x^n)^2; \quad (7)$$

отметим, что гиперквадрики (7) найдены с существенным использованием фундаментального подобъекта $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ijks}^n\}$ (с привлечением объектов $\{M_{ij}^v, \Lambda_{ij}^n\}$, $\{N_{vj}^i\}$).

Образ, двойственный соприкасающейся гиперквадрике (7), есть тангенциальная гиперквадрика, уравнение которой относительно репера $\{\bar{\xi}_{\bar{\mathcal{T}}}\}$ (см. (6)) записывается в виде:

$$2\bar{x}^0 \bar{x}^n = \bar{a}_{ij}^n \bar{x}^i \bar{x}^j + \frac{2\bar{\theta}_i}{m+2} \bar{x}^i \bar{x}^n + \bar{B}_{uv}^n \bar{x}^u \bar{x}^v + 2\bar{\theta}_v^x \bar{x}^v \bar{x}^n + \bar{T}_n (\bar{x}^n)^2. \quad (8)$$

В уравнении (8) $\bar{x}^{\bar{\mathcal{T}}}$ представляют собой координаты гиперплоскостей $\bar{\xi}$ относительно тангенциального репера (6): $\bar{\xi} = \bar{x}^{\bar{\mathcal{T}}} \bar{\xi}_{\bar{\mathcal{T}}}$; охваты функций $\bar{a}_{ij}^n, \bar{\theta}_i, \bar{B}_{uv}, \bar{\theta}_v^x, \bar{T}_n$ аналогичны соответствующим охватам коэффициентов уравнения (7) (см. [7]).

Показано, что при $\Lambda_{[ij]k}^n = 0$ обращение в нуль тензора Дарбу $\mathcal{D}_{ijk}^n \stackrel{\text{def}}{=} (m+2) A_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n \theta_{k)}$ (см. [7]) есть условие касания третьего порядка соприкасающихся гиперквадрик (7) и (8) с распределением $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_{n,n}$ соответственно.

6. Согласно работе [8], на распределении $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, оснащённом в смысле А.П. Нордена [5] двойственным образом (в смысле [9]) полями квазитензоров ν_n^i, ν_i^0 , система форм $\{\bar{\theta}_{\bar{\mathcal{T}}}^i\}$, где

$$\bar{\theta}_0^i = \omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n,$$

$$\bar{\theta}_j^i = \omega_j^i - \nu_n^i \omega_j^n - \delta_j^i (\omega_0^0 - \bar{\theta}_0^k \nu_k^0) - M_{vj}^i \omega_0^v - \quad (9)$$

$$- (\nu_{nj}^i - \Lambda_{kj}^n \nu_n^k \nu_n^i + \nu_n^i \nu_j^0) \omega_0^n + \nu_j^0 \omega_0^i,$$

определяет пространство $\bar{A}_{n,m}$ с линейной связностью аффинного типа.

Аналогично, если распределение характеристик $\Pi_{n-m-1} \equiv [A_0 A_v]$ распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ оснащено в смысле А.П. Нордена полями квазитензоров ν_n^v, ν_v^0 (полем нормалей первого рода служит поле $[\Pi_m, A_n + \nu_n^v A_v]$) то система форм $\{\bar{\theta}_{\bar{\mathcal{T}}}^v\}$, где

$$\bar{\theta}_0^v = \omega_0^v - \nu_n^v \omega_0^n,$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_u^v &= \omega_u^v - \delta_u^v (\omega_0^0 - \bar{\theta}_0^w \nu_w^0) - (M_{iu}^v - \Lambda_{iu}^n \nu_n^v) \omega_0^i - \\ &- \nu_n^v \omega_u^n - (\nu_{nu}^v - \Lambda_{wu}^n \nu_w^v \nu_n^w + \nu_n^v \nu_u^0) \omega_0^n + \nu_u^0 \omega_0^v,\end{aligned}\quad (10)$$

также определяет пространство $\hat{A}_{n, n-m-1}^1$ с линейной связностью аффинного типа.

Отметим, что в выражениях (9), (10) можно, например, взять внутренним образом определенные квазитензоры

$$\begin{aligned} \nu_n^i &= \frac{1}{n-m-1} A_n^{uv} N_{vu}^i, & \nu_n^v &= \frac{1}{m} M_{ij}^v \Lambda_n^{ji}, \\ \nu_i^0 &= -\frac{1}{n-m-1} (M_{iv}^v - \frac{1}{m} \Lambda_{iv}^n M_{sl}^v \Lambda_n^{ls}), & \nu_v^0 &= -\frac{1}{m} N_{vs}^s. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как каждая из систем функций

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_n^i &= -\Lambda_n^{ik} \nu_k^0, & \bar{\nu}_i^0 &= \Lambda_{ki}^n \nu_n^k, \\ \bar{\nu}_n^v &= -A_n^{vu} \nu_u^0, & \bar{\nu}_v^0 &= A_{uv}^n \nu_n^u. \end{aligned} \quad (12)$$

есть квазитензор, двойственный соответствующему квазитензору относительно преобразования (3), то системы форм $\{\hat{\theta}_j^i\}, \{\hat{\theta}_n^v\}$ строения (9) и (10), где входящие в них формы и функции, пишутся с черточкой сверху, определяют пространства $\hat{A}_{n,m}$ и $\hat{A}_{n, n-m-1}$ с линейной связностью аффинного типа, двойственные соответствующим пространствам $\hat{A}_{n,m}$ и $\hat{A}_{n, n-m-1}$.

Заметим, что можно строить двойственную теорию распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и при некоторых других его оснащениях, а именно: а/при оснащении в смысле Э.Картана [10], б/при касательном оснащении [4], определяемом заданной на нем m -тканью линий.

7. В работе [7] нами построены (без применения теории двойственности) различные внутренние инвариантные нормализации регулярного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ (они справедливы и в случае $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$). Теперь, зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода ν_n^i (ν_i^0) распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, с использованием его двойственной теории легко построить внутренним образом определенную нормаль второго (первого) рода $\bar{\nu}_i^0$ ($\bar{\nu}_n^i$) следующим образом: построим охват квазитензора $\bar{\nu}_i^0$ ($\bar{\nu}_n^i$)

двойственного образа $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_{n,n}$, аналогичный охвату ν_n^i (ν_i^0), после чего по закону (12) найдем соответствующую нормаль $\bar{\nu}_i^0$ ($\bar{\nu}_n^i$). В частности, в охватах (11) нормали ν_n^i и ν_i^0 (а также ν_n^v и ν_v^0) именно в таком смысле являются двойственными друг по отношению к другу. Согласно работе [6], с распределением $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ m -мерных линейных элементов ($m < n-1$) во второй дифференциальной окрестности внутренним образом ассоциируется гиперплоскостное распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, для которого исходное распределение \mathcal{M} является базисным; уравнение гиперплоскости оснащающего распределения имеет вид $c_\alpha x^\alpha = 0$.

В случае $\det \|c_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha\| \neq 0$ двойственную теорию гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ можно приложить к изучению двойственной геометрии распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$; в частности, это позволяет: а/построить новые внутренним образом определенные инвариантные нормализации распределения \mathcal{M} ; б/найти ряд двойственных линейных связностей (аффинного и проективного типов), определяемых на распределении \mathcal{M} , оснащенном в смысле А.П.Нордена или Э.Картана; в/инвариантное присоединение регулярного распределения \mathcal{H} к распределению $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ позволяет изучить двойственную геометрию m -тканей на \mathcal{M} .

Все это приводит к обогащению теории распределений m -мерных линейных элементов в $P_{n,n}$ новыми геометрическими фактами.

Список литературы

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - Проблемы геометрии, Т.9. (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР), М., 1979.
2. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. - Изд-во Казанск. ун-та, 1962.
3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. общ-ва, 1953, т.2, с.275-382.

4. М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий. — Известия вузов. Матем., 1972, №9, с.54–65.

5. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности, М., Наука, 1976.

6. О с т и а н у Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. — Тр. геометр. семинара, т.3. (ВИНИТИ АН СССР), М., 1971, с.95–114.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m -мерных линейных элементов. — Проблемы геометрии, т.7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., 1975, с.117–151.

8. С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия полос. — Проблемы геометрии, т.10 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., 1978, с.25–54.

9. Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация. — ДАН Арм.ССР, 1959, т.28, № 4, с.151–157.

10. C a r t a n E. *Les espaces à connexion projective.*

— Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1937, 4, 147–159.

II. C a r t a n E. *Lecons sur la théorie des espaces à connexion projective.* Paris, 1937.

В.Н.Худенко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КОНИК В P_4

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются двумерные многообразия коник Q_1 , инцидентных стационарной гиперквадрике Q (многообразия S). Доказано наличие четырех фокальных точек коники $Q_1 \in S$, найдена их геометрическая характеристика.

Отнесем многообразие S к реперу $R = \{A_1, \dots, A_5\}$, где A_1, A_2, A_3 инцидентны двумерной плоскости коники Q_1 , а A_4, A_5 вне этой плоскости.

Уравнения квадрики Q и коники Q_1 запишем в виде:

$$a_{j\gamma\kappa} x^j x^\gamma x^\kappa = 0; \quad (1)$$

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^4 = 0; \quad x^5 = 0. \quad (2)$$

Пфаффовы уравнения многообразия S имеет вид:

$$\omega_i^4 = \Gamma_i^{4j} \omega_j, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4j} \omega_j, \quad \omega_3^5 = \Gamma_3^{5j} \omega_j, \\ d a_{j\gamma\kappa} - a_{j\gamma\lambda} \omega_\lambda^j - a_{\lambda\gamma\kappa} \omega_\lambda^j = 0, \quad (3) \\ (\omega_i^{\det} = \omega_i^5).$$

Здесь индексы принимают следующие значения:

$$j, \gamma, \kappa = 1, 2, \dots, 5; \quad \alpha, \beta, \lambda = 1, 2, 3; \quad i, j, \kappa = 1, 2. \quad (4)$$

Рассмотрим фокальное многообразие коник $Q_1 \in S$ [2], из (1)–(3) получаем, что оно определяется системой алгебраических уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^5 = 0, \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1^{41} x^1 + \Gamma_2^{41} x^2 + \Gamma_3^{41} x^3 & \Gamma_1^{42} x^1 + \Gamma_2^{42} x^2 + \Gamma_3^{42} x^3 \\ x^1 + \Gamma_3^{51} x^3 & x^2 + \Gamma_3^{52} x^3 \end{vmatrix} = 0$$

Система (5) определяет в P_4 дискретное многообразие четвертого порядка $[f]$, следовательно, коника Q_1 многообразия S обладает, в общем случае, четырьмя фокальными точками.

Проведем канонизацию репера R , поместив вершины A_1 и A_2 в фокальные точки коники Q_1 , вершину A_3 — в полюс прямой $[A_1 A_2]$ относительно коники Q_1 , а вершины A_4, A_5 — в точки пересечения поляр плоскости $(A_1 A_2 A_3)$ относительно квадрики Q с этой квадратикой. В результате система (3) приводится к виду:

$$\omega_{\hat{i}}^4 = \Gamma_1^{4\hat{i}} \omega_{\hat{i}}, \quad \omega_{\hat{\xi}}^{\xi} = \Gamma_3^{\xi\kappa} \omega_{\kappa}, \quad \omega_{\hat{i}}^{\xi} = \Gamma_i^{\xi\kappa} \omega_{\kappa},$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_5^4 = \omega_4^5 = 0, \quad (6)$$

$$\omega_{\hat{5}}^{\hat{1}} = -\frac{a_{54}}{a_{12}} \Gamma_{\hat{j}}^{4\hat{j}} \omega_{\hat{j}}, \quad \omega_{\hat{\xi}}^{\xi} = -\frac{a_{54}}{a_{33}} \Gamma_3^{\xi\kappa} \omega_{\kappa},$$

$$\omega_{\hat{4}}^{\hat{1}} = -\frac{a_{54}}{a_{12}} \omega_{\hat{j}}, \quad \omega_{\hat{3}}^{\hat{1}} = -\frac{a_{33}}{a_{12}} \Gamma_{\hat{j}}^{3\kappa} \omega_{\kappa},$$

$$da_{33} = 2a_{33} \omega_3^3, \quad da_{45} = a_{45} (\omega_5^5 + \omega_4^4),$$

$$da_{12} = a_{12} (\omega_1^1 + \omega_2^2).$$

Многообразия S определяются системой (6) и конечными соотношениями

$$a_{\hat{i}\hat{i}} = \Gamma_{\hat{j}}^{4\hat{j}} = a_{i3} = a_{25} = a_{44} = a_{55} = 0. \quad (7)$$

(Здесь $\hat{\xi} = 4, 5$; $\hat{j} = 1, 2$, но $\hat{i} \neq \hat{j}$ по ним суммирование не производится). Имеет место следующая теорема

Т е о р е м а 1. Для фокальной точки существует направление, вдоль которого касательная к линии, описываемой фокальной точкой, совпадает с касательной к кони-

ке Q_1 в этой точке.

Не умаляя общности, возьмем для доказательства фокальную точку A_1 . Имеем

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^{\xi} A_{\xi}.$$

При $\omega_1 = 0$, учитывая (6), получаем

$$dA_1 \Big|_{\omega_1=0} = \Gamma_1^{32} \omega_2 A_3 + \omega_1^1 \Big|_{\omega_1=0} A_1. \quad (8)$$

Из (8) следует утверждение теоремы.

Имеет место и обратная

Т е о р е м а 2. Если существует направление, вдоль которого касательная к линии, описываемой некоторой, инвариантной точкой M , инцидентной конике Q_1 , совпадает с касательной к конике Q_1 в этой же точке, то точка M является фокальной точкой коники Q_1 .

Доказательство теоремы 2 основывается на использовании соотношений (5), (6), (7).

Найдем координаты всех фокальных точек, две из которых (A_1, A_2) найдены. Координаты двух оставшихся фокальных точек $\mathcal{L}_1 (x_1 : y_1 : 1 : 0 : 0)$, $\mathcal{L}_2 (x_2 : y_2 : 1 : 0 : 0)$ можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{a_{32}}{2a_{12}} \cdot \frac{2m_3}{(-m_2^2 \pm \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3})}, \quad (9)$$

$$y_{1,2} = \frac{-m_2^2 \pm \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3}}{2m_3},$$

где

$$m_1 = \frac{a_{33}}{2a_{12}} (\Gamma_1^{41} \Gamma_3^{52} - \Gamma_3^{42}),$$

$$m_2 = \frac{a_{33}}{a_{12}} (\Gamma_1^{41} - \Gamma_2^{42}) + (\Gamma_3^{41} \Gamma_3^{52} - \Gamma_2^{42} \Gamma_3^{51}), \quad (10)$$

$$m_3 = \Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{51} \Gamma_2^{42}.$$

В заключение приведем уравнение для определения фокальных направлений

$$a_{12} \left[\Gamma_1^{42} \Gamma_2^{42} (\Gamma_3^{51} \omega_1 + \Gamma_3^{52} \omega_2)^2 - (\Gamma_3^{41} \omega_1^1 + \Gamma_3^{42} \omega_2) (\Gamma_3^{51} \omega_1 + \Gamma_3^{52} \omega_2) (\Gamma_2^{42} + \Gamma_1^{41}) + (\Gamma_3^{51} \omega_1 + \Gamma_3^{52} \omega_2)^2 \right] - a_{33} (\Gamma_1^{41} - \Gamma_2^{42}) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Список литературы

1. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т. 2, М., 1954.

2. Худенко В. Н. О фокальных образах многообразий многомерных квадрик. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 9. Калининград, 1978, с. 118-123.

