Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2020/2021

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 24

Aufgaben

Aufgabe 24.1. Zeige, dass der Einheitskreis

$$S^1_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{R}[\mathrm{i}] \cong \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

isomorph zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 24.2. Charakterisiere die Restklassengruppe eines Gitters $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 24.3. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ vollständige Gitter. Zeige, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gibt, die einen Gruppenisomorphismus

$$\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

induziert.

Aufgabe 24.4. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ rationale vollständige Gitter. Zeige, dass es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$

gibt, die einen Gruppenisomorphismus

$$\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

induziert.

Aufgabe 24.5. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ rationale vollständige Gitter. Zeige, dass es ein rationales Gitter $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ gibt.

Aufgabe 24.6. Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3,4)$ und den Sprung $\pm(5,2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14,11),\ (13,15),\ (17,12),\ (15,19),\ (16,16) \text{ und } (12,20)\,.$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 24.7. Sind alle Vierecke konvex?

Aufgabe 24.8. Zeige, dass der Durchschnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist.

Aufgabe 24.9. Sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass ein Punkt $Q \in \mathbb{R}^n$ genau dann zur konvexen Hülle von U gehört, wenn es endlich viele Punkte $P_i \in U$, $i \in I$, und reelle Zahlen r_i, $i \in I$, mit $r_i \in [0,1]$, $\sum_{i \in I} r_i = 1$ und mit

$$Q = \sum_{i \in I} r_i P_i$$

gibt.

Aufgabe 24.10. Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 24.11. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 24.12. Es sei X ein Hausdorff-Raum, $Y \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $P \notin Y$ ein Punkt. Zeige, dass es offene disjunkte Mengen $U, V \subseteq X$ mit $Y \subseteq U$ und $P \in V$ gibt.

Aufgabe 24.13. Es sei X ein Hausdorff-Raum und seien $Y, Z \subseteq X$ kompakte Teilmengen, die zueinander disjunkt seien. Zeige, dass es offene disjunkte Mengen $U, V \subseteq X$ mit $Y \subseteq U$ und $Z \subseteq V$ gibt.

Aufgabe 24.14. Es sei X ein metrischer Raum und seien $Y, Z \subseteq X$ kompakte Teilmengen, die zueinander disjunkt seien. Zeige, dass es ein $d > 0$ derart gibt, dass für beliebige Punkte $P \in Y$ und $Q \in Z$ die Abstandsbedingung $d(P,Q) \geq d$ gilt.

Aufgabe 24.15. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass es Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ mit der Eigenschaft gibt, dass für beliebige Punkte $P \in X$ und $Q \in Y$ die Abschätzung

$$d(x,y) \leq d(P,Q)$$

gilt.

Tipp: Betrachte die Produktmenge $S \times T \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ und darauf die Abbildung $(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$. Argumentiere dann mit Satz 36.12 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)).

Aufgabe 24.16. Skizziere zum Gitter $\mathbb{Z}^2$ in $\mathbb{R}^2$ drei Teilmengen, die die Maßbedingung des Gitterpunksatzes von Minkowski erfüllen, die den Nullpunkt, aber keine weiteren Gitterpunkte enthalten, und die jeweils zwei der drei Bedingungen konvex, kompakt und zentralsymmetrisch erfüllen.

Abbildungsverzeichnis