算學小叢書

直尺與圓規

H. P. Hudson 著
林辰 譯

商務印書館發行

算學小叢書

直尺與圓規

H. P. Hudson 著
林　辰　譯

商務印書館發行

譯　例

(一)　本書為 H. P. Hudson 原著,屬 Longmans 近世數學叢書之一;專論直尺及圓規之作圖,內容兼及初等幾何,近世幾何及解析幾何.

(一)　本書計分八章:第一章為導言;第二章論直尺及規尺作圖之可能條件;第三章論直尺作圖而引述交比,對合,等晝等近世幾何之基本思想;第四章論規尺作圖,旁及圓錐曲線之性質與近世畫具如平行尺,分線器,三角板等之作用;第五章論作圖題之各種解法,根據性質分離及變換兩原理對軌跡,投影,反形,……諸法作有系統之敍述;第六章論作圖方法之比較,述物質條件受有種種限制(如畫具之鈍劣,紙張之狹小等)時之作圖法及物質條件不受限制時之作圖之最簡方法,並介紹 Lemoine 氏之幾何繪圖學;第七章論單圓作圖,第八章論圓規作圖,皆於其歷史發展及作圖之基本問題有精詳之闡述.

(一)　本書可供高級中學學生及教員幾何課程之參考．其理論之精闢，敍述之有條不紊，皆足以訓練思考途徑之發展；五、六、七、八諸章所舉之多數例題尤能引起學者之研究興趣．

(一)　譯文力求忠實，全書次序皆仍原文．除原文中有顯著之錯誤二、三處譯者更改之後附註於頁末外，其餘有證明不甚明顯，說理稍涉高深者，反足以鍛鍊閱者之思想能力，譯者均不加註釋，以免強作解人之誚．

(一)　譯名大部按照國立編譯館所暫定者，其有未經擬定者則從舊譯參酌採用之．

(一)　人名，地名等皆不加翻譯，逕用原文．

(一)　原文中有引證參考書時，皆僅舉其作者之名而另附參考書目於書末，譯文率仍其舊．

(一)　譯者以規尺作圖問題之重要而國內專論本問題之書尙未之見，故特不揣譾陋，遂譯此書而公之於世，錯誤舛謬，知所難免，海內學者，幸有以教之．

二十五年十一月十九日，譯者識．

目　錄

直尺與圓規

第一章

導言

Euclid 於其幾何原本 (element) 之篇首即舉三公設 (postulates) 曰:

"茲假定

(i) 從任一點能作一直線至另一點;

(ii) 一線段能延長至直線上之任何長度;

(iii) 以任意點爲圓心可作一圓與此圓心成任一距離;"

該書首六篇之一切作圖所根據者僅此三個基本作圖法而已。首二公設述 Euclid 用其直尺,或一直邊,所能爲者何事。此直尺未必有刻度,蓋 Euclid 僅用以作直線或延長之,固未嘗以之移動距離至他一位置也。第一公設

予吾人直線 AB 上在 A 與 B 間之部分，而第二公設則予吾人 A 以外及 B 以外之部分，故合兩公設則能畫爲兩與點所定之一直線之全部或該線上爲問題所需之任何部分。

末一公設則述 Euclid 用其圓規所能爲者。同樣，Euclid 捨自一半徑至同圓他半徑外未嘗以之移動距離；Euclid 此畫具，不論其作如何狀，於圓心變易時，或兩尖端之一離開平面時，必將下垂而失原來之半徑(93 頁)。合此三公設即得直尺及圓規之作用，即過兩與點畫一直線及以一已與圓心作一圓使過一與點；而此兩作圖法遂構成幾何原本中之全部平面作圖。歐氏作圖(Euclidian construction) 一名詞即用以表一切能用 Euclid 兩作圖法重複應用有限次完成之作圖，而此種作圖不必皆見於 Euclid 原著中。

事實上，Euclid 所予吾人能用規尺完成之作圖爲數極少，而即任一學幾何者皆有得一前人從未嘗有之作圖之可能。然數千年前，即有三數幾何圖形爲任何人所欲以規尺作圖，而無人能成功者。其中最著名者爲作一正方形與一圓同面積及作一角等於一與角之三分一；最後

始證明此兩者中無一能以有限次之 Euclid 之作圖法完成之.

