MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. Felix Klein
zu Göttingen.

Prof. Walther Dyck
zu München.

Prof. Adolph Mayer
zu Leipzig.

XXXIII. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1889.

41191

Inhalt des dreiunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Zweiter Theil*).

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg.

Der vorliegende Theil meiner Untersuchungen über die Zusammensetzung der Transformationsgruppen behandelt die wichtige Frage nach der Bildung der einfachen Gruppen, d. h. derjenigen, welche keine invarianten Untergruppen besitzen. Nach dieser Richtung hin kommt der vorliegende Theil, wie ich glaube, zu einem vollständigen Abschluss, und schon aus diesem Grunde, vor Allem aber bei der hohen Bedeutung der einfachen Gruppen für die ganze Theorie, glaubte ich die folgenden Untersuchungen gesondert veröffentlichen zu dürfen. Andererseits habe ich bereits in § 12 ein allgemeineres Problem aufgestellt und dessen Lösung in etwas vorbereitet. Es wird also die nächste Aufgabe sein, in einer folgenden Mittheilung dieses Problem in engem Anschluss an die hier gefundenen Resultate vollständig zu lösen.

Den Grundgedanken, auf dem die in diesem Theile durchgeführten Untersuchungen ruhen, habe ich bereits in den Vorbemerkungen zu meiner ersten Mittheilung angegeben. Ich möchte aber die vorliegende Untersuchung auch denen leicht verständlich machen, welche den ersten Theil nicht gelesen haben. Daher habe ich die Beweise von den früher gefundenen Resultaten im Ganzen unabhängig gemacht. Nur einmal in § 10 benutze ich einen in § 9 bewiesenen Lehrsatz und in § 16 verweise ich auf Betrachtungen, welche in § 8 durchgeführt sind; hierdurch wird aber das Verständniss selbst nicht beeinträchtigt. Um dasselbe noch mehr zu erleichtern, mögen einige weitere Bemerkungen gestattet sein.

*) Vergl. den unter gleichem Titel erschienenen Aufsatz in Bd. 31 dieser Annalen, p. 252 ff.

Wir bestimmen die Gruppe durch r infinitesimale Transformationen, welche symbolisch mit $X_1 f \dots X_r f$ bezeichnet werden. Bildet man nach bekannter Vorschrift $(X_\iota X_\varkappa)$, so muss sein:

$$(X_\iota X_\varkappa) = \sum^\varrho c_{\iota\varkappa\varrho} X_\varrho f,$$

und es müssen die Jacobi'schen Relationen bestehen:

$$\sum^\varrho \left\{ c_{\varkappa\lambda\varrho}(X_\varrho X_\iota) + c_{\lambda\iota\varrho}(X_\varrho X_\varkappa) + c_{\iota\varkappa\varrho}(X_\varrho X_\lambda) \right\} = 0,$$

von denen die vorstehende kurz mit $(\iota\varkappa\lambda)$ bezeichnet werden soll.

Wenn bei Beschränkung von ι, $\varkappa$ auf die ersten $m (< r)$ Marken $1 \dots m$ sich die $\frac{m(m-1)}{2}$ Ausdrücke $(X_\iota X_\varkappa)$ durch $X_1 f \dots X_m f$ darstellen lassen, so bestimmen $X_1 f \dots X_m f$ eine *Untergruppe* der gegebenen r-gliedrigen Gruppe. Diese ist *invariant*, wenn für $\iota = 1 \dots m$, $\varrho = 1 \dots r$ sich auch alle $(X_\iota X_\varrho)$ durch $X_1 f \dots X_m f$ darstellen lassen. Wie diese Begriffe allgemein definirt werden, braucht wohl nicht erwähnt zu werden.

Meine Untersuchungen über die Zusammensetzung der Gruppen gehen von dem Problem aus, die zweigliedrigen Untergruppen zu finden, denen eine beliebig gewählte eingliedrige Untergruppe $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ angehört. Sollen die Transformationen dieser Untergruppe nicht mit einander vertauschbar sein, so müssen sich $r+1$ Grössen $\omega, \zeta_1 \dots \zeta_r$ so bestimmen lassen, dass ist:

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum \zeta_\iota X_\iota\right) = \sum_{\iota\varkappa\varrho} \eta_\iota \zeta_\varkappa c_{\iota\varkappa\varrho} X_\varrho f = \omega \sum^\varrho \zeta_\varrho X_\varrho f.$$

Um daher alle zweigliedrigen Untergruppen zu finden, denen $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ angehört, hat man zunächst ω vermittelst der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_\iota c_{\iota 1 1} - \omega & \sum \eta_\iota c_{\iota 2 1} & \cdots & \sum \eta_\iota c_{\iota r 1} \\ \sum \eta_\iota c_{\iota 1 2} & \sum \eta_\iota c_{\iota 2 2} - \omega & \cdots & \sum \eta_\iota c_{\iota r 2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum \eta_\iota c_{\iota 1 r} & \sum \eta_\iota c_{\iota 2 r} & \cdots & \sum \eta_\iota c_{\iota r r} - \omega \end{vmatrix}$$
$$= \omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) - \cdots \pm \omega \psi_{r-1}(\eta) = 0$$

zu berechnen und alsdann die zu jedem ω gehörigen Verhältnisse $\zeta_1 : \zeta_2 : \cdots : \zeta_r$ in bekannter Weise zu bestimmen. Die Functionen $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta) \dots \psi_{r-1}(\eta)$ sind im Allgemeinen nicht von einander unabhängig; die kleinste Zahl derjenigen Functionen, durch welche sich alle darstellen lassen, bezeichne ich mit l und nenne diese Zahl den *Rang* der Gruppe. Der vorstehenden Gleichung selbst lege ich den Namen: charakteristische Gleichung bei.

Die vorliegende Arbeit geht von den Bedingungen aus, welche erfüllt sein müssen, wenn die letzten k Coefficienten dieser Gleichung, also $\psi_{r-1}(\eta)\ldots\psi_{r-k+1}(\eta)$ gleich Null sind, ohne dass $\psi_{r-k}(\eta)$ verschwindet. Durch eine etwas umständliche Betrachtung gelange ich zu dem Resultate, dass wenn $\psi_{r-1}(\eta)\ldots\psi_{r-k+1}(\eta)$ identisch verschwinden und zugleich keine Transformation der Gruppe mit allen andern Transformationen vertauschbar ist (die Gruppe also, um einen Ausdruck des Herrn Lie zu benutzen, keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt), auch immer alle Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}| = \left|\sum_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}\,\eta_\varrho\right|$ identisch verschwinden.

Indem wir den Fall einer ausgezeichneten Untergruppe ausschliessen und die weitere Annahme hinzufügen, dass die nicht verschwindenden Wurzeln für eine ganz allgemeine Transformation sämmtlich von einander verschieden sind, wird der Rang l der Gruppe $= k$ und alle Wurzeln der Gleichung lassen sich durch l unter ihnen homogen und linear ausdrücken, wo die Coefficienten rationale Zahlen sind. Für je zwei derjenigen Wurzeln, durch welche sich alle ausdrücken lassen, etwa ω_ι und $\omega_\varkappa$, giebt es zwei ganze Zahlen $a_{\iota\varkappa}$ und $a_{\varkappa\iota}$, welche einen gewissen Zusammenhang zwischen jenen Wurzeln bestimmen. Wir erwähnen hier nur, dass mit ω_ι und $\omega_\varkappa$ auch $\omega_\iota + a_{\iota\varkappa}\omega_\varkappa$ und $\omega_\varkappa + a_{\varkappa\iota}\omega_\iota$, sowie für jedes ganzzahlige, zwischen 0 und $a_{\iota\varkappa}$ gelegene $\mathfrak{a}$ auch $\omega_\iota + \mathfrak{a}\omega_\varkappa$ eine Wurzel sein muss. Die Coefficienten $a_{\iota\iota}$ sind sämmtlich gleich -2; die übrigen können aber keineswegs beliebig gewählt werden; vielmehr müssen für dieselben recht viele Bedingungsgleichungen bestehen. Eine Reihe von diesen ergiebt sich aus den Bedingungen dafür, dass eine mit den Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ gegebene homogene lineare Transformation durch eine endliche Zahl von Wiederholungen in die identische Transformation übergeht. Jedes System dieser Coefficienten ist entweder einfach oder zerfällt in einfache Systeme. Diese beiden Fälle werden in folgender Weise unterschieden: man geht von einer beliebigen Marke ι aus, nimmt alle Marken $\varkappa$ hinzu, für welche $a_{\iota\varkappa}$ nicht verschwindet, fügt hierzu alle Marken λ, für welche ein $a_{\varkappa\lambda}$ nicht verschwindet, und fährt damit so lange fort, als man auf diesem Wege noch zu neuen Marken gelangt; dann heisst das System einfach, wenn diese Operation zu allen Marken $1\ldots l$ führt. Es ist nicht schwer, die einfachen Systeme zu bestimmen. Diejenigen Wurzeln, welche durch ein einfaches System gefordert werden, führen auf eine einfache Gruppe, und umgekehrt lassen sich alle Wurzeln bei einer einfachen Gruppe als durch ein einfaches System bestimmt ansehen. Man gelangt also auf dem angedeuteten Wege zu den einfachen Gruppen. Für jedes l ergeben sich vier Formen, zu denen für $l = 2, 4, 6, 7, 8$ noch specielle einfache Gruppen treten.

Von diesen speciellen Gruppen habe ich mehrere nicht in vollständig entwickelter Form angegeben; ich hoffe, dass es mir später möglich sein wird, diese Gruppen in einfacherer Weise darzustellen, und deshalb mochte ich die bis jetzt gefundenen Darstellungen nicht mittheilen.

§ 10.

Die charakteristische Gleichung hat mehrere verschwindende Wurzeln.

Die in den letzten drei Paragraphen zu Grunde gelegten Voraussetzungen konnten deshalb unbedenklich zur Grundlage einer Untersuchung gemacht werden, weil sie sich in allbekannten Gruppen verwirklicht finden. Auch trug sowohl die Voraussetzung, dass die Gleichung

$$(1) \qquad \omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) + \cdots \pm \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0$$

nur eine einzige verschwindende Wurzel besitzt, wie die Annahme, dass alle ihre Wurzeln verschwinden, durch ihre Einfachheit den Charakter der Erlaubtheit offenbar an sich. Wir wollen jetzt die Annahme machen, dass die Gleichung eine k-fache verschwindende Wurzel besitzt, und haben dabei, ehe wir diese Annahme weiter verfolgen, die Frage zu beantworten, ob in diesem Falle auch die Unterdeterminanten von $\left|\sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}\right|$ oder $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ bis zu einem gewissen Grade verschwinden oder nicht.

Zu dem Ende beweisen wir einen Satz noch einmal, den wir bereits in § 5 hergeleitet haben, nämlich den Satz:

Wenn eine inf. Transformation die eingliedrige Hauptuntergruppe einer der Gruppe angehörigen zweigliedrigen Untergruppe ist, so hat für dieselbe die charakteristische Gleichung nur verschwindende Wurzeln.

Diese Transformation sei $X_r f$ und die zweigliedrige Untergruppe, deren Haupttransformation sie ist, sei $\eta_r X_r f + \eta_{r-1} X_{r-1} f$, so dass ist:

$$(X_r X_{r-1}) = \varepsilon X_r f,$$

wo ε nicht verschwinden darf. Wir wollen also jetzt beweisen, dass die Gleichung (1) für $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{r-1} = 0$, $\eta_r = 1$ nur verschwindende Wurzeln hat. Angenommen zunächst, die Gleichnng hätte eine einfache nicht verschwindende Wurzel ω. Dann kann man $X_1 \ldots X_{r-2}$ so wählen, dass

$$(X_r X_1) = \omega X_1 f$$

wird und dass in den Ausdrücken für $(X_r X_2) \ldots (X_r X_{r-2})$ die $X_1 f$ nicht vorkommt. Bestimmt man nun in der Jacobi'schen Relation für $(1, r, r-1)$ den Coefficienten von $X_1 f$, so folgt $\omega\varepsilon = 0$, was unserer Annahme widerstreitet.

Ebensowenig ist eine mehrfache nicht verschwindende Wurzel möglich. Es sei nämlich ω eine m-fache Wurzel; dann kann man $X_1 f$, $X_2 f \dots X_{r-2} f$ so wählen, dass $(X_r X_1)$, $(X_r X_2) \dots (X_r X_m)$ sich nur durch $X_1 f \dots X_m f$ ausdrücken lassen und in $(X_r X_{m+1}) \dots (X_r X_{r-2})$ die $X_1 f \dots X_m f$ nicht vorkommen. Bezeichnet man mit $\varkappa$ eine der Nummern $1 \dots m$ und bestimmt in der Relation $(r, r-1, \varkappa)$ den Coefficienten von $X_\varkappa f$, so folgt:

$$\sum_1^m {}^\varrho (c_{r-1,\varkappa\varrho} c_{r\varrho\varkappa} - c_{r-1,\varrho\varkappa} c_{r\varkappa\varrho}) = \omega\varepsilon.$$

Hier liefert die Summation nach $\varkappa$ über die Nummern $1 \dots m$ die Gleichung:

$$0 = m\omega\varepsilon,$$

was mit unserer Annahme unvereinbar ist.

Hieraus leiten wir folgenden Satz her:

Wenn für ein Werthsystem $(\eta_1 \dots \eta_r)$ *die charakteristische Gleichung eine k-fache verschwindende Wurzel hat und wenn* $1 < k < r$ *ist, so verschwinden für dasselbe Werthsystem auch alle Unterdeterminanten* $r - 1^{\text{ten}}$ *Grades der Determinante* $|\gamma_{\iota\varkappa}|$.

Verschwänden nämlich die Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades nicht sämmtlich, so könnte man ein System $(\zeta_1 \dots \zeta_r)$ derartig bestimmen, dass bei nicht verschwindendem ε die Gleichung bestände:

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum \zeta_\iota X_\iota\right) = \varepsilon \sum \eta_\iota X_\iota f.$$

Somit wäre $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ die Haupttransformation einer zweigliedrigen Untergruppe, und die Gleichung (1) hätte für $(\eta_1 \dots \eta_r)$ lauter verschwindende Wurzeln (c. h.).

Es sei jetzt für $(00 \dots 01)$ $\omega = 0$ eine k-fache Wurzel und es mögen nur die Unterdeterminanten $r - i + 1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ sämmtlich verschwinden, wo $i < k$ sein soll, so dass ist:

$$(X_r X_{r-1}) = 0, \ \cdots, \ (X_r X_{r-i+1}) = 0.$$

Um die folgende Entwicklung leichter darstellen zu können, möge es gestattet sein, eine homogene lineare Function dadurch zu bezeichnen, dass man deren Veränderliche in eine eckige Klammer einschliesst. Dann lassen sich die $X_{r-i} f \dots X_{r-k+1} f$ so bestimmen, dass ist:

$$\begin{aligned}
(X_r X_{r-i}) &= [X_r X_{r-1} \cdots X_{r-i+1}],\\
(X_r X_{r-i-1}) &= [X_r X_{r-1} \cdots X_{r-i+1} X_{r-i}],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(X_r X_{r-k+1}) &= [X_r X_{r-1} \cdots X_{r-k+2}].
\end{aligned}$$

Endlich kann man die $X_1 f \ldots X_{r-k} f$ so wählen, dass für $\alpha, \beta = 1 \cdots r-k$ die Gleichungen bestehen:

$$(X_r X_\alpha) = \sum^\beta e_{\alpha\beta} X_\beta,$$

wo die Determinante $|e_{\alpha\beta}|$ nicht verschwindet.

Wie α, β Nummern der Reihe $1 \ldots r-k$, sollen $\varkappa, \lambda$ solche der Reihe $1 \ldots i-1$ darstellen. Jetzt folgt aus $(r, r-\varkappa, r-\lambda)$:

$$\big(X_r(X_{r-\varkappa} X_{r-\lambda})\big) = 0,$$

oder da X_r nur mit $X_r, X_{r-1} \ldots X_{r-i+1}$ vertauschbar ist:

(2) $$(X_{r-\varkappa} X_{r-\lambda}) = [X_r X_{r-1} \ldots X_{r-i+1}].$$

Somit bestimmen $X_r, X_{r-1} \ldots X_{r-i+1}$ eine Untergruppe der gegebenen Gruppe.

Die Relation $(r, r-\lambda, \alpha)$ liefert die Gleichung:

$$\big(X_r(X_{r-\lambda} X_\alpha)\big) = \sum^\beta e_{\alpha\beta}(X_{r-\lambda} X_\beta).$$

Hätte $(X_{r-\lambda} X_\beta)$ ein Glied $m_\beta X_{r-k+1}$, so müsste da links X_{r-k+1} nicht vorkommt, $\sum e_{\alpha\beta} m_\beta = 0$ sein für $\alpha = 1 \ldots r-k$ oder $|e_{\alpha\beta}| = 0$. Somit kann X_{r-k+1} in $(X_{r-\lambda} X_\beta)$ nicht vorkommen. Nunmehr schliesst man der Reihe nach geradeso, dass $(X_{r-\lambda} X_\beta)$ auch von $X_{r-k+2} \ldots X_{r-i}$ frei ist und daraus folgt endlich, dass auch $X_{r-i+1} \ldots X_r$ in $(X_{r-\lambda} X_\beta)$ fehlen. Somit ergiebt sich:

(3) $$(X_{r-\lambda} X_\alpha) = [X_1 \ldots X_{r-k}],$$

wo λ eine der Nummern $1 \ldots i-1$ und α eine der Nummern $1 \ldots r-k$ sein soll, und wo die eckige Klammer eine homogene lineare Function der eingeschlossenen Grössen darstellt.

Jetzt bilde man die Jacobi'sche Relation für $(r, r-\lambda, r-i)$; diese hat die Form:

$$\big(X_r, (X_{r-\lambda} X_{r-i})\big) = \big(X_{r-\lambda}[X_r \ldots X_{r-i+1}]\big),$$

welche infolge der Relation (2) liefert:

$$\big(X_r, (X_{r-\lambda} X_{r-i})\big) = [X_r \ldots X_{r-i+1}]$$

oder

(4) $$(X_{r-\lambda} X_{r-i}) = [X_r X_{r-1} \ldots X_{r-i}].$$

Ebenso folgt:

(5) $$\begin{cases} (X_{r-\lambda} X_{r-i-1}) = [X_r X_{r-1} \ldots X_{r-i-1}], \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_{r-\lambda} X_{r-k+1}) = [X_r X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}].^{*)} \end{cases}$$

*) Herr Engel, der die Freundlichkeit gehabt hat, eine Correctur der vorliegenden Arbeit zu lesen, macht mich darauf aufmerksam, dass die Formeln (4) und (5) nicht streng richtig seien, da sie auf der Voraussetzung beruhen, dass

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass $(X_{r-i} X_{r-i-1})$ durch X_r, $X_{r-1} \dots X_{r-i-1}$, X_{r-i-2} ausgedrückt werden kann. Nun seien $r-i-\nu$ und $r-i-\varrho$ zwei Nummern aus der Reihe $r-i \dots r-k+1$, und es sei bewiesen, dass die Ausdrücke für $(X_\sigma X_\tau)$ nur $X_r \dots X_{r-k+1}$ enthalten, wofern wenigstens eine der Marken σ und τ grösser ist als die grössere der Marken $r-i-\nu$ und $r-i-\varrho$ und die andere nicht kleiner ist als die kleinere. Dann folgt aus $(r, r-i-\nu, r-i-\varrho)$ oder aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}&\big(X_r(X_{r-i-\nu} X_{r-i-\varrho})\big)\\ &= \big(X_{r-i-\nu}[X_r \dots X_{r-i-\varrho+1}]\big) - \big(X_{r-i-\varrho}[X_r \dots X_{r-i-\nu+1}]\big),\end{aligned}$$

dass sich $(X_{r-i-\nu} X_{r-i-\varrho})$ durch $X_r \dots X_{r-k+1}$ darstellen lässt, oder dass bei Benutzung der eingeführten Abkürzung ist:

$$(X_{r-i-\nu} X_{r-i-\varrho}) = [X_r \dots X_{r-k+1}]. \tag{6}$$

Somit bestimmen die inf. Transformationen $X_r f$, $X_{r-1} f \dots X_{r-k+1} f$ eine k-gliedrige Untergruppe, und es folgt der Satz:

Hat für das System $(\eta_1 \dots \eta_r)$ die charakteristische Gleichung eine k-fache Wurzel gleich Null, so gehört die Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ einer k-gliedrigen Untergruppe an, in welcher ihr eine k-fache verschwindende Wurzel der charakteristischen Gleichung entspricht.

Wenn wir die so eben getroffene Wahl von $X_1 f \dots X_r f$ beibehalten, ist es nicht möglich, von Null verschiedene Coefficienten $\nu_1 \dots \nu_{r-k}$ so zu bestimmen, dass $(X_r, \nu_1 X_1 + \dots + \nu_{r-k} X_{r-k}) = 0$ ist. Lassen wir daher die Verhältnisse $\frac{\mu_1}{\mu_0}, \frac{\mu_2}{\mu_0} \dots \frac{\mu_{r-1}}{\mu_0}$ je eine ge-

---

in den obigen Ausdrücken für $(X_r X_{r-i-1}) \dots (X_r X_{r-k+1})$ das mit der nächst höhern Marke versehene X auch wirklich vorkomme, also in $[X_r X_{r-1} \dots X_{r-i+1}, X_{r-i}]$ das $X_{r-i}, \dots$ in $[X_r X_{r-1} \dots X_{r-k+2}]$ das X_{r-k+2}; indessen genüge es für den vorliegenden Zweck, die linken Seiten von (4) und (5) durch $[X_r X_{r-1} \dots X_{r-k+1}]$ zu ersetzen, und hierfür ergebe sich der Beweis unmittelbar. Beide Bemerkungen sind richtig; gleichwohl möchte ich die Formeln (4) und (5) nicht ganz entbehren, da sie in manchen Fällen gebraucht werden können. Zu dem Ende bringe ich folgende Correctur an: Es sei X_r mit $X_{r-1} \dots X_{r-i+1}$ vertauschbar, dann lassen sich $X_{r-i} \dots X_{r-k+1}$ so wählen, dass erstens $(X_r X_{r-i}) \dots (X_r X_{r-i'})$ unabhängige lineare Functionen von $X_r \dots X_{r-i+1}$ werden, dass zweitens $(X_r X_{r-i'-1}) \dots (X_r X_{r-i''})$ nur die $X_r \dots X_{r-i+1}$, $X_{r-i} \dots X_{r-i'}$ enthalten und insbesondere unabhängige Functionen von $X_{r-i} \dots X_{r-i'}$ sind, dass drittens $(X_r X_{r-i''-1}) \dots (X_r X_{r-i'''})$ nur die $X_r \dots X_{r-i} \dots X_{r-i'} \dots X_{r-i''}$ enthalten und unabhängige Functionen von $X_{r-i'-1} \dots X_{r-i''}$ sind u. s. w. Dann enthält wie die vorstehende Betrachtung zeigt jedes $(X_{r-\lambda} X_{r-i}) \dots (X_{r-\lambda} X_{r-i'})$ nur die $X_r X_{r-1} \dots X_{r-i} \dots X_{r-i'}$, ebenso $(X_{r-\lambda} X_{r-i'-1}) \dots (X_{r-\lambda} X_{r-i''})$ ausser $X_r \dots X_{r-i'}$ nur noch $X_{r-i'-1} \dots X_{r-i''}$ u. s. w.

wisse Grenze nicht überschreiten, so giebt es nur einzelne Werthsysteme dieser Verhältnisse, für welche die $\nu_1 \ldots \nu_{r-k}$ so bestimmt werden können, dass

$$(\mu_0 X_r + \mu_1 X_{r-1} + \cdots + \mu_{k-1} X_{r-k+1},\ \nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \cdots + \nu_{r-k} X_{r-k}) = 0$$

ist. Schliessen wir diese Verhältnisse aus, so wird die Gl. (1) für

$$\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{r-k} = 0, \quad \eta_{r-k+1} = \mu_{k-1} \cdots \eta_r = \mu_0$$

höchstens soviel verschwindende Wurzeln besitzen, als dieselbe Gleichung, für die angegebene k-gliedrige Untergruppe gebildet, Wurzeln gleich Null hat. Wenn daher die Gl. (1) für die r-gliedrige Gruppe stets mindestens k verschwindende Wurzeln hat, so muss die im vorigen Lehrsatz angegebene Untergruppe lauter verschwindende Wurzeln haben, oder:

Verschwinden für eine r-gliedrige Gruppe die Functionen $\psi_{r-1}(\eta) \ldots \psi_{r-k+1}(\eta)$ identisch, so gehört jede Transformation einer k-gliedrigen Untergruppe vom Range Null an.

Wir nehmen wieder an, die Functionen $\psi_{r-1}(\eta) \ldots \psi_{r-k+1}(\eta)$ verschwänden identisch; wir wählen $X_r f$ wieder ganz beliebig, $X_1 f \ldots X_{r-k} f$ wieder in der oben angegebenen Weise, aber $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ in der k-gliedrigen Untergruppe nach den Festsetzungen des vorigen Paragraphen derartig, dass ist:

$$(X_r X_{r-1}) = a_1 X_{r-2} f, \quad (X_r X_{r-2}) = a_2 X_{r-3} f \ldots$$
$$(X_r X_{r-k+2}) = a_{k-2} X_{r-k+1}, \quad (X_r X_{r-k+1}) = 0.$$

Hier können die $a_1 \ldots a_{k-2}$ alle oder zum Theil verschwinden; zugleich ist $X_{r-k+1} f$ mit allen Transformationen der Untergruppe vertauschbar. Wir wollen zeigen, dass wofern nicht alle Transformationen dieser Untergruppe mit einander vertauschbar sind, sicherlich derselben eine Transformation angehört, welche mit allen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe vertauschbar ist. Man kann diesen Beweis unter Zugrundelegung der obigen Gleichungen

$$(X_r X_\alpha) = \sum^\beta e_{\alpha\beta} X_\beta f$$

und mit Benutzung der Gleichung (3) liefern. Einfacher ist es, die im § 8 angegebene specielle Form der Gleichungen für $(X_r X_\alpha)$ zu benutzen. Es genüge, den Beweis unter der Annahme durchzuführen, dass die $r - k$ nicht verschwindenden Wurzeln sämmtlich ungleich sind. Diese seien $\omega_1 \ldots \omega_{r-k}$; dann kann man setzen:

$$(X_r X_1) = \omega_1 X_1 f \cdots (X_r X_{r-k}) = \omega_{r-k} X_{r-k} f.$$

Eine unmittelbare Folge aus (3) ist dann:

$$(X_{r-k+1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(k-1)} X_\alpha f.$$

Die Jacobi'sche Relation für $(r, r-k+2, \alpha)$ liefert:

$$\sum^{\beta} c_{r-k+2,\alpha,\beta}\,\omega_\beta X_\beta - \omega_\alpha \sum^{\beta} c_{r-k+2,\alpha,\beta} X_\beta - a_{k+2}\,\omega_\alpha^{(k-1)} X_\alpha = 0,$$

woraus sich die Folgerungen ergeben:

$$a_{k-2}\,\omega_\alpha^{(k-1)} = 0 \quad \text{und} \quad c_{r-k+2,\alpha,\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \gtrless \beta.$$

Wäre $a_{k-2} = 0$, so könnte man auf dieselbe Weise folgern:

$$a_{k-3}\,\omega_\alpha^{(k-2)} = 0$$

und so fort.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

Wenn die Coefficienten $\psi_{r-1}(\eta)$, $\psi_{r-2}(\eta) \ldots \psi_{r-k+1}(\eta)$ identisch verschwinden und wenn dann keine Transformation der Gruppe mit allen ihren Transformationen vertauschbar ist, so müssen auch die sämmtlichen Unterdeterminanten $r-k+1^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch verschwinden. Jede Transformation gehört also einer k-gliedrigen Untergruppe an, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

§ 11.

Systeme von Gleichungen.

Wir nehmen jetzt an, die Functionen $\psi_{r-1}(\eta) \ldots \psi_{r-k+1}(\eta)$ verschwänden identisch, aber $\psi_{r-k}(\eta)$ sei nicht für jeden Werth der η gleich Null. Ausserdem sehen wir von denjenigen Gruppen ab, in denen mindestens eine Transformation mit allen andern vertauschbar ist. Dann wissen wir, dass auch alle Unterdeterminanten $r-k+1^{\text{ten}}$ Grades, aber nicht die vom $r-k^{\text{ten}}$ Grade, der aus den $\gamma_{\iota\varkappa} = \sum^{\varrho} \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}$ gebildeten Determinante identisch verschwinden. Jetzt soll $X_r f$ eine inf. Transformation ganz allgemeiner Art sein. Dann hat die charakteristische Gleichung für $(00\ldots01)$ k verschwindende und $r-k$ nichtverschwindende Wurzeln. Wir können also $X_{r-1}f, \ldots X_{r-k+1}f$ so wählen, dass dieselben mit $X_r f$ vertauschbar sind. Bezeichnet man mit $\alpha_0 \ldots \alpha_\varkappa$, $\beta_0 \ldots \beta_\lambda \ldots$ die Nummern $1 \ldots r-k$, so lassen sich die Ausdrücke für $(X_r X_1)$, $(X_r X_2) \ldots (X_r X_{r-k})$ in folgender Weise darstellen:

$$(X_r X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0}, \; (X_r X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + e_{\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0}, \ldots$$
$$(X_r X_{\alpha_\varkappa}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\varkappa} + e_{\alpha_\varkappa\alpha_{\varkappa-1}} X_{\alpha_{\varkappa-1}} + \cdots + e_{\alpha_r\alpha_0} X_{\alpha_0}.$$

Bilden wir die Jacobi'sche Relation für $(r,\varrho,\alpha_0),(r,\varrho,\alpha_1)\ldots(r,\varrho,\alpha_\varkappa)$, wo ϱ eine der Nummern $r-1, \ldots r-k+1$ ist, und nehmen wir zunächst an, dass keine Wurzel ω_β gleich ω_α sei, so folgt, dass sich $(X_\varrho X_1) \ldots (X_\varrho X_{r-k})$ in der durch die vorstehenden Gleichungen bezeichneten Art darstellen lassen, wofern nur die ω und $e_{\lambda\mu}$ geändert werden. Es ist dann:

$$(X_\varrho X_{\alpha_0}) = \omega'_\alpha X_{\alpha_0},\ (X_\varrho X_{\alpha_1}) = \omega'_\alpha X_{\alpha_1} + e'_{\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0}, \ldots$$
$$(X_\varrho X_{\alpha_\varkappa}) = \omega'_\alpha X_{\alpha_\varkappa} + e'_{\alpha_\varkappa\alpha_{\varkappa-1}} X_{\alpha_{\varkappa-1}} + \cdots + e'_{\alpha_\varkappa\alpha_0} X_{\alpha_0} f.$$

Somit gehört die Transformation $X_{\alpha_0} f$ einer ebenen k-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, in deren Bildraum alle durch den Bildpunkt dieser Transformation gehenden Geraden zweigliedrige Untergruppen abbilden, und für alle diese zweigliedrigen Untergruppen, wofern ihre Transformationen nicht vertauschbar sind, ist $X_{\alpha_0} f$ das Hauptelement. Beachten wir, dass der Rang l der Gruppe höchstens gleich k ist und dass $X_{\alpha_0} f$ mit Transformationen der Reihe $X_1 f \ldots X_{r-k} f$ vertauschbar sein kann, so gelangen wir zu dem Satze:

Jede Transformation, welche für eine zweigliedrige Untergruppe die Haupttransformation darstellt, besitzt dieselbe Eigenschaft mindestens für eine $(l-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von zweigliedrigen Untergruppen.

Der beim Beweise ausgeschlossene Fall, dass ω_α weiteren Wurzeln ω_β gleich ist, ändert am Resultate nichts, wenn wir $X_r f$, wie geschehen, als ganz allgemeine Transformation voraussetzen. Ist dann z. B. $\omega_\alpha = \omega_\beta = \omega_\gamma$, so sollen für $\omega = \omega_\alpha$ alle Unterdeterminanten $r - 2^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega| = |c_{r\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega|$ verschwinden; es muss also auch für $X_\varrho f$ eine Wurzel existiren, für welche alle Unterdeterminanten $r - 2^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Nun müsste wegen der Jacobi'schen Relation $(r\,\varrho\,\alpha_0)$ sein:

$$(X_\varrho X_{\alpha_0}) = a_\alpha X_{\alpha_0} + a_\beta X_{\beta_0} + a_\gamma X_{\gamma_0},$$
$$(X_\varrho X_{\beta_0}) = b_\alpha X_{\alpha_0} + b_\beta X_{\beta_0} + b_\gamma X_{\gamma_0},$$
$$(X_\varrho X_{\gamma_0}) = c_\alpha X_{\alpha_0} + c_\beta X_{\beta_0} + c_\gamma X_{\gamma_0}.$$

Soll aber jetzt für $X_\varrho f$ die verlangte Bedingung erfüllt sein, so ist nothwendig:

$$(X_\varrho X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha' X_{\alpha_0},\ (X_\varrho X_{\beta_0}) = \omega_\beta' X_{\beta_0},\ (X_\varrho X_{\gamma_0}) = \omega_\gamma' X_{\gamma_0} \ldots.$$

Entsprechendes gilt für die $(X_\varrho X_{\alpha_1})$ u. s. w.

Da offenbar die Transformationen $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ mit einander vertauschbar sind, so können wir einen Satz des § 4 in folgender Weise erweitern:

In einer Gruppe vom Range l gehört jede Transformation einer $(l-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind, wofern nicht eine Transformation der Gruppe mit allen ihren Transformationen vertauschbar ist.

Beiläufig machen wir noch auf folgenden Satz aufmerksam:

Wenn eine Transformation das Hauptelement einer zweigliedrigen Untergruppe ist, so gehört sie einer aus mindestens $l + 1$ Gliedern ge-

bildeten Untergruppe an, für welche $p = 1$ ist und welche eine l-gliedrige Untergruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen enthält. Alle diejenigen zweigliedrigen Untergruppen dieser neuen Gruppe, deren Transformationen nicht vertauschbar sind, haben die gegebene Transformation zu ihrer eingliedrigen Hauptuntergruppe.

Die charakteristische Gleichung war zu dem Zwecke aufgestellt, um zu dem gegebenen System $(\eta_1 \dots \eta_r)$ ein System $(\zeta_1 \dots \zeta_r)$ zu finden, so dass ist:

$$(1) \qquad \left(\sum \eta_\iota X_\iota, \ \sum \zeta_\iota X_\iota\right) = \omega \sum \zeta_\iota X_\iota f.$$

Verschwinden alle Unterdeterminanten $r - k + 1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch, so kann man $k - 1$ Systeme $(\eta') \dots (\eta^{(k-1)})$ finden, so dass ist:

$$(2) \quad \left(\sum \eta_\iota X_\iota, \ \sum \eta_\iota' X_\iota\right) = 0 \cdots \left(\sum \eta_\iota X_\iota, \ \sum \eta_\iota^{(k-1)} X_\iota\right) = 0$$

oder

$$(2') \quad \begin{cases} \sum\limits_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa' \quad c_{\iota\varkappa 1} = 0 \cdots \sum\limits_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa' \quad c_{\iota\varkappa r} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum\limits_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa^{(k-1)} c_{\iota\varkappa 1} = 0 \cdots \sum\limits_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa^{(k-1)} c_{\iota\varkappa r} = 0. \end{cases}$$

Dann folgt aus den vorangehenden Entwickelungen unter der gemachten Einschränkung, dass auch ist:

$$(3) \quad \left(\sum \eta_\iota' X_\iota, \sum \eta_\iota'' X_\iota\right) = 0 \cdots \left(\sum \eta_\iota' X_\iota, \sum \eta_\iota^{(k-1)} X_\iota\right) = 0 \cdots$$

oder

$$(3') \qquad \sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota' \eta_\varkappa'' c_{\iota\varkappa 1} = 0 \cdots \sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota' \eta_\varkappa'' c_{\iota\varkappa r} = 0.$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Ferner sind in Folge der obigen Entwicklungen mit den Gleichungen (1) und (2) auch die folgenden verbunden:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\left(\sum \eta_\iota' X_\iota, \sum \zeta_\iota X_\iota\right) = \omega' \sum \zeta_\iota X_\iota f \cdots \\ &\left(\sum \eta_\iota^{(k-1)} X_\iota, \sum \zeta_\iota X_\iota\right) = \omega^{(k-1)} \sum \zeta_\iota X_\iota f. \end{aligned}$$

Diese Formeln führen uns dazu, für $l > 1$ nicht die eine Gleichung

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta) + \omega^{r-2} \psi_2(\eta) - \cdots \pm \omega \psi_{r-1}(\eta) = 0$$

der Untersuchung zu Grunde zu legen, sondern damit, nachdem durch (2) die (η'), $(\eta'') \dots (\eta^{(k-1)})$ bestimmt sind, die weiteren:

$$\begin{aligned}
&\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta') \quad + \omega^{r-2}\psi_2(\eta') \quad + \cdots = 0,\\
&\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta'') \quad + \omega^{r-2}\psi_2(\eta'') \quad + \cdots = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta^{(l-1)}) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta^{(l-1)}) + \cdots = 0
\end{aligned}$$

zu verbinden. Nun lehren die Gleichungen (2), dass das System dieser Gleichungen in sich abgeschlossen ist: geht man z. B. von (η') aus, so darf man damit $(\eta), (\eta'') \ldots (\eta^{(k-1)})$ in derselben Weise verbinden, wie man $(\eta'), (\eta'') \ldots (\eta^{(k-1)})$ mit (η) verbunden hat.

Die späteren Entwicklungen werden die Beziehung der Wurzeln dieser Gleichungen aufs deutlichste hervortreten lassen. Hier genüge es, auf einige Einzelheiten aufmerksam zu machen. Zunächst entspricht jeder Wurzel der einen Gleichung eine ganz bestimmte Wurzel in jeder andern. Es gehört eben zu jeder von Null verschiedenen Wurzel ω der ersten Gleichung nach (1) ein System (ζ); dies in (4) eingesetzt, liefert die entsprechenden Wurzeln $\omega' \ldots \omega^{(l-1)}$.

Ist ω_α eine $\varkappa+1$-fache Wurzel der ersten Gleichung, und verschwinden nicht alle Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega_\alpha|$, so muss auch jede der entsprechenden Wurzeln mindestens eine $\varkappa+1$-fache Wurzel ihrer Gleichung sein. Schliesst man für $(\eta), (\eta') \ldots$ besondere Lagen aus, so gilt der Satz ganz allgemein.

Bilden $\omega_\alpha, \omega_\alpha' \ldots \omega_\alpha^{(l-1)}$ eine Reihe entsprechender Wurzeln der l Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) \quad + \cdots = 0,\\
&\omega^r - \omega^{r-1}\psi(\eta') \quad + \cdots = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta^{(l-1)}) + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

so bilde man $(\widetilde{\eta})$ als homogene lineare Function der $(\eta), (\eta') \ldots (\eta^{(l-1)})$, indem man setzt:

$$\widetilde{\eta_\iota} = p_0\eta_\iota + p_1\eta_\iota' + \cdots + p_{l-1}\eta_\iota^{(l-1)}.$$

Bezeichnet man nun mit ϖ_α die ω_α entsprechende Wurzel der Gleichung

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\widetilde{\eta}) + \cdots = 0,$$

so ist dieselbe aus den $\omega_\alpha, \omega_\alpha' \ldots \omega_\alpha^{(l-1)}$ in derselben Weise gebildet, wie $\widetilde{\eta_\iota}$ aus $\eta_\iota, \eta_\iota' \ldots \eta_\iota^{(l-1)}$, so dass ist:

$$\varpi_\alpha = p_0\omega_\alpha + p_1\omega_\alpha' + \cdots p_{l-1}\omega_\alpha^{(l-1)}.$$

Es folgt dies unmittelbar daraus, dass mit den Gleichungen:

$$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f, \ (X_{r-1}X_\alpha) = \omega_\alpha' X_\alpha f \ldots (X_{r-l+1}X_\alpha) = \omega_\alpha^{(l-1)} X_\alpha f$$

auch die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(p_0 X_r + p_1 X_{r-1} + \cdots + p_{l-1} X_{r-l+1}, X_\alpha)\\
&= (p_0\omega_\alpha + p_1\omega_\alpha' + \cdots + p_{l-1}\omega_\alpha^{(l-1)}) X_\alpha f
\end{aligned}$$

verbunden ist.

Endlich beachte man, dass die Verhältnisse der $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$, welche der Gleichung (1) genügen, sich rational vermittelst $\eta_1 \ldots \eta_r$ und ω ausdrücken lassen. Man erhält (abgesehen von speciellen Lagen) Verhältnisse von Functionen $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von ω, in denen die Coefficienten der einzelnen Potenzen homogene Functionen der $\eta_1 \ldots \eta_r$ sind. Diese Verhältnisse ändern sich aber nicht, wenn man z. B. ω mit ω' und zugleich (η) mit (η') vertauscht.

Im folgenden wird es sich bald mehr empfehlen, die l einzelnen Gleichungen

$$\begin{array}{l} \omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) \quad + \cdots = 0, \\ \omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta') \quad + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta^{(l-1)}) + \cdots = 0 \end{array}$$

zu Grunde zu legen, bald nur die eine Gleichung

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\overline{\eta}) + \cdots = 0$$

mit den unbestimmten Coefficienten $p_0, p_1, \ldots p_{l-1}$ zu untersuchen.

§ 12.

Ausdrückung aller Wurzeln durch l unter ihnen.

Wir suchen jetzt diejenigen Gruppen zu bestimmen, welche folgenden Bedingungen genügen:

a) es sollen alle Unterdeterminanten $r - l + 1^{\text{ten}}$ Grades, aber nicht die $r - l^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch verschwinden;

b) für ein System $\eta_1 \ldots \eta_r$ allgemeiner Lage soll die charakteristische Gleichung $r - l$ unter einander (und von Null) verschiedene Wurzeln haben;

c) es soll die Zahl p gleich der Zahl r der Glieder sein.

Es wird sich zeigen, dass die so definirte Zahl l gleich dem Range der Gruppe ist.

Indem wir von den Gruppen absehen, in denen gewisse Transformationen mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind, können wir die beiden ersten Forderungen kürzer in folgender Form aussprechen: die Gleichung $\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1 + \omega^{r-2}\psi_2 - \cdots = 0$ hat mindestens l verschwindende Wurzeln; sie besitzt aber für gewisse Werthe der Constanten gerade $r - l$ von Null und unter einander verschiedene Wurzeln. Wir wählen jetzt $X_r f$ als eine ganz allgemeine Transformation; $X_{r-1}f \ldots X_{r-l+1}f$ sollen mit ihr vertauschbar sein. Dann wissen wir, dass auch die letzteren unter einander vertauschbar sind. Ferner können wir die $X_1 f, X_2 f \ldots X_{r-l} f$ so wählen, dass für $\alpha = 1 \ldots r - l$ ist:

(1) $$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f.$$

Wie im vorigen Paragraphen bewiesen, ist dann auch:

$$(1') \qquad (X_{r-1} X_\alpha) = \omega_\alpha' X_\alpha f, \; \ldots \; (X_{r-l+1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(l-1)} X_\alpha f.$$

Um die verschiedenen Beziehungen, in denen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung hier auftreten, recht scharf aus einander zu halten, wollen wir die sämmtlichen Wurzeln, welche dieselbe für feste Werthe von $\eta_1 \ldots \eta_r$ besitzt, als ein Wurzelsystem bezeichnen; dagegen sollen solche Wurzeln, welche nach passender Wahl von $(\eta), (\eta') \ldots (\eta^{(l-1)})$ zu denselben Werthen von $\zeta_1 : \zeta_2 : \ldots : \zeta_r$ führen, als eine Reihe entsprechender Wurzeln oder auch als Wurzelreihe bezeichnet werden; wo kein Missverständniss zu befürchten ist, soll im letzteren Falle auch nur von einer Wurzel gesprochen werden.

Nun bilde man die Jacobi'sche Relation für $(r, \alpha, \beta), (r-1, \alpha, \beta) \ldots$ und erhält die Gleichungen:

$$(2) \qquad c_{\alpha\beta\gamma}(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma) = 0, \; c_{\alpha\beta\gamma}(\omega_\alpha' + \omega_\beta' - \omega_\gamma') = 0 \ldots,$$

$$(3) \qquad c_{\alpha\beta\varrho}(\omega_\alpha + \omega_\beta) = 0, \qquad c_{\alpha\beta\varrho}(\omega_\alpha' + \omega_\beta') = 0 \ldots.$$

Hier bedeuten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Nummern der Reihe $1 \ldots r - l$ und ϱ, σ Nummern der Reihe $r - l + 1 \ldots r$. Dies liefert den Satz:

Sind α und β irgend zwei unter den Nummern $1 \ldots r - l$, so wird unter den angegebenen Bedingungen jedes $(X_\alpha X_\beta)$, welches nicht verschwindet, entweder durch eine einzige der $X_1 f \ldots X_{r-l} f$ oder durch einige der $X_{r-l+1} f \ldots X_r f$ dargestellt; soll die erstere Darstellung möglich sein, so muss die Summe je zweier entsprechender zu $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ gehörender Wurzeln eine neue Wurzel liefern; die zweite Darstellung ist nur möglich, wenn jede zu $X_\alpha f$ gehörige Wurzel entgegengesetzt gleich ist der entsprechenden zu $X_\beta f$ gehörigen Wurzel.

Da alle $(X_r X_\alpha) \ldots (X_{r-l+1} X_\alpha)$ durch $X_1 f \ldots X_{r-l} f$ ausgedrückt werden, müssen sich, damit $p = r$ ist, mindestens l Ausdrücke $(X_\alpha X_\beta)$ für $\alpha, \beta = 1 \ldots r - l$ durch $X_{r-l+1} f \ldots X_r f$ darstellen lassen und die aus den zugehörigen l^2 Coefficienten $c_{\alpha\beta\varrho}$ gebildete Determinante muss von Null verschieden sein. Diese Ausdrücke seien

$$(X_1 X_{l+1}), \; (X_2 X_{l+2}) \ldots (X_l X_{2l}).$$

Dann ist:

$$\omega_1 + \omega_{l+1} = 0, \; \omega_2 + \omega_{l+2} = 0 \ldots \omega_l + \omega_{2l} = 0.$$

Indem wir die bisherige Bezeichnung für die Marken beibehalten, wonach $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Nummern der Reihe $1 \ldots r - l$, ϱ, σ solche der Reihe $r - l + 1 \ldots r$ sind, setzen wir jetzt fest, dass $\iota, \varkappa, \lambda \ldots \iota', \varkappa', \lambda' \ldots$ Nummern der Reihe $1 \ldots 2l$ bezeichnen sollen, und zwar soll die Wahl stets so getroffen werden, dass $(X_\iota X_{\iota'})$ sich durch $X_{r-l+1} f \ldots X_r f$ darstellt, also auch $\omega_\iota + \omega_{\iota'} = 0$ ist. Endlich soll ν eine der Marken $0 \ldots l - 1$ bezeichnen.

Dann muss sein:

(4) $$(X_\iota X_{\iota'}) = e_\iota X_r + e_\iota' X_{r-1} + \cdots + e_\iota^{(l-1)} X_{r-l+1} f;$$

und es ist offenbar:

(5) $$e_\iota^{(\nu)} + e_{\iota'}^{(\nu)} = 0.$$

Die aus den Coefficienten $e_\iota^{(\nu)}$ gebildete Determinante muss von Null verschieden sein.

Indem wir diese Bezeichnung benutzen, bilden wir die Jacobi'sche Relation für (ι, ι', α) und erhalten:

(6) $$e_\iota \omega_\alpha + e_\iota' \omega_\alpha' + \cdots + e_\iota^{(l-1)} \omega_\alpha^{(l-1)} = -\sum\nolimits^{s} (c_{\iota\alpha s} c_{\iota' s\alpha} - c_{\iota'\alpha s} c_{\iota s\alpha}).$$

Wenn die linke Seite dieser Gleichung nicht verschwindet, so muss zum mindesten eines der $2(r-l)$ Producte

$$c_{\iota\alpha 1} c_{\iota' 1\alpha}, \; c_{\iota\alpha 2} c_{\iota' 2\alpha}, \; \ldots \; c_{\iota'\alpha 1} c_{\iota 1\alpha}, \; c_{\iota'\alpha 2} c_{\iota 2\alpha} \ldots$$

von Null verschieden sein. Somit muss in diesem Falle entweder $\omega_\alpha^{(\nu)} + \omega_\iota^{(\nu)}$ oder $\omega_\alpha^{(\nu)} - \omega_\iota^{(\nu)}$ eine Wurzel sein oder sowohl $\omega_\alpha^{(\nu)} + \omega_\iota^{(\nu)}$ als $\omega_\alpha^{(\nu)} - \omega_\iota^{(\nu)}$. Das giebt den Satz:

Ist α eine von ι und ι' verschiedene Zahl der Reihe $1 \ldots r - l$, und $e_\iota \omega_\alpha + \cdots + e_\iota^{(l-1)} \omega_\alpha^{(l-1)}$ von Null verschieden, so erhält man durch Addition oder Subtraction von $\omega_\iota^{(\nu)}$ zu $\omega_\alpha^{(\nu)}$ oder durch beide Operationen eine neue Reihe entsprechender Wurzeln.

Wir gehen jetzt von einer Wurzelreihe aus, für welche die linke Seite von (6) nicht verschwindet und suchen alle weitern Wurzeln, zu denen man durch Addition und Subtraction von $\omega_\iota^{(\nu)}$ gelangt. Die entsprechenden Marken bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_\varkappa$ und ordnen dieselben in der Weise, dass ist:

$$\omega_{\alpha_1}^{\nu} = \omega_{\alpha_0}^{\nu} + \omega_\iota^{\nu}, \; \omega_{\alpha_2}^{\nu} = \omega_{\alpha_0}^{\nu} + 2\omega_\iota^{\nu} \cdots \omega_{\alpha_\varkappa}^{\nu} = \omega_{\alpha_0}^{\nu} + \varkappa\omega_\iota^{\nu}.$$

Bilden wir jetzt die Gleichung (6) für α_0, so wird nur das erste Product vorkommen, und zwar für $s = \alpha_1$; dieselbe Gleichung für α_1 angewandt erfordert, dass im ersten Product $s = \alpha_2$, im zweiten $s = \alpha_0$ gesetzt wird u. s. w. Wird endlich $\alpha_\varkappa$ für α gesetzt, so hat man im zweiten Product $s = \alpha_{\varkappa-1}$ zu setzen. Addirt man alle diese Gleichungen, so verschwindet die rechte Seite und es ergiebt sich das Resultat:

$$e_\iota(2\omega_{\alpha_0} + \varkappa\omega_\iota) + e_{\iota 2}'(2\omega'_0 + \varkappa\omega_\iota) + \cdots + e_\iota^{(l-1)}(2\omega_{\alpha_0}^{(l-1)} + \varkappa\omega_\iota^{(l-1)}) = 0,$$

wo $\varkappa$ eine ganze positive Zahl ist. Hierin kann man α_0 durch $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\varkappa$ ersetzen, wenn man nur $\varkappa$ durch $\varkappa - 2, \varkappa - 4, \ldots, -\varkappa$ ersetzt. Somit schliessen wir:

Ist

$$(X_\iota X_{\iota'}) = e_\iota X_r f + e_\iota' X_{r-1} f + \cdots + e_\iota^{(l-1)} X_{r-l+1} f,$$

so kann man zu jeder Reihe entsprechender Wurzeln $\omega_\alpha \ldots \omega_\alpha^{(l-1)}$ *eine ganze positive oder negative Zahl* $a_{\alpha\iota}$ *(mit Einschluss der Null) so zuordnen, dass die Gleichung besteht:*

$$\sum_0^{l-1}{}_\nu e_\iota^{(\nu)}(2\omega_\alpha^{(\nu)} + a_{\alpha\iota}\omega_\iota^{(\nu)}) = 0 \tag{7}$$

Ferner muss, wenn $\mathfrak{a}$ *eine ganze Zahl ist, welche zwischen* 0 *und* $a_{\alpha\iota}$ *liegt, auch* $\omega_\alpha^{(\nu)} + \mathfrak{a}\omega_\iota^{(\nu)}$ *eine Wurzel sein.*

Den letzten Theil dieses Satzes können wir, wie die vorstehende Entwicklung lehrt, noch in folgender Weise erweitern: Wenn für ein ganzzahliges $\mathfrak{b}$, welches das entgegengesetzte Vorzeichen von $a_{\alpha\iota}$ hat, $\omega_\alpha + \mathfrak{b}\omega_\iota$ eine Wurzel ist, so wird für $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = a_{\alpha\iota}$ auch $\omega_\alpha + \mathfrak{c}\omega_\iota$ eine Wurzel darstellen; zugleich werden aber auch für jedes zwischen 0 und $\mathfrak{b}$ gelegene $\mathfrak{b}$ und für jedes zwischen 0 und $\mathfrak{c}$ gelegene $\mathfrak{c}$ sowohl $\omega_\alpha + \mathfrak{b}\omega_\iota$ wie $\omega_\alpha + \mathfrak{c}\omega_\iota$ Wurzeln sein.

Der bei der Entwicklung ausgeschlossene Fall, dass die linke Seite von (6) verschwindet, ist im Resultate ebenfalls enthalten, da alsdann $a_{\alpha\iota} = 0$ ist. Wenn dieser Fall eintritt und zugleich mit $\omega_\alpha^{(\nu)}$ und $\omega_\iota^{(\nu)}$ auch $\omega_\alpha^{(\nu)} + \mathfrak{a}\omega_\iota^{(\nu)}$ eine Wurzel ist, so muss es auch $\omega_\alpha^{(\nu)} - \mathfrak{a}\omega_\iota^{(\nu)}$, sowie $\omega_\alpha^{(\nu)} \pm \mathfrak{b}\omega_\iota^{(\nu)}$ sein, wenn $\mathfrak{b}$ zwischen 0 und $\mathfrak{a}$ liegt.

In der Gleichung (7) kann man auch $\alpha = \iota$ wählen, wenn man $a_{\iota\iota} = -2$ setzt.

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\sum{}_\nu e_1^{(\nu)}\omega_1^{(\nu)} = -2E_1, \quad \sum{}_\nu e_2^{(\nu)}\omega_2^{(\nu)} = -2E_2, \ldots, \tag{8}$$
$$\sum{}_\nu e_l^{(\nu)}\omega_l^{(\nu)} = -2E_l.$$

Dann folgt aus (7):

$$\sum{}_\nu e_\iota^{(\nu)}\omega_\alpha^{(\nu)} = a_{\alpha\iota}E_\iota. \tag{9}$$

Da die Determinante der $e_\iota^{(\nu)}$ nicht verschwindet, so lassen sich Coefficienten $g_{\iota\nu}$ so bestimmen, dass ist:

$$\omega_\alpha^{(\nu)} = a_{\alpha 1}E_1 g_1^{(\nu)} + a_{\alpha 2}E_2 g_2^{(\nu)} + \cdots + a_{\alpha l}E_l g_l^{(\nu)}. \tag{10}$$

Hier darf man α auch $= 1 \ldots l$ setzen, wobei die $g_\iota^{(\nu)}$ sich nicht ändern, so dass sich ergiebt:

$$\tag{10'} \begin{cases} \omega_1^{(\nu)} = a_{11}E_1 g_1^{(\nu)} + a_{12}E_2 g_2^{(\nu)} + \cdots + a_{1l}E_l g_l^{(\nu)}, \\ \omega_2^{(\nu)} = a_{21}E_1 g_1^{(\nu)} + a_{22}E_2 g_2^{(\nu)} + \cdots + a_{2l}E_l g_l^{(\nu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_l^{(\nu)} = a_{l1}E_1 g_1^{(\nu)} + a_{l2}E_2 g_2^{(\nu)} + \cdots + a_{ll}E_l g_l^{(\nu)}. \end{cases}$$

Wenn jetzt die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll} \end{vmatrix}$ nicht verschwindet, so lassen sich rationale Zahlen $h_{\alpha 1} \dots h_{\alpha l}$ so finden, dass ist

$$a_{\alpha\varkappa} = h_{\alpha 1} a_{1\varkappa} + h_{\alpha 2} a_{2\varkappa} + \dots + h_{\alpha l} a_{l\varkappa} \quad \text{für} \quad \varkappa = 1 \dots l.$$

Dann ergiebt sich aus den Gleichungen (10) und (10'):

$$(11) \quad \begin{cases} \omega_\alpha = h_{\alpha 1}\omega_1 + h_{\alpha 2}\omega_2 + \dots + h_{\alpha l}\omega_l, \\ \omega_\alpha' = h_{\alpha 1}\omega_1' + h_{\alpha 2}\omega_2' + \dots + h_{\alpha l}\omega_l', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_\alpha^{l-1} = h_{\alpha 1}\omega_1^{l-1} + h_{\alpha 2}\omega_2^{l-1} + \dots + h_{\alpha l}\omega_l^{l-1}. \end{cases}$$

Diese Entwicklung führt auf den für die Zusammensetzung der Gruppen fundamentalen Satz:

Unter den angegebenen Bedingungen, dass $p = r$ ist und dass die charakteristische Gleichung l verschwindende und $r - l$ von einander und von Null verschiedene Wurzeln hat, lassen sich die sämmtlichen $r - l$ nicht verschwindenden Wurzeln als lineare homogene Functionen von l unter ihnen darstellen; die Coefficienten sind rationale Zahlen und ändern sich nicht, wenn man zu irgend einem andern Wurzelsystem übergeht.

Beiläufig folgt aus diesem Satze, dass l wirklich den Rang der Gruppe darstellt, wofern nur die aus den l^2 Wurzeln $\omega_\iota^{(\nu)}$ gebildete Determinante nicht verschwindet. Da nämlich alle Wurzeln durch l ausgedrückt werden und durch keine geringere Zahl, so gilt dasselbe von den Functionen $\psi_1(\eta), \psi_2(\eta) \dots \psi_{r-l}(\eta)$. Das Verschwinden der genannten Determinante verlangt aber, dass die Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe besitzt, welcher Fall ausgeschlossen ist.

Beim Beweise ist der Fall ausgeschlossen, dass die aus den $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \dots l$ gebildete Determinante gleich Null ist. Der folgende Paragraph wird uns aber zeigen, dass die im früheren Lehrsatz (Gl. (7)) für $a_{\iota\varkappa}$ gefundenen Beziehungen diesen Fall nicht gestatten.

Hätten wir noch den Fall ausschliessen wollen, dass die aus den Wurzeln $\omega_\iota^{(\nu)}$ für $\iota = 1 \dots l$, $\nu = 0 \dots l - 1$ gebildete Determinante gleich Null ist, so hätten wir den Beweis des vorangehenden Lehrsatzes einfacher gestalten können. Wir hielten es aber für wichtig, einen Beweis mitzutheilen, welcher diesen Fall mitumfasst.

§ 13.

Eigenschaften des aus den $a_{\iota\varkappa}$ gebildeten Systems.

Wir sehen in den zunächst folgenden Paragraphen von dem Schlussresultat des vorigen Paragraphen ganz ab und berücksichtigen nur die Gleichung (7)

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2(e_\iota\omega_\alpha + e_\iota'\omega_\alpha' + \cdots + e_\iota^{(l-1)}\omega_\alpha^{(l-1)}) \\ &+ a_{\alpha\iota}(e_\iota\omega_\iota + e_\iota'\omega_\iota' + \cdots + e_\iota^{(l-1)}\omega_\iota^{(l-1)}) = 0 \end{aligned}$$

wenn auch die Marke α nur auf die Nummern $1 \ldots l$ beschränkt wird. Hier tritt ein System von l^2 Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ auf, wenn die Marken $\iota, \varkappa$ die Reihe $1 \ldots l$ durchlaufen. Dabei ist $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{ll} = -2$. Die übrigen können keineswegs beliebig gewählt werden, da der der Formel (7) § 12 beigegebene Lehrsatz auf Wurzeln

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_l\omega_l$$

führt und deren Zahl unendlich gross wird, wenn nicht zwischen den $a_{\iota\varkappa}$ bestimmte Beziehungen bestehen. Wir wollen nur diejenigen Wurzeln berücksichtigen, welche nach diesem Lehrsatz aus einer vorliegenden auf einem ganz bestimmten Wege erhalten werden.

Es sei also $m_1\omega_1 + \cdots + m_l\omega_l$ eine beliebige Wurzel, wo die $m_1 \ldots m_l$ ganze Zahlen mit Einschluss von Null sind. Man setze diese Wurzel statt ω_α in die Gleichung (7) § 12 ein und nehme ω_1 statt ω_ι. An Stelle der Zahl $a_{\alpha\iota}$ gelangt man dann zu der Zahl:

$$-2m_1 + m_2 a_{21} + \cdots + m_l a_{l1}.$$

Somit muss mit $\Sigma m_\iota\omega_\iota$ mindestens die Wurzel $\Sigma m_\iota'\omega_\iota$ vorhanden sein, wo

$$m_2' = m_2,\ m_3' = m_3, \ldots m_l' = m_l,\ m_1' = -m_1 + m_2 a_{21} + \cdots + m_l a_{l1}$$

ist. Auf diese Wurzel wendet man dieselbe Betrachtung an für ω_2, wobei die Zahl $a_{\alpha 2}$ ist $= \Sigma m_\iota' a_{\iota 2}$, und daher kommt noch mindestens die Wurzel vor: $\Sigma m_\iota''\omega_\iota$, wo ist

$$\begin{gathered} m_1'' = m_1',\ m_3'' = m_3', \cdots m_l'' = m_l', \\ m_2'' = m_1' a_{12} - m_2' + m_3' a_{32} + \cdots + m_l' a_{l2}. \end{gathered}$$

Für die gefundene Wurzel suche man die Zahl $a_{\alpha 3}$ in Bezug auf ω_3 und schliesse auf das Vorhandensein einer Wurzel $\Sigma m_\varkappa'''\omega_\varkappa$, u. s. w. Nachdem man so auf eine Wurzel $\Sigma m_\varkappa^{(l-1)}\omega_\varkappa$ gekommen ist, sucht man für sie die dem $a_{\alpha\iota}$ entsprechende Zahl in Bezug auf ω_l und schliesst dann auf das Vorhandensein der Wurzel $\Sigma m_\varkappa^{(l)}\omega_\varkappa$, wo ist:

$$\begin{gathered} m_1^{(l)} = m_1^{(l-1)},\ m_2^{(l)} = m_2^{(l-1)} \ldots m_{l-1}^{(l)} = m_{l-1}^{(l-1)}, \\ m_l^{(l)} = m_1^{(l-1)} a_{1l} + m_2^{(l-1)} a_{2l} + \cdots + m_{l-1}^{(l-1)} a_{l-1,l} - m_l^{(l-1)}. \end{gathered}$$

Indem man nur diese letzte Wurzel berücksichtigt, gelangt man zu dem Satze:

Sobald die charakteristische Gleichung eine Wurzel $\Sigma m_\varkappa \omega_\varkappa$ hat, besitzt sie zum mindesten noch eine weitere Wurzel $\Sigma b_{\iota\varkappa} m_\iota \omega_\varkappa$, wo sich die Coefficienten $b_{\iota\varkappa}$ nach folgenden Regeln berechnen lassen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\text{für } \iota = \varkappa \text{ ist } b_{\iota\iota} = \sum_1^{\iota-1}{}^{\varrho}\, b_{\iota\varrho} a_{\varrho\iota} - 1,\\
&\text{für } \iota > \varkappa \text{ ist } b_{\iota\varkappa} = \sum_1^{\varkappa-1}{}^{\varrho}\, b_{\iota\varrho} a_{\varrho\varkappa} + a_{\iota\varkappa},\\
&\text{für } \iota < \varkappa \text{ ist } b_{\iota\varkappa} = \sum_1^{\varkappa-1}{}^{\varrho}\, b_{\iota\varrho} a_{\varrho\varkappa}.
\end{aligned}
$$

Somit erkennen wir, dass alle diejenigen Systeme von Grössen $\overline{m}_\varkappa$, $\overline{\overline{m}}_\varkappa$ u. s. w. welche man durch wiederholte Anwendung der Substitution:

$$\overline{m}_\varkappa = \sum{}^{\iota}\, m_\iota b_{\iota\varkappa}, \quad \overline{\overline{m}}_\varkappa = \sum{}^{\iota}\, \overline{m}_\iota b_{\iota\varkappa} \ldots$$

erhält, eine neue Wurzel der charakteristischen Gleichung bestimmen. Die Substitution $b_{\iota\varkappa}$ muss also, beliebig oft wiederholt, nur eine endliche Zahl von Systemen $m_\varkappa$ liefern, oder da die Determinante der $b_{\iota\varkappa}$, wie man leicht sieht und unten noch besonders gezeigt werden soll, gleich $(-1)^l$ ist, so muss diese Substitution nach einer gewissen Zahl von Wiederholungen die identische Substitution erzeugen. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür hat Herr Lipschitz, gestützt auf Arbeiten anderer Mathematiker, im 10. Bande der Acta mathematica (S. 137 ff.) in folgender einfacher Weise zusammengefasst:

Soll die Substitution $b_{\iota\varkappa}$ nach μ-facher Wiederholung in die identische Substitution übergehen, so muss die Determinante:

$$
(3)\qquad
\begin{vmatrix}
b_{11} - s & b_{12} & \ldots & b_{1l}\\
b_{21} & b_{22} - s & \ldots & b_{2l}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
b_{l1} & b_{l2} & \ldots & b_{ll} - s
\end{vmatrix}
$$

nur für solche Werthe von s, welche μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, verschwinden, und zugleich müssen ihre sämmtlichen Elementartheiler von der ersten Ordnung sein, wo die letztere Bedingung darauf hinauskommt, dass der gemeinschaftliche Theiler der sämmtlichen partialen Determinanten der $(l-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, durch die Determinante dividirt, gleich einem Bruch wird, dessen Zähler constant und dessen Nenner gleich einem Product aus linearen Functionen von s ist, die alle unter einander verschieden sind.

Gleichwie die durch die Coefficienten $b_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \cdots l$ bestimmte Transformation durch eine endliche Zahl von Wiederholungen auf die identische Substitution führt, muss auch jede Transformation, für welche die Marken ι, $\varkappa$ auf die $l - \lambda$ ersten Zahlen $1 \ldots l - \lambda$ beschränkt wird, bei einer gewissen Zahl von Wiederholungen auf die ursprüngliche Wurzel zurückführen. Endlich darf man natürlich auch die Marken $1 \ldots l$ beliebig vertauschen. Demnach können wir jetzt folgenden Satz aussprechen:

Um Bedingungen dafür zu erhalten, dass das System der Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ zu einer Gruppe führt, bilde man nach der Vorschrift (2) *die l^2 Grössen $b_{\iota\varkappa}$ und aus diesen und einer beliebig veränderlichen Grösse s die Determinante* (3); *dann muss zunächst diese Determinante nur Elementartheiler der ersten Ordnung besitzen und diese müssen die Form $s - e^{\frac{2k\pi i}{\mu}}$ haben, wo k und μ ganze Zahlen sind; ferner muss jede Determinante, welche aus* (3) *durch Weglassung der letzten λ* (*für $\lambda = 1 \ldots l - 2$*) *Verticalreihen erhalten wird, denselben beiden Bedingungen genügen. Sobald hieraus eine Beziehung zwischen den Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ hergeleitet ist, müssen auch diejenigen Relationen bestehen, welche man aus der ersten durch beliebige Permutation der Nummern $1 \ldots l$ erhält.*

Subtrahirt man in der Determinante $| b_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa} s |$ von der l^{ten}, $(l-1)^{\text{ten}} \ldots 2^{\text{ten}}$ Horizontalreihe die mit gewissen Factoren multiplicirten vorangehenden Reihen und berücksichtigt die Relationen (2), so erhalten wir folgende Form der Determinante:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} -s-1 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{l1} \\ a_{12}s & -s-1 & a_{32} & \ldots & a_{l2} \\ a_{13}s & a_{23}s & -s-1 & \ldots & a_{l3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1l}s & a_{2l}s & a_{3l}s & \ldots & -s-1 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in dieser Determinante s durch $\frac{1}{s}$ und multiplicirt mit s^l, so werden die Glieder der Diagonale ungeändert bleiben; dagegen werden in jeder Horizontalreihe die Glieder links von der Diagonale den Factor s verlieren und die Glieder rechts von derselben diesen Factor erhalten. Beiläufig ergiebt sich daraus, dass die Determinante $| b_{\iota\varkappa} |$ den Werth $(-1)^l$ hat. Schreibt man die Determinante (3) oder (4) in der Form:

$$(5) \qquad (-1)^l \{ s^l + M_1 s^{l-1} + M_2 s^{l-2} + \cdots + M_{l-1} s + 1 \},$$

so wird jeder Coefficient M_{l-k} aus M_k dadurch erhalten, dass man jedes in M_k enthaltene $a_{\iota\varkappa}$ durch $a_{\varkappa\iota}$ ersetzt. Um z. B. den Coefficienten M_1 anzugeben, setze man fest, dass für jedes ϱ sein soll

$$\iota_1 < \iota_2 < \iota_3 < \cdots < \iota_\varrho;$$

dann ist:

$$M_1 = -l + \sum_{\iota_1 \iota_2} a_{\iota_1\iota_2} a_{\iota_2\iota_1} + \sum_{\iota_1\iota_2\iota_3} a_{\iota_1\iota_2} a_{\iota_2\iota_3} a_{\iota_3\iota_1} + \sum_{\iota_1\cdots\iota_4} a_{\iota_1\iota_2} a_{\iota_2\iota_3} a_{\iota_3\iota_4} a_{\iota_4\iota_1}$$
$$+ \cdots + a_{12}a_{23}a_{31}\ldots a_{l-1,l}a_{ll}.$$

Dann wird M_{l-1} erhalten, wenn man jedes $a_{\iota\varkappa}$ mit $a_{\varkappa\iota}$ vertauscht; demnach ist:

$$M_{l-1} = -l + \sum_{\iota_1\iota_2} a_{\iota_2\iota_1} a_{\iota_1\iota_2} + \sum_{\iota_1\iota_2\iota_3} a_{\iota_3\iota_2} a_{\iota_2\iota_1} a_{\iota_1\iota_3} + \sum_{\iota_1\cdots\iota_4} a_{\iota_4\iota_3} a_{\iota_3\iota_2} a_{\iota_2\iota_1} a_{\iota_1\iota_4}$$
$$+ \cdots + a_{l,l-1}a_{l-1,l-2}\ldots a_{43}a_{32}a_{21}a_{ll}.$$

Jedes M_k besteht aus Aggregaten der Form $a_{\iota_1\iota_2}a_{\iota_2\iota_3}a_{\iota_3\iota_4}\ldots a_{\iota_\varrho\iota_1}$, wo die vorstehende Bedingung wegen der Grösse der Marken $\iota_1\ldots\iota_\varrho$ nicht mehr erfüllt zu sein braucht. Kennt man alle solchen Aggregate, welche in M_k vorkommen, so kann man hieraus in der angegebenen Weise M_{l-k} herleiten.

Wenn der Ausdruck (5) für $\alpha + \beta i$ verschwindet, so muss er auch für $\alpha - \beta i = \frac{1}{\alpha + \beta i}$ gleich Null werden. Demnach ist für jedes k nothwendig $M_k = M_{l-k}$. Da dasselbe auch für jedes aus weniger Nummern gebildete System gilt, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$(6)\quad \begin{cases} a_{\iota_1\iota_2}a_{\iota_2\iota_3}a_{\iota_3\iota_1} = a_{\iota_3\iota_2}a_{\iota_2\iota_1}a_{\iota_1\iota_3}, \\ a_{\iota_1\iota_2}a_{\iota_2\iota_3}a_{\iota_3\iota_4}a_{\iota_4\iota_1} = a_{\iota_4\iota_3}a_{\iota_3\iota_2}a_{\iota_2\iota_1}a_{\iota_1\iota_4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\iota_1\iota_2}a_{\iota_2\iota_3}a_{\iota_3\iota_4}\ldots a_{\iota_{\varrho-1}\iota_\varrho}a_{\iota_\varrho\iota_1} = a_{\iota_\varrho\iota_{\varrho-1}}a_{\iota_{\varrho-1}\iota_{\varrho-2}}\ldots a_{\iota_3\iota_2}a_{\iota_2\iota_1}a_{\iota_1\iota_\varrho} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{l-1,l}a_{ll} = a_{l,l-1}\ldots a_{43}a_{32}a_{21}a_{1l}. \end{cases}$$

Wenn umgekehrt diese Gleichungen für jede Wahl der Nummern $\iota_1\iota_2\ldots$ erfüllt sind, so ist auch jedes $M_k = M_{l-k}$.

Wenn die Gleichung $s^l + M_1 s^{l-1} + \cdots + 1 = 0$ eine Wurzel $= +1$ hat, so muss dieselbe eine Doppelwurzel sein. Somit müssen für dieselbe auch alle Unterdeterminanten $(l-1)^{\text{ten}}$ Grades von $|b_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}s|$ verschwinden, speciell der Coefficient von $b_{ll} - s$. Dieser stellt aber eine ganz gleich gebildete Determinante dar und daher muss auch hierin $s = 1$ eine Doppelwurzel sein. Indem man diese Betrachtung fortsetzt, gelangt man schliesslich zu dem Resultate, dass $b_{11} - s$ oder $-1 - s$ für $s = 1$ verschwindet, was nicht angeht. Somit folgt:

Die Determinante (3) *oder* (4) *kann nicht für* $s = 1$ *verschwinden.*

Für $s = 1$ geht die genannte Determinante in $|a_{\iota\varkappa}|$ über. Folglich darf auch die letztere nicht verschwinden, was man auch leicht direct aus der Forderung herleiten kann, dass die Zahl der Wurzeln ω eine endliche sein muss. Hierauf wollen wir jedoch nicht näher eingehen, vielmehr die vorstehenden Entwicklungen dazu benutzen, um bestimmte Grenzen für die Determinante $|a_{\iota\varkappa}|$ anzugeben. Da die Function $s^l + M_1 s^{l-1} + \cdots + 1$ nur für Wurzeln der Einheit verschwindet, so muss ihr Werth für $s = 1$ zwischen 0 und 2^l eingeschlossen sein. Somit ist auch die Determinante der $a_{\iota\varkappa}$ zwischen den Werthen Null und $(-2)^l$ eingeschlossen; der Werth Null muss, wie bemerkt ausgeschlossen werden. Das liefert die Sätze:

Die Determinante aus den Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ *liegt zwischen* $(-2)^l$ *und Null, und zwar kann sie den ersteren Werth erhalten, den letzteren aber nicht.*

Wählt man aus den Nummern $1 \ldots l$ *irgend* $\varrho\,(<l)$ *Nummern* $\iota_1 \ldots \iota_\varrho$ *beliebig aus und bildet die Determinante der* ϱ^2 *Grössen* $a_{\varkappa\lambda}$, *wo* $\varkappa, \lambda$ *die* ϱ *Nummern* $\iota_1 \ldots \iota_\varrho$ *annehmen können, so liegt die aus diesen Nummern gebildete Determinante zwischen* $(-2)^\varrho$ *und Null, wobei der letztere Werth ausgeschlossen ist.*

Speciell ergiebt sich hieraus für $\varrho = 2$, wenn man noch berücksichtigt, dass für gleiche Wurzeln die Unterdeterminanten verschwinden müssen:

Das Product $a_{\iota\varkappa}\, a_{\varkappa\iota}$ *kann nur die Werthe* 0, 1, 2, 3 *erhalten, und den Werth Null nur, wenn sowohl* $a_{\iota\varkappa}$ *als* $a_{\varkappa\iota}$ *verschwindet.*

Für ein ungerades l kann man (5) auch in der Form schreiben:

$$-\left\{(s^l+1) + M_1(s^{l-1}+s) + \cdots + M_{\frac{l-1}{2}}\left(s^{\frac{l+1}{2}} + s^{\frac{l-1}{2}}\right)\right\};$$

demnach ist diese Form für $s = 1$ nothwendig gleich einer geraden Zahl. Somit folgt:

Nimmt man aus den Zahlen $1 \ldots l$ eine ungerade Zahl ϱ von Marken $\iota_1 \ldots \iota_\varrho$ heraus, und bildet die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{\iota_1\iota_1} & a_{\iota_1\iota_2} & \ldots & a_{\iota_1\iota_\varrho} \\ a_{\iota_2\iota_1} & a_{\iota_2\iota_2} & \ldots & a_{\iota_2\iota_\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\iota_\varrho\iota_1} & a_{\iota_\varrho\iota_2} & \ldots & a_{\iota_\varrho\iota_\varrho} \end{vmatrix},$$

so ist deren Werth eine gerade Zahl.

Gehen wir von einer beliebigen Wurzel $\Sigma m_\iota \omega_\iota$ aus und wenden darauf die Transformation $b_{\iota\varkappa}$ an, so erhalten wir μ verschiedene Wurzeln, wenn die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $|b_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa} s| = 0$

μ^{te}, aber nicht niedrigere Wurzeln der Einheit sind. Eine beliebige hierin nicht enthaltene Wurzel führt durch dieselbe Operation wieder auf μ weitere Wurzeln u. s. w. Daher folgt der Satz:

Die Zahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist ein Vielfaches der kleinsten Zahl μ, *welche der Bedingung genügt, dass die Determinante* (3) *oder* (4) *ein Factor von* $s^\mu - 1$ *ist.*

§ 14.

Eintheilung der aus den $a_{\iota\varkappa}$ gebildeten Systeme.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir einige Definitionen aufstellen. Wählen wir aus den l Nummern $1 \ldots l$ eine kleinere Zahl ϱ aus: $\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_\varrho$, und lassen die beiden Marken $\varkappa$ und λ von $a_{\varkappa\lambda}$ sich nur über $\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_\varrho$ erstrecken, so heisst das durch diese ϱ^2 Coefficienten gebildete System ein Untersystem ϱ^{ter} Ordnung. Jedes solche Untersystem führt, wenn nicht alle seine ausserhalb der Diagonale stehenden Coefficienten Null sind, von den Wurzeln $\pm\omega_{\iota_1} \ldots \pm\omega_{\iota_\varrho}$ zu weiteren Wurzeln; diese werden als abhängig von den ϱ genannten Wurzeln bezeichnet. Dagegen sind alle andern Wurzeln, welche aus $\omega_1 \ldots \omega_l$ vermittelst des Systems l^{ter} Ordnung hergeleitet werden, unabhängig von jenen 2ϱ und den durch das Untersystem abgeleiteten Wurzeln.

Wenn $a_{\iota\varkappa} = 0$ ist, so wissen wir, dass auch $a_{\varkappa\iota} = 0$ ist. Nun ist es ganz gut möglich, dass mehrere Grössen $a_{\iota\varkappa}$ gleich Null werden, ohne dass der Charakter des Systems irgend geändert wird. Um zu einem durchgreifenden Unterschiede zu gelangen, stellen wir folgende Betrachtung an. Wir gehen von einer beliebigen Marke ι aus und suchen alle diejenigen von ι verschiedenen Marken $\iota_1, \iota_2, \iota_3 \ldots$, für welche $a_{\iota\iota_1}, a_{\iota\iota_2}, a_{\iota\iota_3} \ldots$ von Null verschieden sind. Wenn $\iota, \iota_1, \iota_2 \ldots$ noch nicht alle l Marken $1 \ldots l$ sind, so suche man jetzt alle von $\iota, \iota_1, \iota_2 \ldots$ verschiedenen Marken $\iota_{11}, \iota_{12} \ldots$ für welche $a_{\iota_1\iota_{11}}, a_{\iota_1\iota_{12}} \ldots$ nicht verschwinden; ebenso alle noch nicht gefundenen Marken $\iota_{21}, \iota_{22} \ldots$, für welche $a_{\iota_2\iota_{21}}, a_{\iota_2\iota_{22}} \ldots$ von Null verschieden sind u. s. f. Jetzt sind zwei Fälle möglich: entweder gelangt man durch Fortsetzung dieser Betrachtung zu allen l Marken oder man bleibt innerhalb einer (durch die zuerst gewählte Marke ι bestimmten) kleineren Anzahl. Ist das erstere der Fall, so wird man durch diese Operation stets zu allen Marken gelangen, von welcher Marke man auch ausgeht. Demnach ist hierdurch ein wesentlicher Unterschied der Systeme begründet: ein solches heisst *einfach*, wenn die Operation zu allen Marken führt; im anderen Falle heisst es *zusammengesetzt*. So ist das System fünfter Ordnung zusammengesetzt, wenn

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0$$

ist; ebenso ist ein System l^{ter} Ordnung zusammengesetzt, wenn die $a_{l_1}, a_{l_2} \ldots a_{l,l-1}$ sämmtlich verschwinden. Es genügt, die einfachen Systeme aufzusuchen, und diese Aufgabe wird durch folgenden Lehrsatz wesentlich erleichtert, dessen Beweis keiner Ausführung bedarf:

Ist ein System l^{ter} Ordnung einfach, so ist unter dessen l Untersystemen $(l-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mindestens eins ebenfalls einfach.

Die angegebene Eintheilung der aus den $a_{\iota\varkappa}$ gebildeten Systeme begründet eine gleiche für die zugehörigen Wurzeln. Wir gehen von einer Wurzel ω_ι aus, suchen alle Wurzeln $m_1\omega_1 + \cdots + m_l\omega_l$, für welche m_ι von Null verschieden ist, und merken uns diejenigen Wurzeln $\omega_{\iota_1}, \omega_{\iota_2} \ldots$, für welche bei nicht verschwindendem m_ι auch $m_{\iota_1}, m_{\iota_2} \ldots$ von Null verschieden sind. Dieselbe Betrachtung stellen wir jetzt für $m_{\iota_1}, m_{\iota_2} \ldots$ an und fahren damit fort, bis wir auf diesem Wege nicht mehr zu neuen Marken gelangen. Jenachdem das System der a einfach oder zusammengesetzt ist, kommen wir hierdurch zu allen l Marken oder bleiben innerhalb einer kleineren Anzahl.

Zu einer weiteren Eintheilung gelangt man durch folgende Betrachtung. Es wird sich im folgenden zeigen, dass die charakteristischen Eigenschaften der $2l$ Wurzeln $\omega_1, -\omega_1 \ldots \omega_l, -\omega_l$ auch jeder Wurzel $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_l\omega_l$ zukommen, wofern die letztere durch das zwischen den ersten Wurzeln bestehende System $a_{\iota\varkappa}$ gefordert ist. Sobald aber das System der $a_{\iota\varkappa}$ für die ersten $2l$ Wurzeln gegeben ist und alle durch dasselbe geforderten weiteren Wurzeln bestimmt sind, kann man unmittelbar für irgend zwei Wurzeln ω_{α_1} und ω_{α_2} die Coefficienten $a_{\alpha_1\alpha_2}$ und $a_{\alpha_2\alpha_1}$ bestimmen. Wählt man nun irgend l von einander unabhängige aus den Wurzeln aus und sucht das zugehörige System der $a'_{\iota\varkappa}$, so sind bei den getroffenen Festsetzungen nur zwei Fälle möglich: a) die Gesammtheit der Wurzeln fällt in beiden Fällen zusammen, b) der zweite Fall liefert nur einen Theil der im ersten Falle erhaltenen Wurzeln. Der erste Fall erfordert keineswegs, dass die Systeme $a_{\iota\varkappa}$ und $a'_{\iota\varkappa}$ identisch werden. So liefert die Voraussetzung, dass für $l = 3$ bei ungleichen $\iota, \varkappa$ jedes $a_{\iota\varkappa} = -1$ ist, die Wurzeln:

$$\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3, \pm(\omega_1-\omega_2), \pm(\omega_2-\omega_3), \pm(\omega_3-\omega_1).$$

Setzt man aber

$$\omega_1' = \omega_1,\ \omega_2' = \omega_2,\ \omega_3' = \omega_2 - \omega_3,$$

so wird

$$a'_{12} = a'_{21} = a'_{23} = a'_{32} = -1,\ \ a'_{13} = a'_{31} = 0;$$

und das zweite System führt zu den Wurzeln:

$$\pm\omega_1', \pm\omega_2', \pm\omega_3', \pm(\omega_1'-\omega_2'), \pm(\omega_2'-\omega_3') \pm(\omega_1'-\omega_2'+\omega_3'),$$

welche den früher angegebenen gleich sind. In diesem und in ähnlichen

Fällen, wo die beiden Systeme zu denselben Wurzeln führen, heissen sie *äquivalent*.

Man kann dasselbe auch auf folgende Weise ausdrücken. Für das System $a_{\iota\varkappa}$ gehe man von den Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_l$ aus, für $a'_{\iota\varkappa}$ von $\omega_1' \dots \omega_l'$. Wenn es nun möglich ist, durch eine homogene lineare Transformation, welche $\omega_1 \dots \omega_l$ in $\omega_1' \dots \omega_l'$ umwandelt, alle Wurzeln des einen Systems in die des andern umzuwandeln, so heissen die Wurzelsysteme und damit die Systeme $a_{\iota\varkappa}$ und $a'_{\iota\varkappa}$ äquivalent.

§ 15.

Angabe aller einfachen, nicht äquivalenten Systeme.

Da die zusammengesetzten Systeme von selbst in einfache zerfallen, so genügt es, nur die einfachen Systeme anzugeben. Auch werden wir äquivalente Systeme als identisch betrachten und demnach die vielleicht nicht unwichtige Frage nach der Umgestaltung eines Systems in ein äquivalentes nicht untersuchen. Zwar würde ein tieferes Eingehen auf die im § 13 kurz entwickelte Theorie ohne Zweifel die folgende Untersuchung wesentlich erleichtern; aber da die folgenden Entwicklungen, abgesehen von der zunächst vorliegenden Frage, auch für einige Sätze der §§ 17 und 18 nicht entbehrt werden können, so wollen wir uns mit den aufgefundenen Resultaten begnügen und untersuchen, ob dieselben uns zu allen Systemen hinführen.

Für $l = 2$ muss, damit das System einfach ist, das Product $a_{12} a_{21}$ einen der Werthe 1, 2, 3 haben. Diese drei Fälle sind auch sämmtlich möglich, so dass wir den Satz erhalten:

Für $l = 2$ giebt es drei Systeme der Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$, welche wir als II A), II B), II C) unterscheiden wollen. Für II A) können wir $a_{12} = a_{21} = -1$ setzen, so dass wir die Wurzeln erhalten:

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm(\omega_1 - \omega_2).$$

Für II B) ist: $a_{12} = -1$, $a_{21} = -2$, und die Wurzeln sind:

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm (\omega_1 - \omega_2), \pm (2\omega_1 - \omega_2).$$

Für II C) ist $a_{12} = -1$, $a_{21} = -3$, so dass die Wurzeln vorkommen:

$$\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm(\omega_1 - \omega_2), \pm(2\omega_1 - \omega_2), \pm(3\omega_1 - \omega_2), \pm(3\omega_1 - 2\omega_2).$$

Die Determinante (3) *oder* (4) § 13 *liefert ausgerechnet im Falle A): $s^2 + s + 1$, im Falle B): $s^2 + 1$, und im Falle C): $s^2 - s + 1$; dieselbe verschwindet bei A) für dritte, bei B) für vierte und bei C) für sechste Wurzeln der Einheit.*

Um die einfachen Systeme dritter Ordnung zu erhalten, gehen wir von einem der drei einfachen Systeme zweiter Ordnung aus und bestimmen die Coefficienten $a_{13}, a_{31}, a_{23}, a_{32}$ so, dass sie den Forderungen des § 13 genügen. Diese Herleitung lässt sich aber im wesentlichen in derselben Weise für ein beliebiges l durchführen. Wir nehmen also jetzt an, wir wären, entsprechend dem Falle II A), für die Zahl $l-1$ zu einem Systeme gelangt, in welchem für $\iota, \varkappa = 1 \ldots l-1$ und $\iota \gtrless \varkappa$ jedesmal $a_{\iota\varkappa} = -1$ ist, und wollen untersuchen, welche Werthe wir den $a_{l\varkappa}$ und $a_{\varkappa l}$ noch beilegen können. Dann gelten in Folge der Gleichungen (6) § 13 die Beziehungen:

(1) $$a_{l\varkappa} a_{\lambda l} = a_{\varkappa l} a_{l\lambda}$$

für irgend zwei Marken $\varkappa, \lambda$. Unter den $l-1$ Producten $a_{\varkappa l}\, a_{l\varkappa}$ mögen α gleich Null sein, und wir erinnern daran, dass in jedem solchen Producte beide Factoren gleich Null sind. Alle nicht verschwindenden Producte haben in Folge von (1) denselben Werth, welcher mit m bezeichnet werden soll. Zugleich ist $a_{l\varkappa} = a_{l\lambda}$ und $a_{\varkappa l} = a_{\lambda l}$, wofern keiner dieser Coefficienten verschwindet. Bezeichne ich die Determinante der l^2 Coefficienten a mit Δ, so ist:

$$\begin{aligned}(-1)^l \Delta &= 2l - (l-1) \sum^{\varkappa} a_{l\varkappa} a_{\varkappa l} + \sum_{\varkappa\lambda} a_{l\varkappa}\, a_{\lambda l} \\ &= 2l - (l-1)(l-1-\alpha)m + (l-\alpha-1)(l-\alpha-2)m \\ &= 2l - (l-\alpha-1)(\alpha+1)m.\end{aligned}$$

Bei constanten Werthen von l und m wird die linke Seite abnehmen, wenn α von 0 bis $\frac{l-2}{2}$ zunimmt, und dann bei wachsendem α wieder zunehmen. Soll daher die rechte Seite positiv bleiben, so muss für $l > 8$ die Zahl α einen der vier Werthe 0, 1, $l-3$, $l-2$ annehmen; für $l < 6$ sind damit alle für α möglichen Werthe angegeben; für $l = 6, 7, 8$ kommen noch die Werthe $\alpha = 2$, $l = 3$ hinzu. Ausserdem sieht man, dass für $\alpha = 0$ oder $= l-2$ für m die beiden Werthe 1 und 2, für die andern Werthe von α nur der Werth 1 zulässig ist.

Wir sehen zu, ob den so gefundenen Coefficienten jedesmal ein geschlossenes System von Wurzeln entspricht, und ob einige dieser Systeme äquivalent sind.

Nehmen wir zunächst $\alpha = 0$, $m = 1$, so können auch die hinzukommenden $a_{\varkappa l}$ und $a_{l\varkappa}$ gleich -1 genommen werden. Die Wurzeln sind $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_l$, $\omega_1 - \omega_2 \ldots \omega_\iota - \omega_l \ldots \omega_{l-1} - \omega_l$ (wo die entgegengesetzt gleichen Wurzeln, wie auch im Folgenden nicht mit aufgeführt sind). Ersetzen wir ω_l durch $\omega_\varkappa - \omega_l$, so wird $a'_{\varkappa l} = a'_{l\varkappa} = -1$, aber für $\varkappa \gtrless \lambda$ immer: $a'_{\lambda l} = a'_{l\lambda} = 0$. Die Annahme: $\alpha = l-2$, $m = 1$ liefert also ein mit dem vorigen äquivalentes System.

Wir untersuchen jetzt $\alpha = 0$, $m = 2$, und zwar zunächst den Fall, dass jedes $a_{l\varkappa} = -1$, $a_{\varkappa l} = -2$ ist. Zu den Wurzeln

$\omega_1 \ldots \omega_l$, $\omega_\varkappa - \omega_\lambda$ kommen dann noch hinzu: $\omega_l - \omega_\varkappa$, $2\omega_l - \omega_\varkappa$, $2\omega_l - \omega_\varkappa - \omega_\lambda$. Die Ersetzung von ω_l durch $2\omega_l - \omega_\varkappa$ oder $2\omega_l - \omega_\varkappa - \omega_\lambda$ ändert die $a_{l\varkappa}$ und $a_{\varkappa l}$ nicht; wenn man aber statt ω_l die Wurzel $-\omega_l + \omega_\varkappa$ wählt, so wird $a'_{\varkappa l} = -2$, $a'_{l\varkappa} = -1$, $a'_{\lambda l} = a'_{l\lambda} = 0$; somit führt die Annahme $\alpha = l - 2$ wieder auf dieselben Wurzeln.

Wenn für $\alpha = 0$, $m = 2$ jedes $a_{l\varkappa} = -2$, $a_{\varkappa l} = -1$ ist, so müssen ausser $\omega_1 \ldots \omega_l$ und $\omega_\varkappa - \omega_\lambda$ noch die Wurzeln vorhanden sein: $\omega_\varkappa - \omega_l$, $2\omega_\varkappa - \omega_l$, $\omega_\varkappa + \omega_\lambda - \omega_l$. Vertauscht man hier ω_l durch $2\omega_\varkappa - \omega_l$, so wird $a'_{\varkappa l} = -1$, $a'_{l\varkappa} = -2$, dagegen für $\varkappa \gtrless \lambda$: $a'_{\lambda l} = 0$.

Endlich gehen wir zu der Annahme über, dass $\alpha = 1$ und damit $m = 1$ ist. Es sei $a_{1l}\, a_{l1} = \cdots = a_{l-2,l}\, a_{l,l-2} = 1$, $a_{l,l-1} = a_{l-1,l} = 0$. Zu den durch das Untersystem $(l-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmten Wurzeln: $\omega_1 \ldots \omega_l$, $\omega_\iota - \omega_\varkappa$ kommen dann noch folgende hinzu:

$$\omega_\mu - \omega_l,\ \omega_\mu - \omega_{l-1} - \omega_l,\ \omega_\mu + \omega_\nu - \omega_{l-1} - \omega_l,$$

wo μ und ν zwei Nummern der Reihe $1 \ldots l-2$ bezeichnen. Ersetzt man ω_l durch $\omega_\nu - \omega_l$, so wird $a'_{l\nu} = a'_{\nu l} = -1$, $a'_{l,l-1} = a'_{l-1,l} = -1$, dagegen $a'_{l\mu} = 0$. Daher führt die Annahme $\alpha = l - 3$ zu einem äquivalenten System.

Somit sind wir zu dem Satze gelangt:

Für jedes $l > 3$ giebt es mindestens vier wesentlich verschiedene einfache Systeme der Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$. Dieselben können in folgender Weise charakterisirt werden:

Im System A) ist jedes ausserhalb der Diagonale stehende $a_{\iota\varkappa}$ gleich -1; für $\mu, \nu = 1 \ldots l$ sind die Wurzeln $\pm\omega_\mu$, $\pm(\omega_\mu - \omega_\nu)$.

Für das System B) setze man, wenn μ und ν ungleiche Nummern der Reihe $\iota \ldots l-1$ sind:

$$a_{\mu\nu} = -1,\ a_{l\mu} = -1,\ a_{\mu l} = -2.$$

Dann sind die vorkommenden Wurzeln:

$$\pm\omega_1 \cdots \pm\omega_l,\ \pm(\omega_\mu - \omega_\nu),\ \pm(\omega_\mu - \omega_l),\ \pm(2\omega_l - \omega_\mu),$$
$$\pm(2\omega_l - \omega_\mu - \omega_\nu).$$

Für das System C) setze man $a_{\mu\nu} = -1$, $a_{l\mu} = -2$, $a_{\mu l} = -1$, wenn wieder μ, ν verschiedene Nummern der Reihe $1 \ldots l-1$ bezeichnen. Dann sind die Wurzeln

$$\pm\omega_1 \cdots \pm\omega_l,\ \pm(\omega_\mu - \omega_\nu),\ \pm(\omega_\mu - \omega_l),\ \pm(2\omega_\mu - \omega_l),$$
$$\pm(\omega_\mu + \omega_\nu - \omega_l).$$

Für das System D) sollen μ, ν verschiedene Nummern der Reihe $1 \ldots l-2$ sein, und

$$a_{\mu\nu} = -1,\ a_{\mu,l-1} = a_{l-1,\mu} = -1,\ a_{\mu l} = a_{l\mu} = -1,\ a_{l-1,l} = a_{l,l-1} = 0.$$

Das System führt zu den Wurzeln:

$$\pm\omega_1\cdots\pm\omega_l,\ \pm(\omega_\mu-\omega_\nu),\ \pm(\omega_\mu-\omega_{l-1}),\ \pm(\omega_\mu-\omega_l),$$
$$\pm(\omega_\mu-\omega_{l-1}-\omega_l),\ \pm(\omega_\mu+\omega_\nu-\omega_{l-1}-\omega_l).$$

Unter den Untersystemen $(l-1)^{ter}$ Ordnung ist mindestens eins entsprechend der Form A) gebildet.

Für $l=3$ wird das System D) äquivalent zu A).

Die Determinante (3) § 13 *giebt für A) ausgerechnet:*

$$s^l+s^{l-1}+s^{l-2}+\cdots+s+1,$$

für B) und C): s^l+1, *für D):* $(s+1)(s^{l-1}+1)$; *sie verschwindet also bei A) für* $(l+1)^{te}$, *bei B) und C) für* $2l^{te}$, *bei D) für* $(2l-2)^{te}$ *Wurzeln der Einheit.*

Indem wir für $l=6,7,8$ die Voraussetzung $\alpha=2$ machen und die dadurch bedingten Wurzeln aufsuchen, erkennen wir, dass die Annahme $a=l-4$ zu einem äquivalenten Systeme führt. Somit erhalten wir folgenden Satz:

Für $l=6$ giebt es ausser den Systemen A), B), C), D) noch ein System VI E), welches in folgender Weise gebildet ist; für $\iota,\varkappa\cdots=1,2,3$ *ist* $a_{\iota\varkappa}=-1$, $a_{\iota 4}=a_{\iota 5}=a_{\iota 6}=a_{4\iota}=a_{5\iota}=a_{6\iota}=-1$, $a_{45}=a_{54}=-1$, $a_{46}=a_{64}=a_{56}=a_{65}=0$. *Dasselbe führt zu folgenden Wurzeln (und den entgegengesetzt gleichen):*

$$\omega_1,\ldots\omega_6,\ \omega_\iota-\omega_\varkappa,\ \omega_\iota-\omega_4,\ \omega_\iota-\omega_5,\ \omega_\iota-\omega_6,\ \omega_4-\omega_5,$$
$$-\omega_\iota+\omega_4+\omega_6,\ -\omega_\iota+\omega_5+\omega_6,\ -\omega_\iota-\omega_\varkappa+\omega_4+\omega_6,$$
$$-\omega_\iota-\omega_\varkappa+\omega_5+\omega_6,\ -\omega_\iota-\omega_\varkappa+\omega_4+\omega_5+\omega_6,$$
$$-\omega_1-\omega_2-\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6,\ -\omega_1-\omega_2-\omega_3+\omega_4+\omega_5+2\omega_6.$$

Für $l=7$ ist ein System VII E) für $\iota,\varkappa\cdots=1\cdots 4$ *in folgender Weise gebildet:* $a_{\iota\varkappa}=-1$, $a_{\iota 5}=a_{\iota 6}=a_{\iota 7}=a_{5\iota}=a_{6\iota}=a_{7\iota}=-1$, $a_{56}=a_{65}=-1$, $a_{57}=a_{67}=a_{75}=a_{76}=0$. *Dann müssen die Wurzeln vorkommen:*

$$\omega_1\ldots\omega_7,\ \omega_\iota-\omega_\varkappa,\ \omega_\iota-\omega_5,\ \omega_\iota-\omega_6,\ \omega_5-\omega_6,\ \omega_\iota-\omega_7,$$
$$-\omega_\iota+\omega_5+\omega_7,\ -\omega_\iota+\omega_6+\omega_7,\ -\omega_\iota-\omega_\varkappa+\omega_5+\omega_7,$$
$$-\omega_\iota-\omega_\varkappa+\omega_6+\omega_7,\ -\omega_\iota-\omega_\varkappa+\omega_5+\omega_6+\omega_7,$$
$$-\omega_\iota-\omega_\varkappa-\omega_\lambda+\omega_5+\omega_6+\omega_7,\ -\omega_\iota-\omega_\varkappa-\omega_\lambda+\omega_5+\omega_6+2\omega_7,$$
$$\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4-\omega_5-\omega_6-2\omega_7,\ \omega_1+\cdots+\omega_4-2\omega_5-\omega_6-2\omega_7,$$
$$\omega_1+\cdots+\omega_4-\omega_5-2\omega_6-2\omega_7.$$

Für $l=8$ bildet man ein System VIII E) für $\iota,\varkappa\cdots=1\cdots5$ *durch die Festsetzungen:*

$$a_{\iota\varkappa}=-1,\ a_{\iota 6}=a_{\iota 7}=a_{\iota 8}=a_{6\iota}=a_{7\iota}=a_{8\iota}=-1,\ a_{67}=a_{76}=-1,$$
$$a_{68}=a_{86}=a_{78}=a_{87}=0.$$

Hier kommen folgende Wurzeln vor:

$\omega_1 \dots \omega_8$, $\omega_\iota - \omega_\varkappa$, $\omega_\iota - \omega_6$, $\omega_6 - \omega_7$, $\omega_\iota - \omega_7$, $\omega_\iota - \omega_8$, $\omega_\iota - \omega_6 - \omega_8$,
$\omega_\iota - \omega_7 - \omega_8$, $\omega_\iota + \omega_\varkappa - \omega_6 - \omega_8$, $\omega_\iota + \omega_\varkappa - \omega_7 - \omega_8$,
$\omega_\iota + \omega_\varkappa - \omega_6 - \omega_7 - \omega_8$, $\omega_\iota + \omega_\varkappa + \omega_\lambda - \omega_6 - \omega_7 - \omega_8$,
$\omega_\iota + \omega_\varkappa + \omega_\lambda - \omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8$, $\omega_\iota + \omega_\varkappa + \omega_\lambda + \omega_\mu - \omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8$,
$\omega_\iota + \omega_\varkappa + \omega_\lambda + \omega_\mu - 2\omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8$,
$\omega_\iota + \omega_\varkappa + \omega_\lambda + \omega_\mu - \omega_6 - 2\omega_7 - 2\omega_8$,
$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 2\omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8$,
$\omega_1 + \cdots + \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7 - 2\omega_8$,
$\omega_1 + \cdots + \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7 - 2\omega_8$,
$\omega_1 + \cdots + \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7 - 3\omega_8$,
$\omega_1 + \cdots + \omega_5 - 2\omega_6 - \omega_7 - 3\omega_8$,
$\omega_1 + \cdots + \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7 - 3\omega_8$,
$\omega_\iota + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7 - 3\omega_8$.

Die Determinante (3) § 13 *liefert den Werth für VI E):*

$$s^6 + s^5 - s^3 + s + 1,$$

für VII E):

$$(s+1)(s^6 - s^3 + 1),$$

für VIII E):

$$s^8 + s^7 - s^5 - s^4 - s^3 + s + 1;$$

dieselbe verschwindet im ersten Falle für zwölfte, im zweiten für achtzehnte und im letzten für dreissigste Wurzeln der Einheit.

Wir wollen jetzt annehmen, aus $(l-1)^2$ Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ sei ein System in der durch (B) bezeichneten Weise gebildet, und untersuchen, welche Werthe wir den Coefficienten $a_{\varkappa l}$ und $a_{l\varkappa}$ dann beilegen können. Wenn dann $\varkappa$, λ ungleiche Nummern der Reihe $1 \dots l-2$ bezeichnen, so müssen nach (6) § 13 die Gleichungen bestehen:

$$a_{\varkappa l} a_{l\lambda} = a_{\lambda l} a_{l\varkappa}, \quad a_{l,l-1} a_{\varkappa l} = 2 a_{l-1,l} a_{l\varkappa},$$

Ein nicht verschwindendes Product $a_{\varkappa l} a_{l\varkappa}$ sei gleich m; dann hat jedes nicht verschwindende Product denselben Werth. Ferner ist dann $a_{l-1,l} a_{l,l-1} = \frac{2}{m}$ oder $= 0$, und zugleich $a_{l-1,l} = -1$ oder $= 0$. Bezeichnen wir wieder die Determinante der a mit Δ, so ist:

$$(-1)^l \Delta = 4 - 2a_{1l}a_{l1} - 2a_{2l}a_{l2} - \cdots - 2a_{l-2,l}a_{l,l-2} - (l-1)a_{l,l-1}a_{l-1,l}$$
$$+ 4a_{l-1,l}(a_{l1} + \cdots + a_{l,l-2}).$$

Wenn α angiebt, wie viele der Coefficienten $a_{l_1} \dots a_{l,l-2}$ verschwinden, so hat die linke Seite der vorstehenden Gleichung bei nicht-verschwindendem $a_{l,l-1}$ für $m=1$ den Werth $2-2\alpha$, für $m=2$ den Werth $5-l$, endlich bei verschwindendem $a_{l,l-1}$ den Werth $4-2m(l-2-\alpha)$. Das erste ist nur möglich für $\alpha = 0$ und führt auf B); der dritte Fall wird hiermit identisch (denn nachdem man in B) zunächst l mit $l-1$ vertauscht hat, kann man ω_l' durch $\omega_l - 2\omega_{l-1}$ ersetzen). Der zweite Fall kann nur für $l=4$ einen positiven Werth für die rechte Seite ergeben und liefert dann:

$$a_{14} = a_{24} = -2, \quad a_{41} = a_{42} = a_{34} = a_{43} = -1.$$

Ebenso liefert die Annahme, dass ein aus $(l-1)^2$ Coefficienten bestehendes nach der Form C) gebildetes System einem Systeme l^{ter} Ordnung angehören soll, nur für $l=4$ ein neues System

$$a_{41} = a_{42} = -2, \quad a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{43} = -1.$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass das aus den ersten $(l-1)^2$ Coefficienten gebildete Untersystem $l-1^{\text{ter}}$ Ordnung die Form D) hat. Wenn also für $\iota, \varkappa < l$ jedes $a_{\iota\varkappa} = -1$ ist mit Ausnahme von

$$a_{l-1,l-2} = a_{l-2,l-1} = 0,$$

so muss sein:

$$a_{\iota l}\, a_{l\varkappa} = a_{l\iota}\, a_{\varkappa l}.$$

Für die Determinante Δ ergiebt sich der Werth:

$$\begin{aligned}(-1)^l\Delta = 8 - 4a_{1l}\,a_{l1} - \cdots - 4a_{l-3,l}\,a_{l,l-3} - (l-1)\,a_{l,l-2}\,a_{l-2,l} \\ -(l-1)\,a_{l,l-1}\,a_{l-1,l} + 4(a_{l,l-2} + a_{l,l-1})\,(a_{1l} + \cdots + a_{l-3,l}) \\ -2(l-3)\,a_{l,l-2}\,a_{l-1,l}.\end{aligned}$$

Wieder soll α angeben, wie viele der Coefficienten $a_{1l} \ldots a_{l-3,l}$ verschwinden und m soll den Werth eines nicht-verschwindenden Productes $a_{\varkappa l}\, a_{l\varkappa}$ bezeichnen. Wenn $a_{l,l-1}$ und $a_{l,l-2}$ beide von Null verschieden sind, so ist der Werth der rechten Seite $8 - 4m - 4\alpha m$, so dass $\alpha = 0$, $m = 1$ sein muss; ist $a_{l,l-1}$ oder $a_{l,l-2}$ gleich Null, so ist der Werth $8 - (l-1)m$; für $a_{l,l-1} = a_{l,l-2} = 0$ ist er $8 - 4(l-3-\alpha)m$. Von diesen Fällen ist der erste bereits angegeben; der dritte ist damit äquivalent. Der zweite Fall kann nur für $l = 6, 7, 8$ eintreten; wenn dabei $\alpha = 0$ ist, so kommen wir zu den Formen VI E, VII E und VIII E. Ein anderer Werth von α führt aber zu keinem neuen System; ersetzt man z. B. in VI E die ω_5 durch $\omega_4 - \omega_5$, so wird $a_{51}' = a_{52}' = a_{53}' = 0$; nimmt man $-\omega_1 + \omega_5 + \omega_6$ als ω_5', so wird $a_{51}' = 0$, $a_{52}' = a_{53}' = -1$; für $-\omega_1 - \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$ wird $a_{51}' = a_{52}' = 0$, $a_{53}' = -1$, woraus die Aequivalenz leicht ersehen wird. Somit erhalten wir folgende Sätze:

Für $l = 4$ giebt es ausser den vier angegebenen Systemen noch die beiden folgenden:

IV E): $a_{\iota\iota} = -2$, $a_{\iota\varkappa} = -1$ mit Ausnahme von

$$a_{14} = a_{24} = a_{13} = a_{23} = -2.$$

Dazu gehören die Wurzeln:

$\omega_1 \ldots \omega_4$, $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_1 - \omega_3$, $\omega_1 - 2\omega_3$, $\omega_1 - \omega_4$, $\omega_1 - 2\omega_4$,
$\omega_2 - \omega_3$, $\omega_2 - 2\omega_3$, $\omega_2 - \omega_4$, $\omega_2 - 2\omega_4$, $\omega_3 - \omega_4$, $\omega_1 - \omega_3 - \omega_4$,

$\omega_2-\omega_3-\omega_4,\ \omega_1+\omega_2-2\omega_3,\ \omega_1+\omega_2-2\omega_4,\ \omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4,$
$\omega_1+\omega_2-2\omega_3-\omega_4,\ \omega_1+\omega_2-\omega_3-2\omega_4,\ 2\omega_1+\omega_2-2\omega_3-2\omega_4,$
$\omega_1+2\omega_2-2\omega_3-2\omega_4.$

Für IV F) sollen $a_{\iota\iota}=-2$, $a_{\iota\varkappa}=-1$ sein mit Ausnahme von $a_{31}=a_{41}=a_{32}=a_{42}=-2$. Dann bekommt man die Wurzeln:

$\omega_1\ldots\omega_4,\ \omega_1-\omega_2,\ \omega_1-\omega_3,\ 2\omega_1-\omega_3,\ \omega_1-\omega_4,\ 2\omega_1-\omega_4,$
$\omega_2-\omega_3,\ 2\omega_2-\omega_3,\ \omega_2-\omega_4,\ 2\omega_2-\omega_4,\ \omega_3-\omega_4,\ \omega_1+\omega_2-\omega_3,$
$\omega_1+\omega_2-\omega_4,\ 2\omega_1-\omega_3-\omega_4,\ 2\omega_2-\omega_3-\omega_4,\ \omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4,$
$2\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4,\ \omega_1+2\omega_2-\omega_3-\omega_4,\ 2\omega_1+2\omega_2-\omega_3-\omega_4,$
$2\omega_1+2\omega_2-2\omega_3-\omega_4,\ 2\omega_1+2\omega_2-\omega_3-2\omega_4.$

Die Determinante (3) § 13 *liefert ausgerechnet:* s^4-s^2+1 *und verschwindet für zwölfte Wurzeln der Einheit.*

Mit Ausnahme der Systeme IV E) und IV F) hat jedes System l^{ter} Ordnung, wofern es ein Untersystem $l-1^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form B), C), D) hat, nothwendig auch ein solches von der Form A).

Die vorangehende Untersuchung zeigt, dass für $l=3$ ausser den Systemen A), B), C) kein weiteres einfaches vorkommen kann, wenn nicht dessen sämmtliche Producte $a_{\iota\varkappa}\,a_{\varkappa\iota}$ gleich 0 oder 3 sind; man übersieht aber unmittelbar, dass das für ein einfaches System nicht angeht. Somit giebt es auch für $l=4$ nur die sechs einfachen Systeme A) bis F), und da die Systeme IV E) und IV F) in keinem einfachen Systeme fünfter Ordnung vorkommen können, so giebt es für $l=5$ nur die vier einfachen Systeme A), B), C), D), zu denen für $l=6$ nur noch VI E) hinzutritt. Auch zeigt die Untersuchung unmittelbar, dass für $l=7$ zu den aufgestellten nur dann weitere Systeme hinzukommen können, wenn deren einfache Untersysteme sechster Ordnung sämmtlich mit VI E) äquivalent sind. Dass das nicht möglich ist, kann auf mannigfaltige Weise gezeigt werden. Wir theilen einen Beweis mit, welcher sich unmittelbar auf die Fälle $l=8$ und $l=9$ überträgt.

Zu dem Ende vertauschen wir zunächst in VI E) die Marke 1 mit 7; dann ist $a_{27}=a_{37}=a_{47}=a_{57}=a_{67}=-1$. Wir wählen statt ω_7 eine von $\omega_2\ldots\omega_6$ unabhängige, in ω_4 und ω_5 symmetrische Wurzel; für $\omega_2-\omega_7$ wird

$$a_{27}=-1,\quad a_{37}=\cdots=a_{67}=0;$$

für $\omega_6-\omega_7$ wird

$$a_{27}=a_{37}=0,\ a_{47}=a_{57}=1,\ a_{67}=-1;$$

für $-\omega_7-\omega_2+\omega_4+\omega_5+\omega_6$ wird

$$a_{27}=0,\ a_{37}=a_{47}=a_{57}=-1,\ a_{67}=0;$$

für $\omega_7 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6$ wird

$$a_{27} = a_{37} = -1, \; a_{47} = a_{57} = 0, \; a_{67} = -1;$$

endlich für $-\omega_7 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + 2\omega_6$ wird

$$a_{27} = a_{37} = a_{47} = a_{57} = 0, \; a_{67} = -1.$$

Nun legen wir für das aus den sechs ersten Marken gebildete Untersystem genau die Form VI E) zu Grunde und suchen die $a_{17}, a_{71} \ldots$ so zu bestimmen, dass jedes weitere Untersystem sechster Ordnung entweder zusammengesetzt oder mit VI E) äquivalent ist. Lassen wir die Marke 6 weg, so erkennen wir, dass von den fünf Producten $a_{17} a_{71}, \ldots a_{57} a_{75}$ entweder zwei oder alle verschwinden müssen. Indem wir aber eine der Marken 5 oder 4 weglassen, erkennen wir aus der mit der Form D) angestellten Untersuchung, dass 1) $a_{76} a_{67}$ oder $a_{75} a_{57}$ und 2) $a_{76} a_{67}$ oder $a_{74} a_{47}$ verschwinden muss. Endlich zeigt die soeben vorgenommene Vertauschung von 1 mit 7 und von ω_7 mit andern Wurzeln, welche Formen nach Weglassung der Marke 1 (und entsprechend der Marke 2 und 3) noch vorkommen können. Wählt man $a_{67} = a_{76} = -1$, so muss $a_{57} = a_{47} = 0$ sein, und zugleich $a_{17} = a_{27} = a_{37}$ entweder $= 0$ oder $= -1$ sein; beide Fälle sind aber auszuschliessen, da die Determinante aus allen $a_{\iota\varkappa}$ alsdann verschwindet. Wählt man aber $a_{67} = 0$, $a_{47} = a_{57} = -1$, so müssen erstens zwei der Coefficienten a_{17}, a_{27}, a_{37} gleich Null sein und zweitens muss von je zweien dieser Coefficienten jedesmal einer verschwinden, was nicht möglich ist. Es giebt also für $l = 7$ nur die aufgestellten Systeme.

In gleicher Weise kann der entsprechende Satz für $l = 8$ bewiesen werden. Wir legen für das durch die sieben ersten Marken gegebene Untersystem die Form VII E) zu Grunde. Um zu erkennen, welche Formen für das durch Auslassung der Marke 1 bestimmte Untersystem noch möglich sind, vertauschen wir in VII E) die Marke 1 mit 8 und wählen dann für ω_8 alle diejenigen Wurzeln, welche unter Beibehaltung der $\omega_2 \ldots \omega_7$ noch möglich sind und in denen ω_5 und ω_6 symmetrisch vorkommen. Für ω_8 selbst wird $a_{28} = \cdots = a_{78} = -1$, für $\omega_2 - \omega_8$ wird $a_{28} = -1$, $a_{38} = \cdots = a_{78} = 0$, für $\omega_7 - \omega_8$ wird

$$a_{28} = a_{38} = a_{48} = 0, \; a_{58} = a_{68} = 1, \; a_{78} = -1,$$

für $-\omega_8 - \omega_2 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7$ wird

$$a_{28} = 0, \; a_{38} = a_{48} = a_{58} = a_{68} = -1, \; a_{78} = 0,$$

für $\omega_8 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_5 - \omega_6 - \omega_7$ wird

$$a_{28} = a_{38} = -1, \; a_{48} = a_{58} = a_{68} = 0, \; a_{78} = -1,$$

für $-\omega_8 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_5 + \omega_6 + 2\omega_7$ wird

$$a_{28} = a_{38} = 0, \; a_{48} = -1, \; a_{58} = a_{68} = 0, \; a_{78} = -1,$$

und für $\omega_8 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7$:

$$a_{28} = a_{38} = a_{48} = -1, \; a_{58} = a_{68} = -1, \; a_{78} = 0.$$

Wählt man entsprechend der einen durch Weglassung je einer der Marken 5 und 6 erkannten Möglichkeit $a_{78} = -1$, $a_{58} = a_{68} = 0$, so verlangt die durchgeführte Aufstellung, dass, nachdem aus den vier Coefficienten a_{18}, a_{28}, a_{38}, a_{48} irgend drei ausgewählt sind, jedesmal zwei oder einer verschwinden müssen; das ist aber mit der durch Weglassung der Marke 7 sich ergebenden Forderung unvereinbar, dass entweder diese vier Grössen oder nur höchstens eine von ihnen gleich Null sein muss. Für $a_{78} = 0$, $a_{58} = a_{68} = -1$ müssen zwei oder drei der Grössen a_{18}, a_{28}, a_{38}, a_{48} verschwinden, was für die durch Weglassung je einer der Marken 1, 2, 3, 4 sich ergebenden Möglichkeiten sicherlich mindestens einmal ein nicht geeignetes Untersystem liefert.

Genau dieselbe Betrachtung gilt für $l = 9$ und demnach ergeben sich folgende Sätze:

Für $l = 3$ sind nur die drei einfachen Systeme A), B), C) und ihre äquivalenten möglich; für $l = 5$ und $l > 8$ tritt nur die Form D) hinzu. Dagegen kommen alle einfachen Systeme vierter Ordnung auf eine der sechs Formen A) bis F) und die 6^{ter}, 7^{ter} und 8^{ter} Ordnung auf die fünf Formen A) bis E) hinaus.

Jedes einfache System mit Ausnahme von $IV\,E$) und $IV\,F$) hat mindestens ein Untersystem $(l-1)^{ter}$ Ordnung, welches der Form A) äquivalent ist.

Die Formen $II\,C$), $IV\,E$), $IV\,F$) und $VIII\,E$) kommen als Untersysteme in keinem einfachen Systeme vor.

§ 16.

Die einfachen Systeme der Coefficienten a und die einfachen Gruppen.

Wir gehen jetzt wieder auf § 12 zurück, allerdings ohne den letzten Lehrsatz zu berücksichtigen. Die Formel (2) desselben

(1) $$c_{\alpha\beta\gamma}(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma) = 0, \quad c_{\alpha\beta\varrho}(\omega_\alpha + \omega_\beta) = 0,$$

wo α, β, γ Nummern der Reihe $1 \dots r - 2l$, ϱ eine der Reihe $r \dots r - l + 1$ darstellt, giebt eine Relation zwischen den Wurzeln an, welche erfüllt sein muss, wenn $(X_\alpha X_\beta)$ von Null verschieden ist, ohne festzusetzen, dass $(X_\alpha X_\beta)$ wirklich, wofern die Bedingung erfüllt wird, von Null verschieden ist. Um dies zu erkennen, müssen wir die Gleichung (6) § 12 hinzunehmen:

(2) $$\sum_0^{l-1}{}^{\nu} e_\iota^{(\nu)} \omega_\alpha^{(\nu)} = \sum{}^{\mathfrak{s}} (c_{\iota\mathfrak{s}\alpha} c_{\iota'\alpha\mathfrak{s}} - c_{\iota\alpha\mathfrak{s}} c_{\iota'\mathfrak{s}\alpha}).$$

Unter Anwendung der Abkürzung (8) § 12:

(3) $$\sum{}^{\nu} e_\iota^{(\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} = -2 E_\iota$$

kann man diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(2') \qquad a_{\alpha\iota} E_\iota = \sum (c_{\iota\varkappa\alpha} c_{\iota'\alpha\varkappa} - c_{\iota\alpha\varkappa} c_{\iota'\varkappa\alpha}).$$

Hier sind $\iota, \varkappa, \iota', \varkappa', \ldots$ Nummern der Reihe $1 \ldots 2l$ und $\omega_\iota + \omega_{\iota'} = 0$, $(X_\iota X_{\iota'})$ von Null verschieden

$$= \sum_0^{l-1} e_\iota^{(\nu)} X_{r-\nu} f.$$

Jetzt nehmen wir an, wir fügten zu den $\pm \omega_1 \cdots \pm \omega_l$ nur diejenigen Wurzeln hinzu, welche damit wegen der $a_{\iota\varkappa}$ nothwendig verbunden sind. Dann wollen wir beweisen, dass sobald für jedes ν die Summe $\omega_\alpha^{(\nu)} + \omega_\beta^{(\nu)}$ eine neue Wurzel darstellt, $(X_\alpha X_\beta)$ von Null verschieden ist, und dass speciell für $\omega_\alpha^{(\nu)} + \omega_\beta^{(\nu)} = 0$ die Marke α statt einer der früher gewählten in die Reihe der $\iota, \varkappa \ldots$ eingereiht werden kann.

Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir zunächst an, $a_{\iota\varkappa}$ sei negativ. Dann müssen mit $\pm \omega_\iota$, $\pm \omega_\varkappa$ auch die Wurzeln

$$\pm (\omega_\iota - \omega_\varkappa), \cdots \pm (\omega_\iota + a_{\iota\varkappa} \omega_\varkappa)$$

vorkommen. Wir bezeichnen $\omega_\iota - \omega_\varkappa$ mit ω_α, $-\omega_\iota + \omega_\varkappa$ mit $\omega_{\alpha'}$. Dann sind nach (2) die $c_{\iota\varkappa'\alpha}$, $c_{\iota'\varkappa\alpha'}$, $c_{\iota\alpha'\varkappa}$, $c_{\alpha\varkappa\iota}$ von Null verschieden. Bilden wir die Jacobi'sche Relation für α, α', ι, so folgt auch, dass $(X_\alpha X_{\alpha'})$ von Null verschieden ist und durch $X_r \ldots X_{r-l+1}$ ausgedrückt werden kann. In gleicher Weise schliesst man für

$$\omega_\iota - 2\omega_\varkappa \cdots \omega_\iota + a_{\iota\varkappa} \omega_\varkappa.$$

Man kann aber den Beweis auch dadurch führen, dass man eine der $X_1 \ldots X_{2l}$ durch eine derjenigen $X_\beta f$ ersetzt, für welche $\omega_\beta = \omega_\iota - \omega_\varkappa$ und dann $= \omega_\iota - 2\omega_\varkappa \cdots$ ist. Nun erhält man aber alle aus ω_ι, $\omega_\varkappa$ gebildeten Wurzeln, welche durch das System $a_{\iota\varkappa}$ gefordert werden, indem man für jede Wurzel $\omega_\iota - \omega_\varkappa \cdots \omega_\iota + a_{\iota\varkappa} \omega_\varkappa$ die Coefficienten a in Bezug auf ω_ι und $\omega_\varkappa$ bestimmt, also je eine der Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ durch die Wurzeln $\omega_\iota - \omega_\varkappa \cdots \omega_\iota + a_{\iota\varkappa} \omega_\varkappa$ ersetzt. Auch die weiteren Wurzeln, in deren Ausdruck drei der ursprünglich gegebenen Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_l$ vorkommen, erhält man auf entsprechende Weise aus denjenigen Wurzeln, in deren Ausdruck nur ω_ι und $\omega_\varkappa$ vorkommen. So kann man fortfahren. Auch ist die Annahme, dass $a_{\iota\varkappa}$ negativ sei, nicht nothwendig, so dass wir zu dem Resultate gelangen:

Soll in einer Gruppe $p = r$ sein und sollen für eine Transformation allgemeiner Lage l Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander unabhängig und die übrigen durch das zwischen denselben bestehende System $a_{\iota\varkappa}$ gefordert sein, so kommt zu jeder Wurzel die ent-

gegengesetzt gleiche vor; der Rang der Gruppe ist gleich l, und jede Transformation gehört einer l-gliedrigen Untergruppe an, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Wählt man $X_r f$ ganz allgemein, $X_{r-1}f \dots X_{r-l+1}f$ damit vertauschbar, so können die übrigen $X_1 f \dots X_{r-l} f$ so bestimmt werden, dass für $\alpha = 1 \dots r - l$ jedesmal $(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f \dots (X_{r-l+1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(l-1)} X_\alpha f$ ist; sobald für jedes ν die Beziehung besteht: $\omega_\alpha^\nu + \omega_\beta^\nu = \omega_\gamma^\nu$, ist $(X_\alpha X_\beta)$ von Null verschieden; wenn speciell $\omega_\alpha^\nu + \omega_{\alpha'}^\nu = 0$ ist, kann $(X_\alpha X_{\alpha'})$ durch $X_r \dots X_{r-l+1}$ so dargestellt werden, dass wenigstens einer der Coefficienten von Null verschieden ist.

Jetzt setzen wir fest, dass das System der $a_{\iota\varkappa}$ einfach sein soll. Gehen wir dann von irgend einer Marke ι aus und suchen alle Marken ι_1, für welche $a_{\iota\iota_1}$ von Null verschieden ist, und dann zu ι_1 die Marken ι_{11}, für welche $a_{\iota_1\iota_{11}}$ von Null verschieden ist, so kommen wir durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu allen Marken $1 \dots l$. Nun wissen wir, dass jede Marke α auch an Stelle eines ι genommen werden kann. Suchen wir aber alle Wurzeln ω_{α_1}, welche zu beliebig gewählten ω_α addirt eine neue Wurzel ergeben und fahren damit fort, so gelangen wir nicht nur zu allen Marken $1 \dots l$, sondern auch zu allen Wurzeln. Wegen der im letzten Lehrsatze angegebenen Eigenschaft können wir jetzt auch von einem beliebigen X_α ausgehen und diejenigen $X_{\alpha_1} f$ suchen, für welche $(X_\alpha X_{\alpha_1}) \neq 0$ ist, dann zu den gefundenen $X_{\alpha_1} f$ die $X_{\alpha_{11}} f$ suchen, für welche dieselbe Forderung erfüllt ist und damit fortfahren; dann gelangen wir nicht nur zu allen $X_1 f \dots X_{r-l} f$, sondern auch zu mehr als l linearen Functionen von $X_r f \dots X_{r-l+1} f$, von denen l unter einander unabhängig sind. Daraus folgt, dass die Gruppe keine invariante Untergruppe besitzt. Alle inf. Transformationen der Gruppe zerfallen nämlich in drei Classen: a) ganz allgemeine Transformationen, b) die Haupttransformationen von zweigliedrigen Untergruppen, denen ganz allgemeine Transformationen angehören, c) solche, welche eine Mittelstellung einnehmen. Als Repräsentanten einer der ersteren können wir $X_r f$ wählen; soll diese in einer invarianten Untergruppe vorkommen, so hat die vorstehende Betrachtung ergeben, dass derselben alle Transformationen der Gruppe angehören müssen. Ebensowenig kann eine Transformation der zweiten Classe, als deren Repräsentanten wir eine $X_\alpha f$ wählen können, einer invarianten Untergruppe angehören. Stellen wir aber eine inf. Transformation der dritten Art mit allen r Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ durch die Operation $(X_\varrho X_\sigma)$ zusammen, so gelangen wir zunächst sicher zu solchen von einfacherem Ausdruck, bis wir durch Fortsetzung zu einer $X_1 f \dots X_{r-l} f$ gelangen, so dass auch dieser Fall nicht möglich ist. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Wenn in der charakteristischen Gleichung l Wurzeln beliebig sind und alle anderen eine Folge der zwischen jenen bestehenden Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ sind, und wenn dann das System dieser Coefficienten einfach ist, so ist auch die zugehörige Gruppe selbst nothwendig einfach.

Beiläufig erwähnen wir noch folgendes Resultat, auf welches wir erst im folgenden Theile näher eingehen werden:

Wenn man für eine Gruppe nur diejenigen Wurzeln zulässt, welche durch ein zusammengesetztes System von Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ gefordert werden, so besteht die Gruppe aus mehreren invarianten Untergruppen; aber die Transformationen, von denen je eine Untergruppe gebildet wird, sind nicht vertauschbar, sondern gehören einer einfachen Gruppe an.

Wenn umgekehrt eine Gruppe einfach ist, so kann man unter den Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung immer l so wählen, dass das zugehörige System der $a_{\iota\varkappa}$ einfach ist. Wenn nämlich das System zusammengesetzt ist und durch die Marken $\iota_1 \ldots \iota_\varrho$ ein darin enthaltenes einfaches Theilsystem bestimmt wird, wo ϱ auch gleich 1 sein kann, so bestimmen die 2ϱ Marken $\iota_1 \ldots \iota_\varrho$, $\iota_1' \ldots \iota_\varrho'$ unter der Bedingung $\omega_{\iota_1} + \omega_{\iota_1'} = 0 \ldots \omega_{\iota_\varrho} + \omega_{\iota_\varrho'} = 0$ eine Untergruppe. Diese wird invariant sein, wenn nicht mindestens eine in dieser Untergruppe enthaltene inf. Transformation $X_\alpha f$ mit einer derselben nicht angehörigen Transformation $X_\beta f$ durch die Operation $(X_\alpha X_\beta)$ verbunden, zu einem von Null verschiedenen Ausdruck führt. Dann wird $\omega_\alpha^\nu + \omega_\beta^\nu$ für jedes ν zu einer neuen Wurzel führen. Demnach kann der entsprechende Coefficient $a_{\alpha\beta}$ nur dann gleich Null sein, wenn die Wurzeln $\omega_\alpha^\nu + \mathfrak{a}\,\omega_\beta^\nu$ und $\omega_\alpha^\nu - \mathfrak{a}\,\omega_\beta^\nu$ für ein ganzzahliges $\mathfrak{a}$ vorkommen. Ersetzt man dann ω_β durch $\omega_\alpha + \mathfrak{a}\,\omega_\beta$, so wird der zugehörige Coefficient $a_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sein. Sollte nun die Marke α nicht zu den Marken $\iota_1 \ldots \iota_\varrho$ gehören, so kann man nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen die Marke α mit $\varrho - 1$ andern dem Systeme $(\iota_1 \ldots \iota_\varrho)$ angehörigen Marken so verbinden, dass das neue System einfach bleibt. Fügt man die auf die angegebene Weise bestimmte Marke β hinzu, so ist das Untersystem ϱ^{ter} Ordnung durch ein einfaches System ersetzt, dessen Ordnung mindestens $\varrho + 1$ beträgt. Auf diesem Wege muss man zu einer Wahl der l Wurzeln gelangen, für welche das System der $a_{\iota\varkappa}$ einfach ist.

Wenn es aber nicht möglich ist, durch passende Wahl der l ersten Wurzeln alle andern als Folge der zwischen jenen bestehenden Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ zu erweisen, so muss die Gruppe eine invariante Untergruppe besitzen. Werden nämlich mit $\iota, \varkappa \ldots$ Marken bezeichnet, welche dem einfachen Systeme angehören, während $\alpha, \beta \ldots$ demselben nicht angehören, so führt, wie die Gl. (2) lehrt, jedes $(X_\iota X_\alpha)$, wofern es von Null verschieden ist, auf eine ausserhalb des Systems vorhandene Marke. Diese letzteren (nämlich die Marken $\alpha, \beta \ldots$) werden also eine invariante Untergruppe bestimmen, wenn nicht ein $(X_\alpha X_\beta)$ auf ein $X_\iota f$ führt. Sobald aber ein Coefficient $c_{\alpha\beta\iota}$ von Null verschieden ist, bilde man die Jacobi'sche Relation für $(\alpha\beta\iota')$, und aus dieser folgt, dass entweder $(X_\alpha X_{\alpha'})$ oder $(X_\beta X_{\beta'})$ von Null verschieden ist. Somit muss mindestens eine der Marken α oder β dem System der $\iota, \varkappa \ldots$ angehören.

Dass mehrfache Wurzeln am Beweise nichts ändern, zeigen Untersuchungen, wie sie ähnlich in § 8 für $l = 1$ angestellt sind. Wollte man nämlich annehmen, dass die ersten, den mehrfachen entgegengesetzt gleichen Wurzeln entsprechenden Transformationen durch $X_r f \ldots X_{r-l+1} f$ ausgedrückt werden, so zeigt man auf dem dort vorgezeichneten Wege, dass die weiteren zu diesen Wurzeln gehörigen Transformationen zu einer invarianten Untergruppe führen. Der Fall aber, dass die ersten zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehörigen Transformationen vertauschbar sind, die spätern aber nicht, wird in derselben Weise wie am Schlusse von § 8 erledigt.*)

Daraus folgt der Satz:

Aus den Wurzeln, welche die charakteristische Gleichung für eine einfache Gruppe hat, wofern man eine allgemeine Transformation zu Grunde legt, lassen sich immer l von einander unabhängige Wurzeln so auswählen, dass das System der zugehörigen Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ einfach ist und dass alle andern Wurzeln durch diese Coefficienten gefordert werden.

§ 17.

Die einfachen Systeme von allgemeinem Charakter.

Der vorige Paragraph hat gezeigt, dass wir, um zu allen einfachen Gruppen zu gelangen, von den einfachen Systemen der Coefficienten a ausgehen müssen, und dass, wenn zu einem solchen System eine Gruppe gehört, dieselbe nothwendig einfach ist. Es erübrigt also nur der Nachweis, dass zu jedem einfachen System eine Gruppe gehört. Dieser Nachweis ist nicht schwer zu führen: nachdem das System der a aufgestellt ist, bildet man die sämmtlichen Jacobi'schen Relationen, welche nicht identisch verschwinden, und leitet daraus die

---

*) Dabei muss ich jedoch bemerken, dass sich an der betreffenden Stelle (diese Annalen Bd. 31, S. 284) ein Versehen eingeschlichen hat, indem statt X_{r-1} stehen muss X_{α_0}. Wenn dann $2\omega_\alpha$ keine Wurzel ist, so genügt die hingeschriebene Relation; im andern Falle bilde man für $\omega_\gamma = 2\omega_\alpha$ noch die Jacobi'sche Relation $(\alpha_1\beta_0\gamma_0)$.

(Juni 1888).

Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ her. Im Ausdruck derselben kommen noch einige willkürliche Factoren vor, wie auch in der Natur der Sache begründet ist. Denn einmal können die Transformationen $X_r f \dots X_{r-l+1} f$ durch l beliebige andere, von einander unabhängige Transformationen dieser l-gliedrigen Untergruppe ersetzt werden; ferner kann man die $r - l$ Transformationen $X_1 f \dots X_{r-l} f$ je mit einem beliebigen Factor $m_1 \dots m_{r-l}$ multipliciren, ohne dass die ω_α sich ändern. Umgekehrt kann diese Willkür dazu benutzt werden, um den Coefficienten möglichst einfache Werthe zu verschaffen.

Um die Aufzählung recht kurz zu machen, wollen wir, wenn es angeht, von bekannten Gruppen ausgehen und zeigen, dass sie zu Systemen gehören, wie sie im § 15 gefunden sind.

Die allgemeine projective Gruppe des l-dimensionalen Raumes ist an einer früheren Stelle (§ 6) in folgender Weise angegeben: indem wir $\iota, \varkappa, \lambda \dots$ Marken der Reihe $1 \dots l$ sein lassen, verstehen wir unter $X_{0\iota} f$, $X_{\iota 0} f$, $X_{\iota\iota} f$, $X_{\iota\varkappa} f$ infinitesimale Transformationen; zwischen denselben sollen die Relationen bestehen:

$$(X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = - X_{\iota\lambda} + \delta_{\iota\varkappa} X'_{\varkappa\varkappa}, \quad (X_{\varkappa 0} X_{0\lambda}) = - X_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} \sum' X_{\mu\mu},$$
$$(X_{0\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = - X_{0\lambda}, \qquad (X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa 0}) = - X_{\iota 0}.$$

Gehen wir von der Transformation $\Sigma \eta_\iota X_{\iota\iota} f$ aus, so bilden $X_{\iota 0}$, $X_{0\iota}$, $X_{\iota\varkappa}$ die Hauptelemente der die gegebene Transformation enthaltenden zweigliedrigen Untergruppen. Die charakteristische Gleichung hat also in der That die Wurzeln $\pm \omega_\iota$, $\pm(\omega_\iota - \omega_\varkappa)$ und gehört somit zu dem System A). Um aber zu zeigen, dass zu diesem System keine andere Gruppe gehört, führen wir statt der in § 12—16 benutzten Bezeichnung eine andere ein. Wir setzen

$$X_r f = \sum \eta_\iota X_{\iota\iota} f, \quad X_{r-1} f = \sum \eta_\iota' X_{\iota\iota} f \quad \text{u. s. w.}$$

und bezeichnen die zu ω_ι gehörige Transformation mit $X_{0\iota}$, die zu $-\omega_\iota$ gehörige mit $m_\iota X_{\iota 0}$. Dann lassen sich die Coefficienten $\eta_\iota, \eta_\iota' \dots m_\iota$ so wählen, dass jedes $(X_{0\iota} X_{\iota 0})$ den oben angegebenen Werth erhält, $\omega_\iota^\iota = -1$, $\omega_\iota^\nu = 0$ für $\nu \gtrless \iota$ wird. Indem man dann noch zu $\omega_\iota - \omega_\varkappa$ die Transformation $m_{\iota\varkappa} X_{\iota\varkappa}$ gehören lässt, lassen sich die $m_{\iota\varkappa}$, $m_{\varkappa\iota}$ eindeutig so bestimmen, dass alle Gl. (1) erfüllt sind.

Wir gehen jetzt zu der Form D) über und setzen für

$$\alpha = 1 \cdots l - 2 : \omega_\alpha = \pi_\alpha + \pi_l$$
$$\omega_{l-1} = \pi_{l-1} + \pi_l, \quad \omega_l = - \pi_{l+1} + \pi_l.$$

Dann lassen sich alle $l(2l - 2)$ Wurzeln in der Form $\pm \pi_\iota \pm \pi_\varkappa$ darstellen. Nun haben wir bereits früher für $\iota, \varkappa = 1 \dots 2l$ aus $l(2l - 1)$ Transformationen $X_{\iota\varkappa} f \, (= - X_{\varkappa\iota} f)$ eine Gruppe gebildet, für welche die Relationen $(X_{\iota\varkappa}\, X_{\iota\lambda}) = X_{\varkappa\lambda} f$, $(X_{\iota\varkappa}\, X_{\lambda\mu}) = 0$ bestehen. Gehen wir hier von der Transformation

$$\eta_{12} X_{12} + \eta_{34} X_{34} + \cdots + \eta_{2l-1,2l}\, X_{2l-1,2l}$$

aus, so erscheinen alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der Form $\pm \pi_\iota \pm \pi_\varkappa$. Diese Gruppe gehört also zu dem System D), und zwar, wie man ebenfalls leicht sieht, gehört keine andere Gruppe zu diesem System.

Für das System B) ersetze man $\omega_1 \ldots \omega_l$ durch die l Wurzeln: $\omega_l - \omega_1$, $\omega_l - \omega_2 \cdots \omega_l - \omega_{l-1}$, ω_l. Alsdann lassen sich alle Wurzeln in der Form darstellen: $\pm \omega_\iota$, $\pm \omega_\iota \pm \omega_\varkappa$. Diese $2l^2$ Wurzeln finden sich aber in folgender Gruppe: wir setzen für $\alpha, \beta = 1 \ldots 2l+1$ die $l(2l+1)$ inf. Transformationen $X_{\alpha\beta} (= -X_{\beta\alpha})$ voraus, so dass für ungleiche Werthe von α, β, γ, δ die Relationen bestehen:

$$(X_{\alpha\beta}\, X_{\alpha\gamma}) = X_{\beta\gamma} f, \quad (X_{\alpha\beta}\, X_{\gamma\delta}) = 0.$$

Für die Transformation

$$\eta_{12}\, X_{12} + \eta_{34}\, X_{34} + \cdots + \eta_{2l-1,2l}\, X_{2l-1,2l} f$$

hat dann die charakteristische Gleichung die oben angegebenen Wurzeln. Somit gehört diese Gruppe zu dem System B) und zwar, wie man leicht beweist, als einzige Gruppe.

Eine Gruppe, deren Wurzeln das System C) befriedigen, war bisher nicht bekannt. Zwar kann man für diese Gruppen auch eine Form angeben, welche der für B) aufgestellten Form entspricht; aber ich hoffe, dieselbe noch wesentlich vereinfachen zu können, und desshalb möchte ich dieselbe noch nicht mittheilen. Ich begnüge mich also damit, aus den Jacobi'schen Relationen eine Darstellung dieser Gruppen herzuleiten, obwohl dieselbe noch etwas an Uebersichtlichkeit zu wünschen lässt.

Wir ersetzen die $\omega_1 \ldots \omega_l$ durch $2\omega_1 - \omega_l$, $2\omega_2 - \omega_l \ldots 2\omega_{l-1} - \omega_l$, ω_l und können dann alle Wurzeln in der Form $\pm \omega_\iota$, $\dfrac{\pm \omega_\iota \pm \omega_\varkappa}{2}$ darstellen. Diesen $r - l$ Wurzeln entsprechend, bezeichnen wir auch die $2l^2$ ersten Transformationen durch

$$X_1 \ldots X_l,\; X_{-1} \ldots X_{-l},\; X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}},\; X_{\frac{\iota-\varkappa}{2}},\; X_{\frac{-\iota+\varkappa}{2}},\; X_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}}.$$

Wir setzen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\sum^{\nu} e_\iota^{\nu} \omega_\iota^{\nu} = -\sum e_{-\iota}^{\nu} \omega_\iota^{\nu} = -2E_\iota = -2E_{-\iota} = -2g_\iota^2, \\ &\sum^{\nu} e_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}^{\nu}\, \omega_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}^{\nu} = \tfrac{1}{2}\sum^{\nu} e_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}^{\nu} (\omega_\iota^{\nu} + \omega_\varkappa^{\nu}) = -\sum^{\nu} e_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}}^{\nu} (\omega_\iota^{\nu} + \omega_\varkappa^{\nu}) \\ &\qquad = -2E_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} = -2E_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}} = -2g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}^2 \end{aligned}$$

und entsprechend für $\dfrac{\iota-\varkappa}{2}$.

Dazu treten die Gleichungen:

$$\sum\nolimits^{\nu} e_\iota^\nu \omega_\varkappa^\nu = 0, \quad \sum\nolimits^{\nu} e^\nu_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} \omega^\nu_{\frac{\iota-\varkappa}{2}} = 0, \quad \sum\nolimits^{\nu} e^\nu_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} \omega^\nu_\lambda = 0, \tag{3}$$

wenn $\iota, \varkappa, \nu$ als ungleich vorausgesetzt werden. Somit lassen sich aus den E_ι, $E_{\frac{\iota\pm\varkappa}{2}}$, ω_ι^ν die e_ι^ν, $e^\nu_{\frac{\iota\pm\varkappa}{2}}$ einfach berechnen. Speciell erhalten wir:

$$\frac{e^\nu_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}}{E_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}} = \frac{e_\iota^\nu}{E_\iota} + \frac{e_\varkappa^\nu}{E_\varkappa}, \quad \frac{e^\nu_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}{E_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}} = \frac{e_\iota^\nu}{E_\iota} - \frac{e_\varkappa^\nu}{E_\varkappa}. \tag{4}$$

Die Jacobi'schen Relationen

$$\left(\iota, -\iota, \frac{-\iota+\varkappa}{2}\right), \left(\iota, -\iota, \frac{\iota-\varkappa}{2}\right), \left(\frac{-\iota+\varkappa}{2}, \frac{\iota-\varkappa}{2}, \iota\right),$$
$$\left(\frac{-\iota+\varkappa}{2}, \frac{\iota-\varkappa}{2}, -\iota\right), \left(\frac{\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota-\varkappa}{2}, \iota\right), \left(\frac{\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota-\varkappa}{2} -\iota\right)$$

liefern folgende sechs Gleichungen, von denen eine eine Folge der andern ist:

$$c_{\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}}\; c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,-\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}} = c_{-\iota\,\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\frac{-\iota-\varkappa}{2}}\; c_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,\iota\,\frac{\iota-\varkappa}{2}} = g_\iota^2,$$
$$c_{\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\iota\,\frac{\iota+\varkappa}{2}}\; c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\iota} = c_{\frac{\iota-\varkappa}{2}\,-\iota\,\frac{-\iota-\varkappa}{2}}\; c_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,-\iota} = 2g^2_{\frac{\iota-\varkappa}{2}},$$
$$c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,-\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}}\; c_{\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,-\iota} = c_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,\iota\,\frac{\iota-\varkappa}{2}}\; c_{\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\iota} = 2g^2_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}.$$

Indem wir eine Grösse $p_{\iota\varkappa}$ willkürlich wählen, folgt:

$$\left\{\begin{aligned}
c_{\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}} &= p_{\iota\varkappa}\frac{g_\iota\, g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}}, & c_{-\iota\,\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\frac{-\iota-\varkappa}{2}} &= \frac{1}{p_{\iota\varkappa}}\frac{g_\iota\, g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}},\\
c_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,\frac{\iota-\varkappa}{2}} &= -p_{\iota\varkappa}\frac{g_\iota\, g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}}{g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}, & c_{-\iota\,\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}} &= -\frac{1}{p_{\iota\varkappa}}\frac{g_\iota\, g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}}{g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}},\\
c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\iota} &= -\frac{2}{p_{\iota\varkappa}}\frac{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}\, g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}{g_\iota}, & c_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,-\iota} &= -2p_{\iota\varkappa}\frac{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}\, g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}{g_\iota}.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die Jacobi'sche Relation für $\left(\frac{\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota-\varkappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2}\right)$ liefert:

$$c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\varkappa+\lambda}{2}}\; c_{\frac{\varkappa+\lambda}{2}\,\frac{-\iota-\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}} = g^2_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}. \tag{6}$$

Die übrigen Jacobi'schen Relationen, in denen nicht sämmtliche c verschwinden, können einmal dadurch gebildet werden, dass man drei Marken nimmt, deren Summe verschwindet, z. B. $\left(\iota, \frac{-\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota-\varkappa}{2}\right)$ oder $\left(\frac{\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2}, \frac{-\varkappa-\lambda}{2}\right)$. Diese werden durch die vorstehenden Relationen von selbst befriedigt. Ausserdem können wir zur Bildung einer Jacobi'schen Relation drei Marken wählen, für welche die Summe der entsprechenden Wurzeln eine neue Wurzel liefert, während auch schon die Summe zweier zu einer neuen Wurzel führt. Von diesen liefert auch jede Relation $\left(\iota, \varkappa, \frac{-\iota-\varkappa}{2}\right)$ keine neue Beziehung zwischen den Coefficienten. Dagegen folgt aus $\left(\iota, \frac{-\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2}\right)$:

(7) $$c_{\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}}\; c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\varkappa+\lambda}{2}} = c_{\iota\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\iota+\lambda}{2}}\; c_{\frac{\iota+\lambda}{2}\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\varkappa+\lambda}{2}}$$

aus $\left(\iota, \frac{-\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\varkappa+\lambda}{2}\right)$:

(8) $$c_{\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}}\; c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\varkappa+\lambda}{2}\,\frac{\iota+\lambda}{2}} = c_{\iota\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\iota+\lambda}{2}}\; c_{\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\varkappa+\lambda}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}}$$

und aus $\left(\frac{\iota+\varkappa}{2}, \frac{\iota+\lambda}{2}, \frac{-\varkappa-\lambda}{2}\right)$:

(9) $$c_{\frac{\iota+\lambda}{2}\,\frac{-\varkappa+\lambda}{2}\,\frac{\iota-\varkappa}{2}}\; c_{\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\iota} = c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\varkappa-\lambda}{2}\,\frac{\iota-\lambda}{2}}\; c_{\frac{\iota-\lambda}{2}\,\frac{\iota+\lambda}{2}\,\iota}.$$

Endlich liefert die Relation $\left(\frac{\iota+\varkappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2}, \frac{-\varkappa+\mu}{2}\right)$ die Gleichung:

(10) $$c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\varkappa+\lambda}{2}}\; c_{\frac{\varkappa+\lambda}{2}\,\frac{-\varkappa+\mu}{2}\,\frac{\lambda+\mu}{2}} + c_{\frac{-\varkappa+\mu}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\mu}{2}}\; c_{\frac{\iota+\mu}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\lambda+\mu}{2}} = 0.$$

In den Gl. (6)—(10) darf man nicht nur die einzelnen Marken vertauschen, sondern auch die Vorzeichen der Marken beliebig ändern.

Aus (6)—(9) folgt:

(11) $$c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\varkappa+\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{p_{\varkappa\lambda}\, p_{\lambda\varkappa}\, p_{\iota\lambda}}{p_{\iota\varkappa}\, p_{\varkappa\iota}\, p_{\lambda\iota}}}\; \frac{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}\, g_{\frac{\iota-\lambda}{2}}}{g_{\frac{\varkappa+\lambda}{2}}}.$$

Um alle weiteren Coefficienten c in gleicher Weise darstellen zu können und um hierbei namentlich das Vorzeichen richtig zu bestimmen, zerlegen wir in (11) die Wurzel rechts in sechs Wurzeln, und setzen dann:

(12) $$\sqrt{p_{\iota,-\varkappa}} = i\sqrt{p_{\iota\varkappa}}, \quad \sqrt{p_{-\iota,\varkappa}} = \frac{-i}{\sqrt{p_{\iota\varkappa}}}, \quad \sqrt{p_{-\iota,-\varkappa}} = \frac{1}{\sqrt{p_{\iota\varkappa}}}.$$

Diese Festsetzung steht in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (5). Ausserdem werden jetzt alle Gleichungen (6)—(10) befriedigt, so dass die Existenz der Gruppen bewiesen und ein Ausdruck für dieselben angegeben ist. Dieser kann durch passende Wahl der $X_r f \ldots X_{r-l+1} f$ und durch Multiplication von $X_{-\iota}$, $X_{\frac{\pm\iota\pm\varkappa}{2}} f$ mit passenden Factoren noch etwas vereinfacht werden. So kann man bewirken, dass ist $\omega_\iota^{(\iota-1)} = -2$, $\omega_\iota^{(\nu-1)} = 0$ für $\iota \gtrless \nu$, und dass $g_\iota = 1$, $g_{\frac{\iota\pm\varkappa}{2}} = 1$, und jedes $p_{\iota\varkappa}$ für positive Werthe $\iota, \varkappa$ gleich eins ist. Die hierdurch eingeführten Vereinfachungen brauchen wir nicht hinzuschreiben.

Die vorangehenden Entwicklungen haben uns folgenden Lehrsatz geliefert:

Zu jedem der (allgemeinen) einfachen Systeme A), B), C), D *gehört eine und zwar eine einzige einfache Gruppe, welche jedesmal mit demselben Buchstaben bezeichnet werden soll.*

Die Gruppe A) *ist* $l(l+2)$*-gliedrig und identisch mit der Gruppe der allgemeinen projectiven Transformationen des l-dimensionalen Raumes; um sie recht einfach niederzuschreiben, wähle man für* $\iota, \varkappa = 1 \ldots l$ *die inf. Transformationen* $X_{0\iota}, X_{\iota 0}, X_{\iota\varkappa}$ und setze fest:

$$(X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = - X_{\iota\lambda} + \varepsilon_{\iota\lambda} X_{\varkappa\varkappa},$$
$$(X_{\varkappa 0} X_{0\lambda}) = - X_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda} \sum X_{\mu\mu},$$
$$(X_{0\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = - X_{0\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa 0}) = - X_{\iota 0}$$

und $(X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0$, *wenn weder* $\iota = \mu$, *noch* $\varkappa = \lambda$ *ist.*

Die Gruppe D) *ist identisch mit der Gruppe der Bewegungen in einem* $(2l-1)$*-dimensionalen Riemann'schen Raume; man wähle für* $\iota, \varkappa = 1 \ldots 2l$ *die* $l(2l-1)$ *inf. Transformationen* $X_{\iota\varkappa} f (= - X_{\varkappa\iota} f)$ *und setze fest:* $(X_{\iota\varkappa} X_{\iota\lambda}) = X_{\varkappa\lambda} f$, $(X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0$ *für ungleiche Werthe von* $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$.

Die Gruppe B) *ist identisch mit der Gruppe der Bewegungen in einem* $2l$*-dimensionalen Riemann'schen Raume; um sie darzustellen, wähle man für* $\iota, \varkappa = 1 \ldots 2l+1$ *die inf. Transformationen* $X_{\iota\varkappa} (= - X_{\varkappa\iota})$ *und lasse sein:*

$$(X_{\iota\varkappa} X_{\iota\lambda}) = X_{\varkappa\lambda} f, \quad (X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0.$$

Die Gruppe C) *ist ebenfalls* $l(2l+1)$*-gliedrig; man wähle zur Bestimmung der Gruppe die inf. Transformationen:*

$$X_r f,\ X_{r-1} f \ldots X_{r-l+1} f,\ X_\iota f,\ X_{-\iota} f,\ X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} f,\ X_{\frac{\iota-\varkappa}{2}} f,\ X_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}} f.$$

Dann bestehen folgende Relationen:

$$(X_r X_\iota) = \omega_\iota X_\iota, \quad (X_r X_{-\iota}) = -\omega_\iota X_\iota,$$
$$\left(X_r X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}\right) = \frac{1}{2}(\omega_\iota + \omega_\varkappa) X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} f \quad \text{u. s. w.}$$
$$(X_{r-1} X_\iota) = \omega_\iota' X_\iota, \quad (X_{r-1} X_{\varkappa-\iota}) = -\omega_\iota' X_\iota,$$
$$\left(X_{r-1} X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}\right) = \frac{1}{2}(\omega_\iota' + \omega_\varkappa') X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} f \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(X_\iota X_{-\iota}) = e_\iota X_r + e_\iota' X_{r-1} + \cdots$$
$$\left(X_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} X_{\frac{-\iota-\varkappa}{2}}\right) = e_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} X_r + e'_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} X_{r-1} + \cdots.$$

Setzt man

$$\sum\nolimits^{\nu} e_\iota^\nu \omega_\iota^\nu = -2 g_\iota^2, \quad \frac{1}{2}\sum\nolimits^{\nu} e^\nu_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} (\omega_\iota^\nu + \omega_\varkappa^\nu) = -2 g^2_{\frac{\iota+\varkappa}{2}},$$

so ist

$$\frac{e^\nu_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}}{g^2_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}} = \frac{e_\iota^\nu}{g_\iota^2} + \frac{e_\varkappa^\nu}{g_\varkappa^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Indem man ferner für positive Werthe ι, $\varkappa$ die $2l(l-1)$ Coefficienten $p_{\iota\varkappa}$ willkürlich wählt und für negative Werthe festsetzt, dass sein soll:

$$\sqrt{p_{\iota,-\varkappa}} = i\sqrt{p_{\iota\varkappa}}, \quad \sqrt{p_{-\iota,\varkappa}} = \frac{-i}{\sqrt{p_{\iota\varkappa}}},$$

kann man alle weiteren Coefficienten c durch die Gleichungen darstellen:

$$c_{\iota\,\frac{-\iota+\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}} = p_{\iota\varkappa} \frac{\frac{g_\iota g_{\iota-\varkappa}}{2}}{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}}}, \quad c_{\frac{\iota-\varkappa}{2}\,\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\iota} = \frac{2}{p_{\iota\varkappa}} \frac{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} g_{\frac{\iota-\varkappa}{2}}}{g_\iota},$$

$$c_{\frac{\iota+\varkappa}{2}\,\frac{-\iota+\lambda}{2}\,\frac{\varkappa+\lambda}{2}} = \frac{\sqrt{p_{\varkappa\lambda}}\sqrt{p_{\lambda\varkappa}}\sqrt{p_{\iota\lambda}}}{\sqrt{p_{\iota\varkappa}}\sqrt{p_{\varkappa\iota}}\sqrt{p_{\lambda\iota}}} \frac{g_{\frac{\iota+\varkappa}{2}} g_{\frac{\iota-\lambda}{2}}}{g_{\frac{\varkappa+\lambda}{2}}}.$$

Obwohl es nicht in unserer Absicht liegt, die Frage nach den Untergruppen, welche in einer gegebenen einfachen Gruppe vorkommen, an dieser Stelle vollständig zu behandeln, glauben wir doch darauf hinweisen zu sollen, welche Bedeutung die Entwicklungen des § 15 für diese Frage haben. Soll zunächst eine einfache Gruppe des Ranges l eine einfache Untergruppe desselben Ranges besitzen, so müssen nicht nur sämmtliche Wurzeln der letzteren (der Untergruppe) in der Hauptgruppe vorkommen, sondern es muss auch, wenn die Summe irgend zweier von diesen Wurzeln eine Wurzel der Hauptgruppe ist, sie es auch in der Untergruppe sein, oder mit andern Worten: wenn

ω_α, ω_β ... die Wurzeln für die Untergruppe sind, so müssen diese sämmtlich in der Hauptgruppe vorkommen, und zugleich müssen die Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ für je zwei Wurzeln in der Gruppe und ihrer Untergruppe identisch sein. Daraus folgt, dass nur die Gruppe B) eine einfache Untergruppe gleichen Ranges besitzt, nämlich die Gruppe D).

Um nun eine einfache Untergruppe vom Range $l-1$ zu finden, hat man zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob die gegebene Gruppe aus der Untergruppe durch Hinzufügung einer l^{ten} Wurzel gebildet werden kann oder nicht. Der erste Fall ist in § 15 erledigt, der andere ergiebt sich daraus von selbst. Das liefert den Satz:

Unter den vier Formen A), B), C), D) *ist die Gruppe* B) *die einzige, welche eine einfache Gruppe gleichen Ranges zur Untergruppe hat, und zwar hat letztere die Form* D). *Dagegen hat jede einfache Gruppe von einer dieser vier Formen Untergruppen $l-1^{\text{ten}}$ Ranges, welche nach der Form* A) *gebildet sind; alle einfachen Untergruppen dieses Ranges haben für eine Gruppe* A) *vom Range l wieder dieselbe Form; jede einfache Untergruppe $(l-1)^{\text{ten}}$ Ranges für eine Gruppe* C) *vom l^{ten} Range hat die Form* A) *oder* C), *für eine Gruppe* D) *die Form* A) *oder* D); *eine einfache Gruppe* B) *vom Range l hat einfache Untergruppen des Ranges $l-1$ von der Form* A), B) *und* D).

§ 18.

Die zu den einfachen Systemen speciellen Charakters gehörigen Gruppen.

Zu dem System II C), wo $a_{12}=-1$, $a_{21}=-3$ ist, gehören die Wurzeln

$$\pm\omega_1,\ \pm\omega_2,\ \pm(\omega_1-\omega_2),\ \pm(2\omega_1-\omega_2),\ \pm(3\omega_1-\omega_2),\ \pm(3\omega_1-2\omega_2).$$

Ersetzt man hier ω_1 durch $-\omega_1+\omega_2$, so lassen sich die Wurzeln in folgender Weise ausdrücken:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1-\omega_2,\ \omega_1+\omega_2,\ 2\omega_1-\omega_2,\ \omega_1-2\omega_2,$$

nebst den entgegengesetzt gleichen. Diese zuletzt hingeschriebenen Wurzeln sollen der Reihe nach durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ und die entgegengesetzt gleichen durch $\omega_{1'}, \omega_{2'} \dots \omega_{6'}$ bezeichnet werden. Ebenso mögen die zugehörigen $X_\iota f$ dargestellt werden und statt $X_r f$, $X_{r-1} f$ resp. $X_7 f$ und $X_8 f$ geschrieben werden. Ausserdem soll gesetzt werden:

$$\begin{array}{lll}
e_1\omega_1+e_1'\omega_1'=-2E_1, & e_2\omega_1+e_2'\omega_1'=-E_2, & e_3\omega_1+e_3'\omega_1'=-E_3,\\
e_1\omega_2+e_1'\omega_2'=-E_1, & e_2\omega_2+e_2'\omega_2'=-2E_2, & e_3\omega_2+e_3'\omega_2'=E_3,\\
e_4\omega_1+e_4'\omega_1'=-E_4, & e_5\omega_1+e_5'\omega_1'=-E_5, & e_6\omega_1+e_6'\omega_1'=0,\\
e_4\omega_2+e_4'\omega_2'=-E_4, & e_5\omega_2+e_5'\omega_2'=0, & e_6\omega_2+e_6'\omega_2'=E_6.
\end{array}$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{e_3}{E_3}=\frac{e_1}{E_1}-\frac{e_2}{E_2},\qquad \frac{e_4}{E_4}=\frac{1}{3}\Big(\frac{e_1}{E_1}+\frac{e_2}{E_2}\Big),\qquad \frac{e_5}{E_5}=\frac{1}{3}\Big(\frac{2e_1}{E_1}-\frac{e_2}{E_2}\Big),$$
$$\frac{e_6}{E_6}=\frac{1}{3}\Big(\frac{e_1}{E_1}-2\,\frac{e_2}{E_2}\Big)$$

und entsprechend für $e_3' \ldots e_6'$.

Die Jacobi'schen Relationen $(\iota, \iota', \varkappa)$ liefern für $g_\iota^2 = E_\iota$ folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
c_{124}=3p_1\dfrac{g_1g_2}{g_4}, & c_{1'2'4'}=\dfrac{3}{p_1}\dfrac{g_1g_2}{g_4}, & c_{24'1'}=p_1\dfrac{g_2g_4}{g_1}, & c_{2'41}=\dfrac{1}{p_1}\dfrac{g_2g_4}{g_1}, \\[2ex]
c_{41'2}=\dfrac{1}{p_1}\dfrac{g_1g_4}{g_2}, & c_{4'12'}=p_1\dfrac{g_1g_4}{g_2}, & c_{135}=3p_2\dfrac{g_1g_3}{g_5}, & c_{1'3'5'}=\dfrac{3}{p_2}\dfrac{g_1g_3}{g_5}, \\[2ex]
c_{5'13'}=p_2\dfrac{g_1g_5}{g_3}, & c_{51'3}=\dfrac{1}{p_2}\dfrac{g_1g_5}{g_3}, & c_{3'51}=\dfrac{1}{p_2}\dfrac{g_3g_5}{g_1}, & c_{35'1'}=p_2\dfrac{g_3g_5}{g_1}, \\[2ex]
c_{231}=2p_3\dfrac{g_2g_3}{g_1}, & c_{2'3'1'}=\dfrac{2}{p_3}\dfrac{g_2g_3}{g_1}, & c_{12'3}=\dfrac{2}{p_3}\dfrac{g_1g_2}{g_3}, & c_{1'23'}=2p_3\dfrac{g_1g_2}{g_3}, \\[2ex]
c_{3'12}=\dfrac{2}{p_3}\dfrac{g_1g_3}{g_2}, & c_{31'2'}=2p_3\dfrac{g_1g_3}{g_2}, & c_{263}=p_4\dfrac{g_2g_6}{g_3}, & c_{2'6'3'}=\dfrac{1}{p_4}\dfrac{g_2g_6}{g_3}, \\[2ex]
c_{3'26}=3p_4\dfrac{g_2g_3}{g_6}, & c_{32'6'}=\dfrac{3}{p_4}\dfrac{g_2g_3}{g_6}, & c_{63'2'}=p_4\dfrac{g_3g_6}{g_2}, & c_{6'32}=\dfrac{1}{p_4}\dfrac{g_3g_6}{g_2}, \\[2ex]
c_{465}=p_5\dfrac{g_4g_6}{g_5}, & c_{4'6'5'}=\dfrac{1}{p_5}\dfrac{g_4g_6}{g_5}, & c_{54'6}=\dfrac{1}{p_5}\dfrac{g_5g_4}{g_6}, & c_{5'46'}=p_5\dfrac{g_5g_4}{g_6}, \\[2ex]
 & c_{65'4'}=p_5\dfrac{g_6g_5}{g_4}, & c_{6'54}=\dfrac{1}{p_5}\dfrac{g_6g_5}{g_4}. &
\end{array}$$

Von den weiteren Jacobi'schen Relationen berücksichtige man noch (1 2 6), welche die Forderung enthält:

$$p_1 p_5 = p_2 p_4.$$

Alsdann sind alle Jacobi'schen Relationen erfüllt.

Durch passende Wahl von X_7 und X_8 in ihrer zweigliedrigen Untergruppe und durch Multiplication von $X_{1'}$ und $X_{2'}$ mit einem passenden Factor kann man bewirken, dass ist:

$$(X_1 X_{1'}) = 2\,X_7 f + X_8 f, \qquad (X_2 X_{2'}) = X_7 f + 2\,X_8 f;$$
$$\omega_1 = -1, \quad \omega_1' = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_2' = -1, \quad E_1 = E_2 = 1.$$

Ebenso kann man X_3, $X_{3'}$ ... mit gewissen Factoren multipliciren und diese so wählen, dass ist:

$$E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1.$$

Dann ist zugleich $p_5 = 1$.

Somit erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{llll}
(X_7 X_1) = -X_1 f, & (X_7 X_{1'}) = X_{1'} f, & (X_8 X_1) = 0, & (X_8 X_{1'}) = 0, \\
(X_7 X_2) = 0, & (X_7 X_{2'}) = 0, & (X_8 X_2) = -X_2 f, & (X_8 X_{2'}) = X_2 f.
\end{array}$$

Da man unmittelbar übersieht, welche Werthe jetzt $\omega_1 - \omega_2$ u. s. w., sowie c_{124} und die weiteren c annehmen, wird es nicht nöthig sein, diese Ausdrücke hinzuschreiben.

Die Wurzeln des Systems IV E) können in folgender Weise geschrieben werden:

$$\pm \omega_\iota, \quad \pm \omega_\iota \pm \omega_\varkappa, \quad \frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2}.$$

Wir wollen demnach die unendlich kleinen Transformationen, durch welche die Gruppe bestimmt wird, mit

$$X_r, \; X_{r-1}, \; X_{r-2}, \; X_{r-3}; \quad X_{\pm\iota}, \; X_{\pm\iota\pm\varkappa}, \; X_{\frac{\pm1\pm2\pm3\pm4}{2}},$$

bezeichnen. In entsprechender Weise werden auch die e_ι^ν, g_ι^2 u. s. w. eingeführt. Dann gelten die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &c_{-1\,\frac{1+2+3+4}{2}\,\frac{-1+2+3+4}{2}}\; c_{\frac{-1+2+3+4}{1}\,1\,\frac{1+2+3+4}{2}} = g_1^{\,2}, \\ &c_{\frac{-1-2-3-4}{2}\,1\,\frac{1-2-3-4}{2}}\; c_{\frac{1-2-3-4}{2}\,\frac{1+2+3+4}{2}\,1} = g^2_{\frac{1+2+3+4}{2}} \end{aligned}$$

nebst denjenigen, welche hieraus durch Vertauschung der Nummern und deren Vorzeichen erhalten werden. Um diese Gleichungen zu befriedigen, kann man

$$(a)\qquad c_{-1\,\frac{1+2+3+4}{2}\,\frac{-1+2+3+4}{2}},\quad c_{-1\,\frac{1-2+3+4}{2}\,\frac{-1-2+3+4}{2}},\quad c_{-1\,\frac{1+2-3+4}{2}\,\frac{-1+2-3+4}{2}},$$
$$c_{-1\,\frac{1+2+3-4}{2}\,\frac{-1+2+3-4}{2}}$$

und diejenigen zwölf Coefficienten, welche hieraus durch cyklische Vertauschung der Marken hervorgehen, willkürlich wählen und dann die sämmtlichen c berechnen, unter deren Marken eine Marke $\pm\iota$ vorkommt.

Bildet man aber die Relationen

$$\left(1, \; -1+2, \; \frac{1-2+3+4}{2}\right) \text{ und } \left(1, \; -1+2, \; \frac{-1-2+3+4}{2}\right),$$

nämlich

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\qquad c_{1,-1+2,2}\; c_{2\,\frac{1-2+3+4}{2}\,\frac{1+2+3+4}{2}} \\ &+ c_{-1+2,\,\frac{1-2+3+4}{2}\,\frac{-1+2+3+4}{2}}\; c_{\frac{-1+2+3+4}{2}\,1\,\frac{1+2+3+4}{2}} = 0, \\ &\qquad c_{1,-1+2,2}\; c_{2\,\frac{-1-2+3+4}{2}\,\frac{-1+2+3+4}{2}} \\ &+ c_{\frac{-1-2+3+4}{2}\,1\,\frac{1-2+3+4}{2}}\; c_{\frac{1-2+3+4}{2},\,-1+2,\,\frac{-1+2+3+4}{2}} = 0, \end{aligned} \right.$$

so folgt daraus:

$$(3)\qquad c_{1\,\frac{-1+2+3+4}{2}\,\frac{1+2+3+4}{2}}\;c_{2\,\frac{-1-2+3+4}{2}\,\frac{-1+2+3+4}{2}}$$
$$+\;c_{1\,\frac{-1-2+3+4}{2}\,\frac{1-2+3+4}{2}}\;c_{2\,\frac{1-2+3+4}{2}\,\frac{1+2+3+4}{2}} = 0.$$

Diese Gleichung und die entsprechenden lehren, dass man ausser den vier oben hingeschriebenen Coefficienten (a) etwa nur noch

$$c_{-2\,\frac{1+2+3+4}{2}\,\frac{1-2+3+4}{2}},\quad c_{-2\,\frac{1+2-3+4}{2}\,\frac{1-2-3+4}{2}},\quad c_{-3\,\frac{1+2+3+4}{2}\,\frac{1+2-3+4}{2}},$$
$$c_{-4\,\frac{1+2+3+4}{2}\,\frac{1+2+3-4}{2}}$$

willkürlich annehmen darf. Endlich kann man aus den Gleichungen (2) und den Relationen

$$\left(\frac{1+2+3+4}{2},\ \frac{-1-2-3-4}{2},\ 1+2\right)$$

alle weiteren Coefficienten c berechnen.

Die Wurzeln des Systems IV F) können in folgender Weise geschrieben werden:

$$\pm\,\omega_\iota,\quad \frac{\pm\,\omega_\iota \pm \omega_\varkappa}{2},\quad \frac{\pm\,\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2}.$$

Die Jacobi'schen Relationen

$$\left(1,\ -1,\ \frac{-1+2+3+4}{2}\right),\quad \left(\frac{1+2+3+4}{2},\ \frac{-1-2-3-4}{2},\ 1\right),$$
$$\left(1,\ 2,\ \frac{-1-2+3+4}{2}\right)$$

führen zu Gleichungen, welche mit den Gl. (1) und (3) identisch sind. Daher lassen sich die sämmtlichen Coefficienten, welche aus

$$c_{-1\,\frac{1+2+3+4}{2}\,\frac{-1+2+3+4}{2}}$$

durch Vertauschung der Marken und ihrer Zeichen hervorgehen, in derselben Weise durch acht willkürlich gewählte Grössen darstellen, wie bei IV E). Zur Bestimmung der übrigen findet man quadratische Gleichungen, wie bei der Form C).

Was die Form VI E) betrifft, so vertausche man bei den in § 15 aufgezählten Wurzeln zunächst die Marken 5 und 6 und stelle dann die mit den neuen Marken $1\ldots 5$ versehenen Wurzeln in der Form $\pm\,\pi_\iota \pm \pi_\varkappa$ dar, wo $\iota, \varkappa$ ungleiche Marken der Reihe $1\ldots 5$ sind. Hierzu kommen:

$$\omega_6,\quad \pi_\iota + \pi_\varkappa - \omega_6,\quad \pi_\iota + \pi_\varkappa + \pi_\lambda + \pi_\mu - \omega_6$$

nebst den entgegengesetzt gleichen. Ebenso vertausche man in den oben aufgezählten Wurzeln des Systems VII E) die Marken 6 und 7 und man kann dann alle Wurzeln bis auf ihre entgegengesetzt gleichen in der Form angeben:

$$\pi_\iota + \pi_\varkappa,\quad \pi_\iota - \pi_\varkappa,\quad \omega_7,\quad \pi_\iota + \pi_\varkappa - \omega_7,\quad \pi_\iota + \pi_\varkappa + \pi_\lambda + \pi_\mu - \omega_7,$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 - \omega_7,\quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 - 2\omega_7.$$

Genau so ist es mit VIII E), wo wir die Wurzeln erhalten:

$$\pi_\iota + \pi_\varkappa,\quad \pi_\iota - \pi_\varkappa,\quad \omega_8,\quad \pi_\iota + \pi_\varkappa - \omega_8,\quad \pi_\iota + \pi_\varkappa + \pi_\lambda + \pi_\mu - \omega_8,$$
$$\pi_{\iota_1} + \cdots + \pi_{\iota_6} - \omega_8,\quad \pi_{\iota_1} + \cdots + \pi_{\iota_6} - 2\omega_8,$$
$$2\pi_{\iota_1} + \pi_{\iota_2} + \pi_{\iota_3} + \pi_{\iota_4} + \pi_{\iota_5} + \pi_{\iota_6} + \pi_{\iota_7} - 2\omega_8,$$

wo $\iota, \varkappa \ldots$ ungleiche Marken der Reihe $1 \ldots 7$ sind. Die Berechnung aller Coefficienten c bietet keine Besonderheit.

Dass die auf dem angedeuteten Wege gefundenen Coefficienten c wirklich sämmtlichen Jacobi'schen Relationen genügen, dafür spricht auch der folgende Umstand. Multiplicirt man sämmtliche $X_\iota f$ mit beliebigen Factoren, so ändern sich die Ausdrücke für $(X_\iota X_\varkappa)$, aber jedesmal nur so, dass alle Jacobi'schen Relationen gültig bleiben. Auch ist die Zahl der willkürlichen Constanten, welche durch diese Relationen noch gelassen werden, so gross, dass sie durch bestimmte Wahl jener Factoren vorgeschriebene Werthe erhalten können.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

Für $l = 2$ *entspricht dem allgemeinen System* D) *keine einfache Gruppe und diejenigen beiden Gruppen werden identisch, welche den Formen* B) *und* C) *entsprechen. Ausserdem giebt es noch eine vierzehngliedrige einfache Gruppe vom Range zwei.*

Für $l = 4$ *kommen zu den allgemeinen Formen* A), B), C), D) *noch zwei einfache Gruppen von* 52 *Gliedern hinzu. Die eine von diesen hat die Gruppe* IV B) *zur Untergruppe.*

Auch für $l = 6, 7, 8$ *giebt es ausser den allgemeinen Formen noch je eine specielle einfache Gruppe; dieselbe hat* 78 *Glieder für* $l = 6$, 133 *für* $l = 7$ *und* 248 *für* $l = 8$.

Braunsberg, 2. Februar 1888.

Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen.

Von

Friedrich Schur in Dorpat.

Will man den Formalismus der elementaren Rechnungsoperationen, denen höhere complexe Zahlen unterworfen sind, in seinem wahren Zusammenhange verstehen, so scheint mir die Theorie der Transformationsgruppen hierzu das geeignete Mittel zu sein. Erst durch ihre Anwendung erkennt man, inwieweit die einzelnen formalen Gesetze, welchen diese Operationen gehorchen, die besondere, gewöhnlich angenommene algebraische Form derselben zur Folge haben. In den folgenden Zeilen will ich den Versuch machen, diese Lücke, die mir in den bisherigen Untersuchungen über die Theorie der höheren complexen Zahlen noch vorhanden zu sein scheint, bis zu einem gewissen Grade auszufüllen. Wir werden uns hierbei auf die sogenannten endlichen complexen Zahlen beschränken, sodass also die mit ihnen vorzunehmenden Operationen nicht über ein Gebiet von n Dimensionen hinausführen, in welchem jede complexe Zahl oder jeder Punkt durch n Coordinaten bestimmt ist. Haben wir nun irgend einen Rechenausdruck, in welchem eine der darin enthaltenen complexen Grössen in dem ganzen n-dimensionalen Gebiete veränderlich ist, oder mit anderen Worten eine Function der complexen Veränderlichen, so ordnet dieselbe jedem Punkte des Gebietes einen gewissen anderen zu, sie definirt also eine Transformation in diesem n-dimensionalen Gebiete. Dies gilt im Besonderen auch von der Summe einerseits und dem Producte andrerseits je zweier complexer Zahlen, von denen die eine veränderlich ist. Es definiren daher die beiden elementaren Operationen des Addirens und Multiplicirens in jedem solchen Zahlengebiete zwei Schaaren von ∞^n Transformationen dieses Gebietes. Wir werden nun im Folgenden untersuchen, welche besonderen Formen diese Schaaren von Transformationen besitzen müssen, wenn sie dem associativen und commutativen Gesetze einerseits folgen, und wenn sie anderseits unter einander durch das distributive Gesetz verknüpft sein sollen. Wir werden diesem noch die weitere Annahme hinzufügen, dass jede dieser Schaaren die identische Transformation enthalte, welche also jeden Punkt in ihn selbst überführt; diese Annahme, welche offenbar darauf hinauskommt, dass in dem betrachteten Zahlensysteme Aequivalente der Null und der Eins existiren, macht die Voraussetzung der unbedingten Umkehrbarkeit der elementaren Rechnungsoperation überflüssig und ist an und für sich geringer.

Die Methoden, deren wir uns bedienen, sind im Grunde genommen diejenigen, deren sich Herr Lie*) bedient; auch sind die meisten Resultate schon implicite in den allgemeineren Untersuchungen desselben enthalten. Wir werden aber hiervon unabhängige und in einigen wesentlichen Punkten neue Beweise geben. Ich möchte in dieser Beziehung besonders auf die im ersten Paragraphen enthaltene directe Reduction der Gruppeneigenschaft, welche aus dem associativen Gesetze folgt, auf eine einfache analytische Form hervorheben. Fügen wir dann noch die Forderung hinzu, dass die betreffende Gruppe von Transformationen auch dem commutativen Gesetze gehorche, so beweisen wir, dass sich dieselbe dann durch Einführung neuer Veränderlichen stets in eine Gruppe von Translationen überführen lässt, wobei also jedem Punkte derjenige Punkt entspricht, dessen Coordinaten durch Addition der Coordinaten eines festen Punktes zu denen des gegebenen entstehen. Die weitere Forderung, dass die Addition mit der Multiplication in Beziehung auf den zweiten Factor durch das distributive Gesetz verknüpft sei, führt uns zu Transformationen, die in Bezug auf die Coordinaten dieses zweiten Factors linear sind, und so zur Formulirung des Problems, die allgemeinste Art der Multiplication zu finden, welche noch dem associativen Gesetze genügt. Soll auch das commutative Gesetz gelten, so können wir auf die specielleren Untersuchungen des Herrn Dedekind**) verweisen, mit denen diese Arbeit sonst keine Berührungspunkte hat.

§ 1.

Ist in einem Gebiete von n Dimensionen eine Schaar von ∞^n Transformationen vorgelegt, von denen jede einem Punkte $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ einen Punkt $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ zuordnet, so ist der allgemeinste analytische Ausdruck derselben:

---

*) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Math. Ann. Bd. XVI, p. 441; Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen u. s. w. ib. Bd. XXV, p. 71 und ältere Arbeiten in den Berichten d. Ges. d. Wiss. zu Christiania.

**) S. Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, Göttinger Nachrichten 1885. p. 141.

(1) $$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_n) = \varphi_i(x; u),$$
wo man also $u_1, u_2, \cdots, u_n$ ebenfalls als die Coordinaten eines Punktes des n-dimensionalen Gebietes auffassen kann. Wir machen nun die weitere Annahme, dass die φ_i analytische Functionen ihrer Argumente seien, und dass unter jenen Transformationen auch eine solche existire, welche jeden Punkt ihm selbst zuordnet; diese Annahme besagt offenbar, dass in dem durch diese Schaar von Transformationen definirten Zahlensysteme ein Aequivalent der Null existire.

Entspricht nun jene identische Transformation dem Werthsysteme $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ oder $u = 0$, so werden wir nach unsern Voraussetzungen die Functionen φ_i in folgender Form annehmen können:

(2) $$\varphi_i(x; u) = x_i + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi_i(x; 0)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \ldots \partial u_{k_m}} u_{k_1} u_{k_2} \cdots u_{k_m}.$$
$$\{k_1, k_2, \cdots, k_m = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Soll also diese Schaar von Transformationen dem *associativen Gesetze* folgen, soll also sein:

(3) $$\varphi_i\big(\varphi(x; u); v\big) = \varphi_i\big(x; \varphi(u; v)\big),$$

so ergeben sich durch beiderseitige Entwickelung nach v_k die folgenden Gleichungen:

(4) $$\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi_i\big(\varphi(x; u); 0\big)}{\partial v_{k_1} \partial v_{k_2} \ldots \partial v_{k_m}} =$$
$$= \sum \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \varphi_i(x; u)}{\partial u_{l_1} \partial u_{l_2} \ldots \partial u_{l_p}} \left[\frac{1}{s_1!} \frac{\partial^{s_1} \varphi_{l_{d_1}}(u; 0)}{\partial v_{k_1} \partial v_{k_2} \ldots \partial v_{k_{s_1}}} \frac{1}{s_2!} \frac{\partial^{s_2} \varphi_{l_{d_2}}(u; 0)}{\partial v_{k_{s_1+1}} \partial v_{k_{s_1+2}} \ldots \partial v_{k_{s_1+s_2}}} \right.$$
$$\left. \cdots \frac{1}{s_p!} \frac{\partial^{s_p} \varphi_{l_{d_p}}(u; 0)}{\partial v_{k_{m-s_p}} \ldots \partial v_{k_m}} \right].$$
$$\left\{ \begin{matrix} p = 1, 2, \cdots, m;\ l_1, l_2, \cdots, l_p = 1, 2, \cdots, n;\ d_1, d_2, \cdots, d_p = 1, \cdots, p; \\ s_1 + s_2 + \cdots + s_p = m. \end{matrix} \right\}$$

Aus (3) ergiebt sich im Besonderen:

(5) $$\varphi_i(x; v) = \varphi_i\big(x; \varphi(0; v)\big)$$

und

(6) $$\varphi_i(0; v) = \varphi_i\big(0; \varphi(0; v)\big).$$

Sobald es also möglich ist, den Nullpunkt in jeden andern Punkt y eines n-dimensionalen Gebietes durch die ∞^n Transformationen unserer Schaar überzuführen, so würde nach (6) für die Punkte dieses Gebietes, also überhaupt identisch die Gleichung gelten:

(7) $$y_i = \varphi_i(0; y);$$

wäre nun unsere Voraussetzung nicht erfüllt, könnte also der Nullpunkt nur in die Punkte eines Gebietes von weniger als n Dimensionen transformirt werden, so würde nach (5) auch unsere Schaar aus weniger als ∞^n Transformationen bestehen. Unsere Voraussetzung ist daher erfüllt und es ergeben sich aus (7) die Formeln:

$$\frac{\partial \varphi_i(0;\,0)}{\partial u_k} = 1 \text{ oder } 0, \tag{8}$$

je nachdem $i = k$ oder $\lessgtr k$, und:

$$\frac{\partial^m \varphi_i(0;\,0)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \dots \partial u_{k_m}} = 0, \quad \text{sobald } m > 1. \tag{9}$$

Sollen nun die Functionen φ_i so bestimmt werden, dass sie den Bedingungen (4) genügen, so wird dies Problem wesentlich leichter gemacht durch die Bemerkung, dass *diese Relationen für jedes m erfüllt sind, sobald sie für $m = 1$ befriedigt sind;* ja nur dadurch erscheint es möglich, das Problem überhaupt in Angriff zu nehmen. Nehmen wir nämlich an, das System (4) sei für ein gewisses m und alle kleineren Zahlen erfüllt, so ergiebt sich durch Differentiation desselben nach $u_{l_{p+1}}$, Multiplication mit $\dfrac{\partial \varphi_{l_{p+1}}(u;\,0)}{\partial v_{k+1}}$ und Summation über l_{p+1} in Rücksicht auf ebendies System für $m = 1$:

$$\sum_{q=1,2,\dots,n} \frac{1}{m!} \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m \varphi_i(\varphi(x;\,u);\,0)}{\partial v_{k_1} \partial v_{k_2} \dots \partial v_{k_m}}\right)}{\partial \varphi_q(x;\,u)} \frac{\partial \varphi_q(\varphi(x;\,u);\,0)}{\partial v_{k_{m+1}}} = \tag{10}$$

$$-\sum \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1} \varphi_i(x;\,u)}{\partial u_{l_1} \partial u_{l_2} \dots \partial u_{l_{p+1}}} \left[\frac{1}{s_1!} \frac{\partial^{s_1} \varphi_{l_{d_1}}(u;\,0)}{\partial v_{k_1} \partial v_{k_2} \dots \partial v_{k_{s_1}}} \cdots \frac{1}{s_p!} \frac{\partial^{s_p} \varphi_{l_{d_p}}(u;\,0)}{\partial v_{k_{m-s_p}} \dots \partial v_{k_m}} \frac{\partial \varphi_{l_{d_{p+1}}}(u;\,0)}{\partial v_{k_{m+1}}}\right]$$

$$+\sum \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \varphi_i(x;\,u)}{\partial u_{l_1} \partial u_{l_2} \dots \partial u_{l_p}} \left[\frac{1}{s_1!} \frac{\partial^{s_1} \varphi_{l_{d_1}}(u;\,0)}{\partial v_{k_1} \partial v_{k_2} \dots \partial v_{k_{s_1}}} \cdots\right.$$

$$\cdots \left\{\frac{1}{s_c!} \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{s_c} \varphi_{l_{d_c}}(u;\,0)}{\partial v_{k_{s_1+s_2+\dots+s_{c-1}+1}} \dots \partial v_{k_{s_1+s_2+\dots+s_c}}}\right)}{\partial u_{l_{p+1}}} \frac{\partial \varphi_{l_{p+1}}(u;\,0)}{\partial v_{k_{m+1}}}\right\}$$

$$\left.\cdots \frac{1}{s_p!} \frac{\partial^{s_p} \varphi_{l_{d_p}}(u;\,0)}{\partial v_{k_{m-s_p}} \dots \partial v_{k_m}}\right]$$

$$\left\{\begin{matrix} p = 1, 2, \dots, m;\ l_1, l_2, \dots, l_{p+1} = 1, 2, \dots, n;\ d_1, d_2, \dots, d_p;\ d_{p+1} = 1, 2, \dots, p;\ p+1; \\ s_1 + s_2 + \dots + s_p = m;\ c = 1, 2, \dots, p \end{matrix}\right\}.$$

Hier dürfte nun zu erörtern sein, warum in der ersten Summe rechts der Nenner $(p+1)!$ statt $p!$ steht; dem würde in der That so sein, wenn wir nach der Rechenvorschrift dem letzten Factor den Index l_{p+1} gegeben hätten. Durch die angewandte Bezeichnung tritt aber jedes Glied der Summe $(p+1)$-mal so oft auf, als dies eben nach jener Vorschrift der Fall sein dürfte, sodass für ein bestimmtes p die Summe noch durch $p+1$ zu dividiren ist.

Aus (10) ergiebt sich für $u=0$ in Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (9):

$$(11)\quad \sum_{q=1,2,\cdots,n} \frac{1}{m!} \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m \varphi_i(x;0)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}\ldots\partial u_{k_m}}\right)}{\partial x_q} \frac{\partial \varphi_q(x;0)}{\partial u_{k_{m+1}}} = \frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1}\varphi_i(x;0)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}\ldots\partial u_{k_{m+1}}}$$

$$+\sum \frac{1}{p!}\frac{\partial^p \varphi_l(x;0)}{\partial u_{k_{r_1}}\partial u_{k_{r_2}}\ldots\partial u_{k_{r_{p-1}}}\partial u_l}\frac{1}{(m-p+1)!}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{m-p+1}\varphi_i(0;0)}{\partial v_{k_{r_p}}\partial v_{k_{r_{p+1}}}\ldots\partial v_{k_{r_m}}}\right)}{\partial u_{k_{m+1}}}.$$

$$\{p=1,2,\cdots,m;\quad l=1,2,\cdots,n;\quad r_1,r_2,\cdots,r_m=1,2,\cdots,m\}.$$

Setzt man hierin zunächst $\varphi(x;u)$ für x, so erhält man eine neue Form der linken Seite der Gleichung (10). Setzt man dann zweitens in (11) für $x, m, p: u, s_0, q$, so erhält man einen Ausdruck für die in geschweiften Klammern stehende Grösse in der zweiten Summe der rechten Seite von (10). Substituirt man diesen Ausdruck in (10), so liefert der erste Term derselben gerade diejenigen Glieder der Formel (4) für $m+1$, welche in der ersten Summe der rechten Seite von (10) hierzu noch fehlen; die übrigen Terme liefern auf Grund der Formel (4) für m und alle kleineren Zahlen gerade diejenige Summe, welche in der neuen Form der linken Seite von (10) neben:

$$\frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1}\varphi_i(\varphi(x;u);0)}{\partial v_{k_1}\partial v_{k_2}\ldots\partial v_{k_{m+1}}}$$

noch steht. *Aus der Gültigkeit der Formel* (4) *für ein m und alle kleineren Zahlen folgt also diese selbe Formel auch für $m+1$.* Die vollständige Ausrechnung glaubten wir hierbei dem Leser überlassen zu dürfen.

Dieses Resultat ist nicht überraschend, da nach Formel (11) die sämmtlichen Coefficienten der Reihe (2) bekannt sind, sobald die

$$(12)\qquad \frac{\partial \varphi_i(x;0)}{\partial u_k} = \xi_i^k(x)$$

als Functionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bekannt sind. Es wird also alles darauf ankommen, zu untersuchen, welchen Bedingungen diese Functionen noch zu genügen haben. Hierzu gelangen wir durch Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen des aus (4) für $m=1$ entstehenden Systems:

$$\xi_i^k\big(\varphi(x;u)\big)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_l}\,\xi_l^k(u). \tag{13}$$

Aus ihm ergiebt sich durch Differentiation nach u_m, Multiplication mit $\xi_m^h(u)$ und Summation über m:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\xi_i^k(\varphi(x;u))}{\partial\varphi_p(x;u)}\,\xi_p^h\big(\varphi(x;u)\big)= \tag{14}$$

$$=\sum_{l,m=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2\varphi_i(x;u)}{\partial u_l\partial u_m}\,\xi_l^k(u)\,\xi_m^h(u)+\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_l}\,\frac{\partial\xi_l^k(u)}{\partial u_m}\,\xi_m^h(u)\right\}.$$

Zieht man hiervon die durch Vertauschung von h mit k entstehende Gleichung ab, so ergeben sich die folgenden Integrabilitätsbedingungen für das System (13):

$$\sum_{p=1}^{n}\left\{\frac{\partial\xi_i^k(\varphi(x;u))}{\partial\varphi_p(x;u)}\,\xi_p^h\big(\varphi(x;u)\big)-\frac{\partial\xi_i^h(\varphi(x;u))}{\partial\varphi_p(x;u)}\,\xi_p^k\big(\varphi(x;u)\big)\right\}= \tag{15}$$

$$=\sum_{l,m=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_l}\left\{\frac{\partial\xi_l^k(u)}{\partial u_m}\,\xi_m^h(u)-\frac{\partial\xi_l^h(u)}{\partial u_m}\,\xi_m^k(u)\right\}.$$

Dass dies in der That die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (13) sind, ergiebt sich folgendermassen. Auf Grund von (14) sind die Gleichungen (15) identisch mit den folgenden:

$$\sum_{l,m=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_l}\right)}{\partial u_m}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_m}\right)}{\partial u_l}\right)\left\{\xi_l^k(u)\xi_m^h(u)-\xi_l^h(u)\xi_m^k(u)\right\}=0. \tag{16}$$

Dies ist ein System von $\frac{n(n-1)}{2}$ linearen homogenen Gleichungen für die $\frac{n(n-1)}{2}$ Unbekannten:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_m}\right)}{\partial u_l}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i(x;u)}{\partial u_l}\right)}{\partial u_m},$$

dessen Determinante die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der Determinante $|\xi_i^k(u)|$ ist, von welcher wir nach (8) wissen dass sie nicht identisch verschwindet; es müssen daher jene Unbekannten sämmtlich verschwinden.

Die Integrabilitätsbedingungen (15) nun gehen, wenn man:

$$c_{h,k}^l=\frac{\partial\xi_l^k(0)}{\partial u_h}-\frac{\partial\xi_l^h(0)}{\partial u_k} \tag{17}$$

setzt, für $u = 0$ über in:

$$(18)\qquad \sum_{p=1}^{n}\left\{\frac{\partial \xi_i^k(x)}{\partial x_p}\,\xi_p^h(x) - \frac{\partial \xi_i^h(x)}{\partial x_p}\,\xi_p^k(x)\right\} = \sum_{l=1}^{n} \xi_i^l(x)\, c_{h,k}^l;$$

und man sieht leicht, dass aus diesen Gleichungen mit Hülfe des Systems (13) sich umgekehrt die (15) ergeben.

Zwischen den Constanten $c_{h,k}^l$ bestehen bemerkenswerthe Beziehungen, die sich als Integrabilitätsbedingungen des Systems (18) ergeben. Man erhält sie durch Differentiation der Gleichungen (18) nach x_m, Multiplication mit $\xi_m^g(x)$, Summation über m, cyklische Vertauschung der Indices g, h, k und Addition der so entstehenden drei Gleichungen für ein bestimmtes i. Das Resultat ist:

$$(19)\qquad \sum_{l=1}^{n}\left\{c_{g,h}^l\, c_{l,k}^i + c_{h,k}^l\, c_{l,g}^i + c_{k,g}^l\, c_{l,g}^i\right\} = 0.$$

Den Beweis, dass dies die vollständigen Integrabilitätsbedingungen sind, müssen wir uns hier versagen; er kommt nach Herrn Lie auf den Beweis des Satzes hinaus, dass zu jedem Systeme von Constanten, welches den Gleichungen (19) genügt, d. h. zu jeder vorgelegten Zusammensetzung eine einfach transitive, n-gliedrige Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen gehört.

Uns interessirt hier zunächst der besonders einfache Fall, dass unsere Gruppe von Transformationen auch dem *commutativen Gesetze* folge, dass also sei:

$$(20)\qquad \varphi_i\big(\varphi(x;u);v\big) = \varphi_i\big(\varphi(x;v);u\big),$$

oder nach (3):

$$(21)\qquad \varphi_i\big(x;\varphi(u;v)\big) = \varphi_i\big(x;\varphi(v;u)\big),$$

oder nach (7) auch:

$$(22)\qquad \varphi_i(u;v) = \varphi_i(v;u).$$

Entwickeln wir nun die Reihe (2) auch nach Potenzen von x, so erhalten wir:

$$(23)\qquad \varphi_i(x;u) = x_i + u_i + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \xi_i^k(0)}{\partial x_l}\, x_l u_k + \cdots;$$

soll also $\varphi_i(x;u)$ eine symmetrische Function von x und u sein, so muss stets:

$$(24)\qquad \frac{\partial \xi_i^k(0)}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_i^l(0)}{\partial x_k} = c_{l,k}^i = 0$$

sein, sodass die Gleichungen (19) von selbst erfüllt sind.

Jetzt ist es leicht, zu zeigen, dass unsere Gruppe durch Einführung von neuen Veränderlichen:

(25) $$X_i = f_i(x); \qquad U_i = f_i(u)$$

sich stets in eine Gruppe von Translationen überführen lässt. Von den Functionen $f_i(x)$ setzen wir noch voraus, dass:

(26) $$f_i(0) = (0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k} = 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $i = k$ oder $i \lessgtr k$.

Die letzte Voraussetzung hat die Umkehrbarkeit der Gleichungen (25) zur Folge. Unsere Transformationen nehmen nunmehr die folgende Form an:

(27) $$\Phi_i(X; U) = X_i + \sum_{k=1}^{n} \Xi_i^k(X)\, U_k + \cdots,$$

wo:

(28) $$\Xi_i^k(X) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_l}\, \xi_l^k(x).$$

Bestimmen wir nun die Functionen $f_i(x)$ aus den Differentialgleichungen:

(29) $$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_l}\, \xi_l^k(x) = \delta_{i,k},$$

wo $\delta_{i,k} = 1$ oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \lessgtr k$. In der That wäre unter dieser Voraussetzung in Folge der (11) analogen Gleichungen:

(30) $$\frac{\partial^{m+1} \Phi_i(X;\, 0)}{\partial U_{k_1} \partial U_{k_2} \ldots \partial U_{k_{m+1}}} = 0,$$

sobald $m > 0$, sodass unsere Transformation die Form annähme:

(31) $$X_i' = X_i + U_i.$$

Die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des System (29) ergeben sich nun in analoger Weise wie die des Systems (13) in der Form:

(32) $$\sum_{l,m=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_l} \left\{ \frac{\partial \xi_l^k(x)}{\partial x_m}\, \xi_m^h(x) - \frac{\partial \xi_l^h(x)}{\partial x_m}\, \xi_m^k(x) \right\} = 0,$$

welche Gleichungen nun wegen (18) und wegen des Verschwindens der $c_{h,k}^l$ identisch erfüllt sind. Wir erhalten daher das folgende Resultat:

Eine Schaar von ∞^n Transformationen des Raumes von n Dimensionen, welche erstens die identische Transformation enthält und zweitens sowohl dem associativen wie dem commutativen Gesetze folgt, lässt sich durch Einführung von neuen Veränderlichen stets in eine Schaar von Translationen überführen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch hervorheben, dass in einem Gebiete von einer Dimension das associative Gesetz hinreicht, um eine Schaar von einfach unendlich viel Transformationen desselben als in eine Schaar von Translationen überführbar zu charakterisiren, dass diese dann also von selbst dem commutativen Gesetze folgt. Denn die Integration der Differentialgleichung:

$$(33) \qquad \frac{df(x)}{dx}\,\xi(x) = 1,$$

in welche (29) in diesem Falle übergeht, ist dann ohne Weiteres möglich.*)

§ 2.

Ist nun in einem Gebiete von n Dimensionen neben der Schaar von Translationen auch eine andre Schaar von ∞^n Transformationen:

$$(34) \qquad x_i' = \psi_i(x;\, u)$$

gegeben, welche mit der ersteren durch das distributive Gesetz verbunden ist, ist also:

$$(35) \qquad \psi_i(x;\, u+v) = \psi_i(x;\, u) + \psi_i(x;\, v),$$

so folgt zunächst, dass:

$$(36) \qquad \psi_i(x;\, 0) = 0,$$

und ferner:

$$(37) \qquad \frac{\partial \psi_i(x;\, u)}{\partial u_k} = \frac{\partial \psi_i(x;\, 0)}{\partial u_k};$$

es müssen daher die $\psi_i(x;\, u)$ lineare homogene Functionen der u_k sein, also:

$$(38) \qquad \psi_i(x;\, u) = \sum_{k=1}^{n} \eta_i^k(x)\, u_k.$$

Machen wir nun die weitere Voraussetzung, dass auch diese Schaar von Transformationen die identische enthalte, dass also:

$$(39) \qquad \psi_i(x;\, e) = x_i,$$

dass ferner auch diese Schaar dem associativen Gesetze Genüge leiste, so können wir die Resultate des vorigen Paragraphen anwenden, nachdem wir φ, ξ, 0 durch ψ, η, e ersetzt haben. Es kommt dann nur darauf an, die besondere Bedingung einzuführen, dass:

$$(40) \qquad \frac{\partial^2 \psi_i(x;\, u)}{\partial u_k \partial u_h} = 0.$$

---

*) S. Lie, Math. Ann. Bd. XVI, p. 451.

Setzen wir:

$$\frac{\partial \eta_i^k(e)}{\partial e_h} = a_{h,k}^i, \tag{41}$$

so liefert Gleichung (11) für $m = 1$ hiernach die folgenden Bedingungen:

$$\sum_{q=1}^n \frac{\partial \eta_i^k(x)}{\partial x_q} \eta_q^h(x) = \sum_{l=1}^n \eta_i^l(x)\, a_{h,k}^l. \tag{42}$$

Man sieht ausserdem aus Gleichung (11) leicht, dass, wenn die Bedingungen:

$$\frac{\partial^m \psi_i(x;\, e)}{\partial e_{k_1} \partial e_{k_2} \dots \partial e_{k_m}} = 0 \tag{43}$$

für alle Zahlen von 2 bis m erfüllt sind, sie auch für $m + 1$ befriedigt sind, sodass also die Gleichungen (42) den Bedingungen (40) äquivalent sind. Andrerseits ist unmittelbar klar, dass die Gleichungen (42) die Integrabilitätsbedingungen (18) zur Folge haben. Aus (42) ergiebt sich nun durch Differentiation und Anwendung dieser selben Gleichung:

$$\sum_{p,q=1}^n \frac{\partial^2 \eta_i^k(x)}{\partial x_p \partial x_q} \eta_p^g(x)\, \eta_q^h(x) = \sum_{p,l=1}^n \eta_i^p(x) \left(a_{h,k}^l a_{g,l}^p - a_{g,k}^l a_{l,k}^p\right). \tag{44}$$

Hieraus ergeben sich zunächst die vollständigen Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (42) in folgender Form:

$$\sum_{l=1}^n \left\{a_{h,k}^l a_{g,l}^p - a_{g,k}^l a_{h,l}^p - a_{l,k}^p \left(a_{g,h}^l - a_{h,g}^l\right)\right\} = 0. \tag{45}$$

Ist ein System von Constanten $a_{h,k}^l$ gefunden, welches diesen Bedingungen genügt, so sind auf Grund der Anfangsbedingungen (8) die $\eta_i^k(x)$ durch die Differentialgleichungen (42) vollkommen als Functionen von x bestimmt.

Die $a_{h,k}^l$ müssen aber noch anderen Bedingungen genügen, die sich aus (39) ergeben. Hiernach muss nämlich sein:

$$x_i = \sum_{k=1}^n \eta_i^k(x)\, e_k, \tag{46}$$

also auch:

$$\delta_{i,h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_i^k(x)}{\partial x_h} e_k, \tag{47}$$

im Besonderen also:

$$(48) \qquad \delta_{i,h} = \sum_{k=1}^{n} a^i_{h,k}\, e_k.$$

Sind die Constanten $a^i_{h,k}$ auch diesen Bedingungen gemäss gewählt, so folgt umgekehrt aus (42):

$$(49) \qquad \sum_{q,k=1}^{n} \frac{\partial \eta^k_i(x)}{\partial x_q}\, e_k\, \eta^k_q(x) = \eta^k_i(x).$$

Hieraus folgen die Gleichungen (47) und aus diesen wegen den Anfangsbedingungen auch die Bedingungen (46).

Die Bestimmung aller Multiplicationsarten kommt hiernach also auf die Bestimmung aller Systeme von Constanten $a^i_{h,k}$ *hinaus, welche den Bedingungen* (45) *und* (48) *genügen.* Wir begnügen uns hier mit dieser allgemeinen Formulirung des Problems.

Stellt man die weitere Forderung, dass auch das commutative Gesetz erfüllt sein soll, dass also:

$$(50) \qquad a^i_{h,k} = a^i_{k,h},$$

so gehen die Bedingungen (45) über in:

$$(51) \qquad \sum_{l=1}^{n} \left(a^l_{h,k}\, a^p_{g,} - a^l_{g,k}\, a^p_{h,l}\right) = 0.$$

Vertauscht man hierin h mit k, so sieht man, dass auch die rechten Seiten der Gleichungen (44) verschwinden, dass also, was übrigens selbstverständlich, die $\eta_i{}^k(x)$ lineare Functionen der x_l sind. Es braucht aber kaum bemerkt zu werden, dass die Bedingungen hierfür oder die Gleichungen:

$$(52) \qquad \sum_{l=1}^{n} \left(a^l_{h,k}\, a^p_{g,l} - a^l_{g,h}\, a^p_{l,k}\right) = 0$$

zwar die Gleichungen (45) zur Folge haben, aber nicht nothwendig das Bestehen des commutativen Gesetzes. Sie besagen offenbar nur, dass die betreffende Multiplicationsart auch in Beziehung auf den ersten Factor mit der Addition durch das distributive Gesetz verknüpft ist; ich erinnere hier an das Beispiel der Quaternionen. Alle Systeme von Constanten $a^i_{h,k}$, welche den Gleichungen (51) genügen, hat Herr Dedekind a. a. O. aufgestellt.

In dem am Schlusse des vorigen Paragraphen behandelten Probleme, eine solche Gruppe von Transformationen in eine Gruppe von Translationen überzuführen, würden offenbar die Functionen f_i die Stelle der Logarithmen der gewöhnlichen complexen Zahlen einnehmen.

Der Vollständigkeit halber mag auch hier darauf hingewiesen werden, dass in einem Gebiete von einer Dimension das associative Gesetz und das distributive Gesetz in Beziehung auf den einen Factor ausreicht, um die Multiplication als die gewöhnliche zu charakterisiren.

Ich will mich vorläufig hiermit begnügen, um den Zusammenhang der Theorie der complexen Zahlen mit derjenigen der Transformationsgruppen wenigstens in seinen Umrissen dargestellt zu haben.

Leipzig, im März 1888.

Ueber eine fundamentale Eigenschaft des Ueberschiebungsprocesses und deren Verwerthung in der Theorie der binären Formen.

Von

E. Stroh in München.

Wenn man die Ueberschiebung — entgegen der gewöhnlichen Ausdrucksweise — nicht als einen *Process* sondern als eine „*Verknüpfung*" betrachtet, durch welche aus zwei gegebenen binären Formen f, φ, oder aus drei ternären Formen f, φ, ψ etc. eine neue Form $(f\varphi)^i$, $(f\varphi\psi)^i$ etc. gebildet werden kann, dann liegt die Frage nahe, *welchen einfachen Gesetzen diese Verknüpfungsart unterworfen ist.* Für *binäre Formen* habe ich diese Frage im Folgenden beantwortet. Ausser den schon bekannten Eigenschaften der Ueberschiebung, die in § 1 angegeben sind, zeigt sich eine neue Eigenschaft derselben (§ 3), die mit dem *associativen Gesetze* der algebraischen Rechnungsarten in Parallele gestellt werden kann und die ich daher auch kurz so genannt habe. Durch die Erkenntniss dieses Gesetzes wird dann das Rechnen mit Ueberschiebungen ebenso einfach, wie dasjenige mit Producten. Dass in der That ein enger Zusammenhang zwischen der multiplicativen Verknüpfung und der Ueberschiebung stattfinden muss, lässt sich von vornherein aus dem Umstande erkennen, dass das Product als besonderer Fall einer Ueberschiebung (als nullte Ueberschiebung) aufgefasst werden kann. Daher müssen auch die Gesetze der Multiplication aus denen der Ueberschiebung als besondere Fälle gefolgert werden können.

Alle Fragen, welche die Auffindung von linearen Relationen zwischen Covarianten zum Ziele haben, sind durch Anwendung des associativen Gesetzes lösbar. Aber nicht blos, dass lineare Relationen auf diesem Wege aufgefunden werden können, es lässt sich auch zeigen, dass *alle existirenden* Relationen erhalten werden müssen. Dieser Nachweis wird dadurch erreicht, dass man die Ueberschiebungen nach einem bestimmten Gesichtspunkte in *Gruppen* ordnet und alsdann die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen solcher Gruppen untersucht.

Diejenigen linearen Relationen zwischen Covarianten, welche Sylvester *Syzyganten* genannt hat, bieten ein besonderes Interesse. Es zeigt sich, dass die allgemeine Methode zur Auffindung von Syzyganten derart vereinfacht werden kann, dass die Aufstellung eines Systems *fundamentaler* Syzyganten, aus denen alle anderen ableitbar sind, eine verhältnissmässig einfache Sache ist. Damit ist zugleich ein Mangel beseitigt, der sich bisher bei Aufstellung vollständiger Formensysteme mittelst der symbolischen Methode bemerkbar machte. Diese Syzyganten geben nämlich ein brauchbares Mittel an die Hand, um zu entscheiden, ob in einem aufgestellten Formensysteme noch eine überflüssige Form vorhanden ist oder nicht.

§ 1.

Das distributive und das commutative Gesetz für die Ueberschiebung.

Es soll zunächst das Verhalten der Ueberschiebung gegenüber den algebraischen Verknüpfungsarten betrachtet werden. Da die multiplicative Verknüpfung selbst als Ueberschiebung aufgefasst werden kann, so kommt blos das Verhalten der Ueberschiebung gegenüber der Addition in Betracht. In dieser Beziehung gilt nun das distributive Gesetz für die Ueberschiebung ebenso wie für die Multiplication. Denn es ist, wenn f und φ Formen gleicher Ordnung sind:

$$(f \pm \varphi, \psi)^\lambda = (f\psi)^\lambda \pm (\varphi\psi)^\lambda,$$

woraus das genannte Gesetz abgelesen werden kann. Für $\lambda = 0$ folgt dasselbe Gesetz für die Multiplication.

Als Anwendung sollen einige Entwicklungen angegeben werden, auf welche später zurückgegriffen werden wird. Wenn

$$f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{\nu_1 - 1} f_{\nu_1 - 1},$$
$$\varphi = b_0 \varphi_0 + b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + \cdots + b_{\nu_2 - 1} \varphi_{\nu_2 - 1}$$
$$\text{etc.}$$

Formen von den Ordnungen n_1, n_2, etc. sind, dann ergeben sich die Beziehungen

$$(f\varphi)^\lambda = \sum_{i,k} a_i b_k (f_i \varphi_k)^\lambda \quad \begin{cases} i = 0, 1, \ldots \nu_1 - 1, \\ k = 0, 1, \ldots, \nu_2 - 1, \end{cases}$$

$$(ff)^{2\lambda} = \sum_{i,i_1} a_i a_{i_1} (f_i f_{i_1})^{2\lambda} \quad \begin{cases} i = 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1, \\ i_1 = 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1, \end{cases}$$

$$\big((ff)^{2\lambda}\varphi\big)^\mu = \sum_{i,k,i_1} a_i a_{i_1} b_k \big((f_i f_{i_1})^{2\lambda} \varphi_k\big)^\mu$$

und allgemein

$$(1)\ [f_i f_i \cdots \varphi_i \varphi_i \cdots]_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}} = \sum a_i a_{i_1} \cdots b_k b_{k_1} \cdots [f_i f_{i_1} \cdots \varphi_k \varphi_{k_1} \cdots]_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}},$$

wo die [ ] eine *beliebige* Art der Zusammenfassung durch im ganzen $\nu - 1$ Ueberschiebungen andeutet, während die Zahlen $i, i_1 \ldots$ alle Werthe von 0 bis $\nu_1 - 1$, $k, k_1 \ldots$ alle Werthe von 0 bis $\nu_2 - 1$, etc. durchlaufen sollen. Diese Summe kann dann noch in der Weise geordnet werden, dass alle Glieder mit demselben Factor

$$a_i a_{i_1} \ldots b_k b_{k_1} \ldots$$

zusammengenommen werden. Die zugehörigen Ueberschiebungen unterscheiden sich dann nur noch durch die Aufeinanderfolge der Indices $i, i_1 \ldots k, k_1 \ldots$ und können, wie leicht zu sehen, aus *einer* derselben durch Permutation dieser Indices abgeleitet werden.

Wenn eine Verknüpfung derart beschaffen ist, dass durch Vertauschung der zu verknüpfenden Grössen am Resultat nichts geändert wird, dann befolgt bekanntlich diese Verknüpfungsweise das *commutative Gesetz*. Um nun die Ueberschiebung diesem Gesetze unterordnen zu können, muss diese Definition etwas erweitert werden. Da es sich hier nicht um einfache Grössen, sondern um Formen handelt, die *mehrere* Bestimmungsstücke besitzen, so können wir wohl zwischen *wesentlichen* und *unwesentlichen* Bestimmungsstücken einen Unterschied machen. Rechnen wir zu letzteren das Vorzeichen einer Form (oder überhaupt einen Zahlenfactor), dann folgt aus

$$(f\varphi)^\lambda = (-1)^\lambda (\varphi f)^\lambda$$

dass die Ueberschiebung das Resultat bei Vertauschung der Formen in seinen *wesentlichen Bestimmungsstücken* unverändert lässt, und dass sie somit dem *commutativen* Gesetze in dieser erweiterten Fassung unterworfen ist.

§ 2.

Relationen zwischen Ueberschiebungen dreier binärer Formen.

Bevor auf die Art und Weise, wie das associative Gesetz bei der Ueberschiebung sich ausdrückt, näher eingegangen werden kann, müssen zuerst die hiezu erforderlichen Relationen abgeleitet werden.

Bilden wir aus der Ueberschiebung:

$$(f_1 f_2)^{\alpha_3} = (ab)^{\alpha_3} a_x^{n_1-\alpha_3} b_x^{n_2-\alpha_3}$$

die $(n_1 - \alpha_3)^{\text{te}}$ Polare nach y, so ergiebt sich nach Gordan (Formensystem pag. 7):

$$(f_1 f_2)^{\alpha_3}_{y^{n_1-\alpha_3}} = \sum_\lambda \frac{\binom{n_1-\alpha_3}{\lambda}\binom{n_2-\alpha_3}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3}{\lambda}} (ab)^{\alpha_3+\lambda} a_y^{n_1-\alpha_3-\lambda} b_x^{n_2-\alpha_3-\lambda} (xy)^\lambda.$$

Polarisirt man diese Gleichung einmal von y nach x β_1 mal und dann noch von x nach y α_1 mal und führt in bekannter Weise statt der Variabeln y die Symbole der Form

$$f_3 = c_x^{n_3}$$

ein, dann ergeben sich die folgenden beiden Relationen

$$\left((f_1 f_2)^{\alpha_3} f_3\right)^{\alpha_2} = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{\binom{\alpha_2}{\lambda}\binom{\beta_2}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3}{\lambda}} (ab)^{\alpha_3+\lambda} (ac)^{\alpha_2-\lambda} a_x^{\beta_1} b_x^{\beta_2-\lambda} c_x^{\beta_3+\lambda}$$

und

$$\left((f_1 f_2)^{\alpha_3} f_3\right)^{\alpha_1+\alpha_2} = \sum_\lambda (-1)^\lambda \frac{\binom{\alpha_2}{\lambda}\binom{\beta_2}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3}{\lambda}} (ab)^{\alpha_3+\lambda} (ac)^{\alpha_2-\lambda} (bc)^{\alpha_1} b_x^{\beta_2-\lambda} c_x^{\beta_3+\lambda},$$

wobei zur Abkürzung die Zahlen β eingeführt sind, die durch

$$\beta_1 = n_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \quad \beta_2 = n_2 - \alpha_3 - \alpha_1, \quad \beta_3 = n_3 - \alpha_1 - \alpha_2$$

definirt sind. Dabei ist zu beachten, dass diese Werthe nur positiv oder Null sein können. Dadurch sind dann aber auch die Werthe der α derart eingeschränkt, dass für die erste der obigen Gleichungen, für welche $\alpha_1 = 0$ ist, $\alpha_2 \leqq n_3$, $\alpha_3 \leqq n_2$ und $\alpha_2 + \alpha_3 \leqq n_1$ sein muss, während für die zweite, für welche $\beta_1 = 0$ ist,

$$\alpha_2 + \alpha_3 = n_1, \quad \alpha_1 + \alpha_3 \leqq n_2 \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leqq n_3$$

sein muss.

