Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1. Beweise Lemma 10.6.

Aufgabe 10.2. Es sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\, x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 10.3. Es sei G eine additiv geschriebene kommutative Gruppe. Zeige, dass die Negation, also die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\, x \longmapsto -x,$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 10.4.*

Es sei G eine kommutative Gruppe und

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass H ebenfalls kommutativ ist.

Aufgabe 10.5.*

Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z},\, q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

AUFGABE 10.6.*
Es sei R ein kommutativer Ring und $h \in R$. Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto hf,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Beschreibe das Bild und den Kern dieser Abbildung.

AUFGABE 10.7. a) Für welche reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +),\ x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus? b) Für welche reellen Polynome $Q \in \mathbb{R}[X]$ ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot),\ x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

AUFGABE 10.8. Es sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \ldots, d-1\}$$

mit der in Aufgabe 1.19 beschriebenen Addition. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z},\ r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Wir erinnern an den Begriff einer Matrix.

Es sei R ein kommutativer Ring. Unter einer $m \times n$- *Matrix* (über R) versteht man einen Ausdruck der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge a_{ij} aus R sind.

AUFGABE 10.9. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix über R. Zeige, dass die Matrix einen Gruppenhomomorphismus

$$R^n \longrightarrow R^m$$

definiert, indem man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

anwendet, wobei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 10.10. In einer Kekspackung befinden sich Schokokekse, Waffelröllchen, Mandelsterne und Nougatringe. Die Kalorien, der Vitamin C-Gehalt und der Anteil an linksdrehenden Fettsäuren werden durch folgende Tabelle (in geeigneten Maßeinheiten) wiedergegeben:

Sorte	Kalorien	Vitamin C	Fett
Schokokeks	10	5	3
Waffelröllchen	8	7	6
Mandelstern	7	3	1
Nougatring	12	0	5

a) Beschreibe mit einer Matrix die Abbildung, die zu einem Verzehrtupel (x, y, z, w) das Aufnahmetupel (K, V, F) berechnet.

b) Heinz isst 100 Schokokekse. Berechne seine Vitaminaufnahme.

c) Ludmilla isst 10 Nougatringe und 11 Waffelröllchen. Berechne ihre Gesamtaufnahme an Nährstoffen.

d) Peter isst 5 Mandelsterne mehr und 7 Schokokekse weniger als Fritz. Bestimme die Differenz ihrer Kalorienaufnahme.

Matrizen werden miteinander multipliziert, indem jede Zeile der linken Matrix mit jeder Spalte der rechten Matrix gemäß der Merkregel

$$(ZEILE)\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = ZS + EP + IA + LL + ET$$

multipliziert wird (insbesondere muss die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmen) und das Ergebnis an die entsprechende Stelle gesetzt wird.

Aufgabe 10.11. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.12. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K,\, ad - bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2-Matrizen. a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^{\times},\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 10.13. Es sei M eine endliche Menge und $T \subseteq M$ eine Teilmenge, und es seien $\operatorname{Perm}(T)$ und $\operatorname{Perm}(M)$ die zugehörigen Permutationsgruppen (also die Menge aller bijektiven Abbildungen auf M, siehe Aufgabe 1.5.) Zeige, dass durch

$$\Psi\colon \operatorname{Perm}(T) \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),\, \varphi \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ falls } x \in T, \\ x \text{ sonst,} \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus gegeben ist.

Aufgabe 10.14. Es sei G eine Gruppe und $h \in G$. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ g \longmapsto hgh^{-1},$$

eine Gruppenautomorphismus ist.

Die Automorphismen der vorstehenden Aufgabe nennt man auch *innere Automorphismen*.

Aufgabe 10.15. Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element und sei

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow G,\ h \longmapsto hg,$$

die Multiplikation mit g. Zeige, dass φ bijektiv ist, und dass φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn $g = e_G$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.16. (3 (1+2) Punkte)

Es seien $G_1, \ldots, G_n$ Gruppen. a) Definiere eine Gruppenstruktur auf dem Produkt

$$G_1 \times \cdots \times G_n\,.$$

b) Es sei H eine weitere Gruppe. Zeige, dass eine Abbildung

$$\varphi\colon\ H \longrightarrow G_1 \times \cdots \times G_n,\ x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn alle Komponenten φ_i Gruppenhomomorphismen sind.

Aufgabe 10.17. (4 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Die folgende Aufgabe knüpft an Aufgabe 1.20 an. Zu einer reellen Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 10.18. (3 Punkte)

Wir betrachten

$$M \ = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < 1\}$$

mit der in Aufgabe 1.17 definierten Verknüpfung, die nach Aufgabe 1.20 eine Gruppe ist. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow M,\ q \longmapsto q - \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 10.19. (2 Punkte)

Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times,\ z \longmapsto z^n.$$

Aufgabe 10.20. (1 Punkt)

Zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\ (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann irrational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.

Abbildungsverzeichnis