В. П. Ц а п е н к о

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С ГИПЕРКОМПЛЕКСОМ ПАР ФИГУР (P, Q)

В n -мерном проективном пространстве P_n рассмотрим пары (P, Q) , состоящие из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P . Отнеся пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, зададим точку P разложением $P = x^i A_i$ ($i, j, \dots = 0, 1, \dots, n$), а гиперквадрику Q - уравнением $a_{i'j'} y^{i'} y^{j'} = 0$, где

$$a_{i'j'} x^{i'} x^{j'} \neq 0, \det [a_{i'j'}] \neq 0 \text{ и } a_{i'j'} = a_{j'i'}. \quad (1)$$

Не ограничивая общности рассмотрения, пронормируем координаты $x^{i'}$ и $a_{i'j'}$ так, чтобы $x^0 = 1$ и $a_{00} = 1$. С учетом такой нормировки уравнения стационарности точки P имеют вид:

$$\Delta x^i \stackrel{\text{def}}{=} dx^i + x^j \omega_j^i - x^i \omega_0^0 - x^i x^j \omega_j^0 + \omega_0^i = 0, \quad (2)$$

где $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$. Структурные формы Δx^i [1] точечного проективного пространства P_n образуют вполне интегрируемую систему. Уравнения стационарности гиперквадрики Q с учетом нормировки $a_{00} = 1$ имеют вид:

$$\Delta a_{i'j'} = 0,$$

где

$$\Delta a_{ij} = da_{ij} - a_{0i} \omega_j^0 - a_{k(i} \omega_j^k + 2a_{ij} \omega_0^0 + 2a_{ij} a_{0k} \omega_0^k, \quad (3)$$

$$\Delta a_{0j} = da_{0j} - a_{0k} \omega_j^k - a_{kj} \omega_0^k + a_{0j} \omega_0^0 - \omega_j^0 + 2a_{0j} a_{0k} \omega_0^k.$$

Здесь и в дальнейшем круглые скобки в выражениях вида $a_{(i} \omega_j^k)$ означают удвоенное симметрирование: $a_{(i} \omega_j^k) = a_i \omega_j^k + a_j \omega_i^k$.

Структурные формы Δa_{ij} пространства $R(Q)$ гиперквадрик также образуют вполне интегрируемую систему.

Рассмотрим n -мерное невырожденное многообразие V_n пар (P, Q) . При этом точка P описывает n -параметрическое многообразие, в силу чего формы Δx^i линейно независимы. Система дифференциальных уравнений многообразия V_n запишется в виде: $\Delta a_{ij} = a_{ijk} \Delta x^k$. Система функций (x^i, a_{ij}, a_{ijk}) является фундаментальным объектом первого порядка многообразия V_n относительно произвольного репера R .

Рассмотрим гиперплоскость L_{n-1} , полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q . Ее уравнение имеет вид

$$\vartheta_i y^i + \vartheta_0 y^0 = 0, \quad (4)$$

где

$$\vartheta_i = a_{ij} x^j + a_{oi}, \quad \vartheta_0 = a_{oi} x^i + 1. \quad (5)$$

Дифференцируя первую группу равенств (5) с учетом соотношений (2) и (3), получим

$$d\vartheta_i - \vartheta_j \omega_i^j + \vartheta_i \omega_0^0 + 2\vartheta_i a_{oj} \omega_j^0 - \vartheta_i x^j \omega_j^0 - \vartheta_0 \omega_i^0 = (a_{ijk} x^j + a_{oik} + a_{ik}) \Delta x^k. \quad (6)$$

Произведем специализацию подвижного репера R , помещая вершины A_i в гиперплоскость L_{n-1} . В таком репере гиперплоскость L_{n-1} задается уравнением $y^0 = 0$, эквивалентным уравнению (4), в силу чего получим условия $\vartheta_i = 0, \vartheta_0 \neq 0$. С учетом этих условий найдем из (6):

$$\omega_i^0 = \Lambda_{ik} \Delta x^k \left(\Lambda_{ik} = - \frac{a_{ijk} x^j + a_{oik} + a_{ik}}{a_{oj} x^j + 1} \right). \quad (7)$$

Продолжая систему (7) дифференциальных уравнений n -мерного многообразия гиперплоскостей L_{n-1} , получим $\nabla \Lambda_{ij} \equiv 0$. Здесь и в дальнейшем символом \equiv обозначаем сравнение по модулю базисных форм Δx^k , т.е.

$$\nabla \Lambda_{ij} = \Lambda_{ijk} \Delta x^k,$$

где

$$\nabla \Lambda_{ij} = d\Lambda_{ij} - \Lambda_{kj} \omega_i^k - \Lambda_{ik} \omega_j^k + 2\Lambda_{ij} \omega_0^0.$$

Базисные формы Δx^i и вторичные формы $\omega_i^j, \omega_0^i, \omega_0^0$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} d\Delta x^i &= \Delta x^j \wedge \{ \omega_j^i - \delta_j^i (x^k \omega_k^0 + \omega_0^0) - x^i \omega_j^0 \}, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Delta x^k \wedge \Lambda_{jk} \omega_0^i, \\ d\omega_0^i &= \omega_0^k \wedge \omega_k^i + \omega_0^0 \wedge \omega_0^i, \\ d\omega_0^0 &= \Delta x^j \wedge (-\Lambda_{ij} \omega_0^i). \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих уравнений следует, что с многообразием V_n ассоциируется главное расслоение $G_\tau(V_n)$, базой которого является область пространства P_n , описанная точкой P , а типовым слоем - подгруппа стационарности $G_\tau(\tau = n^2 + n)$ гиперплоскости L_{n-1} .

В главном расслоении $G_\tau(V_n)$ зададим фундаментально-групповую связность по Г.Ф. Лаптеву [2] с помощью форм связности

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \Delta x^k, \quad \tilde{\omega}_0^i = \omega_0^i - \Gamma_j^i \Delta x^j, \quad \tilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \Gamma_i \Delta x^i, \quad (9)$$

где компоненты объекта связности $\Gamma = \{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_j^i, \Gamma_i \}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla \Gamma_{jk}^i + \Lambda_{jk} \omega_0^i &\equiv 0, \quad \nabla \Gamma_i - \Lambda_{ji} \omega_0^j \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_j^i + \Gamma_j^i \omega_0^i - \Gamma_{kj}^i \omega_0^k &\equiv 0, \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \nabla \Gamma_{jk}^i &= d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{ek}^i \omega_j^e - \Gamma_{je}^i \omega_k^e + \Gamma_{jk}^e \omega_e^i + \Gamma_{jk}^i \omega_0^0, \\ \nabla \Gamma_j^i &= d\Gamma_j^i - \Gamma_k^i \omega_j^k + \Gamma_j^k \omega_k^i, \\ \nabla \Gamma_i &= d\Gamma_i - \Gamma_j \omega_j^i + \Gamma_i \omega_0^0. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P, Q) точки, не принадлежащей гиперплоскости L_{n-1} , позволяет задать связность в ассоциированном расслоении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точку B , не принадлежащую гиперплоскости L_{n-1} , зададим следующим образом

$B = A + \lambda^i A_i$, где функции λ^i удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla \lambda^i + \omega_o^i = \lambda_j^i \Delta x^j, \quad (10)$$

здесь $\nabla \lambda^i = d\lambda^i + \lambda^j \omega_j^i - \lambda^i \omega_o^i$. Функции Λ_{ij} и оснащенный квазитензор λ^i позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma_{jk}^i = \lambda^i \Lambda_{jk}, \quad \Gamma_j^i = -\lambda^i \lambda^k \Lambda_{kj}, \quad \Gamma_i = -\lambda^j \Lambda_{ji}.$$

С л е д с т в и е. В качестве точки B можно взять точку P , тогда связность в ассоциированном расслоении возникает внутренним образом.

