始

新高等代數學

第一巻

理學士
田嶋正一著

東京
長門屋書房發行

はしがき

I. 私が東京物理學校其の他の專門學校に於て代數學に就て講義した原稿を基として。之に改訂增補を加へて一部の著述に纏めたのが本書であります。從て高等專門學校の學生諸君，並に文部省教員檢定試驗受驗者の參考のために，代數學を説明するのが本書の目的であります。

II. 此の目的のために，本書の程度は高等專門學校に於ける代數學の範圍內に止めました。而して説明は中學校第四學年修了程度の人ならば容易に理解し得られる樣に，出來るだけ平易に，而も出來るだけ懇切丁寧に說いた積りであります。從て易より難へ，具體より抽象へ，既知より未知へと，思想の發展の順序に從つて説明を進め容易に代數學の神髓を捉へらるゝ樣に努めました。

III. 本書には千餘の例題と練習とを挿入してそれに一々詳細な講義を附けて置きました。而して此等の例題は初回より最近に至るまでの文部省教員檢定試驗問題と內外教科書中の難問題とを採りました。是れ蓋し讀者諸君が代數學の神髓を會得せらるゝの助となることを信じたからであります。

IV. とは云へ淺學不才，加ふるに代數學に於けるさうした方面への新しき試みであるが爲に，結構の巧拙，説明の繁簡等．幾多改良すべき所があることゝ思ひます，幸に諸賢の御指摘を得ば，私の光榮これに過ぎません。

V. 本書を成し上げるに就ては，直接間接私を指導された諸先覺

の賜であることは申すまでもありません，又印刷に就ては東勇治氏の苦心も一通りではなく，特に編輯校正に就ては杉本貞夫氏の努力も非常であつた事と思ひます。こゝに記して深く感謝の意を表します。

大正十四年十月

著　　者

新 高 等 代 數 學

目　次

第一章　緒　論

I. 數ヲ表ハス文字ノ意味

1. 變數，常數ト函數 1
2. 算法ノ意味ト性質 2
3. 不等ノ法則 4

II. 代數函數或ハ代數式

4. 式或ハ函數 4
5. 一ツノ變數ノ有理整式 5

III. 條件ニ付イテ

6. 條件 7
7. 必要條件，充分條件ト必充條件 7

第二章　有理整函數ノ恒等式

IV. 恒等式

8. 恒等 10
9. 恒等ト等値 10

V. 恒等式ノ證明法

10. 絶對恒等式ト條件恒等式 11
11. 絶對恒等式ノ證明法 11

12. 條件恒等式ノ證明法 14
(i) 直接法
(ii) 間接法(數學的歸納法)

第三章 一次方程式ノ解法

VI. 一ツノ方程式ノ解法

13. 一ツノ方程式 21
14. 解法 21
(i) 一次整方程式
(ii) 二次以上ノ整方程式
(iii) 分數方程式
15. 二ツ以上ノ未知變數ヲ含ムーツノ方程式 28

VII. 聯立方程式ノ解法

16. 聯立方程式 28
17. 二元一次聯立方程式ノ解法(同値ノ定理) 30
(i) 置換法
(ii) 加減法
18. 一次方程式ノ解法ニ導カル、二元二次方程式 34
19. 三元以上ノ聯立一次方程式ノ解法 36
(i) 三元聯立方程式
(ii) 四元以上ノ聯立方程式
(iii) 特種高次聯立方程式

第四章 應用問題其一

VIII. 恒等式ノ應用

20 證明問題 43
21. 未定係數法 47

IX. 方程式ノ應用

22. 解法ノ形式 50
23. 解法 50

第五章 有理整式ノ變形

X. 一ツノ變數ノ函數

24. 組立除法 56
25. 剩餘定理 59
26. 整除ニ關スル定理 62
27. 未定係數ニ依ル除法 69

XI. 同次函數

28. 同次式 71
29. 對稱式 76
30. 交代式 81

XII. 根ト係數トノ關係

31. 整方程式 82
32. 根ト係數 83
33. 根ノ對稱式 90

XIII. 最大公約數ト最小公倍數

34. 最大公約數 91
35. 最小公倍數 95

第六章 分數式ト無理式ノ變形

XIV. 分數式

36. 有理分數式或ハ比 97

37. 分數演算 100
38. 分數方程式 104

XV. 無 理 式

39. 根數ト根式 110
40. 無理分數 114
41. 複素數 115
42. 無理方程式 118
(i) 一ツノ方程式
(ii) 聯立方程式

第 七 章 聯立高次方程式ノ解法

XVI. 二元聯立方程式

43. 聯立二次方程式 126
(i) 一次ト二次トノ聯立方程式
(ii) 方程式ガ一次ノ項ヲ含マザルトキ
(iii) 平方ノ項ガ全クナキ場合
(iv) 對稱ノ場合 (第一種, 第二種)
(v) 常數項ノナキ場合
(vi) 一般ノ場合
44. 一般ノ對稱方程式 133
45. 特種ノ形ノ方程式 138

XVII. 三元聯立方程式

46. 二ツガ一次, 他ガ高次ノ聯立方程式 140
47. 悉ク二次ナル場合 143
48. 對稱方程式 150
49. 消去問題 151

第 八 章 三次ト四次方程式ノ代數的解法

XVIII. 方程式ノ變換

50. 特種ノ變換 155
51. 一般ノ有理變換 159

XIX. 三次ト四次方程式ノ解法

52. 三次方程式ノ解法 162
53. Cardan ノ方法 162
54. 吟味 163
55. 四次方程式ノ Ferrari ノ解法 165

第 九 章 不等式ノ證明法

XX. 不等式ノ基礎性質

56. 不等 166
57. 絕對不等式ト條件不等式 167

XXI. 條件不等式ノ證明法

58. 直接法 168
(A) 整式
(B) 無理式
(C) 級數
59. 間接法 174
(A) 公式ニヨル法
(B) 歸納法ニヨル法
(C) 相加平均ト相乘平均

XXII. 應 用

60. 根ノ吟味 186
(i) 一元方程式問題
(ii) 二元以上方程式問題

61. x ノ二次二項式ノ性質 191
62. 簡單ナル不等式ノ解法 195
(i) 一次整不等式ノ解キ方
(ii) 二次整不等式ノ解キ方
63. 數 α ト二次方程式ノ根トノ比較 200
64. 根ノ分離 202
65. 文字無理方程式 203

第十章 函數ノ値ノ變化

XXIII. 極限概念

66. 變數ノ極限値 209
67. 無限大(擴張セラレタル極限値) 211

XXIV. 函數ノぐらふ

68. 函數概念 213
69. 函數記號 215
70. 連續變化 217
71. 點ノ座標 218
72. 平均變化率一定ノ曲線卽チ直線 221
73. 二次三項式ノ値ノ變化 223
74. 函數ノ極値 224

XXV. 函數ノ最大最小値

75. 一ツノ變數ノ函數ノ最大最小値 227
76. 二次三項式ノ最大最小値ノ求メ方 227
77. 多クノ變數ノ函數ノ最大最小値 228
78. 定理 I 228
79. 定理 II 230
80. 定理 III 231
81. 定理 IV 233

新高等代數學

第一章

緒論

I. 數ヲ表ハス文字ノ意味

1. 變數, 常數ト函數 代數ニテ文字ヲ使用スルコトハ既ニ熟知ノコトデアルガ,「如何ナル意味デ使用セラルヽカ」其ハ變數ノ意味ト常數ノ意味トノ二種デアル。

然ラバ「變數ト常數ト云フコトハ如何ナルコトデアルカ」其ノコトヲ説明スルタメニ例ヲトル。

例ヘバコヽニ物體ガ落下シツツアルトスルト, 其ノトキハ次ノ樣ナ關係ガアル,

時間(秒)	1	2	3	4	5	6	7	8	...
落下距離(糎)	490	490×4	490×9	490×16	490×25	490×36	490×49	490×64	...(1)

卽チ落チ始メヨリ一秒時ノ終リニハ 490 糎ダケ落下シ, 二秒時經テバ 490×4 糎, ... ト云フ樣ニナル。斯カル場合ニ, **落下距離**ト云フモノヲ考ヘレバ相異ナル狀態ヲ表ハス, 卽チ**變化スル**ノデアル。又**時間**モ相異ナル狀態, 卽チ**變化スル**ノデアル。ソコデ**落下距離**ト云フ言葉, 實ニ長々シイ言葉ヲ一々書クノガ面倒デアルカラ, **落下距離**$=s$ ト記號デ書キ, カクスレバ s ハ一個ノ數ヲ表ハサズシテ, (1) ノ表中ノ下段ノ一列ノ數(之ヲ**數列**ト云ヒ, 各數ヲ**項**ト云フ) 490; 490×4; 490×9; 490×16; .... ヲ表ハス。ソシテ時間ヲ定メルト, s ハ一個ノ數ヲ表ハス。例ヘバ 7 秒經テバ 490×49 ヲ表ハスノデアル, カヽル文字ヲ**變數**ト云フコトニスル。又**時間**ヲ *time* ノ頭文字ノ t ナル記號デ表ハスト, (1) ノ上段ノ數列ヲ表ハスカラ, t ハ**變數**デアル。

トコロガコヽニ變數 a ガアルトキ，其レガ數列，例ヘバ 5, 5, 5,....，卽チ同一デアルモノヲ表ハスナラバコノ變數 a ヲ**常數**ト云フコトニスル，矢張リ常數モ變數デアルガ，同一ノ數値ヲ以テ變化スルモノデアル。從テ單ナル**一個ノ數**，コヽデハ 5 ヲ表ハストモ考ヘラレルノデアル。

ソコデ文字ガ如何ナル場合ニ變數ノ意味デ，又如何ナル場合ニ常數ノ意味デ使用セラルヽカ。

例ヘバ**任意ノ第一數ニ任意ノ第二數ヲ掛ケタ積ハ第二數ニ第一數ヲ掛ケタ積ニ等シ**ト云フコトヲ公式 $ab=ba$ デ表ハスコトハ熟知ノコトデアルガ，玆デ a, b ハ實數ノ全體ヲ表ハス變數デアル。又 $2(x+1)=2x+2$ ナル式ニ於テ x ガ如何ナル數ニテモ(或ハ x ノ**値ニ拘ハラズ**トモ云フ) コノ式ハ成立スル，カヽル x ハ變數デアル。

トコロガ $2x+1=0$ 中ノ x ハ，變數デハナイ，未知ノ或ル一定數 $-\frac{1}{2}$，卽チ**未知數**ヲ表ハスノデアル，從テコノ x ハ常數デアル。又 $ax+b$ ニ於ケル式デハ x ヲ變數，a, b ヲ常數ト考ヘル場合ガ多イ。

サテ $a, b, c,$ 等ノ文字ノ各ガ數列ノ數ヲ表ハストキニ，

例ヘバ a ガ代表スル數ト b ガ代表スル數トノ和ヲ代表スルモノハ $a+b$ ナル**式**デ，コレヲ a ト b トノ**和**ト云フノデアルガ，此ノ式ハ，a, b ニソレ等ガ代表スル數ヲ一々代入シテ算術的算法ヲ施シテ得ラルヽ答ノ數列ヲ表ハスノデアル。又 a ガ代表スル數列ノ項ト b ガ代表スル數列ノ項トノ積ニヨリテ生ズル數列ヲ代表スルニ，式 ab ヲ以テスルノデアル。

サレバ式ハ又一ツノ數列ヲ表ハス，卽チ變數ヲ含ム式ハ矢張リ變數デアル。斯樣ナ變數ヲ**從變數**又ハ**函數**ト云ヒ，之ヲ前者ノ變數ト區別スル。

2. 算法ノ意味ト性質

此レヨリ代數ニ於ケル根底ノ算法ノ意味ヲ説明シテ其ノ性質ヲ附加スルコトニスル。

加法 a ニ b ヲ加ヘタ結果ハ $a+b$ ナル式デ，之ヲ**和**ト云フコトニスル。此ノ式ハ，a ト b トニ其レ等ガ代表スル數列中ノ任意ノ數ニ對シテ，唯一ツノ値ヲ表ハスノデアル，例ヘバ $a=3$; $b=-7$ ヲトラセルト，$a+b$ ハ $3+(-7)=-4$ ヲ表ハス，カヽル値ヲ**式或ハ函數ノ値**ト名ヅケル。

加法ハ**交換ノ法則**ト**組合セノ法則**，卽チ $a+b=b+a$; ト $a+(b+c)=(a+b)+c$ ニ從ヒ**等値ノ法則**

$$a=b \text{ ナラバ } a+c=b+c \text{ デアル。 又逆ニ} \tag{1}$$

$$a+c=b+c \text{ ナラバ } a=b \text{ デアル。} \tag{2}$$

ガ成リ立ツ。

減法 任意ノ二ツノ數 a ト b ガアルトキ，他ノ數 x ニ b ヲ加ヘルト，a ニナル樣ナ x ト云フ數ヲ求ムル算法デ，コノ結果ハ一通デ，$a-b$ デ表ハシ，之ヲ**差**ト云フノデアル，卽チ $a+(b-a)=b$ デアル。從テ減法ハ加法ノ逆算法デアル。

乘法 a ニ b ヲ掛ケタ結果ヲ ab ナル式デ表ハシ，之ヲ**積**ト云フノデアル。コノ結果モ一通リデ，b ガ正ノ整數ノトキハ，$ab=a+a+....$第 b 項マデ，デアリ; a ガ有限ノ値デアレバ $a.0=0.a=0$ デアル。

乘法ハ**交換，組合セト分配ノ法則**，卽チ $ab=ba$，$a(bc)=(ab)c$ ト $a(b+c)=ab+ac$ ニ從ヒ，**等値ノ法則**

$$a=b \text{ ナラバ } ac=bc \text{ デアル。} \tag{3}$$

$$ac=bc \text{ ナルトキ } c \neq 0 \text{ ナラバ } a=b \text{ デアル。} \tag{4}$$

$$ac=0 \text{ ナラバ } a=0 \text{ カ或ハ } c=0 \text{ デアル。} \tag{5}$$

ガ成立スルノデアル。

除法 $b \neq 0$ ニテ a, b ガ與ヘラレ，第三數 x ニ b ヲ掛ケレバ a トナル樣ナ x ハ一通リアリテ，之レヲ $\frac{a}{b}$ デ表ハシテ**商**ト云フ。從テ $\frac{a}{b} \times b=a$ デアルカラ除法ハ乘法ノ逆算法デアル。

羃法 $a.a....$第 n 因數マデヲ a^n デ表ハシテ之ヲ a ノ**第 n 羃**ト云ヒ，n ヲ**指數**，a ヲ**底數**ト名ヅケル。羃法ハ**指數ノ法則** $a^m.a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$ ト $(ab)^n=a^nb^n$ ニ從ヒ，**等値ノ法則**

$$a=b \text{ ナラバ } a^n=b^n \text{ デアリ。} \tag{6}$$

$$a^2=b^2 \text{ ナラバ } a=b \text{ カ，} a=-b \text{ デアル。} \tag{7}$$

ガ成立スルノデアル。

開方 **正數** a ガ與ヘラレテ，第 n 羃ガ a ニナル樣ナ正數ハ一通リアル，之ヲ $\sqrt[n]{a}$ デ表ハシ，a ノ**主第 n 羃根**ト名ヅケ，n ガ奇數デアルトキハ $-a$ ノ主第 n 羃根ハ $-\sqrt[n]{a}$ デアル。從テ $(\sqrt[n]{a})^n=a$ デアルカラ開方ハ羃法ノ逆算法デアル。

3. 不等ノ法則

ニツノ實數 a ト b トガ相等シクナイ，卽チ $a \neq b$ トスレバ

$a-b$ ガ正數ナルトキ $a>b$ デ，$a-b$ ガ負數ナルトキ $a<b$ デアルト云フノデアル從テ a ガ正或ハ負數ナラバ $a>o$ 或ハ $<o$ ト表ハスノデアル。

サテ a, b, c ガ實數ナラバ

(1) $a=b$ ニシテ $b<c$ ナラバ $a<c$ デアル，而シテ。 (8)

$a<b$ ニシテ $b<c$ ナラバ $a<c$ デアル。 (9)

(2) $a>b$ ナラバ $a+c>b+c$,

又 $a>b$ ナルトキ $c>o$ ナラバ $ac>bc$ ニシテ $c<o$ ナラバ $ac<bc$ デアル。 (10)

(3) $a>o$ ニシテ $b>o$ ナルトキハ $a^n>b^n$ ニシテ $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ デアル。 (11)

II. 代數函數或ハ代數式

4. 式或ハ函數

前節ニ述ベタル算法デ結ビ付ケラレタ文字ト數字ノ集合ヲ代數函數或ハ代數式ト云フコトニスル，ソシテ其ノ式中ニアル變數（又ハ未知數）ノ模樣ニヨリテ代數式ヲ分類ショウ，其レニハ例ニ就テ說明スル方ガ早ワカリデアルカラ其ノ樣ニスル。

例ヘバ x ト y ガ變數デ；a, b, c ガ常數ナラバ $ax^3+3bx^2+2cx+a$ ト $\frac{x}{a}+\sqrt{b}y$ ノ樣ナ式ヲ**整式**或ハ**整函數**ト云ヒ，尤モ其ノ場合バ**變數ニ關シテ**ナル言葉ヲ附加スル。又 $ay+\frac{b}{x}$ ト $\frac{ax^2+bx+c}{ax+b}$ ノ樣ナ式ヲ**分數式**或ハ**分數函數**ト云ッテ，之等ヲ總稱スルトキハ**有理式**或ハ**有理函數**ト云フ。ソレカラ以上ノ樣ナ式デナイ代數式，換言スルト根號ヲ含ム式 $\sqrt{y}+\sqrt{ax-by}$ トカ，$\frac{a}{\sqrt{x-y}}$ トカヲ**無理式**或ハ**無理函數**ト云フノデアル。

一般ニ變數又ハ變數ヲ含ム式ノ冪根ヲ含マナイ代數式ヲ**有理式**或ハ**有理函數**，冪根ヲ含ムモノヲ**無理式**或ハ**無理函數**ト名ヅケ，此レ等ニ於テ，變數或ハ變數ヲ含ム式デノ除法ヲ含マナイモノヲ**整式**，含ムモノヲ**分數式**ト名ヅケルノデアル。從テ有理整式，有理分數式，

無理整式，無理分數式ガ生ズル譯デアル。

注意 此等ノ名稱ハ式ガ最簡單ノ形ノトキニ使用スルノデ，例ヘバ $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ ナラバ $\pm(x+y)$ ガ最簡單デアルカラ之ハ有理整式デアル。又此レ等ノ名稱ハ式ノ數値ニハ關係ハ無イ。

5. 一ツノ變數ノ有理整式

一ツノ變數例ヘハ x ノ有理整式ハ算術ニ於ケル整數ノ性質ニ類似ノモノヲ有シテキテ代數ニ於テ算術ニ於ケル整數ト同ジ役目ヲ演ズルノデアル。

サテカヽル x ノ有理整函數ハ一般ニ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ナル形ヲ有シテキル，コヽニ n ハ此函數ノ次數デアリ，又「……」ハ項ノ總數ガ $n+1$ ニナル樣ニ必要ノ項ノ代リニ書イタモノデ，係數ナル $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ハ任意ノ常數デアリ，a_0 ノ外ハ零トスルコトモ出來ル。

例ヘバ $5x^6-3x^3+\frac{3}{5}x^2-x+4$ ニ於テハ $n=6$, $a_0=5$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=-3$, $a_4=\frac{3}{5}$, $a_5=-1$, $a_6=4$ デアル。

斯カル函數 (function, fonction, Funktion) ヲ記號 $f(x)$ デ表ハスコトガアル，コハ式ヲ取扱フ際ニ便利デアルノミナラズ，函數ノ値ヲ示スニモ便利デアル

例ヘバ $f(x)=3x^2-x+4$ ナルトキハ $f(0)=4$, $f(1)=6$, $f(a)=3a^2-a+4$ ト表ハス。

尙ホ x ノ函數ガ二ツ以上アレバ他ノ記號 $F(x)$ トカ，$\varphi(x)$ トカ $\psi(x)$ トカニテ表ハス。又二ツノ變數 x ト y トノ函數ナラバ記號 $f(x \cdot y)$ 等デ表ハス。

練習

(1) $f(x)=x^4-4x^2+6x-1$ ナルトキ $f(3)$, $f(0)$, $f(-2)$ ヲ求メヨ。

(2) $f(x)=x^3-3x^2+1$ ナルトキ. $f(2)+2f(0)=f(1)$ ヲ證明セヨ。

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ ナルトキ $f(3)$, $f(0)$, $f(-1)$ ヲ求メヨ。

(4) $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+7}{x^2+1}$ ナルトキ $f(-x)=f(x)$ ヲ證明セヨ。

(5) $f(x)=x^5+5x^3-9x$ ナルトキ $f(-x)=-f(x)$ ヲ證明セヨ。

(6) $f(x)=x^2+2ax-a^2$ ナルトキ $f(a)+f(-a)=0$ ヲ證明セヨ。

(7) $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$ ナルトキ $f(a)=f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ ヲ證明セヨ。

(8) $f(x)=\dfrac{2+3x}{2-3x}$ ナルトキ $f(a)\cdot f(-a)=1$ ヲ示セ。

(9) $f_1(x)=x^3+a^3$ ニシテ $f_2(x)=2ax$ ナルトキ $f_1(a)-af_2(a)=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

(10) $f_1(x)=\sqrt{x^2-4}$ ニシテ $f_2(x)=\sqrt{x^2+4}$ ナルトキ

$f_1\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+f_2\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=2a$ ナルコトヲ證明セヨ。

(11) $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{x}}$ ニシテ $f_2(x)=\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{x}}$ ナルトキ

$\{f_1(x)\}^2-\{f_2(x)\}^2=\{f_1(a)\}^2$ ナルコトヲ示セヨ。

(12) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ ナルトキ $f\{f(x)\}=x$ ナルコトヲ證セヨ。

(13) $f(x,y)=x^2+y^2-5$ ナルトキ $f(0,0)$, $f(1,0)$, $f(0,1)$, $f(1,2)$ ノ値ヲ求メヨ。

(14) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ ナルトキ $f(a,b)=-f(b,a)$ ヲ示セヨ。

(15) $f_1(x,y)=x+y$ ニシテ $f_2(x,y)=x-y$ ナルトキ

$\{f_1(a,b)\}\{f_2(a,b)\}=f_2(a^2,b^2)$ ナルコトヲ證明セヨ。

(16) $f_1(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ ニシテ $f_2(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$ ナルトキ

$f_2(x,y)=\{f_1(x,y)\}^2-2$ ナルコトヲ證明セヨ。

(17) $f_1(x,y)=x+3y$ ニシテ $f_2(x,y)=3x+9y$ ナルトキ

$xf_1(x,y)+yf_2(x,y)=\{f_1(x,y)\}^2$ ヲ示セヨ。

III. 條件ニ付イテ

6. 條件

必要ナル條件, 充分ナル條件ト必要且ツ充分ナル條件(或ハ必充條件)ト云フ言葉ハ數學デ絶エズ用ヒラルヽカラ, 此際其レ等ノ意味ヲ明白ニ理解シテ置カネバナラヌ。

サテ先ヅ條件ト云フ言葉ノ意味カラ考究シナケレバナラナイガ, 其レニハ例ヲトツテ説明スル。

例ヘバ算法ノ意味ト性質(2 頁)デ述ベタ加法ノ等値ノ法則 $a=b$ **ナラバ** $a+c=b+c$ **デアル**ハ一ツノ**定理**デ, 而モ幾何學ニ於ケル樣ナ定理デアル, 卽チ**假設**ハ $a=b$ デ, **終結**ハ $a+c=b+c$ デアル。コノ假設モ終結モ共ニ條件デアル, 又 $x=2$ **ナルトキ** x^2-2 **ノ値ヲ求メヨ**ト云フ問題デ, x ハ變數デアルカラ何ンナ値モトルコトガ出來ルガ, 特ニ $x=2$ ノトキノ値ヲ求メヨト, 求ムル事柄ヲ制限スルノデアル, コレモ矢張リ條件デアル。

一般ニ或ル事柄ヲ制限スルモノヲ**條件**ト云フノデアル。

尙ホ例ヲ附加スルト, 例ヘバ**スベテノ整數ニ於テ 4 デ割レルモノハ偶數デアル**ニテ, コレハ一ツノ斷言デアルガ, 假設ハ「4 デ割レル數」終結ハ「偶數」デアツテ前者ハスベテ整數中ヲ制限シ, 又後者モ「偶數デナケレバナラナイ」ト制限スルカラ, 兩者トモ條件デアル。

7. 必要條件, 充分條件ト必充條件

例ヘバ上ニ述ベタル定理:

$$a=b \text{ ナラバ } a+c=b+c \text{ ナリ} \tag{1}$$

ニ於テ $a=b$ ナル條件ヲ $a+c=b+c$ **ナルコトノ充分條件**ト云ヒ, $a+c=b+c$ ナル條件ヲ $a=b$ **ナルコトノ必要條件**ト云フノデアル, 一般ニ

A ナラバ B ナリ

ト云フ定理ガアレバ B ガ A ナルコトノ**必要條件**デ, A ガ B ナルコトノ**充分條件**デアル。

トコロガ加法ノ等値ノ法則 (3 頁)ニヨレバ $a+c=b+c$ **ナラバ** $a=b$ **デアル** (2) 卽チ

逆定理ガ眞デアルカラ，又 $a+c=b+c$ ハ $a=b$ ナルコトノ充分條件デアル。從テ $a+c=b+c$ ハ $a=b$ ナルコトノ必要條件（何トナレバ (1) ニヨリ）ニシテ又 (2) ニヨリテ $a+c=b+c$ ハ $a=b$ ナルコトノ充分條件デアル，カヽル條件ヲ**必充條件**ト云フノデアル，一般ニ，

A ナラバ B ナリ，逆ニ B ナラバ A ナリ。

ト云フ本，逆二定理ガ**眞デアレバ** A ハ B ナルコトノ**必充條件**ト云フノデアル。從テ又 B ハ A ナルコトノ必充條件デアル。

例 1. 二ツノ實數 A ト B トニ於テ $A^2+B^2=0$ ナルタメノ必充條件ヲ求メヨ。

講義 先ヅ必要條件ヲ求メ次ニ其レガ充分條件デアルコトヲ驗シテ，必充條件ヲ求ムルニ，

必要條件　　$A^2+B^2=0$ ナラバ $\boxed{\quad}$ ナリ

コノ $\boxed{\quad}$ ヲ發見スルノデアル。トコロガ一般ニ A, B ハ實數デアルカラ $A^2\geqq 0$, $B^2\geqq 0$ デアリ，從テ $A^2+B^2\geqq 0$ デアル，尤モ等號 = ハ A, B 共ニ 0 ナルトキノミデアルコトハ明白デアル。トコロガ今ハ $A^2+B^2=0$ ナル條件ガアルカラ $A^2+E^2\geqq 0$ ノ下號ノ場合デアルカラ，A=0, B=0 トナル（同時ニ）

即チ　　$A^2+B^2=0$ ナラバ A=0, B=0（同時ニ）ナリ，

トナツタカラ，A=0, B=0 ハ $A^2+B^2=0$ ノ必要條件デアル。

充分條件　　$\boxed{\quad}$ ナラバ $A^2+E^2=0$ ナリ

コノ $\boxed{\quad}$ ヲ求ムルノデアル。トコロガ A, B ナル實數ニ付テ研究サレタコトヨリ A=0, B=0（同時ニ）ナルトキハ $A^2+B^2=0$ ナルコト明白デアル，從テ A=0, B=0 ハ充分條件デアル。

サレバ $A^2+E^2=0$ ナルタメノ必充條件ハ A=0, B=0 デアル。

例 2. A.B=0 ナルタメノ必充條件ヲ求メヨ。

講義 乘法ノ等値法則（3 頁）ニヨリ A.B=0 ナルトキハ A=0 或ハ B=0 デアルカラ A.B=0 ノ必要條件ハ A=0 或ハ B=0 デアル。逆ニ A=0 或ハ B=0 ナラバ A.B=0 トナルカラ A=0 或 B=0 ハ A.B=0 ノ充分條件デアル。從テ A.B=0 ナルタメノ必充條件ハ A=0 或ハ B=0 デアル。

練習

(1) $ac=bc$ ナルタメノ充分條件ノ二ツヲ求ム。（答 $c=0$ ト $a=b$）

(2) $a=b$ ナルタメノ必要條件ノ一ツヲ求メヨ．（答 $a^2=b^2$）

(3) $(x-3)(x+2)=0$ ナルタメノ必充條件ヲ求メヨ。（答 $x=3$ 或 -2）

(4) $(x+y)^2+(x-y+1)^2=0$ ナルタメノ必充條件ヲ求メヨ。（但シ x, y ハ實數トス）（答 $x+y=0$, $x-y+1=0$ 即チ $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$）

第　二　章

有理整函數ノ恒等式

IV. 恒等式

8. 恒等　例ヘバ コヽニ $P=(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2$ ト $Q=(a\beta-b\alpha)^2$ ナルニツノ式ガアルト，P ハ

$$P=a^2\alpha^2+a^2\beta^2+b^2\alpha^2+b^2\beta^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+2a\alpha b\beta)$$
$$=a^2\beta^2+b^2\alpha^2-2a\alpha b\beta$$

トナリ，之ハ Q ノ式ト全ク同一ノ式トナル。

一般ニ代數式 P ガ Q ト同一ノ式デアルカ，或ハ代數算法(2 頁)ニヨリテ P ガ Q ニ變形出來ルコトガ示サルヽナラバ P ハ Q ニ**恒等**デアルト云ヒ，**P≡Q** ノ樣ナ記號デ表ハシテ之ヲ**恒等式**ト云フノデアル。

コノコトヨリシテ次ノ定理ガ斷言出來マス。

定理　x **ニ付テノ二ツノ整函數ガ恒等デアレバ其レ等ノ相對應スル項ノ係數ハ相等シ。**

卽チ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots\ldots+b_n$ ナラバ $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, ..., $a_n=b_n$ デアル。

一般ニ各項ガ二ツ以上ノ變數ノ冪ノ積ニ常數係數ヲ付ケタル者カラナルニツノ恒等式ニ付テ上ト同樣ナ定理ガ成リ立ツコトハ明ラカデアル。

9. 恒等ト等値　恒等式ハ其ノ形式ニ關係ヲ云々スルノデ，其ノ値ノ關係ヲ云々シナイコトハ十分記憶シナケレバナラナイ。併シ形式ガ等シイ以上其ノ中ニ含マルヽ文字ニ，實數ノスベテノ値ヲ與ヘルトモ，其ノ式ノ値ハ恒ニ相等シクナル筈デアル。

逆ニ二ツノ有理整式 P ト Q トノ間デ，

P ト Q 中ニ含マルヽ文字ニ，實數ノスベテノ値ヲ與ヘテ恒ニ其レ等ノ函數ノ値ガ相等シクナルト，P≡Q デアル。

ト云フコトガ斷言出來ルガ其ノ理由ハ後章(65頁)ニ讓ルコトニスル。從テ恒等ノ記號「≡」ノ代リニ等値ノ記號「=」ヲ恒等式ニ用ヒテモ差支ヘナク，又普通ニ之レヲ用ヒルノデアル。

V. 恒等式ノ證明法

10. 絕對恒等式ト條件恒等式　例ヘバ $m(a+b)\equiv ma+mb$ ノ樣ナ恒等式ハ式中ノ文字ガ如何ナル實數デモ成立ツ恒等式デアル。

斯ク式ノ文字ガ何等ノ制限モ加ヘラレズ，卽チ文字ガ如何ナル數ヲ代表スルトモ恒等トナルトキハコレヲ**絕對恒等式**ト云フノデアル。トコロガ

例ヘバ $a-b=0$ ナルトキ $a^2-b^2=0$ ナルコトヲ證明スル場合ニ，後者ハ，$a=b$ ナルトキニノミ恒等式トナル，卽チ $b^2-b^2\equiv0$ トナルノデアル。

斯ノ樣ニ或ル條件ノ下ニ於テノミ恒等式トナル場合ニハ斯カル恒等式ヲ**條件恒等式**或ハ方程式ト云ヒ，恒等式トナル條件ヲ求ムルコトヲ方程式ヲ**解ク**ト云フノデアル。

11. 絕對恒等式ノ證明法　コハ直接ニ代數算法ヲ適用シテ次ノ定理ニ基ヅイテ證明スルノデアル。

定理 I. P≡Q ナラバ Q≡P デアル。

何トナレバ P≡Q デアルコトハ P ヲ變形スレバ Q トナルカラデアル。

コノ定理ニ基ヅイテ，恒等式ヲ證明スルニ，左邊ヨリ右邊ヘ或ハ右邊ヨリ左邊ヘ證明シテモ宜シ，唯ダ計算ヲ容易ニ運バレル方ヲ選擇スレバ宜シ。

定理 II. $P \equiv R$ デ $Q \equiv R$ ナラバ $P \equiv Q$ デアル.

コレハ自明デアル。

コノ定理ニ基ヅク恒等式ノ證明法ハ，左邊ヨリ右邊ヘ，或ハ右邊ヨリ左邊ヘ變形スルコトガ一寸困難ナ場合ニ先ヅ左邊ヲ或ル文字ノ降冪ノ順ニ列ベ，次ニ右邊ヲ同一ノ文字ニシテ整頓シテ左右兩邊ガ同一式トナルコトヲ示シテ證明スル證明法デアル。

定理 III. 恒等式ノ兩邊ニ同ジ算法ヲ施シテモ矢張リ恒等式デアル　コノ定理中ノ算法ハ加法，減法デ，乘法，除法，羃法，開方ニハ條件ガ附加セラルヽガ，コハ方程式ニテ詳細ニ說明スルコトニシテ，今ハ加法(代數的)ニ止メル，コレニ基ヅク證明法ハ恒等式ノ兩邊ノ移項ヲナシテ計算ニ都合良キ形ニ恒等式ヲ變形シテ定理 I 又ハ II ニ基ヅク證明法ヲ適用スルノデアル。

サテ次ノ例題ノ恒等式ヲ證明スルガ，コレ等ハ我ガ代數學ニ於テ屢々用ヒラルヽ公式デアルカラ十分ニ記憶セラルヽコトヲ熱望スル譯ケデアル。

例 1. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

公式 I. $a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

講義　コレヲ證明スルニ定理 I ニ基ヅク方法デ證明スル，ソレニハ右邊ヨリ左邊ヲ誘導スル。併シ後章ノ除法ニヨリテ左邊ヨリ右邊ヲ誘導スルコトモ出來ル。

サテ右邊ノ掛ケ算ヲ運ブニ，先ヅ a, b, c ノ何レカノ文字ニ付テ第二ノ括弧内ヲ整頓スル，例ヘバ a ニ付テ整頓スルト，$a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$ トナル，コノ場合ニハ b, c ニ付テハ矢張リ降羃ニ排列スルコトヲ忘レテハナラナイ。ソコデ運算スレバ，

$$\begin{array}{llll}
 & a^2 & -(b+c)a & +b^2-bc+c^2 \\
 & a & +(b+c) & \\
\hline
 & a^3 & -(b+c)a^2 & +(b^2-bc+c^2)a \\
 & & (b+c)a^2 & -(b+c)^2a+(b^2-bc+c^2)(b+c) \\
\hline
 & a^3 & & +(-3bc)a+b^3+c^3 \equiv a^3+b^3+c^3-3abc.
\end{array}$$

トナルカラ左邊ニナル，故ニ公式 I ハ眞デアル。

證明　先ヅ左邊ヲ計算スレバ次ノ如シ

$$\begin{array}{llll}
 & a^2 & -(b+c)a & +b^2-bc+c^2 \\
 & a & +(b+c) & \\
\hline
 & a^3 & -(b+c)a^2 & +(b^2-bc+c^2)a \\
 & & (b+c)a^2 & -(b+c)^2a+(b^2-bc+c^2)(b+c) \\
\hline
 & a^3 & & +(-3bc)a+b^3+c^3 \equiv a^3+b^3+c^3-3abc
\end{array}$$

トナリ左邊ニ等シ。故ニ本題ハ證明セラレタリ。

練習　次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(1)

公式 II. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab \equiv \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(2)　$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

例 2. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

公式 III. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$\equiv (bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

講義　コノ恒等式ヲ證明スルニ，定理 I ニ基ヅク方法デハ困難デアルコトニ氣ガ付クカラ，定理 II ニ基ヅク方法ヲ採用スル。ソコデ

$$\begin{aligned}
左邊 &\equiv a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
&\qquad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz) \\
&\equiv (b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2caxz+a^2z^2)+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)
\end{aligned}$$

トナリ，右邊モカクナルカラ，定理 II ニヨリテ公式 III ガ眞デアル。尤モ定理 I ニヨル證明ナラバ上記ノ最後ノ式ヨリ右邊ヲ誘導スルコトガ容易デアルカラ，コノ結果ヨリ氣ガ付イテ定理 I ニヨル方法デモ宜シ。之ノ公式ハ Identity of Lagrange ト云フ。

證明　證明スベキ恒等式ノ左邊ハ

$$\begin{aligned}
左邊 &\equiv a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
&\qquad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz) \\
&\equiv (b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2caxz+a^2z^2)+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2) \\
&\equiv (bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2
\end{aligned}$$

トナル。故ニ，右邊ニ等シ，從テ本恒等式ハ眞ナリ。

練習　次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(1)　$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2+2(a+b)(a+c)+2(b+c)(b+a)$
$$+2(c+a)(c+b)=4(a+b+c)^2.$$

(2)　$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

例 3.　次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

公式 IV.　$\boldsymbol{2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)}$
$$\boldsymbol{\equiv(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

講義　直ニ氣ガ付クコトハ左邊ガ展開サレタ式デアルカラ，右邊ヲ展開シテ，定理 I ニ基ヅク方法デ證明ショウト思ヒ展開スルニ，

$$右邊\equiv[\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}][\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}]\equiv\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$\equiv-\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\equiv-[a^4-\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2+(b+c)^2(b-c)^2]$$
$$\equiv-\{a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2\}\equiv2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

トナル，卽チ左邊ガ得ラレタカラ定理 I ニヨリテ眞デアル。尙ホ後章デハ左邊ヨリ右邊ヲ誘導スル場合ゲアルガ，其ノ場合ハ目下ノ算法ヲ全ク逆ニ運ブニ過ギナイノデアル。

12. 條件恒等式ノ證明法 (i) 直接法。

コノ場合ハ條件ヲ證明スル式中ニ代入シテ絕對恒等式ニ直シテ證明スルノデアル。

例 1.　$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ ナル式ハ x, y, z ノ代リニ夫々 $x+k$, $y+k$, $z+k$ ト置クモ變ラザルコトヲ證明セヨ。

講義　證明スルコトハ

$$(x+k)^2+(y+k)^2+(z+k)^2-(y+k)(z+k)-(z+k)(x+k)-(x+k)(y+k)$$
$$\equiv x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$$

デアル，ソコデ左邊ヨリ右邊ヲ導ケバ良イガ，次ノ樣ナ工夫ヲスルト直ニ證明出來ル。卽チ公式 II (13 頁)ヨリ

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=\frac{1}{2}[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]$$

トナルカラ，右邊ニ於テ x, y, z ノ代リニ $x+k$, $y+k$, $z+k$ ヲ置イテモ不變ナルコトニ直ニ氣ガ付クコトデアル。

練習

(1)　$x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$ ナルトキハ
　　$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ ナルコトヲ證明セヨ。

(2)　$x=na-b-c$, $y=nb-c-a$, $z=nc-a-b$ ナルトキハ
　　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^3$ ナルコトヲ證明セヨ。

注意　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]$ ナルコトニ着眼セヨ。

(3)　$x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ ナルトキハ
　　$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$ ナルコトヲ證明セヨ。

例 2.　$a+b+c+d=0$ ナルトキハ
　　$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義　條件ノ $a+b+c+d=0$ ヲ證明スル式ニ代入スルニハ d ヲ他ノ文字デ表ハスノデアル，卽チ $d=-(a+b+c)$ トスル（コレハ何レノ文字ニ付テデモ宜シ），之ヲ代入スルト，證明スベキ式ハ

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=-3(b+c)(c+a)(a+b) \qquad (1)$$

トナル。之レハ絕對恒等式デアルカラ，直接法ニヨリ，

$$左邊=-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)$$

トナリ，右邊モ同樣ニ展開シテ同ジ式ガ得ラレル。從テ (1) ハ成リ立ツ，從テ $a+b+c+d=0$ ナルトキハ $a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$ トナル。

證明　$a+b+c+d=0$ ナルヲ以テ $d=-(a+b+c)$ トナル。

然ルニ　$左邊\equiv a^3+b^3+c^3+d^3\equiv a^3+b^3+c^3+[-(a+b+c)]^3$
$$\equiv a^3+b^3+c^3-[a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)]$$
$$\equiv-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)$$

トナリ，又　$右邊\equiv3(a+d)(b+d)(c+d)\equiv-3(b+c)(c+a)(a+b)$
$$\equiv-3[a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc]$$

トナルヲ以テ　$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$

ナリ。

練習

(1)　$a+b+c=0$ ナルトキハ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ナルコトヲ證明セヨ。　**注意**　公式 I (12 頁)ニヨルモ宜シ。

(2)　$a+b+c=0$ ナルトキハ $a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$ ナルコトヲ示セ。　**注意**　公式 I (1[illegible] 頁)ニヨルモ宜シ。

(3) $3s=a+b+c$ ナルトキハ

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 $3s=a+b+c$ ヨリ $(s-a)+(s-b)+(s-c)=0$ ヲ導イテ練習 (1) ニ着眼セヨ。

例 3. $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$ ナルトキ，$A=a+b+c+d$,

$B=a+b-c-d$, $C=a-b+c-d$, $D=a-b-c+d$ トスレバ

$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 一般ノ證明法ニ從ツテ與ヘラレタ條件ヲ代入スルガ，第一ノ條件ハ複雜デアルカラ，コレヲ預ツテ傳家ノ寶刀トシテ大切ニシテ止メヲ刺スニ用フルノデアル。

ソコデ $AB(A^2+B^2)\equiv(a+b+c+d)(a+b-c-d)[(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2]$，之ヲ出來ルダケ簡單ニスル，尤モ「簡單」ト云フノハ「小サイ形」ニスルト云フコトデアル。トコロガ括弧ヲホドケバ簡單ニナルトハ限ラナイ，カヽルコトハ吾々ノ屢々經驗シタコトデアル，ソコデ出來ルダケ公式ヲ用ヒテ仕末スル，ソレニハ「和ト差」ニ關スル公式ヲ思出シテ上式ヲ簡單ニスルト，

$$\equiv[\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}][\{(a+b)+(c+d)\}^2+\{(a+b)-(c+d)\}^2]$$
$$\equiv[(a+b)^2-(c+d)^2]2[(a+b)^2+(c+d)^2]=2[(a+b)^4-(c+d)^4]$$

トナル。同様ニ $CD(C^2+D^2)\equiv(a-b+c-d)(a-b-c+d)[(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2]$

$$\equiv[\{(a-b)+(c-d)\}\{(a-b)-(c-d)\}][\{(a-b)+(c-d)\}^2+\{(a-b)-(c-d)\}^2]$$
$$\equiv2[(a-b)^4-(c-d)^4]$$

トナル。トコロガ $AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$ デアルコトヲ示スニハ第一條件ガ必要デアルガ，上式デハ第一條件ニ入リ込セルコトガ出來ナイ。ソコデ絕對恒等式ノ直接法定理 III (12 頁)ニ從テ先ヅ右邊ニ左邊ニ移項シテ，$AB(A^2+B^2)-CD(C^2+D^2)=0$ ナルコトヲ證明シテ見ルト，

$$AB(A^2+B^2)-CD(C^2+D^2)\equiv2[\{(a+b)^4-(c+d)^4\}-\{(a-b)^4-(c-d)^4\}]$$

トナルガ，第一條件ヲ入リ込メルニハ尙ホ變形シナケレバナラナイ，ソレニハ第一ノ $\{\}$ ト第二ノ $\{\}$ 內ノモノヲ組合セルノガ當然デショウ，a, b ハ a, b；c, d ハ c, d デ，

$$\equiv2[\{(a+b)^4-(a-b)^4\}+\{(c-d)^4-(c+d)^4\}]$$
$$\equiv2[\{(a+b)^2-(a-b)^2\}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}+\{(c-d)^2-(c+d)^2\}\{(c-d)^2+(c+d)^2\}]$$
$$\equiv2[4ab.2(a^2+b^2)-4cd.2(c^2+d^2)]\equiv16[ab(a^2+b^2)-cd(c^2+d^2)]$$

トナツテ第一條件ノ形ガ得ラレタカラ，第一條件ヲ代入シテ 0 ナルコトガ證明出來タノデアル。

例 4. $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ ニ於テ $b^2=ac$ ナラバ

$$x=pX+qY+r,\ y=p'X+q'Y+r' \qquad (1)$$

ト置キテ得タル式 $AX^2+2BXY+CY^2+2DX+2EY+F$ ニ於テモ亦 $B^2=AC$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 今度ハ A, B, C ノ形ガカクレテヰルカラ，先ヅ A, B, C ヲ求ムル手順ニ進マネバナラナイ。ソレニハ順當ニ第一式ニ (1) ヲ代入シテ第二式ヲ作ラネバナラナイ。トコロガ吾々ノ欲スルノハ A, B, C ノ三ツダケデ，他ハ不用デアリ，而モ A, B, C ハ X, Y ノ二次ノ項ニアルカラ，コレ等ハ第一式ノ二次ノ項ニノミ (1) ヲ代入シテ得ラルヽノデアル。サレバ第一式ノ二次ノ項ノ集合 $ax^2+2bxy+cy^2$ ニ (1) ヲ代入シテ A, B, C ガ得ラレルコトニナル

卽チ $a(pX+qY+r)^2+2b(pX+qY+r)(p'X+q'Y+r')+c(p'X+q'Y+r')^2$

$$=\left.\begin{array}{l} ap^2\\ +2bpp'\\ +cp'^2 \end{array}\right| X^2+\left.\begin{array}{l} 2apq\\ +2bp'q\\ +2bpq'\\ +2cp'q' \end{array}\right| XY+\left.\begin{array}{l} aq^2\\ +2bqq'\\ +cq'^2 \end{array}\right| Y^2+R,$$ [R ハ X, Y ノ一次ノ項ト常數項デアル]

トナル，從テ $A=ap^2+2bpp'+cp'^2$, $B=apq+b(p'q+pq')+cp'q'$, $C=aq^2+2bqq'+cq'^2$ トナル。

サテコレカラ $B^2=AC$ ヲ證明スル手順ニ入ルガ，コヽデ $b^2=ac$ ナル條件ガ與ヘラレテヰルトロヲ忘レテハナラナイ。トコロガ前例ト異ナツテ條件ガ簡單デアルカラ，コレヲ式中ニ，計算ノ始メニ入レル。ソレニハ，b ハ平方デアルカラ，(カヽル場合ニ出來ルダケ一次ノモノヲエラベ) a ヲ求メテ $a=\dfrac{b^2}{c}$ トシテ入リ込ムノデアル。

カクシテ $AC=\left(\dfrac{b^2}{c}p^2+2bpp'+cp'^2\right)\left(\dfrac{b^2}{c}q^2+2bqq'+cq'^2\right)$ トナルガ，コノ際アワテヽ括弧ヲホドクト仕末ガ惡クナル。ソコデ通分スルト各因數ノ分子ハ完全平方ニナルカラ

$$=\frac{1}{c^2}(bp+cp')^2(bq+cq')^2=\frac{1}{c^2}\{(bp+cp')(bq+cq')\}^2$$
$$=\frac{1}{c^2}\{b^2pq+bc(p'q+pq')+c^2p'q'\}^2$$

トナリ。又 $B^2=\left\{\dfrac{b^2}{c}pq+b(p'q+pq')+cp'q'\right\}^2=\dfrac{1}{c^2}\{b^2pq+bc(p'q+pq')+c^2p'q'\}^2$

トナルカラ直接法定理 III (12頁)ニヨリ $AC=B^2$ デアル。

練習

(1) $Ax^2+Bxy+Cy^2$ ニ於テ $x=ax'+by'$, $y=bx'-ay'$ トシタルト

キノ形ヲ $A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2$ トス。然ルトキハ

$B'^2-4A'C'=(a^2+b^2)^2(B^2-4AC)$ ナルコトヲ證スベシ。

(2) $ax^2+2bxy+cy^2$ ニ於テ $x=px'+qy'$, $y=rx'+sy'$ ト置キテ得ベキ式ヲ $Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2$ トスレバ $B^2-AC=(b^2-ac)(ps-qr)^2$ ナルコトヲ證スベシ。

(ii) 間接法;（數學的歸納法） 先ヅ具體的例ヲ示スト,

例 n ガスベテノ正整數値ヲトルトキ次ノ式ヲ證明セヨ,

$$1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

講義 n ガスベテノ正整數値 1, 2, 3, 4, 5,.... ヲ順次トルトキニ (1) ガ成リ立ツコトヲ示スノデアル, 卽チ

n	1	2	3	4	5	6	7	....
左邊	1	1+3 =4	1+3+5 =9	1+3+5+7 =16	1+3+5+7 +9=25	1+3+5+7 +9+11=36	1+3+5+7 +9+11+13=49	..(2)

トナル。併シカヽルコトヲ, スベテノ正整數値ニ付テ計算スルニハ, 何百年, 何千年掛ケテモ完了ハ出來ナイシ, 又其ノ樣ナ長イ式ヲ一々加ヘルコトモ困難デアルガ, 誰レモ其レ程ニ多クノ正整數ニ付テ示サズトモ大抵ノ所デ確カニ (1) ガ成リ立ツ, 例ヘバ (2) 位ノ計算デ, 多クノ人ハ (1) ガ眞デアルト斷定スル, 又其レガ間違ヒヲ生ジナイノデアル。コノ精神ヲトツタノガ歸納法デアル。歸納法ハ, (2) ノ樣ナ計算ヲ限リ無ク續ケタ場合ノ結果ヲ斷定スル斷定法デアル, 卽チ何百年, 何千年モ (2) ノ樣ナ計算ヲシテモ斯々ナルト云フコトヲ斷定スル方法デアル。コノ方法ニヨリテ n **ガ如何ナル正整數**デアツテモト斷言出來ルノデアル。

サテ先ヅ (2) ニヨリテ $n=1$, 2 ノトキハ確カニ (1) ガ成リ立ツタカラ, コヽデ n ガ m ト云フ正整數ノトキモ成リ立ツト**假定**スル, 卽チ

$$1+3+5+\ldots.+(2m-1)=m^2 \qquad (3)$$

ソコデ n ガ $m+1$ ノトキニモ (1) ガ成リ立ツコトヲ示スノデアル。サレバ (3) ニヨリ $1+3+5\ldots.+(2m-1)+(2m+1)$ ハ $m^2+(2m+1)$ トナル, 卽チ $(m+1)^2$ トナル, 卽チ

$$1+3+5\ldots.+(2m-1)+[2(m+1)-1]=m^2+(2m+1)=(m+1)^2$$

トナル。從テ n ノ値ガ m ノトキ (1) ガ成リ立ツトスレバ n ガ $m+1$ ノトキモ成リ立

ツコトガ一般ニ證明出來タ, 換言スレバ, **n ノ或ル値ノトキ成立スレバ其レニ次グ n ノ値ノトキモ成立スルコトガ證明出來タノデアル。** ....(4)

トコロガ $n=1$ ノトキ成リ立ツカラ, 今ノ證明ニヨリテ $n=2$ ノトキ成リ立チ, $n=2$ ノトキ成立ツカラ, 又 (4) ニヨリテ $n=3$ ノトキ成リ立チ, 以下斯樣ニシテ一般ニ n ノスベテノ正整數値ニ付テ (1) ガ成立ツコトガ斷定出來タノデアル。

數學的歸納法 n ヲ含ム或公式ガ $n=1$ ナルトキニ眞ナルコトガワカリ, 尙ホ $n=m$ ナルトキ其ノ公式ガ眞ナリトシテ, $n=m+1$ ナルトキモ亦ソレガ眞デアルコトガ證明出來レバ其ノ公式ハ n ノ値ガ正整數値ノスベテニ付テ眞デアルト斷定出來ル。之ヲ**數學的歸納法**ト云フノデアル。

サテ次ニ加減乘法マデノ代數算法ニヨル例題ノミヲ次ニ提供スル。

例 5. n ノ正整數値ノスベテニ付テ次ノ式ガ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$1.2.3+2.3.4+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

講義 先ヅ $n=1$ ノトキ眞デアルコトハ明ラカデアル。次ニ $n=m$ ノトキ眞デアルト假定スルト,

$$1.2.3+2.3.4+\ldots.+m(m+1)(m+2)=\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3) \qquad (1)$$

トナリ. 今 $n=m+1$ ノトキ

$$1.2.3.+2.3.4+\ldots.+m(m+1)(m+2)+(m+1)[(m+1)+1][(m+1)+2]$$
$$=\frac{1}{4}(m+1)[(m+1)+1)][(m+1)+2][(m+1)+3] \qquad (2)$$

ナルコトヲ證明シタイノデアル。ソコデ (2) ヲ證明スルニハ (1) ノ左邊ヲ (2) ノ左邊ニ代入シテ

$$\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)[(m+1)+1][(m+1)+2]$$
$$\equiv\frac{1}{4}(m+1)[(m+1)+1][(m+1)+2][(m+1)+3] \qquad (3)$$

ナル恒等式ヲ證明スルコトニナル。サテ (3) ナル恒等式ヲ證明スルニハ直接法 (14頁) ヲ注意シテ左邊ヨリ右邊ヘ進ム方ガ得策デアルコトニ氣ガ付ク。從テ

$$左邊\equiv\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)(m+2)(m+3)$$
$$\equiv\frac{1}{4}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$$

トナル，サレバ次ノ證明ガ得ラレル。

證明 $n=1$ ナルトキハ，　　$1.2.3=\frac{1}{4}.1.2.3.4$

トナル。次ニ $n=m$ ナルトキ與ヘラレタ式ガ眞ナリトスレバ，

$$1.2.3.+2.3.4+\ldots\ldots+m(m+1)(m+2)=\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3) \qquad (1)$$

トナル。然ルニ與ヘラレタル式ニ於テ $n=m+1$ トオクトキハ其ノ左邊ハ

左邊 $=1.2.3+2.3.4+\ldots\ldots+m(m+1)(m+2)+(m+1)(m+2)(m+3)$ トナリ，(1) ニヨリテ

$=\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)(m+2)(m+3)$ 　トナリ，之レヲ整頓シテ

$=\frac{1}{4}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$ 　　トナル。之レ與ヘラレタル式

ニテ $n=m+1$ トオキタルトキノ右邊トナル。從テ $n=m+1$ ノトキ成リ立ツヲ以テ一般ニ n ノスベテノ正整數値ニ對シテ與ヘラレタル式ハ成立ス。

練習 歸納法ニヨリテ次ノ式ヲ證明セヨ。

(1) $a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ldots\ldots+\{a+(n-1)d\}$

$$=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}.$$

(2) $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}.$

(3) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

(4) $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2.$

第 三 章

一次方程式ノ解法

VI. 一ツノ方程式ノ解法

13. 一ツノ方程式

例ヘバ等式 $3x-4=x+6$ ガアルト；コノ等式ハ或ル條件ノ下ニ於テノミ恒等式トナル，卽チ未知條件ノ下ニ於ケル，條件恒等式デアル。卽チ $x=5$ ノ下ニ於テ恒等式トナル。又 $x^3+(a+b-c)x^2=(bc+ca-ab)x+abc$ モ未知條件ノ下ニ於テ恒等式デ，其ノ條件ハ $x=c$ 或ハ $-a$，或ハ $-b$ ノトキハ恒等式トナル。斯樣ニ

未知條件ノ下ニ於ケル條件恒等式ヲ**方程式**ト名ヅケ，未知ノ條件ヲ探出スルコトヲ**方程式ヲ解ク**ト云ヒ，未知條件ヲ**根**又ハ**解**ト名ヅケル。尤モ根ト云フ場合ハ指定サレタ文字(之ヲ**未知數**ト名ヅケル)ニ對スル條件ヲ云フノガ習慣デアル。例ヘバ上ノ例ニ於ケル方程式デハ x ノ條件ヲ求ムルノデ，$x=5$ トカ，$x=c,\ldots\ldots$ 等ハ根デアル。併シ方程式 $a^2-b^2=0$ ヲ解ケト云フ場合ニハ a ト b トノ簡單ナル形ヲ求ムルノデ，コノトキハ $a=b$ 或ハ $a=-b$ ガ解ニナル。

注意 方程式ガ解チモタナイコトモアル，例ヘバ方程式 $x+2=x+3$ ハ如何ナル x ノ條件ノ下ニ於テモ恒等式トナラナイ。カヽル場合ニハ方程式ハ**不能**デアルト云フ。又絕對恒等式デアル場合卽チ條件ガ限リナクアル場合ニ方程式ハ**不定**デアルト云フ。

14. 解法

次ニ根ヲ求ムル方法ニ付テ考究スルニ，先ヅ次ノ例ヲ考究シヤウ。

(i) **一次整方程式**

例 方程式 $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}=\frac{6x+1}{6}-\frac{5}{4}\ldots\ldots(1)$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ (1) ガ成リ立ツ條件 $x=c$ ガ得ラレタト**假定**スル，卽チ

$$\frac{3c}{8}-\frac{2c-1}{12}=\frac{6c+1}{6}-\frac{5}{4} \qquad (1)'$$

ガ恒等式デアル。トコロガコノ兩邊ニ分母ノ最小公倍數 24 ヲカケテモ恒等式ハ成立ツ〔等値法則 (3) (3 頁)〕卽チ $9c-2(2c-1)=4(6c+1)-30$ (2)

逆ニ (2) ガ成リ立テバ (1)′ ガ成リ立ツ〔等値法則 (4) (3 頁)〕卽チ $x=c$ ハ

$$9x-2(2x-1)=4(6x+1)-30 \qquad (2)'$$

ヲ成リ立タセルコトニナル。卽チ $x=c$ ハ (2)′ ノ根デアル。コノコトハ (1) ヲ成リ立タセルスベテノ x ノ値ニ付テ眞デアル。卽チ (1) ノ根ト (2)′ ノ根トハ同一デアル。カヽル方程式ヲ**同値ノ方程式**ト云フノデアル。

次ニ (2)′ ハ $5x+2=24x-26$ (3)

(3) ト同値デアルコトハ明ラカデアル，何トナレバ唯ダ (2)′ ノ兩邊ヲ計算シタ丈ケデアル。

次ニ (3) ノ兩邊ニ $-24x-2$ ヲ加ヘテ

$$5x+2-24x-2=24x-26-24x-2 \text{ 卽チ } -19x=-28 \qquad (4)$$

ヲ作ルト，コノ (4) ト (3) トハ同値デアル。何トナレバ (3) ヲ滿足スル $x=c$ ($x=c$ ガ根ナルコト) ハ (4) ヲ滿足スル，卽チ $5c+2=24c-26$ ナラバ

$5c+2-24c-2=24c-26-24c-2$ 卽チ $-19c=-28$ デアル〔等値法則 (1) (3 頁)〕，逆ニ $-19c=-28$ ナラバ $5c+2=24c-26$ デアル〔等値法則 (2) (3 頁)〕。最後ニ (4) ノ兩邊ニ $-\frac{1}{19}$ ヲカケテ得ラルヽ方程式 $x=\frac{28}{19}$ (5)

ト (4) トハ同値デアル，コハ (1)′ ヨリ (2)′ ニ移ルト同理ニヨル，

サレバ (1) ト (5) トハ同値デアルカラ根ハ $x=\frac{28}{19}$ デアル。

之ト全ク同樣ナル證明法ニヨリテ一般ニ A, B, C ガ x ノ函數ナルトキ

定理 I. 方程式 A=B ハ方程式 A+C=B+C ト同値デアル.

定理 II. C≠0 ナルトキハ方程式 A=B ハ方程式 AC=BC ト同値デアル。

例 1. 方程式 $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2$ ヲ解ケ。

講義 今後ハ定理 I, II, ヲ適當ニ適用シテ良イ。サテ與ヘラレタル方程式デハ $b-a$, $b-c$ ハ 0 デハナイ。ソハ 0 デハ除法ノ算法ガ成リ立ナイカラデアル。ソコデ定理II ニヨリ $(b-a)(b-c)$ ヲ兩邊ニカケテ

$$(x-a)(b-c)+(x-c)(b-a)=2(b-a)(b-c)$$

ノ樣ニ整式ニ直ス方ガ計算ニ便利デアル。ソコデ括弧ヲトツテ整頓スルト

$$x(b-c)-a(b-c)+x(b-a)-c(b-a)=2(b-a)(b-c)$$

トナル。次ニ定理 I ヲ適用シテ $x[(b-c)+(b-a)]=a(b-c)+c(b-a)+2(b-c)(b-a)$

トナル，之ヲ整頓シテ $x(2b-c-a)=b(2b-c-a)$ (1)

トナル。ソコデ $2b-c-a$ ハ 0 デアルカモ知レナイカラムヤミニ $2b-c-a$ デ兩邊ヲワルコトガ出來ナイ。從テ，コヽニ場合ヲ分ケテ進ム。

(i) $2b-c-a\neq 0$ トスレバ (1) ノ兩邊ヲワリテ $x=b$ ガ得ラレル

(ii) $2b-c-a=0$ ナルトキハ (1) ハ $0=0$ トナルカラ絕對恒等式トナル。從テ不定トナル。

例 2. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ解ケ。

講義 此ノ方程式ハ外見上ハ三次方程式デアルガ，整頓スルト，實ハ一次方程式デアル。其ノ整頓ガ可ナリ厄介デアルカラ少々工夫シテ公式

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-BC-CA-AB)$$

ヲ利用シテ，$(3x-a-b-c)\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]=0$ トスルト，a, b, c 中少ナクトモ二ツガ等シクナケレバ〔 〕內ハ 0 トナラナイカラ定理 II ニヨリ $3x-a-b-c=0$ トナル。從テ $x=\frac{a+b+c}{3}$ トナル。

練習 次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $mx+n=px+q$.

答 $m\neq p$ ナルトキ $x=\frac{q-n}{m-p}$; $m=p$ ニシテ $q\neq n$ ナルトキ不能; $m=p$ ニシテ $n=q$ ナルトキ不定。

(2) $(x+a)(x+b)=(x-a)^2$.

答 $3a+b\neq 0$ ナルトキ $x=\frac{a^2-ab}{3a+b}$; $a=-\frac{b}{3}$ ナルトキ $a\neq 0$ ナラバ不能，$a=b=0$ ナラバ不定。

(3) $(2a+b)(x+a)+(a+2b)(x+b)=0$.

答 $a+b\neq 0$ ナルトキ $x=\frac{2(1-a^2-ab-b^2)}{a+b}$; $a+b=0$ ナルトキ $a=\pm 1$ ナラバ不定; $a\neq\pm 1$ ナラバ不能。

(4) $a^2(x-b)=b^2(x-a)$.

答 $a^2-b^2\neq 0$ ナラバ $x=\dfrac{ab}{a+b}$; $a=b$ ナラバ不定; $a=-b\neq 0$ ナラバ不能;

(5) $\dfrac{x+1}{a+b}+\dfrac{x-1}{a-b}=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$.

($a\neq\pm b$ ナルコトハ當然デアル，ソシテ兩邊ニ a^2-b^2 ヲカケヨ)。

答 $a\neq 0$ ナラバ $x=\dfrac{a+b}{a}$ $a=0$ ナラバ不能。

(ii) 二次以上ノ整方程式

例 方程式 $x^2+3x=4$ ヲ解ケ。 ..... (1)

講義 (1) ハ $x^2+3x-4=0$ ト同値ナルコトハ既ニ明ラカデアル。ソコデ左邊ヲ因數分解スルト，

$$(x+4)(x-1)=0 \qquad \text{......(2)}$$

トナル，コハ (1) ト同値デアル。

ソコデコレヲ滿足スル根ヲ $x=c$ トスル，$(c+4)(c-1)=0$ トナルカラ $c+4=0$ 或ハ $c-1=0$ トナル〔等値法則 (5)〕，逆ニ $c+4=0$ 或ハ $c-1=0$ ナラバ $(c+4)(c-1)=0$ トナル〔7. 例 2(8 頁)〕サレバ $x+4=0$ 或ハ $x-1=0$ ヲ滿足スル根ハ (2) ヲ滿足スルカラ，之ハ (2) ト同値デアル。サレバ根ハ $x=-4$ 或ハ 1 デアル

或ハ 7 必充條件練習 3(9 頁) ニヨリテ (2) ノ必充條件ハ $x=-4$ 或ハ -1 デアル。

之ト全ク同樣ナル證明法ニヨリ一般ニ A, B, C,......ガ x ノ函數ナルトキハ

定理 III. 方程式 $A.B.C......=0$ ト $A=0,\ B=0,\ C=0,......$ トハ同値デアル。

サレバ以上ヲマトメテ次ノ方程式解法ガ得ラレル。

解法 或ル未知數 x ノ方程式ノ根ヲ求ムルニハ，此ノ方程式ヲ恰カモ已知ノ恒等式ノ如ク考ヘテ，之ニ定理 I, II, III ヲ適當ニ適用シテ $x=c$ ノ形ノ方程式ヲ探出スル樣ニ努メルト，$x=c$ ノ樣ナル値ハ方程式ノ根トナル。

例 1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ヲ解ケ。 ......(1)

講義 (1) ハ二次方程式デアルカラ $a\neq 0$ デアル。ソコデ (1) ノ左邊ヲ因數分解シテ定理 III ヲ適用スルト，

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=a\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

トナル。サレバ定理 III ニヨリ (1) ハ $x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ 或ハ $x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ ト同値デアル。從テ $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 或ハ $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ガ求ムル根デアル。

練習 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

(2) $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$.

(3) $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$.

(4) $(x-4)(x-2)+(x-5)(x-1)=(x-3)^2$. 答 $x=3\pm\sqrt{5}$

(5) $(x-a)^2+(x-b)^2=[(x-a)-(x-b)]^2$.

(6) $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$.

(7) $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$.

