贈閱

GALILEO (1564–1642)

第一卷

第十期

第十期目錄

本刊一週年之迴顧及展望

時光荏苒，本刊問世，計已一週；際茲一卷告終，二卷開始，謹將過去之感想與將來之計劃，爲讀者諸君陳之。

本刊發刊之初，爲求國內算學界先進之指導及批評起見，曾專函請教，並按期呈政。然除極少數學者熱心贊翊匡扶而外，大都以緘默出之，誠令人失望之至。其次就讀者方面言，百之九九盡屬中學生徒，而負指導中學算學教育之教師，肯垂顧本刊者，百無一二焉。具見中等算學界命脉之算學教師，對此提倡中等算學之舉動，大都無甚興趣。本刊內容簡陋，宣傳不力，固無可諱言，然若謂此爲冷淡之唯一原因，同人等决不任受。國人通病，在抱定得過且過，多一事不如少一事之主義，因循度日，不謂吾算學界亦然。故就感想言，則年來感想確不見佳。唯其如此，同人等益覺責無旁貸，誓竭其綿薄，以維護此苦心創辦之唯一刊物，無論如何困難，决不中止。

屢奉讀者來函，輒以所輯材料有時不免過深爲言，自第二卷起，决意革除此弊。內容方面之擬改革者，略有下述數事：

1. 每期材料，深淺並容，期於高中初中同學，均有帮助。

2. 問題欄仍照舊。大學試題，坊間有專集出版，决行停載。每期添設『教科書難題解答』一欄，就中等學校通用教本中之難題，加以解答，以爲中學生修學之一助。

3. 世外奇談小說,業於本期結束,以後每期擇載有興趣之小說或遊戲,用助課餘清興.

4. 算學界名人傳記仍舊登載,并選登算學史中有趣的故事及算學格言.

5. 高季可先生之『數學教學實際問題』,極切實際,且饒興趣,承高先生惠允陸續賜稿,且另有專篇論著見賜,謹此露佈,想讀者當以先覩爲快也.

以上各端,期在必踐,此外更當遵從讀者意見,隨時改良以副厚望.

抑尤有進者,同人發行本刊,既非以此牟利,亦不欲沽名,其所以不憚勞瘁,不避艱難,從事於茲,蓋以算學爲一切科學之基礎,而中等算學又爲基礎的基礎,厠身斯界,不敢不盡其提倡之責耳. 然同人對於本刊,毫無自私之意,且極願諸公大衆. 深盼同道諸公,加入合作,以厚實力. 至相當時期,尙擬組織一提倡中等算學之學會團體,即以本刊貢献爲會報.此事已在計畫進行中,至希各方同志,一致輔助,同人當竭誠歡迎,謹此宣言,幸垂察焉.

數學教學實際問題

高季可

II. 數學練習

練習之重要

數學乃是一種技術,——手腦並用的技術. 比如,數字的處理,代數式的變化等,便是重在用手;至於難題的解答,原理的證驗等,便是重在用腦. 既然是一種技術,牠的訓練就貴乎純熟;所謂純熟的意思,是不但求運算或思考的正確,還要謀運算或思考的敏捷. 要使一種技術達到純熟的地步,那全在乎多多練習. 數學上運算和思考的訓練,雖因題材的不同,而有畸重畸輕之別; 但實際上這兩者有聯帶的關係. 運算的技能是學算的基本,一個運算技能很好的人,在解答難題或驗證原理的過程中,得到很多的帮助; 反之於數字的處理或代數式的變化沒有充分的把握,一個思考問題當前,雖明知解證的途徑,往往因為運算的遲鈍或錯誤而阻碍其成功. 從前有一個大學教授(姓名忘却),統計大學一二年級學生對於數學錯誤的原因,說由於高深學理不明者少數,而由於初等數學運算錯誤者為多數.可見運算技能對於思考成績影響之大. 在另一方面,因為思考的正確與敏捷, 在運算時往往可以隨機應變,獨立創造新的可靠的方法,而使運算的手續變為簡單,這便是思考帮助運算的地方. 所以運算的熟練和思考的嚴密實在是互為條件,不可偏廢. 惟其如此,我們數學訓練, 必須使兩者俱達到

正確和敏捷的境界，才算圓滿．正確是學算的初步，一個長乘法或者一個應用問題，有的人一兩分鐘內可以做成，有的人費去一兩小時，結果雖皆正確，但這两人的造詣，便相差很遠了．所以數學的目的，不但正確，還要敏捷．如何才可以使得一個學生對於運算或思考，都能正確而敏捷呢？是不是單憑教者舉幾個例子向他說明運算的方法或者思考的程序就可以呢？我們常聽到（也有時見到）有一種學生，教師所講的或者教本上所有的說明，他都記得並且能背誦（此種情形女生較多），但教他獨立運用思考去做題目還是沒有把握，有時竟覺得無從下手；這原因大都由於最初沒有注意到練習之重要．因爲有許多經驗，非親自練習不能獲得，細微末節的地方，教者固不便說明，而且也說不勝說．比如學騎脚踏車或者學游泳，儘管你聽精於此道的人將各種方法，說得詳詳細細；如果你不實地練習，騎車或游泳的技術，在你仍舊是一無所有的．曾記得從前我有一位先生是美國伊利洛大學的什麼"士"，他教我們大代數，每一個問題，他祇說明解答的方法，然後便說，"Solving, we get·······"，究竟這所謂"Solving"當中過渡的式子如何，他是不說的．我們問他，他的答案是："美國的教法是如此的！我們重在明白這原理，至於運算的過程，誰不知道?！況且卽使運算錯誤，祇要原理不錯，也無傷於大體的．"我們起初倒也相信，但後來遇到一個證題，我們證不出來，請他指示；他告訴我們如何證法，如何證法，說了一大套，但這些方法我們都已經想到了，沒有能證成功．最後惟有請他

將全部的過程寫給我們看，但是，他整整掛在黑板上一點鐘也沒有證起來，當中算式繁復的地方，且時有錯誤．最後他紅漲着臉，說：„好在證明的方法已經知道，而且這方法一定是不錯的，……”．這原因是他根本太少練習的經驗，所以如此受窘．像我這位先生一樣主張的人，恐怕不少，所以我特地寫出來，給讀者做個參考．我們不求教學的成績好則已，如果要得到很好的成績，務必側重學生自已的練習．

練習之方法 練習之重要，既如上述，但練習之方法究竟怎樣呢？在中等學校的數學練習，大概不外紙頭練習黑板練習和演草簿練習數種．在一個新的方法或原理講過以後，究竟學生是否了解，或者還有些什麼地方不甚明瞭，教者亟欲知道，以謀補救．這時可出四五個練習題，教學生演算在單張紙頭上，當堂繳來，教者於課後一一批閱，統計錯誤的種類和次數，於下次上課時提出，所以這個練習可以檢驗教學的效果，因此也可叫做診斷練習．既經這次練習以後，教材的內容，學生大致明瞭，然後可以多出些題目教他們課後演算在演草簿上；上課後還可以就題目當中，選擇較難的數題（或者全部），教學生上黑板來演習．黑板演習的長處，在看出學生眞實的本領，同時遇有錯誤之處，提出說明，可使全體注意，收效甚大．所以近來居然有些學校的數學練習完全側重在黑板練習，甚至於學生有無演草簿或者演草簿上做得何如，且不去管他，這也未免矯枉過正了．誠然學生演草簿的成績，有些是抄襲而來，不值重視；且分

別在演草薄上訂正，教者勞力太費；且不如黑板訂正收效之宏，但說因此就不問演草簿，讓學生自便，這也不是好的辦法．要曉得全憑黑板練習也有許多流弊． 好的學生，課後逐題先自演算一遍，以作黑板練習之準備，自然很好，但如遇不用功的學生，因爲人多題少，或者黑板的地位不多，未必就喊到自已去算，他也就不事前準備，換句話說，他就放棄練習的機會了．再則，數學演算的錯誤，固然也有普通的，就是人人易犯的，黑板訂正時，原可大家改正；但也有特殊的錯誤是因人而異的，如果沒有喊到他做，他的錯誤就沒有得到指正的機會．豈不要讓他長此錯誤下去嗎？ 所以我主張黑板練習和演草簿練習二者並重，不可偏廢．至於前說練習簿練習的弊端，那還是一個運用的方法問題，如果運用得法，未嘗不可補救． 作者不但不忽略演草簿的練習，而且是很重視這種練習的． 關於演草簿的演算，向例在第一次上課時，都有許多剴切的說明． 關於演草簿的內容，有所謂“三C 政策”；關於記分的方法，有所謂“約法三章”；關於問題演算的時間，有所謂“不欠債主義”． 什麼是“三 C 政策”呢？就是 Correct, Clear and Clean. 理想的演草簿，要備具三個條件：1，計算正確；2，說理簡明；3，書法整潔，教學生向着這三大目標努力． 什麼是“約法三章”呢？演草簿繳閱的時間，是無定期，也不豫先告知，以防“平時不燒香，臨時抱佛脚”的學生們借抄同學的演草． 每天上課時，各個學生都要將演草簿帶來，放在自已書桌的右角上，隨時可以教他們繳閱，如果一次不繳這次的

成績自然算零分； 但下次繳卷時還要將這次未做的部分補足. 雖說補足了，並不批改，不過在下面註個"Late"；但如不補足，那連第二次的部分，也不批改了，所以補足前次的作用，祇在取得第二次被批改的資格罷了. 如果連續三次無故不繳，則以後可永遠不繳了，因爲繳來我也不收，那麼這學科當然無成績之可言. 這便叫做"約法三章". 如何才能將演草簿隨時繳閱呢？那在遵守"不欠債主義"了. 俗語說："蝨多不癢，債多不愁". 有幾條數學題目沒有做成功，時時放在心上，老是不安心；要空得太多了，倒反不以爲意了，因爲要補也無從補起；況且時日隔多了，教材的內容，已經模糊了，即使想做也不會做了. 所以我鼓勵他們決不欠債，今日事今日畢，一有題目，便做起來，不做起來不吃飯或者不睡覺. 因爲不欠債，大家都同時做，不用功的學生，即使要想抄襲，也無從抄起了.

