ಬೇಕಾಗುವ ಬಂಡವಾಳದ ಸಂಪಾದನೆಗೆ ಅಥವಾ ಅವಶ್ಯವಾದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆಯಾತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಇದು ಸಾಧಕ. 6. ಗಣಿ ಉದ್ಯಮದಿಂದ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಮತ್ತು ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿ ಸರ್ಕಾರದ ಆದಾಯ ಹೆಚ್ಚಿ ಆರ್ಥಿಕ, ಸಾಮಾಜಿಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಶ್ವದ ನಾನಾ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳು ಹರಡಿರುವ ಬಗೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ ಅನೇಕ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ತಮ್ಮ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗಾಗಿ ಹಿಂದುಳಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿರುವುದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ವಸಾಹತುಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ, ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ನಡುವೆ ಸ್ಪರ್ಧೆ, ವಿರಸ, ಅಶಾಂತಿಗಳಿಗೆ ಇದೂ ಕಾರಣ. ಅನೇಕ ಹಿಂದುಳಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತೇ ವಿದೇಶಿ ವಿನಿಮಯ ಗಳಿಕೆಯ ಸಾಧನವಾಗಿದೆ.

ಕೃಷಿ, ಅರಣ್ಯಗಾರಿಕೆಗಳಂತೆ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯೂ ನಿಸರ್ಗದಿಂದ ಸಂಪತ್ತನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ತೆಗೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಮಗ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಕೃಷಿ–ಅರಣ್ಯಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೂ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗೂ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳುಂಟು. ಕೃಷಿಯ ಉತ್ಪಾದಕತೆಯನ್ನು ಅನೇಕ ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ಬೆಳೆಸಬಹುದು. ಕಾಡು ಕಡಿದಂತೆ ಹೊಸ ಕಾಡು ಬೆಳೆಯಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪ ಪರಿಮಿತವಾದ್ದು. ಅದು ಕೆಲವು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಂದ್ರೀಕೃತ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಮೂಲವಾದ ಭೂಮಿ ಎಲ್ಲ ಕಡೆಗೂ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಹರಡಿರುವಂತೆ, ಖನಿಜಗಳು ಹರಡಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಉದ್ಯಮಗಳನ್ನು ಗಣಿಪ್ರದೇಶಗಳ ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು ಸಹಜ. ಗಣಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಅದಿರುಗಳು ಕೃಷಿವಸ್ತುಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಭಾರವಾಗಿದ್ದು, ದೊಡ್ಡ ಗಾತ್ರವುಳ್ಳವಾಗಿರು ವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸಾರಿಗೆ ವೆಚ್ಚ ದುಬಾರಿ.

ಗಣಿ ಕೆಲಸ ಶ್ರಮದಾಯಕ ಮತ್ತು ಅಪಾಯಕರ. ಗಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸವಲತ್ತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಅವರನ್ನು ಆಕರ್ಷಿಸಬೇಕು. ಗಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಕಾರ್ಮಿಕರು ಒಂದೇ ಕಡೆ ನೆಲಸಿರುವುದ ರಿಂದ ಅವರು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಘಟಿತರಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಭಾರತದಲ್ಲೂ ಬೇರೆ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿಯ ಹಾಗೆ ಗಣಿ ಕಾರ್ಮಿಕ ಸಂಘಗಳು ಉಳಿದ ಕಾರ್ಮಿಕ ಸಂಘಗಳಿಗಿಂತ ಬಲಯುತ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ (**ನೋಡಿ– ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಪಾತ್ರ, ರಾಷ್ಟ್ರಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ; ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಕಾನೂನು ಗಳು; ಗಣಿ ಕಾರ್ಮಿಕರು**). (ಟಿ.ಕೆ.ಎಂ.)

ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪಾತ್ರ, ರಾಷ್ಟ್ರ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ : ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಒಳಗೆ ಅಡಗಿರುವ ಖನಿಜವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದು ಮಾನವನ ಬಳಕೆಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ವಿವಿಧ ಸರಕುಗಳ ತಯಾರಿಕೆಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಕಚ್ಚಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯಾದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಮೂರು ಬಗೆಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಗಳುಂಟು. ಅನೇಕ ವಿಧದ ಮಣ್ಣುಗಳು, ಸುಣ್ಣಕಲ್ಲು ಮತ್ತು ಇತರ ಕಲ್ಲುಗಳು, ಉಪ್ಪು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದಲೆ ಅಗೆದು ಅಥವಾ ಕಡಿದು ಇತರ ಉತ್ಪಾದನ ಕಾರ್ಯಗಳಿಗೆ ಒದಗಿಸಬಹುದು. ಈ ಬಗೆಯ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯನ್ನು ತೆರೆದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಬಾವಿ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನೂ ಕೆಳಗಡೆ ಸುರಂಗ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನೂ ಕಲ್ಪಿಸಿ, ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ಆಳವಾಗಿ ಹುದುಗಿರುವ ಖನಿಜಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ, ಮೇಲಕ್ಕೆತ್ತಿ ಪಡೆಯುವ ಕಾರ್ಯ ಭೂಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ. ಚಿನ್ನ, ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಮುಂತಾದವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೀಗೆ. ವಿವಿಧ ತೈಲಗಳನ್ನು ಭೂಮಿಯ ಆಳದಿಂದ ಪಂಪುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೊರಗೆ ಎಳೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ. ಈ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಗಣಿ ಉದ್ಯಮಗಳು ಆಧುನಿಕ ಕೈಗಾರಿಕೆಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಕಚ್ಚಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನೂ ಶಕ್ತಿಮೂಲಗಳನ್ನೂ ಒದಗಿಸುವುದರಿಂದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ಆರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ವಿಂಗಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮೂಲ ಆರ್ಥಿಕೋದ್ಯಮವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇತರ ಮೂಲ ಆರ್ಥಿಕ ಉದ್ಯಮಗಳಾದ ಕೃಷಿ, ಅರಣ್ಯಗಾರಿಕೆ, ಮೀನುಗಾರಿಕೆಗಳಂತೆಯೇ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯೂ ಆಧುನಿಕ ಆರ್ಥಿಕ ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯ ಸರಕುಸೇವೆಗಳ ತಯಾರಿಕೆಗೆ ಮುಖ್ಯ ತಳಹದಿಯಾಗಿದೆ.

ಆಧುನಿಕ ಕೈಗಾರಿಕಾಯುಗಕ್ಕೆ ಮುನ್ನವೂ ವಜ್ರ, ಚಿನ್ನ, ಬೆಳ್ಳಿ, ತಾಮ್ರ ಮತ್ತು ಇತರ ಅನೇಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಪ್ರಪಂಚದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಗಳಲ್ಲೂ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಿತ್ತು. ಉಪಕರಣ, ಆಯುಧ, ಪಾತ್ರೆ, ಕಟ್ಟಡ ಇವಕ್ಕೆ ಖನಿಜಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಖನಿಜಗಳ ಈ ಉಪಯೋಗ ಈಗಲೂ ಇರುವುದಾದರೂ ಯಂತ್ರ, ಶಕ್ತಿ, ರಾಸಾಯನಿಕ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ಖನಿಜಗಳ ಉಪಯೋಗ ಇಂದು ಹೆಚ್ಚು ಮುಖ್ಯ. ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 18ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾದ ಕೈಗಾರಿಕಾ ಕ್ರಾಂತಿಯ ಕಾಲದಿಂದ ಈಚೆಗೆ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಏಕಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತ ಬಂದಿದೆ. ಅಂದಿನ ಕೈಗಾರಿಕಾಕ್ರಾಂತಿ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಹಾಗೂ ಕಬ್ಬಿಣವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿತ್ತು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಆಧುನಿಕಶಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಯಂತ್ರಯುಗದ ಉಗಮವಾಯಿತು. ಅಂದಿನಿಂದ ಕೈಗಾರಿಕೆ, ಸಾರಿಗೆ, ಸಂಪರ್ಕ ಇತ್ಯಾದಿ ಉದ್ಯಮ ಶಾಖೆಗಳು ಬಹುಮುಖವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿವೆ. ಈ ಬೆಳವಣಿಗೆಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಅನೇಕ ಖನಿಜಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಮೌಲ್ಯ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ರೈಲು, ಮೋಟಾರು, ನೌಕೆ, ವಿಮಾನ ಮುಂತಾದ ಸಾರಿಗೆ ಸೌಲಭ್ಯಗಳು ವಿಸ್ತರಿಸಿದುದೂ ಆಧುನಿಕ ನಾಗರಿಕ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯವೆನಿಸುವ ವಿವಿಧ ಸರಕು ಸೇವೆಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆ ಬೃಹತ್ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿದುದೂ ಎರಡು ಮಹಾಯುದ್ಧಗಳಿಗಾಗಿ ಮತ್ತು ಆತ್ಮರಕ್ಷಣೆಗಾಗಿ ಅನೇಕ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಆಯುಧೋಪಕರಣಗಳ ಮತ್ತು ಇತರ ರಕ್ಷಣ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳನ್ನು ಬೃಹತ್ತಾಗಿ ಬೆಳೆಸಿ ಕೊಂಡಿದ್ದೂ ಬಾಹ್ಯಾಕಾಶ ಶೋಧನೆಯ ಕಾರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ವಿಸ್ತಾರವಾದ ತಾಂತ್ರಿಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೂ ಅನೇಕ ವಿಧದ ಗಣಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೇಡಿಕೆ ತೀವ್ರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳಾಗಿವೆ. ಆಧುನಿಕ ನಾಗರಿಕತೆಗೆ ಖನಿಜಗಳು ಅತ್ಯಗತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಲು ನಿದರ್ಶನಗಳು ಸಾಕು. ಅನೇಕ ಯಂತ್ರೋಪಕರಣ ಗಳು ಕಬ್ಬಿಣ–ಉಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿವೆ. ಮುದ್ರಣಾಲಯಗಳಿಗೆ ಆಂಟಿಮನಿ, ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತ ಯಂತ್ರೋಪಕರಣಗಳಿಗೆ ಟಂಗ್‌ಸ್ಟನ್, ವೆನೇಡಿಯಂ ಮತ್ತು ಕ್ರೋಮಿಯಂ, ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ, ಕೈಗಾರಿಕೆಗೆ ತಾಮ್ರ, ಬ್ಯಾಟರಿಗಳಿಗೆ ಸೀಸ, ಫೌಂಟನ್‌ಪೆನ್ನುಗಳಿಗೆ ಇರಿಡಿಯಂ, ವಿಮಾನಗಳಿಗೆ ಅಲ್ಯೂಮಿನಿಯಂ ಹೀಗೆ ಆಧುನಿಕ ನಾಗರಿಕ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಅನೇಕ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಖನಿಜಗಳು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಪ್ರಪಂಚದ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಖನಿಜಗಳ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಿನ್ನ, ಬೆಳ್ಳಿ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಮೂಲ್ಯ ಲೋಹಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವಿದೆ. ಅನೇಕ ಜನಾಂಗಗಳು ಇವನ್ನು ಆಭರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಬಹು ಹಿಂದಿನಿಂದಲೂ ಬಯಸುತ್ತ ಬಂದಿವೆ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ಬೆಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಚಿನ್ನ ಹಣವಸ್ತುವಾಗಿಯೂ ಹಣಪದ್ಧತಿಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿಯೂ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲಿ ಈ ಅಮೂಲ್ಯ ಲೋಹಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. 19ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಅನೇಕ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಸ್ವರ್ಣಪ್ರಮಿತಿ ಹಣ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಜಾರಿಗೆ ತಂದದ್ದರಿಂದ ಚಿನ್ನದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗೆ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಚೋದನೆ ದೊರಕಿತು. ಚಿನ್ನ ಹಾಗೂ ನೋಟುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಅವಕಾಶವನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಿದ ಅನಂತರವೂ, ಚಲಾವಣೆಯ ಹಣಕ್ಕೆ ಚಿನ್ನದ ಬೆಂಬಲವಿದೆಯೆಂಬ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಂಬಿಕೆ ಹಣಪದ್ಧತಿಗೆ ಭದ್ರತೆಯನ್ನು ತಂದಿತು. ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಹಣ ನಿಧಿಯ ಸ್ಥಾಪನೆಯಿಂದಾಗಿ ಈಚೆಗೆ ಜಾರಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಪಂಚದ ಹಣಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲೂ ಚಿನ್ನಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷ ಸ್ಥಾನವಿದೆ. ತನಗೆ ಸಲ್ಲಬೇಕಾದ ಹಣವನ್ನು ಚಿನ್ನದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಲು ಯಾವ ರಾಷ್ಟ್ರವೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಿರಾಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ಗೌರವಸ್ಥಾನ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದಲೂ, ಆಭರಣ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲೂ ಚಿನ್ನದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವಿದ್ದೇ ಇದೆ. ಚಲಾವಣೆ ನಾಣ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಇತರ ಲೋಹಗಳಿಗೂ ಬೇಡಿಕೆ ಹೆಚ್ಚಿದೆ.

ಸುಮಾರು 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆರಂಭದಿಂದೀಚೆಗೆ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಖನಿಜಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಎಷ್ಟು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಖನಿಜಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಶೇ. 90ರಷ್ಟು ಕಳೆದ ಸುಮಾರು 150ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಳೆದು ಬಂದದ್ದೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದೇ ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗದಲ್ಲಿ ತುಂಬ ಮಿತವ್ಯಯವೂ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅರ್ಧ ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಕಲ್ಲಿದ್ದಲಿನಿಂದ 1919ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದುದಕ್ಕಿಂತಲೂ ತುಂಬ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಈಗ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲಿ ಖನಿಜಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಮಾನವ ಶ್ರಮದ ಉತ್ಪಾದಕತೆ ಗಣನೀಯವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ವರಮಾನದಲ್ಲಿ ಗಣಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಶೇಕಡ ಭಾಗವೂ ಕೈಗಾರಿಕೋದ್ಯೋಗಿ ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಶೇಕಡ ಭಾಗವೂ ಅಲ್ಪವಾಗಿ 1953 ಮತ್ತು 1963ರ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಭಾರತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಉಳಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಶೇಕಡ ಭಾಗಗಳು ಇಳಿದಿವೆ. ಈ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಉದ್ಯಮ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆ ಆಗಿದೆ. ಆರ್ಥಿಕಾಭಿವೃದ್ಧಿಯೊಡನೆ ಯಾವುದೇ ರಾಷ್ಟ್ರದ ತಯಾರಿಕೋದ್ಯಮ ಹಾಗೂ

ಸೇವಾ ಉದ್ಯಮ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಹೆಚ್ಚುವುದೂ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಉದ್ಯಮಗಳಾದ ಕೃಷಿ ಮತ್ತು ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಹೆಚ್ಚುವುದೂ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಉದ್ಯಮಗಳಾದ ಕೃಷಿ ಮತ್ತು ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದೂ ಅನುಭವಸಿದ್ಧವಾದ ಒಂದು ಐತಿಹಾಸಿಕ ಪ್ರವೃತ್ತಿ. ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗಾತ್ರ ಬಹಳ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅಮೆರಿಕದ ಗಣಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ 1953ರಲ್ಲಿ 5.4 ಸಾವಿರ ದಶಲಕ್ಷ ಡಾಲರುಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದದ್ದು, 1963ರಲ್ಲಿ 6.0 ಸಾವಿರ ದಶಲಕ್ಷ ಡಾಲರುಗಳಿಗೂ ಗ್ರೇಟ್ ಬ್ರಿಟನ್ನಿನಲ್ಲಿ ಇದೇ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ 546 ದಶಲಕ್ಷ ಪೌಂಡಗಳಿಂದ 740 ದಶಲಕ್ಷ ಪೌಂಡುಗಳಿಗೂ ಹೆಚ್ಚಿವೆ. ಜರ್ಮನಿ, ಫ್ರಾನ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿ ಉತ್ಪನ್ನ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ದ್ವಿಗುಣವಾಯಿತು. ಜಪಾನ್, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯ, ಭಾರತಗಳಲ್ಲೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಉತ್ಪನ್ನ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಈ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ವಿಸ್ತರಣೆಯಾಗಿದೆಯೆಂಬ ಅಂಶ ವ್ಯಕ್ತಪಡುತ್ತದೆ.

ಆರ್ಥಿಕವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿದಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೋ ಹಾಗೆಯೆ ಆರ್ಥಿಕವಾಗಿ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹಿಂದುಳಿದಿರುವ ಅನೇಕ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಗಣಿ ಉದ್ಯಮ ಆಧುನಿಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿರುವುದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಮುಂದುವರಿದಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಿಗಿಂತ ಅವುಗಳ ಆರ್ಥಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯಗಳಿಸಿದೆ. ಆಫ್ರಿಕ, ಏಷ್ಯ ಮತ್ತು ದಕ್ಷಿಣ ಅಮೆರಿಕದ ಅನೇಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಇತ್ತೀಚಿನ ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ವಸಾಹತುಗಳಾಗಿ ಅಥವಾ ಅಧೀನರಾಷ್ಟ್ರಗಳಾಗಿ ಇದ್ದು, ಅವುಗಳ ಗಣಿ ಉದ್ಯಮಗಳು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಹಿರಿಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳ ಪೂರೈಕೆಗಾಗಿ ವಿದೇಶೀ ಉದ್ಯಮ ಸಾಹಸ ಹಾಗೂ ಬಂಡವಾಳಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬೆಳೆದುವು. ಮುಂದುವರಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಅನೇಕ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳು ಈ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಖನಿಜೋತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿವೆ. ಬಹುಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ರುವ ಈ ಹಿಂದುಳಿದ ದೇಶಗಳ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಖನಿಜಗಳ ಉತ್ಪನ್ನ ಗಣನೀಯ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೈಗಾರಿಕೆ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯಾಗಿಲ್ಲ, ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದಕತೆ ಕೆಳಮಟ್ಟದಲ್ಲಿದೆ. ಸಾರಿಗೆ ಸಂಪರ್ಕ ಹಾಗೂ ಇತರ ಸೇವಾ ಉದ್ಯಮ ಗಳು ಬೆಳೆದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರುವ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ವಲಯ ಇವುಗಳ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಮುಖ್ಯಸ್ಥಾನ ಹೊಂದಿದೆ. ಪೆಟ್ರೋಲಿಯಂ, ತವರ, ನೈಟ್ರೇಟು, ತಾಮ್ರ, ಸತು ಮುಂತಾದ ಖನಿಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಥವಾ ಎರಡರಿಂದಲೇ ಈ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ತಮ್ಮ ವಿದೇಶ ವಿನಿಮಯ ಸಂಪಾದನೆಯ ಬಹುಭಾಗವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಿವೆ.

ಎರಡನೆಯ ಮಹಾಯುದ್ಧದ ತರವಾಯ ಹಿಂದಿನ ವಸಾಹತುಗಳು ಮತ್ತು ಅಧೀನ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ರಾಜಕೀಯ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಪಡೆದಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲೂ ಕೈಗಾರಿಕಾಭಿವೃದ್ಧಿಯ ಹಂಬಲ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿದೆ. ಅವುಗಳ ಆರ್ಥಿಕಾಭಿವೃದ್ಧಿಯಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಆರ್ಥಿಕ ವರಮಾನವೃದ್ಧಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲಿಯ ಜನತೆಯ ಆರ್ಥಿಕ ಜೀವನಮಟ್ಟವೂ ಏರುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಮುಂದೆ ಖನಿಜಗಳ ಬೇಡಿಕೆಯೂ ಹೆಚ್ಚುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಖನಿಜಗಳ ಬೇಡಿಕೆ ಹಿಂದೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಅನೇಕ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದರಿಂದ ಹಾಗೂ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚುವ ಸಂಭವಿರುವುದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಸಮವಾಗಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಈಚಿನ ದಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಿವೆ. ಈ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ತಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರಗತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ್ದು. ಗಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಾವಿಮಾರ್ಗ ತೋಡುವುದು, ಸುರಂಗ ಕೊರೆಯುವುದು, ಅದಿರು ಕಡಿಯುವುದು, ಅದಿರನ್ನು ಹೊರಕ್ಕೆ ಸಾಗಿಸುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತ ಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ತಂತ್ರ ಬೆಳೆದು, ಗಣಿತಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಕ್ರಾಂತಿಯೇ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಕಡಿಮೆ ದರ್ಜೆ ಅದಿರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಲ್ಲೂ ಅದಿರನ್ನು ಶುದ್ಧಗೊಳಿಸುವುರಲ್ಲೂ ಖನಿಜಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದರಲ್ಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಮಿತವ್ಯಯ ಸಾಧಿಸುವ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ದಕ್ಷತೆ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದರಿಂದ ಉತ್ಪಾದನವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ ಇಳಿಕೆಯಾಗುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾದ, ಅಂದರೆ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಉತ್ಪಾದನವೆಚ್ಚ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳೂ ಪ್ರಬಲವಾಗಿವೆ. ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಗಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಆಳದಿಂದ ಅದಿರುಗಳನ್ನು ಅಗೆದು ಹೊರತರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಉತ್ತಮದರ್ಜೆಯ ಅದಿರು ಮುಗಿದು ಕಡಿಮೆ ದರ್ಜೆಯ ಅದಿರುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭ ಒದಗಬಹುದು. ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತಮವಾದ ಅದಿರು ಲಭಿಸಲೂಬಹುದು. ಇದು ಅನಿಶ್ಚಿತ ಅಂಶ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾಲಾವಧಿಯ ಅನಂತರ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತು ಬರಿದಾಗುವುದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿಯ ಗಣಿಗಳನ್ನು ಮುಚ್ಚಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಅಲ್ಲದೆ ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತು ಹುದುಗಿರುವ ಹೊಸ ಪ್ರದೇಶಗಳನ್ನು ಶೋಧಿಸಿ ಸೂಕ್ತ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಗಣಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಉದ್ಯಮದ ಪ್ರಥಮ ಹಂತದ ಕಾರ್ಯವಾದ ಈ ಶೋಧನೆಯ ಫಲ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಆಕಸ್ಮಿಕ ಹಾಗೂ ಅನಿಶ್ಚಿತ. ಖನಿಜಗಳ ಭವಿಷ್ಯ ಸರಬರಾಯಿ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಂದಾಜುಗಳನ್ನು ಹಾಕುವುದು ಕಷ್ಟ. ಆದರೆ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಖನಿಜಗಳಿಗೆ–ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಶಕ್ತಿಮೂಲಗಳಾದ ಪೆಟ್ರೋಲಿಯಂ ಮತ್ತು ಅನಿಲಗಳಿಗೂ ಹೊಸ ಲೋಹ ಕೈಗಾರಿಕೆ ಮತ್ತು ಯಂತ್ರ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಅಲ್ಯೂಮಿನಿಯಂ, ತಾಮ್ರ, ತವರ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಗೂ–ಈಗ ಸರಬರಾಯಿಗೂ ಮೀರಿದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಬರಲಿರುವ ದಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಇಂದಿನ ಅನೇಕ ಹಿಂದುಳಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದರಿಂದ ಈ ಖನಿಜಗಳಿಗೆ ಬೇಡಿಕೆ ಇನ್ನೂ ತೀವ್ರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಹೀಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ಬೇಡಿಕೆಗೆ ಸಮವಾದ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸರಬರಾಯಿ ಬೆಳೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಮುಖ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆ. ಆಧುನಿಕ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಗಣಿ ಶೋಧನ ತಂತ್ರಗಳ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ವಿವಿಧ ಖನಿಜಗಳ ಸರಬರಾಯಿ ಮೂಲಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಮ್ಮ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದರಿಂದಲೂ ಹಳೆಯ ಗಣಿಗಳನ್ನು ಮುಚ್ಚಬೇಕಾಗ ಬಹುದಾದ್ದರಿಂದಲೂ ಗಣಿ ಫಲವತ್ತತೆ ಬಗ್ಗೆ ಅನಿಶ್ಚಯತೆ ಇರುವುದರಿಂದಲೂ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ವಿಶೇಷತಃ ಗತಿಶೀಲ ಆರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಆರ್ಥಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪಾತ್ರ ಆಗಿಂದಾಗ್ಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳ ಬಹುದಾದ ಸಂಭವವಿದೆ.

ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಾನೀಕರಣವಾದ ಉದ್ಯಮ. ಕೃಷಿ ಉದ್ಯಮದಂತೆ ಒಂದೊಂದು ದೇಶದಲ್ಲೂ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಹರಡದೆ, ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸ್ಥಾನೀಕರಣವಾಗಿರುವ ಉದ್ಯಮವಾಗಿದೆ. ಅನೇಕ ತಯಾರಿಕೋದ್ಯಮಗಳೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿದರೂ ಗಣಿ ಉದ್ಯಮ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಾನೀಕರಣವಾಗಿರುವ ಉದ್ಯಮವಾಗಿದೆ. ಖನಿಜಗಳ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಹಾಗೂ ಭೌಗೋಳಿಕ ವಿತರಣೆಯ ವಿನ್ಯಾಸ ಇದಕ್ಕೆ ಏಕೈಕ ಕಾರಣ. ಕೈಗಾರಿಕೆಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಕೆಲವು ವಿಧದ ಮಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಅನೇಕ ಖನಿಜಗಳು ದೊರಕುವ ಪ್ರದೇಶಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವಿರಳವಾಗಿವೆ. ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಮತ್ತು ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರುಗಳು ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿರುವ ಗಣಿವಸ್ತುಗಳು. ಆದರೂ ಪ್ರಪಂಚದ ಕಲ್ಲಿದ್ದಲಿನ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು $^2/_3$ರಷ್ಟು ಜರ್ಮನಿ, ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತಸಂಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರಿನ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಶೇ. 50ರಷ್ಟು ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲೂ ಶೇ. 42ರಷ್ಟು ಫ್ರಾನ್ಸ್, ರಷ್ಯ, ಸ್ವೀಡನ್, ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್ ಮತ್ತು ಜರ್ಮನಿಗಳಲ್ಲೂ ಉಳಿದ ಶೇ. 8ರಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ಪ್ರಪಂಚದ ಇತರ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳು, ವೆನಿಜ್ವೀಲ ಮತ್ತು ಪಶ್ಚಿಮ ಏಷ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಪ್ರಪಂಚದ ಒಟ್ಟು ಪೆಟ್ರೋಲಿಯಂ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಶೇ. 85 ಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗಿವೆ. ವಜ್ರದ ಸುಮಾರು ಮುಕ್ಕಾಲು ಭಾಗದ ಉತ್ಪಾದನೆ ಕಾಂಗೋ ಮತ್ತು ದಕ್ಷಿಣ ಆಫ್ರಿಕಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಚಿನ್ನದ ಗಣಿಗಳು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ದಕ್ಷಿಣ ಆಫ್ರಿಕ, ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳು, ಕೆನಡ, ರಷ್ಯ, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿವೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸೇರಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಒಟ್ಟು ಚಿನ್ನದ ಸುಮಾರು 4/5 ರಷ್ಟು ಉತ್ಪತ್ತಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗ ಬರುವುದು ದಕ್ಷಿಣ ಆಫ್ರಿಕದ ಗಣಿಗಳಿಂದ. ಪ್ಲಾಟಿನಂ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಕೆನಡ, ದಕ್ಷಿಣ ಆಫ್ರಿಕ, ರಷ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೊಲಂಬಿಯಗಳಿಗೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಪಂಚದ ಬೆಳ್ಳಿ ಸರಬರಾಯಿಯ ಸುಮಾರು ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಭಾಗ ಮೆಕ್ಸಿಕೋ, ಪೆರು ಮತ್ತು ಬೊಲಿವಿಯಗಳಿಂದಲೂ ಉಳಿದುದರ ಬಹುಭಾಗ ಅಮೆರಿಕದ ಸಂಯುಕ್ತಸಂಸ್ಥಾನಗಳು, ಕೆನಡ, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯಗಳಿಂದಲೂ ಬರುತ್ತವೆ. ಬಾಕ್ಸೈಟ್ ಗಣಿಗಳು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಉತ್ತರ ಹಾಗೂ ದಕ್ಷಿಣ ಅಮೆರಿಕ, ಆಫ್ರಿಕ ಮತ್ತು ದಕ್ಷಿಣ ಐರೋಪ್ಯ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲೂ ತವರ ಉತ್ಪಾದನೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಲಯ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ದೂರಪ್ರಾಚ್ಯ ದ್ವೀಪಗಳಲ್ಲೂ ಸಾಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿವೆ. ಸತುವಿನಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತಸಂಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲೂ ಉಳಿದದ್ದು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಕೆನಡ, ರಷ್ಯ, ಬೆಲ್ಜಿಯಂ, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯ, ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಉತ್ಪಾದನೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಸೀಸದಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತಸಂಸ್ಥಾನಗಳು ಮತ್ತು ಕೆನಡ ಸೇರಿ ಸುಮಾರು $^2/_5$ ರಷ್ಟನ್ನೂ ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯ, ಮೆಕ್ಸಿಕೋ ಮತ್ತು ರಷ್ಯಗಳು ಉಳಿದದ್ದರಲ್ಲಿ ಬಹುಭಾಗವನ್ನೂ ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಿವೆ. ನಿಕ್ಕಲ್, ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್, ಕ್ರೋಮಿಯಂ, ಟಂಗ್‌ಸ್ಟನ್, ಕೋಬಾಲ್ಟ್, ಯೂರೇನಿಯಂ ಮುಂತಾದ ಖನಿಜಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆಗಳು ಕೂಡ ಪ್ರಪಂಚ ಕೆಲವೇ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿವೆ.

ವಿವಿಧ ಖನಿಜಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆ ಪ್ರಪಂಚದ ವಿವಿಧ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಸ್ಥಾನಮಾನ ಏಕರೀತಿ ಇಲ್ಲ. ಆಯಾ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಖನಿಜಗಳ ಮೂಲಗಳು ಯಾವುವೆಂಬುದೂ ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಆ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಈ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಶೋಧಿಸಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿಕೊಂಡಿವೆಯೆಂಬುದೂ ಆ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಆರ್ಥಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪಾತ್ರವೇನೆಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತವೆ. ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳ ಸ್ಥಾನ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ್ದು. ಪ್ರಪಂಚದ ಒಟ್ಟು ಖನಿಜೋತ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕದ ಪಾಲು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ; ಪೆಟ್ರೋಲಿಯಂ ಶೇ.60 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ, ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರು ಶೇ.50, ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಶೇ.24, ಸತು ಶೇ.47, ಸೀಸ, ಶೇ.27, ತಾಮ್ರ ಶೇ.20, ಬೆಳ್ಳಿ ಶೇ.16, ಚಿನ್ನ ಶೇ.15. ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಖನಿಜಗಳನ್ನು ಗಮನಾರ್ಹ ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲಿ ನೆಲದಿಂದ ತೆಗೆಯಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಪ್ರಪಂಚದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತಸಂಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಹೀಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದ ಸ್ಥಾನವುಂಟು. ಪ್ರಪಂಚದ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯ ಲಭ್ಯವಾಗಲು ಇದು ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣ. ಆದರೆ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಖನಿಜ ವೈವಿಧ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ವಿರಳ; ಕೇವಲ ಕೆಲವೇ ಖನಿಜಗಳನ್ನು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ವೈವಿಧ್ಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳು. ಸೋವಿಯೆತ್ ದೇಶ ಇವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಭಾರತವನ್ನೂ ಸೇರಿಸಬಹುದು. ಹುದುಗಿರುವ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತನ್ನು ಭಾರತ ಸಾಕಷ್ಟು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಿಲ್ಲವಾದರೂ ಇಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಬಗೆಯ ಖನಿಜಗಳು ಗಣನೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದು ಈಚೆಗೆ ನಡೆಸಿರುವ ಶೋಧನೆಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಚಿನ ಅಂದಾಜಿನ ಪ್ರಕಾರ ಇಲ್ಲಿ ಹುದುಗಿರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ನಿಕ್ಷೇಪದ ಕಾಲುಭಾಗದಷ್ಟಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಒರಿಸ್ಸ, ಬಿಹಾರ, ಮಧ್ಯಪ್ರದೇಶ, ಕರ್ನಾಟಕ, ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ, ಗೋವಗಳಲ್ಲಿ ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರಿನ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಯೋಜನಾನುಗುಣವಾಗಿ ತೀವ್ರವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿದೆ. ದೇಶದ ಉಕ್ಕಿನ ಕೈಗಾರಿಕೆಗೆ ಅದಿರನ್ನು ಒದಗಿಸುವುದೇ ಅಲ್ಲದೆ ಕೆಲವು ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಿಗೆ–ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಜಪಾನಿಗೆ–ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರನ್ನು ರಫ್ತು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಝರಿಯ, ರಾಣಿಗಂಜ್ ಮತ್ತು ಬೊಕಾರೊಗಳಲ್ಲಿ ದೇಶದ ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಸ್ಥಾನೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಅಸ್ಸಾಂ, ತ್ರಿಪುರ, ಮಣಿಪುರ, ಪಶ್ಚಿಮ ಬಂಗಾಳ, ಪಂಜಾಬ್, ಹಿಮಾಚಲ ಪ್ರದೇಶ, ಕ್ಯಾಂಬೇ–ಕಚ್ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ತೈಲಗಣಿಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ವ್ಯಕ್ತಪಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರಪಂಚದ ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಭಾರತದ್ದು ಮುಖ್ಯ ಸ್ಥಾನ. ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ, ಮಧ್ಯಪ್ರದೇಶ ಮತ್ತು ಗೋವದಲ್ಲಿ ದೇಶದ ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್ ಅದಿರಿನ ಬಹುಭಾಗ ದೊರಕುತ್ತಿದೆ. ದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿರುವ ಕೈಗಾರಿಕೆಗೆ ಇದು ಸಹಾಯವಾಗಿರುವುದೇ ಅಲ್ಲದೆ ರಫ್ತು ಮೂಲಕ ವಿದೇಶಿ ವಿನಿಮಯದ ಗಳಿಕೆಗೂ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಉತ್ತಮದರ್ಜೆಯ ಅಭ್ರಕ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲೂ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಗಣ್ಯಸ್ಥಾನವುಂಟು. ಪರಮಾಣುಶಕ್ತಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಯೂರೇನಿಯಂ ನಿಕ್ಷೇಪ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಉಂಟು. ಇವುಗಳೇ ಅಲ್ಲದೆ ಚಿನ್ನ, ವಜ್ರ, ತಾಮ್ರ, ಸೀಸ, ಸತು, ಬಾಕ್ಸೈಟ್, ಇಲ್ಮೆನೈಟ್, ಜಿಪ್ಸಮ್, ಕ್ರೋಮೈಟ್, ಫ್ಲೂರೈಟ್ ಮುಂತಾದ ವಿವಿಧ ಖನಿಜನಿಕ್ಷೇಪಗಳು ದೇಶದಲ್ಲಿವೆ. ಈಚೆಗೆ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿರುವ ಆಧುನಿಕ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ಖನಿಜ ಮೂಲಗಳಿಂದ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಮೂಲ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು ಒದಗುತ್ತಿವೆ. ಭಾರತದ ನಾಲ್ಕು ಪಂಚವಾರ್ಷಿಕ ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ಒಟ್ಟು 1,550 ಕೋಟಿ ರೂ. ಬಂಡವಾಳ ಹೂಡಲಾಗಿತ್ತು. ಈ ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಹೊಸ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ತೈಲಶುದ್ಧೀಕರಣ ಕೇಂದ್ರಗಳು, ಭಾರತದ ಯೂರೇನಿಯಂ ಕಾರ್ಪೊರೇಷನ್, ನೈವೇಲಿ ಲಿಗ್ನೈಟ್ ಕಾರ್ಪೊರೇಷನ್, ಬೈಲದಿಲ ಹಿಂದುಸ್ತಾನ್ ಸತು ಕಂಪನಿ, ಖೇತ್ರಿ ತಾಮ್ರ ಯೋಜನೆ, ಕೋರ್ಬ ಹಾಗೂ ಕೊಯ್ನಾ ಅಲ್ಯೂಮಿನಿಯಂ ಯೋಜನೆ ಇವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಕೆಲವು. ದೇಶದ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ಆರ್ಥಿಕ ಯೋಜನಾಯುಗ ಆರಂಭವಾದ ಅನಂತರ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಂದು ನಿರ್ಮಿತವಾಗಿದೆ. ಭಾರತದ ಭೂವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆ ಮತ್ತು ಭಾರತದ ಗಣಿಗಳ ಬ್ಯೂರೊ ಇವು ನಡೆಸುತ್ತಿರುವ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣ, ಸಂಶೋಧನ, ವ್ಯವಸ್ಥಾಪನ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬೆಳೆದಿವೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಖನಿಜ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಕಾರ್ಪೊರೇಷನ್ ಒಂದನ್ನು 1958ರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಯಿತು. ಅನೇಕ ಗಣಿಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆ ಈ ಸಂಸ್ಥೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಸೇರಿದ್ದು. ತೈಲ ಹಾಗೂ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಅನಿಲ ಆಯೋಗ ದೇಶದ ನಾನಾ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಶೋಧನೆಯ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿದೆ. ಸರ್ಕಾರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗಣಿಶಾಖೆಯ ಮೂಲಕ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿ ಸೂಕ್ತ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದೆ. ಹೀಗೆ ಯೋಜನೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾದಾಗಿನಿಂದ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಕೈಗೊಂಡಿರುವ ಕ್ರಮಗಳ ಫಲವಾಗಿ ಖನಿಜೋತ್ಪನ್ನಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ (ಪೆಟ್ರೋಲಿಯಂ ಬಿಟ್ಟು) 1951ರಲ್ಲಿ 89 ಕೋಟಿ ರೂ. ಇದ್ದದ್ದು 1961ರಲ್ಲಿ 182 ಕೋಟಿ ರೂ. ಗೂ 1968ರಲ್ಲಿ 415 ಕೋಟಿ ರೂ. ಗೂ ಹೆಚ್ಚಿತು. ಹೀಗೆ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪಾತ್ರ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತಿದೆ. ಆರ್ಥಿಕಾಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಥದಲ್ಲಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರವೊಂದರ ಸಹಜ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ನಿದರ್ಶನವಿದು.

ಆರ್ಥಿಕಾಭಿವೃದ್ಧಿಯೊಡನೆ ದೇಶದ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಪಾತ್ರ ನಿಸರ್ಗದತ್ತ ಖನಿಜಮೂಲಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುವುದಾದರೂ ಗಣಿ ಉದ್ಯಮಗಳು ಕೆಲವೇ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ಇವು ತಮ್ಮವೇ ಆದ ವಿಶೇಷ ಲಕ್ಷಣಗಳುಳ್ಳ ನಗರಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಗಣಿನಗರಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇತರ ಕಡೆಗಳಿಂದ ಬರುವ ಗಣಿ ಸಿಬ್ಬಂದಿ ಮತ್ತು ಜನರಿಂದ ಕೂಡಿರುತ್ತವೆ. ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗೇ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಆರ್ಥಿಕ, ತಾಂತ್ರಿಕ, ಮಾನವೀಯ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳುಂಟು. ಇವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಆಧುನಿಕ ಸರ್ಕಾರಗಳು ಸದಾ ಶ್ರಮಿಸುತ್ತಿವೆ; ನಾನಾ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಕೊಂಡಿವೆ. (ಎ.ಪಿ.ಎಸ್.)

ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಶಿಲ್ಪ : ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಉದ್ಯಮಕ್ಕೆ ಶಿಲ್ಪ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಬೆಳೆಸಿದ ವಿಜ್ಞಾನವಿಭಾಗ (ಮೈನಿಂಗ್ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್). ಖನಿಜಾನ್ವೇಷಣೆಯಿಂದ ತೊಡಗಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಸಮಸ್ತ ಅಂಗಗಳಲ್ಲೂ ಇದರ ಅನ್ವಯ ಉಂಟು. ವಿಶಿಷ್ಟೀಕರಣದ ಈ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಶಿಲ್ಪದಲ್ಲೂ ಹಲವಾರು ವಿಭಾಗಗಳು ತಲೆದೋರಿ, ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪ್ರಕಾರಗಳಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿವೆ– ಸ್ಫೋಟನೆ, ಬೈರಿಗೆಯಂತ್ರಗಳು, ವಾಯುಯಂತ್ರಗಳು, ರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡ ನಿರ್ಮಾಣ, ಇತ್ಯಾದಿ.

19ನೆಯ ಶತಮಾನದವರೆಗೆ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಈಗಿನಂತೆ ನವೀಕರಣ ಅಂದರೆ ಯಾಂತ್ರೀಕರಣಗೊಂಡಿರಲಿಲ್ಲ. ಮಾನವನ ತೋಳ್ಬಲವೇ ಮುಖ್ಯ ಆಧಾರವೆನಿಸಿತ್ತು. ಖನಿಜ ಹುದುಗಿದ್ದ ಬಂಡೆಯನ್ನು ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಚಿಮ್ಮಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಕುಟ್ಟಿ ಪುಡಿಮಾಡಿ ಖನಿಜವನ್ನು ಒಪ್ಪಮಾಡುತ್ತಿದ್ದುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ. ಆದರೆ ಅಲ್ಲಿಂದೀಚೆಗೆ ಕೈಗಾರಿಕಾಯುಗ ತೊಡಗಿದ ಬಳಿಕ ಲೋಹಖನಿಜಗಳು ಕೈಗಾರಿಕಾ ಖನಿಜಗಳು ಹಾಗೂ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಇಂಧನಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೇಡಿಕೆಯುಂಟಾಗಿ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗಣಿಯ ಉದ್ಯಮವೂ ಹೆಚ್ಚು ಸುಧಾರಿತಗೊಂಡಿತು. ಶ್ರಮಪೂರಿತ ಕೆಲಸಗಳಿಗಾಗಿ ಯಂತ್ರಗಳ ಬಳಕೆ ಮೊದಲಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಯಾಂತ್ರೀಕರಣಗೊಂಡ ಗಣಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನೇಕ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೂ ತಲೆದೋರಿದವು.

ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖ ಭಾಗಗಳಿವೆ. ನೆಲಮಟ್ಟದಲ್ಲೇ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಆಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟದೆ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಕೂಪಗಳನ್ನು ತೋಡುವುದು ಒಂದು ವಿಧಾನ. ಇದೇ ತೆರೆದಗಣಿ ವಿಧಾನ. ವಿಶಾಲವಾದ ಕೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಆಳಕ್ಕೆ ಇಳಿಯಲು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ಗಣಿಯ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅಷ್ಟು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕರ್ನಾಟಕದ ಕಬ್ಬಿಣ ಮತ್ತು ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್ ಗಣಿಗಳು. ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನದ ಹೆಸರು ಭೂಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ. ಇಲ್ಲಿ ನೆಲಮಟ್ಟದಿಂದ ನೂರಾರು ಮೀಟರುಗಳ ಆಳದಲ್ಲಿ ಕಿರಿದಾದ ಕೂಪಗಳನ್ನು ತೋಡಿ ಅದಿರಿನ ಶೇಖರಣೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಲೋಹಕಣಗಳೋ ಎಳೆಗಳೋ ಇರುವ ಜಾಡನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಸುರಂಗಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿಕೊಂಡು ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸುವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸುವುದು ಬಹಳ ಕಷ್ಟ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೋಲಾರದ ಚಿನ್ನದ ಗಣಿಗಳು, ಹಟ್ಟಿ ಚಿನ್ನದ ಗಣಿಗಳು, ಇಂಗಳದ ಹಾಲಿನ ತಾಮ್ರದ ಅದಿರು ಗಣಿಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ತೆರನಾದ ಗಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಸುರಂಗಗಳು, ಅಡ್ಡಸುರಂಗಗಳು, ತೋಡುಗಳು ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಅದಿರನ್ನು ಮುಖ್ಯ ಕೂಪದ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳ ಬಳಿ ಶೇಖರಿಸಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸಾಗಿಸಬೇಕು. ಈ ರೀತಿಯ ಅದಿರು ಸಾಗಣೆ ಹಾಗೂ ಗಣಿಯ ಕೆಲಸಗಳಿಗಾಗಿ ಉತ್ತಮ ರಸ್ತೆಗಳು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕ. ಅದಿರು ಸಾಗಣೆಗಂತೂ ಕೈಗಾಡಿ ಅಥವಾ ಯಂತ್ರಚಾಲಿತ ಟ್ರಕ್ಕುಗಳ ಓಡಾಟಕ್ಕೆ ಹಳಿಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಮಾರ್ಗಗಳು ಉತ್ತಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿಗೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಖನಿಜ ಹುದುಗಿರುವ ಬಂಡೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿಗಳನ್ನು ತೋಡಿ ಅವನ್ನು ಸ್ಫೋಟಕ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ತುಂಬಿಸಿ ಸಿಡಿಸಿ ಚೂರುಮಾಡಿ ಅದಿರನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತಾರೆ. ಶಿಲೆಯ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಗಡುಸೋ ಮೆದುವೋ ಅನುಸರಿಸಿ ಸಾಧಾರಣ ಅಥವಾ ತೀವ್ರಸ್ಫೋಟಕವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ಶಿಲಾಚೂರುಗಳನ್ನು

ಯಾಂತ್ರಿಕ ಸ್ಕ್ರೇಪರುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ರಾಶಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಅನಂತರ ಇವನ್ನು ಯಾಂತ್ರಿಕ ಲೋಡರುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವ್ಯಾಗನ್ನುಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಟ್ರಕ್ಕುಗಳಿಗೆ ಸುರಿಯುತ್ತಾರೆ. ವ್ಯಾಗನ್ನುಗಳನ್ನು ಡೀಸೆಲ್ ಅಥವಾ ವಿದ್ಯುಚ್ಚಾಲಿತ ಎಂಜಿನ್ನಿಗೆ ಲಗತ್ತಿಸಿ ಮುಖ್ಯಕೂಪದ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಸಾಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಅಲ್ಲಿಂದ ಉಪಕೂಪಗಳು ಹಾಗೂ ಅಡ್ಡ ಸುರಂಗಗಳನ್ನು ಹಾದು ಅದಿರನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸಾಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಸೂಕ್ತ ಸುರಕ್ಷಣಾ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಬಹು ಅಪಾಯಕಾರಿಯಾದ ಉದ್ಯಮವಾದೀತು.

ಸುರಂಗ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡ ಸುರಂಗಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಅವು ಕುಸಿದುಬೀಳದಂತೆ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿ ಬಂದೋಬಸ್ತು ಮಾಡಬೇಕು. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಾರೆ ಅಥವಾ ಸಿಮೆಂಟು ಕಾಂಕ್ರೀಟಿನಿಂದಲೂ ಇವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದುಂಟು. ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು ಚಚ್ಚೌಕವಾಗಿ ನೆಲಮಟ್ಟದಿಂದ ಚಾವಣಿಯವರೆಗೂ ಕ್ರಮವರಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಗಣಿಯಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದಿರುವ ಅನಾವಶ್ಯಕ ಶಿಲಾ ಚೂರುಗಳಿಂದ ತುಂಬಿ ಭದ್ರಪಡಿಸುವುದೂ ಉಂಟು. ಗಣಿಯಲ್ಲಿ ಆಳಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ಭೂಜಲ ಸೀಳು ಮತ್ತು ಬಿರುಕುಗಳಲ್ಲಿ ಜಿನುಗಲು ಮೊದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಆಳದಲ್ಲಿ ಜಲಮಟ್ಟವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವ ಕಾರಣವೂ ನೀರಿನ ಶೇಖರಣೆ ಹೆಚ್ಚಿ ಗಣಿಯ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೊಂದರೆಯಾಗುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯ. ಈ ನೀರನ್ನು ಹೊರಹಾಕದೆ ಈ ಅಡಚಣೆಯನ್ನು ನಿವಾರಿಸುವಂತಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಗಣಿಯ ತಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸುರಂಗಗಳನ್ನು ಕೊರೆದು ಶೇಖರವಾದ ನೀರು ಆಳಕ್ಕೆ ಹರಿದು ಹೋಗುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಹಾಗಿಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಪಂಪುಗಳ ಮೂಲಕ ನೀರನ್ನು ಹೊರಕ್ಕೆ ಹಾಯಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಸಹ ಕ್ರಮವರಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕು.

ನೆಲಮಟ್ಟದಿಂದ ಆಳಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ಉಷ್ಣತೆ ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಸುಮಾರು ಪ್ರತಿ 60' ಗೆ 1^0 ಸೆಂ. ನಷ್ಟು ಉಷ್ಣತೆಯ ಏರಿಕೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಿವಾರಿಸುವುದಂತೂ ಅಸಾಧ್ಯದ ಮಾತು. ಅದರೆ ಉಷ್ಣತೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆಮಾಡುವ ಹಲವಾರು ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಇದಲ್ಲದೆ ಕೆಲವು ಗಣಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಷಮಯ ಹಾಗೂ ಕೆಟ್ಟ ಅನಿಲಗಳು ಹೊಮ್ಮುವುದುಂಟು. ಇವುಗಳ ನಿವಾರಣೆಗೆ ಹಾಗೂ ಗಣಿಕೆಲಸಗಾರರ ಉಸಿರಾಟಕ್ಕೆ ಪರಿಶುದ್ಧವಾದ ವಾಯುವಿನ ಸರಬರಾಜು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ತಣ್ಣನೆಯ ಪರಿಶುದ್ಧವಾದ ವಾಯುವನ್ನು ಗಣಿಯ ಮೂಲೆ ಮೂಲೆಗೂ ವಾಯುಯಂತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಸತತವಾಗಿ ಕಳುಹಿಸುತ್ತಿರುತ್ತಾರೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಗಣಿಯೊಳಗಿಂದ ಹೊಮ್ಮುವ ಕೆಟ್ಟ ಅನಿಲಗಳನ್ನು ಹೀರಿ ಹೊರಹಾಕುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಗಣಿಯ ಯಾವುದೋ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಒದಗಿದ ಅಥವಾ ಒದಗಬಹುದಾದ ಅಪಾಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಳಗೆ ಕಳುಹಿಸುವ ವಾಯುವಿಗೆ ನೀಲಗಿರಿ ತೈಲ ಮುಂತಾದ ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸನೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಲ್ಲ ವಸ್ತುವನ್ನು ಬೆರೆಸುವುದೂ ಉಂಟು. ಅಲ್ಲದೆ ಗಣಿಯ ನಾನಾಕಡೆ ವಿದ್ಯುತ್ ಬೀಸಣಿಗೆಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಹವೆಯನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಬೆಳಕಿಗಾಗಿ ಸೂಕ್ತಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಗವಾಕ್ಷಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರುವುದಲ್ಲದೆ ವಿದ್ಯುತ್ ದೀಪಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಉತ್ತಮ ಬೆಳಕಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿರುವುದುಂಟು. ಶಿಲೆಗಳನ್ನು ಸಿಡಿಸಿದಾಗ ಮತ್ತು ಗಣಿಯ ಇತರ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಸಾಕಷ್ಟು ದೂಳು ಹೊರಬಂದು ಕೆಲಸಕಾರ್ಯಗಳಿಗೆ ಅಡಚಣೆಯುಂಟಾಗುವುದೇ ಅಲ್ಲದೇ ಅಲ್ಲಿಯ ಕೆಲಸಗಾರರ ಆರೋಗ್ಯವನ್ನು ಹಾಳುಮಾಡಲು ಕಾರಣವಾದೀತು, ಇದನ್ನು ಕೊಳವೆಗಳಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಸಿಂಪಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸಾಕಷ್ಟು ತಗ್ಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಜತೆಗೆ ಗಣಿಯೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುವ ವಾಯುವಿನಲ್ಲಿ ಸಾಕಷ್ಟು ತೇವಾಂಶವನ್ನು ಇಟ್ಟಿರುವುದರ ಮೂಲಕವೂ ದೂಳಿನ ಹಾವಳಿಯನ್ನು ನಿವಾರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಯಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೇ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ಶಿಲ್ಪ. (ಟಿ.ಟಿ.;ಬಿ.ವಿ.ಜಿ.)

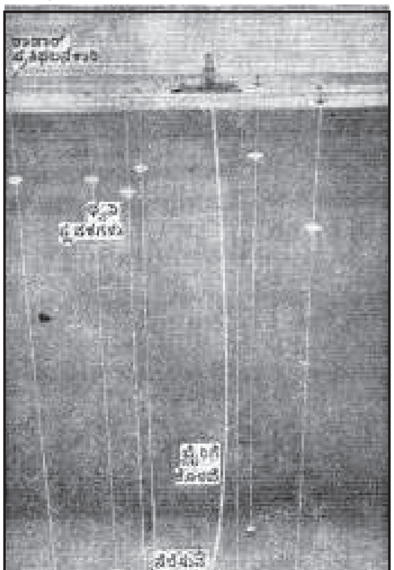
ಗಣಿಗಾರಿಕೆ, ಸಮುದ್ರಗತ : ಸಮುದ್ರದ ನೀರಿನಿಂದಲೂ ಸಮುದ್ರ ತಳದಲ್ಲಿನ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಿಂದಲೂ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಕ್ರಮ (ಮೈನಿಂಗ್ ಅಂಡರ್‌ಸೀ). ಸಮುದ್ರದ ನೀರಿನಲ್ಲೂ ಅದರ ತಳದಲ್ಲೂ ಇರುವ ಅಪಾರ ಖನಿಜಸಂಪತ್ತನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ ಪರಿಸರದ ಅಡ್ಡಿ ಆತಂಕಗಳು ನೆಲದ ಅಡಿಯಿಂದ ಖನಿಜವನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಎದುರಾಗುವ ಅಡ್ಡಿ ಆತಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಅವೆಷ್ಟೋ ಹೆಚ್ಚು. ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಖನಿಜನಿಕ್ಷೇಪಗಳು ಒಂದೇ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳ ಹರವನ್ನು ಅಧ್ಯಯಿಸಲು ಸಮುದ್ರವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಪ್ರದೇಶಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು : ನೀರಿನ ಪ್ರದೇಶ, ಸಮುದ್ರದ ಆಳದ ನೆಲ, ಭೂಖಂಡದ ಮುಂಚಾಚಿನ ಪ್ರದೇಶ ಮತ್ತು ಇಳಿಜಾರು ಹಾಗೂ ತೀರಪ್ರದೇಶ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಸಮುದ್ರದ ನೀರು ಖನಿಜಾಂಶ ಮತ್ತು ಖನಿಜ ಸಂಯೋಜನಗುಣದಲ್ಲಿ ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದದ್ದು.

ಸಮುದ್ರದ ಖನಿಜಸಂಪತ್ತು ಮೂರು ಮೂಲ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿದೆ : 1. ಖನಿಜಗಳು ಕರಗಿರುವ ಸಮುದ್ರದ ನೀರು; 2. ಸಮುದ್ರದ ದಂಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪ, ಭೂಖಂಡದ ಮುಂಚಾಚಿನ ಪ್ರದೇಶದ ಮತ್ತು ಆಳ ಸಮುದ್ರ ನೆಲದ ನಿಕ್ಷೇಪ; 3. ಸಮುದ್ರದ ಅಡಿಯ ತಳಬಂಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪ.

ಈ ಮೂರು ರೀತಿಯ ಸಾಗರ ಸಂಪತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಹಲವಾರು ಖನಿಜಗಳು ಹೀಗಿವೆ: 1. ಮೆಗ್ನೀಷಿಯಂ, ಸೋಡಿಯಂ, ಕ್ಯಾಲ್ಸಿಯಂ, ಬ್ರೋಮಿನ್, ಪೊಟ್ಯಾಸಿಯಂ, ಗಂಧಕ, ಸ್ಟ್ರಾನ್ಷಿಯಂ, ಬೋರಾನ್, ಯುರೇನಿಯಂ ಮತ್ತು ಜಿರ್‌ಕೋನಿಯಂ ಖನಿಜಗಳು ಮತ್ತು ಖನಿಜಲವಣಗಳು. ಇವಲ್ಲದೆ ಯಥೇಚ್ಛವಾದ ಸಿಹಿ ನೀರು.

2. ಭಾರವಾದ ಖನಿಜ ಮರಳು, ಕಬ್ಬಿಣದ ಮರಳು, ಸಿಲಿಕ ಮರಳು, ಸುಣ್ಣದ ಮರಳು, ಮರಳು ಮತ್ತು ನೊರಜು, ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್ ಉಂಡೆಗಳು, ರಂಜಕಯುಕ್ತ ಉಂಡೆಗಳು, ರಂಜಕ ಮರಳು, ಗ್ಲಾಕೊನೈಟ್ ಖನಿಜಗಳು, ಸಮುದ್ರದ ದಂಡೆ ಮತ್ತು ತೀರ ಪ್ರದೇಶದ ಗರಸು ನಿಕ್ಷೇಪಗಳು. ಸಮುದ್ರದ ಅತಿ ಆಳ ಪ್ರದೇಶದ ತಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಸುದ್ದೆ, ಕ್ಯಾಲ್ಕೇರಿಯಸ್ ಊಜ್, ಸಿಲಿಕಾಂಶದ ಊಜ್ ಮತ್ತು ಲೋಹಾಂಶದ ಊಜ್, ಇವೆಲ್ಲ ಗಟ್ಟಿಯಾಗದೆ ಸಮುದ್ರದ ತಳದ ಮೇಲೆ ಸಿಗುವ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳು. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಆದರೆ ನದಿಯ ಗರಸು ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಲ್ಲಿ ವಜ್ರ, ಚಿನ್ನ, ಪ್ಲಾಟಿನಂ, ತವರ, ಭಾರವಾದ ಖನಿಜಗಳಾದ ಮ್ಯಾಗ್ನಟೈಟ್, ಇಲ್ಮನೈಟ್, ರೂಟೈಲ್, ಜಿರ್‌ಕಾನ್, ಮೊನಜೈಟ್, ಕ್ರೋಮೈಟ್, ಮತ್ತು ವುಲ್‌ಫ್ರ್ಯಮೈಟ್ ಇತ್ಯಾದಿ ಖನಿಜಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

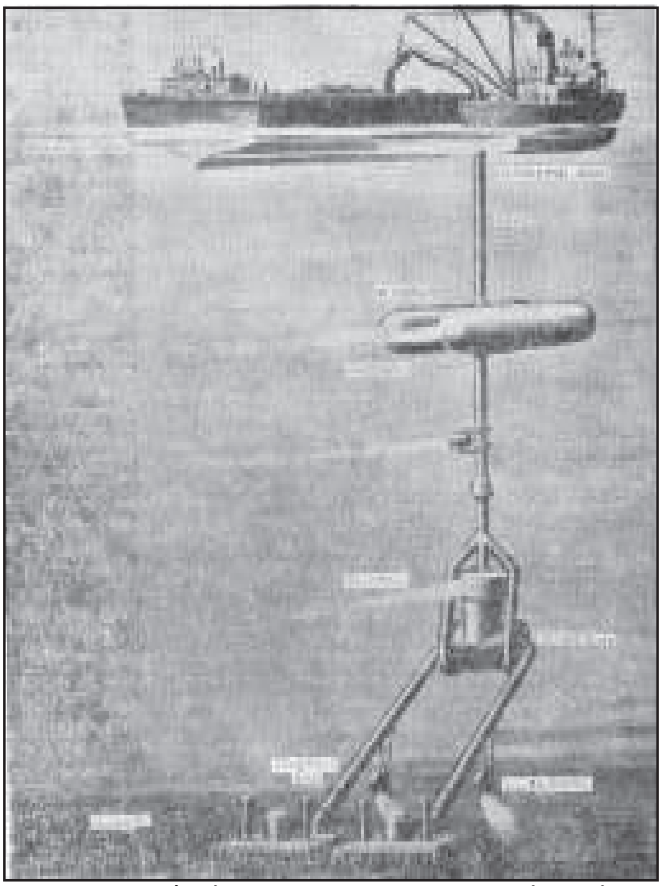
3. ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು, ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರು, ಸುಣ್ಣಶಿಲೆ, ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್ ಆಕ್ಸೈಡ್, ಕೋಬಾಲ್ಟ್, ನಿಕ್ಕಲ್ ಇತ್ಯಾದಿ ಖನಿಜಗಳು ಹೊರ ಕಾಣುತ್ತಿರುವ ಪದರ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಾಗಿಯೂ ಚಿನ್ನ, ತವರ, ಗಂಧಕ, ಉಪ್ಪುಗಳು ಮತ್ತು ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ನೆಲೆ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಾಗಿಯೂ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 1. ಸಮುದ್ರಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಆಧುನಿಕ ಯಂತ್ರ ಮತ್ತು ತಂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗ

ಸಮುದ್ರದ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಅವುಗಳ ರೀತಿ, ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದು, ಗಣಿಗಾರಿಕೆ ಹಾಗೂ ಉಪಯೋಗಾರ್ಹವಾಗಿ ಅವನ್ನು ಸಂಸ್ಕರಿಸಿ ಮಾರುವವರೆಗಿನ ಕಾರ್ಯದ ಎಲ್ಲ ಹಂತಗಳೂ ಭೂಭಾಗದ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಂತೆಯೇ ನಡೆಯುತ್ತವೆ. ನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಗೆ ಮೊದಲು ಭೂಭಾಗದ ಮುಂಚಾಚು ಮತ್ತು ಅದರ ಅಕ್ಕ ಪಕ್ಕದ ತೀರಗಳ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮತ್ತು ಭೂವಿಜ್ಞಾನ ವೃತ್ತಾಂತ ಅಲ್ಲದೇ ಖನಿಜಗಳ ಹಂಚಿಕೆಯ ಅರಿವು ಅವಶ್ಯ. ಇದರಿಂದ ಕೆಲವು ಕಡೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುವ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಸ್ಥೂಲ ಪರಿಶೀಲನೆಗೆ ಅವಕಾಶ ವಾಗುವುದು. ಅನಂತರ ಭೂಭೌತ ಮತ್ತು ಇತರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಹಲವಾರು ವೇಳೆ ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಕಾರ್ಯ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ

ತೊಡಗಿರುವಾಗ ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದೂ ಉಂಟು. ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಇವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಅಥವಾ ಅನಂತರ ಮೂರು ಮುಖ್ಯ ಕಾರ್ಯಗಳುಂಟು. ಅವು ನೌಕಾಯಾನ, ಸಮೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ಖನಿಜ



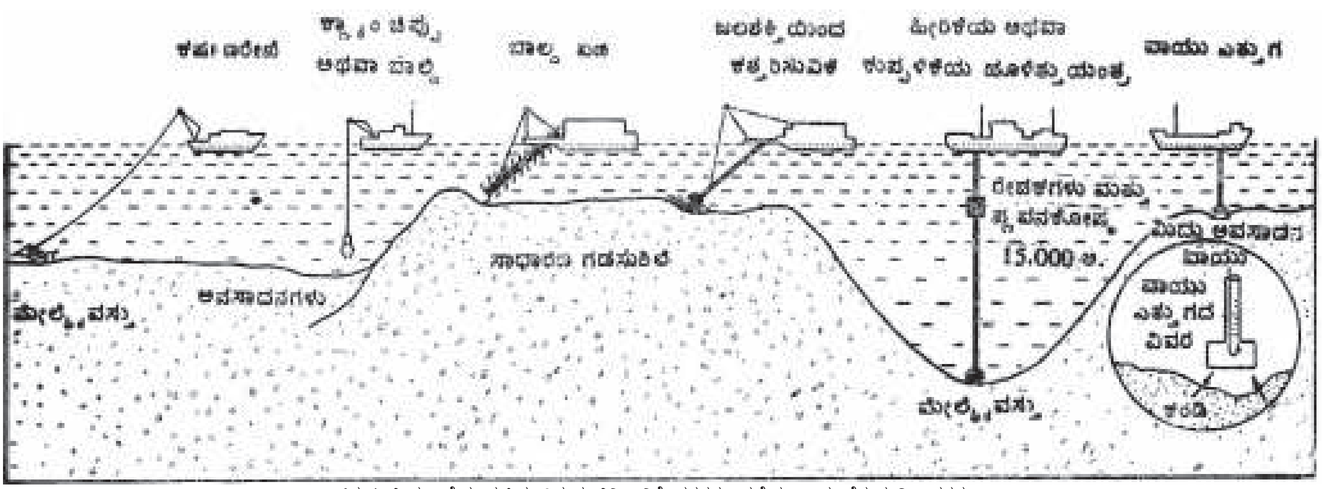
ಚಿತ್ರ 2. ಸಮುದ್ರಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಆಧುನಿಕ ಯಂತ್ರ ಮತ್ತು ತಂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗ–ಇನ್ನೊಂದು ಚಿತ್ರ

ಮಾದರಿಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆ. ನಿತ್ಯ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ ನೌಕೆಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಅನ್ವೇಷಕ ಸಾಧನಸಲಕರಣೆಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ ಕಾರ್ಯ ನಡೆಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಗರದಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸಿ ಕಾರ್ಯನಡೆಸುವ ಸಲಕರಣೆಗಳು ಮುಂದೆ ಹೆಚ್ಚು ಫಲಪ್ರದವಾಗುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಶಯವೂ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಸಲಕರಣೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಅಷ್ಟು ಪರಿಷ್ಕಾರವಾಗದಿರುವುದರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಸಾಗರದಡಿಯಲ್ಲಿನ ಖನಿಜನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಮುಖ್ಯ ಸಾಧನವೆಂದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾದ ನೌಕಾಯಾನ. ಖನಿಜನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು. ನಡೆಸಬೇಕಾದ ಸಮೀಕ್ಷೆ ಕಾರ್ಯರೂಪದ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಆಳವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ ಸುಮಾರು 305ಮೀಗಳವರೆಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಬಿಡಬಹುದು. ಆದರೆ ನಿಕ್ಷೇಪವಿರುವುದು ತಿಳಿದ ಬಳಿಕ 30.5ಮೀಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವಂತೆ ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಅನುಕೂಲ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕೊನೆಗೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮೀಟರ್‌ಗಳಷ್ಟಕ್ಕೆ ನಿಲ್ಲುವುದು.

ನೌಕಾಯಾನಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ ಸಾಧನಗಳಿವೆ. ಇವನ್ನು 1–915ಮೀ ಆಳದಲ್ಲೂ ನಿಖರವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಪ್ರಪಂಚದ ಹಲವಾರು ಕಡೆ ಇಂಥ ಸಾಧನಗಳನ್ನು ಖಾಯಂ ಆಗಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಸಾಗಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾದ ಸಣ್ಣ ಯಂತ್ರಗಳೂ ಇವೆ. ಇವು ಕೂಡ ನಿಖರವಾಗಿ ಕೆಲಸಮಾಡುವಂಥವು. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಆಳ ಸಾಗರದ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸುವ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಕೃತಕ ಉಪಗ್ರಹಗಳ ನೆರವನ್ನು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಒಂದು ಸಮಕ್ಷರ ಉಪಗ್ರಹ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕಡೆ ನಿಂತು ಸಮುದ್ರದ ಸೀಮಿತವಲಯವನ್ನು ಸಾಕಷ್ಟು ಕಾಲ ವೀಕ್ಷಿಸಿ ವಿವರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಲ್ಲುದು.

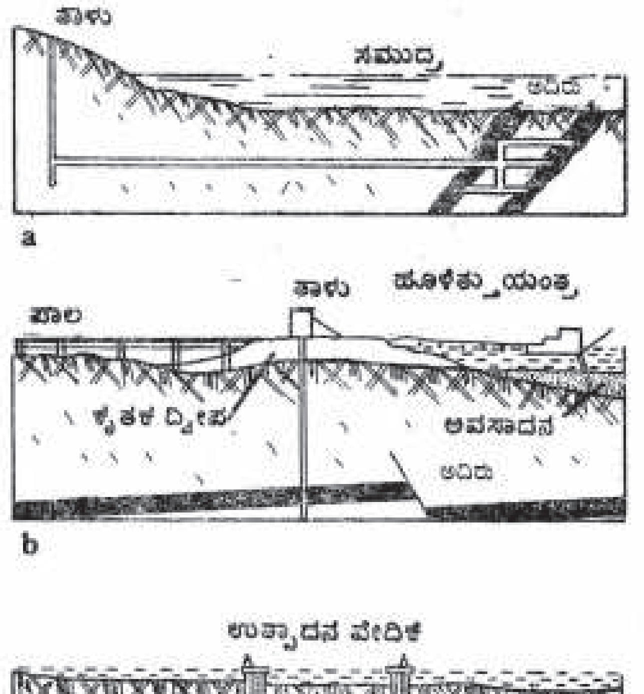
ಚಿತ್ರ 3. ಸಮುದ್ರಗತ ಭೂವಿಜ್ಞಾನಿಯೊಬ್ಬ ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಿರುವ ದೃಶ್ಯ

ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ನೌಕೆಯನ್ನು ಭದ್ರವಾಗಿ ಒಂದು ಕಡೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವುದು ತೀರ ಅಗತ್ಯ. ಕಡಿಮೆ ಅಲುಗಾಟ ಇರುವ ಸಮುದ್ರ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಸೋನಾರ್ ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪಾಂಡರುಗಳನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಿ ನೌಕೆಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಬಹುದು. ಅಥವಾ ಸಮುದ್ರ ತೀರದ ತಾಣಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಅದನ್ನು ಬಂಧಿಸಿ ಇಡಬಹುದು. ಇಂಥ ಒಂದು ನೌಕೆಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಗಣಕದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸುವುದು ಕೂಡ ಸಾಧ್ಯ.



ಚಿತ್ರ 4. ತೀರದಾಚೆಯ ಗಟ್ಟಿಯಾಗಿರುವ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಹೂಳೆತ್ತುವ ವಿಧಾನಗಳು

ಸಮುದ್ರ ತಳದಲ್ಲಿ ಖನಿಜನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮಾಡಲು ಮುಖ್ಯ ಸಲಕರಣೆಗಳೆಂದರೆ ಆಳವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಯಂತ್ರಗಳು, ಸಮುದ್ರತಳದ ಹೊರ ರೇಖಾಕೃತಿ ಚಿತ್ರಣಯಂತ್ರಗಳು, ಕಾಂತ ಬಲಮಾಪಕಗಳು ಮತ್ತು ಆಳದಲ್ಲಿನ ನಿಕ್ಷೇಪಮಾದರಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಲಕರಣೆಗಳು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಅದಿರಿನ ನಿಕ್ಷೇಪವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭಾರ ಖನಿಜದ ಗರಸು ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವಾಗ ಹೊರ ರೇಖಾಚಿತ್ರಣ ಯಂತ್ರಗಳು (ಪ್ರೊಫೈಲರ್ಸ್) ಅತಿಮುಖ್ಯ ಸಾಧನಗಳು. ಕಂಪನ ರೇಖಾಚಿತ್ರಣ ಯಂತ್ರಗಳು ಕಲ್ಲೆಣ್ಣೆಯ ಅನ್ವೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಕಿಡಿ, ಒತ್ತಡಗಾಳಿ, ಅನಿಲಸಿಡಿಕೆ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯುದ್ಯಾಂತ್ರಿಕ ಸ್ಫೋಟನೆ ಮುಂತಾದವನ್ನು ಈ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಹೊರಟ ಶಕ್ತಿ ಸಮುದ್ರ ತಳವನ್ನು ಸೇರಿ ಅಲ್ಲಿಯ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿಫಲನ ಹೊಂದಿ ಬಂದಾಗ ಅವುಗಳ ನೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ಸಮುದ್ರತಳದಲ್ಲಿರುವ ಮಣ್ಣಿನ ಪದರ, ತಳಬಂಡೆಯ ಬಾಹ್ಯಾಕಾರ, ಸ್ತರಭಂಗಗಳು ಮುಂತಾದ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬಹು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಸಮುದ್ರತಳದಲ್ಲಿರುವ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸ್ಫೋಟನೆಗಳ ಶಕ್ತಿ ಅಲೆ ಅಲೆಯಾಗಿ ಸಮುದ್ರತಳದಿಂದ ಹಲವು ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ವರೆಗೆ ಪ್ರಸರಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5. ತೀರಾದಾಚೆಯ ಗಟ್ಟಿಯಾಗಿರುವ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯ ವಿಧಾನಗಳು: a–ನೆಲದಲ್ಲಿ ಹುಗಿದ ತಾಳು, ಸುರಂಗದ ಮೂಲಕ ಪ್ರವೇಶ; b–ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೃತಕ ದ್ವೀಪದಲ್ಲಿ ಹುಗಿದ ತಾಳು; c–ತೀರದಾಚೆ ರಂಧ್ರ ಕೊರೆದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲೇ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ

ಈ ಪ್ರಸರಣೆ ಸಿಡಿತದ ಕಂಪನ ಕಾಲ ಮತ್ತು ಅಲೆಗಳ ಪ್ರಸಾರ ವೇಗವನ್ನು ಆಧರಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಸಿಡಿತಕ್ಕೆ ಮೊದಲೇ ಪ್ರತಿಫಲನದ ಅಲೆಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಫ್ಲಕ್ಸ್‌ಗೇಟ್, ಪ್ರೋಟಾನ್ ಪ್ರಿಸೆಷನ್ ಮತ್ತು ರುಬಿಡಿಯಂ ಕಾಂತ ಬಲಮಾಪಕ ಮುಂತಾದವು ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗದಲ್ಲಿವೆ.

ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಬಳಿಕ ಮುಂದಿನ ಕಾರ್ಯವೆಂದರೆ ಅದರ ನಮೂನೆ ತೆಗೆಯುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ : 1. ಅನ್ವೇಷಣೆ ಅಥವಾ ಗುಣಾತ್ಮಕವಾದ ನಮೂನೆ ಪಡೆಯುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಸ್ನಾಪರ್, ಡ್ರಾಪ್ ಕೋರ್ಸ್, ಡ್ರಾಗ್ ಡ್ರೆಡ್ಜರ್ಸ್ ಮತ್ತು ಡೈವರ್ಸ್ (ಮುಳುಗಿ) ಮುಂತಾದ ಸುಲಭ ನಮೂನೆ ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. 2. ಗಣನಾತ್ಮಕ ನಮೂನೆ: ಇದಕ್ಕೆ ಆಧುನಿಕ ಯಂತ್ರ ಸಲಕರಣೆ ಇದ್ದರೆ ಉತ್ತಮ. ಈಗಿರುವ ಸಲಕರಣೆಗಳಿಂದಲೇ ಕಾರ್ಯ ನಡೆಸಲೂಬಹುದು. ಸಮುದ್ರತಳದ ಪರಿಸರಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿ ಪಡೆಯುವ ಸಲಕರಣೆಗಳ ಕಡೆಯೇ ಹೆಚ್ಚು ಗಮನವಿದೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಗೋರುವುದು ಮತ್ತು ಛಾಯಾಗ್ರಹಣೆ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಸಮುದ್ರಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಆಸಕ್ತಿ ಉಂಟಾಗಿದ್ದರೂ ಹೊಸಹೊಸ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಭಾವನಾತ್ಮಕ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ. ಇದುವರೆಗೆ ಬಂದಿರುವ ಖನಿಜ ಉತ್ಪಾದನೆಯೆಲ್ಲ ತೀರ ಪ್ರದೇಶದಿಂದ ಸಮುದ್ರದ ನೀರು, ದಡ, ಮತ್ತು ಅಂಚಿನಲ್ಲಿರುವ ಗರಸು ನಿಕ್ಷೇಪ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಿಂದ ಮಾತ್ರ. ಸಮುದ್ರದ ನೀರಿನಿಂದ ಉತ್ಪಾದನೆಯೆಂದರೆ, ನೀರನ್ನು ರಾಸಾಯನಿಕವಾಗಿ ಹೆಪ್ಪುಗಟ್ಟಿಸುವುದು, ಶೋಧಿಸುವುದು, ಸೂರ್ಯ ರಶ್ಮಿಯಿಂದ ಆವಿಯಾಗಿಸುವುದು. ಇದರಿಂದ ಮೆಗ್ನೀಷಿಯಂ ಹಾಗೂ ಬ್ರೋಮಿನ್ ಉಪ್ಪುಗಳು ಮತ್ತು ಅಡುಗೆ ಉಪ್ಪುಗಳು ಉತ್ಪಾದನೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇತ್ತೀಚಿನ ಬೃಹತ್ ಪ್ರಮಾಣದ ಕಾರ್ಯವೆಂದರೆ ಸಮುದ್ರದ ನೀರಿನಿಂದ ಸಿಹಿ ನೀರನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುವುದು. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸುವಾಗ ಇತರ ಖನಿಜಗಳನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುವುದನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ 450,000,000 ರೂಪಾಯಿಗಳಷ್ಟು ಎಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮೆಗ್ನೀಷಿಯಂ, ಬ್ರೋಮಿನ್, ಸಿಹಿ ನೀರು ಉತ್ಪಾದನೆಯಾಗಿವೆ.

ಖನಿಜಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಸೋಡಿಯಂ, ಮೆಗ್ನೀಷಿಯಂ ಮತ್ತು ಬ್ರೋಮಿನ್‌ಗಳದೇ ಅಧಿಕ ಉತ್ಪತ್ತಿ. ತೀರದಿಂದ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಈ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಗಣಿಗಾರಿಕೆ, ಸಮುದ್ರಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅತಿ ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಲು ಕಾರಣವೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಮ್ಯಾಂಗನೀಸ್ ಉಂಡೆಗಳು ಮತ್ತು ನೈರುತ್ಯ ಆಫ್ರಿಕದ ಸಮುದ್ರದೊಳಗಿನಿಂದ ಹೊರತೆಗೆಯಲಾದ ವಜ್ರಗಳು. ಇದರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಾಧನಗಳೆಂದರೆ ಗೋರುವುದು, ಕಾಮ್‌ಶೆಲ್ಸ್, ಗೋರುವ ಬಾಲ್ದಿ, ನೀರಿನ ಒತ್ತಡದ ಗೋರುಯಂತ್ರ ಅಥವಾ ವಾಯುವಿನಿಂದ ಎತ್ತುವ ಯಂತ್ರಗಳು. ಇವುಗಳಿಂದ 61–91.5ಮೀ ಆಳದ ವರೆಗೆ ಅಗೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. 1968ರಲ್ಲಿ 70ಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಗೋರು ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ತೀರದಿಂದಾಚೆಗೆ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಮರಳು ಮತ್ತು ನುರುಜು ಹೊರತೆಗೆಯಬೇಕಾಯ್ತು. ಈ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚನ್ನು ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚೆಂದೇ ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೂ ಆದಷ್ಟು ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಈ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕಾರಣ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ಖನಿಜ ಸಂಪತ್ತು ಎಲ್ಲ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ಸದಾಕಾಲ ಸಿಗಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಹಲವಾರು ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ತೀರದಿಂದಾಚೆಗೆ ಸಮುದ್ರತಳದಲ್ಲಿರುವ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆಸಕ್ತಿ ವಹಿಸುತ್ತಿವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಹಲವಾರು ಕಾಯಿದೆ ಕಾನೂನುಗಳನ್ನು ಕೂಡ ರೂಪಿಸುತ್ತಿವೆ. ಈಗಲೂ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಮುಖ್ಯವಾದ ಉತ್ಪಾದನೆ ವಜ್ರಗಳು. ಪ್ರಪಂಚದ ಶೇ.70ಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗದ ಭಾರ ಖನಿಜ ಉತ್ಪಾದನೆ ತೀರ ಪ್ರದೇಶದ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಿಂದಾಗಿದೆ. ಇದು ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯ, ಶ್ರೀಲಂಕ ಮತ್ತು ಭಾರತದ ತೀರಪ್ರದೇಶಗಳಿಂದ. ಇದರಂತೆಯೇ ಇಂಡೋನೇಷ್ಯ, ಥೈಲೆಂಡ್, ಜಪಾನ್, ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳು, ಐಸ್‌ಲೆಂಡ್, ಬ್ರಿಟನ್, ಫಿನ್‌ಲೆಂಡ್, ನ್ಯೂ ಫೌಂಡ್‌ಲೆಂಡ್, ನೊವಸ್ಕೋಷಿಯ, ಟೈವಾನ್ ಮತ್ತು ಟರ್ಕಿದೇಶಗಳೂ ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮುದ್ರಗತ ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ವಹಿಸುತ್ತಿವೆ.

ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಖನಿಜ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳಲ್ಲಿ ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದದ್ದು ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು. ಜಪಾನಿನ ಕಲ್ಲಿದ್ದಲಿನ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಶೇ.30 ಭಾಗ ಸಮುದ್ರತಳದಿಂದ ಬರುತ್ತಿದೆ. ಬ್ರಿಟನ್ನಿನಲ್ಲಿ ಇದು ಸುಮಾರು ಶೇ.10. ಈ ರೀತಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಖರ್ಚು ತಗಲುವುದು ಕೇವಲ ಅನ್ವೇಷಣೆಗಾಗಿ ಮಾತ್ರ. ಉಳಿದ ಕಾರ್ಯ ಹಾಗೂ ವೆಚ್ಚ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ಆಗುವಂತೆಯೇ ಇವೆ. ಜಪಾನ್, ನೊವಸ್ಕೋಷಿಯ, ಟೈವಾನ್, ಬ್ರಿಟನ್, ಟರ್ಕಿ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು 1965 ರಲ್ಲಿ 33,500,000 ಟನ್ನು ಕಲ್ಲಿದ್ದಲನ್ನು

ಉತ್ಪಾದಿಸಿವೆ. ಫಿನ್‌ಲೆಂಡ್ ಮತ್ತು ನ್ಯೂ ಫೌಂಡ್‌ಲೆಂಡ್ 1965 ರಲ್ಲಿ 1,700,000 ಟನ್ನು ಕಬ್ಬಿಣದ ಅದಿರನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದಿವೆ. ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನ 1965 ರಲ್ಲಿ 600,000 ಟನ್ನಿನಷ್ಟು ಗಂಧಕವನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಿದೆ. ಸ್ತರ ನಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಗಣಿ ಒಳಕ್ಕೆ ಇಳಿಯಲು ಕೋಡುದಾರಿಯನ್ನು ಕೊರೆದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಅಡ್ಡಲಾಗಿ ಸಮುದ್ರ ಕೆಳಗಡೆ ನಿಕ್ಷೇಪದವರೆಗೆ ಸುರಂಗ ತೋಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಕೃತಕ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ಕೋಡುದಾರಿಯನ್ನು ಕೊರೆದು ಗಣಿಗಾರಿಕೆಯನ್ನೂ ಮಾಡುವುದುಂಟು. ಈ ಎರಡು ಬಗೆಯಲ್ಲೂ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಭದ್ರತೆ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಎಚ್ಚರಿಕೆ ವಹಿಸಬೇಕು; ಇನ್ನುಳಿದ ಗಣಿ ಕಾರ್ಯಗಳೆಲ್ಲ ಭೂಭಾಗದ ವಿಧಾನಗಳಂತಿರುತ್ತವೆ. ತೀರದಿಂದಾಚೆ ನಡೆಸಿರುವ ತೈಲಾನ್ವೇಷಣೆಯ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೃತಕ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ಭೂ ಕೊರೆತ ನಡೆಸಿರುವುದೇ ಹೆಚ್ಚು. ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯ ತೈಲಾನ್ವೇಷಣೆಯೆಂದರೆ ಸಮುದ್ರದ ನೀರಿನ ಮೇಲೆ ತೇಲುವ ತೆಪ್ಪಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಿ ಅದು ತೇಲುತ್ತಿರುವ ಭೂಕೊರೆತದ ಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಮಾಡುವಂತಹ ತೈಲಾನ್ವೇಷಣೆಯಾಗಿದೆ. (ಎಂ.ಎನ್.ಎಂ.)

ಗಣಿತ ಆದರ್ಶಗಳು : ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನ, ಮಾನವಿಕ ಮುಂತಾದ ಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಧಾರ, ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಸಹಾಯಗಳಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಮತ್ತು ಪರಿಹರಿಸಬೇಕಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಹೇರಳವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತಿರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ವಿಚಾರ ಮಂಥನ ದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆ p ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಸನ್ನಿವೇಶ Σ ವನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಅಂಶದಲ್ಲಿಯೂ ಹೋಲುವಂಥ ಒಂದು ಗಣಿತ ವ್ಯವಸ್ಥೆ σ ವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆ p ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆ p ಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಗಣಿತಮಾರ್ಗದ ಸೌಲಭ್ಯದಿಂದ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಮೊದಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆ p ಗೆ Σ ದಲ್ಲಿ ತಕ್ಕ ಪರಿಹಾರ ದೊರೆತಂತಾಯಿತು. ಇಲ್ಲಿ ó ವನ್ನು ಮೂರ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶ Σದ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶ (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಐಡಿಯಲ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥವು ಒಂದು ರೀತಿಯ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶಗಳು. ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಅಮೂರ್ತರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಅನೇಕವೇಳೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಗಣಿತದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರೀಕರಿಸಿ ಮೂರ್ತರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಚಿತ್ರಣಗಳ ಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಅಮೂರ್ತ ಗಣಿತದ ಮೂರ್ತ ಆದರ್ಶಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವು ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯ ಆದರ್ಶಗಳು.

ಮೂರ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶಗಳು : (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಐಡಿಯಲ್ಸ್ ಆಫ್ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್ ಸಿಚುಯೇಷನ್ಸ್). ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಭಾಷೆ : ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲೂ ವಿಜ್ಞಾನವೇ ಮುಂತಾದ ಶಾಸ್ತ್ರಪ್ರಕಾರಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟೋ ವೇಳೆ ಕೆಲವು ವಸ್ತು ಅಥವಾ ಭಾವನೆಗಳ ಸಮೂಹಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಬಿಡಿ ಅಂಶಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತು ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನೋ ಒಂದು ದೇಶದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನೋ ಒಂದು ರಾಸಾಯನಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಎಲ್ಲ ರಾಸಾಯನಿಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನೋ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಣಿಗಳನ್ನೋ ಕುರಿತು ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತಿರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ವಿವಿಧ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂಬ ಒಂದು ಅಮೂರ್ತ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಗಣವೆಂದರೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿರುವ ವಸ್ತು ಅಥವಾ ಭಾವನೆಗಳ ಸಮೂಹ, ಗುಂಪು ಅಥವಾ ವರ್ಗವೆಂದು ಅರಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ವಿಚಾರಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಗಣವೆಂಬುದೇ ಮೂಲವಾದ ಶಬ್ದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು ಹೊರಟರೆ ವರ್ತುಲೀಯತೆಯಲ್ಲಿ ಸಿಲುಕಿ ಬೀಳುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಅನಿವಾರ್ಯ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಲೇ ಗಣವೆಂಬ ಶಬ್ದದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸಮೂಹ, ಸಮುಚ್ಚಯ, ಸಮಾಹಾರ, ವರ್ಗ ಮುಂತಾದ ಹಲವು ಪರ್ಯಾಯ ಪದಗಳ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಿ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯಿಂದ ಅರಿತುಕೊಳ್ಳಲು ಬಿಡುವುದೇ ವಾಡಿಕೆ; ಮತ್ತು ಇಷ್ಟೇ ಸಾಧ್ಯ (**ನೋಡಿ– ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ**).

ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒದಗುವ ವಸ್ತು ಅಥವಾ ಭಾವನೆಗಳ ಸಮೂಹಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಹಲವು ಬಗೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಏಕ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅದೇ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ 51 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 20 ಮಂದಿ ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲೂ 44 ಮಂದಿ ಗಣಿತದಲ್ಲೂ ಪ್ರವೀಣರಾದರೆ ಇವೆರಡರಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಪ್ರವೀಣರು? A ಎಂಬುದು ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವೀಣರ ಗಣವನ್ನೂ B ಎಂಬುದು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೀಣರ ಗಣವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ AUB ಎಂಬುದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ 51 ಹುಡುಗರ ಗಣವನ್ನೂ $A\cap B$ ಎಂಬುದು ಚರಿತ್ರೆ ಮತ್ತು ಗಣಿತಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಪ್ರವೀಣರ ಗಣವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ A ಯ ಧಾತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\eta(A)$,B ಯ ಧಾತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\eta(B)$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸೋಣ. ಈಗ $n(A) = 20$, $n(B)=44$ ಮತ್ತು $n(A\cup B)= 51$. ಇಲ್ಲಿ $n(A\cap B)= x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

ಏಕೆಂದರೆ $A-B$ ಎಂಬುದು ಗಣಿತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಪ್ರವೀಣರ ಗಣವನ್ನೂ $B-A$ ಎಂಬುದು ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಪ್ರವೀಣರ ಗಣವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore 51 = (20 - x) + (44 - x) + x$$

$$\therefore x = 13$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಚರಿತ್ರೆ, ಗಣಿತಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಪ್ರವೀಣರ ಸಂಖ್ಯೆ 13. ವೆನ್ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಕೂಡ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆಯೇ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ ಅನೇಕ ಬಗೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಭಾಷೆಯಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿಹಾರ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗಿನ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಬಹು ದೊಡ್ಡ ಮತ್ತು ಪ್ರಮುಖ ಶಾಖೆಯಾಗಿರುವುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಭಾಷೆ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತವೆಲ್ಲಕ್ಕೂ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಭಾಷೆಯಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿ, ಗಣಿತದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಶಾಖೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ಧಾಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು: ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಣದ ಕೆಲವು ಧಾತುಗಳೊಂದಿಗೆ, ಅದೇ ಗಣದ ಅಥವಾ ಬೇರೊಂದು ಗಣದ ಕೆಲವು ಧಾತುಗಳನ್ನು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಗೊಂಡಿರುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ S ಗೂ ಈ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪೋಷಕರ ಗಣ T ಗೂ ಮುಂದೆ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಅನ್ವಯವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬಹುದು. ಈ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ s ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಎಂದರೆ $s\in S$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ s ನೊಂದಿಗೆ ಇವನ ಪೋಷಕನನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ T ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಧಾತು t ನೊಂದಿಗೆ ಇವನ ಪೋಷಕನನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ T ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಧಾತು t ಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸೋಣ. ಹೀಗೆ s ನೊಂದಿಗೆ t ಗಿರುವ ಅನ್ವಯವನ್ನು $t=\phi(s)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲೋ ಕ್ರಮಯುಕ್ತ ಧಾತುಯುಗ್ಮವಾಗಿ (s,t) ರೂಪದಲ್ಲೋ ನಿರೂಪಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಇಲ್ಲಿ Sಗೆ ಸೇರಿದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ s_1, s_2 ಗಳಿಗೆ T ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ t ಅನ್ವಯವಾಗಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ s_1, s_2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಬ್ಬರಿಗೆ ಪೋಷಕ t ಒಬ್ಬರೇ ಇರಬಹುದಲ್ಲವೆ? ಹೀಗೆಯೇ ಎಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ N ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ n ನೊಂದಿಗೂ ಅದರ ಉತ್ತರಾಂಶ (ಸಕ್ಸೆಸ್ಸರ್) ಎಂದರೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ $(n+1)$ ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು $(n, n+1)$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಕ್ರಮಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಈ ಬಗೆಯ ಮೂರ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಗಳು (ರಿಲೇಷನ್ಸ್) ಮತ್ತು ಚಿತ್ರಣಗಳು (ಮ್ಯಾಪಿಂಗ್ಸ್) ಅಥವಾ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು (ಫಂಕ್ಷನ್ಸ್) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶಗಳ ವಿವರಗಳಿಗೆ **ನೋಡಿ– ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ**.

ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು (ಬೈನರಿ ಆಪರೇಷನ್ಸ್): p ಒಂದು ಗಣವೂ $f : (p \times p)\to P$ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಆಗಿದ್ದರೆ f ನ್ನು p ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿರುವ ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣಪರಿಕರ್ಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $\alpha: (N \times N)\to N$ನ್ನು (ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ) $\alpha(m,n)=(m+n)$, $(m,n\in N)$ ಎಂದರೆ m ಗೆ nನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಮೊತ್ತ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ α ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮ. ಇದನ್ನೇ N ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿರುವ ಸಾಧಾರಣ ಸಂಕಲನವೆನ್ನುವುದು.

ಹೀಗೆಯೇ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು $\beta : (N\times N)\to N$ನ್ನು $\beta(m,n)=m\times n$ ಎಂಬ ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು.

ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದೃಢವಸ್ತು (ರಿಜಿಡ್ ಬಾಡಿ) ಒಂದು ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತಲೂ ಆವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ಆರಂಭ ಸಮತಲವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಈ ವಸ್ತುವಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆವರ್ತನೆಗಳನ್ನು (ರೊಟೇಷನ್ಸ್) ಈ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಗೊಂಡಿದ್ದು ಅದೇ ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮತಲ β ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ಸಮತಲ α ದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಈಗ P_1 ಮತ್ತು P_2 ಗಳು θ_1 ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ θ_2 ಕೋನಗಳಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸುವಂಥ ಆವರ್ತನೆಗಳಾದರೆ $P_1 P_2$ ಎಂದರೆ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಮೊದಲು P_1 ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ತರುವಾಯ P_2 ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು $\theta_1+\theta_2$ ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ P_1 ಮತ್ತು P_2 ಗಳು ಎರಡು ಆವರ್ತನೆಗಳಾದರೆ $P_1 P_2$ ಸಹ ಒಂದು ಆವರ್ತನೆಯೇ, P_1 ಮತ್ತು P_2 ಗಳಿಂದ $P_1 P_2$ ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಆವರ್ತನೆಗಳ ಗಣದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿರುವ ಒಂದು ಬಗೆಯ ದ್ವಿಗುಣಪರಿಕರ್ಮವೆಂದು ಗಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ಆವರ್ತನೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಎಂದು ಹೆಸರು.

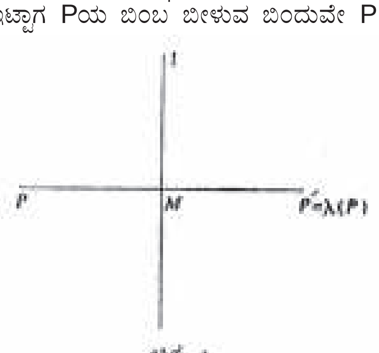
ಹೀಗೆ ಒಂದು ಗಣದ ಎರಡು ಧಾತುಗಳಿಂದ ಹೊರಟು ಅವನ್ನು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ರೀತಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅದೇ ಗಣದ ಒಂದು ಧಾತು ದೊರಕುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಅನೇಕ ಕಡೆ ಕಾಣಸಿಕ್ಕುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಅಮೂರ್ತರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಒಂದು ಬಗೆಯ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶವೇ ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮವೆಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು (ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಫರ್ಮೇಷನ್ಸ್): S ಒಂದು ಗಣವೂ $\phi: S \to S$ ಒಂದು ದ್ವೈಚಿತ್ರಣವೂ ಆಗಿದ್ದರೆ ϕ ನ್ನು S ನ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: 1 R ಎನ್ನುವುದು ಎಲ್ಲ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಈಗ $\phi: R \to R$ನ್ನು $\phi(x)=x+3$ ಎಂದು R ನ ಎಲ್ಲ x ಗಳಿಗೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾಸಿದರೆ $\phi: R \to R$ ಒಂದು ದ್ವೈಚಿತ್ರಣ. ಏಕೆಂದರೆ $y \in R$ ಆಗಿದ್ದರೆ $y = \phi(y-3)$. ಆದ್ದರಿಂದ ϕ ಒಂದು ಮೇಲ್ಚಿತ್ರಣ. ಹಾಗೆಯೇ $x_1+3=X_2+3$ ಆಗಿದ್ದರೆ $X_1 = X_2$: ಎಂದರೆ $\phi(x_1) = \phi(x_2) \quad x_1 = x_2$

$\therefore$ ϕ ಒಂದು ಒಳಚಿತ್ರಣ: $\therefore$ ϕ ಒಂದು ದ್ವೈಚಿತ್ರಣ: $\therefore$ ಅದು Rನ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ.

2 α ಒಂದು ಸಮತಲವೂ t ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯೂ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ $p \in \alpha$, α ದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ PM ಗೆ l ನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದು PM=MP' ಆಗುವಂತೆ PM ನ್ನು P' ಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಮತಲದರ್ಪಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಾಗ Pಯ ಬಿಂಬ ಬೀಳುವ ಬಿಂದುವೇ P' ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ರಚನೆಯಿಂದ a ದಲ್ಲಿ l ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಈ ಅನ್ವಯವನ್ನು $\lambda: a \to \alpha$ ಎಂದು ಬರೆದು $\lambda(P)=P'$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ ಈ λ ಎಂಬುದು α ದ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $P \in \alpha$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\lambda(\lambda(P)=P$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಇದರಿಂದ λ ಚಿತ್ರಣ ಮೇಲ್ಚಿತ್ರಣವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತು. ಮೇಲಾಗಿ $\lambda(P) = \lambda(Q)$ ಎಂದಿದ್ದರೆ $\lambda(\lambda(P) = \lambda(\lambda(Q))$



ಚಿತ್ರ 1

$\therefore P = Q$

$\therefore$ λ ಒಂದು ಒಳಚಿತ್ರಣ; $\therefore$ ಅದು ಒಂದು ದ್ವೈಚಿತ್ರಣ; $\therefore$ ಅದು ಸಮತಳ α ದ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ. ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲನ ಚಿತ್ರಣ (ರಿಫ್ಲೆಕ್ಷನ್ ಮ್ಯಾಪ್ಪಿಂಗ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3 ದತ್ತಸಮತಳ a ದಲ್ಲಿ o_x, o_y ಅಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ದತ್ತಬಿಂದು P ಯ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಎಂದರೆ a ದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೂ ಒಂದು ಕ್ರಮಯುಕ್ತ ನೈಜಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮ (x,y) ಏಕೈಕವಾಗಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ h ಮತ್ತು k ಗಳು ದತ್ತ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ a ದಿಂದ a ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರಣ θ ವನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸೋಣ.

$\theta: a \to \alpha$ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು $\theta(x,y) = (x+h, y+k)$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸೋಣ.

$\therefore (x,y) = \theta(x-h, y-k)$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ವೇದ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ $\theta(x-h, y-k) = ((x-h) + h, (y-k) + k)$

$= (x,y)$

$\therefore \theta: a \to a$ ಒಂದು ಮೇಲ್ಚಿತ್ರಣ.

ಮೇಲಾಗಿ $\theta(x,y) = \theta(x', y')$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ

$[(x+h, y+k) = (x'+h, y'+k)]$

[ಎಂದರೆ $x+h = x'+h$]

ಆದ್ದರಿಂದ $x = x'$ ಹಾಗೂ $y+k = y'+k$. ಆದ್ದರಿಂದ $y = y'$.

[ಎಂದರೆ $(x,y) = (x', y')$ ಎಂದಾಯಿತು.]

ಆದ್ದರಿಂದ $\theta: a \to a$ ಒಂದು ಒಳಚಿತ್ರಣ : ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು ಒಂದು ದ್ವೈಚಿತ್ರಣ : ಆದ್ದರಿಂದ a ದ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ. ಇದು ಸರಳ ಚಲನೆಗೆ (ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಲೇಷನ್) ಒಂದು ನಿದರ್ಶನ.

ಗ್ರೂಪುಗಳು : ಜ್ಯಾಮಿತಿ, ಗತಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಮುಂತಾದ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳು, ಆವರ್ತನೆಗಳು, ಸರಳಚಲನೆಗಳು. ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು (ಪ್ರೊಜೆಕ್ಷನ್ಸ್), ವಿಕಸನಗಳು (ಡೈಲೇಟೇಷನ್ಸ್), ಸ್ಪರ್ಶ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುವುದು ನಿತ್ಯಕರ್ತವ್ಯ. ಒಂದು ದತ್ತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ (ಎಂದರೆ ಒಂದು ಗಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿತವಾಗಿರುವ ಒಂದೋ ಎರಡೋ ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಗಣದ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗುಣಗಳು–ಇವುಗಳ ಒಂದು ಸಮಾಹಾರ) ಮೇಲೆ ಒಂದರ ತರುವಾಯ ಮತ್ತೊಂದರಂತೆ ಹಲವಾರು ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ. ಈ ವಿವಿಧ ವಿಶೇಷ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಒಂದೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನೂ ಅದರ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಧಾತುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಯೋಜನೆ ಹೊಂದುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ದೃಷ್ಟಿಸಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಕೆಲವು ಗೌಣವಾದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಲಕ್ಷಣಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಾಮ್ಯ ಎದ್ದು ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕೃತಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಅವುಗಳಿಗೂ ಅವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಧಾತು ಮತ್ತು ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೇವಲ ನಾಮವಿಶೇಷಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದು ಇವೆಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲೂ ಅಂತರ್ಗಾಮಿಯಾಗಿ ಪ್ರವಹಿಸುವ ಹಲವು ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳಿಂದ ಏಕರೂಪೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ತೆರನಾದ ಎರಡು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ನಾಮಮಾತ್ರದಲ್ಲಿ ವೈವಿಧ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಏಕೈಕತ್ವವನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಅಮೂರ್ತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಗ್ರೂಪುಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು (**ನೋಡಿ– ಗ್ರೂಪ್‌ಸಿದ್ಧಾಂತ**).

ವಲಯಗಳು ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳು (ರಿಂಗ್ಸ್ ಅಂಡ್ ಫೀಲ್ಡ್ಸ್) : ಚಿರಪರಿಚಿತವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ Z ನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ (+) ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ (X) ಎಂಬ ಎರಡು ದ್ವಿಗುಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿರುವುದು ತಿಳಿದೇ ಇದೆ; ಇವು ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ಸಂಕಲನಪರಿಕರ್ಮದಲ್ಲಿ Z ಒಂದು ಸಾಹಚರ್ಯ ಗ್ರೂಪ್. ಎಂದರೆ

1 Zನ ಎಲ್ಲ X,Y,Z ಗಳಿಗೂ ಸಾಹಚರ್ಯ ನಿಯಮ :

$(x+y) + z = x + (y+z)$ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

2 $x+y = y+x$ ಎಂಬ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ.

3 Zನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಧಾತು x ನೊಂದಿಗೂ $0 + x = x = x + 0$ ಆಗುವಂತೆ Z ನಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯ o ಇರುತ್ತದೆ.

4 $x \in Z$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇದರೊಂದಿಗೆ $(-x) + x = 0 = x + (-x)$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ (-x) ಸಹ Z ನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕರ್ಮದಲ್ಲಿ ಸಾಹಚರ್ಯ ನಿಯಮವಾದ $a X (bXc) = (aXb) X c$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧ Z ನ ಎಲ್ಲ a,b,c ಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಇವೆರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ವಿತರಣ ನಿಯಮಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವ

$a X (b+c) = aXb+aXc$ ಮತ್ತು

$(b+c) X a = bXa+cXa$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಬಂಧಿತವಾಗಿವೆ.

ಈ ಬಗೆಯ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ, ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧವಾದ ಗಣಿತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲೂ ಇದೇ ಬಗೆಯ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಎದ್ದುಕಾಣುತ್ತವೆ. ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಕ್ರೋಡೀಕರಿಸಿ ಮುಖ್ಯ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಲೆಕ್ಕಿಸಿಕೊಂಡು ಗೌಣವಾದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೈಬಿಟ್ಟು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ವಲಯಗಳು ಎಂಬ ಭಾವನೆ ಮೂಡಿ ಬರುತ್ತದೆ (**ನೋಡಿ– ಕ್ಷೇತ್ರ, ಬೀಜಗಣಿತೀಯ; ವಲಯಗಳು**).

ಸದಿಶ ಆಕಾಶಗಳು (ವೆಕ್ಟರ್ ಸ್ಪೇಸಸ್) : ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಗತಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಸಮಸ್ಥಿತಿಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ಶಾಸ್ತ್ರಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿತವಾಗುವ ವೇಗ, ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ, ಬಲ, ಸಂವೇಗ ಮುಂತಾದ ಭೌತರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲ್ಪಡುವ ಸರಳಚಲನೆ, ಆವರ್ತನೆ ಮುಂತಾದ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಅವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಅವುಗಳ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಸಾಲವು; ಅವು ವರ್ತಿಸುವ ದಿಶೆಗಳೂ ಅವುಗಳ ರಾಶಿಗಳಷ್ಟೇ ಮುಖ್ಯ. ಹೀಗೆ ದಿಶೆ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ರಾಶಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಏಕರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಸೃಷ್ಟಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ಆದರ್ಶಗಳಿಗೆ ಸದಿಶಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಇವನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರ್ತಿನಿಂದ ದಿಶೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸುವುದು ಸುಲಭವೂ ವಾಡಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಾರ್ಗವೂ ಆಗಿದೆ. ದತ್ತ ಅಳತೆಯುಳ್ಳ ಗೊತ್ತಾದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಎಲ್ಲ ರೇಖಾಖಂಡಗಳೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸದಿಶವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಒಂದು ಸದಿಶಕ್ಕೆ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ದಿಶೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ; ಸ್ಥಾನನಿರ್ಬಂಧ ಇರುವುದಿಲ್ಲ (**ನೋಡಿ– ಸದಿಶಗಳು**).

ಅಮೂರ್ತಗಣಿತದ ಮೂರ್ತ ಆದರ್ಶಗಳು. ಅಭಿಗೃಹೀತ ಇಲ್ಲವೇ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಾಮಂಜಸ್ಯ (ಕನ್ಸಿಸ್ಟೆನ್ಸಿ ಆಫ್ ಎ ಪಾಸ್ಚ್ಯುಲೇಟ್ ಸಿಸ್ಟಂ). ಒಂದು ಗಣಿತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಬೇಕಾದ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಿವು: 1. ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳು ಎಂಬ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗದ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಕೆಲವು (ಪಾರಿಭಾಷಿಕ) ಶಬ್ದಗಳು; 2. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇವುಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವ ಹಲವು ಮೂಲವಾಕ್ಯಗಳು ಇವನ್ನು ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಸೂಚನೆ: ಇವು ಸರಿಯೇ ತಪ್ಪೇ ಅಥವಾ ಇವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಏಳುವುದಕ್ಕೂ ಮಾರ್ಗವಿಲ್ಲ.) ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಬೇಕಾದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು (1) ಮತ್ತು (2) ರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕ ನಿಗಮನದಿಂದ (ಲಾಜಿಕಲ್ ಡಿಡಕ್ಷನ್) ಈ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವೆಲ್ಲ ಸೇರಿ ದೊರೆಯುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಒಂದು ಗಣಿತವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಹೀಗಾಗಿ ಒಂದು ಗಣಿತವ್ಯವಸ್ಥೆ ನಿರ್ಮಿತವಾಗಿರುವ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳು ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಬಹು ಪ್ರಧಾನವಾದ ಘಟಕಗಳು. ಇವು ಹಲವು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರಬೇಕು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಲಕ್ಷಣವೇನೆಂದರೆ ಸಾಮಂಜಸ್ಯ ಎಂದರೆ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳ ಒಂದು ಸಮಾಹಾರದ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ನಿಷೇಧಗಳಾದ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಸಿದ್ಧಿಸಬಾರದು. ಹಾಗಾದರೆ ದತ್ತ ಗಣಿತವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತ ಗಳು ಸಮಂಜಸವೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ತಾನೇ ಹೇಗೆ? ಕುರ್ಟ್‌ಗೊಯ್ಡಲ್ ಎಂಬ ಪ್ರಖ್ಯಾತನಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ದತ್ತ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳ ಸಾಮಂಜಸ್ಯವನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾನೆ (1931).

ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಮಂಜಸ್ಯ (ರಿಲೆಟಿವ್ ಕನ್ಸಿಸ್ಟೆನ್ಸಿ) ಎಂಬ ಒಂದು ನವೀನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ದತ್ತಗಣಿತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಅಂಶದಲ್ಲೂ ಹೋಲುವಂಥ ಒಂದು ಮೂರ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ದತ್ತ ಗಣಿತವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಒಂದು ಮೂರ್ತ ಆದರ್ಶ (ಕಾಂಕ್ರೀಟ್ ಐಡಿಯಲ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈಗ ಈ ಆದರ್ಶ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುವುದೋ ಅಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ದತ್ತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳ ಆವಿರ್ಭಾವ : ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಥಮ ಗಣಿತ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕನಾಗಿದ್ದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ಸುಲಭ ಪಾಠಗಳು (ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್) ಎಂಬ 13 ಭಾಗಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಬೃಹತ್ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಆಗಿನ ಕಾಲದವರೆಗೆ ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿದ್ದ ಗಣಿತವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಕ್ರೋಡೀಕರಿಸಿ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈಗ ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಿರುವ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿಯೇ ವಿಷಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಅಳವಡಿಸಿದ. ಈ ಸುಲಭ ಪಾಠ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ, ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮುಂತಾದ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರಗಳೂ ಇವುಗಳ ಸುಲಭಪ್ರಯುಕ್ತಿಗಳೂ ಪ್ರತಿಪಾದಿತವಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಈಚೆಗೆ ನಾಮಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಮೂಲಾಧಾರವಾಗಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ 23 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು (ಡಿಫಿನಿಷನ್ಸ್), 5 ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳು ಮತ್ತು 5 ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು (ಆ್ಯಕ್ಸಿಯಂಸ್) ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುತ್ತಾನೆ. ಇವುಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತಾನು ಸಾಧಿಸಿರುವುದಾಗಿ ಆತ ಭಾವಿಸಿದ್ದ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪ್ರಯತ್ನದ ಫಲವಾದ ಸುಲಭಪಾಠಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮಾದವಶಾತ್ ಕೆಲವು ಲೋಪದೋಷಗಳು ನುಸುಳಿಕೊಂಡು ಬಂದಿರುವುದೇನೂ ಆಶ್ಚರ್ಯದ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲ. ಇವನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಲು ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಮಂದಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದರು. ಇವರಲ್ಲಿ ಅಗ್ರಗಣ್ಯನಾದ ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ (**ನೋಡಿ– ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್, ಡೇವಿಡ್**) ಎಂಬಾತ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಲೋಪದೋಷರಹಿತವಾದ ಭದ್ರ ಅಡಿಪಾಯವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ಇದನ್ನು ತನ್ನ '**ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಡಿಪಾಯಗಳು**' (ಫೌಂಡೇಶನ್ಸ್ ಆಫ್ ಜಮಿಟ್ರಿ) ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ. ಆದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಮಹಾಕೃತಿಯನ್ನು ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವಿಮರ್ಶಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಹಿಂದೆ, ಎಂದರೆ 1200–1800 ಕಾಲದಲ್ಲಿ, ಗಣಿತಜ್ಞರ ಗಮನ ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತದ ಕಡೆಗೆ ಸೆಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಅದರ ನಿರೂಪಣೆ ಹೀಗಿದೆ : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಈ ಒಳಕೋನಗಳಿರುವ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿಯೇ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗಾದರೂ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂದು ಹೇಳುವ 1ನೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತದೊಂದಿಗೋ, ಎಲ್ಲ ಲಂಬಕೋನಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎನ್ನುವ 4ನೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತದೊಂದಿಗೋ ಹೋಲಿಸಿದರೆ 5ನೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತ ಇವುಗಳಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆಗಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಅಡಿಪಾಯಗಳು ಭೌತ ಪ್ರಪಂಚದ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸತ್ಯಗಳೆಂದೂ ಅವು ಬಲು ಸರಳವೂ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯಿಂದ ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಶೀಘ್ರಗ್ರಾಹ್ಯವಾಗಿರ ಬೇಕೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿದ್ದರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದಂತೆ ಕಂಡುಬಂದ 5ನೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತವನ್ನು ಉಳಿದವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಅನೇಕರು ಮುಂದೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ವಿಫಲರಾದರು. ಜಾನ್ ಪ್ಲೇಫೇರ್ (1748–1819) ಎಂಬಾತ ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ವಾಕ್ಯವನ್ನು 5ನೆಯ ಅಭಿಗೃಹೀತವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ. ಇದು, ದತ್ತಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ, ಅದರ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, ಏಕೈಕವಾದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಉಂಟು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೂ ಉಳಿದ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು 18–19ನೆಯ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಬೇರೆ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಹಿಡಿದರು. ಈ ಅಭಿಗೃಹೀತಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಅದನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುವಂತೆ ದತ್ತರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸದಂತೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಉಂಟು ಎಂದೂ ಅಂಥ ರೇಖೆ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ ಎಂದೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ತಾರ್ಕಿಕ ನಿಗಮನದಿಂದ ಅಸಾಮಂಜಸ್ಯವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಇವೆರಡೂ ಅಸಂಬದ್ಧವೆಂದು ವರ್ಜಿಸಿ ತನ್ಮೂಲಕ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಅಭಿಗೃಹೀತ ಅನಿವಾರ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆದುವು.

ಮೊದಲನೆಯ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹೊರಟವರಲ್ಲಿ ಜರ್ಮನಿಯ ಗೌಸ್ (1777–1855) ಹಂಗರಿಯ ಬೋಲ್ಯಾಯ್ (1802–60) ಮತ್ತು ರಷ್ಯದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಲೊಬಚೆವ್ಸ್ಕಿ (1773–1856) ಎಂಬವರು ಅಗ್ರಗಣ್ಯರು. ಆದರೆ ಇವರು ಯೋಚಿಸಿದಂತೆ ಅಸಾಮಂಜಸ್ಯ ವೇನೂ ಕಂಡುಬರಲಿಲ್ಲ; ಬದಲಾಗಿ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯವಲ್ಲದ, ಆದರೆ ಅದರಷ್ಟೇ ಸಮಂಜಸ ವಾದ, ಒಂದು ಹೊಸ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಈ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ದೊರೆಯಿತು: ಇದನ್ನು ಲೊಬಚೆವ್ಸ್ಕಿಯ ಹೈಪರ್‌ಬಾಲಿಕ್ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಎರಡನೆಯ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹೊರಟ ರೀಮಾನ್ (1826–66) ಎಂಬ

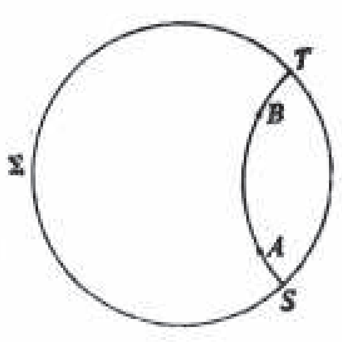
ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮತ್ತೊಂದು ಬಗೆಯ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರಚಾರಪಡಿಸಿದ; ಈತ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಅಡಿಪಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮುಖ್ಯವಾದ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ.

1 ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಆದ್ಯಂತವಿಲ್ಲ : ಪ್ರತಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಉದ್ದವೂ ಸಾಂತ.

2 ದತ್ತರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸದಂತೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಯಾವ ರೇಖೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈತನ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲೂ ಅಸಾಮಂಜಸ್ಯ ತೋರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಉದ್ಭವಿಸಿತು. ಇದನ್ನು ರೀಮಾನನ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿ ಮತ್ತು ರೀಮಾನರ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ ಇವುಗಳಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಮಂಜಸ್ಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ್ದಾರೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿಯ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಹೆನ್ರಿ ಪೋಂಕಾರೆಯ ವೃತ್ತ ಆದರ್ಶ : Σ ಎಂಬುದು ದತ್ತವೃತ್ತವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 2).



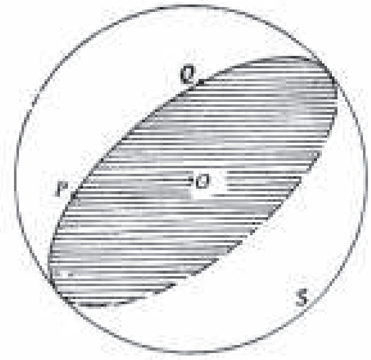
ಚಿತ್ರ 2

ಇದಕ್ಕೆ ಮೂಲವೃತ್ತವೆಂದು ಹೆಸರು. ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿಯ ಸಮತಳದ (L – ಸಮತಳದ) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಈ ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು L – ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೂಲವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಸಂಧಿಸಿ ಅದರ ಒಳಗೆ ಸೇರಿರುವ ಸರಳರೇಖೆ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಗಳ ಖಂಡಗಳಿಂದ L– ಸಮತಳದ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಆದರ್ಶದಲ್ಲಿ L - ಸರಳರೇಖೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು Bಗಳು ಎರಡು L ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ಇವೆರಡರ ನಡುವಿನ L– ಉದ್ದವನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ: A ಮತ್ತು B ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾಯ್ದು Σ ವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತವಿರುತ್ತದೆ. ಇದು Σ ವನ್ನು S ಮತ್ತು Tಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈಗ A ಮತ್ತು Bಗಳ ನಡುವಿನ L – ಉದ್ದವನ್ನು AB ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ AT ಮುಂತಾದವನ್ನು ಆಯಾ ಖಂಡದ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಉದ್ದಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸಿದೆ. ಪರಸ್ಪರ ಛೇಧಿಸುವ ಎರಡು L– ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಾಧಾರಣ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನೇ L – ಕೋನದ L– ಅಳತೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು L – ರೇಖಾಖಂಡಗಳ L– ಉದ್ದಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅವೆರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವೆಂದು (ಕಾಂಗ್ರುಯೆಂಟ್) ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದೇ L– ಅಳತೆಯುಳ್ಳ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಈಗ L– ಸಮತಳದ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಧಾತುಗಳ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಆದರ್ಶವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾಯಿತು.

ಈ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿಯ ಸಮತಳ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಒಂದೊಂದು ಅಂಶಕ್ಕೂ ಹೊಂದಿದಂತೆ ನಮ್ಮ ಆದರ್ಶದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾದ ಒಂದು ಅಂಶ ಅನ್ವಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಅರ್ಥವಿಶೇಷಗಳಲ್ಲಿ ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಈ ಆದರ್ಶದ ವಿವಿಧ ಅಂಶಗಳು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಡಬಹುದು. ಹೀಗಾದ ಮೇಲೆ ಈ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಒಂದೊಂದು ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೂ ಅನುಸಾರವಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಒಂದೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ ನಮ್ಮ ಆದರ್ಶದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯೂಕ್ಲೀಡಿಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಡಿಪಾಯಗಳು ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುತ್ತವೆಯೋ ನಿಖರವಾಗಿ ಅಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಡಿಪಾಯಗಳೂ ಸಮಂಜಸವಾಗಿ ರುತ್ತವೆ ; ಎಂದರೆ ಪೋಂಕಾರೆಯ ವೃತ್ತ ಆದರ್ಶದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಲೊಬಚೇವ್ಸ್ಕಿಯ ಸಮತಲೀಯ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಮಂಜಸ್ಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ರೀಮಾನ್‌ನ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಗೋಳ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂರ್ತ ಆದರ್ಶ: ರೀಮಾನನ ಸಮತಳವನ್ನು (R–ಸಮತಳವನ್ನು) ದತ್ತಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ S ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. R- ಸಮತಳದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು S ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಸಮತಳಗಳು ಗೋಳವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3

ಇವುಗಳಿಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಮಹಾವೃತ್ತಗಳು (ಗ್ರೇಟ್ ಸರ್ಕಲ್ಸ್) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಇವುಗಳಿಂದ R–ಸಮತಳದ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. P ಮತ್ತು Qಗಳು ಎರಡು R– ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದರೆ P,Qಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಗೋಳದ ಮೇಲಿನ ಮಹಾವೃತ್ತದ ಲಘುಖಂಡದ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಉದ್ದವನ್ನು P ಮತ್ತು Qಗಳ ನಡುವಿನ R- ದೂರವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ತ್ರಿಕೋನ ಮುಂತಾದ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳು ಈ ಆದರ್ಶದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ R ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಒಂದು ಮೂರ್ತಾದರ್ಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಆದರ್ಶದಲ್ಲಿ R- ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮತಳ ಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳೂ ಪಾಲಿತವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ R- ಸಮತಳೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಷ್ಟೇ ಸಮಂಜಸವಾಗಿದೆ; ಅರ್ಥಾತ್ ರೀಮಾನನ ಸಮತಳೀಯ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಭಿಗೃಹೀತಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಮಂಜಸ್ಯ ವನ್ನು ಈ ಆದರ್ಶದ ನೆರವಿನಿಂದ ಸಾಧಿಸಲಾಯಿತು. (ಡಿ.ವಿ.ಆರ್.)

ಗಣಿತ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು : ಗಣಿತ ನಿಯಮಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಶಿಷ್ಟಯಾದಿಗಳು (ಮ್ಯಾತ್‌ಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಟೇಬಲ್ಸ್). ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಜ್ಯಾ (ಸೈನ್) ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಲಘುಗಣಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ. ಚರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನೂ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡವಾಗಿಯೂ ನೀಟವಾಗಿಯೂ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿರುವುದು. ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ತಯಾರಿಕೆಗೆ ಅಧಿಕವಾದ ಕಾಲ ಹಾಗೂ ಶ್ರಮ ವೆಚ್ಚವಾಗುವುವಾದರೂ ಒಮ್ಮೆ ಅವನ್ನು ರಚಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಅವು ಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲೂ ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುವಾಗಿ ಕಾಲ ಮತ್ತು ಶ್ರಮಗಳನ್ನು ಇಳಿಸಿ ಸದಾ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವುವು. ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಪಂಚದ ಇಂದಿನ ಮುನ್ನಡೆಯಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಸ್ಥಾನ ಉಂಟು. ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಕೆಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ. ನೇಪಿಯರ್ ಮತ್ತು ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ತಯಾರಿಸಿದ ಲಘುಗಣಕ (ಲಾಗರಿತಂಸ್) ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರಗಳಿಗೂ ಅಲ್ಲದೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕೂಡ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತವೆ. ಲಘುಗಣಕಗಳ ಗುಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತವೆ. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್, ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್, ಲಾಗರಿತ್ಮಿಕ್ ಸೈನ್ ಇತ್ಯಾದಿ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಶಿಲ್ಪಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿವೆ. ಸಂಖ್ಯಾಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ರೇಖೆಯ (ನಾರ್ಮಲ್ ಕರ್ವ್) ಸಲೆ ಮತ್ತು ಕೋಟಿಗಳನ್ನು (ಆರ್ಡಿನೇಟ್ಸ್) ಸೂಚಿಸುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಸ್ಟೂಡೆಂಟರ t– ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, x^2– ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುವು. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಬೀಟ ಮತ್ತು ಗ್ಯಾಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಿರುವುವು. ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳೂ ಬೆಸೆಲ್ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಲಝಾಂಡರ್ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮುಂತಾದ ಅನೇಕಾನೇಕ ಕೋಷ್ಟಕಗಳೂ ಗಣಿತದ ಹಾಗೂ ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಅನೇಕ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿವೆ.

ಇತಿಹಾಸದ ಅತಿ ಪ್ರಾಚೀನ ದಾಖಲೆಗಳಲ್ಲೂ ಗಣಿತಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಕಂಡುಬಂದಿವೆ. ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ 2000ದಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರ ದಾಖಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಹಾಗೂ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ(ರೆಸಿಪ್ರೋಕಲ್) ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು

ಕಾಣಲಾಗಿದೆ. ಆಧುನಿಕ ಅರ್ಥದ ಮೊದಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕ್ಲಾಡಿಯಸ್ ಟಾಲೆಮಿ (ಪ್ರ.ಶ.ಸು. 127–151ರಲ್ಲಿ ಇದ್ದನೆಂದು ಊಹೆ) ತಯಾರಿಸಿದ ಆಲ್ಮಾಜೆಸ್ಟ್ **(ನೋಡಿ)** ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು, ಅರ್ಧ ಡಿಗ್ರಿ ಅಂತರದಲ್ಲಿ, ಆರು ಸ್ಥಳಗಳ ಸನ್ನಿಹಿತತೆವರೆಗೆ ಈ ಗ್ರಂಥದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಟಾಲೆಮಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಷಷ್ಟಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು (ಸೆಕ್ಸಜೆಸಿಮಲ್ ಸಿಸ್ಟಂ). ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿಯೂ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇಂಥವು ಪಂಚಸಿದ್ಧಾಂತಿಕ (ಪ್ರ.ಶ. ಸು 505) ಹಾಗೂ ಆರ್ಯಭಟೀಯ (ಪ್ರ.ಶ. ಸು 500) ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟ ಗಣನೆಗಳಿಂದ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅವೆಷ್ಟು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ಕೋನಗಳು θ	ಪಂಚದರ್ಶಿಕ ರೀತ್ಯಾ ಗಣಿಸಿದ sinθ ದ ಬೆಲೆ	ಆರ್ಯಭಟೀಯ ರೀತ್ಯಾ ಗಣಿಸಿದ sin θ ದ ಬೆಲೆ	ಆಧುನಿಕ ರೀತ್ಯಾ sin θ ದ ಬೆಲೆ
3^0 45’	0.06542	0.06545	0.0654
11^0 15’	0.1951	0.1952	0.1951
15^0	0.2589	0.2589	0.2588
22^0 30’	0.3827	0.3824	0.3827
30^0	0.5000	0.5000	0.5000
45^0	0.7071	0.7071	0.7071
52^0 30’	0.7934	0.7936	0.7934
86^0 15’	0.9979	0.9979	0.9979
90^0	1.0000	1.0000	1.0000

ಹೀಗೆ ಗಣಿತ ಕೋಷ್ಟಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಪ್ರಾಚೀನವಾದ ಇತಿಹಾಸವಿದ್ದರೂ ಇವುಗಳ ವ್ಯಾಪಕ ನಿರ್ಮಾಣ ಹಾಗೂ ಕ್ರೋಡೀಕರಣ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಆರಂಭವಾದದ್ದು 15ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ. ನೈಸರ್ಗಿಕ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ಜಾರ್ಜ್ ಪೂರ್ಬಾಕ್ (1423–61), ಸೈನ್ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಒಂದೊಂದು ಮಿನಿಟ್ ಅಂತರಕ್ಕೂ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟವಾಗಿ ಗಣಿಸಿದ ಈತನ ಶಿಷ್ಯ ಯೋಹಾನ್ ಮ್ಯುಲ್ಲರ್(1436–76), ಸೈನ್ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶದ ಐದು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೂ ಗಣಿಸಿದ ನಿಕೋಲಸ್ ಕೋಪರ್ನಿಕಸ್ (1473–1543) ಇವರ ಹೆಸರುಗಳು ಉಲ್ಲೇಖಾರ್ಹ. ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಮೊದಲ ಕೋಷ್ಟಕ ಪ್ರಕಟವಾದದ್ದು 1553ರಲ್ಲಿ. ಅದೇ ಸುಮಾರಿಗೆ ಸೀಕೆಂಟುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಕೋಷ್ಟಕವೂ ಪ್ರಕಟವಾಯಿತು. ಕೋಷ್ಟಕನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಿಮಾಲಯಸದೃಶ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿ ಅದರ ಬಹುಪಾಲನ್ನು ಪೂರೈಸಿದವರು ರೆಟಿಕಸ್, ಅತ್ತೋ ಮತ್ತು ಪಿಟಿಸ್ಕಸ್. ಕೊಪರ್ನಿಕಸ್‌ನ ಶಿಷ್ಯ ಜಾರ್ಜ್ ಜೋಕಿಮನನ್ನು (1514–76) ರೆಟಿಕಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಕಂಸದ ಪ್ರತಿ 10 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಅಂತರಕ್ಕೆ 15 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಳಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗಣಿಸುವ ಮಹಾಕಾರ್ಯವನ್ನು ಈತ ಕೈಗೊಂಡ. ಇಷ್ಟು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ. ಪಾದದ (ಕ್ವಾಡ್ರಂಟ್) ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಗಳ ಒಂದೊಂದು ಸೆಕೆಂಡ್ ಅಂತರಕ್ಕೂ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗಣಿಸುವುದು ಕೂಡ ಅವನ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿತ್ತು. ಈತ ಸೈನ್ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರೈಸಿ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಹಾಗೂ ಸೀಕೆಂಟ್ ಕೋಷ್ಟಕ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಕೈ ಹಾಕಿದ. ಆದರೆ ಇದು ಮುಗಿವ ಮೊದಲೇ ತೀರಿಕೊಂಡ. ಹಲವಾರು ಗಣನಕಾರರನ್ನು ಹನ್ನೆರಡು ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ರೆಟಿಕಸ್ ನೇಮಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದನಂತೆ. (ಇಂದಾದರೆ ಇಂಥ ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ ಬಲು ಜಟಿಲ ಗಣನೆಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟವಾಗಿಯೂ ಚುರುಕಾಗಿಯೂ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಮಾಡಬಲ್ಲವು.) ರೆಟಿಕಸ್‌ನ ಶಿಷ್ಯ ಮತ್ತು ಸಹೋದ್ಯೋಗಿ ವ್ಯಾಲೆಂಟೀನ್ ಅತ್ತೋ (ಸು. 1550–1605) ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿದ.

ಜಾನ್ ನೇಪಿಯರ್ (1550–1617) ಲಘುಗಣಕಗಳ (ಲಾಗರಿತಂಸ್) ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಸ್ಕಾಟ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ (1614). ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ *e*. ಜೂಸ್ಟ್ ಬೂರ್ಗಿ (1552 – 1632) ಪ್ರತಿಲಘುಗಣಕಗಳ (ಆ್ಯಂಟಿ ಲಾಗರಿತಂಸ್) ಒಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪ್ರೇಗಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ (1620) ಈ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಂದ ಗಣಿತೀಯ ಗಣನೆಗೆ ಲಭಿಸಿ ಕುಮ್ಮಕ್ಕು ಅಸಾಧಾರಣ ಮಟ್ಟದ್ದು. ಇವನು ಆಧಾರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ 10 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡ. ಲಘುಗಣಕಗಳ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದವ ಹೆನ್ರಿ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ (1561–1631). 1624ರಲ್ಲಿ ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ಪ್ರಕಟವಾಯಿತು.

ವಿಜ್ಞಾನ ಬೆಳೆದಂತೆ, ನವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಸೃಷ್ಟಿಯಾದಂತೆ, ನೂತನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತೀವ್ರವಾಗಿ ಏರತೊಡಗಿತು. ಒಂದು ಶತಮಾನದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಶತಮಾನಕ್ಕೆ ಈ ಏರಿಕೆ ಕಡಿದಾಗಿದೆ. ಪ್ರಸಕ್ತ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ಹಿಂದೆ ರಚಿತವಾಗಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಸಮಗ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಹಲವಾರು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚು. ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಹೇಗೋ ಹಾಗೆ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲೂ ಈಗ ವಿಶಿಷ್ಟೀಕರಣ ತಲೆದೋರಿದೆ. ಇಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಗ್ರಂಥಸೂಚಿ ತೀರ ಆವಶ್ಯಕ. ಅಮೆರಿಕ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳ ನ್ಯಾಷನಲ್ ರಿಸರ್ಚ್ ಕೌನ್ಸಿಲ್ ಒಂದು ತ್ರೈಮಾಸಿಕವನ್ನು (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಟೇಬಲ್ಸ್ ಅಂಡ್ ಅದರ್ ಏಡ್ಸ್ ಟು ಕಾಂಪ್ಯುಟೇಷನ್) ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ಆಗಾಗ ಪ್ರಕಟವಾಗುವ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲೂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ವಿವರಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(ಆರ್.ಆರ್.ಯು.)