例 2. 方程式 $x^3=1$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ 1 ヲ左邊ヘ移シテ $x^3-1=0$....(1) トシ，左邊ヲ因數分解スルニ $x^3-1^3\equiv(x-1)(x^2+x+1)\equiv(x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$ トナル。コヽデ實數係數ダケデアレバ最早因數分解ガ出來ナイガ，コヽデ $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ ナル虚數ヲ利用スルト，

$x^3-1\equiv(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$ トナル，カヽル $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ ノ樣ナル數ハ常ニ $\equiv\sqrt{(-1)\frac{3}{4}}=\sqrt{-1}\sqrt{\frac{3}{4}}=i\sqrt{\frac{3}{4}}$ ノ形ニ書クノデアル。サレバ結局 (1) ハ

$(x-1)\left(x+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=0$ トナル。從テ $x-1=0$ 或ハ $x+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ 或ハ $x+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=0$ トナル。從テ $x=1$ 或ハ $-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ 或ハ $-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ トナル。卽チ

1 ノ立方根ハ虚數モ入レルト，三ツ存在スルノデアル。虚根中前者ヲ ω ト書クト後者ハ ω^2 トナル〔複素數(　頁)參照〕

練習　次ノ方程式ヲトケ。

(1)　$x^4+x^2+1=0.$　**注意**　$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ニ着眼セヨ。

答　$x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ 或ハ $\dfrac{+1\pm i\sqrt{3}}{2}$

(2)　$x^4-x^3-5x^2-7x+12=0.$

注意　觀察ニヨリ $x=1;\ x=3$ ガ根ナルコトヲ知ル．答　$x=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{2},\ 1,\ 3.$

例 3.　$(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$ ヲ解ケ。　……(1)

講義　先ヅ x^2+3x ガ兩括弧内ニアルコトニ着眼シテ之レヲ y トオクト，y ノミノ方程式 $(y+4)(y+5)=6$ トナルコトニ注意シテ先ヅ y ノ値ヲ求ムルト，$y^2+9y+14=0$; $y=-2$ 或 -7 トナルカラ結局 (1) ハ $x^2+3x=-2$….(2)，或ハ $x^2+3c=-7$… (3) ト同値ニナル。ソコデ (2) ト (3) ヲトイテ $-1,\ -2$ 或ハ $\dfrac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}$ ガ得ラレル。

例 4.　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ ヲ解ケ。

講義　括弧ヲ全部ホドイテハ仕末ニ困ルカラ工夫シテ先ヅ第一ト第四；第二ト第三ノ因數ヲカケルト，$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$ トナルカラ前例ノ樣ニシテトケバ良イ。

練習　次ノ方程式ヲトケ。

(1)　$3x^4-29x^2+18=0.$　答　$x=\pm 3$ 或ハ $\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(2)　$(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a)=24a^4$

注意　第一ト第二；第三ト第四因數ヲ組合セヨ。答　$x=0,\ a,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{57}}{2}a.$

(3)　$x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0.$

注意　$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0$ ニ直セ。答　$\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}.$

(iii)　分數方程式

例　$\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+5}{x(x-1)}=0$ ヲ解ケ。　(1)

講義　分母ノ最小公倍數 $x(x-1)\neq)$ デアルカラ，之ヲ兩邊ニカケテ

$$3(x-1)+6x-(x+5)=0$$

ガ得ラレル。結局上ノ方程式ハ

3x−3+6x−x−5=0
8x=8

$$x(x-1)\neq 0\ \text{ニシテ，且ツ}\ 3(x-1)+6x-(x+5)=0 \qquad (2)$$

ヲ成リ立タシムル x ノ値ヲ求ムルコトニナル。トコロガ後者ノ方程式ハ $x-1=0$ トナリテ $x=1$ ガ根デアルガ，分母ヲ 0 トスルカラ結局 (1) ヲ滿足スル x ノ値ハ存在シナイ。換言スレバ方程式ハ不能デアル。

分數方程式ノ解法：　定理 II ニヨリテ，分母ノ最小公倍數ハ 0 デナイカラ，之ヲ方程式ノ兩邊ニカケテ整方程式ニ直シテ解キ，分母ヲ 0 ニスル根ヲ捨テヨ。

斯樣ニ整方程式ニ直スコトヲ**分母ヲ拂フ**ト云フ。

例 1.　$\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+13}{x(x-1)}=0$　ヲ解ケ。

講義　$x(x-1)$ ヲ兩邊ニカケテ $3(x-1)+6x-(x+13)=0$ トナル。

サレバ $x(x-1)\neq 0$ ニシテ且ツ $x-2=0$ トガ兩立スル x ノ値ハ $x=2$ デアル。故ニ根ハ $x=2$ デアル。

注意　分數方程式ニ於テ常ニ分母ハ 0 ナル値ヲトラナイ，之ハ除法ノ定義(3 頁)ヨリ明ラカナルコトデアル。サレバ分數方程式ハ分母ノ最小公倍數 $D\neq 0$ ヲ兩邊ニカケテ整方程式ニ直シ $M=0$ ヲ得テ，$D\neq 0$ ニシテ $M=0$ ヲ滿足スル x ノ値ヲ求ムレバ良イ。

練習　次ノ方程式ヲ解ケ。

(1)　$\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x}.$

答　$a^2\neq b^2$ ナラバ $x=\dfrac{ab}{a+b}$，$a=b$ ナラバ不定，$a=-b$ ナラバ不能。

(2)　$\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0.$　答　$x=1$

(3)　$\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x^2-6x+8}.$　答　$x=5.$

15. 二ツ以上ノ未知變數ヲ含ム一ツノ方程式

例ヘバ x ト y トガ未知數デアル $x-3y=0$ ナル方程式ヲ考ヘルト：コハ $x-3y=0$ **ガ成リ立ツタメノ x ト y トノ値如何**トイフコトデアル。カヽル値ハ無數ニ存在スル。

即チ													
x	....	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	....
y	....	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	....

コノ表中各桁中ノ値ヲトルトキハ $x-3y=0$ ガ成リ立ツノデアル。從テ**不定**デアル。サレバ $x-3y=0$ ノ x, y ナル文字ハ變數デ，方程式ハ變數間ノ關係ヲ示スニ過ギナイノデアル。卽チ $\frac{x}{y}=3$ デアル。カヽル場合ニハ變數 x ト y トハ**比例スル**ト云フノデアル。又 $2x+y=3$ ナル方程式ハ $\frac{2c-3}{y}=-1$ ナル關係ニアルカラ $2x-3$ **ト y ハ比例スル**ノデアル。斯樣ニ一般ニ，

幾ツカノ未知數ニ付テノ一ツノ方程式ハ其レ等未知數ヲ變數トスル變數間ノ關係ヲ示スニ過ギナイ。

サレバ斯樣ナル方程式ヲ**トク**ト云フコトハ一次方程式ナラバ其ノ儘デ，二次方程式ナラバ一次ノ關係ヲ求ムルニ過ギナイノデアル。

例 $x^2-3xy-4y^2=0$ ヲ解ケ。

講義 方程式ノ左邊ハ $(x-4y)(x+y)$ トナルカラ方程式ハ $(x-4y)(x+y)=0$ トナル。從テ $x-4y=0$ 或ハ $x+y=0$ トナル。之レ求ムル解デアル。

練習 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $2x^2+xy-6y^2=0.$　　(2) $(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0.$

答 $2x-3y=0$ 或ハ $x+2y=0$；　答 $x+2y+=0$ 或ハ $x+2y+1=0$

VII. 聯立方程式ノ解法

16. 聯立方程式

例ヘバ $x-1=0$ ト $x^2+3x-4=0$ トハ $x=1$ ナルトキ共ニ成リ立ツ。又 $2x+y=3$ ト $4x+3y=5$ トハ $x=2$ ニシテ $y=-1$ ナラバ並立スルノデアル。又 $3x-2y+4z=13$ ト $2x+5y-3z=-9$ ト $6x+3y+2z=7$ トガ同時ニ成リ立ツタメニハ $x=1$, $y=-1$ ト $z=2$ ナラバ宜シ。斯樣ニ

二ツ以上ノ方程式ガ同ジ未知數ノ値デ滿足セラルヽトキハ其レ等ノ方程式ハ**聯立スル**ト名ヅケ，聯立スル條件ヲ求ムルコトヲ**解ク**ト云ヒ，求メラレタル條件ヲ**解**ト名ヅケルノデアル。

注意 聯立ノ條件ガ存在シナイコトガアル。例ヘバ $x-1=0$ ト $x-2=0$ トハ聯立シナイ。又 $2x-y=1$ ト $2x-y=0$ トハ聯立シナイ。斯樣ナルトキハ方程式ハ**不能**デアルト云フ。ソシテ $2x-y=1$ ト $4x-2y=2$ トハ x ト y ノ値ガ唯 $2x-y=1$ ヲ滿足スレバ宜シイカラ，カヽル場合ハ**不定**デアルト云フ。要スルニ無數ノ條件ガ得ラルトキハ**不定**デアル。

例 方程式 11x $12x-2s=\cancel{x}+7$ ト方程式 $\frac{1}{2}(6x+3)=s-x$ トガ同値ナルタメニハ s ノ値如何。

$2x+\frac{3}{2}-s=0$

講義 第一方程式ヲ解イテ $x=\frac{7+2s}{11}$，第二方程式ヲトイテ $x=\frac{2s-3}{8}$ ガ得ラレル。ソシテ二ツノ方程式ガ同値デアルカラ

$$\frac{7+2s}{11}=\frac{2s-3}{8} \qquad (1)$$

デナケレバナラナイ。ソコデ 88 ヲ兩邊ニカケテ $56+16s=22s-33$ トナル。卽チ $89=6s$ トナルカラ $s=\frac{89}{6}$ トナル。コノ値ノトキ (1) ガ成リ立チ，從テ兩方程式ハ同ジ根ヲ有スルノデアル。

練習 次ノ二ツノ方程式ガ同値ナルタメノ s ノ値ヲ求メヨ。

(1) $\left.\begin{array}{l}4x+21s=212\\12x-7s=76\end{array}\right\}$　　(2) $\left.\begin{array}{l}x+s=c\\ax-bs=c(a-b)\end{array}\right\}$

(3) $12x=9-10m$ ト $8m=7-9x$ ガ共通根ヲ有スルタメニハ m ノ値如何。答 $m=\frac{1}{2}$

(4) $3x-2m+4n-13=0$ ト $2x+5m-3n+9=0$ ト $6x+3m+2n-7=0$ トガ共通根ヲ有スルタメニハ m, n ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ。答 $m=-1$, $n=2$

17. 二元一次聯立方程式ノ解法

(i) 置換法

例 1. $3x-2y=1......(1)$, $y-2x=5......(2)$ ナル聯立方程式ヲ解ケ。

講義 同ジ x ト y トノ値デ (1) ト (2) ガ成リ立ツ樣ニ x ト y トノ値ヲ求ムルノデアルカラ，假リニ $y=s$ トスルト (1) ハ $2x-2s=1....(1)'$; (2) ハ $s-2x=5...(2)'$ トナル，從テ (1)′ ト (2)′ トガ同値，卽チ同一ノ x ノ値ヲ有スルカラ (1)′ ヨリ $x=\frac{1+2s}{2}$ ハ (2)′ ヲ滿足シナケレバナラナイ。從テ (1)′ ト (2)′ トガ同時ニ成リ立ツタメニハ $s-\frac{1+2s}{2}\times 2=5....(3)$，ニシテ，$x=\frac{1+2s}{2}$ トナラナケレバナラナイ。

卽チ $s=-6$ ト $x=\frac{1+2s}{2}$ ガ成リ立ネバナラナイ。從テ $s=-6$ デ，$x=-\frac{11}{2}$ デナケレバナラナイコトニナル。サレバ $x=-\frac{11}{2}$ デ，$y=-6$ ナラバ (1) ト (2) ガ同時ニ成リ立ツコトニナル。

以上ノ解法ヲ見ルニ，**最初ヨリ y ガ見出サレタトシテ s トセズ，y 其ノママデ解イテモ良イコトガワカル。**

之ト全ク同樣ナル證明法ニヨリ次ノ定理ヲ得ル。

定理 I. 聯立方程式 $y=\mathrm{X}$, $f(x,y)=0$ ナル一組ト $y=\mathrm{X}$, $f(x,\mathrm{X})=0$ ナル組トハ同値デアル，コヽニ X ハ x ノミノ函數デアリ，$f(x,y)$ ハ x ト y トノ函數デアル。

カヽル解法ヲ置換法ト云フノデアル。

(ii) 加減法

今度ハ上述ト異ナル方法デ解クガ，其ハ次ノ定理ニ基ヅクノデアル。

定理 II. **聯立方程式** $\left.\begin{array}{l}(1)...\mathbf{A}=\mathbf{B}\\(2)...\mathbf{C}=\mathbf{D}\end{array}\right\}$ **ト** $\left.\begin{array}{l}(3)...m\mathbf{A}+n\mathbf{C}=m\mathbf{B}+n\mathbf{D}\\(4)...\qquad\quad \mathbf{C}=\mathbf{D}\end{array}\right\}$ **トハ同値デアル。** コヽニ A, B, C, D ハ未知數ヲ含ムモノトシ而シテ m,n ハ未知數ヲ含マナイ數デ，$m\neq 0$ トスル。

證明 先ヅ (1) ト (2) ガ聯立スル樣ニ未知數 $x, y, ...$ ノ値 $a, b, ...$ ガ求メ得ラレタトスルト，其レ等ヲ (1) ト (2) ニ代入シタトキノ A, B, C, D ノ値ヲ A′, B′, C′, D′ トスレバ

$$\mathrm{A}'\equiv\mathrm{B}'....(1)';\qquad \mathrm{C}'\equiv\mathrm{D}'....(2)'$$

トナル。トコロガ $m\mathrm{A}'+n\mathrm{C}'$ ハ (1)′ ト (2)′ ニヨリ $m\mathrm{B}'+n\mathrm{D}'$ トナル。卽チ $m\mathrm{A}'+n\mathrm{C}'\equiv m\mathrm{B}'+n\mathrm{D}'....(5)$ トナル。サレバ $x=a$, $y=b$, ... ハ (3) ト (4) トヲ滿足スル。逆ニ (3) ト (4) ヲ滿足スル $x=a'$, $y=b'$, ... ヲ (3) ト (4) ニ代入スルト

$$m\mathrm{A}''+n\mathrm{C}''\equiv m\mathrm{B}''+n\mathrm{D}''....(3)',\qquad \mathrm{C}''\equiv\mathrm{D}''....(4)'\quad \text{トナル}$$

ソコデ (3)′ ヨリ $m(\mathrm{A}''-\mathrm{B}'')\equiv n(\mathrm{D}''-\mathrm{C}'')$ トナリ，(4)′ ニヨリ $m(\mathrm{A}''-\mathrm{B}'')\equiv 0$ トナル，トコロガ $m\neq 0$ デアルカラ $\mathrm{A}''-\mathrm{B}''\equiv 0$，故ニ $\mathrm{A}''\equiv\mathrm{B}''$ トナル。從テ $x=a'$, $y=b'$, ... ハ (1) ト (2) トヲ滿足スルカラ $a=a'$, $b=b'$, ... トナル，卽チ (1), (2) ト (3), (4) ハ同値ノ方程式デアル。

例 2. 聯立方程式 $3x+y=5......(1)$, $4x+3y=10......(2)$ ヲトケ。

講義 $\mathrm{A}=3x+y$, $\mathrm{B}=5$; $\mathrm{C}=4x+3y$, $\mathrm{D}=10$ ト考ヘラレル。ソコデ $m=3$, $n=-1$ トスルト，定理 II ニヨリ (1), (2) ト $3(3x+y)-(4x+3y)=5\times 3-10\times 1...(3)$, $4x+3y=10....(4)$ トハ同値デアル，卽チ $5x=5....(3)$ ト $4x+3y=10....(4)$ トハ (1), (2) ニ同値デアル。

サレバ $x=1$ ト $4+3y=10$ トハ (1) ト (2) ニ同値デアル，卽チ $x=1, y=2$ ト同値デアルカラ求ムル解デアル。

定理 III. l, l', m, m' ガ未知數ヲ含マナイ常數デ且ツ，$lm'-l'm\neq 0$ ナルトキハ聯立方程式 $\frac{1}{m}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}=\mathbf{0}......(1)\\\mathbf{Q}=\mathbf{0}......(2)\end{array}\right\}\ \text{ト}\ \left.\begin{array}{l}l\mathbf{P}+l'\mathbf{Q}=\mathbf{0}\ ......(3)\\m\mathbf{P}+m'\mathbf{Q}=\mathbf{0}...(4)\end{array}\right\}\ \text{トハ同値デアル。}$$

證明 (1) ト (2) ヲ滿足スル未知數ノ値ハ P ト Q トヲ同時ニ零トスルカラ $l\mathrm{P}+l'\mathrm{Q}$ ト $m\mathrm{P}+m'\mathrm{Q}$ トヲ同時ニ零トナス，サレバ (1), (2) ヲ滿足スル未知數ノ値ハ (3), (4) ヲ滿足スル。

逆ニ (3), (4) ヲ滿足スル未知數ノ値ハ同樣ナル理由ニヨリ

$$m'(l\mathrm{P}+l'\mathrm{Q})-l'(m\mathrm{P}+m'\mathrm{Q})=(lm'-l'm)\mathrm{P}$$
$$l(m\mathrm{P}+m'\mathrm{Q})-m(l\mathrm{P}+l'\mathrm{Q})=(lm'-l'm)\mathrm{Q}$$

ヲ滿足スル。トコロガ左邊ハ (3), (4) ヲ滿足スル未知數ノ値ニヨリヲ零トナルカラ右邊ガ零トナル筈デアル。トコロガ $lm'-l'm\neq 0$ デアルカラ $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ トナル。卽チ (3), (4) ヲ滿足スル未知數ノ値ハ (1), (2) ヲ滿足スルノデアル。サレバ (1), (2) ト (3), (4)

トハ同值デアル。

例 3. 聯立方程式 $\left.\begin{array}{ll} 4x-12y-14=0 & \ldots\ldots(1) \\ 9x+12y-12=0 & \ldots\ldots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

講義 ソコデ $P\equiv 4x-12y-14$; $Q\equiv 9x+12y-12$ デアル, ソシテ $l=9$, $l'=-4$, $m=1$, $m'=1$ トスルト, $lm'-l'm=9\times1+4\times1=13\neq 0$ デアル。サレバ定理 III ニヨリテ (1), (2) ト $9(4x-12y-14)-4(9x+12y-12)=0$; $(4x-12y-14)+(9x+12y-12)=0$ トハ同值デアル, 卽チ $-12\times13y-78=0$, $13x-26=0$ トハ同值デアル。從テ $y=-\frac{1}{2}$, $x=2$ ハ (1), (2) ト同值デアル。サレバ之レ求ムル解デアル。

例 4. $ax-6y=5a-3\ldots(1)$, $2x+(a-7)y=-7a+29\ldots(2)$ ノ二ツノ方程式中ニ於テ a ニ如何ナル值ヲ與フレバ(第一)此二ツノ方程式ハ相容レザル者トナルカ。(第二)二ツノ方程式ハ不定トナルカ。(第三) x ト y ノ值ハ相等シクナルカ。

講義 先ヅ定理 III ニヨリテ $l=\alpha-7$, $l'=6$, $m=2$, $m'=\alpha$ トオキ, $\alpha(\alpha-7)+12\neq0$ トスルト, (1), (2) ハ

$$[\alpha(\alpha-7)+12]x-(5\alpha-3)(\alpha-7)+6(7\alpha-29)=0$$
$$[\alpha(\alpha-7)+12]y-\alpha(-7\alpha+29)+2(5\alpha-3)=0$$

ト同值デアル, 卽チ $(\alpha-3)(\alpha-4)x=5(\alpha-3)(\alpha-13)\ldots(3)$; $(\alpha-3)(\alpha-4)y=-(\alpha-3)(7\alpha+2)\ldots(4)$ ト同值デアル。サレバ $\alpha(\alpha-7)+12=(\alpha-3)(\alpha-4)\neq0$ ナルトキハ (1), (2) ガ相容レ且, 不定トナラズシテ (3), (4) ヨリ x ト y トノ值ガ定マル。從テ第一ト第二ヲ考究スルニハ $(\alpha-3)(\alpha-4)=0$ ナルトキ, 卽チ $\alpha=3$ 或ハ 4 ナルトキデアル。

サテ $\alpha=3$ ノトキハ (3) ト (4) ノ關係ハ用ヒラレナイ, 卽チ定理 III ハ役立ナイカラ直接 (1) ト (2) ヨリ考究スル, ソコデ (1) ト (2) ハ $3x-6y=15-3\ldots\ldots(1)'$; $2x-4y=8\ldots\ldots(2)'$ トナル。卽チ $(1)'$ ハ $x-2y=4$ トナリ, $(2)'$ ハ $x-2y=4$ ト同值デアルカラ, $(1)'$ ガ成リ立ツ x, y ノ值デ $(2)'$ ハ成リ立ツ, ソシテ $(1)'$ ヲ滿足スル x, y ノ值ハ無數ニアルカラ結局方程式ハ不定トナル。

次ニ $\alpha=4$ ナルトキハ (1), (2) ハソレゾレ $4x-6y=17$, $2x-3y=1$ トナルカラ (1) ヲ滿足スル x, y ノ值ハ (2) ヲ滿足シナイ, 何トナレバ (1) ハ $2x-3y=\frac{17}{2}$ トナルカラデアル。サレバコノ場合ハ方程式ハ不能デアル。

最後ニ $(\alpha-3)(\alpha-4)\neq0$ ナルトキニ $x=y$ ナラバ (3) ト (4) ヨリ $5(\alpha-3)(\alpha-13)=-(\alpha-3)(7\alpha+2)\ldots(5)$ トナラネバナラナイ。トコロガ $\alpha-3\neq0$ デアル

カラ $5(\alpha-13)=-(7\alpha+2)$, 卽チ $\alpha=\frac{21}{4}$ トナル。サレバ $\alpha=\frac{21}{4}$ ナルトキハ x ト y トノ值ハ相等シクナル。

$12+m^2+7m$

練習 次ノ二ツノ方程式アリ $mx-6y=5m-3$, $2x+(m+7)y=7m+33$ ニ如何ナル值ヲ與フレバ, (a) 二ツノ方程式ハ相容レザルベカラザルカ, (b) 二ツノ方程式ハ不定ノ組合ヲナスベキカ。 答 $m=-4$ (不能), -3 (不定)

$12+m^2+7m=0$

例 5. x, y ニ就テノ次ノ聯立方程式ヲ吟味セヨ。

$$(2k+1)x+(4k+3)y=3-k\ldots(1);\quad (k+2)x+(3k+4)y=1+k\ldots(2)$$

講義 定理 III ニヨリ $(2k+1)(3k+4)-(k+2)(4k+3)=2(k+1)(k-1)\neq0$ デアレバ (1) ト (2) ハ

$$2(k+1)(k-1)x=-(7k+9)(k-1)\ldots(1)';\quad 2(k+1)(k-1)y=(3k+5)(k-1)\ldots(2)'$$

ト同值デアル。從テ $x=-\frac{(7k+9)(k-1)}{2(k+1)(k-1)}=-\frac{7k+9}{2(k+1)}$, $y=\frac{(3k+5)(k-1)}{2(k+1)(k+1)}=\frac{3k+5}{2(k+1)}$ トナル。之レ求ムル解デアル。

サテ $2(k+1)(k-1)=0$ ナルトキハ $k=-1$ 或ハ 1 デアル。コノトキハ定理 III ヲ (1), (2) ニ適用スルコトガ出來ナイガ, (1), (2) ハソレゾレ次ノ樣ニナル

$k=-1$ ノトキハ $-x-y=4$, $x+y=0$

$k=1$ ノトキハ $3x+7y=2$, $3x+7y=2$

トナル。サレバ $k=-1$ ノトキハ方程式ハ不能デ, $k=1$ ノトキハ不定デアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトキ, 且ツ之ヲ吟味セヨ

$$(3+\lambda)x+4y=5-3\lambda;\quad 2x+(5+\lambda)y=8.$$

例 6. $ax+ly=p\ldots(1)$, $bx+my=q\ldots(2)$, $cx+ny=r\ldots(3)$ ナル三方程式中ノ二ツガ定マリタル解ヲ有スル聯立方程式ヲ成セルトキハ

$$(a^2+b^2+c^2)x+(al+bm+cn)y=A\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$
$$(al+bm+cn)x+(l^2+m^2+n^2)y=B\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

モ亦定マリタル解ヲ有スル聯立方程式ヲ成セルコトヲ證明セヨ。

講義 (1), (2), (3) 中二ツガ定マリタル解ヲ有スル, 卽チ不定ヤ不能トハナラナイト

云フノデアルカラ定理 III ガ適用出來ルコトヲ意味スル，從テ

$$am-bl \neq 0 \text{ デアルカ}, \quad bn-cm \neq 0 \text{ デアルカ}, \quad \text{或ハ } an-cl \neq 0 \text{ デアル。}$$

トコロガ (4) ト (5) ガ定マリタル解ヲ有スルニハ定理 III ニヨリ

$$(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)-(al+bm+cn)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ガ 0 トナラナイコトヲ示セバ定マル。トコロガ上式ハ(13 頁) ニヨリテ

$$\equiv (am-bl)^2+(bn-cm)^2+(cl-an)^2$$

デアル。ソシテコレ等中ノ一ツハ必ズヤ 0 デハナイ。從テ (6) ハ 0 デハナイ。サレバ (4) ト (5) ハ定マリタル解ヲ有スルコトトナル。

例 7. $x+y=a,\ x-y=b,\ xy(x-y)^2=c$ ヨリ $x,\ y$ ヲ消去セヨ。

講義 二ツノ未知數ニ付テ二ツノ方程式ガアレバ一般ニ x, y ノ値ガ定マル(特別ノ場合ハ不定，不能トナルガ)，トコロガ x, y ニ付テ三ツノ方程式ガアレバ一般ニコレ等ノ方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ハ存在シナイ，卽チ不能デアルガ特別ニ係數間ニ或ル關係ガアルトキニ三ツノ方程式ハ聯立スル其ノ條件中ニハ x, y ガ存在シナイカラ其レヲ消去シタ**終結式**ト云フノデアル。

サレバ問題ハ三ツノ方程式ガ同時ニ成リ立ツタメノ條件ヲ求ムレバ宜シ。

ソコデ第一ト第二方程式ガ同時ニ成リ立ツ x, y ノ値ヲ求ムレバ $x=\dfrac{a+b}{2},\ \ y=\dfrac{a-b}{2}$ デアル，ソシテ之レ以外ニハ最早ヤ第一，第二ノ方程式ヲ滿足スル解ガナイ。從テ第一，第二，第三方程式ガ同時ニ成リ立ツタメニハ第三方程式ニ $x=\dfrac{a+b}{2},\ y=\dfrac{a-b}{2}$ ヲ代入シタル $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2}\cdot b^2=c$ 卽チ $b^2(a^2-b^2)=4c$ デナケレバナラナイ。之レ求ムル終結式デアル。

練習

(1) $ax+by+cz=0,\ a'x+b'y+c'z=0,\ a''x+b''y+c''z=0$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

注意 x, y, z ハ 0 デハナイ他ノ値ヲトルトキニ於テ x, y, z ヲ消去スルノデアル。サレバ各方程式ヲ z デワリテ $\dfrac{x}{z}=X,\ \dfrac{y}{z}=Y$ トオイテ X, Y ヲ消去セヨ。

答 $a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$

18. 一次方程式ノ解法ニ導カル、二元二次方程式

先ヅ基礎定理ヲ述ベヤウ，

定理 IV. A, B 及ビ C ガ整式ナルトキハ聯立方程式

$$\mathbf{A.B=0, \quad C=0}$$

ハ二組ノ聯立方程式 $\left.\begin{array}{l}\mathbf{A=0}\\ \mathbf{C=0}\end{array}\right\}$ **ト** $\left.\begin{array}{l}\mathbf{B=0}\\ \mathbf{C=0}\end{array}\right\}$

ト同値デアル。

證明 A.B=0 ハ二ツノ方程式 A=0 ト B=0 ト同値デアル。從テ A.B=0, C=0 ナル聯立方程式ハ A=0, C=0 ト B=0, C=0 ノ二組ト同値デアル。

例 1. $x^2-2xy=0 \ldots\ldots (1),\ (x+y-1)(2x+y-3)=0 \ldots (2)$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ定理 IV ニヨリ (1) ト (2) ハ

$$\left.\begin{array}{l}x^2-2xy=0\\ x+y-1=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(3) \qquad \left.\begin{array}{l}x^2-2xy=0\\ 2x+y-3=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(4)$$

ト同値デアル。トコロガ又定理 IV ニヨリテ (3) ト (4) ハ

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ x+y-1=0\end{array}\right\}\ldots(3)', \quad \left.\begin{array}{l}x-2y=0\\ x+y-1=0\end{array}\right\}\ldots(3)'' \quad \text{ト} \quad \left.\begin{array}{l}x=0\\ 2x+y-3=0\end{array}\right\}\ldots(4)', \quad \left.\begin{array}{l}x-2y=0\\ 2x+y-3=0\end{array}\right\}\ldots(4)''$$

ニ同値デアルカラ (1), (2) ハ (3)′, (3)″, (4)′, (4)″ ト同値デアル。トコロガ (3)′, (3)″, (4)′, (4)″ ノ解ハソレゾレ $x=0,\ y=1;\ x=\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{1}{3};\ x=0,\ y=3;\ x=\dfrac{6}{5},\ y=\dfrac{3}{5}$ トナルカラ (1), (2) ノ解ガ得ラレタコトニナル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $xy-y=0,\ 3x-8y+5=0.$ 答 $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{3}\\ y=0\end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l}x=1\\ \ =1\end{array}\right\}.$

(2) $x(x-y)(x+y)=0,\ x+2y-5=0.$ 答 $\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\};\ x=y=\dfrac{5}{3};\ \left.\begin{array}{l}x=-5\\ y=5\end{array}\right\}.$

(3) $y^2=(x-1)^2,\ 2x+3y-7=0.$ 答 $\left.\begin{array}{l}x=-4\\ y=5\end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l}x=2\\ y=1\end{array}\right\}.$

(4) $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2,\ (x+y)^2=1.$ 答 $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\};\ \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{13}{5}\\ y=-\dfrac{8}{5}\end{array}\right\}.$

例 2. $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2(3-y)}{x}+\dfrac{3}{2}\ldots(1),\quad \dfrac{y+3}{x}=\dfrac{3y-5}{x}+1\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 分母ヲ拂ヘバ (1) ハ $x-2y+4=0 \ldots\ldots (1)'$ トナリ，(2) ハ $x+2y-8=0 \ldots\ldots (2)'$

ト同値トナルコトニ着眼セヨ。然ラバ求ムル解 $x=2,\ y=3$ ヲ得。

例 3. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=1\ldots\ldots(1),\quad \dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=5\ldots\ldots(2)$ ヲ解ケ。

講義 今度ハ分母ヲ拂ヘバ二次方程式トナルカラコノ様ナル形ノ方程式デハ $\dfrac{1}{x}=\mathrm{X},\ \dfrac{1}{y}=\mathrm{Y}$ トオクト, (1), (2) ハソレゾレ $2\mathrm{X}+\dfrac{5}{3}\mathrm{Y}=1\ldots(1)',\ 9\mathrm{X}+10\mathrm{Y}=5\ldots(2)'$ トナル。コハ X, Y ニ付テノ一次聯立方程式デアルカラ, トイテ $\mathrm{X}=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{Y}=\dfrac{1}{5}$ ガ得ラレル。從テ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ ト同値ニナルカラ $x=3,\ y=5$ ガ求ムル解トナル。

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $\dfrac{7}{2x}+\dfrac{1}{3y}=0,\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{14}{y}+3=0.$ (2) $10x+\dfrac{6}{y}=5,\ 15x+\dfrac{10}{y}=8.$

19. 三元以上ノ聯立一次方程式ノ解法

(i) **三元聯立方程式** 今迄ノ定理 I, II, III, IV ノ中 III ヲ除イテ他ハ聯立方程式ガ三ツ以上ノ場合ニモ擴張セラル, コノ證明ハ全ク同樣ニナスコトガ出來ルカラコヽニ略スル。

例 1. 次ノ二組ノ方程式ガ同ジ根ヲ有スルタメニハ a, b, c ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。

$$\left.\begin{aligned} ax-by+cz&=2\ldots\ldots(1)\\ ax+by-cz&=10\ \ldots\ldots(2)\\ ax+by+cz&=22\ \ldots\ldots(3)\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})\qquad \left.\begin{aligned} x+y+z&=6\ \ldots\ldots(1)'\\ 2x-y+3z&=9\ \ldots\ldots(2)'\\ 5x+2y-3z&=0\ldots\ldots(3)'\end{aligned}\right\}(\mathrm{II})$$

講義 先ヅ (II) ヲ滿足スル解ヲ求ムルニ, 先ヅ y ヲ消去スル, ソレニハ

$(1)'+(2)'$ ヲ作リ, $3x+4z=15\ldots.(4)'$; $(2)'\times2+(3)'$ ヲ作リ $9x+3z=18\ldots.(5)'$

トナル。サレバ $(1)'\ (4)'\ (5)'$ ト (II) トハ同値デアル。

次ニ x ヲ消去スルタメニ $(4)'\times3-(5)'$ ヲ作ルト, $9z=27$, 卽チ $z=3\ldots.(6)'$

サレバ $(1)', (4)', (6)'$ ト (II) トハ同値デアルカラ $(1)', (4)'\ (6)'$ ハ

$$x+y+3=6,\qquad 3x+12=15,\qquad z=3$$

卽チ $x+y=3,\ x=1,\ z=3$ 卽チ $y=2,\ x=1,\ =3$ トナル。之レ求ムル (II) ノ解デアル。コノ値ガ (I) ヲ滿足スルカラ (I) ハ $a-2b+3c=2\ldots.(4),\ a+2b-3c=10\ldots.(5),$

$a+2b+3c=22\ldots.(6)$ トナル。コレガ聯立シナケレバナラナイ。其レガタメニハコレヲトイテ $a=6,\ b=5,\ c=2$ ガ得ラレル, 卽チコレ等ノ値ノトキ (I) ト (II) ハ同値デアル。

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解キ, 且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$x+y+\lambda z=1\ldots\ldots(1),\ x+\lambda y+z=\lambda\ldots\ldots(2),\ x+y+z=3,\ldots\ldots(3)$$

講義 先ヅ (1) ト (2); (1) ト (3) トノ間ニテ x ヲ消去スルト,

$(1)-(2)$; $(1-\lambda)y+(\lambda-1)z=1-\lambda\ldots.(4)$ 又 $(1)-(3)$; $(\lambda-1)z=-2\ldots.(5)$

トナル。卽チ (1), (2), (3) ト

$$x+y+z=3\ldots.(3),\quad (\lambda-1)(z-y+1)=0\ldots.(4),\quad (\lambda-1)z=-2\ldots.(5)$$

トハ同値デアルトコロガ $\lambda=1$ ナラバ (5) ガ不成立デアルカラコノトキハ方程式ハ不能デアル。次ニ $\lambda\neq1$ トスレバ (3), (4), (5) ハ

$$x+y+z=3\ldots.(3),\qquad z-y+1=0\ldots.(4),\qquad z=-\frac{2}{\lambda-1}\ldots.(5)$$

ト同値デアルカラ $z=-\dfrac{2}{\lambda-1},\ y=\dfrac{\lambda-3}{\lambda-1},\ x=3-\dfrac{\lambda-3}{\lambda-1}+\dfrac{2}{\lambda-1}-\dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda-1}$ トナル。

例 3. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$ax+by+cz=1\ldots(1),\quad bx+cy+az=1\ldots(2),\quad cx+ay+bz=1\ldots(3)$$

講義 今度ハ x, y, z ヲ消去スルハ x, y, z ノ係數ガ文字デアルカラコレカラ假定ヲ設ケル繁ヲ避ケテ常數項ヲ消去スル,

$(1)-(2)$; $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0\ldots.(4)$ ト

$(1)-(3)$; $(a-c)x+(b-a)y+(c-b)z=0\ldots.(5)$

ト (1) トハ (1), (2), (3) ト同値デアル。ソコデ $(b-c)(a-c)-(a-b)(b-a)\neq0$ トスルト,

定理 III ニヨリ $[(b-c)(a-c)+(a-b)^2]y=[(c-a)^2+(a-b)(c-b)]z.$

$[(b-c)(a-c)+(a-b)^2]x=[(b-c)^2+(c-a)(b-a)]z.$

トナル, トコロガ各 [ ] 内ハ $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ トナルカラ

$y=z,\ x=z$ トナル。從テ (1) ヨリ $az+bz+cz=1$ 卽チ $(a+b+c)z=1$

トナル。トコロガ $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\equiv\dfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]\neq0$ ナルトキニ $a+b+c$ ハ 0 トナルコトモアルカラ先ヅ $a+b+c\neq0$ トスレバ $z=\dfrac{1}{a+b+c}$ トナル。

サレバ a, b, c 中少ナクトモ二ツガ等シカラズシテ $a+b+c\neq0$ ナラバ

$x=y=z=\dfrac{1}{a+b+c}$ トナル。

次ニ $a=b=c$ ナルトキハ原方程式ハ

(1) ハ $a(x+y+z)=1\ldots.(1)'$; (2) ハ $a(x+y+z)=1\ldots.(2)'$; (3) ハ $a(x+y+z)=1\ldots.(3)'$ トナルカラ $a\neq0$ ナラバスベテ同一ノ方程式トナルカラ不定トナリ，$a=0$ ナラバ不能トナル。

最後ニ a, b, c 中少ナクトモ二ツガ等シカラザルトキ $a+b+c=0$ トナラバ $z(a+b+c)=1$ ハ不能トナル。從テ聯立方程式ハ不能デアル。

例 4. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$ax-by-z+1=0\ldots(1),\quad x+y-az-b=0\ldots(2),\quad x+y-z+1=0\ldots(3)$$

講義 先ヅ (2)−(3) ヲ作リテ $(1-a)z=b+1\ldots.(4)$ ヲ得ル。卽チ (1), (3), (4) ハ (1), (2), (3) ト同値デアル。ソコデ $a-1\neq0$ トスルト，$z=\dfrac{b+1}{1-a}\ldots.(4)'$ ガ得ラルヽカラコレヲ (1) ト (3) ニ代入シテ，(1) ハ $ax-by=\dfrac{a+b}{1-a}\ldots.(1)'$; (3) ハ $x+y=\dfrac{a+b}{1-a}\ldots.(3)'$ トナル。卽チ (1), (2), (3) ハ (4), (1)′, (3)′ ト同値デアル。ソコデ $a+b\neq0$ ナルトキハ定理 III ガ適用セラル

$$(1)'+(3)'\times b \text{ ヨリ } x=\frac{1+b}{1-a} \text{ トナリ; } (1)'-(3)'\times a \text{ ヨリ } y=-1 \text{ ガ得ラレル。}$$

サレバ $1-a\neq0$, $a+b\neq0$ ナラバ $x=\dfrac{1+b}{1-a}$, $y=-1$, $z=\dfrac{b+1}{1-a}$ トナル。

次ニ $a=1$ ナラバ (4) ヨリ (4)′ ヘハ進ムコトガ出來ズ。(4) ヨリ $b+1\neq0$ ナラバ (4) ハ不成立デアルカラ結局 (1), (2), (3) ハ不成立トナリテ不能デアル。若シ $b+1=0$ ナラバ (4) ハ不定トナリ，從テ (1), (2), (3) ハ (1), (3) ト同値デ，コノトキハ (1) ト (3) ハ $x+y-z+1=0$, $x+y-z+1=0$ トナリテ結局 (1), (2), (3) ハ $x+y-z+1=0$ ト同値トナルカラ不定トナル。

最後ニ $a-1\neq0$ ニシテ $a+b=0$ 卽チ $a=-b$ ナラバ (1)′, (2)′ ニ定理 III ハ適用出來ズシテ，$a(x+y)=\dfrac{a+b}{1-a}$, $x+y=\dfrac{a+b}{1-a}$ トナルカラ，$a\neq0$ トキハ不定トナリ，$a=0$ ナルトキハ $b=0$ トナリテ不定トナル。

例 5. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$y+z-\lambda x=2a\ldots(1),\quad z+x-\lambda y=2b\ldots(2),\quad x+y-\lambda z=2c\ldots(3)$$

講義 $(1)+(2)+(3)$ ヲ作ルト $(2-\lambda)(x+y+z)=2(a+b+c)\ldots.(4)$ トナル。サレバ (1), (2), (3) ト (2), (3), (4) トハ同値デアル。ソコデ $2-\lambda\neq0$ トスレバ (4) ヨリ $x+y+z=\dfrac{2(a+b+c)}{2-\lambda}\ldots.(4)'$ ガ得ラル; (4)′−(2) ヨリ $(1+\lambda)y=\dfrac{2(a+b+c)}{2-\lambda}-2b\ldots.(5)$

$b=0$ $0.x+b=0.$ $bx=0$ $x=\frac{b}{0}$ $=-\frac{b}{0}$

(4)′−(3) ヨリ $(1+\lambda)z=\dfrac{2(a+b+c)}{2-\lambda}-2c\ldots.(6)$ ガ得ラル。サレバ (1), (2), (3) ト (4), (5), (6) トハ同値デアル。ソコデ $2-\lambda\neq0$ ナル $1+\lambda$ ガ 0 トナルカモ知レナイカラ，コヽニ又假定ヲ設ケテ $\lambda+1\neq0$ トスルト，卽チ $2-\lambda\neq0$, $\lambda+1\neq0$ ノトキハ

$$x=\frac{2}{1+\lambda}\left(\frac{a+b+c}{2-\lambda}-a\right),\quad y=\frac{2}{1+\lambda}\left(\frac{a+b+c}{2-\lambda}-b\right),\quad z=\frac{2}{1+\lambda}\left(\frac{a+b+c}{2-\lambda}-c\right)$$

ハ (1), (2), (3) ト同値，卽チ解デアル。

次ニ $\lambda=2$ ナラバ (4) ヨリ (4)′ ヘハ移レズ，(4) ニ於テ $0=2(a+b+c)$ トナル。從テ $a+b+c=0$ ナラバ (4) ハ不定トナル，從テ (1), (2), (3) ト (2), (3) トガ同値デアル。コノトキハ (2), (3) ハ $z+x-2y=2b\ldots.(2)'$, $x+y-2z=2c\ldots.(3)'$ トナリテ x, y ハ z ニテ表ハサレルコトニナリ，方程式ハ不定デアル。ソシテ $a+b+c\neq0$ トキハ不能トナル。

最後ニ $\lambda=-1$ ナラバ原方程式ハ

$$y+z+x=2a,\quad z+x+y=2b,\quad x+y+z=2c$$

トナルカラ $a=b=c$ ナラバ不定ニシテ $a=b=c$ ナラザレバ不能デアル。

例 6. a, b, c ガ何レモ零ナラザル數ニシテ $bc+ca+ab=0$ ナルトキハ次ノ三ツノ方程式中初メノ二ツヲ滿足スル x, y, z ノ値ハ第三ノモノヲ滿足スルコトヲ證明セヨ。

$$x+y+z=a+b+c\ldots(1),\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ldots(2),\quad \frac{x}{a^3}+\frac{y}{b^3}+\frac{z}{c^3}=0\ldots(3)$$

講義 先ヅ (1), (2) ヲ滿足スル x, y, z ノ關係式ヲ求ムルニ，a, b, c ハ 0 デナイカラ

$$(2)\times a-(1) \text{ ヨリ } \left(-\frac{a}{b}+1\right)y+\left(-\frac{a}{c}+1\right)z=b+c\ldots.(4),$$

$$(2)\times b-(1) \text{ ヨリ } \left(-\frac{b}{a}+1\right)x+\left(-\frac{b}{c}+1\right)z=a+c\ldots.(5)$$

ソコデ $(4)\div b^2-(5)\div a^2$ ヨリ $(b-a)\left[\dfrac{x}{a^3}+\dfrac{y}{b^3}\right]+\left[\dfrac{c-a}{b^2c}+\dfrac{b-c}{a^2c}\right]z=\dfrac{b+c}{b^2}-\dfrac{a+c}{a^2}\ldots.(6)$

ガ得ラレル。卽チ $(b-a)\left[\dfrac{x}{a^3}+\dfrac{y}{b^3}\right]+\dfrac{(b-a)[b^2+ab+a^2-c(b+a)]}{a^2b^2c}z=\dfrac{(a-b)(ab+bc+ca)}{a^2b^2}$

トナル，トコロガ $ab+bc+ca=0$ デアルカラ $bc+ca=-ab$ トナル。サレバ上式ハ

$(b-a)\left[\dfrac{x}{a^3}+\dfrac{y}{b^3}\right]+\dfrac{(b-a)(a+b)^2}{c^3(a+b)^2}z=0$, 故ニ $a\neq b$ トスレバ $\dfrac{x}{a^3}+\dfrac{y}{b^3}+\dfrac{z}{c^3}=0$ トナル

又 $a=b$ トナラバ $ab+bc+ca=0$ ハ $2bc+b^2=0$ 卽チ $b=-2c$ トナル，ソシテ (1), (2), (3) ハ $x+y+z=-3c\ldots.(1)'$, $x+y-2z=-2c\ldots.(2)'$, $x+y-8z=0\ldots.(3)'$ トナルカラ (1)′, (2)′ ヲ滿足スル値ハ (3)′ ヲ滿足スル。

例 7.　$x=a+ls,\ y=b+ms,\ z=c+ns$ ニ於テ s ノ代リニ p ト置キタルトキノ x, y, z ノ値ハ同時ニ $y-z=1,\ x=0$ ヲ滿足シ，q ト置キタルトキノ値ハ同時ニ $z-x=1,\ y=0$ ヲ滿足シ、r ト置キタルトキノ値ハ $x-y=1,\ z=0$ ヲ滿足スルトキハ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

講義　先ヅ與ヘラレタル方程式ヲ

$$x=a+ls\ldots.(1),\quad y=b+ms\ldots.(2),\quad z=c+ns\ldots.(3)$$

トスル。サテ s ノ代リニ p トオクト，(1), (2), (3) ハソレゾレ

$$x=a+lp\ldots.(1)',\quad y=b+mp\ldots.(2)',\quad z=c+np\ldots.(3)'$$

トナル。コレ等ハ $y-z=1,\ x=0$ ヲ滿足スルカラ

$$a+lp=0\ldots.(a)\qquad b-c+(m-n)p=1\ldots.(b)$$

トナラネバナラナイ。又 s ヲ q トオクト，$z-x=1$ ト $y=0$ ヲ同時ニ滿足スルカラ

$$b+mq=0\ldots.(c)\qquad c-a+(n-l)q=1\ \ldots.(d)$$

トナル。最後ニ s ヲ r トオクト，$x-y=1,\ z=0$ ヲ滿足スルカラ

$$c+nr=0\ldots.(e)\qquad a-b+(l-m)r=1\ \ldots.(f)$$

トナラネバナラナイ。卽チ $(a), (b)\ldots.(f)$ ガ同時ニ成立ネバナラナイ，

ソコデ (a) ト (b) 間ニテ p；(c) ト (d) 間ニテ q；(e) ト (f) 間ニテ r ヲ消去スルト，

$$(b-c-1)l-am+an=0\ldots.(\mathrm{I}),\quad bl+(c-a-1)m-an=0\ldots.(\mathrm{II}),$$
$$-cl+cm+(a-b-1)n=0\ldots.(\mathrm{III})$$

ガ得ラレル。ソコデ $(\mathrm{I})\times b+(\mathrm{II})\times a$ ト $(\mathrm{II})\times(a-b-1)+(\mathrm{III})\times b$ ヲ作ルト，ソレゾレ

$$[b(b-c-1)+ab]l+[-ab+a(c-a-1)]m=0\ldots\ldots..(\mathrm{IV})$$
$$[b(a-b-1)-bc]l+[(c-a-1)(a-b-1)+bc]m=0\ ..(\mathrm{V})$$

サレバ (IV) ト (V) ヨリソレゾレ

$$b(a+b-c-1)l-a(b-c+a+1)m=0$$
$$b(a-b-c-1)l-[a^2-(b+c)a+c-b-1]m=0$$

トナリ，之レヨリ l ト m トヲ消去スルト，

$$b(a+b-c-1)[a^2-(b+c)a+c-b-1]-b(a-b-c-1)a(a+b-c+1)=0\ldots.(\mathrm{VI})$$

b ハ 0 デハナイ，何トナレバ若シ 0 デアラバ (c) ヨリ $mq=0$ トナリ，$m=0$ 或ハ $q=0$ トナル。トコロガ本題ハ l, m, n, p, q, r ニ付テ不定ナル條件ヲ求ムルノデアル。

ソコデ兩邊ヲ b デ割リテ

$$(a+b-c-1)[a^2-(b+c)a+c-b-1]-(a-b-c-1)a(a+b-c+1)=0$$

トナル。之ヲ整頓シテ $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)-1=0$ ガ得ラレル，之レ求ムル關係デアル。

(ii) 四元以上ノ聯立方程式

例　$3x-5y+5z=0\ldots(1)$；$3x+4z=3\ldots(2)$；$5x-3y=25\ldots(3)$；$7w-2z=13\ldots(4)$ ヲ解ケ。

講義　早ク消去出來ル文字ニ着眼シテ先ヅ y ヲ消去スル。ソレニハ $(1)\times3-(3)\times5$ ヲ作ルト $-16x+15z=-125\ldots.(5)$ トナル，卽チ (2), (3), (4), (5) ト (1), (2), (3), (4) トハ同値デアル。次ニ (2) ト (5) トニテ x ヲ消去スルト，$109z=-327$ 卽チ $z=-3\ldots(6)$ トナル。サレバ (2), (3), (4), (6) ト (1), (2), (3), (4) ト同値デアル。

(2) ニ代入シテ $x=5$，之ヲ (3) ニ代入シテ $y=0$，又 (4) ヨリ $w=1$ ガ得ラレ。結局 (1), (2), (3), (4) ト $x=5,\ y=0,\ z=-3.\ w=1$ ト同値デアル。

別法　(2) ヨリ z ヲ，(3) ヨリ y ヲ求メテ (1) ニ代入シテ $x=5$ ヲ導キ，從テ $z=-3,\ y=0$ ガ得ラレ，(4) ヨリ $w=1$ ガ得ラレル。

練習　次ノ聯立方程式ヲ解ケ

(1)　$2x-3y+2w=4,\ 5y-2z=4,\ 5x+3z=14,\ x-4y+3w=5$

答　$x=1,\ y=2,\ z=3,\ w=4.$

(2)　$3x-2y=5y-3z=9,\ 4z-3w=5,\ 20w-3x=5.$

答　$x=5,\ y=3,\ z=2,\ w=1.$

(3)　$x+y-z=a-1,\ y+z-u=2a-8,\ z+u-v=a+1,$
$u+v-x=6a+2,\ v+x-y=5a+3.$

答　$x=2a+1,\ y=2a-3,\ z=3a-1,\ u=3a+4,\ v=5a-1.$

(iii) 特種高次聯立方程式

例　$xyz=\dfrac{1}{a}(yz-zx-xy)=\dfrac{1}{b}(zx-xy-yz)=\dfrac{1}{c}(xy-yz-zx)$ ヲトケ。

講義　x, y, z ハ 0 ナラズトスレバ，各邊ヲ xyz デワルト

$$1=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

トナル。從テ第一ト第二式ヨリ $a=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\ldots\ldots(1)$, 第一ト第三式ヨリ $b=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\ldots\ldots(2)$, 第一ト第四式ヨリ $c=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\ldots\ldots(3)$ ガ得ラレ, (1), (2), (3) ヨリ $\frac{1}{x}=-\frac{b+c}{2}$, $\frac{1}{y}=-\frac{c+a}{2}$; $\frac{1}{z}=-\frac{a+b}{2}$ ガ得ラレルカラ $b+c$, $c+a$; $a+b$ ノ各ガ 0 ナラズバ $x=-\frac{2}{b+c}$, $y=-\frac{2}{c+a}$, $z=-\frac{2}{a+b}$ ガ得ラレル。

次ニ x, y, z 中何レカ一ツガ 0 デアレバ, 例ヘバ $x=0$ トスレバ, 原式ハ

$0=\frac{1}{a}yz=\frac{-1}{b}yz=\frac{-1}{c}yz$ トナルカラ y 或ハ z ガ 0 トナリテ殘リノ一ツハ不定トナル。

サレバ結局方程式ハ不定ノ方程式デアル。

練習 (1) x, y, z ガ 0 ナラザルトキ次ノ方程式ヲトケ。

$4yz-3zx+2xy=9xyz$, $2yz+5zx-3xy=4xyz$, $5yz+6zx-4xy=8xyz$.

(2) $x=1, y=2, z=3$; $x=3, y=2, z=1$; $x=2, y=3, z=1$ ナル三組ノ x, y, z ノ値ガ $lx+my+nz=p$ ヲ滿足スル如ク l, m, n ノ値ヲ定メヨ。コヽニ $l^2+m^2+n^2=1$ ナリトス。

注意 先ヅ $l+2m+3n=p$, $3l+2m+n=p$, $2l+3m+n=p$ ヲ作リ, l, m, n ノ値ヲ求ムルト, $l=m=n=\frac{p}{6}$ トナリ, $l^2+m^2+n^2=1$ ニ代入スルト, $p=\pm 2\sqrt{3}$ トナルコトニ着眼セヨ。

(3) 方程式 $x^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ハ $x=0, y=1$; $x=1, y=0$; $x=-1, y=1$; $x=-1, y=3$; $x=2, y=-2$ ナル五組ノ値ニヨリテ滿足セラルヽトイフ, b, c, f, g, h ノ値ヲ求ム。

答 $h=2$, $b=2$, $g=-\frac{3}{2}$, $f=-2$, $c=2$.

第四章

應用問題其ノ一

VIII. 恒等式ノ應用

20. 證明問題

恒等式ヲ應用スル證明問題ヲ考究シヤウ,

例 1. a, b, c, p, q, r ハ何レモ實數ニシテ且ツ a, b, c ガ正ナルトキ

$$(a+b+c)(ap^2+bq^2+cr^2)=(ap+bq+cr)^2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ナラバ $p=q=r$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義 カヽル問題デハ, 必ズヤ $p-q=0$, $q-r=0$, $r-p=0\ldots\ldots(2)$ ナルコトガ導カレルニ違ヒナシ。ソシテコレ等ハ a, b, c, p, q, r ガ實數デ a, b, c ガ共ニ正デアルコト (1) ヨリ導カレル筈デアル。トコロガ (1) ハ p, q, r ニ付テ二次式デアリ, 且ツ同時ニ (2) ノ各式ガ成立スルカラ, $(p-q)^2=0$, $(q-r)^2=0$, $(r-p)^2=0$ ガ誘導セラレナケレバナラナイコトニ着眼シテ (I) ノ右邊ヲ移項シタ式ヲ變形スルノデアル。

即チ $$(a+b+c)(ap^2+bq^2+cr^2)-(ap+bb+cr)^2=0 \qquad (2)$$

ソコデ上ニ述ベタ注意ニヨリテ括弧ヲホドイテ項ノ集合ヲ作ルト,

$$(abp^2-2abpq+abq^2)+(bcq^2-2bcqr+bcr^2)+(car^2-2carp+cap^2)=0$$

トナル, 即チ $$ab(p-q)^2+bc(q-r)^2+ca(r-p)^2=0 \qquad (3)$$

トナル。トコロガ a, b, c ハ正數デアリ, $(p-q)^2$, $(q-r)^2$, $(r-p)^2$ ハ p, q, r ガ實數ダカラ 0 カ正數デアル。若シ少ナクモコレ等ノ一ツガ正ナラバ (3) ハ成立シナイカラ

$$(p-q)^2=0, \quad (q-r)^2=0, \quad (r-p)^2=0$$

トナラナケレバナラナイ。從テ $p=q=r$ トナル。

例 2. $a^2+b^2=1$, $a'^2+b'^2=1$, $aa'+bb'=0\ldots\ldots(1)$ ナルトキハ $a^2+a'^2=1$, $b^2+b'^2=1$, $ab+a'b'=0\ldots\ldots(2)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 コノ問題デ a, b, a', b' ガ實數ト云フコトガ述ベラレテヰナイガ, コレハ省略サレテヰルノデアル。

サテ (2) ヲ證明スルニハ $a^2+a'^2-1=0$, $b^2+b'^2-1=0$, $ab+a'b'=0$ ガ同時ニ成立タネバナライカラ, (1) ヨリ

$$A(a^2+a'^2-1)^2+B(b^2+b'^2-1)^2+C(ab+a'b')^2=0 \qquad (3)$$

ガ導カレナケレバナラナイ，コヽニ A, B, C ハ正數ト云フコトガナケネバナラナイ。ソレニハ (1) ヲ一ツノ式ニ直サネバナラナイ。ソコデ (1) モ同時ニ成立ツ假定デアルカラ，$a^2+b^2-1=0$, $a'^2+b'^2-1=0$, $aa'+bb'=0$ ニ付テ (3) ノ様ナ式ニ直スコトガ出來ル

即チ
$$A'(a^2+b^2-1)^2+B'(a'^2+b'^2-1)^2+C'(aa'+bb')^2=0 \qquad (4)$$

トナスコトガ出來ル，コヽニ A′, B′, C′ ハ正數デアル

從テ
$$A'(a^2+b^2-1)^2+B'(a'^2+b'^2-1)^2+C'(aa'+bb')^2$$
$$\equiv A(a^2+a'^2-1)^2+B(b^2+b'^2-1)^2+C(ab+a'b')^2$$

トナラネバナラナイ。ソコデ兩邊ノ括弧ヲホドイテ恒等ノ定義(10頁)ニヨルト

$$A=A'=B=B'=C=C'$$

ガ得ラレル。サレバ次ノ證明ヲ導クコトガ出來ル。

證明 $a^2+b^2-1=0$, $a'^2+b'^2-1=0$, $aa'+bb'=0$ ガ同時ニ成立スルヲ以テ等式

$$(a^2+b^2-1)^2+(a'^2+b'^2-1)^2+(aa'+bb')^2=0$$

ヲ以テ代フルコトヲ得。然ルニ上式ノ左邊ヲ展開シテ，更ニ適當ニ括リ換フルトキハ

$$(a^2+a'^2-1)^2+(b^2+b'^2-1)^2+(ab+a'b')^2=0$$

トナスコトヲ得。從テ a, b, a', b' ハ實數ナルヲ以テ $a^2+a'^2-1=0$, $b^2+b'^2-1=0$, $ab+a'b'=0$ トナル。故ニ

$$a^2+a'^2=1, \qquad b^2+b'^2=1, \qquad ab+a'b'=0$$

練習 (1) $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ ナルトキハ，$a=b=c$ ナルコトヲ證セヨ。コヽニ a, b, c ハ實數ナリトス。

(2) $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ ナルトキ，$a=b=c=d$ ナルコトヲ證セヨ，コヽニ a, b, c, d ハ正ノ實數ヲ表ハス。

注意 右邊ヲ移項シテ $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$ トナルコトニ着眼セヨ。

例 3. $x+y=a$, $x^2+y^2=b^2$, $x^3+y^3=c^3$ ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

講義 今度ハ方程式ヲトクコトハ困難デアルカラ恒等式ヲ利用シテ消去スル。

ソレニハ第一式ノ兩邊ヲ平方スルト，$x^2+2xy+y^2=a^2$ ガ成リ立ツ第二式ヲ代入スルト，$2y=a^2-b^2$ トナル，コハ第一，第二式ガ同時ニ成リ立ツトキニ於ケル關係式デアル。ソコデ第三式ノ左邊ハ $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ デアルカラ第一，第二，第三式ガ同時ニ成リ立ツ

ナラバ
$$a\left(b^2-\frac{a^2-b^2}{2}\right)=c^3, \quad \text{即チ} \quad a(3b^2-a^2)=2c^3 \quad \text{トナル。}$$

練習

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, $x^2+y^2=a^2+b^2$, $xy=\lambda$ ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

注意 第一式ヨリ $x+y=\dfrac{a+b}{ab}xy$ トナル，ソコデ第三式ヲ代入シテ $x+y=\dfrac{\lambda(a+b)}{ab}$ トナル。トコロガ第二式ノ左邊ハ $x^2+y^2\equiv(x+y)^2-2xy$ デアルカラ $a^2+b^2=\dfrac{\lambda^2(a+b)^2}{a^2b^2}-2\lambda$ トナル。

(2) $x^2y+xy^2=a$, $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=b$, $x^3y^3=c$ ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

注意 第二式ヨリ $x^3+y^3=bx^3y^3$, 第三式ヲ入レテ $x^3+y^3=bc$, 然ルニ $(x+y)^3\equiv x^3+3(x^2y+xy^2)+y^3$ デアルカラ $(x+y)^3=bc+3a$ トナル。トコロガ第一式ヨリ $xy(x+y)=a$ デアルカラ之ヲ立方シテ $x^3y^3(x+y)^3=a^3$ トナル。之ニ $(x+y)^3$ ト x^3y^3 ノ値ヲ代入スレバ $c(bc+3a)=a^3$ トナル。

(3) $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ ヨリ x ヲ消去セヨ。

注意 $x^2=y$ トオクト，$ay+bx+c=0$, $a'y+b'x+c'=0$ トナルカラコノ三方程式間ニテ x, y ヲ消去スレバ良イ。答 $(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$.

(4) $ax^2+2hxy+by^2=0$, $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

注意 $\dfrac{x}{y}=X$ トオクト，結局 (3) ノ問題トナル。コノ場合 $x, y\neq0$ デハナイコトハ勿論デアル。

例 4. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}=a$, $\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}=b$, $\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}=c$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

講義 コノ式ハ一見 x, y, z ノ値ガ定マル様デアルガ，$\dfrac{y}{x}=X$, $\dfrac{z}{y}=Y$, $\dfrac{x}{z}=Z$ トオクト與ヘラレタ方程式ハ

$X+Z=a\ldots.(1)$, $Y+X=b\ldots.(2)$, $Z+Y=c\ldots.(3)$ トナリ，且ツ $XYZ=1$ ナル四ツノ關係カラ X, Y, Z ヲ消去スレバ x, y, z ヲ消去スルコトニナル。サレバ (1), (2), (3) ヲトイテ

$X=\dfrac{1}{2}(a+b-c)$, $Y=\dfrac{1}{2}(b+c-a)$, $Z=\dfrac{1}{2}(a+c-b)$ トナルカラ終結式ハ

$$\frac{1}{8}(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)=1 \quad \text{トナル。}$$

練習

(1) $\dfrac{y-z}{y+z}=a,\ \dfrac{z-x}{z+x}=b,\ \dfrac{x-y}{x+y}=c$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

注意 $y-z=a(y+z),\ z-x=b(z+x),\ x-y=c(x+y)$ ヨリ $\dfrac{z}{y}=\dfrac{1-a}{1+a},\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{1-b}{1+b},\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{1-c}{1+c}$ ガ得ラレル，コヽニ a, b, c ハ -1 ニ等シカラズトス。

(2) $x=by+cz+du,\ y=ax+cz+du,\ z=ax+by+du,\ u=ax+by+cz$ ヨリ x, y, z, u ヲ消去セヨ，但シ a, b, c, d ハ -1 ニ等シカラズ。

注意 $ax+by+cz+du=t$ トオキテ x, y, z, u ヲ求メテ代入セヨ。

答 $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}+\dfrac{d}{d+1}=1.$

例 5. $y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)=x^3+y^3+m(x+y)$ ナルトキハ，各ハ $2xyz$ ニ等シキコトヲ證セヨ。コヽニ x, y, z ハ相等シカラズトス。

講義 第一式ト第二式ヨリ $y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)$ トナル，即チ $(y-x)(y^2+yx+x^2+m)=0$ トナル。トコロガ $y\neq z$ ト云フ假設ニヨリ $y^2+xy+x^2+m=0\ldots\ldots(1)$ トナル。次ニ第二式ト第三式ヨリ同様ナル演算ニヨリ $y^2+yz+z^2+m=0\ldots\ldots(2)$ トナル。ソコデ (1)−(2) ヲ作ルト，$x^2-z^2+xy-yz=0$ 即チ $(x-z)(x+y+z)=0$ トナル。トコロガ $x\neq z$ デアルカラ $x+y+z=0\ldots\ldots(3)$ トナル。サレバ $y^3+z^3+m(y+z)\equiv(y+z)(y^2-yz+z^2+m)$ ニ於テ (3) ニヨリ $y+z=-x$，又 m ニハ (2) ノ値ヲ代入シテ $=(-x)(-2yz)=2xyz$ トナル，他ノ第二，第三式ニ付テモ同様ニ證明出來ル。

練習

(1) x, y, z ガ相等シカラズシテ

$$y^2+z^2+\lambda yz=z^2+x^2+\lambda zx=x^2+y^2+\lambda xy$$

ナルトキハ此式ノ各ハ $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

注意 第一式ト第二式トヨリ $y^2+z^2+\lambda yz=z^2+x^2+\lambda zx$，即チ $(y-x)(y+x+\lambda z)=0$ トナル $y-x\neq0$ デアルカラ $x+y+\lambda z=0$，同様ニ $y+z+\lambda x=0$ トナル。ソコデ y ヲ消去シテ $(x-z)(1-\lambda)=0$ トナル。トコロガ $x-z\neq0$ 故ニ $\lambda=1$ トナル。從テ $x+y+z=0$ トナル。ソコデ前上例ト同様ニシテ $y^2+z^2+\lambda yz=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ トナル。

(2) a, b, c ガ相等シカラズシテ

$$b^3+c^3+\lambda bc=c^3+a^3+\lambda ca=a^3+b^3+\lambda ab$$

ナルトキハ此ノ式ノ各ハ $\dfrac{1}{2}(a^3+b^3+c^3+abc)$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

注意 前ノ各題ト同様ニシテ第一式ト第二式ヲ組合セテ $a^2+ab+b^2+\lambda c=0\ldots\ldots(1)$ ヲ導キ，同様ニシテ $b^2+bc+c^2+\lambda a=0$ ヲ導イテ邊々相減ジテ $(a-c)(a+c+b-\lambda)=0$ トナル。ソコデ $a-c\neq0$ デアルカラ $a+b+c=\lambda$ トナリテ (1) ニ代入スルト，$a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab=0\ldots\ldots(3)$ トナル。

サレバ $\dfrac{1}{2}[(b^3+c^3+\lambda bc)+(c^3+a^3+\lambda ac)]=\dfrac{1}{2}[a^3+b^3+c^3+c^3+(a+b+c)(bc+ca)]$

$\equiv\dfrac{1}{2}[a^3+b^3+c^3+c\{c^2+(a+b+c)(a+b)\}]$

$\equiv\dfrac{1}{2}[a^3+b^3+c^3+c(a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc)]$，トコロガ (3) ニヨリ

$\equiv\dfrac{1}{2}[a^3+b^3+c^3+abc]$ トナル。

21. 未定係數法

コノ方法ヲ説明スルニ，先ヅ具體的例ヲトツテ進マウ。

例 1. x ノ二次ノ有理整函數ニ於テ，$x=-1, x=1$ ト $x=5$ ナラバ函數ノ値ガソレゾレ 11, −5, ト 6 ニナルト云フ，其ノ函數ヲ求メヨ。

講義 求ムル函數ハ x ノ二次有理整函數即チ二次ノ整式デアルコトダケガ既知デ，其ノ各項ノ係數ガ未知デアル，ザレバ本題ハタヾ係數如何ト云フ問題ニ過ギナイ。尙ホ換言スルト，方程式應用問題デアル。從テ求ムル係數ヲ未知數ニ選ンデ a, b, c トシテ，求ムル二次整式ヲ ax^2+bx+c トスル。次ニ $x=-1, x=1$ ト $x=5$ ノトキニ函數ノ値ハソレゾレ 11, −5 ト 6 ニナルカラ次ノ a, b, c ニ付テノ三ツノ方程式

$a-b+c=11\ldots\ldots(1)$　　$a+b+c=-5\ldots\ldots(2)$　　$25a+5b+c=6\ldots\ldots(2)$

ガ得ラレル。

サテ (1), (2), (3) ノ聯立方程式ヲトクト，$a=\dfrac{43}{24},\ b=-8,\ c=\dfrac{29}{24}$ トナル。

從テ求ムル函數ハ $\frac{43}{24}x^2-8x+\frac{29}{24}$ デアル。

例 2. 函數 x^2+1 ハ函數 $x+1$ ニ付テノ二次整式ニ直シ得ラルヽカ，直シ得ラルヽナラバ其ノ形ヲ求メヨ。

講義 今度ハ前例ト異ナルコトハ**直シ得ラルヽカ**ト云フコトデアル。前例デハ**二次ノ整式**ガ**存在スル**ト云フコトヲ假定シテルノデアル。ソコデ**直シ得ラルヽトシテ**其ノ二次整式ノ各項ノ係數ヲ a, b, c トスル。カクスレバ

$$x^2+1\equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

ガ恒等式デアル筈デアル。從テ恒等ノ定義(10頁)ニヨリテ兩邊ヲ整頓シタトキノ兩邊ノ對應項ノ係數ガ等シクナルカラ $a=1,\ 2a+b=0,\ a+b+c=1$ トナラネバナラナイ。即チコノ方程式ガ同時ニ成リ立ツ a, b, c ノ値ガ存在シナケレバナラナイ。トコロガ $a=1,\ b=-2,\ c=2$ ナラバ三ツノ方程式ガ同時ニ成リ立ツカラ，確カニ x^2+1 ハ $x+1$ ノ二次整式ニ直セテ，其ノ形ハ $(x+1)^2-2(x+1)+2$ トナル。

斯樣ニ未知係數或ハ**未定係數**即チ假リニ定メタ係數ノ値ヲ，問題ノ條件ヨリ定メテ未知函數ヲ求ムル方法ヲ**未定係數法**ト云フノデアル。結局未定數法ハ方程式應用問題ノ一種デ，未知函數ヲ定ムル一種ノ方法デアル。

練習

（1） 次ノ恒等式ガ成立ツ樣ニ未定係數 A, B, C ノ値ヲ求メヨ。

（i） $(x^2+x+2)(x^2-2x+1)-(\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C})\equiv x^4-x^2+x+1$

（ii） $3x^2-2x+1\equiv\mathrm{A}(x-2)(x-3)+\mathrm{B}(x-3)(x-1)+\mathrm{C}(x-1)(x-2)$

注意 他ノ方面ヨリ恒等式ナル可キコトガ證明セラレテル，或ハ恒等式デアルコトガ假定セラレテルトキハ恒等ト等値 (10頁) ニヨリ變數ニ如何ナル實數値ヲ與ヘテモ等値デアルカラ，コノ性質ヲ利用シテ A, B, C ノ決定ノ手順ニ手數ヲハブケル。例ヘバ (ii) ノ如キ問題デハ $x=1, 2, 3$ ト順次代入スレバ A, B, C ノ値ガ順次ニ定マル。

（2） x ニ關スル二次式アリ，x ノ値ガ 2 或ハ -3 ナルトキ其ノ値ハ 0 トナリ，$x=0$ ナルトキ其ノ値ハ 6 トナルト云フ，此二次式

ヲ求メヨ。

（3） x ニ關スル三次式アリ，x ノ値ガ 0, 1, 2, 3 ナルニ從テ其ノ値ハソレゾレ 1, 1, 1, 7 トナルト云フ，此ノ式ヲ決定セヨ。

（4） $f(0,0)=4,\ f(4,4)=0,\ f(1,0)=6$ ナル如キ $f(x,y)=ax+by+c$ ヲ求メヨ。

例 3. $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ完全立方ナルトキハ $ac=b^2,\ bd=c^2$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 三次式ガ完全立方デアルカラ，一次式ノ立方デアル。ソコデ其ノ一次式ヲ $\alpha x+\beta$ トスル。トコロガ

$$ax^3+3bx^2+3cx+d\equiv(\alpha x+\beta)^3 \qquad (1)$$

ガ成立ツ筈デアル。從テ $a=\alpha^3,\ b=\alpha^2\beta,\ c=\alpha\beta^2,\ d=\beta^3$ トナラネバナラナイ。ソコデ第一ト第四式ヨリ α, β ヲ求ムルト，立方根デアルカラ虛根ガ出テ來タリシテ仕末ガ惡イ。從テ其レヲ避ケテ第一ト第三式トヲ掛ケルト，$ac=\alpha^4\beta^2$ トナル筈デ，コレハ第二式ノ兩邊ヲ平方シタ式デアルカラ $ac=b^2$ トナラネバナラナイ。又第二ト第四式ヲ掛ケルト，第三式ノ平方ガ得ラレルカラ $bd=c^2$ トナラネバナラナイ。サレバ結局 $ac=b^2$ ト $bd=c^2$ ガ得ラレル。

練習

（1） 二次三項式 $ax^2+2bx+c$ ガ完全平方ナルタメニハ係數間ノ關係如何。　答. $b^2=ac$　$ax^2+2bx+c=(\alpha x+\beta)^2$

（2） $x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$ ガ完全平方數ナル樣ニ a, b, c ノ値ヲ定メヨ。

注意 與ヘラレタル式ヲ $(\pm x^3+\alpha x^2+\beta x\pm2)^2$ ニ恒等トシテ a, b, c ノ間ノ關係式ヲ求メテ，其レ等ノ値ヲ求メヨ。コヽニ ± ノ複號ハ x^3 ノ前ト常數項 2 ノ前トハ無關係デアル。　答 $a=\frac{3}{11},\ b=\frac{3}{13},\ c=\frac{1}{5}$.