練習之質量 欲謀數學之進步重在練習，就好像要促進身體的發育必有待於飲食一樣. 飲食可以增加身體的營養，但如對於質量方面，毫不審愼，無論太粗太細太多太少，對於身體的健康，都要發生壞的影響. 數學練習之多寡難易，對於學生學習的成績，同樣有至爲密切的關係，如果支配不得其當，教學效率，會因之大爲減低的. 那麼練習題的質量，究竟要合乎什麼條件，才算適當呢？

1. 視學生了解之情形而定 練習題太易，學生不用思考，失却思考訓練的價值，同時學生感覺到乏味. 但如問題太難，學生

無從着手,也容易發生"畏難而退"的弊病.我們知道一般的學習心理,但凡一種活動,有成功的途徑可尋,必感覺興趣;如果在活動的歷程中,時時遇到太難的阻碍,自已覺得沒有把握來解決這困難,必致灰心短氣,結果寧願放棄了.有許多教科書,他上面所舉的例子很簡單,而下面所附的習題,倒很艱深;也有的教師,故意出些難題教學生做,名爲提高程度,實則想炫耀自已的才能,這都是違背學習原理的事體.聰明的教師,時時注意學生的反應,藉以推測學生了解的情形,以作出題的參攷,不使問題太易,學生感覺無事可做;同時也不使問題太難,令學生感覺無事能做。

2. 視教材之性質而定　至於問題分量之多寡,最普通的標準,是容易的多些,繁難的少些.此外還有兩個原則;就是問題的性質偏重運算的,例如算術四則裡面的速算法,代數裡面的因子分解等,習題要多;偏重思考的,習題較少.其次就是看這教材的部分重要與否,比如在一種新觀念的起始講授,要謀學生深切的明瞭,習題要多些,譬如教幾何,在開始的一篇直線形裡全等三角形的證法,學生剛由數的領域踏進形的領域來,印象極不穩定,這部分習題要特別的多,藉以使他們獲得形體的觀念,嫻熟證題的步驟.又如算術裡整數分數四則應用問題,代數裡因子分解法等,如不透切明瞭,則以後的學習,要發生困難;反之如已有很好的訓練,則學習其他各部時,便可以推陳出新,事半功倍,所以類如這些地方,便要多費點時間和精力,以求充分

練習的機會．

3．要顧及各個學生之發展 前面說練問習題的指定，要難易適中，多寡合度，但一班四五十個學生，這所謂"適中""合度"，如何能與每一個學生相都稱呢？ 甲生之所謂易，也許是乙生之所謂難；某丙以爲習題太多，或者某丁方以爲問題太少，未能滿足其學習慾呢！因此第三個條件，就是要顧及各個學生之發展．習題的難易多寡，不必全班學生一律，可將全班學生，就其能力高下，分爲若干組，使習題的內容有相當的差別．（其詳請參觀本刊第九期拙著能力分組與分團教學）．

4．要顧及學生課後時間之支配 練習愈多，成績愈好，但也要顧到學生課後時間的支配． 敷衍的教師，沒有工作指派給學生課後做，固然不好；但熱心的教師，往往會太重視自已所授的學科，工作指派得太多，學生課後的時間，差不多完全消磨在演算數學問題上面，以致其他課業，弄得無暇去做，這也不是正當的辦法．即就數學習題本身而言，普通的教科書，每每於一章結束時，編入許多習題，當一章未講授完畢時，學生無事可做；及至一章講完，又覺問題太多，異常忙碌．所以最好的方法，是以每個學生每日課後消費半小時至一小時的時間，作數學問題的演算爲度，不可過多過少，也不可一暴十寒．

練習之訂正

無論用那一種練習的方法，學生的運算，當然不能免於錯誤．遇着錯誤必須訂正；但訂正時必須抱定一個原則，什麼原則呢？就是"要學生自已發現錯誤並

且自己設法訂正". 有許多教師在學生練習之後，隨時加以批評，誰做的對，誰做的不對，甚且對於何以不對的理由，也不加以說明；練習簿繳來，忙的頭暈眼花，逐本訂正．按之實際，學生對於自身演算的正誤所在，大都不甚注意，所注意的是先生最後的評語，引得一時浮泛的喜畏而已；而眞正的"改正經驗"的目的，並不能達到，豈不是勞而無功嗎？如果錯誤讓他們自己發現，改正方法自己尋求，那麼多一次更深刻的練習，那所得的印象，自必更爲眞切，所以錯誤的訂正，應當遵守這個原則． 練習簿的形式，最近我們是採用活頁本了． 從前用合訂本，感覺有許多困難． 學生繳來之後，教者批改的時間，學生就無事可做；萬一教者因事發還演算遲延幾日，那麼學生便幾日無事做，同時問題積壓甚多，及至發還之時，學生便忙碌異常，爲着不使習題積壓太多的原故、教材即不得不暫時中止講授．其次，學生當一個練習簿開始演算的時候，都想從此努力要"寫作俱佳"，於是錯誤或磨損之處，即便撕去，但普通練習簿的裝訂法，撕去一張，後面便有一張同時掉下，這樣撕過幾回，一本剩了半本了，更加翻來轉去，這本本子已經摺皺磨損，毫不美觀，因此學生也不高興寫好了． 爲解除第一個弊端，也有人想用兩個本子，輪流習算，但結果兩本不能啣接，復習起來，頗不方便．因此現在才採用活頁本的形式． 自經採用以後，差不多每天都可以抽閱學生的演草，至於發還的遲早，也無大關係，教者的勞逸，可以自行支配，而無妨於學生課業之進行． 演算簿繳來之後，並不是逐本批

改,祇就每團中抽改一本(一級學生分爲若干團,實施分團教學法),其餘的分別簽註繳閱日期.於發還後三日,每團學生要開一個研究會,討論每題正確的解法,各生就自已習算錯誤之處,自行訂正.訂正後再行繳閱.教者復行抽看,如遇未曾改正,或改正仍舊錯誤之處,教者再予以相當之指導. 如是乃於簽註日期之下,補簽教者姓名,表示改正的手續業已完備.這方法實施以來,舊時的流弊,完全可以彌補,所以很樂於在此介紹.

形學研究心得錄

羅振青君遺稿

此爲羅振青君十七歲時在中學肄業期內所作. 君天資聰穎,尤嗜算學,惜天不假年,於弱冠夭折. 其兄檢此見示,詢可否在本刊發表. 細察內容,雖不甚豐富,然觀其研究及推論之方法,頗有條理,十七齡童子卽有此,殊屬難能. 原作塗抹之處甚多,足見是探討之結果,而非襲人舊說者可比,爰爲整理而發表之.————編者.

1. 如圖,ADB 及 AD'B' 爲切於 A 點之兩個半圓,B',B 在 A 之同側. 於 AB 上取 A',令 $AA'=B'B$(卽二圓直徑之差);過 A' 作線與 AB 垂直交內半圓周於 D',外半圓周於 D,則 $AD'=A'D$.

(証) $A'D^2=AA'\cdot A'B$

$=AA'(A'B'+B'B)$.

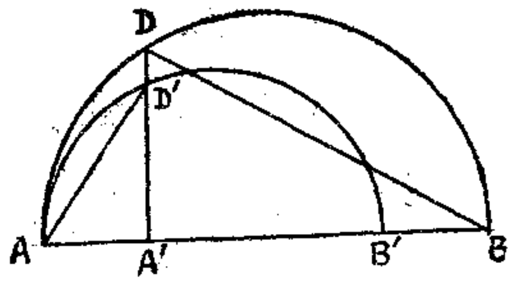
但 $AA'\cdot A'B'=A'D'^2$,

$AA'\cdot B'B=AA'^2$, (假設)

$\therefore\quad A'D^2=A'D'^2+AA'^2$

$=AD'^2$.

而 $A'D=AD'$. (證訖)



(討論) 本題在內圓直徑小於外圓半徑時,不能成立,因 D' 點不存在也.

系 1. 上圖中 $A'AD'$ 及 $A'BD$ 兩角間,有一定之關係,即

$$\cos A'AD'=\tan A'BD.$$

此因 $\cos A'AD'=AA':AD'=AA':A'D=A'D:A'B=\tan A'BD$ 也.

系 2. 設 $AB=2R$, $AA'=a$, 則

$$AD'=A'D=\sqrt{AA'\cdot A'B}=\sqrt{a(2R-a)}=\sqrt{2aR-a^2},$$

$$A'D'=\sqrt{AA'\cdot A'B'}=\sqrt{a(2R-2a)}=\sqrt{2a(R-a)},$$

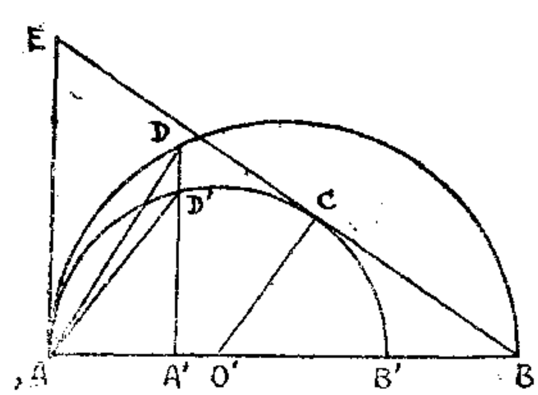
$$BD=\sqrt{A'D^2+A'B^2}=\sqrt{2aR-a^2+(2R-a)^2}=\sqrt{2R(2R-a)}.$$

系 3. 自 B 向內圓作切線 BC, 則 $BC=AD$.

此因 $BC^2=BA\cdot BB'=BA\cdot AA'=2aR$,

$$AD^2=AA'^2+A'D^2=a^2+(2aR-a^2)=2aR,$$

故云.



系 4. 延長 BC, 交兩圓之公切線於 E, 則

$$AE=(2R-a)\sqrt{\frac{R}{2a}},$$

$$BE=(2R+a)\sqrt{\frac{R}{2a}}.$$

作小圓半徑 O'C,則因

$$AE : AB = O'C : BC,$$

$$\therefore \quad AE = AB\frac{OC}{BC} = 2R\frac{\frac{2R-a}{2}}{\sqrt{2aR}} = (2R-a)\sqrt{\frac{R}{2a}}$$

而 $BE = BC + CE = BC + AE$

$$= \sqrt{2aR} + (2R-a)\sqrt{\frac{R}{2a}} = (2R+a)\sqrt{\frac{R}{2a}}.$$

應用問題 1. 已知等腰三角形之周長及其高,求解此三角形.

(解) 將上圖中之 ABE 視作所求三角形之一半,AB 爲其高,AE 爲底邊之半,則依系 4,

$$周長 = 2s = 2(AE+BE) = 2\left[(2R-a)\sqrt{\frac{R}{2a}} + (2R+a)\sqrt{\frac{R}{2a}}\right]$$

$$= 8R\sqrt{\frac{R}{2a}}$$

今高($=2R$)及周長($=2s$)均爲已知,故由上式可求 a,因之 AE,BE 均爲可求,而題以解.