Durch die erhaltenen Gleichungen ist jede Ueberschiebung der 3 Formen $f_1 f_2 f_3$ in ein Aggregat umgesetzt, dessen einzelne Glieder symbolische Producte besonderer Art sind. Dieselben enthalten nämlich in der ersten Gleichung zwei Klammerfactoren (ab), (ac) und drei Linearfactoren a_x, b_x, c_x, in der zweiten ist es umgekehrt. In beiden Fällen ist es aber möglich, jedes der symbolischen Producte in ein Aggregat von Ueberschiebungen zu verwandeln, die aber jetzt von der Art $\left((f_1 f_3)^\lambda f_2\right)^\mu$ sein sollen. Die so erhaltenen zwei Formeln lassen sich dann noch in eine zusammenfassen und zwar dadurch, dass wir das Indicessystem

$$\begin{Bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix}$$

zu Grunde legen mit der Bedingung

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 = 0,$$

während die Zahlen β_i dieselbe Bedeutung haben, wie oben angegeben ist. Dann ist die Schlussformel die folgende

$$(2) \qquad \left((f_1 f_2)^{\alpha_3} f_3\right)^{\alpha_1+\alpha_2} = (-1)^{\alpha_1} \sum_{\lambda=0,1,2\cdots} c_\lambda \left((f_1 f_3)^{\alpha_2-\gamma+\lambda} f_2\right)^{\alpha_1+\alpha_3+\gamma-\lambda},$$

wo γ die kleinere der Zahlen α_2 und β_2 ist, während die Zahlencoefficienten c_λ durch

$$c^\lambda = \sum_{i=0,1,2\cdots}(-1)^{\gamma+i}\frac{\binom{\alpha_2}{\gamma-i}\binom{\beta_2}{\gamma-i}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3}{\gamma-i}}\;\frac{\binom{\alpha_3+\gamma-i}{\lambda-i}\binom{\beta_3+\gamma-i}{\lambda-i}}{\binom{n_1+n_3-2\alpha_2+2\gamma_2-\lambda-i+1}{\lambda-i}}$$

bestimmt sind. Da die Ausrechnung dieser Zahlencoefficienten etwas umständlich ist, so empfiehlt es sich, bei häufigerem Gebrauche dieser Formel, dieselben in einer Tabelle zusammenzustellen. Eine Erleichterung gewährt schon eine Tabelle für die Coefficienten

$$Z_i = \frac{\binom{p}{i}\binom{q}{i}}{\binom{p+q+r-i+1}{i}} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots$$

die für jedes Werthepaar (p, q) in Columnen und für die verschiedenen Werthe von r in Zeilen geordnet werden können. Um die c_λ zu berechnen, sind dann in der Columne (α_2, β_2) und in der Zeile $\alpha_1+\beta_1$ die erste Zahl a_1 und diagonal abwärts die folgenden $a_2, a_3 \ldots a_\gamma$ zu entnehmen. Ebenfalls in der Zeile $\alpha_1+\beta_1$, aber in den Columnen $(\alpha_3\beta_3)$, (α_3+1, β_3+1) etc. bis $(\alpha_3+\gamma, \beta_3+\gamma)$ sollen die Zahlen ($b_0^{(i)} = 1$ ist zu ergänzen)

$$\begin{array}{lllll} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_r, \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \cdots & b_{r+1}^{(1)}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^{(\gamma)} & b_1^{(\gamma)} & & \cdots & b_{r+\gamma}^{(\gamma)} \end{array}$$

enthalten sein. Dann ist

$$c_\lambda = (-1)^\gamma\left[a_\gamma b_\lambda^{(\gamma)} - a_{\gamma-1}b_{\lambda-1}^{(\gamma-1)} + a_{\gamma-2}b_{\lambda-2}^{(\gamma-2)} \mp \cdots\right]$$

wobei die Summe je nach dem Werthe des λ entweder mit einem Coefficienten b abbricht, oder im andern Falle mit a_0, wofür der Werth 1 zu setzen ist.

Ein besonderer Fall dieser Formel (2), der häufig vorkommt, ist der, wenn $\alpha_1 = 0$ und zugleich $n_2 \geqq \alpha_2+\alpha_3$ ist. Dann ergeben sich für die Indicessysteme

$$\begin{Bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & \alpha_2+\alpha_3 \end{Bmatrix}$$

die zwei Formeln

$$((f_1 f_2)^{\alpha_3} f_3)^{\alpha_2} = \sum_\lambda c_\lambda\,((f_1 f_3)^\lambda f_2)^{\alpha_2+\alpha_3-\lambda},$$

$$c_\lambda = \sum_{i=0,1,2\cdots}(-1)^{\alpha_2+i}\frac{\binom{\alpha_2}{\alpha_2-i}\binom{\beta_2}{\alpha_2-i}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3}{\alpha_2-i}}\;\frac{\binom{\alpha_3+\alpha_2-i}{\lambda-i}\binom{n_3-i}{\lambda-i}}{\binom{n_1+n_3-\lambda-i-1}{\lambda-i}}$$

und:

$$(f_1 f_2)^{\alpha_2+\alpha_3} f_3 = \sum_\lambda \frac{\binom{\alpha_2+\alpha_3}{\lambda}\binom{n_3}{\lambda}}{\binom{n_1+n_3-\lambda+1}{\lambda}} \left((f_1 f_3)^\lambda f_2\right)^{\alpha_2+\alpha_3-\lambda}.$$

In beiden kommt als erstes Glied die Ueberschiebung

$$\left((f_1 f_3)^0 f_2\right)^{\alpha_2+\alpha_3}$$

vor, die eliminirt werden kann. Dann ergiebt sich die weitere Formel

$$\left((f_1 f_2)^{\alpha_3} f_3\right)^{\alpha_2} = (-1)^{\alpha_2} \frac{\binom{\beta_2}{\alpha_2}}{\binom{\beta_1+\alpha_2+\beta_2}{\alpha_2}} (f_1 f_2)^{\alpha_2+\alpha_3} \cdot f_3$$

(3) $$+ (-1)^{\alpha_3} \sum_\lambda c_\lambda \left((f_1 f_3)^{1+\lambda} f_2\right)^{\alpha_2+\alpha_3-1-\lambda},$$

$$c_\lambda = \sum_{i=0,1,2\cdots} (-1)^{i+1} \frac{\binom{\alpha_2}{i+1}\binom{\beta_2}{\alpha_2-i-1}}{\binom{\beta_1+\alpha_2+\beta_2}{\alpha_2-i-1}} \frac{\binom{\alpha_2+\alpha_3-i-1}{\lambda-i}\binom{n_3-i-1}{\lambda-i}}{\binom{n_1+n_3-\lambda-i-1}{\lambda-i}},$$

wo die Zahlencoefficienten c_λ in ganz ähnlicher Weise berechnet werden können, wie bei der allgemeinen Formel angegeben wurde.

§ 3.

Das associative Gesetz für die Ueberschiebung.

Aus der entwickelten Formel (2) kann nun das associative Gesetz für die Ueberschiebung entnommen werden. Für einfache Grössen a, b, c, die durch eine beliebige Verknüpfungsart ($\sim$) verbunden werden sollen, ist dasselbe bekanntlich durch die Bedingung

$$(a \sim b) \sim c = a \sim (b \sim c)$$

definirt. Hier muss nun diese Bedingung nach der Richtung erweitert werden, dass an Stelle der gegebenen Ueberschiebung ein *Aggregat* anderer Ueberschiebungen gesetzt werden muss, die in angegebener Weise gebildet sind. Lässt man nämlich in Formel (2) alles Unwesentliche weg, so kann dieselbe in folgender Weise geschrieben werden:

$$\left((f\varphi)^{\alpha_2}\psi\right)^{\alpha_1+\alpha_3} = \sum_\lambda c_\lambda' \left(f(\varphi\psi)^{\alpha_2-\gamma+\lambda}\right)^{\alpha_1+\alpha_3+\gamma-\lambda}.$$

Es geht hieraus hervor, dass in jeder Ueberschiebung, die aus drei Formen gebildet werden kann, *die Art der Zusammenfassung* der drei Formen gleichgültig ist, wenn nur an Stelle einer Ueberschiebung ein *Aggregat* der anders gebildeten Ueberschiebungen gesetzt wird. Dies ist aber der wesentliche Inhalt des associativen Gesetzes.

Auch kann der Vollständigkeit halber noch gezeigt werden, dass diese Darstellung einer Ueberschiebung $\left((f_1 f_2)^\lambda f_3\right)^\mu$ durch solche anderer Zusammenfassung *nur auf eine Weise* möglich ist, d. h. dass die Formel (2) eindeutig ist. Wären zwei verschiedene Entwicklungen möglich, dann würde die Differenz derselben eine Relation folgender Art ergeben:

$$\sum_i c_i \left(f_1 (f_2 f_3)^{\lambda_i}\right)^{\mu_i} = 0,$$

wobei die Coefficienten c_i von Null verschieden sein müssten. Specialisiren wir nun f_1 zu der Potenz $(xy)^{n_1}$ und setzen

$$(f_2 f_3)^{\lambda_i} = \alpha_x^{(i)m_i},$$

dann ergiebt sich

$$\sum_i c_i (xy)^{n_1-\mu_i}\, \alpha_x^{(i)m_i-\mu_i}\, \alpha_y^{(i)\mu_i} = 0,$$

eine Gleichung, die unabhängig von x und y bestehen müsste. Wenn nun das Aggregat nach abnehmendem Index μ_i geordnet war und man setzt nach vorhergegangener Division durch $(xy)^{n_1-\mu_0}$ die Variabeln x und y einander gleich, so folgt

$$c_0\, \alpha_x^{(0)m_0} = 0,$$

demnach $c_0 = 0$. Durch Wiederholung desselben Verfahrens folgt ebenso $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ etc., so dass die Eindeutigkeit der Formel (2) bewiesen erscheint.

§ 4.

Folgerungen aus dem associativen Gesetze für Ueberschiebungen aus drei Formen.

Drei binäre Formen $f_1 f_2 f_3$ lassen sich nur auf folgende drei Arten zu Ueberschiebungen zusammenfassen:

$$\left((f_1 f_2)^\lambda f_3\right)^\mu, \quad \left((f_1 f_3)^\lambda f_2\right)^\mu, \quad \left((f_2 f_3)^\lambda f_1\right)^\mu,$$

wobei λ und μ Werthe durchlaufen können, die nur von den Ordnungen der Formen abhängen. Die Summe $\lambda + \mu = g$ heisse das „*Gewicht*“ der Ueberschiebung und alle Ueberschiebungen von gleicher Zusammenfassung der Formen und gleichem Gewichte sollen in ihrer Gesammtheit eine „*Gruppe*“ bilden. Da die Ordnung einer solchen Ueberschiebung $= n_1 + n_2 + n_3 - 2g$ ist, so folgt, dass alle Formen einer Gruppe auch die *gleiche Ordnung* haben. Gewicht und Ordnung der Ueberschiebungen können daher auch zur Bezeichnung der ganzen Gruppe dienen. Man hat also beispielsweise folgende drei Gruppen vom Gewichte drei und von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 - 6$:

$$(4)\qquad \begin{array}{llll} ((f_1 f_2)^3 f_3)^0, & ((f_1 f_2)^2 f_3)^1, & ((f_1 f_2)^1 f_3)^2, & ((f_1 f_2)^0 f_3)^3, \\ ((f_1 f_3)^3 f_2)^0, & ((f_1 f_3)^2 f_2)^1, & ((f_1 f_3)^1 f_2)^2, & ((f_1 f_3)^0 f_2)^3, \\ ((f_2 f_3)^3 f_1)^0, & ((f_2 f_3)^2 f_1)^1, & ((f_2 f_3)^1 f_1)^2, & ((f_2 f_3)^0 f_1)^3, \end{array}$$

wenn keine der Ordnungen n_1, n_2, n_3 unter 3 ist. In diesem Falle sind die Gruppen „*vollständige*". Sollte andererseits eine der Ordnungen z. B. n_1 kleiner als 3 sein, dann könnten nicht alle angeschriebenen Ueberschiebungen gebildet werden, wie z. B. $((f_2 f_3)^0 f_1)^3$, und die Gruppen wären alsdann „*unvollständige*". Aus dem Vorhergehenden folgt nun ohne Weiteres der folgende Satz:

(5) *Die Ueberschiebungen jeder zu drei Formen gehörigen Gruppe sind unter sich linear unabhängig und jede Ueberschiebung einer Gruppe kann durch diejenigen jeder anderen zugehörigen Gruppe linear ausgedrückt werden.*

Damit ist der ganze Zusammenhang zwischen diesen Formen gegeben. In obigem Beispiele wären demnach nur vier linear unabhängige Formen vorhanden, während die übrigen acht durch diese ausdrückbar sind. Erstere dürfen zwar vorläufig nur aus ein und derselben Gruppe gewählt werden, allein es ist nicht schwer nachzuweisen, dass dieselben auch aus *verschiedenen* Gruppen und zwar aus dem *Anfange* jeder derselben gewählt werden dürfen. (Vgl. Math. Ann. Bd. XXXI, pag. 449). Ganz beliebig ist indessen die Wahl dieser linear unabhängigen Formen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt. Seien die Ordnungen $n_1 = n_2 = n_3 = 4$, dann sind die vier Ueberschiebungen

$$((f_1 f_2)^1 f_3)^2, \quad (f_1 f_2)^3 f_3, \quad (f_1 f_3)^3 f_2, \quad (f_2 f_3)^3 f_1$$

aus obigen Gruppen *nicht* linear unabhängig. Denn aus den beiden Entwicklungen

$$(f_1 f_3)^3 f_2 = ((f_1 f_2)^0 f_3)^3 + \tfrac{3}{2}((f_1 f_2)^1 f_3)^2 + \tfrac{6}{7}((f_1 f_2)^2 f_3)^1 + \tfrac{1}{5}(f_1 f_2)^3 f_3,$$

$$(f_2 f_3)^3 f_1 = ((f_1 f_2)^0 f_3)^3 - \tfrac{3}{2}((f_1 f_2)^1 f_3)^2 + \tfrac{6}{7}((f_1 f_2)^2 f_3)^1 - \tfrac{1}{5}(f_1 f_2)^3 f_3$$

können $((f_1 f_2)^0 f_3)^3$ und $((f_1 f_2)^2 f_3)^1$ eliminirt werden und es folgt in der That eine lineare Relation zwischen den angegebenen vier Formen. In Bezug auf die Ersetzbarkeit der Formen A einer Gruppe durch andere Formen B muss daher im allgemeinen die Regel eingehalten werden, dass dieselbe nur dann vorgenommen werden darf, *wenn alle A linear durch die B ausdrückbar sind.* Dann ist es klar, dass die B ebenso wie die A linear unabhängig sein müssen.

Für *unvollständige* Gruppen aus drei Formen ergiebt sich noch aus obigem Satze, dass dieselben, gleiches Gewicht vorausgesetzt, stets *gleichviel* Formen enthalten müssen, da letztere sonst nicht gegenseitig linear ausdrückbar sein könnten.

§ 5.

Allgemeine Sätze über Ueberschiebungen aus beliebig vielen Formen.

Wenn Ueberschiebungen aus mehr als drei Formen zu bilden sind, dann wird die Zahl der möglichen Zusammenfassungen erheblich grösser. Schon bei vier Formen ergeben sich die folgenden 15 Typen:

$$
(6) \quad \begin{array}{lll}
\left([(f_1f_2)^\lambda f_3]^\mu f_4\right)^\nu, & \left([(f_1f_2)^\lambda f_4]^\mu f_3\right)^\nu, & \left([(f_1f_3)^\lambda f_2]^\mu f_4\right)^\nu, \\
\left([(f_1f_3)^\lambda f_4]^\mu f_2\right)^\nu, & \left([(f_1f_4)^\lambda f_2]^\mu f_3\right)^\nu, & \left([(f_1f_4)^\lambda f_3]^\mu f_2\right)^\nu, \\
\left([(f_2f_3)^\lambda f_1]^\mu f_4\right)^\nu, & \left([(f_2f_3)^\lambda f_4]^\mu f_1\right)^\nu, & \left([(f_2f_4)^\lambda f_1]^\mu f_3\right)^\nu, \\
\left([(f_2f_4)^\lambda f_3]^\mu f_1\right)^\nu, & \left([(f_3f_4)^\lambda f_1]^\mu f_2\right)^\nu, & \left([(f_3f_4)^\lambda f_2]^\mu f_1\right)^\nu, \\
[(f_1f_2)^\lambda (f_3f_4)^\mu]^\nu, & [(f_1f_3)^\lambda (f_2f_4)^\mu]^\nu, & [(f_1f_4)^\lambda (f_2f_3)^\mu]^\nu,
\end{array}
$$

die also zur Bildung von 15 verschiedenen Gruppen Veranlassung geben. Es wird die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein, den vollständigen Zusammenhang zwischen diesen Gruppen allgemein herzustellen.

Es sei nun eine derartige Ueberschiebung der $\varrho + 1$ Formen

$$f_0 f_1 f_2 \cdots f_\varrho$$

durch

$$U = (f_0 f_1 f_2 \cdots f_\varrho)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho}$$

bezeichnet, wobei die Indices der einzelnen Ueberschiebungen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varrho$ genannt sind, dann kann zunächst der allgemeine Satz bewiesen werden:

(7) *Die bei willkürlicher Zusammenfassung der Formen $f_0 f_1 \ldots f_\varrho$ zu einer Ueberschiebung U verwendeten Indices, welche die Höhen der Ueberschiebungen bezeichnen, sind ihrer Zahl nach stets um eins geringer als die Zahl der Formen.*

Denn die Ueberschiebung U muss jedenfalls die Form haben

$$U = (P, Q)^{\alpha_\varrho}$$

wo P und Q Ueberschiebungen aus $\varkappa$ bez. $\varrho + 1 - \varkappa$ Formen sind. Diese enthalten nun $\varkappa - 1$ bez. $\varrho - \varkappa$ Indices, wenn der zu beweisende Satz für Ueberschiebungen aus weniger als $\varrho + 1$ Formen als richtig angenommen wird. Demnach ist die Zahl der Indices in U gleich

$$(\varkappa - 1) + (\varrho - \varkappa) + 1 = \varrho.$$

Da der Satz für $\varrho = 1$ richtig ist, so gilt er allgemein.

Bezeichnen wir die Summe aller Indices einer Ueberschiebung als ihr „*Gewicht*“

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\varrho = g$$

dann lässt sich ganz ähnlich der Satz beweisen, *dass die Ordnung m einer beliebigen Ueberschiebung U als die folgende Differenz erhalten wird:*

$$(8) \qquad m = (n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_\varrho) - 2g,$$

denn sind die Ordnungen von P und Q nach Voraussetzung

$$p = (n_0 + \quad n_1 + \cdots + n_{\varkappa-1}) - 2(\alpha_0 + \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa-1}),$$
$$q = (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} + \cdots + n_\varrho \quad) - 2(\alpha_\varkappa + \alpha_{\varkappa+1} + \cdots + \alpha_{\varrho-1}),$$

dann ergiebt sich für die Ordnung von U

$$m = p + q - 2\alpha_\varrho = (n_0 + n_1 + \cdots + n_\varrho) - 2g$$

also der angegebene Werth. Da derselbe für $\varrho = 1$ richtig ist, so gilt er allgemein.

Hieraus folgt dann, dass alle einfachen Ueberschiebungen der Formen f_i von gleichem Gewichte g auch die gleiche Ordnung m besitzen müssen und umgekehrt. Dabei möge schon gleich hier auf einen Unterschied in der Bezeichnung der Ueberschiebungen aufmerksam gemacht werden. Wenn in der Ueberschiebung jede Form f_i nur einmal vorkommt, dann soll dieselbe in der Folge „*einfache Ueberschiebung*“ genannt werden, kommt dagegen ein und dieselbe Form wiederholt vor, wie z. B. in $\left((ff)^{2\lambda}\varphi\right)^\mu$, dann soll die Ueberschiebung als „*mehrfache*“ bezeichnet werden. Es ist dann deutlich, dass die angeführten allgemeinen Sätze auch für mehrfache Ueberschiebungen ihre Gültigkeit nicht verlieren, wenn nur die wiederholt vorkommenden Formen — durch Zufügung von Indices — als von einander verschieden betrachtet werden.

§ 6.

Sätze über die Bildung linear unabhängiger Ueberschiebungen.

Wenn von mehreren Reihen Ueberschiebungen bekannt ist, dass dieselben linear unabhängig sind, so ist es wichtig, dieselben derart zu neuen Ueberschiebungen *verbinden* zu können, dass diese letzteren ebenfalls linear unabhängig sind. Die folgenden beiden Sätze geben hierüber Aufschluss, sowie auch über die umgekehrte Aufgabe, eine Reihe linear unabhängiger Covarianten in solche Covarianten zu *zerlegen*, die wie diese linear unabhängig sind.

Es möge zunächst der folgende bekannte Hilfssatz vorausgeschickt werden:

(9) *Wenn zwischen Coefficienten von simultanen Covarianten der Formen $f_0 f_1 \dots f_\varrho$ eine lineare Relation besteht, so zieht dieselbe stets eine oder mehrere solcher zwischen den Covarianten selbst nach sich.*

Der Beweis kann in folgender Art geführt werden. Seien die betreffenden Covarianten durch

$$K_i = k_x^{(i)\,m_i} \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

dargestellt und eine lineare Relation zwischen Coefficienten derselben durch

(10) $$\sum_{\lambda, i} c_{\lambda i} k_\lambda^{(i)} = 0,$$

dann muss diese Relation noch stattfinden, wenn die Grundformen des Systems der linearen Transformation

$$x_1 = p_1 y_1 + q_1 y_2, \quad x_2 = p_2 y_1 + q_2 y_2$$

unterworfen und die Covarianten K_i für die transformirten Formen gebildet werden. Statt dessen können jedoch auch die Covarianten K_i linear transformirt und mit einer passenden Potenz der Determinante (pq) multiplicirt werden, wodurch

$$\overline{K}_i = (pq)^{\varrho_i} \left(k_p^{(i)} y_1 + k_q^{(i)} y_2\right)^{m_i}$$

erhalten wird. Die Relation zwischen den Coefficienten geht alsdann in die folgende über

(11) $$\sum_{\lambda, i} c_{\lambda i} (pq)^{\varrho_i} k_p^{(i)\,m_i - \lambda} \; k_q^{(i)\,\lambda} = 0$$

und es versteht sich von selbst, dass dieselbe unabhängig von p und q erfüllt sein muss. Betrachtet man demnach p und q als Veränderliche, so ist ersichtlich, dass an Stelle des Coefficienten $k_\lambda^{(i)}$ der Covariante K_i in (10) die λ^{te} *Polare dieser Form* multiplicirt mit einer Potenz der identischen Covariante (pq) getreten ist. Wenn nun in (11) durch die niedrigste Potenz von (pq) dividirt und dann $p = q$ gesetzt wird, dann ergiebt sich eine lineare Relation zwischen den Covarianten K_i. Durch Wiederholung des Verfahrens ergeben sich ferner so viele verschiedene Relationen, als verschiedene Potenzen von (pq) vorhanden sind. Auch folgt jetzt, dass in (10) nur ein Coefficient jeder Covariante auftreten kann. Denn im andern Falle würde die linke Seite von (11) in jeder der Variabeln p und q nicht homogen sein und es würde daraus dann folgen, dass die betreffende Covariante überhaupt verschwinden müsste, wenn nicht ein weiteres Glied von den gleichen Ordnungen in p und q vorhanden ist. Damit nun die linke Seite von (11) in jeder der Veränderlichen p und q homogen wird, müssen die

Zahlen $g_i + \lambda$ und $g_i + m_i - \lambda$ für alle Coefficienten in (10) dieselben Werthe haben d. h. die Coefficienten in (10) müssen alle dasselbe Gewicht $g_i + \lambda$ und die in die Covarianten K_i eingehenden Formen f müssen dieselbe Ordnungssumme

$$\sum n_x = (g_i + m_i - \lambda) + (g_i + \lambda) = m_i + 2g_i$$

besitzen: wie auch a priori erkannt werden kann. Da die Coefficienten *einer* Covariante alle verschiedenes Gewicht haben, so folgt demnach, dass zwischen denselben eine *lineare* Relation nicht stattfinden kann, obwohl Relationen höherer Ordnung nicht ausgeschlossen sind. Ferner ergiebt sich, dass in dem Falle, wenn mehrere Covarianten linear unabhängig sind, es auch deren Coefficienten sein müssen. Die Umkehrung ist selbstverständlich.

Durch Benutzung dieses Hilfssatzes kann nun der folgende *erste Hauptsatz* bewiesen werden:

(11) *Wenn die simultanen Covarianten K_i mehrerer Formen linear unabhängig sind, dann sind es auch alle Ueberschiebungen dieser Covarianten über eine dem Formensystem nicht angehörige, übrigens aber beliebige Form φ. Auch folgt umgekehrt, dass die Covarianten K_i linear unabhängig sein müssen, sobald die Formen $(K_i \varphi)^{\alpha_i}$ es sind.*

Sei nämlich zum Beweise eine lineare Relation zwischen den Ueberschiebungen durch

$$\sum_i c_i (K_i \varphi)^{\alpha_i} = 0$$

dargestellt, dann lässt sich dieselbe, indem wir für die Variabeln $x_1 x_2$ specielle Zahlenwerthe annehmen, in eine lineare Relation zwischen Coefficienten der Covarianten K_i umsetzen. Dass diese Relation keine identische sein kann, folgt einerseits daraus, dass jede Covariante K_i nur einmal vorkommen kann und andererseits auch daraus, dass bei der angegebenen Specialisirung offenbar nicht alle Ueberschiebungen $(K_i \varphi)^{\alpha_i}$ identisch verschwinden können, da φ von den K_i ganz unabhängig ist. Nach dem vorigen Hilfssatz folgt also, dass jede lineare Relation zwischen den Ueberschiebungen $(K_i \varphi)^{\alpha_i}$ eine oder mehrere solcher zwischen den Coefficienten der K_i und somit auch zwischen den Covarianten K_i selbst nach sich zieht, womit der erste Theil des Satzes bewiesen ist. Da nun auch umgekehrt jede lineare Relation zwischen den Covarianten K_i leicht in eine solche zwischen den $(K_i \varphi)^{\alpha_i}$ verwandelt werden kann, so ist auch die Umkehrung des Satzes richtig.

In ähnlicher Weise kann nun der allgemeinere Satz bewiesen werden:

(12) *Wenn die Covarianten K_i linear unabhängig sind und man verbindet dieselben mit einer zweiten Reihe von Covarianten K_i', die ebenfalls linear unabhängig sind und einem andern Formensysteme angehören, dann sind alle Ueberschiebungen von Formen der ersten Reihe über Formen der zweiten Reihe ebenfalls linear unabhängig.*

Wir zeigen, dass jede lineare Relation zwischen den betreffenden Ueberschiebungen eine solche zwischen den Covarianten K_i oder K_i' nach sich zieht. Sei erstere durch

$$\sum_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} (K_\lambda K_\mu')^{\alpha_{\lambda\mu}} = 0$$

dargestellt, dann folgt aus vorigem Satze, dass diejenigen Theile dieses Aggregates, welche dieselben Formen K_λ enthalten, nicht für sich verschwinden können, da dann eine lineare Relation für die K_λ' folgen würde. Demnach müssen für die Coefficienten der K_μ' stets solche numerische Werthe existiren, für welche die erwähnten Theile des Aggregats nicht alle verschwinden, da sie im andern Falle identisch verschwinden müssten. Setzt man ausserdem noch für x_1 und x_2 besondere Zahlenwerthe, dann hat man eine lineare Relation zwischen Coefficienten der Formen K_λ. Dass diese nicht identisch ist, folgt aus dem Umstande, dass jede Form K in der angenommenen Zusammenfassung des Aggregats in jedem Theile nur einmal vorkommt und dementsprechend auch die Relation zwischen den Coefficienten in gleicher Weise zusammengesetzt ist. Durch Benützung des Hilfssatzes erscheint somit der Satz bewiesen.

Auch hier gilt die Umkehrung:

(13) *Sind die Ueberschiebungen $(K_\lambda K_\mu')^{\alpha_{\lambda\mu}}$ linear unabhängig, dann sind es auch die Covarianten K_λ und K_μ', vorausgesetzt, dass dieselben verschiedenen Formensystemen angehören.*

Der Beweis ist derselbe wie bei der Umkehrung des ersten Satzes.

§ 7.

Nachweis, dass die Formen einer Gruppe linear unabhängig sind.

In ganz ähnlicher Weise wie die Ueberschiebungen aus drei Formen sich zu Gruppen von bestimmtem Gewichte zusammenstellen lassen, kann dies auch für die einfachen Ueberschiebungen

$$U_i = (f_0 f_1 f_2 \ldots f_\varrho)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho}$$

geschehen, die beliebig viele Formen $f_0, f_1, f_2, \ldots f_\varrho$ enthalten, ausserdem eine beliebige aber unter sich gleiche Art der Zusammenfassung aufweisen und dasselbe Gewicht

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = g$$

besitzen. Von den Formen *ein und derselben Gruppe* gilt dann der wichtige Satz, dass dieselben linear unabhängig sind. Der Beweis kann auf zwei verschiedene Arten geführt werden.

Nehmen wir den Satz für Gruppen aus ϱ und weniger Formen als richtig an, so ist nur nachzuweisen, dass er auch für Gruppen aus $\varrho + 1$ Formen gilt. Die Formen dieser Gruppen haben nun die Gestalt

$$U_\iota = (K_\iota K_\lambda')^{\alpha_{\iota\lambda}}$$

wo K_ι eine Ueberschiebung aus $\varkappa$ Formen und K_λ' eine solche aus $\varrho - \varkappa + 1$ Formen ist, wobei der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass K_λ' eine Grundform selber ist.

Die Formen K_ι und K_λ' gehören nun aber Gruppen an, die aus $\varkappa$ bez. $\varrho - \varkappa + 1$ Formen gebildet sind und für welche der Satz als richtig vorausgesetzt wurde. Da die Formen K_ι und K_λ' auch ausserdem verschiedenen Formensystemen angehören, so kann der Satz des vorigen Paragraphen angewendet werden und es folgt, dass die U_ι linear unabhängig sein müssen. Da für Gruppen aus zwei Formen der Satz selbstverständlich ist, so gilt er allgemein.

Der zweite Beweis stützt sich auf die Reihenentwicklungen für symbolische Producte. Seien die Formen f symbolisch durch

$$f_0 = a_x^{(0)^{n_0}}, \quad f_1 = a_x^{(1)^{n_1}}, \cdots f_\varrho = a_x^{(\varrho)^{n_\varrho}}$$

dargestellt, dann können aus dem Producte

$$P = a_x^{(0)^{n_0}} a_y^{(1)^{n_1}} a_z^{(2)^{n_2}} \cdots a_u^{(\varrho)^{n_\varrho}}$$

durch Anwendung von Ω Processen und Gleichsetzen der betreffenden Variabeln alle Formen U_ι *einer* bestimmten Gruppe erhalten werden. Daraus folgt, dass die Coefficienten der U_ι durch die Coefficienten von P linear ausdrückbar sind. Aber auch umgekehrt können letztere Coefficienten durch erstere ausgedrückt werden. Denn P ist entwickelbar nach Polaren von Ueberschiebungen

$$U_\iota^{(0)}, \; U_\iota^{(1)}, \; U_\iota^{(2)} \cdots U_\iota^{(g)} \cdots,$$

die alle dieselbe Art der Zusammenfassung der Formen besitzen, und Gruppen von den Gewichten $0, 1, 2, \ldots g \ldots$ angehören. Da nun die Coefficienten von P linear unabhängig sind, so folgt dasselbe auch für die Coefficienten der Formen U und somit auch für die Formen ein und derselben Gruppe.

§ 8.

Aufstellung sämmtlicher linearer Relationen zwischen einfachen Ueberschiebungen aus beliebig vielen Formen.

Das in § 3 bewiesene associative Gesetz für die Ueberschiebung kann dazu benutzt werden, um lineare Relationen zwischen den Ueberschiebungen verschiedener Gruppen aufzufinden und, was wesentlich ist, es lässt sich nachweisen, dass auf diese Weise *alle* linearen Relationen erhalten werden, die existiren.

Zunächst möge der folgende Satz bewiesen werden:

Jede einfache Ueberschiebung der Formen $f_0 f_1 \dots f_\varrho$, bei welcher die Reihenfolge der Formen die folgende

$$f_{\lambda}, f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2} \dots f_{\lambda_\varrho}$$

und die Zusammenfassung eine beliebige ist, kann linear durch Ueberschiebungen ausgedrückt werden, welche dieselbe Reihenfolge der Formen, aber die folgende einfache Zusammenfassung besitzen:

$$\left(\cdots\left((f_{\lambda_0} f_{\lambda_1})^{\alpha_1} f_{\lambda_2}\right)^{\alpha_2} \cdots f_{\lambda_\varrho}\right)^{\alpha_\varrho}. \tag{15}$$

Die zu entwickelnde Ueberschiebung U wird am Ende eine gewisse Anzahl Klammern besitzen, welche durch die Art der Zusammenfassung bedingt sind und es wird zunächst zu zeigen sein, dass U durch solche Formen linear ausgedrückt werden kann, welche am Ende nur eine Klammer besitzen. Wenn U die Form $(P f_{\lambda_\varrho})^{\alpha_\varrho}$ schon haben sollte, ist diese Entwicklung überflüssig und es kommt daher nur der Fall in Betracht, wenn U die Form $[P, (QR)^\mu]^\nu$ besitzt, wo P, Q, R Ueberschiebungen aus weniger als $\varrho + 1$ Formen oder auch Grundformen selber sind. Aus Formel (2) folgt nun aber die Entwicklung

$$U = \sum_i c_i \left[(P\,Q)^{\mu_i} R\right]^{\nu_i} = \sum_i c_i U_i'$$

woraus zu ersehen ist, dass die Formen U_i', durch welche U linear dargestellt ist, am Ende eine Klammer weniger enthalten als U. Setzt man das Verfahren fort, indem man auch die U_i' in gleicher Weise entwickelt, so wird U schliesslich durch Formen ausgedrückt sein, welche am Ende nur eine Klammer enthalten und die folglich die Gestalt haben $(M f_{\lambda_\varrho})^{\alpha_\varrho}$, wo M eine Ueberschiebung aus ϱ Formen bedeutet.

Die Ueberschiebungen M aus ϱ Formen können in gleicher Weise durch solche ausgedrückt werden, die von der Art $(N f_{\lambda_{\varrho-1}})^{\alpha_{\varrho-1}}$ sind und es erhellt, dass man bei Fortsetzung der Entwicklungen schliesslich auf die verlangte Beziehung

$$U = \sum_i c_i \left(\cdots \left((f_\lambda f_{\lambda_1})^{\alpha_1} f_{\lambda_2} \right)^{\alpha_2} \cdots f_{\lambda_\varrho} \right)^{\alpha_\varrho}$$

kommen muss.

Hieran schliesst sich nun der folgende Satz an:

(16) *Jede Ueberschiebung* $\left(\cdots \left((f_\lambda f_{\lambda_1})^{\alpha_1} f_{\lambda_2} \right)^{\alpha_2} \cdots f_{\lambda_\varrho} \right)^{\alpha_\varrho}$ *kann durch solche Ueberschiebungen linear ausgedrückt werden, bei welchen die Art der Zusammenfassung die gleiche, die Anordnung der Formen aber eine beliebige andere z. B. die natürliche* $f_0 f_1 f_2 \ldots f_\varrho$ *ist.*

Wenn wir nämlich die Formel (2) in der Gestalt

$$\left((P f_{\lambda_i})^{\alpha_i} f_{\lambda_{i+1}} \right)^{\alpha_{i+1}} = \sum_\varkappa c_\varkappa \left((P f_{\lambda_{i+1}})^{\lambda_\varkappa} f_{\lambda_i} \right)^{\sigma_\varkappa}$$

benützen, so erhellt, dass eine Form f_{λ_i} durch wiederholte Anwendung dieser Formel an die Stelle jeder beliebigen anderen Form f_{λ_m} gebracht werden kann. Somit ergiebt sich durch Verbindung der beiden Sätze das Resultat, dass jede Ueberschiebung

$$U = (f_{\lambda_0} f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} \ldots f_{\lambda_\varrho})_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho}$$

durch Anwendung einer bestimmten Reihe von Entwicklungen in der Weise

$$U = \sum_i c_i \left(\cdots \left(\left((f_0 f_1)^{\alpha_1} f_2 \right)^{\alpha_2} f_3 \right)^{\alpha_3} \cdots f_\varrho \right)^{\alpha_\varrho} = \sum_i c_i A_i$$

ausgedrückt werden kann. Die Formen A_i können weiterhin durch die Formen U_i' einer beliebigen anderen Gruppe linear ausgedrückt werden. Denn wenn die U_i' durch die A_i ausdrückbar sind, dann muss bei umgekehrter Reihenfolge der Entwicklungen auch jede Form A_i durch die Formen U_i' dargestellt werden können. Demnach folgt der Satz:

(17) *Jede einfache Ueberschiebung einer Gruppe lässt sich durch die Ueberschiebungen einer beliebigen anderen zugehörigen Gruppe linear ausdrücken.*

Verbindet man damit den früher bewiesenen Satz, dass die Ueberschiebungen derselben Gruppe linear unabhängig sind, dann folgt ferner:

Die Entwicklung einer Form nach Formen einer anderen Gruppe kann nur auf eine Weise vorgenommen werden.

Denn zwei verschiedene Ausdrücke für dieselbe Form U würden eine lineare Relation zwischen den Formen ein und derselben Gruppe nach sich ziehen, die nicht möglich ist. Ferner ergiebt sich auch, dass *alle Gruppen gleichen Gewichtes gleichviel Formen enthalten müssen.*

Im anderen Falle könnten offenbar lineare Relationen zwischen den Formen der grösseren Gruppe abgeleitet werden.

Sei nun die Gruppe der Ueberschiebungen

$$\left(\left((f_0 f_1)^{\alpha_1} f_2\right)^{\alpha_2} \cdots f_\varrho\right)^{\alpha_\varrho}$$

als *„primäre"* bezeichnet und mögen alle Formen der anderen $\gamma - 1$ Gruppen nach den p Formen dieser Gruppe entwickelt werden, dann folgt

Die $p \,.\, (\gamma - 1)$ *Gleichungen*

$$U_i^{(\varkappa)} = \sum_\lambda c_\lambda^{(i\varkappa)} A_\lambda,$$

(18) *durch welche die* $p \,.\, (\gamma - 1)$ *einfachen Ueberschiebungen* $U_i^{(\varkappa)}$ *der Formen* $f_0 f_1 \ldots f_\varrho$ *nach Formen der primären Gruppe entwickelt sind, repräsentiren alle Relationen, welche zwischen den Covarianten von derselben Ordnung und vom ersten Grade in den Coefficienten der Grundformen stattfinden.*

§ 9.

Anwendung auf Gruppen aus vier Formen vierter Ordnung.

Um die Entwicklungen des vorigen Paragraphen an einem Beispiele zu erläutern, nehme ich vier binäre Formen vierter Ordnung f, φ, ψ, χ an und setze die Aufgabe, alle linearen Relationen zwischen den einfachen Ueberschiebungen dieser Formen vom Gewicht 6 aufzufinden. Es lassen sich aus 4 Formen, wie in § 5 schon gezeigt wurde, 15 verschiedene Gruppen bilden und man findet, dass jede Gruppe 16 Formen enthalten muss. Die primäre Gruppe wird nämlich von folgenden 16 Ueberschiebungen gebildet:

$$(19)\quad \begin{array}{llll}
\left(((f\varphi)^2\psi)^4\chi\right)^0, & \left(((f\varphi)^3\psi)^2\chi\right)^1, & \left(((f\varphi)^2\psi)^3\chi\right)^1, & \left(((f\varphi)^1\psi)^4\chi\right)^1, \\
\left(((f\varphi)^4\psi)^0\chi\right)^2, & \left(((f\varphi)^3\psi)^1\chi\right)^2, & \left(((f\varphi)^2\psi)^2\chi\right)^2, & \left(((f\varphi)^1\psi)^3\chi\right)^2, \\
\left(((f\varphi)^0\psi)^4\chi\right)^2, & \left(((f\varphi)^3\psi)^0\chi\right)^3, & \left(((f\varphi)^2\psi)^1\chi\right)^3, & \left(((f\varphi)^1\psi)^2\chi\right)^3, \\
\left(((f\varphi)^0\psi)^3\chi\right)^3, & \left(((f\varphi)^2\psi)^0\chi\right)^4, & \left(((f\varphi)^1\psi)^1\chi\right)^4, & \left(((f\varphi)^0\psi)^2\chi\right)^4.
\end{array}$$

Hieraus ergeben sich weitere 11 Gruppen, wenn man die Formen auf alle möglichen Arten mit einander vertauscht. Da die Formen alle von gleicher Ordnung sind und die Indices der Ueberschiebungen nur von jenen Ordnungszahlen abhängen, so braucht an diesen nichts geändert zu werden. Die Gruppe jedoch, welche durch Vertauschung von f und φ entsteht, wird nicht als neu betrachtet, da ihre Formen höchstens nur durch das Vorzeichen sich von den ursprünglichen unterscheiden. Die 13[te] Gruppe ist alsdann die folgende:

$$
(20)\quad
\begin{array}{llll}
(f\varphi)^2(\psi\chi)^4, & (f\varphi)^3(\psi\chi)^3, & (f\varphi)^4(\psi\chi)^2, & [(f\varphi)^2(\psi\chi)^3]^1, \\
[(f\varphi)^3(\psi\chi)^2]^1, & [(f\varphi)^1(\psi\chi)^3]^2, & [(f\varphi)^2(\psi\chi)^2]^2, & [(f\varphi)^3(\psi\chi)^1]^2, \\
[(f\varphi)^1(\psi\chi)^2]^3, & [(f\varphi)^2(\psi\chi)^1]^3, & [(f\varphi)^0(\psi\chi)^2]^4, & [(f\varphi)^1(\psi\chi)^1]^4, \\
[(f\varphi)^2(\psi\chi)^0]^4, & [(f\varphi)^0(\psi\chi)^1]^5, & [(f\varphi)^1(\psi\chi)^0]^5, & [(f\varphi)^0(\psi\chi)^0]^6
\end{array}
$$

und hieraus ergeben sich die beiden letzten Gruppen durch passende Vertauschung der Formen. Dabei werden wieder solche Vertauschungen, bei denen höchstens nur die Vorzeichen der Ueberschiebungen geändert werden, nicht berücksichtigt.

Um *sämmtliche* lineare Relationen zwischen diesen $15 \cdot 16 = 240$ Formen aufzustellen, müssen zunächst die Formen der zweiten Gruppe durch diejenigen der primären Gruppe linear ausgedrückt werden. Durch Anwendung der Formel (2) hat man die Entwicklungen:

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
\left(((f\varphi)^0\chi)^2\psi\right)^4 &= \tfrac{3}{14}\left(((f\varphi)^0\psi)^2\chi\right)^4 - \tfrac{11}{14}\left(((f\varphi)^0\psi)^3\chi\right)^3 \\
&\quad + \tfrac{55}{98}\left(((f\varphi)^0\psi)^4\chi\right)^2, \\
\left(((f\varphi)^0\chi)^3\psi\right)^3 &= -\tfrac{1}{2}\left(((f\varphi)^0\psi)^2\chi\right)^4 + \tfrac{1}{2}\left(((f\varphi)^0\psi)^3\chi\right)^3 \\
&\quad + \tfrac{5}{14}\left(((f\varphi)^0\psi)^4\chi\right)^2, \\
\left(((f\varphi)^0\chi)^4\psi\right)^2 &= \left(((f\varphi)^0\psi)^2\chi\right)^4 + \left(((f\varphi)^0\psi)^3\chi\right)^3 \\
&\quad + \tfrac{2}{7}\left(((f\varphi)^0\psi)^4\chi\right)^2
\end{aligned}
$$

etc. etc., die ohne Schwierigkeit bis zur letzten Form der zweiten Gruppe fortgesetzt werden können. Ebenso lassen sich auch die Formen der folgenden 10 Gruppen durch diejenigen der primären Gruppe darstellen, doch kann man auch diese Beziehungen zum Theil aus den schon gefundenen durch Vertauschung der Formen ableiten. Durch die Substitution $(\varphi\psi)$ folgen aus (21) die Beziehungen:

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
\left(((f\psi)^0\chi)^2\varphi\right)^4 &= \tfrac{3}{14}\left(((f\psi)^0\varphi)^2\chi\right)^4 - \tfrac{11}{14}\left(((f\psi)^0\varphi)^3\chi\right)^3 \\
&\quad + \tfrac{55}{98}\left(((f\psi)^0\varphi)^4\chi\right)^2
\end{aligned}
$$

etc. etc.

wodurch die Formen $\left(\left((f\psi)^{\lambda}\chi\right)^{\mu}\varphi\right)^{\nu}$ durch die Formen $\left(\left((f\psi)^{\lambda}\varphi\right)^{\mu}\chi\right)^{\nu}$ linear ausgedrückt sind. Ganz ebenso lassen sich durch Benützung der Substitutionen $(\varphi\chi)$, $(f\psi)$, $(f\chi)$ und $(f\chi)(\varphi\psi)$ vier weitere Systeme von Gleichungen ableiten, so dass nunmehr die Formen von 6 Gruppen durch diejenigen der 6 übrigen ausgedrückt sind. Dabei ist zu bemerken, dass durch Anwendung anderer Substitutionen als der eben angeführten, keine neuen Beziehungen erhalten werden.

Um die noch fehlenden 5 Systeme von Gleichungen zu gewinnen, wird man auf die Formen $\left(\left((f\psi)^{\lambda}\varphi\right)^{\mu}\chi\right)^{\nu}$ die Formel (2) anwenden, indem φ mit ψ vertauscht wird. Dann folgen die Beziehungen:

$$(23)\quad \begin{aligned}
\left(\left((f\psi)^{0}\varphi\right)^{2}\chi\right)^{4} &= \tfrac{3}{14}\left(\left((f\varphi)^{0}\psi\right)^{2}\chi\right)^{4} - \tfrac{11}{14}\left(\left((f\varphi)^{1}\psi\right)^{1}\chi\right)^{4} \\
&\quad + \tfrac{55}{98}\left(\left((f\varphi)^{2}\psi\right)^{0}\chi\right)^{4}, \\
\left(\left((f\psi)^{1}\varphi\right)^{1}\chi\right)^{4} &= -\tfrac{1}{2}\left(\left((f\varphi)^{0}\psi\right)^{2}\chi\right)^{4} + \tfrac{1}{2}\left(\left((f\varphi)^{1}\psi\right)^{1}\chi\right)^{4} \\
&\quad + \tfrac{5}{14}\left(\left((f\varphi)^{2}\psi\right)^{0}\chi\right)^{4}
\end{aligned}$$

etc. etc., worin dieselben Zahlencoefficienten auftreten, wie in den Relationen (21), was aber nur zufällig hier vorkommt, da diese Coefficienten bei Formen von verschiedenen Ordnungen im allgemeinen von den früheren auch verschieden sind. In gleicher Weise können nun auch die Formen

$$\left(\left((f\chi)^{\lambda}\psi\right)^{\mu}\varphi\right)^{\nu},\quad \left(\left((\varphi\psi)^{\lambda}f\right)^{\mu}\chi\right)^{\nu},\quad \left(\left((\varphi\chi)^{\lambda}f\right)^{\mu}\psi\right)^{\nu},\quad \left(\left((\psi\chi)^{\lambda}f\right)^{\mu}\varphi\right)^{\nu}$$

durch entsprechende von folgender Art

$$\left(\left((f\psi)^{\lambda}\chi\right)^{\mu}\varphi\right)^{\nu},\quad \left(\left((f\varphi)^{\lambda}\psi\right)^{\mu}\chi\right)^{\nu},\quad \left(\left((f\varphi)^{\lambda}\chi\right)^{\mu}\psi\right)^{\nu},\quad \left(\left((f\psi)^{\lambda}\chi\right)^{\mu}\varphi\right)^{\nu}$$

linear ausgedrückt werden, wodurch dann der ganze Zusammenhang zwischen den ersten 12 Gruppen von Formen hergestellt ist.

Es erübrigt noch, die Formen der drei letzten Gruppen durch diejenigen der primären oder irgend einer davon abhängigen linear auszudrücken.

Die erste Form der 13. Gruppe kann in folgender Gestalt geschrieben werden

$$(f\varphi)^2(\psi\chi)^4 = \left(\left((\psi\chi)^{4}f\right)^{0}\varphi\right)^{2}$$

und ist damit in gewünschter Weise ausgedrückt.

Für die 2^te Form ist nach Formel (2)

$$(24)\qquad (\psi\chi)^3(f\varphi)^3 = \left(\left((f\varphi)^3\psi\right)^0\chi\right)^3 - \left(\left((f\varphi)^3\psi\right)^1\chi\right)^2 + \tfrac{3}{10}\left(\left((f\varphi)^3\psi\right)^2\chi\right)^1 .$$

und ebenso ergeben sich auch die Ausdrücke für die übrigen Formen der 13. Gruppe. Indem wir dann in diesen Gleichungen φ mit ψ und φ mit χ vertauschen, erhalten wir zwei weitere Systeme von Gleichungen, wodurch auch die beiden letzten Gruppen durch frühere ausgedrückt sind.

Damit sind dann alle linearen Relationen gefunden, welche zwischen denjenigen einfachen Ueberschiebungen der Formen f, φ, ψ, χ, die vom Gewicht 6 sind, existiren.

§ 10.

Anzahl der in einer Gruppe aus einfachen Ueberschiebungen befindlichen Formen.

Nachdem bewiesen wurde, dass alle Gruppen, die zusammengehören, die gleiche Zahl von Formen enthalten, ist es von Interesse, diese Zahl selbst anzugeben. Am einfachsten geschieht dies für die primäre Gruppe, deren Formen die Gestalt $\left(\cdots\left((f_0 f_1)^{\alpha_1} f_2\right)^{\alpha_2}\cdots f_\varrho\right)^{\alpha_\varrho}$ haben. Da alle zu einer Gruppe gehörigen Formen gleiches Gewicht g haben, so muss zunächst die Bedingung

$$\text{(I)}\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = g$$

erfüllt sein. Damit die Ueberschiebung aber überhaupt gebildet werden kann, darf keine der überzuschiebenden Formen geringere Ordnung haben, als der Index der Ueberschiebung anzeigt, da sonst die Ueberschiebung identisch verschwindet. Die hieraus folgenden Bedingungen zerfallen in zwei Arten.

Einerseits ergiebt sich

$$\text{(II)}\qquad \alpha_1 < n_1 + 1,\ \alpha_2 < n_2 + 1,\cdots \alpha_\varrho < n_\varrho + 1$$

und andererseits folgt in ähnlicher Weise

$$\text{(IIIa)}\qquad \alpha_1 < n_0 + 1,\ \alpha_2 < n_0 + n_1 - 2\alpha_1 + 1,\cdots \text{etc.}$$
$$\alpha_\varrho < (n_0 + n_1 + \cdots + n_{\varrho-1}) - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\varrho-1}) + 1,$$

welche Bedingungen auch in folgender Form geschrieben werden können:

$$\text{(III)}\qquad (n_0 - \alpha_1 + 1 > 0,\ (n_0 - \alpha_1 - \alpha_2) + (n_1 - \alpha_1) + 1 > 0 \cdots \text{etc.}$$
$$(n_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_\varrho) + (n_1 - \alpha_1) + \cdots + (n_{\varrho-1} - \alpha_{\varrho-1}) + 1 > 0.$$

Um die Zahl der Lösungen von Gleichung (I) mit Rücksicht auf die Bedingungen (II) zu erhalten, hat man bekanntlich den Ausdruck

$$\Pi(x) = \frac{1-x^{n_1+1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{n_2+1}}{1-x} \cdots \frac{1-x^{n_\varrho+1}}{1-x}$$

nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln und den Coefficienten von x^g zu nehmen. Wenn nun $g < n_0 + 1$ ist, dann sind die Bedingungen (III) von selbst erfüllt, da alle darin vorkommenden Differenzen positiv oder Null sind. Dann giebt also der Coefficient von x^g direct die Anzahl der zu der Gruppe gehörigen Formen an. Für grössere Werthe von g muss jedoch ein anderes Verfahren eingeschlagen werden.

Sei φ eine Hilfsform von beliebig hoher Ordnung, dann wird nach dem soeben Gesagten die Grösse der Gruppe

$$\Phi_i = \left(\cdots\left((\varphi f_0)^{\lambda_0} f_1\right)^{\lambda_1} \cdots f_\varrho\right)^{\lambda_\varrho} \qquad \left(\sum_i \lambda_i = g\right)$$

durch den Coefficienten A_g in folgender Entwicklung angegeben.

$$\frac{1-x^{n_0+1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{n_1+1}}{1-x} \cdots \frac{1-x^{n_\varrho+1}}{1-x} = \sum_i A_i x^i.$$

Da alle zugehörigen Gruppen die gleiche Zahl von Formen umfassen (§ 8), so besteht auch die Gruppe der Formen

$$\Phi_i' = \left[\varphi, \left(\cdots\left((f_0 f_1)^{\mu_1} f_2\right)^{\mu_2} \cdots f_\varrho\right)^{\mu_\varrho}\right]^{\mu_0} \qquad \left(\sum_i \mu_i = g\right)$$

vom Gewicht g aus A_g Formen. Aus der Zusammensetzung der Φ_i' folgt dann, dass alle primären Gruppen der f von den Gewichten 0 bis g zusammen A_g Formen enthalten müssen. Berücksichtigt man die entsprechende Bedeutung der Zahl A_{g-1}, so erhellt, dass die Differenz $A_g - A_{g-1}$ die gesuchte Anzahl ist. Durch Multiplication mit $1-x$ treten in obiger Entwicklung diese Zahlen als Coefficienten auf und es folgt:

(35) *Eine Gruppe aus einfachen Ueberschiebungen vom Gewichte g enthält so viele Formen, als der Coefficient von x^g in folgender Entwicklung angiebt:*

$$\frac{(1-x^{n_0+1})(1-x^{n_1+1})\cdots(1-x^{n_\varrho+1})}{(1-x)^\varrho} = \sum_i B_i x^i.$$

§ 11.

Specialisirung für Formen gleicher Ordnung.

Wenn die Ordnungen aller Formen $= n$ sind, dann wird der soeben gefundene Ausdruck:

$$\frac{(1-x^{n+1})^{\varrho+1}}{(1-x)^{\varrho}} = \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}\binom{\varrho+1}{\lambda}x^{\lambda n+\lambda}\cdot\sum_{\mu}\binom{\varrho+\mu-1}{\varrho-1}x^{\mu}$$

$$= \sum_{g}\sum_{\lambda,\mu}(-1)^{\lambda}\binom{\varrho+1}{\lambda}\binom{\varrho+\mu-1}{\varrho-1}x^{g}$$

wobei λ und μ alle Werthe annehmen können, welche die Bedingung

$$\lambda(n+1)+\mu = g$$

erfüllen. Setzt man $\mu = g - \mu'(n+1)$, dann wird diese Bedingung einfach $\lambda = \mu'$ und der gesuchte Coefficient von x^{g} hat die Form

$$\gamma = \sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}\binom{\varrho+1}{\lambda}\binom{\varrho+g-\lambda(n+1)-1}{\varrho-1}. \tag{36}$$

wobei λ die Werthe $0, 1, 2 \ldots$ bis zur grössten in $\frac{g}{n+1}$ enthaltenen ganzen Zahl durchläuft.

Ist $g < n+1$, dann wird die Grösse der Gruppe einfach durch $\binom{\varrho+g-1}{\varrho-1}$ angegeben, und in diesem Falle enthält dieselbe alle Ueberschiebungen, die überhaupt gebildet werden können. Man kann sie daher als *„vollständige Gruppe"* bezeichnen.

Liegt das Gewicht der Gruppe zwischen n und $2n+2$, dann enthält dieselbe nur $\binom{\varrho+g-1}{\varrho-1} - (\varrho+1)\binom{\varrho+g-n-2}{\varrho-1}$ Formen und es ist ersichtlich, dass von den Ueberschiebungen, die überhaupt gebildet werden können, in diesem Falle $(\varrho+1)\binom{\varrho+g-n-2}{\varrho-1}$ identisch verschwinden. Eine solche Gruppe ist daher eine *„unvollständige."* Dazu gehören auch alle Gruppen, deren Gewicht noch höher als $2n+2$ ist. Dasselbe kann jedoch selbstverständlich den Werth $\frac{\varrho+1}{2}n$ nicht übersteigen und daher kann auch λ höchstens den Werth $\frac{\varrho+1}{2}\;\frac{n}{n+1}$ erreichen.

Als *Nebenresultat* zur Entwicklung des vorigen Paragraphen mag Folgendes hervorgehoben werden. Ebenso wie dort die *primäre* Gruppe zu Grunde gelegt wurde, kann natürlich auch jede andere Gruppe z. B. die folgende

$$\left[[(f_0 f_1)^{\alpha_1}(f_2 f_3)^{\alpha_2}]^{\alpha_3}(f_4 f_5)^{\alpha_4}\right]^{\alpha_5}\cdots = D_i$$

der Untersuchung zu Grunde gelegt werden. Die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = g$$

bleibt dann dieselbe, aber die Bedingungen für die Indices α werden ganz andere, oft complicirter Natur. Trotzdem muss die Zahl der Lösungen obiger Gleichung in beiden Fällen übereinstimmen. Hieraus können dann zahlentheoretische Sätze gewonnen werden, deren directer Nachweis erhebliche Schwierigkeiten bereiten würde.

§ 12.

Gruppen aus mehrfachen Ueberschiebungen.

Im Vorhergehenden wurden nur solche Ueberschiebungen betrachtet, in denen jede Form f nur einmal vorkam und die daher *einfache* genannt werden sollen. Es erscheint nun nothwendig, auch solche Ueberschiebungen (und deren Relationen) zu untersuchen, bei denen jede Form wiederholt auftritt, wie z. B. $[(ff)^{2\lambda}(\varphi\varphi)^{2\mu}]^{\nu}$ und die daher *mehrfache* heissen sollen. In dieser Hinsicht kann nun der folgende wichtige Satz bewiesen werden.

(37) *Jede lineare Relation zwischen mehrfachen Ueberschiebungen mehrerer Formen f vom Gesammtgrade v kann erhalten werden aus einer linearen Relation, welche zwischen einfachen Ueberschiebungen aus v Formen stattfindet.*

Sei eine mehrfache Ueberschiebung der Formen $f, \varphi, \psi, \ldots$ durch

$$U = (f, f, f, \ldots \varphi, \varphi, \varphi, \ldots \psi, \psi, \psi \ldots)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}}$$

dargestellt, worin die Formen bez. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ mal wiederholt vorkommen sollen, ferner eine lineare Relation zwischen derartigen Covarianten durch

$$\sum_\lambda c_\lambda (ff \cdots \varphi\varphi \cdots \psi\psi \cdots)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}} = 0, \tag{38}$$

die selbstverständlich in den Coefficienten jeder Form homogen sein muss, dann lässt sich diese Relation auch bilden, wenn an Stelle der Grundformen $f, \varphi, \psi \ldots$ lineare Combinationen derselben mit fremden Formen gleicher Ordnung

$$af + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{\nu_1-1} f_{\nu_1-1},$$
$$b\varphi + b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + \cdots + b_{\nu_2-1} \varphi_{\nu_2-1}$$

etc. etc. gesetzt werden. Durch Anwendung des distributiven Gesetzes für Ueberschiebungen (§ 1) folgt dann, dass die linke Seite von (38) nach Potenzen der $a_i, b_i, c_i, \ldots$ entwickelt werden kann und zwar fassen wir speciell das Glied ins Auge, welches den Factor

$$a \,.\, a_1 \,.\, a_2 \ldots a_{\nu_1-1} \,.\, b \,.\, b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{\nu_2-1} \,.\, c \,.\, c_1 \,.\, c_2 \ldots c_{\nu_3-1} \ldots$$

besitzt. Nach Formel (1) ist der andere Factor eine Summe, welche aus

$$\sum_\lambda c_\lambda (f f_1 f_2 \ldots \varphi \varphi_1 \varphi_2 \ldots \psi \psi_1 \psi_2 \ldots)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}}$$

dadurch hervorgeht, dass man die Formen

$$f f_1 f_2 \ldots \varphi \varphi_1 \varphi_2 \ldots \psi \psi_1 \psi_2 \ldots$$

jede Reihe für sich auf alle möglichen Arten vertauscht und die Resultate addirt. Da dieses Glied der Entwicklung, wie auch jedes andere, für sich verschwinden muss, so folgt eine Beziehung, die wir in der Form

$$(39) \qquad \sum_{f, \varphi \cdots} \sum_\lambda c_\lambda (f f_1 f_2 \ldots \varphi \varphi_1 \varphi_2 \ldots \psi \psi_1 \psi_2 \ldots)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}} = 0$$

schreiben können. Hieraus folgt dann rückwärts wieder die Relation (38) (bis auf einen Zahlencoefficienten), indem man alle $f_i = f$, $\varphi_i = \varphi$, etc. setzt.

Diese Relation (39) enthält nun ausschliesslich *einfache* Ueberschiebungen der Formen $f f_1 f_2 \ldots \varphi \varphi_1 \varphi_2 \ldots$ etc. Das vollständige System der Relationen unter denselben ist nach § 8 bekannt und es ist nun klar, dass hieraus alle in Rede stehenden Relationen dadurch gewonnen werden können, dass man alle Formen $f_i = f$, $\varphi_i = \varphi$ etc. setzt. Demnach gilt der Satz:

Das vollständige System der linearen Relationen zwischen den mehrfachen Ueberschiebungen

$$U_i = (f f f \cdots \varphi \varphi \varphi \cdots)_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1}}$$

(40) *vom Gesammtgrade v ergiebt sich aus demjenigen der einfachen Ueberschiebungen aus v verschiedenen Formen*

$$f, f_1, f_2 \ldots \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \textit{etc.}$$

durch Gleichsetzen aller Formen f_i, φ_i, etc.

Es ist dabei bemerkenswerth, dass durch das Gleichsetzen der Formen f_i, φ_i etc. ausser den schon bestehenden Relationen zwischen den einfachen Ueberschiebungen keine *neuen* Relationen zwischen denselben eintreten. Diese Specialisirung findet vielmehr nur darin ihren Ausdruck, dass manche Formen identisch verschwinden, andere wieder identisch gleich werden. Allein auch unter den linearen Relationen wird Aehnliches eintreten, indem mehrere derselben bei dieser Specialisirung dasselbe Resultat liefern. Es wird daher eine wichtige Aufgabe sein, solche überflüssige Relationen, die schon in anderen enthalten sind, von vornherein auszuscheiden.

§ 13.

Mehrfache Ueberschiebungen von Formen vierter Ordnung.

Um die Resultate des vorigen Paragraphen an einem Beispiele klarzulegen, benütze ich das in § 9 für Formen vierter Ordnung aufgestellte *vollständige System linearer Relationen.* Durch Specialisirung desselben können dann alle linearen Relationen zwischen den folgenden mehrfachen Ueberschiebungen

$$\begin{aligned} &1. \quad (ffff)_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = U_i,\\ &2. \quad (fff\varphi)_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = V_i,\\ &3. \quad (ff\varphi\varphi)_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = W_i \end{aligned}$$

alle vom Gewichte $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ gewonnen werden.

Um die Relationen zwischen den U_i zu erhalten, hat man (nach Satz (40)) in § 9 alle Formen $f_i = f$ zu setzen. Die 16 Relationen (21), durch welche die Formen der zweiten Gruppe mit derjenigen der primären verknüpft sind, reduciren sich dabei auf folgende drei:

$$\big((f^2f)^2f\big)^4 + \big((f^2f)^3f\big)^3 - \tfrac{5}{7}\big((f^2f)^4f\big)^2 = 0,$$

$$\big((Hf)^0f\big)^4 + 2\big((Hf)^1f\big)^3 + \tfrac{12}{7}\big((Hf)^2f\big)^2 + \tfrac{4}{5}\big((Hf)^3f\big)^1 + \tfrac{4}{5}\big((Hf)^4f\big)^0 = 0,$$

$$\big((Hf)^0f\big)^4 - \tfrac{9}{7}\big((Hf)^2f\big)^2 + \big((Hf)^3f\big)^1 - \tfrac{3}{10}\big((Hf)^4f\big)^0 = 0,$$

worin abkürzend $(ff)^2 = H$ gesetzt ist.

Die fünf übrigen Systeme von Gleichungen, die aus dem ersten durch Vertauschen der Formen erhalten werden, liefern offenbar nichts Neues. Erst die Gleichungen (23) ergeben wieder die folgenden vier Beziehungen:

$$\big((f^2f)^2f\big)^4 - \tfrac{5}{7}\big((Hf)^0f\big)^4 = 0,$$

$$\big((f^2f)^3f\big)^3 + \tfrac{6}{7}\big((Hf)^1f\big)^3 = 0,$$

$$\big((f^2f)^4f\big)^2 + \tfrac{12}{7}\big((Hf)^2f\big)^2 - \tfrac{4}{5}\Big(\big((ff)^4f\big)^0f\Big)^2 = 0,$$

$$\big((Hf)^2f\big)^2 + \tfrac{1}{4}\Big(\big((ff)^4f\big)^0f\Big)^2 = 0,$$

womit der Kreis dieser Relationen — nämlich zwischen Formen der primären Gruppe — abgeschlossen ist. Da nun die primäre Gruppe, wenn alle Formen f einander gleich gesetzt sind, nur mehr 9 Formen enthält (die andern 7 verschwinden identisch), so folgt aus vorstehenden Relationen, dass davon 7 Formen durch die andern 2 linear ausgedrückt werden können. Die primäre Gruppe enthält also schliesslich nur mehr 2 linear unabhängige Formen.

Um das System der erhaltenen Relationen zu einem *vollständigen* zu machen, ist nun nur noch erforderlich, in den Gleichungen (24) des § 9 alle Formen f_i einander gleich zu setzen. Es bleiben alsdann nur folgende vier Gleichungen übrig:

$$(ff)^2(ff)^4 = \left(\left((ff)^4 f\right)^0 f\right)^2;$$

$$[(ff)^2(ff)^2]^2 = \tfrac{1}{6}\left((Hf)^0 f\right)^4 + \tfrac{2}{3}\left((Hf)^1 f\right)^3 - \tfrac{3}{14}\left((Hf)^2 f\right)^2 - \tfrac{7}{30}\left((Hf)^3 f\right)^1 + \tfrac{7}{60}\left((Hf)^4 f\right)^0;$$

$$[(ff)^0(ff)^2]^1 = \tfrac{1}{70}\left((Hf)^0 f\right)^4 + \tfrac{9}{35}\left((Hf)^1 f\right)^3 + \tfrac{216}{245}\left((Hf)^2 f\right)^2 + \tfrac{24}{25}\left((Hf)^3 f\right)^1 + \tfrac{9}{25}\left((Hf)^4 f\right)^0;$$

$$[(ff)^0(ff)^0]^6 = \tfrac{3}{14}\left((f^2f)^2f\right)^4 + \tfrac{11}{14}\left((f^2f)^3f\right)^3 + \tfrac{55}{98}\left((f^2f)^4f\right)^2.$$

Durch dieselben sind dann auch noch die Formen der drei letzten Gruppen durch diejenigen der primären Gruppe dargestellt. Diese drei Gruppen werden nämlich beim Gleichsetzen der Formen nicht nur identisch gleich, sondern es verschwinden auch sämmtliche Formen bis auf die angeschriebenen vier. Von diesen können jedoch nur zwei linear unabhängig sein, wie es einem später zu beweisenden allgemeinen Satze auch entspricht.

In gleicher Weise kann aus § 9 das vollständige System der Relationen zwischen den Ueberschiebungen V_i und W_i gewonnen werden. Es ist nur erforderlich, im ersteren Falle $f_1 = f_2 = f_3 = f$ und $f_4 = \varphi$, und im anderen Falle $f_1 = f_2 = f$ und $f_3 = f_4 = \varphi$ zu setzen. Je nach dem Zwecke, dem diese Relationen dienen sollen, wird selbstverständlich auch nicht selten *ein Theil derselben* genügen; insbesondere wenn es sich darum handelt, eine Ueberschiebung wie z. B. $[(ff)^2(\varphi\varphi)^2]^2$ durch zerfallende Ueberschiebungen linear auszudrücken, alsdann werden bloss solche Relationen herauszugreifen sein, in welchen diese Form auch vorkommt. Dieselben habe ich in Bd. XXII dieser Annalen pag. 290 durch Anwendung der Gordan'schen Formel III (Formensystem pag. 11) bereits abgeleitet, nur in einer andern Form, als sie sich aus § 9 ergeben würden. Während aber dort die Gruppirung der Relationen unübersichtlich und zusammenhangslos erschien, wesshalb auch der Gang einer solchen Rechnung von vornherein gar nicht angegeben werden konnte, sind dieselben in der jetzigen Gestalt als Ausdruck eines allgemeinen Princips — des associativen Gesetzes — dargestellt und der Gang der Reduction ist unzweideutig festgestellt.

§ 14.

Zusammenhang zwischen den Gruppen aus mehrfachen Ueberschiebungen.

Obgleich durch den Satz (40) des § 12 in Verbindung mit Satz (18) des § 8 alle Beziehungen zwischen mehrfachen Ueberschiebungen bereits hergestellt sind, ist es doch von Interesse, über die Anordnung derselben genauere Angaben zu besitzen.

Zunächst ist ersichtlich, dass die mehrfachen Ueberschiebungen auch in *Gruppen* geordnet werden können, so dass die Ueberschiebungen gleicher Zusammenfassung und gleichen Gewichts zu derselben Gruppe gehören. Wenn also beispielsweise nur mehrfache Ueberschiebungen einer einzigen Form f in Betracht kommen, dann wird die primäre Gruppe von allen Ueberschiebungen

$$\mathfrak{A}_i^{(1)} = \left(\left((ff)^{\alpha_1} f\right)^{\alpha_2} \cdots f\right)^{\alpha_\varrho}$$

vom Gewichte $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = g$ gebildet. Jede solche Gruppe kann nun aber aus einer Gruppe *einfacher* Ueberschiebungen durch Gleichsetzen von Formen f entstanden gedacht werden. Im angeführten Beispiele wäre dies die Gruppe der Formen

$$A_i^{(1)} = \left(\left((ff_1)^{\alpha_1} f_2\right)^{\alpha_2} \cdots f_\varrho\right)^{\alpha_\varrho}$$

oder auch eine aus dieser durch Vertauschung der f hervorgehende *ähnliche* Gruppe. Es ist somit deutlich, dass jeder Gruppe mehrfacher Ueberschiebungen mehrere Gruppen einfacher Ueberschiebungen zugeordnet werden können, die beim Gleichsetzen von Formen f sämmtlich in erstere übergehen. Dieses letztere System von Gruppen kann daher — seiner Bedeutung entsprechend — kurz als System der *Urgruppen* bezeichnet werden.

Ein bemerkenswerther Unterschied zwischen den Gruppen aus mehrfachen Ueberschiebungen und denen aus einfachen Ueberschiebungen besteht nun darin, dass die Formen der ersteren *nicht mehr linear unabhängig sind.* Wenn nämlich in der Relation (38) des § 12 nur mehrfache Ueberschiebungen *einer* Gruppe vorkommen, dann treten in (39) Relationen zwischen einfachen Ueberschiebungen der zugehörigen Urgruppen auf, die in der That existiren. Durch Anwendung des associativen Gesetzes für die Ueberschiebung kann jedoch das vollständige System dieser letzteren Relationen aufgestellt werden und es gilt demnach der Satz:

(41) *Alle linearen Relationen, welche zwischen mehrfachen Ueberschiebungen ein und derselben Gruppe stattfinden, werden aus den Relationen zwischen Formen der zugehörigen Urgruppen durch Gleichsetzen von Formen f erhalten.*

Sind in solcher Weise alle Beziehungen innerhalb einer Gruppe mehrfacher Ueberschiebungen hergestellt, dann können dieselben dazu benutzt werden, um einen Theil der Formen durch die übrigen linear auszudrücken. Diese letzteren *asyzygetischen* Formen der Gruppe können jedoch noch in verschiedener Weise gewählt werden, doch lässt sich allgemein der Nachweis führen, dass — ähnlich wie bei einfachen Ueberschiebungen — auch hier alle zusammengehörigen Gruppen gleichen Gewichtes die gleiche Zahl asyzygetischer Formen enthalten müssen.

Wir haben nämlich auch hier ein zu Satz (17) analoges Theorem:

(42) *Jede mehrfache Ueberschiebung einer Gruppe ist durch die asyzygetischen Ueberschiebungen einer beliebigen zugehörigen Gruppe linear ausdrückbar.*

Der Beweis kann in folgender Art geführt werden. Soll die mehrfache Ueberschiebung $\mathfrak{A}_i$ durch die asyzygetischen Formen

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varkappa$$

einer zugehörigen Gruppe linear dargestellt werden, so wird man zunächst die zu beiden Gruppen gehörigen Urgruppen bilden. Eine der ersteren enthalte die Formen

$$A_1^{(\lambda)}, A_2^{(\lambda)}, \ldots A_i^{(\lambda)} \ldots A_\nu^{(\lambda)},$$

während eine der anderen durch die Formen

$$B_1^{(\mu)}, B_2^{(\mu)}, \ldots B_\varkappa^{(\mu)} \ldots B_\nu^{(\mu)}$$

gebildet werde. Da dies *einfache* Ueberschiebungen sind, so erhält man nach Satz (17) des § 8 die Relationen

$$A_i^{(\lambda)} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} c_\varrho B_\varrho^{(\mu)} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \nu,$$

durch welche jede Form der Gruppe der A durch die B linear dargestellt ist. Werden hierin die Formen f_i in solcher Weise einander gleich gesetzt, dass dadurch die Gruppen A und B beziehungsweise in die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übergehen, dann folgen die Relationen

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\varkappa'} c_\varrho \mathfrak{B}_\varrho \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

wodurch jede Form $\mathfrak{A}_i$ zunächst als lineare Function *sämmtlicher* Formen $\mathfrak{B}$ dargestellt ist. Durch Benutzung der Relationen, welche innerhalb der Gruppe der $\mathfrak{B}$ selbst stattfinden und deren System nach Satz (41) bekannt ist, kann dann $\mathfrak{A}_i$ bloss durch *asyzygetische* Formen der andern Gruppe ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=x} c_\varrho' \mathfrak{B}_\varrho \quad i = 1, 2, 3 \ldots$$

Da die Wahl der Urgruppen A und B noch eine sehr willkürliche ist, so können die in Rede stehenden Relationen auch auf viele verschiedene Arten entwickelt werden.

Betrachten wir nun die Beziehungen zweier zusammengehöriger Gruppen mehrfacher Ueberschiebungen, so folgt, dass die asyzygetischen Formen derselben gegenseitig linear ausdrückbar sein müssen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Anzahl dieser Formen in beiden Gruppen die gleiche ist. Daher gilt der Satz:

(43) *Alle zusammengehörigen Gruppen aus mehrfachen Ueberschiebungen enthalten die gleiche Anzahl asyzygetischer Formen.*

§ 15.

Ueber eine besondere Gattung von Gruppen.

Die erhaltenen allgemeinen Sätze sollen nun auf eine besondere Gattung von Gruppen angewendet werden, bei welchen die Relationen zwischen den Formen in besonders einfacher Weise sich gestalten. Es ist dies die Gruppe der Ueberschiebungen

$$A_i^{(1)} = \left(\left((\varphi f_1)^{\alpha_1} f_2\right)^{\alpha_2} \cdots f_\varrho\right)^{\alpha_\varrho}$$

nebst allen durch Vertauschung der f_i (unter entsprechender Abänderung der Indices α_i) hieraus hervorgehenden Gruppen. Die Zahl sämmtlicher Gruppen ist durch $\varrho!$ angegeben und es möge auch gleich die Bedingung eingeführt werden, dass die Ordnung m der Form φ nicht kleiner als das Gewicht g dieser Gruppen sei.

Die *Anordnung* der Formen $A_i^{(1)}$ innerhalb der ersten Gruppe sei nun derart, dass die Formen zunächst nach *steigendem* äusseren Index α_ϱ geordnet seien. Diejenigen mit gleichem α_ϱ sollen dann wieder nach steigendem $\alpha_{\varrho-1}$ geordnet werden u. s. w. Alsdann kann jede Ueberschiebung dieser Gruppe durch ein symbolisches Product ersetzt werden. Denn das Product

$$\Pi_i^{(1)} = (\varphi a^{(1)})^{\alpha_1} (\varphi a^{(2)})^{\alpha_2} \cdots (\varphi a^{(\varrho)})^{\alpha_\varrho} \cdot a_x^{(0)^{n_1-\alpha_1}} \cdots \varphi_x^{m-g}$$

kann in folgender Weise entwickelt werden:

$$\Pi_i^{(1)} = A_i^{(1)} + c_1 A_{i-1}^{(1)} + c_2 A_{i-2}^{(1)} + \cdots,$$

woraus hervorgeht, dass die symbolischen Producte einer Gruppe, ebenso wie die Ueberschiebungen A linear unabhängig sind, sowie auch, dass die symbolischen Producte *verschiedener* Gruppen gegenseitig linear ausdrückbar sind. Diese letzteren Beziehungen gestalten sich aber hier ganz besonders einfach. Denn es ist leicht einzusehen, dass die Gruppen der symbolischen Producte Π alle die *gleichen* Formen nur in veränderter Reihenfolge enthalten müssen. Die Gleichungen des Satzes (18) werden daher einfach von der Form:

$$(44) \qquad \Pi_x^{(2)} = \Pi^{(1)}{}_i$$

und es sind dadurch alle Gruppen auf die primäre bezogen. Ersetzt man hierin die Π durch die angegebenen Ausdrücke der A, so gehen dieselben in solche Relationen zwischen den Ueberschiebungen A über, die sich nur der Form nach von denen des Satzes (18) unterscheiden und daher jene vertreten können.

Wenn nun mehrere der Formen f_i z. B. $f_1, f_2, \ldots$ bis f_{x_1} einander gleich gesetzt werden, dann sind die Formen $A_i^{(1)}$ (oder $\Pi_i^{(1)}$) nicht mehr linear unabhängig. Nach Satz (41) können jedoch alle betreffenden Relationen aus dem System (44) durch Gleichsetzen von Formen f gewonnen werden. Für die Gruppe der $\Pi^{(1)}$ bedeutet dies, dass alle Formen, die durch Vertauschung der Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{x_1}$ aus einander hervorgehen, *identisch* gleich sind. Wird daher nur die erste derselben, für welche

$$(45) \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \ldots \alpha_{x_1-1} \geqq \alpha_{x_1}$$

ist, beibehalten und werden alle übrigen entfernt, dann besitzt diese *reducirte* Gruppe wieder *linear unabhängige* Formen.

Ganz dasselbe gilt nun auch für die Ueberschiebungen $A_i^{(1)}$. Bezeichnen wir diejenigen derselben, für welche die Bedingungen (45) erfüllt sind, als *Normalformen* A, dann lässt sich offenbar durch Benützung der Gleichungen (44) jede aus einer Normalform durch Vertauschung der $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_x$ abgeleitete Form durch die Normalform selbst und solche Formen linear ausdrücken, welche beiden in der Gruppe vorangehen. Da nun jede Normalform allen aus ihr abgeleiteten Formen vorangeht, so folgt, dass jede der letzteren durch solche Formen linear darstellbar ist, welche *ihr selbst* vorangehen. Daher sind alle Formen der Gruppe durch die Normalformen linear darstellbar. Andrerseits sind diese letzteren aber auch *asyzygetisch*. Denn das System der Relationen (44) ist ein vollständiges, und keine Relation blieb bei der vorgenommenen Reduction unbenutzt.

In ähnlicher Weise lassen sich die asyzygetischen Formen der Gruppe bestimmen, wenn noch weitere Formen f etwa $f_{x_1+1}, \ldots$ bis $f_{x_1+x_2}$ einander gleich gesetzt werden. Das Resultat kann dann in folgendem Satze ausgesprochen werden:

In der Gruppe der Ueberschiebungen

$$A_i^{(1)} = \left(\left((\varphi f_1)^{\alpha_1} f_2\right)^{\alpha_2} \cdots f_\varrho\right)^{\alpha_\varrho}$$

bleiben beim Gleichsetzen der Formen f_1 bis $f_{\varkappa_1}$, ferner der Formen $f_{\varkappa_1+1}$ bis $f_{\varkappa_1+\varkappa_2}$ etc. nur diejenigen Formen asyzygetisch, für welche die Bedingungen

$$(46) \qquad \begin{gathered} \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \ldots \geqq \alpha_{\varkappa_1}, \\ \alpha_{\varkappa_1+1} \geqq \alpha_{\varkappa_1+2} \geqq \alpha_{\varkappa_1+3} \ldots \geqq \alpha_{\varkappa_1+\varkappa_2} \\ \text{etc. etc.} \end{gathered}$$

erfüllt sind, und alle übrigen sind durch diese linear ausdrückbar. Dabei darf jedoch die Ordnung von φ nicht kleiner sein als das Gewicht der Gruppe.

Was die *Anzahl* dieser asyzygetischen Formen betrifft, so ist dieselbe durch die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = g$$

bedingt, wobei jedoch keine der Zahlen α_i die Ordnung der zugehörigen Form f_i überschreiten darf, während ausserdem noch die im Satze angegebenen Bedingungen erfüllt sein müssen. Bezeichnen wir die Ordnungen der Formen $f_1, f_{\varkappa_1+1}$, etc. durch m_1, m_2, etc., dann können offenbar die Lösungen obiger Gleichung dadurch gewonnen werden, dass aus den Zahlenreihen

$$0, 1, 2, \ldots m_1; \quad 0, 1, 2, \ldots m_2; \text{ etc.}$$

je $\varkappa_1, \varkappa_2$ etc. Zahlen (mit Wiederholung) herausgegriffen werden, so dass ihre Summe $= g$ ist. Wenn dabei die Zahl i der ersten Reihe in der Wiederholung $w_i^{(1)}$ vorkommt und entsprechend die Zahl i der zweiten Reihe in der Wiederholung $w_i^{(2)}$ etc., dann müssen die Zahlen w den folgenden Bedingungen genügen:

$$(47) \qquad \begin{gathered} w_0^{(i)} + w_1^{(i)} + \cdots + w_{m_i}^{(i)} = \varkappa_i \\ i = 1, 2, \ldots \\ \sum_i \left(0 \cdot w_0^{(i)} + 1 \cdot w_1^{(i)} + 2 \cdot w_2^{(i)} + \cdots + m_i \cdot w_{m_i}^{(i)}\right) = g. \end{gathered}$$

Der grösste Werth, den i in dieser Summe annehmen kann, ist nichts Anderes, als die Anzahl der *verschiedenen* Formen f, aus denen die mehrfachen Ueberschiebungen gebildet sind.

§ 16.

Entwicklung der asyzygetischen Covarianten beliebigen Grades in einem simultanen Formensystem.

Aus den asyzygetischen Ueberschiebungen $A_i^{(1)}$ der im vorigen Paragraphen betrachteten Gruppe können nun diejenigen der folgenden zugehörigen Gruppe gewonnen werden

$$B_i^{(1)} = \left[\varphi, \left(\left((f_1 f_2)^{\beta_1} f_3\right)^{\beta_2} \cdots f_\varrho\right)^{\beta_{\varrho-1}}\right]^{\beta_\varrho},$$

wobei selbstverständlich das Gewicht der Gruppen das gleiche sein muss, während ausserdem auch dieselben Formen f_1 bis $f_{\varkappa_1}$, $f_{\varkappa_1+1}$ bis $f_{\varkappa_1+\varkappa_2}$ etc. als gleich anzunehmen sind. Es ist nur erforderlich, die Formen $A_i^{(1)}$ nach Formen $B_i^{(1)}$ zu entwickeln und von letzteren eine solche Zahl auszuwählen, dass sämmtliche asyzygetischen Formen $A_i^{(1)}$ durch sie ausdrückbar sind. Da nach Satz (43) die Gesammtzahl dieser Formen die gleiche sein muss, so ist die Zahl der Formen $B_i^{(1)}$ aus dem vorigen Paragraphen ebenfalls schon bekannt.

Aus der Gruppe der Formen $B_i^{(1)}$ erhält man dann die Reihe der Formen

$$C_i = \left(\left((f_1 f_2)^{\beta_1} f_3\right)^{\beta_2} \cdots f_\varrho\right)^{\beta_{\varrho-1}},$$

welche nach obigen Festsetzungen als simultane Covarianten der Formen $f_1, f_{\varkappa_1+1}$, etc. von den entsprechenden Graden $\varkappa_1, \varkappa_2$, etc. zu betrachten sind. Das Gewicht dieser Covarianten ist jedoch verschieden und liegt zwischen 0 und g. Aus dem Umstande, dass die Formen

$$B_i^{(1)} = [\varphi, C_i]^{\beta_\varrho}$$

asyzygetisch sind, während φ von den Covarianten C_i in keiner Weise abhängig ist, folgt nun, dass Satz (11) des § 6 hier in Anwendung kommen kann. Darnach sind also die Formen C_i ebenfalls asyzygetisch. Da ferner das System der asyzygetischen Formen $B_i^{(1)}$ ein *vollständiges* war, so gilt das gleiche auch von den Formen C_i, weil jede Relation zwischen Formen der ersteren Gruppe (durch Specialisirung der Form φ) in eine solche zwischen Formen der abgeleiteten Reihe der C_i übergeführt werden kann. Es sind also alle ausser den C_i noch existirenden Covarianten derselben Art durch diese linear darstellbar. *Damit sind dann im simultanen Formensystem der Formen $f_1, f_{\varkappa_1+1}$ etc. alle asyzygetischen Covarianten, welche in diesen Formen von den Graden $\varkappa_1, \varkappa_2$ etc. sind und deren Gewicht g nicht übersteigt, in der Gestalt mehrfacher Ueberschiebungen dargestellt.*

Die Anzahl dieser Formen stimmt nach dem Gesagten mit der Zahl der Formen $A_i^{(1)}$, welche im vorigen Paragraphen bestimmt wurde, überein. Nennen wir dieselbe N_ϱ, dann giebt $N_\varrho - N_{\varrho-1}$ die

Anzahl derjenigen asyzygetischen Covarianten C_i an, welche das Gewicht g haben. Dieses Resultat steht im Einklange mit dem bekannten von Cayley herrührenden Satze und es ist somit zugleich eine Verbindung gewonnen zwischen der von Cayley und Sylvester ausgebildeten Seite der Formentheorie, welche sich mehr mit der Bestimmung der *Anzahl* der Covarianten beschäftigte und andrerseits mit der von Clebsch und Gordan verfolgten Richtung, welche auf die wirkliche Herstellung der Covarianten nebst ihren gegenseitigen Beziehungen das Hauptgewicht legte.

§ 17.

Die Syzyganten zwischen einfachen Ueberschiebungen.

Unter den linearen Relationen, welche zwischen den *einfachen* Ueberschiebungen zusammengehöriger Gruppen stattfinden und deren vollständiges System in § 8 aufgestellt wurde, verdienen diejenigen besonderes Interesse, welche ausschliesslich Producte (nullte Ueberschiebungen) von Covarianten enthalten. Dieselben werden nach Sylvester „*Syzyganten*" genannt und es ist die Aufgabe, das vollständige System dieser Syzyganten (für einfache Ueberschiebungen) aufzustellen.

Zunächst soll die Vertheilung der Covariantenproducte in den verschiedenen zusammengehörigen Gruppen näher festgestellt werden. Es möge eine beliebige Gruppe die Ueberschiebungen

$$U_i = (P_i\, Q_\lambda)^{\alpha_\varrho}$$

vom Gewichte g enthalten, wobei P_i und Q_λ ihrerseits wieder Ueberschiebungen aus $\varkappa + 1$ und $\varrho - \varkappa$ Formen sind:

$$P_i = (f_0 f_1 \cdots f_\varkappa)_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varkappa}; \quad Q_\lambda = (f_{\varkappa+1} f_{\varkappa+2} \cdots f_\varrho)_{\alpha_{\varkappa+1} \ldots \alpha_{\varrho-1}},$$

dann können die zerfallenden Formen dieser Gruppe, für welche $\alpha_\varrho = 0$ sein muss, durch Verbindung der Formen anderer einfacherer Gruppen entstanden gedacht werden. Man hat nur unter den Formen P_i und Q_λ solche auszuwählen, deren Gewichte sich zum Gewichte g ergänzen und je zwei zu multipliciren. Diese Formen P_i und Q_λ bilden nun aber ebenfalls Gruppen und zwar gehört zu einer Gruppe der P_i nur *eine* ergänzende Gruppe der Q_λ. Enthält die erstere $N_i^{(1)}$ und die letztere $N_r^{(2)}$ Formen, dann entstehen durch Verbindung dieser beiden $N_i^{(1)} \cdot N_r^{(2)}$ zerfallende Formen U_i. Nach Satz (35) des § 10 sind die Zahlen N durch folgende Entwickelungen bestimmt:

$$(48) \quad \begin{aligned} (1 - x^{n_0+1})(1 - x^{n_1+1}) \cdots (1 - x^{n_\varkappa+1})(1 - x)^{-\varkappa} &= \sum_i N_i^{(1)} x^i, \\ (1 - x^{n_{\varkappa+1}+1})(1 - x^{n_{\varkappa+2}+1}) \cdots (1 - x^{n_\varrho+1})(1 - x)^{-(\varrho-\varkappa-1)} &= \sum_r N_r^{(2)} x^r, \end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass alle diejenigen Zahlen N, welche etwa negativ ausfallen, durch Null ersetzt werden. Die Anzahl ν_g der zerfallenden Formen U_i bestimmt sich dann aus

$$\sum_i N_i^{(1)} x^i \cdot \sum_r N_r^{(2)} x^r = \sum_g \nu_g x^g$$

und es ist ersichtlich, dass diese Entwicklung bis zu einem gewissen Grade mit derjenigen des folgenden Ausdruckes

$$(1 - x^{n_0+1})(1 - x^{n_1+1}) \cdots (1 - x^{n_\varrho+1})(1 - x)^{1-\varrho} = \sum_g \nu_g' x^g$$

übereinstimmen muss. Es ist dies nämlich so lange der Fall, als das Gewicht g eine der beiden Zahlen

$$\frac{n_0 + n_1 + \cdots + n_\varkappa}{2} \quad \text{und} \quad \frac{n_{\varkappa+1} + n_{\varkappa+2} + \cdots + n_\varrho}{2}$$

nicht überschreitet. Alsdann treten in den Entwicklungen (48) negative Coefficienten nicht auf und die Multiplication derselben geschieht in gewöhnlicher Weise. Sobald jedoch g die angegebene Grenze überschreitet, müssen negative Coefficienten der Entwicklungen (48) durch Null ersetzt werden und es werden desshalb die Zahlen ν_g von hier ab im Allgemeinen grösser ausfallen als die Zahlen ν_g'. Die Bedeutung dieser letzteren kann nun allgemein festgestellt werden. Da nämlich die Anzahl N_g der Formen U_i durch die Entwicklung

$$(1 - x^{n_0+1})(1 - x^{n_1+1}) \cdots (1 - x^{n_\varrho+1}) \cdot (1 - x)^\varrho = \sum_g N_g x^g$$

bestimmt wird, so folgt ohne Weiteres

$$\nu_g' = N_g - N_{g-1}.$$

Es giebt demnach in der Gruppe der U_i vom Gewichte g gerade um ν_g' mehr Formen als in der Gruppe vom Gewichte $g - 1$. So lange also g die angegebene Grenze nicht überschreitet, ist dies auch die Bedeutung von ν_g und es sind also dann gerade die zerfallenden Formen, durch welche sich die beiden Gruppen von den Gewichten g und $g - 1$ unterscheiden. Alle anderen Formen der ersteren Gruppe können aus denen der letzteren einfach dadurch abgeleitet werden, dass der äussere Index α_ϱ um eins erhöht wird. Alsdann ist auch deutlich, *dass unter der angegebenen Beschränkung des Gewichtes g alle zusammengehörigen Gruppen gleichen Gewichtes auch die gleiche Zahl zerfallender Formen enthalten müssen.*

Für grössere Werthe von g gilt dieser Satz nicht mehr und ich verweise in dieser Hinsicht auf das Beispiel in § 9, wo die primäre Gruppe nur eine zerfallende Form, dagegen jede der 3 letzten deren 3 besass.

Nachdem die Vertheilung der zerfallenden Formen in den einzelnen Gruppen nunmehr festgestellt ist, soll eine *allgemeine Methode* angegeben werden, um *jede Syzygante* zwischen *einfachen* Ueberschiebungen aufzufinden.

Man wird zunächst *alle zerfallenden Formen* der zusammengehörigen Gruppen nach Formen der primären Gruppe (oder auch einer beliebigen anderen Gruppe) entwickeln, welche Entwicklungen schon in denen des Satzes (18) enthalten sind. Durch Elimination der *nicht zerfallenden* Formen der primären Gruppe folgen dann *alle* Syzyganten, welche zwischen Formen dieser Gruppen existiren. Man erkennt daraus, dass die Aufstellung einer beliebigen Syzygante, nachdem der Weg vorgezeichnet ist, nur noch Sache mechanischer Rechnung ist.

Noch eine andere Frage ist hiermit erledigt. Die angegebene Elimination kann nämlich in dem Falle nicht vollständig ausgeführt werden, wenn die *linear unabhängigen* zerfallenden Formen ihrer Zahl nach gleich oder geringer sind, als die nicht zerfallenden Formen der ersten Gruppe. Alsdann findet man auf dem angegebenen Wege diejenigen Formen der primären Gruppe, durch welche unter Zuhilfenahme der zerfallenden Formen alle übrigen linear ausgedrückt werden können. In dem Beispiele des § 9 würde sich dieses Verfahren in folgender Weise gestalten. Es kommen daselbst in den 15 Gruppen zusammen 21 zerfallende Formen vor, von denen jedoch wegen der Identitäten

$$\big((f\varphi)^2\psi\big)^4\cdot\chi=\big((f\psi)^2\varphi\big)^4\cdot\chi=\big((\varphi\psi)^2f\big)^4\cdot\chi$$

etc. nur 13 von einander verschieden sind. Diese können durch die 15 nicht zerfallenden Formen der primären Gruppe linear ausgedrückt werden. Durch diese Ausdrücke erhält man dann Aufschluss

1) über die Frage, ob die 13 zerfallenden Formen linear unabhängig sind oder nicht, und

2) welche Formen der primären Gruppe den zerfallenden Formen adjungirt werden müssen, um durch diese zusammen alle anderen Formen der Gruppen linear ausdrücken zu können.

§ 18.

Die Syzyganten zwischen einfachen Ueberschiebungen aus 3 und 4 binären Formen.

Die aus 3 Formen f_1, f_2 und f_3 gebildeten 3 Gruppen haben, wenn sie *vollständige* Gruppen sind, die Besonderheit, dass in jeder *nur eine zerfallende Form* vorkommt und da alsdann (Math. Annalen Bd. 31, pag. 449) erst je $g+2$ Anfangsformen durch eine lineare Relation verbunden sind, so muss, wenn eine Syzygante möglich sein soll, $g+2=3$ also $g=1$ sein. Dies ist die bekannte Beziehung

$$(49)\qquad (f_1f_2f_3) \equiv f_1 \cdot (f_2f_3) + f_2 \cdot (f_3f_1) + f_3 \cdot (f_1f_2) = 0$$

die somit zugleich als einfachster Fall der a. a. O. abgeleiteten Formel (6) betrachtet werden kann. Nimmt man zu den 3 Formen noch eine weitere Form f_4 hinzu, dann besteht zwischen den 4 möglichen Syzyganten erster Art die folgende *Syzygante zweiter Art:*

$$(50)\quad (f_1f_2f_3f_4) \equiv f_1(f_2f_3f_4) - f_2(f_1f_3f_4) + f_3(f_1f_2f_4) - f_4(f_1f_2f_3) = 0.$$

Dieser Ausdruck $(f_1f_2f_3f_4)$ verschwindet nämlich nicht allein unabhängig von den Variabeln und Coefficienten der Formen, sondern auch in Bezug auf die *Grundformen*, aus welchen das simultane System der Formen f_i besteht. In ähnlicher Weise können bei noch mehr Formen die Syzyganten höherer Art gebildet werden.

Um die *Syzyganten erster Art* zwischen einfachen Ueberschiebungen *aus vier binären Formen* zu erhalten, kann man in folgender Weise verfahren. Aus den Identitäten

$$(ab)\,c_x + (bc)\,a_x + (ca)\,b_x = 0,$$
$$(cd)\,a_x + (da)\,c_x + (ac)\,d_x = 0$$

folgt durch Elimination der letzten Terme die neue Beziehung

$$(ab)\,c_x d_x + (cd)\,a_x b_x = (ad)\,b_x c_x + (cb)\,a_x d_x,$$

welche schon die einfachste Syzygante (vom Gewicht eins) der verlangten Art darstellt. Indem man aber beiderseits mit i potenzirt und mit passenden Potenzen von a_x, b_x, c_x und d_x multiplicirt, ergiebt sich eine allgemeinere Syzygante vom Gewichte i, welche in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1f_2)^\lambda (f_3f_4)^{i-} = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1f_4)^\lambda (f_3f_2)^{i-\lambda}.$$

Es kommen darin — wie ersichtlich — sämmtliche zerfallende Formen zweier Gruppen vor. Zur kürzeren Bezeichnung führen wir die Abkürzung ein

$$(51)\quad [f_1f_2f_3f_4]_i = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1f_2)^\lambda (f_3f_4)^{i-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1f_4)^\lambda (f_3f_2)^{i-\lambda},$$

dann können durch Vertauschung der Formen f noch weitere Syzyganten abgeleitet werden, von denen jedoch nicht alle verschieden sind. Man erweist leicht folgende Beziehungen:

$$(52)\quad \begin{array}{ll} [f_1f_2f_3f_4]_i = \mathfrak{S}; & [f_1f_4f_3f_2] = -\mathfrak{S}; \\ [f_2f_1f_4f_3]_i = (-1)^i\,\mathfrak{S}; & [f_2f_3f_4f_1]_i = (-1)^{i+1}\,\mathfrak{S}; \\ [f_3f_2f_1f_4]_i = -\mathfrak{S}; & [f_3f_4f_1f_2] = \mathfrak{S}; \\ [f_4f_1f_2f_3]_i = (-1)^{i+1}\,\mathfrak{S}; & [f_4f_3f_2f_1]_i = (-1)^i\,\mathfrak{S}. \end{array}$$

Es bleibt also die Syzygante $\mathfrak{S}$, ähnlich wie die bei der biquadratischen Gleichung vorkommende bekannte Wurzelfunction, bei 8 Substitutionen der Formen insoweit unverändert, als eine Vorzeichenänderung gleichgültig ist. Somit reduciren sich alle 24 Werthe der Syzygante auf nur 3 wesentlich verschiedene. Diese sind die folgenden

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = \mathfrak{S}; \quad [f_1 f_2 f_4 f_3]_i = \mathfrak{S}_1; \quad [f_1 f_3 f_2 f_4]_i = \mathfrak{S}_2.$$

Durch Combination derselben lassen sich alsdann weitere Syzyganten ableiten, welche zerfallende Formen aus *drei* Gruppen enthalten und die häufig einfacher sind, als die ursprünglichen. Man erhält beispielsweise:

$$(53) \qquad \{f_1 f_2 f_3 f_4\}_i = \frac{1}{2}(\mathfrak{S} + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2)$$

$$= \sum_\lambda \binom{i}{2\lambda} (f_1 f_2)^{i-2\lambda} (f_3 f_4)^{2\lambda} - \sum_\lambda \binom{i}{2\lambda} (f_1 f_4)^{i-2\lambda} (f_2 f_3)^{2\lambda}$$

$$+ \sum_\lambda \binom{i}{2\lambda+1} (f_1 f_3)^{i-2\lambda-1} (f_2 f_4)^{2\lambda+1} = 0,$$

ferner

$$(f_1 f_2 f_3 f_4)_i = \frac{1}{2}(\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2)$$

$$= \sum_\lambda \binom{i}{2\lambda+1} (f_1 f_2)^{i-2\lambda-1} (f_3 f_4)^{2\lambda+1} + \sum_\lambda \binom{i}{2\lambda+1} (f_1 f_4)^{i-2\lambda-1} (f_2 f_3)^{2\lambda+1}$$

$$- \sum_\lambda \binom{i}{2\lambda+1} (f_1 f_3)^{i-2\lambda-1} (f_2 f_4)^{2\lambda+1} = 0.$$

Aus diesen ganz allgemeinen Formeln sollen nun einige besonders häufig vorkommende Specialformeln abgeleitet werden.

§ 19.

Die Syzyganten bis zum Gewichte vier.

Aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen folgt, dass die Syzygante $[f_1 f_2 f_3 f_4]_1$ vom *Gewichte eins* aus zwei einfacheren Syzyganten durch Multiplication mit Formen f linear zusammengesetzt werden kann und somit *reducibel* ist.

Die Syzygante *vom Gewichte zwei* ist die folgende:

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_2 = f_1 f_2 (f_3 f_4)^2 + 2(f_1 f_2)(f_3 f_4) + (f_1 f_2)^2 f_3 f_4 - f_1 f_4 (f_3 f_2)^2$$
$$- 2(f_1 f_4)(f_3 f_2) - (f_1 f_4)^2 f_3 f_2 = 0.$$

Benützt man die Beziehung

$$(f_1 f_2)(f_3 f_4) - (f_1 f_4)(f_3 f_2) = (f_1 f_3)(f_2 f_4)$$

noch zur Vereinfachung, so erkennt man leicht die von Clebsch (binäre Formen pag. 119 (11)) entwickelte Formel wieder.

Als Syzyganten *vom Gewichte drei* ergeben sich zunächst die folgenden beiden:

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_3 = f_1 f_2 (f_3 f_4)^3 + 3(f_1 f_2)^1 (f_3 f_4)^2 + 3(f_1 f_2)^2 (f_3 f_4)^1 + (f_1 f_2)^3 f_3 f_4$$
$$- f_1 f_4 (f_3 f_2)^3 - 3(f_1 f_4)^1 (f_3 f_2)^2 - 3(f_1 f_4)^2 (f_3 f_2)^1 - (f_1 f_4)^3 f_3 f_2 = 0,$$

$$\{f_1 f_2 f_3 f_4\}_3 = (f_1 f_2)^3 f_3 f_4 - (f_1 f_4)^3 f_2 f_3 + (f_2 f_4)^3 f_1 f_3 + 3(f_1 f_3)^2 (f_2 f_4)^1$$
$$+ 3(f_1 f_2)^1 (f_3 f_4)^2 - 3(f_2 f_3)^2 (f_1 f_4)^1 = 0.$$

Da nun aber häufig der Fall vorkommt, dass eine oder mehrere der Formen f von der zweiten Ordnung sind, so muss eine der vorstehenden Syzyganten für diese Fälle umgeformt werden. Sei beispielsweise $f_4 = q$ von der zweiten Ordnung, dann wird man die gewünschte Umformung in der Weise vornehmen können, dass man an Stelle von f_4 q^2 einführt und den entstehenden Ausdruck derart verändert, dass der Factor q sich heraushebt. Dann kommt man schliesslich zu der Syzygante*)

$$\{f_1 f_2 f_3 q\}_3 = (f_1 f_2)^3 f_3 q + \big((f_2 q)^2 f_1\big)^1 f_3 - \big((f_1 q)^2 f_2\big)^1 f_3$$
$$+ 2(f_1 f_2)^1 (f_3 q)^2 - 2(f_2 f_3)^2 (f_1 q)^1 + 2(f_1 f_3)^2 (f_2 q)^1 = 0.$$

Diese bleibt auch noch gültig, wenn f_3 ebenfalls eine quadratische Form ist, da diese Form in keiner dritten Ueberschiebung auftritt. Wenn endlich auch noch f_2 von der zweiten Ordnung ist, dann existirt die folgende Syzygante, welche aus einer von Clebsch (binäre Formen pag. 205) entwickelten symbolischen Identität leicht direct erhalten werden kann:

$$\{f q q' q''\}_3 = (q q')^2 (q'' f)^1 + (q' q'')^2 (f q)^1 + (f q')^2 (q q'')^1$$
$$- \big((q q'') f\big)^2 q' = 0.$$

Weitere Specialisirungen der allgemeinen Syzygante vom Gewichte 3 bieten kein Interesse.

Unter den *Syzyganten vom Gewichte* 4 müssen zunächst die beiden folgenden angeführt werden:

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_4 = \sum_\lambda \binom{4}{\lambda} (f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^{4-\lambda} - \sum_\lambda \binom{4}{\lambda} (f_2 f_3)^\lambda (f_4 f_1)^{4-\lambda} = 0,$$

$$\frac{1}{4}(f_1 f_2 f_3 f_4)_4 = (f_1 f_2)^3 (f_3 f_4)^1 + (f_1 f_2)^1 (f_3 f_4)^3 + (f_1 f_4)^3 (f_2 f_3)^1$$
$$+ (f_1 f_4)^1 (f_2 f_3)^3 - (f_1 f_3)^3 (f_2 f_4)^1 - (f_1 f_3)^1 (f_2 f_4)^3 \quad = 0.$$

Von diesen kann die letztere auch dann noch benützt werden, wenn mehrere der Formen f von der dritten Ordnung sind, dagegen wird

*) In derselben kommen zerfallende Formen aus 5 verschiedenen Gruppen vor.

dieselbe unbrauchbar, wenn irgend zwei der Formen f einander gleich werden. Für solche Fälle muss dann die erste der beiden Syzyganten, ähnlich wie dies für die Syzygante vom Gewichte 3 geschehen ist, so umgeformt werden, dass die Form dritter Ordnung höchstens in der dritten Ueberschiebung vorkommt. Auch wenn eine oder mehrere Formen von der zweiten Ordnung werden, lassen sich eine Reihe von besonderen Syzyganten herstellen, auf deren Ableitung jedoch hier nicht eingegangen werden soll*).

§ 20.

Zurückführung der Syzyganten zwischen mehrfachen Ueberschiebungen auf solche zwischen einfachen Ueberschiebungen.

In ähnlicher Weise wie in § 12 jede lineare Relation zwischen mehrfachen Ueberschiebungen auf eine solche zwischen einfachen Ueberschiebungen zurückgeführt wurde, kann nun auch jede Syzygante zwischen mehrfachen Ueberschiebungen aus den in den vorigen Paragraphen betrachteten entstanden gedacht werden.

Wenn nämlich die Relation (38) des § 12 eine Syzygante ist, also von der Form ist

$$\sum_\lambda c_\lambda \cdot P_\lambda \cdot Q_\lambda = 0,$$

wo P_λ und Q_λ mehrfache Ueberschiebungen der Formen $f, \varphi, \psi, \ldots$ sind, dann wird die Relation (39), die aus der ersten entspringt, ebenfalls eine Syzygante. Der Grund liegt darin, dass bei Bildung eines Productes $P_\lambda \cdot Q_\lambda$ für die Combinationen

$$\begin{gathered} af + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{\nu_1 - 1} f_{\nu_1 - 1}, \\ b\varphi + b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + \cdots + b_{\nu_2 - 1} \varphi_{\nu_2 - 1}, \\ \text{etc. etc.} \end{gathered}$$

wegen des für die Ueberschiebung gültigen distributiven Gesetzes (§ 1) wieder ein Aggregat von *Covariantenproducten* erhalten wird. Die Relation (39) ist demnach im vorliegenden Falle eine Syzygante

*) Es ergeben sich beispielsweise für eine Form zweiter Ordnung k die weiter unten verwendeten Syzyganten:

$$[ffkk]_4 = (ff)^2 (kk)^2 - (fk)^2 (fk)^2 + f \cdot (fk^2)^4 - 2k\big((fk)^2 f\big)^2 + \frac{1}{2} k^2 (ff)^4 = 0$$

und

$$[f\varphi kk]_4 = (f\varphi)^2 (kk)^2 - (fk)^2 (\varphi k)^2 + \frac{1}{2} f (\varphi k^2)^4 + \frac{1}{2} \varphi (fk^2)^4$$
$$- k\Big[\big((fk)^2 \varphi\big)^2 + \big((\varphi k)^2 f\big)^2\Big] + \frac{1}{2} k^2 (f\varphi)^4 = 0.$$

zwischen *einfachen* Ueberschiebungen, deren vollständiges System nach § 17 aufgestellt werden kann. Durch Gleichsetzen von Formen f_i, φ_i etc. ergiebt sich dann das *vollständige System* der Syzyganten zwischen *mehrfachen* Ueberschiebungen.

Allein diese Methode kann noch wesentlich vereinfacht werden durch den Nachweis, dass *allein durch Anwendung der in* § 18 *entwickelten Syzygante* $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ *alle* Syzyganten in einem Formensysteme gewonnen werden können. Zur Vereinfachung des Beweises werde ich denselben blos für das vollständige System *einer* binären Form führen.

§ 21.

Die Syzyganten im vollständigen Formensysteme einer binären Form.

Das vollständige System der Form f setzen wir als bekannt voraus und machen überdies die Annahme, dass alle Covarianten vom vierten Grade an (für diejenigen vom dritten Grade ist dies selbstverständlich) als Ueberschiebungen der Formen $k_\lambda = (ff)^{2\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \cdots)$ über Formen von niedrigerem Grade definirt seien. Dass dies gestattet ist, folgt aus dem Umstande, dass alle Covarianten C_i von der allgemeinen Form

$$C_i = \left(\left((ff)^{2\lambda} f\right)^{\lambda_1} \cdots f\right)^{\lambda_{\varrho-1}} = \left((k_\lambda f)^{\lambda_1} \cdots f\right)^{\lambda_{\varrho-1}}$$

und vom Gewichte g durch Formen der zugehörigen Gruppe

$$K_i = \left[k_\lambda \left((ff)^{\beta_1} \cdots f\right)^{\beta_{\varrho-2}}\right]^{\beta_{\varrho-1}} = (k_\lambda K_i')^\mu$$

ersetzt werden können, da beide Gruppen nach Satz (43) die gleiche Zahl asyzygetischer Formen enthalten. Nun ist aber schon für die Grundformen vom 2^{ten} und 3^{ten} Grade $\lambda > 0$ und folglich kann unter den Formen k_λ die erste f^2 weggelassen werden.

Weiterhin kann bei dieser Darstellung der Grundformen stets erreicht werden, *dass in denselben nur* n^{te} *und niedere Ueberschiebungen vorkommen.* Nehmen wir diesen Satz für eine Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung φ als richtig an, dann sind also alle Grundformen von φ in der angegebenen Weise darstellbar, so dass in ihnen höchstens $(n-1)^{\text{te}}$ Ueberschiebungen auftreten. Ersetzt man in diesen Formen φ durch f (von der n^{ten} Ordnung), dann erhält man Covarianten von f, die schon die gewünschte Gestalt besitzen und in denen nur $(n-1)^{\text{te}}$ und niedere Ueberschiebungen vorkommen. Wendet man nun den Gordan'schen Zerlegungssatz an (Clebsch, binäre Formen pag. 257), so folgt, dass alle übrigen Covarianten von f den symbolischen Factor $(ab)^\lambda$, $\lambda \geqq \frac{n}{2}$

enthalten müssen und daher durch Ueberschiebung derjenigen Formen k_λ, deren Ordnungen n nicht übertreffen, über Formen niederen Grades erhalten werden können. Dann versteht es sich von selbst, dass auch in diesen Covarianten keine höhere als die n^{te} Ueberschiebung vorkommen kann und da nun der Satz für Formen der niedersten Ordnungen richtig ist, so gilt er allgemein.

Die *Anordnung* der Grundformen möge nun so gedacht werden, dass zunächst alle Formen von gleichem *Grade* (in den Coefficienten von f) als zusammengehörig gelten sollen. Diese sollen dann wieder nach steigendem *Gewichte* geordnet werden, wobei die Reihenfolge solcher Formen, die gleichen Grad und gleiches Gewicht besitzen, gleichgültig ist.

Durch Benützung der in § 18 entwickelten allgemeinen Syzygante erhalten wir nun folgende Beziehung:

$$(54) \qquad 0 = [f f K_i' k_\lambda]_\mu$$

$$= f^2 K_i + \sum_\varrho \binom{i}{2\varrho+2} k_{\varrho+1} (K_i' k_\lambda)^{\mu-2\varrho-2} - \sum_\varrho \binom{\mu}{\varrho} (f k_\lambda)^\varrho (K_i' f)^{\mu-\varrho}.$$

Die nähere Betrachtung dieses Ausdrucks lehrt, dass derselbe den ersten Term $f^2 K_i$ nur einmal enthalten kann. Denn in der darauf folgenden ersten Summe kommen blos solche Formen vor — abgesehen von den k_ϱ — die ein *kleineres Gewicht* haben als K_i, folglich dieser Form vorangehen. Ferner in der zweiten Summe kommen nur Formen vor, die von *niedrigerem Grade* sind als K_i, vorausgesetzt, dass K_i selbst von höherem als dem dritten Grade ist. Schliessen wir diesen letzteren Fall aus, so ist ersichtlich, dass der vorstehende Ausdruck unter allen Umständen eine Syzygante darstellen muss, zumal der Index μ nach oben bewiesenem Satze nie grösser als n werden kann. Es gilt also der Satz:

(55) *Zu jeder Grundform K_i von höherem als dem dritten Grade gehört eine Syzygante, welche das Glied $f^2 K_i$ enthält. Ist jedoch K_i Functionaldeterminante von Formen zweiten oder höheren Grades, so ist die zugehörige Syzygante stets durch f theilbar.* *)

In letzterem Falle kann daher auch die allgemeine Syzygante (54) durch die einfachere

$$(f K_i' k_\lambda) = f K_i + K_i' (k_\lambda f) + k_\lambda (f K_i') = 0$$

ersetzt werden.

Allein auch einige Formen *dritten* Grades geben zu Syzyganten Veranlassung, nur mit dem Unterschiede, dass bei ihnen die dritte Potenz von f als Factor zur Grundform hinzutritt. Nach einem von

*) Abgesehen von anderen Fällen, in denen dies auch eintreten kann.

mir bewiesenen Satze (Math. Annalen Bd. 31, pag. 451) sind diese *Grundformen* durch

$$A_i = \left((ff)^{2\alpha} f\right)^{\beta} \quad \alpha \gtrless \beta - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

darstellbar, wobei $\beta > 0$ sein muss. Multipliciren wir jede derselben mit f, dann sind diejenigen Producte $A_i \cdot f$, für welche $\beta > 1$ ist, in folgender Weise ausdrückbar

$$(56) \qquad f \cdot A_i = \sum_{\varrho, \sigma, \tau} c_{\varrho\sigma} (k_{1+\varrho}\, k_{1+\sigma})^{\tau} + c(k_0 k_\gamma)^{\delta},$$

wobei δ nur Null oder 1 sein kann, je nachdem das Gewicht von A_i gerade oder ungerade ist. Denn durch Anwendung der Formel (2) ergiebt sich für das Indicessystem

$$\begin{matrix} f & k_\alpha & f \\ 0 & 0 & \beta \\ n-\beta, & 2n-2\alpha-\beta, & n \end{matrix}$$

zunächst die Beziehung

$$f \cdot A_i = (-1)^{\beta} \sum_i \frac{\binom{\beta}{2i}\binom{n}{2i}}{\binom{2n-2i+1}{i}} (k_i\, k_\alpha)^{\beta-2i}.$$

Von den rechts auftretenden Ueberschiebungen lässt sich jedoch die erste $(k_0 k_\alpha)^{\beta}$ durch die Ueberschiebungen $(k_0\, k_{\alpha+i})^{\beta-2i}$ und solche linear ausdrücken, welche k_0 nicht enthalten. Entwickelt man nämlich das symbolische Product

$$P = (ab)^{2\alpha} (ac) (bd)^{\beta-1} a_x^{n-\alpha-1} b_x^{n-\alpha-\beta+1} c_x^{n-1} d_x^{n-\beta+1}$$

auf zwei verschiedene Arten, indem man einmal den Factor $(ab)^{2\alpha}$ bevorzugt, so erhält man

$$P = (k_\alpha k_0)^{\beta} + c_1 (k_{\alpha+1} k_0)^{\beta-2} + c_2 (k_\alpha k_1)^{\beta-2} + \cdots$$

und indem man andrerseits die Factoren (ac) und $(bd)^{\beta-1}$ einander gegenüberstellt, so ergiebt sich ein ähnlicher Ausdruck für P, in welchem aber k_0 nicht vorkommt. Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke kann dann eine Gleichung gewonnen werden, mittelst welcher $(k_\alpha k_0)^{\beta}$ durch

$$(k_{\alpha+1} k_0)^{\beta-2}, \quad (k_{\alpha+2} k_0)^{\beta-4}, \quad \text{etc.}$$

und durch solche Ueberschiebungen, die k_0 nicht enthalten, linear ausgedrückt werden kann. In ganz ähnlicher Weise lässt sich dann auch $(k_{\alpha+1} k_0)^{\beta-2}$ etc. behandeln und es erhellt die Richtigkeit der oben angenommenen Gleichung für $f \cdot A_i$. Es muss jedoch besonders darauf hingewiesen werden, dass β mindestens den Werth 2 haben muss, da sonst in der zweiten Entwicklung des symbolischen Productes P das Auftreten von k_0 nicht vermieden werden kann.

Um nun schliesslich zu einer Syzygante zu gelangen, in welcher A_ι vorkommt, ist nur erforderlich, alle Syzyganten

$$[ff\,k_{1+\varrho}\,k_{1+\sigma}]_\tau = 0$$

entsprechend der Relation (56) zu bilden, dieselben mit den Zahlencoefficienten $c_{\varrho\sigma}$ zu multipliciren, dann wird die Summe

$$(57)\qquad \sum_{\varrho\sigma\tau} c_{\varrho\sigma}[ff\,k_{1+\varrho}\,k_{1+\sigma}]_\tau = f^3 A_\iota - cf^2(k_0\,k_\gamma)^\delta + \Pi = 0$$

die gesuchte Syzygante sein. Derjenige Theil derselben, der durch Π bezeichnet ist, enthält dabei nur solche Grundformen von f, welche entweder niederen Grad oder niederes Gewicht als A_ι besitzen. Darunter werden sich auch im Allgemeinen Grundformen vom 3ten und 4ten Grade befinden, die jedoch alsdann ein niederes Gewicht als A_ι besitzen müssen. Was die Ueberschiebung $(k_0\,k_\gamma)^\delta$ betrifft, so kann dieselbe, wenn das Gewicht von A_ι ungerade ist, durch das Product

$$f\cdot(f\,k_\gamma)^1$$

ersetzt werden. Man erkennt sonach, dass der Term $f^3 A_\iota$ in dem Ausdruck (57) nur einmal vorkommen kann und dass dieser folglich stets eine Syzygante sein muss.

Der oben ausgesprochene Satz kann daher noch durch den folgenden ergänzt werden:

(58) *Zu jeder Grundform dritten Grades A_ι, welche nicht Functionaldeterminante ist, gehört eine Syzygante, die den Term $f^3 A_\iota$ enthält.*

Im Ganzen haben wir nun $s - n$ Syzyganten gewonnen, wenn das System s Grundformen umfasst und aus deren Zusammensetzung folgt zugleich, dass dieselben gegenseitig ganz unabhängig sind. Durch dieselben ist folglich, da nur n unabhängige Grundformen existiren, auch der ganze *algebraische* Zusammenhang zwischen den Formen des Systems bereits festgelegt und alle anderen Syzyganten können durch einfache Eliminationsprocesse aus ihnen abgeleitet werden. Doch soll nicht unerwähnt gelassen werden, dass die erhaltenen Syzyganten in Bezug auf ihren Grad (in den Coefficienten von f) zum Theil häufig noch erniedrigt werden können, wenn nämlich entweder direct der Factor f heraustritt oder wenn dies erst nach vorausgegangener Verbindung mit früher erhaltenen Syzyganten erreicht werden kann. Die so vereinfachten Syzyganten, die wir durch

$$\mathfrak{S}_1 = 0,\quad \mathfrak{S}_2 = 0,\ \cdots\ \mathfrak{S}_\nu = 0$$

bezeichnen, sollen „*fundamentale Syzyganten*" genannt werden. Sie bilden das kleinste System derjenigen Syzyganten, durch welche alle übrigen (in Bruchform) ausdrückbar sind.

§ 22.

Typische Darstellung von Syzyganten.

Es möge eine beliebige Syzygante durch

(59) $$\mathfrak{S} = \sum a_i\, C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} \cdots C_n^{\alpha_n}\, K_1^{\beta_1} K_2^{\beta_2} \cdots K_\nu^{\beta_\nu} = 0$$

dargestellt sein, wobei die unabhängigen Grundformen f, k_i und $(f\,k_i)^1$ durch $C_1\, C_2 \cdots C_n$ bezeichnet sind, während die abhängigen Grundformen — nach Grad und Gewicht geordnet — $K_1, K_2 \cdots K_\nu$ genannt sind. Aus der fundamentalen Syzygante, welche zu K_ν gehört, folgt nun

$$K_\nu = \frac{1}{f^2}(\mathfrak{S}_\nu - M),$$

wo M nur Grundformen niederen Grades oder Gewichtes (als K_ν) enthält. Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die allgemeine Syzygante kann dann in dieser K_ν entfernt werden, wofür jedoch einerseits $\mathfrak{S}_\nu$ und andrerseits eine Potenz von f als Nenner darin auftritt. Ganz ebenso lassen sich die folgenden Grundformen $K_{\nu-1}$, $K_{\nu-2}$ etc. entfernen, deren Anordnung in zweckentsprechender Weise vorgenommen werden muss, und es wird schliesslich $\mathfrak{S}$, abgesehen von einer Potenz von f im Nenner, nur noch die fundamentalen Syzyganten $\mathfrak{S}_i$ und die unabhängigen Grundformen C_i enthalten. Es ist also dann in folgende Form gebracht:

$$f^{\varkappa}\,\mathfrak{S} = \sum b_i\, C_1^{\lambda_1} C_2^{\lambda_2} \cdots C_n^{\lambda_n} \cdot \mathfrak{S}_1^{\mu_1} \mathfrak{S}_2^{\mu_2} \cdots \mathfrak{S}_\nu^{\mu_\nu}.$$

Da nun zwischen den C_i keine Relation besteht und $\mathfrak{S}$ zugleich mit den $\mathfrak{S}_i$ verschwinden muss, so folgt ausserdem, dass jedes Glied dieses Aggregates mindestens einen Factor $\mathfrak{S}_i$ enthalten muss.

Es ist damit der folgende Satz bewiesen:

(60) *Alle Syzyganten im vollständigen Formensysteme einer binären Form f sind durch die fundamentalen Syzyganten als rationale Functionen mit Nennern $f^{\varkappa}$ darstellbar. Dabei treten als Coefficienten dieser Syzyganten nur ganze Functionen der unabhängigen Grundformen f, $(ff)^{2i}$ und $\left((ff)^{2i} f\right)$ auf.*

Noch eine zweite typische Darstellung verdient bemerkt zu werden, weil sie sich dadurch auszeichnet, dass in ihr die fundamentalen Syzyganten *linear* auftreten. Multiplicirt man (59) mit f^2, so kann in dem rechts stehenden Aggregate überall $f^2 K_\nu$ durch $\mathfrak{S}_\nu - M$ ersetzt werden. Dann erhält man

$$f^2\,\mathfrak{S} = \varphi \cdot \mathfrak{S}_\nu + \mathfrak{S}^{(1)},$$

wo φ eine ganze Function der Grundformen und $\mathfrak{S}^{(1)}$ eine Syzygante ist, die entweder K_ν gar nicht mehr enthält, oder doch in einer niedrigeren Potenz, als diese Form ursprünglich in $\mathfrak{S}$ vorhanden war. In derselben Weise hat man weiter

$$f^2\,\mathfrak{S}^{(1)} = \varphi_1\,\mathfrak{S}_r + \mathfrak{S}^{(2)},$$
$$f^2\,\mathfrak{S}^{(2)} = \varphi_2\,\mathfrak{S}_r + \mathfrak{S}^{(3)},$$
$$\text{etc. etc.}$$

und es ist klar, dass die letzte Syzygante $\mathfrak{S}^{(i)}$ dieser Reihe, da sie nur die unabhängigen Grundformen enthält, identisch verschwinden muss. Substituirt man dann rückwärts die Werthe von $\mathfrak{S}^{(i-1)}$, $\mathfrak{S}^{(i-2)}$ etc. in die jedesmal vorhergehende Gleichung, dann folgt schliesslich

$$f^\lambda\,\mathfrak{S} = \sum_i \varphi_i \cdot \mathfrak{S}_i$$

und es gilt der Satz:

(61) *Alle Syzyganten von f sind auch als lineare Functionen der fundamentalen Syzyganten mit Nennern f^λ darstellbar. Dabei treten jedoch als Coefficienten dieser Syzyganten ganze Functionen sämmtlicher Grundformen auf.*

Um schliesslich die entwickelte Methode an einem Beispiele zu erläutern, lasse ich die fundamentalen Syzyganten einer binären Form fünfter Ordnung hier nachfolgen.

Die Grundformen seien in folgender Weise definirt und bezeichnet:

f; $H = (ff)^2$; $i = (ff)^4$; $T = (fH)$; $q = (fi)$; $j = -(if)^2$; $m = (iH)$; $h = -(iH)^2 - \frac{3}{10}i^2$; $A = (ii)^2$; $r = (jH)$; $\varepsilon = (ji)$; $\alpha = -(ji)^2$; $\eta = (hi)$; $\tau = -(hi)^2$; $n = (jh)$; $\beta = (i\alpha)$; $\vartheta = (i\tau)$; $B = (i\tau)^2$; $Q = (j\tau)$; $\gamma = (\tau\alpha)$; $C = (\beta\alpha)$; $\delta = (\vartheta\alpha)$; $R = (\beta\gamma)$.

Die 18 fundamentalen Syzyganten sind dann die folgenden:

$$\mathfrak{S}_1 = 3[ffHH]_2 = f^3 j - \frac{3}{2} f^2 i H + 3H^3 + 6T^2 = 0;$$
$$\mathfrak{S}_2 = (fiH) = fm + Hq - iT = 0;$$
$$\mathfrak{S}_3 = -[ffiH)_2 = f^2 h - H^2 i - fHj + \frac{1}{2} f^2 i^2 - 2qT = 0;$$
$$\mathfrak{S}_4 = [ffii]_2 = f^2 A + 2fij + i^2 H + 2q^2 = 0;$$
$$\mathfrak{S}_5 = (fjH) = fr - Hm - jT = 0;$$
$$\mathfrak{S}_6 = (fji) = f\varepsilon - im - jq = 0;$$
$$\mathfrak{S}_7 = [ffii]_4 = f\alpha + HA + 2ih + \frac{1}{2} i^3 - j^2 = 0;$$
$$\mathfrak{S}_8 = (fhi) = f\eta + ir - qh = 0;$$

$$\mathfrak{S}_9 = [fHii]_4 = f\tau + H\alpha - 2jh - \frac{1}{3}i^2 j = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{10} = (f\alpha H) = fn + fi\varepsilon + 2H\eta - T\alpha = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{11} = (fi\alpha) = f\beta - 2i\eta + q\alpha = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{12} = (fi\tau) = f\vartheta - in + q\tau = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{13} = [fhii]_4 = fB + \frac{1}{2}i^2\alpha + \frac{1}{3}Aij + 2j\tau - h\alpha = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{14} = (fj\tau) = fQ - jn - \tau m = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{15} = (f\tau\alpha) = f\gamma - 2\tau\eta + \alpha n = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{16} = (f\beta\alpha) = fC - 2\beta\eta + \alpha^2 j - \alpha Ah - \frac{3}{2}i\alpha\tau = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{17} = (f\vartheta\alpha) = f\delta - 2\vartheta\eta + \frac{5}{2}j\alpha\tau + Bf\alpha - h\alpha^2 = 0;$$

$$\mathfrak{S}_{18} = (f\beta\gamma) = fR - Ah\gamma - Bh\beta + j\alpha\gamma - \frac{3}{2}\beta\tau^2 - \frac{3}{2}i\tau\gamma = 0.$$

Durch dieselben ist der ganze algebraische Zusammenhang zwischen den 23 Grundformen festgelegt. Alle anderen Syzyganten können dann durch diese typisch dargestellt werden. So ist z. B. die folgende abgeleitete Syzygante

$$\mathfrak{S} = (iHj) = jm + H\varepsilon - ir$$

in der Form darstellbar

$$f \cdot \mathfrak{S} = j\mathfrak{S}_2 + H\mathfrak{S}_6 - i\mathfrak{S}_5$$

und man hat damit eine fundamentale Syzygante *zweiter Art* gewonnen:

$$\Sigma_1 = f\mathfrak{S} - j\mathfrak{S}_2 - H\mathfrak{S}_6 + i\mathfrak{S}_5 = 0.$$

Es erhellt, dass jede abgeleitete Grundsyzygante erster Art zu einer fundamentalen Syzygante zweiter Art Veranlassung giebt und dass folglich die Gesammtzahl beider dieselbe sein muss.

Der wichtigste Zweck aber, der durch Aufstellung der fundamentalen Syzyganten erreicht werden kann, scheint mir der folgende zu sein. Nehmen wir an, es befinde sich unter den Formen des Systems noch eine *reducibele* Covariante und es werde die ihr entsprechende Syzygante gebildet. Alsdann muss sich der Factor f^2, womit die Covariante multiplicirt vorkommt, entweder direct aus der ganzen Syzygante ausscheiden lassen, oder es muss dies nach gehöriger Umformung mittelst früherer Syzyganten erreichbar sein. Man erhält dann eben die Formel, durch welche diese Covariante auf andere reducirt **werden** kann. Lässt sich jedoch der Factor der Covariante nicht **entfernen**, so ist dies ein Beweis, *dass die betreffende Covariante irreducibel ist.* Demnach ist deutlich, dass durch diese Syzyganten ein **Mittel** **geschaffen** ist, um die Frage nach der Reducibilität oder **Irreducibilität** einer als Grundform aufgestellten Covariante endgültig zu **entscheiden**.

München, im März 1888.

Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

(Dritte Abhandlung).

Von

Martin Krause in Dresden.

Im Folgenden soll die letzte directe Methode gegeben werden, um die Primfunctionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv+na, n\tau)}{\vartheta_\beta(v, \tau)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Auf diese Methode ist schon in der ersten Arbeit gleichen Titels als der sich zunächst darbietenden hingewiesen worden. Sie beruht im Wesentlichen auf der Multiplication zweier trigonometrischer Reihen. Der grosse Vorzug, den dieselbe vor allen andern bisher angegebenen Methoden besitzt, besteht darin, dass die unbestimmten Constanten aus den fertigen Formeln verschwunden sind, so dass wir unmittelbar die Entwickelung der Primfunctionen in expliciter Form kennen lernen. Diese Methode schliesst die Theorie der Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art ab für den Fall, dass die Zahl der Nullstellen grösser ist, als die Zahl der Unendlichkeitsstellen und dürfte am klarsten den Unterschied darlegen, der zwischen den Untersuchungen des Herrn Appell und denen des Verfassers besteht.

Die Entwickelungen sollen in mehrfacher Form gegeben werden. Erstens ergeben sich durch Multiplication von:

$$\frac{1}{\vartheta_\beta(v, \tau)} \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(nv+na, n\tau)$$

unmittelbar die gesuchten Reihen, zweitens aber soll in den fertigen Ausdrücken noch ein Factor

$$\frac{1}{\vartheta_\gamma(na, n\tau)}$$

abgesondert werden. Es geschieht das um die erhaltenen Resultate unmittelbar mit den früher gewonnenen in Verbindung setzen zu können.

Um die Methode klar hervortreten zu lassen und weil die einfachsten Fälle aus nahe liegenden Gründen das hauptsächlichste Interesse darbieten, wollen wir vor Behandlung des allgemeinen Falles den Fall der Functionen zweiter Art und den Fall $n = 2$ gesondert betrachten. Es entsprechen diese in gewisser Weise der linearen und quadratischen Transformation in der allgemeinen Transformationstheorie, mit der ja unsere Theorie enge verknüpft ist.

In den fertigen Ausdrücken treten gewisse unendliche Reihen auf, die noch wenig bemerkt sind und die auch abgesehen von dem vorliegenden Problem sich von grosser Bedeutung zeigen dürften. Der Zweck des ersten Paragraphen ist es, die Entstehung dieser unendlichen Reihen nachzuweisen und einige Eigenschaften derselben zu entwickeln. Im zweiten Paragraphen wird dann der Fall der Functionen zweiter Art behandelt, im dritten der Fall $n = 2$, im letzten der allgemeine Fall.

Wir beschränken uns im folgenden auf ein bestimmtes Beispiel die Function:

$$\frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)},$$

indem wir bemerken, dass die Zusammenstellung der fertigen Formeln für alle andern Fälle an anderer Stelle gegeben werden wird.

§ 1.

Definition und Haupteigenschaften gewisser unendlicher Reihen a_r.

Die Definition der ϑ_2-Function lautet bekanntlich:

$$(1) \qquad \vartheta_2(v, \tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \cdot \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cdot \cos 3\pi v + \cdots.$$

Aus dieser Form folgt, dass wir berechtigt sind, den Factor $\cos \pi v$ abzusondern, d. h. dass wir setzen können:

$$(2) \quad \vartheta_2(v, \tau) = 4 \cos \pi v \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos 2\pi v + a_2 \cdot \cos 4\pi v + \cdots\right].$$

Hierbei ergeben sich dann für die Grössen a_r die Werthe:

$$(3) \qquad a_r = \sum_0^{\infty}{}^m (-1)^m \cdot q^{\left(r+m+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Es leisten diese unendlichen Reihen den Gleichungen Genüge:

$$(4) \qquad a_{r+1} + a_r = q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2},$$
$$a_r = a_{-r}.$$

Ihre Einführung gestattet eine recht übersichtliche Darstellung vieler doppelt periodischen Functionen der verschiedenen Arten in trigonometrische Reihen. Wir greifen zunächst die folgenden Formeln heraus. Die übrigen drei Thetafunctionen lassen sich darstellen:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v,\tau) = 4\sin\pi v\left(\frac{a_0}{2} - a_1\cdot\cos 2\pi v + a_2\cdot\cos 4\pi v\cdots\right),\\
(5)\quad &\vartheta_0(v,\tau) = q^{-\frac{1}{4}}(1-e^{2i\pi v}\cdot q)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r}(-1)^r\cdot a_r\cdot q^r\cdot e^{2i\pi r v},\\
&\vartheta_3(v,\tau) = q^{-\frac{1}{4}}(1+e^{2i\pi v}\cdot q)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r}a_r\cdot q^r\cdot e^{2i\pi r v}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_2 = 2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}a_m,\\
(6)\quad &\vartheta_1' = 2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot a_m,\\
&0 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m a_m\cdot q^{2ms}\qquad s\gtrless 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso einfach aber ergeben sich die Entwickelungen der reciproken Thetafunctionen in trigonometrische Reihen. In der That, es ist:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\vartheta_1'}{2\pi\cdot\vartheta_0(v,\tau)} = a_0 + 2\sum_{1}^{\infty}{}^{m}a_m\cdot q^{-m^2}\cdot\cos 2m\pi v,\\
&\frac{\vartheta_1'}{\pi\cdot\vartheta_1(v,\tau)} = \frac{1}{\sin\pi v} - 2\sum_{0}^{\infty}{}^{m}a_{m+1}\cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\cdot\sin(2m+1)\pi v,\\
(7)\quad &\frac{\vartheta_1'}{\pi\cdot\vartheta_2(v,\tau)} = \frac{1}{\cos\pi v} + 2\sum_{0}^{\infty}{}^{m}(-1)^{m+1}\cdot a_{m+1}\cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\cdot\cos(2m+1)\pi v,\\
&\frac{\vartheta_1'}{\pi\cdot\vartheta_3(v,\tau)} = a_0 + 2\sum_{1}^{\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot a_m\cdot q^{-m^2}\cdot\cos 2m\pi v.
\end{aligned}
$$

Durch Nullsetzen des Argumentes ergiebt sich:

$$
(8)\qquad \vartheta_2\cdot\vartheta_3 = 2a_0 + 4\sum_{1}^{\infty}{}^{m}a_m\cdot q^{-m^2},
$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} \vartheta_2 \cdot \vartheta_0 &= 2a_0 + 4\sum_1^\infty{}^m (-1)^m \cdot a_m \cdot q^{-m^2}, \\ \vartheta_0 \cdot \vartheta_3 &= 1 \quad + 2\sum_0^\infty{}^m (-1)^{m+1} \cdot a_{m+1} \cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln können zahlentheoretisch interpretirt werden. In der That, nehmen wir die erste Gleichung, so können wir die linke Seite auch schreiben:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^s q^{\frac{(2r+1)^2+4s^2}{4}}$$

die rechte Seite dagegen nimmt die Form an:

$$2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m \sum_0^\infty{}^\mu (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu+2m+1)^2-4m^2}{4}}.$$

Wir kommen demnach zu einer Vergleichung der beiden Formen:

$$(2r+1)^2 + 4s^2$$

und

$$(2\mu+2m+1)^2 - 4m^2 = (2\mu+1)(2\mu+4m+1).$$

Dieselbe erlaubt in völlig elementarer Weise die Darstellung einer Zahl als Summe von Quadraten einer geraden und einer ungeraden Zahl zu entwickeln. Es möge hierauf bei dieser Gelegenheit nicht näher eingegangen werden, es sei nur bemerkt, dass Herr Hermite in einigen classischen Arbeiten die Eigenschaften der doppelt periodischen Functionen dritter Art zur Ableitung ebenso wichtiger wie fundamentaler arithmetischer Sätze gebraucht hat und dass ausser den von ihm herrührenden Anwendungen, noch eine Fülle anderer aufgestellt werden kann.

§ 2.

Die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter Art in trigonometrische Reihen.

Multipliciren wir die beiden Reihen für:

$$\vartheta_1(v+a) \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_1'}{\pi \cdot \vartheta_0(v)}$$

mit einander, so ergiebt sich, wie schon in der letzten Arbeit bemerkt worden ist, die Reihe:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(v+a)}{\pi \cdot \vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^k \sum_{-\infty}^{+x}{}^r c_{kr} \cdot e^{(2k+1)\pi i v + (2r+1)\pi i a},$$

wobei gesetzt ist:

(2) $$c_{kr} = -2i(-1)^r \cdot q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-r)^2} \cdot a_{k-r}.$$

Diese Reihe multipliciren wir noch mit:

$$\frac{\vartheta_1'}{\pi \cdot \vartheta_0(a, \tau)},$$

dann erhalten wir die zweite Darstellung:

(3) $$\frac{\vartheta_1'^2 \cdot \vartheta_1(v+a)}{\pi^2 \cdot \vartheta_0(v) \cdot \vartheta_0(a)} = -4i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_{kr} \cdot e^{(2k+1)\pi i v + (2r+1)\pi i a},$$

$$A_{k,r} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - (k-m)^2 - (r-m)^2} a_{k-m} \cdot a_{r-m}.$$

Es lässt sich diese zweite Darstellung in eine bedeutend einfachere Form bringen.

Zunächst ist klar, dass die Coefficienten der Gleichung Genüge leisten:

(4) $$A_{k,r} = -A_{-k-1,-r-1}.$$

Dann aber wird:

$$A_{k+1,r} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - (k-m+1)^2 - (r+m)^2} a_{k+1-m} \cdot a_{r-m}$$

oder also nach leichten Reductionen:

(5) $$A_{k+1,r} = q^{2r+1} \cdot A_{k,r} - (-1)^k \cdot q^{(k+1)^2 + \frac{2r+1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \cdot q^{2m(k+1)} \cdot a_m.$$

Ist demnach k verschieden von -1, so folgt:

$$A_{k+1,r} = q^{2r+1} \cdot A_{k,r}.$$

Genau so wird:

(6) $$A_{k,r+1} = q^{2k+1} \cdot A_{k,r} - (-1)^r \cdot q^{(r+1)^2 + \frac{2k+1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \cdot q^{2m(r+1)} \cdot a_m.$$

Ist also r verschieden von -1, so wird:

$$A_{k,r+1} = q^{2k+1} A_{k,r}.$$

Sind demnach k und r beide positiv, so wird:

$$A_{k,r} = q^{k(2r+1)} A_{0,r} = q^{k(2r+1)+r} A_{0,0}.$$

Ferner ist nach Formel (6):

$$A_{0,0} = q \cdot A_{0,-1} + q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi},$$

$$A_{0,-1} = q^{-1} \cdot A_{-1,-1} + q^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}$$

oder also:

$$A_{0,0} = q \cdot A_{0,-1} + q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi} = -A_{-1,-1} = -q \cdot A_{0,-1} + q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}.$$

Mithin folgt:

(7) $$A_{0,0} = q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}$$

oder also wir erhalten für positive k und r

(8) $$A_{k,r} = q^{\frac{(2k+1)(2r+1)}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}.$$

Ferner folgt:

$$A_{0,-1} = A_{-1,0} = 0$$

und damit allgemein

(9) $$A_{k,r} = 0,$$

falls eine und nur eine der beiden Zahlen k und r negativ ist. Sind beide negativ, so ergiebt sich der dazu gehörende Werth des Coefficienten aus der Gleichung:

$$A_{k,r} = -A_{-k-1,-r-1}.$$

Wir erhalten auf diese Weise die bekannten Resultate.

§ 3.

Behandlung des Falles $n = 2$.

Durch Multiplication der beiden trigonometrischen Reihen für:

$$\vartheta_1(2v + 2a, 2\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_1'}{\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)}$$

ergiebt sich zunächst der Ausdruck:

(1) $$\frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(2v+2a, 2\tau)}{\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)} = -2i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} b_{k,r} \cdot e^{2k\pi i v + 2(2r+1)a\pi i},$$

$$b_{k,r} = (-1)^r \cdot q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-1-2r)^2} \cdot a_{k-1-2r}.$$

Hieraus wiederum erhalten wir durch Multiplication:

(2) $$\frac{\vartheta_1' \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1(2v+2a, 2\tau)}{\pi^2 \cdot \vartheta_0(v, \tau) \cdot \vartheta_0(2a, 2\tau)} = -4i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} A_{k,r} \cdot e^{(2k+2)\pi i v + 2(2r+1)\pi i a},$$

$$A_{k,r} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} (-1)^m \cdot q^{2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-2m)^2 - 2(r-m)^2} \cdot a_{k-2m} \cdot a'_{r-m},$$

$$\Theta_1' = \left[\frac{\partial \vartheta_1(2v, 2\tau)}{\partial(2v)}\right]_{v=0}, \quad a'_m = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu} (-1)^\mu q^{2\left(m+\mu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Die Resultate gestalten sich übersichtlicher, wenn wir andere Summationsbuchstaben einführen. Wir setzen:

$$2k+2=2r+1+2l+1$$

oder:

$$k=r+l$$

dann wird:

$$\text{(3)}\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\Theta_1'\cdot\vartheta_1(2v+2a,2\tau)}{\pi^2\cdot\vartheta_0(v,\tau)\,\vartheta_0(2a,2\tau)}=-4i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r B_{l,r}\cdot e^{(2l+1)\pi i v+(2r+1)\pi i(v+2a)},$$

$$B_{l,r}=(-1)^r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\cdot q^{2\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2-(l-r-2m)^2-2m^2}\cdot a_{l-r-2m}\cdot a_m'.$$

Der Ausdruck, den wir für $B_{l,r}$ gefunden haben, ist ein recht complicirter, es handelt sich darum ihn einfacher zu gestalten.

Es leisten die Grössen $B_{l,r}$ nun den Gleichungen Genüge:

$$\text{(4)}\quad \begin{aligned} B_{l,r+1}&=q^{2(l+r)+3}B_{l,r}+(-1)^{r+1}q^{2(r+1)^2+l+r+\frac{7}{4}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\cdot q^{4m(r+1)}\cdot a_m',\\ B_{l+2,r}&=q^{4r+2}B_{l,r}+q^{2r+1+(r+l+2)^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\cdot q^{-2m^2}\cdot a_{2m}.\end{aligned}$$

Die Richtigkeit der beiden Gleichungen braucht wohl kaum nachgewiesen zu werden.

Setzen wir der einfacheren Bezeichnung halber:

$$\text{(5)}\quad F=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m q^{-2m^2}\cdot a_{2m},$$

so wird, wenn r positiv und von Null verschieden angenommen wird, nach der letzten Formel (4):

$$B_{l,-r}=-F\cdot q^{2r-1}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m q^{m(4r-2)+(l-r+2m+2)^2}$$

oder also:

$$\text{(6)}\quad B_{l,-r}=-F\cdot q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2r-1)(2l+1)}{2}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m q^{\left(l+2m+\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Nun gilt allgemein die Relation:

$$B_{l,r}=-B_{-l-1,-r-1};$$

daraus folgt, dass, wenn jetzt r positiv oder Null ist:

$$\text{(7)}\quad B_{l,r}=F\cdot q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(2r+1)(2s+1)}{2}}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m q^{\left(l-2m-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Hiermit sind die Constanten in einfacher Weise bestimmt. Die gemeinsame Summe F ist leicht zu interpretiren. In der That es ist:

$$B_{l,0} = q^{2l+1} \cdot B_{l,-1} + q^{l+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\Theta_1'}{2\pi};$$

andrerseits folgt aber

$$B_{l,0} - q^{2l+1} \cdot B_{l,-1} = q^{\frac{1}{4}+\frac{2l+1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2 \cdot F}{2},$$

also wird:

$$F = \frac{\Theta_1'}{\pi\,\vartheta_2}.$$

Somit finden wir schliesslich das Resultat:

$$(8)\qquad \frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_1' \cdot \vartheta_1(2v+2a, 2\tau)}{\pi \cdot \vartheta_0(v,\tau) \cdot \vartheta_0(a,\tau)} = -\,4i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r C_{l,r} \cdot e^{(2l+1)\pi i v + (2r+1)\pi i (v+2a)},$$

$$C_{l,r} = q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(2r+1)(2l+1)}{2}} \sum_0^{\infty}{}_m\, q^{\left(l-2m-\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$C_{l,-r} = -\,q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(2r-1)(2l+1)}{2}} \sum_0^{\infty}{}_m\, q^{\left(l+2m+\frac{3}{2}\right)^2}.$$

In der vorletzten Formel ist r positiv oder Null, in der letzten positiv.

Der Werth von F kann auch geschrieben werden:

$$(9)\qquad F = \frac{1}{2}\,\vartheta_2 \cdot \vartheta_0(0, 2\tau).$$

Hiermit sind wir für den Fall $n = 2$ vollkommen am Ziele.

§ 4.

Behandlung des allgemeinen Falles.

Bei einem allgemeinen n haben wir zunächst zu unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

Sei n eine ungerade Zahl, so ergiebt sich durch Multiplication der entsprechenden Reihen:

$$\frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{2\pi \cdot \vartheta_0(v,\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, b_{kr} \cdot e^{(2k+1)\pi i v + (2r+1)n a \pi i},$$

$$b_{kr} = (-1)^{r+1} \cdot i \cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(k-\frac{n-1}{2}-nr\right)^2} \cdot a_{k-\frac{n-1}{2}-nr},$$

oder auch:

$$(1)\quad \frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{2\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} c_{kr} \cdot e^{(2k+n)\pi i v + (2r+1) n a \pi i},$$

$$c_{kr} = (-1)^{r+1} \cdot i \cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-nr)^2} \cdot a_{k-nr}.$$

Sei zweitens n eine gerade Zahl, so ergiebt sich analog:

$$\frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{2\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} b_{kr} \cdot e^{2k\pi i v + (2r+1) n a \pi i},$$

$$b_{k,r} = (-1)^{r+1} \cdot i \cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(k-\frac{n}{2}-nr\right)^2} \cdot a_{k-\frac{n}{2}-nr};$$

oder auch:

$$(2)\quad \frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{2\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} c_{k,r} \cdot e^{(2k+n)\pi i v + (2r+1) n a \pi i},$$

$$c_{k,r} = (-1)^{r+1} \cdot i \cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-nr)^2} \cdot a_{k-nr}.$$

So haben wir eine gemeinsame Form gefunden und können jetzt ohne weiteres annehmen, dass n gerade oder ungerade ist. Wir setzen es als gerade voraus.

Jetzt möge mit:

$$\frac{\Theta_1'}{2\pi \cdot \vartheta_0(na, n\tau)}$$

multiplicirt werden, wobei gesetzt ist:

$$\Theta_1' = \left[\frac{\partial \vartheta_1(nv, n\tau)}{\partial(nv)}\right]_{v=0}.$$

Es ergiebt sich:

$$(3)\quad \frac{\vartheta_1' \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{4\pi^2 \cdot \vartheta_0(v, \tau) \cdot \vartheta_0(na, n\tau)} = -\, i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} A_{k,r} \cdot e^{(2k+n)\pi i v + (2r+1) n a \pi i},$$

$$A_{k.r} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{m} (-1)^m\, q^{n\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-nm)^2 - n(r-m)^2} \cdot a_{k-nm} \cdot a'_{r-m},$$

$$a_s' = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu} (-1)^{\mu}\, q^{n\left(s+\mu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Die Formen gestalten sich übersichtlicher, wenn wir einen anderen Summationsbuchstaben einführen. Wir setzen:

$$2k + n = (2r+1)(n-1) + 2l + 1$$

oder:

$$k = r(n-1) + l.$$

Dann wird:

$$(4)\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\Theta_1'\cdot\vartheta_1(nv+na,\,n\tau)}{4\pi^2\cdot\vartheta_0(v,\tau\cdot\vartheta_0)(na,\,n\tau)} = -\,i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} B_{l,r}\cdot e^{(2l+1)\pi i v+(2r+1)\pi i((n-1)v+na)},$$

$$B_{l,r} = (-1)^r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} (-1)^m\cdot q^{n\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2-(l-r-nm)^2-nm^2}\cdot a_{l-r-nm}\cdot a'_m.$$

Der Ausdruck, welchen wir hiermit für den allgemeinen Coefficienten gefunden haben, ist wiederum wenig übersichtlich. Es soll versucht werden, ihn in einer einfacheren Form darzustellen.

Es folgen mit leichter Mühe die Recursionsformeln:

$$B_{l,r+1} = q^{2r(n-1)+2l+2n-1}\cdot B_{l,r}$$
$$+(-1)^{r+1}\cdot q^{n(r+1)^2+\frac{5n}{4}-\frac{3}{4}+r(n-1)+l}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot q^{2n(r+1)m}\cdot a'_m,$$

$$(5)\quad B_{l+n,r} = q^{n(2r+1)}\cdot B_{l,r} + (-1)^{l+1}\cdot q^{3rn+\frac{3n}{2}+nr^2-r^2}\cdot F_{l,r},$$

$$F_{l,r} = q^{-l^2+2rl}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot q^{-n(n-1)m^2+2nm(l+1)}\cdot a_{nm}.$$

Nehmen wir daher an, dass r positiv und von Null verschieden ist, so folgt:

$$(6)\qquad B_{l,-r} = (-1)^l q^{-n\left(\frac{2r-1}{2}\right)+(n-1)r^2}\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu} q^{n\mu(2r-1)}\cdot F_{l+n\mu,-r}.$$

An Stelle der einen Function F, die wir im vorigen Paragraphen fanden, treten hier also deren unendlich viele. Es ist nun aber nicht schwer nachzuweisen, dass sich diese unendlich vielen Functionen sämmtlich auf deren $n-1$ zurückführen lassen.

In der That, aus der Definitionsgleichung der Functionen F folgt unmittelbar die Recursionsformel:

$$(7)\qquad F_{l+n-1,-r} = -\,q^{-2rn+3n+2l+2r-1}\cdot F_{l,-r},$$

und zwar gilt diese Formel für positive und negative r.

Allgemein wird:

$$(8)\quad F_{l+\mu(n-1),-r} = (-1)^\mu\cdot q^{\mu(-2rn+3n+2l+2r-1)+\mu(\mu-1)(n-1)}\cdot F_{l,-r}.$$

Diese Formel lehrt, dass durch $n-1$ auf einander folgende Summen:

$$F_{l,-r},\ F_{l+1,-r},\ \ldots,\ F_{l+n-2,-r}$$

sich die übrigen unmittelbar darstellen lassen.

Unsere Grössen $B_{l,-r}$ nehmen nun zunächst die Form an:

$$B_{l,-r} = (-1)^l\cdot q^{-\frac{n(2r-1)}{2}+(n-1)r^2}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}(-1)^\mu\cdot q^{\mu(2r+2l+n)+\mu^2(n+1)}\cdot F_{l+\mu,-r}.$$

Hieraus folgt, dass wir schreiben können:

$$(9) \quad B_{l,-r} = F_{l,-r} \cdot D_0 + F_{l+1,-r} \cdot D_1 + \cdots + F_{l+n-2,-r} \cdot D_{n-2}.$$

In dieser Formel hat D_k die Bedeutung:

$$(10) \qquad D_k = (-1)^{l+k} \cdot q^{-\left(\frac{2r-1}{2}\right)n + r^2(n-1) + k(n+2l+2r) + k^2(n+1)} \cdot \sum_0^{\infty} {}_m \, q^{(n-1)n^2m^2 + n \cdot m(n+2l+2kn+1)}.$$

Die Grössen $B_{l,r}$ bei denen r positiv oder Null ist, folgen dann aus der Gleichung

$$(11) \qquad B_{l,r} = -B_{-l-1,-r-1}.$$

Hiermit sind wir auch im allgemeinen Falle ans Ziel gelangt und es wird sich jetzt noch lediglich darum handeln, die verschiedenen Methoden mit einander in Verbindung zu setzen und an Beispielen ihre Bedeutung auseinanderzusetzen.

Den 29. April 1888.

Ueber die Convergenz unendlicher Producte.

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

Die Hauptsätze über die Convergenz unendlicher Producte sind zuerst von Cauchy*) mit Hülfe der Theorie der Logarithmen und der logarithmischen Reihe bewiesen worden. So bequem dieses Auskunftsmittel auch erscheinen mag — denn in der That wird dadurch die ganze Theorie der unendlichen Producte mit *einem* Schlage auf diejenige der unendlichen Reihen zurückgeführt — so kann dasselbe doch da, wo es sich um einen wirklich methodischen Aufbau der Analysis handelt, schwerlich als ein befriedigendes gelten: vielmehr blieb es — bei der Stellung, welche die unendlichen Producte als völlig gleichberechtigte analytische Darstellungsformen neben den unendlichen Reihen einnehmen — durchaus wünschenswerth, jene Sätze unmittelbar aus der Definition des Productes abzuleiten, ohne die Heranziehung von *Transcendenten*, welche mit dieser Definition gar nichts zu thun haben, gleichwie es wohl Niemandem einfallen wird, die elementaren Sätze über *endliche* Producte mit Hülfe der Logarithmen aus den entsprechenden Additionssätzen herzuleiten. In Folge dessen erscheint es sehr begreiflich, dass Herr Weierstrass, gelegentlich seiner Bearbeitung der Theorie der analytischen Facultäten**), sein Augenmerk u. a. auch darauf gerichtet hat, das fundamentale Criterium für die Convergenz unendlicher Producte rein elementar zu begründen. Dasselbe sagt aus, dass das unendliche Product $\Pi(1+a_\nu)$ stets convergirt, wenn die unendliche Reihe Σa_ν *unbedingt* convergirt, und es hat keinerlei Schwierigkeit, diesen Satz dahin zu vervollständigen, dass das obige Product dann auch *unbedingt* convergirt. Da sich hiernach die unbedingte Convergenz jener Reihe als eine *hinreichende* Bedingung für diejenige des Productes ergiebt, so entsteht

*) Cours d'Analyse algébr. (1821) p. 562 ff.

**) Journal für Mathematik Bd. 51 (1856), p. 18 ff.

sofort die Frage, ob sich diese nämliche Bedingung auch als eine *nothwendige* erweist. Diese — weder von Cauchy, noch von Herrn Weierstrass erörterte — Frage ist erst von Herrn Dini*) im bejahenden Sinne beantwortet worden, und zwar wiederum unter Anwendung jener älteren Cauchy'schen Methode, mit Hülfe der Logarithmen. Dagegen ist die *elementare* Theorie der unendlichen Producte nach dieser Seite hin bisher unvollständig geblieben. Allerdings wird in der kürzlich publicirten „*Theorie der analytischen Functionen*" des Herrn Biermann auf Grund einer rein elementaren Deduction der Satz von der *Nothwendigkeit* jener Bedingung ebenfalls ausgesprochen (p. 58): der dort versuchte Beweis für diese Behauptung ist aber schlechthin unbrauchbar, wie ich sogleich zeigen werde.

Herr B. formt zunächst das endliche Product:

$$P_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$$

(wo die a_ν reelle oder complexe Grössen mit Ausschluss des Werthes -1 bedeuten) in die folgende Reihe um:

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + a_1 + a_2 P_1 + \cdots + a_n P_{n-1} \\ &= g_0 + g_1 + g_2 + \cdots + g_n \quad \left(g_k = (1 + a_1) \cdots (1 + a_{k-1})\, a_k\right), \end{aligned}$$

worauf dann das unendliche Product $\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,(1 + a_\nu)$ als Summe der unendlichen Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, g_\nu$ definirt wird. Nun heisst es (a. a. O. § 56, letzte Zeile) weiter:

> *Soll* ein solches Product unabhängig von der Anordnung der Factoren *endlich* sein, so *muss* die unendliche Reihe $g_0 + g_1 + g_2 + \cdots$ *unbedingt* convergiren.

Um diesen durch kein weiteres Wort begründeten Ausspruch, in welchem offenbar der Kern des ganzen Beweises steckt, richtig zu verstehen, muss vor allen Dingen festgestellt werden, was hier mit dem Worte „*endlich*" gesagt sein soll: Herr B. operirt nämlich in seinem Buche je nach Bedarf mit zwei ganz verschiedenen Endlichkeitsbegriffen und überlässt es im Allgemeinen dem Leser, zu errathen, welcher von diesen beiden gerade gemeint ist. Er definirt zunächst (S. 19 ff.) nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass die Irrationalzahlen als Summen unendlich vieler Elemente und sagt alsdann (S. 28):

> Eine aus unendlich vielen positiven und negativen Elementen zusammengesetzte Grösse α heisst endlich, wenn eine

*) Annali di Matematica, Ser. II, T. II (1870), p. 35. Vgl. auch: Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 238.

positive Grösse existirt, die grösser ist als der absolute Betrag irgend eines Bestandtheils von a.

Da hier der Ausdruck „Bestandtheil“ nach der auf S. 19 gegebenen Definition jede willkürliche, aber beschränkte Anzahl herausgegriffener Elemente bedeutet, so ist offenbar nach der obigen Begriffsbestimmung für die „*Endlichkeit*“ einer solchen Grösse erforderlich, dass die Summe jeder herausgegriffenen Anzahl von ausschliesslich positiven und ebenso von ausschliesslich negativen Elementen — letztere natürlich absolut genommen — unterhalb einer festen positiven Zahl liegt, sodass man jene Definition folgendermassen in die gewöhnliche Sprache der Analysis übersetzen könnte:

> Eine durch eine unendliche Reihe definirte Zahl heisst *endlich* nur dann, wenn diese Reihe *absolut* — also auch *unbedingt* — convergirt.

Dass man mit diesem gewiss richtigen, aber nach den heute üblichen Anschauungen viel zu engen Endlichkeitsbegriffe nicht ausreicht, liegt auf der Hand, und so führt auch Herr B. neben der eben erwähnten Definition der Irrationalzahlen auch noch die Heine-Cantor'sche durch sog. „Fundamentalreihen“ (Zahlenfolgen) ein (S. 33 ff.), bei welcher an eine derartige Einschränkung des Endlichkeitsbegriffes gar nicht gedacht werden kann; denn hier definirt die „Fundamentalreihe“:

$$1 \quad 1-\frac{1}{2} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$$

gerade so gut eine bestimmte *endliche* Zahl, wie die folgende:

$$1 \quad 1+\frac{1}{2} \quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdots,$$

obschon bei unendlich wachsender Stellenzahl die definirenden Terme der ersteren nach der ursprünglichen Definition gar nicht mehr als „endlich“ zu betrachten wären. In der That spricht auch Herr B. späterhin urplötzlich von den *Summen bedingt* convergenter Reihen (S. 55, 62), deren blosse Existenz auf Grund der erst genannten Definition einer „endlichen“ Grösse schlechthin unverständlich erscheinen müsste.

Da es nun aber Herr B. völlig unterlässt, diesen Zwiespalt an irgend einer Stelle aufzuklären, bezw. sich für eine bestimmte dieser grundverschiedenen Definitionen zu entscheiden, so bleibt schliesslich nichts anderes übrig, als die Richtigkeit des oben citirten Ausspruches mit Rücksicht auf jene *beiden* Endlichkeitsbegriffe zu prüfen.

Dabei zeigt sich denn sofort, dass bei Zugrundelegung der ersten Definition nicht das Geringste gegen die in jenem Satze ausgesprochene Schlussfolgerung einzuwenden ist — nur ist dieselbe dann leider absolut werthlos: denn wenn man das unendliche Product zunächst durch eine gewisse unendliche Reihe *definirt* und diese wiederum nur dann endlich *nennt*, wenn sie *unbedingt* convergirt, so wird eben bei der ganzen Sache *überhaupt nichts* bewiesen*).

Fasst man dagegen den Endlichkeitsbegriff in der sonst üblichen Weise, so enthält der in Rede stehende Schluss geradezu eine petitio principii: es wäre nämlich sehr wohl denkbar, dass das Product unabhängig von der Anordnung der Factoren *denselben* endlichen Werth liefert, auch wenn die Reihe Σg_ν nur *bedingt* convergirt. Denn bezeichnet man etwa mit $a_1', a_2', a_3', \ldots$ irgend eine neue Anordnung der Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und setzt:

$$P_m' = \prod_1^m{}_\nu (1 + a_\nu') = g_0' + g_1' + \cdots + g_m'$$

(wo die g_k' gerade so aus den a_ν' gebildet sein sollen, wie die g_k aus den a_ν), so erfordert die Existenz eines von der Factorenanordnung unabhängigen, endlichen Productwerthes lediglich die *Convergenz* und *Gleichheit* der beiden Reihensummen Σg_ν und $\Sigma g_\nu'$: diese letztere könnte aber sehr wohl gedacht werden, auch wenn diese beiden Reihen nur *bedingt* convergiren, indem ja die Reihe der g_ν' keineswegs eine blosse Umordnung der Glieder g_ν darstellt, sondern aus ganz neuen, in anderer Weise aus den a_ν zusammengesetzten Termen besteht.

Hiernach kann ich in keinem Falle den bezüglichen Ausführungen des Herrn B. irgend welche Beweiskraft zuerkennen. Da mir aber auf der andern Seite der vollständige Ausbau einer elementaren Theorie der unendlichen Producte von principieller Wichtigkeit zu sein schien, so habe ich im Folgenden den Versuch gemacht, nicht nur die oben angedeutete Lücke auszufüllen, sondern auch die Theorie der bedingten

*) Uebrigens ist Herrn B.'s Beweis, selbst bei dieser Auffassung, in seinem weiteren Verlaufe noch nicht einmal einwurfsfrei. Denn soll nun — worauf es ja ankommt — weiter gefolgert werden, dass zur unbedingten Convergenz von Σg_ν schliesslich diejenige von Σa_ν *nothwendig* ist, so erscheint das offenbar nur dann zulässig, wenn von vornherein angenommen wird, dass die P_ν nicht nur *endlich* schlechthin, sondern auch um ein angebbares *von Null verschieden* sein sollen (also $\lim_{n=\infty} P_n$ *nicht* $= 0$). Dass aber Herr B. *nicht* — wie man ja allenfalls zu seinen Gunsten annehmen könnte — diese weitere Einschränkung des Wortes „endlich" stillschweigend gemacht wissen will, geht zur Evidenz daraus hervor, dass er das Resultat der gedachten Deduction auf S. 58 dahin zusammenfasst:

> „Die *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung dafür, dass ein von der Anordnung der Factoren unabhängiges Product *endlich* ist, besteht in der Convergenz der Reihe $|a_1| + |a_2| + |a_3| \cdots$"

während er, vollkommen hiervon getrennt, erst ganze 4 Seiten später nachweist, dass — im Falle der Convergenz von $\Sigma |a_\nu|$ — das betreffende Product *nicht verschwinden* kann.

Convergenz wenigstens für Producte mit reellen Factoren elementar zu begründen. Wenn ich dabei in den ersten drei Paragraphen wesentlich bekannte Dinge vorausschicke, so geschieht dies theils des besseren Zusammenhanges wegen, theils aber auch in der Hoffnung, dass die in § 1 an die Definition der Productconvergenz geknüpften Bemerkungen immerhin etwas zur Beseitigung von mancherlei Unklarheiten beitragen könnten, und dass auch die in §§ 2 und 3 gegebene Darstellung bekannter Sätze vor den sonst üblichen Darstellungen vielleicht manche Vorzüge besitzt. Für neu möchte ich hingegen — trotz ihres elementaren Charakters — die in § 4 angestellten Betrachtungen halten, deren Resultat sodann im § 5 zum Beweise des oben urgirten Hauptsatzes verwendet wird. Ich schliesse daran im § 6 gewisse — wie ich glaube, ebenfalls noch nicht bekannte — Hülfssätze über endliche Producte; dieselben dienen dann im § 7 dazu, die bedingte Convergenz reeller Producte zu behandeln. Was die Theorie der bedingten Convergenz complexer Producte betrifft*) — der ich übrigens, analog wie bei den unendlichen Reihen, nur eine secundäre Bedeutung zuerkennen kann — so muss ich leider gestehen, dass es mir bisher nicht gelungen ist, dieselbe rein elementar darzustellen, und dass ich sogar bezüglich der Möglichkeit einer solchen Behandlung starke Zweifel hege. Dabei verstehe ich unter einer „rein elementaren" Darstellungsweise eine solche, bei der nicht nur die Benützung der Logarithmen, sondern auch die Einführung der sogenannten trigonometrischen Form der complexen Zahlen principiell ausgeschlossen ist. In der That sind diese beiden Hülfsmittel dem Wesen nach gar nicht verschieden, und man wird da, wo es sich um die Untersuchung ganz elementarer Eigenschaften von Zahlen der Form $a + bi$ handelt, bei einigem Sinne für Reinheit der Methode deren transcendente Form: $\sqrt{a^2 + b^2}\left\{\cos \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right\}$, soweit das irgend angeht, zu vermeiden suchen (wie dies z. B. auch Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über analytische Functionen zu thun pflegt). Da dieser Standpunkt in den folgenden Betrachtungen streng festgehalten wird, so möge, um später den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, bezüglich der complexen Grössen an dieser Stelle noch Folgendes eingeschaltet werden:

Nennt man, wie üblich, den positiven Werth von $\sqrt{a^2 + b^2}$ den *absoluten Betrag* der complexen Zahl $a + bi$ und setzt

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| = r,$$

*) Man vergleiche hierüber — ausser dem oben citirten Aufsatze des Herrn Dini — noch: Stolz, a. a. O. p. 245 ff., sowie den Excurs über unendliche Producte in meiner Abhandlung: „Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen etc.", Math. Ann. Bd. XXII, p. 478 ff.

so hat man

$$a + bi = r\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right).$$

Ich will alsdann den Factor $\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right)$ — welcher offenbar eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1 ist — die *Charakteristik**) der complexen Zahl $a + bi$ nennen. Darnach kann also eine complexe Zahl stets zerlegt werden in das Product ihres absoluten Betrages und ihrer Charakteristik. Diese Zerlegung ist offenbar nur auf eine einzige Weise möglich, und umgekehrt ist eine complexe Zahl durch ihren absoluten Betrag und ihre Charakteristik eindeutig bestimmt.

Ferner ergeben sich dann ohne Weiteres die folgenden Sätze:

Multiplicirt man eine complexe Zahl mit einem beliebigen positiven Factor, so wird die Charakteristik hierdurch nicht geändert.

Wie der absolute Betrag eines Productes (Quotienten) complexer Zahlen gleich ist dem Producte (Quotienten) der absoluten Beträge, so ist auch die Charakteristik eines Productes (Quotienten) gleich dem Producte (Quotienten) der einzelnen Charakteristiken.

---

§ 1.

Definition der Convergenz eines unendlichen Productes und Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

Es sei $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ eine unbegrenzt fortsetzbare Folge reeller oder complexer Grössen von der Beschaffenheit, dass zu jedem *endlichen* Index n ein *eindeutig bestimmter*, *endlicher*, für's erste auch *von Null verschiedener* Werth p_n gehört**). Setzt man dann

*) Ich führe diesen Ausdruck ein, da eine *allgemein* acceptirte Bezeichnung für den fraglichen Begriff nicht existirt, und die allenfalls dafür gebrauchten Ausdrücke, wie *Richtungscoefficient*, *Richtungsfactor* (bei Hankel, Stolz u. a. nach dem Vorgange Argand's) wegen ihres rein geometrischen Ursprunges mir nicht recht zusagten, während die Cauchy'sche Bezeichnung „*expression réduite*" (Anal. algébr. p. 183) mir zu umständlich und dabei wenig charakteristisch erschien.

**) Ich sage keineswegs, dass die absoluten Beträge der p_n *durchweg* endlich und von Null verschieden sein sollen, d. h. genauer gesagt dass $|p_n|$ für jedes (noch so grosse) n sowohl *über* als *unter* einer festen endlichen Zahl liegen soll. Vielmehr können die $|p_n|$, wenn n über alle Grenzen wächst, sehr wohl sämmtlich oder zum Theil unter jede Grenze hinabsinken oder über jede Grenze hinaus wachsen, sodass also *der* Werth oder wenigstens *einer* der Werthe von $\lim p_n$ für $n = \infty$ Null oder unendlich gross sein könnte.

$$(1) \qquad p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_1^n {}^{\nu} p_\nu = P_n,$$

so soll der Grenzwerth von P_n für $n = \infty$ als der Werth des *unendlichen* Productes:

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} p_\nu$$

bezeichnet werden. Das letztere heisst *convergent*, wenn P_n für $n = \infty$ einen bestimmten *endlichen*, insbesondere auch *von Null verschiedenen* Werth P besitzt*), und man hat in diesem Falle:

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} p_\nu = P_\infty = P.$$

*) Diese Definition der Convergenz eines unendlichen Productes ist freilich noch nicht allgemein acceptirt: den streitigen Punkt bildet das Auftreten des Grenzwerthes $P_\infty = 0$, welches von manchen Mathematikern als ein Fall von *Convergenz* angesehen wird, z. B. von Herrn Stolz (a. a. O. Bd. II, p. 231) und Cam. Jordan (Cours d'Analyse, T. I, No. 133). Herr Thomae — in seiner „Elementaren Theorie der analytischen Functionen" — schlägt eine Art Mittelweg ein: „Nähert sich mit wachsendem n P_n immer mehr der Null, so ist damit die *Convergenz* des Productes ausgesprochen" — heisst es zunächst a. a. O. p. 23. Dann wird aber hinzugefügt: „Allein solche Producte, welche gegen Null convergiren, ohne dass ein Factor Null ist, verhalten sich anders als solche Producte, die gegen eine bestimmte von Null verschiedene Zahl convergiren, und es soll daher der *Bequemlichkeit* halber angenommen werden, dass ein Product nur dann convergirt, wenn es gegen einen *von Null verschiedenen* endlichen Werth convergirt."

Andere Schriftsteller (wie Herr Weierstrass und Dini a. a. O.) sprechen wohl ausdrücklich von Producten, die unter gewissen Bedingungen endliche und von Null verschiedene Werthe besitzen, ohne indessen den Begriff eines *convergenten* Productes überhaupt zu definiren; während noch andere (vgl. Lipschitz, Grundlagen der Analysis, Bd. I, p. 503; Mittag-Leffler in den Act. Math. T. IV, p. 29) die im Texte als *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Convergenz aufgestellte *Ungleichung* (3) geradezu als *Definition* zu Grunde legen. (NB. Die von Herrn Lipschitz a. a. O. noch hinzugefügte Bedingung: es müssten ausserdem die P_n für jedes noch so grosse n unter einer festen endlichen Grenze liegen, ist in Wahrheit *überflüssig* — ein „bis in idem" — wie die im Texte an die Ungl. (3) geknüpfte Discussion lehrt). Diese letztere Definition ist offenbar von der hier gegebenen nur der äusseren Form nach verschieden, und ich möchte dieser lediglich aus dem Grunde den Vorzug geben, weil es mir natürlicher erscheint, einen neu einzuführenden Begriff, wenn irgend thunlich, durch charakteristische, unmittelbar fassliche Eigenschaften zu definiren und dann erst deren Einkleidung in analytische Zeichen vorzunehmen, als umgekehrt.

Was nun aber ferner die Ausschliessung der unendlichen Producte mit dem Grenzwerthe Null aus der Zahl der als *convergent* zu bezeichnenden betrifft, so will es mir scheinen, dass es sich hierbei nicht bloss — wie Herr Thomae sich ausdrückt — um eine Sache der grösseren *Bequemlichkeit*, sondern schlechterdings um eine directe *logische Nothwendigkeit* handelt. Man hat dabei nur fest-

In jedem anderen Falle wird das unendliche Product *divergent* genannt, und zwar sagt man: dasselbe divergire nach 0 bezw. ∞ oder werde unbestimmt, je nachdem lim P_n für $n = \infty$ verschwindet, bezw. in bestimmter Weise unendlich wird, oder aber innerhalb endlicher oder unendlich grosser Unbestimmtheitsgrenzen oscillirt.

Lässt man jetzt auch zu, dass unter den Grössen p_ν solche mit endlichem Index vorkommen, welche Null oder unendlich gross sind, (was z. B. in dem Falle, wo die p_ν Functionen einer oder mehrerer Variablen sind, für gewisse Werthe dieser Variablen eintreten kann), und sind solche Factoren nur in *begrenzter* Zahl vorhanden, so soll über den Charakter des unendlichen Productes die Beschaffenheit desjenigen Productes entscheiden, welches nach Ausschluss jener kritischen Factoren zurückbleibt. (Man könnte hierbei, im Falle der *Convergenz* des von Null- und Unendlichkeitsfactoren befreiten Productes, das Gesammtproduct, statt es schlechthin als *convergent* zu bezeichnen, vielleicht nicht unpassend *hebbar divergent* nennen).

---

zuhalten, dass es hier nicht sowohl darauf ankommt, die Convergenz irgend einer Grössenfolge $P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ im Allgemeinen zu definiren, dass vielmehr die Frage lautet: Was soll man unter einem *convergenten unendlichen Producte* verstehen? d. h. der Nachdruck ist darauf zu legen, dass die P_n durch eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Multiplicationen entstehen. Wenn man nun überhaupt das Resultat einer unbegrenzten Reihe von Rechnungsoperationen als *convergent* einführt, so geschieht das stets auf Grund des Principes, dass die *definirende Haupteigenschaft,* welche das Resultat einer begrenzten Anzahl jener Operationen charakterisirt, erhalten bleibt.

So erscheint z. B. die Summe S_n einer endlichen Anzahl (n) von Summanden stets als eine eindeutig bestimmte endliche Zahl, *einschliesslich der Null:* demgemäss wird die Summe einer *unendlichen* Reihe von Summanden *convergent* genannt, wenn lim S_n für $n = \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwerth hat, der auch Null sein darf.

Dagegen ist es die *erste und wesentlichste* Eigenschaft des Productes einer endlichen Anzahl von Factoren, von denen keiner verschwindet, einen bestimmten endlichen, unter allen Umständen *von Null verschiedenen* Werth zu haben: diese Eigenschaft ist in dem Grade mit dem Begriffe eines solchen Productes verknüpft, dass man darauf geradezu den Charakter unseres complexen Zahlensystems als eines in sich abgeschlossenen, nicht mehr erweiterungsfähigen begründen kann (vgl. z. B. Hankel, Vorl. über compl. Zahlen, § 29; Stolz, a. a. O. Bd. II, § 10; Weierstrass, „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten compl. Zahlen"— Gött. Nachr. 1884, p. 410).

Hiernach erscheint es mir aber geradezu als eine *contradictio in adjecto,* von einem nach *Null con*vergirenden Producte zu sprechen; und wenn solche Producte mit dem Grenzwerthe Null sich, wie Herr Thomae ausdrücklich hervorhebt, ganz *anders* verhalten wie die gegen einen festen endlichen, von Null verschiedenen Werth convergirenden Producte, so möchte ich daraus folgern, dass es nicht nur *unbequem,* sondern geradezu *unlogisch* ist, dieselben als convergent zu bezeichnen. (Man vergleiche hierzu auch noch die Randbemerkung des § 5). —

Enthält dagegen das betrachtete Product Factoren dieser Art in *unbegrenzter* Anzahl, sodass eine derartige Reduction desselben durch Ausschluss einer endlichen Factorenzahl nicht mehr möglich erscheint, so wird dasselbe ein für allemal als *divergent* anzusehen sein: sein Werth ist wie der jedes anderen divergenten Productes 0, ∞ oder unbestimmt.

Hiernach wird es für die weitere Untersuchung der Convergenz- und Divergenzbedingungen eines unendlichen Productes bei der ursprünglich eingeführten Annahme sein Bewenden haben dürfen, dass die p_ν für jeden endlichen Index endlich und von Null verschieden sein sollen.

Die oben gegebene Definition der Convergenz eines unendlichen Productes lässt sich — unter Zugrundelegung der üblichen Definition eines Grenzwerthes überhaupt — folgendermassen analytisch formuliren: Es muss sich eine positive Grösse g und zu einer beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ eine positive ganze Zahl N fixiren lassen, sodass gleichzeitig:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{(a)} & |P_\varrho| > g \\ \text{(b)} & |P_{n+\varrho} - P_n| < \delta \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, 3 \cdots \text{in inf.} \\ n \geqq N \end{pmatrix}.$$

Es ist ohne Weiteres klar, dass aus diesen *beiden* Gleichungen, welche zusammen die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Convergenz des unendlichen Productes darstellen, — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass vermöge der Ungl. (a) auch insbesondere $|P_n| > g$ — sich stets eine Ungleichung von der Form

$$(3) \qquad \left| \frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1 \right| < \varepsilon \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, 3, \cdots \\ n \geqq N \end{pmatrix}$$

ableiten lässt, wo ε eine positive Grösse von ebenfalls vorzuschreibender Kleinheit bedeutet.

Um aber auch einzusehen, dass umgekehrt die Ungleichung (3) *allein* schon die *beiden* Ungleichungen (2) zu ersetzen geeignet ist, hat man offenbar nur nachzuweisen, dass unter der Voraussetzung, welche durch Ungl. (3) ausgesprochen wird, P_n für $n \geqq N$ stets sowohl oberhalb als unterhalb einer festen endlichen Grenze liegt; denn die erstere dieser Eigenschaften sagt offenbar im Wesentlichen dasselbe aus, wie die Ungleichung (2a), während die zweite es ermöglichen würde, die Ungleichung (3) durch Multiplication mit P_n ohne Weiteres in eine Ungleichung von der Form (2b) überzuführen.

Man denke sich nun ε als positiven ächten Bruch, im übrigen beliebig fixirt, und die endliche, positive, ganze Zahl N, welche zur Ungl. (3) gehört, passend bestimmt. Alsdann ist insbesondere:

$$\left|\left|\frac{P_{N+\varrho}}{P_N}\right|-1\right| \leqq \left|\frac{P_{N+\varrho}}{P_N}-1\right| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots)$$

und daher, wenn man n statt $N+\varrho$ schreibt und den — sicher bestimmten, endlichen und von Null verschiedenen — absoluten Betrag von P_N mit A bezeichnet:

$$-\varepsilon < \frac{|P_n|}{A} - 1 < +\varepsilon \quad (n \geqq N)$$

oder:

$$(1-\varepsilon)A < |P_n| < (1+\varepsilon)A \quad (n \geqq N)$$

d. h. $|P_n|$ — und folglich auch $|P_\varrho|$ — bleibt in der That durchweg endlich und von Null verschieden.

Die Ungleichung (3) stellt somit für sich allein die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Convergenz von P_∞ dar.

Hieraus ergiebt sich insbesondere als eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz die Beziehung:

$$\left|\frac{P_{n+1}}{P_n} - 1\right| = |p_{n+1} - 1| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

d. h. es muss, falls überhaupt Convergenz möglich sein soll:

$$\lim |p_n - 1| = 0 \quad (n = \infty)$$

sein, oder auch, wenn man

$$p_n = 1 + u_n$$

setzt:

$$\lim u_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Daraus folgt, dass in einem convergenten Producte von der Form $\Pi(1+u_\nu)$ die absoluten Beträge der Grössen u_ν von einer bestimmten *endlichen* Stelle ab ächte Brüche sein müssen.

§ 2.

Producte der Form $\prod_1^\infty{}_\nu (1+a_\nu)$, wo $a_\nu \geqq 0$.

Lehrsatz: *Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz des Productes $\prod_1^\infty{}_\nu (1+a_\nu)$, wo die a_ν reelle, positive Grössen bedeuten, besteht in der Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu a_\nu$. Ist dieselbe erfüllt, so convergirt das Product unabhängig von der Anordnung der Factoren gegen denselben*

Werth, wie die — auch in ihren einfachsten Bestandtheilen — unbedingt convergirende Reihe

$$1+\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu A_{\nu-1}$$

(*wo*

$$A_0 = 1 \quad \textit{und für} \quad n \geqq 1 \;\; A_n = \prod_{1}^{n}{}^{\nu}\,(1+a_\nu)$$

zu setzen ist).

Beweis: Man hat hier:

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right| = (1+a_{n+1})\,(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+\varrho})-1 > s_{n,\varrho}$$

wo

$$s_{n,\varrho} = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+\varrho}\,.$$

Soll nun das Product A_∞ convergiren, also $\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right|$ durch Wahl von $n \geqq N$ beliebig klein werden, so ist nach der obigen Ungleichung hierzu vor allem erforderlich, dass auch $s_{n,\varrho}$ durch Wahl von $n \geqq N$ beliebig klein gemacht werden kann — d. h. die Convergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu$ ist eine *nothwendige* Bedingung für diejenige des Productes.

Angenommen jetzt, es convergire $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu$, so lässt sich, wenn ε einen beliebig klein anzunehmenden, pos. ächten Bruch bedeutet, eine pos. ganze Zahl N so bestimmen, dass $s_{n,\varrho} < \varepsilon$ wird für $n \geqq N$ und jeden Werth von ϱ. Alsdann ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right| &= a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+\varrho}\\ &+ a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}a_{n+3}+\cdots+a_{n+\varrho-1}a_{n+\varrho}\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+\varrho}\\ &< s_{n,\varrho}+s_{n,\varrho}^2+\cdots+s_{n,\varrho}^n\\ &< \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad\qquad (n \geqq N)\end{aligned}$$

und es wird daher, wenn δ beliebig klein vorgelegt wird:

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right| < \delta,$$

sobald

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < \delta \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon \leqq \frac{\delta}{1+\delta}$$

genommen wird, was bei der Convergenz der Reihe Σa_ν stets möglich ist: die letztere erscheint also auch als *hinreichende* Bedingung für die Convergenz des betrachteten Productes.

Man hat nun ferner:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_1 &= 1+a_1 && = A_0 + a_1 A_0, \\ A_2 &= (1+a_2)A_1 && = A_1 + a_2 A_1, \\ &\cdots \\ A_n &= (1+a_n)A_{n-1} && = A_{n-1} + a_n A_{n-1} \end{aligned}$$

und hieraus durch Addition dieser Gleichungen:

$$A_n = 1 + \sum_1^n a_\nu A_{\nu-1}$$

folglich:

$$\prod_1^\infty {}^\nu (1+a_\nu) = A_\infty = 1 + \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu A_{\nu-1}. \tag{4}$$

Dass die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe $1 + \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu A_{\nu-1}$ absolut und unbedingt convergirt, folgt ohne weiteres aus der vorausgesetzten Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu$ und der bewiesenen Endlichkeit der Grössen A_ν. Da aber:

$$a_\nu A_{\nu-1} = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{\nu-1})a_\nu$$

nach Ausführung der angedeuteten Multiplication wiederum aus lauter *positiven* Bestandtheilen und zwar solchen von der Form $a_\varkappa$, $a_\varkappa a_\lambda$, $a_\varkappa a_\lambda a_\mu, \ldots$ besteht, so bleibt die obige Reihe auch noch *unbedingt* convergent, wenn man jedes Glied in diese einzelnen Bestandtheile zerlegt und nun diese selbst als die Glieder der Reihe auffasst.

Setzt man etwa zur Abkürzung:

$$\sum_1^\infty {}^\varkappa a_\varkappa = \sum_\varkappa a_\varkappa,$$

$$\sum_2^\infty {}^\lambda \sum_1^\infty {}^\varkappa a_\varkappa a_\lambda = \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda \qquad (\varkappa < \lambda),$$

$$\sum_3^\infty {}^\mu \sum_2^\infty {}^\lambda \sum_1^\infty {}^\varkappa a_\varkappa a_\lambda a_\mu = \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu \qquad (\varkappa < \lambda < \mu)$$

u. s. f.

so hat man insbesondere:

$$(5) \quad \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}(1+a_\nu) = 1 + \sum_{\varkappa} a_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu + \cdots{}^{*)}$$

oder auch als Doppelreihe geschrieben

$$(6) \quad \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}(1+a_\nu) = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
$$+ a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + \cdots$$
$$+ a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + \cdots$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

wo dann, nach dem gesagten, diese Doppelreihe in *jeder* beliebigen Anordnung convergiren muss.

Hieraus folgt nun aber ohne weiteres, dass das betrachtete unendliche Product *unabhängig von der Anordnung der Factoren* gegen denselben Werth convergirt. Denn, denkt man sich die Factoren in irgend einer Weise umgeordnet, so können — gleichgültig ob bei dieser Umordnung nur Factoren mit endlichem Index ihre Stellen vertauschen oder ob auch solche mit unendlich grossem Index *vor* andere mit endlichem Index treten (durch Herausheben von unendlichen Partialproducten und nachherige Vereinigung derselben) — schliesslich doch immer nur die Glieder der unbedingt convergirenden Doppelreihe (6) in irgend einer willkürlichen Anordnung zum Vorschein kommen,

---

*) Die Convergenz dieser Reihe kann auch unabhängig von den angestellten Betrachtungen folgendermassen eingesehen werden. Bezeichnet man die Summe der als convergent vorausgesetzten Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}^{\varkappa} a_\varkappa$ mit s, so ist:

$$s^2 = \sum a_\varkappa^2 + 2\sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda > 2\sum a_\varkappa a_\lambda$$

folglich:

$$s^3 > 2\sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda \sum a_\mu > 2 \cdot 3 \cdot \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu$$

und allgemein:

$$s^n > n! \sum_{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_n} a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n}$$

Es ist daher die Summe der Reihe

$$1 + \sum_{\varkappa} a_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu + \cdots$$

kleiner als diejenige von:

$$1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots$$

und die fragliche Reihe somit convergent.

sodass also das unendliche Product durch die gedachte Operation in der That keine Werthveränderung erleidet.

Hiermit ist aber der ausgesprochene Satz in allen seinen Theilen bewiesen. —

Zusatz. Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ divergent, so muss das Product $\prod_1^\infty (1+a_\nu)$ nach dem obigen *divergiren* (wie sich auch unmittelbar aus der Ungleichung $\prod_1^n (1+a_\nu) > 1 + \sum_1^n a_\nu$ ergiebt) und zwar beständig zunehmend gegen $+\infty$.

Definition. Ein unendliches Product, welches unabhängig von der Anordnung der Factoren convergirt, heisst *unbedingt* convergent. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Ein unendliches Product, dessen Factoren reell und $\geqq 1$ *sind, ist, wenn überhaupt, stets unbedingt convergent.*

§ 3.

Absolute Convergenz eines reellen oder complexen Productes als hinreichende Bedingung der unbedingten Convergenz.

Lehrsatz: *Sind die Grössen* u_ν *beliebig reell oder complex und* $|u_\nu| = a_\nu$, *so convergirt mit dem Producte* $\prod_1^\infty (1+a_\nu)$ *auch stets das Product* $\prod_1^\infty (1+u_\nu)$ *und zwar unbedingt gegen den nämlichen Werth wie die — auch in ihren einfachsten Bestandtheilen unbedingt convergirende Reihe*

$$1 + \sum_1^\infty u_\nu U_{\nu-1}$$

(*wo*

$$U_0 = 1 \quad \text{und für} \quad n \geqq 1 \quad U_n = \prod_1^n (1+u_\nu)$$

zu setzen ist).

Beweis: Sei wiederum $A_n = \prod_1^n (1+a_\nu)$, so folgt aus der Convergenz von A_∞, dass bei beliebig klein gegebenem δ durch Wahl von $n \geqq N$

$$\frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1 < \delta \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

gemacht werden kann. Andererseits hat man:

$$\frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1 = (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \cdots (1 + u_{n+\varrho}) - 1$$
$$= u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+1} u_{n+2} + \cdots$$

also:

$$\left| \frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1 \right| \leqq a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+1} a_{n+2} + \cdots$$

d. h.

$$\leqq \frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1,$$

sodass auch:

$$\left| \frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1 \right| < \delta$$

wird (für ($n \geqq N$, 0, 1, 2, $\cdots$), und somit

$$\prod_1^\infty {}_\nu (1 + u_\nu)$$

convergirt.

Ferner ergiebt sich — genau wie im vorigen Paragraphen — die Identität:

$$U_n = 1 + \sum_1^n {}_\nu u_\nu U_{\nu-1}$$

und es ist leicht zu sehen, dass die rechte Seite für $n = \infty$ in eine unbedingt convergirende Reihe übergeht: denn die Grössen $U_{\nu-1}$ sind für jedes ν endlich, und die Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu u_\nu$ convergirt absolut und unbedingt, da die vorausgesetzte Convergenz des Productes $\prod_1^\infty {}_\nu (1 + a_\nu)$ diejenige der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu a_\nu = \sum_1^\infty {}_\nu |u_\nu|$ mit sich bringt.

Hiernach wird nun wiederum:

$$\prod_1^\infty {}_\nu (1 + u_\nu) = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu u_\nu U_{\nu-1} \tag{7}$$

und zwar bleibt die rechts stehende Reihe auch absolut und unbedingt convergent, wenn man die einzelnen Bestandtheile jedes Gliedes, nämlich

$$u_\nu U_{\nu-1} = u_\nu + u_1 u_\nu + u_2 u_\nu + u_1 u_2 u_\nu + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_\nu$$

als Glieder der Reihe auffasst. Denn die absoluten Beträge dieser Bestandtheile stimmen genau überein mit den einzelnen Termen der im vorigen Paragraphen angeführten Doppelreihe (6), welche — wegen der vorausgesetzten Convergenz des Productes $\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+a_\nu)$ — wiederum unbedingt convergirt. Man kann daher — unter Einführung der analogen Abkürzungen wie in § 2 — die Reihe (7) auch folgendermassen:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+u_\nu) = 1 + \sum_{\varkappa} u_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \cdots \tag{8}$$

oder in Form der absolut und unbedingt convergirenden Doppelreihe schreiben:

$$\begin{aligned}\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+u_\nu) = 1 & + u_1 && + u_2 && + u_3 && + \cdots \\ & + u_1 u_2 && + u_1 u_3 && + u_2 u_3 && + \cdots \\ & + u_1 u_2 u_3 && + u_1 u_2 u_4 && + u_1 u_3 u_4 && + \cdots \\ & + \cdots\end{aligned} \tag{9}$$

woraus dann — durch wörtlich dieselben Schlüsse, wie im vorigen Paragraphen — folgt, dass das vorliegende Product *unbedingt* convergirt. —

Definition. Das unendliche Product $\Pi(1+u_\nu)$ soll *absolut* convergent heissen, wenn $\Pi(1+|u_\nu|)$ convergirt: dass das erstere Product in diesem Falle stets *überhaupt convergirt*, und die gegebene Definition demgemäss wirklich einen Sinn hat, folgt aus dem eben bewiesenen Satze.

Man kann nunmehr das Hauptresultat der beiden letzten Paragraphen auch folgendermassen aussprechen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Convergenz des unendlichen Productes $\Pi(1+u_\nu)$ besteht in der absoluten Convergenz der unendlichen Reihe Σu_ν.

Das absolut convergente Product convergirt auch stets unbedingt. (Die Umkehrbarkeit dieser letzten Aussage bleibt noch zu beweisen).

Zusatz. Ist die Reihe Σu_ν absolut convergent, so gilt das Gleiche von der Reihe $\Sigma u_\nu x$ für jedes endliche x; folglich ist das unendliche Product

$$f(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+u_\nu x)$$

absolut und unbedingt convergent und kann daher in die Form der beständig convergirenden Potenzreihe:

$$f(x) = 1 + \left(\sum_{\varkappa} u_\varkappa\right) x + \left(\sum_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda\right) x^2 + \cdots$$

gesetzt werden, d. h. $f(x)$ ist eine transcendente ganze Function. (Ueber die Erweiterung dieses Satzes und den Begriff der *gleichmässigen* Convergenz eines unendlichen Productes vgl. Stolz, a. a. O. p. 243—245; Mittag-Leffler, Acta Math. T. IV, p. 31).

§ 4.

Besondere Producte, welche überhaupt nicht anders als absolut und unbedingt convergiren.

Die in § 2 betrachteten unendlichen Producte von der Form $\Pi(1+a_\nu)$, wo $a_\nu \geqq 0$, convergiren und divergiren gleichzeitig mit der Reihe Σa_ν; sie convergiren also entweder absolut und unbedingt oder gar nicht. Es ist nun für das folgende wichtig, nachzuweisen, dass die analoge Eigenschaft allen unendlichen Producten von der Form $\Pi(1+p_\nu+q_\nu i)$ zukommt, wo die reellen Grössen p_ν unter sich und die q_ν unter sich — aber nicht nothwendig die p_ν mit den q_ν — gleiches Vorzeichen besitzen. Und da nach § 3 ein solches Product stets absolut und unbedingt convergirt, wenn die Reihe $\Sigma|p_\nu+q_\nu i|$ convergirt, so wird nur zu zeigen sein, dass dasselbe auch gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma|p_\nu+q_\nu i|$ — oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, mit der Reihe $\Sigma(p_\nu+q_\nu i)$ — divergirt. Hierzu betrachte ich zunächst unendliche Producte von der specielleren Form: $\Pi(1-a_\nu)$, $\Pi(1+a_\nu i)$, $\Pi(1-a_\nu i)$, wo $a_\nu \geqq 0$, $\lim a_\nu = 0$, unter der Voraussetzung das Σa_ν divergirt: aus den Ergebnissen dieser Special-Untersuchungen wird sich dann das gewünschte Resultat leicht zusammensetzen lassen.

I. Es sei

$$A_n = (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n).$$

Man hat dann — da man die positiven Grössen a_ν wegen $\lim a_\nu = 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit < 1 annehmen kann —

$$0 < 1 - a_\nu^2 \leqq 1$$

also auch:

$$0 < 1 - a_\nu \leqq \frac{1}{1+a_\nu}$$

und somit

$$A_n < \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)} < \frac{1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

sodass, im Falle der Divergenz von Σa_ν, sich ergiebt:

$$A_\infty = 0$$

d. h. das obige Product *divergirt* in diesem Falle nach Null.

II. Sei jetzt

$$A_n = \prod_1^n{}^{\nu} (1 + \varepsilon \,.\, a_\nu i)$$

wo ε beständig die positive oder beständig die negative Einheit bedeuten soll. Der absolute Betrag von A_n genügt alsdann der Gleichung

$$|A_n|^2 = \prod_1^n{}^{\nu} (1 + a_\nu^2)$$

und nimmt somit mit wachsendem n beständig zu. Daraus folgt aber, dass der absolute Betrag von A_∞ entweder bestimmt endlich und von Null verschieden (nämlich > 1) oder positiv unendlich sein muss. Insbesondere wird $|A_\infty|^2$ und daher auch A_∞ bestimmt und endlich — und zwar unabhängig von der Anordnung der Factoren — sobald Σa_ν^2 convergirt, mag dabei auch Σa_ν divergent sein. Dass hieraus noch nicht die Convergenz des unendlichen Productes A_∞ folgt, ist klar, indem hierzu ausser der Endlichkeit des absoluten Betrages von A_∞ auch die Bestimmtheit der Charakteristik erforderlich ist. Ich behaupte nun, dass diese Charakteristik, welche für

$$A_n = B_n + C_n i$$

dargestellt wird durch den Ausdruck:

$$\frac{B_n}{\sqrt{B_n^2 + C_n^2}} + \frac{C_n i}{\sqrt{B_n^2 + C_n^2}}$$

bei unendlich wachsendem n stets *unbestimmt* wird, wenn Σa_ν divergirt, mag nun Σa_ν^2 zu gleicher Zeit convergiren oder divergiren.*)

Sollte nämlich der obige Ausdruck für $n = \infty$ einen *bestimmten* Werth haben, so müsste zum mindesten *eine* der Grössen B_∞, C_∞, welche wegen $B_\infty^2 + C_\infty^2 = |A_\infty|^2 > 1$ niemals gleichzeitig verschwinden können, entweder einen festen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth haben oder in bestimmter Weise unendlich werden; es müsste sich demnach eine positive ganze Zahl N fixiren lassen, sodass für $n \geq N$ mindestens *eine* der Grössen B_n, C_n absolut genommen *über* einer festen endlichen Zahl g liegt und beständig dasselbe Vorzeichen besitzt. Um die Hinfälligkeit dieser Annahme zu beweisen, bilde ich:

$$A_{n+1} = B_{n+1} + C_{n+1} i = (B_n + C_n i)(1 + \varepsilon a_{n+1} i)$$

woraus:

$$(10\text{a}) \qquad B_{n+1} = B_n - \varepsilon a_{n+1} C_n,$$

$$(10\text{b}) \qquad C_{n+1} = C_n + \varepsilon a_{n+1} B_n$$

*) Die *blosse Divergenz* des betrachteten Productes für den Fall der Divergenz von Σa_ν liesse sich bei weitem kürzer beweisen; des folgenden wegen kommt es aber wesentlich auf die *besondere Art* dieser Divergenz an.

folgt, und weiter, wenn man hier für n der Reihe nach

$$n+1,\ n+2, \ldots n+\varrho-1$$

setzt und die resultirenden Gleichungen addirt:

$$\text{(11a)} \quad B_{n+\varrho} = B_n - \varepsilon(a_{n+1}C_n + a_{n+2}C_{n+1} + \cdots + a_{n+\varrho}C_{n+\varrho-1}),$$

$$\text{(11b)} \quad C_{n+\varrho} = C_n + \varepsilon(a_{n+1}B_n + a_{n+2}B_{n+1} + \cdots + a_{n+\varrho}B_{n+\varrho-1}).$$

Angenommen nun, es wäre für $n \geqq N$ B_n beständig positiv oder beständig negativ und läge, absolut genommen, stets oberhalb einer gewissen endlichen Zahl g. Dann will ich — um die beiden möglichen Fälle eines positiven und eines negativen B_n gemeinsam behandeln zu können — unter ε' die Einheit mit dem Vorzeichen von B_n verstehen, sodass also $\varepsilon' B_n$ für $n \geqq N$ wesentlich positiv und zwar

$$\varepsilon' B_n > g \quad (n \geqq N)$$

ist. Mit Berücksichtigung dieser Ungleichung würde die mit $\varepsilon\varepsilon'$ multiplicirte Ungleichung (11b), nämlich:

$$\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} = \varepsilon\varepsilon' C_n + \{a_{n+1}\varepsilon' B_n + a_{n+2}\varepsilon' B_{n+1} + \cdots + a_{n+\varrho}\varepsilon' B_{n+\varrho-1}\}$$

ergeben:

$$\text{(12)} \qquad \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} > \varepsilon\varepsilon' C_n + g \cdot s_{n+\varrho}$$

sofern, wie früher,

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\varrho} = s_{n,\varrho}$$

gesetzt wird.

Da aber die positive Grösse $s_{n,\varrho}$ — wie auch n fixirt sein mag — wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe Σa_ν durch Wahl von ϱ beliebig gross gemacht werden kann, so lässt sich ϱ so bestimmen, dass die Ungleichung (12) übergehen würde in:

$$\text{(13)} \qquad \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} > g'$$

wo g' eine beliebig grosse, endliche, positive Zahl bedeutet.

Da ferner nach Gleichung (10b) — wenn man daselbst $n+\varrho$ statt n schreibt —

$$\begin{aligned}\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho+1} &= \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} + a_{n+\varrho+1}\varepsilon' B_{n+\varrho} \\ &> \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho}\end{aligned}$$

so folgt daraus in Verbindung mit Ungleichung (13), dass allgemein:

$$\text{(14)} \qquad \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho+\varkappa} > \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} > g' \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Schreibt man jetzt in Gleichung (11a) $n+\varrho$ statt n und σ statt ϱ, so nimmt dieselbe, wenn man noch mit ε' multiplicirt, die Form an:

$$\varepsilon' B_{n+\varrho+\sigma} = \varepsilon' B_{n+\varrho} - \{a_{n+\varrho+1}\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} + \cdots + a_{n+\varrho+\sigma}\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho+\sigma-1}\}$$

und folglich nach (14):

$$\varepsilon' B_{n+\varrho+\sigma} < \varepsilon' B_{n+\varrho} - g' \cdot s_{n+\varrho,\sigma}.$$

Nun kann man aber wieder $s_{n+\varrho,\sigma}$ durch Wahl von σ beliebig gross machen, jedenfalls also so gross, dass der absolute Betrag von $g'.s_{n+\varrho,\sigma}$ die positive Grösse $\varepsilon' B_{n+\varrho}$ beliebig viel übersteigt, und daher

$$\varepsilon' B_{n+\varrho+\sigma} < 0$$

wird. Das hiesse aber, dass $B_{n+\varrho+\sigma}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie B_n besitzen müsste — die Annahme, dass B_n für $n \geqq N$ das Zeichen nicht mehr wechselt, war somit unzulässig.

Durch die nämlichen Schlüsse lässt sich zeigen, dass die analoge Annahme für C_n auf den gleichen Widerspruch führen würde. Hierdurch erscheint dann zugleich auch *die* Möglichkeit ausgeschlossen, dass etwa die *eine* der beiden Grössen B_n, C_n für $n = \infty$ gegen Null convergiren könnte (in welchem Falle sie ja für $n \geqq N$ das Zeichen beliebig oft wechseln dürfte): denn alsdann müsste ja, nach dem gesagten, die *andere* für $n = \infty$ bestimmt endlich oder unendlich sein, was unmöglich ist.

Als Resultat dieser Betrachtung ergiebt sich somit der Satz:

Das unendliche Product $\Pi(1 + \varepsilon a_\nu i)$ — *wo* $a_\nu \geqq 0$, $\varepsilon = +1$ *oder* $= -1$ — *divergirt stets mit der Reihe* Σa_ν, *und zwar in der Weise, dass die Charakteristik unbestimmt wird* (gleichgültig ob der absolute Betrag endlich oder unendlich gross wird, was von der Convergenz, bezw. Divergenz der Reihe Σa_ν^2 abhängt).

III. Sei jetzt endlich

$$P_n = \prod_1^n {}_\nu (1 + \varepsilon a_\nu + \varepsilon' b_\nu i)$$

wo ε, ε' die positive oder die negative Einheit bedeuten sollen (sodass $\varepsilon' = \pm \varepsilon$), und die wesentlich positiven, für $\nu = \infty$ verschwindenden Grössen a_ν, b_ν wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit durchweg < 1 angenommen werden dürfen. Zerlegt man alsdann jeden Factor in folgender Weise:

$$1 + \varepsilon a_\nu + \varepsilon' b_\nu i = (1 + \varepsilon a_\nu)\left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right),$$

so wird die Charakteristik dieses Ausdruckes, weil $1 + \varepsilon a_\nu > 0$, nur von dem Theilfactor

$$\left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right)$$

abhängen, und es wird daher auch die Charakteristik des unendlichen Productes P_∞ ausschliesslich durch die Gesammtheit jener Theilfactoren bestimmt werden. Daraus folgt aber — nach II — dass die Charakteristik von P_∞ *unbestimmt* werden müsste, falls das Product

$$B_\infty = \prod_1^\infty {}_\nu \left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right)$$

divergirte — d. h. die *Convergenz* dieses Productes ist sicherlich eine *nothwendige* Bedingung für diejenige von P_∞. Angenommen nun es convergire B_∞, so ergiebt sich, wenn gesetzt wird:

$$P_n = A_n \cdot B_n,$$

wo

$$A_n = \prod_1^n {}^{\nu} (1 + \varepsilon a_\nu), \qquad B_n = \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right)$$

als weitere *nothwendige* (und, wie man sofort sieht, dann auch hinreichende) Bedingung für die Convergenz von P_∞, dass auch noch A_∞ convergiren muss. Die Convergenz von A_∞, B_∞ erfordert aber (da die εa_ν unter sich und ebenso die $\frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu}$ unter sich gleiches Zeichen haben, stets die Convergenz der beiden unendlichen Reihen Σa_ν, $\sum \frac{b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu}$. Da aber die letztere Reihe wegen $\lim a_\nu = 0$ stets gleichzeitig mit Σb_ν convergirt und divergirt, so lässt sich die obige Bedingung auch ersetzen durch die Convergenz der Reihe $\Sigma(a_\nu + b_\nu i)$ oder auch $\Sigma(\varepsilon a_\nu + \varepsilon' b_\nu i)$, sodass man den folgenden Satz erhält:

Die nothwendige (und hinreichende) Bedingung für die Convergenz des Productes $\prod_1^\infty {}^{\nu} (1 + p_\nu + q_\nu i)$ — *wo die* p_ν *unter sich, desgl. die* q_ν *unter sich gleiches Vorzeichen besitzen, besteht in der Convergenz der Reihe* $\sum_1^\infty {}^{\nu} (p_\nu + q_\nu i)$ (*oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Reihen* $\sum_1^\infty {}^{\nu} p_\nu$, $\sum_1^\infty {}^{\nu} q_\nu$).

Da diese Reihen nicht anders als absolut und unbedingt convergiren können, und in Folge dessen nach § 3 das vorliegende Product ebenfalls absolut und unbedingt convergiren muss, so kann man hinzufügen:

Ein Product der betrachteten Art ist, wenn überhaupt, stets absolut und unbedingt convergent.

Anmerkung. Selbstverständlich lässt sich dieser Satz, auf welchem der Hauptschluss des folgenden Paragraphen beruht, etwas kürzer beweisen, sobald man von der trigonometrischen Form der complexen Grössen Gebrauch macht. Indessen wäre diese Abkürzung nur eine scheinbare, denn in Wahrheit würde hier an die Stelle der oben angestellten elementaren Betrachtung ein nicht unerhebliches Stück von der Theorie der trigonometrischen und cyklometrischen Functionen treten.

§ 5.

Die absolute Convergenz eines unendlichen Productes als nothwendige Bedingung für die unbedingte Convergenz.

Es sei

$$U = \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu} (1 + u_\nu)$$

ein *unbedingt* convergentes Product. Zerlegt man dann die unbegrenzte Reihe der Grössen u_ν in zwei derartige Reihen, deren Glieder resp. mit v_ν, w_ν bezeichnet werden mögen, und setzt

$$\prod_{1}^{n_1}{}^{\nu} (1 + v_\nu) = V_{n_1}, \quad \prod_{1}^{n_2}{}^{\nu} (1 + w_\nu) = W_{n_2},$$

so erheischt die *unbedingte* Convergenz des gegebenen Productes, dass

$$\lim V_{n_1} \cdot W_{n_2} = U$$

wird, wenn n_1 und n_2 *unabhängig von einander* ins Unendliche wachsen. Mit anderen Worten: es müssen sich dann zu jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ zwei ganze positive Zahlen N_1, N_2 fixiren lassen, dergestalt dass

$$|V_{n_1} W_{n_2} - U| < \delta$$

wenn:

$$n_1 \geqq N_1, \quad n_2 \geqq N_2$$

wird. In Folge dessen bestehen insbesondere auch die folgenden Ungleichungen:

$$|V_{N_1} W_\infty - U| < \delta,$$
$$|V_\infty W_{N_2} - U| < \delta$$

und es müssen somit, da V_{N_1}, W_{N_2} (als endliche Producte) und U (nach Voraussetzung) bestimmte endliche Grössen und von Null verschieden sind, V_∞, W_∞ ebenfalls bestimmte, von Null verschiedene Werthe besitzen, dergestalt, dass also die betreffenden unendlichen Producte *convergiren* müssen.

Da im übrigen auch die Convergenz eines solchen Productes, welches etwa durch Ausscheidung einer nur endlichen Anzahl von Factoren aus U_∞ gebildet werden kann, evident ist, so lässt sich jetzt zur näheren Charakterisirung der *unbedingten* Convergenz eines unendlichen Productes folgendes aussprechen:

*Bei einem unbedingt convergenten Producte convergirt auch jedes beliebig herausgehobene Partialproduct.**)

---

*) Es verhalten sich also in dieser Beziehung unbedingt convergirende Producte ganz analog, wie unbedingt convergirende Reihen. Diese Analogie wird

Halten wir jetzt die Annahme von der unbedingten Convergenz des Productes $\prod_1^\infty {}^{\nu} (1 + u_\nu)$ fest (wo die u_ν beliebige complexe Grössen bedeuten mögen), so lässt sich dasselbe im allgemeinsten Falle in vier Partialproducte von folgender Form zerlegen:

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} (1 + a_\nu^{(1)} + b_\nu^{(1)} i), \quad \prod_1^\infty {}^{\nu} (1 - a_\nu^{(2)} + b_\nu^{(2)} i),$$

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} (1 + a_\nu^{(3)} - b_\nu^{(3)} i), \quad \prod_1^\infty {}^{\nu} (1 - a_\nu^{(4)} - b_\nu^{(4)} i)$$

(wo die a_ν, b_ν wesentlich positiv sind, zum Theil auch Null sein können, und wo einzelne dieser Producte auch von endlicher Factorenzahl sein oder ganz fehlen können); jedes dieser Theilproducte muss dann nach dem eben gesagten convergiren. Hierzu ist aber nach § 4 *nothwendig* (und hinreichend), dass die Reihen

---

sofort hinfällig, sobald man auch solche Producte als *convergent* bezeichnet, welche den Grenzwerth Null haben, ohne dass ein Factor verschwindet.

Bedient man sich nämlich dieser Terminologie, so müsste man zuvörderst ein unendliches Product der Form $\Pi(1 - a_\nu)$ — wo die Reihe der positiven Grössen Σa_ν als divergent, $\lim a_\nu = 0$ vorausgesetzt wird — auch als „*unbedingt convergent*" bezeichnen: denn wie man die Factoren auch anordnet, man wird stets den Betrag des Productes einer hinlänglich grossen Anzahl von Factoren beliebig klein machen können. Uebrigens würde dieses Product auch noch die fragliche Eigenschaft unbedingt convergenter Producte haben, dass jedes herausgegriffene Theilproduct „convergirt" — in diesem Falle natürlich gegen einen endlichen Werth oder gegen Null.

Sei nun aber ferner Σb_ν eine divergente Reihe positiver Grössen von der Beschaffenheit, dass Σb_ν^2 convergirt, so divergirt nach § 4, II das unendliche Product $\Pi(1 + b_\nu i)$ in der Weise, dass sein absoluter Betrag *unabhängig von der Anordnung der Factoren* endlich und bestimmt, die Charakteristik dagegen unbestimmt wird. Vereinigt man daher die beiden unendlichen Producte $\Pi(1 - a_\nu)$, $\Pi(1 + b_\nu i)$ zu einem einzigen, so würde dieses *unabhängig von der Anordnung der Factoren* den Werth Null besitzen, also wiederum als „*unbedingt convergent*" zu bezeichnen sein, *ohne* dass hier jedes Partialproduct convergirt, da ja, wie bemerkt, $\Pi(1 + b_\nu i)$ innerhalb endlicher Grenzen oscillirt, also divergirt.

In der That, wenn:

$$\lim V_{n_1} W_{n_2} = 0$$

sein soll, wenn n_1, n_2 unabhängig von einander ins Unendliche wachsen, so braucht nur *einer* der beiden Grenzwerthe V_∞, W_∞ zu verschwinden, während der andere überhaupt gar nicht bestimmt zu sein braucht, sondern innerhalb endlicher Grenzen oscilliren darf.

Diese Betrachtung lehrt, dass bei der Zulassung des Werthes Null für ein *convergentes* Product, der *wahre* Charakter der *unbedingten* Convergenz ganz verloren ginge.

$$\sum_1^\infty a_\nu^{(\varkappa)}, \quad \sum_1^\infty b_\nu^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

convergiren, und da deren Convergenz diejenige von $\sum_1^\infty |u_\nu|$ nach sich zieht, so ergiebt sich schliesslich:

Die nothwendige (und nach § 3 auch hinreichende) Bedingung für die unbedingte Convergenz des Productes $\prod_1^\infty (1+u_\nu)$ besteht in der Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty |u_\nu|$.

Oder auch, da nach § 3 die Convergenz von $\Sigma |u_\nu|$ die *absolute* Convergenz des gegebenen Productes zur Folge hat:

Jedes unbedingt convergente Product muss auch absolut convergiren.

Hiermit ist — in Verbindung mit dem Resultate des § 3 — die vollständige Identität zwischen *absoluter* und *unbedingter* Convergenz eines unendlichen Productes erwiesen: es findet also in dieser Hinsicht vollständige Analogie mit den unendlichen Reihen statt.

Zusatz. Wurde vorhin erkannt, dass die Convergenz *jedes* herausgegriffenen Partialproductes eine *nothwendige* Bedingung für die *unbedingte* Convergenz eines unendlichen Productes bildet, so zeigt die zuletzt angestellte Betrachtung nebenbei auch noch, dass diese Bedingung sich stets auch als *hinreichend* erweist.

§ 6.

Hülfssätze über gewisse endliche Producte.