（3） $(x+a)(x+2b)+(x+2a)(x+b)$ ナル式ガ x ノ完全平方式ナルタメニハ $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{14}{9}$ ナル關係アルベキコトヲ證明セヨ。

IX. 方程式ノ應用

22. 解法ノ形式

方程式ヲ應用シテ問題ヲ解クニハ一定ノ形式ニ從フ方ガ便利デアル，次ニ其ノ形式ヲ順次ニ述ベヨウ。

I. 未知數ノ選擇 問題ノ欲求スルモノヲ未知數 $x, y, z\ldots\ldots$ ノ文字ニテ表ハスノデアル，時トシテハ問題ノ欲求スルモノヲ未知數ニ選ベバ方程式ノ作製又ハ解クコトガ困難ノトキハ，間接ニ求メ得ラルヽモノヲ未知數ニ選ブ方ガ得策デアル場合モアル。

II. 方程式ノ作製 コハ問題中ニ互ニ等シキ事柄（コレハ隱レテヰルコトモアル）ヲ未知數ノ個數ダケ探シ出シテ，其ノコトヲ等式ニ書キ表シタルモノガ方程式トナル，尤モ其ノ等式中ニ未知數ヲ含ミ且ツ恒等式トナラナイ様ニ注意シ，又方程式ガ互ニ無關係，例ヘバ，一方ノ方程式ノ兩邊ニ常數ヲカケルト他ノ方程式ニナルトカ，二ツノ方程式ヲ加ヘルト第三ノ方程式ニナルトカ，卽チ不定ニナル様ナ關係ニナラナイ様ニ努メルコトハ云フマデモナイ。

III. 方程式ノ解 II ニヨリテ方程式ガ作製セラレタル以上ハ單ニ方程式ノミ與ヘラレテヰルモノノ様ニ考ヘテ解クコト。

IV. 根ノ吟味 III ヨリ解カレタル根ガ問題ノ解答トナル資格アルカ否ヤヲ調査シナケレバナラナイ，丁度幾何學ニ於ケル作圖題ノ様ニ與ヘラレタルモノダケハ無條件ニ作圖ガ出來ルトハ限ラナイト同様ニ調査シナケレバナラナイ。

23. 解法

例 1. 資本金壹萬圓ノ合名會社ヲ設立シ資本金ノ若干部ニテ建物ヲ購入シ，其餘ヲ運轉資本ト爲シ從業者ノ數ヲ百六十四人トシテ

旅人宿業ヲ營ム者アリ，其ノ資本金全額ト運轉資本トノ比ハ建物ノ代價ノ其賃貸價格トノ比ニ等シク又登錄稅ノ和ト營業稅ノ和トハ相等シト云フ建物ノ價格ヲ問フ。但シ地所建物ノ登記ヲ請フトキ買受人ノ納ムベキ登錄稅ハ賣買代價ノ千分ノ二十、合名會社設立登記ノ登錄稅ハ資本金額ノ千分ノ二、旅人宿營業稅ハ建物賃貸價格ノ千分ノ四十及ビ從業者一人毎ニ金壹圓ナリ。

講義 先ヅ建物ノ價格ヲ x圓，建物ノ賃貸價格ヲ y圓トスルト，運轉資本ハ $(1000-x)$圓デアルカラ次ノ一組ノ方程式ガ得ラレル，

$$\frac{10000}{10000-x}=\frac{x}{y}\ldots.(1),\quad \frac{20}{10000}x+\frac{2}{10000}\times10000=\frac{40}{10000}y+164 \quad (2)$$

トナル。ソコデ (1) ト (2) トノ間デ y ヲ消去スルト，$x^2-5000x-36000000=0$ トナル，コレヲトイテ $x=9000$ 或 -4000 トナル。トコロガ x ハ正數デナケレバナラナイカラ負根ヲステヽ 9000 圓ガ求ムル答デアル。

例 2. 甲乙丙ノ三人ノ年齡ガ等比級數ヲナストキ或ル金高ヲ年齡ニ比例シテ分配シ，其後 5 年ヲ經テ同ジ金高ヲ又年齡ニ比例シテ分配セシニ甲ハ前ヨリモ 59 圓 50 錢多ク乙ハ前ヨリモ 8 圓 50 錢ヲ多ク得タリ，而シテ此時丙ノ年齡ハ甲ノ年齡ノ 2 倍ニ等シカリシトイフ。依リテ甲乙丙ノ年齡及ビ前後兩度ニ分チタル各金高幾何ナルカ。

講義 先ヅ最初ノ年齡ニ於テ甲ヲ x；乙ヲ xy；丙ヲ xy^2 トシ，分配金額ヲ z トスルト，甲，乙ノ最初分配セラレタル金額ハソレゾレ $\dfrac{zx}{x+xy+xy^2}$圓，$\dfrac{zxy}{x+xy+xy^2}$圓トナル。ソシテ 5 年後ノ甲，乙ノ分配セラレタル金額ハ $\dfrac{z(x+5)}{x+xy+xy^2+15}$圓，$\dfrac{z(xy+5)}{x+xy+xy^2+15}$圓トナルカラ題意ニヨリ

$$\frac{zx}{x+xy+xy^2}-\frac{z(x+5)}{x+xy+xy^2+15}=59.5\ldots.(1)\quad \frac{zxy}{x+xy+xy^2}-\frac{z(xy+5)}{x+xy+xy^2+15}=8.5\ldots.(2)$$

トナル。ソシテ 5 年後ニテハ丙ノ年齡ハ甲ノ年齡ノ 2 倍デアルカラ

$xy^2+5=2(x+5)\ldots.(3)$ ソコデ先ヅ xy^2 ヲ消去スルタメニ (3) ヨリ $xy^2=2x+5$ トナルカラ (1)，(2) ニ代入シテ

$$\frac{zx}{3x+xy+5}-\frac{z(x+5)}{3x+xy+20}=59.5\ldots(1)',\quad \frac{zxy}{3x+xy+5}-\frac{z(xy+5)}{3x+xy+20}=8.5\ldots(2)'$$

ソコデ (1)′ ト (2)′ ニテ z ヲ消去スルト,

$$8.5\left[\frac{x}{3x+xy+5}-\frac{x+5}{3x+xy+20}\right]=59.5\left[\frac{xy}{3x+xy+5}-\frac{xy+5}{3x+xy+20}\right]\ldots(4)$$

即チ $$\frac{-17(xy+5)}{(3x+xy+5)(3x+xy+20)}=\frac{-119(3x-2xy+5)}{(3x+xy+5)(3x+xy+20)}$$ トナル

故ニ $xy+5=7(3x-2xy+5)$, 從テ $y=\dfrac{7x+10}{5x}$ トナル。トコロガ (3) ニヨリ

$$x\times\frac{(7x+10)^2}{25x^2}=2x+5 \quad 即チ \quad x^2-15x-100=0 \quad 即チ \quad x=-5 \text{ 或 } 20$$

トナル。年齢ニ負數ハナシ, サレバ之ヲステテ $x=20$ ヲ得ラル。ソシテ $y=\dfrac{3}{2}$ デアルカラ甲, 乙, 丙ノ年齢ハ 20, 30, 45 デアル, ソシテ分配金額ハ (1) ヨリ $z=3553$ トナルカラ 3553 圓デアル。

練習

(1) 或人ノ貯金ヲ甲乙ノ二分ニ分チ甲ノ金額ヲ銀行ニ預ケ乙ノ金額ヲ以テ或ル事業ノ株券ヲ購フ, 但シ乙ハ甲ヨリ 17500 圓多ク且ツ其年利ハ 100 圓ニ付キ二圓多シ, 而シテ甲乙ヨリ一箇年ニ收入スル所ノ利益ヲ比較スルニ乙ノ利ハ甲ノ利ヨリ 1725 圓超過スト云フ。然ルニ今若シ乙ノ金額ヲ 7500 圓增加シ其年利ヲ 100 圓ニ付 3 圓增加スルトキハ乙一箇年ノ利甲一箇年ノ利ヨリ 3750圓超過スベキヲ知ル, 依テ甲及ビ乙部ノ金額並ニ甲 100 圓ノ年利ヲ問フ。

注意 甲部ノ金額ヲ x 圓トスルト, 乙部ハ $x+17500$ 圓トナル。又甲部ノ年利率ヲ r トスルト, 乙部ハ $r+0.02$ トナルカラ方程式ハ $(x+17500)(r+0.02)-xr=1725$; $(x+25000)(r+0.05)-xr=3750$ トナル。

答 金額ハ甲部 25000 圓, 乙部 42500 圓; 甲部ノ年利 5 分

(2) 或會議ニ於テ或議案ノ可否ヲ議決スルコトアリ遂ニ投票全數ノ半數ヨリ 6 票ノ多數ヲ以テ之ヲ可決セリ, 然ルニ若シ其贊成者ノ六分ノ一ガ否ナリト投票シタトキニハ投票全數ノ半數ヨリ 3 票

ノ少數ヲ以テ之ヲ否決セラルベキ筈ナリト云フ, 投票ノ總人數如何。

答 96 人

(3) 金一圓ニツキ米若干ノ割ニテ米五石ヲ買ヒ, 之ヲ一圓ニツキ二升五合ヅツ高ク賣リテ金十圓ノ利潤ヲ得タリト云フ, 初メノ米ノ價幾何ゾ。若シ負ノ答アラバ之ヲ解釋セヨ。

答 一圓ニツキ 125 合; 負根ノトキハ十圓ノ損失ヲ意味スル。

例 3. A, B 二列車ガ甲地ヲ發シ乙地ニ向フト同時ニ C. D 二列車ハ乙地ヲ發シテ甲地ニ向ヘリ。而シテ A ト C トハ甲地ヲ距ル 156 哩ノ所ニテ出會ヒ, 又 B ト C トハ乙地ヲ距ル 270 哩ノ所ニテ出會ヒ B ト D トハ甲乙兩地ノ中央ニテ出會ヘリトイフ。甲乙兩地間ノ距離ヲ求ム。

講義 求ムル甲乙兩地間ノ距離ヲ x 哩トスル。ソコデ方程式ヲ作ルノデアルガ, 其ハ困難デアルカラ補助ノ未知數卽チ A, B, C, D ノ毎時ノ速サヲソレゾレ a, b, c, d トスル。

先ヅ B, D ハ中央ニ會スルカラ $b=d\ldots.(1)$ ナル關係ガアル。次ニ A ト C ニ付テハ $\dfrac{130}{a}=\dfrac{x-130}{c}\ldots.(2)$ トナリ。又 A, D ニ付テハ $\dfrac{156}{a}=\dfrac{x-156}{d}\ldots.(3)$ トナリ, B, C ニ付テハ $\dfrac{270}{c}=\dfrac{x-270}{b}\ldots.(4)$ トナル。

サテ (1), (2), (3), (4) ノ間ニテ a, b, c, d ヲ消去スレバ $\dfrac{130(x-156)}{156}=\dfrac{(x-130)(x-270)}{207}$ ガ得ラレ, コレヲトイテ $x=390$ 或ハ $146\frac{1}{2}$ トナル。トコロガ $146\frac{1}{2}$ ガ甲乙間デアレバ問題中ノ 207 哩ヨリ小トナルカラ問題ニ適シナイ。デアルカラ答ハ 390 哩デアル。

練習 或日午前七時三十八分ニ甲驛ヲ發シタル列車ハ午前八時二十三分ニ乙驛ニ到著スベク, 同日午前七時五十二分ニ乙驛ヲ發シタル列車ハ午前八時四十六分ニ甲驛ニ到着スベカリシニ, 甲驛ヲ發シタル列車ハ甲乙兩驛間ノ距離ノ $\frac{1}{3}$ ヲ進行シタルトキ機關ニ故障ヲ生ジタルヲ以テ [illegible] 分間停車シテ之ヲ修理シ, 其ノ後ハ速サヲ $\frac{2}{3}$

ニ減ジテ進行ヲ續ケタリト云フ。兩列車ガ出會ヒタル時刻ヲ求ム。

注意 列車ノ速サハ等速デアルトスルコトハ云フマデモナイ。サテ甲驛ヲ發スル列車ヲ甲列車，乙驛ヲ發スルノヲ乙列車トスルト，乙ガ乙驛ヲ發車後 x 分デ甲ニ出合ツタトスル。ソコデ甲ノ速サヲ a, 乙ノ速サヲ b (毎分)トスルト，甲ハ甲乙間ヲ 45 分，乙ハ 54 分カヽルカラ，$45\times a=b\times 54$....(1) トナル。ソコデ乙ガ甲ニ會スルマデニ進ンダ距離ハ bx デアルカラ甲ガ乙ニ會スルマデ進ンダ距離ハ $54b-bx$ デアル。トコロガ甲ハ發車後乙ニ會スルマデニハ $(14+x)$ 分費シタガ，甲乙ノ $\frac{1}{3}$ 即チ $18b$ ダケハ $\frac{18b}{a}$ 分，故障デ十分，其ノ後ハ $\dfrac{3b-bx}{\frac{2}{3}a}$ 分ヲ要シタカラ $14+x=\frac{18b}{a}+10+\frac{3b}{2a}(3-x)$....(2) トナル。ソコデ (1) ヨリ $\frac{b}{a}=\frac{5}{6}$ デアルカラ (2) ハ $14+x=15+\frac{5}{4}(3-x)$ トナル即チ $x=\frac{19}{9}$ トナル。サレバ午前七時五十四分 $\frac{1}{9}$ デ相會スルノデアル。

例 4. 圓壔形ノ桶ノ水ガ其底ノ小孔ヨリ流レ出テ盡クル時間ハ始メノ水ノ深サノ平方根ニ比例ス。今底ニ二箇相等シキ小孔ヲ有スル圓壔形ノ桶中ノ水ガ，其一小孔ヨリ五斗ダケ流レ出デタル時，第二ノ小孔ヲモ開キタルニ殘留ノ水ハ前ノ五斗ノ水ト等シキ時間ニテ全ク流レ出タリト云フ。初メ桶ノ中ニ在リシ水ハ幾何ナリシカ。

講義 初メ桶中ノ水ヲ x 斗トスル。水ノ深サ h ト時間 t トノ間ニハ $t=k\sqrt{h}$ ナル關係ガアル，コヽハ k ハ常數デアル。今圓壔ノ直截面積ヲ S トスルト，x 斗ノ水ガ流レ出ヅル時間ハ $k\sqrt{\frac{x}{S}}$ デ，五斗ヲ除イタダケノ流レ出ヅル時間ハ $k\sqrt{\frac{x-5}{S}}$ トナルカラ五斗ダケ流レ出ヅル時間ハ $k\left(\sqrt{\frac{x}{S}}-\sqrt{\frac{x-5}{S}}\right)$ デアル。ソシテ殘餘ハ二ツノ小孔カラ出スカラ一ツノ孔ヨリスルモノノ半分 $\frac{1}{2}k\sqrt{\frac{x-5}{S}}$ デ出スコトガ出來ル。サレバ

$\frac{1}{2}k\sqrt{\frac{x-5}{S}}=k\left\{\sqrt{\frac{x}{S}}-\sqrt{\frac{x-5}{S}}\right\}$ トナル，即チ $\sqrt{\frac{x}{x-5}}=\frac{3}{2}$ 即チ $\frac{x}{x-5}=\frac{9}{4}$ トナル。故ニ $x=9$ トナルカラ求ムル初メノ水ハ九斗デアツタコトガワカル。

練習

A, B 二箇ノ蠟燭アリ。A, B ノ距離 6 尺ニシテ A ノ光度ハ B ノ光度ノ 4 倍ニ等シト云フ，今 A, B ヲ繫ギ合ス所ノ直線上ノ如何

ナル所ニ障子ヲ置ケバ此ノ障子ノ受クル所ノ光ノ量互ニ相等シクナルベキカ，尤モ此ノ障子ノ各蠟燭ヨリ受クル光ノ量ハ蠟燭ノ光度ト正比例ヲナシ，蠟燭ト障子トノ距離ノ二乘ト反比例ヲナス。

注意 A ヨリ障子マデノ距離ヲ x 尺トスル。サテ光ノ量ハ光度ニ比例スルカラ光度ヲ單位ニトルトキ，光ノ量ヲ I トスレバ I ハ距離 D ノ平方ニ逆比例スルカラ $I=k\frac{1}{D^2}$ トナル。ソコデ此ノ障子ガ A, B ヨリ受ケル光ノ量ヲ i, i' トスルト，

$i=k\frac{4}{x^2}$, $i'=k\frac{1}{(6-x)^2}$ トナル。トコロガ $i=i'$ デアルカラ $\frac{4}{x^2}=\frac{1}{(6-x)^2}$ トナル。依テ $x=4$ 或ハ 12 トナル。

第 五 章

有 理 整 式 ノ 變 形

X. 一ツノ變數ノ函數

24. 組立除法　コノ方法ヲ說明スルニ先ヅ例ヲトレバ，

例　$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ ヲ $x-\mathrm{A}$ ニテ割レ。

講義　次ノ樣ニ普通ノ除法ノ運算ヲ施シテ，

$$\begin{array}{lllll|l}
(\text{被除數}) & a_0x^3 & +a_1x^2 & +a_2x & +a_3 & x-\mathrm{A} \quad (\text{除數}) \\
 & a_0x^3 & -a_0\mathrm{A}x^2 & & & a_0x^2+(a_0\mathrm{A}+a_1)x+(a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2) \\
 & & (a_0\mathrm{A}+a_1)x^2 & +a_2x & & (\text{商}) \\
 & & (a_0\mathrm{A}+a_1)x^2 & -(a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A})x & & \\
 & & & (a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2)x & +a_3 & \\
 & & & (a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2)x & -(a_0\mathrm{A}^3+a_1\mathrm{A}^2+a_2\mathrm{A}) & \\
 & & & & a_0\mathrm{A}^3+a_1\mathrm{A}^2+a_2\mathrm{A}+a_3 \quad (\text{剩餘}) & \quad (1)
\end{array}$$

ガ得ラレル，コノ結果ヲ式ニテ示スト，

$$\underset{(\text{被除數})}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}=\underset{(\text{商})}{[a_0x^2+(a_0\mathrm{A}+a_1)x+(a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2)]}\underset{(\text{除數})}{(x-\mathrm{A})}+\underset{(\text{剩餘})}{a_0\mathrm{A}^3+a_1\mathrm{A}^2+a_2\mathrm{A}+a_3}$$

或ハ又次ノ樣ニ書イテモ宜シ

$$\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{x-\mathrm{A}}=a_0x^2+(a_0\mathrm{A}+a_1)x+(a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2)+\frac{a_0\mathrm{A}^3+a_1\mathrm{A}^2+a_2\mathrm{A}+a_3}{x-\mathrm{A}}$$

サテ商ノ係數ヲ考究スルト，

第一項ノ係數ハ被除數ノ第一項ノ係數ニシテ第二項以下ハ先ニ得タル係數ニ A ヲ掛ケテ，被除數ノ對應項ノ次位ノ未ダ使用セラレナイ係數ヲ附ケ加ヘタルモノデアル。

即チ　$a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2=(a_0\mathrm{A}+a_1)\mathrm{A}+a_2$；

$a_0\mathrm{A}^3+a_1\mathrm{A}^2+a_2\mathrm{A}+a_3=(a_0\mathrm{A}^2+a_1\mathrm{A}+a_2)\mathrm{A}+a_3$　デアル

而シ此ノ法則ハ被除數ノ次數ニ拘ハラズ成リ立ツ。

何トナレバ除數ノ最高次ノ項ノ係數ハ 1 デアルカラ商ノ各新シイ係數ハ恒ニ先キニ得タル剩餘ノ最高次ノ項ノ係數ト同一デアル。從テ商ノ先キ立ツ係數ニ A ヲ掛ケテ被除數ノ新シイ係數ヲ附ケ加ヘテ商ノ係ガ得ラレル，ソシテ同樣ノ理由ニ從テ商ノ最後ノ係數ニ A ヲ掛ケテ被除數ノ最後ノ係數ヲ附ケ加ヘテ剩餘ヲ完成スルコトガ出來ル

求メ方　$x-\mathrm{A}$ デ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ヲ割リタル商ヲ求ムルニハ

$$\boxed{\begin{array}{llllll|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & \mathrm{A} \\
 & c_0\mathrm{A} & c_1\mathrm{A} & \cdots\cdots\cdots\cdots & c_{n-2}\mathrm{A} & c_{n-1}\mathrm{A} & \\
\hline
c_0 & c_1 & c_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & c_{n-1} & \mathrm{R} &
\end{array}}$$

トスル。コヽニ $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{n-1}$ ハ商ノ係數デ，R ハ剩餘デアル。

斯樣ナ算法ヲ**組立除法**ト云フノデアル。

例 1.　$3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$ ヲ $x-2$ ニテ除セヨ。

求メ方

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+3 & -5 & -4 & +3 & -2 & 2 \\
 & 6 & 2 & -4 & -2 & \\
\hline
3 & 1 & -2 & -1 & -4 &
\end{array}$$

サレバ　商$=3x^3+x^2-2x-1$，剩餘$=-4$　デアル

例 2.　x^4-1 ヲ $x+2$ ニテ割レ。

講義　組立除法デ商ト剩餘ヲ求ムルニハ，組立除法ナルモノガ，唯ダ公式ニヨリ計算スルニ過ギナイカラ，與ヘラレタル式ヲ一般ノ形ニ直サネバナラナイ。

求メ方　$x^4-1\equiv x^4+0.x^3+0.x^2+0.x-1$；　$x+2\equiv x-(-2)$

トシテカラ**求メ方**ニヨレバ良イ，

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\
 & -2 & +4 & -8 & 16 & \\
\hline
+1 & -2 & +4 & -8 & 15 &
\end{array}$$

サレバ　商$=x^3-2x^2+4x-8$，剩餘$=15$　デアル。

例 3.　$3x^3-14x^2+5x-4$ ヲ $3x-2$ ニテ割リテ商及ビ剩餘ヲ求メヨ。

講義　今 A, B ト云フ二ツノ整式ガアルトシ，A ヲ B デ割ツタ商ヲ Q，剩餘ヲ R トスルト，

$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{Q}+\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$ トナル，又 $\dfrac{\mathrm{A}}{a\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{Q}}{a}+\dfrac{\mathrm{R}}{a\mathrm{B}}$　(1)

デアルコトハ先キニ述ベタコトデアル(56頁參照)。コノ最後ノ關係ヲ利用スルノデアル。

卽チ $\dfrac{3x^3-14x^2+5x-4}{3x-2}=\dfrac{3x^3-14x^2+5x-4}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$ デアルカラ，$\dfrac{3x^3-14x^2+5x-4}{x-\frac{2}{3}}$ ノ商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスルト，最後ノ式ニヨリ $\dfrac{3x^3-14x^2+5x-4}{3x-2}=\dfrac{Q}{3}+\dfrac{R}{3x-2}$ トナル，サレバ次ノ求メ方ガ得ラレル。

求メ方

$$\begin{array}{rrrr|l} +3 & -14 & +5 & -4 & +\frac{2}{3} \\ & +2 & -8 & -2 & \\ \hline +3 & -12 & -3 & -6 & \end{array} \quad \therefore\ Q=3x^2-12x-3,\ R=-6$$

サレバ 求ムル商$=x^2-4x-1$, 剩餘$=-6$.

練習 次ノ各ニ於テ第一式ヲ第二式ニテ割リタルトキノ商ト剩餘ヲ求メヨ。

(1) $5x^5-x^3+x+2;\ x-3.$　(2) $x^3+6x^2+11x+6;\ x+3.$

(3) $2x^3-3x^2+8x-12;\ 2x-3.$

例 4. $f(x)=3x^3-x^2-7x+1$ ニテ $f(-3)$ ノ値ヲ求ム。

講義 既ニ(1)(57頁)ヨリ知ラルヽ樣ニ $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 中ノ $x=A$ ヲ代入シタル $a_0A^3+a_1A^2+a_2A+a_3$ ハ $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ ヲ $x-A$ デ割ツタ剩餘デアルコトニ着眼スルト，

求メ方

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -1 & -7 & 1 & -3 \\ & -9 & 30 & -69 & \\ \hline 3 & -10 & 23 & -68 & \end{array} \quad \therefore\ f(-3)=-68$$

練習 $f(x)=3x^3-x^2-7x+1$ ナルトキ組立除法ニヨリ $x=-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$ ニ對スル $f(x)$ ノ値ヲ求ム。

例 5. 組立除法ニヨリ $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ヲ $x+y+z$ ニテ割レ。

講義 コレヲ x ノ函數ト考ヘテ與ヘラレタ式ヲ x ノ降冪ノ順ニ列ベテ求メヨ。

求メ方

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -3yz & (y^3+z^3) & -(y+z) \\ & -(y+z) & (y+z)^2 & -(y^3+z^3) & \\ \hline 1 & -(y+z) & y^2-yz+z^2 & 0 & \end{array}$$

$\therefore$ 商$=x^2-(y+z)x+y^2-yz+z^2\equiv x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$

練習 次ノ商ヲ求メヨ。但シ m ハ正整數トス。

(1) $\dfrac{x^m-y^m}{x-y}$　(2) $\dfrac{x^m+y^m}{x-y}$　(3) $\dfrac{x^m-y^m}{x+y}$　(4) $\dfrac{x^m+y^m}{x+y}$

25. 剩餘定理

前節例 4 ヨリ明白デアル樣ニ次ノ剩餘定理ガ得ラレル。

x ノ有理整函數 $f(x)$ ヲ $x-A$ ニテ割リテ得ラルヽ剩餘ハ $f(A)$ デアル。

コレヲ證明スルニハ未定係法ヲ用フル，**證明** $f(x)$ ヲ $x-A$ デ割ツタ商ヲ $Q(x)$ トシ剩餘ヲ R トスレバ R ハ常數デアル，何トナレバ $x-A$ ヨリ低次デアルカラデアル。斯樣ニシテ前節(56頁)ニヨリ $f(x)\equiv Q(x)(x-A)+R$ トナル。トコロガ之ハ恒等式ダカラ x ノ特別ノ値 A デモ成立ツカラ $f(A)=Q(A)\times 0+R$ トナル。從テ $R\equiv f(A)$ トナル。

例 1. $f(x)=4x^3-2x^2-2x+1$ ヲ $2x+3$ ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求ム。

講義 前節例 3 (57頁)ヲ參照スレバ，求ムル剩餘ハ $x=-\dfrac{3}{2}$ ト $f(x)$ ニテ置ケバ良イ。

求メ方

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -2 & -2 & +1 & -\frac{3}{2} \\ & -6 & +12 & -15 & \\ \hline 4 & -8 & +10 & -14 & \end{array} \qquad \text{答}\ -14$$

練習

(1) $4x^3-2x^2-2x+1$ ヲ (i) $x+5$; (ii) $x-\dfrac{1}{2}$; (iii) $4x+5$ ニテソレゾレ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。答 (i) -539; (ii) 0; (iii) $-\dfrac{199}{16}$.

(2) $x-2-\sqrt{3}$ ニテ $2x^2+3(2-\sqrt{3})x+2(2-\sqrt{3})$ ヲ除シタル剩餘ヲ求ム。答 $21+6\sqrt{3}$

(3) $x-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ ニテ $x^3-3\sqrt[3]{6}x$ ヲ割リタル剩餘ガ 5 ナルコトヲ示セヨ。

(4) x^2+px+q ヲ $x-1$ ニテ除スレバ剩餘 6 ヲ得，$x+1$ ニテ除スレバ剩餘 2 ヲ得ベシトイフ p 及ビ q ノ値如何。答 $q=3,\ p=2.$

例 2. $a+b-1$ ニテ $a^3+b^3-3a^2+3a-1$ ヲ除シタル剩餘ヲ求メヨ。

講義 斯樣ナ場合ハ何レノ文字ヲ x ト見テモ良イ，換言スルト，何レノ文字ノ函數ト見テモ良イ。從テ今 a ノ函數ト考ヘル。

斯ウスルト，$a=-(b-1)$ ト $f(a)=a^3+b^3-3a^2+3a-1$ ニ於テ置ケバ良イ，

卽チ $f(-b+1)=(1-b)^3+b^3-3(1-b)^2+3(1-b)-1\equiv 0$ トナル。

注意 剩餘ガ 0 デアルカラ，$f(a)$ ハ $a+b-1$ デ割リ切レルノデアル。

練習

(1) $3x-(a+b+c)$ ニテ $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ割リタル剩餘ヲ求ム. 答 0.

(2) $a-x-y$ 及ビ $b-x+y$ ニテ $2a^3+5a^2b+3ab^2$ ヲ割リタル剩餘ヲ求メヨ。 答 $2(x+y)^3+5(x+y)^2b+3b^2(x+y)$, $2a^3+5a^2(x-y)+3a(x-y)^2$

(3) $x-y$ ニテ $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ ヲ割リタル剩餘ヲ求メヨ。 答 0.

例 3. $f(x)$ ヲ $x-a$ ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ A, $x-b$ ニテ割リタル剩餘ヲ B トシタルトキ $f(x)$ ヲ $(x-a)(x-b)$ ニテ除シタル剩餘ヲ求メヨ。但シ $a\neq b$ トス。

講義 先ヅ $f(x)$ ヲ $(x-a)(x-b)$ ニテ割リタルトキノ商ヲ $\varphi(x)$ トシ，剩餘ヲ $\alpha x+\beta$ トスル，何トナレバ，剩餘ノ定義ニヨルト，除數ヨリモ低次ノモノデアルカラ其ノ一般ノモノハ上記ノモノトナル。

從テ
$$f(x)=\varphi(x)(x-a)(x-b)+\alpha x+\beta \qquad (1)$$
ナル恒等式ガ成リ立ツ答デアル。コレヨリ未定係數 α, β ヲ定メテ剩餘ヲ定ムルコトガ出來ル。

サテ恒等式ノ性質ニヨリ x ノ特別ノ値デモ (1) ハ成立ツカラ，$x=a$, b ト順次ニオクト，
$$A=f(a)\equiv\alpha a+\beta\ldots.(2)\quad B=f(b)\equiv\alpha b+\beta\ldots.(3)$$
トナル。(2) ト (3) トヨリ $\alpha\equiv\dfrac{A-B}{a-b}$ ト $\beta\equiv\dfrac{bA-aB}{b-a}$ トナル。サレバ求ムル剩餘ハ
$$\frac{A-B}{a-b}x+\frac{bA-aB}{b-a}$$
トナル，

練習 (1) $f(x)$, $\phi(x)$ ヲ x ニ關スル二ツノ有理整式トスレバ $f(x^2)+x\phi(x^2)$ ヲ x^2-1 ニテ除スルトキノ剩餘ハ $f(1)+x\phi(1)$ ナルコトヲ證明セヨ。

注意 $x^2-1\equiv(x+1)(x-1)$ ナルコトニ注意シテ前例ヲ利用セヨ。

(2) x ニ於ケル有理整式 P ヲ $x-a, x-b, x-c$ ニテ割リタルトキノ剩餘ガソレゾレ α, β, γ ナルコトヲ知リテ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ニテ P ヲ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。但シ a, b, c ノ互ニ相異ナル數トス。

系 1. $f(x)$ ガ $x=A$ ナルトキ 0 トナラバ $f(x)$ ハ $x-A$ ニテ整除セラル，ソシテ其ノ逆モ眞デアル。換言スルト，$f(x)$ ガ $x-A$ ニテ整除セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $f(A)=0$ ナルコトデアル。

何トナレバ $f(A)=0$ ナラバ $x-A$ ニテ $f(x)$ ガ整除セラルヽコトハ「割リ切レヽ」ト言フ言葉ノ定義カラ明ラカデアリ，又 $f(x)$ ガ $x-A$ ニテ割リ切ルヽト云フコトハ卽チ剩餘ガ 0 デアルコトデアルカラ $f(A)=0$ デアル。

例 1. $x^4+px^2+qx+a^2$ ガ $x-1$ 及ビ $x+1$ ノ何レニテモ整除セラルヽナラバ此ノ式ハ又 $x-a$ 及ビ $x+a$ ノ何レニテモ整除セラルヽコトヲ示セ。

講義 先ヅ與ヘラレタル式 $f(x)=x^4+px^2+qx+a^2$ ハ $x-1$ ト $x+1$ デ割レルカラ，系 1 ニヨリ $\quad 1+p+q+a^2=0\ldots.(1)\quad 1+p-q+a^2=0\ldots.(2)$

トナル，コレ等 (1), (2) カラ p ト q ガ定マル，卽チ (1) ト (2) ト加ヘテ $2+2p+2a^2=0$ トナル。從テ $p=-(a^2+1)$ トナリ，(1) ヨリ (2) ヲ減ジテ $2q=0$ トナル，卽チ $q=0$ トナル。サレバ $f(x)$ ハ
$$f(x)\equiv x^4-(a^2+1)x^2+a^2\equiv(x^2-a^2)(x^2-1)$$
トナル。從テ $f(x)$ ハ $x-a$ デモ，$x+a$ デモ整除セラレル

練習

(1) ax^2+bx+c ガ $2ax+b$ ニテ整除セラルヽトキハ第一式ハ完全平方ナルコトヲ證明セヨ。

(2) $ax^3+bx^2-47x-15$ ハ $3x+1$ ニテモ又 $2x-3$ ニテモ整除セラルトイフ, a, b ノ各値如何.

(3) $3bm+am-2an-6bn$ ハ $m-2n$ ニテモ又 $a+3b$ ニテモ整除セラルヽコトヲ示セ。

例 2. x 及ビ常數ヨリ成ル整多項式 μ ノ中ニ於テ x^3 ヲ 8 トスルトキ μ ガ零トナレバ μ ハ必ズ x^2+2x+4 ニテ整除セラルベシ之ヲ證明セヨ。

講義 本題ハ x^3 ヲ 8 トスルノデ, $x=2$ トオクノデハナイ, 卽チ μ ハ x^3 ノ整多項式デアルコトヲ假定シテルノデアル(然ラザレバ本題ハ眞デハナイ), ソコデ先ヅ $x^3=\mathrm{X}$ トオクト, 與ヘラレタル整多項式 $\mu=f(\mathrm{X})$ トナル。ソシテ $x^3=\mathrm{X}=8$ トオクト, $\mu=f(8)=0$ トナルカラ $f(\mathrm{X})$ 卽チ μ ハ $\mathrm{X}-8$ デ整除セラレル。從テ μ ハ x^3-8 デ整除セラレル。トコロガ $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ デアルカラ勿論 μ ハ x^2+2x+4 デ割レル。

26. 整除ニ關スル定理

定理 I. x ニ關スル n 次ノ有理整函數 $f(x)$ ガ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$ ナル n 個ノ因數ノ積ニテ整除セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots, f(a_n)$ ガ悉ク 0 ナルコトデアル, 但シ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ハ悉ク相異ナルモノトスル.

證明 先ヅ充分條件デアルコトヲ證明スル

$f(a_1)=0$ デアルカラ $x-a_1$ デ $f(x)$ ガ整除セラルヽコトニナル, 其ノトキノ商ヲ $f_1(x)$ トスルト, $f(x)\equiv(x-a_1)f_1(x)$ トナル。次ニ $f(a_2)=0$ デアルカラ $f(a_2)\equiv(a_2-a_1)f_1(a_2)=0$ トナル。トコロガ $a_2\neq a_1$ デアルカラ $f_1(a_2)\equiv0$ トナル。從テ $f_1(x)$ ガ $x-a_2$ ニテ整除セラルヽコトニナル, 其ノトキノ商ヲ $f_2(x)$ トスレバ $f_1(x)\equiv(x-a_2)f_2(x)$ トナリ,

$\ldots . f_{n-1}(x)\equiv(x-a_n)f_n(x)$ トナル。從テコレ等ヲ順次代入スルト,

$$f(x)\equiv(x-a_1)f_1(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)f_2(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(x)\equiv\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)f_n(x)$$

トナル。從テ $f(a_1), f(a_2), \ldots . f(a_n)$ ガ悉ク 0 ナラバ $f(x)$ ハ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)$ ニテ整除セラルヽコトトナル.

次ニ必要條件ナルコトヲ證明スル

$f(x)$ ハ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)$ デ整除セラルヽカラ,

$f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)f_n(x)$ トオクコトガ出來ル。從テ $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots.,$ $f(a_n)$ ハ悉ク 0 トナル。

例 1. x ニ於ケル整式

$nx^{n+1}-(1+np)x^n+(p-1)x^{n-1}+(p-1)x^{n-2}+\ldots\ldots+(p-1)x+p$ ガ $x^2-(p+1)x+p$ ニテ整除サルヽコトヲ證明セヨ。

講義 上ノ定理ヲ適用スルタメニ $x^2-(p+1)x+p\equiv(x-1)(x-p)$ ニ直スト與ヘラレタル式ニ $x=1, p$ ヲ代入シタル値ガ 0 トナルコトヲ示セバ足リル。トコロガ $x=1, p$ トスルト, 與ヘラレタル式ハソレゾレ

$$n-(1+np)+\underbrace{(p-1)+(p-1)+\ldots.+p-1}_{(n-1)\text{ 個}}+p\equiv n-1-np+(p-1)(n-1)+p\equiv0 \text{ ニシテ}$$

$$np^{n+1}-(1+np)p^n+(p-1)p^{n-1}+(p-1)p^{n-2}+\ldots.+(p-1)p+p$$
$$\equiv np^{n+1}-np^{n+1}-p^n+p^n-p^{n-1}+p^{n-1}-p^{n-2}+\ldots.+p^2-p+p\equiv0$$

トナル。從テ定理 I ニヨリ與ヘラレタル式ハ $x^2-(p+1)x+p$ デ整除セラレル。

練習

(1) $2x^3-x^2+lx+m$ ガ $(x+2)(x-4)$ ニテ整除セラルヽ樣ニ l, m ノ値ヲ定メヨ。

(2) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ ハ $(a-b)(b-c)(c-a)$ ニテ整除セラルヽコトヲ示セ。

(3) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ハ $(b+c)(c+a)(a+b)$ ニテ整除セラルヽコトヲ證明セヨ。

例 2. $(x^m-1)(x^{m+1}-1)(x^{m+2}-1)$ ハ $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ ニテ整除セ

ラルヽコトヲ證明セヨ，但シ m ハ正ノ整數トス。

講義 先ヅ除數ハ $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\equiv(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$ トナル。トコロガ x^n-1 ハ $x-1$ ヲ因數ニ有スルカラ，x^m-1, $x^{m+1}-1$, $x^{m+2}-1$ ハ各 $x-1$ ヲ因數ニ有スルコトニナル。從テ與ヘラレタル被除數 P ハ $(x-1)^3$ ヲ因數ニ有スルコトニナル。

次ニ P ハ x^2-1 ヲ因數ニ有シテル，何シトナレバ指數ノ $m, m+1, m+2$ ニ於テ m ハ正整數デアルカラ，其ハ $2k, 2k+1$ デ表ハサレル，卽チ $2k, 2k+1, 2k+2$ カ $2k+1, 2k+2, 2k+3$ トナル。從テ $m, m+1, m+2$ ノ中ニハ 2 ノ倍數ガ存在スル，其ノ 2 倍數ノ指數ヲ有スル P 中ノ因數ハ $(x^2)^n-1$ ノ形トナルカラ $x^2=1$ トオケバ 0, 卽チ x^2-1 デ整除セラレ，$x^2-1\equiv(x-1)(x+i)$ デアルカラ $x^{2n}-1$ 中ニ $x+1$ ヲ因數トシテ含ムノデアル。又 $m, m+1, m+2$ ニ於テ m ナル一般ノ正整數ハ $3n$ ガ，$3n+1$ カ，$3n+2$ デ表ハサレルカラ，$3n, 3n+1, 3n+2$；$3n+1$；$3n+2, 3n+3$；或ハ $3n+2, 3n+3, 3n+4$ ト表ハサレルコトヽナリテ必ズ $m, m+1, m+2$ 中ニハ 3 ノ倍數ガ存在スルコトニアル。從テ P ノ因數ニハ $(x^3)^p-1$ ノ形ノモノガ存在シテコハ x^3-1 ニテ整除セラルヽコトトナル。從テ x^2+x+1 ナル因數ニテ $x^{3p}-1$ ガ整除セラルヽコトトナル。

サレバ結局 P ハ $(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$ ニテ整除セラルヽコトトナル。

練習 $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ ハ $x(x+1)(2x+1)$ ニテ整除セラルヽコトヲ證明セヨ。

例 3. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_n$ ガ $(x-\alpha)^2$ ニテ割リ切ルヽタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ $f(\alpha)=0$ ニシテ且ツ $na_0\alpha^{n-1}+(n-1)a_1\alpha^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}=0$ ナルコトヲ示セ。

講義 先ヅ必要條件デアルコトヲ證明スル

ソレニハ先ヅ $f(x)$ ヲ組立除法ニヨリテ $x-\alpha$ デ割ルト，

$$
\begin{array}{ccccc|l}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3\ldots\ldots\ldots a_n & & \alpha \\
 & c_0\alpha & c_1\alpha & c_2\alpha\ldots\ldots c_{n-1}\alpha & & \\
\hline
c_0 & c_1 & c_2 & c_3\ldots\ldots\ldots \mathrm{R} & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
&c_0=a_0\\
&c_1=a_0\alpha+a_1\\
&c_2=a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2\\
&c_3=a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathrm{R}=f(\alpha)
\end{aligned}
$$

トナルカラ，$f(x)$ ハ $(x-\alpha)^2$ ニテ割リ切レルナラバ，先ヅ $f(x)$ ハ $x-\alpha$ デ割リ切レネバナラナイ。從テ $f(\alpha)=0$ トナルコトヲ要スル，從テ $f(x)$ ヲ $x-\alpha$ デ整除シタ商ハ $c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+c_2x^{n-3}+\ldots\ldots+c_{n-1}$ トナル。次ニコノ商ガ $x-\alpha$ デ整除サレネバナラナイ，卽チ $c_0\alpha^{n-1}+c_1\alpha^{n-2}+c_2\alpha^{n-3}+\ldots\ldots+c_{n-1}\equiv0$ ナルコトヲ要スル。トコロガコノ式ハ

$$a_0\alpha^{n-1}+(a_0\alpha+a_1)\alpha^{n-2}+(a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2)\alpha^{n-3}+\ldots+(a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\ldots a_{n-1})\equiv0 \quad (1)$$

トナル。卽チ

$$na_0\alpha^{n-1}+(n-1)a_1\alpha^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}\equiv0 \quad (2)$$

トナル。サレバ $f(\alpha)\equiv0$ ト (2) トハ $f(x)$ ガ $(x-\alpha)^2$ ニテ整除セラルヽタメニ**必要ナル條件**デアル。

コレ又**充分條件**デアル。

何トナレバ (2) ナレバ $c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots\ldots+c_{n-1}$ ガ $x-\alpha$ ニテ整除セラレル，其商ヲ $\varphi(x)$ トスル。$f(\alpha)=0$ ナラバ $f(x)$ ガ $x-\alpha$ デ整除セラルヽカラ

$$f(x)\equiv(x-\alpha)\{c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots\ldots+c_{n-1}\}\equiv(x-\alpha)(x-\alpha)\varphi(x)=(x-\alpha)^2\varphi(x)$$

トナル。

練習

(1) x^3+px+q ガ $(x-\alpha)^2$ ノ如キ一次式ノ平方ニテ割リ切ルヽタメニハ p ト q トノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

注意 前例ニヨリ $\alpha^3+p\alpha+q=0$ ト $3\alpha^2+p=0$ ガ並立スル條件 $-\frac{p}{3}\left(-\frac{2p}{3}\right)^2=q^2$ ガ得ラレル。

(2) $x^5-mx^4+(4n+1)x^3-(6m+3)x^2+54x-27$ ガ $(x-3)^2$ ニテ割リ切ルヽヤウニ m 及ビ n ヲ定メヨ。答 $m=-10$, $n=-16$.

定理 II. x ノ n 次ノ有理整函數 $f(x)$ ガ n 個ヨリ多クノ相異ナル x ノ値ニ對シテ 0 トナルトキハ，各係數ハ悉ク 0 デアル，卽チ函數ハ恒等的ニ 0 デアル。

證明 n 個ヨリ多クノ x ノ値ヲ $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots, a_n, a_{n+1}\ldots\ldots$ トスルト，先ヅ其レ等中ノ n 個ニ對シテ $f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots, f(a_x)$, ガ悉ク 0 トナルカラ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$ デ $f(x)$ ガ整除セラル。ソシテ $f(x)$ ハ n 次デアリ，$(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$ モ亦 n 次デアルカラ，

$$f(x)\equiv \mathrm{A}_0x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\mathrm{A}_2x^{n-2}+\ldots\ldots+\mathrm{A}_n$$

トスルト，

$$f(x)\equiv \mathrm{A}_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$$

トナラネバナラナイ。トコロガ $x=a_{n+1}$ デモ $f(x)$ ハ 0 トナルカラ $f(a_{n+1})\equiv \mathrm{A}_0(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots\ldots(a_{n+1}-a_n)\equiv0$ トナル筈デアル。ソシテ

$a_1, a_2 \ldots a_n, a_{n+1}$ ハ悉ク相異ナルカラ $a_{n+1}-a_1 \neq 0$, $a_{n+1}-a_2 \neq 0$, ..., $a_{n+1}-a_n \neq 0$ デアル。サレバ A_0 ガ 0 トナラネバナラナイ。カクシテ $f(x)$ ハ

$f(x)=A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n$ トナリ，之ガ x ノ $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ デ 0 トナルカラ全ク同様ナル方法デ $A_1 \equiv 0$ トナル，以下斯クシテ $A_2 \equiv 0 \ldots$, $A_n \equiv 0$ トナル。

例 次ノ式ハ恒等式ナルコトヲ證明セヨ。

$$(\beta-\gamma)(x-\beta)(x-\gamma)+(\gamma-\alpha)(x-\gamma)(x-\alpha)+(\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$+(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=0.$$

講義 與ヘラレタル式ノ左邊ハ x ノ二次式デアル。トコロガ $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$ ナルニ 0 トナルカラ，左邊ハ恒等的ニ 0 トナル(前定理ニヨリ)。從テ與ヘラレタル式ハ恒トキ等式デアル。

系 I. x ノ n 次ノ整式ガ x ノ値ニ拘ラズ 0 ナルトキハ其ノ整式ノ係數ガ悉ク 0 デアル。

系 II. x ノ n 次ノ整式ガ x ノ値ニ拘ラズ 0 ナルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ整式ノ係數ガ悉ク 0 ナルコトデアル。

證明 先ヅ必要ナルコトハ系 I ヨリ明ラカデアル。又逆ニ整式ノ係數ガ悉ク 0 ナラバ明ラカニ x ノ値ニ拘ハラズ恒ニ 0 デアルカラ，之レ又充分ナル條件デアル。

注意 コノ系ニヨリ恒等式ノ定義トシテ**變數ノ値ニ拘ハラズ成立ツ式**ヲ採用スルコトガ出來ル。

例 1. $\dfrac{5x^2+ax-b}{cx^2-8x+3}$ ガ相異ナル x ノ三ツノ値ニ對シテ同一ノ値ヲトルトキハ x ノ總テノ値(分母ヲ零ナラシメザル)ニ對シテ同ジ値ヲ取ルコトヲ證明セヨ。又其ノ場合ノ a, b, c 間ノ關係ヲ求メヨ。

講義 x ノ三ツノ相異ナル値ヲ α, β, γ トシ，其レ等ノ値ノトキ與ヘラレタル函數ガ k ニナツタトスルト，題意ニヨリ

$$\frac{5\alpha^2+a\alpha-b}{c\alpha^2-8\alpha+3}=k, \ (1); \quad \frac{5\beta^2+a\beta-b}{c\beta^2-8\beta+3}=k, \ (2); \quad \frac{5\gamma^2+a\gamma-b}{c\gamma^2-8\gamma+3}=k, \ (3)$$

トナル。從テ分母ヲ拂フテ

$$5\alpha^2+a\alpha-b=k(c\alpha^2-8\alpha+3), \ (1)'; \quad 5\beta^2+a\beta-b=k(c\beta^2-8\beta+3), \ (2)';$$
$$5\gamma^2+a\gamma-b=k(c\gamma^2-8\gamma+3), \ (3)'$$

トナル。**コレ等ハ未ダ恒等式デアルト云フコトハ證明サレズ，唯 α, β, γ ナル常數ノ値ニヨリテ成リ立ツノミデアル**

トコロガコヽニ次ノ式ヲ考ヘル，$5x^2+ax-b-k(cx^2-8x+3)$。コハ x ノ二次整式デアリ，ソシテ $(1)', (2)', (3)'$ ニヨリ $x=\alpha, \beta, \gamma$ ノ相異ナル三ツノ値ニヨリテ 0 トナル。從テ定理ニヨリ恒等的ニ

$$5x^2+ax-b-k(cx^2-8x+3)\equiv 0 \qquad (4)$$

トナル。從テコハ x ノスベテノ値(分母ヲ 0 トナサナイ)ニ對シテ成リ立ツ。從テコレヨリ $k=\dfrac{5x^2+ax-b}{cx^2-8x+3}$ ガ得ラレ，コハ x ノ値ニ拘ハラズ成立スルノデアル。

又コノ場合ノ a, b, c ノ關係ヲ求ムルニ，(4) ハ x ノ値ニ拘ラズ成リ立ツカラ，$(5-kc)x^2+(a+8k)x-(b+3k)\equiv 0$ トナル，從テ系 II ニヨリ $5-kc=0$, $a+8k=0$, $b+3k=0$ トナル。コレ等ガ k ノ同一ノ値ニヨリ成立タヽネバナラナイ。トコロガ最後ノ式ヨリ $k=\dfrac{b}{3}$ トナルカラ，$5-\dfrac{b}{3}c=0$, $a+8\times\dfrac{b}{3}=0$ トナラネバナラナイ，卽チ $bc=15$, $3a+8b=0$ トナル。

練習 分數式 $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ ガ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ(分母ヲ 0 ナラシメナイ)一定値ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ a', b', c' ハ悉ク 0 ナラズトス。

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ガ k ノ値ニ拘ラズ一定ナルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

$$kx+(a-k)y=1\ldots\ldots(1); \quad (bk-1)x+(c+k)y=k+1\ldots\ldots(2)$$

講義 k ガ種々ノ値ヲトツテモ x, y ノ値ハ一定不變デアルト云フノデアルカラ，其レ等ノ値ヲ α, β トスルト，コレ等ノ値ハ (1) ト (2) ヲ滿足スル，從テ

$$k\alpha+(a-k)\beta\equiv 1\ldots.(1)', \quad (bk-1)\alpha+(c+k)\beta\equiv k+1\ldots.(2)'$$

トナル。コレ等 $(1)', (2)'$ ハ k ノ値ニ拘ハラズ成リ立タネバナラナイカラ，k ニ付テ整頓シタ式

$$k(\alpha-\beta)+a\beta-1\equiv 0, \quad (b\alpha+\beta-1)k+c\beta-\alpha-1\equiv 0$$

ガ同時ニ成リ立タネバナラナイ。

卽チ $\alpha-\beta=0$, (3); $a\beta-1=0$, (4); $b\alpha+\beta-1=0$, (5); $c\beta-\alpha-1=0$, (6)

ガ同時ニ成リ立タネバナラナイ。ソレニハ (3) ヨリ $\alpha=\beta$, (4) ヨリ $\beta=\dfrac{1}{a}$ ($a\neq 0$ トシテ

$K\alpha^2+(a-K)^2\alpha+K^2+bK+c=0$

$K^2(1+\alpha)+K(\alpha^2-2a\alpha+b)+a^2\alpha+c=0$

$a=0$ ナルトキハ問題ハ不可能デアル)トナル，從テ $\alpha=\beta=\frac{1}{a}$ ナルトキ (3) ト (4) ガ成リ立チ，尙ホ (5) ト (6) モ成リ立タネバナラナイカラ $b\times\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1=0$；$c\frac{1}{a}-\frac{1}{a}-1=0$ ガ成リ立タネバ (3), (4), (5), (6) ガ同時ニ成リ立タナイ，卽チ $b-a+1=0$；$c-a-1=0$

サレバ (1), (2) ガ k ノ値ニ拘ハラズ x, y ノ一定値デアルタメニハ

$$\alpha=\beta=\frac{1}{a};\quad b-a+1=0;\quad c-a-1=0 \tag{7}$$

ガ同時ニ成リ立ツコトガ**必要條件**デアル。

逆ニ (7) ノ條件ハ又**充分條件**デアル。何トナレバ (7) ガ同時ニ成リ立テバ (3), (4), (5), (6) ガ同時ニ成リ立チ，從テ (1)′, (2)′ ガ k ノ値ニ拘ラズ成リ立ツ。サレバ (7) ガ**必充條件**デアル。

練習　$kx^2+(a-k)^2x+k^2+bk+c=0$ ノ二根ノ中一根ガ k ノ値ノ如何ニ關セズ一定ナルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

例 3.　x, y, z ノ値ニ拘ラズ $ax+by+cz+d=0$……(1) ナルタメノ必充條件ヲ求メヨ。

$x=\frac{(a-K)^2\pm\sqrt{(a-K)^4-4K(K^2+bK+c)}}{2K}$

講義　(1) ガ x, y ト z ノ値ニ拘ハラズ成リ立ツナラバ，x, y, z ハ互ニ無關係デアルカラ少ナクトモ x ダケノ値ノ如何ニ拘ハラズ成リ立ネバナラナイ。從テ先ヅ $a=0$，$by+cz+d=0$ ナルコトガ x ノ値ニ拘ラズ成リ立ツコトヲ要スル。トコロガ，y ガ任意ノ値ノトキニモ成リ立ネバナラナイカラ後者ノ式ヨリ $b=0$，$cz+d=0$ ナルコトヲ要スル，最後ニ z ガ任意ノ値ノトキニモ成リ立ネバナラナイカラ $c=0$, $d=0$ ナルコトヲ要スル。サレバ x, y, z ノ値ニ拘ハラズ (1) ガ成リ立ツタメニ**必要ナル**條件ハ $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$ ナルコトデアル。逆ニコノ條件ハ**充分**デアルコトハコレ等ヲ (1) ニ代入スレバ明ラカデアル。

$-a^2+2aK-K^2$　$\pm\sqrt{a}$

練習

(1)　α, β 及ビ γ, δ ナル二組ノ何レニ付テモ同次ニシテ一次ナル式ノ一般ノ形ハ　$A\alpha\gamma+B\alpha\delta+C\beta\gamma+D\beta\delta$　ナルコトヲ注意シ，若シ，此ノ式ガ $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ ナルトキ恒ニ 0 ニ等シトスレバ，其ノ形ハ $k(\alpha\delta-\beta\gamma)$ ナルコト證セヨ。

注意　與式ニ $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ トオクト，γ, δ ニ付テノ整式ナルコトニ着眼セヨ。

$x+2=0$　$(1+2)x+2=0$

$x+4=0$　$(2+4)x+4=0$　$Kx+1=0$

$x+8=0$　$x=\frac{-1}{K}$

(2)　分數式 $\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ ガ x, y ノ値ノ如何ニ拘ラズ(分母ヲ 0 ナラシメザル)一定値ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ナルコトヲ示セ，爰ニ a', b', c' ハ悉ク 0 ナラズトス。

(3)　x, y, z ニ付テノ有理整函數ガ x, y, z ノ値ノ如何ニ拘ラズ 0 ナルタメノ條件ヲ求メヨ。　答　各係數ガ悉ク 0.