應用問題 2. 已知等腰三角形之周長及其內切圓之半徑,求解此三角形.

(解) 此即已知 AE+BE 之二倍及 O'C 之意.設 $O'C=r$,

則 $\qquad r = R - \frac{a}{2}$,而 $2R = 2r + a$,

由前題 $\qquad s = 4R\sqrt{\frac{R}{2a}}$,即 $s^2 = 8R^3/a = (2r+a)^3/a$.

由是 $\qquad a^3 + 6ra^2 + (12r^2 - s^2)a + 8r^3 = 0$,

可以定 a 之值,而題以解.

(編者按後一題不能用圓規及直尺求解,因 a 係三次方程式之根也.)

2. 已知三角形之二邊及其一對角,求解此三角形之新法.

如圖,設已知二邊爲 a, c, 已知角爲 A. 作三角形之外接圓,過 B 作其直徑 BH. 再自 A 向 BH 作垂線,設其垂足爲 D. 因 BAH 及 BDA 两三角形相似,故有

即 $BD:BA=BA:BH$, 即 $BD=BA^2/BH=c^2/2R$,

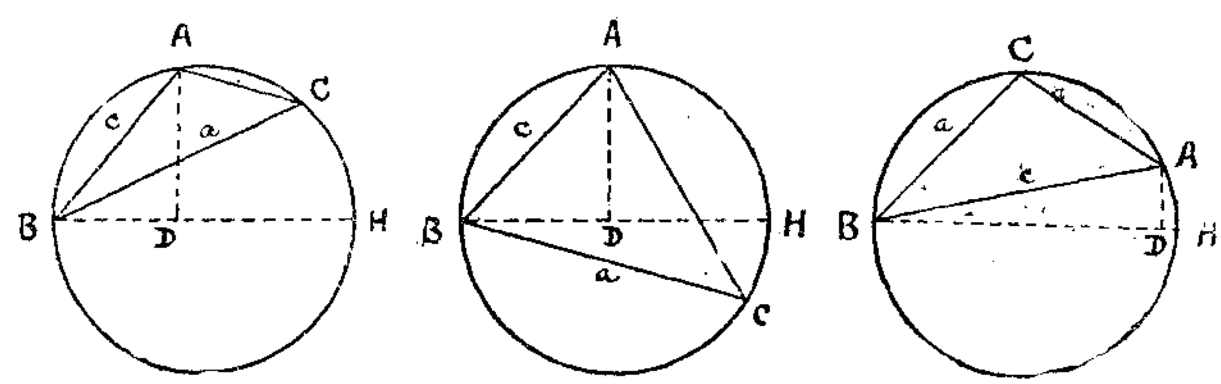
即 $BD=c^2\sin A/a$,

故 BD 由已知件可求出. 又因

$$\cos ABH=BD/c=c\sin A/a \cdots\cdots (1)$$

$$\cos CBH=\sin CHB=\sin A,$$

故 ABH,CBH 兩角均可求出. 依次各圖情形:



A >90° A <90° A <90°

$B=\angle ABH-\angle CBH$. $B=\angle ABH+\angle CBH$. $B=\angle CBH-ABH$.

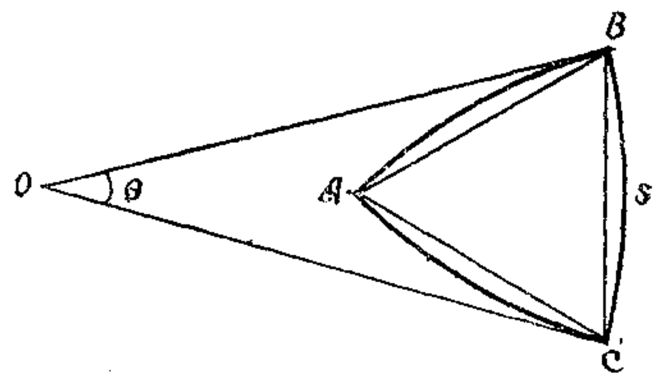
故 A<90° 有二解,如一般所云.(後略).

(編者按羅君此法,在(1)式以前無異於常法,蓋(1)式之 cos ABH 等於 sin C 也. 普通於(1)後卽求 C,羅君則先求 B,此

爲其異點.)

3. 三條等長等曲之圓弧所圍成圖形之面積.

如圖 AB,BC,CA 爲三條等長等曲之圓弧,求此形之面積.



因各弧曲度相等,故半徑亦等. 設半徑爲 r,各弧長爲 s,則所對圓心角爲 $\theta=s/r$.

所求面積=正三角形 ABC+3 倍弓形 BC 之面積.

$$=\tfrac{1}{2}BC^2\sin 60^\circ+3\cdot\tfrac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$$

$$=\sqrt{3}r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$$

$$=\frac{3}{2}r^2\left(\theta-\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

若 $\theta=60^\circ$,則所求面積爲 $\tfrac{1}{2}(\pi-\sqrt{3})r^2$.

若 $\theta=120^\circ$,則此圖形變爲全圓,而面積爲 πr^2.

(按以上各式,均係由編者代擬. 羅君原作甚爲繁難,不堪卒讀,故改正之. 此外尚有關於立體幾何之問題數則及三點共線之証法幾條,以無甚精采,祇好割愛.)

(完)

雙曲函數ＡＢＣ

龍 季 和

英文書籍中有些名叫某某ＡＢＣ的，意思是把這一門學問，很通俗地介紹給多數人．我現在想把雙曲函數，很通俗地介紹給中學同學們，所以仍襲用這名稱．

學過初等代數的同學，當然知道所謂雙曲線者，是 $xy=c$ 或 $x^2-y^2=c$，等方程式的圖形，學過解析幾何的，對牠的認識當更深一點．又，在中學的同學，對於函數一名詞，大概都聽得不少，對於函數的意義，亦有相當的認識，可是雙曲線和函數擺在一起，便不易明瞭了．

讓我們先把三角函數溫習一遍．假如我們作一單位圓（即以 1 為半徑的圓），我們便可作出種種的線來代表 $\sin x, \cos x, \cdots\cdots$ 等三角函數．因為這原故，三角函數又名圓函數．

到這裏你們也許會想到，所謂雙曲函數者，必定可以用種種的線，在一個雙曲線上表示出來了．不錯，不過不幸得很，要講雙曲函數怎樣可以用直線表示，必須借用積分算法，所以我們不能在這裏講了．程度好一點的同學，請參看 Osborne : Differential and Integral Calculus p.383（其實別的書也可以找到，不過這書比較普通點罷了）．

我們這裏要講的，是雙曲函數的定義，和牠的一些性質．

1. 定 義．

雙曲函數凡六種,舉其定義如下:

雙曲正弦 $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. 雙曲餘弦 $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

雙曲正切 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$. 雙曲餘切 $\coth x=\frac{1}{\tanh x}$.

雙曲正割 $\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}$. 雙曲餘割 $\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}$.

其所以叫正弦,餘弦等名稱,是因爲牠們有許多性質和三角函數相類似,且看下節分解罷.

2. 雙曲函數與三角函數之比較

由雙曲正切,餘切,正割,餘割的定義,我們已可窺見牠和三角函數一些相似地方,下面再舉出三個平方關係出來,看牠是否和三角函數相類似:

I. $$\begin{aligned}\cosh^2x-\sinh^2x&=\tfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2-\tfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2\\&=\tfrac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x})\\&=\tfrac{1}{4}\cdot 4=1\end{aligned}$$

這正和三角函數的 $\cos^2x+\sin^2x=1$ 有點相似,不過前者係兩平方之差等于1,後者是兩平方之和等於1罷了.

II. $$\begin{aligned}\operatorname{sech}^2x+\tanh^2x&=\frac{1}{\cosh^2x}+\frac{\sinh^2x}{\cosh^2x}\\&=\frac{1+\sinh^2x}{\cosh^2x}\\&=\frac{\cosh^2x}{\cosh^2x}\qquad\text{(根據I)}\\&=1\end{aligned}$$

這又和三角函數的 $\sec^2x-\tan^2x=1$ 有點相似了.

III. $$\coth^2x-\operatorname{csch}^2x=\frac{\cosh^2x}{\sinh^2x}-\frac{1}{\sinh^2x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - 1}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x} \qquad \text{(根據 I)}$$

$$= 1$$

這又和三角函數的 $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$ 有點相似了. 其實雙曲函數和三角函數對應的公式還有許多, 並且都可以由上述六個定義導出, 不過我們可以另外用一個簡單方法, 把牠們導出,要知端的,請看下節.

3. 雙曲函數之幾種性質.

要證明雙曲函數與三角函數對應諸公式, 我們可以利用三角函數的指數值. 由尤拉公式 (參看本刊第九期拙作 $\mathrm{Log}(-1) = ?$)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

故 $$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad [\text{因 } \cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x]$$

因之 $$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

最後兩式便是所謂三角函數的指數值也.