Es seien $a_1, a_2, \ldots a_m$ beliebige positive Grössen, so ist:

$$\prod_1^m (1+a_\nu) = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(m)}$$

wenn $S^{(\varkappa)}$ die Summe aller Combinationen von $a_1, a_2, \ldots a_m$ zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Classe bezeichnet. Setzt man:

$$\sum_1^m a_\nu = s_m$$

sodass also: $s_m = S^{(1)}$, so hat man für $\varkappa \geq 2$ offenbar:

$$s_m^\varkappa > \varkappa!\, S^{(\varkappa)}$$

da $s_m^\varkappa$ jedes Glied von $S^{(\varkappa)}$ $\varkappa!$ mal ausser anderen positiven Gliedern enthält. In Folge dessen hat man:

$$(15) \qquad \prod_1^m (1+a_\nu) < 1 + \frac{1}{1!}s_m + \frac{1}{2!}s_m^2 + \cdots + \frac{1}{m!}s_m^m.$$

Ferner ist, wenn b einen positiven echten Bruch, p eine beliebig grosse positive ganze Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-b} &= 1 + b + b^2 + \cdots + b^p + \frac{b^{p+1}}{1-b} \\ &> 1 + b + b^2 + \cdots + b^p \\ &> 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^p}{p!}.\end{aligned}$$

Seien nun $b_1, b_2, \ldots b_n$ lauter positive echte Brüche, so folgt zunächst, wenn man $\frac{1}{1-b_1}$ und $\frac{1}{1-b_2}$ unter Anwendung der letzten Ungleichung multiplicirt und die resultirende Ungleichung noch dadurch verstärkt, dass man die Glieder von höherer als der p^{ten} Dimension fortlässt:

$$\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)} > 1 + \frac{1}{1!}(b_1+b_2) + \frac{1}{2!}(b_1+b_2)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}(b_1+b_2)^p$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens:

$$\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)\ldots(1-b_n)} > 1 + \frac{1}{1!}\,t_n + \frac{1}{2!}\,t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\,t_n^p$$

wenn:

$$\sum_1^n b_\nu = t_n$$

gesetzt wird, sodass also:

$$(16)\qquad \prod_1^n{}_\nu (1-b_\nu) < \frac{1}{1 + \frac{1}{1!}\,t_n + \frac{1}{2!}\,t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\,t_p^n}$$

(für jede beliebige positive ganze Zahl p). Durch Verbindung der Ungleichungen (15), (16) ergiebt sich nun:

$$(17)\qquad \prod_1^m{}_\nu (1+a_\nu) \prod_1^n{}_\nu (1-b_\nu) < \frac{1 + s_m + \frac{1}{2!}\,s_m^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\,s_m^m}{1 + t_n + \frac{1}{2!}\,t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\,t_n^p}.$$

Ist nun $s_m \leqq t_n$ d. h.

$$\sum_1^m{}_\nu a_\nu - \sum_1^n{}_\nu b_\nu \leqq 0$$

so folgt, da man ja $p > m$ nehmen kann, dass:

$$(18)\qquad \prod_1^m{}_\nu (1+a_\nu) \prod_1^n{}_\nu (1-b_\nu) < 1.$$

Da ferner:

$$\frac{1}{1+a_\nu} = 1 - \frac{a_\nu}{1+a_\nu}, \qquad \frac{1}{1-b_\nu} = 1 + \frac{b_\nu}{1-b_\nu}$$

so ergiebt sich mit Benutzung von (18), dass:

$$\frac{1}{\prod_1^m (1+a_\nu) \prod_1^n (1-b_\nu)} < 1$$

wenn:

$$\sum_1^n \frac{b_\nu}{1-b_\nu} - \sum_1^m \frac{a_\nu}{1-a_\nu} \leqq 0$$

d. h. man hat:

$$\prod_1^m (1+a_\nu) \prod_1^n (1-b_\nu) > 1$$

wenn:

$$\sum_1^m \frac{a_\nu}{1+a_\nu} - \sum_1^n \frac{b_\nu}{1-b_\nu} \geqq 0.$$

und man erhält somit den folgenden Satz:

(I) *Sind* $c_1, c_2 \ldots c_m$ *positive und negative Grössen von der Beschaffenheit, dass* $1 + c_\nu > 0$ *ist, so wird:*

$$\prod_1^n (1+c_\nu) \begin{cases} < 1, & \textit{wenn: } \sum_1^n c_\nu \leqq 0, \\ > 1, & \textit{wenn: } \sum_1^n \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \geqq 0.^{*)} \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man $\sum_1^n c_\nu = s_n$, so ergiebt sich — wegen $\sum_1^n c_\nu - s_n = 0$ — sobald $1 - s_n > 0$ d. h. sobald s_n *beliebig negativ* oder ein *positiver echter Bruch* ist:

$$\prod_1^n (1+c_\nu)(1-s_n) < 1.$$

Es gilt mithin die Beziehung:

*) Setzt man $1 + c_\nu = p_\nu$, so nimmt dieser Satz die folgende Form an: Sind die positiven Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$ nicht sämmtlich $= 1$, so hat man stets

$$p_1 p_2 \ldots p_n \begin{cases} < 1, & \text{wenn: } \sum_1^n p_\nu \leqq n, \\ > 1, & \text{wenn: } \sum_1^n p_\nu^{-1} \leqq n. \end{cases}$$

$$(19)\qquad \prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{1-s_n} \quad \text{falls:} \quad -\infty < s_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu < 1.$$

(Diese Beziehung stellt eine nicht unerhebliche Erweiterung der beiden bekannten Specialfälle dar:

$$\prod_1^n{}^{\nu}(1-a_\nu) < \frac{1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}\,,\quad \prod_1^n{}^{\nu}(1+a_\nu) < \frac{1}{1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\,,$$

wo die a_ν positive echte Brüche bedeuten und im zweiten Falle auch $\sum_1^n{}^{\nu} a_\nu$ ein echter Bruch sein muss).

Weiss man nur, dass s_n die positive Zahl g nicht überschreitet, sodass also $s_n < g$, so hat man sicher

$$\sum_1^n{}^{\nu} c_\nu - g \leqq 0$$

oder auch, wenn m eine beliebige, oberhalb g gelegene ganze Zahl bedeutet:

$$\sum_1^n{}^{\nu} c_\nu - m \cdot \frac{g}{m} \leqq 0.$$

In Folge dessen ergiebt sich aber wiederum:

$$\prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu)\left(1-\frac{g}{m}\right)^m < 1$$

d. h. es wird:

$$(19\text{a})\qquad \prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu) < \left(\frac{m}{m-g}\right)^m \quad \text{falls:} \quad s_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu \leqq g < m,$$

und insbesondere, wenn g ein ächter Bruch oder Null ist, sodass $m = 1$ gesetzt werden kann:

$$(19\text{b})\qquad \prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{1-g} \quad \text{falls:} \quad s_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu \leqq g < 1.$$

Um auch die zweite Ungleichung des Satzes (I) in ähnlicher Weise zu verwerthen, setze man:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = S_n = -\frac{t_n}{1+t_n}\,,$$

sodass also:

$$t_n = -\frac{S_n}{1+S_n}$$

alsdann folgt aus:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} + \frac{t_n}{1+t_n} = 0$$

dass:

$$\prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu)(1+t_n) > 1 \quad \text{falls:} \quad 1+t_n > 0.$$

Da aber $1 + t_n = \frac{1}{1+S_n} > 0$ wird, wenn $1 + S_n > 0$, so ergiebt sich schliesslich:

$$(20) \quad \prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu) > 1 + S_n, \quad \text{falls:} \quad -1 < S_n = \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} < +\infty.$$

Weiss man nur soviel, dass S_n unter eine gewisse Zahl $(-G)$ nicht hinabsinkt (wo $G \geqq 0$), sodass also sicher:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} + G = \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} + M \cdot \frac{\frac{G}{M-G}}{1+\frac{G}{M-G}} \geqq 0$$

(wo M eine ganze positive Zahl $> G$ bedeuten soll), so ergiebt sich:

$$\prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu)\left(1+\frac{G}{M-G}\right)^M > 1$$

d. h. so ist:

$$(20\text{a}) \quad \prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu) > \left(\frac{M-G}{M}\right)^M \quad \text{falls:} \quad \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \geqq -G > -M$$

und speciell, wenn G ein echter Bruch oder Null ist:

$$(20\text{b}) \quad \prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu) > 1 - G \quad \text{falls:} \quad \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \geqq -G > -1.$$

Für die im folgenden Paragraphen anzustellenden Convergenz-Untersuchungen reichen die soeben entwickelten Relationen, welche sämmtlich auf der Ungleichung (17) basiren, noch nicht vollständig aus. Vielmehr erscheint es zweckmässig, die obere Grenze, welche durch Ungleichung (17) für ein Product der betrachteten Art statuirt wird, noch in folgender Weise zu erniedrigen.

Aus der Identität:

$$(1+a)\left(1+\frac{a^2}{4}\right) = 1 + a + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{4}$$

folgt für $|a| < 1$:

$$(1+a)\left(1+\frac{a^2}{4}\right) < 1 + a + \frac{a^2}{2}$$

also:

$$1 + a < \frac{1 + a + \frac{a^2}{2}}{1 + \frac{a^2}{4}}.$$

Sind jetzt $a_1, a_2, \ldots a_m$ positive echte Brüche, so ergiebt sich zunächst:

$$(1+a_1)(1+a_2) < \frac{1 + (a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \frac{1}{2}(a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2) + \frac{1}{4} a_1^2 a_2^2}{1 + \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) + \frac{1}{16} a_1^2 a_2^2}$$

und wenn jetzt $\sum_1^\varkappa{}^\nu a_\nu = s_\varkappa$, $\sum_1^\varkappa{}^\nu a_\nu^2 = \sigma_\varkappa$ ($\varkappa = 2, 3, \cdots m$) gesetzt wird — a fortiori:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) < \frac{1 + s_2 + \frac{1}{2!} s_2^2 + \frac{1}{3!} s_2^3 + \frac{1}{4!} s_2^4}{1 + \frac{1}{4}\sigma_2}.$$

Da nun allgemein

$$\left(1 + s_\varkappa + \frac{1}{2!} s_\varkappa^2 + \cdots + \frac{1}{p!} s_\varkappa^p\right)\left(1 + a_{\varkappa+1} + \frac{1}{2} a_{\varkappa+1}^2\right)$$
$$< 1 + s_{\varkappa+1} + \frac{1}{2!} s_{\varkappa+1}^2 + \cdots + \frac{1}{(p+2)!} s_{\varkappa+1}^{p+2}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{4}\sigma_\varkappa\right)\left(1 + \frac{1}{4} a_{\varkappa+1}^2\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(\sigma_\varkappa + a_{\varkappa+1}^2) + \frac{1}{16}\sigma_\varkappa a_{\varkappa+1}^2 > 1 + \frac{1}{4}\sigma_{\varkappa+1},$$

so ergiebt sich:

$$\text{(21)} \qquad \prod_1^m{}^\nu (1 + a_\nu) < \frac{1 + s_m + \frac{1}{2!} s_m^2 + \cdots + \frac{1}{(2m)!} s_m^{2m}}{1 + \frac{1}{4}\sigma_m}.$$

Man hat ferner für jeden pos. ächten Bruch b, bei beliebigem, pos. ganzzahligem p:

$$\frac{1}{1-b} > 1 + b + b^2 + \cdots + b^{p+2}$$
$$> \left(1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^p}{p!}\right)\left(1 + \frac{b^2}{2}\right)$$

und daher:

$$\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n)}$$
$$> \left(1 + t_n + \frac{1}{2!} t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!} t_n^p\right)\left(1 + \frac{\tau_n}{2}\right),$$

wenn $b_1, b_2, \ldots b_n$ pos. ächte Brüche bedeuten, und $\sum_1^n{}^\nu b_\nu = t_n$, $\sum_1^n{}^\nu b_\nu^2 = \tau_n$ gesetzt wird. Daraus ergiebt sich aber, dass

$$(22)\qquad \prod_1^n {}^{\nu}(1-b_\nu) < \frac{1}{1+t_n+\frac{1}{2!}t_n^2+\cdots+\frac{1}{p!}t_n^p}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}\tau_n}$$

und in Verbindung mit Ungl. (21):

$$(23)\qquad \prod_1^m {}^{\nu}(1+a_\nu)\cdot\prod_1^n {}^{\nu}(1-b_\nu)$$

$$< \frac{1+s_m+\frac{1}{2!}s_m^2+\cdots+\frac{1}{(2m)!}s_m^{2m}}{1+t_n+\frac{1}{2!}t_n^2+\cdots+\frac{1}{p!}t_n^p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\sigma_m\right)\left(1+\frac{1}{2}\tau_n\right)}.$$

Ist nun wiederum $s_m \leqq t_n$, so erhält man durch Wahl der beliebig gross anzunehmenden pos. ganzen Zahl $p > 2m$:

$$(24)\qquad \prod_1^m {}^{\nu}(1+a_\nu)\prod_1^{\nu} {}^{\nu}(1-b_\nu)$$

$$< \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\sigma_m\right)\left(1+\frac{1}{2}\tau_n\right)} < \frac{1}{1+\frac{1}{4}(\sigma_m+\tau_n)}$$

und man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

(II) *Sind* $c_1, c_2, \ldots c_n$ *positive und negative ächte Brüche und* $\sum_1^n {}^{\nu} c_\nu^2 = \sigma_n$, *so hat man stets:*

$$(25)\qquad \prod_1^n {}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{1+\frac{1}{4}\sigma_n} \quad \textit{wenn:}\ \sum_1^n {}^{\nu} c_\nu \leqq 0.$$

Hieraus lässt sich wiederum noch schliessen — falls

$$\sum_1^n {}^{\nu} c_\nu \leqq g < m$$

(wo g positiv und m eine ganze Zahl) — dass:

$$\prod_1^n {}^{\nu}(1+c_\nu)\left(1-\frac{g}{m}\right)^m < \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\sigma_n+m\left(\frac{g}{m}\right)^2\right)} < \frac{1}{1+\frac{1}{4}\sigma_n}$$

also:

$$(25\text{a})\qquad \prod_1^n {}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{\left(1-\frac{g}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{4}\sigma_n\right)}$$

und daher speciell, wenn g ein ächter Bruch ist:

$$(25\text{b})\qquad \prod_1^n {}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{(1-g)\left(1+\frac{1}{4}\sigma_n\right)} \quad \left(\left|\sum_1^n {}^{\nu} c_\nu\right| < g < 1\right).$$

§ 7.

Bedingte Convergenz reeller Producte.

Sind Σa_ν, Σb_ν zwei divergente unendliche Reihen, deren Glieder für $\nu = \infty$ der Null zustreben, so kann man nach einem bekannten Riemann'schen Satze aus den Grössen a_ν und den negativ genommenen Grössen b_ν unendlich viele *bedingt* convergirende Reihen mit beliebig vorgeschriebener Summe S bilden. Mit anderen Worten: man kann zwei Systeme von niemals abnehmenden, positiven, ganzen Zahlen m und m' einander so zuordnen, dass $\lim \left\{ \sum_1^m {}^\nu a_\nu - \sum_1^{m'} {}^\nu b_\nu \right\} = S$ für $m = \infty$, $m' = \infty$.

Da unter den bezüglich der Grössen a_ν, b_ν gemachten Voraussetzungen das Product $\prod_1^\infty {}^\nu (1 + a_\nu)$ nach ∞ und $\prod_1^\infty {}^\nu (1 - b_\nu)$ nach 0 divergirt, so lässt sich offenbar durch ein — dem Beweise des oben angeführten Riemann'schen Satze völlig analoges Verfahren zeigen, dass man durch passende Einschaltung von Factoren der Form $(1 - b_\nu)$ in ein Product von Factoren $(1 + a_\nu)$ ein *endliches* Product bilden kann, dessen Werth sich von einer beliebig vorgeschriebenen Zahl P beliebig wenig unterscheidet und zwar um so weniger, je weiter man den gedachten Process fortsetzt. Darnach kann man sagen, dass bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens ein aus Factoren der Form $(1 + a_\nu)$, $(1 - b_\nu)$ zusammengesetztes *unendliches* Product entsteht, welches *in dieser Anordnung*, also „*bedingt*“ gegen den Werth P convergirt. Bezeichnet man also die Folge der Grössen a_ν, $-b_\nu$ in der betreffenden Anordnung mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ und ist dann etwa:

$$\prod_1^n {}^\nu (1 + c_\nu) = \prod_1^m {}^\nu (1 + a_\nu) \cdot \prod_1^{m'} {}^\nu (1 - b_\nu), \quad \prod_1^\infty {}^\nu (1 + c_\nu) = P,$$

so kann man den Inhalt des eben Gesagten auch folgermassen formuliren: es lassen sich stets der unbegrenzten Reihe beständig abnehmender und schliesslich gegen Null convergirender positiver Zahlen $\delta_\varkappa (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ zwei Reihen niemals abnehmender, mit $\varkappa$ über alle Grenzen wachsender, pos. ganzer Zahlen $m_\varkappa$, $m_\varkappa'$ zuordnen, dergestalt dass:

$$\left| \prod_1^{m_\varkappa} {}^\nu (1 + a_\nu) \prod_1^{m_\varkappa'} {}^\nu (1 - b_\nu) - P \right| < \delta_\varkappa$$

also

$$\lim_{\varkappa = \infty} \cdot \prod_1^{m_\varkappa} {}^\nu (1 + a_\nu) \prod_1^{m_\varkappa'} {}^\nu (1 - b_\nu) = P$$

wird.

Es entsteht nun die Frage: Entspricht hierbei einer solchen Anordnung der Grössen a_ν, $-b_\nu$, für welche die nach der oben eingeführten Bezeichnung durch $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu$ dargestellte Reihe *convergirt*, auch stets eine *convergente* Factorenanordnung $\prod_1^\infty{}^\nu (1+c_\nu)$? Die Antwort hierauf giebt der folgende — von Cauchy*) mit Hülfe der logarithmischen Reihe bewiesene — Satz, der an dieser Stelle mit Hülfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehungen rein elementar sich ergeben wird:

Convergirt die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu$ *bedingt in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, so convergirt* $\prod_1^\infty{}^\nu (1+c_\nu)$ *oder divergirt nach Null, je nachdem* $\sum_1^\infty{}^\nu c_\nu^2$ *convergirt oder divergirt.*

Beweis: Es werde zunächst angenommen, dass ausser der Reihe Σc_ν, auch die Reihe Σc_ν^2 — letztere eo ipso *unbedingt* — *convergire:* alsdann convergirt auch die Reihe $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$ und folglich auch:

$$\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum c_\nu - \sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$$

(letztere Reihe natürlich wieder nur bedingt). In Folge dessen lässt sich, wenn ε einen beliebig klein vorzuschreibenden, pos. ächten Bruch bezeichnet, eine Zahl N so bestimmen, dass für jede pos. ganze Zahl ϱ:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}^\nu c_\nu\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}^\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right| < \varepsilon, \quad (n \geqq N)$$

und man findet daher mit Benützung der Ungleichungen (19b), (20b):

$$\frac{C_{n+\varrho}}{C_n} = \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}^\nu (1+c_\nu) \begin{cases} < \frac{1}{1-\varepsilon}\left(= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1\right) \\ > 1-\varepsilon \end{cases} \quad (n \geqq N)$$

sodass:

$$-\varepsilon < \frac{C_{n+\varrho}}{C_n} - 1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (n \geqq N)$$

wird, und somit das unendliche Product $C_\infty = \prod_1^\infty{}^\nu (1+c_\nu)$ *convergirt.*

---

*) Cours d'Anal. algébr. p. 563.

Sei zweitens Σc_ν^2 *divergent*, so wird jetzt auch $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ divergent, und es bleibt daher (in Folge der Convergenz von Σc_ν) nur die erste der eben benützten Ungleichungen bestehen, nämlich:

$$\frac{C_{n+\varrho}}{C_n} = \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}^{\nu} (1 + c_\nu) < \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (n \geqq N),$$

woraus sich nur so viel ersehen lässt, dass das betrachtete unendliche Product nicht ins Unendliche wachsen kann: es könnte dann immer noch convergiren, innerhalb endlicher Grenzen oscilliren oder nach Null divergiren. Zum Beweise, dass stets der letzte Fall eintritt, dient der Satz (II) des vorigen Paragraphen.

Hat man nämlich zunächst die Zahl N wie erforderlich bestimmt, so lässt sich jetzt noch eine Zahl R als untere Grenze für ϱ bestimmen, so dass:

$$\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}^{\nu} c_\nu^2 > 4A \quad (\varrho \geqq R)$$

wird, wo A in Folge der Divergenz von Σc_ν^2 *beliebig gross* angenommen werden kann. Alsdann erhält man aber unter Anwendung der Ungleichung (25b):

$$\prod_{n+1}^{n+\varrho}{}^{\nu} (1 + c_\nu) < \frac{1}{(1-\varepsilon)(1+A)}$$

und da die rechte Seite durch Wahl von A d. h. schliesslich durch Wahl von ϱ beliebig klein wird, so folgt dass $\prod_1^\infty{}^{\nu} (1 + c_\nu)$ nach Null divergirt. —

Zusatz I. Die *Divergenz* des betrachteten Productes *nach Null* bleibt auch bestehen, wenn Σc_ν^2 *divergirt* und Σc_ν so *oscillirt*, dass die *obere* Unbestimmtheitsgrenze einen endlichen Werth hat (NB. die *untere* darf dagegen beliebig, auch negativ unendlich sein). Da man nämlich in diesem Falle für jedes endliche oder unendliche n setzen kann

$$\sum_1^n{}^{\nu} c_\nu \leqq g \qquad (g \geqq 0),$$

so ergiebt sich nach Ungl. (25a):

$$\prod_1^n{}^{\nu} (1 + c_\nu) < \frac{1}{\left(1 - \frac{g}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{4}\sigma\right)} \qquad \left(\sigma_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu^2\right),$$

wo m eine beliebige, pos. ganze Zahl $> g$ bedeutet: die rechte Seite dieser Ungleichung wird beliebig klein, wenn σ_n durch Wahl von n gross genug gemacht wird, mithin hat man wiederum:

$$\prod_1^{\infty}{}^{\nu} (1+c_\nu) = 0.$$

Wenn andererseits Σc_ν^2 *convergirt* und Σc_ν wieder so *oscillirt*, dass für jedes n

$$\sum_1^n{}^{\nu} c_\nu \leqq g$$

gesetzt werden kann, so lehrt die eben benützte Ungleichung (25a) im wesentlichen nichts anderes, als die einfachere Ungleichung (19a):

$$\prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu) < \left(\frac{m-g}{m}\right)^m \quad \text{(wo } m \text{ eine pos. ganze Zahl} > g)$$

nämlich, dass für dieses Product eine endliche *obere* Grenze existirt, während die *untere* Grenze offenbar auch Null sein kann.

Besitzt jedoch $\sum_1^n{}^{\nu} c_\nu$ auch eine endliche *untere* Grenze, und beachtet man, dass dann auch:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu - \sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu} \geqq -G \quad (G \geqq 0)$$

gesetzt werden kann, so folgt aus Ungl. (20a), dass

$$\prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu) > \left(\frac{M-G}{M}\right)^M \quad \text{(wo } M \text{ eine pos. ganze Zahl} > G)$$

d. h. das Product besitzt in diesem Falle eine *von Null verschiedene untere* Grenze.

Zusatz II. Auch wenn die Reihe Σc_ν divergirt, lassen sich gewisse Criterien bezüglich des Verhaltens von $\Pi(1+c_\nu)$ angeben (natürlich immer unter der Voraussetzung dass $\lim c_\nu = 0$). Divergirt nämlich die Reihe Σc_ν nach $-\infty$, so kann man eine pos. ganze Zahl N so bestimmen, dass für ein beliebig gross gegebenes positives A:

$$s_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu < -A \quad (n \geqq N)$$

wird. Alsdann ergiebt sich aber nach Ungl. (19), dass:

$$\prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu) < \frac{1}{1-s_n} < \frac{1}{1+A} \quad (n \geqq N)$$

durch Wahl von A bezw. von n beliebig klein gemacht werden kann. Das unendliche Product $\prod_1^{\infty}{}^{\nu} (1+c_\nu)$ *divergirt* also in diesem Fall *nach Null*.

Ist dagegen $\sum_1^\infty {}^{\nu}\, c_\nu = +\infty$, so betrachte man zunächst

$$\frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu} (1+c_\nu)} = \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 - \frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right).$$

Da hier das rechts stehende Product für $n = \infty$ nach dem eben Gesagten gegen Null divergiren wird, sobald

$$\sum_1^\infty {}^{\nu} \left(-\frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right) = -\infty,$$

so folgt, dass $\prod_1^\infty {}^{\nu} (1+c_\nu)$ *nach Unendlich divergirt*, sobald ausser der Reihe $\sum_1^\infty {}^{\nu}\, c_\nu$ auch noch die Reihe $\sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ nach $+\infty$ divergirt. Hierzu ist vermöge der Beziehung:

$$\sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum_1^\infty {}^{\nu}\, c_\nu - \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$$

hinreichend (aber nicht nothwendig), dass die Reihe $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$, also schliesslich die Reihe Σc_ν^2 *convergirt.*

Ist hingegen Σc_ν^2, also auch $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$ *divergent* (und zwar dann stets $= +\infty$), so *kann* die Reihe $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$, wie die obige Zerlegung lehrt, zwar ebenfalls noch *nach* $+\infty$ *divergiren,* sie kann aber auch *convergiren*, *oscilliren* und sogar *nach* $-\infty$ *divergiren.* Hierbei wird nun — im Falle der *Convergenz* und der *Oscillation* mit endlicher *unterer* Unbestimmtheitsgrenze — das betrachtete Product wieder *nach* $+\infty$ *divergiren* (der erste Theil dieser Behauptung folgt aus dem Hauptsatze dieses Paragraphen, der zweite aus Zusatz I, wenn man nur beachtet, dass die zunächst in Betracht kommende *obere* Unbestimmtheitsgrenze von $\sum \left(-\frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right)$ identisch mit der *unteren* von $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ ist). Wenn jedoch $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ die *untere* Unbestimmtheitsgrenze $-\infty$ besitzt oder auch *nach* $-\infty$ *divergirt*, so lässt sich über den Werth von $\Pi(1+c_\nu)$ allgemein nichts bestimmtes aussagen: das Product kann dann noch jeden Werth, einschliesslich von 0 und ∞, annehmen, bezw. innerhalb der Grenzen 0 und ∞ oscilliren.

Es erscheint vielleicht nicht überflüssig, an einem Beispiele zu zeigen, dass, unter der Voraussetzung $\Sigma c_\nu = +\infty$, die Reihe $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ wirklich auch *convergiren* oder *nach* $-\infty$ *divergiren* kann, und dass insbesondere in diesem letzten Falle der Werth des fraglichen Productes $\Pi(1+c_\nu)$ wiederum noch ∞, endlich oder 0 sein kann.

Ich setze

$$c_{2\nu-1} = \frac{1}{\sqrt{\nu}-x}, \quad c_{2\nu} = -\frac{1}{\sqrt{\nu}+x} \qquad (x>0)$$

und wähle, um im Falle eines ganzzahligen x den Werth $\nu = x^2$ (für welchen $c_{2\nu-1} = \infty$ werden würde) von vornherein auszuschliessen, als niedrigsten Summationsindex eine Zahl $m > x^2$. Alsdann hat man:

$$\sum_m^\infty c_\nu = \sum_m^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{\nu}-x} - \frac{1}{\sqrt{\nu}+x} \right\} = \sum_m^\infty \frac{2x}{\nu - x^2} = +\infty$$

und ferner:

$$\sum_m^\infty \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum_m^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{\nu}-x+1} - \frac{1}{\sqrt{\nu}+x-1} \right\} = \sum_m^\infty \frac{2(x-1)}{\nu-(x-1)^2}.$$

Diese letztere Reihe divergirt nun, wie die Reihe Σc_ν nach $+\infty$, sobald $x > 1$; sie convergirt hingegen (nach Null) für $x = 1$, und sie divergirt nach $-\infty$ für $x < 1$. In den beiden ersten Fällen wird also das correspondirende unendliche Product

$$P = \prod_m^\infty \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu}-x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\nu}+x}\right) \right\}$$

nach $+\infty$ divergiren, und man hat somit zunächst:

$$P = \infty \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

Um nun auch den Werth dieses Productes für den dritten Fall ($x < 1$, $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = -\infty$) zu bestimmen, bringe man dasselbe auf die Form:

$$P = \prod_m^\infty \frac{\nu-(1-x)^2}{\nu - x^2} = \prod_m^\infty \left(1 + \frac{2x-1}{\nu - x^2}\right)$$

und man erkennt sofort, dass gerade wie früher:

$$P = \infty \quad \text{für} \quad x > \tfrac{1}{2}$$

wird, dass dagegen:

$$P = 1 \quad \text{für} \quad x = \tfrac{1}{2}$$

(d. h. das Product *convergirt* in diesem Falle, obschon die entsprechende Reihe *divergirt*) und schliesslich:

$$P = 0 \quad \text{für} \quad x < \tfrac{1}{2}$$

sich ergiebt. —

Berlin, im April 1888.

Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen.*)

Von

Eberh. Illigens in Beckum.

Das Bestreben, die Irrationalzahlen in streng logischer und zugleich rein arithmetischer Weise zu erklären, hat in neuerer Zeit zu verschiedenen Definitionsformen geführt, von denen neben der Dedekind'schen die des Herrn Weierstrass und des Herrn Cantor bei Weitem den grössten Anklang gefunden haben. Trotz des Ansehens aber, dessen sich die Theorien der beiden letztgenannten Autoren erfreuen, dürfte sich dennoch in beide Theorien ein eigenartiger Fehler eingeschlichen haben. Um diese Behauptung rechtfertigen zu können, erscheint es angebracht, die Grundzüge beider Erklärungsweisen kurz voranzuschicken, indem bemerkt wird, dass eine weitere Entwickelung u. A. in den Mathem. Annalen Band 5, S. 123, Crelle-Borchardt's Journal Band 74, S. 172, Cantor, Mannigfaltigkeitslehre S. 21 (Leipzig 1883) und Stolz, Allgem. Arithmetik S. 72 (Leipzig 1885) enthalten ist.

Bezeichnet nach Herrn Weierstrass $\Sigma_n a$ die Summe von n positiven, rationalen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Art, dass, wie gross auch n gewählt wird, $\Sigma_n a$ immer unterhalb einer angebbaren Zahl bleibt, so bieten sich bei Vergleichung zweier solcher Summen $\Sigma_n a$ und $\Sigma_n a^1$ drei Fälle: es ist bei hinreichend grossem n jedes $\frac{1}{n}$ entweder erstens in $\Sigma_n a$ und $\Sigma_n a^1$ stets gleich oft, oder zweitens in $\Sigma_n a$ stets öfter als in $\Sigma_n a^1$, oder drittens in $\Sigma_n a^1$ stets öfter, als in $\Sigma_n a$ enthalten. Es werden nun den Reihen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots$ als

---

*) Indem wir den nachstehenden Aufsatz zur Veröffentlichung bringen, wünschen wir dazu beizutragen, dass die wichtige Frage der Irrationalzahlen unter möglichst vielseitigen Gesichtspunkten zur wissenschaftlichen Discussion gelangt; wir übernehmen damit aber keine Verantwortung für den besonderen Inhalt des betr. Aufsatzes. Herr G. Cantor hat uns in Aussicht gestellt, demnächst in unseren Annalen eine Entgegnung auf die Darstellung des Hrn. Illigens folgen lassen zu wollen.

D. Red.

neu einzuführende, durch diese Reihen zu definirende Zahlen die Zeichen b und b^1 zugeordnet, und b im ersten Falle *gleich* b^1, im zweiten *grösser* als b^1, im dritten *kleiner* als b^1 genannt. Weiterhin werden die den Reihen $a_1 + a_1^1$, $a_2 \pm a_2^1 \ldots$ resp. $a_1 \cdot a_1^1$, $a_2 \cdot a_2^1, \ldots$ resp. $a_1^1 : a_1^1$, $a_2 : a_2^1 \ldots$ zuzuordnenden neuen Zahlen die *Summe* resp. die *Differenz* resp. das *Product*, resp., falls b^1 nicht 0, der *Quotient* von b und b^1 genannt. Wird noch festgesetzt, dass der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$, falls sie einen rationalen Grenzwerth habe, dieser Grenzwerth selbst zuzuordnen sei, so gelten die neuen Zahlen für eingeführt, da sowohl die Beziehungen des Grösser-, Gleich- und Kleinerseins untereinander und zu den rationalen Zahlen, als auch die Rechnungsoperationen für sie definirt seien.

Skizziren wir nunmehr auch die Cantor'sche Erklärungsart. Nach derselben wird einer, kurz durch das Zeichen (a_ν) bezeichneten sog. Fundamentalreihe oder Zahlreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass die einzelnen Glieder rationale Zahlen sind, und dass $\lim\limits_{n=\infty}(a_{n+\mu} - a_n)$ für jeden Werth von μ gleich Null ist, als neu einzuführende Zahl das Zeichen b zugeordnet. Sind nun (a_ν) und (a_ν^1) zwei Zahlreihen, b und b^1 die ihnen zugeordneten Zahlen, so wird b *gleich* b^1 genannt, wenn $\lim\limits_{n=\infty}(a_n - a_n^1)$ gleich 0 ist, *grösser* als b^1, wenn von einem gewissen n an $a_n - a_n^1$ stets grösser ist, als ein positives, rationales ε, und endlich *kleiner* als b^1, wenn $a_n - a_n^1$ von einem gewissen n an stets kleiner bleibt, als ein negatives, rationales $-\varepsilon$. Zur Ermöglichung der Rechnungsoperationen werden ganz dieselben Definitionen wie bei der Weierstrass'schen Theorie aufgestellt. Um eine Beziehung der neuen Zahlen zu den rationalen zu haben, wird die Festsetzung getroffen, dass der Zahlreihe $a, a, a \ldots$ die rationale Zahl a selbst zugeordnet sei. Nun kann gefolgert werden, dass b *minus* a_n bei wachsendem n *kleiner* wird, als jede denkbar rationale Zahl; diese Schlussfolgerung drückt Herr Cantor dadurch aus, dass er sagt, b ist der *Grenzwerth* von a_n. Diese Theorie ist später von Herrn Cantor etwas umgestaltet (Mannigfaltigkeitslehre S. 23); doch betrifft diese Aenderung den leitenden Gedanken nicht, und kommt für unseren Zweck nicht in Betracht.

Die Aehnlichkeit der beiden kurz dargelegten Theorien trotz ihrer Verschiedenheit und Selbständigkeit in den Einzelheiten der Ausführung ist leicht zu erkennen; insbesondere ist der Grundgedanke bei beiden derselbe, weshalb sie im Nachfolgenden zumeist als eine einzige Theorie behandelt sind. Hinsichtlich dieses Grundgedankens bemerkt Herr Cantor treffend: „es muss als wesentlich hervorgehoben werden, dass (bei der Weierstrass'schen Definitionsform) nur die Summation einer stets endlichen Anzahl von rationalen Elementen zur Anwendung kommt und nicht etwa von vornherein die zu definirende Zahl b als die Summe $\Sigma_\nu a$ der unendlichen Reihe (a_ν) gesetzt wird; es würde hierin ein logischer Fehler liegen, weil vielmehr die Definition der Summe $\Sigma_\nu a$ erst durch Gleichsetzung mit der nothwendig vorher schon definirten, fertigen Zahl b gewonnen wird. Ich glaube, dass dieser erst von Herrn Weierstrass vermiedene logische Fehler in früheren Zeiten fast allgemein begangen und aus dem Grunde nicht bemerkt worden ist, weil er zu den seltenen Fällen gehört, in welchen wirkliche Fehler keinen bedeutenderen Schaden im Calcül anrichten können" (Mannigfaltigkeitslehre S. 22) und weiter: „es wird nicht etwa die Zahl b definirt als Grenze der Glieder a_n einer Fundamentalreihe (a_ν), denn dieses würde ein ähnlicher logischer Fehler sein, wie der bei Besprechung der ersten (Weierstrass'schen) Definitionsform hervorgehobene und zwar aus dem Grunde, weil alsdann die Existenz der Grenze $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ präsumirt würde; vielmehr verhält sich die Sache umgekehrt so, dass durch unsere vorangegangenen Definitionen der Begriff b mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht worden ist, dass daraus mit logischer Evidenz der Schluss gezogen werden kann: $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ existirt und ist gleich b" (a. a. O. S. 24). Ist aber ein solcher Nachweis der „Existenz" der Grenze geliefert, oder auch nur möglich? Oder aber, um gleich unsern Haupteinwand zu bezeichnen, drücken die durch die Weierstrass'-Cantor'sche Theorie eingeführten neuen „Zahlen" in *irgend einer* Weise eine Vielheit oder Quantität aus? Sind sie vielmehr nicht blosse Zeichen für das Gegebensein einer Zahlreihe, so dass Quantitätsbezeichnungen auf sie anzuwenden gar keinen Sinn hat? Dass diese Fragen zu verneinen, möge das Folgende ergeben.

Wenn der Zahlreihe (a_ν) als neue, durch diese Zahlreihe zu definirende Zahl das Zeichen b zugeordnet wird, so ist, wenigstens vor Aufstellung weiterer Definitionen, b ein vollständig qualitätsloses Ding ganz unbekannter Gattung; was b an sich ist, kommt überhaupt nicht in Betracht; b wird eben lediglich als Zeichen dafür genommen, dass durch irgend ein Gesetz die Zahlreihe (a_ν) gegeben sei. Dass nun der Begriff von b mit dem einer rationalen Zahl auch nicht das Mindeste gemein hat, sondern ganz verschiedener Natur ist, unterliegt wohl keinem Zweifel; ist doch b seinem Begriffe nach nichts Anderes, als ein blosses Zeichen für das Gegebensein einer Zahlreihe; die rationalen Zahlen aber, auch die gebrochenen, bezeichnen eine Vielheit oder, vielleicht richtiger, eine Quantität von Dingen. Die rationalen Zahlen bilden daher *nicht* einen Specialfall der neuen Dinge b, b' u. s. w. Wird nun aber hierin durch die weitere Entwicklung der Theorie etwas geändert, wenn von zwei Zahlreihenzeichen b und b' nach einem gewissen Gesetze das eine *„grösser"* oder *„kleiner"* als das andere genannt wird? Es mag dahin gestellt bleiben, ob es nicht zu vermeiden ist, Bezeichnungen, welche nach ihrem durch den Sprachgebrauch fixirten Sinne in eigentlicher Redeweise nur für Quantitäten dienen, also z. B. grösser, kleiner, auch auf solche Dinge anzuwenden, welche, wie es ja bei den Zahlreihezeichen der Fall, keine Quantität ausdrücken. Gewiss aber ist, dass die Zahlreihezeichen bloss dadurch, dass sie je nach Umständen *„grösser"* etc. *genannt* werden, keine Quantitätsbezeichnungen werden können. Es ist eben der totale, im Vorhergehenden schon durch die verschiedene Schreibweise angedeutete Unterschied zwischen den für Quantitäten gebrauchten Begriffen „grösser, kleiner" einerseits und den für die Zahlreihezeichen angewandten gleichlautenden Benennungen *„grösser, kleiner"* andererseits ins Auge zu fassen. Ist eine rationale Vielheit resp. die sie bezeichnende Zahl m grösser, als eine andere rationale n, so verbleibt nach der, je 1 zu 1 erfolgenden, Zuordnung der in n enthaltenen Einheiten (ev. Brucheinheiten) zu den in m enthaltenen gleichbenannten Einheiten von letzteren ein Ueberschuss; von einem Ueberschusse des Zahlreihezeichens b aber über das *„kleinere"* Zeichen b' lässt sich natürlich gar nicht reden, in dem Zahlreihezeichen sind gar keine Einheiten vorhanden. Nun mag es allerdings bei Erweiterung des Zahlbegriffes nicht gefordert werden können, dass die für rationale Vielheiten geltenden Begriffe des Grösserseins unverändert für das erweiterte Zahlsystem Geltung haben, mit anderen Worten, es mag vielleicht nöthig sein, den für rationale Vielheiten definirten Begriff des Grösserseins behufs Anwendung auf einen allgemeinen Zahlbegriff gleichfalls zu erweitern; sollen aber die rationalen Vielheiten resp. die sie bezeichnenden Zahlen Specialfälle der allgemeinen Zahlen sein, so muss der für die allgemeinen Zahlen geltende Begriff des Grösserseins auch auf die rationalen Vielheiten Anwendung finden können.

In gleicher Weise ist die Summe zweier rationalen Vielheiten ganz anderer Gattung, als die *„Summe"* zweier Zeichen b und b^1, die nichts Anderes ist, als das zur Zahlreihe $a_1 + a_1{}^1,\ a_2 + a_2{}^1 \cdots$ gehörige Zeichen.

Auf dem Standpunkte nun, den die kritisirte Theorie uns nach Aufstellung der Definitionen über das *Grösser-*, *Kleiner-*, *Gleichsein*, sowie die *Summe*, *Differenz* u. s. w. der neuen Zahlen einnehmen lässt, haben wir einerseits die rationalen Vielheiten, anderseits die Zeichen b, b^1 u. s. w., welche lediglich das Gegebensein einer Zahlreihe, aber in keiner Weise eine Vielheit von Dingen bezeichnen; zwischen beiden Seiten besteht gar keine Verwandtschaft. Wird nun, um eine Beziehung zwischen den rationalen Zahlen und den Zahlreihezeichen herzustellen, die Festsetzung getroffen, dass der Zahlreihe $a, a, a, \ldots$ oder nach Herrn Weierstrass der Zahlreihe $a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$

welche den rationalen Grenzwerth a hat, die rationale Zahl a selbst als Zahlreihezeichen zugeordnet werde, so gewinnt es den Anschein, als ob es gelungen sei, hierdurch die rationalen Zahlen zu einer speciellen Art der bloss als Zahlreihezeichen definirten neuen „Zahlen" zu machen. Jedoch mit Nichten. Denn da die neuen Zahlen b, b^1 u. s. w. *nur Zeichen* für das Gegebensein einer Zahlreihe resp. des Gesetzes derselben sind, so kann darauf gar Nichts ankommen, was diese Dinge an sich sind; da b bloss in seiner Eigenschaft als Zeichen in Betracht kommt, so kann ich unter b jedes beliebige Ding, jedes Wort u. s. w. verstehen, wofern ich es nur als ein Zeichen der Zahlreihe ansehe. Wenn daher als Zeichen der Zahlreihe $a, a, a \ldots$ die rationale Zahl a selbst gewählt werden soll — beiläufig bemerkt hätte man mit ebendemselben Rechte $\frac{a}{2}$ oder $\frac{a}{3}$ oder a^2 als Zeichen bestimmen können — so gehört freilich a, insofern es als Zahlreihezeichen dient, zu den neuen „Zahlen"; sofern aber a eine Vielheit von Dingen bezeichnet, gehört es einer ganz anderen Gattung an.

Sind demnach die rationalen Zahlen und die Zahlreihezeichen ganz anseinanderfallenden Gattungen angehörig, so zwar, dass für ihre Beziehungen untereinander nur gleichlautende Benennungen eingeführt sind, so kommt in Frage, ob das Verhältniss ein Anderes wird, wenn gezeigt wird, dass b *minus* a_n mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach *kleiner* wird, als jede denkbare rationale Zahl ϱ und diese Schlussfolgerung mit den Worten ausgedrückt wird, dass b für ein wachsendes n der *Grenzwerth* von a sei.

Die verneinende Antwort ergiebt sich schon aus dem Vorhergesagten. Da die gleichklingenden Benennungen: grösser, kleiner, Summe u. s. w. für die rationalen Vielheiten und für die Zahlreihezeichen in gänzlich verschiedener Bedeutung gebraucht werden, so hat in gleicher Weise das Wort Grenzwerth bei rationalen Vielheiten einen ganz anderen Sinn, als bei Zahlreihezeichen. Die Schlussfolgerung, dass b der *Grenzwerth* von a_n, bedeutet bei der Cantor'schen Entwickelung nur, dass für ein wachsendes n, b *minus* a_ν *kleiner* als ϱ, d. h. dass das der Zahlreihe $a - a_n$, $a_1 - a_n$, $a_2 - a_n$, ... zugeordnete Zeichen *kleiner* sei, als ϱ d. h. dass $a_\nu - a_n$ bei hinreichender Grösse von ν und n kleiner sei, als ϱ; weiter reicht die besagte Schlussfolgerung *nicht;* keineswegs aber ergiebt sie, dass b der Grenzwerth von a_n ist, falls das Wort Grenzwerth in einem auch für rationale Vielheiten anwendbaren Sinne gebraucht wird. Es ist auch von vornherein unerfindlich, wie ein blosses Zahlreihezeichen, also ein Ding, welches in keiner Weise eine Vielheit, eine Quantität bezeichnet, eine Grenze von rationalen Vielheiten sein könnte; unter „Grenze" für Vielheiten oder, sagen wir Quantitäten, kann doch nur wieder eine Quantität verstanden werden.

Aus dem Gesagten also dürfte sich ergeben, dass es der erörterten Theorie nicht gelungen ist, einen allgemeinern Zahlbegriff zu begründen und solche Zahlen einzuführen, welche eine Vielheit oder Quantität bezeichnen, deren Ausdruck durch eine rationale Zahl nicht möglich ist; die aufgestellten Zahlreihezeichen vermögen trotz aller Benennungen, die ihnen durch verschiedene Definitionen zugelegt werden, keine Quantitätsbegriffe zu werden. Dass aber die irrationalen Zahlen eine Quantität bezeichnen müssen, zeigt — wofern überhaupt ein Nachweis hierfür nothwendig erscheint — schon die Gleichung $x^2 = 3$, welche durch die irrationale Zahl $\sqrt{3}$ befriedigt wird. Da nämlich die rechte Seite der Ausdruck für eine Vielheit ist, so muss auch durch die linke eine Vielheit ausgedrückt werden; eine Vielheit (Quantität) kann aber doch nur durch die Verknüpfungen von Vielheiten, nicht von anderen Dingen sich ergeben. Würde $\sqrt{3}$ bloss als Zahlreihezeichen (für die Reihe 1 . 4, 1 . 41, 1 . 414, . . .) gefasst, so hätten wir auf der linken Seite der Gleichung nur ein Zeichen für die Zahlreihe $1 . 4^2$, $1 . 41^2$, $1 . 414^2$ . . . . Ein solches Zeichen aber, als welches jedes beliebige Ding gewählt werden kann, der durch die Zahl 3 bezeichneten Vielheit gleichzusetzen, kann wohl Niemandem in den Sinn kommen.

Ferner, was soll man denn, wenn die irrationalen Zahlen nur Zeichen für Zahlreihen sind, unter benannten Zahlen verstehen? Hat es einen Sinn, einem solchen Zeichen eine Benennung zuzulegen? Was würde z. B. eine Linie von $\sqrt{2}$ Metern sein? Man antwortet vielleicht, eine Linie, welche die Grenze der Linien von 1 . 4, 1 . 41, 1 . 414 Met. u. s. w. ist. Ganz richtig; es schliesst aber diese Antwort die Voraussetzung ein, dass $\sqrt{2}$ eine Quantität bedeutet, welche die Grenze von 1 . 4. 1 . 41 u. s. w ist; nach der erörterten Theorie aber kann $\sqrt{2}$ nicht zu einer Quantitätsbezeichnung erhoben, mithin die angegebene Antwort nicht ertheilt werden.

Beckum, im März 1888.

Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten.

Von

Karl Heun in München.

Die Gauss'sche hypergeometrische Reihe ist in mehrfacher Richtung verallgemeinert worden. Man hat entweder die Zahl der Parameter vermehrt und ist so auf Functionen gekommen, welche linearen Differentialgleichungen der dritten oder höheren Ordnung genügen, oder man hat, wie Heine, Exponentialgrössen an Stelle der ursprünglichen Elemente eingeführt, wodurch Functionen definirt werden, die lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung befriedigen. Endlich hat man mehrere unabhängige Veränderliche statt des vierten Elementes eingeführt und zugleich die Zahl der Parameter erhöht, wie dies von Herrn Appell geschehen ist. Die so entstehenden Functionen genügen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ich habe im Folgenden Riemann'sche Functionen mit vier Verzweigungspunkten eingehender untersucht, welche in die Gauss'schen hypergeometrischen Functionen degeneriren, wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenfallen und zugleich ein gewisser Parameter einen besonderen Werth erhält. Da die sogenannten Lamé'schen Functionen und verschiedene andere in der mathematischen Physik vorkommende Reihen specielle Fälle der hier behandelten Functionen sind, so habe ich, in Rücksicht auf solche Anwendungen, eine bestimmte Reihe $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$, welche für $a = 1$ und $q = 1$ in die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ degenerirt, als Grundform angenommen. Durch diese Reihe und ihre erste Ableitung lassen sich alle Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken. Gleichungen, welche den Gauss'schen relationes inter functiones contiguas entsprechen, existiren für die Function $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$, so lange die Parameter allgemein bleiben, nicht.

Die Fortsetzung der vorliegenden Arbeit wird die Beziehungen eingehend entwickeln, welche zwischen der Gruppe und den zugehörigen Differentialgleichungen bestehen.

1.

Einführung der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. — Normalgleichung.

Die drei endlichen Verzweigungspunkte einer mehrwerthigen Function y der unabhängigen Veränderlichen x seien ξ_1, ξ_2, ξ_3. Es werde ferner angenommen der unendlich ferne Punkt ξ_4 sei gleichfalls eine Verzweigungsstelle. Zu dem Punkte ξ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ sollen zwei, linear unabhängige Fundamentalzweige $y_{1\iota}, y_{2\iota}$ gehören. Nach einem vollständigen positiven Umlauf der unabhängigen Veränderlichen um den Punkt ξ_i gehe $y_{1\iota}$ in $\overset{i}{\overline{y_{1\iota}}}$ und $y_{2\iota}$ in $\overset{i}{\overline{y_{2\iota}}}$ $\left(\iota \gtrless i\right)$ über. Soll nun die Function y als eine zweifach linear verknüpfte charakterisirt sein, dann ist

$$\text{(1)} \qquad \overset{i}{\overline{y_{1\iota}}} = b_{1i}^{(1)} y_{1\iota} + b_{2i}^{(1)} y_{2\iota} \quad \text{und} \quad \overset{i}{\overline{y_{2\iota}}} = b_{1i}^{(2)} y_{1\iota} + b_{2i}^{(2)} y_{2\iota}$$

wo die Coefficienten b gewisse constante Werthe haben. Da zwischen je drei Zweigen eine dreigliedrige homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen soll, so ist auch

$$\text{(2)} \qquad y_{1i} = \mathfrak{b}_{1i}^{(1)} y_{1\iota} + \mathfrak{b}_{2i}^{(1)} y_{2\iota} \quad \text{und} \quad y_{2i} = \mathfrak{b}_{1i}^{(2)} y_{1\iota} + \mathfrak{b}_{2i}^{(2)} y_{2\iota}.$$

Sind nun $w_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Wurzeln der quadratischen Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad \begin{vmatrix} b_{1i}^{(1)} - w_i, & b_{1i}^{(2)} \\ b_{2i}^{(1)}, & b_{2i}^{(2)} - w_i \end{vmatrix} = 0,$$

dann ist

$$\overset{i}{\overline{y_{1i}}} = w_i^{(1)} \cdot y_{1i} \quad \text{und} \quad \overset{i}{\overline{y_{2i}}} = w_i^{(2)} y_{2i},$$

wenn

$$w_i^{(1)} \lesseqgtr w_i^{(2)}.$$

Die Zweige y_{1i} und y_{2i} lassen sich also darstellen in der Form

$$y_{1i} = (x-\xi_i)^{\lambda_{1i}} \cdot \mathfrak{P}_1(x-\xi_i) \text{ und } y_{2i} = (x-\xi_i)^{\lambda_{2i}} \cdot \mathfrak{P}_2(x-\xi_i),$$

wo

$$\lambda_{1i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log w_i^{(1)}, \quad \lambda_{2i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log w_i^{(1)}.$$

$\mathfrak{P}_1(x-\xi_i)$ un d$\mathfrak{P}_2(x-\xi_i)$ sind Potenzreihen des Elementes $x - \xi_i$, die für $x = \xi_i$ einen von Null verschiedenen Werth haben. Aus dieser Darstellung folgt, dass die Function y der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(5)} \qquad (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2(x-\xi_3)^2 \cdot F_2[h] \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ (x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3) \cdot F_1[h+2] \cdot \frac{dy}{dx} + F_0[h+4] \cdot y = 0$$

genügt, wo zur Abkürzung $h = 2 - \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})$ gesetzt ist und wo F_0, F_1, F_2 ganze rationale Functionen von x bedeuten, deren Grade in den beigefügten Klammern angegeben sind. Für den besonderen Fall $h = 0$ nimmt die Gleichung (5) die bestimmte Fuchs'sche Form an:

$$\psi(x)^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \psi(x) F_1[2] \cdot \frac{dy}{dx} + F_0[4] \cdot y = 0, \tag{6}$$

wo

$$\psi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)$$

und

$$\sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) = 2$$

ist.

Da sich nun im Allgemeinen eine Function y, für welche $h > 0$ ist, durch eine andere und deren Derivirte rational ausdrücken lässt*), für welche $h = 0$ ist, so genügt es die durch die Gleichung (6) definirten Functionen zu betrachten. Insoweit eine solche Function durch die Grössen λ_{1i}, λ_{2i} determinirt ist, bezeichnen wir dieselbe durch das Symbol

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \\ \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} \end{matrix} \middle| \, x \right\}.$$

Alsdann ist

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \\ \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} \end{matrix} \middle| \, x \right\} = (x - \xi_1)^{\lambda_{11}} (x - \xi_2)^{\lambda_{12}} (x - \xi_3)^{\lambda_{13}}$$

$$\cdot \left\{ \begin{matrix} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \\ 0, & 0, & 0, & \lambda_{14} + \sum_{(i)}^{3} \lambda_{1i} \\ \lambda_{21} - \lambda_{11}, & \lambda_{22} - \lambda_{12}, & \lambda_{23} - \lambda_{13}, & \lambda_{24} + \sum_{(i)}^{3} \lambda_{1i} \end{matrix} \middle| \, x \right\}. \tag{7}$$

Hieraus schliesst man, dass eine Function y, welche der Differentialgleichung (6) genügt, stets auf eine andere zurückgeführt werden kann, welche durch vier von einander unabhängige Verzweigungsindices bestimmt ist.

*) Man vergl. meine Abhandlung „Zur Theorie der mehrwerthigen, mehrfach linear verknüpften Functionen" in den Act. Mathem. t. XI, pag. 105.

Die „determinirenden“ Gleichungen für die Differentialgleichung (6) sind bekanntlich

$$\text{(a)} \qquad \lambda(\lambda-1)\psi'(\xi_i)^2 + \lambda\psi'(\xi_i)\cdot F_1(\xi_i) + F_0(\xi_i) = 0$$
$$i = 1, 2, 3$$

und

$$\text{(b)} \qquad \lambda(\lambda+1) - \lambda\cdot\left[\frac{F_1(x)}{x^2}\right]_{x=\xi_4} + \left[\frac{F_0(x)}{x^4}\right]_{x=\xi_4} = 0.$$

Aus Gleichung (a) folgt

$$F_1(\xi_i) = \psi'(\xi_i)[1-\lambda_{1i}-\lambda_{2i}] \quad \text{und} \quad F_1(\xi_i) = \psi'(\xi_i)^2\cdot\lambda_{1i}\lambda_{2i}$$

Ebenso erhält man auch Gleichung (b)

$$\left[\frac{F_1(x)}{x^2}\right]_{x=\xi_4} = 1 + \lambda_{14} + \lambda_{24} \quad \text{und} \quad \left[\frac{F_0(x)}{x^4}\right]_{x=\xi_4} = \lambda_{14}\lambda_{24}.$$

Es ist also

$$\text{(8)} \quad F_1(x) = (1-\lambda_{11}-\lambda_{21})(x-\xi_2)(x-\xi_3) + (1-\lambda_{12}-\lambda_{22})(x-\xi_1)(x-\xi_3) + (1-\lambda_{13}-\lambda_{23})(x-\xi_1)(x-\xi_2).$$

Die Function $F_0(x)$ ist durch die vorstehenden Bedingungen noch nicht vollständig determinirt. Es sei nun q ein beliebiger Parameter, dann genügt die Function

$$\text{(9)} \quad \begin{aligned} F_0(x) = &- [\lambda_{11}(x-\xi_2)(x-\xi_3) + \lambda_{12}(x-\xi_1)(x-\xi_3) \\ &\qquad + \lambda_{13}(x-\xi_1)(x-\xi_2)]^2 \\ &+ \lambda_{11}(x-\xi_2)^2(x-\xi_3)^2 + \lambda_{12}(x-\xi_1)^2(x-\xi_3)^2 \\ &\qquad + \lambda_{13}(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 \\ &- [\lambda_{11}(x-\xi_2)(x-\xi_3) + \lambda_{12}(x-\xi_1)(x-\xi_3) \\ &\qquad + \lambda_{13}(x-\xi_1)(x-\xi_2)]\cdot F_1(x) \\ &+ \left[\lambda_{14} + \sum_{(i)}^{3}\lambda_{1i}\right]\left[\lambda_{24} + \sum_{(i)}^{3}\lambda_{1i}\right]\psi(x)(x-q) \end{aligned}$$

wie man ohne Weiteres erkennt, allen geforderten Bedingungen und ist erst dann eindeutig bestimmt, wenn man der Grösse q einen vorgegebenen Werth beilegt. In Wirklichkeit kann man über die Grösse q nicht beliebig verfügen, wenn, wie hier, als primitives Definitionsmittel der Function y gewisse erzeugende Substitutionen gegeben sind. Ist jedoch y schlechthin als Integral der Differentialgleichung (6) definirt, dann ist q in der That ein willkürliches Datum. Legt man, unter diesem Gesichtspunkte der Grösse q nach einander verschiedene Werthe bei, während die übrigen Bestimmungselemente unverändert bleiben, dann ändert y im Allgemeinen seinen functionentheoretischen Charakter (man denke etwa an die sogenannten Lamé'schen Functionen). Aus diesem Grunde nenne ich die Grösse q den *charakteristischen* Parameter von y.

Die Gleichung (7) veranlasst uns in den Ausdrücken für $F_1(x)$ und $F_0(x)$ $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$ zu setzen. Dann nimmt die Gleichung (6) die einfachere Form an

$$(10) \qquad \psi(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \chi(x) \cdot \frac{dy}{dx} + \lambda_{14}\lambda_{24}(x-q) \cdot y = 0,$$

wo

$$(11) \quad \chi(x) = (1-\lambda_{21})(x-\xi_2)(x-\xi_3) + (1-\lambda_{22})(x-\xi_1)(x-\xi_3) + (1-\lambda_{23})(x-\xi_1)(x-\xi_2)$$

zu setzen ist.

Macht man noch die Annahmen

$$\lambda_{14} = \alpha,\ \lambda_{24} = \beta,\ \lambda_{21} = 1-\gamma,\ \lambda_{22} = 1-\delta$$

und

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = a,$$

dann erhält man die Differentialgleichung für die Function y in der Normalform

$$(12) \quad x(x-1)(x-a)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x^2 - \{\alpha+\beta+a\gamma+(a-1)\delta+1\}x + a\gamma]\cdot\frac{dy}{dx} + \alpha\beta(x-q)\cdot y = 0.$$

Für $a = 1$ und $q = 1$ wird diese Gleichung durch $x - 1$ theilbar und degenerirt in die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Für $a = 0$, $q = 0$ dagegen wird sie durch x theilbar und man erhält die Gleichung

$$x(x-1)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - (\alpha+\beta-\delta+1)]\cdot\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\cdot y = 0,$$

welcher durch die Function

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\delta+1, x)$$

genügt wird.

Die Gleichung (12) kann demnach als eine Verallgemeinerung der Gauss'schen hypergeometrischen Differentialgleichung betrachtet werden.

2.

Die linearen Transformationen, welche drei feste Verzweigungspunkte ungeändert lassen.

Jede Function y, welche der Differentialgleichung (6) genügt, also die Verzweigungspunkte ξ_1, ξ_2, ξ_3, ∞ besitzt, kann durch eine bestimmte Anzahl linearer Transformationen des Argumentes x in eine solche mit den Verzweigungspunkten 0, 1, a, ∞ übergeführt werden, wo die Grösse a je nach der gewählten Transformation eine bestimmte Function der Grössen ξ_2, ξ_2, ξ_3 ist. Den Verzweigungspunkt a wollen wir den *Modul* der transformirten Function nennen. Von besonderem Interesse sind diejenigen linearen Transformationen der Function

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & a & \infty & \\ \hline \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & x \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \end{array}\right\},$$

welche die Verzweigungspunkte auf alle möglichen Arten permutiren, wobei jedoch der Modul a' von dem ursprünglichen verschieden sein kann. Die 24 linearen Substitutionen, welche diese Aufgabe lösen, sind in der nachstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt.

x ,	$1-x$,	$\frac{1}{x}$,	$\frac{x-1}{x}$,	$\frac{1}{1-x}$,	$\frac{x}{x-1}$,
$\frac{a}{x}$,	$\frac{x-a}{x}$,	$\frac{x}{a}$,	$\frac{a-x}{a}$,	$\frac{x}{x-a}$,	$\frac{a}{a-x}$,
$\frac{x-a}{x-1}$,	$\frac{a-1}{x-1}$,	$\frac{x-1}{x-a}$,	$\frac{1-a}{x-a}$,	$\frac{x-1}{a-1}$,	$\frac{x-a}{1-a}$,
$\frac{a(x-1)}{x-a}$,	$\frac{(1-a)x}{x-a}$,	$\frac{x-a}{a(x-1)}$,	$\frac{(a-1)x}{a(x-1)}$,	$\frac{x-a}{(1-a)x}$,	$\frac{a(x-1)}{(a-1)x}$.

Die Substitutionen der ersten Horizontalreihe sind identisch mit denjenigen, welche bei dem entsprechenden Problem in der Theorie der hypergeometrischen Functionen auftreten. Sie entstehen aus den drei erzeugenden Substitutionen:

$$x,\ 1-x,\ \frac{1}{x}.$$

Aus diesen in Verbindung mit den Substitutionen:

$$\frac{a}{x},\quad \frac{x-a}{x-1},\quad \frac{a(x-1)}{x-a}$$

lassen sich durch Combination alle übrigen erzeugen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & a & \infty & \\ \hline \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} & x \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} & \end{array}\right\} = \{0, 1, a, \infty \mid x\},$$

dann ergiebt die Anwendung der Substitutionen der obigen Tabelle das nachstehende System von äquivalenten Functionen

$\left\{0, 1, a, \infty \,\middle\|\, x\right\}$,	$\left\{\infty, a, 1, 0 \,\middle\|\, \frac{a}{x}\right\}$,	$\left\{a, \infty, 0, 1 \,\middle\|\, \frac{x-a}{x-1}\right\}$,	$\left\{1, 0, \infty, a \,\middle\|\, \frac{a(x-1)}{x-a}\right\}$,
$\left\{1, 0, 1-a, \infty \,\middle\|\, (1-x)\right\}$,	$\left\{\infty, 1-a, 0, 1 \,\middle\|\, \frac{x-a}{x}\right\}$,	$\left\{1-a, \infty, 1, 0 \,\middle\|\, \frac{a-1}{x-1}\right\}$,	$\left\{0, 1, \infty, 1-a \,\middle\|\, \frac{(1-a)x}{x-a}\right\}$,
$\left\{\infty, 1, \frac{1}{a}, 0 \,\middle\|\, \frac{1}{x}\right\}$,	$\left\{0, \frac{1}{a}, \infty, 1 \,\middle\|\, \frac{x}{a}\right\}$,	$\left\{\frac{1}{a}, 0, \infty, 1 \,\middle\|\, \frac{x-1}{x-a}\right\}$,	$\left\{1, \infty, 0, \frac{1}{a} \,\middle\|\, \frac{x-a}{a(x-1)}\right\}$,
$\left\{\infty, 0, \frac{a-1}{a}, 1 \,\middle\|\, \frac{x-1}{x}\right\}$,	$\left\{1, \frac{a-1}{a}, 0, \infty \,\middle\|\, \frac{a-x}{a}\right\}$,	$\left\{\frac{a-1}{a}, 1, \infty, 0 \,\middle\|\, \frac{1-a}{x-a}\right\}$,	$\left\{0, \infty, 1, \frac{a-1}{a} \,\middle\|\, \frac{(a-1)x}{a(x-1)}\right\}$,
$\left\{1, \infty, \frac{1}{1-a}, 0 \,\middle\|\, \frac{1}{1-x}\right\}$,	$\left\{0, \frac{1}{1-a}, \infty, 1 \,\middle\|\, \frac{x}{x-a}\right\}$,	$\left\{\frac{1}{1-a}, 0, 1, \infty \,\middle\|\, \frac{x-1}{a-1}\right\}$,	$\left\{\infty, 1, 0, \frac{1}{1-a} \,\middle\|\, \frac{x-a}{(1-a)x}\right\}$,
$\left\{0, \infty, \frac{a}{a-1}, 1 \,\middle\|\, \frac{x}{x-1}\right\}$,	$\left\{1, \frac{a}{a-1}, \infty, 0 \,\middle\|\, \frac{a}{a-x}\right\}$,	$\left\{\frac{a}{a-1}, 1, 0, \infty \,\middle\|\, \frac{x-a}{\text{[illegible]}-x}\right\}$,	$\left\{\infty, 0, 1, \frac{a}{a-1} \,\middle\|\, \frac{a(x-1)}{(a-1)x}\right\}$.

Je *vier* in einer Horizontalreihe stehende Functionen haben also denselben Modul. Legt man jedoch dem Modul einen der vier speciellen Werthe

$$-1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}),\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}),$$

bei, dann giebt es in jedem Falle *acht* resp. *zwölf* lineare Transformationen, welche denselben ungeändert lassen. Solche Functionen nehmen also eine Sonderstellung in der allgemeinen Theorie ein.

Die um die Punkte 0, 1 mit dem Radius 1 beschriebenen Kreise, dann die Axe der reellen Zahlen und eine Gerade durch $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ und $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$ theilen die Ebene in zwölf Gebiete*); irgend zwei benachbarte derselben mögen zu einem „Fundamentalgebiet" zusammengefasst werden. Man überzeugt sich dann leicht von der Richtigkeit des Satzes:**)

Die Variabilität des Moduls einer zweifach linear verknüpften Function mit vier Verzweigungspunkten kann durch geeignete lineare Transformationen des Argumentes auf die Fläche irgend eines der Fundamentalgebiete beschränkt werden.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten wie sich der charakteristische Parameter q bei den vorstehenden linearen Transformationen verhält. Dieser Punkt erledigt sich unmittelbar durch einen Blick auf die Gleichung (9). Man erkennt nämlich ohne Weiteres aus der Form der Function $F_0(x)$, dass der charakteristische Parameter q ebenfalls lineare Transformationen erleidet.

3.

Convergenzbedingungen der Reihe $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$. — Darstellung des Integrals der Normalgleichung durch diese Reihe.

Um die Existenz der Integrale der Differentialgleichung (12) zu erweisen, könnte man die Methode des Herrn Fuchs [Journ. f. Mathem. t. 66, pag. 148] oder diejenige des Herrn Frobenius [Journ. f. Mathem. t. 76, pag. 214] auf den gegenwärtigen speciellen Fall anwenden. Dies soll jedoch hier nicht geschehen, da die eigenthümliche Natur dieser Differentialgleichung ein weit kürzeres Beweisverfahren erlaubt, welches noch den besonderen Vortheil bietet, dass sich auch die Existenzbedingungen ihrer Integrale auf den Convergenzkreisen unmittelbar ergeben.***)

*) Man vergl. etwa die Figuren bei Klein, Math. Ann. Bd. XIV, pag. 115.

**) Die Formulirung des obigen Satzes verdanke ich der Güte des Herrn H. Burkhardt.

***) Nachträglich bin ich auf die Abhandlung des Herrn Thomé „Ueber Convergenz und Divergenz der Potenzreihen auf dem Convergenzkreise", im

Versucht man der Gleichung (12) durch eine Reihe von der Form

$$y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \cdot x^\nu$$

zu genügen, dann erhält man für die Coefficienten g_ν die dreigliedrige recurrente Relation

$$(13) \qquad f_0(\nu) \cdot f_1(\nu-1) \cdot g_{\nu-1} + f_2(\nu-2) \cdot g_{\nu-2} = 0.$$

Die Factoren f_0, f_1, f_2 bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\nu(\nu-1)(x-1)(x-a) + \chi(x) + x(x-q)\alpha\beta = f(x, \nu).$$
$$f(x, \nu) = f_0(\nu) + f_1(\nu) \cdot x + f_2(\nu) \cdot x^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_1(\nu) = -\frac{f_1(\nu-1)}{f_0(\nu)}, \quad \varphi_2(\nu) = \frac{f_2(\nu-2)}{f_0(\nu)}, \quad v_\nu = \frac{g_\nu}{g_{\nu-1}},$$

dann ist also

$$(14) \qquad v_\nu = \varphi_1(\nu) + \frac{\varphi_2(\nu)}{v_{\nu-1}}.$$

Aus dieser Relation erkennt man, dass v_ν auf die Form

$$v_\nu = C_0 + \frac{C_1}{\nu} + \frac{C_2}{\nu^2} + \cdots$$

gebracht werden kann. Nun ist aber auch

$$\varphi_1(\nu) = h_0 + \frac{h_1}{\nu} + \frac{h_2}{\nu^2} + \cdots,$$
$$\varphi_2(\nu) = k_0 + \frac{k_1}{\nu} + \frac{k_2}{\nu^2} + \cdots,$$

wo

$$h_0 = 1 + \frac{1}{a}, \; h_1 = \frac{1}{a}\{\alpha + \beta - \gamma + (a-1)\delta - (2a+1)\}, \cdots$$
$$k_0 = \frac{1}{a}, \; k_1 = \frac{1}{a}\{\alpha + \beta - \gamma - 3\}, \cdots.$$

Aus Gleichung (14) folgt

$$C_0C_0 - h_0C_0 + k_0 = 0, \quad 2C_0C_1 - h_0C_1 + k_1 = 0, \cdots$$

d. h.

$$C_0 = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{a}, \end{cases} \quad C_1 = \delta - 2 \quad \text{oder} \quad C_1 = \frac{1}{a}(\alpha+\beta-\gamma-\delta-1).$$

---

100. Bd. des *Journals f. Mathem.* aufmerksam geworden. Da jedoch die Zurückführung der Convergenzbetrachtungen der Integrale regulärer linearer Differentialgleichungen auf das von Herrn Weierstrass verallgemeinerte Gauss'sche Criterium einen wesentlich elementareren Charakter hat, als die von Herrn Thomé benutzten Hülfsmittel, so behalte ich die folgende Darstellung bei und bemerke noch, dass dieselbe von der besonderen Annahme $p = 2$, $i = 2$ unabhängig ist.

Es ist also

$$\lim_{\nu=\infty}(v_\nu) = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{\nu=\infty}(v_\nu) = \frac{1}{a}\cdot$$

Mithin convergirt die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \cdot x^\nu$ für $|x| < 1$ oder $|x| < |a|$.]
der Convergenzbereich keinen Verzweigungspunkt enthalten darf,
findet die Convergenz statt für $|x| < 1$ wenn $|a| > 1$ und für $|x| < |$
wenn $|a| < 1$ ist. Wir setzen jetzt $g_0 = 1$ und

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \cdot x^\nu = F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x),$$

dann hängt die Convergenz der Reihe $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ auf den Convergenzkreisen von den Werthen des Coefficienten C_1 ab. Nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass („Abhandlungen aus der Functionenlehre" pag. 220) ist also $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ absolut convergent

für $|a| > 1$ und $(x) = 1$, wenn *reller Bestandtheil* $(\delta - 2) < -1$

und

für $|a| < 1$ und $(x) = a$, wenn *reeller Bestandtheil* $(\alpha + \beta - \gamma - \delta - 1) < -1$

ist.

Ferner hat $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, a)$ einen bestimmten Werth, wenn reeller Bestandtheil von $(\delta - 2) < 0$ und $|a| > 1$ ist und ebenso $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ 1)$, wenn reeller Bestandtheil von $(\alpha + \beta - \gamma - \delta - 1) < 0$, vorausgesetzt dass $|a| < 1$ ist.

Die Integrale der Differentialgleichung (12) lassen sich in mannigfacher Weise durch die Reihe $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ ausdrücken. Hier sollen nur diejenigen angeführt werden, die in den Anwendungen von Vortheil sein können. Der Kürze wegen ist der charakteristische Parameter ausgelassen. [Man vergl. die Bemerkung am Ende von Nr. 2.]

$$F[a;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x],$$

$$(x-1)^\alpha F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha, \alpha-\delta+1, \gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{x-1}\right],$$

$$(x-1)^\alpha F\left[\frac{1}{a};\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{a}\right],$$

$$(x-1)^\alpha F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{x-a}\right],$$

$$(x-a)^\alpha F\left[1-a;\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \gamma, \delta;\ \frac{(1-a)x}{x-a}\right],$$

$$(x-a)^\alpha F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha, \alpha-\delta+1, \gamma, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{(a-1)x}{a(x-1)}\right];$$

$$x^{1-\gamma}F[a;\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \gamma,\ \delta;\ x],$$
$$x^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha}F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\gamma-\delta+2,\ 2-\gamma,\ \alpha-\gamma+1;\ \frac{x}{x-1}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha}F\left[\frac{1}{a};\ \alpha-\gamma+1,\ \delta-\beta+1,\ 2-\gamma,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{a}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha}F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha-\gamma+1,\ \delta-\beta+1,\ 2-\gamma,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{x-a}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-a)^{\alpha}F\left[1-a;\ \alpha-\gamma+1,\ \delta-\beta+1;\ 2-\gamma,\ \delta;\ \frac{(1-a)x}{x-a}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-a)^{\alpha}F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\gamma-\delta-2,\ 2-\gamma,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{(a-1)x}{a(x-1)}\right];$$

$$F[1-a;\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma;\ 1-x],$$
$$(x-1)^{\alpha}F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \delta,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x}\right],$$
$$(x-1)^{\alpha}F\left[\frac{1}{a};\ \alpha,\ \gamma+\delta-\beta,\ \delta,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x-a}\right],$$
$$F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{x-1}{a-1}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha}F\left[a;\ \alpha,\ \gamma+\delta-\beta,\ \delta,\ \gamma;\ \frac{a(x-1)}{x-a}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha}F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \delta,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a(x-1)}{(a-1)x}\right];$$

$$(x-1)^{1-\gamma}F[1-a;\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \delta,\ 2-\gamma;\ 1-x],$$
$$(x-1)^{\beta}F\left[\frac{a-1}{a};\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \delta,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{x-1}{x}\right],$$
$$(x-1)^{\beta}F\left[\frac{1}{a};\ \beta,\ \gamma+\delta-\alpha,\ \delta,\ \beta-\alpha+1;\ \frac{x-1}{x-a}\right],$$
$$(x-1)^{\gamma+\gamma-\alpha-\beta}F\left[\frac{1}{1-a};\ \gamma+\delta-\beta,\ \gamma+\delta-\alpha,\ \delta,\ \gamma+\delta-\alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x-a}\right],$$
$$(x-1)^{1-\delta}(x-a)^{\alpha}F\left[a;\ \alpha-\delta+1,\ \gamma-\beta+1,\ \delta,\ 2-\gamma;\ \frac{a(x-1)}{x-a}\right],$$
$$(x-1)^{\gamma+\delta-\alpha-\beta}(x-a)^{\alpha}F\left[\frac{a}{a-1};\ \gamma+\delta-\beta,\ \delta-\beta+1,\ \delta,\ \gamma+\delta-\alpha-\beta+1;\ \frac{a(x-1)}{(a-1)x}\right];$$

$$(x-1)^{\alpha}F\left[1-a;\ \alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x}\right],$$
$$F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \gamma;\ \frac{a-x}{a}\right],$$
$$(x-1)^{\alpha}F\left[a;\ \alpha,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x-1}\right],$$
$$F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \delta;\ \frac{x-a}{a-1}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha}F\left[\frac{1}{a};\ \alpha,\ \beta-\delta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \gamma;\ \frac{x-a}{a(x-1)}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha}F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \delta;\ \frac{a(x-a)}{(a-1)x}\right];$$

$$(x-a)^{1-\delta}(x-1)^{\alpha} F\left[1-a;\ \alpha-\delta+1, \alpha-\gamma-\delta+2, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x}\right],$$

$$(x-a)^{1-\gamma} F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, 2-\gamma;\ \frac{a-x}{a}\right],$$

$$(x-a)^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha} F\left[a;\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\gamma-\delta+2,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x-1}\right],$$

$$(x-a)^{1-\gamma} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \delta;\ \frac{x-a}{a-1}\right],$$

$$(x-a)^{\beta} F\left[\frac{1}{a};\ \beta,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \gamma;\ \frac{x-a}{a(x-1)}\right],$$

$$(x-a)^{\beta} F\left[\frac{a}{a-1};\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a(x-a)}{(a-1)x}\right];$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{1}{a};\ \alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \delta;\ \frac{1}{x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha-\beta+1,\ \gamma;\ \frac{1}{1-x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[a;\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a}{x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha,\ \gamma+\delta-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \gamma;\ \frac{a}{a-x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[1-a;\ \alpha,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a-1}{x-1}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha,\ \gamma+\delta-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \delta;\ \frac{1-a}{x-a}\right];$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{1}{a};\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \delta;\ \frac{1}{x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{1}{1-a};\ \beta,\ \beta-\delta+1,\ \beta-\alpha+1.\ \gamma;\ \frac{1}{1-x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[a;\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a}{x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{a}{a-1};\ \beta,\ \gamma+\delta-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \gamma;\ \frac{a}{a-x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[1-a;\ \beta,\ \beta-\delta+1,\ \beta-a+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a-1}{x-1}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{a-1}{a};\ \beta,\ \gamma+\delta-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \delta;\ \frac{1-a}{x-a}\right].$$

Aus den vorstehenden Integralen lässt sich durch passende Combination, in mannichfacher Weise, eine allgemeine Lösung der Gleichung (12) herstellen, welche für einen gewissen Bereich des Argumentgebietes gültig ist.

4.

Die Relationen zwischen „gleichgruppigen" Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten.

Wir wenden uns jetzt zu demjenigen Theil der Theorie unserer Function, welcher den Gauss'schen *Relationes inter functiones contiguas* entspricht. Zwischen den drei Functionen

$$F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x), \quad F(a, q'; \alpha', \beta', \gamma', \delta'; x),$$
$$F(a, q''; \alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''; x),$$

für welche die Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\alpha - \alpha''$, $\beta - \beta'$, ..., $\delta - \delta''$ ganzen Zahlen oder theilweise der Null gleich sind, besteht eine homogene lineare Relation mit rationalen Coefficienten wenn die Substitutionen der zugehörigen Differentialgleichungen übereinstimmen. Die folgende Methode gestattet es die letztere, nothwendige und hinreichende Bedingung zum analytischen Ausdruck zu bringen, ohne auf die Substitutionen selbst Bezug zu nehmen. Statt der F-Functionen wollen wir die allgemeineren Functionen betrachten, welche der Differentialgleichung (5) genügen. Die Indicescharakteristik eines Integrals dieser Gleichung sei

$$\begin{array}{cccc} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda'_{11}, & \lambda'_{12}, & \lambda'_{13}, & \lambda'_{14} \\ \lambda'_{21}, & \lambda'_{22}, & \lambda'_{23}, & \lambda'_{24} \end{array}\right\},$$

so dass also

$$h = 2 - \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda'_{1i} + \lambda'_{2i})$$

ist.

Eine Lösung der Gleichung (6) habe die Charakteristik

$$\begin{array}{cccc} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} \end{array}\right\}$$

wo die Bedingung

$$0 = 2 - \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})$$

erfüllt sein muss.

Man bilde nun das Schema der Indicesdifferenzen:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda'_{11} - \lambda_{11}, & \lambda'_{12} - \lambda_{12}, & \lambda'_{13} - \lambda_{13}, & \lambda'_{14} - \lambda_{14} \\ \lambda'_{21} - \lambda_{21}, & \lambda'_{22} - \lambda_{22}, & \lambda'_{23} - \lambda_{23}, & \lambda'_{24} - \lambda_{24} \end{array}\right\},$$

Damit die Gleichungen (5) und (6) übereinstimmende Substitutionen besitzen, müssen diese Indicesdifferenzen *ganze* Zahlen sein. Bezeichnet man jetzt mit $\mathfrak{d}_i$ diejenige Differenz in der i^{ten} Verticalreihe des vorstehenden Schemas, welche von der anderen um eine positive Zahl (incl. Null) übertroffen wird, dann ist [cf. *Acta Math.* t. 11, pag. 105]

$$y = (x-\xi_1)^{\mathfrak{d}_1}(x-\xi_2)^{\mathfrak{d}_2}(x-\xi_3)^{\mathfrak{d}_3}\left\{P_0[h-D]\cdot y_0 + \psi\cdot P_1[h-D-2]\cdot\frac{dy_0}{dx}\right\}$$

wo y und y_0 die Lösungen der Gleichungen (5) und (6) bedeuten und

$$D = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3 + \mathfrak{d}_4, \quad \psi = (x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)$$

gesetzt ist. Die Grade der ganzen rationalen Functionen P_0 und P_1 sind in den beigefügten Klammern angedeutet. Wir setzen ferner

$$y = (x-\xi_1)^{\mathfrak{d}_1}(x-\xi_2)^{\mathfrak{d}_2}(x-\xi_3)^{\mathfrak{d}_3}\cdot z.$$

In Folge der Gleichung (7) genügt die Function z einer Differentialgleichung von der Form

(5a) $$\psi^2\cdot G_2[h]\,\frac{d^2z}{dx^2} + \psi G_1[h+2]\cdot\frac{dz}{dx} + G_0[h+4]\cdot z = 0.$$

Aus der Gleichung

$$z = P_0\cdot y_0 + \psi P_1\cdot\frac{dy_0}{dx}$$

entwickele man $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ indem man gleichzeitig $\frac{d^2y}{dx^2}$ mittelst der Gleichung (6) eliminirt. Die so erhaltenen Werthe von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ führe man in die Gleichung (5a) ein. Hierdurch nimmt dieselbe die Form an

$$\psi H_1[2h-D+2]\,\frac{dy_0}{dx} + H_2[2h-D+4]\cdot y_0 = 0.$$

Setzt man aber voraus, die Gleichung (6) sei irreductibel, dann müssen die Gleichungen

(A) $$H_0 = 0,\ H_1 = 0$$

für jeden Werth von x befriedigt sein. Hierdurch sind $2(2h-D)+8$ Bedingungen gegeben. Sind diese $2(2h-D)+8$ Gleichungen von einander unabhängig, dann genügen sie zur Bestimmung von ebensovielen unbekannten Grössen. Dies ist in der That der Fall, wenn nicht ganz besondere Bedingungen zwischen den Verzweigungsindices der Function y_0 vorausgesetzt werden. Als Unbekannte wollen wir zunächst ansehen:

erstens $2(h-D)-1$ Coefficienten in den Functionen P_0 und P_1,
zweiten $2h+8$ Coefficienten in den Functionen G_0 und G_1,
drittens die h Wurzeln der Gleichung $G_2[h]=0$, welche im Folgenden die *individuellen* Parameter der Differentialgleichung (5a) genannt werden mögen.

Damit nun diese Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der in Rede stehenden Gleichungen sei, muss die Bedingung stattfinden

$$5h - 2D + 7 = 4h - 2D + 8$$

d. h. es muss $h = 1$ sein.

Betrachten wir jedoch als Unbekannte

erstens $2(h-D) - 1$ Coefficienten in den Functionen P_0 und P_1,

zweitens die 8 Coefficienten in den Functionen F_0 und F_1

drittens $2h$ der $2h + 1$ Coefficienten in den Functionen G_0 und G_1, welche durch die Indices λ'_{pi} $(p=1, 2;\ i=1, 2, 3, 4)$ *nicht* bestimmt sind,

dann ist die Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der Gleichungen, welche aus (A) fliessen, welchen Werth auch h besitzen mag. Diese Gleichungen sind im Allgemeinen von einander unabhängig.

Setzen wir endlich $h = 0$, dann wird

$$\sum_{i=1}^{i=4}(\lambda'_{1i} + \lambda'_{2i}) = \sum_{i=1}^{i=4}(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) = 2.$$

Als Unbekannte sind anzusehen:

erstens $-2D - 1$ Coefficienten in den Functionen P_0 und P_1,

zweitens 8 Coefficienten in den Functionen G_0 und G_1,

drittens der *charakteristische* Parameter in der Function F_0.

$-2D + 8$ Unbekannte werden durch ebensoviele Gleichungen bestimmt, welche im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Ein Beispiel diene zur Erläuterung. In dem speciellen Falle der Reduction von $F(a, q'; \alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1; x)$ auf $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ und deren Derivirte setze man (da $\mathfrak{d}_1 = -1$, $\mathfrak{d}_2 = -1$, $\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{d}_4 = 0$)

$$z = \varphi \cdot F(q; x) + \psi \cdot \frac{dF(q; x)}{dx}; \quad \varphi = p_0 + p_1 x + p_2 x^2.$$

Die Function z genügt einer Gleichung von der Form

$$x(x-1)\psi \frac{d^2 z}{dx^2} + x(x-1)\Theta \cdot \frac{dz}{dx} + \sigma \cdot z = 0.$$

Mittelst der Gleichungen (8) und (9) findet man

$$\Theta = (\gamma-1)(x-1)(x-a) + (\delta-1)x(x-a) + (\alpha+\beta-\gamma-\delta-1)x(x-1),$$
$$\sigma = -2\psi - (2x-1)\Theta + \alpha\beta\, x(x-1)(x-q').$$

Die Function $y_0 = F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ genügt der Gleichung (12), welche wir in die Form bringen

$$\psi \frac{d^2 y_0}{dx^2} + \chi \cdot \frac{dy_0}{dx} + \varpi \cdot y_0 = 0,$$

wo also

$$\chi = a\bar{\gamma} - \{\alpha+\beta+a\gamma+(a-1)\delta+1\}x+(\alpha+\beta+1)x^2$$

und

$$\varpi = \alpha\beta(x-q)$$

ist. Die Gleichungen (A) heissen jetzt

$$[\sigma-x(x-1)\varpi]\cdot\varphi+x(x-1)[\Theta\varphi'+\psi\varphi'']-x(x-1)[(\psi\varpi)'+(\Theta-\chi)\varpi]=0,$$
$$(\Theta-\chi)\varphi+2\psi\varphi'+(\Theta-\chi)(\psi'-\chi)+\psi[\psi''-\chi'-\varpi]+(x-a)\sigma=0.$$

Diese Gleichungen müssen nach Potenzen von x geordnet werden. Alsdann sind alle Coefficienten der Null gleichzusetzen. Auf diese Weise erhält man die folgenden Relationen*)

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \bar{\varkappa}_0 p_0 = 0,\\
&2.\quad \bar{\varkappa}_0 p_0 + (\bar{\varkappa}_0 - g_0')p_1 + \bar{k}_0 = 0,\\
&3.\quad \bar{\varkappa}_2 p_0 + (\bar{\varkappa}_1 + g_0' - g_1')p_1 + (\bar{\varkappa}_0 - 2g_0' - 2a)p_2 + \bar{k}_1 - \bar{k}_0 = 0,\\
&4.\quad \bar{\varkappa}_3 p_0 + (\bar{\varkappa}_2 + g_1' - g_2')p_1 + (\bar{\varkappa}_1 + 2g_0' - 2g_1' + 4a + 2)p_2\\
&\qquad\qquad + \bar{k}_2 - \bar{k}_1 = 0,\\
&5.\quad (\bar{\varkappa}_3 + g_2')p_1 + (\bar{\varkappa}_2 + 2g_1' - 2g_2' - 2a - 4)p_2\\
&\qquad\qquad + \bar{k}_3 - \bar{k}_2 = 0,\\
&6.\quad (\bar{\varkappa}_3 + 2g_2' + 2)p_2 - \bar{k}_3 = 0,\\
&7.\quad \bar{g}_0 p_0 + \bar{g}_0 h_0 - a k_0' = 0,\\
&8.\quad \bar{g}_1 p_0 + (\bar{g}_0 + 2a)p_1 + \bar{g}_0 h_1 + \bar{g}_1 h_0 + a\varkappa_0 + k_0' - a k_1' = 0,\\
&9.\quad \bar{g}_2 p_0 + (\bar{g}_1 - 2a - 2)p_1 + (\bar{g}_0 + 4a)p_2 + \bar{g}_0 h_2 + \bar{g}_1 h_1 + \bar{g}_2 h_0\\
&\qquad\qquad + a\varkappa_1 - (a+1)\varkappa_0 + k_1' - a k_2' = 0,\\
&10.\quad (\bar{g}_2 + 2)p_1 + (\bar{g}_1 - 4a - 4)p_2 + \bar{g}_1 h_2 + \bar{g}_2 h_1 + \varkappa_0\\
&\qquad\qquad - (a+1)\varkappa_1 + k_2' - a k_3' = 0,\\
&11.\quad (\bar{g}_2 + 4)p_2 + \bar{g}_2 h_2 + \varkappa_1 + k_3' = 0.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\chi = g_0 + g_1 x + g_2 x^2,\quad \Theta = g_0' + g_1' x + g_2' x^2,$$
$$\Theta - \chi = \bar{g}_0 + \bar{g}_1 x + \bar{g}_2 x^2,\quad \psi' - \chi = h_0 + h_1 x + h_2 x^2,$$
$$\varpi = k_0 + k_1 x,\quad \sigma = k_0' + k_1' x + k_2' x^2 + k_3' x^3,$$
$$(\psi\varpi)' + (\Theta-\chi)\varpi = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 x + \bar{k}_2 x^2 + \bar{k}_3 x^3,$$
$$\psi'' - \chi' - \varpi = \varkappa_0 + \varkappa_1 x,\quad \sigma - x(x-1)\varpi = \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1 x + \bar{\varkappa}_2 x^2 + \bar{\varkappa}_3 x^3.$$

*) Die Anzahl dieser Gleichungen ist hier 11 und nicht wie im allgemeinen Falle 12, weil die Gleichung (6) hier durch ψ theilbar ist und die Gleichung (5) durch $x - a$.

Mithin ist

$$\bar{g}_0 = -a,\ \bar{g}_1 = 2a+3,\ \bar{g}_2 = -4,\ h_0 = a - g_0,$$
$$h_1 = -2(a+1) - g_1,\quad h_2 = 3 - g_2,$$
$$k_0' = g_0',\ k_1' = \alpha\beta q' + g_1' - 2g_0' - 2a,\ k_2' = -\alpha\beta q' + g_2' - 2g_1' - k_1 + 2(a+1),$$
$$k_3' = -2g_2' + k_1 - 2,\ \varkappa_0 = -2(a+1) - g_1 - k_0,\ \varkappa_1 = 6 - 2g_2 - k_1,$$
$$\bar{k}_0 = 0,\ \bar{k}_1 = [\bar{g}_1 - 2(a+1)]k_0 + (\bar{g}_0 + 2a)k_1,$$
$$\bar{k}_2 = (\bar{g}_2 + 3)k_0 + (g_1 - 3a - 3)k_1,\ \bar{k}_3 = 0,$$
$$\bar{\varkappa}_0 = k_0',\ \bar{\varkappa}_1 = k_0 + k_1',\ \bar{\varkappa}_2 = k_1 - k_0 + k_2',\ \bar{\varkappa}_3 = k_3' - k_1.$$

Da $\bar{\varkappa}_0$ von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung 1. $p_0 = 0$. Gleichung 2. ist identisch Null. Ebenso die Gleichung 6., 7. und 11. Aus Gleichung 8. folgt

$$p_1 = \alpha\beta(q'-q) + g_1 + 2\gamma + 1.$$

Die Gleichungen 3. und 5. lassen sich auf die Form bringen

$$[\alpha\beta(q'-q) - g_0' - 2a]p_1 - (g_0' + 2a)p_2 + k_0 + ak_1 = 0,$$
$$-(g_1' + 2)p_1 - [\alpha\beta(q'-q) + g_2' + g_2' + 2]p_2 + k_0 + ak_1 = 0.$$

Folglich ist

$$p_1 = -p_2 = \frac{k_0 + ak_1}{\alpha\beta(q'-q)} = \frac{a-q}{q'-q}.$$

Die Gleichsetzung der beiden erhaltenen Ausdrücke für p_1 liefert die Relation

(a) $$\alpha\beta(q'-q)^2 + (g_1 + 2\gamma + 1)(q'-q) + q - a = 0.$$

Die Gleichungen 9. und 10. geben aber

$$3ap_2 = (a+2)\alpha\beta(q-q') + 2ag_2 - ag_1 - 2g_0 - 2\gamma - 3a,$$
$$(2a+1)p_2 = 3\alpha\beta(q-q') + 2ag_2 - g_1 - 4\gamma - (2a+1).$$

Durch Elimination von p_2 folgt hieraus unter Annahme $a \gtrless 1$

(b) $$\alpha\beta(q'-q) - a\delta - (a-1)\gamma = 0.$$

Damit die Gleichungen (a) und (b) nebeneinander bestehen können, muss also sein

(c) $$q = a + \frac{(\gamma+\delta-\alpha-\beta)\,[(a-1)\gamma + a\delta]}{\alpha\beta}.$$

Folglich wird

(d) $$q' = a + \frac{(\gamma+\delta-\alpha-\beta+1)\,[(a-1)\gamma + a\delta]}{\alpha\beta}$$

und

$$p_1 = \gamma + \delta - \alpha - \beta.$$

Die Reductionsgleichung nimmt jetzt die Form an

$$[F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = F(q; x) \text{ gesetzt}]$$

$$m \cdot F(a, q'; \alpha, \beta, \gamma+1, \delta+1; x) = (\alpha+\beta-\gamma-\delta) F(q; x) + (x-a) \frac{dF(q; x)}{dx},$$

wo m eine Constante bedeutet. Setzt man $x = 0$, dann geht die vorstehende Gleichung über in

$$m = (\alpha+\beta-\gamma-\delta) - \frac{\alpha\beta}{\gamma} q.$$

Durch Einführung dieses Werthes erhält man

$$[\gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta)-\alpha\beta q] F(a, q'; \alpha, \beta, \gamma+1, \delta+1; x)$$
$$= \gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta) F(q; x) + \gamma(x-a) \frac{dF(q; x)}{dx}.$$

In dieser Relation sind für q und q' ihre Werthe aus den Gleichungen (c) und (d) zu setzen. Ferner ist die Bedingung $a \gtrless 1$ als eine nothwendige anzusehen. Nur in dem speciellen Falle $q = 1$, $\delta = 0$ darf $a = 1$ werden, wie man aus Gleichung (e) erkennt. Alsdann geht die vorstehende Relation über in die bekannte Gauss'sche Gleichung zwischen hypergeometrischen Reihen:

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)$$
$$= \gamma(\gamma-\alpha-\beta) F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \alpha\beta(x-1) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

Das vorstehende Beispiel mag genügen um die Behauptung zu rechtfertigen die aus den Relationen (A) fliessenden Gleichungen seien im Allgemeinen von einander unabhängig. Die unter dieser Bedingung oben erhaltenen Resultate lassen sich in den folgenden Sätzen zusammenfassen.

Soll sich die Function $F(a, q'; \alpha', \beta', \gamma', \delta'; x)$ durch die Function $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ und deren erste Derivirte rational ausdrücken lassen, so genügt es nicht, dass die Differenzen $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'-\gamma$, $\delta'-\delta$ ganze Zahlen sind, sondern die charakteristischen Parameter q und q' müssen bestimmte Functionen von $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sein.

Dagegen lässt sich die Riemann'sche Function, welche einer Differentialgleichung von der Form

$$(x-\varrho)(x-1)(x-a)x \frac{d^2y}{dx^2} + G_1[3] \frac{dy}{dx} + G_2[5] \cdot y = 0$$

genügt, im Allgemeinen durch die Function $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ und deren erste Derivirte rational ausdrücken, wenn der individuelle Parameter ϱ, der nicht mit einem Verzweigungspunkt *zusammenfallen darf, passend bestimmt wird. Der charakteristische Parameter q kann hierbei willkürlich angenommen werden.*

Eine Riemann'sche Function zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten und einer beliebigen Anzahl beliebiger individueller Parameter lässt sich rational durch die Function $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ und deren Derivirte ausdrücken, wobei die Grösse q festgelegt wird.

Will man also für die hier untersuchten Functionen Gleichungen aufstellen, welche den Gauss'schen relationes inter functiones contiguas entsprechen, dann muss man wenigstens zweien derselben je *einen* individuellen Parameter zuertheilen, *dessen Werth nicht willkürlich angenommen werden kann.* Andernfalls müssen die Verzweigungsexponenten bestimmten Bedingungen genügen. Hierdurch unterscheiden sich diese Functionen wesentlich von den hypergeometrischen. Dieser Unterschied lässt sich auch so ausdrücken:

Alle Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit drei Verzweigungspunkten lassen sich durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellen. Die Functionen derselben Ordnung mit zwei Verzweigungspunkten lassen sich durch die Function $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ und deren erste Derivirte ausdrücken.

Frankfurt a./M., 12. Mai 1888.

Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Functionen.

Von

Karl Heun in München.

Gauss hat in der Abhandlung „Methodus nova integralium valores per approxim. inveniendi“ die Gruppe der Differentialgleichung, welche durch die Kugelfunctionen integrirt wird, aufgefunden. Jacobi erhielt im 56. Bd. des Crelle'schen Journals das analoge Resultat für alle hypergeometrischen Differentialgleichungen, welche eine rationale Lösung besitzen. Heine ist in dieser Richtung noch weiter vorgedrungen und gelangte im 60. Bd. desselben Journals zur Gruppe der sogenannten Lamé'schen Differentialgleichung. Selbstverständlich ist gerade die gruppentheoretische Bedeutung der Resultate in diesen Arbeiten nicht hervorgehoben. Thatsächlich haben aber die genannten Mathematiker specielle gruppentheoretische Probleme *vollständig* gelöst. Der Umstand, dass die Resultate im Gewande des Kettenbruchalgorithmus auftraten, musste die Erkenntniss ihrer *wesentlichen* Bedeutung erschweren. Aber man darf desshalb den Kettenbruch doch nicht als ein *zufälliges* Moment in diesen Untersuchungen auffassen. Er hat eine wohl definirte Stellung in der Riemann'schen Theorie der Differentialgleichungen. Um dies zu erläutern will ich das Gauss'sche Resultat als Beispiel benutzen. In der üblichen Bezeichnung für die Kugelfunctionen ist nämlich

$$Q^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\lg\frac{x+1}{x-1}\cdot P^{(n)}(x) - Z^{(n)}(x),$$

wo $Z^{(n)}(x)$ eine ganze Function vom Grade $\overline{n-1}$ bedeutet. Man erkennt aus dieser Relation ohne Weiteres, dass die Gruppe für die Differentialgleichung der Kugelfunctionen durch den Periodicitätsmodul der Function $\frac{1}{2}\lg\frac{x+1}{x-1}$ bestimmt ist und dass dieselbe eine *discrete*, in der Terminologie des Herrn Poincaré ist. Die recurrente Relation zwischen drei consecutiven Näherungsnennern oder den zugehörigen Resten der Kettenbruchentwicklung von $\frac{1}{2}\lg\frac{x+1}{x-1}$, welche $P^{(n)}(x)$

und $Q^{(n)}(x)$ liefert, ist eine „relatio inter functiones contiguas“ in der Gauss'schen Benennung. Der Kettenbruch bestimmt also nicht allein die *Gruppe*, sondern auch *Relationen* zwischen gleichgruppigen Functionen.

Für die sogenannten Lamé'schen Functionen hat Heine l. c. die Function, welche in einen Kettenbruch zu entwickeln ist, vollständig bestimmt und bewiesen, dass diese Theilnenner bis zu einer gewissen Stelle lineär, der nächstfolgende aber quadratisch wird. Wie der Kettenbruch jenseits dieser kritischen Stelle beschaffen ist, blieb unentschieden. Die formale Theorie des Kettenbruchalgorithmus konnte keinen Aufschluss geben. An eine wirkliche Aufstellung der fraglichen Theilbrüche war auch nicht zu denken. Es bieten sich aber in der soeben angedeuteten gruppentheoretischen Interpretation des Kettenbruchs die hinreichenden Hilfsmittel zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe dar. Man kann nämlich die Differentialgleichungen aufstellen, welchen die Näherungsnenner genügen und hieraus die recurrenten Relationen, die zwischen denselben bestehen, herleiten. In dieser Weise ergab sich, dass diejenigen Theilnenner, welche auf den quadratischen folgen, ausnahmelos lineär sind. Der Kettenbruch wird also jenseits der erwähnten kritischen Stelle wieder regulär.

1.

Die sogenannten Lamé'schen Functionen sind *specielle* Riemann'sche Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. Ihr Indicesschema ist

$$\left\{\begin{array}{cccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{a} & \underline{\infty} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{n}{2}+\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Setzt man

$$F(a,\, q;\; \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta;\; x)$$
$$= 1 + \alpha\beta \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{G^{(\nu)}(q)}{1\,.\,2\ldots\nu\,.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)} \left(\frac{x}{a}\right)^{\nu},$$

wo

$$G^{(1)}(q) = q, \quad G^{(2)}(q) = \alpha\beta q^2 + \{\alpha+\beta-\delta+1+(\gamma+\delta)\,a\}\, q - a\gamma$$

und allgemein

$$G^{(\nu+1)}(q) = \{\nu[\alpha+\beta-\delta+\nu+(\gamma+\delta+\nu-1)\,a] + \alpha\beta q\}\cdot G^{(\nu)}(q)$$
$$-(\alpha+\nu-1)(\beta+\nu-1)(\gamma+\nu-1)\,\nu a\cdot G^{(\nu-1)}(q),$$

dann sind

$$
\begin{array}{rl}
& F\left(a,\, q;\ -\frac{n}{2},\ \ \frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x\right),\\
\sqrt{x(x-1)}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ x\right),\\
\sqrt{x(x-a)}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2};\ x\right),\\
\sqrt{(x-1)\,(x-a)}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ x\right),\\
\sqrt{x}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2};\ x\right),\\
\sqrt{x-1}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ x\right),\\
\sqrt{x-a}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x\right),\\
\sqrt{x(x-1)(x-a)}\cdot & F\left(a,\, q;\ -\frac{n-3}{2},\ \frac{n}{2}+2,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ x\right),
\end{array}
$$

Functionen, welche das obige Indicesschema besitzen. Der charakteristische Parameter q ist in jedem der vorstehenden 8 Fälle so zu bestimmen, dass die betreffende F-Function eine ganze rationale Function wird. Nun stellt aber bekanntlich die Reihe $F(a,q;\,\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$ eine ganze rationale Function m^{ten} Grades dar, wenn $\alpha = -m$ und q eine Wurzel der Gleichung $G^{(m+1)}(q) = 0$ ist. Da die obigen F-Functionen alle in der Form

$$F\left(a, q;\ -m,\ m-\sigma+2,\ 1-\frac{1}{2}\varepsilon_1,\ 1-\frac{1}{2}\varepsilon_2;\ x\right)$$

enthalten sind, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Werthe $+1$ oder -1 annehmen und zur Abkürzung $\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$ gesetzt ist, so muss das betreffende q in jedem Falle der Gleichung $G^{(m+1)}(q) = 0$ genügen, wenn

$$G^{(1)}(q) = q,$$

$$G^{(2)}(q) = -m(m-\sigma+2)\,q^2 + $$
$$+\left\{2-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+\left[2-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]a\right\}q-\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)a$$

und allgemein

$$\text{(A)}\quad G^{(\nu+1)}(q) = \left[\nu\left\{\left[\nu-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+1\right]+\left[\nu-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+1\right]a\right\}\right.$$
$$\left. - m(m-\sigma+2)\,q\right]\cdot G^{(\nu)}(q) -$$
$$-\nu\left(\nu-\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)(\nu-m-1)\,(\nu+m-\sigma+1)\,a\ G^{(\nu-1)}(q)$$

ist. Die Gleichung $G^{(m+1)}(q) = 0$ ist also in Bezug auf die Unbekannte q vom Grade $m + 1$. Ueber ihre Wurzeln sind mehrfach Untersuchungen angestellt worden. Ich verweise in dieser Beziehung auf Heine, „Handbuch der Kugelfunctionen" Bd. I, p. 364 und auf eine Abhandlung des Herrn F. Klein in den Mathem. Annalen Bd. 18.

Die Werthe von ε_1, ε_2, ε_3 und m für die obigen 8 Functionen sind in derselben Anordnung diese

ε_1	ε_2	ε_3	m	ε_1	ε_2	ε_3	m
$+1$,	$+1$,	$+1$,	$\frac{n}{2}$;	-1,	$+1$,	$+1$,	$\frac{n-1}{2}$;
-1,	-1,	$+1$,	$\frac{n}{2}-1$;	$+1$,	-1,	$+1$,	$\frac{n-1}{2}$;
-1,	$+1$,	-1,	$\frac{n}{2}-1$;	$+1$,	$+1$,	-1,	$\frac{n-1}{2}$;
$+1$,	-1,	-1,	$\frac{n}{2}-1$;	-1,	-1,	-1,	$\frac{n-3}{2}$.

Durch das Symbol $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ können wir also eine *bestimmte* Form Lamé'scher Functionen bezeichnen. Für die Function $(+1, +1, +1)$ heisst z. B. die Gleichung (A)

$$G^{(\nu+1)}(q) = \left[(a+1)\,\nu^2 - \frac{1}{4}\,n(n+1)\right]\cdot G^{(\nu)}(q)$$
$$-\frac{1}{8}\,\nu(2\nu-1)\,(2\nu+n-1)\,(2\nu-n-2)\,a\cdot G^{(\nu-1)}(q)$$

und es wird

$$G^{(2)}(q) = -\frac{1}{4}\,n(n+1)\,q^2 + (a+1)\,q - \frac{1}{2}\,a.$$

Folglich heisst für $n = 2$ die Gleichung, welche den charakteristischen Parameter bestimmt,

$$q^2 - \frac{2}{3}\,(a+1)\,q + \frac{1}{3}\,a = 0.$$

Die beiden Werthe für q sind also in diesem Falle

$$\frac{1}{3}\left[a+1+\sqrt{a^2-a+1}\right] \quad \text{und} \quad \frac{1}{3}\left[a+1-\sqrt{a^2-a+1}\right].$$

Sie fallen zusammen, wenn a einen der Werthe $\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{-3}\right]$, $\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{-3}\right]$ annimmt; d. h. der Punkt a coincidirt mit einem der Endpunkte der Basis des „Modulardreiecks". [Man vergl. Nr. 2 der vorhergehenden Abhandl.]

Da die Function $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ der Gleichung

$$x(x-1)(x-a)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$\Big[(\alpha+\beta+1)x^2-\{\alpha+\beta-\delta+1+(\gamma+\delta)a\}x+a\gamma\Big]\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$+\alpha\beta(x-q)\cdot y=0$$

genügt, so muss der rationale Bestandtheil der Function $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, welcher gleich

$$F\Big(a, q;\ -m,\ m-\sigma+2,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2;\ x\Big)$$

ist, ein Integral der Gleichung

$$\text{(I)}\qquad x(x-1)(x-a)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$\Big[(3-\sigma)x^2-\Big\{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2-\sigma+2+\Big[2-\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Big]a\Big\}x+\Big(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\Big)a\Big]\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$-m(m-\sigma+2)(x-q)\,y=0$$

sein, während die Function $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ selbst die Gleichung

$$\text{(1)}\qquad \psi(x)\cdot\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{2}\,\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{dw}{dx}-\frac{1}{4}\,n(n+1)\cdot w=0$$

befriedigt.

Die Integrale der Differentialgleichung (I) lassen sich in mannigfacher Weise durch die F-Function ausdrücken. So hat man z. B. für den Punkt $x=\infty$ die Lösungen

$$y_1=x^m F\Big(\frac{1}{a}, \bar{q};\ -m,\ -m+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ -2m+\sigma-1,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2;\ \frac{1}{x}\Big),$$

$$y_2=x^{-(m-\sigma+2)}F\Big(\frac{1}{a}, \bar{q};\ m-\sigma+2,\ m-\sigma+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1+2,\ 2m-\sigma+3,$$
$$1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2;\ \frac{1}{x}\Big),$$

wo $\bar{q}$ eine lineäre Function von q ist, welche einer Gleichung

$$\bar{G}^{(m+1)}(\bar{q})=0$$

genügt, die der Gleichung $G^{(m+1)}(q)=0$ entspricht. y_1 unterscheidet sich also von

$$F\Big(a, q;\ -m,\ m-\sigma+2,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2;\ x\Big)$$

nur durch einen constanten Factor. Man kann demnach alle Lamé'schen Functionen darstellen durch den Ausdruck

$$\text{(1a)}\qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)=x^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}(x-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}(x-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{4}}$$
$$\cdot\, x^m F\Big(\frac{1}{a}, \bar{q};\ -m,\ -m+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ -2m+\sigma-1,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2;\ \frac{1}{x}\Big),$$

wo für $\bar{q}$ eine der $m+1$ Wurzeln der Gleichung $\bar{G}^{(m+1)}(\bar{q})=0$ zu setzen ist. Heine nennt auch die Function

$$x^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}(x-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}(x-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{4}}$$
$$\cdot x^{-(m-\sigma+2)} F\left(\frac{1}{a}, \bar{q};\ m-\sigma+2,\ m-\sigma+\frac{1}{2}\varepsilon_1+2,\ 2m-\sigma+3,\ 1-\frac{1}{2}\varepsilon_2;\ \frac{1}{x}\right)$$

eine Lamé'sche und unterscheidet beide Ausdrücke als Functionen *erster* und *zweiter Art*. Wir verstehen im Folgenden unter Lamé'schen Functionen nur die durch die Gleichung (1a) definirten Ausdrücke.

2.

Heine hat bekanntlich den rationalen Theil der Lamé'schen Functionen mit der Kettenbruchentwicklung ganzer elliptischer Integrale dritter Gattung in Verbindung gebracht und gefunden, dass derselbe sich als ein bestimmter Näherungsnenner auffassen lässt. In unserer Bezeichnung lautet dieses Resultat:

Der rationale Bestandtheil von $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ist der m^{te} Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung der Function

$$W = r_1 \int_0^1 \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}} + r_2 \int_1^a \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}}, \qquad |a| > 1,$$

wo $\varphi(z) = z^{\varepsilon_1}(z-1)^{\varepsilon_2}(z-a)^{\varepsilon_3}$ gesetzt ist und r_1, r_2 so zu bestimmen sind, dass der $\overline{m+1}^{te}$ Theilnenner, in Bezug auf x, nicht wie die vorhergehenden, lineär sondern vom zweiten Grade wird. Der zugehörige Rest, multiplicirt in $\sqrt{\varphi(x)}$, ist identisch mit der Function

$$x^{-(m-\sigma+2)} \cdot F\left(\frac{1}{a}, \bar{q};\ -m,\ -m+\frac{1}{2}\varepsilon_1,\ -2m+\sigma-1,\ 1-\frac{1}{2}\varepsilon_2;\ \frac{1}{x}\right)$$

also, ebenso wie der Nenner, eine Lösung der Differentialgleichung (I).

Die Kettenbruchentwicklung der Function W ist von Heine selbst nicht weiter untersucht. Die Theilnenner, welche dem quadratischen vorangehen, habe ich zuerst in meiner Inauguraldissertation „Die Kugelfunctionen und Lamé'schen Functionen als Determinanten" (Göttingen 1881) explicite dargestellt.

Bezeichnet man mit $N^{(\nu)}(x)$, $Z^{(\nu)}(x)$, $R^{(\nu)}(x)$ den Näherungsnenner, Näherungszähler und zugehörigen Rest ν^{ten} Ranges der Kettenbruchentwicklung von W, dann ist nach dem obigen Satze:

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = x^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}} (x-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}} (x-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{4}} \cdot N^{(m)}(x).$$

Ohne Weiteres erkennt man aber, dass bei festgehaltenem m die Functionen

$N^{(m-1)}(x)$, $N^{(m-2)}(x) \ldots N^{(1)}$ sowie $N^{(m+1)}(x)$, $N^{(m+2)}(x), \ldots$,

jede mit der Irrationalität $x^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}} (x-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}} (x-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{4}}$ multiplicirt, *keineswegs* Lamé'sche Functionen sind, so lange $|a| > 1$ ist. Es entsteht also die Frage, welche *functionentheoretische* Stellung diese „adjungirten" Functionen zu den Lamé'schen Functionen einnehmen. Ehe ich jedoch diesen Punkt untersuche, will ich noch eine Bemerkung zu dem Heine'schen Satze beifügen.

Die Function W hat die Form

$$W = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{c_s}{x^s}$$

wo

$$c_s = r_1 \int_0^1 \frac{z^{s-1}\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}} + r_2 \int_1^a \frac{z^{s-1}\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Die ganzen elliptischen Integrale $\int_0^1 \frac{z^{s-1}\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$, $\int_1^a \frac{z^{s-1}\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$ lassen sich durch die Integrale

$$\alpha_1^{(0)} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \quad \alpha_2^{(0)} = \int_1^a \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \quad \alpha_1^{(1)} = \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}},$$

$$\alpha_2^{(1)} = \int_1^a \frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

rational ausdrücken, denn es ist

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} = \int z^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} (z-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{2}} (z-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

Wir setzen also

(a) $\qquad c_s = r_1 (g_s^{(0)} \alpha_1^{(0)} + g_s^{(1)} \alpha_1^{(1)}) + r_2 (g_s^{(0)} \alpha_2^{(0)} + g_s^{(1)} \alpha_2^{(1)}),$

wo $g_s^{(0)}$, $g_s^{(1)}$ als bekannte ganze rationale Functionen des Modul a

anzusehen sind. Zur Bestimmung der Factoren r_1, r_2 benutzt man nun die Thatsache, dass

$$R^{(m)}(x) = x^{-(m-\sigma+2)}\,[\varphi(x)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\cdot F\left(\frac{1}{a}, \bar{q};\ -m,\ -m+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ -2m+\sigma-1,\ 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2;\ \frac{1}{x}\right)$$

in der Umgebung des Punktes $x=\infty$ für *alle* zulässigen Werthe von ε_1, ε_2, ε_3 darstellbar ist in der Form

$$R^{(m)}(x) = x^{-(m+2)}\cdot\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ist also

$$N^{(m)}(x) = h_0 x^m + h_1 x^{m-1} + \cdots + h_{m-1}x + h_m,$$

so müssen in dem Producte $N^{(m)}(x)\cdot W$ die -1^{te}, -2^{te}, $\cdots \overline{m+1}^{\text{te}}$ Potenz von x ausfallen. Diese Forderung ist erfüllt, wenn die Gleichungen bestehen

$$(2)\qquad\left\{\begin{array}{l} c_1\ \ h_m + c_2\ \ h_{m-1} + \cdots + c_{m+1}\ h_0 = 0,\\ c_2\ \ h_m + c_3\ \ h_{m-1} + \cdots + c_{m+2}\ h_0 = 0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ c_m\ \ h_m + c_{m+1}h_{m-1} + \cdots + c_{2m}\ \ h_0 = 0,\\ c_{m+1}\,h_m + c_{m+2}h_{m-1} + \cdots + c_{2m+1}\,h_0 = 0. \end{array}\right.$$

Aus den m ersten Gleichungen dieses Systems folgt, dass abgesehen von einem constanten Factor

$$(3)\qquad\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{m+1}\\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{m+2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{2m}\\ 1 & x & \cdots & x^m \end{vmatrix} = N^{(m)}(x).$$

Die Gleichung

$$(4)\qquad c_{m+1}h_m + c_{m+2}h_{m-1} + \cdots + c_{2m+1}h_0 = 0,$$

welche das Verhältniss der Constanten r_1, r_2 bestimmt, wollen wir jetzt näher betrachten. Aus der Determinantenform für $N^{(m)}(x)$ in Verbindung mit der Gleichung (a) schliesst man, dass die Coefficienten $h_0, h_1, \cdots h_m$ die Form haben

$$A_0 r_1^m + A_1 r_1^{m-1} r_2 + A_2 r_1^{m-2} r_2^2 + \cdots + A_m r_2^m,$$

wo die A ganze rationale Functionen m^{ten} Grades der Transcendenten $\alpha_1^{(0)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(0)}$, $\alpha_2^{(1)}$ sind. Die Gleichung (4) hat also die Form

$$H_0 r_1^{m+1} + H_1 r_1^m r_2 + H_2 r_1^{m-1} r_2^2 + \cdots + H_{m+1} r_2^{m+1} = 0,$$

worin die H in Bezug auf die Integrale $\alpha_1^{(0)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(0)}$, $\alpha_2^{(1)}$ vom Grade $m+1$ sind. Sie entspricht der Gleichung $\bar{G}^{(m+1)}(\bar{q}) = 0$ oder, da $\bar{q}$ eine lineäre Function von q ist, auch der ursprünglichen Gleichung $G^{(m+1)}(q) = 0$, wenn man $r_1 : r_2$ als die Unbekannte ansieht. Um jedoch die Beschaffenheit der Coefficienten r_1 und r_2 zu erkennen, ist es nothwendig die bisherige unsymmetrische Elimination in Bezug auf das System (2) durch eine *symmetrische* zu ersetzen. Aus den Gleichungen (2) folgt der Reihe nach

$$-\frac{r_1}{r_2} = \frac{(g_1^{(0)}h_m + g_2^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+1}^{(0)}h_0)\,\alpha_2^{(0)} + (g_1^{(1)}h_m + g_2^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+1}^{(1)}h_0)\,\alpha_2^{(1)}}{(g_1^{(0)}h_m + g_2^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+1}^{(0)}h_0)\,\alpha_1^{(0)} + (g_1^{(0)}h_m + g_2^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+1}^{(1)}h_0)\,\alpha_1^{(1)}},$$

$$-\frac{r_1}{r_2} = \frac{(g_2^{(0)}h_m + g_3^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+2}^{(0)}h_0)\,\alpha_2^{(0)} + (g_2^{(1)}h_m + g_3^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+2}^{(1)}h_0)\,\alpha_2^{(1)}}{(g_2^{(0)}h_m + g_3^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+2}^{(0)}h_0)\,\alpha_1^{(0)} + (g_2^{(1)}h_m + g_3^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{m+2}^{(1)}h_0)\,\alpha_1^{(1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{r_1}{r_2} = \frac{(g_m^{(0)}\;h_m + g_{m+1}^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m}^{(0)}\;h_0)\,\alpha_2^{(0)} + (g_m^{(1)}\;h_m + g_{m+1}^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m}^{(1)}\;h_0)\,\alpha_2^{(1)}}{(g_m^{(0)}\;h_m + g_{m+1}^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m}^{(0)}\;h_0)\,\alpha_1^{(0)} + (g_m^{(1)}\;h_m + g_{m+1}^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m}^{(1)}\;h_0)\,\alpha_1^{(1)}},$$

$$-\frac{r_1}{r_2} = \frac{(g_{m+1}^{(0)}h_m + g_{m+2}^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m+1}^{(0)}h_0)\,\alpha_2^{(0)} + (g_{m+1}^{(1)}h_m + g_{m+2}^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m+1}^{(1)}h_0)\,\alpha_2^{(1)}}{(g_{m+1}^{(0)}h_m + g_{m+2}^{(0)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m+1}^{(0)}h_0)\,\alpha_1^{(0)} + (g_{m+1}^{(1)}h_m + g_{m+2}^{(1)}h_{m-1} + \cdots + g_{2m+1}^{(1)}h_0)\,\alpha_1^{(1)}},$$

Man setze nun m mal je zwei dieser $m + 1$ Ausdrücke für $r_1 : r_2$ einander gleich. Hierdurch entstehen m Gleichungen für die Coefficienten $h_m, h_{m-1}, \cdots h_0$, in welchen die Transcendenten $\alpha_1^{(0)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(0)}$, $\alpha_2^{(1)}$ *eliminirt* sind, da $\begin{vmatrix} \alpha_1^{(0)} & \alpha_2^{(0)} \\ \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} \end{vmatrix}$ einen constanten Werth hat. Die Coefficienten h hängen also von dem Modul a nur algebraisch ab. Ferner ergiebt sich der folgende Zusatz zu dem Heine'schen Theorem.

Die constanten Multiplicatoren r_1 und r_2 in dem Ausdruck

$$W = r_1\int_0^1 \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}} + r_2\int_1^a \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}},$$

dessen Kettenbruchentwicklung die Lamé'schen Functionen liefert, haben die Form

$$r_1 = \Delta^{(0)}\cdot\int_1^a \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} + \Delta^{(1)}\cdot\int_1^a \frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}},$$

$$-r_2 = \Delta^{(0)}\cdot\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} + \Delta^{(1)}\cdot\int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}},$$

wo die Δ *algebraische* Functionen des Modul a sind.

Man kann also für W auch schreiben:

$$W = \Delta^{(0)} \cdot \left[\int_1^a \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} \cdot \int \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}} - \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} \cdot \int_1^a \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}} \right]$$

$$+ \Delta^{(1)} \cdot \left[\int_1^a \frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}} \cdot \int_0^1 \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}} - \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}} \cdot \int_1^a \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\varphi(z)}} \right],$$

Hieraus erkennt man unmittelbar, dass die Coefficienten c in der Reihe

$$W = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{x} + \cdots$$

keine höheren Transcendenten enthalten als *algebraische* Functionen des Modul a. Mit Berücksichtigung der Gleichung (3) ergiebt sich also der Satz

Die zur Lamé'schen Function $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ „adjungirten" Functionen

$$x^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}} (x-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}} (x-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{4}} \cdot N^{(\mu)}(x)$$

$$|\mu = 1, 2, \cdots m-1, m+1, m+2, \cdots|$$

enthalten keine höheren Transcendenten in Bezug auf den Modul a als *algebraische* Functionen desselben.

Dass dieser Satz nicht mehr besteht wenn r_1 und r_2 *beliebig* gewählt werden, ist selbstverständlich. Heine hat im I. Bd. seines Handbuchs p. 294 solche Functionen untersucht, ohne jedoch fertige Resultate zu erhalten. Ich verweise auf diese Stelle, damit die im Folgenden behandelten „adjungirten" Functionen nicht etwa mit den dort auftretenden verwechselt werden.

3.

Wir betrachten jetzt die Nenner $N^{(m-1)}(x), N^{(m-2)}(x), \cdots N^{(1)}(x)$, welche dem zur Lamé'schen Function $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ gehörigen Nenner $N^{(m)}(x)$ vorangehen. In der Gleichung

$$W = \frac{Z^{(\mu)}}{N^{(\mu)}} + \frac{R^{(\mu)}}{N^{\mu}} \qquad \mu \leqq m-1$$

ersetze man W mit Hilfe des Satzes von der Vertauschung von Argument und Parameter bei elliptischen Integralen durch den äquivalenten Ausdruck

$$W = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} \cdot \int \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x}{\Theta(x)}\, dx,$$

wo γ_0 und γ_1 Constanten sind und zur Abkürzung $\Theta(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$ gesetzt ist. Die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\int\frac{\gamma_0+\gamma_1 x}{\Theta(x)}\,dx = \frac{Z^{(\mu)}}{N^{(\mu)}} + \frac{R^{(\mu)}}{N^{(\mu)}}$$

bringe man dann auf die Form

$$N^{(\mu)}N^{(\mu)}\left\{\gamma_0+\gamma_1 x - \Theta(x)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\varphi(x)}\,\frac{Z^{(\mu)}}{N^{(\mu)}}\right)\right\}$$
$$= N^{(\mu)}N^{(\mu)}\,\Theta(x)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\varphi(x)}\,\frac{R^{(\mu)}}{N^{(\mu)}}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist in Bezug auf x *lineär*. Man setze also

$$N^{(\mu)}N^{(\mu)}\,\Theta(x)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\varphi(x)}\,\frac{R^{(\mu)}}{N^{(\mu)}}\right) = x-\varrho,$$

wo ϱ eine Constante bezeichnet, deren Bedeutung noch zu ermitteln bleibt. Aus der letzten Gleichung folgt

$$\sqrt{\varphi(x)}\,R^{(\mu)} = N^{(\mu)}\int\frac{x-\varrho}{N^{(\mu)}N^{(\mu)}\,\Theta(x)}\,dx. \tag{5}$$

Ich zeige nun, dass $N^{(\mu)}$ und $\sqrt{\varphi(x)}\,R^{(\mu)}$ Lösungen einer Differentialgleichung von der Form

$$(x-\varrho)\,\psi(x)\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\chi(x)\cdot\frac{dz}{dx}+\varpi(x)\cdot z = 0 \tag{6}$$

sind. In der That, genügen z_1, z_2 dieser Gleichung, dann besteht die Relation

$$z_2 = z_1\cdot\int\frac{e^{-\int\frac{\chi(x)}{(x-\varrho)\,\psi(x)}dx}}{z_1 z_1}\,dx.$$

Soll also $N^{(\mu)}(x) = z_1$ und $\sqrt{\varphi(x)}\,R^{(\mu)}(x) = z_2$ sein, dann ist

$$e^{-\int\frac{\chi(x)}{(x-\varrho)\,\psi(x)}dx} = \frac{x-\varrho}{\Theta(x)}$$

zu setzen. D. h. es muss sein

$$\chi(x) = (x-\varrho)\,\psi(x)\frac{d}{dx}\lg\Theta - \psi(x).$$

Die Gleichung (6) geht jetzt über in

$$(x-\varrho)\,\psi(x)\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+\left[(x-\varrho)\,\psi(x)\frac{d}{dx}\lg\Theta(x) - \psi(x)\right]\frac{dz}{dx}+\varpi(x)\cdot z = 0.$$

$\varpi(x)$ muss eine ganze rationale Function zweiten Grades sein. Da nun

$$N^{(\mu)}(x) = x^{\mu} \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{\varphi(x)}\, R^{(\mu)}(x) = x^{\cdot(\mu-\sigma+1)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist, so hat diese die Form

$$\varpi(x) = -\mu(\mu - \sigma + 1)\,[x^2 + \varkappa_1 x + \varkappa_0).$$

Wir haben also die Differentialgleichung

$$\text{(II)} \quad (x-\varrho)\,\psi(x) \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + \left[(x-\varrho)\,\psi(x)\frac{d}{dx}\lg\Theta(x) - \psi(x)\right] \cdot \frac{dz}{dx}$$
$$- \mu(\mu - \sigma + 1)\,[x^2 + \varkappa_1 x + \varkappa_0] \cdot z = 0$$

genauer zu untersuchen. Zunächst erkennt man, dass $x = \varrho$ kein singulärer Punkt derselben sein kann, da sie mit Gl. (I) gleichgruppig sein muss. Da nun die determinirenden Gleichungen das Indicesschema

$$\left\{\begin{array}{cccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{a} & \underline{\infty} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_3 & \mu - \sigma + 1 \end{array}\right\}$$

liefern, so muss ϱ ein individueller Parameter [M. vergl. Nr. 4 der vorhergehenden Abh.] von z sein. Die Functionen $N^{(\mu+1)}(x)$, $N^{(\mu-1)}(x)$ werden Differentialgleichungen genügen, welche aus Gl. (II) hervorgehen*), wenn man μ resp. durch $\mu + 1$ und $\mu - 1$ ersetzt und den Parametern ϱ, $\varkappa_1$, $\varkappa_0$ passende Werthe giebt. Ich setze zur Abkürzung $N^{(\mu+1)}(x) = z^{(+)}$ und entsprechend $N^{(\mu-1)}(x) = z^{(-)}$ und bezeichne die entsprechenden Grössen in analoger Weise. Alsdann bestehen die Relationen (cf. Acta Math. Bd. 11, pag. 105)

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} p^{(+)} \cdot z^{(+)} = g^{(+)} \cdot z + \psi(x) \cdot \dfrac{dz}{dx}, \\ p^{(-)} \cdot z^{(-)} = g^{(-)} \cdot z + \psi(x) \cdot \dfrac{dz}{dx}, \end{cases}$$

wo die p lineäre und die g quadratische Functionen von x bedeuten. Ich setze, ohne Rücksicht auf die oberen Indices,

$$p = p_0 + p_1 x, \qquad g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2.$$

Durch Elimination von $\frac{dz}{dx}$ aus den Gl. (7) folgt dann

$$\text{(8)} \quad (p_0^{(+)} + p_1^{(+)} x) \cdot z^{(+)} = [(g_0^{(+)} - g_0^{(-)}) + (g_1^{(+)} - g_1^{(-)})\,x + (g_2^{(+)} - g_2^{(-)})\,x^2]$$
$$\cdot z + (p_0^{(-)} + p_1^{(-)} x)\, z^{(-)}.$$

*) Selbstverständlich muss jetzt $\mu \leqq m - 2$ sein.

Um die Coefficienten in den Functionen p und g zu bestimmen, benutzt man am bequemsten die Relation

$$\begin{vmatrix} z_1^{(+)} & \frac{dz_1^{(+)}}{dx} \\ z_2^{(+)} & \frac{dz_2^{(+)}}{dx} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & \frac{dz_1}{dx} \\ z_2 & \frac{dz_2}{dx} \end{vmatrix} = (x - \varrho^{(+)}) : (z - \varrho),$$

wo z_1 und z_2 lineär unabhängige Integrale der Gleichg. (II) sind. Aus den Gleichg. (7)*) folgt mit Benutzung der Gleichg. (6)

$$p^2(x-\varrho)\frac{dz^{(+)}}{dx} = [(x-\varrho)(pg'-gp') - p\varpi]\cdot z$$
$$+ [(x-\varrho)(pg + p\psi' - p'\psi) - p\chi]\frac{dz}{dx}.$$

Mithin

$$p^3(x-\varrho)\begin{vmatrix} z_1^{(+)} & \frac{dz_1^{(+)}}{dx} \\ z_2^{(+)} & \frac{dz_2^{(+)}}{dx} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} g & \psi \\ (x-\varrho)(pg'-p'g)-p\varpi & (x-\varrho)(pg+p\psi'-p'\psi)-p\chi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \frac{dz_1}{dx} \\ z_2 & \frac{dz_2}{dx} \end{vmatrix}.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit der obigen Determinantenrelation giebt die Beziehung

$$\text{(7a)}\quad (x-\varrho)\,[g^{(+)}g^{(+)} + g^{(+)}\psi' - g^{(+)\prime}\psi] + (g^{(+)}\chi^{(+)} - \varpi^{(+)}\psi)$$
$$= p^{(+)}p^{(+)}(x-\varrho^{(+)})$$

und eine analoge, in welcher der obere Index (+) durch (—) ersetzt ist. Die vorstehende Gleichung muss für jeden Werth von x identisch erfüllt sein. Setzt man also zur Abkürzung

$$(x-\varrho)[g^{(+)}g^{(+)} + g^{(+)}\psi' - g^{(+)\prime}\psi] + [g^{(+)}\chi^{(+)} - \varpi^{(+)}\psi] = \sum_{r=0}^{r=5} A_r^{(+)}x^r$$

und

$$p^{(+)}p^{(+)}(x-\varrho^{(+)}) = \sum_{r=0}^{r=3} B_r^{(+)}x^r,$$

dann bestehen die Gleichungen

$$\text{(9)}\quad A_0^{(+)} - B_0^{(+)} = 0, \;\dots\; A_3^{(+)} - B_3^{(+)} = 0,\quad A_4^{(+)} = 0,\quad A_5^{(+)} = 0,$$

*) Die oberen Indices sind, wo kein Missverständniss möglich ist, weggelassen.

und die analogen Ausdrücke mit dem oberen Index (—). Aus der Gleichung

$$A_5^{(+)} - A_5^{(-)} = 0$$

schliesst man, dass $g_2^{(+)} - g_2^{(-)} = 0$. Mithin ist auch $p_1^{(+)} = 0$. Ferner folgt aus

$$A_4^{(+)} - A_4^{(-)} = 0,$$

dass auch $p_1^{(-)}$ verschwindet. Endlich bestimmen sich $\varrho^{(+)}$ und $\varrho^{(-)}$ sowie die noch unbekannten Coefficienten in den Functionen p und g aus den Gleichg. (9) und den zugehörigen mit (—). Die Parameter ϱ, k_0, k_1 sind hierbei als Data anzusehen. Die Gleichg. (8) nimmt jetzt die Form an

(8a) $$N^{(\mu+1)}(x) = \lambda_{\mu+1} \cdot N^{(\mu)}(x) - c_{\mu+1} \cdot N^{(\mu-1)}(x),$$

wo $\mu_{\mu+1}$ in Bezug auf x lineär und $c_{\mu+1}$ constant ist.

Man bestimme nun ϱ für die Function $N^{(1)}(x)$, was keine Schwierigkeit hat. Alsdann ist die entsprechende Grösse in $N^{(2)}(x)$ bekannt. So fahre man fort bis man zu $N^{(\mu)}(x)$ kommt. Die wirkliche Auflösung der hierbei auftretenden algebraischen Gleichungen scheint nicht einfach zu sein. Für unsere Zwecke genügt es jedoch die Gleichg. (8a) aus der Differentialgleichg. (II) formell *abgeleitet* zu haben. Man kann also auch aus Gleichg. (II) die Partialbrüche des Kettenbruchs für die Function W bis zum $\overline{m-1}^{\text{ten}}$ (incl.) bestimmen. Die Relation

$$N^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} \cdot N^{(m-2)}(x) - c_{m-1} \cdot N^{(m-3)}(x)$$

ist mithin die letzte, welche durch die vorstehende Untersuchung erledigt ist.

4.

Die Untersuchung der homogenen lineären Relation, welche zwischen den Functionen $N^{(m)}(x)$, $N^{(m-1)}(x)$, $N^{(m-2)}(x)$ besteht, ist sehr einfach. Man hat nur die Gleichg. (II) für $\mu = m$ durch die Gleichg. (I) zu ersetzen. Im Uebrigen ergiebt sich alles wie vorher. Man findet, dass λ_m in der Relation

$$N^{(m)}(x) = \lambda_m \cdot N^{(m-1)}(x) - c_m N^{(m-2)}(x)$$

wiederum lineär ist.

Andere Verhältnisse treten erst bei der Gleichg. für $N^{(m+1)}(x)$, $N^{(m)}(x)$ und $N^{(m-1)}(x)$ ein. Nach einem bekannten Satze von Euler ist

$$\frac{R^{(m)}}{N^{(m)}} = c_1 c_2 \cdots c_{m+1} \left\{ \frac{1}{N^{(m)} N^{(m+1)}} + \frac{c_{m+2}}{N^{(m+1)} N^{(m+2)}} \right.$$
$$\left. + \frac{c_{m+2}\, c_{m+3}}{N^{(m+2)} N^{(m+3)}} + \cdots \right\},$$

wo die c die Theilzähler des Kettenbruchs für W sind. $R^{(m)}(x)$ muss die Form

$$R^{(m)}(x) = x^{-(m+2)}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

haben. Da die c Constante sind, so muss also $N^{(m+1)}(x)$ vom Grade $m+2$ sein. Hieraus schliesst Heine weiter, dass in der Gleichung

$$(10) \qquad N^{(m+1)}(x) = \lambda_{m+1}\cdot N^{(m)}(x) - c_{m+1}\cdot N^{(m-1)}(x)$$

der Theilnenner λ_{m+1} vom *zweiten* Grade in Bezug auf x ist. Dasselbe Resultat muss aber auch aus der Theorie der gleichgruppigen Functionen folgen. Die Differentialgleichungen für $N^{(m)}(x)$ und $N^{(m-1)}(x)$ sind uns bekannt. Man findet ferner ohne Rechnung, dass $N^{(m+1)}(x)$ der Gleichg. (II) genügt, wenn man dort μ durch $m+2$ ersetzt, Man hat nun nach einer Reductionsformel [Acta Math. Bd. 11, pag. 109]

$$(11) \qquad \begin{cases} N^{(m+1)}(x) = g^{(+)}N^{(m)}(x) + h^{(+)}\cdot\psi\cdot\dfrac{dN^{(m)}(x)}{dx}, \\ \text{und} \\ N^{(m-1)}(x) = g^{(-)}N^{(m)}(x) + h^{(-)}\cdot\psi\cdot\dfrac{dN^{(m)}(x)}{dx}, \end{cases}$$

wo die g ganze Functionen vom zweiten Grade und die h Constante bedeuten. Wir setzen zur Abkürzung

$$N^{(m+1)}(x) = z^{(+)}, \qquad N^{(m)}(x) = y, \qquad N^{(m-1)}(x) = z^{(-)}$$

und schreiben statt der Gleichung (11) unter Weglassung der oberen Indices nur eine Gleichung:

$$(11\text{a}) \qquad z = g\cdot y + h\psi\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Gleichung für y:

$$\psi\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \chi\cdot\frac{dy}{dx} + \varpi\cdot y = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = (g' - h\varpi)\cdot y + (g + h\psi' - h\chi)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Mithin ist

$$\begin{vmatrix} z_1, & \dfrac{dz_1}{dx} \\ z_2, & \dfrac{dz_2}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g\quad, & h\psi \\ g' - h\varpi, & g + h\psi' - h\chi \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} y_1, & \dfrac{dy_1}{dx} \\ y_2, & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}.$$

Wegen der Proportion

$$\begin{vmatrix} y_1, & \dfrac{dy_1}{dx} \\ y_2, & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1, & \dfrac{dz_1}{dx} \\ z_2, & \dfrac{dz_2}{dx} \end{vmatrix} = 1 : (x - \varrho)$$

hat man also die Beziehung

ischen

eier

wird.

sowie die zugehörigen

der Differentialgleichung (II), in welcher ϱ ein in jedem Falle bestimmter ausserwesentlich singulärer Punkt ist. Die Nenner $N^{(m+r)}(x)$, welche auf $N^{(m)}(x)$ folgen, sind vom Grade $m+r+1$ und genügen ebenfalls der Gleichung (II), wenn man μ durch $m+r+1$ ersetzt. Der Kettenbruch ist also bis zum m^{ten} Theilnenner (incl.) regulär. Nur der unmittelbar folgende Theilnenner wird quadratisch. Jenseits dieser kritischen Stelle ist der Kettenbruch wieder regulär.

Frankfurt a/M., 24. Mai 1888.

Die Syzyganten zweier simultanen binären biquadratischen Formen.

Von

Frhr. v. Gall in Oppenheim.

Bekanntlich besteht das volle System der Grundformen zweier simultanen biquadratischen Formen aus folgenden 28 Bildungen:

A	B	E	C	A	Γ	D	B
$(\alpha\alpha)^4$	$(\alpha\nabla)^4$	$(a\alpha)^4$	$(a\nabla)^4$	$(aa)^4$	$(\alpha\Delta)^4$	$(\Delta\nabla)^4$	$(a\Delta)^4$
(020)	(030)	(110)	(120)	(200)	(210)	(220)	(300)
ψ_x^2	l_x^2	m_x^2	λ_x^2	χ_x^2	n_x^2	μ_x^2	ν_x^2
$(a\alpha)^3$	$(a\nabla)^3$	$(a\tau)^4$	$(\alpha\Delta)^3$	$(\Delta\nabla)^3$	$(\Delta\tau)^4$	$(\alpha t)^4$	$(\nabla t)^4$
(112)	(122)	(132)	(212)	(222)	(232)	(312)	(322)
φ_x^4	∇_x^4	f_x^4	Θ_x^4	S_x^4	Δ_x^4	Σ_x^4	
α_x^4	$(\alpha\alpha)^2$	a_x^4	$(a\alpha)^2$	$(a\nabla)^2$	$(ab)^2$	$(\alpha\Delta)^2$	
(014)	(024)	(104)	(114)	(124)	(204)	(214)	
τ_x^6	ξ_x^6	r_x^6	ϱ_x^6	t_x^6			
$(\alpha\nabla)$	$(a\alpha)$	$(a\nabla)$	$(\alpha\Delta)$	$(a\Delta)$			
(036)	(116)	(126)	(216)	(306).			

Hierbei bezeichnet $(i\,k\,l)$, wie gebräuchlich, eine Covariante vom i^{ten} und k^{ten} Grade in den Coefficienten der beiden gegebenen biquadratischen Formen f und φ und von der l^{ten} Ordnung in den Variabeln x.*)

Schon die Auflösung aller in dem vollen System nicht enthaltenen Ueberschiebungen bietet mit alleiniger Anwendung der symbolischen

*) Man vergleiche die einschlägigen Arbeiten Gordan's im 2. Bde. der Math. Annalen, Bertini's im 11. Bde. desselben Journals und Sylvester's im 2. Bande des American Journal.

Rechnung und der Gordan'schen Identitäten (pag. 7 seiner binären Formen 1875) ganz besondere Schwierigkeiten. Die zwei bekannten Processe

$$d\Psi = \sum a_i \frac{d\Psi}{d\alpha_i} \quad \text{und} \quad \delta\Psi = \Delta_i \frac{d\Psi}{da_i}$$

dagegen ermöglichen es, fast überall die umständlichere symbolische Rechnung durch einfache Reductionen zu ersetzen. Der erste Process wandelt jede Bildung (ikl) in eine $(i+1,\ k-1,\ l)$, der zweite jede $(i\,kl)$ in eine $(i+1,\ kl)$ um. Durch eine geeignete Verbindung beider Processe und die Verwandlung der Relationen $(i\,kl)$ in ihre Gegenbilder (kil), die durch einfache Vertauschung der Symbole a mit α entstehen, gelingt es, aus wenigen errechneten Beziehungen alle übrigen abzuleiten. Es wird daher unsere erste Aufgabe sein, das Resultat der oben definirten Processe auf die Grundformen des Systems zu untersuchen.

§ 1.

Der δ Process.

Aus der Theorie der biquadratischen Formen (vergl. Gordan's Vorlesungen über die Invariantentheorie, herausgegeben von G. Kerschensteiner, II. Band) erhält man ohne besondere Rechnung die nachfolgenden Reductionsformeln:

$$\begin{array}{llll}
\delta\mathsf{A} = 0 & \delta\psi = -\lambda & \delta\varphi = 0 & \delta\tau = 0 \\
\delta\mathsf{B} = 0 & \delta l = \chi & \delta\nabla = 0 & \delta\xi = -\varrho \\
\delta E = \Gamma & \delta m = n & \delta f = \Delta & \delta r = (\Delta\nabla)^1 \\
\delta C = D & \delta\lambda = -\frac{1}{3} A\psi & \delta\Theta = \Sigma & \delta\varrho = -\frac{1}{3} A\xi \\
\delta A = 2B & \delta\chi = \frac{1}{3} Al & \delta S = (\Delta\nabla)^2 & \delta t = 0. \\
\delta\Gamma = \frac{1}{3} AE & \delta n = \frac{1}{3} Am & \delta\Delta = \frac{1}{3} Af & \\
\delta D = \frac{1}{3} AC & \delta\mu = 0 & \delta\Sigma = \frac{1}{3} A\Theta & \\
\delta B = \frac{1}{2} A^2 & \delta\nu = 0 & &
\end{array}$$

Die Reduction der beiden Covarianten $(\Delta\nabla)^2$ und $(\Delta\nabla)^1$, die sich in den angeführten Arbeiten von Gordan und Bertini noch unter den Grundformen des Systems aufgeführt finden, deren Reducibilität aber von Sylvester gezeigt worden ist, wird in § 3 geleistet werden. Alle mit lateinischen Buchstaben benannten Grundformen gehen durch Vertauschung von f mit φ in die mit den entsprechenden griechischen

Buchstaben bezeichneten über, so A in A, B in B, B in B und umgekehrt, dagegen gehen E, D und Θ hierdurch in sich selbst, Δ, ψ, χ und ξ bezüglich in: $\nabla - \psi$, $-\chi$ und $-\xi$ über.

§ 2.

Der d Process.

Die Aufstellung der entsprechenden Reductionsformeln dG erfordert mehrfach ausführlichere Rechnung. Selbstredend verschwinden dA, dB, $d\psi$, $d\lambda$, $d\mu$, df, $d\Delta$, $d\xi$ und dt. Leicht findet man:

$$d\mathsf{A} = 2E; \quad d\varphi = f; \quad d\nabla = 2\Theta; \quad d\Theta = \Delta; \quad dC = 2\Gamma;$$
$$d\Gamma = B; \quad dE = A.$$

Die Gordan'sche Identität $\begin{pmatrix}\varphi & \varphi & f\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ liefert:

$$(f\Theta)^4 = \Gamma \quad \text{und} \quad (\varphi\Theta)^4 = C.$$

Es wird daher

$$d\mathsf{B} = (a\nabla)^4 + 2(a\Theta)^4 = 3C.$$

Es ist weiter

$$dD = 2(\Delta\Theta)^4.$$

$$d\left[(\nabla\nabla)^4 = \frac{1}{6}\mathsf{A}^2\right]$$

(vergl. Gordan-Kerschensteiner pag. 181)

giebt aber die Relationen:

$$(\nabla\Theta)^4 = \frac{1}{6}\mathsf{A}E \quad \text{und} \quad (\Delta\Theta)^4 = \frac{1}{6}AE;$$

und es wird daher

$$dD = \frac{1}{3}AE.$$

Ferner wird

$$d\Sigma = (a\Delta)^2 = \frac{1}{6}Af.$$

(Vergl. G-K. pag. 180.)

Weiter ist $dS = 2(a\Theta)^2$; $(a\Theta)^2$ aber erhalten wir aus

$$d\left[(a\nabla)^2 = \frac{1}{6}\mathsf{A}\varphi\right]$$

in der Form

$$(a\Theta)_2 = \frac{1}{12}A\varphi + \frac{1}{6}Ef - \frac{1}{2}\Sigma,$$

so dass

$$dS = \frac{1}{6}A\varphi + \frac{1}{3}Ef - \Sigma$$

wird.

$$d[(a\nabla)^3 = 0]$$

(vergl. G-K. pag. 180)

giebt

$$(\alpha\Theta)^3 = -\frac{1}{2}l \quad \text{und} \quad (a\Theta)^3 = -\frac{1}{2}\lambda$$

sowie

$$dl = 2(a\Theta)^3 = -\lambda.$$

Aus $\begin{pmatrix}\varphi & f & \varphi \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ folgert man leicht die Beziehungen:

$$(f\Theta) = \frac{1}{2}f\psi + \varrho \quad \text{und} \quad (\varphi\Theta) = -\frac{1}{2}\varphi\psi + r$$

und hiermit

$$d\tau = (a\nabla) + 2(\alpha\Theta) = 3r - \varphi \cdot \psi.$$

Dagegen giebt

$$dm = 3(ar)^4 - (f, \varphi \cdot \psi)^4.$$

Zur Bestimmung dieser Ueberschiebungen liefern $\begin{pmatrix}f & \nabla & f \\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}f & \nabla & f \\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}f & \nabla & f \\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ die Relationen

$$(lf)_2 = -\chi; \quad (Sf)_3 = -\frac{1}{2}\chi; \quad (rf)_4 = \frac{4}{5}\chi.$$

Weiter entnimmt man $\begin{pmatrix}f & \varphi & f \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ die auch fernerhin wichtigen Beziehungen

$$\begin{cases} (f\psi)_1 = \frac{1}{2}Ef - \frac{1}{4}A\varphi - \frac{3}{2}\Sigma \\ -(\varphi\psi) = \frac{1}{2}E\varphi - \frac{1}{4}\mathsf{A}f - \frac{3}{2}S. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser und $\begin{pmatrix}\varphi & \psi & f \\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$ gelangt man auch zu dem Ausdruck:

$$(\varphi \cdot \psi, f)_4 = \frac{1}{8}E\psi + \frac{2}{5}\chi$$

und zu dem Resultat:

$$dm = 2\chi - \frac{1}{3}E\psi.$$

$\begin{pmatrix}\varphi & f & \nabla \\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\varphi & f & \nabla \\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ geben die weiterhin häufig verwandten Relationen:

$$\begin{cases} (\psi\nabla)_2 = m - \frac{1}{6}\mathsf{A}\psi \\ (\Theta\nabla)_3 = \frac{1}{2}m + \frac{1}{12}\mathsf{A}\psi, \end{cases}$$

und, da $d\chi = 2(\Delta\Theta)^3$ ist, auch;

$$d\chi = \frac{1}{6}A\psi - \mu.$$

Weil $dn = 3(\Delta r)^4 - (\Delta, \varphi \cdot \psi)^4$ ist, haben wir auch noch die Ueberschiebungen $(\Delta r)^4$ und $(\Delta, \varphi\psi)^4$ zu bestimmen.

Mit Hülfe von $\begin{pmatrix}f & \nabla & \Delta \\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}f & \nabla & \Delta \\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}f & \nabla & \Delta \\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ findet man nacheinander

$$(l\Delta)_2 = -\nu - \frac{1}{6}Al; \quad (S\Delta)_3 = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{12}Al;$$

$$(r\Delta)_4 = -\frac{1}{5}\nu + \frac{2}{15}Al$$

und durch $\begin{pmatrix} \varphi & \psi & \Delta \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$:

$$(\varphi\psi,\ \Delta)^4 = \Gamma\psi + \frac{2}{3}E\lambda - 2(S\Delta)_3 + \frac{3}{5}(l\Delta)_2.$$

Es wird daher

$$dn = \nu + \frac{1}{3}Al - \frac{2}{3}E\lambda - \Gamma\psi.$$

$d\left[(l\Delta)_2 = -\nu - \frac{1}{6}Al\right]$ giebt:

$$d\nu = (\lambda\Delta)^2 + \frac{1}{6}A\lambda.$$

Zur Bestimmung von $(\lambda\Delta)^2$ folgern wir aus $\begin{pmatrix} \Delta & \varphi & \Delta \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ die Relation:

$$(\lambda\Delta)_2 = [(\Delta\Delta)^2\varphi]^3.$$

Da aber $(\Delta\Delta)_2 = \frac{1}{3}Bf - \frac{1}{6}A\Delta$ ist (G. K. pag. 181), so wird

$$(\lambda\Delta)_2 = \frac{1}{3}B\psi + \frac{1}{6}A\lambda$$

und

$$d\nu = \frac{1}{3}B\psi + \frac{1}{3}A\lambda.$$

Leicht findet man:

$$dr = 2(f\Theta) = f\cdot\psi + 2\varrho$$

und

$$d\varrho = (a\Delta) = t.$$

Uebersicht über die dG.

$d\mathsf{A} = 2E$	$d\psi = 0$
$d\mathsf{B} = 3C$	$dl = -\lambda$
$dE = A$	$dm = 2\chi - \frac{1}{3}E\psi$
$dC = 2\Gamma$	$d\lambda = 0$
$d\Gamma = B$	$d\chi = \frac{1}{6}A\psi - \mu$
$dD = \frac{1}{3}AE$	$dn = \nu + \frac{1}{3}Al - \frac{2}{3}E\lambda - \Gamma\psi;$
$dA = 0$	$d\mu = 0$
$dB = 0$	$d\nu = \frac{1}{3}B\psi + \frac{1}{3}A\lambda$

$$d\varphi = f \qquad d\tau = 3r - \varphi\psi$$
$$d\nabla = 2\Theta \qquad d\xi = 0$$
$$df = 0 \qquad dr = f\psi + 2r$$
$$d\Theta = \Delta \qquad d\varrho = t$$
$$dS = \frac{1}{6}A\varphi + \frac{1}{3}Ef - \Sigma \qquad dt = 0.$$
$$d\Delta = 0$$
$$d\Sigma = \frac{1}{6}Af$$

§ 3.

Die Covarianten $(\Delta\nabla)^1$ und $(\Delta\nabla)^2$.

Diese im Gordan'schen System der Grundformen noch vorhandenen Ueberschiebungen lassen sich leicht mit Hülfe der vorstehend mitgetheilten Entwickelungen dG und δG als reducibel erweisen.

$$\delta[2(\varphi\Theta) = 2r - \varphi\psi]$$

giebt sofort:

$$(\Delta\nabla)^1 = -(\Sigma\varphi) - \frac{1}{2}\varphi\lambda.$$

Zur Entwickelung von $(\Sigma\varphi)$ schieben wir die in § 2 gefundene Relation:

$$\Sigma = \frac{1}{3}Ef - \frac{1}{6}A\varphi - \frac{2}{3}(a\psi)^1$$

über φ und erhalten hierdurch, mit Hülfe von

$$[(a\psi)\,\alpha] = \frac{1}{4}\varphi\cdot(a\psi)^2 + \frac{1}{2}\psi\Theta - \frac{1}{2}f(\alpha\psi)^2$$

und den aus $\begin{pmatrix} f & \varphi & f \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ folgenden Beziehungen:

$$(a\psi)^2 = \lambda \quad \text{und} \quad (\alpha\psi)^2 = -l,$$

$$(\Sigma\alpha)_1 = \frac{1}{3}E\xi - \frac{1}{6}\varphi\lambda - \frac{1}{3}\psi\Theta - \frac{1}{3}fl$$

und schliesslich

(I) $$(\Delta\nabla) = -\frac{1}{3}E\xi - \frac{1}{3}\varphi\lambda + \frac{1}{3}fl + \frac{1}{3}\psi\Theta.$$

Setzen wir die eben gefundenen Ausdrücke von $(a\psi)^1$ und $(a\psi)^2$ in der aus $\begin{pmatrix} f & \varphi & \psi \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ resultirenden Gleichung

$$(\Theta\psi)^1 + \frac{1}{2}\psi^2 = [(a\psi)^1\alpha]^2 + \frac{1}{2}[a\psi)^2\alpha]^1$$

ein, so geht diese über in:

$$(\Theta\psi)^1 = -\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}E\Theta - \frac{3}{2}(\Sigma\alpha)^2 - \frac{1}{4}A\nabla + \frac{1}{2}(\lambda\alpha)_1.$$

Es erübrigt jetzt nur noch die Bestimmung der Ueberschiebungen $(\Sigma\alpha)^2$ und $(\lambda\alpha)_1$, um $(\Delta\nabla)^2$ zu erhalten. Die erste liefert

$$d\delta\left[(\alpha\nabla)^2 = \frac{1}{6}\mathsf{A}\varphi\right]$$

in der Form:

$$2(\varphi\Sigma)^2 = \frac{1}{3}\Gamma\varphi + \frac{1}{6}\mathsf{A}\Delta - (\Delta\nabla)^2.$$

Die zweite:

$$(\lambda\alpha)_1 = -\frac{1}{2}\Gamma\varphi + \frac{3}{2}(\Delta\nabla)^2 + \frac{1}{4}\mathsf{A}\Delta$$

folgt sofort aus $\begin{pmatrix}\varphi & \Delta & \varphi\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Addiren wir schliesslich zu der obigen Darstellung von $(\Theta\psi)^1$ ihr Gegenbild:

$$-(\Theta\psi)^1 = -\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}E\Theta - \frac{3}{2}(Sa)^2 - \frac{1}{4}\mathsf{A}\Delta + \frac{1}{2}(la)^1$$

und ersetzen in der Summe der beiden Gegenbilder die Ueberschiebungen $(\Sigma\alpha)^2$, $(Sa)^2$, $(\lambda\alpha)^1$ und $(la)^1$ durch ihre eben gefundenen Werthe, so gelangen wir zu der gesuchten Relation

$$\text{(II)}\quad 0 = -\psi^2 + E\Theta - \frac{1}{4}(A\nabla + \mathsf{A}\Delta) - \frac{1}{2}(Cf + \Gamma\varphi) + 3(\Delta\nabla)^2.$$

§ 4.

Verfahren zur Aufstellung der Syzyganten.

In dem 96. Bande der Comptes-Rendus hat C. Stephanos unter dem Titel: „Sur les relations qui existent entre les Covariants de caractère paire d'une forme binaire a_x^6“ ein leicht zu verallgemeinerndes Verfahren angegeben, das gestattet alle relativ einfachen Beziehungen (Syzyganten) zwischen den Grundformen jenes Systems, nach Erledigung gewisser eng begrenzten Vorrechnungen, sofort hinzuschreiben. Wenn auch die meisten der auf diesem Wege gefundenen Syzyganten noch im Hammond'schen Sinne *zusammengesetzt* sein werden (vergl. die Arbeit des Verfassers über die Syzyganten zweier simultanen cubischen Formen im 31. Bande dieses Journals), so lassen sich doch, mit Hülfe des an ebendemselben Orte angeführten, selbstverständlichen Satzes, dass alle Syzyganten, die eine binäre Combination der Grundformen als Summand enthalten, *Grundsyzyganten* sind, sofort aus der Menge der erhaltenen Beziehungen die wirklichen Grundsyzyganten herauslesen. Im Folgenden wollen wir zunächst das von Herrn Stephanos gegebene Verfahren erläutern, selbstredend zugleich mit den Modificationen, die unsere besondere Aufgabe erfordert. Die 15 Covarianten C_2 und C_4 unseres vollen Systems geben, zu je zweien combinirt, Veranlassung zu $\binom{15}{2}$ d. s. 107 schiefen Covarianten oder

Functionaldeterminanten: $(C_2 C_2')^1$; $(C_2 C_4)^1$ und $(C_4 C_4')^1$, unter denen sich auch die 6 Covarianten C_6 befinden. Es müssen sich daher 101 dieser Formen ungeraden Charakters als ganze Functionen unserer 28 Grundformen darstellen lassen. Sehen wir aber von $(\psi\chi)^1$ ab, das sich als Gegenbild selbst entspricht, so brauchen wir nur die Hälfte der bleibenden 100 d. s. 50 wirklich in der angegebenen Weise zu entwickeln. Und auch diese Rechnung vereinfacht sich noch ausserordentlich, weil wir bloss durch Anwendung des d und δ Processes auf die Entwickelungen von (ψl) und $(a\psi)$ nach einander alle übrigen erhalten. Die ganze Arbeit wird hierdurch auf rein elementare Operationen zurückgeführt. Freilich macht dieses Verfahren die absolute Zuverlässigkeit jedes einmal erhaltenen Resultates erforderlich. Es müssen daher fortgesetzt Proberechnungen für die erhaltenen Beziehungen angestellt werden. In der Auffindung dieser und ihrer Durchführung liegt allein, wenn nicht gerade die Schwierigkeit, so doch die Mühe der Rechnung. Hat man aber einmal die 51 oben definirten Entwickelungen der Functionaldeterminanten festgelegt, so ergeben die bekannten Identitäten

$$(\varphi\psi)\,\chi_x^p + (\psi\chi)\,\varphi_x^m + (\chi\varphi)\,\psi_x^n = 0, \tag{1}$$

$$[(\varphi\psi)\,\chi]^1 = \frac{m-n}{2(m+n-2)}\,\chi\cdot X - \frac{1}{2}\,(\varphi\Phi - \psi\Psi) \tag{2}$$

und die pag. 119 von Clebsch's binären Formen gegebenen Darstellungen von $[(\varphi\psi)^1]^2$ und $(\varphi\psi)^1\cdot(\varphi'\psi')^1$ die Mittel an die Hand, Syzyganten zwischen den Grundformen G fast in beliebiger Menge ohne Weiteres aufzustellen. Es leuchtet ein, dass zur endgiltigen Festlegung der Form jeder einzelnen Beziehung zuvor auch die zweiten Ueberschiebungen: $(C_2 C_2')^2$, $(C_2 C_4)^2$ und $(C_4 C_4')^2$ ausgerechnet werden müssen. Es sind deren im Ganzen $\frac{15\cdot 16}{1\cdot 2} = 120$. Von diesen sind aber schon Δ, ∇, Θ, S und Σ unter den Grundformen enthalten. Die 3 weiteren $(\psi\psi)^2$, $(\psi\chi)^2$ und $(\chi\chi)_2$ gehen als Gegenbilder in sich selbst über. Es bleiben daher ausser diesen drei nur $\frac{112}{2} = 56$ zu entwickeln übrig. Und auch diese lassen sich aus den beiden $(\psi\psi)^2$ und $(\alpha\psi)^2$ durch alleinige Anwendung der beiden Processe $d\Phi$ und $\delta\Phi$ successive durch elementare Reductionen herleiten. Stephanos führt noch als weitere Quellen relativ einfacher Syzyganten die bekannten Relationen auf:

$$R\varphi = (\alpha\varphi)_2\,(\beta\gamma)_1 + (\beta\varphi)_2\,(\gamma\alpha)_1 + (\gamma\varphi)_2\,(\alpha\beta)_1$$

$$R\cdot(\varphi\psi)^1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} (\alpha\varphi)_2 & (\beta\varphi)_2 & (\gamma\varphi)_2 \\ (\alpha\psi)_2 & (\beta\psi)_2 & (\gamma\psi)_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

und

$$R^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (\alpha\alpha)^2 & (\beta\alpha)^2 & (\gamma\alpha)^2 \\ (\alpha\beta)^2 & (\beta\beta)^2 & (\gamma\beta)^2 \\ (\alpha\gamma)^2 & (\beta\gamma)^2 & (\gamma\gamma)^2 \end{vmatrix};$$

wo R die forme gauche $(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)$ und α, β, γ beliebige der 8 Grundformen C_2 bedeuten. Diese liefern uns aber nur zusammengesetzte Syzyganten und können daher in unserem Falle ausser Betracht gelassen werden.

Die nächste Aufgabe wird daher sein die Entwickelung der oben definirten Ueberschiebungen $(GG')^1$ und $(GG')^2$ zu leisten.*)

§ 5.

Die Ueberschiebungen $(C_2 C_2')^1$.

Aus $\begin{pmatrix} f & \nabla & \psi \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$(l\psi)_1 + \frac{1}{2} C\psi = \left((a\psi)^1 \nabla\right)^3 + \frac{3}{4}\left((a\psi)^2 \nabla\right)_2.$$

Die im § 2 gefundenen Werthe für $(a\psi)^1$ und $(a\psi)^2$ verwandeln diese in:

$$(l\psi)_1 + \frac{1}{2} C\psi = \frac{1}{2} El - \frac{3}{2}(\Sigma\nabla)_3 + \frac{3}{4}(\lambda\nabla)_2.$$

Ersetzen wir hierin $(\Sigma\nabla)_3$ und $(\lambda\nabla)_2$ durch die in demselben Paragraphen gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir die Grundlage für alle übrigen $(C_2 C_2')^1$ in der Gestalt:

$$(\psi l)_1 = \frac{1}{2} C\psi + \frac{3}{2} n - \frac{1}{2} El.$$

$\delta(\psi l)$ giebt uns dann die Entwickelung von $(\psi\chi) + (l\lambda)$ und das Gegenbild diejenige von $(\psi\chi) - (l\lambda)$, woraus wir sofort die Ausdrücke von $(\psi\chi)$ und $(l\lambda)$ folgern. Zur Controlle liefert

$$d(l\lambda) \equiv 0.$$

$$d(\psi\chi) = \frac{1}{6} A(\psi\psi) - (\psi\mu)$$

entwickelt $(\psi\mu)$ und (ψm).

$$\delta(\psi\mu) = -(\lambda\mu) \quad \text{und} \quad \delta(\psi\chi) = -(\lambda\chi) + \frac{1}{3} A(\psi l)$$

geben $(\lambda\mu)$, (lm), $(\lambda\chi)$ und $(l\chi)$.

*) Stephanos sagt in der genannten Abhandlung, resp. in deren Fortsetzung in demselben Bande der C. R. pag. 1564—67: „Certes ce sont les 5 formules précédentes qui constituent le fondement de la méthode ici exposée. Mais au point de vue de calcul, c'est la determination des valeurs des formes $(GG')^1$ et $(GG')^2$, qui en est la partie la plus importante.

Eine Controlle gestattet:

$$\delta(l\chi) = (\chi\chi) + \frac{1}{3} A(ll) \equiv 0.$$

Aus den Gleichungen:

$$d(l\chi) = -(\lambda\chi) + \frac{1}{6} A(l\psi) - (l\mu)$$

und

$$\delta(\psi m) = -(\lambda m) + (\psi n)$$

finden wir $(l\mu)$ und (λm), sowie (ψn) und $(\psi\nu)$. Zur Probe zeige man, dass

$$d(\psi n) \equiv (\psi\nu) + \frac{1}{3} A(\psi l) - \frac{2}{3} E(\psi\lambda)$$

giebt. Aus:

$$\delta(m\lambda) = (n\lambda) - \frac{1}{3} A(m\psi)$$

folgern wir $(n\lambda)$ und (νl), wie aus:

$$d(l\nu) = -(\lambda\nu) + \frac{1}{3} B(l\psi) + \frac{1}{3} A(l\lambda)$$

die Ausdrücke von $(\lambda\nu)$ und (ln). Eine Controlle gestattet

$$(\lambda\nu) = d(\lambda n) + \frac{1}{3} A(l\lambda) - \Gamma(\psi\lambda) \quad \text{und} \quad \delta(\lambda\nu) = -\frac{1}{3} A(\psi\nu).$$

Weiter schliessen wir aus

$$\delta(lm) = (\chi m) + (ln)$$

auf die Werthe von (χm) und $(\chi\mu)$, wie aus:

$$\delta(m\chi) = (n\chi) + \frac{1}{3} A(ml)$$

auf diejenigen von $(n\chi)$ und $(\nu\chi)$. Zur Probe zeige man dass

$$\delta(\chi\nu) \equiv \frac{1}{3} A(l\nu)$$

wird. Grössere Rechnuug verlangt $(\mu\nu)$, das sich aus

$$d(\chi\nu) = \frac{1}{6} A(\psi\nu) - (\mu\nu) + \frac{1}{3} B(\chi\psi) + \frac{1}{3} A(\chi\lambda)$$

ergiebt. Eine Controlle auf dessen Gegenbild (mn) erhalten wir in

$$\delta(mn) \equiv 0.$$

$$d(m\chi) = -\frac{1}{3} E(\psi\chi) + \frac{1}{6} A(m\psi) - (m\mu)$$

giebt $(m\mu)$, das durch Vertauschung von a und α in $-(m\mu)$ übergehen muss und weiter durch

$$d(m\mu) \equiv 2(\chi\mu) - \frac{1}{3} E(\psi\mu)$$

controllirt wurde.

$$\delta(m\mu) = (n\mu) \quad \text{und} \quad \delta(m\nu) = (n\nu)$$

geben vier weitere $(C_2 C_2')$. Eine durchgreifende Controlle wurde dann durch Verificirung der Gleichung

$$d(n\nu) = \frac{1}{3} A(l\nu) - \frac{2}{3} E(\lambda\nu) - \Gamma(\psi\nu) + \frac{1}{3} B(n\psi) + \frac{1}{3} A(n\lambda)$$

geleistet.

Uebersicht über die $(C_2 C_2')$.

(1) $(\psi l) = \frac{1}{2} C\psi - \frac{1}{2} El + \frac{3}{2} n.$

(2) $(\psi m) = \frac{1}{12} \mathsf{A} E\psi - \frac{1}{2} Cl + \frac{1}{2} Em - \frac{1}{2} \mathsf{B}\lambda - \frac{1}{2} \mathsf{A}\chi.$

(3) $(\psi\chi) = -\frac{1}{2}(C\lambda + \Gamma l) + \frac{1}{4}(Am + \mathsf{A}\mu).$

(4) $(\psi n) = \frac{1}{4}\left(\mathsf{A}\Gamma + \frac{1}{3} A\mathsf{B}\right)\psi - l\left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{12} A\mathsf{A}\right) - \frac{1}{2}\Gamma m$
$+ \frac{1}{6} \mathsf{A} E\lambda + C\chi + En + \frac{1}{2} \mathsf{B}\mu - \frac{1}{2} \mathsf{A}\nu.$

(5) $(lm) = \psi\left(-\frac{1}{12} \mathsf{A} C + \frac{1}{6} \mathsf{B} E\right) - \frac{1}{12} \mathsf{A} El + \frac{1}{2} Cm - \frac{1}{12} \mathsf{A}^2\lambda$
$- \frac{1}{2} \mathsf{B}\chi.$

(6) $(l\lambda) = \frac{1}{2} D\psi + \frac{1}{4}(Am - \mathsf{A}\mu) - \frac{1}{2} E\chi.$

(7) $(l\chi) = -\frac{1}{2} Dl + \frac{1}{2} C\chi + \frac{1}{2} \mathsf{B}\mu - \frac{1}{4} \mathsf{A}\nu.$

(8) $(ln) = \psi\left(\frac{1}{72} A\mathsf{A}^2 - \frac{1}{4} \mathsf{A} D + \frac{1}{2} \mathsf{B}\Gamma\right) + l\left(-\frac{1}{12} A\mathsf{B} - \frac{1}{4} \mathsf{A}\Gamma\right)$
$- \frac{1}{2} Dm + \lambda\left(\frac{1}{3} \mathsf{B} E - \frac{1}{6} \mathsf{A} C\right) + \frac{1}{6} \mathsf{A} E\chi + Cn$
$+ \frac{1}{12} \mathsf{A}^2\mu - \frac{1}{2} \mathsf{B}\nu.$

(9) $(l\mu) = \frac{1}{6}\psi\left(\frac{1}{2}\mathsf{A}B - AC\right) + \frac{1}{4} AEl + \frac{1}{2} Bm + \lambda\left(-D + \frac{1}{12} A\mathsf{A}\right)$
$- \frac{3}{2}\Gamma\chi - \frac{1}{2} An - C\mu + \frac{1}{2} E\nu.$

(10) $(l\nu) = \frac{1}{6} B\mathsf{B}\psi - \frac{1}{12} l\left(\mathsf{A}B - AC\right) + \frac{1}{6} A\mathsf{B}\lambda$
$+ \chi\left(\frac{1}{12} A\mathsf{A} - \frac{1}{2} D\right) - \frac{1}{2} C\nu.$

$$(11)\quad (m\chi) = \psi\left(-\tfrac{1}{72}A\mathrm{A}^2 - \tfrac{1}{6}\mathrm{A}D + \tfrac{1}{3}\mathrm{B}\Gamma\right) + l\left(\tfrac{1}{12}A\mathrm{B} - \tfrac{1}{6}\mathrm{A}\Gamma\right)$$
$$- Dm + \lambda\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{B}E - \tfrac{1}{4}\mathrm{A}C\right) + \tfrac{1}{4}\mathrm{A}E\chi + \tfrac{1}{2}Cn$$
$$+ \tfrac{1}{12}\mathrm{A}^2\mu - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\nu.$$

$$(12)\quad (mn) = -\psi\left(-\tfrac{1}{36}\mathrm{A}^2\Gamma + \tfrac{1}{6}\mathrm{B}D\right) + l\left(-\tfrac{1}{6}\mathrm{B}\Gamma + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}D\right)$$
$$+ \lambda\left(\tfrac{1}{36}\mathrm{A}^2E - \tfrac{1}{6}\mathrm{B}C\right) + \chi\left(\tfrac{1}{6}\mathrm{B}E - \tfrac{1}{6}\mathrm{A}C\right).$$

$$(13)\quad (m\mu) = \psi\left(\tfrac{1}{18}A\mathrm{A}E - \tfrac{1}{2}C\Gamma - \tfrac{1}{6}B\mathrm{B}\right) + l\left(-\tfrac{1}{3}AC + \tfrac{1}{2}E\Gamma + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}B\right)$$
$$+ \lambda\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{A}\Gamma - \tfrac{1}{2}EC - \tfrac{1}{6}A\mathrm{B}\right) + \tfrac{1}{6}AEm - \tfrac{1}{6}\mathrm{A}E\mu$$
$$+ \chi\left(2D - \tfrac{1}{2}E^2 - \tfrac{1}{6}A\mathrm{A}\right) - \Gamma n + C\nu.$$

$$(14)\quad (m\nu) = \psi\left(\tfrac{1}{9}A\mathrm{B}E - \tfrac{1}{18}A\mathrm{A}C - \tfrac{1}{2}DC - \tfrac{1}{36}\mathrm{A}^2B\right)$$
$$- l\left(\tfrac{1}{18}A\mathrm{A}E - \tfrac{1}{6}B\mathrm{B} - \tfrac{1}{2}DE\right)$$
$$- \lambda\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{A}D + \tfrac{1}{36}A\mathrm{A}^2 - \tfrac{2}{3}\mathrm{B}\Gamma + \tfrac{1}{2}C^2\right) + \tfrac{1}{6}ACm$$
$$- \mu\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{B}E - \tfrac{1}{6}\mathrm{A}C\right) + \chi\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{A}\Gamma - \tfrac{1}{2}EC - \tfrac{1}{6}A\mathrm{B}\right)$$
$$- Dn + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}E\nu.$$

$$(15)\quad (\chi n) = \tfrac{1}{36}\mathrm{A}^2B\psi - \tfrac{1}{6}B\mathrm{B}l + \lambda\left(\tfrac{1}{72}A\mathrm{A}^2 + \tfrac{1}{12}\mathrm{A}D - \tfrac{1}{6}\mathrm{B}\Gamma\right)$$
$$+ \chi\left(\tfrac{1}{12}A\mathrm{B} - \tfrac{1}{12}\mathrm{A}\Gamma\right) + \tfrac{1}{2}Dn.$$

$$(16)\quad (n\nu) = \psi\left(\tfrac{2}{9}B\mathrm{B}E - \tfrac{1}{9}A\mathrm{B}\Gamma - \tfrac{1}{9}\mathrm{A}BC + \tfrac{1}{18}A\mathrm{A}D\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{216}A^2\mathrm{A}^2 - \tfrac{1}{2}D^2\right)$$
$$+ l\left(-\tfrac{1}{9}\mathrm{A}BE + \tfrac{1}{18}A\mathrm{A}\Gamma + \tfrac{1}{36}A^2\mathrm{B} + \tfrac{1}{2}D\Gamma\right)$$
$$+ \lambda\left(\tfrac{1}{9}A\mathrm{B}E - \tfrac{1}{18}A\mathrm{A}C - \tfrac{1}{36}\mathrm{A}^2B - \tfrac{1}{2}DC\right)$$
$$+ \chi\left(\tfrac{1}{18}A\mathrm{A}E - \tfrac{1}{6}B\mathrm{B} - \tfrac{1}{2}C\Gamma\right)$$
$$+ m\left(\tfrac{1}{3}BC - \tfrac{1}{6}AD\right) + \mu\left(-\tfrac{1}{3}\mathrm{B}\Gamma + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}D\right)$$
$$- \tfrac{1}{6}ACn + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}\Gamma\nu.$$

In dieser Zusammenstellung sind die Gegenbilder $(\psi\lambda)$, $(\psi\nu)$ u. s. w. der Kürze halber ausgelassen worden.

§ 6.

Die Ueberschiebungen $(C_2 C_2')^2$.

Diese Invarianten finden sich zum grösseren Theil schon in der oben genannten Arbeit des Herrn Bertini ausgerechnet; seine Resultate müssen aber durchgängig in den Zahlencoefficienten rectificirt werden.

Es wurde deshalb auf ihre Controlle besonderes Gewicht gelegt und viele von ihnen auch durch directe symbolische Rechnung erprobt. Wir gehen bei diesen von $(\psi\psi)^2$ aus, das sich durch $\begin{pmatrix} a & \alpha & \psi \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der oben gegebenen Darstellung von $(a\psi)^1$ und der aus $(\alpha\Theta)^4$ resultirenden von $(\alpha\Sigma)^4 = D$ leicht in der Form ergiebt:

$$(\psi\psi)^2 = \frac{1}{2}\left(-E^2 + \frac{1}{2} A\mathsf{A} + 3D\right).$$

$$\delta(\psi\psi)^2 = -2(\psi\lambda)_2$$

gestattet uns hieraus die Entwickelung von $(\psi l)_2$ und $(\psi\lambda)_2$. Von der ersteren ausgehend erhalten wir, ganz wie im vorigen Paragraphen, alle anderen $(C_2 C_2')^2$. Auf neue Weise müssen nur alle $(C_2 C_2)^2$ gefunden werden. Nun ist aber

$$d(l\lambda)_2 = -(\lambda\lambda)_2; \quad \delta(l\chi)_2 = \frac{1}{3} A(ll)_2 + (\chi\chi)_2;$$

$$d(\chi\mu)_2 = \frac{1}{6} A(\psi\mu)_2 - (\mu\mu)_2;$$

$$\delta(mn)_2 = (nn)_2 + \frac{1}{3} A(mm)_2,$$

wodurch auch alle $(C_2 C_2)^2$ bestimmt sind.

Uebersicht über die $(C_2 C_2')^2$.

(1) $(\psi\psi)^2 = \frac{1}{2}\left(-E^2 + \frac{1}{2} A\mathsf{A} + 3D\right).$

(2) $(\psi l)^2 = -\frac{1}{4}(2CE - \mathsf{A}\Gamma - A\mathsf{B}).$

(3) $(\psi m)^2 = \frac{1}{12}\mathsf{A}E^2 - \frac{1}{2}\mathsf{A}D + \frac{1}{2}\mathsf{B}\Gamma - \frac{1}{2}C^2.$

(4) $(\psi\chi)^2 = \frac{1}{4}\left(-DE - C\Gamma + B\mathsf{B} + \frac{1}{6} A\mathsf{A}E\right).$

(5) $(\psi n)^2 = -\frac{1}{12} A\mathsf{A}C + \frac{1}{12} A\mathsf{B}E - \frac{1}{2} CD + \frac{1}{12}\mathsf{A}\Gamma E.$

(6) $(ll)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} A\mathsf{A}^2 - \mathsf{A}D + 2\mathsf{B}\Gamma - 2C^2\right).$

$$(7)\quad (lm)^2 = \frac{1}{6}\mathsf{B}E^2 - \frac{1}{2}\mathsf{B}D + \frac{1}{12}\mathsf{A}^2\Gamma - \frac{1}{6}\mathsf{A}CE.$$

$$(8)\quad (l\lambda)^2 = \frac{1}{4}\left(C\Gamma - B\mathsf{B} + DE - \frac{1}{6}A\mathsf{A}E\right).$$

$$(9)\quad (l\chi)^2 = \frac{1}{24}(\mathsf{A}^2B - A\mathsf{A}C + 2A\mathsf{B}E - 12CD).$$

$$(10)\quad (ln)^2 = \frac{1}{6}\mathsf{B}\Gamma E - \frac{1}{12}A\mathsf{B}C + \frac{1}{72}A\mathsf{A}^2E - \frac{1}{12}\mathsf{A}DE - \frac{1}{12}\mathsf{A}C\Gamma.$$

$$(11)\quad (l\mu)^2 = \frac{1}{2}D\Gamma - \frac{1}{12}\mathsf{A}BE - \frac{1}{12}ACE + \frac{1}{12}A\mathsf{A}\Gamma.$$

$$(12)\quad (l\nu)^2 = \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{12}\mathsf{A}BC - \frac{1}{12}AC^2 - \frac{1}{6}B\mathsf{B}E - \frac{1}{12}A\mathsf{A}D + \frac{1}{6}A\mathsf{B}\Gamma.$$

$$(13)\quad (mm)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}A\mathsf{A}^3 - \frac{1}{6}\mathsf{A}^2E^2 + 2\mathsf{B}CE - A\mathsf{B}^2 - \mathsf{A}C^2\right).$$

$$(14)\quad (m\chi)^2 = \frac{1}{12}\left(-\mathsf{A}DE + 2\mathsf{B}\Gamma E - A\mathsf{B}C - \mathsf{A}C\Gamma + \frac{1}{6}A\mathsf{A}^2E\right).$$

$$(15)\quad (mn)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\mathsf{A}^3B - \frac{1}{6}\mathsf{A}^2\Gamma E + \mathsf{B}DE + \mathsf{B}C\Gamma - B\mathsf{B}^2 - \mathsf{A}CD\right).$$

$$(16)\quad (m\mu)^2 = -\frac{1}{12}\left(-3E^2D - A\mathsf{A}D + \frac{1}{3}A\mathsf{A}E^2 + 3C\Gamma E - B\mathsf{B}E + 12D^2 - 2(AC^2 + \mathsf{A}\Gamma^2) + \mathsf{A}BC + A\mathsf{B}\Gamma\right).$$

$$(17)\quad (m\nu)^2 = -\frac{1}{12}\left(-3CDE + 3C^2\Gamma - A\mathsf{B}D + B\mathsf{B}C + \frac{1}{6}A\mathsf{A}^2\Gamma - \frac{1}{6}\mathsf{A}^2BE + \frac{2}{3}A\mathsf{B}E^2 - \frac{2}{3}A\mathsf{A}CE + 4\mathsf{A}\Gamma D - 4\mathsf{B}\Gamma^2\right).$$

$$(18)\quad (\chi\chi)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}A^2\mathsf{A}^2 - \mathsf{A}BC + \frac{1}{2}A\mathsf{A}D + 2B\mathsf{B}E - A\mathsf{B}\Gamma - 6D^2\right).$$

$$(19)\quad (\chi n)^2 = \frac{1}{12}\left(A\mathsf{B}D - \frac{1}{6}A\mathsf{A}^2\Gamma - 2\mathsf{A}\Gamma D + 2\mathsf{B}\Gamma^2 - 2B\mathsf{B}C + \frac{1}{3}\mathsf{A}^2BE\right).$$

$$(20)\quad (nn)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{36}A^2\mathsf{A}^3 - \frac{1}{6}\mathsf{A}^2\Gamma^2 - \frac{1}{6}A^2\mathsf{B}^2 + 2\mathsf{B}\Gamma D - \mathsf{A}D^2\right).$$

$$(21)\quad (n\nu)^2 = \frac{1}{12}\Big[3(D^2E - C\Gamma D) + \frac{4}{3}(A\mathsf{B}\Gamma E - B\mathsf{B}E^2 + \mathsf{A}BCE) - \frac{1}{6}(A^2\mathsf{B}C + \mathsf{A}^2B\Gamma) + B\mathsf{B}D + \frac{1}{36}A^2\mathsf{A}^2E - \frac{2}{3}(A\mathsf{A}C\Gamma + A\mathsf{A}DE)\Big].$$

Zwischen diesen 36 Relationen bestehen eine Menge identischer Beziehungen, die zur eleganten, übersichtlichen Umgestaltung der später zu entwickelnden Syzyganten vortheilhaft verwendet werden können. Die einfachste derselben ist die evidente:

(I) $$(\psi\chi)_2 + (l\lambda)_2 \equiv 0.$$

Durch successive Anwendung des d und δ Processes lassen sich hieraus mannigfaltige andere ableiten, von denen wir hier nur folgende hervorheben wollen:

(II) $$(\lambda\lambda)_2 + (\psi\mu)^2 - \frac{1}{6}A(\psi\psi)^2 \equiv 0,$$

(III) $$3(ml)^2 + \mathsf{B}(\psi\psi)^2 - \mathsf{A}(\psi l)^2 \equiv 0,$$

(IV) $$A(\psi l)^2 + 6(\lambda\chi)_2 - 6(l\mu)^2 \equiv 0 \quad \text{u. s. w.}$$

§ 7.

Die Ueberschiebungen $(C_4 C_2')^1$.

Die Darstellung dieser Functionaldeterminanten knüpft an dem in § 2 entwickelten Ausdruck für $(a\psi)'$ an. $(al)'$ findet sich in § 3.

$$d(al) = -(a\lambda);\quad \delta(\alpha l) = (\alpha\chi);\quad \delta(a\psi) = (\Delta\psi) - (a\lambda)$$

geben 6 weitere Ueberschiebungen.

Die Darstellung der übrigen ergiebt sich aus den nachfolgend angegebenen Operationen:*)

$$\delta(\Delta\psi) = \frac{1}{3}A(a\psi) - (\Delta\lambda);\quad \delta(\nabla\psi) = -(\nabla\lambda);$$

$$d(\alpha\chi) = (a\chi) + \frac{1}{6}A(\alpha\psi) - (\alpha\mu);\quad \delta(a\chi) = (\Delta\chi) + \frac{1}{3}A(al);$$

$$d(\nabla\psi) = 2(\Theta\psi);\ d(\nabla\lambda) = 2(\Theta\lambda);\ \delta(\Theta\psi) = (\Sigma\psi) - (\Theta\lambda).$$

Man findet

$$\big((\Delta\nabla)^2\psi\big) = f\Big(\frac{1}{48}A\mathsf{B} + \frac{1}{16}\mathsf{A}\Gamma\Big) - \varphi\Big(\mathsf{A}B + \frac{1}{16}AC\Big) - \frac{1}{48}\mathsf{A}E\Delta + \frac{1}{48}AE\nabla - \frac{1}{4}C\Sigma + \frac{1}{4}\Gamma S;$$

und

$$\delta(S\psi) = \big((\Delta\nabla)^2\psi\big) - (S\lambda);\quad \delta(\Theta l) = (\Sigma l) + (\Theta\chi);$$

$$d(a\chi) = (a\chi) + \frac{1}{6}A(\alpha\psi) - (\alpha\mu);\ d(\nabla\chi) = 2(\Theta\chi) + \frac{1}{6}A(\nabla\psi) - (\nabla\mu);$$

$$\delta(am) = (\Delta m) + (an);\ d(a\chi) = \frac{1}{6}A(a\psi) - (a\mu);\ \delta(\alpha m) = (\alpha n);$$

$$\delta(\Delta m) = \frac{1}{3}A(am) + (\Delta n);\ d(\Delta\chi) = \frac{1}{6}A(\Delta\psi) - (\Delta\mu);$$

*) *Jede* Ueberschiebung wurde dadurch controllirt, dass für sie die Identität $[(C_4 C_2)' C_4]^4 \equiv 0$ verificirt wurde.

$$\delta(\nabla m) = (\nabla n);\quad d(\Theta\chi) = (\Delta\chi) + \frac{1}{6}A(\Theta\psi) - (\Theta\mu);$$

$$d(\nabla\nu) = 2(\Theta\nu) + \frac{1}{3}B(\nabla\psi) + \frac{1}{3}A(\nabla\lambda);$$

$$\delta(\Theta\chi) = (\Sigma\chi) + \frac{1}{3}A(\Theta l);$$

$$\delta(\Theta m) = (\Sigma m) + (\Theta n);\quad \delta(\Theta\mu) = (\Sigma\mu);$$

$$\delta(\Theta n) = (\Sigma n) + \frac{1}{3}A(\Theta m).$$

Uebersicht über die $(C_4 C_2)^1$.

(1) $(a\psi) = \frac{1}{2}Ef - \frac{1}{4}A\varphi - \frac{3}{2}\Sigma,$

(2) $(al) = -\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}E\Theta + \frac{1}{4}Cf - \frac{1}{4}\Gamma\varphi - \frac{3}{8}A\nabla - \frac{1}{8}\mathrm{A}\Delta,$

(3) $(a\lambda) = -\frac{1}{4}\Gamma f + \frac{1}{4}B\varphi + \frac{1}{4}A\Theta - \frac{1}{4}E\Delta.$

(4) $(am) = \frac{1}{2}D\varphi - \frac{1}{2}\Gamma\nabla + \frac{1}{2}C\Theta - \frac{1}{2}ES,$

(5) $(a\chi) = \frac{1}{4}Df + \frac{1}{4}C\Delta - \frac{1}{4}B\nabla - \frac{1}{4}AS = (\Delta l),$

(6) $(an) = -\frac{1}{6}CEf + \varphi\left(\frac{1}{12}AC - \frac{1}{6}E\Gamma\right) - \frac{1}{12}\mathrm{A}E\Delta - \frac{1}{6}AE\nabla$
$+\Theta\left(-\frac{1}{2}D + \frac{1}{8}E^2\right) + \frac{1}{2}\Gamma S + C\Sigma - \frac{1}{3}E\psi^2,$

(7) $(a\mu) = \frac{1}{12}AEf - \frac{1}{2}\Gamma\Delta + \frac{1}{2}B\Theta - \frac{1}{2}A\Sigma,$

(8) $(a\nu) = -\frac{1}{12}A\Gamma\varphi - \frac{1}{24}A^2\nabla + \Delta\left(-\frac{1}{2}D - \frac{1}{24}A\mathrm{A}\right) + \frac{1}{6}AE\Theta$
$+\frac{1}{2}BS - \frac{1}{6}A\psi^2,$

(9) $(\Delta\psi) = \frac{1}{4}\Gamma f - \frac{1}{4}B\varphi - \frac{1}{4}A\Theta + \frac{1}{4}E\Delta = -(a\lambda),$

(10) $(\Delta l) = \frac{1}{4}Df + \frac{1}{4}C\Delta - \frac{1}{4}B\nabla - \frac{1}{4}AS,$

(11) $(\Delta m) = \frac{1}{12}\varphi(AC + E\Gamma) + \frac{1}{12}CEf + \frac{1}{24}\mathrm{A}E\Delta - \frac{1}{24}AE\nabla$
$+\Theta\left(D - \frac{1}{6}E^2\right) - \Gamma S - \frac{1}{2}C\Sigma + \frac{1}{6}E\psi^2,$

(12) $(\Delta\lambda) = \frac{1}{24}A^2\varphi - \frac{1}{4}A\Sigma - \frac{1}{2}\Gamma\Delta + \frac{1}{2}B\Theta,$

(13) $(\Delta\chi) = \frac{1}{24}ACf + \frac{1}{24}A\Gamma\varphi + \Delta\left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{48}A\mathrm{A}\right) - \frac{1}{48}A^2\nabla$
$-\frac{1}{12}AE\Theta - \frac{1}{2}BS + \frac{1}{12}A\psi^2.$

$$(14)\quad (\Delta n) = -\tfrac{1}{12} C\Gamma f + \tfrac{1}{6}\varphi\left(BC - \tfrac{1}{2} AD - \tfrac{1}{2}\Gamma^2\right) - \tfrac{1}{24}\mathrm{A}\Gamma\Delta$$
$$+\nabla\left(-\tfrac{1}{6} BE + \tfrac{1}{24} A\Gamma\right) + \tfrac{1}{6} E\Gamma\Theta + \tfrac{1}{2} D\Sigma - \tfrac{1}{6}\Gamma\psi^2,$$

$$(15)\quad (\Delta\mu) = \tfrac{1}{6} f\left(BE - \tfrac{1}{2} A\Gamma\right) - \tfrac{1}{12} AE\Delta + \tfrac{1}{12} A^2\Theta - \tfrac{1}{2} B\Sigma,$$

$$(16)\quad (\Delta\nu) = \tfrac{1}{12} f(BC - \mathrm{A}D) - \tfrac{1}{12} B\Gamma\varphi - \tfrac{1}{12}\Delta\left(AC + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}B\right)$$
$$-\tfrac{1}{24} AB\nabla + \tfrac{1}{6} BE\Theta + \tfrac{1}{12} A^2 S - \tfrac{1}{6} B\psi^2,$$

$$(17)\quad (\Theta\psi) = \tfrac{1}{4} Cf - \tfrac{1}{4}\Gamma\varphi + \tfrac{1}{8}\mathrm{A}\Delta - \tfrac{1}{8} A\nabla,$$

$$(18)\quad (\Theta l) = \tfrac{1}{24}\mathrm{A}Ef + \tfrac{1}{48}\varphi(6D - A\mathrm{A}) - \tfrac{3}{8}\Gamma\nabla + \tfrac{1}{8}\mathrm{B}\Delta + \tfrac{1}{4} C\Theta$$
$$-\tfrac{1}{4} ES,$$

$$(19)\quad (\Theta m) = \tfrac{1}{24}\mathrm{B}Ef + \tfrac{1}{24}\varphi(3CE + A\mathrm{B} - \mathrm{A}\Gamma) + \tfrac{1}{48}\mathrm{A}^2\Delta$$
$$+\tfrac{1}{48}\nabla(-6E^2 - A\mathrm{A} + 24D) + \tfrac{1}{24}\mathrm{A}E\Theta$$
$$-\tfrac{1}{4}\mathrm{B}\Sigma - \tfrac{3}{4} CS + \tfrac{1}{12} A\psi^2,$$

$$(20)\quad (\Theta\chi) = \tfrac{1}{48} f(A\mathrm{B} - \mathrm{A}\Gamma) + \tfrac{1}{48}\varphi(-\mathrm{A}B + AC) + \tfrac{1}{16} E(\mathrm{A}\Delta - A\nabla)$$
$$+\tfrac{1}{4}(C\Sigma - \Gamma S),$$

$$(21)\quad (\Theta n) = -\tfrac{1}{12} C^2 f + \tfrac{1}{72}\varphi(3C\Gamma + 3B\mathrm{B} - A\mathrm{A}E) + \tfrac{1}{24}\Delta(\mathrm{B}E - 2\mathrm{A}C)$$
$$-\tfrac{1}{24}\nabla(3\Gamma E + \mathrm{A}B - AC) + \tfrac{1}{24}\Theta(\mathrm{A}\Gamma + 4CE - A\mathrm{B})$$
$$+\tfrac{1}{12}\mathrm{A}E\Sigma + \tfrac{1}{24} S(A\mathrm{A} - 6D) - \tfrac{1}{6} C\psi^2,$$

$$(22)\quad (\Sigma\psi) = \tfrac{1}{48} f(A\mathrm{A} + 18D) - \tfrac{1}{24} AE\varphi - \tfrac{1}{8}(C\Delta + B\nabla) + \tfrac{1}{4}\Gamma\Theta$$
$$-\tfrac{1}{4} E\Sigma,$$

$$(23)\quad (\Sigma l) = \tfrac{1}{48} f(A\mathrm{B} + 3\mathrm{A}\Gamma - 2CE) + \tfrac{1}{48}\varphi(AC - \mathrm{A}B - 2\Gamma E)$$
$$+\tfrac{1}{12}\Theta(E^2 + 3D) - \tfrac{1}{24}\mathrm{A}E\Delta - \tfrac{1}{12} AE\nabla - \tfrac{1}{12} E\psi^2,$$

$$(24)\quad (\Sigma m) = \tfrac{1}{24} f(\mathrm{B}\Gamma - C^2 - \mathrm{A}D) + \tfrac{1}{72}\varphi(-3C\Gamma + 9DE - A\mathrm{A}E + 3B\mathrm{B})$$
$$-\tfrac{1}{48}\mathrm{A}C\Delta + \tfrac{1}{48}\nabla(-6\Gamma E - 2\mathrm{A}B + 3AC)$$
$$+\tfrac{1}{24}\Theta(2\mathrm{A}\Gamma - A\mathrm{B} + 2CE) + \tfrac{1}{24}\mathrm{A}E\Sigma$$
$$+\tfrac{1}{24} S(-12D + A\mathrm{A}) - \tfrac{1}{12} C\psi^2,$$

$$(25)\quad (\Sigma\lambda) = -\frac{1}{24}\mathrm{A}Bf - \frac{1}{24}\varphi(A\Gamma - 2BE) - \frac{1}{48}\Delta(12D - A\mathrm{A}) + \frac{1}{48}A^2\nabla,$$

$$(26)\quad (\Sigma\chi) = \frac{1}{24}f(B\mathrm{B} - C\Gamma) + \frac{1}{288}\varphi(12BC - 6AD - A^2\mathrm{A} - 12\Gamma^2) + \frac{1}{48}\Delta(\mathrm{A}\Gamma - A\mathrm{B}) + \frac{1}{24}\nabla(A\Gamma - 3BE) + \frac{1}{12}\Gamma E\Theta + \frac{1}{4}D\Sigma - \frac{1}{12}\Gamma\psi^2,$$

$$(27)\quad (\Sigma\mu) = \frac{1}{144}f(18\Gamma^2 + A^2\mathrm{A} - 18BC + 12AD) + \frac{1}{144}A^2E\varphi + \frac{1}{48}\Delta(4AC - 6\Gamma E - \mathrm{A}B) + \frac{1}{48}AB\nabla + \frac{1}{24}\Theta(4BE - 3A\Gamma) - \frac{1}{8}AE\Sigma - \frac{1}{24}A^2S + \frac{1}{12}B\psi^2,$$

$$(28)\quad (\Sigma n) = -\frac{1}{144}f(18CD + A\mathrm{A}C) + \frac{1}{144}\varphi(-4\mathrm{A}BE + A\mathrm{A}\Gamma + A^2\mathrm{B}) + \frac{1}{288}\Delta(-30\mathrm{A}D + 12\mathrm{B}\Gamma - A\mathrm{A}^2) + \frac{1}{288}\nabla(-36\Gamma^2 - 3A^2\mathrm{A} + 48BC - 42AD) + \frac{1}{72}\Theta(A\mathrm{A}E + 18DE - 6B\mathrm{B}) + \frac{1}{8}\Sigma(\mathrm{A}\Gamma + 4A\mathrm{B}) + \frac{1}{12}\mathrm{A}BS - \frac{1}{72}\psi^2(18D + A\mathrm{A}),$$

$$(29)\quad (\Sigma\nu) = \frac{1}{144}f(18\Gamma D - 2ACE + A^2\mathrm{B} - 4\mathrm{A}BE + 2A\mathrm{A}\Gamma) - \frac{1}{72}A\Gamma E\varphi - \frac{1}{144}\Delta(6B\mathrm{B} - A\mathrm{A}E + 18DE) - \frac{1}{24}B\Gamma\nabla + \frac{1}{144}\Theta(-6AD - A^2\mathrm{A} + 12BC + 4AE^2) + \frac{1}{24}\Sigma(\mathrm{A}B - AC) + \frac{1}{12}S(2BE - A\Gamma) - \frac{1}{36}AE\psi^2.$$

Zwischen diesen 64 Functionaldeterminanten bestehen wiederum für den weiteren Ausbau der Theorie dieser Formen wichtige identische Beziehungen, die sich durch alleinige Anwendung der beiden Processe d und δ aus den beiden einfachsten und augenscheinlichen:

$$(a\chi) - (\Delta l) \equiv 0 \quad \text{und} \quad (a\lambda) + (\Delta\psi) \equiv 0$$

herleiten lassen. Von diesen wollen wir hier nur die beiden

$$(al) - (\alpha\lambda) - 2(\Theta\psi) \equiv 0 \quad \text{und} \quad A(a\psi) - 6(a\mu) + 6(\Delta\lambda) \equiv 0$$

anführen. Zur oben erwähnten Verificirung vorstehender 29 Relationen bedarf man einer Reihe zu jeder Arbeit über das behandelte simultane System unentbehrlicher Invariantenrelationen, die wir an dieser Stelle mittheilen wollen:

$$(a\Theta)^4 = \Gamma;\quad (\Delta\Delta)^4 = \frac{1}{6}A^2;\quad (\Theta\Delta)^4 = \frac{1}{6}AE;$$

$$(a\Sigma)^4 = \frac{1}{6}AE;\quad (aS)^4 = D;$$

$$(\Sigma\Delta)^4 = \frac{1}{3}BE - \frac{1}{6}A\Gamma;\quad (\Sigma\nabla)^4 = \frac{1}{6}\mathsf{A}\Gamma;$$

$$(\Theta\Theta)^4 = \frac{1}{6}E^2 + \frac{1}{12}A\mathsf{A} - \frac{1}{2}D;$$

$$(\Theta\Sigma)^4 = \frac{1}{6}\Gamma E + \frac{1}{12}\mathsf{A}B - \frac{1}{12}AC;$$

$$(\Sigma\Sigma)^4 = \frac{1}{6}\Gamma^2 + \frac{1}{72}A^2\mathsf{A} - \frac{1}{6}BC + \frac{1}{12}AD;$$

$$(\Sigma S)^4 = -\frac{1}{12}C\Gamma + \frac{1}{4}DE + \frac{1}{12}B\mathsf{B} - \frac{1}{72}A\mathsf{A}E.$$

(Die ferner zu diesen Proberechnungen nöthigen Ueberschiebungen $(C_4, \psi)^2$ finden sich im nächsten Paragraphen).

§ 8.

Die Ueberschiebungen $(C_4 C_2)^2$.

Diese Covarianten 2. Ordnung werden auf analoge Weise wie die entsprechenden $(C_4\, C_2)^1$ aus den beiden: $(a\psi)^2 = \lambda$ und $(al)^2 = -\chi$ nach einander entwickelt. Nur lässt sich bei denselben kein allgemein giltiges Princip der Verificirung a priori aufstellen.

Es mussten für jeden einzelnen Fall besondere Verfahrungsweisen gefunden werden, die aber unsere beiden Processe stets sofort liefern. Wir wollen von den bei jeder Ueberschiebung vorgenommenen Controllrechnungen nur einige der interessanteren bei dieser Gelegenheit erwähnen:

$$\delta(\Sigma\nu)^2 \equiv \frac{1}{3}A(\Theta\nu)^2;\ \delta(\Theta\lambda)_2 \equiv (\Sigma\lambda)_2 - \frac{1}{3}A(\Theta\psi)^2;$$

$$\delta(\Delta\mu)_2 \equiv \frac{1}{3}A(a\mu)_2;\ \delta(\Sigma\mu)_2 \equiv \frac{1}{3}A(\Theta\mu)^2;$$

$$\delta(\Sigma n)_2 \equiv \frac{1}{3}A(\Theta n)_2 + \frac{1}{3}A(\Sigma m)_2;\ \text{u. s. w.}$$

Uebersicht über die Ueberschiebungen $(C_4 C_2)^2$.

(1) $(a\psi)^2 = \lambda$; (2) $(al)^2 = -\chi$;

(3) $(am)^2 = 2n - El + C\psi$; (4) $(a\lambda)^2 = -\mu + \frac{1}{6}A\psi$;

(5) $(a\chi)^2 = \nu - \frac{1}{6}Al$;

(6) $(an)^2 = \frac{1}{3}D\psi - \frac{1}{3}\Gamma l - \frac{2}{3}C\lambda - \frac{2}{3}E\chi + \frac{1}{3}Am$;

(7) $(a\nu)^2 = -\frac{1}{3} B\lambda + \frac{1}{3} A\chi$; (8) $(a\mu)^2 = -\frac{1}{3} B\psi - \frac{1}{3} A\lambda$;

(9) $(\Delta\psi)^2 = -\mu - \frac{1}{6} A\psi$; (10) $(\Delta l)^2 = -\nu - \frac{1}{6} Al$;

(11) $(\Delta m)^2 = \frac{2}{3} D\psi - \frac{1}{3} C\lambda - \frac{2}{3} \Gamma l - \frac{1}{3} E\chi + \frac{1}{3} Am$;

(12) $(\Delta\lambda)^2 = \frac{1}{3} B\psi + \frac{1}{6} A\lambda$;

(13) $(\Delta\chi)^2 = -\frac{1}{3} Bl + \frac{1}{6} A\chi$;

(14) $(\Delta n)^2 = -D\lambda - \Gamma\chi + \frac{2}{3} Bm - \frac{1}{3} An$;

(15) $(\Delta\mu)^2 = -\frac{1}{18} A^2\psi - \frac{1}{3} B\lambda$;

(16) $(\Delta\nu)^2 = -\frac{1}{18} A^2 l + \frac{1}{3} B\chi$;

(17) $(\Theta\psi)^2 = \chi - \frac{1}{3} E\psi$.

(18) $(\Theta l)^2 = -\frac{1}{2} n - \frac{1}{2} C\psi + \frac{1}{6} El - \frac{1}{6} \mathrm{A}\lambda$;

(19) $(\Theta m)^2 = \frac{1}{12} \mathrm{A} E\psi - \frac{1}{6} \mathrm{B}\lambda - \frac{1}{2} Cl - \frac{1}{6} \mathrm{A}\chi + \frac{1}{6} Em$.

(20) $(\Theta\chi)^2 = -\frac{1}{3} D\psi + \frac{1}{36} A\mathrm{A}\psi - \frac{1}{6} \Gamma l + \frac{1}{6} C\lambda + \frac{1}{3} E\chi - \frac{1}{12} (Am - \mathrm{A}\mu)$;

(21) $(\Theta n)^2 = \frac{1}{36} \psi (A\mathrm{B} - 3\mathrm{A}\Gamma) + \frac{1}{36} l (18D - A\mathrm{A}) - \frac{1}{6} \mathrm{A} E\lambda - C\chi$

$+ \frac{1}{2} \Gamma m - \frac{1}{6} \mathrm{B}\mu - \frac{1}{3} En + \frac{1}{6} \mathrm{A}\nu$;

(22) $(\Sigma\psi)^2 = -\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{6} \Gamma\psi + \frac{1}{6} Al + \frac{1}{2} E\lambda$;

(23) $(\Sigma l)^2 = -\frac{1}{6} D\psi + \frac{1}{36} A\mathrm{A}\psi + \frac{1}{3} \Gamma l + \frac{1}{3} C\lambda - \frac{1}{6} E\chi$

$-\frac{1}{12} Am - \frac{1}{12} \mathrm{A}\mu$;

(24) $(\Sigma m)^2 = \frac{1}{36} \psi (6\mathrm{A}\Gamma + A\mathrm{B}) - \frac{1}{36} l (36D + A\mathrm{A}) + \frac{1}{12} \mathrm{A} E\lambda$

$+ \frac{1}{2} C\chi - \frac{1}{3} \Gamma m + \frac{1}{6} \mathrm{B}\mu + \frac{1}{2} En - \frac{1}{6} \mathrm{A}\nu$;

(25) $(\Sigma\lambda)^2 = \frac{1}{6} A\chi - \frac{1}{3} \Gamma\lambda - \frac{1}{3} Bl$;

(26) $(\Sigma\chi)^2 = \frac{1}{18} \mathrm{A} B\psi + \frac{1}{36} \lambda (18D + A\mathrm{A}) + \frac{1}{6} \Gamma\chi - \frac{1}{6} Bm + \frac{1}{12} An$;

(27) $(\Sigma n)^2 = \frac{1}{18} B\mathrm{B}\psi - \frac{1}{18} \mathrm{A} Bl + \frac{1}{36} \lambda (A\mathrm{B} - 3\mathrm{A}\Gamma)$

$+ \frac{1}{36} \chi (A\mathrm{A} - 18D) + \frac{1}{6} \Gamma n$;

(28) $(\Sigma\mu)^2 = \frac{1}{12}\psi(A\Gamma - 2BE) - \frac{1}{36}A^2 l - \frac{1}{12}AE\lambda + \frac{1}{6}B\chi + \frac{1}{6}\Gamma\mu;$

(29) $(\Sigma\nu)^2 = \frac{1}{216}\psi(36BC - 18AD - A^2\mathrm{A}) + \frac{1}{6}l(A\Gamma - 2BE)$

$+ \frac{1}{36}\lambda(3AC - \mathrm{A}B) + \frac{1}{6}AE\chi - \frac{1}{36}A^2 m + \frac{1}{2}D\mu$

$+ \frac{1}{6}Bn - \frac{1}{3}\Gamma\nu;$

§ 9.

Die Ueberschiebungen $(C_4 C_4')^1$.

Im § 3 finden wir $(a\Theta)$ entwickelt. Die folgenden Operationen geben die noch unbekannten übrigen:

$$\delta(\varphi\Theta) = (\varphi\Sigma);\ d(\varphi\Sigma) = (f\Sigma) + \frac{1}{6}A(\varphi f);\ d(\Delta\nabla) = 2(\Delta\Theta);$$

Zur Probe muss $d(\nabla\Theta)$ wieder $(\nabla\Delta)$ geben.

$$\delta(\Delta\Theta) = \frac{1}{3}A(f\Theta) + (\Delta\Sigma);$$

Zur Controlle hat man:

$$\delta(\Delta\Sigma) = \frac{1}{3}A(a\Sigma) + \frac{1}{3}A(\Delta\Theta).$$

Weiter ist:

$$\delta(\nabla\Theta) = (\nabla\Sigma);\quad d(\nabla\Sigma) = 2(\Theta\Sigma) + \frac{1}{6}A(\nabla f).$$

Die letztere erhält eine Controlle durch

$$d(\Theta\Sigma) = (\Delta\Sigma) + \frac{1}{6}A(\Theta f).$$

Die letzte Covariante (ΣS) bestimmt man am kürzesten durch directe Ueberschiebung von

$$\Sigma = \frac{1}{3}Ef - \frac{1}{6}A\varphi - \frac{2}{3}(a\psi)\quad [\text{Vergl. § 7 } (a\psi)']$$

mit S und Entwickelung von $\big((a\psi)S\big)$ nach der im § 4 erwähnten Regel. Der erhaltene Ausdruck ist noch nicht symmetrisch. Vertauschen wir aber in demselben f mit φ und addiren die beiden Werthe von (ΣS), so wird die erwünschte Form erlangt.

Uebersicht über die $(C_4 C_4')^1$.

(1) $(a\Theta) = \frac{1}{2}f\psi + \varrho;$

(2) $(aS) = \frac{1}{3}E\xi + \frac{1}{6}fl - \frac{1}{3}\Theta\psi + \frac{1}{3}\varphi\lambda;$

(3) $(a\Sigma) = -\frac{1}{6}A\xi - \frac{1}{6}f\lambda + \frac{1}{3}\Delta\psi;$

(4) $(\Delta\nabla) = -\frac{1}{3}E\xi - \frac{1}{3}\varphi\lambda + \frac{1}{3}fl + \frac{1}{3}\Theta\psi;$

(5) $(\Delta\Theta) = -\frac{1}{6}A\xi - \frac{1}{3}f\lambda + \frac{1}{6}\Delta\psi;$

(6) $(\Delta S) = -\frac{1}{6}Ar + \frac{1}{3}f\chi + \frac{1}{6}l\Delta;$

(7) $(\Delta\Sigma) = -\frac{1}{3}B\xi - \frac{1}{2}\Delta\lambda - \frac{1}{6}A\varrho;$

(8) $$(\Theta\Sigma) = -\frac{1}{6}E\varrho - \frac{1}{12}\mathrm{A}t - \frac{1}{6}f\chi - \frac{1}{36}A\varphi\psi + \frac{1}{6}\varphi\mu + \frac{1}{6}\Theta\lambda + \frac{1}{12}Ar;$$

(9) $$(\Sigma S) = \frac{1}{36}\xi(4E^2 - A\mathrm{A}) + \frac{1}{9}E(\varphi\lambda - fl) - \frac{1}{6}E\Theta\psi + \frac{1}{24}(A\varphi l - \mathrm{A}f\lambda) + \frac{1}{36}(\mathrm{A}\Delta + A\nabla) + \frac{1}{36}\psi(Cf + \Gamma\varphi) + \frac{1}{12}(\Sigma l - S\lambda) + \frac{1}{12}(fn - \varphi\nu) + \frac{1}{18}\psi^3.$$

Von den 21 Covarianten $(C_4C_4')^1$ sind 5 unter den Grundformen enthalten. Die fehlenden sieben sind die Gegenbilder der oben entwickelten, mit Ausnahme von (ΣS) und $(\Delta\nabla)$, die sich selbst entsprechen.

§ 10.

Die Ueberschiebungen $(C_4C_4')^2$.

Die Entwickelung dieser knüpft an dem im § 2 entwickelten Ausdruck von $(a\Theta)^2$ an. Mit Ausnahme der zweiten Ueberschiebungen einer jeden C_4 über sich selbst findet man aus $(a\Theta)^2$ alle übrigen wie im vorigen Paragraphen die entsprechenden (C_4C_4'). $(\Delta\Delta)^2$ findet man bei den biquadratischen Formen (G.-K. pag. 181).

$$d(\nabla\Theta)^2 = 2(\Theta\Theta)^2 + (\Delta\nabla)^2$$

giebt $(\Theta\Theta)^2$,

$$\delta(\Theta\Sigma)^2 = (\Sigma\Sigma)^2 + \frac{1}{3}A(\Theta\Theta)^2$$

liefert $(\Sigma\Sigma)^2$ und $(SS)^2$ sowie

$$d(SS)_2 = 2\left[\frac{1}{6}A(\alpha S)_2 + \frac{1}{3}E(aS)_2 - (\Sigma S)_2\right]$$

desgl. $(\Sigma S)_2$.

Eine Controlle auf diese aber erhalten wir durch:

$$d(\Sigma S)_2 \equiv \frac{1}{6}A(aS)_2 + \frac{1}{6}A(\alpha\Sigma)_2 + \frac{1}{3}E(a\Sigma)_2 - (\Sigma\Sigma)_2.$$

Uebersicht über die $(C_4 C_4')^2$.

(1) $(a\Delta)^2 = \frac{1}{6} Af$, (2) $(a\Theta)^2 = \frac{1}{12} A\varphi + \frac{1}{6} Ef - \frac{1}{2} \Sigma$.

(3) $(aS)^2 = -\frac{1}{6}\psi^2 + \frac{1}{6} E\Theta + \frac{1}{24}(A\nabla - \mathrm{A}\Delta) + \frac{1}{12}(Cf - \Gamma\varphi)$,

(4) $(a\Sigma)^2 = \frac{1}{12}(3E\Delta - A\Theta - \Gamma f + B\varphi)$,

(5) $(\Delta\Delta)^2 = \frac{1}{3} Bf - \frac{1}{6} A\Delta$,

(6) $(\Delta\nabla)^2 = \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{3} E\Theta + \frac{1}{12}(A\nabla + \mathrm{A}\Delta) + \frac{1}{6}(Cf + \Gamma\varphi)$,

(7) $(\Delta\Theta)^2 = \frac{1}{12}(3\Gamma f + B\varphi - E\Delta - A\Theta)$,

(8) $(\Delta S)^2 = \frac{1}{12}(3Df + B\nabla - C\Delta - AS)$,

(9) $(\Delta\Sigma)^2 = \frac{1}{72}(12\Gamma\Delta + A^2\varphi - 12B\Theta + 6A\Sigma)$,

(10) $(\Theta\Theta)^2 = -\frac{1}{6}\psi^2 - \frac{1}{12}(A\nabla + \mathrm{A}\Delta) + \frac{1}{6}(Cf + \Gamma\varphi)$,

(11) $$(\Theta\Sigma)^2 = f\left(\frac{1}{8} D - \frac{1}{144} A\mathrm{A}\right) + \frac{1}{24}(AE\varphi + 3C\Delta - B\nabla - 2\Gamma\Theta - 2E\Sigma - 2AS),$$

(12) $$(\Sigma\Sigma)^2 = \frac{1}{72}[f(AC - \mathrm{A}B) + 2\varphi(3BE - A\Gamma) + \Delta(18D + A\mathrm{A}) - 2AE\Theta - 12(\Gamma\Sigma + BS) + 2A\psi^2],$$

(13) $$(\Sigma S)^2 = \frac{1}{144}[f(3\mathrm{A}\Gamma - A\mathrm{B} - 6CE) + \varphi(3AC - \mathrm{A}B - 6\Gamma E) + 2\Theta(6E^2 - A\mathrm{A} - 18D) + 24(C\Sigma + \Gamma S) - 12E\psi^2].$$

Von den 28 Ueberschiebungen $(C_4 C_4')^2$ sind 5 Grundformen, aber $(\Delta\nabla)^2$, $(\Theta\Theta)^2$ und $(\Sigma S)^2$ gehen durch Vertauschung in sich selbst über; die übrigen 10 erhält man als Gegenbilder der oben entwickelten $(C_4 C_4')^2$.

§ 11.

Grundsyzyganten.

Obgleich wir die Ausarbeitung der Grundsyzyganten des simultanen Systemes einer nächstfolgenden Publication vorbehalten, so wollen wir doch zum Schlusse noch an einigen einfachsten Beispielen zeigen, wie sich aus den entwickelten Relationen ohne weiteres neben den mannigfaltigsten, zusammengesetzten Syzyganten auch die *Grundsyzyganten* hinschreiben lassen.