Т е о р е м а 2. Точка B переносится параллельно в связности Γ тогда и только тогда, когда она остается на месте.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнений (10), используя формы (9), получим: $\mathcal{D}\lambda^i = \tilde{\lambda}_j^i \Delta x^j$, где ковариантный дифференциал (см., в частности, [3]) квазитензора λ^i имеет вид:

$$\mathcal{D}\lambda^i = d\lambda^i + \lambda^j \tilde{\omega}_j^i - \lambda^i \tilde{\omega}_o^i + \tilde{\omega}_o^i,$$

а ковариантные производные выражаются по формулам:

$$\tilde{\lambda}_j^i = \lambda_j^i - \lambda^k \Gamma_{kj}^i - \Gamma_j^i + \lambda^i \Gamma_j.$$

Дифференциал точки можно привести к виду:

$$dB = \tilde{\omega}_o^i B + \mathcal{D}\lambda^i A_i. \quad (11)$$

Отсюда видно, что обращение ковариантного дифференциала $\mathcal{D}\lambda^i$ в нуль характеризует параллельный перенос точки B в связности Γ , при котором она остается на месте.

Т е о р е м а 3. Подобъект линейной связности Γ_{jk}^i объекта связности Γ характеризуется проекцией на плоскость L_{n-1} смежной с ней плоскости $L_{n-1} + dL_{n-1}$ из центра B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскость L_{n-1} определяется системой точек A_i . Дифференциалы точек A_i входят в состав точек, определяющих смежную плоскость $L_{n-1} + dL_{n-1}$. Они приводятся к виду: $dA_i = \tilde{\omega}_i^j A_j + \Lambda_{ik} \Delta x^k B$. Проекция плоскости $L_{n-1} + dL_{n-1}$ на плоскость L_{n-1} из центра B определяется формами связности $\tilde{\omega}_i^j$, которые в свою очередь выражаются с помощью объекта линейной связности Γ_{jk}^i .

Т е о р е м а 4. Проекция на точку B смежной с ней точки $B + dB$ из центра L_{n-1} характеризует под-объект Γ_i объекта связности Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы вытекает из соотношения (11).

Список литературы

1. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. - В кн.: Труды геом. семинара. ВИНТИ АН СССР, 1973, с. 71-120.

2. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф. Лаптева. - В кн.: Труды геом. семинара ВИНТИ АН СССР, 1973, т. 4, с. 7-70.

3. Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12, Калининград, 1980, с. 126-130.

И.И.Шевченко

НОРМАЛИЗАЦИЯ ПОЛОСЫ

В проективном пространстве рассматривается полоса, для которой вводится понятие нормализации, позволяющей задавать связность в ассоциированном главном расслоении. Результаты настоящей работы содержатся в докладе [1], где исследуется более широкое расслоение.

Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_j\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \omega A + \omega^j A_j \quad (j, \gamma, \kappa = \overline{1, n}),$$

$$dA_j = \omega A_j + \omega_\gamma^j A_\gamma + \omega_\gamma A_j,$$

где ω - форма Пфаффа ($d\omega = \omega^j \wedge \omega_j$), а инвариантные формы проективной группы удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^j = \omega^\kappa \wedge \omega_\kappa^j, \quad d\omega_\gamma = \omega_\gamma^\kappa \wedge \omega_\kappa,$$

$$d\omega_\gamma^j = \omega_\gamma^\kappa \wedge \omega_\kappa^j + (\delta_\gamma^\kappa \omega_\kappa + \delta_\gamma^j \omega_\kappa) \wedge \omega^\kappa.$$

В пространстве P_n рассмотрим полосу $L_h(X_m)$, т.е. m -поверхность X_m , к каждой точке которой присоединена h -плоскость L_h , проходящая через соответствующую касательную m -плоскость T_m . Произведем адаптацию подвижного репера $\{A, A_i, A_\alpha, A_\alpha\}$, где индексы принимают значения:

$$i, j, \kappa = \overline{1, m}; \quad a, \ell, c = \overline{m+1, h}; \quad \alpha, \beta = \overline{h+1, n}.$$

Вершину A совместим с текущей точкой поверхности X_m , вершины A_i расположим на касательной плоскости T_m и вершины A_α - на плоскости L_h . Система уравнений полосы $L_h(X_m)$ в таком репере имеет вид

$$\omega^a = 0, \quad \omega^\alpha = 0;$$

$$\omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \omega_\alpha^a = \Lambda_{\alpha i}^a \omega^i.$$

Замыкая первую подсистему, получим $\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a, \Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha$. Продолжая вторую подсистему, найдем

$$\nabla \Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^a \equiv 0, \quad \nabla \Lambda_{ij}^\alpha \equiv 0, \quad \nabla \Lambda_{\alpha i}^a - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^j \equiv 0,$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla \Lambda_{\alpha i}^a = d\Lambda_{\alpha i}^a - \Lambda_{\alpha j}^a \omega_i^j - \Lambda_{\ell i}^\alpha \omega_\alpha^\ell + \Lambda_{\alpha i}^\beta \omega_\beta^a,$$

а символ \equiv означает сравнение по модулю базисных форм ω^i . Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_{ij}^a, \Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{\alpha i}^a\}$ будем называть фундаментальным объектом $\hat{1}$ -го порядка полосы $L_h(X_m)$, рассматриваемой как специальное m -мерное многообразие троек (A, T_m, L_h) .

С полосой $L_h(X_m)$ ассоциируется расслоение $H(X_m)$ со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^\kappa \wedge \omega_\kappa^i + \omega^\kappa \wedge \omega_{j\kappa}^i,$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$

$$d\omega_\ell^a = \omega_\ell^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{\ell i}^a,$$

$$d\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i + \omega_\alpha^\ell \wedge \omega_\ell^i + \omega^j \wedge \omega_{\alpha j}^i,$$

$$d\omega_\alpha = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i + \omega_\alpha^\ell \wedge \omega_\ell + \omega^i \wedge \omega_{\alpha i},$$

где

$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i + \Lambda_{jk}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j,$$

$$\omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a \omega_a + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha, \quad \omega_{aj}^i = \Lambda_{aj}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \omega_a,$$

$$\omega_{\xi i}^a = \Lambda_{\xi i}^\alpha \omega_\alpha^a - \Lambda_{ij}^a \omega_\xi^j - \delta_\xi^a \omega_i, \quad \omega_{ai} = \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha.$$

Базой главного расслоения $H(X_m)$ является поверхность X_m , а типовым слоем - группа H , действующая на тройке (A, T_m, L_h) .

Фундаментально-групповую связность в главном расслоении $H(X_m)$ зададим по Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{\xi i}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai})$ на базе X_m :

$$\nabla \Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i \equiv 0, \quad \nabla \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k \omega_k + \omega_{ij} \equiv 0,$$

$$\nabla \Gamma_{\xi i}^a + \omega_{\xi i}^a \equiv 0, \quad \nabla \Gamma_{aj}^i - \Gamma_{kj}^i \omega_a^k + \Gamma_{aj}^\xi \omega_\xi^i + \omega_{aj}^i \equiv 0,$$

$$\nabla \Gamma_{ai} - \Gamma_{ji}^j \omega_a^j + \Gamma_{ai}^j \omega_j + \Gamma_{ai}^\xi \omega_\xi + \omega_{ai} \equiv 0.$$

Т е о р е м а 1. Для определения связности в расслоении $H(X_m)$ достаточно задать 4-членную композицию [3] $\{(A, P_{m-1}, P_{h-m-1}, P_{n-h-1})\}$, -оснащающие элементы которой связаны с полосой $L_h(X_m)$ следующим образом: а/плоскость P_{m-1} является нормалью 2-го рода в смысле А.П.Нордена; б/плоскость P_{h-m-1} принадлежит плоскости L_h и не имеет общих точек с касательной плоскостью T_m ; в/плоскость P_{n-h-1} не пересекается с плоскостью L_h .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оснащающие плоскости $P_{m-1}, P_{h-m-1}, P_{n-h-1}$ зададим системами точек

$$B_i = A_i + \lambda_i A, \quad B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A,$$