假如 x 的地方換了 ix, 便有

$$\sin ix = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) \qquad \cos ix = \tfrac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$$

$$= \frac{i^2}{2i}(e^{x} - e^{-x}) \qquad = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

$$= i \sinh x. \qquad = \cosh x.$$

有了這關係,其餘 $\tan ix$ 和 $\tanh x$ 等等的關係,便不難推出,

說明了三角函數的指數值的意義，我們便開始考究雙曲函數的性質． 我們先看

Ⅳ． 和角公式

$$\sinh(x+y)=\frac{1}{i}\sin i(x+y)$$

$$=\frac{1}{i}\left[\sin ix\ \cos iy+\sin iy\ \cos ix\right]$$

$$=\frac{\sin ix}{i}\cos iy+\frac{\sin iy}{i}\cos ix$$

$$=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x$$

其他 $\cosh(x+y)$, $\tanh(x+y)$ 等公式亦可推出．用 $-y$ 去換 y 便得差角公式，設 $x=y$ 便得倍角公式． 又看

Ⅴ． 函數之和

$$\sinh x+\sinh y=\frac{1}{i}(\sin ix+\sin iy)$$

$$=\frac{2}{i}\sin i\frac{x+y}{2}\cos i\frac{x-y}{2}$$

$$=2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}.$$

其餘 $\sinh x-\sinh y$ 等公式亦可推出． 其他的公式，如半角公式，負角公式，棣美弗定理之對應等，留給諸位作練習罷．

4． 雙曲函數的週期．

諸位可記得三角函數有這麼一個特性：

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad 內\ k\ 爲任意整數$$

這裏面的 2π 便叫正弦函數的週期；餘弦，正割，餘割的週期都是 2π， 而正切和餘切的週期卻是 π，因爲

$$\tan(x+k\pi)=\tan x$$

至於雙曲函數的週期怎樣呢？ 要討論這問題，我們仍然用 $\sin ix = i\sinh x$, $\cos ix = \cosh x$ 等關係，

$$\sinh(x+2k\pi i) = \frac{1}{i}\sin i(x+2k\pi i)$$

$$= \frac{1}{i}\sin(ix-2k\pi)$$

$$= \frac{1}{i}\sin ix$$

$$= \sinh x.$$

所以雙曲正弦的週期是 $2\pi i$，同理可証雙曲餘弦，雙曲正割，雙曲餘割，的週期是 $2\pi i$；而雙曲正切和雙曲餘切的週期是 πi：

5. 反雙曲函數

若 $$y=\sinh x,$$

則 $$x=\sinh^{-1}y.$$

這和一般反函數的定義一樣，不必多說． 不過反雙曲函數有點特異的地方，就是和對數生了點關係，請看，若

$$y=\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

則 $$e^x - e^{-x} - 2y = 0,$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

解之得 $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$，（因 e^x 之值爲正，負號不能用）

依對數定義 $x = \log(y+\sqrt{y^2+1})$，

即 $\sinh^{-1}y = \log(y+\sqrt{y^2+1})$．

至如 $\cosh^{-1}y$，$\tanh^{-1}y$ 等，也可以用對數表出，結果是

$$\cosh^{-1}y = \log(y+\sqrt{y^2-1}).$$

$$\tanh^{-1}y=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}. \qquad \coth^{-1}y=\tfrac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}.$$

$$\operatorname{sech}^{-1}y=\log\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}. \qquad \operatorname{csch}^{-1}y=\log\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

6. 雙曲函數之展開式,雙曲函數表.

由 e^x 的展開式,易知

$$\sinh x=\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)-\left(1-x+\frac{x}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=x+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cosh x=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=1+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

至於其他四個雙曲函數的展開式,要用到級數的除法,此處不談了。

用這些展開式,便可以和三角函數表一樣,做出雙曲函數表來.

7. 結　　論

雙曲函數可以應用來求三次方程式的根之近似值，聽說航海也用得着牠,交流電的問題也借重牠,解某種微分方程式也可要牠來帮忙，懸鏈線更非牠不可，但這不是我們中學生所易懂的,不多談了.

本文限於 A B C 的範圍,未能詳細一點討論,歡喜研究的同學,請參考下列書籍:

1. Hobson: Treatise on Plane Trigonometry 十六章
2. Chrystal: Text Book of Algebra Vol. II. 廿九章

伽 利 略

(Galileo 1564——1642 A. D.)

瘦 桐

中世紀的歐洲,和我們最近過去的中國差不多吧?歷史家稱爲黑暗時期.那時教皇的威力籠照全歐,傳統的思想,因襲的陳說,支配着整個的社會.一切的信仰言論,是不容許有絲毫的自由,科學的眞理,不消說自然也埋沒在荆棘叢裏去了.

然而那怕在這種高壓的底下,仍有不少的科學家不斷的爲眞理而奮鬥.雖被人所唾棄和威迫,甚至視作異物,加以殘害,亦毫不顧忌.這種「力行不惑,信道篤而自明」的精神,直創造出歐洲近代的文明,伽利略便是其中的一個.

的確,伽利略要算「近代文明的鼻祖」,「不死的聖人」.自從伽利略而後,歐洲的士風爲之轉變,掙斷了阻礙知識的鎖鍊,而實事求是的去探尋宇宙的神秘.設無伽利略倡導於前,我們可以斷言今日的歐洲,必定仍舊是「漫漫長夜」,正同我們現在的際遇一樣.

伽利略是意大利人,姓伽利烈(Galilie,西人多以姓稱,有時因姓音艱澀難讀,也有以名稱的),1564年生於比薩(Pisa),他的父親名叫芬遣齊倭(Vincenzio),在當時以長於哲學和音樂著名,家境不大豐裕.據他自已的經驗,認爲學習科學太沒出息,爲他的兒子將來的衣食計,原想打發伽利略去學布商.可是這

小孩子生來才藝過人，就能自造許多聰明機巧的玩具．他的父親看了，暗暗稱奇，知道這孩子不是稗販能滿足志望的，因此也就轉變念頭．當他十八歲的時候，送他進比薩大學去學習醫學．

我們現在使用的鐘錶，就是他在這學生時代發明的．有一天傍晚，伽利略無事坐在教堂裡，看見教堂上面懸掛的燈架往復擺動，細心觀察，竟觸起了一條擺錘等時性的原理，就是「擺幅的大小無論如何變動，一個完全的擺動周．所需要的時間，卻常常不變」．他利用這個道理，立卽製造一架簡單的計時器，用來查驗病人的脈搏，很有帮助．後來逐漸改良，遂變爲精確的天文鐘．

伽利略好學深思，是其特性．對於宇宙間的眞理，不輕易放過，凡教師講解有不明白的地方，總要追求根底；前人說的話如不能驗証，總不肯盲從認爲事實，他能成就他的偉大，也就在此．因爲他太好眞實了，嘗和他的教師發生思想上的衝突。那些教師們，都墨守亞里士多德關於自然定律的理論，毫不懷疑．他卻反駁這種違反事實的信條，常常被教師們責罵：『蠢東西！你想，難道你還比亞德士多德聰敏些嗎？』

以他這種好問的精神，自然是易於成就．1588 年他二十四歲時，發表了幾篇關於重心和浮體的論文，竟使他名噪一時。第二年就被薦爲比薩大學數學教授．這職務給他宣揚他的主張的好機會．爲了反證亞里士多德關於降落物體運動定律「物體從高處落下，愈重愈快」的不眞實，曾在比薩斜塔之上，當着全校師

生的面前，做過歷史上有名的實驗．取兩個大小不同物質各異的球，令牠們從 180 呎高的塔上下墜，結果，同時着地，並無先後．可是事實雖是明明如此，而那些「非聖人之言不敢言」的腐學究們，仍然以爲這是「離經叛道」，「邪說惑衆」．因此伽利略遂被人妬嫉，攻擊，立足不住，不到一年便辭職了．

1592 年又被朋友介紹到伯都奧 (Padua)大學充教授，在此處任職較長．1602 年發揮他那創造的天才製造望遠鏡，能將遠景放大至三十倍．借這鏡力的帮助，使他對於天文上的研究，更增興趣，結果發現了月面的深谷和高山，銀河裡的星團，土星的光環，太陽表面的黑斑，和木星的四個衛星，這些都是當時的人們所夢想不到的奇景．惟其少見，因此多怪，攻擊他的敵人日漸增多，一時輿論大譁．最可笑的，就是一位比薩大學的教授，他曾親從天文鏡看見過木星的四顆衛星，但他指爲是鏡頭的幻影；並引亞里士多德「天體不損壞性」說：『宇宙是不可變化的，天上只能有日，月，水，金，火，木，土七座行星，不然，七天一星期，便不成立了．』足見這般頑固人們，實在蠢得可憐！

伽利略的新理論，最受人反對的，就是他 1630 年所發表的一篇兩學派之問答 (Dialogues on the two Systems)，主張哥伯尼(Copernicus)的學說，闡明地球并不是宇宙的中心，固定不動，也和其他的行星一樣，都是繞太陽而旋轉的．這種論調，在我們現在看來，似乎平淡無奇，然在十六世紀，的確很有些駭人聽聞．因爲聖經上的主張，都是建立在以地球爲中心的觀念上，這

麼一來，把地球中心的觀念打破，教堂裡的西洋鏡，豈不拆穿了嗎？又拿什麼來支撑他們的教義，維護他們的尊嚴呢？

伽利略如是激怒了一般教長，1632年4月被傳至羅馬，送到聖法院（Holy office）審訊．依照教律，犯異端而不自認悔者當焚死．其時因此致命的，就有三人．但他雖經嚴刑威迫，終不少屈．6月10日又被傳去拷問一次，那時他已達六十八歲的高齡，身體孱弱，熬不過殘酷的苦刑，只得屈服了，由教堂宣判將他永遠監禁，並要他當衆發誓，不得再倡地動的邪說．可是當他那天跪在悔罪人的膝墊上，對着衣冠楚楚的教會領袖讀悔罪誓詞剛罷站起的當兒，口裡仍說『我雖不說地動，怎奈地是動的啊』！這老的毅力，眞有常人不能及的地方．他自受這次重刑以後，時常發痴氣，不久便雙目失明，科學的事業，也就以此停止，嗣於1642年逝世．

講到這裡，學習算學的朋友們，一定等不得了要問：什麼是伽利略在算學上的貢獻呢？伽利略對于算學的功績，和其他算學家不一樣，並不重在發明一個公式，一條定理．是他能運用算學作研究物理天文的利器，擴大算學的領域，增加算學的材料，這幾點已夠我們紀念不忘了．他嘗說：『哲學是寫在宇宙這本大書中，總是公開的．但是我們首先要懂得其中所寫的言語和文字，那言語便是算學，那文字便是三角形，圓形，和別的幾何圖形．沒有他們，我們不能知道其中所說的是甚麼，只是在黑暗中摸索而已』！

世 外 奇 談

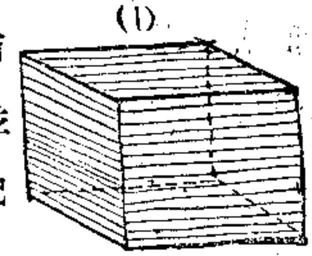
(續)

A Square 原著 乙 閣 譯

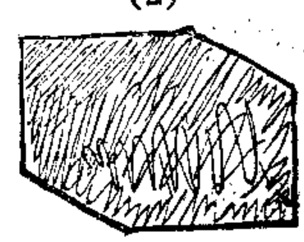
19. 求眞獲譴再返塵世

當他們將我的兄弟押去監禁的時候,我本想跳入議事廳去替他求情,即使求不下來,至少也和他見一面. 但是我的行動,完全操於球體之手,絲毫不能動彈. 只聽得暗中有人說道,"不要擔心你的兄弟,也許將來有的是工夫去安慰他. 隨我來罷".

(1)



(2)



於是我們又升到空間內面. 球體說道,"以前我只把平面圖形和牠們的內部,指示於你,現在讓我把立體介紹給你,並且使你明白立體是怎樣做成的. 這兒有許多正方卡片,我把這片放在另一片上面, 看着, 我是放在上面, 不是"北"面. 現在再放上一片,又放上一片. 這樣一個一個的正方平行拼起來,便做成一個立體了. 好了,做成功了. 這個立體的高,和牠的長,寬一樣,我們叫牠做立方."