27.　未定係數ニ依ル除法

除法ヲ施シテ所求ノ問題ヲ解決スルト却テ混雜スルコトガアル，カヽル場合ニハ未定係數法 (47頁) ニヨル方ガ宜シ，尙例題ニ付テ考究セン。

例 1.　x^4+px^2+q ガ x^2+px+q ニテ整除セラルヽタメニハ p, q ノ取ルベキ値如何。

講義　第一式ガ第二式デ整除セラルヽト，其ノ商ハ x ニ付テ二次式デアル。ソコデ其ノ二次式ヲ Ax^2+Bx+C トスルト，$x^4+px^2+q\equiv(Ax^2+Bx+C)(x^2+px+q)$ トナル筈デアル

$$\equiv Ax^4+(B+Ap)x^3+(C+Bp+Aq)x^2+(Cp+Bq)x+Cq \quad トナル$$

サレバ

$$A=1,\ (1);\quad B+Ap=0,\ (2);\quad C+Bp+Aq=p,\ (3);$$

$$Cp+Bq=0,\ (4);\quad Cq=q,\ (5)$$

トナル。コレ等 (1) ヨリ (5) マデガ同時ニ成リ立ツトキ x^4+px^2+q ガ x^2+px+q デ整除セラルノデアル。

ソコデ A, B, C ヲ消去シテ p, q ノ方程式ヲ求ムレバ良イガ，ソレヲサケテ先ヅ (1) ガ成リ立ツタメニハ $A=1$ デアレバ宜シ，又 (5) ガ成リ立ツニハ，$q(1-C)=0$ トナルカラ，$q=0$ カ或ハ $C=1$ ナラバ宜シ。ソコデ

(a) **~~A=1 デ q=0~~ ナルトキ** (2), (3), (4) ノ如何ヲ見ルト，

(2) ハ $B+p=0$....(2)′；(3) ハ $C+Bp=p$....(3)′；(4) ハ $Cp=0$....(4)′ トナル

從テ (4)′ ガ成リ立ツニハ $C=0$ カ或ハ $p=0$ トナル。サレバ先ヅ **$p=0$ ナルトキ** (2)′, (3)′ ノ如何ヲ見ルト，(2)′ ヨリ $B=0$, (3)′ ヨリ $C=0$ トナル。次ニ **$C=0$ ナルトキ** (2)′, (3)′ ノ如何ヲ見ルト，(2)′ ヨリ $B=-p$, (3)′ ヨリ，$p=0$ カ $B=1$ トナル

サレバ (a) ナル場合ヲマトメルト，(1), (2)....(5) ガ同時ニ成リ立ツタメニハ

$$A=1,\ B=0,\ C=0,\ p=0,\ q=0;\quad A=1,\ B=1,\ C=0,\ p=-1,\ q=0.$$

次ニ (b) **A=1 デ C=1 ナルトキ** (2), (3), (4) ヲ見ルト,

(2) ハ $B+p=0$, (2)′; (3) ハ $1+Bp+q=p$, (3)′; (4) ハ $p+Bq=0$, (4)′ トナル

從テ (2)′ ガ成リ立ツニハ $B=-p$ デ, コノトキ (3)′, (4)′ ハ如何ト見ルト,

(3)′ ハ $1-p^2+q=p, \ldots .(3)''$; (4)′ ハ $p-pq=0, \ldots .(4)''$ トナル

從テ (4)″ ガ成立ツニハ $p=0$, 或ハ $q=1$ デナケレバナラナイ。**$p=0$ ナラバ** (3)″ ヨリ $q=-1$ トナリ; **$q=1$ ナラバ** (3)″ ハ $p^2+p-2=0$ 卽チ $(p+2)(p-1)=0$ トナリテ $p=1$ 或ハ $p=-2$ トナル。

サレバ (b) ノ場合ヲマトメルト (1)....(5) ガ同時ニ成リ立ツタメニハ

$A=1,\ B=0,\ C=1,\ p=0,\ q=-1$; $A=1,\ B=-1,\ C=1,\ p=1,\ q=1$;

$A=1,\ B=2,\ C=1,\ p=-2,\ q=1.$

ノ三組デアル。サレバ求ムル p, q ノ値ノ組ハ次ノ通リデアル

$$\left.\begin{matrix}p=0\\q=0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}p=-1\\q=0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}p=0\\q=-1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}p=1\\q=1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}p=-2\\q=1\end{matrix}\right\}$$

例 2. $f(x)$ ハ x ニ關スル二次ノ有理整式ニシテ $f(x^2-1)$ ハ $f(x)$ ニテ整除シ得ベシトイフ, $f(x)$ ヲ求ム。

講義 先ヅ求ムル x ノ二次ノ有理整式 $f(x)$ ヲ $f(x)\equiv Ax^2+Bx+C$ トスル, コヽニ $A\neq 0$ デアル。ソコデ

$f(x^2-1)\equiv A(x^2-1)^2+B(x^2-1)+C\equiv Ax^4+(B-2A)x^2+A-B+C$ トナル。コレガ $f(x)$ デ整除セラルヽカラ其ノ商ヲ x^2+mx+n トスル, 何トナレバ商ノ第一項ハ Ax^4 ヲ Ax^2 デ割ツタ商デアルカラデアル。サレバ

$$Ax^4+(B-2A)x^2+A-B+C\equiv(Ax^2+Bx+C)(x^2+mx+n)$$

トナル, 今計算ノ便宜上兩邊ヲ A デ割ルト,

$$x^4+\left(\frac{B}{A}-2\right)x^2+1-\frac{B}{A}+\frac{C}{A}\equiv\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)(x^2+mx+n)$$ トナル, コヽニ於テ

$\dfrac{B}{A}=p,\ \dfrac{C}{A}=q$ トオクト

$$x^4+(p-2)x^2+1-p+q\equiv(x^2+px+q)(x^2+mx+n)$$
$$=x^4+(p+m)x^3+(pm+q+n)x^2+(pn+qm)x+qn.$$

トナル。コレガ恒等式デアルカラ, 同時ニ次ノ式ガ成リ立ネバナラナイ,

$p+m=0\ldots .(1)$; $pm+q+n=p-2\ldots .(2)$; $pn+qm=0\ldots .(3)$; $qn=1-p+q\ldots (4)$

ソコデ m, n ヲ消去シテ p, q ノ方程式ヲ求ムレバ良イガ, 其レヲサケテ先ヅ (1) ガ成リ立ツノハ $p=-m$ デ, コノトキハ (2), (3), (4) ノ如何ヲ見ルト,

(2) ハ $-m^2+q+n=-m-2\ldots .(2)'$; (3) ハ $-mn+qm=0\ldots .(3)'$;

(4) ハ $qn=1+m+q\ldots .(4)'$

トナル。今 (3)′ ガ成立スルノハ $m=0$ 或ハ $q=n$ ナルトキデアル

(A) ソコデ $m=0$ トスルトキ (2)′ ト (4)′ ノ如何ヲ見ルト, (2)′ ハ $q+n=-2..(2)''$; (4)′ ハ $qn=1+q\ldots .(4)''$ トナルカラ, (2)″ ガ成リ立ツトキ, 卽チ $n=-2-q$ ノトキ (4)″ ハ $-q(2+q)=1+q$, 卽チ $q^2+3q+1=0$, 卽チ $q=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ ナルトキ成リ立ツ。

(B) $q=n$ トスルトキ (2)′ ト (4)′ ノ如何ヲ見ルト, (2)′ ハ $-m^2+2n=-m-2..(2)'''$; (4)′ ハ $n^2=1+m+n\ldots (4)'''$ トナルカラ, (2)‴ ガ成リ立ツトキ, $2n=(m-2)(m+1)$ ノトキ, (4)‴ ハ $\dfrac{(m-2)^2(m+1)^2}{4}=1+m+\dfrac{(m-2)(m+1)}{2}$ トナル, 卽チ

$(m+1)[(m-2)^2(m+1)-4-2(m-2)]=0$, 卽チ $(m+1)(m-1)(m^2-2m-4)=0$, サレバ $m=-1, 1$ 或ハ $1\pm\sqrt{5}$ ノトキニ (4)‴ ガ成リ立ツ。

結局以上ノ結果ヲマトメルト,

$$\left.\begin{matrix}p=0\\q=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}p=0\\q=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}p=1\\q=0\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}p=-1\\q=-1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}p=-1-\sqrt{5}\\q=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\right\},\ \begin{matrix}p=-+\sqrt{5}\\q=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}$$

トナル。サレバ求ムル $f(x)$ ハ

$A\left\{x^2-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$, $A\left\{x^2-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$, $A(x^2+x)$, $A(x^2-x-1)$,

$A\left\{x^2-(1+\sqrt{5})x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$, $A\left\{x^2-(1-\sqrt{5})x+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ ノ六通リデアル。

練習

(1) x^3+px^2+qx+r ガ ax^2+bx+c ニテ整除セラルヽタメニハ $\dfrac{ap-b}{a}=\dfrac{aq-c}{b}=\dfrac{ar}{c}$ ナラザルベカラザルコトヲ證明セヨ。

(2) $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ $ax^2+2bx+c$ ニテ整除セラルヽトキハ前者ハ完全ナル立方ニシテ, 後者ハ完全ナル平方ナルコトヲ證セヨ。

XI. 同次函數

28. 同次式

例ヘバ x ト y ノ整式

$$ax^2+bxy+cy^2\ldots .(1);\quad ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f\ldots .(2)$$

ヲ見ルト, (1) デハ各項ガ二次デ, (2) デハ始メノ三項ハ各二次デアツテ, 其ノ次ノ二項

ハ各一次デ最後ノ一項ハ零次デアル，カヽル場合ニ (1) ヲ**同次式**，(2) ヲ**不同次式**ト云フノデアル。

一般ニ或幾ツカノ變數ノ有理整函數ニ於テ同類項ヲ集メテ之ヲ整頓シタルトキニ，其レ等ノ變數ニ付テ各項ノ次數ガ同一デアルトキハ之ヲ**同次式**ト云フコトニスル。

同次式ノ性質　サテ同次式デハ x ヲ tx'，y ヲ ty' トオクト，(例ヘバ (1) ニ付テ)

$$ab^2x'^2+bx'ty't+ct^2y'^2=t^2(ax'^2+bx'y'+cy'^2)$$

トナル，即チ二次ノ同次式ノトキハ t^2 ナル因數ヲ放出スル，又三次ノ同次式ナラバ t^3 ヲ放出スル以下斯樣ニ次數ダケノ t ノ冪數ヲ放出スル。ソシテコノコトハ必ズシモ x, y ノ二變數ノミニ關スル性質デナクテ，一般ニ x, y, z......ナル變數ノトキモ x ヲ tx'，y ヲ ty'，......トオケバ n 次ノ同次式ナラバ t^n ガ得ラレル．サレバ次ノコトガ斷言出來ル。

同次式ヲ因數ニ分解スルトキハ各因數ハ亦同次式デアルベキデアル。

例 1. $a^2+b^2-1+k(a^2+2mab-b^2)$ ガ a, b ニ於ケル二ツノ一次式ノ積ニ等シキタメニハ k ト m トノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。

講義　先ヅ與ヘラレタル式ヲ次ノ樣ニ同次式ニ直スト，

$$a^2+b^2-c^2+k(a^2+2mab-b^2),\quad c=1\ldots.(1)$$

トナル。コノ同次式ガ二ツノ一次式 $Ma+Nb+c$ ト $Pa+Qb-c$ トノ積デアルト考ヘラレル。何トナレバ c ノ項ハ $-c^2$ ダケデ，掛ケテ $-c^2$ トナリ，ソシテ各ガ一次デアルカラ，c ト $-c$ デナケレバナラヌ

カクシテ　$a^2+b^2-c^2+k(a^2+2mab-b^2)\equiv(Ma+Nb+c)(Pa+Qb-c)$　トナル

即チ
$$\begin{aligned}(1+k)a^2+2kmab+(1-k)b^2-c^2\equiv{}&MPa^2+(NP+MQ)ab+NQb^2\\&+(P-M)ac+(Q-N)bc-c^2\end{aligned}$$

トナル。從テコレガ恒等式デアルコトガ問題ノ假定デアルカラ，同時ニ

$1+k=MP\ldots.(1)$；$2km=NP+MQ\ldots.(2)$；$1-k=NQ\ldots.(3)$；

$P-M=0\ldots.(4)$，$Q-N=0\ldots.(5)$

ガ成立シナケレバナラナイ。ソコデ M,N,P,Q ヲ消去スレバ宜シイ。ソレニハ消去法ヲ適用スレバ良イガ，次ノ樣ニシテ求メル。サテ先ヅ (4) ト (5) ガ成立ツカラ $P=M$，$Q=N$ デアッテ，コノトキ (1), (2), (3) ハ如何ト見ルト，(1) ハ $1+k=M^2\ldots.(1)'$；(2) ハ $2km=2NM\ldots.(2)'$；(3) ハ $1-k=N^2\ldots.(3)'$ トナル。コレ等ガ同時ニ成リ立ツ假定デアルカラ，(1)′, (2)′ ト (3)′ カラ次ノ關係ガ得ラレル，即チ (2)′ ノ兩邊ヲ平方シテ (1)′ ト (3)′ トヲ代入スルト $k^2m^2=1-k^2$

トナル，コレ本題ノ必要ナル條件デ，求ムル條件デアル。

例 2. $x^3+y^3+px^2+qxy+ry^2$ ガ x, y ニ關シテ一次ト二次トノ因數ニ分解シ得ルニハ p, q, r ハ如何ナル條件ヲ滿足スベキカ。但シ p, q, r ハ實數ニシテ二ツノ因數ノ係數ハ實數若クハ虛數ナリトス。

講義　與ヘラレタル式ヲ同次式ニ完成スルト，$x^3+y^3+px^2z+qxyz+rzy^2$ トナル，ココニ $z=1$ デアル。ソコデコノ式ハ一次ト二次トノ因數ニ分解出來ルト云フノデアルカラ，其ノ一次ト二次ノ因數ヲ $Px+Qy+Rz$ ト $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2$ トスルト

$$x^3+y^3+px^2z+qxyz+rzy^2\equiv(Px+Qy+Rz)(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2)\qquad\text{(A)}$$

トナル。ソコデ括弧ヲホドイテ係數ヲ等シク置イテ方程式ヲトケバ良イガ，非常ニ繁雜ダカラ，其レヲ避ケテ。

先ヅ直ニ氣ガ付クコトハ (A) ノ左邊ガ x, y ニ付テ一次ノ項ト x, y ヲ含マナイ項トガナイコトデアル。サレバ $RD+PF=0\ldots.(1)$；$RE+QF=0\ldots.(2)$；$RF=0\ldots.(3)$ トナル筈デアル。コレガ同時ニ先ヅ成リ立タネバナラナイガ，(3) ヨリハ $R=0$ カ或ハ $F=0$ ナルトキ (3) ガ成リ立チ，其ノトキニ (1), (2) ガ成リ立ツニハ (i) $R=0$, $F=0$ (P, Q ガ同時ニ 0 トナルコトガ出來ナイ) カ，(ii) $F=0$, $D=0$, $E=0$ ($R\neq0$ デアル)。サレバ次ノ樣ニ二ツノ場合ニ分ケテ考究ヲ進メル。

第一 R=0, F=0 ナル場合　(A) ハ次ノ樣ニナル

$$\begin{aligned}x^3+y^3+px^2z+qxyz+ry^2z&\equiv(Px+Qy)(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz)\\&\equiv APx^3+(BP+AQ)x^2y+(CP+BQ)xy^2+CQy^3+DPx^2z+(EP+DQ)xyz+EQy^2z\end{aligned}$$

トナルカラ，$AP=1\ldots\ldots(1)$; $CQ=1\ldots\ldots(2)$; $BP+AQ=0\ldots\ldots(3)$; $CP+BQ=0\ldots\ldots(4)$ $DP=p\ldots\ldots(5)$; $EP+DQ=q\ldots(6)$; $EQ=r\ldots\ldots(7)$. ガ同時ニ成リ立タネバナラナイ。トコロガ (1) ト (2) トガ先ヅ成リ立ツタメニハ $P=\dfrac{1}{A}$, $Q=\dfrac{1}{C}$ デナケレバナラナイ，コノトキ (3), (4), (5), (6), (7) ノ如何ヲ見ルト，

$$(3)\text{ ハ }\frac{B}{A}+\frac{A}{C}=0\ldots\ldots(3)';\quad (4)\text{ ハ }\frac{C}{A}+\frac{B}{C}=0\ldots\ldots(4)';\quad (5)\text{ ハ }\frac{D}{A}=p\ldots\ldots(5)';$$

$$(6)\text{ ハ }\frac{E}{A}+\frac{D}{C}=q\ldots\ldots(6)';\quad (7)\text{ ハ }\frac{E}{C}=r\ldots\ldots(7)'$$

トナル。從テ $(3)'$ ト $(4)'$ ガ同時ニ成リ立ツニハ $B=-\dfrac{C^2}{A}$, $A^3=C^3$ ナルコト，即チ $A=C$, $B=-C$; $A=C\omega$, $B=-\dfrac{C}{\omega}$; 或ハ $A=C\omega^2$, $B=-\dfrac{C}{\omega^2}$ トナラネバナラナイ (ω ハ 1 ノ立方根デアル)。コノトキ $(5)'$, $(6)'$, $(7)'$ ノ如何ヲ見ルト

(I) $A=C$, $B=-C$ ノトキ $(5)'$ ハ $\dfrac{D}{C}=p\ldots\ldots(5)''$; $(6)'$ ハ $\dfrac{E}{C}+\dfrac{D}{C}=q\ldots\ldots(6)''$
$(7)'$ ハ $\dfrac{E}{C}=r\ldots\ldots(7)''$

トナルカラ，コレガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ $(5)''$ ト $(7)''$ ガ同時ニ成リ立ツトキハ $D=Cp$, $E=Cr$ デ，其ノトキ $(6)''$ ノ如何ヲ見ルト，$(6)''$ ハ $p+r=q$ トナルカラ，(A) ガ成リ立ツタメニハ $\boldsymbol{p-q+r=0}$ ナルコトガ必要デアル。

(II) $A=\omega C$, $B=-\dfrac{C}{\omega}$ ノトキハ $(5)'$ ハ $\dfrac{D}{\omega C}=p\ldots\ldots(5)'''$;
$(6)'$ ハ $\dfrac{E}{\omega C}+\dfrac{D}{C}=q\ldots\ldots(6)'''$; $(7)'$ ハ $\dfrac{E}{C}=r\ldots\ldots(7)'''$

トナルカラ，コレ等ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ $(5)'''$ ト $(7)'''$ トガ同時ニ成リ立ツトキハ $D=C\omega p$, $E=Cr$ デコノトキ $(6)'''$ ノ如何ヲ見ルト，$(6)'''$ ハ $\dfrac{r}{\omega}+\omega p=q$, 即チ $r-q\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}p=0$, 即チ $r+\dfrac{q}{2}-\dfrac{p}{2}-(p+q)\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=0$ トナル。サレバ p, q, r ガ實數デアルカラ，$r+\dfrac{1}{2}(q-p)=0$, $p+q=0$ トナル（　頁參照）コレガ同時ニ成リ立ツコトガコノ場合ニ於ケル (A) ガ恒等式ナルコトノ必要條件トナル，即チ $\boldsymbol{p=-q=r}$ デアル。

(III) $A=\omega^2 C$, $B=-\dfrac{C}{\omega^2}$ ノトキモ同ジ條件ガ得ラレル。

第二ノ場合 $F=0$, $D=0$, $E=0$, $R\neq 0$ コノトキハ (A) ハ

$$x^3+y^3+px^2z+qxyz+ry^2z\equiv(Px+Qy+Rz)(Ax^2+Bxy+Cy^2)$$
$$\equiv APx^3+(BP+AQ)x^2y+(CP+BQ)xy^2+CQy^3+ARx^2z+BRxyz+CRy^2z.$$

トナル。ソコデ上式ガ恒等式デアルカラ

$AP=1\ldots(1)$; $BP+AQ=0\ldots(2)$; $CP+BQ=0\ldots(3)$; $CQ=1\ldots\ldots(4)$;
$AR=p\ldots\ldots(5)$; $BR=q\ldots(6)$; $CR=r\ldots\ldots(7)$

ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。ソコデ (1) ト (4) ガ同時ニ成立ツノハ $P=\dfrac{1}{A}$, $Q=\dfrac{1}{C}$ ノトキデ，其ノトキ (2), (3), (5), (6), (7) ハ如何ト見ルト，

$$(2)\text{ ハ }\frac{B}{A}+\frac{A}{C}=0\ldots\ldots(2)';\quad (3)\text{ ハ }\frac{C}{A}+\frac{B}{C}=0\ldots\ldots(3)';\quad (5)\text{ ハ }AR=p\ldots(5)';$$

$$(6)\text{ ハ }BR=q\ldots(6)';\quad (7)\text{ ハ }CR=r\ldots\ldots(7)'$$

トナル。ソコデ $(2)'$ ト $(3)'$ ガ同時ニ成リ立ツノハ $B=-\dfrac{C^2}{A}$, $A^3=C^3$ ノトキ，即チ $A=C$, $B=-C$; $A=\omega C$, $B=-\dfrac{C}{\omega}$; $A=\omega^2 C$, $B=-\dfrac{C}{\omega^2}$ ノ三組ノ値ノトキ $(5)'$, $(6)'$, $(7)'$ ノ如何ヲ見ルト

(I) $A=C$, $B=-C$ ノトキ; $(5)'$ ハ $CR=p\ldots(5)''$; $(6)'$ ハ $-CR=q\ldots\ldots(6)''$; $(7)'$ ハ $CR=r\ldots\ldots(7)''$ トナル。サレバコレ等ガ同時ニ成リ立ツニハ $\boldsymbol{p=-q=r}$ ナルコトヲ要スル。

(II) $A=\omega C$, $B=\dfrac{C}{\omega}$ ノトキ $(5)'$ ハ $\omega CR=p$; $(6)'$ ハ $-\dfrac{C}{\omega}R=q$; $CR=r$ トナル。サレバコレ等デ同時ニ成リ立ツニハ $\dfrac{p}{\omega}=-\omega q=r\ldots\ldots(8)$ トナラネバナラナイガ，p, q, r ハ實數ダカラ，成リ立ツニハ $p=q=r=0$ トナラネバナラズ，コノトキハ $R\neq 0$ デアルシ又 $C\neq 0$, 何トナレバ $A=0$, $D=0$, $C=0$ トナルカラ (A) ノ意味ガナイコトニナル。サレバ (8) ハ成立シナイ。

結局求ムル關係ハ $\boldsymbol{p-q+r=0}$ カ或ハ $\boldsymbol{p=-q=r}$ デアル。

例 3. a, b ガ整數ナルトキ $x^3+y^3+ax^2y+bxy^2$ ガ有理係數ヲ有スル因數ニ分解シ得ルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求ム。

講義 先ヅ**必要條件**ヲ求ムルニ，

サテ與式ガ三次ノ同次式デアルカラ，分解出來ル假定ニヨリ一次ノ同次式ト二次ノ同次式ニ分解出來ル筈デアル。其レ等ヲ $m'x+n'y$; $p'x^2+q'xy+r'y^2$ トスルト，

$$x^3+ax^2y+bxy^2+y^3\equiv(m'x+n'y)(p'x^2+q'xy+r'y^2) \qquad (1)$$

トナル，シカモ假定ニヨリ m', n'; p', q', r' ハ有理數デアル

ソコデ $m'=\dfrac{m}{M}$, $n'=\dfrac{n}{M}$; $p'=\dfrac{p}{N}$, $q'=\dfrac{q}{N}$, $r'=\dfrac{r}{N}$ ノ樣ニスルト，(但シ，M, N ハ最小數トスル), (1) ハ次ノ樣ニナル

$$x^3+ax^2y+bxy^2+y^3\equiv\frac{1}{MN}(mx+ny)(px^2+qxy+ry^2) \qquad (2)$$

ソシテ m ト n 間ニモ，p, q ト r トノ間ニモ**公約數ヲ有シナイ**，何トナレバ左邊ノ各項ノ係數ニ公約數ヲ有シナイカラデアル。又組 m, n ト組 p, q, r トノ間ニモ公約數ハ存在シナイ，何トナレバ M ト N トガ最小數デアルカラデアル。

ソコデ (2) ヨリ $MNx^3+aMNx^2y+bMNxy^2+MNy^3$

$$=mpx^3+(pn+mq)x^2y+(mr+nq)xy^2+nry^3 \qquad \text{(A)}$$

ガ得ラレル。ソシテ此ハ恒等式デアルカラ

$MN=mp\ldots(1)$; $aMN=pn+nq\ldots(2)$; $bMN=mr+nq\ldots(3)$; $MN=nr\ldots(4)$

トナラネバナラナイ。(コヽデ注意シナケレバナラナイコトハ各式トモ整數ニ關スル等式デアル)。

サテ MN ノ素因數ノ一ツヲ ρ トスルト，(1) ヨリ mp ハ ρ デ整除セラレテ m ト p ト互ニ素デアルカラ，ρ ハ m カ或ハ p ノ約數デアル。今 m ノ約數トスル。トコロガ (2) ニ於テ左邊ハ ρ デ整除セラルヽカラ，右邊ガ整除セラル。從テ m ガ ρ デ整除セラルヽカラ np ガ ρ デ整除セラル。サレバ n ガ ρ デ整除セラルヽコトヽナル。斯クスルト，m ト n トガ ρ ナル公約數ヲ有スルコトニナル，之 m ト n トガ公約數ヲ有シナイコトニ不合理トナル。從テ $MN=\pm1$ デナケレバナラナイ。サレバ $mp=nr=\pm1$ トナル，

從テ $mp=nr=1\ldots(5)$; 或ハ $mp=nr=-1\ldots(6)$ トナル。ソシテ m, n, p, r ハ整數デアルカラ。

(5) ヨリ $m=+1, p=1, n=1, r=1$; $m=+1, p=+1, n=-1, r=-1$;

$m=-1, p=-1, n=1, r=1$; $m=-1, p=-1, n=-1, r=-1$

ノ四組ガ得ラレ。又 (6) ヨリ

$m=+1, p=-1, n=+1, r=-1$, $m=+1, p=-1, n=-1, r=+1$;

$m=-1, p=+1, n=+1, r=-1$, $m=-1, p=+1, n=-1, r=+1$

ノ四組ガ得ラレル。

サレバ結局 $x+y$ カ或ハ $x-y$ ナル因數ヲ與式ガ有シナケレバナラナイコトニナル。從テ剩餘定理ニヨリテ $1+a+b+1=0$ カ或ハ $-1+a-b+1=0$ 卽チ $a+b+2=0\ldots(7)$ カ或ハ $a=b\ldots(8)$ ナルコトヲ要スル，之ガ**必要條件**デアル。

次ニ (7) ト (8) ハ**充分條件**デアル。

何トナレバ (7) ナレバ與式ハ $x^3+ax^2y-(a+2)xy^2+y^3=(x-y)(x^2+xy+axy-y^2)$ トナリ，(8) ナレバ與式ハ $x^3+y^3+axy(x+y)=(x+y)(x^2-xy+axy+y^2)$ トナリテ有理係數ヲ有スル因數ニ分解出來ルカラデアル

サレバ求ムル**必充條件**ハ $a=b$ 或ハ $a+b+2=0$ 卽チ $(a-b)(a+b+2)=0$ デアル。

29. 對稱式

例ヘバ同次式 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^3+\beta^3$ ノ樣ニ α ト β トヲ交換シテモ矢張リソレゾレ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^3+\beta^3$ ト形ガ不變デアル，

カヽル α, β ノ同次式ヲ α, β **ニ付テノ對稱式**ト云フノデアル。次ニ $a+b+c$, $bc+ca+ab$, abc ノ樣ニ a ト b; b ト c; c ト a トヲ交換スルモ何レノトキモ形ハ不變デアル，カヽル場合ニハ **a, b, c ニ付テ對稱式**デアルト云フノデアル。又 $a+b+c+d$ ガアレバ a ト b; a ト c; a ト d; b ト c; b ト d; c ト d; トヲ交換スルモ何レノトキモ形ハ不變デアル，カヽル場合ニハ **a, b, c, d ニ付テ對稱式**デアルト云フノデアル。

例 整式 $a^2+3ab+b^2+5c^2$ ハ如何ナル文字ニ付テ對稱式デアルカ。

講義 與式ハ a ト b トヲ交換スルト，不變デアルガ，a ト c 又ハ b ト c トヲ交換スルトキハ形ヲ變更スルカラ，與式ハ a ト b ニ付テノ對稱式デアル。

練習 整式 $a^2+b^2+c^2+(a+b)(b+c)(c+a)-5d^2$ ハ如何ナル文字ニ對シテ對稱式デアルカ。 答 a, b, c ニ付テ對稱式

(i) ***對稱式ノ性質*** サテ例ヘバ二ツノ對稱式 $\alpha+\beta$ ト $\alpha\beta$ ニ四則ノ演算ヲ施シテモ其ノ結果ハ，例ヘバ $a(\alpha+\beta)\pm b\alpha\beta$; $(\alpha+\beta)^2\alpha\beta$; $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ ノ樣ニ矢張リ α, β ニ付テノ對稱式デアル。又二ツノ對稱式 $a+b+c$ ト $ab+bc+ca$ ニ四則ノ算法ヲ施スト，$x(a+b+c)\pm y(ab+bc+ca)$; $(a+b+c)(ab+bc+ca)$; $\dfrac{a+b+c}{ab+bc+ca}$ トナリテ矢張リ對稱式デアル。斯樣ニ一般ニ次ノ定理ガ得ラレル(證明ハ本書ノ程度ヲ越スカラ略ス)。

定理 I. 同文字ノ二ツノ對稱式ノ和，差，積，商ハ又同文字ノ對稱式デアル。

サレバコノ定理ヲ推シ擴メテ三ツ四ツ……ノ對稱式ニ付テモ同樣ニ述ベルコトガ出來ル. 從テ逆ニ(證明略ス)。

定理 II. 一般ノ對稱式ハ四則ノ算法ニヨリテ簡單ナル對稱式ヨ

リ組立ツルコトカ出來ル。

爰デ簡單ナル對稱式ト云フノハ二文字 α, β ナラバ $\alpha+\beta$ ト $\alpha\beta$; 三文字 α, β, γ ナラバ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ ト $\alpha\beta\gamma$ ノコトデアル。

例 1. $\alpha+\beta=p_1$, 及ビ $\alpha\beta=p_2$ ナルトキ $\alpha^4+\beta^4$ ヲ p_1 及ビ p_2 ニテ表ハセ。

講義 $\alpha^4+\beta^4$ ハ四次ノ同次對稱式デアルカラ, 同次式ノ性質(72頁), 對稱式ノ性質(77頁)ト未定係數法(頁47)ニヨリ $\alpha^4+\beta^4\equiv A(\alpha+\beta)^4+B(\alpha+\beta)^2\alpha\beta+C(\alpha\beta)^2\ldots\ldots(1)$ トナル。ソコデ未定係數 A, B, C ヲ決定シナケレバナラナイ。トコロガ (1) ハ恒等式デアルコトハ對稱式ノ性質ヨリ明ラカデアルカラ, $\beta=0$ ノトキデモ成立スル筈デアル。從テ (1) ハ $\alpha^4\equiv A\alpha^4$ トナリ, $A=1$ トナル。サレバ (1) ハ
$\alpha^4+\beta^4\equiv(\alpha+\beta)^4+B(\alpha+\beta)^2\alpha\beta+C(\alpha\beta)^2\ldots\ldots(2)$ トナル。ソコデ兩邊ノ $\alpha^3\beta$ ノ係數ヲ比較スルト, 左邊デハ 0 デ, 右邊デハ $4+B$ トナルカラ, $B=-4$ トナル。最後ニ (2) ニ於テ $\alpha=-\beta$ トオクト, $2\beta^4\equiv C(-\beta^2)^2$ トナルカラ $C=2$ トナル。サレバ (1) ハ
$\alpha^4+\beta^4\equiv(\alpha+\beta)^4-4(\alpha+\beta)^2\alpha\beta+2(\alpha\beta)^2$ トナル。從テ $\alpha^4+\beta^4\equiv p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2$ トナル。

練習 $\alpha+\beta=p_1$ 及ビ $\alpha\beta=p_2$ ナルトキ $\alpha^5+\beta^5+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3$ ヲ p_1 及ビ p_2 ニテ表ハセ。 $p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^3$

注意 $\alpha^5+\beta^5+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3\equiv A(\alpha+\beta)^5+B(\alpha+\beta)^3\alpha\beta+C(\alpha+\beta)(\alpha\beta)^2$ トオク。

例 2. $\dfrac{(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5}{5}$ ハ $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3}$ ト $\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$ トノ積ニ等シキコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ直ニ氣ガ付クコトハ $a-b$, $b-c$, $c-a$ ニ關スル式デアルカラ, コレ等ヲソレゾレ x, y, z トオクト, 結局問題ハ次ノ様ニナル
$x+y+z=0$ ナルトキ $\dfrac{x^5+y^5+z^5}{5}\equiv\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\times\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\ldots\ldots(1)$, ナルコトヲ示セ。
サテ $x+y+z=p_1=0$, $xy+yz+zx=p_2$, $xyz=p_3$ トシテ, $x^5+y^5+z^5$, $x^3+y^3+z^3$, $x^2+y^2+z^2$ ヲ p_1, p_2, p_3 デ表ハスコトガ出來ルコトハ對稱式ノ性質カラ明ラカデアル。
ソコデ先ヅ $x^5+y^5+z^5\equiv Ap_2p_3+Bp_1^2p_3+Cp_2^2p_1\equiv Ap_2p_3$
トオクコトガ出來ル。今 $x=1=y$, $z=-2$ トオクト, 上式ハ $1+1-32=A(1-4)(-2)$ トナル。

從テ $A=-5$ トナル。故ニ $x^5+y^5+z^5\equiv-5p_2p_3$ トナル。又 $x^3+y^3+z^3\equiv Cp_3$ トオカレ ($p_1=0$ ダカラ), $x=1$, $y=1$, $z=-2$ トオクト, $C=3$ トナル。最後ニ $x^2+y^2+z^2\equiv Dp_2$ トオクト ($p_1=0$ ダカラ), $D=-2$ トナル。

サレバ (1) ノ左邊ハ $-p_2p_3$ トナリ, 右邊ハ $-p_3p_2$ トナル。從テ (1) ガ成リ立ツノデアル。

練習 $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=a$, $x^5+y^5+z^5=b$, $x^7+y^7+z^7=c$ ナルトキハ $21b^2-25ac=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

注意 先ヅ $x+y+z=p_1$, $xy+yz+zx=p_2$, $xyz=p_3$ トオキ, 後ニ $p_1=0$ トオキテ前例ト同様ニシテ p_2, p_3 ニテ各式ヲ表ハシ, p_2, p_3 ヲ消去セヨ。

(ii) 因數分解 例ヘバ a, b, c ノ對稱式

$$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \qquad (1)$$

$$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$$
$$\equiv(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a) \qquad (2)$$

ノ様ニ $a+b+c$ ナル對稱式ノ因數ヲ有スルト, 他ノ因數ハ對稱式ナルコトハ明ラカデアル。何トナレバ若シ他ノ因數ガ對稱式ナラズバ右邊ハ a, b, c ヲ交換シテ得ラルヽ式ガ異ナル形ヲトルコトニナリ, 左邊ハ不變デアルト云フコトト不合理ニ陷ルカラデアル。

從テ $a+b-c$ ナル因數ヲ有スルトキハ, コハ對稱式デナイカラ, コレニ他ノ a, b, c ニ付テノ一次ノ同次式ヲ乘ジタル連乘積ガ對稱式トナル様ニ他ノ因數ヲ有シテキル, 即チ (2) ニ於ケル様ニ $a+b-c$ ノ他ニ $c+a-b$, $c+b-a$ ナル因數ヲ有シテ $(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)$ ガ對稱式デアル。

例 1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

講義 $a=-b$ トオクト原式ハ $c^3+b^3-b^3-c^3=0$ トナルカラ $a+b$ ナル因數ガアル。トコロガコハ a, b, c ニ付テノ對稱式デアルカラ $(a+b)(b+c)(c+a)$ ナル因數ヲ有シナケ

レバナラナイ，何トナレバ $a+b$ ハ a ト b ノ對稱式デアルカラ，b ト c，c ト a ニ付テノ對稱式ガ存在シナケレバ a, b, c ニ付テノ對稱式トナラナイカラデアル。

例 2. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$ ヲ因數ニ分解セヨ。

講義 與ヘラレタル式ハ x, y, z ニ付テノ對稱式デアリ，$x+y+z$ ナル因數ヲ有スルカラ

$$(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(x+y+z)[L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)]$$

デナケレバナラナイ。ソコデ x^3 ノ係數ヲ比較シテ $L=0$, x^2y ノ係數ヲ比較シテ $M=1$ トナル。依テ $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

練習 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$

注意 $a=0$ トスルト，0 トナルカラ a, b, c ナル因數ヲ有スルコトニ着眼セヨ。

答 $80abc(a^2+b^2+c^2)$

(2) $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$ 答 $12abc(a+b+c)$

例 3. $bz+cy=cx+az=ay+bx$ 及ビ $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$ ナルトキハ $a\pm b\pm c=0$ ナルコトヲ示セ，コヽニ a, b, c ハ悉ク 0 ナラズトス。

講義 $bz+cy=cx+az=ay+bx=k$ トオクト $bz+cy=k\ldots\ldots(1)$, $cx+az=k\ldots\ldots(2)$ $ay+bx=k\ldots\ldots(3)$ トナル。ソコデ (1), (2), (3) ヲソレゾレ bc, ca, ab デワルト，

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{k}{bc}\ldots\ldots(1),\quad \frac{z}{c}+\frac{x}{a}=\frac{k}{ca}\ldots\ldots(2),\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{k}{ab}\ldots\ldots(3)$$ トナル。

ソコデ $x=\frac{k}{2bc}(b+c-a)$, $y=\frac{k}{2ca}(a+c-b)$, $z=\frac{k}{2ab}(a+b-c)$ トナル。サレバコレ等ヲ $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$ ニ代入シテ

$$\frac{k^2}{4}\left[\frac{1}{b^2c^2}(b+c-a)^2+\frac{1}{c^2a^2}(a+c-b)^2+\frac{1}{a^2b^2}(a+b-c)^2\right]-\frac{k^2}{2}\left[\frac{1}{a^2bc}(a+c-b)(a+b-c)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{ab^2c}(a+b-c)(b+c-a)+\frac{1}{abc^2}(b+c-a)(a+c-b)\right]=0$$

トナラネバナラナイ。ソコデ $4a^2b^2c^2$ ヲ兩邊ニ乘ジテ k^2 デワリテ (k ハ 0 デナイ任意ノ數デアルカラ)

$$a^2(b+c-a)^2+b^2(a+c-b)^2+c^2(a+b-c)^2-2bc(a+c-b)(a+b-c)-2ca(a+b-c)(b+c-a)$$
$$-2ab(b+c-a)(a+c-b)=0$$

トナル，コノ左邊ハ a, b, c ニ付テノ對稱デ，$a-b+c$ ヲ因數ニ有スルカラ

$$\mu(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=0$$

トナル。從テ $b+c-a=0$, 或ハ $a+c-b=0$, 或ハ $a+b-c=0$, 或ハ $a+b+c=0$ トナル，之ヲマトメテ $a\pm b\pm c=0$ トナル。

30. 交代式

例ヘバ整式 $(b-c)(c-a)(a-b)$ ニ於テ b ト c トヲ交換スルト，$(c-b)(b-a)(a-c)$ トナル。恰モ上ノ式ノ符號ヲ變ヘタル形ヲトルノデアル。カヽル式ヲ **b ト c ニ付テノ交代式**ト云フノデアル。ソシテ $(b-c)(c-a)(a-b)$ ハ又 c ト a ニ付テモ，a ト b ニ付テモ交代式デアル。カヽル交代式ヲ **a, b, c ニ付テ交代式**ト云フノデアル。同樣ニ $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ ハ a ト b; a ト c; a ト d; b ト c; b ト d; c ト d ニ付テ交代式デアル，カヽル式ヲ **a, b, c, d ニ付テ交代式**ト云フノデアル。

定理 I. **同一文字ノ二ツノ交代式 P ト Q トノ積ハ一ツノ對稱式デアル。**

證明 此レ等交代式ニ入リ來ル文字ノ何レノ二ツヲ取リカフルモ P ハ $-$P; Q ハ $-$Q トナルノミデアルカラ積ハ矢張リ PQ トナルカラデアル。コレト同樣ニ次ノ定理ガ證明出來ル。

定理 II. **同一ノ文字ノ對稱式 P ト交代式 Q トノ積ハ一ツノ交代式デアル。**

定理 III. **二ツノ文字 a, b ノ交代式ハ $a-b$ ニテ整除セラル。**

證明 二ツノ文字 a, b ノ交代式ヲ $f(a, b)$ トスルト，交代式デアルカラ，$f(a, b)\equiv -f(b, a)$ デアル。トコロガ $a=b$ トオクト，$f(b, b)\equiv -f(b, b)$ 即チ $2f(b, b)\equiv 0$ トナル。サレバ $f(a, b)$ ハ $a-b$ ニテ整除セラルヽコトハ剩餘定理ヨリ明ラカデアル。

定理 IV. **三ツノ文字 a, b, c ノ交代式ハ $(b-c)(c-a)(a-b)$ ニテ整除セラル，之ヲ最簡交代式ト云フ，又四ツノ文字 a, b, c, d ノ交代式ハ $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ ニテ整除セラル，ソシテコノ式ヲ最簡交代式ト云フ。**

例 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ヲ因數ニ分解セヨ。

講義 コノ式ハ a, b, c ニ付テ四次ノ同次交代式デアルカラ，$(b-c)(c-a)(a-b)$ ナル交代式ヲ因數ニ有スルカラ，定理 II ニヨリ他ノ因數ハ一次ノ對稱式デアル.

卽チ $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\equiv L(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$

トナル，ソコデ兩邊ノ a^3b ノ係數ヲ比較スルト，$-1=L$ トナル。サレバ

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ トナル.

練習 次ノ方程式ヲ解ケ

$$\frac{a^2(b+c-x)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(c+a-x)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(a+b-x)}{(c-a)(c-b)}=x-(a+b+c).$$

答 $x=\frac{1}{2}(a+b+c)$

XII. 根ト係數トノ關係

31. 整方程式

方程式ノ一方ノ邊ノ各項ヲ他邊ニ集メテ整頓シタルトキニ，其ガ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad \text{(A)}$$

ノ樣ナ形ニナルトキ，卽チ左邊ガ x ノ有理整函數ナルトキニコレヲ整方程式ト云フノデアル。

定理 **n 次ノ整方程式ハ n 個ノ根ヲ有スルノデアル。**

證明 コノ定理ヲ證明スルニ先立テ注意シナケレバナラナイコトハ**根ノ存在**ヲ假定スルコトデアル。

サテ α_1 ガ n 次ノ整方程式 (A) ノ根デアルトシ，(A) ノ左邊ヲ $f(x)$ トオクト，根 α_1 ハ $f(\alpha_1)=0$ ナラシメルコトハ根ノ定義ヨリ明ラカデアル。トコロガ剩餘定理ニヨリテ $f(x)\equiv(x-\alpha_1)f_1(x)$ トナル，ソシテ $f_1(x)$ ハ $n-1$ 次ノ整式トナル。次ニ α_2 ガ $f_1(x)=0$ ノ根デアルトスルト，同樣ニ $f_1(x)\equiv(x-\alpha_2)f_2(x)$ トナスコトガ出來ル，ソシテ $f_2(x)$ ハ $n-2$ 次ノ整式トナル，以下斯ノ樣ニシテ $f_n(x)=L(x-\alpha_n)$ ニ達スルコトガ出來ル，コヽニ L ハ常數デアル。サレバ $f(x)$ ニ $f_1(x)$ ヲ；$f_1(x)$ ニ $f_2(x)$ ヲ；....ヲ代入シテ

$f(x)\equiv L(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$ トナル。トコロガ $L=a_0$ デアルカラ

$$f(x)-a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)\equiv0 \qquad \text{(B)}$$

トナルカラ $f(x)=0$ ガ n 個ノ根ヲ有スルコトトナル。

32. 根ト係數

サテ (B) ハ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n\equiv a_0\{x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n)x^{n-1}$$
$$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots\ldots)x^{n-2}+\ldots\ldots(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n\}$$

トナルカラ，根ト係數トノ間ニ次ノ關係ガ成リ立ツ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n)=-(\textbf{根ノスベテノ和})\\
&\frac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\ldots\ldots+\alpha_2\alpha_n+\ldots\\
&\qquad=(\textbf{根中任意ノ二ツ宛ノ積ノスベテノ和})\\
&\frac{a_3}{a_0}=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots\ldots)\\
&\qquad=-(\textbf{根中任意ノ三ツ宛ノ積ノスベテノ和})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\ldots\alpha_n=(-1)^n(\textbf{根ノスベテノ連乘積})
\end{aligned}\right\}\text{(C)}$$

例ヘバ $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ ノ根ヲ α,β トスルト，

$\alpha+\beta=-\frac{a_1}{a_0}$; $\alpha\beta=\frac{a_2}{a_0}$ トナル.

又 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ ノ根ヲ α,β,γ トスルト，$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{a_1}{a_0}$; $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=+\frac{a_2}{a_0}$; $\alpha\beta\gamma=-\frac{a_3}{a_0}$ トナル。

逆ニ (C) ナル關係ガ存在スレバ $\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ ハ (A) ノ根デアル。コトガ明ラカデアル。サレバ $\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots,\alpha_n$ **ニ付テ (C) ナルコトノ必要且ツ十分ナル條件ハ (A) ノ根ナルコトデアル** トナル。

例 1. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二ツノ根ノ比ガ與ヘラレタル數ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

講義 先ヅ必要條件ヲ求ムルニ，與ヘラレタル方程式ノ根ヲ α,β トスルト，$\alpha+\beta=-p\ldots.(1)$, $\alpha\beta=q\ldots.(2)$ トナル，ソシテ $\frac{\alpha}{\beta}=k\ldots(3)$ トスル。ソコデ題意ノコトガアレバ (1) ト (2) ト (3) ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ (1) ト (3) トガ

同時ニ成リ立ツニハ, (1) ト (3) ヲトイテ $\beta=-\frac{p}{k+1}$, $\alpha=-\frac{pk}{k+1}$ デアル, コヽニ $k\neq-1$ トスル(コレハ後ニ考究スルコトニスル)。コノ場合ニ (2) ハ如何ト見ルト, $\frac{p^2k}{(k+1)^2}=q$ トナリテ一般ニ成リ立ツトハ限ラナイガ, (1), (2), (3) ガ同時ニ成リ立ネバナラナイナラバ,

$$p^2k=q(k+1)^2 \qquad (4)$$

ナルコトヲ要スル。之レ**必要條件**デアル。逆ニ (4) ガ成リ立ツト, (4) ヨリ $q=\frac{p^2k}{(k+1)^2}$ ガ得ラレ, 之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スルト,

$$x^2+px+\frac{p^2k}{(k+1)^2}=0$$

トナル。之ヲトクト, $x=-\frac{p}{k+1}$ 或ハ $-\frac{pk}{k+1}$ トナル。サレバ其ノ二根ノ比ハ k トナル。從テ (4) ハ**充分條件**デアル。從テ (4) ハ**必要且ツ充分ナル條件**デアル。次ニ $k=-1$ ナラバ (1), (2), (3) ハ $\alpha+\beta=-p$....(1); $\alpha\beta=q$....(2); $\alpha=-\beta$....(3) トナル從テ $p=0$ ナルコトガ**必要條件**デアル。ソシテ $p=0$ ナラバ $\alpha=-\beta$ トナル ($q=0$, ノトキハ $0=0$ デアルガ $0=-0$ トモ考ヘラレルカラ, コレガ成立スルトスルト, 結局 (4) ハ k ノ値ニ拘ハラズ**必充條件**トナル。

練習

(1) 方程式 $(2\lambda-1)x^2+(5\lambda+1)x+3\lambda+1=0$ ナル方程式ノ二ツノ根ノ比ガ $\frac{3}{2}$ トナル樣ニ λ ヲ定メヨ。答 $\lambda=-\frac{31}{85}$

(2) $\alpha+\beta=\alpha\beta=1$ ナルトキハ $\alpha^3=\beta^3=-1$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 α, β ハ $x^2-x+1=0$ ノ根デアル, 從テ $x^3+1=0$ ノ根デアルコトニ着眼セヨ。

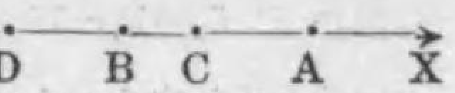
(3) 方程式 $(14p-1)x^2-2px+1=0$ ノ二根ノ間ニ次ノ關係ノ成リ立ツタメニハ p ニ如何ナル値ヲ與フベキカ, $3\alpha\beta=2\alpha-\beta$。答 $p=15$

(4) 方程式 $x^2-(8a-2)x+15a^2-2a-7=0$ ノ二根ノ平方ノ和ガ 24 ナルトキハ a ノ値如何。答 $a=1$, 或ハ $-\frac{3}{17}$

例 2. 一直線上ニ四點 A, B, C, D アリ, 同ジ直線上ノ一定點 P ヨリ A, B マデノ距離ハソレゾレ二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$......(1) ノ二根ニテ表ハサレ, 同ジ點ヨリ C, D マデノ距離ハソレゾレ二次方程式 $px^2+2qx+r=0$......(2) ノ二根ニテ表ハサル。點 A, B ガ點

C, D ニヨリテ調和ニ分タルガタメニ必要ニシテ, 且ツ充分ナル要件ヲ求ム。

講義 先ヅ (1) ノ根ヲ α, β; (2) ノ根ヲ γ, δ トスル。今一直線ヲ圖ノ樣ニ PX トシ其ノ上ニ A, B, C, D ガ在ル。ソシテ二點間ノ距離ハ → ノ方向ニ測ルトスル, サモナクバ絶對値等シク符號相反スルモノガ等シキコトニナルカラデアル。



サテ A, B, C, D ガ調和列點ナルコトノ必充條件ハ $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}$ ナルコトデアル。

ソコデ　$\mathrm{PA}=\alpha$, $\mathrm{PB}=\beta$, $\mathrm{PC}=\gamma$, $\mathrm{PD}=\delta$

デアルカラ　$\mathrm{CA}=\alpha-\gamma$, $\mathrm{BC}=\gamma-\beta$, $\mathrm{DA}=\alpha-\delta$, $\mathrm{DB}=\beta-\delta$ トナル。

從テ　$\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}=\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ 即チ $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=0$　(3)

トナル。ソコデ問題ハ $\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$; $\gamma+\delta=-\frac{2q}{p}$, $\gamma\delta=\frac{r}{p}$ ナルトキハ (3) ナル關係アルトキ, a, b, c; p, q, r ノ間ノ關係ヲ求メヨト云フコトニ過ギナイ。從テ (3) ヲ變形シテ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\gamma+\delta$, $\gamma\delta$ ノ値ガ代入出來ル樣ニスル。ソレニハ (3) ノ左邊ノ括弧ヲホドイテ只今ノ方針ニ從テ括ルト,

$$2(\alpha\beta+\gamma\delta)-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=0$$

トナル。從テ　$2\left(\frac{c}{a}+\frac{r}{p}\right)-\frac{2b}{a}\times\frac{2q}{p}=0$ 或ハ $ar+cp=2bq$ トナル。

練習

p, q, p', q' ガ與ヘラレタル實數ナルトキ $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トシ, $x^2+p'x+q'=0$ ノ二根ヲ α', β' トシ, $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ 及ビ $\alpha\beta'+\alpha'\beta$ ノ和及ビ積ヲ p, q, p', q' ニテ表ハセ。

注意 和ヲ S トシ, 積ヲ P トスルト,

$$\mathrm{S}=(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta'),\ \mathrm{P}=\alpha\beta\{(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'\}+\alpha'\beta'\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$ トナル。

例 3. 二根ノ比 3:2 ナルコトヲ知リテ方程式

$$x^3-9x^2+14x+24=0$$ ヲ解ケ。

講義 三根ヲ α, β, γ トスルト, 題意ニヨリテ $2\alpha=3\beta$....(1) トナル。トコロガ α, β, γ ノ間ニハ上述ニヨリ $\alpha+\beta+\gamma=9$..(2), $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=14$..(3), $\alpha\beta\gamma=-24$..(4) トナルカラ結局 (1), (2), (3), (4) ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ先ヅ (1) ダケ成リ立ツトスルトキ (2), (3), (4) ハ如何ト見ルト.

(2) ハ $\frac{3}{2}\beta+\beta+\gamma=9$..(2)′; (3) ハ $\frac{3}{2}\beta(\beta+\gamma)+\beta\gamma=14$..(3)′; (4) ハ $\frac{3}{2}\beta.\beta\gamma=-24$..(4)′ トナルカラ，コレ等ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。

即チ　$5\beta+2\gamma=18$....(2)′;　$3\beta^2+5\beta\gamma=28$....(3)′;　$\beta^2\gamma=-16$....(4)′

ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ (2)′ ガ成リ立ツトキハ $\gamma=\frac{18-5\beta}{2}$ デアツテ，コノトキ (3)′, (4)′ ハ如何ト見ルト，

(3)′ ハ $3\beta^2+5\beta\times\frac{18-5\beta}{2}=28$....(3)″;　(4)′ ハ $\beta^2\times\frac{18-5\beta}{2}=-16$....(4)″

即チ　$19\beta^2-90\beta+56=0$....(3)″;　　$\beta^2(18-5\beta)=-32$....(4)″

トナルカラ，コレ等ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ (3)″ ガ成リ立ツニハ，コレヲトイテ，$\beta=4$ カ $\frac{14}{19}$ デアルコトヲ要スル，其ノトキ (4)″ ハ如何ト見ルト，$\beta=4$ ハ (4)″ ヲ成立セシメルガ，$\beta=\frac{14}{19}$ ハ駄目デアル。

サレバ $\alpha=\frac{3}{2}\beta$ デ，$\gamma=\frac{18-5\beta}{2}$ デ，$\beta=4$ デアルトキ即チ　$\alpha=6,\ \beta=4,\ \gamma=-1$ ナルトキ (1), (2), (3), (4) ハ同時ニ成リ立ツカラ，之ガ求ムル根デアル。

例 4. 等根ノ二對アルコトヲ知リテ方程式

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0\quad ヲ解ケ。$$

講義　一般ノ方法ガ示サレテアツテモ其ノ精神ハ飽クマデ捨テズニ計算ヲ簡ニスルコトハ差支ヘガナイコトデアル。ソコデ本題ノ樣ナノハ馬鹿正直ニ一般ノ方法ニ從ハズ，直ニ題意ヲ組ミ入レテ幾分カ計算ヲ簡ニスルノデアル。

サテ等根ガ二對アルカラ，方程式ノ根ヲ $\alpha,\alpha,\beta,\beta$ トスルコトガ出來ル。ソコデ根ト係數ノ關係カラ，

$2\alpha+2\beta=-4$..(1);　$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-2$..(2);　$2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2=12$..(3);　$\alpha^2\beta^2=9$..(4)

トナル，即チ $\alpha+\beta=-2$..(1);　$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-2$..(2);　$\alpha\beta(\alpha+\beta)=6$..(3);　$\alpha^2\beta^2=9$ (4)

ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ (1) ト (3) ガ先ヅ同時ニ成リ立ツノハ

$t^2+2t-3=0$ ノトキ即チ　$\alpha=-3,\ \beta=1$; $\alpha=1,\ \beta=-3$ ノ二ツノ場合デ，コノトキ (2), (4) ハ如何ト見ルト，

$\alpha=-3,\ \beta=1$ ノトキハ，(2) ハ $9-12+1=-2$ トナリ，(4) ハ $9\times1=9$ トナル.

次ニ $\alpha=1,\ \beta=-3$ ノトキハ (2) ト (4) ノ左邊ガ α,β ニ付テ對稱式デアルカラ，矢張リ前ト同ジコトニナル。

サレバ $\alpha=1,\ \beta=-3$; カ或ハ $\alpha=-3,\ \beta=1$ ナルトキハ (1), (2), (3), (4) ガ同時ニ成リ立ツカラ結局根ハ 1, 1 $-3,\ -3$ デアル。

練習

(1)　三根ガ等差級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$$x^3-9x^2+23x-15=0\quad ヲトケ。$$

注意　三根ヲ $\alpha-\delta,\ \alpha,\ \alpha+\delta$ トオクト，1, 3, 5 ナル根ガ得ラレル。

(2)　四根ガ等差級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$$x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0\quad ヲトケ。$$

注意　四根ヲ $\alpha-3\delta,\ \alpha-\delta,\ \alpha+\delta,\ \alpha+3\delta$ トシテ，根 $-5,\ -2,\ 1,\ 4$ ガ得ラレル。

(3)　三根ガ等比級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$$27x^3+42x^2-28x-8=0\quad ヲトケ。$$

注意　三根ヲ $\alpha r,\ \alpha,\ \frac{\alpha}{r}$ トシテ，$\alpha=\frac{2}{3}$, $\gamma=-3$, 或ハ $-\frac{1}{3}$ ナルコトニ着眼セヨ。

(4)　根ガ等比級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$$3x^4-40x^3+130x^2-120x+27=0\quad ヲトケ。$$

注意　四根ヲ $\frac{\alpha}{r^3},\ \frac{\alpha}{r},\ \alpha r,\ \alpha r^3$ トオクト，四根ノ積ヨリ $\alpha^4=27$ ガ得ラレ，ソシテ等比級數ハ實數ニ付テノミ考ヘルカラ $\alpha=\pm\sqrt[4]{27}$ ガ得ラレ，又三根ノ積ノ和ヨリ $\alpha^3\left(\frac{1}{r^3}+r+\frac{1}{r}+r^3\right)=120$ ガ得ラレ。從テ $r^3+\frac{1}{r^3}+r+\frac{1}{r}=\frac{12}{\pm\sqrt[4]{27^3}}$ トナリ，$r+\frac{1}{r}=X$ トオクト，$X(X^2-1)+X=\frac{120}{\pm\sqrt[4]{27^3}}=\frac{40}{\pm3\sqrt[4]{3}}$ トナルコトニ着眼セヨ。

(5)　根ガ調和級數ナルコトヲ知リテ方程式

$$6x^3-11x^3+6x-1=0\quad ヲトケ。$$

注意　三根ヲ α,β,γ トスルト，コレ等ガ調和級數ヲナスコトヨリ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{\beta}$ ナルコトニ注意セヨ。

例 5. 方程式 $ax^3+bx^2+\overset{c}{e}x+d=0$ ガ絶對値相等シクテ符號相反スル二ツノ根ヲ有スルタメニハ係數ノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。

講義　先ヅ絶對値相等シキ根ヲ $\alpha,\ -\alpha$ トシ，他ヲ β トスルト，

$\alpha+(-\alpha)+\beta=-\frac{b}{a}$....(1);　$\alpha(-\alpha)+\alpha\beta+(-\alpha)\beta=\frac{c}{a}$....(2);　$\alpha(-\alpha)\beta=-\frac{d}{a}$....(3)

ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ，卽チ

$$\beta=-\frac{b}{a}\ldots.(1);\quad -\alpha^2=\frac{c}{a}\ldots\ldots(2);\quad \alpha^2\beta=\frac{d}{a}\ldots.(3)$$

ガ同時ニ成立ネバナラナイ。ソコデ (1) ト (2) トガ同時ニ成リ立ツトキ，卽チ $\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha^2=-\frac{c}{a}$ ナルト (3) ハ如何ト見ルト，$\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}=\frac{d}{a}$ トナリテ恒ニ成リ立ツトハ限ラナイ。サレバ (1), (2), (3) ガ同時ニ成リ立ツタメニハ $\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha^2=-\frac{c}{a}$ デ $bc=ad$ デナケレバナラナイ。從テ求ムル係數間ノ關係ハ $bc=ad$ デアル。

練習

（1） 方程式 $225x^3-90x^2-x+m=0$ ノ一ツノ根ガ他ノ二ツノ根ノ和ニ等シクナル樣ニ m ヲ定メ且ツ此ノ方程式ヲトケ。

（2） 方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ ニ於テ (i) 根ガ調和級數ヲナストキハ中項ハ $\frac{3r}{q}$ ナルコトヲ示セヨ。(ii) 根ノ二ツヲ $\alpha,\ \beta$ トシ $\alpha+\beta=0$ ナルタメニハ係數間ノ關係ハ $pq-r=0$ ナルコトヲ示セ。(iii) 根ガ等比級數ヲナストキハ $p^3r-q^3=0$ ナルコトヲ示セ。

（3） 一直線上ノ三點 A, B, C ノ原點ヨリノ距離ガ次ノ方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ノ根ナルトキ三點 A, B, C 中ノ一ツガ他ノ二ツノ間ヲ二等分スルタメノ條件ヲ求ム。

注意 32. 例 2 (84頁)ヲ參照シテ $a^2d-3abc+2b^3=0$ ガ得ラレル。

例 6. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}+\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}$；$\frac{1}{x+b}+\frac{1}{y+b}+\frac{1}{z+b}=\frac{1}{b}$；$\frac{1}{x+c}+\frac{1}{y+c}+\frac{1}{z+c}=\frac{1}{c}\ldots\ldots(1)$ ニシテ a, b, c ガ悉ク相異ナルトキハ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\ldots\ldots(2)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 (1) ノ各式ノ分母ニ着眼スルト，t ニ付テノ方程式 $\frac{1}{x+t}+\frac{1}{y+t}+\frac{1}{z+t}=\frac{1}{t}\ldots(3)$ デ，$t=a,\ b,\ c$ トシタルトキ，コレ等ガ (3) ヲ滿足スルコトヲ (1) ノ各式ガ示シテキル，卽チ根デアル。其ハ

$$t(y+t)(z+t)+t(x+t)(z+t)+t(x+t)(y+t)=(x+t)(y+t)(z+t)$$

ノ根デアル，卽チ $2t^3+(x+y+z)t^2+xyz=0$ トナルカラ，t ノ一次ノ項ノ係數ガ 0，卽チ，$ab+bc+ca=0$ トナル。從テ $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$，卽チ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ トナル。

例 7. 次ノ聯立方程式ヲトケ

$$x+ay+a^2z+a^3=0,\quad x+by+b^2z+b^3=0,\quad x+cy+c^2z+c^3=0$$

講義 先ヅ氣ガ付クコトハ a, b, c ガ悉ク相異ナルトキ與ヘラレタル方程式ガ方程式 (t ニ付テ) $t^3+zt^2+yt+x=0\ldots.(1)$ ヲ滿足スルコトヲ示シテルコトデアル。サレバ (1) ハ $t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=0$ ト同値デアルカラ

$$z=-(a+b+c),\quad y=bc+ca+ab,\quad x=-abc$$

デアルコトヲ知ル。又 a, b, c ガ悉クハ等シクナイトキハ $a=b$ ナレバ x, y, z 中ノ一ツハ任意ニ定マリ，他ハ其レニ從テ定マル。ソシテ $a=b=c$ デアレバ方程式ハ一ツトナルガ x, y, z 中ノ二ツガ任意デ，他ハ其レニ從テ定マル。何レニシテモ a, b, c 中少ナクモ二ツガ等シキトキハ不定デアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

（1） $x-ay+a^2z=a^3,\ x-by+b^2z=b^3,\ x-cy+c^2z=c^3.$

注意 $t^3-t^2z+ty-x=0$ ニ着眼セヨ。 答 $x=abc,\ y=ab+bc+ca,\ z=a+b+c.$

（2） $x+ay+a^2z+a^3u+a^4=0,\ x+by+b^2z+b^3u+b^4=0,$
$x+cy+c^2z+c^3u+c^4=0,\ x+dy+d^2z+d^3u+d^4=0.$

注意 $t^4+ut^3+zt^2+yt+x=0$ ニ着眼セヨ。

例 8. $(x^2+pxy+qy^2)(x'^2+px'y'+qy'^2)$ ハ $X^2+pXY+qY^2$ ナル形ニナシ得ルコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ $x^2+pxy+qy^2=(x-\alpha y)(x-\beta y)$ トナルトスレバ，又 $x'^2+px'y'+qy'^2=(x'-\alpha y')(x'-\beta y')$ トオクコトガ出來ル，コヽデ $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ デ α, β ハ $t^2+pt+q=0$ ノ二根デアル，

サテ 第一式 $\equiv(x-\alpha y)(x-\beta y)(x'-\alpha y')(x'-\beta y')$ トナル。トコロガ

$(x-\alpha y)(x'-\beta y')\equiv xx'-\alpha x'y-\beta y'x+\alpha\beta y'y$ トナル，ソコデ $\alpha\beta=q,\ \beta=-p-\alpha$ デアルカラ

$$\equiv xx'-\alpha x'y+(p+\alpha)y'x+qy'y\equiv xx'+py'x+qy'y-\alpha(x'y-y'x)$$

トナル。同樣ニシテ $(x-\beta y)(x'-\alpha y')\equiv xx'+py'x+qy'y-\beta(x'y-y'x)$

トナル。サレバ 第一式 $=[xx'+py'x+qy'y-\alpha(x'y-y'x)][x'x+py'x+qy'y-\beta(x'y-y'x)]$

$$=[xx'+py'x+qy'y]^2-(\alpha+\beta)(x'y-y'x)(xx'+py'x+qy'y)+\alpha\beta(x'y-y'x)^2$$

$$=(xx'+py'x+qy'y)^2+p(x'y-y'x)(xx'+py'x+qy'y)+q(x'y-y'x)^2$$

トナル。サレバ $X=xx'+py'x+qy'y,\ \ Y=x'y-y'x$ トオクト,

$$\equiv X^2+pXY+qY^2$$

トナル。

33. 根ノ對稱式

對稱式ノ性質(77頁)ト問題(78頁)ヨリ次ノ定理ガ誘導セラル。

定理 最高羃項ノ係數 1 ナル方程式

$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_n=0$ ノ根ノ有理對稱式ハ方程式ノ係數 $p_1, p_2\dots\dots p_n$ ノ有理式トシテ表ハスコトガ出來ル。

例 方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ根ヲ α,β,γ トシ, 次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

(i) $\Sigma\alpha^2\beta$; (ii) $\Sigma\alpha^2$; (iii) $\Sigma\alpha^3$

講義 對稱式ノ例題ヲ確實ニ摑ンデ

(i) $\Sigma\alpha^2\beta\equiv L(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+M(\alpha+\beta+\gamma)^3+N\alpha\beta\gamma.$

トオイテ L, M, N ヲ定ムルニ, 左邊ニ α^3 ノ項ガナク, 右邊デハ第二項ヨリ生ズルカラ先ヅ $M=0$ デアル。

次ニ $\alpha^2\beta$ ノ項ハ, 左邊ヨリ $\alpha^2\beta$ ニシテ右邊ヨリ $L\alpha^2\beta$ ガ生ズルカラ, $L=1$。又 $\alpha\beta\gamma$ ハ左邊ニナクテ右邊ノ第一項ト第三項ヨリ生ズルカラ, $3L+N=0$, 卽チ $N=-3$ トナル

サレバ $\Sigma\alpha^2\beta=-p\cdot q-3(-r)=3r-pq$ トナル。

(ii) $\Sigma\alpha^2\equiv L(\alpha+\beta+\gamma)^2+M(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

トナル。ソコデ左邊ヨリ α^2, 右邊ヨリ $L\alpha^2$ デアルカラ $L=1$。又 $\alpha\beta$ ハ左邊ニナリテ右邊ノミデアルカラ $2L+M=0$, 從テ $M=-2$。サレバ $\Sigma\alpha^2=p^2-2q$ トナル。

(iii) $\Sigma\alpha^3\equiv L(\alpha+\beta+\gamma)^3+M(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+N\alpha\beta\gamma$

トナル。ソシテ前例ト同樣ニシテ $L=1,\ M=-3,\ N=3$ ガ得ラルヽカラ

$\Sigma\alpha^3=-p^3+3pq-3r.$

練習

(1) 例 1. ノ方程式ニ於テ,

(i) $\Sigma\alpha^2\beta^2=q^2-2pr$; (ii) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=r-pq$ ナルコトヲ示セ。

(2) 方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ ノ根ヲ α,β,γ トシテ $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2=18(a_1^2-a_0a_2)$ ナルコトヲ示セ。

(3) 同上例ニ於テ $(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$ ノ値ヲ求ム。

注意 前ノ例ノ樣ニシテモ求メ得ラルヽガ特種ノ方法ヲ示スト,

$$2\alpha-\beta-\gamma=3\alpha-(\alpha+\beta+\gamma)=3\alpha+\frac{3a_1}{a_0}$$

$$2\beta-\gamma-\alpha=3\beta-(\alpha+\beta+\gamma)=3\beta+\frac{3a_1}{a_0}$$

$$2\gamma-\alpha-\beta=3\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)=3\gamma+\frac{3a_1}{a_0}$$

ナルコトニ着眼シテ恒等式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3\equiv a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ヲ利用シテ次ノ結果ガ得ラレル.

$$a_0^3(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)=-27(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3).$$

XIII. 最大公約數ト最小公倍數

34. 最大公約數

例ヘバコヽニ x^2+y^2 ト x^3+y^3 ナル二ツノ整式ヲ考ヘルニ, 兩式ニ共通ノ因數ガナイ。カヽル場合ニ**兩式ハ素デアル**ト云ヒ, 又 x^3+y^3 ト x^2-y^2 トノ間ニ於ケル樣ニ $x+y$ ナル共通ノ因數ヲ**兩式ノ公因數**ト云ツテ, 其ノ中ノ最高次ノモノヲ**最大公約數**ト云フノデアル。一般ニ A, B……ガ x 或ハ其ノ他ノ變數ノ一ツ或ハ二ツ以上ノモノノ**有理整函數**トスルト, コレ等ノ間ニ公因數ヲ有シナケレバ A, B……ハ**互ニ素**デアルト云ヒ, コレニ反シテ公因數ヲ有スレバ其中ノ最高次ノモノヲ其等ノ**最大公約數**(H.C.F)ト名ヅケル. (Highest common factor)

例ヘバ $4xyz^5$, $8xz^4$ ト $6x^2yz^3$ ハ公因數 $x, z, z^2, z^3, xz, xz^2, xz^3$ ヲ有シ, 其中ノ最高次ノモノハ xz^3 デアルカラ, 之ガ最大公約數デアル。

注意 (i) 函數ノ最大公約數ハ數字因數ヲ無視スル。(ii) A ト B トノ最大公約數

ノ數値ハ必ズシモ A ト B ノ數値ノ最大公約數トハナラナイ，例ヘバ $(2x+1)x$ ト $(x-1)x$ トノ最大公數數ハ x デアルガ，$x=7$ デアルト，$(2x+1)x$ ト $(x-1)x$ ノ値ハソレゾレ 105, 42 トナツテ其ノ最大公約數ハ 21 トナルノデアル。

定理 ニツノ整函數 P ト Q トノ公因數ハ，M ト N ガ他ノ任意ノ整函數又ハ常數ナルトキ，MP＋NQ ノ因數デアル。

證明 今 P ト Q トノ一ツノ公因數ヲ F トスルト，定義ニヨリ $P=A.F$, $Q=B.F$ デアル，コヽニ A, B ハ整函數デアル。

サレバ $PM+QN=A.F.M+B.F.N=(AM+BN)F$ トナル，ソシテ A, B, M, N ガ整函數デアルカラ，$AM+BN$ ハ整函數デアル。從テ F ハ $PM+QN$ ノ因數デアル。

例 1. x^3+bx^2+cx+1 ト x^3+cx^2+bx+1 トガ公約數ヲ有スルタメニハ $b+c+2=0$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 上ニ述ベタル定理ニヨリ第一式ヲ P, 第二式 Q トシ, $M=1$, $N=-1$ トスルト $PM+QN$ ハ $(b-c)x^2+(c-b)x=(b-c)x(x-1)$ トナル。サレバ公約數ガアレバ x カ，$x-1$ デアル。トコロガ x ガ公約數デナイコトハ與式ガ何レモ常數項 1 デアルカラデアル。從テ第一式ト第二式ガ公約數ヲ有スレバ $x-1$ デナケレバナラナイ。從テ剩餘定理(59頁)ニヨリ $x=1$ トオイテ，$1+b+c+1=0\ldots.(1)$, $1+c+b+1=0\ldots.(2)$ ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。トコロガ(1)ガ成リ立テバ當然(2)ガ成リ立ツカラ $b+c+2=0$ ハ公約數ヲ有スルタメニ必充條件デアル。

例 2. x^n-ax+b ト $nx^{n-1}-a$ トガ公約數ヲ有スルガタメニ必充條件ヲ見出セ。

講義 第一式ニ n, 第二式ニ x ヲカケテ相減ズルト，$-a(n-1)x+nb\ldots(1)$ トナル。サレバ第一式ト第二式トニ公約數ガアレバ (1) 卽チ $x-\dfrac{nb}{a(n-1)}$ デナケレバナラナイ(コヽニ $a\neq0$ ニシテ $n\neq1$ トスル)。從テ剩餘定理ニヨリ $\dfrac{n^nb^n}{a^n(n-1)^n}-\dfrac{nab}{a(n-1)}+b=0$ ニシテ $n\times\dfrac{n^{n-1}b^{n-1}}{a^{n-1}(n-1)^{n-1}}-a=0$ ナルコトガ同時ニ成リ立ネバナラナイ。

卽チ
$$b[n^nb^{n-1}-na^n(n-1)^{n-1}+a^n(n-1)^n]=0\ldots.(2);$$
$$n^nb^{n-1}-a^n(n-1)^{n-1}=0\ldots.(3)$$

ガ同時ニ成リ立ネバナラナイ，トコロガ (3) ガ先ヅ成リ立ツニハ $b^{n-1}=\dfrac{a^n(n-1)^{n-1}}{n^n}$ デ，

コノトキ (2) ハ

$$b\left[\frac{n^na^n(n-1)^{n-1}}{n^n}-na^n(n-1)^{n-1}+a^n(n-1)^n\right]=0 \quad 卽チ$$
$$ba^n(n-1)^{n-1}[1-\ \ +n-1]=0$$

トナリテ成リ立ツカラ，求ムル條件ハ $\left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ デアル。

練習 x^3-x-a 及ビ x^2+x-a ガ公約數ヲ有スルタメニハ a ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。 答 $a=0$ 或ハ $a=6$.