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha^i A_i + \lambda_\alpha A,$$

причем

$$\nabla \lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij} \omega^j, \quad \nabla \lambda_a + \lambda_a^i \omega_i + \omega_a = \lambda_{ai} \omega^i,$$

$$\nabla \lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aj}^i \omega^j, \quad \nabla \lambda_\alpha^i + \lambda_\alpha^a \omega_a^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega^j, \quad (1)$$

$$\nabla \lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a \omega^i, \quad \nabla \lambda_\alpha + \lambda_\alpha^i \omega_i + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i} \omega^i.$$

Композиционное оснащение, указанное в теореме, задается полем квазитензора $\lambda = (\lambda_i, \lambda_a^i, \lambda_a, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha)$ на базе X_m . Фундаментальный объект Λ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \lambda_\alpha^i + \Lambda_{jk}^\alpha (\lambda_\alpha^i - \lambda_\alpha^a \lambda_a^i) - \delta_j^i \lambda_k - \delta_k^i \lambda_j,$$

$$\Gamma_{ij} = \Lambda_{ij}^a \lambda_a - \lambda_i \lambda_j + \Lambda_{ij}^\alpha (\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^a \lambda_a),$$

$$\Gamma_{\xi i}^a = \Lambda_{\xi i}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_\xi^a \lambda_i - \lambda_\xi^j M_{ij}^a,$$

$$\Gamma_{aj}^i = \Lambda_{aj}^\alpha \lambda_\alpha^i - \delta_j^i \mu_a - \lambda_\xi^i \lambda_a^k M_{jk}^\xi,$$

$$\Gamma_{ai} = \Lambda_{ai}^\alpha \lambda_\alpha - \mu_a \lambda_i - \lambda_\xi^j \lambda_a^i M_{ij}^\xi,$$

где

$$M_{ij}^a = \Lambda_{ij}^a - \Lambda_{ij}^\alpha \lambda_\alpha^a, \quad \mu_a = \lambda_a - \lambda_a^i \lambda_i.$$

О п р е д е л е н и е. Нормализацией полосы $L_h(X_m)$ назовем присоединение к каждой точке базисной поверхности X_m нормали 1-го рода P_{n-m} и нормали 2-го рода P_{m-1} в смысле А.П.Нордена, а также нормали 3-го рода -плоскости P_{n-h+m} , пересекающей плоскость L_h по касательной плоскости T_m .

Т е о р е м а 2. Нормализация полосы $L_h(X_m)$ дает возможность построить ее композиционное оснащение.

Доказательство. Нормаль 1-го рода P_{n-m} зададим системой уравнений $x^i = \lambda_\alpha^i x^\alpha + \mu_\alpha^i x^\alpha$, причем

$$\nabla \mu_\alpha^i - \lambda_\alpha^i \omega_\alpha^a + \omega_\alpha^i = \mu_{\alpha j}^i \omega^j. \quad (2)$$

Нормаль 2-го рода P_{m-1} , определяемая точками B_i , входит в состав композиционного оснащения. Нормаль 3-го рода P_{n-k+m} зададим системой уравнений $x^\alpha = \lambda_\alpha^a x^\alpha$. Нормализация полосы $L_k(X_m)$ определяется полем квазитензора $\mu = (\lambda_\alpha^i, \mu_\alpha^i, \lambda_i, \lambda_\alpha^a)$ на базе X_m . Доказательство сводится к построению компонент $\lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha, \lambda_\alpha$, оснащающего квазитензора λ с помощью нормализующего квазитензора μ . Компоненты λ_α^i находятся следующим образом: $\lambda_\alpha^i = \mu_\alpha^i + \lambda_\alpha^a \lambda_\alpha^i$. Для построения компонент $\lambda_\alpha, \lambda_\alpha$ продолжим систему уравнений $(1_3), (2)$:

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_{\alpha j}^i - \lambda_\alpha^i \omega_{\alpha j}^\beta + \lambda_\alpha^k \omega_{\alpha j}^i + \omega_{\alpha j}^i &\equiv 0, \\ \nabla \mu_{\alpha j}^i + \mu_\alpha^i (\delta_\alpha^\beta \omega_j + \Lambda_{jk}^\beta \omega_\alpha^k + \Lambda_{\alpha j}^\beta \omega_\alpha^a) + \\ + \mu_\alpha^k \omega_{\alpha j}^i - \lambda_{\alpha j}^i \omega_\alpha^a + \lambda_\alpha^i \Lambda_{jk}^a \omega_\alpha^k - \delta_j^i \omega_\alpha^a &\equiv 0. \end{aligned}$$

Формулы охвата имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \frac{1}{m} [\mu_\alpha^i (\Lambda_{\alpha i}^a + \Lambda_{ij}^a \lambda_\alpha^j) + \Lambda_{ij}^a \lambda_\alpha^i \lambda_\alpha^j - \lambda_{\alpha i}^i], \\ \lambda_\alpha &= \frac{1}{m} [\mu_\alpha^i (\Lambda_{ij}^a \lambda_\alpha^j + \Lambda_{\alpha i}^a \lambda_\alpha^a) + \Lambda_{ij}^a \lambda_\alpha^i \lambda_\alpha^j - \mu_{\alpha i}^i - \lambda_{\alpha i}^i \lambda_\alpha^a]. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Нормализацию полосы $L_k(X_m)$ можно представить в другой форме, а именно, к каждой точке базисной поверхности X_m присоединить: 1/нормаль 2-го рода P_{m-1} ; 2/плоскость P_{n-k} , пересекающую плоскость L_k лишь в точке A ; 3/плоскость P_{k-m} , принадлежащую плоскости L_k и пересекающую касательную плоскость T_m в той же точке. М.М. Похила построил [4] внутренним образом поля плоскостей, входящих в обе формы нормализации.

Список литературы

1. Шевченко Ю.И. Обобщенная нормализация полос в проективном пространстве. - В кн.: Всес. научн. конф. по неевклидовой геом. "150 лет геометрии Лобачевского". Казань, 1976, с. 214.
2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - В кн.: Проблемы геометрии, Т. 9, М., 1979, с. 7-246.
3. Норден А.П. Многочленные композиции и теория распределений. - Изв. вузов. Матем., 1978, №1, с. 87-97.
4. Похила М.М. Инвариантные оснащения многомерных полос проективного пространства. - В кн.: Всес. научн. конф. по неевклид. геом. "150 лет геометрии Лобачевского", Казань, 1976, с. 170.

Н.М.Шейдорова

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС
 ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Одномерные регулярные гиперполосы $H_1 \subset P_n$ впервые рассмотрел М.А.Василиян [1]. В данной работе получены новые результаты по теории одномерных гиперполос: 1/доказано, что внутренний инвариантный репер (в двух двойственных формах) определяется окрестностью 4-го порядка образующего элемента гиперполосы $H_1 \subset P_n$ (в работе [1] внутреннее оснащение гиперполосы рассмотрено в окрестности 5-го порядка); 2/рассмотрены специальные виды оснащений гиперполосы и выяснен их геометрический смысл.

Обозначения и замечания:

1. Во всей работе придерживаемся следующей схемы индексов:

$$j, \bar{j}, \kappa = \overline{0, n}; \quad u, v, w = \overline{2, n-1}.$$

2. Оператор ∇ действует по обычному закону.

1. Образующий элемент (A, α) гиперполосы $H_1 \subset P_n$ состоит из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α . При изменении параметра t , от которого зависит этот элемент, точка A описывает кривую V_1 , а гиперплоскость α , касательная к этой кривой в точке A , огибает тангенциально-вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^1 ранга 1.