故能以規尺完成之圖形一方爲數無窮，一方亦有極多限制. 其爲無窮也顯而易見:即就最簡單之包含直線上一組等距離之點之一圖形言(此圖形自可以規尺完成)，即可含三點,可含四點,可含四以上乃至無窮數之點，因此即此最簡一式已含無窮圖形，全部可能圖形之爲數無窮更不待言矣;然而此種圖形亦有限制,蓋已知有多數圖形不屬於此一種,而需要直尺,圓規以外之畫具以完成之.例如上舉者外尚有正七角形,正九角形，或橢圓;橢圓可以兩針及一線畫成連續曲線，然用歐氏作圖則僅能得此曲線上無窮數之點.

於是本書所討論之第一個問題遂爲: 何種作圖能根據 Euclid 之三公設完成而何種作圖則否? 或換言之,何種問題能僅用圓規與直尺解決? 學者之用盡心力圖欲以歐氏作圖方一圓或三等分一角也,歷時蓋數世紀,此企圖雖於直接目的上失敗;而亦常生他方面之效果;然能證明前此學者之企圖必當失敗,則解析學發達後之事也.古代或經典的幾何中少有普遍的論述，而即近世幾何亦

缺少一種檢查其自身之權限之記法或計算法。吾人常謂某一種問題當有某一類解法，但原則上對於每一特殊問題均須注重其本身之條件而為之創一特殊之法。方法之變異無窮，欲總述一切方法似屬無望，而欲謂某問題必無一未來之天才能得其一規尺解法亦似不可能者。然而如今則此最後一語卻可施於方圓者(circle-squares)，方圓者之稱不來自幾何學者，而來自解析學者。利用坐標幾何學 (coordinate geometry) 之方法得以代數語言表一切幾何之敍述；代數語言雖稍欠優美，而其所含之字彙較廣；且不但能討論特殊問題而亦能普遍論述一切問題，以是能完全答覆下一問題：僅用直尺，或兼用直尺及圓規，有何種可能作圖?

次章卽述規尺作圖之每一步驟如何等於一解析學之方法；實則，應用一把直尺之能力相當於解一一次方程式之能力，而應用圓規之能力則相當於解一二次方程式者。因此，僅用直尺能解決之問題卽稱為一次問題 (linear problem)，而能用直尺圓規解決之問題則稱為二次問題 (quadratic problem)。因規尺作圖 (ruler and compasses construction) 之每一步驟皆等於解一一次或二次

方程式，故研究用各種可能方法連合此二代數方法所能得之結果即可答覆吾人目前之問題謂 (27 頁)：某種問題而亦僅此某種問題，其解法恃乎一一次方程式其根之計算僅須有理運算 (rational operation) 者，始得僅以直尺解之；而 (32,42 頁) 某種問題而亦僅此某種問題，其解法恃乎一次數爲 2 之冪，而根可以有理運算及開平方得之之代數方程式者，始得以直尺及圓規解之。

是即上述問題之完全解答，蓋全用代數語言述之者；然欲維持其普遍之形式，此解答實不能譯爲純幾何之語言，幾何學中蓋尚缺此類文字也。然此舉實非必要，蓋若有一用幾何語言敍述之問題，儘可試測其以代數語言表示所得之形式——其實際實行唯於數種特殊情形始稍感困難。若試測成功，即可從解析學獲得此幾何問題之一歐氏作圖。例如第二章之末即研究吾人對於正多角形 (regular polygon) 之作圖能力。出乎意外者則正十七角形作圖之可能也，其作法見 47 頁。

吾人旣明瞭可能的歐氏作圖之爲無窮而亦爲有限制，並已相當明瞭其限制爲如何，自欲對此種作圖之全體施一清晰之觀察，而究問最佳之分類當如何。第一分類

上文已提及之；包含能僅用直尺解之之一次問題，第三章卽專論此種作圖. 該章將述及已知件 (data) 對作法之影響，及已知件之性質及關係可如何分類，使每一類各有一特殊的作圖方法.