例 3. $6x^3+37x^2+41x-18=0$, $15x^3+34x^2+5x-6=0$ トノ共通根ヲ求ム。

講義 共通根ヲ α トスレバ $x=\alpha$ ハ與ヘラレタル二ツノ方程式ヲ滿足スル，換言スルト $P=6x^3+37x^2+41x-18$ ト $Q=15x^3+34x^2+5x-6$ ニ $x=\alpha$ ヲ代入スレバ 0 トナルカラ P ト Q ハ $x-\alpha$ デ整除セラレル。從テ $x-\alpha$ ガ公約數デアル。サレバ共通根ノスベテハ P ト Q トノ最大公約數ヲ 0 トナス x ノ値デアル。

サテ P ト Q トノ最大公約數或ハ公約數ヲ求ムルニ，前諸例カラ推定スルト，結局除法ヲ施シテ剩餘ヲ求ムルニ過ギナイノデ，棚ヲ設ケナイダケデアル。從テカヽル複雜ナル式デハ寧ロ除法ヲ施ス方ガ便利デアル。次ノ樣ニナスコトハ既ニ良ク知ラレテヰルコトデアル

$$\begin{array}{r|c|l}
6x^3+37x^2+41x-18 & 2x+9 & 15x^3+34x^2+5x-6 \\
6x^3+10x^2-4x & & \quad 2 \\ \hline
27x^2+45x-18 & 5 & 30x^3+68x^2+10x-12 \\
27x^2+45x-18 & & 30x^3+185x^2+205x-90 \\ \hline
 & & -39)\ -117x^2-195x+78 \\ \hline
 & & \quad 3x^2+5x-2
\end{array}$$

トナル。サレバ最大公約數ハ $3x^2+5x-2$ デ，共通根ハ $3x^2+5x-2=0$ デアル。從テ $x=\dfrac{1}{3}$ 或ハ -2 デアル。

練習

(1) $6x^3+37x^2+41x-18$ ト $15x^3+34x^2+5x-6$ トガ同時ニ 0 トナル x ノ値ヲ求ム。 答 $x=\dfrac{1}{3}$ 或ハ -2

(2) 次ノ三ツノ方程式ノ共通根ヲ求メヨ。

$3x^3+7x^2-4=0,\quad 3x^3+x^2-8x+4=0,\quad x^3+6x^2+11x+6=0$。

例 4. 三ツノ三次式 ax^3+bx^2+cx+d ト px^3+qx^2+rx+s トガ二次ノ最大公約數ヲ有スルタメニハ $\dfrac{bp-aq}{as-dp}=\dfrac{cp-ar}{bs-dq}=\dfrac{dp-as}{cs-dr}$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 $P\equiv ax^3+bx^2+cx+d$, $Q\equiv px^3+qx^2+rx+s$ トオクト，P ト Q トノ最大公約數 G ハ

$$pP-aQ\equiv(bp-aq)x^2+(pc-ar)x+dp-as \qquad (1)$$

ノ約數デアリ，併カモ二次ノ最大公約數デアレバ上式ニ常數ヲ掛ケタモノデアル。又 G ハ

$$sP-dQ\equiv x[(as-dp)x^2+(bs-dq)x+(cs-dr)] \qquad (2)$$

ノ約數デアリ，d ト s トハ一般ニ共ニ 0 デナイカラ，G ハ [ ] 内ノ式ニ或ル常數ヲカケタルモノデアル

サレバ $(bp-aq)x^2+(pc-ar)x+dp-as\equiv k[(as-dp)x^2+(bs-dq)x+(cs-dr)]$

ナル恒等式ガ成リ立ネバナラナイ。ソシテコレガ成立スルニハ

$$\frac{bp-aq}{as-dp}=\frac{pc-ar}{bs-dq}=\frac{dp-as}{cs-dr}$$

デナケレバナラナイ，コレ求ムル條件デアル。

練習

(1) $ax^2+bx+c=o$ ト $px^2+qx+r=o$ ガ一ツノ共通根ヲ有スル爲ニハ，$(aq-bp)(br-cq)=(ar-cp)^2$ ニナラザル可カラザルコトヲ證セヨ。

(2) (1) ニ於テ二ツノ共通根ヲ有スルタメノ條件如何。

(3) $a=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, $b=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ ガ一根ヲ共有スルタメニハ $a^2-b^2=1$ ナルコトヲ示セ。

(4) ax^3+bx^2+cx+d ト $3ax^2+2bx+c$ トガ x ニ付テ一次式ナル最大公約數ヲ有スルトキハ $b^2(4bd-c^2)+a(4c^3-18bcd+27ad^2)=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

例 5. $ax^2+bx+c=o$ ト $a'x^2+b'x+c'=o$ ガ一根ヲ共ニシ，共有

ナラザル根ノ中前者ノ根ノ平方ガ後者ノ根ナルタメノ條件ヲ求ム。

講義 先ヅ $ax^2+bx+c=o$ ト $a'x^2+b'x+c'=o$ トノ共通根ヲ求ムルニ，前者ノ左邊ヲ P，後者ノ左邊ヲ Q トスレバ $a'P-aQ=(a'b-ab')x+a'c-ac'$ トナルカラ共通根ハ $x=\dfrac{ac'-a'c}{a'b-ab'}$ デアル。ソシテ $P=o$ ト $Q=o$ トガ共通根ヲ有スル條件ハ前例練習 (1) ニヨリテ $(ab'-a'b)(bc'-cb')=(ac'-ca')^2$..(1) デアル。コノ條件ノ下ニ於テ共通ナラザル根ハ根ト係數 (83頁) ニヨリソレゾレ $\dfrac{c}{a}\times\dfrac{a'b-ab'}{ac'-a'c}$ ト $\dfrac{c'}{a'}\times\dfrac{a'b-ab'}{ac'-a'c}$ トニナル。從テ題意ニヨリ $\dfrac{c^2}{a^2}\left(\dfrac{a'b-ab'}{ac'-a'c}\right)^2=\dfrac{c'}{a'}\times\dfrac{a'b-ab'}{ac'-a'c}$ 卽チ $a'c^2(a'b-ab')=c'a(ac'-a'c)$..(2) トナル。

サレバ求ムル條件ハ (1) ト (2) ガ同時ニ成立ツコト，

卽チ $(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ac'-ca')^2$; $a'c^2(a'b-ab')=c'a^2(ac'-a'c)$

ナルコトデアル。

練習 $x^2+ax+bc=o$ ト $x^2+bx+ca=o$ トガ共通ナル一根ヲ有スルトキハ他ノ二根ハ $x^2+cx+ab=o$ ノ根ナルコトヲ證明セヨ。

35. 最小公倍數

二ツ以上ノ整函數 P,Q,...... ヲ約數ニ有スル整函數ヲ P, Q,...... ノ**公倍數**ト云ヒ，コレ等ノ函數中最底次ノモノヲ**最小公倍數** (L.C.M) ト云フノデアル。(Least common multiple)

定理 二ツノ整函數 P ト Q ノ最小公倍數ハ此ノ二ツノ函數ノ積ヲ其ノ最大公約數デ割リタルモノデアル。

證明 P ト Q トノ最大公約數ヲ G トシ，$\dfrac{P}{G}\equiv P_1$, $\dfrac{Q}{G}\equiv Q_1$, トスルト，$\dfrac{P\times Q}{G}\equiv P_1\cdot Q_1\cdot G$ ハ P ト Q トノ公倍數デアル，ソシテコレガ最底次ノモノデアル。何トナレバ M ガアツタトスレバ $\dfrac{M}{P}=Q'$ トナリ，(Q' ノ次數)<(Q ノ次數)..(1) トナル。ソシテ $\dfrac{M}{Q}\equiv\dfrac{P_1.G.Q'}{G.Q_1}\equiv\dfrac{P_1Q'}{Q_1}$ トナル，トコロガ P_1 ト Q_1 トハ互ニ素デアルカラ Q' ガ Q_1 デ整除セラルヽコトトナリテ (1) ニ不合理トナル。故ニ $\dfrac{P\times Q}{G}$ ガ最小公倍數デアル。

例 1. $x+c$ ガ x^2+ax+b...(1) ト $x^2+a'x+b'$...(2) トノ最大公約數ナルトキハ此ノ二式ノ最小公倍數ハ $x^3+(a+a'-c)x^2+(aa'-c^2)x+(a-c)(a'-c)c$...(3) ナルコトヲ證セヨ。

講義 $x+c$ ガ(1)ト(2)ノ最大公約數デアルカラ，$c^2-ac+b=0$....(1)′，$c^2-a'c+b'=0$....(2)′ ガ同時ニ 0 トナル。ソシテ公約數ナラザル因數ヲ求ムルニ，(1)′ ヨリ $b=ac-c^2$，(2)′ ヨリ $b'=a'c-c^2$ ヲ求メテ (1)，(2) ニソレゾレ代入シテ。

(1) ハ $x^2+ax+c(a-c)\equiv(x+c)[x+(a-c)]$；(2) ハ $x^2+a'x+a'c-c^2\equiv(x+c)[x+(a'-c)]$ トナルカラ，$x+(a-c)$ ト $x+(a'-c)$ デアル。サレバ (1) ト (2) ノ最小公倍數ハ

$$(x+c)[x+(a-c)][x+(a'-c)]\equiv x^3+(a+a'-c)x^2+(aa'-c^2)x+(a-c)(a'-c)c$$

トナル。

例 2. 二個ノ x ニ付テノ有理整式ノ和ト其ノ最小公倍數トヲ與ヘテ此二式ヲ求ム。

講義 x ノ二個ノ有理整式ヲ X ト Y トシ，其ノ最小公倍數ヲ L，最大公約數ヲ G トスルト，G モ L モ x ノ整函數デアル。ソコデ問題ハ X+Y=P ガ與ヘラレ，且ツ L ガ與ヘラレテ X ト Y ナル x ノ函數ヲ求ムルコトデアル。

サテ X=A.G; Y=B.G トスルト A.G+B.G=P, ...(1) A.B.G=L...(2) ナル關係ガ得ラレル。ソコデ A ト B トハ互ニ素デアルカラ A+B ト A.B トハ互ニ素デアル。何トナレバ若シ A+B ト A.B ノ間ニ公約數アルト，其レハ A カ 又ハ B ノ約數デアルベキデアル (A ト B ガ互ニ素デアルカラ)，假ニ A ノ約數トスルト，其レガ A+B ノ約數デアルカラ又 B ノ約數トナリテ不合理ニナルカラデアル。

サレバ P ト L トノ最大公約數ハ G デアル。從テ P ト L トハ與ヘラレテルカラ其レ等ノ最大公約數 G ハ求メ得ラル。カヽル場合ニ $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{G}}=\mathrm{P}'$，$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{G}}=\mathrm{L}'$ ガ求メラレ。從テ A+B=P′，A.B=L′ トナル。

サレバ和ト積ヲ知ルカラ A，B ガ求メ得ラレ，G ガ求メラレテルカラ結局 X ト Y ヲ求ムルコトガ出來ル。

練習

(1) 二個ノ x ニ付テノ有理整式ノ積ト最大公約數トヲ與ヘテ此ノ式ヲ求ム。

注意 與ヘラレタル積ヲ P，最大公約數ヲ G トスルト，$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{G}^2}$ ヲ互ニ素ナル二ツノ整函數ニ分解シテ各々ニ G ヲ掛ケルト求ムル二ツノ整式ガ得ラレル。

(2) 二個ノ x ニ付テノ有理整式ノ最大公約數ト最小公倍數トヲ與ヘテ此二式ヲ求ム。

第六章

分數式ト無理式ノ變形

XIV. 分數式

36. 有理分數式或ハ比 サテ有理分數式ニ付テハ既ニ述ベタ(4 頁)コトデ，二ツノ整式ノ**商或ハ比ヲ有理分數**ト云フノデアル，コレハ一ツノ除法ヲ表ハスニ過ギナイカラ有理分數式ノ最簡ノモノデアル。從テ分母ガ 0 ナルコトハ其ノ分數ノ意味ヲ有シナイコトニナル。又分數，$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=0$ ナラバ A=0 デアル。

性質 I. $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}}{n}\Big/\frac{\mathrm{B}}{n}$ **デアル。**

II. $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ **即チ A, B, C, D ガ比例スルナラバ，A.D=B.C デリア，逆ニ A.D=B.C ナラバ** $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ **或ハ** $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}$ **デアル。**

III. $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ **ナラバ** $\frac{\mathrm{A+B}}{\mathrm{A-B}}=\frac{\mathrm{C+D}}{\mathrm{C-D}}$ **或ハ** $\frac{\mathrm{A+C}}{\mathrm{B+D}}=\frac{\mathrm{A-C}}{\mathrm{B-D}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ **デアル。**

例 1. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 コレハ條件恒等式 (14 頁) デアルガ，第一式ヲ第二式ニ入レ込ムコトハ容易デナイカラ，第一式ヲ變形シテ代入スル，尤モ其ノ場合ニ括弧ヲ全部ホドクコトヲ避ケ出來ルダケ簡單ナ式ニ付テ整頓スル。第一式ヲ

$$(a+b)(c+d)(b+c)(a+d)=\{(a+b)+(c+d)\}\{cd(a+b)+ab(c+d)\}$$

トナシテ，$a+b$，$c+d$ ヲマトメテオク，次ニ括弧ヲホドイテ，

$$(a+b)(c+d)(ab+ac+bd+cd)=cd(a+b)^2+(a+b)(c+d)(cd+ab)+ab(c+d)^2$$

卽チ　$cd(a+b)^2-(a+b)(c+d)(ac+bd)+ab(c+d)^2=0$

トナル。コヽデ第二式，卽チ $ac-bd=0$ ノ左邊ヲ誘導スル樣ニ工夫スル。ソレニハ $ac+bd$ ノ括弧ヲホドイテ

$$c(a+b)\{d(a+b)-a(c+d)\}-b(c+d)\{d(a+b)-a(c+d)\}=0$$

卽チ　$c(a+b)(bd-ac)-b(c+d)(bd-ac)=0$，　卽チ　$-(bd-ac)^2=0$

トナルカラ，$bd-ac=0$ 故ニ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{d}{c}$ トナル。

練習

(1)　$(bcd+cda+dab+abc)^2=abcd(a+b+c+d)^2$ ナルトキハ a, b, c, d ハ取リ樣ニヨリテ比例ヲナスコトヲ證セヨ。

注意　$\{cd(a+b)+ab(c+d)\}^2-abcd\{(a+b)+(c+d)\}^2=0$ トナシ，括弧ヲホドイテ，$cd(a+b)^2(cd-ab)-ab(c+d)^2(cd-ab)=0$ トナルコトニ着眼スレバ最後ニ $(cd-ab)(da-bc)(ca-bd)=0$ トナルカラ，$cd=ab$ カ或ハ $da=bc$ カ或ハ $ca=bd$ ノ何レカデナケレバナラナイコトヨリ，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}$ 或ハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 或ハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{d}{c}$ トナル。

(2)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\Big/\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}\right)=\dfrac{(b+d)}{(a+c)}$ ナルトキハ，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルカ又ハ $\dfrac{a}{d}=\dfrac{c}{b}$ ナルコトヲ證セヨ。

例 2. x, y, z ガ相等シカラズシテ，$\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}$，$\dfrac{y^2-zx}{y(1-zx)}$，$\dfrac{z^2-xy}{z(1-xy)}$ ナル三式ノ中何レカ二ツガ相等シキトキハ三式ハ悉ク相等シク且ツ $x+y+z$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ ナル二式ノ何レニモ等シキコトヲ證明セヨ。

講義　先ヅ $\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\dfrac{y^2-zx}{y(1-zx)}$ デアルトシ，コレヲ k トオクト，

$$x^2-yz=kx(1-yz)\ \ldots(1) \qquad y^2-zx=ky(1-zx)\ \ldots(2)$$

ナルコトガ得ラレル。ソコデ目的ハ先ヅ $\dfrac{z^2-xy}{z(1-xy)}=k$ ヲ誘導スルノデアル。サテ (1)×$(y-z)$; (2)×$(z-x)$ ヲ作ツテ邊々相加ヘテモ等式ハ成リ立ツ筈デアル。何トナレバ $x \neq y \neq z$ デアルカラデアル，(カヽル因數ヲカケテ邊々相加ヘルノハ (1) ト (2) ノ右邊ノ x ト y ノ一次項ヲ消去スルタメデアルガ，タヾ (1)×y，(2)×x トナシテモ消去出來ルガ目的ノ $kz(1-xy)$ ノ形ガ誘導出來ナイカラデアル)

カクシテ　(1) ハ　$x^2y-y^2z-x^2z+yz^2=k(xy-xy^2z-xz+xyz^2)\ldots\ldots(1)'$ トナリ

(2) ハ　$-xy^2+zx^2+y^2z-z^2x=k(-xy+x^2yz+yz-xyz^2)\ldots\ldots(2)'$

トナルカラ，$(1)'+(2)'$ ヲ作ルト，$(x-y)xy-z^2(x-y)=k[-(x-y)z+xyz(x-y)]$ トナル，トコロガ $x \neq y$ デアルカラ，$x-y$ デ兩邊ヲワリテ，$z^2-xy=kz(1-xy)\ldots\ldots(3)$ トナル。從テ $k=\dfrac{z^2-xy}{z(1-xy)}$ トナル。

尙ホ (1)−(2) ヲ作ルト，$(x-y)(x+y+z)=k(x-y)$ トナルカラ，$x+y+z=k$ ガ得ラレ，最後ニ (1)+(2)+(3) ヲ作ルト，

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=k(x+y+z-3xyz)=(x+y+z)^2-3(x+y+z)xyz \text{ トナル。}$$

サレバ　$yz+zx+xy-xyz(x+y+z)=0$，故ニ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=x+y+z\ (=k)$ トナル。

練習

$\dfrac{yz-x^2}{y+z}=\dfrac{zx-y^2}{z+x}$ ニシテ且ツ x, y, z ガスベテ相異ナルトキハ上式ノ各邊ハ $\dfrac{xy-z^2}{x+y}$ 及ビ $x+y+z$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

例 3. $x-\dfrac{ayz}{x^2}=y-\dfrac{azx}{y^2}=z-\dfrac{axy}{z^2}$，ニシテ，$x, y, z$ ガ相等シカラザルトキハ此各ハ $x+y+z-a$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

講義　**等號「＝」ガ二ツ以上ノトキハ恒ニ其ノ等シイ値ヲ，例ヘバ k トオイテ等式ヨリ分離シテ目的ニ進ムノデアル。**

サテ與ヘラレタル式ノ等シイ値ヲ k トオクト，

$$x^3-ayz=kx^2\ldots\ldots(1);\ y^3-azx=ky^2\ldots\ldots(2),\ z^3-axy=kz^2\ \ldots(3)$$

ソコデ (1)−(2) ヲ作ルト，$x^3-y^3-ayz+azx=k(x^2-y^2)$，卽チ $(x-y)[x^2+xy+y^2+az-k(x+y)]=0$ トナル。トコロガ $x \neq y \neq z$ デアルカラ $x^2+xy+y^2+az-k(x+y)=0\ldots\ldots(4)$ トナル。同樣ニ $y^2+yz+z^2+ax-k(y+z)=0\ldots\ldots(5)$ トナル。ソコデ (4)−(5) ヲ作ルト $x^2-z^2+xy-yz+az-ax-k(x-z)=0$，卽チ $(x-z)(x+y+z-a-k)=0$ 從テ $x \neq z$ デアルカラ $x+y+z-a=k$ トナル。

練習

(1)　x, y, z ガ相等シカラズシテ，

$y^2+z^2+myz=z^2+x^2+mzx=x^2+y^2+mxy$ ナルトキハ此ノ各ハ $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

(2) $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ ナルトキハ, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ナルコトヲ證セヨ。

37. 分數演算

例題ニ付テ直接算法ヲ示スコトニスル。

例 1. $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{1}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{1}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$ ヲ簡單ニセヨ。

講義 異分母デアルカラ通分スルニ，分母ノ最小公倍數ハ $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ デアルカラ,

$$與式=\frac{(b-c)(b-d)(c-d)+(a-c)(a-d)(d-c)+(a-b)(a-d)(b-d)+(a-b)(c-a)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

トナル。ソコデ分子ハ a, b, c, d ニ付テノ交代式デアルカラ $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ ヲ因數ニ有スル筈デアル。トコロガ三次式デアルカラ 0 デナケレバナラナイ。從テ求ムル値ハ 0 デアル。

練習

(1) **Euler ノ公式**ヲ證セヨ. 又コレヲ a, b, c, d ニ擴張シ, a, b, c, d ......ノ n 個ニ付テ歸納法ニヨリ證セヨ。

(i) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0,$

(ii) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0,$

(iii) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=0,$

(iv) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$

(2) $2\left\{\frac{x}{x^2-1}+\frac{x^2}{x^4-1}+\frac{x^4}{x^8-1}\right\}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^8+1}{x^8-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 全部ヲ通分セズ，先ヅ二ツヲ整頓シテ第三ニ移レ。

例 2. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$ ナルトキハ左邊ノ三ツノ分數ノ中二ツハ 1 ニ等シク，他ノ一ツハ -1 ニ等シキコトヲ證セヨ。

講義 與ヘラレタル式カラ a, b, c ノ簡單ナル關係ヲ誘導スルニ，**一般ニハ分母ヲ拂ツテ，即チ分母ノ最小公倍數ヲ等式ノ兩邊ニカケテ，因數分解シテ簡單ナル關係式ガ得ラル。**トコロガ本題ハ其ノ樣ニ單純ニハ參ラズ，カクスルト複雜トナツテ取扱ニ困却スル。サレバ少々工夫スル，其レハ與式ヲ

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=0$$

即チ $\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(c-a)^2-b^2}{2ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=0$ トナル。ソコデ兩邊ニ $2abc$ ヲカケテ，即チ分母ヲ拂ヘバ,

$$a(b-c+a)(b-c-a)+b(c-a+b)(c-a-b)+c(a+b+c)(a+b-c)=0,$$

即チ $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=0$

トナルカラ，$a+b-c=0$ カ或ハ $a-b+c=0$ 或ハ $-a+b+c=0$ トナル。今 $a+b-c=0$ トスレバ

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b)^2+b^2-a^2}{2b(a+b)}=\frac{a+b+b-a}{2b}=1,\ 同樣ニ\ \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1,\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-1$$

トナル。他ノ因數ニ付テ同樣ニ論ズルコトガ出來ル。

練習

(1) $a+b+c=0$ ナルトキハ $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 與式ノ左邊ハ

$$\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}\times\frac{a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$ トナリ

第一分數ノ分子ハ交代式第二分數ノ分子ハ對稱式デアルカラ對稱式例 2 (78頁)ニナラエ。

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ ナルトキハ

$\dfrac{1}{x^{2n+1}}+\dfrac{1}{y^{2n+1}}+\dfrac{1}{z^{2n+1}}=\dfrac{1}{(x+y+z)^{2n+1}}$ ナルコトヲ證セヨ，コヽニ n ハ正ノ整數トスル。

注意　第一式ヨリ $(y+z)(z+x)(x+y)=0$ ヲ誘導セヨ。

(3)　$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$ ナルトキハ亦

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$$ ナルコトヲ證セヨ。

例 3.　x, y, z ノ値ニ拘ハラズ，$y=\dfrac{a+bz}{c+dz}$，$z=\dfrac{a+bx}{c+dx}$，$x=\dfrac{a+by}{c+dy}$ ガ成立ツタメニハ $b^2+c^2+ad+bc=0$ ナラザルベカラザルコトヲ證セヨ。

講義　先ヅ與ヘラレタル條件ノ三ツヲ一ツニマトメル，其レニハ第二式ノ z ヲ第一式ニ代入スルト，

$y=\left[a+b\dfrac{a+bx}{c+dx}\right]\Big/\left[c+d\dfrac{a+bx}{c+dx}\right]=\dfrac{a(c+dx)+b(a+bx)}{c(c+dx)+d(a+bx)}$ トナル。又第三式ヨリ $y=\dfrac{a-cx}{dx-b}$ トナルカラ，第一，第二第三ガ x, y, z ノ値ニ拘ハラズ成リ立ツタメニハ $\dfrac{a(c+dx)+b(a+bx)}{c(c+dx)+d(a+bx)}=\dfrac{a-cx}{dx-b}$ デナケレバナラナイ。

從テ分母ヲ拂フテ整頓シテ，$(b^2+c^2+ad+bc)[dx^2-(b-c)x-a]=0$ ガ x ノ値ニ拘ハラズ成リ立ネバナラナイ。サレバ $d(b^2+c^2+ad+bc)=0$....(1)，$(b^2+c^2+ad+bc)(b-c)=0$,....(2)，$a(b^2+c^2+ad+bc)=0$......(3)，トナラネバナラナイ (66 頁參照)。トコロガ $b^2+c^2+ad+bc\neq 0$ トスレバ，$d=0$，$b=c$，$a=0$ ナルコトヲ要スルガ，コノトキハ與ヘラレタル三條件ガ $y=z=x$ トナリテ x, y, z ノ値ハ任意ナル假定ニ反スルコトニナル。サレバ $b^2+c^2+ad+bc=0$ ニナラナケレバナラナイ。

練習

(1)　$\dfrac{x}{y+z}=a$，$\dfrac{y}{z+x}=b$，$\dfrac{z}{x+y}=c$ ナルトキハ $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$ ナルコトヲ證セヨ。

(2)　$y=a-\dfrac{a^2}{x}$，$z=a-\dfrac{a^2}{y}$ ナルトキハ $x=a-\dfrac{a^2}{z}$ ナルコトヲ證セヨ。

例 4　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ ナルトキハ x, y, z ノ中何レカ一ツハ必ズ 1 ニ等シキコトヲ證明セヨ。

講義　證明スルコトハ $x-1=0$ カ，$y-1=0$ 或ハ $z-1=0$ ヲ導クコト，即チ $(x-1)(y-1)(z-1)=0$ ヲ導クコトニ着眼シテ，與式ヨリ $x+y+z=1$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ ナルコトヨリ $1-(x+y+z)=0$，$yz+zx+xy-xyz=0$ トナル。サレバ邊々相加ヘテ $1-(x+y+z)+(yz+zx+xy)-xyz=0$，即チ $(1-x)(1-y)(1-z)=0$ トナル。故ニ $1-x=0$，$1-y=0$ 或ハ $1-z=0$ トナル。從テ $x=1$ 或ハ $y=1$ 或ハ $z=1$ デアル。

練習

(1)　$x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$ ナルトキ $x^2y^2z^2=1$ 或ハ $x=y=z$ ナルコトヲ證セヨ。

注意　$x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}$ ヨリ $yz(x-y)=y-z$ トナル。第二ト第三トヲ組ミ合セテ，$zx(y-z)=z-x$，又第三ト第一トヲ組合セテ，$xy(z-x)=x-y$ トナル，ソコデ $x\neq y\neq z$ ナラバ邊々相乘シテ，$x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=(y-z)(z-x)(x-y)$ トナル，從テ $x^2y^2z^2=1$ トナル。若シ $x=y=z$ ナラバ與式ハ成リ立ツカラ，$x=y=z$ ナルカ，或ハ $x^2y^2z^2=1$ トナル。

(2)　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$ ナルトキハ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ナルコトヲ證セヨ。

例 5.　α, β ハ $x=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ノ二根ニシテ，y, z ハ $y=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ヲ滿足スル二ツノ變數トス．$\dfrac{y-\alpha}{y-\beta}=k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ ヲ滿足スル常數 k ノ値ヲ求ム。

講義　α, β ハ $x=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ノ根デアルカラ，$\alpha=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$....(1)，$\beta=\dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}$....(2) デアル。ソコデ $y-\alpha=\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=\dfrac{(ad-bc)(z-\alpha)}{(cz+d)(c\alpha+d)}$；$y-\beta=\dfrac{(ad-bc)(z-\beta)}{(cz+d)(c\beta+d)}$ トナルカラ $\dfrac{y-\alpha}{y-\beta}=\dfrac{(c\beta+d)(z-\alpha)}{(c\alpha+d)(z-\beta)}$ トナル。

サレバ $k=\dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$ トナレ。今 α, β ハ $x=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，即チ $cx^2-(a-d)x-b=0$ ノ根デアルカラ x ノ根ヲ求メテ k ニ代入スルト，

$$k=\frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d\mp\sqrt{(a-d)^2+4bc}}=\frac{a^2+d^2+2bc\pm(a+d)\sqrt{(a-d)^2+2bc}}{2(ad-bc)}$$，トナル。

例 6. $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トシ, $\dfrac{k\alpha+l\beta}{m\alpha+n\beta}$, $\dfrac{k\beta+l\alpha}{m\beta+n\alpha}$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

講義 $\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$ デアル。ソコデ

$$\frac{k\alpha+l\beta}{m\alpha+n\beta}+\frac{k\beta+l\alpha}{m\beta+n\alpha}=\frac{2\alpha\beta(km+ln)+(kn+lm)(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(m^2+n^2)+mn(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{2q(km+ln)+(kn+lm)(p^2-2q)}{q(m^2+n^2)+mn(p^2-2q)}$$

$$\frac{k\alpha+l\beta}{m\alpha+n\beta}\times\frac{k\beta+l\alpha}{m\beta+n\alpha}=\frac{\alpha\beta(k^2+l^2)+kl(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(m^2+n^2)+mn(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{q(k^2+l^2)+kl(p^2-2q)}{q(m^2+n^2)+mn(p^2-2q)}$$

トナルカラ,求ムル方程式ハ $[q(m^2+n^2)+mn(p^2-2q)]x^2-[(2q(km+ln)+(kn+lm)(p^2-2q)]x$
$+q(k^2+l^2)+kl(p^2-2q)=0$ トナル

38. 分數方程式

(i) **一元方程式** 分數方程式ノ解法ハ一般ニ,

(i) 各分數式ノ最小公分母ヲ方程式ノ兩邊ニカケルコト,

(ii) 其ノ整方程式ヲ解キ最小公分母ヲ0トナス根ヲステルコト。デアル。トコロガ一般ノ方法ニヨルト整方程式ガ高次方程式ニナルトキハ特別ノ工夫ヲナシテ因數ヲ放出シテ低次方程式ヲトクコトニ努ムレバ良イ。

例 1. $\dfrac{ax+b}{(a+b)x+b}+\dfrac{bx+a}{(a+b)x+a}=\dfrac{x+2}{x+1}$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ $\left(1-\dfrac{ax+b}{(a+b)x+b}\right)+\left(1-\dfrac{bx+a}{(a+b)x+a}\right)=2-\dfrac{x+2}{x+1}$ トナスト,

$$\frac{bx}{(a+b)x+b}+\frac{ax}{(a+b)x+a}=\frac{x}{x+1}\ \text{トナル。}$$

サレバ $x=0$ 或ハ $\dfrac{b}{(a+b)x+b}+\dfrac{a}{(a+b)x+a}=\dfrac{1}{x+1}$ トナル。ソコデ後者ノ分母ヲ拂ツテ

$$b(x+1)[(a+b)x+a]+a(x+1)[(a+b)x+b]=[(a+b)x+a][(a+b)x+b]$$

即チ $2abx+ab=0$ トナル。サレバ $ab\neq0$ ナラバ $x=-\dfrac{1}{2}$ トナル。

ソコデ $[(a+b)x+b][(a+b)x+a]$ ハ $x=-\dfrac{1}{2}$ ノトキ $\dfrac{1}{4}(b-a)(a-b)$ トナルカラ, $a=b$ ナラバ $x=-\dfrac{1}{2}$ ハ根トナラズ。

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $\dfrac{b+c}{bc-x}+\dfrac{c+a}{ca-x}+\dfrac{a+b}{ab-x}=\dfrac{a+b+c}{x}$

注意 $\left(\dfrac{b+c}{bc-x}-\dfrac{a}{x}\right)+\left(\dfrac{c+a}{ca-x}-\dfrac{b}{x}\right)+\left(\dfrac{a+b}{ab-x}-\dfrac{c}{x}\right)=0$ ニ直セ。

(2) $\dfrac{ax+b}{cx+b}+\dfrac{bx+a}{cx+a}=\dfrac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}$

注意 $\dfrac{ax+b}{cx+b}-1+\dfrac{bx+a}{cx+a}-1=\dfrac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}-2$ ニ直セ。

(3) $\dfrac{1}{x+a+b}+\dfrac{1}{x-a+b}+\dfrac{1}{x+a-b}+\dfrac{1}{x-a-b}=0$ ヲトケ

注意 $\left\{\dfrac{1}{x+(a+b)}+\dfrac{1}{x-(a+b)}\right\}+\left\{\dfrac{1}{x-(a-b)}+\dfrac{1}{x+(a-b)}\right\}=0$ ニ直セ。

例 2. $8.\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}+3.\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}-11=0$ ヲトケ。

講義 先ヅ $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=y$ トオクト, 與ヘラレタル方程式ハ $8y^2-11y+3=0$ トナル, 即チ $(y-1)(8y-3)=0$ トナル。サレバ $y=1$ 或ハ $y=\dfrac{3}{8}$ トナル。サレバ與ヘラレタル方程式ハ次ノ二ツノ方程式ト同値デアル。(0頁參照)即チ $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=1\ldots.(1)$ 或ハ $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=\dfrac{3}{8}\ldots.(2)$ トナル。ソコデ (1) ヨリ $x=-\dfrac{1}{2}$, (2) ヨリ -3 ト $-\dfrac{1}{5}$ ガ得ラレル。コレ等ハ分母ヲ 0 トナサナイコトハ明ラカデアル。

練習 $\dfrac{4x^2+2x}{x^2+6}+\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}-3=0$ ヲ解ケ。答 $2,\ -3,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{3}$

例 3. $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ同ジ係數ヲ有スル項ヲマトメテ, x^2 デワレバ與ヘラレタル方程式ハ $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$ トナル。ソコデ $x+\dfrac{1}{x}=t$ トオクト, $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$ トナルカラ, 上ノ方程式ハ $2(t^2-2)-3t+4=0$ 即チ $2t^2-\ t=0$ サレバ $t=0$ 或ハ $t=\dfrac{3}{2}$ トナル。從テ與ヘラレタル方程式ハ $x+\dfrac{1}{x}=0\ldots.(1)$ 或ハ $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}\ \ldots.(2)$ ト同値デアル從テ (1) ヨリ $x=\pm\sqrt{-1}$ (2) ヨリ $\dfrac{3\pm\sqrt{-7}}{4}$ トナル, 即チ $\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1},\ \dfrac{3+\sqrt{-7}}{4},\ \dfrac{3-\sqrt{-7}}{4}$ ノ四根ヲ得。

注意 カヽル整方程式ヲ**逆數方程式**ト云フノデアル, ソレハ $\sqrt{-1}\times(-\sqrt{-1})=1$, $\dfrac{3+\sqrt{-7}}{4}\times\dfrac{3-\sqrt{-7}}{4}=1$ トナルコトハ明ラカデアル, 即チ根ガ二ツ宛互ニ逆數デアルカラコノ名稱ノ生ズル所以デアル。

ソコデカヽル方程式ノ特徴ハ x ヲ $\frac{1}{x}$ トシテモ方程式ガ不變デアル。從テ第一係數ト最後ノ係數；第二係數ト終リヨリ第二ノ係數；....トガ同一ニナル。併シ，係數ノ此組ガ絶對値等シクシテ相異ナル符號ヲ有スル方程式モ此ノ種ノ方程式ニ屬スルノデアル。

サレバ**奇數次ノ逆數方程式**ハ必ズ 1 ヲ根ニ有スルコトガワカルカラ斯樣ナル方程式ヲ解クトキハ $x-1$ ナル因數ヲ放リ出シテ偶數次ノモノニ直シテトケ。

練習 次ノ方程式ヲトケ

(1) $x^3-2x^2+2x-1=0$, (2) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$,

(3) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

(ii) 聯立方程式

例 1. $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)$......(1), $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)$......(2),
$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)$......(3), $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right)$......(4) ナル一組ノ方程式ハ唯一組ノ根ヲ有スルコトヲ證明シ，且ツ之ヲ求メヨ。

講義 先ヅ (1), (2), (3) ヲ滿足スル解ヲ求ムルニ，

(1)+(2) ヲ作リテ，$\frac{2x}{a}=\lambda+\frac{1}{\lambda}+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b}$ トナル。

又 (2)+(3) ヲ作リテ $\frac{2x}{a}=\mu+\frac{1}{\lambda}-\left(\mu+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b}$ トナル。從テ邊々減ジテ

$$0=\lambda-\mu+(\lambda+\mu)\frac{y}{b} \text{ トナル。}$$

サレバ $\mu+\lambda\neq 0$ ナルトキハ $y=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}b$, 從テ $x=\frac{\mu\lambda+1}{\mu+\lambda}a$, $z=\frac{\mu\lambda-1}{\mu+\lambda}c$ トナル。ソシテコレ等ノ値ノトキハ (1)×(2)÷(3) ヲ作ルト，(4) ノ方程式ガ得ラルヽカラ，上ノ x, y, z ヲ (4) ニ代入シテモ滿足スル。從テ (1),(2),(3),(4) ハ一組ノ解 $x=\frac{\mu\lambda+1}{\mu+\lambda}a$, $y=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}b$, $z=\frac{\mu\lambda-1}{\mu+\lambda}c$ ヲ有スルコトニナル，尤モ $\mu+\lambda\neq 0$ ヲ要ス。

次ニ $\mu+\lambda=0$ ナラバ，$\lambda-\mu=0$ トナリ，(1), (2) ト (3), (4) ハ同一トナルカラ (1), (2), (3), (4) ヲ滿足スル從テ，無數ニ解ガ存在スルコトニナル。卽チ解ハ不定ニナル。

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解キ，且ツ吟味セヨ。

$x+y+z=0$......(1), $\frac{ax}{a-d}+\frac{by}{b-d}+\frac{cz}{c-d}=d(a-b)(b-c)(c-a)$......(2),
$\frac{a^2x}{a-d}+\frac{b^2y}{b-d}+\frac{c^2z}{c-d}=0$......(3)

講義 (1) ト (3) ヨリ x, y, z ノ連比ヲ求ムルト，$\dfrac{x}{\frac{c^2}{c-d}-\frac{b^2}{b-d}}=\dfrac{y}{\frac{a^2}{a-d}-\frac{c^2}{c-d}}$
$=\dfrac{z}{\frac{b^2}{b-d}-\frac{a^2}{a-d}}$， 卽チ $\dfrac{x}{\frac{(b-c)(bd+cd-bc)}{(b-d)(c-d)}}=\dfrac{y}{\frac{(c-a)(cd+ad-ca)}{(c-d)(a-d)}}=\dfrac{z}{\frac{(a-b)(ad+bd-ab)}{(a-d)(b-d)}}=k$

トオクト，

$x=\frac{(b-c)(bd+cd-bc)}{(b-d)(c-d)}k$, $y=\frac{(c-a)(cd+ad-ca)}{(c-d)(a-d)}k$, $z=\frac{(a-b)(ad+bd-ab)}{(a-d)(b-d)}k$....(4) トナル。

コヽニ $(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$ トス

ソコデコレ等ヲ (2) 中ニ代入スルト

$$\frac{a(b-c)(bd+cd-bc)+b(c-a)(cd+ad-ca)+c(a-b)(ad+bd-ab)}{(a-d)(b-d)(c-d)}k=d(a-b)(b-c)(c-a)\,..(5)$$

トナル。トコロガ左邊ノ分子ハ a, b, c ニ付テノ交代式デアルカラ

左邊ノ分子$\equiv \mathrm{L}(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)+\mathrm{M}(b-c)(c-a)(a-b)d$

トナル。何トナレバ左邊ノ分子ハ a, b, c, d ニ付テノ四次ノ同次式デアルカラデアル，ソシテ a, b, c ニ付テ交代式デアルカラ a, b, c ノ對稱式ガ掛ツタモノト，d ノ掛ツタモノトノ和デナケレバナラナイ。

ソコデ a^3b ノ係數ニ比較シテ，$\mathrm{L}=0$ トナリ，a^2bd ノ係數ヲ比較シテ $\mathrm{M}=1$ ガ得ラレルカラ結局 (5) ハ $\frac{d(b-c)(c-a)(a-b)}{(a-d)(b-d)(c-d)}k=d(a-b)(b-c)(c-a)$ ....(6)

トナル。サレバ $d\neq 0$ ナルトキハ $k=(a-d)(b-d)(c-d)$ トナル。從テ (4) ヨリ
$x=(b-c)(a-d)(bd+cd-bc)$, $y=(c-a)(b-d)(cd+ad-ca)$, $z=(a-b)(c-d)(ad+bd-ab)$ トナル。

次ニ a, b, c 中ニ少ナクモ二ツガ相等シケレバ上ノ連比ヲ求ムル算法ヲ施スコトガ出來ナイカラ原方程式ニ付テ考究スルニ，例ヘバ $b=c$ ナラバ (1), (2), (3) ハ

$x+y+z=0$....(1), $\frac{ax}{a-d}+\frac{by}{b-d}+\frac{bz}{b-d}=0$....(2)′, $\frac{a^2x}{a-d}+\frac{b^2y}{b-d}+\frac{b^2z}{b-d}=0$....(3)′

トナル。(1) ヨリ $y+z=-x$ トナルカラ，之ヲ (2)′ ニ代入シテ $\left(\frac{a}{a-d}-\frac{b}{b-d}\right)x=0$ 卽チ $\frac{d(a-b)}{(a-d)(b-d)}x=0$ トナル。

サレバ $d\neq 0$ ニシテ，$a\neq b$ ナラバ $x=0$ トナル。從テ $x=0$, $y+z=0$ ナルトキハ (1),(2)′,

(3)′ ガ成立スルカラ不定トナル他ノ $c=a$ 或ハ $a=b$ ナルトキモ同樣ニ論ズルコトガ出來ル。

次ニ $d\neq 0$ ニシテ, $a=b=c\neq 0$ ナラバ (1), (2), (3) ヨリ $x+y+z=0$ トナリテ不定トナル, 又 $a=b=c=0$ ナラバ $x+y+z=0$ ノミノ一ツノ方程式トナル。

最後ニ $d=0$ ナラバ各方程式トモ $x+y+z=0$ トナル從テ不定デアル。

例 3. $\dfrac{x}{a+l}+\dfrac{y}{a+m}+\dfrac{z}{a+n}=1\ldots\ldots(1)$, $\dfrac{x}{b+l}+\dfrac{y}{b+m}+\dfrac{z}{b+n}=1\ldots(2)$, $\dfrac{x}{c+l}+\dfrac{y}{c+m}+\dfrac{z}{c+n}=1\ldots\ldots(3)$, ヲ解ケ.

講義 $(1)\times(a+n)-(2)\times(b+n)$ ヲ作ルト, $x\left(\dfrac{a+n}{a+l}-\dfrac{b+n}{b+l}\right)+y\left(\dfrac{a+n}{a+m}-\dfrac{b+n}{b+m}\right)=a+n-(b+n)$ トナル, 卽チ $\dfrac{x(a-b)(l-n)}{(a+l)(b+l)}+\dfrac{y(a-b)(m-n)}{(a+m)(b+m)}=a-b\quad(4)$ トナル, サレバ $a\neq b$ ナラバ,

$$\frac{x(l-n)}{(a+l)(b+l)}+\frac{y(m-n)}{(a+m)(b+m)}=1\ldots(4)'$$ トナル。同樣ニ (2) ト (3) トヨリ $b\neq c$ ナラバ,

$$\frac{x(l-n)}{(b+l)(c+l)}+\frac{y(m-n)}{(b+m)(c+m)}=1\ldots(5)$$ トナル。ソコデ $(4)'\times(a+m)-(5)\times(c+m)$ ヲ作ルト, $\dfrac{x(l-n)}{(a+l)(b+l)(c+l)}\{(c+l)(a+m)-(a+l)(c+m)\}=a-c$ トナル。サレバ $a\neq c$ ニシテ $l\neq n$, $l\neq m$ ナラバ $x=\dfrac{(c+l)(b+l)(c+l)}{(l-n)(l-m)}$ トナル。

同樣ニシテ $y=\dfrac{(a+m)(b+m)(c+m)}{(m-l)(m-n)}$, $z=\dfrac{(a+n)(b+n)(c+n)}{(n-m)(n-l)}$ ガ得ラレル。

次ニ a, b, c 中ノ少ナクモ二ツガ相等シケレバ (1), (2), (3) ハ二ツ或ハ一ツノ方程式ト同値トナルカラ不定トナル。

又 $l=m=n$ ナルトキハ (1), (2), (3) ノ各ノ左邊ハ $x+y+z$ ニ導カレ, $a=b=c$ ナラバ右邊モ同一式トナルカラ不定デ, a, b, c ガ等シクナケレバ不能デアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $lx+my+nz=p$

答 $x=\dfrac{ap}{al+bm+cn}$, $y=\dfrac{bp}{al+bm+cn}$, $z=\dfrac{cp}{al+bm+cn}$

(2) $x+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=a$, $y+\dfrac{z}{c}-\dfrac{x}{a}=b$, $z+\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=c$

答 $x=a$, $y=b$, $z=c$。

(3) $x+y+z=0$, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$, $bcx+cay+abz=1$。

注意 第一式ト第二式ヨリ x, y, z ノ連比ヲ求メテトケ。

答 $x=-\dfrac{1}{(c-a)(a-b)}$, $y=-\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}$, $z=-\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}$

(4) $x+y+z=a+b+c$, $bx+cy+az=bc+ca+ab$,

$cx+ay+bz=bc+ca+ab$

注意 第一式ハ $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0$, 第二式ハ $b(x-a)+c(y-b)+a(z-c)=0$ ト直シテ, $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ ノ連比ヲ求メテトケ。 答 $x=a$, $y=b$, $z=c$。

x : y : z

K=0トナル
X=0 Y=0 Z=0
KB=X−a=0, ……

(5) $ax+cy+bz=a^2+2bc$, $bx+ay+cz=c^2+2ab$,

$cx+by+az=b^2+2ca$。

注意 第一式ハ $a(x-a)+c(y-b)+b(z-c)=0$, 第二式ハ $b(x-a)+a(y-b)+c(z-c)=0$ ニ直シテ $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ ノ連比ヲ求メテトケ。 答 $x=a$, $y=b$, $z=c$。

例 4. $\dfrac{x}{l-a}+\dfrac{y}{l-b}+\dfrac{z}{l-c}=1$, $\dfrac{x}{m-a}+\dfrac{y}{m-b}+\dfrac{z}{m-c}=1$, $\dfrac{x}{n-a}+\dfrac{y}{n-b}+\dfrac{z}{n-c}=1$ ヲトケ。

講義 先ヅ與ヘラレタル方程式ハ $\dfrac{x}{t-a}+\dfrac{y}{t-b}+\dfrac{z}{t-c}-1=0\ldots(1)$, ニ於テ $t=l, m, n$ トシタル式デ, 結局 (1) ヲ t ノ方程式ト考ヘルトキハ l, m, n ガ根デアル。

ソコデ (1) ノ左邊ハ通分スレバ $\dfrac{x}{t-a}+\dfrac{y}{t-b}+\dfrac{z}{t-c}-1=\dfrac{(t\text{ ニ付テノ三次式})}{(t-a)(t-b)(t-c)}\ldots(2)$ トナル。

トコロガ $t=l, m, n$ ハ (1) ノ根卽チ (2) ノ右邊ノ分子ヲ 0 ニスルカラ, 右邊ノ分子ハ $(t-l)(t-m)(t-n)$ ナル因數ヲ有シ, 且ツ t^3 ノ係數ハ -1 デアルコトハ左邊ヲ通分スレバ直ニ知ラルヽコトデアル, 從テ (2) ハ

$$\frac{x}{t-a}+\frac{y}{t-b}+\frac{z}{t-c}-1=-\frac{(t-l)(t-m)(t-n)}{(t-a)(t-b)(t-c)}\ldots(3)$$

トナル。ソコデ (3) ノ恒等式ヲ利用シテ與ヘラレタル方程式ヲ解ク。

ソレニハ (3) ノ兩邊ニ $t-a$ ヲ乘ジテ $t=a$ トオクト, $x=-\dfrac{(a-l)(a-m)(a-n)}{(a-b)(a-c)}$ トナル, 又 $t-b$ ヲ (3) ノ兩邊ニカケテ $t=b$ トオケバ, $y=\dfrac{(b-l)(b-m)(b-n)}{(b-c)(b-a)}$, 同樣ニ

$z=-\dfrac{(c-l)(c-m)(c-n)}{(c-a)(c-b)}$ トナル。

練習 $\dfrac{x}{a+l}+\dfrac{y}{a+m}+\dfrac{z}{a+n}=1,\ \dfrac{x}{b+l}+\dfrac{y}{b+m}+\dfrac{z}{b+n}=1,$

$\dfrac{x}{c+l}+\dfrac{y}{c+m}+\dfrac{z}{c+n}=1$ ヲトケ。 $x=-\dfrac{(l+a)(l+b)}{(m-l)(n-l)}$

例 5. 次ノ聯立程式ヲトケ。

$$\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-3}{y-4}=0,\ \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y\quad 2y^2}-\frac{2}{xy}=0.$$

講義 兩方程式ノ分母ヲ拂ツテ之ヲ整頓スルト，$x-y+1=0$, $x+2y-8=0$ トナル。之ヲトツト，$x=2$, $y=3$ トナリ，之レ等ガ分母ヲ 0 トシナイカラ求ムル解デアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ

$$\frac{y-2}{x-3}+\frac{x-y}{x^2-9}=\frac{y-4}{x+3},\ \frac{2}{x^2-2x}+\frac{3}{xy-2y}+\frac{9}{xy}=0$$

例 6. 次ノ聯立方程式ヲトケ，

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\ \frac{yz}{y+z}=-\frac{3}{2},\ 2(z+x)+xz=0.$$

講義 x, y, z ハ零デナイコトハ與ヘラレタル方程式ヨリ明ラカデアルカラ上ノ方程式ヲ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{}=-\frac{1}{2}$$

ニ直シ，之ヨリ $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ ヲ求メルト，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{z}=-1$ トナリ，求ムル解ハ $x=2$, $y=3$, $z=-1$ トナル，何トナレバ之レ等ハ分母ヲ零トシナイカラデアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ

(1) $\dfrac{xy}{x+y}=a,\ \dfrac{yz}{y+z}=b,\ \dfrac{zx}{x+z}=c.$

(2) $\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3,\ \dfrac{z+y}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=1.$

XV. 無理式

39. 根數ト根式

根數 例ヘバ平方スルト，正數 9 トナル樣ナル

數ヲ 9 ノ**平方根**ト云フ，トコロガ其ノ樣ナル數ハ $+3$ ト -3 ノ二ツガアル。ソコデコノ算法ノ記號ハ $\sqrt{\ }$ ヲ用ヒ，$\sqrt{9}$ デ**算法ト答**トヲ表ハスノデアル，尤モ其ノトキハ平方根ハ $+3$ ト -3 ガアルケレドモ，$\sqrt{9}=+3$ ノミヲ表ハスト約束スルノデアル。トコロガ $\sqrt{2}$ ハ有理數デハ存在シナイ，カヽル數ハコノマヽデ表ハシテ之ヲ**根數**ト云フノデアル。

一般ニ a ガ**正數**ナルトキ $\sqrt[n]{a}$ ヲ **a ノ主第 n 羃根**，即チ第 n 羃ガ a トナル正數，即チ $(\sqrt[n]{a})^n=a$ デ定義サレタル**正數**ヲ表ハス，特ニ n ガ奇數デアルトキ $\sqrt[n]{-a}$ ハ **$-a$ ノ主第 n 羃根**，即チ $-\sqrt[n]{a}$ ヲ示ス。今後記號ニテ表ハサレタル根數ハ**主根**ヲ表ハスコトヲ附記シテオク。

注意 例ヘバ $\sqrt{a^2}$ ハ正數デアルカラ，a ガ負數，例ヘバ -3 デアレバ $\sqrt{a^2}=+3$ トナル。

例 1. $\sqrt[4]{7-\sqrt{48}}$ ヲ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ナル形ニ直セ。

講義 $7-\sqrt{48}=4-2\sqrt{3}\sqrt{4}+3=(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2=(2-\sqrt{3})^2$ トナル，ハテ $\sqrt{3}-\sqrt{4}$ トナサナイノハ，コレハ負數トナルカラデアル，尤モ $(\sqrt{3}-2)^2$ トスレバ開ク際ニ注意スレバ宜シ，サレバ $\sqrt{7-\sqrt{48}}=2-\sqrt{3}$ トナル。從テ $\sqrt[4]{7-\sqrt{48}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ トナル.

ソコデ $2-\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}-2\sqrt{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2$ トナル。

サレバ $\sqrt[4]{7-\sqrt{48}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ トナル。

何トナレバ $\sqrt{\dfrac{3}{2}}>\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ デアルカラ，$\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}>0$ トナルカラデアル。

例 2. $a, a'; b, b'; u, u'$ ガ有理數ナルトキ $a+b\sqrt{u}=a'+b'\sqrt{u'}$ ニシテ u, u' ガ有理數ノ平方ニ等シカラザルトキハ $\dfrac{u}{u'}$ ガ有理數ノ平方ニ等シ。

講義 $a+b\sqrt{u}=a'+b'\sqrt{u'}$ デアルカラシテ，$a-a'=b'\sqrt{u'}-b\sqrt{u}$ トナル。ソシテ $\sqrt{u}$ ト $\sqrt{u'}$ ハ根數デアル，從テ $b'\sqrt{u'}-b\sqrt{u}$ モ根數カ 0 デアル。又 $a-a'$ ハ有理數カ 0 デアル。サレバ有理數ハ根數ニ等シクナルコトガ出來ナイカラ，$a-a'=0$,

$b'\sqrt{u'}-b\sqrt{u}=0$ デナケレバナラヌ。從テ $\dfrac{b'}{b}=\sqrt{\dfrac{u}{u'}}$ トナル。從テ $\dfrac{u}{u'}=\dfrac{b'^2}{b^2}$ トナル。

例 3. u ト u' ハ有理數ニシテ，而モ $u,\ u',\ \dfrac{u}{u'}$ ガ何レモ有理數ノ平方ニ等シカラザルトキハ $\sqrt{u}+\sqrt{u'}$ ハ整數ヲ係數トセル或定マリタル四次方程式ノ根ナリ，此ノ方程式ノ四ツ根ハ $\pm\sqrt{u}\pm\sqrt{u'}$ ナリ。

講義 今 $\sqrt{u}+\sqrt{u'}=a$....(1) トオクト，コノ等式ノ兩邊ヲ平方シテモ等式ハ成リ立ツ(3頁)，從テ $u+2\sqrt{uu'}+u'=a^2$ トナル，卽チ $u+u'-a^2=-2\sqrt{uu'}$....(2) トナル。同樣ニ兩邊ヲ平方シテ，

$(u+u'-a^2)^2=4(uu')$ トナル，卽チ $a^4-2(u+u')a^2+(u-u')^2=0$....(3) トナル。サレバ $\sqrt{u}+\sqrt{u'}=a$ ナルトキハ (3) ガ成リ立ツ，卽チ $\sqrt{u}+\sqrt{u'}$ ハ四次方程式 $x^4-2(u+u')x^2+(u-u')^2=0$....(4) ノ根デアル。而シテ (1) ノ兩邊ヲ平方スルコトハ (1) ノ兩邊ニ $\sqrt{u}+\sqrt{u'}=-a$ ヲカケタルコトデ，(2) ノ兩邊ヲ平方シタルコトハ $u+u'-a^2=+2\sqrt{uu'}$ ヲ (2) ノ兩邊ニカケタルコトニナルカラ，結局 (4) ノ根ハ $\sqrt{u}+\sqrt{u'}=a,\ -(\sqrt{n}+\sqrt{u'})=a,\ -(\sqrt{u}-\sqrt{u'})=a,\ \sqrt{u}-\sqrt{u'}=a$ トナル，卽チ $\pm\sqrt{u}\pm\sqrt{u'}$ ノ四根トナル。

$10+6\sqrt{3}=x^3+(\sqrt{3})^3+2x\sqrt{3}(\sqrt{3}+x)$

$3\sqrt{3}\quad +2x\cdot 3+2x^2\sqrt{3}$ $(6x)$

練習 $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=x+\sqrt{3}$ ニ適合スル x ノ値ヲ求メヨ。

根式 例ヘバ $A=a^2+2ab+b^2$ ナル有理式ガアルトキ，$\sqrt{A}$ ヲ考ヘルト，$a+b$ トナル。コノ場合ニ a, b ガ或ル實數ヲ表ハストキニハ $a+b$，ノ符號ヲ調ベテ $\sqrt{A}$ ガ正數トナル樣ニトラナケレバナラナイ。サレバ數値ヲ考ヘルトキハ $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\pm(a+b)$ トナル，コヽニ $\pm$ ノ複號ハ今述ベタルコトニヨリ適當ニ選定スルノデ $+(a+b)$ ト $-(a+b)$ ガ存在スルコトデハナイ。

$x^3+3x^2\sqrt{3}+6x+3\sqrt{3}-10=0$

併シ數値ヲ考ヘズ唯ダ形ノミノ場合ナラバ $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$ ト表ハスノデアル。ソシテ $\sqrt{a^2+b^2}$ ノ樣ニ有理式デ表ハスコトガ出來ナイ樣ナル式ヲ**根式**ト云フノデアル，併シコノコトヲ擴張シテ開キ切レル，切レナイコトニ無關係ニ根號ノ存在スル式ヲ根式或ハ無理式ト云フノデアル。

注意 $A^{\frac{q}{p}}$ ハ $\sqrt[p]{A^q}$ ヲ畧記シタルモノ卽チ $\sqrt[p]{A^q}\equiv A^{\frac{q}{p}}$ デアルカラ $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ ヲ $(a^2+2ab+b^2)^{\frac{1}{2}}$ ト書クコトモアル。ソシテ指數ノ法則ニ從フカラコノ分數指數ハ便利ナル場合ガ多クアル。又 $a^{-n}\equiv\dfrac{1}{a^n}$ ノコトデアル。

例 1. $(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})\times(a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}})$ ヲ算計セヨ。

講義 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$ コノ場合モ降羃ノ順ニ列ベテ計算セヨ。

$$\times\ a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$$

$$a^{\frac{3}{3}}-a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}-a^{0}+a^{-\frac{1}{3}}$$

$$a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$$

$$a^{\frac{1}{3}}-a^{0}+a^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{3}{3}}$$

$$a\qquad +a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}\qquad +a^{-1}$$

コヽデ $a^0=1$ デアル。

サレバ求ムル答ハ $a+a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}$ デアル。

練習 $3x^{\frac{4}{3}}+4x+6x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+3$ ヲ $3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1$ ニテ割レ。

例 2. x ガ二次方程式 $x^2+x-1=0$ ノ根ナルトキ x^3+2x^2+x+1 ノ値ヲ計算セヨ。

講義 先ヅ割リ算ニヨリテ $x^3+2x^2+x+1\equiv(x^2+x-1)(x+1)+x+2$ トシテ $x^2+x-1=0$ ノ値ヲ代入スルニ第一項ハ 0 トナルカラ，$x+2$ ニ代入スルコトニナル。ソコデ $x^2+x-1=0$ ノ根ハ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ デアルカラ，

求ムル値ハ $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}+2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

例 3. $a,b>0$ ニシテ，$x=2^{-1}\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$ ナルトキ，$2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left\{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1}$ ノ値ヲ求ム。

講義 カヽル計算ハ一部分宛計算シテ最後ニ其レ等ヲマトメルノデアル。

ソコデ $x=2^{-1}\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right\}$ デアルカラ，

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)\right]}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$$

$$x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]+\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right]=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

トナル，サレバ $2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left\{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1}=\dfrac{2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2a\times\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right]}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$

$$=a\times\sqrt{\frac{b}{a}}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right]=a+b$$

トナル。

例 4. 二ツノ正數 a, A ヨリ順次 $a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)$,

$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{A}{a_1}\right)$, ……$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{A}{a_{n-1}}\right)$ 等ノ正數ヲ作ルトキハ

$\frac{a_n-\sqrt{A}}{a_n+\sqrt{A}}=\left(\frac{a-\sqrt{A}}{a+\sqrt{A}}\right)^{2^n}$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義 コレハ歸納法ニヨルヨリ外ニ途ガナイ。

先ヅ m ノ任意ノ値ニ對シテ $\frac{a_m-\sqrt{A}}{a_m+\sqrt{A}}=\left(\frac{a-\sqrt{A}}{a+\sqrt{A}}\right)^{2^m}$ トスレバ,

$$\frac{a_{m+1}-\sqrt{A}}{a_{m+1}+\sqrt{A}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_m+\frac{A}{a_m}\right)-\sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(a_m+\frac{A}{a_m}\right)+\sqrt{A}}=\frac{a_m^2-2\sqrt{A}a_m+A}{a_m^2+2\sqrt{A}a_m+A}=\left(\frac{a_m-\sqrt{A}}{a_m+\sqrt{A}}\right)^2$$

$$=\left[\left(\frac{a-\sqrt{A}}{a+\sqrt{A}}\right)^{m}\right]^2=\left(\frac{a-\sqrt{A}}{a+\sqrt{A}}\right)^{2^{m+1}}$$

トナル, 卽チ $n=m$ ノトキ成リ立ツトスルト $n=m+1$ ノトキモ成立ツ, ソシテ $m=1$ ナラバ,

$$\frac{a_1-\sqrt{A}}{a_1+\sqrt{A}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)-\sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)+\sqrt{A}}=\frac{a^2-2\sqrt{A}a+A}{a^2+2\sqrt{A}a+A}=\left(\frac{a-\sqrt{A}}{a+\sqrt{A}}\right)^2$$

トナリテ成立ツカラ n ノスベテノ正整數値ニ對シテ成リ立ツ。

40. 無理分數

無理分數式ヲ簡單ニスル一般ナル方法ハ存在シナイ。併シ一般ニ無理式ガ與ヘラレタルトキハコレト同値デ且ツ分母ニ根號ヲ含マナイモノニ變形スル樣ニ努メ, 然ル後ハ根式ノ計算ニ從フノミデアル。

例 1. $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ ナルトキ $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ノ値如何, コヽニ a, b ハ正數トス。

講義 先ヅ $\sqrt{a+x}=\sqrt{a+\frac{2ab}{b^2+1}}=\sqrt{\frac{a(b+1)^2}{b^2+1}}=\frac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}$

$$\sqrt{a-x}=\sqrt{a-\frac{2ab}{b^2+1}}=\sqrt{\frac{a(b-1)^2}{b^2+1}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b^2+1}}, & b>1 \text{ ナルトキ}\\ \frac{\sqrt{a}(1-b)}{\sqrt{b^2+1}}, & b<1 \text{ ナルトキ}\end{cases}$$

サレバ (i) $b>1$ ナルトキ

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{\frac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b^2+1}}}{\frac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}-\frac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b^2+1}}}=\frac{2\sqrt{a}b}{2\sqrt{a}}=b$$

(ii) $b<1$ トナルトキ

$$=\frac{\frac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{\sqrt{a}(1-b)}{\sqrt{b^2+1}}}{\frac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}-\frac{\sqrt{a}(1-b)}{\sqrt{b^2+1}}}=\frac{1}{b}$$

トナル。

練習

(1) a, b ガ正數ナルトキ $x=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ナラバ $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{(a+b)(x+\sqrt{1+x^2})}$ ノ値如何。 答 1

(2) $\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ ヲ求ム 答 $\pm\left(x-2-\frac{1}{x}\right)$。

(3) $\frac{y}{a^2-y^2}\left(\frac{a}{a+\sqrt{a^2-y^2}}-1\right)+\frac{a}{y\sqrt{a^2-y^2}}$ ヲ簡單ニセヨ。

(4) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ノ値如何。

答 1.