我答道,"我的先生,請你恕我,據我看來,這東西好像並不是立體, 乃是一個不正當的圖形,牠的內部我都可以看見,不由得想起那怪樣的罪犯們來,令人頭痛."

球體道;"這也難怪. 你對於三元世界的光暗和透視的方法沒有習慣,看起來自然以爲是平面圖形,正像你們那裏不懂得視覺認識法的人,把六邊形看作直線一般. 不過這個東西確乎是立體,你可以來摸摸試試".

於是乎他將我介紹給那立方,一接觸之後,纔知道這個奇怪的東西, 果然是立體而非平面,幷且有六個邊和八個角尖. 我還記得球體曾經說過,這個東西,可以由一個正方形在空間平行移動而成的,像我這藐不足道的人,居然在某種意下之義

可以被稱爲這樣一位體面人物的祖先，想到這裏，不禁心花怒放．但是對於我的先生所說關於"光""暗"，及"透視"的意義，還是不懂，當然不客氣的問個明白纔好．如果把他的解釋都寫下來，無論如何簡潔明瞭，讀者諸君一定討厭，因爲你們住在空間，這些事情早就知道的． 憑他那流暢的口才，加以實地試驗，將物體放在種種位置，視覺觸覺都用上，有時還准我摸他那神聖的身體，終於使我對於一切都明白了，圓形和球體的分別，平面圖形和立體的差異，我那時一一概瞭如指掌．

花無常好，月不永圓，我的奇遇，到此算是極頂了，纔到得神仙世界，又要貶謫回塵世，想將起來，眞是不幸，而且萬分不值！剛把求知的渴望引起來，隨即給與失望；這是應該的嗎？提起我那時所受的侮辱，不由我不怨氣冲天，不過如果有方法叫大家懂得空間的向度，並不限於二元三元或幾元爲止，那麼我便再受更多的侮辱，也甘心情願．讓我把當時情形老實的寫出來，請讀者公平裁判罷．

球體既將立方示我，很情願繼續地指敎我一切有規則的體，如柱體，錐體，五面體，六面體，十二面體，及球體自身之類，但是我偏𨶹住他的話頭，這幷非我厭倦學問，實在是我所渴想的，比他要傳授我的還要更深一層．

我說，"我的——不，我現在不能再稱你爲最完備最圓滿的——大師，請允許你的僕人看一看你的內部．

球． 我的什麼？

我． 你的內部：你的肚子，內臟．

球． 那裏來的這種唐突的請求？你說不能再稱我爲最完備最圓滿的人物，到底是什麼意思？

我． 由你的敎訓，使我更懷奢望，以爲一定還有比你更完備，更圓滿，更偉大的存在．有如你自已，高出於二元世界一切的形體，由許多個圓形而成，所以在你之上一定還有更高於三元世界一切立體的東西，由許多個球體而成的．我們現在置身空間，下視二元世界一切事物的內容，一覽無遺，那麼在我們之上一定還有更高度的空間，從那裏我們可以一同看見一切立體的內部，那時你自已以及你同類的

內臟，一律呈露在我的眼前．我想你一定引導我到那地方去．

球．少說廢話！光陰寶貴得很，你如果打算向二元世界的人們宣傳三元世界的福音，還有好些事情要做啦．

我．仁愛的先生，我知道你有權力可以做這個事情．祗須允許我把你的內部給我看一眼，我便永遠滿足了，從此便一輩子做你的徒弟，做你的奴僕，謹守你的教訓，說什麽便算什麽．

球．如果我辦得到，一定照你所希望的去做，其奈我不能何．難道你一定要我把肚子翻過來纔喜歡嗎？

我．你把我帶到三元世界來，於是二元世界一切的內部，都看得清楚，何不再帶我到四元世界內去，從那裏我們豈不是可以看見三元世界一切立體的內部嗎？

球．可是四元世界在那裏呢？

我．我不知道．但是你一定知道無疑．

球．我也不知道．根本就沒有這個世界．這個觀念本身便不可思議．

我．不可思議，不見得吧？我還是用你所敎我的類推的方法來說罷．

我於是把他從前所說的話重述一遍．在一元世界裡，點運動成直線，有兩個尖端．在二元世界裡，直線運動成正方有四個尖端，在三元世界裡，眼見着正方運動成立方，有八個尖端，那麽在四元世界裡，立方運動必然成爲更高上的一種東西，有十六個尖端了．2，4，8，16 不是等比級數嗎？再則直線以兩點爲界，正方以四邊爲界，立方以六面爲界，那麽四元世界內的那個東西，無疑的是以八個立方爲界的因爲 2，4，6，8 是等差級數呵！

"這不是完全由類推而來嗎？" 我說．"哦，先生，請你証實我所說的話，或者推翻牠．如果我不對，我從此認了，否則你也要講講理．請問你們世界中人，有沒有看見過那來無影去無蹤的人物，好像你到我舍下一般情形，門未開，壁未破，自由來去？務必回答我，好叫我死心"．

球（沈思有頃）．聽說有人說過．是否事實誰都不敢說．就令有此事實，他們

的解釋，也不一樣，可是從來沒有人想到四元世界上面去．請休管這種閒事，我們還是言歸正傳吧．

我． 我一定相信此事，我相信一切都如我所預料． 我的好先生，請你耐心再回答我一個問題；那些來無影去無蹤的，他們去的時候，是否他們在三元世界內面的截痕漸漸的縮小，好像向着一個更大的世界內面去了呢？

球 （面有怒容）． 如果他們是來的，當然一定要去． 但是很多人以為這是心理作用——你當然不懂得這話的意思——無非是那看見的人的神經錯亂罷了！

我 他們是這樣說的嗎？ 請不要信他們的話． 就令事實果然如此，四元世界果然是理想中的世界，那麼也請你領導我進去，好叫我理想方面可以看見一切立體的內部． 并且可以看見一個立方，向着某一個新的方向移動，他內部的各點，都一律走到一種新的空間內面去，因而做成比牠自已更完美的形體，具有十六個尖端和八個立方做成的界限． 到了這種幸福的四元世界之後，又踏到五元世界的門口了，難道我們停止不再前進嗎？ 不，還要往上去，只要知識邁進，六元世界的門也是開放的，更進而七元，而八元——

這樣繼續着說下來，我自已也不知道說了幾久． 球體氣得暴跳如雷，再三的命令我停住，而且百般恫嚇，但是毫無效果． 在極端興奮下的我，說什麼也禁止不住．也許是我不對，但是我被他指點之後，陶醉在眞理的懷抱中，竟自忘其所以．這一幕喜劇，快到結局．不待我說完，我外部忽然受了，一下打擊內部同時也振了一下．致令我身不由主，在空間動了起來，其速無比．下！ 下！ 下！，一直降將下來；我知道一定是回到二元世界去的． 整個的二元世界正到我的眼前，一瞥而過，這最後的而且永不能忘的一瞥呵！ 隨卽一片黑暗，最後忽聞霹靂一聲，萬事皆了，等到回復知覺的時候，我已在書房之中，耳聽得我妻前來，依舊是二元世界內一個匍匐爬行的凡夫俗子了．

20． 再相逢是在夢中

雖然沒有時間細想，我的本能使我覺得一切經過，必須瞞着我妻纔好． 當

時並沒想到怕她洩露秘密，惹起危險，不過知道和二元世界中任何女人談我的經歷，是說不通的，所以臨時撒了一個謊，說是偶然不慎，掉在儲藏室的地板下面去了，在那裏昏倒了一會兒．

在我們所居的地域中，南向吸力是很小的，我所撒的謊，不很高明，即便是女人，也一定以爲奇怪而不肯相信；可是我妻在婦女界中，總算是很有見識的．看見我有失常度，不和我爭論，却堅囑我去休息．我也便將計就計的回到自已寢室內去，好把過去的事情，默記一遍．坐定以後，忽覺疲倦上來；在沒有合眼之前，我想起那第三個方向，尤其是那運動正方而成立方的手續，想要再試一次．可是大出意料之外，居然有點模糊，好在還記得那是要"向上不是向北"的，所以我决意記住這一句話，以便按圖索驥嘴裏唸着，"向上，不是向北"，好像唱歌一般，不一會便睡得爛熟了．

睡這一覺之中，做了一夢，好像又在球體旁邊立着，他的面容和善，表示對我的態度，已經改變了．我們同向一個很光亮但是極其微小的點走過去，球體叫我注意，說"你家住在二元世界，夢見過一元世界，同我到過三元世界，現在我再帶你到一個新的世界，比一元世界還低一級的世界．

"看見前面那一點點小東西嗎？牠和你我一樣，也是一生，不過位置一定，毫無運動的能力．牠就是牠的世界，牠的宇宙；牠只知有已，不知有人；牠不懂得什麼是長，什麼是寬，什麼是厚，因爲牠從來就沒有這些經驗；牠連"二"字都不知道；更無所謂多數；因爲牠是牠世界內所有而且唯一的人物．你看牠那種躊躇滿意的態度，祇顯得牠愚昧無知而已．注意，古話說的好"滿招損，謙受益"．你仔細聽聽看"．

說完，只聽得那小小點兒發出嗡嗡的聲音，非常微弱，我只聽見了幾句，"牠眞有福氣呵！世界之大祇有牠唯一的存在"，

評我，"這小東西所說的'牠'是什麼？"球體答道，"就是牠自已．你不要做聲，再聽下去！"

那小東西繼續着說道，"牠所在的空間就是牠，牠所想的就是牠所說的；牠所說的就是牠所想的；牠自已想，自已說，自已聽，想也是牠，說也是牠，聽也是牠；牠是

唯一的，又是所有的．哈，牠眞是快樂呵！"

我對球體說，"你能有方法叫牠不要太高興嗎？告訴牠的實情，讓牠知道還有比牠高的存在，如你以前所告訴我的一般"．球體說，"不容易，你試試看．"於是我提高了嗓子，對着那小點說下面的話：

"卑賤的小東西，少說話，不要太美了．你自稱一切的一切，其實你算不了什麽．你所謂的世界，不過是直線上渺小的一點，比直綫更高的還多着呢，譬如——"球體攔着說，"够了，不要再說了，聽着，看看你的話對牠究竟有何影響．"