Euclid 之圓規雖於相當限度外能移動距離，而該章中未嘗用及圓規，至其直尺則絕對不能移動距離. 故原則上，卽已知件中無某種特殊關係時，"距離"不能從圖形之某一部移動至另一部，更不能比較兩線段之長短，卽此兩線段在同一直線上亦爲不可能，唯於一線段爲他一線段之一部分時，始能謂全體大於部分. 兩線段捨相重合外皆不能謂其長度相等；蓋比較兩線段實有使其排列於同方向以供吾人比較之意義，故至少須將其中一線段移至他一位置；然僅用直尺，於一般情形，此爲不可能. 從平行四邊形對邊相等之性質，知若能作平行線，卽能將長度自一線移至其平行線，故移動距離與作平行線間實有密切關係；後此尙當證明，在某種限度內，若吾人能完成兩者之一，卽能完成另一者. 雖云如是，然亦唯平行四邊形之對邊爲相等，其鄰邊卽不然，故作平行線實無補於移線段之長度至與原線段不同之一方向. 唯於已知件

允許吾人作一鄰邊，對邊同爲相等之菱形時，始能於兩組不同方向之平行線中任一組上獲得相等長度。若僅用直尺，實無使一已與長度旋轉任意角度之能力，蓋此爲圓規之主要功用之一。

於是吾人根據已知件之投影性質 (projective property) 及數量性質 (metrical property)，長度之性質及角度之性質而獲一次作圖之普通分類法。交比 (cross-ratio) 於兩者皆屬重要，比較兩不同列點 (range) 之交比之結果又引起等畫 (homography) 及對合 (involution) 兩義；自此數者最終又歸結於需求公點 (common point) 或重點 (double point) 之問題，此種重點之作圖等於解一二次方程式，故僅用直尺不能完成之。

故於兼用圓規之第四章中，吾人對"作一圓"及"解一二次方程式"加以比較，於是能完滿研究交比及對合。此後復離開本題 (92 頁) 而證明尋常之近世作圖器，分線器 (dividers)，平行尺 (parallel ruler)，及三角板 (set square)，常與規尺并用者，僅能縮短歐氏作圖而不能擴張其解決問題之範圍。後此又詳述如何運用此諸器具能完全代替圓規之作用。

除對作圖之已知件加以分類外，尙可分彙作圖之方法而研究每個方法對何種問題最爲有用． 第五章介紹兩個最基本的思想，卽性質分離 (separation of properties 及變換 (transformation)，大多數作圖中此兩者或其中之一必居顯要之地位． 自此兩思想引起者有半打極有用之解題方法，該章中當詳細解釋之． 其中有軌跡法 (103 頁)：如自某某條件推知所求點必在一軌跡上，此軌跡若吾人所用方法能成功則必爲直線或圓所構成者，同時自其他條件推知所求點必在另一如此之軌跡上，則兩軌跡之交卽所求點． 又有試驗錯誤法 (106 頁)：於數次失敗的試測後，若問題確有解法，則必能獲一必底於成之著手途徑；有投影法 (119 頁) 及其數特例：其中含性質分離及變換兩原理；有反形法 (122 頁)：因其中直線與圓之關係而極適於規尺作圖；有對極法 (130 頁)：完全根據於對偶原理 (principle of duality)．

上述者爲研究作圖本身之純本質分類． 此外另有其他完全自外在觀點觀察得來之分類法． 此種分類法根據於作法之能否減少種種作圖之不便利，所謂不便利者蓋原於畫具之弱點，可謂爲實用上的，而非數學的．