Присоединим к гиперполосе H_1 репер i -го порядка следующим образом: положим $A_0 \equiv A$, $\alpha^n = \alpha$; точки $\{A_v\}$ поместим в характеристику E_{n-2} гиперполосы $H_1 \subset P_n$,

точку A_1 — на касательной к базисной кривой V_1 гиперполосы H_1 , а точку A_n выберем таким образом, чтобы она не лежала в главной гиперплоскости α^n . Тогда основные уравнения гиперполосы в репере i -го порядка имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \omega_0^n = 0, \omega_0^v = 0, \omega_v^n = 0; \\ \omega_1^n = a\omega_0^1, a \neq 0; \\ \omega_1^v = \lambda^v \omega_0^1, \\ \omega_v^1 = \lambda_v \omega_0^1, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$da + a(\omega_0^v - 2\omega_1^1 + \omega_n^n) = a_1 \omega_0^1; \quad (1.2)$$

$$d\lambda^v = -\lambda^u \omega_u^v + \lambda^v \omega_n^n - \omega_n^v + \theta^v \omega_0^1; \quad (1.3)$$

$$d\lambda_v = \lambda_u \omega_v^u - \lambda_v \omega_0^v + \omega_v^0 - \theta_v \omega_0^1. \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.3), (1.4) следует, что величины $\{\lambda^v\}$, $\{\lambda_v\}$ являются квазитензорами 2-го порядка гиперполосы $H_1 \subset P_n$. Системы функций $\Gamma_2 = \{a, \lambda^v, \lambda_v\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_1, \theta^v, \theta_v\}$ называются фундаментальными геометрическими объектами соответственно 2-го и 3-го порядков регулярной гиперполосы $H_1 \subset P_n$.

Условие $a \neq 0$ означает, что гиперплоскость α^n не содержит двумерную соприкасающуюся плоскость кривой V_1 , а точка A_0 не принадлежит $(n-3)$ -мерной характеристической плоскости гиперповерхности V_{n-1}^1 , т.е. рассматривается общий случай гиперполосы $H_1 \subset P_n$.

Из уравнений (1.2) при фиксированных значениях главных параметров имеем:

$$\delta \ln a = 2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_n^n,$$

откуда следует, что можно положить $a=1$. После этой канонизации будем иметь

$$\begin{cases} \omega_1^n = \omega_0^1, \\ \omega_0^v - 2\omega_1^1 + \omega_n^n = a_1 \omega_0^1. \end{cases} \quad (1.5)$$

II. Оснащающие объекты

$$\{x_1\}, \{x_v\}, \{y^1\}, \{y^v\}, \{x, y^1, y^v\}, \{y, x_1, x_v\} \quad (2.1)$$

определяют инвариантные реперы гиперполосы $H_1 \subset P_n$ элементы которых следующим образом выражаются через элементы исходных реперов (точечного и тангенциального):

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0, & \eta^0 &= \alpha^0 - x_1 \alpha^1 - x_v \alpha^v + y \alpha^n, \\ M_1 &= A_1 + x_1 A_0, & \eta^1 &= \alpha^1 + y^1 \alpha^n, \\ M_v &= A_v + x_v A_0, & \eta^v &= \alpha^v + y^v \alpha^n, \\ M_n &= A_n - y^v A_v - y^1 A_1 + x A_0; & \eta^n &= \alpha^n \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения на компоненты геометрических объектов (2.1) имеют вид:

$$V_\delta x_v = -x_v \pi_v^0 - \pi_v^0, \quad (2.2)$$

$$V_\delta y^v = y^v \pi_n^v + \pi_n^v, \quad (2.3)$$

$$\delta x_1 = x_1 (\pi_1^1 - \pi_0^0) - \pi_1^1, \quad (2.4)$$

$$\delta y^1 = y^1 (\pi_1^1 - \pi_0^0) + \pi_n^1, \quad (2.5)$$

$$\delta x = x (\pi_n^n - \pi_0^0) + y^v \pi_v^n + y^1 \pi_1^n - \pi_n^n, \quad (2.6)$$

$$\delta y = y (\pi_n^n - \pi_0^0) - x_v \pi_n^v - x_1 \pi_n^1 + \pi_n^n, \quad (2.7)$$

причем
$$x + y + x_1 y^1 + x_v y^v = 0. \quad (2.8)$$

Сравним уравнения (1.3), (1.4) при фиксированных главных параметрах с уравнениями (2.2), (2.3), получим, что

$$x_v = -\lambda_v,$$

$$y^v = -\lambda^v.$$

Теорема 1. Двойственные друг другу плоскости $E_{n-3} = [M_v] = [A_v - \lambda_v A_0]$ и $E_2 = [\eta^v] = [\alpha^v - \lambda^v \alpha^n]$ внутренним инвариантным образом присоединены к одномерной регулярной гиперполосе $H_1 \subset P_n$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка ее образующего элемента.

Продолжая уравнения (1.3) и (1.4) и фиксируя главные параметры, получим, что

$$\begin{aligned} V_\delta \ell^v &= \ell^v (2\pi_n^n - \pi_1^1), \\ V_\delta \ell_v &= \ell_v (\pi_1^1 - 2\pi_0^0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.9) показывают, что величины ℓ^v, ℓ_v являются тензорами 3-го порядка гиперполосы $H_1 \subset P_n$.

Положим

$$\ell = \ell_v \ell^v. \quad (2.10)$$

В силу (2.9), имеем:

$$\delta \ell = 2\ell (\pi_n^n - \pi_0^0). \quad (2.11)$$

Будем рассматривать такие гиперполосы, для которых $\ell \neq 0$, тогда из уравнения (2.11) следует, что

$$d \ln \sqrt{\ell} = \omega_n^n - \omega_0^0 + \beta \omega_0^1,$$

где

$$\delta \beta = \beta (\pi_1^1 - \pi_0^0) - \pi_1^1 - \pi_n^1. \quad (2.12)$$

Продолжая уравнение (1.5), находим:

$$d a_1 + a_1 (\omega_0^0 - \omega_1^1) + 3\omega_1^0 - 3\omega_n^1 = a_{11} \omega_0^1.$$

Из этого уравнения следует, что величина $a_2 = \frac{1}{3} a_1$ удовлетворяет уравнению:

$$\delta a_2 = a_2 (\pi_1^1 - \pi_0^0) - \pi_1^1 + \pi_n^1. \quad (2.13)$$

Введем в рассмотрение функции:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} (\beta + a_2); \quad (2.14)$$

$$\lambda^1 = \frac{1}{2} (\beta - a_2),$$

которые в силу (2.12), (2.13) удовлетворяют уравнениям:

$$\delta \lambda_1 = -\lambda_1 (\pi_0^0 - \pi_1^1) + \pi_1^1, \quad (2.15)$$

$$\delta \lambda^1 = -\lambda^1 (\pi_0^0 - \pi_1^1) - \pi_n^1.$$

Сравнивая уравнение (2.15) с уравнениями (2.4), (2.5), получим $x_1 = -\lambda_1, y^1 = -\lambda^1$.

Теорема 2. Точка $M_1 = A_1 - \lambda_1 A_0$ и гиперплоскость $\eta^1 = \alpha^1 - \lambda^1 \alpha^n$ внутренним инвариантным образом присоединены к регулярной гиперполосе $H_1 \subset P_n$ в дифференциальной окрестности 4-го порядка ее образующего элемента.