這位唯一無二的至尊，聽見我的話以後，那得意的神情，由牠所發出的亮光看起來，還和以前一樣，我剛停口他又唱起來了，依舊是那一套自誇自大的詞句．球體道，"你聽，你的話白說了．牠就想不出除牠以外還有他人，算了罷，你我决沒有方法可以使牠不自鳴得意的"．

此後我們從容地回到二元世界，我的同伴在途中很和氣的告訴我許多道理，鼓勵我上進，並且叫我教別人也要上進．他承認他最初生氣，因爲我堅持着三元世界之上還有世界，可是他後來也有新的覺悟了，所以他很客氣的向我認錯．他幷且告訴我怎樣將一個立體運動，可做成高級的立體，比從前做給我看的那個立方，還要更進一步．他完全用類推的方法，一層一層上進，極其簡便而且容易，幾乎婦人孺子都可以懂得．

21．第一次試驗就失敗了．

我醒後想起前途的光明，快活得很．立刻就想要向二元世界的人們，宣傳三元世界的福音，卽便婦女及兵士們也應該叫他們知道．打算從我妻方面做起．

正在打主意的時候，忽聽街上人聲鼎沸，接着有人高聲說話，原來是政府派出來的人員宣讀命令．仔細一聽，知道就是那天元老會議通過的議案，公佈出來，如有邪說惑衆，宣傳世外奇談者，逮捕之後，或被監禁，或卽處死．

我細想一遍，危險不小，最好關於去過三元世界的話，一字不提，從事實着手宣傳也無所不可．"向上，不是向北"，有這句話，便可證明三元世界的存在了．這話

的意思，在我未睡之前，心中十分明白；剛醒來的一會兒，離開夢境不久，心內還很有把握，可是此時又有點拿不住了，所以雖然我的妻正在此時進我房內來，我終於決定不和她談此事，祇說了幾句家常話而已．

我那幾位五邊兒子，品行端正，而且醫道很好，頗有名譽，但是算學程度太差，所以我也不想和他們談論此事．忽地想起我那六邊孫子，他曾經問過 3^3 的問題，何不把他找來試試呢．和他談談這事，是再妥當不過，因為他，一個小孩子，當然不懂得什麼政府的命令；而我那幾位兒子，愛國心熱，極端服從元老，如果他們見我堅持己見，宣傳三元的理論，說不定要大義滅親，把我送到公堂，那豈不是糟透了！

不過目下第一件事情，便是要想法子對付我的妻，因為她問起昨天那位元老突如其來，光降我家，究竟為了什麼，而且問到他是怎樣進來的．我天花亂墜的對她說了一遍——其實所說的都不是事實，所以我不寫出來——居然把她哄過去了，並沒有一句提到三元世界的話． 接着我便立時去找我那孫子，因為，說實在話吧，我所見所聞的一切，自己覺得越來越糊塗，只依稀彷彿地記得一點，幾乎都要交還我的先生，再說我也很想教出第一個徒弟來，試試自己的本領．

我的孫子進來之後，我小心地把門鎖了起來．於是坐在他的旁邊，拿起算學簿子，對他說要繼續昨天的功課． 又重說了一遍如何一點運動，成為直線，直線運動，成為正方． 說到此處，我笑了起來，說，"你昨天不是對我說一個正方，怎樣'向上，不是向北'運動可以做成一個三元世界內的東西嗎？小鬼，你再說一遍看看"．

正在此時，街上那宣讀命令的聲音，又傳到我們耳內． 我這孫子雖是小孩，可是聰明得很，而且生長名門，很知道尊敬元老，服從命令．當時他便知道事情不妙，立即改變態度，大出我意料之外．他一句話也不說，一直等到宣讀命令的聲音聽不見了，纔迸出眼淚道，"祖父，我不過是說得玩的，當然不是有意說的．我們那時候並不知道有這個命令，而且我好像沒有說三元世界的話．至於'向上，不是向北'的話，我確乎沒有說過． 那有向上運動而不是向北的呢？向上不向北！即使我是三歲小孩，也不會說這樣不通的話．這是多麼愚蠢呵！哈！哈！哈！"

我生氣了，我說，"一點也不蠢．你看，我把這個正方，"我一面說一面拿了一個正方形在手內；"我叫牠運動，不是向北，而是——哦，對了，是向上——就是這樣——不，不恰好是這樣，但是——"我拿着一個正方在手內擺動，怎樣都不是辦法，話也說不下去了，讓我孫子看着好笑；他果然大笑特笑，說我不是教他，是和他頑笑，立起身來，開門便跑．我第一次傳授三元世界的道理，所得結果，就是如此．

22 宣傳三元理論所得之結果

我的試驗失敗之後，便不想把我的秘密告訴家中其餘的人們；但是我不相信這樣就沒有成功的希望．不過我知道只靠"向上，不是向北"一句話是不行的，一定要設法尋一個證明，好使大衆對於此事有一種清晰的觀念．因此費了幾個月的工夫，在家寫一部書，敘述關於三元世界一切的秘密．為了要避免法律的干涉，我不敢說實有其事，只說是一個理想的世界．假定那個世界內有人，下望二元世界，可以同時看見一切東西的內部．在那個世界內，可以假想有一種形體存在，是由六個正方圍成的而且，有八個尖端．我寫此書時，最感受困難的，便是心內想要畫的圖，事實上不能畫．因為在二元世界內，無論什麽都是一條直綫，祇有長短和光暗的分別，所以我的著作（定名為"從二元世界到理想世界"）雖是完成了，是否別人懂得我的意思，我自已也沒有把握．

這時候的我，已經受了重大的嫌疑．因為每見一事物，便想到在三元世界看牠，應該是如何的樣子，所以遇事必談眞象，人家聽不慣就認為是狂言亂語．因此我的師律職務也放棄了，一天到晚去想我那曾經親歷過而無法使人相信的種種神秘的事情，這些事情，因為日子多了，有時在自已心目中也不容易重新記憶起來．

有一天，大約是從三元世界回來十一個月以後，我閉着眼睛想像立方的樣子，居然想不起來；後來雖有一次想到了（只此一次以後再也想不起來）然而是否和原物一樣，自已也不敢十分決定．此事令我更為傷心，決意從速發表一切經過，免得全忘却了，但是如何辦法，我自已也不知道．如果能够叫人相信，即便犧牲性命我都願意．不過自已的孫子都沒法傳授，試問如何能使元老們相信我的話呢？

有時我精神失常，竟發出危險的言論．本來我已被人視作異端，只差沒有加上反動派的罪名，所處地位的危險，我自己未嘗不知道．然而有時情不自禁，即便在貴族交際會中，也不免發表惹動嫌疑的談話．譬如當他們談到有些瘋人，自稱他們有透視一切物體內部的能力，商量如何處置這些瘋人的時候，我總是提起以前古代一位元老所說的話，"先知先覺的人，在大衆看起來，都是瘋子"；有時不知不覺的說起像"通天眼"一類的名詞，而且竟有一兩次把那犯禁的"三元世界，四元世界"都說了出來．這類小禍，委實闖了不少次，最後有一回，我們地方商業會議在當地長官公署內舉行，在座有幾個人宣讀一篇文章，說到上帝為什麼限制這個世界為二元世界，及為什麼只是上帝有通天眼．我居然不顧一切，對着大衆宣佈如何我同球體到三元世界旅行，如何到了首都的會議廳，如何又回到空間去，如何回家，以及我親身或夢中所見所聞的一切．開始的時候，我還假裝着說是一個杜撰的故事，後來越說越痛快，索性自己承認了，最後我用熱烈的口吻，奉勸聽衆捐棄成見，相信三元世界的存在．

不消說得當然是立時被捕，押送至首都去候審了．

第二天早晨他們把我帶到我家，站在幾月以前同球體初次見面的地方，讓我自頭至尾叙述一切經過．還沒有開始說話，我就看出我的命運來了．因為那主席元老看見在場衛隊，是很好的一隊．頂角差不多有 55^0，立即傳令撤退，在我自辯以前，另換了一隊頂角不過 2^0 或 3^0 的壞兵士．我是十分明白他的用意，無非是等我說完之後，要處死我或者監禁我，同時為了不要世人知道我所說的一切神秘，在場官吏，一律殺絕，免致傳漏出去，而他又捨不得犧牲好的衛隊，所以拿壞的隊伍來替死．

我聲辯完畢之後，主席好像覺察到有許多晚輩的元老，被我的真誠摯意感動了，於是提出兩個問題：

1. 我總是說"向上，不是向北"，這個方向究竟能否指出？

2. 我所喜歡說的立方，是怎樣的東西，我能否用圖畫表示出來（僅僅憑空說

有幾邊幾角是不行的)?

我宣言再沒有可說的了，我自己相信眞理總有明白的一天. 主席說他也對我示同情，相信我無法再把此事說得更明白. 於是宣佈把我終身監禁，但是如果三理表元世界是眞的，我可以從監獄內逃出來，那麼他也可以讓我自由自便去宣傳三元論. 所以除了防備我逃走所必取的手段外，在獄裏還不覺得太苦，只要不再做不正當的行爲，並且允許我時常和那先我入獄的兄弟會面.

日子過得眞快，我進監獄於今已有七年了，除去有時見見自己的兄弟外，和一切朋友都隔絕了，天天見面的，祇是幾個獄卒而已. 我的兄弟是一個極好的正方形，爲人公正明達，樂天知命. 我們友愛之情彌篤，然而我們每星期一次見面之中，至少有一點叫我深深地感到苦痛. 那天球體在會議廳現身的時候，他是在場的，他親自看見球體截痕的變動，他親自聽見球體對元老們所說的話. 在這七年之中，我差不多每個禮拜都對他講三元世界的事實，告訴他那天我正和球體在一起，而且用類推的方法，說明立體是怎樣做成的. 然而我的兄弟至今還沒有完全懂得三元的理論，竟明白宣稱不相信有球體那種東西，提起來我自己眞是慚愧呵!

所以在二元世界之中，我是絕對沒有信徒了，球體那天所進行的使命，千載難逢，然而對於我的宣傳，毫無幫助. 我只希望這篇記載，流傳出去，能使世人明白空間的元度，是沒有限制的，那麼我已心滿意足了.

—(完)—

問 題 欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效。 凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題。 無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露。 數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登。 來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰。 至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下。 編者謹識.

晚 到 之 解 答

27. （四川成都私立成公中學陳永棪君）

問 題 已 解 決 者

29. 試以式證明算術之分數除法，爲何要將除數之分子分母顛倒乘被除數並解釋之。

解（湖南省立第一職業學校段桂棠）

設 $x=\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$，兩邊同以$\frac{d}{c}$乘之，則 $x\times\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$. 再以 c 乘兩邊，以 d 除兩邊，則得 $x=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$矣.