(5) $x=\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ナルトキ $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ ノ値ヲ求メヨ。

答 $a(a-1)$

(6) $2x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナラバ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ ノ値ヲ求メヨ。

答 $\frac{1}{2}$

(7) x ガ $a^2+12x+15=0$ ノ根ナルトキ $\frac{x(x+1)}{x^2+3x+1}$ ノ値ヲ求メヨ。

答 $\frac{19\mp\sqrt{31}}{11}$

41. 複素數

例ヘバ $ax^2+bx+c=0$ ニ於テコノ根ヲ求ムルト, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ トナルコトハ熟知セラレテキルコトデアル。サテ $b^2-4ac>0$ **デアレバ x ノ値ハ實數デアル, 又** $b^2-4ac=0$ **ナルトキハ等根デ實數デアル。** トコロガ $b^2-4ac<0$

デアレバ x ノ値ハ虛數デアル，即チ虛根トナルコトハ熟知セラレテキルコトデアル。一般ニ虛數チ定義スルト，

負數ノ平方根ハ實數トナルコトガ出來ナイ。斯樣ナル羃根ヲ**虛數**ト名ヅケル。(附錄參照)

サレバ

(1)　記號 i ハ $\sqrt{-1}$ ヲ表ハスコトトシテ之ヲ**虛數單位**ト云フ，

(2)　a ガ實數デアルトキハ ai トル記號ヲ**純粹虛數**ト名ヅケル，

(3)　a ト b ガ實數ナルトキ，$a+bi$ ナル記號ヲ**複素數**ト云フ，

(4)　$a+bi=c+di$ ナラバ $a=c,\ b=d$ デアル。

複素數ノ四則　二ツノ複素數 $a+bi$ ト $c+di$ ニ四則ノ算法ヲ施スト，

$$\text{I.}\quad (a+bi)\pm(c+di)=a\pm c+(b\pm d)i$$

$$\text{II.}\quad (a+bi)(c+di)=ac+bci+adi-bd=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$\text{III.}\quad \frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

トナル。ソコデ $a+bi$ ト $a-bi$ ノ樣ナル複素數ヲ**共軛虛數**ト云フ。コノ和ハ實數ニシテ積ハ $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ トナルカラ，之又實數デアル。ソシテ $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲ $a+bi$ 或ハ $a-bi$ ノ**絕對值**ト云フ。ソシテ**二ツノ複素數ノ積並ニ商ノ絕對值ハ各々ノ絕對值ノ積並ニ商ニ等シ。**

例 1.　$(a^2+ab+b^2)(x^2+xy+y^2)$ ハ X^2+XY+Y^2 ナル形ニナシ得ルコトヲ示セ。

講義　$a^2+a\ +b^2=(a-\omega b)(a-\omega^2 b)$, $x^2+xy+y^2=(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$ トナル，コヽニ ω, ω^2 ハ 1 ノ立方根，即チ $t^2+t+1=0$ ノ根デアル。カクシテ 32 例 8 (89頁) ニ倣ツテ證明スルコトガ出來ル。

例 2.　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ ナルコトヲ示セ。コヽニ ω ハ 1 ノ立方根デアル。

講義　先ヅ $x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ ナルコトハ熟知ノコトデアル。

サテ $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\equiv x^2-(z+y)x+y^2-yz+z^2$ トナルカラ，今右邊ヲ 0 トオイテ x ノ値ヲ求ムルト，$x=\dfrac{z+y\pm\sqrt{(z+y)^2-4(y^2-yz+z^2)}}{2}=\dfrac{z+y\pm\sqrt{-3}(z-y)}{2}$

$$=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}z+\frac{1\mp\sqrt{-3}}{3}y.$$ トナル。ソシテ $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ハ 1 ノ立方根即チ ω デアルカラ，

$$=-\omega^2 z-\omega y \text{ 或 } -\omega z-\omega^2 y$$ トナル。

サレバ $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ トナル

例 3.　$\dfrac{\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta}{\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma}$ ト $\dfrac{\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta}{\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma}$ ヲ二根トスル方程式ヲ作レ，但シ $\omega^3=1$ ニシテ α, β, γ ハ $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ノ根トス。

講義　先ヅ第一分數ト第二分數ノ積ヲ求ムルニ

$$P=\frac{\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta}{\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma}\times\frac{\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta}{\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma}=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta}$$

トナルコトハ例 2 ニ於ケル結果ヲ適用スレバ良イ，即チ上式ノ分子ニ於テハ x, y, z ヲ $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ ト分母ニテハ α, β, γ トスレバ良イ。

次ニ和ヲ求ムルニ

$$S=\frac{\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta}{\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma}+\frac{\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta}{\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma}$$

$$=\frac{(\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)+(\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta)(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)}{(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)}$$ トナル，トコロガ

$$(\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=(\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)\omega+(\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha^2\beta)\omega^2+3\alpha\beta\gamma.$$

$$(\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta)(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)=(\gamma^2\alpha+\alpha^2\beta+\beta^2\gamma)\omega+(\beta\gamma^2+\alpha\beta^2+\gamma\alpha^2)\omega^2+3\alpha\beta\gamma$$

トナル。從テ分子 $=-(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)+6\alpha\beta\gamma$

サレバ　$S=\dfrac{6\alpha\beta\gamma-\Sigma\alpha^2\beta}{\Sigma\alpha^2-\Sigma\beta\gamma}$, $P=\dfrac{\Sigma\beta^2\gamma^2-\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha^2-\Sigma\beta\gamma}$

トナル。從テ α, β, γ ガ $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ノ根デアルカラ根ノ對稱式 (90頁) ヨリ a, b, c, d デ表ハスコトガ出來ル，カクシテ $(ac-b^2)x^2+(ad-bc)x+(bd-c^2)=0$ ガ得ラレル

例 4.　$\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ガ方程式 $x^3+qx+r=0$ ノ根ナルトキハ 2α ハ

$x^3+qx-r=0$ ノ根ナルコトヲ示セ。

講義 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ガ第一方程式ノ根デアルカラ $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3+q(\alpha+\beta\sqrt{-1})+\gamma=0$

即チ

$\alpha^3-3\alpha\beta^2+q\alpha+\gamma+(3\alpha^2\beta-\beta^3+q\beta)\sqrt{-1}=0$ トナル。サレバ

$\alpha^3-3\alpha\beta^2+q\alpha+\gamma=0$, $3\alpha^2\beta-\beta^3+q\beta=0$ トナル。トコロガ $\beta\neq0$ デアルカラ

$3\alpha^2-\beta^2+q=0$ ト $\alpha^3-3\alpha\beta^2+q\alpha+\gamma=0$ ガ同時ニ成リ立ツ。從テ

$\alpha^3-3\alpha(3\alpha^2+q)+q\alpha+\gamma=0$ 即チ $8\alpha^3+2q\alpha-\gamma=0$ ガ成リ立ツ。

從テ $(2\alpha)^3+q(2\alpha)-\gamma=0$ ガ成立ツカラ 2α ハ $x^3+qx-\gamma=0$ ノ根デアル。

例 5. $a+xi$, $b+yi$, ナル二ツノ複素數ノ和ノ絶對値ハ各々ノ絶對値ノ和ヨリ大ナラズ。

講義 二ツノ複素數ノ和ハ $a+b+(x+y)i$ デアルカラ絶對値ハ $\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ デアル，

サレバ
$$\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}\leqq\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \qquad (1)$$

ナルコトハ證明スレバ足リル。トコロガ各々正數デアルカラ不等式ノ定理（　頁）ニヨリ，
$$(a+b)^2+(x+y)^2\leqq a^2+x^2+b^2+y^2+2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)} \qquad (2)$$

ナルコトヲ證明スレバ十分デアル。トコロガ左邊 $=a^2+x^2+b^2+y^2+2(ab+xy)$ デアルカラ
$$(ab+xy)^2\leqq(a^2+x^2)(b^2+y^2) \qquad (3)$$

ヲ證明スレバ良イ，何トナレバ $ab+xy$ ガ負デアレバ (2) ハ勿論成立スルカラ，之ガ正ナル場合ニ (3) ガ證明サレレバ良イカラデアル。トコロガ $(a^2+x^2)(b^2+y^2)-(ab+xy)^2$ $=(bx-ay)^2$ デアルカラ $(a^2+x^2)(b^2+y^2)-(ab+xy)^2\leqq0$ トナル。サレバ (3) ガ成リ立ツ，從テ (2), 從テ (1) ガ成リ立ツ。

42. 無理方程式

(i) **一ツノ方程式** 次ノ方程式ノ解法ニ就イテ考究シヤウ。

例 1. $x-7=\sqrt{x-5}=0$……(1) ヲトケ

講義 (1) ハ根號ヲ含ムカラ，カヽル方程式ノ解法ハ未ダ知ラナイ譯ケデアル。ソコデ (1) ハ $x-7=\sqrt{x-5}$….(2) ト同値デアル (3頁參照)。トコロガ (2) ガ成リ立ツトキハ $(x-7)^2=x-5$….(3) ガ成立ツ，即チ (2) ヲ滿足スル根ハ (3) ノ根デアル。ケレドモ逆ニ **(3) ヲ滿足スル根ハ (2) ノ根デアルカ**ト云フト，然ラズ。何トナレバ (3) ハ $x-7-\sqrt{x-5}=0$ ト $x-7+\sqrt{x-5}=0$ ノ積デアルカラ，(2) ノ根ノミデナク，$x-7=-\sqrt{x-5}$ ナル方程式ノ根ガ存在スルカラデアル。

ゲニモ (3) ヲトクト $x=9$ ト 6 ガ得ラレルガ 6 ハ (2) ノ根デナク，9 ガ (2) ノ根デ，6 ハ $x-7=-\sqrt{x-5}$ ノ根デアル。

結局ハ無理方程式ト同値ノ有理方程式ハ一般ニ存在シナイカラ，止ムヲ得ズ，無理方程式ノ**根ヲ含ム**有理方程式ヲ作リテ其レヲ解キ，後デ無理方程式ノ根ダケ探スノデアル。一般ニ

解法 (i) 與ヘラレタル方程式中ノ根式ノ一ツノミヲ方程式ノ一方ノ邊ニ分離シ，適當ナル羃法ヲナシテ，其ノ根式ノ根號ヲ除キ，又……斯樣ニシテ全ク根號ヲ含マナイ，即チ有理化サレタル有理方程式ヲ求メルコト。

(ii) 之ヲ解クコト。(iii) 其ノ根ガ與ヘラレタル方程式ニ適スルヤ否ヤヲ吟味シテ，適セザルモノヲ省クコト。

注意 根式ハ主羃根ヲ表ハス，即チ**平方根ナラバ正數，立方根ナラバ根號內ガ正ナラバ立方根ハ正，負ナラバ負**ナルコトヲ忘レテハナラナイ。

例 1. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9$ ヲ解ケ

講義 與ヘラレタル方程式ニ於テ $\sqrt{x-4}$ ヲ分離シテ $\sqrt{x-4}=9-\sqrt{x+5}$….(1) トナシテ兩邊ヲ平方シテ $x-4=81-18\sqrt{x+5}+x+5$ トナル。コレヲ整頓シテ根式ノ一ツヲ分離スルト，

$-18\sqrt{x+5}=-90$ 即チ $\sqrt{x+5}=5$ トナル。又平方シテ $x+5=25$, 即チ $x=20$ トナル。

ソコデ $x=20$ ナルトキ與ヘラレタル方程式ノ
$$左邊 =\sqrt{20+5}+\sqrt{20-4}=5+4=9, \qquad 右邊 =9$$

トナルカラ求ムル根ハ 20 デアル。

注意 無理方程式ハ不能ノコトガアル，即チ根ヲ有シナイコトガアル，例ヘバ $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9$ ハ根ヲ有シナイ。何トナレバ上ノ例ニテ $x=20$ ハ $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}=9$ ノ根デアルカラデアル。

又 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$ (或ハ $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+E=0$) ナル形ノ方程式ヲ有

理化スルニ，最モ簡單ナル方法ハ $\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-\sqrt{D}$ (或ハ $\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-E$) トシテ兩邊ヲ平方スル。カクスルト二ツノ根式ヲ含ムコトニナリ，上ノ例ノ樣ニシテ又コレヲ有理化スルコトガ出來ル。

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $\sqrt{2x^2-6x+1}=x-2$, 答 $x=3$。

(2) $x\sqrt{x^2+12}+x\sqrt{x^2+6}=3$ 答 $x=\frac{1}{2}$.

例 2. $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{3x-1}$ ヲ解ケ。

講義 兩邊ヲ平方スルト，$x+2+\frac{1}{x}=3x-1$ トナル。何トナレバ $\sqrt{x}>0$ デアルカラ $x>0$ 卽チ $\sqrt{x}$ ノ虛數ヲ考ヘズトモヨシ，從テ分母ヲ拂ツテ整頓スルト，$2x^2-3x-1=0$ トナル。サレバ $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ トナル。ソシテ $\frac{3-\sqrt{17}}{4}<0$ デ，$\sqrt{x}$ ニ適シナイカラ捨テル，

ソコデ $x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ ナルトキハ左邊 $=\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{4}}+\sqrt{\frac{4}{3+\sqrt{17}}}$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}+\frac{2}{\sqrt{3+\sqrt{17}}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{4}+\frac{4}{3+\sqrt{17}}+2}=\frac{\sqrt{3\sqrt{17}+5}}{2},$$

右邊 $=\sqrt{3\times\frac{3+\sqrt{17}}{4}-1}=\frac{\sqrt{3\sqrt{17}+5}}{2}$ トナル。

(コヽデ $\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{4}}=\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$ ノ形ニ直サナイノハ右邊ノ結果ヨリ必要ヲ認メナカツタカラデアル。併シ右邊ガ一ツノ平方根ダケナルトキハ $\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{4}}$ ノ樣ナ形ノ根數ハ分離シタ方ガ宜シ)

サレバ求ムル根ハ $x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ デアル。

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $\sqrt{3x-1}-\sqrt{4x-5}+\sqrt{x-4}=0$ 答 $x=\frac{1}{3}$ 或ハ 4。

(2) $2x+2\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{\sqrt{1+x^2}}$ 答 $x=\frac{3}{4}$。

(3) $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}-\sqrt{7x-4}-\sqrt{4x-2}=0$

注意 最後ノ二ツノ根式ヲ右邊ニ移セ。 答 $x=1$。

(4) $\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}$ 答 不能

(5) $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x}$

注意 分母ヲ有理化スルモ一方デアルガ，却テ複雜ニナルカラ順當ニ分母ヲ拂フテ $x^2-x\sqrt{x^2-1}=x+\sqrt{x^2-1}$ 卽チ $x(x-1)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$ トナル。ソコデ兩邊ヲ平方シテ $x^2(x-1)^2=(x+1)^2(x^2-1)$ 卽チ $(x-1)[x^2(x-1)-(x+1)^3]=0$ 卽チ $(x-1)(4x^2+3x+1)=0$。サレバ $x=1$ 或ハ $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{8}$ トナル。ソコデ $x^2-1>0$ デナケレバナラナイガ $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{8}$ ヲ代入シテモ駄目デアルカラ，コレヲ捨テ，$x=1$ ハ採用出來テ與ヘラレタル方程式ノ根トナル。

(6) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}}=2x-5$

注意 分母ヲ有理化シテトケ，答 $x=3$ 或ハ 4。

例 3. $2x^2-14x+3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0$......(1) ヲ解ケ

講義 單ニ方程式ヲ有理化スルト複雜ナル式トナルカラ，コヽニ少々工夫スル，ソレニハ $x^2-7x=y$ トオクト，$2y+3\sqrt{y+10}+18=0$....(2) トナル。サレバ $3\sqrt{y+10}=-(18+2y)$ ノ兩邊ヲ平方シテ $9(y+10)=18^2+4y^2+72y$,

卽チ $4y^2+63y+231=0$, $y=-6$ 或ハ $-\frac{39}{4}$ トナル。

ソコデ $y=-6$ ノトキ 左邊 $=-12+3\sqrt{4}+18=0$, $y=-\frac{39}{4}$ ノトキ 左邊 $=-\frac{39}{2}+3\sqrt{\frac{1}{4}}+18=0$ トナル，サレバ $y=-6$, $-\frac{39}{4}$ ハ共ニ (2) ノ根デアル。ソコデ $x^2-7x=-6$....(3), $x^2-7x=-\frac{39}{4}$....(4) ヲトイテ，(3) ヨリ $x=1$ 或 7, (4) ヨリ $x=\frac{7\pm\sqrt{10}}{2}$ トナル。從テ求ムル根ハ $x=1, 7, \frac{7+\sqrt{10}}{2}$, 或ハ $\frac{7-\sqrt{10}}{2}$ デアル。

注意 無理方程式ハムヤミニ，元ノ方程式ニ根ヲ代入シテ調ベルトハ限ラナイ。要ハ平方シタルトキニ他ノ根ガ入リ込ムカラ其所ヲ調ベレバ宜シ。

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$.

注意 $3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9$ ト直スト，$\sqrt{3x^2+x}=\pm3$ トナル。

(2) $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}=2$.

注意 $x^2+\frac{1}{2}=y$ トオケ。 答 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(3) $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a$, $(a>0$ トス$)$。

注意 $\sqrt{(x-2a)(x-5a)}-\sqrt{(x-2a)(x+3a)}=x-2a$. ソコデ $P=x-2a$, $Q=x-5a$, $R=x+3a$ トオクト $\sqrt{PQ}-\sqrt{PR}=P$ トナル。ソコデ $\sqrt{PQ}=P+\sqrt{PR}$ ノ兩邊ヲ平方シテ $PQ=P^2+2P\sqrt{PR}+PR$ トナル，卽チ $P(Q-P-R-2\sqrt{PR})=0$, サレバ $P=0$ 或ハ $Q-P-R=2\sqrt{PR}$ 卽チ $(Q-P-R)^2=4PR$ トナシテ P, Q, R ニ原ノ値ヲ代入シテトケ。答 $x=2a$.

例 4. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ ヲ解ケ。

講義 コヽデ $\sqrt{x}>0$, $x-\sqrt{x}>0$, $x+\sqrt{x}>0$ ナル條件ハ勿論含マレテヰルカラ，與ヘラレタル方程式ハ分母ヲ拂ツテ $2\sqrt{x^2-x}-2x+2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$ 卽チ $\sqrt{x}〔2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}+2-3〕=0$ トナル。サレバ $\sqrt{x}=0\ldots.(1)$ 或ハ $2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}-1=0\ldots.(2)$ トナル。(2) ヨリ $2\sqrt{x-1}=2\sqrt{x}+1$ ヲ作リ，兩邊ヲ平方シテ $4(x-1)=4x+4\sqrt{x}+1$ 卽チ $4\sqrt{x}=-5$ トナル。トコロガ $\sqrt{x}>0$ デアルカラ之不合理トナリ (2) ハ成立シナイ。又 (1) ハ $\sqrt{x}>0$ ニ適シナイカラ之レ又採用出來ナイ。サレバ此ノ方程式ハ不能デアル。〔分數方程式ノ分母ハ常ニ 0 ナラズト規約シテヰル(27頁參照)〕

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$.

注意 分母ヲ拂フテ $\sqrt{x}=0$ 或ハ $\sqrt{x}=\dfrac{5}{4}$ ガ得ラレルガ前者ハ駄目後者ナルトキハ
左邊 $=\sqrt{\dfrac{25}{16}+\dfrac{5}{4}}+\sqrt{\dfrac{25}{16}-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}$. 右邊 $=\dfrac{5}{4}\Big/\sqrt{\dfrac{25}{16}-\dfrac{5}{4}}=\sqrt{5}$ トナル。
サレバ $x=\dfrac{25}{16}$ ハ求ムル根デアル。

(2) $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$.

注意 コノ場合ハ分母ヲ拂フコトガ出來ナイ。何トナレバ $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ ノ $\dfrac{x-1}{x}>0$ デアルカラ，$x-1<0$, $x<0$ カ或ハ，$x-1>0$, $x>0$ デアルカ何レトモ區別ガ出來ナイ，從テ若シ $x-1<0$, $x<0$ ナルトキニ $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ トスルト $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-1}$ ハ虛數トナルカラ，面倒ニナル。ソレヲサケテ兩邊ヲ平方スルト，$x+1-2\sqrt{x+1}+1=\dfrac{x-1}{x}$ トナル。コヽデ分母ヲ拂フテ $2x\sqrt{x+1}=1+x+x^2$ トナル。ソコデ平方シテ $4x^2(x+1)=(1+x+x^2)^2$ 卽チ $4x^2(x+1)=(1+x)^2+2x^2(1+x)+x^4$ 卽チ $x^4-2x^2(x+1)+(1+x)^2=0$ 卽チ $(x^2-x-1)^2=0$.

サレバ $x^2-x-1=0$ トナル，之ヲトイテ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ トナル。ソコデ $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ノトキハ 左邊 $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1}-1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

右邊 $=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ トナル，$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ノトキハ

左邊 $=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+1}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$,

右邊 $=\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{4}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ トナル，サレバ $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ハ求ムル根デアル。

例 5. $\sqrt[3]{62+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{6+\sqrt{x}}=2\ldots\ldots(1)$ ヲトケ。

講義 (1) ノ兩邊ヲ立方スルト，
$62+\sqrt{x}-3\sqrt[3]{(62+\sqrt{x})(6+\sqrt{x})}〔\sqrt[3]{62+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{6+\sqrt{x}}〕-(6+\sqrt{x})=8$ トナル，〔 〕內ニ (1) ヲ代入スルト $62+\sqrt{x}-3\sqrt[3]{(62+\sqrt{x})(6+\sqrt{x})}\times2-(6+\sqrt{x})=8$, 卽チ $\sqrt[3]{(62+\sqrt{x})(6+\sqrt{x})}=8$ トナル。ソコデ兩邊ヲ又立方スルト，$(62+\sqrt{x})(6+\sqrt{x})=8^3$, 卽チ $x+68\sqrt{x}-140=0$ 卽チ $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+70)=0$ トナル。トコロガ $\sqrt{x}>0$ デアルカラ，$\sqrt{x}+70>0$. サレバ $\sqrt{x}-2=0$, 故ニ $x=4$ トナル。之レ求ムル根デアル。

何トナレバ $A=B$ ノ兩邊ヲ立方スルコトハ $A-B=0$ ニ A^2+AB+B^2 ヲ乘ズルコトデ，A^2+AB+B^2 ハ，A, B ガ實數ニシテ何レカ一ツガ 0 ナラザル間ハ，$A^2+AB+B^2=\left(A+\dfrac{B}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}B^2$ トナリテ，正數デアルカラ 0 トナラナイ。從テ $A=B$ ト $A^3=B^3$ トハ同値デアル。トコロガ $\sqrt{x}>0$ デアルカラ $62+\sqrt{x}$, $6+\sqrt{x}$ ハ共ニ實數デアリ，其ノ立方根モ實數デアル，ソシテ 2 ハ 0 デナイカラデアル。

練習 次ノ方程式ヲトケ。

(1) $\sqrt[3]{7x-1}=x-1$. 答 $x=0, 4$ 或ハ -1.

(2) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$. 答 $x=1$.

(3) $\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2-1}}=6$.

注意 $1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2$, $1+\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ トナルカラ與式ハ，$\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=t$ トオクト，$t^2+t-6=0$ トナル。

(ii) 聯立方程式

例 1. 聯立方程式 $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$……(1),

$x+2y=17$……(2) ヲトケ。

講義 (2) ヨリ $x=17-2y$ トナルカラ，之ヲ (1) ニ代入スルト，$\sqrt{12-2y}+\sqrt{y+5}=\sqrt{17-2y}+\sqrt{y}$….(1)′ トナル。ソコデ兩邊ヲ平方シテ $y=4$ トナリ，從テ $x=9$ トナル。今 $y=4$ ヲ (1)′ ニ代入スルト，滿足スルカラ $x=9$, $y=4$ ハ求ムル根デアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $\sqrt{y}-\sqrt{20-x}=\sqrt{y-x}$, $3\sqrt{20-x}=2\sqrt{y-x}$.

注意 第二方程式ヲ平方シテ y ヲ求メテ第一ニ代入セヨ。$x=16$, $y=25$.

(2) $x+y=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-y^2}=\sqrt{3}$.

注意 $x+y=\sqrt{3}$ ヨリ $y=\sqrt{3}-x$ ヲ求メテ $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-y^2}=\sqrt{3}$ ニ代入セヨ。

答 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$; $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.

例 2. 聯立方程式 $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1$……(1),

$\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78$……(2) ヲトケ。

講義 (1) ノ兩邊ニ $\sqrt{xy}$ ヲカケルト $\sqrt{xy}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{xy}=61+\sqrt{xy}$ トナル。トコロガ $xy>0$ デアルカラ，x ト y トハ同符號デアル。サレバ實數ノ算法ニ從テ $\sqrt{\frac{x}{y}\times xy}+\sqrt{\frac{y}{x}\times xy}=61+\sqrt{xy}$, 即チ $\pm(x+y)=61+\sqrt{xy}$….(1)′ トナル，何トナレバ x, y ガ共ニ負ナラバ $\sqrt{x^2}=-x$, $\sqrt{y^2}=-y$ トナルカラデアル，又 (2) ハ $\sqrt[4]{xy.x^2}+\sqrt[4]{xy.y^2}=78$ 即チ $\sqrt[4]{xy}(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2})=78$… (2)′ トナル。ソコデ (2)′ ノ兩邊ヲ平方シテ $\sqrt{xy}[\pm(x+y)+2\sqrt[4]{x^2y^2}]=78^2$ 即チ $\sqrt{xy}[\pm(x+y)+2\sqrt{xy}]=78^2$… (2)″ トナル。

サテ $x+y=X$, $\sqrt{xy}=Y$ トオクト，(1)′ ハ $\pm X-Y=61$….(3); (2)″ ハ $Y(\pm X+2Y)=78^2$….(4) トナル。コヽニ ± ハ共ニ ＋，或ハ － ヲトルモノデアル。サレバ (3) ヨリ $\pm X=61+Y$ デアルカラ (4) ニ代入シテ $Y(61+3Y)=78^2$ 即チ $3Y^2+61Y-78^2=0$ トナル。從テ $Y=36$ 或 $-\frac{169}{3}$ トナルガ，$Y>0$ デアルカラ

$-\frac{169}{3}$ ヲ捨テ、$Y=36$ ノミ採用出來ル。從テ $\pm X=61+36=97$ トナル。サレバ $\pm(x+y)=97$….(5), $\sqrt{xy}=36$, 即チ $xy=36^2$….(6) トナル。

ソコデ (5) ヨリ $y=\pm 97-x$ ヲ (6) ニ代入シテ，$x(\pm 97-x)=36^2$ 即チ $x^2\mp 97x+36^2=0$ トナル。從テ上號ヲトレバ $x=16$ 或ハ 81 下號ヲトレバ $x=-16$ 或ハ -81 トナリ，$y=81, 16$, 或ハ $-81, -16$ トナル，ソシテ之レ等ノ値ヲ (1), (2) ニ代入スレバ滿足スルカラ求ムル根ハ $x=16$, $y=81$; $x=81$, $y=16$; $x=-16$, $y=-81$; $x=-81$, $y=-16$ トナル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $7\sqrt{3x+y}-3\sqrt{8x+3y}=6$, $5\sqrt{3x+y}+2\sqrt{8x+3y}=25$.

注意 $\sqrt{3x+y}=X$, $\sqrt{8x+3y}=Y$ トオイテトケ。答 $x=2$, $y=3$.

(2) $x^2+xy+y^2=133$, $x+\sqrt{xy}+y=19$.

注意 $x^2+xy+y^2\equiv(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$ ナルコトヨリ結局 $x+\sqrt{xy}+y=19$ ト $x-\sqrt{xy}+y=7$ トヲトク問題トナル。答 $x=4$, $y=9$; $x=9$, $y=4$.

第 七 章

聯立高次方程式ノ解法

XVI. 二元聯立方程式

43. 聯立二次方程式

(i) 一次ト二次トノ聯立方程式

例 1. 聯立方程式

$3x+2y+1=0\ldots\ldots(1)$, $x^2+2xy+y^2-x+y+3=0\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 (1) ヨリ $y=-\dfrac{3x+1}{2}\ldots.(1)'$ ヲ求メテ之ヲ (2) ニ代入スルト, x ノミノ方程式 $x^2-8x+11=0\ldots.(3)$ トナル。卽チ (1), (2) ト (1)', (3) トハ同値ノ方程式デアル (30頁)。ソコデ (3) ヲトイテ $x=4+\sqrt{5}$ 或ハ $4-\sqrt{5}$ トナル。之ヲ (1)' ニ代入シテ $y=-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$, 或ハ $-\dfrac{13}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ ガ得ラレル。サレバ求ムル根ハ $x=4+\sqrt{5}$, $y=-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$; $x=4-\sqrt{5}$, $y=-\dfrac{13}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ ノ二組デアル。一般ニ

一次ト二次トノ聯立方程式ヲ解クニハ一次方程式ニヨリ一ツノ未知數ヲ他ノ一ツデ表ハシテ, 之ヲ二次ノ方程式ニ代入シテ一元二次方程式ヲ導ク樣ニ努ムルノデアル.

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $8x-y=3$, $x^2+4xy-5y^2+12x+92=0$

答 $x=1$, $y=5$; $x=-\dfrac{47}{287}$, $y=-\dfrac{1237}{287}$

(2) $y^2-x^2+2x+2y+4=0$, $y-mx=0$

答 $m^2-1\neq0$ ノトキ $x=\dfrac{-(m+1)\pm\sqrt{(5-3m)(1+m)}}{m^2-1}$,

$y=\dfrac{-m(m+1)\pm m\sqrt{(5-3m)(1+m)}}{m^2-1}$

$m=1$ ノトキ $x=y=-1$; $m=-1$ ノトキ不能。

(3) $x^2-xy-2y^2+y=0$, $(x-2y)(x+y-3)=0$

注意 方程式ハ $x^2-xy-2y^2+y=0$, $x-2y=0$; $x^2-xy-2y^2+y=0$, $x+y-3=0$ ノ二組ト同値デアル。

(4) $ax+by=1$, $cx^2+dy^2=1$ ガ唯一組ノ解ヲ有スルナラバ $\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{d}=1$ ナルコトヲ示シ, 其ノトキノ解ハ $x=\dfrac{a}{c}$, $y=\dfrac{b}{d}$ ナリ。

(ii) 方程式ガ一次ノ項ヲ含マザルトキ

例 2. 聯立方程式

$3x^2+4xy-y^2=14\ldots\ldots(1)$, $2x^2+5xy+6y^2=9\ldots\ldots(2)$ ヲ解ケ。

講義 $(1)\times9-(2)\times14$ ヲ作ルト $x^2+34xy+93y^2=0\ldots.(3)$ トナル。サレバ (1), (2) ト (2), (3) ガ同値デアル (30頁參照)。トコロガ (3) ハ $x=-3y$ 或ハ $x=-31y$ トナルカラ。(3) ト (2) ノ聯立方程式ハ

$x=-3y\ldots.(4)$, $2x^2+5xy+6y^2=9\ldots.(2)$; ト $x=-31y\ldots(5)$, $2x^2+5xy+6y^2=9\ldots.(2)$

ノ二組ト同値デアル (35頁參照)。ソコデ (4) ト (2) ヨリ $x=\pm3$, $y=\mp1$ ガ得ラル, (5) ト (2) ヨリ $x=\pm\dfrac{31}{\sqrt{197}}$, $y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{197}}$ トナル。サレバ求ムル解ハ次ノ四組デアル

$x=3$, $y=-1$; $x=-3$, $y=+1$; $x=\dfrac{31}{\sqrt{197}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{197}}$; $x=-\dfrac{31}{\sqrt{197}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{197}}$.

一般ニ $ax^2+bxy+cy^2=k$, $a'x^2+b'xy+c'y^2=k'$ ナル聯立方程式デハ第一方程式ニ k' ヲ第二方程式ニ k ヲカケテ邊々減ジテ $(ak'-a'k)x^2+(bk'-b'k)xy+(ck'-c'k)y^2=0$ ナル方程式ヲ作リテコレヨリ $\dfrac{x}{y}=m_1$, $\dfrac{x}{y}=m_2$ ナル比ヲ求メテ, 之ヲ第一或ハ第二方程式ト組合セテ求ムル解ガ得ラレル。

別法 例 4. (130頁)ノ別法ノ樣ニシテトクコトガ出來ル。

練習 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

(1) $x^2+xy=12$, $xy-2y^2=1$.

注意 第一式ヨリ $y=\dfrac{12-x^2}{x}$ ヲ求メテ第二式ニ代入シテトイテモ良イ。

答 $x=3$, $y=1$; $x=-3$, $y=-1$; $x=4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $x=-4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

(2)　$6x^2-xy-2y^2=56,\ 5x^2-xy-y^2=46.$

注意　第一ト第二式ノ間ニテ y^2 ヲ加減法ニテ消出シテ y ヲ x デ表ハシ，第一或ハ第二式デモヨロシイ，何レカニ入レルト，x ノ複二次方程式ガ得ラル。カク解クモ一法デアル。答 $x=\pm3\sqrt{35}/10,\ y=\pm\sqrt{35}/5$；$x=\pm2\sqrt{21}/3,\ y=\mp\sqrt{21}/3$ コヽニ $\pm$ 又ハ $\mp$ ハ上號ヲトレバスベテ上號，下號ハスベテ下號ヲトル。

(3)　$\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5},\ y^2-2x^2=2.$

答　$x=\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{-\dfrac{2}{7}},\ y=\pm\sqrt{-\dfrac{2}{7}}$；$x=\mp\dfrac{3}{2}\sqrt{-\dfrac{2}{7}},\ y=\pm\sqrt{-\dfrac{2}{7}}.$

(4)　$x^2+xy=a,\ y^2+xy=b.$

答　$a+b\neq0$ ノトキ $x=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}$；$x=-\dfrac{a}{\sqrt{a+b}},\ y=-\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}.$
$a+b=0$ ナルトキ，a, b ガ共ニ 0 ナラザレバ不能，$a=b=0$ ナレバ不定，即チ $x+y=0$ ノミノ方程式トナル。

(iii)　平方ノ項ガ全クナキ場合　即チ $2hxy+2gx+2fy+c=0$...(1), $2h'xy+2g'x+2f'y+c'=0$......(2) ヲトクトキハ先ヅ $(1)\times h'-(2)\times h$ ヲ作リテ $2(gh'-g'h)x+2(fh'-f'h)y+ch'-c'h=0$......(3) ノ様ニ xy ヲ消去スル。カクシテ (1) ト (2) ハ (2) ト (3) ト同値ニナル (30頁參照)。從テ例 1. ト全ク同樣ナル解法ニ導カレルノデアル。

(iv)　對稱ノ場合　第一種

例 3.　聯立方程式　$x^2+y^2-2xy+3(x+y)-2=0$......(1),
$2(x^2+y^2)-2xy-2(x+y)+15=0$......(2) ヲトケ。

講義　對稱式ノ性質 (77頁) ヲ繰返シ考究スレバ x, y ニ付テノ對稱式ハ最簡ノ對稱式 $x+y$ ト xy デ表ハサレル。サレバ $x+y=u,\ xy=v$ トスルト，(1) ト (2) ハ
$u^2+3u-2-4v=0$..(1)′, $2u^2-2u+15-6v=0$..(2)′ トナル。サレバ v ヲ消去スルト，
$3(u^2+3u-2)=2(2u^2-2u+15)$ 即チ $u^2-13u+36=0$. ヲトイテ $u=4$, 或ハ 9 トナルカラ (1)′ ヨリ $v=\dfrac{13}{2}$. 或ハ $\dfrac{53}{2}$ トナル。從テ $x+y=4$....(3), $xy=\dfrac{13}{2}$....(4); $x+y=9$....(5), $xy=\dfrac{53}{2}$....(6) ノ二組ヲトクコトニナル。トコロガ根ト係數ノ性質 (83頁) ヲ利用スルト

(3) ト (4) ノ根ハ $t^2-4t+\dfrac{13}{2}=0$ ノ根デアル，即チ $t=\dfrac{4+\sqrt{-10}}{2}$ 或ハ $\dfrac{4-\sqrt{-10}}{2}$ トナルカラ (3) ト (4) ノ解ハ $x=\dfrac{4+\sqrt{-10}}{2},\ y=\dfrac{4-\sqrt{-10}}{2}$；$x=\dfrac{4-\sqrt{-10}}{2}$, $y=\dfrac{4+\sqrt{-10}}{2}$ トナル。同樣ニシテ (5) ト (6) ノ解ハ $x=\dfrac{9+5\sqrt{-1}}{2},\ y=\dfrac{9-5\sqrt{-1}}{2}$；$x=\dfrac{9-5\sqrt{-1}}{2},\ y=\dfrac{9+5\sqrt{-1}}{2}$ トナル。

一般ニ對稱方程式ニ於テハ $x+y=u,\ xy=v$ トオイテ u, v ニ付テノ聯立方程式ニ變換シテ u, v ノ値ヲ求メ，根ト係數ト性質ニヨリテ $t^2-ut+v=0$ ナル方程式ヲトイテ $t=t_1$ 或ハ t_2 ヲ求メ，$x=t_1,\ y=t_2$；$x=t_2$；$y=t_1$ ナル解ガ得ラレル。

別法　例 4 (130頁) ノ別法ノ樣ニシテモ求メラレル。

練習　次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1)　$2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0,\ x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0$

答　$x, y=2\pm\sqrt{41},\ 2\mp\sqrt{41}$；$(-1\pm2\sqrt{3})/3,\ (-1\mp2\sqrt{3})/3.$

(2)　$(x-1)(x+2y+1)=(y-1)(y+2x+1),\ x^2+y^2=x+y+4$

注意　第一方程式ノ括弧ヲホドイテ，$x+y=u,\ xy=v$ トオケ。

答　$x=y=-1,\ x=y=2.$

第二種

例 4.　$ax^2+bxy=y$......(1), $ay^2+bxy=x$......(2) ヲトケ。コヽニ $a, b\neq0$ トス。

講義　例 3 ニ於テハ x ト y トヲ交換シテモ一ツノ方程式ガ不變デアルガ，今度ハ (1) ト (2) トヲ組ミ合セルト，不變デアル。依テ**第一種ト第二種ト區別スル所以**デアル。
サテ (1)−(2) ヲ作ルト，$a(x^2-y^2)=y-x$ 即チ $(y-x)[-a(x+y)-1]=0$....(3) トナル。從テ $y-x=0$....(3)′ 或ハ $a(x+y)+1=0$....(3)″ トナル。又 (1)+(2) ヲ作ルト，$a(x^2+y^2)+2bxy=x+y$....(4) ガ得ラレル。サレバ (1), (2) ト (3), (4) ハ同値デアル(31頁參照)，又ハ (1), (2) ト (3), (2) トモ同値デアル(30頁參照)。サレバ (1), (2) ハ
$ay^2+bxy=x$..(2), $y-x=0$..(3)′；$a(x^2+y^2)+2bxy=x+y$..(4) $a(x+y)+1=0$..(3)″；

ノ二組ト同値デアル。ソコデ (2) ト (3)′ ヲトイテ $a+b\neq 0$ ノトキハ $x=y=\dfrac{1}{a+b}$ トナル，又 (4) ト (3)″ ヲトクニ，例 3 ニ從テ xy ヲ求ムルニハ，(4) ヲ $a(x+y)^2-(x+y)=2(a-b)xy$ ニ直スト，$a-b\neq 0$ ナルトキ $xy=\dfrac{1}{a(a-b)}\ldots\ldots(4)'$ トナル，サレバ (3)″ ト (4)′ ヨリ $x=\dfrac{b-a\pm\sqrt{(b-a)(3a+b)}}{2a(a-b)}$，$y=\dfrac{b-a\mp\sqrt{(b-a)(3a+b)}}{2a(a-b)}$ ガ得ラレル。

結局 $a+b\neq 0$，$a-b\neq 0$ ノトキハ $x=y=\dfrac{1}{a+b}$；
$x=\dfrac{b-a\pm\sqrt{(b-a)(3a+b)}}{2a(a-b)}$，$y=\dfrac{b-a\mp\sqrt{(b-a)(3a+b)}}{2a(a-b)}$ ガ解デアル。

次ニ $a+b=0$ ナラバ (2) ヨリ $x=0$ トナル，從テ $x=y=0$ トナル。又 $a-b=0$ ナラバ唯ダ (4) ハ恒等式デ，(3)″ ノミノ方程式トナルカラ不定デ，$x+y=\dfrac{1}{a}$ トナル。

別法 又ハ (1), (2) ハ $x=y=0$ ナル解ヲ有スルコトハ常數項ノ缺ケタルコトヨリ直ニ知ラルヽコトデアル。ソコデ $x\neq 0$ トシテ $y=mx$ トオクト，(1), (2) ハソレゾレ $(a+bm)x=m\ldots\ldots(1)'$，$(am^2+bm)x=1\ldots\ldots(2)'$ トナル。今 $a+bm\neq 0$ トスルト (1)′ ヨリ $x=\dfrac{m}{a+bm}$ トナルカラ (2)′ ニ代入シテ $(am^2+bm)m=a+bm$ ガ得ラレル，卽チ $(m-1)[am^2+(a+b)m+a]=0$ トナル。之ヲトイテ $m=1$ 或ハ $\dfrac{-(a+b)\pm\sqrt{(b+3a)(b-a)}}{2a}$ トナル。之レラ (1)′ ニ代入シテ $a+b\neq 0$ ノトキ $x=\dfrac{1}{a+b}$，$a-b\neq 0$ ナルトキ $x=\dfrac{b-a\pm\sqrt{(b-a)(3a+b)}}{2a(a-b)}$ ヲ誘導スルコトガ出來テ，從テ y ハ $y=mx$ ヨリ $y=\dfrac{1}{a+b}$；$\dfrac{b-a\mp\sqrt{(b-a)(3a+b)}}{2a(a-b)}$ ガ得ラレル，尤モ計算ハ複雜デ分母ヲ有理化シテ求ムルノデアル。

注意 コノ解法ノ理由ハ後ニ詳シク述ベル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $x+2y=x^2$, $2x+y=y^2$.

答 $x=y=0$；$x=y=3$；$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$，$y=\dfrac{-1\mp\sqrt{-7}}{2}$

(2) $x^3=7x+3y$, $y^3=7y+3x$.

答 0, 0；2, −2；−2, 2；$\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{10}$；$(1\pm\sqrt{13})/2$, $(1\mp\sqrt{13})/2$；$(-1\pm\sqrt{13})/2$, $(-1\mp\sqrt{13})/2$.

(v) 常數項ノナキ場合

例 5. $x^2+xy+y^2=p(x+y)\ldots\ldots(1)$，$x^2-xy+y^2=q(x-y)\ldots\ldots(2)$ ヲ

トケ。

講義 先ヅコノ場合ノ特性デアル，$x=0$, $y=0$ ノ根ヲ除イテ $y=mx$ トオクト，(1), (2) ハソレゾレ

$x(1+m+m^2)=p(1+m)\ldots\ldots(1)'$，$x(1-m+m^2)=q(1-m)\ldots\ldots(2)'$ トナル。ソコデ $1+m+m^2\neq 0$ トスレバ (1)′ ヨリ $x=\dfrac{p(1+m)}{1+m+m^2}$ トナル，之ヲ (2)′ ニ代入シテ分母ヲ拂フテ $q(1-m^3)=p(1+m^3)$ 卽チ $(p+q)m^3=q-p$ トナル。今 $p+q\neq 0$ トシ $m^3=1$ ノ根ヲ $1, \omega, \omega^2$ トスルト，$m=\sqrt[3]{\dfrac{q-p}{p+q}}$，$\omega\sqrt[3]{\dfrac{q-p}{p+q}}$，$\omega^2\sqrt[3]{\dfrac{q-p}{p+q}}$ トナル。トコロガ (1)′ ヨリ $x=\dfrac{p(1+m)}{1+m+m^2}=\dfrac{p(1-m^2)}{1-m^3}$ トナル，又 $y=\dfrac{pm(1-m^2)}{1-m^3}$ トナルカラ $p\neq 0$ ナルトキハ ($p=0$ ナラバ $1+m+m^2=0$ トナルカラ) $x, y=\dfrac{p+q}{2}\left[1-\left(\dfrac{q-p}{p+q}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$，$\dfrac{p-q}{2}\left[1-\left(\dfrac{p+q}{q-p}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$；$\dfrac{p+q}{2}\left[1-\omega\left(\dfrac{q-p}{p+q}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$，$\dfrac{p-q}{2}\left[1-\omega^2\left(\dfrac{p+q}{q-p}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$；$\dfrac{p+q}{2}\left[1-\omega^2\left(\dfrac{q-p}{p+q}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$，$\dfrac{p-q}{2}\left[1-\omega\left(\dfrac{p+q}{q-p}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$ トナル。

次ニ $p+q=0$ ナルトキハ $q-p=0$ 卽チ $p=q=0$ ナルトキハ (1), (2) ハ $x^2+xy+y^2=0$，$x^2-xy+y^2=0$ トナルカラ $x\neq 0$, $y\neq 0$ ナルトキハ 能デアル。又 $q-p\neq 0$ ナラバ之又不能デアル。最後ニ $p=0$ ナラバ $m=1, \omega, \omega^2$ トナリ，(1)′ ハ當然成リ立ツ，(2)′ ヨリ $x=0$, $\dfrac{q(1-\omega^2)}{2}$, $\dfrac{q(1-\omega)}{2}$ トナル，コハ $x\neq 0$ ノ假定ニ反スルカラ不能デアル。

一般ニ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0$,
$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y=0$ ニ於テ $x=0$, $y=0$ ノ他ノ根ヲ求ムルニハ $y=mx$ トオイテ $x(a+2hm+bm^2)+2(g+fm)=0$,
$x(a'+2h'm+b'm^2)+2(g'+f'm)=0$ ヲ導キ，x ヲ消去シテ m ノ値ヲ求メ，カクシテ x, y ノ値ヲ求ムルコトガ出來ル。

此レト同樣ニ $2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$,
$2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ ノ樣ニ二次ノ項ノ x^2 又ハ y^2 ノ項ノナキ合場ニハ x 又ハ y (y^2 ノ項ノナキ場合) ヲ y 又ハ x ニテ表ハシ他ノ式ニ代入シテ x 又ハ y ヲ消去シテ解クコトガ出來ル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1)　$x^2+3xy+y^2=x+y,\ 3x^2-5xy-2y^2=4x-2y.$

答　$x,\ y=0,\ 0;\ \dfrac{19\mp\sqrt{31}}{11},\ \dfrac{-29\pm5\sqrt{31}}{11}.$

(2)　$3x^2-2xy+3y^2=x+12y,\ 6x^2+3xy-2y^2=2x+29y.$

答　$x, y=0,\ 0;\ \dfrac{1}{3},\ 0;\ 3,\ 2;\ \dfrac{185}{227},\ \dfrac{20}{227}.$

(vi)　一般ノ場合

例 6.　$x^2+6xy+2y^2+8x-12y+13=0\ldots\ldots(1),$

$x^2+4xy+y^2+10x-16y+18=0\ldots\ldots(2),$ ヲトケ。

講義　先ヅ (2) ニ適當ナル係數ヲカケテ (1) ニ加ヘテ得ラルヽ方程式ガ因數ニ分解セラルヽ條件ノ下ニ係數ヲ求メヤウトスルノデアル。ソコデ (2)×m+(1) ヲ作ルト，

$$(1+m)x^2+2(3+2m)xy+(2+m)y^2+2(4+5m)x-2(6+8m)y+(13+18m)=0 \qquad (3)$$

トナル，コレガ因數ニ分解セラルヽニハ y ニ付テトイタ根ガ x ノ整式デナケレバナラナイ，其レガタメニハ y ノ根ノ根號內ガ完全平方デナケレバナラナイコトカラ

$$(1+m)(6+8m)^2+(2+m)(4+5m)+(13+18m)(3+2m)^2-(1+m)(2+m)(13+18m)$$
$$+2(6+8m)(4+5m)(3+2m)=0$$

トナル。卽チコレヲ整頓スルト $101m^3+313m^2+313m+101=0$ トナル，ソシテ $m=-1$ ナルコトハ推定出來ル。サレバ $m=-1$ トオクト (3) ハ $2xy+y^2-2x+4y-5=0$ 卽チ $(y-1)(2x+y+5)=0\ldots.(3)'$ トナル。卽チ (1),(2) ト (2), (3)′ ハ同値デアル。サレバ (2) ト (3)′ ヲトイテ $x=-7\pm\sqrt{46},\ y=1;\ x=7\pm3\sqrt{10},\ y=-19\mp6\sqrt{10}$ ノ四組ノ解ガ得ラル。

一般ニ聯立二次方程式 $F(x\ y,)=0,\ F'(x, y)=0$ ヲトクニハ $F(x,y)+mF'(x,y)=0$ ヲ作リコレガ一次式ニ分解出來ルタメノ條件ノ下ニ m ノ値ヲ定メテ，其ノ値ノ下ニテ因數ニ分解シテ一次ト二次ノ聯立方程式ヲトクコトニ努ムルノデアル。

然シ又次ノ例ノ樣ニシテ解クコトガ出來ル。

例 7.　$3x^2+y^2+4x-3=0\ldots\ldots(1),\ x^2+4xy-y^2+4x+5=0\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義　(1) ト (2) ヲ y ニ付テ整頓シ，$y^2+3x^2+4x-3=0\ldots.(1)',$

$y^2-4xy-(x^2+4x+5)=0\ldots.(2)'$ ヨリ y ヲ消去スルト(45頁參照)，卽チ

$$+4x[-4x(3x^2+4x-3)]=[3x^2+4x-3+(x^2+4x+5)]^2$$

卽チ　$4x^2(3x^2+4x-3)+(2x^2+4x+1)^2=0$，卽チ $16x^4+32x^3+8x^2+8x+1=0,$

卽チ　$(4x^2+1)^2+8x(4x^2+1)=0$，卽チ $(4x^2+1)(4x^2+8x+1)=0$ トナルカラ，コレヲトイテ $x=\pm\dfrac{i}{2}$ 或ハ $\dfrac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$ トナル，コレ等ノ値ヲ (1)′−(2)′ ニ代入シテ $y=\dfrac{-4\pm i}{3}$，$\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ ガ得ラレ，結局求ムル解ハ

$$x,\ y=\frac{i}{2},\ \frac{-4+i}{4};\ -\frac{i}{2},\ \frac{-4-i}{2};\ \frac{-2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{2+\sqrt{3}}{2};\ \frac{-2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$ トナル。

注意　y ノ値ヲ求ムル場合ニ (1)′−(2)′ ニ代入シテ求ムル所以ヲ說明スルト，(1)′ ト (2)′ ニテ y ヲ消去スルニハ (1)′−(2)′ ヲ作リテ $4xy+4x^2+8x+2=0$ ガ得ラレコレヨリ y ノ値ヲ求メテ (1)′ ニ代入シタニ過ギナイカラ，x ノ値ガ決定スレバ y ハ (1)′−(2)′ ヨリ求メナケレバナラナイ。

一般ニ聯立二次方程式ヲ $Ay^2+By+C=0\ldots\ldots(1),$ $A'y^2+B'y+C'=0\ldots\ldots(2)$ ニ直シテ (A, B, C, A′, B′, C′ ハ x ヲ含ム) $(1)\times A'-(2)\times A$ ヲ作リ $(A'B-AB')y+(A'C-AC')=0\ldots\ldots(3)$，又 $(1)\times C'-(2)\times C$ ヲ作リ $-(A'C-AC')y^2-(B'C-BC')y=0$ ガ得ラレ，$y\neq0$ デアルカラ $(A'C-AC')y+(B'C-BC')=0\ldots\ldots(4)$ トナル。ソコデ (3) ト (4) ノ間ニテ y ヲ消去シテ $(A'C-AC')^2-(A'B-AB')(B'C-BC')=0$ ガ得ラレル，之ハ x ニ付テ一般ニ四次方程式ニシテ，コレガトケレバ (3) ニ x ノ値ヲ代入シテ y ノ值ヲ求ムルコトヲ得ラルヽノデアル。

44.　一般ノ對稱方程式

聯立二次方程式ノ場合ニ付テハ既ニ前節ニ於テ述ベテキル(128頁)。併シコヽデハ一般ノ形ノ聯立方程式ニ付テ述ベルガ，二次ノ場合ニ於ケルト同樣ナル解法ニヨルヨリ以外ニ方法ハナイ。サレバ本節デハ其ノ解法ノ原理ヲ明ラカニ

シテ例題ノ二三ヲ附加シ度イノデアル。

サテ**對稱方程式ト云フノハ x ト y トヲ交換スルモ不變ノ方程式デアル**，例ヘバ $x+y=a, x^2+y^2=b$; $x^3+y=a$, $y^3+x=a$ ノ樣ナル形ノモチ主デアル。從テコヽニ $x=\alpha_1$, $y=\beta_1$ ト云フ根ガアルト，今ノ定義ニヨリ又 $x=\beta_1$, $y=\alpha_1$ ヲ根トスル，例ヘバ上ノ例デハ $\alpha_1+\beta_1\equiv a$, $\alpha_1^2+\beta_1^2\equiv b$; $\alpha_1^3+\beta_1\equiv a$, $\beta_1^3+\alpha_1\equiv a$ ト云フ恒等式ガ成リ立ツテ α_1 ト β_1 ノ位置ヲ交換シテモ不變デアルカラデアル。又 $x=\alpha_2$, $y=\beta_2$ ナル根ガアルト，必ヅヤ $x=\beta_2$, $y=\alpha_2$ ナル根ガ存在スルノデアル。從テ $\frac{y}{x}$ ノ値ヲ求ムルト，$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}; \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots\ldots$ ト云フ樣ニ，$\frac{y}{x}=m$ トスルト，必ヅヤ $\frac{1}{m}$ ヲ根トスルモノガ存在スル(勿論 $m=1$ ナラバ一ツシカ存在シナイ)。

サレバ $y=mx$ トオイテ x, y ヲ消去シテ m ノミノ方程式ヲ作ルト，其ハ m ノ逆數方程式デナケレバナラナイコトニナル。コノ逆數方程式ハスデニ解法ヲ知ツテキル(105頁)，サレバ對稱方程式ナラバ $y=mx$ トオイテ必ヅ解キ得ラルヽト斷言出來ル所以デアル。

次ニ他ノ解法ハ對稱式ハ最簡ナル對稱式ヨリ組立ラレ，併カモ有理式ナラバ有理算法デ出來ル(77頁)コトニ根柢ヲオイテ $x+y=u$, $xy=v$ ニ付テノ方程式ニ變換シテ u, v ノ方程式ガ解キ得ラルヽトキハ根ト係數ノ性質(83頁)ヲ利用シテ $t^2-ut+v=0$ ヲ解イテ最後ノ x, y ノ解ガ得ラルヽノデアル，

コノ解法ハ**第一種ノ對稱方程式ノトキノミニ限ル**。

第一種

例 1. $x+y=6\ldots\ldots(1)$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 先ヅ (2) ノ左邊ハ $(x^2+y^2)(x^3+y^3)\equiv[(x+y)^2-2xy][(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}]$ トナル。サレバ $x+y=u=6$, $xy=v$ トオクト，(2) ハ $(36-2v)6(36-3v)=0$ 卽チ $v^2-30v+176=0$ トナル。サレバ $v=8$ 或ハ 22 トナル。從テ (1), (2) ハ $x+y=6\ldots.(1)$; $xy=8\ldots.(3)$; $x+y=6\ldots.(1)$, $xy=22\ldots.(4)$ ノ二組ト同樣トナル。サレバ (1) ト (3) ヨリ $x=2$, $y=$; $x=4$, $y=2$ ガ得ラレ，(1) ト (4) ヨリ $x=3+\sqrt{-13}$, $y=3-\sqrt{-13}$; $x=3-\sqrt{-13}$, $y=3+\sqrt{-13}$ ヲ得。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $x^2y+xy^2=30$, $6(x+y)=5xy$.

注意 $x+y=u$, $xy=v$ トスルト，$vu=30$, $6u=5v$ トナル。

答 $x, y=2, 3;\ 3, 2;\ 1, -6;\ -6, 1$.

(2) $5(x+y)+xy=71$, $x^2+y^2=58$.

答 $x, y=7, 3;\ 3, 7;\ -10+\sqrt{-71}, -10-\sqrt{-71};\ -10-\sqrt{-71}, -10+\sqrt{-71}$.

(3) $xy=a-b$, $x^4+y^4=2a^2+2b^2+12ab$.

注意 $x^4+y^4=A(x+y)^4+Bxy(x+y)^2+Cx^2y^2$ ノ形デアルコトハ對稱式 (78頁)ヨリ知ラル，ソコデ未定係數 A, B, C ヲ定メルト，ソレゾレ 1, −4, 2 トナル。サレバ $x+y=u$ トオクト，(2) ハ $x^4+y^4=u^4-4(a-b)u^2+2(a-b)^2=2a^2+12\,b+2b^2$ 卽チ $u^4-4(a-b)u^2-16ab=0$ トナル。

サレバ $u^2=4a$ 或ハ $-4b$ トナル。答 $x, y=\sqrt{a}+\sqrt{b}, \sqrt{a}-\sqrt{b};\ -\sqrt{a}+\sqrt{b}, -\sqrt{a}-\sqrt{b};\ \sqrt{-b}+\sqrt{-a}, \sqrt{-b}-\sqrt{-a};\ -\sqrt{-b}+\sqrt{-a}, -\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$.

(4) $x+y=a$, $x^5+y^5=l^5$.

注意 $x^5+y^5=A(x+y)^5+B(x+y)^3xy+Cx^2y^2(x+y)$ トオクト，A=1, B=−5, C=5 トナルカラ $xy=v$ トオケバ $x^5+y^5=a^5-5a^3v+5v^2a=b^5$ トナル。從テ

$v=\frac{5a^3\pm\sqrt{5a^6+20ab^5}}{10a}$ トナルカラ x, y ハ $t^2-at+\frac{5a^3\pm\sqrt{5a^6+20ab^5}}{10a}=0$ ノ根トナル。

例 2. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=a\ldots\ldots(1)$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=b\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 先ヅ $x, y\neq 0$ デアル。ソコデ分母ヲ拂ツテ (1), (2) ハソレゾレ

$x^3+y^3=axy\ldots.(1)'$, $x+y=bxy\ldots.(2)'$ トナル。今 $x+y=u$, $xy=v$ トオクト，$(1)'$ ハ $u^3-3uv=av\ldots.(1)''$, $u=bv\ldots.(2)''$ トナル。

サレバ $(2)''$ ヲ $(1)''$ ニ代入シテ $b^3v^3-3bv^2-av=0$ 卽チ $v(b^3v^2-3bv-a)=0$ トナル。從テ $v=0$ 或ハ $b^3v^2-3bv-a=0$ トナル。トコロガ x, y ハ共ニ 0 デナイカラ $v\neq 0$ デアル。從テ $v=0$ ヲステ $b^2v^2-3bv-a=0$. サレバ $v=\dfrac{3b\pm b\sqrt{9+4ab}}{b^3}$ トナル，コヽニ $b\neq 0$ トスル。從テ $u=\dfrac{3b\pm\sqrt{9+4ab}}{2b}$ トナル。サレバ x, y ハ

$t^2-\dfrac{3\pm\sqrt{4ab+9}}{2b}t+\dfrac{3\pm\sqrt{4ab+9}}{2b^2}=0$ ノ根デアル，コヽニ $\pm$ ハ上號ハ上號ヲトリ，下號ハ下號ヲトルモノデアル。サレバ四組ノ根ガ得ラレル。$b=0$ ナラバ $a\neq 0$ ナルトキ不能ニシテ $a=0$ ナラバ $x+y=0$ ノミノ方程式トナリテ不定トナル。

練習 $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a-y}=\dfrac{1}{a-b}$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{c}$ ヲトケ。

例 3. 聯立方程式 $x^2+xy+y^2=133\ldots\ldots(1)$, $x+\sqrt{xy}+y=19\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 $x+y=u$, $\sqrt{xy}=v>0$ トオクト，(1), (2) ハソレゾレ $u^2-v^2=133\ldots.(1)'$, $u+v=19\ldots.(2)'$ トナル。從テ $(1)'$ ニ $(2)'$ ヲ代入シテ $u-v=7\ldots.(1)''$ トナル。サレバ $(1)''+(2)'$ ヲ作リテ $2u=26$ 卽チ $u=13$. 又 $(2)'-(1)''$ ヲ作ルト，$2v=12$, 卽チ $v=6>0$ トナル。サレバ $x+y=13$, $xy=36$ トナル。從テ x, y ハ $t^2-13t+36=0$ ノ根デアル。從テ $t=4$ 或ハ 9 トナル。サレバ求ムル解ハ $x=4, y=9$; $x=9, y=4$ デアル。

例 4. 聯立方程式 $x+y=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-y^2}=\sqrt{3}$ ヲトケ。

講義 $x+y=\sqrt{3}\ldots.(1)$, $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-y^2}=\sqrt{3}\ldots(2)$ トオクト，(1), (2) ハ對稱方程式デアル。トコロガ $x+y=\sqrt{3}$, $xy=v$ トオイテ (2) ニ代入シヤウトシテモコノマヽデハ出來ナイカラ，コノ場合ハ寧ロ (1) ヨリ $y=\sqrt{3}-x$ ヲ求メテ (2) ニ代入スルト，$\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-(\sqrt{3}-x)^2}=\sqrt{3}\ldots.(2)'$ トナル。ソコデ

$\sqrt{2-(\sqrt{3}-x)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2-x^2}$ トオイテ兩邊ヲ平方スルト，

$2-(\sqrt{3}-x)^2=3+2-x^2-2\sqrt{3}\sqrt{2-x^2}$ トナル，卽チ $-3+\sqrt{3}x=-\sqrt{3}\sqrt{2-x^2}$, 卽チ $-\sqrt{3}+x=-\sqrt{2-x^2}$ トナル。ソコデ又平方シテ $3-2\sqrt{3}x+x^2=2-x^2$, 卽チ $2x^2-2\sqrt{3}x+1=0$, サレバ $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm 1)$ トナル。ソコデ $(2)'$ ノ根ナルカヲ調ベルニ

$$左邊=\sqrt{2-\frac{1}{4}(\sqrt{3}\pm 1)}+\sqrt{2-\frac{1}{4}(\sqrt{3}\mp 1)^2}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{4\mp 2\sqrt{3}}+\sqrt{4\pm 2\sqrt{3}}\right]$$

$=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{3}\mp 1+\sqrt{3}\pm 1\right]=\sqrt{3}$ トナルカラ $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm 1)$ ハ $(2)'$ ノ根デアル。從テ $y=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm 1)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\mp 1)$ トナル。

練習 聯立方程式 $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{61}{\sqrt{xy}}+1$, $\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78$.