Из уравнения (2.13) получим:

$$da_2 = a_2(\omega_1^1 - \omega_0^0) - \omega_1^0 + \omega_n^1 + a_3\omega_0^1, \quad (2.16)$$

$$d a_2 = a_2(\omega_n^1 - \omega_1^1) - \omega_1^0 + \omega_n^1 - a_3^* \omega_0^1, \quad (2.17)$$

где

$$\delta a_3 = 2a_3(\pi_1^1 - \pi_0^0) + 2a_2(2\pi_n^1 - \pi_1^1) - (\lambda^v \pi_v^0 + \lambda_v \pi_n^v + 2\pi_n^0), \quad (2.18)$$

$$\delta a_3^* = 2a_3^*(\pi_n^1 - \pi_1^1) + 2a_2(\pi_n^1 - 2\pi_1^1) - (\lambda^v \pi_v^0 + \lambda_v \pi_n^v + 2\pi_n^0). \quad (2.19)$$

Функции $T = a_3 - (a_2)^2$, $\bar{T} = a_3^* - (a_2)^2$ удовлетворяют уравнениям

$$\delta T = T(\pi_n^1 - \pi_0^0) - \lambda^v \pi_v^0 - \lambda_v \pi_n^v - 2\pi_n^0 + 2a_2 \pi_n^1, \quad (2.20)$$

$$\delta \bar{T} = \bar{T}(\pi_n^1 - \pi_0^0) + \lambda^v \pi_v^0 + \lambda_v \pi_n^v + 2\pi_n^0 - 2a_2 \pi_n^1, \quad (2.21)$$

а функции $\bar{X} = \frac{1}{2}(T - \lambda_v \lambda^v + \lambda^1 \lambda^1) + \lambda^1 a_2$; $\bar{Y} = \frac{1}{2}(\bar{T} - \lambda_v \lambda^v + \lambda_1 \lambda_1) + \lambda_1 a_2$ удовлетворяют соответственно уравнениям (2.6), (2.7).

Точка $\bar{M}_n^* = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 + \bar{X} A_0$ и гиперплоскость

$\bar{\eta}^0 = \alpha^0 + \lambda_1 \alpha^1 + \lambda_v \alpha^v + \bar{Y} \alpha^n$ внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности 4-го порядка образующего элемента гиперполосы $H_1 \subset P_n$, но при этом не выполняется условие инцидентности, т.е. $(\bar{M}_n^*, \bar{\eta}^0) \neq 0$. Однако можно выделить на прямой $[M_n, \bar{M}_n^*]$ инвариантную точку

$M_n^* = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 - (\bar{Y} + \lambda_v \lambda^v + \lambda_1 \lambda^1) A_0$, внутренним инвариантным образом присоединенную к гиперполосе $H_1 \subset P_n$ и инцидентную гиперплоскости η^0 . Или в пучке гиперплоскостей $[\bar{\eta}^0, \eta^0]$ можно выделить внутреннюю инвариантную гиперплоскость $\tau^0 = \alpha^0 + \lambda_1 \alpha^1 + \lambda_v \alpha^v - (\bar{X} + \lambda_v \lambda^v + \lambda_1 \lambda^1) \alpha^n$, инцидентную точке \bar{M}_n^* .

Проведем более общее построение.

Величины $\lambda^0 = \frac{1}{t_1 + t_2}(t_1 \bar{X} + t_2 \bar{X})$, $\lambda_n = \frac{1}{t_1 + t_2}(t_1 \bar{Y} + t_2 \bar{Y})$, где $\bar{X} = -(\bar{Y} + \lambda_v \lambda^v + \lambda_1 \lambda^1)$, $\bar{Y} = -(\bar{X} + \lambda_v \lambda^v + \lambda_1 \lambda^1)$, t_1, t_2 — любые действительные числа ($t_1 + t_2 \neq 0$), удовлетворяют уравнениям (2.6), (2.7) и условию инцидентности (2.8).

Следовательно, точка $M_n = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 + \lambda^0 A_0$ и гиперплоскость $\eta^0 = \alpha^0 + \lambda_1 \alpha^1 + \lambda_v \alpha^v + \lambda_n \alpha^n$ внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе $H_1 \subset P_n$ в окрестности 4-го порядка ее образующего элемента и

удовлетворяют условию инцидентности (2.8). Построенные таким образом точечный и тангенциальный реперы имеют вид:

$$M_0 = A_0, \quad \eta^0 = \alpha^0 + \lambda_1 \alpha^1 + \lambda_v \alpha^v + \lambda_n \alpha^n,$$

$$M_1 = A_1 - \lambda_1 A_0, \quad \eta^1 = \alpha^1 - \lambda^1 \alpha^n;$$

$$M_v = A_v - \lambda_v A_0, \quad \eta^v = \alpha^v - \lambda^v \alpha^n,$$

$$M_n = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^1 A_1 + \lambda^0 A_0; \quad \eta^n = \alpha^n.$$

Теорема 3. При $\bar{\epsilon} \neq 0$ внутренний инвариантный репер гиперполосы $H_1 \subset P_n$ (в двух двойственных формах) определяется окрестностью 4-го порядка ее образующего элемента.

Геометрическая характеристика построенного репера аналогична геометрической характеристике репера, построенного в работе [1].

III. Точку M плоскости E_{n-2} назовем фокальной, если точка M принадлежит и некоторой смежной образующей гиперповерхности V_{n-1}^1 . Множество всех фокальных точек назовем фокальной поверхностью F плоской образующей E_{n-2} гиперповерхности V_{n-1}^1 .

Для гиперполосы $H_1 \subset P_n$ фокальная поверхность F совпадает с плоскостью $E_{n-3} = [M_v]$.

Центральным оснащением гиперполосы $H_1 [2]$ назовем такое оснащение, когда все нормали 1-го рода N_{n-1} пересекаются в одной точке K_n . Эта точка определена следующим образом:

$$K_n = T_n A_0 + \lambda^v A_v + A_n, \quad T_n = T + \lambda_n.$$

Под осевым оснащением гиперполосы $H_1 \subset P_n [2]$ будем понимать такое оснащение, когда все нормали 1-го рода M_{n-1} содержат неподвижную плоскость Π_{n-2} . Плоскость Π_{n-2} натянута на плоскость $\Pi_{n-3}(A_0)$ и точку

$$K(t) = A_n + \lambda^v A_v + (\lambda^1 + t \bar{\lambda}) A_1 + \lambda^0 A_0,$$

где $\bar{\lambda}^2 = a_3 + a_3^* - 3(a_2)^2$.

Таким образом, имеем связку нормалей Γ -го рода $N_{n-1}(t)$ с вершиной в соответствующей параметру t характеристике $E_{n-2}(t)$ гиперполосы $H_1 \subset P_n$. Если $t=0$, то $K \equiv M_n$.

Список литературы

1. В а с и л я н М.А. О проективно-дифференциальной геометрии однопараметрических гиперполос. В сб.: Дифференциальная геометрия, Калинин, 1977, с.38-45.

2. П о п о в Ю.И. Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства. — Уч. зап. Моск. заочн. пед. ин-та, 1971, 30, с.386-396.

3. Ч а к м а з я н С.М. Двойственная нормализация. ДАН Арм.ССР, 1959, 28, №4, с.151-157.

Семинар по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 21 мая 1980 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 22 октября 1980 г. по 20 мая 1981 г.

22.10.1980г. Ю.И. П о п о в. Аффинные связности двухсоставного гиперполостного распределения.

29.10.1980г. Е.В. С к р и д л о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные квадратикой и точкой.

5.11.1980г. В.В. М а х о р к и н. Некоторые свойства фокальных многообразий.

12.11.1980г. Е.А. Х л я п о в а. Некоторые свойства цилиндрических конгруэнций.

19.11.1980г. Л.Г. К о р с а к о в а. Пара конгруэнций коник, инцидентных одномерному многообразию квадратик.

26.11.1980г. Ю.И. Ш е в ч е н к о. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.

3.12.1980г. М.В. К р е т о в. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадратик в аффинном пространстве.

10.12.1980г. Б.А. А н д р е е в. Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур.

17.12.1980г. Т.П. Ф у н т и к о в а. Конгруэнции, образованные эллипсом и прямой.

24.12.1980г. Е.П. С о п и н а. О полях геометрических объектов на многообразии V_{n-1} .

11.02.1981г. Е.А.М и т р о ф а н о в а. Группа преобразований $A_{n-1}(n)$.

18.02.1981г. В.П.Ц а п е н к о. Конгруэнции оснащенных гиперквадрик в p -мерном проективном пространстве.

25.02.1981г. В.Н.Х у д е н к о. Многообразия коник в R_4 .