又解（湖南省立第一師範楊堯農）

設 m, n, l, s 爲任意之數，求証 $\frac{m}{n}\div\frac{l}{s}=\frac{ms}{nl}$.

証，令 $\frac{m}{n}=\alpha$，$\frac{l}{s}=\beta$，則 $m=n\alpha, l=s\beta$ ……………………(A)

而 $$\frac{m}{n}\div\frac{l}{s}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ns\alpha}{ns\beta}=\frac{(n\alpha)s}{n(s\beta)}=\frac{ms}{nl}\text{（由A）}$$

又解（成都私立成公中學陳永棪）

設 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$ 爲二分數，而以後者除前者，則

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}}=\frac{\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c},$$

故如題云.

(編者按以上三解理論上均不誤，但此問題最易發生於小學中，若用前之二解敎小學生，決不能懂．第三解較好．其實解釋時，應利用除法定義，即

被除數＝除數×商.……………………………………(1)

如以 $\frac{a}{b}$（敎小學生時宜用數字式，不可用代數式，但一樣有效）爲被除數，$\frac{c}{d}$ 爲除數，代入上式，則發生下之問題：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\times ?$$

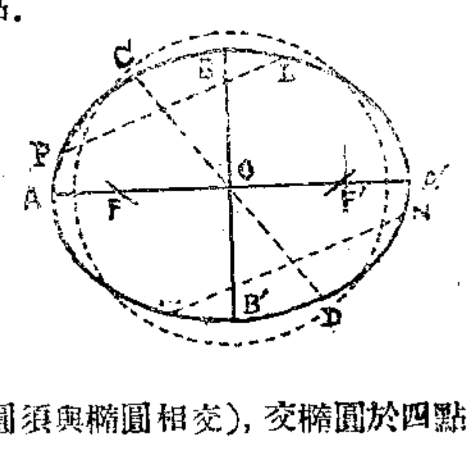
即以何數乘 $\frac{c}{d}$ 即得 $\frac{a}{b}$ 乎？此時應令小學生知次式爲眞確：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}\times\frac{a}{b}$$

然後與(1)式比較，即知商數爲 $\frac{d}{c}\times\frac{a}{b}$ 矣.)

30. 已知橢圓圖形，求其中心及二軸與焦點.

解（湖南省立第一職業學校段桂棠）



如圖，任作平行之兩弦PL 及 MN. 聯結其中點作線與橢圓相交於 CD，則 CD 必爲橢圓之一直徑，因之其中點 O 即爲所求之橢圓中心.

於是以 O 爲心，適宜之長度爲半徑作圓（其圓須與橢圓相交），交橢圓於四點.[2] 因圓及橢圓對其中心皆爲對稱圖形，故此四點亦然，而順次聯之，必得內接於橢圓

之一矩形．過O作平行於此矩形各邊之直徑AA′及BB′，卽爲所求之二軸矣．

復次，以B（或B′）爲心，AA′之半（卽OA＝a）爲半徑，在AA′上取F，F′兩點，卽得橢圓之二焦點．蓋因焦點與中心之距離應爲$\sqrt{a^2-b^2}$，而$OF=\sqrt{BF^2-OB^2}$ $=\sqrt{a^2-b^2}$也．

（本題解者尙有湖南第一師範楊堯農君，不另錄．）

31．梯形上下底之長爲a，b，兩腰之長爲c，d，對角線之長爲l，m，試證

$$l^2+m^2=c^2+d^2+2ab.$$

證（江西省立第七中學畢業生袁漢火）

如圖，設ABCD爲梯形，AD＝a，BC＝b，AB＝c，CD＝d，AC＝l，BD＝m．作AE及DF垂直於BC，則

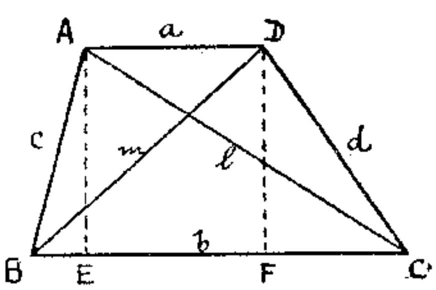
$$l^2=AE^2+EC^2$$

$$c^2=AE^2+BE^2$$

$$\therefore\ l^2-c^2=EC^2-BE^2$$

$$=(EC+BE)(EC-BE)$$

$$=b(EC-BE)$$



同理 $m^2-d^2=BF^2-CF^2=(BF+CF)(BF-CF)=b(BF-CF)$

相加 $l^2+m^2-c^2-d^2=b\ (CE-CF+BF-BE)=b(a+a)=2ab$

$$\therefore\ \ l^2+m^2=c^2+d^2+2ab.$$

又證（湖南省立第一職業學校段桂棠）

如上圖．從 ΔABD 得$m^2,=a^2+c^2-2ac\cos A=a^2+c^2+2ac\cos B$

從 ΔACD 得 $l^2=a^2+d^2-2ad\cos D=a^2+d^2+2ad\cos C$

加之得 $l^2+m^2\ =2a^2+c^2+d^2+2ac\cos B+2ad\cos C$

$$=c^2+d^2+2a\ (a+c\cos B+d\cos C)$$

$$=c^2+d^2+2a\ (EF+BE+FC)=c^2+d^2+2ab,$$

（本題解者尙有湖南第一師範楊堯農，成都私立成公中學陳永棪二君）

提出之問題

提出者湖南省立第一師範楊堯農，

34. 四邊形 ABCD 外 切於圓，引長 AB，CD 交於E，AD，BC 交於F，則 AC，BD，EF 三線段之中點及圓心同在一直線上.

35. A，B二人每日作工時間之積，與其所得工資之和爲正比. 某次承辦一工程，言明工價 23.2元. 第一日兩人得工資 1，2元，其後每日各增加工作一小時，至最後一日兩人所得工資爲7，2元，但總計前半日子所得之工資，只有 6，2 元. 問二人第一日各作工幾小時.

36. 若方程式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$， $x^2+y^2=r^2$ 之公解僅有一組，則 p，r 之關係若何？

提出者謝來方.

37. 求自一定點作一直線，分一已知三角形爲定比分.

38. AB 爲一線段， 位置一定，C 爲一定點，求過 C 作一直線，使由 A，B 向此直線所作垂綫 AD，BE 所成之梯形 AEBD 有定面積.

提出者成都私立成公中學陳永楙.

39. 於任意四邊形各邊上各作正方形，設此等正方形之中心，依次爲K，L，M，N，試証 $KM\perp LN$，且 $KM=LN$.

提出者湖南省立第一職業學校段桂棠

40. 過已知角內之一已知點，求作一直線，與角之兩邊成一三角形，令與已知三角形等積.

國立上海交通大學廿二年度入學試驗算學試題

（編者按原題係英文，下述爲意譯）

(A) 高等代數

1. 分解次式為部份分數

$$\frac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

解：命 $$\frac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}\equiv\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+\frac{C}{(x-c)}\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+px+q\equiv A(x-b)(x-c)+B(x-c)(x-a)+C(x-a)(x-b)$$

命 $x=a$， $A=\dfrac{a^2+pa+q}{(a-b)(a-c)}$.

同理 $B=\dfrac{b^2+pb+q}{(b-c)(b-a)}$， $C=\dfrac{c^2+pc+q}{(c-a)(c-b)}$.

代入(1)即得.

2. 若 a,b,c，為不等正数，求證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.

證：參看本刊第一卷第四期第8頁例3.

3. 以遞差法(Method of difference)求下列級數之第n項及n項之和.

$$8,\quad 16,\quad 0,\quad -64,\quad -200,\quad -432\cdots\cdots$$

解： $8,\quad 16,\quad 0,\quad -64,\quad -200,\quad -432\cdots\cdots$

首次差： $8,\quad -16,\quad -64,\quad -136,\quad -232,\cdots\cdots$

二次差： $-24,\quad -48,\quad -72,\quad -96,\cdots\cdots$

三次差： $-24,\quad -24,\quad -24,\cdots\cdots$

$0,\quad 0,\cdots\cdots$

$$\therefore\ U_n=8+8(n-1)-24\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}-24\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|3}}$$

$$=4n(3-n),$$

及 $S_n=12\Sigma n^2-4\Sigma n^3=n(n+1)(-n^2+3n+2)$.

4. 某童平均能于五題中作三題．若試驗八題中，能作五題即及格，求此童及格之機會.

解：此童每題能解之機會為$3/5$，不能解之機會為$2/5$，故所求之機會為

$${}^8C_8(\tfrac{3}{5})^8+{}^8C_7(\tfrac{3}{5})^7(\tfrac{2}{5})+{}^8C_6(\tfrac{3}{5})^6(\tfrac{2}{5})^2+{}^8C_5(\tfrac{3}{5})^5(\tfrac{2}{5})^3=\frac{46413}{78125}.$$

5. 用消元法解下之聯立方程式

$$x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-xy-2y^2-5x-5y=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

解: 依x之降冪排列而消去之

$$\begin{aligned}
x^3-(3y+16)x^2+(2y^2-28y)x &=0\\
x^2-(3y+16)x+(2y^2-28y) &=0\\
x^3-(y+5)x^2-(2y^2+5y)x &=0\\
x^2-(y+5)x-(2y^2+5y) &=0
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3y-16 & 2y^2-28y & 0 \\ 0 & 1 & -3y-16 & 2y^2-28y \\ 1 & -y-5 & -2y^2-5y & 0 \\ 0 & 1 & -y-5 & -2y^2-5y \end{vmatrix}=0.$$

展開而簡約之, $y^3-y^2-2y=0$.

解之得 $y=0,-1,2$.

代入(1)及(2)而求其公共根,得答為

$$x=0,\ y=0;\quad x=3,\ y=-1;\ x=-2,\ y=2.$$

注意: 二元二次聯立方程,應有四對答數,今祇有三對,乃因有一對為$(x,y)=(\infty,\infty)$也. 曾習解析幾何之學生,當知所設二方程式所代表之雙曲線有兩條平行漸近線,此解即其公共無窮遠點之坐標也.

6. 求一最簡分數表 $\pi=3.14159265\cdots\cdots$ 使其誤差小于0.000001

解: 先將 $\pi=3.14159265\cdots\cdots$ 書成連分數

$$3.14159265=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{288+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{4}$$

其各次收歛分數(convergent)為$\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, ……

因其第五次商(quotient)最大，故取其第四次收斂分數(參看Hall and Knight: Higher Algebra P.280) $\frac{355}{113}$，其誤差為 $\frac{1}{288\times113^2}<0\cdot000001$.