1) Aus

$$[(\psi l)\psi]^1 = \frac{1}{2} l(\psi\psi)^2 - \frac{1}{2}\psi(l\psi)^2$$

erhalten wir mit Hülfe der für $(\psi\psi)^2$, $(\psi l)^2$ und $(\psi l)^1$ gefundenen Werthe:

$$\frac{1}{2} l\left[-\frac{1}{2}E^2+\frac{1}{4}A\mathsf{A}+\frac{3}{2}D\right]-\frac{1}{2}\psi\left[-\frac{1}{2}CE+\frac{1}{4}\mathsf{A}\Gamma+\frac{1}{4}A\mathsf{B}\right]$$
$$=\frac{1}{2}C(\psi\psi)^1+\frac{3}{2}(n\psi)^1-\frac{1}{2}E(l\psi)^1.$$

Ersetzen wir hierin $(\psi n)^1$ und $(\psi l)^1$ resp. durch

$$\frac{1}{12}(A\mathsf{B}+3\mathsf{A}\Gamma)\psi-\frac{1}{12}l(18D+A\mathsf{A})+C\chi-\frac{1}{2}\Gamma m+En+\frac{1}{6}\mathsf{A}E\lambda$$
$$-\frac{1}{2}\mathsf{A}\nu+\frac{1}{2}\mathsf{B}\mu$$

und

$$\frac{1}{2}C\psi+\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}El,$$

so geht die gefundene Relation über in die Syzygante:

$$(342): \mathsf{A}\Gamma\psi-6Dl-3\Gamma m+\mathsf{A}E\lambda+6C\chi+3En+3\mathsf{B}\mu-3\mathsf{A}\nu=0.$$

2) Ersetzen wir in der Identität

$$(\psi l)\lambda+(l\lambda)\psi+(\lambda\psi)l=0$$

die ersten Ueberschiebungen (ψl) u. s. w. durch ihre bezügl. Werthe, so finden wir:

$$(444): 3(n\lambda+\nu l)+\psi(C\lambda-\Gamma l)+D\psi^2+\frac{1}{2}\psi(Am-\mathsf{A}\mu)-E\chi\psi-El\lambda=0.$$

3) Ferner giebt die Gleichung:

$$\big((a\psi)\psi\big)=\frac{1}{4}\psi(a\psi)^2+\frac{1}{2}\psi(a\psi)^2-\frac{1}{2}a(\psi\psi)^2$$
$$=\frac{1}{2}E(a\psi)-\frac{1}{4}A(\varphi\psi)-\frac{3}{2}(\Sigma\psi)$$

nach Einsetzung der bekannten Werthe der Ueberschiebungen $(a\psi)^2$ u. s. w. die Syzygante:

$$(324): 6E\Sigma+6AS+6\Gamma\Theta-3Df-3C\Delta-3B\nabla-AE\varphi-\frac{1}{2}A\mathsf{A}f$$
$$+12\psi\lambda=0.$$

4) Schieben wir weiter

$$(\alpha\psi)=-\frac{1}{2}E\varphi+\frac{1}{4}\mathsf{A}f+\frac{3}{2}S$$

einmal über Δ und substituiren für $(\alpha\Delta)$, $(a\Delta)$, $(S\Delta)$ die gefundenen Werthe und entwickeln $\big((\alpha\psi)\Delta\big)$, so erhalten wir:

$$(326): \psi\Sigma+\varphi\mu+\frac{1}{6}A\varphi\psi+E\varrho-\frac{1}{2}\mathsf{A}t-\frac{1}{2}Ar+f\chi=0.$$

5) Ersetzen wir in

$$(a\alpha)\psi + (\alpha\psi)a + (\psi a)\alpha = 0$$

die ersten Ueberschiebungen durch ihre unter $(C_4 C_4')^1$ und $(C_4 C_2)^1$ gefundenen Werthe, so gelangen wir zu der Syzygante

$$(228):\ \xi\psi + \frac{1}{4}(\mathsf{A}f^2 + A\varphi^2) + \frac{3}{2}[fS + \varphi\Sigma] = 0.$$

6) Das Quadrat von $(a\psi)^1$ liefert

$$(428):\left(\frac{1}{2}Ef - \frac{1}{4}A\varphi - \frac{3}{2}\Sigma\right)^2 = \lambda\psi f - \frac{1}{2}\left(\Delta\psi^2 + f(\psi\psi)^2\right).$$

7) Aus

$$(a\alpha)\Delta + (\alpha\Delta)a + (\Delta a)\alpha = 0$$

schliessen wir auf

$$(3, 1, 10):\ \xi\Delta + f\varrho - \varphi t = 0.$$

8) Das Quadrat von $(a\alpha)$ dagegen giebt uns:

$$(2, 2, 12):\ \xi^2 = -\frac{1}{2}(\Delta\varphi^2 - 2\Theta\cdot f\cdot\varphi + \nabla\cdot f^2) \qquad \text{u. s. w.}$$

Zum Schlusse wollen wir noch an einigen Beispielen zeigen, wie wir Grundsyzyganten mit bestimmten *Charakteristiken* erhalten können, d. h. Syzyganten die durch eine gewisse, in ihr auftretende binäre Combination der Grundformen als Grundsyzyganten charakterisirt sind.

1) Es soll die Grundsyzygante mit der Charakteristik λ^2 gefunden werden. Wir finden in unseren Tabellen: $(a\psi)^2 = \lambda$ und erhalten also die gewünschte Relation durch die Identität:

$$\left((a\psi)\lambda\right) = \frac{1}{4}\lambda(a\psi)^2 + \frac{1}{2}\psi(a\lambda)^2 - \frac{1}{2}f(\psi\lambda)^2.$$

Ersetzen wir $(a\psi)$ durch seinen in den Tabellen gegebenen Werth, $(a\psi)^2$ durch λ und $\left((a\psi)\lambda\right)$ mithin durch

$$\left(\frac{1}{2}E(a\lambda) - \frac{1}{4}A(\alpha\lambda) - \frac{3}{2}(\Sigma\lambda)\right),$$

und schliesslich auch die letzten drei Functionaldeterminanten, so erscheint die gesuchte Syzygante in der gewünschten Form.

2) Sollte die Grundsyzygante mit der Charakteristik μ^2 aufgestellt werden, so müssten wir wegen $(a\lambda)_2 = -\mu + \frac{1}{6}A\psi$ an der Identität

$$\left((a\lambda)\mu\right) = \frac{1}{4}\mu\cdot(a\lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda(a\mu)^2 - \frac{1}{2}f(\lambda\mu)^2$$

anknüpfen.

3) Die Grundsyzygante $D\cdot m$ muss, da D in $(\psi\psi)^2$ auftritt, aus

$$\left((\psi m)\psi\right)' = \frac{1}{2}m(\psi\psi)^2 - \frac{1}{2}\psi(m\psi)^2$$

entwickelt werden.

Da in keiner der Invarianten $(C_2 C_2')^2$ ausser D eine andere Invariante als Summand auftritt, so müssen alle Syzyganten $(i, k, 2)$ eine binäre Combination $D \cdot C_2$ enthalten.

4) Die Grundsyzygante mit der Charakteristik $\Sigma\Theta$ entsteht aus

$$(a\psi) \cdot \Theta + (\psi\Theta)a + (\Theta a)\psi = 0,$$

weil $(a\psi)$ die Covariante Σ als Summand enthält.

5) Die Charakteristik $D \cdot \Theta$ befindet sich in der Syzygante

$$\big((\Theta\psi)\psi\big) = \frac{3}{4}\psi(\Theta\psi)^2 - \frac{1}{2}\Theta(\psi\psi)^2.$$

6) Um die Charakteristik $D \cdot \xi$ zu erhalten, müssen wir z. B.

$$(am) = \frac{1}{2}D\varphi - \frac{1}{2}\Gamma\nabla + \frac{1}{2}C\Theta - \frac{1}{2}ES$$

einmal über f schieben, u. s. w.

Es lassen sich aber auch mit Hülfe der gegebenen Tabellen zusammengesetzte Syzyganten aufstellen, die bestimmte höhere Combinationen der Grundformen enthalten.

So geben

$$[(al)^1\psi] = 0; \quad [(\Sigma S)^1\psi] = 0$$

solche mit den Summanden ψ^3 und ψ^4;

$$[(\Theta n)^1\psi] = 0; \quad [(\Delta l)^1 f] = 0; \quad [(\Delta\nabla)^1\Theta]) = 0; \quad [(\Sigma\lambda)\nabla] = 0$$

resp. solche mit $C\psi^3$, Df^2, $\Theta^2 \cdot \psi$ und $A^2\nabla^2$. (Wir verstehen, wie gebräuchlich unter $[(ab)c] = 0$ die Identität $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$).

Es bleibt hiernach nur die Aufgabe zu lösen, unter den $\frac{28 \cdot 29}{1 \cdot 2}$ binären Combinationen der 28 Grundformen diejenigen abzusondern, die wirklich einer Syzygante als integrirender Bestandtheil angehören, und dies wird, wie schon oben gesagt, der Inhalt einer weiteren Veröffentlichung sein.

Oppenheim, 24. April 1888.

Ueber die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen.

Von

DAVID HILBERT in Königsberg.

P. Gordan hat zuerst bewiesen, dass es für ein vorgelegtes System von binären Grundformen eine endliche Zahl von Invarianten giebt, durch welche sich jede andere Invariante jener Grundformen rational und ganz ausdrücken lässt. Im Folgenden wird für diesen fundamentalen Satz ein anderer Beweis erbracht, welcher mit dem ursprünglichen Verfahren von P. Gordan*) nahe Analogieen aufweist, während andererseits der Gedankengang dem von F. Mertens**) gegebenen Beweise parallel läuft.

Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden bekannten und leicht beweisbaren Theoreme:

I.

Ein System von beliebig vielen linearen und homogenen diophantischen Gleichungen besitzt eine endliche Anzahl positiver Lösungen von der Beschaffenheit, dass jede andere positive Lösung sich mit Hülfe positiver ganzzahliger Coefficienten linear und homogen aus jenen zusammensetzen lässt.***)

II.

Bildet man aus N beliebigen Grössen $\omega, \ldots$ die Summe ihrer $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, N^{\text{ten}}$ Potenzen, wie folgt:

$$\omega + \cdots, \quad \omega^2 + \cdots, \cdots, \quad \omega^N + \cdots$$

und bedeutet p irgend eine positive ganze Zahl, so gilt stets eine Identiät von der Gestalt:

---

*) Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II, pag. 231.

**) Crelle's Journal Bd. 100, p. 223.

***) Vergl. P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. I, pag. 199.

$$\omega^{\nu} = G + G^{(1)}\omega + \cdots + G^{(N-1)}\omega^{N-1}. \tag{1}$$

wo $G, G^{(1)}, \ldots, G^{(N-1)}$ ganze Functionen jener N Potenzsummen sind.

Beide Theoreme sind dem in Rede stehenden Invariantensatze insofern gleichgeartet, als sie ebenso wie jener die Endlichkeit gewisser in sich geschlossener Systeme behaupten. Zugleich weisen wir auf den Umstand hin, dass in beiden Theoremen die charakteristische Reductionsgleichung die einzelnen Glieder des geschlossenen Systems in linearer Weise enthält.

Die vorgelegte Grundform f von der n^{ten} Ordnung in den homogenen Variablen x, y stelle man als Product ihrer Linearfactoren dar, wie folgt:

$$f = (\alpha^{(1)}x + \beta^{(1)}y)(\alpha^{(2)}x + \beta^{(2)}y) \cdots (\alpha^{(n)}x + \beta^{(n)}y)$$

und benutze die Abkürzung:

$$(k, l) = \alpha^{(k)}\beta^{(l)} - \alpha^{(l)}\beta^{(k)}.$$

Jede Invariante der Form f setzt sich bekanntermassen zusammen aus symmetrischen Gebilden von der Gestalt:

$$J = (1, 2)^{e^{1,2}}(1, 3)^{e^{1,3}}(2, 3)^{e^{2,3}} \cdots (n-1, n)^{e^{n-1,n}} + \cdots, \tag{2}$$

wo man die folgenden Glieder der Summe aus dem hingeschriebenen Anfangsgliede dadurch erhält, dass man die in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf alle möglichen Weisen permutirt. Ueberdies ist jedoch erforderlich, dass in jenem Anfangsgliede jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gleich oft vorkommt, d. h. es bestehen für die als Potenzexponenten auftretenden positiven ganzen Zahlen nothwendig die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & e^{1,2} + e^{1,3} + \cdots + e^{1,n} \\ & = e^{2,1} + e^{2,3} + \cdots + e^{2,n} \\ & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & = e^{n,1} + e^{n,2} + \cdots + e^{n,n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo allgemein $e^{k,l}$ und $e^{l,k}$ dieselben Zahlen sind.

Nach Satz I lässt sich jede positive Lösung der diophantischen Gleichungen (3) aus einer gewissen endlichen Anzahl m von speciellen positiven Lösungen linear und homogen unter Vermittelung ganzzahliger positiver Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ zusammensetzen, wie folgt:

$$\begin{aligned} e^{1,2} &= p_1 e_1^{1,2} + p_2 e_2^{1,2} + \cdots + p_m e_m^{1,2}, \\ e^{1,3} &= p_1 e_1^{1,3} + p_2 e_2^{1,3} + \cdots + p_m e_m^{1,3}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{n-1,n} &= p_1 e_1^{n-1,n} + p_2 e_2^{n-1,n} + \cdots + p_m e_m^{n-1,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir bedienen uns der Abkürzungen:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1 &= (1,2)^{e_1^{1,2}}(1,3)^{e_1^{1,3}}(2,3)^{e_1^{2,3}}\cdots(n-1,n)^{e_1^{n-1,n}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_m &= (1,2)^{e_m^{1,2}}(1,3)^{e_m^{1,3}}(2,3)^{e_m^{2,3}}\cdots(n-1,n)^{e_m^{n-1,n}},
\end{aligned}
$$

und bilden sämmtliche Invarianten von der Gestalt:

$$
(6)\qquad J_{\pi_1\pi_2\cdots\pi_m} = \omega_1^{\pi_1}\omega_2^{\pi_2}\cdots\omega_m^{\pi_m}+\cdots,
$$

wo keiner der Zahlenexponenten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ die Zahl

$$
N = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n
$$

überschreitet und wo die folgenden Glieder der Summe auf gleiche Weise wie oben in (2) aus dem Anfangsgliede abzuleiten sind.

Aus jedem der m Producte (5) gehen durch Permutation der in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ noch $N-1$ weitere Ausdrücke hervor; daher gelten, entsprechend der Reductionsformel (1) in Satz II, Gleichungen der folgenden Art:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1^{p_1} &= G_1 + G_1^{(1)}\omega_1 + \cdots + G_1^{(N-1)}\omega_1^{N-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_m^{p_m} &= G_m + G_m^{(1)}\omega_m + \cdots + G_m^{(N-1)}\omega_m^{N-1},
\end{aligned}
$$

wo die Coefficienten G ganze Functionen der Potenzsummen:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_1+\cdots,\ \omega_1^2+\cdots,\ \cdots,\ \omega_1^N+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_m+\cdots,\ \omega_m^2+\cdots,\ \cdots,\ \omega_m^N+\cdots
\end{aligned}
$$

bedeuten. Die Potenzsummen (8) sind sämmtlich dem System (6) angehörige Invarianten.

Was nunmehr den allgemeinen Ausdruck (2) einer Invariante anbetrifft, so erhält derselbe bei Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (5) die Gestalt:

$$
J = \omega_1^{p_1}\omega_2^{p_2}\cdots\omega_m^{p_m}+\cdots
$$

Hieraus erkennen wir leicht nach Eintragung der Werthe (7), dass J eine ganze Function der Invarianten des Systems (6) wird, d. h. *die Invarianten* (6) *bilden ein System von der Beschaffenheit, wie es unser Satz verlangt.*

Liegt ein System von beliebig vielen Formen $f, g, h, \ldots$ zu Grunde, so ist an Stelle von (2) ein symmetrisches Gebilde zu setzen, dessen

Anfangsglied sämmtliche Determinanten der Linearfactoren von $f, g, h, \ldots$ enthält und zwar in der Weise, dass die Coefficienten der zur selben Grundform gehörigen Linearfactoren in demselben Grade auftreten. Diese charakteristische Eigenschaft einer Simultaninvariante findet ihren Ausdruck in einem System diophantischer Gleichungen, welches die Rolle des Gleichungssystems (3) übernimmt. Im Uebrigen gilt genau dieselbe Schlussfolgerung.

Göttingen, den 30. März 1888.

Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante*).

Von

David Hilbert in Königsberg.

Das Problem.

Ein Büschel von binären Formen der ν^{ten} Ordnung in den homogenen Variablen x, y:

(1) $$\varkappa\varphi + \mu\psi$$

hängt von $2\nu - 2$ wesentlichen Constanten ab und diese Zahl ist zugleich die Ordnung der Functionaldeterminante:

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = (\varphi, \psi).$$

Gehen wir daher von der letzteren Form als gegeben aus, so entsteht die Frage nach der Zahl und Beschaffenheit der Formenbüschel mit der vorgeschriebenen Functionaldeterminante f, oder, was auf dasselbe hinausläuft, es handelt sich um die Ermittelung der Involutionen ν^{ter} Ordnung, deren $2\nu - 2$ Doppelelemente gegeben sind. Das gekennzeichnete Problem hat in neuerer Zeit vielfaches Interesse erweckt, aber nur in den einfachsten Fällen $\nu = 3$ und $\nu = 4$ durch C. Stephanos**) und A. Brill***) erfolgreiche Behandlung gefunden.

Grundlegend für unser Problem ist vor Allem der von A. Brill†) streng erbrachte Beweis für die allgemeine Natur der Form f. Diese Thatsache lässt nämlich unmittelbar erkennen, dass zu jeder Form f

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Berichten der k. sächs. Gesellschaft vom 24. October 1887. — Eine wesentlich vom vorliegenden Problem verschiedene Aufgabe besteht in der Bestimmung von binären Formen mit vorgeschriebener Discriminante; vergl. die auf letztere Frage bezügliche Untersuchung des Verfassers in diesen Annalen Bd. XXXI, pag. 482.

**) Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne. Mémoires présentés à l'académie des sciences de l'institut de France. Bd. 27.

***) Ueber binäre Formen und die Gleichung 6^{ten} Grades, diese Annalen Bd. XX.

†) l. c. pag. 334.

nothwendig eine *endliche* Anzahl n von Büscheln (1) zugehören muss. Ein weiterer Fortschritt ist die *Berechnung* dieser Anzahl durch F. Meyer*), H. Schubert**) und C. Stephanos***); dieselben fanden in Uebereinstimmung mit einander:

$$n = \frac{(2\nu-2)!}{(\nu-1)!\,\nu!}.$$

Im Folgenden wird das bezeichnete Problem algebraisch verfolgt und in einer für jede Ordnung ν gültigen Weise zur Lösung gebracht.

Der zwischen zwei Lösungen obwaltende Zusammenhang.

Es seien:

$$\text{(2)} \qquad \varkappa\varphi_1 + \mu\psi_1 \quad \text{und} \quad \varkappa\varphi_2 + \mu\psi_2$$

zwei Formenbüschel ν^{ter} Ordnung mit der nämlichen Functionaldeterminante:

$$\text{(3)} \qquad (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2).$$

Wir bestimmen zunächst alle Formen ν^{ter} Ordnung, deren ν^{te} Ueberschiebungen über die Formen des ersteren Büschels verschwinden und erhalten so eine $\nu - 2$-fach unendliche lineare Formenmannigfaltigkeit M_1, welche zu jenem Büschel apolar ist. Entsprechend bezeichne M_2 diejenige $\nu - 2$-fach unendliche Formenmannigfaltigkeit, welche zu dem zweiten Büschel apolar ist. Die den beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 gemeinsamen Formen bilden ihrerseits eine $\nu - 4$-fach unendliche Mannigfaltigkeit M, welche nothendigerweise apolar ist zu der dreifach unendlichen linearen Formenmannigfaltigkeit:

$$\text{(4)} \qquad \varkappa_1\varphi_1 + \mu_1\psi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \mu_2\psi_2.$$

Die beiden Formenmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 besitzen die nämliche Functionaldeterminante wie die beiden Formenbüschel (2). Desgleichen stimmt die Functionaldeterminante der Mannigfaltigkeit M überein mit der Functionaldeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^3} & \frac{\partial^3\psi_1}{\partial x^3} & \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x^3} & \frac{\partial^3\psi_2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^2\partial y} & \frac{\partial^3\psi_1}{\partial x^2\partial y} & \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x^2\partial y} & \frac{\partial^3\psi_2}{\partial x^2\partial y} \\ \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\partial y^2} & \frac{\partial^3\psi_1}{\partial x\partial y^2} & \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x\partial y^2} & \frac{\partial^3\psi_2}{\partial x\partial y^2} \\ \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial y^3} & \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^3} & \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial y^3} & \frac{\partial^3\psi_2}{\partial y^3} \end{vmatrix}.$$

*) Apolarität und rationale Curven. Tübingen 1883, pag. 391.

**) Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 1884.

***) Sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination, Annales de l'école normale. S. III, Bd. 1, pag. 351.

Die Relation (3) führt unmittelbar zu einer charakteristischen Eigenschaft der Mannigfaltigkeit (4). Betrachten wir nämlich irgend ein dieser Mannigfaltigkeit angehöriges Formenbüschel, so zeigt sich, dass es im allgemeinen innerhalb jener Mannigfaltigkeit noch ein anderes Formenbüschel giebt, welches die nämliche Functionaldeterminante wie das erstere besitzt*). Es sei nun τ ein Linearfactor der Functionaldeterminante Δ und φ diejenige Form der Mannigfaltigkeit (4), welche die Linearform τ als vierfachen Factor enthält. Die Functionaldeterminante dieser Form φ und einer beliebigen anderen Form derselben Mannigfaltigkeit (4) enthält jedenfalls die Linearform τ als dreifachen Factor. Andererseits ist leicht einzusehen, dass jedes Büschel, dessen Functionaldeterminante durch τ^3 theilbar ist, selbst eine durch τ^3 theilbare Form enthalten muss. Nach obiger Bemerkung giebt es daher in jener Mannigfaltigkeit (4) noch eine zweite Form ψ, welche τ als dreifachen Factor enthält. Diese und die Form φ bestimmen innerhalb der Mannigfaltigkeit (4) ein Büschel (1), dessen sämmtliche Formen durch τ^3 theilbar sind. Zu diesem Formenbüschel ist jede Form von der ν^{ten} Ordnung apolar, welche τ als $\nu - 2$-fachen Factor enthält. Bestimmen wir daher eine quadratische Form π derart, dass die Form $\tau^{\nu-2}\pi$ noch zu zwei anderen Formen der Mannigfaltigkeit (4) apolar wird, so ist diese Form $\tau^{\nu-2}\pi$ zu allen Formen der Mannigfaltigkeit (4) apolar und folglich in der Mannigfaltigkeit M enthalten. Die Functionaldeterminante Δ der letzteren Mannigfaltigkeit ist mithin durch das Quadrat oder durch eine höhere Potenz des Linearfactors τ theilbar d. h. die Functionaldeterminante Δ enthält jeden ihrer Linearfactoren zwei- oder mehrfach. Die Functionaldeterminante Δ ist von der Ordnung $4\nu - 12$. Damit dieselbe ein vollständiges Quadrat werde, sind $2\nu - 6$ von einander unabhängige Bedingungen zu erfüllen nöthig. Da andererseits diese Zahl von Bedingungen gerade hinreicht, um innerhalb der $\nu - 2$-fach unendlichen Formenmannigfaltigkeit M_1 eine $\nu - 4$-fach unendliche Formenmannigfaltigkeit M festzulegen, so schliessen wir, dass die Functionaldeterminante Δ im allgemeinen jeden ihrer Linearfactoren *nur* zweifach enthält. Wir gewinnen dadurch die folgenden Sätze:

Die dreifach unendliche lineare Formenmannigfaltigkeit (4) *enthält* $2\nu-6$ *Büschel, deren sämmtliche Formen einen dreifachen Linearfactor besitzen.*

Die $\nu - 4$*-fach unendliche lineare Formenmannigfaltigkeit* M *enthält* $2\nu - 6$ *Formen mit* $\nu - 2$*-fachem Linearfactor.*

Die Functionaldeterminante Δ *ist ein vollständiges Quadrat.*

---

*) Vergl. C. Stephanos, Sur les faisceaux de formes binaires etc. pag. 52.

Die beiden ersteren Sätze bedingen sich gegenseitig und überdies den letzten Satz; indem sie den speciellen Charakter der beiden Mannigfaltigkeiten (4) und M kennzeichnen, wird damit zugleich die gegenseitige Abhängigkeit von irgend zwei Lösungen unseres Problems in grelles Licht gerückt.

Dem einfachsten Falle $\nu = 4$ entspricht der bekannte von C. Stephanos und A. Brill entdeckte Satz.

Die Combinante J.

Bereits C. Stephanos*) hat auf eine allgemeine Bedingung aufmerksam gemacht, welche für die beiden Formen φ_1 und φ_2 gilt und eine Folge der Relation (3) ist. Sollen nämlich zwei bestimmte Formen φ_1 und φ_2 von der ν^{ten} Ordnung beziehungsweise zu zwei Büscheln mit der nämlichen Functionaldeterminante gehören, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass eine gewisse Combinante J jener Formen verschwinde. Diese Combinante ist vom $\nu - 2^{\text{ten}}$ Grade in den Coefficienten jeder der beiden Formen φ_1 und φ_2. Eine andere Deutung der Combinante J ist auf Grund eines allgemeinen vom Verfasser**) angegebenen Theóremes möglich. Hiernach ist das Verschwinden der Combinante J zugleich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass den Formen φ_1 und φ_2 eine Form ϑ von der $2\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung mit den invarianten Beziehungen:

$$(\varphi_1, \vartheta)_{\nu-1} = 0, \quad (\varphi_2, \vartheta)_{\nu-1} = 0$$

zugehört.

Um die Combinante J zweier Formen φ und ψ zu bestimmen, nehmen wir für den Augenblick an, dass die beiden Formen φ und ψ von der ν^{ten} Ordnung einen gemeinschaftlichen Linearfactor τ besitzen und ausserdem so specialisirt seien, dass die Combinante J für dieselben verschwindet. Wie man sich leicht überzeugt, folgt nothwendig aus diesen Annahmen, dass entweder die Combinante J' der beiden Formen:

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\tau} \quad \text{und} \quad \psi' = \frac{\psi}{\tau}$$

verschwindet oder die Functionaldeterminante dieser beiden Formen φ' und ψ' den Linearfactor τ enthält. Diese Thatsache lässt erkennen, dass die Combinante J der beiden Formen:

$$\varphi = \alpha_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_1 x^{\nu-1} y + \cdots + \alpha_\nu y^\nu,$$

$$\psi = \beta_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} \beta_1 x^{\nu-1} y + \cdots + \beta_\nu y^\nu$$

*) Sur les faisceaux de formes binaires etc. pag. 50.

**) Vergl. diese Annalen, Bd. XXX, pag. 570.

die Eigenschaft besitzt, nach Einsetzung der Werthe:

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = \alpha_0',\ \alpha_2 = 2\alpha_1',\ \cdots,\ \alpha_\nu = \nu\alpha_{\nu-1}',$$
$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = \beta_0',\ \beta_2 = 2\beta_1',\ \cdots,\ \beta_\nu = \nu\beta_{\nu-1}'$$

überzugehen in die Combinante J' der beiden Formen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\varphi' = \alpha_0' x^{\nu-1} + \binom{\nu-1}{1}\alpha_1' x^{\nu-2}y + \cdots + \alpha_{\nu-1}' y^{\nu-1},$$
$$\psi' = \beta_0' x^{\nu-1} + \binom{\nu-1}{1}\beta_1' x^{\nu-2}y + \cdots + \beta_{\nu-1}' y^{\nu-1},$$

multiplicirt mit:

$$\alpha_0'\beta_1' - \alpha_1'\beta_0'.$$

Führen wir daher in J' mittelst der Gleichungen:

$$\alpha_0' = \alpha_1,\ \alpha_1' = \frac{1}{2}\alpha_2,\ \alpha_2' = \frac{1}{3}\alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_{\nu-1}' = \frac{1}{\nu}\alpha_\nu,$$
$$\beta_0' = \beta_1,\ \beta_1' = \frac{1}{2}\beta_2,\ \beta_2' = \frac{1}{3}\alpha_3,\ \cdots,\ \beta_{\nu-1}' = \frac{1}{\nu}\beta_\nu$$

die ungestrichenen Coefficienten ein und bezeichnen den so entstehenden Ausdruck mit $[J']$, so erhalten wir die charakteristische Recursionsformel:

$$J = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[J'] + \alpha_0\mathsf{A} + \beta_0\mathsf{B}.$$

Hierin sind A und B als ganze Functionen der Coefficienten von φ und ψ so zu bestimmen, dass der Ausdruck rechter Hand eine Simultaninvariante der beiden Formen φ und ψ wird, d. h. der bekannten Differentialgleichung einer solchen genügt. Diese Bestimmung der Grössen A und B ist nur auf eine einzige Weise möglich. Denn erfüllten etwa A', B' ebenfalls jene Bedingungen, so besässen wir in dem Ausdrucke:

$$\alpha_0(\mathsf{A} - \mathsf{A}') + \beta_0(\mathsf{B} - \mathsf{B}')$$

eine Simultaninvariante vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten jeder der beiden Formen φ und ψ, welche gleichzeitig mit der Resultante dieser beiden Formen verschwinden müsste; eine solche Simultaninvariante ist aber augenscheinlich unmöglich.

Die angegebene Methode gestattet eine successive Berechnung der Combinanten J. Wir finden so für $\nu = 3$ und $\nu = 4$ beziehungsweise:

$$J = (\varphi, \psi)_3,$$
$$J^{*)} = 8(\varrho, \varrho)_2 + [(\varphi, \psi)_4]^2 - (\varphi, \varphi)_4 (\psi, \psi)_4,$$

wo ϱ die dritte Ueberschiebung $(\varphi, \psi)_3$ bezeichnet.

Die Combinante J**) ist für die Fortentwickelung des in Rede

---

*) Dieselben Werthe findet C. Stephanos mittelst directer Rechnung, vergl. Sur les faisceaux de formes binaires etc., pag. 50.

**) Auch zwischen der Form φ und den Factoren ν^{ter} Ordnung der Functionaldeterminante (φ, ψ), besteht eine Beziehung, welche durch das Verschwinden stehenden Problems von fundamentaler Bedeutung und bedarf daher einer eingehenderen Discussion. Wir setzen sie in der Gestalt an:

$$J(\varphi, \psi) = \sum (-1)^{i_1+i_3+\cdots} \binom{\nu}{1}^{i_1} \binom{\nu}{2}^{i_2} \cdots \frac{(\nu-2)}{i_0!\, i_1! \cdots i_\nu!} \alpha_0^{i_0} \alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_\nu^{i_\nu} G_{i_0 i_1 \cdots i_\nu}(\psi),$$

wo die Summe über alle Potenzexponenten $i_0, i_1, \ldots, i_\nu$ mit der Bedingung:

$$i_0 + i_1 + \cdots + i_\nu = \nu - 2$$

auszuführen ist und $G_{i_0 i_1 \cdots i_\nu}(\psi)$ die betreffenden Glieder vom $\nu - 2^{\text{ten}}$ Grade in den Coefficienten der Form ψ umfasst. Nach Einführung der abkürzenden Differentiationssymbole:

$$\psi \frac{\partial}{\partial \varphi} = \beta_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_0} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \cdots + \beta_\nu \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu},$$

$$\varphi \frac{\partial}{\partial \psi} = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \beta_0} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \beta_1} + \cdots + \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \beta_\nu}$$

folgen aus der Combinanteneigenschaft unserer Simultaninvariante:

$$J(\varphi + q\psi, \psi + p\varphi) = (1 - pq)^{\nu-2} J(\varphi, \psi)$$

die weiteren Formeln:

$$\left[\varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\right]^\varkappa \left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]^\mu J(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varkappa \gtrless \mu),$$

$$\left[\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]^\varkappa \left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]^\varkappa J(\varphi, \psi) = (-1)^\varkappa \frac{\varkappa!\,(\nu-2)!}{(\nu-\varkappa-2)!} J(\varphi, \psi).$$

Die Lösung des Problems.

Es mögen:

(5) $$\varkappa\varphi_1 + \mu\psi_1, \ \varkappa\varphi_2 + \mu\psi_2, \ldots$$

die Gesammtheit derjenigen Formenbüschel darstellen, deren Functionaldeterminante der gegebenen Form:

$$f = a_0 x^{2\nu-2} + \binom{2\nu-2}{1} a_1 x^{2\nu-3} y + \cdots + a_{2\nu-2} y^{2\nu-2}$$

gleich ist. Es seien ferner:

---

einer gewissen Simultaninvariante K zum Ausdruck gebracht werden kann. Diese Invariante K wurde zuerst von C. Stephanos behandelt, vergl. Sur les faisceaux de formes binaires etc., pag. 38. Hierauf hat der Verfasser eine Recursionsformel zu ihrer successiven Berechnung aufgestellt und vermöge derselben die Berechnung in den Fällen $\nu = 2$, $\nu = 3$ und $\nu = 4$ wirklich ausgeführt, vergl. die Berichte der k. sächs. Gesellschaft vom 24. October 1887, pag. 115. Es sei zugleich darauf hingewiesen, dass ebenso wie die Combinante J so auch die Invariante K vielfache Ansätze für weitere im Bereich unserer Fragestellung liegenden Untersuchungen bietet.

$$\xi = \xi_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} \xi_1 x^{\nu-1} y + \cdots + \xi_\nu y^\nu,$$

$$\eta = \eta_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} \eta_1 x^{\nu-1} y + \cdots + \eta_\nu y^\nu,$$

$$u = u_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} u_1 x^{\nu-1} y + \cdots + u_\nu y^\nu,$$

$$v = v_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} v_1 x^{\nu-1} y + \cdots + v_\nu y^\nu$$

Formen mit unbestimmten Coefficienten. Die Summe:

$$\{(\varphi_1, \xi)_\nu(\psi_1, \eta)_\nu - (\varphi_1, \eta)_\nu(\psi_1, \xi)_\nu\}^{\nu-2}$$
$$+ \{(\varphi_2, \xi)_\nu(\psi_2, \eta)_\nu - (\varphi_2, \eta)_\nu(\psi_2, \xi)_\nu\}^{\nu-2} + \cdots$$

ist offenbar eine rationale Function der Coefficienten von f und daher einem Bruche gleich, dessen Zähler eine ganze Simultaninvariante der Formen f, ξ, η und dessen Nenner eine ganze Invariante der Form f allein darstellt. Die letztere Invariante i ist aber nothwendigerweise eine constante Zahl; denn im andern Falle müsste wenigstens eines der Büschel (5) für $i = 0$ unendlich grosse Coefficienten erhalten. Greifen wir ein solches Büschel heraus und denken uns die Coefficienten desselben nicht, wie ursprünglich, als algebraische Functionen der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{2\nu-2}$ der gegebenen Form f, sondern als algebraische Functionen von $a_0, a_1, \ldots, a_{2\nu-3}$ und i, so ist die Annahme berechtigt, dass die Form φ beim Grenzübergange $i = 0$ in die endliche und nicht verschwindende Form φ' übergehe, während die Form ψ erst nach Multiplication mit $i^p (p > 0)$ für $i = 0$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth ψ' ergiebt. Da trotzdem die Functionaldeterminante beider Formen einen für $i = 0$ endlich bleibenden Werth besitzen soll, so folgt zunächst, dass ψ' mit φ' bis auf einen endlichen constanten Factor c übereinstimmen muss. Substituiren wir daher für ψ die Form $\psi - ci^{-p}\varphi$, so wird nunmehr beim Grenzübergange das Büschel von einem niederen Grade unendlich als vorhin. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt auf einen Widerspruch, welcher nur durch die Annahme $i =$ const. beseitigt werden kann. Daher stellt jene Summe eine **ganze** Simultaninvariante vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten einer jeden der drei Formen f, ξ, η dar. Setzen wir in dieser Simultaninvariante allgemein an Stelle der Producte:

$$\xi_\nu^{i_0} \xi_{\nu-1}^{i_1} \cdots \xi_0^{i_\nu} \quad \text{und} \quad \eta_\nu^{i_0} \eta_{\nu-1}^{i_1} \cdots \eta_0^{i_\nu}$$

die Aggregate:

$$G_{i_0 i_1 \cdots i_\nu}(u) \quad \text{beziehungsweise} \quad G_{i_0 i_1 \cdots i_\nu}(v),$$

so entsteht eine neue Simultaninvariante $S(f, u, v)$, welche wiederum vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten einer jeden der drei Formen

f, u, v ausfällt. Die Benutzung der vorhin entwickelten Eigenschaften der Combinante J führt zu folgendem Ergebniss.

Setzt man in der Simultaninvariante $S(f, \varphi, v)$ an Stelle der Form f die Functionaldeterminante (φ, ψ) ein, so lässt sich das entstehende Gebilde in zwei ganze und rationale Factoren spalten, von denen der eine die Coefficienten der Form v, der andere diejenigen der Form ψ nicht enthält; und zwar gilt dann die Identität:

$$S(f, \varphi, v) = J(\varphi, \psi)\, J(\varphi, v).$$

Diese Identität dient einerseits in jedem einzelnen Falle zur wirklichen Berechnung der Simultaninvariante $S(f, u, v)$, andererseits ist mit ihrer Hülfe die Lösung unseres Problems möglich. Um letzteres einzusehen, setzen wir:

$$\lambda = J(\varphi, \psi)$$

und vergleichen dann auf beiden Seiten der aufgestellten Identität:

$$(6) \qquad S(f, \varphi, v) = \lambda J(\varphi, v)$$

die Coefficienten der Ausdrücke:

$$v_0^{i_0} v_1^{i_1} \cdots v_\nu^{i_\nu}. \qquad (i_0 + i_1 + \cdots + i_\nu = \nu - 2)$$

Die Zahl der auf diese Weise aus (6) entstehenden Gleichungen ist:

$$N = \frac{(2\nu - 2)!}{(\nu - 2)!\, \nu!}.$$

In diesen N Gleichungen treten ausser der Grösse λ noch die Producte von der Gestalt:

$$\alpha_0^{i_0} \alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_\nu^{i_\nu} \qquad (i_0 + i_1 + \cdots + i_\nu = \nu - 2)$$

als Unbekannte auf. Da diese Producte offenbar nur in linearer und homogener Verbindung vorkommen und ihre Zahl ebenfalls N beträgt, so ist die Elimination derselben direct ausführbar und liefert eine Gleichung von der Gestalt:

$$(7) \qquad D(\lambda) = 0,$$

wo die linke Seite eine N-reihige Determinante ist und nur noch die eine Unbekannte λ enthält. Aus der Identität (6) folgen durch Anwendung der Operation $\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}$ und unter Benutzung der Combinanteneigenschaft von f und J die $\nu - 2$ weiteren Identitäten:

$$\left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right] S(f, \varphi, v) = \lambda \left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right] J(\varphi, v),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]^{\nu-2} S(f, \varphi, v) = \lambda \left[\psi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]^{\nu-2} J(\varphi, v);$$

λ ist daher eine $\nu - 1$-fache Wurzel der gewonnenen Gleichung (7)

d. h. $D(\lambda)$ wird die vollständige $\nu - 1^{\text{te}}$ Potenz eines Ausdruckes von der Gestalt:

$$F(\lambda) = \lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_{n-3}\lambda^3 + A_{n-2}\lambda^2 + A_n$$

und die Unbekannte λ genügt der Gleichung:

$$(8) \qquad F(\lambda) = 0,$$

deren Grad:

$$n = \frac{N}{\nu - 1} = \frac{(2\nu - 2)!}{(\nu - 1)!\,\nu!}$$

in der That mit der zu Anfang erwähnten anzahltheoretisch berechneten Zahl übereinstimmt. Die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ sind **ganze** Invarianten der gegebenen Form f beziehungsweise vom $\nu - 2^{\text{ten}}$, $2(\nu-2)^{\text{ten}}, \ldots$ Grade. Der Coefficient von λ ist gleich Null.

Um die gesuchten Formenbüschel (5) selbst zu finden, dazu dient dasselbe Verfahren, welches der Verfasser in seiner Habilitationsschrift*) zur Erledigung ähnlicher Fragen angewandt hat. Das Verfahren liefert in unserem Falle die folgenden Resultate. Rändern wir die Determinante $D(\lambda)$ in geeigneter Weise unten beziehungsweise an der Seite mit den Gliedern:

$$\xi_0^{i_0}\xi_1^{i_1}\cdots\xi_\nu^{i_\nu} \quad \text{beziehungsweise:} \quad \eta_0^{i_0}\eta_1^{i_1}\cdots\eta_\nu^{i_\nu},$$

so ist die so entstandene Determinante durch die $\nu - 2^{\text{te}}$ Potenz des Ausdruckes $F(\lambda)$ theilbar. Der übrig bleibende Factor nimmt die Gestalt an:

$$T(\lambda) = T_0\lambda^{n-1} + T_1\lambda^{n-2} + \cdots + T_{n-1},$$

wo $T_0, T_1, T_2, \ldots$ simultane Invarianten vom Grade 0, $\nu-2$, $2(\nu-2), \ldots$ in den Coefficienten von f und vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten jeder der beiden Formen ξ und η sind.

Einer jeden von den n Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der Gleichung (8) *entspricht eines der gesuchten Formenbüschel* (5). *Die Construction desselben wird ermöglicht durch die Formel:*

$$\frac{\lambda_i\,T(\lambda_i)}{\dfrac{\partial F(\lambda_i)}{\partial \lambda_i}} = \{(\varphi_i, \xi)_\nu(\psi_i, \eta)_\nu - (\varphi_i, \eta)_\nu(\psi_i, \xi)_\nu\}^{\nu-2}.$$

Es ist bemerkenswerth, dass die mitgetheilte Lösung des Problems im Grunde auf die Anwendung des in der Habilitationsschrift des Verfassers zum ersten Male eingehend behandelten und seitdem nach verschiedenen Richtungen hin erweiterten**) Gesichtspunktes

*) Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete. Diese Annalen Bd. 28, pag. 381.

**) Vergl. den Brief des Verfassers an Ch. Hermite, Journal de Mathématiques, 1888.

hinausläuft. Wie dort so erfordert auch das hier behandelte Problem zur vollständigen Erledigung eine Untersuchung sämmtlicher möglichen Ausartungen, wie sie durch das Zusammenfallen mehrerer Wurzeln der Gleichung für λ bedingt sind. Schon der Fall einer blossen Doppelwurzel giebt zur Unterscheidung zweier völlig verschiedenen Ausartungen Anlass, je nachdem die Bedingung $A_n = 0$ den Werth $\lambda = 0$ zu einer Doppelwurzel macht, oder wenn ein Wurzelwerth λ_i zugleich den Ausdruck:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = n\lambda^{n-2} + (n-1)A_1\lambda^{n-3} + \cdots + 3A_{n-3}\lambda + 2A_{n-2}$$

zum Verschwinden bringt. Nur im ersteren Falle fallen wirklich zwei der gesuchten Büschel zusammen, während im letzteren Falle der Doppelwurzel λ_i zwei unter einander verschiedene Büschel:

$$\varkappa\varphi_i + \mu\psi_i \quad \text{und} \quad \varkappa\varphi_i' + \mu\psi_i'$$

zugehören, deren Construction vermöge der Formel:

$$\frac{2\lambda_i\dfrac{\partial T(\lambda_i)}{\partial\lambda_i}}{\dfrac{\partial^2 F(\lambda_i)}{\partial\lambda_i^2}} = [\{(\varphi_i, \xi)_\nu(\psi_i, \eta)_\nu - (\varphi_i, \eta)_\nu(\psi_i, \xi)_\nu\}^{\nu-2}$$
$$+ \{(\varphi_i', \xi)_\nu(\psi_i', \eta)_\nu - (\varphi_i', \eta)_\nu(\psi_i', \xi)_\nu\}^{\nu-2}]$$

durch Auflösung einer quadratischen Gleichung ermöglicht wird.

Das einfachste Beispiel für die bisherigen allgemeinen Entwickelungen liefert der Fall $\nu = 3$*). Die zur Lösung des Problems erforderliche Simultaninvariante lautet in symbolischer Schreibweise:

$$S(f, u, v) = (au)^2(av)^2(uv),$$

wo:

$$f = a_x^4, \quad u = u_x^3, \quad v = v_x^3$$

gesetzt ist. Den weiteren Specialfall $\nu = 4$ hat C. Stephanos in der citirten Arbeit sehr ausführlich, jedoch mittels einer wohl kaum verallgemeinerungsfähigen und mehr rechnenden Methode behandelt. Die von ihm aufgestellte Gleichung fünften Grades**) geht durch eine sehr einfache Substitution in diejenige Gleichung desselben Grades über, auf welche die Anwendung unserer allgemeinen Theorie führt; ebenso dienen die übrigen von C. Stephanos für diesen Specialfall berechneten invarianten Bildungen vortrefflich zur Bestätigung unserer allgemeinen Entwickelungen.

Königsberg, den 23. Mai 1888.

*) Vergl. die citirte Habilitationsschrift des Verfassers, pag. 436—437.

**) Sur les faisceaux de formes binaires etc. pag. 80.

Ueber Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

1. Durch Verallgemeinerung des Satzes, den Cauchy im Cours d'Analyse p. 48 gegeben hat, bin ich zu dem folgenden Satze gelangt*):

a) „Bedeuten $f(n)$ und $\varphi(n)$ eindeutige reelle Functionen der ganzen positiven Zahl n, *wovon die letztere bei wachsendem n stets in demselben Sinne sich ändert* und für $\lim n = +\infty$ einen unendlichen Grenzwerth hat, so folgt aus der Existenz des Grenzwerthes

$$\lim_{n=+\infty} \frac{f(n+1)-f(n)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, \tag{1}$$

dass für den Bruch $f(n):\varphi(n)$ ein Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ vorhanden ist und dass er mit dem Grenzwerth (1) übereinstimmt."

*) Vgl. Math. Ann. XIV, S. 234, O. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik 1, s. 173. — Einen besonderen Fall meines Satzes findet man in der Note des Hrn. E. Cesàro in den Rendiconti dell' Accad. dei Lincei 1888 p. 116. Bezeichnen

$$\sum_1^\infty {}^n u_n \quad \sum_1^\infty {}^n v_n$$

zwei unendliche Reihen, wovon die letztere von einem bestimmten Werthe von n an nur positive (bezw. nur negative) Glieder enthält und divergirt, und setzt man

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n = U_n, \quad v_1 + v_2 + \cdots + v_n = V_n,$$

so hat man

$$\lim_{n=+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n=+\infty} \frac{U_n - U_{n-1}}{V_n - V_{n-1}} = \lim_{n=+\infty} \frac{u_n}{v_n},$$

im *Falle dass der letzte Grenzwerth existirt*, gleichviel ob er endlich oder unendlich ist. Denn V_n ändert sich von einem bestimmten Werthe von n an stets in demselben Sinne.

Hr. Jensen hat vor kurzem einen Satz aufgestellt*), welcher den vorstehenden als besonderen Fall enthält, wenn der Grenzwerth (1) endlich ist. Er lautet:

b) „Bedeuten $g(n)$ und $\varphi(n)$ eindeutige (reelle oder complexe) Functionen der ganzen positiven Zahl n, von welchen die erstere bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth c besitzt, während

$$\lim_{n=+\infty} |\varphi_n| = +\infty$$

ist und

$$\frac{1}{|\varphi(n)|} \sum_1^n {}^r |\varphi(r) - \varphi(r-1)|$$

für alle Werthe von n unter einer positiven Zahl B liegt, so hat

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_1^n {}^r [\varphi(r) - \varphi(r-1)]\, g(r) = F(n)$$

bei $\lim n = +\infty$ einen Grenzwerth und zwar ist

$$\lim_{n=+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_1^n {}^r [\varphi(r) - \varphi(r-1)]\, g(r) = c.\text{“} \tag{2}$$

Es scheint mir nicht unwichtig zu sein, dass der Beweis dieses Satzes mit denselben Mitteln geleistet werden kann, wie der des vorausgehenden; das erhellt aus einer kleinen Abänderung der von Hrn. Jensen gegebenen Entwickelung. Setzt man mit ihm

$$g(n) - c = \varrho_n \qquad \sum_1^n {}^r |\varphi(r) - \varphi(r-1)| = A_n,$$

so ergiebt sich

$$F(n) - c = \frac{1}{\varphi(n)} \left\{ \sum_1^n {}^r [\varphi(r) - \varphi(r-1)]\, \varrho_r - \varphi(0)\, c \right\}$$

$$|F(n) - c| \leqq \frac{1}{|\varphi(n)|} \left\{ \sum_1^n {}^r |\varphi(r) - \varphi(r-1)|\, |\varrho_r| + |c\varphi(0)| \right\},$$

also

$$|F(n) - c| < \frac{B}{A_n} \left\{ A_1 |\varrho_1| + \sum_2^n {}^r (A_r - A_{r-1})\, |\varrho_r| + |c\varphi(0)| \right\}. \tag{3}$$

---

*) Compt. rend. 1888, I. Sem., S. 833. Hr. Jensen bemerkt, dass in seinem Satze für $\varphi(n)$ jede positive Function von n, die mit wachsendem n beständig und in's Unendliche zunimmt, gesetzt werden dürfe. Der Satz *a*) erscheint demnach als besonderer Fall der Formel (4) i. T. Dass derselbe bereits vor seiner Mittheilung bekannt war, erwähnt Hr. Jensen nicht. — Auch Hr. E. Cesàro theilte schon früher den in Nr. 3 erwähnten und einen anderen besonderen Fall des Satzes *b*) mit (vgl. Rendiconti d. Circolo mat. di Palermo I, S. 225 und Nouv. Ann. de Mathématiques 5. sér. VII, p. 54).

Zufolge der Voraussetzungen lässt sich jeder positiven Zahl δ eine natürliche Zahl m so zuordnen, dass für $n \geqq m+1$

$$|\varrho_n| < \delta$$

ist. Bedeutet γ_m die grösste der Zahlen $|\varrho_1|$, $|\varrho_2| \cdots |\varrho_m|$, so ergiebt sich aus (3)

$$|F(n) - c| < \frac{B}{A_n}\left\{A_m\gamma_m + \delta(A_n - A_m) + |c\varphi(0)|\right\}$$

$$< \frac{B\left\{A_m\gamma_m + |c\varphi(0)|\right\}}{A_n} + B\delta.$$

A_n, welches nicht kleiner als $|\varphi(n)| - |\varphi(0)|$ ist, wächst mit n in's Unendliche. Versteht man unter ε eine positive Zahl, so setze man $B\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ und bestimme hiernach m und γ_m. Der Zahl $\frac{1}{2}\varepsilon$ entspricht ferner eine solche positive Zahl ν, dass für

$$n > \nu \quad B\left\{A_m\gamma_m + |c\varphi(0)|\right\} A_n < \frac{1}{2}\varepsilon$$

ist. Mithin hat man für jeden Werth von n grösser als ν

$$|F(n) - c| < \varepsilon,$$

womit der Satz b) erwiesen ist.

Setzt man nach Hrn. Jensen in (2)

$$g(n) = \frac{f(n) - f(n-1)}{\varphi(n) - \varphi(n-1)},$$

so gelangt man zur Formel

$$(4) \qquad \lim_{n=+\infty} \frac{f(n) - f(n-1)}{\varphi(n) - \varphi(n-1)} = \lim_{n=+\infty} \frac{f(n) - f(0)}{\varphi(n)} = \lim_{n=+\infty} \frac{f(n)}{\varphi(n)},$$

und zwar unter der Voraussetzung, dass der erste Grenzwerth in (4) vorhanden und endlich ist und $\varphi(n)$ den im Satze b) angegebenen Bedingungen Genüge leistet.

2. Wenn die Functionen $g(n)$ und $\varphi(n)$ reell sind und die letztere mit wachsenden n sich stets in demselben Sinne ändert, so lässt der Satz b) eine weitere Verallgemeinerung zu.

c) „Es seien $g(n)$ und $\varphi(n)$ reelle Functionen, $\varphi(n)$ *ändere sich bei wachsendem* n *stets im nämlichen Sinne* und habe bei $\lim n = +\infty$ einen unendlichen Grenzwerth. Wenn $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze $O(U)$ besitzt, so ist die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze von

$$(5) \qquad F(n) = \frac{1}{\varphi(n)} \sum_1^n \left(\varphi(r) - \varphi(r-1)\right) g(r)$$

entweder $-\infty$ $(+\infty)$ oder eine endliche Zahl $O'(U')$, *welche nicht grösser* (kleiner) *als* $O(U)$ *ist.*“

„Hat $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $+\infty\,(-\infty)$, so auch die Function (5).“

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $\varphi(n)$ für alle Werthe von n das gleiche Zeichen hat, welches das der Differenz $\varphi(r) - \varphi(r-1)$ sein muss. Wenn die obere Unbestimmtheitsgrenze von $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ die endliche Zahl O ist, so entspricht jeder positiven Zahl ε eine natürliche Zahl m in der Art, dass für

$$n \geqq m+1 \quad g(n) < O + \varepsilon$$

ist. Verstehen wir jetzt unter ϱ_n die Differenz $g(n) - O$, so finden wir wie oben

$$(6)\quad F(n) - O = \frac{1}{\varphi(n)}\left\{\sum_1^n [\varphi(r) - \varphi(r-1)]\,\varrho_r - \varphi(0)\cdot O\right\}.$$

Die Brüche $\frac{\varphi(r) - \varphi(r-1)}{\varphi(n)}$ $(r = 1, 2 \cdots n)$ sind sämmtlich positiv. Bezeichnet γ_m die algebraisch grösste unter den Zahlen $\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_m$, so erhalten wir durch Zerlegung der Summe in (6) in die Theile von $r = 1$ bis $r = m$ und von $r = m+1$ bis $r = n$

$$F(n) - O < \frac{1}{\varphi(n)}\Big[\big(\varphi(m) - \varphi(0)\big)\,\gamma_m + \{\varphi(n) - \varphi(m)\}\,\varepsilon - \varphi(0)\cdot O\Big]$$

$$< \frac{\big(\varphi(m) - \varphi(0)\big)\,\gamma_m - \varphi(0)\cdot O}{\varphi(n)} + \varepsilon.$$

$\varphi(n)$ wächst mit n in's Unendliche; also giebt es solche positive Zahlen ν, dass für $n > \nu$

$$\left|\frac{\big(\varphi(m) - \varphi(0)\big)\,\gamma_m - \varphi(0)\cdot O}{\varphi(n)}\right| < \varepsilon,$$

somit

$$(7)\qquad F(n) - O < 2\varepsilon \quad \text{d. i.} \quad F(n) < O + 2\varepsilon$$

ist. Daraus erhellt zunächst, dass die obere Unbestimmtheitsgrenze von $F(n)$ bei $\lim n = +\infty$ nicht $+\infty$ ist. Wohl aber kann sie $-\infty$ d. h.

$$(8)\qquad \lim_{n=+\infty} F(n) = -\infty$$

sein. Wenn sie eine endliche Zahl O' ist, so muss es mindestens eine ganze Zahl n_1 grösser als ν geben, wofür

$$O' - \varepsilon < F(n_1)$$

ist. Demnach hat man nach (7)

$$O' - \varepsilon < O + 2\varepsilon \quad \text{oder} \quad O' - O < 3\varepsilon;$$

somit, da 3ε jede positive Zahl sein kann, $O' \leqq O$.

Wenn aber

$$\lim_{n=+\infty} g(n) = +\infty$$

ist, so lässt sich jeder positiven Zahl γ eine natürliche Zahl m so zuordnen, dass für

$$n \geqq m+1 \qquad g(n) > \gamma$$

ist. Demnach ist

$$F(n) > \frac{1}{\varphi(n)}\left\{\sum_{1}^{m}[\varphi(r)-\varphi(r-1)]\,g(r)+\gamma[\varphi(n)-\varphi(m)]\right\}.$$

Bezeichnet g_m die algebraisch kleinste der Zahlen $g(1), g(2) \cdots g(m)$, so findet man hieraus, dass

$$F(n) > \frac{[\varphi(m)-\varphi(0)]\,g_m-\gamma\varphi(m)}{\varphi(n)}+\gamma$$

ist. Da jeder positiven Zahl ε eine andere ν so entspricht, dass für $n > \nu$

$$\left|\frac{[\varphi(m)-\varphi(0)]\,g_m-\gamma\varphi(m)}{\varphi(n)}\right| < \varepsilon$$

ist, so hat man demnach für $n > \nu$

$$F(n) > \gamma - \varepsilon;$$

mithin ist

$$\lim_{n=+\infty} F(n) = +\infty.$$

Einen besonderen Fall des Satzes c) erhält man wieder durch die Annahme

$$g(n) = \frac{f(n)-f(n-1)}{\varphi(n)-\varphi(n-1)} \qquad f(0)=0,$$

wodurch $F(n)$ in $f(n):\varphi(n)$ übergeführt wird*). — Hier wollen wir noch zeigen, dass neben einer endlichen oberen Unbestimmtheitsgrenze von $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ in der That die Formel (8) bestehen kann. Setzen wir $f(0) = 0$

$$f(r+1)-f(r) = -r\{1+(-1)^r\} \quad (r=0,1\cdots n-1)$$
$$\varphi(n)=n,$$

so hat der Ausdruck

$$\{f(n)-f(n-1)\}:\{\varphi(n)-\varphi(n-1)\}$$

bei $\lim n = +\infty$ die Unbestimmtheitsgrenzen $-\infty$ und 0. Da jetzt

$$f(n) = -\tfrac{1}{2}\,n(n-1)+\tfrac{1}{4}(-1)^n\{2n-1+(-1)^n\}$$

ist, so ergiebt sich

$$\lim_{n=+\infty}\{f(n):\varphi(n)\} = -\infty.$$

---

*) Diesen besonderen Fall des Satzes c) theilte ich in den „Vorlesungen u. s. w." I, S. 340 mit.

3. Setzt man in den Sätzen *b*) und *c*) $\varphi(n) = n$, so erhält man zunächst die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^r g(r) = \lim_{n=+\infty} g(n)$$

und zwar unter der Voraussetzung, dass der zweite Grenzwerth vorhanden und endlich ist. Ist $g(n)$ eine reelle Function von n, so darf er auch unendlich sein.

Hr. E. Cesàro hat eine merkwürdige Formel aufgestellt*), welche die letzte als besonderen Fall einschliesst. „$g(n)$ sei eine eindeutige (reelle oder complexe) Function der natürlichen Zahl n von der folgenden Beschaffenheit. Man kann die Reihe der natürlichen Zahlen in r unendliche Reihen von der Art zerlegen, dass wenn $t_i(n)$ die Anzahl derjenigen in der i-ten Reihe vorkommenden Zahlen

$$p_{i,k} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

welche n nicht übersteigen, bedeutet, der Bruch $t_i(n):n$ bei $\lim n = +\infty$ einem endlichen Grenzwerthe ω_i sich nähert**) und dass $g(p_{ik})$ bei $\lim k = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth l_i besitzt. Alsdann ist

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n=+\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^s g(s) = \sum_1^r {}^i \omega_i l_i.\text{“}$$

Der Satz ergiebt sich auf folgende Weise. Setzt man

$$\frac{1}{n} t_i(n) - \omega_i = \varrho_i(n) \qquad (i = 1, 2 \cdots r)$$

und bemerkt, dass

$$\text{(B)} \qquad t_1(n) + t_2(n) + \cdots + t_i(n) = n$$

ist, so findet man unmittelbar, dass

$$\frac{1}{n} \sum_1^n {}^s g(s) - \sum_1^r {}^i \omega_i l_i = \frac{1}{n} \sum_1^r \sum_1^{t_i(n)} {}^k \left(g(p_{i,k}) - l_i\right) + \sum_1^r {}^i \varrho_i(n)\, l_i$$

ist. Zufolge Voraussetzung lässt sich jeder positiven Zahl ε eine natürliche Zahl so zuordnen, dass für

---

*) Vgl. Rendiconti d. Circ. mat. di Palermo a. a. O. Eine weitere Verallgemeinerung des in Rede stehenden Satzes giebt Hr. Cesàro in den Rendiconti dei Lincei l. c. p. 118. Auch mit ihr steht der Satz *c*) in Einklang.

**) $t_i(n)$ nimmt bei wachsenden n nicht ab und es ist $t_i(n) - t_i(n-1)$ entweder 0 oder 1. Dass unter diesen Voraussetzungen der Bruch $t_i(n):n$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzen muss, ist bisher nicht erwiesen worden. Ein Verhalten, ähnlich dem von $g(n)$ an dieser Stelle d. T., kann er auf keinen Fall zeigen.

$$p_{i,k} > m \qquad |g(p_{i,k}) - l_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

ist. Nun sei $n > m$. Wählt man die ganze Zahl m_i so, dass

$$p_{i,m_i} \leqq m \qquad p_{i,m_i+1} > m$$

ist, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung die Relation

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n{}^s g(s) - \sum_1^r{}^i \omega_i l_i\right| < \frac{1}{n} A_m + r\varepsilon + \left|\sum_1^r{}^i \varrho_i(n)\, l_i\right|,$$

worin A_m anstatt

$$\left|\sum_1^r{}^i \sum_1^{m_i}{}^k \big(g(p_{i,k}) - l_i\big)\right|$$

steht. Denkt man sich hier m constant und lässt n in's Unendliche wachsen, so gelangt man in der nun bereits öfters ausgeführten Art zur Formel (A).

Mit dem Satze des Hrn. Cesàro steht der Satz c) im Einklang. Ist in (A) $g(n)$ eine reelle Function von n, so muss nach c) der Grenzwerth von $\frac{1}{n}\sum_1^n{}^s g(s)$ bei $\lim n = +\infty$ zwischen der algebraisch kleinsten und grössten der Zahlen l_i liegen. Das trifft in der That zu, da zufolge der Gleichung (B)

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r = 1$$

ist.

4. Dem aus c) fliessenden Satze, welcher über das Verhalten des Quotienten $f(n) : \varphi(n)$ bei $\lim n = +\infty$ handelt, lässt sich der folgende über den Quotienten zweier für jeden endlichen Werth von x definirten reellen Functionen $f(x)$ $\varphi(x)$ an die Seite stellen. Er wird aus dem ersteren Satze auf dieselbe Art abgeleitet, wie der dem Satze a) analoge über den Bruch $f(x) : \varphi(x)$ aus diesem Satze.

d) „Es seien für *jeden endlichen Werth* von $x \geqq x_1$ zwei Functionen $f(x)$ $\varphi(x)$ eindeutig definirt; die erste sei in jedem Intervalle (x_1, x_2) — $x_2 > x_1$ — kleiner (grösser) als eine endliche Zahl, während die zweite von $x = x_1$ an mit wachsendem x sich stets in demselben Sinne ändert und bei $\lim x = +\infty$ einen unendlichen Grenzwerth hat. Wenn dann die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze bei $\lim x = +\infty$ von

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}, \tag{9}$$

worin h eine von 0 verschiedene Constante bedeutet, eine endliche Zahl $O(U)$ ist, so ist die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze von

$$f(x) : \varphi(x) \tag{10}$$

entweder $-\infty$ $(+\infty)$ oder eine endliche Zahl $O'(U')$, *die nicht grösser* (kleiner) *als* $O(U)$ *ist.*"

Wenn unter den nämlichen Voraussetzungen über $f(x)$ und $\varphi(x)$ der Ausdruck (9) bei $\lim x = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth K besitzt, so hat man $O = U = K$. Da nach dem letzten Satze

$$U \leqq U' \leqq O' \leqq O$$

sein soll, so muss auch $O' = U' = K$ sein. Demnach hat auch der Quotient (10) bei $\lim x = +\infty$ den Grenzwerth K. Das ist ein neuer Beweis eines von mir früher gegebenen Satzes*), jedoch nur für den Fall, dass der Ausdruck (9) einen endlichen Grenzwerth hat. Wenn sein Grenzwerth unendlich ist, bleibt man bei dem a. a. O. geführten Beweise. — Der soeben erwähnte Satz wurde von mir benutzt, um die bekannte Regel der Differentialrechnung über die Grenzwerthe der Quotienten von Functionen auch im Falle, dass Zähler und Nenner unendlich werden, sicher zu begründen. Die Regel wurde in einem besonderen Falle schon vor mir und zwar von Hrn. P. du Bois-Reymond**) und später von Hrn. Rouquet***) bewiesen.

Ich werde nun eine aus dem Satze d) folgende Verallgemeinerung der soeben erwähnten Regel vorführen, welche sich übrigens auch nach den Methoden von du Bois-Reymond und Rouquet darthun lässt.

5. Satz e). „Es seien für jeden endlichen Werth von $x \geqq x_1$ die Functionen $f(x)$ $\varphi(x)$ eindeutig definirt *und stetig;* die letztere ändere sich mit wachsendem x beständig in demselben Sinne und habe bei $\lim x = +\infty$ einen unendlichen Grenzwerth. Ferner habe für jeden Werth $x \geqq x_1$ der Bruch

$$\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\varphi(x+\xi) - \varphi(x)} \tag{11}$$

bei $\lim \xi = \pm 0$ *einen* (endlichen oder unendlichen) Grenzwerth $g(x)$. Wenn alsdann die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze von $g(x)$ bei $\lim x = +\infty$†) eine endliche Zahl O_1 (U_1) ist, so ist die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze des Quotienten

$$f(x) : \varphi(x) \tag{12}$$

entweder $-\infty$ $(+\infty)$ oder eine endliche Zahl O' (U'), *die nicht grösser* (kleiner) *als* O_1 (U_1) *ist.*“

f) Derselbe Satz gilt, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ denselben Bedingungen wie in e) genügen, nur für $\lim x = +\infty$ beide den Grenzwerth Null besitzen.

---

*) Vgl. Math. Ann. XIV S. 234, XV S. 558.

**) Vgl. Brioschi Annali 2. ser. IV p. 346.

***) Vgl. Nouv. Ann. de Mathématiques 2. sér. XVI p. 113.

†) Kommen Werthe von x vor, wofür $g(x)$ unendlich ist, so denkt man sich dieselben bei diesem Grenzübergange $\lim x = +\infty$ nicht berücksichtigt.

Beweis. Da die obere Unbestimmtheitsgrenze von $g(x)$ bei $\lim x = +\infty$ O_1 ist, so lässt sich jeder positiven Zahl ε eine andere G so zuordnen, dass für

$$x > G \qquad g(x) < O_1 + \varepsilon$$

ist. Man hat nun, wenn h eine positive Zahl bedeutet,

$$(13)\text{*)} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = g(x+H), \quad (0 < H < h)$$

unter H eine nicht bekannte positive Zahl kleiner als h verstanden. Somit ist für $x > G$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} < O_1 + \varepsilon,$$

woraus man schliessen muss, dass die obere Unbestimmtheitsgrenze des Ausdruckes links d. i. (9) bei $\lim x = +\infty$ entweder $-\infty$ oder eine endliche Zahl $O \leqq O_1$ ist.

In dem ersten Falle ist auch die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze des Quotienten $f(x):\varphi(x)$ $-\infty$, in dem zweiten entweder $-\infty$ oder eine endliche Zahl $O' \leqq O$, also auch $\leqq O_1$. Ist $\lim\limits_{x=+\infty} \varphi(x)$ unendlich, so folgt das aus Sätzen, die im Vorstehenden angeführt sind, insbesondere aus dem Satze d). Wenn $\lim\limits_{x=+\infty} \varphi(x)$ verschwindet, so kann man ihnen ähnliche aufstellen; übrigens reicht schon die Formel

$$f(x):\varphi(x) = g(X) \qquad (x < X)$$

zum Beweise des Satzes f) aus.

Der Grenzwerth $g(x)$ stimmt mit dem Quotienten $f'(x):\varphi'(x)$ überein, wenn beide Differentialquotienten endlich sind und $\varphi'(x)$ nicht verschwindet. Wenn $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ zugleich verschwinden oder unendlich sind, so kann gleichwohl der Ausdruck (11) bei $\lim \xi = \pm 0$ einen Grenzwerth haben. Z. B. Es sei

$$f(x) = e^{x+\sin x} \qquad \varphi(x) = x + \sin x.$$

Für $x = 2k\pi + \pi$ (k ganze Zahl) hat man $f'(x) = \varphi'(x) = 0$ und für den Ausdruck (11) den Grenzwerth bei $\lim \xi = \pm 0$

$$g(2k\pi + \pi) = e^{2k\pi+\pi}.$$

Für jeden anderen Werth von x ist

$$g(x) = f'(x):\varphi'(x) = e^{x+\sin x}.$$

Innsbruck, 26. Mai 1888.

---

*) Die Formel (13) i. T. wird erhalten, indem man in dem Beweise des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes nach O. Bonnet den Differentialquotienten der betrachteten Function $f(x)$ durch den Grenzwerth $g(x)$ des Quotienten (11) ersetzt.

Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Diejenigen Werthe des Argumentes z, für welche die Bessel'sche Transcendente

$$(1)\quad J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + - \cdots + \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(n+r+1)\Gamma(r+1)} - \cdots\right]$$

verschwindet, spielen bekanntlich in vielen mathematisch-physicalischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. Man weiss von diesen Nullwerthen, dass sie sämmtlich reell sind, wenn der Index n einen reellen Werth besitzt, welcher nicht kleiner als -1 ist. Den Beweis dieses Satzes pflegt man nach Poisson's Vorgang auf eine Integralformel zu gründen (vgl. unten § 7), die auch sonst in der Theorie der Bessel'schen Functionen von Wichtigkeit ist.*) Herr Schläfli hat aus einer ähnlichen Formel eine weitere Eigenschaft jener Nullwerthe gefolgert.**) Betrachtet man nämlich den einzelnen Nullwerth als Function $\psi(n)$ des Index n, so wächst $\psi(n)$ beständig, wenn n von Null ausgehend die reellen positiven Werthe durchläuft. Endlich ist noch zu bemerken, dass man die Existenz von unendlich vielen Wurzeln der Gleichung $J_n(z) = 0$ aus dem asymptotischen Werth von $J_n(z)$ für unendlich grosse Werthe von z geschlossen hat.***)

In der vorliegenden Arbeit habe ich die Untersuchung der Nullstellen von $J_n(z)$ weiter geführt. Ich behandle namentlich den Fall,

*) Poisson, Théorie de la Chaleur, p. 178. Man vergleiche eine Arbeit von Sturm in Liouville's Journal, Bd. I, pag. 384 ff., sowie die Abhandlung von Stern, Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen, Crelle's Journal Bd. 22, pag. 1 ff.

**) Mathematische Annalen Bd. X, pag. 137, Anmerkung.

***) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Band, pag. 210. Hankel hat die hier in Betracht kommende semiconvergente Entwicklung von $J_n(z)$ in den Mathematischen Annalen Bd. I, pag. 491 ausführlich untersucht. Die Abschätzung des Restes jener Entwicklung ist indessen, so wie sie Hankel giebt, nicht richtig. Der leicht kenntliche Fehler findet sich pag. 492 unten.

wo n einen *beliebigen* reellen Werth besitzt und zwar nach einer Methode, welche sich auf allgemeine Sätze über die Nullstellen analytischer Functionen gründet.

Zum Schluss betrachte ich auch solche imaginäre Werthe von n, deren reeller Bestandtheil positiv ist, wobei ich jedoch wieder Integralformeln zu Hülfe ziehen muss. Ich bemerke noch, dass ich bei meinen Entwicklungen $J_n(z)$ ersetze durch die Function

$$(2)\quad f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \cdots + \frac{z^r}{\Gamma(n+r+1)\Gamma(r+1)} + \cdots.$$

Der Uebergang von $f_n(z)$ zu $J_n(z)$ wird dann offenbar vermittelt durch die Gleichung

$$(3)\qquad J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n f_n\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

Zur Abkürzung werde ich $f_n(z)$ als die „Bessel'sche Reihe" bezeichnen.

§ 1.

Ueber die Nullstellen analytischer Functionen.

Es sei

$$(4)\qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe der complexen Veränderlichen z,

$$(5)\qquad g_\nu(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_\nu z^\nu$$

die Summe ihrer ersten $\nu + 1$ Glieder. Man kann nun beweisen, dass die Nullstellen von $f(z)$ mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit durch die Auflösung der algebraischen Gleichung

$$(6)\qquad g_\nu(z) = 0$$

gefunden werden können. Um diese Behauptung näher zu präcisiren, will ich die Werthe von z in der üblichen Weise durch die Punkte einer Ebene darstellen, und in dieser Ebene die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(z) = 0,\; g_2(z) = 0,\; g_3(z) = 0, \ldots$$

markiren. Das auf diese Weise entstehende System von unendlich vielen Punkten wird, einem bekannten Satze zufolge, bestimmte Verdichtungsstellen besitzen und der Sinn der oben ausgesprochenen Behauptung ist nun dieser:

Jede im Innern des Convergenzkreises von $f(z)$ liegende Verdichtungsstelle ist eine Nullstelle von $f(z)$ und umgekehrt: grenzt man um eine Nullstelle von $f(z)$ einen beliebig kleinen Bereich ab, so kann man N so gross wählen, dass eine Wurzel der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ in jenen Bereich hineinfällt, sobald $\nu \geq N$ ist. Ich beweise statt dieses Satzes sogleich einen allgemeineren, welcher ihn als speciellen Fall enthält, schicke jedoch zunächst folgenden Hülfssatz voraus:

„*Im Innern und auf dem Rande R eines einfach zusammenhängenden Bereiches B seien die Functionen $f(z)$ und $g(z)$ eindeutig und stetig. In jedem Punkte des Randes R mögen ferner $f(z)$ und $g(z)$ von Null verschieden, sowie*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

sein. Dann verschwindet die Function $f(z)$ im Innern des Bereiches B genau so oft wie die Function $g(z)$.

Zum Beweise setze ich

$$f(z) - g(z) = f(z) \cdot u,$$

und bilde die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int d\log f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1-u),$$

die Integrale erstreckt durch den Rand R. Das letzte dieser Integrale ist nun gleich Null. Während nämlich z den Rand R durchläuft, beschreibt der Punkt $1-u$ einen Weg, welcher zufolge der Ungleichung $|u| < 1$ die Nullstelle ausschliesst, und es kann sich daher $\log(1-u)$ nach Durchlaufung dieses Weges nicht geändert haben. Es ist somit

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int d\log f(z),$$

eine Gleichung, welche den zu beweisenden Satz enthält.

Derselbe Satz gilt, beiläufig bemerkt, auch dann noch, wenn der Bereich B von mehreren in sich zurücklaufenden Linien begrenzt wird. Wenn ferner $f(z)$ und $g(z)$ im Innern eines solchen Bereiches nicht überall stetig sind, jedoch nur wie rationale Functionen unstetig werden, so modificirt sich der Satz nur insofern, als an die Stelle der Zahl der Nullstellen die Differenz zwischen dieser Zahl und der Zahl der Unendlichkeitsstellen tritt.

Ich nehme nun an, dass jede einzelne der Functionen

$$g_1(z),\ g_2(z), \ldots, g_\nu(z), \ldots$$

ebenso wie $f(z)$ im Innern eines Gebietes G den Charakter einer rationalen Function besitzt und dass gleichmässig für die Umgebung einer beliebigen Stelle des Gebietes

$$\lim_{\nu=\infty} g_\nu(z) = f(z)$$

ist. Sei dann a eine Stelle des Gebietes, an welcher $f(z)$ von der r^{ten} Ordnung verschwindet. Um diese Stelle a grenze ich einen kleinen ganz im Innern von G liegenden Bereich B ab; innerhalb dessen (einschliesslich des Randes) die Function $f(z)$ nicht verschwindet, ausser an der Stelle a. Es ist dann längs des Randes von B beständig

$$|f(z)| > \varepsilon,$$

wo ε eine positive von Null verschiedene Zahl bedeutet. Nun kann aber ferner nach Voraussetzung N so gross angenommen werden, dass für alle Stellen des Bereiches B

$$|f(z) - g_\nu(z)| < \varepsilon$$

wird, sobald $\nu \geqq N$ ist. Daher folgt nach dem vorausgeschickten Hülfssatze, dass von $\nu = N$ ab jede Function $g_\nu(z)$ ebenso oft wie $f(z)$, also r Mal im Innern von B verschwindet. Hierbei ist noch zu bemerken, dass der Bereich B beliebig verkleinert werden kann, so dass die r Nullstellen von $g_\nu(z)$ mit unendlich wachsendem ν der Stelle a unendlich nahe rücken.

Liegen umgekehrt in jeder noch so kleinen Umgebung von $z = a$ unendlich viele Wurzeln der Gleichungen $g_1(z) = 0$, $g_2(z) = 0, \ldots$, so ist a nothwendig eine Nullstelle von $f(z)$. Andernfalls würde man nämlich um $z = a$ einen kleinen Bereich abgrenzen können, innerhalb dessen $|f(z)| > \varepsilon$ ist, wo ε eine positive von Null verschiedene Grösse bezeichnet. Da andererseits ν so gross gewählt werden kann, dass erstens $g_\nu(z)$ für einen Punkt z_0 jenes Bereiches verschwindet und zweitens $|f(z) - g_\nu(z)| < \varepsilon$ ist, so ergiebt sich für die Stelle z_0 der Widerspruch, dass gleichzeitig $|f(z_0)| > \varepsilon$ und $|f(z_0)| < \varepsilon$ ist. Daher ist die Annahme, $f(z)$ sei für $z = a$ von Null verschieden, unzulässig.

Hiernach kann man folgenden Satz aussprechen:

„*Es sei in einem endlichen Gebiete G die Function $f(z)$ die gleichmässige Grenze der Reihe von Functionen $g_1(z), g_2(z), \ldots, g_\nu(z), \ldots$, also $\lim g_\nu(z) = f(z)$. Innerhalb G möge ferner jede einzelne der genannten Functionen den Charakter einer rationalen Function besitzen.*

Dann sind im Innern von G die Nullstellen der Function $f(z)$ identisch mit denjenigen Stellen, an welchen sich die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(z) = 0,\ g_2(z) = 0, \ldots, g_\nu(z) = 0, \ldots$$

verdichten. Und zwar liegen in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle a, welche eine r-fache Nullstelle von $f(z)$ ist, genau r Wurzeln der Gleichung $g_\nu(z) = 0$, sobald ν eine bestimmte von der Grösse jener Umgebung abhängende Zahl überschreitet.“

Der entsprechende Satz gilt auch für die Unendlichkeitsstellen der Function $f(z)$, sowie für die Stellen, an welchen $f(z) = C$ wird, unter C eine beliebige Constante verstanden. Ferner ist in diesem Satze als ein besonderer Fall der oben genannte enthalten, nach welchem die Bestimmung der Nullstellen einer Potenzreihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$ mit beliebiger Genauigkeit durch die Auflösung der algebraischen Gleichung

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_\nu z^\nu = 0$$

geschehen kann.

§ 2.

Die Bessel'sche Reihe als Grenze einer besonderen rationalen Function.

Will man den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz verwenden, um die Nullstellen irgend einer besonderen Function $f(z)$ zu bestimmen, so wird es sich zunächst immer um eine zweckmässige Wahl der Functionen $g_1(z)$, $g_2(z)$, $\ldots$, $g_\nu(z)$, $\ldots$ handeln. In dem Falle der Bessel'schen Reihe

$$(7) \qquad f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(2)} + \cdots$$

sind es die Zähler und Nenner der Kettenbruchentwicklung von $\frac{f_n(z)}{f_{n+1}(z)}$, welche passend als Functionen $g_\nu(z)$ gewählt werden. Diese Functionen sind von Heine, Christoffel und Lommel behandelt worden.*) Der Vollständigkeit halber will ich jedoch die Formeln, welche für den vorliegenden Zweck von Wichtigkeit sind, kurz entwickeln.

Man verificirt zunächst ohne Weiteres die bekannten Gleichungen

$$(8) \qquad \frac{df_n}{dz} = f_{n+1},$$

$$(9) \qquad f_{n-1} = nf_n + zf_{n+1},$$

wobei ich, wie in der Folge mehrfach, kurz f_n statt $f_n(z)$ geschrieben habe. Durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung (9) erhält man eine Gleichung der Form

$$f_{n-1} = g_\nu f_{n+\nu-1} + zh_\nu \cdot f_{n+\nu},$$

wo g_ν und h_ν ganze Functionen von z und n bezeichnen. Um letztere zu bestimmen ersetze man $f_{n+\nu-1}$ nach (9) durch $(n+\nu)f_{n+\nu} + zf_{n+\nu+1}$; dann erkennt man, dass $h_{\nu+1}$ mit g_ν und $g_{\nu+1}$ mit $(n+\nu)g_\nu + zh_\nu$ identisch ist. Hiernach hat man:

$$(10) \qquad f_{n-1} = g_\nu f_{n+\nu-1} + zg_{\nu-1}f_{n+\nu},$$

$$(11) \qquad g_{\nu+1} = (n+\nu)g_\nu + zg_{\nu-1}.$$

Man findet vermöge dieser Gleichungen nach und nach:

$$g_{-1} = 0,\ g_0 = 1,\ g_1 = n,\ g_2 = n(n+1) + z,$$
$$g_3 = n(n+1)(n+2) + 2(n+1)z, \ldots.$$

Zur Auffindung des allgemeinen Ausdruckes für g_ν bemerke ich, dass die Recursionsformel (11) befriedigt wird, wenn man statt g_ν entweder

$$(-1)^\nu f_{-n-\nu} \quad \text{oder} \quad (-1)^\nu z^{\nu+1} f_{n+\nu}$$

einträgt. Daher ist allgemein

*) Heine, l. c. Bd. 1, pag. 284, Christoffel, Crelle's Journal, Bd. 58, pag. 91, Lommel, diese Annalen Bd. 4, pag. 108 ff.

$$g_\nu = (-1)^\nu (\varphi f_{-n-\nu} - \psi z^{\nu+1} f_{n+\nu}),$$

wenn die Factoren φ und ψ so bestimmt werden, dass letztere Gleichung für $\nu = -1$ und $\nu = 0$ richtig ist. Es müssen also φ und ψ die Gleichungen

$$\varphi f_{-n+1} - \psi f_{n-1} = 0,$$
$$\varphi f_{-n} \quad - \psi z f_n \;= 1$$

befriedigen. Nun ist aber die Determinante $f_{-n} f_{n-1} - z f_{-n+1} f_n$ von z unabhängig; denn ihr nach z genommener Differentialquotient verschwindet zufolge der Relationen (8) und (9). Der Werth jener Determinante ergiebt sich, indem man $z = 0$ setzt, und man findet so

(12) $$f_{-n} f_{n-1} - z f_{-n+1} f_n = \frac{\sin n\pi}{\pi}$$

und somit

$$\varphi = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot f_{n-1}, \quad \psi = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot f_{-n+1}.$$

Nach Eintragung dieser Werthe von φ und ψ kommt:

(13) $$g_\nu = \frac{(-1)^\nu \pi}{\sin n\pi} [f_{n-1} f_{-n-\nu} - z^{\nu+1} f_{n+\nu} f_{-n+1}].$$

Ersetzt man die Functionen f durch ihre Reihenentwicklungen so erhält man nach den erforderlichen Reductionen:

(14) $$g_\nu = \sum_r (\nu - r)_r \frac{\Gamma(n+\nu-r)}{\Gamma(n+r)} z^r,$$

wobei a_r den r^{ten} Binomialcoefficienten von a bezeichnet und die Summation von $r = 0$ bis $r = \frac{\nu}{2}$ oder $r = \frac{\nu-1}{2}$ auszudehnen ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist.*) Zur besseren Uebersicht will ich die Anfangs- und Endglieder von $g_{2\nu}$ und $g_{2\nu+1}$ hier ausführlich hinschreiben; es ist

(15) $$\begin{cases} g_{2\nu} = z^\nu + (\nu+1)_2 (n+\nu)(n+\nu-1) z^{\nu-1} + \cdots \\ \qquad + (2\nu-1) \cdot (n+1) \cdots (n+2\nu-2) z + n(n+1) \cdots (n+2\nu-1), \\ g_{2\nu+1} = (\nu+1)(n+\nu) z^\nu + (\nu+2)_3 (n+\nu-1)(n+\nu)(n+\nu+1) z^{\nu-1} \\ \qquad + \cdots + 2\nu(n+1) \cdots (n+2\nu-1) z + n(n+1) \cdots (n+2\nu). \end{cases}$$

Trägt man jetzt in die Formel (13) für $f_{-n-\nu}$ und $f_{n+\nu}$ die Reihenentwicklungen ein, so findet man unter Berücksichtigung der Gleichung $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$:

*) Die Function g_ν befriedigt, beiläufig bemerkt, die Differentialgleichung:

$$z^3 y^{IV} - 2(\nu-2) z^2 y''' + [(\nu-1)(\nu-2) - n(n+\nu-1) - 4z] z y''$$
$$+ [n\nu(n+\nu-1) + (4\nu-6) z] y' - \nu(\nu-1) y = 0,$$

aus welcher ebenfalls ihr allgemeiner Ausdruck (14) abgeleitet werden kann.

$$(16)\quad \frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)} = f_{n-1}\left[1 + \frac{z}{-n-\nu+1} + \cdots\right]$$
$$+\frac{(-1)^{\nu+1}\pi}{\sin n\pi} f_{-n+1} \frac{z^{\nu+1}}{\Gamma(n+\nu)\Gamma(n+\nu+1)}\left[1+\frac{z}{n+\nu+1}+\cdots\right].$$

Ich schliesse nun Einfachheit halber den Fall eines ganzzahligen n von der Betrachtung aus. Ist dann G ein beliebig grosses aber endliches Gebiet der z-Ebene, so kann man der Gleichung (16) zufolge N so gross wählen, dass für jede Stelle des Gebietes $\frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)}$ sich um weniger als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse von f_{n-1} unterscheidet, sobald $\nu \geqq N$ genommen wird.

Es ist also in jedem endlichen Gebiete f_{n-1} die gleichmässige Grenze von $\frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)}$ und man kann daher nach dem Satze des vorigen Paragraphen die Nullstellen von $f_{n-1}(z)$ mit beliebiger Genauigkeit durch Auflösung der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ finden.

§ 3.

Ueber eine Art Sturm'scher Reihen.

Ehe ich zu der Untersuchung der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ übergehe, will ich zur Vereinfachung der Darstellung einen allgemeinen Satz vorausschicken.

Es seien

$$(17)\qquad V_m,\ V_{m-1},\ \ldots,\ V_{\mu+1},\ V_\mu,\ V_{\mu-1},\ \ldots,\ V_1,\ V_0$$

ganze Functionen von z mit reellen Coefficienten, der Grad von V_i sei gleich i und der Coefficient der höchsten Potenz eine positive Grösse, insbesondere V_0 eine positive Constante. Die Functionen mögen ferner folgenden Bedingungen genügen:

1) Sobald für einen reellen Werth von z eine der Functionen V_i, wo $i \gtrless \mu$ ist, verschwindet, besitzen die benachbarten Functionen V_{i+1}, V_{i-1} nichtverschwindende Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen; wenn dagegen V_μ verschwindet, so haben $V_{\mu+1}$ und $V_{\mu-1}$ nicht verschwindende Werthe von demselben Vorzeichen.

2) Wenn z die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so geht der Quotient $\frac{V_m}{V_{m-1}}$ überall, wo er verschwindet, von negativen zu positiven Werthen über.

3) Die Gleichung $V_m = 0$ hat keine mehrfachen reellen Wurzeln.

Aus diesen Voraussetzungen lässt sich nun Folgendes erschliessen. Betrachtet man die Reihe

$$(18)\qquad V_\mu,\ V_{\mu-1},\ \ldots,\ V_1,\ V_0,$$

so bietet dieselbe μ Zeichenwechsel für $z = -\infty$ und μ Zeichenfolgen für $z = +\infty$. Da nun die Reihe nur dadurch einen Zeichenwechsel verlieren kann, dass z eine Wurzel der Gleichung $V_\mu = 0$ passirt und dabei zugleich $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ von negativen zu positiven Werthen übergeht, so folgt:

„Die Wurzeln der Gleichung $V_\mu = 0$ sind sämmtlich reell und von einander verschieden. Der Quotient $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ geht, wenn z eine Wurzel der Gleichung $V_\mu = 0$ überschreitet, stets von negativen zu positiven Werthen über."

Eine Folge hiervon ist, dass die Zahl der Wurzeln von $V_\mu = 0$, welche zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegen, genau gleich der Zahl der Zeichenwechsel ist, welche die Reihe (18) verliert, während z von α bis β wächst.

Betrachtet man jetzt die Reihe (17), so verliert dieselbe, wenn z von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst m Zeichenwechsel. Der Verlust eines Zeichenwechsels tritt nun ein, erstens beim Ueberschreiten einer Nullstelle von V_m und zweitens beim Ueberschreiten einer Nullstelle von V_μ und zwar gehen im letzteren Falle immer zwei Zeichenwechsel verloren. Denn da $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ kurz vor einer Nullstelle von V_μ negativ ist, so bieten die Functionen $V_{\mu+1}$, V_μ, $V_{\mu-1}$ kurz vor resp. kurz nach dem Ueberschreiten einer Nullstelle die Zeichen ε, $-\varepsilon$, ε, resp. ε, ε, ε dar, wo ε entweder $+$ oder $-$ sein kann. Bezeichnet daher r die Zahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$, so ist

$$r + 2\mu = m,$$

und also 2μ die Zahl der imaginären Nullstellen von V_m. Man hat also den Satz:

„*Die Gleichung* $V_m = 0$ *hat* 2μ *imaginäre und* $m - 2\mu$ *reelle Wurzeln.*"

Um die Zahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$ zu bestimmen, welche zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegen, bezeichne man mit A die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe (17), mit A' die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe (18) verliert, wenn z von α bis β wächst. Es ist dann

$$r_{\alpha\beta} + 2r'_{\alpha\beta} = A,$$
$$r'_{\alpha\beta} = A',$$

wo $r_{\alpha\beta}$ die gesuchte Zahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$ und $r'_{\alpha\beta}$ die Zahl der in den Grenzen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegenden Wurzeln von $V_\mu = 0$ bedeutet.

Man hat hiernach

$$(19) \qquad r_{\alpha\beta} = A - 2A'$$

als Anzahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$, welche zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegen.

§ 4.

Die Nullstellen der Functionen g_ν.

Eliminirt man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} g_\nu &= (n+\nu-1)g_{\nu-1} + zg_{\nu-2}, \\ g_{\nu+1} &= (n+\nu)g_\nu \qquad\quad + zg_{\nu-1}, \\ g_{\nu+2} &= (n+\nu+1)g_{\nu+1} + zg_\nu \end{aligned}$$

die Functionen $g_{\nu+1}$ und $g_{\nu-1}$, so erhält man

$$(20) \qquad (n+\nu-1)g_{\nu+2} = c_\nu g_\nu - (n+\nu+1)z^2 g_{\nu-2},$$

wo zur Abkürzung

$$(21) \qquad c_\nu = (n+\nu)[(n+\nu-1)(n+\nu+1) + 2z]$$

gesetzt ist. Wird nach und nach $\nu = 2, 4, 6, \ldots$ genommen, so ergiebt sich die Gleichungskette

$$(22) \qquad \begin{cases} (n+1)g_4 = c_2 g_2 - (n+3)z^2 g_0, \\ (n+3)g_6 = c_4 g_4 - (n+5)z^2 g_2, \\ (n+5)g_8 = c_6 g_6 - (n+7)z^2 g_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

neben welche sich eine andere für die Functionen $g_1, g_3, g_5, \ldots$ stellt, die ich indessen im Folgenden nicht verwende.

Sei nun n eine reelle Grösse und seien erstens die Zahlen

$$n+1, \; n+3, \; n+5, \ldots$$

sämmtlich positiv. Dann ergiebt die Sturm'sche Deduction angewandt auf die Reihe $g_0, g_2, g_4, \ldots$, dass die Gleichung $g_{2\nu} = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt. Also:

„*Wenn $n > -1$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichungen*

$$g_2(z) = 0. \; g_4(z) = 0, \ldots, g_{2\nu}(z) = 0, \ldots$$

sämmtlich reell.“

Die Zahl der positiven Wurzeln von $g_{2\nu} = 0$ ist in diesem Falle gleich der Anzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe $g_0, g_2, \ldots, g_{2\nu}$ bei dem Uebergang von $z = 0$ bis $z = \infty$ verliert. Es ist aber für $z = 0$

$$(23) \quad g_0 = 1, \; g_2 = n(n+1), \; g_4 = (n+2)(n+3)g_2, \ldots$$
$$\ldots, g_{2\nu+2} = (n+2\nu)\,(n+2\nu+1)g_{2\nu}, \ldots.$$

Da nun $n > -1$ ist, so bietet diese Reihe einen oder keinen Zeichenwechsel dar, je nachdem $n < 0$ oder $n > 0$ ist. Also folgt:

Die Gleichung $g_{2\nu}(z) = 0$ hat eine positive und $\nu - 1$ negative Wurzeln, wenn n zwischen -1 und 0 liegt, dagegen sind für $n > 0$ alle Wurzeln jener Gleichung negativ.

Sei nun zweitens in der Reihe

$$n+1,\ n+3,\ n+5, \ldots$$

$n + 2\mu + 1$ die erste Zahl, welche positiv ist, wobei $\mu > 0$ vorausgesetzt wird. Dann sind für die Functionenreihe

$$V_0 = g_0,\ V_1 = g_2, \ldots,\ V_\mu = g_{2\mu}, \ldots,\ V_\nu = g_{2\nu}$$

die Bedingungen 1) des vorigen Paragraphen erfüllt, wie dies sofort aus den Gleichungen (22) hervorgeht. Da nun, wie sogleich gezeigt werden soll, auch die Bedingungen 2) und 3) erfüllt sind, sobald ν eine gewisse Grösse überschreitet, so folgt:

Wenn n zwischen $-2\mu - 1$ und $-2\mu + 1$ liegt, so besitzt die Gleichung

$$g_{2\nu}(z) = 0$$

genau 2μ imaginäre Wurzeln, falls ν eine gewisse Zahl N überschreitet. Zugleich ist von den reellen Wurzeln dieser Gleichung eine oder keine positiv, je nachdem n zwischen $-2\mu - 1$ und -2μ oder zwischen -2μ und $-2\mu + 1$ liegt.

Der letzte Zusatz ergiebt sich aus (19) indem man bemerkt, dass die Reihe $g_0, g_2, \ldots, g_{2\nu}$ nach (23) entweder einen oder keinen Zeichenwechsel aufweist, je nachdem $(n + 2\mu)(n + 2\mu + 1)$ negativ oder positiv ist.

Um den Nachweis zu führen, dass von einem bestimmten ν ab die Bedingungen 2) und 3) des vorigen Paragraphen erfüllt sind, bemerke ich, dass diese Bedingungen dann und nur dann erfüllt sind, wenn der Differentialquotient von $\frac{V_m}{V_{m-1}} = \frac{g_{2\nu}}{g_{2\nu-2}}$ oder was auf dasselbe hinausläuft, die Functionaldeterminante $g_{2\nu-2}g'_{2\nu} - g_{2\nu}g'_{2\nu-2}$ für jede reelle Nullstelle von $g_{2\nu}$ einen positiven (nicht verschwindenden) Werth besitzt. Jene Functionaldeterminante drückt sich aber vermöge (11) durch

$$g^2_{2\nu-2} + (n+2\nu-1)\Delta_{2\nu-1}$$

aus, wenn allgemein

$$\Delta_\nu = g_{\nu-1}g'_\nu - g'_{\nu-1}g_\nu \tag{24}$$

gesetzt wird. Ich werde nun zeigen, dass $\Delta_{2\nu-1}$ von einem gewissen Werthe von ν ab für jeden reellen Werth von z positiv ist, woraus dasselbe dann für jene Functionaldeterminante folgt.

Zu dem Ende benutze ich den Ausdruck (13) für g_ν; vermöge desselben ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$(25)\quad \Delta_\nu = \left(\frac{\pi}{\sin n\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\Gamma(n-\nu+2)}\right)^2 \cdot f_{n-1}^2 \left[\frac{1}{n+\nu-1} + \cdots\right] + \cdots,$$

wo die durch Punkte angedeuteten Terme gegen den berücksichtigten mit unendlich wachsendem ν verschwinden. Wenn indessen z einen Werth besitzt, für welchen f_{n-1} verschwindet, so ist die Formel (25) zu ersetzen durch

$$(26)\quad \Delta_\nu = \left(\frac{\pi}{\sin n\pi}\right)^4 (-z)^{\nu-1} + \cdots.$$

Aus diesen Formeln folgt nun: Beschränkt man z auf irgend ein endliches reelles Intervall, so kann man N so gross wählen, dass $\Delta_{2\nu-1}$ für das ganze Intervall positiv ist, sobald $\nu > N$ genommen wird. Nun findet man aus (11) und (15):

$$(27)\quad \Delta_{2\nu-1} = \frac{\nu(\nu-1)(n+\nu-1)(n+\nu-2)}{6}[2\nu^2+2\nu(n-2)-n]z^{2\nu-2} + \cdots,$$

$$(28)\quad \Delta_{\nu+2} = (n+\nu)g_\nu^2 + z^2\Delta_\nu,$$

und hieraus geht hervor, dass $\Delta_{2\nu-1}$ für unendlich grosse Werthe von z positiv ist, sobald ν eine gewisse Zahl überschreitet und dass $\Delta_{2\nu+1}$ für die eventuellen äussersten Nullstellen von $\Delta_{2\nu-1}$ noch positiv ist, also nur zwischen diesen Nullstellen negativ werden könnte. Alle diese Betrachtungen zusammen ergeben nun die Richtigkeit des erwähnten Satzes:

„*Setzt man $\Delta_\nu = g_{\nu-1}g_\nu' - g_{\nu-1}'g_\nu$, so ist für jeden reellen Werth von z $\Delta_{2\nu-1}$ positiv, sobald ν eine gewisse Zahl überschreitet.*“

Der Vollständigkeit halber bemerke ich, dass derselbe Satz für $\Delta_{2\nu}$ gilt, wenn $f_{n-1}(z)$ für keinen positiven Werth von z verschwindet. Für die Umgebung einer positiven Nullstelle von $f_{n-1}(z)$ besitzt hingegen $\Delta_{2\nu}$ für genügend grosse Werthe von ν das negative Zeichen, wie aus (26) ersichtlich ist.

§ 5.

Die Nullstellen der Bessel'schen Reihe für reelle Indices.

Da die Nullstellen der Function $f_{n-1}(z)$ mit den Verdichtungsstellen der Wurzeln von

$$g_2(z) = 0,\ g_4(z) = 0, \ldots, g_{2\nu}(z) = 0, \ldots$$

übereinstimmen, so ergiebt sich aus den Resultaten des vorigen Paragraphen ohne Weiteres:

„*Die Wurzeln der Gleichung*

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \cdots + \frac{z^\nu}{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} + \cdots = 0$$

sind sämmtlich reell, falls $n > -2$ ist. Diese Wurzeln sind für

$n > -1$ *sämmtlich negativ; dagegen ist eine derselben positiv und die übrigen negativ, wenn n zwischen -2 und -1 liegt.*"

Der Fall, wo $n < -2$ ist, erfordert indessen noch weitere Entwicklungen, da die Verdichtungsstellen eines Systems reeller Werthe freilich reell, aber diejenigen eines Systems imaginärer Werthe nicht nothwendig imaginär sind.

Ich betrachte zunächst die Gleichung

$$(29) \qquad g_{2\nu}(z) + \lambda g_{2\nu+1}(z) = 0,$$

in welcher λ irgend eine reelle Constante bezeichnet. Ist $\lambda = 0$ und hat ν einen genügend grossen Werth, so besitzt die Gleichung (29) 2μ imaginäre Wurzeln. Wenn nun λ von Null bis zu irgend einem Werthe λ_0 variirt, so kann die Zahl der imaginären Wurzeln sich nur dann verändern, wenn λ einen Werth passirt, für welchen (29) eine Doppelwurzel erhält. Für diese Doppelwurzel würde aber

$$\Delta_{2\nu+1} = g_{2\nu+1} g'_{2\nu} - g_{2\nu} g'_{2\nu+1}$$

verschwinden, was nach dem vorigen Paragraphen nicht angeht. Also:

„*Die Gleichung* (29) *hat für jeden reellen Werth von λ genau 2μ imaginäre Wurzeln.*"

Wenn daher λ von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt, so durchlaufen die imaginären Wurzeln der Gleichung (29) eine Curve, welche aus 2μ getrennten Zügen besteht. Sei

$$(30) \qquad z = x + iy, \quad z' = x - iy,$$

so ist die Gleichung der genannten Curve

$$(31) \qquad \varphi_\nu(x, y) = \frac{g_{2\nu+1}(z)\, g_{2\nu}(z') - g_{2\nu+1}(z')\, g_{2\nu}(z)}{z - z'} = 0$$

und die Glieder höchster Dimension von $\varphi_\nu(x, y)$ lauten:

$$c \cdot (zz')^{\nu-1} = c(x^2 + y^2)^{\nu-1},$$

wo

$$c = \frac{(\nu+1)\,\nu\,(n+\nu)\,(n+\nu-1)}{6}\,[2\nu^2 + 2n\nu + n - 2]$$

ist. Die Curve $\varphi_\nu(x, y) = 0$ ist also von der $2\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung und trifft die unendlich ferne Gerade nur in den imaginären Kreispunkten, welche $(\nu - 1)$-fache Punkte der Curve sind.

Die 2μ Züge der Curve sind daher ganz im Endlichen liegende Ovale.

Da für $y = 0$, also $z = z'$, die Function $\varphi_\nu(x, y)$ in $\Delta_{2\nu+1}$ übergeht, welches beständig positiv ist, so treffen die Ovale nicht die Axe der reellen Zahlen und es geht $\varphi_\nu(x, y)$, wenn der Punkt $z = x + iy$ von einem reellen Werthe ausgehend sich so bewegt, dass er eines der Ovale überschreitet, von positiven zu negativen Werthen über. Nun findet man aber mit Hülfe der Gleichung (11):

$$(32) \qquad \varphi_{\nu+1}(x, y) = (n + 2\nu + 1)\, g_{2\nu+1}(z)\, g_{2\nu+1}(z') + zz'\varphi_\nu(x, y),$$

und es ist also $\varphi_{\nu+1}$ noch positiv, wenn φ_ν verschwindet, abgesehen von denjenigen Punkten $z=x+iy$, welche die Gleichung $g_{2\nu+1}(z)=0$ befriedigen und welche gleichzeitig auf den Curven $\varphi_{\nu+1}=0$ und $\varphi_\nu=0$ liegen.

Hieraus geht hervor, dass jedes Oval der Curve $\varphi_{\nu+1}=0$ je ein Oval der Curve $\varphi_\nu=0$ in einem Punkte, für welchen $g_{2\nu+1}(z)=0$ ist, von Innen berührt*). Die 2μ Ovale werden sich ferner mit wachsendem ν immermehr verkleinern, bis sie sich für $\nu=\infty$ auf 2μ Punkte zusammengezogen haben. Da nämlich die Grenzstellen der Punkte eines Ovales Nullstellen von $f_{n-1}(z)$ sind und letztere discret über die Ebene vertheilt sind, so kann die Grenze jedes Ovales nur ein Punkt sein. Auf demselben Grunde beruht die Richtigkeit der stillschweigend gemachten Annahme, dass die 2μ Ovale der Curve $\varphi_\nu=0$ sämmtlich ausser einander liegen.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun der Satz:

„*Die Gleichung*

$$f_n(z)=\frac{1}{\Gamma(n+1)}+\frac{z}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(2)}+\cdots+\frac{z^\nu}{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}+\cdots=0$$

hat für negative, zwischen $-2\mu-2$ *und* -2μ *liegenden Werthe von* n *genau* 2μ *paarweis conjugirte imaginäre und übrigens unendlich viele reelle Wurzeln***). *Zur näheren Bestimmung der imaginären Wurzeln hat man eine unendliche Reihe algebraischer Curven*

$$\varphi_\nu(x,y)=0,\ \varphi_{\nu+1}(x,y)=0,\ldots$$

von denen jede einzelne aus 2μ *im Endlichen und ausser einander liegenden Ovalen besteht. Das einzelne Oval der Curve* $\varphi_\varkappa=0$ *berührt und umschliesst je ein Oval der nächstfolgenden Curve und enthält zugleich in seinem Innern je eine imaginäre Nullstelle von* $f_n(z)$. *Auf diese Nullstelle zieht sich das Oval mit wachsendem* $\varkappa$ *immer mehr und mehr zusammen.*“

Was nun die reellen Wurzeln betrifft, so folgt aus dem vorigen Paragraphen:

„*Von den reellen Wurzeln der Gleichung* $f_n(z)=0$ *sind entweder alle oder alle bis auf eine negativ, je nachdem* n *zwischen* $-2\mu-1$ *und* -2μ *oder zwischen* $-2\mu-2$ *und* $-2\mu-1$ *liegt.*“

---

*) Siehe die Fig. 1, welche diese Verhältnisse qualitativ veranschaulichen soll. Die Figur bezieht sich auf den Fall $\mu=1$ (vgl. unten § 8).

**) Wenn n continuirlich in einen ganzzahligen Werth übergeht, so werden die imaginären Wurzeln sämmtlich unendlich klein.

§ 6.

Die reellen Nullstellen von $f_n(z)$.

Der zuletzt genannte Satz lässt sich auch direct aus der Reihenentwicklung von $f_n(z)$ ableiten, wie ich nunmehr zeigen will.

Ich stütze mich dabei auf folgende Sätze:

„*Wenn die Function*

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{2\nu} x^{2\nu}$$

für alle reellen Werthe von x positiv ist, so gilt Gleiches von der Function

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi'(x) + \cdots + \varphi^{(2\nu)}(x).\text{“}$$

In der That ist

$$\psi(x) = e^x \int_x^\infty e^{-x} \varphi(x)\, dx,$$

aus welcher Darstellung der Satz unmittelbar hervorgeht.

„*Unter derselben Voraussetzung besitzt die Function*

$$\chi(x) = \frac{c_0}{\Gamma(\alpha)} + \frac{c_1}{\Gamma(\alpha+1)} x + \cdots + \frac{c_{2n}}{\Gamma(\alpha+2n)} x^{2n}$$

für alle reellen Werthe von x dasselbe Vorzeichen wie $\sin \alpha\pi$. Dabei bedeutet α eine Constante, welche der Bedingung $\alpha + 2n < 1$ genügt.“

Zum Beweise bemerke man, dass für $a < 1$ die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi} \Gamma(1-a) = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^{-a}\, dx$$

gilt. Vermöge derselben ergiebt sich:

$$\chi(z) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\alpha} \left[c_0 - c_1 \frac{z}{x} + c_2 \frac{z^2}{x^2} - + \cdots\right] dx$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\alpha} \varphi\left(-\frac{z}{x}\right) dx,$$

woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

Ich wende den ersten Satz auf die Function $\varphi(x) = \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$ an und erhalte:

„*Die Summe der ersten 2ν Glieder der Exponentialreihe*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

besitzt für jeden reellen Werth von x einen positiven Werth.“ *)

---

*) Dieser Satz ist auf andere Weise von Hermite bewiesen (Cours d'Analyse p. 34).

Es möge nun der Index n der Bessel'schen Reihe zwischen $-2\mu-1$ und -2μ liegen. Dann haben die Glieder der Reihe, welche mit $z^{2\mu+1}$, $z^{2\mu+2}$, ... multiplicirt sind, sämmtlich positive Coefficienten. Die Summe der vorhergehenden Glieder ist

$$\chi(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\cdot 2!} + \cdots + \frac{z^{2\mu}}{\Gamma(n+2\mu+1)\cdot(2\mu)!}.$$

Diese Summe besitzt aber nach den vorausgeschickten Sätzen für alle reellen Werthe von z das Vorzeichen von $\sin(n+1)\pi$, welches das positive ist, da $(n+1)\pi$ zwischen $-2\mu\pi$ und $(-2\mu+1)\pi$ liegt. Daher ist a fortiori $f_n(z)$ für alle positiven Werthe von z positiv, und die reellen Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = 0$ sind also sämmtlich negativ.

Wenn nun zweitens der Index n zwischen $-2\mu-2$ und $-2\mu-1$ liegt, so schreibe man

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + R,$$

wo R die Summe der auf das erste Glied der Reihe folgenden Glieder bedeutet. Der Term $\frac{1}{\Gamma(n+1)}$ besitzt einen negativen Werth, während der Differentialquotient von R, welcher gleich $f_{n+1}(z)$ ist, für alle positiven Werthe von z positiv ist. Lässt man daher z von Null aus wachsen, so wächst R von Null ausgehend beständig und folglich wird für einen und nur einen positiven Werth von z die Gleichung $R = -\frac{1}{\Gamma(n+1)}$, also $f_n(z) = 0$ erfüllt werden.*)

§ 7.

Verwendung der Integralsätze.

Die schon oben erwähnten Integralformeln gestatten es, einen Theil der erhaltenen Resultate aufs Neue zu beweisen und nach einigen Richtungen zu ergänzen. Man erhält jene Formeln bekanntlich, indem man von der Differentialgleichung

$$(33) \qquad \frac{d^2\left(z^{\frac{n}{2}} f_n(z)\right)}{(d \log z)^2} = z^{\frac{n}{2}} f_n(z)\left(z + \frac{n^2}{4}\right)$$

ausgeht. Es seien m, n, r, s irgend welche complexe Constante und t eine reelle Variable; ferner werde zur Abkürzung

$$(34) \qquad t^{\frac{m}{2}} f_m(rt) = u, \quad t^{\frac{n}{2}} f_n(st) = v$$

*) Wegen der numerischen Berechnung der negativen Wurzeln von $f_n(z) = 0$ vergleiche man Stern, l. c. pag. 35 ff. und Crelle's Journal Bd. 33, pag. 363.

gesetzt. Dann ist nach (33):

$$(35)\qquad \frac{d^2u}{(d\log t)^2} = u\left(rt + \frac{m^2}{4}\right),\quad \frac{d^2v}{(d\log t)^2} = v\left(st + \frac{n^2}{4}\right),$$

und hieraus folgt

$$(36)\qquad \frac{d}{d\log t}\left[Au\frac{dv}{d\log t} + Bv\frac{du}{d\log t}\right] = (A+B)\frac{du}{d\log t}\,\frac{dv}{d\log t}$$
$$+\,uv\left[A\left(st + \frac{n^2}{4}\right) + B\left(rt + \frac{m^2}{4}\right)\right],$$

wobei A und B beliebige Constante bedeuten.

Wenn nun $A = 1$, $B = -1$ und $m = n$ genommen wird, so besitzt das Anfangsglied in der Entwicklung von

$$Au\frac{dv}{d\log t} + Bv\frac{du}{d\log t}$$

den Exponenten $\frac{m+n}{2} + 1 = n + 1$ und der Ausdruck verschwindet also für $t = 0$, wenn der reelle Bestandtheil von n grösser als -1 ist. Die Integration der Gleichung (36) zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ ergiebt dann

$$[t(uv' - vu')]_{t=1} = (s-r)\int_0^1 uv\,dt,$$

oder in Rücksicht auf (34) und die Relation $f_n' = f_{n+1}$:

$$(37)\qquad sf_{n+1}(s)f_n(r) - rf_{n+1}(r)f_n(s) = (s-r)\int_0^1 t^n f_n(rt)f_n(st)\,dt.$$

Im Allgemeinen wird dagegen die Entwicklung des Ausdrucks

$$Au\frac{dv}{d\log t} + Bv\frac{du}{d\log t}$$

mit dem Terme $t^{\frac{m+n}{2}}$ beginnen, und es wird folglich nur unter der Annahme, dass $m + n$ einen positiven reellen Bestandtheil besitze, jener Ausdruck für $t = 0$ verschwinden. Die Integration der Gleichung (36) ergiebt dann:

$$(38)\qquad Af_m(r)\left[f_n(s) + \frac{n}{2}f_{n+1}(s)\right] + Bf_n(s)\left[f_m(r) + \frac{m}{2}f_{m+1}(r)\right]$$
$$= (A+B)\int_0^1 t\,u'v'\,dt + (An^2 + Bm^2)\frac{1}{4}\int_0^1 uv\,\frac{dt}{t}$$
$$+\,(As + Br)\int_0^1 uv\,dt.$$

Es seien nun in der Formel (37) $s = z$ und $r = z'$ conjugirt complexe Grössen, dagegen n reell. Dann ist das auf der rechten Seite auftretende Integral positiv, da alle seine Elemente positiv sind. Es folgt also:

„*Ist n reell und grösser als -1, bezeichnen ferner z und z' conjugirt complexe Grössen, so besitzt der Quotient*

$$\frac{z f_{n+1}(z) f_n(z') - z' f_{n+1}(z') f_n(z)}{z - z'}$$

stets einen von Null verschiedenen positiven Werth."

Ich setze nun in diesem Satze $n + \nu - 1$ an Stelle von n, unter n jetzt eine beliebig reelle Zahl und unter ν eine ganze Zahl verstanden, welche der Bedingung $n + \nu > 0$ genügt. Ich nehme ferner an, dass z und z' conjugirte Wurzeln der Gleichung $f_{n-1}(z) = 0$ sind.

Dann ist nach (10)

$$\begin{aligned} z f_{n+\nu}(z) \cdot g_{\nu-1}(z) &= - g_\nu(z) f_{n+\nu-1}(z), \\ z' f_{n+\nu}(z') \cdot g_{\nu-1}(z') &= - g_\nu(z') f_{n+\nu-1}(z'), \end{aligned}$$

und unser Satz ergiebt, dass der Quotient

$$\frac{g_\nu(z) g_{\nu-1}(z') - g_{\nu-1}(z) g_\nu(z')}{z - z'}$$

negativ ist. Dies lässt sich, wenn noch $z = x + iy$, $z' = x - iy$ gesetzt wird, so aussprechen:

„*Die imaginären Wurzeln der Gleichung $f_{n-1}(z) = 0$ liegen in denjenigen Gebieten der Ebene, in welchen die Function*

$$\psi_\nu(x, y) = \frac{g_\nu(z) g_{\nu-1}(z') - g_{\nu-1}(z) g_\nu(z')}{z - z'} \tag{39}$$

negativ ist. Dabei bezeichnet ν eine ganze Zahl, welche der Bedingung $n + \nu > 0$ genügt."

Die im Satze genannten Gebiete werden durch die Curve $\psi_\nu(x, y) = 0$ abgegrenzt, wobei indessen nicht ausgeschlossen ist, dass diese Curve keinen oder nur isolirte reelle Punkte besitzt, in welchem Falle nur ein einziges von der ganzen Ebene gebildetes Gebiet vorhanden ist. Die Function $\psi_{2\nu+1}(x, y)$ ist nach (31) mit $\varphi_\nu(x, y)$ identisch, und es lassen sich daher, wie leicht zu sehen, die im § 5 entwickelten Sätze aus dem vorstehenden Satze ableiten. Der letztere enthält indessen mehr, insofern die ganze Zahl ν nicht wie in § 5 eine nicht näher bezeichnete Zahl zu überschreiten braucht, sondern nur der Bedingung $n + \nu > 0$ genügen muss.

§ 8.

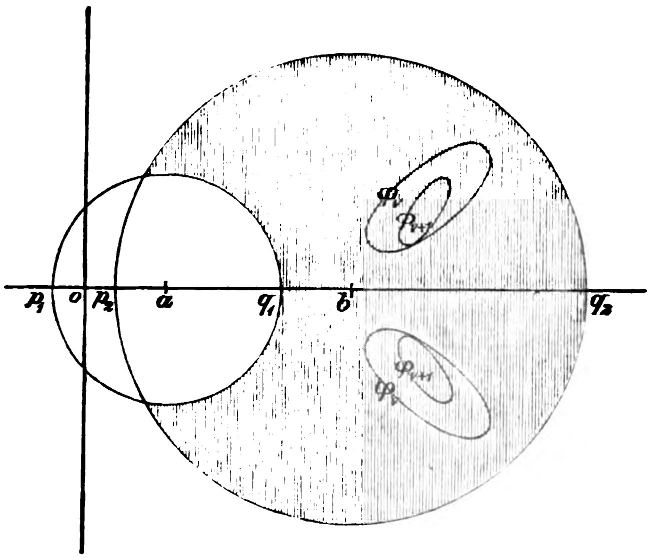
Beispiel.

Betrachten wir beispielsweise die Gleichung

$$f_{n-1}(z) = 0,$$

wo n zwischen -2 und $-2+\frac{4}{5}$ liegt. Dann kann $\nu = 2, 3, 4, \ldots$ sein. Nun ist

$$(40)\quad \begin{cases} \psi_4 = 2(n+1)(x^2+y^2)+2n(n+1)(n+2)x+(n+2)n^2(n+1)^2, \\ \psi_5 = (n+1)(n+2)(5n+6)(x^2+y^2)+4n(n+1)^2(n+2)(n+3)x \\ \qquad + n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3). \end{cases}$$



Figur 1.

Daher stellen $\psi_4 = 0$ und $\psi_5 = 0$ zwei Kreise vor, deren Gleichungen in die Form

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)}\psi_4 \equiv (x-a)^2 + y^2 - \varrho^2 = 0, \\ \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(5n+6)}\psi_5 \equiv (x-b)^2 + y^2 - \sigma^2 = 0 \end{cases}$$

gesetzt werden können, wobei dann

$$(42)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{n(n+2)}{2}, & \varrho = -\dfrac{n}{2}\sqrt{-n(n+2)}, \\ b = -\dfrac{2n(n+1)(n+3)}{5n+6}, & \sigma = -\dfrac{n^2\sqrt{-(n+1)(n+3)}}{5n+6} \end{cases}$$

ist.

Die Function ψ_4 hat im Innern des Kreises $\psi_4 = 0$ offenbar das Vorzeichen von $-2(n+1)$, also das positive Vorzeichen. Dagegen hat ψ_5 im Innern des Kreises $\psi_5 = 0$ das negative Vorzeichen. Es folgt daher:

„*Die beiden imaginären Wurzeln der Gleichung* $f_{n-1}(z) = 0$ *befinden sich, wenn* n *zwischen* -2 *und* $-2 + \frac{4}{5}$ *liegt, ausserhalb des ersten und im Innern des zweiten der beiden Kreise* (41)."

Ueber die Lage dieser beiden Kreise*) geben die folgenden Ungleichungen Aufschluss, welche man mit Hülfe von (42) leicht bestätigt:

$$(43) \qquad b > a > 0; \quad a^2 < \varrho^2 < (b-a)^2 < \sigma^2 < b^2.$$

Wenn p_1, q_1 und p_2, q_2 die Werthe bezeichnen, welche den Durchschnittspunkten des ersten bez. zweiten Kreises mit der Axe der reellen Zahlen entsprechen, so folgt aus (43), dass

$$p_1 < 0 < p_2 < a < q_1 < b < q_2$$

ist. Daher müssen sich die beiden Kreise schneiden, so dass das Gebiet, in welchem die Wurzeln von $f_n(z) = 0$ liegen, durch eine (in Fig. 1 schraffirte) Kreissichel vorgestellt wird.

§ 9.

Die Gleichung $f_n(z) = 0$ für imaginäre Werthe von n.

Zum Schluss will ich noch den Fall betrachten, in welchem der Index n einen imaginären Werth mit positivem reellen Bestandtheil besitzt. Sei in der Formel (38) m die zu n conjugirte Grösse, und

$$(44) \qquad s = z = x + iy, \quad r = z' = x - iy$$

Wurzeln der Gleichungen

$$f_n(z) = 0 \text{ resp. } f_m(z') = 0.$$

Dann ergiebt (38):

$$(45) \qquad (A+B)J_1 + (An^2 + Bm^2)\frac{1}{4}J_2 + (As + Br)J_3 = 0,$$

wobei ich die in (38) vorkommenden Integrale zur Abkürzung mit J_1, J_2, J_3 bezeichnet habe. Diese Integrale besitzen positive Werthe, da u und v (siehe (34)) für jeden reellen Werth von t conjugirte Grössen sind. Ueberdies hat man

$$(46) \qquad J_2 > J_3,$$

weil der im Integrale J_2 vorkommende Factor $\frac{1}{t}$ in dem ganzen Integrationsintervall grösser als 1 ist. Sei nun

*) Siehe Figur 1.

$$(47) \qquad -\frac{n^2}{4} = \alpha + \beta i, \quad -\frac{m^2}{4} = \alpha - \beta i,$$

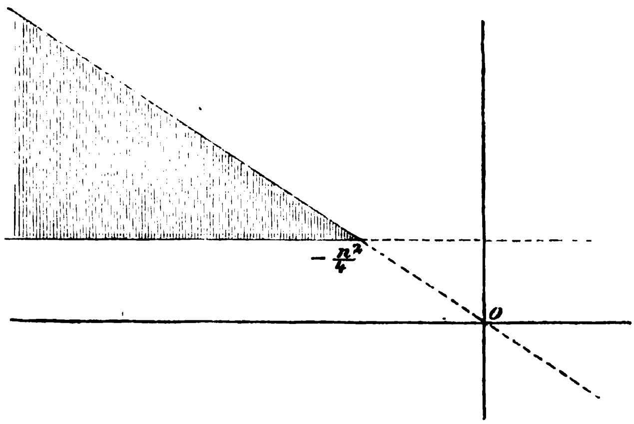
so folgt aus (45) in Rücksicht auf (44)

$$(A + B)J_1 + [(A + B)x + i(A - B)y]J_3$$
$$= [(A + B)\alpha + i(A - B)\beta]J_2$$

oder, da A und B willkürliche Constanten bedeuten:

$$(48) \qquad J_1 + xJ_3 = \alpha J_2, \quad yJ_3 = \beta J_2.$$

Die letzte dieser beiden Gleichungen besagt, dass y dasselbe Vorzeichen besitzt wie β und absolut grösser ist als β. Dies lässt sich auch so ausdrücken: Man construire den Punkt $-\frac{n^2}{4} = \alpha + \beta i$ und zerlege die Ebene in zwei Theile, indem man durch jenen Punkt eine



Figur 2.

Parallele zur Axe der reellen Zahlen zieht. Dann liegt der Punkt $z = x + iy$ in demjenigen Theile, welcher die Axe der reellen Zahlen nicht enthält. Aus (48) folgt nun ferner

$$\beta J_1 + (x\beta - y\alpha)J_3 = 0$$

und es ist also $\frac{x\beta - y\alpha}{\beta}$ negativ. Construirt man daher, unter X, Y laufende Coordinaten verstanden, die Gerade $X\beta - Y\alpha = 0$, welche den Nullpunkt mit dem Punkte $-\frac{n^2}{4}$ verbindet, so liegt $z = x + iy$ auf derjenigen Seite dieser Geraden, welche die Axe der negativen reellen Zahlen in sich aufnimmt. Aus alledem ergiebt sich nun der Satz (vgl. Fig. 2):

„*Es sei n eine Zahl mit positivem reellen Bestandtheil. Man ziehe durch den Punkt $-\frac{n^2}{4}$ zwei Halbstrahlen, von welchen der erste parallel* *zur Axe der negativen reellen Zahlen läuft, während die Verlängerung des zweiten durch den Nullpunkt geht. Die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = 0$ liegen dann in dem von den genannten Strahlen begrenzten (convexen) Winkelraum.*"

Dieser Raum reducirt sich auf ein doppelt überdecktes Stück der Axe der reellen negativen Zahlen, wenn n einen reellen Werth besitzt, wie es nach den früheren Sätzen zu erwarten stand.

Königsberg i. Pr., den 2. Juni 1888.

Die partiellen Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

ED. WILTHEISS in Halle a./S.

Einleitung.

In mehreren Aufsätzen*) habe ich mich schon beschäftigt mit den partiellen Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen, in denen einerseits nach den Argumenten, andererseits nach Parametern differentiirt wird. Dabei habe ich die Weierstrass'ische Form der Thetafunction zu Grund gelegt, und zwar dieselbe nach dem Vorgange von F. Klein so specialisirt, dass sie Invarianteneigenschaft hat. Es ergab sich, dass die sämmtlichen derartigen Differentialgleichungen aus einer Gruppe von vier Gleichungen**):

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{2\varrho+2} \lambda A_{\lambda-1} \frac{\partial \Theta}{\partial A_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\varrho} (\varrho-\nu)\, u_{\nu+1} \frac{\partial \Theta}{\partial u_\nu} = 0,\\
&\sum_{\lambda=0}^{2\varrho+1} (2\varrho+2-\lambda)\, A_{\lambda+1} \frac{\partial \Theta}{\partial A_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\varrho} (\nu-1)\, u_{\nu-1} \frac{\partial \Theta}{\partial u_\nu} = 0,\\
&\sum_{\lambda=1}^{2\varrho+2} \lambda A_\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial A_\lambda} - \sum_{\nu=1}^{\varrho} \nu u_\nu \frac{\partial \Theta}{\partial u_\nu} = 0,\\
&\sum_{\lambda=0}^{2\varrho+1} (2\varrho+2-\lambda)\, A_\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial A_\lambda} - \sum_{\nu=1}^{\varrho} (\varrho+1-\nu)\, u_\nu \frac{\partial \Theta}{\partial u_\nu} = 0,
\end{aligned}
$$

bestanden, welche bekanntlich die Invarianteneigenschaft eines Ausdrucks definiren, und aus einer Gruppe von $2\varrho-1$ weiteren Differential-

---

*) Journal für Mathematik, Bd. 99, S. 236. Mathematische Annalen, Bd. 29, S. 272 und Bd. 31, S. 134.

**) Mathematische Annalen, Bd. 31, S. 151.

gleichungen, welche für die Thetafunction charakteristisch sind. Diese letztere Gruppe, welche das wesentliche Resultat meiner Entwicklungen ist, will ich noch auf einem ein wenig anderen Wege herstellen, als es bisher geschehen ist. Ich werde zuerst die Form und Beschaffenheit der Differentialgleichungen ohne Rechnung nur durch einfache Betrachtung möglichst festzustellen suchen, indem ich mich hauptsächlich auf die Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen stütze. Dies geschieht in den vier ersten Paragraphen. Es bleiben dann noch zwei Covarianten, eine vom ersten und die andere vom zweiten Grade, zu bestimmen übrig, und die Ausdrücke für diese muss ich freilich durch Rechnung — im fünften Paragraphen — ermitteln, deren Umfang aber gegen diejenige in meinen früheren Arbeiten viel geringer ist.

§ 1.

Die Grundlagen und die Ausgangspunkte der Entwicklung.

Die Differentialgleichungen zwischen den partiellen Ableitungen der allgemeinen Jacobi'schen Thetafunctionen nach den Argumenten und den Parametern können in der Form

$$(2)\qquad 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\alpha}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha^2}, \quad 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha \, \partial v_\beta}$$

geschrieben werden, in der sich dieselben zuerst bei Riemann*) finden. Nimmt man aber die speciellen hyperelliptischen Thetafunctionen, so sind die $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ nicht unabhängig von einander, und demgemäss existirt eine geringere Anzahl solcher Differentialgleichungen, welche sich aber aus den Differentialgleichungen der allgemeinen Thetafunctionen zusammensetzen lassen müssen. Will man nun diese aufstellen, so wird es vortheilhafter sein, als diejenigen Parameter, nach denen differentiirt wird, an Stelle der $\tau_{\alpha\beta}$, die Verzweigungspunkte der zugehörigen Integrale oder Verbindungen derselben zu wählen, und zugleich anstatt der Jacobi'schen Form der Thetafunction die Weierstrass'ische Form zu nehmen, welche sich vor der ersteren dadurch auszeichnet, dass bei ihrer Entwicklung in eine Potenzreihe der Argumente die Coefficienten, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor, *rationale* Functionen der Verzweigungspunkte und der sonst noch in den Normalintegralen erster und zweiter Gattung vorkommenden Constanten sind. Die Weierstrass'ische Form der Thetafunction entsteht aus der Jacobi'schen, indem man mittels der Gleichung

*) Riemann's Gesammelte Werke, S. 131. Ich gebrauche hier die Weierstrass'ische Bezeichnung, der $\pi i \tau_{\alpha\beta}$, bez. $\pi i v_\alpha$ an Stelle von $a_{\mu\mu'}$, bez. v_μ schreibt.

$$u_\alpha = \sum_\beta 2\,\omega_{\alpha\beta} v_\beta$$

an Stelle der $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ die neuen Argumente $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ einführt, und zugleich die Thetafunction mit einem Exponentialfactor multiplicirt, der quadratisch in den Argumenten ist:

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots u_\varrho) = e^{\eta(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)}\, \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\varrho). \tag{3}$$

Darin ist

$$\eta(u_1, u_2, \ldots u_\varrho) = \frac{1}{2\omega} \sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial \omega_{\beta\gamma}} u_\alpha u_\beta, \tag{4}$$

und es bedeuten $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, bez. $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$ die Perioden der Normalintegrale erster, bez. zweiter Gattung und ω die sogenannte Determinante der halben realen Perioden $\omega_{\alpha\beta}$; die Summation ist hier wie überall im Folgenden, wo die Summationsbuchstaben α, β, γ vorkommen, von 1 bis ϱ auszuführen.

Die Normalintegrale erster und zweiter Gattung

$$\int^{\cdot} \frac{H(x)_\alpha}{2y} (dx, x), \qquad \int^{\cdot} \frac{G(x)_\alpha}{2y} (dx, x), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

(wo

$$y^2 = f(x) = \sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\lambda} A_\lambda x_1^{\lambda} x_2^{2\varrho+2-\lambda} = A_{2\varrho+2} \prod_{\mu=1}^{2\varrho+2} (x_1 - a_\mu x_2),$$

$$(dx, x) = x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2$$

ist), sind dadurch bestimmt, dass der Grad der ganzen Functionen $H(x)_\alpha$ den $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ nicht übersteigt und die identische Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} -\frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x, \xi)^2\, 4y\eta} &= \sum_\alpha \frac{H(\xi)_\alpha}{2\eta} \cdot \frac{G(x)_\alpha}{2y} - \frac{d\Phi(x, \xi)}{(dx, x)} \\ &= \sum_\alpha \frac{H(x)_\alpha}{2y} \cdot \frac{G(\xi)_\alpha}{2\eta} - \frac{d\Phi(\xi, x)}{(d\xi, \xi)}, \end{aligned} \tag{5}$$

durch deren zweimalige Integration, einmal nach x_1, x_2 und einmal nach ξ_1, ξ_2, die Relationen zwischen den Perioden*)

$$\sum_\alpha (\eta_{\alpha\beta}\, \omega'_{\alpha\gamma} - \eta'_{\alpha\gamma}\, \omega_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{für } \beta \gtrless \gamma \\ \frac{\pi i}{2}, & \text{für } \beta = \gamma \end{cases}$$

erhalten werden, welche der Periodicität der Thetafunctionen halber zwischen denselben nothwendig sind. In dieser Gleichung (5) haben η

*) Vergl. Schottky: Abel'sche Functionen, S. 4.

und $(d\xi, \xi)$ dieselbe Beziehung zu ξ_1, ξ_2, wie y und (dx, x) zu x_1, x_2; ferner ist

$$(x, \xi) = x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1,$$

und $f(x|\xi)$ bedeutet eine ganze Function von x_1, x_2 und ξ_1, ξ_2 von je der Dimension $\rho + 1$, welche bei der gegenseitigen Vertauschung von x_1, x_2 mit ξ_1, ξ_2 ungeändert bleibt und für $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ in $f(x)$ übergeht; die Function $\Phi(x, \xi)$ endlich ist nur der Bedingung unterworfen, dass die Gleichung (5) identisch in dieser Form bestehen muss.

Wählt man insbesondere für $f(x|\xi)$ die $(\rho + 1)^{\text{te}}$ Polare von $f(x)$:

$$f(x|\xi) = f(\xi|x) = \sum_{ij=0}^{\rho+1} \binom{\rho+1}{i} \binom{\rho+1}{j} A_{i+j} x_1^i x_2^{\rho+1-i} \xi_1^j \xi_2^{\rho+1-j},$$

und setzt ausserdem

$$H(x)_\alpha = (-x_1)^{\alpha-1} x_2^{\rho-\alpha}, \tag{6}$$

so sind in der Reihenentwicklung der Thetafunctionen nach Potenzen der Argumente die Coefficienten, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor, *ganze* Functionen der Verzweigungspunkte a_i*). Sodann zeichnen sich diese Thetafunctionen noch dadurch aus, dass sie *Invarianteneigenschaft* besitzen**), d. h. dass sie ungeändert bleiben — es folgt dies auch aus den alsdann bestehenden Gleichungen (1) —, wenn man in ihnen diejenigen Veränderungen der Argumente und Constanten vornimmt, welche diese erfahren, wenn man in $f(x)$ und in den Integralen erster Gattung die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= p x_1' + q x_2', \\ x_2 &= p' x_1' + q' x_2' \end{aligned} \tag{7}$$

macht.

Bei den Argumenten ist diese Veränderung der Art, dass

$$\sum_\alpha \binom{\rho - 1}{\alpha - 1} u_\alpha t_1^{\rho-\alpha} t_2^{\alpha-1} \tag{8}$$

bis auf eine multiplicativ auftretende Potenz der Substitutionsdeterminante ungeändert bleibt, vorausgesetzt, dass man t_1, t_2 in derselben Weise durch neue Variable ersetzt, wie es durch die Gleichungen (7) mit x_1, x_2 geschieht. Denn da u_α gleich einer Summe von Integralen erster Gattung

*) Aufsatz des Verf., Math. Annalen, Bd. XXXI, S. 410.

**) Klein, Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente. Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, 1887, S. 516.

$$(9) \qquad u_\alpha = \sum_\beta \int^{x_\beta} \frac{H(x)_\alpha}{2y} (dx, x)$$

ist, so folgt daraus, dass

$$\sum_\alpha \binom{\varrho - 1}{\alpha - 1} u_\alpha t_1^{\varrho-\alpha} t_2^{\alpha-1} = \sum_\beta \int^{x_\beta} \frac{(t, x)^{\varrho-1}}{2y} (dx, x),$$

wo

$$(t, x) = t_1 x_2 - t_2 x_1,$$

und hieraus erkennt man, weil die rechte Seite eine Covariante der cogredienten Variablen x_1, x_2 und t_1, t_2 ist, dass auch die rechte Seite, d. i. der fragliche Ausdruck, die Invarianteneigenschaft hat.

§ 2.

Die Form der Differentialgleichung.

Diese Thetafunctionen genügen wegen der eben angeführten Invarianteneigenschaft den vier partiellen Differentialgleichungen (1), die ich in der Einleitung angegeben habe. Da aber die Thetafunctionen nur von $2\varrho + 3$ Parametern, z. B. den $2\varrho + 3$ Coefficienten A_λ von $f(x)$, abhängen, so können daher nur noch $2\varrho - 1$ weitere, gegenseitig unabhängige Differentialgleichungen bestehen, in denen nach den Parametern differentiirt wird. Zunächst werde ich die einfachste *Form* dieser Differentialgleichungen zu bestimmen suchen.

Ich kann mir dieselben dadurch hergestellt denken, dass ich die Thetafunction nach einem der Coefficienten A_λ von $f(x)$ differentiire und $\frac{\partial \Theta}{\partial A_\lambda}$ in folgender Weise umwandele. An Stelle von Θ setze ich auf Grund der Gleichung (3) den Ausdruck $e^{\eta}\vartheta$, führe hier die Differentiation an den Constanten $\omega_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$ und $\tau_{\alpha\beta}$ aus, substituire alsdann $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}$ für $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}}$ (vergl. (2)) und drücke endlich wieder $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}$ mit Hilfe der Gleichung (3) durch die Ableitungen von Θ nach den $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ aus. Da die Ableitungen von $\omega_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$ und $\tau_{\alpha\beta}$ nach A_λ ebenfalls Constanten sind, die eventuell mittels der Normalintegrale berechnet werden können, so ist der Ausdruck, den ich auf diese Weise für $\frac{\partial \Theta}{\partial A_\lambda}$ erhalte, eine Summe von Gliedern von der Form

$$u_\alpha u_\beta \Theta, \quad u_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial u_\beta}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \quad \Theta,$$

die mit Constanten multiplicirt sind. Indem ich diese Operation für die $2\varrho + 3$ Coefficienten A_λ von $f(x)$ ausführe, bekomme ich $2\varrho + 3$

Differentialgleichungen; aber da ausser den Gleichungen (1) nur $2\varrho-1$ weitere Differentialgleichungen existiren, müssen sich vier von jenen Gleichungen mit Hilfe der Gleichungen (1) aus den übrigen ableiten lassen.

Da, wie oben bemerkt, die Thetafunction bei den Aenderungen der Argumente und Parameter, welche zu Folge der Substitution (7) eintreten, ungeändert bleibt, so muss auch das System der Differentialgleichungen dabei bestehen bleiben und sich demnach die ursprünglichen Gleichungen durch die transformirten ausdrücken lassen. Es liegt daher der Gedanke nahe, das Gleichungssystem so umzuformen, dass man diese Eigenschaft desselben unmittelbar erkennt. Dies kann man dadurch erreichen, dass man eine vorerst unbestimmt zu lassende Covariante, welche homogen von der Dimension $2\varrho+2$, bez. $2\varrho-2$ in den cogredienten Variablen x_1, x_2, bez. v_1, v_2 ist, einführt:

$$F(x, v) = \sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\lambda} F_\lambda x_1^{\lambda} x_2^{2\varrho+2-\lambda},$$

mit den Coefficienten der x in derselben die einzelnen Differentialgleichungen, und zwar mit F_λ diejenige, welche $\frac{\partial\Theta}{\partial A_\lambda}$ enthält, multiplicirt und dann addirt. Wenn ich dabei

$$\sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} F_\lambda \frac{\partial\Theta}{\partial A_\lambda} = \delta\Theta \tag{10}$$

setze und die Gesammtheit derjenigen Glieder, in denen einmal, bez. zweimal nach den Argumenten differentiirt wird, mit $\pi\Theta$, bez. $\bar{\pi}\Theta$ bezeichne, so hat die erhaltene Gleichung die Form

$$2(\varrho+1)\,\delta\Theta + \pi\Theta + \bar{\pi}\Theta + \tfrac{1}{2}\Lambda\Theta + \mathsf{M}_1\Theta = 0, \tag{11}$$

wo die Function Λ die Argumente quadratisch enthält, während dieselben in $\pi\Theta$ linear und in M_1 und $\bar{\pi}\Theta$ gar nicht vorkommen.

In dieser Gleichung hat $\delta\Theta$ die Invarianteneigenschaft, wie unmittelbar aus dem Ausdruck (10) ersichtlich, und demnach muss das Gleiche auch je mit den übrigen Gliedern

$$\pi\Theta,\quad \bar{\pi}\Theta,\quad \Lambda,\quad \mathsf{M}_1$$

der Fall sein, denn durch das erste Glied $\delta\Theta$ sind die übrigen vollkommen bestimmt und die ganze Gleichung muss ja bei der linearen Substitution (7) unverändert bestehen bleiben.

Da die Gleichung (11) in den willkürlichen Variablen v_1, v_2 homogen von der Dimension $2\varrho-2$ ist und demnach die Coefficienten von v_1, v_2 einzeln Null sein müssen, so sind in derselben $2\varrho-1$ Differentialgleichungen enthalten, genau so viel als es, von den

Gleichungen (1) abgesehen, deren gegenseitig unabhängige giebt, und man hat demgemäss durch die Zusammenfassung zugleich erreicht, dass sich in dem System keine überflüssigen Gleichungen mehr finden. —

Die Differentialgleichungen forme ich noch weiter dadurch um, dass ich an Stelle der Function Θ dieselbe multiplicirt mit $\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{\varrho}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}$, wo

$$\omega = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1\varrho} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\varrho 1} & \omega_{\varrho 2} & \cdots & \omega_{\varrho\varrho} \end{vmatrix},$$

unter der Bezeichnung

$$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{\varrho}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}\Theta = \mathrm{Th}$$

einführe. Dadurch ändert sich übrigens nur das letzte Glied der Gleichung:

$$(12)\qquad 2(\varrho+1)\,\delta\mathrm{Th} + \pi\mathrm{Th} + \bar{\pi}\mathrm{Th} + \frac{1}{2}\Lambda\mathrm{Th} + \mathrm{M}\mathrm{Th} = 0.$$

Es geschieht dies aus dem Grunde, weil in der Reihenentwicklung der Function Th nach Potenzen der Argumente keine transcendenten Constanten mehr vorkommen, indem die Coefficienten, abgesehen von dem allen gemeinschaftlichen Factor, der eine vierte Wurzel aus einem in den Verzweigungspunkten a_i der Integrale rationalen Ausdruck ist, ganze Functionen dieser Verzweigungspunkte sind, wie schon oben bemerkt wurde, und weil demgemäss in der umgewandelten Differentialgleichung (12) die sämmtlichen Constanten rational in den Verzweigungspunkten sein müssen. Da aber ferner die Gleichung ihrer Ableitung nach für alle Thetafunctionen besteht, so müssen die Constanten in derselben die $2\varrho+2$ Verzweigungspunkte symmetrisch enthalten und demnach *rationale Functionen der* A_λ sein.

Setzt man daher

$$(13)\qquad \pi\mathrm{Th} = \sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}\, u_\alpha \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\beta},$$

$$(14)\qquad \bar{\pi}\mathrm{Th} = \sum_{\alpha\beta} \bar{k}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta},\quad \bar{k}_{\alpha\beta} = \bar{k}_{\beta\alpha},$$

und bildet gemäss dem Umstande, dass sich die u_α bei der Substitution (7) wie $(-x_1)^{\alpha-1}x_2^{\varrho-\alpha}$, und also $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\beta}$, bez. $\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}$ wie $t_1^{\varrho-\beta}t_2^{\beta-1}$, bez. wie $x_1^{\varrho-\alpha}x_2^{\alpha-1}x_1'^{\varrho-\beta}x_2'^{\beta-1}$ transformiren (vergl. (8)), die Functionen

(15) $K(x, t) = \sum_{\alpha\beta} \binom{\varrho - 1}{\beta - 1} k_{\alpha\beta} (-x_1)^{\alpha-1} x_2^{\varrho-\alpha} t_1^{\varrho-\beta} t_2^{\beta-1}$,

(16) $\overline{K}(x, x') = \sum_{\alpha\beta} \binom{\varrho - 1}{\alpha - 1} \binom{\varrho - 1}{\beta - 1} \overline{k}_{\alpha\beta}\, x_1^{\varrho-\alpha} x_2^{\alpha-1} x_1'^{\varrho-\beta} x_2'^{\beta-1}$,

so sind diese Functionen, da, wie oben hervorgehoben, $\varkappa\Theta$ und $\bar{\varkappa}\Theta$ die Invarianteneigenschaft haben, ebenso wie die Function M *Covarianten* von $f(x)$ mit den cogredienten Variablen x_1, x_2; x_1', x_2'; t_1, t_2 und v_1, v_2. Ausserdem ist noch Λ als simultane *Covariante* von $f(x)$ und $\sum_\alpha \binom{\varrho - 1}{\alpha - 1} u_\alpha t_1^{\varrho-\alpha} t_2^{\alpha-1}$ mit den Variablen v_1, v_2 zu betrachten. — Diese Covarianten werden aber im Allgemeinen eine Invariante als Nenner besitzen.

Den Grad dieser Covarianten bestimmt man wohl am leichtesten dadurch, dass man in die Gleichung (12) $h^2 A_\lambda$ an Stelle von A_λ und dementsprechend, wie dies aus (9) folgt, $h^{-1} u_\alpha$ an Stelle von u_α setzt. Da sich dadurch die Thetafunction nicht ändert, so muss auch die Differentialgleichung unverändert bestehen bleiben, und dies ist, wie unmittelbar ersichtlich, nur dann möglich, wenn sich dabei $F_\lambda : k_{\alpha\beta} : \overline{k}_{\alpha\beta} : \Lambda : \mathsf{M}$ in $h^4 F_\lambda : h^2 k_{\alpha\beta} : \overline{k}_{\alpha\beta} : \Lambda : \mathsf{M}$ verwandelt. Hieraus schliesst man, da Λ die Argumente noch quadratisch enthält, dass wenn p der Grad von $F(x, v)$ in den A_λ ist, der Grad des Zählers der Covarianten K, bez. $\overline{K}$, Λ und M den Grad des Nenners um $p - 1$, bez. $p - 2$, p und $p - 2$ übersteigt.

Die Covarianten K, $\overline{K}$, Λ, M werden natürlich verschieden sein, je nach der Function, die man für die Covariante $F(x, v)$ nimmt, welche ja nur der einzigen Beschränkung unterliegt, die Variablen x_1, x_2 und v_1, v_2 in den Dimensionen $2\varrho + 2$, bez. $2\varrho - 2$ zu enthalten, im übrigen aber vollkommen beliebig war. Man kann daher fragen, wie die Function $F(x, v)$ beschaffen sein muss, damit diese Ausdrücke eine möglichst einfache Form bekommen, insbesondere, welcher Bedingung $F(x, v)$ genügen muss, damit in K, $\overline{K}$, Λ und M keine Nenner auftreten. Dies wird sich am leichtesten durch eine Untersuchung der Differentialgleichungen der Normalintegrale, welche sich aus der Differentialgleichung der Thetafunctionen mittels der Periodicität derselben ergeben, feststellen lassen.

§ 3.

Die Bedingung, unter welcher die Differentialgleichung eine ganze Function der A_λ ist.

Die Weierstrass'ische Thetafunction und also auch die Function $\mathrm{Th}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ ist bekanntlich in der Weise periodisch*), dass

$$\mathrm{Th}(\cdots u_\alpha + 2\omega_\alpha, \cdots) = (-1)^N \,\mathrm{Th}(\cdots u_\alpha, \cdots)\, e^{\sum_\beta 2\eta_\beta(u_\beta+\omega_\beta)},$$

wo N eine ganze Zahl ist, die davon abhängt, welche Thetafunction man genommen hat, und welche der Perioden $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, bez. $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$ man unter ω_α, bez. η_α versteht. Demgemäss ist

$$(17)\qquad \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha + 2\omega_\alpha, \cdots)}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha, \cdots)}{\partial u_\beta} + 2\eta_\beta,$$

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha + 2\omega_\alpha, \cdots)}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma} = \frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha, \cdots)}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma}.$$

Ferner folgt aus jener Gleichung

$$\delta \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha + 2\omega_\alpha, \cdots) + \sum_\beta \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha + 2\omega_\alpha, \cdots)}{\partial u_\beta}\, 2\delta\omega_\beta$$
$$= \delta \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha, \cdots) + \sum_\beta \left\{2(u_\beta+\omega_\beta)\,\delta\eta_\beta + 2\eta_\beta\,\delta\omega_\beta\right\},$$

und diese geht mit Hilfe von (17) in

$$(19)\qquad \delta \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha + 2\omega_\alpha, \cdots) = \delta \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha, \cdots)$$
$$+ \sum_\beta 2(u_\beta+\omega_\beta)\,\delta\eta_\beta - \sum_\beta 2\left(\frac{\partial \lg \mathrm{Th}(\cdots u_\alpha, \cdots)}{\partial u_\beta} + \eta_\beta\right)\delta\omega_\beta$$

über.

Jetzt vermehre ich in der Differentialgleichung (12) der Function Th, welche ich unter Benutzung der Bezeichnungen (13) und (14) und indem ich ausserdem noch

$$(20)\qquad \Lambda = \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \quad l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}$$

setze, in der Form

$$(21)\qquad 2(\varrho+1)\,\delta \lg \mathrm{Th} + \sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} u_\alpha \frac{\partial \lg \mathrm{Th}}{\partial u_\beta}$$
$$+ \sum_{\alpha\beta} \bar{k}_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial \lg \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha}\cdot\frac{\partial \lg \mathrm{Th}}{\partial u_\beta}\right] + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \mathsf{M} = 0$$

---

*) Vergl. z. B. Schottky, Abel'sche Functionen, Seite 3.

schreibe, die Argumente u_α um ein System von Perioden $2\omega_\alpha$. Dadurch erhalte ich, indem ich zur Reduction die eben aufgestellten Relationen (17), (18), (19) und die Differentialgleichung selbst benutze, den folgenden Ausdruck:

$$\sum_\alpha 2\left(\frac{\partial \lg \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha}+\eta_\alpha\right)\Big[-2(\varrho+1)\delta\omega_\alpha+\sum_\beta k_{\beta\alpha}\omega_\beta+2\sum_\beta \bar{k}_{\alpha\beta}\eta_\beta\Big]$$
$$+\sum_\alpha 2(u_\alpha+\omega_\alpha)\Big[2(\varrho+1)\delta\eta_\alpha+\sum_\beta l_{\alpha\beta}\omega_\beta+\sum_\beta k_{\alpha\beta}\eta_\beta\Big]=0.$$

Da nun bekanntlich zwischen den Argumenten einerseits und den Ableitungen der Thetafunction anderseits keine linearen Gleichungen bestehen, so müssen die Coefficienten derselben einzeln gleich Null sein. Dies giebt die *Differentialgleichungen der Perioden:*

$$(22)\qquad 2(\varrho+1)\,\delta\omega_\alpha-\sum_\beta k_{\beta\alpha}\omega_\beta-2\sum_\beta \bar{k}_{\alpha\beta}\eta_\beta=0,$$

$$(23)\qquad 2(\varrho+1)\,\delta\eta_\alpha+\sum_\beta l_{\alpha\beta}\omega_\beta+\sum_\beta k_{\alpha\beta}\eta_\beta=0.$$

Die Perioden $2\omega_\alpha$, $2\eta_\alpha$ werden durch Integration der Normalintegrale auf geschlossenen Integrationswegen erhalten, und dementsprechend bestehen nothwendig zwischen diesen Integralen analoge Gleichungen:

$$2(\varrho+1)\,\delta\int\frac{H(x)_\alpha}{2y}(dx,x)-\sum_\beta k_{\beta\alpha}\int\frac{H(x)_\beta}{2y}(dx,x)$$
$$-2\sum_\beta \bar{k}_{\alpha\beta}\int\frac{G(x)_\beta}{2y}(dx,x)+P_\alpha=0,$$

$$2(\varrho+1)\,\delta\int\frac{G(x)_\alpha}{2y}(dx,x)+\sum_\beta l_{\alpha\beta}\int\frac{H(x)_\beta}{2y}(dx,x)$$
$$+\sum_\beta k_{\alpha\beta}\int\frac{G(x)_\beta}{2y}(dx,x)+Q_\alpha=0,$$

wo P_α und Q_α Functionen von x sind. Diese fasse ich je wieder in eine einzige Gleichung zusammen, indem ich dieselben mit $\binom{\varrho-1}{\alpha-1}t_1^{\varrho-\alpha}t_2^{\alpha-1}$, bez. $(-s_1)^{\alpha-1}s_2^{\varrho-\alpha}$ multiplicire und addire. Wenn ich dabei von der Formel

$$(24)\quad \sum_\alpha(-s_1)^{\alpha-1}s_2^{\varrho-\alpha}\int\frac{G(x)_\alpha}{2y}(dx,x)=-\int\frac{f(x|s)}{(x,s)^2y}(dx,x)+\Psi,$$

die sich aus (5) ergiebt, Gebrauch mache und zugleich

$$(25)\qquad \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}(-x_1)^{\beta-1}x_2^{\varrho-\beta}(-s_1)^{\alpha-1}s_2^{\varrho-\alpha}=L(x,s)$$

setze, finde ich die *Differentialgleichungen der Normalintegrale*

$$(26)\quad 2(\varrho+1)\,\delta\int\frac{(t,x)^{\varrho-1}}{2y}(dx,x)-\int\frac{K(x,t)}{2y}(dx,x)$$
$$-2\sum_{\alpha\beta}\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\bar{k}'_{\alpha\beta}t_1^{\varrho-\alpha}t_2^{\alpha-1}\int\frac{G(x)_\beta}{2y}(dx,x)+P^0=0,$$

$$(27)\quad -2(\varrho+1)\,\delta\int\frac{f(x|s)}{(x,s)^2y}(dx,x)+\int\frac{L(x,s)}{2y}(dx,x)$$
$$+\sum_{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}(-s_1)^{\alpha-1}s_2^{\varrho-\alpha}\int\frac{G(x)_\beta}{2y}(dx,x)+Q^0=0.$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen kann man nun leicht die Bedingung ableiten, der $F(x,v)$ genügen muss, damit K, $\bar{K}$, L und M ganze Functionen sind. Denn da in dem Ausdruck von $\delta\int\frac{(t,x)^{\varrho-1}}{2y}(dx,x)$ und $\delta\int\frac{f(x|s)}{(x,s)^2y}(dx,x)$ durch die Normalintegrale die $k_{\alpha\beta}$, $\bar{k}_{\alpha\beta}$ und $l_{\alpha\beta}$ die Coefficienten sind, so hat man ja nur nothwendig, die Beschaffenheit dieses Ausdrucks festzustellen.

Zu Folge der Bedeutung von δ ist

$$\delta\int\frac{(t,x)^{\varrho-1}}{2y}(dx,x)=-\int\frac{(t,x)^{\varrho-1}F(x,v)}{4f(x)\,y}(dx,x).$$

Die rechte Seite zerlege ich in Partialbrüche, indem ich mit $x_2^{2\varrho+2}F(a_i,v)$, bez. $x_2^{2\varrho+2}f'(a_i)$ die Function $F(x,v)$, bez. die Ableitung von $f(x)$ nach x_1 bezeichne, wenn ich in derselben $x_1=a_ix_2$ gesetzt habe:

$$(28)\quad \delta\int\frac{(t,x)^{\varrho-1}}{2y}(dx,x)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\int\frac{H(x)_\alpha}{2y}(dx,x)$$
$$+\sum_{i=1}^{2\varrho+2}\frac{(t_1-a_it_2)^{\varrho-1}F(a_i,v)}{2f'(a_i)}\int\frac{x_2^\varrho(dx,x)}{(x_1-a_ix_2)\,2y},$$

wo die γ_α ganze Functionen der A_λ mit einer Potenz von $A_{2\varrho+2}$ als Nenner sind. Diese muss sich aber bei der weitern Umwandlung wegheben, da der eventuelle Nenner eine Invariante sein muss. Aus (24) folgt, wenn ich $f(x|s)$ nach Potenzen von (x,s) entwickele und alsdann $s_1=a_is_2$ setze:

$$f'(a_i)\int\frac{x_2^\varrho(dx,x)}{(x_1-a_ix_2)\,2y}=\Psi+\sum_\alpha\varphi_\alpha(a_i)\int\frac{H(x)_\alpha}{2y}(dx,x)$$
$$-\sum_\alpha(-a_i)^{\alpha-1}\int\frac{G(x)_\alpha}{2y}(dx,x),$$

wo die $\varphi(a_i)$ ganze Functionen der A_λ sind. Denkt man sich hieraus den Ausdruck von $\int\frac{x_2^\varrho(dx,x)}{(x_1-a_ix_2)\,2y}$ in (28) eingesetzt, so erkennt man, da sich abgesehen von einer Potenz von $A_{2\varrho+2}$ nur das Quadrat von $f'(a_i)$ als Nenner vorfindet, dass sich mindestens einmal $f'(a_i)$ wegheben, also $F(a_i, v)$ *einmal durch* $f'(a_i)$ *theilbar* sein muss. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so sind zu Folge der Euler'schen Formeln die Coefficienten der Integrale, und mithin auch die Covarianten K und $\overline{K}$ ganze Functionen der A_λ.

Stellt man die analoge Betrachtung bezüglich $\delta\int\frac{f(x|s)}{(x,s)^2\, y}(dx, x)$ an, so zeigt es sich genau in derselben Weise, dass alsdann auch L eine ganze Function der A_λ ist.

Zugleich aber ersieht man aus dieser Entwicklung, dass, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, wenn $F(a_i, v)$ *nicht durch* $f'(a_i)$ *theilbar* ist, der *auftretende Nenner* nur das Product der $f'(a_i)$, also die *Discriminante von* f sein kann. —

Was nun endlich die Function M anbelangt, so ist diese eine ganze Function der A^λ, sobald es K und $\overline{K}$ sind. Man beweist dies am leichtesten, indem man die Entwickelung der Thetafunction mit den Charakteristiken Null nach den Cosinus der Vielfachen der Argumente zu Hilfe nimmt. Da dieselbe als Fourier'sche Reihe im weitern Sinn zu betrachten ist, so muss Glied für Glied derselben, insbesondere das Anfangsglied

$$e^{\eta(u_1, \cdots u_\varrho)}$$

(vergl. (3)), einzeln der Differentialgleichung genügen. Setzt man daher das entsprechende Glied

$$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{\varrho}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}e^{\eta(u_1, \cdots u_\varrho)}$$

von Th an Stelle von Th in die Differentialgleichung (21) und lässt dann die Argumente Null werden, so erhält man

$$\mathsf{M} = (\varrho + 1)\,\delta\lg\omega - \sum_{\alpha\beta}\overline{k}_{\alpha\beta}\frac{\partial\eta(u_1, \cdots u_\varrho)}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}.$$

Denkt man sich jetzt die rechte Seite mittels (22) ausgerechnet, so können, wie man unmittelbar sieht, Nenner, die ganz in den A_λ sind, nur dann auftreten, wenn solche schon in den $k_{\alpha\beta}$ und $\overline{k}_{\alpha\beta}$ enthalten waren.

Man ist somit zu dem Resultat gekommen, dass *sämmtliche Theile der Differentialgleichung ganze Functionen der* A_λ *sind, sobald* $F(a_i, v)$ *durch* $f(a_i)$ *theilbar ist.* — Da nun diejenige Form der Differentialgleichung, bei der keine Nenner auftreten, als die einfachste anzusehen ist, so soll die Covariante $F(x, v)$, welche seither bis auf den Umstand ganz willkürlich war, dass sie in x_1, x_2, bez. v_1, v_2 von der Dimension $2\varrho + 2$, bez. $2\varrho - 2$ ist, von jetzt an der eben gefundenen Bedingung unterliegen, dass sie ausgerechnet für $x_1 = a_i x_2$ durch $f'(a_i)$ theilbar sei. Es wäre nun nicht schwierig, auf Grund dieser Eigenschaft solche Functionen $F(x, v)$ herzustellen, aber dies wird insofern überflüssig, als durch die Betrachtungen des folgenden Paragraphen, diese Function auf bekannte Formeln zurückgeführt wird.

§ 4.

Die Fundamentaleigenschaft und die Bestimmung von $F(x, v)$.

Der Differentialgleichung muss auch die Entwicklung der Thetafunction nach Potenzen der Argumente genügen. Diese Reihenentwicklung hat bei der geraden nicht verschwindenden Function Th die Form*)

$$\Delta_1^{\frac{1}{8}} \Delta_2^{\frac{1}{8}} \{1 + N_2 + N_4 + \cdots\},$$

wo $N_2, N_4, \ldots$ ganze Functionen der Verzweigungspunkte sind und Δ_1, Δ_2 die Discriminanten derjenigen beiden ganzen Functionen $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades bedeuten, in welche bezüglich dieser Thetafunction die Function f zerlegt wurde. Da nun bei der Substitution der Reihe in die Differentialgleichung, wenn K, $\overline{K}$, Λ und M ganze Functionen sind, auch die Glieder $\varkappa$Th, $\overline{\varkappa}$Th, ΛTh und MTh Ausdrücke liefern, in denen keine Nenner vorkommen, so darf dies auch nicht bei δTh der Fall sein. Dazu ist aber nothwendig, dass die Operation δ an Δ_1 und Δ_2 ausgeführt, entweder Null giebt, oder diese Grössen reproducirt:

$$\delta \Delta_i = h_i \Delta_i,$$

wo h_i Null oder eine ganze Function der Verzweigungspunkte ist. Bilde ich nun alle die möglichen Discriminanten Δ_i und multiplicire sie mit einander, so muss auch bezüglich des Products eine analoge Gleichung bestehen. Dies Product ist aber eine Potenz der Discriminante Δ von f; folglich muss auch bezüglich dieser Discriminante

$$\delta \Delta = h \Delta \tag{29}$$

sein, wo jetzt h Null oder eine ganze Function der A_λ ist.

Nun sind die einzigen Differentialgleichungen, denen die Discriminante genügt, ausser den vier Gleichungen, welche die Invarianteneigenschaft ausdrücken und die zu den oben angegebenen Differentialgleichungen (1) führen, nur die folgenden Gleichungen:**)

---

*) Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Math. Annalen, Bd. 31, S. 410.

**) Vergl. Brioschi, Sur une nouvelle propriété du résultant, Journal für Mathematik, Bd. 53, S. 372.

$$(30)\quad\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}\frac{1}{\binom{2\varrho+2}{\nu}}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial A_{2\varrho-\nu+2}} = -\binom{2\varrho+1}{\mu+1}(\mu+1)\,A_{2\varrho-\mu}\Delta,\\
&\sum_{\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}\frac{1}{\binom{2\varrho+2}{\nu+1}}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial A_{2\varrho-\nu+1}} = \binom{2\varrho+1}{\mu+1}(\mu+1)\,A_{2\varrho-\mu+1}\Delta,\\
&\sum_{\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}\frac{1}{\binom{2\varrho+2}{\nu+2}}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial A_{2\varrho-\nu}} = -\binom{2\varrho+1}{\mu+1}(\mu+1)\,A_{2\varrho-\mu+2}\Delta,
\end{aligned}$$

in denen die $c_{\mu,\nu}$ die Elemente der Bézout'schen Form der Discriminante, und also durch die Gleichung

$$(31)\quad\begin{aligned}
&\frac{1}{4(\varrho+1)^2}\left\{\frac{\partial f(v)}{\partial v_1}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(v)}{\partial v_2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right\}:(x,v)\\
&=\sum_{\mu,\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu}x_2^{\nu}v_1^{2\varrho-\mu}v_2^{\mu}
\end{aligned}$$

definirt sind. Demnach muss sich $\delta\Delta$ aus diesen Gleichungen und mithin $F(x,v)$ aus den Ausdrücken

$$(32)\quad \sum_{\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu+2}x_2^{\nu},\quad \sum_{\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu+1}x_2^{\nu+1},\quad \sum_{\nu=0}^{2\varrho} c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu}x_2^{\nu+2}$$

zusammensetzen lassen, indem man die Gleichungen (30), bez. diese Functionen mit Ausdrücken, welche die v_1, v_2 homogen von der Dimension $2\varrho-2$ und sonst eventuell noch die A_λ enthalten, multiplicirt und addirt. Man erkennt hieraus, dass $F(x,v)$ vom zweiten oder höheren Grade in den A_λ sein muss, und dass im einfachsten Fall, wenn $F(x,v)$ eine Covariante zweiten Grades ist, die A_λ *nur in den Verbindungen* $c_{\mu\nu}$ *vorkommen.* In diesem Fall muss sich $F(x,v)$ — wenn überhaupt eine derartige Function existirt —, da sie eine Covariante ist, durch Polarenbildung aus (31) ableiten lassen. In der That erhält man auch, wenn man durch Polarenbilden zweimal die Variablen x_1, x_2 an Stelle von v_1, v_2 einführt, eine Function, die allen Bedingungen genügt, die $F(x,v)$ zu erfüllen hat. Man findet nämlich einerseits

$$(33)\quad\begin{aligned}
\frac{1}{2\varrho(2\varrho-1)}\Bigg\{&\sum_{\mu=0}^{2\varrho-2}(2\varrho-\mu)(2\varrho-\mu-1)\,v_1^{2\varrho-\mu-2}v_2^{\mu}\sum_{\nu=0}^{2\varrho}c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu+2}x_2^{\nu}\\
&+2\sum_{\mu=1}^{2\varrho-1}(2\varrho-\mu)\mu\,v_1^{2\varrho-\mu-1}v_2^{\mu-1}\sum_{\nu=0}^{2\varrho}c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu+1}x_2^{\nu+1}\\
&+\sum_{\mu=2}^{2\varrho}\mu(\mu-1)\,v_1^{2\varrho-\mu}v_2^{\mu-2}\sum_{\nu=0}^{2\varrho}c_{\mu\nu}x_1^{2\varrho-\nu}x_2^{\nu+2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

und andererseits bekommt man, wenn man für die gemischte Polare von f, welche in x_1, x_2, bez. y_1, y_2; z_1, z_2; u. s. w. homogen von der Dimension l, bez. m, n, u. s. w. ist, die Bezeichnung

$$f\left(\overset{l}{x}, \overset{m}{y}, \overset{n}{z}, \ldots\right)$$

einführt, dafür den Ausdruck

$$\frac{1}{4\varrho(\varrho+1)}\left\{\frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{2\varrho}{v}\right)}{\partial v_1}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{2\varrho}{v}\right)}{\partial v_2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right\} : (x, v),$$

oder da

$$\frac{1}{2\varrho}\frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{2\varrho}{v}\right)}{\partial v_i} = \frac{1}{3}\frac{\partial f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right)}{\partial x_i}$$

ist:

$$\frac{1}{6(\varrho+1)}\left\{\frac{\partial f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right)}{\partial x_2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right\} : (x, v). \tag{34}$$

Aus dem ersten dieser beiden Ausdrücke (33) folgt, dass die erhaltene Function in x_1, x_2, bez. v_1, v_2 homogen von der Dimension $2\varrho + 2$, bez. $2\varrho - 2$ ist und sich linear aus den Ausdrücken (32) zusammensetzt, während aus dem zweiten Ausdruck (34) bei Zuhilfenahme der Identität

$$x_1\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = (2\varrho+2)f(x)$$

hervorgeht, dass sie ausgerechnet für $x_1 = a_i x_2$ durch $f'(a_i)$ theilbar wird. Folglich kann man diese Function für $F(x, v)$ wählen:

$$F(x, v) = \frac{1}{6(\varrho+1)}\left\{\frac{\partial f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right)}{\partial x_2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right\} : (x, v).$$

Und diese Bedeutung soll von nun an $F(x, v)$ haben.*) —

Der Zähler der rechten Seite ist eine Functionaldeterminante. Da solche im weitern noch öfters auftreten, will ich für dieselbe eine Abkürzung einführen: wenn χ und ψ homogen von der Dimension m und n sind, so soll

$$\frac{1}{mn}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right\} = [\psi, \chi]_x$$

bezeichnet werden. Dann muss ich den Ausdruck für $F(x, v)$ in der Weise

---

*) Diese Function, die ich eben hier für $F(x, v)$ genommen habe, ist in meiner früheren Arbeit, Math. Annalen Bd. XXXI, S. 134, mit $-\varphi(x)$ bezeichnet, und dementsprechend hat dort $-\vartheta$ Th dieselbe Bedeutung wie hier ϑ Th.

$$F(x, v) = \frac{\left[f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right), f(x)\right]_x}{(x, v)} \tag{35}$$

schreiben.

Diese specielle Function $F(x, v)$ ist noch dadurch ausgezeichnet, dass

$$\delta\Delta = 0. \tag{36}$$

Denn wäre es nicht der Fall, wäre $\delta\Delta = h\Delta$ (vergl. (29)), so müsste h eine Covariante sein, weil $\delta\Delta$ und Δ es sind; aber dies h würde die A_λ linear enthalten, wie man durch Vergleich des Grades beider Seiten in den A_λ erkennt, während es in den einzigen Variablen v_1, v_2 nur homogen von der Dimension $2\varrho - 2$ wäre; dies ist jedoch unmöglich, also muss $h = 0$ sein. —

Man kann jetzt auch, wenn man $F(x, v)$ in dieser Weise bestimmt hat, auf Grund der früher gewonnenen Resultate die Ausdrücke von $\overline{K}$ und M unmittelbar angeben. Dieselben sind zu Folge der Betrachtungen am Ende des zweiten Paragraphen Covarianten nullten Grades; sie sind aber in v_1, v_2 homogen von der Dimension $2\varrho - 2$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\overline{K}(x, x') &= \sum_{\alpha\beta} \binom{\varrho-1}{\alpha-1}\binom{\varrho-1}{\beta-1} \bar{k}_{\alpha\beta}\, x_1^{\varrho-\alpha} x_2^{\alpha-1} x_1'^{\varrho-\beta} x_2'^{\beta-1} \\ &= c(x, v)^{\varrho-1}(x', v)^{\varrho-1},\end{aligned}$$

also

$$\bar{k}_{\alpha\beta} = c(-v_1)^{\alpha+\beta-2} v_2^{2\varrho-\alpha-\beta}, \tag{37}$$

wo c ein Zahlencoefficient ist, und

$$\mathsf{M} = 0 \tag{38}$$

sein muss. Demgemäss hat die Differentialgleichung jetzt die Form:

$$2(\varrho+1)\delta\,\mathrm{Th} + \pi\,\mathrm{Th} + \frac{1}{2}\Lambda\,\mathrm{Th} + c\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta}(-v_1)^{\alpha+\beta-2} v_2^{2\varrho-\alpha-\beta} = 0. \tag{39}$$

In derselben sind ausser der Constanten c jetzt nur noch die Terme $\pi\,\mathrm{Th}$ und Λ zu bestimmen übrig, und man weiss nach den seitherigen Entwicklungen nur so viel, dass die Covarianten $K(x, t)$ und $L(x)$, auf welche diese Terme zurückgeführt werden, zweiten, bez. ersten Grades sind. —

So weit war es möglich, die Differentialgleichung ohne grössere Rechnung zu bestimmen.

§ 5.

Die Bestimmung von $K(x, t)$ und $L(x, s)$.

Die noch restirende Bestimmung der Functionen $K(x, t)$ und $L(x, s)$ geschieht wohl am leichtesten dadurch, dass man die Differentialgleichungen (26) und (27) weiter umformt.

Indem man in der ersten derselben:

$$2(\varrho+1)\delta\int^{\bullet}\frac{(t, x)^{\varrho-1}}{2y}(dx, x)-\int\frac{K(x, t)}{2y}(dx, x)$$
$$-2\sum_{\alpha\beta}\binom{\varrho-1}{\alpha-1}\bar{k}_{\alpha\beta}t_1^{\varrho-\alpha}t_2^{\alpha-1}\int^{\bullet}\frac{G(x)_\beta}{2y}(dx, x)+P^0=0$$

für $\bar{k}_{\alpha\beta}$ den eben gefundenen Werth (37) einsetzt und sie mittels (24) vereinfacht, ergiebt sich

$$2(\varrho+1)\delta\int^{\bullet}\frac{(t, x)^{\varrho-1}}{2y}(dx, x)-\int\frac{K(x, t)}{2y}(dx, x)$$
$$+2c(t, v)^{\varrho-1}\int\frac{f\binom{\varrho+1\ \ \varrho+1}{x,\ \ v}}{(x, v)^2 y}(dx, x)+P=0.$$

Diese Gleichung differentiire ich nun, indem ich zugleich die Operation δ ausführe, und löse sie dann nach $K(x, t)$ auf:

$$K(x, t)=4c(t, v)^{\varrho-1}\frac{f\binom{\varrho+1\ \ \varrho+1}{x,\ \ v}}{(x, v)^2}-(\varrho+1)(t, x)^{\varrho-1}\frac{F(x, v)}{f(x)}+2y\frac{dP}{(dx, x)}.$$

Hierin muss nun c und P so bestimmt werden, dass die rechte Seite eine ganze Function von x wird. Dieser Forderung wird genügt, wie die weitere Rechnung zeigen wird, wenn man

$$c=\frac{1}{4},\quad P=\frac{(t, x)^{\varrho-1}f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v}}{(x, v)2y}$$

setzt. Denn, wenn G und H Covarianten der Ordnung p sind, so ist

$$(40)\qquad d\frac{G}{H}=p\frac{[G, H]_x}{H^2}(dx, x),$$

und demgemäss erhält man, wenn man P in der Form

$$P=\frac{1}{2}\frac{f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v}}{(x, v)(t, x)^{1-\varrho}y}$$

schreibt:

$$\frac{dP}{(dx,x)} = \frac{3}{2}\left[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v}, (x,v)(t,x)^{1-\varrho}y\right]_x \frac{(t,x)^{2\varrho-2}}{(x,v)^2 f(x)}$$

$$= \frac{1}{2y}\left\{-\frac{(t,x)^{\varrho-1} f\binom{2\ \ 2\varrho}{x,\ v}}{(x,v)^2} - (\varrho-1)\frac{(t,x)^{\varrho-2} f\binom{2\ \ 1\ \ 2\varrho-1}{x,\ t,\ \ v}}{(x,v)}\right.$$

$$\left. + (\varrho-1)\frac{(t,x)^{\varrho-1}F(x,v)}{f(x)}\right\}.$$

Und substituirt man diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so ergiebt sich

$$(41)\quad K(x,t) = \left\{(t,v)^{\varrho-1} f\binom{\varrho+1\ \ \varrho+1}{x,\ \ \ v} - (t,x)^{\varrho-1} f\binom{2\ \ 2\varrho}{x,\ v}\right.$$

$$\left. - (\varrho-1)(x,v)(t,x)^{\varrho-2} f\binom{2\ \ 1\ \ 2\varrho-1}{x,\ t,\ \ v}\right\} : (x,v)^2.$$

Da der Klammerausdruck auf der rechten Seite, wie die daraus mittels des Omegaprocesses abgeleitete Covariante, für $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$ verschwindet, so ist die rechte Seite eine ganze Function von x_1, x_2, und da, wie aus der Gleichung (26), von der wir ausgingen, hervorgeht, nur *eine* solche Function existirt, so muss dies also thatsächlich *die gesuchte Darstellung* von $K(x,t)$ sein. —

In derselben Weise verfährt man mit der Gleichung (27):

$$-2(\varrho+1)\delta\int \frac{f\binom{\varrho+1\ \ \varrho+1}{x,\ \ \ s}}{(x,s)^2 y}(dx,x) + \int \frac{L(x,s)}{2y}(dx,x)$$

$$+ \sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}(-s_1)^{\alpha-1} s_2^{\varrho-\alpha} \int \frac{G(x)_\beta}{2y}(dx,x) + Q^0 = 0,$$

um den Ausdruck für $L(x,s)$ aufzustellen. Ich differentiire dieselbe und führe zugleich die Operation δ aus, indem ich die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Polare von $F(x,v)$, die ich unter Einführung der Variablen s_1, s_2 an Stelle von x_1, x_2 gebildet habe, mit

$$F(x \mid s, v)$$

bezeichne:

$$L(x,s) = 4(\varrho+1)\frac{F(x\mid s,v)}{(x,s)^2} - 2(\varrho+1)\frac{f\binom{\varrho+1\ \ \varrho+1}{x,\ \ \ s} F(x,v)}{(x,s)^2 f(x)}$$

$$- \sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}(-s_1)^{\alpha-1} s_2^{\varrho-\alpha} G(x)_\beta - 2y\frac{dQ^0}{(dx,x)}.$$

Hierin führe ich den Ausdruck von $k_{\alpha\beta}$ ein, wie sich derselbe aus (41) ergiebt:

$$\sum_\alpha k_{\alpha\beta}(-s_1)^{\alpha-1}s_2^{\varrho-\alpha}$$

$$= \Big\{ f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{s,\ \ v}(-v_1)^{\beta-1}v_2^{\varrho-\beta} - f\binom{3\ \ 2\varrho}{s,\ v}(-s_1)^{\beta-1}s_2^{\varrho-\beta}$$

$$-\frac{1}{3}(s,v)\left(\frac{\partial}{\partial s_1}f\binom{3\ 2\varrho-1}{s,\ \ v}\frac{\partial}{\partial s_2}\left((-s_1)^{\beta-1}s_2^{\varrho-\beta}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial s_2}f\binom{3\ 2\varrho-1}{s,\ \ v}\frac{\partial}{\partial s_1}\left((-s_1)^{\beta-1}s_2^{\varrho-\beta}\right)\right)\Big\} : (s,v)^2,$$

und benutze dabei die Formel (24):

$$(42)\quad L(x,s) = 4(\varrho+1)\frac{F(x\,|\,s,v)}{(x,s)^2} - 2(\varrho+1)\frac{f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}F(x,v)}{(x,s)^2 f(x)}$$

$$+2\frac{f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{s,\ \ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ v}}{(x,v)^2(s,v)^2} - 2\frac{f\binom{2\ \ 2\varrho}{s,\ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(s,v)^2(x,s)^2}$$

$$-2(\varrho+1)\frac{\left[f\binom{3\ 2\varrho-1}{s,\ \ v}, f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}\right]_s}{(s,v)(x,s)^2}$$

$$+4\frac{f\binom{2\ 1\ 2\varrho-1}{s,\ x,\ \ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(s,v)(x,s)^3} + 2y\frac{dQ}{(dx,x)},$$

wo auf der rechten Seite bei dem fünften Gliede die Functionaldeterminante durch Differentiiren nach den s_1, s_2 gebildet wird, wie der angehängte Index s angiebt.

Hierin muss für Q ein solcher Ausdruck gesetzt werden, dass die rechte Seite eine ganze Function der x_1, x_2 wird. Dies erreicht man, indem man

$$Q = \frac{f\binom{3\ 2\varrho-1}{x,\ \ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(x,v)(x,s)^2 y}$$

annimmt. Dann schreibt man

$$Q = f\binom{3\ 2\varrho-1}{x,\ \ v} : \frac{(x,v)(x,s)^2 y}{f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}},$$

so ist nach (40)

$$\frac{dQ}{(dx,x)} = \frac{1}{3}\left[f\binom{3\ 2\varrho-1}{x,\ \ v}, \frac{(x,v)(x,s)^2 y}{f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}\right]_x \frac{f^2\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(x,v)^2(x,s)^4 f(x)}$$

$$= (\varrho+1)\frac{\left[f\binom{3\ 2\varrho-1}{x,\ \ v}, f(x)\right]_x f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(x,v)(x,s)^2 f(x)y}$$

$$-(\varrho+1)\frac{\left[f\binom{3\ 2\varrho-1}{x,\ \ v}, f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}\right]_x}{(x,v)(x,s)^2 y} - \frac{f\binom{2\ \ 2\varrho}{x,\ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(x,v)^2(x,s)^2 y}$$

$$-2\frac{f\binom{2\ 1\ 2\varrho-1}{x,\ s,\ \ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ \ s}}{(x,v)(x,s)^3 y},$$

und substituire ich diesen Ausdruck in (42) und mache dabei zur Reduction von den leicht zu beweisenden Identitäten

$$(s,v)\, f\Big(\overset{2}{x}, \overset{1}{s}, \overset{2\varrho-1}{v}\Big) + (v,x)\, f\Big(\overset{1}{x}, \overset{2}{s}, \overset{2\varrho-1}{v}\Big) + (x,s)\, f\Big(\overset{1}{x}, \overset{1}{s}, \overset{2\varrho}{v}\Big) = 0,$$

$$(s,v)^2 f\Big(\overset{2}{x}, \overset{2\varrho}{v}\Big) - 2(s,v)(x,v)\, f\Big(\overset{1}{x}, \overset{1}{s}, \overset{2\varrho}{v}\Big) + (x,v)^2 f\Big(\overset{2}{s}, \overset{2\varrho}{v}\Big) = (x,s)^2 f(v)$$

Gebrauch, so erhalte ich

$$\begin{aligned} L(x,s) = \Big\{ & 4(\varrho+1)(x,v)^2(s,v)^2 F(x|s,v) \\ & + 2(x,s)^2 \left(f\Big(\overset{\varrho+1}{x}, \overset{\varrho+1}{v}\Big) f\Big(\overset{\varrho+1}{s}, \overset{\varrho+1}{v}\Big) - f\Big(\overset{\varrho+1}{x}, \overset{\varrho+1}{s}\Big) f(v) \right) \\ & - 2(\varrho+1)(x,v)(s,v) \left((s,v) \left[f\Big(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\Big),\; f\Big(\overset{\varrho+1}{x}, \overset{\varrho+1}{s}\Big) \right]_x \right. \\ & \left. \qquad + (x,v) \left[f\Big(\overset{3}{s}, \overset{2\varrho-1}{v}\Big),\; f\Big(\overset{\varrho+1}{s}, \overset{\varrho+1}{x}\Big) \right]_s \right) \Big\} : (x,s)^2 (x,v)^2 (s,v)^2. \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist die rechte Seite eine ganze Function von x_1, x_2; mithin ist es der *gesuchte Ausdruck* von $L(x, s)$.

§ 6.

Die Resultate.

Die gefundenen Resultate will ich hier in diesem Abschnitt möglichst übersichtlich zusammenstellen.

Ausser den Gleichungen (1) *existiren noch* $2\varrho-1$ *partielle Differentialgleichungen für die Thetafunctionen, in denen einerseits nach den Argumenten, andererseits nach Parametern differentiirt wird. Dieselben lassen sich, indem man sie mit Functionen einer willkürlichen Variablen* v_1, v_2 *multiplicirt und addirt, in eine einzige Gleichung zusammenfassen. Die einfachste Form derselben ist, wenn man mit* Th *die mit* $\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{\varrho}{2}} \omega^{-\frac{1}{2}}$ *multiplicirte Weierstrass'ische Thetafunction bezeichnet, die folgende:*

$$2(\varrho+1)\,\delta\,\mathrm{Th} + \varkappa\,\mathrm{Th} + \bar{\varkappa}\,\mathrm{Th} + \frac{1}{2}\Lambda\,\mathrm{Th} = 0.$$

Darin bedeuten $\delta\,\mathrm{Th}$, $\varkappa\,\mathrm{Th}$ *und* $\bar{\varkappa}\,\mathrm{Th}$ *Aronhold'sche Processe:*

$$\delta\,\mathrm{Th} = \sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} F_\lambda \frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_\lambda},$$

$$\varkappa\,\mathrm{Th} = \sum_{\alpha\beta=1}^{\varrho} k_{\alpha\beta}\, u_\alpha \frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial u_\beta},$$

$$\bar{\varkappa}\,\mathrm{Th} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta=1}^{\varrho} (-v_1)^{\alpha+\beta-2}\, v_2^{2\varrho-\alpha-\beta} \frac{\partial^2\,\mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta},$$

wo

$$\sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\lambda} F_\lambda x_1^\lambda x_2^{2\varrho+2-\lambda} = F(x, v),$$

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{\varrho} \binom{\varrho-1}{\beta-1} k_{\alpha\beta} (-x_1)^{\alpha-1} x_2^{\varrho-\alpha} t_1^{\varrho-\beta} t_2^{\beta-1} = K(x, t)$$

Covarianten von $f(x)$ *mit den cogredienten Variablen* x_1, x_2; t_1, t_2 *und* v_1, v_2 *sind; desgleichen ist, wenn*

$$\Lambda = \sum_{\alpha\beta=1}^{\varrho} l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \; l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}$$

gesetzt wird, auch die Function

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{\varrho} l_{\alpha\beta} (-x_1)^{\alpha-1} x_2^{\varrho-\alpha} (-s_1)^{\beta-1} s_2^{\varrho-\beta} = L(x, s)$$

eine Covariante von $f(x)$ *mit den cogredienten Variablen* x_1, x_2; s_1, s_2 *und* v_1, v_2. —

Der erste der obigen drei Aronhold'schen Processe, die Operation δ, *ist insbesondere dadurch charakteristirt, dass sie an der Discriminante* Δ *von* $f(x)$ *ausgeführt den Werth Null liefert:*

$$\delta \Delta = 0.$$

Um die Ausdrücke für die Covarianten $F(x, v)$, $K(x, t)$ *und* $L(x, s)$ *angeben zu können, führe ich für die gemischte Polare von* $f(x)$, *welche in den Variablen* x_1, x_2, *bez.* s_1, s_2, *u. s. w. homogen von der Dimension* p, *bez.* q, *u. s. w. ist, die Bezeichnung*

$$f\left(\overset{p}{x}, \overset{q}{s}, \ldots\right)$$

ein und verstehe unter $[\psi, \chi]_x$ *die Functionaldeterminante von* ψ *und* χ, *die, wie der Index* x *angiebt, durch Differentiiren nach* x_1, x_2 *gebildet ist:*

$$\frac{1}{mn}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial \chi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial \chi}{\partial x_1}\right\} = [\psi, \chi]_x,$$

wo m *und* n *die Dimensionen von* ψ *und* χ *in den* x *sind; wenn ich dann noch die Determinanten* $x_1 v_2 - x_2 v_1$, $x_1 s_2 - x_2 s_1, \ldots$ *gleich* (x, v), $(x, s), \ldots$ *setze, so ist*

$$F(x, v) = \left[f\left(\overset{3}{x}, \overset{2\varrho-1}{v}\right), f(x)\right]_x : (x, v),$$

$$K(x, t) = \Big\{(t, v)^{\varrho-1} f\left(\overset{\varrho+1}{x}, \overset{\varrho+1}{v}\right) - (t, x)^{\varrho-1} f\left(\overset{2}{x}, \overset{2\varrho}{v}\right)$$

$$- (\varrho-1)(x, v)(t, x)^{\varrho-2} f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}, \overset{2\varrho-1}{v}\right)\Big\} : (x, v)^2,$$

$$L(x,s)=\Big\{4(\varrho+1)(x,v)^2(s,v)^2F(x|s,v)$$
$$+2(x,s)^2\Big(f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ v}f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{s,\ v}-f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ v}f(v)\Big)$$
$$-2(\varrho+1)(x,v)(s,v)\Big((s,v)\Big[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ v},f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{x,\ s}\Big]_x$$
$$+(x,v)\Big[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{s,\ v},f\binom{\varrho+1\ \varrho+1}{s,\ x}\Big]\Big)\Big\}:(x,s)^2(x,v)^2(s,v)^2,$$

worin $F(x|s,v)$ *diejenige Function bedeutet, welche aus* $F(x,v)$ *entsteht, indem man durch Polarenbildung* $\varrho+1$ *mal die Variablen* s_1, s_2 *an Stelle von* x_1, x_2 *einführt.* —

Da die Differentialgleichung homogen von der Dimension $2\varrho-2$ in den Variablen v_1, v_2 ist, so sind in derselben thatsächlich $2\varrho-1$ einzelne Gleichungen zusammengefasst.

§ 7.

Umwandlung des Processes δ.

In der Reihenentwicklung der Function Th nach Potenzen der Argumente kommen bekanntlich die Coefficienten von $f(x)$, die A_λ, nicht unmittelbar selbst vor, sondern es treten vielmehr in derselben die Coefficienten α_i und $\bar{\alpha}_j$ der beiden ganzen Functionen rational auf:

$$g(x)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\alpha_i x_1^{\,i}x_2^{\,m-i},$$

$$\bar{g}(x)=\sum_{j=0}^{\bar{m}}\binom{\bar{m}}{j}\bar{\alpha}_j x_1^{\,j}x_2^{\,\bar{m}-j},$$

deren Product

$$g(x)\,\bar{g}(x)=f(x),\quad m+\bar{m}=2\varrho+2 \tag{43}$$

ist. Demgemäss will ich den Process

$$\delta=\sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2}F_\lambda\frac{\partial}{\partial A_\lambda}$$

so umgestalten, dass *die Differentiation nach den* α_i *und* $\bar{\alpha}_j$ *stattfindet:*

$$\delta=\sum_{i=0}^{m}G_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+\sum_{j=0}^{\bar{m}}\bar{G}_j\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_j},$$

wo dann

$$G(z,v)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}G_i z_1^{\,i}z_2^{\,m-i},$$

$$\overline{G}(\bar{z}, v) = \sum_{j=0}^{\overline{m}} \binom{\overline{m}}{j} \overline{G}_j \bar{z}_1{}^j \bar{z}_2{}^{\overline{m}-j}$$

simultane Covarianten von $g(x)$ und $\bar{g}(x)$ sind.

Um diese Covarianten zu bestimmen, gehe ich davon aus, dass diese beiden Ausdrücke von δ in einander übergehen müssen:

$$\sum_{\lambda=0}^{2\varrho+2} F_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda} = \sum_{i=0}^{m} G_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=0}^{\overline{m}} \overline{G}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j},$$

sobald man für $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j}$ ihre Ausdrücke in den $\frac{\partial}{\partial A_\lambda}$ setzt. Wenn

$$\overline{m} \geqq m$$

angenommen wird, so sind diese Ausdrücke, wie aus

$$\binom{2\varrho+2}{\lambda} A_\lambda = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \binom{\overline{m}}{\lambda-h} \alpha_h \bar{\alpha}_{\lambda-h}$$

(siehe (43)) hervorgeht, die folgenden:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} = \binom{m}{i} \sum_{\lambda=i}^{i+\overline{m}} \frac{\binom{\overline{m}}{\lambda-i}}{\binom{2\varrho+2}{\lambda}} \bar{\alpha}_{\lambda-i} \frac{\partial}{\partial A_\lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j} = \binom{\overline{m}}{j} \sum_{\lambda=j}^{j+m} \frac{\binom{m}{\lambda-j}}{\binom{2\varrho+2}{\lambda}} \alpha_{\lambda-j} \frac{\partial}{\partial A_\lambda}.$$

Daraus erkennt man, wenn man von den Differentialausdrücken zu den zugehörigen Covarianten übergeht, dass die Gleichung

$$F(x, v) = G(z, v) + \overline{G}(\bar{z}, v)$$

auf Grund der Relationen

$$z_1{}^i z_2{}^{m-i} = \sum_{\lambda=i}^{i+\overline{m}} \binom{\overline{m}}{\lambda-i} \bar{\alpha}_{\lambda-i} x_1{}^\lambda x_2{}^{2\varrho+2-\lambda} = x_1{}^i x_2{}^{m-i} \bar{g}(x),$$

$$\bar{z}_1{}^j \bar{z}_2{}^{\overline{m}-j} = \sum_{\lambda=j}^{j+m} \binom{m}{\lambda-j} \alpha_{\lambda-j} x_1{}^\lambda x_2{}^{2\varrho+2-\lambda} = x_1{}^j x_2{}^{\overline{m}-j} g(x)$$

bestehen muss, und aus diesem Umstand folgt dann weiter, dass identisch

(44) $$F(x, v) = \bar{g}(x)\, G(x, v) + g(x)\, \overline{G}(x, v)$$

ist. Diese Identität gestattet nun die Functionen $G(x, v)$ und $\overline{G}(x, v)$, deren Ausdrücke ich übrigens in meiner frühern Arbeit, Math. Ann. Bd. XXXI, S. 154, nicht ganz richtig angeführt habe, unmittelbar hinzuschreiben: wenn man die erste Polare von $[g(v),\ \bar{g}(v)]_v$ unter Einführung von x mit $\chi\binom{2\varrho-1\ \ 1}{v\ \ ,\ x}$ bezeichnet, so ist

$$G(x,v) = m\left\{2(\varrho+1)\left[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v},\ g(x)\right]_x + \bar{m}\,g(x)\,\chi\binom{2\varrho-1\ \ 1}{v,\ \ x}\right\} : 4(\varrho+1)^2(x,v),$$

$$\bar{G}(x,v) = \bar{m}\left\{2(\varrho+1)\left[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v},\ \bar{g}(x)\right]_x - m\,\bar{g}(x)\,\chi\binom{2\varrho-1\ \ 1}{v,\ \ x}\right\} : 4(\varrho+1)^2(x,v).$$

Denn da

$$\begin{aligned}2(\varrho+1)\left[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v},\ f(x)\right]_x = {} & m\,\bar{g}(x)\left[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v},\ g(x)\right]_x \\ & + \bar{m}\,g(x)\left[f\binom{3\ \ 2\varrho-1}{x,\ \ v},\ \bar{g}(x)\right]_x,\end{aligned}$$

so genügen diese Ausdrücke der Gleichung (44), und ausserdem sind es ganze Functionen, da die Zähler, wie unmittelbar ersichtlich, für $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$ verschwinden; sie erfüllen also alle Bedingungen, denen sie zu genügen haben.

Halle a. d. S., im Mai 1888.

Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte.*)

Von

Hermann Stahl in Tübingen.

Herr Poincaré hat seine Theorie der „Fuchs'schen Functionen" gegründet auf eine Darstellung dieser Functionen *durch unendliche Reihen*, die „Thetafuchs'schen Reihen", die in höchst einfacher Weise aus den Elementen der Function d. h. aus ihren ∞-Punkten (und dem Verhalten in denselben) und den Substitutionen der „Fuchs'schen Gruppe" gebildet sind. Neben diese erste tritt nach allgemeinen Sätzen der Functionentheorie eine zweite Darstellung der „Fuchs'schen Functionen" *durch unendliche Producte*, gebildet aus den 0- und ∞-Punkten der Function in Verbindung mit gewissen Exponentialfactoren, welche die Convergenz bewirken.

Die elliptischen Functionen stellen einen sehr speciellen Fall der „Fuchs'schen Functionen" dar. Die Summenbildungen oder die „Thetafuchs'schen Reihen" finden hier ein Analogon nur in den elliptischen Functionen selber, also etwa in der Darstellung der Function $p(u)$ des Herrn Weierstrass durch unendliche, in der ganzen Ebene gültige Reihen; die Productbildungen ein Analogon etwa in der Function $\sigma(u)$. Der einfache Zusammenhang zwischen den beiden Functionen $p(u)$ und $\sigma(u)$ gestattet es, beide Functionen neben einander und sich ergänzend zu verwerthen, worauf die Einfachheit und Uebersichtlichkeit der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Functionen beruht. Doch macht sich schon hier der Umstand bemerkbar, dass für die eine der fundamentalen Functionen, nämlich für $p(u)$ wohl das Gesetz der Reproduction bei Aenderung des Arguments um Perioden sehr einfach ist und die ∞-Punkte gegeben sind, aber die Nullpunkte der Function

---

*) Ich bediene mich im Folgenden der Kürze halber des von Herrn Poincaré gewählten Namens „Fuchs'sche Functionen".

aus der Summenbildung selber nur schwer zu bestimmen sind; während für die andere Function $\sigma(u)$ die Nullpunkte gegeben sind, aber das Gesetz der Reproduction bei Aenderung des Arguments um Perioden aus der Productbildung selber nur schwer zu erkennen ist.

Dasselbe gilt in erhöhtem Masse von den „Fuchs'schen Functionen“. Als Grundlage für eine Theorie derselben haben die Summenbildungen (die „Thetafuchs'schen Reihen“) den Vorzug, dass das Gesetz der Reproduction bei Anwendung der Substitutionen der zugehörigen Gruppe sehr einfach ist und die ∞-Punkte gegeben sind, während die Nullpunkte der Function nur schwer zu bestimmen sind; die Productbildungen dagegen den Vorzug, dass die Nullpunkte gegeben sind, während das Gesetz der Reproduction bei Anwendung der Substitutionen der Gruppe nur schwer zu übersehen ist.

Eine Darstellung der „Fuchs'schen Functionen“ durch unendliche Producte hat zuerst Herr von Mangoldt*) angegeben für den einfachsten Fall, wo die Functionen nur innerhalb eines Hauptkreises existiren und vom Geschlecht Null sind. Das von demselben angewandte Verfahren lässt sich indess nicht wohl auf den allgemeinen Fall ausdehnen; es soll daher im Folgenden ein anderer Weg angegeben werden, der in allen Fällen zum Ziele führt. Nach einigen vorbereitenden Bemerkungen werden in § 3 zuerst die „Fuchs'schen Functionen“ durch Abel'sche Integrale 3. Gattung dargestellt; dann in § 4 und 5 die in diesen Integralen auftretenden Functionen durch „Thetafuchs'sche Reihen“ ersetzt und schliesslich durch Umformung dieser Reihen in § 6 die Darstellung der „Fuchs'schen Functionen“ durch unendliche Producte gewonnen. Die Darstellungen beschränken sich zur Vermeidung von Wiederholungen auf die beiden Hauptfälle, wo die Functionen einen Hauptkreis besitzen nämlich auf Functionen, die entweder nur in diesem Hauptkreise oder aber in der ganzen Ebene existiren; für jeden dieser Fälle ist ein allgemeines, typisches Beispiel durchgeführt um die Verschiedenheit der Bildungen zu zeigen. Andere von Herrn Poincaré aufgeführte Beispiele ergeben sich durch einfache Abänderungen oder Combinationen dieser beiden Fälle. Auch lassen sich die Entwicklungen des zweiten Falles ohne Weiteres auf die Functionen ausdehnen, die keinen Hauptkreis besitzen (die „Klein'schen Functionen“).

Dagegen ist durch diese Untersuchungen noch keineswegs die eigentliche fundamentale Aufgabe gelöst, die Aufgabe nämlich, nach Analogie der σ-Functionen, erstens ein unendliches Product herzustellen, das im Gebiete der „Fuchs'schen Functionen“ convergirt und dessen Nullpunkte aus einem derselben durch die Substitutionen

*) Göttinger Nachrichten 1885, 9. December und 1886, 3. Febr.

der zugehörigen Gruppe hervorgehen, und zweitens das Gesetz der Reproduction dieses Products bei Anwendung der Substitutionen der Gruppe anzugeben. —

§ 1.

Vorbemerkungen.

Ich schicke einige Bemerkungen aus der Theorie des Hrn. Poincaré voraus.*)

Es sei eine „Fuchs'sche Gruppe" G von unendlich vielen linearen Substitutionen gegeben

$$\varphi_i(z) = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}, \quad \varphi_0(z) = z, \quad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

welche einen Kreis C, den Hauptkreis, vom Mittelpunkt 0 und vom Radius 1 ungeändert lassen. Einer solchen Gruppe entspricht eine Gebietseintheilung des Hauptkreises oder der ganzen Ebene durch unendlich viele Polygone R_i, gebildet aus Kreisen, die orthogonal zum Hauptkreise sind. Diese Polygone seien abgeleitet aus einem Fundamentalpolygon R_0 durch die Substitutionen (1) derart, dass die Punkte von R_0 durch die Substitution $\varphi_i(z)$ in die Punkte von R_i transformirt werden. Das Polygon R_0 hat eine grade Seitenzahl $2n$ und ein bestimmtes Geschlecht P.

Die Polygone R_i liegen *entweder* sämmtlich innerhalb des Hauptkreises C; dann existiren die zugehörigen Functionen auch nur im Inneren von C, da sie unendlich viele wesentlich singuläre Punkte besitzen, die den ganzen Hauptkreis erfüllen, *oder* die Polygone R_i nehmen die ganze Ebene ein; dann existiren die zugehörigen Functionen auch in der ganzen Ebene, da sie unendlich viele wesentlich singuläre Punkte besitzen, die isolirt auf dem Hauptkreise liegen.

Eine Function $F(z)$ heisst eine „*Fuchs'sche Function*", wenn sie in ihrem Gebiet (d. h. entweder im Hauptkreis oder in der ganzen Ebene) den Charakter einer rationalen Function hat und sich durch die Substitutionen der Gruppe G reproducirt nach dem Gesetz

$$F\left(\varphi_i(z)\right) = F(z).$$

Eine Function $\Theta(z)$ heisst eine „*Thetafuchs'sche Function*" *vom Grade* m, wenn sie in ihrem Gebiete den Charakter einer rationalen Function hat und sich durch die Substitutionen der Gruppe G reproducirt nach dem Gesetz:

$$\Theta\left(\varphi_i(z)\right) = \Theta(z) \cdot (\gamma_i z + \delta_i)^{2m}.$$

Zählt man die Ordnung des 0- und ∞-Werdens einer Function im

*) Acta math. I, p. 1—62 und p. 193—294.

Innern und in den Ecken von R_0 in der von Herrn Poincaré angegebenen Weise, so gelten die Sätze: Für die „Fuchs'schen Functionen" ist die Zahl der 0^1- und der ∞^1-Punkte in R_0 dieselbe; für die „Thetafuchs'schen Functionen" vom Grade m ist die Differenz zwischen der Zahl V der 0^1- und der Zahl U der ∞^1-Punkte im Polygon R_0 nur abhängig von der Beschaffenheit des Polygons; es ist nämlich

$$V - U = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_h}\right),$$

wenn die Function nur innerhalb des Hauptkreises existirt.

$$V - U = 2m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_h}\right),$$

wenn die Function in der ganzen Ebene existirt.

Hier bezeichnet $2n$ die Seitenzahl und $2\pi \cdot \sum \frac{1}{\beta_h}$ die Summe der Winkel des Polygons R_0. Wir machen endlich noch Gebrauch von der Bemerkung:

> Ist eine „Thetafuchs'sche Function" vom Grade m in einem Punkte $z = \zeta$ unendlich wie $A \cdot (z - \zeta)^{-p}$, so ist die Function in dem transformirten Punkte $z = \varphi_i(\zeta)$ unendlich wie $A \cdot (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2(m-p)} \cdot (z - \varphi_i \zeta)^{-p}$.

§ 2.

Das Abel'sche Theorem für „Fuchs'sche Functionen".

Wir beginnen mit der Aufstellung der Relationen zwischen den 0- und ∞-Punkten einer „Fuchs'schen Function", und unterscheiden, wie schon bemerkt, zwei Fälle.

1. Fall. *Die Functionen existiren nur im Hauptkreis C.*

Wir nehmen an, das Polygon sei von der Familie 1*) d. h. die Ecken von R_0 liegen sämmtlich im Innern von C. Die Zahl der Seiten von R_0 sei $= 2n$; die Zahl der Cyklen (1. Art) $= r$; das Geschlecht $= P$; so dass die Relation besteht:

$$n = 2P + r - 1.$$

Die Winkelsummen in den r Cyklen seien $\frac{2\pi}{\beta_h}$ wo β_h ganze Zahlen $(h = 1, 2, \ldots r)$. Alle zu R_0 gehörigen „Fuchs'schen Functionen" drücken sich rational durch irgend zwei derselben aus, x und y. Zwischen diesen besteht eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ von

*) Acta math. I, p. 254 ff. Der Fall, wo die Ecken sämmtlich (Fam. 2) oder zum Theil (Fam. 6) auf dem Hauptkreis liegen, erfordert einige leicht angebbare Aenderungen.

der Ordnung N und vom Geschlecht P. Wir setzen voraus, dass $f(xy)=0$ von Singularitäten nur einfache Doppelpunkte hat, und dass kein Verzweigungspunkt im Unendlichen liegt, wozu hinreicht, dass die Richtungen der N Asymptoten der Curve $f(xy)=0$ sämmtlich verschieden sind. Die Coefficienten von $f(xy)=0$ hängen ab von $3P-3$ Moduln.

Wir bezeichnen ferner die Werthe von (x, y) in den Ecken des $1, 2, \dots r$ Cyklus durch (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \dots (a_r, b_r)$. Die Entwicklung von x (ebenso von y) in der Umgebung einer Ecke α_h des Cyklus schreitet fort nach ganzen positiven Potenzen von $(z-\alpha_h)^{\beta_h}$; wir nehmen an, dass für $z=\alpha_h$, $x-a_h$ Null sei wie $(z-\alpha_h)^{\beta_h}$, also $\frac{dx}{dz}$ Null sei wie $(z-\alpha_h)^{\beta_h-1}$ oder $(x-a_h)^{1-\frac{1}{\beta_h}}$.

Wir bilden zunächst aus (x, y) eine *„Thetafuchs'sche Function" $Q(z)$ vom Grade m*, die im Innern und auf dem Rande von R_0, also auch im Innern des Hauptkreises C, allenthalben endlich bleibt; eine solche Function ist von der Form*)

$$(1)\qquad Q(z)=\frac{G(x, y)}{(f'y)^m\cdot(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_r)^{\lambda_r}}\cdot\left(\frac{dx}{dz}\right)^m.$$

Hier kann m jede beliebige, positive ganze Zahl sein; wir nehmen jedoch der Einfachheit halber für m das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen $\beta_1 \dots \beta_r$, wodurch die Abzählungen sich etwas vereinfachen.**) Die Function (1) bleibt in den Verzweigungspunkten von $f(xy)=0$ endlich. Damit sie in den Ecken von R_0 endlich sei, ist zu setzen

$$\lambda_h=m\left(1-\frac{1}{\beta_h}\right)$$

also

$$\sum\lambda_h=m\left(n-1-\sum\frac{1}{\beta_h}\right)-2m(P-1)\quad(h=1,\dots r).$$

Damit (1) auch für $(x=\infty, y=\infty)$ endlich sei, muss $G(x, y)$ eine ganze rationale Function in (x, y) vom Grade $\Sigma\lambda_h+m(N-3)$ sein. Die Zahl der linearen homogenen Coefficienten in $G(x, y)$ ist alsdann mit Rücksicht auf die Bedingung $f(xy)=0$ gleich

$$N\cdot\sum\lambda_h+(2m-1)\cdot\frac{N\,.\,N-3}{2}.$$

Zwischen denselben bestehen $(N-1)\Sigma\lambda_h$ Bedingungen, die ausdrücken, dass $Q(z)$ endlich bleibt in den $r(N-1)$ Punkten, in denen die r

---

*) Acta math. I, p. 263.

**) Eine Folge dieser Bestimmung ist, dass $Q(z)$ in den Ecken von R_0 nicht nur endlich sondern (im Allgemeinen) auch von Null verschieden ist.

Geraden $x = a_h$ die Curve $f(xy) = 0$ ausser den Punkten a_h noch schneiden; weiterhin $(2m-1)\left\{\frac{N-1\cdot N-2}{2} - P\right\}$ Bedingungen, die ausdrücken, dass $Q(z)$ in den Doppelpunkten von $f(xy) = 0$ endlich sei. Somit behält $G(xy)$ noch $\Sigma\lambda_h + (2m-1)(P-1)$ *willkürliche*, lineare, homogene Coefficienten oder es hat $Q(z)$ im Innern des Polygons R_0 noch

$$\sum \lambda_h + (2m-1)(P-1) - 1 = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_h}\right) - P$$

willkürliche 0-Punkte. Nun ist die Zahl der 0-Punkte von $Q(z)$ in R_0 überhaupt

$$q = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_h}\right). \tag{2}$$

Von diesen Nullpunkten sind also die $(q-P)$ ersten willkürlich wählbar; die P letzten aber alsdann eindeutig bestimmt.

Aus (1) bilden wir eine *„Thetafuchs'sche Function“ $P(z)$ vom Grade $m+1$*, die ebenfalls in Hauptkreis C allenthalben endlich ist, nämlich die Function

$$P(z) = \frac{Q(z)\cdot\varphi(xy)}{f'y}\cdot\frac{dx}{dz}. \tag{3}$$

In derselben muss $\varphi(xy)$ eine ganze rationale Function in (x, y) vom Grade $N-3$ sein, die in den Doppelpunkten von $f(xy) = 0$ verschwindet. Alsdann hat $\varphi(xy)$ noch $(2P-2)$ weitere Nullpunkte, aber nur noch P lineare, homogene, willkürliche Constanten, so dass von diesen $(2P-2)$ Nullpunkten die $P-1$ ersten willkürlich, die $P-1$ letzten aber durch sie eindeutig bestimmt sind.

Bildet man nun aus (1) und (3) den Integralausdruck

$$\int_{z_0}^{z} \frac{P(z)}{Q(z)}\cdot dz = \int_{x_0 y_0}^{xy} \frac{\varphi(xy)}{f'y}\cdot dx \tag{4}$$

wo z_0 resp. (x_0, y_0) ein beliebiger Anfangspunkt ist, so stellt derselbe ein Abel'sches Integral 1. Gattung dar, welches als Function von (x, y) in der durch $f(xy) = 0$ bestimmten Verzweigungsfläche allenthalben endlich ist und an dem canonischen Querschnittsystem dieser Fläche $2P$ Periodicitätsmoduln hat. Die Verzweigungsfläche wird durch das Functionenpaar (x, y) eindeutig auf die Polygone R_i der z Ebene abgebildet. Das Integral (4) ist daher, als Function von z, im Hauptkreis allenthalben eindeutig und endlich und in correspondirenden Punkten der Polygone R_i um ganzzahlige Vielfache der $2P$ Periodicitätsmoduln verschieden. Ist nun $R(x, y)$ eine beliebige rationale Function von (x, y) oder eine beliebige „Fuchs'sche Function“ von z, die im Innern des Polygons R_0 in den Punkten $z_1, \ldots, z_s$ gleich $0'$ und in ebensoviel Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ gleich ∞' wird, so besteht nach dem Abel'schen Theorem zwischen diesen $2s$ Punkten die transcendente Beziehung

$$\sum_{h=1}^{s} \int_{\zeta_h}^{z_h} \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot dz \equiv 0, \tag{5}$$

welche P unabhängige Gleichungen derselben Art enthält.

2. Fall. Die *Functionen existiren in der ganzen Ebene.*

Das Polygon R_0 sei von der Familie 3*) d. h. begrenzt von $2n$ Kreisen c_1 und $c_1'; \ldots; c_n$ und c_n', orthogonal zum Hauptkreise C; dieselben sind einander paarweise zugeordnet durch n fundamentale Substitutionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ der Gruppe G derart, dass durch die Substitution φ_i der Kreis c_i in c_i' übergeführt wird. Das Geschlecht P des Polygons R_0 ist hier $= n$. Alle zu diesem Polygon R_0 gehörigen „Fuchs'schen Functionen" sind rational durch zwei derselben x, y darstellbar, zwischen welchen eine algebraische Gleichung $f(x\,y) = 0$ vom Grade N und vom Geschlecht n besteht, deren Coefficienten von $(3n-3)$ reellen Moduln abhängen. Wir setzen voraus, dass x in dem Punkte $z = \infty$ und den transformirten Punkten ausserhalb des Hauptkreises endlich sei.

Wir bilden wieder aus (x, y) eine *„Thetafuchs'sche Function"* $Q(z)$ *vom Grade* m, die in der z Ebene allenthalben endlich ist (mit Ausnahme natürlich der auf dem Hauptkreis isolirt liegenden, unendlich vielen, wesentlich singulären Punkte); eine solche Function ist von der Form

$$Q(z) = \frac{G(x\,y)}{(f'\,y)^m} \cdot \left(\frac{dx}{dz}\right)^m, \tag{6}$$

wo m eine beliebige, positive, ganze Zahl. Die Function (6) ist in den Verzweigungspunkten von $f(x\,y) = 0$ endlich; damit (6) auch für $(x = \infty, y = \infty)$ endlich sei, muss $G(x\,y)$ eine ganze rationale Function vom Grade $m(N-3)$ sein. Die Zahl der linearen, homogenen Coefficienten in $G(x\,y)$ ist alsdann $(2m-1) \cdot \frac{N \cdot N-3}{2} \cdot$ Zwischen denselben bestehen $(2m-1)\left[\frac{N-1 \cdot N-2}{2} - P\right]$ Bedingungen, die ausdrücken, dass $Q(z)$ in den Doppelpunkten von $f(x\,y) = 0$ endlich sei. Somit behält $G(x\,y)$ noch $(2m-1)(P-1) = (2m-1)(n-1)$ *willkürliche*, lineare, homogene Coefficienten oder es hat $Q(z)$ im Polygon R_0 noch $(2m-1)(n-1) - 1$ willkürliche Nullpunkte. Die Zahl der 0^1-Punkte von $Q(z)$ in R_0 überhaupt ist

$$q = 2m(n-1). \tag{7}$$

---

*) Acta math. I, p. 276 ff.

Von diesen Nullpunkten sind also die $(q-n)$ ersten beliebig wählbar; die n letzten alsdann eindeutig bestimmt. Abgesehen von diesen Aenderungen bleiben die früheren Betrachtungen und Gleichungen auch für den 2. Fall bestehen, wenn man noch überall P durch n ersetzt.

§ 3.

Darstellung der „Fuchs'schen Functionen" durch Integrale 3. Gattung.

Es soll nunmehr eine beliebige Fuchs'sche Function durch Abel'sche Integrale 3. Gattung dargestellt werden.

1. Fall. Unter den früheren Voraussetzungen und mit Benutzung von $Q(z)$ bilden wir die folgende *„Thetafuchs'sche Function"* $P(z; z_1, \zeta_1)$ *vom Grade* $(m+1)$, die in zwei beliebigen Punkten z_1 und ζ_1 im Innern von R_0 gleich ∞^1 wird

$$(1) \qquad P(z;\, z_1, \zeta_1) = \frac{Q(z)\,.\,\Psi(x,y)}{f'y\,.\,l(z_1,\zeta_1)}\cdot\frac{dx}{dz}.$$

Hier ist $l(z_1, \zeta_1)$ ein in (x, y) linearer Ausdruck, der verschwindet in den beiden Punkten (x_1, y_1) und (ξ_1, η_1) der Curve $f(x\,y) = 0$, die den Punkten z_1 und ζ_1 entsprechen; ferner ist $\Psi(x, y)$ eine ganze rationale Function in (x, y) vom Grade $(N-2)$, welche verschwindet in den Doppelpunkten von $f(x\,y) = 0$ und in den $N-2$ Punkten, die $l(z_1, \zeta_1)$ ausser z_1 und ζ_1 mit der Curve $f(x\,y) = 0$ gemein hat. Nach dieser Bestimmung hat $\Psi(x\,y)$ noch $2P$ weitere Nullpunkte, aber nur noch $P+1$ willkürliche, lineare, homogene Coefficienten, so dass von diesen $2P$ Nullpunkten die P ersten willkürlich wählbar, die P letzten aber alsdann eindeutig bestimmt sind.

Die Function (1) hat hiernach und mit Rücksicht auf den Charakter von $Q(z)$ folgende Eigenschaften: sie wird in den Ecken von R_0 gleich 0 in niederster Ordnung, nämlich in einer Ecke $z = \alpha_h$ des h Cyklus gleich 0 wie $(x - a_h)^{1-\frac{1}{\beta_h}}$ oder wie $(z - \alpha_h)^{\beta_h - 1}$. Die Nullpunkte in den Ecken von R_0 zählen für

$$r - \sum\frac{1}{\beta_h} = \left(n - 1 - \sum\frac{1}{\beta_h}\right) - 2(P-1)$$

0^1-Punkte. Die Function (1) hat ferner im Innern von R_0 noch $(q+2P)$ 0^1-Punkte; sie hat endlich im Innern von R_0 zwei ∞^1-Punkte z_1 und ζ_1. Die Differenz zwischen der Zahl V der 0^1-Punkte und der Zahl U der ∞^1-Punkte ist also $V - U = (m+1)\left(n-1-\sum\frac{1}{\beta_h}\right)$ in Uebereinstimmung mit dem in § 1 angeführten Satze.

Bildet man nun aus $Q(z)$ § 2 und $P(z; z_1, \zeta_1)$ den Integralausdruck

$$(2) \qquad \int_{z_0}^{z}\frac{P(z;\, z_1, \zeta_1)}{Q(z)}\cdot dz = \int_{x_0 y_0}^{x\,y}\frac{\Psi(x\,y)}{f'y\cdot l(z_1,\zeta_1)}\cdot dx,$$

so stellt derselbe ein Abel'sches Integral 3. Gattung dar. Dasselbe hat, als Function von (x, y) betrachtet, in der Verzweigungsfläche von $f(xy) = 0$ die zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkte (x_1, y_1) und (ξ_1, η_1) und an dem canonischen Querschnittsystem der Fläche $2P$ Periodicitätsmoduln. Wir geben demselben die Normalform, indem wir die in $\Psi(xy)$ noch willkürlichen $(P+1)$ Coefficienten derart bestimmen, dass die erste Hälfte der $2P$ Periodicitätsmoduln verschwindet und den noch übrig bleibenden Factor derart, dass das Integral in den beiden Unstetigkeitspunkten unendlich wird bez. wie $+\log(x-x_1)$ und $-\log(x-\xi_1)$. Dann hat das Integral (2), als Function von z in dem Hauptkreis betrachtet, beim Uebergang von einem Polygon R_i in ein anderes dieselben Periodicitätsmoduln und verhält sich in den Punkten z_1 und ζ_1 von R_0 wie $+\log(z-z_1)$ und $-\log(z-\zeta_1)$ oder in den correspondirenden Punkten z_1^i und ζ_1^i von R_i wie $+\log(z-z_1^i)$ und $-\log(z-\zeta_1^i)$.

Ist nun wieder $R(xy)$ eine beliebige „Fuchs'sche Function" von z, die in den Punkten $z_1 \ldots z_s$ gleich 0^1 und in $\zeta_1 \ldots \zeta_s$ gleich ∞^1 wird, so hat man nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Abel'schen Integrale

$$\log \frac{R(x, y)}{R(x_0, y_0)} = \sum_{h=1}^{s} \int_{z_0}^{z} \frac{P(z; z_h, \zeta_h)}{Q(z)} \cdot dz \tag{3}$$

also eine Darstellung des Logarithmus einer „Fuchs'schen Function" $R(x, y)$ durch eine Summe von Abel'schen Integralen 3. Gattung.

2. Fall. Wir bilden mit der in (6) § 2 bestimmten Function $Q(z)$ wieder eine Function der Form $P(z; z_1, \zeta_1)$ der Form (1) und bestimmen $l(z_1, \zeta_1)$ und $\Psi(x, y)$ auf dieselbe Weise. Die Function $\Psi(x, y)$ hat alsdann in der Verzweigungsfläche von $f(xy) = 0$ noch $2n$ weitere 0^1-Punkte, von denen die n ersten willkürlich wählbar sind; die Function $P(z; z_1, \zeta_1)$ hat im Innern von R_0

$$q + 2P = 2m(n-1) + 2n$$

0^1-Punkte und 2 ∞^1-Punkte z_1 und ζ_1. Die Differenz zwischen beiden Zahlen ist gleich $2(m+1)(n-1)$ in Uebereinstimmung mit dem in § 1 angeführten Satze $\left(\text{da hier } \sum \frac{1}{\beta_h} \text{ wegfällt}\right)$. Aus den Functionen $Q(z)$ und $P(z; z_1, \zeta_1)$ erhält man nun genau wie im Falle 1 eine Darstellung der Fuchs'schen Function $R(x, y)$ durch Abel'sche Integrale 3. Gattung.