ಗಣಿತ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ : ವಿವೇಚನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಭಾವಲೇಖಗಳ (ಐಡಿಯೋಗ್ರಾಫ್ಸ್) ಹಾಗೂ ಪ್ರತೀಕಗಳ (ಸಿಂಬಲ್ಸ್) ನೆರವಿನಿಂದ ಅನ್ವೇಷಿಸುವ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಭಾಗ; ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ ಎಂದು ಸಹ ಹೆಸರುಂಟು (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಲಾಜಿಕ್; ಸಿಂಬಾಲಿಕ್ ಲಾಜಿಕ್). ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ವಿಷಯ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ. ಆದರೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಪದಗಳನ್ನು (ಪದಗಳನ್ನೂ ಪದಸಮೂಹಗಳಾದ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನೂ ಉಚ್ಚರಿಸಿ ಇಲ್ಲವೇ ಬರೆದು ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಕ್ರಮ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ – ನಾಲ್ಕನ್ನು ಮೂರರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಆಗ ಹನ್ನೆರಡು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.) ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಮಾತಾಡಬೇಕಾದ ವಿಷಯವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಪ್ರತೀಕೀಕರಿಸುವ ಭಾವಲೇಖಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ ಮುಂತಾದ ಭಾವಲೇಖಗಳು; ಮತ್ತು p, q, r, s ಮುಂತಾದ ಉಕ್ತಿ ನಿರೂಪಕ ಪ್ರತೀಕಗಳು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಮೊದಲು ಹೇಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಉಕ್ತಿ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಸ್ಪಷ್ಟ ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಮಾತು ಹೇಳಬೇಕು. ಯಾವುದೇ ಭಾವನೆ, ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಮುಂತಾದವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ವಾಕ್ಯ ಇಲ್ಲವೇ ಉದ್ಗಾರ ಹೇಳಿಕೆ; ಸುವ್ಯಾಖ್ಯಿತ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ನಿಜ ಇಲ್ಲವೇ ಸುಳ್ಳು ಆಗಿರುವ ಹೇಳಿಕೆ ಮಾತ್ರ ಉಕ್ತಿ.

1. ತುಂಬ ಸಂತೋಷ
2. ಸಿದ್ದಾರ್ಥ ಬುದ್ಧನಾಗುವ ರಾತ್ರಿ
3. ಸೋಮವಾರದ ಮರುದಿನ ಮಂಗಳವಾರ
4. ಮೂರಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಫಲ ಒಂಬತ್ತು
5. ಮೈಸೂರು ಭಾರತದಲ್ಲಿದೆ

ಮೇಲಿನ ಐದು ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ (3), (4), (5) ಮಾತ್ರ ಉಕ್ತಿಗಳು. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ (4)ನೆಯದು (ದಶಮಾನದ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ) ಸುಳ್ಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಇಂಥ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆಡುಮಾತಿನಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ ಎರಡು ವಿಧದ ತೊಂದರೆಗಳಿವೆ: ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿರುವ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವದ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯ ಸಾಕಷ್ಟು ಹರಿಯುವುದಿಲ್ಲ: ಹೀಗಾಗಿ ಗಣಿತದ ವಿಕಾಸ ಆಗಲಾರದು. ಎರಡು, ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತತೆ ಲುಪ್ತವಾಗಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉಕ್ತಿಗಳು ಪ್ರತೀಕಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಹೀಗೆ ಗಣಿತ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ p, q, r, s ಮುಂತಾದ ಪ್ರತೀಕಗಳು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ (3)ನ್ನು p ಯೂ (4)ನ್ನು q ವೂ (5)ನ್ನು r ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೊಸ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

p : ನಾಲ್ಕು ಐದಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ

q : ಐದಕ್ಕೆ ಆರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಫಲ ಹನ್ನೆರಡು

r : ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಏಳು ದಿವಸಗಳಿವೆ

s : ವಾಲ್ಮೀಕಿಯನ್ನು ಆದಿಕವಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ

ಇಲ್ಲಿ p ನಿಜ, q ಸುಳ್ಳು, r ನಿಜ, s ನಿಜ. ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಗೆ ಅದರ ನಿಜಮೌಲ್ಯ (ಟ್ರೂತ್ ವ್ಯಾಲ್ಯೂ) ಎಂದು ಹೆಸರು. ನಿಜಮೌಲ್ಯ ನಿಜವಾದಾಗ

ಅದನ್ನು 1 (ಒಂದು) ಪ್ರತೀಕದಿಂದಲೂ, ಸುಳ್ಳಾದಾಗ ಅದನ್ನು 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಪ್ರತೀಕದಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ p ಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 1, q ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 0, r ನ ನಿಜ ಮೌಲ್ಯ 1 ಮತ್ತು s ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 1.

ಗಣಿತ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಭಾವಲೇಖಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತೀಕಗಳು ಹೊಸ ಒಂದು ಲೋಕವನ್ನೇ ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳಿಂದ ಲಭಿಸುವ ಅನುಮಾನಗಳು (ಇನ್ಫರೆನ್ಸಸ್) ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನಗಳು (ಕನ್‌ಕ್ಲೂಷನ್ಸ್) ಈ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಹೊಸ ಆಯಾಮಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿವೆ. ಗಣಿತ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಾರಭೂತವಾದ ಲಕ್ಷಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎಂದರೆ ಅದರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆ (ಜನರ್‍ಯಾಲಿಟಿ). ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ತ್ವಗಳು ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥದಲ್ಲೂ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ ಹಾಗೂ ರಾಶಿಯೊಡನೆ (ಕ್ವಾಂಟಿಟಿ) ವ್ಯವಹರಿಸುವ ಪರಿಮೇಯ ಪ್ರಕ್ರಮಕ್ಕೆ (ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಪ್ರೊಸೀಜರ್) ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ಗುರುತು ಅದರ ಕ್ರಮೀಕೃತ ಯಂತ್ರಾವಳಿಯಾದರೂ (ಫಾರ್ಮಲ್ ಮಷಿನರಿ) ಈ ಪ್ರತೀಕಗಳೂ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳೂ ವಾಸ್ತವವಾದ ಹಾಗೂ ಪ್ರಬಲವಾದ ಸೌಕರ್ಯಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ. ಸಂಜ್ಞೀಕರಣದಲ್ಲಿ (ನೊಟೇಷನ್) ಸಾಧಿಸಲಾದ ಸುಧಾರಣೆಗಳಿಂದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮುನ್ನಡೆಯ ಮೇಲೆ ಮಹತ್ತರವಾದ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ. ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಒಂಟಿ ಪ್ರತೀಕ 0 ಯಿಂದ ಅಂದಿನ ಗಣಿತದ ಮೇಲೆ ಆದ ಪ್ರಭಾವದಷ್ಟೇ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾದದ್ದು ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಭಾವ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತದ ಮೇಲೆ. ಇದರಿಂದ ದೊರೆತ ಹೊಸ ಆಯುಧಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಹೊಸ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಿ ನೂತನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ, ಗ್ರೂಪ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತ, ವಿಶ್ಲೇಷಣಶಾಸ್ತ್ರ, ಟಾಪಾಲಜಿ ಇಲ್ಲೆಲ್ಲ ಗಣಿತತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನಗಳು ಹಾಸುಹೊಕ್ಕಾಗಿ ಬೆರೆತು ಹೋಗಿವೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇನ್ನಿತರ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ನಿಗಮನ ಅಥವಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೂಲಭೂತ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ನಿರತರಾಗಿದ್ದಾಗ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿವೇಚನೆಯ ಜಟಿಲ ಸ್ವರೂಪದ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನದ ಸಾಧುತ್ವವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು, ಆರಿಸ್ಟಾಟಲನ ತಾರ್ಕಿಕ ಪರೀಕ್ಷಾ ಕ್ರಮಗಳು (ಸಿಲ್ಲಿಜಿಸಂಸ್) ಮತ್ತು 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಉತ್ತರಾರ್ಧಕ್ಕೂ ಮುನ್ನ ವಿವರಿಸಿದ ತರ್ಕ ತತ್ತ್ವಗಳು ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನ ವಿಧಾನಗಳು ಸಾಲವು ಎಂಬುವುದನ್ನು ಮನಗಂಡರು. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಿಂದಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಹೊಸ ತೀರ್ಮಾನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ರೂಪಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತೊಡಗಿದರು. ವಿಶೇಷ ಭಾವಲೇಖಗಳನ್ನು ವಿಪುಲವಾಗಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪಕಾರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೇ ತಾರ್ಕಿಕ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು, ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವಿವೇಚನಾಪರಂಪರೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಗಣಿತ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಪೀಠಿಕೆ ಹಾಕಿದರು. ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಗೋಟ್ಲಬ್ ಫ್ರೇಜ್ (1848–1925) ಎಂಬಾತನನ್ನು ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪಿತಾಮಹ ಎನ್ನುವರು. ಇದರ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಜಿ. ಪಿಯಾನೊ (1858–1932), ಬರ್ಟ್ರಂಡ್ ರಸಲ್ (1872–1970), ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲ್ (1815–64), ಕುರ್ಟ್ ಗೊಯ್ಡಲ್ (1906–78), ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ (1862–1943) ಮತ್ತು ಎ. ಟಾರ್ಸ್ಕಿ ಇವರ ಕೊಡುಗೆಗಳು ಮಹತ್ತ್ವವಾದವು. ಭಾವಲೇಖೀಯ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಜಟಿಲವಾದ ವಿವೇಚನೆಗಳನ್ನು ಅಡಕವಾಗಿ ರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಅಲ್ಲದೆ ಭಾಷಾನಿರೂಪಣೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುವ ದ್ವಂದ್ವಾರ್ಥ ಮತ್ತು ಅಸ್ಪಷ್ಟತೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತಡೆಗಟ್ಟಬಹುದು. ಅರ್ಥವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಿಂದ ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತಾರ್ಕಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತಾರೆ. ಕೇವಲ ಕೆಲವನ್ನು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳೆಂದು (ಆ್ಯಕ್ಸಿಯಂಸ್) ಅಂಗೀಕರಿಸಿ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವ ತಾರ್ಕಿಕವಾದ ನಿಜ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿತವಾದ ತೀರ್ಮಾನ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ಪಡೆಯುವುದು ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನ. ಇಂಥ ಒಂದು ಸಿದ್ಧಾಂತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಲಾಜಿಸ್ಟಿಕ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಕೆಲವು ಅವ್ಯಾಖ್ಯಿತ ಮೂಲ ಭಾವಲೇಖಗಳು, ಸುರೂಪಿತ ಸೂತ್ರಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತೀಕಗಳು, ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅನುಮಾನ ನಿಯಮಗಳು ಒಂದು ಲಾಜಿಸ್ಟಿಕ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಸುರೂಪಿತ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಾಧನೆ ಸುರೂಪಿತ ಸೂತ್ರಗಳ ಒಂದು ಪರಂಪರೆ. ಈ ಪರಂಪರೆಯ ಸೂತ್ರಗಳು ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಪೂರ್ವಸಾಧಿತ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ತೀರ್ಮಾನ ನಿಯಮದ ಅನ್ವಯದಿಂದ ದೊರೆತ ಸುರೂಪಿತ ಸೂತ್ರಗಳು. ಈ ಪರಂಪರೆಯ ಅಂತ್ಯವಾಕ್ಯವೇ ಪ್ರಮೇಯ. ಮೊದಲನೆಯ ಲಾಜಿಸ್ಟಿಕ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದಾತ ಜಿ. ಫ್ರೇಜ್. ಈತ ಅಂಕಗಣಿತದ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳನ್ನೂ (ಟರ್ಮ್ಸ್) ತಾರ್ಕಿಕ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ನಿರೂಪಿಸಿ ಕೇವಲ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳಿಂದಲೇ ಅಂಕಗಣಿತದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿದ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತವನ್ನು ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಶಾಖೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಈತನ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದ ರಸಲ್ ಮತ್ತು ವೈಟ್‌ಹೆಡ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತಮ್ಮ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಿಯಾ ಮ್ಯಾತ್‌ಮ್ಯಾಟಿಕಾ (1910–13) ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಇಡೀ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಂಗವೆಂದೂ ಮತ್ತೊಂದು ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಮೂರ್ತ ಬೀಜಗಣಿತ ಅಥವಾ ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಅಂಗವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಉಕ್ತಿಗಳ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ: ಈ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದಂತೆ p, q, r, s ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ವಿವಿಧ ಉಕ್ತಿಗಳು. ಇವು ಸರಳ ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದು –ಎಂದರೆ ನೇರವಾದ ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ, ಆಡುಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಸರಳ ವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಸರಳೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾವಲೇಖಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಯೋಜಿಸಿ ಇಲ್ಲವೇ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆದು ಅವುಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದು ಉಕ್ತಿಗಳ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನ.

$\wedge$ ... ಮತ್ತು (ಸಮುಚ್ಚಯ)
$\vee$ ... ಅಥವಾ (ಪರ್ಯಾಯ)
$\sim$ ... ಇಲ್ಲ/ ಅಲ್ಲ/ ಆಗಿಲ್ಲ (ನಿಷೇಧಾತ್ಮಕ)
$\rightarrow$ ... ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ (ನಿಬಂಧಿತ)
$\longleftrightarrow$ ... ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ (ಸಮತೆ)

ಮೇಲಿನ ಭಾವಲೇಖಗಳ (ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಯೋಜಕಗಳೆಂಬ ಹೆಸರೂ ಉಂಟು) ಪ್ರಕಾರ ರಚಿಸಿದ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿದೆ:

$p \wedge q$ ...p ಮತ್ತು q
$p \vee q$ ... p ಅಥವಾ q
$\sim p, \sim q$ ... p ಅಲ್ಲ, q ಅಲ್ಲ
$p \rightarrow q$ ... p ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ q
$p \longleftrightarrow q$ ... p ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ q

ಈಗ p, q ಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ತಲೆದೋರಬಹುದಾದ ಭಿನ್ನತೆಗಳನ್ನು ಅನುಲಕ್ಷಿಸಿ $p \wedge q$ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿ ತಲೆದೋರುವ ಭಿನ್ನತೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದೆ.

ಸಮುಚ್ಚಯ

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ಅಂದರೆ, ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು 1 ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 1 ಆಗಿರುವುದು; ಮಿಕ್ಕ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಅದು 0 ಆಗಿರುವುದು.

ಇತರ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತುನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಬರೆದಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ

p	q	pVq
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ಅಂದರೆ, ಪರ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು 0 ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ಮೌಲ್ಯ 0 ಆಗಿರುವುದು; ಮಿಕ್ಕ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಅದು 1 ಆಗಿರುವುದು.

ನಿಷೇಧ

p	q	~p	~q
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ನಿಷೇಧಾತ್ಮಕ ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಅದರ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜ ಮೌಲ್ಯದ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

ನಿಬಂಧಿತ

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ಅಂದರೆ, ನಿಬಂಧಿತ ಪೂರ್ವೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 1 ಉತ್ತರೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 0 ಆಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 0 ಆಗಿರುವುದು; ಮಿಕ್ಕ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಅದು 1 ಆಗಿರುವುದು.

ಸಮತೆ

p	q	p←→q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ಅಂದರೆ, ಸಮತೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳೆರಡರ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಾಗ (1, 1 ಇಲ್ಲವೇ 0, 0) ಮಾತ್ರ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ 1 ಆಗಿರುವುದು; ಮಿಕ್ಕ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಅದು 0 ಆಗಿರುವುದು.

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕ್ರೋಡೀಕರಿಸಿ ಸಮಗ್ರ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

p	q	~q	~q	p∧q	p∨q	p→q	p←→q
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಯೋಜಕಗಳ (ಭಾವಲೇಖಗಳ) ಸಹಾಯದಿಂದ ಜಟಿಲ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ವಿಶದಪಡಿಸದಿದ್ದರೆ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಎರಡು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳ ಸಮಾನತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಮುಖ್ಯವಾದದ್ದು. ಇದರಿಂದ ವಾದಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಅಥವಾ ಅನುಕೂಲವಾದ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಸಮಾನತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಹೀಗಿದೆ: ಒಂದೇ ಬಗೆಯ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳ ನಿಜ ಮೌಲ್ಯಗಳು, ಆ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ನಿಜ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಣೆಗೂ ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ, ಆ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಸಂಜ್ಞೆ ≡ .

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\sim (P \wedge q) \equiv \sim P \vee \sim q$$
$$\sim (P \vee q) \equiv \sim P \wedge \sim q$$

ಇವುಗಳಿಗೆ ಡಿಮಾರ್ಗನ್ನನ ನಿಯಮಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ a ಯ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಯಾವುದೇ ಆಗಿದ್ದರೂ a ಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಮಾತ್ರ 1 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ a ಗೆ ಒಂದು ನಿತ್ಯ ಸತ್ಯ(ಟಾಟಾಲಜಿ) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು $\models$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿತ್ಯ ಸತ್ಯ ಉಕ್ತಿಗಳು ಸಾಧುವಾದ (ವ್ಯಾಲಿಡ್) ಉಕ್ತಿಗಳು. ಇವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರದ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಅನುಮಾನದ ಸಾಧುತ್ವದ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಪಾತ್ರ ಹಿರಿದಾದುದು. $\sim (p \wedge q) \vee (q \longleftrightarrow p)$ ಎಂದು ನಿತ್ಯ ಸತ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ಕೊನೆಯ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

p	q	p∧q	~(p∧q)	q←→p	(p∧q)V (q←→p)
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿತ್ಯಸತ್ಯವನ್ನು ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಯಾವಾಗಲೂ ಅನುಕೂಲವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳಿಂದ ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ನಿಯಮಗಳ ಹಾಗೂ ಮಿತಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಳ ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳ ಪರಿಜ್ಞಾನದಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿತ್ಯಸತ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮತ್ತು ಅನೇಕ ಬಗೆಯ ಸಾಧು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಸುಲಭ ಸಾಧ್ಯ.

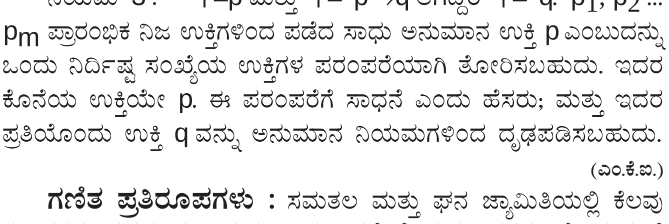
ನಿಯಮ 1: $\models p$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಒಂದು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿ q ಗಳೆಲ್ಲಕ್ಕೂ ಉಕ್ತಿ r ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಉಕ್ತಿ ನಿತ್ಯಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

ನಿಯಮ 2 : $p \equiv q$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\models p \leftrightarrow q$. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಮಾನ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬಹುದು.

ನಿಯಮ 3: $\models p$ ಮತ್ತು $\models p \rightarrow q$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\models q$. $p_1, p_2 \ldots p_m$ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ನಿಜ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಸಾಧು ಅನುಮಾನ ಉಕ್ತಿ p ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉಕ್ತಿಗಳ ಪರಂಪರೆಯಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಕೊನೆಯ ಉಕ್ತಿಯೇ p. ಈ ಪರಂಪರೆಗೆ ಸಾಧನೆ ಎಂದು ಹೆಸರು; ಮತ್ತು ಇದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಕ್ತಿ q ವನ್ನು ಅನುಮಾನ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ದೃಢಪಡಿಸಬಹುದು.

(ಎಂ.ಕೆ.ಐ.)

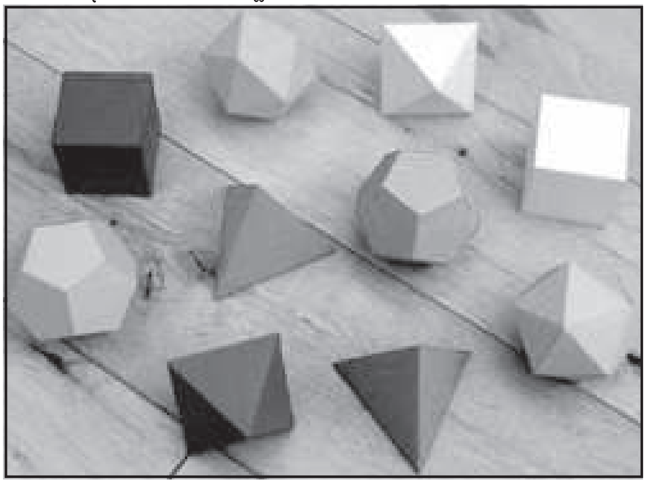
ಗಣಿತ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳು : ಸಮತಲ ಮತ್ತು ಘನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಹೊಸ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಬಳಸುವ ಘನವಸ್ತುಗಳು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಗೋಳ, ಶಂಕು, ಘನಾಕೃತಿ ಇತ್ಯಾದಿ. ಮಾನವನಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮೊತ್ತಮೊದಲಿಗೆ ಪ್ರಾಯಶಃ ಮಕ್ಕಳ ಆಟಿಕೆ ಘನಗಳಿಂದ ಮೂಡಿರಬಹುದೆಂದು ಊಹಿಸಬಹುದು. ಎಣಿಕೆಯ ಮಣಿಚೌಕಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆರಳಿಸುವುದಷ್ಟೆ. ಅದೇ ರೀತಿ



ತಂತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳು

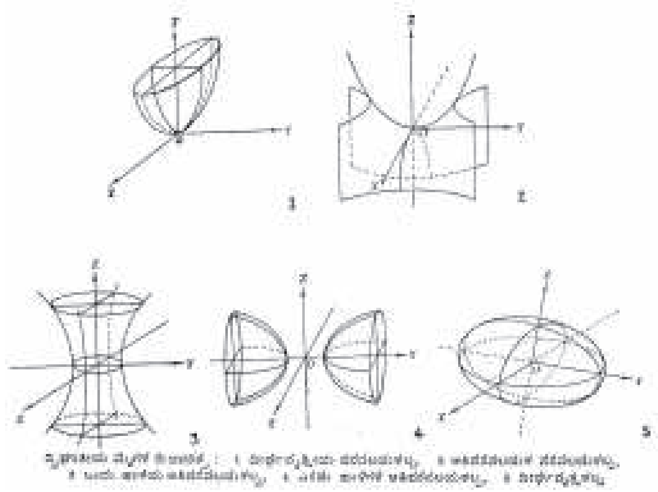
ಘನಾಕೃತಿ, ಅಶ್ರಕ, ಉರುಳೆ ಮುಂತಾದವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಕುತೂಹಲವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಗಣಿತ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳು ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಕಗಳು. ಅವು ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರಿಸಬಹುದೇ ವಿನಾ ಅವೇ ಸಾಧನೆಗಳಾಗಲಾರವು. ಗಣಿತಪ್ರತಿರೂಪಗಳ ಉಗಮ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ 3ನೆಯ ಶತಮಾನವೆಂದು ಗ್ರೀಸ್

ದೇಶದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಕೆಲವು ಲೇಖನಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಕೌಲೆ ಎಂಬ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ 1752ರಷ್ಟು ಹಿಂದೆಯೇ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಬರೆದುದೇ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಅವುಗಳ ರಚನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೂಡ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದ.



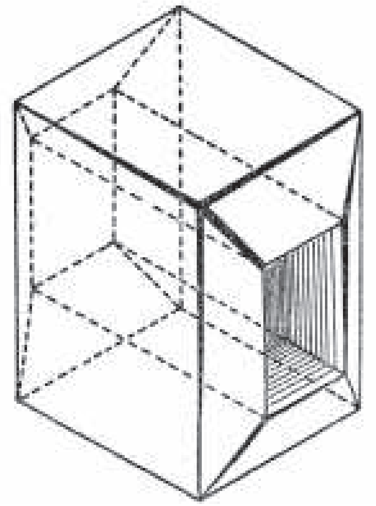
ಘನಾಕೃತಿ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳು

ಪ್ರತಿರೂಪಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ : ರಟ್ಟಿನ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಅನೇಕ ಸರ್ವಸಮ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಅನುರೂಪ ಭುಜಗಳು ಸಮತಲೀಯವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ತ್ರಿಭುಜೀಯ ಅಶ್ರಕ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ



ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಪಾದವಾಗಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಮೂರು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ತ್ರಿಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅಂಚುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಇಟ್ಟಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನ ಸಮಚತುಷ್ಫಲಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಐದು ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಸಮಘನಾಕೃತಿಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಅರಿಯಬಹುದು. ಅವು ಸಮಚತುಷ್ಫಲಕ, ಸಮಷಷ್ಠಫಲಕ (ಘನಾಕೃತಿ), ಸಮ ಅಷ್ಟಫಲಕ, ಸಮದ್ವಾದಶ ಫಲಕ ಮತ್ತು ಸಮವಿಂಶತಿ ಫಲಕ. ಈರೀತಿಯ ಸರಳವಾದ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳ ಅವಲೋಕನದಿಂದ ಕನಿಷ್ಠಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಗರಿಷ್ಠ ಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಪರಿಧಿಯ ತ್ರಿಭುಜ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜವಾದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅದರ ಸಲೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಿಶ್ಚಿತ ಮೇಲ್ಮೈ ಸಲೆಯುಳ್ಳ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಗಾತ್ರ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಸಮಚತುಷ್ಫಲಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಬಹುಫಲಕಗಳು: ಬಹುಭುಜಗಳು ಫಲಕಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಘನಗಳಿಗೆ ಈ ಹೆಸರುಂಟು. ಒಂದು ಬಹುಫಲಕದ ಎಲ್ಲ ಘಟಕಗಳು ಸಮಫಲಕಗಳಾಗಿದ್ದು ಎಲ್ಲ ಶೃಂಗಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಘನಕ್ಕೆ ಸಮಬಹುಫಲಕ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸರಳ ಬಹುಫಲಕವನ್ನು ಸತತವಾಗಿ ಹಿಗ್ಗಿಸಿದಾಗ ಅದು ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸತತವಾಗಿ ಕುಗ್ಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸರಳ ಬಹುಫಲಕಗಳ ವಿಶೇಷಗುಣ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಹುಫಲಕದಲ್ಲಿ ಅದರ ಶೃಂಗ (V), ಅಂಚು (E) ಮತ್ತು ಫಲಕಗಳ (F) ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ ಉಂಟು. ಈ ಸೂತ್ರ ಎಲ್ಲ ಸರಳ ಬಹುಫಲಕಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.



ಅಸರಳ ಬಹುಫಲಕ

ಗ್ರೀಕ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಬಹುಫಲಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಅಗ್ರಸ್ಥಾನ ಪಡೆದಿದ್ದರೂ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಡೇಕಾರ್ಟೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ತನಕ ಯಾವ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಿಗೂ ಗೊತ್ತಿರಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಈ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಕಾಲದ ಬಳಿಕ ಸ್ವಿಸ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆಯ್ಲರ್ (1707–83) ಸಮರ್ಪಕ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿದ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಆಯ್ಲರನ ಸೂತ್ರವೆಂದೇ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. (**ನೋಡಿ– ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ವಿಭಾಗ**) ಅಸರಳ ಬಹುಫಲಕಕ್ಕೆ (ನಾನ್‌ಸಿಂಪಲ್ ಪಾಲಿಹೆಡ್ರನ್) ಈ ಸೂತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ಫಲಕಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸೂತ್ರ

ಪ್ರತಿರೂಪಗಳನ್ನು ಮರ, ತಗಡು, ರಟ್ಟು, ದಾರ, ಪ್ಲಾಸ್ಟರ್ ಆಫ್ ಪ್ಯಾರಿಸ್, ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಇವೇ ಮುಂತಾದ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಿಂದ ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಇಂಥ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವನ್ನು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. (ಸಿ.ಪಿಯು.)

ಗಣಿತ ಪ್ರತೀಕಗಳು : ರಾಶಿಗಳನ್ನು (ಕ್ವಾಂಟಿಟೀಸ್) ಮತ್ತು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು (ಕಾನ್ಸೆಪ್ಟ್ಸ್) ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು (ಆಪರೇಷನ್ಸ್) ಮತ್ತು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಅಮೂರ್ತೀಕರಿಸಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಯೂ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿಯೂ ನಿರೂಪಿಸುವ ಭಾಷಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಸಿಂಬಲ್ಸ್).

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1) ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ತೊಡಗಿ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗಿನ ಅಂಕಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವು ರಚಿಸುವ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು:

ಇತ್ಯಾದಿ.

2) ವರ್ಣಮಾಲೆಗಳಿಂದ ಆಯ್ದ ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳು

a, b, c, x, y ,z, α, β, γ ಇತ್ಯಾದಿ.

3) +, –, x, ÷, >, <, =, $\sum$, II ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಜ್ಞೆಗಳು (ಸೈನ್ಸ್).

4) e, sin, cos, log, mod, f(x) ಇತ್ಯಾದಿ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು.

ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ದತ್ತವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವಿಧಿನಿಯಮಗಳ ಅನುಸಾರ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದು ಅವನ್ನು ಅರ್ಥವಿಸುವುದು ಈ ಪ್ರತೀಕಗಳು ಒದಗಿಸುವ ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

$$\sin\ 60^\circ + \cos\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3+1}}{2}$$

$$\{a,b,c,d,e\} \cup \{p,q,r\} = \{a,b,c,d,e,p,q,r\}$$

$$\{a,b,c,d,e\} \cap \{p,q,r\} = \phi$$

p	q	p∧q	p∨q	p→q	~p
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

ಪ್ರಾರಂಭ ಮತ್ತು ವಿಕಾಸ: ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತವನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ಗಣಿತ ಪ್ರತೀಕಗಳು ಬೆಳೆದು ಬಂದಿರುವ ಜಾಡು ಯಾವುದೇ ಭಾಷೆಯ ಜಾಡಿನಂತೆಯೇ ಸ್ವಾರಸ್ಯ ಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಭಾಷೆ ಮೊದಲು ವಿಕಾಸಗೊಂಡು ಮನುಷ್ಯನ ಚಿಂತನೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟವನ್ನು ತಲುಪಿದ ಬಳಿಕ ಗಣಿತಚಿಂತನೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿರಬೇಕು. ಮೊದಮೊದಲು ಸಂಕ್ಷೇಪ ನಿರೂಪಣೆಗಳೂ ಪದಗಳ ಮೊದಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳೂ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನಾಗಲೀ ನಿರೂಪಿಸಲು ಬಳಸಲ್ಪಟ್ಟವು. ಇವು ಒಂದು ರೀತಿಯ ಒಳದಾರಿಗಳು. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎನ್ನುವ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಅವೆರಡರ ನಡುವೆ = ಗುರುತನ್ನು ಬರೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಮೊದಲಿಗೆ ಸೂಚಿಸಿದವ (1557) ರಾಬರ್ಟ್ ರಿಚರ್ಡ್. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4 = 12/3. 15ರಿಂದ 17ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಅಜ್ಞಾತ ರಾಶಿಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ಘಾತಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾದವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಹೊಸ ಹೊಸ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಶೋಧನೆಯ ಕೆಲಸ ಭರದಿಂದ ಸಾಗಿತು. ಸಾಕಷ್ಟು ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿನಿಮಯ ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ನಡೆಯದಿದ್ದ ಆ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೇಶಗಳ ಸಂಶೋಧಕರು ಒಂದೇ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಅಥವಾ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರತೀಕಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದುದು ಅಸಾಧಾರಣವಾಗಿರಲಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ ಮುಂದೆ ಗಣಿತಾಭ್ಯಾಸಿಗಳಿಗೆ ಒದಗುತ್ತಿದ್ದ ಗೊಂದಲವನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಪ್ರತೀಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಾಮವೇ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಂಥ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಅಂದಿನದು. ಇವುಗಳ ವಿಪುಲಸೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಸರಾಂತ ರಾದವರೆಂದರೆ 16–17ನೆಯ ಶತಮಾನಗಳ ಫ್ರಾನ್ಸೊವಾವ್ಯೇಟ, ವಿಲಿಯಂ ಔಟ್‌ರೆಡ್, ರೆಣೆ ಡೇಕಾರ್ಟೆ ಮತ್ತು ಗಾಟ್‌ಫ್ರೆಡ್ ವಿಲ್ಹೆಲ್ಮ್ ಲೈಬ್‌ನಿಟ್ಸ್. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು (*a, b, c,* ಇತ್ಯಾದಿ) ಜ್ಞಾತಗಳ ಪ್ರತೀಕಗಳಾಗಿಯೂ ಕೊನೆಯ ಕೆಲವು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು (*u, v, w,* ಇತ್ಯಾದಿ) ಅಜ್ಞಾತಗಳ ಪ್ರತೀಕಗಳಾಗಿಯೂ ಬಳಸಲು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದವ ಡೇಕಾರ್ಟೆ. 17ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಅಂತ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಲೈಬ್‌ನಿಟ್ಸ್ ಅಂದು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಎಲ್ಲ ಗಣಿತ ಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನೂ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಮುದ್ರಣ ಸೌಕರ್ಯದ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ, ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ. ಬಹು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಚಿರಕಾಲ ಅವು ಉಳಿಯುವಂತೆ ಮಾಡಿದವನೆಂದರೆ 18ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಲಿಯೊನ್ಹಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್. X ಎಂಬ ಚರದ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ ax^2+bx+c) ನಿರೂಪಿಸಲು *f*(*x*) (ಎಂದರೆ *x*ನ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ), ನೈಸರ್ಗಿಕ ಲಘುಗಣಕದ ಆಧಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು *e*, ಸಂತತ ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು Σ, –1ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು, ಎಂದರೆ $\sqrt{-1}$ ನ್ನು, ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು *i* ಇವೇ ಮುಂತಾದವು ಆಯ್ಲರನ ಮಹತ್ತ್ವಪೂರ್ಣ ಕೊಡುಗೆಗಳು. ಪ್ರತೀಕಗಳ ವಿಕಾಸದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಗಮನಾರ್ಹ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಯನ್ನು ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲನ ತರ್ಕವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಪ್ರಕಟವಾದ ಬಳಿಕ (1847) ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. 20ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಪ್ರಥಮಾರ್ಧದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನದ ರಚನೆಯ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಲಭಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರತೀಕಗಳೂ ತೀವ್ರ ವಿಮರ್ಶೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟದ್ದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಹೊಸ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಸೃಷ್ಟಿಯೂ ವಿಪುಲವಾಗಿ ನಡೆಯಿತು. ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತವಲ್ಲ, ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲ, ಒಂದು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವಲ್ಲ– ಅಂಥ ಹಲವಾರು ಬೀಜಗಣಿತಗಳಿವೆ, ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳಿವೆ, ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿವೆ–ಎಂಬ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತಚಿಂತನೆ ಹರಿದದ್ದರಿಂದ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಾದ ಗಣ, ಗ್ರೂಪ್, ವಲಯ, ಕ್ಷೇತ್ರ, ಗಣಿತತರ್ಕ ಮುಂತಾದವು ಪ್ರವರ್ಧಿಸಿದುವು ಹಾಗೂ ಹೊಸ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಉಗಮಕ್ಕೆ ಹೇತುಗಳಾದವು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಭಾರತದ ಸಮಸ್ತ ಪ್ರಜೆಗಳ ಗಣವನ್ನು *A* ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಈ ಗಣ ಸಾಂತವಾಗಿದ್ದರೂ ಇದರ ಪೂರ್ಣ ರಚನೆ ಭೌತವಾಗಿ ಬಲು ಕಠಿಣ ಕಾರ್ಯ, ಅಸಾಧ್ಯವೆನಿಸುವಷ್ಟೇ ಕಠಿಣವಿದು. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ

$$A=\{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು *a*ಯೂ ಒಬ್ಬ ಭಾರತೀಯನನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ *A*={ x|x ಓರ್ವ ಭಾರತೀಯ} ಎಂದು ಬರೆದುದಾದರೆ ಮೊದಲಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವ್ಯರ್ಥವಾಗುವ ಕಾಲ, ಶ್ರಮ ಎರಡೂ ಉಳಿದು ಸಂಕ್ಷೇಪವೂ ನಿಖರವೂ ಆದ ಒಂದು ನಿರೂಪಣೆ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ನಿರೂಪಣೆಗಳಿಂದ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಹೊಸ ಹಾದಿ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನು ವಿವರಣೆಯ ಸಮೇತ ಬರೆದಿದೆ.

p, q, r	. . .	ಉಕ್ತಿಗಳು (ಪ್ರಾಪೊಸಿಷನ್ಸ್)
$\wedge$	. . .	ಸಮುಚ್ಚಯ (ಕಂಜಂಕ್ಷನ್)
$\vee$	. . .	ಪರ್ಯಾಯ (ಡಿಸ್ಜಂಕ್ಷನ್)
$\rightarrow$	. . .	ನಿಬಂಧಿತ (ಇಂಪ್ಲಿಕೇಷನ್)
~	. . .	ನಿಷೇಧ (ನೆಗೇಷನ್)
P(x)	. . .	x ಎಂಬ ಚರದಿಂದ ಕೂಡಿರುವ ಆಖ್ಯಾತ (ಪ್ರೆಡಿಕೇಟ್)
T[p(x)]	. . .	P(x) ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಗಣ
	. . .	ಎಲ್ಲ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು (ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಖ್ಯಾವಾಚಕ)
	. . .	ಕೆಲವು (ಅಸ್ತಿತ್ವ ಸಂಖ್ಯಾವಾಚಕ)

ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಸಂಬಂಧಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

A, B, C	. . .	ಗಣಗಳು (ಸೆಟ್ಸ್)
	. . .	aಯು Aಗೆ ಸೇರಿದೆ; aಯು Aಯ ಧಾತು
	. . .	aಯು Aಗೆ ಸೇರಿಲ್ಲ; aಯು Aಯ ಧಾತುವಲ್ಲ
	. . .	Aಯು Bಯ ಉಪಗಣ; Aಯು Bಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ
	. . .	A ಸಂಯೋಗ B
$A \bigcap B$	. . .	A ಛೇದನ B
$\bigcup A_i$	. . .	ಎಲ್ಲ A_i ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ
$\bigcap A_i$	. . .	ಎಲ್ಲ A_i ಗಣಗಳ ಛೇದನ
A X B	. . .	A,B ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ
A – B	. . .	A, B ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
χ Ry, R{x,y}	. . .	ಸಂಬಂಧ
	. . .	ಉತ್ಪನ್ನ, ಚಿತ್ರಣ
$X \rightarrow Y, f \in Y^X$	. . .	ಪರಿವರ್ತನೆ
f(x)	. . .	f ನಿಂದ Xನ ಬಿಂಬ
$f^{-1}(X)$	. . .	ವ್ಯಸ್ತ ಬಿಂಬಗಣ
1-1	. . .	ಒಂದು–ಒಂದು ಸಂವಾದಿತ್ವ

ಸಂಖ್ಯೆ, ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

X/y	. . .	X, y ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ
$x \equiv y \mod p$	. . .	Y ಮಾಡ್ Pಗೆ x ಸಮಶೇಷ
[a, b]	. . .	ಸಂವೃತ ಅಂತರ
[a, b), [a,b[	. . .	ಅರ್ಧವಿವೃತ ಅಂತರ (ಬಲಗಡೆ ವಿವೃತ)
(a,b),] a,b[	. . .	ವಿವೃತ ಅಂತರ
lim f(x)=b	. . .	x, a^- ಗಾಮಿಯಾದಂತೆ
$x \rightarrow a$	. . .	*f*(x)ನ ಪರಿಮಿತಿ b
	. . .	x ನ್ನು ಕುರಿತು y ಯ ಅವಕಲನಾಂಕ
$\int y dx$	. . .	xನ್ನು ಕುರಿತು y ಯ ಅನುಕಲನಾಂಕ

(ಆರ್.ಆರ್.ಯು)

ಗಣಿತಬೋಧನ ಕ್ರಮ : ಯಾವ ವಿಷಯದ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲೇ ಆಗಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ದೈಹಿಕ ಬೆಳೆವಣಿಗೆ, ಮಾನಸಿಕ ಶಕ್ತಿ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳು, ವಿಷಯದ ಸ್ವರೂಪ, ಅದನ್ನು ಬೋಧಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮತ್ತು ವಿಶಿಷ್ಟ ಉದ್ದೇಶಗಳು– ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಬೋಧನಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇತರ ವಿಷಯಗಳ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೋ ಹಾಗೆ ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲೂ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೋಧನವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಕಾಲೇಜು ಮಟ್ಟದವರೆಗಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವೇಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿರುವ ಬೋಧನಕ್ರಮಗಳನ್ನು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಬೋಧನಕ್ರಮಗಳು, ಸಾಮೂಹಿಕ ಬೋಧನ ಕ್ರಮಗಳು ಮತ್ತು ಪಠ್ಯ ವಿಷಯವನ್ನು ಆಧಾರಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ಬೋಧನ ಕ್ರಮಗಳು ಎಂದು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಮೂರು ವರ್ಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲೂ ಮುಖ್ಯವೆನಿಸಿರುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ.

ವೈಯಕ್ತಿಕ ಬೋಧನ ಕ್ರಮ : ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗಮನ ಕೊಟ್ಟು ಅವನ ಸಾಧನೆ, ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಶಕ್ತಿ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವಂತೆ ಕಲಿಸಲು ಅವಕಾಶವೀಯುವ ಈ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಅಥವಾ ಯೋಜನೆಯ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಸಂಶೋಧನ ವಿಧಾನ ಎಂಬ ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳು ಮುಖ್ಯವಾದವು.

ಯೋಜನೆಯ ವಿಧಾನ : ಬ್ಯಾಂಕು ವ್ಯವಹಾರ, ಸಾಲ, ಪಾಲುಗಾರಿಕೆ ಮುಂತಾದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಬೋಧಿಸಲು ಇದು ಉಪಯುಕ್ತವೆನಿಸುವ ಕ್ರಮ. ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಒಂದೊಂದು ಸರಳ ಯೋಜನೆಯನ್ನೂ ಅದರ ಟಿಪ್ಪಣಿಯನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವಂತೆ ಕೇಳುವರು. ಅದು ತನ್ನ ಯೋಜನೆಯೆಂಬ ಆಸಕ್ತಿಯಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪೂರ್ಣಜ್ಞಾನವನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಿ ತನ್ನ ಮುಂದಿನ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಿಳಿಸುವನು. ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಅದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮುಂದಿನ ಹೊಸ ಯೋಜನೆ ಹಾಕಿಕೊಡುವರು. ಇಲ್ಲವಾದರೆ ತಪ್ಪಿರುವ ಹಂತವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಸೂಕ್ತ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ನೀಡುವರು. ಪ್ರತಿಭಾವಂತರು ವೇಗವಾಗಿಯೂ ಸಾಧಾರಣ ಮಕ್ಕಳು ನಿಧಾನವಾಗಿಯೂ ಸಾಗಲೂ ಅವಕಾಶವಿರುವ ಈ ಕ್ರಮ ಎಲ್ಲ ಮಟ್ಟದ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಯವರಿಗೂ ಅನುಕೂಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇಷ್ಟರಿಂದಲೇ ಅವರು ಗಣಿತದ ಮುಖ್ಯ ತತ್ತ್ವಗಳ ಮತ್ತು ವಿಧಾನಗಳ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾರರು. ಅಲ್ಲದೆ, ಸಾಮೂಹಿಕ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ದೊರಕತಕ್ಕ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ, ತತ್ತ್ವ ನಿಯಮಗಳ ಬಳಕೆ, ನೂತನ ಅಂಶಗಳ ಸಮೀಕರಣ, ಚರ್ಚೆ ಇತ್ಯಾದಿ ಸೌಲಭ್ಯಗಳು ಅವರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವಾಗುತ್ತವೆ. ತೀರ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ ಮಕ್ಕಳು ಮಾತ್ರ ಅವನ್ನೆಲ್ಲ ತಾವೇ ಗ್ರಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲರಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಕ್ರಮ ಅವರಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವೆನಿಸಬಹುದು. ಈ ಯೋಜನೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಲ್ಯಾಬೊರೇಟರಿ ವಿಧಾನವೆಂಬ ಹೆಸರೂ ಉಂಟು. ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಕೊಠಡಿ ಅಥವಾ ಪ್ರಯೋಗಾಲಯದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಯ ಸಲಕರಣೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ತಾಳೆಹಾಕಿ ನೋಡಿ, ಅವುಗಳ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮನನ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನೇತೃತ್ವದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನೂ ಅರಿತುಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವುದು. ಗಣಿತ ಒಂದು ಉಪಯುಕ್ತ ವಿಷಯವೆಂಬುದನ್ನೂ ವಿಜ್ಞಾನ, ಕೈಗಾರಿಕೆ, ಯಂತ್ರಗಳ ಕಾರ್ಯ ಮೊದಲಾದವುಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ವಹಿಸುವ ಪಾತ್ರವನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತಕ್ಕಷ್ಟು ಪರಿಶ್ರಮ ದೊರೆಯದವರು, ಅಳತೆಯ ಸಲಕರಣೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಕ್ಕಷ್ಟು ಪರಿಚಯವಿಲ್ಲದವರು, ಹಾಗೂ ಸಾಮೂಹಿಕ ಬೋಧನ ಕ್ರಮದಿಂದ ತಕ್ಕಷ್ಟು ಲಾಭ ಪಡೆಯದವರು ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ತುಂಬ ಉಪಯೋಗ ಪಡೆಯಬಲ್ಲರು. ಆದರೆ ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಕಾಲವ್ಯಯವಾಗುವ ಕ್ರಮ. ಹಲವರು ಸುಮ್ಮನೆ ಸಲಕರಣೆಗಳೊಡನೆ ಆಡಿಕೊಂಡು ಕಾಲಹರಣ ಮಾಡಿಬಿಡಬಹುದು. ದಕ್ಷರೂ ನುರಿತವರೂ ಆದ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುವ ವಿಷಯಗಳ ಬೋಧನೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಗತ್ಯ.

ಸಂಶೋಧನ ವಿಧಾನ : ಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೊದಲಿಂದ ಕೊನೆಯವರೆಗೆ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನಿರ್ದೇಶನದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ, ಸಂಶೋಧನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅವರು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಂದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ತೀರ ಅಗತ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ನಿರ್ದೇಶನಗಳನ್ನು ಪಡೆದು ತಮ್ಮ ಯತ್ನದಿಂದಲೇ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವರು. ಅಧ್ಯಾಪಕರು ನೀಡುವ ಸಲಹೆ ನೇರವಾಗಿರದೆ, ಸೂಕ್ತಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆಲೋಚನೆಯನ್ನು ಪ್ರಚೋದಿಸು ವಂತಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು ಮುಂದುವರಿಯಲು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅವರು ಪರಿಚಯಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ನಿಧಾನವಾದರೂ ಅವರ ಮನಶ್ಶಕ್ತಿಗಳು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಕಲಿವನ್ನು ವೇಗವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲ ಹಿನ್ನೆಲೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ತಾವೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆಂಬ ಅಭಿಮಾನವೂ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮತ್ತು ಸಂಶೋಧನ ಚಿತ್ತವೃತ್ತಿಯೂ ಅವರಲ್ಲಿ ವರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾದ ಹಲವು ನ್ಯೂನತೆಗಳುಂಟು. ಪ್ರತಿಭಾವಂತರೂ ನಿಸ್ಪೃಹರೂ ಆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನಿಷ್ಠೆಯಿಂದ ತಮ್ಮ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದಾದರೂ ಮಂದಬುದ್ಧಿಯ ಹಾಗೂ ಸೋಮಾರಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮಹಾಸಂಶೋಧಕರಂತೆ ನಟಿಸುತ್ತ ಕಾಲಹರಣ ಮಾಡಿಬಿಡಬಹುದು. ಅಂಥವರಿಗೆ ಬೋಧಕರೇ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರ ಹುಡುಕಿಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಇರುವುದಾದರೆ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಎಲ್ಲರ ಕಡೆಯೂ ಗಮನವೀಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವಾಗಿ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇತರರು ಮಾಡಿದ್ದನ್ನು ಕದ್ದು ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುವ ಸಂಭವವೂ ಉಂಟು. ಆದ್ದರಿಂದ ದಕ್ಷರೂ ಅನುಭವಿಗಳೂ ಆದ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಮಾತ್ರ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು. ಸರಿಯಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆದರೆ ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನೇ ಅವಲಂಬಿಸಿ ಕೆಲಸಮಾಡುವ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ರೂಢಿಸಬಹುದು.

ಸಾಮೂಹಿಕ ಬೋಧನಕ್ರಮಗಳು : ವೈಯಕ್ತಿಕ ಬೋಧನವಿಧಾನಗಳು ಸಣ್ಣ ಪುಟ್ಟ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ಸರಿ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಬಳಕೆಗೆ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿರುವ ಈಚಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಾಮೂಹಿಕ ಬೋಧನವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಮುಂದೆ ವಿವರಿಸಿದೆ.

ಅನುಕ್ರಮ ವಿಧಾನ : ಶಿಕ್ಷಣದ ಎಲ್ಲ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಗಣಿತದ ಯಾವುದೇ ವಿಷಯವನ್ನಾದರೂ ಇಡೀ ತರಗತಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅದರ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬೋಧಿಸಲು ಬಳಸುವ ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಶ್ನೆ, ಸಲಹೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಮೂಲಕ ಕಲಿಯಬೇಕಾದ ನೂತನ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆಸಕ್ತಿ ಹರಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವರು. ಇದು ಪಾಠಕ್ಕೆ ಪೀಠಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೋರಂಗದಲ್ಲಿ ಈ ಸಿದ್ಧತೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಮೇಲೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಆ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಅವಕಾಶಕೊಟ್ಟು ಅನಂತರ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಇಡೀ ತರಗತಿಗೆಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿ, ಬೋಧಿಸುವರು. ಇಲ್ಲವೆ ಆ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತತ್ತ್ವ ಇಲ್ಲವೆ ನಿಯಮವನ್ನು ಮೊದಲು ಪ್ರಶ್ನೆ, ಸಲಹೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಡಿಸುವರು. ಅನಂತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ಉತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಇಡೀ ತರಗತಿಯನ್ನು ಕೇಳಬಹುದು. ಅಥವಾ, ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಯುವಂತೆ ಏರ್ಪಡಿಸಿ ಆ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಪ್ರತ್ಯಯ, ನಿಯಮ, ಸೂತ್ರ, ತತ್ತ್ವ–ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಇಡೀ ತರಗತಿ ಅರಿತುಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಅನಂತರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಡಿಸಲು ಆ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಆಗಲೇ ಕಲಿತಿರುವ ಗಣಿತದ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಿಕೊಂಡಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿಯೂ ಪರಣಾಮಕಾರಿ ಯಾಗಿಯೂ ಆಕರ್ಷಕವಾಗಿಯೂ ಬೋಧಿಸಬಹುದು.

ಉಪನ್ಯಾಸ ವಿಧಾನ : ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಅನಂತರದ ಗಣಿತದ ಯಾವುದೇ ವಿಷಯವನ್ನಾದರೂ ಬೋಧಿಸಲು ಬಳಸಬಹುದಾದ ಈ ವಿಧಾನ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಉಪನ್ಯಾಸದ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆಗಾಗ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಕಪ್ಪುಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರ, ನಕ್ಷೆ, ಆಕೃತಿ, ತತ್ತ್ವಗಳ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೂಪ, ಚಿಹ್ನೆ, ಸಮೀಕರಣ, ಸಂಕೇತ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತ ಅಗತ್ಯವಾದಾಗ ಮಾದರಿ ಮುಂತಾದ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸುತ್ತ ವಿಷಯವನ್ನು ಪೋಷಿಸುವರು. ಈ ವಿಧಾನ ಫಲಪ್ರದವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಬೋಧಿಸುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಷ್ಟು ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಪರಿಚಯವಿರಬೇಕು; ಆಲೋಚನಾಸರಣಿಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವಷ್ಟು ಮನಸ್ಸು ಬೆಳೆದಿರಬೇಕು; ಅವಧಾನ ಕಾಲಾವಧಿಯು (ಅಟೆನ್ಷನ್ ಸ್ಪ್ಯಾನ್) ತಕ್ಕಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು. ಎಂದಮೇಲೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ

ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಅಷ್ಟಾಗಿ ಬಳಸುವಂತಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಪಠ್ಯವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪಾಂಡಿತ್ಯ, ವಿಷಯಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಜೋಡಣೆಯ ಮತ್ತು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಸ್ವರೂಪದ ಪರಿಜ್ಞಾನ, ಅವುಗಳ ತತ್ತ್ವಾರ್ಥಗಳ ವಿಮರ್ಶಾ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಖಚಿತಾಭಿಪ್ರಾಯ – ಇವೆಲ್ಲ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಇರಬೇಕು. ಬೋಧಿಸುವ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗಾದರೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರಿಚಯಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದರೆ ಉಪನ್ಯಾಸವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸರಾಗವಾಗುವುದು. ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತತ್ತ್ವ, ಮೂಲಭೂತ ವಿಧಾನ, ಭಾವನೆ, ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದ, ಚಾರಿತ್ರಿಕ ವಿಷಯ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಪರಿಚಯ ಈ ವಿಧಾನದ ಬೋಧನೆಯಿಂದ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಆಗುವುದರಿಂದ ಗಣಿತದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ, ಗಣಿತಕ್ಕೂ ಇತರ ಪಠ್ಯ ವಿಷಯಗಳ ವ್ಯಾಸಂಗವಿಷಯಗಳಿಗಿರುವ ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಸಂಬಂಧ–ಇವೆಲ್ಲ ಅವರಿಗೆ ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಉಪನ್ಯಾಸವಾದ ಮೇಲೆ ಆಯಾ ಉಪನ್ಯಾಸದ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಿ ಅಂದಿಗಂದಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹಂಚುವುದು ಕೆಲವೆಡೆ ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯಸೂತ್ರಗಳು, ತತ್ತ್ವಗಳು, ನಕ್ಷೆಗಳು, ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮುಂತಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಬೇಕು. ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಯ ಇತರ ವಿಧಾನಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನೂ ಅನುಸರಿಸಿದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆಕರ್ಷಕ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿಷಯದ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಡಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸದ ವಿಧಾನ : ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ತತ್ತ್ವ, ವಿಧಾನ, ಅನುಭವ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪುನಃ ಪುನಃ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವು ಸಿದ್ಧ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಿಕೊಡುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವುಳ್ಳ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂದು ಬೋಧಿಸುವ ಕ್ರಮವೆನ್ನುವುದಕ್ಕಿಂತ ಬೋಧಿಸಿದ್ದನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ರೂಢಿಸಿಕೊಡುವ ಕ್ರಮ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಮಗ್ಗಿ, ತೂಕ, ಅಳತೆ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಸೂತ್ರಗಳು, ನಿಯಮಗಳು, ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಮೊದಲು ಕಲಿತ ಮೇಲೆ ಅವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಳಸಲು ಅನುಕೂಲಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅವು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕು. ಅದರಿಂದ ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವನ್ನು ಸರಾಗವಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. ಅವನ್ನು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಗಣಿತಬೋಧನೆಗೆ ಯಾವ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅವಕಾಶ ಇದ್ದೇ ಇರಬೇಕು. ಅಂಕಗಣಿತದ ಯಾವ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲೇ ಆಗಲಿ ಅವು ಪಾತ್ರವಹಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯ. ಅಂಕಗಣಿತದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲ ಕೌಶಲಗಳೆಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯನ್ನು ಬಿಡುವ ವೇಳೆಗೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಸಿದ್ಧಿಸಿರಬೇಕು. ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯಲ್ಲೂ ಈ ಕೌಶಲಗಳು ವೃದ್ಧಿಯಾಗಬೇಕು. ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಗಣಿತದ ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳನ್ನೂ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಅಭ್ಯಸಿಸಿ ರೂಢಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತದ ಯಾವ ಬೋಧನ ಕ್ರಮವೇ ಆಗಲಿ ಅದರ ಅಂಗವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಚೆಗೆ ಹಲವಾರು ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಪಾಠಕ್ಕೆ ಶಾಲಾ ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಅವಕಾಶ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ. ಗಣಿತದ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಮಟ್ಟವಿಳಿಯಲು ಇದೂ ಒಂದು ಕಾರಣವೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನೋತ್ತರ ವಿಧಾನ : ಇದನ್ನು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೋಧನಕ್ರಮವೆನ್ನುವುದಕ್ಕಿಂತ ಎಲ್ಲ ಬೋಧನಕ್ರಮಗಳಲ್ಲೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆಲೋಚನೆಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಲು ಬಳಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ತಂತ್ರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಪಾಠದ ಎಲ್ಲ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಈ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುವುದರಿಂದ ಇದೂ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೋಧನಕ್ರಮವೆಂದು ಕೆಲವರು ಭಾವಿಸುವರು. ಪಾಠದ ಪೀಠಿಕಾಹಂತದಲ್ಲಿ ಆ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪೂರ್ವಾನುಭವಗಳನ್ನು ಕುರಿತ, ವಿಶಾಲ ಅರ್ಥ ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವ, ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಾಕುವರು. ಆಗ ಬರುವ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಕಡೆ ಅವರು ಉದ್ದೇಶವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವರು. ಅನಂತರ ವಿಷಯ ಪರಿಚಯದ ಅಂತಸ್ತಿನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವಲ್ಪವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅರಿತುಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಉತ್ತರ ಬಯಸುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವರು. ಅವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದಿದ್ದು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಇಡೀ ತರಗತಿಗೆ ಕೇಳಿ ಕೆಲವು ಕ್ಷಣಗಳ ವಿರಾಮದ ಅನಂತರ ಒಬ್ಬ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಿ ಉತ್ತರ ಹೇಳಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಇದರಿಂದ ಇಡೀ ತರಗತಿಯೇ ಆ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚನೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದಿರುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದಲೇ ತಾವು ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವುದಾಗಿಯೂ ಭಾವಿಸಿ ಉತ್ತೇಜಿತರಾಗುತ್ತಾರೆ. ಉದ್ದೇಶಿತ ವಿಷಯವನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಮೇಲೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗಾಗಿ ಮತ್ತೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಾಕಿ ಉತ್ತರ ಹೇಳಿಸುವುದುಂಟು. ಪಾಠಮುಗಿದ ಮೇಲೆ ಪರೀಕ್ಷಾರ್ಥ ಮನೆಗೆಲಸಕ್ಕೂ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪಾಠ ಬೋಧಿಸುವುದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಲೂ ಮೇಲ್ವರ್ಗದ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಲೂ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ನಿರ್ದೇಶಿತ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಧಾನ : ಗಣಿತವನ್ನು ಸಾಮೂಹಿಕವಾಗಿ ಬೋಧಿಸಿದರೂ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಗಮನವನ್ನು ಕೊಡಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಅವಕಾಶವಾಗುವಂತೆ ರೂಪಿಸಿರುವ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮ. ಇಡೀ ತರಗತಿಗೆ ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನಿರತರಾಗಿರುವಾಗ ಬೇಕೆನಿಸಿದವರಿಗೆ ಅಗತ್ಯ ನೆರವು ನೀಡುತ್ತ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಇಡೀ ತರಗತಿಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವರು. ಅವರವರ ಶಕ್ತಿಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತ ಹೋಗಬಹುದು. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಭಾವಂತರು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಮಿಕ್ಕವರು ಕಡಿಮೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಪೂರೈಸಬಲ್ಲರು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲೇ ಮಾಡಿ ಮುಗಿಸಲಾಗದವರು ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸಿದಾಗ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಸಹಾಯ ಮಾಡಲು ಕಾದೇ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಕಷ್ಟವಿರುವೆಡೆ ಅವರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದುವರಿಯುವಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತದ ತತ್ತ್ವ, ವಿಧಾನ, ಕೌಶಲ –ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಒಂದೇ ತತ್ತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪುಗೊಂಡಿರುವ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಅವಕಾಶವಿರುವುದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆ ಮುಖವಾದ ಅಭ್ಯಾಸವೂ ಆದ ಹಾಗಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಮೂಹಿಕ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಗಮನವೀಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವೆಂಬ ಟೀಕೆಯನ್ನು ಈ ವಿಧಾನ ನಿವಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ ವೈಯಕ್ತಿಕ ವಿಧಾನದ ಉತ್ತಮಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಹೊಂದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತಬೋಧನೆಗೆ ಈ ವಿಧಾನ ತುಂಬ ಉಪಯುಕ್ತವೆನಿಸಿದೆ. ಉನ್ನತ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲೂ ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಬಳಸಬಹುದು.

ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಹಿಂದುಳಿದ ಬಾಲಕರಿಗೆ ನೆರವು ನೀಡುತ್ತ ಮಿಕ್ಕವರನ್ನು ಮರೆಯುವುದುಂಟು. ಆಗ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಬೇಸರವಾಗಬಹುದು. ಅವರ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿ ಫಲದಾಯಕ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರವಹಿಸದೆ ಅಡ್ಡದಾರಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂದಿಗಂದಿಗೆ ಅವರ ಕಾರ್ಯವನ್ನೂ ನೋಡುತ್ತ ಸೂಕ್ತ ಉತ್ತೇಜನಾದಿ ನಿರ್ದೇಶನ ನೀಡುವುದು ಅಗತ್ಯ. ಈ ಬೋಧನಕ್ರಮ ನುರಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನಿರ್ದೇಶನದಲ್ಲಿ ಬಹು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಬಲ್ಲದು.

ಪಠ್ಯ ವಿಷಯವನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ಬೋಧನಕ್ರಮ : ಇದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವೂ ವಿಶಿಷ್ಟವೂ ಆದ ಬೋಧನ ಕ್ರಮವಲ್ಲವಾದರೂ ಗಣಿತದ ಯಾವ ಯಾವ ವಿಷಯಬೋಧನೆಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ಕ್ರಮ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗುವುದೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಆಯಾ ವಿಷಯವನ್ನು ಬೋಧಿಸುವುದು ಈ ವಿಧಾನದ ಉದ್ದೇಶ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಎರಡನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ.

ವಿಕಾಸ (ಅಭಿವೃದ್ಧಿ) ವಿಧಾನ (ಡೆವಲಪ್‌ಮೆಂಟಲ್ ಮೆಥಡ್) : ಗಣಿತದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಷಯಬೋಧನೆಗೆ ಯಾವ ವಿಧಾನ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಬಲ್ಲುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆ ವಿಷಯಬೋಧನೆಗೆ ಅನುಸರಿಸುವುದೇ ಈ ವಿಧಾನದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ. ಎಂದಮೇಲೆ ಇದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬೋಧನವಿಧಾನವೇ ಅಲ್ಲ. ವಿಷಯವನ್ನು ಆಧಾರಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸೂಕ್ತ ಬೋಧನಕ್ರಮವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಒಂದು ವಿವೇಚನೆ ಮಾತ್ರ. ಉದಾ : ಗೋಳದ ಗಾತ್ರ= $^3/_4\pi r^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬೋಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅನುಕ್ರಮ ವಿಧಾನ ಉತ್ತಮ; ಆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಲಿಯುವಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತವನ್ನೂ ಅರಿತಿರುವರೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಶ್ನೋತ್ತರ ವಿಧಾನ ಅನುಕೂಲ. ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಕ್ಕಳು ಅರಿತಿದ್ದಾರೆಯೆ ಎಂದು ದೃಢಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿರ್ದೇಶಿತ ವ್ಯಾಸಂಗ ವಿಧಾನ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಬಲ್ಲದು. ಹೀಗೆಯೇ ಇತರ ವಿಷಯಗಳ ಬೋಧನೆಗೂ ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುವ ಬೋಧನವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಒಂದೇ ಬೋಧನವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಯುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅದರಿಂದ ಹುಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಬೇಸರವನ್ನು ಈ ವಿಧಾನ ನಿವಾರಿಸುತ್ತದೆ.

ಘಟಕ ಪದ್ಧತಿ (ಯೂನಿಟ್ ಪ್ಲಾನ್) : ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ತರಗತಿಯ ಕಾಲಾವಧಿಗಳಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವಂತೆ, ಹಾಗೂ ಉದ್ದೇಶಿತ ಜ್ಞಾನ, ಮನೋಭಾವ, ಕೌಶಲ್ಯ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಆ ವಿಷಯ ಬೋಧನೆಯಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಪಠ್ಯವಿಷಯವನ್ನು ವಿಶಿಷ್ಟ ಭಾಗ ಇಲ್ಲವೇ ಘಟಕವನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಬೋಧನೆಗೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದೇ ಈ ವಿಧಾನದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ. ಇದು ಅಮೆರಿಕದ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಈಚೆಗೆ ಪ್ರಚಾರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬೋಧನ ಕ್ರಮ. ಒಂದು ಘಟಕ ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಕಾಲಾವಧಿಗೆ ಮುಗಿಯಬಹುದು; ಅಥವಾ ಹಲವು ಕಾಲಾವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಬೋಧಿಸಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಮೊದಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಂಡು ಅವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನೆರವಾಗುವಂತೆ ವಿಷಯ ಘಟಕವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಅದಕ್ಕೆ ನೆರವಾಗುವಂತೆ ವಿಷಯದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಂಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭಿರುಚಿ ಆಸಕ್ತಿಗಳಿಗೂ ಪೂರ್ವ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಬುದ್ಧಿಮಟ್ಟಕ್ಕೂ ಅನುಗುಣವಾಗುವಂಥ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಗಣಿತದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ರಚನೆ, ರೇಖಾಗಣಿತದ ನಕ್ಷೆಗಳ ರಚನೆ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನೂ ಘನಫಲಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವುದು ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಘಟಕಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳನ್ನೂ (ಸ್ಟೆಪ್ಸ್) ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಘಟಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪೂರ್ವಜ್ಞಾನ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಡುವರು; ಅನಂತರ ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿ ಪೋಷಿಸುವರು; ಆಮೇಲೆ ಚರ್ಚೆ, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ, ವಿವರಣೆ, ಪ್ರಶ್ನೋತ್ತರ – ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿಷಯವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನೆರವಾಗುವರು. ಅನಂತರ ವಿಷಯದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವರು; ಕೊನೆಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಉದ್ದೇಶಿತ ಗುರಿ ಸಾಧಿಸುವರು, ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಲಿತದ್ದು ಅವರಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವೆನಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡುವರು. ಈ ಐದು ಹಂತಗಳು ಒಂದೇ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯಬಹುದು ಅಥವಾ ಹಲವು ಕಾಲಾವಧಿಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ನುರಿತ ಬೋಧಕರು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನೇತೃತ್ವದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿಷಯದ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಸ್ವರೂಪದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗದವರಾಗಬಹುದು. (ಎಸ್.ಎಸ್.ಕೆ.)

ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ : ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ಆಧಾರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೂ ಅವುಗಳಿಂದ ಉದ್ಭವಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಗಣಿತ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಅರ್ಥ ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸುವ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಮ್ಯಾತ್‌ಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಫಿಸಿಕ್ಸ್). ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನವೆಂದು ಸಹ ಕರೆಯುವುದುಂಟು. ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳಿಂದಲೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ಪಡೆದಿರುವ ಸಮಸ್ತ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಕ್ರೋಡೀಕರಿಸಿ ಅವುಗಳೊಡನೆ ಸಂಬಂಧ ಬೆಳೆಸುವುದು, ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಪಡೆಯುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಂಖ್ಯಾಕಲನೀಯವಾಗಿ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯುವುದು, ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮಂಜಸವಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿವರಣೆಯೊಳಗೆ ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಕೆಲವೇ ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವುದು ಇವೇ ಮುಂತಾದವು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ಧ್ಯೇಯಗಳು.

ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದ ಅಧ್ಯಯನದೊಡನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಲಗ್ರಾಂಜ್ ಮತ್ತು ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ನರ ಚಲನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಂಡಿತು. ಯಾವುದೇ ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಸಲ್ಲುವ ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ವೆಲ್ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತ ಮತ್ತು ಗತಿಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡೂ ಸಮನ್ವಯಗೊಂಡವು. ಹಾಗೆಯೇ ಉಷ್ಣತೆ, ಪುಟಿತತೆ, ವಿದ್ಯುದ್ವಾಹಕತ್ವ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ವಸ್ತುಗಳ ಸ್ಥೂಲ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮಕಣಗಳಾದ ಪರಮಾಣು ಮತ್ತು ಅಣುಗಳ ನಿರಂತರ ಚಲನೆ ಮತ್ತು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ವರ್ಣಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಸತತವಾಗಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಈ ಪ್ರಯತ್ನ ಸಿದ್ಧಾಂತರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಟ್ಟಾಗ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ.

ದ್ರವ್ಯದ ಮೂಲಕಣಗಳಿಗೆ ಕಣಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಅಲ್ಲ, ಅಲೆ ಲಕ್ಷಣಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಪ್ರಯೋಗಗಳು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟ ವಿಷಯಗಳಿಂದ ಆಧುನಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಕ್ವಾಂಟಮ್ ಗತಿವಿಜ್ಞಾನ ಎಂಬ ಒಂದು ಹೊಸ ಅಧ್ಯಾಯ 20ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಪ್ರಾರಂಭದಿಂದಲೂ ಬೆಳೆದುಬಂದಿದೆ. ಹೀಗೆ ಪ್ರಕೃತಿಯ ರಹಸ್ಯಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಕೆಲವೇ ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಮೂಲಕ–ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮಕಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಮೂಲಕ–ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿ ಸತತವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಗಳು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುತ್ತವೆ. ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಸಲು ಹೊಸ ಪ್ರಯೋಗಗಳೇ ಕಾರಣ; ಅಲ್ಲದೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಗಳೇ ಸಮರ್ಥಿಸಬೇಕು.

ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಹೈಸನ್‌ಬರ್ಗ್‌ನ γ–ಕಿರಣ ಸೂಕ್ಷ್ಮದರ್ಶಕ ಇಂಥ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಉಪಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾದ ಒಂದು ಕಣದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದಾಗ ಅದನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೆಳಕಿನಿಂದ ಬೆಳಗಿಸಿ ಅದು ಚೆದರಿಸಿ ಕಳಹುವ ಬೆಳಕನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮದರ್ಶಕದ ಮೂಲಕ ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೂ ಬೆಳಕಿನ ಅಲೆಯುದ್ದದ ಕಣದ ಸ್ಥಾನನಿರ್ಧರಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಲೆಯುದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾದಷ್ಟೂ ಹೀಗೆ ಸ್ಥಾನ ನಿರ್ಧರಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ದೋಷ ಕಡಿಮೆ. ಹೀಗೆಂದು ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಅಲೆಯುದ್ದ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಬೆಳಕಿನಿಂದ (ಅಂದರೆ γ ಕಿರಣದಿಂದ) ಸೂಕ್ಷ್ಮಕಣವನ್ನು ಬೆಳಗಿಸಿದರೆ ಕಣವೇ ಚೆದರಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮದರ್ಶಕದ ಕಡೆಗೆ ರವಾನಿಸುವ ಬೆಳಕಿನ ಕಣದ ಸಂವೇಗ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕಣ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಂವೇಗ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವ ದೋಷವೂ ಇಲ್ಲದೆ ಕಣದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಕಣದ ಸಂವೇಗವನ್ನು ಪಲ್ಲಟಗೊಳಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಅಂದರೆ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಖಚಿತವಾಗಿ ಕಣದ ಸಂವೇಗ ಎಷ್ಟೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಕೆಲವು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಯಾವ ದೋಷವೂ ಇಲ್ಲದೆ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಅನಿಶ್ಚಿತತಾತತ್ತ್ವ ಎಂಬ ಒಂದು ತತ್ತ್ವವೊಂದನ್ನು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿ ಈ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಬೆಳೆಸಿರುತ್ತಾನೆ.

ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಎಂಬ ಪದ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಎಂಬ ಪದದೊಡನೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಪದ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಸಾಕಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಉಂಟು. ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಮೈಕೇಲ್ ಫ್ಯಾರಡೆ (1791–1867) ಮತ್ತು ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ವೆಲ್ (1831–1879) ಎಂಬ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಅನುಸರಿಸಿದ ವಿಧಾನಗಳು ಈ ಎರಡು ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತ ಪ್ರೇರಕತ್ವದ ನಿಯಮದ ಸಂಶೋಧನೆ, ವಸ್ತುಗಳ ಅನುಕಾಂತತ್ವ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಕಾಂತತ್ವ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆ ವಿದ್ಯುತ್ ಮತ್ತು ಕಾಂತಕ್ಷೇತ್ರಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಬಲರೇಖೆಗಳು ಆವರಿಸಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಫ್ಯಾರಡೆ ವಿವರಿಸಿದ. ಆದರೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ವೆಲ್ ಗಣಿತರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದ. 1855ರಲ್ಲಿ ಈತ 'ಆನ್ ಫ್ಯಾರಡೇಸ್ ಲೈನ್ಸ್ ಆಫ್ ಫೋರ್ಸ್' ಎಂಬ ಲೇಖನ ಒಂದನ್ನು ಬರೆದ. ಗೌಸ್, ವೆಬರ್, ರೀಮಾನ್, ಫ್ರಾನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಲ್ ನಾಯ್‌ಮಾನರು ಬಲರೇಖೆಗಳು ವಿದ್ಯುತ್ ಮತ್ತು ಕಾಂತಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ದೂರದಿಂದ ಆಕರ್ಷಣೆಯನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಬಲದ ಕೇಂದ್ರವೊಂದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡರು. ಹೀಗೆ ಫ್ಯಾರಡೆಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಗಣಿತರೂಪಕ್ಕೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಈ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಿಂದಲೂ ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಂಡವು. ಈ ಗಣಿತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ 1873ರಲ್ಲಿ ದ್ಯುತಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯುತ್ ಗತಿಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿವಂಥ ಒಂದು ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ವೆಲ್ ಬರೆದ. ಹೀಗೆ ಇದುವರೆಗೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಭಾಷೆ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿತು.

ಕ್ಷೇತ್ರದ ತುಣುಕು ಮತ್ತು ನಿತ್ಯ ಅನುಭವದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಯಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳ–ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಿದ ದಾರಗಳು ಅದುಮಿರಿಸಿದ ಪ್ರವಾಹಿಗಳು, ಅವುಗಳ ಆವರ್ತ ಚಲನೆ ಇತ್ಯಾದಿ–ನಡುವೆ ಸಾದೃಶ್ಯಗಳನ್ನು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ. ಅಭಿಜಾತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದರೂ ಅವೆಲ್ಲ ಯಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತವೆ. ಪರಮಾಣು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಅಸ್ತಿತ್ವವುಳ್ಳವು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಭೌತ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತವನ್ನು ಬಳಸಿ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿದರೂ ಅದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಉಪಕರಣ, ವಿವರಣೆಗೆ ಬೇಕಾದ

ಭಾಷೆ ಮಾತ್ರ ಎಂದು ಅದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬೆಳೆಸಿದಾಗ ಪರಮಾಣುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅವನ್ನು ಭೌತ ಪ್ರಪಂಚದ ಅಡಿಗೊರಡುಗಳು ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಭಾವಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ಅಭಿಜಾತ ಪರಮಾಣ್ವಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಬೆಳೆಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಥೂಲ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ವಿವರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಐನ್‌ಸ್ಟೈನನ ಸಾಪೇಕ್ಷತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಚಾರಿತ್ರಿಕವಾಗಿ ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ಅತ್ಯಂತ ಘನವಾದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮಿಂಕೋವಿಸ್ಕಿ ನಾಲ್ಕು-ಸದಿಶಗಳು, ರೀಮಾನಿಯನ್ ಸದಿಶಗಳು ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಗಣಿತದ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ನಿತ್ಯವೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಪಡೆಯಲಾಯಿತು. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಂಶಗಳು ದೊರಕಿಸಿಕೊಡುವ ವೇಗ, ಬಲ, ಕ್ಷೇತ್ರಚರಗಳು ಇವೇ ಮೊದಲಾದವುಗಳೊಡನೆ ಈ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಕ ಗುಣಗಳು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಾಪೇಕ್ಷತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಐನ್‌ಸ್ಟೈನ್ ಬೆಳೆಸಿರುತ್ತಾನೆ. ಈ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳ ನಡುವೆ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಆಗಲೇ ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ತೋರಿಸದೇ ಮತ್ತು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಅಡಿಗೊರಡುಗಳನ್ನು ಕೋರದೆ ಭೌತ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವ ಸ್ವಸಮಂಜಸವಾದ ಗಣಿತ ವಿವರಣೆ ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞನದ ಉದ್ದೇಶ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನದಿಂದ ಬೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ತಮ್ಮ ನಿರಂತರ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಹಲವಾರು ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅತಾರ್ಕಿಕ ಎಂದು ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಅನೇಕ ವೇಳೆ ತಳ್ಳಿಹಾಕುವುದುಂಟು. ಆದರೆ ಈಚೆಗೆ ಅವು ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶಬ್ದ ಸಂಪತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಣ್ಯಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ. ಆಲಿವರ್ ಹೆವಿಸೈಡ್‌ನ ಪರಿಕರ್ಮಕ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ (ಆಪರೇಶನ್ ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲಸ್), ವಿಲಾರ್ಡ್ ಗಿಬ್ಸನ ಸದಿಶ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಪಿ.ಎ.ಎಂ. ಡಿರಾಕನ ಡೆಲ್ಟ ಉತ್ಪನ್ನ ತಂತ್ರಗಳು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮಾತ್ರ. ಹೀಗೆಯೇ, ಯಾವ ಉದ್ದೇಶವೂ ಇಲ್ಲದೆ ಬೆಳೆಸಿದ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಭಾಗಗಳು ಭೌತವಿದ್ಯಮಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತ ಮತ್ತು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಉಪಕರಣಗಳೆಂದು ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ. ವಿಶ್ವ ವಿಜ್ಞಾನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ, ಆಧುನಿಕ ಕ್ವಾಂಟಮ್ ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನ ಆಕಾಶ, ಕ್ವಾಂಟಮ್ ಕ್ಷೇತ್ರ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಿನಾರ್ ಅಥವಾ ದ್ವಿಚರ ರೂಪಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಪುನಃ ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿ ಮತ್ತು ಶುದ್ಧ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ನಡುವೆ ಸಹೋದ್ಯಮ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಮೂಲ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿವೆ. ಗ್ರೂಪ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಪರಿಕರ್ಮಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ, ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಹೀಗೆ ಬೆಳೆದು ಬಂದಿರುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಭಾಗಗಳು.

ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿದಾಗ ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಅನ್ವಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ತಿಳಿಯುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ವಾಂಸನೇ ಎರಡು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಡೆದಿರುವ ಸಂಶೋಧನೆಗಳಿಗೆ ಕಾರಣನಾಗಿರುತ್ತಾನೆ. ಐಸಾಕ್ ನ್ಯೂಟನ್, ಲಪ್ಲಾಸ್, ಗೌಸ್, ಪಾಂಕಾರೆ, ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್, ಅರ್ನ್‌ಸ್ಟ್ ಮಾಕ್ ಇಂಥ ವಿದ್ವಾಂಸರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಫಲದಾಯಕವಾದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಗುಂಪುಗೂಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯುಳ್ಳವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ಚರಿತ್ರೆ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಈಚಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ ಶಕ್ತಿ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮಕಣಗಳ ಸೃಷ್ಟಿ ಮತ್ತು ನಾಶ ಇವೇ ಮೊದಲಾದವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಬೆಳೆಸಿದ ಕ್ವಾಂಟಮ್ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಘನಸ್ಥಿತಿ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಕಲನೀಯ ಗತಿಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳೊಡನೆ ಗಣಿತ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದ ದರ್ಶನ ವಿಕಾಸಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದೆ. (ಸಿ.ಕೆ.ವಿ.)

ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನ : ಪ್ರಗತಿಪಥದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನಾಗಲಿ ಸ್ಥಿರೀಕೃತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಚೌಕಟ್ಟಿನೊಳಗೆ ಬಂಧಿಸಿಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಾದರೂ ಈ ಮಾತಿಗೆ ಅಪವಾದವಾಗದೆ ಇರುವುದರಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚರಿಯೇನಿಲ್ಲ. ಅನೇಕ ಸಹಸ್ರಮಾನಗಳ ದೀರ್ಘ ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ಇತಿಹಾಸದುದ್ದಕ್ಕೂ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಚೈತನ್ಯಪೂರ್ಣತೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿ ವರ್ಧಿಸುತ್ತಲೇ ಬಂದಿದೆ. ಏನನ್ನೊ ಎಣಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಎಲುಬುಗಳ ಮೇಲೆ ಆದಿಮಾನವ ಕಚ್ಚುಗಳ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಕೆತ್ತಿಟ್ಟಿರುವ ಗತಕಾಲದ ದಾಖಲೆಗಳು ಇಂದಿಗೂ ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿವೆ; ಮೊರೇವಿಯದಲ್ಲಿ (ಜೆಕೊಸ್ಲೊವಾಕಿಯ) ದೊರೆತ ಅಂಥ ಒಂದು ಮೂಳೆಯ ಮೇಲೆ (ಅದು ಮರಿತೋಳವೊಂದರ ಅಸ್ಥಿ) ಐವತ್ತೈದು ಕಚ್ಚುಗಳಿದ್ದವು. ಈ ದಾಖಲೆಗಳು ಸುಮಾರು ಮೂವತ್ತು ಸಹಸ್ರ ವರ್ಷಗಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಚೀನವಾದವು. ಅಲ್ಲಿಗೆ ಮಾನವನಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣಿತಪ್ರಜ್ಞೆ ಉಗಮಿಸಿದ್ದು ಮೂಲತಃ ಎಣಿಕೆಯ ದಾಖಲೆಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದೊಂದಿಗೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದಾದರೆ ಆ ಉಗಮ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಎಲ್ಲ ನಾಗರಿಕತೆಗಳಿಗಿಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಕೆಲವು ದಶಸಹಸ್ರ ವರ್ಷಗಳಷ್ಟು ಹಿಂದೆಯೇ ಜರುಗಿದ ಘಟನೆ ಎಂದಾಯಿತು. ತರುವಾಯ ಪ್ರಾಚೀನ ನಾಗರಿಕತೆಗಳ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನ ವಸ್ತು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅಳತೆಯ ರಾಶಿಗಳು ಹಾಗೂ ದೃಗ್ಗೋಚರ ಆಕೃತಿಗಳು ಎಂಬ ಭಾವನೆ ರೂಪುಗೊಂಡಿತು. ಇದೇ ಮನೋಭಿಪ್ರಾಯ ಗಣಿತರಂಗದಿಂದ ತುಸು ದೂರ ಉಳಿದಿರುವ ಅನೇಕ ಜನರಲ್ಲಿ ಇಂದೂ ಬೇರೂರಿಯೇ ಇದೆ. ಆದರೆ ಹತ್ತೊಂಬತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕುಡಿಯೊಡೆದ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ (ನಾನ್-ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ ಜೊಮಿಟ್ರಿ), ಬೂಲೀಯ ಬೀಜಗಣಿತ (ಬೂಲಿಯನ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ) ಮುಂತಾದ ಕೆಲ ನವ್ಯ ಶಾಖೆಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಆಯಾಮಗಳನ್ನು ನೀಡತೊಡಗಿದವು. ಅಲ್ಲಿಂದೀಚೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆ, ರಾಶಿ ಮತ್ತು ಗೋಚರಾಕೃತಿಗಳ ವ್ಯಾಸಂಗ ಗಣಿತಾಭ್ಯಾಸದ ಮೊದಲ ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಬಲ್ಲದೆ ವಿನಾ ಸಮಗ್ರ ಗಣಿತವಾಗಲಾರದು ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಲ್ಲಟ ಅಧಿಕೃತ ಗಣಿತವಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮೇಣ ಮೂಡಿಬಂದಿತು. ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಮನೋವೃತ್ತಿಯ ಹಲವಾರು ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಮ್ಮ ಶಾಸ್ತ್ರದ ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಈ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಹೊಸ ಬೆಳಕಿನಲ್ಲಿ ಪುನರ್ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿಯೇ ಕೈಗೊಂಡರು. ತತ್ಫಲವಾಗಿ ಗಣಿತದ ನೈಜಸ್ವರೂಪ ಅಡಗಿರುವುದು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಅದರ ಚಿಂತನಮಾರ್ಗದಲ್ಲೇ ಹೊರತು ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಲ್ಲ ಎಂಬ ಅಂಶ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗತೊಡಗಿತು. ಯಾವ ಯಾವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೆ ಯಾವ ಯಾವ ಉಕ್ತಿಗಳು ಸತ್ಯವೆಂದು ಸಿದ್ಧಪಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಜನರು ವಿವೇಚಿಸುವಾಗಲೆಲ್ಲ ಗಣಿತ ಅಂಕುರಿಸುತ್ತದೆ, ಹಾಗೂ ಗಣಿತದ ಬಹುಭಾಗವೆಲ್ಲ ಅಂಕುರಿಸಿರುವುದು ಇಂಥ ವಿವೇಚನೆಯ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿಯೇ. ಆದಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಗೀಕರಿಸಲಾಗುವ ಉಕ್ತಿಗಳೇ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು (ಆಕ್ಸಿಯಂಸ್/ ಪಾಸ್ಚ್ಯುಲೇಟ್ಸ್), ಅವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧಪಡುವ ಉಕ್ತಿಗಳೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳು (ಥಿಯರಂಸ್). ಹೀಗೆಂದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಗಣಿತದ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು (ಕಾನ್‌ಸೆಪ್ಟ್ಸ್) ಕುರಿತ ಅರ್ಥ ಪ್ರಜ್ಞೆ ಯಾವ ಪಾತ್ರವನ್ನೂ ವಹಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದಾಗಲಿ, ಇಲ್ಲವೇ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಗೌಣವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆಂದಾಗಲಿ ಬಗೆಯಲಾಗದು. ಉತ್ತಮ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಆಯ್ಕೆಗೂ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಸಾಧನಕ್ರಮಗಳ ರೂಪಣೆಗೂ ಹಿಂದಾಗಲಿ, ಇಂದಾಗಲಿ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಯೇ ಪ್ರಧಾನ ನಿರ್ಣಾಯಕ; ಅನಂತರ ಬರುವ ಯಾಂತ್ರಿಕ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅರ್ಥ ಹಿನ್ನೆಲೆಗೆ ಹಿಮ್ಮೆಟ್ಟಬಹುದು, ಅಷ್ಟೆ.

ಪ್ರಸಕ್ತ ಲೇಕನದ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಏಳು ಉಪಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳ ಅಡಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು: 1) ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು; 2) ಪರಿಮೇಯಗಳು ಮತ್ತು ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತ; 3) ಜ್ಯಾಮಿತಿ; 4) ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ; 5) ಟಾಪಾಲಜಿ; 6) ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು 7 ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ತಳಹದಿ.

1 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು : ಆದಿಮಾನವ ಎಣಿಕೆಯ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಚ್ಚುಗಳು, ಬೊಟ್ಟುಗಳು ಮುಂತಾದ ಏಕರೂಪ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದನಷ್ಟೆ. ಹಿಂದೂ-ಅರ್‍ಯಾಬಿಕ್ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿ ಎಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿರುವ ಆಧುನಿಕ ಪ್ರತೀಕಯೋಜನೆಯಲ್ಲಾದರೋ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ಎಂಬ ಹತ್ತು ಪ್ರತೀಕಗಳ ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಸಂಯೋಜನೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಆಧುನಿಕ ಲಿಖಿತರೂಪಗಳು ಪ್ರತೀಕ ಭಾಷೆಯೊಂದರ ಪದ ಅಥವಾ ವಾಕ್ಯಗಳೆಂದೂ 0, 1, 2, ... 9 ಎಂಬ ಗುರುತುಗಳು (ಅಂಕಿಗಳು) ಆ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಡಿ ಬಿಡಿ ಅಕ್ಷರಗಳೆಂದೂ ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಆದಿಮಾನವನ ಲಿಖಿತಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ವಾಕ್ಯಗಳೇ ; ಆದರೆ ಅವೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಕ್ಷರದಿಂದ ರಚಿತವಾದ ವಾಕ್ಯಗಳು. ಆದಿಮಾನವ ನಿಯೋಜಿಸಿಕೊಂಡ ಸರಳ ಸಂಖ್ಯಾಭಾಷೆಗೆ ಇಂದೂ ಮೂಲಭೂತ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಮಹತ್ತ್ವವಿರುವುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಆಧುನಿಕ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಅತಿ ಮುಖ್ಯ. ಈ ಸಲುವಾಗಿ ಕಚ್ಚು ಅಥವಾ ಬೊಟ್ಟಿನ ಗುರುತನ್ನು T ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ತತ್ಫಲವಾಗಿ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಆದಿಮಾನವನ ಪ್ರತೀಕಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ T, TT, TTT ಮೊದಲಾದ ರೂಪಗಳನ್ನು ತಾಳುತ್ತವೆ. ಇವೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಆದಿಮರೂಪಗಳು. ಆದಿಮಾನವನ TTTTTTTTTT ಇಂದು 10 ಎಂಬ ಹೊಸ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳಿದೆಯಷ್ಟೆ ; ಎಂತಲೇ TTTTTTTTTT ಎಂಬುದು ಆಧುನಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಪದ್ಧತಿಯ ಪಾದ (ರ್‍ಯಾಡಿಕ್ಸ್/ ಬೇಸ್) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮಿಕ್ಕ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಬಿಟ್ಟು ಇದನ್ನೇ ಆಧುನಿಕ ಪದ್ಧತಿಯ ಪಾದವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಈ TTTTTTTTTT ಎಣಿಸಲು ಸಹಜವಾಗಿ ಒಗ್ಗಿಬರುವ ಮಾನವನ ಕೈಬೆರಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದೇ ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಕಾರಣವಾಯಿತೆಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಇದು ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರ. ಪ್ರಸಕ್ತ ವಿವರಣೆಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ TTTTTTTTTT ಯ ಉದ್ದ ತೀರ ಪ್ರತಿಕೂಲಕರವಾಗುವ ಕಾರಣ ಆಧುನಿಕ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ (ಡೆಸಿಮಲ್ ಸಿಸ್ಟಮ್) ಬದಲಾಗಿ ಪ್ರಧಾನಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನೇ ಹೋಲುವ, ಆದರೆ ಲಾಂಬಿಕ TTTTTTTTTT ಯ ಬದಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಮೊಟಕಾಗಿರುವ TTT ಯಷ್ಟನ್ನೇ ಪಾದವಾಗಿ ಉಳ್ಳ, ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು (ಟರ್ನರಿ ಸಿಸ್ಟಮ್) ಕುರಿತು ಮೊದಲು ವಿವೇಚಿಸೋಣ. ಈ ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಆದಿಮಾನವನ TTT ಯನ್ನು 10ಎಂದೂ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ TT ಮತ್ತು T ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 1 ಎಂದೂ ಬರೆಯಲಾಗುವುದು. (ಇಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ 0, 2 ಮತ್ತು 1 ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಗುರುತುಗಳು ; ಅವಕ್ಕೆ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಸುಸಂಗತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಳಸಲು ಅಡ್ಡಿಯಿಲ್ಲ.) ಈಗ ಆದಿಮಾನವನ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ (ಅಂದರೆ T ಗಳ ಸಾಲುಗಳಿಗೆ) ಅನುರೂಪವಾದ ತ್ರಿಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಿಗಳ ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂ **(ನೋಡಿ)** ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು:

ವಿಧಿ 1 : OTTT ಯನ್ನು TO ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.
ವಿಧಿ 2 : OTT ಯನ್ನು 2 ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.
ವಿಧಿ 3 : OT ಯನ್ನು 1 ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.
ವಿಧಿ 4 : ಪರಿಶೀಲಿತ ವಾಕ್ಯದ ಅತ್ಯಂತ ಎಡಗಡೆಯಲ್ಲಿ T ಇರುವುದಾದರೆ ಅದನ್ನು OT ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.

ಈ ವಿಧಿಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೋ ಅಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಅವನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಕ್ರಮದ ಆದ್ಯತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸುತ್ತ ಹೋಗುವುದೇ ಪ್ರಸ್ತುತ ಅಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಆದಿಮಾನವನ

TTT TTT TTT TTT TTT

ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ತ್ರಿಮಾನಾಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರದ ಕಾರಣ O ಅದರ ಮೇಲೆ 1,2 ಮತ್ತು 3ನೆಯ ವಿಧಿಗಳ ಪ್ರಯೋಗ ಅಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಮೊದಲಿಗೆ 4ನೆಯ ವಿಧಿ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಗುರಿಪಡಿಸಬೇಕು.

OTTT TTT TTT TTT TTT

ಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಡಿಗೆರೆ ಹಾಕಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಇದರ ಮೇಲೆ 1,2 ಮತ್ತು 3ನೆಯ ವಿಧಿಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವೊಂದನ್ನು ಬೇಕಿದ್ದರೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿದೆಯೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಆದರೆ 1ನೆಯ ವಿಧಿ 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ವಿಧಿಗಿಂತ ಮುಂಚೆ ನಮೂದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಆದ್ಯತೆ ಅದರ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಈಗ ಈ 1ನೆಯ ವಿಧಿಯ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ನಮಗೆ T OTTT TTT TTT TTT ಎಂಬ ವಾಕ್ಯ ಲಭಿಸುವುದು. ನಮೂದಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಿಗಳನ್ನೂ ಇದರ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿರುವುದಾದರೂ ಆಗಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಯೋಗದ ಆದ್ಯತೆ ಸಲ್ಲುವುದು ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧಿಗೇ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ 1ನೆಯ ವಿಧಿಯನ್ನೇ ಬಳಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ TT OTTT TTT TTT:

TTT OTTT TTT ;
TTTT OTTT ಮತ್ತು
TT TTTO

ಎಂಬ ವಾಕ್ಯಗಳು ಫಲಿಸುತ್ತವೆ. ಕೊನೆಯ ವಾಕ್ಯವನ್ನು 1, 2 ಮತ್ತು 3ನೆಯ ವಿಧಿಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೆ ಗುರಿಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಅದರ ಮೇಲೆ 4ನೆಯ ವಿಧಿಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ OTTT TTOವನ್ನೂ ಬಳಿಕ 1ನೆಯ ವಿಧಿಯ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ T OTT O ವನ್ನೂ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. T OTT O ನ ಮೇಲೆ 1ನೆಯ ವಿಧಿಪ್ರಯೋಗ ಅಸಾಧ್ಯ, ಮಿಕ್ಕೆಲ್ಲ ವಿಧಿಗಳ ಪ್ರಯೋಗ ಸಾಧ್ಯ. ನಿಷ್ಕರ್ಷಿತ ಆದ್ಯತೆಯಂತೆ ಅದರ ಮೇಲೆ 2ನೆಯ ವಿಧಿಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಈಗ T20 ಎಂಬ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಹೆಜ್ಜೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲು 4ನೆಯ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ OT 20ಯನ್ನೂ ತರುವಾಯ 3ನೆಯ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 120 ಯನ್ನೂ ರಚಿಸಬಹುದಷ್ಟೆ. ನಮೂದಾಗಿರುವ ಯಾವೊಂದು ವಿಧಿಯನ್ನೂ ಈ 120 ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಅಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ಇಲ್ಲಿಗೆ ಕೊನೆಗೊಂಡಿತು. ಅಂದ ಮೇಲೆ ಆದಿಮಾನವನ TTT TTT TTT TTT TTT ಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರತೀಕ 120. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಆಧಿಮಾನವನ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನೂ ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಬಹುದು. ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ (ಸೂಚಕ) ಪ್ರತೀಕಗಳೆಲ್ಲವೂ 0,1,2 ಎಂಬ ಮೂರೇ ಗುರುತುಗಳ ಕ್ರಮಸಂಯೋಜನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದಿಮಾನವ ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನು ಆಧುನಿಕ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಮಾರ್ಗವೂ ಈಗ ತಿಳಿಸಿರುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾದುದೇ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ನಾಲ್ಕೇ ವಿಧಿಗಳ ಆಲ್ಗಾರಿತಂನ ಬದಲು ಕೆಳಗಿನ ಹನ್ನೊಂದು ವಿಧಿಗಳ ಹೊಸ ಆಲ್ಗಾರಿತಮನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ, ಅಷ್ಟೆ:

ವಿಧಿ 1 : OTTTTTTTTTT ಯನ್ನು TO ಎಂದು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.
ವಿಧಿ 2 : OTTTTTTTTT ಯನ್ನು 9 ಎಂದು ಬದಲಿಸಿ.
ವಿಧಿ 3: OTTTTTTTTಯನ್ನು 8 ಎಂದು ಬದಲಿಸಿ.
....
ವಿಧಿ 9 : OTTಯನ್ನು 2 ಎಂದು ಬದಲಿಸಿ.
ವಿಧಿ 10 : OTಯನ್ನು 1 ಎಂದು ಬದಲಿಸಿ.
ವಿಧಿ 11 : ಪರಿಶೀಲಿತ ವಾಕ್ಯದ ಅತ್ಯಂತ ಎಡಗಡೆಯಲ್ಲಿ T ಇರುವುದಾದರೆ ಅದನ್ನು OT ಎಂದು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.

ದಶಮಾನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಮಾನಗಳಂಥ ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರತೀಕ ಪದ್ಧತಿಗಳ ನಿಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ O ಚಿಹ್ನೆ ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿರುವುದು ಇದೀಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಪ್ರ.ಶ. ಸುಮಾರು 5 ರಿಂದ 8 ನೆಯ ಶತಮಾನಗಳ ನಡುವೆ ಹಿಂದೂ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ಚಿಹ್ನೆಯ ಅಗತ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮನಗಂಡು ಅದನ್ನು ಏನೂ ಇಲ್ಲದಿರುವಿಕೆ ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯದ ಶೂನ್ಯ ಪದದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರು. ಅದಕ್ಕೂ ಕೆಲ ಶತಮಾನಗಳ ಹಿಂದೆ ಪ್ರಾಚೀನ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರೂ ಮಧ್ಯ ಅಮೆರಿಕದ ಮಾಯ ಜನಾಂಗದವರೂ o ಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ದಾಖಲೆಗಳಿವೆ. ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರು ಶೂನ್ಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಅವರ ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರತೀಕಗಳ ಮಧ್ಯಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ 120) ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರೇ ವಿನಾ ಪ್ರಾಯಶಃ ತುದಿಗಳಲ್ಲಲ್ಲ. ಅವರ ಪ್ರತೀಕಪದ್ಧತಿ ಹತ್ತು ಮತ್ತು ಅರವತ್ತು ಎಂಬ ಎರಡೆರಡು ಪಾದಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುವ ಮಿಶ್ರತಳಿಯಾಗಿತ್ತು. ಮಾಯ ಜನಾಂಗದವರು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದ ಶೂನ್ಯ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಪೈಕಿ ಕೆಲವಷ್ಟು ಇಪ್ಪತ್ತನ್ನೂ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಅವರ ಪ್ರತೀಕಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಐದು, ಇಪ್ಪತ್ತು ಹಾಗೂ ಹದಿನೆಂಟು ಎಂಬ ಮೂರು ಪಾದಗಳ ಕೈವಾಡವಿರುತ್ತಿತ್ತು. ಇಂಥ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಶೂನ್ಯ ಪ್ರತೀಕದ ಪೂರ್ಣ ಸುಸಂಗತ ಬಳಕೆಯನ್ನೂ ಜೊತೆಗೆ ಹತ್ತು ಮಾತ್ರವೇ ಪಾದವಾಗಿರುವ ಶುದ್ಧ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನೂ ರೂಢಿಗೆ ತರುವಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ಹಿಂದೂ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಯಶಸ್ವಿಯಾದರು. 9ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಹಿಂದೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಅರಬ್ಬರು ಕಲಿತು ಅದನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಸಂಸ್ಕರಿಸಿ ಯುರೋಪಿಗೂ ರವಾನಿಸಿದರು. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಆಧುನಿಕ ದಶಮಾನ ಸಂಜ್ಞಾಪದ್ಧತಿಗೆ ಹಿಂದೂ–ಅರ್‍ಯಾಬಿಕ್ ಪದ್ಧತಿ ಎಂದು ಹೆಸರಾಗಲು ಇದೇ ಕಾರಣ.

ಆದಿಮಾನವನ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ತ್ರಿಮಾನ ಹಾಗೂ ದಶಮಾನ ಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿದಂತೆ ತ್ರಿಮಾನ, ದಶಮಾನಗಳಂಥ ಪದ್ಧತಿಗಳ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಆದಿಮಾನವನ ಪ್ರತೀಕಗಳಾಗಿ ಪುನಾರೂಪಾಂತರಿಸುವುದೂ ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯವಷ್ಟೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲೂ ಸರಳ ಅಲ್ಗಾರಿತಮುಗಳ ನಿಯೋಜನೆ ಸಾಧ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು T ಗುರುತುಗಳ ಸಾಲುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮರುಪರಿವರ್ತಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಆರು ವಿಧಿಗಳ ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. (ಇಲ್ಲಿ S ಒಂದು ಸಹಾಯಕ ಅಕ್ಷರ).

ವಿಧಿ 1 : TSನ್ನು STTT ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.
ವಿಧಿ 2 : OSನ್ನು SS ಎಂದು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.
ವಿಧಿ 3 : 1Sನ್ನು SST ಎಂದು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.

ವಿಧಿ 4 : 2Sನ್ನು SSTT ಎಂದು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.

ವಿಧಿ 5 : ಎಲ್ಲ Sಗಳನ್ನೂ ಅಳಿಸಿಬಿಡಿ.

ವಿಧಿ 6 : ಪರಿಶೀಲಿತ ವಾಕ್ಯದ ಅತ್ಯಂತ ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿ O ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು OS ಎಂದೂ 1ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 1S ಎಂದೂ 2 ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 2S ಎಂದೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ.

ಈ ಅಲ್ಗಾರಿತಂ ಮೇರೆಗೆ ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ 122 ಎಂಬ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು Tಗಳ ಸಾಲನ್ನಾಗಿ ರೂಪಾಂತರಿಸುವ ಹೆಜ್ಜೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಒಂದೊಂದು ಹೆಜ್ಜೆಯ ವಾಕ್ಯದ ಮೇಲೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಬೇಕಾದ ವಿಧಿಯ ವಿವರವನ್ನು ಆವರಣದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದೆ.)

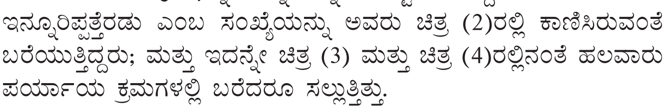
122 [ದತ್ತತ್ರಿಮಾನ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ; ಇದರ ಮೇಲೆ 6ನೆಯ ವಿಧಿಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬೇಕು.]

122 S [ಈಗ ವಿಧಿ 4]
12 S STT [ಪುನ: ವಿಧಿ 4]
1SS TTS TT [ಈಗ ವಿಧಿ1]
1SS TST TTT T [ಪುನಃ ವಿಧಿ 1]
1SS STTTT TT TT [ವಿಧಿ 3]
SST SS TTTT TT T T [ವಿಧಿ 1]
SSS TTT STTT TTT TT [ಮತ್ತೆ ವಿಧಿ 1]
SSS TTS TTT TTT TTT TT [ಮತ್ತೆ ವಿಧಿ 1]
SSS TST TTT TTT TTT TTT T [ಪುನ: ವಿಧಿ 1]
SSSSTTT TTT TTT TTT TTT TT [ಕೊನೆಗೆ ವಿಧಿ 5]
TTT TTT TTT TTT TTT TT [ಪರಿಸಮಾಪ್ತಿ]

ಮೇಲಿನ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ 122ರ ಬಲತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ 2 ಎಂಬ ಅಂಕೆ ಮೂರನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ TT ಗೂ ಮಧ್ಯದ 2 ಆರನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ TTT TTT ಗೂ ಎಡತುದಿಯ 1 ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನುಳಿದ TTTTTTTTT ಗೂ ಜನ್ಮ ನೀಡಿರುವುದು ವೇದ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು:

122 =	$\underbrace{\text{TTT TTT TTT}}$	TTT TTT	TT
(ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿ)	1 ರ ಕೊಡುಗೆ	ಮಧ್ಯದ 2 ರ ಕೊಡುಗೆ	ಬಲತುದಿಯ 2ರ ಕೊಡುಗೆ

ಮಧ್ಯದ 2ರ ಕೊಡುಗೆ ಬಲತುದಿಯ 2ರ ಕೊಡುಗೆಗಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅಂದಮೇಲೆ ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರತೀಕಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಅಂಕೆಗಳ ಮೌಲ್ಯ ಆ ಅಂಕೆಗಳಷ್ಟನ್ನೇ ಅಲ್ಲದೆ ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಈ ಲಕ್ಷಣವಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕಪದ್ಧತಿಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಾನಿಕ ಮೌಲ್ಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು (ಪೊಸಿಷನ್ ವ್ಯಾಲ್ಯು ಸಿಸ್ಟಮ್ಸ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. ತ್ರಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯೂ ಒಂದು ಸ್ಥಾನಿಕ ಮೌಲ್ಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೇ. ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 20–25ನೆಯ ಶತಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹಿಂದೆಯೇ ಯೂಫ್ರಟಿಸ್–ಟೈಗ್ರಿಸ್ ಕಣಿವೆಯ ಸುಮೇರಿಯನ್ ಜನರು ಅರವತ್ತನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಪಾದವಾಗಿ ಉಳ್ಳ, ಆದರೆ ಶೂನ್ಯ ಚಿಹ್ನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಸ್ಥಾನಿಕ ಮೌಲ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಂದನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಿ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇದಕ್ಕೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿ ಅದಕ್ಕಿಂತ ತುಸು ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಹೈರೊಗ್ಲಿಫಿಕ್ ಬರಹಗಾರರಾದರೋ ಬಿಡಿ, ಹತ್ತು, ನೂರು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು (ಕೋಟಿಯವರೆಗೆ ಮಾತ್ರ) ಸೂಚಿಸಲು ಚಿತ್ರ (1)ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ಭಿನ್ನ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನೇ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಇನ್ನೂರಿಪ್ಪತ್ತೆರಡು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವರು ಚಿತ್ರ (2)ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿರುವಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು; ಮತ್ತು ಇದನ್ನೇ ಚಿತ್ರ (3) ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ (4)ರಲ್ಲಿನಂತೆ ಹಲವಾರು ಪರ್ಯಾಯ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದರೂ ಸಲ್ಲುತ್ತಿತ್ತು.



ಚಿತ್ರ 1 ಚಿತ್ರ 2 ಚಿತ್ರ 3 ಚಿತ್ರ 4

ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ತೇಜಕ ಸೌಲಭ್ಯಗಳು ನಿಜಕ್ಕೂ ಅಪಾರ. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಗಾಗಿ ಇಂಥದೊಂದು ಪದ್ಧತಿ ನಿಯೋಜಿತವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ (ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್), ಅನ್ವಯಿಕ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ (ಅಪ್ಲೈಡ್ ಇಕನಾಮಿಕ್ಸ್), ವಾಣಿಜ್ಯೋದ್ಯಮ (ಕಾಮರ್ಸ್), ತಂತ್ರವಿಜ್ಞಾನ (ಟೆಕ್ನಾಲಜಿ) ಮುಂತಾದ ನವನಾಗರಿಕತೆಯ ಅವಶ್ಯ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಾವುವೂ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರವರ್ಧಿಸಲು ಅವಕಾಶವೇ ಆಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ (ಪ್ಯೂರ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್) ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ದಶಮಾನ, ತ್ರಿಮಾನ, ದ್ವಿಮಾನ (ಈ ಕೊನೆಯದರ ಪಾದ TT) ಮುಂತಾದ ಪ್ರತೀಕ ಯೋಜನೆಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ ಕೇವಲ ಒಂದು ತಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರಗತಿಯೋ ಇಲ್ಲವೇ ನಿಜವಾದ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಪ್ರಗತಿಯೋ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪರಿಶೀಲನಾರ್ಹ. ಬಹುಸಂಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಇಂದಿನವರೆಗೆ ಬೆಳೆದು ಬಂದಿರುವ ಚಿಂತನ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಅದು ತಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರಗತಿ ಮಾತ್ರ ಆದೀತೇ ಹೊರತು ತಾತ್ತ್ವಿಕವಲ್ಲ (ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ ಇದು ಈ ಬಹುಸಂಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಸುಪ್ತ ಅಥವಾ ಪ್ರಬುದ್ಧ ಮನೋಭಿಪ್ರಾಯ). ಏಕೆಂದರೆ ಆಧುನಿಕ ದಶಮಾನಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವಿಂದು ಯಾವ ಯಾವ ಗಣಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗಬಹುದೋ ಅವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಆದಿಮಾನವನ ಕಚ್ಚು, ಬೊಟ್ಟುಗಳ ನೆರವಿನಿಂದಲೇ ನಿರ್ವಹಿಸಲು ತತ್ತ್ವಶಃ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4 ನ್ನೂ 3ನ್ನೂ ಕೂಡುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ TTTT ಯನ್ನೂ TTT ಯನ್ನೂ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ TTTTTTT ಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಷ್ಟೆ; ಅಂದರೆ ಎರಡು T ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ + ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕೈಬಿಟ್ಟರಾಯಿತು:

TTTT + TTT = TTTTTTT

ಮತ್ತೆ TTTT × TTT ಮಾದರಿಯ ಎರಡು T ಸಾಲುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಏಳು ವಿಧಿಗಳ ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಮನ್ನೂ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು (ಇಲ್ಲಿ × ಗುಣಾಕಾರದ ಚಿಹ್ನೆ, Q, R,S ಸಹಾಯಕ ಅಕ್ಷರಗಳು) :

ವಿಧಿ 1 : Q × TT ಯನ್ನು R ×T ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.

ವಿಧಿ 2 : Q × T ಯನ್ನು ಅಳಿಸಿಬಿಡಿ.

ವಿಧಿ 3 : TR ನ್ನು RST ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.

ವಿಧಿ 4 : SR ನ್ನು RSಎಂದು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.

ವಿಧಿ 5 : TX ನ್ನು TQX ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ.

ವಿಧಿ 6 : Sಗಳನ್ನೆಲ್ಲ Tಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

ವಿಧಿ 7 : Rಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಅಳಿಸಿಬಿಡಿ.

ಈ ಅಲ್ಗಾರಿತಮನ್ನು TTTT × TTTಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ TTTTTTTTTTTT ಎಂಬ ಸರಿಯಾದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಫಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಅಂಕಗಣಿತದ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನೂ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ T ಸಾಲುಗಳ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ ತತ್ತ್ವಶ: ಕೈಗೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂದೆನಿಸುವುದು ಸಹಜ. ಮೇಲಾಗಿ ಆದಿಮಾನವನ T ಸಾಲುಗಳಿಗೆ, ಹಾಗೂ ಅವನ್ನೊಳಗೊಳ್ಳುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕ್ರಮಗಳಿಗೆ, ಪ್ರಶ್ನಾತೀತ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಸರಳತೆ ಸಹ ಇರುವುದನ್ನು ಯಾರೂ ಅಲ್ಲಗಳೆಯುವಂತಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣಿತವನ್ನು ಆದಿಮಾನವನ ಪ್ರತೀಕಗಳಿಂದಲೇ ನಿರ್ಮಾಣಮಾಡುವ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ನಿಜಕ್ಕೂ ಒಂದು ಅಪ್ರಕಟಿತ ವಿಶ್ವಾಸವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ನಿಂತಿದೆ: ಮನಬಂದಷ್ಟು ಉದ್ದುದ್ದವಾದ T (ಹಾಗೂ ಇತರ) ಗುರುತುಗಳ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿಡಲು ಯಾವ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಆತಂಕವೂ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದೇ ಆ ಅಪ್ರಕಟಿತ ವಿಶ್ವಾಸ. (ದಶಮಾನ ಪ್ರತೀಕಗಳಿಂದ ಇಲ್ಲವೇ ಮತ್ತಾವುದೇ ಪೂರ್ವನಿಶ್ಚಿತ ಸಾಲುಗುರುತು ಪ್ರತೀಕಗಳಿಂದ, ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಪೂರ್ಣ ಗಣಿತವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಪ್ರೌಢತರ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಿಗೆ ಸಹ ಈ ಮಾತು ಅನ್ವಯಿಸದೆ ಇಲ್ಲ). ಇತ್ತೀಚೆಗೆ (ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ––––– ಇನ್‌ಫರ್ಮೇಷನ್ ಥಿಯರಿ ––––– ಸಂಸ್ಥಾಪನೆಯ ಬಳಿಕ) ಈ ವಿಶ್ವಾಸದ ಬಗ್ಗೆ ತುಸು ಪುನರಾಲೋಚನೆ ನಡೆಸುವ ಅಗತ್ಯ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಎರಡು. ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ, ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಇಡೀ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಭೂತ ದ್ರವ್ಯಕಣಗಳೆಲ್ಲ ಸ್ವಭಾವತಃ ಅವಿಭಾಜ್ಯವೂ ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಸ್ವಭಾವತಃ ಸಾಂತವೂ (ಫೈನೈಟ್) ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತಲೂ ಉದ್ದವಾದ T ಸಾಲುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಕಲ್ಪನೆಗೆ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಆಸರೆ ಉಳಿದೀತೇ? ಎರಡನೆಯದಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗುರುತುಗಳ ತೀರ ಉದ್ದವಾದ ಸಾಲೊಂದನ್ನು ರಚಿಸತೊಡಗಿದರೂ ಅಂಥ ಸಾಲಿನ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಲಿಖಿತವಾದ ಗುರುತುಗಳು ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ ಮಸಕಾಗುತ್ತ ಬಂದು ರಚನೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುವ ಮುನ್ನವೇ ಪರಿಸರದೊಂದಿಗೆ ಲೀನವಾಗಿಬಿಡುವುದಿಲ್ಲವೇ? ನಾವು ಮೂವತ್ತನಾಲ್ಕನ್ನು 34 ಎಂಬ ದಶಮಾನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪ್ರಯಾಸವೂ ಇಲ್ಲದೆ ನೆನಪಿಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲೆವಾದರೂ ಅದನ್ನು TTTTTTTTTTTTTTTTTT TTTTTTTTTTTTTTTT ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಗ್ರಹಿಸಲು ಲೇಖನಿ, ಕಾಗದ

ಗಳನ್ನು ಮರೆಹೋಗದೆ ವಿಧಿಯಿಲ್ಲ. ಇಷ್ಟೊಂದು ಉದ್ದವಿರುವ T ಸಾಲಿನ ರಚನೆ ನಮ್ಮ ಮಿದುಳಿನೊಳಗಡೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಅಪೂರ್ಣವಾಗಿರುವಾಗಲೇ ಆದಿಯ Tಗಳು ಆಳಿಸುತ್ತ ಬರುವುದು ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ 9999,9999999999,99999 999999,999999999 ಎಂಬ ದಶಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕಾದರೂ ನಮಗೆ ಕಾಗದ, ಲೇಖನಿಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗುವುವು. ಈಗ ಈ ದಶಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಒಂದು ಅನುರೂಪ T ಸಾಲನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯತೊಡಗಿದರೆ ಸೆಕೆಂಡ್ ಒಂದಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ಸಹಸ್ರಕೋಟಿ T ಗಳನ್ನು ಬರೆದರೂ ಸಾಲಿನ ರಚನೆ ಪೂರ್ಣವಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದಷ್ಟು ಕೋಟಿಕೋಟಿ ವರ್ಷಗಳು ಅವಶ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ರಚನೆಯ ಅವಧಿ ಇಷ್ಟೊಂದು ದೀರ್ಘವಿರುವಾಗ ಮಿದುಳಿನೊಳಗಡೆ ನಡೆದಂಥ ವಿದ್ಯಮಾನವೇ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ದಾಖಲೆ ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಭವಿಸುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯ. ಅಂದಮೇಲೆ ಮೇಲಿನ ದಶಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ T ಸಾಲನ್ನು ಬಹುಶಃ ಎಲ್ಲೂ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇನ್ನು ಇದೇ ಬಗೆಯ ತೊಡಕು ಸಾಕಷ್ಟು ದೊಡ್ಡವಾದ A, B ಎಂಬ ದಶಮಾನ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆರಡರ ಚರಘಾತಾಂಕೀಯ ಸಂಯೋಜನೆ (ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕಾಂಪೊಸಿಷನ್) A^B ಯನ್ನು ಒಂದು ನೇರ ದಶಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿ ಬರೆಯ ಹೊರಟಾಗಲೂ ಉದ್ಭವಿಸಿಯೇ ತೀರುವುದು. ಅಲ್ಲಿಗೆ ನಾವು ಯವುದೇ ಪ್ರತೀಕಯೋಜನೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದರೂ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಎಲ್ಲ ಸುಸಂಬದ್ಧ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೂಲರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಬಹುಶಃ ಅಸಾಧ್ಯವೇ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಮೊದಲ ನೋಟಕ್ಕೆ ಈ ತೊಡಕುಗಳು ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಚರ್ಚೆಗೆ ಅಪ್ರಕೃತವಾದ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಸ್ವರೂಪವೆನಿಸಿದರೂ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನಿಜಕ್ಕೂ ಮೂಲಭೂತ ನಿಸರ್ಗ ನಿಯಮಗಳ ಕೈವಾಡವಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ನಾವು ಅಲಕ್ಷಿಸುವಂತಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಇಂಥ ಸಂಕೀರ್ಣತೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗಣಿತವನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ಪುನಾರಚಿಸಲು ಇದುವರೆಗೆ ಯಾರಿಂದಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಇಂತಿರುವಾಗ ತಾತ್ಕಾಲಿಕವಾಗಿಯಾದರೂ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಯಿಂದ ಪಾರಾಗುವ ವಿಮೋಚನ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಅರಸುವುದು ಸೂಕ್ತವಷ್ಟೆ. T ಹಾಗೂ ಇತರ ಗುರುತುಗಳ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮನಬಂದಷ್ಟು ದೀರ್ಘವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸುತ್ತ ಹೋಗುವ ಸೌಲಭ್ಯವುಂಟೆಂಬ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ವಿಶ್ವಾಸ ಅಂಥ ಒಂದು ಸರಳ ವಿಮೋಚನ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನಮ್ಮ ಪಾಲಿಗೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಎಂತಲೇ ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಲ್ಲದೆ ನಾವು ಅದನ್ನು ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಎಲ್ಲೆಡೆಯಲ್ಲೂ ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. [ಈ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಅನಪೇಕ್ಷಣೀಯ ಕ್ಷಮಾಯಾಚಕ ಧ್ವನಿ ಇದೆಯೆಂದು ಕಳವಳಪಡುವವರು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ನಿಜಕ್ಕೂ ಮಾನವರ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನೇ ಅವಲಂಬಿಸದ ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಆದರ್ಶಲೋಕದ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳೆಂದಾಗಲಿ, ಇಲ್ಲವೆ ಮಾನವರ ಸ್ವತ್ತೇ ಆದಾಗ್ಯೂ ಅವರ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯ ಅಮೂರ್ತ ಸೃಷ್ಟಿಫಲಗಳೆಂದಾಗಲಿ ಘೋಷಿಸಿ, ಅವುಗಳ ದಿವ್ಯಸ್ವರೂಪವನ್ನು T ಸಾಲುಗಳಂಥ ಪಾಮರ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೆ ಹೋಗುವುದರಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚರಿಯಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಮಾಧಾನ ತಂದು ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸಾಕಷ್ಟು ಗೌರವ ಗಳಿಸಿರುವ ಇವೆರಡು ದೃಷ್ಟಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ಲೇಟೋವಾದ (ಪ್ಲೇಟಾನಿಸಂ) ಮತ್ತು ಅಂತರ್ಬೋಧನವಾದ (ಇಂಟ್ಯುಇಷನಿಸಂ) ಎಂಬ ಹೆಸರುಗಳು ಬಂದಿವೆ]

ಸಾಲು ಪ್ರತೀಕಗಳ ಉದ್ದದ ಕ್ಲಿಷ್ಟಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸ್ಥಗಿತಗೊಳಿಸಿದ ತರುವಾಯ ಆದಿಮಾನವನ T ಸಾಲುಗಳು ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಮಸ್ತ ಗಣಿತವನ್ನೂ ನಿರ್ಮಿಸುವ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ನಾವೀಗ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಇದರ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದು ವಾಡಿಕೆ:

I T ಯನ್ನು ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದು.

II x ಯಾವುದೇ ಪ್ರತೀಕವಾಗಿರಲಿ ಅದರ ನಕಲಿನ ಮುಂದೆ T ಗುರುತನ್ನು ಬರೆದು xT ಎಂಬ ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಶಕ್ಯತೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪುವುದು; ಹಾಗೂ x ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಸ್ವೀಕೃತವಾಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ xT ಯನ್ನು ಮತ್ತೆ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದು; (ಇದರ ಪ್ರಕಾರ TT, TTT ಮುಂತಾದ T ಸಾಲುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ).

III T $\neq$ xT ಎಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದು (x ಚರ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ, $\neq$ ಅಸಮತೆಯ ಚಿಹ್ನೆ).

IV $X \neq y$ ಆದಾಗ xT $\neq$ yT ಎಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದು (x, y ಚರ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.)

V x ಗೆ ಇದ್ದೊಡನೆ xT ಗೂ ಇರಲೇಬೇಕಾಗಿ ಬರುವಂಥ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲಕ್ಷಣವೂ T ಗೆ ಇದ್ದೊಡನೆ ಸಮಸ್ತ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆಂದು ತರ್ಕಿಸುವುದು (x ಚರ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ).

ಈ ತತ್ತ್ವಗಳು ಇಂದು ಪಿಯಾನೋ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು (ಪಿಯಾನೋ ಆ್ಯಕ್ಸಿಯಂಸ್, 1899) ಎಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿರುವವುಗಳಿಗೆ ವಸ್ತುತಃ ಸಮಾನವಾದವು. ರಿಚರ್ಡ್ ಡೆಡೆಕಿಂಟ್ (1831 – 1916) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನಿಂದ ಪ್ರಭಾವಿತನಾದ ಗ್ಯೆಸೆಪೆ ಪಿಯೊನೋ (1858 – 1932) ಇವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆದ್ಯುಕ್ತಿರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯದಕ್ಕೆ (V) ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ ತತ್ತ್ವ (ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಆಫ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಇಂಡಕ್ಷನ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ಕುರಿತು ತುಸು ಚಿಂತನೆ ಅವಶ್ಯ. A ಎಂಬುದು xಗೆ ಇದ್ದೊಡನೆ xT ಗೂ ಇರಲೇಬೇಕಾಗಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಲಕ್ಷಣವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಲಕ್ಷಣ Tಗೆ ಇರುವುದಾದರೆ TTಗೂ ಇರಲೇಬೇಕಷ್ಟೆ. ಅದು ಯಾವಾಗ TTಗೆ ಪ್ರಾಪ್ತವಾಗಬೇಕಾಯಿತೋ TTTಗೂ ಪ್ರಾಪ್ತವಾಗದೆ ವಿಧಿಯಿಲ್ಲ (ಇದನ್ನು ಮನಗಾಣಲು T T ಯನ್ನು X ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು); ಇತ್ಯಾದಿ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಪರಿಶೀಲಿತ A ಲಕ್ಷಣ ಸಮಸ್ತ T ಸಾಲುಗಳಿಗೂ ಇದ್ದೇ ತೀರಬೇಕೆಂದು ನಮಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ T ಸಾಲುಗಳ ವಿನಾ ಬೇರಾವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬ ಬೆಳಕಿನಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸುವವರಿಗೆ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ A ಲಕ್ಷಣ ಇದ್ದೇ ಇರುವ ಸಂಗತಿ ಒಡನೆಯೇ ಗೋಚರಿಸಿ ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ ತತ್ತ್ವದ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಕರಣ ಅನವಶ್ಯವಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಯ ಮನೋಧರ್ಮದ ಪ್ರಕಾರ ಸಮಸ್ತ ಚಿಂತನೆಗಳೂ ಪ್ರಕಟಿತ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಚೌಕಟ್ಟಿನೊಳಗೆ ಸಾಗಬೇಕೇ ವಿನಾ ಆ ಚೌಕಟ್ಟಿನ ಹೊರಗಡೆ ಉಗಮಿಸುವ ಬೆಳಕನ್ನು ಆಶ್ರಯಿಸುವಂತಿಲ್ಲ. ಈ ಮನೋಧರ್ಮದ ಒತ್ತಡಕ್ಕೆ ಸಿಲುಕಿದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ಮಾರ್ಗದಿಂದಲೇ ನಿಖರಗೊಳಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಕರಿಸಿಟ್ಟರು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಪಿಯಾನೋ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಗೆಯ ಗಣಿತೀಯ ಧಾತುಗಳಾಗಲಿ ವಸ್ತುತಃ T ಗಳ ಸಾಲುಗಳಿಗೇ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆಂಬುದು ಅವರ ಎಣಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಇತ್ತೀಚಿನ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಫಲವಾಗಿ ಈ ಎಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲ ನಿಗೂಢ ಅಸಮರ್ಪಕತೆಗಳಿರುವುದು ಗೋಚರಕ್ಕೆ ಬಂದಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಆ ಅಸಮರ್ಪಕತೆಗಳು ಇಂದು ಗಣಿತದ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಕುಂಠಿತಗೊಳಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಶಿಷ್ಟೇತರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (ನಾನ್ – ಸ್ಟ್ಯಾಂಡರ್ಡ್ ಅನ್ಯಾಲಿಸಿಸ್) ಮುಂತಾದ ನವ್ಯ ಅಧ್ಯಯನಗಳಿಗೆ ಮೂಲ ಪ್ರೇರಣೆಯಾಗಿ ನಿಂತಿರುವ ವಿಚಾರ ಗಮನಾರ್ಹ.