然實則盡量減除用一小塊紙，一枝鉛筆作圖的種種困難在理論上亦有其相當的價值(第六章). 同章末段之用意則在於估計一作圖之長度，法爲計算其所需之各種圓規及直尺之演繪動作，然後能指出一個問題之種種不同作法中何者爲最短捷. 此種計分方法實無異於消遣，而計分標準亦極隨意,唯 Lemoine 氏之幾何繪圖學原著頗堪一讀,本書介紹其材料之一部,望讀者能致力於其原書.

最後兩章所述者僅由於好奇心理，唯最少亦有一章可謂爲原於機械作圖之實際應用. 任何歐氏作圖題可僅作一圓及作多數直線解之，亦可不作一直線而作多數圓解之. 七,八兩章證明是理並舉例以明其作法.

於是全書之連鎖包含全部規尺作圖,其範圍,其限制及其分類. 但本書盡量引證例題，故後此舉例獨多; 所望讀者中有不喜一般之敍述或解析學研究者可自諸問題及其幾何解法中獲得研究興趣.

第二章

可能之作圖

於討論任何特殊規尺作圖之前，本章中先借助解析學而研討此種作圖之全部．吾人對每個幾何步驟均當獲得其相等之解析手續 (analytical process)，始能確切敍述以某種方法運用某種畫具能完成何種作圖．

坐標

茲當先知如何用某種坐標系能以算術形式表示問題之已知件，然後研查規與尺之每個運用與此數字已知件間有何種關係．於是利用代數定律即能確切指明用某一畫具或兼用兩者所能得之結果．

爲使研究之進行簡單順利必須假設一切幾何的已知件皆爲點．如此必能使研究大爲便利，且亦完全無損於普遍性．從 Euclid 首二公設，知任與所與直線上之二點，該直線即可作圖，故若已知件中有一直線，即可易以

該直線上之兩點. 此兩點必為確定的而非"任意"點. Euclid 三公設中無一能用以自一直線中"任意"取出一點(參閱 18 頁);點,必為已與者,或為已作兩相交直線以決定之者. 故若欲自已知件中摒棄一直線而易以兩點,則捨非其他已知件中已有該直線上之兩定點,吾人必先使兩條其他已與直線或兩對與點之連線與之相交,始能以此兩交點為已知件,以代所與直線. 即在已知件中,或自已知件能直接得到者,至少有兩直線,或不在一直線上之三點. 於某種瑣屑情款 (trivial cases) 中,所與之元素 (elements, 指點, 線等) 過少,故所能作圖者僅有有限之點及直線 (參閱 26 頁). 例如,若所予者僅有一對直線,則所能作圖者唯其交點而已,此點為唯一完全確定之點. 線上其他各點可謂之部分決定,而不能謂為完全確定;此諸點形成一組定點,與平面上其他各點有別,而諸點間則無可分別,故不能用於更進一步之作圖. 此等情形後此完全置之不論. 同理,一圓可代以圓心及圓周上一點,或圓心及他兩點其距離等於圓之半徑者,或圓周上之三點;而亦有數種瑣屑情款當棄置弗論. 又吾人所研究之問題皆係求有某種所求性質之點,直線與圓之作圖,

故只須能得到所求點，或能藉以作成所求直線及圓之諸點，問題即可謂爲完全解決。故問題中之所求者及所與者皆可化爲一組點。

吾人當先對一組坐標軸或他種坐標系取所求點及所與點之坐標；於是任一點有一組坐標，一組坐標決定一點。此種坐標因所選坐標系 (frame of reference) 而可爲長度，可爲面積，亦可爲角度；然皆可假設其爲一種數目，卽決定一點之幾何量與其相當之同類單位之比。於笛卡兒坐標系中，坐標卽長度之比，卽是橫標 (abscissa) 與 x 軸上單位長之比及縱標 (ordinate) 與 y 軸上單位長之比，兩個單位長不必相同。本書當盡量採用斜角笛卡兒坐標；其坐標系包含兩軸及各軸上一個距原點一單位長之點。本章末段則又另用一種較普遍之投影坐標 (projective coordinates)，其坐標系包含四點。此兩坐標系中，一點皆有兩個確定之坐標，直線則以坐標之一次方程式表之。