4.03.1981г. Н.М.О с т и а н у (г.Москва). Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.

11.03.1981г. М.Ф.К о с а р е н к о. Регулярные гиперполосы в многомерных неевклидовых пространствах.

18.03.1981г. С.В.К и ш т а н о в а. Конгруэнции квадрик с вырождающейся фокальной поверхностью.

25.03.1981г. В.С.М а л а х о в с к и й. Об одной классификации подгрупп группы Ли.

1.04.1981г. Г.Л.С в е ш н и к о в а. Конгруэнции коник с вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

8.04.1981г. Л.А.В е р б и ц к а я. Конгруэнции парабол в эквивалентном пространстве.

15.04.1981г. Н.М.Ш е й д о р о в а. Одномерные регулярные гиперполосы проективного пространства.

22.04.1981г. Т.Ю.С у в о р о в а. Аффинное двух-составное гиперполостное распределение.

29.04.1981г. Л.И.У д а л о в а. Аффинное гиперполостное распределение.

13.05.1981г. Ю.Г.Л у м и с т е (г.Тарту). Связности на главных расслоениях.

20.05.1981г. С.В.М а л а х о в с к а я. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратными фокальными поверхностями.

УДК 514.75.

Об одном классе поверхностей, несущих ∇ -сопряженную сеть. А б р а м о в А.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с.5-8.

Изучаются поверхности евклидова пространства E_n , несущие ∇ -сопряженную сеть, векторы вынужденных кривизн которой, кроме одного, равны нулю.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Два класса комплекса коник в аффинном пространстве. А м и ш е в а Н.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с.9-15.

Рассматриваются два частных класса комплексов коник в трехмерном аффинном пространстве, когда имеет место вырождение основных прямых.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Некоторые типы 2-скоростей в пространстве с фундаментальной группой. А н д р е е в Б.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с.16-20.

Исследованы специальные типы элементов 2-го касательного расслоения проективного пространства и пространства нуль-пар.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

О вырожденных конгруэнциях, порожденных квадрикой и плоскостью. Б у х а р и н а Е.В., С к р ы д л о в а Е.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с.21-26.

В трехмерном проективном пространстве рассмотрен частный класс вырожденных конгруэнций, порожденных квадрикой, описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью, описывающей двухпараметрическое семейство.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Мера множества гиперплоскостей в E_n . Г р и г о р ь в а И.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с.27-29.

Изучается мера множества гиперплоскостей в E_n , инвариантная относительно группы движения. Получено выражение этой меры через геометрические характеристики неголономного образа, а также дивергентный вид получаемой при этом гауссовой кривизны.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Геометрия сетей Σ_n^{n-1} в пространстве P_n . К и р е - в а С. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 30-33.

Рассмотрена геометрия гармонической плоскости $\Pi(A)$ корреляций K_p, K_q , связанные с асимптотической квадратикой к поверхности V_{n-1} и квадратикой Риччи.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

О конгруэнции пар коник, инцидентных одномерному многообразию квадратик К о р с а к о в а Л. Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 34-37.

В трехмерном проективном пространстве рассматривается невырожденная конгруэнция пар коник, не лежащих в одной плоскости и имеющих две общие точки, причем коники принадлежат квадратике, описывающей однопараметрическое многообразие.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Поля геометрических объектов регулярной гиперполосы $S_{n-2} \subset S_n$ К о с а р е н к о М. Ф. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 38-44.

С помощью основных полей фундаментальных геометрических объектов регулярной гиперполосы $S_{n-2} \subset S_n$ в окрестности третьего порядка присоединяются точечный и тангенциальный реперы.

Библиография: 8 названий.

УДК 514.75

Свойства связностей, порожденных комплексом центральных квадратик в аффинном пространстве. К р е т о в М. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 45-49.

Дается полная геометрическая характеристика компонента объекта связности, заданной в ассоциированном расслоении, заданной в ассоциированном расслоении, базой которого является комплекс центральных гиперквадрик в n -мерном аффинном пространстве.

Библиография: 9 названий.

УДК 514.75

R -сети в евклидовом пространстве E_n . К у з ь м и н Н. К. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 50-53.

В евклидовом пространстве E_n вводится понятие R -сети. Приводятся достаточные условия для того, чтобы ортогональная сеть была R -сетью.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

О специальном расслоении p -поверхности в евклидовом пространстве. Л о к о т к о в Н. Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 54-59.

Изучаются распределения на гладких поверхностях в p -мерном евклидовом пространстве.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Конгруэнции линейчатых квадратик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков. М а л а х о в с к а я С. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 60-64.

Доказано, что фокальная точка второго порядка линейчатой квадратик является ее четырехкратной фокальной точкой.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

О поверхностях постоянной средней кривизны. М и х а й л о в П. Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 65-70.

Выделены необходимые и достаточные условия постоянства средней кривизны поверхности. Дана сетевая характеристика поверхностей, отличных от поверхностей постоянной средней кривизны.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

К геометрии интегрируемых распределений в E_n . Н у р п е й с о в Е. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 71-75.

Рассмотрены некоторые геометрические свойства $(n-1)$ -распределения в евклидовом пространстве E_n .

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

О почти контактном погружении в многообразие почти контактной структуры. О б о л ь с к а я Е. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 76-80.

Получены условия, при которых подмногообразие M_n в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(V, \xi, \eta)$ является многообразием почти контактной структуры со структурными объектами $\{F, E_{n-1}, \eta\}$.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Об $N(\sigma)$ -антиинвариантных поверхностях в почти контактном многообразии. П о д а к о в Н. Д. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград,

1982, с. 81-86.

Введены понятия $M(\sigma)$ - антиинвариантного многообразия и $N(\sigma)$ - антиинвариантного распределения. Получены достаточные условия антиинвариантности.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

О скалярной кривизне поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве. С и л а в Е. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982 г., с. 87-90.

Получены неравенства, которым удовлетворяет скалярная кривизна поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Замечание о релятивной линейчатой геометрии. С о с о в Е. Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, с. 91-94.

Изучается геометрия множества ориентированных прямых аффинного пространства D_3 .

Библиография: 7 названий.

УДК 514.75

Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения. С т о л я р о в А. В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 95-102.

Строится проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения $H \subset R_{n,m}$ - мерных линейных элементов

Библиография: 11 названий.

УДК 514.75

Об одном классе двумерных многообразий коник в R_4 . Х у д е н к о В. Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 103-106.

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются двумерные многообразия коник, инцидентных стационарной гиперквадрике.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P, Q) . Ц а п е н к о В. П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 107-111.

Изучается фундаментально-групповая связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар состоящих из невырожденной гиперквадрики и неинцидентной ей точки.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Нормализация полосы. Ш е в ч е н к о Ю. И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 112-117.

В проективном пространстве рассматривается полоса, для которой вводится понятие нормализации, позволяющей задавать связность в ассоциированном главном расслоении.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

К теории одномерных регулярных гиперполос проективного пространства. Ш е й д о р о в а Н. М. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 13. Калининград, 1982, с. 118-124.

Доказано, что внутренний инвариантный репер (в двух двойственных формах) определяется окрестностью 4-го порядка образующего элемента гиперполосы $H \subset P_n$. Рассмотрены специальные виды оснащений гиперполосы.

Библиография: 3 названия.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ ФИГУР

Выпуск 13

Межвузовский сборник

Темплан 1982 года, поз. 568.

Редактор А. М. Соколова. Техн. редактор Н. Д. Шишкова.

Корректор В. В. Костина.

Подписано к печати 03.V 1982. КУ 01120. Формат $60 \times 90^{1/16}$. Сор. бу-
маги тип. № 1. Усл. печ. л. 8,25. Заказ 1151. Тираж 500 экз. Цена 1 руб.

Калининградский государственный университет,
236040, г. Калининград, ул. Университетская, 2.

Типография издательства «Калининградская правда»,
236000, г. Калининград, ул. Карла Маркса, 18.

1 руб.