§ 4.

Darstellung der Functionen $Q(z)$, $P(z)$ und $P(z; z_1, \zeta_1)$ durch „Thetafuchs'sche Reihen".

Die im Vorigen aus „Fuchs'schen Functionen" x und y gebildeten Ausdrücke $Q(z)$, $P(z)$ und $P(z; z_1, \zeta_1)$ lassen sich als „Thetafuchs'sche Functionen" vom Grade m, bez. $m+1$, vorausgesetzt, dass $m > 1$, nach allgemeinen Sätzen des Herrn Poincaré durch unendliche „Thetafuchs'sche Reihen" darstellen, die unmittelbar aus den Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe G gebildet sind. Dies kann in mannigfacher Weise geschehen; wir treffen eine bestimmte Wahl.

1. Fall. Die Function $Q(z)$ hat nach § 2 folgende Eigenschaften: sie ist im Innern des Hauptkreises C allenthalben endlich; sie hat in R_0 $q = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_h}\right)$ 0^1-Punkte, von denen $(q - P)$ willkürlich sind; endlich ist

$$Q\left(\varphi_i(z)\right) = Q(z) \cdot (\gamma_i z + \delta_i)^{2m} \tag{1}$$

für jede Substitution $\varphi_i(z)$ der Gruppe G.

Wir bilden nun, indem wir einen *Hilfspunkt* ϱ einführen, der beliebig *ausserhalb* des Hauptkreises C liegt die „*Thetafuchs'sche Reihe*" *vom Grade* m

$$Q_\varrho(z) = \sum_i \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}}{(\varphi_i(z) - \varrho)^{2m}}. \tag{2}$$

Diese Function wird im Innern von C nirgends unendlich*); sie hat in R_0 ebenfalls q 0^1-Punkte, die indess nicht willkürlich sondern von ϱ abhängig sind. Bilden wir aber $(q - P + 1)$ Functionen der Form (2) mit jedesmal anderem ϱ, so sind diese Functionen im Allgemeinen linear unabhängig; aus ihnen lässt sich daher jede andere innerhalb des Hauptkreises endliche „Thetafuchs'sche Function" vom Grade m linear zusammensetzen. Man kann daher in dem Ausdruck

$$Q(z) = \sum_\varkappa C_\varkappa \cdot Q_{\varrho_\varkappa}(z) \quad (\varkappa = 1, \ldots, q - P + 1). \tag{3}$$

die Coefficienten $C_\varkappa$ so bestimmen, dass dieser Ausdruck mit der früher aus den „Fuchs'schen Functionen" x und y gebildeten Function $Q(z)$ identisch wird.

In derselben Weise stellt sich die Function $P(z)$ § 2 durch eine „Thetafuchs'sche Reihe" vom Grade $m+1$ dar, indem wir zunächst

*) Indem wir den Nenner des allgemeinen Gliedes in $Q_\varrho(z)$ vom $2m$. Grade in $\varphi_i(z)$ nehmen, wird erreicht, dass $Q_\varrho(z)$ als Function von z im Raume ausserhalb C betrachtet, im Punkt $z = \infty$ und den transformirten Punkten endlich bleibt und nur in dem einen Punkte $z = \varrho$ und seinen Transformirten unendlich wird; Entsprechendes gilt von den Darstellungen von $P(z)$ und $P(z; z_1, \zeta_1)$.

$$P_\varrho(z) = \sum_i \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m-2}}{(\varphi_i z - \varrho)^{2m+2}}$$

und hieraus

$$P(z) = \sum_\varkappa B_\varkappa \cdot P_{\varrho_\varkappa}(z) \qquad (\varkappa = 1, \cdots q + P + 1)$$

bilden, und die Coefficienten $B_\varkappa$ so bestimmen, dass dieser Ausdruck mit der früher gebildeten Function $P(z)$ übereinstimmt; die Hilfspunkte $\varrho_\varkappa$ sind hierbei wieder beliebige, aber ausserhalb C liegende Punkte.

Endlich stellen wir in ähnlicher Weise $P(z; z_1, \zeta_1)$ durch eine „Thetafuchs'sche Reihe" vom Grade $m + 1$ dar; diese Function hat nach den Bestimmungen des § 3 folgende Eigenschaften; sie ist im Innern von R_0 ∞ und zwar

(4)
$$\begin{aligned}
&\text{im Punkte } z = z_1 \text{ wie } + Q(z_1)\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z_1}(x - x_1)^{-1} \text{ oder wie}\\
&\qquad\qquad + Q(z_1)\cdot(z - z_1)^{-1},\\
&\text{im Punkte } z = \zeta_1 \text{ wie } - Q(\zeta_1)\cdot\left(\frac{dx}{dz}\right)_{\zeta_1}(x - \xi_1)^{-1} \text{ oder wie}\\
&\qquad\qquad - Q(\zeta_1)\cdot(z - \zeta_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Sind ferner z_1^i und ζ_1^i die den Punkten z_1 und ζ_1 des Polygons R_0 entsprechenden Punkte im Polygon R_i also

$$z_1^i = \varphi_i(z_1) = \frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \qquad \zeta_1^i = \varphi_i(\zeta_1) = \frac{\alpha_i \zeta_1 + \beta_i}{\gamma_i \zeta_1 + \delta_i},$$

so folgt aus (4) und (1) dass $P(z; z_1, \zeta_1)$ im Innern von R_i ∞ ist und zwar

$$\begin{aligned}
&\text{im Punkte } z = z_1^i \text{ wie } + Q(z_1)\cdot(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}\cdot(z - z_1^i)^{-1}\\
&\qquad\qquad = + Q(z_1^i)\cdot(z - z_1^i)^{-1},\\
&\text{die Punkte } z = \zeta_1^i \text{ wie } - Q(\zeta_1)\cdot(\gamma_i \zeta_1 + \delta_i)^{2m}\cdot(z - \zeta_1^i)^{-1}\\
&\qquad\qquad = - Q(\zeta_1^i)\cdot(z - \zeta_1^i)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ferner war $P(z; z_1, \zeta_1)$ in den Ecken α_h von R_0 gleich 0 in niederster Ordnung und hatte ausserdem im Innern von R_0 noch $(q + 2P)$ 0^1-Punkte, von denen $(q + P)$ willkürlich waren.

Wir bilden nun, indem wir abermals einen *Hilfspunkt* ϱ einführen, der beliebig *ausserhalb* C liegt, die „Thetafuchs'sche Reihe" vom Grade $(m + 1)$

(5)
$$P_\varrho(z; z_1) = \sum_i \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m-2}}{(\varphi_i(z) - z_1)(\varphi_i(z) - \varrho)^{2m+1}},$$

welche unendlich wird

$$\text{in } z = z_1^i \text{ wie } (z_1 - \varrho)^{-2m-1}\cdot(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}\cdot(z - z_1^i)^{-1}.$$

Demnach ist die folgende Function

$$(6) \qquad P_\varrho(z; z_1, \zeta_1) = (z_1 - \varrho)^{2m+1} \cdot Q(z_1) \cdot P_\varrho(z; z_1) \\ - (\zeta_1 - \varrho)^{2m+1} \cdot Q(\zeta_1) \cdot P_\varrho(z; \zeta_1)$$

in den Punkten z_1^i und ζ_1^i ebenso ∞ wie die Function $P(z; z_1, \zeta_1)$; sie ist ferner wie diese Function in den Ecken von R_0 gleich 0 in niederster Ordnung; sie hat daher ausserdem in R_0 noch $(q + 2P)$ 0^1-Punkte, die indess nicht willkürlich, sondern von ϱ, z_1 und ζ_1 abhängig sind. Bildet man aber $(q + P + 1)$ Functionen der Form (6) mit jedesmal anderem ϱ, so sind diese Functionen im Allgemeinen linear unabhängig; aus ihnen lässt sich jede andere „Thetafuchs'sche Function" vom Grade $(m + 1)$, welche in den Punkten a_k, z_1 und ζ_1 in derselben Weise 0 bez. ∞ wird, linear zusammensetzen. Man kann daher in dem Ausdruck

$$(7) \quad P(z; z_1, \zeta_1) = \sum_\varkappa A_\varkappa \cdot P_{\varrho_\varkappa}(z; z_1, \zeta_1) \qquad (\varkappa = 1, \cdots, q + P + 1$$

die Coefficienten $A_\varkappa$ so bestimmen, dass dieser Ausdruck mit der früher aus den „Fuchs'schen Functionen" x und y gebildeten Function $P(z; z_1, \zeta_1)$ § 3 identisch wird, d. h. so, dass er in den q 0^1-Punkten der Function $Q(z)$ (3) verschwindet, dass in dem Integral

$$\int_{z_0}^{z} \frac{P(z; z_1, \zeta_1)}{Q(z)} \, dz$$

die P ersten Periodicitätsmoduln Null werden und dass $\sum_\varkappa A_\varkappa = 1$ wird.

§ 5.

Fortsetzung.

2. Fall. Etwas abweichend von dem Vorigen ist die Bildung der Functionen für den Fall, wo dieselben in der ganzen Ebene existiren. Die Function $Q(z)$ war so bestimmt, dass sie in allen Punkten der z Ebene, insbesondere auch im Punkt $z = \infty$ und den transformirten Punkten endlich blieb (mit Ausnahme der wesentlich singulären Punkte auf dem Hauptkreis); sie hatte ferner in R_0 $q = 2m(n - 1)$ 0^1-Punkte von denen $(q - n)$ willkürlich waren. Zur Darstellung einer solchen Function sind *zwei Hilfspunkte* ϱ und σ zu verwenden, von denen der eine ϱ beliebig in der z Ebene liegen möge (nur nicht in einem der singulären Punkte auf dem Hauptkreis), der andere σ aber von ϱ abhängig sei durch die Gleichung

$$\sigma = f(\varrho) = \frac{a\varrho + b}{c\varrho + d}$$

wo $f(z)$ eine beliebige, aber fest gewählte Substitution der „Fuchs'schen Gruppe“ G ist. Bildet man nun, indem man unter $Q_\varrho(z)$ den früheren Ausdruck (2) § 4 versteht,

$$Q_{\varrho\sigma}(z) = A \cdot Q_\varrho(z) + B \cdot Q_\sigma(z), \tag{8}$$

so reicht eine Bedingung zwischen den Grössen A, B und den Coefficienten der Substitution $f(z)$ hin, damit die Function (8) in allen Punkten der z Ebene (mit Ausnahme der singulären Punkte) endlich sei; es wird nämlich das erste Glied in (8) für $z = \varrho$ ∞ wie $A(z-\varrho)^{-2m}$; folglich für $z = \sigma$ ∞ wie $A \cdot (c\varrho + d)^{-2m} \cdot (z - \sigma)^{-2m}$; das zweite Glied in (8) aber ist in $z = \sigma$ ∞ wie $B \cdot (z - \sigma)^{-2m}$. Die Function (8) bleibt also in σ sowohl wie in ϱ und den transformirten Punkten endlich, wenn

$$A(c\varrho + d)^{-2m} + B = 0.$$

Man erhält daher, indem man $A = 1$ setzt, an Stelle von (8)

$$Q_{\varrho\sigma}(z) = Q_\varrho(z) - (c\varrho + d)^{-2m} Q_\sigma(z). \tag{9}$$

Diese Function hat in R_0 $q = 2m(n-1)$ 0^1-Punkte, die indess noch nicht willkürlich sind; bilden wir aber ein Aggregat von $(q-n+1)$ Functionen der Form (9) mit jedesmal anderem ϱ (bez. σ)

$$Q(z) = \sum_\varkappa C_\varkappa Q_{\varrho_\varkappa \sigma_\varkappa}(z) \qquad (\varkappa = 1, \cdots, q - n + 1),$$

so können wir in demselben die Coefficienten $C_\varkappa$ so bestimmen, dass dieser Ausdruck mit der in § 2 für den Fall 2 definirten Function $Q(z)$ identisch wird. In derselben Weise ist ein Ausdruck für $P(z)$ zu bilden.

Für die Function $P(z; z_1, \zeta_1)$ endlich gilt folgendes: sie hatte in R_0 $(q + 2n)$ 0^1-Punkte, von denen $q + n$ willkürlich waren; sie wurde ∞

in $z = z_1^i$ wie $+Q(z_1^i)(z - z_1^i)^{-1}$ und in $z = \zeta_1^i$ wie $-Q(\zeta_1^i)(z - \zeta_1^i)^{-1}$. Dagegen war sie in allen übrigen Punkten der z Ebene, insbesondere auch in $z = \infty$ und den transformirten Punkten endlich (mit Ausnahme der wesentlich singulären Punkte auf dem Hauptkreis). Wir bilden daher, indem wir die frühere Voraussetzung über die Hilfspunkte ϱ und σ beibehalten und unter $P_\varrho(z; z_1)$ den Ausdruck (5) § 4 verstehen, die Function

$$P_{\varrho\sigma}(z; z_1) = A \cdot P_\varrho(z; z_1) + B \cdot P_\sigma(z; z_1)$$

und erhalten als Bedingung dafür, dass diese Function in den Punkten $z = \varrho$ (bez. σ) und den transformirten Punkten endlich bleibe

$$A(z_1 - \varrho)^{-1} \cdot (c\varrho + d)^{-2m} + B \cdot (z_1 - \sigma)^{-1} = 0.$$

Für $A = 1$ wird

$$P_{\varrho\sigma}(z; z_1) = P_\varrho(z; z_1) - \frac{z_1 - \sigma}{z_1 - \varrho} \cdot (c\varrho + d)^{-2m} \cdot P_\sigma(z; z_1). \tag{10}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R = (z_1 - \varrho)^{-2m-1} - (z_1 - \varrho)^{-1}(z_1 - \sigma)^{-2m}(c\varrho + d)^{-2m},$$

so wird die Function (10) ∞
in $z = z_1$ wie $R \cdot (z - z_1)^{-1}$ und in $z = z_1^i$ wie $R(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m} \cdot (z - z_1^i)^{-1}$.
Bildet man daher weiter die Function

(11) $P_{\varrho\sigma}(z; z_1, \zeta_1) = R^{-1} \cdot Q(z_1) \cdot P_{\varrho\sigma}(z; z_1) - P^{-1} \cdot Q(\zeta_1) \cdot P_{\varrho\sigma}(z; \zeta_1)$

(wo P der Ausdruck R gebildet für ζ_1 statt z_1), so wird diese Function in z_1^i und ζ_1^i in derselben Weise ∞ wie die frühere Function $P(z; z_1, \zeta_1)$; nur hat sie noch nicht dieselben 0^1-Punkte. Bildet man aber wieder ein Aggregat von $(q + n + 1)$ linear unabhängigen Functionen der Form (11) mit ebensovielen verschiedenen Hilfspunkten ϱ (bez. σ)

(12) $$P(z; z_1, \zeta_1) = \sum_{\varkappa} A_\varkappa P_{\varrho_\varkappa \sigma_\varkappa}(z; z_1, \zeta_1) \qquad (\varkappa = 1, \cdots, q + n + 1),$$

so lassen sich in demselben die Coefficienten neben der Bedingung $\Sigma A_\varkappa = 1$ so bestimmen, dass diese Function mit der in § 3 für den Fall 2 definirten Function $P(z; z_1, \zeta_1)$ identisch wird.

§ 6.

Darstellung der „Fuchs'schen Functionen" durch Producte.

Um nunmehr die frühere Darstellung der „Fuchs'schen Functionen" durch Abel'sche Integrale 3. Gattung in eine solche durch unendliche Producte umzuwandeln, formen wir die in (5) § 4 benutzte „Thetafuchs'sche Reihe" $P_\varrho(z; z_1)$ vom Grade $m + 1$ in folgender Weise um; zunächst können wir schreiben

(1) $$P_\varrho(z; z_1) = \sum_i \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-1}}{(\varphi_i z - z_1)} \cdot \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m-1}}{(\varphi_i z - \varrho)^{2m+1}}$$
$$= \sum_i \frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-1}}{z - \varphi_i z_1} \cdot \frac{(\gamma_i \varrho + \delta_i)^{-2m-1}}{(z - \varphi_i \varrho)^{2m+1}}.$$

Denn in dem ersten Ausdruck kann man sämmtliche Substitutionen

$$\varphi_i(z) = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

ersetzen durch

$$\varphi_i^{-1}(z) = \frac{\delta_i z - \beta_i}{-\gamma_i z + \alpha_i}$$

und entsprechend $(\gamma_i z + \delta_i)$ durch $(\alpha_i - \gamma_i z)$, wodurch das i Glied in das entsprechende des zweiten Ausdrucks übergeht. Setzt man wieder

$$\varphi_i(z) = z_1^i \quad \varphi_i(\varrho) = \varrho^i,$$

so dass

$$z_1{}^i - \varrho^i = (z_1 - \varrho)\,(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-1} \cdot (\gamma_i \varrho + \delta_i)^{-1}$$

und setzt weiter

$$(\gamma^i z_1 + \delta_i)^{-1}\,(\gamma_i \varrho + \delta_i)^{-2m-1} = M^i,$$

so lässt sich der Ausdruck (1) in folgender Weise in Partialbrüche zerlegen

$$(2)\qquad P_\varrho(z; z_1) = \sum_i \frac{M^i}{(z - z_1{}^i)\,(z - \varrho^i)^{2m+1}}$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{A^i}{z - z_1{}^i} + \sum_{\mu=1}^{2m+1} \frac{C^i_\mu}{(z - \varrho^i)^\mu} \right\}.$$

Für die Coefficienten A^i und C^i_μ findet man

$$A^i = \frac{M^i}{(z_1{}^i - \varrho^i)^{2m+1}}; \qquad C^i_\mu = -\frac{M^i}{(z_1{}^i - \varrho^i)^{2m+2-\mu}},$$

ferner wird

$$M^i = (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m-1} \cdot (\gamma_i \varrho + \delta_i)^{-2m-1} \cdot (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}$$
$$= (z_1{}^i - \varrho^i)^{2m+1} \cdot (z_1 - \varrho)^{-2m-1} \cdot (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m},$$

so dass (2) übergeht in

$$(3)\qquad (z_1 - \varrho)^{2m+1} \cdot P_\varrho(z; z_1)$$
$$= \sum_i (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m} \cdot \left\{ \frac{1}{z - z_1{}^i} - \frac{1}{z_1{}^i - \varrho^i} \cdot \sum_{\mu=1}^{2m+1} \left(\frac{z_1{}^i - \varrho^i}{z - \varrho^i} \right)^\mu \right\}.$$

Diese Umformung führen wir in die früher gebildeten Ausdrücke ein.

1. Fall. Multiplicirt man (3) mit $Q(z_1)$ und berücksichtigt die Relation (1) § 4, so folgt

$$(z_1 - \varrho)^{2m+1} \cdot Q(z_1) \cdot P_\varrho(z; z_1)$$
$$= \sum_i Q(z_1{}^i) \cdot \left\{ \frac{1}{z - z_1{}^i} - \frac{1}{z_1{}^i - \varrho^i} \cdot \sum_{\mu=1}^{2m+1} \left(\frac{z_1{}^i - \varrho^i}{z - \varrho^i} \right)^\mu \right\}$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\frac{Q(z) - Q(z_1{}^i)}{z - z_1{}^i} + \frac{Q(z_1{}^i)}{z_1{}^i - \varrho^i} \sum_{\mu=1}^{2m+1} \left(\frac{z_1{}^i - \varrho^i}{z - \varrho^i} \right)^\mu = -\,\Phi_\varrho{}^i(z; z_1),$$

$$(z_1 - \varrho)^{2m+1} \cdot Q(z_1) \cdot P_\varrho(z; z_1) = Q(z) \cdot \sum_i \frac{1}{z - z_1{}^i} + \sum_i \Phi_\varrho{}^i(z; z_1).$$

Bildet man hieraus $P_\varrho(z; z_1, \zeta_1)$ und weiterhin

$$P(z; z_1, \zeta_1) = \sum A_\varkappa P_{\varrho_\varkappa}(z; z_1, \zeta_1)$$

in der früher § 4 angegebenen Weise und mit der Bedingung $\sum A_\varkappa = 1$ und setzt zur Abkürzung,

$$\sum_\varkappa A_\varkappa \Phi^i_{\varrho_\varkappa}(z; z_1) = \Psi^i(z; z_1);$$

$$\sum_\varkappa A_\varkappa \Phi^i_{\varrho_\varkappa}(z; \zeta_1) = \Psi^i(z; \zeta_1) \qquad (\varkappa = 1, \cdots, q + P + 1),$$

so erhält man

$$(4) \quad \frac{P(z; z_1, \zeta_1)}{Q(z)} = \sum_i \left[\frac{1}{z - z_1^i} + \frac{\Psi^i(z; z_1)}{Q(z)}\right] - \sum_i \left[\frac{1}{z - \zeta_1^i} + \frac{\Psi^i(z; \zeta_1)}{Q(z)}\right].$$

Trägt man diesen Ausdruck in (3) § 3 ein, geht vom Logarithmus zum Numerus über und setzt abermals abkürzend

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\Psi^i(z; z_h)}{Q(z)} dz = X^i(z; z_h) \quad (h = 1, \cdots, s),$$

so erhält man endlich

$$(5) \qquad \frac{R(x, y)}{R(x_0, y_0)} = \frac{\prod\limits_i \prod\limits_h \left(\frac{z - z_h^i}{z_0 - z_h^i}\right) \cdot e^{X^i(z;\, z_h)}}{\prod\limits_i \prod\limits_h \left(\frac{z - \zeta_h^i}{z_0 - \zeta_h^i}\right) \cdot e^{X^i(z;\, \zeta_h)}}.$$

Hiermit ist die Darstellung der „Fuchs'schen Function" $R(x, y)$ durch unendliche Producte erreicht, in einer unmittelbar aus den Substitutionen der „Fuchs'schen Gruppe" G und den 0^1- und ∞^1-Punkten z_h^i und ζ_h^i der Function gebildeten Form.

2. Fall. Man hat nur die Entwicklung (3) für $P_\varrho(z; z_1)$ und die entsprechende für $P_\sigma(z; z_1)$ in den Ausdruck (10) § 5 einzuführen; dann giebt dasselbe Verfahren wie oben auch eine entsprechende Darstellung von $R(xy)$ durch unendliche Producte.

§ 7.

Schlussbemerkung.

Wir fügen zum Schluss noch eine Bemerkung hinzu, über den Zusammenhang unsrer Untersuchung mit den allgemeinen Methoden der Herren Weierstrass und Mittag-Leffler zur Darstellung eindeutiger Functionen durch unendliche Reihen und Producte, indem wir zeigen wie die im Vorigen verwandten Functionen $P_\varrho(z; z_1)$ und

$P_{\varrho\sigma}(z; z_1)$ unmittelbar aus jenen Methoden abgeleitet werden können. Herr Mittag-Leffler löst u. A. folgende, allgemeine Aufgabe*):

In dem Bereich der unbeschränkten Variabeln z ist eine isolirte Punktmenge gegeben von ∞ vielen Punkten $R = a_0, a_1, a_2 \ldots$; die Grenzstellen derselben oder die abgeleitete Punktmenge $R' = b_0, b_1, b_2 \ldots$ sei entweder ebenfalls isolirt oder erfülle stetig eine geschlossene Linie; ferner ist zu den Punkten a_i eine Reihe von ganzen rationalen oder transcendenten Functionen $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ gegeben, die mit dem Argument verschwinden; es lassen sich dann immer eindeutige, monogene Functionen herstellen, die nur innerhalb des von $R + R'$ begrenzten Continuums A existiren, in den Punkten von A regulär, in den Punkten von R' wesentlich singulär sind und in den Punkten a_i von R unstetig werden wie die vorgegebenen Functionen $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$.

Wir specialisiren diese Aufgabe für unsere Untersuchungen folgendermassen, wobei wir wie früher zwei Fälle von Functionen unterscheiden.

1. Fall. *Die Functionen existiren nur innerhalb des Hauptkreises C.*

Wir wählen im Polygon R_0 einen beliebigen *Punkt* z_1 und bilden aus den Substitutionen der Gruppe G die Punktmenge

$$R = a_i = \varphi_i(z_1) = z_1^{\,i},$$

deren Punkte isolirt innerhalb des Hauptkreises liegen. Die Grenzstellen b_i derselben oder die Punkte der abgeleiteten Menge R' erfüllen dann stetig die Peripherie des Hauptkreises. Das Continuum A besteht aus den Punkten im Inneren des Hauptkreises mit Ausschluss der Punktmengen $R + R' = a_i + b_i$. Es soll eine eindeutige Function gebildet werden, die in den Punkten von A regulär, in den Punkten b_i von R' wesentlich singulär ist und in den Punkten $a_i = z_1^{\,i}$ von R sich verhält wie

$$G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right) = \frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}}{z - z_1^{\,i}},$$

wo m eine ganze positive Zahl > 1. Die Lösung dieser Aufgabe nach Herrn M.-Leffler ist folgende. Wir wählen beliebig ausserhalb des Hauptkreises C einen Punkt ϱ und ordnen jedem Punkte $a_i = \varphi_i(z_1) = z_1^{\,i}$ innerhalb C einen Punkt $c_i = \varphi_i(\varrho) = \varrho^i$ ausserhalb C zu mit demselben Index i. Dann ist die für das Weitere nothwendige Bedingung erfüllt, dass die einander zugeordneten Punkte $a_i = z_1^{\,i}$ und $c_i = \varrho^i$ beim Grenzübergang $\lim i = \infty$ in demselben Punkte des Hauptkreises zusammentreffen, da

*) Acta math. IV, p. 22 ff.

$$\lim_{i=\infty} (a_i - c_i) = \lim_{i=\infty} (z_1{}^i - \varrho^i)$$
$$= (z_1 - \varrho) \cdot \lim_{i=\infty} (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-1} (\gamma_i \varrho + \delta_i)^{-1} = 0.$$

Wir entwickeln nun $G\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$ nach fallenden Potenzen von $z - c_i$

$$\frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}}{z - z_1{}^i} = \frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}}{z_1{}^i - \varrho^i} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{z_1{}^i - \varrho^i}{z - \varrho^i}\right)^\mu$$

und bringen die m_i ersten Glieder der Entwicklung auf die linke Seite; dann entsteht die Function

$$F_i(z) = \frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}}{z - z_1{}^i} - \frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}}{z_1{}^i - \varrho^i} \cdot \sum_{\mu=1}^{m_i} \left(\frac{z_1{}^i - \varrho^i}{z - \varrho^i}\right)^\mu.$$

Es lassen sich nun die ganzen Zahlen m_i stets so bestimmen, dass die ∞ Reihe

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(z) \tag{1}$$

eine analytische Function der verlangten Art darstellt.

Die Vergleichung mit (3) § 6 zeigt, dass man die Zahlen m_i sämmtlich $= 2m + 1$ setzen kann und dass die somit erhaltene Function $F(z)$ identisch ist mit der Function (3) § 6. Derselbe Ausdruck $F(z)$ (1) ist, als Function von z in dem Raume ausserhalb des Continuums A oder des Hauptkreises C betrachtet, in den zugeordneten Hilfspunkten ϱ^i unstetig. Man kann nach Herrn M.-Leffler auch Functionen der verlangten Art herstellen, die sich ausserhalb C allenthalben regulär verhalten, indem man nämlich die Punkte $a_i = z_1{}^i$ nicht den Punkten $c_i = \varrho^i$ ausserhalb C, sondern den wesentlich singulären Punkten b_i auf dem Hauptkreise C selber in gewisser Weise zuordnet; doch dürfte für diesen Fall die Bestimmung der Zahlen m_i einige Schwierigkeit machen.

2. Fall. *Die Functionen existiren in der ganzen Ebene.*

Wir wählen wieder in R_0 einen Punkt z_1 und bilden mit den Substitutionen der Gruppe G die Punktmenge $R = a_i = \varphi_i(z_1) = z_1{}^i$, deren Punkte jetzt isolirt über die ganze Ebene verbreitet sind. Die abgeleitete Punktmenge R' besteht aus ∞ vielen Punkten b_i, die isolirt auf dem Hauptkreise C liegen, das Continuum A aus allen Punkten der Ebene mit Ausschluss der Punktmengen $R + R' = a_i + b_i$. Es soll wieder eine eindeutige Function gebildet werden, die in den Punkten von A regulär, in den Punkten b_i von R' wesentlich singulär und in den Punkten $a_i = z_1{}^i$ von R unstetig ist, wie

$$G\left(\frac{1}{z - a_i}\right) = \frac{(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{2m}}{z - z_1{}^i}$$

Zur Lösung dieser Aufgabe ordnet Herr M.-Leffler die ∞^1-Punkte der zu bildenden Function den Grenzstellen auf dem Hauptkreise in gewisser Weise zu. Die Betrachtungen des § 6 zeigen, dass es noch eine zweite Art der Zuordnung giebt, welche die Aufgabe löst. Man wähle in der z-Ebene zwei Punkte ϱ und σ, die in der früher angegebenen Beziehung $\sigma = f(\varrho)$ stehen und ordne jedem Punkt $z_1{}^i$ gleichzeitig die Punkte ϱ^i und σ^i zu. Dann führen die den obigen analogen Entwicklungen (abgesehen von einem constanten Factor) unmittelbar zu der Function $P_{\varrho\sigma}(z; z_1)$ (10) § 5, die in den Punkten ϱ^i und σ^i nicht unendlich wird, sondern regulär bleibt und im Uebrigen den vorgeschriebenen Charakter besitzt. —

Tübingen, 10. Juni 1888.

Ueber die singulären Stellen der Integrale einer linearen partiellen Differentialgleichung.

Von

J. Horn in Rehbach (Odenwald).

Die singulären Stellen der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung

(1) $$p_0 \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0,$$

deren Coefficienten $p_0, p_1, \cdots, p_m$ ganze rationale Functionen von x sind, können bekanntlich, wenn man von dem unendlich fernen Punkte absieht, nur in den Nullstellen der ganzen Function p_0 liegen.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Ausdehnung dieses Satzes auf eine lineare partielle Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$

(2) $$\sum_{(\nu)} P_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_n^{\nu_n}} = 0,$$

wo $\sum\limits_{(\nu)}$ über die Indexsysteme $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, für welche $\nu_1 + \cdots + \nu_n \leqq m$ ist, erstreckt wird und die Coefficienten $P_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Während das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) m willkürliche Constanten enthält, kommen in dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung (2) m willkürliche Functionen von $n-1$ Veränderlichen vor, wie dies genauer durch den folgenden Satz ausgedrückt wird, der sich aus einem allgemeineren Satze von Frau v. Kowalevski (Crelles Journal Bd. 80) ergiebt:

„Wenn in der Differentialgleichung

$$\sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_n^{\nu_n}} = 0 \quad (\nu_1 + \cdots + \nu_n \leqq m),$$

deren Coefficienten $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, der

Coefficient von $\frac{\partial^m y}{\partial x_1^m}$, nämlich $A_{m,0,\ldots,0}$, an der Stelle $(x_1=a_1,\cdots,x_n=a_n)$, an welcher sich alle Coefficienten $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ regulär verhalten, nicht verschwindet, so wird der Differentialgleichung durch eine Potenzreihe von $x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n$,

$$y=\mathfrak{P}(x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n)$$

von solcher Beschaffenheit genügt, dass

$$y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\ldots,\ \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_1^{m-1}},$$

wenn man $x_1=a_1$ setzt, gleich willkürlich angenommenen Potenzreihen von $x_2-a_2,\ldots,x_n-a_n$ werden."

Es sind noch einige Ueberlegungen erforderlich, um über die Stellen, an welchen sich ein Integral der Differentialgleichung (2) singulär verhalten kann, eine Vorstellung zu gewinnen. Zunächst muss man beachten, dass die singulären Stellen einer analytischen Function von $x_1,\ldots,x_n$ nicht isolirt liegen, sondern im allgemeinen eine $(2n-2)$-fache Mannigfaltigkeit bilden. So verhält sich eine rationale Function

$$z=\frac{F(x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)},$$

deren Nenner $G(x_1,\ldots,x_n)$ die irreductiblen ganzen Functionen

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n),\ \psi(x_1,\ldots.x_n)\ldots$$

zu Factoren hat, an denjenigen Stellen singulär, welche einem der algebraischen Gebilde

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0,\ \psi(x_1,\ldots,x_n)=0\ldots$$

angehören. Wir wollen diese Gebilde die singulären Gebilde der rationalen Function z nennen. Aehnliches findet bei irgend einer analytischen Function statt; ist $(x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n)$ eine singuläre Stelle derselben, so verhält sich dieselbe im Allgemeinen auch an den Nullstellen einer für $x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n$ verschwindenden Potenzreihe

$$\psi(x_1,\ldots,x_n)=A_1(x_1-a_1)+\cdots+A_n(x_n-a_n)+\cdots$$

singulär, und diese Nullstellen bilden eben eine $(2n-2)$-fache Mannigfaltigkeit (vgl. Weierstrass, einige auf analytische Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze).

Wir werden nun sehen, dass ein analytisches Gebilde

$$\psi(x_1,\ldots,x_n)=0,$$

damit es ein singuläres Gebilde für ein particuläres Integral

$$y=f(x_1,\ldots x_n)$$

der Differentialgleichung (2) sein kann, einer gewissen Bedingung genügen muss. Zunächst wird diese Bedingung in einem speciellen Falle aufgesucht und dann deren Allgemeingültigkeit bewiesen. Die Function $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ habe in der Umgebung der Stellen $(a_1,\ldots,a_n)$ des Gebildes $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ die Form

$$y=\frac{\eta}{\psi},$$

wo η in eine Potenzreihe von $x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n$ entwickelbar ist. Durch wiederholte Differentiation dieses Ausdrucks findet man

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}y}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}=$$

$$=\frac{(-1)^{\nu_1+\cdots+\nu_n}(\nu_1+\cdots+\nu_n)!\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}\eta+\psi H_{\nu_1,\ldots,\nu_n}}{\psi^{\nu_1+\cdots+\nu_n+1}},$$

wo H eine Potenzreihe von $x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n$ bedeutet. Durch Einsetzung von $y=\frac{\eta}{\psi}$ in die linke Seite der Differentialgleichung (2) ergiebt sich ein Ausdruck von der Form

$$\frac{(-1)^m m!\,\eta\sum\limits_{(\mu)}P_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\mu_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\mu_n}+\psi P}{\psi^{m+1}},$$

wo P in eine Potenzreihe von $x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n$ entwickelbar ist und unter $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ alle diejenigen Indexsysteme zu verstehen sind, für welche $\mu_1+\cdots+\mu_n=m$ ist. Wenn der letzte Ausdruck verschwinden soll, muss

$$\eta\cdot\sum_{(\mu)}P_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\mu_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\mu_n}\quad(\mu_1+\cdots+\mu_n=m)$$

gleich dem Producte aus ψ in eine Potenzreihe von $x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n$ sein, was wir folgendermassen schreiben wollen:

$$\eta\cdot\sum_{(\mu)}P_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\mu_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\mu_n}\equiv 0,\quad\text{mod }\psi;$$

da η als nicht durch ψ theilbar angenommen wird, so muss

$$(3)\qquad\sum_{(\mu)}P_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\mu_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\mu_n}\equiv 0,\quad\text{mod. }\psi$$
$$(\mu_1+\cdots+\mu_n=m)$$

sein. Wie wir nun sehen werden, ist die Bedingung (3) stets erfüllt, wenn $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ ein singuläres Gebilde einer der Differentialgleichung (2) genügenden Function ist, gleichviel wie sich diese in der Umgebung der Stellen von $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ verhält. Wir führen an Stelle von $x_1,\ldots,x_n$ neue Variable $u_1,\ldots,u_n$ so ein, dass für $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ wird und dass $u_1 = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ ist. Dadurch erhalten wir eine Differentialgleichung

$$\sum_{(\nu)} Q_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} y}{\partial u_1^{\nu_1} \cdots \partial u_n^{\nu_n}} = 0, \tag{4}$$

in welcher der Coefficient von $\dfrac{\partial^m y}{\partial u_1^m}$

$$Q_{m,0,\ldots,0} = \sum_{(\mu)} P_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)^{\mu_n}$$
$$(\mu_1 + \cdots + \mu_n = m)$$

ist; wir haben die Bedingung zu suchen, unter welcher $u_1 = 0$ ein singuläres Gebilde eines Integrals der Differentialgleichung (4) ist. Aus dem Satze der Frau v. Kowalevski erhellt, dass jedes Integral von (4) an den Stellen $(u_1, \ldots, u_n)$, an welchen $Q_{m,0,\ldots,0}$ nicht verschwindet, in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Soll ein Integral vorhanden sein, welches sich für $u_1 = 0$ singulär verhält, so muss, wenn $u_1 = 0$ ist, auch $Q_{m,0,\ldots,0} = 0$ sein, d. h. es muss

$$Q_{m,0,\ldots,0} \equiv 0, \text{ mod. } u_1,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{(\mu)} P_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)^{\mu_n} \equiv 0, \text{ mod. } \psi \tag{3}$$

sein. Wir haben somit den Satz:

„Die Differentialgleichung (2) kann nur dann ein Integral haben, welches sich an den Nullstellen der Potenzreihe $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, singulär verhält, wenn die Function ψ der Bedingung (3) genügt.“

Für $n = 1$ haben alle singulären Gebilde die Form $x - a = 0$, die Bedingung (3) geht über in

$$p_0 \equiv 0, \text{ mod. } x - a,$$

d. h. $x = a$ muss eine Nullstelle von p_0 sein.

Ein singuläres Gebilde $\psi(x, y) = 0$ eines Integrals der Differentialgleichung

$$\sum_{\mu\nu} P_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = 0 \quad (\mu + \nu \leqq m) \tag{5}$$

muss die Bedingung

$$\sum_{\mu+\nu=m} P_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^\mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^\nu \equiv 0, \text{ mod. } \psi \tag{6}$$

erfüllen. Versteht man jetzt unter (x, y) die Stellen des singulären Gebildes $\psi(x, y) = 0$, so lässt sich die Bedingung (6), da

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$$

und folglich

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} : \frac{\partial\psi}{\partial y} = -dy : dx$$

ist, umformen in

$$\sum_{\mu+\nu=m}(-1)^\mu P_{\mu,\nu}\,dy^\mu\,dx^\nu = 0 \tag{7}$$

oder

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu P_{\mu,m-\mu}\left(\frac{dy}{dx}\right)^\mu = 0. \tag{7a}$$

Ersetzt man die Differentialgleichung (5) durch die einfache Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

so geht die Gleichung (7) in

$$dx^2 + dy^2 = 0$$

über, es ist also $dx \pm i\,dy = 0$, die Integration ergiebt

$$x \pm iy = a,$$

wo a eine Constante ist. Die singulären Gebilde eines Integrals der Differentialgleichung (8) sind also von der Form

$$x \pm iy = a.$$

Nimmt man für x und y nur reelle Werthe an, so ist eine Function von x und y, welche der Differentialgleichung (8) genügt, bekanntlich eine Function der complexen Veränderlichen $u = x + iy$, die sich singulär verhält, wenn u gewisse constante Werthe a annimmt. Dasselbe Resultat liefert im Falle reeller x und y der obige Ausdruck der singulären Gebilde $x \pm iy = a$, denn hiernach ist entweder $u = a$ oder, wenn $x - iy = a = \alpha + i\beta$ ist, $x + iy = u = \alpha - i\beta$, d. h. eine Function der complexen Veränderlichen u verhält sich im Allgemeinen an einzelnen Stellen $u = a$ singulär.

Rehbach im Odenwald, im Mai 1888.

Note zu der Abhandlung „Ueber conjugirte Curven“ Math. Ann. Bd. XXX, pag. 454.

Von

Otto Schlesinger in Basel.

Durch eine freundliche Zuschrift von Herrn Gino Loria bin ich einige Zeit nach Publication meiner obengenannten Arbeit auf eine mir bisher unbekannt gebliebene Abhandlung von Herrn R. de Paolis aufmerksam gemacht worden: „*Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari*“ (Reale Accademia dei Lincei). Diese vom 20. Juni 1886 datirte Arbeit enthält bereits den Satz, dass, wenn eine Curve dritter Ordnung C^3 zu einer Curve dritter Classe conjugirt ist, der letzteren ∞^1 Polarfünfseite, ∞^3 Polarsechsseite etc. von C^3 umschrieben werden können (l. c. p. 279). Ich nehme Gelegenheit, dies ausdrücklich hervorzuheben, indem ich zugleich bemerke, dass die übrigen Resultate meiner Abhandlung, z. B. die Construction der auf C^3 liegenden Polarfünfecke, die Vertheilung derselben etc. von Herrn de Paolis nicht berührt werden. Ueberdies glaube ich aber sagen zu müssen, dass der von Herrn de Paolis gegebene Beweis jenes Satzes meines Erachtens durchaus unzureichend ist, wie schon daraus hervorgeht, dass durch die daselbst angewandte Argumentation ein gerade entgegengesetztes Resultat mit mindestens derselben Evidenz abgeleitet werden könnte.

Ich kann nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit noch einer Bemerkung entgegenzutreten, die Herr P. in einer Fussnote seiner Arbeit (p. 266) ausgesprochen hat. In derselben soll angedeutet werden, dass man mit Unrecht Herrn Rosanes die erste Einführung und *Verwerthung* des Begriffes der conjugirten Formen zuschreibe, dass vielmehr dies Verdienst Herrn Battaglini gebühre. Bei Prüfung der wohl vorzugsweise in Frage kommenden Arbeit des Herrn B. im Giornale di Matematiche di Napoli, t. X habe ich jedoch nur die Benennung „harmonisch conjugirt“ für die betreffende Relation auffinden können.

Von irgend einer *Verwerthung* (worauf es doch hauptsächlich ankommt) des Begriffs ist dagegen an dem angegebenen Orte nirgends die Rede. Man findet daselbst weder eine Anwendung auf Potenzdarstellung, noch auf abhängige Systeme von Punkten etc., wie sie von Herrn Rosanes und Anderen seither in ausgedehntem Masse gegeben worden sind.

Basel, Juli 1888.

Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen.

Von

HEINRICH MASCHKE in Berlin.*)

In der Theorie der elliptischen Functionen hat Herr F. Klein**) Jacobische Functionen k^{ter} Ordnung, die Grössen X_α, aufgestellt, welche sich bei linearer Transformation der Perioden linear unter sich mit rein numerischen Coefficienten substituiren.

Bei näherer Untersuchung der durch diese Substitutionen constituirten endlichen Gruppen hat sich gezeigt, dass man auf diesem Wege *alle* endlichen Gruppen *binärer* und *ternärer* linearer Substitutionen***) erschöpft. Allein es gelingt nicht, aus der Theorie der elliptischen X_α wesentlich neue *quaternäre* Substitutionsgruppen abzuleiten.

Nun hat Hr. Klein im Wintersemester 1885—86 in Seminarvorträgen darauf aufmerksam gemacht, dass es bei den hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p=2$ gelingen muss, Grössen $X_{\alpha\beta}$, Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung, zu construiren, welche linearen Periodentransformationen gegenüber ein analoges Verhalten zeigen, wie die X_α im elliptischen Falle. Dieser Gedanke ist dann von Hrn.

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1888, Nr. 5.

**) Ueber die ellipt. Normalcurven der N^{ten} Ordnung. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Abhandl. Bd. XIII, Leipzig 1885.

***) Bekanntlich ist für die binären und ternären linearen Substitutionen die Bestimmung aller endlichen Gruppen bereits durchgeführt, für erstere von Herrn F. Klein (Sitzungsberichte der Erlanger physikalisch-medicinischen Gesellschaft vom Juli 1874, und „Ueber binäre Formen mit linearen Transform. in sich selbst“ Math. Ann. Bd. IX, 1875) und Herrn Gordan („Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen“ Math. Ann. Bd. XII 1877), für erstere und letztere von Herrn C. Jordan („Mémoire sur les équations différentielles à intégrale algébrique“, Borch. Journ. Bd. 84, 1878 und „Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenu dans le groupe linéaire“ Atti della Reale Accademia di Napoli, 1880).

Witting*) durchgeführt worden. Insbesondere hat sich dabei herausgestellt, dass, wenn man sich auf die Transformationen beschränkt, welche die Charakteristik $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ — oder bei ungeradem k überhaupt eine beliebige Charakteristik — ungeändert lassen, man k^2 linear unabhängige Grössen $X_{\alpha\beta}$ bilden kann, die bei den erwähnten Transformationen sich linear unter sich *mit numerischen Coefficienten* substituiren.

Die hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ liefern uns also ebenfalls endliche Substitutionsgruppen, und hier stossen wir nun auch in der That auf wesentlich neue *quaternäre* Gruppen. So ergiebt sich aus den $X_{\alpha\beta}$ für $k = 2$ die quaternäre Gruppe der Borchardt'schen Moduln von 16.720 Collineationen**).

Für $k = 3$ liefern uns die in diesem Falle existirenden $\frac{k^2-1}{2} = 4$ ungeraden Functionen $Z_{\alpha\beta}$, welche als Differenzen der $X_{\alpha\beta}$ definirt sind, eine quaternäre Gruppe von 25920 Collineationen.

Herr Witting giebt für diese Gruppe der $Z_{\alpha\beta}$ fünf erzeugende Substitutionen an***), und beschäftigt sich, indem er die vier Variabelen z_0, z_1, z_2, z_3 als homogene Punktcoordinaten deutet, mit der Configuration†), welche aus denjenigen Ebenen, Geraden und Punkten zusammengesetzt ist, die bei den Collineationen der Gruppe ausgezeichnet sind, d. h. allgemein zu reden, in weniger als 25920 verschiedene Lagen übergehen.

Ich möchte diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne die Aufmerksamkeit namentlich der synthetischen Geometer nachdrücklich auf diese ausgezeichnet schöne Configuration hingelenkt zu haben. Ich hebe zu diesem Zwecke, und weil ich auch in dieser Arbeit noch gelegentlich darauf zurückzukommen habe, nur folgenden Punkt hervor:

Die Ebene $z_0 = 0$ geht durch die Collineationen der Gruppe in 40 von einander verschiedene Lagen über. Aus jeder dieser 40 Ebenen wird von den 39 anderen eine Hesse'sche Configuration ausgeschnitten. Die 39 Ebenen sondern sich nämlich in 12 und 27; die 12 Ebenen schneiden 4 Wendedreiecke aus; von den 27 Ebenen schneiden sich je 3 in einer, in der ursprünglichen Ebene liegenden Geraden, und die 9 so entstehenden Geraden bilden die zu den 4 Wendedreiecken gehörigen 9 harmonischen Polaren.

Die in Rede stehende Gruppe ist, was ihre abstracten Gruppirungsverhältnisse angeht, auch sonst schon bekannt. Sie ist nämlich, wie sich leicht zeigen lässt, isomorph mit der Gruppe der mod. 3 ver-

*) Inaugural-Dissertation d. Univ. Göttingen, Dresden 1887 und Math. Ann. Bd. 29: „Ueber Jacobische Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabelen".

**) Vergl. den Aufsatz des Verf. im 30ten Bande dieser Annalen.

***) Diss. pag. 27.

†) Diss. § 2—9.

schiedenen linearen Transformationen der Perioden, oder, was dasselbe besagt, mit der *Gruppe der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung*, die von Herrn C. Jordan behandelt worden ist*). Letztere ist wieder, wie ebenfalls Herr C. Jordan bemerkt hat*), isomorph mit der *Gruppe der Gleichung* 27^{ten} *Grades, von der die* 27 *Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängen*, obwohl zwischen diesen beiden Gruppen durchaus kein innerer Zusammenhang zu existiren scheint**).

In vorliegender Arbeit, deren Durchführung mehrfach Unterredungen mit Hrn. Prof. Klein von erheblichem Nutzen gewesen sind, habe ich die Absicht, für die genannte quaternäre Substitutionsgruppe das volle System invarianter Formen aufzustellen — eine Aufgabe, welche erledigt sein muss, ehe an die Behandlung der mit der Gruppe in Zusammenhang stehenden algebraischen Probleme herangegangen werden kann.

§ 1.

Definition der Gruppe G. Collineationen derselben.

Die Witting'schen fünf erzeugenden Substitutionen, wie sie sich direct aus den zugehörigen Periodentransformationen ergeben, lauten folgendermassen:

$$(1)\quad \begin{cases} M\begin{cases} z_0' = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(z_0 + z_2 - z_3) \\ z_1' = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(\varepsilon^2 - \varepsilon)\, z_1 \\ z_2' = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(z_0 + \varepsilon^2 z_2 - \varepsilon z_3) \\ z_3' = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(-z_0 - \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) \end{cases} \\ N\begin{cases} z_0' = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}(\varepsilon - \varepsilon^2)\, z_0 \\ z_1' = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}(\varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + z_3) \\ z_2' = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}(\varepsilon^2 z_1 + \varepsilon z_2 + z_3) \\ z_3' = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}(z_1 + z_2 + z_3) \end{cases} \end{cases}$$

*) C. Jordan. Traité des substitutions.

**) Inzwischen hat Herr F. Klein es unternommen, beide Probleme auf einander zu reduciren: „Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique" par M. F. Klein. Extrait d'une lettre addressée à M. C. Jordan. Journal de Mathématiques. 4$^{\text{me}}$ série. tome IV. Fasc. II. 1888.

$$(1)\qquad \begin{cases} P\begin{cases} z_0' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(z_0 + \varepsilon z_2 - \varepsilon^2 z_3) \\ z_1' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon^2 - \varepsilon) z_1 \\ z_2' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon^2 z_0 + \varepsilon^2 z_2 - \varepsilon^2 z_3) \\ z_3' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(-\varepsilon z_0 - \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) \end{cases} \\ Q\begin{cases} z_0' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon^2 - \varepsilon) z_0 \\ z_1' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + z_2 + z_3) \\ z_2' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) \\ z_3' = -\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) \end{cases} \\ R\begin{cases} z_0' = -z_2 \\ z_1' = z_1 \\ z_2' = -z_0 \\ z_3' = -z_3 \end{cases} \end{cases}$$

Hierin ist $i = \sqrt{-1}$, $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, und die Substitutionsdeterminante überall $= +1$.

Ich will aus diesen Substitutionen andere zusammensetzen, welche einfacher gebaut sind und vor allen Dingen zwei für die Folge besonders wichtige Untergruppen in Evidenz treten lassen. Ich bilde nämlich:

$$(N^2M^2)^2 = A, \quad M^2 = B, \quad (M^2P^2)^2 = C, \quad (RC)^2 = D,$$
$$N^2M^2 \cdot N \cdot M^2N^2 = E, \quad R = F,$$

endlich

$$QN \cdot M^2N^2 \cdot M^2P^2 = J.$$

Alsdann erhalte ich folgende Substitutionen:

(2)

	A	B	C	D	E	F
$z_0' =$	z_0	$-z_0$	z_0	εz_0	z_0	$-z_2$
$z_1' =$	z_2	z_1	z_1	z_1	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(z_1 + z_2 + z_3)$	z_1
$z_2' =$	z_3	z_3	εz_2	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)$	$-z_0$
$z_3' =$	z_1	z_2	$\varepsilon^2 z_3$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3)$	$-z_3$

ausserdem J:

$$z_0' = iz_0, \quad z_1' = iz_1, \quad z_2' = iz_2, \quad z_3' = iz_3.$$

Auch hier ist die Determinante jeder einzelnen Substitution $= +1$.

Ich lege jetzt diese Formeln als erzeugende Substitutionen zu Grunde, und zeige, dass sich die Witting'schen Formeln (1) aus diesen zusammensetzen lassen. In der That ist:

$$M = FAFC^2EFA^2C, \quad N = AEA^2,$$
$$P = FAFECFA^2CJ, \quad Q = BEJ^3.$$

Hieraus folgt, dass durch die Formeln (2) in Verbindung mit J dieselbe Gruppe erzeugt wird wie durch die Formeln (1).

In den Formeln (2) treten als Coefficienten der z nur dritte Einheitswurzeln und deren rationale Verbindungen auf, da $\sqrt{-3} = \varepsilon - \varepsilon^2$ ist. Eine Folge davon ist, dass man durch Combination und Wiederholung der Formeln (2) niemals zur Substitution J gelangen kann, denn i kann als eigentliche vierte Einheitswurzel niemals rational aus dritten Einheitswurzeln zusammengesetzt werden. Wohl aber lässt sich J^2 aus den Substitutionen (2) zusammensetzen. In der That liefert nämlich BE^2:

(3) $$z_0' = -z_0, \quad z_1' = -z_1, \quad z_2' = -z_2, \quad z_3' = -z_3.$$

Ich bezeichne fortan die aus den 6 Substitutionen (2) erzeugte Gruppe mit G.

Die aus den Formeln (1) erzeugte Gruppe besitzt demnach doppelt soviele Substitutionen als G, nämlich ausser denen von G selbst noch die mit $+i$ multiplicirten, während sie als Collineationsgruppe, d. h. bei Berücksichtigung nur der Verhältnisse $z_0' : z_1' : z_2' : z_3'$, mit der Collineationsgruppe G vollkommen identisch ist.

Da ferner in den Formeln (2) die Substitutionsdeterminante überall $+1$ ist, so können sich nach dem eben Gesagten zwei, dieselbe Collineation liefernde, Substitutionen von G nur durch simultanen Zeichenwechsel unterscheiden. Also folgt:

Die Anzahl der in G enthaltenen Substitutionen ist doppelt so gross als die der Collineationen.

Bei den mit einer Gruppe G zusammenhängenden algebraischen Untersuchungen ist es stets von Wichtigkeit zu wissen, ob man aus den Substitutionen von G eine Anzahl derselben so aussondern kann, dass diese eine mit der Collineationsgruppe G holoëdrisch isomorphe Untergruppe bilden.

Zur Beantwortung dieser Frage für die vorliegende Gruppe G greifen wir, dem Vorgange von Herrn Klein folgend*), aus G folgende vier Substitutionen heraus:

*) Vorlesungen über das Ikosaëder. Leipzig 1884. I, 2. § 8.

$$1,\ B,\ AFA^{-1},\ AFA^{-1}B,$$

welche als Collineationen eine Vierergruppe bilden (dieselben lassen die Tetraëderkante $z_0 = 0$, $z_1 = 0$ fest), und als solche kurz mit I, II, III, IV bezeichnet werden mögen. Verstehen wir unter $\varrho, \varrho', \varrho''$ nach Belieben $+1$ oder -1, so lauten die genannten Substitutionen, von der Identität abgesehen, folgendermassen:

$$\begin{array}{rcccc} & & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV}, \\ z_0' & = & -\varrho z_0, & -\varrho' z_1, & -\varrho'' z_1, \\ z_1' & = & \varrho z_1, & -\varrho' z_0, & \varrho'' z_0, \\ z_2' & = & \varrho z_3, & -\varrho' z_2, & -\varrho'' z_3, \\ z_3' & = & \varrho z_2, & \varrho' z_3, & \varrho'' z_2. \end{array}$$

Soll jetzt ein holoëdrischer Isomorphismus zwischen der Collineationsgruppe G und der Hälfte der Substitutionen von G stattfinden, so muss, da derselbe sich auch auf alle Untergruppen erstrecken würde, es möglich sein, aus den genannten, mit doppelten Vorzeichen geschriebenen acht Substitutionen vier so herauszugreifen, dass diese für sich eine Vierergruppe bilden. Die für die Operationen einer Vierergruppe bestehende Bedingung: $II \cdot III = III \cdot II \ (= IV)$ liefert hier aber den Widerspruch: $+\varrho\varrho' = -\varrho\varrho'$. Damit ist der Satz bewiesen:

Es ist unmöglich, aus den Substitutionen von G die Hälfte so herauszugreifen, dass diese eine mit der Collineationsgruppe G holoëdrisch isomorphe Untergruppe bilden.

§ 2.

Die Untergruppe H. Ordnung von G.

Wir wenden uns nun zur näheren Betrachtung einer in G enthaltenen Untergruppe, deren Existenz für die folgenden Entwickelungen von fundamentaler Wichtigkeit ist.

Es ist dies die Untergruppe H, welche aus den 5 Substitutionen A, B, C, D, E der Formeln (2) erzeugt wird.

Evidenter Weise lassen die Substitutionen dieser Gruppe die Ebene $z_0 = 0$ fest. Ich behaupte nun:

Alle in G enthaltenen Substitutionen, welche die Ebene $z_0 = 0$ fest lassen, sind in H enthalten.

Zum Beweise zeige ich zuerst, dass alle, die Ebene $z_0 = 0$ fest lassenden *Collineationen* in H enthalten sind.

Die Collineationsgruppe H, welche sich auf Collineationen innerhalb der Ebene $z_0 = 0$ bezieht, will ich kurz mit H' bezeichnen. Dieselbe ist ternär, da nur die drei Variabelen $z_1 : z_2 : z_3$ in Betracht kommen. H' ist nun aber nichts anderes als die wohlbekannte, mit der Hesse'schen Configuration zusammenhängende ternäre Gruppe von 216 Collineationen — ich will dieselbe im Folgenden als *„Hesse'sche Gruppe"* bezeichnen — von welcher Herr C. Jordan bereits bewiesen hat*), dass sie in keiner umfassenderen endlichen ternären Gruppe enthalten sein kann. Also kann es nicht möglich sein, durch Hinzuziehung der Substitution F zur Gruppe H noch irgend eine neue nicht bereits in H' vorkommende Collineation zu erzeugen.

Ich habe nun zweitens zu beweisen, dass durch Hinzuziehung von F zur Gruppe H auch keine neue *Substitution* geliefert wird, welche nicht schon in H allein vorkäme. Insbesondere beweise ich:

Alle in G enthaltenen Substitutionen, welche eine und dieselbe in H' enthaltene ternäre Collineation bewirken, sind in H enthalten.

Sei nämlich S irgend eine in G enthaltene Substitution, welche die Ebene $z_0 = 0$ ungeändert lässt. Dieselbe möge lauten:

$$z_0' = Z_0, \quad z_1' = Z_1, \quad z_2' = Z_2, \quad z_3' = Z_3,$$

wo $Z_0, \ldots Z_3$ lineare, homogene Functionen von $z_0, \ldots z_3$ sind. Dann kann folglich irgend eine andere in G enthaltene Substitution S', welche mit S die gleiche Collineation innerhalb der Ebene $z_0 = 0$ bewirkt, nur die Form haben:

$$z_0' = \sigma \cdot Z_0, \quad z_1' = \varrho \cdot Z_1, \quad z_2' = \varrho \cdot Z_2, \quad z_3' = \varrho \cdot Z_3,$$

wo $\sigma \cdot \varrho^3 = +1$ ist. Alsdann ist in G auch die Substitution $S' S^{-1}$ enthalten. Dieselbe lautet:

$$z_0' = \sigma \cdot z_0, \quad z_1' = \varrho \cdot z_1, \quad z_2' = \varrho \cdot z_2, \quad z_3' = \varrho \cdot z_3.$$

Bilden wir jetzt $FS'S^{-1}F$, so kommt:

$$z_0' = \varrho \cdot z_0, \quad z_1' = \varrho \cdot z_1, \quad z_2' = \sigma \cdot z_2, \quad z_3' = \varrho \cdot z_3.$$

Die hierdurch innerhalb der Ebene $z_0 = 0$ gelieferte Collineation muss aber, wie bereits bewiesen, in H' enthalten sein, und daraus folgt:

$$\sigma = \varepsilon^\nu \cdot \varrho \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Mit Berücksichtigung von $\sigma \cdot \varrho^3 = +1$ ergiebt dies folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &1) \quad \sigma = \varrho, && \varrho = \pm 1, \\ &2) \quad \sigma = \varepsilon\varrho, && \varrho = \pm \varepsilon^2, \\ &3) \quad \sigma = \varepsilon^2\varrho, && \varrho = \pm \varepsilon, \end{aligned}$$

da die Werthe $\varrho = \pm i \cdot \varepsilon^\nu$ nach den Erörterungen des § 1 ausgeschlossen sind.

Man findet demnach alle anderen, mit der Substitution S die nämliche Collineation innerhalb der Ebene $z_0 = 0$ liefernden Sub-

*) In der bereits citirten Arbeit Borch. Journ. Bd. 84.

stitutionen von G durch linksseitige Multiplication von S mit folgenden 6 Substitutionen:

$$z_0' = \pm z_0, \quad z_1' = \pm \varepsilon^\nu z_1, \quad z_2' = \pm \varepsilon^\nu z_2, \quad z_3' = \pm \varepsilon^\nu z_3 \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Da diese 6 Substitutionen nun wirklich alle in der Gruppe H enthalten sind, so ist mithin der im Eingang dieses Paragraphen aufgestellte Satz bewiesen.

Wir erledigen im Anschluss hieran die Bestimmung der Ordnung von G. In H sind nach den soeben augestellten Erörterungen 6.216 Substitutionen enthalten. Wir benutzen den schon in der Einleitung erwähnten Umstand, dass die Ebene $z_0 = 0$ durch die Gruppe G in 40 verschiedene Lagen übergeführt wird. Dann folgt:

Die Gruppe G enthält $6 \cdot 216 \cdot 40 = 51840$ *Substitutionen.*

§ 3.

Formensystem der Hesse'schen Gruppe.

Die fünf erzeugenden Collineationen der Hesse'schen Gruppe H' lauten folgendermassen:

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l|c|c|c|c|c} & A & B & C & D & E \\ \hline \rho z_1' = & z_2 & z_1 & z_1 & z_1 & z_1 + z_2 + z_3 \\ \rho z_2' = & z_3 & z_3 & \varepsilon z_2 & \varepsilon z_2 & z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 \\ \rho z_3' = & z_1 & z_2 & \varepsilon^2 z_3 & \varepsilon z_3 & z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3. \end{array}\right.$$

Aus A und B folgt, dass jede bei H' invariant bleibende Form — worunter wir in diesem Paragraphen auch Formen verstehen wollen, welche sich um einen vortretenden numerischen Factor ändern — eine symmetrische oder alternirende Function von z_1, z_2, z_3 sein muss.

Es können daher in den invarianten Formen von H' nur Terme von folgender Beschaffenheit auftreten:

$$\sum_i z_i^\alpha, \quad \sum_{i,k} \pm z_i^\alpha z_k^\beta, \quad \sum_{i,k,l} \pm z_i^\alpha z_k^\beta z_l^\gamma.$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass die beiden ersten Ausdrücke bei Anwendung von C und D in (4) nur dann invariant bleiben können, wenn α sowohl als β durch 3 theilbar sind. Zieht man aus

$$\sum \pm z_i^\alpha z_k^\beta z_l^\gamma$$

in geeigneter Potenz das Product $z_1 z_2 z_3$ heraus, so restirt einer der beiden ersten Ausdrücke. Hieraus folgt:

Jede invariante Form Φ ist eine ganze Function von z_1^3, z_2^3, z_3^3 und dem Product $z_1 z_2 z_3$.

Man hat also:

$$\Phi = G_1 + z_1 z_2 z_3\, G_2 + z_1^2 z_2^2 z_3^2\, G_3,$$

wo die drei Functionen G nur von den dritten Potenzen der Variabelen abhängen. Da aber Φ symmetrisch oder alternirend sein soll, so müssen die G einzeln dieselbe Eigenschaft haben, also ausdrückbar sein durch die elementaren symmetrischen Functionen und das Differenzenproduct von z_1^3, z_2^3, z_3^3. Führen wir daher folgende Bezeichnung ein:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= \varphi, \\ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 &= \psi, \\ z_1^3 z_2^3 + z_2^3 z_3^3 + z_3^3 z_1^3 &= \chi, \\ (z_1^3 - z_2^3)(z_2^3 - z_3^3)(z_3^3 - z_1^3) &= C_9, \end{aligned} \right.$$

so folgt:

Jede invariante Form der Hesse'schen Gruppe ist eine ganze Function von φ, ψ, χ und C_9.

Wir constatiren jetzt die Wirkung der Substitutionen (4) auf diese Functionen (5).

Dabei zeigt sich, dass sämmtliche Formen (5) bei A, B, C invariant bleiben, C_9 sogar auch bei D und E:

C_9 ist mithin bereits eine invariante Form der Hesse'schen Gruppe.

Die übrigen Formen substituiren sich bei D und E folgendermassen:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &D \left\{ \begin{aligned} \varrho\varphi' &= \varphi, \\ \varrho\psi' &= \varepsilon\psi, \\ \varrho^2\chi' &= \varepsilon^2\chi. \end{aligned} \right. \\ &E \left\{ \begin{aligned} \varrho\varphi' &= \frac{i}{\sqrt{27}}(\psi - 3\varphi), \\ \varrho\psi' &= \frac{i}{\sqrt{3}}(\psi + 6\varphi), \\ \varrho^2\chi' &= \chi - \frac{1}{9}(\psi^2 + 3\varphi\psi + 9\varphi^2). \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Wir verschaffen uns nun weitere invariante Formen, indem wir aus φ, ψ, χ mit unbestimmten Coefficienten in allgemeinster Weise ganze homogene Functionen der z ansetzen, der Reihe nach von den Graden 3, 6, 9, 12, und die Coefficienten dann durch die Forderung der Invarianz der Formen den Substitutionen (6) gegenüber bestimmen. Eine leichte Rechnung ergiebt, *dass eine invariante C_3 nicht existirt, und dass für die höheren Grade folgende die einzigen invarianten Formen sind:*

$$(7)\qquad \begin{cases} C_6 = \psi^2 - 12\chi, \\ C_{12} = \psi(\psi^3 + 216\varphi^3), \\ \mathfrak{C}_{12} = \varphi(27\varphi^3 - \psi^3). \end{cases}$$

C_{12} kann dabei auch durch eine lineare Verbindung von C_{12} und C_6^2 ersetzt werden (nicht aber $\mathfrak{C}_{12}$, wie die Anwendung der Substitution D zeigt).

Von Wichtigkeit ist nun, dass, wie aus (6) hervorgeht, *sich φ und ψ linear unter sich, also binär, substituiren.* Indem wir Covarianten der binären Formen C_{12} und $\mathfrak{C}_{12}$ in Bezug auf φ und ψ als Variabele bilden, bekommen wir neue invariante Formen der Hesse'schen Gruppe. Hierbei zeigt sich, dass, von Zahlenfactoren abgesehen, jede der beiden Formen C_{12} und $\mathfrak{C}_{12}$ die Hesse'sche Form der andern ist. Als einzig neue Covariante tritt dann nur noch die Functionaldeterminante beider Formen auf, und diese lautet:

$$(8)\qquad C_{18} = \psi^6 - 20\cdot 27\varphi^3\psi^3 - 8\cdot 27\cdot 27\varphi^6.$$

Weitere invariante Formen zu bilden haben wir aber jetzt nicht mehr nöthig, denn wir sind nunmehr im Stande, folgenden Satz zu beweisen:

Jede bei den Substitutionen der Hesse'schen Gruppe (4) *bis auf einen Factor invariante Form lässt sich als ganze Function von C_6, C_9, C_{12}, $\mathfrak{C}_{12}$, C_{18} darstellen; folgende Formen bilden also das volle Formensystem der Hesse'schen Gruppe:*

$$(9)\ \begin{cases} C_6 = z_1^6 + z_2^6 + z_3^6 - 10(z_1^3z_2^3 + z_2^3z_3^3 + z_3^3z_1^3), \\ C_9 = (z_1^3 - z_2^3)(z_2^3 - z_3^3)(z_3^3 - z_1^3), \\ C_{12} = (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3)[(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3)^3 + 216z_1^3z_2^3z_3^3], \\ \mathfrak{C}_{12} = z_1z_2z_3[27z_1^3z_2^3z_3^3 - (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3)^3], \\ C_{18} = (z_1^3+z_2^3+z_3^3)^6 - 540z_1^3z_2^3z_3^3(z_1^3+z_2^3+z_3^3)^3 - 5832z_1^6z_2^6z_3^6. \end{cases}$$

Zwischen diesen 5 Formen müssen selbstverständlich zwei Relationen existiren. Dieselben sind leicht aufzustellen und lauten:

$$(10)\qquad \begin{cases} 432C_9^2 = C_6^3 - 3C_6C_{12} + 2C_{18}, \\ 1728\mathfrak{C}_{12}^3 = C_{18}^2 - C_{12}^3. \end{cases}$$

§ 4.

Beweis der Vollständigkeit des Formensystems für die Hesse'sche Gruppe.

Sei Φ eine ganz beliebige, für die Hesse'sche Gruppe invariante ternäre Form. Dann wissen wir von derselben, wie in § 3 bewiesen, dass sie eine ganze Function der Formen (5): φ, ψ, χ, C_9 sein muss, und zwar ist sie entweder Function von φ, ψ, χ allein (symmetrisch in den z), oder das Product von C_9 in eine Function von φ, ψ, χ (alternirend in den z). Wir können uns demnach auf ganze Functionen von φ, ψ, χ beschränken.

Ich wende nun folgendes Recursionsverfahren an: Sei χ^μ die höchste in Φ vorkommende Potenz von χ, dann muss der Factor von χ^μ für sich eine nur von φ und ψ abhängende *invariante* Form sein, die wir $g_0(\varphi, \psi)$ nennen wollen. Denken wir uns nämlich auf Φ die Substitutionen D und E (6) angewandt, so kann, wie ein Anblick dieser Substitutionen lehrt, der Term χ^μ nur aus dem Term χ^μ selber hervorgehen.

Ich bilde nun den Ausdruck:

$$\Phi - \frac{C_6^\mu}{(-12)^\mu} \cdot g_0(\varphi, \psi).$$

Dieser Ausdruck ist wiederum eine invariante Form, aus welcher sich aber der Term χ^μ herausgehoben hat, so dass der Exponent der höchsten darin vorkommenden Potenz von χ mindestens um eine Einheit kleiner ist als μ. Auf diese Form wende ich nun dasselbe Verfahren an, und so fort. Schliesslich muss ich auf einen invarianten Ausdruck $g_\mu(\varphi, \psi)$ kommen, in welchem χ gar nicht mehr vorkommt. Hieraus ergiebt sich folgende Darstellung von Φ:

$$\Phi = \frac{C_6^\mu}{(-12)^\mu} g_0(\varphi, \psi) + \frac{C_6^{\mu-1}}{(-12)^{\mu-1}} g_1(\varphi, \psi) + \cdots$$
$$+ \frac{C_6}{(-12)} g_{\mu-1}(\varphi, \psi) + g_\mu(\varphi, \psi),$$

wo sämmtliche Functionen g_k invariante Formen für die Hesse'sche Gruppe sind (die auch Null sein können).

Nun ist nur noch nachzuweisen, dass alle diejenigen invarianten Formen, welche nur φ und ψ enthalten, sich als ganze Functionen von C_{12}, $\mathfrak{C}_{12}$ und C_{18} darstellen. Zu dem Ende fragen wir, nach welcher binären Gruppe sich die Grössen φ und ψ in (6) linear substituiren.

Da C_{12} und $\mathfrak{C}_{12}$ in Bezug auf φ und ψ vom 4. Grade, und, wie bereits bemerkt, zugleich die niedrigsten von φ und ψ abhängigen invarianten Formen sind, so folgt, *dass die fragliche Gruppe keine andere als die Tetraëdergruppe sein kann**), weil für diese allein als Formen niedrigsten Grades 2 vom 4ten, die eine die Hesse'sche der anderen, und eine vom 6ten Grade (C_{18}), die Functionaldeterminante

*) Vgl. hiermit § 9 Abschn. I der Abhandlung von Herrn Bianchi: „Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung". Math. Ann. Bd. XVII.

beider, existiren. Von der Tetraëdergruppe aber ist bereits bekannt, dass die genannten 3 Formen ihr volles Formensystem ausmachen*).

Hiermit ist der Beweis der Vollständigkeit des Formensystems (9) erbracht.

§ 5.

Invariantentheoretische und geometrische Bedeutung der Formen (9).**)

Da φ und ψ sich binär substituiren, so folgt, dass das syzygetische Büschel der Curven 3^{ter} Ordnung:

$$\varkappa\psi + 6\lambda\varphi = 0 \tag{11}$$

bei Anwendung der Hesse'schen Gruppe in sich selbst übergeht. Die in (9) aufgestellten Formen gewinnen alsdann die Bedeutung *des vollen Systems der Combinanten von* (11) und sind als solche in der Theorie der Curven 3^{ter} Ordnung bereits bekannt.

Sei, um diesen Zusammenhang kurz auseinander zu setzen, f eine ternäre cubische Form, Δ ihre Hesse'sche Covariante, u. zw.

$$\Delta = 6 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \left(f_{i\varkappa} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_\varkappa}\right),$$

S und T ihre Aronhold'schen Invarianten, so erhält man für das Büschel:

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0 \tag{12}$$

diejenigen vier Werthe von $\lambda : \varkappa$, welche die vier in drei gerade Linien zerfallenden Curven des Büschels (die vier Wendedreiecke) ergeben, aus der Gleichung:

$$G(\varkappa, \lambda) = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4 = 0.$$

Das Product der Gleichungen der vier Wendedreiecke ist daher:

$$G(\Delta, -f) = \Delta^4 - S\Delta^2 f^2 + \frac{4}{3}T\Delta f^3 - \frac{1}{12}S^2 f^4 = 0\text{***}). \tag{13}$$

---

*) Klein, Ikosaëder pag. 51.

**) In diesem Paragraphen habe ich mich an die Entwickelungen in den „Vorlesungen über Geometrie“ von Clebsch-Lindemann, Leipzig 1876, gehalten, und dieses Werk im Folgenden kurz mit L. citirt. In der Bezeichnung bin ich nur insofern abgewichen, als ich für die bei L. mit φ und ψ bezeichneten Covarianten die entsprechenden grossen Buchstaben gewählt habe, um Collisionen mit den Bezeichnungen (5) zu vermeiden. Vgl. auch durchgehend die für die Theorie der Combinanten grundlegende Arbeit von Clebsch und Gordan „Ueber cubische ternäre Formen“, Math. Ann. Bd. VI.

***) L. pag. 563, Formel (3).

Die Discriminante der Curve $f = 0$ ist durch den Ausdruck gegeben:

$$R = T^2 - \frac{1}{6} S^3.$$

Indem wir die für die Curve (12) bestehenden Bildungen durch den Index $(\varkappa, \lambda)$ charakterisiren, ist also:

$$R_{\varkappa,\lambda} = T^2_{\varkappa,\lambda} - \frac{1}{6} S^3_{\varkappa,\lambda}.$$

Andererseits besteht die Beziehung*):

(14) $$R_{\varkappa,\lambda} = R \cdot G^3(\varkappa, \lambda).$$

Eine Covariante 6^{ter} Ordnung von f ist mit der Abkürzung: $\Delta_i = \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial z_i}$ durch den Ausdruck dargestellt**):

(15) $$\Phi = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Daneben benutzen wir die von Herrn Brioschi eingeführte Covariante***) 6^{ter} Ordnung, welche Combinanteneigenschaft besitzt:

(16) $$\Psi = -\frac{3}{4} \Phi - \frac{1}{12} T f^2 + \frac{1}{8} S \Delta f.$$

Endlich ergiebt sich als Covariante 9^{ter} Ordnung die (durch 54 dividirte) Functionaldeterminante†) von f, Δ, ψ:

(17) $$\Omega = \frac{1}{54} (f, \Delta, \psi).$$

Zwischen diesen Formen besteht alsdann folgende von Herrn Brioschi††) aufgestellte Gleichung:

(18) $$24^2 \Omega^2 = 384 \Psi^3 - 12 \Psi S_{\Delta,-f} + 2 T_{\Delta,-f}.$$

Nehmen wir nun speciell:

$$f = \psi = z_1{}^3 + z_2{}^3 + z_3{}^3,$$

so wird:

$$\Delta = 6 z_1 z_2 z_3 = 6\varphi, \quad S = 0, \quad T = -6, \quad R = 36,$$

*) L. pag. 566, (7).

**) L. pag. 570.

***) L. pag. 570, (22) und pag. 571, (25). Brioschi, Borch. Journ. Bd. 63, pag. 33.

†) L. pag. 571, (28).

††) L. pag. 640, (42). Brioschi, C. R. 1863, 1e part, pag. 305.

und (13) geht über in:

(19) $$G(\Delta, -f) = 48\,\mathfrak{C}_{12}.$$

$\mathfrak{C}_{12} = 0$ *ist also,* wie auch a priori klar, *die Gleichung der vier Wendedreiecke.*

Die Invarianten $S_{\varkappa,\lambda}$, $T_{\varkappa,\lambda}$, gebildet für die Curve (11), lauten ferner:

(20) $$\begin{cases} S_{\varkappa,\lambda} = 24\lambda(\lambda^3 - \varkappa^3), \\ T_{\varkappa,\lambda} = 6(8\lambda^6 + 20\lambda^3\varkappa^3 - \varkappa^6), \end{cases}$$

und geben, $= 0$ gesetzt, die Bedingung dafür, dass das Doppelverhältniss der vier von einem Punkte der Curve (11) an dieselben gezogenen Tangenten äquianharmonisch, resp. harmonisch ist.*) Wir erhalten demnach folgende Gleichungen für die Producte der vier äquianharmonischen und der sechs harmonischen Curven des Büschels:

$$S_{\Delta,-f} = 0, \quad T_{\Delta,-f} = 0.$$

Wie aus (20) hervorgeht, ist aber:

(21) $$S_{\Delta,-f} = 24\,C_{12}, \quad T_{\Delta,-f} = 48\,C_{18},$$

womit die geometrische Bedeutung von $C_{12} = 0$, $C_{18} = 0$ *gegeben ist.*

Wir erhalten weiter für $f = \psi$ aus (15):

(22) $$\begin{cases} & \Phi = 8\chi \\ \text{aus (16):} & \Psi = \frac{1}{2}C_6 \\ \text{und aus (17):} & \Omega = -6C_9. \end{cases}$$

$C_9 = 0$ stellt, so wie im allgemeinen Falle $\Omega = 0$, die neun harmonischen Polaren der neun Wendepunkte dar.**)

Endlich gehen die Gleichungen (14) und (18) unmittelbar in die beiden Relationen (10) über.

§ 6.

Die Untergruppe Q.

Die aus den Substitutionen A, B, F in (2) erzeugte Untergruppe, die wir Q nennen wollen, bewirkt sämmtliche 24 Vertauschungen der Indices (0, 1, 2, 3) der Variabelen z_i, da den genannten Substitutionen die Vertauschungen (123), (23), (02) entsprechen. Man zeigt aber leicht vermittelst der in § 2 angestellten Betrachtungen, dass sich je zwei dieselbe Vertauschung der Indices bewirkende Substitutionen nur durch simultanen Zeichenwechsel sämmtlicher z unterscheiden können.

*) L. pag. 579 und 580.

**) L. pag. 578.

Andererseits ist die Substitution (3) auch wirklich in Q enthalten, nämlich BFA^2FAF.*) Also enthält Q 48 Substitutionen.

Es können keine invarianten Formen existiren, die bei der Substitution (3) ihr Zeichen wechseln. Dann würden nämlich diejenigen 24 Substitutionen, welche die Form absolut invariant lassen, eine in Q enthaltene (ausgezeichnete) Untergruppe bilden müssen. Diese Untergruppe müsste auch sämmtliche Vertauschungen der Indices bewirken können, u. A. die der Vierergruppe: (01), (23), (01)(23). Dies ist aber nach § 1 unmöglich.

Der Grad einer jeden bis auf einen Factor invarianten Form muss daher gerade sein.

Wohl aber können Formen existiren, die bei B und dann auch gleichzeitig bei F ihr Zeichen wechseln, überhaupt also bei allen Substitutionen, welche eine Permutation der Indices bewirken, die aus einer ungeraden Anzahl von einfachen Vertauschungen zusammengesetzt ist.

Wegen der Symmetrie der Indices sind nun in allen bei Q invarianten Formen nur folgende Terme möglich:

$$\text{I:}\ \sum \pm z_i^\alpha,\quad \text{II:}\ \sum \pm z_i^\alpha z_k^\beta,\quad \text{III:}\ \sum \pm z_i^\alpha z_k^\beta z_l^\gamma,$$
$$\text{IV:}\ \sum \pm z_i^\alpha z_k^\beta z_l^\gamma z_m^\delta,$$

und es kommt jetzt vor allen Dingen darauf an, den Wechsel der Vorzeichen in diesen vier Ausdrücken zu bestimmen.

Es folgt sofort, dass in I der Exponent α gerade sein muss, so dass man erhält:

$$I = \sum z_i^{2\lambda} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Was die Ausdrücke von der Form II angeht, so suchen wir zunächst solche Formen, die bei Q absolut invariant bleiben. Dann muss wegen der Substitution A, B das von z_0 unabhängige Glied symmetrisch in z_1, z_2, z_3 sein. Diejenigen Terme aber, welche ungerade Potenzen von z_0 enthalten, müssen wegen B einen in $z_1\, z_2\, z_3$ alternirenden Factor enthalten, müssen also mit dem Differenzenproduct:

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}$$

multiplicirt sein. Das geht aber nicht, weil mit z_0 nur ein- (nicht

*) Hieraus folgt, dass B überhaupt ausdrückbar ist durch A und F. In den Formeln (2) konnte daher B als erzeugende Substitution wegbleiben. Ich habe sie indess beibehalten, weil sie für die Hesse'sche Untergruppe unentbehrlich ist.

zwei-)gliedrige Terme laut Annahme multiplicirt sein können. Folglich können keine ungeraden Potenzen von z_0, also überhaupt keine ungeraden Potenzen in II vorkommen.

Ein absolut invarianter Ausdruck II kann also nur die Form haben:

$$IIa = \sum z_i^{2\lambda} z_k^{2\mu} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{23}$$

Diejenigen Ausdrücke II, welche bei B ihr Zeichen wechseln, müssen als das von z_0 unabhängige Glied eine alternirende Function von z_1, z_2, z_3 haben. Deren allgemeine Form für zweigliedrige Terme ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1^\alpha & z_1^\beta \\ 1 & z_2^\alpha & z_2^\beta \\ 1 & z_3^\alpha & z_3^\beta \end{vmatrix}.$$

Gerade Potenzen von z_0 können nicht vorkommen, weil die betreffenden Terme wieder das Differenzenproduct zum Factor haben müssten, also dreigliedrig ausfallen würden. Also können auch in obiger Determinante nur ungerade Potenzen vorkommen. Man erhält aus derselben folgende Form für II:

$$IIb = \begin{vmatrix} 1 & z_1^\alpha & z_1^\beta \\ 1 & z_2^\alpha & z_2^\beta \\ 1 & z_3^\alpha & z_3^\beta \end{vmatrix} - z_0^\alpha \sum z_i^\beta + z_0^\beta \sum z_i^\alpha \cdot \left(\begin{matrix} i = 1, 2, 3;\ \alpha \text{ u. } \beta \\ \text{ungerade und v.} \\ \text{einand. versch.} \end{matrix}\right). \tag{23a}$$

Zugleich überzeugt man sich, dass diese Form bei A absolut invariant bleibt, bei B und F ihr Zeichen wechselt.

Wir wenden uns jetzt zu den dreigliedrigen Termen. Bei diesen müssen entweder sämmtliche drei Exponenten α, β, γ gerade sein, oder einer gerade, zwei ungerade. Durch ganz ähnliche Ueberlegungen, wie wir sie für die Ausdrücke II angestellt haben, ergeben sich jetzt für die Ausdrücke III folgende Möglichkeiten:

$$IIIa = \sum z_i^{2\alpha} z_k^{2\beta} z_l^{2\gamma} \quad (i, k, l = 0, 1, 2, 3),$$

$$IIIb = \sum z_i^{2\alpha} z_k^\beta z_l^\gamma - z_0^{2\alpha} \cdot \sum z_i^\beta z_k^\gamma + z_0^\beta \begin{vmatrix} 1 & z_1^\gamma & z_1^{2\alpha} \\ 1 & z_2^\gamma & z_2^{2\alpha} \\ 1 & z_3^\gamma & z_3^{2\alpha} \end{vmatrix} \tag{24}$$

$$+ z_0^\gamma \begin{vmatrix} 1 & z_1^\beta & z_1^{2\alpha} \\ 1 & z_2^\beta & z_2^{2\alpha} \\ 1 & z_3^\beta & z_3^{2\alpha} \end{vmatrix}$$

$(i, k, l = 1, 2, 3;\ \beta$ und γ ungerade$)$.

$$(25)\qquad IIIc = \sum z_i^{2\alpha} z_k^\beta z_l^\beta - z_0^{2\alpha} \sum z_i^\beta z_k^\beta + z_0^\beta \begin{vmatrix} 1 & z_1^\beta & z_1^{2\alpha} \\ 1 & z_2^\beta & z_2^{2\alpha} \\ 1 & z_3^\beta & z_3^{2\alpha} \end{vmatrix},$$

$(i, k, l = 1, 2, 3;\ \beta$ ungerade$)$,

$$(26)\qquad IIId = \begin{vmatrix} z_1^{2\alpha} & z_1^\beta & z_1^\gamma \\ z_2^{2\alpha} & z_2^\beta & z_2^\gamma \\ z_3^{2\alpha} & z_3^\beta & z_3^\gamma \end{vmatrix} + z_0^{2\alpha} \begin{vmatrix} 1 & z_1^\beta & z_1^\gamma \\ 1 & z_2^\beta & z_2^\gamma \\ 1 & z_3^\beta & z_3^\gamma \end{vmatrix} - z_0^\beta \sum z_i^{2\alpha} z_k^\gamma + z_0^\gamma \sum z_i^{2\alpha} z_k^\beta,$$

$(i, k = 1, 2, 3;\ \beta$ und γ ungerade$)$.

Von diesen Formen sind alle absolut invariant bis auf IIb und $IIId$, welche bei B etc. ihr Zeichen wechseln.

Die Ausdrücke IV erledigen sich nun von selbst. Man ziehe das Product $z_0\, z_1\, z_2\, z_3$ in geeigneter Potenz heraus, so restirt als Factor einer der bereits behandelten Ausdrücke. Zur Beurtheilung der absoluten Invarianz von IV beachte man alsdann, dass das Product $z_0\, z_1\, z_2\, z_3$ bei B etc. sein Zeichen wechselt.

§ 7.

Aufstellung der Leitterme für die invarianten Formen der Gruppe G.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, an die Aufstellung des vollen Formensystems der quaternären Gruppe G heranzugehen.

Es ist zunächst nicht schwer, die Gleichungen derjenigen 40 Ebenen aufzustellen, welche durch die Substitutionen von G aus $z_0 = 0$ hervorgehen.*) Multiplicirt man die linken Seiten derselben, so erhält man eine invariante Form 40ten Grades, die, wie sich zeigt, sich nicht nur bis auf einen Factor, sondern absolut invariant verhält.

Um Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir verabreden, fortan unter einer der Gruppe G gegenüber invarianten quaternären Form stets eine *absolut invariante* Form zu verstehen, und werden eine solche kurz mit dem Buchstaben Φ bezeichnen.

Alsdann haben wir als erste invariante Form Φ die genannte F_{40} zu verzeichnen:

$$(27)\qquad \begin{aligned} F_{40} = z_0 z_1 z_2 z_3 & [(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3)^3 - 27 z_1^3 z_2^3 z_3^3] \\ & \cdot [(z_0^3 - z_1^3 + z_3^3)^3 + 27 z_0^3 z_1^3 z_3^3] \\ & \cdot [(z_0^3 + z_1^3 - z_2^3)^3 + 27 z_0^3 z_1^3 z_2^3] \\ & \cdot [(z_0^3 + z_2^3 - z_3^3)^3 + 27 z_0^3 z_2^3 z_3^3]. \end{aligned}$$

*) Vgl. Witting, Diss. pag. 41, (38).

Aus der Existenz der in G enthaltenen Untergruppe H folgt nun sofort, *dass jede invariante Form Φ eine ganze Function sein muss von:*

$$z_0, C_6, C_9, C_{12}, \mathfrak{C}_{12}, C_{18},$$

da diese Formen (z_0 als Form mit eingeschlossen) das volle Formensystem von H ausmachen. Wir haben also:

$$\Phi = A_0 + z_0 A_1 + z_0^2 A_2 + \cdots, \tag{28}$$

wo die A_i ganze Functionen von $C_6, \ldots, C_{18}$ sind. So ist beispielsweise:

$$F_{40} = - z_0 \mathfrak{C}_{12} C_9^3 + \cdots + 3 z_0^{22} \mathfrak{C}_{12} C_6 - z_0^{28} \mathfrak{C}_{12}.$$

Verschwindet nun eine invariante Form Φ identisch für $z_0 = 0$, so folgt, dass dieselbe F_{40} in irgend einer Potenz als Factor enthalten muss. Alsdann muss der restirende Factor wiederum eine invariante Form sein. Wir haben demnach nur noch solche Formen Φ aufzustellen, die für $z_0 = 0$ nicht verschwinden, für welche also in der Entwickelung (28) A_0 von Null verschieden ist.

Wir wollen nun schrittweise eine solche Form Φ zu construiren suchen. Wir beginnen damit, dass wir uns zunächst den von z_0 unabhängigen Term A_0 verschaffen. Diesen Ausdruck wollen wir den *Leitterm* von Φ nennen, weil aus diesem Term die Function Φ in der Weise eindeutig bestimmt ist, dass die Differenz zweier Formen Φ, die in diesem Leitterm übereinstimmen, nothwendigerweise durch eine Potenz von F_{40} theilbar sein muss.

Ein solcher Leitterm muss nun erstens eine ganze Function der Formen (9) der Hesse'schen Gruppe sein, zweitens muss er aus den Formen I, II, III des § 6 zusammengesetzt sein, wenn man in diesen $z_0 = 0$ setzt, weil sowohl die Gruppe H als auch die Gruppe Q in G als Untergruppe enthalten ist.

Wir werden sehen, dass diese beiden Bedingungen zur Bestimmung der Leitterme ausreichend sind.

Aus Formel (23) folgt, dass in den, nur zwei Variabele enthaltenden Gliedern des Leitterms: $\Sigma z_i^\alpha z_k^\beta$ nur gerade Potenzen vorkommen dürfen. Da der Leitterm als ganze Function der Formen (9) auch eine ganze Function von φ, ψ, χ (5) sein muss, so schliessen wir:

Es können in der Darstellung des Leitterms durch die Functionen φ, ψ, χ die Glieder, welche φ nicht als Factor enthalten, die beiden anderen Functionen nur in den Verbindungen χ^2 und $\psi^2 - 2\chi$ enthalten.

Andererseits müssen φ, ψ, χ in einem Leitterm so verbunden sein, dass sie sich zu ganzen Functionen von $C_6, \ldots, C_{18}$ zusammensetzen. Ich übergehe die Einzelheiten der klar vorgezeichneten Rechnung, und schreibe zunächst die möglichen Bildungen an, welche man bis zum 30ten Grade der Variabelen z erhält, indem ich unter (Ψ) den Theil der Ausdrücke verstehe, welcher mit φ multiplicirt ist.

$$(29)\quad \begin{cases} L_{12} = 6[(\psi^2-2\chi)^2+20\chi^2] + \varphi(\Psi), \\ L_{18} = 54(\psi^2-2\chi)[20\chi^2-(\psi^2-2\chi)^2] + \varphi(\Psi), \\ L_{24} = 27\cdot 64\chi^2[(\psi^2-2\chi)^2+8\chi^2] + \varphi(\Psi), \\ L_{30} = 32\cdot 81\chi^2(\psi^2-2\chi)[52\chi^2-(\psi^2-2\chi)^2] + \varphi(\Phi). \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich nun definitiv folgende Leitterme:

$$(30)\quad \begin{cases} L_{12} = C_6^2 + 5C_{12}, \\ L_{18} = C_6^3 - 30C_6C_{12} + 25C_{18}, \\ L_{24} = C_6^4 + 6C_6^2C_{12} - 16C_6C_{18} + 9C_{12}^2, \\ L_{30} = C_6^5 - 19C_6^3C_{12} + 29C_6^2C_{18} - 6C_6C_{12}^2 - 5C_{12}C_{18}; \end{cases}$$

und zwar sind diese bis zum 30ten Grad incl. *die einzig möglichen Leitterme* mit der Massgabe, dass man L_{24} auch durch eine lineare Verbindung von L_{24} und L_{12}^2, L_{30} durch eine solche von L_{30} und $L_{12}L_{18}$ ersetzen kann.

Für unsere invarianten Formen Φ folgt nun hieraus sofort:

Wenn es überhaupt invariante Formen Φ vom 12ten und 18ten Grade giebt, so giebt es für jeden dieser Grade nur eine, und deren Leitterme sind durch L_{12} und L_{18} gegeben. Wenn es dann ferner überhaupt andere invariante Formen Φ vom 24ten und 30ten Grade giebt, als Φ_{12}^2 und $\Phi_{12}\Phi_{18}$, so giebt es unter diesen sicher solche, und zwar auch wieder nur je eine, deren Leitterme L_{24} und L_{30} sind; alle anderen sind lineare Verbindungen dieser mit Φ_{12}^2 resp. $\Phi_{12}\Phi_{18}$.

§ 8.

Berechnung der invarianten Formen für die Gruppe G.

Ich will nun zeigen, wie man aus den Leittermen die volle Form Φ construiren kann. Auch hier ist, ähnlich wie bei der Construction der Leitterme, der leitende Grundgedanke der, dass sich Φ sowohl durch die Formen der Untergruppe H, als auch durch die der Untergruppe Q darstellen lassen muss.

Die durchzuführenden Rechnungen sind nothwendigerweise wegen der Menge der zu bestimmenden Constanten complicirt und zum Theil sehr langwierig. Es sei mir daher gestattet, nur den Gedankengang derselben im Folgenden klar zu legen.

Der erste Schritt ist der, dass man die Leitterme zunächst vollständig als Functionen der z ausrechnet. Die so erhaltenen Formen sind alsdann linear zusammengesetzt aus symmetrischen Functionen von z_1, z_2, z_3, die man aus den Formen I, II, III des § 6 erhält, wenn man in letzteren $z_0 = 0$ setzt. Umgekehrt hat man jetzt eine jede dieser symmetrischen Functionen durch Hinzufügung der z_0 enthaltenden Glieder auf die entsprechenden vollen Formen *I*, *II* und *III* zu ergänzen, was nur in durchaus eindeutiger Weise möglich ist.

Die so resultirende quaternäre Form, die wir Φ^* nennen wollen, kann sich von der vollen Form Φ nur dadurch unterscheiden, dass in ihr die Glieder, welche das Product aller vier Variabelen enthalten, fehlen.

Nun ordne man Φ^* nach steigenden Potenzen von z_0^3; nur solche Potenzen nämlich können auftreten, weil in den Leittermen resp. in C_6, C_{12}, C_{18} die drei Variabelen nur in dritter Potenz vorkommen. Die Coefficienten der Potenzen von z_0^3 sind aber in Φ nach (28) ganze Functionen der ternären Formen $C_6, C_9, \ldots, C_{18}$. Mithin müssen die Coefficienten der Potenzen von z_0^3 in Φ^* mit den entsprechenden invarianten, ternären Formen in den Gliedern, welche 1, 2 und 3 der Variabelen enthalten, übereinstimmen, falls wirklich eine zu dem Leitterm gehörige Form Φ existirt.

Setzt man jetzt aus den ternären Formen $C_6, C_9, \ldots, C_{18}$ in allgemeinster Weise ganze Functionen von den entsprechenden Graden in den z zusammen, so sind diese durch Vergleichung mit den Coefficienten der Potenzen von z_0^3 in Φ^* in durchaus eindeutiger Weise bestimmbar. Man erhält sogar durchgängig eine oder mehrere Bestimmungsgleichungen mehr als nöthig sind. Diese dienen dann, wenn sie mit den anderen vereinbar sind, zur Controle der Rechnung. Anderenfalls würde ihre Unverträglichkeit anzeigen, dass zu dem betreffenden Leitterm keine Form Φ gehört.

Hat man diese Rechnung durchgeführt, so ist Φ bestimmt. Man hat jetzt nur noch aus dem erhaltenen Ausdruck für Φ diejenigen Glieder zusammenzufassen, welche alle vier Variabelen enthalten, also $z_0 z_1 z_2 z_3$ zum Factor haben, und sich nun zu überzeugen, ob sich diese Glieder für sich der Untergruppe Q gegenüber invariant verhalten. Ist dies der Fall, dann ist Φ sicher die zu dem Leitterm gehörige invariante Form, denn aus H und Q setzt sich die ganze Gruppe G zusammen.

Trotz der vielen zu erfüllenden Bedingungen zeigt nun der Erfolg, *dass in der That zu jedem der in* (30) *gegebenen Leitterme eine quaternäre invariante Form gehört.*

Wir erhalten somit vier invariante Formen, die wir mit F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30} bezeichnen. Dabei sind wir sicher, dass bis zum 30ten Grad incl. keine anderen invarianten Formen existiren können, immer mit der Einschränkung, dass an Stelle von F_{24} und F_{30} auch eine lineare Verbindung von F_{24} mit F_{12}^2, resp. F_{30} mit $F_{12}.F_{18}$ treten kann.

Ich lasse jetzt die ausgerechneten Werthe folgen, sowohl als ganze Functionen von z_0, C_6, $C_9, \ldots, C_{18}$ als auch direct in den vier Variabelen z:

$$(31)\begin{cases} F_{12} = 6z_0^{12} + 6\cdot 22C_6z_0^6 + 6\cdot 220C_9z_0^3 + C_6^2 + 5C_{12}, \\ F_{18} = -54z_0^{18} + 17\cdot 54C_6z_0^{12} + 54\cdot 1870C_9z_0^9 \\ \quad + \frac{1}{2}\cdot 17\cdot 27(19C_6^2 - 15C_{12})z_0^6 + 54\cdot 170C_6C_9z_0^3 + C_6^3 \\ \quad - 30C_6C_{12} - 25C_{18}, \\ F_{24} = 1728C_6z_0^{18} - 36\cdot 1728C_9z_0^{15} + 15\cdot 144(7C_{12} + C_6^2)z_0^{12} \\ \quad - 10\cdot 1728C_6C_9z_0^9 + 36(178C_{18} - 135C_6C_{12} + 5C_6^3)z_0^6 \\ \quad + 432(41C_{12} - C_6^2)C_9z_0^3 + C_6^4 + 6C_6^2C_{12} - 16C_6C_{18} + 9C_{12}^2, \\ F_{30} = -2\cdot 6^4C_6z_0^{24} + 312\cdot 6^4C_9z_0^{21} + 216(715C_{12} - 127C_6^2)z_0^{18} \\ \quad + 272\cdot 6^4C_6C_9z_0^{15} + 18(1306C_{18} + 6045C_6C_{12} - 295C_6^3)z_0^{12} \\ \quad + 216(73C_6^2 - 5473C_{12})C_9z_0^9 \\ \quad + \frac{1}{2}\cdot 3(16648C_6C_{18} + 2334C_6^2C_{12} - 20709C_{12}^2 - C_6^4)z_0^6 \\ \quad - 36(1370C_{18} - 657C_6C_{12} + 7C_6^3)C_9z_0^3 + C_6^5 - 19C_6^3C_{12} \\ \quad + 29C_6^2C_{18} - 6C_6C_{12}^2 - 5C_{12}C_{18}. \end{cases}$$

$$(32)\begin{cases} F_{12} = 6\{\Sigma z_i^{12} + 22\Sigma z_i^6z_k^6 + 220\Sigma\pm z_i^6z_k^3z_l^3\}, \\ F_{18} = 54\{-\Sigma z_i^{18} + 17\Sigma z_i^{12}z_k^6 + 170\Sigma\pm z_i^{12}z_k^3z_l^3 \\ \qquad + 1870\Sigma\pm z_i^9z_k^6z_l^3 + 7854\Sigma z_i^6z_k^6z_l^6\}, \\ F_{24} = 1728\{\Sigma z_i^{18}z_k^6 + 10\Sigma\pm z_i^{18}z_k^3z_l^3 - 36\Sigma\pm z_i^{15}z_k^6z_l^3 \\ \qquad + 10\Sigma z_i^{12}z_k^{12} - 10\Sigma\pm z_i^{12}z_k^9z_l^3 + 180\Sigma z_i^{12}z_k^6z_l^6 \\ \qquad - 110\Sigma\pm z_i^9z_k^9z_l^6 + 60\cdot 37z_0^3z_1^3z_2^3z_3^3\Sigma\pm z_i^9z_k^3 \\ \qquad - 11\cdot 36\cdot 37z_0^6z_1^6z_2^6z_3^6\}, \\ F_{30} = 2592\{-\Sigma z_i^{24}z_k^6 - 10\Sigma\pm z_i^{24}z_k^3z_l^3 + 156\Sigma\pm z_i^{21}z_k^6z_l^3 \\ \qquad + 49\Sigma z_i^{18}z_k^{12} - 450\Sigma\pm z_i^{18}z_k^9z_l^3 - 722\Sigma z_i^{18}z_k^6z_l^6 \\ \qquad + 136\Sigma\pm z_i^{15}z_k^{12}z_l^3 + 1496\Sigma\pm z_i^{15}z_k^9z_l^6 \\ \qquad - 1870\Sigma z_i^{12}z_k^{12}z_l^6 - 170\Sigma\pm z_i^{12}z_k^9z_l^9 \\ \qquad + 80\cdot 73z_0^3z_1^3z_2^3z_3^3(2\Sigma\pm z_i^{15}z_k^3 + 17\Sigma\pm z_i^9z_k^6z_l^3) \\ \qquad - 16\cdot 17\cdot 18\cdot 73z_0^6z_1^6z_2^6z_3^6\Sigma z_i^6\}. \end{cases}$$

Zu den Formeln (32) ist dabei Folgendes zu bemerken:

In den Termen $\Sigma\pm z_i^\alpha z_k^\beta$ und $\Sigma\pm z_i^\alpha z_k^\beta z_l^\gamma$ sind die Vorzeichen nach § 6 zu bestimmen. Von zweigliedrigen Termen kommen nur in Betracht $\Sigma\pm z_i^9z_k^3$, mit $z_0^3z_1^3z_2^3z_3^3$ multiplicirt, in F_{24}, und $\Sigma\pm z_i^{15}z_k^3$, ebenfalls mit $z_0^3z_1^3z_2^3z_3^3$ multiplicirt, in F_{30}. Beide Ausdrücke sind von der Form *IIb* (23a). Die dreigliedrigen Terme $\Sigma\pm z_i^\alpha z_k^\beta z_l^\gamma$ sind entweder von der Form *IIIb* (24) oder *IIIc* (25), je nachdem alle drei Exponenten verschieden sind oder nicht. Einzig von der Form *IIId* (26) ist in F_{30} der mit $z_0^3z_1^3z_2^3z_3^3$ multiplicirte Ausdruck $\Sigma\pm z_i^9z_k^6z_l^3$.

§ 9.

Darstellung von F_{40} durch die übrigen Formen. Zwei Covarianten der letzteren.

Wir sind jetzt im Besitz von den fünf invarianten Formen: $F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}, F_{40}$. Da diese Formen nur von den vier Variabelen z abhängen, so muss zwischen denselben mindestens eine Relation existiren. Es handelt sich darum, diese Relation zu ermitteln.

Dieselbe sei von der Form:

$$G(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}, F_{40}) = 0. \tag{33}$$

Setzt man in dieser Gleichung $z_0 = 0$, so verschwindet F_{40} und jede der übrigen Formen geht in den entsprechenden Leitterm $L_{12}, L_{18}, L_{30}, L_{40}$ über. Man erhält somit die Gleichung:

$$G(L_{12}, L_{18}, L_{24}, L_{30}) = 0. \tag{34}$$

Diese identische Relation, die a priori zwischen den *vier* Leittermen bestehen muss, da dieselben nur von den *drei* Grössen C_6, C_{12}, C_{18} abhängen, ist aber ohne Schwierigkeit aufzustellen, indem man aus den Formeln (30), als Gleichungen angesehen, die drei Grössen C_6, C_{12}, C_{18} eliminirt. Man erhält aus den ersten beiden Gleichungen (30) C_{12} und C_{18} als ganze Functionen von C_6. Diese Werthe hat man in die dritte und vierte Gleichung einzutragen, und aus diesen zwei Gleichungen C_6 zu eliminiren. Sondert man dann aus der Resultantengleichung die nicht identisch verschwindenden Factoren ab, so erhält man die gesuchte Gleichung:

$$0 = R(L_{12}, L_{18}, L_{24}, L_{30}), \tag{35}$$

wo die rechte Seite eine homogene ganze Function der z_1, z_2, z_3 vom 120^{ten} Grade darstellt.

Ich ersetze nun in der rechten Seite dieser Gleichung jeden der Leitterme durch die entsprechende Form $F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}$. Alsdann ergiebt sich eine quaternäre Form vom 120^{ten} Grade, die wir mit $R(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30})$ bezeichnen wollen. Es ist dies die weiter unten in Formel (38) aufgestellte Determinante.

Durch Einsetzen eines speciellen Werthsystems weist man nach, *dass diese Form R nicht identisch verschwindet*, und nun kann man folgendermassen schliessen:

Da R eine *nicht identisch verschwindende* Form ist, welche zu Folge von (35) für $z_0 = 0$ verschwindet, so muss sie z_0, und da z_0 in $F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}$ nur als z_0^3 vorkommt, z_0^3 zum Factor haben. Nun ist aber R eine *invariante* Form, weil aus $F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}$ zusammengesetzt, also muss sie F_{40}^3 zum Factor haben, und da sie endlich vom 120ten Grade ist, *so kann sie sich von F_{40}^3 nur um einen Zahlenfactor unterscheiden.* Mithin lautet die Gleichung (33):

$$\text{Const.}\, F_{40}^3 = R(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}). \tag{36}$$

Für die Constante ergiebt sich der Werth:

$$\text{Const.} = 2^{28} \cdot 3^{15} \cdot 5^{15},$$

und die gesuchte Relation zwischen F_{40} und den übrigen Formen lautet nunmehr definitiv, unter Zuhülfenahme der Abkürzungen:

$$4\Phi_{24} = 25F_{24} - 9F_{12}^2,$$
$$6\Phi_{30} = 25F_{30} - F_{12}F_{18},$$

folgendermassen:

$$2^{28} \cdot 3^{15} \cdot 5^{15} \cdot F_{40}^3 = \tag{37}$$

$$= \begin{vmatrix} \Phi_{30}, & 2\Phi_{24}^2, & F_{18}\Phi_{24}, & F_{12}\Phi_{24} \\ 2\Phi_{24}, & 27F_{12}\Phi_{30} - 11F_{18}\Phi_{24}, & 3F_{12}\Phi_{24} - 4F_{18}^2, & 3\Phi_{30} - 4F_{12}F_{18} \\ F_{18}, & 3F_{12}\Phi_{24} - 4F_{18}^2, & 13F_{12}F_{18} - 3\Phi_{30}, & 9F_{12}^2 - 2\Phi_{24} \\ F_{12}, & 3\Phi_{30} - 4F_{12}F_{18}, & 9F_{12}^2 - 2\Phi_{24}, & F_{18} \end{vmatrix}.$$

Ich will bei dieser Gelegenheit noch zwei Covarianten unserer Formen aufstellen.

Bildet man zunächst von F_{12} die *Hesse'sche Determinante*

$$H(F_{12}) = \left| \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial z_i \partial z_k} \right|,$$

so besitzen sämmtliche Glieder $\frac{\partial^2 F}{\partial z_0 \partial z_i}$ der ersten Zeile den Factor z_0, weil z_0 nur als z_0^3 in F_{12} vorkommt. Da ferner $H(F_{12})$ vom 40ten Grade ist, und als Covariante einer invarianten Form ebenfalls invariant sein muss, so muss sie bis auf einen Zahlenfactor mit F_{40} übereinstimmen. Man findet:

$$H(F_{12}) = 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 11^4 \cdot F_{40}. \tag{38}$$

Durch eine ganz analoge Ueberlegung folgt, dass die *Functionaldeterminante* $(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}) = \left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|$, da sämmtliche Glieder einer Zeile $\frac{\partial F_{12}}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial F_{30}}{\partial z_0}$ den Factor z_0^2 besitzen, mit F_{40}^2 übereinstimmen muss. *Dieselbe verschwindet nicht identisch*, und es ergiebt sich:

$$(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}) = 2^{26} \cdot 3^{15} \cdot 5^6 \cdot F_{40}^2. \tag{39}$$

§ 10.

Beweis der Vollständigkeit des Formensystems für die Gruppe G.

Ich will jetzt nachweisen, dass die aufgestellten fünf invarianten Formen das volle Formensystem der Gruppe G bilden, d. h. dass jede bei den Substitutionen von G absolut ungeändert bleibende Form sich als ganze Function der genannten Formen darstellen lässt.

Zu dem Ende stelle ich folgende Gleichungen auf:

$$F_{12} = a, \; F_{18} = b, \; F_{24} = c, \; F_{30} = d, \tag{40}$$

wo ich unter a, b, c, d beliebige, aber feste Werthe verstehe. Dass man diese vier Werthe beliebig wählen darf, folgt aus dem in Formel (39) bereits constatirten Nichtverschwinden der Functionaldeterminante.

Ich zeige zuerst, dass die Gleichungen (40) für ein endliches Werthsystem a, b, c, d nicht unendlich grosse Werthe der z ergeben können.

Angenommen nämlich, die Gleichungen würden erfüllt für unendlich grosse Werthe einer oder mehrerer der vier Grössen z_i, dann müssten diejenigen Terme der linken Seiten der Gleichungen (40), welche nur diese Grössen z_i enthalten, für nicht identisch verschwindende Argumente verschwinden. Es müssten z. B., wenn z_0 und z_1 gleichzeitig unendlich grosse Werthe zuliessen, z_0 und z_1 sich so bestimmen lassen, dass $F_{12}, \ldots, F_{30}$ verschwinden, wenn man in ihnen z_2 und z_3 gleich Null setzt. Allgemein können wir sagen: Es müsste möglich sein, die Gleichungen:

$$F_{12} = 0, \; F_{18} = 0, \; F_{24} = 0, \; F_{30} = 0 \tag{41}$$

zu erfüllen, ohne dass sämmtliche Grössen z_0, z_1, z_2, z_3 gleichzeitig verschwinden. Ein Werthsystem der z nun, welches die Gleichungen (41) erfüllt, müsste gleichzeitig auch der Gleichung $F_{40} = 0$ genügen, weil F_{40}^3 nach (37) eine ganze Function von $F_{12}, \ldots, F_{30}$ ist. Es müsste demnach, da F_{40} nach (27) als ein Product von 40 Linearfactoren erscheint, durch das genannte Werthsystem der z mindestens einer dieser Factoren verschwinden. Ich nehme zuerst an, einer dieser verschwindenden Factoren sei z_0. Setze ich dann in (41) $z_0 = 0$, so erhalte ich folgende Gleichungen:

$$L_{12} = 0, \; L_{18} = 0, \; L_{24} = 0, \; L_{30} = 0. \quad \text{(vgl. Formel (30))}$$

Hieraus folgt sofort:

$$C_6 = 0, \; C_{12} = 0, \; C_{18} = 0. \quad \text{(vgl. Formel (7) und (8))}$$

Diese Gleichungen sind aber wieder nicht anders zu erfüllen, als durch:

$$\varphi = 0, \; \psi = 0, \; \chi = 0, \quad \text{(vgl. Formel (5))}$$

woraus sich endlich ergiebt:

$$z_1 = 0, \; z_2 = 0, \; z_3 = 0.$$

Ist also für irgend ein die Gleichungen (41) erfüllendes Werthsystem $z_0 = 0$, so heisst dasselbe:

$$z_0 = 0, \; z_1 = 0, \; z_2 = 0, \; z_3 = 0.$$

Sei jetzt irgend ein anderer Linearfactor von F_{40}, den wir z_0' nennen wollen, gleich Null, so führe ich die soeben für den Fall $z_0 = 0$ angestellte Betrachtung in der Weise durch, dass ich auf alle dabei auftretenden Gleichungen und Formeln diejenige Substitution von G anwende, welche z_0 in z_0' überführt. Ich komme dann schliesslich auf vier Gleichungen:

$$z_0' = 0, \; z_1' = 0, \; z_2' = 0, \; z_3' = 0,$$

in welchen die linken Seiten lineare Verbindungen von z_0, z_1, z_2, z_3 sind. Diese Gleichungen stellen eins der 40*) Tetraeder dar, welches durch eine in G enthaltene Collineation aus dem Coordinatentetraeder hervorgegangen ist. Dieselben sind wiederum nicht anders zu befriedigen, als durch:

$$z_0 = 0, \; z_1 = 0, \; z_2 = 0, \; z_3 = 0.$$

Also folgt, dass die Gleichungen (41) keine andere Lösung gemeinsam haben, als $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$. Hiermit ist der Satz bewiesen:

Einem endlichen Werthsystem der Grössen a, b, c, d entspricht in den Gleichungen (40) *immer nur ein endliches Werthsystem* z_0, z_1, z_2, z_3.

Ich beweise ferner, dass, wenn eine sogleich anzugebende Bedingung *nicht* erfüllt ist, die Gleichungen (40) weder unendlich viele Lösungen besitzen, noch dass irgend zwei Lösungen derselben einander gleich sein können. Für den ersten Fall nämlich müssten die unendlich vielen Lösungen ein oder mehrere Continua bilden. Hierfür, sowie für den zweiten Fall, in welchem zwei verschiedene Lösungen in einen Punkt zusammenrücken, muss es möglich sein, Werthe von z_0, z_1, z_2, z_3 und von den Differentialen dz_0, dz_1, dz_2, dz_3 anzugeben, für welche die vier Gleichungen bestehen:

$$\sum \frac{\partial F_{12}}{\partial z_i} dz_i = 0, \quad \sum \frac{\partial F_{18}}{\partial z_i} dz_i = 0, \quad \sum \frac{\partial F_{24}}{\partial z_i} dz_i = 0,$$
$$\sum \frac{\partial F_{30}}{\partial z_i} dz_i = 0.$$

Hieraus würde folgen, dass die Functionaldeterminante $(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30})$ für die genannten Werthsysteme der z verschwinden müsste. Diese Functionaldeterminante ist aber nach (39) bis auf einen Factor gleich

*) Siehe Witting, Dissertation, pag. 43.

F_{40}^2, und andererseits ist F_{40}^3 nach (37) gleich einer ganzen Function von $F_{12}, \ldots, F_{30}$, also von a, b, c, d, die wir kurz mit

$$G(a, b, c, d)$$

bezeichnen wollen.

Ist also $G(a, b, c, d)$ *von Null verschieden* — (dass dieser Ausdruck nicht identisch Null ist, ist in § 9 bereits bewiesen) — *so können in den Gleichungen* (40) *weder unendlich viele Lösungen auftreten, noch auch können irgend zwei Lösungen zusammenfallen.*

Sei jetzt (z_0, z_1, z_2, z_3) ein bestimmtes Lösungssystem der Gleichungen (40), so erhält man durch Anwendung der N Substitutionen der Gruppe G aus diesem sofort N Lösungssysteme ($N = 51840$), weil für die genannten Substitutionen die Formen $F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}$ ungeändert bleiben. Unter diesen Substitutionen ist die folgende nicht vorhanden:

$$z_0' = \varepsilon z_0, \; z_1' = \varepsilon z_1, \; z_2' = \varepsilon z_2, \; z_3' = \varepsilon z_3, \tag{42}$$

da ihre Determinante von $+1$ verschieden ist. Andererseits ist aber $(\varepsilon z_0, \varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \varepsilon z_3)$ auch ein Lösungssystem von (40), wenn (z_0, z_1, z_2, z_3) ein solches ist, weil die Variabelen z in den Formen $F_{12}, \ldots, F_{30}$ nur als z^3 vorkommen.

Man erhält demnach $3N$ *verschiedene Lösungssysteme der Gleichungen* (40) *aus einem, wenn man auf dieses die* N *Substitutionen der Gruppe* G, *und alsdann auf jede so erhaltene Lösung die Substitution* (42) *einmal und zweimal anwendet.*

$3N = 3 . 51840$ ist nun aber gleich der Anzahl der nach dem Bézout'schen Theorem möglichen Lösungen der Gleichungen (40), nämlich $= 12 . 18 . 24 . 30$, also können wir, das Vorhergehende zusammenfassend, folgenden Satz aussprechen:

Werden den Constanten a, b, c, d *endliche Werthe von der Beschaffenheit beigelegt, dass die Gleichung* $G(a, b, c, d) = 0$ *nicht erfüllt ist, so besitzen die Gleichungen:*

$$F_{12} = a, \; F_{18} = b, \; F_{24} = c, \; F_{30} = d$$

$3 . 51840$ *endliche Lösungen, welche alle von einander verschieden sind.*

Sei nun Φ irgend eine beliebige, homogene, ganze Function der vier Variabelen z, so erhält man durch Elimination der z aus den Gleichungen (40) und dem Ausdruck für Φ eine algebraische Gleichung für Φ. Der Grad dieser Gleichung in Φ ist sicher nicht grösser als die Anzahl der Lösungssysteme (z_0, z_1, z_2, z_3) der Gleichungen (40) und im Allgemeinen gleich dieser Anzahl. Man kann sich nämlich die Elimination der z in der Weise vorgenommen denken, dass man die $3N$ Lösungssysteme von (40) der Reihe nach in Φ einträgt, und aus den so erhaltenen Ausdrücken $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{3N-1}$ die Gleichung

$$(\Phi - \Phi_0)(\Phi - \Phi_1) \cdots (\Phi - \Phi_{3N-1}) = 0$$

bildet, deren Coefficienten dann aus evidenten Gründen rational in a, b, c, d sein müssen.

Ist nun aber Φ eine für die Substitutionen von G *invariante* Form, dann werden von den 3N Werthen $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{3N-1}$ immer je N einander gleich sein, nämlich diejenigen, welche durch die Substitutionen von G auseinander hervorgehen, und *die Gleichung, welche* Φ *mit* a, b, c, d *verbindet, reducirt sich demnach auf den dritten Grad.**) Da aber Φ als homogene Function der z vorausgesetzt ist, so lauten die Wurzeln dieser Gleichung, falls der Grad von Φ in den z nicht durch 3 theilbar ist:

$$\Phi, \ \varepsilon\Phi, \ \varepsilon^2\Phi,$$

und die Gleichung hat demnach die Form:

$$\Phi^3 = \text{Rat.}\,(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}),$$

indem hier für die a, b, c, d wieder die Ausdrücke F geschrieben sind. Ein Beispiel hierfür liefert die Form F_{40} in der Gleichung (37). Ist endlich der Grad von Φ durch 3 theilbar, so sind auch diese drei Wurzeln einander gleich, und es restirt eine Gleichung *ersten* Grades, also:

$$\Phi = \text{Rat.}\,(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}).$$

Ist der Grad von Φ nicht durch 3 theilbar, so betrachte man die Function $\Phi : F_{40}$ oder $\Phi : F_{40}^2$, je nachdem der Grad von $\Phi \equiv 1$, oder $\equiv 2$ (mod. 3) ist. Für diese Functionen ergiebt sich dann ebenfalls, dass sie durch eine Gleichung ersten Grades mit a, b, c, d verknüpft sein müssen, weil die Einsetzung der $3N$ Lösungssysteme von (40) immer nur einen und denselben Werth bewirkt. Also haben wir hier: entweder

$$\Phi = F_{40} \cdot \text{Rat.}\,(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}),$$

oder

$$\Phi = F_{40}^2 \cdot \text{Rat.}\,(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30}).$$

Ich habe jetzt noch zu beweisen, dass die genannten rationalen Functionen: Rat. $(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30})$, sich auf *ganze Functionen* ihrer Argumente reduciren, wenn Φ als ganze Function der z vorausgesetzt wird. Wir haben gefunden:

$$\Phi = F_{40}^{\nu} \cdot \frac{G(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30})}{G_1(F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30})} \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

wo jetzt G und G_1 ganze Functionen ihrer Argumente bedeuten sollen, von denen wir annehmen dürfen, dass sie keine gemeinsame Theiler besitzen. Wenn sich in diesem Ausdruck der Nenner G_1

*) Dies ist der Kernpunkt des Beweises. Das hier zu Grunde liegende Princip hat Herr Klein in seiner W. S. 1886/87 in Göttingen gehaltenen Universitätsvorlesung: „*Ueber ausgewählte Kapitel der Algebra*" entwickelt und mehrfach angewandt.

nicht auf eine Constante reduciren soll, so muss es endliche Werthsysteme F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30} geben, für welche G_1 verschwindet. Für diese Werthsysteme würde alsdann Φ unendlich werden. Nun aber kann einem endlichen Werthsysteme von $F_{12}, \ldots, F_{30}$ nur ein endliches Werthsystem von $z_0, \ldots, z_3$ entsprechen, wie bereits bewiesen, und andererseits darf für ein endliches Werthsystem von z_0, z_1, z_2, z_3 Φ nicht unendlich werden, weil Φ als ganze Function der z vorausgesetzt ist, also folgt:

Jede quaternäre Form, welche durch die 51840 *Substitutionen der Gruppe G in sich übergeführt wird, ist als ganze Function der Formen* F_{12}, F_{18}, F_{24}, F_{30} (32) *und* F_{40} (27) *darstellbar.*

Berlin, den 30. Juni 1888.

Ueber die Differentialgleichungen dritter Ordnung, welchen die Formen mit linearen Transformationen in sich genügen.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Jacobi hat mit Hülfe von Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen gezeigt, dass die Function

$$\vartheta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

einer algebraischen Differentialgleichung dritter Ordnung genügt, von welcher zugleich $\vartheta_2(0)$ und $\vartheta_0(0)$ Lösungen sind.*) In den folgenden Zeilen möchte ich nachweisen, dass diese Differentialgleichung nur ein Beispiel eines allgemeinen Satzes bildet, welcher der Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich angehört.

Es sei ω eine complexe Variable und die Transformationen

$$\omega' = \frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

mögen eine Gruppe bilden. Ferner möge

$$a_i d_i - b_i c_i = 1 \tag{2}$$

sein, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Es ist nun von Vortheil neben der Gruppe (1) zugleich eine andere für zwei homogene Variable ω_1, ω_2 zu betrachten, welche aus den Transformationen

$$\begin{matrix} \omega_1' = a_i\omega_1 + b_i\omega_2, & \omega_1' = -a_i\omega_1 - b_i\omega_2, \\ \omega_2' = c_i\omega_1 + d_i\omega_2, & \omega_2' = -c_i\omega_1 - d_i\omega_2, \end{matrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

besteht. Wir nehmen an, dass der Gruppe (1) eine Eintheilung der ω-Ebene in Bereiche entspreche, welche die Ebene oder einen Theil derselben einfach und lückenlos überdecken, Bereiche, wie sie in den

---

*) Jacobi, Gesammelte Werke (herausgegeben von K. Weierstrass auf Veranlassung der kgl. preussischen Academie der Wissenschaften) Bd. 2, pag. 171.

bekannten Arbeiten von Poincaré und Klein*) verwendet werden. Ferner möge aus dem einzelnen Bereiche durch Aneinanderheftung der zusammengehörigen Ränder eine Riemann'sche Fläche von endlichem Geschlechte entstehen. Es sei nun

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^n f(\omega), \quad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \tag{4}$$

eine homogene Function n^{ten} Grades von ω_1, ω_2, welche die Transformationen (3) zulässt und nach Division durch ω_2^n in eine eindeutige Function $f(\omega)$ übergeht, die auf der oben genannten Riemann'schen Fläche keine wesentliche Singularität besitzt. Eine solche Function heisse eine „Form der Gruppe (1)". Ist der Grad n der Form gleich Null, so möge sie auch als „Function der Gruppe" bezeichnet werden.

Der oben erwähnte allgemeine Satz lautet nun so:

„*Jede Form $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ der Gruppe genügt einer algebraischen Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Coefficienten von ω_1, ω_2 unabhängig sind.*"

Zum Beweise bilden wir die Hesse'sche Form H von $\log\varphi$ und die Functionaldeterminante ∇ von H und $\log\varphi$, setzen also

$$\tag{5} \begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\omega_1^2}, & \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\omega_1\,\partial\omega_2} \\ \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\omega_2\,\partial\omega_1}, & \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\omega_2^2} \end{vmatrix}, \\ \nabla(\omega_1, \omega_2) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial\omega_1}, & \frac{\partial H}{\partial\omega_2} \\ \frac{\partial \log\varphi}{\partial\omega_1}, & \frac{\partial \log\varphi}{\partial\omega_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

H und ∇ werden, wie jede Covariante von φ, Formen der Gruppe sein**). Aus H, ∇ und φ können wir aber durch Quotientenbildung zwei Functionen der Gruppe herstellen und da zwischen je zwei Functionen eine algebraische Gleichung mit von ω_1, ω_2 unabhängigen Coefficienten besteht, so werden wir zwischen H, ∇ und φ eine eben solche algebraische Gleichung aufstellen können. Hiermit ist unser Satz bewiesen; denn vermöge (5) ist jene Gleichung eine Differentialgleichung 3. Ordnung für $\varphi(\omega_1, \omega_2)$.

Wenn indessen $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ vom Grade Null, also eine Function $f(\omega)$ der Gruppe ist, so wird der Beweis hinfällig, da in diesem Falle

---

*) Poincaré, Acta Mathematica, Bd. 1; Klein, diese Annalen Bd. 21, pag. 141.

**) Dieser Schluss ist bei ähnlichen Untersuchungen schon mehrfach angewendet worden. Vgl. z. B. Fuchs, Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, Crelle's Journal Bde. 81 u. 85. Klein, Ueber Multiplicatorgleichungen, diese Annalen Bd. 15.

zwischen H und ∇ eine identische Relation, nämlich $16H^3 + \nabla^2 = 0$, besteht. Wir bilden dann, um unseren Satz zu beweisen:

$$(6)\qquad \psi(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_2^2}\,\frac{df(\omega)}{d\omega}, \qquad h(\omega_1, \omega_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \log \psi}{\partial \omega_1^2}, & \frac{\partial^2 \log \psi}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ \frac{\partial^2 \log \psi}{\partial \omega_2 \partial \omega_1}, & \frac{\partial^2 \log \psi}{\partial \omega_2^2} \end{vmatrix}.$$

Diese Functionen ψ, h sind wieder Formen der Gruppe von den Graden -2 bez. -4. Daher besteht eine algebraische Gleichung zwischen $f(\omega)$ und $\frac{h(\omega_1, \omega_2)}{[\psi(\omega_1, \omega_2)]^2}$, welche offenbar eine Differentialgleichung 3. Ordnung für $f(\omega)$ darstellt.

„*Die für $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ geltende Differentialgleichung wird auch durch die Function $\varphi(a\omega_1 + b\omega_2,\ c\omega_1 + d\omega_2)$ befriedigt, wo a, b, c, d irgend welche Constante bedeuten, die der Bedingung $ad - bc = 1$ genügen.*“

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem invarianten Charakter der Bildungen, welche zur Aufstellung der Differentialgleichung benutzt wurden.

Es ist nun leicht, die Differentialgleichung für $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ in eine totale Differentialgleichung für $f(\omega) = \frac{1}{\omega_2^n}\,\varphi(\omega_1, \omega_2)$ umzusetzen. Betrachten wir zuerst den Fall, wo n nicht gleich Null ist, so ist es zweckmässig die Function

$$(7)\qquad y = \sqrt[n]{f(\omega)} = \frac{1}{\omega_2}\sqrt[n]{\varphi(\omega_1, \omega_2)}$$

einzuführen. Man findet nach kurzer Rechnung:

$$(8)\qquad H = -\frac{n^2}{\omega_2^4}\cdot\frac{1}{y}\,\frac{d^2 y}{d\omega^2}, \qquad \nabla = -\frac{n^3}{2\omega_2^6}\cdot\frac{1}{y^2}\,\frac{d^3(y^2)}{d\omega^3},\ ^{*})$$

und die Gleichung zwischen φ, H, ∇ geht durch Eintragung der Werthe (7), (8) in eine Differentialgleichung dritter Ordnung für y über.

In dem Falle, wo $n = 0$, also $\varphi(\omega_1, \omega_2) = f(\omega)$ ist, kommt

$$(9)\quad h = -\frac{4}{\omega_2^4}\sqrt{\frac{df}{d\omega}}\,\frac{d^2\sqrt{\frac{d\omega}{df}}}{d\omega^2}, \qquad \frac{h}{\psi^2} = -4\left(\sqrt{\frac{d\omega}{df}}\right)^3\frac{d^2\sqrt{\frac{d\omega}{df}}}{d\omega^2}$$

und die Gleichung zwischen f und $\frac{h}{\psi^2}$ erscheint nun explicite als

*) Vgl. Frobenius und Stickelberger „Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten“, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 321.

Differentialgleichung für f. Der Ausdruck für $\frac{h}{\varphi^2}$ ist, wie es zu erwarten war, nichts anderes, wie die bekannte Differential-Invariante.*)

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung für $f(\omega)$ entsteht nach dem Obigen offenbar, wenn wir $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ durch

$$\varphi(a\omega_1 + b\omega_2,\ c\omega_1 + d\omega_2)$$

ersetzen. Es lautet also: $f\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)(c\omega + d)^n$, unter a, b, c, d irgend welche Constanten verstanden, welche die Gleichung $ad - bc = 1$ befriedigen.

Wir wollen nun die allgemeinen Erörterungen auf einige der Theorie der elliptischen Modulfunctionen entnommene Beispiele anwenden. Es werde zuerst angenommen, dass die Gruppe (1) aus der Gesammtheit der ganzzahligen linearen Transformationen von der Determinante 1 bestehe. Wählen wir dann

$$(10)\quad \varphi(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{12} \Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{12} h \prod_1^\infty (1 - h^k)^{24},$$
$$\left(h = e^{2i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right),$$

so ist $n = -12$ und also nach (7):

$$(11)\quad y = h^{-\frac{1}{12}} \prod (1 - h^k)^{-2} = h^{-\frac{1}{12}}(1 + 2h + \cdots) = \frac{2\pi}{\omega_2 \sqrt[12]{\Delta}}$$

Nach der Gleichung (8) ist H, abgesehen von einem constanten Factor, gleich $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \cdot \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{(d \log h)^2}$, folglich eine Form der Gruppe, welche vom -4^{ten} Grade ist und nirgends unstetig wird. Eine solche Form ist nothwendig bis auf einen constanten Factor gleich

$$(12)\qquad g_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_1^\infty \frac{k^3 h^k}{1 - h^k}\right].$$

Es genügt ein Blick auf die Entwicklungen von y und g_2 nach Potenzen von h, um diesen Factor zu bestimmen. Man erhält so

$$(13)\qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \cdot \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{(d \log h)^2} = \frac{1}{12}\, g_2 \text{ **)}.$$

Durch eine analoge Ueberlegung finden wir

$$(14)\qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot \frac{1}{y^2} \frac{d^3 (y^2)}{(d \log h)^3} = g_3 \text{ **)},$$

*) Vgl. H. A. Schwarz „Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussi'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist." (Crelle's Journal Bd. 75).

**) Klein, „Ueber Multiplicatorgleichungen", diese Annalen Bd. 15.

wobei

$$(15)\qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_1^\infty \frac{k^5 h^k}{1-h^k}\right]$$

ist. Aus den Gleichungen (11), (13), (14) ergiebt sich, in Rücksicht auf die Relation $g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta$ der Satz*):

„*Die Function* $y = h^{-\frac{1}{12}} \prod (1-h^k)^{-2}$ *ist eine Lösung der Differentialgleichung:*

$$(16)\qquad [12 y^3 d^2 y]^3 - 27 [y^4 d^3(y^2)]^2 = (d \log h)^6.$$

Genügen die Constanten a, b, c, d *der Gleichung* $ad - bc = 1$, *wird ferner* $h = e^{2i\pi\omega}$ *und* $y = f(\omega)$ *gesetzt, so stellt*

$$(c\omega + d)\, f\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$$

das allgemeine Integral der Gleichung (16) *vor.*"

Wählen wir jetzt zweitens

$$(17)\qquad \varphi(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 g_2(\omega_1, \omega_2),$$

so ist $n = -4$; daher nach (7):

$$(18)\qquad y = \frac{2\pi}{\omega_2 \sqrt[4]{g_2}} = \left[\frac{1}{12} + 20 \sum \frac{k^3 h^k}{1-h^k}\right]^{-\frac{1}{4}}.$$

Die Covarianten H und ∇ unterscheiden sich nur durch Zahlenfactoren von

$$(19)\qquad \psi = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \cdot \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{(d \log h)^2}, \qquad \chi = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot \frac{1}{y^2} \frac{d^3(y^2)}{(d \log h)^3}.$$

Diese Formen ψ, χ werden nur für diejenigen Werthe von ω unendlich, für welche g_2 verschwindet, und zwar wird für jeden solchen Werth ψ von der zweiten, χ von der dritten Ordnung unendlich. Daher sind $g_2^2 \psi$, $g_2^3 \chi$ ganze rationale Functionen von g_2 und g_3. Da ψ und χ für $h = 0$ verschwinden, so ist $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ ein Factor jener Functionen und wir haben also:

$$(20)\qquad g_2^2 \psi = a \cdot \Delta, \qquad g_2^3 \chi = a' \cdot \Delta g_3,$$

wo a und a' Constante bedeuten. Aus den Reihenentwicklungen finden wir $a = -\frac{5}{12}$, $a' = -15$. Wenn wir endlich g_2, g_3, Δ aus (18), (20) und der Relation $g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta$ eliminiren, so erhalten wir das Resultat:

*) Frobenius und Stickelberger, l. c. pag. 322.

„Die Function

$$y = \frac{2\pi}{\omega_2 \sqrt[4]{g_2}} = \left(\frac{1}{12} + 20 \sum \frac{k^3 h^k}{1-h^k}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

genügt der Differentialgleichung:

$$(21)\qquad (y\,d^2y)^3 - \frac{5}{12 \,.\, 48}\left(y\,d^3(y^2)\right)^2 + \frac{5}{12}(d^2y)^2\,(d\log h)^2 = 0.\text{“}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung leitet man, ähnlich wie es bei der Gleichung (16) der Fall war, ohne Weiteres aus dem particulären Integrale y ab.

Die Differentialgleichung, welche man nach derselben Methode für

$$(22)\qquad y = \frac{2\pi}{\omega_2 \sqrt[6]{g_3}} = \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum \frac{k^5 h^k}{1-h^k}\right)^{-\frac{1}{6}}$$

erhält, wird schon recht complicirt. Sie entsteht als Resultat der Elimination von g_2, g_3, Δ zwischen den Gleichungen:

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot \frac{1}{y^6} = g_3, \qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \frac{1}{y} \cdot \frac{d^2y}{(d\log h)^2} = \frac{7}{18 \,.\, 18}\,\frac{\Delta g_2}{g_3^2}, \\ \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot \frac{1}{y^2}\,\frac{d^3(y^2)}{(d\log h)^3} = \frac{7}{27 \,.\, 27}\,\frac{\Delta(4\Delta + 81 g_3^2)}{g_3^3}, \quad g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta. \end{cases}$$

Für die absolute Invariante $J(\omega) = \frac{g_2^3}{\Delta}$ ergiebt sich endlich:

$$(24)\qquad \frac{1}{\omega_2^2}\,\frac{dJ}{d\log h} = -\frac{9}{2\pi^2}\,\frac{g_2^2 g_3}{\Delta},$$

und wenn zur Abkürzung

$$(25)\qquad \sqrt{\frac{dJ}{d\log h}} = \frac{1}{z}$$

gesetzt wird:

$$(26)\qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \frac{1}{z}\,\frac{d^2z}{(d\log h)^2} = \frac{36 g_2^6 - 41 g_2^3\Delta + 32\Delta^2}{9 \,.\, 36 g_2^2 g_3^2}.$$

Aus (24) und (26) folgt nun *die Differentialgleichung der absoluten Invariante:*

$$(27)\qquad z^3\,\frac{d^2z}{(d\log h)^2} = \frac{36J^2 - 41J + 32}{4 \,.\, 36J^2(1-J)^2}, \qquad \frac{dJ}{d\log h} = \frac{1}{z^2}.\,^{*)}$$

Wir betrachten zweitens die Gruppe der linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante 1, welche (mod. 2) der Identität congruent sind. Zu dieser Gruppe gehören bekanntlich folgende Formen:

$$(28)\quad \varphi_1 = \frac{1}{\omega_2^2}\,\vartheta_0^4(\omega), \qquad \varphi_2 = \frac{1}{\omega_2^2}\,\vartheta_2^4(\omega), \qquad \varphi_3 = \frac{1}{\omega_2^2}\,\vartheta_3^4(\omega),$$

---

*) Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Crelle's Journal Bd. 83, pag. 280.

aus welchen sich alle übrigen Formen, wie sogleich gezeigt werden soll, in einfacher Weise zusammensetzen. Es bestehen die Gleichungen

$$(29)\qquad \varkappa^2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}, \qquad 1 - \varkappa^2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_3},$$

und jede Function der Gruppe ist rational durch $\varkappa^2$ darstellbar. Wenn daher $f(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{2n} f(\omega)$ eine Form der Gruppe vom Grade $2n$ ist, so ist $f(\omega_1, \omega_2) \cdot \varphi_3^n$ eine rationale Function von $\varkappa^2$, etwa gleich $\frac{G(\varkappa^2)}{G_1(\varkappa^2)}$. Machen wir nun die Annahme, dass $f(\omega)$ im Innern der positiven ω-Halbebene nicht unendlich wird, so muss sich $G_1(\varkappa^2)$ auf einen Ausdruck der Form $\varkappa^{2\mu}(1 - \varkappa^2)^\nu$ reduciren, weil $f\varphi_3^n$ nur für $\varkappa^2 = 0, 1, \infty$ unendlich werden kann. Wenn wir (29) berücksichtigen so erhalten wir schliesslich

$$(30)\qquad f(\omega_1, \omega_2) = \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^\gamma \cdot G(\varphi_2, \varphi_3)$$

als allgemeinen Ausdruck für die Formen der Gruppe, welche von geradem Grade $2n$ sind und im Innern der ω-Halbebene nicht unstetig werden. Zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, n$ (wo δ den Grad der Function $G(\varphi_2, \varphi_3)$ bezeichnet) besteht die Relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -n.$$

Wir dürfen ferner annehmen, dass $G(\varphi_2, \varphi_3)$ weder den Factor φ_2, noch φ_3, noch $\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_1$ enthält, weil wir diese Factoren herausheben und mit φ_2^β, φ_3^γ, φ_1^α vereinigen könnten. Es wird dann α der erste Exponent von $q = h^{\frac{1}{2}} = e^{i\pi\omega}$ in der Entwicklung von $\frac{1}{\omega_2^{2n}} f(\omega_1, \omega_2)$ nach Potenzen von q. Aehnlich sind β und γ zu bestimmen. Hat man eine Form $f(\omega_1, \omega_2)$ in der Gestalt (30) dargestellt, so ergeben sich die Darstellungen der Formen, welche aus $f(\omega_1, \omega_2)$ durch beliebige lineare Transformationen hervorgehen mit Hülfe der Fundamentalformeln:

$$(31)\quad \begin{cases} \varphi_1(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varphi_3(\omega_1, \omega_2), & \varphi_2(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = -\varphi_2(\omega_1, \omega_2), \\ & \varphi_3(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varphi_1(\omega_1, \omega_2), \\ \varphi_1(-\omega_2, \omega_1) = -\varphi_2(\omega_1, \omega_2), & \varphi_2(-\omega_2, \omega_1) = -\varphi_1(\omega_1, \omega_2), \\ & \varphi_3(-\omega_2, \omega_1) = -\varphi_3(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Es sei nun

$$(32)\quad y_1 = \frac{1}{\omega_2 \sqrt{\varphi_1}} = \frac{1}{\vartheta_0^2}, \quad y_2 = \frac{1}{\omega_2 \sqrt{\varphi_2}} = \frac{1}{\vartheta_2^2}, \quad y_3 = \frac{1}{\omega_2 \sqrt{\varphi_3}} = \frac{1}{\vartheta_3^2}.$$

Dann finden wir, indem wir zur Abkürzung

$$(33)\quad H_i = \frac{1}{\omega_2^4} \frac{1}{y_i} \frac{d^2 y_i}{(d\log q)^2}, \quad \nabla_i = \frac{1}{\omega_2^6} \cdot \frac{1}{y_i^2} \frac{d^3(y_i^2)}{(d\log q)^3}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

setzen, die folgenden Darstellungen der Formen H_i, ∇_i:

$$(34)\quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{4}\varphi_2\varphi_3, & \nabla_1 = \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_3(\varphi_2+\varphi_3), \\ H_2 = \frac{1}{4}\varphi_3\varphi_1, & \nabla_2 = -\frac{1}{2}\varphi_3\varphi_1(\varphi_3+\varphi_2), \\ H_3 = -\frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2, & \nabla_3 = -\frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2). \end{cases}$$

Verbindet man hiermit die aus (32) folgenden Gleichungen

$$(35)\quad \frac{1}{\omega_2^2}\cdot\frac{1}{y_1^2} = \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2, \quad \frac{1}{\omega_2^2}\cdot\frac{1}{y_2^2} = \varphi_3 - \varphi_1, \quad \frac{1}{\omega_2^2}\frac{1}{y_3^2} = \varphi_1 + \varphi_2,$$

so ergiebt sich durch Elimination von φ_2, φ_3, etc.

$$(36)\quad \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{\nabla_1}{H_1}\right)^2 - 16H_1 = (\varphi_3-\varphi_2)^2 = \frac{1}{\omega_2^4}\cdot\frac{1}{y_1^4}, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{\nabla_2}{H_2}\right)^2 - 16H_2 = (\varphi_3-\varphi_1)^2 = \frac{1}{\omega_2^4}\cdot\frac{1}{y_2^4}, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{\nabla_3}{H_3}\right)^2 - 16H_3 = (\varphi_1+\varphi_2)^2 = \frac{1}{\omega_2^4}\cdot\frac{1}{y_3^4}. \end{cases}$$

Oder endlich:

„*Die Functionen*

$$y_1 = \frac{1}{\vartheta_0^2}, \quad y_2 = \frac{1}{\vartheta_2^2}, \quad y_3 = \frac{1}{\vartheta_3^2}$$

sind Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\,\frac{d^3(y^2)}{(d\log q)^3}\right]^2 = \left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2y}{(d\log q)^2}\right]^2\left\{\frac{16}{y}\,\frac{d^2y}{(d\log q)^2} + \frac{1}{y^4}\right\}.\text{“}$$

Dieses ist der Eingangs erwähnte Satz von Jacobi.

Königsberg i./Pr., Juli 1888.

Ueber gewisse partielle Differentialgleichungen, denen hypergeometrische Integrale genügen.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Es sollen im Folgenden für die hypergeometrischen Integrale von der Form

$$y = \int_g^h (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - a_m)^{b_m - 1} (u - v)^{\varkappa - 1} (u - x)^{\lambda - 1}\, du$$

partielle Differentialgleichungen, in denen x und v die unabhängigen Variablen sind, abgeleitet werden. Für den Fall $m = 2$ sind diese Gleichungen zuerst von Herrn Appell*) angegeben, dann von Herrn E. Picard**) auf anderem Wege gewonnen worden***).

Die nachstehende Rechnung stützt sich auf eine Modification des Taylor'schen Satzes für ganze algebraische Functionen, die in §§ 1—3 bewiesen wird. In §§ 4 und 5 werden zwei specielle Differentialgleichungen, in § 6 die allgemeinere abgeleitet.

§ 1.

Man bezeichne durch $\varphi(u)$ eine beliebige ganze Function m^{ten} Grades von u und durch x und v zwei von einander und von u unabhängige Variable. Der Coefficient von u^m in $\varphi(u)$ heisse β_0, so

---

*) „Sur les séries hypergéométriques de deux variables etc.", Comptes Rendus, t. XC, pag. 296 und 731, (1880) und Journal de Liouville (Résal) série 2, t. VIII (1882).

**) „Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques", Comptes Rendus, t. XC, pag. 1267, und Annales de l'École Normale, Série 2, t. X.

***) Man vergleiche auch die Abhandlung des Herrn E. Goursat „Sur une classe de fonctions représentées par des integrales définies" im Bd. II der Acta mathem. (1883).

dass der m^{te} Differentialquotient $\varphi^{(m)}(u)$ gleich $\beta_0 \cdot 1 \cdot 2 \cdots m$ ist. Nach dem Taylor'schen Satze hat man die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(u) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\dfrac{u-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-1)}(x)\,\dfrac{(u-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \beta_0(u-x)^m, \\ \varphi(v) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\dfrac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-1)}(x)\,\dfrac{(v-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \beta_0(v-x)^m, \end{cases}$$

in denen $k!$ das Product $1 \cdot 2 \cdots k$ bedeutet. Wird aus denselben die Grösse $\varphi^{(m-1)}(x)$ eliminirt, indem die mit $\left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-1}$ multiplicirte zweite Gleichung von der ersten abgezogen wird, so ergiebt sich

$$\varphi(u) - \left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-1} \varphi(v)$$

$$= \left[1 - \left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-1}\right] \varphi(x) + (u-x)\left[1 - \left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-2}\right] \frac{\varphi'(x)}{1} + \cdots$$

$$+ (u-x)^{m-2}\left[1 - \frac{u-x}{v-x}\right] \frac{\varphi^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} + \beta_0(u-x)^{m-1}(u-v).$$

Man nennt zur Abkürzung p und q die Quotienten

$$(2)\qquad p = \frac{u-x}{v-x}, \qquad q = \frac{u-v}{x-v}.$$

Durch Anwendung der Formel

$$1 - p^k = (1-p)(1 + p + p^2 + \cdots + p^{k-1})$$

nimmt, da $1 - p = \frac{v-u}{v-x} = q$ ist, die soeben erwähnte Gleichung die Gestalt

$$\varphi(u) - p^{m-1}\varphi(v) =$$

$$= q \begin{Bmatrix} (1+p+\cdots+p^{m-2})\varphi(x) + (u-x)(1+p+\cdots+p^{m-3})\dfrac{\varphi'(x)}{1} + \cdots \\ + (u-x)^{m-3}(1+p)\dfrac{\varphi^{(m-3)}(x)}{(m-3)!} + (u-x)^{m-2}\dfrac{\varphi^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} \end{Bmatrix}$$

$$+ \beta_0(u-x)^{m-1}(u-v)$$

an. Definirt man also $X_0, X_1, X_2, \cdots$ als die Ausdrücke

$$(3)\quad \begin{cases} X_0 = \varphi(x), \quad X_1 = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\dfrac{u-x}{1}, \cdots \\ X_k = \varphi(x) + \varphi'(x)\dfrac{u-x}{1} + \varphi''(x)\,\dfrac{(u-x)^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \varphi^{(k)}(x)\,\dfrac{(u-x)^k}{k!}, \end{cases}$$

so entsteht für $\varphi(u)$ die Gleichung

$$(4)\quad \varphi(u) = \beta_0(u-v)(u-x)^{m-1} + p^{m-1}\varphi(v) + q \begin{Bmatrix} X_{m-2} + p\,X_{m-3} + p^2 X_{m-4} + \cdots \\ + p^{m-4} X_2 + p^{m-3} X_1 + p^{m-2} X_0 \end{Bmatrix}.$$

Zu den Gleichungen (1) werde nunmehr die entsprechende Entwickelung von $\varphi'(v)$ nach dem Taylor'schen Satze

$$\varphi'(v) = \varphi'(x) + \varphi''(x)\frac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-3}}{(m-3)!}$$
$$+ \varphi^{(m-1)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!} + \beta_0 m (v-x)^{m-1}$$

hinzugenommen. Dann lassen sich die Grössen $\varphi^{(m-1)}(x)$ und $\varphi^{(m-2)}(x)$ fortschaffen, so dass $\varphi(u)$ mit Hülfe von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\cdots$ $\varphi^{(m-3)}(x)$, $\varphi(v)$ und $\varphi'(v)$ ausgedrückt wird. Man eliminirt zunächst $\varphi^{(m-1)}(x)$ aus der zweiten Gleichung (1) und der obigen Gleichung für $\varphi'(v)$, wodurch die Identität

$$(m-1)\varphi(v) - (v-x)\varphi'(v) =$$
$$= (m-1)\varphi(x) + (m-2)\varphi'(x)\frac{v-x}{1} + (m-3)\varphi''(x)\frac{(v-x)^2}{1.2} + \cdots$$
$$+ 2\varphi^{(m-3)}(x)\frac{(v-x)^{m-3}}{(m-3)!} + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!} - \beta_0(v-x)^m$$

erhalten wird. Indem letztere mit $-p^{m-2}q$ multiplicirt und zu (4) addirt wird, ergiebt sich nach Berücksichtigung von (2)

$$\varphi(u) - \beta_0(u-x)^{m-2}(u-v)^2 - p^{m-2}\{[(m-2)q+1]\varphi(v) + \varphi'(v)(u-v)\} =$$
$$= q\{X_{m-2} + pX_{m-3} + p^2X_{m-4} + \cdots + p^{m-3}X_1 + p^{m-2}X_0\}$$
$$-p^{m-2}q\left\{(m-1)\varphi(x) + \cdots + (m-k-1)\varphi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!} + \cdots\right.$$
$$\left. + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!}\right\}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung heben sich die mit $\varphi^{(m-2)}(x)$ multiplicirten Summanden gegenseitig fort. Ist $k < m-2$, so hat die Grösse $q\,\varphi^{(k)}(x)\frac{(u-x)^k}{k!}$ daselbst den (für $p=1$ verschwindenden) Factor

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-k-2} - (m-k-1)p^{m-k-2},$$

der auf die Form

$$(1-p)\{1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \cdots + (m-k-2)p^{m-k-3}\}$$

gebracht werden kann. Substituirt man daher $1-p=q$, so findet man für die rechte Seite der genannten Gleichung den Ausdruck

$$q^2\left\{\begin{matrix} X_{m-3} + 2pX_{m-4} + 3p^2X_{m-5} + \cdots \\ + (m-3)p^{m-4}X_1 + (m-2)p^{m-3}X_0 \end{matrix}\right\}.$$

In Analogie zu (3) sollen unter V_0, V_1, V_2, $\cdots$ die Functionen

$$(5)\begin{cases} V_0 = \varphi(v), \quad V_1 = \varphi(v) + \varphi'(v)\frac{u-v}{1}, \cdots \\ V_k = \varphi(v) + \varphi'(v)\frac{u-v}{1} + \varphi''(v)\frac{(u-v)^2}{1.2} + \cdots + \varphi^{(k)}(v)\frac{(u-v)^k}{k!} \end{cases}$$

verstanden werden. Dann hat man gemäss der obigen Rechnung die Formel

$$(6) \qquad \varphi(u) =$$
$$= \beta_0(u-v)^2(u-x)^{m-2} + p^{m-2}\{V_1 + (m-2)\,q\,V_0\}$$
$$+ q^2\{X_{m-3} + 2p\,X_{m-4} + 3p^2 X_{m-5} + \cdots + (m-2)\,p^{m-3}X_0\},$$

in welcher p und q die Quotienten (2) bedeuten.

In ähnlicher Weise lässt sich die Function $\varphi(u)$ mittelst der Werthe $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\cdots \varphi^{(m-l-1)}(x)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(v)$, $\cdots \varphi^{(l-1)}(v)$ ausdrücken, während l eine beliebige der Zahlen $1, 2, 3, \cdots m-1$ ist. Der Herleitung dieser allgemeineren Formel sollen einige einfache Rechnungen vorausgeschickt werden.

§ 2.

Man bezeichne durch $(\alpha)_k$ den Binomialcoefficienten

$$(\alpha)_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}, \qquad (\alpha)_0 = 1,$$

durch Ω die Summe

$$(7)\ \Omega = \begin{cases} (m-1)_{l-1}\,\varphi(v) + (m-2)_{l-2}\,\varphi'(v)\,\frac{x-v}{1} + \cdots \\ + (m-k-1)_{l-k-1}\,\varphi^{(k)}(v)\,\frac{(x-v)^k}{k!} + \cdots \\ + (m-l+1)_1\,\varphi^{(l-2)}(v)\,\frac{(x-v)^{l-2}}{(l-2)!} + \varphi^{(l-1)}(v)\,\frac{(x-v)^{l-1}}{(l-1)!}, \end{cases}$$

in der die ganze positive Zahl l kleiner als m ist, und setze für $\varphi(v)$ die Entwickelung (1), für die Differentialquotienten $\varphi^{(k)}(v)$ die entsprechenden Ausdrücke

$$\varphi^{(k)}(v) = \varphi^{(k)}(x) + \varphi^{(k+1)}(x)\frac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m)}(x)\frac{(v-x)^{m-k}}{(m-k)!}$$

in die Summe Ω ein. Hierdurch entsteht für Ω die Gleichung

$$\Omega = \omega_0\varphi(x) + \omega_1\varphi'(x)(v-x) + \omega_2\varphi''(x)(v-x)^2 + \cdots + \omega_m\varphi^{(m)}(x)(v-x)^m,$$

in welcher ω_0, ω_1, $\cdots$ ω_m Constante bedeuten. Während

$$\omega_0 = (m-1)_{l-1}$$

ist, nimmt ω_k im Fall $0 < k < l$ den Werth

$$\omega_k = \frac{(m-1)_{l-1}}{k!} - \frac{(m-2)_{l-2}}{(k-1)!\,1!} + \cdots + (-1)^i \frac{(m-i-1)_{l-i-1}}{(k-i)!\,i!} + \cdots$$
$$+ (-1)^k \frac{(m-k-1)_{l-k-1}}{k!}$$

und im Fall $k \geqq l$ den Werth

$$\omega_k = \frac{(m-1)_{l-1}}{k!} - \cdots + \frac{(-1)^i (m-i-1)_{l-i-1}}{(k-i)!\,i!} + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{l-2}(m-l+1)_1}{(k-l+2)!\,(l-2)!} + \frac{(-1)^{l-1}}{(k-l+1)!\,(l-1)!}$$

an. Im ersteren Falle kann man ω_k als das Product aus der Grösse

$$\frac{(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-l+1)}{(l-1)!}$$

und der Summe

$$(m-1)_k - (m-2)_{k-1}(l-1)_1 + \cdots + (-1)^i (m-i-1)_{k-i}(l-1)_i + \cdots$$
$$+ (-1)^k (l-1)_k$$

ansehen; für $k \geqq l$ schreibt man dagegen

$$\omega_k = \frac{1}{k!}\Big\{(m-1)_{l-1} - (m-2)_{l-2}(k_1) + \cdots + (-1)^i (m-i-1)_{l-i-1}(k)_i + \cdots$$
$$+ (-1)^{l-1}(k)_{l-1}\Big\}\cdot$$

Nun besteht für beliebige Werthe von β und γ und für ein ganzzahliges positives ν die Gleichung

$$(8) \qquad (-1)^\nu (\beta-\gamma+\nu)_\nu = (\gamma-\beta-1)_\nu$$
$$= (\gamma-1)_\nu - (\gamma-2)_{\nu-1}(\beta)_1 + (\gamma-3)_{\nu-2}(\beta)_2 - \cdots$$
$$+ (-1)^i (\gamma-i-1)_{\nu-i}(\beta)_i + \cdots + (-1)^\nu (\beta)_\nu,$$

welche aus der bekannten Formel

$$(\alpha+\beta)_\nu = (\alpha)_\nu + (\alpha)_{\nu-1}(\beta)_1 + (\alpha)_{\nu-2}(\beta)_2 + \cdots + (\beta)_\nu$$

für $\alpha = \nu - \gamma$ nach Berücksichtigung der Identität

$$(-\delta)_i = \frac{(-\delta)(-\delta-1)\cdots(-\delta-i+1)}{i!} = (-1)^i(\delta+i-1)_i$$

erhalten wird. Indem man die Gleichung (8) für $\beta = l-1$, $\gamma = m$, $\nu = k$ benutzt, findet man im Falle $0 < k < l$ für ω_k den Werth

$$\omega_k = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-l+1)}{(l-1)!}\;\frac{(m-l)\cdots(m-l-k+1)}{k!}$$

oder

$$\omega_k = \frac{1}{k!}(m-k-1)_{l-1}.$$

Die letztere Gleichung gilt auch im Fall $k \geqq l$. Denn die Anwendung der Formel (8) für die Zahlen $\beta = k$, $\gamma = m$, $\nu = l-1$ zeigt, dass für $k \geqq l$

$$\omega_k = \frac{(-1)^{l-1}}{k!}(k-m+l-1)_{l-1} = \frac{1}{k!}(m-k-1)_{l-1}$$

ist. Hieraus folgt $\omega_m = \frac{(-1)^{l-1}}{m!}$, so dass das Product $\omega_m\,\varphi^{(m)}(x)$ den Werth $(-1)^{l-1}\beta_0$ hat. Für $m-l<k<m$ ist $\omega_k=0$, da der Zähler des Binomialcoefficienten $(m-k-1)_{l-1}$,

$$(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-k-l+1),$$

dann einen Factor Null enthält. Auf diese Weise gewinnt man für die in (7) angegebene Summe Ω den Ausdruck

$$(9)\quad \Omega = \begin{cases} (m-1)_{l-1}\,\varphi(x) + (m-2)_{l-1}\,\varphi'(x)\,\frac{v-x}{1} \\ + (m-3)_{l-1}\varphi''(x)\frac{(v-x)^2}{1.2} + \cdots + (m-k-1)_{l-1}\varphi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!} + \cdots \\ + \varphi^{(m-l)}(x)\,\frac{(v-x)^{m-l}}{(m-l)!} + (-1)^{l-1}\beta_0(v-x)^m. \end{cases}$$

Es sollen noch zwei weitere Hülfsgleichungen hergestellt werden, die sich in einfacher Weise aus der Formel

$$(10)\qquad (\beta)_\nu = (\beta-1)_\nu + (\beta-1)_{\nu-1}$$

und der hieraus folgenden Gleichung

$$(11)\quad (\beta+\nu)_\nu = 1 + (\beta)_1 + (\beta+1)_2 + (\beta+2)_3 + \cdots + (\beta+\nu-1)_\nu$$

ergeben. Man substituire in die Summe

$$1 + (\beta+1)_1\,q + (\beta+2)_2\,q^2 + \cdots + (\beta+\mu)_\mu\,q^\mu$$

an Stelle von $(\beta+1)_1$, $(\beta+2)_2, \cdots (\beta+\mu)_\mu$ die aus (11) folgenden Werthe. Dann kommen in derselben keine anderen Binomialcoefficienten vor als $(\beta)_1$, $(\beta+1)_2$, $(\beta+2)_3, \cdots (\beta+\mu-1)_\mu$, und der Factor von $(\beta+i-1)_i$ lautet (für $i=1,2,\cdots\mu$)

$$q^i(1+q+q^2+\cdots+q^{\mu-i}) = \frac{q^i(1-q^{\mu-i+1})}{1-q}.$$

Mithin besteht die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i)_i q^i = \frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i-1)_i\,q^i - \frac{q^{\mu+1}}{1-q}\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i-1)_i.$$

Für die zweite der rechts stehenden Summen kann nach (11) und (10) die Grösse

$$\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i-1)_i = (\beta+\mu)_\mu = (\beta+\mu+1)_{\mu+1} - (\beta+\mu)_{\mu+1}$$

gesetzt werden, wodurch die Identität

$$(12)\qquad \sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i)_i\, q^i + (\beta+\mu+1)_{\mu+1}\frac{q^{\mu+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{i=\mu+1}(\beta+i-1)_i\, q^i$$

erhalten wird. Hierin sind β und q beliebig, μ irgend eine positive ganze Zahl.

Man betrachte ferner den Ausdruck

$$1+(\mu)_{\mu-1}\,p+(\mu+1)_{\mu-1}\,p^2+(\mu+2)_{\mu-1}\,p^3+\cdots$$
$$+(\mu+i-1)_{\mu-1}\,p^i+\cdots+(\nu-2)_{\mu-1}\,p^{\nu-\mu-1}+(\nu-1)_{\mu-1}\,p^{\nu-\mu},$$

in welchem p einen beliebigen Werth, μ und ν positive ganze Zahlen bedeuten, und $\nu>\mu$ ist. Indem man nach (10)

$$(\mu+i-1)_{\mu-1}=(\mu+i)_\mu-(\mu+i-1)_\mu$$

setzt, ergiebt sich die Relation

$$\sum_{i=0}^{i=\nu-\mu}(\mu+i-1)_{\mu-1}p^i = 1+\sum_{i=1}^{i=\nu-\mu}(\mu+i)_\mu p^i - \sum_{i=1}^{i=\nu-\mu}(\mu+i-1)_\mu p^i$$
$$= \sum_{i=0}^{i=\nu-\mu}(\mu+i)_\mu p^i - p\sum_{i'=0}^{i'=\nu-\mu-1}(\mu+i')_\mu p^{i'}.$$

In der ersten rechts stehenden Summe werde der zu $i=\nu-\mu$ gehörige Term $(\nu)_\mu\, p^{\nu-\mu}$ abgetrennt und auf die linke Seite gebracht. Dann wird die rechte Seite durch $1-p$ theilbar, und es entsteht die Gleichung:

$$(13)\qquad \sum_{i=0}^{i=\nu-\mu}(\mu+i-1)_{\mu-1}p^i-(\nu)_\mu p^{\nu-\mu} = (1-p)\sum_{i=0}^{i=\nu-\mu-1}(\mu+i)_\mu p^i.$$

§ 3.

Es soll nun gezeigt werden, dass für die beliebige ganze Function m^{ten} Grades $\varphi(u)$ der Variablen u die Formel

$$(14)\qquad \varphi(u)-\beta_0(u-v)^l(u-x)^{m-l}$$
$$= p^{m-l}\left\{\begin{array}{l} V_{l-1}+(m-l)_1 q\, V_{l-2}+(m-l+1)_2 q^2\, V_{l-3}+\cdots \\ +(m-k-2)_{l-k-1}q^{l-k-1}\, V_k+\cdots+(m-2)_{l-1}q^{l-1}\, V_0 \end{array}\right\}$$
$$+ q^l\left\{\begin{array}{l} X_{m-l-1}+(l)_{l-1}p\, X_{m-l-2}+(l+1)_{l-1}p^2\, X_{m-l-3}+\cdots \\ +(m-k-2)_{l-1}p^{m-l-k-1}\, X_k+\cdots+(m-2)_{l-1}p^{m-l-1}\, X_0 \end{array}\right\}$$

gilt, in welcher l irgend eine der Zahlen $1, 2, \cdots m-1$ bedeutet, und $p, q, X_0, X_1, \cdots V_0, V_1, \cdots$ die in (2), (3), (5) definirten Grössen sind. Durch β_0 wird wiederum der Factor von u^m in $\varphi(u)$

bezeichnet. Die Gleichung (14) geht für $l=1$ in (4), für $l=2$ in (6) über.

Der Beweis der Formel (14) wird mittelst Induction geführt. Diejenige Gleichung, die aus (14) entsteht, wenn man l durch $l-1$ ersetzt,

$$(15)\qquad \varphi(u)-\beta_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}=$$

$$p^{m-l+1}\sum_{k=0}^{k=l-2}(m-k-2)_{l-k-2}\,q^{l-k-2}\,V_k+q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=m-l}(m-k-2)_{l-2}\,p^{m-l-k}X_k,$$

wird als gültig angenommen. Dann lässt sich mit Hülfe der Identitäten (9), (12), (13) die Gleichung (14) ohne Schwierigkeit aus (15) ableiten.

Man bemerke, dass auf der rechten Seite der Gleichung (14) der Factor von $\varphi^{(k)}(x)\,\frac{(u-x)^k}{k!}$ für $k=1,2,\cdots m-l-1$ gleich dem Ausdruck

$$(16)\qquad q^l\left\{1+(l)_{l-1}p+(l+1)_{l-1}p^2+\cdots+(m-k-2)_{l-1}p^{m-l-k-1}\right\},$$

der Factor von $\varphi^{(k)}(v)\,\frac{(u-v)^k}{k!}$ für $k=1,2,\cdots l-1$ gleich

$$(17)\qquad p^{m-l}\left\{1+(m-l)_1\,q+(m-l+1)_2\,q^2+\cdots+(m-k-2)_{l-k-1}q^{l-k-1}\right\}$$

ist, und dass die Coefficienten von $\varphi(x)$ und von $\varphi(v)$ aus (16) und (17) für $k=0$ erhalten werden.

Da die Grösse X_{m-l} in (15) vorkommt, in (14) dagegen fehlt, so soll der Differentialquotient $\varphi^{(m-l)}(x)$, welcher in X_{m-l}, aber nicht in $X_0, X_1, \cdots X_{m-l-1}$ enthalten ist, aus (15) und (9) eliminirt werden. Man subtrahirt zu diesem Behufe die Gleichung (9) von (15), nachdem man dieselbe mit dem Factor $q^{l-1}\left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-l}$, $=q^{l-1}p^{m-l}$, versehen hat. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned}(18)\quad \varphi(u)-\beta_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}+(-1)^{l-1}\beta_0(v-x)^m p^{m-l}q^{l-1}=\\
=p^{m-l+1}\sum_{k=0}^{k=l-2}(m-k-2)_{l-k-2}\,q^{l-k-2}\,V_k\\
+q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=m-l}(m-k-2)_{l-2}\,p^{m-l-k}\,X_k\\
+p^{m-l}q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=l-1}(m-k-1)_{l-k-1}\,\varphi^{(k)}(v)\,\frac{(x-v)^k}{k!}\\
-p^{m-l}q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=m-l}(m-k-1)_{l-1}\,\varphi^{(k)}(x)\,\frac{(v-x)^k}{k!},\end{aligned}$$

woselbst die Werthe $\frac{\varphi^{(k)}(v)}{k!}$ und $\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}$ für $k=0$ durch $\varphi(v)$ und $\varphi(x)$ zu ersetzen sind.

Werden auf der rechten Seite von (18) die Summen (3) und (5) für $X_0, X_1, \cdots, V_0, V_1, \cdots$ substituirt, so ist daselbst die Grösse $\varphi^{(k)}(x)\,\frac{(u-x)^k}{k!}$ mit dem Coefficienten

$$(19)\quad q^{l-1}[1+(l-1)_{l-2}\,p+(l)_{l-2}\,p^2+\cdots+(m-k-2)_{l-2}\,p^{m-l-k} \\ -(m-k-1)_{l-1}\,p^{m-l-k}]$$

und die Grösse $\varphi^{(k)}(v)\,\frac{(u-v)^k}{k!}$ mit dem Coefficienten

$$(20)\quad p^{m-l+1}\Big[1+(m-l+1)_1 q+(m-l+2)_2 q^2+\cdots+(m-k-2)_{l-k-2}q^{l-k-2} \\ +(m-k-1)_{l-k-1}\,\frac{q^{l-k-1}}{p}\Big]$$

multiplicirt. Indem man nun die Formel (13) für $\mu=l-1$, $\nu=m-k-1$ benutzt, transformirt man den Coefficienten (19) in das Product

$$q^{l-1}(1-p)\,[1+(l)_{l-1}p+(l+1)_{l-1}p^2+\cdots+(m-k-2)_{l-1}\,p^{m-l-k-1}],$$

welches wegen der Relation $p+q=1$ mit dem Ausdruck (16) gleichlautend ist.

Ebenso folgt aus der Formel (12), wenn daselbst $\beta=m-l$, $\mu=l-k-2$ genommen, und die Gleichung $1-q=p$ angewendet wird, die Identität der Grössen (17) und (20). Diese Umformungen bleiben im Falle $k=0$ gültig, so dass auch die Coefficienten von $\varphi(x)$, resp. $\varphi(v)$, in (18) und (14) dieselben sind.

Endlich stimmen die linken Seiten der Gleichungen (18) und (14) überein, da nach (2)

$$\beta_0\left\{(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}-(-1)^{l-1}(v-x)^m\,p^{m-l}\,q^{l-1}\right\}= \\ \beta_0(u-v)^{l-1}\,(u-x)^{m-l}\,[u-x-(v-x)]=\beta_0(u-v)^l\,(u-x)^{m-l}$$

gefunden wird. Hiermit ist die Formel (14) bewiesen.

Man bringt mit Rücksicht auf das Folgende die Gleichungen (4), (6), (14) noch auf eine andere Form. Die Grösse X_k lautet, wenn nach (2) für $u-x$ das Product $(v-x)\,p$ substituirt wird,

$$X_k=\varphi(x)+\varphi'(x)\,\frac{v-x}{1}\,p+\varphi''(x)\,\frac{(v-x)^2}{1\,.\,2}\,p^2+\cdots \\ +\varphi^{(k)}(x)\,\frac{(v-x)^k}{k!}\,p^k.$$

Daher geht die in der Gleichung (4) vorkommende Summe

$$X_{m-2}+p\,X_{m-3}+p^2\,X_{m-4}+\cdots+p^{m-2}\,X_0,$$

falls sie nach Potenzen von p geordnet wird, in den Ausdruck

$$\varphi(x) + p\left[\varphi(x) + \varphi'(x)\frac{v-x}{1}\right]$$
$$+ p^2\left[\varphi(x) + \varphi'(x)\frac{v-x}{1} + \varphi''(x)\frac{(v-x)^2}{1\,.\,2}\right] + \cdots$$
$$+ p^{m-2}\left[\varphi(x) + \varphi'(x)\frac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!}\right]$$

über. Man bezeichnet nun (für $l = 1, 2, \cdots m-1$) durch $R_0^{(l)}, R_1^{(l)}, R_2^{(l)}, \cdots$ die Functionen

$$(21)\quad \begin{cases} R_0^{(l)} = \varphi(x), \quad R_1^{(l)} = \varphi'(x)\dfrac{v-x}{1} + (l)_1\,\varphi(x), \\ R_2^{(l)} = \varphi''(x)\dfrac{(v-x)^2}{1\,.\,2} + (l)_1\,\varphi'(x)\dfrac{v-x}{1} + (l+1)_2\,\varphi(x), \cdots \\ R_k^{(l)} = \varphi^{(k)}(x)\dfrac{(v-x)^k}{k!} + (l)_1\,\varphi^{(k-1)}(x)\dfrac{(v-x)^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad + (l+1)_2\,\varphi^{(k-2)}(x)\dfrac{(v-x)^{k-2}}{(k-2)!} \\ \qquad + (l+2)_3\,\varphi^{(k-3)}(x)\dfrac{(v-x)^{k-3}}{(k-3)!} + \cdots + (l+k-1)_k\,\varphi(x), \end{cases}$$

in denen $(l)_1, (l+1)_2, \cdots$ Binomialcoefficienten bedeuten. Ferner sei $S_k^{(n)}$ diejenige Function, die aus $R_k^{(n)}$ entsteht, wenn die Variablen x und v mit einander vertauscht werden; also man setzt

$$(22)\quad \begin{cases} S_0^{(n)} = \varphi(v), \quad S_1^{(n)} = \varphi'(v)\dfrac{x-v}{1} + (n)_1\,\varphi(v), \\ S_2^{(n)} = \varphi''(v)\dfrac{(x-v)^2}{1\,.\,2} + (n)_1\,\varphi'(v)\dfrac{x-v}{1} + (n+1)_2\,\varphi(v), \cdots \\ S_k^{(n)} = \varphi^{(k)}(v)\dfrac{(x-v)^k}{k!} + (n)_1\,\varphi^{(k-1)}(v)\dfrac{(x-v)^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad + (n+1)_2\,\varphi^{(k-2)}(v)\dfrac{(x-v)^{k-2}}{(k-2)!} \\ \qquad + (n+2)_3\,\varphi^{(k-3)}(v)\dfrac{(x-v)^{k-3}}{(k-3)!} + \cdots + (n+k-1)_k\,\varphi(v) \end{cases}$$

Dann ist

$$X_{m-2} + p\,X_{m-3} + p^2\,X_{m-4} + \cdots + p^{m-2}\,X_0$$
$$= R_0^{(1)} + p\,R_1^{(1)} + p^2\,R_2^{(1)} + \cdots + p^{m-2}\,R_{m-2}^{(1)},$$

so dass aus (4) die Gleichung

$$(23)\quad \varphi(u) = \begin{cases} q\left[R_0^{(1)} + p\,R_1^{(1)} + p^2\,R_2^{(1)} + \cdots + p^{m-2}\,R_{m-2}^{(1)}\right] \\ + p^{m-1}\varphi(v) + \beta_0(u-v)\,(u-x)^{m-1} \end{cases}$$

erhalten wird. In analoger Weise leitet man aus (6) die Formel

$$(24)\quad \varphi(u) = \begin{cases} q^2\left[R_0^{(2)} + p\,R_1^{(2)} + p^2\,R_2^{(2)} + \cdots + p^{m-3}\,R_{m-3}^{(2)}\right] \\ + p^{m-2}\left[S_0^{(m-2)} + q\,S_1^{(m-2)}\right] + \beta_0(u-v)^2\,(u-x)^{m-2} \end{cases}$$

ab. Endlich bestehen die Identitäten

$$X_{m-l-1}+(l)_{l-1}\,p\,X_{m-l-2}+(l+1)_{l-1}\,p^2\,X_{m-l-3}+\cdots+(m-2)_{l-1}\,p^{m-l-1}\,X_0$$
$$=R_0^{(l)}+p\,R_1^{(l)}+p^2\,R_2^{(l)}+\cdots+p^{m-l-1}\,R^{(l)}_{m-l-1}$$

und

$$V_{l-1}+(m-l)_1\,q\,V_{l-2}+(m-l+1)_2\,q^2\,V_{l-3}+\cdots+(m-2)_{l-1}\,q^{l-1}\,V_0$$
$$=S_0^{(m-l)}+q\,S_1^{(m-l)}+q^2\,S_2^{(m-l)}+\cdots+q^{l-1}\,S^{(m-l)}_{l-1},$$

zu denen man unmittelbar gelangt, wenn man in X_k die Differenz $u-x$ durch $(v-x)\,p$ und in V_k die Differenz $u-v$ durch $(x-v)\,q$ ersetzt und die Formel $(n)_i=(n)_{n-i}$ beachtet. Auf diese Weise nimmt die Gleichung (14) durch Einführung der Functionen (21) und (22) die Gestalt

$$(25)\quad \varphi(u)=\begin{cases} q^l\left[R_0^{(l)}+p\,R_1^{(l)}+p^2\,R_2^{(l)}+\cdots+p^{m-l-1}\,R^{(l)}_{m-l-1}\right]\\ +p^{m-l}\left[S_0^{(m-l)}+q\,S_1^{(m-l)}+q^2\,S_2^{(m-l)}+\cdots+q^{l-1}\,S^{(m-l)}_{l-1}\right]\\ +\beta_0\,(u-v)^l\,(u-x)^{m-l}\end{cases}$$

an, woselbst für l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \cdots m-1$ gewählt werden kann. Im Folgenden wird neben der Gleichung (25) auch diejenige angewendet, die sich aus (25) ergiebt, wenn man l durch $l-1$ ersetzt. Diese Gleichung lautet

$$(26)\quad \varphi(u)=\begin{cases} q^{l-1}\left[R_0^{(l-1)}+p\,R_1^{(l-1)}+p^2\,R_2^{(l-1)}+\cdots+p^{m-l}\,R^{(l-1)}_{m-l}\right]\\ +p^{m-l+1}\left[S_0^{(m-l+1)}+q\,S_1^{(m-l+1)}+\cdots+q^{l-2}\,S^{(m-l+1)}_{l-2}\right]\\ +\beta_0\,(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}\end{cases}$$

und gilt für $l=2, 3, \cdots m$.

§ 4.

Die gewonnenen Formeln (23) bis (26) sollen dazu benutzt werden, eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen, denen das hypergeometrische Integral

$$(27)\quad y=\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

genügt, abzuleiten. Unter v und x werden zwei von einander unabhängige Veränderliche, unter $a_1, a_2, \cdots a_m$ Constante, die im Uebrigen beliebig, aber sämmtlich von einander verschieden sind, verstanden. Als Grenzen g, h des Integrals (27) sind zwei der $m+3$ Werthe $a_1, a_2, \cdots a_m, \infty, v, x$ zu nehmen. Die Grössen $b_1, b_2, \cdots b_m, \varkappa, \lambda$ sind constant.

Fasst man das obige bestimmte Integral y als Function von x allein auf, so hat man für dasselbe eine gewöhnliche Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung*); ebenso ist y mit $\frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \ldots \frac{d^{m+1}y}{dv^{m+1}}$ durch eine lineare Gleichung verbunden. Die Differentialgleichungen, zu denen die nachstehenden Rechnungen führen, enthalten gleichzeitig Differentialquotienten aus den zwei Reihen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ und $\frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \cdots$; und zwar ist die Gesammtzahl der in jeder einzelnen Gleichung auftretenden Differentialquotienten wieder gleich $m+1$. Es soll zunächst diejenige Differentialgleichung hergestellt werden, in welcher neben $\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}$ die Grösse $\frac{dy}{dv}$ vorkommt.

Der Zähler des Binomialcoefficienten $(\gamma)_\nu$ möge (im Anschluss an eine von Vandermonde angewendete Bezeichnung) kurz $[\gamma]_\nu$ genannt werden; man setzt also für ein beliebiges γ und für ein positives ganzzahliges ν

$$(28)\qquad [\gamma]_\nu = \gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-\nu+1), \quad [\gamma]_0 = 1.$$

Dann ist

$$\frac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i [\lambda-1]_i \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-1}(u-x)^{\lambda-i-1}\,du,$$

$$\frac{d^i y}{dv^i} = (-1)^i [\varkappa-1]_i \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-i-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du.$$

Die letzteren Gleichungen bleiben bekanntlich auch in dem Falle gültig, dass g oder h gleich x oder v ist; nur muss dann $\lambda - i > 0$, resp. $\varkappa - i > 0$ sein.

Man bezeichne nun durch $\varphi(u)$ die ganze Function m^{ten} Grades

$$(29)\qquad \varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_m)$$

und definire die ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades $\psi(u)$ durch die Gleichung

$$(30)\qquad \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \frac{b_1}{u-a_1} + \frac{b_2}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_m}{u-a_m}.$$

Ferner seien Π_1 und Θ_1 die Producte

$$\Pi_1 = (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\cdots(u-a_m)^{b_m}(u-v)^{\varkappa-1}(u-x)^{\lambda-m},$$

$$\Theta_1 = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-2}(u-x)^{\lambda-m-1},$$

---

*) Cfr. die Arbeit des Verfassers im 71^{ten} Bande des Crelle'schen Journals, sowie die Abhandlung des Herrn Hossenfelder „Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung" im 4^{ten} Bande dieser Annalen.

so dass y, $\frac{d^i y}{dx^i}$ und $\frac{dy}{dv}$ in der Form

$$(31)\quad \begin{cases} y = \int_g^h \Theta_1(u-v)\,(u-x)^m du, \\[2ex] \frac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i [\lambda - 1]_i \int_g^h \Theta_1(u-v)(u-x)^{m-i} du, \\[2ex] \frac{dy}{dv} = -(\varkappa - 1) \int_g^h \Theta_1 (u-x)^m du \end{cases}$$

geschrieben werden können. Es wird vorausgesetzt, dass Π_1 für $u = g$ und für $u = h$ verschwinde. Ist g oder h gleich a_ν, so muss, damit das Integral (27) überhaupt einen bestimmten Sinn habe, der reelle Theil von b_ν positiv sein; dann ist aber auch $\Pi_1 = 0$ für $u = a_\nu$. Hat g oder h einen der Werthe v, x, ∞, so wird, der obigen Voraussetzung gemäss, der reelle Theil der respectiven Zahlen

$$\varkappa - 1, \quad \lambda - m, \quad m + 1 - b_1 - b_2 - \cdots - b_m - \varkappa - \lambda$$

als positiv angenommen, womit gleichzeitig die Convergenz des Integrales (27) ausgesprochen ist. Indem man Π_1 nach u differenzirt, während u für unabhängig von v und x gilt, findet man

$$\frac{d\Pi_1}{du} = \Theta_1 \begin{Bmatrix} (u-v)\,(u-x)\,\psi(u) \\ +\,(\varkappa-1)\,(u-x)\,\varphi(u) \\ +\,(\lambda-m)(u-v)\,\varphi(u) \end{Bmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{(u-v)\,\Theta_1}\,\frac{d\Pi_1}{du}$$
$$= (u-x)\,\psi(u) + (\varkappa-1)\,\frac{u-x}{u-v}\,\varphi(u) + (\lambda-m)\,\varphi(u).$$

Auf der rechten Seite der letzteren Gleichung substituirt man für die mit $(\varkappa-1)\,\frac{u-x}{u-v}$ multiplicirte Function $\varphi(u)$ den Ausdruck (23), dagegen für die im letzten Summandus der Gleichung enthaltene Function $\varphi(u)$ und für die Function $\psi(u)$ die respectiven Entwickelungen nach dem Taylor'schen Satze

$$\varphi(u) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\frac{u-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m)}(x)\,\frac{(u-x)^m}{m!},$$

$$\psi(u) = \psi(x) + \psi'(x)\,\frac{u-x}{1} + \cdots + \psi^{(m-1)}(x)\,\frac{(u-x)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Hierdurch entsteht, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{u-x}{u-v}\,q=-p,\quad \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}=\beta_0=1,\quad \frac{\psi^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}=b_1+b_2+\cdots+b_m$$

ist, die Gleichung

$$(32)\qquad \frac{1}{(u-v)\,\Theta_1}\,\frac{d\Pi_1}{du}$$
$$=A_0+A_1(u-x)+A_2(u-x)^2+\cdots+A_{m-1}(u-x)^{m-1}-$$
$$-(\varkappa-1)\frac{\varphi(v)}{(v-x)^{m-1}}\,\frac{(u-x)^m}{u-v}+s(u-x)^m,$$

in welcher durch A_0 die Function $(\lambda-m)\,\varphi(x)$, durch A_i für

$$i=1,2,\ldots,m-1$$

die Function

$$(33)\qquad A_i=(\lambda-m)\frac{\varphi^{(i)}(x)}{i!}+\frac{\psi^{(i-1)}(x)}{(i-1)!}-\frac{(\varkappa-1)R_{i-1}^{(1)}}{(v-x)^i},$$

und durch s die Constante

$$(34)\qquad s=b_1+b_2+\cdots+b_m+\varkappa+\lambda-m-1$$

bezeichnet wird. Die in (33) vorkommende Grösse $R_{i-1}^{(1)}$ ist nach (21) gleich der Summe

$$\varphi^{(i-1)}(x)\frac{(v-x)^{i-1}}{(i-1)!}+\varphi^{(i-2)}(x)\frac{(v-x)^{i-2}}{(i-2)!}+\cdots+\varphi'(x)\frac{v-x}{1}+\varphi(x).$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (32) mit $(-1)^m(u-v)\,\Theta_1$ und integrirt dieselbe nach u zwischen den Grenzen g und h, so treten auf der rechten Seite die in (31) angegebenen bestimmten Integrale auf; die linke Seite verschwindet, da Π_1 für $u=g$ und für $u=h$ den Werth 0 annimmt. Auf diese Weise findet man für das Integral (27) die Differentialgleichung

$$(35)\qquad \frac{A_0}{[\lambda-1]_m}\,\frac{d^m y}{dx^m}-\frac{A_1}{[\lambda-1]_{m-1}}\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{A_2}{[\lambda-1]_{m-2}}\,\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$$
$$-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}A_{m-1}}{[\lambda-1]_1}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\varphi(v)}{(x-v)^{m-1}}\,\frac{dy}{dv}+(-1)^m s y=0,$$

woselbst $[\lambda-1]_i$ nach (28) das Product $(\lambda-1)\,(\lambda-2)\cdots(\lambda-i)$ bedeutet.

§ 5.

Die Function (27) genügt ferner einer Differentialgleichung, in welcher die beiden ersten Differentialquotienten derselben nach v und die $m-1$ ersten Differentialquotienten nach x enthalten sind. Nennt man Π_2 und Θ_2 die Producte

$$\Pi_2 = (u-a_1)^{b_1} \quad (u-a_2)^{b_2} \quad \cdots (u-a_m)^{b_m} \quad (u-v)^{\varkappa-2}(u-x)^{\lambda-m+1},$$

$$\Theta_2 = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-3}(u-x)^{\lambda-m},$$

so nehmen durch Einführung von Θ_2 die oben erwähnten Ausdrücke für y, $\frac{d^i y}{dx^i}$, $\frac{d^i y}{dv^i}$ die Gestalt

$$(36)\quad \begin{cases} y = \int\limits_g^h \Theta_2 (u-v)^2 (u-x)^{m-1} du, \\ \frac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i [\lambda - 1]_i \int\limits_g^h \Theta_2 (u-v)^2 (u-x)^{m-i-1} du, \\ \frac{d^i y}{dv^i} = (-1)^i [\varkappa - 1]_i \int\limits_g^h \Theta_2 (u-v)^{2-i} (u-x)^{m-1} du \end{cases}$$

an. Die Functionen Π_2 und Θ_2 sind durch die Gleichung

$$(37)\quad \frac{1}{\Theta_2}\frac{d\Pi_2}{du}$$
$$= (u-v)(u-x)\psi(u) + (\varkappa-2)(u-x)\varphi(u) + (\lambda-m+1)(u-v)\varphi(u)$$

mit einander verbunden, in der $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ die in (29) und (30) angegebenen Functionen sind. Für den Factor $\varphi(u)$ des mittleren Summandus der rechten Seite von (37) werde der Ausdruck (24), für die im letzten Summandus enthaltene Function $\varphi(u)$ der Ausdruck (23) eingesetzt. Auf die Function $\psi(u)$, die im ersten Summandus der obigen rechten Seite vorkommt, wird ebenfalls die Formel (23) angewendet, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\psi(u)$ eine ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Man bezeichne durch

$$\mathfrak{R}_0^{(n)}, \mathfrak{R}_1^{(n)}, \ldots \mathfrak{S}_0^{(n)}, \mathfrak{S}_1^{(n)}, \ldots$$

die zu (21) und (22) analogen Functionen

$$(38)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_0^{(n)} = \psi(x),\ \mathfrak{R}_1^{(n)} = \psi'(x)\frac{v-x}{1} + (n)_1\psi(x), \ldots \\ \mathfrak{R}_k^{(n)} = \psi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!} + (n)_1\psi^{(k-1)}(x)\frac{(v-x)^{k-1}}{(k-1)!} + \\ \qquad + \cdots + (n+k-1)_k\psi(x), \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_0^{(n)} = \psi(v),\ \mathfrak{S}_1^{(n)} = \psi'(v)\frac{x-v}{1} + (n)_1\psi(v), \ldots \\ \mathfrak{S}_k^{(n)} = \psi^{(k)}(v)\frac{(x-v)^k}{k!} + (n)_1\psi^{(k-1)}(v)\frac{(x-v)^{k-1}}{(k-1)!} + \\ \qquad + \cdots + (n+k-1)_k\psi(v). \end{cases}$$

Ferner werde die Constante $b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, welche den Coefficienten von u^{m-1} in $\psi(u)$ bildet, kurz γ_0 genannt. Dann bestehen für $\psi(u)$ die aus (23) und (26) folgende Formeln

$$(40)\quad \psi(u) = \begin{cases} q\left[\mathfrak{R}_0^{(1)} + p\mathfrak{R}_1^{(1)} + p^2\mathfrak{R}_2^{(1)} + \cdots + p^{m-3}\mathfrak{R}_{m-3}^{(1)}\right] \\ + p^{m-2}\psi(v) + \gamma_0(u-v)(u-x)^{m-2}, \end{cases}$$

$$(41)\quad \psi(u) = \begin{cases} q^{l-1}\left[\mathfrak{R}_0^{(l-1)} + p\mathfrak{R}_1^{(l-1)} + p^2\mathfrak{R}_2^{(l-1)} + \cdots + p^{m-l-1}\mathfrak{R}_{m-l-1}^{(l-1)}\right] \\ + p^{m-l}\left[\mathfrak{S}_0^{(m-l)} + q\mathfrak{S}_1^{(m-l)} + q^2\mathfrak{S}_2^{(m-l)} + \cdots + q^{l-2}\mathfrak{S}_{l-2}^{(m-l)}\right] \\ + \gamma_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l}, \end{cases}$$

von denen die erstere für die Gleichung (37) benutzt wird. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\frac{1}{\Theta_2}\frac{d\Pi_2}{du} =$$

$$= -(u-v)^2\left[B_0 + B_1(u-x) + B_2(u-x)^2 + \cdots + B_{m-2}(u-x)^{m-2}\right]$$

$$+ (u-v)(u-x)^{m-1}\left\{\begin{aligned} & s(u-v) + \frac{(\varkappa-2)S_0^{(m-2)}}{(u-v)(v-x)^{m-2}} \\ & + \frac{\psi(v)}{(v-x)^{m-2}} + \frac{(\lambda-m+1)\varphi(v) - (\varkappa-2)S_1^{(m-2)}}{(v-x)^{m-1}} \end{aligned}\right\},$$

wo s die Constante (34), und $B_0, B_1, \ldots, B_{m-2}$ die Functionen

$$(42)\quad \begin{cases} B_0 = \dfrac{\lambda-m+1}{v-x}R_0^{(1)} = \dfrac{\lambda-m+1}{v-x}\varphi(x), \\ B_i = \dfrac{(\lambda-m+1)R_i^{(1)} - (\varkappa-2)R_{i-1}^{(2)}}{(v-x)^{i+1}} + \dfrac{\mathfrak{R}_{i-1}^{(1)}}{(v-x)^i} \qquad (i>0) \end{cases}$$

bedeuten. Wird die obige Gleichung nach Multiplication mit $(-1)^m\Theta_2$ in Bezug auf u zwischen g und h integrirt, so erhält man, da

$$(\Pi_2)_{u=g} = (\Pi_2)_{u=h} = 0$$

vorausgesetzt wird, nach Berücksichtigung von (36) die Differentialgleichung

$$(43)\quad \frac{B_0}{[\lambda-1]_{m-1}}\frac{d^{m-1}y}{\partial x^{m-1}} - \frac{B_1}{[\lambda-1]_{m-2}}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{(-1)^{m-2}B_{m-2}}{[\lambda-1]_1}\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{\varphi(v)}{(\varkappa-1)(x-v)^{m-2}}\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{\mathfrak{B}_1}{\varkappa-1}\frac{dy}{dv} + (-1)^m s y = 0,$$

in der $\mathfrak{B}_1$ die Function

$$\frac{(\varkappa-2)S_1^{(m-2)} - (\lambda-m+1)\varphi(v)}{(x-v)^{m-1}} + \frac{\psi(v)}{(x-v)^{m-2}}$$

bezeichnet.

§ 6.

Um für die in (27) definirte Function y eine Differentialgleichung abzuleiten, in welcher die Differentialquotienten

$$\frac{d^{m-l+1}y}{dx^{m-l+1}},\ \frac{d^{m-l}y}{dx^{m-l}},\dots,\frac{dy}{dx},\ \frac{d^l y}{dv^l},\ \frac{d^{l-1}y}{dv^{l-1}},\dots,\frac{dy}{dv},$$

jedoch nur diese, vorkommen, während l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \dots, m$ bedeutet, geht man von den Producten

$$\Pi_l = (u-a_1)^{b_1}\ (u-a_2)^{b_2}\ \cdots(u-a_m)^{b_m}\ (u-v)^{\varkappa-l}\ (u-x)^{\lambda-m+l-1},$$
$$\Theta_l = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-l-1}(u-x)^{\lambda-m+l-2}$$

aus, zwischen denen die Relation

$$(44)\qquad \frac{1}{\Theta_l}\,\frac{d\Pi_l}{du} =$$
$$=(u-v)(u-x)\psi(u)+(\varkappa-l)\,(u-x)\,\varphi(u)+(\lambda-m+l-1)\,(u-v)\,\varphi(u)$$

besteht. Die Grössen y, $\frac{d^i y}{dx^i}$, $\frac{d^i y}{dv^i}$ können als die Integrale

$$(45)\qquad \begin{cases} y=\displaystyle\int_g^h \Theta_l(u-v)^l\,(u-x)^{m-l+1}\,du, \\[2ex] \dfrac{d^i y}{dx^i}=(-1)^i[\lambda-1]_i\displaystyle\int_g^h \Theta_l(u-v)^l(u-x)^{m-l-i+1}\,du, \\[2ex] \dfrac{d^i y}{dv^i}=(-1)^i[\varkappa-1]_i\displaystyle\int_g^h \Theta_l(u-v)^{l-i}\,(u-x)^{m-l+1}\,du \end{cases}$$

dargestellt werden. Man nimmt an, dass das Product Π_l für $u=g$ und für $u=h$ den Werth Null habe.

Auf der rechten Seite der Gleichung (44) werde für die mit $(\varkappa-l)\,(u-x)$ multiplicirte Function $\varphi(u)$ der Ausdruck (25), für die mit $(\lambda-m+l-1)\,(u-v)$ multiplicirte Function $\varphi(u)$ der Ausdruck (26) und für $\psi(u)$ der Ausdruck (41) substituirt. Dann findet man die Gleichung

$$(46)\qquad \frac{1}{\Theta_l}\,\frac{d\Pi_l}{du}=$$
$$=(-1)^{l-1}(u-v)^l[L_0+L_1(u-x)+L_2(u-x)^2+\cdots+L_{m-l}(u-x)^{m-l}]$$
$$+(-1)^{m-l}(u-x)^{m-l+1}[\Lambda_0+\Lambda_1(u-v)+\Lambda_2(u-v)^2+\cdots+\Lambda_{l-1}(u-v)^{l-1}]$$
$$+s(u-v)^l(u-x)^{m-l+1},$$

in welcher zur Abkürzung

$$(47)\quad \begin{cases} L_0 = \dfrac{\lambda-m+l-1}{(v-x)^{l-1}}\, R_0^{(l-1)} = \dfrac{\lambda-m+l-1}{(v-x)^{l-1}}\, \varphi(x), \\ \Lambda_0 = \dfrac{\varkappa-l}{(x-v)^{m-l}}\, S_0^{(m-l)} = \dfrac{\varkappa-l}{(x-v)^{m-l}}\, \varphi(v), \end{cases}$$

und für $i > 0$

$$(48)\quad \begin{cases} L_i = \dfrac{(\lambda-m+l-1)\,R_i^{(l-1)} - (\varkappa-l)\,R_{i-1}^{(l)}}{(v-x)^{l+i-1}} + \dfrac{\mathfrak{R}_{i-1}^{(l-1)}}{(v-x)^{l+i-2}}, \\ \Lambda_i = \dfrac{(\varkappa-l)\,S_i^{(m-l)} - (\lambda-m+l-1)\,S_{i-1}^{(m-l+1)}}{(x-v)^{m-l+i}} + \dfrac{\mathfrak{S}_{i-1}^{(m-l)}}{(x-v)^{m-l+i-1}} \end{cases}$$

gesetzt ist. Die Grössen $R_k^{(n)}$, $S_k^{(n)}$, $\mathfrak{R}_k^{(n)}$, $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ sind die in (21), (22), (38), (39) definirten Summen, s die Constante (34). Man integrirt die Gleichung (46), nachdem man sie mit $(-1)^m \Theta_l$ multiplicirt hat, in Bezug auf die Variable u zwischen den Grenzen g und h und benutzt die Gleichungen (45), um die Functionen y, $\dfrac{d^i y}{dx^i}$, $\dfrac{d^i y}{dv^i}$ einzuführen. Hierdurch ergiebt sich für y die Differentialgleichung

$$(49)\quad \sum_{\nu=l}^{\nu=m} \frac{(-1)^{l-\nu} L_{l-\nu}}{[\lambda-1]_{m-\nu+1}} \frac{d^{m-\nu+1} y}{dx^{m-\nu+1}} + \\ + \sum_{\nu=0}^{\nu=l-1} \frac{(-1)^{\nu} \Lambda_\nu}{[\varkappa-1]_{l-\nu}} \frac{d^{l-\nu} y}{dv^{l-\nu}} + (-1)^m s y = 0,$$

welche die $m-l+1$ ersten Ableitungen von y nach x und die l ersten nach v enthält. Durch $[\varkappa-1]_i$, $[\lambda-1]_i$ werden die in (28) angegebenen Producte bezeichnet. Die Gleichung (49) geht für $l=1$ in (35), für $l=2$ in (43) über. Im Fall $l=m$ liefert die Gleichung (49) die zu (35) analoge Differentialgleichung, welche aus letzterer entsteht, wenn v und x, sowie $\varkappa$ und λ mit einander vertauscht werden.

Ausser diesen Differentialgleichungen bestehen für y noch andere, in denen Ableitungen von der Form $\dfrac{d^{i+k} y}{dv^i dx^k}$ vorkommen. Aus der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dv\,dx} = (\varkappa-1)(\lambda-1) \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1} (u-v)^{\varkappa-2} (u-x)^{\lambda-2}\, du$$

folgt, wenn man dieselbe mit $x-v$, $= u-v-(u-x)$, multiplicirt, die Beziehung

$$(x-v)\frac{d^2y}{dv\,dx}=(\lambda-1)\frac{dy}{dv}-(\varkappa-1)\frac{dy}{dx},$$

und analog ist

$$(x-v)\frac{d^3y}{dv\,dx^2}=(\lambda-2)\frac{d^2y}{dv\,dx}-(\varkappa-1)\frac{d^2y}{dx^2},\quad \text{u. s. w.}$$

Daher lassen sich, wenn man die letzteren Gleichungen anwendet, aus (49) unmittelbar weitere Differentialgleichungen gewinnen, welche die Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dv\,dx}$, $\frac{d^3y}{dv\,dx^2}$ etc. enthalten.

Kiel, im August 1888.

Das erweiterte Formensystem.

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Einleitung.

Das simultane System einer Anzahl quadratischer binärer Formen $f_1, f_2, \ldots f_\lambda$ besteht aus den Formen:

$$f_i;\ (f_i, f_x),\ \left((f_i, f_x), f_\lambda\right)^2,\ (f_i, f_x)^2.$$

Dieselben entstehen aus den Typen:

$$(1)\qquad f;\ (f, f);\ \left((f, f), f\right)^2;\ (f, f)^2,$$

indem man den f Indices anfügt. Man kann das System (1) das *erweiterte* System einer einzigen quadratischen Form f nennen im Gegensatz zu dem *einfachen* vollen System, das nur die beiden Formen

$$f,\ (f, f)^2$$

enthält. Angeregt von Herrn Study habe ich nun für binäre Formen beliebigen Grades das erweiterte System aufgestellt, und dabei denselben Weg eingeschlagen, auf dem ich früher das einfache System gebildet habe. Mittelst solcher erweiterter Systeme ist man im Stande auch Systeme binärer Formen aufzustellen, welche Variabeln enthalten, die linearen *von einander unabhängigen* Substitutionen unterworfen werden.

Nachdem ich im § 1 die wesentlichsten Punkte recapitulirt habe, welche bei der Aufstellung einfacher Systeme eine Rolle spielen, gehe ich im zweiten Paragraphen dazu über nach deren Analogie das erweiterte System zu bilden. In den folgenden Paragraphen stelle ich die erweiterten Systeme einer quadratischen, cubischen und biquadratischen Form sowie das simultan erweiterte System einer quadratischen und cubischen Form dar. Sodann leite ich aus jenen erweiterten Systemen die einfachen simultanen Systeme zweier cubischen und zweier biquadratischen Formen ab. Zum Schluss gebe ich das System einer Form, die in zwei Reihen Variabler x, y, welche von einander unabhängigen Substitutionen unterworfen werden, quadratisch ist.

§ 1.

Das einfache Formensystem.

Um das volle System von $f = a_x^n = b_x^n = \cdots$ etc., welches ich im Folgenden das *einfache* nennen werde, zum Unterschiede von dem später zu behandelnden erweiterten, aufzustellen, habe ich folgendes Verfahren*) eingeschlagen. Zunächst bemerke ich, dass die Form f für sich allein ein System $A^{(0)}$ bildet, welches mod. (ab), also auch mod. $(ab)^2$ vollständig ist. Hieraus folgerte ich, dass die Form $(f, f)^2$ für sich allein ein System $B^{(0)}$ bildet, welches mod. $(ab)^3$ also auch mod. $(ab)^4$ vollständig ist; durch Ueberschiebung beider Systeme erhielt ich ein drittes System $A^{(1)}$, das wie $B^{(0)}$ vollständig ist mod. $(ab)^4$. Nach diesem System $A^{(1)}$ bildete ich für die Form $(f, f)^4$ ein Bildsystem $B^{(1)}$, welches mod. $(ab)^6$ vollständig ist. Durch Ueberschiebung von $A^{(1)}$ mit $B^{(1)}$ ergiebt sich ein System $A^{(2)}$, das wie $B^{(1)}$ vollständig ist mod. $(ab)^6$, etc. etc. Die Systeme $A^{(\nu)}$ können so lange als Modelle für die Herstellung der Bildsysteme benützt werden, als der Grad von $(f, f)^{2\varrho}$ grösser oder gleich dem von f ist, so lange also

$$2n - 4\varrho \geqq n.$$

Andernfalls benützte ich als Modelle die vollständigen Systeme von Formen des Grades $2n - 4\varrho < n$.

Das letzte System $A^{(\nu)}$ ist dasjenige, für welches ν die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl ist; und dieses System ist alsdann das einfache volle System von f. Die Richtigkeit des eingeschlagenen Verfahrens beruht hauptsächlich auf den Congruenzen**)

$$\left((f, f)^{2\mu}, f\right)^{2\mu+\varrho} \equiv 0, \quad \text{mod. } (ab)^{2\mu+1} \tag{1}$$

für

$$2n - 4\mu > n, \quad \text{oder} \quad 4\mu < n,$$

$$\left((f, f)^{2\mu}, f\right)^{2\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+1} \tag{2}$$

für

$$4\mu = n, \quad 2\mu + \varrho < n.$$

Aus diesen ergeben sich nämlich die weitern Congruenzen:

$$\left((f, f)^{2\mu}, (f, f)^{2\mu}\right)^{2\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+1}, \; 4\mu < n, \tag{3}$$

$$\left((f, f)^{2\mu}, (f, f)^{2\mu}\right)^{2\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+1}, \; j \tag{4}$$

für

---

*) Vergl. meine Vorlesungen, Herausgabe von G. Kerschensteiner, B. G. Teubner.

**) Vergl. a. a. O. Bd. II, Seite 105.

$$4\mu = n, \quad j = \left((f, f)^{2\mu}, f\right)^n,$$

welche die Mittel zum Beweise liefern, dass ein Bildsystem $B^{(\varkappa)}$ vollständig ist mod. $(ab)^{2\varkappa+4}$, resp. $(ab)^{2\varkappa+4}$, j.

§ 2.

Das erweiterte Formensystem.

Aus den Symbolen von Formen gleichen Grades

$$f_1 = a_x^n; \quad f_1 = b_x^n; \quad f_3 = c_x^n; \cdots$$

lassen sich symbolische Producte P zusammensetzen, von denen alle simultanen Covarianten und Invarianten der f_i Aggregate sind. Aus jedem P entstehen durch Vertauschung der Symbole eine Anzahl anderer symbolischer Producte, welche ich „die Ableitungen von P" nennen will. Jede derselben kann als Ausgangsform gewählt werden.

Jene Anzahl von Ausgangsformen

$$P_1, P_2, P_3, \ldots P_\lambda,$$

durch deren Ableitungen alle simultanen Covarianten und Invarianten sich ganz und rational darstellen lassen, nenne ich *das erweiterte System* der einen Form f.

Die symbolischen Producte P lassen sich bekanntlich auch durch Ueberschiebungen

$$U = \left(\left(\left((f_{i_1}, f_{i_2})^{\varkappa_1}, f_{i_3}\right)^{\varkappa_2}, f_{i_4}\right)^{\varkappa_3} \cdots\right)$$

darstellen. Auch diese Grössen U können als Originalformen statt der P angenommen werden. Aus einem U folgen die Ableitungen, wenn man darin für die

$$i_1 \, i_2 \, i_3 \ldots$$

irgend welche der Indices der f einsetzt. Da es gleichgültig ist, welche dieser Ableitungen als Originalform gewählt wird, so darf man, ohne ein Missverständniss zu erregen, in U die Indices der f weglassen, es also so schreiben:

$$U = \left(\left((f, f)^{\varkappa_1}, f\right)^{\varkappa_2} \cdots\right).$$

Man muss sich aber während der Rechnung bewusst sein, dass den f beliebige, gleiche oder verschiedene Indices zukommen.

Bei Aufstellung des erweiterten Systems von f werde ich im Wesentlichen ebenso verfahren, wie bei Aufstellung des einfachen Systems; nur werde ich die Annahme fallen lassen, dass während der Rechnung die Symbole resp. die Indices der f beliebig vertauscht werden dürfen. —

Die Form f bildet für sich ein mod. (ab) vollständiges System $A^{(0)}$; sein Bildsystem $B^{(0)}$ besteht aus (f, f) allein und ist mod. $(ab)^2$ vollständig. Durch Ueberschiebung von $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ entsteht ein System $A^{(1)}$, das gleichfalls mod. $(ab)^2$ vollständig ist.

Dem $A^{(1)}$ entspricht ein für $(f, f)^2$ aufgestelltes Bildsystem $B^{(1)}$, welches mod. $(ab)^3$ vollständig ist und über $A^{(1)}$ geschoben ein System $A^{(2)}$ erzeugt, das ebenfalls mod. $(ab)^3$ vollständig ist. So kann man eine Reihe von Systemen bilden

$$A^{(0)},\ A^{(1)},\ A^{(2)}, \ldots A^{(\nu-1)},$$

welche nach den Moduln

$$(ab),\ (ab)^2,\ (ab)^3, \ldots (ab)^\nu$$

vollständig sind, und eine zweite Reihe von Bildsystemen

$$B^{(0)},\ B^{(1)},\ B^{(2)}, \ldots B^{(n-1)},$$

die nach den Moduln

$$(ab)^2,\ (ab)^3,\ (ab)^4, \ldots (ab)^{\nu+1}$$

vollständig sind. Ist der Grad von $(f, f)^\mu$ kleiner als der von f, ist also

$$2\mu > n, \quad \text{oder} \quad 2n - 2\mu < n,$$

so kann man nach dem Modell $A^{(\mu-1)}$ kein Bildsystem $B^{(\mu-1)}$ mehr bilden. Dann wähle man als Modell eine Form vom Grade $2n - 2\mu$.

Das letzte der so entstehenden Systeme $A^{(n-1)}$ ist das erweiterte System von f.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht hauptsächlich auf der Congruenz

$$\text{(1)} \qquad \left((f, f)^\mu, f\right)^{\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{2\mu+1}$$

wenn

$$\alpha) \qquad 2n - 2\mu > n,$$

$$\beta) \qquad 2n - 2\mu = n, \quad 2\mu + \varrho < n.$$

Denn aus ihr folgen die weiteren Congruenzen:

$$\text{(2)} \qquad \left((f, f)^\mu, (f, f)^\mu\right)^{\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1},$$

wenn

$$2n - 2\mu > n$$

und

$$\text{(3)} \qquad \left((f, f)^\mu, (f, f)^\mu\right)^{\mu+\varrho} \equiv 0 \text{ mod } (ab)^{\mu+1}, j$$

wenn

$$2n - 2\mu = n, \quad j = \left((f, f)^\mu, f\right)^n.$$

Die Congruenzen (2) und (3) aber lehren, dass $B^{(\mu-1)}$ nach dem Modul $(ab)^{\mu+1}$, resp. nach den Moduln $(ab)^{\mu+1}, j$ vollständig ist.

Um die Congruenz (1) nachzuweisen, unterscheide ich die beiden Fälle μ gerade und μ ungerade. Im ersten Falle gehe ich aus von dem Ausdrucke:

$$P_1 = \begin{cases} (ab)^{\mu-1}(ac)^{\mu+\lambda+1}(bc)^\varrho a_x^{n-2\mu-\lambda} b_x^{n-\mu-\varrho+1} c_x^{n-\mu-\varrho-1-\lambda} \\ +(ba)^{\mu-1}(bc)^{\mu+\lambda+1}(ac)^\varrho a_x^{n-\varrho-\mu+1} b_x^{n-2\mu-\lambda} c_x^{n-\mu-\varrho-1-\lambda}, \end{cases}$$

wobei $\varrho \gtrless \mu + \lambda - 1$ gewählt ist. Im zweiten Falle gehe ich aus von

$$P_2 = (ab)^\mu (ac)^{\mu+\lambda}(bc)^\varrho a_x^{n-2\mu-\lambda} b_x^{n-\mu-\varrho} c_x^{n-\varrho-\mu-\lambda},$$

wobei $\mu + \lambda \gtrless \varrho$ und für $\lambda = 0$ auch $\varrho = 0$ gewählt ist.

Die beiden Formen P_1 und P_2 genügen, wie man sieht, den Congruenzen:

$$P_1 \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1},$$
$$P_2 \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}, \quad \text{für } \lambda > 0.$$

Ich entwickle sie in Reihen, welche nach Ueberschiebungen fortschreiten. Die Glieder dieser Reihen sind:*)

$$\left((f_1, f_2)^\mu, f_3\right)^{\mu+\varrho+\lambda}, \quad \left((f_1, f_2)^{\mu+1}, f_3\right)^{\mu+\varrho+\lambda-1},$$
$$\left((f_1, f_2)^{\mu+2}, f_3\right)^{\mu+\varrho+\lambda-2}, \text{ etc. etc.}$$

Das zweite und die folgenden Glieder verschwinden nach dem Modul $(ab)^{\mu+1}$; also hat man:

$$\left((f_1, f_2)^\mu, f_3\right)^{\mu+\varrho+\lambda} \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}$$

wenn μ gerade, oder wenn μ ungerade aber $\varrho + \lambda > 0$ ist. Ist dagegen $\varrho + \lambda = 0$, so entwickle ich P_2 noch in eine zweite Reihe, mit den Gliedern:

$$\left((f_1, f_3)^\mu, f_2\right)^\mu, \quad \left((f_1, f_3)^{\mu+1}, f_2\right)^{\mu-1} \cdots$$

Wiederum sind in ihr das zweite und alle folgenden Glieder

$$\equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{n+1},$$

und demnach erhält man durch Vergleichung beider Reihen im zweiten Falle die Congruenz:

$$\left((f_1, f_2)^\mu, f_3\right)^\mu + \left((f_3, f_1)^\mu, f_2\right)^\mu \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}.$$

Ebenso ist aber:

$$\left.\begin{aligned} \left((f_2, f_3)^\mu, f_1\right)^\mu + \left((f_1, f_2)^\mu, f_3\right)^\mu \equiv 0 \\ \left((f_3, f_1)^\mu, f_2\right)^\mu + \left((f_2, f_3)^\mu, f_1\right)^\mu \equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}.$$

Aus diesen drei Congruenzen folgt aber unmittelbar

$$\left((f_1, f_2)^\mu, f_3\right)^\mu \equiv 0 \text{ mod. } (ab)^{\mu+1}.$$

*) Vergl. a. a. O. S. 48.

§ 3.

Ueberschiebungen eines Systems über das erweiterte System einer quadratischen Form f.

Schon in der Einleitung habe ich die Formen des erweiterten Systemes einer quadratischen Form aufgeführt. Es besteht aus den Formen

(1) $$f;\ (f,f);\ \big((f,f),f\big)^2;\ (f,f)^2;$$

Denn das System $A^{(0)}$ besteht aus f allein, und das System $B^{(0)}$ aus (f,f) allein. Ersteres ist mod. (ab), letzteres mod. $(ab)^2$ vollständig. Von den aus ihnen durch Ueberschiebung entstehenden Formen sind alle reducibel bis auf $\big((f,f),f\big)^2$, einmal, weil Functionaldeterminanten reducibel sind (vgl. a. a. O. S. 56), dann, weil das Quadrat der Functionaldeterminante (f,f) durch andere Formen ausdrückbar ist.*)

Das System $A^{(1)}$, welches mod. $(ab)^2$ vollständig, enthält daher nur die Formen

$$f,\ (f,f),\ \big((f,f),f\big)^2.$$

Fügt man demselben den Modul $(ab)^2 = (f,f)^2$ hinzu, so bildet es das ganze erweiterte System von f.

Bei Ueberschiebung des Systemes (1) über eine andere Form φ braucht man nur die beiden Covarianten f, und (f,f) zu berücksichtigen und zwar von (f,f) nur die erste Potenz, eben weil sie Functionaldeterminante ist.

Wir haben also φ nur über die Producte

$$f^\nu,\ f^\nu\cdot(f,f)$$

zu schieben und unterscheiden hiebei vier Fälle.

1) Ist φ vom Grade $n = 1$, so treten die Formen hinzu:

(2) $$(f,\varphi);\ (f,\varphi^2)^2;\ \big((f,f),\varphi\big);\ \big((f,f),\varphi^2\big)^2.$$

2) Ist φ vom Grade $n = 2$, so sind die neuen Formen

(3) $$(f,\varphi);\ \big((f,f),\varphi\big)^2;\ (f,\varphi)^2.$$

3) Ist n gerade und grösser als 2, so hat man als neue Formen

(4) $$(f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa};\ (f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa-1};\ \big((f,f),\varphi\big)^2;\ \big((f,f)\cdot f^{\frac{n}{2}-1},\varphi\big)^n,\quad \varkappa \leq \frac{n}{2}.$$

*) Auch für Formen höheren Grades besteht $A^{(0)}$ aus f, und $B^{(0)}$ aus (f,f) allein, und das aus $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ durch Ueberschiebung entstehende System $A^{(1)}$, welches mod. $(ab)^2$ vollständig ist, enthält die zwei Formen f; (f,f), aus den gleichen Gründen, wie wir sie oben für eine quadratische Form angegeben haben.

4) Ist n ungerade und grösser als 2, so treten hinzu die Formen:

$$(5)\qquad \begin{gathered}(f^\varkappa, \varphi)^{2\varkappa};\ (f^\varkappa, \varphi)^{2\varkappa-1};\ (f^n, \varphi^2)^{2n};\ \left(f^{n-1}\cdot(f,f),\ \varphi^2\right)^{2\varkappa},\\ \left((f,f),\varphi\right)^2;\ \left(f^{\frac{n-1}{2}}\cdot(f,f),\varphi\right)^n;\ (f^{\frac{n+1}{2}},\varphi)^n.\end{gathered}$$

Jede dieser Ueberschiebungen darf durch irgend eines ihrer Glieder ersetzt werden.

Im Falle dass $\varphi = (\psi, \chi)$ Functionaldeterminante zweier Formen ist, deren Grad grösser als 1, lassen sich einige der Formen reduciren. Unter den Formen des Systems (3) sind es die Formen (f, φ) und $\left((f,f),\varphi\right)^2$. Unter jenen des Systems (4) sind es die Formen

$$\left((f,f),\varphi\right)^2,\quad (f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa-1},$$

wenn ψ und χ von ungeradem Grade, und

$$\left((f,f),\varphi\right)^2,\ (f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa-1},\ \left(f^{\frac{n}{2}-1}\cdot(f,f),\varphi\right)^n,$$

wenn sie geraden Grades sind.