故若已與一組點，諸點之坐標立可知悉。任何問題之全部已知件皆可代以一組數字；同理，所求諸點，直線或圓亦可易爲一組數字，卽決定所求點、直線、圓之諸點

之坐標. 吾人之問題遂爲:如果作圖可用直尺,或圓規,或兩者兼用以完成之,第二組數字(所求坐標)與第一組數字(所與坐標)間當有何種關係?

I. 僅用直尺

若吾人僅以直尺爲畫具,則所能作之直線唯有已與或已得之點之連線,而所能作之新點亦唯有兩個如此之連線之交點.

設 x_1, y_1 爲 P_1 之笛卡兒坐標, P_1 爲 $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$ 之連線與 A_3, A_4 連線之交點,則 x_1, y_1 適於兩直線之方程式. 第一方程式爲

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ a_1, & b_1, & 1 \\ a_2, & b_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

蓋於直線之普通方程式

$$lx + my + 1 = 0$$

中定 l, m 之值使直線合於通過 A_1, A_2 之條件,即

$$la_1 + mb_1 + 1 = 0,$$

$$la_2 + mb_2 + 1 = 0,$$

而於最後三方程式中消去l,m,即得上列之行列式方程式.

於是x_1, y_1之值可得自聯立方程式

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ a_1, & b_1, & 1 \\ a_2, & b_2, & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ a_3, & b_3, & 1 \\ a_4, & b_4, & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$x(b_1-b_2)+y(a_2-a_1)+a_1b_2-a_2b_1=0,$$
$$x(b_3-b_4)+y(a_4-a_3)+a_3b_4-a_4b_3=0,$$

由是得

$$\frac{x_1}{\begin{matrix}(a_2-a_1)(a_3b_4-a_4b_3)\\-(a_4-a_3)(a_1b_2-a_2b_1)\end{matrix}}=\frac{y_1}{\begin{matrix}(b_2-b_1)(a_3b_4-a_4b_3)\\-(b_4-b_3)(a_1b_2-a_2b_1)\end{matrix}}$$
$$=\frac{1}{\begin{matrix}(a_1-a_2)(b_3-b_4)\\-(a_3-a_4)(b_1-b_2)\end{matrix}}.$$

於此,對吾人之目的而言有最當重視之一點,即x_1,y_1爲四A點之八坐標$a_1\cdots\cdots b_4$之有理函數.

於是若有一組與點(A),用各種組合從其中取出兩對,即能作一組新點(P),其坐標(x, y)可自與點坐標(a, b)以上列形式之方程式得來. 諸點P可用於進一步之作圖,(x, y)諸值可加入數字已知件(a, b)中,吾人遂可繼續構成新點及新坐標,每次如是之手續皆能增加新點於

已知件，增加新坐標於代替上式中之 $a_1 \cdots\cdots b_4$ 之諸值中.

若最後得一圖形，其中諸點皆已與其他各點連成直線，則因無法再作新線及新點，上述作法卽須中斷，例如所得者爲三角形是. 然此後 (26 頁) 卽知此種情形實屬僅有，普通則上法皆可繼行不斷，新點，新線之數可多至無窮.

上法之每步中，各新點之坐標皆係構成此點之四點之坐標之有理函數. 故以連續代入之法得知任何一點 P，能自諸與點 $A(a,b)$ 僅用直尺作圖者，其坐標 x, y 皆係 a, b 諸值之有理函數. 代入法之步驟恰與倒轉直尺作圖之次序所得之步驟相對應；作 A_1A_2, A_3A_4 二線使相交於 P_1 之幾何手續相當於代 x_1, y_1 以上列 $a_1 \cdots\cdots b_4$ 所成之值之代入手續.