T, TT, TTT ಮೊದಲಾದ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅರ್ಥವೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಲವಾರು ತಾತ್ತ್ವಿಕರನ್ನೂ ತಾರ್ಕಿಕರನ್ನೂ ಕಾಡಿ ನಾನಾ ಬಗೆಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೊರಗೆಡಹಿದೆ. ಎಫ್. ಎಲ್. ಜಿ. ಫ್ರೇಜ್ (1848–1925) ಎಂಬಾತನ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಏಕಧಾತು ಗಣಗಳ ಸಮುದಾಯವೇ T, ಎಲ್ಲ ದ್ವಿಧಾತು ಗಣಗಳ ಸಮುದಾಯವೇ TT, ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಧಾತು ಗಣಗಳ ಸಮುದಾಯವೇ TTT, ಇತ್ಯಾದಿ ಆದುವು. ಅರ್ನ್‌ಸ್ಟ್ ಟ್ಸರ್‌ಮಲೋಜ್ (1871–1956)ಎಂಬಾತನ ಪಾಲಿಗೆ T ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಏಕಧಾತುಗಣ, TT ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಏಕಧಾತುಗಣವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಏಕಧಾತುಗಣ, TTT ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಏಕಧಾತುಗಣವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಏಕಧಾತುಗಣವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಏಕಧಾತುಗಣ, ಹೀಗೆಲ್ಲ ಆಗಿ ನಿಂತವು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಎಲುಬುಗಳ ಮೇಲೆ ಕಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಕೆತ್ತಿದಾಗ ಆದಿಮಾನವ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗಾಗಲಿ, ಬಹಿರ್ಬೋಧೆಗಾಗಲಿ ಗುರಿಯಾಗಿದ್ದಿರಲಾರನಷ್ಟೆ. ಅಮೂರ್ತ ಸ್ವರೂಪದ ಕೆಲ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ದಾಖಲೆ ಮಾಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಆತ ಬಳಸಿದ ಪದಗಳೇ ಈ T, TT ಮುಂತಾದ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಪದಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ನಿಜವಾದ ತರಬೇತಿಯ ಅಗತ್ಯವಿರುವುದು ಅವು ನೀಡುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರವೇ. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲು ಪದಗಳನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೂಲಕ ವರ್ಣಿಸತೊಡಗಿದರೆ ನಾವು ಅನತಿ ಕಾಲದಲ್ಲೇ ವಿಷವರ್ತುಲಕ್ಕೆ (ವಿಷಸ್ ಸರ್ಕಲ್) ಸಿಲುಕಿ ನರಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಸಿಹಿಯ ನಿಜವಾದ ಅರ್ಥ ಬೇಕಿದ್ದರೆ ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ತಿನ್ನುವುದು ಜಾಣತನ, ನಿಘಂಟನ್ನು ಶೋಧಿಸಿ ಸಿಹಿ = ಸಕ್ಕರೆಯ ರುಚಿ. ಸಕ್ಕರೆ = ಸಿಹಿಯಾದ ಪದಾರ್ಥ ಎಂಬಂಥ ವರ್ಣನೆಗಳನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸುವುದು ಹಾಸ್ಯಾಸ್ಪದ. ದರ್ಜಿಯೊಬ್ಬ ತನ್ನ ಗಿರಾಕಿಯ ಹಸ್ತಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿ TT (ಎರಡು ಕೈಗಳಿವೆ) ಎಂದು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಆತನಿಗಾಗಿ TTಯಷ್ಟೇ (ಎರಡೇ)

ತೋಳುಗಳಿರುವ ಅಂಗಿಯನ್ನು ಹೊಲಿದುಕೊಡಬಲ್ಲನಾದರೆ TTಯಿಂದ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತವಾದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸದುಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡಂತಾಗುವುದು, ಮತ್ತು TTಯ ನಿಜವಾದ ಅರ್ಥ ಅಡಗಿರುವುದು ಅಂಥ ಸದುಪಯೋಗದಲ್ಲೇ. ಇನ್ನು ಇಂಥ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಯ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಹೊಲಿಗೆ ಮುಂತಾದ ಪ್ರಾಪಂಚಿಕ ಉದ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವೋ ಇಲ್ಲವೆ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಪಾಲಿಗೂ ಉಂಟೋ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಹ ಇದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲನಾರ್ಹ. ಗಣಿತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಸುತ್ತ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಹೆಣೆಯಬಹುದಾದ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಚೌಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಹೊರತಾಗಿಯೇ ಆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅರ್ಥ ಉಳಿದುಹೋಗುವುದರಿಂದ ಶುದ್ಧಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅರ್ಥ ಪ್ರಜ್ಞೆಯ ಕೈವಾಡವಿರುವುದನ್ನೇ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಮಾರ್ಗಿಗಳು ಮೊದಲಲ್ಲಿ ವಿರೋಧಿಸತೊಡಗಿದರು. ಆದ್ಯುಕ್ತೀಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದ ಪ್ರಕಾರ ಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಅರ್ಥದ ಪಾತ್ರವೇನಿದ್ದರೂ ಸೂಕ್ತ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಆಯ್ಕೆಯವರೆಗೆ ಮಾತ್ರವೇ; ಅನಂತರ ಅವುಗಳ ಅರ್ಥ ಅಪ್ರಕೃತವಾಗಬೇಕು. ಅವುಗಳಿಂದ ನೆರವೇರುವ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ಪಾಲನೆಯೇ ಸರ್ವಸ್ವವಾಗಬೇಕು; ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಆಯ್ಕೆ ಕೂಡ ಅರ್ಥಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೇಶಮಾತ್ರವೂ ಅವಲಂಬಿಸದೆ ಸೌಂದರ್ಯಸೃಷ್ಟಿ ಮೊದಲಾದ ಉನ್ನತ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಂದಷ್ಟೇ ಪ್ರೇರಿತವಾಗಬೇಕು. ಈ ವಿಪರೀತ ಮನೋಧರ್ಮವನ್ನು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಾದರೆ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಪಾಲಿಗೆ ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಅರ್ಥದ ಗೊಡವೆ ಅನವಶ್ಯ. ಅವು ಪಿಯಾನೋ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಂಬ ವಿಶ್ವಾಸವಷ್ಟೇ ಸಾಕು ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲಿಗೆ ಆ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಆಧಾರದಿಂದಲೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಪ್ರಮೇಯಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಸಮಸ್ತ ಗಣಿತವನ್ನೂ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಕರಿಸಬೇಕೆಂಬ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಮಾರ್ಗಿಗಳ ಈ ಬಗೆಯ ತೀವ್ರಗಾಮಿ ಚಳವಳಿ ಸಲ್ಲುವಂತದ್ದಲ್ಲವೆಂದು ಕಳೆದ ಕೆಲವು ದಶಕಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದಿರುವ ಗಣಿತತರ್ಕ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಕೆಲ ಮಹತ್ತ್ವಪೂರ್ಣ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟಿವೆ. ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ, ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಅವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಮನಗಾಣಬಹುದಾದ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ವ್ಯುತ್ಪಾದಿಸಿ ಕೊಡುವಂಥ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಂದನ್ನು ಯಾರಾದರೂ ನಿಯೋಜಿಸ ಹೊರಟರೆ ವಿರೋಧಾಭಾಸಗಳ ಅನಿವಾರ್ಯ ಪ್ರವೇಶದಿಂದ ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಕುಸಿದು ಬೀಳಬೇಕಾಗಿ ಬರುವುದು (ಗೊಯ್ಡಲ್ ಪ್ರಮೇಯ, 1931 ; ವಿವರಗಳಿಗೆ ಈ ಲೇಖನದ ಅಂತಿಮ ವಿಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಿ). ಅಂದಮೇಲೆ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೇರ ಅರ್ಥ ಪ್ರಜ್ಞೆ ಚೆಲ್ಲುವಷ್ಟು ಬೆಳಕನ್ನು ಯಾವೊಂದು ಸುಸಂಗತ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಚೆಲ್ಲಲಾರದು ಎಂದಾಯಿತು. ಇದರಿಂದ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಕ್ಕೂ ಅರ್ಥದ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಮಿತಿಗಳೊಳಗಡೆ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯಿಂದ ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಒಳ್ಳೆಯ ಲಾಭವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದೂ ನಿಜವೇ. ಗಣಿತದ ಸರ್ವತೋಮುಖ ಪ್ರಗತಿ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆ ಹಾಗೂ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ವಿಧಾನಗಳ ಸೂಕ್ತ ಸಮನ್ವಯದಿಂದಲೇ. **(ಎಸ್.ಆರ್.ಎಂ.)**

2 ಪರಿಮೇಯಗಳು ಮತ್ತು ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತ : (ರ್‍ಯಾಷನಲ್ಸ್ ಅಂಡ್ ಸಿಂಪಲ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ) ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಮಾನವ T ಸಾಲು ಮತ್ತು ಇತರ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಜ್ಞಿಸಿ ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಸಮರ್ಥನಾದನಷ್ಟೆ. ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ ಆತನ ದೈನಂದಿನ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಿ ಎಣಿಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಅಳತೆಯ ಆವಶ್ಯಕತೆಯೂ ಉಂಟಾಯಿತು. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹಾಲಿನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಾತ್ರದ ಪಾತ್ರೆಯೊಂದನ್ನು ಮೂಲ ಮಾನವನ್ನಾಗಿ (ಯೂನಿಟ್) ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ನಮ್ಮ ಬಳಿ ಇಂಥ ಮೂರು ಮಾನಪಾತ್ರೆಗಳ ತುಂಬಾ ಹಾಲು ಇದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಹಾಲಿನ ರಾಶಿಯನ್ನೇನೋ TTT ಇಲ್ಲವೆ 3ಎಂಬ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಲ್ಲದು. ಆದರೆ ಇದೇ ಹಾಲನ್ನು ಇಬ್ಬರು ಸಮವಾಗಿ ಹಂಚಿಕೊಂಡಾಗ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರಿಗೂ ದೊರಕುವ ಹಾಲಿನ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಅಂಗೀಕೃತ ಮನದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಸೂಚಿಸಲಾರದು. ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಗೆ TTT/TT ಅಥವಾ 3/2ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಉಪಜ್ಞೆ ಅವಶ್ಯ. ಇದೇ ಮೇರೆಗೆ p ಮತ್ತು q ಎರಡು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಲ್ಲಿ p ಮಾನಗಳನ್ನು q ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ ಫಲಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಅಳತೆಯನ್ನೂ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಮಾನವ p/q ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬೇಕಾಯಿತು. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ TT, TTT) ಒಂದೇ T ಅಕ್ಷರದಿಂದಾದ ಪದಗಳು ಎಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದೆಂದು ಆಗಲೇ ಮನಗಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ TTT/TT) T ಮತ್ತು / ಎಂಬ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಾದ ಪದಗಳಾಗುತ್ತವೆ. (ಅಂತ ಒಂದೊಂದು ಪದದಲ್ಲೂ / ಪ್ರತೀಕದ ಪ್ರವೇಶ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರವೇ ಸೀಮಿತವಾಗಿರಬೇಕು. p/q ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ p ಗೆ ಅಂಶ (ನ್ಯೂಮರೇಟರ್) ಎಂದೂ q ಗೆ ಛೇದ (ಡಿನಾಮಿನೇಟರ್) ಎಂದೂ ಹೆಸರು. ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಕೇವಲ 1ನ್ನು ಅಂಶವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಏಕಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು (ಯೂನಿಟ್ ಫ್ರ್ಯಾಕ್ಷನ್ಸ್) ಮಾತ್ರ ಮೊದಲು ಬಳಕೆಗೆ ತಂದರು. ಇಂದಿನ 1/3ನ್ನು (ಅಥವಾ 1/3) ಪುರಾತನ ಈಜಿಪ್ಷಿಯನ್ನರು ಮತ್ತು ಗ್ರೀಕರು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. 1/3 ರಲ್ಲಿನ ಅಡ್ಡ ಗೀಟಿನ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಅರಬ್ಬರು ರೂಢಿಗೆ ತಂದರು. ಪ್ರಾಚೀನ ಹಿಂದೂ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಅದನ್ನು 1/3 ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತಿದ್ದರು.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸೃಷ್ಟಿಯ ಬಳಿಕ ಅವನ್ನು ಕುರಿತ ವಿವಿಧ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ನಿಯೋಜನೆಯೂ ಅವಶ್ಯವಾಯಿತು. ಮೂರು ಮಾನಪಾತ್ರೆಗಳ ಹಾಲನ್ನೂ ಇಬ್ಬರಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಹಂಚಲು ಎಲ್ಲ ಹಾಲನ್ನೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬೆರೆಸಿ ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನು

ಮಾಡುವುದು ಒಂದು ಕ್ರಮವಾದರೆ ಒಂದೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಹಾಲನ್ನೂ ಎರಡೆರಡು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬನಿಗೂ ಅಂಥ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಮ. ಅಲ್ಲದೆ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಒಂದೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಹಾಲನ್ನು ಇಪ್ಪತ್ತಿಪ್ಪತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೂ ಅಂಥ ಮೂವತ್ತು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ ಸಲ್ಲುತ್ತದಷ್ಟೆ. ಆದರೆ ಈ ಕೊನೆಯ ಕ್ರಮದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 30/20. ಇದರಿಂದ (3/2 = (30/20) = [(3 × 10)/ (2 × 10)] ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ p, q ಮತ್ತು n ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ p/q = (p × n) / (q × n) ಆಗುವುದು. p/q ಮತ್ತು r/s ಎಂಬ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ p × s=r × q ಆದರೆ ಸಾಕೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಈಗ p/q ಮತ್ತು r/s ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ಬಗೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ವಿವೇಚಿಸೋಣ. p/q = (ps) / (qs) ಹಾಗೂ r/s = (rq) / (sq) ಆದಕಾರಣ (p/q +(r/s) ಗೆ ಬದಲು [(p × s) / (q × s)] + [(r × q) / (q × s)]ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಹೊಳೆಯುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಮಾನವನ್ನು (q × s) ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಅಂಥ (p × s) ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದಾಗ (p × s) / (q × s) ರಾಶಿಯೂ ಅಂಥ (r × q) ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದಾಗ (r × q) / (q × s) ರಾಶಿಯೂ ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ಇವೆರಡು ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ (p × s) + (r × q) ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ತತ್ಫಲವಾಗಿ ಲಭಿಸುವ ರಾಶಿ [(p × s) + (r × q)] / (q × s) ಆದ್ದರಿಂದ

$$(p/q) + (r/s) = [(p \times s) + (r \times q)] / (q \times s) \ldots (1)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಅಂಗೀಕರಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಒಂದು ಮಾನವನ್ನು s ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಅಂಥ r ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದಾಗ r/s ಫಲ ಲಭಿಸುತ್ತದಷ್ಟೆ. ಈ ಫಲವನ್ನು ಮತ್ತೆ q ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಅಂಥ p ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ರಾಶಿಯೇ (p/ q) × (r/s) ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಅರ್ಥವಿಸಬಹುದು. ತುಸು ಚಿಂತನೆಯಿಂದ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶ (p × r) / (q × s) ಆಗುತ್ತದೆಂದು ಮನಗಾಣಲು ಶಕ್ಯವಿದೆ. ಎಂತಲೇ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಅಂಗೀಕಾರ ಯೋಗ್ಯ :

$$(p/q) \times (r/s) = (p \times r) / (q \times s) \ldots\ldots.(2)$$

ನಿತ್ಯ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಜಮಾ, ಖರ್ಚು, ಲಾಭ ನಷ್ಟ, ಭೂತಕಾಲ, ಭವಿಷ್ಯತ್ಕಾಲ, ಹಿಂಚಲನೆ ಮುಂಚಲನೆ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ರಾಶಿಗಳು ಪದೆ ಪದೇ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಸಹಸ್ರರೂಪಾಯಿ ಲಾಭವನ್ನೂ ಅಷ್ಟೇ ನಷ್ಟವನ್ನೂ 1000 ಎಂಬ ಒಂದೇ ಪ್ರತೀಕದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಬದಲು ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಲಾಭವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ಪ್ರತೀಕದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿ ನಷ್ಟವನ್ನು (–1000) (ಋಣ ಸಹಸ್ರ ಎಂದು ಓದಬೇಕು) ಎಂಬ ಪರಿವರ್ತಿತ ಪ್ರತೀಕದಿಂದ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಿದ್ದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸೌಲಭ್ಯಗಳು ಒದಗಿಬರುತ್ತವೆ. ಇತರ ವಿರುದ್ಧ ರಾಶಿಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲೂ ಅಂತೆಯೇ. (–1000) ದಂಥ ಪ್ರತೀಕಗಳಿಗೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ನೆಗೆಟಿವ್ ನಂಬರ್ಸ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. [ಇವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ. ಉದಾ, (–3/2); ಇಂಥವಕ್ಕೆ ಋಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು.] ಈಗ ಋಣ ಹಾಗೂ ಮಾಮೂಲು (ಧನ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಳ್ಳುವ ಕೆಲವು ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಿಸುತ್ತೇವೆ. 5 ರೂಪಾಯಿ

ನಷ್ಟ ಹಾಗೂ 3ರೂಪಾಯಿ ಲಾಭ ಇವುಗಳ ನಿವ್ವಳ ಫಲ 2 ರೂಪಾಯಿ ನಷ್ಟವಷ್ಟೆ. ಈ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು (–5)+3=(– 2)ಎಂಬ ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ 5+ (–3)=2 ಮತ್ತು (–5)+(–3)= (–8). ವ್ಯವಕಲನದ ನಿದರ್ಶನವಾಗಿ (–2)ರಲ್ಲಿ (–5)ನ್ನು ಕಳೆಯೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ (–5) ಕ್ಕೆ ಏನನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ (–2) ಲಭಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಆಲೋಚಿಸಬೇಕು. 5 ರೂಪಾಯಿಯಷ್ಟು ನಷ್ಟವನ್ನು 2 ರೂಪಾಯಿಯಷ್ಟು ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ತಗ್ಗಿಸಲು 3 ರೂಪಾಯಿ ಲಾಭಗಳಿಸಬೇಕೆಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ. ಎಂತಲೇ (–2)–(–5)=3. (ಇಲ್ಲಿ ಗೋಚರಿಸುವ ಮೂರು – ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಪೈಕಿ ಮಧ್ಯದ್ದು ವ್ಯವಕಲನ ಸೂಚಕ. ತುದಿಯವು ನಷ್ಟಸೂಚಕ; ಇವೆರಡು ಭಿನ್ನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ಬಳಸುವ ರೂಢಿ ಬೋಧನೆಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಮೊದಮೊದಲು ಗೊಂದಲಕಾರಿಯೆನಿಸಿದರೂ ಬರುಬರುತ್ತ ಉಪಯುಕ್ತವೇ ಆಗುವುದು.) ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ 2–5=(–3) ; (–2) –5=(–7) ; ಮತ್ತು 2– (–5) = 7. ಇನ್ನು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕುರಿತು ವಿವೇಚಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ವಾಹನಸಂಚಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವೇಗ × ಪ್ರಯಾಣದ ಅವಧಿ = ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಇದರಂತೆ ಗಂಟೆಗೆ v ಕಿಲೋಮೀಟರು ವೇಗದಿಂದ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ವಾಹನವೊಂದು t_1 ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ s_1ಕಿಮೀ. ಕಲ್ಲನ್ನೂ t_2 ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ s_2 ಕಿಮೀ. ಕಲ್ಲನ್ನೂ ಹಾದುಹೋದರೆ $v \times (t_2 - t_1) = (s_2 - s_1)$ ಆಗಬೇಕು. ವಾಹನ ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕಿಮೀ. ಕಲ್ಲುಗಳ ಮೇಲೆ ನಮೂದಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಏರುತ್ತ ಹೋದರೆ ವಾಹನದ ವೇಗವನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವೆಂದೂ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋದರೆ ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ. ಈಗ $v = -50$, $t_1 =$ ಸಂಜೆ 5 ಗಂಟೆ, $t_2 =$ ಅಪರಾಹ್ನ 2 ಗಂಟೆ, $s_2 = 400$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ 50ಕಿಮೀ. ಗಳಂತೆ ಅಪರಾಹ್ನ 2 ಗಂಟೆಯಿಂದ ಸಂಜೆ 5 ಗಂಟೆಯ ವರೆಗಿನ 3 ಗಂಟೆಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ವಾಹನ 150 ಕಿಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿ, 400 ನೆಯ ಕಿಮೀ. ಕಲ್ಲಿನಿಂದ 250 ನೆಯ ಕಿಮೀ. ಕಲ್ಲಿಗೆ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ. (ವೇಗ ಋಣಾತ್ಮಕವಿರುವುದರಿಂದ ಕಿಮೀ. ಕಲ್ಲಿನ ಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಬೇಕು). ಆದ್ದರಿಂದ $s_1=250$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $v \times (t_2 - t_1) = (s_2 - s_1)$ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $(-50) \times (2-5) = (400-250)$ ಅಥವಾ $(-50) \times (-3) = 150$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದಮೇಲೆ ಎರಡು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಮಾಮೂಲು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಉಪಯುಕ್ತವೆಂದಾಯಿತು; ಇದನ್ನೇ ಶಾಲಾ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ $(-) \times (-) = (+)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸುತ್ತಾರೆ. ವಾಹನಸಂಚಾರದ ನಿದರ್ಶನವನ್ನೇ ಬಳಸಿಕೊಂಡು $(-50) \times 3 = (-150)$, $50 \times (-3) = (-150)$ ಎಂದು ಸಹ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮನಗಾಣಬಹುದು. ಶಾಲಾಬೀಜಗಣಿತದ ಸೂತ್ರೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $(-) \times (+) = (-)$ ಮತ್ತು $(+) \times (-) = (-)$. ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಭಾಗಾಹಾರ ಪರಿಕರ್ಮ ಗುಣಾಕಾರದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವಾದ್ದರಿಂದ $[(-50) \times (-3) = 150$ ಆದಕಾರಣ $150 \div (-50) = (-3)$; $(-50) \times 3 = (-150)$ ಆದಕಾರಣ $(-150) \div 50 = -3$; $50 \times (-3) = -150$ ಆದಕಾರಣ $(-150) \div 50 = (-3)]$ ಇಂಥವೇ ಸೂತ್ರಗಳು ಭಾಗಾಹಾರಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ ; $(-) \div (-) = (+)$; $(-) \div (+) = (-)$; $(+) \div (-) = (-)$.

ಇದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದೆರಡು ಮಾತುಗಳು ಅವಶ್ಯ. (–2) +2 ಎಂಬ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಲಾಭವೂ ಇಲ್ಲ ನಷ್ಟವೂ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸುವೇದ್ಯ. ಇಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಲು ನಾವು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಜ್ಞಿಸುತ್ತೇವೆ (–2) +2=0. ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿದಾಗ ಅದೇ ರಾಶಿ ಬರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆ: $a+0=a=o+a$; $a \times 0 = 0 = 0 \times a$. ಸೊನ್ನೆಯ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಗಮನಾರ್ಹ ಗುಣಗಳೆಂದರೆ $a - 0 = 0$, $0 - a = -a$, $a - a = 0$; ಮತ್ತು a ಯೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದೆ ಇರುವಾಗ $0 \div a = 0$. ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಷಿದ್ಧ. ಸೊನ್ನೆ ಮಾಮೂಲು ಧನವೂ ಅಲ್ಲ, ಋಣವೂ ಅಲ್ಲ ; ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು, ಋಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಹಾಗೂ ಸೊನ್ನೆ ಇವಿಷ್ಟನ್ನೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಪರಿಮೇಯಗಳು (ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ನಂಬರ್ಸ್)ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಪರಿಮೇಯಗಳ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪ p/q; ಇಲ್ಲಿ q ಒಂದು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, p ಒಂದು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ. p, q ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಲ್ಲಿ $(-p)/(-q)$ವನ್ನು ಮಾಮೂಲು ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ (p/q) ವಿನೊಂದಿಗೂ $(-p)/q$ ಹಾಗೂ $p/(-q)$ ಗಳನ್ನು ಋಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿ [–(p/q)] ವಿನೊಂದಿಗೂ ಸಮೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. p ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಲ್ಲಿ $p/1 = p$ ಆಗುವ ಕಾರಣ (ಸೊನ್ನೆಯೂ ಸೇರಿದಂತೆ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪರಿಮೇಯಗಳೇ. ಯಾವುದೇ ಪರಿಮೇಯ p/q ವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದ q ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವುದು ನಿಷಿದ್ಧ. ps=qr ಆದಲ್ಲಿ (p/q) = (r/s) ಎಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪರಿಮೇಯ p/q ಮತ್ತು r/s ಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ (1) ಮತ್ತು (2) ಸೂತ್ರಗಳ ಮೇರೆಗೆ ಕೂಡಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ ಗುಣಿಸಬಹುದು (ಈಗ p, q, r, s ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಬೇಕಾದುದೇನಿಲ್ಲ). ಅಲ್ಲದೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಂತೆ ಅವನ್ನು ವ್ಯವಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಹ ಗುರಿಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ :

$$(p/q) - (r/s) = [(p \times s) - (r \times q)]/(q \times s)$$

ಕೊನೆಯದಾಗಿ r ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದಿರುವಾಗ p/q ವನ್ನು r/s ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲೂಬಹುದು : $(p/q) \div (r/s) = (p \times s)/(q \times r)$ ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು $[(p/q) \div (r/s] \times (r/s) = p/q$

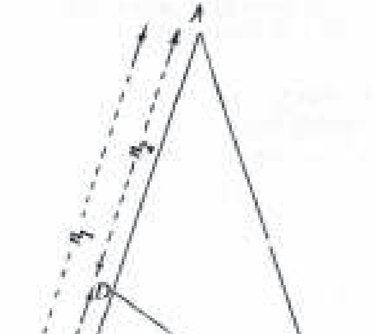
$(p/q) \times [(r/s) + (t/u)] = [(p/q) \times (r/s)] + [(p/q) \times (t/u)]$ ಮುಂತಾದ ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ ಪರಿಮೇಯಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ (ಫೀಲ್ಡ್) ಎಂದೆನಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ (**ನೋಡಿ– ಕ್ಷೇತ್ರ, ಬೀಜಗಣಿತೀಯ**).

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯಗಳಿರುವ 0, 1, (–2), (3/2) ಮುಂತಾದ ಪ್ರತೀಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಚರ ಅಥವಾ ಅಜ್ಞಾತ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಇತರ ಪ್ರತೀಕ ಇಲ್ಲವೆ ಪದಗುಚ್ಛಗಳನ್ನು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಬಳಸತೊಡಗಿದಾಗ ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತದ (ಎಲಿಮೆಂಟರಿ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ) ಉದ್ಭವವಾಯಿತು. ಡಯೊಫಾಂಟಸ್ (ಗ್ರೀಸ್, ಪ್ರ. ಶ. 250), ಆರ್ಯಭಟ್ಟ (ಭಾರತ, ಪ್ರ.ಶ. 628), ಆಲ್‌ಖ್ವಾರಿಜ್ಮೀ (ಅರೇಬಿಯ, ಪ್ರ. ಶ. 825), ಮಹಾವೀರ (ಭಾರತ ಪ್ರ. ಶ. 850), ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ (ಭಾರತ, ಪ್ರ. ಶ. 1150) ಮುಂತಾದ ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆ ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಮಹತ್ತರವಾದುದು. ಇವರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನಾಗಿ ರೂಪಿಸಿ ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮುಲಕ ಅಜ್ಞಾತ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾದರು. ಅನಂತರ ಯುರೋಪಿನ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತದ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಸಂಸ್ಕರಿಸಿದರು. ಇಂದು ಚರ ಅಥವಾ ಅಜ್ಞಾತ ರಾಶಿಗಳನ್ನು x, y ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರ ಪ್ರತೀಕಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ ರೂಢಿಗೆ ಬಂದಿದೆ. $x \times y$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ x, y ಅಥವಾ ಕೇವಲ x y ಎಂದು ಈಗ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. x X x, x X x X x ಮುಂತಾದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಲು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x^2, x^3 ಮುಂತಾದ ಹ್ರಸ್ವ ಪ್ರತೀಕಗಳು ರೂಪಿತವಾಗಿವೆ. ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ವೇಳೆ x. y ಗಳಂಥ ಚರ ಇಲ್ಲವೆ ಅಜ್ಞಾತಗಳಿಗೆ ಸಂದಾಯವಾಗುವ ಬೆಲೆಗಳು ಪರಿಮೇಯಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ಎಂಬುದು ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಸುಪರಿಚಿತ ಸೂತ್ರ : x, y ಗಳಿಗೆ (ಮುಖ್ಯವಾಗಿ) ಯಾವುದೋ ಪರಿಮೇಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ ಇದು ಒಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮತ್ವವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆಂಬುದೇ ಈ ಸೂತ್ರೀಕರಣದ ಅಭಿಪ್ರಾಯ. 2 x + 5 = 12 ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ; ಇಲ್ಲಿ x ಅಜ್ಞಾತ; ಸಮೀಕರಣ ಸತ್ಯವಾಗಲು ಈ ಅಜ್ಞಾತಕ್ಕೆ (7/2) ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಬೆಲೆ ಸಲ್ಲಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. $x^2 - 2x = 1$ $x^2 + 4x + 5 = 0$ ಮುಂತಾದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (ಕ್ವಾಡ್ರ್ಯಾಟಿಕ್ ಈಕ್ವೇಷನ್ಸ್) ಪ್ರಸ್ತಾವಿಸುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಸರಳ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಪರಿಮೇಯಗಳ ಎಲ್ಲೆಯನ್ನು ದಾಟಿ $1+\sqrt{2}$ ರಂಥ ಅಪರಿಮೇಯಗಳನ್ನೂ (ಇರ್‍ಯಾಷನಲ್ಸ್) $\sqrt{-1}$-2 ರಂಥ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ (ಕಾಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ನಂಬರ್ಸ್) ಒಳಗೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು. (ಎಸ್.ವಿ.ಆರ್.ಎಸ್.)

3.ಜ್ಯಾಮಿತಿ : ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಾಧ್ಯಯನದ ಒಂದು ಮುಖವಾದರೆ ಆಕೃತಿಗಳು ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಮುಖ. ಆದಿಮಶಿಲಾಯುಗದ ಮಾನವನಿಗೆ (ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 25,000) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಜ್ಞೆ ಇತ್ತು. ಇನ್ನು ಪುರಾತನ ನಾಗರಿಕತೆಗಳ ಕಾಲವನ್ನು ಸಮೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಅದ್ಭುತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಿದ್ದು ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 3,000 ವೇಳೆಗೆ. ಅದಕ್ಕೂ ಹಿಂದೆ ಮಡಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ವಾಹನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವಲ್ಲಿ, ಚಕ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಜನರು ಅರಿತಿದ್ದರು. ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ 2,000ದ ವೇಳೆಗೆ ಕೆಲವಷ್ಟು ಏಕತಲಾಕೃತಿಗಳ ಸಲೆಗಳನ್ನೂ (ಏರಿಯಾಸ್)

ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಗಾತ್ರಗಳನ್ನೂ (ವಾಲ್ಯೂಮ್ಸ್) ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು ಈಜಿಪ್ಷಿಯನರು ಕಲಿತಿದ್ದರು. ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ತಾಲಿಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂಬುದಾಗಿ ಇಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 1500 ಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರಿಗೆ ಪರಿಚಿತವಾಗಿದ್ದುವು. ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ A ಲಂಬಕೋನಗಳು $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ಆಗಬೇಕೆಂಬ ಸಂಗತಿಯೇ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ. ಅರ್ಧವೃತ್ತವೊಂದರೊಳಗಿನ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಲಂಬಕೋನಗಳು ಎಂಬುದು ತಾಲಿಸ್ ಪ್ರಮೇಯ. ತಾಲಿಸ್ ಮತ್ತು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಅವಿಷ್ಕರಿಸಿದವರೇನಲ್ಲ. ನಿಜಕ್ಕೂ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 6ನೆಯ ಶತಮಾನದ ತಾತ್ತ್ವಿಕರು.

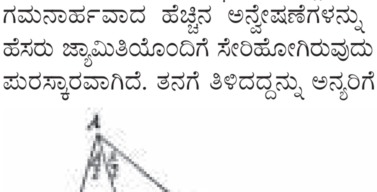
ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 8ನೆಯ ಶತಮಾನದ ವೇಳೆಗೆ ದೇವಸ್ಥಾನಗಳ ವಿನ್ಯಾಸ, ಯಜ್ಞಯಾಗಾದಿಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆ ಮೊದಲಾದ ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ರೀತಿಯ ವಿಶಿಷ್ಟೀಕೃತ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರಚನಾವಿಧಿಗಳು ಅನುಷ್ಠಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿದ್ದುವು. ಈ ವಿಧಿಗಳನ್ನು ಆಪಸ್ತಂಬ (ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳು) ಎಂಬ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಶ್ಲೋಕಗಳ ಮೂಲಕ ವರ್ಣಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಆಪಸ್ತಂಬರದೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಏಳು ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳು ಇಂದು ತಿಳಿದಿವೆ). ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯಾಪಕ ಬಳಕೆ ಕಂಡುಬರುವುದು. ಇಷ್ಟೆಲ್ಲ ಆದರೂ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 6ನೆಯ ಶತಮಾನದಕ್ಕಿಂತ ಹಿಂದಿನ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನದಂತೆ ಪ್ರಧಾನತಃ ಒಂದು ಅನುಭವಜನ್ಯ (ಎಂಪಿರಿಕಲ್) ವಿಜ್ಞಾನವಾಗಿದ್ದಿತೇ ವಿನಾ ತರ್ಕಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಗಣಿತವಾಗಿರಲಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವಿಕ ರಚನೆಗಳ ಅನುಭವದಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸಿದ ಉಕ್ತಿಗಳೇ ಆ ಭೌತ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳು. ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಅಪರೂಪಕ್ಕೆ ಅಲ್ಲೊಮ್ಮೆ ಇಲ್ಲೊಮ್ಮೆ ಕೆಲವೊಂದು ಸಮರ್ಥ ವಾದಗಳನ್ನು ಹೂಡಿರಬಹುದಾದರೂ ಅಂಥ ವಾದಗಳು ಆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಂಗಗಳಲೆನಿಸಿರಲಿಲ್ಲ. ಬದಲು, ಆಕೃತಿಗಳ ಪರಿಧಿ (ಪೆರಿಮಿಟರ್), ಸಲೆ ಮೊದಲಾದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯವಾದರೋ ಭೌತ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಪಾಠವಾಗಿತ್ತು. ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿರಬಲ್ಲವೇ ವಿನಾ ಪೂರ್ಣ ನಿಖರವಾಗಲಾರ ವೆಂಬುದು ಆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕೃಷಿಕಾರರ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಮಹತ್ತ್ವವಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಗೌಣ ಅಂಶವಾಗಿ ತೋರಿತು. ತತ್ಫಲವಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ಅಂದರೆ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ, ಇಲ್ಲವೆ ಪರಿಮೇಯಗಳ) ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ ಕೈಗೊಳ್ಳಬಹುದೆಂಬ ದೃಢವಿಶ್ವಾಸಕ್ಕೆ ಅವರಲ್ಲಿ ಮೂಡಿತು. (ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲೂ ಈ ವಿಶ್ವಾಸಕ್ಕೆ ಮನ್ನಣೆ ಉಂಟು; ಆದರೆ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು–ರಿಯಲ್ ನಂಬರ್ಸ್–ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ಆಧುನಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಮಾಧ್ಯಮದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಪರಿಮೇಯಗಳಿಗಷ್ಟೇ ಸೀಮಿತವಲ್ಲ. ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲ ದಲ್ಲಾದರೋ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಕಲ್ಪನೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದ ಕಾರಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಲ್ಲವೆ ಪರಿಮೇಯ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಅರ್ಥವಿಸ ಬೇಕಾಗಿತ್ತು.) ಗ್ರೀಕ್ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಮತ್ತು ಅವನ ಅನುಯಾಯಿಗಳಾದರೂ ಈ ವಿಶ್ವಾಸದಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಂಡವರೇ ಆಗಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 6 ಮತ್ತು 4ನೆಯ ಶತಮಾನಗಳ ನಡುವೆ ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷ ಗ್ರೀಕ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಬುಡಮೇಲಾಗಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು ಆವಿಷ್ಕೃತವಾದುವು.



ಚಿತ್ರ 6

ಚಿತ್ರ (6)ರ ABC ತ್ರಿಭುಜ ಈ ಬಗೆಯ ಅಂದೋಲಕ ವಿದ್ಯಮಾನವೊಂದನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ABC ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 36^0, 72^0, 72^0, ಆಗಿವೆ. (ಇಂಥ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ನಿಜಕ್ಕೂ ಸಾಧ್ಯವುಂಟೆಂದು ಗ್ರೀಕರಿಗೆ ವೇದ್ಯವಾಗಿತ್ತು). AB, BC ಗಳೆರಡರ ಉದ್ದಗಳನ್ನೂ ಪರಿಮೇಯಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದು ಈಗ ನಮ್ಮ ಮುಂದಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಪರ್ಯಾಲೋಚನೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅದು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಬದಲಿಸುವುದರಿಂದ AB, BC ಗಳ ಉದ್ದಗಳು (ಧನ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗುವಂತೆ ಏರ್ಪಡಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನವನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡಾಗ ABಯ ಉದ್ದ 29/3, BCಯ ಉದ್ದ 32\5 ಆಗಿರಬಹುದು. ಈ ಮೂಲಮಾನದ 1/(3X5)= 1/15 ಭಾಗವನ್ನು ಹೊಸ ಮೂಲಮಾನವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ AB=15X29/3=145, BC=15X32/5=96 ಆಗುತ್ತವೆ. 145 ಮತ್ತು 96 ಎರಡೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.) ಆದ್ದರಿಂದ AB= ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ n_1, BC= ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಿರಿದಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ n_2 ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಇದಾದ ಬಳಿಕ CD=BC ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು AB ಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸೋಣ. ತತ್ಫಲವಾಗಿ $AD=BC=n_2$ ಎಂದೂ $BD = AB-AD=n_1-n_2-=n_3$ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದೂ ಮನಗಾಣುವುದು ಸುಲಭ. ಅಲ್ಲದೆ CBDಯು ABCಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (ಸಿಮಿಲರ್) AB/BC = CB/BD ಅಥವಾ $n_1/n_2=n2/n_3$ ಎಂದಗ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $n1>n_2>n_3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಈಗ CBD ಯೂ ABC ಯಂಥದೇ ತ್ರಿಭುಜವಾದ್ದರಿಂದ ABCಯ ಮೇಲೆ ಎಸಗಿದ ರಚನೆಯನ್ನೇ CBDಯನ್ನು ಕುರಿತಂತೆಯೂ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಲು ಅಡ್ಡಿಯೇನಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ n_4 ಗೆ $n_2>n_3>n_4$ ಹಾಗೂ $n_2/n_3=n_3/n_4$ ಆಗಬೇಕಾಗುವುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಒಂದು ಅನಂತಶ್ರೇಣಿ $\{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n6........\}$ ಫಲಿಸಿ ಅದರ ಉದ್ದಕ್ಕೂ $n_1>n_2>n_3>n_4>n_5>n_6>$....... ಆಗಬೇಕಾಗುವುದು. ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 6ರ AB, BC ಉದ್ದಗಳೆರಡನ್ನೂ ಪರಿಮೇಯಗಳಿಂದ ಅಳೆಯಬಹುದೆಂಬ ನಮ್ಮ ಕಲ್ಪನೆ ಮಿಥ್ಯೆಯೇ ಸರಿ. ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಅನಂತರ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ ಅನೇಕ ಗ್ರೀಕ್ ಸಂಶೋಧಕರು ಇಂಥ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳ ಫಲವಾಗಿ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು (ಲೈನ್ ಸೆಗ್‌ಮೆಂಟ್ಸ್) ವೃತ್ತಚಾಪಗಳು (ಸರ್ಕ್ಯುಲರ್ ಆರ್ಕ್ಸ್), ಸಲೆಗಳೇ ಮೊದಲಾದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಧಾತುಗಳು ನಿಜಕ್ಕೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಮೂಲಭೂತ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳೆಂಬ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದರು. ಅವರ ಅಭಿಮತದ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಧಾತುಗಳ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೇ ವಿನಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಧಾತುಗಳನ್ನಲ್ಲ. (ಇಂದಿನ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಧುನಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳತ್ತ ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಇಣುಕಿ ನೋಡುವುದಾದರೂ ಕಪ್ಪುಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ ಆಶ್ರಯವನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ಬಳಿಕವೇ: ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರ ಅಭಿಮತಕ್ಕೆ ಇಂದೂ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಲುವಳಿ ಇದೆ ಎನ್ನಬಹುದು.) (ಎಸ್.ಆರ್.ಎಂ.)

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ನಡೆದುಬಂದ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ಥಾನ ಮಹತ್ತ್ವದ್ದು ಎನ್ನುವುದು ಇದರಿಂದ ಅರಿವಾಗುತ್ತದೆ. ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಮಾಡದಿದ್ದರೂ ಅವನ ಹೆಸರು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಹೋಗಿರುವುದು ಅವನಿಗೆ ಸಂದಾಯವಾದ ಸರಿಯಾದ ಪುರಸ್ಕಾರವಾಗಿದೆ. ತನಗೆ ತಿಳಿದದ್ದನ್ನು ಅನ್ಯರಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯ ಪಡಿಸುವ ಅಪೂರ್ವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಅವನಿಗಿತ್ತು. 'ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಎಂಬ ಆತನ ಗಣಿತಗ್ರಂಥ ಇದರ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ನಿದರ್ಶನ. ತನ್ನ ಕಾಲದ ವರೆಗೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಡೆದಿದ್ದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ಪಾಠಗಳು ('ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್'), ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಭಾಗೀಕರಣ (ದಿ ಡಿವಿಷನ್ ಆಫ್ ಫಿಗರ್ಸ್) ಇವೇ ಮುಂತಾದ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು ಅಳವಡಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಸುಲಭ ಪಾಠಗಳು ಎನ್ನುವ ಪುಸ್ತಕ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ಗಿಂತ ಮುಂಚೆ ಆಗಿಹೋದವರ ಬೌದ್ಧಿಕ ಹಿರಿಮೆಗಳ ಫಲಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಂಕಲನವೇ



ಚಿತ್ರ 7

ವಿನಾ ಒಂದು ಸಂಶೋಧನ ಗ್ರಂಥವಲ್ಲ. ಅದರಲ್ಲಿ ಅಂದಿನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಕ್ತಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಆಯಾ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ: ಅಲ್ಲದೆ ಸಾಧನೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಉಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಸಹ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪುನರುಜ್ಜೀವನಕ್ಕೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣನಾದ.

ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಚಿತ್ರಗಳು ಸಹಾಯಕವಾಗಬಲ್ಲವೇ ವಿನಾ ಸಾಧನೆಗಳ ಸತ್ಯತೆಗೆ ಅವು ಅನಿವಾರ್ಯವಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ಯೂಕ್ಲಿಡನಿಗೆ ತಿಳಿದಿತ್ತು. ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಚಿತ್ರಗಳು ಕೇವಲ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತವೆ ಮಾತ್ರ. ಸರಿಯಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಅಸಂಬದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಣಕಸಾಧನೆ ಈ ರೀತಿ ಇದೆ.

Δ MRA $\equiv \Delta$ MPA

$\therefore$ MR=MP

AR =AP .... (1)

ಈಗ MB =MC ಮತ್ತು

$\angle$MRB = $\angle$ MPC = 90^0

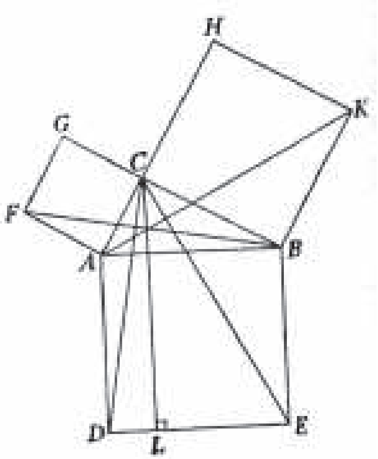
$\therefore \Delta$ MBR $\equiv \Delta$ MCP

$\therefore$ RB =PC .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ AB = AC

ಇದೇ ರೀತಿ AB =BC ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. M ಬಿಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಗಡೆ ಇರುವಂತೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದು ಗಮನಾರ್ಹ. ಆದರೆ ಅದು ನಿಜವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಹೊರಗಡೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಗೆ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿರಬೇಕಾದರೆ M ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಗಡೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಶಾಸ್ತ್ರದ ತಳಪಾಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಅನಿವಾರ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಗಳು ಇರಬೇಕು. ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ ಸಿಕ್ಕುವ ಎಲ್ಲ ನಿರೂಪಣೆಗಳೂ ಈ ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಕೂಡ ಇದಕ್ಕೆ ಹೊರತಾದುದಲ್ಲ. ಅಂತೆಯೇ ಮೊದಲನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತುಮೂರು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಾದ ಬಳಿಕ ಐದು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು (ಪಾಸ್ಚ್ಯುಲೇಟ್ಸ್) ಮತ್ತು ಐದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗ್ರಹಿಕೆಗಳನ್ನು (ಕಾಮನ್ ನೋಷನ್ಸ್) ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗ್ರಹಿಕೆಗಳು ಎಲ್ಲ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ, ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗ್ರಹಿಕೆಗಳು ಎಂದು ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದ್ದಾನೆ. (ಇಂದಾದರೋ ಇಂಥ ವಿಂಗಡಣೆಗೆ ಅಷ್ಟೇನೂ ಮಾನ್ಯತೆ ಇಲ್ಲ; ಎಲ್ಲ ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನೂ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳೆಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ ಆಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ತರ್ಕಬದ್ಧತೆಯ ಇಂದಿನ ಮಾನಕಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದಲು ಈ ಹತ್ತೇ ಉಕ್ತಿಗಳು ಸಾಲುವುದೂ ಇಲ್ಲ.) ನೇರ ಅಂಚು (ಸ್ಟ್ರೇಟ್ ಎಡ್ಜ್) ಮತ್ತು ಕೈವಾರಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಮಾಡಬಹುದಾದಂಥ ರಚನೆಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ, ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು (ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮ ಎನ್ನುವುದೂ ಸೇರಿದಂತೆ), ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು (ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಕೃತಿಯ ಸಲೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು ಗೊತ್ತಾದ ಕೋನಗಳಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆಯೂ ಸೇರಿದಂತೆ) ಇವಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮೊದಲನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮದ ಸಾಧನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಶಿರದಿಂದ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳ ಅನುಪಾತದ ಬಳಕೆಯಿಂದ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈಚಿನ ಬಹಳಷ್ಟು ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸಾಧನೆ ಇದಕ್ಕೆ ಹೊರತಾಗಿದೆ. ಆತನ ಸಾಧನೆ ಈ ರೀತಿ ಇದೆ :



ಚಿತ್ರ 8

DE ಗೆ CL ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

Δ CBE $\equiv \Delta$ ABK = 1/2 BK . HK = 1/2 CB^2

$\therefore$ CB^2 = 2 Δ CBE = ಆಯತ BL

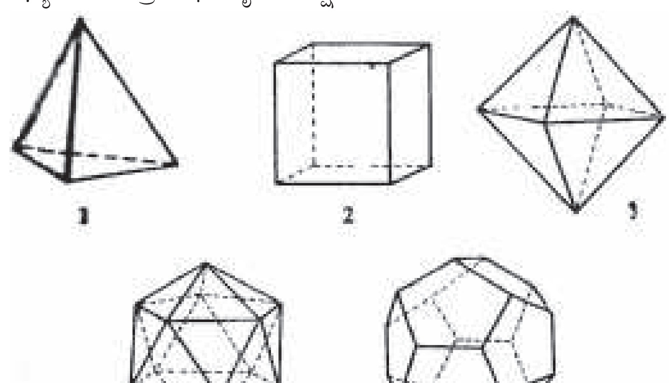
ಇದೇ ರೀತಿ AC^2 = ಆಯತ AL

ಈಗ ಆಯತ BL+ ಆಯತ AL = AB^2

$\therefore$ AB^2 + CB^2 = AB^2

ಈ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ವರ್ಗವನ್ನು ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದದ ಅಂಕಗಣಿತ ರೀತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯವರ್ಗವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸದೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ವರ್ಗದ ಸಲೆಯೆಂದು ತಿಳಿದು ಅದನ್ನು ಇನ್ನೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿದ ವರ್ಗಗಳ ಸಲೆಗೆ ಸಮವಾದ ಎರಡು ಆಯತಗಳ ಸಲೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರುವುದು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಅಂಶ.

a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದರೆ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಬಾಹುಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಸಲೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಗ್ರೀಕರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. ಅವರು ಇಂಥ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದರು. ಸುಲಭಪಾಠಗಳು (ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್) ಪುಸ್ತಕದ ಎರಡನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದೆ. ಮೂರು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯಗಳು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಮೀಸಲಾಗಿದ್ದರೆ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಅನುಪಾತದ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಸಾಕಷ್ಟು ಮುಂದೂಡಿ ಐದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟುಮಟ್ಟಿಗೆ ವಿಶದವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳಿವೆ. ಏಳು, ಎಂಟು ಮತ್ತು ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯಗಳು ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು (ಥಿಯರಿ ಆಫ್ ನಂಬರ್ಸ್) ಕುರಿತು ಇವೆ. ಆಗಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದ ಕಾರಣ ಗ್ರೀಕರು ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಧಿಯೊಳಗೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದರು. ಅವರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳೇ ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತಿದ್ದವು. ಕರಣಿಗಳಿಗೆ(ಸರ್ಡ್ಸ್) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಾನಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಹತ್ತನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ದಪ್ಪಗಳಿರುವ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಎಂದೂ ಅದರ ಎಲ್ಲೆಯನ್ನು ಮೇಲ್ಮೈ ಎಂದೂ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ. ಹನ್ನೆರಡನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಲೆ ಮುಂತಾದ ಅಳತೆಗಳ ಮಾಪನವನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷೀಕರಣ ವಿಧಾನದಿಂದ (ಮೆಥಡ್ ಆಫ್ ಎಕ್ಸಾಷನ್) ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹದಿಮೂರನೆಯ (ಕೊನೆಯ) ಅಧ್ಯಾಯ ಐದು ಕ್ರಮ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಚರ್ಚೆಗೆ ಮೀಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 9. ಐದು ಕ್ರಮ ಘನಾಕೃತಿಗಳು: 1. ಚತುಷ್ಫಲಕ, 2. ಘನ ಅಥವಾ ಷಷ್ಠಫಲಕ, 3. ಅಷ್ಟಫಲಕ, 4. ವಿಂಶತಿಫಲಕ, 5. ದ್ವಾದಶ ಫಲಕ

ಕೊನೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗೋಲದ (ಸರ್ಕಮ್‌ಸ್ಫಿಯರ್) ಅಳತೆಗಳ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹುದುಗಿಸುವ ಧ್ಯೇಯವನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿವೆ. ಕ್ರಮ ಚತುಷ್ಫಲಕ (ರೆಗ್ಯುಲರ್ ಟೆಟ್ರಹೆಡ್ರನ್), ಘನ (ಕ್ಯೂಬ್ ಅಥವಾ

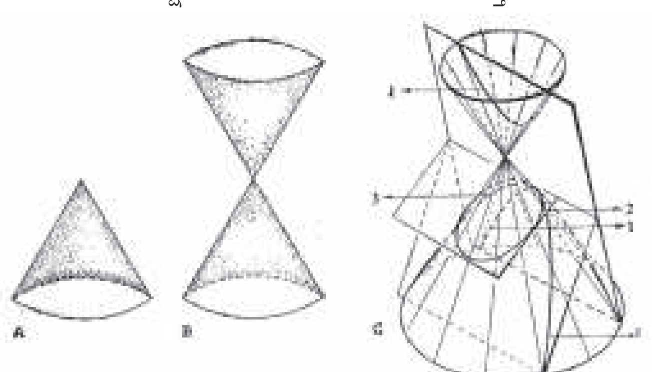
ರೆಗ್ಯುಲರ್ ಹೆಕ್ಸಹೆಡ್ರನ್), ಕ್ರಮ ಅಷ್ಟಫಲಕ (ರೆಗ್ಯುಲರ್ ಆಕ್ಟಹೆಡ್ರನ್), ಕ್ರಮ ದ್ವಾದಶಫಲಕ (ರೆಗ್ಯುಲರ್ ಡೊಡೆಕಹೆಡ್ರನ್) ಮತ್ತು ಕ್ರಮವಿಂಶತಿ ಫಲಕ (ರೆಗ್ಯುಲರ್ ಐಕೊಸಹೆಡ್ರನ್) ಇವೇ ಐದು ಕ್ರಮ ಘನಾಕೃತಿಗಳು. ಇದನ್ನು ಕುರಿತು ಕೆಲವು ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೋಷ್ಟೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ಬಹುಫಲಕದ ಹೆಸರು	ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ E	ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ V	ಫಲಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ F	ಫಲಕದ ಆಕಾರ
1	ಚತುಷ್ಫಲಕ	6	4	4	ತ್ರಿಭುಜ
2	ಘನ ಅಥವಾ ಷಷ್ಠಫಲಕ	12	8	6	ಚೌಕ
3	ಅಷ್ಟಫಲಕ	12	6	8	ತ್ರಿಭುಜ
4	ದ್ವಾದಶಫಲಕ	30	20	12	ಪಂಚಭುಜ
5	ವಿಂಶತಿಫಲಕ	30	12	20	ತ್ರಿಭುಜ

ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ $V + F = E + 2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಆಯ್ಲರ್ ಸೂತ್ರ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಸೂತ್ರ ಎಲ್ಲ ಸರಳ ಸಂಯೋಜಿತ (ಸಿಂಪ್ಲಿ ಕನೆಕ್ಟಡ್) ಬಹುಫಲಕಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಶಂಕುವನ್ನು ಒಂದು ತಲದಿಂದ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ (ಕರ್ವ್ಸ್) ಶಂಕುಜಗಳು (ಕಾನಿಕ್ಸ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇವುಗಳ ಪರಿಚಯ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಮುಂತಾದವರಿಗೆ ಇದ್ದರೂ ಇವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದಾತ ಆ ತುರುವಾಯ ಬಂದ ಅಪಲೋನಿಯಸ್. ಶಿರಃಕೋನಗಳು ವಿಶಾಲ, ಲಂಬ ಮತ್ತು ಲಘುಕೋನಗಳಿರುವಂತೆ ಮೂರು ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ಒಂದೊಂದರ ಅಕ್ಷದೊಡನೆಯೂ 45^0 ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಒಂದು ತಲದಿಂದ ಆ ಶಂಕುವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಪರವಲಯ ಮತ್ತು ಅತಿಪರವಲಯಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು ಅಪಲೋನಿಯಸನ ಪೂರ್ವಜರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಛೇದಕತಲದ ಬಾಗುವನ್ನೇ ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಒಂದೇ ಶಂಕುವಿನಿಂದ ಈ ಮೂರು ಶಂಕುಜಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಶಂಕು ಲಂಬವೃತ್ತೀಯವಾಗಿರದೆ ಕೇವಲ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕೆಂದು ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟ. ಮೇಲಾಗಿ ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ಶಂಕುವಿನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ ಅತಿಪರವಲಯ ನಿಜಕ್ಕೂ ಎರಡು ಕವಲುಗಳ ವಕ್ರರೇಖೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟ. ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಬಹಳ ಹತ್ತಿರ ಬಂದಿದ್ದ. ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಮಾತ್ರ ಆತನಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲ.

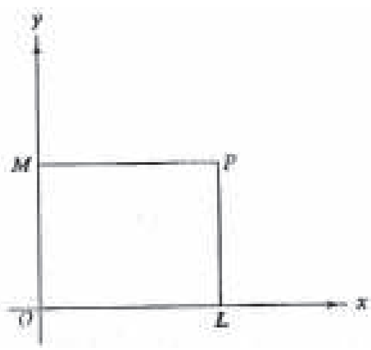
ಜ್ಯಾಮಿತಿಯು ಆಕೃತಿಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾದುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ತರಬೇಕಾದರೆ ಈ ಲಕ್ಷಣಗಳ ವಿಂಗಡಣೆ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ



ಚಿತ್ರ 10 A: ಶಂಕು; B : ಶಂಕುಗಳೆರಡರ ಶಿರಃಕೋನಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕೂಡಿರುವ ಆಕೃತಿ; C: ಶಂಕುಜಗಳ ಬಗೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಚಿತ್ರ. ಚಿತ್ರ Cಯಲ್ಲಿ 1: ಅತಿಪರವಲಯದ ಎರಡು ಶಾಸನಗಳು; 2: ದೀರ್ಘವೃತ್ತ; 3: ಪರವಲಯ

ಮೆದುಮರದ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಅದರ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನೂ ರಚಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಬಲವಾದ ತಿರಡಿನಲ್ಲಿ (ವೈಸ್) ಸಿಕ್ಕಿಸಿ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಗಲ ಮೊದಲಿನ ಅಗಲದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗುವ ತನಕ ಅದುಮಿದರೆ ರಚಿಸಿದ್ದ ವೃತ್ತ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆಗ ಅದರ ವ್ಯಾಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಘನಾಕೃತಿಗೆ ಇದ್ದ ಮೊದಲಿನ ಎಲ್ಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳೂ ನಾಶವಾದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದು ಪೂರ್ಣ ಸತ್ಯವಲ್ಲ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೇಂದ್ರ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವ ಗುಣ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಎರಡಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೂಲ ಅಳತೆಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದರೂ ಕೆಲವು ಲಕ್ಷಣಗಳು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬದಲಾಗುವ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕುರಿತಾದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಪರಿವರ್ತನ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಫೆಲಿಕ್ಸ್ ಕ್ಲೈನ್ (1849–1925) ಎಂಬಾತ 1872ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಪ್ರಮುಖ ಭಾಷಣ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮುನ್ನುಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದ.

ಮೂಲ ಮೂರ್ತಿಯೊಂದುಂಟು; ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಅದರ ಚಿತ್ರ ಉಂಟು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು, ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂರ್ತಿಯ ವಿಕ್ಷೇಪ (ಪ್ರೊಜೆಕ್ಷನ್) ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಮೂಲಮೂರ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ಈ ವಿಕ್ಷೇಪ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲೂ ಮೂಲದ ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಇದ್ದಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ವಿಕ್ಷೇಪ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗದ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕುರಿತಾದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ವಿಕ್ಷೇಪ ಜ್ಯಾಮಿತಿ (ಪ್ರೊಜೆಕ್ಟಿವ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿ) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಅಂದರೆ ಈ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಆಕೃತಿಗಳ ಉದ್ದ, ಕೋನಗಳು ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಮುಂತಾದವನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹದಿನೇಳನೆಯ ಶತಮಾನದ ಹೊತ್ತಿಗೆ ವಿಕ್ಷೇಪ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಜನಿಸಿದ್ದರೂ ಅದು ಪ್ರೌಢಿಮೆಯನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದು ಹದಿನೆಂಟನೆಯ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆ ಮತ್ತು ಹತ್ತೊಂಬತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ. ಮೊದಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತದ ಬಳಕೆಯಿಲ್ಲದೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಅದರದೇ ಆದ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಬೇಕೆಂಬ ಮನೋಭಾವ ಬೆಳೆದು ಬಂದಿತ್ತು. ಆದರೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪರಿಧಿ ಬೆಳೆದಂತೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗುತ್ತ ಬಂತು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಚಿಂತನೆಗಳು ಸಂಖ್ಯಾ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರಬೇಕೆಂಬ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಚಿಂತನಮಾರ್ಗ ಫರ್ಮಾ (1601–1665) ಮತ್ತು ಡೇ ಕಾರ್ಟೆ (1596–1650) ಅವರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಇದು ನಿರ್ದೇಶಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಜನನಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ವಾಯಿತು. ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಸ್ತುವನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ (ಯೂನಿಕ್‌ಲಿ) ಗುರುತಿಸಲು ನೆರವಾಗುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಗಣಕ್ಕೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಗಣವೆಂದು ಹೆಸರು. ಒಂದು ತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದು P ಗೆ ಎರಡು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 11

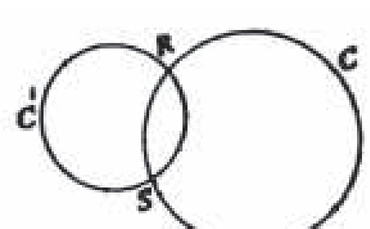
ತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಲಿ. ಇವನ್ನು x- ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y- ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. Pಯ ಮೂಲಕ y- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ x- ಅಕ್ಷವನ್ನು L ನಲ್ಲೂ x- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ y- ವನ್ನು M ನಲ್ಲೂ ಸಂಧಿಸಲಿ. OL ದೂರವನ್ನು Pಯ x- ನಿರ್ದೇಶಕ ವೆಂದೂ OM ದೂರವನ್ನು y- ನಿರ್ದೇಶಕವೆಂದೂ ಕರೆಯ ಬಹುದು. ಅಂದರೆ x- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ OL ದೂರವನ್ನು ಗಮಿಸಿ ಅಲ್ಲಿಂದ y- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ OM = LP ದೂರ ಸಾಗಿದರೆ P ಬಿಂದು ಸಿಕ್ಕುತ್ತದೆ. P ಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ P(x, y) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು). $ax+by+c = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x, y ಚರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಮತ್ತು a, b, c ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದ x ಮತ್ತು y ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಸತ್ಯತೆ ನಾಶವಾಗದಿದ್ದರೆ ಅಂಥ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸರಳರೇಖೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. x ಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ yಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $ax+by+c = 0$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆದು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $ax+by+c = 0$ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನೂ $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ಅತಿಪರವಲಯವನ್ನೂ $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯವನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ x, y ಚರಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಸ್ತುಗಳ ಎಲ್ಲ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ನಿರ್ದೇಶಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸಬಹುದು.

ಗ್ರೀಕರಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮನುಷ್ಯನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಭವಗಳಿಂದ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿತ್ತು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಉಕ್ತಿಯ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯ ಅನುಭವಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಅಂದರೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿರದೆ ಅದು ಮನುಷ್ಯನ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಹಳಷ್ಟು ಅವಲಂಬಿಸಿತ್ತು. ಈ ರೀತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ 18ನೆಯ ಶತಮಾನದವರೆಗೂ ನಡೆದುಬಂದಿತ್ತು. ಆ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆಯ ಮತ್ತು 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಯ ಕೆಲವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ತನ್ನದೇ ಆದ ಒಂದು ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಮಾನವನ ಅನುಭವಗಳಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಇರಬಲ್ಲುದು ಎನ್ನುವ ಚಿಂತನೆಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟರು. ಇಂದು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ನಾನಾರೀತಿಯ ಆಕಾಶಗಳು (ಸ್ಪೇಸಸ್) ಈ ಧಾಟಿಯ ಚಿಂತನೆಯ ಫಲವಾಗಿ ಜನಿಸಿದವುಗಳು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ತಳಪಾಯವಾಗಿ ಐದು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಐದು ಮೂಲ ಗ್ರಹಿಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿದ್ದನಷ್ಟೆ. ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ಇತರ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳಿಗಿಂತ ಮಹತ್ತರವಾದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಳಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಚಿಂತನೆಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನೇ ಬದಲಾಯಿಸಿತು. ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಆಧುನಿಕ ರೂಪ. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಹುಟ್ಟುತ್ತದೆ – ದತ್ತ ಬಿಂದವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವ ಬಗೆ ಯಾವುದು? ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅನಂತವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬೇಕು. ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದನ್ನು ಛೇದಿಸದಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದು ಪ್ರಯೋಗಾತೀತ. ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಇನ್ನುಳಿದ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಚಿಂತನೆ ಮಾಡಲು 18ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆಯ ಮತ್ತು 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ಬಹಳಷ್ಟು ಸಾಧನೆಗಳೂ ಬಂದವು. ಆದರೆ ಅವೆಲ್ಲವೂ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಅಪ್ರಕಟಿತ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಮರ್ಥನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುತ್ತಿದ್ದವು. ಹೀಗೆ ಬಳಸಿಕೊಂಡಂಥ ಉಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವುದು ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವಷ್ಟೇ ಕಷ್ಟವಾಗಿರುತ್ತಿತ್ತು. ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ 19 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಗೌಸ್, ಲಗ್ರಾಂಜ್, ಡಾಲಂಬರ್ಟ, ಲಝಾಂಡರ್ ಮುಂತಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರನ್ನು ಆಕರ್ಷಿಸಿತು. ಆದರೂ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ಸಮರ್ಪಕ ಸಾಧನೆ ಮಾತ್ರ ದೊರೆಯಲೇ ಇಲ್ಲ. ಆ ಬಳಿಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಸಾಧನೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯ ಕಡೆಗಿದ್ದ ತಮ್ಮ ಗಮನವನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿರೂಪಣೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಹರಿಯಬಿಟ್ಟರು. ಈ ರೀತಿಯ ಚಿಂತನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸಿದವರು ಗೌಸ್, ಸ್ವೈ ಇಕಾರ್ತ್ ಮತ್ತು ಟೌರಿನಸ್. ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಗೌಸ್ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಕೈಬಿಟ್ಟು ಅದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುವಂತೆ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಯಾವ ಕಾರಣಕ್ಕೋ ಏನೋ ಗುಪ್ತವಾಗಿರಿಸಿದ್ದ. ಆದರೆ ಟೌರಿನಸ್ ಮಾತ್ರ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಅಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದ ಹೊಸ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನ ಪಟ್ಟು ಅದು ಅಸಾಧ್ಯವೆಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ತಿಳಿದ. ಅಂದರೆ ಇವರ್‍ಯಾರೂ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಲೊಬಾಚೆವ್ಸ್ಕಿ (1793–1856) ಮಾತ್ರ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ನೂತನ ಧಾಟಿಯಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಿಸಿ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಲ್ಲದೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತರ ವಿಭಾಗಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಇದ್ದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನೇ ಬದಲಾಯಿಸಿದ. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ವಿರುದ್ಧ ಆಗುವಂತೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಬಹುದೆಂಬ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಂಡ. ಈ ಹೊಸ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ಒಂದು ವೇಳೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಇತರ ಉಕ್ತಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳದಿದ್ದರೆ ಅಸಂಬದ್ಧವಾದ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಈ ಅಸಂಬದ್ಧತೆಗಳ ಸೃಷ್ಟಿ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುವ ಲೊಬಾಚೆವ್ಸ್ಕಿಯ ಹೊಸ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಅಳಿಸಿಹಾಕುವುದರ ಮೂಲಕ ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಲೊಬಾಚೆವ್ಸ್ಕಿ ಎಣಿಸಿದಂತೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಅಸಂಬದ್ಧತೆಗಳೂ ಜನಿಸಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆತ ಎರಡು ರೀತಿಯ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಯಿತು : (1) ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ನಾಟ್ ಪ್ರೂವಬಲ್), (2) ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಒಂದು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲ ಉಕ್ತಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಸುಸಂಬದ್ಧವಾದ ಕೆಲವು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು. ಈ ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳ ಜನನಕ್ಕೆ ನೈಜವಾದ ಒಂದು ಅರ್ಥವನ್ನು ಒದಗಿಸಲು ಆತ ಅಸಮರ್ಥನಾಗಿದ್ದರಿಂದ ಅವನ್ನು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದ. ಆದರೆ ಈ ಹೊಸ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೇ ಇಂದು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸೃಷ್ಟಿಗೆ ಕಾರಣವಾಯಿತು.

ಕೇವಲ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸೃಷ್ಟಿ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಇರುವಿಕೆಗೆ ಬುನಾದಿ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವಂಥ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪ್ರಪಂಚ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿರೂಪಗಳನ್ನೂ (ಮೋಡಲ್ಸ್) ಒದಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಫೆಲಿಕ್ಸ್ ಕ್ಲೈನ್ ಮತ್ತು ಹೆನ್ರಿ ಪಾನ್‌ಕ್ವಾರೆಯವರು (1854–1912) ಇಂಥ ಎರಡು ಪ್ರತಿರೂಪಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದರು. ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವನ್ನು ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅಸ್ತಿತ್ವಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗುವಂತೆ ಹೊಸದಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿದರು. ಕ್ಲೈನ್ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ತಲ ಒಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ವೃತ್ತದ ಅಭ್ಯಂತರ ಭಾಗ (ಇಂಟೀರಿಯರ್) ಎಂದು ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಬಿಂದು ಎಂದೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದನೆ ಇವು ಕ್ಲೈನ್ ಪ್ರತಿರೂಪದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಧಾಟಿಯಲ್ಲೇ ಇವೆ. ಈ ಪ್ರತಿರೂಪ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನುಳಿದು ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಪಾನ್‌ಕ್ವಾರೆ ಪ್ರತಿರೂಪದಲ್ಲೂ ತಲ ಒಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ವೃತ್ತ C ಯ ಅಭ್ಯಂತರ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. C ಮತ್ತು C' ಎರಡು ಲಂಬಕೋನೀಯ ವೃತ್ತಗಳು (ಆರ್ಥಾಗನಲ್ ಸರ್ಕಲ್ಸ್); R ಮತ್ತು S ಅವುಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುಗಳು (ಚಿತ್ರ 12). ಈ ಪ್ರತಿರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಬಿಂದುಗಳು C ವೃತ್ತದ ಅಭ್ಯಂತರ ಭಾಗದ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. C ವೃತ್ತದ ಅಭ್ಯಂತರ ಭಾಗ ಮತ್ತು C' ರೀತಿಯ ಯಾವುದಾದರೂ ವೃತ್ತ ಇವೆರಡರ ಛೇದನವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದೆ. ಈ ಪ್ರತಿರೂಪ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಅದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಉಳಿದು ಇನ್ನೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಲೊಬಾಚೆವ್ಸ್ಕಿಯ ಈ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ರೀಮಾನ್ ಕೂಡ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದೇ ತಲದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಬೇರೊಂದು ಅಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ. ಇದಕ್ಕೆ ಎಲಿಪ್ಟಿಕ್ ಅಥವಾ ರೀಮಾನಿಯನ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಂದು ಹೆಸರು.