7. 以一行列式表次行列式之積

$$\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解:

$$原式=\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2-b^2 & -a^2+b^2 & a^2+b^2 & a^2+b^2 \\ ac-bd & -ac+bd & ac+bd & ac+bd \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix}$$

8. 知 $x^3-2x^2-23x+70=0$ 有根在 -5 與 -6 之間求此根之值至小數四位止

解: 此卽用 Horner's process 可也，但此法便于求正根，故改為求 $f(-x)=0$ 在5，6間之根. 算法冗長，請參看 Fine's College Algebra pp.453－454. 結果得 $f(-5.1345)>0$, $f(-5.1346)<0$, 故答數為 $x=-5.1345$

(B)平面三角及解析幾何

1. 求滿足次方程式x之值

$$\text{vers}^{-1}x-\text{vers}^{-1}\alpha x=\text{vers}^{-1}(1-\alpha)$$

解: 設 $\text{vers}^{-1}x=\theta$, $\text{vers}^{-1}\alpha x=\phi$, 依題意 $\text{vers}(\theta-\phi)=1-\alpha$

卽 $\cos(\theta-\Phi)=\cos\theta\cos\Phi+\sin\theta\sin\Phi=\alpha$ ……………………(1)

但 $\text{vers}\,\theta=x$, 故 $\cos\theta=1-x$, 而 $\sin\theta=\sqrt{2x-x^2}$

又 $\operatorname{vers}\Phi=\alpha x$，故 $\cos\Phi=1-\alpha x$，而 $\sin\Phi=\sqrt{2\alpha x-\alpha^2x^2}$，

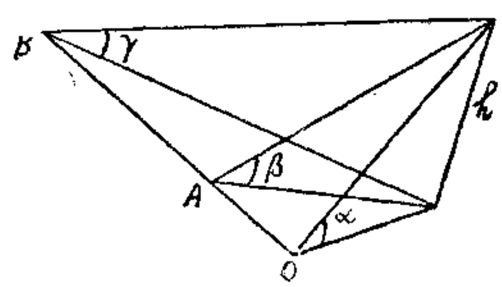
代入(1)式 $(1-x)(1-\alpha x)+\sqrt{2x-x^2}\sqrt{2\alpha x-\alpha^2x^2}=\alpha$

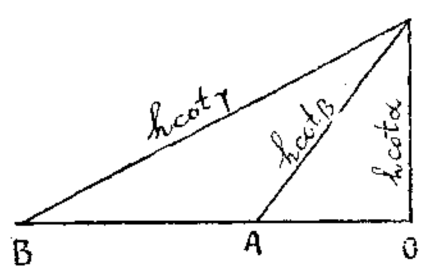
簡之得 $x^2-2x+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=0$

$$\therefore \qquad x=1\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}$$

但x不能大于1,故以取負號爲是.

2. 一人立于一高爲h之塔之正南，測得塔之仰角爲α，自此向西行至A處，測得仰角β；繼續西行至B,得仰角γ：求A B之長,以h,α,β,γ,表之





解: 如圖, AB＝OB－OA

$$=h\left[\sqrt{\cot^2\gamma-\cot^2\alpha}-\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}\right]$$

3. 由抛物線焦點向切線所引之垂直線,交過切點之直徑于準綫上.

證: 設抛物線爲 $y^2=2px$，$P_1(x_1,y_1)$爲切點,則切線斜度爲p/y_1，故自焦點向切綫所引之垂直線之方程式爲: $y=-\frac{y_1}{p}\left(x-\frac{p}{2}\right)$

或 $2y_1x+2py-py_1=0$ ....(1)

過切點之直徑爲 $y-y_1=0$ ....(2)

解(1),(2)得其交點之坐標爲$\left(-\frac{p}{2}\right)$,y,恰在準綫 $x=-p/2$上.

4. 討論且描出次方程式之軌跡.

$$r^2=16\sin 2\theta$$

解: 參看 Smith and Gale: Elements of Analytic Geometry p.152例2.

將其中 θ 改爲 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 卽得.

5. 橢圓諸圓之極(Pole)在輔圓(Auxiliary Circle)上,求此諸弦中心之軌跡.

解: 設橢圓爲 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$,則其輔圓爲 $x^2+y^2=a^2$. 題意即求此輔圓上各點之極綫(polar)在橢圓內段中點之軌跡. 今設 $P_1(x_1,y_1)$爲輔圓上任意一點,則必

$$x_1^2+y_1^2=a^2 \cdots\cdots(1)$$

P_1之極線爲 $$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \cdots\cdots(2)$$

取(2)與橢圓方程式聯立解之,先消去y,得

$$(b^2x_1^2+a^2y_1^2)x^2-2a^2b^2x_1x+a^4(b^2-y_1^2)=0.$$

此方程式之兩根,卽(2)與橢圓兩個交點之橫座標. 但此兩根之平均數,恰爲中點之橫座標,故若(X,Y)爲其中點,則有

$$X=\frac{a^2b^2x_1}{b^2x_1^2+a^2y_1^2} \cdots\cdots(3)$$

同理 $$Y=\frac{a^2b^2y_1}{b^2x_1^2+a^2y_1^2} \cdots\cdots(4)$$

由(3),(4)得 $$x_1Y-y_1X=0 \cdots\cdots(5)$$

因(X,Y)在(2)上 $$b^2x_1X+a^2y_1Y=a^2b^2 \cdots\cdots(6)$$

由(5),(6)得 $$x_1=\frac{a^2b^2X}{b^2X^2+a^2Y^2}, \qquad y_1=\frac{a^2b^2Y}{b^2X^2+a^2Y^2}.$$

代入(1)式得 $$\frac{a^4b^4}{b^2X^2+a^2Y^2}(X^2+Y^2)=a^2,\ 卽X^2+Y^2=a^2\left[\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right]^2.$$

6. 求雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ 之反曲線(Inverse),并討論其性質,但反演中心(center of inversion)在雙曲線之頂點上.

解: 先移動原點至頂點.則雙曲線方程式變爲

$$(x\pm a)^2-y^2=a^2$$

設反演圓之半徑爲1,則以 $x=x'/R'$, $y=y'/R'$ 代入,內 $R'=x'^2+y'^2$,得

$$(x'\pm aR')^2-y'^2=a^2R'^2$$

或
$$x'^2-y'^2=\mp 2ax'R'=\mp 2ax'(x'^2+y'^2)$$

此軌跡名爲 Logocyclic Curve.（討論從略）

7. 求過$(3,2,-6)$且與平面 $4x-y+3z=5$ 垂直之直線方程式

解：設 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 爲所求線之方向餘弦.

則
$$\frac{\cos\alpha}{4}=\frac{\cos\beta}{-1}=\frac{\cos\gamma}{3}$$

∴
$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+6}{3}$$爲所求之直線之方程式.

8. 求過直線$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$及與直線$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$平行之平面之方程式

解：設所求平面爲　$Ax+By+Cz+D=0$

因(x_1,y_1,z_1)在平面上，　$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$

因平面含第一線，　$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0$

因平面與第二線平行，　$Aa_2+Bb_2+Cc_2=0$

∴ 平面之方程爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=0,\qquad \text{或}\qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

介紹新著

高中平面幾何教科書

傅種孫著　　北平師大附中算學叢刻社出版

初等幾何學一科，在中等算學中，是最難了解的課程，其所以難于了解者，並不是因爲理論之嚴謹和高深，而是因爲學習方法的錯誤。我們可以看到許多中學生，能够將所有的定理，逐一背誦，但是不能拿來應用去證明問題；有的是對於某一問題的證明方法，能够逐步記憶出來，但是稍爲變更題義，則又不知如何着手。這種現象非常普遍。記得我在中學時代，會問過敎幾何的先生怎樣學習幾何的方法，他的回答是要多記問題解法，才能熟能生巧，這樣我想要是無系統的記憶，不但記不牢固，並且因爲不能運用思考和埋沒創造能力的緣故，便失却了學習幾何學的眞正意義了。

這種學習方法的錯誤，敎員和學生，固然要負直接的責任，但是敎科書也不能不引咎。現在流行的敎科書，祗顧敎材的堆積，完全不顧及系統的叙述。初中幾何學所講的方式，在高中幾何學中，還是依樣畫葫蘆地重復叙述一遍，令人讀之生厭。甚至理論故示嚴謹，例如詳述歐幾里特之比例論，或材料故示淵博，討論某著名定理及某特殊點線，或炫奇立異，强制灌輸近世幾何中形式的觀念；對於定理的證法及問題的解法，競以簡潔巧妙爲貴；關於幾何證題之如何着手，如何推論，都沒有詳細明確而有系統的指示。因此弄成所謂幾何，除却少數對算學有特殊興趣的人以外，誰都要感着厭倦而害怕了。

最近北平師範大學傅種孫敎授，將其所著高中平面幾何見示，復經中等算學月刊社編者囑作書評。自忖淺學寡聞，本不敢胡說亂道，但是略爲拜讀之後，却又發生許多感想，便把這些感想隨意寫出來：

這本書的特色，是以方法爲經，敎材爲緯，每次汎論推證方法以後，繼之以證題雜術，引入實際運用。例題羅列，理論淺顯，至於敎材的取捨和分類，習題的選擇和

本刊啟事

(一)本刊草創伊始加之出版匆促疏忽譌陋在所不免還祈海內高明有以教之

(二)本刊除特約國內有名學者及中學算學教師長期撰述稿件外尤歡迎讀者投稿凡關於中等算學之稿件不拘門類一律歡迎揭登後略致薄酬以答雅意

(三)自第三期起問題欄中另闢一部專載國內有名大學入學試驗算學試題并附解法以供中學生升學預備之參考讀者幸注意焉

本刊代售處

武昌：武漢書店
文華書局
中國書局
漢口：中華書局
南京：良友書店
上海：開明書店
羣衆圖書公司
北平：景山書社
開封：中華書局
重慶：中華書局
杭州：商務印書館
長沙：求志公司
南昌：藝文書社

本刊價目表

時期	全年(七八兩月停刊)	一月
冊數	十冊	一冊
價目	國幣一元三角	國幣一角五分
郵費在內	費須先惠	
郵票通用	不折不扣	

中等算學月刊

第一卷第十期

編輯者：中等算學月刊社

發行者：中等算學月刊社
(武昌珞珈山武漢大學內)

印刷者：漢口武漢印書館

中華民國二十二年十二月出版