例如，已與四點，$A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(a,b)$.

(i) 連 AB, CD 交於 $P(p,q)$，更連 AC, BD 交於 $Q(r,s)$.

(ii) 連 AD, PQ 交於 $X(x,y)$.

是乃一極簡單之作圖，包含兩步：(i) 自 A, B, C, D 四與點得二點 P, Q；(ii) 自 P, Q 及與點中之兩點得最後一

點 X. 相當於所作三對直線之三對方程式爲:

$$p=0, q=\frac{b}{1-a}; \quad r=\frac{a}{1-b}, \quad s=0; \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

$$x=\frac{a(ps-qr)}{b(p-r)-a(q-s)}, \quad y=\frac{b(ps-qr)}{b(p-r)-a(q-s)}. \cdots(\text{ii})$$

X 之坐標 x, y 若欲以 A, B, C, D 之坐標表之,與作圖之最後一步相當,可自方程式 (ii) 著手,方程式 (ii) 中之 x, y 蓋幷用 A, D 及 P, Q 之坐標表之者. 於 (ii) 之兩式中之 p, q, r, s,代以相當於作圖之第一步之方程式 (i),遂得僅以 A, B, C, D 之坐標表示之之 x, y 之最後之式,其式可約爲

$$x=\frac{a}{2-a-b}, \quad y=\frac{b}{2-a-b}.$$

此最初之普遍結論可概述如:

自一組與點能僅用直尺作圖之諸點,其坐標皆爲與點坐標之有理函數*.

不定作圖 (Indeterminate Constructions)

問題之解答過程中常見有不肯定之詞句,如:“任取

*此處所謂坐標者可包括笛卡兒坐標,投影坐標等. 本條件爲必要條件而非充足條件,故下“逆定理”節更進論直尺作圖之充足條件.——譯者

一點"或"一直線","於一與線上任取一點","過一與點任作一直線"之類. 此種不肯定之作圖手續與吾人茲所研究者大不相同,吾人所研究之作圖手續中,任一新點皆爲兩已作直線所確定,任一新直線皆爲已作之兩點所確定. 此種不確定之作圖手續等於取幾個隨意點 $X(\xi,\eta)$ 而用以完成某種確定的作圖. 此種不明確界定之點視 X 之位置影響最後所得諸點之位置與否而可分屬於兩類. 若前者之位置確能影響於後者,則作圖題爲不定的,於是 X 必當視爲已知件中之一點,而 ξ,η 必當歸於所與坐標 a,b 之中,蓋在 X 未擇定之前,作圖實無法進行. 反之,如 X 果係補助點,其位置不影響於最後之結果者,則不論如何選定 X 點,最後所求諸點之坐標皆爲相同,且此諸坐標之式中必不含 ξ,η;X 點亦可特選之使 ξ,η 爲 a,b 之有理函數,此自亦不影響於最後所得坐標,例如使 X 與諸與點 A 中之一相合或與能從諸 A 點直接確定之諸點 P 中之一相合是. 因在此特殊情款(ξ,η 爲 a,b 之有理函數時),最後所得諸坐標必爲 a,b 諸值之有理函數,於是不論補助點 X 之位置如何,此等坐標皆必爲 a,b 之有理函數. 常有諸與點有某種特殊位置致諸點 A 或 P 中

無一能選之為 X 之情形，例如與點全部在一直線上，而 X 為平面上不在此直線上任意一點是. 若以該直線為 x 軸，則諸 $b=0$；然吾人尙可使 ξ, η 為 a 之有理函數而 η 不等於 0 以定 X 點. 嚴格言之，一組全部在一直線上之與點實不能用以完成任何直尺作圖；然利用不在此線上之補助點卽能獲得此線上之他點其位置亦定自與點者，故從其廣義言，此諸點亦可謂為僅從與點作圖者.