Unter den Formen (5) werden reducibel die Formen

$$\begin{gathered}(f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa-1};\ \left((f,f),\varphi\right)^2,\ \left(f^{\frac{n}{2}-1}\cdot(f,f),\varphi^2\right)^{2n},\ (f^n,\varphi^2)^{2n},\\ \left(f^{\frac{n-1}{2}}\cdot(f,f),\varphi\right)^n.\end{gathered}$$

Da die reduciblen Formen weggelassen werden können, so reducirt sich in diesem Falle das simultane System von f und $\varphi = (\psi, \chi)$

1) wenn φ vom Grade $n = 2$ auf:

(3a) $\qquad f,\ \varphi,\ (f,\varphi)^2$ und das erweiterte System S von f,

2) wenn der Grad n von φ grösser als 2 und gerade, dagegen ψ und χ ungeraden Grades sind, auf

$$(4\,\mathrm{a})\qquad f,\ \varphi,\ (f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa},\ \left(f^{\frac{n}{2}-1}\cdot(f,f),\varphi\right)^n,\ S,\quad \varkappa\le\frac{n}{2},$$

3) wenn n ungerade und grösser als 2, auf

$$(5\,\mathrm{a})\qquad f,\ \varphi,\ (f^\varkappa,\varphi)^{2\varkappa},\ (f^{\frac{n+1}{2}},\ \varphi)^n,\ S,\quad \varkappa<\frac{n}{2}.$$

Soll man das System (1) nicht über eine einzelne Form sondern über ein ganzes System von Formen schieben:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots A_\lambda,$$

so schiebe man zunächst nur über die einzelnen Formen A_i und füge sodann Ueberschiebungen hinzu:

$$(f^\varkappa,\ A_l\cdot A_m)^{2\varkappa},\quad \left(f^{\varkappa-1}\cdot(f,f),\ A_l\cdot A_m\right)^{2\varkappa}$$

wo man solche A_i auswählt, deren Grade μ, ν ungerade Zahlen von der Beschaffenheit sind, dass

$$\mu + \nu = 2\varkappa$$

ist. —

§ 4.

Das erweiterte System einer cubischen Form.

Das System $A^{(1)}$, bestehend aus (vergl. § 3) den Formen:

(1) $$f,\ (f, f),$$

ist mod. $(ab)^2$ vollständig. Da der Grad von $(f, f)^2 = \tau$ bereits kleiner als der von f, so kann das Bildsystem $B^{(1)}$ nicht mehr nach dem Modell $A^{(1)}$ gebildet werden; dasselbe ist aber in dem schon ermittelten erweiterten System einer quadratischen Form:

(2) $$\tau,\ (\tau),\ \big((\tau, \tau), \tau\big)^2,\ (\tau, \tau)^2$$

gegeben. Schiebt man beide Systeme übereinander, so entsteht ein mod. $(ab)^3$ vollständiges System. Fügt man diesem die Invariante

(3) $$i = (ab)^3$$

hinzu, so hat man das volle erweiterte System von f. Man findet durch Ueberschiebung von f und (f, f) über τ und (τ, τ) dass folgende 9 Formen irreducibel sind:

(4) $$\begin{cases} (f, \tau),\ (f, \tau)^2,\ (f, \tau^2)^3,\ (f^2, \tau^3)^6, \\ \big(f, \tau\cdot(\tau, \tau)\big)^3,\ \big(f^2, \tau^2\cdot(\tau, \tau)\big)^6, \\ \big((f, f), \tau\big)^2,\ \big((f, f), \tau^2\big)^4,\ \big((f, f), \tau\cdot(\tau, \tau)\big)^4. \end{cases}$$

Das erweiterte System einer cubischen Form besteht also aus den 16 Formen (1), (2), (3), (4). —

Schiebt man dieses System über das System einer quadratischen Form φ, so erhält man das simultane System S von f und φ. Dasselbe entsteht somit durch Ueberschiebung der drei Systeme (1), (2) und dem von φ, also auch durch Ueberschiebung des Systemes (1) mit dem simultanen System T von φ und τ. Die Formen des Systemes T erhält man aber durch den Aronhold'schen Process

$$\delta\tau = \varphi$$

aus dem von τ. Daher erhält man durch denselben Process auch das System S aus den Systemen (1), (2) und (3), (4) von f.

§ 5.

Das erweiterte System einer biquadratischen Form.

Die Ueberschiebungen von f über sich selbst bezeichne ich durch:

(1) $$(f,f)^2 = \Delta, \quad (f,f)^3 = h, \quad (f,f)^4 = i;$$

die Invariante $(f,\Delta)^4$ durch j. Das System

(2) $$f, \; (f,f)$$

ist mod. $(ab)^2$ vollständig. Ferner hat man nach § 2,

$$(f,\Delta)^2 \equiv 0; \quad (f,\Delta)^3 \equiv 0 \text{ mod. } h, i$$

und demnach auch

$$(\Delta,\Delta)^\varrho \equiv 0 \text{ mod. } h, i, j,$$

so dass Δ allein ein mod. h, i, j vollständiges System bildet. Schiebt man es über das System (2), so treten nur die Formen $(f,\Delta), j$ hinzu. Daher ist

(3) $$f, \; (f,f), \; \Delta, \; (f,\Delta), \; j$$

ein mod. h, i vollständiges System. Nun besteht das System der quadratischen Form h aus

(4) $$h, \; (h,h), \; \big((h,h),h\big)^2, \; (h,h)^2.$$

Schiebt man es über das System (5) und fügt dann die Invariante i hinzu, so entsteht das System von f. Es enthält an alten Formen:

(5) $$\begin{cases} f, \; (f,f), \; \Delta, \; (f,\Delta), \; i, \; j, \\ h, \; (h,h), \; \big((h,h),h\big)^2, \; (h,h)^2 \end{cases}$$

und an neuen Formen

(6) $$\begin{cases} (f,h), \; (f,h)^2, \; (f,h^2)^3, \; (f,h^2)^4, \\ (\Delta,h), \; (\Delta,h)^2, \; (\Delta,h^2)^3, \; (\Delta,h^2)^4, \\ \big(f, h(h,h)\big)^4, \; \big(\Delta, h(h,h)\big)^4, \\ \big((f,f),h\big)^2, \; \big((f,f),h^2\big)^4, \; \big((f,f),h^3\big)^6, \\ \big((f,\Delta),h\big)^2, \; \big((f,\Delta),h^2\big)^4, \; \big((f,\Delta),h^3\big)^6, \end{cases}$$

im ganzen 26 Formen.

§ 6.

Das einfache simultane System zweier cubischen Formen.

Aus dem erweiterten System einer quadratischen Form f:

$$f,\ (f, f),\ (f, f)^2,\ \big((f, f),\ f\big)^2$$

erhält man, wie ich schon Eingangs erwähnte, das einfache simultane System zweier quadratischer Formen f und φ, wenn man darin den Buchstaben f auf alle möglichen Arten durch f und φ ersetzt und die verschwindenden oder reduciblen Formen unterdrückt. So findet man direct die 6 Formen (v. a. a. O. pag. 143)

$$f, \varphi;\ (f, \varphi);\ (f, f)^2,\ (f, \varphi)^2,\ (\varphi, \varphi)^2.$$

In derselben Weise erhält man aus dem erweiterten System einer cubischen Form das einfache simultane System zweier solcher Formen

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \text{etc.},$$
$$\varphi = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \text{etc.}$$

Von den zahlreichen durch die ein- oder mehrmalige Substitution von $\varphi, \sigma, \ldots$ für $f, \tau, \ldots$ aus den Typen sich ergebenden *Ableitungen* sind sehr viele reducibel. Einzelne der Typen liefern gar keine reduciblen Formen, wie im obigen Beispiel die Typen f, und $(f, f)^2$; andere führen theilweise auf reducible Formen oder reducible Aggregate von solchen Ableitungen, theilweise auf irreducible wie im obigen Beispiel der Typus (f, f); endlich hat man eine dritte Reihe von Typen, deren sämmtliche Ableitungen verschwinden oder reducibel sind wie im obigen Beispiel der Typus $\big((f, f),\ f\big)^2$.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend theilen wir unsere 16 Formen in folgende Classen ein:

I[te] Classe.

$$f,\ \tau.$$

Alle Ableitungen

$$f;\ \ \varphi;\ \ (f, f)^2 = \tau;\ \ (f, \varphi)^2 = \Theta;\ \ (\varphi, \varphi)^2 = \sigma$$

gehören dem simultanen System an.

II[te] Classe.

$$(f, \tau);\ \ (f, \tau)^2.$$

Von den Ableitungen:

$$(f, \tau);\ (\varphi, \tau);\ (f, \Theta);\ (\varphi, \Theta);\ (f, \sigma);\ (\varphi, \sigma);$$
$$(f, \tau)^2;\ (\varphi, \tau)^2;\ (f, \Theta)^2;\ (\varphi, \Theta)^2;\ (f, \sigma)^2;\ (\varphi, \sigma)^2$$

verschwinden:

$$(f, \tau)^2 \quad \text{und} \quad (\varphi, \sigma)^2$$

und die übrigen sind — abgesehen von den beiden Formen (f, τ), (φ, σ) — durch 4 Relationen verbunden, die wir theils durch symbolische Rechnung, theils durch den Aronhold'schen Process herleiten.

Es ist:

$$(1) \quad (ab)(b\alpha)\, a_x \alpha_x \left\{\alpha_x (ab) + a_x (b\alpha)\right\} = (ab)(b\alpha)(a\alpha)\, a_x b_x \alpha_x = 0,$$

$$(2) \quad (f, \tau)^2 = 0 \quad (\text{v. a. a. O. pag. 169 I})$$

somit durch Umformung des symbolischen Productes (1)

$$(\varphi, \tau) = (f, \Theta) - \frac{1}{2} f (f, \varphi)^3,$$

$$(f, \sigma) = (\varphi, \Theta) + \frac{1}{2} \varphi (f, \varphi)^3,$$

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi, \tau)^2 + 2(f, \Theta)^2 = 0 \\ (f, \sigma)^2 + 2(\varphi, \Theta)^2 = 0 \end{array}\right\} \text{(v. a. a. O. pag. 341, (1) u. (2)).}$$

Von denjenigen Formen, welche f und τ zusammen enthalten, können somit entweder alle diejenigen als reducibel weggelassen werden, bei denen ein f und ein τ, sei es durch f, σ, sei es durch φ, τ, ersetzt wird, oder jene, bei denen τ durch Θ ersetzt ist.

3te Classe.

$$(f, f); \quad (f, f)^3; \quad (\tau, \tau); \quad \big((\tau, \tau), \tau\big)^2.$$

Diejenigen Ableitungen verschwinden, in welchen f zweimal durch denselben Buchstaben f oder φ und τ zweimal durch den entsprechenden τ oder σ ersetzt werden; es bleiben übrig:

$$(f, \varphi); \quad (f, \varphi)^3 = i; \quad (\tau, \Theta); \quad (\sigma, \Theta); \quad (\tau, \sigma); \quad \big((\tau, \sigma), \Theta\big)^2.$$

Bei den Formen, in denen

$$(f, f) \quad \text{oder} \quad (\tau, \tau)$$

auftritt, braucht man also nur die Ableitungen beizubehalten, bei denen sie durch:

$$(f, \varphi) \quad \text{und} \quad (\tau, \Theta); \quad (\tau, \sigma); \quad (\sigma, \Theta)$$

ersetzt sind.

4te Classe.

$$(\tau, \tau)^2; \quad (f, \tau^2)^3.$$

Von den Ableitungen:

$$(\tau, \tau)^2; \quad (\tau, \Theta)^2; \quad (\tau, \sigma)^2; \quad (\Theta, \Theta)^2; \quad (\Theta, \sigma)^2; \quad (\sigma, \sigma)^2;$$

$$(f, \tau^2)^3; \quad (f, \sigma\tau)^3; \quad (f, \sigma^2)^3; \quad (\varphi, \tau^2)^3; \quad (\varphi, \sigma\tau)^3; \quad (\varphi, \sigma^2)^3$$

verschwinden

$$(f, \tau^2)^3 \quad \text{und} \quad (\varphi, \sigma^2)^3$$

und

$$(\Theta, \Theta)^2 = \big((f, \varphi)^2, \Theta\big)^2$$

ist reducibel, da sich nach obiger Bemerkung f, Θ durch φ, τ ersetzen lässt, $(\tau, \tau)^2$ aber bekanntlich gleich der Discriminante R von f ist.

5te Classe.

$$\big((f, f), \tau\big)^2; \quad \big((f, f), \tau^2\big)^4; \quad \big((f, f), \tau(\tau, \tau)\big)^4.$$

Ihre Ableitungen sind gleichzeitig Ableitungen von:

$$\big((f, \varphi), \tau\big)^2; \quad \big((f, \varphi), \tau^2\big)^4; \quad \big((f, \varphi), \tau(\tau, \tau)\big)^4;$$

von ihnen sind die Ableitungen zu untersuchen:

$$\big((f, \varphi), \tau\big)^2; \quad \big((f, \varphi), \sigma\big)^2,$$

$$\big((f, \varphi), \tau^2\big)^4; \quad \big((f, \varphi), \sigma\tau\big)^4; \quad \big((f, \varphi), \sigma^2\big)^4,$$

$$\big((f, \varphi), \tau(\sigma, \tau)\big)^4; \quad \big((f, \varphi), \sigma(\sigma, \tau)\big)^4.$$

Alle haben verschwindende Glieder, dürfen also weggelassen werden.

6te Classe.

$$\big(f, \tau(\tau, \tau)\big)^3; \quad \big(f^2, \tau^2(\tau, \tau)\big)^6; \quad (f^2, \tau^3)^6.$$

Es brauchen nur die Ableitungen betrachtet zu werden, bei denen τ durch Θ ersetzt wird. Die beiden ersten Formen haben nur verschwindende Ableitungen und die der 3ten wird mittelst der Formel reducibel:

$$\begin{vmatrix} (f, \varphi)^2, & (f, \Theta)^2, & f \\ (\varphi, \Theta)^2, & (\Theta, \Theta)^2, & \Theta \\ \varphi \quad , & \Theta \quad , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das simultane System hat somit die 26 Formen (vgl. Gordan-Kerschensteiner pag. 333)

Vom Grade 4: (f, φ);

" " 3: f; φ; (f, τ); (φ, τ); (f, σ); (φ, σ);

" " 2: τ; Θ; σ; (τ, Θ); (τ, σ); (Θ, σ);

" " 1: $(f, \sigma)^2$; $(\varphi, \tau)^2$; $(f, \sigma^2)^3$; $(\varphi, \tau^2)^3$; $(f, \sigma\tau)^3$; $(\varphi, \sigma\tau)^3$;

" " 0: i; $(\tau, \tau)^2$; $(\tau, p)^2$; $(\tau, \sigma)^2$; $(p, \sigma)^2$; $(\sigma, \sigma)^2$; $\big((\sigma, \tau), \Theta\big)^2$.

Behufs Vergleichung mit der citirten Stelle setze man $\tau = \Delta$, $\sigma = \nabla$, $(f, \tau) = Q$, $(\varphi, \sigma) = K$.

§ 7.

Das einfache simultane System zweier biquadratischer Formen.

In derselben Weise, wie wir oben das simultane System zweier cubischen Formen entwickelt haben, lässt sich auch das zweier biquadratischen Formen aus dem erweiterten System einer der Formen herleiten. Wir gruppiren zu dem Zwecke wie vorhin die Typen des erweiterten Systems in Classen.

1te Classe:

$$f,\ \Delta,\ i,\ j.$$

Die Ableitungen:

$$\begin{array}{llll} f,\ \varphi; & \Delta = (f, f)^2; & p = (f, \varphi)^2; & \nabla = (\varphi, \varphi)^2; \\ i = (f, f)^4; & i_1 = (f, \varphi)^4; & i_2 = (\varphi, \varphi)^4; & \\ j = (f, \Delta)^4; & j_1 = (f, p)^4; & j_2 = (\varphi, p)^4; & j_3 = (\varphi, \nabla)^4; \\ & \quad = (\varphi, \Delta)^4; & \quad = (f, \nabla)^4; & \end{array}$$

sind durchwegs irreducibel und bilden sonach Formen des Systemes.

2te Classe.

$$(f, f),\quad (f, f)^3 = h,\quad (h, h),\quad \big((h, h),\ h\big)^2,$$
$$\big(f,\ h\cdot(h,\ h)\big)^4,\quad \big(\Delta,\ h\cdot(h,\ h)\big)^4.$$

Von den Ableitungen verschwinden alle ausser

$$(f, \varphi) \quad \text{und} \quad (f, \varphi)^3 = g.$$

Desgleichen sind von den Typen des erweiterten Systemes, in denen (f, f) oder $(f, f)^3 = h$ vorkommt, nur jene Ableitungen zu untersuchen, in denen (f, f) durch (f, φ) und $(f, f)^3$ durch $(f, \varphi)^3$ ersetzt ist.

3te Classe.

$$(f, h),\ (f, h)^2;\ \ (f, h^2)^3;\ \ (\Delta, h)^2,\ (h, h)^2.$$

Die Ableitungen

$$\begin{array}{lllll} (f, g); & (f, g)^2; & (f, g^2)^3; & (\Delta, g)^2; & (g, g)^2, \\ (\varphi, g); & (\varphi, g)^2; & (\varphi, g^2)^3; & (p, g)^2; & (\nabla, g)^2 \end{array}$$

sind nicht reducibel und bilden daher Formen des Systems.

4te Classe.

$$(f, \Delta).$$

Zwischen den Ableitungen:

$$(f, \Delta);\quad (f, p);\quad (f, \nabla);\quad (\varphi, \Delta);\quad (\varphi, p);\quad (\varphi, \nabla)$$

bestehen zwei Relationen, die wir aus der Formel

$$(ab)(b\alpha)^2 a_x^3 b_x \alpha_x^2 = (ab)^2 (\alpha b) a_x^2 b_x \alpha_x^3$$

gewinnen; sie sind:

$$(1)\qquad \begin{aligned}(\varphi, \Delta) &= (f, p) - f \cdot g,\\ (f, \nabla) &= (\varphi, p) + \varphi \cdot g.\end{aligned}$$

Man kann daher zwei der 6 Ableitungen, etwa (f, p) und (φ, p) auslassen.

5te Classe.

$$\big((f, f), h)\big)^2; \quad (\Delta, h).$$

Die Ableitungen dieser Typen sind zugleich Ableitungen von

$$\big((f \cdot \varphi), g\big)^2; \quad (\Delta, g)$$

und lauten:

$$\big((f, \varphi), (f, \varphi)^3\big)^2; \quad (\Delta, g); \quad (p, g); \quad (\nabla, g).$$

Die beiden ersten sind mit ihren Gliedern:

$$(a\alpha)(b\beta)^3 (ab)(\alpha\beta) a_x^2 \alpha_x^2; \quad (\Delta a)(a\alpha)^3 \alpha_x \Delta_x^3$$

durch die Relation verbunden:

$$(a\alpha)(b\beta)^3 (ab)(\alpha\beta) a_x^2 \alpha_x^2 = \big((f, \varphi), g\big)^2 - \frac{1}{5} g^2 + \frac{1}{2} i_1 p$$

$$(\Delta, g) = (\Delta a)(a\alpha)^3 \Delta_x^3 \alpha_x - \frac{1}{2} i_1 \Delta.$$

Diese Glieder erhalten nun mit Hülfe der Formeln:

$$(ab)\, a_x^3 b_y^3 = -\frac{3}{2} \Delta_{y^2} (yx) - \frac{i}{4} (yx)^3,$$

$$(ab)\, a_x^2 a_{z_1} b_y^3 = -\Delta_{y^2 z} (yx) + \frac{1}{2} \Delta_{y^3} (zy) + \frac{i}{4} (yx)^2 (zy),$$

$$a_y^4 \Delta_x^4 - a_x^4 \Delta_y^4 = 4 (f, \Delta)_{y^3},$$

$$(\Delta a)\, a_y^3 \Delta_x^3 = -(f, \Delta)_{y^2} - \frac{i}{4} f_{y^2} (yx) - \frac{j}{4} (yx)^3,$$

$$(yx)(\Delta a)\, a_y^3 \Delta_x^3 = \frac{1}{4} f \cdot \Delta_{y^4} - \frac{1}{4} \Delta \cdot f_{y^4} - \frac{i}{4} f_{y^2} (yx)^2 - \frac{j}{4} (yx)^4$$

die Werthe:

$$(a\alpha)(b\beta)^3 (ab)(\alpha\beta) a_x^2 \alpha_x^2 =$$

$$= (\alpha\beta)\, \alpha_x^2 \Big\{ (\Delta\beta)^2 (\alpha\Delta) \Delta_x \beta_x + \frac{1}{2} (\Delta\beta)^2 (\alpha\beta) \Delta_x^2 + \frac{i}{7} (\alpha\beta) \beta_x^2 \Big\}$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha\beta)^2 \Delta_x^2 \big\{ (\beta\Delta)^2 \alpha_x^2 - (\alpha\Delta)(\beta\Delta) \alpha_x \beta_x \big\} + \frac{i}{4} \nabla$$

$$= \frac{1}{4} \big\{ i_2 \Delta + i \nabla \big\}.$$

Daher ist:

(2) $$\big((f,\varphi),\,g\big)^2 = \frac{1}{5}\,g^2 - \frac{1}{2}\,i_1 p + \frac{1}{4}\,i_2\Delta + \frac{1}{4}\,i\Delta,$$

(3) $$(\Delta,g) = \frac{1}{4}\,j_1 f - \frac{3}{4}\,i_1\Delta - \frac{i}{4}\,p - \frac{j}{4}\,\varphi.$$

Die Werthe von (p, g) und (∇, g) ergeben sich hieraus durch den Aronhold'schen Process

$$df = \varphi$$

und der Werth von $\big((f,\Delta),\,g\big)^2$ aus (2) durch den Process

$$d\varphi = \Delta.$$

6te Classe.

$$\big((f,f)^2,\,h^2\big)^4;\quad \big((f,f),\,h^3\big)^6;\quad \big((f,\Delta),\,h\big)^2,$$
$$\big((f,\Delta),\,h^2\big)^4;\quad \big((f,\Delta),\,h^3\big)^6;\quad (\Delta,\,h^2)^3.$$

Die Ableitungen aus diesen Formen sind gleichzeitig Ableitungen von:

$$\big((f,\varphi),\,g^2\big)^4;\quad \big((f,\varphi),\,g^3\big)^6;\quad \big((f,\Delta),\,g\big)^2,$$
$$\big((f,\Delta),\,g^2\big)^4;\quad \big((f,\Delta),\,g^3\big)^6;\quad (\Delta,\,g^2)^3.$$

Von diesen letzteren sind aber die beiden ersten Ueberschiebungen der Form $\big((f,\varphi),\,g\big)^2$ mit g. Die erste Ableitung der dritten Form ist bereits berechnet, während sich die übrigen Ableitungen dieser Form durch den Aronhold'schen Process bestimmen lassen. Die drei letzten Formen sind Ueberschiebungen der dritten Form mit (Δ, g). Es liefert sonach diese Classe keine Form des simultanen Systems.

7te Classe.

$$(f,\,h^2)^4;\quad (\Delta,\,h^2)^4.$$

Auch diese Gruppe liefert keine weitere Form mehr. Denn von ihren Ableitungen

$$(f,g^2)^4;\quad (\Delta,g^2)^4;\quad (\varphi,g^2)^4;\quad (p,g^2)^4;\quad (\nabla,g^2)^4$$

hat die erste den Werth

$$\begin{aligned}(f,g^2)^4 &= (ab)\,(a\alpha)\,(b\alpha)^3\,(ag)^2 = (ab)^2\,(a\alpha)\,(b\alpha)^2\,(ag)\,(g\alpha)\\ &= (\Delta\alpha)^3\,(\Delta g)\,(g\alpha) \qquad = \big((\Delta,g),\,\varphi\big)^4\\ &= -\frac{1}{2}\Big\{i_1 j_1 + \frac{1}{2}\,i j_2 + \frac{1}{2}\,j i_2\Big\}.\end{aligned}$$

Die übrigen lassen sich aus ihr durch den Aronhold'schen Process ableiten.

Es besteht daher das simultane System von f und φ aus den 28 Formen:

Vom Grade 6:

$$(f, \varphi);\quad (f, \Delta);\quad (f, \nabla);\quad (\varphi, \Delta);\quad (\varphi, \nabla).$$

Vom Grade 4:

$$f,\ \varphi,\ (f, g);\quad (\varphi, g);\quad \Delta;\quad p;\quad \nabla).$$

Vom Grade 2:

$$g;\ (f, g)^2;\ (\varphi, g)^2;\ (\Delta, g)^2;\ (p, g)^2;\ (\nabla, g)^2;\ (f, g^2)^3;\ (\varphi, g^2)^3.$$

Vom Grade 0:

$$(g, g)^2,\ i,\ i_1,\ i_2,\ j,\ j_1,\ j_2,\ j_3.$$

§ 8.

System von Formen mit mehreren Reihen Veränderlicher.

Eine Form mit 2 Reihen Variabeln x, y kann symbolisch dargestellt werden durch:

(1) $$F = r_x^n s_y^n = r_{1,x}^m s_{1,y}^n = r_{2,x}^m s_{2,x}^m \cdots.$$

Sind nun die Variabeln nicht cogredient, sondern beliebigen von einander unabhängigen Substitutionen zu unterwerfen, so werden sich die Invarianten (und Covarianten) von F durch symbolische Producte P ausdrücken lassen, welche aus Factoren:

(2) $$r_x;\ r_{1,x} \cdots (rr_1);\ (rr_2) \cdots,$$

(3) $$s_y;\ s_{1,y} \cdots (ss_1);\ (ss_2) \cdots$$

zusammengesetzt sind. Dieselben zerfallen somit in Factoren Q, R, deren erster Q nur die Symbole r enthält, also aus Factoren (2) besteht, während R nur die Factoren (3) enthält. Es sei nun:

$$A_1,\ A_2, \cdots A_\lambda$$

das erweiterte System einer Form

$$f = a_x^n,$$

d. h. alle Covarianten und Invarianten von f seien ganze Functionen von Formen dieses Typus; ferner seien

$$B_1,\ B_2,\ B_3 \cdots B_\lambda$$

diejenigen symbolischen Producte, welche man aus den A erhält, wenn man die Symbole a durch r ersetzt. Es wird dann Q sich als ganze Function von Formen des Typus B darstellen lassen:

$$Q = c_1 Q_1 + c_2 Q_2 \cdots + c_\mu Q_\mu,$$

wo die Q_i Producte der B bedeuten. Trägt man diesen Werth in P ein, so erhält man P als Aggregat von Formen:

$$P_i = Q_i R,$$

in denen Q_i ein Product der B bedeutet. Aus den B lassen sich Covarianten von F bilden; ist nämlich B aus den Symbolen

$$r;\ r_1,\ r_2 \cdots r_\mu$$

zusammengesetzt und sind

$$y_1,\ y_2,\ \cdots y_\mu$$

den y cogredient, so sind sowohl die Form

$$B s_y^m s_{1,y_1}^m \cdots s_{\mu,y_\mu}^m,$$

als auch ihre Elementarcovarianten C Covarianten von F. Die P_i sind simultane Covarianten und Invarianten von den C in Bezug auf die Variablen y.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich die Endlichkeit der Systeme von Formen, in denen mehrere Reihen nicht cogredienter Variabeln auftreten.

Als Beispiel wollen wir das System S der Form:

$$F = r_x^2 s_y^2$$

aufstellen.

Entsprechend dem System:

$$f;\ (f, f);\ \big((f, f), f\big)^2;\ (f, f)^2$$

hat man die B:

$$B_1 = r_x^2;\quad B_2 = (r r_1)\, r_{x,x};\quad B_3 = (r r_1)(r r_2)(r_1 r_2);\quad B_4 = (r r)^2$$

und die C als Elementarcovarianten der Formen:

$$r_x^2 s_y^2;\quad (r r_1)\, r_x r_{1,x} s_y^2 s_{1,y_1}^2;\quad (r r_1)(r r_2)(r_1 r_2)\, s_y^2 s_{1,y_1}^2 s_{2,y_2}^2;\quad (r r_1)^2 s_y^2 s_{1,y_1}^2.$$

Die nicht verschwindenden oder reduciblen Elementarcovarianten sind:

$$C_1 = r_x^2 s_y^2;\quad C_2 = (r r_1)(s s_1) r_x r_{1,x} s_y s_{1,y};$$

$$(4)\quad C_3 = (r r_1)(r r_2)(r_1 r_2)(s s_1)(s s_2)(s_1 s_2);\ C_4 = (r r_1)^2 s_y^2 s_{1,y}^2;\ C_5 = (r r_1)^2 (s s_1)^2.$$

Das System S ist das simultane System der C in Bezug auf die y. Von den C sind C_3 und C_5 Invarianten, C_1 und C_2 quadratische Formen, C_4 eine biquadratische Form.

Um das simultane System S zu erhalten wird man zunächst die Systeme der C_1, C_2, C_4 einzeln aufstellen, sodann die Systeme von C_1 und C_2 übereinander und das so entstehende System T über das System von C_4 schieben. Schliesslich hat man noch die Invarianten $(C_1, C_1)^2$, $(C_2, C_2)^2$ und jene von C_4 hinzuzufügen.

Nun besteht das System von C_1 aus

$$(5)\qquad C_1 \quad (C_1, C_1)^2,$$

das von C_2 aus

$$(6)\qquad C_2 \quad (C_2, C_2)^2,$$

das von C_4 aus

$$(7)\quad C_4,\ (C_4, C_4)^2 = \Delta,\ (C_4, \Delta) = t,\ (C_4, C_4)^4 = i,\ (C_4, \Delta)^4 = j.$$

Hierin ist Δ reducibel, da in ihr das Quadrat der Functionaldeterminante $(rr_1)\, r_x r_{1x}$ durch andere Formen ausdrückbar ist. Aus demselben Grunde ist auch das Quadrat von C_2 reducibel.

Das System T besteht aus den Formen:

(8) $\quad C_1;\; C_2;\; (C_1, C_2) = R;\; (C_1, C_1)^2 = i_1;\; (C_1, C_2)^2 = i_2$

und somit das System S aus den Formen: (7) und (8), den Invarianten

(9) $$C_3,\; C_5$$

und den Ueberschiebungen:

$$(C_4, C_1);\; (C_4, C_1)^2;\; (C_4, C_1^2)^3;\; (C_4, C_1^2)^4,$$
$$(C_4, C_2);\; (C_4, C_2)^2;\; (C_4, R)^2;\; (C_4, C_1 C_2)^3;\; (C_4, C_1 C_2)^4;\; (C_4, C_1 R)^4,$$
$$(\Delta, C_1);\; (\Delta, C_1)^2;\; (\Delta, C_1^2)^3;\; (\Delta, C_1^2)^4,$$
$$(\Delta, C_2);\; (\Delta, C_2)^2;\; (\Delta, R)^2;\; (\Delta, C_1 C_2)^3;\; (\Delta, C_1 C_2)^4;\; (\Delta, C_1 R)^4,$$
$$(t, C_1)^2;\; (t, C_1^2)^4;\; (t, C_2^3)^6;\; (t, C_2)^2;\; (t, C_1 C_2)^4;\; (t, C_1^2 C_2)^6;$$

im Ganzen aus 38 Formen.

Zur complexen Multiplication elliptischer Functionen.

Von

H. Weber in Marburg.

1.

Wenn das Periodenverhältniss einer Classe elliptischer Functionen Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung (mit imaginären Wurzeln) ist, so genügen bekanntlich die Modulfunctionen einer gewissen algebraischen Gleichung, deren Grad, bei passender Auswahl der Modulfunction, gleich ist der Classenzahl der quadratischen Formen mit negativer Determinante, deren Coefficienten dieselben sind, wie die der erwähnten quadratischen Gleichung. Dadurch erhält man zu jeder Classe quadratischer Formen von negativer Determinante einen zugehörigen Körper algebraischer Zahlen, welcher zu der Formenclasse in der innigsten zahlentheoretischen Beziehung steht. Der Grad dieses Zahlkörpers ist gleich der Classenzahl, und die conjugirten Körper entsprechen den verschiedenen zu derselben Determinante gehörigen Formenclassen. Diejenigen Zahlen eines solchen Körpers, durch welche alle Zahlen desselben Körpers rational ausdrückbar sind, (die also nach Kroneckers Terminologie eine *Gattung* algebraischer Zahlen bilden), habe ich in einer früheren Abhandlung als *Classeninvarianten* bezeichnet und will diesen Ausdruck hier beibehalten.*)

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen (zweite Abhandlung), Acta Mathematica Bd. 11, S. 333. Man vergl. auch die erste Abhandlung unter gleichem Titel, Acta Math. Bd. 6, S. 329. Von neueren, die complexe Multiplication betreffenden Publicationen, die mir zur Zeit des Drucks jener Arbeit noch nicht bekannt waren, erwähne ich hier: Sylow, Sur la multiplication complex des fonct. ell. Journal de Liouville IV. Ser., Tome 3, 1887. Greenhill, Complexe multiplication of ell. fonct. Quarterly Journal of Mathematics Nr. 86, 1887. Herr Greenhill hat mir brieflich drei von ihm berechnete weitere Fälle von Classeninvarianten mitgetheilt, die ich (in meiner Bezeichnung) hier anführe:

$$f^2(\sqrt{-73}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{5+\sqrt{73}}{2},$$

$$f^2(\sqrt{-97}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{9+\sqrt{97}}{2},$$

$$f^2(\sqrt{-193}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{9+\sqrt{193}}{2}.$$

Durch Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante werden alle diese conjugirten Körper mit einander identisch, indem sie in *denselben* Normalkörper übergehen, dessen Grad das Doppelte der Classenzahl ist. Dieser Körper ist, im allgemeinen wenigstens, kein Abel'scher Körper, aber seine Permutationsgruppe besitzt einen Divisor, dessen Permutationen unter einander vertauschbar sind, dessen Grad der Hälfte des Körpergrades gleich ist, was zur Folge hat, dass die Classeninvarianten durch Wurzelzeichen darstellbar sind.

In dem besonderen Falle jedoch, wo die zu der Determinante gehörigen Classen alle ambig sind und daher jedes Geschlecht nur *eine* Formenclasse enthält, ist auch *ohne* die Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante der Körper der Classeninvarianten ein Normalkörper, und zwar ein Abel'scher Körper, und in diesem Falle sind die Classeninvarianten rational ausdrückbar durch die Quadratwurzeln, aus den in der Determinante aufgehenden Primzahlen. Die Anzahl dieser Determinanten ist aber nur eine begrenzte, nämlich 65.*)

Die guten Erfolge, welche ich durch die in der oben erwähnten Abhandlung mitgetheilten Methoden zur Berechnung von Classeninvarianten erreicht habe, legten den Versuch nahe, die Classeninvarianten für diese 65 merkwürdigen Determinanten wirklich zu berechnen. Diese Methoden versagen nun zwar bald wegen der allzugrossen Complication und der Höhe der auftretenden Zahlen. Dagegen führt die Anwendung einer sehr merkwürdigen Untersuchung von Kronecker**) vollständig zum Ziele und zwar ohne viele Rechnung, wenn man die Lösungen der Pell'schen Gleichung und die Classenzahlen quadratischer Formen für gewisse positive und negative Determinanten als bekannt voraussetzen darf. Die Lösungen der Pell'schen Gleichung, welche hierbei gebraucht werden, kann man aus den Legendre'schen Tafeln entnehmen und für die Classenzahlen bedient man sich mit grossem Nutzen der Tafeln von Gauss.***)

---

*) Diese Thatsache ist von Euler und Gauss durch Induction geschlossen und bis jetzt noch nicht streng erwiesen. Vgl. Euler, Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin 1776, S. 338, Gauss, Disq. ar. art. 303. Die 65 Zahlen sind die folgenden: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848.

**) Kronecker, über die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen. Monatsbericht der Berliner Academie, 22. Januar 1863.

***) Die Legendre'sche Tafel findet sich in der „Theorie des nombres", die Tafeln von Gauss sind aus dem Nachlass im 2. Band der Werke, Seite 450—476 veröffentlicht. Die Resultate habe ich sämmtlich durch Vergleichung der numerischen Werthe der algebraischen und transcendenten Ausdrücke der Classen invarianten mit 7-stelligen, theilweise auch mit 10-stelligen Tafeln controllirt. Es

Ich gebe zunächst eine auf anderer Grundlage beruhende Ableitung der Kronecker'schen Resultate.

2.

Es bedeute (a, b, c) eine beliebige positive quadratische Form, so dass $m = ac - b^2$ eine positive Zahl ist. (Die Annahme, dass a, b, c ganze Zahlen seien, ist zunächst noch gleichgültig).

Die Summe

$$S = \sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s},$$

welche sich auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe von x, y, mit Ausnahme von $x = 0$, $y = 0$ erstreckt, hat, so lange $s > 1$ ist, einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen endlichen Werth *), der eine Function von s ist, und dessen Verhalten untersucht werden soll bei Annäherung von s an die Grenze 1.

Wir ordnen die Glieder der Summe S zunächst in folgender Weise an:

$$(1) \qquad S = 2 \sum_{1, \infty}^{y} \sum_{-\infty, \infty}^{x} (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s} + 2 \sum_{1, \infty}^{x} (ax^2)^{-s},$$

und nun ist:

$$(2) \qquad \operatorname{Lim}_{s=1} 2 \sum_{1, \infty}^{x} (ax^2)^{-s} = \frac{2}{a} \sum_{1, \infty}^{x} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{3a}.$$

Den ersten Theil der Summe S in der Darstellung (1) setzen wir

$$a^{-s} \sum_{1, \infty}^{y} \sum_{-\infty, \infty}^{x} \frac{2}{(x + \omega_1 y)^s (x - \omega_2 y)^s},$$

worin

$$\omega_1 = \frac{b + i\sqrt{m}}{a}, \quad \omega_2 = \frac{-b + i\sqrt{m}}{a}$$

und $\sqrt{m}$ positiv zu nehmen ist.

In Folge einer bekannten Formel aus der Theorie der Γ-Functionen ist aber

$$(3) \quad \frac{2}{(x + \omega_1 y)^s (x - \omega_2 y)^s} = \frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(s)\,\Gamma(s)}\, 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\pi i((u-v)x + (\omega_1 u + \omega_2 v)y)} (uv)^{s-1}\, du\, dv,$$

---

hat sich hierbei ergeben, dass in der Gauss'schen Tafel (S. 475) in der zweiten Centade der positiven Determinanten die Determinante 136 irrthümlich unter der Classification IV, 1 statt unter IV, 2 aufgeführt ist.

*) Vergl. z. B. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, Supplement II.

wodurch wir den Vortheil erreicht haben, dass die Summationsbuchstaben x, y im Exponenten nur noch linear auftreten.

Betrachten wir zur Veranschaulichung u, v als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so haben wir auf der linken Seite von (3) ein über den positiven Quadranten hinerstrecktes (unbedingt convergentes) Doppelintegral, welches wir dadurch in zwei Theile zerlegen, dass wir den Quadranten durch eine den Winkel halbirende Gerade theilen.

Im ersten dieser Theile substituire man

$$u - v = \xi, \qquad u + v = \zeta,$$

im zweiten

$$u - v = -\xi, \quad u + v = \zeta,$$

wodurch sich ergiebt*)

$$(4) \qquad 2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{2\pi i(u-v)x + 2\pi i(\omega_1 u + \omega_2 v)y}(uv)^{s-1}\,du\,dv =$$

$$= \int_0^\infty e^{2\pi i x\xi}\,d\xi \int_\xi^\infty e^{\pi i y(\zeta(\omega_1+\omega_2)+\xi(\omega_1-\omega_2))}\left(\frac{\zeta^2-\xi^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-2\pi i x\xi}\,d\xi \int_\xi^\infty e^{\pi i y(\zeta(\omega_1+\omega_2)-\xi(\omega_1-\omega_2))}\left(\frac{\zeta^2-\xi^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta.$$

Die nach ξ zwischen den Grenzen $0, \infty$ genommenen Integrale verwandelt man nun in unendliche Reihen, indem man dieselben in lauter solche Bestandtheile zerlegt, deren Grenzen um eine Einheit verschieden sind, und durch eine lineare Substitution die Grenzen aller auf 0, 1 reducirt, wodurch die beiden Integrale auf der rechten Seite von (4) resp. die Form annehmen:

$$\sum_{0,\infty}^{\nu} \int_0^1 e^{\pm 2\pi i x\xi}\,d\xi \int_{\xi+\nu}^\infty e^{\pi i y\zeta(\omega_1+\omega_2)}\, e^{\pm \pi i y(\xi+\nu)(\omega_1-\omega_2)}\left(\frac{\zeta^2-(\xi+\nu)^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta.$$

Wenn man nun hiervon, wie es die Bildung von S erfordert, die Summe zunächst über alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe von x nimmt, so erhält man eine Fourier'sche Reihe, deren Werth nach der Formel

$$\sum_{-\infty,\infty}^{x} \int_0^1 e^{\pm 2\pi i x\xi} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big)$$

*) Der Leser wolle eine Figur zu Hilfe nehmen.

gefunden werden kann. Setzt man nämlich

$$f(\xi) = \sum_{0,\infty}^{\nu} \int_{\xi+\nu}^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2) \pm \pi i y (\xi+\nu)(\omega_1-\omega_2)} \left(\frac{\zeta^2-(\xi+\nu)^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta,$$

so wird

$$\frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2)} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2(s-1)} d\zeta +$$

$$+\sum_{1,\infty}^{\nu} \int_{\nu}^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2) \pm \pi i y \nu(\omega_1-\omega_2)} \left(\frac{\zeta^2-\nu^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta.$$

Setzt man also dies in (3) und dann in (1) ein, so ergiebt sich

$$(5)\quad 2\sum_{1,\infty}^{y}\sum_{-\infty,\infty}^{x}(ax^2+2bxy+cy^2)^{-s} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2s}}{a^s\Gamma(s)^2}\left\{\sum_{1,\infty}^{y}\int_0^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2)} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2(s-1)} d\zeta +\right.$$

$$+\sum_{1,\infty}^{y}\sum_{1,\infty}^{\nu} e^{\pi i y \nu(\omega_1-\omega_2)} \int_{\nu}^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2)} \left(\frac{\zeta^2-\nu^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta +$$

$$\left.+\sum_{1,\infty}^{y}\sum_{1,\infty}^{\nu} e^{-\pi i y \nu(\omega_1-\omega_2)} \int_{\nu}^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2)} \left(\frac{\zeta^2-\nu^2}{4}\right)^{s-1} d\zeta\right\}.$$

Wir betrachten zunächst das erste Glied dieses Ausdrucks

$$\sigma = \sum_{1,\infty}^{y}\int_0^{\infty} e^{\pi i y \zeta(\omega_1+\omega_2)} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2(s-1)} d\zeta,$$

führen in dem Integral die neue Variable

$$\pi i \zeta(\omega_1+\omega_2) = -t$$

ein, führen die Summation nach y aus, und setzen für $\omega_1+\omega_2$ seinen Werth $2i\sqrt{m}:a$. So folgt

$$\sigma = \frac{2a^{2s-1}}{(4\pi\sqrt{m})^{2s-1}}\int_0^{\infty}\frac{t^{2(s-1)}}{e^t-1}\,dt.$$

Aus der Theorie der Γ Functionen erhält man aber leicht

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}\left(\int_0^\infty \frac{t^{2(s-1)}}{e^t-1}\,dt - \frac{1}{2(s-1)}\right) = 0$$

und folglich

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}\left(\sigma - \left(\frac{a}{4\pi\sqrt{m}}\right)^{2s-1}\frac{1}{s-1}\right) = 0,$$

also

$$(6)\quad \operatorname*{Lim}_{s=1}\left(\frac{(2\pi)^{2s}}{a^s\Gamma(s)^2}\sigma - \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}}\right) = \operatorname*{Lim}_{s=1}\frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}}\left(\left(\frac{a}{4m}\right)^{s-1}\frac{1}{\Gamma(s)^2} - 1\right)$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{m}}\left(2C + \lg\frac{a}{4m}\right),$$

worin $C = 0{,}5772\ldots$ die Euler'sche Constante ist.

Die beiden andern Bestandtheile in der Klammer des Ausdrucks (5), repräsentiren stetige Functionen von s bis $s = 1$ einschliesslich. Ihre Werthe für $s = 1$ ergeben sich aus

$$\frac{a}{2\pi\sqrt{m}}\sum_{1,\infty}^{y}\sum_{1,\infty}^{\nu}\frac{1}{y}\,e^{2\pi i y\nu\omega},$$

oder nach Ausführung der Summation über y

$$(7)\qquad -\frac{a}{2\pi\sqrt{m}}\sum_{1,\infty}^{\nu}\lg\left(1-e^{2\pi i\nu\omega}\right),$$

wenn ω durch ω_1 und ω_2 ersetzt wird.

Bedient man sich der in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen auch in meinen früheren Arbeiten benutzten Function

$$(8)\qquad \eta(\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{1,\infty}^{\nu}\left(1-e^{2\pi i\nu\omega}\right),$$

so ist der Ausdruck (7)

$$(9)\qquad -\frac{a}{2\pi\sqrt{m}}\left(\lg\eta(\omega) - \frac{\pi i\omega}{12}\right),$$

und es bleibt nur noch übrig, (2), (6), (9) in (1) einzutragen, um zu der folgenden Formel zu gelangen:

$$(10)\qquad \operatorname*{Lim}_{s=1}\left(\sum^{x,y}\frac{1}{(ax^2+2bxy+xy^2)^s} - \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}}\right) =$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{m}}C + \frac{\pi}{\sqrt{m}}\lg\frac{a}{4m} - \frac{2\pi}{\sqrt{m}}\lg\eta(\omega_1)\eta(\omega_2).$$

3.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\psi = ax^2 + 2bxy + cx^2 = (a, b, c)$$

und nehmen von nun an a, b, c ganzzahlig und ohne gemeinsamen Theiler an. Neben der Form ψ werde nun die zweite Form derselben Determinante $-m$,

$$\psi' = (a', b', c') = \left(2a,\ a + b,\ \frac{a+2b+c}{2}\right)$$

betrachtet, und wenn ω_1', ω_2' für ψ' dieselbe Bedeutung haben wie ω_1, ω_2 für ψ, nämlich

$$\omega_1' = \frac{a + b + i\sqrt{m}}{2a}, \quad \omega_2' = \frac{-a - b + i\sqrt{m}}{2a},$$

so ist

$$\omega_1' = \frac{\omega_1 + 1}{2}, \qquad \omega_2' = \frac{\omega_2 - 1}{2}$$

und wir erhalten, wenn wir noch die Function

$$f(\omega) = e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)} \tag{11}$$

einführen, durch Anwendung von (10) auf ψ und ψ'

$$\lim_{s=1} \sum \left(\frac{1}{\psi^s} - \frac{1}{\psi'^s}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} \log \frac{f(\omega_1) f(\omega_2)}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Die Function $f(\omega)$, welche durch den Legendre'schen Modul ausgedrückt gleich

$$\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}}$$

ist, habe ich in der oben erwähnten Arbeit den Berechnungen der Classeninvarianten zu Grunde gelegt, und diese und die verwandte Function

$$f_1(\omega) = e^{\frac{\pi i}{24}} f(\omega + 1) = \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)} = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{\varkappa'^2}{\varkappa}} \tag{13}$$

soll auch hier vorzugsweise benutzt werden.*)

---

*) Zur Erleichterung der Uebersicht sollen die wichtigsten Formeln für die drei Functionen

$$f(\omega) = e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \quad f_1(\omega) = \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \quad f_2(\omega) = \sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta(\omega)}$$

In den in (10), (12) vorkommenden Summen haben die Summationsbuchstaben x, y alle ganzzahligen Werthe anzunehmen, mit Ausnahme der einen Combination 0, 0. Daraus folgt, dass diese Summen sich in keiner Weise ändern, wenn die Form ψ durch eine äquivalente Form ersetzt wird. Darnach wollen wir die Festsetzung treffen, dass

$$\text{wenn } m \text{ ungerade } a \equiv 1,\ b \equiv 0 \pmod{2},$$
$$\text{wenn } m \text{ gerade } a \equiv 1,\ b \equiv 1 \pmod{2}.$$

Nach § 7 der zweiten der oben citirten Abhandlungen „zur Theorie der elliptischen Functionen" sind nur unter dieser Voraussetzung gewisse Potenzen von $f(\omega)$ Classeninvarianten, wenn $\omega = x : y$ der Gleichung $\psi = 0$ genügt, oder, wie wir sagen wollen, eine Wurzel der Form ψ ist.*)

Darnach entsteht die Form ψ' durch Composition von ψ mit der Form

$$\left(2,\ 1,\ \frac{m+1}{2}\right) \quad \text{oder} \quad \left(2,\ 0,\ \frac{m}{2}\right)$$

je nachdem m ungerade oder gerade ist, und daraus ergiebt sich folgendes:

1) Ist $m \equiv 1$ oder $\equiv 2 \pmod{4}$ so ist ψ' ebenso wie ψ eine *primitive* Form und durchläuft gleichzeitig mit ψ ein vollständiges Repräsentantensystem der Determinante $-m$.

2) Ist $m \equiv 3 \pmod{4}$, so ist ψ' primitiv von der zweiten Art und durchläuft ein oder drei vollständige Repräsentantensysteme der

---

aus der erwähnten Abhandlung hier wiederholt werden.

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 + q^{2\nu-1}), \qquad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - q^{2\nu-1}),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 + q^{2\nu})$$

wenn

$$q = e^{\pi i \omega}$$

ist.

$$f(\omega)\, f_1(\omega)\, f_2(\omega) = \sqrt{2},$$
$$f(\omega)^8 = f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8,$$

$$f(\omega \pm 1) = e^{\mp \frac{\pi i}{24}} f_1(\omega), \qquad f_2(\omega \pm 1) = e^{\pm \frac{\pi i}{12}} f_2(\omega),$$
$$f\left(-\frac{1}{\omega}\right) = f(\omega), \qquad f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = f_2(\omega),$$

$$f_2(\omega)\, f_1(2\omega) = \sqrt{2}, \qquad f(\omega)\, f_2\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt{2}.$$

*) Es ist hier wie im Folgenden immer nur von derjenigen der beiden imaginären Wurzeln die Rede, deren imaginärer Theil positiv ist.

Formenclassen zweiter Art der Determinante $-m$, während ψ ein vollständiges Repräsentantensystem der Formenclassen erster Art durchläuft, je nachdem $m \equiv 7$ oder $m \equiv 3 \pmod{8}$ ist.*)

3) Ist $m \equiv 0 \pmod{4}$, so ist ψ' imprimitiv vom Theiler 2.

Wenn wir also unter der Voraussetzung 1) die Formel (12) auf ein vollständiges Repräsentantensystem ψ anwenden und die Summe nehmen, so ergiebt sich, da ω_1, ω_2 die Wurzeln entgegengesetzter Formen sind,

$$\prod \frac{f(\omega)}{\sqrt{2}} = 1,$$

worin das Zeichen Π sich auf die sämmtlichen zur Determinante $-m$ gehörigen Classeninvarianten bezieht, wodurch also die Norm der Classeninvarianten bestimmt ist. Da in diesem Falle die verschiedenen zu demselben m gehörigen Werthe von $f(\omega)$ sich in Paare ordnen, deren Product $\sqrt{2}$ ist, so lässt sich dies Resultat auch auf andere Weise ohne die hier gebrauchten Hilfsmittel ableiten.

4.

Wir nehmen jetzt zunächst an, es sei $m \equiv 1$ oder $\equiv 2 \pmod{4}$ und bezeichnen mit C_ψ einen der Charaktere für die Determinante $-m$.**) Da entgegengesetzte Classen dieselben Charaktere haben, so ergiebt sich aus der Formel (12) durch Multiplication mit C_ψ und Summation über alle durch je einen Repräsentanten ψ vertretenen Formenclassen

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} \sum^{\psi} C_\psi \sum \left(\frac{1}{\psi^s} - \frac{1}{\psi'^s}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{m}} \sum^{\psi} C_\psi \log \frac{f(\omega)}{\sqrt{2}}.$$

Nehmen wir den ersten Coefficienten a von ψ relativ prim zu $2m$ an, so lässt sich, wenn $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$, immer ein *ungerader durch kein Quadrat theilbarer* Divisor m'' von m bestimmen, so dass

$$C_\psi = \left(\frac{a}{m''}\right), \quad C_{\psi'} = \left(\frac{2}{m''}\right)\left(\frac{a}{m''}\right),$$

woraus man erhält

$$(14) \quad \begin{aligned} &\left(\frac{2}{m''}\right) = +1, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{m}} \sum^{\psi} C_\psi \log \frac{f(\omega)}{\sqrt{2}} = 0, \\ &\left(\frac{2}{m''}\right) = -1, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{m}} \sum^{\psi} C_\psi \log \frac{f(\omega)}{\sqrt{2}} = \operatorname*{Lim}_{s=1} \sum^{\psi} \left(\frac{a}{m''}\right) \sum^{x,y} \frac{1}{\psi^s}. \end{aligned}$$

*) Vgl. Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie § 150, 151.

**) Gauss, Disq. ar. art. 228 ff. Dirichlet-Dedekind, Supplement IV.

Die hier geforderte Grenzbestimmung lässt sich ausführen, nachdem die auf der rechten Seite vorkommende Summe so umgeformt ist, dass ψ nur noch solche Werthe annimmt, die zu $2m$ theilerfremd sind. Dies geschieht auf folgende Weise: Die Summe bleibt ungeändert, wenn ψ durch eine äquivalente Form ersetzt wird. Daher können wir, wenn r irgend eine in $2m$ aufgehende Primzahl bedeutet, in $\psi = (a, b, c)$ a relativ prim zu $2m$, $b \equiv m \pmod{r}$ und folglich $c = rc'$ durch r aber nicht durch r^2 theilbar voraussetzen. Dann ist

$$\sum \frac{1}{\psi^s} = \sum{}' \frac{1}{\psi^s} + \frac{1}{r^s} \sum \frac{1}{(arx^2+2bxy+c'y^2)^s},$$

wenn das Zeichen Σ' bedeutet, dass x, y in ψ alle und nur solche Werthe annehmen soll, für welche ψ durch r untheilbar ist.

Die Form der Determinante $-m$

$$\psi' = arx^2 + 2bxy + c'y^2$$

entsteht durch Composition von ψ mit

$$\left(r, 0, \frac{m}{r}\right)$$

oder wenn $r = 2$ und m ungerade ist, mit

$$\left(2, 1, \frac{m+1}{2}\right)$$

und durchläuft daher gleichzeitig mit ψ ein vollständiges Repräsentantensystem.

Bezeichnen wir daher mit ε den Charakter C_ψ für die Form

$$\left(r, 0, \frac{m}{r}\right) \quad \text{oder} \quad \left(2, 1, \frac{m+1}{2}\right),$$

so ist

$$C_\psi = \varepsilon C_{\psi'}$$

und es ergiebt sich

$$\sum C_\psi \sum \frac{1}{\psi^s} = \sum C_\psi \sum{}' \frac{1}{\psi^s} + \frac{\varepsilon}{r^s} \sum^{\psi'} C_{\psi'} \sum \frac{1}{\psi'^s}.$$

Die Summe im zweiten Gliede der rechten Seite ist aber mit der linken Seite identisch, und folglich

$$\sum C_\psi \sum \frac{1}{\psi^s} = \frac{\sum C_\psi \sum' \frac{1}{\psi^s}}{1 - \varepsilon r^{-s}}.$$

Hierin ist

$\varepsilon = \left(\frac{r}{m'}\right)$, wenn r in m' aufgeht,

$\varepsilon = \left(\frac{\mp m'}{r}\right)$, wenn r in m'' aufgeht und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m'' \equiv 5$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$,

$\varepsilon = -1$, wenn $r = 2$.

Diese Betrachtung kann man nun auf alle in $2m$ aufgehenden Primzahlen r anwenden, eine nach der anderen, und man erhält, wenn Σ^0 bedeutet, das x, y alle und nur solche Werthe annehmen, für welche ψ relativ prim zu $2m$ ist

$$(15) \qquad \prod^{r}(1-\varepsilon r^{-s}) \sum C_\psi \sum \frac{1}{\psi^s} = \sum C_\psi \sum^0 \frac{1}{\psi^s}.$$

Nun ist aber nach einer von Dirichlet herrührenden Formel*)

$$\sum C_\psi \sum^0 \frac{1}{\psi^s} = 2\sum^{n}\left(\frac{n}{m''}\right)\frac{1}{n^s} \sum^{n}\left(\frac{-m}{n}\right)\left(\frac{n}{m''}\right)\frac{1}{n^s},$$

worin beide Summen rechts sich auf alle zu $2m$ theilerfremden positiven Zahlen n erstrecken. Diese beiden Summen können nun, wenn

$$m = m'm''$$

ist, in der Form geschrieben werden

$$\sum\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^s}, \qquad \sum\left(\frac{\mp m'}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem $m'' \equiv 5$ oder $\equiv 3 \pmod{8}$ ist. Deuten wir durch das Zeichen Σ^0 an, dass n alle die Werthe erhalten soll, welche zu $2m''$ resp. zu $2m'$ relativ prim sind, so ist, wenn r' die in m', r'' die in m'' aufgehenden ungeraden Primzahlen durchläuft

$$\sum\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \prod^{r'}\left(1-\left(\frac{r'}{m''}\right)\frac{1}{r'^s}\right)\sum^0\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

$$\sum\left(\frac{\mp m'}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \prod^{r''}\left(1-\left(\frac{\mp m'}{r''}\right)\frac{1}{r''^s}\right)\sum^0\left(\frac{\mp m'}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

wonach sich nach (15) ergiebt

$$\left(1+\frac{1}{2^s}\right)\sum C_r \sum \frac{1}{\psi^s} = \sum^0\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^s}\sum^0\left(\frac{\mp m'}{n}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Nun ist aber, wenn wir mit $H(D)$ die Anzahl eigentlich primitiver Classen der Determinante D bezeichnen, mit der Einschränkung, dass $H(-1) = \frac{1}{2}$ sei, nach den Dirichlet'schen Classenzahlformeln**)

$$\begin{aligned}\operatorname{Lim} \sum^0\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^s} &= \frac{H(m'')}{2\sqrt{m''}}\log(T+U\sqrt{m''}) \qquad && m'' \equiv 5 \pmod{8}\\ &= \frac{\pi H(-m'')}{2\sqrt{m''}} && m'' \equiv 3 \pmod{8},\end{aligned}$$

*) Dirichlet-Dedekind, § 125.

**) Dirichlet-Dedekind, § 97, 99.

$$\operatorname{Lim} \sum{}^{0} \left(\frac{\mp m'}{n}\right) \frac{1}{n^s} = \frac{\pi H(-m')}{2\sqrt{m'}} \qquad m'' \equiv 5 \pmod 8$$

$$= \frac{H(m')}{2\sqrt{m'}} \log (T + U\sqrt{m'}) \qquad m'' \equiv 3 \pmod 8$$

worin für T, U die *kleinste positive* Lösung der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - m'' U^2 = 1 \quad \text{oder} \quad T^2 - m' U^2 = 1$$

zu setzen ist. Hiernach erhält man aus (14)

$$(16)\quad 6 \sum^{\psi} \left(\frac{a}{m''}\right) \log \frac{f(\omega)}{\sqrt{2}} = 0, \qquad m'' \equiv \pm 1 \pmod 8,$$

$$= H(-m')\, H(m'') \log (T + U\sqrt{m''}), \quad m'' \equiv 5 \pmod 8$$

$$= H(m')\, H(-m'') \log (T + U\sqrt{m'}), \quad m'' \equiv 3 \pmod 8.$$

Diese Formel hat man für alle Werthe von m'', d. h. für alle Charaktere zu bilden. Da die Summe aller Charaktere für ein und dieselbe Form immer dann verschwindet, wenn die Form nicht dem *Hauptgeschlecht* angehört, so erhält man durch Addition aller so gebildeten Gleichungen

$$6g \log \frac{f(\omega)}{\sqrt{2}} \frac{f(\omega')}{\sqrt{2}} \cdots,$$

wenn g die Anzahl der Geschlechter, also eine Potenz von 2, deren Exponent gleich der Anzahl der in m aufgehenden ungeraden Primzahlen, und $\omega, \omega' \ldots$ die Wurzeln der Formen des Hauptgeschlechtes sind.*) In den Fällen also, in welchen jedes Geschlecht nur *eine* Classe enthält, ist durch (16) die Classeninvariante der Hauptclasse vollkommen bestimmt, wenn man die Zahlen H, T, U kennt.

Dies Verfahren lässt sich anwenden auf die folgenden Werthe von m

5, 13, 21, 33, 37, 57, 85, 93, 105, 133, 165, 177, 253, 273, 345, 357, 385, 1365,

6, 10, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462

und liefert für die ungeraden m ohne weiteres die Werthe von $f(\sqrt{-m})$; bei den geraden Werthen von m ist zu beachten, dass die Hauptform $(1, 0, m)$ nicht der in Art. 3 für den Coefficienten b gestellten Be-

*) Um das Product der Classeninvarianten für ein anderes als das Hauptgeschlecht zu bilden hat man (16) vor der Summation mit $\left(\frac{a_0}{m''}\right)$ zu multipliciren, wenn a_0 eine beliebige zu $2m$ theilerfremde und durch eine Form des betreffenden Geschlechts darstellbare Zahl bedeutet, oder man hat in denjenigen der Formeln (16) das Zeichen der Quadratwurzel zu ändern, für welche $\left(\frac{a_0}{m''}\right) = -1$ ist.

dingung genügt; dies hat zur Folge dass unsere Formel für $f(\omega)$ den Werth von $f_1(\sqrt{-m})$ liefert. So habe ich folgende Werthe gefunden:

$$f(\sqrt{-5})^4 = 1+\sqrt{5},$$
$$f(\sqrt{-13})^4 = 3+\sqrt{13},$$
$$2f(\sqrt{-21})^{12} = (3+\sqrt{7})^2(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3,$$
$$\sqrt{2}\,f(\sqrt{-33})^6 = (1+\sqrt{3})^3(3+\sqrt{11}),$$
$$f(\sqrt{-37})^4 = 2(6+\sqrt{37}),$$
$$\sqrt{2}\,f(\sqrt{-57})^6 = (1+\sqrt{3})^3(13+3\sqrt{19}),$$
$$16\,f(\sqrt{-85})^4 = (1+\sqrt{5})^4(9+\sqrt{85}),$$
$$2\,f(\sqrt{-93})^{12} = (3\sqrt{3}+\sqrt{31})^3(39+7\sqrt{31})^2,$$
$$\sqrt{2}^{13}\,f(\sqrt{-105})^6 = (1+\sqrt{5})^3(1+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7}),$$
$$2\,f(\sqrt{-133})^4 = (3+\sqrt{7})^2(5\sqrt{7}+3\sqrt{19}),$$
$$2^9\,f(\sqrt{-165})^{12} = (1+\sqrt{5})^6(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6(3\sqrt{5}+2\sqrt{11})^2(\sqrt{11}+\sqrt{15})^3,$$
$$\sqrt{2}^7\,f(\sqrt{-177})^6 = (23+3\sqrt{59})(1+\sqrt{3})^9,$$
$$2\,f(\sqrt{-253})^4 = (5+\sqrt{23})^2(13\sqrt{11}+9\sqrt{23}),$$
$$\sqrt{2}^{13}\,f(\sqrt{-273})^6 = (3+\sqrt{13})^3(1+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(11\sqrt{13}+15\sqrt{7}),$$
$$\sqrt{2}^{19}\,f(\sqrt{-345})^6 = (1+\sqrt{5})^6(1+\sqrt{3})^3(3\sqrt{3}+\sqrt{23})^3(15\sqrt{5}+7\sqrt{23}),$$
$$2^{16}\,f(\sqrt{-357})^6 = (\sqrt{3}+\sqrt{7})^{12}(3+\sqrt{7})^6(\sqrt{17}+\sqrt{21})^3(11+\sqrt{119})^2,$$
$$\sqrt{2}^7\,f(\sqrt{-385})^2 = (1+\sqrt{5})^2(3+\sqrt{11})(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{11}),$$
$$2^{31}\,f(\sqrt{-1365})^{12} = (\sqrt{3}+\sqrt{7})^{12}(1+\sqrt{5})^6(3+\sqrt{7})^6(3+\sqrt{13})^6$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6(2\sqrt{3}+\sqrt{13})^6(\sqrt{35}+\sqrt{39})^3(3\sqrt{7}+\sqrt{65})^2,$$
$$f_1(\sqrt{-6})^6 = \sqrt{2}^3(1+\sqrt{2}),$$
$$\sqrt{2}\,f_1(\sqrt{-10})^2 = 1+\sqrt{5},$$
$$f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1+\sqrt{2}),$$
$$\sqrt{2}^3\,f_1(\sqrt{-30})^6 = (1+\sqrt{5})^3(3+\sqrt{10}),$$
$$\sqrt{2}^3\,f_1(\sqrt{-42})^6 = (\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(2\sqrt{2}+\sqrt{7}),$$
$$\sqrt{2}\,f_1(\sqrt{-58})^2 = 5+\sqrt{29},$$
$$\sqrt{2}^3\,f_1(\sqrt{-70})^2 = (1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{2}),$$
$$\sqrt{2}^3\,f_1(\sqrt{-78})^6 = (3+\sqrt{13})^3(5+\sqrt{26}),$$

$$f_1(\sqrt{-102})^6 = \sqrt{2}^3(1+\sqrt{2})^3(3\sqrt{2}+\sqrt{17})^2,$$
$$\sqrt{2}^7 f_1(\sqrt{-130})^2 = (1+\sqrt{5})^3(3+\sqrt{13}),$$
$$\sqrt{2}^5 f_1(\sqrt{-190})^2 = (1+\sqrt{5})^3(3+\sqrt{10}),$$
$$\sqrt{2}^9 f_1(\sqrt{-210})^6 = (1+\sqrt{5})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(5\sqrt{5}+3\sqrt{14}),$$
$$\sqrt{2}^{15} f_1(\sqrt{-330})^6 = (1+\sqrt{5})^6(\sqrt{5}+\sqrt{6})^3(\sqrt{11}+\sqrt{15})^3(\sqrt{10}+\sqrt{11}),$$
$$\sqrt{2}^9 f_1(\sqrt{-462})^6 = (\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{6}+\sqrt{7})^3(\sqrt{7}+\sqrt{11})^3(22\sqrt{22}+39\sqrt{7}).$$

5.

Es sind ähnliche Betrachtungen jetzt für eine durch 8, nicht aber durch 16, theilbare Determinante durchzuführen.

Wir setzen

$$\psi = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad ac - b^2 = m$$

und nehmen an m sei durch 8, nicht durch 16 und, ausser 4, durch kein Quadrat theilbar, ferner werde a relativ prim zu m, b gerade und folglich $c = 4c'$ durch 4 theilbar vorausgesetzt, und

$$\psi' = ax^2 + bxy + c'y^2$$

von der Determinante $-\frac{1}{4}m$.

Die Formel (10) Art. 2 auf ψ und ψ' angewandt, ergiebt

$$\mathrm{Lim}\left(\sum \frac{1}{\psi^s} - \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}}\right) = -\frac{2\pi}{\sqrt{m}} \log \frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{a}}\, \eta(\omega_1)\, \eta(\omega_2) + \frac{2\pi C}{\sqrt{m}},$$

$$\mathrm{Lim}\left(\sum \frac{1}{\psi'^s} - \frac{2\pi}{(s-1)\sqrt{m}}\right) = -\frac{4\pi}{\sqrt{m}} \log \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{a}}\, \eta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \eta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{4\pi C}{\sqrt{m}},$$

also:

$$\mathrm{Lim} \sum \left(\frac{2}{\psi^s} - \frac{1}{\psi'^s}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{m}} \log \frac{f_1(\omega_1)\, f_1(\omega_2)}{2}. \tag{17}$$

Es entsteht hier die imprimitive Form $2\psi'$ durch Composition von ψ mit der Form

$$\left(2,\ 0,\ \frac{m}{2}\right).$$

Durchläuft ψ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Determinante m, so durchläuft ψ' zwei Repräsentantensysteme für die Determinante $m:4$ und zwar führen zwei Formen, die durch Composition einer Form ψ mit

$$(1, 0, m), \quad \left(4, 2, \tfrac{1}{4}m + 1\right)$$

entstehen, zu äquivalenten Formen ψ'.

Die sämmtlichen Charaktere für die Formen der Determinante m können, wenn m'' einen *ungeraden* Divisor von m bedeutet, in einer der beiden Formen dargestellt werden

$$C_\psi = \left(\frac{a}{m''}\right), \quad C'_\psi = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{m''}\right),$$

und für die beiden zu demselben ψ' führenden Formen ψ hat C_ψ denselben, C'_ψ entgegengesetzten Werth. Die zur Determinante $m:4$ gehörigen Charaktere sind

$$C_{\psi'} = C_\psi = \left(\frac{a}{m''}\right).$$

Auf Grund dieser Bemerkungen ergiebt sich, wenn wir die Gleichungen (16) mit C_ψ oder C'_ψ multipliciren und die Summation über ein vollständiges Repräsentantensystem ψ ausführen:

$$\frac{4\pi}{\sqrt{m}}\sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = \mathrm{Lim}\left(\sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\sum\frac{1}{\psi^s} - \sum^{\psi'}\left(\frac{a}{m''}\right)\sum\frac{1}{\psi'^s}\right),$$

$$\frac{4\pi}{\sqrt{m}}\sum^{\psi}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = \mathrm{Lim}\sum^{\psi}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{m''}\right)\sum\frac{1}{\psi^s}.$$

Wir haben nun, wie oben, die Summen auf der rechten Seite so einzuschränken, dass ψ, ψ' nur Zahlwerthe annehmen, welche zu m relativ prim sind. Bezeichnen wir die so verstandenen Summen durch Σ^0, so ergiebt eine der oben durchgeführten ganz ähnliche sehr einfache Betrachtung

$$\frac{4\pi}{\sqrt{m}}\sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \mathrm{Lim}\left(\frac{\sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\sum^0\frac{1}{\psi^s}}{\Pi(1-\varepsilon r^{-s})} - \frac{1-\frac{2}{4^s}}{1-\left(\frac{2}{m''}\right)2^{-s}}\,\frac{\sum^{\psi'}\left(\frac{a}{m''}\right)\sum^0\frac{1}{\psi'^s}}{\Pi(1-\varepsilon r^{-s})}\right),$$

$$\frac{4\pi}{\sqrt{m}}\sum^{\psi}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = \mathrm{Lim}\,\frac{\sum^{\psi}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{m''}\right)\sum^0\frac{1}{\psi^s}}{\Pi(1-\varepsilon' r^{-s})}.$$

Hierin erstreckt sich das Productzeichen Π auf alle in m aufgehenden *ungeraden* Primzahlen r, und es ist

$$m = m'm'', \quad \varepsilon = \left(\frac{r}{m''}\right) \text{ oder } = \left(\frac{\mp m'}{r}\right),$$

je nachdem r in m' oder in m'' aufgeht, und in letzterem Fall gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $m'' \equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 4) ist, ferner

$$\varepsilon' = \left(\frac{-1}{r}\right)\varepsilon.$$

Nun ist nach der oben angewandten Dirichlet'schen Formel

$$\sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\sum^{0}\frac{1}{\psi^{s}} - \sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\sum^{0}\frac{1}{\psi'^{s}}$$
$$= 2\sum\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^{s}}\sum\left(\frac{\mp m'}{n}\right)\frac{1}{n^{s}},$$
$$\sum^{\psi}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{n}{m''}\right)\sum^{0}\frac{1}{\psi^{s}} = 2\sum\left(\frac{\mp m''}{n}\right)\frac{1}{n^{s}}\sum\left(\frac{\pm m'}{n}\right)\frac{1}{n^{s}},$$

und daraus wie dort

$$\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\sum^{\psi}\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} =$$
$$= \operatorname{Lim}\frac{\frac{2}{4^{s}} - \left(\frac{2}{m''}\right)\frac{1}{2^{s}}}{1 - \left(\frac{2}{m''}\right)\frac{1}{2^{s}}}\sum^{0}\left(\frac{\pm m''}{n}\right)\frac{1}{n^{s}}\sum^{0}\left(\frac{\mp m'}{n}\right)\frac{1}{n^{s}},$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\sum^{\psi}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = \operatorname{Lim}\sum^{0}\left(\frac{\mp m''}{n}\right)\frac{1}{n^{s}}\sum^{0}\left(\frac{\pm m'}{n}\right)\frac{1}{n^{s}}.$$

Bei Ausführung des Grenzübergangs bildet der Fall $m'' = 1$ eine Ausnahme, und da

$$\operatorname{Lim}(s-1)\sum\frac{1}{n^{s}} = \frac{1}{2},$$

so ergiebt sich

$$\sum\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}\log 2\; H(-m),$$
$$\sum\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = 0, \qquad m'' \equiv \pm 1 \pmod{8},$$
$$\sum\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{12}H(m'')\,H(-m')\log(T + U\sqrt{m''}),$$
$$m'' \equiv 5 \pmod{8},$$
$$= \frac{1}{12}H(-m'')\,H(m')\log(T + U\sqrt{m'}),$$
$$m'' \equiv 3 \pmod{8},$$
$$\sum\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{m''}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8}H(-m'')\,H(m')\log(T + U\sqrt{m'}),$$
$$m'' \equiv 1 \pmod{4},$$
$$= \frac{1}{8}H(m'')\,H(-m')\log(T + U\sqrt{m''}),$$
$$m'' \equiv 3 \pmod{4}.$$

Die Addition aller dieser Gleichungen ergiebt wie früher

$$g \log \frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}} \frac{f_1(\omega')}{\sqrt{2}} \cdots$$

und für den Fall dass nur eine Classe in jedem Geschlecht vorkommt, den Werth von $f(\sqrt{-m})$. Aus dieser Formel kann man für die Werthe

8, 24, 40, 88, 120, 168, 232, 280, 312, 408, 520, 760,
840, 1320, 1848,

von m die Classeninvarianten leicht finden, nämlich:

$$f_1(\sqrt{-8})^8 = 8(1+\sqrt{2}),$$

$$f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^6(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{3})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-40})^8 = 2(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{5})^2(3+\sqrt{10}),$$

$$f_1(\sqrt{-88})^8 = 4(1+\sqrt{2})^2(3+\sqrt{11})^2(7\sqrt{2}+3\sqrt{11}),$$

$$8f_1(\sqrt{-120})^{24} = (1+\sqrt{3})^6(1+\sqrt{5})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6 (\sqrt{5}+\sqrt{6})^3(3+\sqrt{10})^2,$$

$$2^6 f_1(\sqrt{-168})^{24} = (1+\sqrt{3})^{12}(1+\sqrt{2})^6(3+\sqrt{7})^6(\sqrt{3}+\sqrt{7})^6 (\sqrt{6}+\sqrt{7})^3(\sqrt{7}+\sqrt{8})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-232})^8 = 2(1+\sqrt{2})^6(5+\sqrt{29})^2(99+13\sqrt{58}),$$

$$8f_1(\overline{-280})^8 = (1+\sqrt{5})^4(1+\sqrt{2})^2(3+\sqrt{7})^2(5+\sqrt{7})^2 (\sqrt{7}+\sqrt{8})^2(5\sqrt{5}+3\sqrt{14}),$$

$$2^6 f_1(\sqrt{-312})^{24} = (1+\sqrt{3})^{18}(3+\sqrt{13})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6(2\sqrt{3}+\sqrt{13})^6 (3\sqrt{3}+\sqrt{26})^3(5+\sqrt{26})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-408})^{24} = (1+\sqrt{3})^{12}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{12}(1+\sqrt{2})^6(7+\sqrt{51})^6 (3\sqrt{2}+\sqrt{17})^4(5\sqrt{2}+\sqrt{51})^3,$$

$$2^5 f_1(\sqrt{-520})^8 = (1+\sqrt{5})^6(1+\sqrt{2})^4(3+\sqrt{13})^2(3+\sqrt{10})^2 (5+\sqrt{26})^2(57+5\sqrt{130}),$$

$$2f_1(\sqrt{-760})^8 = (1+\sqrt{5})^6(3+\sqrt{10})^2(13+3\sqrt{19})^2(3\sqrt{2}+\sqrt{19})^2 (2\sqrt{5}+\sqrt{19})^2(51\sqrt{10}+37\sqrt{19}),$$

$$2^{12} f_1(\sqrt{-840})^{24} = (\sqrt{3}+\sqrt{5})^{12}(1+\sqrt{2})^6(1+\sqrt{3})^6(1+\sqrt{5})^6(3+\sqrt{7})^6$$
$$(3+\sqrt{10})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6(\sqrt{5}+\sqrt{7})^6(\sqrt{6}+\sqrt{7})^6$$
$$(\sqrt{14}+\sqrt{15})^3(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})^2(5\sqrt{5}+3\sqrt{14})^2,$$

$$2^{24} f_1(\sqrt{-1320})^{24} = (1+\sqrt{3})^{18}(1+\sqrt{5})^{12}(1+\sqrt{2})^6(3+\sqrt{10})^6$$
$$(3+\sqrt{11})^6(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6(\sqrt{5}+\sqrt{6})^6(\sqrt{11}+\sqrt{15})^6$$
$$(3\sqrt{5}+2\sqrt{11})^6(4\sqrt{2}+\sqrt{33})^6(3\sqrt{6}+\sqrt{55})^3$$
$$(\sqrt{10}+\sqrt{11})^2,$$

$$2^{21} f_1(\sqrt{-1848})^{24} = (1+\sqrt{3})^{12}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{12}(3+\sqrt{7})^{12}(3+\sqrt{11})^6$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^6(\sqrt{6}+\sqrt{7})^6(\sqrt{7}+\sqrt{11})^6(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^6$$
$$(7\sqrt{2}+3\sqrt{11})^6(5\sqrt{3}+\sqrt{77})^6(\sqrt{21}+\sqrt{22})^3$$
$$(22\sqrt{22}+39\sqrt{7})^2.$$

6.

Es fehlen hiernach noch die folgenden Werthe von m, auf welche die abgeleiteten Formeln nicht ohne Weiteres anwendbar sind

1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 15, 16, 18, 25, 28, 45, 48, 60, 72, 112, 240.

Für alle diese Zahlen, mit Ausnahme der letzten, habe ich in der oben citirten Abhandlung die Classeninvarianten nach verschiedenen Methoden bestimmt, und ich setze die Resultate der Vollständigkeit halber hierher

$$f(\sqrt{-1})^4 = 2,$$
$$f_1(\sqrt{-2})^4 = 2,$$
$$f(\sqrt{-3})^3 = 2,$$
$$f_1(\sqrt{-4})^8 = 8,$$
$$f(\sqrt{-7})^2 = 2,$$
$$f(\sqrt{-9})^6 = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})^2,$$
$$f_1(\sqrt{-12})^{24} = 2^7(1+\sqrt{3})^6,$$
$$f(\sqrt{-15})^3 = \sqrt{2}(1+\sqrt{5}),$$
$$f_1(\sqrt{-16})^8 = \sqrt{2}^7(1+\sqrt{2})^2,$$
$$f_1(\sqrt{-18})^6 = \sqrt{2}^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2,$$

$$\sqrt{2}^3 f(\sqrt{-25})^2 = (1+\sqrt{5})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-28})^4 = \sqrt{2}^3(3+\sqrt{7}),$$

$$f(\sqrt{-45})^{12} = 2(2+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^4,$$

$$f_1(\sqrt{-48})^{24} = \sqrt{2}^{19}(1+\sqrt{3})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6(1+\sqrt{2})^6,$$

$$f_1(\sqrt{-60})^{12} = \sqrt{2}^5(1+\sqrt{5})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-72})^{24} = 2^6(2+\sqrt{6})^4(1+\sqrt{2})^9(2+\sqrt{3})^6,$$

$$f_1(\sqrt{-112})^8 = \sqrt{2}^7(1+\sqrt{2})^4(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^2(3+\sqrt{7}).$$

Es bleibt also nur noch die Bestimmung von $f_1(\sqrt{-240})$ übrig. Diese Rechnung habe ich, in Ermangelung einer für diesen Fall passenden allgemeinen Formel auf einem etwas anderen Wege durchgeführt, den ich hier kurz andeuten werde.

Als Repräsentanten der 8 zur Determinante -240 gehörigen Classen wählen wir die folgenden:

$$\psi_0 = (1,\ 0,\ 240), \quad \psi_1 = (3,\ 0,\ 80), \quad \psi_2 = (5,\ 0,\ 48),$$
$$\psi_3 = (15,\ 0,\ 16), \quad \psi_4 = (4,\ 2,\ 61), \quad \psi_5 = (12,\ 6,\ 23),$$
$$\psi_6 = (20,\ 10,\ 17), \quad \psi_7 = (60,\ 30,\ 19),$$

deren Charaktere folgende sind:

	$\left(\frac{a}{3}\right)$	$\left(\frac{a}{5}\right)$	$\left(\frac{-1}{a}\right)$	$\left(\frac{2}{a}\right)$
ψ_0	+	+	+	+
ψ_1	−	−	−	−
ψ_2	−	−	+	−
ψ_3	+	+	−	+
ψ_4	+	+	+	−
ψ_5	−	−	−	+
ψ_6	−	−	+	+
ψ_7	+	+	−	−

Setzen wir

$$\omega_0 = \sqrt{-60}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{-20}{3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{-\frac{12}{5}}, \quad \omega_3 = \sqrt{-\frac{4}{15}},$$

so werden die zu -240 gehörigen Classeninvarianten

$$x_0 = f_1(2\omega_0)^{24},\quad x_1 = f_1(2\omega_1)^{24},\quad x_2 = f_1(2\omega_2)^{24},\quad x_3 = f_1(2\omega_3)^{24},$$

$$x_4 = f_2\left(\frac{\omega_0 - 1}{2}\right)^{24},\quad x_5 = f_2\left(\frac{\omega_1 - 1}{2}\right)^{24},\quad x_6 = f_2\left(\frac{\omega_2 - 1}{2}\right)^{24},\quad x_7 = f_2\left(\frac{\omega_3 - 1}{2}\right)^{24}$$

und es bestehen die folgenden Relationen (Art. 3 Anmerkung, mit Benutzung des Werthes von $f(\sqrt{-15})$)

$$\begin{aligned} x_0\, x_4 &= 2^{12} f_1(\omega_0)^{24}, \\ x_1\, x_5 &= 2^{12} f_1(\omega_1)^{24}, \\ x_2\, x_6 &= 2^{12} f_1(\omega_2)^{24}, \\ x_3\, x_7 &= 2^{12} f_1(\omega_3)^{24}, \end{aligned}$$

$$x_0\; x_1\; x_2\; x_3\; x_4\; x_5\; x_6\; x_7 = 2^{96}.$$

Nun ist x_0 eine rationale Function von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ mit rationalen Coefficienten, und wenn wir diese für den Augenblick mit $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ bezeichnen, so folgt mit Rücksicht auf die oben zusammengestellten Charaktere *)

$$\begin{aligned} x_0 &= (\ \ \sqrt{2},\ \ \ \sqrt{3},\ \ \ \sqrt{5}), & x_4 &= (-\sqrt{2},\ \ \ \sqrt{3},\ \ \ \sqrt{5}), \\ x_1 &= (-\sqrt{2},\ \ \ \sqrt{3}, -\sqrt{5}), & x_5 &= (\ \ \sqrt{2},\ \ \ \sqrt{3}, -\sqrt{5}), \\ x_2 &= (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}), & x_6 &= (\ \ \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}), \\ x_3 &= (\ \ \sqrt{2}, -\sqrt{3},\ \ \ \sqrt{5}), & x_7 &= (-\sqrt{2}, -\sqrt{3},\ \ \ \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} x_0\, x_1\, x_2\, x_3 &= \xi_0 + \eta_0\sqrt{10}, \\ x_0\, x_1\, x_6\, x_7 &= \xi_1 + \eta_1\sqrt{30}, \\ x_0\, x_2\, x_5\, x_7 &= \xi_2 + \eta_2\sqrt{6}, \\ x_0\, x_3\, x_5\, x_6 &= \xi_3 + \eta_3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

worin nunmehr, da die Classeninvarianten *ganze algebraische* Zahlen sind, die ξ, η *ganze rationale* Zahlen bedeuten, welche den Bedingungen genügen

$$\xi_0^2 + 10\eta_0^2 = \xi_1^2 + 30\eta_1^2 = \xi_2^2 + 6\eta_2^2 = \xi_3^2 + 2\eta_3^2 = 2^{96}$$

und die also durch 2^{48} theilbar sind. Man kann sie daher durch die Lösungen der Pell'schen Gleichung ausdrücken und erhält, wenn $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ unbestimmte *ganzzahlige* Exponenten sind,

*) Vgl. des Verfassers erste Abhandlung „Zur Theorie der ell. Funct." § 21 Acta Math. Bd. 6.

$$
\begin{aligned}
x_0\, x_1\, x_2\, x_3 &= 2^{48}(3+\sqrt{10})^{2\varkappa_0},\\
x_0\, x_1\, x_6\, x_7 &= 2^{48}(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{2\varkappa_1},\\
x_0\, x_2\, x_5\, x_7 &= 2^{48}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2\varkappa_2},\\
x_0\, x_3\, x_5\, x_6 &= 2^{48}(1+\sqrt{2})^{2\varkappa_3},\\
x_0^2 x_4^2 &= 2^{24} f_1(\sqrt{-60})^{48}.
\end{aligned}
$$

Eine ganz rohe Näherungsrechnung ergiebt für die vier Exponenten $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ den Werth 12, so dass man durch Multiplication der fünf letzten Gleichungen findet

$$\big(f_1(\sqrt{-240})\big)^4 = 2 f_1(\sqrt{-60})^2 (1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{6}).$$

Marburg, im October 1888.

Ueber Resultanten und Discriminanten von ϑ-Functionen höheren Grades.

Von

Otto Schlesinger in Basel.

Einleitung.

Die nachfolgenden Untersuchungen sind aus dem Bestreben hervorgegangen, die allgemeine Theorie der elliptischen Curven durch dieselben directen Methoden zu entwickeln, welche für die rationalen seit langer Zeit mit Vortheil verwandt werden. Es ist klar, dass dabei alle diejenigen Aufgaben, welche die nothwendigsten Grundlagen für die Behandlung ganzer rationaler Functionen bilden, nunmehr für Theta-Functionen höheren Grades sich darbieten und vor allem eine Erledigung finden müssen. In erster Reihe wird demnach die Frage auftreten, welches die nothwendige und hinreichende Bedingung ist, unter welcher zwei allgemeine ϑ-Functionen, die irgendwie (z. B. als lineare Aggregate von ϑ-Producten) gegeben sind, gemeinsame Nullwerthe besitzen. Es handelt sich also, wenn wir uns einer nach Analogie verständlichen Bezeichnung bedienen, um Herstellung der *Resultante* der ϑ-Functionen. Hieran schliesst sich naturgemäss die Aufsuchung der *Discriminante* einer ϑ-Function, sowie insbesondere die immer wieder sich darbietende Aufgabe, die gemeinschaftlichen Lösungen von

$$F(u\,v) = 0,$$
$$\Phi(u\,v) = 0$$

zu bestimmen, wenn F als Function von u allein eine ϑ-Function von gewissem Grade ist und ebenso als Function von v allein, während für Φ genau dasselbe gilt. Der engen und leicht ersichtlichen Beziehung, in welcher diese letzte Aufgabe zu den Sätzen steht, die aus dem erweiterten Correspondenzprincip für Curven vom Geschlechte eins sich ergeben, ist am Schlusse von § 3 eine kurze Betrachtung gewidmet.

Ich setze im Folgenden, um Wiederholungen zu vermeiden, die Bezeichnungen und Sätze als bekannt voraus, die ich in meiner Abhandlung: „Ueber die Verwerthung der ϑ-Functionen“ etc. (diese Annalen Bd. XXXI) auf Seite 185—189 zusammengestellt habe, während ich gleichzeitig bemerke, dass die übrigen Theile jener Arbeit (die ich im Folgenden immer mit Th. citiren will) hier nicht in Betracht kommen. Nur möchte ich darauf hinweisen, dass ich die Beschränkung fallen lasse, die ich l. c. S. 187, Z. 12 eingeführt habe, wonach der Index ϱ immer als ein Werth im ersten Periodenparallelogramm betrachtet werden sollte. In der That war für diese offenbar unwesentliche Festsetzung nur der Wunsch massgebend, die Ausdrucksweise in den geometrischen Theilen jener Arbeit einfacher zu gestalten.

An die Sätze, welche ich dem angeführten Orte entlehne, und die ich überdies meist ausdrücklich citire, schliessen sich einige einfache Rechnungsresultate, die ich im § 1 zusammengestellt habe, um weiterhin den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen. Die Vertheilung des übrigen Stoffes ist aus den Ueberschriften des Paragraphen deutlich genug zu entnehmen.

Eine unmittelbar nachfolgende Abhandlung über die Curven vom Geschlechte eins wird einen Theil der hier gegebenen Sätze verwerthen, und, wie ich hoffe, einen ersten Beweis ihrer Fruchtbarkeit ablegen.

§ 1.

Einige Hülfssätze.

I. Wenn $\varphi(u)$ eine ϑ_ϱ^n-Function ist, so folgt sehr leicht aus den Definitionsgleichungen (Th. S. 185), dass für zwei beliebige (positive oder negative) ganze Zahlen $r r'$ die Gleichung gilt:

$$(1) \qquad \varphi(u+r\omega+r'\omega') = (-1)^{(r+r')n} e^{-nr'\frac{\pi i}{\omega}(2u+r'\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega} r'\varrho} \varphi(u).$$

II. *Ist g irgend eine ganze Zahl, α eine beliebige Grösse und $\varphi(u)$ eine ϑ_ϱ^n-Function, so ist $\varphi(gu+\alpha)$ eine ϑ-Function vom Grade $g^2 n$ und vom Index $g(\varrho - n\alpha)$*

Beweis: Setzt man

$$\psi(u) = \varphi(gu+\alpha)$$

so ist nach Gleichung (1)

$$\psi(u+\omega) = \varphi(gu+\alpha+g\omega) = (-1)^{gn}\varphi(gu+\alpha) = (-1)^{gn}\psi(u),$$

$$\psi(u+\omega') = \varphi(gu+\alpha+g\omega') = (-1)^{gn} e^{-gn\frac{\pi i}{\omega}[2gu+2\alpha+g\omega']} e^{\frac{2\pi i}{\omega} g\varrho} \varphi(gu+\alpha)$$

$$= (-1)^{gn} e^{-g^2 n\frac{\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}[g\varrho - gn\alpha]} \psi(u).$$

Nun sind offenbar gn und g^2n gleichzeitig gerade oder ungerade Zahlen; also $(-1)^{gn} = (-1)^{g^2n}$. Es folgt mithin:

$$\psi(u+\omega) = (-1)^{g^2n}\psi(u),$$

$$\psi(u+\omega') = (-1)^{g^2n} e^{-g^2n\frac{\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}g(\varrho-n\alpha)} \psi(u)$$

q. e. d.

III. *Ist $\varphi(u)$ eine ϑ_ϱ^r und $\psi(u)$ eine ϑ_σ^s-Function, und sind $\varphi'\psi'$ die Ableitungen derselben nach u, so ist*

$$L(u) = \begin{vmatrix} r\varphi(u) & s\psi(u) \\ \varphi'(u) & \psi'(u) \end{vmatrix}$$

*eine $\vartheta_{\varrho+\sigma}^{r+s}$-Function.**)

Beweis. Aus den Functionalgleichungen für $\varphi(u)$ (Th. S. 185) folgt durch Differentiation:

(2a) $\varphi'(u+\omega) = (-1)^r\varphi(u)$,

$$\varphi'(u+\omega') = (-1)^r e^{-\frac{r\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\varrho}\left\{\varphi'(u) - \frac{2r\pi i}{\omega}\varphi(u)\right\}.$$

Die letzte Gleichung giebt aber auch:

(2b) $\varphi'(u+\omega') + \frac{2r\pi i}{\omega}\varphi(u+\omega') = (-1)^r e^{-\frac{r\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\varrho}\varphi'(u)$.

Ebenso folgt:

(3a) $\psi'(u+\omega) = (-1)^s\psi(u)$,

(3b) $\psi'(u+\omega') + \frac{2s\pi i}{\omega}\psi(u+\omega') = (-1)^s e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\sigma}\psi'(u)$.

Nach (2a) und (3a) resultirt mithin

$$L(u+\omega) = (-1)^{r+s}L(u)$$

Ausserdem ergiebt sich unter Anwendung einer Determinantentransformation und der Gleichungen (2b), (3b)

$$L(u+\omega') = \begin{vmatrix} r\varphi(u+\omega') & s\psi(u+\omega') \\ \varphi'(u+\omega') + \frac{2r\pi i}{\omega}\varphi(u+\omega') & \psi'(u+\omega') + \frac{2s\pi i}{\omega}\psi(u+\omega') \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{r+s} e^{-(r+s)\frac{\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\varrho+\sigma)} L(u)$$

was zu beweisen war.

Es möge übrigens gleich bemerkt werden, dass man auf genau dieselbe Art den Satz findet:

---

*) Vergl. einen speciellen Fall dieses Satzes bei Hermite, Crelle's Journal Bd. 32, p. 288.

IV. *Sind*

$$\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)\,\ldots\,\varphi_q(u)$$

ϑ-Functionen von den Graden $r_1 \ldots r_q$ *und von den Indices* $\varrho_1 \ldots \varrho_q$, *so ist:*

$$\begin{vmatrix} r_1^{q-1}\varphi_1(u) & r_2^{q-1}\varphi_2(u) \ldots & r_q^{q-1}\varphi_q(u) \\ r_1^{q-2}\varphi_1'(u) & \ldots & r_q^{q-2}\varphi_q'(u) \\ \vdots & & \\ r_1\varphi_1^{(q-2)}(u) & \ldots & r_q\varphi_q^{(q-2)}(u) \\ \varphi_1^{(q-1)}(u) & \ldots & \varphi_q^{(q-1)}(u) \end{vmatrix}$$

eine ϑ-Function vom Grade $r_1 + r_2 + \cdots + r_q$ *und vom Index*

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_q.$$

Dabei bedeutet $\varphi_i^{(p)}(u)$ die p^{te} Ableitung von $\varphi_i(u)$.

§ 2.

Resultante zweier ϑ-Functionen.

Die Behandlung der meisten auf ganze rationale Functionen bezüglichen Aufgaben ruht in letzter Linie auf der Thatsache, dass wir uns jede solche Function ein für alle Mal nach Potenzen der Variablen entwickelt denken. Die einzelnen Functionen desselben Grades sind alsdann durch die bei der Entwicklung auftretenden Coefficienten charakterisirt, und jede Beziehung zwischen denselben, wie etwa die Resultante zweier ganzen Functionen, stellt sich als eine Relation zwischen den Coefficienten dar.

Um bei den ϑ-Functionen höheren Grades denselben Vortheil zu geniessen, habe ich schon früher (Th. S. 189) das Verfahren eingeschlagen, alle Functionen dieser Art von einem festen Grade n und einem festen Index ϱ, die etwa in einer und derselben Rechnung auftreten, sämmtlich aus denselben n independenten ϑ_ϱ^n-Functionen als *Grundformen* zusammenzusetzen. Jede auftretende ϑ-Function wird alsdann, da die Zusammensetzung nur auf *eine* Art möglich ist (cfr. Th. Satz 8) in genau bestimmter Weise entwickelt gedacht, und die bei dieser Entwicklung auftretenden Coefficienten leisten mithin denselben Dienst, wie die Coefficienten ganzer rationaler Functionen.

Wenn nun

$$\mathsf{H}_1(u)\,\mathsf{H}_2(u)\,\ldots\,\mathsf{H}_p(u)$$

p independente ϑ_σ^p-Functionen und

$$\mathsf{Z}_{p+1}(u)\,\mathsf{Z}_{p+2}(u)\,\ldots\,\mathsf{Z}_{p+q}(u)$$

q independente ϑ_τ^q-Functionen sind, die wir resp. als Grundformen für alle ϑ_σ^p- und ϑ_τ^q-Functionen benutzen, so kann man sich die Aufgabe stellen, die nothwendige und hinreichende Bedingung zu finden, unter welcher die Functionen:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
E(u) &= \sum_{i=1}^{i=p} l_i \, \mathrm{H}_i(u),\\
Z(u) &= \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda \, \mathrm{Z}_\lambda(u)
\end{aligned}
$$

einen gemeinsamen Nullwerth haben; d. h. wir können uns nach der *Resultante der Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
E(u) &= 0,\\
Z(u) &= 0
\end{aligned}
$$

fragen.

Diese Resultante, welche sich als eine Function der Coefficienten $l_1 \ldots l_p \; m_{p+1} \ldots m_{p+q}$ darstellen muss, kann nun durch ein Verfahren gewonnen werden, welches der durch Sylvester modificirten Euler-Bezout'schen Methode, die Resultante zweier algebraischen Gleichungen herzustellen, ganz analog ist.

Es kommt dabei vor Allem darauf an, die Grundformen aller auftretenden ϑ-Functionen, d. h. zunächst die Functionen H_i und Z_i passend zu wählen. Aber da wir im Laufe der Rechnung noch $\vartheta_{-\sigma}^{p}$, $\vartheta_{-\tau}^{q}$ und ϑ_0^{p+q}-Functionen brauchen werden, so wird es zweckmässig sein, auch für diese schon hier die geeigneten Grundformen aufzustellen.

Ich bediene mich dabei eines ganz ähnlichen Verfahrens, wie in meiner Abhandlung: „Ueber die Verwerthung der ϑ-Functionen etc.“ (cfr. S. 190 derselben): Es seien nämlich $\alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_p \; \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+q}$ irgend welche $(p+q)$ verschiedene Grössen die nur so gewählt sind, dass:

$$
(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \alpha_i \quad \text{nicht} \equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega, \omega').
$$

Ich setze

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i &= s,\\
\sum_{i=p+1}^{i=p+q} \alpha_i &= t
\end{aligned}
$$

so dass

$$
\sum_{i=1}^{i=p+q} \alpha_i = s + t.
$$

Ich bilde nunmehr die Functionen:

$$\mathsf{H}_i(u)=\vartheta_1(u-\alpha_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{i-1})\vartheta_1(u-\sigma+s-\alpha_i)\vartheta_1(u-\alpha_{i+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_p),$$
$$i=1\ldots p,$$
$$\mathfrak{E}_i(u)=\vartheta_1(u-\alpha_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{i-1})\vartheta_1(u+\tau+s-\alpha_i)\vartheta_1(u-\alpha_{i+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_p),$$
$$i=1\ldots p,$$
$$\mathsf{Z}_\lambda(u)=\vartheta_1(u-\alpha_{p+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{\lambda-1})\vartheta_1(u-\tau+t-\alpha_\lambda)\vartheta_1(u-\alpha_{\lambda+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{p+q}),\tag{7}$$
$$\lambda=p+1,\ldots p+q,$$
$$\mathfrak{Z}_\lambda(u)=\vartheta_1(u-\alpha_{p+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{\lambda-1})\vartheta_1(u+\sigma+t-\alpha_\lambda)\vartheta_1(u-\alpha_{\lambda+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{p+q}),$$
$$\lambda=p+1,\ldots,p+q,$$
$$\Theta_\mu(u)=\vartheta_1(u-\alpha_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{\mu-1})\vartheta_1(u+s+t-\alpha_\mu)\vartheta_1(u-\alpha_{\mu+1})\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{p+q}),$$
$$\mu=1,2\ldots p+q.$$

Die Functionen $\Theta_1(u)\ldots\Theta_{p+q}(u)$ sind, da $s+t$ nicht $\equiv 0$, stets independent (cfr. Th. p. 188) und können daher unter allen Umständen als Grundformen für alle ϑ_0^{p+q}-Functionen genommen werden. Die Functionen $\mathsf{H}_i(u)$ dagegen stellen nur so lange p independente ϑ_σ^p-Functionen vor, als $(-\sigma+s)$ nicht $\equiv 0$. Nun kann, bei festem σ, s als Summe der beliebigen Grössen $\alpha_1\ldots\alpha_p$ stets so gewählt werden, dass $-\sigma+s$ nicht $\equiv 0$ ist und eine solche Wahl soll im Folgenden stets vorausgesetzt werden. Da jedoch in den Anwendungen σ auch bisweilen als Variable erscheinen kann, so muss jedenfalls ein für alle Mal festgehalten werden, dass $\mathsf{H}_1\ldots\mathsf{H}_p$ nur so lange independent sind, als $-\sigma+s$ nicht $\equiv 0$ ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt von den Functionen $\mathfrak{E}_\lambda\ \mathsf{Z}_\lambda\ \mathfrak{Z}_\lambda$. Wir wählen also im Folgenden die Functionen $\mathsf{H}_i\ \mathfrak{E}_i\ \mathsf{Z}_\lambda\ \mathfrak{Z}_\lambda$ als Grundform resp. für alle auftretenden $\vartheta_\sigma^p\ \vartheta_{-\tau}^p\ \vartheta_\tau^q\ \vartheta_{-\sigma}^q$, halten aber fest, dass:

(8)
$\mathsf{H}_1\ldots\mathsf{H}_p$ dann und nur dann indepedent sind, wenn $-\sigma+s$ nicht $\equiv 0$,
$\mathfrak{E}_1\ldots\mathfrak{E}_p$ „ „ „ „ „ „, wenn $\tau+s$ nicht $\equiv 0$,
$\mathsf{Z}_{p+1}\ldots\mathsf{Z}_{p+q}$ „ „ „ „ „ „, wenn $-\tau+t$ nicht $\equiv 0$,
$\mathfrak{Z}_{p+1}\ldots\mathfrak{Z}_{p+q}$ „ „ „ „ „ „, wenn $\sigma+t$ nicht $\equiv 0$.

Die Producte $\mathsf{H}_i\,\mathfrak{Z}_\lambda$ und $\mathfrak{E}_i\,\mathsf{Z}_\lambda$ sind (Th. Satz 10, S. 189) stets ϑ_0^{p+q}-Functionen, und es müssen sich daher nach Th. Satz 8 constante Grössen $n_\mu^{i\lambda}\ N_\mu^{i\lambda}$ so finden lassen, dass

$$\left.\begin{aligned}\mathsf{H}_i(u)\,\mathfrak{Z}_\lambda(u)&\underset{u}{\equiv}\sum_{\mu=1}^{\mu=p+q}n_\mu^{i\lambda}\,\Theta_\mu(u),\\ \mathfrak{E}_i(u)\,\mathsf{Z}_\lambda(u)&\underset{u}{\equiv}\sum_{\mu=1}^{\mu=p+q}N_\mu^{i\lambda}\,\Theta_\mu(u).\end{aligned}\right\}\quad\begin{pmatrix}i=1\ldots p\\ \lambda=p+1\ldots p+q\end{pmatrix}\tag{9}$$

Die Bestimmung dieser Coefficienten ist für das Folgende wichtig. Sie ergiebt sich sehr leicht, indem man $u = \alpha_\mu$ setzt. Es folgt alsdann, da alle $\Theta_i(u)$, ausser $\Theta_\mu(u)$ verschwinden:

$$(10\text{a})\qquad n_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathsf{H}_i(\alpha_\mu)\mathfrak{Z}_\lambda(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)},$$

$$(10\text{b})\qquad N_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathfrak{E}_i(\alpha_\mu)\mathsf{Z}_\lambda(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)}. \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \dots p \\ \lambda = p+1 \dots p+q \\ \mu = 1 \dots p+q. \end{pmatrix}$$

Man beachte nun bei den Gleichungen (10a), dass wenn $\mu \leqq p$ ist, $\mathsf{H}_i(\alpha_\mu)$ stets den Werth Null hat, ausser für $\mu = i$, und dass, wenn $\mu > p$ ist, $\mathfrak{Z}_\lambda(\alpha_\mu) = 0$ ausser für $\mu = \lambda$, dass mithin von den Grössen $n_1^{i\lambda} \dots n_{p+q}^{i\lambda}$ nur $n_i^{i\lambda}$ und $n_\lambda^{i\lambda}$ von Null verschieden sind. Die Werthe dieser Letzteren resultiren überdies leicht, sobald man auf die Gleichungen (7) Bezug nimmt, und aus ihnen die Werthe für $\mathsf{H}_i\, \mathfrak{Z}_\lambda\, \Theta_\lambda$ in (10a) einsetzt. Es ergiebt sich so nach einer einfachen Umformung:

$$(11\text{a})\qquad \begin{aligned} n_i^{i\lambda} &= -\frac{\vartheta_1(\sigma - s)\,\vartheta_1[\sigma - (\alpha_\lambda - \alpha_i - t)]}{\vartheta_1(s+t)\,\vartheta_1(\alpha_i - \alpha_\lambda)}, \\ n_\lambda^{i\lambda} &= \frac{\vartheta_1[\sigma - (s + \alpha_\lambda - \alpha_i)]\,\vartheta_1[\sigma - (-t)]}{\vartheta_1(s+t)\,\vartheta_1(\alpha_i - \alpha_\lambda)}, \\ n_\mu^{i\lambda} &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \gtrless i, \quad \mu \gtrless \lambda. \end{aligned}$$

Eine ganz entsprechende Behandlung der Formeln (10b) lässt erkennen, dass von den Grössen $N_1^{i\lambda} \dots N_{p+q}^{i\lambda}$ nur $N_i^{i\lambda}$ und $N_\lambda^{i\lambda}$ von Null verschieden sind, deren Werthe sich leicht ergeben. Es folgt demnach:

$$(11\text{b})\qquad \begin{aligned} N_i^{i\lambda} &= -\frac{\vartheta_1[\tau - (-s)]\,\vartheta_1[\tau - (\alpha_i - \alpha_\lambda + t)]}{\vartheta_1(s+t)\,\vartheta_1(\alpha_i - \alpha_\lambda)}, \\ N_\lambda^{i\lambda} &= \frac{\vartheta_1[\tau - (\alpha_i - \alpha_\lambda - s)]\,\vartheta_1(\tau - t)}{\vartheta_1(s+t)\,\vartheta_1(\alpha_i - \alpha_\lambda)}, \\ N_\mu^{i\lambda} &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \gtrless i, \quad \mu \gtrless \lambda. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nunmehr an unsere eigentliche Aufgabe herantreten. Wenn $E(u)$ und $Z(u)$ einen gemeinschaftlichen Nullwerth haben, d. h. wenn die Gleichungen (4) neben einander bestehen, so gilt dies auch für die $(p+q)$ Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{i=p} l_i\, \mathsf{H}_i(u)\right) \mathfrak{Z}_\lambda(u) = 0, \qquad \lambda = p+1 \dots p+q \\ &\left(\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda\, \mathsf{Z}_\lambda(u)\right) \mathfrak{E}_i(u) = 0, \qquad i = 1 \dots p \end{aligned}$$

oder, was nach den Formeln (9) dasselbe ist, für:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\substack{i=1\ \mu=1\\ i=p\ \mu=p+q}} l_i n_\mu^{i\lambda}\,\Theta_\mu(u) = 0, \qquad (\lambda = p+1\ldots p+q)\\ &\sum_{\substack{\lambda=p+1\ \mu=1\\ \lambda=p+q\ \mu=p+q}} m_\lambda N_\mu^{i\lambda}\,\Theta_\mu(u) = 0. \qquad (i=1\ldots p) \end{aligned}$$

Dies sind $(p+q)$ homogene lineare Gleichungen zwischen

$$\Theta_1(u)\,\Theta_2(u)\ldots\Theta_{p+q}(u).$$

Damit sie neben einander bestehen, müssen entweder $\Theta_1(u)\ldots\Theta_{p+q}(u)$ gleichzeitig Null sein, was offenbar, da $s+t$ nicht $\equiv 0$, nach (7) unmöglich ist, oder es muss die Gleichung $\Delta = 0$ stattfinden, wobei:

$$(14)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_1^{i,p+1} & \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_2^{i,p+1} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_{p+q}^{i,p+1}\\ \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_1^{i,p+2} & \sum\limits_{i} l_i n_2^{i,p+2} & \ldots & \sum\limits_{i} l_i n_{p+q}^{i,p+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i} l_i n_1^{i,p+q} & \sum\limits_{i} l_i n_2^{i,p+q} & \ldots & \sum\limits_{i}^{n} l_i n_{p+q}^{i,p+q}\\ \sum\limits_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda N_1^{1,\lambda} & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_2^{1,\lambda} & \ldots & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_{p+q}^{1,\lambda}\\ \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_1^{2,\lambda} & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_2^{2,\lambda} & \ldots & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_{p+q}^{2,\lambda}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_1^{p,\lambda} & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_2^{p,\lambda} & \ldots & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_{p+q}^{p,\lambda} \end{vmatrix}.$$

Für die Berechnung von Δ ist es manchmal nützlich, zu beachten, dass nach (10)

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=p} l_i\, n_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathfrak{Z}_\lambda(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)} \sum l_i \mathrm{H}_i(\alpha_\mu) = \frac{\mathfrak{Z}_\lambda(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)}\, E(\alpha_\mu),\\ &\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda N_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathfrak{E}_i(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)} \sum m_\lambda \mathrm{Z}_\lambda(\alpha_\mu) = \frac{\mathfrak{E}_i(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)}\, Z(\alpha_\mu). \end{aligned}$$

Anderseits kann man bemerken, dass nach den Gleichungen (11) viele der Grössen n, N den Werth 0 haben. Unter Einsetzung dieser Werthe tritt Δ in die mitunter besser verwerthbare Form:

$$
(14^a)\quad \Delta = \begin{vmatrix}
l_1 n_1^{1,p+1} & l_2 n_2^{2,p+1} & \cdots l_p n_p^{p,p+1} & \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_{p+1}^{i,p+1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
l_1 n_1^{1,p+2} & l_2 n_2^{2,p+2} & \cdots l_p n_p^{p,p+2} & 0 & \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_{p+2}^{i,p+2} & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
l_1 n_1^{1,p+q} & l_2 n_2^{2,p+q} & \cdots l_p n_p^{p,p+q} & 0 & 0 & 0 \cdots & \sum\limits_{i=1}^{i=p} l_i n_{p+q}^{i,p+q} \\
\sum\limits_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda N_1^{1\lambda} & 0 & \cdots \quad 0 & m_{p+1} N_{p+1}^{1,p+1} & \cdots & \cdots & m_{p+q} N_{p+q}^{1,p+q} \\
0 & \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_2^{2\lambda} \cdots & 0 & m_{p+1} N_{p+1}^{2,p+1} & \cdots & \cdots & m_{p+q} N_{p+q}^{2,p+q} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots \sum\limits_{\lambda} m_\lambda N_p^{p\lambda} & m_{p+1} N_{p+1}^{p,p+1} & \cdots & \cdots & m_{p+q} N_{p+q}^{p,p+q}
\end{vmatrix}.
$$

Wir sehen, dass aus der Existenz einer gemeinschaftlichen Wurzel von (4) $\Delta = 0$ folgte. Wenn umgekehrt $\Delta = 0$ ist, so siind offenbar die $(p+q)$ Functionen (13) oder was dasselbe ist, die $(p+q)$ Functionen (12) linear abhängig. Es lassen sich also $(p+q)$ Constante, *die nicht alle Null sind:*

$$m'_{p+1} \cdots m'_{p+q}, \quad l_1' \cdots l_p'$$

so bestimmen, dass die Identität stattfindet:

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathrm{H}_i(u) \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda \mathrm{Z}_\lambda(u) \sum_{i=1}^{i=p} l_i' \mathfrak{E}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0$$

oder:

$$(16) \qquad E(u) \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u) + Z(u) \sum_{i=1}^{i=p} l_i' \mathfrak{E}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0.$$

Diese Identität kann entweder dadurch erfüllt werden, dass die zwei Summanden einzeln identisch verschwinden, oder ohne diese Voraussetzung.

Im *ersten* Fall folgt, dass man die Constanten $m'\,l'$, ohne dass alle Null sind, so wählen kann, dass gleichzeitig:

$$\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u) \underset{u}{\equiv} 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i' \mathfrak{E}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0$$

und dazu ist nothwendig und hinreichend, dass entweder die Functionen $\mathfrak{Z}_\lambda$ oder die Functionen $\mathfrak{E}_i$ linear dependent sind. Nach (8) sind aber $\mathfrak{Z}_{p+1} \dots \mathfrak{Z}_{p+q}$ nur abhängig, wenn $\sigma \equiv -t$, $\mathfrak{E}_1 \dots \mathfrak{E}_p$ nur, wenn $\tau \equiv -s$ ist.

Wenn also $\Delta = 0$ ist, und die daraus resultirende Identität (16) einzeln verschwindende Summanden hat, so ist entweder $\sigma \equiv -t$ oder $\tau \equiv -s$.

Wenn aber in (16) die beiden links stehenden Glieder nicht einzeln verschwinden, so lässt sich die Gleichung in der Form:

$$E(u)\,\mathfrak{Z}(u) + Z(u)\,\mathfrak{E}(u) \underset{u}{\equiv} 0 \tag{17}$$

schreiben, wo jetzt $\mathfrak{E}(u)$ eine nicht identisch verschwindende $\vartheta^{\varrho}_{-\tau}$ und $\mathfrak{Z}(u)$ eine ebenfalls von Null verschiedene $\vartheta^{\varrho}_{-\sigma}$ ist. Dann aber folgt, dass entweder $E(u)$ und $Z(u)$ einen gemeinschaftlichen Nullwerth besitzen, oder

$$\sigma + \tau \equiv 0$$

ist. Denn wenn $E(u) = 0$, $Z(u) = 0$ keine gemeinsame Wurzel haben, so muss nach (17) jede Wurzel von $E(u) = 0$ auch solche von $\mathfrak{E}(u) = 0$ sein. Da aber die Summe der Nullwerthe von $E(u)$ (cfr. Th. Satz 4, S. 187) $\equiv \sigma$, die entsprechende Summe für $\mathfrak{E}(u) \equiv -\tau$ ist, so würde folgen

$$\sigma \equiv -\tau \pmod{\omega\ \omega'},$$

wie behauptet wurde.

Wir sehen also im Ganzen, dass, wenn die Gleichung $\Delta = 0$ *stattfindet, entweder*

$$(18)\quad \begin{cases} \text{a)} & \sigma \equiv -t \\ \textit{oder} & \\ \text{b)} & \tau \equiv -s \\ \textit{oder} & \\ \text{c)} & \sigma + \tau \equiv 0 \\ \textit{oder} & \\ \text{d)} & \textit{eine gemeinschaftliche Wurzel von } E(u) = 0 \textit{ und } Z(u) = 0 \\ & \textit{existirt.} \end{cases}$$

Die Fälle a), b), c), in denen, wie unten gezeigt wird, thatsächlich Δ *Null ist, geben also die einzigen Nullwerthe von* Δ, *für welche keine Lösung unseres Problems sich ergiebt.* Man könnte vermuthen, dass vielleicht Δ durch $\vartheta_1(\sigma + t)$, $\vartheta_1(\tau + s)$, $\vartheta_1(\sigma + \tau)$ resp. durch gewisse Potenzen dieser Ausdrücke theilbar sein könnte. Indessen scheint dies im Allgemeinen nicht der Fall zu sein; wohl aber tritt es in den meisten speciellen Anwendungen, die ich bisher untersucht habe, thatsächlich ein, und es ist alsdann möglich, durch Division Δ von jenen fremden Factoren zu befreien und so die Resultante selbständig herzustellen.

Aber gerade für diese Anwendungen ist es nützlich, schon hier zu bestimmen, in welchem Grade Δ für die Werthe a), b), c) verschwindet.

Es sei zunächst $\sigma \equiv -t$, d. h. $\sigma = -t + r\omega + r'\omega'$ wo rr' beliebige ganze Zahlen sind. Alsdann ist nach (7)

$$\mathfrak{Z}_\lambda(u) = \vartheta_1(u - \alpha_{p+1}) \ldots \vartheta_1(u - \alpha_{\lambda-1})\,\vartheta_1(u - \alpha_\lambda + r\omega + r'\omega')\,\vartheta_1(u - \alpha_{\lambda+1}) \ldots \vartheta_1(u - \alpha_{p+q})$$

mithin nach Gleichung (1)

$$\mathfrak{Z}_\lambda(u) = (-1)^{r+r'} e^{-\frac{r'\pi i}{\omega}(2u - 2\alpha_\lambda + r'\omega')}\,\vartheta_1(u - \alpha_{p+1}) \ldots \vartheta_1(u - \alpha_{\lambda-1})\,\vartheta_1(u - \alpha_\lambda) \ldots \vartheta_1(u - \alpha_{p+q}).$$

Wenn wir also setzen:

$$\mathfrak{Z}(u) = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=q} \vartheta_1(u - \alpha_{p+\lambda}),$$

so ergiebt sich:

$$\mathfrak{Z}_\lambda(u) = (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u - 2\alpha_\lambda + r'\omega')}\,\mathfrak{Z}(u)$$

wo $\mathfrak{Z}$ von λ ganz unabhängig ist. Nunmehr folgt aus Gleichung (15):

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i n_\mu^{i\lambda} = (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2\alpha_\mu - 2\alpha_\lambda + r'\omega')}\,\frac{\mathfrak{Z}(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)}\,E(\alpha_\mu).$$

Hieraus erkennt man, dass in Δ (Gleichung 14) alle Elemente der ersten Horizontalreihe den Factor $e^{2r'\frac{\pi i}{\omega}\alpha_{p+1}}$, alle Elemente der zweiten Horizontalreihe den Factor $e^{2r'\frac{\pi i}{\omega}\alpha_{p+2}}$ etc., alle Elemente der q^{ten} Zeile den Factor $e^{2r'\frac{\pi i}{\omega}\alpha_{p+q}}$ gemein haben, und dass, wenn man diese Factoren vor die Determinante schreibt, die q ersten Zeilen der übrigbleibenden Determinante sämmtlich identisch werden. Daraus folgt, dass für $\sigma \equiv -t$ nicht nur Δ, sondern auch die Ausdrücke

$$\frac{d\Delta}{d\sigma}\;\frac{d^2\Delta}{d\sigma^2}\cdots\frac{d^{q-2}\Delta}{d\sigma^{q-2}}$$

den Werth Null erhalten.

Alle Werthe $\sigma \equiv -t$ sind also mindestens $(q-1)$-fache Nullwerthe von Δ.

Es sei ferner $\tau \equiv -s$ d. h. $\tau = -s + r\omega + r'\omega'$, dann ist nach (7) und nach den Gleichungen (1)

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_i(u) &= (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u-2\alpha_i+r'\omega')} \vartheta_1(u-\alpha_1)\ldots\vartheta_1(u-\alpha_{i-1})\vartheta_1(u-\alpha_i) \\ &\qquad \vartheta_1(u-a_{i+1})\ldots\vartheta_1(u-a_p) \\ &= (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u-2\alpha_i+r'\omega')} \mathfrak{E}(u),\end{aligned}$$

wenn

$$\mathfrak{E}(u) = \prod_{i=1}^{i=p} \vartheta_1(u-\alpha_i)$$

gesetzt ist. Aus den Gleichungen (15) folgt alsdann:

$$\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda N_\mu^{i\lambda} = (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2\alpha_\mu-2\alpha_i+r'\omega')} \frac{\mathfrak{E}(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)} Z(\alpha_\mu).$$

Daraus ist ersichtlich, dass in Δ alle Elemente der $(q+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe den Factor $e^{2r'\frac{\pi i}{\omega}\alpha_1}$, alle Elemente der $(q+2)^{\text{ten}}$ Zeile den Factor $e^{2r'\frac{\pi i}{\omega}\alpha_2}$ etc., alle Elemente der $(q+p)^{\text{ten}}$ den Factor $e^{2r'\frac{\pi i}{\omega}\alpha_p}$ enthalten, und dass nach Vorsetzung dieser Factoren die p letzten Horizontalreihen der Determinante ganz identisch werden. Es folgt also, dass für $\tau \equiv -s$

$$\Delta, \frac{d\Delta}{d\tau}, \frac{d^2\Delta}{d\tau^2}, \ldots \frac{d^{p-2}\Delta}{d\tau^{p-2}}$$

sämmtlich verschwinden; $\tau \equiv -s$ *ist demnach ein mindestens* $(p-1)$-*facher Nullwerth von* Δ.

Ich beweise schliesslich, dass die Werthe (18c) nämlich $\tau \equiv -\sigma$ jedenfalls einfache Nullwerthe von Δ vorstellen. Man kann dies durch directe Untersuchung von Δ mit Hülfe von Determinantenumformungen erkennen. Ich ziehe aber der Kürze halber vor, zu zeigen, dass die Functionen (12) abhängig sind, sobald $\tau = -\sigma + r\omega + r'\omega'$ gesetzt wird. Wie wir gesehen haben, muss dann $\Delta = 0$ sein.

Nun ist für $\tau = -\sigma + r\omega + r'\omega'$ resp. was dasselbe ist, für $\sigma = -\tau + r\omega + r'\omega'$ nach Gleichung (7)

$$\mathfrak{E}_i(u) = (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u-2\sigma+2s-2\alpha_i+r'\omega')} \mathsf{H}_i(u),$$

$$\mathfrak{Z}_\lambda(u) = (-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u-2\tau+2t-2\alpha_\lambda+r'\omega')} \mathsf{Z}_\lambda(u).$$

Die linken Seiten der Gleichung (12) lauten mithin in diesem Fall:

$$(-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u+r'\omega')} \sum_{i=1}^{i=p} l_i \, \mathrm{H}_i(u) \, e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\tau+2t-2\alpha_\lambda)} \mathrm{Z}_\lambda(u),$$
$$(\lambda = p+1 \dots p+q),$$

$$(-1)^{r+r'} e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(2u+r'\omega')} \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda \mathrm{Z}_\lambda(u) \, e^{-r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\sigma+2s-2\alpha_i)} \mathrm{H}_i(u),$$
$$(i = 1 \dots p).$$

Multiplicirt man

die erste dieser Functionen mit $e^{r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\tau+2t-2\alpha_{p+1})} m_{p+1}$,

die zweite „ „ „ $e^{r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\tau+2t-2\alpha_{p+2})} m_{p+2}$,

$\vdots$

die q^{te} „ „ „ $e^{r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\tau+2t-2\alpha_{p+q})} m_{p+q}$,

die $(q+1)^{\text{te}}$ „ „ „ $-e^{r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\sigma+2s-2\alpha_1)} l_1$,

die $(q+2)^{\text{te}}$ „ „ „ $-e^{r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\sigma+2s-2\alpha_2)} l_2$,

$\vdots$

die $(q+p)^{\text{te}}$ „ „ „ $-e^{r'\frac{\pi i}{\omega}(-2\sigma+2s-2\alpha_p)} l_p$

und addirt die Resultate, so ergiebt sich offenbar identisch Null, wie zu beweisen war. Wir sehen also, *dass für $\tau+\sigma \equiv 0$ die Determinante Δ mindestens einfach verschwindet.*

Man kann jedoch weiterhin zeigen, dass die Werthe $\sigma \equiv -t$, $\tau \equiv -s$, $\sigma \equiv -\tau$, welche die einzigen unserer Frage fremden Nullwerthe von Δ sind, als solche nur resp. $(q-1)$-fach, $(p-1)$-fach und einfach zu zählen sind. Zu diesem Zwecke genügt es festzustellen, dass in irgend einem speciellen Falle diese Nullwerthe nur in der genannten Vielfachheit auftreten, da alsdann im Allgemeinen die Thatsache a fortiori stattfinden muss.

Ich wähle zu diesem Zweck den Fall, dass in den Gleichungen (4)

$$l_1 = 1 \; l_2 = 0 \dots l_p = 0,$$
$$m_{p+1} = 0 \; m_{p+2} = 0 \dots m_{p+q-1} = 0 \; m_{p+q} = 1$$

ist. Indem ich diese Werthe in die Determinante (14a) einsetze und die letzten q Colonnen derselben, ohne ihre gegenseitige Stellung zu ändern, vor die ersten p Colonnen bringe, ergiebt sich:

$$(-1)^{pq}\Delta = \begin{vmatrix} n^{1,p+1}_{p+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & n^{1,p+1}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n^{1,p+2}_{p+2} & \cdots & 0 & 0 & n^{1,p+2}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & n^{1,p+q-1}_{p+q-1} & 0 & n^{1,p+q-1}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n^{1,p+q}_{p+q} & n^{1,p+q}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N^{1,p+q}_{p+q} & N^{1,p+q}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N^{2,p+q}_{p+q} & 0 & N^{2,p+q}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N^{p,p+q}_{p+q} & 0 & 0 & \cdots & N^{p,p+q}_p \end{vmatrix}$$

$$= n^{1,p+1}_{p+1}\, n^{1,p+2}_{p+2} \cdots n^{1,p+q-1}_{p+q-1}\, N^{2,p+q}_2 \cdots N^{p,p+q}_p \begin{vmatrix} N^{1,p+q}_1 & N^{1,p+q}_{p+q} \\ n^{1,p+q}_1 & n^{1,p+q}_{p+q} \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier die Werthe aus (11a) und (11b) ein, so resultirt unter Benutzung des Productzeichens

$$(19) \qquad (-1)^{pq}\Delta$$

$$= \frac{(-1)^p \prod_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q-1} \vartheta_1[\sigma-(s+\alpha_\lambda-\alpha_1)] \prod_{i=2}^{i=p} \vartheta_1[\tau-(t+\alpha_i-\alpha_{p+q})]\,[\vartheta_1(\sigma+t)]^{q-1}\,[\vartheta_1(\tau+s)]^{p-1}}{[\vartheta_1(s+t)]^{p+q} \prod_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} \vartheta_1(\alpha_1-\alpha_\lambda) \prod_{i=1}^{i=p} \vartheta_1(\alpha_i-\alpha_{p+q})} \cdot D,$$

wo:

$$D = \begin{vmatrix} \vartheta_1[\tau-(-s)]\,\vartheta_1[\tau-(\alpha_1-\alpha_{p+q}+t)] & \vartheta_1[\tau-(\alpha_1-\alpha_{p+q}-s)]\,\vartheta_1(\tau-t) \\ \vartheta_1(\sigma-s)\,\vartheta_1[\sigma-(\alpha_{p+q}-\alpha_1-t)] & \vartheta_1[\sigma-(s+\alpha_{p+q}-\alpha_1)]\,\vartheta_1[\sigma-(-t)] \end{vmatrix}.$$

D ist demnach (cfr. Th. Satz 4 und 6) als Function von τ eine ϑ^2 mit dem Index $(-s+t+\alpha_1-\alpha_{p+q})$, als Function von σ eine ϑ^2 mit dem Index $(s-t-\alpha_1+\alpha_{p+q})$. Andererseits erkennt man, dass D für $\sigma \equiv -\tau$ verschwindet, mithin durch $\vartheta_1(\sigma+\tau)$ theilbar ist. Der Quotient muss als Function von τ eine ϑ^1 mit dem Index

$$-s+t+\alpha_1-\alpha_{p+q}+\sigma,$$

als Function von σ eine ϑ^1 mit dem Index $s-t-\alpha_1+\alpha_{p+q}+\tau$ sein und ist daher:

$$= C\vartheta_1(\sigma-\tau-s+t+\alpha_1-\alpha_{p+q}),$$

wo C von σ und τ frei ist; d. h. es ist

$$D = C\cdot\vartheta_1(\sigma+\tau)\,\vartheta_1(\sigma-\tau-s+t+\alpha_1-\alpha_{p+q})$$

und nach (19)

$$\Delta = c \cdot \frac{\prod\limits_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q-1} \vartheta_1[\sigma-(s+\alpha_\lambda-\alpha_1)] \prod\limits_{i=1}^{i=p} \vartheta_1[\tau-(t+\alpha_i-\alpha_{p+q})]}{\prod\limits_{\substack{\lambda=p+1\\ \lambda=p+q}} \vartheta_1(\alpha_1-\alpha_\lambda) \prod\limits_{\substack{i=1\\ i=p}} \vartheta_1(\alpha_i-\alpha_{p+q})} \times$$
$$\times \frac{\vartheta_1(\sigma+\tau)[\vartheta_1(\sigma+t)]^{q-1}[\vartheta_1(\tau+s)]^{p-1}}{[\vartheta_1(s+t)]^{p+q}}$$

wobei c eine von σ und τ freie Grösse ist.

Da hier sämmtliche von σ und τ abhängige Nullwerthe von Δ in Erscheinung treten, so sieht man, dass in der That $\sigma \equiv -t$, $\tau \equiv -\sigma$, $\sigma \equiv -\tau$ nur in der angegebenen Vielfachheit vorkommen.

Wir können in Folge dessen nunmehr den Satz aussprechen:

1. *Wenn* $E(u)=0$, $Z(u)=0$ *eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so ist* $\Delta=0$. *Umgekehrt bedingt jeder Nullwerth von* Δ *mit Ausschluss der* $(q-1)$*-fach zählenden Nullwerthe* $\sigma\equiv -t$, *der* $(p-1)$*-fach zählenden Nullwerthe* $\tau \equiv -s$ *und der einfach zählenden Nullwerthe* $\sigma \equiv -\tau$ *die Existenz von mindestens einer gemeinschaftlichen Wurzel der Gleichungen* $E(u)=0$, $Z(u)=0$.

§ 3.

Ueber die Natur der Functionen $F(uv)$, die sowohl in u als in v ϑ-Functionen von denselben Perioden sind. Gemeinschaftliche Nullwerthe zweier Functionen dieser Art.

Die eben durchgeführte Untersuchung kann ganz allgemein dazu dienen, die gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen

$$(20) \qquad \begin{aligned} F(uv) &= 0, \\ \Phi(uv) &= 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen, wenn F und Φ sowohl als Functionen von u, wie auch als Functionen von v ϑ-Functionen von beliebigem Grade darstellen. Bevor diese Aufgabe in Angriff genommen werden kann, muss jedoch der Charakter derartiger Functionen von zwei Variablen näher festgestellt werden.

Wenn $F(uv)$ als Function von u eine ϑ^p-Function ist, so wird der Index derselben im Allgemeinen von v abhängig, also eine Function v sein, die ich mit $\eta(v)$ bezeichnen will. Ist ferner $F(uv)$ als Function von v eine ϑ^{p_1}-Function, so wird der Index durch eine gewisse Function $\eta_1(u)$ dargestellt werden. Ich behaupte nun:

2. *Wenn* $F(uv)$ *als Function von* u *eine* $\vartheta^p_{\eta(v)}$, *als Function von* v *eine* $\vartheta^{p_1}_{\eta_1(u)}$ *ist, so sind die Functionen* $\eta\ \eta_1$ *stets von der Form:*

$$(21)\qquad \begin{aligned}\eta(v) &= gv + \beta,\\ \eta_1(u) &= gu + \beta_1\end{aligned}$$

wo g eine ganze Zahl, $\beta\,\beta_1$ beliebige Constanten sind.

Beweis. Nach unserer Definition gilt für jeden Werth von u und v die Gleichung:

$$(22)\qquad F(u+\omega', v) \underset{u,v}{\equiv} (-1)^p e^{-\frac{p\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\eta(v)} F(uv).$$

Da $F(u+\omega', v)$ als Function von v (nach Definition) für alle endlichen Werthe von v eindeutig stetig und endlich ist, so gilt dasselbe von der rechten Seite der Identität (22) und da es für $F(uv)$ eo ipso der Fall ist, auch für $e^{\frac{2\pi i}{\omega}\eta(v)}$. Diese Function kann also insbesondere für keinen endlichen Werth von v unendlich gross werden. Aus dieser Thatsache folgt, dass jeder Werth von v, der $F(uv)$ annullirt, auch ein Nullwerth von $F(u+\omega', v)$ ist. Da nun $F(uv)$ und $F(u+\omega', v)$ in v ϑ-Functionen desselben Grades sind [resp. vom Index $\eta_1(u)$ und $\eta_1(u+\omega')$] so stimmen ihre Nullwerthe sämmtlich überein. Daraus folgt aber (Th. Satz 4), dass ihre Indices congruent sind. Es müssen sich mithin zwei feste ganze Zahlen*) $g'g$ so finden lassen, dass

$$(23)\qquad \eta_1(u+\omega') = \eta_1(u) + g'\omega + g\omega'.$$

Man ersieht daraus, dass

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}gv} F(uv)$$

als Function von v eine ϑ^{p_1} ist, die denselben Index hat wie $F(u+\omega', v)$. Weil beide Functionen überdies dieselben Nullwerthe haben, so folgt (Th. Satz 3) für c als eine von v freie Grösse

$$F(u+\omega', v) \underset{v}{\equiv} c\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}gv} F(u\,v),$$

Indem man dies in die Gleichung (22) einsetzt, ergiebt sich:

$$c\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}gv} \underset{v}{\equiv} (-1)^p e^{-\frac{p\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\eta(v)}.$$

---

*) Man könnte etwa noch zweifeln, dass gg' für jeden Werth von u dieselben Zahlen vorstellen. Dann müsste aber $\eta_1(u)$ an gewissen Stellen entweder vieldeutig oder unstetig sein. Oben ist gezeigt, dass $e^{\frac{2\pi i}{\omega}\eta(v)}$ eindeutig und stetig ist, dasselbe kann von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}\eta_1(u)}$ bewiesen werden. Die Grössen, um welche an Stellen der Vieldeutigkeit resp. Unstetigkeit die Werthe von $\eta_1(u)$ differiren können, dürften also nur Vielfache von ω sein. Es könnte also eventuell g' variiren, was auf das Folgende keinen Einfluss hat.

Diese Gleichung lehrt offenbar, dass

(24) $$\eta(v) \underset{v}{\equiv} gv + \beta$$

wo g die oben definirte ganze Zahl und β eine von v unabhängige Grösse ist, die aber, weil η überhaupt nur Function von v ist, auch u nicht enthalten kann, also eine reine Constante vorstellt. Ebenso ergiebt sich, indem man in der angestellten Betrachtung u und v ihre Rolle wechseln lässt:

(25) $$\eta_1(u) = g_1 u + \beta_1$$

wo g_1 eine ganze Zahl, β_1 eine Constante ist. Aus dieser Formel und (23) folgt aber:

$$\eta_1(u+\omega') - \eta_1(u) = g_1\omega' = g'\omega + g\omega'$$

d. h.

$$g_1 = g.$$

Die Functionen η und η_1 haben also in der That die Form (21), wie zu beweisen war.

Wir gehen nunmehr an die Lösung der oben gestellten Aufgabe, indem wir über $F(uv)$ und $\Phi(uv)$ die allgemeinsten nach dem Lehrsatz 2 überhaupt möglichen Voraussetzungen machen.

(26) $$\left\{\begin{array}{llllllll} \text{Es} & \text{sei} & F & \text{als Function} & \text{von} & u & \text{eine} & \vartheta^{p}_{gv+\beta}, \\ ,, & ,, & F & ,, & ,, & v & ,, & \vartheta^{p_1}_{gu+\beta_1}, \\ ,, & ,, & \Phi & ,, & ,, & u & ,, & \vartheta^{q}_{hv+\gamma}, \\ ,, & ,, & \Phi & ,, & ,, & v & ,, & \vartheta^{q_1}_{hu+\gamma_1} \end{array}\right.$$

wobei gh beliebige ganze Zahlen, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ beliebige Constanten sind.

Die Auffindung der gemeinschaftlichen Lösungen von (20) erfordert die Ableitung der nothwendigen und hinreichenden Bedingung, unter der F und Φ als Function von u einen gemeinsamen Nullwerth haben. Diese Bedingung kann aber auch nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen sofort hergestellt werden, sobald man setzt

(27) $$\begin{aligned} F(uv) &= E(u), \\ \Phi(uv) &= Z(u), \\ \sigma &= gv + \beta, \\ \tau &= hv + \gamma.^{*)} \end{aligned}$$

*) Hier könnte sich das Bedenken erheben, ob für Werthe von v, welche das Eintreten einer der unter (8) ausgeschlossenen Fälle bewirken, z. B. für diejenigen, welche die Congruenz $gv + \beta \equiv s$ erfüllen, die Anwendung des Satzes 1 erlaubt sei, weil alsdann die Formen $\mathsf{H}_1 \ldots \mathsf{H}_p$ dependent werden. Dadurch könnte die Gültigkeit der nachfolgenden Sätze für eine Anzahl isolirter Werthe von v zweifelhaft werden. Doch ist aus der Willkürlichkeit von s und aus der

Sie wird nämlich durch die Gleichung $\Delta = 0$ unter Ausschluss gewisser Nullwerthe derselben geliefert. Es kommt mithin zunächst auf Herstellung von Δ an. Für die Berechnung dieser Determinante benutze ich die Formel (14) und die Gleichungen (15), welche Letztere unter Anwendung von (27) ergeben:

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i\, n_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathfrak{Z}_\lambda(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)} F(\alpha_\mu, v),$$

$$\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda\, N_\mu^{i\lambda} = \frac{\mathfrak{E}_i(\alpha_\mu)}{\Theta_\mu(\alpha_\mu)} \Phi(\alpha_\mu, v).$$

Wenn man hier auf der rechten Seite die Gleichungen (7) unter Einführung der Werthe von σ und τ benutzt, und alle Factoren, die von v unabhängig sind, in Constanten zusammenfasst, so ergiebt sich:

$$(28)\begin{cases} \text{a)} \quad \sum_{i=1}^{i=p} l_i\, n_\mu^{i\lambda} = c_{\lambda\mu}\vartheta_1(gv+\beta+t+\alpha_\mu-\alpha_\lambda)\, F(\alpha_\mu, v), \\ \text{b)} \quad \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda\, N_\mu^{i\lambda} = C_{i\mu}\vartheta_1(hv+\gamma+s+\alpha_\mu-\alpha_i)\, \Phi(\alpha_\mu, v). \end{cases}$$

In (28a) ist der erste Factor als Function von v nach § 1, II eine ϑ^{g^2} vom Index $-g(\beta+t+\alpha_\mu-\alpha_\lambda)$, der zweite Factor nach (26) eine ϑ^{p_1} vom Index $g\alpha_\mu+\beta_1$ mithin die ganze linke Seite eine $\vartheta^{p_1+g^2}$ vom Index $\beta_1 - g(\beta+t-\alpha_\lambda)$. Da hier der Stellenzeiger μ gar nicht mehr vorkommt, so folgt, dass in der Determinante (14)

alle Elemente der 1ten Zeile ϑ-Functionen v. Grade p_1+g^2, v. Index $\beta_1-g(\beta+t-\alpha_{p+1})$,
„ „ „ 2ten „ „ „ „ p_1+g^2, „ „ $\beta_1-g(\beta+t-\alpha_{p+2})$,
⋮ ⋮
„ „ „ $q$ten „ „ „ „ p_1+g^2 „ „ $\beta_1-g(\beta+t-\alpha_{p+q})$

vorstellen.

Aus (28b) ersieht man ebenso, dass der erste Factor der rechten Seite in v eine ϑ^{h^2} vom Index $-h(\gamma+s+\alpha_\mu-\alpha_i)$, der zweite Factor eine ϑ^{q_1} vom Index $(h\alpha_\mu+\gamma_1)$, mithin $\sum_\lambda m_\lambda N_\mu^{i\lambda}$ eine ϑ-Function vom Grade (q_1+h^2) und mit dem Index $\gamma_1-h(\gamma+s-\alpha_i)$ ist, der also μ gar nicht mehr enthält. Daraus folgt wiederum, dass in (14)

Stetigkeit der hier auftretenden Functionen leicht zu ersehen, dass auch für jene Werthe die Resultate unverändert bleiben müssen (man vergl. die eingehende Erledigung eines analogen Bedenkens in Th. S. 194).

alle Elemente der $(q+1)^{\text{ten}}$ Zeile ϑ-Functionen v. Grade q_1+h^2, v. Index $\gamma_1-h(\gamma+s-\alpha_1)$,

„ „ „ $(q+2)^{\text{ten}}$ „ „ „ „ q_1+h^2, „ „ $\gamma_1-2(\gamma+s-\alpha_2)$,

⋮

„ „ „ $(q+p)^{\text{ten}}$ „ „ „ „ q_1+h^2, „ „ $\gamma_1-h(\gamma+s-\alpha_p)$

sind.

Da jedes Glied der Determinante ein Product von $(p+q)$ Elementen ist, die verschiedenen Zeilen angehören, so stellt es (nach Th. Satz 10) eine ϑ_J^G-Function vor, wo

$$(29)\quad \begin{aligned} G &= q(p_1+g^2)+p(q_1+h^2),\\ J &= q(\beta_1-g\beta)+p(\gamma_1-h\gamma)-g(q-1)\,t-h(p-1)\,s. \end{aligned}$$

Die ganze Determinante Δ ist folglich nach Th. Satz 6 ebenfalls als Function von v eine ϑ^G-Function vom Index J.

Wir wissen nun aus Satz 1, dass die einzigen Fälle, in denen Δ verschwindet, ohne dass eine Lösung unseres Problems eintritt, durch (18) gegeben sind; d. h. in unserem Falle durch:

$$\begin{aligned} gv+\beta &\equiv -t,\\ hv+\gamma &\equiv -s,\\ (g+h)\,v+\beta+\gamma &\equiv 0. \end{aligned}$$

Die Werthe von v, für welche diese Gleichungen stattfinden, werden resp. gegeben durch:

$$(30)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad v\equiv\frac{-t-\beta}{g}+\frac{\varkappa\omega+\varkappa'\omega'}{g}\quad \begin{matrix}\varkappa=0\cdots g-1\\ \varkappa'=0\cdots g-1\end{matrix}\ ,\\ &\text{b)}\quad v\equiv\frac{-s-\gamma}{h}+\frac{\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'}{h}\quad \begin{matrix}\varepsilon=0\cdots h-1\\ \varepsilon'=0\cdots h-1\end{matrix}\ ,\\ &\text{c)}\quad v\equiv\frac{-\beta-\gamma}{g+h}+\frac{\zeta\omega+\zeta'\omega'}{g+h}\quad \begin{matrix}\zeta=0\cdots g+h-1\\ \zeta'=0\cdots g+h-1\end{matrix}\ . \end{aligned}$$

Sind $v_1v_2\ldots v_{g^2}$ die rechten Seiten von (30a), so ist $v\equiv v_i$ nach Satz 1. ein $(q-1)$-facher Nullwerth von Δ, und da Δ eine ϑ^G-Function ist, so muss es die $(q-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\vartheta_1(v-v_i)$ als Factor enthalten.

Sind desgleichen $v_1'v_2'\ldots v_{h^2}'$ die rechten Seiten von (30b), so folgt ebenso, dass Δ durch die $(p-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\vartheta_1(v-v_\lambda')$ $(\lambda=1\cdots h^2)$ theilbar ist und wenn $v_1''v_2''\ldots v_{(g+h)^2}''$ die rechten Seiten von (30c) sind, so erkennt man, dass Δ die erste Potenz von $\vartheta_1(v-v_\mu'')$ für $\mu=1\cdots(g+h)^2$ als Factor enthält. Nach Ausscheidung aller dieser Factoren stellt Δ das gesuchte Resultat $R(v)$ der Elimination von u aus F und φ ohne fremde Bestandtheile dar. Setzen wir also:

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \vartheta_1(v - v_1) \cdots \vartheta_1(v - v_{g^2}),\\ \psi(v) &= \vartheta_1(v - v_1') \cdots \vartheta_1(v - v'_{h^2}),\\ \chi(v) &= \vartheta_1(v - v_1'') \cdots \vartheta_1(v - v''_{(g+h)^2}),\end{aligned} \tag{31}$$

so ist Δ durch $\varphi^{q-1}\psi^{p-1}\chi$ theilbar und:

$$R(v) = \frac{\Delta}{\varphi^{q-1}\,\psi^{p-1}\,\chi}\,. \tag{32}$$

Aber da nach (30)

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 \cdots + v_{g^2} &= -g(t+\beta) + \frac{g^2(g-1)}{2}(\omega+\omega'),\\ v_1' + v_2' \cdots + v'_{h^2} &= -h(s+\gamma) + \frac{h^2(h-1)}{2}(\omega+\omega'),\\ v_1'' + v_2'' \cdots + v''_{(g+h)^2} &= -(g+h)(\beta+\gamma) + \frac{(g+h)^2(g+h-1)}{2}(\omega+\omega'),\end{aligned}$$

so ist

φ eine ϑ^{g^2} vom Index $-g(t+\beta) + \frac{g^2(g-1)}{2}(\omega+\omega')$,

ψ „ ϑ^{h^2} „ „ $-h(s+\gamma) + \frac{h^2(h-1)}{2}(\omega+\omega')$,

χ „ $\vartheta^{(g+h)^2}$ „ „ $-(g+h)(\beta+\gamma) + \frac{(g+h)^2(g+h-1)}{2}(\omega+\omega')$.

Also ist $\varphi^{q-1}\psi^{p-1}\chi$ eine ϑ-Function vom Grade

$$(q-1)\,g^2 + (p-1)\,h^2 + (g+h)^2 = qg^2 + ph^2 + 2gh$$

und einem Index, der congruent ist zu

$$-(q-1)\,gt - (p-1)\,hs - qg\beta - ph\gamma - g\gamma - h\beta.$$

Man erhält Grad und Index von R, indem man Grad resp. Index des Nenners von (32) von den entsprechenden Zahlen des Zählers abzieht. So ergiebt sich als Grad von R

$$G - qg^2 - ph^2 - 2gh = pq_1 + qp_1 - 2gh,$$

während der Index congruent ist zu

$$J + (q-1)\,gt + (p-1)\,hs + qg\beta + ph\gamma + g\gamma + h\beta$$

d. h. zu

$$p\gamma_1 + q\beta_1 + g\gamma + h\beta.$$

Es folgt aus Alledem der Satz:

3. *Es giebt genau* $(pq_1 + qp_1 - 2gh)$ *Werthe von* v, *für welche die Gleichungen* (20) *neben einander bestehen können. Dieselben werden durch Auflösung der transcendenten Gleichung:*

$$R(v) = \frac{\Delta}{\varphi^{q-1}\,\psi^{p-1}\,\chi} = 0 \tag{33}$$

erhalten. Dabei haben φ, ψ, χ *die aus* (30) *und* (31) *ersichtliche Bedeutung. Sind* $V_1\,V_2 \cdots V_{pq_1+qp_1-2gh}$ *die Nullwerthe von* R, *so ist*

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_{pq_1+qp_1-2gh} \equiv p\gamma_1 + q\beta_1 + g\gamma + h\beta \pmod{\omega, \omega'}.$$

Wenn $F = 0$ und $\Phi = 0$ symmetrische Gleichungen in u und v sind, so giebt die Gleichung $R(v) = 0$ nicht nur die Werthe v, für welche die Gleichungen (20) in u eine gemeinsame Lösung haben, sondern auch die Werthe u, für welche die Gleichungen (20) in v eine gemeinsame Lösung haben. Da alsdann:

$$\begin{aligned} p &= p_1, \\ \beta &= \beta_1, \\ q &= q_1, \\ \gamma &= \gamma_1 \end{aligned}$$

ist, so wird R eine $\vartheta^{2pq-2gh}_{\gamma(p+g)+\beta(q+h)}$ und es folgt:

3a. *Wenn die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ in u und v symmetrisch sind und F in u eine $\vartheta^p_{gv+\beta}$, Φ in u eine $\vartheta^q_{hv+\gamma}$ vorstellt, so haben sie $pq - gh$ gemeinschaftliche Werthepaare $u_1 v_1 \ldots u_{pq-gh} v_{pq-gh}$ und es ist:*

$$\sum_{i=pq+gh}^{i=1} u_i + \sum_{i=pq+gh}^{i=1} v_i \equiv \gamma(p+g) + \beta(q+h) \quad (\text{mod. } \omega\omega').$$

Die Sätze 3 und 3a können nur dann eine Ausnahme erleiden, wenn $R(v)$, oder was dasselbe ist, Δ identisch in v verschwindet. Alsdann existiren die Gl. (20) für *jeden* Werth von v, d. h. es giebt unendlich viele gemeinsame Nullpaare.

Bevor ich dazu übergehe, einige specielle Anwendungen der eben abgeleiteten Sätze zu geben, wird es am Platze sein, auf den Zusammenhang hinzuweisen, welcher den Gegenstand dieses Paragraphen mit der allgemeinen Theorie der auf algebraischen Curven vom Geschlechte eins stattfindenden Correspondenzen verbindet. Ich nehme zu diesem Zwecke an, dass die homogenen Coordinaten einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung C^n vom Geschlechte 1 in bekannter Weise durch Thetafunctionen (mit den Perioden $\omega\omega'$) eines Parameters ausgedrückt sind. $F(uv)$ sei ferner eine Function der oben betrachteten Art und zwar als Function von u vom Grade p, als Function von v vom Grade p_1. Alsdann stellt

$$F(uv) = 0 \tag{34}$$

eine Beziehung dar, vermöge welcher jedem Punkte u der Curve (d. h. dem Punkte mit dem Parameter u) p_1 Punkte $v(v_1 v_2 \ldots v_{p_1})$, jedem Punkte v aber p Punkte $u(u_1 u_2 \ldots u_p)$ zugeordnet werden. Zugleich sagt der Lehrsatz 2. aus, dass sich eine ganze Zahl g und 2 Constanten $\beta\beta_1$ so finden lassen, dass:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \cdots + v_{p_1} &\equiv gu + \beta_1 \quad (\text{mod. } \omega\omega'), \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_p &\equiv gv + \beta \quad (\text{mod. } \omega\omega'). \end{aligned} \tag{34a}$$

Setzen wir nunmehr, um die Vergleichung mit den allgemeinen Untersuchungen über Correspondenzen zu erleichtern, $g = -\gamma$, so können wir sagen:

Jede Gleichung der Form (34) *begründet auf* C^n *eine Werthigkeitscorrespondenz*) und zwar von positiver oder negativer Werthigkeit, je nachdem* γ *positiv oder negativ ist. Ist insbesondere* γ *positiv, so hat die Correspondenz einen* γ*-werthigen Schnittpunkt in* $u = v$**). Es ist nun leicht, für die durch (34) dargestellte Correspondenz die Anzahl der Coincidenzen zu bestimmen. Die Parameter der Coincidenzpunkte sind nämlich gegeben durch

$$F(uu) = 0.$$

Nach der Definition von $F(uv)$ ist aber:

$$F(u+\omega,\ v+\omega) = (-1)^p F(u,\ v+\omega) = (-1)^{p+p_1} F(uv),$$

$$F(u+\omega',\ v+\omega') = (-1)^p e^{-\frac{p\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(gv+g\omega'+\beta)} F(u,\ v+\omega'),$$

$$= (-1)^{p+p_1} e^{\frac{-p\pi i}{\omega}(2u+\omega')} e^{-p_1\frac{\pi i}{\omega}(2v+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(gv+g\omega'+\beta)} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(gu+\beta_1)} F(uv).$$

Aus diesen Formeln folgt für $u = v$

$$F(u+\omega,\ u+\omega) = (-1)^{p+p_1-2g} F(uu),$$

$$F(u+\omega',\ u+\omega') = (-1)^{p+p_1-2g} e^{\frac{-\pi i}{\omega}(p+p_1-2g)(2u+\omega')} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\beta+\beta_1)} F(uu).$$

Wir sehen also, *dass* $F(uu)$ *eine* ϑ*-Function vom Grade* $p + p_1 - 2g = p + p_1 + 2\gamma$ *und vom Index* $\beta + \beta_1$ *ist. Unsere Correspondenz hat also* $p + p_1 + 2\gamma$ *Coincidenzpunkte, wie es sein muss.****)

Wenn $\Phi(uv)$ eine Function derselben Art ist wie $F(uv)$ und den zu F gehörigen Zahlen pp_1 $g = -\gamma$, für Φ die Zahlen qq_1 $g' = -\gamma'$ entsprechen, so folgt aus Lehrsatz 3, *dass die beiden Correspondenzen:*

$$F(uv) = 0,$$

$$\Phi(uv) = 0,$$

$$pq_1 + qp_1 - 2gg' = pq_1 + qp_1 - 2\gamma\gamma'$$

gemeinschaftliche entsprechende Punktepaare besitzen. Dieses Resultat ist gleichfalls in völliger Uebereinstimmung mit der von Herrn Hurwitz†) und früher für positive Werthe von $\gamma\gamma'$ von Herrn Brill l. c. gegebenen Formel.

*) Hurwitz, Math. Ann. Bd. 28, S. 564 (abgedruckt aus den Berichten der kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1886).

**) Brill, Math. Ann. Bd. VII, p. 609.

***) Hurwitz, l. c. S. 567, für positives γ cfr. Cayley, Comptes rendus Bd. 62, p. 587 u. Philos. Transactions Bd. 158, p. 145. Brill, Math. Ann. Bd. VI, p. 41. Bd. VII, p. 611.

†) l. c. S. 568.

Man könnte hier den Beweis anschliessen, dass jede unserer Correspondenzen im Falle eines positiven γ durch *eine* algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten der entsprechenden Punkte, im Falle eines negativen γ durch *zwei* solche Gleichungen definirt werden kann. Der betreffende Nachweis würde jedoch nur auf eine Specialisirung derjenigen Entwicklungen hinauslaufen, welche Herr Hurwitz im Falle einer Curve von beliebigem Geschlechte gegeben hat*). Ich nehme daher nur noch Veranlassung, auf eine neuere Abhandlung von Herrn Brill zu verweisen**), welche den hier berührten Gegenstand mit Berücksichtigung der von Herrn Hurwitz gegebenen Erweiterungen vom rein algebraischen Standpunkt aus behandelt.

§ 4.

Beispiele.

Die erhaltenen Resultate sollen hier auf 2 einfache Aufgaben Anwendung finden, welche für die nachfolgende Abhandlung über elliptische Curven von Bedeutung sind.

Es seien $\mathsf{\Lambda}(u)$ $\mathsf{M}(u)$ 2 beliebige ϑ_σ^{p+1}-Functionen, $\mathsf{N}(u)$ $\mathsf{P}(u)$ 2 beliebige ϑ_τ^{q+1}-Functionen. Es soll die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen von:

$$(35)\qquad \begin{aligned} F(uv) &= \frac{\mathsf{\Lambda}(u)\,\mathsf{M}(v) - \mathsf{\Lambda}(v)\,\mathsf{M}(u)}{\vartheta_1(u-v)} = 0,\\ \Phi(uv) &= \frac{\mathsf{N}(u)\,\mathsf{P}(v) - \mathsf{N}(v)\,\mathsf{P}(u)}{\vartheta_1(u-v)} = 0 \end{aligned}$$

bestimmt werden.

Da der Zähler von F als Function von u ein ϑ_σ^{p+1} ist, während der Nenner, welcher offenbar als Factor im Zähler auftritt, eine ϑ_v^1 vorstellt, so ist F in u eine $\vartheta_{\sigma-v}^p$, ebenso in v eine $\vartheta_{\sigma-u}^p$. Ferner ist Φ als Function von u eine $\vartheta_{\tau-v}^q$, als Function von v eine $\vartheta_{\tau-u}^q$. Beide Gleichungen sind überdies symmetrisch, und wir haben mithin den Satz 3a anzuwenden, wobei gesetzt werden muss:

$$\begin{aligned} g &= -1, \qquad \beta = \sigma,\\ h &= -1, \qquad \gamma = \tau. \end{aligned}$$

Es folgt mithin der Satz:

4. *Die Gleichungen* (35) *haben* (*falls sie nicht unendlich viele gemeinsame Werthepaare besitzen*) *genau* $pq-1$ *gemeinschaftliche Nullpaare* $u_1 v_1 \ldots u_{pq-1}\, v_{pq-1}$ *und es ist*

$$\sum_{i=1}^{i=pq-1} u_i + v_i \equiv (p-1)\,\tau + (q-1)\,\sigma \quad (\text{mod. } \omega\, \omega').$$

*) l. c. S. 565 u. 575.

**) Math. Ann. Bd. 31, p 374 ff., man vergl. insbesondere p. 405.

Daran schliesst sich naturgemäss die Behandlung der folgenden *Aufgabe:*

$\mathsf{\Lambda}(u)$ $\mathsf{M}(u)$ $\mathsf{N}(u)$ seien 3 beliebige ϑ_ϱ^{p+1}-Functionen. Es soll die Zahl der Werthepaare bestimmt werden, welche alle Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \mathsf{\Lambda}(u) & \mathsf{M}(u) & \mathsf{N}(u) \\ \mathsf{\Lambda}(v) & \mathsf{M}(v) & \mathsf{N}(v) \end{Vmatrix}$$

annuliren, ohne dass $u = v$.

Es sollen also die gemeinschaftlichen Lösungen von

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad L(uv) = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{M}(u) & \mathsf{N}(u) \\ \mathsf{M}(v) & \mathsf{N}(v) \end{vmatrix}}{\vartheta_1(u-v)} = 0, \\ &\text{b)} \quad M(uv) = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{N}(u) & \mathsf{\Lambda}(u) \\ \mathsf{N}(v) & \mathsf{\Lambda}(v) \end{vmatrix}}{\vartheta_1(u-v)} = 0, \\ &\text{c)} \quad N(uv) = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{\Lambda}(u) & \mathsf{M}(u) \\ \mathsf{\Lambda}(v) & \mathsf{M}(v) \end{vmatrix}}{\vartheta_1(u-v)} = 0 \end{aligned}$$

gefunden werden.

L, M, N sind symmetrische Functionen von u, v und zwar als Functionen von u $\vartheta_{\varrho-v}^p$-Functionen, mithin als solche von v $\vartheta_{\varrho-u}^p$-Functionen.

Wenn also (36a) und (36b) nicht unendlich viele gemeinsame Werthepaare haben, so ist die Zahl der gemeinschaftlichen Paare aus Lehrsatz 4. zu ersehen, wenn man dort

$$p = q,$$
$$\sigma = \tau = \varrho$$

setzt. Die Zahl derselben ist also $p^2 - 1$ und wenn sie durch $u_1 v_1 \ldots u_{p^2-1} v_{p^2-1}$ vorgestellt werden, so ist

$$\sum_{i=1}^{i=p^2-1} u_i + v_i \equiv 2(p-1)\,\varrho.$$

Nun gelten offenbar die Identitäten

$$(37)\qquad \begin{aligned} \mathsf{\Lambda}(u)\,L(uv) + \mathsf{M}(u)\,M(uv) + \mathsf{N}(u)\,N(uv) \underset{uv}{\equiv} 0, \\ \mathsf{\Lambda}(v)\,L(uv) + \mathsf{M}(v)\,M(uv) + \mathsf{N}(v)\,N(uv) \underset{uv}{\equiv} 0. \end{aligned}$$

Aus diesen folgt, dass für die $(p^2 - 1)$ gemeinsamen Werthepaare von (36a) und (36b) entweder

$$N(uv) = 0$$

oder:

$$\mathsf{N}(u) = 0, \qquad \mathsf{N}(v) = 0.$$

Wenn also $\mathsf{N}(u) = 0$ die Wurzeln $U_1 U_2 \dots U_{p+1}$ hat, so finden sich unter den $(p^2 - 1)$ oben bestimmten Werthepaaren insbesondere:

$$\begin{array}{ll} U_1 U_2 & U_1 U_3 \dots U_1 U_{p+1}, \\ & U_2 U_3 \dots U_2 U_{p+1}, \\ & \qquad\vdots \\ & \qquad U_p U_{p+1}, \end{array}$$

deren Zahl $\frac{(p+1)p}{2}$ und deren Gesammtsumme $\equiv p\varrho$ ist. Nach Ausschluss dieser Paare bleiben nur gemeinsame Lösungen aller 3 Gleichungen (36) übrig; die Zahl der Letzteren ist mithin:

$$p^2 - 1 - \frac{(p+1)p}{2} = \frac{(p+1)(p-2)}{2}$$

und die Summe ihrer Argumente ist congruent zu $\sum_{i=1}^{i=p^2-1} u_i + v_i - p\varrho$ oder

$$2(p-1)\varrho - p\varrho = (p-2)\varrho.$$

Wenn aber der oben ausgeschlossene Fall eintritt, dass $L = 0$, $M = 0$ unendlich viele gemeinsame Werthepaare haben, so folgt aus (37), dass für $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ genau dasselbe gilt. Wir können mithin sagen:

5. *Wenn die Gleichungen* (36) *nicht unendlich viele gemeinsame Lösungen besitzen, so ist die Zahl der gemeinschaftlichen Nullpaare stets gleich* $\frac{(p+1)(p-2)}{2}$. *Werden dieselben durch*

$$u_1 v_1 \dots u_{\frac{(p+1)(p-2)}{2}} v_{\frac{(p+1)(p-2)}{2}}$$

bezeichnet, so ist:

$$\sum_{i=1}^{i=\frac{(p+1)(p-2)}{2}} u_i + v_i \equiv (p-2)\varrho. \quad (\text{mod. } \omega\, \omega').$$

§ 5.

Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei ϑ-Functionen mehrere gemeinschaftliche Nullwerthe besitzen. Berechnung der Letzteren.

Im § 2 wurde gezeigt, dass, wenn die Gleichungen (4) eine gemeinsame Wurzel haben, $\Delta = 0$ ist. Es war dies eine unmittelbare Folge davon, dass für jede gemeinsame Lösung u die Gleichungen (13) coexistiren, woraus in Verbindung mit der Thatsache, dass $\Theta_1(u)\,\Theta_2(u) \dots \Theta_{p+q}(u)$ niemals zu gleicher Zeit verschwinden können, $\Delta = 0$ resultirt. Wenn nun die Gl. (4) 2 gemeinsame (incongruente) Wurzeln v, w besitzen, so folgt ganz ebenso, dass die Gleichungen (13) sowohl für v, als für w befriedigt werden, dass mithin die $(p+q)$ linearen Gleichungen:

$$(38)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} l_i n_\mu^{i\lambda} x_\mu = 0, \qquad (\lambda = p+1 \cdots p+q),\\ &\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q}\sum_{\mu=1}^{\mu=p+q} m_\lambda N_\mu^{i\lambda} x_\mu \qquad (i = 1 \cdots p), \end{aligned}$$

(deren Determinante Δ ist) für

$$x_1 : x_2 \cdots : x_{p+q} = \Theta_1(v) : \Theta_2(v) \cdots : \Theta_{p+q}(v),$$

aber auch für

$$x_1 : x_2 \cdots : x_{p+q} = \Theta_1(w) : \Theta_2(w) \cdots : \Theta_{p+q}(w)$$

befriedigt werden. Sie besitzen also gewiss 2 verschiedene, mithin überhaupt eine 2-gliedrige Gruppe von Lösungen. Hieraus ergiebt sich, dass alle Unterdeterminanten $(p+q-1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ verschwinden müssen. Man sieht ferner, dass ganz ebenso, wenn die Gleichungen (4) etwa 3 gemeinsame Lösungen haben, alle Unterdeterminanten $(p+q-2)^{\text{ten}}$ Grades von Δ Null sind etc., und wir haben mithin den Satz:

6. *Wenn $E(u) = 0$, $Z(u) = 0$ r gemeinschaftliche Wurzeln besitzen, so sind alle Unterdeterminanten $(p+q-r+1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ gleich Null.*

Es gilt aber auch die Umkehrung:

7. *Wenn alle Unterdeterminanten $(p+q-r+1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ verschwinden, ohne dass eine der Gleichungen* (18a, b, c) *stattfindet, so haben $E(u)$ und $Z(u)$ r gemeinsame Nullwerthe.*

Wenn überdies eine Unterdeterminante $(p+q-r)^{\text{ten}}$ Grades nicht Null ist, so haben sie auch nicht mehr als r gemeinsame Wurzeln.

Das Letztere folgt sofort aus Satz 6., weil sonst eben alle Unterdeterminanten $(p+q-r)^{\text{ten}}$ Grades der Voraussetzung entgegen verschwinden müssten.

Es bleibt demnach nur zu zeigen, dass in der That r gemeinsame Nullwerthe vorhanden sind.

Ich gebe den Beweis der Einfachheit halber nur für $r = 2$ und $r = 3$, da er ganz analog allgemein geführt werden kann: Ich nehme also zunächst an, dass alle Unterdeterminanten $(p+q-1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ verschwinden, ohne dass (18a, b, c) stattfindet. Alsdann bestehen bekanntlich zwischen den linken Seiten der Gleichungen (38) zwei von einander verschiedene in $x_1 x_2 \ldots x_{p+q}$ identische Gleichungen. Da aber die Gl. (38), wenn man x_i durch $\Theta_i(u)$ ersetzt, in die Gl. (13) oder was dasselbe ist, in (12) übergehen, so bestehen auch zwischen diesen zwei unabhängige lineare Identitäten in u; d. h. es lassen sich zwei nicht proportionale Systeme von Constanten:

$$(39)\qquad \begin{array}{ll} m'_{p+1}\cdots m'_{p+q} & l_1'\cdots l_p', \\ m''_{p+1}\cdots m''_{p+q} & l_1''\cdots l_p'' \end{array}$$

so bestimmen, dass:

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathrm{H}_i(u)\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda \mathrm{Z}_\lambda(u)\sum_{i=1}^{i=p} l_i' \mathfrak{S}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_i \mathrm{H}_i(u)\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda'' \mathfrak{Z}_\lambda(u) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda \mathrm{Z}_\lambda(u)\sum_{i=1}^{i=p} l_i'' \mathfrak{S}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0,$$

oder

$$(40)\qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & E(u)\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u) + Z(u)\sum_{i=1}^{i=p} l_i' \mathfrak{S}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0, \\ \text{b)} & E(u)\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda'' \mathfrak{Z}_\lambda(u) + Z(u)\sum_{i=1}^{i=p} l_i'' \mathfrak{S}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0. \end{array}$$

Die Identität (40a) kann entweder dadurch erfüllt werden, dass $\sum m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u)$ und $\sum l_i' \mathfrak{S}_i(u)$ einzeln identisch Null werden oder ohne diese Voraussetzung. Im § 2 ist jedoch ausführlich bewiesen worden, dass im ersten Fall entweder (18a) oder (18b) erfüllt sein muss. Da dies ausgeschlossen ist und für Gl. (40b) dieselbe Erwägung gilt, so sind

$$(41\text{a})\qquad \mathfrak{Z}'(u) \equiv \sum_\lambda m_\lambda' \mathfrak{Z}_\lambda(u), \qquad \mathfrak{Z}''(u) \equiv \sum_\lambda m_\lambda'' \mathfrak{Z}_\lambda(u)$$

nicht identisch verschwindende $\vartheta^q_{-\sigma}$-Functionen,

$$(41\text{b})\qquad \mathfrak{S}'(u) = \sum_i l_i' \mathfrak{S}_i(u), \qquad \mathfrak{S}''(u) = \sum_i l_i \mathfrak{S}_i(u)$$

nicht identisch verschwindende $\vartheta^p_{-\tau}$-Functionen und es existiren die Identitäten

$$(42)\qquad \begin{array}{l} E(u)\,\mathfrak{Z}'(u) + Z(u)\,\mathfrak{S}'(u) \underset{u}{\equiv} 0, \\ E(u)\,\mathfrak{Z}''(u) + Z(u)\,\mathfrak{S}''(u) \underset{u}{\equiv} 0. \end{array}$$

Hieraus folgt, wenn ε eine *beliebige* Constante ist

$$(43)\qquad E(u)\left\{\mathfrak{Z}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{Z}''(u)\right\} + Z(u)\left\{\mathfrak{S}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{S}''(u)\right\} \equiv 0,$$

Auch hier ist $\mathfrak{Z}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{Z}''(u)$ für *jedes* ε eine nicht verschwindende $\vartheta^q_{-\sigma}$ und $\mathfrak{S}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{S}''(u)$ eine nicht verschwindende $\vartheta^p_{-\tau}$. Denn gäbe es z. B. ein ε, für welches

$$\mathfrak{Z}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{Z}''(u) \underset{u}{\equiv} 0$$

wäre, so würde aus (43) noch folgen:

$$\mathfrak{E}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{E}''(u) \underset{u}{\equiv} 0,$$

d. h. es wäre nach (41)

$$\sum_{\lambda} (m_\lambda' + \varepsilon m_\lambda'')\,\mathfrak{Z}_\lambda(u) \underset{u}{\equiv} 0,$$

$$\sum_{i} (l_i' + \varepsilon l_i'')\,\mathfrak{E}_i(u) \underset{u}{\equiv} 0.$$

Da aber in Folge der Unmöglichkeit von (18a) und (18b) weder zwischen $\mathfrak{Z}_{p+1} \ldots \mathfrak{Z}_{p+q}$ noch zwischen $\mathfrak{E}_1 \ldots \mathfrak{E}_p$ eine Identität stattfinden darf, so wären in den letzten Gleichungen alle Coefficienten Null, d. h. die Reihen (39) proportional, was nicht der Fall ist.

Da jetzt feststeht, dass keiner der Summanden von (43) einzeln verschwindet, so folgt leicht, dass $E(u)$ $Z(u)$ mehr als einen gemeinschaftlichen Nullwerth haben müssen. Hätten sie nämlich nur einen v, so müssten alle übrigen $(p - 1)$ Nullwerthe von $E(u)$, welche $v_1 v_2 \ldots v_{p-1}$ heissen mögen, auch solche von $\mathfrak{E}'(u) + \varepsilon\mathfrak{E}'(u)$ sein. Man kann aber ε so bestimmt denken, dass

$$\mathfrak{E}'(v) + \varepsilon\,\mathfrak{E}''(v) = 0$$

ist. Nachdem dies geschehen, haben $E(u)$ und $\mathfrak{E}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{E}''(u)$ dieselben p Nullwerthe $v v_1 \ldots p_{p-1}$. Die Indices dieser beiden Functionen müssen also (Th. Satz 4) congruent sein; d. h. es muss die Gleichung

$$\sigma \equiv -\tau$$

stattfinden (cfr. 18c), was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Man sieht also dass $E(u) = 0$ und $Z(u) = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen in der That 2 Wurzeln gemein haben, wodurch Satz 7 für $r = 2$ vollständig bewiesen ist.

Für $r = 3$ würden sich ganz ebenso 3 Identitäten:

$$\begin{aligned} E(u)\,\mathfrak{Z}'(u) + Z(u)\,\mathfrak{E}'(u) &\underset{u}{\equiv} 0, \\ E(u)\,\mathfrak{Z}''(u) + Z(u)\,\mathfrak{E}''(u) &\underset{u}{\equiv} 0, \\ E(u)\,\mathfrak{Z}'''(u) + Z(u)\,\mathfrak{E}'''(u) &\underset{u}{\equiv} 0 \end{aligned} \tag{44}$$

ergeben, wo $\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{Z}''\,\mathfrak{Z}'''$ nicht verschwindende und linear unabhängige $\vartheta^q_{-\sigma}$, $\mathfrak{E}'\,\mathfrak{E}''\,\mathfrak{E}'''$ nicht verschwindende, linear independente $\vartheta^p_{-\tau}$ wären. Aus (44) würde folgen:

$$E(u)\left\{\mathfrak{Z}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{Z}''(u) + \zeta\,\mathfrak{Z}'''(u)\right\} + Z(u)\left\{\mathfrak{E}'(u) + \varepsilon\,\mathfrak{E}''(u) + \zeta\,\mathfrak{E}'''(u)\right\} \underset{u}{\equiv} 0.$$

Hätten nun E und Z nur 2 gemeinsame Nullpunkte v, w, so könnte man $\varepsilon\zeta$ so bestimmen, dass

$$(45) \qquad \mathfrak{E}'(u) + \varepsilon\mathfrak{E}''(u) + \zeta\mathfrak{E}'''(u)$$

ebenfalls durch $u = v$, $u = w$ annulirt würde. Da alsdann alle andern Nullwerthe von $E(u)$ nicht $Z(u) = 0$ erfüllen dürfen, so müssten sie (45) genügen, d. h. $E(u)$ und (45) hätten alle Nullwerthe gemeinsam. Hieraus würde aber wiederum Congruenz der Indices, d. h.

$$\sigma \equiv -\tau$$

folgen, was nicht möglich ist.

Man sieht, dass der Beweis des Satzes 7. in ganz analoger Weise für allgemeines r geführt werden könnte.

Es handelt sich nunmehr noch um *die Bestimmung der gemeinschaftlichen Nullwerthe der ϑ-Functionen.* Wenn 2 algebraische Gleichungen r gemeinsame Wurzeln haben, so genügen diese bekanntlich einer Gleichung r^{ten} Grades, die sich auf rationale Weise aus den Coefficienten der gegebenen Gleichungen bilden lässt. An die Stelle dieses Satzes tritt hier ein Theorem, welches zwar auch die Isolirung der gemeinschaftlichen Wurzeln gestattet, aber doch einen wesentlich verschiedenen Charakter besitzt. Um dasselbe abzuleiten, nehme ich an, dass $E(u) = 0$, $Z(u) = 0$ genau r gemeinsame Wurzeln haben. Dann sind nach Satz 6 alle Unterdeterminanten $(p + q - r + 1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ Null, dagegen mindestens eine Unterdeterminante $(p + q - r)^{\text{ten}}$ Grades nicht Null. Die Gleichungen (38) haben mithin eine r-gliedrige Gruppe von Lösungen, die auf bekannte Weise aus den Coefficienten herstellbar ist. Dieselbe sei gegeben durch

$$(46) \quad x_\mu = \varepsilon_1 L_{1\mu} + \varepsilon_2 L_{2\mu} + \cdots + \varepsilon_r L_{r\mu}, \qquad \mu = 1 \cdots p + q.$$

Ist aber u ein gemeinsamer Nullwerth von E und Z, so genügt er den Gleichungen (13), woraus folgt, dass

$$x_\mu = \Theta_\mu(u), \qquad \mu = 1 \cdots p + q$$

eine Lösung von (38) ist. Mithin müssen sich $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ so bestimmen lassen, dass:

$$\begin{aligned}
\Theta_1(u) &= \varepsilon_1 L_{11} + \varepsilon_2 L_{21} + \cdots + \varepsilon_r L_{r1},\\
\Theta_2(u) &= \varepsilon_1 L_{12} + \varepsilon_2 L_{22} + \cdots + \varepsilon_r L_{r2},\\
&\vdots\\
\Theta_{p+q}(u) &= \varepsilon_1 L_{1\,p+q} + \varepsilon_2 L_{2\,p+q} + \cdots + \varepsilon_r L_{r\,p+q}.
\end{aligned}$$

Daraus erkennt man, dass für jedes u, welches gemeinsame Wurzel von $E = 0$, $Z = 0$ ist, neben anderen die Gleichung gilt:

$$(47)\qquad 0 = \begin{vmatrix} \Theta_1(u) & L_{11} & \cdots & L_{r1} \\ \Theta_2(u) & L_{12} & \cdots & L_{r2} \\ \vdots & & & \\ \Theta_r(u) & L_{1r} & \cdots & L_{rr} \\ \Theta_{r+1}(u) & L_{1,r+1} & \cdots & L_{r,r+1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{u}{\equiv} \vartheta_1(u-\alpha_{r+2})\cdots\vartheta_1(u-\alpha_{p+q}) \begin{vmatrix} P_1(u) & L_{11} & \cdots & L_{r1} \\ P_2(u) & L_{12} & \cdots & L_{r2} \\ \vdots & & & \\ P_r(u) & L_{1r} & \cdots & L_{rr} \\ P_{r+1}(u) & L_{1r+1} & \cdots & L_{rr+1} \end{vmatrix},$$

wobei

$$P_i(u) = \vartheta_1(u-\alpha_1)\cdots\vartheta_1(u-\alpha_{i-1})\,\vartheta_1(u+s+t-\alpha_i)\,\vartheta_1(u-\alpha_{i+1})\cdots\vartheta_1(u-\alpha_{r+1})$$

gesetzt ist. Da der erste Factor auf der rechten Seite von (47) wegen der Willkürlichkeit von $\alpha_{r+2}\ldots\alpha_{p+q}$ nicht Null ist, so folgt, dass die gemeinsamen Nullwerthe sämmtlich Wurzeln von:

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} P_1(u) & L_{11} & \cdots & L_{r1} \\ P_2(u) & L_{12} & \cdots & L_{r2} \\ \vdots & & & \\ P_{r+1}(u) & L_{1r+1} & \cdots & L_{r,r+1} \end{vmatrix} = 0$$

sind. Die linke Seite von (48) ist eine ϑ^{r+1}-Function vom Index

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_r + \alpha_{r+1} - s - t = -(\alpha_{r+2} + \alpha_{r+3} + \cdots + \alpha_{p+q}).$$

Durch Wahl von $\alpha_{r+2}\ldots\alpha_{p+q}$ kann dieser Index jeden beliebigen Werth i annehmen und die Gl. (48) hat alsdann, wenn $u_1 u_2 \ldots u_r$ die gemeinsamen Wurzeln von $E=0$, $Z=0$ sind, keine andern Lösungen, als $u_1\ldots u_r$ und $i-u_1-u_2\cdots-u_r$. Es folgt mithin der Satz:

8. *Wenn die Gleichungen $E(u)=0$ und $Z(u)=0$ gemeinsame Wurzeln haben, so lässt sich aus den Coefficienten derselben eine ϑ-Function $(r+1)^{ten}$ Grades und mit einem beliebig vorgegebenen Index construiren, welche diese Wurzeln zu Nullwerthen hat.*

Ich bemerke, dass die betreffende Gleichung, falls q die grössere der Zahlen p, q ist (eine Annahme, die offenbar stets erlaubt ist), auch direct in die Form geschrieben werden kann*):

*) Das Folgende entspricht dem Verfahren Baltzer's für algebraische Gleichungen. cfr. Leipziger Berichte. 1873, p. 530, Theorie der Determinanten. 4. Aufl. p. 106.

$$S \equiv \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{i=p} l_i n_1^{i,p+1} P_1(u) + \cdots + \sum_i l_i n_{r+1}^{i,p+1} P_{r+1}(u) & \sum_i l_i n_{r+2}^{i,p+1} & \cdots & \sum_i l_i n_{p+q}^{i,p+1} \\ \sum_i l_i n_1^{i,p+2} P_1(u) + \cdots + \sum_i l_i n_{r+1}^{i,p+2} P_{r+1}(u) & \sum_i l_i n_{r+2}^{i,p+2} & \cdots & \sum_i l_i n_{p+q}^{i,p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_i l_i n_1^{i,p+q-r} P_1(u) + \cdots + \sum_i l_i n_{r+1}^{i,p+q-r} P_{r+1}(u) & \sum_i l_i n_{r+2}^{i,p+q-r} & \cdots & \sum_i l_i n_{p+q}^{i,p+q-r} \\ \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+q} m_\lambda N_1^{1,\lambda} P_1(u) + \cdots + \sum_\lambda m_\lambda N_{r+1}^{1,\lambda} P_{r+1}(u) & \sum_\lambda m_\lambda N_{r+2}^{1,\lambda} & \cdots & \sum_\lambda m_\lambda N_{p+q}^{1,\lambda} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_\lambda m_\lambda N_1^{p,\lambda} P_1(u) + \cdots + \sum_\lambda m_\lambda N_{r+1}^{p,\lambda} P_{r+1}(u) & \sum_\lambda m_\lambda N_{r+2}^{p,\lambda} & \cdots & \sum_\lambda m_\lambda N_{p+q}^{p,\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir nämlich diese Determinante mit $\vartheta_1(u-\alpha_{r+2}) \ldots \vartheta_1(u-\alpha_{p+q})$ multipliciren, so tritt überall $\Theta_i(u)$ an Stelle von $P_i(u)$. Addirt man alsdann die resp. mit $\Theta_{r+2}(u) \ldots \Theta_{p+q}(u)$ multiplicirte $2^{\text{te}} \ldots (p+q-r)^{\text{te}}$ Colonne zur ersten, so ergeben sich als Elemente der ersten Colonne unter Benutzung der Gl. (9) folgende Ausdrücke:

$$\sum_{\substack{i=1 \;\; \mu=1 \\ i=p \;\; \mu=p+q}} l_i n_\mu^{i\,p+1} \Theta_\mu(u) \equiv E(u)\, \mathfrak{Z}_{p+1}(u),$$

$$\sum_{i,\mu} l_i n_\mu^{i\,p+1} \Theta_\mu(u) \equiv E(u)\, \mathfrak{Z}_{p+2}(u),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\mu} l_i n_\mu^{i\,p+q-r} \Theta_\mu(u) \equiv E(u)\, \mathfrak{Z}_{p+q-r}(u),$$

$$\sum_{\substack{\lambda=p+1 \;\; \mu=1 \\ \lambda=p+q \;\; \mu=p+q}} m_\lambda N_\mu^{1\lambda} \Theta_\mu(u) \equiv Z(u)\, \mathfrak{E}_1(u),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\lambda,\mu} m_\lambda N_\mu^{p\lambda} \Theta_\mu(u) \equiv Z(u)\, \mathfrak{E}_p(u).$$

Da alle diese entweder $E(u)$ oder $Z(u)$ als Factor enthalten, so ergiebt sich:

$$\vartheta_1(u-\alpha_{r+2}) \cdots \vartheta_1(u-\alpha_{p+q})\, S \underset{u}{\equiv} P(u)\, E(u) + Q(u)\, Z(u).$$

Für jeden gemeinsamen Nullwerth von Z und E ist also die linke Seite Null, und da der erste Factor nicht verschwindet, so hat S alle gemeinsamen Wurzeln zu Nullwerthen und ist also mit der im Satz 8 erwähnten ϑ-Function identisch.

Aus unserer Untersuchung folgt ein wesentlicher Unterschied der ganzen rationalen von den ϑ-Functionen. Für zwei ϑ-Functionen, welche gemeinsame Nullwerthe haben, lässt sich nämlich im Allgemeinen der grösste gemeinsame Factor nicht ohne fremden Bestandtheil rational aus den Coefficienten zusammensetzen.

§ 6.

Ueber die Discriminante einer ϑ-Function r^{ten} Grades.

Insofern die Discriminante einer algebraischen Gleichung als ein specieller Fall der Resultante zweier Gleichungen angesehen wird, und in Anbetracht der grossen Analogie, die das Vorhergehende mit den entsprechenden algebraischen Untersuchungen aufweist, wird man hier sofort die Frage aufwerfen, wie wohl die Bildung der Discriminante einer ϑ-Function zu erfolgen hat. Dabei verstehen wir unter *Discriminante* einer ϑ_ϱ^r-Function $\varphi(u)$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung unter der* $\varphi(u)$ *einen doppelten Nullwerth besitzt;* d. h. unter der die Gleichungen:

$$\varphi(u) = 0, \quad \varphi'(u) = \frac{d\varphi(u)}{du} = 0 \tag{49}$$

gleichzeitig befriedigt werden können.

Nun ist zwar $\varphi'(u)$ keine ϑ-Function mehr, aber es ist leicht, aus φ und φ' eine solche zusammenzusetzen, indem man einen speciellen Fall des Satzes III, § 1 in Anwendung bringt. Ersetzt man nämlich die dort auftretende Function $\psi(u)$ durch $\vartheta_1(u-\gamma)$, so dass $s = 1$, $\sigma = \gamma$, so ersieht man, dass

$$r\varphi(u)\,\vartheta_1'(u-\gamma) - \vartheta_1(u-\gamma)\,\varphi'(u) = L(u)$$

eine ϑ-Function vom Grade $(r+1)$ und vom Index $\varrho + \gamma$ vorstellt. Man kann demnach die Resultante von

$$\varphi(u) = 0, \quad L(u) = r\varphi(u)\,\vartheta_1'(u-\gamma) - \vartheta_1(u-\gamma)\,\varphi'(u) = 0 \tag{50}$$

auf bekannte Weise bestimmen. Dieselbe sei R. Bezeichnen wir aber die Discriminante von $\varphi(u)$ mit D, so kann die Resultante von (50), d. h. der Ausdruck dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Coexistenz beider Gleichungen ist, nichts anderes sein als $\varphi(\gamma)\,D$. Denn wenn dieser Ausdruck Null wird, so coexistiren die Gl. (50), wenn umgekehrt die Gleichungen (50) neben einander bestehen, so ist entweder:

$$\varphi(u) = 0, \quad \vartheta_1(u-\gamma) = 0,$$

oder

$$\varphi(u) = 0,$$
$$\varphi'(u) = 0,$$

d. h. es ist $\varphi(\gamma) = 0$ oder $D = 0$. Mithin kann $R = D\varphi(\gamma)$ gesetzt werden, also $D = \frac{R}{\varphi(\gamma)}$, wenn man γ so wählt, dass es $\varphi(u)$ nicht zu Null macht. Nun kann allerdings die Resultante der Gl. (50) im Allgemeinen nicht immer isolirt werden; ist aber Δ der für diese beiden Gleichungen gebildete in Satz 1 erwähnte Ausdruck, so ersieht man, dass, so oft die Gleichungen (49) coexistiren, $\frac{\Delta}{\varphi(\gamma)}$ verschwindet und dass umgekehrt alle Nullwerthe von $\frac{\Delta}{\varphi(\gamma)}$ mit Ausschluss von (18a), (18b), (18c) Coexistenz der Gl. (49) bewirken. Es folgt also:

Satz 9. *Man erhält die Discriminante einer ϑ_ϱ^r-Function $\varphi(u)$, indem man die Resultante R der Gleichungen* (50) *für beliebiges γ herstellt und dieselbe durch $\varphi(\gamma)$ dividirt.*

Ist die Resultante nicht frei von fremden Factoren herzustellen, so bilde man Δ für die Gleichungen (50). *So oft $\varphi = 0$ eine doppelte Wurzel hat, ist dann $\frac{\Delta}{\varphi(\gamma)} = 0$ und sobald $\frac{\Delta}{\varphi(\gamma)} = 0$ ist, ohne dass eine der Gl.* (18a, b, c) *erfüllt ist, besitzt $\varphi = 0$ eine doppelte Wurzel.*

Wird γ so gewählt, dass $\varphi(\gamma)$ von Null verschieden ist, so sind die gemeinsamen Wurzeln von (50) mit den gemeinschaftlichen Nullwerthen von $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ vollständig identisch. Es folgt mithin der Satz:

10. *Hat die Gleichung $\varphi(u) = 0$ p doppelte Wurzeln, so lässt sich eine ϑ^{p+1}-Function mit beliebigem Index herstellen, welche diese p Wurzeln zu Nullwerthen hat. Diese Function ist identisch mit der nach Satz 8 herstellbaren Function, welche durch die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen* (50) *annullirt wird.*

Basel, den 11. Juli 1888.

Ueber elliptische Curven in der Ebene.

Von

Otto Schlesinger in Basel.

Einleitung.

Die allgemeine Theorie der elliptischen ebenen Curven, ausgehend von der Parameterdarstellung in independenter Weise zu entwickeln, ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchung. Bei der Ausführung dieses Unternehmens, über dessen methodische Bedeutung ich an anderer Stelle (Math. Annalen Bd. 31, p. 183) schon gesprochen habe, kam es insbesondere auf drei Fragen an, die meines Wissens bisher ohne Erledigung geblieben sind.

In *erster* Linie war der Fall zu untersuchen, dass bei der Parameterdarstellung jedem Punkte der Curve mehr als ein Parameter zugehört. An diesen Gegenstand, den bekanntlich Herr Lüroth für rationale Curven erledigt hat*), ist in Bezug auf Curven vom Geschlechte 1 neuerdings Herr Humbert herangetreten, und hat, übrigens ohne Angabe eines Beweises, den Satz ausgesprochen, dass die Curve alsdann unicursal sei.**) Dieser Satz ist jedoch falsch. In der That tritt der genannte Fall sehr wohl bei wirklichen elliptischen Curven auf. Die allgemeine Gestalt, welche die Parameterdarstellung alsdann annimmt, ist im Folgenden entwickelt, und, da eine Zurückführung auf den einfacheren, bisher allein betrachteten Fall anscheinend nicht möglich ist, der Darstellung zu Grunde gelegt worden.***)

*) Math. Annalen Bd. IX, p. 163.

**) Comptes rendus 1883, p. 1136.

***) Handelt es sich nur um die *Eigenschaften* elliptischer Curven, so darf man stets die Parameterdarstellung in der einfachsten Form annehmen. Denn für jede Curve n^{ter} Ordnung können nach Clebsch (Crelle's Journ. Bd. 64, p. 221) die Coordinaten eines Curvenpunktes zu drei ϑ_ϱ^{n}-Functionen proportional gesetzt werden, wobei offenbar jedem Punkte nur ein Parameter zugehört. In unserem Falle jedoch, wo es sich um die *Bestimmung* der Singularitäten handelt, muss man auch auf die allgemeinste Form eingehen, in der etwa im Laufe einer Rechnung die Parameterdarstellung sich darbieten kann.

Die *zweite* Hauptaufgabe bestand in der directen*) Bestimmung der Doppelpunkte, welche mit Hülfe der in der vorstehenden Abhandlung enthaltenen Sätze leicht ausgeführt werden kann.

Auf der vorgängigen Bestimmung der Doppelpunkte beruht schliesslich die Lösung der *dritten* Hauptfrage, nämlich die Ableitung der Curvengleichung mit Hülfe derjenigen Methode, welche Herr Hermite für Curven dritter Ordnung angewandt hat, die aber für höhere Curven zu versagen schien.**) Sie besteht in dem Nachweis, dass, wenn die Parameterdarstellung einer C^n vorliegt, alle Potenzen und Producte n^{ten} Grades der Variablen, durch den Parameter ausgedrückt, ein System linear abhängiger Functionen bilden. Es zeigt sich, dass dies nicht nur im Falle $n = 3$, sondern allgemein stattfindet, sobald man nur die Relationen zu Hülfe nimmt, die aus der Existenz der Doppelpunkte fliessen. — Im Anschluss hieran findet man in § 4 noch eine Methode, um eine gewisse Potenz der linken Seite der Curvengleichung herzustellen. Beide Methoden sind, wie man leicht erkennen wird, wesentlich von dem Verfahren verschieden, durch welches Herr Humbert die gleiche Aufgabe erledigt.***)

Da die vorangehende Arbeit „Ueber Resultanten und Discriminanten von ϑ-Functionen" die wesentliche Grundlage des Folgenden bildet, so ist sie mit Ausnahme von § 5, als bekannt vorausgesetzt, während von meiner Abhandlung „Ueber Verwerthung der ϑ-Functionen etc." (die auch hier mit Th. citirt werden soll) nur die wenigen Stellen Anwendung finden, welche der vorstehenden Arbeit zu Grunde liegen und in der Einleitung der Letzteren besonders genannt sind.†)

§ 1.

Form der Parameterdarstellung in dem Falle, wo jedem Punkte mehrere incongruente Parameter entsprechen.

Es seien die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varepsilon x_1 &= \Psi_1(u), \\ \varepsilon x_2 &= \Psi_2(u), \\ \varepsilon x_3 &= \Psi_3(u) \end{aligned}$$

*) Bei Clebsch werden die Doppelpunkte *nicht* aus der Darstellung vermittelst elliptischer Functionen abgeleitet (l. c. p. 225); ebensowenig bei Humbert l. c. 1045), wo der Satz von der Erhaltung des Geschlechts benutzt wird.

**) Crelle's Journal Bd. 82. Lettre à Mr. Fuchs. p. 345. „Le procédé qui réussit dans le cas de $m = 3$, donne donc en général un degré trop élevé et j'ai dû complétement y renoncer comme méthode d'élimination."

***) l. c. p. 991.

†) Auf die Unrichtigkeit des Humbert'schen Satzes und auf die Erweiterung der Hermite'schen Methode habe ich inzwischen an anderem Ort hingewiesen. cfr. Comptes rendus t. CVII, p. 225.

gegeben, in denen $\Psi_1\,\Psi_2\,\Psi_3$ beliebige linear independente $\vartheta_\varrho^{\,n}$-Functionen sein mögen, *die keinen allen dreien gemeinschaftlichen Nullwerth besitzen.* Alsdann ist durch die Gleichungen (1) eine Reihe von Punkten x definirt. Zu jedem Werth u gehört *ein* Punkt; derselbe Punkt gehört zu den congruenten Werthen von u. Indessen wäre es möglich, dass zu *jedem* so erlangten Punkte mit den Coordinaten $\Psi_1(u):\Psi_2(u):\Psi_3(u)$ im Allgemeinen noch p nicht congruente Parameterwerthe $v_1\,v_2\ldots v_p$ existirten, die denselben Punkt liefern, wodurch nicht ausgeschlossen ist, dass zu *einzelnen* Punkten noch andere Parameterwerthe sich ergeben. Diese würden wir dann als *singuläre* bezeichnen.

Die Parameterwerthe $v_1 v_2 \ldots v_p$, welche noch dem Punkte

$$\Psi_1(u):\Psi_2(u):\Psi_3(u)$$

entsprechen, sind Functionen von u. Bilden wir:

$$(2)\qquad \vartheta_1(v-u)\,\vartheta_1(v-v_1)\cdots\vartheta_1(v-v_p)=f(v\,u)$$

so muss, wenn v, u ein zu demselben Punkte gehöriges Paar nicht singulärer Parameter ist, v einer der Werthe $u\,v_1\ldots v_p$ sein, d. h. $v\,u$ die Function f annulliren. Umgekehrt, wenn das Paar $v\,u$ die Function f annullirt, so ist v ein nicht singulärer Parameter, der zu demselben Punkte gehört wie u.

$$f(v\,u)=0$$

ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $v\,u$ nicht singuläre Parameterwerthe desselben Punktes sind. Diese Bedingung muss aber für v und u gleich gebaut sein. Nun ist f in v eine ϑ^{p+1}-Function vom Index

$$u+v_1+\cdots+v_p=i(u)$$

also wird sie in u eine ϑ^{p+1} mit dem Index $i(v)$ sein. Dann folgt aber nach dem Satze 2 der vorstehenden Abhandlung, dass $i(u)$ die Form:

$$i(u)=g\,u+\beta$$

besitzt, wo g eine ganze Zahl, β eine Constante ist.

Es sei jetzt $w_1\,w_2$ ein Nullpaar von f, so dass:

$$(3)\qquad f(w_1\,w_2)=0.$$

Dann gehören $w_1\,w_2$ als Parameter demselben Punkte zu; die weiteren Parameter derselben seien $w_3\ldots w_{p+1}$. Die Functionen:

$$(4)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & f(v\,w_1), \\ \text{b)} & f(v\,w_2) \end{array}$$

haben demnach in v dieselben $(p+1)$ Nullwerthe $w_1\,w_2\ldots w_{p+1}$. Beide sind ferner in v ϑ^{p+1}-Functionen; die erste hat den Index $g\,w_1+\beta$, die zweite den Index $g\,w_2+\beta$; diese müssen daher (nach

Th. Satz 4) beide zu $w_1 + w_2 + \cdots + w_{p+1}$ congruent sein. Es folgt mithin:

$$g w_1 + \beta \equiv g w_2 + \beta \quad (\text{mod. } \omega\,\omega')$$

oder

$$(5) \qquad g(w_1 - w_2) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega\,\omega').$$

Die Congruenz (5) kann erfüllt werden, entweder

a) dadurch dass $g = 0$

oder

b) ohne dass $g = 0$

ist.

Erste Möglichkeit.

Im ersten Falle haben (4a) und (4b) denselben constanten Index β. Da sie auch dieselben Nullpunkte haben, so lässt sich eine von v unabhängige Grösse C so bestimmen, dass:

$$f(v\,w_1) - C f(v\,w_2) \underset{v}{\equiv} 0.$$

Für zwei beliebige Werthe $v = \gamma$, $v = \delta$ folgt also:

$$f(\gamma w_1) - C f(\gamma w_2) = 0,$$
$$f(\delta w_1) - C f(\delta w_2) = 0$$

mithin:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} f(\gamma w_1) & f(\gamma w_2) \\ f(\delta w_1) & f(\delta w_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Vorausgesetzt war aber nur die Gleichung (3). So oft also $f(w_1 w_2) = 0$ ist, wird auch Gleichung (6) erfüllt. Die linke Seite von (6) ist in w_1 (nach Th. Satz 6) eine ϑ_β^{p+1}, hat also denselben Charakter wie $f(w_1 w_2)$. Da sie überdies, wie eben gezeigt, dieselben Nullwerthe hat, so können sich beide Ausdrücke nur um einen von w_1 freien Factor unterscheiden. Aber ganz ebenso sieht man, dass sie sich nur um einen von w_2 freien Factor unterscheiden können; es ist also:

$$f(w_1\,w_2) \underset{w_1 w_2}{\equiv} c \begin{vmatrix} f(\gamma w_1) & f(\gamma w_2) \\ f(\delta w_1) & f(\delta w_2) \end{vmatrix},$$

wo c eine Constante bedeutet. Setzt man:

$$c f(\gamma u) = \mathsf{X}(u),$$
$$f(\delta u) = \mathsf{P}(u)$$

so sind X, P gewisse ϑ_β^{p+1}-Functionen, und es ist

$$(7) \qquad f(u v) \underset{uv}{\equiv} \begin{vmatrix} \mathsf{X}(u) & \mathsf{X}(v) \\ \mathsf{P}(u) & \mathsf{P}(v) \end{vmatrix}.$$

Ein Werthepaar $u\,v$, welches f annulirt, gehört zu demselben

Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ (Gleichung 1) und ist daher ein gemeinsames Nullpaar aller Determinanten der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} \Psi_1(u) & \Psi_2(u) & \Psi_3(u) \\ \Psi_1(v) & \Psi_2(v) & \Psi_3(v) \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Da $\Psi_1\, \Psi_2\, \Psi_3$ keinen gemeinsamen Factor haben, so können, wie man leicht sieht, in der dreigliedrigen Gruppe $k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + k_3\Psi_3$ auf vielfache *Art drei independente Functionen $\psi_1\, \psi_2\, \psi_3$ gewählt werden, die auch paarweise keinen Factor gemein haben.*

Man kann dann setzen:

$$\begin{aligned} \Psi_1(u) &= a_{11}\psi_1(u) + a_{12}\psi_2(u) + a_{13}\psi_3(u) \\ \Psi_2(u) &= a_{21}\psi_1(u) + a_{22}\psi_2(u) + a_{23}\psi_3(u) \\ \Psi_3(u) &= a_{31}\psi_1(u) + a_{32}\psi_2(u) + a_{33}\psi_3(u) \end{aligned} \tag{9}$$

wo

$$A = \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \gtrless 0.$$

Alsdann ist bekanntlich ein gemeinsames Nullpaar uv von (8) auch ein solches von:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \psi_2(u) & \psi_3(u) \\ \psi_2(v) & \psi_3(v) \end{vmatrix} = 0, \\ &\text{b)} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \psi_3(u) & \psi_1(u) \\ \psi_3(v) & \psi_1(v) \end{vmatrix} = 0, \\ &\text{c)} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \psi_1(u) & \psi_2(u) \\ \psi_1(v) & \psi_2(v) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

und umgekehrt. Da also jedes Nullpaar von f die Gleichungen (10) annulirt, so enthalten $\Delta_1\, \Delta_2\, \Delta_3$ sämmtlich $f(uv)$ als Factor.*) Zwei Functionen von der Form (7) resp. (10) können jedoch nur unter ganz besondern Verhältnissen durch einander theilbar sein:

$$f(uv) = 0$$

ist nämlich nach Gleichung (7) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass uv demselben Element der Involution $\varepsilon X + \zeta P$ angehören. Ebenso ist $\Delta_3 = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass uv demselben Element der Involution $k_1\psi_1 + k_2\psi_2$ angehören.

Da aus $f(uv) = 0$ auch $\Delta_3 = 0$ resultirt, so können wir sagen: *Wenn die Grössen uv demselben Element von $\varepsilon X + \zeta P$ als Nullwerthe*

---

*) Hieraus folgt, dass X und P keinen gemeinsamen Nullwerth α besitzen; denn sonst wäre $\Delta_1\, \Delta_2\, \Delta_3$ für jedes v durch $\vartheta_1(u-\alpha)$ theilbar, und dasselbe würde mithin für $\psi_1\, \psi_2\, \psi_3$ gelten, was nicht der Fall ist.

angehören, so annulliren sie auch ein und dasselbe Element der Involution $k_1\psi_1 + k_2\psi_2$.

Es sei nun:

(11) $$\psi_1(u) \underset{u}{\equiv} \vartheta_1(u-u_1)\ldots\vartheta_1(u-u_n).$$

Wird $\varepsilon_1\zeta_1$ so bestimmt, dass

(12) $$\varepsilon_1 \mathsf{X}(u) + \zeta_1 \mathsf{P}(u) = 0$$

die Wurzel u_1 hat (was nach obiger Fussnote nur auf eine Art möglich ist), so gehören alle andern Wurzeln von (12) mit u_1 demselben Element der Involution $(\psi_1\psi_2)$ an, und da (11) das *einzige Element* der Involution ist, das u_1 zur Wurzel hat (sonst hätten $\psi_1\psi_2$ einen gemeinsamen Nullwerth), so sind alle Wurzeln von (12) auch Nullwerthe von (11). Wir haben mithin:

(13) $$\psi_1(u) \underset{u}{\equiv} [\varepsilon_1 \mathsf{X}(u) + \zeta_1 \mathsf{P}(u)]\,\vartheta_1(u-u'_{p+2})\ldots\vartheta_1(u-u'_n).$$

Wird nun $\varepsilon_2\zeta_2$ so bestimmt, dass

(14) $$\varepsilon_2 \mathsf{X}(u) + \zeta_2 \mathsf{P}(u) = 0$$

die Wurzel u'_{p+2} besitzt, so folgt ganz ebenso, dass (13) durch

$$\varepsilon_2 \mathsf{X} + \zeta_2 \mathsf{P}$$

theilbar ist. Da aber der erste Factor von (13) mit

$$\varepsilon_2 \mathsf{X} + \zeta_2 \mathsf{P}$$

keinen Nullwerth gemein hat, so resultirt:

$$\psi_1(u) \underset{u}{\equiv} [\varepsilon_1 \mathsf{X}(u) + \zeta_1 \mathsf{P}(u)]\,[\varepsilon_2 \mathsf{X}(u) + \zeta_2 \mathsf{P}(u)]\,\vartheta_1(u-u''_{2p+3})\ldots\vartheta_1(u-u''_n)$$

Indem man so fortschliesst, erkennt man, *dass n durch $(p+1)$ theilbar sein muss* und dass für $n = (p+1)\nu$ sich $\varepsilon_1\zeta_1\;\varepsilon_2\zeta_2\ldots\varepsilon_\nu\zeta_\nu$ so bestimmen lassen, dass die ϑ^n_ϱ-Function $\psi(u)$ durch die $\vartheta^n_{\nu\beta}$-Function

$$\prod_{i=1}^{i=\nu}[\varepsilon_i \mathsf{X}(u) + \zeta_i \mathsf{P}(u)]$$

theilbar ist. Es ist demnach (Th. Satz 4) $\varrho \equiv \nu\beta$, also etwa

$$\varrho = \nu\beta + k\omega + k'\omega',$$

und es lässt sich (Th. Satz 3) eine Constante c so finden, dass:

$$\psi_1(u) \underset{u}{\equiv} c\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}k'u} \prod_{i=1}^{i=\nu} \varepsilon_i \mathsf{X}(u) + \zeta_i \mathsf{P}(u)$$

$$\equiv e^{\frac{2\pi i}{\omega}k'u}\,[a_0\mathsf{X}^\nu + a_1\mathsf{X}^{\nu-1}\mathsf{P} + \cdots a^\nu\mathsf{P}^\nu].$$

Ganz ebenso folgt aber:

$$\psi_2(u) = e^{\frac{2\pi i}{\omega}k'u}\,[b_0\mathsf{X}^\nu + b_1\mathsf{X}^{\nu-1}\mathsf{P} + \cdots + b_\nu\mathsf{P}^\nu],$$

$$\psi_3(u) = e^{\frac{2\pi i}{\omega}k'u}\,[c_0\mathsf{X}^\nu + c_1\mathsf{X}^{\nu-1}\mathsf{P} + \cdots + c_\nu\mathsf{P}^\nu].$$

Mithin haben auch $\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3$ dieselbe Form, und es folgt, dass die Gleichungen (1) sich schreiben lassen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = F_1(\mathsf{X}, \mathsf{P}) : F_2(\mathsf{X}, \mathsf{P}) : F_3(\mathsf{X}, \mathsf{P}),$$

wo $F_i(\varkappa, \lambda)$ eine binäre Form ν^{ten} Grades von $\varkappa, \lambda$ ist. *Die durch* (1) *dargestellten Punkte bilden also in unserem Falle* ($g = 0$) *eine unicursale Curve ν^{ter} Ordnung.**)

Zweite Möglichkeit.

Falls in der Gleichung (5) g nicht Null ist, so müssen sich, immer unter alleiniger Voraussetzung von Gleichung (3), zwei ganze Zahlen $\varkappa, \varkappa' < g$ so finden lassen, dass

$$(15) \qquad w_1 \equiv w_2 + \frac{\varkappa\omega + \varkappa'\omega'}{g} \quad (\text{mod. } \omega\, \omega').$$

Hieraus folgt, dass jeder Werth w_1, der $f(w_1 w_2)$ annullirt, die Form (15) besitzt, oder allgemein, dass $f(uv) = 0$ als Gleichung in u Wurzeln hat von der Form

$$(16) \quad v,\ v + \frac{\varkappa_1\omega + \varkappa_1'\omega'}{g},\ v + \frac{\varkappa_2\omega + \varkappa_2'\omega'}{g},\ \ldots\ v + \frac{\varkappa_p\omega + \varkappa_p'\omega'}{g},$$

wo $\varkappa_i \varkappa_i'$ gewisse ganze Zahlen unter g sind. Da $f(uv)$ aber als Function von u eine $\vartheta^{p+1}_{gv+\beta}$ ist, so muss, wie übrigens auch v beschaffen sei (nach Th. Satz 4) die Gleichung gelten:

$$gv + \beta \equiv (p+1)\, v + \frac{\sum_1^p \varkappa_i\omega + \sum_1^p \varkappa_i'\omega'}{g} \quad (\text{mod. } \omega\, \omega').$$

Daraus folgt, dass

$$g = p + 1$$

und die Wurzeln von $f(uv) = 0$ congruent sind zu

$$(17) \qquad v,\ v + \frac{\varkappa_1\omega + \varkappa_1'\omega'}{p+1},\ \ldots\ v + \frac{\varkappa_p\omega + \varkappa_p'\omega'}{p+1}.$$

Aber $f\left(u,\ v + \frac{\varkappa_\sigma\omega + \varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}\right)$ muss genau dieselben Wurzeln haben, d. h. die Reihe (17) muss sich bis auf Vielfache von $\omega\,\omega'$ und abgesehen von der Reihenfolge reproduciren, sobald für v einer der Werthe (17) gesetzt wird. Wenn man demnach in (17) jeden der Ausdrücke als eine Substitution für v auffasst und Werthe, die sich nur um Vielfache von $\omega\,\omega'$ unterscheiden, als *äquivalent* gelten lässt**), so müssen die Ausdrücke (17) eine Gruppe von (übrigens vertauschbaren) Substitutionen bilden.***)

*) Das im Vorhergehenden angewandte Verfahren führt, wie man leicht sieht, ganz ebenso zum Beweis des Lüroth'schen Satzes über rationale Curven.

**) In dem Sinne, in welchem dieser Ausdruck von Herrn Kronecker gebraucht wird. cfr. Monatsberichte der Berliner Academie. 1870. p. 881.

***) Ueber die geschlossene Form, auf welche alle Substitutionen einer solchen Gruppe gebracht werden können, cf. Kronecker l. c.

Wir verstehen jetzt unter $\varkappa_1\varkappa_1'$, $\varkappa_2\varkappa_2'$ ... $\varkappa_p\varkappa_p'$ immer solche Zahlenpaare (unter $p+1$) welche aus (17) eine Substitutionsgruppe formiren. Dann hat $f(uv)$ die Gestalt:

$$(17\text{a})\quad f(uv) \underset{uv}{\equiv} \vartheta_1(u-v)\vartheta_1\left(u-v-\frac{\varkappa_1\omega+\varkappa_1'\omega'}{p+1}\right)\cdots\vartheta_1\left(u-v-\frac{\varkappa_p\omega+\varkappa_p'\omega'}{p+1}\right).$$

Ein Werthepaar uv, welches f annullirt, gehört nach Gleichung (1) zu demselben Punkte x und genügt in Folge dessen den drei Gleichungen (10a), (10b), (10c). $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ *sind also*, wie nebenbei bemerkt, *durch* $f(uv)$ *theilbar.*

Nun ist $f(uv)=0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass uv durch eine Substitution unserer Gruppe auseinander hervorgehen. $\Delta_3=0$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, unter der uv demselben Element der Involution

$$(18)\qquad \varkappa_1\psi_1(u)+\varkappa_2\psi_2(u)$$

angehören. Da aus $f(uv)=0$ stets $\Delta_3=0$ resultirt, so können wir sagen: „*Wenn uv durch eine Substitution unserer Gruppe mit einander verbunden sind, so gehören sie als Nullpunkte zu einem und demselben Element der Involution* (18)."

Man zeigt aber ausserdem leicht, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\psi_1\psi_2$ keinen Nullwerth gemein haben, dass es in der Involution (18) nur $2n$ Elemente mit doppelten Nullwerthen giebt.*) Es sei nun

$$(19)\qquad \lambda_1\psi_1(u)+\lambda_2\psi_2(u) \underset{u}{\equiv} \vartheta_1(u-\delta_1)\ldots\vartheta_1(u-\delta_n)$$

ein beliebiges Element *ohne Doppelpunkte*, so dass also $\delta_1\ldots\delta_n$ sämmtlich incongruent sind. Jede Wurzel von $f(u\delta_1)=0$ geht aus δ_1 durch eine Substitution unserer Gruppe hervor und gehört also mit δ_1 demselben Element von (18) an. Da aber (19) das *einzige* Element der Involution ist, welches den Nullwerth δ_1 besitzt, so ist jede Wurzel von $f(u\delta_1)=0$ auch solche von $\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2=0$ und (19) ist durch $f(u\delta_1)$ theilbar; d. h. es ist

$$\lambda_1\psi_1(u)+\lambda_2\psi_2(u) \underset{u}{\equiv} f(u\delta_1)\,\vartheta_1(u-\delta_{p+2}')\ldots\vartheta_1(u-\delta_n').$$

Ebenso folgt aber, dass $\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2$ durch $f(u\delta_{p+2}')$ theilbar ist und da $f(u\delta_1)$ und $f(u\delta_{p+2}')$ keinen Nullwerth gemein haben, weil sonst δ_{p+2}' Doppelwurzel von $\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2=0$ wäre, so ergiebt sich:

$$\lambda_1\psi_1(u)+\lambda_2\psi_2(u) \underset{u}{\equiv} f(u\delta_1)f(u\delta_{p+2}')\,\vartheta_1(u-\delta_{2p+3}'')\cdots$$

Indem man so fortschliesst, erkennt man, *dass n durch $(p+1)$ theilbar ist*, und dass für $n=\nu(p+1)$ sich $\delta_1\ldots\delta_\nu$ so bestimmen lassen, dass $\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2$ die Function $f(u\delta_1)\,f(u\delta_2)\ldots f(u\delta_\nu)$ als Factor

*) Cfr. die vorstehende Abhandlung § 1, Satz III.

enthält. Die erste Function ist aber eine ϑ_ϱ^{n}, die zweite eine ϑ^{n} vom Index

$$(p+1)(\delta_1+\cdots+\delta_\nu)+\nu\frac{\sum_1^p \varkappa_i\omega+\sum_1^p \varkappa_i'\omega'}{p+1}.$$

Da sie dieselben Nullwerthe haben, so ist der letzte Ausdruck zu ϱ congruent. Es sei:

$$\text{(20a)}\quad \varrho=(p+1)(\delta_1+\cdots+\delta_\nu)+\nu\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}+g\omega+g'\omega'.$$

Dann lässt sich nach Th. Satz 3 eine Constante c so bestimmen, dass

$$\text{(21a)}\quad \mathrm{X}(u)\equiv\lambda_1\psi_1(u)+\lambda_2\psi_2(u)\underset{u}{\equiv}c\,e^{\frac{2\pi i}{\omega}g'u}f(u\delta_1)f(u\delta_2)\ldots f(u\delta_\nu).$$

Ist $\lambda_1'\psi_1+\lambda_2'\psi_2$ ein anderes der Involution angehöriges Element ohne Doppelpunkte, so lassen sich $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\nu$ $h h'$ auf dieselbe Art so finden, dass:

$$\text{(20b)}\quad \varrho=(p+1)(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_\nu)+\nu\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}+h\omega+h'\omega',$$

$$\text{(21b)}\quad \mathrm{X}'(u)\equiv\lambda_1'\psi_1(u)+\lambda_2'\psi_2(u)\underset{u}{\equiv}c'e^{\frac{2\pi i}{\omega}h'u}f(u\varepsilon_1)\ldots f(u\varepsilon_\nu).$$

Man sieht daraus, dass alle Elemente X'' *der Involution* (18) [*auch solche mit doppelten Nullwerthen*] *die Eigenschaft haben, dass, wenn* u *eine Wurzel von* $\mathrm{X}''(u)=0$ *ist, dasselbe für alle Werthe gilt, die aus* u *durch die Substitutionen unserer Gruppe* (17) *hervorgehen.*

Für jedes λ *muss also aus*

$$\mathrm{X}(u)+\lambda\mathrm{X}'(u)=0$$

folgen:

$$\mathrm{X}\left(u+\frac{\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}\right)+\lambda\mathrm{X}'\left(u+\frac{\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}\right)=0$$
$$\sigma=1\cdots p.$$

Nun lässt sich $f(uv)$ (cfr. 17a) als eine Function von $u-v$ ansehen, und zwar ist sie als solche eine ϑ^{p+1} vom Index

$$\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1};$$

$f\left(u+\frac{\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega'}{p+1},v\right)$ ist mithin*) als Function von $(u-v)$ eine ϑ^{p+1} mit dem Index:

$$\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}-\varkappa_\sigma\omega-\varkappa_\sigma'\omega'.$$

*) Cfr. die vorhergehende Abhandlung § 1, Satz II.

Daraus folgt:

$$f\left(u+\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}, v\right) \underset{uv}{\equiv} c_\sigma e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa'_\sigma (u-v)} f(uv) \tag{22}$$

wo c_σ eine Constante bedeutet, die weder von u, noch von v abhängt. Man ersieht daraus, dass:

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} f\left(u+\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}, \delta_i\right) = c_\sigma^\nu e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa'_\sigma (\nu u-\delta_1-\cdots-\delta_\nu)} \prod_{i=1}^{i=\nu} f(u\delta_i) \tag{23}$$

also nach (21a)

$$\mathrm{X}\left(u+\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}\right) =$$

$$= c_\sigma^\nu e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa'_\sigma \nu u} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[g'\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}+\varkappa'_\sigma(\delta_1+\cdots+\delta_\nu)\right]} \mathrm{X}(u)$$

und ebenso

$$\mathrm{X}'\left(u+\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}\right) =$$

$$= c_\sigma^\nu e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa'_\sigma \nu u} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[h'\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}+\varkappa'_\sigma(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_\nu)\right]} \mathrm{X}'(u).$$

Es ergiebt sich mithin:

$$[\mathrm{X}+\lambda \mathrm{X}']_{u+\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}} = c_\sigma^\nu e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa'_\sigma \nu u} e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[g'\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}+\varkappa'_\sigma(\delta_1+\cdots+\delta_\nu)\right]} \tag{24}$$

$$\times\left\{\mathrm{X}(u)+\lambda e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[(h'-g')\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}+\varkappa'_\sigma(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_\nu-\delta_1-\cdots-\delta_\nu)\right]}\mathrm{X}'(u)\right\}.$$

Damit dieser Ausdruck wie verlangt mit $\mathrm{X}(u)+\lambda \mathrm{X}'(u)=0$ zugleich verschwindet, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Exponentialgrösse, mit der $\lambda \mathrm{X}'(u)$ auf der rechten Seite multiplicirt ist, gleich 1 wird, dass also

$$(h'-g')\frac{\varkappa_\sigma \omega+\varkappa'_\sigma \omega'}{p+1}+\varkappa'_\sigma\left(\sum_1^\nu \varepsilon_i-\sum_1^\nu \delta_i\right) \equiv 0 \pmod{\omega} \tag{25}$$

für jeden Werth von $\sigma=1.2$ bis $\sigma=p$ gültig ist. Da aber nach (20a) und (20b)

$$\sum_1^\nu \varepsilon_i-\sum_1^\nu \delta_i = \frac{(g-h)\omega+(g'-h')\omega'}{p+1}$$

ist, so geht (25) über in:

$$\frac{(h'-g')(\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega')+\varkappa_\sigma'[(g-h)\omega+(g'-h')]\omega'}{(p+1)}$$
$$=\frac{(h'-g')\varkappa_\sigma-(h-g)\varkappa_\sigma'}{p+1}\omega\equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega)$$

oder, was dasselbe ist:

$$(h'-g')\varkappa_\sigma-(h-g)\varkappa_\sigma'\equiv 0 \quad (\text{mod. } p+1) \tag{26}$$
$$\sigma=1\,2\ldots p.$$

Wenn $h'-g'$, $h-g$ den p Congruenzen (26)*) genügen, so sind $X(u)$, $X'(u)$ von der Beschaffenheit, dass

$$X\left(u+\frac{\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}\right)\cdot X'\left(u+\frac{\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}\right)=X(u):X'(u).$$
$$\sigma=1\ldots p.$$

Die Congruenzen (26) haben stets Lösungen; eine Lösung $h'-g'=0$, $h-g=0$ ist überdies stets vorhanden.