ಚಿತ್ರ 12

4 ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಅನಂತ ಕ್ರಿಯೆ ಅಥವಾ ಪರಿಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದುದನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶಾಖೆಯೇ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (ಅನಾಲಿಸಿಸ್). ಇದರ ಉಗಮ ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಮತ್ತು ಯುಡೋಕ್ಸಸ್ ಅವರ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿತ್ತು. ಅನಂತರ ಬಹಳಷ್ಟು ಮಂದಿ ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ಚಿಂತನೆ ಮಾಡಿದರೂ ಅದು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟರೂಪಕ್ಕೆ ಬಂದದ್ದು 19ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯೇ. ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ (ಫಂಕ್ಷನ್) ಬಹು ಮುಖ್ಯ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. x, A ಯ ಒಂದು ಧಾತುವನ್ನೂ y, B ಯ ಒಂದು ಧಾತುವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಲಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೆ ಗೊತ್ತಾದ ಒಂದು $y \in B$ ಯನ್ನು ನಿಗದಿಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಆಗ A ಯಿಂದ B ಗೆ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಈ

ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಹತ್ತಿರ ಬರುವಂತೆ ಪಿ.ಜಿ.ಎಲ್.ಡೀರಿಕ್‌ಲೇ (1805–1859) ಎಂಬಾತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತಾನೆ: x ಮತ್ತು y ಗಳು ಎರಡು ಚರಗಳು; x ಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ y ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುವ x ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸೂತ್ರವಿದ್ದರೆ ಆಗ y ಯು x ಎಂಬ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಡೀರಿಕ್‌ಲೇಯ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ y ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸೂತ್ರ ಯಾವುದೇ ಅಭಿಜಾತ (ಕ್ಲ್ಯಾಸಿಕಲ್) ಸೂತ್ರೀಕರಣಕ್ಕೂ ಒಳಪಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ಅರಿವಾಗುತ್ತದೆ. x ಪರಿಮೇಯ ಆಗಿದ್ದರೆ $y=c$ ಆಗಿರಲಿ; ಮತ್ತು x ಅಪರಿಮೇಯ ಆಗಿದ್ದರೆ $y=d\neq c$ ಆಗಿರಲಿ. c ಮತ್ತು d ಗಳು ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪರಿಮೇಯಗಳ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಪರಿಮೇಯ $ax+b=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a,b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ನೈಜ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (ರಿಯಲ್ ಅನಾಲಿಸಿಸ್) ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಎರಡರೊಂದಿಗೂ ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತದೆ. $ax^2+bx+c=0$ (a,b ಮತ್ತು c ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಸಲಕರಣೆಗಳಿಂದ (ನೇರ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಕೈವಾರ) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಾನಗಳನ್ನೂ ಕೊಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಡಿಗ್ರಿ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಈ ಸಲಕರಣೆಗಳಿಂದ ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಾನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪರಿಮೇಯ ಗುಣಾಂಕಗಳುಳ್ಳ (ಕೋಎಫಿಷೆಂಟ್ಸ್) ಯಾವುದೇ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣದ (ಆಲ್ಜಿಬ್ರೇಕ್ ಇಕ್ವೇಷನ್) ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು; ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಪರಿಮೇಯಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ π ಮತ್ತು e ಗಳು ಎರಡು ಅಪರಿಮೇಯಗಳು; ಇವು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಅಲ್ಲದ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೀಜಾತೀತ (ಟ್ರಾನ್ಸೆಂಡೆಂಟಲ್) ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. e^{π}, πe, $\pi+e$ ಮತ್ತು π^e ಗಳಲ್ಲಿ e ಮಾತ್ರ ಬೀಜಾತೀತ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನುಳಿದ ಮೂರರ ಸ್ವರೂಪ ಇನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿತವಾಗಿಲ್ಲ. π^e ಮತ್ತು $\pi+e$ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೀಜಾತೀತ ಎಂದು $x^2-(\pi+e)x+\pi e=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ πe ಮತ್ತು $\pi+e$ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದು ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಬೀಜಾತೀತ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೆ ಹಾಗೆಯೇ ಇಂದು ಉಳಿದಿದೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶೈಶವಾವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿ ಕಾಣುತ್ತಿದ್ದವು. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೂ ಇದ್ದ ನಿಕಟ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತೆ ಮಾರ್ಪಾಡು ಮಾಡಲು ಹೊರಟಾಗ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಒಂದು ಅಂಗ ಮಾತ್ರ ಎಂದು ಗೋಚರವಾಯಿತು (**ನೋಡಿ– ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ**). ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ ಪ್ರಮುಖರು ಕಾರ್ಲ್ ವೈರ್‌ಸ್ಟ್ರಾಸ್ (1815–1897), ಬಾರ್ನರ್ಡ್ ಬೊಲ್ಜಾನೋ (1781–1848) ಮುಂತಾದವರು. ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಿಯಾದ ನಿರೂಪಣೆಯ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇತ್ತು. ಈ ಕೊರತೆಯನ್ನು ತುಂಬಿದವ ಜೆ. ಡಬ್ಲ್ಯು. ಆರ್. ಡೆಡಿಕೆಂಟ್ (1831–1916). ಈತನ ಹೆಸರಿನ ವಿಭಜನೆಗಳು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಡೆಡಿಕೆಂಟ್ ವಿಭಜನೆಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭರೂಪದ ರಸಲ್‌ನ ನಿರೂಪಣೆ ಈ ರೀತಿ ಇದೆ: ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ R ನ ನೀಚಖಂಡ (ಲೋಯರ್ ಸೆಗ್‌ಮೆಂಟ್) ಈ ಕೆಳಗೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಲಕ್ಷಣಗಳಿರುವ L ಗಣ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ:

1. L ಅಶೂನ್ಯ ಗಣ.

2. $x\in L$ ಮತ್ತು $y<x$ ಆಗಿದ್ದರೆ y ಕೂಡ L ನಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

3. $x\in L$ ಆದಾಗ $z > x$ ಮತ್ತು $Z \in L$ ಆಗುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಚ್ಚಖಂಡ (ಅಪ್ಪರ್ ಸೆಗ್ಮೆಂಟ್) U ನ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಇಂತಿವೆ:

1 U ಅಶೂನ್ಯ ಗಣ.

2 $x\in U$ ಮತ್ತು $y > x$ ಆಗಿದ್ದರೆ y ಕೂಡ U ನಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

3 $x\in U$ ಆದಾಗ $z < x$ ಮತ್ತು $z\in U$ ಆಗುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು z ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಂಥ ಖಂಡಗಳು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: 1 $U = \{x \mid x>2\}$ ಎನ್ನುವ ಉಚ್ಚಖಂಡ 2 ಎಂಬ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ.

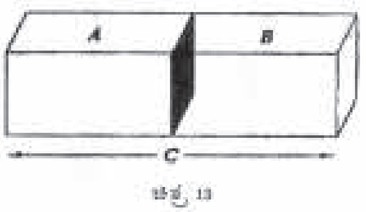
2 $U = \{x \mid x^2 > 2$ ಮತ್ತು $x > 0\}$

ಎನ್ನುವ ಉಚ್ಚಖಂಡದ $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಅಪರಿಮೇಯ) ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯ ಈ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವುದು, ಗುಣಿಸುವುದು ಮುಂತಾದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೌಷಿ ಲಕ್ಷಣವಿರುವ ಪರಿಮೇಯಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುವುದು ಉಂಟು. ಕೌಷಿ ಲಕ್ಷಣ ಈ ರೀತಿ ಇದೆ: (R_n) ಪರಿಮೇಯಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರಲಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\varepsilon > 0$ಗೆ (ε ಪರಿಮೇಯ) $m,n > N$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $-\varepsilon < R_m-R_n < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ N ನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಾದರೆ (R_n) ಗೆ ಕೌಷಿ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲೂ ಸಮತೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

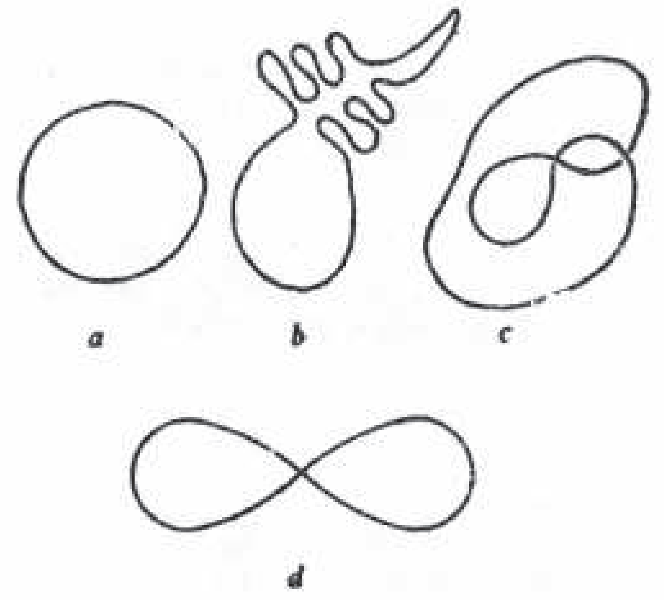
ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹೊಸ ಪರಕಲ್ಪನೆ ಪರಿಮಿತಿ ಮುಂತಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಧಾರವಿಲ್ಲದೆಯೇ ಚರ್ಚಿಸಲು ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟಿತು. ಈ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಬಂದು ಇದರಿಂದಾಗಿ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯಾ ಚರಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಇವು ಹುಟ್ಟಿಕೊಂಡವು. ಇಂದು ಅನ್ವಯ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿದೆ. **(ನೋಡಿ– ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ, ಗಣಿತೀಯ)**

5 **ಟಾಪಾಲಜಿ** : 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸಬಗೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಅಂಕುರಿಸಿತು. ಇದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ನಿಂತು ಟಾಪಾಲಜಿ (**ನೋಡಿ**) ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಶಾಖೆಯಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಬಂದಿದೆ. ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಅವಲಂಬಿಸಲು ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕೆ ಬದಲು ಇದು ಮನುಷ್ಯನ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯನ್ನು ಬಹಳವಾಗಿ ಅವಲಂಬಿಸಿತ್ತು. ಇದರ ಉಗಮ ಕಳೆದ ನೂರು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಅದಂತೆ ಅನಿಸಿದರೂ ಬಹು ಫಲಕಗಳ ಭುಜಗಳು, ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಮುಖಗಳು ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಡೇಕಾರ್ಟೆ (1596–1650) ಮತ್ತು ಆಯ್ಲರ್ (1707–1783) ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದರಿಂದ 17 ಮತ್ತು 18ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಟಾಪಾಲಜಿಯ ಸುಳಿವು ಇವರಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖನಾದ ಪಾನ್‌ಕ್ವಾರೆ (1854–1912) ಎಂಬಾತ ಡೇಕಾರ್ಟೆ ಮತ್ತು ಆಯ್ಲರ್ ಅವರ ಅನಿಸಿಕೆಗಳನ್ನು ಟಾಪಾಲಜಿಯ ಕೇಂದ್ರ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದ್ದಾನೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೂ ಅದರ ಪಕ್ಕದ ಭಾಗಕ್ಕೂ ಇರುವ ದೈಹಿಕ ಪಾರ್ಶ್ವಸಂಪರ್ಕ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಲಕ್ಷಣ. ಲೊಬಾಚೆವ್ಸ್ಕಿ (1793 – 1856) ಈ ಪಾರ್ಶ್ವ ಸಂಪರ್ಕವನ್ನು ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಲಕ್ಷಣ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದ; A ಮತ್ತು B ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಅಂಟಿಕೊಂಡು C ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿ ಆಗಿದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ C ಎಂಬ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ A ಮತ್ತು B ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗುತ್ತವೆ. Cಯನ್ನು ಒಂದೇ ಆಕೃತಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವಸಂಪರ್ಕ ಇರುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತನೆಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿದಾಗ ವಸ್ತುಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವಸಂಪರ್ಕ ನಾಶವಾಗದಿದ್ದರೆ ಆ ಪರಿವರ್ತನೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಪರಿವರ್ತನೆಯೆಂದೂ ಪಾರ್ಶ್ವ ಸಂಪರ್ಕಗಳು ನಾಶವಾಗದಿರುವ ಜೊತೆಗೆ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಪಾರ್ಶ್ವ ಸಂಪರ್ಕಗಳು ಉಂಟಾಗದಿದ್ದರೆ ಅಂಥ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ ಯೆಂದೂ ಹೆಸರು. ಅಂದರೆ ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ಭಾಗಗಳ ವಿಭಜನೆ ಅಥವಾ ಬೆಸುಗೆಗಳು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂಥ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಒಂದು–ಒಂದು ಸಂವಾದಿತ್ವವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತವೆ. ರಬ್ಬರಿನ ಒಂದು ವರ್ತುಲ ಉಂಗುರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅದನ್ನು ನಿರಂತರ ಪರಿವರ್ತನೆಗೆ ಗುರಿಪಡಿಸಿದಾಗ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಮೂನೆಯ ಆಕೃತಿಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ (*d*)ಯನ್ನುಳಿದು ಇನ್ನೆಲ್ಲವೂ ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು. ಈ ಚಿತ್ರ ಅಡ್ಡಲಾದ 8ರ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಇದರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಗಂಟಿನಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಸಂಪರ್ಕ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಪರಿವರ್ತನೆಯೇ ಹೊರತು ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ ಅಲ್ಲ. ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಟಾಪಾಲಜಿಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ಗುರಿಪಡಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಕೆಲವು ಲಕ್ಷಣಗಳು ನಾಶವಾಗದೆ ಹಾಗೆಯೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಇಂಥವುಗಳಿಗೆ ವಸ್ತುವಿನ



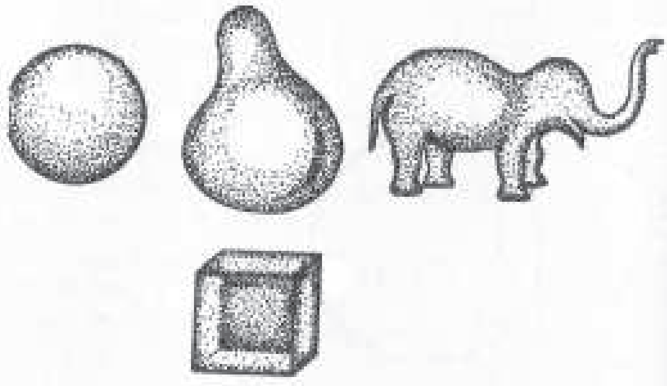
ಚಿತ್ರ 13

ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಯಾವುದೇ ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 14

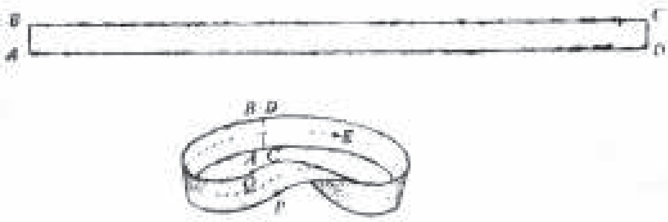
ಹೀಗೆ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವಿಕೆ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಲಕ್ಷಣ. ಹಿಟ್ಟಿನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಮಿದುವಾದ ಗೋಳವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಚಿತ್ರ(15)ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ರೂಪಕ್ಕೆ ಈ



ಚಿತ್ರ 15

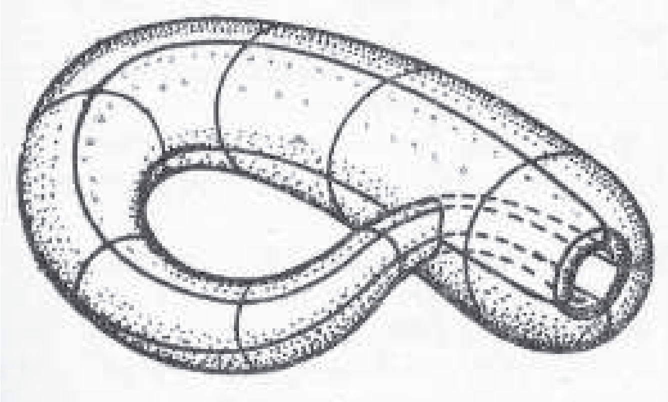
ಗೋಳವನ್ನು ಮುರಿಯದೇ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು. ಇದು ಒಂದು ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ ಯಾಗಿದೆ. ಗೋಳವನ್ನು ಒಂದು ಘನವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ. ಈಗ ಗೋಳಕ್ಕೆ ಅಂಚುಗಳಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಘನಕ್ಕೆ ಅಂಚುಗಳಿವೆ. ಅಂಚುಗಳಿರುವುದು ಅಥವಾ ಅಂಚು ಗಳಿಲ್ಲದಿರುವುದು ಟಾಪಾಲಜೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಬದಲಾಗಿವೆ. ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಆಕೃತಿ ಮತ್ತು ಗೋಳ ಟಾಪಾಲಜೀಯವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಟಪಾಲಜೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಿಂದ ಮಾರ್ಪಾಡು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಅಂಥ ವಸ್ತುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೋಮಿಯೋಮಾರ್ಫಿಕ್ ಆಗಿವೆ ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳುತ್ತದೆ: ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವ ಇರುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಹೌದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೋಬಿಯಸ್ ಪಟ್ಟಿ (ಚಿತ್ರ 16).

ಇದೊಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಕಾಗದದ ಪಟ್ಟಿ ABCD. ಇದರಲ್ಲಿ D ಬಿಂದು Bಯೊಂದಿಗೆ C ಬಿಂದು A ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ CD ತುದಿಯನ್ನು AB ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ಅಂಟಿಸಬೇಕು. ಈ ಆಕೃತಿಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವವಿರುವ ಮೇಲ್ಮೈ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭ. ಪಟ್ಟಿಯ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ E ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. E ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೋದರೆ ಕೊನೆಗೆ ಆಯತಾಕಾರದ ಪಟ್ಟಿಯ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಇನ್ನೊಂದು ಪಟ್ಟಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 16

ಬಂದು ಸೇರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಮೋಬಿಯಸ್ ಪಟ್ಟಿಗೆ ದ್ವಿಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ಇದ್ದಿದ್ದರೆ E ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಅದು ಇರುವ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿಯೇ ತಲುಪಬೇಕಾಗಿದ್ದಿತು. ಇದೇ ರೀತಿ ಏಕಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ಇರುವುದರೊಂದಿಗೆ ಸಂವೃತ ಸಹ ಆಗಿರುವ ಆಕೃತಿಗೆ ಕ್ಲೈನ್‌ಕುಪ್ಪಿ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಆಗಿದೆ. ಎರಡು ಮೋಬಿಯಸ್ ಪಟ್ಟಿಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಅಂಟಿಸುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಆಕೃತಿಯೇ ಕ್ಲೈನ್‌ಕುಪ್ಪಿ ಚಿತ್ರ 17.



ಚಿತ್ರ 17

6 **ಬೀಜಗಣಿತ :** 19ನೆಯ ಶತಮಾನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತಹಾಸದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಹತ್ತರವಾದ ಕಾಲ. ಈ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಚಿಂತನೆಯ ಚೌಕಟ್ಟು ಲಭಿಸಿತಲ್ಲದೆ ಆ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅತೀವವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಉಂಟಾಯಿತು. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಈ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆರೋಗ್ಯಕರವಾದ ಪ್ರೌಢಿಮೆಯನ್ನು ಗಳಿಸಿ ವಿವಿಧ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮುಂದಿನ ಗತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಂಡಿತು. 19ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪರಿಸರವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿ ಅದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತ (ಮಾಡರ್ನ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ) ಎಂದು ಕರೆಯುವ ವಾಡಿಕೆ ಇತ್ತು. ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಂಗವಾಗಿ ಅಮೂರ್ತ ಬೀಜಗಣಿತವೂ ಸೇರಿಕೊಂಡಿದೆ. 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತ ಆಧುನಿಕ ಆಗಿದ್ದಿತೇ ವಿನಾ ಇಂದು ಆಧುನಿಕ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಕೇವಲ ಬೀಜಗಣಿತ ಎಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುವಷ್ಟು ಹಳೆಯದಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಬೀಜಗಣಿತ ಅಂದರೆ ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬೇಕು. ಜಾರ್ಜ್ ಪೀಕಾಕ್ (1791–1858), ವಿಲಿಯಂ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ (1805–1865), ಆರ್ಥರ್ ಕೇಲೀ (1821–1895), ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್ (1814–1897), ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲ್ (1815–1864) ಮತ್ತು ಗ್ಯಾಲ್ವ (1811–1832) ಇವರು ಬೀಜಗಣಿತದ ಕ್ರಾಂತಿ ಪುರುಷರು. ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು ಅಪರಾಧವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದ್ದ ಕಾಲವದು. ಹೊಸ ಚಿಂತನೆಗೆ ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬಯಸದೆ ಹಳೆಯದಕ್ಕೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಬಲವಾಗಿ ಅಂಟಿಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡಿದ್ದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಂದ ಕೂಡಿದ ವಾತಾವರಣವಿತ್ತು. ಅಂಥ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪೀಕಾಕ್ ಕೇಂಬ್ರಿಜಿನ ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜಿನ ಅಧಿಕಾರವರ್ಗದಲ್ಲಿದ್ದು ಕೊಂಡು ಬೀಜಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಶ್ರಮಿಸಿದ. ಟ್ರೀಟೈಸ್ ಆನ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ

ಎನ್ನುವ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಬರೆದು (1830) ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ತಾರ್ಕಿಕ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಪಟ್ಟ. ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ (ಕಾಮ್ಯೂಟೇಟಿವ್ ಲಾ), ಸಾಹಚರ್ಯ ನಿಯಮ (ಅಸೋಸಿಯೇಟಿವ್ ಲಾ) ಇತ್ಯಾದಿ ಮೂಲ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಇಂದು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಈತನಷ್ಟು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ಯಾರೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಿಲ್ಲ. ಮೊದಲು ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿದು ಇವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ರಾಶಿಗಳ ಮೇಲೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ (ಸಿಂಬಾಲಿಕ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ) ಜನನಕ್ಕೆ ಕಾರಣನಾದ. ಮುಂಚೆ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ + ಮತ್ತು – ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಸರ್ವೇಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಅರ್ಥವಿತ್ತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 2–1ಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿರುತ್ತಿತ್ತೇ ವಿನಾ 1–2ಕ್ಕೆ ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಗಳ (ಮ್ಯಾಗ್ನಿಟ್ಯೂಡ್ಸ್) ಮೇಲೆ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಹಾಕದೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದೆಂದು ಪ್ರತಿವಾದಿಸಲಾಯಿತು. ಪೀಕಾಕ್ + ಮತ್ತು – ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಈ ರೀತಿಯ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಬಳಕೆ ಯಾವ ಸಮಜಾಯಿಸಿಕೆಯನ್ನೂ ಕೊಡಲಿಲ್ಲ. ಆತನ ಹೊಸ ಚಿಂತನಮಾರ್ಗಕ್ಕೆ ಬೆಂಬಲ ಕೊಟ್ಟವ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆದ ಡಿ' ಮಾರ್ಗನ್ (1806–1871). ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಪೀಕಾಕನಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಆಗಿದ್ದರೆ ಡಿ' ಮಾರ್ಗನನಿಗೆ ಅವು ಅಮೂರ್ತವಾಗಿದ್ದವು. ತಾನು ಬಳಸಿದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನೂ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಆತ ಅಮೂರ್ತವಾಗಿರಿಸಿದ. ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ಎರಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಬಗೆಯ ಪರಿಕರ್ಮ ಪದ್ಧತಿಗಳ ಇರುವಿಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲ ನಿಯಮಗಳು ಎಲ್ಲ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿಗೂ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವುವು ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಬಹಳ ಹತ್ತಿರ ಬಂದರೂ ಆತ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೀಜಗಣಿತಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರಬಲ್ಲವು ಎಂದು ನಂಬಿದ್ದ. ಡಿ' ಮಾರ್ಗನನ ಈ ಗ್ರಹಿಕೆ ತಪ್ಪು ಎಂದು ಡಬ್ಲಿನ್ನಿನ ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ತೋರಿಸಿದ. ಈತ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ. (a,b) ಮತ್ತು (α,β) ಎಂಬ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎರಡು ಸಕ್ರಮ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $(a,b),(\alpha,\beta)=(a\alpha-b\beta,\ a\beta+b\alpha)$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತಾನೆ. ಈ ಸಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಇಡೀ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲು ಅವನಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು. ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರಿದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ತಲದಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸಿ ಇದೇ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಿದ. ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಮೂರು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಕ್ರಮಗಣಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾನೆ: $(a+bi+cj)$ ಅಥವಾ (a,b,c). ಆದರೆ ಮೂರು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಕ್ರಮಗಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು ಆತನಿಗೆ ಕೂಡಲೇ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲ. 10ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಒಂದು ದಿವಸ ಮೂರು ನೈಜಸಂಖ್ಯಾಸಕ್ರಮಗಣದ ಬದಲು 4 ನೈಜ ಸಂಖ್ಯಾಸಕ್ರಮಗಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $i^2=j^2=k^2=-1$ ಮತ್ತು $ij=k=ji, jk=i=-kj$ ಮತ್ತು $ki=j=-ik$ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಂಡರೆ $(a+bi+cj+dk)$ ರೂಪದ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಆತ ಕೈಬಿಟ್ಟಿರುವುದು ಗಮನಾರ್ಹ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $ij \neq ji$. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೈಬಿಟ್ಟು ಲೊಬಾಚೆವ್ಸ್ಕಿ ಹೊಸ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಜನನವಿತ್ತರೆ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಕೈಬಿಟ್ಟು ಒಂದು ಹೊಸ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ. ನಾಲ್ಕು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮವಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತ (**ನೋಡಿ– ಕ್ವಟರ್ನಿಯನ್**). ಪರಿವರ್ತನ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ. ಇದರ ಕರ್ತೃ ಕೇಲಿ. ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲ್ ಎಂಬ ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಇನ್ನೊಂದು ಬಗೆಯ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ. ಯಾವುದೇ ವಿಷಯ ತನ್ನ ಅಸ್ತಿತ್ವಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸೂಕ್ತ ಪರಿಕರ್ಮ ಸೂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಗುರಿಯಾಗುವ ಪ್ರತೀಕಗಳು ಇವನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಅಂಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸರಿಯಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಆತ ಗ್ರಹಿಸಿದ. ಇಂದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಕಾಣುವ ಗಣ ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮೊದಲು ಗ್ರಹಿಸಿದಾತ ಬೂಲ್. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಶ್ವಗಣ U ವಿನ ಎರಡು ಉಪಗಣಗಳಾದರೆ A U B ಅನ್ನುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ಗಣ; ಇದರಲ್ಲಿ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಧಾತುಗಳು B ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಧಾತುಗಳೂ ಇವೆ. A U B ಅನ್ನುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ಗಣ. ಇದರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಎರಡಕ್ಕೂ ಉಭಯಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಧಾತುಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ. O ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ಧಾತುಗಳೇ ಇಲ್ಲದ ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಬಳಸುತ್ತಾನೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯಗಣ ಎಂದು ಹೆಸರು (ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರಚಲಿತ ಪ್ರತೀಕ ϕ). ಇಂದು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ U ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಬದಲು + ಮತ್ತು × ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬೂಲ್ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದ. + ಮತ್ತು × ಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಬೂಲೀಯ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಆತ ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ. ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ, ಸಾಹಚರ್ಯ ನಿಯಮ ತುತ್ತು ವಿತರಣ ನಿಯಮಗಳು ಈ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಈ ಬೀಜಗಣಿತದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

1. $A+A=A$, ($2A$ ಅಲ್ಲ).
2. $A\times B=A\times C$, $A\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $B=C$ ಆಗಬೇಕಾದ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ.
3. $A\times B=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ A ಅಥವಾ B ಯಾವುದಾದರೂ ಶೂನ್ಯಗಣ ಆಗಲೇಬೇಕಾದ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ($A=B$ ಅಂದರೆ A ಮತ್ತು B ಯಲ್ಲಿರುವ ಧಾತುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ).

ಇದು (ಅಮೂರ್ತ) ಬೀಜಗಣಿತದ ಕಡೆಗಿಟ್ಟ ಮೊದಲ ಹೆಜ್ಜೆ ಆಗಿದೆ. ಗ್ರೂಪ್, ವಲಯ (ರಿಂಗ್) ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರ (ಫೀಲ್ಡ್) ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಬೆಳೆದು ಬಂದು ಅಮೂರ್ತಬೀಜಗಣಿತ ಬೃಹದಾಕಾರವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಇದೆ. (**ನೋಡಿ– ಬೀಜಗಣಿತ**)

(ಜಿ.ಎನ್.ಎಂ.ಡಿ.)

7 **ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ತಳಹದಿ** : ಶಾಸ್ತ್ರವೊಂದರ ಆಯಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗುವುದಾದರೆ ಅಂಥ ಶಾಸ್ತ್ರ ಅಸಂಗತ (ಇನ್‌ಕನ್ಸಿಸ್ಟೆಂಟ್) ಎನಿಸುವುದು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಬಗೆಯ ಸನ್ನಿವೇಶ ಉದ್ಭವಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ. ಈ ನಂಬಿಕೆಯನ್ನೇ ಒಂದು ಖಚಿತ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ವಿವೇಚನಾರ್ಹ. ಗಣಿತದ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು (ಕನ್ಸಿಸ್ಟೆನ್ಸಿ) ಸಾಧಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ವಸ್ತುತಃ ಗಣಿತೀಯ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸ ಬೇಕಾಗುವುದರಿಂದ ಅಂಥ ಸಾಧನೆಗಳ ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆಗೆ ಭಂಗ ತಗಲುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಹೆಚ್ಚು ವಿಶ್ವಸನೀಯವೆಂದು ತೋರುವ ಒಂದು ಗಣಿತಶಾಖೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ವಿಶ್ವಸನೀಯವೆನಿಸಬಹುದಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಗಣಿತಶಾಖೆಯ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯದೆ ಇಲ್ಲ. ಬಹಳಷ್ಟು ಮಂದಿ ಕಾರ್ಯನಿರತ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದರೋ (ವರ್ಕಿಂಗ್ ಮ್ಯಾಥಿಮ್ಯಾಟಿಷಿಯನ್ಸ್) ಗಣಿತದ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ಅನುಭವಸಿದ್ಧವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ತಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೇಳೆ ಗೌಣ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳು ತಲೆದೋರಿದರೂ ಅವು ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಅಪರಿಪೂರ್ಣತೆ ಯನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತವೆಂದೂ ಚಿಕ್ಕಮಟ್ಟ ಸುಧಾರಣೆಗಳಿಂದ ಅವನ್ನೆಲ್ಲ ನಿವಾರಿಸ ಬಹುದೆಂದೂ ಅವರು ದೃಢವಾಗಿ ನಂಬುತ್ತಾರೆ.

ಗಣಿತಮಾರ್ಗಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಜನಸಾಮಾನ್ಯರ ನಿಲುವು ಇಂದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಭಕ್ತಿಪೂರ್ಣ ವಾಗಿದೆ. ಶಾಶ್ವತ ಸತ್ಯಗಳ ಆಗಾರ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿರುವ ಗಣಿತವನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ಅದಾವ ಸಂಶಯಗಳು ತಾನೆ ಜನಿಸಲು ಶಕ್ಯ ಎಂದು ಅವರು ಅಚ್ಚರಿಪಡುವುದು ಸಹಜ. ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವಾಗಿ ನಾವು ಪ್ರಧಾನತಃ ಮೂರು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಕಡೆ ಬೆರಳು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿಬರುತ್ತದೆ. ಅನಂತ (ಇನ್‌ಫಿನಿಟಿ), ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆ (ಜನರ್‍ಯಾಲಿಟಿ)ಮತ್ತು ನಿಷೇಧ (ನೆಗೇಷನ್). ಆಧುನಿಕ ಪ್ರೌಢ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆಗೆ ಬರುವ ಬಹಳಷ್ಟು ಗಣಗಳೆಲ್ಲ ಅನಂತವಾದವು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಮಸ್ತ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ); ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಎಣಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಲಿ, ವಿಶಿಷ್ಟ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಗುರಿಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಹತ್ತು ಗೋಲಿಗಳಿವೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ

(A) ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಗೋಲಿಯ ಬಣ್ಣ ಕೆಂಪು (ಅರ್ಥಾತ್ ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಗೋಲಿಗಳೆಲ್ಲ ಕೆಂಪುಬಣ್ಣದವು) ಎಂಬ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು

(B) ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲ ಒಂದು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಎಂಬುದರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಬೇಕು. (A)ಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ತೆಗೆದು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು. (B)ಯ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಮನಗಾಣಲು 1+2=3= ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, 2+3=5= ಬೆಸ

ಪೂರ್ಣಾಂಕ, 3+4=7= ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಗುರಿಮಾಡುತ್ತ ಸಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಬದಲು ಅದಕ್ಕೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾರ್ಗದ ಒಂದು ಸಮಗ್ರ ಸಾಧನೆಯೇ ಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಬಳಸುವ ಭಾಷೆಯ ಅಪರಿಪೂರ್ಣತೆಯಿಂದಾಗಿ (A). (B) ಗಳೊಂದೊಂದೂ ಉಕ್ತಧಾತುಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಒಂದೊಂದು ಲಕ್ಷಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವಂತೆ ತೋರಿದಾಗ್ಯೂ (A)ಯಲ್ಲಿರುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯ ಸ್ವರೂಪವೇ ಬೇರೆ, (B) ಯಲ್ಲಿರುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯ ಸ್ವರೂಪವೇ ಬೇರೆ. ಇವೆರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆ ಎಂಬ ದ್ವಂದ್ವಾರ್ಥಯುಕ್ತ ಏಕಪದವನ್ನೇ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದು ನಮ್ಮ ವಾಗ್ಭಂಡಾರದ ದಾರಿದ್ರ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕದ ಭೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ಇಂಥ ದಾರಿದ್ರ್ಯವನ್ನೇ ಒಂದು ಸೌಲಭ್ಯವನ್ನಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಿ (B)ಯಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲೂ (A) ಮಾದರಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯ ಅರ್ಥಛಾಯೆಯನ್ನು ವಿಕ್ಷೇಪಿಸುವ ಮೂಲಕ ವಿವಿಧ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಬಗೆಯ ಪ್ರಶ್ನಾಸ್ಪದ ಸಾಧನಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಉಪಕರಣವೆಂದರೆ ನಾವು ಹೆಸರಿಸಿರುವ ಮೂರನೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ನಿಷೇಧ. ಅಂಥ ಸಾಧನೆಗಳಿಗೆ ನಿಷೇಧದಿಂದ ಒದಗಿಬರುವ ಆಸರೆಯನ್ನು ಬಹಿರಂಗಪಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಸೇರಿದಂತೆ ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳ ಗೋಲಿಗಳಿವೆಯೆಂದೂ, ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಬಣ್ಣವನ್ನು ನೋಡದೆ ಎರಡು ಮೂರು ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಚೀಲಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸುತ್ತೇವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಶೀಲಿಸಬೇಕು.

(~A) ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಗೋಲಿಗಳೆಲ್ಲ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದವಲ್ಲ

(C) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣವಿರದ ಒಂದು ಗೋಲಿಯಾದರೂ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಇದೆ

(D) $n-1+10^{1000}$ ಮತ್ತು $n+1+10^{1000}$ ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದನ್ನಾದರೂ ವಿಭಾಜ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನಾಗಿಸುವ ಗುಣ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಗಳಿಗೂ ಇದೆ. [ಸೂಚನೆ: ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ m ಗೆ $\pm$ m ಹಾಗೂ ± 1 ಇವುಗಳಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಇರುವುದಾದರೆ ಆ m ವಿಭಾಜ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕ (ಕಾಂಪೊಸಿಟ್ ಇಂಟಿಜರ್) ಎನಿಸುತ್ತದೆ.]

(~D) $n-1+10^{1000}$ ಮತ್ತು $n+1+10^{1000}$ ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದನ್ನಾದರೂ ವಿಭಾಜ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನಾಗಿಸುವ ಗುಣ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಗಳಿಗೂ ಇಲ್ಲ.

(E) $n-1+10^{1000}$ ಮತ್ತು $n+1+10^{1000}$ ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದನ್ನಾದರೂ ವಿಭಾಜ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನಾಗಿಸದೆ ಹೋಗುವಂಥ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಇದೆ.

(~A) ಉಕ್ತಿ (A) ಉಕ್ತಿಯ ನಿಷೇಧ; ಅಂತೆಯೇ (~D) ಉಕ್ತಿ (D) ಉಕ್ತಿಯ ನಿಷೇಧ. (A)ಯನ್ನಾಗಲಿ (~A)ಯನ್ನಾಗಲಿ ಸಮರ್ಥಿಸಬೇಕಾದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಗೋಲಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದೊಂದಾಗಿ ತೆಗೆದು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿದರಾಯಿತು. ಆಗ ಕೊನೆಯವರೆಗೂ ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳೇ ಗೋಚರಿಸುತ್ತಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲವೆ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಸಲ ಕೆಂಪಲ್ಲದ ಗೋಲಿಯೊಂದು ಕಣ್ಣಿಗೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ಅನುಭವವೇದ್ಯ. ಪ್ರಥಮ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (A)ಯೂ ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (~A)ಯೂ ಸಮರ್ಥಿತವಾಗುವುವು. ಒಂದು ವೇಳೆ (~A) ಸಮರ್ಥಿತವಾಗುವುದಾದರೆ ಅದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ (ಅಂದರೆ ಕೆಂಪಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ) (C) ಸಮರ್ಥಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. (~A) ಊರ್ಜಿತವಾಗುವುದು (C) ಮೂಲಕವೇ. ಈ ಅನುಭವದಿಂದ ನಾವು ಎರಡು ತೀರ್ಮಾನಗಳಿಗೆ ಬರುತ್ತೇವೆ: (1) (A) ಮತ್ತು (~A) ಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಸಮರ್ಥಿತವಾಗಲೇಬೇಕು; (2) (C) ಮತ್ತು (~A) ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಉಕ್ತಿಗಳು. ಈಗ ಸಾದೃಶ್ಯತರ್ಕದಿಂದ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಶ್ರದ್ಧೆಗಳನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತದೆ; (1) (D) ಮತ್ತು (~D) ಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಸಮರ್ಥಿತವಾಗಲೇಬೇಕು. ;(2) (E) ಮತ್ತು (~D) ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಉಕ್ತಿಗಳು. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ಸಮರ್ಥಿತವಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮರ್ಥಿತವಾದಂತೆಯೇ. ಗೋಲಿಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ (1), (2) ಆ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ನೇರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹಾಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಅವನ್ನು ಕುರಿತ (1), (2) ಕೇವಲ ಭಾಷಾಸಾದೃಶ್ಯದಿಂದ ಜನಿಸಿದ ಮಿಥ್ಯೆಗಳಿರಬಹುದು. ನಿಜಕ್ಕೂ (D) ಯನ್ನಾಗಲಿ (~D)ಯನ್ನಾಗಲಿ ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಗಣಿತೀಯ ಮಾರ್ಗದ ಸಾಧನೆಯನ್ನೇ ನಿಯೋಜಿಸ ಬೇಕಾಗುವುದು. (D)ಗೆ ಇಲ್ಲವೆ (~D)ಗೆ ಸಾಧನೆಯೊಂದನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿಸರ್ಗನಿಯಮ ಎಲ್ಲಿದೆ? ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣಿತಶಾಖೆಯ ಆಯಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ (D)ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು; (~D)ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇದುವರೆಗೆ ಯಾರೂ (D)ಯನ್ನಾಗಲಿ (~D)ಯನ್ನಾಗಲಿ ಸಾಧಿಸಿಯೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಸಂಗಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಮುಂದೆ ಯಾವಾಗಲಾದರೂ (~D)ಯನ್ನು ಪರೋಕ್ಷ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ (ಇಂಡೈರೆಕ್ಟ್ ಮೆಥಡ್) ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿ ನೇರಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ (C) ಮೂಲಕ (~A) ಫಲಿಸಿದಂತೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಅಂಥ ಪರೋಕ್ಷ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ (E) ಮೂಲಕ (~D) ಸಿದ್ಧಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ; ಆ ಪರೋಕ್ಷ ಸಾಧನೆಯ ಪೂರ್ಣ ಅಧ್ಯಯನದ ಬಳಿಕವೂ $n \pm 1+10^{1000}$ ಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು. ಅಂದಮೇಲೆ (~D) ಗೆ (ಪರೋಕ್ಷ) ಸಾಧನೆಯೊಂದು ಇದ್ದಾಗಲೂ (E)ಗೆ ಸಾಧನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಇಂತಿರುವಾಗ (E) ಮತ್ತು (~D) ಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಉಕ್ತಿಗಳು ಎಂದು ಬಗೆಯಲು ಆಧಾರವಾದರೂ ಏನಿದೆ?

ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಟೀಕೆಗಳು ಬಹುಸಂಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರನ್ನು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಬಾಧಿಸಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗದು. ಕಾರ್ಯನಿರತ ಗಣಿತಜ್ಞರನೇಕರಿಗೆ ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅರಿವೇ ಇಲ್ಲದಿರುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಭವನೀಯ. ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತವನ್ನು ಕುರಿತ ಈ ಟೀಕೆಗಳು ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಅಂತರ್ಬೋಧನವಾದಿಗಳೆಂಬ (ಇಂಟ್ಯುಇಷನಿಸ್ಟ್ಸ್) ಕೆಲ ಗಣಿತ ತಾತ್ತ್ವಿಕರ ಅಭಿಮತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಲಿಯೊಪೋಲ್ಡ್ ಕ್ರೋನೆಕರ್ (1823–1891) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನ ಆಲೋಚನೆಗಳಿಂದ ಅಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಅಂತರ್ಬೋಧನವಾದವನ್ನು 20ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್.ಇ.ಜೆ. ಬ್ರುವರ್ (1882–1966)ಸ್ಫುಟ ರೂಪರೇಖೆಗಳಿನ್ನಿತ್ತು ಬೆಳೆಸಿದ. ಅಂತರ್ಬೋಧನವಾದಿಗಳ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಅಲಕ್ಷಿಸಿದರೂ ಅವರಲ್ಲಿ ಅತಿ ಪ್ರಮುಖನಾಗಿದ್ದ ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್‌ನಿಗೆ (1862–1943) ಮಾತ್ರ ಅವು ತಕ್ಕ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಸವಾಲುಗಳೆನಿಸಿದ್ದು ಗಮನಾರ್ಹ. ಈ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್‌ನ ಮನೋಭಿಪ್ರಾಯ ಹೀಗಿದ್ದಿತು: ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೇ ಮೊದಲಾದ ಅನಂತ ಗಣಗಳ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ (1), (2) ರಂಥ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಶ್ರದ್ಧೆಗಳು ಮಿಥ್ಯಾ ಸಾದೃಶ್ಯ ತರ್ಕದ ಫಲಗಳೇ ಇರಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಂಥ ಶ್ರದ್ಧೆಗಳ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳು ಜನಿಸದೆ ಇರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸುವ ಜನ್ಮಸಿದ್ಧ ಹಕ್ಕಿನಿಂದ ಗಣಿತಜ್ಞರನ್ನು ಯಾರೂ ವಂಚಿಸಲಾಗದು; ಆದ್ದರಿಂದ ಟೀಕೆಗೆ ಗುರಿಯಾಗಿರುವ ಶ್ರದ್ಧೆಗಳಿಂದ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳು ತಲೆದೋರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮೇಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ್ಮತವಾಗುವಂತೆ ಸಮರ್ಥಿಸುವುದೇ ಅಂತರ್ಬೋಧನವಾದಿಗಳ ಸವಾಲಿಗೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕರು ನೀಡಬೇಕಾದ ಉತ್ತರ. (ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನೂ ಬ್ರುವರ್ ಒಪ್ಪಲಿಲ್ಲ; ಅರ್ಥಕ್ಕೆ ವಿಮುಖವಾದ ಚಿಂತನೆಗಳು ಸುಸಂಗತವಾಗಿದ್ದಾಗ್ಯೂ ಅಪರಿಗ್ರಾಹ್ಯ ಎಂಬುದು ಬ್ರುವರ್ ವಾದ. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಪ್ರಸಕ್ತ ಚರ್ಚೆಗೆ ಇದು ಅನವಶ್ಯ.) ಹೀಗೆಂದು ಆಲೋಚಿಸಿ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವ ಗಂಭೀರ ಪ್ರಯತ್ನಕ್ಕೆ (1920ರ ವೇಳೆ) ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ ಕೈಹಾಕಿದ. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆ ಮಿಕ್ಕೆಲ್ಲವಕ್ಕೂ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಕಾರಣ ಮೊದಲಿಗೆ ಇದೊಂದು ಶಾಖೆಯ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ಶ್ರುತಪಡಿಸುವಂತೆ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಅವರು ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕರೆಯಿತ್ತರು. ಈ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಪಕ ಯಶಸ್ಸು ಲಭಿಸಬಹುದೆಂಬ ಪೂರ್ಣ ವಿಶ್ವಾಸ ಅಂದು ಅವರಿಗೆ ಇದ್ದಂತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್‌ನ ಈ ಎಣಿಕೆ ತಪ್ಪು ಎಂಬ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಫಲಿತಾಂಶ 1931ರಲ್ಲಿ ಕುರ್ಟ್ ಗೊಯ್ಡೆಲ್‌ನ (1906–) ಸಂಶೋಧನೆಗಳಿಂದ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂದಿತು.

ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತಶಾಖೆಯನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ N ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈ N ಒಂದು ಆದ್ಯುಕ್ತೀಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ (ಆಕ್ಸಿಯಮ್ಯಾಟಿಕ್ ಥಿಯೊರಿ); ಅದು ಪಿಯಾನೊ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನೂ (ಪುಟ 74 ಮತ್ತು 90) ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ (1), (2)ರಂಥ ಶ್ರದ್ಧೆಗಳನ್ನೂ ಅವಲಂಬಿಸಿ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಆದರೆ N ನ್ನು ಕನ್ನಡದಂಥ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ನಿತ್ಯ ವ್ಯವಹಾರದ

ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಹೊರಟರೆ ಆದಿಯಲ್ಲೇ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳು ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಕೈಬಿಡಬೇಕಾಗಿ ಬರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (V) ಪಿಯಾನೊ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸುಳಿದಿರುವ ಲಕ್ಷಣ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಲಕ್ಷಣ a ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಆ a ಲಕ್ಷಣವಿರದ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಧಾತು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪಿಯಾನೊ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನೂ ಸಾಧಾರಣ ಗಣಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನೂ ಆಧರಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಹತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕನ್ನಡ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿರುವುದೂ ಕೆಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವ ಒಂದು ಲಕ್ಷಣವಷ್ಟೆ. ಕನ್ನಡ ಪದಗಳ ಗಣ ಸಾಂತ; ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾದರೋ ಅನಂತ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಲಕ್ಷಣ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ತತ್ಫಲವಾಗಿ ಹತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕನ್ನಡ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗದೆ ಇರುವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಧಾತು b ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಇದೇ b ಯನ್ನು

ಹತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕನ್ನಡ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು
1 2 3 4 5
ಶಕ್ಯವಾಗದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ
6 7 8 9

ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅಡಿಯಲ್ಲೇ ಎಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂಬತ್ತು ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಿದೆ (ಜಿ. ಜಿ. ಬೆರಿ ಎಂಬಾತನ ಆಭಾಸ). ಇಂಥ ಅಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪಾದಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಭಾಷೆಯೊಂದರ ವಾಕ್ಯರಚನಾ ಶೈಲಿಯ (ಸಿಂಟ್ಯಾಕ್ಸ್) ಸ್ವಚ್ಛಂದತೆಯನ್ನೂ ಅದರ ಪದಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಮಗಿರುವ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನೂ ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳ ಬಹಿಷ್ಕರಣ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಗಣಿತಶಾಖೆ N ನ ನಿರೂಪಣಮಾಧ್ಯಮ ಆಖ್ಯಾತಕಲನದಂಥ (ಪ್ರೆಡಿಕೇಟ್ ಕ್ಯಾಲ್ಕ್ಯುಲಸ್; ತಾರ್ಕಿಕ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಗಳು) ಶಿಸ್ತಿನ ಭಾಷೆಯೇ ಆಗಬೇಕು. ಮತ್ತು ಆ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಗೆ ಎಡೆಯಿರಲೇಬಾರದು ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ ಹಾಕಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಹೀಗೆ ರೂಪಿತವಾಗುವ N ನಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಾಧನೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕೆಲನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಧಿಗಳ ಮೇರೆಗೆ ಆಡಿದ ಕೆಲ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಆಟದಂತೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತವೆ. ಇಂಥ N ನಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳೂ ಇದುವರೆಗೆ ಗೋಚರಿಸಿಲ್ಲ;' ಇನ್ನು ಮುಂದೆಯೂ ಗೋಚರಿಸಲಾರವು ಎಂಬ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಒಂದು ನಂಬಿಕೆ ಗಣಿತಜ್ಞವಲಯಗಳಲ್ಲಿದೆ. ಈಗ ಈ N ನ ಚೌಕಟ್ಟಿನೊಳಗೇ (ಪ್ರತೀಕಗಳ ಒಂದು ವಿಧ್ಯುಕ್ತ ಕ್ರೀಡೆಯಾಗಿ) ಅದರ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸಾಧನೆಗೆ ಮುಂಚೆಯೇ ಸಾಧಿಸ ಬೇಕಾದುದನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದಷ್ಟೆ. ಇದು ನಿಷ್ಪ್ರಯೋಜಕವಾದ ಕಾರಣ N ನ ಸುಸಾಂಗತ್ಯದ ಸಮರ್ಥನೆ ಮಾತ್ರ ಶುದ್ಧ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಬೇಕೆಂದೂ (1). (2)ರಂಥ ವಿವಾದಾಸ್ಪದ ಶ್ರದ್ಧೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟುನಿಟ್ಟಾಗಿ ತೊರೆದೇ ಅದು ಸಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ ಉದ್ದೇಶಿಸಿದ. N ನೊಳಗಡೆ ನಡೆಯುವ ಪ್ರತೀಕಗಳ ಅರ್ಥವಿಮುಖಕ್ರೀಡೆ ಗಣಿತವಾದರೆ ಆ ಕ್ರೀಡೆಯ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ಕುರಿತು N ನ ಹೊರಗಡೆ ನಡೆಯುವ ಅರ್ಥಾವಲಂಬಿ ವಿವೇಚನೆ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್‌ನ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅಧಿಗಣಿತ (ಮೆಟಮ್ಯಾಥಿ ಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್) ಎಂದೆನಿಸುತ್ತದೆ.

1931ರ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥೂಲಪರಿಚಯವನ್ನು ಈಗ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡಬಹುದು. ಈ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಗೊಯ್ಡಲ್‌ನ ಮೂಲ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಬದಲು ಪ್ರಸಕ್ತ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಒದಗಿಬಂದಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಗಳ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಸೂಕ್ತ ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. N ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಡಿ ಪ್ರತೀಕ (ಅಕ್ಷರ)ಗಳ ಮಾಲೆ ಸಾಂತವಾದ ಕಾರಣ ಅವೆಲ್ಲಕ್ಕೂ ನಾವು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಪಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, N ನ ಅಕ್ಷರಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ S, T, X ಎಂಬ ಮೂರೇ ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. (ನಿಜಕ್ಕೂ ಅದರಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಕ್ಷರಗಳಿರಬಹುದು; ಇದರಿಂದ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನೂ ಉಂಟಾಗುವುದಿಲ್ಲ.) ಇವಕ್ಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 0,1,2, ಎಂಬ ಕ್ರಮಾಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದಷ್ಟೆ. N ನ ಸೂತ್ರಗಳು, ಸಾಧನೆಗಳು, ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂಗಳು **(ನೋಡಿ– ಅಲ್ಗಾರಿತಂ)** ಮುಂತಾದವೆಲ್ಲವೂ S, T, X ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಾಂತಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಫೈನೈಟ್ ಸ್ಟ್ರಿಂಗ್ಸ್) ಉದಾಹರಣೆಗೆ

TTSTTTXXSTSTXSSSTSSTTX

ಎಂಬುದು N ನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸೂತ್ರವಾಗಿರಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಬದಲು ಆಯಾ ಕ್ರಮಾಂಕಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

1101112201012000100112

ಎಂಬ ಪ್ರತೀಕ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಕೊನೆಯ ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ಒಂದು ತ್ರಿಮಾನ; ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. N ನಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಇಂಥ ತ್ರಿಮಾನ ಪ್ರತೀಕಯೋಜನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಪ್ರಾಯಶಃ ಅಲ್ಲಿ ಅವನ್ನು T, TT, TTT ಮೊದಲಾದ T ಸಾಲುಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಪರಿಪಾಠ ಅಂಗೀಕೃತವಾಗಿರಬಹುದು. ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಒಂದು ಉದ್ದವಾದ T ಸಾಲನ್ನಾಗಿ (ತತ್ತ್ವಶಃ) ಪರಿವರ್ತಿಸಿಡಬಹುದಷ್ಟೆ. (ಈ ಸರಳ ನಿದರ್ಶನದಲ್ಲೇ ತ್ರಿಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅನುರೂಪ T ಸಾಲು ಒಂದು ಸಹಸ್ರ ಕೋಟಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು T ಗಳನ್ನೊಳಗೊಳುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಚರ್ಚೆ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ತಲಕ್ಕೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ ಇಂಥ ಬೃಹತ್ಸರಣಿಗಳನ್ನು ನೆನೆದು ಧೃತಿಗೆಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ). ಆ ಪ್ರಕಾರ ಫಲಿಸುವ T ಸಾಲನ್ನು ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ TTS... ... TX ಸೂತ್ರದ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. (ಮೂಲಸಂಶೋಧನೆಯ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇರೆ ರೀತಿಯವಾಗಿದ್ದವು.) ಹೀಗೆ N ನ ಒಂದೊಂದು ಸೂತ್ರ, ಸಾಧನೆ, ಪ್ರಮೇಯ ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂಗೂ N ನ ಅಕ್ಷರಮಾಲೆಯಲ್ಲೇ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದ ಒಂದೊಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ, ಹಾಗೂ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಸೂತ್ರ ಮುಂತಾದವನ್ನು (ತತ್ತ್ವಶಃ) ಯಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ಗೊತ್ತುಮಾಡಬಹುದು. N ನಲ್ಲಿ ನಿಯೋಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ವಿವಿಧ ಉಕ್ತಿಗಳ ವಿವಿಧ ಸಾಧನೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಒಂದನೆಯ ಸಾಧನೆ, ಎರಡನೆಯ ಸಾಧನೆ, ಮೂರನೆಯ ಸಾಧನೆ ಎಂದು ಮೊದಲಾಗಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತ ಹೋಗಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಬರೆಯುವಾಗ ಒಂದೊಂದು ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲೂ N ನ ಯಾವುದೇ ದತ್ತಸೂತ್ರ (ಉಕ್ತಿ)ಗಳು ಸಾಧಿತವಾದವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡುತ್ತಲೂ ಹೋಗಬಹುದು. ಈ ಕಾರ್ಯ ಕೇವಲ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಲ್ಲ ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು; ನಿಜಕ್ಕೂ ಅಂಥ ನಿಯೋಜನೆ ಶಕ್ಯವೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಅಧಿಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

N ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ಅದರ ಇಂಥಿಂಥ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ಇಂಥಿಂಥ ಸಾಧನೆಗಳಿವೆ; ಮತ್ತೆ ಇಂಥಿಂಥ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ. ಇಂಥಿಂಥ ವಾಕ್ಯ (ಪದ)ಗಳ ಮೇಲೆ ಇಂಥಿಂಥ ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಇಂಥಿಂಥ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಮಾತನಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಷ್ಟೆ. ಈ ಬಗೆಯ ವರ್ಣನೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಧಿಗಣಿತದ ಪ್ರಾಂತಕ್ಕೆ ಸೇರಿದವು. ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖವಾಗುವ ಸೂತ್ರ, ಸಾಧನೆ, ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಂ ಮುಂತಾದವುಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳತ್ತ ಹೊರಳಿಸಿದರೆ ಈ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳೆಲ್ಲ ಆ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಡುವ ಕೆಲವಷ್ಟು ಸಂಬಂಧಗಳಾಗಿ ಗೋಚರಿಸುತ್ತವೆ. ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೇವಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಳಾದ ಕಾರಣ N ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸತ್ತ್ವಯುತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಇಂಥ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು N ನ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಅಂತರ್ಭಾಷೆಯಲ್ಲೇ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗಬೇಕು. N ಭಾಷೆಗೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವಿದೆಯೆಂದು ಇನ್ನು ಮುಂದೆಲ್ಲ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದಮೇಲೆ, ಮೇಲೆ ನಿದರ್ಶಿಸಿರುವಂಥ ಸುಸ್ಪಷ್ಟ ಅರ್ಥದ ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ವರ್ಣನೆಗಳೊಂದೊಂದಕ್ಕೂ ಅನುರೂಪವಾಗಿ N ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಒಂದೊಂದು ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಸೂತ್ರ (ಉಕ್ತಿ) ಇರುತ್ತದೆಂದಾಯಿತು. ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಆಯಾ ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ವರ್ಣನೆಗಳ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಸ್ಪಷ್ಟಾರ್ಥಯುಕ್ತ ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ವರ್ಣನೆಯೊಂದರ ಬಗ್ಗೆ ನಿತ್ಯವ್ಯವಹಾರದ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮರ್ಥನೆ ಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಅದರ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರ ವನ್ನು ಕುರಿತು N ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಧ್ಯುಕ್ತ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವು ದೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ x ಎಂಬುದು N ನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಾಕ್ಯ(ಪದ) ವೂ M ಎಂಬುದು ಇದೇ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಒಂದು ಮಾರ್ಕಫ್ ಅಲ್ಗಾರಿತಮೂ ಆದಲ್ಲಿ

(Mx). xನ ಮೇಲೆ Mನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುತ್ತದೆ

(~Mx). xನ ಮೇಲೆ Mನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ

ಎಂಬ ಎರಡು ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ವರ್ಣನೆಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವುಂಟು. ಇವುಗಳ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ M (x) ಮತ್ತು ~M(x) ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸೋಣ. (Mx), (~Mx) ಕನ್ನಡದ ವಾಕ್ಯಗಳು ; M(x), ~M(x) ಆದರೋ Nನ ಸಂಕೇತಗಳ ಸರಪಣಿಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ M(x), ~M(x) ಗಳಿಗೆ ಅಧಿಗಣಿತ ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಅರ್ಥ ಕಲ್ಪಿಸಿದರೂ ಅವು (Mx), (~Mx) ಆಗಿ ಮರುಪರಿವರ್ತಿತವಾಗುವ ಬದಲು ಒಂದಷ್ಟು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತವೆ. M(x) ಇಲ್ಲವೇ ~M(x)ನ್ನು Nನಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೂ ಆಗಬಹುದು, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಇಲ್ಲ; ಒಂದು ವೇಳೆ ಅಲ್ಲಿ ಅವೆರಡನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾದರೆ N ಅಸಂಗತವೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈಗ x ಎಂಬುದು Nನ ಅಕ್ಷರಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಈ x ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಮಾರ್ಕಫ್ ಆಲ್ಗಾರಿತಂನ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು ; ಅಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾರ್ಕಫ್ ಆಲ್ಗಾರಿತಂನ್ನು x* ಎಂಬ ಪ್ರತೀಕದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಒಂದು ವೇಳೆ x ಯಾವೊಂದು ಮಾರ್ಕಫ್ ಆಲ್ಗಾರಿತಂನ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ x* ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಪದ yಯನ್ನು yT, yTT, yTTT ಎಂದು ಮೊದಲಾಗಿ ಕೊನೆಯೇ ಇಲ್ಲದಂತೆ ಲಂಬಿಸುತ್ತ ಹೋಗುವ ಮಾರ್ಕಫ್ ಆಲ್ಗಾರಿತಂನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಿ. ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ಉಕ್ತಿಗಳಾದ

(x*x). x ಮೇಲೆ x* ವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುತ್ತದೆ ;

(~x*x). x ಮೇಲೆ x* ವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ

ಎಂಬವಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ Nನಲ್ಲಿ x*(x) ಮತ್ತು ~x*(x) ಎಂಬ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರಗಳಿರುತ್ತವಷ್ಟೆ. ಆಗಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ Nನ ಸಾಧನೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತ ಹೋದಾಗ x*(x) ಮತ್ತು ~x(*x)ಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು ಗೋಚರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಜ್ಜೆ ಹೆಜ್ಜೆಗೂ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ತನಿಖೆ ನಡೆಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ x*(x) ನದಕ್ಕಿಂತ ಮುನ್ನ ~x*(x)ನ ಒಂದು ಸಾಧನೆ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡರೆ ನಮ್ಮ ತನಿಖೆಯನ್ನು ಅಷ್ಟಕ್ಕೇ ನಿಲ್ಲಿಸೋಣ. ಬದಲು ~x*(x) ನದಕ್ಕಿಂತ ಮುಂಚೆ x*(x)ನ ಸಾಧನೆ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಬಿದ್ದರೆ ಆ ಸಾಧನೆಯ ಮುಂದೆ T, TT, TTT ಎಂದು ಮೊದಲಾಗಿ ಕೊನೆಯೇ ಇಲ್ಲದಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತ ಹೋಗೋಣ. ಯಾಂತ್ರಿಕವಾದ ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನೂ x ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಮಾರ್ಕಫ್ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ Lನಿಂದ ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗುವುದು. x ಮೇಲೆ L ನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರಬೇಕಿದ್ದರೆ N ನ ಸಾಧನೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ~x*(x) ನ ಒಂದು ಸಾಧನೆ ಇರಬೇಕಲ್ಲದೆ ಆ ಸಾಧನೆಗಿಂತ ಮುಂಚೆ x*(x)ನ ಯಾವ ಸಾಧನೆಯೂ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಾರದು. (ಗೊಯ್ಡಲ್‌ನ ಮೂಲ ಸಂಶೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ಈ Lಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿತ್ತು; Lಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ಅಧಿಕತರ ಉಪಯುಕ್ತತೆ ಇರುವುದನ್ನು 1936ರಲ್ಲಿ ಬಾರ್ಕ್ಲೆ ರಾಸೆಕ್ ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಿದ.) ಈ Lನ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ g ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದಮೇಲೆ L ಎಂದರೂ ಒಂದೇ, g* ಎಂದರೂ ಒಂದೇ : g* = L. ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರ ಪ್ರಶ್ನೆಯೊಂದು ಈಗ ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ಏಳುತ್ತದೆ : L (g) = g*(g) ಮತ್ತು ~L(g) = ~g*(g) ಇವೆರಡು ಉಕ್ತಿಗಳ ಪೈಕಿ N ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ? ಈ ಬಗ್ಗೆ ವಿವೇಚಿಸಲು g*(g) ಗೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆ P ಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. Nನ ಸಾಧನೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮದೊಳಗೆ ಈ P ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆಗ ಆದಿಯಿಂದ Pವರೆಗಿನ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು (ಇವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಾಂತವೆನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು) ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ N ಸಾಧನೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು g*(g)ಯೋ ಇಲ್ಲವೇ ~g*(g) ಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದಷ್ಟೆ. ಹಾಗೆ ಮೊದಲು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು ~g*(g) ಆದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ N ನೊಳಗೆ g*(g) ಮತ್ತು ~g*(g) ಗಳೆರಡರ ಸಾಧನೆಗಳೂ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡು N ಅಸಂಗತವಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಮೊದಲು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು g*(g) ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ g ಯ ಮೇಲೆ L ನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಸಾಧನೆಗಳ ತನಿಖೆಯಲ್ಲಿ g*(g) ಯ ಸಾಧನೆ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಗೋಚರಕ್ಕೆ ಬಂದು L ಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಆ ಸಾಧನೆಯ ಮುಂದೆ T, TT, TTT ಇತ್ಯಾದಿ ಅಕ್ಷರಗಳು ಕೊನೆಯೇ ಇಲ್ಲದಂತೆ ಲಿಖಿತವಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವುವು. ಅಂದ ಮೇಲೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ g ಯನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ L ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ಉಕ್ತಿ (~Lg) ಸಮರ್ಥಿತವಾದಂತಾಯಿತು. N ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸತ್ತ್ವಯುತವಿರುವಾಗ ಇದೇ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು Nನ ಅಧಿಕೃತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ~L(g) [= ~g*(g)] ಉಕ್ತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈಗಲೂ N ನೊಳಗೆ g*(g) ಮತ್ತು ~g*(g) ಗಳೆರಡರ ಸಾಧನೆಗಳೂ ಗೋಚರಿಸಿ N ಅಸಂಗತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಅಲ್ಲಿಗೆ Nನಲ್ಲಿ g*(g)ಗೆ ಸಾಧನೆಯೊಂದನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ N ಅಸಂಗತವಾಗಿಯೇ ತೀರುವುದು. ಇದೇ ಮೇರೆಗೆ Nನಲ್ಲಿ ~g*(g)ಯನ್ನು ಕುರಿತು ಸಾಧನೆ ನೀಡಲು ಶಕ್ಯವಾದಾಗಲೂ N ಅಸಂಗತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. N ನಿಜಕ್ಕೂ ಸುಸಂಗತ ಎಂಬ ವಿಶ್ವಾಸ ನಮಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಚೌಕಟ್ಟಿನೊಳಗೆ g*(g) ಯನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ, ~g*(g) ಯನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಂಬಲು ಸಹ ನಾವು ಸಿದ್ಧರಿರಬೇಕು. ಒಂದು ಉಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ನಿಷೇಧ ಇವೆರಡರ ಪೈಕಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲೇಬೇಕೆಂಬ ಎಣಿಕೆ ಇಲ್ಲಿ ತಪ್ಪಾಗಿಬಿಟ್ಟಿತು. ಇದೇ ಗೊಯ್ಡಲ್‌ನ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ಪ್ರಥಮ ಪ್ರಮೇಯ.

ಮೇಲಿನ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥೂಲ ಉಪಮಾನವನ್ನು ನೀಡುವ ಸಲುವಾಗಿ (F). ಕೆಳಗೆ ಲಿಖಿತವಾಗಿರುವ (~ F) ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ; (~ F). (~ F) ಎಂಬ ಈ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬ ನಿತ್ಯವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಭಾಷೆಯ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಜನಪ್ರಿಯವಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ (F)ಗೆ ಸಾಧನೆಯೊಂದನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕಾದಲ್ಲಿ (~ F) ನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದೆಂದು ಅದರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಬೇಕಾಗುವ ಕಾರಣ ಆ (F)ನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ (~ F)ನ ಸಾಧನೆಯೂ ಅಡಕವಾಗಿ ಅಸಾಂಗತ್ಯ ತಲೆದೋರುವುದು; ಬದಲು (~ F) ಗೆ ಸಾಧನೆ ಕೊಡಲು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಸಾಧನೆಯೇ (F)ನ ಸಾಧನೆಯೂ ಆಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿ ಮತ್ತೆ ಅಸಾಂಗತ್ಯ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಈ ಉಪಮಾನ ತೀರ ಸರಳೀಕೃತವೆನ್ನದೆ ವಿಧಿಯಿಲ್ಲ. ಇದರ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಪ್ರಮೇಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ದೂರವೂ ಮಹತ್ತ್ವರಹಿತವೂ ಆದ ಕೇವಲ ಒಂದು ಚಮತ್ಕಾರಿಕ ಭಾಷಾಶ್ಲೇಷೆ (ಕ್ವಿಬ್ಲಿಂಗ್) ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಮೂಡಬಹುದು. (F) ಮತ್ತು (~ F) ಗಳು ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಅಧಿಗಣಿತೀಯ (g*g) ಮತ್ತು (~ g*g)ಗಳಿಗೆ ಸದೃಶ್ಯವಾಗಬಹುದೇ ವಿನಾ ಅವುಗಳ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರ g*(g) ಮತ್ತು ~g*(g)ಗಳಿಗಿಲ್ಲ. ಅಧಿಗಣಿತ ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಈ g*(g) ಮತ್ತು ~g*(g)ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತೆ ಅರ್ಥಕಲ್ಪಿಸಿದಾಗ ಅವು ಯಾವುದೇ ಶ್ಲೇಷೆಯ ಸೋಂಕಿಲ್ಲದೆ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ನೂರಕ್ಕೆ ನೂರರಷ್ಟು ಅಪ್ಪಟ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುವು. ಇಂಥ ಸದಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು Nನಲ್ಲಿ ವಿಧ್ಯುಕ್ತವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು ಇಲ್ಲವೆ ನಿರಾಕರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದೂ ಒಂದೇ, N ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೇ ಅಸಂಗತ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುವುದೂ ಒಂದೇ ಎಂಬ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಆವಿಷ್ಕಾರ ಇಪ್ಪತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಭಾಗದವರೆಗೂ ಗಣಿತಜ್ಞ ವಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೂರಿ ನಿಂತಿದ್ದ ಪ್ರಬಲ ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಶ್ರದ್ಧೆಯೊಂದನ್ನು ಬುಡಮೇಲಾಗಿಸಿತು.

ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಈಗ

(G) N ವ್ಯವಸ್ಥೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಸುಸಂಗತ

ಎಂಬ ಅಧಿಗಣಿತೀಯ ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಾಸವಿರಿಸಿ g*(g), ~g*(g)ಗಳ ಗೊಯ್ಡಲ್‌ಪೂರ್ವ ರೂಪಗಳಾದ g*g, ~g*g ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತುಸು ಆಲೋಚಿಸೋಣ:

(g*g). g ಮೇಲೆ g*[= L] ಎಂಬ ಮಾರ್ಕಫ್ ಆಲ್ಗಾರಿತಂನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ; ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುತ್ತದೆ ;

(~ g*g). g ಮೇಲೆ g* [= L] ನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

x ಮೇಲೆ L ನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆಲ್ಗಾರಿತಂ ಕ್ರಿಯೆ ನಿಲುಗಡೆಗೆ ಬರಬೇಕಿದ್ದಲ್ಲಿ N ನೊಳಗೆ $\sim x*(x)$ನ ಒಂದು ಸಾಧನೆ ಇರಬೇಕೆಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಉಕ್ತಿಗಳ ಪೈಕಿ $g*(g)$ ಸಮರ್ಥನೀಯವಾದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಡೆ ಆ ಮೂಲಕ ಅದರ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರ $g*(g)$ ಸಾಧಿತವಾಗುವುದಲ್ಲದೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ Nನ ಸಾಧನೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $\sim g*(g)$ಯ ಸಾಧನೆಯೂ ಗೋಚರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವಾಸ (G) ಗೆ ಇದು ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾದ ಕಾರಣ $(g*g)$ ನಿರಾಕರಣೀಯ, $(\sim g*g)$ ಸಮರ್ಥನೀಯ. ಅಂದಮೇಲೆ (G) ಸಮರ್ಥನೀಯವಾದಲ್ಲಿ $(\sim g*g)$ ಕೂಡ ಸಮರ್ಥನೀಯ ಎಂದಾಯಿತು. ಇದರಿಂದ N ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಳಗೆ (G)ಯ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಾದರೆ $\sim g*(g)$ನ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರ $\sim g*(g)$ ಯನ್ನೂ ಅಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಪ್ರಥಮ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $\sim g*(g)$ ಸಾಧಿತವಾದೊಡನೆಯೇ N ಅಸಂಗತವಾಗಿ ಬಿಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು (G)ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದೂ ಒಂದೇ [ಅಧಿಗಣಿತದಲ್ಲಿ (G) ಸಮರ್ಥಿತವಾದ ಕೂಡಲೇ N ನಲ್ಲಿ ಅದರ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರವೂ ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು] N ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅಸಂಗತವೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುವುದೂ ಒಂದೇ. ಈ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಫಲಿತಾಂಶವೇ ಗೊಯ್ಡಲ್ ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮೇಯ. ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ ಸಂಶಯಾತೀತವಾದ ಅರ್ಥಾವಲಂಬಿ ಮಾರ್ಗಗಳಿಂದ N ನ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು [ಅಂದರೆ (G) ಉಕ್ತಿಯನ್ನು] ಸಮರ್ಥಿಸ ಹೊರಟನಷ್ಟೆ. ಅವನು ಆಲೋಚಿಸಿದಂಥ ಮಾರ್ಗಗಳಿರಲಿ, ಅವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ N ನಲ್ಲಿ ಅಂಗೀಕೃತವಾಗಿರುವ ಇನ್ನುಳಿದ ಸಂದೇಹಪೀಡಿತ ಮಾರ್ಗಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಬಳಸಿಕೊಂಡರೂ N ನಿಜಕ್ಕೂ ಸುಸಂಗತವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಅದರ ಸುಸಾಂಗತ್ಯವನ್ನು ಯಾರೂ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಾವುದೇ ಮಾರ್ಗಗಳಿಂದ (G) ಸಾಧಿತವಾಗುವುದಾದರೆ ಏಕಕಾಲೀಯವಾಗಿ (~ G). N ವ್ಯವಸ್ಥೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಅಸಂಗತ ಎಂಬುದೂ ಸಾಧಿತವಾಗಿಬಿಡುವುದು.

N ನಲ್ಲಿ $g*(g)$, $\sim g*(g)$ ಯ ಗೊಯ್ಡಲ್ ರೂಪಾಂತರ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಉಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸೂತ್ರಗಳು (ಅನ್‌ಡಿಸೈಡಬಲ್ ಫಾರ್ಮ್ಯುಲೇ) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇವುಗಳ ನಿರುಪಾಧಿಕ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿವಾದ ತಲೆದೋರುವುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅವನ್ನು ಕುರಿತು ಚಿಂತಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಯಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಅಸ್ತಿತ್ವವುಂಟು ಎಂದು ಗೊಯ್ಡಲ್‌ನೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ಗಣಿತ ತಾತ್ತ್ವಿಕರು ನಂಬುತ್ತಾರೆ. ಇಂಥವರಿಗೆ ಪ್ಲೇಟೋವಾದಿಗಳು ಎನ್ನಬಹುದು. ಇವರ ಪ್ರಕಾರ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸೂತ್ರಗಳೂ ದಿಟ ಇಲ್ಲವೆ ಸಟೆ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು; N ನಂಥ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಅವು ದಿಟವೊ ಸಟೆಯೊ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೆ ಇರುವುದಕ್ಕೆ ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಹಾಗೂ ಸಾಧನಮಾರ್ಗಗಳ ಅಪರಿಪೂರ್ಣತೆಯೇ ಕಾರಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (G) ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಾಸವಿರಿಸಿ ಮೇಲಿನ $\sim g*(g)$ ಸಮರ್ಥನೀಯವೆಂದು ಮನಗಂಡೆವಷ್ಟೆ. ಇದು ನೇರ ಅರ್ಥ ಪ್ರಜ್ಞೆಯ ಫಲ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಆ ಮೂಲಕ ನಿಜವಾದ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ $\sim g*(g)$ ಸತ್ಯವೆಂದೂ $g*(g)$ ಅಸತ್ಯವೆಂದೂ ಈ ಮೊದಲನೆಯ ಗುಂಪಿನ ತಾತ್ತ್ವಿಕರು ನಂಬಬಹುದು. ನೇರ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆ ಚೆಲ್ಲುವಷ್ಟು ಬೆಳಕನ್ನು N ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತೀಯ ಸಾಧನಮಾರ್ಗಗಳು ಚೆಲ್ಲಲಾರವೇ ಹೊರತಾಗಿ ಆ ಬೆಳಕೇ ಇಲ್ಲವೆನ್ನಲಾಗದು ಎಂಬುದು ಇವರ ಅಭಿಮತ. ಮತ್ತೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಗಣಿತತಾತ್ತ್ವಿಕರಾದರೋ ಅನಂತದ ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನಂಥ ನೇರ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಯ, ಹಾಗೂ ನಿರುಪಾಧಿಕ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಗಳ, ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯೇ ಮಿಥ್ಯ ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪಡುತ್ತಾರೆ. ಇವರ ಪ್ರಕಾರ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಕೇವಲ ಒಂದು ಬೌದ್ಧಿಕ ಉಪಜ್ಞೆಯೇ (ಇನ್‌ವೆನ್ಷನ್) ಹೊರತು ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿರುವ ಧಾತುಗಳಲ್ಲ ; ಅವು ನಾವು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತೇವೋ ಹಾಗೆ ರೂಪತಾಳುತ್ತವೆ. ಮೇಲಾಗಿ ಅನಂತ ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಮಾನವನ ಸೃಷ್ಟಿಕ್ರಿಯೆ ಎಂದೂ ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಅಪೂರ್ಣ ಕಾದಂಬರಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ನಾಯಕನ ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ಕುರಿತು ಪ್ರಶ್ನೆ ಇನ್ನೂ ಅನಿರ್ಧರಿತವಾಗಿಯೇ ಉಳಿದಿರಬಹುದಷ್ಟೆ. ಅಂತೆಯೇ N ನಂಥ ಉಪಜ್ಞಿತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲೂ $\sim g*(g)$ ಮಾದರಿಯ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸೂತ್ರಗಳು ಗೋಚರಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚರಿಯೇನಿಲ್ಲ. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಕಾದಂಬರಿಯನ್ನು ಕನ್ನಡದಂಥ ನಿತ್ಯವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸತೊಡಗಿದಾಗ ಪಿಯಾನೊ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು ಅದನ್ನು ಅಂತಿಮ ಪರಿಸಮಾಪ್ತಿಯವರೆಗೂ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುತ್ತವೆಂಬ ಮಿಥ್ಯೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಹಾಗೆ ರಚಿಸಿದ ಕಾದಂಬರಿ ಅಸಂಗತವೂ ಆಗುವ ಅಪಾಯವನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಮನಗಂಡಿದ್ದೇವೆ. ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಭಾಷೆಗೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಸೂಕ್ತ ಪ್ರತೀಕಾತ್ಮಕ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು (ಸಿಂಬಾಲಿಕ್ ಲ್ಯಾಂಗ್ವೇಜ್) ಬಳಸಿ ಈ ಅಪಾಯವನ್ನು ತಡೆಗಟ್ಟಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದಾಗ ಕಾದಂಬರಿ ಎಂದೆಂದೂ ಅಪೂರ್ಣವಾಗಿಯೇ ಉಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಅಪೂರ್ಣ ಕಾದಂಬರಿಯನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದಷ್ಟೆ. ಎಂತಲೇ N ನ್ನೂ ವಿವಿಧ ಮಾರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಅಂಥ ಕೆಲವು ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $\sim g*(g)$ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗಬಹುದು, ಇನ್ನು ಕೆಲವು ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $g*(g)$ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಮತ್ತೆ ಕೆಲವಲ್ಲಿ ಇವೆರಡೂ ಮುಂಚಿನಂತೆ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯವಾಗಿಯೇ ಉಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದಮೇಲೆ ಪಿಯಾನೊ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲೇ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಐಸೊಬಿಂಬಗಳಾಗದೆ ಇರುವಂಥ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದಾಯಿತು. [ಎರಡು ಗಣಿತೀಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಏಕರೀತಿಯ ರಚನೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂಥವನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಐಸೊಬಿಂಬಗಳೆಂದು (ಐಸೊಮಾರ್ಫಿಕ್ ಇಮೇಜಸ್) ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ T ಸಾಲುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಮತ್ತು ದಶಮಾನ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.] ಇದೇ ಮೇರೆಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಐಸೊಬಿಂಬಗಳಾಗದೆ ಇರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ನೈಜಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ಸಹ ರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಅಬ್ರಹಾಂ ರಾಬಿನ್‌ಸನ್ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಗಣಿತ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನೂ (ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ) ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಶಿಷ್ಟೇತರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (ನಾನ್‌ಸ್ಟ್ಯಾಂಡರ್ಡ್ ಅನ್ಯಾಲಿಸಿಸ್) ಎಂಬ ಹೊಸ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ (1966). ಈಚೆಗೆ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಒಲವು, ನವರೂಪವಾದಿಗಳು (ನಿಯೊಫಾರ್ಮಲಿಸ್ಟ್ಸ್) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದಾದ, ಈ ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪಿನ ತಾತ್ತ್ವಿಕರ ಪರ ತುಸು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಒಲಿದಿರುವಂತಿದೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ತಳಹದಿಯನ್ನು ಕುರಿತ ನಮ್ಮ ವಿವೇಚನೆ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಉಕ್ತಿ (D) ಮತ್ತು ಅದರ ನಿಷೇಧರೂಪ (~ D) ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತಷ್ಟೆ. ಒಂದು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 1931ರ ಗೊಯ್ಡಲ್ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಹಾಗೆ ಪ್ರಶ್ನಿಸುವುದರ ಸಾಧುತ್ವವನ್ನು ಪುರಸ್ಕರಿಸುತ್ತವೆನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಪ್ಲೇಟೋವಾದಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಉಕ್ತಿಗಳ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯತೆಗೆ N ನಂಥ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಸಾಧನಾಮಾರ್ಗಗಳ ಸತ್ತ್ವಹೀನತೆ ಕಾರಣವೇ ವಿನಾ ಆ ಉಕ್ತಿಗಳಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾರಿ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಎತ್ತಿ ಹಿಡಿಯಬಯಸುತ್ತಾರೆ. ಅತ್ತ ನವರೂಪವಾದಿಗಳೂ ಬೇರೊಂದು ನಿಗೂಢ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಶ್ರದ್ಧೆಗೆ ಬೆಂಬಲ ನೀಡುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಪ್ರಕಾರ (D) ಮತ್ತು (~D) ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂಬ ನಿಯಮವಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ್ಯೂ (D) ಇಲ್ಲವೆ (~D) ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ಧರಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಇಲ್ಲವೆ ಹಾಗೂ ಸತ್ಯ ಎಂಬ ಪದಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಅರ್ಥವನ್ನು ಆರೋಪಿಸಬಾರದು: ಅವು ಗಣಿತ ಕ್ರೀಡೆಯ ಅರ್ಥವಿಮುಖ ಪಗಡೆಕಾಯಿಗಳು ಮಾತ್ರ. [ಉದಾಹರಣೆಗೆ (D) ಸತ್ಯವೋ (~D) ಸತ್ಯವೋ ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸುವಂತಿಲ್ಲ; ಹಾಗೆ ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ ಸಲ್ಲದ ರೂಢಿಯ ಅರ್ಥ ಕೊಟ್ಟಂತಾಗುತ್ತದೆ.] ಈ ಪಗಡೆ ಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಅಂಗೀಕೃತ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ನಡೆಸುತ್ತ ಹೋದಾಗ (D), (~D) ಗಳೆರಡೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ಮಾದರಿಯ ಅಸಾಂಗತ್ಯ ಎಂದೂ ತಲೆದೋರದೆ ಇರುವುದೇ ರೂಪವಾದಿಗಳ ಪಾಲಿಗೆ ಗಣಿತಕ್ರೀಡೆಯ ಸಾರ್ಥಕ್ಯ ನಿರ್ಣಾಯಕ. ಪ್ರಸಕ್ತ ವಿಭಾಗದ ಆದಿಯಲ್ಲೇ ಹೆಸರಿಸಿದ ಅಂತರ್ಬೋಧನವಾದಿಗಳಾದರೋ ರೂಪವಾದಿಗಳ ಅಂತರ್ವಿಮುಖ ಸತ್ಯವನ್ನೂ ಪ್ಲೇಟೋವಾದಿಗಳ ನಿರುಪಾಧಿಕ ಸತ್ಯವನ್ನೂ ತಿರಸ್ಕರಿಸಿ ಯಾವುದನ್ನು ಶುದ್ಧ ಅರ್ಥಪ್ರಜ್ಞೆಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಶಕ್ಯವೋ ಅದು ಮಾತ್ರವೇ ಸತ್ಯ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಂಥ ಹಲವಾರು ತಾತ್ತ್ವಿಕ ಪಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಜ್ಞನೊಬ್ಬನ ಒಲವು ಯಾವೆಡೆಗೇ ಇದ್ದರೂ ಆತನ ಗಣಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಾಂಗತ್ಯಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ವಿಶ್ವಾಸಕ್ಕೆ ಆತನ ಅನುಭವ ಮಾತ್ರ ಆಸರೆಯಾಗಬಲ್ಲದೇ ವಿನಾ ಅಂಥ ವಿಶ್ವಾಸವನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಮಾರ್ಗಗಳಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಎಂದೆಂದೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಗೊಯ್ಡಲ್ ನೆರವೇರಿಸಿದ ಈ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯ ಆವಿಷ್ಕಾರ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ತಳಹದಿಯ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ತ್ವಪೂರ್ಣ ಮೈಲಿಗಲ್ಲಾಗಿ ಬಹುಕಾಲ ಉಳಿಯಲಿದೆ.

(ಎಸ್.ಆರ್.ಎಂ.)

ಗಣಿತ ಸಂಘಗಳು : ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸಮಾನ ಆಸಕ್ತಶೀಲ ಗಣಿತಜ್ಞರೊಡನೆ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನೂ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನೂ ವಿನಿಮಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸ್ಥಾಪಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿಚಾರವೇದಿಕೆಗಳು. ಗಣಿತಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಸಂಸರ್ಗ ಕಲ್ಪಿಸುವುದೇ ಇವುಗಳ ಮುಖ್ಯೋದ್ದೇಶ. 17ನೆಯ ಶತಮಾನದವರೆಗೆ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿನಿಮಯಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಭೇಟಿ ಮತ್ತು

ಪತ್ರ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿತ್ತು. ಗಣಿತಜ್ಞರ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಗಣಿತಸಂಘಗಳ ಸ್ಥಾಪನೆ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಯಿತು. ಸಭೆ ಸಮ್ಮೇಳನಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಲೇಖನಗಳಿರುವ ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿ ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಈ ಸಂಸರ್ಗವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿವೆ. ಗ್ರಂಥಾಲಯಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ವಿದೇಶಿವಿನಿಮಯದ ನಿರ್ಬಂಧವಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡು ಜ್ಞಾನಪ್ರಸಾರ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿವೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ ಉದ್ಯೋಗಾವಕಾಶ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿಕೊಡುವುದು, ಸಾಮೂಹಿಕ ಜೀವವಿಮೆ ಇಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ನೆರವಾಗುವುದು ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಅಮೆರಿಕದ ಕೆಲವು ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿವೆ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಘಗಳು ಮೊದಲಿಗೆ ಒಂದು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಕ್ಕಾಗಲಿ ಒಂದು ನಗರಕ್ಕಾಗಲಿ ಸೀಮಿತಗೊಂಡಿದ್ದು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಸಂಘಗಳಾಗಿಯೇ ಹುಟ್ಟಿಕೊಂಡರೂ ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ ಹೆಚ್ಚಿನವು ಬೇಗನೆ ಪ್ರಗತಿ ಹೊಂದಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಂಘಗಳಾಗಿ ಪ್ರವರ್ಧಿಸಿದವು. ಕೆಲವು ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಂಘಗಳೂ ಇವೆ. ಆದರೆ ಇವು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಂಘಗಳಷ್ಟು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿಲ್ಲ. ಚರ್ಚಾತೀತವಾದ, ಸಮರ್ಪಕ ಸಂಶೋಧನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿರುವ ಲೇಖನಗಳನ್ನಷ್ಟೇ ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಸಮ್ಮೇಳನಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವುದು ಸಂಪ್ರದಾಯ. ಕಡಿಮೆ ಓದುಗರಿಂದ ಮತ್ತು ವ್ಯಾವಹಾರಿಕವಾಗಿ ಲಾಭದಾಯಕವಲ್ಲದ ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳನ್ನು ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಪ್ರಕಟಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳು ಧನಸಹಾಯ ನೀಡಿ ನೆರವಾಗುವುದುಂಟು.

ಈಗಿರುವ ಗಣಿತಸಂಘಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಚೀನವಾದುದು ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಶೆ ಗೆಝೆಲ್ ಶಾಫ್ಟ್. ಜರ್ಮನಿಯ ಹಾಂಬುರ್ಗ್ ನಗರದಲ್ಲಿ 1690ರಲ್ಲಿ ಇದರ ಸ್ಥಾಪನೆ. 1881ರಿಂದ ಇದು ಮಿಟ್ಟೈಲೂಗೆನ್ (ನಿವೇದನೆ) ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ. 1717ರಲ್ಲಿ ಲಂಡನ್ನಿನಲ್ಲಿ ರೂಪಗೊಂಡ ಚರ್ಚಾಕೂಟ (ಡಿಸ್ಕಷನ್ ಸರ್ಕಲ್) ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಾಚೀನ ಸಂಘ. 1845ರ ವರೆಗೆ ಇದರ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿತ್ತು. ಬಳಿಕ ಇದು ರಾಯಲ್ ಅಸ್ಟ್ರಾನಾಮಿಕಲ್ ಸೊಸೈಟಿಯೊಡನೆ ವಿಲೀನಗೊಂಡಿತು. ವಿಸ್ಕೊಂಡಿಶ್ ಗೆನೊಟ್ ಶಾಪ್ಟ್ ಸಂಘ 1778ರಲ್ಲಿ ಆಮ್‌ಸ್ಟರ್‌ಡಾಮ್ ನಗರದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಉಳಿದೆಲ್ಲ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಂಘಗಳ ಉದಯ 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಉತ್ತರಾರ್ಧದ ತರುವಾಯವೇ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಂಘಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಹಳೆಯದು ಮಾಸ್ಕೋ ಗಣಿತಸಂಘ. ಇದರ ಕಾರ್ಯಾರಂಭವಾದದ್ದು 1864ರಲ್ಲಿ. 1867ರಲ್ಲಿ ವಿಶಾಲ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಯಿತು. ಇದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ. 1952ರಿಂದ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವ ಟ್ರಾನ್ಸಾಕ್ಷನ್ಸ್ ಇವುಗಳಲ್ಲೊಂದು. ರಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಗಣಿತಸಂಘಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 1879ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಕಾರ್ಖೋಫ್‌ನ ಗಣಿತ ಸಂಘ ಉಲ್ಲೇಖಾರ್ಹ. ಲಂಡನ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ 1865ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಸಂಸ್ಥೆಯಾಗಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಲಂಡನ್ ಗಣಿತ ಸಂಘ ಶೀಘ್ರವೇ ಪ್ರಗತಿ ಹೊಂದಿ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತಸಂಘವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ದೊಡ್ಡ ಗಾತ್ರದ ಪ್ರಬಂಧಗಳನ್ನು ಇದು ಪ್ರೊಸೀಡಿಂಗ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿಯೂ (1865 ರಿಂದ) ಸಣ್ಣವನ್ನು ಜರ್ನಲ್‌ನಲ್ಲಿಯೂ (1926 ರಿಂದ) ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಎಡಿನ್‌ಬರೋ ಗಣಿತಸಂಘದ ಸ್ಥಾಪನೆ 1883 ರಲ್ಲಿ. ಅದೇ ವರ್ಷ ಪ್ರೊಸೀಡಿಂಗ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಕಟಣೆ ಆರಂಭವಾಯಿತು. 1909 ರಿಂದ ನೋಟ್ಸ್‌ನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಫ್ರಾನ್ಸಿನ ಗಣಿತಸಂಘವನ್ನು 1872 ರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಯಿತು. ಅದೇ ವರ್ಷ ಬುಲೆಟಿನ್ ಪ್ರಕಟಣೆ ಆರಂಭವಾಯಿತು. 1890 ರಲ್ಲಿ ಜರ್ಮನಿಯ ಡಾಯ್ಚೆ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಶೆ ಫೆರೈನ್ ಗುಂಗ್ ಸ್ಥಾಪನೆ. 1892 ರಿಂದ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವ ಈ ಸಂಘದ ಯಾರೆಬೆರಿಷ್ಟೆಯಲ್ಲಿ (ವಾರ್ಷಿಕ ಸರದಿ) ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಮೂಲ್ಯ ಲೇಖನಗಳನ್ನೂ ಸಮೀಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ದೀರ್ಘ ಪ್ರಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ವರದಿಗಳು ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಎರಡು ಸಂಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ಪುನರ್ಮುದ್ರಣಗೊಂಡಿವೆ. ಇಟಲಿಯ ಸರ್ಕೊಲೊ ಮ್ಯಾತಿಮಾಟಿಕೊ ಡಿ ಪಾಲೆರ್ಮೊ 1884 ರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪನೆಯಾಯಿತು. ಶೀಘ್ರವೇ ಇದಕ್ಕೆ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮನ್ನಣೆ ದೊರೆಯಿತು. 1887 ರಿಂದ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವ ರೆಂಡಿಕೋಂಟಿ ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಪ್ರಪಂಚದ ಪ್ರಮುಖ ನಿಯತಕಾಲಿಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಯೂನಿಯನ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಾ ಇಟಾಲಿಯಾನಾ 1922 ರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪನೆ. ಅದೇ ವರ್ಷದಿಂದ ಇದು ಬುಲೆಟಿನೊವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. 1888 ರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿತವಾದ ನ್ಯೂಯಾರ್ಕ್ ಗಣಿತ ಸಂಘ 1894 ರಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕನ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಸೊಸೈಟಿಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆಗೊಂಡಿತು. ಇದು ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲೇ ಹೆಸರುವಾಸಿಯಾದ ಸಂಘ. 1891 ರಿಂದ ಉಪನ್ಯಾಸಗಳು, ಪ್ರಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಘದ ಕಾರ್ಯಕಲಾಪಗಳ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬುಲೆಟಿನನ್ನು ಇದು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ದೀರ್ಘ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಟ್ರಾನ್ಸಾಕ್ಷನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ (1900 ರಿಂದ), ಸುದೀರ್ಘ ಪ್ರಬಂಧಗಳನ್ನು ಮೆಮ್ವಾರ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ (1950 ರಿಂದ), ಸಣ್ಣ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಪ್ರೊಸೀಡಿಂಗ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ 1940ರಿಂದ ಲೇಖನಗಳ ವಿಮರ್ಶೆಗಳನ್ನು ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ರಿವ್ಯೂನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇದೇ ಸಂಘ ಪ್ರಪಂಚದ ಇತರ ಕೆಲವು ಗಣಿತಸಂಘಗಳ ಸಹಕಾರದಿಂದ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. 1938 ರಲ್ಲಿ ಸಂಘದ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನೂ 1950 ರಲ್ಲಿ ಹಿರಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಜಾರ್ಜ್ ಬರ್ಕ್‌ಫರ ಲೇಖನಗಳನ್ನೂ ಮೂರು ಸಂಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದೆ. ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಅಸೋಸಿಯೇಷನ್ ಆಫ್ ಅಮೆರಿಕದ ಸ್ಥಾಪನೆ ಆದದ್ದು 1915 ರಲ್ಲಿ. ಸದಸ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಘಕ್ಕೆ ಅಗ್ರಸ್ಥಾನ. ಅಮೆರಿಕನ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಮಂತ್ಲಿ, ಕೇರಸ್ ಮೊನೊಗ್ರಾಫ್, ಸ್ಲಾಟ್ ಮೆಮೋರಿಯಲ್ ಪೇಪರ್ಸ್ ಇದರ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು. ಅನ್ವಯ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮೀಸಲಾದ ಸಂಘ ಸಿಯಾಂ. ಇದರ ಸ್ಥಾಪನೆ 1952 ರಲ್ಲಿ. ಇದು ರಿವ್ಯೂ ಜರ್ನಲ್ ಆಫ್ ಅಪ್ಲೈಡ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್‌ನ್ನು ಮೊದಲ್ಗೊಂಡು ಏಳು ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. 1960ರ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಪ್ರಪಂಚದ ಎಲ್ಲ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಗಣಿತಸಂಘಗಳ ಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿತ್ತು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಖ್ಯಾತವಾದವು ಭಾರತದ ಮತ್ತು ಜಪಾನಿನ ಗಣಿತ ಸಂಘಗಳು. ಎರಡನೆಯ ಜಾಗತಿಕ ಯುದ್ಧಾನಂತರ ಸ್ಥಾಪನೆಯಾದ ಜಪಾನಿನ ಸಂಘ ಜರ್ನಲ್‌ನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಸಂಘ 1907 ರಲ್ಲಿ ಮದ್ರಾಸಿನಲ್ಲಿ ರೂಪುಗೊಂಡಿತು. ಸ್ಥಾಪಿಸಿದವರು ವಿ. ರಾಮಸ್ವಾಮಿ ಅಯ್ಯರ್. ಜರ್ನಲ್ ಮತ್ತು ಸ್ಟೂಡೆಂಟ್ ಎಂಬ ಎರಡು ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳು ಇದರ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು. ಇದಲ್ಲದೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಸಮ್ಮೇಳನಗಳಲ್ಲಿ ಓದಲ್ಪಡುವ ಲೇಖನಗಳ ಸಾರಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಈ ಸಂಘ ಬಿಡಿಯಾಗಿ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಪ್ರಧಾನ ಕಾರ್ಯಾಲಯ ದೆಹಲಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ದಲ್ಲೂ, ಗ್ರಂಥಾಲಯ ಮದ್ರಾಸ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ರಾಮಾನುಜಂ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲೂ ಇವೆ. ಲಕ್ನೋದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಪರಿಷತ್ ಗಣಿತವನ್ನೂ ಸಂಘ ಬುಲೆಟಿನನ್ನೂ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿವೆ. ಇವಲ್ಲದೆ ಅಲಹಾಬಾದ್ ಗಣಿತಸಂಘ, ದೆಹಲಿಯ ಆಪರೇಷನ್ ರಿಸರ್ಚ್ ಸಂಘಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಇಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳ ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಖ್ಯಾತಿ ಪಡೆದಿವೆ. ಟೊರೊಂಟೊ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಕೆನಡಿಯನ್ ಜರ್ನಲ್, ಪ್ರಿನ್ಸ್‌ಟನ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಜರ್ನಲ್, ಸ್ವೀಡನ್ನಿನ ಉಪ್ಸಲಾ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಆಕ್ಟಾ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಾ ಇಂಥವು. ಇವಲ್ಲದೆ ಗಣಿತದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಹಲಕೆಲವು ಸಂಘಗಳಿವೆ. ಈ ಸಂಘಗಳ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳನ್ನು ಆವರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅಮೆರಿಕದ ಸಿಂಬಾಲಿಕ್ ಲಾಜಿಕ್ ಸಂಸ್ಥೆ (ಜರ್ನಲ್), ಬಯೋಮೆಟ್ರಿಕ್ ಸಂಸ್ಥೆ (ಬಯೋಮೆಟ್ರಿಕ್), ಇಕೊನೊ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಸಂಘ (ಇಕೊನೊಮೆಟ್ರಿಕ), ಸಂಖ್ಯಾಕಲನಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಸಂಘ (ಅನ್ನಲ್ ಆಫ್ ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್), ಫಿಬೋನಾಚೀ ಸಂಘ (ಫಿಬೋನಾಚೀ ಕ್ವಾರ್ಟರ್ಲಿ), ಜಪಾನಿನ ಟೆನ್ಸರ್ ಸಂಘ (ಟೆನ್ಸರ್) ಇವನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಬಹುದು.

ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತ ಸಮ್ಮೇಳನಗಳು 19ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ನಡೆದುವು. ಮೊದಲಿಗೆ 1897 ರಲ್ಲಿ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತ ಕಾಂಗ್ರೆಸ್ ಜ್ಯೂರಿಚ್ ನಗರದಲ್ಲಿ ನಡೆಯಿತು. 1900 ರಲ್ಲಿ ಪ್ಯಾರಿಸ್‌ನಲ್ಲಿ ನಡೆಯಿತು. ತದನಂತರ ಪ್ರತಿ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ (ಯುದ್ಧಾವಧಿಯ ಹೊರತು) ಪ್ರಪಂಚದ ವಿವಿಧ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸಭೆ ಸೇರುತ್ತಿದೆ. 1954ರಲ್ಲಿ ಅಮ್‌ಸ್ಟರ್‌ಡಾಮ್ ನಗರದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ ಸಭೆ ರಷ್ಯನ್, ಇಟಾಲಿಯನ್, ಫ್ರೆಂಚ್, ಜರ್ಮನ್ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ಸಂಶೋಧನ ಲೇಖನಗಳು ಮಾತ್ರ ಅಭಿಜಾತವೆಂಬ ನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದೆ. ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತಸಂಘಗಳ ಒಕ್ಕೂಟಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಲೇ ಇದ್ದು 1950ರಲ್ಲಿ ಒಕ್ಕೂಟ ಅಸ್ತಿತ್ವಕ್ಕೆ ಬಂತು. ವಿಶ್ವಸಂಸ್ಥೆಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಸಂಘಕ್ಕೆ ಇದರ ಪ್ರವೇಶ 1952 ರಲ್ಲಾಯಿತು. ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳೇ ಈ ಸಂಘದ ಸದಸ್ಯರು.

ಪ್ರಪಂಚದ ಸಮಸ್ತ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಗಣಿತಸಂಘಗಳು ಪ್ರಕಟಿಸುವ ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1200ನ್ನೂ ಮಿಕ್ಕಿದೆ. (ಎಚ್.ವಿ.ಕೆ.)

ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ : ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ನಿದರ್ಶನಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಕ್ರಮವಿಧಿಗೆ ಅಥವಾ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆ ಒದಗಿಸುವ ಗಣಿತ ವಿಧಾನ (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಇಂಡಕ್ಷನ್). ಜಾನ್ ಸ್ಟೂವರ್ಟ್ ಮಿಲ್ ಎಂಬಾತನ ಪ್ರಕಾರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿಯಮಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥನೆ ಮಾಡುವ ಪರಿಕರ್ಮವೇ ಅನುಮಿತಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿದರ್ಶನಗಳಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಒಂದು ನಿಯಮ ಈ ನಿದರ್ಶನಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಲುವ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭ

ಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗಬೇಕೆಂದು ಊಹಿಸುವ ಬುದ್ಧಿಯ ಕಾರ್ಯವೇ ಅನುಮಿತಿ ಎನ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1 B = { 1, 3, 5, 7, 9, ... }

ಎಂಬ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$1 = 1^2$ ಮೊದಲನೆಯ ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತ

$1 + 3 = 4 = 2^2$ ಮೊದಲ ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ ಮೊದಲ ಮೂರು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

ಅಂದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲ ಐದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $5^2 = 25$ ಆದೀತು ಎಂದು ಮನಸ್ಸು ಸಂದೇಹಿಸುವುದು. ಇವನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ನೋಡಿ ತಾಳೆ ಮಾಡಬಹುದು. $1+ 3+ 5+ 7+ 9 = 25$, ನಿಜ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಈ ಹಲವಾರು ಸಂದರ್ಭಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ n^2 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $S(n) = 1+ 3+ 5+ \ldots + (2n - 1) = n^2$. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು $n = 1, 2, 3$ ಮುಂತಾದ ಎಷ್ಟೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡಿದರೂ ಇದನ್ನು nನ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೂ ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ nನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ, ಅದು ಎಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಲಿ, ಈ ಸೂತ್ರ ಸುಳ್ಳಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ತಳ್ಳಿಹಾಕುವಂತಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 $P(n) = 2^{2^n} + 1$ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಇದರಲ್ಲಿ

$n = 1$ ಆದಾಗ $P(1) = 2^{2^2} + 1 = 4+1=5$

$n = 2$ ಆದಾಗ $P(2) = \quad + 1 = 16+1=17$

$n = 3$ ಆದಾಗ $P(3) = \quad + 1 = 256+1=257$

$n = 4$ ಆದಾಗ $P(4) = \quad + 1 = 65536+1=65537$

$P(n)$ ನಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, ಮುಂತಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬರುವ 5, 17, 257, 65537 ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳೇ (ಪ್ರೈಮ್ಸ್). ಈಗ $P(1), P(2), P(3), P(4)$ ಎಲ್ಲವೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ $P(n) = \quad + 1$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ n ನ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು ಎಂದು ಫರ್ಮಾ (1601 – 1665) ಎಂಬ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞ ಊಹಿಸಿದ. ಆದರೆ $n = 5$ ಆದಾಗ $P(5) = \quad + 1 = 4294967297$. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $4294967297 = 641 X 6700417$. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಫರ್ಮಾನ ಊಹೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 $P(n) = 991 n^2 + 1$ ಆಗಿರಲಿ.

$n = 1$ ಆದಾಗ $P(1) = 991 . 1^2 + 1 = 992$

$n = 2$ ಆದಾಗ $P(2) = 991 . 2^2 + 1 = 3965$

$n = 3$ ಆದಾಗ $P(3) = 991 . 3^2 + 1 = 8920$

ಈಗ 992, 3965, 8920 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $P(n) = 991n^2 + 1$ ಸೂತ್ರ n ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಕೊಡುವುದೆಂದು ಊಹಿಸಿದರೆ ಅದು ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$ ಆದಾಗ $P(n)$ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಲವೊಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ಪ್ರಭಾವಿತರಾಗಿ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಾವು ರೂಪಿಸಿದರೂ ಅವು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಕಾದಾಗ ಬಹಳ ಜಾಗರೂಕರಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಮೇಲಿನ ನಿದರ್ಶನಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದು. n ನ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಲಕ್ಷಣ ಅನ್ವಯಿಸಿದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ n ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಲಕ್ಷಣ ಅನ್ವಯಿಸಿಯೇ ತೀರುವುದೆಂದು ಹೇಳುವುದು ತಪ್ಪಾಗುವುದು. ಅಂದಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದೇ ತಪ್ಪು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗದು. ಅನೇಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಇರುವಿಕೆಯ ಸೂಚನೆ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಮೊದಮೊದಲು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ತಿಳಿಯಿತು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಇಂಥ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಹತ್ತ್ವವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಊಹಿಸಿದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ಮುಂತಾದ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಿಜವಾಗುವುದರ ಜೊತೆಗೆ n ನ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಸ್ಸಂದಿಗ್ಧವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಅಗತ್ಯವುಂಟು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಊಹಿಸಿದ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅದು n ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವುದೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿದಾಗ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಉದ್ಭವವಾಗುವ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...n, n+1... ಇವುಗಳಿಗೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪಿಯಾನೋ ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಇವುಗಳ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಮೂರು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಮತ್ತು ಐದು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿದ.

1, ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, ಮತ್ತು ಉತ್ತರ ಪದ – ಇವೇ ಆ ಮೂರು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು. (ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದರೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದರ್ಥ) ಪಿಯಾನೋ ಮಂಡಿಸಿದ ಐದು ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಬರೆದಿದೆ.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 1 : 1 ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 2 : 1 ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಪದವೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 3 : 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಉತ್ತರ ಪದವಲ್ಲ.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 4 : ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರ ಪದಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿರುವುವು.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 5 : ಒಂದು ಲಕ್ಷಣ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನ್ವಯವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ ಅದನ್ನು ಅದರ ಉತ್ತರ ಪದಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅದೇ ಲಕ್ಷಣ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಾದರೆ ಆ ಲಕ್ಷಣ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದು.

ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗೆ ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು N ಎಂದು ಕರೆದರೆ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರತೀಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವುದು ವಾಡಿಕೆ :

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 1 : $1 \in N$

ಎಂದರೆ ನಮ್ಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದ N ಶೂನ್ಯಗಣವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಉಂಟು.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 2 : $x \in n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆಯೂ ಅದರ ಉತ್ತರಪದವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ $x' \in N$ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದು.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 3 : $x' \neq 1$, $x' \in N$ ಎಂದರೆ 1ಎಂಬುದು ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಉತ್ತರಪದವಲ್ಲ.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 4 : $x' = y'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $x = y$. ಇದರ ಅರ್ಥ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರಪದಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ.

ಆದ್ಯುಕ್ತಿ 5 : p ಎಂಬ ಒಂದು ಲಕ್ಷಣ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ M ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ (a) $1 \in M$ ಆಗಿದ್ದು (b) $x \in M$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $x' \in M$ ಆಗಿದ್ದರೆ $M = N$ ಆಗುವುದು.

ಒಂದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಪ್ರಕಾರ 1 ಎಂಬುದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದ N ನಲ್ಲಿದೆ. 1 ರ ಉತ್ತರ ಪದ 2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. 2 ರ ಉತ್ತರ ಪದ 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದೆ ಸಾಗುತ್ತ ಹೋದಾಗ ಬರುವ n ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಪದ n+1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರತೀಕಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ $1' = 2, 2' = 3, \ldots, n' = n + 1$. 1 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅದರ ಉತ್ತರ ಪದ 2, ಅದರ ಉತ್ತರ ಪದ 3 ಹೀಗೆಯೇ ಸಾಗುತ್ತ ಮುಂದೆ ಹೋದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉದ್ಭವವಾಗುವುವೇ ವಿನಾ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಸಾರಿ ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಪದವೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರ ಪದಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಸಾರಿ ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಮೂರನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯ ಪ್ರಕಾರ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಉತ್ತರ ಪದವಲ್ಲ. ಎಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬುದೇ ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈಗ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

(a) 1 ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿದೆ

(b) n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ ಅದರ ಉತ್ತರ ಪದವಾದ n+ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಈ ಗಣದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಆದ್ಯುಕ್ತಿಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ.

$\therefore\ N = \{1, 2, 3, ... n, n+ 1, ...\}$

ಈಗ ಪಿಯಾನೋನ ಐದನೆಯ ಆದ್ಯುಕ್ತಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವ ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಈ ಕ್ರಮದ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದು ಸೂತ್ರದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಎರಡು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತ : n = 1 ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ ನಿಜವೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು.

ಎರಡನೆಯ ಹಂತ: ಸೂತ್ರ n ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ ಅದರ ಉತ್ತರಪದ n+ 1 ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ನಿಜವೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೂ (ಉತ್ತರ ಪದಕ್ಕೂ) ನಿಜವಾಗುವುದೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ (b) ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮಹತ್ತರವಾದ ತಾರ್ಕಿಕಶಕ್ತಿ ಅಡಗಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದು. (b) ಹಂತವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ಬಳಿಕ (a) ಹಂತವನ್ನು ಜೊತೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಸೂತ್ರ ಎಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದೆಂದು ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು. (a) ಹಂತದ ಪ್ರಕಾರ n=1 ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ ನಿಜ. (b) ಹಂತದ ಪ್ರಕಾರ n ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ n+1 ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ನಿಜ . 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಉತ್ತರಪದ 2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ನಿಜ. 2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಉತ್ತರಪದವಾದ 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ನಿಜ. ಹೀಗೆಯೇ ವಾದ ಮಾಡುತ್ತ ಹೋದರೆ, n = 1,2,3,..........n, n+1 ಎಂಬ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದಂತಾಗುವುದು.

ಒಂದನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಮೊದಲನೆಯ n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ n^2ಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಅಥವಾ

$S(n)$=1+3+5+.....+ (2n-1) = n^2

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಊಹಿಸಿದೆವು. ಇದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ nನ ಎಲ್ಲ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

(a) ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತ: $S(n)$ =1+3+5+.... +(2n -1) = n^2

n=1 ಆದಾಗ $S(1) = 1 = 1^2$

$\therefore n$ =1 ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ ನಿಜ.

ಎರಡನೆಯ ಹಂತ: S (n) =1+3+5+....+ (2n- 1) = n^2 ಎಂಬ ಸೂತ್ರ n ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಂತೆ ನಿಜವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಈಗ $S(n+1)$ = ಮೊದಲನೆಯ n+1 ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $(n+1)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸೂತ್ರ nಗೆ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ n+1 ಕ್ಕೂ ನಿಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಗುವುದು.

n ನೆಯ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ =2n -1

$\therefore$ (n+1) ನೆಯ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ = 2n -1+ 2 =2n+1

$\therefore S$ (n+1) = {1+3+5+......+ (2n -1) }+ (2n+1)

=S (n)+ (2n+ 1)

= n^2+2n+1, S (n) = n^2

=$(n+1)^2$

ಆದ್ದರಿಂದ $S(n)$ ಸೂತ್ರ n ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ n+1 ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ನಿಜ. ಆದರೆ n =1 ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ ನಿಜವೆಂದು (a) ಹಂತದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1+1 =2 ಕ್ಕೆ ಸಹ ಸೂತ್ರ ನಿಜ. 2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಉತ್ತರಪದ 2+1 = 3 ಕ್ಕೆ ಸಹ ನಿಜ. ಹೀಗೆಯೇ ವಾದ ಮಾಡುತ್ತ ಹೋದರೆ

$S(n)$ = 1+ 3+ 5+ .....+ (2n -1) = n^2

ಎಂಬ ಸೂತ್ರ n ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವೆಂದು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (a) ಮತ್ತು (b) ಎಂಬ ಎರಡು ಹಂತಗಳಿಗೂ ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಆ ಸೂತ್ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಎಂದೆನ್ನಿಸುವುದು. ಇವೆರಡು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಗದಿದ್ದರೂ ಸೂತ್ರದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆ ಏರ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, P (n) = + 1 ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಲಕ್ಷಣ n = 1 ಆದಾಗ ನಿಜವಾದ್ದರಿಂದ (a) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾದಂತಾಯಿತು. $P(n)$ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ $P(n$+1) ಅವಿಭಾಜ್ಯವೆಂದು ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ (b) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಗಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $P(n)$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಲಕ್ಷಣ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ನಿಜವಲ್ಲ.

ಮೂರನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $P(n) = 991n^2+1$ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲ, ಎಂಬುದು n =1 ಆದಾಗ ನಿಜ. ಎಂದರೆ (a) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾದಂತಾಯಿತು. $P(n)$ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $P(n$+1) ಕೂಡ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲ ಎಂದು ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಎಂದರೆ (b) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಗಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $P(n)$ = $991n^2+1$ ಒಂದು ವರ್ಗವಲ್ಲ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.

ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯ (b) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಗಿ (a) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಗದಿದ್ದಾಗ ಕೂಡ ಸೂತ್ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಸತ್ಯವಾಗಲಾರದು. ಒಂದು ನಿದರ್ಶನವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿ. n ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದರ ಉತ್ತರಪದ n+ 1 ಆಗುವುದು. ಪ್ರತೀಕಗಳಲ್ಲಿ ಇದು

$n = n+ 1$ …(1)

ಎಂದಾಗುವುದು. (1) ರ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$n+ 1 = (n+ 1)+ 1$ …(2)

ಎಂದಾಗುವುದು. (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ಈ ಸೂತ್ರ n ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ (n+1) ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆಯೂ ನಿಜವಾಗುವುದೆಂದು ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು. ಎಂದರೆ ಅನುಮಿತಿಯ (b) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

ಈಗ $n = n+ 1$ ...(1)

ಈ ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ n = 1 ಆದಾಗ 1 = 1+ 1. ಅಥವಾ 1 = 2 ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು ಸರಿಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ (a) ಹಂತ ಸಾಧಿತವಾಗಲಿಲ್ಲ. ಹೀಗಾಗಿ $n = n+ 1$ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.

ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸೂತ್ರ 1,2,3,.........p - 1 ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಿಜವಲ್ಲದೆ ಇದ್ದರೂ (a) ಹಂತದಲ್ಲಿ $n = p$ ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ ನಿಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ, ಬಳಿಕ (b) ಹಂತದಲ್ಲಿ nಗೆ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ n+ 1 ಕ್ಕೂ ನಿಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಸೂತ್ರ p ಯಿಂದ ಮುಂದೆ ಬರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲಕ್ಕೂ (pಯನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ) ನಿಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುವುದು.

n ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳೆಲ್ಲ n 3 ಆದಾಗ ನಿಜವಾಗುತ್ತವೆ; ಎಂದರೆ n = 3,4,5,,..... ಆದಾಗ ನಿಜ. ಏಕೆಂದರೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜ. (ಎಲ್.ಎನ್.ಪಿ.)

ಗಣಿತೋಪಕರಣಗಳು : ದೂರ, ಸಲೆ, ಘನಗಾತ್ರ, ಒತ್ತಡ, ಉಷ್ಣತೆ, ವೇಗ, ತೂಕ ಮೊದಲಾದ ಭೌತರಾಶಿಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸುವ ಉಪಕರಣಗಳು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅಳತೆಪಟ್ಟಿ, ಕೋನಮಾಪಕ, ವಾಯುಭಾರಮಾಪಕ ಇವೇ ಮುಂತಾದವು. ಭೌತರಾಶಿಗಳನ್ನೂ (ಫಿಸಿಕಲ್ ಕ್ವಾಂಟಿಟೀಸ್) ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನೂ ಅಮೂರ್ತೀಕರಿಸಿ ಸೂಕ್ತ ಗಣಿತರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ಗಣಿತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಇಲ್ಲಿನ ಸೂತ್ರ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಜವ (ವೇಗ) ಅನ್ನುವುದು ಒಂದು ಭೌತರಾಶಿ. ಗಮಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಇದು ದೊರೆಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಜವಮಾಪಕದಲ್ಲಿ (ವೇಗಮಾಪಕ) ದೂರದ ಹಾಗೂ ಕಾಲದ ಅಳತೆಗಳೂ ಅವುಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಅಳತೆಯೂ ಆಗುವಂಥ ಏರ್ಪಾಡಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮೂಲಸೂತ್ರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸಿದರೆ ಬಳಿಕ ಇದರ ಅನುಸಾರ ಉಪಕರಣದ ರಚನೆ ಕೇವಲ ಯಂತ್ರವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುವುದು.

ಹಲವಾರು ಬಗೆಯ ಸರಳ ಹಾಗೂ ಜಟಿಲ ಗಣಿತೀಯ ಉಪಕರಣಗಳಿದ್ದರೂ ವಿಶಾಲವಾಗಿ ಅವನ್ನು ಮೂರು ಭಿನ್ನ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬಹುದು :

1. ಸಾಂತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಉಪಕರಣಗಳು. ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಮತ್ತು ಬೀಜಾತೀತ (ಟ್ರಾನ್ಸೆಂಡೆಂಟಲ್) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿವೆ. ಕ್ಯಾಮುಗಳು, ಬಂಧಕಗಳು, ಗಿಯರುಗಳು ಇವೇ ಮುಂತಾದ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಲೇಖ್ಯಾನುಸಾರ ಜೋಡಿಸಿ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕಡಲ ತೀರಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಉಬ್ಬರವಿಳಿತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಭೌತ ಬಲಗಳನ್ನೂ ಪ್ರಾಚಲಗಳನ್ನೂ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಉಬ್ಬರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಯಿತು. ಈ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಲಾರ್ಡ್ ಕೆಲ್ವಿನ್ 1872ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉಬ್ಬರ ಮುನ್ಸೂಚಕ (ಟೈಡ್ ಪ್ರೆಡಿಕ್ಟರ್) ಉಪಕರಣವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದ. ಇದು ಈ ವರ್ಗದ ಉಪಕರಣಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ.

2. ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಅವಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವಂಥ ಉಪಕರಣಗಳು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರಗಳಿರುವ ಮೈಗಳ ಮೇಲೆ ಚಕ್ರಗಳು ಉರುಳುವ ಮೂಲಕ, ವಿದ್ಯುನ್ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿನ ಆವೇಶ ಹಾಗೂ ಪ್ರವಾಹಗಳ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ರಚಿತವಾದ ದೃಙ್ಮಾಧ್ಯಮದ ಮೂಲಕ ಪ್ರೇಷಿತವಾದ ಬೆಳಕಿನ ರಾಶಿಯ ಮೂಲಕ ಈ ಮೌಲ್ಯೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಮಾಪಕ (ಪ್ಲಾನಿಮೀಟರ್) ಎಂಬ ಉಪಕರಣ ಈ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆ. $y=f(x)$ ಒಂದು ಸಮತಲ ವಕ್ರರೇಖೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆ ಹಾಗೂ $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ಸಲೆಯ (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ) ಮೌಲ್ಯ ಎಂದು ಅನುಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ತಿಳಿದಿದೆ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಮಾಪಕದ ರಚನೆ ಈ ತತ್ತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಉಂಟು. ಅನುಕಲನಕಗಳು (ಇಂಟೆಗ್ರೇಟರ್ಸ್), ಅನುಕಲನ ಲೇಖಿಗಳು (ಇಂಟೆಗ್ರಾಫ್ಸ್), ಸಂಗತ ವಿಶ್ಲೇಷಕಗಳು (ಹಾರ್ಮಾನಿಕ್ ಅನಲೈಸರ್ಸ್), ಅವಕಲ ವಿಶ್ಲೇಷಕಗಳು (ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಅನಲೈಸರ್ಸ್) ಇವು ಕೂಡ ಇದೇ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತವೆ.

3. ಆಂಶಿಕ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಉಪಕರಣಗಳು. ಒಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಗಣಿತೀಯ ಉಪಕರಣಗಳು ಅವು ಯಾವ ಭೌತ ಸನ್ನಿವೇಶಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಿಯೋಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆಯೋ ಆ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಸದೃಶ

$A = \int_a^b ydx$ ರೂಪಗಳು. ಈ ತಾದ್ರೂಪತೆ ಆಂಶಿಕ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರಸಲು ಬಳಸುವ ಉಪಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ತೀರ ಎದ್ದು ಕಾಣುವಂತಿದೆ. ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ ನಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ವಿಭವದ (ಪೊಟೆನ್ಷಿಯಲ್) ಆಂಶಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಆ ವಿಭವದ ಪ್ರಭಾವದಲ್ಲಿ ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನುಗಳ ಅನುಸರಿಸುವ ಪಥಗಳನ್ನು ಮುನ್ನುಡಿಯಲು ಬಳಸುವ ಉಪಕರಣ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ. (ಆರ್.ಆರ್.ಯು.)

ಗಣೇಕಲ್ ಸಂಗವಿಭು: ಹತ್ತೊಂಬತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದ ವೀರಶೈವ ಕವಿ. 'ಲಕ್ಷ್ಮೀಶ ನನ್ನ ತಮ್ಮ, ಷಡಕ್ಷರಿ ಅಣ್ಣ' ಎಂದು ಈತ ಹೇಳಿಕೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿದರೆ ಆ ಇಬ್ಬರು ಜನಪ್ರಿಯ ಕವಿಗಳ ಕಾವ್ಯಗಳನ್ನು ಈತ ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಮೈಗೂಡಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂದು ಧ್ವನಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈತ ತನ್ನ ಹುಟ್ಟೂರನ್ನಾಗಲೀ ಗಣೇಕಲ್ಲಿನ ವಿಚಾರವನ್ನಾಗಲೀ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತನ್ನ ಕಾವ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿಕೊಂಡಿಲ್ಲವಾದರೂ ಈತನ ಕುಮಾರವಿಜಯದಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಆಧಾರಗಳ ಮೇಲೆ ಇಷ್ಟು ಹೇಳಬಹುದು. ಸಂಗವಿಭು ಅಥವಾ ಸಂಗಪ್ಪ ಆದವಾನಿ ತಾಲ್ಲೂಕಿನ ನಂದವಾರ ಗ್ರಾಮದ ನಾಡಗೌಡ ಮನೆತದವನಾಗಿದ್ದ. ರಾಯಚೂರು ಜಿಲ್ಲೆಯ ದೇವದುರ್ಗ ತಾಲ್ಲೂಕಿನ ಗಣೇಕಲ್ ನಾಡಗೌಡರ ಮನೆತನದ ಹೆಣ್ಣನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಂಸ್ಥಾನದ ರಾಜ್ಯಕಾರಭಾರ ಮಾಡುತ್ತ ತನ್ನ ಜೀವಿತದ ಬಹುಕಾಲವನ್ನು ಗಣೇಕಲ್ಲಿನಲ್ಲಿ ಕಳೆದ. ಪ್ರ.ಶ. ಸುಮಾರು 1832 ರಿಂದ 1856ರ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಈತ ತನ್ನ ಕಾವ್ಯಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಬೇಕು. ಈ ಕಾವ್ಯಗಳ ಹಸ್ತ ಪ್ರತಿಗಳೆಲ್ಲ ಹುಟ್ಟೂರಾದ ನಂದವಾರದ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಸಿಗದೆ ರಾಯಚೂರು ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿಯೇ ದೊರೆತಿವೆ. ಗಣೇಕಲ್ ಸುತ್ತಣ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಈತ ರಚಿಸಿದ ಶತಕಗಳನ್ನೂ ಚಂಪೂಕಾವ್ಯಗಳನ್ನೂ ವಿವಿಧ ಜಾತಿಯ ಸಹೃದಯರು ಓದುವ ಪರಿಪಾಠವಿದೆ.

ಇದುವರೆಗೆ ದೊರೆತ ಸಂಗವಿಭುವಿನ ಕಾವ್ಯಗಳು ನಾಲ್ಕು: ಭುವನೈಕ ನಾಯಕೀಶತಕ, ಬಸವಶತಕ, ಪಂಪಾಶತಕ, ಕುಮಾರವಿಜಯ ಚಂಪೂಮಹಾಕಾವ್ಯ.

ಕುಮಾರವಿಜಯದಲ್ಲಿ ಮಹಾಕಾವ್ಯದ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಲ್ಲ ಇವೆ. ಸತ್ಕವಿ ಕಾಳಿದಾಸ ತಾಂ ಪೇಳಿದ ಸತ್ಕಥಾಸರಣಿ ವೈಖರಿಯಿಂ ಬಣ್ಣಿಪೆಂ ಎಂದು ಕುಮಾರ ಸಂಭವದತ್ತ ಈ ಕವಿ ಬೆರಳು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿದರೂ ಇದು ಕಾಳಿದಾಸನ ಯಥಾವತ್ ಅನುವಾದವೇನಲ್ಲ. ಷಡಕ್ಷರಿಯ ಕಾಲಕ್ಕೇ ನಿಂತುಹೋಗಿದ್ದ ಚಂಪೂಯುಗವನ್ನು ತನ್ನವರೆಗೂ ನಡೆಸಿಕೊಂಡು ಬಂದ ಕೀರ್ತಿ ಸಂಗವಿಭುಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಸಂಗವಿಭುವಿನ ಶತಕಗಳಲ್ಲಿ ಶುಷ್ಕನೀತಿಯಿಲ್ಲ. ಹೇಳುವುದನ್ನು ರಸವತ್ತಾಗಿ ಹೇಳಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಪದ್ಯ ಕವಿಯ ಚಮತ್ಕಾರಕ್ಕೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ:

ಬಾಣನ ಭಕ್ತಿಯಂ ಮನೆಯ ಬಾಗಿಲು ಬಲ್ಲುದು ಪಾರ್ಥಭಕ್ತಿಯಂ
ಬಾಣವು ಬಲ್ಲುದೊಂದಡಿಯು ಬಲ್ಲುದು ಕಣ್ಣಪ್ಪನೊಪ್ಪ ಭಕ್ತಿಯಂ ।
ಮಾಣದ ನಿಮ್ಮ ಭಕ್ತಿಯನು ಚಿತ್ತವು ಬಲ್ಲುದು ಚಿನ್ಮಯಾತ್ಮಕ
ಲ್ಯಾಣ ಪುರಪ್ರಸಿದ್ಧ ಶರಣಾ ಶರಣಾಗತವಜ್ರಪಂಜರಾ ॥

ಭುವನೈಕನಾಯಕೀಶತಕದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ವತಿಯ ವರ್ಣನೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಕವಿಯ ಭಕ್ತಿ, ಗೌರವಗಳ ಜೊತೆಗೆಯೇ ಅವನ ದೃಷ್ಟಿ ಆಕೆಯ ಅಲೌಕಿಕ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನೂ ಕಂಡಿದೆ. ಪಂಪಾಶತಕವಂತೂ ತುಂಬಿ ಹರಿಯುವ ಪ್ರವಾಹದಂತೆ ನಿರರ್ಗಳವಾಗಿ ಸಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಸ್ಕೃತ ಭೂಯಿಷ್ಠವಾದ ಭಾಷೆಯಷ್ಟೇ ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ಅಚ್ಚಗನ್ನಡ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಸಂಗವಿಭು ಸುಂದರವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತಾನೆ.

ತೊಗೆಯುಂಟಾದೊಡೆ ತುಪ್ಪಮೆಂಬ ನೆರೆತುಪ್ಪಂ ನೀಡಲೇನಿಬರೇ
ಯಗುಳೆಂತುಂಬುವೆನೆಂದು ಸಾರುತರವೇಳಲ್ಲಂದು ನೀಡಲ್ಕೆ ಮ ।
ಜ್ಜಿಗೆ ಬೇಕೆಂಬುವನಪ್ಪು ಗೂಡಿ ಮನುಜಂಗೇನಿರ್ದರೇನಪ್ಪುದೇ
ಮಿಗೆ ತೃಪ್ತಿತ್ವಕ್ಕೆ ಸಾಲದೆಂಬನಭವಾ ಪಂಪಾಪುರಾಧೀಶ್ವರಾ ॥

ಅಶಾಂತಿ, ಅವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಕಾಲದಲ್ಲಿದ್ದವನಾದರೂ ಕವಿ ಮನಸ್ಸಿನ ಸ್ತಿಮಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸುವ ಶತಕಗಳನ್ನೂ ಚಂಪೂಕಾವ್ಯವನ್ನೂ ರಚಿಸಬಲ್ಲಂಥ ರಸಪ್ರಜ್ಞೆಯನ್ನೂ ಸೃಜನಶೀಲತೆಯನ್ನೂ ಕಾಯ್ದುಕೊಂಡಿರುವುದು ಮೆಚ್ಚತಕ್ಕ ವಿಷಯ. (ಜಿ.ಆರ್.ಪಿ.)

ಗಣೇಶ ದೈವಜ್ಞ : ಪ್ರಾಚೀನ ಭರತಖಂಡದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಜ್ಯೋತಿಷ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ. ಪಶ್ಚಿಮ ಸಮುದ್ರತೀರದಲ್ಲಿರುವ ನಂದಗಾವ್ ಎಂಬುದು ಈತನ ಊರು. ತಂದೆ ಕೇಶವ ದೈವಜ್ಞ, ತಾಯಿ ಲಕ್ಷ್ಮಿ. ಕೌಶಿಕ ಗೋತ್ರದವ. ಕಾಲ ಪ್ರ.ಶ.ಸು. 1500. ಗ್ರಹ ಲಾಘವ (ಪ್ರ.ಶ. 1520), ಲಘುತಿಥಿ ಚಿಂತಾಮಣಿ (ಪ್ರ.ಶ. 1525). ಬೃಹತ್ತಿಥಿ ಚಿಂತಾಮಣಿ, ಸಿದ್ಧಾಂತ ಶಿರೋಮಣಿ ಟೀಕೆ, ಲೀಲಾವತಿ ಟೀಕೆ (ಪ್ರ.ಶ. 1545), ವಿವಾಹ ಬೃಂದಾವನ ಟೀಕೆ, ಮುಹೂರ್ತತತ್ತ್ವ ಟೀಕೆ, ಶ್ರಾದ್ಧ ನಿರ್ಣಯ, ಛಂದೋರ್ಣವ ಟೀಕೆ, ತರ್ಜನೀಯಂತ್ರ, ಕಷ್ಣಾಷ್ಟಮೀ ನಿರ್ಣಯ, ಹೋಲಿಕಾ ನಿರ್ಣಯ, ಲಘೂಪಾಯ ಪಾಕ (ಪಾತ ಸರಣಿ ಪ್ರ.ಶ. 1538)–ಈ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಗಣೇಶ ದೈವಜ್ಞ ರಚಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ ಪರ್ವನಿರ್ಣಯ ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದ ಕರ್ತೃ ಈತನೇ ಎಂದು ಕೆಲವರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ. ಈತನ ಜನ್ಮವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಂತಕಥೆ ಇದೆ. ತಂದೆಯಾದ ಕೇಶವ ದೈವಜ್ಞ ಒಮ್ಮೆ ಮಾಡಿದ ಗ್ರಹಣ ಗಣಿತ ತಾಳೆಯಾಗಲಿಲ್ಲ. ಅದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ ರಾಜ ಅವನನ್ನು ಹಾಸ್ಯ ಮಾಡಿದ. ನೊಂದ ಕೇಶವ ನಂದಿಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಗಣಪತಿ ದೇವಾಲಯದಲ್ಲಿ ಏಕಮನಸ್ಕನಾಗಿ ಗಣೇಶನನ್ನು ಕುರಿತು ತಪಸ್ಸು ಮಾಡಿದ. ತಪಸ್ಸಿಗೆ ಮೆಚ್ಚಿದ ಗಣಪತಿ ಸ್ವಪ್ನದಲ್ಲಿ ಬಂದು ದೃಕ್ಸಮವಾದ ಗ್ರಹಣಗಣಿತ ಆತನಿಂದ ಸಾಧ್ಯವೆಂತಲೂ ಗಣಪತಿಯ ಅಂಶದಿಂದ ಹುಟ್ಟುವ ಮಗ ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತಾನೆ ಎಂತಲೂ ತಿಳಿಸಿ ಅದೃಶ್ಯನಾದ. ಕೇಶವನ ಮಗ ಗಣೇಶ ದೈವಜ್ಞ ಈಶ್ವರಾಂಶದಿಂದ ಹುಟ್ಟಿದವನೆಂದು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವರು ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಡುತ್ತಾರೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಈತ ದೈವಜ್ಞ ದೈವಾಂಶಸಂಭೂತನೆಂಬುದು ಸರ್ವಸಮ್ಮತ.