逆 定 理

其次當及其逆定理，而問：坐標為 a, b 之有理函數之諸點是否全部皆可僅用直尺作圖.

若所用者為笛卡兒坐標，則答案當謂諸點未必均能作圖. 已與笛卡兒之坐標系時，一與點之坐標為兩定數；但此兩數雖為確定的，卻須先假設能作一種作圖，卽對兩軸各作一平行線，始得界定之；而若所與已知件為一組普通之點，僅用直尺卽不能作平行線. 諸坐標雖屬有定，而不能作圖，亦不能施以所擬之任何有理運算. 故實際上吾人當摒棄笛卡兒坐標.

然吾人可證明：若能作平行線，卽能完成笛卡兒坐標之任何有理運算. 此自非普通所可能者，故吾人當先注

意於自已知件作平行線之一特殊情款. 最簡單之假設爲在已知件或能直接得自已知件之諸點中有一平行四邊形之四角點;蓋若已與一平行四邊形,即能過任一點作任一直線之平行線也. 次章,68頁,有本定理之完全討論,玆則先假定其已成立.

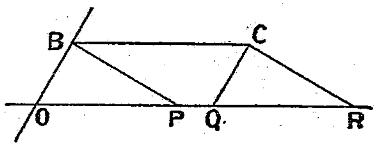
於是即可選一組笛卡兒坐標系,使原點 O 與一與點 A_1 重合,兩軸通過他二與點 A_2, A_3, 幷取 A_1A_2, A_1A_3 爲各軸上之單位長度,於是兩軸上與 O 成單位距之點 A, B 遂與 A_2, A_3 重合. 由是吾人當使

$$a_1 = b_1 = 0;\ a_2 = 1,\ b_2 = 0;\ a_3 = 0,\ b_3 = 1.$$

於前所假設之特殊情款中,即能完成平行四邊形 $OAEB$, 而 E 爲單位點 (unit point), 其坐標爲 $(1,1)$; 更過諸與點作直線平行於此單位平行四邊形之諸邊及對角線,即得坐標爲 $0, \pm 1, \pm a, \pm b$ 諸數中之兩數之諸點之作圖.

基本四律

其次,若 P, Q 爲與點 $(a,0), (b,0)$, 吾人即能作坐標爲 $(a+b,0)$ 之 R 點,於是若重復施行之,即能得無窮之點其坐標爲有正或負整數之係數之 a, b 之一次函數者.



(圖 1)

R 之作圖如下:

完成平行四邊形 $OQCB$, 作 CR 平行於 BP 交 OPQ 於 R, R 即所求之點.

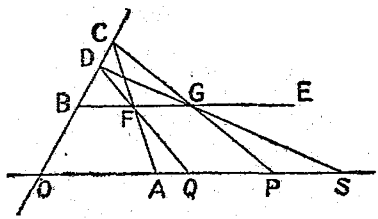
蓋三角形 RCQ, PBO 相全等,而 $QR=OP$,

$$\therefore \quad OR=OQ+QR=OQ+OP=a+b.$$

設已與 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $X(x,0)$ 三點,求作一點其坐標爲 $7x+3$, 則可於軸上自 X 點開始截六相鄰長度, XX_1, X_1X_2,……X_5X_6, 各等於 OX, 與三相鄰長度 X_6Y_1, Y_1Y_2, Y_2Y_3 各等於 OA;於是 Y_3 即所求之點.

$S(ab,0)$ 及 $T(a/b,0)$ 兩點亦可作圖. 蓋 OS 爲 OA, OP, OQ 之第四比例項 (fourth proportional) 而 OT 爲 OQ, OP, OA 之第四比例項. 例如欲作一點其坐標爲 $3/x$ 者,即可依次於軸上求 A_2, A_3, Y 諸點,使 $AA_2=A_2A_3=OA$, 而 OY 爲 OX, OA, OA_3 之第四比例項.