Indem wir beachten, dass nunmehr *jedes* Element von $\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2$ die Form von $X(u)$, $X'(u)$ hat, dies also auch von $\psi_1\psi_2$, ferner in gleicher Weise von ψ_3 und allen linearen Aggregaten von $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3$ gilt, so resultirt endlich der Satz:

1. *Wenn zu jedem durch die Gleichungen* (1) *dargestellten Punkte* $(p+1)$ *Parameterwerthe gehören, so ist jedenfalls n durch* $(p+1)$ *theilbar und für $n=(p+1)\nu$ bilden entweder alle Punkte eine unicursale Curve ν^{ter} Ordnung oder die Gleichungen lassen sich auf die Form bringen:*

$$\begin{aligned} x_1&=c_1e^{\frac{2\pi i}{\omega}g'u}f(u\delta_1)f(u\delta_2)\ldots f(u\delta_\nu),\\ x_2&=c_2e^{\frac{2\pi i}{\omega}h'u}f(u\varepsilon_1)f(u\varepsilon_2)\ldots f(u\varepsilon_\nu),\\ x_3&=c_3e^{\frac{2\pi i}{\omega}l'u}f(u\zeta_1)f(u\zeta_2)\ldots f(u\zeta_\nu),\end{aligned} \tag{27}$$

wobei unter Zugrundelegung gewisser Zahlenpaare

$$\varkappa_1\,\varkappa_1'\ldots\varkappa_p\,\varkappa_p',$$

welche aus (17) *eine Substitutionsgruppe formiren, die Gleichungen gelten:*

$$\begin{aligned} \varrho&=(p+1)(\delta_1+\cdots+\delta_\nu)+\nu\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}+g\omega+g'\omega',\\ \varrho&=(p+1)(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_\nu)+\nu\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}+h\omega+h'\omega',\\ \varrho&=(p+1)(\zeta_1+\cdots+\zeta_\nu)+\nu\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}+l\omega+l'\omega'\end{aligned} \tag{28}$$

*) Von diesen Congruenzen sind immer einige eine Folge der übrigen. Denn ist $\varkappa_\sigma\varkappa_\sigma'$ eins der Zahlenpaare, so ist im Allgemeinen $2\varkappa_\sigma$, $2\varkappa_\sigma'$ ein zweites verschiedenes Zahlenpaar der Reihe etc.

und ferner die Grössenpaare hh', ll', für xx' gesetzt, die Congruenzen erfüllen:

$$(29)\qquad (g'-x')\varkappa_\sigma - (g-x)\varkappa_\sigma' \equiv 0 \pmod{p+1}$$
$$\sigma = 1 \ldots p.^{*})$$

Gleichungen der Form (27), welche den Bedingungen (28), (29) entsprechen, lassen sich stets herstellen. Man wähle Zahlen $\varkappa_1\varkappa_1' \ldots \varkappa_p\varkappa_p'$, die aus (17) eine Substitutionsgruppe machen; ferner zwei beliebige Zahlen gg', bestimme von gg' verschiedene oder gleiche Zahlenpaare hh', ll', die den Congruenzen (29) genügen, und wähle eine beliebige Grösse ϱ; dann sind $\sum_1^\nu \delta_i$, $\sum_1^\nu \varepsilon_i$, $\sum_1^\nu \zeta_i$ aus (28) bestimmt. Hat man dann die einzelnen Grössen $\delta_1 \ldots \delta_\nu$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu$, $\zeta_1 \ldots \zeta_\nu$ so gewählt, dass die Summen die berechneten Werthe haben, so liefert (27) ein Gleichungssystem der gewünschten Art.

§ 2.

Einige Hülfssätze.

Ist $\Psi(u)$ irgend eine der auf der rechten Seite von (27) stehenden Functionen, so ist, wie man unter Anwendung der Gleichungen (23) und der Gleichungen (28), (29) leicht findet,

$$(30)\qquad \Psi\left(u + \frac{\varkappa_\sigma\omega + \varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}\right) =$$
$$= c_\sigma^\nu\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[\frac{g'\varkappa_\sigma - g\varkappa_\sigma'}{p+1}\omega + \frac{\varkappa_\sigma'}{p+1}\left(\varrho - \nu\frac{\Sigma\varkappa_i\omega + \Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}\right)\right]}\Psi(u).$$
$$\sigma = 1 \ldots p.$$

Ich definire nun:

Unter einer $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Function, die zu der Substitutionsgruppe (17) *und den Zahlen $g\,g'$ gehört, verstehe ich jede $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Function, welche den Gleichungen* (30) *Genüge leistet.***)

Diese Definition gilt für beliebige Werthe von ν, ϱ $g\,g'$.***) *Aus ihr folgen sofort die Sätze:*

---

*) Alle nachfolgenden Untersuchungen vereinfachen sich beträchtlich, in dem Falle, wo jedem Punkt nur ein Parameter zugehört. Dann ist nämlich

$$f(uv) = \vartheta_1(u-v).$$

Doch war die Behandlung des allgemeinen Falls principiell geboten; cfr. die Anmerkung auf S. 444.

**) Da in der That eine solche Function durch die Substitutionen der Gruppe (17) nur unwesentlich verändert wird, so entspricht die Bezeichnung dem Sprachgebrauch der Substitutionstheorie.

***) Wenn die Zahlen hh' den Congruenzen (29) genügen, so gehören zu ihnen offenbar *dieselben* Functionen wie zu gg'.

2. *Ein lineares Aggregat von $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Functionen, die sämmtlich zu der Substitutionsgruppe* (17) *und den Zahlen $g\,g'$ gehören, ist wieder eine Function derselben Art.*

3. *Das Product einer $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Function, die zu unserer Substitutionsgruppe und zu den Zahlen $g\,g'$ gehört mit einer $\vartheta_{\varrho_1}^{\nu_1(p+1)}$, die ebenfalls zu unserer Gruppe, aber zu den Zahlen $h\,h'$ gehört, ist eine $\vartheta_{\varrho+\varrho_1}^{(\nu+\nu_1)(p+1)}$-Function, die zur Gruppe und zu den Zahlen $(g+g')$, $(h+h')$ gehört.*

4. *Zwischen ν $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Functionen, die zur Substitutionsgruppe* (17) *und zu den Zahlen $g\,g'$ gehören, besteht im Allgemeinen keine lineare Identität.*

In der That kann man ν derartige linear independente Functionen herstellen. Es seien nämlich $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$ ν incongruente Zahlen, welche so gewählt sind, dass auch irgend zwei *nicht* durch eine Substitution von (17) aus einander hervorgehen, oder die wie ich kurz sagen will, *nicht associirt* sind*) und dass ausserdem:

$$(31)\qquad (p+1)(\alpha_1+\dots+\alpha_\nu)+\nu\,\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}\ \text{nicht}\equiv\varrho.$$

Ferner seien die Zahlen α_i' $(i=1\dots i=\nu)$ definirt durch die Gleichungen:

$$(32)\quad (p+1)(\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}+\alpha_i'+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_\nu)+\nu\,\frac{\Sigma\varkappa_i\omega+\Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1} +g\omega+g'\omega'=\varrho. \qquad (i=1\dots\nu)$$

Dann bilde ich

$$F_1(u)=e^{\frac{2\pi i}{\omega}g'u}f(u\alpha_1')\,f(u\alpha_2)\cdots f(u\alpha_\nu),$$

$$F_2(u)=e^{\frac{2\pi i}{\omega}g'u}f(u\alpha_1)\,f(u\alpha_2')\cdots f(u\alpha_\nu),$$

$$\vdots$$

$$F_\nu(u)=e^{\frac{2\pi i}{\omega}g'u}f(u\alpha_1)\,f(u\alpha_2)\cdots f(u\alpha_\nu'),$$

wobei $f(uv)$ die frühere Bedeutung hat. $F_1 \dots F_\nu$ sind $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Functionen, die zur Gruppe und zu den Zahlen $g\,g'$ gehören. Sie sind ferner independent; denn wäre

$$\sum_{i=\nu}^{i=\nu} r_i F_i(u)\underset{u}{\equiv}0,$$

so müsste jedes r_i Null sein. In der That ist für $u=\alpha_i$

$$0=r_iF_i(\alpha_i)=r_if(\alpha_i\alpha_1)\cdots f(\alpha_i\alpha_{i-1})\,f(\alpha_i\alpha_i')f(\alpha_i\alpha_{i+1})\cdots f(\alpha_i\alpha_\nu).$$

---

*) Zwei Werthe, die durch die Substitution (17) aus einander entstehen, sollen *associirt* heissen.

Da aber alle α *nicht associirt* sind, so ist $f(\alpha_\iota \alpha_\varkappa) \gtrless 0$. Wäre $f(\alpha_\iota \alpha_\iota') = 0$, so müsste α_ι' zu α_ι *associirt* sein, dies aber würde nach den Gleichungen (32) der Bedingung (31) zuwider laufen. Es folgt also $r_\iota = 0$, wie behauptet wurde.

5. *Jede $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Function, die zu* (17) *und den Zahlen $g\,g'$ gehört, lässt sich aus $F_1 \ldots F_\nu$ auf eine und nur eine Art zusammensetzen.*

Beweis. Ist $X(u)$ die vorliegende Function, so stellt

$$X(u) - \sum_{i=1}^{i=\nu} r_i F_i(u) \tag{34}$$

für jedes Werthsystem ν eine Function desselben Charakters vor. Aber hier kann man, da $F_i(\alpha_i) \lesseqgtr 0$ ist, $r_1\, r_2 \ldots r_\nu$ eindeutig so bestimmen, dass (34) für $\alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ also auch für alle associirten Werthe verschwindet. Da aber dann die Summe der $(p+1)\nu$ Nullwerthe von (34), nämlich

$$(p+1)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu) + \nu\, \frac{\Sigma \varkappa_i \omega + \Sigma \varkappa_i' \omega'}{p+1}$$

nach (31) nicht $\equiv \varrho$ ist, so folgt (aus Th. Satz 9), dass (34) identisch Null ist, d. h.

$$X(u) \underset{u}{\equiv} \sum_{i=1}^{i=\nu} r_i F_i(u)$$

q. e. d.

6. *Ist $\varphi(u)$ eine $\vartheta_\varrho^{r(p+1)}$-Function, die zur Substitutionsgruppe* (17) *und zu den Zahlen $g\,g'$ gehört und $\psi(u)$ eine $\vartheta_\sigma^{s(p+1)}$-Function, die ebenfalls zur Gruppe aber zu den Zahlen $h\,h'$ gehört, so ist:*

$$L(u) = \begin{vmatrix} r\varphi(u) & s\psi(u) \\ \varphi'(u) & \psi'(u) \end{vmatrix}$$

eine $\vartheta_{\varrho+\sigma}^{(r+s)(p+1)}$, die zur Gruppe und zu den Zahlen $(g+g')\,(h+h')$ gehört.

Beweis. Aus der vorhergehenden Abhandlung § 1, Satz III ist klar, dass $(p+1)\,L(u)$ ein $\vartheta^{(r+s)(p+1)}$ mit dem Index $\varrho + \sigma$ vorstellt. Nun ist ferner:

$$\begin{aligned} \varphi\left(u + \frac{\varkappa_\tau \omega + \varkappa_\tau' \omega'}{p+1}\right) &= l_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' r u}\, \varphi(u), \\ \psi\left(u + \frac{\varkappa_\tau \omega + \varkappa_\tau' \omega'}{p+1}\right) &= m_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' s u}\, \psi(u), \end{aligned} \tag{35}$$

wenn nämlich:

$$(35\text{a})\qquad \begin{aligned} l_\tau &= c_\tau^\nu\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[\frac{g'\varkappa_\tau - g\varkappa_\tau'}{p+1}\omega + \frac{\varkappa_\tau'}{p+1}\left(\varrho - r\frac{\Sigma\varkappa_i\omega + \Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}\right)\right]},\\ m_\tau &= c_\tau^\nu\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left[\frac{h'\varkappa_\tau - h\varkappa_\tau'}{p+1}\omega + \frac{\varkappa_\tau'}{p+1}\left(\sigma - s\frac{\Sigma\varkappa_i\omega + \Sigma\varkappa_i'\omega'}{p+1}\right)\right]}\end{aligned}$$

gesetzt wird. Durch Differentiation von (35) ergiebt sich:

$$\varphi'\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) = l_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' r u}\varphi'(u) - l_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' r u}\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' r\,\varphi(u),$$

$$\psi'\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) = m_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' s u}\varphi'(u) - m_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' s u}\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' s\,\psi(u)$$

oder mit Benutzung von (35)

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\varphi'\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) - \frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' r\,\varphi\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) =\\ &= l_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' r u}\varphi'(u),\\ &\psi'\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) - \frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' s\,\psi\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) =\\ &= m_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau' s u}\psi'(u).\end{aligned}$$

Nunmehr folgt aus:

$$L\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) = \begin{vmatrix} r\varphi\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) & s\psi\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right)\\ \varphi'\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) & \psi'\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right)\end{vmatrix}$$

indem man die mit $\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau'$ multiplicirte erste Zeile von der zweiten abzieht und (36) benutzt:

$$L\left(u + \frac{\varkappa_\tau\omega + \varkappa_\tau'\omega'}{p+1}\right) = l_\tau m_\tau e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\varkappa_\tau'(r+s)u}L(u).$$

Aus der Bedeutung von $l_\tau m_\tau$ (35a) ersieht man mithin, dass $L(u)$ zu den Zahlen $(g+h)$, $(g'+h')$ gehört, q. e. d.

Ganz analog beweist man den folgenden allgemeinen Satz, dessen ausführliche Darstellung wohl unterbleiben darf:

7. *Sind*

$$\varphi_1(u),\ \varphi_2(u)\ \ldots\ \varphi_q(u)$$

ϑ-Functionen, die sämmtlich zu unserer Substitutionsgruppe gehören, resp. vom Grade $r_1(p+1)\ldots r_q(p+1)$, *von den Indices* $\varrho_1\ldots\varrho_q$ *und gehörig zu den Zahlen* $g_1 g_1'\ldots g_q g_q'$, *so ist*

$$\begin{vmatrix} r_1^{q-1}\varphi_1(u) & r_2^{q-1}\varphi_2(u) & \cdots r_q^{q-1}\varphi_q(u) \\ r_1^{q-2}\varphi_1'(u) & r_2^{q-2}\varphi_2'(u) & \cdots r_q^{q-2}\varphi_q'(u) \\ \vdots & & \\ r_1\varphi_1^{(q-2)}(u) & r_2\varphi_2^{(q-2)}(u) & \cdots r_q\varphi_q^{(q-2)}(u) \\ \varphi_1^{(q-1)}(u) & \varphi_2^{(q-1)}(u) & \cdots \varphi_q^{(q-1)}(u) \end{vmatrix}$$

eine ϑ-Function vom Grade $(r_1+\cdots+r_q)(p+1)$, vom Index

$$\varrho_1+\cdots+\varrho_q,$$

gehörig zur Substitutionsgruppe und zu den Zahlen

$$g_1+\cdots+g_q,\quad g_1'+\cdots+g_q'.$$

§ 3.

Bestimmung der Doppelpunkte.

Nach den Ausführungen des ersten Paragraphen können wir stets, wenn nicht etwa eine unicursale Curve vorliegt, die Gleichungen

$$(37)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \Psi_1(u), \\ x_2 &= \Psi_2(u), \\ x_3 &= \Psi_3(u) \end{aligned}$$

zu Grunde legen, wo $\Psi_1\Psi_2\Psi_3$ $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$-Functionen sind, die zu unserer Substitutionsgruppe und zu den Zahlen $g\,g'$ gehören. Alsdann sind jedem Punkte des durch (37) dargestellten Gebildes $(p+1)$ incongruente Parameter zugeordnet, die aber sämmtlich associirt sind. Wir können also auch sagen, dass jedem Punkte nur *ein nicht associirter Parameter entspricht*, und man kann dann auf bekannte Weise zeigen, dass jede Gerade ν der Punkte (37) enthält, d. h. dass (37) eine Curve ν^{ter} Ordnung repräsentirt. *)

Es wird nun aber Punkte geben (*die Doppelpunkte der Curve*) denen zwei nicht associirte Parameter u, v zugehören. Jedem Punkte dieser Art sind alsdann im Ganzen $2(p+1)$ nicht congruente Parameter zugeordnet, und man wird offenbar aus diesen auf $(p+1)^2$ verschiedene Arten ein Paar nicht associirter Parameter zusammenstellen können. Wenn es also δ Doppelpunkte giebt, so wird es $(p+1)^2\delta$ Paare nicht associirter Zahlen $u\,v$ geben, welche demselben Punkte als Parameter entsprechen. Für zwei solche Zahlen ist nothwendig und hinreichend, dass sie den Gleichungen

$$(38)\qquad \text{a)}\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \Psi_2(u) & \Psi_3(u) \\ \Psi_2(v) & \Psi_3(v) \end{vmatrix} = 0,$$

*) Hermite l. c. p. 345.

(38)
$$\text{b)}\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Psi_3(u) & \Psi_1(u) \\ \Psi_3(v) & \Psi_1(v) \end{vmatrix} = 0,$$
$$\text{c)}\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \Psi_1(u) & \Psi_2(u) \\ \Psi_1(v) & \Psi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

genügen, ohne associirt zu sein, d. h. ohne

$$f(uv) = 0$$

zu erfüllen. Da aber offenbar die Functionen $\Delta_1\, \Delta_2\, \Delta_3$ durch $f(uv)$ theilbar sind*), so werden alle jene Zahlenpaare uv definirt als gemeinsame Lösungen von:

(39)
$$\text{a)}\quad D_1 = \frac{\Delta_1(uv)}{f(uv)} = 0,$$
$$\text{b)}\quad D_2 = \frac{\Delta_2(uv)}{f(uv)} = 0,$$
$$\text{c)}\quad D_3 = \frac{\Delta_3(uv)}{f(uv)} = 0.$$

D_i ist in u eine $\vartheta^{(p+1)(\nu-1)}$ vom Index $\varrho-(p+1)v-\frac{\Sigma \varkappa_i\omega+\Sigma \varkappa_i'\omega'}{p+1}$,

D_i ist in v eine $\vartheta^{(p+1)(\nu-1)}$ vom Index $\varrho-(p+1)u-\frac{\Sigma \varkappa_i\omega+\Sigma \varkappa_i'\omega'}{p+1}$.

Ausserdem ist D_i offenbar eine symmetrische Function von u und v. Um die Zahl der gemeinsamen Lösungen von

(40)
$$D_1(uv) = 0,$$
$$D_2(uv) = 0$$

zu finden, hat man im Lehrsatz 3a der vorhergehenden Abhandlung

p und q durch $(p+1)(\nu-1)$,
g und h durch $-(p+1)$,
β und γ durch $\varrho-\frac{\Sigma \varkappa_i\omega+\Sigma \varkappa_i'\omega'}{p+1}$

zu ersetzen. Es ergiebt sich dann, dass die Gleichungen (40)

$$(p+1)^2\, \nu(\nu-2) = \mathsf{N}$$

gemeinsame Nullpaare haben; sind dieselben $u_1 v_1, u_2 v_2 \dots u_{\mathsf{N}} v_{\mathsf{N}}$, so ist

(41)
$$\sum_1^{\mathsf{N}} u_i + \sum_1^{\mathsf{N}} v_i \equiv 2\varrho\,(p+1)(\nu-2).$$

*) Δ_i ist nämlich nach Satz 2 als Function von u eine $\vartheta_\varrho^{\nu(p+1)}$, die zur Substitutionsgruppe (17) und den Zahlen $g\,g'$ gehört, und wird offenbar durch $u=v$ sonach auch durch

$$u = v + \frac{\varkappa_\sigma\omega+\varkappa_\sigma'\omega'}{p+1}$$

annullirt.

Zwischen $D_1\, D_2\, D_3$ bestehen aber, wie besonders aus (38) klar ist, die Identitäten:

$$\Psi_1(u) D_1 + \Psi_2(u) D_2 + \Psi_3(u) D_3 \underset{uv}{\equiv} 0,$$

$$\Psi_1(v) D_1 + \Psi_2(v) D_2 + \Psi_3(v) D_3 \underset{uv}{\equiv} 0.$$

Für die Werthepaare $u_i v_i$, welche (40) genügen, ist also entweder

$$D_3 = 0$$

oder gleichzeitig

$$\Psi_3(u) = 0, \quad \Psi_3(v) = 0.$$

Ein Paar $u_i v_i$ stellt mithin eine gemeinschaftliche Lösung von (39) dar, wenn es nicht ein Wurzelpaar von $\Psi_3(u) = 0$ ist, das zu gleicher Zeit D_1 und D_2 annullirt. Nun befriedigt, wie aus (38a), (38b) zu ersehen, *jedes* Wurzelpaar von $\Psi_3(u) = 0$ die Gleichungen $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. *Jedes Paar nicht associirter* Wurzeln von $\Psi_3 = 0$ annullirt also $D_1\, D_2$. Da $\Psi_3(u) = 0$ ν nicht associirte Wurzeln besitzt, so kann man $(p+1)^2 \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ Paare solcher Wurzeln bilden, welche von $u_1 v_1 \ldots u_N v_N$ ausgeschlossen werden müssen, damit nur Lösungen unseres Problems übrig bleiben. Es giebt also:

$$(p+1)^2 \left\{\nu(\nu-2) - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\right\} = (p+1)^2 \frac{\nu(\nu-3)}{2}$$

gemeinsame Lösungen von (39), mithin nach der obigen Bemerkung $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ Doppelpunkte.

Auch die Summe der auszuschliessenden Parameterpaare kann leicht hergestellt werden. Sind nämlich $U_1\, U_2 \ldots U_\nu$ die nicht associirten Wurzeln von $\Psi_3(u) = 0$, so bildet man hieraus Paare nicht associirter Werthe, indem man jede Wurzel

$$U_i, \quad U_i + \frac{\varkappa_\sigma \omega + \varkappa_\sigma' \omega'}{p+1} \qquad \sigma = 1 \ldots p$$

mit jedem der $(p+1)(\nu-1)$ Werthe combinirt, die aus

$$U_1 \ldots U_{i-1}\, U_{i+1} \ldots U_\nu$$

durch die Substitution (17) hervorgehen. Der von den Wurzeln U_i und den associirten herrührende Antheil an der zu suchenden Summe ist also

$$\equiv (p+1)^2 (\nu-1) U_i,$$

mithin die ganze auszuschliessende Summe:

$$\equiv (p+1)^2 (\nu-1)(U_1 + U_2 + \cdots U_\nu).$$

Nun ist

$$\varrho \equiv (p+1)(U_1 + \cdots + U_\nu) + \nu \frac{\Sigma \varkappa_i \omega + \Sigma \varkappa_i' \omega'}{p+1},$$

also jene Summe

$$\equiv (p+1)(\nu-1)\left\{\varrho - \nu\frac{\Sigma k_i\omega + \Sigma k_i'\omega'}{p+1}\right\} \equiv (p+1)(\nu-1)\,\varrho.$$

Da (41) die Summe aller Paare $u_i v_i$ giebt, so ist die der $(p+1)^2\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ übrig bleibenden Paare

$$(42)\qquad \equiv 2\varrho(p+1)(\nu-2) - (p+1)(\nu-1)\,\varrho \equiv \varrho(p+1)(\nu-3).$$

Sind nun für $\frac{\nu(\nu-3)}{2} = \delta$

$$u_1'v_1',\quad u_2'v_2'\cdots u_\delta'v_\delta'$$

ein System nicht associirter Paare, welche den einzelnen Doppelpunkten zugehören, so entsprechen jedem Doppelpunkte im Ganzen die $(p+1)^2$ Werthepaare

$$u_i' + \frac{k_\sigma\omega + k_\sigma'\omega'}{p+1},\quad v_i' + \frac{k_\tau\omega + k_\tau'\omega'}{p+1},$$
$$\sigma = 1\cdots p+1,$$
$$\tau = 1\cdots p+1.$$

Die Summe derselben ist

$$\equiv (p+1)^2\,(u_i' + v_i')$$

und somit ist die Summe aller $(p+1)^2\,\delta$ Parameterpaare

$$\equiv (p+1)^2\left(\sum_1^\delta u_i' + \sum_1^\delta v_i'\right)$$

und da dieselbe auch durch (42) dargestellt wird, so folgt:

$$(p+1)\left(\sum_1^\delta u_i' + v_i'\right) \equiv (\nu-3)\,\varrho.$$

Wir haben mithin den Satz*):

8. *Die Curve* (37) *hat* $\frac{\nu(\nu-3)}{2} = \delta$ *Doppelpunkte. Sind* $u_1v_1\ldots u_\delta v_\delta$ *ein System nicht associirter Parameterpaare dieser Punkte, so gilt*

$$(p+1)\sum_1^\delta u_i' + v_i' \equiv (\nu-3)\,\varrho \qquad (\text{mod. } \omega\,\omega').$$

*) Das Resultat ist offenbar eine Verallgemeinerung des Satzes 5 der vorstehenden Abhandlung.

§ 4.

Bestimmung der Curvengleichung.

Da die in Satz 8 erwähnten Grössen $u_i\,v_i$ Parameter desselben Punktes sind, so giebt es Werthe ε_i derart, dass:

$$
(43)\qquad \begin{aligned} \Psi_1(u_i) &= \varepsilon_i \Psi_1(v_i), \\ \Psi_2(u_i) &= \varepsilon_i \Psi_2(v_i), \qquad i = 1 \cdots i = \delta, \\ \Psi_3(u_i) &= \varepsilon_i \Psi_3(v_i). \end{aligned}
$$

Bilden wir jetzt die Potenzen und Producte ν^{ten} Grades der Ψ_i

$$
(44)\qquad X(u) = \Psi_1^{\alpha}(u)\,\Psi_2^{\beta}(u)\,\Psi_3^{\gamma}(u), \qquad \alpha + \beta + \gamma = \nu,
$$

so sind dieselben nach Lehrsatz 3 $\vartheta_{\nu\varrho}^{\nu^2(p+1)}$-Functionen, welche zu unserer Substitutionsgruppe und zu den Zahlen νg, $\nu g'$ gehören. Ausserdem befriedigen sie aber nach (43) sämmtlich die Gleichungen:

$$
(45)\qquad X(u_i) = \varepsilon_i^{\nu} X(v_i), \qquad i = 1 \cdots i = \delta.
$$

Alle $\vartheta_{\nu\varrho}^{\nu^2(p+1)}$-Functionen, die zur Gruppe (17) und zu den Zahlen νg, $\nu g'$ gehören, bilden nach Satz 4 eine genau ν^2-gliedrige Gruppe und zwar lassen sie sich nach Massgabe des Satzes 5 aus ν^2 Functionen zusammensetzen, die ich folgendermassen bilde. Ich nehme zu den $2\delta = \nu(\nu - 3)$ Grössen

$$
(46\text{a})\qquad u_1 u_2 \ldots u_\delta, \quad v_1 v_2 \ldots v_\delta
$$

noch $\nu^2 - \nu(\nu - 3) = 3\nu$ andere

$$
(46\text{b})\qquad w_1 w_2 \ldots w_{3\nu}
$$

hinzu, welche sonst willkürlich, nur so gewählt sind, dass:

$$
S = (p+1)\left(\sum_1^{\delta} u_i + \sum_1^{\delta} v_i + \sum_1^{3\nu} w_i\right) + \nu^2 \frac{\Sigma k_i \omega + \Sigma k_i' \omega'}{p+1}
$$

nicht $\equiv \nu\varrho$ ist. Ferner bestimme ich die Zahlen $u_1' u_2' \ldots u_\delta' v_1' \ldots v_\delta'$ $w_1' w_2' \ldots w_\delta'$ entsprechend den Gleichungen (cfr. 32)

$$
\begin{aligned}
S - (p+1)u_i + (p+1)u_i' + \nu g\omega + \nu g'\omega' + \nu^2 \frac{\Sigma k_i \omega + \Sigma k_i' \omega'}{p+1} &= \varrho, \\
S - (p+1)v_i + (p+1)v_i' + \nu g\omega + \nu g'\omega' + \nu^2 \frac{\Sigma k_i \omega + \Sigma k_i' \omega'}{p+1} &= \varrho, \\
S - (p+1)w_i + (p+1)w_i' + \nu g\omega + \nu g'\omega' + \nu^2 \frac{\Sigma k_i \omega + \Sigma k_i' \omega'}{p+1} &= \varrho.
\end{aligned}
$$

Ich bilde nunmehr alle Functionen:

$$(47)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & f(uu_1)\ldots f(uu_\delta)\, f(uv_1)\ldots f(uv_\delta)\, f(uw_1)\ldots f(uw_{3\nu}), \\ \text{b)} & f(uu_1')\ldots f(uu_\delta')\, f(uv_1')\ldots f(uv_\delta')\, f(uw_1')\ldots f(uw_{3\nu}') \end{array}$$

und bezeichne:

mit $U_i(u)$ das Product von $f(uu_i')$ mit allen Functionen (47 a) ausser $f(uu_i)$,

mit $V_i(u)$ das Product von $f(uv_i')$ mit allen Functionen (47 a) ausser $f(uv_i)$,

mit $W_i(u)$ das Product von $f(uw_i')$ mit allen Functionen (47 a) ausser $f(uw_i)$.

Dann ergiebt sich aus Satz 5, dass jede $\vartheta_{\nu\varrho}^{\nu^2(p+1)}$-Function $X(u)$, die zur Substitutionsgruppe und zu den Zahlen νg, $\nu g'$ gehört, sich schreiben lässt:

$$\sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda=\delta}} q_\lambda U_\lambda(u) + \sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda=\delta}} r_\lambda V_\lambda(u) + \sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda=3\nu}} s_\lambda W_\lambda(u).$$

Soll nun eine solche Function noch den Gleichungen (45) genügen, so ist,

$$\begin{array}{llllllll} \text{da } U_\lambda & \text{für alle Werthe (46) mit Ausnahme von } u_\lambda, \\ V_\lambda & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad v_\lambda, \\ W_\lambda & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad w_\lambda \end{array}$$

verschwindet, nothwendig und hinreichend, dass:

$$q_i U_i(u_i) = \varepsilon_i^\nu r_i V_i(v_i),$$
$$i = 1 \cdots \delta.$$

Da $U_i(u_i)$ von Null verschieden, so bestimmen sich hieraus $q_1 \ldots q_\delta$ und es folgt:

Die $\vartheta_{\nu\varrho}^{\nu^2(p+1)}$-Functionen, die zu unserer Substitutionsgruppe und den Zahlen νg, $\nu g'$ gehören, ausserdem aber die Gleichungen (45) *befriedigen, bilden eine genau* $\frac{\nu(\nu-3)}{2} + 3\nu = \frac{\nu(\nu+3)}{2}$*-gliedrige Gruppe.*

Functionen dieser Art sind aber insbesondere die Ausdrücke (44), deren Anzahl jedoch $\frac{\nu(\nu+3)}{2} + 1$ ist. *Es folgt also dass zwischen diesen Ausdrücken eine lineare Identität besteht:*

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=\nu} a_{\alpha\beta\gamma} \Psi_1^\alpha(u)\, \Psi_2^\beta(u)\, \Psi_3^\gamma(u) \underset{u}{\equiv} 0,$$

d. h. dass jeder Punkt $x_1 x_2 x_3$ unserer Curve die Gleichung:

$$\sum a_{\alpha\beta\gamma} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma = 0$$

befriedigt. Dies ist mithin die Curvengleichung. Sind demnach für $\frac{\nu(\nu+3)}{2} = N$, $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_N$ irgend welche unter sich weder congruente noch associirte Werthe, so ist:

$$\begin{vmatrix} x_1^\nu & \cdots & x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma & \cdots \\ \Psi_1^\nu(\varrho_1) & \cdots & \Psi_1^\alpha(\varrho_1)\Psi_2^\beta(\varrho_1)\Psi_3^\gamma(\varrho_1) & \cdots \\ \vdots & & & \\ \Psi_1^\nu(\varrho_N) & \cdots & \Psi_1^\alpha(\varrho_N)\Psi_2^\beta(\varrho_N)\Psi_3^\gamma(\varrho_N) & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der durch (37) *dargestellten Curve.*

Im Anschluss hieran möge eine Methode erwähnt werden, welche dazu dient, die $(p+1)^{te}$ Potenz der linken Seite der Curvengleichung herzustellen.*) Sind nämlich $g_1 g_2 g_3$ und $h_1 h_2 h_3$ die Coordinaten zweier Geraden, die sich in einem Punkte der Curve mit dem Parameter u schneiden, so ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = (gh)_1 : (gh)_2 : (gh)_3 \tag{48}$$

und es bestehen neben einander die Gleichungen:

$$\begin{aligned} E(u) &\equiv g_1 \Psi_1(u) + g_2 \Psi_2(u) + g_3 \Psi_3(u) = 0, \\ Z(u) &\equiv h_1 \Psi_1(u) + h_2 \Psi_2(u) + h_3 \Psi_3(u) = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Dann muss aber

$$\Delta = 0$$

sein, wenn Δ die Formel (14) der vorigen Abhandlung ist, gebildet für die speciellen aus (49) hervorgehenden Werthe von $E(u)$ und $Z(u)$.

Δ ist in unserem Falle eine $2(p+1)\nu$-gliedrige Determinante. Jedes Element der ersten $(p+1)\nu$ Horizontalreihen ist nach Gleichung (15) der vorstehenden Abhandlung linear und homogen in $g_1 g_2 g_3$; jedes Element der letzten $(p+1)\nu$ Horizontalreihen ebenso linear und homogen in $h_1 h_2 h_3$. Δ ist also offenbar eine homogene ganze rationale Function $(p+1)\nu^{\text{ten}}$ Grades von $(gh)_1$, $(gh)_2$, $(gh)_3$. Ist also $x_1 x_2 x_3$ ein Punkt der Curve, so genügt er der Gleichung $(p+1)\nu^{\text{ten}}$ Grades in x:

$$\Delta(x) = 0. \tag{50}$$

Da ferner nach Satz 1 der vorigen Abhandlung die Nullwerthe von Δ, welche *nicht* Coexistenz von (49) bedingen, von g, h ganz unabhängig sind, so sehen wir dass, wenn $x_i = (gh)_i$ die Gleichung $\Delta = 0$ befriedigt, die Gleichungen (49) eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. gh sich in einem Punkte der Curve schneiden. Wenn also x der Gl. (50) genügt, so ist es ein Punkt unserer Curve. *Daraus*

*) cfr. Pasch, Math. Ann. Bd. 18, p. 91. Brill, Math. Ann. Bd. V, p. 402 für rationale Curven und Flächen.

folgt, dass $\Delta(x)$ bis auf Factoren, die von x frei sind, die $(p+1)^{te}$ Potenz der linken Seite der Curvengleichung ist, welche wir herstellen wollten.

§ 5.

Bestimmung der Rückkehrpunkte, der Classe, der Wendepunkte und der Doppeltangenten.

Ein Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt über, wenn die beiden nicht associirten Parameterwerthe desselben zusammenfallen. Man kann auch sagen: Der Punkt mit dem Parameter u ist ein Rückkehrpunkt, wenn für $\varepsilon = 0$ sich eine Grösse c so bestimmen lässt, dass:

$$\Psi_1(u+\varepsilon) = c\Psi_1(u),$$
$$\Psi_2(u+\varepsilon) = c\Psi_2(u),$$
$$\Psi_3(u+\varepsilon) = c\Psi_3(u).$$

Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass u den Gleichungen:

$$(51)\quad \begin{vmatrix} \Psi_2(u) & \Psi_3(u) \\ \Psi_2'(u) & \Psi_3'(u) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Psi_3(u) & \Psi_1(u) \\ \Psi_3'(u) & \Psi_1'(u) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Psi_1(u) & \Psi_2(u) \\ \Psi_1'(u) & \Psi_2'(u) \end{vmatrix} = 0$$

Genüge leistet, wobei $\Psi_i'(u)$ die Ableitung von $\Psi_i(u)$ ist. Man hätte diese Gleichungen auch aus (39) erhalten können, indem man $v = u + \varepsilon$ setzte und die Grenzwerthe für $\varepsilon = 0$ suchte.

Die linken Seiten von (51) sind nach Satz 6 $\vartheta_{2\varrho}^{2\nu(p+1)}$-Functionen, die zur Substitutionsgruppe und den Zahlen $2g$, $2g'$ gehören. Wenn also r Rückkehrpunkte mit den (nicht associirten) Parametern $v_1 \dots v_\lambda$ vorhanden sind, so haben die Gleichungen (51) genau $r(p+1)$ gemeinsame Wurzeln; d. h. der grösste gemeinsame Factor der linken Seiten ist $f(uv_1)f(uv_2)\dots f(uv_r)$.

Sind 2 Punkte der Curve mit den Parametern v und w durch eine Gerade g verbunden, so ist:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \begin{vmatrix} \Psi_2(v) & \Psi_3(v) \\ \Psi_2(w) & \Psi_3(w) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Psi_3(v) & \Psi_1(v) \\ \Psi_3(w) & \Psi_1(w) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Psi_1(v) & \Psi_2(v) \\ \Psi_1(w) & \Psi_2(w) \end{vmatrix}.$$

Wenn w an v heranrückt, d. h. $w = v + \varepsilon$ und ε unendlich klein wird, so geht g in die Tangente des Punktes v über. Es ist dann:

$$(52)\quad g_1 : g_2 : g_3 = \begin{vmatrix} \Psi_2(v) & \Psi_3(v) \\ \Psi_2'(v) & \Psi_3'(v) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Psi_3(v) & \Psi_1(v) \\ \Psi_3'(v) & \Psi_1'(v) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Psi_1(v) & \Psi_2(v) \\ \Psi_1'(v) & \Psi_2'(v) \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehenden Ausdrücke sind schon oben ihrem Charakter nach studirt worden. Sie haben, wenn r Rückkehrpunkte $v_1 v_2 \dots v_r$

vorhanden sind, $f(vv_1)\ldots f(vv_r)$ zum grössten gemeinsamen Factor. Setzt man also:

$$
(53)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\begin{vmatrix}\Psi_2(v) & \Psi_3(v)\\ \Psi_2'(v) & \Psi_3'(v)\end{vmatrix}}{f(vv_1)\cdots f(vv_r)} &= X_1(v),\\
\frac{\begin{vmatrix}\Psi_3(v) & \Psi_1(v)\\ \Psi_3'(v) & \Psi_1'(v)\end{vmatrix}}{f(vv_1)\cdots f(vv_r)} &= X_2(v),\\
\frac{\begin{vmatrix}\Psi_1(v) & \Psi_2(v)\\ \Psi_1'(v) & \Psi_2'(v)\end{vmatrix}}{f(vv_1)\cdots f(vv_r)} &= X_3(v),
\end{aligned}
$$

so sind $X_i(v)$ nach den Sätzen 2 und 3 $\vartheta^{(2\nu-r)(p+1)}$-Functionen mit dem Index:

$$2\varrho-(p+1)(v_1+\cdots+v_r)+r\,\frac{\Sigma k_i\omega+\Sigma k_i'\omega'}{p+1}$$

überdies gehörig zur Substitutionsgruppe und zu den Zahlen $2g-h$, $2g'-h'$, wenn nämlich $f(vv_1)\ldots f(vv_r)$ zu den Zahlen hh' gehört. Ueberdies haben $X_1(v)$, $X_2(v)$, $X_3(v)$ keinen gemeinsamen Factor. Die Parameterdarstellung der Curve als Linienort ist also gegeben durch:

$$
(54)\qquad
\begin{aligned}
g_1 &= X_1(v),\\
g_2 &= X_2(v),\\
g_3 &= X_3(v).
\end{aligned}
$$

Auf diese Gleichungen kann man alle Folgerungen anwenden, die wir in § 3 und 4 aus den genau ebenso gebildeten Gleichungen (37) gezogen haben, wobei nur an Stelle der Doppelpunkte Doppeltangenten, an Stelle der Rückkehrpunkte Wendetangenten treten. *Die Curve ist also von der Classe* $(2\nu-r)$, *ihre Liniengleichung kann nach Massgabe von* § 4 *durch die Methode von* H e r m i t e *hergestellt werden*, *sie hat überdies* (*cfr.* § 3) $\frac{(2\nu-r)(2\nu-r-3)}{2}$ *Doppel- und Wendetangenten. Insbesondere ergeben sich die Wendetangenten nach den Ausführungen dieses Paragraphen als gemeinsame Wurzeln der drei Gleichungen:*

$$(55)\quad \begin{vmatrix}X_2(v) & X_3(v)\\ X_2'(v) & X_3'(v)\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}X_3(v) & X_1(v)\\ X_3'(v) & X_1'(v)\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}X_1(v) & X_2(v)\\ X_1'(v) & X_2'(v)\end{vmatrix}=0.$$

Wenn man aber

$$F(v)=f(vv_1)\cdots f(vv_r)$$

setzt, überdies der Kürze halber das Argument v der auftretenden Functionen unterdrückt, so ist nach (53)

$$FX_1 \underset{v}{\equiv} \Psi_2\Psi_3' - \Psi_3\Psi_2',$$
$$FX_2 \underset{v}{\equiv} \Psi_3\Psi_1' - \Psi_1\Psi_3',$$
$$FX_3 \underset{v}{\equiv} \Psi_1\Psi_2' - \Psi_2\Psi_1'$$

und in Folge von Differentiation:

$$FX_1' + F'X_1 \underset{v}{\equiv} \Psi_2\Psi_3'' - \Psi_3\Psi_2'',$$
$$FX_2' + F'X_2 \underset{v}{\equiv} \Psi_3\Psi_1'' - \Psi_1\Psi_3'',$$
$$FX_3' + F'X_3 \underset{v}{\equiv} \Psi_1\Psi_2'' - \Psi_2\Psi_1''.$$

Daraus folgt für beliebige Constanten $A_1 A_2 A_3$ nach bekannten Determinantensätzen:

$$F^2 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ FX_1 & FX_2 & FX_3 \\ FX_1' + F'X_1 & FX_2' + F'X_2 & FX_3' + F'X_3 \end{vmatrix}$$
$$= (A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + A_3\Psi_3) \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \\ \Psi_1' & \Psi_2' & \Psi_3' \\ \Psi_1'' & \Psi_2'' & \Psi_3'' \end{vmatrix}.$$

Die linken Seiten von (55) lauten also, wenn

$$L(v) = \begin{vmatrix} \Psi_1(v) & \Psi_2(v) & \Psi_3(v) \\ \Psi_1'(v) & \Psi_2'(v) & \Psi_3'(v) \\ \Psi_1''(v) & \Psi_2''(v) & \Psi_3''(v) \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$\Psi_1(v)\,\frac{L(v)}{F^2(v)}, \qquad \Psi_2(v)\,\frac{L(v)}{F^2(v)}, \qquad \Psi_3(v)\,\frac{L(v)}{F^2(v)}.$$

Da $\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3$ keinen gemeinsamen Factor haben, so sind die Parameter der Wendetangenten (also auch der Wendepunkte) gegeben durch*)

$$(56) \qquad \frac{L(v)}{F^2(v)} = 0.$$

Die linke Seite ist in der That eine ϑ-Function der hier auftretenden Art. $L(v)$ ist nämlich nach Satz 7 (da in unserem Falle $r_1 = r_2 = r_3 = \nu$ ist) eine ϑ-Function vom Grade $3\nu(p+1)$, vom Index 3ϱ, gehörig zur Gruppe und zu den Zahlen $3g$, $3g'$. $F(v)$ ist ebenfalls eine zur Substitutionsgruppe gehörige ϑ-Function. Da jeder Nullwerth von F gemeinschaftliche Wurzel von (51) ist, so gilt für ihn offenbar $L = 0$, aber auch $L' = 0$, denn es ist

*) cfr. Hermite, Crelle Bd. 82, p. 346.

$$L'(v) = \begin{vmatrix} \Psi_1(v) & \Psi_2(v) & \Psi_3(v) \\ \Psi_1'(v) & \Psi_2'(v) & \Psi_3'(v) \\ \Psi_1''(v) & \Psi_2''(v) & \Psi_3''(v) \end{vmatrix}.$$

Jeder Nullwerth von F ist also doppelte Wurzel von $L = 0$; die Function L ist also durch F^2, welches eine $\vartheta^{2r(p+1)}$ vorstellt, theilbar.

Es giebt demnach $(3\nu - 2r)(p + 1)$ *Parameter die* (56) *befriedigen; d. h. es giebt* $(3\nu - 2r)$ *Wendepunkte.*

Daraus folgt schliesslich für die Zahl der eigentlichen Doppeltangenten die Formel:

$$\frac{(2\nu - r)(2\nu - r - 3)}{2} - (3\nu - 2r) = \frac{(2\nu - r)(2\nu - r - 4) + r}{2}.$$

Basel, den 17. Juli 1888.

Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades.

Von

Georg Kober in Halle a./S.

In meiner Inauguraldissertation*) habe ich mir die Aufgabe gestellt, aus einem Tetraeder, dessen Kanten von einer Fläche zweiten Grades berührt werden, die Configuration der harmonisch zugeordneten Tetraeder und deren Beziehung zu den harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades auf synthetischem Wege zu entwickeln. Insofern in der vorhandenen Literatur des Gegenstandes gerade auf jenen Zusammenhang mit den harmonisch zugeordneten Flächen nicht näher Bezug genommen ist, sei mir gestattet, denselben in den nachfolgenden Sätzen kurz zu bezeichnen — wobei bezüglich der näheren Ausführung eben auf meine Dissertation verwiesen sein mag**).

Das räumliche Analogon des vollständigen Viereckes sowohl als des vollständigen Vierseites der Ebene ist das *Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder*. Es repräsentirt beides, das vollständige Fünfeck und das vollständige Fünfseit des Raumes, weil es durch ein Tetraeder und einen fünften Punkt oder eine fünfte Ebene vollständig bestimmt ist. Ein solches Tetraederpaar, welches stets zu den Ecken und Seiten eines dritten harmonisch zugeordneten Tetraeders perspectiv liegt, lässt folgende Doppelauffassung zu:

---

*) Die harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades, Halle 1888.

**) Dem dort gegebenen Literatur-Verzeichnisse sind, wie mir von hochgeschätzter Seite mitgetheilt wurde, noch nachzutragen: die Arbeiten der Herren Retali (Mem. della Acc. di Bologna 1884, 1886) und Sturm (Math. Ann. Bd. 25. 26), ferner die Untersuchungen von Harnack über Raumcurven 4. Ordnung 1. Species im 12. Bande und die Bemerkungen des Herrn Caspary über desmische Tetraeder im 29. Bande dieser Annalen.

Die vier vollständigen Vierkante, in welchen ein Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder identisch gesehen wird, ergänzen dasselbe zu einem vollständigen Achtecke (Hexaeder), *dessen vier Diagonalpunkte die Mittelpunkte der vierfachen Perspective sind.*

Die vier vollständigen Vierseite, in welchen ein Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder identisch geschnitten wird, ergänzen dasselbe zu einem vollständigen Achtseite (Octaeder), *dessen vier Diagonalebenen die Hauptebenen der vierfachen Perspective sind.*

Oder:

Zwei harmonisch zugeordnete Tetraeder bestimmen ein vollständiges Achteck und ein vollständiges Achtseit im Raume, welche das dritte harmonisch zugeordnete Tetraeder zum gemeinschaftlichen Diagonaltetraeder haben.

Jenes besteht aus vier einfachen Octaedern, deren Diagonalen je drei Eckkanten, dieses aus vier einfachen Hexaedern, deren Diagonalen je drei Seitenkanten des gemeinschaftlichen Diagonaltetraeders sind. Je ein Octaeder des einen und ein Hexaeder des anderen, deren Diagonalen einander zum gemeinschaftlichen Diagonaltetraeder ergänzen, sind einander ein- und umgeschrieben.

In reciproker Beziehung haben zwei harmonisch zugeordnete Tetraeder zu dem dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder verschiedene Lage. Stets werden die Ecken des einen Tetraeders von einer geraden, die Ecken des anderen Tetraeders von einer ungeraden Anzahl Seiten des dritten Tetraeders ein- und ausgeschlossen. Wie die Ecken des einen Tetraeders zu den Seiten des anderen Tetraeders liegen, so liegen auch die Seiten des ersteren zu den Ecken des letzteren; denn von wieviel Seiten eines Tetraeders ein Punkt ein- und ausgeschlossen wird, soviel Ecken desselben trennt die harmonisch zugeordnete Ebene. Wir sagen:

Von zwei harmonisch zugeordneten Tetraedern hat stets das eine gerade, das andere ungerade Lage zum dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder.

Da jedes Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder durch das eine und eine Ecke oder Seite des anderen vollständig bestimmt ist, so stellen irgend zwei Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder, wenn die Ecken des einen den Seiten des anderen entsprechend gesetzt werden, zwei reciproke Räume dar, in denen auch die dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder einander entsprechen. Sind daher zwei Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder demselben dritten Tetraeder harmonisch zugeordnet, so ist dieses ein Polartetraeder, und jene befinden sich in polarer Lage. Da aber durch ein Polartetraeder und ein Paar Pol und Polarebene ein Polarsystem vollständig und eindeutig bestimmt ist, so liegen gleichzeitig acht Paare reciproker Räume polar, nämlich vier, in denen die gleichliegenden, und vier, in denen die ungleichliegenden Tetraeder einander entsprechen. Solche *acht räumlichen Polarsysteme*, welche durch *zwei conjugirte* (demselben dritten Tetraeder harmonisch zugeordnete) *Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder* bestimmt sind, heissen *harmonisch zugeordnet*, ihre Kerne *harmonisch zugeordnete Flächen zweiten Grades*. In dieser Definition ist die Grundeigenschaft ausgesprochen, aus welcher sämmtliche Eigenschaften harmonisch zugeordneter Flächen zweiten Grades fliessen. Aus dem Umstande nämlich, dass die acht Paare Pole und Polarebenen des einen Polarsystemes die acht Polarebenen und die acht Pole des einen Paares Pol und Polarebene in Bezug auf die acht Polarsysteme sind, geht klar hervor:

Von acht harmonisch zugeordneten Polarsystemen ist jedes in Bezug auf jedes sein eigenes Polargebilde.

Ferner ergiebt sich aus der perspectiven Lage harmonisch zugeordneter Tetraeder:

In acht harmonisch zugeordneten Polarsystemen gehören jeder Ecke und Seite des gemeinschaftlichen Polartetraeders bez. dieselben vier harmonisch zugeordneten Polarbündel und Polarfelder, jeder Kante desselben dieselben zwei harmonisch zugeordneten Punkt- und Ebeneninvolutionen zu.

Endlich zeigt sich allgemein:

Die acht Pole jeder Ebene und deren acht Polarebenen in Bezug auf acht harmonisch zugeordnete Polarsysteme bilden zwei Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder, welche dem gemeinschaftlichen Polartetraeder harmonisch zugeordnet sind.

Insbesondere sind die beiden *Centraltetraeder* der acht harmonisch zugeordneten Polarsysteme einander und dem gemeinschaftlichen Polartetraeder harmonisch zugeordnet, woraus sowohl die allgemeine als auch die besondere Natur harmonisch zugeordneter Flächen zweiten Grades folgt:

Die acht harmonisch zugeordneten Flächen einer Gruppe zerfallen in zwei Reihen, in vier gerade und vier ungerade Flächen. Von den vier geraden Flächen ist die eine ein imaginäres Ellipsoid, die drei anderen sind hyperbolische Hyperboloide. Unter den vier ungeraden oder elliptischen Flächen ist ein oder kein Ellipsoid, je nachdem beide Centraltetraeder zu einander ungerade oder gerade Lage haben.

Schliesslich giebt es unter den conjugirten Paaren harmonisch zugeordneter Tetraeder *ein sich selbst conjugirtes Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder* in Bezug auf die acht Flächen. Jedes dieser beiden Tetraeder ist in Bezug auf die vier geraden Flächen sein eigenes, in Bezug auf die vier ungeraden Flächen des anderen Polargebilde. Hieraus folgt auf Grund der octaedrischen und hexaedrischen Auffassung harmonisch zugeordneter Tetraeder:

Je ein einfaches Octaeder und ein einfaches Hexaeder des sich selbst conjugirten Tetraederpaares, welche einander ein- und umgeschrieben sind, sind in Bezug auf jede der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades polarreciprok. Von den Gegenecken des ersteren und den Gegenseiten des letzteren enthalten bez. berühren drei elliptische Flächen je ein Paar, eine elliptische Fläche drei Paare, die drei hyperbolischen Flächen je zwei Paare, die imaginäre Fläche kein Paar.

Für die reellen Flächen heisst das:

Jede der vier elliptischen Flächen berührt die Kanten des sich selbst conjugirten Paares harmonisch zugeordneter Tetraeder in denjenigen Punkten, in welchen sie die Kanten des gemeinschaftlichen Polartetraeders schneidet, während jede der drei hyperbolischen Flächen beiden Tetraedern gleichzeitig um- und eingeschrieben ist.

Halle a./S., im September 1888.

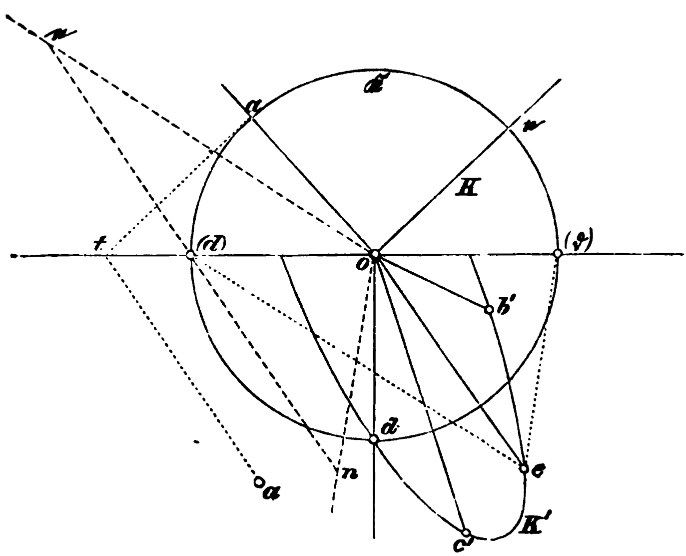
Der Satz von Pohlke.

Von

C. Küpper in Prag.

„Drei endliche Strecken von beliebiger Länge oa', ob', oc' in einer Ebene E können als Parallelprojectionen dreier gleichen auf einander senkrechten Strecken $oa = ob = oc$ betrachtet werden."

Die folgende Herleitung dieses Satzes habe ich seit 1867 am hiesigen Polytechnicum vorgetragen; dieselbe ist seitdem von Herrn C. **Pelz** ohne Angabe des Ursprungs publicirt worden:



Soll das Dreieck $b'oc'$ die Parallelprojection eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks boc sein, so muss die Ellipse K', welche ob', oc' zu conjugirten Halbmessern hat, als Parallelprojection eines Kreises K erscheinen, dessen Radien ob, oc sind. *Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass K mit K' irgend einen Diameter gemein hat, einerlei, in welcher durch diesen gelegten Ebene sich K befindet.* Ist demnach $od = \alpha$ ein beliebiger Halbmesser von K', und wird dieser als Radius von K angenommen, so sei oc ein zweiter, senkrecht zu od. Wenn ferner in K' $oe = \beta$ zu od conjugirt ist, so wird bei der Projectionsrichtung ec der Kreis K sich in K', daher werden auch zwei rechtwinklige Radien des K sich in ob', oc' projiciren. Errichtet man in o auf der Ebene $d o \mathfrak{c}$, welche ob, oc enthält, $oa = \alpha$ senkrecht, und projicirt a parallel zu $e\mathfrak{c}$ nach a' auf E, *so ist die Frage, ob a' die ganze Ebene E durchwandert, wenn K jede Grösse und Lage annimmt, die nach dem Hervorgehobenen möglich ist?* Die Antwort hierauf erhält man am einfachsten, wenn man zunächst nur diejenigen K in's Auge fasst, welche den beliebig angenommenen Halbmesser od von K' zum Radius haben: Die Punkte $\mathfrak{c}$, a beschreiben nun einen Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Ebene auf E senkrecht ist, und der in E den Durchmesser (d) $(\mathfrak{d})$ haben möge. Ist $\mathfrak{c}$ irgendwo auf $\mathfrak{K}$ gewählt, sodann a bestimmt, so ziehe man in a die Tangente at des $\mathfrak{K}$ und den projicirenden Strahl aa', wobei das Dreieck ata' einstimmig ähnlich mit $\mathfrak{c}oe$ sein wird. Setzt man $ot = x$, $ta' = y$, $oe = \beta$, so folgt

$$\frac{y^2}{x^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2};$$

d. h. der Ort von a' ist eine Hyperbel H, welche den Durchmesser (d) $(\mathfrak{d})$ hat, und in dessen Endpunkten parallele Tangenten zu oe. Dreht man jetzt die Ellipse K' um 90^0 in ihrer Ebene um o, wodurch man (K') erhält, so wird (K') durch (d), $(\mathfrak{d})$ gehen und hier von H orthogonal geschnitten werden. Aus der Construction des Ortes von a' folgt sofort, dass die Asymptoten von H den Verbindungslinien von e mit (d), $(\mathfrak{d})$ parallel sind. Zieht man mithin in (d) die Normale von (K') oder eine Parallele zu oe, so schneidet diese die Asymptoten von H in n, $\mathfrak{n}$ so, dass $(d)n = (d)\mathfrak{n} = \beta$; und hieraus folgt nach bekannten Eigenschaften der Ellipse — β ist der zu $o(d)$ conjugirte Halbmesser in (K') —, dass H, (K') coaxial sind, dass ferner on, $o\mathfrak{n}$ die halbe Axensumme und -Differenz von (K') darstellen. Dadurch aber, dass H die Ellipse (K') in (d), $(\mathfrak{d})$ rechtwinklig schneiden und mit ihr coaxial sein soll, ist H mehr als bestimmt, und weil eine mit (K') confocale Hyperbel existirt, welche diese Forderung erfüllt, so muss H selbst diese confocale Hyperbel sein.

Wenn man an die Stelle von od jeden Halbmesser von K' setzt, so tritt statt (d) $(\mathfrak{d})$ jeder Durchmesser von (K') auf, und als Oerter von a' ergeben sich *alle* mit (K') confocalen Hyperbeln. Weil aber durch jeden willkürlichen Punkt von E eine solche möglich ist, so nimmt a' in der That jede denkbare Lage in E ein.

Nach dieser Erörterung ist es nur noch eine leichte Schüleraufgabe, bei gegebenem a' der Reihe nach: 1) den Durchmesser (d) $(\mathfrak{d})$ von (K'), 2) oa, 3) die Projectionsrichtung $e\mathfrak{c}$, 4) K und dessen Radien ob, oc zu ermitteln.

Prag, 25. November 1888.

Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen in Math. Annalen Bd. XXXIII, p. 154.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

Es möge mir gestattet sein, nur *ganz kurz* auf die Bedenken zu antworten, welche Herr Illigens in Bezug auf meine Theorie der Irrationalzahlen ausgesprochen hat. Seine Einwände scheinen mir alle darauf hinaus zu laufen, dass den mit Hülfe von sogenannten Fundamentalreihen eingeführten irrationalen Zahlbegriffen $b, b', b'', \ldots$ die Bedeutung einer anschaulichen *Vielheit* nicht zugesprochen werden könne. Darin hat er gewiss Recht; es ist aber auch weder von mir, noch von Anderen jemals behauptet worden, dass die Zeichen b, b', b'', ... *concrete* Grössen, im eigentlichen Wortsinne seien. Als *abstracte Gedankendinge* sind sie nur Grössen im uneigentlichen oder übertragenen Sinne des Wortes. Für *entscheidend* muss hier angesehen werden, dass man, wie jeder mit meiner Theorie Vertraute weiss, mit Hülfe dieser abstracten Grössen b, b', b'', ... *eigentliche concrete* Grössen, z. B. geometrische Strecken u. s. w. quantitativ genau zu bestimmen im Stande ist (M. v. Math. Ann. Bd. V, p. 127). Wenn dies gehörig berücksichtigt wird, so fallen alle von Herrn I. gemachten Einwände in Bezug auf die in *übertragenem Sinne* gebrauchten Bezeichnungen des „Grösser", „Kleiner" und „Gleichseins" der verschiedenen Zahlgrössen und ebensowenig wird man Anstoss daran nehmen können, eine Zahlgrösse b in *übertragenem Wortsinne* als Grenze der Glieder der ihr zugehörigen Fundamentalreihe zu bezeichnen.

Dass es aber Herrn I. selbst, welcher am Schlusse seines Aufsatzes ausdrücklich die Irrationalzahlen anerkennt, an einer Definition der letzteren fehlt, erkennt man aus seiner Auflösung der Gleichung $x^2 = 3$, welche vermeintlich durch $\sqrt{3}$ geschieht; während offenbar $\sqrt{3}$ nichts anderes ist, als eine Umschreibung der aufgeworfenen Frage: eine Zahl zu suchen, deren Quadrat 3 ist. $\sqrt{3}$ ist also nur ein Zeichen für eine Zahl, welche erst noch gefunden werden soll, nicht aber deren Definition. Letztere wird jedoch in meiner Weise, etwa durch:

$$(1 \cdot 7,\ 1 \cdot 73,\ 1 \cdot 732,\ \cdots)$$

befriedigend gegeben.

Halle, im Januar 1889.

Zur Theorie der Determinanten.

Von

Nicolaus v. Szüts in Budapest.

Vorliegender Aufsatz beschäftigt sich mit der formalen Bildungsweise der Determinanten. Die entwickelten Gleichungen enthalten, als besonderen Fall, die von Herrn Weyrauch im 74. Bande des „Journal f. d. r. u. a. Mathematik" auf Seite 273—276 gegebenen Formeln.

1.

Bezeichnet man mit $A_k^{(n)}$ und $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ die Anzahl der verschwindenden bezw. der nicht verschwindenden Glieder — also die Gliederzahl — einer Determinante n^{ten} Grades: $D^{(n)} = (a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn})$ mit $k \leq n$ transversalen Nullelementen, so bedeuten die Symbole $A_0^{(n)}$ und $\mathfrak{A}_0^{(n)}$ die Anzahl der ersteren bezw. der letzteren Glieder dieser Determinante ohne Nullelemente. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$A_0^{(n)} = 0; \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}_0^{(n)} = n! \tag{2}$$

$$A_k^{(n)} + \mathfrak{A}_k^{(n)} = n! \tag{3}$$

gültig für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Es bezeichne ferner $D_k^{(n)} = (b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn})$ die Determinante, deren Schema aus demjenigen von $D^{(n)}$ durch Vertauschung paralleler Reihen so gebildet ist, dass seine k ersten Hauptdiagonalelemente die k transversalen Nullelemente sind, mithin seine $(n-k)$ letzten Zeilen und Colonnen kein Nullelement enthalten; dann besitzen $D^{(n)}$ und $D_k^{(n)}$ die gleiche Anzahl von Gliedern. Entwickelt man $D_k^{(n)}$ nach den Elementen einer Reihe, deren Hauptdiagonalement den Werth Null hat, z. B. nach den Elementen der k^{ten} Zeile, so ist:

$$D_k^{(n)} = \sum_{q=1}^{q=k-1} b_{kq} \cdot B_{kq} + b_{kk} \cdot B_{kk} + \sum_{q=k+1}^{q=n} b_{kq} \cdot B_{kq}$$

wobei allgemein B_{pr} den Coefficienten des Elements b_{pr} bezeichnet. Der Coefficient B_{kq} ist eine Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Schema entstand aus demjenigen von $D_k^{(n)}$ für $q = 1, 2, \ldots, (k-1)$ durch die Auslassung der k^{ten} Zeile und einer der $(k-1)$ ersten Colonnen, für $q = (k+1) \cdots n$ durch die Auslassung der k^{ten} Zeile und einer der $(n-k)$ letzten Colonnen, mithin besitzt B_{kq} im ersten Falle $(k-2)$ Nullelemente und daher $\mathfrak{A}_{k-2}^{(n-1)}$ Glieder, im zweiten Falle aber $(k-1)$ Nullelemente und somit $\mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)}$ Glieder. Da $b_{kk} = 0$ ist, so erhält man durch die Abzählung der Glieder der einzelnen Summanden der rechten Seite von $D_k^{(n)}$ die Formel:

(4) $$\mathfrak{A}_k^{(n)} = (n-k) \cdot \mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)} + (k-1) \cdot \mathfrak{A}_{k-2}^{(n-1)}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Entwickelt man $D_k^{(n)}$ nach den Elementen einer Reihe ohne Nullelemente, z. B. nach den Elementen der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile, so ist:

$$D_k^{(n)} = \sum_{q=1}^{q=k} b_{k+1,q} \cdot B_{k+1,q} + \sum_{q=k+1}^{q=n} b_{k+1,q} \cdot B_{k+1,q};$$

hieraus erhält man nach einer ähnlichen Erörterung wie bei der Ableitung der Gleichung (4), die Formel:

(5) $$\mathfrak{A}_k^{(n)} = k \cdot \mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)} + (n-k) \cdot \mathfrak{A}_k^{(n-1)}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$; denn es wurde bei der Ableitung dieser Gleichung vorausgesetzt, dass wenigstens eine Zeile und eine Colonne ohne Nullelemente vorhanden ist. Schreibt man in (5) $k-1$ für k und subtrahirt die erhaltene und für $k = 2, 3, \ldots, n$ gültige Gleichung von der Gleichung (4), so erhält man aus diesen beiden nur für $k = 2, 3, \ldots, n$ gleichzeitig gültigen Gleichungen die Formel:

(6) $$\mathfrak{A}_k^{(n)} = \mathfrak{A}_{k-1}^{(n)} - \mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$; dass diese Gleichung auch für $k = 1$ gültig ist, folgt daraus, dass sie für $k = 1$ in:

$$\mathfrak{A}_1^{(n)} = n! - (n-1)!$$

übergeht, mithin die Gliederzahl einer Determinante n^{ten} Grades mit einem einzigen Nullelement richtig angiebt. Schreibt man in der Gleichung (6) τ für k, und bildet daraus die für

$\tau = (p+1), (p+2) \ldots k$ — wobei $p = 0, 1, \ldots, (k-1)$ ist, — sich ergebenden Ausdrücke, so erhält man nach Addition der letzteren folgende Formel:

(7) $$\mathfrak{A}_p^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)} + \sum_{\tau=p}^{\tau=k-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $p = 0, 1, \ldots, (k-1)$. Mit Hülfe der Gleichung (6) kann man eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Grösse $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ beweisen. Wir bilden eine aus $(n+1-r)$ Gliedern bestehende Reihe R_r, deren Glieder aus ihrem allgemeinen Gliede:

$$g_r^{(\lambda)} = \mathfrak{A}_r^{(r+\lambda-1)}$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots, (n+1-r)$ erhalten werden. Bildet man aus der Gleichung (6) für $n = q + \lambda - 1$ und $k = q$ die Formel:

$$\mathfrak{A}_q^{(q+\lambda-1)} = \mathfrak{A}_{q-1}^{(q+\lambda-1)} - \mathfrak{A}_{q-1}^{(q+\lambda-2)},$$

so sieht man, dass das allgemeine Glied:

$$g_{q-1}^{(\lambda+1)} - g_{q-1}^{(\lambda)} = \mathfrak{A}_{q-1}^{(q+\lambda-1)} - \mathfrak{A}_{q-1}^{(q+\lambda-2)}$$

der ersten Differenzreihe von der für $r = q - 1$ entstehenden Reihe R_{q-1} durch den Ausdruck: $\mathfrak{A}_q^{(q+\lambda-1)}$ dargestellt wird, daher mit dem allgemeinen Gliede;

$$g_q^{(\lambda)} = \mathfrak{A}_q^{(q+\lambda-1)}$$

der für $r = q$ erhaltenen Reihe R_q identisch ist, woraus folgt: dass die Reihe R_q die erste Differenzreihe der Reihe R_{q-1} ist, mithin R_q die $(q-1)^{\text{te}}$ Differenzreihe der für $r = 1$ erhaltenen Reihe R_1 bildet. Man erkennt ferner, dass die Reihe R_1 die erste Differenzreihe der für $r=0$ hervorgehenden Reihe R_0 darstellt, sodass die Reihe R_q die q^{te} Differenzreihe der Reihe R_0 bildet; man hat also den Satz:

Die aus $(n+1-k)$ Gliedern bestehende und aus ihrem allgemeinen Gliede: $\mathfrak{A}_k^{(k+\lambda-1)}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, (n+1-k)$ hervorgehende Reihe: $\mathfrak{A}_k^{(k)}, \mathfrak{A}_k^{(k+1)}, \ldots, \mathfrak{A}_k^{(n)}$, deren aufeinanderfolgende Glieder die Gliederzahlen der Determinanten von der k^{ten} bis zur n^{ten} Ordnung mit je k transversalen Nullelementen bedeuten, bildet die k^{te} Differenzreihe der aus $(n+1)$ Gliedern bestehenden Reihe: $0!, 1!, 2!, \ldots, n!$, welche aus ihrem allgemeinen Gliede: $\mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = (\lambda-1)!$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, (n+1)$ erhalten wird; wobei $\mathfrak{A}_0^{(0)} = 0! = 1$.

Es folgt ferner:

Die Gliederzahl $\mathfrak{A}_k^{(k+x)}$ einer Determinante $(k+x)^{\text{ten}}$ Grades mit k transversalen Nullelementen ist das $(x+1)^{\text{te}}$ Glied der k^{ten} Differenzreihe von der Reihe: $0!, 1!, 2!, \ldots, n!$, welche aus ihrem allgemeinen Gliede: $\mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = (\lambda-1)!$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, (n+1)$ erhalten wird.

Mit Hülfe dieser Sätze kann man noch verschiedene Formeln für die Grösse $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ ableiten, insbesondere kann dieselbe in independenter Form dargestellt werden. In der Theorie der Differenzreihen erhält man für eine aus $(n+1)$ Gliedern bestehende Hauptreihe die folgenden Gleichungen:

$$\text{I.}\quad D_k g_\lambda = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-p} (-1)^\tau \cdot (k-p)_\tau \cdot D_p\, g_{k+\lambda-p-\tau},$$

gültig für

$$k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, (n+1-k);\ p = 0, 1, \ldots, (k-1).$$

$$\text{II.}\quad D_k g_{r+\lambda} = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda} (\lambda)_\tau \cdot D_{k+\tau} g_r,$$

gültig für

$$k = 0, 1, \ldots, (n-1);\ r = 1, 2, \ldots, (r+\lambda-1);\ \lambda = 1, \ldots, (n+1-k-r).$$

$$\text{III.}\quad \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda} D_k\, g_{r+\varrho} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda+1} (\lambda+1)_\tau \cdot D_{k+\tau-1} g_r,$$

gültig für

$$k = 0, 1, \ldots, (n-1);\ r = 1, 2, \ldots, (n-k);\ \lambda = 1, \ldots, (n+1-k-r).$$

$$\text{IV.}\quad \sum_{\tau=1}^{\tau=n+1-k} D_k g_\tau = D_{k-1} g_{n+2-k} - D_{k-1} g_1,$$

gültig für

$$k = 1, 2, \ldots, n;$$

wo allgemein $(q)_\tau$ den τ^{ten} Binomialcoefficienten der q^{ten} Potenz bedeutet, und mit:

$$\text{V.}\quad D_0 g_\lambda = \mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = (\lambda-1)!$$

das allgemeine Glied der Hauptreihe, mit

$$\text{VI.}\quad D_k g_\lambda = \mathfrak{A}_k^{(k+\lambda-1)}$$

das allgemeine Glied der k^{ten} Differenzreihe bezeichnet ist.

Aus den Gleichungen I, V, VI folgt für $\lambda = n+1-k$:

$$\mathfrak{A}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-p} (-1)^\tau \cdot (k-p)_\tau \cdot \mathfrak{A}_p^{(n-\tau)}, \tag{8}$$

gültig für

$$k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{und} \quad p = 0, 1, \ldots, (k-1);$$

hieraus erhält man für $p = 0$ die independente Form:

$$\mathfrak{A}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} (-1)^\tau \cdot (k)_\tau \cdot (n-\tau)!, \tag{9}$$

gültig für

$$k = 0, 1, \ldots, n;$$

der Werth $k = 0$ ist zulässig, weil dafür die Gleichung (9) den richtigen Werth: $\mathfrak{A}_0^{(n)} = n!$ liefert.

Aus den Gleichungen II, V, VI folgt für $\lambda = n + 1 - k - r$:

$$(10)\qquad \mathfrak{A}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n+1-k-r} (n+1-k-r)_\tau \cdot \mathfrak{A}_{k+\tau}^{(k+\tau+r-1)},$$

gültig für

$k = 0, 1, \ldots, (n-1)$ und $r = 1, 2, \ldots, (n-k)$.

Für $r = 1$ ergiebt sich hieraus:

$$(11)\qquad \mathfrak{A}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k} (n-k)_\tau \cdot \mathfrak{A}_{k+\tau}^{(k+\tau)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$; der Werth $k = n$ ist zulässig, weil dafür die Gleichung (11) eine Identität wird. In der Gleichung (11) ist $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ durch die Gliederzahlen der Determinanten mit leerer Diagonale von der k^{ten} bis zur n^{ten} Ordnung ausgedrückt. Setzt man in der Gleichung (10) $k = 0$, so ist sie gültig für $r = 1, 2, \ldots, n$, man kann daher in ihr setzen: $r = n + 1 - \varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, n$, und $\tau = \varrho - x$ für $x = 0, 1, \ldots, \varrho$; schreibt man ferner k für ϱ und τ für x, so ergiebt sich:

$$(12)\qquad n! = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} (k)_\tau \cdot \mathfrak{A}_{k-\tau}^{(n-\tau)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$; der Werth $k = 0$ ist zulässig, weil dafür die Gleichung (12) eine Identität wird.

Aus den Gleichungen III, V, VI folgt für $\lambda = n + 1 - k - r$ und $r = 1$:

$$(13)\qquad \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k} \mathfrak{A}_k^{(k+\tau)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k} (n+1-k)_{\tau+1} \cdot \mathfrak{A}_{k+\tau}^{(k+\tau)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$; hieraus erhält man für $k = 0$:

$$(14)\qquad \sum_{\tau=1}^{\tau=n} \tau! = n + \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (n+1)_{\tau+1} \cdot \mathfrak{A}_\tau^{(\tau)}.$$

Aus den Gleichungen IV, V, VI ergiebt sich:

$$(15)\qquad \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k} \mathfrak{A}_k^{(k+\tau)} = \mathfrak{A}_{k-1}^{(n)} - \mathfrak{A}_{k-1}^{(k-1)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$; die linke Seite bezeichnet die Summe der Gliederzahlen der Determinanten von der k^{ten} bis zur n^{ten} Ordnung, wenn jede derselben k transversale Nullelemente enthält.

Bei der Betrachtung des Falles $k = n$ findet auch die Aufgabe ihre Lösung, die Anzahl der Glieder einer Determinante n^{ten} Grades mit leerer Diagonale zu bestimmen. Für $k = n$ erhält man aus den Gleichungen (6) bis (9) und aus (12) die Formeln:

$$\mathfrak{A}_n^{(n)} = \mathfrak{A}_{n-1}^{(n)} - \mathfrak{A}_{n-1}^{(n-1)}, \tag{16}$$

gültig für $p = 0, 1, \ldots, (n-1)$,

$$\mathfrak{A}_n^{(n)} = \mathfrak{A}_p^{(n)} - \sum_{\tau=p}^{\tau=n-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)}, \tag{17}$$

gültig für $p = 0, 1, \ldots, (n-1)$,

$$\mathfrak{A}_n^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n-p} (-1)^\tau \cdot (n-p)_\tau \cdot \mathfrak{A}_p^{(n-\tau)}, \tag{18}$$

gültig für $p = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

$$\mathfrak{A}_n^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot (n)_\tau \cdot (n-\tau)!, \tag{19}$$

$$\mathfrak{A}_n^{(n)} = n! \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot \frac{1}{\tau!} = n! \cdot \sum_{\tau=2}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot \frac{1}{\tau!}; \tag{19a}$$

diese Gleichungen geben $\mathfrak{A}_n^{(n)}$ in independenter Form.

$$n! = \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (n)_\tau \cdot \mathfrak{A}_\tau^{(\tau)} = 1 + \sum_{\tau=2}^{\tau=n} (n)_\tau \cdot \mathfrak{A}_\tau^{(\tau)}; \tag{20}$$

diese Gleichung ergiebt sich auch aus der Gleichung (11) für $k = 0$, sie zeigt an, in welcher Weise die Gesammtgliederzahl $n!$ einer Determinante n^{ten} Grades ohne Nullelemente, durch die Gliederzahlen der Determinanten mit leerer Diagonale von der zweiten bis zur n^{ten} Ordnung ausgedrückt wird.

Setzt man in (4) $k = n$ und schreibt dann $(n+1)$ für n, setzt man ferner in (19a) $n+1$ für n, so erhält man:

$$\mathfrak{A}_{n+1}^{(n+1)} = n \cdot \mathfrak{A}_{n-1}^{(n)}, \tag{21}$$

und

$$\mathfrak{A}_{n+1}^{(n+1)} = (n+1) \cdot \mathfrak{A}_n^{(n)} + (-1)^{n+1}. \tag{22}$$

Aus den Gleichungen (16) und (21) folgt noch:

$$\mathfrak{A}_{n+1}^{(n+1)} = n \cdot \left[\mathfrak{A}_n^{(n)} + \mathfrak{A}_{n-1}^{(n-1)}\right]. \tag{23}$$

Die Gleichungen für die Grösse $A_k^{(n)}$ liessen sich in ähnlicher Weise selbständig herleiten; es sollen aber die Grundformeln aus den vorhergehenden Gleichungen dadurch entwickelt werden, dass man die in ihnen vorkommenden Grössen $\mathfrak{A}$ mit Hülfe der Gleichung (3) durch die entsprechenden Grössen A ausdrückt. Aus den Gleichungen (4) bis (9), (11) und (12) erhält man:

(24) $\quad A_k^{(n)} = (n-1)! + (n-k) A_{k-1}^{(n-1)} + (k-1) \cdot A_{k-2}^{(n-1)},$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

(25) $\quad A_k^{(n)} = k \cdot A_{k-1}^{(n-1)} + (n-k) \cdot A_k^{(n-1)},$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

(26) $\quad A_k^{(n)} = A_{k-1}^{(n)} + \mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)},$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

(27) $$A_k^{(n)} = A_p^{(n)} + \sum_{\tau=p}^{\tau=k-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)},$$

(28) $$A_k^{(n)} = A_p^{(n)} - \sum_{\tau=1}^{\tau=k-p} (-1)^\tau \cdot (k-p)_\tau \cdot \mathfrak{A}_p^{(n-\tau)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $p = 0, 1, \ldots, (k-1)$.

(29) $$A_k^{(n)} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=k} (-1)^\tau \cdot (k)_\tau \cdot (n-\tau)!,$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$; diese Gleichung ergiebt sich auch aus der Gleichung (28) für $p = 0$, und stellt $A_k^{(n)}$ in independenter Form dar.

(30) $$A_k^{(n)} = n! - \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k} (n-k)_\tau \cdot \mathfrak{A}_{k+\tau}^{(k+\tau)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$.

(31) $$A_k^{(n)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=k} (k)_\tau \cdot \mathfrak{A}_{k-\tau}^{(n-\tau)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Aus (27) folgt:

(32) $$A_k^{(n)} = (k-p) \cdot (n-1)! + A_p^{(n)} - \sum_{\tau=p}^{\tau=k-1} A_\tau^{(n-1)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$; $p = 0, 1, \ldots, (k-1)$; hieraus und aus der Gleichung (27) folgt für $p = 0$:

(33) $$A_k^{(n)} = k \cdot (n-1)! - \sum_{\tau=1}^{\tau=k-1} A_\tau^{(n-1)},$$

(34) $$A_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Setzt man in (24) $k=n$ und schreibt dann $(n+1)$ für n, so folgt:

(35) $$A_{n+1}^{(n+1)} = n! + n\cdot A_{n-1}^{(n)}.$$

Aus den Gleichungen (26) bis (34) ergeben sich für $k=n$ folgende Formeln:

(36) $$A_n^{(n)} = A_{n-1}^{(n)} + \mathfrak{A}_{n-1}^{(n-1)},$$

(37) $$A_n^{(n)} = -n!\cdot\sum_{\tau=1}^{\tau=n}(-1)^\tau\cdot\frac{1}{\tau!},$$

diese Gleichung ist die independente Form von $A_n^{(n)}$.

(38) $$A_n^{(n)} = A_p^{(n)} + \sum_{\tau=p}^{\tau=n-1}\mathfrak{A}_\tau^{(n-1)},$$

(39) $$A_n^{(n)} = A_p^{(n)} - \sum_{\tau=1}^{\tau=n-p}(-1)^\tau\cdot(n-p)_\tau\cdot\mathfrak{A}_p^{(n-\tau)},$$

gültig für $p=0, 1, \ldots, (n-1)$.

(40) $$A_n^{(n)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n}(n)_\tau\cdot\mathfrak{A}_{n-\tau}^{(n-\tau)} = 1 + \sum_{\tau=1}^{\tau=n-2}(n)_\tau\cdot\mathfrak{A}_{n-\tau}^{(n-\tau)},$$

(41) $$A_n^{(n)} = (n-p)\cdot(n-1)! + A_p^{(n)} - \sum_{\tau=p}^{\tau=n-1}A_\tau^{(n-1)},$$

gültig für $p=0, 1, \ldots, (n-1)$.

(42) $$A_n^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n-1}\mathfrak{A}_\tau^{(n-1)},$$

und

(43) $$\mathfrak{A}_n^{(n)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n-1}A_\tau^{(n-1)}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (3) ergeben sich aus den Gleichungen (22) und (23) folgende Formeln:

(44) $$A_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)\cdot A_n^{(n)} - (-1)^{n+1},$$

und

(45) $$A_{n+1}^{(n+1)} = n\cdot\left[A_n^{(n)} + A_{n-1}^{(n-1)}\right].$$

Es sei noch bemerkt, dass die Gleichung (26) auch direct erhalten werden kann. Man kann nämlich setzen:

$$A_k^{(n)} = A_{k-1}^{(n)} + \sigma,$$

wenn σ die Anzahl der Glieder bezeichnet, deren Verschwinden durch das Hinzutreten des k^{ten} Nullelements b_k verursacht wird; σ ist also gleich der Gliederzahl des Coefficienten B_k des Elements b_k, B_k ist aber eine Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Schema die $(k-1)$ ersten Nullelemente enthält, mithin wird die Gliederzahl σ von B_k durch das Symbol $\mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)}$ ausgedrückt.

Ordnet man die k transversalen Nullelemente in einer bestimmten, sonst aber ganz beliebigen Reihenfolge, dann bedeutet die Differenz:

$$E_\lambda = A_\lambda^{(n)} - A_{\lambda-1}^{(n)} = \mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(n-1)} \tag{46}$$

die Anzahl derjenigen Glieder, in welchen keines der $(\lambda-1)$ ersten Nullelemente als Factor enthalten ist. Substituirt man den aus der Gleichung (9) dadurch sich ergebenden Werth von $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(n-1)}$, dass darin $(n-1)$ für n, und $(\lambda-1)$ für k gesetzt wird, in die Gleichung (46), so erhält man E_λ in independenter Form:

$$E_\lambda = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} (-1)^\tau \cdot (\lambda-1)_\tau \cdot (n-1-\tau)! \tag{47}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Setzt man in (46) für λ die successiven Werthe: $1, 2, \ldots, k$ und addirt die erhaltenen Ausdrücke, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (34):

$$A_k^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} E_\lambda, \tag{48}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$; in dieser Gleichung ist $A_k^{(n)}$ durch die Anzahl der Glieder ausgedrückt, deren Verschwinden durch die einzelnen, in bestimmter Reihenfolge geordneten Nullelemente bewirkt wird. Aus den Gleichungen (47) und (48) folgt:

$$A_k^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} (-1)^\tau \cdot (\lambda-1)_\tau \cdot (n-1-\tau)! \tag{49}$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$; aus dieser Gleichung erhält man wieder die Gleichung (29), wenn man berücksichtigt, dass der Ausdruck:

$$\sum_{x=0}^{x=k-\lambda} (\lambda - 1 + x)_{\lambda-1} = (k)_\lambda$$

die Summe der den Ausdruck: $(-1)^{\lambda-1} \cdot (n-\lambda)!$ als Factor enthaltenden Glieder bildet.

Substituirt man den Werth der Differenz: $A_k^{(n)} - A_p^{(n)}$ aus der Gleichung (28) in die Gleichungen (27) und (32), schreibt dann $(k+1)$ für k, und $(n+1)$ für (n), so folgt:

$$(50)\qquad \sum_{\tau=p}^{\tau=k}\mathfrak{A}_\tau^{(n)} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=k+1-p}(-1)^\tau\cdot(k+1-p)_\tau\ \mathfrak{A}_p^{(n+1-\tau)},$$

$$(51)\qquad \sum_{\tau=p}^{\tau=k}A_\tau^{(n)} = (k+1-p)\cdot n! + \sum_{\tau=1}^{\tau=k+1-p}(-1)^\tau\cdot(k+1-p)_\tau\cdot\mathfrak{A}_p^{(n+1-\tau)},$$

gültig für $p=0, 1, \ldots, k$ und $k=1, 2, \ldots, n$.

Für $p=0$ erhält man die independente Form der Gleichungen:

$$(52)\qquad \sum_{\tau=0}^{\tau=k}\mathfrak{A}_\tau^{(n)} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=k+1}(-1)^\tau\cdot(k+1)_\tau\cdot(n+1-\tau)!$$

$$(53)\qquad \sum_{\tau=1}^{\tau=k}A_\tau^{(n)} = (k+1)\cdot n! + \sum_{\tau=1}^{\tau=k+1}(-1)^\tau\cdot(k+1)_\tau\cdot(n+1-\tau)!$$

gültig für $k=1, 2, \ldots, n$.

Die aus den Gleichungen (50) bis (53) für $k=n$ folgenden Formeln sind leicht zu entwickeln.

2.

Bezeichnet man mit $F_k^{(n)}$ und $F_{k0}^{(n)}$ die Anzahl der Glieder einer Determinante n^{ten} Grades, welche Elemente eines gegebenen Systems $k \leqq n$ transversaler Elemente als Factor enthalten bezw. nicht enthalten, so bestehen die Gleichungen:

$$(54)\qquad F_k^{(n)} + F_{k0}^{(n)} = n!;$$

$$(55)\qquad F_{k0}^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)};$$

$$(56)\qquad F_k^{(n)} = A_k^{(n)},$$

gültig für $k=0, 1, \ldots, n$; die Annahme $k=0$, ist in dem Sinne zu definiren, dass, wenn alle Elemente des gegebenen Systems den Werth Null haben, die Symbole $F_{00}^{(n)}$ und $\mathfrak{A}_0^{(n)}$, bezw. $F_0^{(n)}$ und $A_0^{(n)}$ dieselbe Bedeutung haben. In Folge der Gleichungen (55) und (56) haben alle für $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ entwickelten Formeln auch für $F_{k0}^{(n)}$, und die für $A_k^{(n)}$ auch für $F_k^{(n)}$ Gültigkeit. Die independente Form von $F_{k0}^{(n)}$ wird also durch Gleichung (9), und diejenige von $F_k^{(n)}$ durch die Gleichung (29) gegeben. Für $k=n$ findet auch die Aufgabe ihre Lösung, die Anzahl der Glieder mit Diagonalelementen und ohne Diagonalelemente zu bestimmen, die independente Form der ersteren ist durch die Gleichung (37), die der letzteren durch die Gleichungen (19) und (19a) gegeben.

Ordnet man die gegebenen k transversalen Elemente in einer bestimmten, sonst aber ganz beliebigen Reihenfolge, so bestimmt die Gleichung:

(57) $$F_\lambda^{(n)} - F_{\lambda-1}^{(n)} = A_\lambda^{(n)} - A_{\lambda-1}^{(n)} = \mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(n-1)} = E_\lambda$$
$$= \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} (-1)^\tau . (\lambda-1)_\tau . (n-1-\tau)!$$

— in welcher die Gleichungen (46) und (47) vereinigt sind —, die Anzahl der Glieder, in welchen keines der $(\lambda-1)$ ersten Elemente des Systems als Factor enthalten ist. Substituirt man in (57) für λ die successiven Werthe: $1, 2, \ldots, n$, so erhält man die Formeln, von welchen Herr Weyrauch in seiner Arbeit ausgegangen ist; die Summe derselben ist: $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} E_\lambda$, d. h. der aus (48) für $k=n$ sich ergebende Ausdruck: $A_n^{(n)} = F_n^{(n)}$, welcher in independenter Form durch die Gleichung (37) gegeben ist, somit die von Herrn Weyrauch abgeleitete Formel: $F^{(1+)}$ darstellt. Hiermit ist zugleich die Weyrauch'sche Analyse als ein Gesetz erwiesen.

Ersetzt man in dem Coefficienten C des Productes π_ϱ von $\varrho \leqq k$ bestimmten Elementen des gegebenen k-gliedrigen Elementensystems, die in π_ϱ *nicht* enthaltenen $(k-\varrho)$ Elemente des Systems durch Nullen, und bezeichnet den so entstehenden Ausdruck durch C_0, so enthält der Ausdruck: $\Pi_\varrho . C_0$ nur diejenigen Glieder der gegebenen Determinante n^{ten} Grades, welche ausschliesslich die ϱ bestimmten Elemente als Factor besitzen, somit ist die Anzahl $f_{k\varrho}^{(n)}$ dieser Glieder gleich der Gliederzahl des Ausdrucks: C_0, welcher in Folge seiner Entstehungsweise eine Determinante $(n-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades mit $(k-\varrho)$ transversalen Nullelementen bildet, mithin $\mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)}$ Glieder besitzt; also ist:

(58) $$f_{k,\varrho}^{(n)} = \mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $\varrho = 0, 1, \ldots, k$.

Schreibt man in der Gleichung (9) $n-\varrho$ für n, und $k-\varrho$ für k, so erhält man die independente Form von $f_{k\varrho}^{(n)}$:

(59) $$f_{k\varrho}^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-\varrho} (-1)^\tau \cdot (k-\varrho)_\tau \cdot (n-\varrho-\tau)!,$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Für $k=n$ erhält man aus den Gleichungen (58) und (59):

(60) $$f_{n,\varrho}^{(n)} = \mathfrak{A}_{n-\varrho}^{(n-\varrho)},$$

(60 a) $$f_{n,\varrho}^{(n)} = (n-\varrho)! \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=n-\varrho} (-1)^\tau \cdot \frac{1}{\tau!},$$

(60 b) $$f_{n,\varrho}^{(n)} = (n-\varrho)! \cdot \sum_{\tau=2}^{\tau=n-\varrho} (-1)^\tau \cdot \frac{1}{\tau!}$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, n$.

Man erhält aus (60a) für $\varrho = n$, $\varrho = n-1$, und $\varrho = n-2$, die Werthe:

(61) $$f_{n,n}^{(n)} = 1;\quad f_{n,n-1}^{(n)} = 0;\quad f_{n,n-2}^{(n)} = 1,$$

wodurch die Anzahl der Glieder bestimmt sind, welche n, $n-1$ und $n-2$ Elemente eines n-gliedrigen Elementensystems, mithin auch ebensoviele Diagonalelemente einer n-gradigen Determinante enthalten. Aus den Gleichungen (58) und (59) erhält man für $\varrho = k$ und $\varrho = 0$:

(62) $$f_{k,k}^{(n)} = (n-k)!,$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

(63) $$f_{k,0}^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)} = F_{k,0}^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} (-1)^\tau \cdot (k)_\tau \cdot (n-\tau)!,$$

d. h. die Gleichung (9), mithin gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$; für $k = 0$ folgt hieraus:

(64) $$f_{00}^{(n)} = \mathfrak{A}_0^{(n)} = F_{00}^{(n)} = n!.$$

Nach Gleichung (58) ist:

$$f_{p,\pi}^{(q)} = \mathfrak{A}_{p-\pi}^{(q-\pi)} \cdots (Q_1).$$

Es bedeute $\varepsilon = \pm 1$ und x eine positive ganze Zahl, deren Werthgebiet später bestimmt wird.

Man setze: $q = n + \varepsilon x$, $\pi = \varrho + \varepsilon x$, $p = k + \varepsilon x$, so erhält man aus den Gleichungen (Q_1) und (58):

(65) $$f_{k,\varrho}^{(n)} = f_{(k+\varepsilon x),(\varrho+\varepsilon x)}^{(n+\varepsilon x)} = \mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)},$$

gültig: bei $\varepsilon = -1$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho = 0, 1, \ldots, k$ und $x = 0, 1, \ldots, \varrho$;
bei $\varepsilon = +1$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho = 0, 1, \ldots, k$ und für x bei jeder positiven ganzen Zahl, d. h. für $x = 1, 2, \ldots, (n+1) \ldots$.

Wenn in (Q_1) einerseits: $q = n$, $p = k$ und $\pi = \varrho - \varepsilon x$, anderseits: $q = n + \varepsilon x$, $p = k + \varepsilon x$, $\pi = \varrho$, gesetzt wird, so erhält man:

(66) $$f_{k,(\varrho-\varepsilon x)}^{(n)} = f_{(k+\varepsilon x),\varrho}^{(n+\varepsilon x)} = \mathfrak{A}_{k+\varepsilon x-\varrho}^{(n+\varepsilon x-\varrho)},$$

gültig: bei $\varepsilon = +1$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho = 0, 1, \ldots, k$, $x = 0, 1, \ldots, \varrho$;
bei $\varepsilon = -1$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ und für solche positive ganze Werthe von ϱ und x, welche der Gl.: $\varrho + x \leq k$ genügen.

Für $k = n$ erhält man aus den Gleichungen (65) und (66):

(67) $$f_{n,\varrho}^{(n)} = f_{(n+\varepsilon x),(\varrho+\varepsilon x)}^{(n+\varepsilon x)} = \mathfrak{A}_{n-\varrho}^{(n-\varrho)},$$

(68) $$f_{n,(\varrho-\varepsilon x)}^{(n)} = f_{(n+\varepsilon x),\varrho}^{(n+\varepsilon x)} = \mathfrak{A}_{n+\varepsilon x-\varrho}^{(n+\varepsilon x-\varrho)},$$

deren Gültigkeitsgebiete aus denjenigen der Gleichungen (65) und (66) für $k = n$ erhalten werden.

Schreibt man: in (16) $n+1-\varrho$ für n; in (21), (22), (23), $n-\varrho$ für n; in (65) einerseits: $n-1$ für k, anderseits: $n+1$ für n und n für k; in (67) einerseits; $n+1$ für n, anderseits: $n-1$ für n, und bezeichnet die so erhaltenen Gleichungen der Reihe nach durch: (Q_2) bis (Q_9), so sind die Gleichungen (Q_2) bis (Q_5) gültig für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, n;$$

die Gleichungen (Q_6) und (Q_9) sind gültig: bei $\varepsilon = -1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (n-1) \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho,$$

bei $\varepsilon = +1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (n-1) \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho \ldots (n+\nu) \ldots;$$

die Gleichung (Q_7) ist gültig: bei $\varepsilon = -1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho$$

bei $\varepsilon = +1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho \ldots (n+\nu) \ldots;$$

die Gleichung Q_8 ist gültig: bei $\varepsilon = -1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (n+1) \quad \text{und} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \varrho,$$

bei $\varepsilon = +1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (n+1) \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho \ldots (n+\nu) \ldots.$$

Nach Einsetzung der Gleichung Q_8, Q_6 in die Gleichung Q_3; der Gleichungen Q_8, 67, und Q_7 in die Gleichung Q_2; der Gleichungen Q_8, 67, Q_9 in die Gleichung Q_5; der Gleichungen Q_8, 67, in die Gleichung Q_4, ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$(69) \qquad f^{(n+1+\varepsilon x)}_{(n+1+\varepsilon x), (\varrho+\varepsilon x)} = (n-\varrho) \cdot f^{(n+\varepsilon x)}_{(n-1+\varepsilon x), (\varrho+\varepsilon x)},$$

$$(70) \qquad f^{(n+1+\varepsilon x)}_{(n+1+\varepsilon x), (\varrho+\varepsilon x)} + f^{(n+\varepsilon x)}_{(n+\varepsilon x), (\varrho+\varepsilon x)} = f^{(n+1+\varepsilon x)}_{(n+\varepsilon x), (\varrho+\varepsilon x)},$$

$$(71) \qquad f^{(n+1+\varepsilon x)}_{(n+1+\varepsilon x), (\varrho+\varepsilon x)} = (n-\varrho) \cdot \left[f^{(n+\varepsilon x)}_{(n+\varepsilon x)(\varrho+\varepsilon x)} + f^{(n-1+\varepsilon x)}_{(n-1+\varepsilon x)(\varrho+\varepsilon x)}\right],$$

$$(72) \qquad f^{(n+1+\varepsilon x)}_{(n+1+\varepsilon x)(\varrho+\varepsilon x)} = (n+1-\varrho) \cdot f^{(n+\varepsilon x)}_{(n+\varepsilon x)(\varrho+\varepsilon x)} + (-1)^{n+1-\varrho}.$$

Die Gleichungen (69) und (71) sind gültig: bei $\varepsilon = -1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (n-1) \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho$$

bei $\varepsilon = +1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (n-1) \quad \text{und} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \varrho \ldots (n+\nu) \ldots.$$

Die Gleichungen (70) und (72) sind gültig: bei $\varepsilon = -1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho,$$

bei $\varepsilon = +1$ für

$$\varrho = 0, 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad x = 0, 1, \ldots, \varrho \ldots (n+\nu) \ldots.$$

Für $x = 0$ erhält man aus den Gleichungen (69) bis (72) folgende Formeln:

(73) $$f_{n+1,\varrho}^{(n+1)} = (n-\varrho)\cdot f_{n-1,\varrho}^{(n)},$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, (n-1)$,

(74) $$f_{n+1,\varrho}^{(n+1)} + f_{n,\varrho}^{(n)} = f_{n,\varrho}^{(n+1},$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, n$,

(75) $$f_{n+1,\varrho}^{(n+1)} = (n-\varrho)\cdot\left[f_{n,\varrho}^{(n)} + f_{n-1,\varrho}^{(n-1)}\right],$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, n$,

(76) $$f_{n+1,\varrho}^{(n+1)} = (n+1-\varrho)\cdot f_{n,\varrho}^{(n)} + (-1)^{n+1-\varrho},$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, n$.

Die in den Gleichungen (65) bis (76) enthaltenen Sätze kann man leicht mit Worten aussprechen.

Aus k Elementen kann man $(k)_\varrho$ Combinationen o. W. zur ϱ^{ten} Classe herstellen. Daher beträgt die Anzahl der Glieder, welche irgend ϱ Elemente eines k-gliedrigen transversalen Elementensystems enthalten:

(77) $$F_{k\varrho}^{(n)} = (k)\varrho\cdot f_{k\varrho}^{(n)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho = 0, 1, \ldots, k$; mit Rücksicht auf Gleichung (63) folgt hieraus für $\varrho = 0$:

(78) $$F_{k0}^{(n)} = f_{k0}^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$.

Aus den Gleichungen: (77) und (58) bezw. (59); (31), (56) und (77); (30, (56) und (58); (12) und (58) erhält man die Formeln:

(79) $$F_{k\varrho}^{(n)} = (k)_\varrho\cdot\mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)} = (k)_\varrho\cdot\sum_{\tau=0}^{\tau=k-\varrho}(-1)^\tau\cdot(k-\varrho)_\tau\cdot(n-\varrho-\tau)!$$

gültig für $\varrho = 0, 1, \ldots, k$ und $k = 1, 2, \ldots, n$,

(80) $$F_k^{(n)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=k}(k)_\tau\cdot\mathfrak{A}_{k-\tau}^{(n-\tau)} - \sum_{\tau=1}^{\tau=k}(k)_\tau\cdot f_{k\tau}^{(n)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=k}F_{k\tau}^{(n)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$,

(81) $$F_k^{(n)} = n! - \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k}(n-k)_\tau\cdot\mathfrak{A}_{k-\tau}^{(n-\tau)} = n! - \sum_{\tau=0}^{\tau=n-k}(n-k)_\tau\cdot f_{k\tau}^{(n)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$,

(82) $$n! = \sum_{\tau=0}^{\tau=k}(k)_\tau\cdot\mathfrak{A}_{k-\tau}^{(n-\tau)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k}(k)_\tau\cdot f_{k\tau}^{(n)},$$

gültig für $k = 0, 1, \ldots, n$; hieraus erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen (77) und (79), die Formel:

(83) $$n! = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} F_{k\tau}^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=p} F_{k\tau}^{(n)} + \sum_{\tau=p+1}^{\tau=k} F_{k\tau}^{(n)};$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Diese Gleichung zeigt an, in welcher Weise die Gesammtgliederzahl $n!$ einer Determinante n^{ten} Grades, aus den Gliedern mit 0 bis k Elementen des gegebenen k-gliedrigen Elementensystems zusammengesetzt ist. Auf der letzten Seite der Gleichung (83) bezeichnet der erste Summand die Anzahl $F_{k,(p-\cdots)}^{(n)}$ der Glieder, welche p und weniger Elemente, der zweite Summand die Anzahl $F_{k,(p+1+\cdots)}^{(n)}$ der Glieder, welche $(p+1)$ und mehr Elemente des gegebenen k-gliedrigen Elementensystems enthalten; man hat also:

(84) $$F_{k,(p-\cdots)}^{(n)} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=p} F_{k\varrho}^{(n)},$$

und

(85) $$F_{k,(p+1+\cdots)}^{(n)} = \sum_{\varrho=p+1}^{\varrho=k} F_{k,\varrho}^{(n)}.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen, kann die Gleichung (83) in der Form geschrieben werden:

(86) $$n! = F_{k,(p-\cdots)}^{(n)} + F_{k,(p+1+\cdots)}^{(n)},$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Aus der Gleichung (85), ferner aus den Gleichungen (84) und (86), erhält man für $p = q - 1$:

(87) $$F_{k,(q+\cdots)}^{(n)} = \sum_{\varrho=q}^{\varrho=k} F_{k\varrho}^{(n)} = \sum_{\varrho=q}^{\varrho=k} (k)_\varrho \cdot \mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)},$$

(88) $$F_{k,(q+\cdots)}^{(n)} = n! - F_{k,(q-1-\cdots)}^{(n)} = n! - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} F_{k,\varrho}^{(n)}$$

die Anzahl der Glieder, welche q und mehr Elemente des gegebenen k-gliedrigen Elementensystems enthalten.

Die Gleichungen (84) und (88) haben, mit Rücksicht auf die Gleichungen (67) und (79), die Form:

(89) $$F_{k,(p-\cdots)}^{(n)} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=p} (k)_\varrho \cdot f_{k,\varrho}^{(n)} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=p} (k)_\varrho \cdot \mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)}$$
$$= \sum_{\varrho=0}^{\varrho=p} (k)_\varrho \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=k-\varrho} (-1)^\tau \cdot (k-\varrho)_\tau \cdot (n-\varrho-\tau)!,$$

$$(90)\qquad F_{k,(q+\cdots)}^{(n)} = n! - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} (k)_\varrho \cdot f_{k\varrho}^{(n)} = n! - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} (k)_\varrho \cdot \mathfrak{A}_{k-\varrho}^{(n-\varrho)}$$

$$= n! - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} (k)_\varrho \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=k-\varrho} (-1)^\tau \cdot (k-\varrho)_\tau \cdot (n-\varrho-\tau)!\,.$$

Die aus den Gleichungen (77) bis (90) für $k = n$ sich ergebenden Ausdrücke sind leicht zu entwickeln.

Wenn für das Symbol: $\mathfrak{A}_r^{(r)}$, welches die Gliederzahl einer Determinante r^{ten} Grades mit r transversalen Nullelementen, somit auch die Anzahl der Glieder ohne Diagonalelemente einer r-gradigen Determinante bezeichnet, die Bezeichnung: $\varphi(r)$ eingeführt wird, so sind die aus den Gleichungen (79), (82), (83), (87), (89), (90) für $k = n$ sich ergebenden Ausdrücke, und die Gleichungen (19a), (37), (60), (60a), (60b), (76), die von Herrn Weyrauch abgeleiteten Formeln.

München, im Juni 1888.

Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Collineationen und Reciprocitäten.

Von

P. Muth in Osthofen.

Die Arbeiten von Herrn **Pasch** in den Mathem. Annalen Bd. 23, S. 419ff. und Bd. 26, S. 211ff., an welche sich der Aufsatz von Herrn **Kraus** in den Mathem. Annalen Bd. 29, S. 234ff. anschliesst, ermöglichen eine geometrische Deutung gewisser bei einer oder mehreren Raumcollineationen auftretenden Invarianten. Es soll im Folgenden auf Grund vorstehend genannter Abhandlungen gezeigt werden, dass, wie die involutorische Verwandtschaft auf der Geraden zur Collineation in eingeschriebener Dreieckslage in der Ebene (Math. Annal. Bd. 23), so die letztere Verwandtschaft zur Raumcollineation in eingeschriebener Tetraederlage und zur Construction solcher räumlicher Fünfecke führt, mit deren Hülfe die Deutung einer Reihe von Invarianten gelingt. Eine Verallgemeinerung der erlangten Resultate mittelst der Z-Lage (Kraus a. a. O.) ermöglicht schliesslich die geometrische Deutung der entsprechenden simultanen Invariante von vier räumlichen Reciprocitäten.

§ 1.

Durch

$$f(xu) = \sum a_{ik} x_i u_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist eine Raumcollineation algebraisch bestimmt.

Auf einer beliebigen Ebene u wird dadurch eine projectivische Verwandtschaft hergestellt, dass man einem Punkte ξ derselben den Punkt ξ_0 zuordnet, der mit dem zu ξ homologen Punkte ξ' in $f = 0$ und einem festen Punkte x in einer Geraden liegt.

$\mathfrak{x}, y, z$ seien drei Punkte auf u, also $u_i = (\mathfrak{x}\, y\, z)_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, die Coordinaten von u, ferner

$$\xi_i = \varkappa \mathfrak{x}_i + \lambda y_i + \mu z_i$$

die Coordinaten von $\mathfrak{x}$ und

$$\xi_{0i} = \varkappa' \mathfrak{x}_i + \lambda' y_i + \mu' z_i$$

die von ξ_0. Man findet alsdann die Coordinaten der Ebene $\mathfrak{x}\, x\, \xi_0$ in der Form

$$\lambda'(\mathfrak{x} x y)_i + \mu'(\mathfrak{x} x z)_i,$$

die der Ebene $y x \xi_0$ als

$$\varkappa'(y x \mathfrak{x})_i + \mu'(y x z)_i.$$

Nun ist aber:

$$\sum a_{ik}(\varkappa \mathfrak{x} + \lambda y + \mu z)_i\,[\lambda'(\mathfrak{x} x y) + \mu'(\mathfrak{x} x z)]_k = 0$$

und

$$\sum a_{ik}(\varkappa \mathfrak{x} + \lambda y + \mu z)_i\,[\varkappa'(y x \mathfrak{x}) + \mu'(y x z)]_k = 0.$$

Hieraus bestimmen sich $\frac{\varkappa'}{\lambda'}$ und $\frac{\varkappa'}{\mu'}$ durch $\varkappa, \lambda, \mu$, oder man hat, wenn ϱ eine Constante bedeutet und $v_i = (x y z)_i$, $w_i = (x z \mathfrak{x})_i$, $t_i = (x \mathfrak{x} y)_i$ gesetzt wird

$$\begin{aligned}
\varrho \varkappa' &= \varkappa f(\mathfrak{x} v) + \lambda f(y v) + \mu f(z v),\\
\varrho \lambda' &= \varkappa f(\mathfrak{x} w) + \lambda f(y w) + \mu f(z w),\\
\varrho \mu' &= \varkappa f(\mathfrak{x} t) + \lambda f(y t) + \mu f(z t).
\end{aligned}$$

Diese Collineation auf Ebene u befindet sich in eingeschriebener Dreieckslage, für (Math. Ann. Bd. 23, S. 425)

$$f(\mathfrak{x} v) + f(y w) + f(z t) = 0.$$

Führt man in diese Gleichung statt der $\mathfrak{x}, y, z, v, w, t$ die x_i und u_i ein, so ergiebt sich

$$\psi(x u) = f(x u) - i u_x = 0,$$

wobei

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$$

und

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4.$$

Also:

„*Durch die Collineation $f(xu) = 0$ wird, wenn man einen Punkt α festlegt, auf jeder Ebene u des Raumes eine projectivische Verwandtschaft dadurch erzeugt, dass man jedem Punkte b von u den Punkt b_0 zuordnet, den die Gerade $\alpha\, b'$, wo b' zu b in $f = 0$ homolog ist, aus u heraussticht. Alle Ebenen u, für welche sich diese Collineation in eingeschriebener Dreieckslage befindet, gehen durch einen Punkt A und die Paare αA erzeugen eine neue Collineation im Raume, deren Gleichung durch $\psi(xu) = f(xu) - i u_x = 0$ gegeben ist.*

Bem. Die Punkte α, α' und A liegen geradlinig.

§ 2.

Im Falle $i = 0$ ist

$$\psi(xu) = f(xu)$$

und A fällt nach a'. Entspricht also in diesem Falle dem Punkte a der Punkt a' und man legt durch a' eine beliebige Ebene, nimmt darin zwei Punkte b und c beliebig an, und construirt nach vorigem Paragraphen b_0 und c_0 und sucht den Punkt $d = (bc_0, b_0c)$, so liegt nach § 1 d_0 auf bc, also

$$d' \text{ auf } abc,$$

ferner pr. Const.

$$\begin{array}{lll} a' & „ & bcd, \\ b' & „ & acd, \\ c' & „ & abd. \end{array}$$

„*Im Falle $i = 0$ giebt es ∞^9 Tetraeder die ihren homologen umgeschrieben sind; man sagt, die Collineation $f = 0$ befindet sich in eingeschriebener Tetraederlage.*"

Wenn

$$\alpha_{ix} = \text{adj. } a_{ik} \text{ in } \Delta = \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

und $j = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44}$, so gilt der Satz:

„*Im Falle $j = 0$ befindet sich die Collineation $f(xu) = 0$ in umgeschriebener Tetraederlage.*"

Also:

„*Im Falle $i = 0$ und $j = 0$ giebt es ∞^9 Tetraeder die ihren homologen um- und ebensoviele die ihren homologen eingeschrieben sind; beiden neunfachen Serien gehören ∞^7 Tetraeder an, welche ihren homologen um- und zugleich eingeschrieben sind.*"

Der letzte Theil dieses Satzes bedarf eines Beweises. Die verlangte Lage ist die folgende:

$$\left.\begin{array}{llll} a' \text{ in } bcd, & b' \text{ in } acd, & c' \text{ in } abd, & d' \text{ in } abc \\ a \;„\; b'c'd', & b \;„\; a'c'd', & c \;„\; a'b'd', & d \;„\; a'b'c' \end{array}\right\} Z.$$

Man nehme zwei Punkte a und b beliebig an, construire a' und b', ziehe die Geraden ab' und ba'. Die Lage Z verlangt, dass cd und $c'd'$ sowohl ab' als $a'b$ schneiden. Die noch zu bestimmende Gerade cd wollen wir γ nennen, ihre homologe γ' und annehmen sie wäre gefunden; dann schneidet

$$\text{die Gerade } a\,b' \text{ die Gerade } \gamma,$$

also auch

$$„ \quad „ \quad a'b'' \quad „ \quad „ \quad \gamma'$$

(hier, wie immer im Folgenden, bezeichnen die Striche oben die ein- resp. mehrmalige Anwendung der Collineation $f(xu) = 0$).

γ' schneidet also $a'b''$ und $a'b$, liegt also in der Ebene $a'bb''$. Ferner

$$\text{Gerade } a'b \text{ schneidet Gerade } \gamma,$$

also

$$\text{„} \quad a''b' \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \gamma';$$

letztere schneidet aber auch: ab', also γ' liegt in der Ebene $ab'a''$. Es erscheint daher γ' als Schnitt der Ebenen $ab'a''$ und $a'bb''$ und ist demnach durch a und b bestimmt; hiermit auch γ.

ab, $a'b'$, γ und γ' müssen zu einer Regelschaar gehören, falls die Lage Z möglich sein soll.

Nennt man den Schnittpunkt von ba' mit $\gamma: c_0$, so liegt c_0' auf γ'; $d_0' = (ba', \gamma')$ entspricht invers d_0 auf γ. Es ist nun im Falle $i = 0$ stets: (analog der Darstellung in Math. Ann. Bd. 26)

$$(a'bcd) + (ab'cd) + (abc'd) + (abcd') = 0.$$

Bei unserer Annahme ist

$$(abc_0d_0') = 0, \quad (ab'c_0d_0) = 0 \quad \text{und} \quad (a'bc_0d_0) = 0$$

also wegen $i = 0$ auch

$$(abc_0'd_0) = 0$$

d. h. d_0c_0' schneidet ab.

Ferner pr. Const.

$$(ab'c_0'd_0') = 0, \quad (a'bc_0'd_0') = 0 \quad \text{und} \quad (a'b'c_0d_0') = 0$$

also wegen $j = 0$ auch

$$(a'b'c_0'd_0) = 0$$

d. h. d_0c_0' schneidet auch $a'b'$.

Es giebt demnach drei Gerade: ab', $a'b$, d_0c_0' und somit eine Serie von Geraden, welche ab, $a'b'$ γ und γ' schneiden.

Nun nehme man auf γ einen Punkt c beliebig an und suche c' auf γ' und bestimme den Punkt:

$$(abc', acb', bca') = (\gamma, abc') = d$$

und hierzu d' auf γ', so liegt d' in abc (wegen $i = 0$), die Geraden dc' und cd' schneiden drei Gerade der obigen Regelschaar, nämlich ab, γ und γ' also auch $a'b'$, wodurch die mit Z bezeichnete Lage erreicht ist. —

Weitere Deutungen von $i = 0$ und $j = 0$ ergeben sich wie folgt: Man nehme

$$b = a', \quad b' = a'',$$
$$c = a'', \quad c' = a''',$$
$$d = a''', \quad d' = a^{(4)},$$

so ist (siehe oben)

$$(aa'a''a^{(4)}) = 0 \quad \text{bei} \quad i = 0.$$

Also:

„*Im Falle* $i = 0$ *liegen die Punkte* $a a' a'' a^{(4)}$ *und im Falle* $j = 0$ *die Punkte* $a a'' a''' a^{(4)}$ *in einer Ebene; im Falle* $i = 0$ *und* $j = 0$ *liegen also* $a a'' a^{(4)}$ *in einer Geraden.*"

Zu den Invarianten i und j tritt im Raume noch eine dritte einfach gebildete Invariante

$$\varphi = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} + a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31} + a_{11} a_{44} - a_{14} a_{41}$$
$$+ a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} + a_{22} a_{44} - a_{24} a_{42} + a_{33} a_{44} - a_{34} a_{43}.$$

Aus

$$j(abcd) = (a'b'c'd) + (a'b'cd') + (a'bc'd') + (ab'c'd')$$

findet man durch einen δ-Process

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial a_{ik}} \cdot p_{ik}, \; p_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k, \quad = 1 \;\;,, \;\; i = 1,$$

$$\varphi(abcd) = (abc'd') + (ab'cd') + (ab'c'd) + (a'bcd') + (a'b'cd) + (a'bc'd).$$

Also bei $\varphi = 0$ ist

$$(abc'd') + (ab'cd') + (ab'c'd) + \cdots = 0.$$

Die vollständige Deutung dieser Relation folgt in § 3. Hier ziehen wir nur aus dieser Darstellung das Resultat:

„*Bei* $\varphi = 0$ *liegen die Punkte* $a, a', a''', a^{(4)}$ *in einer Ebene.*"

Und:

„*Im Falle* $i = j = \varphi = 0$ *befindet sich die Collineation* $f(xu) = 0$ *in Quadrupellage d. h.* $a^{(4)}$ *fällt nach* a."

Bemerkung. Wenn die Coordinaten zweier Fünfecke $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ die Gleichung

$$\begin{aligned}&(abcd)\,(abce)\,(abde)\,(c'd'e'a')\,(b'cde)\\ &+ (acde)\,(acdb)\,(aceb)\,(c'deb)\,(d'c'a'b')\\ &+ (adeb)\,(adec)\,(adbc)\,(d'ebc)\,(e'a'b'c')\\ &+ (aebc)\,(aebd)\,(aecd)\,(e'bcd)\,(a'b'c'd') = 0\end{aligned}$$

erfüllen, so kann man ein Fünfflach construiren, welches dem Fünfeck $abcde$ verkehrt eingeschrieben und dem Fünfeck $a'b'c'd'e'$ umschrieben ist. Zu diesem Resultate gelangt man durch Uebertragung der Arbeit von Herrn Pasch in den Math. Annalen Bd. 26, pag. 211sq. auf den Raum. Die Rechnung ist der daselbst gegebenen vollständig analog. (Vergl. auch Franz London: Ueber polare Fünfflache und Sechsflache etc., Inaugural-Dissertation, Breslau 1886).

Sind zwei Fünfecke durch obige Relation verknüpft, so sagen wir das Fünfeck $abcde$ ruhe auf dem Fünfecke $a'b'c'd'e'$ und letzteres stütze das erstere. Als kurze Schreibweise möchte ich die folgende vorschlagen

$$\frac{\text{Fünfeck } a\,b\,c\,d\,e}{\text{Fünfeck } a'b'c'd'e'} \text{ oder noch einfacher: } \begin{pmatrix} a\;b\;c\;d\;e \\ a'b'c'd'e' \end{pmatrix}.$$

Analog $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ d. h. der Kegelschnitt $f = 0$ ruht auf dem Kegelschnitt $f' = 0$.

Wenn $\begin{pmatrix} a\;b\;c\;d\;e \\ a'b'c'd'e' \end{pmatrix}$, so befindet sich die Collineation

$$[abcde,\; a'b'c'd'e']$$

in eingeschriebener Tetraederlage und umgekehrt. Denn ist

$$[abcde,\; a'b'cd'e']$$

durch

$$\sum a_{ik}\, x_i u_k = 0$$

algebraisch bestimmt und

$$\sum \pm\, a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = R,$$

so hat man

$$(c'd'e'a') = R(cdea) \text{ u. s. w.};$$

also wenn $\begin{pmatrix} a\;b\;c\;d\;e \\ a'b'c'd'e' \end{pmatrix}$, nach obiger Gleichung

$$(b'cde) + (bc'de) + (bcd'e) + (bcde') = 0$$

und somit

$$i = 0.$$

§ 3.

Die in § 1 behandelte Collineation

$$\psi(xu) = iu_x - f(xu) = 0$$

lehrt noch Folgendes. Hält man u fest, so liegen die Punkte x in einer Ebene. Absehend von Collineationen kann man sagen:

„*Zwei collineare Ebenen (ebene Systeme) u und u' bestimmen eine dritte U derart, dass aus sämmtlichen Punkten von U das System u' nach u in eingeschriebene Dreieckslage projicirt wird.*“

Oder auch:

„*Projicirt man u und u' aus irgend einem Punkte von U, so erhält man zwei concentrische collineare Strahlenbündel in eingeschriebener Dreikantslage.*“

Die Ebene U heisse die *i-Ebene* der beiden Ebenen u und u'.

Die Ebenen u und u' sind collinear aufeinander bezogen, wenn man dem Viereck $abcd$ auf u das Viereck $a'b'c'd'$ auf u' zuordnet. Die i-Ebene von u und u' geht durch folgende Punkte

$$(abc',\ \ ab'c,\ \ a'bc) = D,$$
$$(bda',\ \ bd'a,\ \ b'da) = C,$$
$$(cad',\ \ ca'd,\ \ c'ad) = B,$$
$$(bcd'\ \ bc'd,\ \ b'cd) = A.$$

Denn projicirt man etwa von D aus u' nach u, so tritt ein Dreieck und folglich eine Quadrupelserie von Dreiecken auf, welche ihren homologen umschrieben sind. D liegt somit auf der i-Ebene von u und u' etc.

Analog geht die j-Ebene durch $(a'b'c,\ a'bc',\ ab'c')$ etc.

Zwei Fünfecke $abcde$, $a'b'c'd'e'$ liefern 10 Paare homologer Ebenen abc und $a'b'c'$ etc. und jedes dieser Paare bestimmt eine i-Ebene, so dass 10 i-Ebenen auftreten.

Diese 10 i-Ebenen gehen zu je sechs durch fünf Punkte α, β, γ, δ, ε und bestimmen so ein drittes Fünfeck: das *i-Fünfeck* der beiden ersteren.

Bezeichnung: $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist das i-Fünfeck $(abcde,\ a'b'c'd'e')$.

Beweis: Bezeichnet man

die Collineation $[abcde,\ a'b'c'd'e']$ mit $f(xu) = 0$

und bildet

die Collineation $\psi(xu) = f(xu) - iu_x = 0,$

so entspricht dem Fünfeck $abcde$ in der inversen ψ-Collineation ein Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, welches die gewünschte Eigenschaft besitzt. Denn es wird (§ 1) sowohl von α, als β, als γ die Ebene $a'b'c'$ nach abc in eingeschriebene Dreieckslage projicirt, also ist $\alpha\beta\gamma$ die i-Ebene von abc und $a'b'c'$ u. s. w.

Dies Letztere kann man auch so aussprechen:

„*Construirt man zu zwei Fünfecken* $abcde$ *und* $a'b'c'd'e'$ *das* i-*Fünfeck* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ *und bezeichnet die Collineation* $[abcde,\ a'b'c'd'e']$ *mit* $f(xu) = 0$, *so deckt sich die Collineation* $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ abcde]$ *mit* $\psi(xu) = iu_x - f(xu) = 0$."

Folgerungen: Im Falle $i = 0$ deckt sich $\psi(xu) = 0$ mit $f(xu) = 0$, also

die Collineation $[abcde,\ a'b'c'd'e']$ mit $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ abcde]$,

also:

„*Entspricht einem Fünfeck* A *ein Fünfeck* A', *diesem* A'', *diesem* A''', *so fällt bei* $i = 0$ *das* i-*Fünfeck* $(A'A'')$ *nach* A, *bei* $j = 0$ *nach* A'''."

Ferner bilde man die Collineation:

$$[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ a'b'c'd'e'] = \psi(xu)\cdot f(xu),$$

also:

$$\sum_{i,k,l=1,2,3,4} a_{il}\,a_{lk}\,x_i\,u_k - i f(xu) = 0.$$

Dieselbe befindet sich in eingeschriebener Tetraederlage für

$$\sum a_{ii}\, a_{ii} - i^2 = 0$$

oder

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \cdots = \varphi = 0 \quad (\S\ 2).$$

„Im Falle $\varphi = 0$ ruht das i-Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zweier homologen Fünfecke $abcde$, $a'b'c'd'e'$ der Collineation $f = 0$ auf $a'b'c'd'e'$ und das j-Fünfeck $(abcde,\ a'b'c'd'e')$ auf $abcde$.“

Durch die Deutungen der Invarianten i, j und φ einer Collineation sind zugleich die Invarianten

$$\Theta = \sum \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \Theta' = \sum \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

und

$$\Phi = \sum \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix}$$

zweier Reciprocitäten

$$\sum_{i,k=1,2,3,4} a_{ik}\, x_i\, y_k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i,k=1,2,3,4} a'_{ik}\, x_i\, y_k = 0$$

erledigt.

Denn $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ und $\Phi = 0$ hat für die aus beiden Reciprocitäten resultirende Collineation $i = 0$, $j = 0$ und $\varphi = 0$ zur Folge.

Die Deutung von $\Phi = 0$ und $\varphi = 0$, welche Herr Segre in Math. Annal. Bd. 23, S. 422 Anmerk. gegeben, ergiebt sich unmittelbar aus der Darstellung von $\varphi \cdot (abcd) = (abc'd') + \cdots$ in § 2.

§ 4.

Wenn das i-Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ von zwei Fünfecken $a'b'c'd'e'$ und $a''b''c''d''e''$ auf dem Fünfeck $abcde$ ruht, so ist die Gleichung erfüllt

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta\gamma\delta)\,(\alpha\beta\gamma\varepsilon)\,(\alpha\beta\delta\varepsilon)\,(b\gamma\delta\varepsilon)\,(cdea) \\ +\ &(\alpha\gamma\delta\varepsilon)\,(\alpha\gamma\delta\beta)\,(\alpha\gamma\varepsilon\beta)\,(c\delta\varepsilon\beta)\,(deab) \\ +\ &(\alpha\delta\varepsilon\beta)\,(\alpha\delta\varepsilon\gamma)\,(\alpha\delta\beta\gamma)\,(d\varepsilon\beta\gamma)\,(eabc) \\ +\ &(\alpha\varepsilon\beta\gamma)\,(\alpha\varepsilon\beta\delta)\,(\alpha\varepsilon\gamma\delta)\,(e\beta\gamma\delta)\,(abcd) = 0 \end{aligned}$$

nach § 2.

Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sind durch die $a', b' \ldots a'', b''$ auszudrücken. Vergl. hierzu Math. Ann. Bd. 29, l. c., woselbst eine analoge Rechnung für die Ebene durchgeführt ist. Man findet

$$(abcd)(c'd'e'a')(d'e'a'b')(e''a''b''c'')(b'c'd''e)$$
$$+(abcd)(c'd'e'a')(d''e''a''b'')(e'a'b'c')(b'c''d'e)+\cdots$$
$$=\sum(c'd'e'a')(d'e'a'b')(e''a''b''c'')(abcd)(b'c'd''e)=0.$$

Setzt man

$$\text{Collineation } [abcde,\ a'b'c'd'e'] = \sum m_{ik}x_i u_k = 0,$$
$$\sum \pm m_{11}m_{22}m_{33}m_{44} = M$$

und

$$\text{Collineation } [abcde,\ a''b''c''d''e''] = \sum n_{ik}x_i u_k = 0,$$
$$\sum \pm n_{11}n_{22}n_{33}n_{44} = N,$$

so ist

$$(e'a'b'c') = M(eabc),$$
$$(e''a''b''c'') = N(eabc) \text{ etc.}$$

und man hat für die obige Lage

$$(b'c'd''e)+(b'c''d'e)+(b''c'd'e)+\cdots=\sum(b'c'd''e)=0.$$

Nun betrachten wir drei Reciprocitäten

1) $x_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + a_{i4}u_4 \quad (i=1,2,3,4),$

2) $x'_i = a'_{i1}u_1 + a'_{i2}u_2 + a'_{i3}u_3 + a'_{i4}u_4 \quad (i=1,2,3,4),$

3) $x''_i = a''_{i1}u_1 + a''_{i2}u_2 + a''_{i3}u_3 + a''_{i4}u_4 \quad (i=1,2,3,4)$

und deren simultane Invarianten

$$\Pi_1 = \sum \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a''_{41} & a''_{42} & a''_{43} & a''_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Pi_2 = \sum \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a''_{41} & a''_{42} & a''_{43} & a''_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Pi_3 = \sum \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} & a''_{34} \\ a''_{41} & a''_{42} & a''_{43} & a''_{44} \end{vmatrix}$$

oder statt 3 Reciprocitäten 2 Collineationen:

$$\begin{array}{l} \text{die } x_i' \text{ collinear zu den } x_i, \\ \text{,,} \; x_i'' \;\; \text{,,} \;\; \text{,,} \;\; \text{,,} \;\; x_i \end{array}$$

bestimmt durch

$$\sum m_{ik} x_i u_k = 0$$

und

$$\sum n_{ik} x_i u_k = 0.$$

$$\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = A$$

gesetzt, ist

$$\Pi_1 = \sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{vmatrix} \cdot A = \pi_1 \cdot A,$$

$$\Pi_2 = \sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{vmatrix} \cdot A = \pi_2 \cdot A,$$

$$\Pi_3 = \sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{vmatrix} \cdot A = \pi_3 \cdot A.$$

Nun ist

$$\sum \pm m_{11} m_{22} m_{33} m_{44} \cdot (bcde) = (b'c'd'e').$$

Hieraus findet man durch einen δ-Process

$$\sum \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{vmatrix} \cdot (bcde) =$$

$$= (b'c'd'e'') + (b'c'd''e') + (b'c''d'e') + (b''c'd'e')$$

und hieraus durch einen 2ten δ-Process

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial m_{ik}} \cdot p_{ik}, \quad p_{ik} = \begin{matrix} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k' \end{matrix}$$

$$\pi_1 \cdot (bcde) = (bc'd'e'') + (bc'd''e') + \cdots = \sum (bc'd'e'').$$

Also:

Im Falle $\pi_1 = 0$ ruht das i-Fünfeck der Fünfecke A' und A'', welche einem beliebigen Fünfeck A in der m- resp. n-Collineation ent-

sprechen, auf dem Fünfecke A und zugleich das j-Fünfeck von A und A' auf A''.

Aehnlich findet man:

„Im Falle $\varkappa_2 = 0$ gilt die Lage

$$\left(i\text{-Fünfeck } \underset{A''}{A} \text{ und } A'\right) \text{ und zugleich } \left(i\text{-Fünfeck } \underset{A'}{A} \text{ und } A''\right)“.$$

„Bei $\varkappa_3 = 0$ finden folgende Lagen statt

$$\left(i\text{-Fünfeck } \underset{A'}{A''} A\right) \text{ und } \left(i\text{-Fünfeck } \underset{A}{A''} A'\right)“.$$

(Weitere Deutungen findet man § 7.)

Die Deutung von $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$ ist hierdurch erledigt.

§ 5.

Satz: In einem beliebigen Strahlenbündel α wird durch jede Ebene u eine projectivische Verwandtschaft dadurch erzeugt, dass man die ebenen Systeme u' und u'', welche u in einer Collineation $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ zugeordnet sind, aus α projicirt, wodurch man zwei concentrische collineare Strahlenbündel erhält.

Damit sich diese in eingeschriebener Dreikantslage befinden, muss die Ebene u durch einen bestimmten Punkt gehen: A und die Paare αA erzeugen eine neue Collineation $\psi(xu) = \delta\varphi(xu) = 0$.

Beweis. Wir betrachten den Schnitt der collinearen Bündel mit der Ebene u. Soll das Verlangte stattfinden, so muss sich die Collineation

$$\text{Punkt } \varkappa'\lambda'\mu' \text{ collinear zu } \varkappa, \lambda, \mu \quad (\S\ 1)$$

gegen die Collineation

$$\varkappa'', \lambda'', \mu'' \text{ collinear zu } \varkappa, \lambda, \mu$$

in umgeschriebener Dreieckslage befinden. Bezeichnung wie in § 1. Setzt man

$$v_i = (xyz)_i, \quad w_i = (xz\mathfrak{x})_i, \quad t_i = (x\mathfrak{x}y)_i,$$

so muss also

$$\Theta = \sum \begin{vmatrix} f'(\mathfrak{x}v) & f'(yv) & f'(zv) \\ f(\mathfrak{x}w) & f(yw) & f(zw) \\ f(\mathfrak{x}t) & f(yt) & f(zt) \end{vmatrix} =$$

$$= \delta \begin{vmatrix} f(\mathfrak{x}v) & f(yv) & f(zv) \\ f(\mathfrak{x}w) & f(yw) & f(zw) \\ f(\mathfrak{x}t) & f(yt) & f(zt) \end{vmatrix} = \delta u_x^2 \cdot \varphi(xu) = 0$$

sein, wo

$$\varphi(xu) = \sum \alpha_{ik} x_k u_i, \quad \alpha_{ik} = \text{adj. } a_{ik}.$$

Die Collineation $[\alpha A]$ lautet also

$$\psi(xu) = \sum A_{ik} x_k u_i = 0, \quad \text{wo } A_{ik} = \delta \alpha_{ik}.$$

Satz: *Wenn man zu zwei Fünfecken A' und A'' das i-Fünfeck α construirt und ein Fünfeck A beliebig annimmt, ferner die*

die $\begin{array}{lll} \textit{Collineation} & [AA'] & \textit{mit } f(xu) = 0, \\ \quad " & [AA''] & \quad " \ f'(xu) = 0 \end{array}$

bezeichnet, so deckt sich die

$$\textit{Collineation } [\alpha A] \textit{ mit } \psi(xu) = \delta \varphi(xu) = 0.$$

$\psi(xu) = 0$ befindet sich in eingeschriebener Tetraederlage für:

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = \pi_1 = 0$$

in Uebereinstimmung mit vorigem Paragraphen.

§ 6.

Wir betrachten nun 4 Reciprocitäten

$$\begin{aligned} x_i &= a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + a_{i3} u_3 + a_{i4} u_4, \\ x_i' &= b_{i1} u_1 + b_{i2} u_2 + b_{i3} u_3 + b_{i4} u_4, \\ x_i'' &= c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2 + c_{i3} u_3 + c_{i4} u_4, \\ x_i''' &= d_{i1} u_1 + d_{i2} u_2 + d_{i3} u_3 + d_{i4} u_4 \end{aligned}$$

und deren simultane Invariante

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= \sum \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix}.$$

Statt der 4 Reciprocitäten fassen wir die drei Collineationen in's Auge

System der x' collinear zum System der x,
" " x'' " " " " x,
" " x''' " " " " x.

Die erste sei durch: $\sum m_{ik} x_i u_k = 0,$

„ 2te „ „ : $\sum n_{ik} x_i u_k = 0,$

„ 3te „ „ : $\sum p_{ik} x_i u_k = 0,$

algebraisch fixirt.

H = 0 documentirt sich für die 3 Collineationen im Verschwinden einer Invariante $\eta = 0$, wo

$$\eta = \sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix}.$$

Man findet ähnlich wie oben

$$\eta(bcde) = (bc'd''e''') + (bc'd'''e'') + (bc''d'e''') + \cdots = \sum (bc'd''e''').$$

Es ist also zu ermitteln, welche geometrische Bedeutung

$$\sum (bc'd''e''') = 0$$

hat.

Satz: „Entspricht einem Viereck

$abcd$ auf einer Ebene u ein Viereck

$a'b'c'd'$ „ „ „ u', und ein Viereck

$a''b''c''d''$ „ „ „ u'',

(wo u, u', u'' nicht zusammenliegen), so bestimmen diese 3 Ebenen u, u', u'' eindeutig eine vierte U mit folgender Eigenschaft: projicirt man von U aus irgend zwei der 3 Vierecke auf die Ebene des dritten, so erhält man auf dieser Ebene 3 Vierecke in Z-Lage, d. h. das Involutionsviereck je zweier derselben ruht auf dem dritten.“ (Kraus l. c.)

Wir wollen desshalb die Ebene U die *Z-Ebene* der drei Ebenen u, u', u'' nennen. Man kann auch sagen: drei collineare Ebenen bestimmen eine 4te, aus deren sämmtlichen Punkten zwei der collinearen Ebenen auf die dritte in Z-Lage, oder alle drei durch drei concentrische collineare Strahlenbündel in Z-Lage projicirt werden.

Der Beweis liegt in den Ausführungen des § 8.

Es ist

$$\begin{aligned} \varrho a_i + \sigma b_i + \tau c_i + \omega d_i &= 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ \varrho' a_i' + \sigma' b_i' + \tau' c_i' + \omega' d_i' &= 0, \quad \text{„} \\ \varrho'' a_i'' + \sigma'' b_i'' + \tau'' c_i'' + \omega'' d_i'' &= 0, \quad \text{„} \end{aligned}$$

wo ϱ, $\sigma \ldots \varrho' \ldots \sigma''$ bestimmte Constanten sind.

Die Gleichung der Z-Ebene schreibt sich alsdann in viererlei Form:

$$1)\quad \varrho\sigma'\tau''(ab'c''x)+\varrho\sigma''\tau'(ab''c'x)+\varrho'\sigma\tau''(a'bc''x)+\varrho''\sigma\tau'(a''bc'x)$$
$$+\varrho'\sigma''\tau(a'b''cx)+\varrho''\sigma'\tau(a''b'cx)=0,$$

oder kurz:

$$\begin{cases} 1)\quad \sum \varrho\sigma'\tau''(ab'c''x)=0,\\ 2)\quad \sum \varrho\sigma'\omega''(ab'd''x)=0,\\ 3)\quad \sum \varrho\tau'\omega''(ab'd''x)=0,\\ 4)\quad \sum \sigma\tau'\omega''(bc'd''x)=0.\end{cases}$$

Beweis. Man nenne

$$(a'd',\ b'c')=f';\quad (a''d'',\ b''c'')=f'',$$
$$(a'c',\ b'd')=g'\quad \text{u. s. w.},$$
$$(a'b',\ c'd')=h'\quad \text{u. s. w.}$$

und ziehe durch a die 3 Geraden, welche resp. schneiden

$$b'c''\ \text{und}\ b''c',$$
$$b'f''\ \ „\ \ b''f',$$
$$c'f''\ \ „\ \ c''f';$$

sie liegen in einer Ebene A.

Durch b ziehe man

eine Gerade, welche $a'c''$ und $a''c'$, ferner
„ „ „ $a'g''$ „ $a''g'$, „
„ „ „ $c'g''$ „ $c''g'$ schneidet;

sie liegen in einer Ebene B.

Durch c ziehe man

eine Gerade, welche $a'b''$ und $a''b'$, ferner
„ „ „ $a'h''$ „ $a''h'$, „
„ „ „ $b'h''$ „ $b''h'$ schneidet;

sie liegen in einer Ebene C.

Der Punkt (ABC) liegt auf der Z-Ebene; denn projicirt man von (ABC) aus die Dreiecke $a'b'c'$ und $a''b''c''$ nach der Ebene abc, so folgt aus obiger Construction, dass das Involutionsdreieck der Projectionen von $a'b'c'$ und $a''b''c''$ dem Dreieck abc umgeschrieben ist, wie es sein muss. (Vergl. Kraus, „die geometrische Deutung etc.“, Inaug.-Diss., Giessen 1886, pag. 19. § 11).

Ebenso kann man von drei anderen Dreiecken z. B. abd, $a'b'd'$, $a''b''d''$ ausgehen und auf diese Weise eine Reihe von Punkten construiren (zunächst 12), welche alle in einer Ebene, der Z-Ebene, liegen.

Andererseits erkennt man rechnend, dass (ABC) etc. den Gleichungen 1) oder 2), 3), 4) genügen, wodurch nachgewiesen ist, dass die Z-Ebene durch 1), 2), 3), 4) analytisch gegeben ist.

Bemerkung: Lässt man $a''b''c''d''$ nach $abcd$ fallen, so geht die Z-Lage in die eingeschriebene Dreieckslage, die Z-Ebene in die i-Ebene von u und u' über. Ihre Gleichung lautet:

$$\sum \varrho\sigma\tau'(abc'x) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Nimmt man 3 Fünfecke $abcde$, $a'b'c'd'e'$, $a''b''c''d''e''$ beliebig an, so kann aus denselben ein viertes wie folgt construirt werden; man construirt zu je drei zusammengehörigen Ebenen die Z-Ebene und erhält auf diese Weise 10 Z-Ebenen, welche zu je 6 fünfmal durch einen Punkt gehen und so ein neues Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, das *Z-Fünfeck* der 3 übrigen, bestimmen. — Der Beweis lässt sich direct führen analog Math. Ann. Bd. 29 l. c. (Vergl. auch § 8).

Nimmt man ausser drei Fünfecken $a'b'c'd'e'$, $a''b''c''d''e''$, $a'''b'''c'''d'''e'''$ und deren Z-Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ein Fünfeck $abcde$ im Raume an, so ruht $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ auf $abcde$ unter der Bedingung

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma\varepsilon)(\alpha\beta\delta\varepsilon)(b\gamma\delta\varepsilon)(cdea) + \cdots = 0 \quad (\S\ 4).$$

Drückt man auch hier die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ durch die $a', \ldots, a'', \ldots, a''' \ldots$ aus, so erhält man

$$\begin{aligned}&(cdea)(d'e'a'b')(e''a''b''c'')(a'''b'''c'''d''')(bc'd''e''') + \\ &+ (cdea)(d'e'a'b')(e'''a'''b'''c''')(a''b''c''d'')(bc'd'''e'') + \cdots = 0,\end{aligned}$$

(24 Addenden!), oder kurz

$$\sum (cdea)(d'e'a'b')(e''a''b''c'')(a'''b'''c'''d''')(bc'd''e''') = 0.$$

„*Wenn vier Fünfecke des Raumes eine solche Lage haben, dass das Z-Fünfeck von dreien derselben auf dem vierten ruht, so ruht das Z-Fünfeck von drei beliebigen derselben auf dem vierten.*“

Dies ergiebt die Symmetrie.

Bezeichnet man die Collineation

$$\begin{aligned}&(abcde,\ a'b'c'd'e') &&\text{mit} && \sum m_{ik}x_iu_k = 0,\\ &(abcde,\ a''b''c''d''e'') &&\text{„} && \sum n_{ik}x_iu_k = 0,\\ &(abcde,\ a'''b'''c'''d'''e''') &&\text{„} && \sum p_{ik}x_iu_k = 0,\end{aligned}$$

so schreibt sich vorstehende Relation

$$(b c' d'' e''') + (b c' d''' e'') + (b' c'' d''' e) + \cdots = \sum (b c' d'' e''') = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung wird demnach $\eta = 0$ (Anfang des § 6). Also:

„*Im Falle* $\eta = 0$ *ruht das Z-Fünfeck von irgend dreien der Fünfecke* $abcde$, $a'b'c'd'e'$, $a''b''c''d''e''$ *und* $a'''b'''c'''d'''e'''$ *auf dem vierten.*“

Die π-Invarianten sind specielle Fälle der Invariante η. Ausser den in § 4 gegebenen Deutungen ergeben sich noch die folgenden:

„*Im Falle* $\pi_1 = 0$ *ruht das Z-Fünfeck dreier Fünfecke* $AA'A''$ *auf* A', *bei* $\pi_2 = 0$ *auf* A *und bei* $\pi_3 = 0$ *auf* A''.“

§ 7.

Durch drei Collineationen $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ und $f''(xu) = 0$ wird eine vierte, wie folgt, erzeugt:

„Man projicirt von einem Punkte α aus die collinearen Systeme u', u'', u''', welche einer Ebene u in $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$ entsprechen, durch 3 concentrische collineare Strahlenbündel. Alle Ebenen u, für welche sich die letzteren in Z-Lage befinden, gehen durch einen Punkt A und die Paare αA erzeugen die neue Collineation:

$$\psi(xu) = \delta^2 \varphi(xu) = 0,$$

wo $\psi(xu)$ aus $\varphi(xu)$ durch einen δ-Process nach a' und einen 2ten nach a'' hervorgeht.“

Beweis. Man betrachte wieder die 3 Collineationen, welche durch den Schnitt von u mit den collinearen Strahlenbündeln entstehen. Die H-Invariante dieser drei Collineationen muss verschwinden. (Kraus a. a. O.)

$$\mathrm{H} = \sum \begin{vmatrix} f(\mathfrak{x}v) & f(yv) & f(zv) \\ f'(\mathfrak{x}w) & f'(yw) & f'(zw) \\ f''(\mathfrak{x}t) & f''(yt) & f''(zt) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bezeichnung wie § 1 und § 5. Oder man hat

$$\delta^2 \begin{vmatrix} f(\mathfrak{x}v) & f(yv) & f(zv) \\ f(\mathfrak{x}w) & f(yw) & f(zw) \\ f(\mathfrak{x}t) & f(yt) & f(zt) \end{vmatrix} = \delta^2 u_x{}^2 \cdot \varphi(xu) = u_x{}^2 \delta^2 \cdot \varphi(xu) = 0;$$

$u_x = 0$ kommt nicht in Betracht, also

$$\psi(xu) = \delta^2 \varphi(xu) = 0;$$

dabei ist

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial a_{ik}} \cdot a'_{ik} = U',$$

$$\delta^2 U = \sum \frac{\partial U'}{\partial a_{ik}} \cdot a''_{ik}, \quad \text{und} \quad \varphi(xu) = \sum a_{ik} x_k u_i.$$

Diese ψ-Collineation befindet sich in eingeschriebener Tetraederlage für

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a''_{41} & a''_{42} & a''_{43} & a''_{44} \end{vmatrix} = \eta = 0$$

in Uebereinstimmung mit folgendem Satz:

„*Nimmt man ausser drei Fünfecken A', A'', A''' und deren Z-Fünfeck $\mathfrak{A}$ ein Fünfeck A im Raume beliebig an, bezeichnet*

die Collineation $[AA']$ *mit* $f(xu) = 0$,

„ „ $[AA'']$ „ $f'(xu) = 0$,

„ „ $[AA''']$ „ $f''(xu) = 0$,

so deckt sich die Collineation $[\mathfrak{A}A]$ *mit obiger Collineation*

$$\psi(xu) = \delta^2 \varphi(xu) = 0.$$

§ 8.

Die Ausdehnung der Untersuchungen von Herrn Pasch in Math. Annal. Bd. 23 über ebene Reciprocitäten auf den Raum unterliegt nach dem bisher Gebrachten keiner Schwierigkeit. Ich theile desshalb den allgemeinsten auf 3 Reciprocitäten

$$\sum a_{ik} x_i y_k = 0, \quad \sum a'_{ik} x_i y_k = 0, \quad \sum a''_{ik} x_i y_k = 0$$

bezüglichen Satz ohne Beweis mit:

Durch 3 Reciprocitäten wird eine vierte erzeugt wie folgt: Einem beliebigen ebenen Systeme u entsprechen in den 3 Reciprocitäten drei zu u reciproke, also unter sich collineare Strahlenbündel; sämmtliche Ebenen v, welche diese in Z-Lage schneiden, gehen durch einen Punkt p und die Paare up erzeugen die neue Reciprocität: $\psi(uv) = 0$, wo

$$\psi(uv) = \delta^2 \varphi(uv) \quad \text{und} \quad \varphi(uv) = \sum a_{ik} u_i v_k$$

ist und die δ-Processe wie in § 7 anzuwenden sind.

Indem man

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad a'_{ik} = a'_{ki} \quad \text{und} \quad a''_{ik} = a''_{ki}$$

werden lässt erhält man Polarreciprocitäten und auch $\psi(uv) = 0$ wird polarreciprok. Für die Flächen 2ter Ordnung $f(xx) = 0$, $f'(x, x) = 0$,

$f''(xx) = 0$ und den Ebenenbündel 2ter Ordnung $\psi(uv) = 0$ gilt nach Obigem der Satz:

„*Jeder der drei Kegelschnitte, welche durch den Schnitt einer Ebene des Ebenenbündels II. O. mit den drei Flächen II. O. entstehen, ist zu dem Kegelschnitt der 8 Tangenten der beiden übrigen conjugirt.*“

Dies ergiebt sich aus dem Begriffe der ψ-Reciprocität (siehe oben) und aus § 13 der Inaug. Diss. von Herrn Kraus: Ueber die geometrische Deutung etc. Giessen 1886.

Lässt man die Reciprocität $f'' = 0$ und $f = 0$ zusammenfallen, so erhält man specielle Sätze und im Falle von Polarreciprocitäten erhält man die Fläche $\tau = 0$ bei Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. des Raumes, 3. Auflage, I. Theil, S. 269.

Die an dieser Stelle gegebene geometrische Deutung von $\tau = 0$ ergiebt sich unmittelbar aus unserer allgemeineren im vorstehenden Satze.

Osthofen, im Juli 1888.

Zur Auflösung der Gleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

In den Lehrbüchern der Algebra wird die Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten geschieden in eine „*numerische*" und eine „*algebraische*"; die erstere ist zwar allgemeiner gültig, beschränkt sich aber darauf, geeignete Annäherungswerthe für die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung zu ermitteln; die letztere ist bis jetzt nur in besonderen Fällen durchgeführt; sie verfolgt das Ziel, die Gleichungen auf canonische, durch ihre Einfachheit ausgezeichnete Formen, oder, wie man auch sagt, die algebraischen Ausdrücke für die Wurzeln auf canonische „*Irrationalitätstypen*" zurückzuführen.

Bei der „*algebraischen*" Auflösung im *engeren* Sinne des Wortes — wie sie gewöhnlich verstanden wird — kommt nur eine einzige solche canonische Form, die der *Kreistheilungsgleichung*, in Betracht.

Neuerdings ist man bekanntlich mit grossem Erfolge auf dieser Bahn fortgeschritten und hat damit den Begriff einer „*algebraischen*" Gleichungsauflösung in *weiterem* Sinne geschaffen.

Zwei Hauptmomente erscheinen dabei als massgebend: einmal das „*arithmetische*", dass man sich, soweit möglich, auf *rationale* Processe beschränkt, also in Galois'schem Sinne mit rational bekannten Grössen operirt; sodann das „*gruppentheoretische*", dass es weniger auf das Studium der Wurzeln einer einzelnen Gleichung ankommt, als auf dasjenige rationaler Functionen der Wurzeln einer ganzen „*Classe*" von Gleichungen, die einem gegebenen Rationalitätsbereich angehören.

Im Folgenden gedenke ich in einer andern Richtung vorzugehen, indem ich das Wesen der numerischen Annäherung mit der arithmetisch-rationalen Seite der algebraischen Auflösung zu einer Methode*) verknüpfe, welche ich als die der „*rationalen Auflösung*" zu bezeichnen mir erlaube; sie führt zu einer gleichmässigen Darstellung aller Wurzeln einer einzeln vorgelegten Gleichung, die nicht nur dem praktischen Bedürfniss der Auswerthung Rechnung trägt, sondern auch,

---

*) Vgl. auch „Nekrassoff, Ueber trinomische Gleichungen", diese Annalen Band XXIX.

in transcendente Form gekleidet, die Natur der algebraischen Irrationalitäten als solcher in's Licht stellt.*)

Dies geschieht wie von selber, sobald man von speciellen Irrationalitäten ganz absieht und auf die allgemeinen und strengen Definitionen zurückgreift, vermöge deren man in neuerer Zeit**) das Irrationale aus dem Rationalen abgeleitet hat. Insbesondere sei hier daran erinnert, wie Herr G. Cantor eine reelle irrationale Grösse als „*Grenzwerth*“ einer einfach unendlichen Reihe (bestimmter Beschaffenheit) von rationalen Zahlen einführt, eine Definition, die mit Leichtigkeit auch auf die Erzeugung von imaginären Irrationalen übertragen werden kann.

Darauf gründen wir die Definition:

„*Eine Gleichung μ^{ten} Grades rational (in allgemeinerem Sinne) auflösen, heisst μ Reihen rational bekannter Grössen von der Form:*

(R) $$R_1,\ R_2,\ \ldots R_n,\ \ldots$$

auffinden, sodass der Grenzwerth $\lim_{n=\infty} R_n$ *je eine bestimmte Wurzel der gegebenen Gleichung liefert.*“

Um nun eine gleichmässige Behandlung aller μ Wurzeln zu ermöglichen, erweist es sich als das Zweckmässigste, nur *eine* solche Reihe von Grössen R zu Grunde zu legen, dieselben aber mit einem noch willkürlichen Parameter x auszustatten, um dann durch passende Veränderung von x (im complexen Werthgebiete) sämmtliche Wurzeln der Gleichung successive hervorzubringen.

Zu derartigen Reihen gelangt man auf ganz natürlichem Wege, sobald man die Art der *Annäherung* an eine Wurzel näher charakterisirt, die dadurch vor sich geht, dass man (wenigstens von einem bestimmten n an) vom Gliede R_n zum nächstfolgenden R_{n+1} übergeht. Man kann und wird, falls die Methode der Auflösung zugleich eine praktisch brauchbare sein soll, der Reihe (R) die Forderung auferlegen, *möglichst rasch zu convergiren.*

---

*) Dass diesen Anforderungen die bisher bekannten Annäherungsmethoden nicht oder nur theilweise genügen, wird am Schlusse der Abhandlung kurz gezeigt.

**) Vgl. Cantor, Math. Ann. Bd. V; Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1878; Lipschitz, Lehrbuch der Analysis; Stolz, Vorlesungen über Arithmetik; Biermann, Analytische Functionen; die Vorlesungen von Weierstrass. Die Ausführungen des Textes bieten geradezu, wie ich meine, ein praktisches Beispiel für die theoretischen Anschauungen der Herren Cantor und Dedekind vom Irrationalen, welche sich in diesem Falle auch ungezwungen in einander überführen lassen, sobald man die von Herrn Dedekind l. c. eingeführten „Classen“ auf eine gewisse Umgebung (cf. § 4) der fraglichen Irrationalität einschränkt. Für reelle (algebraische) Irrationale insbesondere vgl. pg. 520.

Dies erreichen wir durch folgende Ueberlegung. Ist $f(z) = 0$ die vorgelegte Gleichung, so stellen die Werthe $|f(R_n)|$ und $|f(R_{n+1})|$ zwei „Fehler" dar, von denen der letztere dem ersteren gegenüber möglichst klein sein soll. Nehmen wir an, (wozu wir nur n genügend hoch zu wählen haben), dass $|f(R_n)| < 1$, so setzen wir die beiden, in Rede stehenden Fehler dadurch *direkt* in die gewünschte Beziehung zu einander, dass wir $f(R_{n+1})$ mit einer möglichst hohen *Potenz* von $f(R_n)$ (bis auf einen unwesentlichen Factor) *proportional* machen.

Diese Bedingung möge bereits für $n = 1$ erfüllt sein: ferner wählen wir das erste Glied R_1 selbst noch ganz willkürlich, gleich x (wo nur $|f(x)| < 1$ sein soll), und lassen das folgende Glied R_2 rational von x abhängen, R_3 wiederum rational von R_2 u. s. f.

Damit reducirt sich die Aufgabe der „Auflösung" auf folgende einfachere, rein algebraische:

„*Eine solche rationale, rationalbekannte Function y von x zu finden, dass $f(y)$ mit einer möglichst hohen Potenz von $f(x)$ proportional wird.*"

Es ergiebt sich, dass diese Hülfsaufgabe formal eine ganz bestimmte Lösung hat, die nur insoweit willkürlich ist, als eine arbiträre ganze Function einer Variabeln in gewisser Weise in sie eingeht.

Die Zahl, welche den Exponenten der gemeinten Potenz von $f(x)$ angiebt, hängt in einfacher Weise von der Gradzahl der rationalen Function y (von x) ab. Man kann daher entweder diese Gradzahl (und damit auch jenen Exponenten) fest lassen, und die „Operation" R_n immer wieder von Neuem (auf y u. s. f.) anwenden, oder aber umgekehrt x als unveränderliches Argument betrachten, und die Gradzahl dafür fortwährend wachsen lassen — beidemal erhält man Reihen (R), deren Grenzwerth bei Variation des Parameters x — abgesehen von festen Ausnahmswerthen und auch von dem Falle, wo der Grenzwerth selbst völlig unbestimmt bleibt — alle Wurzeln der ursprünglichen Gleichung und nur diese liefert. Und zwar zerlegt sich die ganze complexe x-Ebene in μ, von geraden Linien begrenzte Gebiete, von der Beschaffenheit, dass, so lange sich x *innerhalb* eines solchen Gebietes bewegt, stets nur ein- und dieselbe Wurzel dargestellt wird.

Verwandelt man in bekannter Weise die discrete Reihe von Grössen R in eine eigentliche, gleichmässig convergente Reihe, so stellt die letztere eine Function von x dar, von der Natur der in neuerer Zeit von Herrn Weierstrass*) betrachteten, mit der Eigenschaft, in μ

*) In den Berliner Monatsberichten von 1879, 1880. Vgl. Pringsheim, Math. Ann. Bd. XXII. Das daselbst auf pg. 110 mitgetheilte Beispiel des Herrn Tannery stellt geradezu unsere „rationale Auflösung" dar für eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln ± 1.

verschiedenen Gebieten der x-Ebene μ völlig verschiedene analytische Functionen (in unserem Falle Constante, nämlich die Wurzeln der vorgelegten Gleichung) zu repräsentiren.

§ 1.

Ein Hülfssatz aus der Analysis situs.

Gegeben seien in einer Ebene μ Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$, nebst den $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ Geraden $m_{12}, \ldots$, welche auf den Strecken $\overline{\alpha_1 \alpha_2}, \ldots$ in ihren bezüglichen Mittelpunkten $M_{12}, \ldots$ senkrecht stehen.

„*Dann lässt sich die ganze Ebene auf nur* e i n e *Art in* μ *geradlinige Polygone* $[\alpha_i]$ *zerlegen von der Beschaffenheit, dass ihre Seiten Stücke von Geraden* m, *ev. noch der unendlich fernen Geraden sind, und jeder Punkt im Innern eines Polygones* $[\alpha_i]$ *dem Punkte* α_i *näher liegt, als allen anderen Punkten* α."

Der Beweis ist einfach. Zunächst ist klar, dass jeder im Endlichen gelegene Punkt P der Ebene — falls er nicht etwa von zwei (oder mehreren) Punkten α gleichweit absteht, d. h. auf einer Geraden m liegt — *einem* bestimmten der Punkte α *am nächsten* liegen muss.

Daher ist der geometrische Ort der Punkte P, die vom Punkte α_i weniger weit abstehen, als von den übrigen Punkten α, das Innere eines Polygones $[\alpha_i]$ von der angegebenen Art, welches man erhält, wie folgt.

Sei α_k unter den übrigen Punkten α der α_i zunächst befindliche (resp. wenn es mehrere solche giebt, irgend einer derselben). Dann gehe man vom Punkte M_{ik} auf der Geraden m_{ik} in einer der beiden möglichen Richtungen entlang, bis zu der Stelle M_{ikl}, wo m_{ik} zum *ersten* Male einer Geraden m_{il} begegnet. Von da auf demjenigen Theile der Geraden m_{il}, der mit der Richtung von m_{ik} den kleineren Winkel bildet, weiter bis zu dem Punkte M_{ilm} in dem m_{il} zuerst wieder von einer Geraden m_{im} getroffen wird, u. s. f. Entweder gelangt man so zur Geraden m_{ik} und zum Punkte M_{ik} zurück, oder man stösst auf eine Gerade m_{ip}, die, ohne eine weitere Gerade m_{iq} zu treffen, in's Unendliche verläuft. Im letzteren Falle führe man den angegebenen Process noch einmal durch, von M_{ik} auf m_{ik} die zweite, noch übrig gebliebene Richtung einschlagend.

Sollten im Besonderen in einem Punkte M_{ikl} noch weitere Geraden m_{ir} einmünden, so wähle man als Gerade m_{il} diejenige aus, welche mit m_{ik} den kleinsten Winkel macht.

Endlich leuchtet ein, dass man bei Ueberschreiten einer Seite des Polygons $[\alpha_i]$, etwa der auf m_{il} befindlichen, unmittelbar in das Innere des Polygons $[\alpha_i]$ kommen muss, sodass jedes Gebiet $[\alpha_i]$ ein einfach zusammenhängendes Stück der Ebene bildet.

Wir sprechen den Inhalt des obigen Satzes auch in analytischer Form aus, nämlich:

„Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ μ beliebige complexe Werthe, und x ein weiterer, der nur so gewählt sein soll, dass keine zwei der Moduln $|x-\alpha_i|$, $|x-\alpha_k|, \ldots$ einander gleich sind, so existirt unter den Grössen α stets eine, α_i, von der Beschaffenheit, dass die $\mu-1$ Moduln $\left|\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right|$, $\left|\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_l}\right|, \ldots$ sämmtlich kleiner als Eins sind."

Mit Hülfe dieses Satzes beweist man den folgenden:

„Ist $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\mu)$, und bedeuten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$ beliebige complexe Constante, (deren Moduln jedoch endliche und nicht verschwindende Grössen seien) sowie n eine positive ganze Zahl, so lässt sich, welche Lage der Punkt x innerhalb eines Polygones $[\alpha_i]$ auch haben möge, n stets so hoch annehmen, dass der Modul der ganzen Function $F(x)$:

$$F(x)=f^n(x)\sum_{i=1}^{i=\mu}\frac{\varphi_i}{(x-\alpha_i)^n} \tag{2}$$

nicht unendlich klein wird."

Um dies einzusehen, haben wir nur $F(x)$ auf die Form zu bringen:

$$F(x)=\frac{f^n(x)}{(x-\alpha_i)^n}\left\{\varphi_i+\varphi_k\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right)^n+\varphi_l\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_l}\right)^n+\cdots\right\}. \tag{3}$$

Der Modul des Klammerfactors nähert sich, so viel man will, dem Modul von φ_i, wenn man nur n genügend hoch wählt; und kann demnach ebensowenig unendlich klein werden, wie der erste Factor.

§ 2.

Die algebraische Hülfsaufgabe.

„Sei

$$f(z)=0=z^\mu+a_1z^{\mu-1}+\cdots+a_\mu \tag{4}$$

die vorgelegte Gleichung, mit beliebigen complexen Coefficienten und den als ungleich vorausgesetzten Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$, und ist x ein willkührlicher complexer Ausgangswerth, so soll eine rationale Function y von x, mit rational bekannten Coefficienten, derart bestimmt werden, dass $f(y)$ mit einer möglichst hohen Potenz von $f(x)$ proportional wird."

Für

$$y=\frac{Z(x)}{N(x)}=\frac{Z}{N}, \tag{5}$$

wo Z, N ganze Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler darstellen, soll demnach identisch erfüllt werden die Gleichung:

$$(6) \qquad f(y) = Q(x) f^n(x)$$

wo unter n ein maximaler, ganzzahliger, positiver Exponent zu verstehen ist, und unter $Q(x)$ eine rationale Function von x, deren Modul (selbst bei eventuell beliebigem Wachsthum von n) eine gewisse endliche Grenze nicht überschreiten soll.

Substituirt man den Werth von y aus (5) in (6), so geht die letztere Forderung über in die folgende:

$$(7) \quad (Z - \alpha_1 N)(Z - \alpha_2 N)\ldots(Z - \alpha_\mu N) \equiv Q N^\mu (x-\alpha_1)^n (x-\alpha_2)^n \ldots (x-\alpha_\mu)^n \equiv K(x)(x-\alpha_1)^n (x-\alpha_2)^n \ldots (x-\alpha_\mu)^n.$$

Schliessen wir den besonderen Fall vorderhand aus, dass die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ von $f = 0$ irgendwie rational durcheinander ausdrückbar sind, so kann (7) nur erfüllt werden durch das Einzelnbestehen der μ Identitäten:

$$(8) \qquad Z - \alpha_i N \equiv \varrho(x) \psi(x, \alpha_i)(x - \alpha_i)^n \quad (i = 1, 2, \ldots \mu).$$

Hier repräsentirt $\psi(x, \alpha_i)$ eine noch unbekannte ganze Function der beiden Argumente x, α_i, und $\varrho(x)$ eine ebensolche, nur noch von x rational abhängige Grösse. Die Elimination von Z, N, ϱ zieht das Verschwinden aller Determinanten der Matrix:

$$(9) \qquad | 1, \alpha_i, \psi(x, \alpha_i)(x - \alpha_i)^n | = 0$$

nach sich, und umgekehrt ist das Bestehen des Systemes (9) äquivalent mit dem von (8).

Das System von $n - 2$ unabhängigen Functionalgleichungen, welche durch (9) dargestellt werden, linear in den unbekannten Verhältnissen der $\psi(x, \alpha_i)$, lässt, behufs Herstellung einer eleganten Auflösung, eine formale Vervollständigung zu durch eine neue Relation:

$$(10) \qquad \sum \varphi_i \psi(x, \alpha_i) = 0$$

wo die φ_i (vorläufig) ganz willkürliche Coefficienten bedeuten.

Aus (9) und (10) ergeben sich die Verhältnisse der $\psi(x, \alpha_i)$ in folgender Form:

$$(11) \quad \varkappa \psi(x, \alpha_i) = \frac{1}{(x - \alpha_i)^n} \left\{ \frac{\varphi_1(\alpha_1 - \alpha_i)}{(x - \alpha_1)^n} + \frac{\varphi_2(\alpha_2 - \alpha_i)}{(x - \alpha_2)^n} + \cdots + \frac{\varphi_\mu(\alpha_\mu - \alpha_i)}{(x - \alpha_\mu)^n} \right\}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Identitäten (8) ein, und berücksichtigt, dass es nicht auf die absoluten Werthe der Functionen $Z(x)$ und $N(x)$, sondern nur auf ihr Verhältniss ankommt, so resultiren für die gesuchte Function y (5) folgende, einander gleichwerthige Darstellungen:

$$(12)\qquad y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum \alpha_i \varphi_i (x-\alpha_k)^n (x-\alpha_l)^n \cdots}{\sum \varphi_i (x-\alpha_k)^n (x-\alpha_l)^n \cdots}$$

$$= \frac{f^n(x)\cdot \sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{\alpha_i \varphi_i}{(x-\alpha_i)^n}}{f^n(x)\cdot \sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{\varphi_i}{(x-\alpha_i)^n}}$$

$$= \frac{\sum \frac{\alpha_i \varphi_i}{(x-\alpha_i)^n}}{\sum \frac{\varphi_i}{(x-\alpha_i)^n}},$$

wo im letzten Falle Zähler und Nenner in der Form rationaler Functionen auftreten. Symmetrie der Zähler und Nenner in den α tritt ein, sobald den willkürlichen Grössen φ_i eine geeignete Form ertheilt wird.

Man hat zu dem Zwecke zu setzen:

$$(13)\qquad \varphi_i = \varphi(\alpha_i)$$

wenn $\varphi(z)$ eine willkürliche ganze Function von z mit rationalen Coefficienten bezeichnet (deren Grad mit Rücksicht darauf, dass nur die α_i für z eingesetzt werden, vermöge $f(\alpha_i) = 0$ immer auf die Zahl $\mu - 1$ herabgedrückt werden kann). Nunmehr sind die Ausdrücke (12) als rational bekannt anzusehen.

In den beiden ersten Formeln (12) treten $Z(x)$ und $N(x)$ als ganze Functionen vom Grade $(\mu - 1)n$ auf: die ganze, positive Zahl n ist vorderhand noch keiner weiteren Beschränkung unterworfen.

Wir fassen in der Folge die rechte Seite von y als eine rationale Operation auf, die mit dem Argument x vorgenommen ist, und geben ihr in dieser Hinsicht das Zeichen $R_n(x)$. Wiederholungen der Operation (bei constantem n) mögen durch einen oberen Index in Klammern angegeben werden, also durch $R_n^{(2)}(x)$, $R_n^{(3)}(x)$ u. s f.

Soll nun die Formel (12) unsere Aufgabe lösen, so ist vor Allem zu prüfen, ob die Zahl n in der That den jeweiligen, grösstmöglichen Exponenten für die rechte Seite der geforderten Identität (6) liefert. Gesetzt, der fragliche Exponent erhöhte sich auch nur um eine Einheit, so müsste der zweite Factor rechter Hand von (11), nach Heraufschaffung der Nenner, für $x = \alpha_i$ verschwinden. Dies repräsentirt μ (im Allgemeinen*) von einander unabhängige) lineare Gleichungen zwischen den homogenen φ_i. Setzt man demnach fest, dass die Deter-

*) Nur der Fall $\mu = 3$ macht insofern eine Ausnahme, als hier für ein ungerades n die bez. Determinante stets identisch verschwindet.

minante der μ linearen Gleichungen nicht verschwinden soll (was zu speciellen Gleichungen $f = 0$ führen würde), so ist ein weiteres Heraustreten eines Factors $f(x)$ aus der Function $Q(x)$ (6) unmöglich gemacht.

Es erübrigt nunmehr noch die Ermittelung der Vorsichtsmassregeln, die zu treffen sind, damit ein Unendlichgross-Werden des Factors $Q(x)$ in (6) verhütet werde.

Die Formel (7) lehrt, dass

$$Q(x) = \frac{K(x)}{N^{\mu}(x)} \tag{14}$$

wo $K(x)$ eine ganze Function ist, die durch Multiplication der rechten Seiten von (11) entsteht, nachdem man jede derselben zuvor mit $f^n(x)$ multiplicirt hat.

Da wir uns auf endliche Werthe von x beschränken, so würde ein Unendlichgross Werden von $Q(x)$ nur durch ein Unendlichklein Werden von $N(x)$ ermöglicht.

Das Letztere aber ist nach § 1 ausgeschlossen, wofern nur dem Parameter x verboten ist, eine Seite eines der Polygone $[\alpha_i]$ zu betreten, und die Moduln der φ_i endliche, nicht verschwindende Werthe besitzen, und endlich n nicht zu klein gewählt ist.

(In jenem Ausnahmefalle d. h. wenn irgend eine der Grössen $\left|\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right|$ gleich der Einheit wäre, würde offenbar die rechte Seite von (12) im Allgemeinen überhaupt ganz unbestimmt werden.)

Für $x = \alpha_i$ wird auch $y = \alpha_i$.

§ 3.

Die Annäherungsmethode.

Aus den bezüglich der Gültigkeit der Identität (6)

$$f(y) \equiv Q(x) f^n(x) \tag{6}$$

soeben angestellten Betrachtungen ziehen wir zunächst den Schluss, dass, sobald der Ausgangswerth x so gewählt ist, dass $|f(x)| < 1$ wird, und ausserdem die Zahl n genügend hoch angenommen ist, der Werth von $|f(y)|$ jedenfalls kleiner ausfällt, als der von $|f(x)|$, und dies um so mehr, je stärker n wächst, und je kleiner $|f(x)|$ bereits war. Man wird sich demnach, bei Wiederholung der Operation R_n mit grosser, und immer wachsender Geschwindigkeit einer bestimmten Wurzel α der vorgelegten Gleichung $f = 0$ nähern.

Es lässt sich aber auch leicht nachweisen, welches diese Wurzel ist. Ferner gelingt es, sich von der Voraussetzung, dass $|f(x)| < 1$ sein solle, ganz frei zu machen; endlich kann man, falls es sich um die Annäherung an eine *reelle* Wurzel handelt, über die Natur des Annäherungsprocesses selbst Genaueres aussagen.

Möge der Werth x gewählt sein, *wie man will*, wenn nur die Moduln $|x - \alpha|$ alle von einander verschieden sind, so gehört er dem Innern eines bestimmten Polygones $[\alpha_i]$ an. (cf. § 1.) Dann kleiden wir y (12) in die Form:

$$(15) \qquad y = \frac{\alpha_i + \alpha_k \frac{\varphi_k}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right)^n + \alpha_l \frac{\varphi_l}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_l}\right)^n + \cdots}{1 + \frac{\varphi_k}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right)^n + \frac{\varphi_l}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_l}\right)^n + \cdots}$$

und ersehen daraus, dass stets n so gross gewählt werden kann, dass die Moduln aller Glieder in Zähler und Nenner, bis auf den des ersten, unterhalb einer beliebig vorgeschriebenen Kleinheitsgrenze liegen, und somit der Werth von y dem von α_i beliebig nahe gebracht werden kann.

Hat man einmal einen ausreichend hohen Werth von n ausfindig gemacht, sodass jedenfalls y näher an α_i liegt, als x, so *genügt* dieser Werth von n auch für die Wiederholungen der Operation R_n (15). Denn der Modul $\left|\frac{y-\alpha_i}{y-\alpha_k}\right|$ z. B. ist kleiner, als der entsprechende $\left|\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right|$.

Wir wollen jetzt den Fall einer reellen Wurzel α_i eingehender in Betracht ziehen. Der Einfachheit halber machen wir die vorläufige Annahme, dass sämmtliche Wurzeln α von $f = 0$ reell seien.

Wir denken uns dieselben auf der reellen Axe durch μ Punkte fixirt, welche in der Reihenfolge von links nach rechts mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ bezeichnet sein mögen. Die Mittelpunkte der Strecken

$$\overline{\alpha_1\alpha_2}, \ \overline{\alpha_2\alpha_3}, \ \ldots \ \overline{\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu}$$

nennen wir $M_{12}, M_{23}, \ldots M_{\mu-1,\mu}$. Durch diese $\mu - 1$ Punkte M und den unendlich fernen Punkt wird die reelle Axe in μ Strecken $[\alpha_i]$ zerlegt, deren jede einen der Punkte α trägt, und die unter der Voraussetzung, dass man auch den variabeln Parameter x auf reelle (rationale) Werthe beschränkt, einen vollständigen Ersatz für die Polygone $[\alpha_i]$ des allgemeinen Falles bieten.

Es liege x auf der Strecke $[\alpha_i]$, sei es links oder rechts von α_i. Zur deutlicheren Bestimmung der Lage von y leiten wir aus (15) (oder (12)) die Formel ab:

$$(16) \qquad \frac{y-x}{\alpha_i - x} = \frac{1 + \frac{\varphi_k}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right)^{n-1} + \frac{\varphi_l}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_l}\right)^{n-1} + \cdots}{1 + \frac{\varphi_k}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right)^n + \frac{\varphi_l}{\varphi_i}\left(\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_l}\right)^n + \cdots}$$

wo sich der Zähler der rechten Seite vom Nenner nur durch den Exponenten $n - 1$ statt n unterscheidet.

Wählen wir n so gross, dass die Summe der absoluten Beträge der Zählerglieder, vom zweiten an gerechnet, kleiner als Eins ist, so ist dies umsomehr mit der entsprechenden Summe der Nennerglieder der Fall, und der ganze Bruch (16) fällt sicher positiv aus. Legen wir ausserdem den willkürlichen Grössen $\varphi_i = \varphi(\alpha_i)$ die Beschränkung auf, positiv (rational) zu sein, und nehmen noch n ungerade an, so ist der Zähler von (16) für den gewählten Werth von n (und a fortiori für alle noch grösseren) unbedingt grösser, als der Nenner; der Quotient ist demnach grösser, als die positive Einheit, und nähert sich derselben mit wachsendem n, so weit man will.

Dann sagt die Formel (16) aus, dass die Punkte x und y stets auf verschiedenen Seiten von α_i sich befinden, und dass bei genügend hohem, ungeraden n der Punkt y stets näher an α_i gelegen ist, als x (und zugleich der Strecke $[\alpha_i]$ angehört).

Will man daher eine rationale Operation haben — was für theoretische Zwecke wünschenswerth ist — welche aus einem beliebigen (rationalen) Näherungswerthe x der Strecke $[\alpha_i]$ stets einen solchen zweiten x' herleitet, der zwischen x und α_i liegt, so hat man die Operation R_n noch einmal zu wiederholen d. h. die rationale Function $R_n^{(2)}(x)$ zu bilden, wobei der Index n eventuell noch höher zu nehmen ist, als bei der einmaligen Ausübung von R_n. Diese letztere Zahl n genügt dann aber auch, um vermöge Iterirung der Operation $R_n^{(2)}$, also mittelst der Functionenfolge

$$R_n^{(2)}(x),\ R_n^{(4)}(x),\ R_n^{(6)}(x),\ \ldots$$

zu Punkten $x', x'', x''' \ldots$ zu gelangen, die sich der Wurzel α_i successive und zwar immer auf derselben Seite nähern. Denn man überzeugt sich leicht davon, dass, wenn α_k irgend eine der übrigen Wurzeln α (links oder rechts von α_i) bedeutet, stets $\left|\frac{x-\alpha_i}{x-\alpha_k}\right|$ den Werth von $\left|\frac{x'-\alpha_i}{x'-\alpha_k}\right|$ übersteigt.

Der dargelegte Beweisgang ist mit geringen Modificationen auf den allgemeineren Fall übertragbar, wo α_i zwar reell, die übrigen Wurzeln theilweise (oder sämmtlich) auch conjugirt imaginär sein können. Man hat nur, um die Annäherung an eine der reellen Wurzeln zu vollziehen, die Vorsicht zu beobachten, den Ausgangspunkt x auf der reellen Axe so zu wählen, dass er nicht etwa auf eine Seite eines Polygones α_k (unter α_k eine der imaginären Wurzeln verstanden) zu liegen kommt.

Es finde noch Erwähnung, dass der Fall der Gleichungen zweiten Grades ($\mu = 2$) eine exceptionelle Rolle spielt, insofern er ausser der Function (12) noch drei weitere Lösungen zulässt, nämlich:

$$\text{I.}\qquad y = \frac{\alpha_1\varphi_1(x-\alpha_2)^n - \alpha_2\varphi_2(x-\alpha_1)^n}{\varphi_1(x-\alpha_2)^n - \varphi_2(x-\alpha_1)^n}$$

$$\text{II.}\qquad y = \frac{\alpha_1\varphi_1(x-\alpha_1)^n + \alpha_2\varphi_2(x-\alpha_2)^n}{\varphi_1(x-\alpha_1)^n - \varphi_2(x-\alpha_2)^n}$$

$$\text{III.}\qquad y = \frac{\alpha_1\varphi_1(x-\alpha_1)^n - \alpha_2\varphi_2(x-\alpha_2)^n}{\varphi_1(x-\alpha_1)^n - \varphi_2(x-\alpha_2)^n}.$$

Bei I. und III. sind Zähler und Nenner alternirende Functionen der Wurzeln α_1, α_2.

Für $f(z) = z^2 - d$ und $n = 3$ liefert der Fall I.:

$$(17)\qquad y = \frac{x(x^2+3d)}{3x^2+d}$$

ein Beispiel, welches Herr Dedekind in seiner Schrift „Stetigkeit und Irrationale Zahlen" zu dem Beweise benützt, dass es unter allen rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner resp. grösser als eine positive, ganze Zahl d ist, keine grösste resp. kleinste giebt.

§ 4.

Die Auflösungsmethode.

Auf Grund des Vorangegangenen können wir folgende Sätze aussprechen:

(A) *Ist x ein ganz beliebig gewählter complexer Werth, und n ein genügend hoher Index, so fällt der „Grenzwerth" der Reihe:*

$$(R^{(\nu)}) : R_n(x),\ R_n^{(2)}(x),\ R_n^{(3)}(x),\ \ldots\ R_n^{(\nu)}(x),\ \ldots$$

mit einer bestimmten Wurzel der Gleichung μ^{ten} Grades $f = 0$ zusammen. Dies erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn x auf gewissen Stücken irgend einer von $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ Geraden (der complexen Ebene), deren volles System rational bekannt ist, angenommen sein sollte: in diesem Ausnahmefalle werden entweder alle Glieder der Reihe ($R^{(\nu)}$ unbestimmt, oder führen, wenn bestimmt, zu Ausnahmsgrenzwerthen."

(B) *„Dasselbe gilt von der Reihe:*

$$(R_n) : R_n(x),\ R_{n+1}(x),\ R_{n+2}(x)\ \ldots\ R_{n+\nu}(x)\ \ldots\text{“}$$

Mittelst dieser Sätze lassen sich, nach bekannten functionentheoretischen Principien, auf mannigfaltige Weise gleichmässig convergente, nach rationalen Functionen von x fortschreitende Reihen herleiten, welche die Wurzeln von $f = 0$ repräsentiren. Es genüge die Anführung des folgenden Resultates:

(C) *„Bedeutet*

$$\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_\nu,\ \ldots$$

eine der Reihen $(R^{(\nu)})$, *oder* (R_n), *und gehört* x *dem Innern des Polygones* $[\alpha_i]$ *an, so stellt die gleichmässig convergente Reihe:*

$$\zeta_0 + (\zeta_1 - \zeta_0) + (\zeta_2 - \zeta_1) + \cdots$$

die Wurzel α_i *dar, während sie auf der Grenzlinie des Polygones* $[\alpha_i]$ *im Allgemeinen einen ganz unbestimmten Werth liefert.*"

§ 5.

Algebraische Umformungen.

Man wird verlangen, in der durch (12) angegebenen, in den Wurzeln α von $f = 0$ symmetrischen, rationalen Function y:

$$(12) \qquad y = \frac{\sum_i \frac{\alpha_i \varphi(\alpha_i)}{(x-\alpha_i)^n}}{\sum_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{(x-\alpha_i)^n}} = R_n(x)$$

wo $\varphi(\alpha_i)$ eine willkürliche, ganze Function von α_i, des Grades $\mu - 1$, vorstellt, die Wurzeln durch die Coefficienten von $f = 0$ ausgedrückt zu sehen.

Wir beginnen mit dem Specialfalle $\varphi = 1$, und gehen von der Cauchy'schen Formel aus:

$$(19) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x - \alpha_i} = \frac{d\,l f(x)}{dx}$$

und erhalten durch wiederholtes Differenziren nach x:

$$(20) \qquad \frac{d^n \frac{f'(x)}{f(x)}}{dx^n} = (-1)^n n! \sum \frac{1}{(x-\alpha_i)^{n+1}}.$$

Ferner liefert die Identität:

$$(21) \qquad xf'(x) - \mu f(x) = Q(x)$$

wo $Q(x)$ eine ganze Function in x vom Grade $\mu - 1$ bezeichnet, mittelst Division mit $f(x)$ und Partialbruchzerlegung:

$$(22) \qquad x\frac{f'(x)}{f(x)} - \mu = \frac{\sum \frac{Q(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}}{x - \alpha_i} = \sum \frac{\alpha_i}{x - \alpha_i}.$$

Differenzirt man hier n-mal, so kommt:

$$(23) \qquad x\frac{d^n \frac{f'(x)}{f(x)}}{dx^n} + n\frac{d^{n-1} \frac{f'(x)}{f(x)}}{dx^{n-1}} = (-1)^n n! \sum \frac{\alpha_i}{(x-\alpha_i)^{n+1}}.$$

Die Division der Formeln (20), (23) ergiebt nach leichter Umformung, dass (12), wenn man $n+1$ für n schreibt, ersetzt werden kann durch:

$$(24) \qquad y = R_{n+1}(x) = x + \frac{n}{\dfrac{d\,l\left\{\dfrac{d^{n-1}\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{dx^{n-1}}\right\}}{dx}}$$

oder

$$(25) \qquad \frac{y-x}{n} = \frac{1}{\dfrac{d\,l\left\{\dfrac{d^{n-1}\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{dx^{n-1}}\right\}}{dx}} = \frac{1}{\dfrac{d\,l\dfrac{d^n\,l f(x)}{dx^n}}{dx}},$$

eine Relation, die auch mit alleiniger Hülfe von (20) aus (16) hätte gewonnen werden können.

Hieraus fliesst ohne Weiteres der Ausdruck für die allgemeinere Function y, in welche noch die willkürliche ganze Function φ eingeht, indem man in (25) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ mit $\varphi(x)$ multiplicirt.

Indem wir noch einmal $n+1$ für n setzen, kommt:

$$(26) \qquad \frac{n+1}{y-x} = \frac{d\,l\left\{\dfrac{d^n\dfrac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}}{dx^n}\right\}}{dx}\,^{*)}$$

und durch Integration:

$$(27) \qquad c\,e^{\int\frac{n+1}{y-x}dx} = \frac{d^n\dfrac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}}{dx^n},$$

wo c einen constanten Factor bedeutet. Im Besonderen wird für $\varphi(x)=1$:

$$(28) \qquad c\,e^{\int\frac{n}{y-x}dx} = \frac{d^n\,l f(x)}{dx^n}.$$

Die beiden letzten Formeln dienen dazu, wenn umgekehrt der zweite Näherungswerth y als rationale Function des ersten Näherungswerthes x vorliegt, daraus die linke Seite der Gleichung $f=0$ zu reconstruiren.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, dass die in dieser Mittheilung vorgetragene *Näherungsmethode* mit der Gräffe'schen nur eine *äusserliche* Aehnlichkeit besitzt. Allerdings wird bei der letzteren ebenfalls der Grundgedanke verwandt, dass, wenn $|\alpha_i| < |\alpha_k|$, der Bruch $\left|\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right|^n$ mit wachsendem, positivem n der Null zustrebt; der prinzipielle Unterschied beider Methoden beruht aber darauf, dass die Gräffe'schen

*) Das Product $\varphi(x)f'(x)$ lässt sich, wie seiner Herleitung unmittelbar entnommen werden kann, auch durch eine beliebige ganze Function $\psi(x)$ ersetzen, wenn diese nur mit $f(x)$ keinen Theiler gemein hat.

Näherungswerthe von vornherein *irrational* (nämlich n^{te} Wurzeln aus rational bekannten Grössen) sind, während die unsrigen ausschliesslich aus *rationalen* Operationen erwachsen sind, was eben die in § 4 dargelegte transcendente Auflösung der vorgelegten Gleichung mittelst Grenzwerthen und convergenter Reihen erst ermöglicht.

Anders verhält es sich mit der sog. Bernouilli'schen Methode. Seien die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ so angeordnet, dass $|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_\mu|$ resp. $|\alpha_1| < |\alpha_2| < \cdots < |\alpha_\mu|$, so setzt Daniel Bernouilli als Ausdruck eines Näherungswerthes für α_1:

$$\frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_\mu^n}{\alpha_\nu^{n-1} + \alpha_\nu^{n-1} + \cdots + \alpha_\mu^{n-1}}.$$

Aber dies liefert, wenn das Gebiet *rationaler* Operationen nicht verlassen werden soll, nur die absolut grösste, resp. kleinste (reelle) Wurzel, je nachdem n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Endlich sei erwähnt, dass alle bis jetzt bekannten Näherungsmethoden unter dem Nachtheil leiden, dass die bei dem Näherungsprocess jeweilig begangenen *Fehler* *) entweder keine oder nur eine nebensächliche Berücksichtigung finden, während eben diese genaue Bestimmung den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bildete.

Tübingen, Anfang October 1888.

---

*) [*Nachträgliche Anmerkung vom* 15. *Februar* 1889: Allerdings beschäftigt sich auch Herr Schröder („Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen", diese Annalen, Band II) mit einer Bestimmung des Fehlers $y - \alpha$, und dieser ist bei ihm gleichfalls (wie im Texte) der n^{ten} Potenz des vorangegangenen Fehlers $x - \alpha$ proportional. Indessen setzt er voraus, dass sich bereits x in unmittelbarer Umgebung der Wurzel α befindet. Die Aehnlichkeit zwischen seinem Ansatze und dem unsrigen ist auch insofern nur eine äusserliche, als der von ihm verwandte Proportionalitätsfactor nur von α, nicht von dem Ausgangswerthe x abhängt.

Sieht man dagegen von dem Fehlergesetze des § 1, auf welches ich das Hauptgewicht lege, völlig ab, so ist die im Texte mitgetheilte Auflösung als rationale überhaupt, im Wesentlichen enthalten in der Arbeit von Herrn Runge: „Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten", Acta Mathem. Band VI.

Die Formel (26) des § 5 stimmt, sofern man sich auf die Ermittelung der absolut kleinsten Wurzel einer Gleichung beschränkt, überein mit einer von Herrn König angegebenen („Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen", diese Annalen, Band XXIII, pag. 449). Herr König weist nach, in welchem Umfange seine Formel auch für transcendente Gleichungen gilt. Ueberträgt man seine Ergebnisse auf beliebige Wurzeln der Gleichung, so erkennt man, dass die Formel (26) eine gemeinsame Bestimmungsart der Wurzeln algebraischer, wie transcendenter Gleichungen liefert. Umgekehrt tritt der Unterschied zwischen beiden Bestimmungsarten sehr deutlich in's Licht, sobald man bei der wirklichen Ausführung berücksichtigt, dass bei ganzen rationalen $f(x)$ die höheren Differentialquotienten, von einem gewissen an, sämmtlich verschwinden, während dies bei transcendenten $f(x)$ nie eintreten kann.]

Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen.

Von

M. Noether in Erlangen.

Alle *Doppelebenen*, welche rational eindeutig auf die einfache Ebene abgebildet werden können, lassen sich durch Cremona'sche eindeutige Ebenentransformationen auf drei wesentlich verschiedene Classen zurückführen:

1) solche mit Uebergangscurve einer Ordnung $2m$, die einen $(2m-2)$-fachen Punkt besitzt;

2) solche mit Uebergangscurve 4^{ter} Ordnung;

3) solche mit Uebergangscurve 6^{ter} Ordnung, welche zwei unendlich-benachbarte dreifache Punkte besitzt.

Davon sind die Fälle 1), für $m=1$ und $m=3$, und 2) ausführlich von Clebsch*), und später von de Paolis**), behandelt worden, während sich der allgemeine Fall 1) genau so wie für $m=3$ erledigt. Die Classe 3) von Doppelebenen ist von mir in einer 1878 erschienenen Note***) zuerst angegeben und auf ihre Abbildung hin kurz discutirt worden. Da nun bisher keine Bearbeitung dieses wichtigen Falles erschienen ist und ich in einem nachfolgenden Aufsatze eine Anwendung desselben zu machen habe, so erlaube ich mir, hier aus meinen Papieren von 1878 die ausführlichere Discussion mitzutheilen, aus der jene Note eine vorläufige Mittheilung bildete†).

Erlangen, October 1888.

---

*) „Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen", Math. Ann. III, 1870.

**) In drei Aufsätzen in Ser. III, vol. I und II der Mem. d. R. Acc. de Lincei, 1877 u. 1878.

***) „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen", Sitzungsber. der physik. medic. Soc. zu Erlangen, vom 14. Jan. 1878.

†) Ich veröffentliche den vorliegenden Aufsatz auch aus dem Grunde, weil er, wie ich schon in der Vorrede zu meiner Abhandlung „Ueber die Theta-

§ 1.

Abbildbarkeit der Doppelebene.

Die beiden Blätter einer Doppelebene Ξ mögen längs einer Uebergangscurve

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

zusammenhängen, die von der 6^{ten} Ordnung sei und zwei benachbarte dreifache Punkte, Π und Π_1, habe, wobei $\xi_1 = \xi_2 = 0$ in Π, $\xi_1 = 0$ in die Gerade $\overline{\Pi\Pi_1}$ gelegt werde. $\Omega = 0$ hat dann in Π drei die Gerade $\xi_1 = 0$ berührende Zweige und hat das Geschlecht 4; ihre Gleichungsform wird

$$(1)\qquad \Omega \equiv \xi_3{}^3\xi_1{}^3 + \xi_3{}^2\xi_1{}^2\Omega_2(\xi_1, \xi_2) + \xi_3\xi_1\Omega_4(\xi_1, \xi_2) + \Omega_6(\xi_1, \xi_2).$$

Soll nun durch Formeln der Art

$$\varrho y_i = \chi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + A_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\cdot\sqrt{\Omega}\quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die χ_i, A_i ganze rationale Functionen der ξ sind, ein eindeutiger Uebergang der Doppelebene Ξ in eine einfache Ebene Y stattfinden können, so müssen die den Geraden

$$\sum u_i y_i = 0$$

der einfachen Ebene Y entsprechenden Curven von Ξ, nämlich, wenn

$$\sum u_i\chi_i(y) = \mathsf{M}_i,\qquad \sum u_i\Omega_i(y) = \mathsf{N}_i$$

gesetzt wird, die Curven $\psi_u = 0$, definirt durch

$$\mathsf{M}^2 - \mathsf{N}^2\Omega \equiv C\psi_u = 0,$$

wo C von den u unabhängig wird, die Eigenschaften haben:

---

functionen von 4 Argumenten", diese Annalen Bd. XIV, 1878, bemerkte, den algebraischen Ausgangspunkt für meine Theorie der Charakteristikengruppirungen bei $p = 4$ bildete. Obwohl gerade bei der hier vorliegenden Uebergangscurve 6^{ter} Ordnung ($p = 4$) *eine* der 136 geraden eigentlichen Charakteristiken vor den übrigen ausgezeichnet auftritt, habe ich der Theorie doch schon in Bd. 14, und für beliebige p in Bd. 16, eine Form gegeben, bei der die, im allgemeineren Falle nicht vorhandene, Auszeichnung auch nicht vorkommt; davon ist aber — siehe die Vorrede zur Abhandlung, Bd. 16 — die Unterscheidung in zwei Classen von *eigentlichen* und in eine Classe von *Gruppen*-Charakteristiken nöthig, die erstere Art als den Thetafunctionen, die zweite Art als den Perioden zugeordnet; mit der Gruppe der linearen Transformationen der Thetafunctionen. — Hierbei sei constatirt, dass dieser Standpunkt der Unterscheidung der Charakteristiken („Indices"), mit den anschliessenden Folgerungen, nun neuerdings auch von Herrn Schottky in seiner Arbeit „Zur Theorie der Abel'schen Functionen von 4 Variabeln", Cr. J. Bd. 102, angenommen ist. Auch finden sich vereinzelte der Resultate des vorliegenden Aufsatzes schon in der Arbeit des Herrn Schottky „Ueber specielle Abel'sche Functionen vierten Ranges", Cr. J. Bd. 103.

a) eine quadratische ∞^2-Schaar von Curven zu sein, welche Ω in allen beweglichen Schnittpunkten in 1ter Ordnung berühren, wonach eine Identität existirt

$$\mathsf{M}^2 - \mathsf{N}'\,\Omega \equiv C \cdot \psi_u;$$

b) N' muss ein volles Quadrat einer ganzen Function N werden, wonach an jeder Stelle von $\psi_u = 0$ die $\sqrt{\Omega}$ zu einer rationalen Function $\pm \frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}}$ wird, d. h. zwei in beiden Blättern von Y übereinanderlaufende Curven $\psi_u = 0$ rational von einander getrennt sind. *Die* Curven, für welche $\sqrt{\Omega} = -\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}}$ gesetzt wird, mögen dann als den Geraden von Y entsprechend angenommen werden;

c) von den beweglichen Schnittpunkten zweier Curven $\psi_u = 0$, $\psi_{u'} = 0$, welche irgend zwei Geraden von Y entsprechen, darf nur *einer* dadurch ausgezeichnet sein, dass in ihm $\sqrt{\Omega}$ für beide Curven dasselbe Vorzeichen hat, dem *einen* Schnittpunkt der beiden Geraden entsprechend. Vermöge dieser Bedingung drücken sich die ξ und $\sqrt{\Omega}$ rational durch die y aus.

Im Falle Ω die unter (1) gegebene Curve 6ter Ordnung ist, lassen sich diese dreierlei Bedingungen erfüllen. Die zu Ω adjungirten Curven 3ter Ordnung mit Doppelpunkten in Π und Π_1, zerfallen hier in die feste Gerade $\overline{\Pi\Pi_1}$ und die bewegliche Schaar von Curven φ der 2ten Ordnung, welche durch Π und Π_1 gehen. Zwischen gewissen drei dieser 4 linear-unabhängigen Functionen φ besteht eine quadratische, in den ξ identische, Gleichung und zwischen den 4 eine cubische Gleichung, nämlich $\Omega(\xi) = 0$. Wir betrachten alle cubischen Functionen $\Phi^{(3)}$ der φ, die, $= 0$ gesetzt, alle Curven 6ter Ordnung vorstellen, die Π und Π_1 zu dreifachen Punkten haben, wie Ω selbst, oder $C_6(\Pi^3, \Pi_1^3)$. Unter diesen sei $C = 0$ irgend eine solche Curve, welche Ω in neun Punkten

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_9,$$

die auf keiner $\Phi^{(2)}$, d. i. $C_4(\Pi^2, \Pi_1^2)$ liegen, je in 1ter Ordnung berühre und welche ausserdem in der Ξ-Ebene ausserhalb Ω noch 4 Doppelpunkte

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$$

besitze. Dass solche Curven existiren, wird schon durch Angabe irgend einer speciellen erwiesen: so kann man als solche eine

$$\varphi' \cdot \varphi'' \cdot \varphi'''$$

nehmen, wo φ', φ'', φ''' drei Ω je in 3 Punkten berührende Kegelschnitte (Π, Π_1) sind, deren 9 Berührungspunkte auf keiner $\Phi^{(2)}$ liegen; und dabei als Punkte β die beiden Schnittpunkte von φ' mit φ'' und je einen der beiden Schnittpunkte von φ''' mit φ' und mit φ''. Durch die Annahme über die Lage der 9 Punkte α_i soll verhindert werden, dass von den gesuchten Schaaren von Berührungscurven 6^{ter} Ordnung (Π^3, Π_1^3) mit je 4 Doppelpunkten die Mannigfaltigkeit $> \infty^2$ wird; denn geht eine $C_4(\Pi^2, \Pi_1^2)$ durch die 9 Punkte α_i, so trifft dieselbe Ω noch in 3 Punkten, in welchen ein Kegelschnitt (Π, Π_1), etwa φ', berührt; und dann bildet φ', verbunden mit irgend einer Curve $(\varphi)^2$, eine uneigentliche ∞^3-Schaar jener Berührungscurven, aber mit je unendlich vielen Doppelpunkten. —

Nun lege man alle durch die Punkte $\alpha_1, \ldots \alpha_9, \beta_1, \ldots \beta_4$ gehenden Curven $\Psi^{(3)}$, d. h. Curven 6^{ter} Ordnung (Π^3, Π_1^3); die lineare ∞^2-Schaar derselben, mit den Parametern $u_1 : u_2 : u_3$ sei

(2) $$\mathrm{M} \equiv u_1 \chi_1(\xi) + u_2 \chi_2(\xi) + u_3 C = 0.$$

Diese Schaar $\mathrm{M} = 0$ trifft die Curve $C = 0$ in ∞^1 Gruppen von je $36 - 2 \cdot 9 - 9 - 2 \cdot 4 = 1$ beweglichem Punkte γ_u; eine Gruppenschaar, welche aus $C = 0$ auch durch den Curvenbüschel

(3) $$\mathrm{N} \equiv u_1 A_1(\xi) + u_2 A_2(\xi) = 0$$

von Curven 3^{ter} Ordnung $C_3(\Pi^2, \Pi_1, \beta_1, \ldots \beta_4)$ ausgeschnitten werden kann, sodass nach dem Restsatz eine Identität besteht:

(4) $$A_1 \chi_2 - A_2 \chi_1 \equiv C \cdot B.$$

Die Curve B wird ebenfalls eine Curve 3^{ter} Ordnung (Π^2, Π_1) und geht durch die Systeme von je 4 Punkten, in denen sich die Curven

$$u_1 A_1 + u_2 A_2 = 0, \quad u_1 \chi_1 + u_2 \chi_2 = 0,$$

— welche beide Ausdrücke nach unserer Annahme über die α keinen Factor gemein haben können — ausserhalb $\Pi, \Pi_1, \beta_1 \ldots \beta_4, \gamma_u$ schneiden.

Ich betrachte jetzt den Büschel von Curven 12^{ter} Ordnung, mit Parameter λ:

$$\mathrm{M}^2 - \lambda \mathrm{N}^2 \Omega = 0.$$

Diese Curven treffen die Curve $C = 0$ bei Π und Π_1 in $2 \cdot 18$ Punkten (denn auch $\mathrm{N}^2 = 0$, eine Curve $C_6(\Pi^4 \Pi_1^2)$, stellt eine specielle $C_6(\Pi^3, \Pi_1^3)$ vor, bei welcher nur das Glied $\alpha \xi_3^3 \xi_1^3$ fehlt; sie ist eine $C_3(\Pi^2, \Pi_1) \cdot C_3(\Pi, \Pi_1^2)$); in den 10 Punkten $\alpha_1, \ldots \alpha_9$ und γ_u je 2-punktig, in den 4 Punkten $\beta_1, \ldots \beta_4$ je 4-punktig; also in 72 von λ unabhängigen Punkten. Bestimmt man daher λ so, dass jene Curve einen weiteren Punkt mit $C = 0$ gemein hat, so zerfällt sie in $C = 0$ und eine weitere Curve 6^{ter} Ordnung $\psi_u = 0$. Dabei wird λ eine von den u unabhängige Zahl; denn sei

$$\chi_1^2 - \lambda_1 A_1^2 \Omega \equiv C \psi_1,$$
$$\chi_2^2 - \lambda_2 A_2^2 \Omega = C \psi_2,$$

so folgt für $C = 0$:

$$\sqrt{\lambda_1} A_1 \chi_2 - \sqrt{\lambda_2} A_2 \chi_1 = 0,$$

also nach (4):

$$\lambda_2 = \lambda_1.$$

Setzt man somit λ, als reine Zahl, $=1$, so hat man die Identität

$$\mathsf{M}^2 - \mathsf{N}^2\Omega \equiv C \cdot \psi_u. \tag{5}$$

Die hier gefundene ∞^2-Schaar von Curven 6^{ter} Ordnung, $\psi_u = 0$, mit dreifachen Punkten in Π und Π_1, und Ω in je 9 Punkten berührend, erfüllt die unter a) und b) oben genannten Bedingungen. Aber auch die Bedingung c); denn für die Schnittpunkte zweier Curven $\psi_u = 0$, $\psi_{u'} = 0$ mit den Parametern u und u' hat man

$$\mathsf{M}^2 - \mathsf{N}^2\Omega = 0, \quad \mathsf{M}'^2 - \mathsf{N}'^2\Omega = 0,$$

wo M', N' aus M und N durch Ersetzen der u durch die u' hervorgeht; für diejenigen Schnittpunkte, für welche $\sqrt{\Omega}$ denselben Werth in beiden Curven hat, wird also

$$\mathsf{M}\mathsf{N}' - \mathsf{M}'\mathsf{N} = 0.$$

Nun ist nach (4)

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\mathsf{N}' - \mathsf{M}'\mathsf{N} &\equiv [(u_2 u_1' - u_1 u_2')B + (u_3 u_1' - u_1 u_3')A_1 + (u_3 u_2' - u_2 u_3')A_2] \cdot C,\\ &\equiv L \cdot C,\end{aligned}$$

wo $L = 0$ eine Curve $C_3(\Pi^2, \Pi_1)$ ist, welche durch die 4 Schnittpunkte von $\mathsf{M} = 0$, $\mathsf{N} = 0$ und die 4 Schnittpunkte von $\mathsf{M}' = 0$, $\mathsf{N}' = 0$, die ausserhalb C liegen, hindurchgeht. Solche 4 Punkte sind aber nach (5) Doppelpunkte von $\psi_u = 0$, bez. $\psi_{u'} = 0$; die Curve $L = 0$ trifft also $\psi_u = 0$ in $18 - 9 - 8 = 1$ Schnittpunkte mit $\psi_{u'} = 0$ — was die Bedingung c) war.

Somit lässt sich unsere Doppelebene auf eine einfache Ebene Y abbilden mittels der Formeln:

$$\begin{cases}\varrho y_1 = \chi_1(\xi) + A_1(\xi) \cdot \sqrt{\Omega},\\ \varrho y_2 = \chi_2(\xi) + A_2(\xi) \cdot \sqrt{\Omega},\\ \varrho y_3 = C(\xi).\end{cases} \tag{6}$$

Zu bemerken wäre noch, dass die obigen Schlüsse in *einem* Falle ihre Gültigkeit verlieren würden: wenn nämlich in einem der Punkte β, etwa in β_1, χ_1 von A_1 und χ_2 von A_2 berührt würde, also einer der 4 Schnittpunkte von $\mathsf{M} = 0$, $\mathsf{N} = 0$ immer in β_1 hineinrückte. Dieser Punkt würde dann nur einfacher Punkt der ψ_u. Aber da man von der im folgenden Paragraphen gegebenen Umkehrung von (6) *ausgehen* kann, so zeigt sich, dass jener Fall im Allgemeinen nicht stattfindet.

§ 2.

Abbildung der Doppelebene.

Zur Discussion der in § 1 bewiesenen Abbildung der Doppelebene Ξ auf die einfache Ebene Y ist zunächst die Umkehrung der Formeln (6), § 1 aufzustellen.

Den beide Blätter durchsetzenden Geraden der Ξ-Ebene muss in Y eine lineare ∞^2-Schaar von Curven f entsprechen, von derselben Ordnung wie die der Berührungscurven in Ξ, welche den Geraden von Y entsprechen, also von der 6^{ten} Ordnung. Diese Curven f müssen je eine lineare ∞^1-Schaar von Punktepaaren enthalten, d. h. hyperelliptische sein, dürfen sich nur in je einem solchen Paar schneiden und werden vom Geschlecht p, wenn eine Gerade der Doppelebene $2p+2$ Stellen besitzt, an denen die Punkte der beiden Blätter zugleich benachbarte Punkte sind. Da dieses die Durchschnitte der Geraden mit der Uebergangscurve Ω sind, wird hier $2p+2=6$, $p=2$.

Unter den Schaaren von hyperelliptischen Curven 6^{ter} Ordnung vom Geschlecht 2 sind ferner diejenigen mit 4-fachem oder einem oder zwei 3-fachen Punkten auszuschliessen, weil dieselben durch Cremona'sche Transformation der Y-Ebene auf Curven r^{ter} Ordnung mit $(r-2)$-fachem Punkte, also auf den Fall 1) der Einleitung führen. Somit bilden die Curven f hier eine lineare ∞^2-Schaar von Curven 6^{ter} Ordnung mit 8 festen Doppelpunkten

$$a_1, a_2, \ldots a_8$$

und zwei festen einfachen Punkten

$$b_1, b_2.$$

Aber alle ∞^3 Curven 6^{ter} Ordnung mit 8 beliebigen festen Doppelpunkten $a_1, a_2, \ldots a_8$ haben schon die Eigenschaft sich nur in *Punktepaaren* zu treffen. Denn legt man dieselben durch irgend einen Punkt b_1 der Ebene, so treffen diese ∞^2 Curven die durch $a_1, \ldots a_8, b_1$ gehende Curve 3^{ter} Ordnung, da es auf derselben nicht ∞^1 corresiduale Gruppen von je 1 Punkte giebt, in einem weiteren festen Punkte b_2. Somit zerlegt sich die Ebene vermöge der willkürlich angenommenen Punkte $a_1, \ldots a_8$ in ∞^2 Punktepaare, von denen irgend eines für das Paar b_1, b_2 genommen werde.

Sei dann

$$\alpha\Gamma + \alpha'\Gamma' = 0$$

der Büschel der Curven 3^{ter} Ordnung durch $a_1, \ldots a_8$, $\Gamma = 0$ die Curve 3^{ter} Ordnung durch $a_1, \ldots a_8, b_1, b_2$; f irgend eine solche Curve 6^{ter} Ordnung $(a_1^2, \ldots a_8^2, b_1, b_2)$, dass f nicht Γ zum Factor hat; so drückt sich unsere ∞^2-Schaar in der Form aus

(7) $$\Gamma(\alpha\Gamma + \alpha'\Gamma') + \alpha'' f = 0,$$

mit den Parametern $\alpha : \alpha' : \alpha''$. —

Geht man nun von einer solchen Schaar (7) aus und transformirt die Y-Ebene mittels der Formeln:

(8) $$\sigma\xi_1 = \Gamma^2(y), \quad \sigma\xi_2 = \Gamma(y)\cdot\Gamma'(y), \quad \sigma\xi_3 = f(y),$$

so entspricht jedem Punkt ξ ein Punktepaar von Y, sodass sich die Y-Ebene in die doppelt überdeckte Ξ-Ebene transformirt. Die Uebergangscurve $\Omega(\xi) = 0$ wird dabei, da die Curven (7) das Geschlecht 2 haben, von der 6^{ten} Ordnung. Sie erhält das Geschlecht 4; denn die ihr eindeutig entsprechende Curve in Y wird der Ort der Berührungspunkte von Curven der Schaar (7), d. h. ein irreducibler Factor der Jacobi'schen Determinantencurve der Schaar (7); diese aber ist

$$\Gamma^2(y)\cdot\Delta(y),$$

wo $\Delta(y)$

(9) $$\Delta(y) = \sum \pm \frac{\partial\Gamma(y)}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial\Gamma'(y)}{\partial y_2}\,\frac{\partial f(y)}{\partial y_3}.$$

Dieses $\Delta(y)$ wird zugleich, nach der eben angegebenen geometrischen Bedeutung, gemeinsamer Factor der Functionaldeterminanten von irgend 3 Ausdrücken der Schaar $\alpha f + \beta\Gamma^2 + \gamma\Gamma\Gamma' + \delta\Gamma'^2$. Es ist $\Delta(y) = 0$ eine Curve 9^{ter} Ordnung, welche $a_1, \dots a_8$ zu dreifachen Punkten hat, durch b_1, b_2 nicht geht, also vom Geschlecht 4. $\Omega(\xi) = 0$ erhält ferner in $\xi_1 = \xi_2 = 0$ einen 3-fachen Punkt Π; denn der Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung, $\alpha\Gamma + \alpha'\Gamma' = 0$, trifft $\Delta(y) = 0$ in ∞^1 Gruppen von je 3 Punkten. $\Omega(\xi) = 0$ erhält aber noch einen weiteren 3-fachen Punkt Π_1, der Π in der Richtung $\xi_1 = 0$ unendlich benachbart zu liegen kommt; denn die in Π fallenden 3 Punkte von $\Omega(\xi) = 0$ entsprechen den 3 Schnittpunkten von $\Delta(y) = 0$ mit $\Gamma(y) = 0$ (ausserhalb der a_i); da aber in dem Büschel $\Gamma(\alpha\Gamma + \alpha'\Gamma') = 0$ die Curve $\Gamma^2 = 0$, $\Delta(y) = 0$ in diesen 3 Punkten doppelt trifft, muss die Gerade $\xi_1 = 0$ *jeden* der 3 durch Π gehenden Zweige daselbst berühren.

Die Doppelebene Ξ wird daher, wenn man von (8) ausgeht, genau von der in § 1 untersuchten Art.

Von Einzelheiten des Entsprechens sind folgende zu erwähnen: Nach (8) entspricht dem Punkt Π von Ξ in Y die Curve $\Gamma(y) = 0$; und zwar derart, dass einem Zweige, der durch Π *und* Π_1 geht, je nach seiner *Krümmung* die verschiedenen Punkte von $\Gamma(y) = 0$ entsprechen; durchsetzt der Zweig durch Π und Π_1 beide Blätter, so entspricht ihm hiernach ein Punktepaar von Γ. Wenn aber ein Zweig durch Π geht in einer von $\overline{\Pi\Pi_1}$ *verschiedenen* Richtung, so entspricht ihm in Y immer nur ein Zweig durch *einen* ganz bestimmten Punkt von Γ, nämlich durch den Punkt c, welcher dem ganzen Büschel

$\alpha\Gamma + \alpha'\Gamma' = 0$ ausser $a_1, \ldots a_8$ gemeinsam ist. Dieser Punkt c hat die Eigenschaft, zu allen seinen benachbarten Punkten conjugirt zu sein (mit ihnen je ein Paar der ∞^2 Punktepaare der Y-Ebene zu bilden); denn irgend eine durch c gehende Curve $\alpha\Gamma + \alpha'\Gamma' = 0$ wird von der Curve $\Gamma^2 = 0$, die der Schaar (7) angehört, in c 2-punktig getroffen. Es folgt daraus, dass ein durch Π in von $\overline{\Pi\Pi_1}$ verschiedener Richtung gehender Zweig einer Curve entweder beide Blätter von Ξ durchsetzt und daselbst verzweigt ist (entsprechend einer selbst conjugirten Curve von Y durch c), oder in Π einen Rückkehrpunkt hat und daselbst von einem Blatt in das andere übergeht (entsprechend einer nicht-conjugirten Curve von Y, die durch c geht). Dieses Verhalten der Curven in Π ist also völlig analog dem an den gewöhnlichen einfachen Stellen der Uebergangscurve Ω.

Den beiden Punkten b_1 und b_2 von Γ entsprechen in Ξ zwei übereinander liegende Gerade B_1, B_2, die beide durch Π und Π_1 gehen müssen, also die Gerade $\overline{\Pi\Pi_1}$, im einen, bez. dem andern, Blatte genommen; diese beiden Geraden sind rational getrennte Curven. —

Hiernach sieht man unmittelbar, dass den Geraden von Y in Ξ Curven ψ_u 6ter Ordnung (Π^3, Π_1^3) entsprechen müssen, welche Ω in je 9 Punkten berühren — den 9 Schnittpunkten der Geraden mit $\Delta(y) = 0$ entsprechend —, und mit je 4 ausserhalb Ω liegenden (scheinbaren) Doppelpunkten, da ihr Geschlecht $= 0$ sein muss. Insbesondere entspricht den durch c gehenden Geraden von Y eine ∞^1-Schaar solcher Curven 6ter Ordnung (Π^4, Π_1^2), mit je 2 in die Richtung $\overline{\Pi\Pi_1}$ fallenden Zweigen, mit je einem dritten Zweig in davon verschiedener Richtung, der in Π einen Rückkehrpunkt hat, und mit je 3 weiteren Doppelpunkten.

Vermöge (8) erhält man, da Ω eine $C_6(\Pi^3, \Pi_1^3)$ ist:

$$\sigma^6 \cdot \Omega(\xi) = \Gamma^6(y) \cdot \Delta^2(y),$$

oder

$$\sigma^3 \cdot \sqrt{\Omega(\xi)} = \Gamma^3(y) \cdot \Delta(y),$$

$$\text{(10)} \qquad \frac{\sqrt{\Omega(\xi)}}{\xi_1^3} = \frac{\Delta(y)}{\Gamma^3(y)},$$

was mit (8) die Transformation völlig definirt. —

Auch die *Abzählung* der in (8) wesentlichen Constanten zeigt, dass durch solche Formeln (8) *alle* Doppelebenen mit Uebergangscurven der Art $\Omega(\xi) = 0$ müssen erhalten werden können. Denn in (8) sind, von den linearen Transformationen der Parameter α der Schaar (7), d. h. der ξ, abgesehen, die 16 Grössen, welche die Punkte $a_1, \ldots a_8$ bestimmen, und die 2 Grössen, welche alsdann das Punktepaar b_1, b_2 festlegen, enthalten; von diesen 18 Grössen lassen sich zunächst 8 durch lineare Transformation der y zerstören. Nun ist bei unveränderter

Doppelebene Ω auch noch eine beliebige Cremona'sche Transformation der Ebene Y gestattet, durch welche nur die Curvenschaar 6^{ter} Ordnung (7) wiederum in eine analog definirte Curvenschaar 6^{ter} Ordnung $(a_1'^2, \dots a_8'^2, b_1', b_2')$ übergeht; aber durch eine solche Transformation können keine weiteren Constanten zerstört werden. Denn eine solche quadratische Transformation muss 3 der Punkte a zu Grundpunkten wählen; die höheren Transformationen setzen sich dann aus solchen quadratischen zusammen, führen also alle keine neuen willkürlichen Grundpunkte, d. h. keine neuen Parameter ein. Somit kommt man durch Formeln der Art (8) auf ∞^{10} verschiedene Doppelebenen, wenn man die linear aus einer hervorgehenden je zusammenfasst.