ಸೂರ್ಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಆರ್ಯಭಟ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಬ್ರಹ್ಮ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಂದ ಮೂಲಭೂತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿ ದೃಗ್ಗಣಿತೈಕ್ಯ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಅಲ್ಪ ಮಾರ್ಪಾಡು ಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ದೈವಜ್ಞ ಗ್ರಹಲಾಘವ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಸುಲಭ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಕೃತಿ ಆಸೇತುಹಿಮಾಚಲಪರ್ಯಂತ ಜ್ಯೋತಿಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಅತ್ಯುಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಗಂಗಾಧರ (ಪ್ರ.ಶ. 1586), ಮಲ್ಲಾರಿ (ಪ್ರ.ಶ. 1602), ವಿಶ್ವನಾಥ್ (ಪ್ರ.ಶ. 1612)– ಇವರು ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ 14 ಅಧಿಕಾರಗಳಿವೆ. ಮಲ್ಲಾರಿ ಮತ್ತು ವಿಶ್ವನಾಥರ ಟೀಕೆಗಳಿಂದ ಇದರಲ್ಲಿ 15 ಅಧಿಕಾರಗಳಿರುವಂತೆ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಒಟ್ಟು ಶ್ಲೋಕಸಂಖ್ಯೆ 187.

ತಿಥಿ, ನಕ್ಷತ್ರ, ಯೋಗ, ಕರಣಗಳನ್ನು ಸುಲಭಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನ ಲಘು ಮತ್ತು ಬೃಹಚ್ಚಿಂತಾಮಣಿ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿದೆ.

ತರ್ಜನೀ ಯಂತ್ರ ಎಂಬ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಲ ಸಾಧನ ವಿಚಾರ ಉಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತೋದಯ ಎಂಬ ಹೆಸರೂ ಉಂಟು. ಸಖಾರಾಮ ನೃಪ ಎಂಬಾತನೂ ಸಂಗಮೇಶ್ವರದ ಗೋಪೀನಾಥ ಎಂಬಾತನೂ ಇದಕ್ಕೆ ಟೀಕೆ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಕೃತಿಗಳ ಅವಲೋಕನದಿಂದ ಗಣೇಶ ದೈವಜ್ಞನ ಗಣಿತ ಪ್ರೌಢಿಮೆ, ಜ್ಯೋತಿಷ, ಧರ್ಮಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ

ವಿದ್ವತ್ತು ಮತ್ತು ಗ್ರಂಥರಚನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳು ಯಾವ ಮಟ್ಟದವು ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ಹೆಸರಿನ ಬೇರೆ ಇಬ್ಬರು ದೈವಜ್ಞರ ಹೆಸರಗಳೂ ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿವೆ. ತಾಜಕಭೂಷಣ ಮತ್ತು ಜಾತಕಾಲಂಕಾರ ಇವರ ಕೃತಿಗಳು. (ಎಸ್.ಎನ್.ಕೆ.)

ಗಣೇಶನ್ : ಒಂದು ತಮಿಳು ಮಾಸಪತ್ರಿಕೆ. 1965ರಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಯಿತು. ವಿ.ಎಸ್. ಗಣೇಶನ್ ಸ್ಥಾಪಕ-ಸಂಪಾದಕ, ಪ್ರಕಾಶಕ, ಮಾಲೀಕ. ಮಧುರೆಯ ತಿರುಮಲ ಅಚಗಮ್‌ನಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿತಗೊಂಡು ಟಿ. ವಡಿಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿದೆ. ಚಲನಚಿತ್ರ ವಾರ್ತೆಗಳಿಗೆ ಮೀಸಲಾದ ಪತ್ರಿಕೆಯಿದು. (ಕೆ.ಆರ್.ಡಿ.)

ಗಣೇಶ್, ಎಂ.ಪಿ. : 1946–. ಒಲಂಪಿಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಹಾಕಿ ಆಟಗಾರ. 1946 ಜುಲೈ 8ರಂದು ಮಡಿಕೇರಿಯಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದರು. ಪ್ರಾರಂಭದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟವನ್ನು ಆಡುತ್ತಿದ್ದ ಇವರು 1964ರಲ್ಲಿ ಸೈನ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಅನಂತರ ಹಾಕಿ ಆಟವನ್ನು ಮೈಗೂಡಿಸಿಕೊಂಡರು. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಹಾಕಿ ಚಾಂಪಿಯನ್‌ಷಿಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಸರ್ವಿಸಸ್ ತಂಡದ ಆಟಗಾರರಾಗಿ 1968–73ರ ತನಕ ಮುಂಬಯಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರು. ಆಟದ ಶೈಲಿ ಹಾಗೂ ಸಾಧನೆಯಿಂದಾಗಿ 1970ರಲ್ಲಿ ಭಾರತ ಹಾಕಿ ತಂಡದ ಆಟಗಾರರಾಗಿ ಆಯ್ಕೆಗೊಂಡರು. ಇವರು ಏಷ್ಯನ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾರಿ ಭಾರತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರು. 1970ರಲ್ಲಿ ಬಾಂಕಾಕ್, 1974ರಲ್ಲಿ ತೆಹರಾನ್ ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಭಾರತ ತಂಡ ಪಾಕಿಸ್ತಾನಕ್ಕೆ ಸೋತು ಬೆಳ್ಳಿಯ ಪದಕದೊಂದಿಗೆ ಹಿಂದಿರುಗಿತು. 1969–74ರ ತನಕ ಹಲವಾರು ಪ್ರದರ್ಶನ ಹಾಗೂ ಟೆಸ್ಟ್ ಪಂದ್ಯಾಟಗಳನ್ನು ಆಡಿದ ಇವರು 1971ರಲ್ಲಿ ಬಾರ್ಸಿಲೋನದಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಮೊದಲನೆಯ ವಿಶ್ವಕಪ್ ಪಂದ್ಯಾಟದಲ್ಲಿ ಆಟಗಾರರಾಗಿ ಭಾಗವಹಿಸಿ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಕಂಚಿನ ಪದಕವನ್ನು ತಂದುಕೊಟ್ಟರು. 1972ರ ವಿಶ್ವಕಪ್ ಪಂದ್ಯಾಟದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಭಾರತ ಬೆಳ್ಳಿಯ ಪದಕ ಪಡೆಯಲು ನೆರವಾದರು. ಇವರು 1972ರ ಮ್ಯೂನಿಚ್ ಒಲಂಪಿಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾರತ ತಂಡದ ಆಟಗಾರರಾಗಿದ್ದರು. ಭಾರತಕ್ಕೆ ಆಗ ಕಂಚಿನ ಪದಕ ದೊರಕಿತು. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ 1972ರ ವಿಶ್ವ 11ರ ತಂಡದಲ್ಲಿ ಇವರು ಸ್ಥಾನ ಗಳಿಸಿದ್ದರು. 1970–74ರ ತನಕ ಏಷ್ಯ 11ರ ತಂಡದ ಆಟಗಾರರಾಗಿದ್ದರು.

ಗಣೇಶ್ ಒಬ್ಬ ಒಳ್ಳೆಯ ತರಬೇತುದಾರರು. 1974–77ರಲ್ಲಿ ಇವರು ಇಟಲಿಯ ತಂಡವೊಂದಕ್ಕೆ ತರಬೇತುದಾರರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಿದರು. ಇವರು 1980ರ ಮಾಸ್ಕೋ ಒಲಂಪಿಕ್ ತಂಡದ ಹಾಕಿ ತರಬೇತುದಾರರಾಗಿದ್ದರು. ಆಗ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಚಿನ್ನದ ಪದಕ ದೊರಕಿತು. ಭಾರತದ ಕಿರಿಯರ ತಂಡಕ್ಕೆ ಇವರು 1981–85ರಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ತರಬೇತುದಾರರಾಗಿದ್ದರು.

ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ 1981ರಲ್ಲಿ ಇವರನ್ನು ಕ್ರೀಡೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗಾಗಿ ವಿಶೇಷ ಅಧಿಕಾರಿಯಾಗಿ ನೇಮಿಸಿತು. ಅನಂತರ 1986ರಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯ ಕ್ರೀಡಾ ಪ್ರಾಧಿಕಾರದ ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರಾಗಿ, ಪ್ರಾಂತೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕರಾಗಿ (1991), ದೈಹಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಾಹಕ ನಿರ್ದೇಶಕರಾಗಿ (1996) ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ಹೊತ್ತು ಕೆಲಸ ನಿರ್ವಹಿಸಿದರು. ಅನಂತರ ದೆಹಲಿಯ ಭಾರತೀಯ ಕ್ರೀಡಾಪ್ರಾಧಿಕಾರದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸಿದರು. ಇವರು ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಎಂ.ಎ. ಪದವಿಯನ್ನೂ ಅಳಗಪ್ಪ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ ಪಿಎಚ್.ಡಿ. ಪದವಿಯನ್ನೂ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ.

ಇವರಿಗೆ ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರದ ಹಲವು ಪ್ರಶಸ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರದ ಅರ್ಜುನ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯೂ (1973) ಲಭಿಸಿವೆ. (ಎಸ್.ಆರ್.ಯು.)

ಗಣೇಶ, ರಾಜಾ : ಬಂಗಾಳವನ್ನಾಳುತ್ತಿದ್ದ ಸುಲ್ತಾನರಿಂದ ರಾಜ್ಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಸಿದುಕೊಂಡಿದ್ದ ಒಬ್ಬ ಹಿಂದೂ ಪ್ರಮುಖ. ಮುಸ್ಲಿಂ ದೊರೆಗಳಿಂದ ಹಿಂದೂ ಆದವನೊಬ್ಬ ರಾಜ್ಯಾಡಳಿತ ಕಸಿದುಕೊಂಡ ವಿರಳ ಪ್ರಸಂಗವಿದಾದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವುಂಟು. ಈ ಘಟನೆ ನಡೆದದ್ದುಂಟೆಂಬುದು ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾದರೂ ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಖಚಿತವಾದ ವಿವರಗಳು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಇವನನ್ನು ಮುಸ್ಲಿಂ ಇತಿಹಾಸಕಾರರು ರಾಜಾ ಕಾನ್ಸ್ ಅಥವಾ ಕಾನ್ಸಿ ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಕೆಲವು ಹಿಂದೂ ಆಧಾರಗಳಿಂದ ಈತನ ಹೆಸರು ಗಣೇಶ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಈತನ ನಿಜವಾದ ಹೆಸರು ಎಂಬುದು ಈಗ ಬಹುತೇಕ ನಿಸ್ಸಂದೇಹ. ಈತ ಉತ್ತರ ಬಂಗಾಳದ ಒಬ್ಬ ಜಮೀನ್ದಾರ. 400 ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಹಳೆಯ ವಂಶವೊಂದರಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿದಾತ. 1389–1393ರ ನಡುವೆ ಸಿಂಹಾಸನವೇರಿದ್ದಿರಬಹುದಾದ ಘಿಯಾಸುದ್ದೀನ್ ಆಜ಼ಂ ಷಹನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಈತ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಗಳಿಸಿದ. ಆಜ಼ಂ ಷಹನನ್ನು ಇವನು ಕೊಲ್ಲಿಸಿದನೆಂದು 1788ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲಾದ ರಿಯಾಜ಼್ ಎಂಬ ಮುಸ್ಲಿಂ ಉದಂತವೊಂದರಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆಯಾದರೂ ಇದಕ್ಕೆ ಬೇರಾವ ಆಧಾರವೂ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂತೂ ಅಜ಼ಂ ಷಹನ ಅನಂತರ ಸೈಫುದ್ದೀನ್ ಹಂಜ಼ಾ ಷಹ ಪಟ್ಟಕ್ಕೆ ಬಂದ. ಈತ ತುಂಬ ದುರ್ಬಲ ಅರಸ. ಇವನ ಆಳ್ವಿಕೆಯ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆಸ್ಥಾನಿಕರೂ ಸೇನಾ ನಾಯಕರೂ ಪ್ರಬಲರಾದರು. ಇವರ ಪೈಕಿ ಗಣೇಶ ಪ್ರಮುಖ. ಹಂಜ಼ಾ ಷಹನ ಅನಂತರ ಬಂದ ಸುಲ್ತಾನನಾದ ಷಿಹಾಬುದ್ದೀನನ ಮರಣಾನಂತರ (ಅವನನ್ನು ಕೊಲ್ಲಿಸಿದವನು ಗಣೇಶನೇ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಒಂದು ಮೂಲ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ) ಗಣೇಶ ಅಧಿಕಾರ ಗಳಿಸಿಕೊಂಡನೆಂದೂ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಗಣೇಶ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ರಾಜ ನಿರ್ಮಾಪಕನಾಗಿದ್ದನೆಂಬುದಂತೂ ನಿಜ. ಈತನೇ ಸಿಂಹಾಸನವನ್ನೇರಿದನೆಂದೂ ಕೆಲವರು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ರಾಜಾ ಗಣೇಶನ ನಾಣ್ಯಗಳು ಯಾವುವೂ ಇದುವರೆಗೂ ಸಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. ಇವನಿಗೆ ಹಿಂದಿನ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಸುಲ್ತಾನರ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ರಾಜಾ ಗಣೇಶ ರಾಜ್ಯವಾಳಿದನೆಂದೂ ಸಿಂಹಾಸನವನ್ನೇರಿದ ಮೇಲೆ ದನುಜಮರ್ದನದೇವ, ಮಹೇಂದ್ರದೇವ ಎಂಬ ಹೆಸರುಗಳನ್ನೂ ತಳೆದನೆಂದೂ ಕೆಲವರು ಊಹಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಊಹೆಗಳಿವೆ.

ಅಂತೂ ಈತ 15ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಯಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿಯೋ ಅನಧಿಕೃತವಾಗಿಯೋ ಆಡಳಿತ ನಡೆಸಿದ್ದು ನಿಜ. ಗಣೇಶ ಏಳು ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ರಾಜ್ಯವಾಳಿದನೆಂದೂ ಇವನ ಅನಂತರ ಇವನ ಎರಡನೆಯ ಮಗ ಜಲಾಲುದ್ದೀನ್ ಸಿಂಹಾಸನವನ್ನೇರಿದನೆಂದೂ ಫಿರಿಷ್ತಾನಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಈತ 1415 ರಿಂದ 1431ರ ವರೆಗೆ ಆಳಿದ. ರಾಜಾ ಗಣೇಶನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಮುಸ್ಲಿಮರ ಒತ್ತಡದಿಂದಾಗಿ ಅವನ ಎರಡನೆಯ ಮಗ ಮುಸ್ಲಿಮನಾದನೆಂಬುದು ಒಂದು ವಾದ. ಗಣೇಶ ಸ್ವತಃ ಅಧಿಕಾರವನ್ನು ತನ್ನ ಮಗ ಜಾದುವಿಗೆ ವಹಿಸಿಕೊಟ್ಟನೆಂದೂ ಅವನು ಅನಂತರ ಮುಸ್ಲಿಂ ಮತಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತನೆ ಹೊಂದಿ ಜಲಾಲುದ್ದೀನ್ ಮುಹಮ್ಮದ್ ಷಹ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ರಾಜ್ಯವಾಳಿದನೆಂದೂ ಕೆಲವು ಮುಸ್ಲಿಂ ಇತಿಹಾಸಕಾರರು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಜಲಾಲುದ್ದೀನನ ಮರಣಾನಂತರ ಅವನ ಮಗ 1435ರ ವರೆಗೆ ಆಳಿದ. ಈತ ಕೊಲೆಗೆ ಗುರಿಯಾದ. ರಾಜಾ ಗಣೇಶನ ವಂಶದ ಅಧಿಕಾರ ಕೊನೆಗೊಂಡಿತು. ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲಾನಂತರ ರಾಜ್ಯಸೂತ್ರ ಮತ್ತೆ ಹಿಂದಿನ ಸುಲ್ತಾನವಂಶಕ್ಕೆ ಹೋಯಿತು. (ಎ.ವಿ.ವಿ.)

ಗಣೇಶ ಶಂಕರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ : 1890–1931. ಹಿಂದೀ ಸಾಹಿತಿ ಮತ್ತು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಕಾರ್ಯಕರ್ತ. ಉತ್ತರ ಪ್ರದೇಶದ ನನಿಹಾಲ್ ಪ್ರಯಾಗನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ. ತಂದೆಯ ಹೆಸರು ಜಯನಾರಾಯಣ. ಮುಂಗಾವಲಿ (ಗ್ವಾಲೇರ್) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣ ನಡೆಯಿತು. ಅನಂತರ ಕಾನ್‌ಪುರದಲ್ಲಿ ಸರ್ಕಾರಿ ನೌಕರಿ ಹಿಡಿದನಾದರೂ ಅಲ್ಲಿನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಅಧಿಕಾರಿಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳಲು ಆಗದ್ದರಿಂದ ಆ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ರಾಜೀನಾಮೆ ಕೊಟ್ಟ. ಅನಂತರ ಸರಸ್ವತಿ, ಅಭ್ಯುದಯ ಇತ್ಯಾದಿ ನಿಯತಕಾಲಿಕ ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಬರೆಯತೊಡಗಿದ. ಪ್ರಭಾ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಸಂಪಾದಕನಾದ. 1913ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಾಪ ವಾರಪತ್ರಿಕೆಯ ಸಂಪಾದಕತ್ವವನ್ನು ವಹಿಸಿಕೊಂಡ ಮೇಲೆ ಒಂದುಕಡೆ ನೆಲೆ ನಿಲ್ಲಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು. ಕ್ರಮೇಣ ಪತ್ರಕರ್ತ, ನಿಬಂಧ ಲೇಖಕ ಮತ್ತು ವಿಶಿಷ್ಟ ಶೈಲಿಯ ಬರೆಹಗಾರ ಎಂದು ಹಿಂದೀ ಸಾಹಿತ್ಯದಲ್ಲಿ ಈತ ಪ್ರಸಿದ್ಧಿ ಗಳಿಸಿದ. ಒಕ್ಕಲಿಗರ ಚಳವಳಿಗಳಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ ಚಳವಳಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ಭಯದಿಂದ ಈತ ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ. ಕಾನ್‌ಪುರದಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಹಿಂದೂ-ಮುಸ್ಲಿಂ ದುರಂತದಲ್ಲಿ ನೊಂದವರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಗುಂಡಿನೇಟಿಗೆ ಬಲಿಯಾಗಿ ಈತ ಅಕಾಲ ಮರಣಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾದ. *

ಗಣೇಶ್ವರ : ರಾಜಸ್ತಾನ ರಾಜ್ಯದ ಸೀಕರ್ ಜಿಲ್ಲೆಯ ನೀಮ್–ಕ–ಥಾಣ ತಾಲ್ಲೂಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಚೀನ ನೆಲೆ. ಇಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಪ್ರಾಚ್ಯಾವಶೇಷಗಳು ವಿಭಿನ್ನವೂ ವಿಶಿಷ್ಟವೂ ಆಗಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿತವಾದ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಗಣೇಶ್ವರದ ಸುತ್ತಮುತ್ತ ನಡೆಸಿದ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಗಣೇಶ್ವರದಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಉತ್ಖನನದಲ್ಲಿ ಸು. 1000 ತಾಮ್ರದ ಉಪಕರಣಗಳು ಸಿಕ್ಕವು. ಭಾರತದ ಇತರ ಯಾವ ಪುರಾತತ್ತ್ವ ನೆಲೆಯಲ್ಲೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ತಾಮ್ರೋಪಕರಣಗಳು ದೊರೆತಿಲ್ಲ. ಇದೇ ಗಣೇಶ್ವರ ನೆಲೆಯ ಮತ್ತು ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ವಿಶೇಷತೆ. ಈ ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಪ್ರ.ಶ. 20ನೆಯ ಶತಮಾನದ 70ರ ದಶಕದಲ್ಲಿ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂದಿತು. ಚಪ್ಪಟೆಯಾದ ಕೊಡಲಿ, ಬಾಣದ ಮೊನೆ, ಭರ್ಜಿಯ ಮೊನೆ, ಅಲಗು, ಮೀನಿನ ಗಾಳದ ಕೊಕ್ಕೆ, ತಂತಿ, ಮೊಳೆ, ಉಳಿ–ಹೀಗೆ ಹಲವಾರು ಬಗೆಯ ಉಪಕರಣಗಳು ಈ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ನೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆತಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಲಗು, ಬಾಣದ ಮೊನೆ, ಗಾಳದ ಕೊಕ್ಕೆ ಮುಂತಾದ ನಮೂನೆಗಳು ಹರಪ್ಪ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ನೆಲೆಗಳಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಮೀನುಗಾರಿಕೆ ಮತ್ತು ಬೇಟೆ ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಜೀವನಾಧಾರಗಳಾಗಿದ್ದವೆಂಬುದು ಉಪಕರಣಗಳ ನಮೂನೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಸಮಕಾಲೀನ – ತಾಮ್ರಶಿಲಾ, ತಾಮ್ರೋಪಕರಣ ಗುಡ್ಡೆ ಅಥವಾ ಹರಪ್ಪ ಯಾವ ಸಂಸ್ಕೃತಿಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕೆಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯಗಳಿವೆ. ಗಣೇಶ್ವರದ ಉಪಕರಣಗಳಿಗೂ ಗಂಗಾ–ಯಮುನ ನದಿ ಬಯಲಿನಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ತಾಮ್ರೋಪಕರಣ ಗುಡ್ಡೆ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಉಪಕರಣಗಳಿಗೂ ಯಾವುದೇ ಸಾಮ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯ. ಬ್ರಿಜೆಟ್ ಮತ್ತು ರೇಮಂಡ್ ಅಲ್ಚಿನ್ ಅವರ ಪ್ರಕಾರ ಗಣೇಶ್ವರ ಮತ್ತು ಆಹಾರ್ ಸಂಸ್ಕೃತಿಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿಗಳಾಗಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಇವು ನಗರೀಕೃತ ಹರಪ್ಪ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯೊಂದಿಗೆ ವ್ಯಾಪಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನಿಟ್ಟು ಕೊಂಡಿದ್ದವು. ಗಣೇಶ್ವರದ ಸಿದ್ಧ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಹರಪ್ಪ ಮತ್ತು ಅಹಾರ್ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ವಸತಿಗಳು ಪ್ರಾಯಶಃ ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದವು. ಗಣೇಶ್ವರ ಮತ್ತು ಕಾಲಿಬಂಗನ್ ನಡುವೆ ಹರಪ್ಪ ಪೂರ್ವ ಮತ್ತು ಹರಪ್ಪ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿದ್ದ ಸಂಪರ್ಕಕ್ಕೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಪುರಾವೆಗಳಿವೆ.

ಗಣೇಶ್ವರ ಖೇತ್ರಿ ತಾಮ್ರಗಣಿಗಳಿಂದ 75ಕಿಮೀ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಕಳೆದ ಮೂವತ್ತು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಗೆ ಸೇರುವ 5,000ಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ತಾಮ್ರ ಉಪಕರಣಗಳು ಈ ವಲಯದಿಂದ ಲಭಿಸಿವೆ. ಆರ್.ಸಿ. ಅಗ್ರವಾಲರ ಅಭಿಪ್ರಾಯದಲ್ಲಿ ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಜನರೇ ಖೇತ್ರಿ ಪ್ರದೇಶದ ಮೂಲ ನಿವಾಸಿಗಳು. ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ನಿವೇಶನಗಳು ಖೇತ್ರಿ ಗಣಿಗಳನ್ನು ಆರ್ಥಿಕವಾಗಿ ಅವಲಂಬಿಸಿದ್ದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಲ್ಚಿನ್ ದಂಪತಿಗಳೂ ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತಾರೆ.

ತಾಮ್ರ ಉಪಕರಣಗಳ ಜತೆಗೆ ಮಣ್ಪಾತ್ರೆಗಳೂ ಈ ನಿವೇಶನಗಳಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿವೆ. ಇವನ್ನು ಗಣೇಶ್ವರ ಪಾತ್ರೆಗಳೆಂದೇ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸೀಕರ್ ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಣಸಿಗುತ್ತವೆ. ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 3000–2800ರ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಮಣ್ಪಾತ್ರೆಗಳ ತೌಲನಿಕ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಈ ಮಣ್ಪಾತ್ರೆಗಳು ಇಲ್ಲಿಂದ 40 ಕಿಮೀ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜೋಧಪುರದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಕಾವಿಬಣ್ಣದ ಮಣ್ಪಾತ್ರೆಗಳನ್ನು ಹೋಲುತ್ತವೆ. ಜೋಧಪುರದ ಪಾತ್ರೆಗಳು ಇಂಗಾಲ14ರ ಕಾಲನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗಿವೆ. ಈ ಕಾಲಮಾನವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿದ ಡಿ.ಪಿ. ಅಗ್ರವಾಲರು ಇದೇ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಗಣೇಶ್ವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಪ್ರ.ಶ.ಪೂ. 3000ದ ಆಸುಪಾಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತೆಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. (ಪಿ.ಎಸ್.ಜೆ.)

ಗತಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ : ಬದಲಾವಣೆಯೇ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಲಕ್ಷಣ–ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನಾಧರಿಸಿದ ಆರ್ಥಿಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ (ಡೈನಾಮಿಕ್ ಎಕನಾಮಿಕ್ಸ್). ಅಸ್ತವ್ಯಸ್ತಗೊಳಿಸುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಯಾವುವೂ ಸಂಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದಾಗಿ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಸಲುವಾಗಿ ಊಹೆಯನ್ನಾಧರಿಸಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ (ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಕ್ ಎಕನಾಮಿಕ್ಸ್) ಇದು ಭಿನ್ನವಾದ್ದು. ಯಾವುದಾದೊಂದು ವಿದ್ಯಮಾನದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸಿದಾಗ, ಅವನ್ನು ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಗುರಿಪಡಿಸಬಹುದಾದ ಇತರ ಅಂಶಗಳು. ಬಲಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಾಚಲಗಳು ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ತಟಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು, ಇದ್ದಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತವೆಂದು, ಊಹಿಸಿ ಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ಸ್ಥಿರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ವಿಧಾನ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸುವ ಒಂದು ಬಗೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಪದಾರ್ಥದ ಬೇಡಿಕೆ–ಸರಬರಾಯಿಗಳಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆ ಹೇಗೆ ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಾಗ ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು, ತಂತ್ರ ಮುಂತಾದ ಇತರ ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳವುದುಂಟು. ಕಾಲದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಯಾವುದೋ ದತ್ತ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ–ಸರಬರಾಯಿ–ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವಣ ಬಾಂಧವ್ಯ ಯಾವ ರೀತಿ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಸ್ಥಿರತೆಗೆ ಕಾರಣವಾದ ಅನೇಕಾನೇಕ ಬಲಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದೊಂದನ್ನೇ ಎತ್ತಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಏನು ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗುವುದೆಂಬುದು ಸ್ಥಿರ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಷಯ. ಹೀಗೆಂದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಚಲನೆಯೇ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಅದು ಹೇಳವುದಿಲ್ಲ. ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳಾಗುವುದನ್ನು ಕೂಡ ಅದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡರೂ ಆ ಬದಲಾವಣೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರವಾದ ದರದಲ್ಲಿ ಆಗುತ್ತಿದೆಯೆಂಬುದು ಅದರ ಪರಿಭಾವನೆ. ಈ ಊಹೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ಆ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ರಚನೆಯಾಗಿದೆ.

ಚಲನಾತ್ಮಕವಾದ, ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗಿರುವ ಆರ್ಥಿಕತೆಯ ಅಧ್ಯಯನವೇ ಗತಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಗುರಿ. ಒಂದಾದ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಸಂಭವಿಸುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳ ಅನಂತರ ಸ್ಥಾಪಿತವಾದ ಸಮತೋಲಗಳನ್ನು ತೌಲನಿಕ ಸ್ಥಿತಿಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ತೌಲನಿಕ ಸ್ಥಿತಿ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ತೌಲನಿಕ ಸ್ಥಿತಿ ಮಟ್ಟವನ್ನು ತಲಪುವಾಗ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅನುಸರಿಸುವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವುದು ಗತಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಉದ್ದೇಶ. ವ್ಯತ್ಯಾಸಕಾರಕವಾದ ಒಂದೊಂದೇ ಅಥವಾ ಕೆಲವೇ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ, ಇತರ ಅಂಶಗಳು ಸಮನಾಗಿವೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯು ವುದು ಇದರ ವಿಧಾನವಲ್ಲ. ಎಲ್ಲ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನೂ ಗತಿವಿಲಂಬಗಳನ್ನೂ ಕ್ರಮಾನುಗತಿ ಗಳನ್ನೂ ಸಂಚಿತ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನೂ ನಿರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೆಚ್ಚು ವಾಸ್ತವವಾದ ವಿಧಾನ. ಇದು ಅತ್ಯಂತ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ವಿಧಾನ. ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂಶವನ್ನೂ, ಅದು ಎಷ್ಟೇ ಸಣ್ಣದಾಗಿರಲಿ, ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳದೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ವಿಶ್ಲೇಷಣ ವಿಧಾನ.

ಕಾಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅವಶ್ಯ. ಅದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಚಿತ್ರ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಅದಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿನ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕೈಗೊಳ್ಳಲಾದ ಅನೇಕ ತೀರ್ಮಾನಗಳ ಪರಿಣಾಮ. ಒಂದು ಪದಾರ್ಥದ ಸರಬರಾಯಿಯಾದರೂ ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಬೆಲೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಉತ್ಪಾದಕರ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಏನೆಂಬುದನ್ನೂ ಅದು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಆರ್ಥಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಇತಿಹಾಸದ ಆರಂಭದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿತಿ ಮತ್ತು ಗತಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಖಚಿತ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಇರಲಿಲ್ಲ. ಆಡಳಿತಗಾರರಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಸಲಹೆ ನೀಡುವುದಷ್ಟೇ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿತ್ತು. ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸುವುದು ಅವರ ಪದ್ಧತಿಯಾಗಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ಯ ಅಭಿಜಾತ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಇವೆರಡೂ ವಿಶ್ಲೇಷಣ ವಿಧಾನಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಲಗ್ನವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದರು. ಮಾಲ್ಥಸ್, ರಿಕಾರ್ಡೊ, ಜೆ. ಎಸ್. ಮಿಲ್ ಈ ವಿಧಾನ ಅನುಸರಿಸಿದ್ದರು. ಕೂಲಿ, ಲಾಭ, ಗೇಣಿ ಇವನ್ನು ಕುರಿತ ಶುದ್ಧ ಸ್ಥಿರ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಬಂಡವಾಳ ಮತ್ತು ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಯ ದರಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವಾದ ಕ್ರಿಯಾವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಆ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು: ಅಲ್ಪಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗಾಗಿ ಇರುವ ಬೇಡಿಕೆಯೇ ಕೂಲಿಯನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತದೆ. ಬಂಡವಾಳದ ಸರಬರಾಯಿ ಅಧಿಕವಾದಂತೆ ಈ ಬೇಡಿಕೆಯೂ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗಾಗಿ ಬೇಡಿಕೆ ಅಧಿಕವಾದಾಗ ಕೂಲಿಯೂ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ; ಇದರಿಂದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸರಬರಾಯಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಇದು ಕೂಲಿಯ ಇಳಿತಾಯಕ್ಕೆ ಕಾರಣ. ಆಗ ಲಾಭ ಅಧಿಕವಾಗಬೇಕು. ಅದರ ಫಲ ಬಂಡವಾಳದ ಸರಬರಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಳ. ಹೀಗೆ ಕಾಲಾನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂಡವಾಳದ ಸರಬರಾಜು, ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸರಬರಾಯಿ ಈ ಮೂರೂ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತವೆ. ತತ್ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಕೂಲಿಯೂ ಅಧಿಕವಾಗಬೇಕು. ಆದರೆ ಈ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟಕಾಲ ಮುಂದುವರಿಯಲಾರದು. ಏಕೆಂದರೆ ನೆಲ ಮತ್ತು ಇತರ ನಿಸರ್ಗ ಸಾಧನಗಳು ಅಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಅಧಿಕವಾದಾಗ ನಿಸರ್ಗ ಸಾಧನಗಳು ಅಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಅಧಿಕವಾದಾಗ ನಿಸರ್ಗ ಸಾಧನಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಮಿಕ ಸರಬರಾಜಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಸರ್ಗ ಸಾಧನಗಳು ಅಚಲವಾಗಿದ್ದು ಕಾರ್ಮಿಕ ಸರಬರಾಜು ಅಧಿಕವಾದರೆ ತತ್‌ಕ್ಷಣವೋ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲಾ ನಂತರವೋ ಅಂಚಿನ ಪ್ರತಿಫಲ

ಇಳಿಮುಖವಾಗುವುದೆಂಬ ನಿಯಮ–ಇಳಿಮುಖ ಪ್ರತಿಫಲ ನಿಯಮ–ಪ್ರವೇಶಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದಾಗಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ, ಲಾಭ ಇಳಿದು, ಬಂಡವಾಳ ಶೇಖರಣೆ ತಗ್ಗಿ, ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗೆ ಬೇಡಿಕೆಯೂ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ, ಕೂಲಿ ತಗ್ಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ತಡೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಇಳಿಮುಖ ಪ್ರತಿಫಲ ನಿಯಮದಿಂದಾಗಿ ಆರ್ಥಿಕತೆ ಸ್ಥಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಕೂಲಿ ಲಾಭಗಳು ತಗ್ಗಿನಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ; ಒಟ್ಟು ಜನರ ಕಲ್ಯಾಣ ಸಾಧಿಸದು.

ಈ ಬಗೆಯ ಚಿಂತನದಿಂದಾಗಿ ಆಗ ಅನೇಕ ನೀತಿಗಳು ರೂಪಿತವಾದುವು. ಎಲ್ಲೆಲ್ಲೂ ನಿರಾಶೆ ಹಬ್ಬಲು ಇದು ಕಾರಣವಾಯಿತು. ಸ್ಥಿರ–ಗತಿ ದೃಷ್ಟಿಗಳ ಅವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಬೆರಕೆಯೇ ಇಂಥ ತೀರ್ಮಾನಗಳಿಗೆ ಕಾರಣ. ಆದರೆ 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಅಂತ್ಯದ ವೇಳೆಗೆ ಆರ್ಥಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಲು ಆರಂಭವಾಯಿತು. ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ಗತಿ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಖಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲಾಯಿತು. ಮೊದಮೊದಲು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಗತಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಬಹುತೇಕ ತ್ಯಜಿಸಲಾಯಿತು. ಗಮನ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸಂದದ್ದು ಸ್ಥಿರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ. ಆದರೆ ಈಚಿನ ಕೆಲವು ದಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಗತಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಲಾಗಿದೆ. ಇದು ಸಂಕೀರ್ಣವಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿದೆ. ಗತಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಮೊದಲು ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದ ವಿಧಾನವೇ ತೌಲನಿಕ ಸ್ಥಿತಿಶಾಸ್ತ್ರ. ಇಂದು ಗತಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣ ವಿಧಾನ ಬಹಳಮಟ್ಟಿಗೆ ಗಣಿತವನ್ನವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಬದಲಾಗುವ ಹಲವಾರು ಪ್ರಾಚಲಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಳಗೊಂಡ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ. ವ್ಯಾಪಾರ ಆವರ್ತ, ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ದೀರ್ಘಾವಧಿಯ ಆರ್ಥಿಕ ಬೆಳೆವಣಿಗೆ ಮುಂತಾದವುಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವಕ್ಕಾಗಿ ಆಧುನಿಕ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತಂತಮ್ಮವೇ ಆದ ಅನೇಕ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಜೆ.ಎಂ. ಕ್ಲಾರ್ಕ್, ರ್‍ಯಾಗ್ನಾರ್ ಫ್ರಿಶ್, ಸಿ.ಎಫ್. ಹೂಸ್, ಟಿನ್ ಬರ್ಜನ್, ಕಾಲೆಕಿ, ರಾಬರ್ಟ್ ಸನ್, ಕೇನ್ಸ್, ಹೆಬರ್ಲರ್, ಗುನ್ನಾರ್ ಮಿರ್ಡಾಲ್, ಬರ್ಟಿಲ್ ಓಡ್ಲಿನ್, ಲಿಂಡ್ಹಾಲ್, ಲುನ್‍ಬರ್ಗ್, ಸಾಮ್ಯುಯೆಲ್ ಸನ್, ಗುಡ್‍ವಿನ್, ಸ್ಮಿಥೀಸ್, ಡೋಮರ್, ಮೆಟ್ಜಲರ್, ಬಾವೆಲ್ಹೋ, ರಾಬರ್ಟ್ ಕೈನ್, ಜೆ. ಆರ್. ಹಿಕ್ಸ್, ಆಸ್ಕರ್ ಲಾಂಜ್, ಕೂಪ್ಮನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಟಿಂಟರ್ ಗತಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಮಹತ್ವಪೂರ್ಣ ಕಾಣಿಕೆ ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. (ಎನ್.ಪಿ.ಎಸ್.)

ಗತಿವಿಜ್ಞಾನ : ವಸ್ತುವಿಗೆ ಸ್ಥಾಯೀಸ್ಥಿತಿ ಇಲ್ಲವೇ ಚಲನಸ್ಥಿತಿ ಕೊಡುವ ಅಥವಾ ಅದರ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವುಂಟುಮಾಡುವ ಬಲಗಳ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಭಾಗ; ವಿಶೇಷವಾಗಿ, ಬಲಗಳಿಂದ ಪ್ರಯುಕ್ತವಾದ ಹಾಗೂ ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುವ ವೇಗವಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ವರ್ತನೆಯ ಅಭ್ಯಾಸ (ಡೈನಮಿಕ್ಸ್). ಇದು ಬಲವಿಜ್ಞಾನದ (ಮೆಕ್ಯಾನಿಕ್ಸ್) ಒಂದು ಅಂಗ. ಇತರ ಎರಡು ಅಂಗಗಳು ಸ್ಥಿತಿವಿಜ್ಞಾನ (ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್) ಹಾಗೂ ಶುದ್ಧಗತಿವಿಜ್ಞಾನ (ಕೈನ್‍ಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್). ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೇ ಸಮತೋಲ ಬಲಗಳ ಪ್ರಭಾವದಲ್ಲಿ ಇರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಅಧ್ಯಯನ ಸ್ಥಿತಿವಿಜ್ಞಾನ. ಚಲನೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಬಲಗಳ ಗೊಡವೆಗೆ ಹೋಗದೆ ಕೇವಲ ಚಲನೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಶುದ್ಧಗತಿವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತೇವೆ (**ನೋಡಿ– ಬಲವಿಜ್ಞಾನ; ಸ್ಥಿತಿ ವಿಜ್ಞಾನ; ಶುದ್ಧಗತಿ ವಿಜ್ಞಾನ**).

ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸುವ ಮುನ್ನ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸುಪ್ತವಾಗಿರುವ ಚಿಂತನೆಯ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿದಿರುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು. ಮೊದಲನೆಯದು, ಭೌತವಿಧಾನ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಚುಕ್ಕಿ ಬಿಂದು; ನೇರ ಅಂಚಿನ ಮೇಲೆ ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಚೂಪು ಮೊನೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಗೀರು ಸರಳರೇಖೆ; ಕೈವಾರ ರೇಖಿಸುವ ಆಕೃತಿ ವೃತ್ತ ಇತ್ಯಾದಿ. ಎರಡನೆಯದು ಆದರ್ಶ ಅಥವಾ ಗಣಿತವಿಧಾನ. ಇಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲಿನ ಚುಕ್ಕಿ ಅಲ್ಲ, ಬದಲು ಚುಕ್ಕಿ ಪ್ರೇರಿಸುವ ಒಂದು ಆದರ್ಶವಸ್ತು. ಭೌತವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು – ನೈಸರ್ಗಿಕ ಅಥವಾ ಮನುಷ್ಯನಿರ್ಮಿತ ಕುರಿತು – ಯೋಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರಿತು ದತ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಆ ವಸ್ತುಗಳು ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸಬಹುದೆಂದು ಮುನ್ನುಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅದೆಷ್ಟೋ ಸಲ ಓರ್ವ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಜಿನಿಯರ್ ತನ್ನ ಅರಿವೇ ಇಲ್ಲದೆ ಭೌತವಿಧಾನದ ಚಿಂತನೆಯಿಂದ ಗಣಿತವಿಧಾನದ ಚಿಂತನೆಗೆ ಜಾರಿರುತ್ತಾನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಭೂಮಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಗೋಳವೆಂದು ಒಬ್ಬ ಖಗೋಳವಿಜ್ಞಾನಿ ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಇದೊಂದು ಅಮೂರ್ತ ಗಣಿತಭಾವನೆ. ನಿಸರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕೆ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿಲ್ಲ. ಭೌತವಿಧಾನದಿಂದ ಗಣಿತವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಬದಲಿಸುವ ಮತ್ತು ಮರಳುವ ಕ್ರಿಯೆ ಬಲುಸುಲಭವೇನೂ ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ತೀರ ಅನಿವಾರ್ಯ. ಭೌತವಿಧಾನದ ಚಿಂತನೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಹಜವಾದದ್ದು, ನಿಜ. ಹಾಗೆಂದು ಅದನ್ನೇ, ಅನುಸರಿಸಿದರೆ ಪ್ರಗತಿ ಕುಂಠಿತವಾಗುವುದು. ಭೌತವಸ್ತುಗಳು ಅತಿ ಸಂಕೀರ್ಣ. ಅವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಆವಶ್ಯಕ ಗುಣಗಳೇನು ಆನುಷಂಗಿಕ ಗುಣಗಳೇನು ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಅರಿತುಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಸುವುದು ಬಲು ಕಠಿಣ. ಹೀಗಾಗಿ ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ನಿಸರ್ಗದ ಒಂದು ಗಣಿತ ಪ್ರತಿರೂಪವನ್ನು (ಮ್ಯಾತಿಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಮಾಡೆಲ್) ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರ ಮೇಲೆ, ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶದ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಬಲಗಳನ್ನೂ ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸಿ, ಆ ಪ್ರತಿರೂಪದ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಆಡುವ ಒಂದು ಕಣ್ಕಟ್ಟಿನ ಆಟವಿದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭೂಮಿ ಒಂದು ಸಮಸಾಂದ್ರತೆಯ (ಹೊಮೋಜೀನಿಯಸ್) ದೃಢ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕಲ್ಪ ಆಗಿದ್ದು ಅದರ ಮೇಲೆ ಅಂಥಿಂಥ ಬಲಗಳು ವರ್ತಿಸಿದ್ದರೆ ಅದು ಹೇಗೆ ನಡೆದು ಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು? ಈ ಗಣಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಲಭ್ಯವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ದೊರೆತ ಉತ್ತರಗಳೊಡನೆ ಹೋಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅವು ತಾಳೆಯಾದರೆ ನಮ್ಮ ಪ್ರತಿರೂಪ ಸರಿಯಾದದ್ದೆಂದೂ, ಆಗದಿದ್ದರೆ ಅಲ್ಲಿನ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಪ್ರತಿರೂಪವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆಂದೂ ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ನಾಲ್ಕು ಮಾತುಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿದೆ.

ಜಡತೆ : ಯಾವುದೇ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಬಲಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡಿದಾಗ, ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುವ ಗುಣಕ್ಕೆ ಜಡತೆ (ಇನರ್ಷಿಯ) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಒಂದೇ ಬಲದ ಪ್ರಯೋಗವಾದಾಗ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ನಿಶ್ಚಲವಸ್ತುಗಳು ಭಿನ್ನವಾದ ವೇಗವನ್ನು ಹೊಂದುವುವು. ನಿಧಾನವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ವಸ್ತುವಿನ ಜಡತೆ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಜಡತೆ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ದ್ರವ್ಯವನ್ನು (ಮ್ಯಾಟರ್) ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಬಾಹ್ಯ ಬಲದ ಪ್ರಭಾವವಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ತಾನಿರುವ ನಿಶ್ಚಲ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನಾಗಲೀ ಏಕರೀತಿವೇಗದ ಸರಳರೇಖಾ ಚಲನೆಯನ್ನಾಗಲಿ ವ್ಯತ್ಯಯಿಸದಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಗುಣ.

ರಾಶಿ : ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಜಡತೆಯ ಅಳತೆಯೇ ಎಂದರೆ ಜಡತೆಯ ಮಾನವೇ ರಾಶಿ (ಮಾಸ್).

ಕಣ : ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆಯೋ ಹಾಗೆಯೇ ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ರಾಶಿ ಇರುವ ಆದರೆ ಗಾತ್ರವಿಲ್ಲದ ಅಂದರೆ ಆಯಾಮರಹಿತ ಒಂದು ಆದರ್ಶ ವಸ್ತುವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಕಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಕಣವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಣದ ರಾಶಿಯನ್ನು m ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕಾಲ : ಘಟನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅವಧಿ (t). ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯ ಅಥವಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರಾರಂಭ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಗಳು ಕೇವಲ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದಲ್ಲದೆ, ಕಾಲ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಕಾಲ 0 ಎಂದೂ, ವರ್ತಮಾನ ಕಾಲ t ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಕಾಲದಿಂದ ವರ್ತಮಾನ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂದ ಕಾಲ t.

ಸ್ಥಾನಾಂತರಣ : ಒಂದು ಕಣ ಅಥವಾ ವಸ್ತು ಕಾಲ ಬದಲಾದಂತೆ ತಾನಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (ಸ್ಥಾನದಿಂದ) ಬೇರೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ (ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ) ಹೋದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳ (ಸ್ಥಾನಗಳ) ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಣ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇಂಥ ಸ್ಥಾನಾಂತರದ ಪರಿಮಾಣ (ಮ್ಯಾಗ್ನಿಟ್ಯೂಡ್) ಹಾಗೂ ದಿಶೆ ಎರಡೂ ಮುಖ್ಯ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವ ಗಣಿತೋತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸದಿಶ (ವೆಕ್ಟರ್) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಮಾನಗಳು : ಕಾಲ, ರಾಶಿ ಮತ್ತು ದೂರ ಇವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಮುಖ್ಯ ವಿಧಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ.

ವಿವರ	ಸಿ.ಜಿ.ಎಸ್	ಎಫ್.ಪಿ.ಎಸ್.	ಎಸ್‍ಐ
ದೂರ	ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್	ಫುಟ್	ಮೀಟರ್
ರಾಶಿ	ಗ್ರಾಂ	ಪೌಂಡ್	ಕಿಲೋಗ್ರಾಮ್
ಕಾಲ	ಸೆಕೆಂಡ್	ಸೆಕೆಂಡ್	ಸೆಕೆಂಡ್

ಮೂರು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಬರುವ 1 ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಒಂದು ಸೌರ ಮಾಧ್ಯದಿವಸದ 86164.09 ನೆಯ ಭಾಗ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ನೇರ ಕಣದ ಚಲನೆ : ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಕಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಿಂದು O ಆಗಿರಲಿ. ಕಣ t ಕಾಲದಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ $t+\delta t$ ಕಾಲದಲ್ಲಿ B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಇರಲಿ. $OA = x$ ಮತ್ತು $OB = x + \delta x$ ಆಗಿರಲಿ. OA ಗೆ ಕಣದ *x*- ನಿರ್ದೇಶಕ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಅಲ್ಲದೆ x ಎಂಬುದು ಕಾಲದ ಒಂದು ಫಲನವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ $x = f(t)$.

ಚಿತ್ರ 1

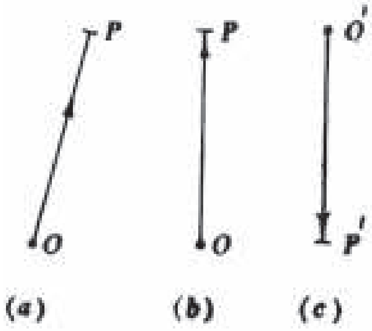
ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ : ಚಿತ್ರ(1)ರಲ್ಲಿ Aಯಲ್ಲಿದ್ದ ಕಣ δt ಕಾಲದಲ್ಲಿ δx ದೂರವನ್ನು ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಆಗ $\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}$ ಎಂಬುದು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಣದ ವೇಗ. ವೇಗ ಒಂದು ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣ.

ಒಂದು ಕಣದ ವೇಗ A ಯಲ್ಲಿ (ಕಾಲ t) v ಆಗಿದ್ದು B ಯಲ್ಲಿ (ಕಾಲ $t + \delta t$) $v + \delta v$ ಆಗಿದ್ದರೆ

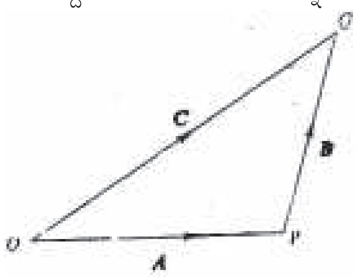
$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ = f ಎಂಬುದು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಣದ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ. ವೇಗದಂತೆಯೇ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವೂ ಒಂದು ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣ.

ಸದಿಶ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳು : ಸ್ಥಾನಾಂತರಣ, ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಇವುಗಳಿಗೆ ಕೇವಲ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ಅವನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಪರಿಮಾಣದ ಜೊತೆಗೆ ದಿಶೆಯನ್ನು ಸಹ ಹೇಳಿದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟತೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಇಂಥವಕ್ಕೆ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. ದಿಶೆಯನ್ನು ಹೇಳದೆ ಕೇವಲ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಂದ ಮಾತ್ರ ಉಕ್ತವಾದ ವುಗಳಿಗೆ ಅದಿಶ ಪರಿಮಾಣ ಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ರಾಶಿ, ಉಷ್ಣತೆ, ಜವ (ಸ್ಪೀಡ್) ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಅದಿಶಗಳು. ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಬಾಣ ಗುರುತಿನಿಂದ ಇಲ್ಲವೆ ದಪ್ಪ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 2

ಚಿತ್ರ 2 (a)ಯಲ್ಲಿ OP ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣ ವನ್ನೂ O ನಿಂದ Pಗೆ ಸಾಗುವ ದಿಶೆ ಸದಿಶದ ದಿಶೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸದಿಶ ವನ್ನು $\overrightarrow{OP}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. 2 (b), (c) ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ OP = O' P' (ಉದ್ದಗಳು ಸಮ). ಈಗ $\overrightarrow{OP}$ = A ಎಂಬ ಸದಿಶವಾದರೆ $\overrightarrow{O'P'} = -A$ ಆಗುತ್ತದೆ. A ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ।A। ಎಂಬ ಪ್ರತೀಕದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ (ಸದಿಶವನ್ನು A ಅಥವಾ ದಪ್ಪ ಅಕ್ಷರ **A** ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ).



ಚಿತ್ರ 3

ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಮೊತ್ತ: $\overrightarrow{OP}$ = **A**, $\overrightarrow{PQ}$ = **B** ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ **A, B** ಗಳ ಮೊತ್ತ $A + B = C$ ಎಂಬ ಸದಿಶ. ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸು ತ್ತದೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ Cಯ ಘಟಕಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

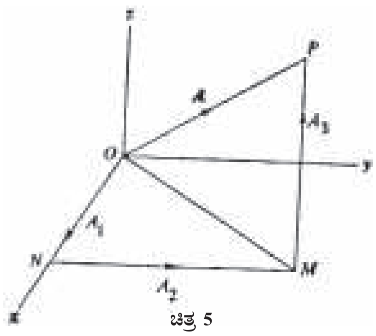
ಚಿತ್ರ 4

ಚಿತ್ರ (4) ರಲ್ಲಿ $\overrightarrow{OP}$ = A ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ c. OP = OQ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ c. $\overrightarrow{OP}$ = c.A. ಚಿತ್ರ(5)ರಲ್ಲಿ Ox, Oy, Oz ಮೂರೂ ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಅಕ್ಷಗಳು. i, j, k ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಅಕ್ಷಗಳ ನೇರ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶಗ ಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶ

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

ಇಲ್ಲಿ A_1, A_2, A_3 ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಕ್ಷಗಳ ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ A ಯ ಘಟಕಗಳು ಮತ್ತು (A_1, A_2, A_3), P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಅಲ್ಲದೆ

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$



ಚಿತ್ರ 5

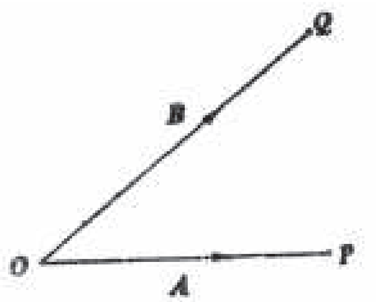
ಚಿತ್ರ(5)ರಲ್ಲಿ $\overrightarrow{OP}$ = A.

ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ : $A = A_1.i + A_2.j + A_3.k$ ಮತ್ತು $B = B_1.i + B_2.j + B_3.k$ ಆಗ $A.B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$. ಇದೇ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುವ ರೂಢಿ ಉಂಟು. A ಮತ್ತು B ಗಳು OP ಮತ್ತು OQ ಎಂಬ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಸೂಚಿತವಾದರೆ

$A.B = |A||B| \cos\theta$.ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಜ್ಞಾನದಿಂದ

$$|A||B| \cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

ವಕ್ರರೇಖೆಯ ನೇರಕಣದ ಚಲನೆ: ಚಿತ್ರ (7) ರಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಒಂದು ಕಣದ ಎರಡು ಸಮೀಪ ಸ್ಥಾನಗಳು. ಕಾಲ t ಯಲ್ಲಿ ಕಣ P ಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಾಲ $t + \delta t$ ಯಲ್ಲಿ Q ನಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದರೆ ಆಗ OP = r, $\overrightarrow{OQ} = r + \delta r$, $PQ = \delta s$. δt ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನಾಂತರ δr.



ಚಿತ್ರ 6

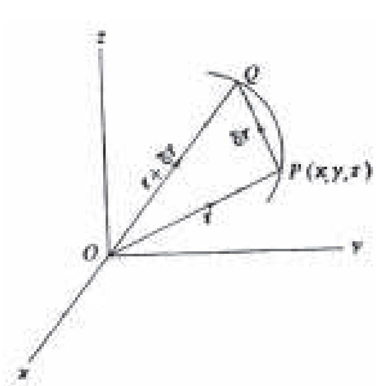
$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta r}{\delta t} = \frac{dr}{dt}$$

ಎಂಬುದು Bಯಲ್ಲಿ ಕಣದ ವೇಗ.

v ಎಂಬ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣ $|V| = \lim_{\delta t \to 0} \frac{|PQ|}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{|PQ|}{\delta s} \frac{\delta s}{\delta t} = 1 \times \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}$

$\frac{|PQ|}{\delta t}$ ನ ದಿಶೆಯೂ $\overrightarrow{PQ}$ ವಿನ ದಿಶೆಯೂ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ Q ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ PQ ಜ್ಯಾ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗು ತ್ತದೆ. ವೇಗನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡಿ ದಂತೆಯೇ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಕೂಡ ಒಂದು ಏಕಮಾನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವೇಗದ ಬದಲಾವಣೆಯಾದ್ದರಿಂದ f ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

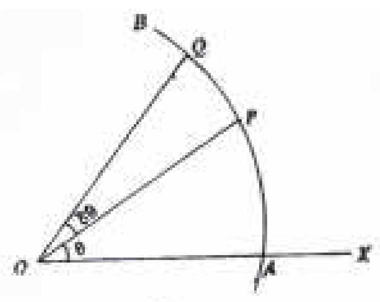


ಚಿತ್ರ 7

ಕೋನೀಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ : O*x* ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆ. ಒಂದು ಕಣ AB ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 8) t ಕಾಲದಲ್ಲಿ p ಯಲ್ಲೂ $t + \delta t$ ಕಾಲದಲ್ಲಿ Q ನಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ. $\angle xoP = \theta$, $\angle xoQ = \theta + \delta\theta$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}=\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta=\omega$$

ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಕಣದ ಕೋನೀಯ ವೇಗ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪುನಃ $\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot\theta=\dot\omega$ ಕಣದ ಕೋನೀಯ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಎಂದು ಹೆಸರು.



ಚಿತ್ರ 8

ಸಂವೇಗ (ಮೊಮೆಂಟಂ): ವಸ್ತುವಿನ ರಾಶಿ m ಹಾಗೂ ವೇಗ V ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ವಸ್ತುವಿನ ಸಂವೇಗ (P) ಎಂದು ಹೆಸರು. mv ಇವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೊಂದು ಸದಿಶೋತ್ಪನ್ನ. ಇದು ರೇಖೀಯ ಸಂವೇಗ

ಮಹತ್ವ ಅಥವಾ ಭ್ರಮಣಾಂಕ (ಮೊಮೆಂಟ್) : ಒಂದು ಬಲ F ನ ವರ್ತನರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸರಳ ರೇಖೆ l ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ d (ಷಾರ್ಟೆಸ್ಟ್ ಡಿಸ್ಟೆನ್ಸ್) ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Fd ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ l ನ್ನು ಕುರಿತು F ನ ಭ್ರಮಣಾಂಕ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದೊಂದು ಸದಿಶೋತ್ಪನ್ನ. ಸಮತಲ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ o ಎಂಬುದು F ನೆಲೆಸಿರುವ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. O ನಿಂದ F ನ ವರ್ತನರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ d ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ O ವನ್ನು ಕುರಿತು F ನ ಭ್ರಮಣಾಂಕ Fd ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಹ ಒಂದು ಸದಿಶೋತ್ಪನ್ನ.

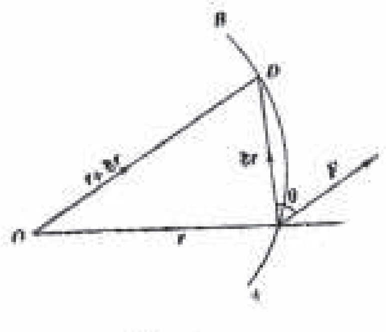
ಗತಿವಿಜ್ಞಾನದ ಕಟ್ಟಡ ನ್ಯೂಟನ್ನನ ಮೂರು ಚಲನ ನಿಯಮಗಳ ಅಡಿಪಾಯದ ಮೇಲೆ ನೆಲೆಸಿದೆ. ಇವುಗಳ ನಿರೂಪಣೆ ಹೀಗಿದೆ :

1 ಬಾಹ್ಯಬಲ ಪ್ರಯೋಗವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ವಿರಾಮಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತು ಅದೇ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು; ಏಕರೀತಿ ವೇಗದಿಂದ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತು ಅದೇ ವೇಗದಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತ ಇರುವುದು.

2 ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಸಂವೇಗದ ದರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಯ ಪ್ರಯುಕ್ತ ಬಲಕ್ಕೆ ಸರಳಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುದು; ಮತ್ತು ಈ ಬದಲಾವಣೆ ಪ್ರಯುಕ್ತಬಲದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ.

3 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ ಇರುವುದು.

ಮೊದಲನೆಯ ನಿಯಮ ಚಲನೆಯಲ್ಲಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಕಾರಣವಾದ ಬಲದ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ ಎರಡನೆಯದು ಬಲವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 9

ಒಂದು ಕಣದ ರಾಶಿ m ಮತ್ತು ವೇಗ V ಇರಲಿ, ಆಗ ಅದರ ಸಂವೇಗ $P=mV$. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಲ $F=k\frac{d}{dt}(mV)$, ಇಲ್ಲಿ k ಅನುಪಾತದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ. m ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದ್ದರಿಂದ $F=kmf$ ಸೂಕ್ತ ಏಕಮಾನಗಳ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ k ಯನ್ನು 1 ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಆಗ $F=mf$. ಈ ಬಲು ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಚಲನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಬಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ. F ಬಲದ ಅಕ್ಷೀಯ ಘಟಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ X, Y,Z ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $X=m\ddot x,\ Y=m\ddot y, Z=m\ddot z$

ಕಾರ್ಯ, ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಶಕ್ತಿ: AB ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಕಣದ ಮೇಲೆ F ಎಂಬ ಬಲ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿದೆ. ಕಣ t ಕಾಲದಲ್ಲಿ C ಯಲ್ಲಿಯೂ. t + δt ಕಾಲದಲ್ಲಿ D ಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರಲಿ. δt ಕಾಲದಲ್ಲಿ F ಬಲ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನೂ ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಚಿತ್ರ (9). ಈಗ C ಯಿಂದ Dಗೆ ಕಣ ಚಲಿಸಿದಾಗ ಆಗುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನು (ವರ್ಕ್). δW = F. δr ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ ಕಣ A ಯಿಂದ Bಗೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ಆಗುವ ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯ

$$W=\int_A^B F.dr$$

ಕಣದ ರಾಶಿ m ಸ್ಥಿರವಾದರೆ $F=m\frac{dv}{dt}$ ಅಲ್ಲದೆ δr=v. δt

$$\therefore F.dr = md\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\therefore \text{ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯ} = \int_A^B F.dr = \left[\frac{1}{2}mV^2\right]_A^B$$

$$=\frac{1}{2}m(v_B{}^2 - v_A{}^2)$$

ಕಾರ್ಯ ಮಾಡಬಲ್ಲ ಕ್ಷಮತೆಗೆ ಶಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧ; ಚಲನಶಕ್ತಿ ಮತ್ತು ವಿಭವಶಕ್ತಿ.

$\frac{1}{2}mv^2=T$ ಎಂಬುದನ್ನು ಚಲನಶಕ್ತಿ (ಕೈನೆಟಿಕ್ ಎನರ್ಜಿ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯ = $T_B - T_A$. ಕಣವನ್ನು A ಯಿಂದ Bಗೆ ಒಯ್ಯುವಾಗ F ಎಂಬ ಬಲ ಮಾಡುವ ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯ ಚಲನಶಕ್ತಿಯ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಎಂದಾಯಿತು. F.δr ಎಂಬುದು δt ಕಾಲದಲ್ಲಿ F ಮಾಡುವ ಕಾರ್ಯ. ಇದರ ದರ $F.\frac{\delta r}{\delta t}$ ಈಗ $\lim_{\delta t\to 0} F.\frac{\delta r}{\delta t}=F.\frac{dr}{dt}=F.v.$ ಕಾರ್ಯ ಮಾಡುವ ದರಕ್ಕೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ (ಪವರ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. $T=\frac{1}{2}mv^2$ ಎಂಬುದು ಚಲನಶಕ್ತಿಯೆಂದು ಹೇಳಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಇದಕ್ಕೆ ವೇಗ ಕಾರಣವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಂತೆಯೇ ಸ್ಥಾನದ ಪ್ರಭಾವದಿಂದಲೋ ರೂಪವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದಲೋ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಗುಪ್ತವಾಗಿರುವ ಶಕ್ತಿಗೆ ವಿಭವಶಕ್ತಿ (ಪೊಟೆನ್ಷಿಯಲ್ ಎನರ್ಜಿ) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆಯ ಇಲ್ಲವೇ ಶಕ್ತಿ ವರ್ಗಾವಣೆಯ ದರಕ್ಕೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ (ಪವರ್) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಎಸ್‌ಐ ಏಕಮಾನದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುತ್ತಾರೆ. (1 ವಾಟ್ = 1 ಜೂಲ್/ ಸೆಕೆಂಡ್). ಬ್ರಿಟಿಷ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಅಶ್ವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ. 1 ಅಶ್ವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ = 746 ವಾಟ್‌ಗಳು.

ಶಕ್ತಿ ಸಂರಕ್ಷಣೆ (ಕನ್ಸರ್ವೇಷನ್ ಆಫ್ ಎನರ್ಜಿ) : ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು ರೂಪದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದೇ ವಿನಾ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಅಥವಾ ನಾಶಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೆ ಶಕ್ತಿ ಸಂರಕ್ಷಣ ನಿಯಮ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಕಣಗತಿವಿಜ್ಞಾನ: ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಅದು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಪರಿಸರದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಆ ವಸ್ತು ಅನಂತ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಒಂದು ಕಣವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೌರವ್ಯೂಹದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿ, ಚಂದ್ರ, ಗ್ರಹಗಳು, ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳಿರುವ ಭಿನ್ನ ಕಣಗಳೆಂದೇ ಗಣನೆಯ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಭಾವಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಪರಮಾಣುವೊಂದರ ನ್ಯೂಕ್ಲಿಯಸಿನ ಸುತ್ತ ವಿವಿಧ ಶಕ್ತಿಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನುಗಳನ್ನು ಆ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಕಣಗಳೆಂದೇ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಣ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಆ ಕಣದ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಾಂಕ (ಡಿಗ್ರಿ ಆಫ್ ಫ್ರೀಡಂ) ಮೂರು. ಈಗ ದತ್ತ ಬಲಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಕಣದ ಚಲನೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

(a) ಮೊದಲು ಫಲಿತಬಲವನ್ನು (ಎಂದರೆ ಕಣದ ಮೇಲೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಲಗಳ ಸದಿಶ ಮೊತ್ತ) ಪಡೆದು ಬಳಿಕ ಆಯ್ದ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಘಟಕವನ್ನು ಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

(b) ಈ ಮೂರು ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಎರಡನೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಕಣದ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

(c) ಈ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷಗಳನ್ನು) ಅನುಕಲಿಸಿ ಕಣದ ವೇಗ ಘಟಕಗಳನ್ನೂ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಕೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕಕ್ಷೆಗಳು (ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಆರ್ಬಿಟ್ಸ್) : ಕಣಗತಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಅನ್ವಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉತ್ಕೃಷ್ಟ ನಿದರ್ಶನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು. ಇಂಥ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉಗಮವನ್ನು ಸೌರವ್ಯೂಹದ ಸ್ವರೂಪದ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ ಪ್ರಧಾನ ಅಂಶಗಳಿವು: 0 ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರೀಕೃತ ಬಲಕೇಂದ್ರ. P ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಕಣದ ಮೇಲೆ ಇದು ಆಕರ್ಷಣ ಬಲವನ್ನು ದತ್ತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸು ವುದು. ಈ ಬಲ OP ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0 ನೆಡೆಗೆ ನಿರ್ದೇಶಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ P ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕಕ್ಷೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಸೌರವ್ಯೂಹದ ಉದಾಹರಣೆ ಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯ ಬಲಕೇಂದ್ರ (S); ಭೂಮಿ (E) ರಾಶಿ m ಇರುವ ಒಂದು ಕಣ. ಸೂರ್ಯ– ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸುವ ಬಲ ಸೂರ್ಯ ಭೂಮಿ ದೂರದ ವ್ಯಸ್ತ ವರ್ಗಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