注意 無理方程式(118頁)ヲ見ヨ。

第二種

例 5. 聯立方程式 $x^4=2x+3y\ldots\ldots(1)$, $y^4=3x+2y\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 $x=0, y=0$ ハ根デアル。コレヲ除イタル根ハ，$y=mx$ トオイテ (1), (2) ハソレゾレ

$x^4=2x+3mx\ldots.(1)'$, $m^4x^4=3x+2mx\ldots.(2)'$ トナル。ソコデ $x\neq 0$ デアルカラ，又ソレゾレ

$x^3=2+3m\ldots.(1)''$, $m^4x^3=3+2m\ldots.(2)''$ トナル。ソコデ $(1)''$ ノ x^3 ヲ $(2)''$ ニ代入スルト，

$m^4(2+3m)=3+2m$ 卽チ $3m^5+2m^4-2m-3=0$ 卽チ $(m-1)[3m^4+5m^3+5m^2+5m+3]=0$ トナル。サレバ $m=1$ 或ハ $3m^4+5m^3+5m^2+5m+3=0\ldots.(3)$ トナル。ソコデ (3) ノ兩邊ヲ m^2 デ割リテ同ジ係數ノ項ヲ集メルト，$3\left(m^2+\dfrac{1}{m^2}\right)+5\left(m+\dfrac{1}{m}\right)+5=0$, 卽チ $3\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^2+5\left(m+\dfrac{1}{m}\right)-1=0$. 從テ

$m+\dfrac{1}{m}=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$, 卽チ $m^2-\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{6}m+1=0$. サレバ

$m=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}\pm\sqrt{\mp 10\sqrt{37}-82}}{12}$ トナル。卽チ $m=\dfrac{-5+\sqrt{37}\pm\sqrt{-10\sqrt{37}-82}}{12}$, $\dfrac{-5-\sqrt{37}\pm\sqrt{10\sqrt{37}-82}}{12}$ トナル。コレ等四ツヲ A, B, C, D トスル

サテ $m=1$ ナラバ $(1)''$ ヨリ $x=\sqrt[3]{5}$, $\omega\sqrt[3]{5}$, $\omega^2\sqrt[3]{5}$ トナル，從テ $y=\sqrt[3]{5}$, $\omega\sqrt[3]{5}$, $\omega^2\sqrt[3]{5}$ トナル。

$m=\mathrm{A}$ ナラバ $(1)''$ ヨリ $x=\sqrt[3]{2+3\mathrm{A}}$, $\omega\sqrt[3]{2+3\mathrm{A}}$, $\omega^2\sqrt[3]{2+3\mathrm{A}}$ トナル，從テ $y=\mathrm{A}\sqrt[3]{2+3\mathrm{A}}$, $\omega\mathrm{A}\sqrt[3]{2+3\mathrm{A}}$, $\omega^2\mathrm{A}\sqrt[3]{2+3\mathrm{A}}$ トナル。

B, C, D ニ付テモ同様ニシテ得ラレル。

練習 $ax^2+bxy=y$, $ay^2+bxy=x$ ヲトケ。

注意 聯立二次方程式(129頁)ヲ見ヨ。

45. 特種ノ形ノ方程式

例 1. 聯立方程式 $(x-y)(x^3+y^3)=35\ldots\ldots(1)$, $xy(x^2-y^2)=30\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 與ヘラレタル方程式ハ x, y ニ付テ 4 次ノ**同次式**デアルコトニ着眼シテ二次ノ同次式ノ場合ノ解法ニ倣ツテ $(1)\times6-(2)\times7$ ヲ作ルト $6(x-y)(x^3+y^3)-7xy(x^2-y^2)=0$ 即チ $(x^2-y^2)(6x^2-13xy+6y^2)=0$。サレバ $x^2-y^2=0$ 或ハ $6x^2-13xy+6y^2=0$ トナル。從テ $y=\pm x$ 或ハ $y=\frac{2}{3}x$ 或ハ $\frac{3}{2}x$ トナル。トコロガ $y=\pm x$ ナルトキハ (1) 又ハ (2) ノ左邊ハ 0 トナルカラコレハ採用出來ナイ。

ソコデ $y=\frac{2}{3}x$ ナルトキハ (2) ヨリ $\frac{2}{3}x^2\left(x^2-\frac{4}{9}x^2\right)=30$ 即チ $x^4=3^4$ トナル。從テ $x=\pm3$ 或ハ $\pm3i$ トナル。從テ $y=\pm2$ 或ハ $\pm2i$ トナル。又 $y=\frac{3}{2}x$ ナルトキハ (2) ヨリ $\frac{3}{2}x^2\left(x^2-\frac{9}{4}x^2\right)=30$, 即チ $x^4=-2^4$ トナル。即チ $x^4+2.2^2x^2+2^4-2.2^2x^2=0$, 即チ $(x^2+2^2)^2-(2\sqrt{2}x)^2=0$, 即チ $x^2+2\sqrt{2}x+2^2=2$ 或ハ $x^2-2\sqrt{2}x+2^2=0$ トナル。サレバ $x=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$ 或ハ $\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$ トナル。從テ $y=-\frac{3}{\sqrt{2}}(1\mp i)$ 或ハ $\frac{2}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ トナル。

例 2. a, b ハ共ニ正ナリトシ, 次ノ聯立方程式ノ實根ヲ求メヨ。

$$(a-x)^3=x^2y\ldots\ldots(1),\quad (b-y)^3=xy^2\ldots\ldots(2)$$

講義 $(1)\times(2)$ ヲ作ルト, $(a-x)^3(b-y)^3=x^3y^3$ トナル。トコロガ x, y ノ實根ヲ求ムルカラ x, y ハ實數デアリ, $a-x$, $b-y$ モ實數デアルベキデアル。從テ $(a-x)(b-y)=xy$ ガ得ラレル。即チ $ab-bx-ay=0$ トナル。コレヨリ $y=\frac{b(a-x)}{a}$ ガ得ラレル, コヽニ假定ニヨリ $a>0$ デアル。コレヲ (1) ニ代入スルト $(a-x)^3=\frac{b}{a}x^2(a-x)$. 即チ $\frac{(a-x)}{a}[a(a-x)^2-bx^2]=0$ トナル。サレバ $a-x=0$ 或ハ $(a-b)x^2-2a^2x+a^3=0\ldots\ldots(3)$ ガ得ラレ, $x=a$ ナラバ第一方程式ヨリ $y=0$ トナルガ, コハ (2) ヲ滿足シナイ, 何トナレバ $b>0$ デアルカラデアル。サレバ後者ノ方程式ヲトイテ $x=\frac{a(a\pm\sqrt{ab})}{a-b}$ トナリ, 從テ $y=\frac{b(b\pm\sqrt{ab})}{b-a}$ トナル, コヽニ $a\neq b$ トスル。

次ニ $a=b$ ナラバ (3) ハ $-2a^2x+a^3=0$ 即チ $x=\frac{a}{2}$ トナリ, $y=\frac{a}{2}$ トナル。

例 3. 聯立方程式 $(x+y)(xy+1)=xy\ldots\ldots(1)$,

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)=x^2y^2\ldots\ldots(2)$$ ヲトケ。

講義 先ヅ $x=0, y=0$ ハ根デアルコト明ラカデアル。次ニ $x\neq0, y\neq0$ ナル根ヲ求ムルニ, (1) ヨリ $(x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=1$ 即チ $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ トナル。ソコデ $x+\frac{1}{x}=u$, $y+\frac{1}{y}=v$ トオクト, (1) ハ $u+v=1\ldots\ldots(1)'$ トナル。又 (2) ノ兩邊ヲ x^2y^2 デワリテ $x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=1$ 即チ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=5$ トナル。從テ (2) ハ $u^2+v^2=5\ldots\ldots(2)'$ トナル。

サテ $(1)'$ ヨリ $u=1-v$ トナルカラ $(2)'$ ニ代入シテ $(1-v)^2+v^2=5$ 即チ $2v^2-2v-4=0$ 即チ $(v-2)(v+1)=0$ トナル。サレバ $v=2$ 或 -1 トナル。從テ $u=-1$ 或ハ 2 トナル。サレバ $x+\frac{1}{x}=-1$, $y+\frac{1}{y}=2\ldots\ldots(3)$; $x+\frac{1}{x}=2$, $y+\frac{1}{y}=-1\ldots\ldots(4)$ ナル二組ガ (1), (2) ト同値デアル。(3) ノ組ヨリ $x^2+x+1=0$ ヨリ $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $y=1$; 又 (4) ノ組ヨリ $y=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $x=1$ ガ得ラレル。

サレバ求ムル解ハ $x, y=0, 0$; $1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; $1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, 1$; $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, 1$ ノ五組デアル。

例 4. 聯立方程式 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a^2}\ldots\ldots(1)$, $\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{b^2}\ldots\ldots(2)$ ヲトケ。

講義 (1)+(2) ヲ作ルト, $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 即チ $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ トナルカラ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ トナル。サレバ (1) ヨリ $\frac{1}{x}=\pm\frac{b}{a\sqrt{b^2+b^2}}$. 從テ $x=\pm\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ トナル, 同樣ニシテ $y=\pm\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ トナル。

例 5. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ ヲ解ケ。

講義 分母ヲ拂ツテ $(x^2+a^2)by=ax(y^2+b^2)=ab(x^2+y^2)$ トナル。ソコデ初メノ等式ヨリ $bx^2y-axy^2+a^2by-ab^2x=0$ 即チ $xy(bx-ay)+ab(ay-bx)=0$ 即チ $(bx-ay)(xy-ab)=0$ トナル。サレバ與ヘラレタル聯立方程式ハ $bx-ay=0\ldots(1)$, $ax(y^2+b^2)=ab(x^2+y^2)\ldots(2)$; ト $xy-ab=0\ldots\ldots(3)$, $ax(y^2+b^2)=ab(x^2+y^2)\ldots\ldots(2)$ ノ二組ト同値デアル。

サテ (1) ト (2) トヲトクニ, (1) ヨリ $y=\frac{bx}{a}$ ガ得ラレル, 即チ $ax\left(\frac{b^2x^2}{a^2}+b^2\right)=ab\left(x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)$ トナル。トコロガ $ax\neq0$ デアルカラ $b^2x^2+a^2b^2=a^2bx+b^3x$ 即チ $b^2x^2-b(a^2+b^2)x+a^2b^2=0$ 即チ $bx^2-(a^2+b^2)x+a^2b=0$ 即チ $(bx-a^2)(x-b)=0$ トナル, サレバ $x=b$ 或ハ $\frac{a^2}{b}$ トナル。從テ $y=\frac{b^2}{a}$ 或ハ a トナル。

又 (3) ト (4) トヲトクニ，(3) ヨリ $y=\dfrac{ab}{x}$ トナル，之ヲ (4) ニ代入シテ $ax\left(\dfrac{a^2b^2}{x^2}+b^2\right)=ab\left(x^2+\dfrac{a^2b^2}{x^2}\right)$ トナル。即チ $x(a^2b+bx^2)=x^4+a^2b^2$ 即チ $x^4-bx^3-a^2bx+a^2b^2=0$ 即チ $(x-b)(x^3-a^2b)=0$ トナル。サレバ $x=b$ 或ハ $\sqrt[3]{a^2b}$, $\omega\sqrt[3]{a^2b}$, $\omega^2\sqrt[3]{a^2b}$ トナル。從テ $y=a$ 或ハ $\sqrt[3]{ab^2}$, $\omega^2\sqrt[3]{ab^2}$, $\omega\sqrt[3]{ab^2}$ トナル。

例 6. $x+\dfrac{1}{x}=a\ldots\ldots(1)$, $y+\dfrac{1}{y}=b\ldots\ldots(2)$, $xy+\dfrac{1}{xy}=c\ldots\ldots(3)$ ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

講義 (1), (2), (3) ヲ邊々相乘ズルト，

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)=abc$, 即チ $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(y^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)^2=abc\ldots.(4)$ トナル。ソコデ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$, $y^2+\dfrac{1}{y^2}=\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2-2$, トナルカラ (1) ト (2) ノ値ヲ代入シテ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$, $y^2+\dfrac{1}{y^2}=b^2-2$ トナルカラ，結局 (4) ハ $a^2-2+b^2-2+c^2=abc$ 即チ $a^2+b^2+c^2-abc=4$ トナル。

XVII. 三元聯立方程式

46. 二ツガ一次，他ガ高次ノ聯立方程式

例 聯立方程式 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0\ldots\ldots(1)$, $x+y+z=a+b+c\ldots\ldots(2)$, $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2\ldots\ldots(3)$ ヲトケ，但シ a, b, c ハ悉ク相異ナルモノトス。

講義 先ヅ (1) ト (2) ノ方程式ニ於テ $x=a+X$, $y=b+Y$, $z=c+Z$ トオクト，$(b-c)X+(c-a)Y+(a-b)Z=0\ldots.(1)'$, $X+Y+Z=0\ldots(2)'$ トナル。ソコデ $(1)'$ ト $(2)'$ ヨリ X, Y, Z ノ連比ヲ求ムルト，$\dfrac{X}{b+c-2a}=\dfrac{Y}{c+a-2b}=\dfrac{Z}{a+b-2c}$ トナル，尤モ a, b, c ハ悉ク相異ナルカラデアル。ソコデ上ノ比ヲ k トオクト，$X=k(b+c-2a)$, $Y=k(c+a-2b)$, $Z=k(a+b-2c)$ トナル。サレバ (3) ニ x, y, z ヲ代入シテ $[k(b+c-2a)+a]^2+[k(c+a-2b)+b]^2+[k(a+b-2c)+c]^2=a^2+b^2+c^2$, 即チ $k^2[(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2]+2k[a(b+c-2a)+b(c+a-2b)+c(a+b-2c)]=0$ トナル，即チ $6k^2[a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab]-4k[a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab]=0$ トナル。トコロガ $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2]$ デ，a, b, c ハ悉ク相異ナルカ

ラ $\neq 0$ トナル。サレバ $k=0$ 或ハ $\dfrac{2}{3}$ トナル。サレバ $x=a$, $y=b$, $z=c$; 或ハ $x=\dfrac{1}{3}(2b+2c-a)$, $y=\dfrac{1}{3}(2c+2a-b)$, $z=\dfrac{1}{2}(2a+2b-c)$ トナル。

一般ニ，二ツノ一次方程式ト他ハ高次方程式ヨリ成ル聯立方程式ニテハ先ヅ一次ノ方程式ノ間ニテ，二ツノ未知數ヲ他ノ未知數ニテ表ハシ，之ヲ高次ノ方程式ニ代入シテ一ツノ未知數ノ方程式ヲ作ル，即チ二ツノ未知數ヲ消去スルノデアル。カクシテ得ラレタル方程式ヲトキテ求ムル解ガ得ラレル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $x+y+z=a+b+c$, $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3$。但シ a, b, c ハ，悉ク相異ナルモノトス。

答 $k=2(b-c)(c-a)(a-b)/[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]$ トスルト，
$x=a(1+2k)$, $y=b(1+2k)$, $z=c(1+2k)$ ト $x=a, y=b, z=c$ ノ二組デアル。

(2) $x+y+z=1$, $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ 但シ α, β, γ ハ悉ク相異ナルモノトス。

答 $x, y, z=\dfrac{1-\gamma}{\alpha-\beta}, \dfrac{\gamma-1}{\alpha-\beta}, 1;\ 1, \dfrac{1-\alpha}{\beta-\gamma}, \dfrac{\alpha-1}{\beta-\gamma};\ \dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}, 1, \dfrac{\beta-1}{\alpha-\beta}$.

(3) $ax=by=cz=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

答 $x=\pm\dfrac{1}{a}\sqrt{a+b+c}$, $y=\pm\dfrac{1}{b}\sqrt{a+b+c}$, $z=\dfrac{1}{c}\sqrt{a+b+c}$.

(4) $ax^3=by^3=cz^3$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{d}$.

注意 $ax^3=by^3=cz^3=k$ トオケ，カクシテ $x=\sqrt[3]{\dfrac{k}{a}}, \omega\sqrt[3]{\dfrac{k}{a}}, \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{k}{a}}$; $y=\sqrt[3]{\dfrac{k}{b}}, \omega\sqrt[3]{\dfrac{k}{b}}, \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{k}{b}}$; $z=\sqrt[3]{\dfrac{k}{c}}, \omega\sqrt[3]{\dfrac{k}{c}}, \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{k}{c}}$ トナル。コレ等ハ互ニ獨立デアルカラ x, y, z ノ $3^3=27$ 組ガ得ラレ。ソレ等ニ對應スル解ガ 27 組得ラレル。

(5) $x+2y+3z=45$, $5z+6x-y=36$, $y^2-xz=31446$.

答 $x, y, z=123, 132, -144;\ -127\frac{1}{2}, -118\frac{1}{2}, 136\frac{1}{2}$.

(6)　$bz+cy=cx+az=ay+bx=xyz.$

(7)　$\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

(8)　$(a+1)x+y+z=x+(b+1)y+z=x+y+(c+1)z=yz+zx+xy.$

例 2.　$x+y=12\ldots\ldots(1),\ z+u=4\ldots\ldots(2),\ x^2+z^2=34\ldots\ldots(3),$

$y^2+z^2=50\ldots\ldots(4)$ ヲトケ。

講義　(1) ト (2) ヨリ, $y=12-x\ldots.(1)',\ u=4-z\ldots.(2)'$ ガ得ラレ, 之ヲ (4) ニ代入スルト, $x^2+z^2-24x-8z+11=0\ldots.(4)'$, トナル。サレバ $(1)', (2)', (3), (4)'$ ハ $(1), (2), (3), (4)$ ト同値デアル。$(4)'$ ニ (3) ヲ代入スルト, $3x+z=18\ldots.(4)''$ トナル。之ヨリ $z=18-3x$ ガ得ラレ。(3) ニ代入スルト, $5x^2-54x+145=0$, $x=5$ 或ハ $\dfrac{29}{5}$ トナル。サレバ求ムル解ハ $x, y, z, u=5, 7, 3, 1;\ \dfrac{29}{5}, \dfrac{31}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{17}{5}$ トナル。

練習　$x+y=a,\ z+u=b,\ xy+zu=c,\ xz+yu=d$ ヲトケ。

例 3.　$y+z=2axyz\ldots\ldots(1),\ z+x=2bxyz\ldots\ldots(2),\ x+y=2cxyz\ldots\ldots(3)$ ヲトケ。

講義　a, b, c ガ悉ク 0 ナラズトスルト, (1), (2), (3) ヨリ $\dfrac{y+z}{2a}=\dfrac{z+x}{2b}=\dfrac{x+y}{2c}=xyz$ トナル。サレバ $xyz=k$ トオクト, (1), (2), (3) ハソレゾレ $y+z=2ak\ldots.(1)'$, $z+x=2bk\ldots.(2)'$, $x+y=2ck\ldots.(3)'$ トナル。從テ $x=(b+c-a)k,\ y=(a+c-b)k$, $z=(a+b-c)k$ トナル。サレバ $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)k^3=k\ldots.(4)$ トナル。從テ $k=0$ 或ハ $k^2(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=1$ トナル。ソコデ $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\neq 0$ トスルト $k=\pm 1/\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ トナル。

サレバ a, b, c ガ悉ク 0 ナラズシテ $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\neq 0$ ノトキノ解ハ $x, y, z=0, 0, 0;\ \pm\dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{BC}}}, \pm\dfrac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{CA}}}, \pm\dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{AB}}}$, コヽニ $\mathrm{A}=b+c-a$, $\mathrm{B}=a+c-b$, $\mathrm{C}=a+b-c$ トス。

次ニ a, b, c ガ悉ク 0 ナラバ原式ヨリ $x=0,\ y=0\ z=0$ ガ得ラルヽノミデアル。a, b, c 中二ツガ 0 ナルトキハ, 例ヘバ $a=b=0$ ナラバ $x=y=-z$ トナリ, (3) ヨリ $-2z=2cz^3$ 卽チ $z=0,\ z=\mp\dfrac{1}{\sqrt{-c}}$ トナル。コノトキハ $x, y, z=0, 0, 0;\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{-c}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{-c}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{-c}}$ トナル。

又 a, b, c 中一ツダケガ 0, 例ヘバ $a=0$ ナラバ (2) ト (3) ハ $z+x=-2bxz^2\ldots.(2)''$

$x-z=-2cxz^2\ldots.(3)''$ トナル, 從テ $(2)''+(3)''$ ヲ作ルト, $2x=-2(b+c)xz^2$ 卽チ $x=0$ 或ハ $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{-(b+c)}}$ トナル。コノトキハ $x, y, z=0, 0, 0;\ \mp\dfrac{\sqrt{-(b+c)}}{b-c}$, $\mp\dfrac{1}{\sqrt{-(b+c)}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{-(b+c)}}$ トナル, コヽニ $b+c\neq 0$ トシタノデアル。$b+c$ ガ 0 ナラバ $x=0,\ y=0,\ z=0$ ノミデアル。

最後ニ a, b, c ガ悉ク 0 ナラズシテ $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=0$ ナラバ (4) ヨリ $k=0$ ノミガ得ラレ $x=0, y=0, z=0$ ノミガ解トナル。

練習

(1)　$(y+z)(x+y+z)=a,\ (z+x)(x+y+z)=b,\ (x+y)(x+y+z)=c$ ヲトケ。

注意　與ヘラレタル方程式ハ $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{1}{x+y+z}$, $\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{1}{x+y+z}$, $\dfrac{x+y}{c}=\dfrac{1}{x+y+z}$ トナル。從テ $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=\dfrac{1}{x+y+z}$ トナルコトニ着眼セヨ。 $x=\dfrac{b+c-a}{\sqrt{2(a+b+c)}}$

(2)　$x=a\sqrt{x+y+z},\ y=b\sqrt{x+y+z},\ z=c\sqrt{x+y+z}$ ヲトケ。

(3)　$(x+2y+3z)(3x-y+z)=56,\ (2x-3y+5z)(3x-y+z)=44,$

注意　$\dfrac{x+2y+3z}{56}=\dfrac{2x-3y+5z}{44}=\dfrac{3x+4y-3z}{20}=\dfrac{1}{3x-y+z}$ トシテトケ。

47.　悉ク二次ナル場合

例 1.　次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$x(1-5z)+y(1+z)=5z+2\ldots\ldots(1),\ 2x(1+2z)+y(2-5z)=z+4\ldots\ldots(2),$

$(x+y)(1-z)+z=k\ldots\ldots(3)$

講義　$(1)\times 2-(2)$ ヲ作ルト, $-z(14x-7y+9)=0\ldots.(4)$, 卽チ $z=0$ 或ハ $14x-7y+9=0$ トナル。ソコデ $z=0$ トスルト, (1) ヨリ $x+y=2\ldots.(1)'$, (3) ヨリ $x+y=k\ldots.(3)'$ トナル。サレバ $k\neq 2$ ナラバ $z=0$ ハ採用出來ズ。又 $k=2$ ナラバ方程式ハ $z=0$ ト $x+y=2$ トナリテ不定トナル。

次ニ $14x-7y+9=0$ 卽チ $y=2x+\dfrac{9}{7}$ ナラバ (1) ヨリ $3x(1-z)=\dfrac{26}{7}z+\dfrac{5}{7}\ldots.(1)''$, (3) ヨリハ $3x(1-z)=\dfrac{2}{7}z+k-\dfrac{9}{7}\ldots.(3)''$ ガ得ラレル。サレバ $(1)''-(3)''$ ヲ作ルト,

$0=\frac{24}{7}z-k+2$ トナル，從テ $z=\frac{7}{24}(k-2)$ トナル。之ヲ (1)′ ニ代入スルト，

$3x\left(1-\frac{7k-14}{24}\right)=\frac{26}{7}\times\frac{7(k-2)}{24}+\frac{5}{7}$，卽チ $\frac{38-7k}{8}x=\frac{91k-122}{84}$ ....(1)″′ トナルカラ

$k\neq\frac{38}{7}$ ナラバ $x=\frac{18k-244}{21(38-7k)}$ トナル，カクシテ $y=2x+\frac{9}{7}$ ニ x ノ値ヲ代入シテ，

$y=\frac{175k+538}{21(38-7k)}$ トナル。又 $k=\frac{38}{7}$ ナラバ (1)″′ ハ $0=\frac{13\times38-122}{84}$ トナリテ (1)″′ ガ成立ナイ。從テコノトキハ $14x-7y+9=0$ ヲ採用スルコトガ出來ナイ。

結局 k ガ 2 又ハ $\frac{38}{7}$ ニ等シクナイトキハ一組ノ解ガアル，ソレハ

$x, y, z=\frac{182k-244}{21(38-7k)}, \frac{175k+538}{21(38-7k)}, \frac{7}{24}(k-2)$ デアル。$k=2$ ナラバ不定デ，$k=\frac{38}{7}$ ナラバ不能デアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $x^2+y^2=1,\ 18(z-1)x-(z-26)y=0,\ (23z-72)x-36(z-1)y=0.$

答 $x, y, z=\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 2;\ -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 2;\ \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -1;\ -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -1.$

(2) $y+\frac{1}{z}=a,\ z+\frac{1}{x}=b,\ x+\frac{1}{y}=c.$

答 $\frac{abc+a-b-c\pm\sqrt{(abc-a-b-c)^2-4}}{2(ab-1)}, \frac{abc+b-c-a\pm\sqrt{(abc-a-c-b)^2-4}}{2(bc-1)},$

$\frac{abc+c-a-b\pm\sqrt{(abc-a-b-c)^2-4}}{2(ca-1)}.$

例 2. $(x+y)(x+z)=a$......(1), $(y+z)(y+z)=b$......(2),

$(z+x)(z+y)=c$......(3) ヲトケ。

講義 $x+y=X,\ y+z=Y,\ z+x=Z$ トオクト，(1), (2), (3) ハ $XZ=a$....(1)′, $XY=b$....(2)′, $YZ=c$....(3)′ トナル。從テ (1)′×(2)′×(3)′ ヲ作ルト，$X^2Y^2Z^2=abc$ トナル。從テ $XYZ=\pm\sqrt{abc}$....(4) トナル。サレバ (4)÷(1)′ ヲ作リテ $Y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a}$....(5) 又 (4)÷(2)′ ヲ作リテ $Z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{b}$....(6)，次ニ (4)÷(3)′ ヲ作リテ $X=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$.. (7) トナル。サレバ (5), (6), (7) ハ $x+y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$....(7)′ $x+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{b}$....(6)′, $y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a}$....(5)′ トナル。ソコデ (5)′+(6)′+(7)′ ヲ作リテ $x+y+z=\pm\frac{bc+ca+ab}{2\sqrt{abc}}$....(8) ガ得ラレ，(7) ヨリ (5)′, (6)′, (7)′ ヲソレゾレ減ズル

ト，$x=\pm\frac{-bc+ca+ab}{2\sqrt{abc}}$，$y=\pm\frac{bc-ca+ab}{2\sqrt{abc}}$。$z=\pm\frac{bc+ca-ab}{2\sqrt{abc}}$ トナル。コヽニ複號ハ共ニ上號，共ニ下號ヲトルモノデアル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

(1) $yz+zx+xy=(a+b+c)xyz,\ \frac{yz+zx}{a}=\frac{zx+xy}{b}=\frac{xy+yz}{c}.$

注意 最後ノ等式ヲ k トオイテ $yz+zx=ak,\ zx+xy=bk\ \ xy+yz=ck$ ヲ導キ，邊々相加ヘテ $xy+yz+zx=\frac{1}{2}(a+b+c)k$ ガ得ラレ，次ニ $xy=\frac{1}{2}(b+c-a)k,\ yz=\frac{1}{2}(a+c-b)k,\ zx=\frac{1}{2}(a+b-c)k$ ガ得ラル。カクシテ x, y, z ヲ前例ニ從テ求メテ最初ノ方程式ニ代入シテ k ノ値ヲ求メヨ。 $z=\frac{1}{b+c-a}$

(2) $x^2-(y-z)^2=a,\ y^2-(z-x)^2=b,\ z^2-(x-y)^2=c.$

注意 與ヘラレタル方程式ハソレゾレ $(x+y-z)(x-y+z)=a,\ (y+z-x)(y-z+x)=b,\ (z+x-y)(z-x+y)=c$ トナシ $x+y-z\equiv Z,\ x-y+z\equiv Y,\ y+z-x\equiv X$ トナシテ X, Y, Z ノ値ヲ求メテトケ。 $z=\pm\frac{\sqrt{c}}{2}\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$

(3) $x(y+z-x)=a.\ y(z+x-y)=b,\ z(x+y-z)=c.$

注意 第二，第三ヲ加ヘ，第一ヲ減ズルト，$x^2-(y-z)^2=b+c-a$ トナル，同様ニ $y^2-(z-x)^2=c+a-b,\ z^2-(x-y)^2=a+b-b$ ガ得ラル。 $z=\pm\frac{\sqrt{a+b-c}}{2}\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$

(4) $x(y+z)=a,\ y(z+x)=b,\ z(x+y)=c.$ $x=\frac{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}{\sqrt{2}\sqrt{b+c-a}}$

注意 $xy+zx=a,\ yz+xy=b,\ zx+yz=c$ トナシテ xy, yz, zx ノ値ヲ求メテトケ。

(5) $x^2+(y-z)^2=a,\ y^2+(z-x)^2=b,\ z^2+(x-y)^2=c.$ $x=\frac{\sqrt{(k-b)(k-c)}}{\sqrt{2}}$

注意 各方程式ハソレゾレ $x^2+y^2+z^2=a+2yz,\ x^2+y^2+z^2=b+2zx,\ x^2+y^2+z^2=c+2xy$ ト直シテ $x^2+y^2+z^2=a+2yz=b+2zx=c+2xy$ トナルコトニ着眼シテ $x^2+y^2+z^2=k$ トオケ，カクシテ $2yz=k-a,\ 2zx=k-b,\ 2xy=k-c$ トナル。

(6) $x(x+y+z)=a-yz,\ y(x+y+z)=b-zx,\ z(x+y+z)=c-xy.$

注意 各式ノ括弧ヲホドイテ $yz+zx+xy=a-x^2=b-y^2=c-z^2$ トナルコトニ着眼セヨ。

(7) $yz=y+z+a,\ zx=z+x+b,\ xy=x+y+c.$

注意 與ヘラレタル方程式ガソレゾレ $(y-1)(z-1)=a+1,\ (z-1)(x-1)=b+1,$

$(x-1)(y-1)=c+1$ トナル。ソコデ $x-1=X,\ y-1=Y,\ z-1=Z$ トオイテトケ。

（8） $yz-f^2=cy+bz,\ zx-g^2=az+cx,\ xy-h^2=bx+ay.$

注意 與ヘラレタル方程式ハソレゾレ $(y-b)(z-c)=f^2+bc,\ (z-c)(x-a)=g^2+ca,\ (x-a)(y-b)=h^2+ab$ トナル。サレバ $x-a=X,\ y-b=Y,\ z-c=Z$ トオイテトケ。

（9） $\sqrt{\dfrac{yz}{x}}=a,\ \sqrt{\dfrac{zx}{y}}=b,\ \sqrt{\dfrac{xy}{z}}=c.$

注意 $\sqrt{\ }$ ノ形デ與ヘラレテヰルカラ a, b, c ハ共ニ正デアル。ソコデ邊々相乘ズルト，$\sqrt{xyz}=abc$ トナル。之ヲソレゾレ第一，第二，第三ノ方程式ニテ順次除スルト，$x=\pm bc,\ y=\pm ca,\ z=\pm ab$ トナル，複號ハ互ニ獨立デアルガ $\dfrac{yz}{x}>0,\ \dfrac{zx}{y}>0,\ \dfrac{xy}{z}>0$ トナル樣ニ選擇シナケレバナラナイ。

(10) $yz=a(x+y+z),\ zx=b(x+y+z),\ xy=c(x+y+z).$

注意 $x+y+z=k$ トオケ。

(11) $\sqrt{x}=a\sqrt{yz(x+y+z)},\ \sqrt{y}=b\sqrt{zx(x+y+z)},$

$\sqrt{z}=c\sqrt{xy(x+y+z)}$，コヽニ a, b, c ハ悉ク 0 ナラズトス。

注意 根式ハスベテ正數ヲ表ハスカラ a, b, c ハ悉ク正デアル。先ヅ $x=y=z=0$ ハ解デアル。ソコデ x, y, z ガ悉クガ 0 ナラザル場合ノ解ヲ求ムルタメニ與ヘラレタル方程式ヲ變形シテ

$a\sqrt{\dfrac{yz}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}},\ b\sqrt{\dfrac{zx}{y}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}},\ c\sqrt{\dfrac{xy}{z}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}}$ トスルト，直ニ氣ガ付クコトデアルガ，$\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}}=k$ トオクト，(10) ト同樣ニシテ x, y, z ガ求メラレ，之ヲ $\dfrac{1}{\sqrt{x+y+z}}=k$ ニ代入シテ k ノ値ヲ求ムルコトガ出來ル。

例 3. $y^2+yz+z^2=a^2\ldots\ldots(1),\ z^2+zx+x^2=b^2\ldots\ldots(2),$

$x^2+xy+y^2=c^2\ldots\ldots(3)$ ヲトケ。

講義 (1)−(2) ヲ作ルト，$(y-x)(x+y+z)=a^2-b^2\ldots.(4)$，(2)−(3) ヲ作ルト，$(z-y)(x+y+z)=b^2-c^2\ldots.(5)$ 從テ $x+y+z=\dfrac{a^2-b^2}{y-x}=\dfrac{b^2-c^2}{z-y}$ トナル，コヽニ $a\neq b\neq c$ トスル。ソコデ之ヲ $\dfrac{1}{k}$ トオクト，$x+y+z=\dfrac{1}{k},\ y-x=k(a^2-b^2),\ z-y=k(b^2-c^2)$ トナルカラ之レ等ヨリ x, y, z ヲ求ムルト，$x=\dfrac{k}{3}(b^2+c^2-2a^2)+\dfrac{1}{3k},\ y=\dfrac{k}{3}(a^2+c^2-2b^2)+\dfrac{1}{3k},$

$z=\dfrac{k}{3}(a^2+b^2-2c^2)+\dfrac{1}{3k}$，トナル。トコロガ (1), (2), (3) ト (4), (5), (3) トハ同値デアルカラコレ等ノ値ヲ (3) ニ代入シテ整頓シテ 3 デワリ，

$k^4(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)-k^2(a^2+b^2+c^2)+1=0$ トナル。之ヲトイテ x, y, z ノ解ノ四組ガ得ラレル。

練習 次ノ聯立方程式ヲトケ。

（1） $x^2-yz=a;\ y^2-zx=b,\ z^2-xy=c.$

注意 第一ヨリ第二式ヲ減ジテ $(x-y)(x+y+z)=a-b$，第二ヨリ第三式ヲ減ジテ $(y-z)(x+y+z)=b-c$ ガ得ラル。前例ト同樣ニシテ $x+y+z=\dfrac{a-b}{x-y}=\dfrac{b-c}{y-z}$ トナル，之ヲ $\dfrac{1}{k}$ トオイテ，$x-y=k(a-b),\ y-z=k(b-c),\ x+y+z=\dfrac{1}{k}$ トナル。從テ

$x=\dfrac{1}{3k}+\dfrac{k}{3}(2a-b-c),\ y=\dfrac{1}{3k}+\dfrac{k}{3}(2b-a-c),\ z=\dfrac{1}{3k}+\dfrac{k}{3}(2c-a-b)$ トナル，之ヲ第三式ニ代入シテ前例ト同樣ニシテ解ヲ求メテ，$x, y, z=\pm\dfrac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}},$

$\pm\dfrac{b^2-ca}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}},\ \pm\dfrac{c^2-ab}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$ トナル，コヽニ $k\neq 0$ ヲ注意セヨ。

（2） $y^2+z^2-x(y+z)=a^2,\ z^2+x^2-y(z+x)=b^2,\ x^2+y^2-z(x+y)=c^2.$

答 $x, y, z=\pm\dfrac{b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)}{\sqrt{\{2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)\}}},\ \pm\dfrac{c^4+a^4-b^2(c^2+a^2)}{\sqrt{\{2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)\}}},$

$\pm\dfrac{a^4+b^4-c^2(a^2+b^2)}{\sqrt{\{2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)\}}}.$

（3） $x(x+y+z)-(y^2+z^2+yz)=a,\ y(x+y+z)-(z^2+x^2+zx)=b,$

$z(x+y+z)-(x^2+y^2+xy)=c.$

答 $x, y, z=\pm\dfrac{(b+c)^2-(c+a)(a+b)}{2\sqrt{(3abc-a^3-b^3-c^3)}},\ \pm\dfrac{(c+a)^2-(a+b)(b+c)}{2\sqrt{(3abc-a^3-b^3-c^3)}},$

$\pm\dfrac{(a+b)^2-(b+c)(c+a)}{2\sqrt{(3abc-a^3-b^3-c^3)}}.$

例 4. $x^2+a(2x+y+z)=y^2+b(2y+z+x)=z^2+c(2z+x+y)=(x+y+z)^2$ ヲトケ。

講義 $x+y+z=k$ トオクト，$x^2+ax+ak=y^2+by+bk=z^2+cz+ck=k^2$ トナル。從テ $x^2+ax+ak=k^2$ ヨリ $(x+k)(x-k+a)=0$ トナル，從テ $x+k=0$ 或ハ $x-k+a=0$ トナル。同樣ニ $y^2+by+bk=k^2$ ヨリ $(y+k)(y-k+b)=0$ トナル，從テ $y+k=0$ 或ハ $y-k+b=0$

トナル。又 $z^2+cz+ck=k^2$ ヨリ $(z+k)(z-k+c)=0$ トナル，從テ $z+k=0$ 或ハ $z-k+c=0$ トナル。サレバ與ヘラレタル方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l}x+k=0\\y+k=0\\z+k=0\end{array}\right\}\text{(I)},\quad \left.\begin{array}{l}x+k=0\\y+k=0\\z-k+c=0\end{array}\right\}\text{(II)},\quad \left.\begin{array}{l}x+k=0\\y-k+b=0\\z+k=0\end{array}\right\}\text{(III)},\quad \left.\begin{array}{l}x+k=0\\y-k+b=0\\z-k+c=0\end{array}\right\}\text{(IV)}$$

$$\left.\begin{array}{l}x-k+a=0\\y+k=0\\z+k=0\end{array}\right\}\text{(V)},\quad \left.\begin{array}{l}x-k+a=0\\y+k=0\\z-k+c=0\end{array}\right\}\text{(VI)}\quad \left.\begin{array}{l}x-k+a=0\\y-k+b=0\\z+k=0\end{array}\right\}\text{(VII)},\quad \left.\begin{array}{l}x-k+a=0\\y-k+b=0\\z-k+c=0\end{array}\right\}\text{(VIII)}$$

ノ八組ト同値デアル。コレ等ハ $k=x+y+z$ ヲ代入スルト，x, y, z ニ付テノ一次方程式トナルカラ容易ニトクコトガ出來ル。コヽニ (IV), (VI), (VII) ハ各ニ於テ邊々相加ヘテソレゾレ $b+c=0, c+a=0, a+b=0$ ガ得ラレ，之レ等ガ成立テバ (IV), (VI), (VII) ガ不定トナル，從テ與ヘラレタル方程式ハ不定トナル。若シ不成立ナラバコレ等三組ノ方程式ヲ除外シテ次ノ答ガ得ラレル。

答 $x, y, z=0, 0, 0$；$-\dfrac{3a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}$；$\dfrac{b}{2}, -\dfrac{3b}{2}, \dfrac{b}{2}$；$\dfrac{c}{2}, \dfrac{c}{2}, -\dfrac{3c}{2}$；$\dfrac{1}{2}(-a+b+c)$, $\dfrac{1}{2}(a-b+c)$, $\dfrac{1}{2}(a+b-c)$.

例 5. $x^2-yz=ax$……(1), $y^2-zx=by$……(2), $z^2-xy=cz$……(3) ヲトケ。

講義 先ヅ $x=0$ ナラバ (1) ヨリ $yz=0$, (2) ヨリ, $y^2=by$, (3) ヨリ $z^2=cz$ トナルカラ $x=0, y=0, z=0$；$x=0, y=0, z=c$；$x=0, y=b, z=0$；トナル。同様ニシテ $y=0$ 又ハ $z=0$ ニナシテ今ノ解ト異ナルモノガ得ラレル，ソレハ $x=a, y=0, z=0$ デアル。次ニ x, y, z ガ何レモ 0 ナラザル解ヲ求ムルニ，

(1)×y+(2)×z+(3)×x ヲ作ルト，$axy+byz+czx=0$….(4) トナル。又 (1)×z+(2)×x+(3)×y ヲ作ルト，$bxy+cyz+azx=0$….(5) トナル。サレバ xy, yz, zx ノ連比ヲ (4), (5) ヨリ求ムルト，$\dfrac{xy}{c^2-ab}=\dfrac{yz}{a^2-bc}=\dfrac{zx}{b^2-ca}$….(6) トナル。コヽニ c^2-ab, a^2-bc, b^2-ca ハ悉ク 0 ナラズトスル，ソコデ (1), (2), (3) ト (1), (4), (5) トハ同値デアルカラ (6) ヨリ $z=\dfrac{x(a^2-bc)}{c^2-ab}$, $y=\dfrac{(a^2-bc)x}{b^2-ca}$ ガ得ラレ，之ヲ (1) ニ代入スルト，

$x^2-\dfrac{(a^2-bc)^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}x^2=ax$ トナル。$x\neq0$ デアルカラ $x=\dfrac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{3abc-a^3-b^3-c^3}$ トナル。從テ

$y=\dfrac{(c^2-ab)(a^2-bc)}{3abc-a^3-b^3-c^3}$, $z=\dfrac{(a^2-bc)(b^2-ca)}{3abc-a^3-b^3-c^3}$ トナル。

例 6. $(x+y)(x+z)=ax$……(1), $(y+z)(y+x)=by$……(2),
$(z+x)(z+y)=cz$……(3) ヲトケ。

講義 先ヅ $x=0$ トシテ，次ニ $y=0$ トシテ，次ニ $z=0$ トシテトクト，$x=0, y=0, z=0$；$x=a, y=0, z=0$；$x=0, y=b, z=0$；$x=0, y=0, z=c$ ナル解ガ得ラレ，x, y, z ノ何レモガ 0 デナイ解ヲ求ムルニ，

(2)×(3)÷(1) ヲ作ルト，$(y+z)^2=\dfrac{bcyz}{ax}$ トナル，卽チ $(y+z)x=\pm\dfrac{1}{a}\sqrt{abcxyz}$….(4) トナル。同様ニシテ

$(z+x)y=\pm\dfrac{1}{b}\sqrt{abcxyz}$….(5), $(x+y)z=\pm\dfrac{1}{c}\sqrt{abcxyz}$….(6) トナル。トコロガ ± ハ共ニ上，共ニ下ヲトラネバナラナイ，何トナレバ例ヘバ (4)×(5) ヲ作ルト，(3) ガ得ラルヽニハ同符號デナケレバナラナイ。

ソコデ (4), (5), (6) ハ $xy+zx=\pm\dfrac{1}{a}\sqrt{abcxyz}$….(4)′, $yz+xy=\pm\dfrac{1}{b}\sqrt{abcxyz}$….(5)′
$xz+yz=\pm\dfrac{1}{c}\sqrt{abcxyz}$….(6)′ トナルカラ (4)′+(5)′−(6)′ ヲ作ルト

$2xy=\pm\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)\sqrt{abcxyz}$….(7) トナル。同様ニシテ

$2yz=\pm\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\sqrt{abcxyz}$….(8), $2zx=\pm\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\sqrt{abcxyz}$….(9) トナル。

ソコデ (7)×(8) ヲ作ルト，$4xy^2z=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)abcxyz$ トナル，トコロガ x, y, z ハ悉ク 0 デナイカラ $xyz\neq0$ デアル。從テ

$y=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)abc\equiv\dfrac{1}{4abc}(bc+ca-ab)(ab+ca-bc)$ トナル。同様ニシテ $x=\dfrac{1}{4abc}(bc-ca+ab)(bc+ca-ab)$, $z=\dfrac{1}{4abc}(ab+ca-bc)(ab+bc-ca)$ トナル。

例 7. $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{a}{x}$…(1), $\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{b}{y}$…(2), $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{c}{z}$…(3), ヲトケ。

講義 x, y, z ハ 0 デナイコトハ先ヅ注意シテ分母ヲ拂フト，(1) ハ $x(y^2+z^2)=ayz$….(1)′, (2) ハ $y(z^2+x^2)=bzx$….(2)′, (3) ハ $z(x^2+y^2)=cxy$….(3)′ トナル。ソコデ (1)′×x, (2)′×y, (3)′×z ヲ作ルト，ソレゾレ $x^2y^2+z^2x^2=axyz$….(4), $y^2z^2+x^2y^2=bxyz$….(5), $z^2x^2+y^2z^2=cxyz$….(6) トナル。ソコデ (4)+(5)−(6) ヲ作ルト，$2x^2y^2=(a+b-c)xyz$ (7), 同様ニシテ $2z^2x^2=(c+a-b)xyz$..(8), $2y^2z^2=(b+c-a)xyz$ (9) トナル。從テ (7)×(8) ヲ作ルト，$4x^4y^2z^2=(a+b-c)(c+a-b)x^2y^2z^2$ トナル，ソシテ $xy\neq0$ デアルカラ $4x^2=(a+b-c)(c+a-b)$ トナル，從テ $x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}$ トナル。

同様ニシテ $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$, $z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$ トナル，コヽニ複號ハ互ニ獨立デアルガ，(7), (8), (9) ガ成立ツ樣ニエラブ。

48. 對稱方程式

例 聯立方程式 $x+y+z=10$......(1), $yz+zx+xy=33$,

$(y+z)(z+x)(x+y)=294$......(3) ヲ解ケ。

講義 對稱式ノ性質ニヨリテ

$(y+z)(z+x)(x+y)=A(x+y+z)^3+B(x+y+z)(yz+zx+xy)+Cxyz$ トオクル。ソコデ $y=-z$ トオクト，左邊ハ 0 トナリ，右邊ハ $Ax^3+Bxz(-z)+Cx(-z)z\equiv 0$ トナル。從テ $A=0$, $B+C=0$ トナル。ソコデ左邊ノ x^2z ノ係數ハ B デ，左邊ハ 1 デアルカラ $B=1=-C$ トナル。サレバ $(y+z)(z+x)(x+y)\equiv(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz$ トナル，トコロガ (1), (2), (3) ニヨリ $xyz=36$ トナル。サレバ根ト係數ノ關係(83頁)ニヨリ x, y, z ハ $t^3-10t^2+33t-36=0$ ノ根デアル，コノ根ハ觀察ニヨリ $t=3, 3, 4$ デアルカラ求ムル解ハ $x, y, z=3, 3, 4$; $3, 4, 3$; $4, 3, 3$ トナル。

一般ニ對稱方程式ハ $x+y+z$, $yz+zx+xy$, xyz ノ値ヲ求メテコレヲ係數トスル，三次方程式ヲ作リテ之ヲ解キテ x, y, z ノ解ガ得ラレル。

例 1. $x+y+z=15$......(1), $x^3+y^3+z^3=495$......(2), $yxz=105$......(3) ヲトケ。

講義 先ヅ $x^3+y^3+z^3=A(x+y+z)^3+B(x+y+z)(yz+zx+xy)+Cxyz$ トオイテ A, B, C ヲ求ムルト，$A=1$, $B=-3$, $C=3$ トナル，ソコデ (1), (2), (3) ノ値ヲ代入スルト，$yz+zx+xy=71$ トナル。サレバ x, y, z ハ $t^3-15t^2+71t-105=0$ ノ根デアル。ソコデ觀察ニヨリテ $t=3, 5, 7$ トナルカラ求ムル解ハ $x, y, z=3, 5, 7$; $3, 7, 5$; $5, 3, 7$; $5, 7, 3$; $7, 3, 5$; $7, 5, 3$ デアル。

例 2. $x+y+z=a$......(1), $x^2+y^2+z^2=b^2$......(2), $x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3$ ......(3) ハ聯立スルヤ否ヤ

講義 先ヅ (1), (2), (3) ガ聯立スルト，$(1)^2-(2)$ ヲ作リ，$xy+yz+zx=\frac{a^2-b^2}{2}$..(4)

トナル。トコロガ (3) ノ左邊ハ $x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ トナルカラ (3) ヨリ

$$a\left(b^2-\frac{a^2-b^2}{2}\right)=c^3 \quad \text{卽チ} \quad a(3b^2-a^2)=2c^2....(5)$$

ガ得ラレル。卽チ (5) ガ成リ立ツトキ聯立シ，コノトキハ (1) ト (2) ヲ滿足スル値ニヨリテ成立スルカラ不定トナル。

例 3. $3x+3y-2z=6$......(1), $2x^2+2y^2-3z^2=8-5z$......(2), $yz+zx+xy=z^2+2z$......(3) ヲ解ケ。

講義 與ヘラレタル方程式ハ x, y ニ付テノ對稱式デアルコトニ着眼シテ x, y ヲ消去スル，其レニハ (1) ヨリ $x+y=\frac{1}{3}(6+2z)$, (3) ヨリ $xy=z^2+2z-\frac{1}{3}(6z+2z^2)=\frac{1}{3}z^2$ トナル，コレヲ (2) ニ代入スルト，$2\left[\frac{1}{9}(6+2z)^2-\frac{2}{3}z^2\right]-3z^2=8-5z$, 卽チ $-31z^2+93z=0$ トナル。サレバ $z=0$ 或ハ $z=3$ トナル。$z=0$ ナルトキ (1) ト (3) ハ $x+y=1$....(1)′, $xy=0$....(3)′ トナル，サレバ $t^2-2t=0$, 從テ $t=0$ 或ハ 2 トナルカラ $x=0$, $y=2$ 或ハ $x=2$, $y=0$ トナル。

又 $z=3$ ナラバ (1) ハ $x+y=4$....(1)″; (3) ハ $xy=3$....(3)″ トナル。サレバ $t^2-4t+3=0$, 卽チ $t=3$ 或ハ 1 トナル。從テ $x=1$, $y=3$; 或ハ $x=3$, $y=1$ トナル。

サレバ求ムル解ハ $x=0$, $y=2$, $z=0$; $x=2$, $y=0$, $z=0$; $x=1$, $y=3$, $z=3$; $x=3$, $y=1$, $z=3$. トナル。

練習 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $x+y=5z$, $x^2+y^2=13z$, $x^3+y^3=35z$.

答 $x, y, z=0, 0, 0$; $3, 2, 1$; $2, 3, 1$; $\frac{1}{5}(7+\sqrt{42})$, $\frac{1}{5}(7-\sqrt{42})$, $\frac{14}{25}$; $\frac{1}{5}(7-\sqrt{42})$, $\frac{1}{5}(7+\sqrt{42})$, $\frac{14}{24}$.

(2) $x+y-z=a$, $x^2+y^2+z^2=b$, $2xy+z(x+y)=c$.

(3) $x+y+z=a$, $yz=bx$, $x^2+y^2+z^2=c^2$.

49. 消去問題

例 1. $x+y+z=a$...(1), $x^2+y^2+z^2=b^2$...(2), $x^3+y^3+z^3=c^3$...(3), $xyz=d^3$......(4) ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ

講義 對稱式ナル·コトニ着眼シテ $(1)^2-(2)$ ヲ作ルト，$2(xy+yz+zx)=a^2-b^2 \ldots\ldots(5)$ トナル。ソコデ (3) ノ左邊ハ

$$x^3+y^3+z^3=\mathrm{A}(x+y+z)^3+\mathrm{B}(x+y+z)(xy+yz+zx)+\mathrm{C}xyz$$

トオクコトガ出來ルコトハ對稱式ノ性質(77頁)ヨリ明ラカデアル。未定係數 A, B, C ハソレゾレ $\mathrm{A}=1,\ \mathrm{B}=-3,\ \mathrm{C}=3$ トナル。サレバ (3) ハ

$(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz=c^3$ トナル。ソコデ (1), (4), (5) ヲ代入シテモ成リ立ツベキデアル，即チ $a^3-\dfrac{3}{2}a(a^2-b^2)+3d^3=c^3$ 即チ $a^3+2c^3-6d^3-3ab^2=0$ トナル。

練習

(1) $x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=b^2;\ x^3+y^3+z^3=c^3,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{d}$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

注意 最後ノ式ハ $\dfrac{yz+zx+xy}{yxz}=\dfrac{1}{d}$ ナルコトニ着眼シ，上例ト全ク同樣ニシテ x, y, z ヲ消去セヨ。

答 $2(a^3-c^3)=3(a^2-b^2)(a-d)$.

(2) $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1},\ x^2+y^2+z^2=b^2,\ x^3+y^3+z^3=c^3,\ xyz=d^3$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

答 $c^3-3d^3=\sqrt{b^2+\dfrac{2d^3}{a}}\left(b^2-\dfrac{d^3}{a}\right)$，コレヲ有理化シテ

$a^3(c^3-3d^3)^2=(ab^2+2d^3)(ab^2-d^3)^2$.

(3) $x+y+z=-a,\ x^2+y^2-z^2=0,\ xy+yz+zx=b,\ xyz=-c$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

答 $a^6-6a^4b+8a^3c+8a^2b^2-16abc+8c^2=0$.

例 2. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\alpha \ldots\ldots(1),\ \dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\beta \ldots\ldots(2),$

$\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=\gamma \ldots\ldots(3)$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

講義 先ヅ (1) ヨリ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}=\alpha-\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\alpha-\dfrac{x}{y},\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}=\alpha-\dfrac{y}{z}$ トナルカラ

之レ等ヲ (3) ニ代入スルト，$\left(\alpha-\dfrac{z}{x}\right)\left(\alpha-\dfrac{x}{y}\right)\left(\alpha-\dfrac{y}{z}\right)=\gamma$ トナルベキデアル。即チ

$\alpha^3-\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\alpha^2+\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}\right)\alpha-1=\gamma$ トナル。トコロガ (2), (1) ヲ上式ニ代入スルト，$\alpha^3-\alpha^3+\beta\alpha-1=\gamma$ ガ成立ツベキデアル，即チ $\alpha\beta-1=\gamma$ トナル，コレ求ムル消去ノ終結式デアル。

例 3. $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=a \ldots\ldots(1),\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=b \ldots\ldots(2),\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=c \ldots\ldots(3)$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

講義 (1), (2), (3) ガ成リ立ツカラ又 $(1)\times(2)\times(3)$、即チ

$2+\dfrac{z^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{y^2}=abc$ ガ成リ立ツ。トコロガ (1) ヨリ $\dfrac{z^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}=a^2-2$, (2) ヨリ $\dfrac{z^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{z^2}=b^2-2$, (3) ヨリ $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=c^2-2$ トナルカラ之レ等ヲ上式ニ代入シテ $a^2+b^2+c^2=abc+4$ ガ得ラレル。

練習 次ニ於テ x, y, z ヲ消去セヨ。

(1) $\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{yz}{x^2}=l,\ \dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{zx}{y^2}=m,\ \dfrac{z^2}{xy}+\dfrac{xy}{z^2}=n.$

答 $l^2+m^2+n^2-lmn=4$.

(2) $c\dfrac{y}{z}+b\dfrac{z}{y}=2f,\ a\dfrac{z}{x}+c\dfrac{x}{z}=2g,\ b\dfrac{x}{y}+a\dfrac{y}{x}=2h.$

答 $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.

~~(3) $y^2+z^2=ayz,\ z^2+x^2=bzx,\ x^2+y^2=cxy.$~~

注意 與ヘラレタル方程式ヲソレゾレ yz, zx, xy デワレ。カクシテ例 3 トナル。

(4) $x^2(y+z)=a^2,\ y^2(z+x)=b^2,\ z^2(x+y)=c^2,\ xyz=abc.$

注意 初メノ三方程式ヲ邊々カケテ $x^2y^2z^2(y+z)(z+x)(x+y)=a^2b^2c^2$ トナリ，第四方程式ノ値ヲ代入スルト $(y+z)(z+x)(x+y)=1$ 即チ $2xyz+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=1$ トナルコトニ着眼セヨ。 答 $2abc+a^2+b^2+c^2=1$.

(5) $bx^2+lx+c=0,\ cy^2+my+a=0,\ az^2+nz+b=0,\ xyz=1.$

注意 各式ハソレゾレ $bx+\dfrac{c}{x}=-l,\ cy+\dfrac{a}{y}=-m,\ az+\dfrac{b}{z}=-n$ ナルコトニ注意シテ前諸題ノ樣ニシテ求メヨ。 答 $al^2+bm^2+cn^2+lmn=4abc$.

(6) $ax+yz=bc,\ by+zx=ca,\ cz+xy=ab,\ xyz=abc.$

答 $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2.$

(7) $(z+x-y)(x+y-z)=ayz,\ (x+y-z)(y+z-x)=bzx,$

$(y+z-x)(z+x-y)=cxy.$

注意 邊々カケテ $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=\pm\sqrt{abc}\,xyz$ トナル。コレヲ第一式，第二式，第三式デ順次ワルト，$y+z-x=\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{a}x,\ x+z-y=\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{b}y,\ x+y-z=\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{c}z$ トナル。ソコデ各式ニソレゾレ $2x, 2y, 2z$ ヲ兩邊ニ加ヘルト

$x+y+z=\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{a}+2\right)x,\ x+y+z=\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{b}+2\right)y,\ x+y+z=\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{c}+2\right)z$ トナル，

從テ $\dfrac{x}{x+y+z}=1\Big/\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{a}+2\right),\ \dfrac{y}{x+y+z}=1\Big/\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{b}+2\right),$

$\dfrac{z}{x+y+z}=1\Big/\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{c}+2\right)$ トナルコトニ着眼シテ x, y, z ヲ消去シ，有理化シテ

$(a+b+c-4)^2=abc$ トナル。

例 4. $x^3-a^3=y^3-b^3=z^3-c^3=xyz,\ \dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z}=\dfrac{d^3}{x+y+z}$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

講義 第一ノ等式ヨリ $x^3-a^3=xyz,\ y^3-b^3=xyz,\ z^3-c^3=xyz$ ヲ導キ，カクシテ $\dfrac{a^3}{x}=x^2-yz,\ \dfrac{b^3}{y}=y^2-zx,\ \dfrac{c^3}{z}=z^2-xy$ ガ得ラレルカラ邊々加ヘテ與ヘラレタル第二式ヨリ

$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=\dfrac{d^3}{x+y+z}$ 即チ $x^3+y^3+z^3-3xyz=d^3$ ガ得ラレルコトニ着眼シテ第一式ノ各値ヲ代入スルト，$a^3+b^3+c^3=d^3$ ガ得ラレル。

第八章

三次ト四次方程式ノ代數的解法

XVIII. 方程式ノ變換

50. 特種ノ變換 サテ與ヘラレタル方程式 $f(x)=0$ アリテ其ノ方程式ノ根ト與ヘラレタル關係ニアル値ヲ根トスル他ノ方程式 $\varphi(x)=0$ ヲ作ルコトハ屢々起ル，斯カル方程式ヲ作ルコトヲ與ヘラレタル方程式 $f(x)=0$ ヲ變換スルト云フ，而シテ最モ屢々採用セラルヽ變換ハ次ノ通リデアル。

I. 與ヘラレタル方程式ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ トスルトキ，$-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots\ldots, -\alpha_n$ ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

求メ方 與ヘラレタル方程式ヲ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots.+p_{n-1}x+p_n=0$$

トセバ $y=-x$ 或 $x=-y$ トオクトキハ求ムル方程式ハ

$$p_0(-y)^n+p_1(-y)^{n-1}+p_2(-y)^{n-2}+\ldots.+p_{n-1}(-y)+p_n=0$$

或ハ
$$(-1)^n[p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\ldots.+(-1)^{n-1}p_{n-1}y+(-1)^np_n]=0$$

或ハ
$$p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\ldots.+(-1)^np_n=0$$

トナル。

例 1. 方程式 $x^3+2x^2-3x-4=0$ ノ根ノ符號ヲ變ヘタル値ヲ根トスル方程式ヲ求ム。

講義 $y=-x$ 或ハ $x=-y$ トオクト，求ムル方程式ハ

$$(-y)^3+2(-y)^2-3(-y)-4=0$$

或ハ
$$-y^3+2y^2+3y-4=0$$

或ハ
$$y^3-2y^2-3y+4=0$$

トナル。

II. 與ヘラレタル方程式ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

與ヘラレタル方程式ヲ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

トシ，$y=\dfrac{1}{x}$ 或ハ $x=\dfrac{1}{y}$ トオクトキハ求ムル方程式ハ

$$p_0\left(\frac{1}{y}\right)^n+p_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)+p_n=0$$

或ハ $$p_ny^n+p_{n-1}y^{n-1}+\ \ldots+p_2y^2+p_1y+p_0=0.$$

例 2. 方程式 $x^3-3x^2+7x-2=0$ ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ヲ求ム。

講義 $y=\dfrac{1}{x}$ 或ハ $x=\dfrac{1}{y}$ トオクト，求ムル方程式ハ

$$\left(\frac{1}{y}\right)^3-3\left(\frac{1}{y}\right)^2+7\left(\frac{1}{y}\right)-2=0$$

或ハ $$1-3y+7y^2-2y^3=0$$

或ハ $$2y^3-7y^2+3y-1=0$$

例 3. 根ガ調和級數ヲナストキ方程式 $105x^3-142x^2+60x-8=0$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ與ヘラレタル方程式ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ヲ求ムレバ $8x^3-60x^2+142x-105=0$ トナル，而シテコノ根ハ等差級數ヲナスコトニナル，サレバ此ノ方程式ノ根ノ和ハ $\dfrac{60}{8}$ 或ハ $\dfrac{15}{2}$ トナル，トコロガ根ノ和ハ中項ノ三倍デアルカラ中項ハ $\dfrac{5}{2}$ トナル，サレバ，上ノ方程式ハ

$$(2x-5)(4x^2-20x+21)=0$$

或ハ $$(2x-5)(2x-3)(2x-7)=0$$

トナル，從テ求ムル根ハ $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{2}{7}$, トナル。

例 4. 方程式

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

ノ根ヲ α, β, γ ……トスルトキ

$$\Sigma\frac{1}{\alpha} \text{ 及ビ } \Sigma\frac{1}{\alpha^2}$$

ヲ求メヨ。

講義 $\alpha'=\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta'=\dfrac{1}{\beta}$, ……トスレバ α', β', γ', ……ヲ根トスル方程式ハ

$$p_ny^n+p_{n-1}y^{n-1}+p_{n-2}y^{n-2}+\ldots\ldots p_1y+p_0=0$$

デアル。

サレバ $$\Sigma\alpha'=-\frac{p_{n-1}}{p_n},\ \Sigma\alpha'^2=(\Sigma\alpha')^2-2\Sigma\alpha'\beta'$$

$$=\frac{p^2_{n-1}}{p_n^2}-2\frac{p_{n-2}}{p_n}$$

トナル。

III. 方程式 $f(x)=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\alpha_n$ トスルトキ，$m\alpha_1, m\alpha_2, \ldots\ldots m\alpha_n$ ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

求メ方 與ヘラレタル方程式ヲ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

トシ，$y=mx$, 或ハ $x=\dfrac{y}{m}$ トオクトキハ求ムル方程式ハ

$$p_0\left(\frac{y}{m}\right)^n+p_1\left(\frac{y}{m}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{y}{m}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(\frac{y}{m}\right)+p_n=0$$

或ハ $$p_0y^n+p_1my^{n-1}+p_2m^2y^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}m^{n-1}y+p_nm^n=0$$

トナル。

例 5. 方程式 $x^4-2x^3-3x^2+4x-5=0$ ノ根ノ 10 倍ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

講義 $y=10x$ 或ハ $x=\dfrac{y}{10}$ トオクト，求ムル方程式ハ

$$\left(\frac{y}{10}\right)^4-2\left(\frac{y}{10}\right)^3-3\left(\frac{y}{10}\right)^2+4\left(\frac{y}{10}\right)-5=0$$

或ハ $$y^4-20y^3-300y^2+4000y-50000=0$$

トナル。

例 6. 方程式 $x^3-7x+6=0$ ノ一根ハ他數ノ二倍ナルコトヲ知リテ方程式ヲ解ケ。

講義 先ヅ與ヘラレタル方程式ノ根ノ 2 倍ヲ根トスル方程式ヲ作ルニ，$y=2x$ 或ハ

$x=\frac{y}{2}$ トオクト，方程式

$$\left(\frac{y}{2}\right)^3-7\left(\frac{y}{2}\right)+6=0$$

或ハ $$y^3-28y+48=0$$

ノ根ハ與ヘラレタル方程式ノ根ノ 2 倍デアル，サレバ方程式

$$x^3-7x+6=0 \quad 及ビ \quad x^3-28x+48=0$$

ハ共通ノ一根ヲ有シ，其レハ與ヘラレタル方程式ノ一根トナル而シテ其ハ $x-2$ デアル，従テ 2 ト 1 ハ與ヘラレタル方程式ノ根トナル，サレバ

$$x^3-7x+6=(x^2-3x+2)(x+3)$$

トナル，故ニ與ヘラレクル方程式ノ根ハ -3, 1 及ビ 2 デアル。

IV. 與ヘラレタル方程式ノ根ト一定數ダケノ差ヲ有スル値ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

求メ方 與ヘラレタル方程式ヲ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_{n-1}x+p_n=0$$

トシ，$y=x+h$，或ハ $x=y-h$ トオクトキハ求ムル方程式ハ

$$p_0(y-h)^n+p_1(y-h)^{n-1}+p_2(y-h)^{n-2}+\dots+p_{n-1}(y-h)+p_n=0$$

トナル。

例 7. 方程式 $x^3-4x^2-17x+60=0$ ノ一根ハ他ノ一根ヨリ 2 ダケ大ナルコトヲ知リテ方程式ヲトケ。

講義 先ヅ與ヘラレタル方程式ノ根ヨリ 2 ダケ大ナル値ヲ根トスル方程式ヲ求ムルニ，$y=x+2$ 或ハ $x=y-2$ トオケバ

$$y^3-10y^2+11y+70=0$$

トナル。

サレバ $$x^3-4x^2-17x+60=0 \quad ト \quad x^3-10x^2+11x+70=0$$

トハ共通根ヲ有シ，其ハ與ヘラレタル方程式ノ他ノ根ヨリ2ダケ大デアル，而シテ共通ノ根ハ $x-5=0$ デアルカラ，與ヘラレタル方程式ハ 5 ト 3 ヲ根トスル，従ツテ

$$x^3-4x^2-17x+60=(x^2-8x+15)(x+4)$$

トナル，サレバ求ムル根ハ -4, 3 ト 5 トナル。

例 8. 方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

ヨリ第二項ヲ除去セヨ。

講義 先ヅ $y=x+h$ 或ハ $x=y-h$ トオクト，與ヘラレタル方程式ハ

$$(y-h)^3+p(y-h)^2+q(y-h)+r=0$$

或ハ $$y^3+y^2(p-3h)+y(3h^2-2ph+q)-h^3+ph^2-qh+r=0$$

トナル。

ソコデ y^2 ノ係數

$$p-3h$$

ヲ零ナラシムル h ノ値，即チ

$$h=\frac{p}{3}$$

ヲ h ニ與ヘルト，y^2 ノ係數ハ零トナリ，而シテ方程式ハ

$$y^3+y\left(3\cdot\frac{p^2}{9}-2p\cdot\frac{p}{3}+q\right)-\frac{p^3}{27}+p\cdot\frac{p^2}{9}-q\cdot\frac{p}{3}+r=0$$

或ハ $$27y^3+9(3q-p)y+2p^3-9pq+27r=0$$

トナル，コレ求ムル方程式デアル。

51. 一般ノ有理變換

先ヅ方程式 $f(x)=0$ ト $y=-x$ トノ間デ x ヲ消去スルトキハ終結式トシテ $f(-y)=0$ ガ得ラレル，而シテ $f(-y)=0$ ノ根 y ト $f(x)=0$ ノ根 x トノ間ニハ $y=-x$ ナル關係デ結ビ付ケラルルノデアル，ソコデ一般ニ $f(x)=0$ ト $y=\varphi(x)$ ($\varphi(x)$ ハ有理式)トノ間デ x ヲ消去シテ，$F(y)=0$ ガ得ラレ，其ノ根ト $f(x)=0$ ノ根トノ間ニハ $y=\varphi(x)$ ナル關係ガ成立スル，従テ $f(x)=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots\alpha_n$ トスルト，$F(y)=0$ ノ根ハ $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots\dots, \varphi(\alpha_n)$ トナルコトハ明ラカデアル，上述ノ變換及ビ II III IV ノ變換ハ此ノ一般ノ變換ノ特別ノ場合ニ外ナラナイ。

例 1. α, β, γ ガ方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

ノ根ナルトキ $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ ヲ根トスル方程式ヲ求ム。

講義 求ムル方程式ヲ $F(y)=0$ トスルト，$y=\varphi(x)$ ノ $\varphi(x)$ ヲ求ムルニ，

$$y=\beta\gamma=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=-\frac{r}{\alpha}$$

又

$$y=\gamma\alpha=\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta}=-\frac{r}{\beta}$$

最後ニ

$$y=\alpha\beta=\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma}=-\frac{r}{\gamma}$$

トナルカラ

$$xy=-r \quad y=-\frac{r}{x}$$

ナル關係ガ得ラレル，

サレバ

$$x=-\frac{r}{y}$$

トナル，從テ求ムル方程式ハ

$$\left(-\frac{r}{y}\right)^3+p\left(-\frac{r}{y}\right)^2+q\left(-\frac{r}{y}\right)+r=0$$

或ハ

$$y^3-qy^2+pry-r^2=0$$

例 2. α, β, γ ヲ方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

ノ根ナルトキ $\alpha^2-\beta\gamma,\ \beta^2-\gamma\alpha,\ \gamma^2-\alpha\beta$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

講義 先ヅ $\quad y=\alpha^2-\beta\gamma$

トオクト，

$$=\alpha^2-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=\alpha^2+\frac{r}{\alpha}$$

トナル。

サレバ

$$y=x^2+\frac{r}{x}$$

トオクト，x ガ α, β, γ ナルトキ，y ハ $\alpha^2-\beta\gamma,\ \beta^2-\gamma\alpha,\ \gamma^2-\alpha\beta$ トナル，從テ方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0 \quad ト \quad x^3-xy+r=0$$

ノ間ニテ x ヲ消去スルトキハ y ニ付テノ終結式ヲ求ムル方程式デアル

ソコデ上ノ二ツノ方程式ヲ邊々相減ジテ

$$px^2+x(q+y)=0 \quad 或ハ \quad x=-\frac{q+y}{p}$$

ガ得ラレル

サレバ求ムル方程式ハ

$$\left(-\frac{q+y}{p}\right)^3+p\left(-\frac{q+y}{p}\right)^2+q\left(-\frac{q+y}{p}\right)+r=0$$

或ハ $\quad -(y+q)^3+p^2(y+q)^2-qp^2(y+q)+rp^3=0$

或ハ $\quad y^3-(p^2-3q)y^2+q(3q-p^2)y+q^3-p^3r=0$

トナル。

練習

(1) α, β, γ ガ方程式

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

ノ根ナルトキハ $\beta\gamma+\dfrac{1}{\alpha},\ \gamma\alpha+\dfrac{1}{\beta},\ \alpha\beta+\dfrac{1}{\gamma}$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

注意 $\quad y=\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\beta\gamma+1}{\alpha}=\frac{r+1}{\alpha}$

トナル，サレバ x ト y トノ關係ハ $xy=1+r$ トナル。

答 $\quad ry^3-q(1+r)y^2+p(1+r)^2y-(1+r)^3=0.$

(2) 上記ニ於テ

$$\alpha\beta+\alpha\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma,\ \beta\gamma+\alpha\gamma$$

ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

注意 x ニ對シテ $\dfrac{r}{q-y}$ トオケ。 答 $\quad y^3-2qy^2+(pr+q^2)y+r^2-pqr=0$

(3) (1) ニ於テ

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha},\quad \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta},\quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$$

ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

注意 x ニ對シテ $\dfrac{py}{1+2y}$ トオケ。

答 $\quad (p^3-4pq+8r)y^3+(p^3-4pq+12r)y^2+(6r-pq)y+r=0.$

(4) α, β, γ ガ方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

ノ根ナルトキ，

$$\frac{\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-2\alpha},\quad \frac{\gamma\alpha-\beta^2}{\gamma+\alpha-2\beta},\quad \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}$$

ヲ根トスル方程式ハ次ノ變換式 $axy+b(x+y)+c=0$

ニヨリテ得ラルルコトヲ證セヨ。

XIX. 三次ト四次方程式ノ解法

52. 三次方程式ノ解法 完全三次方程式ハ常ニ前欵ノ變換法ニヨリテ x^2 ノ項ヲ除イタ方程式

$$x^3+qx+r=0$$

ノ形ニ變換セラルヽカラ，カヽル形ノ方程式ノ解法ヲ研究スレバ充分デアル，次ニ Cardan ノ法ト稱セラルヽ方法ヲ述ベルガ，尤モ此ノ方法ハ實用上寧ロ迂遠ナル方法デ，三根ノスベテガ實根ナル際ハ其レ等ヲ實數ノ形ニ表ハスコトガ出來ナイ，概シテ根ノ一ツガ簡單ナル整數デアルトキハ視察ニヨリ，又根ガ分數ナルトキハ Horner ノ方法デ求ムルコトガ出來ル。

53. Cardan ノ方法 サテ方程式

$$x^3+qx+r=0$$

ニ於テ，$x=y+z$ トオクトキハ

$$x^3=3yz(y+z)+y^3+z^3$$

トナリ，而シテ方程式ハ

$$(3yz+q)(y+z)+y^3+z^3+r=0$$

トナル。

爰ニ二ツノ未知數 y ト z ガ存在スルカラ，尙ホ

$$3yz+q=0$$

トオクコトガ出來ル，從テ

$$y^3z^3=-\frac{q^3}{27},\ 及ビ\ y^3+z^3=-r.$$

トナル。

斯クシテ y^3 ト z^3 ノ積ト和ヲ知ルカラ，此レ等ハ方程式

$$t^2+rt-\frac{q^3}{27}=0$$

ノ根デアル。

サレバ $y^3=-\dfrac{r}{2}+\sqrt{\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}}$ ト $z^3=-\dfrac{r}{2}-\sqrt{\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}}$

トナル，從テ

$$\left\{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}=m,\ \left\{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}=n$$

トオキ，且ツ. 1, ω, ω^2 ヲ 1 ノ三ツノ立方根トスルト，

$$y=m,\ \omega m,\ \omega^2 m,\ z=n,\ \omega n,\ \omega^2 n$$

トナル，トコロガ $x=y+z$ デアルカラ，二ツ宛組合セテ x ノ値トシテ，9 組ガ得ラレルコトトナル，コハ $yz=-\dfrac{q}{3}$ ノ代リニ，$y^3z^3=-\left(\dfrac{q}{3}\right)^3$ ヲ採用シタ結果デ，唯ダ $yz=-\dfrac{q}{3}$ ヲ滿足スルモノノミヲ撰定スルト，m ト n；ωm ト $\omega^2 n$；$\omega^2 m$ ト ωn ダケデアル，サレバ求ムル根ハ

$$m+n,\ \omega m+\omega^2 n,\ \omega^2 m+\omega n$$

デアル。

54. 吟味 次ニ q ト r ガ實數ナルトキ根ノ性質ヲ吟味スルニ，其ハ $\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}$ ニ關係ヲ有スルコトガ，上述ノ解法ヨリ明ラカデアル。

I. $\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}>0$，ナルトキハ一根ハ實數ニシテ他ハ虛數デアル.

何トナレバ m, n ハ共ニ實數ナルガ故ニ $\omega m+\omega^2 n$ ト $\omega^2 m+\omega n$ トハ共軛虛數トナル。

II. $\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}\leqq 0$ ナルトキハ三根共ニ實數デアル.

此ノ場合ノ中 $\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}=0$ ナル場合ハ $m=n$ トナリ, 而シテ

$$\omega m+\omega^2 n=m(\omega+\omega^2)=m(-1)=-m$$

$$\omega^2 m+\omega n=m(\omega^2+\omega)=m(-1)=-m$$

トナル, サレバ三根共ニ實數ナルコトヲ知ル, サレドモ $\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}<0$ ナルトキハ三根トモ虚數ノ形ヲナシテ, 一見虚根ノ如シ, 此等ハスベテ實數ナルコトノ證明ハ附録第二方程式餘論（　頁）參照セヨ。

例 1. $x^3-6x^2+6x-2=0$ ヲ解ケ。

講義 先ヅ $x=y+2$ ト置換シテ與ヘラレタル方程式ヲ變換スルト, $y^3+qy+r=0$ ノ形ニナリテ, $y^3-6y-6=0$ トナル。

サレバ $q=-6$, $r=-6$ トナルカラ求ムル根ハ

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\quad \sqrt[3]{4}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2,\quad \sqrt[3]{4}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega$$

從テ方程式ノ根ハ $2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$, $2+\sqrt[3]{4}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2$, $2+\sqrt[3]{4}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega$

例 2. 次ノ方程式ヲ公式ヲ用ヒズシテトケ, $x^3+3x-14=0$

講義 先ヅ $x=y+z$ トオクト, 與ヘラレタル方程式ハ

$$(3yz+3)(y+z)+y^3+z^3-14=0$$

トナル, ソコデ尙ホ $yz=-1$ トオクト, $y^3+z^3=14$, 及ビ $y^3z^3=-1$

故ニ y^3 ト z^3 ハ方程式 $t^2-14t-1=0$ ノ根デアル,

故ニ $y^3=7+\sqrt{50}=14.07$ ト $z^3=7-\sqrt{50}=-0.7$

故ニ $x=2.41\ldots\ldots-0.41\ldots\ldots=2$

サレバ與ヘラレタル方程式ハ $(x-2)(x^2+2x+7)=0$

トナリ, 根ハ 2, $-1+\sqrt{6}i$, ト $-1-\sqrt{6}i$ トナル。

55. 四次方程式ノ (Ferrari ノ) 解法

一般ノ四次方程式ヲ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ **(1)**

ト表ハスコトガ出來ル, 而シテ此ノ方程式ハ次ノ如ク書クコトガ出來ル,

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda\right)^2-\frac{a^2x^2}{4}-\lambda^2-2\lambda x^2-a\lambda x+bx^2+cx+d=0$$

或ハ $$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda\right)^2-x^2\left(\frac{a^2}{4}+2\lambda-b\right)-x(a\lambda-c)-(\lambda^2-d)=0$$

或ハ $$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda\right)^2-\left\{x^2\left(\frac{a^2}{4}+2\lambda-b\right)+x(a\lambda-c)+(\lambda^2-d)\right\}=0$$

トナル, サテ第二括弧内ノ項ハ

$$(a\lambda-c)^2=4(\lambda^2-d)\left(\frac{a^2}{4}+2\lambda-b\right)=(\lambda^2-d)(a^2+8\lambda-4b) \qquad (2)$$

ナルトキハ完全平方トナル, 而シテ上式ハ λ ノ三次方程式デアルカラ, 此ノ三次方程式ノ一根ヲ λ ニ代入スルト, x ニ付テノ先キノ方程式ハ $\left(x^2+\dfrac{a}{2}x+\lambda\right)^2-(\alpha x+\beta)^2=0$ トナル。 (3)

而シテ左邊ハ二ツノ二次因數ニ分解スルコトガ出來ルカラ, 與ヘラレタル四次方程式ノ四ツノ根ヲ求ムルコトガ出來ル。

例 1. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ ヲトケ。

講義 與式ハ $(x^2-5x+\lambda)^2-x^2(2\lambda-10)+2x(5\lambda-25)-\lambda^2+24=0$ トナル,

或ハ $(x^2-5x+\lambda)^2-\{(2\lambda-10)x^2-2(5\lambda-25)x+\lambda^2-24\}=0$ トナル。

從テ $\{\}$ ノ内ガ完全平方ナルタメニハ $(2\lambda-10)(\lambda^2-24)=(5\lambda-25)^2$ トナル。

コノ一根ハ $\lambda=5$ デアルカラ與式ハ $(x^2-5x+5)^2-1=0$ トナリ。從テ求ムル根ハ 1, 4, 2 ト 3 デアル。

例 2. $x^4-18x^2+32x-15=0$ ヲトケ。

講義 $(x^2+\lambda)^2-2\lambda x^2-\lambda^2-18x^2+32x-15=0$,

或ハ $(x^2+\lambda)^2-\{x^2(2\lambda+18)-32x+\lambda^2+15\}=0$ トナリ, $\{\}$ 内ガ完全平方ニナルタメニハ $(2\lambda+18)(\lambda^2+15)=16^2$ 卽チ $\lambda^3+9\lambda^2+15\lambda+7=0$ ナルコトヲ要スル。

コノ一根ハ $\lambda=-1$ デアルカラ與ヘラレタル方程式ハ

$(x^2-1)^2-(16x^2-32x+16)=0$, 或ハ $(x^2-1)^2-16(x-1)^2=0$,

或ハ $(x^2-4x+3)(x^2+4x-5)=0$ トナル。從テ求ムル根ハ 1, 1, 3, -5 デアル。

第九章

不等式ノ證明法

XX. 不等式ノ基礎性質

56. 不等 本章デ採用シテル文字ハ實數ノミニ付テ考究スルノデアルコトヲ先ヅ忘レテハナラナイ。

サテコレヨリ論ズルコトノ根抵ハ既ニ第一章不等ノ法則(4頁)ニ於テ述ベテキルガ，重要デアルカラ，コヽニ不等ノ定義ヨリ出發シテ嚴格ニ證明シテ根抵ヲ作ルコトヽスル。

不等 **二ツノ數 a ト b ニ付テ，$a-b>0$ ナルトキハ $a>b$，**
$a-b<0$ ナルトキハ $a<b$ デアルト云フ。

ソシテ不等號デ結バレタル式ヲ**不等式**ト云フノデアル。

定理 I. $a>b$, $b>c$ ナラバ $a>c$ デアル 何トナレバ $a>b$, $b>c$ デアルカラ定義ニヨリ $a-b>0$, $b-c>0$ デアル。サレバ $a-b+b-c>0$，即チ $a-c>0$，故ニ $a>c$ デアル。

定理 II. $a>b$ ナラバ $a+x>b+x$ デアル 何トナレバ $a>b$ デアルカラ $a-b>0$，トコロガ $a+x-(b+x)=a-b$ デアルカラ，假設ニヨリテ $a+x-(b+x)>0$，從テ $a+x>b+x$ デアル。

注意 コレハ不等式ニ於テモ移項ガ許サルヽコトヲ意味スルノデアル。

定理 III. $x>0$ デ $a>b$ デアレバ $ax>bx$ 又ハ $\dfrac{a}{x}>\dfrac{b}{x}$; $x<0$ デ $a>b$ ナラバ $ax<bx$ 又ハ $\dfrac{a}{x}<\dfrac{b}{x}$ デアル 何トナレバ $a>b$ デアルカラ $a-b>0$. 從テ $x>0$ ナラバ $x(a-b)>0$. サレバ $ax>bx$ デアル。又 $x<0$ ナラバ $x(a-b)<0$ デアルカラ，$ax<bx$ デアル。

注意 コノ定理ハ等式ト其ノ趣ガ異ナルカラ，特ニ注意シナケレバナラナイ。特ニ兩邊ノ符號ヲ變更スルコトハ兩邊ニ -1 ヲカケルコトデアル，從テ不等號ノ向キガ變ルコトニ注意セヨ。

定理 IV. $a>b$, $a'>b'$ ナラバ，$a+a'>b+b'$ デアル.
何トナレバ $a-b>0$, $a'-b'>0$ デアルカラ，$a-b+a'-b'>0$ 從テ定理 II ニヨリテ $a+a'>b+b'$ デアル。

注意 コノ定理中ニモ $a-a'>b-b'$ ガ含マルヽ樣ニ考ヘラレルノハ等式ノ習慣ノタメデアルガ，コノコトハ**成立セズ**，例ヘバ $10>7$ デアリ，$9>2$ デアレバ $10-9>7-2$ トナルコトガ出來ナイカラデアル。併シ次ノ定理 V ハ成立ツ。又 $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$,.... ノトキハ $a+a'+a''+....>b+b'+b'+....$ トナル。

定理 V. $a>b$, $a'>b'$ デアルトキ，$a-b'>b-a'$ デアル。
何トナレバ $a-b>0$, $a'-b'>0$ デアルカラ，$a-b+a'-b'>0$ デアル。從テ定理 II ニ由リ移項シテ $a-b'>b-a'$ トナル。

定理 VI. $a>b>0$, $a'>b'>0$ ナラバ，$a.a'>b.b'$ デアル。 何トナレバ定理 III ニヨリ $a>0$, $a'>b'$ デアルカラ $aa'>ab'$ トナル。又 $b'>0$, $a>b$ デアルカラ，$ab'>bb'$ トナル。サレバ $aa'>bb'$ デアル。

系 I. $a>b>0$, $a'>b'>0$, $a''>b''>0$,......ナルトキ，
$a.a'.a''$,......$>b.b'.b''$......デアル。

系 II. $a>b>0$ デ，且ツ n ガ正整數デアレバ，$a^n>b^n$ デアル。
何トナレバ系 I ニテ $a=a'=a''=....$, $b=b'=b''=....$ ノトキデアル

注意 n ガ偶數デ a, b ガ正負何レモ決定シナイトキニ $a^n>b^n$ トシテハナラナイ。例ヘバ $-3>-5$ デアルガ兩邊ヲ平方スルト $(-3)^2<(-5)^2$ トナル，又 $5>-7$ ノトキモ $25<49$ トナルカラデアル。

系 III. $a>b>0$ デ，且ツ n ガ正整數デアレバ $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ デアル。
何トナレバ $a>b>0$ ナルトキニ $a^{\frac{1}{n}}\leqq b^{\frac{1}{n}}$ トスルト，$a^{\frac{1}{n}}$, $b^{\frac{1}{n}}$ ハ根數 (110頁) デアルカラ共ニ正數デアル。サレバ系 II ニヨリ $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\leqq\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n$ 即チ $a\leqq b$ トナル。之假設ニ反スルカラ $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ デアル。

57. 絶對不等式ト條件不等式 例ヘバ $x^2+5>0$ ナル不等式

ハ式中ノ文字 x ニ實數値ノスベテヲ與ヘテモ成リ立ツ。カヽル不等式ヲ**絶對不等式**ト云フ。ソシテ例ヘバ定理 II ノ樣ニ $a>b$ ナルトキ $a+x>b+x$ ナル不等式デハ x ニスベテノ實數値ヲトルコトガ出來ルガ，a ト b トニ付テハ制限ガアル，カヽル不等式ヲ**條件不等式**ト云フノデアル。又 $x-1>0$ ナル不等式ハ或ル條件ノ下ニ於テノミ成リ立ツ條件不等式デ，其ノ條件 $x>1$ ヲ求ムルコトヲ**不等式ヲ解ク**ト云フノデアル。一般ニ

不等式中ニアル文字ニ如何ナル實數値ヲ與ヘテモ，常ニ成立スル不等式ヲ**絶對不等式**ト名ヅケ，又不等式中ニアル文字ニ或ル制限ガアルトキノミ成立スル不等式ヲ**條件不等式**ト名ヅケルノデアル。ソシテ文字ニ制限ガ與ヘラレテキル場合ハ**證明**シナケレバナラナイガ，與ヘラレテキナイ場合ハ其レヲ求メナケレバナラナイ，カヽル場合ニハ**不等式ヲ解ク**ト云フノデアル。

XXI. 條件不等式ノ證明法

58. 直接法 式ヲ變形シテ定義ト基礎定理ヲ適用シテ證明スルノデ其ノ例ハ既ニ基礎定理ノ證明デ知ラルル通リデアル。

(A) **整式**

例 1. $x>1$ ナルトキ x^3 ト x^2-x+1 トハ何レガ大ナルカ。

講義 大小ヲ調ベルニハ大小卽チ不等ノ定義ニ從テ二ツノ差ノ符號ヲ調ベレバ宜シ，卽チ $x^3-(x^2-x+1)=x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ トナル。ソコデ $x>1$ デアルカラ，$x-1>0$，又 $x^2+1>0$ デアル。サレバ $x^3-(x^2-x+1)>0$，故ニ $x^3>x^2-x+1$ デアル。

例 2. $x\neq1$ ナルトキ $3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 コレヲ證明スルニハ $3(1+x^2+x^4)-(1+x+x^2)^2>0$ ナルコトヲ示セバ良イ。ソコデ左邊ヲ變形スルニ，先ヅ $1+x^2+x^4=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ ナルコトニ氣ヲ付ケテ，

$$f(x)=3(1+x^2+x^4)-(1+x+x^2)^2=3(x^2-x+1)(x^2+x+1)-(1+x+x^2)^2$$
$$=(1+x+x^2)(2x^2-4x+2)=2(x-1)^2(1+x+x^2)$$

トナル。サテ $x\neq1$ デアルカラ $(x-1)^2>0$ デアル。又 $1+x+x^2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ デアル サレバ $f(x)>0$ トナル。從テ $3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2$ トナル。

練習 (1). a ト b ガ等シカラズシテ，共ニ正ナルトキ a^3-b^3 ト $3a^2(a-b)$ トハ何レガ大ナルカ。

(2). a ト b ガ相異ナルトキ $(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 $(a^4+b^4)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)^2=a^2b^2(a-b)^2$ トナルコトニ着眼セヨ。

例 3. a, b, c ガ悉ク相等シカラザルトキハ $a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅ二邊ノ差ノ符號ヲ調ベルタメニ差ヲトルト $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ トナル。トコロガ第二章恒等式ノ公式 (13頁) ニヨリテ，

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

トナル，ソシテ a, b, c ハ悉ク相等シクナイカラ，$(a-b)^2>0$，$(b-c)^2>0$，$(c-a)^2>0$ デ，

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab>0$$

デアル。$a=b=c$ ノトキハ 0 トナル。

別法 a, b, c ハ悉ク相等シクナイカラ $(b-c)^2>0$，$(c-a)^2>0$，$(a-b)^2>0$ デアル。從テ $b^2+c^2>2bc$，$c^2+a^2>2ca$，$a^2+b^2>2ab$ デアル。サレバ前節定理 IV ニヨリ邊々相加ヘテ，

$2(a^2+b^2+c^2)>2(bc+ca+ab)$ トナル。ソシテ定理 III ニヨリ兩邊ヲ 2 デ割レバ $a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$ トナル。

練習

(1) a, b, c ガ悉ク相等シカラザルトキハ $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2>bc+ca+ab$ ナルコトヲ證セヨ。

(2) a, b, c ガ正ニシテ，悉クハ相等シカラザルトキハ $a^3+b^3+c^3>3abc$ ナルコトヲ示セ。

例 4. n ガ正整數ニシテ，且ツ 2 ヨリモ大ナルトキハ $(1.2.3\ldots\ldots n)^2>n^n$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ證明スベキ式ヲ變形シテ $(1.2.3\ldots\ldots n)\{n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots3.2.1\}>n^n$

トスル。ソコデ尙ホ

$(1.n)[2(n-1)][3,(n-2)][4(n-3)]\ldots\ldots[(n-2),3][(n-1).2][n.1]>n.\ n\ldots\ldots n$

トナス。コヽニ於テ $(n-r+1)r>n$ ト云フコトガ出來ル何トナレバ $n(r-1)>r(r-1)$ 卽チ $n>r>1$ ナラバ $n>r$ トナリ，コレハ常ニ成立ツ。

證明 サレバ $1.n=n$; $2.(n-1)>n$; $3(n-2)>n$; $\ldots$; $(n-2).3>n$; $(n-1).2>n$; $1.n=n$ トナルカラ，定理 V ニヨリテ邊々相乘ジテ $(1.2.3.\ldots\ldots n)(n\ldots\ldots3.2.1)>n^n$，卽チ $(1.2.3.\ldots\ldots n)^2>n^n$ トナル。

(B) 無理式

例 5. $a, b>0$, 且ツ $a \neq b$ ナルトキ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ナルコトヲ示セ。

講義 先ヅ兩邊ノ差ヲ變形スルニ，

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

トナル。ソコデ a, b ハ共ニ正デ，不等デアルカラ，$a>b>0$ デアルトスレバ $a-b>0$，又定理 IV 系 III (167頁) ニヨリ $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ 從テ $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ トナル。サレバ $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ トナル。又 $0<a<b$ ナラバ $a-b<0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$ トナル。從テ之モ亦 $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ トナル。

サレバ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})>0$ トナル。從テ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

例 6. x ガ 1 ヨリ小ナル正ノ數ナルトキハ $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ ト $\dfrac{x}{2}$ トノ差ハ $\dfrac{x^2}{2}$ ヨリ小ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅコノ事柄ヲ式ニテ示スト，$\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{x}{2}<\dfrac{x^2}{2}$ ナルコトデアル。

ソコデ今迄ノ樣ニ兩邊ノ差ヲトリテ，其ノ符號ヲ調ベルニ。

差ハ $\Delta=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2}$ トナルガ容易ニ減法ガ施サレナイカラ 先ヅ第一分數ノ分子ヲ有理化シテ見ルト，$\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\dfrac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ トナル。

$$\text{從テ}\quad \Delta=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{2(1+\sqrt{1-x^2})}-\frac{x^2}{2}=\frac{x}{2}\left[\frac{1-(1-x^2)}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}-x\right]$$
$$=\frac{x^2}{2}\left[\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}-1\right]$$

トナル。トコロガ $1+\sqrt{1-x^2}>1$ デアルカラ，$(1+\sqrt{1-x^2})^2>1$，又 $0<x<1$ デアル。サレバ $\dfrac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}<1$ トナル。從テ $\Delta<0$ トナル。サレバ $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{x}{2}<\dfrac{x^2}{2}$ トナル。

例 7. a, b ガ共ニ正ニシテ $a>b$ ナルトキハ $\dfrac{a}{2}\geqq\sqrt{2a(a-b)}-(a-b)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅΔヲ求ムルニ，$\Delta=\dfrac{a}{2}-\sqrt{2a(a-b)}+(a-b)=\dfrac{1}{2}\left[(3a-2b)-2\sqrt{2a(a-b)}\right]$ トナル。ソコデ

$$(3a-2b)-2\sqrt{2a(a-b)}=\frac{(3a-2b)^2-4[2a(a-b)]}{(3a-2b)+2\sqrt{2a(a-b)}}$$
$$=\frac{(a-2b)^2}{(3a-2b)+2\sqrt{2a(a-b)}}$$

トナル。サテ假設ニヨリ $a>b>0$ デアルカラ，$2\sqrt{a(a-b)}>0$, $3a>3b>2b$ デアルカラ，分母>0 ニシテ，分子ハ $a=2b$ ナルトキ 0 トナリ，$a\neq 2b$ ナルトキ正デアル。サレバ $(3a-2b)-2\sqrt{2a(a-b)}\geqq 0$ トナル。從テ $\dfrac{a}{2}\geqq\sqrt{2a(a-b)}-(a-b)$ トナル。

別法

$$\frac{a}{2}-[\sqrt{2a(a-b)}-(a-b)]=\frac{1}{2}[a-2\sqrt{a.2(a-b)}+2(a-b)]=\frac{1}{2}[\sqrt{a}-\sqrt{2(a-b)}]^2\geqq 0$$

トナル。

例 8. $1>a>0$ ニシテ，$\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1-a^2}$ ナル キハ $a>1-x>\dfrac{a^2}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 コノ問題ノ樣ニ二ツノ數ノ間ニ挾マレタルトキハ慾張ラズニ一ツ一ツ證明ヲ進メルノデアル。ソコデ先ヅ (A) $a>1-x\ldots\ldots(1)$ ヲ證明スルニ，$a-1>-x\ldots\ldots(2)$ ナルコトヲ證スレバ，定理 II ニヨリテ明ラカデアル。又 $1-a<x\ldots\ldots(3)$ ナルコトヲ證スレバ定理 II ニヨリテ (2) ガ成立チ，從テ (1) ガ成リ立ツ。トコロガ $\sqrt{1-a}<x$ナルコトヨリ定理 III ニヨリ $1-a<x^2\ldots\ldots(4)$ デアリ，$\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1-a^2}$ デアルカラ $0<x<1$，從テ定理 III ニヨリ $x^2<x$ トナル。サレバ (4) ヨリ，$1-a<x$ トナル。從テ (3) ガ成リ立チ，(2) ガ成立チ，(1) ガ成リ立ツ。

(B) 又 $1-x>\dfrac{a^2}{2}\ldots\ldots(1)$ ヲ證スルニ，$2(1-x)>a^2\ldots(2)$ ヲ證スレバ定理 III ニヨリ (1) ガ成リ立ツ。トコロガ $\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1-a^2}$ ヨリ $x^2<1-a^2$ トナルカラ，$1-x^2>a^2$ デアル，卽チ $(1+x)(1-x)>a^2$ トナル。トコロガ $2>1+x$ デアルカラ $2(1-x)>(1+x)(1-x)>a^2$ トナル。故ニ $1-x>\dfrac{a^2}{2}$ トナル。

サレバ $a>1-x>\dfrac{a^2}{2}$ トナル。

例 9. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ ノ三數ニ對シテ，$\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}$ ナル數ノ大小ヲ比較セヨ。但シ $\sqrt{\ }$ ハ正ナル根ヲ表ハスモノトス。

講義 先ヅ $\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}=\dfrac{a^2+1-(a^2-1)}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}$ トナル。ソコデ

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ トノ比較：$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}-(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})=\dfrac{-\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1})}$

トナル。トコロガ $a^2>1$ ナルコトハ $\sqrt{a^2-1}>0$ ナルコトヨリ明ラカデアル。從テ $\sqrt{a^2+1}>\sqrt{a^2-1}$ トナル，ソシテ分母 >0 デアル。

サレバ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}-(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})<0$, 故ニ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}$

(B) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ トノ比較：全ク同様ナル方法ニヨリ $\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}<\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ トナル。

(C) $\dfrac{1}{a}$ トノ比較：先ヅ $\dfrac{1}{a}-(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}$

$$=\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}-2a}{a(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1})}$$

今 $a<0$ ナレバ，$\dfrac{1}{a}<\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}$ トナルコト明ラカデアル。次ニ $a>0$ トスルト，分母 >0 デアルカラ分子ノ符號ヲ吟味スレバ宜シ $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}-2a$

$=\dfrac{(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1})^2-4a^2}{2a+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}=\dfrac{2\sqrt{a^4-1}-2a^2}{2a+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}$ トナル。トコロガ $a^4-1<a^4$ デアルカラ，定理 VI 系 III (167頁) ニヨテ，$\sqrt{a^4-1}<a^2$ トナル。從テ上式ノ分子ハ負數デアル，又分母 >0 デアルカラ，$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}-2a<0$ トナル。從テ $\dfrac{1}{a}<\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}$ トナル。サレバ以上ノ結果ヲマトメルト，

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}<\dfrac{1}{a}<\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}<\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ トナル。

例 10. 正數 A ノ正ノ平方根ノ不足ナル近似數中誤差ノ δ ヨリ小ナルモノヲ a トスレバ，$a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}<\sqrt{A}\leqq a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}+\dfrac{\delta^2}{4}\dfrac{1}{2a+\delta}$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義 前諸例ニ倣フテ分離シテ證明スルニ，

(I) $a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}-\sqrt{A}=\dfrac{A-a^2-(\sqrt{A}-a)(2a+\delta)}{2a+\delta}=\dfrac{(\sqrt{A}-a)[\sqrt{A}-(a+\delta)]}{2a+\delta}\ldots\ldots(1)$

トナル。トコロガ a, δ 何レモ正デ，且ツ $a<\sqrt{A}<a+\delta$ デアルカラ，$2a+\delta>0$, $\sqrt{A}-a>0$, $\sqrt{A}-(a+\delta)<0$ トナル。サレバ (1) ハ負トナル。從テ $a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}<\sqrt{A}$ トナル

(II) $a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}+\dfrac{\delta^2}{4}\dfrac{1}{2a+\delta}-\sqrt{A}=\dfrac{a(\overset{2a+\delta}{\cancel{a+2\delta}})+A-a^2+\dfrac{\delta^2}{4}-\sqrt{A}(2a+\delta)}{2a+\delta}$

$$=\frac{A-2\sqrt{A}\left(a+\frac{\delta}{2}\right)+\left(a+\frac{\delta}{2}\right)^2}{2a+\delta}=\frac{\left[\sqrt{A}-\left(a+\frac{\delta}{2}\right)\right]^2}{2a+\delta}\ldots\ldots(2)$$

トナル。トコロガ此ノ分子ハ $\sqrt{A}$ ガ $a+\dfrac{1}{2}\delta$ ニ等シキトキニ 0 トナルノミデ，他ノ値ノトキハ正デアル，又分母 >0 デアルカラ (2) ハ $\geqq 0$ トナル。サレバ

$\sqrt{A}\leqq a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}+\dfrac{\delta^2}{4}\dfrac{1}{2a+\delta}$ トナル。從テ $a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}<\sqrt{A}\leqq a+\dfrac{A-a^2}{2a+\delta}+\dfrac{\delta^2}{4}\dfrac{1}{2a+\delta}$

(C) 級數

例 11. a, b, c, d ガ皆正ニシテ，調和級數ヲナストキハ $bc<ad$ 及ビ $a+d>b+c$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義 a, b, c, d ガ調和級數ヲナスカラ $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{d}$ ガ等差級數デアル。ソコデ $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}=\delta$ トオクト，

$\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{d}=\left(\dfrac{1}{b}-\delta\right)\left(\dfrac{1}{c}+\delta\right)=\dfrac{1}{b.c}+\delta\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)-\delta^2=\dfrac{1}{b.c}-2\delta^2$

トナル。サレバ $\dfrac{1}{b.c}-\dfrac{1}{a.d}=\dfrac{1}{b.c}-\left(\dfrac{1}{b.c}-2\delta^2\right)=2\delta^2>0$ トナル。從テ $\dfrac{1}{b.c}>\dfrac{1}{a.d}$ トナル。

トコロガ a, , c, $d>0$ デアルカラ，$a.d>b.c$ トナル。

又 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 卽チ $\dfrac{a+d}{ad}=\dfrac{b+c}{bc}$ トナル。サレバ $a+d>b+c$ トナル。

例 12. 各項ガ正ナル等差級數ト等比級數トガ同一ノ初項，末項及ビ項數ヲ有スルトキハ等差級數ノ和ハ等比級數ノ和ヨリ大ナルコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ等比級數ヲ $a, ar, ar^2, \ldots. ar^{n-1}$ トスルト，等差級數ノ初項，末項ハソレゾレ a ト ar^{n-1} デ，其ノ n 項ノ和ハ $\dfrac{n}{2}(a+ar^{n-1})$ トナル。サレバ證明スルコトハ $\dfrac{n}{2}(a+ar^{n-1})>a+ar+ar^2+\ldots.+ar^{n-1}$ デアル。コヽニ $r\neq 1$ トス。

サテ $r\gtrless 1$ ナルトキ $r^k\gtrless 1$ トナルカラ，$(1-r^s)(1-r^t)>0$ 卽チ $1+r^{s+t}-r^s-r^t>0$ トナル。從テ $1+r^{s+t}>r^s+r^t$ トナル。ソコデ $s+t=n-1$ ニナル樣ニ s ヲ $1, 2, 3, \ldots. n-2$ トスルト，t ハ $n-2, n-3, \ldots, 1$ トナルカラ，次ノ不等式ガ成立ツ $1+r^{n-1}>r+r^{n-2}$; $1+r^{n-1}>r^2+r^{n-3}$; $\ldots 1+r^{n-1}>r^{n-2}+r$ トナル。ソシテ

$1+r^{n-1}=1+r^{n-1}$ ニシテ，$1+r^{n-1}=r^{n-1}+1$ トナル。カクシテコレ等ノ不等式ト二ツノ等式トヲ邊々相加ヘルト，$n(1+r^{n-1})>2(1+r+r^2+\ldots\ldots+r^{n-1})$ ガ得ラレル。

59. 間接法

コレヲ二ツニ分ケテ，公式ニヨル法ト歸納法トニスル。

(A) 公式ニヨル法

例 1. $l^2+m^2+n^2=1$, $l'^2+m'^2+n'^2=1$ ニシテ，$\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}$ ナラザルトキハ $-1<ll'+mm'+nn'<1$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 第二章恒等式ノ公式 (13頁) ニヨリ，

$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2\equiv(mn'-nm')^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-ml')^2$ デアル。トコロガ假設ニヨリ $l^2+m^2+n^2=1$, $l'^2+m'^2+n'^2=1$ デアルカラ，

$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=1$ デアリ，又 $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}$ デナイカラ

$mn'-m'n\neq0$, $n'l-n'l\neq0$, $lm'-l\,m\neq0$ デアルカラ，上式ノ右邊ハ正デアル，故ニ $(ll'+mm'+nn')^2<1$ トナル，従テ定理 VI 系 III (167頁) ニヨリ $|ll'+mm'+nn'|<1$ トナル。

練習

(1) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ad+bc)^2$ ナルコトヲ示セ。

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ ナルコトヲ證セヨ。

公式 (I) **$x, y>0$ ナルトキ $x+y\geqq2\sqrt{xy}$，但シ $x=y$ ナルトキニ等號ヲトル。**

(II) **$x, y, z>0$ ナルトキハ $x+y+z\geqq3\sqrt[3]{xyz}$，但シ $x=y=z$ ナルトキノミ等號ヲトル。**

證明 (I) $x+y-2\sqrt{xy}\equiv(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ トナル。サレバ $x=y$ ナルトキ 0 トナリ，サモナクバ正デアル。

(II) $x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\equiv(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx}-\sqrt[3]{xy})$

$$\equiv\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})[(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2]$$

トナル。サレバ $x=y=z$，ノトノキミ 0 トナリ，サモナクバ右邊ハ正デアル。

例 2. a, b, c ガ何レモ正ナルトキハ

$$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqq\frac{1}{2(a+b+c)} \quad ナリ。$$

講義 先ヅ左邊ノ括孤内ニ公式 II ヲ適用スルト，

$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+b}+\dfrac{1}{a+b}\right)\geqq\sqrt[3]{\dfrac{1}{b+c}\times\dfrac{1}{c+a}\times\dfrac{1}{a+b}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}}\ldots\ldots(1)$

トコロガ $a+b$, $b+c$, $c+a$ ニ公式 II ヲ適用スルト，

$\dfrac{1}{3}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\geqq\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$ ....(2) トナル。ソコデ (1) ト (2) ノ各邊ハ共ニ正デアルカラ定理 VI ニヨリテ邊々相乘ジテ，

$\dfrac{2}{9}(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{b+c}\right)\geqq1$ トナル。又 $a+b+c>0$ デアルカラ，定理 III ニヨリ

$\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)\geqq\dfrac{1}{2(a+b+c)}$ トナル。

練習 (1) $x, y, z>0$, ナルトキ $(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)\geqq9x^2y^2z^2$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 $x^2y+y^2z+z^2x\geqq3xyz$, $xy^2+yz^2+zx^2\geqq3xyz$ トナリ，邊々相乘ジテ上式ガ得ラレル。

(2) a, b, c ガ正ナルトキ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqq9abc$ ナルコトヲ證セヨ。

(3) $a, b, c>0$ ナルトキハ $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}>\dfrac{3}{2}$ ナルコトヲ示セ。

注意 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqq3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$,

$\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}\geqq\sqrt[3]{2\sqrt{bc}\,2\sqrt{ca}\,2\sqrt{ab}}$ サレバ $\dfrac{1}{2}\geqq\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$ トナル。

(4) a, b, c ト x, y, z ガ正數ナルトキ

$\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)\geqq9$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\geqq3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{xyz}}$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\geqq3\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{abc}}$ ナルコトニ着眼セヨ。

例 3. a, b, c ガ何レモ正ナルトキハ $(b+c)(c+a)(a+b)\geqq8abc$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅ公式 I ニヨルト, $b+c\geqq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geqq 2\sqrt{ca}$, $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ デアリ, 各邊ガ正デアルカラ, 定理 VI ニヨリ邊々相乘ジテ $(b+c)(c+a)(a+b)\geqq 8\sqrt{bc.ca.ab}=8abc$ トナル。

練習 a, b, c ガ何レモ正ニシテ相等シカラザルトキハ

$6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$ ナルコトヲ證セヨ。

注意
$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\geqq 3\sqrt[3]{bc(b+c)ca(c+a)ab(a+b)}=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2(b+c)(c+a)(a+b)}$.
トコロガ a, b, c ガ相異ナルカラ例 3 ニヨリ $(b+c)(c+a)(a+b)a^2b^2c^2\geqq 8a^3b^3c^3$ トナルコトニ着眼セヨ。

例 4. a, b, c ガ何レモ正ナルトキハ

$3(a^3+b^3+c^3)\geqq(a+b+c)(bc+ca+ab)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅ $a^3+b^3\geqq ab(a+b)$ デアル, 何トナレバ $a^2-ab+b^2\geqq ab$ 從テ兩邊ニ正數 $a+b$ ヲカケテモ成立ツ。同樣ニ $b^3+c^3\geqq bc(b+c)$, $c^3+a^3\geqq ca(a+c)$ デアルカラ, 邊々相加ヘテ $2(a^3+b^3+c^3)\geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c)$....(1)

又 $a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$ デアル。從テ $3(a^3+b^3+c^3)\geqq ab(a+b)+ca(a+c)+bc(b+c)+3abc$.

即チ $3(a^3+b^3+c^3)\geqq(a+b+c)(ab+bc+ca)$ トナリ。

練習 (1) $a, b, c>0$ ナルトキハ $8(a^3+b^3+c^3)\geqq 3(b+c)(c+a)(a+b)$ ナルコトヲ示セ。

注意 例 4. (1) ヨリ $2(a^3+b^3+c^3)\geqq(b+c)(c+a)(a+b)-2abc$ トナル。從テ $8(a^3+b^3+c^3)\geqq 4(a+b)(b+c)(c+a)-8abc$ トナル。トコロガ例 3 ニヨリ, $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$, 從テ $3(a+b)(c+a)(b+c)\leqq 4(a+b)(b+c)(c+a)-8abc$ トナルコトニ着眼セヨ。

(2) $a, b, c>0$ ナルトキハ $9(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)^3$ ナルコトヲ證セヨ。

注意 $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(b+c)(c+a)(a+b)$ ナレバ (1) ノ結果ニ, コレヲ利用セヨ。

例 5. a, b, c ガ正ナルトキハ

$a^4+b^4+c^4\geqq b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqq abc(a+b+c)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅ前部ヲ證明スルニ, $a^4+b^4\geqq 2a^2b^2$, $b^4+c^4\geqq 2b^2c^2$, $c^4+a^4\geqq 2c^2a^2$ トナルカラ邊々相加ヘテ $a^4+b^4+c^4\geqq b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$。次ニ後部ハ $b^2c^2+c^2a^2\geqq 2abc^2$, $c^2a^2+a^2b^2\geqq 2a^2bc$ $a^2b^2+b^2c^2\geqq 2ab^2c$ トナルカラ邊々相加ヘテ $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqq abc(a+b+c)$ トナル。

練習

(1) a, b, c ガ何レモ正ナルトキハ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ ナルコトヲ示セヨ。

(2) a, b, c ガ正ノ數ナルトキハ $\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt{\frac{bc+ca+ab}{3}}\geqq\sqrt[3]{abc}$ ナルトコヲ證セヨ。

注意 $a, b, c>0$ デアルカラ前部ヲ證スルニハ $\frac{(a+b+c)^2}{9}\geqq\frac{bc+ca+ab}{3}$ 即チ $(a+b+c)^2\geqq 3(bc+ca+ab)$ ヲ證スレバ足リル。トロコガ $a^2+b^2\geqq 2ab$ $b^2+c^2\geqq 2bc$, $c^2+a^2\geqq 2ca$ デアルカラ $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$ トナル, ソコデ兩邊ニ $2(ab+bc+ca)$ ヲ加ヘテ $(a+b+c)^2\geqq 3(ab+bc+ca)$ ガ得ラレル。又後部ハ $bc+ca+ab\geqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ ヨリ導カル。

例 6. a, b, c ガ正ナルトキハ $abc\geqq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅ a, b, c ガ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハス數トスルト, $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$ デアル。ソコデ $a^2\geqq a^2-(b-c)^2$ 即チ $a^2\geqq(a+b-c)(a-b+c)$ トナル。同樣ニ $b^2\geqq(b+c-a)(b-c+a)$, $c^2\geqq(c+a-b)(c-a+b)$ トナル。トコロガ定理 V ニヨリ $a^2b^2c^2\geqq(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2$ トナル, ソシテ各邊ノ平方根ハ正デアルカラ $abc\geqq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ トナル。

次ニ a, b, c ガ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハサナイ場合ニハ $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ ノ中二ツガ同時ニ負又ハ 0 トナルコトガ出來ナイ。何トナレバ若シ $b+c-a\leqq 0$, $c+a-b\leqq 0$ ナラバ $b+c\leqq a$, $c+a\leqq b$ ガ兩立シナケレバナラナイガ前者ヨリ $b<a$, 後者ヨリ $a<b$ トナリテ不合理トナル ($c>0$ デアルカラ), 他ノ組合セニ於テモ同樣ニ證スルコトガ出來ル。ソコデ $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ ノ悉クハ負トナルコトガ出來ナイコトハ今ノ證明ニヨリ明ラカデアルガ, 一ツダケハ負又ハ 0 トナルコトガ出來ル。例ヘバ $b+c-a>0$, $c+a-b>0$ ニシテ, $a+b-c\leqq 0$ ナル樣ニ a, b, c ガ選ベル, 即チ $a+b\leqq c$ デアレバ宜シ。

ソコデーツガ負又ハ 0 ナラバ與ヘラレタル不等式ハ明ラカニ成リ立ツ。依テ本題ハ證明セラレル。

練習 a, b, c ガ三角形ノ三邊ヲ表ハシ，且悉クハ相等シカラザルトキハ $\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c}\geqq\dfrac{9}{a+b+c}$ ナルコトヲ證セヨ。

又之ヨリ $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geqq 3$ ナルコトヲ誘出セヨ。

注意 a, b, c ハ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハスカラ $b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$ デアル。ソコデ直ニ氣ガ付クコトハ 公式 (II) (174 頁)デアル。之ニ倣ツテ

$\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c}\geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$ トナル。トコロガ上例ニヨリ $\geqq 3\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}$ トナリ，$3\sqrt[3]{abc}\leqq a+b+c$ デアルカラ結局

$\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c}\geqq\dfrac{9}{a+b+c}$ トナル。

ソコデコノ不等式ノ兩邊ニ $a+b+c>0$ ヲ乘ズルト，$\dfrac{a+b+c}{b+c-a}+\dfrac{a+b+c}{c+a-b}+\dfrac{a+b+c}{a+b-c}\geqq 9$ トナル。從テ $\left(\dfrac{a+b+c}{b+c-a}-1\right)+\left(\dfrac{a+b+c}{c+a-b}-1\right)+\left(\dfrac{a+b+c}{a+b-c}-1\right)\geqq 6$ トナル。從テ

$\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geqq 3$ トナル。

(B). 歸納法ニヨル法

例 7. n ガ 3 ヨリ大ナル整數ナルトキ $\sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n}$……(1) ナルコトヲ證セヨ。

講義 (1) ヲ證明スルニハ定理 VI 系 III ニヨリ $3n$ 乘シタル $3^n>n^3$ ….(1)′ ナルコトヲ證明スレバ足リル。ソコデ $n=m$ ナルトキ成リ立ツトスルト，$3^m>m^3$ デアル。サテ兩邊ニ 3 ヲカケテモ成立スルカラ $3^{m+1}>3m^3$….(2) トナル。トコロガ $3m^3=m^3+m\times m^2+m\times m\times m>m^3+3m^2+2\times 3\times m$ トナル。何トナレバ $m>3$ デアルカラデアル。トコロガ又 $m^3+3m^2+6m>m^3+3m^2+3m+1=(m+1)^3$ ト+ル。サレバ $3m^3>(m+\ )^3$ トナル。從テ (2) ヨリ $3^{m+1}>(m+1)^3$ トナル。從テ (1)′ ハ $n=m$ ノトキ成立ツトスルト，$n=m+1$ ノトキモ成リ立ツ。ソシテ $n=4$ ナルトキハ $3^4=81,\ 4^3=156$ トナルカラ (1)′ ハ成立ツ。從テ n ノスベテノ正整數値ニ對シテ (1)′ ガ成立ツカラ (1) ガ成立ツノデアル。

例 8. n ガ正ノ整數ナルトキ

$\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+……+\sqrt{3}>\dfrac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$….(1)ナルコトヲ證セヨ。

講義 分離シテ證明スルニ $\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+….+\sqrt{n}$….ガ $n=m$ ノトキ成立ツトスルト，$\dfrac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+….+\sqrt{m}$….(1)′ ガ成立ツ。ソコデ $\dfrac{2}{3}(m+1)^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+….+\sqrt{m}+\sqrt{m+1}$ ….(2) ヲ證明シ様ト思フ。サテ (1)′ ガ成立ツカラ (2) ヲ證明スルニハ $\dfrac{2}{3}(m+1)^{\frac{3}{2}}<\dfrac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}+\sqrt{m+1}$ ナルコトガ成立ツコトヲ證明スレバ充分デアル。ソレニハ $\dfrac{1}{3}\sqrt{m+1}\,(2m+2-3)<\dfrac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}$ 卽チ $\dfrac{1}{3}\sqrt{m+1}\ (2m-1)<\dfrac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}$….(3)ガ證明セラルレバ足リル。トコロガ $m>1$ ナル正ノ整數デアルカラ $2m-1>0$デアル。從テ (3) ハ (3) ノ兩方ヲ平方シタル式 $\dfrac{1}{9}(m+1)(2m-1)^2<\dfrac{4}{9}m^3$ ナルコトガ證明出來レバ足リル (定理 VI 系 III ニヨリ)。トコロガコノ不等式ノ兩邊ノ差ヲ求ムルト，

$\dfrac{1}{9}(m+1)(2m-1)^2-\dfrac{4}{9}m^3=\dfrac{1}{9}[(m+1)(2m-1)^2-4m^3]=\dfrac{1}{9}(-3m+1)<0$ トナル。サレバ (3) ガ成リ立チ (2) ガ成リ立ツコトトナル。ソシテ $m=1$ ノトキハ確カニ (1)′ ハ成リ立ツカラ一般ニ (1) ガ成リ立ツ。

次ニ後ノ部分モ全ク同様ニシテ出來ル。サレバ一般ニ n ノ正整値ノスベテニ對シテ

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+….+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$$

トナル。

例 9. n ガ 1 ヨリ大ナル整數ニシテ α>0 $\alpha<0$ ナルトキハ $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ ナルコトヲ歸納法ニテ證セヨ。

講義 先ヅ $n=m$ ナルトキ成立ツトスルト $(1+\alpha)^m>1+m\alpha$ デアル。ソコデ $1+\alpha>0$ ヲ兩邊ニカケテモ不等式ハ成立スル〔定理 III (166 頁)〕カラ，$(1+\alpha)^{m+1}>(1+m\alpha)(1+\alpha)=1+(m+1)\alpha+m\alpha^2$ トナル。從テ $(1+\alpha)^{m+1}>1+(m+1)\alpha$ トナル。ソシテ $m=2$ ナラバ $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2$ デアルカラ $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$ トナル。サレバ一般ニ $n>1$ ナル正整數ナルトキ $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ トナル。

例 10. $a_1, a_2,……a_n$ ガ 1 ヨリ小ナル正數ナルトキ $(1-a_1)(1-a_2)……(1-a_n)>1-(a_1+a_2+……+a_n)$ ナルルコトヲ歸納法ニテ證セヨ。

講義 先ヅ $n=m$ ナルトキ眞ナリトスルト,

$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_m)>1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)$ トナル。ソコデ $0<\alpha_{m+1}<1$ デアルカラ $1-\alpha_{m+1}>0$ アル。コレヲ不等式ノ兩邊ニカケテモ不等式ハ成リ立ツカラ

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_m)(1-\alpha_{m+1})>1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\alpha_{m+1})+\alpha_{m+1}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)>1-(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{m+1})$$

トナル。サレバ $n=m$ ノトキ成立ツトスレバ $n=m+1$, ノトキモ成立チ, $n=2$ ナルトキハ明ラカデアルカラ n ノスベテノ正ノ整數ニ對シテ成立スル。

例 11. $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ガ何レモ正ノ數ナルトキ

$(x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right)\geqq n^2$ ナルコトヲ數學的歸納法ニヨリテ證明セヨ。

講義 今 $n=m$ ナルトキ成立ツトスルト,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}\right)\geqq m^2 \text{ トナル。}$$

トコロガ $(x_1+x_2+\ldots+x_m+x_{m+1})\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_m}+\dfrac{1}{x_{m+1}}\right)=(x_1+x_2\ldots+x_m)$

$$\times\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}\right)+x_{m+1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}\right)+\frac{1}{x_{m+1}}(x_1+x_2+\ldots+x_m)+1.$$

$$\geqq m^2+\sum_{i=1}^{i=m}\left(\frac{x_{m+1}}{x_i}+\frac{x_i}{x_{m+1}}\right)+1$$

トナル。トコロガ $\dfrac{x_{m+1}}{x_i}+\dfrac{x_i}{x_{m+1}}=\dfrac{x^2{}_{m+1}+x_i{}^2}{x_i x_{m+1}}$ デアル。ソシテ

$x_i>0$, $x_{m+1}>0$ デ, $x^2{}_{m+1}+x_i{}^2\geqq 2x_{m+1}x_i$ デアルカラ, $\dfrac{x^2{}_{m+1}+x_i{}^2}{x_i x_{m+1}}\geqq 2$ トナル。サレバ

$\dfrac{x_{m+1}}{x_i}+\dfrac{x_i}{x_{m+1}}\geqq 2\ldots(1)$ トナル。從テ $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\left(\frac{x_{m+1}}{x_i}+\frac{x_i}{x_{m+1}}\right)\geqq 2m$ トナル

サレバ $(x_0+x_2+\ldots+x_m+x_{m+1})\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_m}+\dfrac{1}{x_{m+1}}\right)\geqq m^2+2m+1=(m+1)^2$ トナル。從テ $n=m$ ナルトキ眞デアルトスルト, $n=m+1$ ノトキモ成立ツ, ソシテ $m=2$ ナルトキハ $(x_1+x_2)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=2+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$ デ (1) ニヨリ $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}\geqq 2$ デアル。サレバ $(x_1+x_2)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)\geqq 2+2=2^2$ トナル。サレバ n ノスベテノ正整値ニ對シテ

$$(x+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqq n^2 \text{ トナル。}$$

例 12. $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ 及ビ $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ ハ何レモ正ノ數ニシテ $a_1\leqq a_2\leqq\ldots\ldots\leqq a_n$, $b_1\leqq b_2\leqq\ldots\ldots\leqq b_n$ ナルトキ

$(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n)\leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots\ldots+a_nb_n)$ ナルコトヲ證セヨ。

講義 先ヅ $n=m$ ノトキ眞デアルトスルト,

$(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_m)\leqq m(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_mb_m)\ldots(1)$ トナル。ソコデ

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1})(b_1+b_2+\ldots+b_m+b_{m+1})\leqq(m+1)(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{m+1}b_{m+1})\ldots(2)$$

ガ成立ツコトヲ證明スルニ, (2) ヲ變形スルト,

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_m)+b_{m+1}(a_1+a_2+\ldots+a_m)+a_{m+1}(b_1+b_2+\ldots+b_m)+a_{m+1}b_{m+1}\leqq m(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_mb_m)+(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_mb_m)+(m+1)a_{m+1}b_{m+1}$$

トナル。サレバ $b_{m+1}(a_1+a_2+\ldots+a_m)+a_{m+1}(b_1+b_2+\ldots+b_m)\leqq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_mb_m+ma_{m+1}b_{m+1}$ ガ證明出來レバ充分デアル。トコロガ左邊ヲ減ズルニ, 其ノ差ヲ△トスレバ

$$\begin{aligned}\triangle&=[b_{m+1}(a_1+a_2+\ldots+a_m)-ma_{m+1}b_{m+1}]+[a_{m+1}(b_1+b_2+\ldots+b_m)\\&\qquad-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_mb_m)]\\&=b_{m+1}[(a_1-a_{m+1})+(a_2-a_{m+1})+\ldots+(a_m-a_{m+1})]\\&\qquad-[b_1(a_1-a_{m+1})+b_2(a_2-a_{m+1})+\ldots+b_m(a_m-a_{m+1})]\\&=(a_1-a_{m+1})(b_{m+1}-b_1)+(a_2-a_{m+1})(b_{m+1}-b_2)+\ldots+(a_m-a_{m+1})(b_{m+1}-b_m)\ldots(3)\end{aligned}$$

トナル。トコロガ假設ニヨリ $a_1\leqq a_2\leqq\ldots\leqq a_m$, $b_1\leqq b_2\leqq\ldots\leqq b_n$ デアルカラ $a_r-a_{m+1}\leqq 0$, $b_{m+1}-b_r\geqq 0$ $(r=1,2,\ldots,m)$ デアル。サレバ $(a_r-a_{m+1})(b_{m+1}-b_r)\leqq 0$, $(r=1,2,\ldots m)$ デアル。從テ (3) ハ $\leqq 0$ トナル。サレバ (2) ガ成リ立ツカラ $n=m$ トスルト, $n=m+1$ ノトキニ成リ立ツ, $m=1$ ナルトキハ $a_1b_1=a_1b_1$ トナリ, $m=2$ ナラバ今ト同樣ナル方法ニヨリテ $(a_1+a_2)(b_1+b_2)\leqq 2(a_1b_1+a_2b_2)$ ナルコトガ證明セラル。サレバ n ノ正整數値ノスベテニ對シテ,

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \text{ デアル。}$$

例 13. $a_1, a_2, a_3\ldots\ldots$ ハ等差級數ニシテ $b_1, b_2, \ldots\ldots$ ハ其各項ガ皆正ナル等比級數ナリ, 若シ $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ ナルトキハ a_n ハ b_n ヨリモ大ナラザルヲ證セヨ。

講義 等差級數ノ公差ヲ d, 等比級數ノ公比ヲ r トスルト, $a_2=a_1+d$, $b_2=b_1r$ ト

ナル，トコロガ假設ニヨリ $a_1=b_1,\ a_2=b_2$ デアルカラ $a_1r=a_1+d\ldots.(1)$ トナル。

サテ $n=m$ ナルトキ $a_m\leqq b_m\ldots.(2)$ トナルトシテ $a_{m+1}\leqq b_{m+1}$ ガ成立ツコトヲ證明シヤウト思フ。

ソコデ $a_m=a_1+(m-1)d,\ b_m=a_1r^{m-1}$ デアルカラ (2) ナルコトハ

$a_1+(m-1)d\leqq a_1r^{m-1}$ デアル。今コノ兩邊ニ r ヲカケルト，($a_1>0,\ a_1r>0$ ダカラ $r>0$)

$[a_1+(m-1)d]r\leqq a_1r^m$ トナル。トコロガ (1) ニヨリ $r=1+\frac{d}{a_1}$ デアルカラ上式ノ左邊ハ

左邊$=[a_1+(m-1)d](1+\frac{d}{a_1})=a_1+(m-1)d+d+(m-1)\frac{d^2}{a_1}\ldots.(3)$ トナル。

トコロガ $d_2>0,\ a_1>0$ ニシテ $m\geqq1$ ナルトキハ $(m-1)\frac{d_2}{a_1}\geqq0$ トナル。從テ

$[a_1+(m-1)d]r\geqq a_1+md$ トナル。サレバ $a_1r^m\geqq a_1+md$ トナルカラ $a_{m+1}\leqq b_{m+1}$ トナル。

サレバ $n=m$ ノトキ $a_n\lesseqgtr b_n$ トスレバ $n=m+1$ ノトキモ眞デアリ，又 $m=3$ ナルトキハ $a_3=a_1+2d,\ b_3=a_1r^2=a_1\left(1+\frac{d}{a_1}\right)^2=a_1+2d+\frac{d^2}{a_1}$ トナツテ $a_3\lesseqgtr b_3$ トナル。サレバ一般ニ n ノスベテノ正整値ニ對シテ $a_n\lesseqgtr b_n$ トナル

例 14. m ガ 1 ヨリ大ナル整數ニシテ a ト b トガ相等シカラザルトキハ $\frac{1}{2}(a^m+b^m)>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$

講義 先ヅ $m=p$ ナルトキ眞ナリトシテ $p+1$ ナルトキモ眞デアルコトヲ先ヅ證明スル

卽チ $\frac{1}{2}(a^p+b^p)>\left(\frac{a+b}{2}\right)^p\ldots.(1)$ ガ成立スルトスル。ソコデ $a,\ b>0$ デアルカラ $\frac{a+b}{2}>0$ ヲ (1) ノ兩邊ニカケテモ不等號ノ向キハ變ラナイ。

卽チ
$$\frac{1}{4}(a^p+b^p)(a+b)>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{p+1}\ \ldots.(2)\ \text{トナル。}$$

トコロガ(2)ノ左邊$=\frac{1}{4}(a^{p+1}+b^{p+1}+a^pb+ab^p)=\frac{1}{4}[2(a^{p+1}+b^{p+1})+a^p(b-a)+b^p(a-b)]$

$$=\frac{1}{4}[2(a^{p+1}+b^{p+1})+(a-b)(b^p-a^p)]$$
$$=\frac{1}{4}[2(a^{p+1}+b^{p+1})-(a-b)(a^p-b^p)]$$

トナル，ソシテ，$a\gtrless b$ ナラバ $a^p\gtrless b^p$，ニシテ $(a-b)(a^p-b^p)>0$ デアル 從テ

$<\frac{1}{2}(a^{p+1}+b^{p+1})$ トナル。サレバ $\frac{1}{2}(a^{p+1}+b^{p+1})>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{p+1}$ トナル

又 $p=2$ ナルトキハ $\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}>0$ トナル。サレ

バ $\frac{1}{2}(a^2+b^2)>\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ トナル。故ニ m ノスベテノ正整數値ニ對シテ

$\frac{1}{2}(a^m+b^m)>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$ トナル。

練習 各項ガ正ナル奇數項ノ等比級數ニ於テ奇數項ノ平均數ハ偶數項ノ平均數ヨリ大ナルコトヲ示セヨ。

注意 本題ハ $a,\ ar,\ ar^2,\ldots.ar^{2m}$ ニ於テ

$\frac{a+ar^2+ar^4+\ldots.+ar^{2m}}{m+1}>\frac{ar+ar^3+\ldots.+ar^{2m-1}}{m}$ ナルコトヲ證スレバ宜シ。ソコデ $m=n$ ノトキ眞デアルトスルト，$\frac{1+r^2+r^4+\ldots.+r^{2n}}{r+r^3+\ldots.+r^{2n-1}}>\frac{n+1}{n}$。ソコデ左邊ヲ $\mathrm{R}(n)$ トスルト，$\mathrm{R}(n)>\frac{n+1}{n}$ デアル。サレバコノトキ $\mathrm{R}(n+1)>\frac{n+2}{n+1}=2-\frac{n}{n+1}>2-\frac{1}{\mathrm{R}(n)}$ ナルコトガ證明セラルレバ足リル，卽チ $\mathrm{R}(n+1)+\frac{1}{\mathrm{R}(n)}>2$ ナルコトガ證セラルレバ足リル。トコロガ $\mathrm{I}(n+1)+\frac{1}{\mathrm{I}(n)}=r+\frac{1}{r}>2$ トナルコトガ證明出來ルコトニ着眼セヨ。

(C). 相加平均ト相乘平均 n 個ノ正數ノ和ノ $\frac{1}{n}$ ヲ此レ等ノ數ノ**相加平均**，又コレ等ノ積ノ主 n 乘根ヲ其レ等ノ **相乘平均**ト名ヅケル。サテ二個ト三個ノ正數ノ相加平均ト相乘平均ノ間 公式 III (174頁) 卽チ $x+y\geqq2\sqrt{xy},\ x+y+z\geqq3\sqrt[3]{xyz}$ ナル關係ノ存在スルコトヲ知ツテキル。之ハ一般ニ n 個ノ場合ニ擴張出來ルノデアル，其ハ次ノ定理デアル。

定理 若干個ノ正數ノ相加平均ハ相乘平均ヨリ小ナラズ

證明 今若干個ヲ n 個トシ，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n$ ノ n 個トスルト，定理ハ次ノコトヲ斷言シテキル

$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots.+x_n)\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots.x_n}$ 等號ハ $x_1=x_2=\ldots.=x_n$ ノトキノミ，

サテ先ヅ $n=2$ ナルトキハ $\frac{1}{2}(x_1+x_2)\geqq\sqrt{x_1x_2}$ ナルコトハ既ニ證明ヲシテアル。次ニ $n=2^2=4$ ナルトキハ $\frac{1}{2}\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right]$

$$\geqq\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}}\geqq\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}}=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

トナルカラコノ場合モ眞デアル，一般ニ $n=2^r$ ナラバ眞デアルトスルト，$n=2^{r+1}$，ノトキモ成立スル。何トナレバ

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{2^r}}{2^r}+\frac{x_{2^r+1}+x_{2^r+2}+\ldots\ldots+x_{2^{r+1}}}{2^r}\right]$$

$\geqq\sqrt{\sqrt[2^r]{x_1x_2\ldots x_{2^r}}\;\sqrt[2^r]{x_{2^r+1}\ldots\ldots x_{2^{r+1}}}}=\sqrt[2^{r+1}]{x_1x_2\ldots\ldots x_{2^{r+1}}}$ トナルカラ，數ニ $n=2^k$ ナルトキハ眞デアル。

最後ニ $n=m$ ナルトキ眞ナリトスルト，m ヨリ小ナル數ニ就テ又成立スル。

何トナレバ $m=p+q$ トスルト，$\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_m}{m}\geqq\sqrt[m]{x_1x_2\ldots\ldots x_m}$　(1)

ニ於テ $\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_p}{p}=x_0$ トスルト，(1) ハ

$$\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_p+\overbrace{x_0+\ldots\ldots+x_0}^{q\text{個}}}{m}\geqq\sqrt[m]{x_1x_2\ldots x_p\,x_0^q}$$

トナル。サレバ $x_0\geqq\sqrt[m]{x_1x_2\ldots\ldots x_p\,x_0^q}$ トナル。

ソコデ兩邊チ m 乘シテ $x_0^m\geqq x_1x_2\ldots\ldots x_p\,x_0^q$ 即チ $x_0^p\geqq x_1x_2\ldots\ldots x_p$ 從テ $x_0\geqq\sqrt[p]{x_1x_2\ldots\ldots x_p}$ トナル。サレバ $n=2^k$ ナルトキ不等式ガ成立チ p ガ如何ナル數デアツテモ之ヨリ大ナル 2 ノ羃數ガ存在スル，其ノ値チ m トスルト，n ガ其ノ値ノトキハ成立ツカラ p ノトキモ成リ立ツ。從テ n ノ如何ナル正整數値ニ對シテモ不等式ハ成立ツ。

練習　m ガ 1 ヨリ大ナル整數ニシテ n 個ノ正數 $a, b, c\ldots\ldots$ ガ悉クハ相等シカラザルトキハ $\dfrac{1}{n}(a^m+b^m+c^m+\ldots\ldots)>\left(\dfrac{a+b+\ldots\ldots}{n}\right)^m$ ナルコトヲ證セヨ。

注意　コノ證明ニハ例14チ適用スレバ上ノ定理ノ證明ト全ク同ジ方法デ證明出來ル。

例 1.　$a_1, a_2,\ldots\ldots a_n$ ハ正ノ數ニシテ悉クハ相等シカラザルトキ其和ヲ s トオケバ $\dfrac{s}{s-a_1}+\dfrac{s}{s-a_2}+\ldots\ldots+\dfrac{s}{s-a_n}>\dfrac{n^2}{n-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

講義　サテ $\dfrac{s}{s-a_1},\dfrac{s}{s-a_2},\ldots,\dfrac{s}{s-a_n}$ ハ悉ク正數デアルカラ上ノ定理ニヨルト，

$$\frac{1}{n}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\ldots+\frac{s}{s-a_n}\right)>\sqrt[n]{\left[\frac{s^n}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)}\right]}$$

又 $\dfrac{1}{n}[(s-a_1)+(s-a_2)+\ldots+(s-a_n)]\geqq\sqrt[n]{[(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)]}$ トナル。ソシテコレ等二ツノ不等式ノ各邊ハ正數デアルカラ邊々相乘ジテ

$\dfrac{1}{n}\times\dfrac{s(n-1)}{n}\times\left[\dfrac{s}{s-a_1}+\dfrac{s}{s-a_2}+\ldots+\dfrac{s}{s-a_n}\right]>s$ トナル。トコロガ $s>0, n>1$ デアルカラ $\left[\dfrac{s}{s-a_1}+\dfrac{s}{s-a_2}+\ldots+\dfrac{s}{s-a_n}\right]>\dfrac{n^2}{n-1}$ トナル。

例 2.　n ガ 1 ヨリ大ナル整數ナルトキハ $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義　本題チ證明スル手順ハ 2^n，2^{n-1} ニ着眼スルト，コレ等ハ 2 ヲ公比トスル等比級數ノ和ト積ニ於テ生ズルコトニ氣ガ付クノデアル。

ソコデ n 個ノ等比級數 $1, 2, 2^2, 3^3,\ldots, 2^{n-1}$ ハ相異ナル正數デアルカラ上ノ定理チ適用シテ $\dfrac{1}{n}(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})>\sqrt[n]{1.2.2^2.\ldots.2^{n-1}}$

トナル。即チ $\dfrac{2^n-1}{n}>\sqrt[n]{2^{1+2+\ldots\ldots+(n-1)}}=\sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=2^{\frac{n-1}{2}}$

トナル。サレバ $2^n-1>n\sqrt{2^{n-1}}$ 即チ $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$ トナル。

例 3.　$a_1, a_2,\ldots\ldots a_n$ ガ等差級數ヲナス正數ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ。

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}$$

講義　$a_1, a_2,\ldots a_n$ ハ等差級數デアルカラ相等シカラズシテ，假設ニヨリ正數デアルカラ上ノ定理ガ適用出來ル。從テ $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)>\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1}\cdot\dfrac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1}{a_n}}$ ..(1)

デアル，又

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2\ldots+a_n)>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ \ldots(2)$$ デアル，

(1) ト (2) ノ各邊ハ悉ク正數デアルカラ邊々相乘ジテ

$\dfrac{1}{n^2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)>1$ トナル。トコロガ

$a_1+a_2+\ldots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ デアルカラ，$\dfrac{a_1+a_2}{2n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)>1$ トナル。從テ

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_2}$$ トナル。

練習

(1)　$n^n>1,3,5\ldots\ldots(2n-1)$ ナルコトヲ證セヨ ($n>2$ トス)