Genau so viele Doppelebenen mit Uebergangscurven der Art Ω giebt es aber überhaupt nur; denn ist die Lage von Π, Π_1 in der Ξ-Ebene vorgeschrieben, was 3 lineare Parameter absorbirt, so giebt es noch ∞^{15} Curven Ω; und man kann noch 5 weitere Constanten durch lineare Transformation zerstören. Die Gesammtheit der Curven 6^{ter} Ordnung (Π^3, Π_1^3) bei gegebener Lage von Π, Π_1 bildet aber eine irreductible algebraische Mannigfaltigkeit; so dass jene durch (8) gefundene mit dieser identisch werden muss.

§ 3.

Discussion der Berührungscurven an Ω.

Die Abbildung der §§ 1, 2 giebt mit grösster Leichtigkeit die ganze Theorie der die Curve Ω überall in erster Ordnung berührenden Curven. Was davon für die ganze Classe der aus Ω rational abzuleitenden Curven erhalten bleibt, werde ich später angeben.

Zunächst ist zu bemerken, dass eine Berührungscurve $\psi_u(\Pi^3, \Pi_1^3)$ mit der mit ihr im andern Blatt vereinigt liegenden Curve sich in Y als $C_{18}(a_1^6, \dots a_8^6)$ abbildet, also als Gerade und eine dazu conjugirte $C_{17}(a_1^6 \dots a_8^6)$. So sieht man, dass in der involutorischen Cremona'schen Transformation, welche durch die ∞^2 Punktepaare von Y veranlasst wird, den Geraden Curven $C_{17}(a_1^6, \dots a_8^6)$ entsprechen.*)

I. Ω berührende Curven φ.

Die zu Ω gehörigen adjungirten Curven 3^{ter} Ordnung zerfallen in die Gerade $\overline{\Pi\Pi_1}$ und in die Kegelschnitte φ, die durch Π und Π_1

*) Dies ist bekannt; siehe Bertini, Ric. sulle trasform. univoche involut. nel piano, Annali di Matem. Ser. II, t. VIII; und anschliessende Arbeiten, wie Küpper in Abh. d. böhm. Ges. d. W. 1884 und Bobek, Dissert. Erlangen 1885.

[Oct. 1888].

gehen. Dieser ∞^3-Schaar entspricht in Y die zu $\Delta(y) = 0$ adjungirte ∞^3-Schaar von Curven 6^{ter} Ordnung $(a_1^2, \ldots a_8^2)$

$$\alpha f + \beta \Gamma^2 + \gamma \Gamma \Gamma' + \delta \Gamma'^2 = 0,$$

welche sich selbst conjugirte Curven sind. Man erhält hiermit folgende 120, Ω je in 3 Punkten berührende Kegelschnitte $\varphi(\Pi, \Pi_1)$ und deren Bilder in Y, je nachdem φ im einen oder dem andern Blatte genommen ist:

1) φ_{091}, abgebildet durch den Fundamentalpunkt a_1, bez. durch eine $C_6(a_1^3 a_2^2, \ldots a_8^2)$, wobei die 3 Richtungen dieser C_6 in a_1 identisch werden mit den 3 Richtungen der Curve Δ in a_1; denn diese 3 Zweige sind sich selbst conjugirt;

2) φ_{912}, abgebildet durch Gerade $C_1(a_1 a_2)$, bez. durch Curve 5^{ter} Ordnung $C_5(a_1 a_2 a_3^2, \ldots a_8^2)$;

3) φ_{123}, abgebildet durch $C_2(a_4 \ldots a_8)$, bez. durch $C_4(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 \ldots a_8)$;

4) φ_{012}, abgebildet durch $C_3(a_1^2 a_3, \ldots a_8)$, bez. durch $C_3(a_2^2, a_3 \ldots a_8)$;

und die durch Vertauschung der Indices $1, 2, \ldots 8$ daraus hervorgehenden Curven. Diess liefert aus 1) 8, aus 2) 28, aus 3) 56, aus 4) 28, zusammen 120 Ω dreifach berührende Curven φ.

Zu diesen für die allgemeinen Curven vom Geschlechte 4 ebenfalls vorhandenen 120 einzelnen 3-fach berührenden φ tritt in unserm Falle noch eine quadratische ∞^1-Schaar von (uneigentlichen) solchen Kegelschnitten, φ_0, nämlich die durch Π gehenden doppelt gezählten Geraden

$$\varphi_0 \equiv (\alpha \xi_1 + \alpha' \xi_2)^2 = 0,$$

abgebildet in Y durch den Curvenbüschel $\alpha \Gamma + \alpha' \Gamma' = 0$; oder in Beziehung auf Ω allein: der Schnitt von Ω mit φ_0 geht über in den Schnitt von Δ mit $(\alpha \Gamma + \alpha' \Gamma')^2 = 0$. Die Existenz dieser Curvenschaar ist charakteristisch für die Classen von Curven, zu denen Ω gehört.

II. Ω berührende Schaaren $\Phi^{(3)}$ mit je 4 Doppelpunkten.

Ich wende mich jetzt zu den Berührungscurven ψ_u, welche den Geraden der Ebene Y entsprechen, und zu den analogen Schaaren. Aus irgend einer Curve $\psi_6(\Pi^3, \Pi_1^3)$, welche Ω in 9 Punkten berührt, leitet man vermöge einer Relation:

$$\psi_6 \psi_6' - \Psi_6^2 \equiv \Omega \cdot \mathrm{N}'$$

eine quadratische ∞^6-Schaar, oder vermöge $\Omega = 0$ ∞^5-Schaar, von Curven $\psi_6'(\Pi^3, \Pi_1^3)$ ab, welche alle Ω in je 9 Punkten berühren und zusammen ein *System*

$$\Phi_\alpha^{(3)}$$

bilden, mit *einem* geeignet gewählten Index α. Die ∞^5 Gruppen von je 9 Punkten werden aus Ω durch die lineare Schaar Ψ_6 ausgeschnitten, sind also corresidual. In je einem Theil solcher Systeme giebt es nun hier ausgezeichnete quadratische Untersysteme von Curven mit 4, 3, 2 oder 1 Doppelpunkten von den bez. Mannigfaltigkeiten ∞^2, ∞^3, ∞^4, ∞^5, welche N' zu einem vollen Quadrat machen; diese sollen alle der Reihe nach hier aufgestellt werden. Eine isolirte Stellung bei unserer Curve Ω nehmen diejenigen Berührungscurven $\Phi_0^{(3)}$ ein, welche aus den obigen uneigentlichen Berührungskegelschnitten φ_0 rational hergeleitet werden können: Curven, welche Ω in je 9 Punkten berühren, durch die eine $C_3(\Pi^2, \Pi_1)$ geht; welche also vermöge $\Omega = 0$ in Curven $C_3^2(\Pi^2, \Pi_1)$, mit unendlich vielen Doppelpunkten, übergehen; diesem uneigentlichen System wird der Index $\alpha = (0)$ zugeeignet.

Von ∞^2-Schaaren von rationalen Berührungscurven $\Phi^{(3)}$, mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten ausserhalb Π und Π_1, existiren folgende, mit ihren beiden Bildern (je nach dem Blatte von Ξ, in dem $\Phi^{(3)}$ genommen wird) in Y:

a$_1$) $\Phi_9^{(3)}$; Bilder in Y: C_1, bez. $C_{17}(a_1^6 \ldots, a_8^6)$,

a$_2$) „ ; „ „ „: $C_5(a_1^2 \ldots a_6^2)$, bez. $C_{13}(a_1^4 \ldots a_6^4 a_7^6 a_8^6)$,

a$_3$) „ ; „ „ „: $C_9(a_1^4 \ldots a_4^4\ a_5^2 \ldots a_8^2)$,
bez. $C_9(a_1^2 \ldots a_4^2\ a_5^4 \ldots a_8^4)$.

b$_1$) $\Phi_{09123}^{(3)}$; „ „ „: $C_2(a_1, a_2, a_3)$, bez. $C_{16}(a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^6 \ldots a_8^6)$,

b$_2$) „ ; „ „ „: $C_4(a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_5^2 a_6^2)$,
bez. $C_{14}(a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^4 a_5^4 a_6^4 a_7^6 a_8^6)$,

b$_3$) „ ; „ „ „: $C_6(a_1^3 a_2^3 a_3 a_4^2 \ldots a_7^2)$,
bez. $C_{12}(a_1^3 a_2^3 a_3^5 a_4^4 \ldots a_7^4 a_8^6)$,

b$_4$) „ ; „ „ „: $C_6(a_1 a_2 a_3 a_4^4 a_5^2 \ldots a_8^2)$,
bez. $C_{12}(a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^2 a_5^4 \ldots a_8^4)$,

b$_5$) „ ; „ „ „: $C_8(a_1^5 a_2^3 a_3^3 a_4^2 \ldots a_8^2)$,
bez. $C_{10}(a_1 a_2^3 a_3^3 a_4^4 \ldots a_8^4)$,

b$_6$) „ ; „ „ „: $C_8(a_1^3 a_2^3 a_3 a_4^4 a_5^4 a_6^2 a_7^2 a_8^2)$,
bez. $C_{10}(a_1^3 a_2^3 a_3^5 a_4^2 a_5^2 a_6^4 a_7^4 a_8^4)$.

c$_1$) $\Phi_{01234}^{(3)}$; „ „ „: $C_3(a_1^2 a_5 \ldots a_8)$, bez. $C_{15}(a_1^4 a_2^6 a_3^6 a_4^6 a_5^5 \ldots a_8^5)$,

c$_2$) „ ; „ „ „: $C_5(a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6 a_7 a_8)$,
bez. $C_{13}(a_1^6 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^5 a_7^5 a_8^5)$,

c$_3$) „ ; „ „ „: $C_7(a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 \ldots a_8^3)$,
bez. $C_{11}(a_1^6 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 \ldots a_8^3)$,

c_4) $\Phi^{(3)}_{01234}$; Bilder in Y: $C_7(a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7 a_8)$,

bez. $C_{11}(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^5 a_8^5)$,

c_5) „ ; „ „ „: $C_9(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^3 a_8)$,

bez. $C_9(a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7^3 a_8^5)$.

d_1) $\Phi^{(3)}_1$; „ „ „: $C_4(a_2 \ldots a_7 a_8^3)$, bez. $C_{14}(a_1^6 a_2^5 \ldots a_7^5 a_8^3)$,

d_2) „ ; „ „ „: $C_6(a_1^2 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 \ldots a_8)$,

bez. $C_{12}(a_1^4 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^5 \ldots a_8^5)$,

d_3) „ ; „ „ „: $C_8(a_2^3 \ldots a_8^3)$ bez. $C_{10}(a_1^6 a_2^3 \ldots a_8^3)$,

d_4) „ ; „ „ „: $C_8(a_1^4 a_2^3 \ldots a_6^3 a_7 a_8)$,

bez. $C_{10}(a_1^2 a_2^3 \ldots a_6^3 a_7^5 a_8^5)$,

sowie die daraus durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, ... 8 hervorgehenden Schaaren. Die Anordnung ist die folgende:

Die unter a_1), a_2), a_3) stehenden ∞^2-Schaaren von Berührungscurven, an Zahl

$$1 + \frac{8.7}{1.2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 64,$$

gehören einem und demselben System $\Phi^{(3)}_\alpha$ an, dem der Index $\alpha = (9)$ zugeeignet wurde. Zum Beweis ist nur zu zeigen, dass die Gruppen von je 9 Punkten, in denen Δ von den Curven a_2) und a_3) der Ebene Y geschnitten wird, corresidual sind zu den Gruppen, in welchen die Geraden C_1 die Curve Δ treffen; und zwar genügt schon der Nachweis für je *eine* Gruppe. Nun besteht aber eine Curve in a_1) aus

$$C_1(a_7 a_8),$$

in a_2) aus

$$C_5(a_1^2, \ldots a_6^2 a_7 a_8);$$

diese beiden Curven sind zu einander conjugirt, treffen also Δ ausser in 3 in a_7 und 3 in a_8 liegenden Punkten noch in *denselben* 3 weiteren Punkten, d. h. in *derselben* Gruppe von 9 Punkten.

Ebenso treffen die beiden in a_2), bez. a_3) enthaltenen Curven

$$C_1(a_5 a_6) . C_2(a_1 \ldots a_4 a_5) . C_2(a_1 \ldots a_4 a_6)$$

und

$$C_1(a_5 a_6) . C_4(a_1 \ldots a_5 a_5 a_6^2 a_7^2 a_8^2). \quad C_4(a_1 \ldots a_4 a_5^2 a_6 a_7^2 a_8^2),$$

wo die beiden C_4 conjugirt sind zu den beiden C_2, die Curve Δ in derselben Gruppe von 9 Punkten.

Aus den 64 Schaaren $\Phi_9^{(3)}$ von a) sind die 64 Schaaren, $\Phi^{(3)}_{09123}$, welche sich in b) durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 unter einander und von 4, 5, ... 8 unter einander ergeben, durch eine quadratische Cremona-Transformation mit den Grundpunkten in a_1, a_2, a_3 abgeleitet. Denn durch eine solche Transformation erhält man in der neuen Ebene Y' nur wieder, den Geraden von Ξ entsprechend, ein solches System von Curven 6^{ter} Ordnung wie in Y, und eine Functionaldeterminante Δ' derselben, für welche sich die 64 a) analogen Schaaren a'), C_1', C_5', C_9' so verhalten, wie die Schaaren a) für Δ; die aus a') durch die Transformation folgenden Curven b) von Y haben also in Bezug auf Δ dasselbe Verhalten. — Ebenso folgen die 64 Schaaren $\Phi^{(3)}_{01234}$ aus a) durch eine Transformation 3^{ter} Ordnung, die 64 Schaaren $\Phi_1{}^{(3)}$ aus a) durch eine solche 4^{ter} Ordnung.

Es zeigt sich also zunächst, dass die 135 Indices der Art

$$(i), \quad (0iklm),$$

wo i, k, l, m von einander *verschiedene* Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots 8, 9$ sind, gleichartige sind; dass insbesondere 9 vor $1, \ldots 8$ nicht ausgezeichnet ist.

Aber auch die 64 Schaaren, welche zu *einem* Index gehören, sind einander gleichwerthig; denn auch diese ergeben sich alle aus einer durch eindeutige Ebenentransformationen. Man hat somit im Ganzen 64 . 135 gleichartige ∞^2-Schaaren von rationalen Berührungscurven 6^{ter} Ordnung $(\Pi^3, \Pi_1{}^3)$ an Ω, von denen irgend eine zur Abbildung der Doppelebene Ξ in eine einfache Ebene genommen werden kann.

Die 64 Schaaren, welche zu *einem* Index gehören, lassen sich je einer Gruppe von 8 Indices, oder einer Gruppe von 8 Berührungskegelschnitten φ von Ω, zuordnen und danach unterscheiden. So sind die $\Phi_9{}^{(3)}$ in a$_1$), deren Bilder die C_1 von Y sind, zugeordnet der Gruppe

$$a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_8,$$

d. h. der Gruppe von 8 Ω berührenden Kegelschnitten $\varphi(\Pi\Pi_1)$, welchen in I, 1) dieses Paragraphen die Indices beigeschrieben sind:

$$(091), \; (092), \; \ldots \; (098).$$

Denn unter den C_1 giebt es Curven der Art $C_1(a_i a_k)$, wo i und k irgend 2 Zahlen aus der Reihe $1, \ldots 8$; und dem entspricht, dass es unter den $\Phi_9{}^{(3)}$ von a$_1$) Curven giebt, welche in irgend zwei jener Kegelschnitte

$$\varphi_{09i} \cdot \varphi_{09k}$$

zerfallen und in einen 3^{ten} Kegelschnitt φ, dessen Index in I, 2) als $(9ik)$ angegeben ist. Die 3 Indices $09i$, $09k$, $9ik$ ergänzen sich zum Index 9 von $\Phi_9{}^{(3)}$, wenn man jene Zahlen neben einander in irgend einer Ordnung schreibt und 2 gleiche Zahlen weglässt.

Die Cremona'schen Transformationen liefern für jede der 64 . 135 Schaaren die zugehörige Gruppe von 8 Kegelschnitten φ; so für b$_1$) aus $a_1, \ldots a_8$ zunächst

$$C_1(a_2 a_3), \;\; C_1(a_3 a_1), \;\; C_1(a_1 a_2), \;\; a_4, \ldots a_8,$$

und hieraus

$$\varphi_{923},\ \varphi_{931},\ \varphi_{912},\ \varphi_{094},\ \dots\ \varphi_{098};$$

für a$_2$) aus $a_1, \dots a_8$ zunächst

$$C_2(a_2, \dots a_6),\quad C_2(a_1 a_3 \dots a_6), \dots C_2(a_1 \dots a_5),\ a_7,\ a_8,$$

und hieraus

$$\varphi_{178},\ \varphi_{278}, \dots, \varphi_{678},\ \varphi_{097},\ \varphi_{098};$$

etc. etc. So giebt es in der Schaar $\Phi^{(3)}_{09123}$ von b$_1$) die Curve, der $C_2(a_1 \dots a_5)$ entsprechend:

$$\varphi_{094} \cdot \varphi_{095} \cdot \varphi_{678}$$

und die Indices 094, 095, 678 ergänzen sich wieder zu (09123), wenn man nur noch (45678) und (09123) als *identisch* betrachtet, d. h. festsetzt, dass auch die Combination

$$012 \dots 9$$

beliebig hinzugefügt oder weggelassen werden kann.

Danach ergeben sich auch die 120 Indices der Form

$$(09i),\ (0ik),\ (9ik),\ (ikl),\quad \begin{array}{c}(i,k,l \text{ verschiedene Zahlen}\\ \text{von } 1, \dots 8)\end{array}$$

welche den 120 Kegelschnitten I, 1) ... 4) zugeschrieben sind, als gleichartige, indem keiner derselben vor den übrigen bei Ω ausgezeichnet ist.

III. Ω berührende Schaaren $\Phi^{(3)}$ mit je 3 Doppelpunkten.

Von ∞^3-Schaaren von Berührungscurven $\Phi^{(3)}$, mit je 3 scheinbaren Doppelpunkten ausser Π und Π_1, also vom Geschlecht 1, existiren folgende, mit ihren beiden conjugirten Bildern in Y:

a$_1$) $\Phi^{(3)}_{012}$; Bilder in Y: $C_3(a_3 \dots a_8)$, bez. $C_{15}(a_1{}^6 a_2{}^6 a_3{}^5 \dots a_8{}^5)$,

a$_2$) „ ; „ „ „: $C_5(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^3 a_4 \dots a_8)$,
bez. $C_{13}(a_1{}^4 a_2{}^4 a_3{}^3 a_4{}^5 \dots a_8{}^5)$,

a$_3$) „ ; „ „ „: $C_7(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^3 \dots a_6{}^3 a_7 a_8)$,
bez. $C_{11}(a_1{}^4 a_2{}^4 a_3{}^3 \dots a_6{}^3 a_7{}^5 a_8{}^5)$,

a$_4$) „ ; „ „ „: $C_9(a_1{}^4 a_2{}^4 a_3{}^3 \dots a_7{}^3 a_8)$,
bez. $C_9(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^3 \dots a_7{}^3 a_8{}^5)$.

b$_1$) $\Phi^{(3)}_{123}$; „ „ „: $C_4(a_1{}^2 a_2{}^2 a_4 \dots a_8)$, bez. $C_{14}(a_1{}^4 a_2{}^4 a_3{}^6 a_4{}^5 \dots a_8{}^5)$,

b$_2$) „ ; „ „ „: $C_6(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^2 a_4{}^3 a_5{}^3 a_6 a_7 a_8)$,
bez. $C_{12}(a_1{}^4 a_2{}^4 a_3{}^4 a_4{}^3 a_5{}^3 a_6{}^5 a_7{}^5 a_8{}^5)$,

b$_3$) „ ; „ „ „: $C_8(a_1{}^4 a_2{}^2 a_3{}^2 a_4{}^3 \dots a_7{}^3 a_8)$,
bez. $C_{10}(a_1{}^2 a_2{}^4 a_3{}^4 a_4{}^3 \dots a_7{}^3 a_8{}^5)$.

c$_1$) $\Phi^{(3)}_{912}$; Bilder in Y: $C_5(a_1 a_2 a_3^2 \dots a_7^2)$,

bez. $C_{13}(a_1^5 a_2^5 a_3^4 \dots a_7^4 a_8^6)$,

c$_2$) „ ; „ „ „: $C_7(a_1^3 a_2 a_3^4 a_4^2 \dots a_8^2)$,

bez. $C_{11}(a_1^3 a_2^5 a_3^2 a_4^4 \dots a_8^4)$,

c$_3$) „ ; „ „ „: $C_9(a_1^3 a_2^3 a_3^4 a_4^4 a_5^4 a_6^2 a_7^2 a_8^2)$

bez. $C_9(a_1^3 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^4 a_7^4 a_8^4)$.

d$_1$) $\Phi^{(3)}_{091}$; „ „ „: $C_6(a_1^3 a_2^2 \dots a_7^2)$, bez. $C_{12}(a_1^3 a_2^4 \dots a_7^4 a_8^6)$,

d$_2$) „ ; „ „ „: $C_8(a_1^3 a_2^4 a_3^4 a_4^2 \dots a_8^2)$,

bez. $C_{10}(a_1^3 a_2^2 a_3^2 a_4^4 \dots a_8^4)$,

sowie die durch Vertauschung von $1, \dots 8$ daraus hervorgehenden Schaaren.

Alle diese Schaaren ergeben sich wieder durch Cremona'sche Transformationen aus irgend einer derselben. Es bleibt nur zu zeigen, dass die unter *einem* Index, etwa $\Phi^{(3)}_{091}$ in d$_1$) und d$_2$) stehenden 28 Schaaren von Berührungscurven in der That zu *einem* System gehören, und zwar bez. zu demjenigen, welches aus φ_{091} rational hervorgeht. Nun gehört aber zur $\Phi^{(3)}_{091}$ in d$_1$) die Curve, deren Bild

$$C_6(a_1^4 a_2^2 \dots a_7^2) = C_3^2(a_1^2 a_2 \dots a_7),$$

diese aber besteht aus dem a_1 entsprechenden Kegelschnitt φ_{091}, verbunden mit einem doppelt gezählten Kegelschnitt (Π, Π_1); ebenso gehört zur $\Phi^{(3)}_{091}$ von d$_2$) die Curve, deren Bild

$$C_8(a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^2 \dots a_8^2) = C_4^2(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 \dots a_8),$$

die also wieder aus dem a_1 entsprechenden Kegelschnitt φ_{091} und einem doppelten Kegelschnitt (Π, Π_1) besteht. Beide Arten gehören also zu dem durch φ_{091} definirten einen System.

Man findet somit hier $28 \,.\, 120$ Schaaren, zu je 28 einem der 120 Ω 3-fach berührenden Kegelschnitte φ zugeordnet.

Die 28 Schaaren selbst, die zu einem und demselben Index (β) gehören, wo (β) eine der 120 Formen

(ikl), (i, k, l drei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots 8, 9$)

hat, lassen sich einzeln den 28 Paaren von Indices derselben Form zuordnen, in welche sich der Gruppenindex $[0\beta]$ zerlegen lässt.

Denn zur Schaar a$_1$), vom Index (012), gehören die beiden Curven, dargestellt durch

$$a_1^2 \,.\, C_3(a_1^2 a_3 \dots a_8)$$

und

$$a_2^2 \,.\, C_3(a_2^2 a_3 \dots a_8),$$

nämlich die beiden Curven

$$\varphi_{091}^2 \cdot \varphi_{012} \quad \text{und} \quad \varphi_{092}^2 \cdot \varphi_{012},$$

und man hat

$$(0) + (012) = [12] = (091) + (092).$$

Oder auch so: in derselben Schaar ist auch die Curve enthalten, deren Bild ist:

$$a_1, \; a_2, \; C_3(a_1 a_2 a_3 \ldots a_8),$$

nämlich

$$\varphi_{091} \cdot \varphi_{092} \cdot \varphi_0,$$

entsprechend der Zerlegung

$$(012) = (0) + (091) + (092).$$

IV. Ω berührende Schaaren $\Phi^{(3)}$ mit je 2 Doppelpunkten.

Von solchen ∞^4-Schaaren, mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten, also vom Geschlecht 2, existiren nach unserer Abbildung:

a$_1$) $\Phi_1'^{(3)}$; Bilder in Y: $C_4(a_1^2 a_2 \ldots a_8)$, bez. $C_{14}(a_1^4 a_2^5 \ldots a_8^5)$,
a$_2$) „ ; „ „ „: $C_8(a_1^2 a_2 a_3^3 \ldots a_8^3)$,
bez. $C_{10}(a_1^4 a_2^5 a_3^3 \ldots a_8^3)$.
b$_1$) $\Phi'^{(3)}_{01234}$; „ „ „: $C_5(a_1^2 \ldots a_4^2 a_5 \ldots a_8)$,
bez. $C_{13}(a_1^4 \ldots a_4^4 a_5^5 \ldots a_8^5)$,
b$_2$) „ ; „ „ „: $C_7(a_1^2 \ldots a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7^3 a_8)$,
bez. $C_{11}(a_1^4 \ldots a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^3 a_8^5)$,
b$_3$) „ ; „ „ „: $C_9(a_1^2 a_2^2 a_3^4 a_4^4 a_5^3 \ldots a_8^3)$,
bez. $C_9(a_1^4 a_2^4 a_3^2 a_4^2 a_5^3 \ldots a_8^3)$.
c$_1$) $\Phi'^{(3)}_{09123}$; „ „ „: $C_6(a_1^3 a_2 a_3 a_4^2 \ldots a_8^2)$,
bez. $C_{12}(a_1^3 a_2^5 a_3^5 \ldots a_8^4)$,
c$_2$) „ ; „ „ „: $C_5(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^4 a_5^2 \ldots a_8^2)$,
bez. $C_{10}(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^2 a_5^4 \ldots a_8^4)$.
d) Φ_9' ; „ „ „: $C_7(a_1^4 a_2^2 \ldots a_8^2)$, bez. $C_{11}(a_1^2 a_2^4 \ldots a_8^4)$,

mit den möglichen Vertauschungen der Zahlen $1, 2, \ldots 8$.

Dies sind 8 . 135 verschiedene, aber gleichwerthige, Schaaren; und zwar je zu 8 in einem der 135 Systeme mit den Indices (α) oder

$$(i), \; (oiklm),$$

zu denen auch die Schaaren II. gehören, enthalten, wie sich wieder analog wie in II. und III. zeigt.

Die 8 Schaaren selbst, welche zu einem der Indices (α) gehören, lassen sich auf etwas complizirtere Weise je einem System von 7 Indicespaaren zuordnen. Innerhalb a$_1$) hat man nämlich eine ∞^1-Schaar, deren Bild

$$C_3(a_1 \ldots a_8) \,.\, C_1(a_1),$$

d. h. eine φ_0, verbunden mit einer Ω berührenden, [01] zugeordneten, ∞^1-Schaar von $\Phi^{(2)}$; und in *dieser* Schaar 7 Curven, deren Bilder sind

$$a_2 \,.\, C_1(a_1, a_2); \ldots a_8 \,.\, C_1(a_1, a_8),$$

also die 7 Curvenpaare:

$$\varphi_{092} \cdot \varphi_{912}; \cdots \varphi_{098} \cdot \varphi_{918},$$

Unsere Schaar a$_1$) ist daher den 7 (von den 28 möglichen) Zerlegungen von [01] in 2 Indices der Art I.:

$$[01] = (092) + (912) = \cdots = (098) + (918)$$

zugeordnet. Die 14 so erhaltenen Indices (ikl) haben die Eigenschaft, dass *irgend* zwei derselben, genommen aus zwei verschiedenen der 7 Paare, und verbunden mit dem Index (0), oder mit dem Index (1), immer wieder einen Index derselben Art I. geben, der zudem noch in einer der übrigen Zerlegungen von [01] vorkommt*). So ist

$$(092) + (093) \equiv (0) + (023) \equiv (1) + (123)$$

und

$$[01] \equiv (023) + (123).$$

Dabei hat die Gleichung

$$(092) + (093) + (123) \equiv (1)$$

auch noch die Bedeutung, dass

$$\varphi_{092} \cdot \varphi_{093} \cdot \varphi_{123}$$

eine Curve aus der Schaar $\Phi_1'^{(3)}$ von a$_1$) ist; denn deren Bild

$$a_2 \,.\, a_3 \,.\, C_4(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^2 a_4 \ldots a_8)$$

ist unter den $C_4(a_1{}^2 a_2 \ldots a_8)$ von a$_1$) enthalten.

Den hier erhaltenen 8 zu einem System (α) gehörigen Schaaren

*) Diese Anordnung der 28 Zerlegungen von [01] in 8 Gruppen von je 7 (von denen je 2 Gruppen eine Zerlegung gemein haben), mittels Auszeichnung von (0) und (1), ist identisch mit der Anordnung der 28 ungeraden Charakteristiken für $p = 3$ in 8 Aronhold'sche Gruppen von je 7 unter Auszeichnung einer geraden Charakteristik. Vgl. Math. Ann. XVI: „Zur Theorie der Thetafunctionen etc.", § 11, 1. b).

gegenüber ordnen sich die 64 in II. erhaltenen zum selben System (α) gehörigen Schaaren nicht nochmal näher zusammen: insbesondere sind diese in jenen in keiner Weise als Unterschaaren enthalten.

V. Ω berührende Schaaren $\Phi^{(3)}$ mit je einem Doppelpunkte.

Von solchen Schaaren von Curven $\Phi^{(3)}$ mit je einem scheinbaren Doppelpunkte, aber vom Geschlechte 3, gibt es nach der Abbildung folgende 5-fach unendliche:

1) $\Phi'^{(3)}_{091}$; Bilder in Y: $C_6(a_1 a_2^2 \ldots a_8^2)$, bez. $C_{12}(a_1^5 a_2^4 \ldots a_8^4)$.

2) $\Phi'^{(3)}_{912}$; „ „ „: $C_7(a_1^3 a_2^3 a_3^2 \ldots a_8^2)$, bez. $C_{11}(a_1^3 a_2^3 a_3^4 \ldots a_8^4)$.

3) $\Phi'^{(3)}_{123}$; „ „ „: $C_8(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3 \ldots a_8^3)$, bez. $C_{10}(a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^3 \ldots a_8^3)$.

4) $\Phi'^{(3)}_{012}$; „ „ „: $C_9(a_1^4 a_2^2 a_3^3 \ldots a_8^3)$, bez. $C_9(a_1^2 a_2^4 a_3^3 \ldots a_8^3)$,

mit den Vertauschungen der Zahlen $1, 2, \ldots 8$.

Diese 120 Schaaren sind den 120 Berührungskegelschnitten φ_β von I, mit bez. denselben Indices β, einzeln zugeordnet; denn in jeder solchen ∞^5-Schaar ist als Unterschaar der betreffende Kegelschnitt φ, verbunden mit der ∞^3-Schaar der doppelt gerechneten Kegelschnitte durch Π und Π_1, enthalten. So in 1) die Curve, deren Bild ist

$$a_1 \,.\, C_6(a_1^2 a_2^2 \ldots a_8^2),$$

welch' letztere Curve einen Kegelschnitt durch Π, Π_1 als in beiden Blättern verlaufend vorstellt.

Eine solche zum System (β) gehörige ∞^5-Schaar von Berührungscurven $\Phi'^{(3)}_\beta$ berührt Ω schon in *allen* ∞^5 Gruppen von je 9 Punkten, die im System (β) überhaupt enthalten sind. In der That ergänzt sich jene Schaar mit Ω selbst zur ganzen ∞^6-Schaar jenes Systems, indem in dem Büschel, welcher durch irgend eine Curve dieser ∞^6-Schaar und durch Ω erzeugt wird, immer *eine* in zwei *getrennte* übereinanderlaufende Curven zerfallende Curve, mit je einem scheinbaren Doppelpunkte, sich befindet. Sei nämlich ψ_β die Curve 6ter Ordnung (Π^3, Π_1^3), so wird

$$\varphi_\beta \cdot \psi_\beta = \Psi^2 - \Omega \cdot \mathrm{N}',$$

wo Ψ eine durch die 12 Berührungspunkte von φ_β und ψ_β gehende Curve 4ter Ordnung (Π^2, Π_1^2) ist, N' ein Kegelschnitt (Π, Π_1) wird, der φ_β in 1, ψ_β in 3 Punkten berührt, durch die Ψ geht. In dem Kegelschnittbüschel, der aus N' und φ_β entsteht, ist nun, da diese beiden Curven sich doppelt berühren, *eine* doppelte Gerade N^2 enthalten:

$$\mathrm{N}' + \lambda \varphi_\beta = \mathrm{N}^2,$$

so dass

$$\varphi_\beta(\psi_\beta - \lambda \Omega) = \Psi^2 - \mathrm{N}^2 \cdot \Omega.$$

Die Curve $\psi_\beta - \lambda\Omega = 0$ erhält dann einen Doppelpunkt γ in dem Punkt $\mathsf{N} = 0$, $\Psi = 0$ der nicht auf φ_β liegt, während der weitere Schnittpunkt der durch Π gehenden Geraden N mit $\Psi(\Pi^2, \Pi_1^2)$ zugleich φ_β und $\psi_\beta - \lambda\Omega = 0$ angehört. Vermöge dieser $\psi_\beta - \lambda\Omega = 0$ also wird $\sqrt{\Omega}$ rational, und diese Curve ist die oben unter V. gefundene, welche zu einer ∞^5-Schaar führt. In einer solchen ∞^5-Schaar ist die oben unter III. gefundene, zum selben Index (β) gehörige ∞^3-Schaar nicht enthalten; die 3 Doppelpunkte einer Curve der letzteren Schaar haben nicht die eben für γ angegebene Lage.

VI. Ω berührende Schaaren $\Phi^{(2)}$.

Die Kegelschnitte φ, welche Ω in je 3 Punkten berühren, kann man paarweise zusammennehmen und erhält hieraus neue Berührungssysteme, welchen Gruppenindices $[\gamma]$ zugeordnet werden. Es gibt 255 solcher von den Formen:

$$[oi],\ [ik],\ [oikl],\ [iklm],$$

wo i, k, l, m verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots 8, 9$ sind; vermöge des ausgezeichneten Index $[o]$ zerfallen dieselben in zwei Arten von 120 bez. 135 Indices:

$$[ik],\ [oikl]$$

bez.

$$[oi],\ [iklm].$$

Ein einem solchen Index $[\gamma]$ zugeordnetes System von Curven $\Phi^{(2)}_\gamma$, d. h. von Curven 4ter Ordnung $(\Pi^2\Pi_1^2)$, die Ω in je 6 Punkten berühren, hat die Mannigfaltigkeit ∞^2; und in jeder solchen Schaar gibt es, den 28 Zerlegungen von γ in zwei Indices der Art $[oik]$ oder $[ikl]$ entsprechend, 28 Curven, die in ein Kegelschnittpaar zerfallen. Die 120 Schaaren nun, welche den 120 Gruppenindices erster Art zugeordnet sind, bilden sich so ab:

$\Phi^{(2)}_{91}$; Bild. in $Y: C_3(a_2 \ldots a_8)$, bez. $C_9(a_1{}^4 a_2{}^3 \ldots a_8{}^3)$.

$\Phi^{(2)}_{0912}$; „ „ „ : $C_4(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3 \ldots a_8)$, bez. $C_8(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^3 \ldots a_8{}^3)$.

$\Phi^{(2)}_{0123}$; „ „ „ : $C_5(a_1 a_2 a_3 a_4{}^2 \ldots a_8{}^2)$, bez. $C_7(a_1{}^3 a_2{}^3 a_3{}^3 a_4{}^2 \ldots a_8{}^2)$.

$\Phi^{(2)}_{12}$; „ „ „ : $C_6(a_1{}^3 a_2 a_3{}^2 \ldots a_8{}^2)$, bez. $C_6(a_1 a_2{}^3 a_3{}^2 \ldots a_8{}^2)$.

Diese Schaaren haben also alle die Eigenschaft, $\sqrt{\Omega}$ rational zu machen und zwar hat man eine Beziehung:

$$\Phi^{(2)}_\gamma \cdot \varphi_{o\gamma} = \Psi^2 - \Omega,$$

wo Ψ eine Curve 3ter Ordnung (Π^2, Π_1).

In den 135 ∞^2-Schaaren, die den 135 Indices $[oi]$, $[iklm]$ zugeordnet sind, erhält man Unterschaaren von der Mannigfaltigkeit ∞^1, mit Curven mit je *einem* scheinbaren Doppelpunkte ($p=0$), und mit der Abbildung

a$_1$) $\Phi^{(2)}_{01}$; Bild. in Y: $C_1(a_1)$, bez. $C_{11}(a_1{}^3 a_2{}^4 \ldots a_8{}^4)$.
a$_2$) „ „ „ „ : $C_5(a_1 a_3{}^2 \ldots a_8{}^2)$, bez. $C_7(a_1{}^3 a_2{}^4 a_3{}^2 \ldots a_8{}^2)$,
b$_1$) $\Phi^{(2)}_{1234}$; „ „ „ : $C_2(a_1 \ldots a_4)$, bez. $C_{10}(a_1{}^3 \ldots a_4{}^3 a_5{}^4 \ldots a_8{}^4)$.
b$_2$) „ „ „ „ : $C_4(a_1 \ldots a_4 a_5{}^2 a_6{}^2 a_7{}^2)$, bez. $C_8(a_1{}^3 \ldots a_4{}^3 a_5{}^2 a_6{}^2 a_7{}^2 a_8{}^4)$,
b$_3$) „ „ „ „ : $C_6(a_1 a_2 a_3{}^3 a_4{}^3 a_5{}^2 \ldots a_8{}^2)$, bez. $C_6(a_1{}^3 a_2{}^3 a_3 a_4 a_5{}^2 \ldots a_8{}^2)$.
c$_1$) $\Phi^{(2)}_{9123}$; „ „ „ : $C_3(a_1{}^2 a_4 \ldots a_8)$, bez. $C_9(a_1{}^2 a_2{}^4 a_3{}^4 a_4{}^3 \ldots a_8{}^3)$,
c$_2$) „ „ „ „ : $C_5(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^2 a_4{}^3 a_5 \ldots a_8)$, bez. $C_7(a_1{}^2 a_2{}^2 a_3{}^2 a_4 a_5{}^3 \ldots a_8{}^3)$,
d) $\Phi^{(2)}_{09}$; „ „ „ : $C_4(a_1{}^3 a_2 \ldots a_8)$, bez. $C_8(a_1 a_2{}^3 \ldots a_8{}^3)$.

Dies liefert innerhalb jeder der 135 ∞^2-Schaaren 8 verschiedene ∞^1-Schaaren von $\Phi^{(2)}_\gamma$, welche, wenn $[\gamma]$ der bezügliche Gruppenindex, dem 8 zu $(\alpha)=(o\gamma)$ gehörigen ∞^4-Schaaren von Berührungscurven $\Phi'^{(3)}_\alpha$ aus IV. eindeutig zugeordnet sind, insofern in einer solchen Schaar $\Phi'^{(3)}_\alpha$ als Theil jene $\Phi^{(2)}_\gamma$, verbunden mit einem uneigentlichen Kegelschnitte φ_o, enthalten ist. Die algebraische Beziehung wird von der Form

$$\Phi^{(2)}_\gamma \cdot \Phi'^{(3)}_{o\gamma} = \Psi^2 - \mathrm{N}^2\Omega, \tag{11}$$

wo Ψ eine Curve 5$^{\text{ter}}$ Ordnung ($\Pi^3\Pi_1{}^2$), N ein Kegelschnitt ($\Pi\Pi_1$) ist. Dass und welche 7 Kegelschnittpaare in einer solchen ∞^1-Schaar $\Phi^{(2)}_\gamma$ enthalten sind, ist unter IV. nachgewiesen.

Man kann noch bemerken, dass, wenn man die Bildcurven a$_1$) ... d) durch den Punkt b_1, bezügl. durch b_2 legt, sich 2 . 8 . 135 einzelne rationale Ccurven 3$^{\text{ter}}$ Ordnung (mit je einem scheinbaren Doppelpunkte) ergeben, welche durch Π, Π_1 einfach gehen und Ω in je 6 Punkten berühren.

§ 4.

Allgemeine Bemerkungen.

Es ist leicht, aus der Abbildung die Discussion der Berührungscurven an Ω zu höheren Ordnungen hier fortzuführen oder aus dem schon Mitgeteilten eine Reihe von Sätzen über die Lagenverhältnisse der Schnittpunkte der in den einzelnen Schaaren enthaltenen Curven φ abzuleiten. Ich will indess nur noch anführen, was im Vorigen durch die speziell gewählte Curve Ω bedingt ist und was dagegen bei rationaler Transformation von Ω erhalten bleibt.

Zunächst ist für die Curve Ω charakteristisch, dass sie ausser 120 einzelnen Berührungscurven φ noch eine ∞^1-Schaar φ_0 solcher enthält.

Man hat in Folge dessen unter den 136 Schaaren von Berührungscurven $\Phi^{(3)}$, die im Allgemeinen bei einer Curve vom Geschlecht 4 existiren, ohne auf eine Berührungscurve φ zu führen, hier *eine* ausgezeichnete. Die zugehörigen 136 Indices zerfallen in *einen*, und in 135 unter sich gleichberechtigte. Die Berührungsschaaren $\Phi^{(2)}$, von denen im Allgemeinen 255 gleichberechtigte existiren, zerfallen in Folge dessen in 120 und 135.

Der Curve Ω der Doppelebene Ξ entspricht in unserer Abbildung eindeutig die Curve $\Delta(y) = 0$, wo $\Delta(y)$ Jacobi'sche Curve von irgend drei Curven 6ter Ordnung, welche $a_1 \dots a_8$ zu Doppelpunkten haben. Auch diese Curve 9ter Ordnung $(a_1^3 \dots a_8^3)$ hat daher die für Ω genannte charakteristische Eigenschaft; und diese Eigenschaft theilen mit Δ alle Curven $C_9(a_1^3 \dots a_8^3)$, zu denen die Curven $C_3'^2(a_1 \dots a_8)$ eine ∞^1-Schaar von in je 3 Punkten berührenden Curven φ_0 vorstellen; ebenso alle, Curven Ω rational eindeutig entsprechende Curven.

Da die Curven $\Phi^{(3)}$ von Ω, die sich als Ausdrücke 3ter Dimension in den φ darstellen, in Bezug auf jede Ω eindeutig entsprechende Curve Ω' in ebensolche zu Ω' gehörige Curven $\Phi'^{(3)}$ übergehen, so gehen auch die im § 3 behandelten ausgezeichneten Unterschaaren von zu Ω gehörigen Berührungssystemen $\Phi^{(3)}$ in zu Ω' gehörige ausgezeichnete Unterschaaren von Berührungscurven $\Phi'^{(3)}$ über. Aber die in § 3 in Bezug auf Ω gegebene Definition der Art dieser Auszeichnung hört bei der Transformation zu gelten auf; sowohl die Eigenschaft, dass die genannten Untersysteme $\sqrt{\Omega}$ rational machen, als die, dass jede Curve eine Anzahl (scheinbarer) Doppelpunkte erhält. Vielmehr besteht das Invariante dieser Unterschaaren nur in der, in § 3 behandelten, Zusammensetzung derselben aus den berührenden φ-Curven.

So seien die 8 . 135 Schaaren von IV. und VI. betrachtet, etwa die Schaar $\Phi_\gamma^{(2)}$ von VI., welche die Mannigfaltigkeit ∞^1 hat, wobei die Beziehung (11) jener Nummer besteht. In dem Ψ dieser Beziehung tritt der eine Parameter der Schaar $\Phi_\gamma^{(2)}$ linear auf; d. h. vermöge $\Omega = 0$ herrscht zwischen drei Ausdrücken

$$\sqrt{\Phi_\gamma^{(2)'}}, \quad \sqrt{\Phi_\gamma^{(2)''}}, \quad \sqrt{\Phi_\gamma^{(2)'''}},$$

wo $\Phi_\gamma^{(2)'} = 0$, $\Phi_\gamma^{(2)''} = 0$, $\Phi_\gamma^{(2)'''} = 0$ irgend drei Curven der Schaar $\Phi_\gamma^{(2)}$ sind, eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten. Insbesondere kann man für diese drei $\Phi_\gamma^{(2)}$ drei der 7, nach IV. in $\Phi_\gamma^{(2)}$ enthaltenen φ-Paare wählen. So erhält man also lineare homogene Relationen zwischen irgend drei der 7 zu [01] gehörigen Paare

$$\sqrt{\varphi_{092} \cdot \varphi_{192}}, \quad \dots, \quad \sqrt{\varphi_{098} \cdot \varphi_{198}};$$

und analog für 8 . 135 Schaaren, im Ganzen 35 . 8 . 135 solcher Relationen. Dieses sind im obigen Sinne invariante Relationen.

Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung.

Von

M. Noether in Erlangen.

Von den Flächen vierter Ordnung, deren Coordinaten als rationale Functionen zweier Parameter dargestellt werden können, sind bis jetzt, ausser solchen mit vielfachen Curven, nur die Fläche mit einem dreifachen Knotenpunkt und die Fläche mit einem Selbstberührungspunkt

$$F_4^{(1)} \equiv x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 f_2(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bekannt*). Die Abbildung der letzteren auf die Ebene geschieht durch ∞^3 Curven 6^{ter} Ordnung:

$$C_6(a_1^2, a_2^2, \ldots a_7^2, b_1, \ldots b_4),$$

wobei die Punkte $a_1, \ldots a_7, b_1, \ldots b_4$ auf einer Curve 3^{ter} Ordnung liegen.

Aber ich habe gefunden, dass noch zwei, und nur zwei, weitere Arten von rationalen Flächen 4^{ter} Ordnung mit einem singulären Punkte existiren. Die eine, $F_4^{(2)}$ wird auf die Ebene abgebildet mittels ∞^3 Curven 7^{ter} Ordnung

$$C_7(a^3, b_1^2, b_2^2 \ldots b_9^2),$$

wo $a, b_1, b_2 \ldots b_9$ in besonderer Lage auf einer C_3 sind; die zweite, $F_4^{(3)}$, wird abgebildet mittels ∞^3 Curven 9^{ter} Ordnung

$$C_9(a_1^3, a_2^3, \ldots a_8^3, b_1^2, b),$$

wo wiederum $a_1, a_2, \ldots a_8, b_1, b$ auf einer C_3 sind**). Der Nachweis

*) S. meine Note in den Göttinger Nachrichten vom 7. Juni 1871. Ein spezieller Fall der Fläche $F_4^{(1)}$ war von Herrn Cremona ebendaselbst, 3. Mai 1871 mitgetheilt worden. Eine ausführliche Behandlung der allgemeinen $F_4^{(1)}$ hat Herr Cremona unter dem Titel: „Sopra una certa superficie di quart' ordine" in den „Collectanea mathem. in commemor. di Dom. Chelini", Hoepli, Milano 1881, gegeben.

**) Dieses System der C_9 findet sich in Herrn Jung's Aufsatz: „Ricerche sui sistemi lineari di curve algebr. etc.", Annali di Mat. Ser. II, t. 15, 1887. Eine Anfrage der Herren Jung und Segre, ob die zugehörige F_4 schon discutirt sei — Herr Segre hatte die C_9 schon auf die Eigenschaft hin, ob sie eine F_4 in der That eindeutig bestimmen, untersucht —, bot die Veranlassung zur Ausarbeitung und Veröffentlichung des vorliegenden Aufsatzes.

des Gesagten und die Discussion der genannten Flächenarten bildet den Inhalt des folgenden Aufsatzes.

§ 1.

Reduction des Problems.

Eine Fläche 4^{ter} Ordnung ohne vielfachen Punkt kann nicht rational-eindeutig auf die Ebene abbildbar sein, da sie nicht das Flächengeschlecht 0 hat. Man hat daher nur die F_4 mit einem Doppelpunkt P zu betrachten.

Projicirt man die F_4 von P aus auf eine Ebene Ξ, so wird diese doppelt überdeckt, und die beiden Blätter hängen längs einer Uebergangscurve 6^{ter} Ordnung, Ω, zusammen. Im Falle P ein Selbstberührungspunkt von F_4 ist, d. h. im Falle jeder ebene Schnitt durch P die Fläche in einer Curve 4^{ter} Ordnung mit *zwei* bei P benachbarten Doppelpunkten trifft, hat man die Fläche $F_4^{(1)}$ der Einleitung vor sich, und die Curve Ω besteht dann aus einer doppelt gezählten Geraden, längs der die Blätter getrennt verlaufen, und aus einer eigentlichen Uebergangscurve der 4^{ten} Ordnung: die Doppelgerade, in der Ξ durch eine durch P gehende Ebene geschnitten wird, erhält 4 Verzweigungspunkte, entsprechend dem Geschlechte $p = 1$ des ebenen Schnittes durch P.

In jedem andern Falle hat man in den Schnitten durch P Curven 4^{ter} Ordnung mit nur einem Doppelpunkte vor sich, vom Geschlechte 2, und dem entsprechend eine eigentliche Uebergangscurve Ω von der 6^{ten} Ordnung, damit die Geraden der Doppelebene Ξ 6 Verzweigungspunkte erhalten. Bei der Abbildung von F_4 in die einfache Ebene entspricht den ebenen Schnitten von F_4 durch P, oder den Geraden von Ξ, eine lineare ∞^2-Schaar von Curven vom Geschlechte 2, die sich in je 2 beweglichen Punkten schneiden. Man hat daher die Aufgabe, alle solche Schaaren zu construiren.

Wenn die ∞^2-Schaar aus Curven n^{ter} Ordnung besteht, welche eine Reihe von i_1-, i_2-, ... fachen Fundamentalpunkten besitzen, so hat man die Gleichungen

$$n^2 - 2 = \sum_\varrho i_\varrho^2, \quad \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 2 = \frac{1}{2}\sum_\varrho i_\varrho(i_\varrho - 1),$$

woraus auch

$$\frac{1}{2}\sum_\varrho i_\varrho(i_\varrho + 1) = \frac{1}{2}n(n+3) - 1.$$

Die dritte Gleichung zeigt zunächst, dass unter den linearen Bedingungsgleichungen, welche die Fundamentalpunkte für die Parameter der Schaar liefern, *eine* eine Folge der übrigen sein muss. Die beiden ersten Gleichungen ergeben, indem man wörtlich die Schlussweise verfolgt, welche ich in meiner Note „Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen" (diese Annalen Bd. V) aufgestellt habe*), dass sich *alle* unsere Schaaren, auch die singulärsten, durch eine Reihenfolge quadratischer eindeutiger Ebenentransformationen auf die folgenden zwei Schaaren reduciren lassen:

I. Curven $C_4(a^2 b_1 b_2 \dots b_{10})$,
wobei eine $C_3(a b_1 \dots b_{10})$ existirt;

II. Curven $C_6(a_1{}^2 a_2{}^2 \dots a_8{}^2 b_1 b_2)$,
wobei wieder $a_1, a_2 \dots a_8, b_1, b_2$ auf einer C_3 liegen.

Die I[te] ∞^2-Schaar führt (s. Clebsch, Math. Ann. III.) auf eine Doppelebene Ξ mit Uebergangscurve Ω von der 6[ten] Ordnung, die einen 4-fachen Punkt hat. Die II[te] ∞^2-Schaar führt, nach meinem vorstehenden Aufsatz „Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen", auf eine Doppelebene Ξ mit Uebergangscurve Ω von der 6[ten] Ordnung, welche zwei unendlich benachbarte 3-fache Punkte besitzt. —

§ 2.

Bestimmung der rationalen Flächen F_4.

Sei nun

$$F_4 \equiv x_4{}^2 f_2(x_1, x_2, x_3) + 2x_4 f_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3),$$

und hierbei

$$f_2 \equiv \alpha x_3{}^2 + x_3 A_1 + A_2,$$
$$f_3 \equiv \beta x_3{}^3 + x_3{}^2 B_1 + x_3 B_2 + B_3,$$
$$f_4 \equiv \gamma x_3{}^4 + x_3{}^3 C_1 + x_3{}^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4,$$

wo die A_i, B_i, C_i ganze homogene Functionen i[ter] Dimension in x_1, x_2. Also

$$\Omega \equiv f_3{}^2 - f_2 f_4.$$

I. Im Falle I. des § 1 hat man, damit in Ω alle Glieder 0[ter] bis 3[ter] Dimension in x_1, x_2 verschwinden, die vier Identitäten zu erfüllen:

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0$$
$$2\beta B_1 - \alpha C_1 - \gamma A_1 = 0$$
$$B_1{}^2 + 2\beta B_2 - \alpha C_2 - A_1 C_1 - \gamma A_2 = 0$$
$$2\beta B_3 + 2B_1 B_2 - \alpha C_3 - A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0.$$

*) Ich theile die einfache Rechnung hier nicht mit, weil sich dieselbe bereits bei Martinetti, „Sopra alc. sistemi lin. di curve piane algebr. di genere due", Rendic. d. Circ. Matem. di Palermo, I, pag. 205 ausgeführt findet. Nur ist dessen System 1° von $[\Phi_4]$ auf pag. 216 nichts weiter als ein specieller Fall von dessen System 2° von $[\Phi_4]$.

Wenn nun 1) α nicht $=0$, etwa $=1$, so kann man, indem man $x_4+\lambda x_3$ statt x_4 einführt, jedenfalls γ zu 0 machen; also sei dann $\gamma=0$, $\beta=0$. Dies gibt

$$C_1=0,\quad C_2=B_1^2,\quad C_3=B_1(2B_2-A_1B_1),$$

und

$$F_4\equiv x_3^2(x_4+B_1)^2+x_3(x_4+B_1)(A_1^2-A_1x_4+2B_2)$$
$$+(x_4^2A_2+2x_4B_3+C_4);$$

d. h. F_4 erhält in $x_1=x_2=x_4=0$ einen Selbstberührungspunkt und gehört also zur Klasse $F_4^{(1)}$ der Einleitung.

Wenn 2) $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, so wird

$$B_1^2-A_1C_1=0,\quad 2B_1B_2-A_1C_2-A_2C_1=0.$$

Also entweder

$$A_1=0,\quad B_1=0,\quad C_1=0,$$

dann erhält aber F_4 eine Doppelgerade $x_1=x_2=0$, was ausgeschlossen ist.

Oder

$$B_1=0,\ A_1=0,\ C_1 \text{ nicht } =0,\ A_2=0,$$

was einen 3-fachen Punkt von F_4 in $x_1=x_2=x_3=0$ gibt; oder

$$B_1=0,\ C_1=0,\ A_1 \text{ nicht } =0,\ C_2=0,$$

was aber einen 3-fachen Punkt von F_4 in $x_1=x_2=x_4=0$ liefert; oder

$$B_1 \text{ nicht } =0,\ A_1=B_1=C_1,\ A_2+C_2=2B_2,$$
$$F_4\equiv A_1x_3(x_4+x_3)^2+(x_4+x_3)(A_2x_4+C_2x_3)$$
$$+(2x_4B_3+x_3C_3+C_4),$$

was wiederum einen 3-fachen Punkt von F_4 in $x_1=x_2=x_4+x_3=0$ liefert, also hier ebenfalls ausgeschlossen werden soll.

Wenn 3) $\alpha=0$, $\beta=0$, γ nicht $=0$, so sei $\gamma=1$ und es wird

$$A_1=0,\ A_2=B_1^2,$$

wobei B_1 und A_2 nicht zu 0 werden können, weil sonst F_4 wieder in $x_1=x_2=x_3=0$ einen 3-fachen Punkt hätte; dann

$$2B_2=B_1C_1$$

und somit kommt man auf die Flächenklasse:

$$F_4^{(2)}\equiv(x_4B_1+x_3^2)^2+(x_4B_1+x_3^2)x_3C_1$$
$$+(2x_4B_3+x_3^2C_2+x_3C_3+C_4),$$

für die

$$\Omega(x)\equiv x_3^2B_1\left[B_1\left(\tfrac{1}{4}C_1^2-C_2\right)+2B_3\right]+x_3B_1(C_1B_3-B_1C_3)$$
$$+(B_3^2-B_1^2C_4)=0$$

eine Curve 6^{ter} Ordnung mit 4-fachem Punkte $x_1=x_2=0$, dessen einer Zweig, in der Richtung $B_1=0$, daselbst einen Wendepunkt hat.

II. Im Falle II. des § 1 hat man, damit Ω die Form

$$\Omega(x) = x_3^3 x_1^3 + x_3^2 x_1^2 Q_2 + x_3 x_1 Q_4 + Q_6$$

annimmt, die Identitäten zu erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\beta^2 - \alpha\gamma = 0\\
&2\beta B_1 - \alpha C_1 - \gamma A_1 = 0\\
&B_1^2 + 2\beta B_2 - \alpha C_2 - A_1 C_1 - \gamma A_2 = 0\\
&2\beta B_3 + 2 B_1 B_2 - \alpha C_3 - A_1 C_2 - A_2 C_1 = x_1^3\\
&B_2^2 + 2 B_1 B_3 - \alpha C_4 - A_1 C_3 - A_2 C_2 = x_1^2 Q_2\\
&2 B_2 B_3 - A_1 C_4 - A_2 C_3 = x_1 Q_4 .
\end{aligned}$$

Wenn hier 1) $\alpha = 0$, γ nicht $= 0$, etwa $= 1$, so wird

$$\beta = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = B_1^2$$

und von 0 verschieden; die weiteren Gleichungen ergeben dann, dass B_1, B_2, und B_3 die Grösse x_1 zum Factor haben müssen, was nur den schon erledigten Fall des Selbstberührungspunktes von F_4 in

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

liefert.

Wenn 2) $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, so wird

$$\beta = 0, \quad B_1^2 - A_1 C_1 = 0.$$

Sei nun 2a) B_1 nicht $= 0$; so kann man setzen

$$A_1 = B_1 = C_1,$$

wonach die 4te Gleichung wird

$$B_1(2B_2 - A_2 - C_2) = x_1^3,$$

d. h. etwa

$$B_1 = x, \quad 2B_2 - A_2 - C_2 = x_1^2 .$$

Die 5te Gleichung liefert dann für C_2 und C_3 die Formen

$$C_2 = A_2 + x_1 L_1, \quad C_3 = 2B_3 + x_1 L_2,$$

wonach die 6te Gleichung schon erfüllt ist. Dies gibt

$$F_4 \equiv (x_4 + x_3)^2 (x_3 x_1 + A_2) + (x_4 + x_3)(x_3 x_1 L_1 + 2B_3) + (x_3 x_1 L_2 + C_4).$$

d. h. den ausgeschlossenen Fall eines dreifachen Punktes in

$$x_1 = x_2 = x_4 + x_3 = 0.$$

Ist aber 2b) $B_1 = 0$, so kann wegen der 4ten Gleichung nicht zugleich $A_1 = 0$, $C_1 = 0$ sein. Sei dann zunächst

$$C_1 = 0, \quad A_1 \text{ nicht } = 0,$$

so wird

$$A_1 = x_1, \quad C_2 = -x_1^2,$$

B_2 und C_3 erhalten ebenfalls x_1 zum Factor und F_4 erhielte wieder einen Selbstberührungspunkt in $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Es muss also sein

$$A_1 = 0, \quad C_1 \text{ nicht } = 0;$$

wonach nach der vierten Gleichung $-A_2C_1 = x_1^3$ gesetzt werden kann:

$$A_2 = x_1^2, \quad C_1 = -x_1;$$

und nach der 5ten Gleichung $B_2^2 - x_1^2 C_2 = x_1^2 Q_2$:

$$B_2 = x_1 D_1.$$

Die 6te Gleichung ist hierdurch ebenfalls erfüllt, und es wird:

$$F_4^{(3)} \equiv x_4^2 x_1^2 + 2x_4(x_3 x_1 D_1 + B_3) \\ + (-x_3^3 x_1 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4).$$

Dafür wird

$$\Omega(x) \equiv x_3^3 x_1^3 + x_3^2 x_1^2 (D_1^2 - C_2) + x_3 x_1 (2 D_1 B_3 - x_1 C_3) \\ + (B_3^2 - x_1^2 C_4).$$

Wenn endlich 3) α nicht $= 0$, etwa $= 1$, so kann man setzen (wie in I.):

$$\gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = B_1^2.$$

Die übrigen drei Gleichungen lassen dann A_1 und A_2 ganz willkürlich, liefern aber Bestimmungen für C_3, C_4 und B_2 oder B_3. Sie bewirken jedenfalls, dass F_4 nach x_3 geordnet, von der Form wird:

$$x_3^2 (x_4 + B_1)^2 + x_3 M_3 + M_4,$$

d. h. im Punkte $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ einen weiteren Doppelpunkt Q erhält, und zwar mit dem Tangentenkegel $(x_4 + B_1)^2 = 0$, d. h. einen uniplanaren Knotenpunkt Q, während der zuerst betrachtete Projectionspunkt P von F_4 ein gewöhnlicher Knotenpunkt ohne alle Singularität bleibt. Die Betrachtung dieses Falles kann aber ausgeschlossen werden; denn man kann hier, statt von P, die Projection von F_4 auf eine Doppelebene von Q aus machen und muss dann, da P nicht singulär ist, auf einen andern, als diesen Fall II., 3), d. h. auf einen der im Vorhergehenden schon behandelten Fälle für Q kommen.

Somit bleiben nur die Flächen $F_4^{(1)}$, $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$ übrig*).

---

*) Ein anderer Weg zur Auffindung der $F_4^{(2)}$ und $F_4^{(3)}$ ist folgender: Man transformirt eine F_4, mit einem uniplaren Punkt P, mittels einer gewöhnlichen eindeutigen quadratischen Raumtransformation, deren isolirter Fundamentalpunkt in P gelegt ist, in eine Fläche 6ter Ordnung F_6', welche von der P entsprechenden Fundamentalebene längs einer Geraden p berührt werden wird; und bestimmt dann die Singularität von P so, dass F_6' in einem Punkte von p noch einen Selbstberührungspunkt erhält. Dieser Weg liefert unmittelbar die beiden Flächenarten, zeigt aber nicht, dass dieselben, mit $F_4^{(1)}$, dem in der Einleitung genannten Probleme allein genügen; dagegen zeigt er, dass die Singularität der Flächen $F_4^{(2)}$ und $F_4^{(3)}$ als aus zwei benachbarten einfacheren Singularitäten — einem gewöhnlichen Doppelpunkt und einem Selbstberührungspunkt — zusammengesetzt aufgefasst werden kann.

§ 3.

Die Fläche $F_4^{(1)}$.

Herr Cremona führt in seinem in der Einleitung citirten Aufsatze die Behandlung der Fläche

(1) $$F_4^{(1)} \equiv x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 f_2(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

auf die Ueberführung dieser Gleichung in die Form zurück:

(2) $$F_4^{(1)} \equiv S_1 S_4 - S_2 S_3,$$

wo die $S = 0$ vier Flächen 2ten Grades vorstellen, welche im Punkte P oder $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ alle die Ebene $x_1 = 0$ berühren. Denn der Schnitt von $F_4^{(1)}$ mit dem Flächenbüschel

$$S_1 + \lambda S_2 = 0$$

besteht dann aus einer linearen Schaar rationaler Curven, was also nach einem von mir gegebenen Theorem zur Abbildung führt. Aber da in Bezug auf die Ueberführung von (1) in die Form (2) jener Aufsatz im Wesentlichen nur eine Abzählung gibt, so will ich dieselbe durch Angabe der Art und Zahl der Lösungen der Aufgabe hier ergänzen.

Sei gesetzt

$$S_i = k_i x_4 x_1 + K_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (i = 1, \ldots 4)$$

wo die k_i Constanten, die K_i homogene Ausdrücke 2ten Grades in x_1, x_2, x_3 sind, so wird (2) zu

$$F_4^{(1)} \equiv (k_1 k_4 - k_2 k_3) x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 (k_1 K_4 + k_4 K_1 - k_2 K_3 - k_3 K_2) \\ + (K_1 K_4 - K_2 K_3),$$

und die Aufgabe ist, die k_i, K_i den 3 Gleichungen gemäss

(3) $$\begin{cases} 1 = k_1 k_4 - k_2 k_3 \\ f_2 = k_1 K_4 + k_4 K_1 - k_2 K_3 - k_3 K_2 \\ f_4 = K_1 K_4 - K_2 K_3 \end{cases}$$

zu bestimmen. Dies liefert 22 Gleichungen für die 28 Constanten der k_i, K_i, so dass man ∞^6 Lösungssysteme zu erwarten hat.

Geometrisch ist die Lösung klar. Projicirt man $F_4^{(1)}$ vom Knotenpunkt P aus auf eine Ebene Ξ, so erhält man aus einem Büschel von Raumcurven 4ter Ordnung, das durch $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $S_3 + \lambda S_4 = 0$ auf $F_4^{(1)}$ gegeben ist, in Ξ ein ∞^1-System von Berührungskegelschnitten der die beiden Blätter von Ξ verbindenden Uebergangscurve 4ter Ordnung $\Omega \equiv f_2^2 - 4 f_4 = 0$; und umgekehrt: aus jedem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten an Ω 2 Büschel von Raumcurven 4ter Ordnung von $F_4^{(1)}$, ausgeschnitten durch Büschel von Flächen 2ter Ordnung

$$S_1 + \lambda S_2 = 0, \quad S_3 + \lambda S_4 = 0$$

oder durch

$$S_1 + \mu S_3 = 0, \quad S_2 + \mu S_4 = 0.$$

Im Wesentlichen hat man also 63 verschiedene Lösungsarten von (3); und aus *einer* Lösung erhält man immer ∞^3, indem man statt $K_1, \ldots K_4$ solche lineare Functionen dieser Grössen setzt, welche $K_1 K_4 - K_2 K_3$ in sich überführen, wodurch auch die k_i sich linear transformiren.

Analytisch stellt sich dies so:

Durch eine Lösung von (3) wird

$$\begin{aligned}\Omega \equiv f_2^2 - 4f_4 &= (k_1K_4 + k_4K_1 - k_2K_3 - k_3K_2)^2 - 4(k_1k_4 - k_2k_3)(K_1K_4 - K_2K_3)\\ &\equiv (k_1K_4 - k_4K_1 - k_2K_3 + k_3K_2)^2 - 4(k_1K_2 - k_2K_1)(k_3K_4 - k_4K_3),\end{aligned}$$

so dass damit ein System von Berührungskegelschnitten (mit Parameter λ)

$$(k_1K_2 - k_2K_1) + \lambda(k_1K_4 - k_4K_1 - k_2K_3 + k_3K_2) + \lambda^2(k_3K_4 - k_4K_3) = 0$$

an Ω bestimmt ist. Sei nun umgekehrt irgend ein Berührungskegelschnitt A von Ω bekannt, so erhält dadurch Ω die Form

(4) $\Omega \equiv B^2 - AC$, (A, B, C Functionen 2^{ten} Grads in x_1, x_2, x_3),

und daraus leitet man für (3) eine Lösung her:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \tfrac{1}{2}(f_2 - B), & k_1 &= 1,\\
K_2 &= -\tfrac{1}{2}A, & k_2 &= 0,\\
K_3 &= \tfrac{1}{2}C, & k_3 &= 0,\\
K_4 &= \tfrac{1}{2}(f_2 + B), & k_4 &= 1,
\end{aligned}$$

und eine zweite Lösung durch Vertauschung von B mit $-B$.

Die übrigen Lösungen, welche zum *selben* der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten, wie A, gehören, ergeben sich dann aus der einen mittels der linearen Transformationen

$$\begin{aligned}K_1' &= \alpha K_1 + \beta K_2, \quad & K_2' &= \gamma K_1 + \delta K_2,\\ K_3' &= \alpha K_3 + \beta K_4, \quad & K_4' &= \gamma K_3 + \delta K_4,\end{aligned}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürlichen Parameter, für welche nur

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

damit

$$K_1'K_4' - K_2'K_3' = K_1K_4 - K_2K_3$$

wird. Damit auch

$$k_1'K_4' + k_4'K_1' - k_2'K_3' - k_3'K_2' = k_1K_3 + k_4K_1 - k_2K_3 - k_3K_2,$$

hat man dann zu setzen:

$$k_1' = \alpha k_1 + \beta k_2, \quad k_2' = \gamma k_1 + \delta k_2,$$
$$k_3' = \alpha k_3 + \beta k_4, \quad k_4' = \gamma k_3 + \delta k_4,$$

wonach auch

$$k_1' k_4' - k_2' k_3' = k_1 k_4 - k_2 k_3.$$

Verbindet man mit diesen ∞^3 Transformationen die ∞^3, welche durch Vertauschung von K_1 mit K_4 entstehen, so erhält man aus *einer* Lösung ∞^6 solcher. Dies ist dann für jede der 63 verschiedenen Möglichkeiten, Ω in die Form (4) zu setzen, auszuführen.

§ 4.

Die Fläche $F_4^{(2)}$. Erste Methode der Abbildung.

Die eindeutige Abbildung dieser Fläche (s. I., § 2) auf die Ebene kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden. Einmal durch Projection vom Knotenpunkt P aus auf eine Doppelebene Ξ, mit Uebergangscurve Ω 6ter Ordnung, die einen 4-fachen Punkt hat und durch Abbildung von Ξ auf eine einfache Ebene (nach Clebsch). Sodann, indem man beachtet, dass sich auf $F_4^{(2)}$ unmittelbar ein Büschel von *rationalen* Curven angeben lässt, durch Anwendung meiner in Annalen III gegebenen Methoden. Der Büschel von rationalen Curven aber wird aus
$F_4^{(2)} \equiv (x_4 B_1 + x_3^2)^2 + (x_4 B_1 + x_3^2) x_3 C_1 + (2 x_4 B_3 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4) = 0$
durch den Ebenenbüschel

$$x_1 + \lambda x_2 = 0$$

ausgeschnitten; denn ein solcher ebener Schnitt erhält die Gleichungsform

$$(\alpha x_4 x_1 + x_3^2)^2 + (\alpha x_4 x_1 + x_3^2) \beta x_3 x_1$$
$$+ (\gamma x_4 x_1^2 + \gamma_1 x_3^2 x_1^2 + \gamma_2 x_3 x_1^3 + \gamma_3 x_1^4) = 0,$$

was (vgl. meinen Aufsatz über singuläre Punkte, Math. Ann. IX) eine ebene Curve 4ter Ordnung vorstellt, die bei P oder ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) *zwei einander osculirende Zweige*, von der Richtung $x_1 = x_2 = 0$, d. h. *drei aufeinanderfolgende Doppelpunkte* besitzt, also vom Geschlecht 0 ist.

Die beiden Methoden sollen hier nacheinander angewandt werden, zunächst die erste Methode der Abbildung.

Setzt man

$$F_4^{(2)} = x_4^2 B_1^2(x_1, x_2) + 2 x_4 f_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3),$$

so wird

$$f_3(x) = B_1 x_3 \left(x_3 + \tfrac{1}{2} C_1\right) + B_3,$$

$$f_4(x) = x_3^4 + x_3^3 C_1 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4;$$

und für die Abbildung von $F_4^{(2)}$ auf die Doppelebene Ξ, deren Punkte auf ξ-Coordinaten bezogen seien, erhält man

$$\varrho x_1 = \xi_1 B_1^2(\xi), \quad \varrho x_2 = \xi_2 B_1^2(\xi), \quad \varrho x_3 = \xi_3 B_1^2(\xi),$$
$$\varrho x_4 = -f_3(\xi) + \sqrt{\Omega(\xi)},$$

wo

$$\Omega(\xi) = f_3^2(\xi) - B_1^2(\xi) f_4(\xi) \equiv \xi_3^2 B_1 \left(\tfrac{1}{4} B_1 C_1^2 - B_1 C_2 + 2 B_3\right)$$
$$+ \xi_3 B_1 (C_1 B_3 - B_1 C_3) + (B_3^2 - B_1^2 C_4).$$

Der 4-fache Punkt $\xi_1 = \xi_2 = 0$ dieser Curve 6ter Ordnung, $\Omega = 0$, sei Π; die eine der 4 Tangenten in Π, $B_1 = 0$, ist Wendetangente. Den ebenen Schnitten

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

von $F_4^{(2)}$ entsprechen in Ξ die in *einem* Blatte verlaufenden Curven 4ter Ordnung

$$\Gamma_4 \equiv B_1^2(\xi) \Big(\sum_{i=1}^{3} u_i \xi_i\Big)^2 - 2 u_4 f_3(\xi) \,.\, \sum u_i \xi_i + u_4^2 f_4(\xi) = 0,$$

indem sich dafür $\sqrt{\Omega}$ aus der Gleichung bestimmt:

$$u_4 \sqrt{\Omega(\xi)} = u_4 f_3(\xi) - B_1^2(\xi) \,.\, \Sigma u_i \xi_i \,.$$

Da

$$B_1^2 \Gamma_4 = (B_1^2 \,.\, \Sigma u_i \xi_i - u_4 f_3)^2 - u_4^2 \Omega\,,$$

so berühren die Curven Γ_4, welche nicht durch Π gehen, die Curve Ω in je 12 Punkten.

Von Π aus gehen 10 Tangenten an Ω, von denen eine in $B_1 = 0$ fällt. Vermöge jeder dieser Tangenten wird $\sqrt{\Omega}$ rational, d. h. die beiden Blätter längs einer solchen Tangente sind völlig getrennt und man erhält dementsprechend je 2 getrennte Gebilde von $F_4^{(2)}$. Den 9 von B_1 verschiedenen Tangenten muss je ein Kegelschnittpaar von $F_4^{(2)}$ entsprechen, da kein anderes Zerfallen der oben genannten von einer Ebene des Büschels durch die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ (die mit p bezeichnet sei) ausgeschnittenen rationalen Curve 4ter Ordnung möglich ist. Es gibt daher in dem Ebenenbüschel, der p $(x_1 = x_2 = 0)$ zur Axe hat, 9 Ebenen, welche $F_4^{(2)}$ je in Kegelschnittpaaren schneiden. Die Kegelschnitte berühren alle die Gerade p in P und die beiden eines Paares osculiren einander daselbst.

Der letzten Tangente B_1, die Ω bei Π selbst berührt, entspricht, als Gerade $B_1^{(1)}$ des einen Blattes, in dem $\sqrt{\Omega(\xi)} = +f_3(\xi)$ ist, die rationale Curve 4ter Ordnung, mit 3-fachem Punkt in P, in welcher $B_1(x) = 0$ die Fläche $F_4^{(2)}$ schneidet, nämlich

$$B_1(x) = 0\,, \quad 2 x_4 B_3(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

eine Curve, für deren 3-fachen Punkt die 3 Elemente *einen* Zweig von der Richtung p bilden; als Geraden $B_1^{(2)}$ des zweiten Blattes entspricht der Tangente B_1 von Ω der *Punkt* P von $F_4^{(2)}$ selbst, und zwar so:

Den verschiedenen Punkten von $B_1^{(2)}$ entsprechen die verschiedenen *Richtungen* durch P in der Ebene $B_1(x) = 0$ derart, dass einem Curvenzweig von $F_4^{(2)}$, welcher in P einen Rückkehrpunkt von der Richtung $x_1 = 0$, $\alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ $(\beta \neq 0)$ hat, zu einem Curvenzweig der Doppelebene Ξ führt, welcher $B_1^{(2)}$ im Punkte $\alpha \xi_2 + \beta \xi_3 = 0$ einfach trifft; einem Curvenzweig von $F_4^{(2)}$ aber, welcher in P die Richtung p und daselbst die Schmiegungsebene $\gamma x_1 + \delta x_2 = 0$ hat, ein Curvenzweig von Ξ entspricht, *der durch* Π *geht* mit der Richtung $\gamma \xi_1 + \delta \xi_2 = 0$. —

Ich wende mich jetzt zur Abbildung von Ξ auf eine einfache Ebene Y, die nach Clebsch so geschieht, dass den (doppelten) Geraden der Doppelebene Ξ in Y eine ∞^2-Schaar von

$$C_4(a^2 b_1, b_2, \ldots b_{10}),$$

entspricht, wobei eine

$$C_3(a, b_1, b_2, \ldots b_{10})$$

existirt, deren Punkte den *Richtungen* von Π in Ξ entsprechen, nämlich das Punktepaar, das aus C_3 durch eine durch a gehende Gerade ausgeschnitten wird, zwei übereinanderliegenden Richtungen in Π. Dabei entsprechen ferner den Punkten $b_1, \ldots b_{10}$ die 10 von Π an Ω gehenden Tangenten in je *einem* Blatte, den Geraden $\overline{ab_1}, \ldots \overline{ab_{10}}$ diese 10 Tangenten je im andern Blatte; dem Punkte a ein durch Π gehender Kegelschnitt A. Hier, wo eine der 10 Tangenten von Π an Ω, $B_1 = 0$, bei Π selbst berührt, soll dieser, als Linie $B_1^{(1)}$ die Gerade $\overline{ab_{10}}$, als Linie $B_1^{(2)}$ der Punkt b_{10} von Y entsprechen. Die Gerade $\overline{ab_{10}}$ muss in b_{10} die Curve C_3 *berühren;* denn der dem Schnittpunktepaar entsprechende Punkt von Ξ fällt nicht nur an Π, sondern auch auf Ω.

Für die hierdurch vermittelte eindeutige Beziehung der Fläche $F_4^{(2)}$ zur Ebene Y erhält man so:

Den rationalen Curven 4ter Ordnung, in welchen $F_4^{(2)}$ von dem Geradenbüschel mit Axe p (Linie $P\Pi$) geschnitten wird, entsprechen in Y die Geraden durch den Punkt a — was umgekehrt den rationalen Charakter jener Curven beweist. Insbesondere entsprechen den 9 Kegelschnittpaaren dieses Büschels die 9 Punkte $b_1, \ldots b_9$, verbunden je mit einer der 9 Geraden $\overline{ab_1}, \ldots \overline{ab_9}$; der rationalen Curve 4ter Ordnung mit 3-fachem Punkt, in welcher $B_1(x) = 0$ die Fläche schneidet, die Gerade $\overline{ab_{10}}$; den verschiedenen Richtungen von $F_4^{(2)}$ am Punkte P, die in der Ebene $B_1(x) = 0$ liegen, die verschiedenen Richtungen durch den Punkt b_{10}. Für das Letztere ist genauer zu sagen: einem Curvenzweig von $F_4^{(2)}$, der in P eine Spitze in einer von p verschiedenen Richtung hat, entspricht ein *einfach* durch b_{10} gehender Zweig; einem einfachen Curvenelement von $F_4^{(2)}$ von der Richtung p je nach seiner Schmiegungsebene die verschiedenen Punkte von C_3, nämlich bei bestimmter Schmiegungsebene der eine oder andere Punkt des zugehörigen *Paars* von C_3 je nach dem Vorzeichen von $\sqrt{\Omega(x)}$. Dem Punkt a entspricht daher auf $F_4^{(2)}$ eine durch P in der Richtung p einfach gehende Curve, die sich auf Ξ als Kegelschnitt A durch Π projicirt, d. h. eine Raumcurve 3ter Ordnung.

Hiernach lässt sich leicht sehen, was den ebenen Schnitten von $F_4^{(2)}$ bei der eindeutigen Abbildung auf die Ebene Y entsprechen muss. Da die Curven von $F_4^{(2)}$, welche den Punkten $a, b_1, \ldots b_9$ entsprechen, von den ebenen Schnitten von $F_4^{(2)}$ 3-punktig, bez. 2-punktig getroffen werden, der dem Punkte b_{10} entsprechende Punkt P gar nicht getroffen wird, weitere Fundamentalpunkte aber nicht auftreten, so bilden sich die ebenen Schnitte durch Curven

$$C_r(a^3, b_1^2, b_2^2, \ldots b_9^2)$$

ab. Da diese Curven von den Geraden durch a in je 4 Punkten getroffen werden sollen, wird dabei $r = 7$, so dass als Bilder der ebenen Schnitte eine lineare ∞^3-Schaar von Curven

$$C_7(a^3, b_1^2 b_2^2, \ldots b_9^2)$$

in Y auftritt.

Es ist jetzt nur noch die Lage der 10 Punkte $a, b_1, \ldots b_9$ genauer zu bestimmen; denn es genügt nicht, dass dieselben auf einer Curve dritter Ordnung liegen. In diesem Falle würden die C_7 nur aus dieser C_3, verbunden mit einer ∞^2-Schaar $C_4(a^2, b_1, \ldots b_9, b_{10})$ bestehen, und die Transformation mittels dieser C_4 würde nicht auf die *spezielle* Art von Uebergangscurve $\Omega_6(\Pi^4)$ führen, welche zu einer $F_4^{(2)}$ gehört.

Nimmt man aber 9 Punkte $a, b_1, \ldots b_8$ beliebig an, so erhält man eine lineare ∞^5-Schaar von Curven

$$C_7(a^3, b_1^2, \ldots b_8^2),$$

welche die durch $a, b_1, \ldots b_8$ gehende C_3 in einer linearen ∞^1-Schaar $g_2^{(1)}$ von Gruppen von je 2 Punkten treffen. In dieser Schaar $g_2^{(1)}$ gibt es vier Gruppen, welche je aus zwei benachbarten Punkten von C_3 bestehen. Sei b_9 eine dieser Stellen; so gibt es ∞^4 unserer Curven, welche C_3 in b_9 berühren; also ∞^3 derselben, welche b_9 zum Doppelpunkte haben, ohne in C_3 und eine weitere Schaar zu zerfallen.

So ist eine ∞^3-Schaar von $C_7(a^3 b_1^2 \ldots b_9^2)$ gefunden; aber man kann dieselbe noch anders definiren. Nimmt man zu einer dieser Curven, welche nicht C_3 zum Factor hat, die Geraden $C_1(a)$ hinzu, so erhält man eine Schaar $C_7(a^3 b_1^2 \ldots b_9^2) \,.\, C_1(a)$, welche vermöge $C_3 = 0$ auch auf eine Schaar von irreductiblen Curven

$$C_8(a^4, b_1^2, \ldots b_9^2)$$

reducirt werden kann. Diese ganze Schaar trifft C_3 in einer linearen

∞^1-Schaar $\gamma_2^{(1)}$ von Gruppen von je 2 Punkten, welche aus C_3 auch durch die Geraden $C_1(a)$ ausgeschnitten werden. Eine dieser Curven ist aber $C_4^2(a^2 b_1 \dots b_9 b_{10})$; wo b_{10} auch auf C_3 liegt; d. h. eine der Gruppen von $\gamma_2^{(1)}$ ist der doppelt gezählte Punkt b_{10}, die Gerade $\overline{ab_{10}}$ muss also C_3 in b_{10} *berühren.*

Dies war in der That bei der Abbildung unserer speziellen Doppelebene $\Omega_6(\Pi^4)$ der Fall, damit eine der Tangenten von Π an Ω bei Π selbst berührt.

Aber umgekehrt *genügt* die Berührung einer Curve $C_3(a, b_{10})$ durch die Gerade ab_{10}, um auf eine ∞^3-Schaar von $C_7(a_3 b_1^2 \dots b_9^2)$ zu führen. Man lege eine beliebige Curve 4ter Ordnung $C_4(a^2, b_{10})$, welche jene C_3 noch in 9 Punkten $b_1, \dots b_9$ treffe. Die Curven $C_8(a^4 b_1^2 \dots b_9^2)$ bilden dann eine ∞^7-Schaar, welche C_3 in der, b_{10}^2 corresidualen, Gruppenschaar $\gamma_2^{(1)}$ schneiden, da $C_4^2(a^2 b_1 \dots b_9, b_{10})$ eine der Curven ist, mit der Gruppe b_{10}^2 aus $\gamma_2^{(1)}$. Die durch eine Gruppe von $\gamma_2^{(1)}$ gehenden Curven der C_8 bilden eine ∞^6-Schaar; legt man daher unsere C_8 durch die Gruppe b_{10}^2 und durch 3 weitere Punkte der Geraden $\overline{ab_{10}}$, so erhält man eine ∞^3-Schaar von Curven $C_8(a^4 b_1^2 \dots b_9^2 b_{10}^2)$, welche alle in die feste Gerade $C_1(a_1 b_{10})$, verbunden mit einer ∞^3-Schaar von $C_7(a^3 b_1^2 \dots b_9^2)$ zerfallen müssen; q. e. d.

Im § 6 werde ich von dieser ∞^3-Schaar ausgehen.

§ 5.

Zweite Methode der Abbildung der $F_4^{(2)}$.

Da die Fläche $F_4^{(2)}$ von dem durch die Gerade $p(x_1 = x_2 = 0)$ gehenden Ebenenbüschel in einer Schaar rationaler Curven 4ter Ordnung geschnitten wird, muss man dadurch zu einer Abbildung gelangen, dass man der Fläche $F_4^{(2)}$ eine Fläche F', eindeutig entsprechen lässt, aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar von Kegelschnitten ausschneidet. Dies erreicht man am einfachsten durch die direct umkehrbare quadratische Raumtransformation (von sehr speciellem Charakter):

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = x_1 B_1(x) : x_2 B_1(x) : x_3 B_1(x) : x_4 B_1(x) + x_3^2,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = z_1 B_1(z) : z_2 B_1(z) : z_3 B_1(z) : z_4 B_1(z) - z_3^2,$$

wo $B_1(x)$ die in $F_4^{(2)}$ vorkommende, in x_1, x_2 lineare homogene, Function bedeutet; denn es wird

$$F_4^{(2)} = B_1^3(z) \,.\, F_5',$$
$$F_5' \equiv z_4^2 B_1^3 + z_4 B_1(z_3 B_1 C_1 + 2B_3) + [z_3^2(B_1 C_2 - 2B_3) + z_3 B_1 C_3 + B_1 C_4],$$

wo die B, C in z_1, z_2 geschrieben sind.

Die Fläche $F_5' = 0$, von der 5ten Ordnung, enthält eine 3-fache

Gerade $p'(z_1 = z_2 = 0)$; von den Ebenen des Büschels durch p' berührt eine, $B_1 = 0$, die Fläche längs einer Geraden $q'(B_1 = z_3 = 0)$. Singulär ist der Punkt $(p'q')$ oder $z_1 = z_2 = z_3 = 0$; denn jeder ebene Schnitt durch $(p'q')$ erhält nicht nur in $(p'q')$ einen 3-fachen Punkt, sondern noch einen benachbarten Doppelpunkt — nämlich zwei Zweige, einen einfachen und einen 2-elementigen, von derselben Richtung $B_1 = 0$; d. h. F_5' hat bei $(p'q')$ noch eine Selbstberührung, mit Berührungsebene $B_1 = 0$.

Nun bilden sich die ebenen Schnitte einer Fläche $F_5'(p'^3)$ auf einer Ebene Y durch eine ∞^3-Schaar von Curven

$$C_5(a^3 b_1 b_2 \ldots b_{11})$$

ab, die vom Ebenenbüschel durch p' ausgeschnittenen Kegelschnitte durch die $C_1(a)$, die 3-fache Gerade p', verbunden mit der bei $(p'q')$ liegenden Singularität, durch $C_4(a^2 b_1 \ldots b_{11})$. Dabei müssen hier, wo von den 11 im allgemeinen Falle existirenden Ebenen durch p', welche Geradenpaare ausschneiden, zwei in B_1 fallen, zwei der Punkte b_i, etwa b_{10}, b_{11}, auf einer Geraden durch a liegen, und zwar einander benachbart, da die entsprechenden, von $B_1 = 0$ ausgeschnittenen beiden Geraden in q' benachbart liegen; die Gerade $\overline{a b_{10} b_{11}}$ entspricht der Singularität $(p'q')$. Die Abbildung der 3-fachen Geraden p' und des Punktes $(p'q')$, $C_4(a^2 b_1 \ldots b_{11})$, wird also in diese $C_1(a b_{10} b_{11})$ und in eine $C_3(a b_1 \ldots b_9)$ zerfallen. —

Geht man jetzt von der Fläche $F_4^{(2)}$ aus, so entsprechen deren ebenen Schnitten Schnitte von F_5' mit Kegeln 2ter Ordnung K', welche ihre Spitzen auf q' haben, einander längs dieser Geraden berühren mit Berührungsebene B_1 und im Punkte $(p'q')$ einander osculiren. Das Bild des Schnittes von F_5' mit einer beliebigen Fläche 2ter Ordnung, die durch die beiden bei q' benachbarten Geraden von F_5' geht, wird eine

$$C_{10}(a^6 b_1^2 \ldots b_9^2 b_{10}^3 b_{11}^3) \equiv C_1(a b_{10} b_{11}) \,.\, C_9(a^5 b_1^2 \ldots b_9^2 b_{10}^2 b_{11}^2).$$

Aber in dieses Bild ist noch das dem Punkte $(p'q')$ Entsprechende eingeschlossen, so dass noch die Gerade $C_1(a b_{10} b_{11})$ mehrfach wegzunehmen ist; wie oft, ergibt folgende Betrachtung:

Vermöge

$$K' \equiv (z_4 B_1 - z_3^2) + B_1(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)$$

wird F_5' von der Form

$$F_5' \equiv B_1 K'^2 - B_1 z_3 K' \psi_1 - K' \psi_3 + B_1 K_4',$$

wo K_4' ein Kegel 4ter Ordnung ist, der in $(p'q')$ seine Spitze hat; so dass K' von F_5' getroffen wird, wie von $B_1 K_4'$, nämlich in den beiden in q' zusammenfallenden Geraden und in einer Curve, die vier Zweige in $(p'q')$, in der Ebene B_1, hat. Da K_4' von q' *nur* in $(p'q')$ getroffen wird, wird auch jene Curve q' nicht weiter treffen.

Somit muss von $C_{10}(a^6 b_1^2 \ldots b_9^2 b_{10}^3 b_{11}^3)$ die Gerade $C_1(a b_{10} b_{11})$ so oft abgehen, dass der Rest b_{10} und b_{11} nicht mehr enthält, also dreimal*); und es bilden sich die ebenen Schnitte von $F_4^{(2)}$ ab mittels einer ∞^3-Schaar von Curven

$$C_7(a^3 b_1^2 b_2^2 \ldots b_9^2);$$

wie auch in § 4 gefunden ist.

§ 6.

Discussion der Abbildung der $F_4^{(3)}$.

Am Schlusse von § 4 ist die Construction einer ∞^3-Schaar Σ von Curven

$$C_7(a^3, b_1^2, b_2^2, \ldots b_9^2)$$

angegeben, deren Existenz durch die Abbildungen des § 4 und § 5 nachgewiesen ist. Wir können desshalb umgekehrt von einer solchen Schaar ausgehen, dieselbe zur eindeutigen Transformation einer Ebene Y in eine Fläche benutzen und die Eigenschaften dieser Fläche aufsuchen.

Man erhält dann eine Fläche F_4 der Ordnung

$$7 \cdot 7 - 3 \cdot 3 - 9 \cdot 4 = 4.$$

Da eine $C_3(a, b_1, \ldots b_9)$ existirt, welche von der Schaar Σ nicht getroffen wird, so ist, wenn C_7' eine specielle Curve der Schaar, welche nicht C_3 zum Factor hat, Σ von der Form

$$C_7' + C_3 \,.\, C_4(a^2 b_1 \ldots b_9),$$

wo die C_4 die ∞^2 zu C_7' adjungirten Curven φ vorstellen. Diese C_4 treffen aber die $C_3(a, b_1, \ldots b_9)$ in 11 festen Punkten, also noch in einem *weiteren* festen Punkte c (der Punkt b_{10} des § 4); d. h. je zwei der C_4 schneiden einander, ausser in $a, b_1, \ldots b_9, c$ nur noch in einem Punktepaar, das zudem (da auch der Büschel $C_3 \,.\, C_1(a)$ zu den C_4 gehört) auf einer Geraden durch a liegt. Dementsprechend existirt ein Ebenenbündel, dessen Geraden die Fläche F_4 nur in Punktepaaren schneiden: ein Doppelpunkt P von F_4. Eine singuläre *Curve* existirt wegen des Geschlechts 3 der Curven Σ nicht; der Doppelpunkt P muss also spezieller Art sein. Nun entspricht dem Punkt P die Curve C_3; den verschiedenen Richtungen, welche die ebenen durch P gehenden Schnittcurven, Γ_4, in P haben, entspricht der Schnitt der $C_4(a^2 b_1 \ldots b_9)$ mit C_3, d. h. der *eine* Punkt c von C_3, mit seinen verschiedenen Rich-

*) Dasselbe würde einfacher aus der Ordnung 4 von $F_4^{(2)}$ etc. zu folgern sein.

tungen. Daraus folgt zunächst, dass die Γ_4 in P nur je *einen* zusammenhängenden Zweig haben können, d. h. dass ihr Doppelpunkt in P eine Spitze ist: P wird ein uniplanarer Punkt von F_4. Dasselbe folgt daraus, dass die Geraden durch P in der Ebene B_1, welche durch $C_3^2 C_1(a, c)$ abgebildet wird, die Fläche F_4 nur in je einem Punkte ausserhalb P treffen. — Unter den ebenen Schnitten durch P ist ein Büschel durch eine Gerade p ausgezeichnet, abgebildet durch $C_3^2 . C_1(a)$; da die $C_1(a)$ rationale Curven sind, welche C_3 in je einem Punktepaar treffen, sagt dies aus: die ebenen Schnitte Γ_4', durch eine ausgezeichnete Richtung p von P (die in der Ebene B_1 liegt) sind rationale Curven 4ter Ordnung, welche von P zwei sich in der Richtung p berührende einfache Zweige aussenden. Noch mehr: die beiden Zweige müssen einander *osculiren*, damit *drei* aufeinanderfolgende Doppelpunkte entstehen, die nöthig sind, um die Curven Γ_4' rational zu machen. Dies sieht man auch aus der Abbildung so: Das Bild der Schnitte von F_4 mit beliebigen Flächen 2ter Ordnung, die nur durch P gehen und daselbst eine p enthaltende Tangentenebene haben, wird eine Schaar von $C_8(a^4 b_1^2 \ldots b_9^2)$, die die $C_3(a b_1 \ldots b_9)$ in den Punktepaaren schneiden, in denen auch die obigen Geraden $C_1(a)$ treffen; daher gehen diese Flächen 2ter Ordnung, sobald man sie durch einen dritten Punkt des einen Zweiges einer Curve Γ' in P legt, damit zugleich durch den dritten Punkt des andern Zweiges, d. h. diese Zweige osculiren sich. Man sieht, dass die Singularität von F_4 in P so bezeichnet werden könnte, dass diesem uniplanaren Doppelpunkt in der Richtung p unendlich benachbart eine *Selbstberührung* der Fläche eintritt.

Das bezeichnete Verhalten der Schnitte durch P ist genau das der Fläche $F_4^{(2)}$ von § 2, auf welche also die allgemeinste Schaar Σ führt.

Ich benutze nun die Abbildung zur Aufsuchung der bemerkenswerthesten Curven und Curvensysteme der $F_4^{(2)}$. Zunächst ergeben sich die 9 Kegelschnittpaare, von Ebenen durch p ausgeschnitten, aus den Bildern b_i, $C_1(a, b_i)$; die beiden Kegelschnitte eines Paares osculiren einander in P. Sodann, aus der Abbildung $C_1(a, c)$, von einer Ebene B_1 durch p ausgeschnitten eine ebene Curve 4ter Ordnung, welche in P einen 3-fachen Punkt hat, da $C_1(a, c)$ von den $C_4(a^2 b_1 \ldots b_9 c)$ nur in je *einem* beweglichen Punkt getroffen wird; die 3 Elemente des 3-fachen Punktes bilden nur *einen* Zweig von der Richtung p, da, nach dem Früheren, die Gerade $C_1(a, c)$ die Curve C_3 nicht in zwei verschiedenen Punkten ausserhalb a trifft, sondern in c berührt.

R_3 von $F_4^{(2)}$: Es gibt auf $F_4^{(2)}$ 256 einzelne Raumcurven 3ter Ordnung, welche alle durch P in der Richtung p gehen, abgebildet durch den Punkt a, die Geraden durch 2 der Punkte b_i, die Kegelschnitte durch a und 4 der Punkte b_i, die $C_3(a^2)$ durch 6 der b_i und die $C_4(a^3)$ durch 8 der b_i. Alle diese R_3 treffen jede der rationalen Γ_4 der Fläche

in je einem Punkte, so dass eine jede der R_3 zu einer Abbildung von $F_4^{(2)}$ führt. So gibt es 256 gleichberechtigte Abbildungen. Nimmt man aus 8 der 9 Kegelschnittpaare von $F_4^{(2)}$ je einen Kegelschnitt beliebig heraus, so gibt es *eine* zugehörige R_3, welche diese 8 Kegelschnitte trifft. Je nach dieser Zuordnung schneiden sich zwei der R_3 in keinem, einem, 2 oder 3 Punkten. —

Die Raumcurven 3[ter] Ordnung schneiden den Kegel $x_4 B_1 + x_3^2 = 0$ in P dreipunktig, weil die Transformation des § 5 wieder zu R_3 der Fläche F_5', a entsprechend, führen muss; ihre Parameterdarstellung erhält also die Form:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu^2\lambda : \mu^3 : \mu(\gamma_0\lambda^2 + \gamma_1\lambda\mu + \gamma_2\mu^2)$$
$$: (-\gamma_0^2\lambda^3 + \beta_1\lambda^2\mu + \beta_2\lambda\mu^2 + \beta_3\mu^3),$$

wo $\mu = 0$ der $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ entsprechende Parameterwerth ist. Das Abbildungsproblem, auf welche unsere $F_4^{(2)}$ direct führen würde, wäre also das Folgende: Man suche die R_3, welche durch P in der Richtung p gehen (4 Bedingungen), einen benachbarten Punkt in $x_4 B_1 + x_3^2 = 0$ haben (1 Bedingung) und 7 Kegelschnitte (je einen aus 7 der Paare) je einmal treffen (7 Bedingungen); dies gibt eine endliche Zahl von R_3, welche $F_4^{(2)}$ in $4 + 2 + 7 = 13$ Punkten treffen, also auf $F_4^{(2)}$ liegen. Unsere Abbildung gibt 2 als Anzahl der Lösungen des Problems. —

Weitere Schnitte von $F_4^{(2)}$ mit $F_2(Pp)$: Das Bild der Schnitte von $F_4^{(2)}$ mit denjenigen Flächen 2[ter] Ordnung, welche durch P gehen und daselbst eine durch p gehende Tangentenebene haben, wird die ∞^7-Schaar von

$$C_8(a^4, b_1^2, \ldots b_9^2).$$

Die Schnitte erhalten zwei einander in P, in der Richtung p, osculirende Zweige. Darunter sind diejenigen besonders hervorzuheben, welche in eine der obigen R_3 von $F_4^{(2)}$, und in eine *∞^2-Schaar von Raumcurven 5[ter] Ordnung vom Geschlecht* 2 zerfallen, alle in der Richtung $\overline{Pp}$ einander osculirend. Solcher Schaaren gibt es, den einzelnen R_3 zugeordnet, 256; und die Curven einer Schaar osculiren die zugehörige R_3 in P, treffen dieselbe noch in 5 weiteren Punkten, und einander in je 2 beweglichen Punkten. In jeder solchen ∞^2-Schaar gibt es eine einzige ∞^1-Schaar von *rationalen Raumcurven* 5[ter] *Ordnung*, welche je *zwei* einander in der Richtung $\overline{Pp}$ berührende, aber nicht osculirende, Zweige in P haben — ausgeschnitten von $F_2(R_3)$ mit Tangentenebene B_1 in P. Wenn das Bild von R_3 der Punkt a ist, wird das der ∞^2-Schaar zu $C_8(a^5 b_1^2 \ldots b_9^2)$, das der ∞^1-Schaar zu $C_5(a^4 b_1 \ldots b_9)$; die durch $C_5(a^4 b_1 \ldots b_9 c)$ dargestellte Curve wird dann von dem Kegel 2[ter] Ordnung ausgeschnitten, der seine Spitze in P hat und durch die R_3 geht.

R_4^1 *auf* $F_4^{(2)}$: Auch ein Zerfallen der Schnitte von $F_4^{(2)}$ mit $F_2(Pp)$ in zwei Raumcurven 4ter Ordnung vom Geschlechte 1 kann eintreten. So wenn das Bild zu

$$C_3(ab_3b_4\dots b_9)\,.\,C_6(a^3b_1^2b_2^2b_3b_4\dots b_9)$$

wird. Aus einer R_4' ergeben sich zwei zugeordnete Curvenbüschel, deren Curven alle in P einander osculiren, während die Curven des einen Büschels die des andern noch weiter in je 5 Punkten treffen. In jedem solchen Büschel befindet sich eine R_4^1, welche in zwei der Kegelschnitte von $F_4^{(2)}$ zerfällt (in der Schaar aus $C_3(ab_3\dots b_9)$ die aus den b_1 und b_2 entsprechenden Kegelschnitten gebildete Curve). Solcher Büschel gibt es also $4\,.\,36$, oder $2\,.\,36$ Büschelpaare.

Man kann ein solches Büschelpaar zur Erzeugung der Fläche 4ter Ordnung $F_4^{(2)}$ mittels Flächenbüschel zweiter Ordnung benutzen. Schreibt man die Bedingungen der Osculation in P an, so sieht man, dass, wenn man $F_4^{(2)}$ in die Form

$$F_4^{(2)} \equiv F_2\Phi_2' - F_2'\Phi_2$$

setzt, man für F_2, F_2', Φ_2, Φ_2' Ausdrücke der Form annehmen darf:

$$F_2 = x_4B_1 + x_3^2 + x_3f_1 + f_2,\quad F_2' = f_2',$$
$$\Phi_2 = x_4x_2 + x_3\varphi_1 + \varphi_2,\quad \Phi_2' = x_4B_1 + x_3^2 + x_3\varphi_1' + \varphi_2',$$

wo die $f_i, f_i', \varphi_i, \varphi_i'$ homogene Functionen i^{ter} Dimension in x_1, x_2 vorstellen.

§ 7.

Die Fläche $F_4^{(3)}$. Abbildung auf die Ebene.

Die eindeutige Abbildung der in II. § 2 definirten Fläche

$$F_4^{(3)} \equiv x_4^2x_1^2 + 2x_4f_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo

$$f_3 = x_3x_1D_1(x_1, x_2) + B_3(x_1, x_2),$$
$$f_4 = -x_3^3x_1 + x_3^2C_2(x_1, x_2) + x_3C_3(x_1, x_2) + C_4(x_1, x_2),$$

auf die Ebene kann dadurch geschehen, dass man diese Fläche vom Knotenpunkt P ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) aus auf eine Doppelebene Ξ, mit Uebergangscurve $\Omega(\xi)$ von der 6ten Ordnung, die zwei benachbarte 3-fache Punkte besitzt, projicirt, und diese Doppelebene dann auf eine einfache Ebene Y, nach meinem vorstehenden Aufsatze, abbildet. Das Erstere geschieht mittels der Formeln:

$$\varrho x_1 = \xi_1^3,\quad \varrho x_2 = \xi_1^2\xi_2,\quad \varrho x_3 = \xi_1^2\xi_3,$$
$$\varrho x_4 = -f_3(\xi) + \sqrt{\Omega(\xi)},$$

für

$$\Omega(\xi) = f_3^2(\xi) - \xi_1^2 f_4(\xi) \equiv \xi_3^3\xi_1^3 + \xi_3^2\xi_1^2\left(D_1^2(\xi) - C_2(\xi)\right)$$
$$+ \xi_3\xi_1\left(2D_1(\xi)B_3(\xi) - \xi_1 C_3(\xi)\right) + \left(B_3^2(\xi) - \xi_1^2 C_4(\xi)\right),$$

wobei der singuläre Punkt in $\xi_1 = \xi_2 = 0$ liegt und die Gerade $\xi_1 = 0$ die beiden dort benachbart liegenden dreifachen Punkte Π, Π_1 von $\Omega(\xi) = 0$ verbindet. Den ebenen Schnitten von $F_4^{(3)}$

$$\sum_1^4 u_i x_i = 0$$

entsprechen in Ξ die Curven

$$\Gamma_4 \equiv \xi_1^2\Big(\sum_1^3 u_i\xi_i\Big)^2 - 2u_4 f_3(\xi)\cdot\sum u_i\xi_i + u_4^2\cdot f_4(\xi) = 0,$$

aber nur in dem Blatte genommen, für welches

$$u_4\sqrt{\Omega(\xi)} = u_4 f_3(\xi) - \xi_1^2\sum u_i\xi_i.$$

Diese Curven 4[ter] Ordnung, $\Gamma_4 = 0$, gehen durch Π und Π_1 einfach und berühren $\Omega(\xi) = 0$ ausserdem in je 9 Punkten; der Gleichung gemäss:

$$\xi_1^2\Gamma_4 \equiv \Big[\xi_1^2\sum u_i\xi_i - u_4 f_3(\xi)\Big]^2 - u_4^2\Omega(\xi).$$

Die Curven Γ_4 *osculiren* sogar einander in Π, denn für irgend zwei der Curven $\Gamma_4(u)$, $\Gamma_4(v)$ wird

$$v_4^2\Gamma_4(u) - u_4^2\Gamma_4(v) = \Big(v_4\sum u_i\xi_i - u_4\sum v_i\xi_i\Big)$$
$$\cdot\Big[\xi_1^2\Big(v_4\sum u_i\xi_i + u_4\sum u_i\xi_i\Big) - 2u_4 v_4 f_3(\xi)\Big],$$

d. h. $\Gamma_4(u)$ wird von $\Gamma_4(v)$ in Π, Π_1 getroffen wie von einer Curve $C_3(\Pi^2\Pi_1)$, also dreipunktig. Es kommt dies daher, dass die Fläche $F_4^{(3)}$ nicht nur eine Gerade $p = \overline{P\Pi}(x_1 = x_2 = 0)$ enthält, sondern noch zwei weitere, p successive von P ausgehende Geraden. In der That *berührt* die Ebene $x_1 = 0$ die Fläche längs p; und der Kegel 2[ter] Ordnung

$$K \equiv x_3 x_1 - C_2(x_1, x_2) = 0$$

trifft $F_4^{(3)}$ wegen

$$F_4^{(3)} \equiv x_4 x_1(x_4 x_1 + 2x_3 D_1) + (2x_4 B_3 + x_3 C_3 + C_4) - x_3^2 K$$

in *drei* aufeinanderfolgenden Geraden. Die Curven Γ_4 haben also einen weiteren, Π, Π_1 successiven, einfachen Fundamentalpunkt, der mit Π' bezeichnet sei, gelegen auf dem Kegelschnitt $\xi_3\xi_1 - C_2(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Legt man den ebenen Schnitt von $F_4^{(3)}$ durch P, so erhält man als Bild in Ξ die Curve $\xi_1^2 = 0$, verbunden mit den beide Blätter durchsetzenden Geraden dieser Ebene. Ein solcher Schnitt hat P zum gewöhnlichen Rückkehrpunkt (mit Richtung in $x_1 = 0$), welchem der einfache Punkt entspricht, in dem die Gerade die Linie $\xi_1 = 0$ in *einem* Blatte, etwa als Linie $\xi_1^{(2)}$, trifft. Unter diesen Schnitten sind die durch die Gerade p gelegten ausgezeichnet; sie zerfallen in p und in Curven 3^{ter} Ordnung vom Geschlechte 1, welche alle die Gerade p bei P *osculiren*. Denselben entsprechen in Ξ die, beide Blätter durchsetzenden, Geraden durch Π; und zwar entspricht dem Verzweigungspunkt, den eine solche Gerade in Π hat, dass die Curve 3^{ter} Ordnung zwei, P benachbarte, auf einer Geraden p gelegene Punkte besitzen muss: die Osculation mit p.

Unter diesen Schnitten wiederum ist der der Ebene $x_1 = 0$ ausgezeichnet; dieselbe berührt $F_4^{(3)}$ längs p und trifft noch in einem Kegelschnitt k, welcher p bei P berührt. Dem entspricht in Ξ die Gerade $\xi_1 = 0$, welche in beiden Blättern gesondert verläuft, als Gerade $\xi_1^{(1)}$, bez. $\xi_1^{(2)}$; als Gerade $\xi_1^{(1)}$ entsprechen deren Punkte einzeln den Punkten des Kegelschnitts k; als Gerade $\xi_1^{(2)}$, wie schon oben gesagt, einzeln den Rückkehrpunkten (mit Richtung in $x_1 = 0$), welche die durch P in von p verschiedener Richtung gehenden Curven von $F_4^{(3)}$ bei P besitzen. —

Trifft eine Curve von $F_4^{(3)}$ die Gerade p in irgend einem von P verschiedenen Punkte, so geht die in Ξ projicirte Curve durch Π und Π_1 mit einem einfachen Zweige und mit der *bestimmten* Krümmung $\Pi\Pi_1\Pi'$, wie das Verhalten der Curven Γ_4 zeigt. Berührt die Curve von $F_4^{(3)}$ die Gerade p in P, ohne p zu osculiren, aber mit Schmiegungsebene $x_1 = 0$ in P, so geht das Bild einfach durch Π, Π_1, aber mit von $\Pi\Pi_1\Pi'$ verschiedener Krümmung. Osculirt endlich die Curve von $F_4^{(3)}$ die Gerade p in P, so erhält das Ξ-Bild in Π einen Rückkehr- (bez. Verzweigungs-)punkt, mit von $\xi_1 = 0$ verschiedener Richtung; wie wieder die Bilder der durch P gelegten ebenen Schnitte von $F_4^{(3)}$ ergeben. —

Die Doppelebene Ξ bildet sich nun auf eine einfache Ebene Y so ab, dass die Geraden von Ξ in eine Curvenschaar:

$$\Gamma_3(\alpha\Gamma_3 + \alpha'\Gamma_3') + \alpha'' f_6 = 0$$

von Curven 6^{ter} Ordnung übergehen, wo f_6 eine solche Curve ist, die 8 Punkte $a_1, \ldots a_8$ zu Doppelpunkten hat, $\alpha\Gamma_3 + \alpha'\Gamma_3' = 0$ der Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung, die durch $a_1, \ldots a_8$ gehen. Die Schaar hat $a_1, \ldots a_8$ zu Doppelpunkten und die beiden weiteren Schnittpunkte b_1, b_2 von $\Gamma_3 = 0$, $f_6 = 0$ zu einfachen Punkten.

Die beiden Punkte b_1 und b_2 entsprechen dabei den über $\xi_1 = 0$ liegenden Geraden $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$, welche die Bilder von Kegelschnitt k, bez. Punkt P, von $F_4^{(3)}$ sind. Da die ebenen Schnitte von $F_4^{(3)}$ k zweimal, P nicht treffen, müssen ihre Bilder in der einfachen Ebene Y, die als

Schaar Σ bezeichnet seien, b_1 zum Doppelpunkt haben und können durch b_2 nicht gehen.

Den Punkten $a_1, \ldots a_8$ entsprechen in Ξ 8 Kegelschnitte, welche durch Π und Π_1 gehen und $\Omega(\xi)$ je in drei Punkten berühren; nur je in einem Blatte von Ξ laufend. Einem solchen Kegelschnitt A entsprechend, erhalten wir auf $F_4^{(3)}$ eine durch P in der Richtung p gehende Raumcurve, die von der dritten Ordnung wird, weil A ihre Projection aus P ist; dieselbe hat in P die Schmiegungsebene $x_1 = 0$, ohne k zu osculiren. Die Bilder Σ der ebenen Schnitte von $F_4^{(3)}$ in Y müssen also, da die Schnitte diese Raumcurven in 3 Punkten treffen, die Punkte $a_1, \ldots a_8$ je zu dreifachen Punkten haben.

Endlich existirt für diese Schaar Σ in Y noch ein einfacher Fundamentalpunkt b. Denn wir haben gesehen, dass die Curven Γ_4 von Ξ, die jener entsprechen, durch Π, Π_1 einfach gehen und daselbst eine und dieselbe Krümmung $\Pi\Pi_1\Pi'$ haben. Aber den durch Π und Π_1 gehenden Zweigen entsprechen, je nach ihrer Krümmung, in Y die verschiedenen Punkte der Curve Γ_3, welche durch $a_1 a_2 \ldots, a_8, b_1, b_2$ geht. Somit hat die Schaar Σ noch einen bestimmten, Π' entsprechenden, Punkt b von Γ_3 zum einfachen Punkt.

Für die Bestimmung der Ordnung der gesuchten Bildcurven in Y kann man den Schnitt mit dem Curvenbüschel $\alpha\Gamma_3 + \alpha'\Gamma_3' = 0$ durch $a_1, \ldots a_8$ benutzen. Der 9$^{\text{te}}$ Basispunkt des Büschels, c, gehört jenen Curven Σ nicht an; denn demselben entsprechen in Ξ die von $\xi_1 = 0$ verschiedenen Richtungen durch Π, auf $F_4^{(3)}$ also eine Osculation einer Curve mit p am Punkte P. Die Curven der Schaar Σ,

$$C_r(a_1^3 \ldots a_8^3 b_1^2 b),$$

müssen aber von dem Curvenbüschel 3$^{\text{ter}}$ Ordnung $(a_1 \ldots a_8)$ in je 3 beweglichen Punkten getroffen werden; was $r = 9$ liefert. Ein weiterer Fundamentalpunkt kann dann nicht auftreten, weil zwei solche Curven 9$^{\text{ter}}$ Ordnung bereits 77 feste Schnittpunkte haben und sich in 4 beweglichen Punkten schneiden sollen.

Somit bilden sich die ebenen Schnitte der Fläche $F_4^{(3)}$ auf der einfachen Ebene Y ab mittels einer ∞^3-Schaar Σ von Curven

$$C_9(a_1^3 a_2^3 \ldots a_8^3 b_1^2 b),$$

wobei $a_1 a_2 \ldots a_8 b_1 b$ auf einer Curve 3$^{\text{ter}}$ Ordnung, Γ_3, liegen. —

Es gibt 2 . 64 . 135 gleichberechtigte Arten, die $F_4^{(3)}$ mittels solcher Curven 9$^{\text{ter}}$ Ordnung auf eine Ebene eindeutig abzubilden. Denn so viele Arten gab es, die Doppelebene Ξ, mit Unterscheidung der beiden Blätter, auf eine einfache Ebene Y abzubilden. Die obige Abbildung ist dem System der 8 Raumcurven 3$^{\text{ter}}$ Ordnung zugeordnet, die auf $F_4^{(3)}$ liegen und durch $a_1, a_2, \ldots a_8$ abgebildet sind; Curven, die einander, ausser bei P, nicht schneiden. Und so ist jede Art einem analogen

8-System von Raumcurven 3^{ter} Ordnung von $F_4^{(8)}$ zugeordnet, von denen — den 120 Kegelschnitten durch Π, Π_1 entsprechend, die $\Omega(\xi)$ in je 3 Punkten berühren — 2 . 120 auf der Fläche liegen. —

Durch Benutzung einer solchen Raumcurve 3^{ter} Ordnung kann man $F_4^{(8)}$ auch direkt in eine andere bekannte Fläche überführen. Sei nämlich K_2 einer der $\Omega(\xi)$ in 3 Punkten berührenden Kegelschnitte durch Π und Π_1; so wird

$$\Omega(\xi) \equiv K_3^2 - K_2 K_4,$$

wo K_3 Π zum Doppel-, Π_1 zum einfachen Punkte, K_4 beide Punkte zu Doppelpunkten hat:

$$\begin{aligned} K_2 &\equiv \xi_3 \xi_1 + L_2(\xi_1 \xi_2), \\ K_3 &\equiv \xi_3 \xi_1 \xi_2 + L_3(\xi_1, \xi_2), \\ K_4 &\equiv \xi_3^3 \xi_1^2 + \xi_3 \xi_1 M_2(\xi_1, \xi_2) + M_4(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Mittels der Formeln

$$\sigma y_1 = \xi_1 K_2, \quad \sigma y_2 = \xi_2 K_2, \quad \sigma y_3 = \xi_3 K_2, \quad \sigma y_4 = - K_3 + \sqrt{\Omega(\xi)}$$

kommt man dann von der Doppelebene Ξ eindeutig zur Fläche

$$\begin{aligned} \Phi_4 \equiv K_2(y) \cdot y_4^2 + 2 K_3(y) \cdot y_4 + K_4(y) \\ \equiv y_3^2 y_1^2 + y_3 y_1 [M_2(y) + 2 y_2 y_4 + y_4^2] \\ + [M_4(y) + 2 y_4 L_3(y) + y_4^2 L_2(y)] = 0, \end{aligned}$$

und der direkte eindeutige Uebergang von $F_4^{(8)}$ zu Φ_4 wird durch die Formeln geleistet:

$$\varrho x_1 = y_1^3, \ \varrho x_2 = y_1^2 y_2, \ \varrho x_3 = y_1^2 y_3, \ \varrho x_4 = - f_3(y) + K_3(y) + y_4 K_2(y).$$

Die Fläche Φ_4 hat aber einen *Selbstberührungspunkt* in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ *und einen konischen Doppelpunkt* in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, der auf der Berührungsebene des ersteren Punktes liegt; d. h. *sie enthält die zusammengesetzte Singularität von $F_4^{(8)}$ in zwei gewöhnliche Singularitäten zerlegt.* Auch bei Φ_4 berührt die Ebene $y_1 = 0$ längs der Geraden $y_1 = y_2 = 0$, und der Kegel $y_3 y_1 + L_2 = 0$ osculirt längs dieser Geraden. Φ_4 lässt sich als specieller Fall von $F_4^{(1)}$ erledigen.

§ 8.

Discussion der Abbildung der $F_4^{(8)}$.

Wir wollen jetzt umgekehrt von der ∞^3-Schaar Σ:

$$C_9(a_1^3, a_2^3, \ldots a_8^3, b_1^2, b)$$

wo eine

$$\Gamma_3(a_1, a_2, \ldots a_8, b_1, b)$$

existirt, ausgehen, da wir wissen, dass sie zur eindeutigen Transformation einer Ebene Y in eine Fläche dienen kann.

Diese Fläche F_4 wird zunächst von der Ordnung

$$9 \cdot 9 - 9 \cdot 8 - 4 - 1 = 4.$$

Die Γ_3 wird von den Curven der Schaar Σ nicht mehr in beweglichen Punkten getroffen; ist daher C_9' eine specielle, Γ_3 nicht als Factor enthaltende Curve von Σ, so wird diese Schaar von der Form:

$$\sum \equiv C_9' + \Gamma_3 \cdot C_6(a_1{}^2 a_2{}^2 \cdots a_8{}^2 b_1),$$

wo die C_6 eine ∞^2-Schaar von zu C_9' adjungirten Curven φ vorstellen, welche alle noch durch einen festen Punkt b_2 von Γ_3 gehen. Je zwei dieser Curven C_6 schneiden sich also nur in einem beweglichen Punkte*paar*, d. h. die Fläche F_4 hat einen Doppelpunkt P. Diesem Punkt P entspricht die Curve Γ_3, und zwar entspricht den verschiedenen Richtungen der ebenen durch P gelegten Schnitte daselbst der Schnitt der C_6 mit Γ_3, also nur der *eine* Punkt b_2. Man schliesst daraus, dass die beiden Elemente jenes Schnittes in P nur *einen* Zweig bilden: P ist also ein uniplanarer Punkt von F_4. — Unter den ebenen Schnitten durch P ist der Büschel durch eine Gerade p ausgezeichnet, welcher durch $\Gamma_3{}^2 . C_3(a_1 a_2 \ldots a_8)$ abgebildet wird: es werden ebene Curven 3ter Ordnung vom Geschlechte 1. Daraus folgt zunächst, dass die Gerade p der Fläche F_4 angehört; und weiter, da $\Gamma_3{}^2 C_3$ einmal mehr durch b geht, als $\Gamma_3 C_6$: dass einem Durchlegen der Bildcurve durch b ein Zerfallen der Curve von F_4 in p und eine weitere Curve entspricht: b ist das Bild der Geraden p. Weiter wird, indem man diese $C_3(a_1 \ldots a_8)$ *noch* durch b_1 und b gehen lässt, ein Schnitt erhalten, der durch $\Gamma_3{}^3$ abgebildet wird und aus einem, dem Fundamentalpunkt b_1 entsprechenden Kegelschnitt k von F_4 und aus der nun zweimal zu nehmenden Geraden p bestehen muss; d. h. es gibt eine Ebene, welche F_4 längs der Geraden p berührt.

Die Curven 3ter Ordnung, welche von den durch p gelegten Ebenen aus F_4 ausgeschnitten werden, treffen p ausserhalb P nicht mehr, da ihre Bilder, die $C_3(a_1 \ldots a_8)$, nicht durch b gehen. Dieselben *osculiren* also p bei P. Diesem Verhalten der Curven in P entspricht in Y der Schnitt der $C_3(a_1 \ldots a_8)$ mit Γ_3, d. h. das Durchgehen durch den 9ten Basispunkt c des letzten Büschels. Ebenso muss der durch b_1 abgebildete Kegelschnitt k die Gerade p bei P berühren.

Von den Punkten der Curven Γ_3, welche P entspricht, ist bisher die Bedeutung der Punkte $a_1, \ldots a_8, b_1, b_2, b, c$ angegeben, und es bleibt noch die der übrigen Punkte von Γ_3 zu erörtern. Zu dem Zwecke schneiden wir F_4 mit den ∞^3 Kegeln 2ter Ordnung, die ihre Spitze in P haben und F_4 längs p berühren; die Bilder der Schnittcurven S sind die

$$S' \equiv C_6(a_1{}^2, a_2{}^2, \ldots a_8{}^2).$$

Denn ein ebener Schnitt durch P bildet sich durch die

$$C_6(a_1^2 \dots a_8^2 b_1 b_2)$$

ab, ein Schnitt mit einem Kegel 2ter Ordnung mit Spitze in P also durch die $C_{12}(a_1^4 \dots a_8^4 b_1^2 b_2^2)$, und wenn der Kegel F_4 längs p berührt, durch

$$C_{12}(a_1^4 \cdots a_8^4 b_1^2 b_2^2 b^2) \equiv \Gamma_3^2 \cdot C_6(a_1^2 \cdots a_8^2).$$

Diese Schnitte S sind Raumcurven 6ter Ordnung, vom Geschlechte 2, welche je zwei getrennte Zweige in P haben, da die S' die Γ_3 in je einem Punktepaar (corresidual zum Paar $b_1 b_2$) treffen. Die beiden Zweige sind einfache, weil eine solche Raumcurve 6ter Ordnung von einer Ebene durch P in noch vier Punkten ausserhalb P, nach der Abbildung, geschnitten wird. Zugleich berührt jeder der Zweige die Gerade p in P, weil die S die Gerade p ausserhalb P nicht treffen, eine beliebige durch p gehende Ebene aber die S nur in je 2 Punkten trifft. Endlich hat jeder der Zweige in P die Ebene $x_1 = 0$ zur Schmiegungsebene; denn da die S' auch nicht durch b_1 gehen, treffen die S die Ebene $x_1 = 0$ weder in p noch in k ausserhalb P. Dabei findet auch nicht etwa eine Osculation mit dem Kegelschnitt k statt; denn da sich die Schnitte von F_4 mit den p in P berührenden Flächen 2ter Ordnung F_2 durch $C_{12}(a_1^4 \dots a_8^4 b_1^2)$ abbilden, also wenn die F_2 noch durch k gelegt werden, durch $C_{12}(a_1^4 \dots a_8^4 b_1^3)$, treffen diese letzteren F_2 die S ausserhalb P in 8, bei P also in nur 4 Punkten.

So entsprechen also den verschiedenen Punkten von Γ_3 auf F_4 einfache Curvenzweige, die p in P berühren und $x_1 = 0$ dort zur Schmiegungsebene haben. Aber natürlich können die Krümmungen dieser Zweige den Punkten von Γ_3 nicht *eindeutig* zugeordnet sein. Betrachtet man vielmehr wieder die p in P berührenden F_2, so treffen deren Bilder $C_{12}(a_1^4 \dots a_8^4 b_1^2)$ die Γ_3 in Punktepaaren, die dem doppelt gezählten Punkt b_2 corresidual sind; einem solchen Punkte*paar* kann nur eine und dieselbe Krümmung eines Zweiges auf F_4 entsprechen. Die Unterscheidung findet da erst durch den vierten, aus der Ebene $x_1 = 0$ heraustretenden, Punkt des Zweiges statt. —

Legt man die Curven S' noch durch den Punkt b, so erhält man ∞^2 Kegel zweiter Ordnung, welche ihre Spitze in P haben und die Fläche längs der Geraden p *osculiren*. F_4 enthält also drei successive, von p ausgehende, Gerade. —

Somit sind alle in § 7 bezeichneten Eigenschaften der Fläche $F_4^{(3)}$ aus der Discussion der Abbildungsfunctionen in der F_4 wiedergefunden. —

Es sollen jetzt noch die einfachsten Curven von $F_4^{(3)}$ durch die Abbildung aufgesucht werden.

R_3 von $F_4^{(3)}$: Auf $F_4^{(3)}$ liegen 2 . 120 Raumcurven 3ter Ordnung, welche alle durch P gehen, daselbst p berühren und $x_1 = 0$ zur Schmie-

gungsebene haben. Die Bilder in Y sind die im vorhergehenden Aufsatze bezeichneten Bilder der in der Ξ-Ebene die Curve Ω in 3 Punkten berührenden, durch Π, Π_1 gehenden Kegelschnitte. — Je zwei der Curven gehören zusammen, insofern sie sich ausserhalb P in noch 3 Punkten treffen und durch *einen* Kegel 2ter Ordnung mit Spitze in P, der $F_4^{(3)}$ noch längs p berührt, aus $F_4^{(3)}$ ausgeschnitten werden können. Irgend eine dritte der Curven wird von der einen Curve eines Paars in einem, von der andern Curve des Paars in zwei Punkten, ausserhalb P, getroffen.

Rationale R_4 von $F_4^{(3)}$: Es gibt 2 . 8 . 135 rationale Raumcurven 4ter Ordnung (zweiter Species) auf $F_4^{(3)}$. Dieselben gehen ebenfalls durch P, mit Berührung an p und Schmiegungsebene $x_1 = 0$ daselbst, und treffen die Gerade p weiter nicht mehr. Deren Bilder in Y werden erhalten, wenn man die im vorstehenden Aufsatze unter § 3, VI, a_1) ... d) gegebenen Curven von Y noch durch den Punkt b_1 gehen lässt. Auch die Zuordnung einer solchen Curve zu sieben Paaren von Curven R_3 von $F_4^{(3)}$ ist aus jenem Aufsatze zu entnehmen.

Je zwei der Curven gehören zusammen, insofern sie durch *eine* Fläche zweiter Ordnung, die p in P berührt, aus $F_4^{(3)}$ ausgeschnitten werden. So hat man z. B. zwei Paare, deren Bilder sind

$$C_1(a_1 b_1); \quad C_{11}(a_1^3 a_2^4 \ldots a_8^4 b_1)$$

und

$$C_2(a_1 \ldots a_4 b_1); \quad C_{10}(a_1^3 \ldots a_4^3 a_5^4 \ldots a_8^4 b_1).$$

Die 2 Curven eines solchen Paars treffen sich in 7 Punkten ausserhalb P und *osculiren* einander in P, nach dem Früheren, insofern ihre Bilder Γ_3 in einem zu b_2^2 corresidualen Punktepaar schneiden; während eine Curve eine andere, die mit ihr kein solches Paar bildet, nicht in P osculirt und mit ihr 0, 1, ... 6 Schnittpunkte ausserhalb P gemein hat.

Weitere Schnitte mit F_2: Von weiteren Curven der Fläche, die sich aus der Abbildung, insbesondere aus den in der vorstehenden Abhandlung betrachteten Curven der Y-Ebene, nun leicht ergeben, will ich nur noch die einfachsten Spezialisirungen der Schnitte von $F_4^{(3)}$ mit Flächen zweiter Ordnung anführen.

Lässt man die Kegel 2ter Ordnung mit Spitze in P, welche $F_4^{(3)}$ längs der Geraden p berühren und welche eine ∞^3-Schaar von Raumcurven 6ter Ordnung vom Geschlecht 2 ausschneiden, die Fläche längs p osculiren, so erhält man eine ∞^2-Schaar von Raumcurven 5ter Ordnung, vom Geschlecht 2, abgebildet durch die $C_6(a_1^2, \ldots a_8^2 b)$. Dieselben berühren p in P, osculiren einander dort in der Ebene $x_1 = 0$, treffen sich ausserdem noch in je 2 Punkten und treffen p ausserhalb P in je einem Punkte.

Davon ganz verschieden sind 2 . 120 ∞^2-Schaaren von Raumcurven 5^{ter} Ordnung vom Geschlecht 2 auf $F_4^{(3)}$. Eine solche Schaar wird erhalten, indem man die Flächen 2^{ter} Ordnung durch eine der R_3 von $F_4^{(3)}$ legt, ist also dieser R_3 eindeutig zugeordnet. Wenn das Bild der R_3 etwa die $C_6(a_1^3 a_2^2 \dots a_8^2)$ ist, wird das Bild der Schaar zu

$$C_6(a_1 a_2^2 \dots a_8^2 b_1^2).$$

Auch die Curven dieser Schaar verhalten sich bei P wie die oben genannte Schaar und osculiren dort die R_3, aber sie treffen p ausserhalb P nicht mehr, dagegen den Kegelschnitt k in 2 Punkten. — Der Schaar zugeordnet ist dann eine zweite solche, abgebildet durch

$$C_{12}(a_1^5 a_2^4 \dots a_8^4 b_1^2),$$

deren Curven die der ersten Schaar ausserhalb P in je 7 Punkten treffen. Die Curven *einer* Schaar treffen einander in je 2 Punkten.

Unter den Curven einer solchen Schaar ist enthalten: die Gerade p, verbunden mit einer ∞^1-*Schaar von Raumcurven 4^{ter} Ordnung vom Geschlecht* 1(erster Species), R_4', von welchen Schaaren es also ebenfalls 2 . 120 auf $F_4^{(3)}$ gibt. *Eine* solche Schaar ist abgebildet durch

$$C_3(a_2 a_3 \dots a_8 b_1),$$

indem die obigen C_6, wenn sie noch durch b gehen sollen, in Γ_3 und diese C_3 zerfallen müssen. Die R_4^1 eines Büschels osculiren ebenfalls einander in $x_1 = 0$ und berühren p bei P; je zwei der Curven treffen ausserdem einander nicht.

Zu einem solchen Büschel erhält man, durch den Schnitt mit Flächen 2^{ter} Ordnung, einen zugeordneten Büschel von R_4^1 auf $F_4^{(3)}$, abgebildet durch

$$C_9(a_1^4 a_2^3 \dots a_8^3 b_1).$$

Die Curven dieses Büschels osculiren bei P nicht nur einander, sondern auch die Curven des zugeordneten Büschels; sie treffen diese Curven ausserdem noch in je 5 Punkten.

Somit ergibt sich auch für die $F_4^{(3)}$ eine Erzeugung mittels Flächenbüschel zweiter Ordnung. Setzt man

$$F_4^{(3)} \equiv F_2 \Phi_2' - F_2' \Phi_2,$$

so kann man für die $F_2, F_2', \Phi_2, \Phi_2'$ Ausdrücke der Form annehmen:

$$F_2 = x_4 x_1 + x_3 f_1 + f_2, \qquad F_2' = x_4 x_2 + x_3^2 + x_3 f_1' + f_2',$$
$$\Phi_2 = x_3 x_1 + \varphi_2, \qquad \Phi_2' = x_4 x_1 + x_3 \varphi_1' + \varphi_2',$$

wo die $f_i, f_i', \varphi_i, \varphi_i'$ homogene ganze Functionen i^{ter} Dimension in x_1, x_2 bedeuten.

Erlangen, 10. November 1888.

Ueber die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten.

Von

ALFRED BOCHERT in Breslau.

(Fortsetzung zu Seite 27 ff. in Band 29.)*)

IV.

Nach dem zuletzt Gezeigten ist, wenn n den Grad, u die Classe**) und t den Transitivitätsgrad irgend einer Substitutionengruppe bezeichnet, welche weder die alternirende ihres Grades enthält, noch auch weniger als $2sp_s$mal transitiv ist, unter s eine beliebig gegebene positive ganze Zahl und unter p_s die $s$te in der wachsenden Reihe der Primzahlen verstanden:

$$t^{\frac{1}{8}s} < 2u \quad \text{und} \quad < n\text{***)}.$$

Aus der ersten dieser zwei Beziehungen lässt sich zunächst noch entnehmen, dass zwischen u und t auch eine Abhängigkeit derselben einfacheren Gestalt besteht, wie nach der zweiten zwischen n und t. Man überzeugt sich davon schon mittels der Bemerkung, dass die Zahl u ihrer Bedeutung nach nicht kleiner als 2 werden kann, und dass daher $2u$ niemals grösser als u^2 ist. Denn danach folgt ja aus $t^{\frac{1}{8}s} < 2u$ stets $t^{\frac{1}{8}s} < u^2$, und also auch $t^{\frac{1}{16}s} < u$.

Es ist somit das Vorhandensein positiver Constanten q_1 $\left(z. B. \frac{1}{16}\right)$ und q_2 $\left(z. B. \frac{1}{8}\right)$ festgestellt von der Art, dass der Transitivitätsgrad t

*) Daselbst S. 34 Z. 14 v. o. statt „versetzt" l. „ersetzt";
Z. 17 v. o. „$U^{-1}.S^{-1}US$ oder" wegzulassen.

**) So ist, nach Hrn. Camille Jordan (Journ. de math. 2, XVII), von nun an kürzer die kleinste unter den Buchstabenzahlen (Graden) aller Substitutionen der Gruppe ausser der identischen genannt.

***) Von $t^{\frac{1}{8}s}$, wie von jeder hier vorkommenden Potenz nicht ganzen Grades, ist selbstverständlich der positive Werth gemeint.

jeder die alternirende ihres Grades nicht enthaltenden Substitutionengruppe, welche der Bedingung $t \geqq 2zp_z$ *genügt, unter* p_z *die zte Primzahl verstanden, zu der Classe u und dem Grade n der Gruppe in den Beziehungen*

$$t^{q_1 z} \gtreqqless u \quad und \quad t^{q_2 z} \gtreqqless n$$

steht, wie gross auch die positive ganze Zahl z sein möge.

Im Folgenden ist für diese beiden Beziehungen bei der übereinstimmenden Gestalt derselben auch die gemeinsame Bezeichnung

$$t^{qz} \gtreqqless m \tag{1}$$

gebraucht, bei der also q und m das eine Mal q_1 und u, das andere Mal q_2 und n bedeuten.

Aus denselben kann man nun schon Alles folgern, was in Bezug auf die allgemeine Gestalt der Abhängigkeit zwischen u und t, sowie n und t, an wesentlich scheinenden Ergebnissen auf dem eingeschlagenen Wege überhaupt erreichbar ist.

Man gelangt dazu, indem man z aus (1) mittels einer geeigneten unteren Grenze für den grössten Werth dieser Zahl entfernt, welcher der für dieselbe erhaltenen Bedingung $t \geqq 2zp_z$ genügt. Und eine solche Grenze erhält man auf Grund des Satzes:

Solange nur die sonst unbestimmte, ganze oder nicht ganze, Grösse $y \geqq 2$ *ist, solange also die Anzahl z der diese Grösse nicht übersteigenden Primzahlen* > 0 *bleibt, besteht eine Beziehung der Gestalt* $y^z \geqq a^y$ (oder $y^{\frac{z}{y}} \geqq a$, oder auch, wenn $\log_a y$ den reellen Logarithmus von y nach der Grundzahl a bezeichnet, $z \geqq \frac{y}{\log_a y}$), *unter a eine gewisse* 1 *übersteigende Constante verstanden*, deren grösster Werth $\sqrt{2}$ beträgt, wenn die Beziehung bis zur niedrigst-möglichen Grenze $y = 2$ herab gelten soll, und sich durch Erhöhung der unteren Gültigkeitsgrenze noch vergrössern lässt (aber wieder nicht über eine gewisse constante Grösse hinaus).

Dieser Satz ergiebt sich zwar schon als leicht ersichtliche Folgerung aus den Tschebischef'schen Untersuchungen über die Anzahl der Primzahlen zwischen gegebenen Grenzen.*) Da indessen eine einfachere, unmittelbare Herleitung desselben durch das jenen Untersuchungen zu Grunde liegende Verfahren möglich ist, so mag eine solche für den Fall, dass dieselbe der Hauptsache nach noch nicht schon anderwärts gegeben sein sollte**), hier noch Platz finden.

*) Liouville, Journal de math. Serie 1, XVII und J. A. Serret, Hdb. d. höh. Algebra, Bd. II, Th. III, C. IV.

**) Es ist mir z. B. eine Abhandlung von A. Berger, Upsala 1875, aus der ein möglicherweise ähnlich abgeleitetes Ergebniss in den „Fortschr. d. Math." kurz mitgetheilt ist, nicht zugänglich gewesen.

Das erwähnte Verfahren beruht auf der leicht beweisbaren Gleichheit:

$$[x]! \equiv \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=(x)'} P\left[\frac{x}{\varkappa}\right] \equiv P[x]\cdot P\left[\frac{x}{2}\right]\cdot P\left[\frac{x}{3}\right]\cdot P\left[\frac{x}{4}\right]\cdots P\left[\frac{x}{(x)'}\right],$$

in der x eine beliebige positive Grösse bezeichnet, $[x]!$ das Product aus 1 und allen positiven ganzen Zahlen $\overline{\gtrless} x$, $P[x]$ das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen, also das Product aus 1 und allen verschiedenen Primzahlpotenzen, welche die höchsten ihrem Werthe nach x nicht übersteigenden Potenzen ganzen Grades ihrer Grundzahlen darstellen; endlich $(x)'$ irgend eine positive ganze Zahl $> \frac{1}{2}x - 1$, der Art also, dass $\frac{x}{(x)'+1} < 2$ ist.

Aus dieser Gleichheit folgt augenscheinlich $\left(\text{da } 2\left(\frac{1}{2}x\right)' + 1 > \frac{1}{2}x - 1, \text{ weil } > 2\left(\frac{1}{4}x - 1\right) + 1\right)$:

$$\frac{[x]!}{\left[\frac{1}{2}x\right]!^2} \equiv \frac{P[x]\cdot P\left[\frac{x}{2}\right]\cdot P\left[\frac{x}{3}\right]\cdot P\left[\frac{x}{4}\right]\cdot P\left[\frac{x}{5}\right]\cdots P\left[\frac{x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)'}\right]\cdot P\left[\frac{x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)'+1}\right]}{P\left[\frac{x}{2}\right]\cdot P\left[\frac{x}{2}\right]\cdot P\left[\frac{x}{4}\right]\cdot P\left[\frac{x}{4}\right]\cdots P\left[\frac{x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)'}\right]\cdot P\left[\frac{x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)'}\right]}$$

$$\equiv P[x]\,\frac{P\left[\frac{x}{3}\right]}{P\left[\frac{x}{2}\right]}\cdot\frac{P\left[\frac{x}{5}\right]}{P\left[\frac{x}{4}\right]}\cdots\frac{P\left[\frac{x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)'+1}\right]}{P\left[\frac{x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)'}\right]},$$

und also, da der Ausdruck $P[x]$ seiner Bedeutung zufolge immer positiv, weil $\geqq 1$, bleibt und mit wachsendem x nicht abnimmt:

$$\frac{[x]!}{\left[\frac{1}{2}x\right]!^2} \overline{\gtrless} P[x].$$

Setzt man nun für x irgend eine 1 übersteigende ungerade Zahl $2k+1$, so wird:

$$\frac{[x]!}{\left[\frac{1}{2}x\right]!^2} = \frac{(2k+1)!}{k!^2} \equiv \frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots 2k\,.\,(2k+1)}{1\,.\,1\,.\,2\,.\,2\ldots k\,.\,\;k}$$

$$\equiv 2^{2k}\,\frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots 2k\,.\,(2k+1)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\ldots 2k\,.\,\;2k} > 2^{2k};$$

so dass man

$$2^{2k} < \frac{(2k+1)!}{k!^2} \overline{\gtrless} P[2k+1]$$

erhält.

Es ist demnach, wenn y irgend eine ganze oder nicht ganze

Zahl $\geqq 3$ darstellt, und $2k+1$ die grösste ungerade Zahl, die noch nicht $> y$ ist, auch:

$$2^{2k} < P[y],$$

und um so mehr, da schon $2k+3 > y$, also $2k > y-3$ sein soll:

$$2^{y-3} < P[y];$$

welche Beziehung ersichtlich auch bestehen bleibt, wenn $y < 3$ wird.

Andererseits ist $P[y]$ seiner Bedeutung nach offenbar keinesfalls $> y^s$, wenn s die Anzahl der Primzahlen $\overline{\gtrless} y$ angiebt. Man hat somit weiter:

$$2^{y-3} < y^s;$$

und diesem Ergebnisse braucht man nur die Gestalt

$$2^{\left(1-\frac{3}{y}\right)y} < y^s$$

zu geben, um aus ihm sofort zu erkennen, dass aufwärts von jedem beliebig über 3 gewählten Werthe y_0 von y eine Abhängigkeit der behaupteten Art $a^y \overline{\gtrless} y^s$ besteht, in der also a eine 1 übersteigende Constante bedeutet. Ist ja doch $2^{\left(1-\frac{3}{y}\right)y} \geqq 2^{\left(1-\frac{3}{y_0}\right)y}$, und $2^{1-\frac{3}{y_0}} > 1$, wenn $y \geqq y_0 > 3$.

Und folglich gilt eine solche Abhängigkeit, insofern dieselbe bei positivem y nur besagt, dass $y^{\frac{s}{y}}$ nicht unter eine gewisse höher als 1 liegende feste Grenze (a) sinkt, offenbar auch schon von $y=2$ an aufwärts, der niedrigstmöglichen Grenze, weil dem kleinsten Werthe von y, bei dem noch s von Null verschieden, und also $y^{\frac{s}{y}} > 1$ ist.

(Es ergiebt sich auch leicht, dass $\sqrt{2}$ der grösste Werth von a ist, für den die Beziehung $y^s \geqq a^y$ oder $y^{\frac{s}{y}} \geqq a$ schon bei allen Werthen von $y \geqq 2$ stattfindet. Denn bis $\sqrt{2}$ sinkt ja der Ausdruck $y^{\frac{s}{y}}$ wirklich für einen dieser Werthe, nämlich $y=2$ selbst; während er $> \sqrt{2}$ bleibt, solange $y > 2$ ist, wie sich für $y \geqq 6$ aus der vorhin gefundenen Ungleichung $2^{\left(1-\frac{3}{y}\right)y} < y^s$ oder $2^{1-\frac{3}{y}} < y^{\frac{s}{y}}$ ersehen und für $6 > y \geqq 2$ ohne Schwierigkeit besonders feststellen lässt.)

Die Anwendung auf den vorliegenden Fall ist folgende: Für den grössten Werth s' der positiven ganzen Zahl s, welcher der Bedingung $t \geqq 2sp_s$ entspricht, hat man, da ja $2sp_s$ mit s wächst,

$$2(s'+1)\,p_{s'+1} > t \geqq 2s'p_{s'}, \tag{2}$$

unter p_k immer die $k$te in der wachsenden Reihe der Primzahlen verstanden. Es ist also die $(s'+1)$te Primzahl $p_{s'+1} > \frac{t}{2(s'+1)}$; und daraus folgt, dass die Anzahl s'' der die Grösse $\frac{t}{2(s'+1)}$ nicht überschreitenden Primzahlen höchstens s' betragen kann. Für diese Anzahl besteht nun andererseits nach dem eben bewiesenen Hülfssatze unter der Voraussetzung $\frac{t}{2(s'+1)} \geqq 2$ eine Abhängigkeit der Gestalt

$$\left(\frac{t}{2(s'+1)}\right)^{s''} \geqq a^{\frac{t}{2(s'+1)}},$$

in der a eine gewisse 1 übersteigende Constante bezeichnet. Unter derselben Voraussetzung ist mithin erst recht

$$\left(\frac{t}{2(s'+1)}\right)^{s'} \geqq a^{\frac{t}{2(s'+1)}}. \tag{3}$$

Der Beziehung $t \geqq 2s'p_{s'}$ zufolge ist aber $\frac{t}{2(s'+1)} \geqq \frac{s'}{s'+1}\, p_{s'}$, bleibt also $\geqq 2$, solange die positive ganze Zahl $s' > 1$ ist; während durch $s' = 1$ aus $\frac{t}{2(s'+1)} < 2$ ja $t < 8$ folgt. Die Bedingung $\frac{t}{2(s'+1)} \geqq 2$ ist demnach sicher erfüllt, wenn $t \geqq 8$ ist; da es dann eine den Beziehungen (2) entsprechende positive ganze Zahl s' auch immer giebt. Und folglich besteht (3) auch nothwendig unter der Voraussetzung $t \geqq 8$.

Indem man jetzt, zur Ableitung einer unteren Grenze für s' aus (3), beide Seiten dieser Beziehung in die s'te Potenz erhebt, erhält man bei dem positiven ganzzahligen Werthe von s' und den 1 übersteigenden Werthen von t und a, wenn noch β eine beliebig über 1 gewählte Grösse und $\log_\beta$ den nach der Grundzahl β genommenen reellen Logarithmus bedeutet, nacheinander offenbar:

$$\left(\frac{t}{2(s'+1)}\right)^{s'^2} \geqq a^{\frac{1}{2}\frac{s'}{s'+1}t}$$

$$t^{s'^2} > a^{\frac{1}{4}t}$$

$$s'^2 \log_\beta t > \frac{1}{4} t \log_\beta a$$

$$s'^2 > \frac{t \log_\beta a}{4 \log_\beta t}$$

$$s' > \sqrt{\frac{t \log_\beta a}{4 \log_\beta t}}. \tag{4}$$

Und damit ist für den grössten der Bedingung $t \geqq 2sp_s$ genügenden Werth s' der positiven ganzen Zahl s unter der Voraussetzung $t \geqq 8$ eine untere Grenze der Art gefunden, wie sie zur Entfernung von s aus der vorher unter jener Bedingung nachgewiesenen Abhängigkeit (1) gesucht wurde. Dass die durch letztere für s' gegebene zweite Beziehung

$$m \geqq t^{2s'} \tag{5}$$

ebenfalls immer stattfindet, wenn $t \geqq 8$ ist, bedarf kaum der Erwähnung, da eben hierzu die Erfüllbarkeit der Bedingung $t \geqq 2s'p_s$ ausreicht.

Die Einführung von (4) in (5) giebt nun bei dem 1 übersteigenden Werthe von t und dem positiven der Constanten q (1):

$$m > t^{q\sqrt{\frac{t\log_\beta a}{4\log_\beta t}}},$$

oder:

$$m > t^{\sqrt{\frac{t\log_\beta\left(a^{\frac{1}{4}q^2}\right)}{\log_\beta t}}},$$

also, da ja $a^{\frac{1}{4}q^2}$ constant und > 1 ist, wie a selbst (3), und

$$\frac{\log_\beta b}{\log_\beta t} \equiv \frac{1}{\log_b t} \equiv \log_t b,$$

eine Abhängigkeit der Gestalt:

$$m \geqq t^{\sqrt{\frac{t}{\log_b t}}} \quad \text{oder} \quad m \geqq t^{\sqrt{t\log_t b}}, \tag{6}$$

in der b eine gewisse 1 übersteigende Constante bezeichnet.

Dieses Ergebniss ist allerdings vorläufig nur mit der Beschränkung $t \geqq 8$ bewiesen. Es ist indessen leicht zu sehen, dass dasselbe so, wie es ausgesprochen ist, ohne nähere Bestimmung der Constanten b, auch dieser ohnehin unerheblichen Beschränkung nicht unterworfen ist, sondern nur der durch seine Gestalt selbst erforderten $t > 1$. Denn unter der letzteren Bedingung ist ja die Beziehung (6) gleichbedeutend mit der sie dann nach b lösenden

$$t^{\frac{(\log_t m)^2}{t}} \geqq b,$$

besagt also, wenn von b nur verlangt wird, dass eine 1 übersteigende Constante dadurch dargestellt ist, nichts weiter, als dass $t^{\frac{(\log_t m)^2}{t}}$ um einen nicht unbegrenzt klein werdenden positiven Betrag grösser als 1 bleibt. Und dass dies bei allen über 1 liegenden Werthen der ganzen Zahl t unterhalb einer beliebig gegebenen festen Grösse der Fall, ist unmittelbar ersichtlich, da ja auch m in jeder seiner zwei Bedeutungen als Classe oder Grad einer die alternirende ihres Grades nicht enthaltenden Gruppe (1) eine 1 übersteigende ganze Zahl ist.

Auf diese Weise erhält man bei der eben erwähnten Doppelbedeutung von m den Satz:

IX. *Es giebt Constante b_1 und b_2, grösser als 1, von der Art, dass die Classe u und der Grad n jeder mehr als einmal transitiven, die alternirende ihres Grades nicht enthaltenden Substitutionengruppe zu dem Transitivitätsgrade t derselben in den Beziehungen stehen:*

$$u \geqq t^{\sqrt{\frac{t}{\log_{b_1} t}}} \quad \textit{und} \quad n \geqq t^{\sqrt{\frac{t}{\log_{b_2} t}}},$$

unter $\log_b t$ *den nach der Grundzahl* b *genommenen reellen Logarithmus von* t *verstanden.*

(Dass die Werthe der Constanten b_1 und b_2 sich erhöhen und also vortheilhafter gestalten können, wenn das Bestehen des Satzes erst von höheren unteren Grenzen an verlangt wird, braucht kaum bemerkt zu werden.)

Aus den eben gefundenen Beziehungen lassen sich auch noch nach t gelöste von ähnlicher Einfachheit ableiten.

Zu diesem Zwecke mag zunächst der gemeinsamen Darstellung derselben (6) durch reelle Logarithmirung nach der beliebig über 1 gewählten Grundzahl β, Quadrirung und Benützung der Gleichheit $\log_b t \equiv \frac{\log_\beta t}{\log_\beta b}$ die Gestalt

$$(\log_\beta m)^2 \geqq t \log_\beta t \log_\beta b \tag{7}$$

gegeben werden, was ja bei den 1 übersteigenden Werthen von t und b immer möglich ist, und in welcher (durch $\beta = b$ sich zu $(\log_b m)^2 \geqq t \log_b t$ vereinfachenden) Gestalt die Abhängigkeit offenbar auch noch für $t = 1$ besteht.

Nun nimmt $x^{\frac{1}{x}}$ aufwärts von einer gewissen über 1 liegenden Grösse (e) von x mit wachsendem x unbegrenzt gegen 1 hin ab. Da somit $\frac{x}{\log_\beta x} = \frac{1}{\log_\beta \left(x^{\frac{1}{x}}\right)}$ von derselben Grenze an mit x zunimmt, so folgt unter der Voraussetzung, dass $t \log_\beta t \log_\beta b$ nicht unter diese Grenze (e) sinkt, aus (7):

$$\frac{(\log_\beta m)^2}{\log_\beta((\log_\beta m)^2)} \geqq \frac{t \log_\beta t \log_\beta b}{\log_\beta (t \log_\beta t \log_\beta b)},$$

oder, bei dem hier stets positiven Werthe von $\log_\beta m$,

$$\frac{(\log_\beta m)^2}{\log_\beta \log_\beta m} \geqq t \frac{2 \log_\beta t \log_\beta b}{\log_\beta(t \log_\beta t \log_\beta b)}. \tag{8}$$

Der Quotient von t in der rechten Seite dieser letzteren Beziehung bleibt aber hier, wo b sowohl als β constant und > 1, t ganz und positiv, und $t \log_\beta t \log_\beta b$, also auch t, > 1 vorauszusetzen ist, über einer gewissen constanten positiven Grösse, die sich dadurch über jeden gegebenen Werth erhöhen lässt, dass die beliebig über 1 wählbare Grundzahl β unter eine diesem Werthe entsprechende constante Grenze gegen 1 hin erniedrigt wird. Denn unter jenen Voraussetzungen ist ja sowohl $\log_\beta t \log_\beta b$ als auch $\log_\beta (t \log_\beta t \log_\beta b)$ immer positiv;

während sich dann der umgekehrte Werth des ganzen Quotienten, weil
$$=\frac{\log_\beta t+\log_\beta(\log_\beta b\log_\beta t)}{2\log_\beta b\log_\beta t}=\frac{1}{2\log_\beta b}+\frac{\log_b((\log_\beta b)^2\log_b t)}{2\log_\beta b\log_b t}=$$
$$=\frac{1}{2\log_\beta b}+\frac{\log_b\log_\beta b}{\log_b t\log_\beta b}+\frac{\log_b\log_b t}{2\log_\beta b\log_b t}=$$
$$=\frac{1}{2\log_\beta b}+\frac{\log_b\left((\log_\beta b)^{\frac{1}{\log_\beta b}}\right)}{\log_b t}+\frac{\log_b\left((\log_b t)^{\frac{1}{\log_b t}}\right)}{2\log_\beta b},$$
nach dem über $x^{\frac{1}{x}}$ Gesagten offenbar innerhalb gewisser nur von β und b abhängiger Grenzen hält, deren obere durch Verkleinerung von β gegen 1 beliebig gegen 0 erniedrigt werden kann.

Und ist
$$0<\gamma \overline{\overline{<}} \frac{2\log_\beta t\log_\beta b}{\log_\beta(t\log_\beta t\log_\beta b)}, \tag{9}$$
so folgt ja bei dem positiven Werthe von t
$$\frac{(\log_\beta m)^2}{\log_\beta\log_\beta m}\geqq\gamma t \quad \text{oder} \quad \frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma\log_\beta\log_\beta m}\geqq t \tag{10}$$
aus (8), und also aufwärts von einer gewissen Grösse (e) von $t\log_\beta t\log_\beta b$ mit (8) zusammen auch aus (7).

Da es nun constante, 1 übersteigende Werthe von b giebt, bei welchen (8) in allen Fällen besteht, in denen $t>0$ ist (IX), so ist unter den Voraussetzungen, dass $t>0$ bleibt, und $t\log_\beta t\log_\beta b$ bei auch nur einem solchen Werthe von b nicht unter eine gewisse feste 1 übersteigende Grösse (e) sinkt, auch bei jedem 1 übersteigenden constanten Werthe von β eine constante positive Grenze nachgewiesen, zwischen der und 0 der Werth von γ, und bei jedem positiven constanten Werthe von γ eine constante über 1 liegende Grenze, zwischen der und 1 der Werth von β nicht liegen kann, ohne dass eine Abhängigkeit der Gestalt (10) stattfinden muss.

Jene Voraussetzungen kommen aber hier darauf hinaus, dass dem Werthe von t selbst eine gewisse, 1 übersteigende, nur von b und β abhängige und mit β gegen 1 hin sinkende untere Grenze gesetzt wird, da ja $t\log_\beta t\log_\beta b$ bei über 1 gegebenen Werthen von β und b oberhalb $t=1$ mit t unbegrenzt und um so rascher wächst, je kleiner β ist. Und auf alle Werthe von t unterhalb irgend einer derartigen Grenze lässt sich nöthigenfalls die Gültigkeit der fraglichen Abhängigkeit bei jedem Werthe der 1 übersteigenden Constanten β, welcher der offenbar schon durch die Gestalt der Beziehung erforderten Bedingung genügt, kleiner als der kleinste Werth von m zu sein, durch Verkleinerung der positiven Constanten γ ausdehnen, und bei jedem Werthe der letzteren durch Verkleinerung von β. Denn der Ausdruck $\frac{(\log_\beta m)^2}{\log_\beta \log_\beta m}$, dem man auch die Gestalt

$$\frac{\log_{\beta'} m \log_\beta m}{\log_{\beta'} \log_\beta m} = \frac{\log_{\beta'} m}{\log_{\beta'} \left((\log_\beta m)^{\frac{1}{\log_\beta m}}\right)}$$

geben kann, unter β' irgend eine neue, 1 übersteigende Grundzahl verstanden, bleibt ja einerseits, wenn β fest über 1 und unter dem kleinsten Werthe der stets mehr als 1 betragenden ganzen Zahl m gegeben ist, über einer festen positiven Grenze und nimmt andererseits oberhalb einer gewissen Grösse von $\log_\beta m$ nicht nur mit m, sondern auch mit gegen 1 abnehmendem β unbegrenzt zu.

Es ergiebt sich demnach, wenn man wieder auf die zweifache Bedeutung von m zurückgeht, der Satz:

X. *Es giebt positive Constante γ_1 und γ_2, und 1 übersteigende β_1 und β_2 der Art, dass der Transitivitätsgrad keiner Substitutionengruppe, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten soll, eine der Grenzen*

$$\frac{(\log_{\beta_1} u)^2}{\gamma_1 \log_{\beta_1} \log_{\beta_1} u} \quad \textit{oder} \quad \frac{(\log_{\beta_2} n)^2}{\gamma_2 \log_{\beta_2} \log_{\beta_2} n}$$

überschreiten kann, unter u die Classe, unter n den Grad der Gruppe verstanden, unter $\log_\beta$ *den nach der Grundzahl β genommenen reellen Logarithmus; und zwar kann in jeder dieser Grenzen irgend eine der beiden Constanten β, γ bis auf die Beschränkungen $\beta_1 < u$ und $\beta_2 < n$ beliebig gegeben sein.*

Als eine noch einfacher gestaltete unmittelbare Folgerung dieses Satzes erhält man, indem man $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ wählt:

Es giebt Constante b_1' und b_2', grösser als 1, von der Art, dass keine Substitutionengruppe, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten soll, mehr als

$$\frac{(\log_{b_1'} u)^2}{\log_{b_1'} \log_{b_1'} u}, \quad \textit{noch als} \quad \frac{(\log_{b_2'} n)^2}{\log_{b_2'} \log_{b_2'} n}$$

mal transitiv sein kann, unter u die Classe, unter n den Grad der Gruppe, unter $\log_{b'}$ *den nach der Grundzahl b' genommenen reellen Logarithmus verstanden.*

In Bezug auf den Zusammenhang der Constanten von X mit denen von IX ergiebt sich dabei Folgendes:

Nach dem Vorhergehenden folgen die Beziehungen des ersteren Satzes (10) aus denen des letzteren (6) oberhalb einer gewissen nur von b und β abhängigen Grösse von t bei allen Werthen der 1 übersteigenden Constanten b und β und der positiven γ, welche der Bedingung (9):

$$\gamma \gtreqless \frac{2\log_\beta t \log_\beta b}{\log_\beta(t \log_\beta t \log_\beta b)}\ \text{*)}$$

genügen. Das Gleiche ist mithin auch bei irgend solchen Werthen derselben Constanten, für welche noch $\gamma < 2\log_\beta b$, d. h. $\beta^{\frac{1}{2}\gamma} < b$ ist, oberhalb einer nur von diesen Werthen abhängigen Grösse von t der Fall. Denn wie die Umkehrung des Ausdruckes rechts in (9) zeigt, die ja $= \frac{1}{2\log_\beta b} + \frac{\log_\beta(\log_\beta t \log_\beta b)}{2\log_\beta t \log_\beta b} =$

$$= \frac{1}{2\log_\beta b} + \frac{1}{2}\log_\beta\left((\log_\beta t \log_\beta b)^{\frac{1}{\log_\beta t \log_\beta b}}\right)$$

ist, lässt sich dieser Ausdruck bei fest über 1 gegebenen Werthen von b und β dem Werthe $2\log_\beta b$ durch entsprechende Vergrösserung von t beliebig weit von unten her nähern, und also auch so weit, dass er nicht kleiner als irgend ein noch unter $2\log_\beta b$ fest gewählter Werth γ ist.

Die fragliche untere Grenze für t kann dabei auch durch eine ebensolche für m ersetzt werden. Soll nämlich $\frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} < t$ nur dann mit (6) vereinbar sein, wenn $t \gtreqless t_0$ ist, so ist ja dazu auch erforderlich, dass $\frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} < t_0$ bleibt, womit offenbar eine Grenze der behaupteten Art für m bestimmt ist.

Es lässt sich endlich leicht zeigen, dass auch rückwärts der Satz IX eine blosse Folge von X ist.

Denn sobald $\beta > 1$ und die ganze Zahl $t > 0$ ist, zieht ja die Beziehung (10):

$$\frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} \geqq t$$

die andere:

$$\frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} \log_\beta\left(\frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma \log_\beta \log_\beta m}\right) \geqq t \log_\beta t \tag{11}$$

nach sich, da x^x, und also auch $\log_\beta(x^x) = x \log_\beta x$, aufwärts von $x = 1$ mit x zunimmt. Unter den hier zu machenden Voraussetzungen, dass γ eine über 0, und β eine über 1 und unter dem kleinsten Werthe der ganzen Zahl m liegende Constante darstellt, bleibt nun der Quotient von $(\log_\beta m)^2$ in der linken Seite von (11), weil gleich $\frac{2}{\gamma} - \frac{\log_\beta(\gamma \log_\beta \log_\beta m)}{\gamma \log_\beta \log_\beta m}$, offenbar unter einer gewissen constanten Grenze. Und folglich giebt es dann bei dem positiven Werthe von

*) $\log_\beta$ bezeichnet selbstverständlich wieder, wie immer hier, den reellen Logarithmus nach der Grundzahl β.

$(\log_\beta m)^2$ constante Werthe γ', wenigstens eben alle diejenigen, welche der Bedingung

$$\gamma' \geqq \frac{2}{\gamma} - \frac{\log_\beta(\gamma \log_\beta \log_\beta m)}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} \tag{12}$$

entsprechen, von der Art, dass aus (10) bei allen, 0 übersteigenden Werthen von t auch

$$\gamma' (\log_\beta m)^2 \geqq t \log_\beta t$$

folgt, oder, da hiernach $\gamma' > 0$ sein muss:

$$(\log_\beta m)^2 \geqq \frac{1}{\gamma'} t \log_\beta t.$$

Das ist aber eine Beziehung der behaupteten Art (7), wie man sofort erkennt, wenn man durch $\frac{1}{\gamma'} = \log_\beta b$ für die positive Constante γ' die 1 übersteigende $b = \beta^{\frac{1}{\gamma'}}$ einführt.

(Daraus, dass hierbei nur je ein Werth der Constanten β und γ gebraucht wurde, ergiebt sich beiläufig, dass es auch genügt, die Beziehungen des Satzes X für je einen solchen Werth nachzuweisen, und selbst das erst aufwärts von einer noch so hohen festen Grösse von t, um auf das volle Bestehen dieses Satzes schliessen zu können. Denn bis zu derselben Grenze herab, und also, wie früher gezeigt, auch in seinem ganzen Umfange, gilt ja dann eben der Satz IX, aus dem X gefolgert wurde. Dasselbe würde sich übrigens auch unmittelbar ohne besondere Schwierigkeit darthun lassen.)

Zugleich ist ersichtlich, dass die Bedingung (12) unter den über die Constanten β und γ gemachten Voraussetzungen $\beta > 1$ und $\gamma > 0$ zwar durch keinen kleineren constanten Werth von γ' als $\frac{2}{\gamma}$ oberhalb einer noch so hohen Grenze von m bei allen Werthen dieser Zahl erfüllt werden kann, da sich ja die rechte Seite von (12) dem Werthe $\frac{2}{\gamma}$ mit wachsendem m schliesslich unbegrenzt nähert; wohl aber durch $\gamma' \geqq \frac{2}{\gamma}$, sobald $\frac{\log_\beta(\gamma \log_\beta \log_\beta m)}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} \geqq 0$ ist. Und Letzteres ist ja hier der Fall, wenn $\gamma \log_\beta \log_\beta m \geqq 1$, oder $\log_\beta m \geqq \beta^{\frac{1}{\gamma}}$, oder endlich $m \geqq \beta^{\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$ ist. Nun ist hier weiter mit $\gamma' \geqq \frac{2}{\gamma}$ gleichbedeutend $b \overline{\gtrless} \beta^{\frac{1}{2}\gamma}$, wenn wieder $\frac{1}{\gamma'} = \log_\beta b$ gesetzt wird. Das für diesen Fall unter der Bedingung (12) gefundene Ergebniss, dass mit der selbstverständlichen Beschränkung $t > 1$ die Beziehungen von IX Folgerungen der entsprechenden von X sind, gilt demnach oberhalb einer gewissen noch unter $\beta^{\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$ liegenden Grösse von m bei allen solchen Werthen der 1 übersteigenden Constanten b und β und der positiven γ, bei denen $b \gtreqless \beta^{\frac{1}{2}\gamma}$ ist. Und aus der Grenze für m folgt auch eine derselben Art für t, vermöge der vorausgesetzten Beziehung (10) selbst, wie bei Berücksichtigung der Bedeutung von m und t auch vermöge des Satzes IX, oder schon der einfachen Abhängigkeit $m > t$.

Jeder der Sätze IX und X ist mithin sowohl in dem auf u als dem auf n bezüglichen Theile blosse Folge des andern.

Und zwar giebt es, unter m, b, β, γ der Reihe nach das eine Mal $u, b_1, \beta_1, \gamma_1$, das andere Mal $n, b_2, \beta_2, \gamma_2$ verstanden, für m wie für t eine gewisse nur von b, β, γ abhängige Grenze, die nicht überschritten werden kann, ohne dass

$$\frac{(\log_\beta m)^2}{\gamma \log_\beta \log_\beta m} \geqq t \quad \textit{aus} \quad m \geqq t^{\sqrt{\frac{t}{\log_\beta t}}}$$

bei allen der Bedingung $\beta^{\frac{1}{2}\gamma} < b$ genügenden Werthen der 1 übersteigenden Constanten b, β und der positiven γ folgt; während umgekehrt oberhalb einer ebensolchen Grenze für t, wie bei 1 übersteigendem Werthe von t auch oberhalb einer unter $\beta^{\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$ liegenden für m, die erste Beziehung die zweite bei allen der Bedingung $b \gtreqless \beta^{\frac{1}{2}\gamma}$ entsprechenden Werthen derselben Constanten nach sich zieht.

Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann.

Von

Alfred Bochert in Breslau.

Obgleich der Zeit nach vielleicht die erste der Substitutionstheorie, ist die Frage nach der Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erhalten kann, verhältnissmässig doch noch nicht weit gefördert. Die letzten wesentlichen Fortschritte sind wohl auch in dieser Richtung der Theorie Herrn Camille Jordan zu verdanken, insofern dieselben durch die beiden von ihm gefundenen Sätze dargestellt werden:

Ist die Gruppe einer mehr als zweiwerthigen transitiven Function von n Buchstaben primitiv, so ist die Werthezahl der Function ein Vielfaches des Productes aller Primzahlen, die kleiner als $\frac{2}{3} n$ sind.

Welche noch so grosse ganze Zahl auch k sein möge, immer giebt es eine nur von k abhängige Grenze für n, oberhalb deren die Werthezahl einer Function von n Buchstaben geringer sein muss, wenn die Function in $n - k$ derselben alternirend oder symmetrisch ist, als wenn sie diese Eigenschaft nicht besitzt.*)

Ich bin nun, ohne mich dabei auf viel mehr als die ersten Grundlagen der Substitutionstheorie zu stützen, zu einigen bedeutend weiter reichenden Sätzen gelangt, von denen ich hier zunächst den nachstehenden ableiten will:

Wird eine Function in n Buchstaben durch jeden Cyklus dritter Ordnung geändert (oder, was ja Dasselbe sagt, ist die Function in keiner Anzahl von mehr als zwei der n Buchstaben alternirend oder symmetrisch), so giebt es unter diesen Buchstaben immer $n - \left[\frac{1}{2} n\right]$, *durch deren Vertauschung untereinander allein die Function schon*

---

*) C. Jordan, *Traité des Substitutions*, 1870, S. 68 und 664.

$\left(n-\left[\frac{1}{2}n\right]\right)! = 1\cdot 2\cdots\left(n-\left[\frac{1}{2}n\right]\right)$ *verschiedene Werthe erlangt, unter* $\left[\frac{1}{2}n\right]$ *die grösste* $\frac{1}{2}n$ *nicht übersteigende ganse Zahl, das Ganze von* $\frac{1}{2}n$, *verstanden.*

Und zwar erhalte ich diesen Satz als Folgerung des anderen:

Sind irgend n Buchstaben und eine Substitutionengruppe gegeben, und wird aus den n Buchstaben eine Anzahl, etwa von x, der Art herausgegriffen, dass sich in der gegebenen Gruppe keine auf die herausgegriffenen x Buchstaben beschränkte Substitution ausser der identischen findet, und überdies unter den gegebenen n Buchstaben keine andere Anzahl dieser Eigenschaft, welche die herausgegriffene vollständig enthält, so kann auch in den übrigen n — x der n Buchstaben keine von der identischen verschiedene Substitution zur gegebenen Gruppe gehören, wenn die letztere nicht Cyklen dritter Ordnung in den n Buchstaben aufweisen soll.

Die Bestimmungen „in gegebenen n Buchstaben" oder „auf solche beschränkt", von einer Substitution gebraucht, sollen dabei selbstverständlich nur besagen, dass dieselbe keine andern Buchstaben vertauscht, und Nichts darüber festsetzen, mit wie vielen der gegebenen sie dies thut; zum Unterschiede davon, dass als Substitution *von* gegebenen n Buchstaben derjenige besondere Fall einer Substitution in denselben bezeichnet wird, in welchem die letzteren auch wirklich alle vertauscht werden.

Ebenso braucht kaum bemerkt zu werden, dass man unter der „Gruppe einer Function in gegebenen n Buchstaben" die Gruppe aller die Function nicht ändernden Substitutionen in diesen Buchstaben zu verstehen hat; unter „Werthen der Function in den n Buchstaben" solche, welche die Function schon allein durch Vertauschung dieser Buchstaben untereinander erlangt.

I.

Der Umstand, dass die Werthezahl einer Function in x Buchstaben am grössten und zugleich von bekannter Grösse ist, nämlich $= x! = 1 . 2 \ldots x$ (der Zahl aller verschiedenen Reihenfolgen der x Buchstaben), wenn sich die Gruppe der Function in denselben auf die identische Substitution beschränkt, d. h. wenn die x Buchstaben für sich allein ohne Aenderung der Function überhaupt nicht vertauschbar sind, führt auf den Gedanken, zur Ermittelung unterer Grenzen für die Werthezahl einer Function in gegebenen Buchstaben die grösste Anzahl unter letzteren zu suchen, welche der eben angegebenen Bedingung genügt.

Diese Bedingung lässt sich offenbar auch so aussprechen, dass keine auf die gesuchten Buchstaben beschränkte Substitution ausser der identischen der Gruppe der Function in irgendwelchen die gegebenen und damit auch die gesuchten sämmtlich enthaltenden Buchstaben angehören soll; einer Gruppe, die ja, solange über die Function Nichts bestimmt ist, beliebig gegeben sein kann, auch hinsichtlich der von ihr vertauschten Buchstaben; wenngleich hier von derselben immer nur die Untergruppe der Substitutionen in den gegebenen Buchstaben selbst wirklich in Betracht kommt.

Eine Anzahl von Buchstaben, die in dieser Beziehung zu einer Substitutionengruppe stehen, d. h. wenn überhaupt, nur mit einem oder mehreren anderen zusammen durch die Substitutionen der Gruppe vertauscht werden, mag dementsprechend auch kürzer als „für sich allein durch die Gruppe nicht vertauschbare Anzahl oder Zusammenstellung“ bezeichnet werden.

Es seien nun n Buchstaben und eine Substitutionengruppe beliebig gegeben. Dann ist zunächst klar, dass es in diesen Buchstaben immer Zusammenstellungen giebt, die in Bezug auf die gegebene Gruppe von der bezeichneten Eigenschaft sind. Denn als eine solche Zusammenstellung ist ja nach dem Begriffe derselben schon jeder beliebige einzelne Buchstabe in Bezug auf jede beliebige Substitutionengruppe anzusehen. Es muss sich also unter den gegebenen Buchstaben auch immer eine für sich allein durch die gegebene Gruppe nicht vertauschbare Anzahl von der besonderen Art finden, dass unter allen andern solchen in diesen Buchstaben möglichen Zusammenstellungen, wenn überhaupt noch eine grössere, wenigstens keine mehr vorhanden ist, welche die fragliche ganz enthält.

Denkt man sich eine Zusammenstellung dieser Art herausgegriffen, und besteht dieselbe aus x Buchstaben, so bilden diese x der Voraussetzung zufolge schon mit jedem einzelnen der übrigen $n-x$ gegebenen Buchstaben, falls die Zahl derselben überhaupt noch grösser als Null ist, eine Anzahl von $x+1$, welche die Eigenschaft, für sich allein durch die gegebene Gruppe unvertauschbar zu sein, nicht mehr besitzt. Das heisst also, es findet sich für jeden dieser übrigen $n-x$ Buchstaben in der Gruppe mindestens eine von der identischen verschiedene Substitution, die auf ihn und die herausgegriffenen x beschränkt ist, und somit von jenen $n-x$ höchstens diesen einen vertauscht. Diesen aber auch nothwendig, da sie ja sonst sogar auf die herausgegriffenen x beschränkt sein würde, welche doch für sich allein durch die gegebene Gruppe nicht vertauschbar sein sollen. Und folglich giebt es insbesondere für jeden Buchstaben, der von irgendeiner auf jene $n-x$ beschränkten Substitution vertauscht wird, in dieser Gruppe wenigstens eine andere Substitution, die von allen durch die ersteren vertauschten Buchstaben gerade nur diesen einen gleichfalls vertauscht, während alle übrigen von ihr betroffenen Buchstaben zu den herausgegriffenen x gehören.

Haben aber zwei Substitutionen einen und nur einen der von ihnen vertauschten Buchstaben gemein, so finden sich unter den blossen Zusammensetzungen dieser Substitutionen mit sich selbst und einander, und also in jeder Gruppe, der beide angehören, Cyklen dritter Ordnung (worunter immer solche, die den gemeinsamen Buchstaben und ausserdem noch einen aus jeder der zwei Substitutionen vertauschen).

Denn wird von solchen zwei Substitutionen, S_1 und S_2, die eine, etwa S_1, durch die andere transformirt, (S_2 in den Buchstaben von S_1 ausgeführt), so ergiebt sich ja eine Substitution S_1', die sich von der ursprünglichen, S_1, nur dadurch unterscheidet, dass in ihr an Stelle des einzigen gemeinsamen Buchstaben der gegebenen zwei Substitutionen, c, derjenige, b, steht, der von der transformirenden, S_2, dafür gesetzt wird. Anders als die ursprüngliche Substitution, S_1, ersetzt also die neue, S_1', drei und nur drei Buchstaben: nämlich ausser den eben bezeichneten zwei, deren jeder nur von einer der zwei Substitutionen vertauscht wird, noch den einen durch beide vertauschten, a, an dessen Stelle die Substitutionen jene zwei verschiedenen Buchstaben, b und c, bringen. Und folglich sind es von allen Buchstaben auch nur diese drei, a, b, c, bei denen die durch irgendeine der zwei Substitutionen, S_1 oder S_1', bewirkten Ersetzungen durch die umgekehrte der andern nicht rückgängig gemacht werden, oder die nicht überhaupt beidemal unvertauscht bleiben. Das heisst aber, das Ergebniss einer solchen Substitutionenfolge, $S_1 S_1'^{-1}$ oder $S_1' S_1^{-1}$, ist eine Vertauschung von drei und nur drei Buchstaben, eben jener drei, und also, als einzig mögliche Art einer solchen Vertauschung, ein Cyklus dritter Ordnung in diesen Buchstaben.

Nun ist die Umkehrung S^{-1} einer Substitution S einer Potenz der letzteren gleich, und das Ergebniss der Transformation einer Substitution S_1 durch eine andere S_2, S_1', $= S_2^{-1} S_1 S_2$. Jene Substitutionenfolgen, $S_1 S_1'^{-1}$ und $S_1' S_1^{-1}$, stellen sich demnach als blosse Zusammensetzungen der gegebenen zwei Substitutionen S_1 und S_2 mit sich selbst und einander dar. Und damit ist die Behauptung offenbar erwiesen.

Kurz angedeutet, in der bekannten Bezeichnungsweise, bei welcher der ersetzende Buchstabe unter dem zu ersetzenden steht, und Zusammensetzungen von Substitutionen von links nach rechts auszuführen sind:

$$S_1 = \begin{pmatrix} c\ a_1\ a_2 \ldots a_\varkappa \\ a_1'\ c\ a_2' \ldots a_\varkappa' \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} c\ b_1\ b_2 \ldots b_\lambda \\ b_1'\ c\ b_2' \ldots b_\lambda' \end{pmatrix},$$

$$S_2^{-1} S_1 S_2 = \begin{pmatrix} b_1'\ a_1\ a_2 \ldots a_\varkappa \\ a_1'\ b_1'\ a_2' \ldots a_\varkappa' \end{pmatrix} = S_1',$$

$$S_1 S_1'^{-1} = \begin{pmatrix} c\ a_1\ a_2 \ldots a_\varkappa \\ a_1'\ c\ a_2' \ldots a_\varkappa' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'\ b_1'\ a_2' \ldots a_\varkappa' \\ b_1'\ a_1\ a_2 \ldots a_\varkappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\ b_1'\ a_1 \\ b_1'\ a_1\ c \end{pmatrix} = (c b_1' a_1),$$

$$S_1' S_1^{-1} = \begin{pmatrix} b_1'\ a_1\ a_2 \ldots a_\varkappa \\ a_1'\ b_1'\ a_2' \ldots a_\varkappa' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'\ c\ a_2' \ldots a_\varkappa' \\ c\ a_1\ a_2 \ldots a_\varkappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1'\ c\ a_1 \\ c\ a_1\ b_1' \end{pmatrix} = (b_1' c a_1).$$

Das giebt nun, auf den vorliegenden Fall angewendet, offenbar sofort den Satz:

1. *Sind irgendwelche Buchstaben und eine Substitutionengruppe gegeben, und wird, was immer möglich ist, aus jenen gegebenen Buchstaben eine Anzahl der Art herausgegriffen, dass sich in der gegebenen Gruppe keine auf die herausgegriffenen Buchstaben beschränkte Substitution ausser der identischen findet, und überdies unter den gegebenen Buchstaben keine andere Anzahl derselben Eigenschaft, welche die herausgegriffene vollständig enthält, so kann auch in den etwa noch übrigen dieser Buchstaben keine von der identischen verschiedene Substitution zur gegebenen Gruppe gehören, wenn die letztere nicht Cyklen dritter Ordnung in den gegebenen Buchstaben aufweisen soll (mittels deren sich jeder von der Substitution vertauschte Buchstabe durch einen der herausgegriffenen ersetzen lässt).*

Daraus folgt aber, da ja von zwei Zahlen, die eine gegebene Summe haben sollen, wie hier die Anzahlen der herausgegriffenen und der noch übrigen gegebenen Buchstaben, nicht jede kleiner als die Hälfte dieser Summe sein kann:

2. *Aus irgend n Buchstaben, in denen eine Substitutionengruppe keinen Cyklus dritter Ordnung enthalten soll, muss sich eine Anzahl von mindestens $\frac{1}{2}n$ herausgreifen lassen, in der überhaupt keine Substitution ausser der identischen zur Gruppe gehört, die also für sich allein durch die Gruppe nicht vertauschbar ist.*

Nun erlangt, wie gesagt, eine Function durch Vertauschung solcher x Buchstaben untereinander, in denen keine Substitution ausser der identischen ihrer Gruppe angehört, die also für sich allein ohne Aenderung der Function nicht vertauschbar sind, $x! = 1 \cdot 2 \cdots x$ verschiedene Werthe. Und die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als die Hälfte einer gegebenen ist, ergiebt sich offenbar auch dadurch, dass von dieser letzteren selbst die grösste die Hälfte nicht übersteigende abgezogen wird. Indem man also zur gegebenen Gruppe insbesondere diejenige einer Function in den gegebenen n oder sonst irgend welchen die letzteren sämmtlich umfassenden Buchstaben wählt, erhält man weiter als Folgerung des Satzes 2:

I. *Soll eine Function in n Buchstaben durch jeden Cyklus dritter Ordnung geändert werden, so muss es unter denselben immer $n - \left[\frac{1}{2} n\right]$ geben von der Art, dass schon durch Vertauschung dieser unter einander die Function $\left(n - \left[\frac{1}{2} n\right]\right)! = 1 \cdot 2 \cdots \left(n - \left[\frac{1}{2} n\right]\right)$ verschiedene Werthe erlangt, unter $\left[\frac{1}{2} n\right]$ die grösste $\frac{1}{2} n$ nicht übersteigende ganze Zahl, das Ganze von $\frac{1}{2} n$, verstanden.*

Solche Buchstaben unter irgendwie gegebenen, die überhaupt von keiner auf die letzteren beschränkten Substitution einer gegebenen Gruppe betroffen werden, setzen selbstverständlich mit jeder für sich allein durch diese Gruppe nicht vertauschbaren Anzahl der gegebenen Buchstaben wieder eine derartige Anzahl zusammen.

Soll demnach eine aus irgendwelchen gegebenen (n) Buchstaben herauszugreifende, für sich allein durch irgend eine gegebene Gruppe nicht vertauschbare Anzahl (x_n) der besonderen Bedingung genügen, dass es unter jenen Buchstaben keine grössere Anzahl dieser Art, oder auch nur keine andere die herauszugreifende vollständig enthaltende der gleichen Eigenschaft giebt, so muss sie alle diejenigen der gegebenen Buchstaben umfassen, die von den auf die letzteren beschränkten Substitutionen der gegebenen Gruppe überhaupt nicht betroffen werden, und ihre übrigen Buchstaben müssen zur Gesammtheit der von diesen Substitutionen vertauschten (g) offenbar in derselben Beziehung stehen, wie der Annahme gemäss die ganze fragliche Anzahl zur Gesammtheit der gegebenen Buchstaben überhaupt; d. h. sie müssen ebenfalls eine daraus entnommene, für sich allein durch die gegebene Gruppe nicht vertauschbare Anzahl (x_g) der besonderen Art darstellen, dass sich keine grössere, bzw. keine andere sie vollständig enthaltende dieser Eigenschaft herausgreifen lässt. ($x_n = n - g + x_g$ oder $x_n - x_g = n - g$.)

Zugleich ergiebt sich zwar wieder eine Folgerung in Bezug auf die Werthezahl einer Function in n Buchstaben, nämlich dass diese Zahl nicht kleiner als $(n - g + x_g)!$ ist, wenn g die Zahl derjenigen Buchstaben bezeichnet, welche durch die Gruppe der Function in den fraglichen n wirklich vertauscht werden, also den Grad dieser Gruppe, und x_g irgendwelche für sich allein durch dieselbe Gruppe unvertauschbare Anzahl unter diesen g Buchstaben; da eben dann $n - g + x_g$ eine Anzahl der gleichen Art unter allen n angiebt.

Indessen lässt sich ja der Zusammenhang zwischen der Werthezahl v_n einer Function in n Buchstaben und dem Grade g ihrer Gruppe in denselben auch ganz genau ausdrücken. Denn da die letztere auch schon in den g von ihr vertauschten Buchstaben Gruppe der Function ist, so wird ihre Ordnung nicht nur durch $\frac{n!}{v_n}$, sondern auch durch $\frac{g!}{v_g}$ dargestellt, wenn v_g die Werthezahl der Function in jenen g Buchstaben bezeichnet. Und folglich ist $\frac{g!}{v_g} = \frac{n!}{v_n}$ oder $v_n = \frac{n!}{g!} v_g$; woraus man bei der angegebenen Bedeutung von x_g insbesondere $v_n \geqq \frac{n!}{g!} x_g!$ erhält, eine untere Grenze, die offenbar genauer ist, als die vorhin erhaltene $v_n \geqq (n - g + x_g)!$

Breslau, im August 1888.

Zur Bildung allgemeiner σ-Functionen.

Von

A. Krazer in Würzburg.

(Auszug eines Briefes an Herrn F. Klein in Göttingen.)

In Ihren Arbeiten im 27ten und 32ten Bande der Annalen haben Sie an die Stelle des Systems der 2^{2p} hyperelliptischen Thetafunctionen mit p Variablen ein System von 2^{2p} Functionen gesetzt, die sich bei unimodularer linearer Transformation der Perioden ohne hinzutretende Factoren permutiren. Im Anschlusse daran habe ich nun die Bildung solcher Functionen aus allgemeinen p-fach unendlichen Thetareihen mit beliebigen Charakteristiken, von der Formel für die lineare Transformation der Thetafunctionen ausgehend, durchgeführt, und ich erlaube mir, Ihnen hiermit meine diesbezüglichen Resultate mitzutheilen.

Charakterisiren die $4p^2$ ganzen Zahlen:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pp} \\ \hline \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} & \delta_{11} & \cdots & \delta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} & \delta_{p1} & \cdots & \delta_{pp} \end{array}\right|$$

eine lineare Transformation, so genügen sie für jedes μ und μ' von 1 bis p den Relationen:

$$\sum_{\nu} (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} - \alpha_{\nu\mu'}\gamma_{\nu\mu}) = 0, \qquad \sum_{\nu} (\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} - \beta_{\nu\mu'}\delta_{\nu\mu}) = 0,$$

$$\sum_{\nu} (\alpha_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} - \gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}) = \begin{matrix} 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ 1, & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{matrix}$$

oder den damit äquivalenten:

$$\sum_\varepsilon (\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_\varepsilon (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0,$$

$$\sum_\varepsilon (\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ 1, & \text{wenn } \mu' = \mu. \end{matrix}$$

Setzt man dann:

$$\mathsf{A}_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varepsilon \beta_{\nu\varepsilon} a_{\mu\varepsilon}, \qquad \mathsf{B}_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varepsilon \delta_{\nu\varepsilon} a_{\mu\varepsilon}$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots, p)$$

und bezeichnet mit $\Delta(\mathsf{A})$ den stets von Null verschiedenen Werth der aus den p^2 Grössen A gebildeten Determinante $\Sigma \pm \mathsf{A}_{11}\mathsf{A}_{22}\cdots\mathsf{A}_{pp}$, mit $\overline{\mathsf{A}}_{\mu\nu}$ aber die zu dem Elemente $\mathsf{A}_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante $p-1^{\text{ten}}$ Grades dieser Determinante, so besteht für irgend eine Thetafunction:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sum_{m_1,\cdots,m_p}^{-\infty,\cdots,+\infty} e^{\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'}) + 2\sum\limits_\mu (m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)}$$

die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = f e^{-\sum\limits_\nu \sum\limits_{\nu'} c_{\nu\nu'} v_\nu v_{\nu'}} \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b, \tag{1}$$

bei der für jedes μ, ν und ν' von 1 bis p:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta(\mathsf{A})} \sum_\mu \overline{\mathsf{A}}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad u_\mu = \frac{1}{\pi i} \sum_\nu \mathsf{A}_{\mu\nu} v_\nu,$$

$$b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta(\mathsf{A})} \sum_\varepsilon \overline{\mathsf{A}}_{\varepsilon\nu} \mathsf{B}_{\varepsilon\nu'},$$

$$k_\nu = \sum_\varepsilon (\alpha_{\nu\varepsilon} g_\varepsilon - \beta_{\nu\varepsilon} h_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}),$$

$$l_\nu = \sum_\varepsilon (-\gamma_{\nu\varepsilon} g_\varepsilon + \delta_{\nu\varepsilon} h_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\gamma_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon}),$$

$$c_{\nu\nu'} = \frac{1}{(\pi i)^2} \sum_\varepsilon \beta_{\nu\varepsilon} \mathsf{A}_{\varepsilon\nu'}$$

ist, der Factor f aber eine von den Variablen u, v unabhängige Grösse vertritt, der in dem Falle, dass die Determinante $\Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\cdots\beta_{pp}$ einen von Null verschiedenen Werth hat, die Form:

$$\sqrt{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_\beta^{2p-1}\Delta(\mathrm{A})}}\times$$

$$\times e^{\sum\limits_s\sum\limits_{s'}\sum\limits_\nu(\alpha_{\nu s}\gamma_{\nu s'}g_s g_{s'}-2\gamma_{\nu s}\beta_{\nu s'}g_s h_{s'}+\beta_{\nu s}\delta_{\nu s'}h_s h_{s'})\pi i-\sum\limits_\nu\sum\limits_s(\alpha_{\nu s}g_s-\beta_{\nu s}h_s)\sum\limits_{s'}\gamma_{\nu s'}\delta_{\nu s'}\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{1}{4\Delta_\beta}\sum\limits_\nu\sum\limits_{\nu'}\sum\limits_\mu\bar\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu'\mu}\sum\limits_s\alpha_{\nu s}\beta_{\nu s}\sum\limits_{s'}\alpha_{\nu' s'}\beta_{\nu' s'}\pi i-\frac{1}{2}\sum\limits_\nu\sum\limits_s\alpha_{\nu s}\beta_{\nu s}\sum\limits_{s'}\gamma_{\nu s'}\delta_{\nu s'}\pi i}$$

$$\times\sum_{\varrho_1,\dots,\varrho_p}^{0,1,\dots,\bar\Delta_\beta-1} e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu\frac{\alpha_{\nu\mu}\bar\beta_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i+\sum\limits_\mu\sum\limits_\nu\frac{\bar\beta_{\nu\mu}}{\Delta_\beta}\sum\limits_s\alpha_{\nu s}\beta_{\nu s}\varrho_\mu\pi i}$$

gegeben werden kann, wobei Δ_β den von Null verschiedenen Werth der Determinante $\Sigma\pm\beta_{11}\beta_{22}\cdots\beta_{pp}$, $\bar\Delta_\beta$ den absoluten Werth von Δ_β, $\bar\beta_{\mu\nu}$ aber die zu dem Elemente $\beta_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante $p-1^{\text{ten}}$ Grades dieser Determinante bezeichnet, und wobei endlich die im Anfange stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Differenzirt man die aus (1) durch Logarithmirung folgende Gleichung:

$$\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a=\log f-\sum_\nu\sum_{\nu'}c_{\nu\nu'}v_\nu v_{\nu'}+\log\vartheta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b$$

zuerst partiell nach v_i und sodann partiell nach v_k, indem man unter i und ebenso unter k irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots, p$ versteht, und beachtet, dass wegen:

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial v_i}=\frac{1}{\pi i}\mathrm{A}_{\mu i},\qquad\frac{\partial u_{\mu'}}{\partial v_k}=\frac{1}{\pi i}\mathrm{A}_{\mu' k},$$

$$\frac{\partial\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{\partial v_i}=\sum_\mu\frac{\partial\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{\partial u_\mu}\cdot\frac{\partial u_\mu}{\partial v_i}$$

$$=\frac{1}{\pi i}\sum_\mu\frac{\partial\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{\partial u_\mu}\mathrm{A}_{\mu i}$$

und daher weiter:

$$\frac{\partial^2\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{\partial v_i\,\partial v_k}=\frac{1}{\pi i}\sum_\mu\sum_{\mu'}\frac{\partial^2\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{\partial u\,\partial u_{\mu'}}\mathrm{A}_{\mu i}\frac{\partial u_{\mu'}}{\partial v_k}$$

$$=\left(\frac{1}{\pi i}\right)^2\sum_\mu\sum_{\mu'}\frac{\partial^2\log\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{\partial u_\mu\,\partial u_{\mu'}}\mathrm{A}_{\mu i}\mathrm{A}_{\mu' k}$$

ist, so erhält man sofort die für jedes i und k von 1 bis p geltende Gleichung:

$$(2)\qquad \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 \sum_{\mu}\sum_{\mu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a}{\partial u_\mu \partial u_{\mu'}} A_{\mu i} A_{\mu' k}$$
$$= -2c_{ik} + \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right]((v))_b}{\partial v_i \partial v_k}.$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Werthe der Charakteristikenelemente g, h, und nach getroffener Wahl der Charakteristik für alle Werthe der Variablen u, für welche die gewählte Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ nicht verschwindet; die zugehörigen Werthe der Grössen k, l, v sind stets mit Hülfe der oben angeschriebenen Gleichungen zu berechnen.

Es seien jetzt m Systeme von Werthen g, h, u, die mit $g^{(\lambda)}$, $h^{(\lambda)}$, $u^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, \cdots, m$, bezeichnet werden mögen, so ausgewählt, dass die m ihnen entsprechenden Werthe $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((u^{(\lambda)}))_a$ sämmtlich von Null verschieden sind. Führt man dann diese m Werthesysteme der Reihe nach an Stelle von g, h, u in die Gleichung (2) ein, indem man zugleich die zu $g^{(\lambda)}$, $h^{(\lambda)}$, $u^{(\lambda)}$ gehörigen Werthe der Grössen k, l, v mit $k^{(\lambda)}$, $l^{(\lambda)}$, $v^{(\lambda)}$ bezeichnet, multiplicirt für $\lambda = 1, 2, \cdots, m$ die λ^{te} der entstehenden Gleichungen mit n_λ, indem man unter $n_1, n_2, \cdots, n_m$ m Grössen versteht, welche der Bedingung $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = 1$ genügen, und addirt die m so gebildeten Gleichungen zu einander, so erhält man die neue Gleichung:

$$(3)\qquad \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 \sum_{\lambda} n_\lambda \sum_{\mu}\sum_{\mu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((u^{(\lambda)}))_a}{\partial u_\mu^{(\lambda)} \partial u_{\mu'}^{(\lambda)}} A_{\mu i} A_{\mu' k}$$
$$= -2c_{ik} + \sum_{\lambda} n_\lambda \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k^{(\lambda)} \\ l^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((v^{(\lambda)}))_b}{\partial v_i^{(\lambda)} \partial v_k^{(\lambda)}},$$

wobei mit:

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((u^{(\lambda)}))_a}{\partial u_\mu^{(\lambda)} \partial u_{\mu'}^{(\lambda)}}, \qquad \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k^{(\lambda)} \\ l^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((v^{(\lambda)}))_b}{\partial v_i^{(\lambda)} \partial v_k^{(\lambda)}}$$

die Werthe bezeichnet sind, die aus:

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((u))_a}{\partial u_\mu \partial u_{\mu'}}, \qquad \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k^{(\lambda)} \\ l^{(\lambda)} \end{smallmatrix}\right]((v))_b}{\partial v_i \partial v_k}$$

hervorgehen, wenn man darin nach geschehener Differentiation für jedes ε von 1 bis p:

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^{(\lambda)}, \quad v_\varepsilon = v_\varepsilon^{(\lambda)},$$

setzt.

Multiplicirt man jetzt die Gleichung (3) links und rechts mit $v_i\, v_k$, summirt sodann über i und k von 1 bis p und beachtet, dass:

$$\frac{1}{\pi i}\sum_i A_{\mu i}\, v_i = u_\mu, \qquad \frac{1}{\pi i}\sum_k A_{\mu' k}\, v_k = u_{\mu'}$$

ist, so erhält man die Gleichung:

$$(4) \qquad \sum_\lambda n_\lambda \sum_\mu \sum_{\mu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((u^{(\lambda)}))_a}{\partial u_\mu^{(\lambda)}\, \partial u_{\mu'}^{(\lambda)}}\, u_\mu u_{\mu'}$$

$$= -2\sum_i \sum_k c_{ik} v_i v_k + \sum_\lambda n_\lambda \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} k^{(\lambda)} \\ l^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((v^{(\lambda)}))}{\partial v_i^{(\lambda)}\, \partial v_k^{(\lambda)}}\, v_i v_k,$$

und aus ihr sofort die weitere:

$$(5) \qquad e^{-\frac{1}{2}\sum_\lambda n_\lambda \sum_\mu \sum_{\mu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((u^{(\lambda)}))_a}{\partial u_\mu^{(\lambda)}\, \partial u_{\mu'}^{(\lambda)}} u_\mu u_{\mu'}}$$

$$= e^{\sum_\nu \sum_{\nu'} c_{\nu\nu'} v_\nu v_{\nu'} - \frac{1}{2}\sum_\lambda n_\lambda \sum_\nu \sum_{\nu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} k^{(\lambda)} \\ l^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((v^{(\lambda)}))_b}{\partial v_\nu^{(\lambda)}\, \partial v_{\nu'}^{(\lambda)}} v_\nu v_{\nu'}}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (5) folgt aber, indem man ihre linken und ihre rechten Seiten mit einander multiplicirt, die Gleichung:

$$(6) \qquad \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((u))_a\, e^{-\frac{1}{2}\sum_\lambda n_\lambda \sum_\mu \sum_{\mu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((u^{(\lambda)}))_a}{\partial u_\mu^{(\lambda)}\, \partial u_{\mu'}^{(\lambda)}} u_\mu u_{\mu'}}$$

$$= f\vartheta \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} ((v))_b\, e^{-\frac{1}{2}\sum_\lambda n_\lambda \sum_\nu \sum_{\nu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} k^{(\lambda)} \\ l^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((v^{(\lambda)}))_b}{\partial v_\nu^{(\lambda)}\, \partial v_{\nu'}^{(\lambda)}} v_\nu v_{\nu'}}.$$

Das Product:

$$P \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((u))_a = \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((u))_a\, e^{-\frac{1}{2}\sum_\lambda n_\lambda \sum_\mu \sum_{\mu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta \begin{bmatrix} g^{(\lambda)} \\ h^{(\lambda)} \end{bmatrix} ((u^{(\lambda)}))_a}{\partial u_\mu^{(\lambda)}\, \partial u_{\mu'}^{(\lambda)}} u_\mu u_{\mu'}}$$

ist daher eine Function, welche bei linearer Transformation, der aus (6) sich ergebenden Gleichung:

$$(7) \qquad P \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((u))_a = f P \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} ((v))_b$$

zufolge, nur unter Erlangung eines von den Variablen u freien Factors f in die entsprechende Function:

$$P\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b = \vartheta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\lambda} n_\lambda \sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\nu'} \frac{\partial^2 \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix}k^{(\lambda)}\\l^{(\lambda)}\end{smallmatrix}\right]((v^{(\lambda)}))_b}{\partial v_\nu^{(\lambda)}\,\partial v_{\nu'}^{(\lambda)}} v_\nu v_{\nu'}}$$

übergeht. Die Function $P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ enthält die Grössen

$$n_\lambda,\ g_\mu^{(\lambda)},\ h_\mu^{(\lambda)},\ u_\mu^{(\lambda)}, \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \cdots, m\\ \mu = 1, 2, \cdots, p\end{pmatrix}$$

als Parameter, über die im Rahmen der oben für sie aufgestellten Bedingungen frei verfügt werden kann.

Entspricht die Function $P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ einem bestimmten zulässigen Werthesysteme der Parameter n_λ, $g_\mu^{(\lambda)}$, $h_\mu^{(\lambda)}$, $u_\mu^{(\lambda)}$, und bezeichnet man die einem anderen solchen Werthesysteme n'_λ, $g'^{(\lambda)}_\mu$, $h'^{(\lambda)}_\mu$, $u'^{(\lambda)}_\mu$ entsprechende Function mit $P'\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$, die zu dieser gehörige Function $P\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b$ aber mit $P'\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b$, so ist auch:

$$(8) \qquad P'\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a = f\,P'\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b,$$

da der Factor f zwar von den Werthen der Charakteristikenelemente g, h, nicht aber von den Werthen der genannten Parameter abhängt.

Man bezeichne nun mit $u_1 = u_1^{(0)}$, $u_2 = u_2^{(0)}$, $\cdots$, $u_p = u_p^{(0)}$ ein Werthesystem, für welches $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ und daher auch $P'\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, führe diese Werthe an Stelle der Grössen u in die Gleichung (8) ein, und bezeichne die ihnen entsprechenden Werthe der Variablen v mit $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \cdots, v_p^{(0)}$; es wird dann aus (8) die Gleichung:

$$(8') \qquad P'\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u^{(0)}))_a = f\,P'\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v^{(0)}))_b,$$

und man erhält endlich, indem man linke und rechte Seite der Gleichung (8) durch linke und rechte Seite der Gleichung (8′) theilt, die Gleichung:

$$(9) \qquad \frac{P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{P'\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u^{(0)}))_a} = \frac{P\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v))_b}{P'\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((v^{(0)}))_b}.$$

Der Quotient:

$$Q\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a = \frac{P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a}{P'\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u^{(0)}))_a}$$

ist daher eine Function, welche bei linearer Transformation, der aus (9) sich ergebenden Gleichung:

(10) $$Q\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = Q\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b$$

zufolge ohne Erlangung eines Factors in die entsprechende Function:

$$Q\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b = \frac{P\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b}{P'\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v^{(0)}))_b}$$

übergeht. —

Man betrachte jetzt, indem man unter n eine beliebige positive ganze Zahl versteht, das System der $(2n)^{2p}$ Thetafunctionen, die aus $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ hervorgehen, wenn man darin für die Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ der Reihe nach die $(2n)^{2p}$ zur Zahl $2n$ gehörigen Normalcharakteristiken, d. h. diejenigen $(2n)^{2p}$ Charakteristiken setzt, die man aus:

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{2n} & \dots & \frac{\varepsilon_p}{2n} \\ \\ \frac{\varepsilon_1'}{2n} & \dots & \frac{\varepsilon_p'}{2n} \end{bmatrix}$$

dadurch erhält, dass man an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p, \ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'$ die $(2n)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \cdots, 2n-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Ersetzt man dann eine jede dieser $(2n)^{2p}$ Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ mit Hilfe der auf irgend eine lineare Transformation T sich beziehenden Formel (1) durch den ihr gleichen Ausdruck:

$$f e^{-\sum\limits_{\varepsilon}\sum\limits_{\varepsilon'} c_{\varepsilon\varepsilon'} v_\varepsilon v_{\varepsilon'}} \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b,$$

schreibt hierauf allenthalben wieder u statt v, a statt b und reducirt auch, wenn es nöthig ist, die Charakteristik $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ mit Hülfe der Formel:

$$\vartheta\begin{bmatrix} k_1 \cdots k_p \\ l_1 \cdots l_p \end{bmatrix}((u))_a = \vartheta\begin{bmatrix} k_1 - \varkappa_1 \cdots k_p - \varkappa_p \\ l_1 - \lambda_1 \cdots l_p - \lambda_p \end{bmatrix}((u))_a \, e^{2\sum\limits_{\mu} k_\mu \lambda_\mu \pi i},$$

in der die $\varkappa, \lambda$ die grössten in den k, l beziehlich enthaltenen ganzen Zahlen bezeichnen, auf die ihr congruente Normalcharakteristik, so kann man, da dann an Stelle der Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b$ wieder die sämmtlichen $(2n)^{2p}$ Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$, von denen man ausgegangen, nur in anderer Reihenfolge treten, sagen, dass die $(2n)^{2p}$ oben definirten Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ durch die Anwendung einer linearen Transformation T sich unter Hinzutritt von Factoren permutiren.

Der hiebei zu irgend einer Function $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ hinzutretende Factor besteht nun aus zwei Theilen, von denen der eine von den Variablen der Thetafunction unabhängig ist, aber mit der Charakteristik derselben sich ändert, der andere dagegen eine Function der Variablen u ist, aber für alle $(2n)^{2p}$ Thetafunctionen denselben Werth besitzt, und man kann mit Hülfe der oben angestellten Untersuchungen zunächst die $(2n)^{2p}$ Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ auf verschiedene Weisen durch $(2n)^{2p}$ Functionen $P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ ersetzen, welche sich bei allen linearen Transformationen oder bei einer bestimmten Gruppe derselben nur unter Hinzutritt der von den Variablen u unabhängigen Factoren $\tau \cdot f$, $\tau = e^{2\pi i \sum\limits_{\mu} k_\mu \lambda_\mu}$, permutiren. Folgt man dabei der von Ihnen angewandten Methode, so wird man in der die Function $P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ definirenden Gleichung m gleich der Anzahl der für das Argumentensystem (0) nicht verschwindenden Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ wählen, entsprechend an Stelle der Charakteristiken $\begin{bmatrix}g^{(\lambda)}\\h^{(\lambda)}\end{bmatrix}$, $\lambda = 1, 2, \cdots, m$, die m Charakteristiken dieser Thetafunctionen treten lassen, ferner alle Grössen

$$u^{(\lambda)} = 0 \quad \text{und} \quad n_1 = n_2 = \cdots = n_m = \frac{1}{m}$$

setzen. Die so definirten $(2n)^{2p}$ Functionen $P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ permutiren sich dann nur unter Hinzutritt der von den u unabhängigen Factoren τf bei der Gruppe jener linearen Transformationen, bei denen sich die für $(u) = (0)$ nicht verschwindenden und ebenso die für $(u) = (0)$ verschwindenden Thetafunctionen unter sich umsetzen; für allgemeine Thetafunctionen umfasst diese Gruppe alle linearen Transformationen überhaupt.

An die Stelle der m für $(u) = (0)$ nicht verschwindenden Functionen $P\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ kann man nun endlich leicht ein System von m Functionen $Q\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ setzen, die sich bei der genannten Gruppe linearer Transformationen ohne Hinzutritt von Factoren permutiren; man braucht zu dem Ende nur in der Definitionsgleichung der Function $Q\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ alle Grössen $u^{(0)} = 0$ zu setzen, wodurch dann $P'\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u^{(0)}))_a$, einerlei welche Werthe die Parameter n'_λ, g'_λ, h'_λ, $u'^{(\lambda)}_\mu$ besitzen, in $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((0))_a$ übergeht. —

Würzburg, im October 1888.

Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale.

Par

J. Ptaszycki à Pétersbourg.

---

1. Dans une note, insérée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1883), M. Hermite a montré que la réduction de l'intégrale hyperelliptique à la forme normale peut être effectuée à l'aide de seules opérations arithmétiques*).

Dans la note présente, je me propose de montrer que ce résultat s'étend à l'intégrale plus générale, savoir à l'intégrale qui dépend d'une racine quelconque d'un polynôme entier.

Une telle intégrale, comme on sait, se réduit aux intégrales de la forme

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt[m]{R}},$$

où P, Q sont des fonctions entières de x et

$$R = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_\lambda)^{n_\lambda},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ étant des nombres différents, $m, n_1, n_2, \ldots n_\lambda$ des nombres entiers positifs tels que leur plus grand commun diviseur est 1 et $n_i < m$. En vertu de cela, je ne m'occuperai ici que de la réduction de l'intégrale dernière.

2. La propriété annoncée à l'égard de cette réduction résulte immédiatement des formules pour la réduction des intégrales

$$\int \frac{x^\mu\,dx}{\sqrt[m]{R}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-b)^\mu\sqrt[m]{R}}$$

---

*) Anmerkung. Diese Untersuchungen hat neuerdings auch Herr Pick in einem Aufsatze „Ueber die Reduction hyperelliptischer Differentiale in rationaler Form" (diese Annalen Bd. 32, pg. 443) durchgeführt, ohne — wie er uns mitzutheilen bittet — von der Hermite'schen Arbeit, mit welcher die seine in wesentlichen Punkten übereinstimmt, Kenntniss gehabt zu haben.

Die Redaction.

aux intégrales normales de première, de seconde et de troisième espèce; ces formules appartiennent à Abel, et se trouvent dans son Mémoire posthume (Oeuvres compl., 2 ed., t. II, p. 210—213). Nous allons d'abord présenter ces formules dans une forme la plus commode pour notre but.

3. En différentiant l'expression

$$x^\mu \cdot (x-a_1)^{1-\frac{n_1}{m}} (x-a_2)^{1-\frac{n_2}{m}} \cdots (x-a_\lambda)^{1-\frac{n_\lambda}{m}},$$

on trouve la relation

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^\mu \cdot (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\lambda)}{\sqrt[m]{R}}\right] =$$

$$= [C_0 x^{\mu+\lambda-1} + C_1 x^{\mu+\lambda-2} + \cdots + C_\lambda x^{\mu-1}) \frac{1}{\sqrt[m]{R}},$$

où $C_0, C_1, \ldots$ sont des constantes, dont la première est égale à

$$\mu + \lambda - \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda}{m}.$$

En remarquant que, pour $\mu \geqq 0$, $C_0 > 0$, on conclut que cette relation démontre la formule de réduction:

$$\int \frac{x^\mu\, dx}{\sqrt[m]{R}} = \sum_{i=0}^{i=\lambda-2} A_i \int \frac{x^i\, dx}{\sqrt[m]{R}} + \frac{K(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\lambda)}{\sqrt[m]{R}}$$

$$(\mu \geqq \lambda - 1),$$

où K désigne un polynôme entier, A_i une constante.

4. En différentiant l'expression

$$(x-b)^{-\mu} \cdot (x-a_1)^{1-\frac{n_1}{m}} (x-a_2)^{1-\frac{n_2}{m}} \cdots (x-a_\lambda)^{1-\frac{n_\lambda}{m}},$$

on trouve la relation

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\lambda)}{(x-b)^\mu \sqrt[m]{R}}\right] =$$

$$= \left[\frac{C_0}{(x-b)^{\mu+1}} + \frac{C_1}{(x-b)^\mu} + \cdots + C_\lambda (x-b)^{\lambda-1-\mu}\right] \frac{1}{\sqrt[m]{R}},$$

où $C_0, C_1, \ldots$ sont des constantes, dont la première est égale à $-\mu(b-a_1)(b-a_2)\cdots(b-a_\lambda)$.

On remarque que C_0 est différent de zéro, ou égal à zéro, suivant que $x-b$ est diviseur, ou non, de R. Si $b = a_1$, C_1 est différent de zéro. On en conclut que la relation indiquée démontre les formules de réduction:

$$\int \frac{dx}{(x-b)^{\mu}\sqrt[m]{R}} =$$

$$= B\int \frac{dx}{(x-b)\sqrt[m]{R}} + \sum_{i=0}^{i=\lambda-2} A_i \int \frac{x^i dx}{\sqrt[m]{R}} + \frac{K(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\lambda)}{(x-b)^{\mu-1}\sqrt[m]{R}},$$

($\mu \geqq 2$, $x-b$ est premier avec R),

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^{\mu}\sqrt[m]{R}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=\lambda-2} A_i \int \frac{x^i dx}{\sqrt[m]{R}} + \frac{K(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_\lambda)}{(x-a_1)^{\mu-1}\sqrt[m]{R}},$$

($\mu \geqq 1$, $x-a_1$ est diviseur de R),

où B, A_i désignent des constantes, K un polynôme entier.

5. Les formules de deux n^{os} précédents réduisent les intégrales du n^0 2 aux intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{R}},\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt[m]{R}},\ \ldots,\ \int \frac{x^{\lambda-2}dx}{\sqrt[m]{R}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-b)\sqrt[m]{R}} \quad (x-b \text{ est premier avec } R);$$

on obtient en même temps pour l'intégrale du n^0 1 la réduction suivante:

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt[m]{R}} = \frac{M}{N\sqrt[m]{R}} + \int \frac{P_1 dx}{Q_1\sqrt[m]{R}},$$

M, N, P_1, Q_1 désignant des polynômes entiers: Q_1 n'a ni facteurs multiples, ni facteurs appartenant à R, le degré de $\frac{P_1}{Q_1}$ n'est pas supérieur à $\lambda - 2$.

6. Voici quelques propriétes relatives à la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1\sqrt[m]{R}}$$

à une fonction finie, c'est à dire à une fonction s'exprimant à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, en nombre fini:

I) Si l'intégrale s'exprime sous forme finie, sa valeur sera $\Sigma A \log\varphi$, φ étant une fonction algébrique de x, A une constante;

II) L'intégrale ne se réduit pas à une fonction finie, si le degré de $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ surpasse -1;

III) L'intégrale ne se réduit pas à une fonction finie, si le degré de $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ est inférieur à -1 en même temps que $Q_1 = 1$.

Ces propriétés découlent immédiatement des propositions de M. Tchebycheff, données dans le Mémoire inséré dans le Journal de Liouville (t. XVIII). Pour la démonstration de la III propriété, on peut consulter l'Extrait de ma lettre adressée à M. Hermite, inséré dans le Bulletin des Sciences mathématiques (t. XII, 1888).

7. Passons maintenant à l'objet principal de cet article; nous allons montrer que les polynômes N, Q_1, M, P_1, déterminant la réduction du n° 5, peuvent être obtenus à l'aide de seules opérations arithmétiques.

Remarquons d'abord que le polynôme

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_\lambda),$$

égal au produit des facteurs simples du polynôme R, peut être décomposé, à l'aide de simples divisions, en deux facteurs R_1, R_2, dont le premier divise Q, et le second est premier avec Q.

A l'aide des formules de réduction données dans les n^os 3, 4, examinons les facteurs des polynomes N, Q_1, ainsi que leurs dégrés de multiplicité; on voit que N est égal aux plus grand commun diviseur entre Q et sa dérivée, et $Q_1 = \frac{Q}{NR_1}$. On remarquera que $M = R_2 M_1$, où M_1 est un polynôme entier.

Les polynômes N_1, Q_1 étant connus, on déterminera p_1, m_1, les dégrés des polynômes P_1, M_1, en remarquant que $\frac{P_1}{Q_1}$ est de dégré $\lambda - 2$, et en s'appuyant sur l'égalité du n° 5.

On considère enfin l'égalité

$$P - M_1' R_2 \frac{Q}{N} - M_1\left(R_2' \frac{Q}{N} - R_2 \frac{N'Q}{N^2} - \frac{1}{m} \frac{R'R_2Q}{NR}\right) = \frac{Q}{Q_1} \cdot P_1$$

qu'on a obtenue en différentiant la relation du n° 5 (on a dénoté les dérivées par les accents): en divisant par $\frac{Q}{Q_1}$ le polynôme représenté par le premier membre de l'égalité, on doit obtenir le reste égal à zéro et le quotient de dégré p_1. Cette condition nous fournit les équations linéaires par rapport à $m_1 + 1$ coefficients de M_1; à l'aide de ces équations on déterminera M_1. Les coefficients de M_1 étant calculés, on connaitra sur le champ le quotient de la division en question; ce quotient est égal à P_1.

Remarque. On déterminera complétement les coefficients de M_1; car, en vertu de la I propriété du n° 6, la réduction de l'intégrale à la forme énoncée dans le n° 5, ne peut être effectuée que d'une seule manière.

8. Pour le cas, où l'intégrale du n° 1 s'exprime sous forme finie, la réduction, démontrée ci-dessus, est équivalente à la séparation du terme algébrique de la valeur de l'intégrale (voir n° 6, I).

C'est à M. Tchebycheff qu'on doit le premier procédé pour la séparation du terme algébrique de l'intégrale s'exprimant en termes finis. La première démonstration du dit procédé est donnée par M. Piuma (Annali di Matematica, 1861).

Péterhof, le 10. février 1889.

Berichtigung zu dem Aufsatze „Ueber Productdarstellung eindeutiger, linearperiodischer Functionen" von H. Stahl in Tübingen.

p. 292 Z. 17 v. o. statt: „Das von demselben ... zum Ziele führt" ist zu lesen: Das bekannte, von Herrn von Mangoldt angewandte Verfahren führt auch im allgemeinen Falle zum Ziel. Dasselbe besteht darin, dass man die logarithmische Ableitung der zu bildenden Function mit Hilfe der 0^1 und ∞^1-Punkte darstellt durch Partialbrüche in Verbindung mit gewissen Zusatzfunctionen, welche die Convergenz der Summe bewirken. Durch Integration erhält man alsdann die Function selber, gebildet aus den 0 und ∞-Punkten, während die Zusatzfunctionen die Exponentialfactoren bestimmen, welche die Convergenz des Products bewirken. Die Behandlung des allgemeinen Falles erfordert nur einige Sätze aus der Theorie der Abel'schen Integrale, die ebenso wie für die Riemann'sche Fläche auch für das „Fuchs'sche" Kreispolygon gelten.