S 之作圖如下:



(圖 2)

於 OB 上任取一點 C，例如 $(0,a)$；連 CA, CP 交 BE (或任何 OPQ 之平行線) 於 F, G；連 QF 交 OC 於 D，連 DG 交 OPQ 於 S, S 卽所求之點.

蓋自相似形定理，$\frac{OQ}{OS}=\frac{BF}{BG}=\frac{OA}{OP}$, 於是 OS 爲所求 OA, OP, OQ 之第四比例項.

T 之作圖亦相類似.

圖 2 中，若使 P 合於 Q，則所得點 S 之坐標爲 a^2。若欲作坐標爲 x^2+3x+2 之 Y 點，可先求得 $S(x^2,0)$，然後於軸上自 S 開始截三線段各等於 OX，兩線段各等於 OA；最後一線段之終點卽所求點 Y. 另有一簡法則爲先求 H, K 兩點使其坐標爲 $(x+1)$,$(x+2)$，於是 OY 卽 OA, OH, OK 之第四比例項.

故若已作一平行四邊形，則坐標可以加、減、乘、除得自與點或已得點之坐標之任一點皆能用直尺作圖. 然

有理函數即係自變數以如是之四基本運算得來者. 故可謂任一點其坐標爲與點坐標之有理函數者皆有一直尺作圖. 如是之函數包含全部有理數，亦即單點 A 之坐標 $(0, 1)$ 之全部有理函數。

連合此第二普遍結論於上述之最初的普遍結論即可謂：若已與一平行四邊形，則笛卡兒坐標爲諸與點之笛卡兒坐標之有理函數之諸點，而亦僅此諸點，能僅用直尺作圖.

自投影法得來之普遍結論

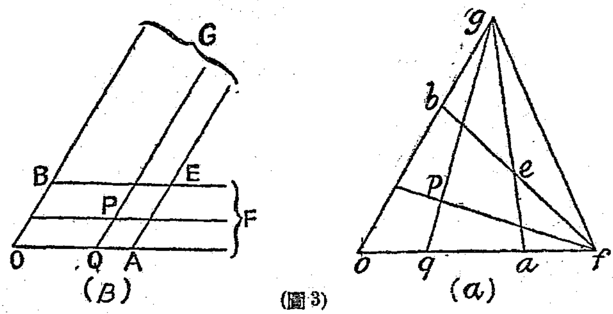
前此所研究者皆限於已與一平行四邊形之情款，故得用笛卡兒坐標，茲當設法除去此種限制. 所用者爲投影之法. 若前此所討論之圖形爲另一平面上一圖形之投影，則平行四邊形即爲另一平面上一四角形(quadrangle) 或四點之投影，此四點無任何特性，可爲該平面上之任四點，唯四點中任三點皆不在一直線上. 蓋若自一頂點 (vextex) V 投射平面 α 於平面 β 上，則過此投影頂點 V 平行於 β 之平面與 α 之交線 fg，即投射於 β 成無窮遠線. 於是若 β 之選擇得當，α 上任一直線皆能投射成 β 上之無窮遠線，α 上任兩交於 fg 線上一點之直線皆

能投射成 β 上交於無窮遠之兩直線，即 β 上之兩平行線．故若選 fg 爲 f, g 兩點之連線，而 f, g 爲 α 上一四角形兩對對邊之交點，則此四角形之投影包含兩對平行線而爲一平行四邊形．

任兩點之連線或任兩線之交點之投影爲其投影之連線或交點，因此 α 上之直尺作圖步驟及 β 上之直尺作圖步驟步步相應． 於是，若於 α 上諸與點中選四點爲坐標系四角形 (quadrangle of reference) 而投射之於 β 上，擇 β 使四角形之一對角線投射於無窮遠，則此四角形之投影遂爲一平行四邊形． α 上能自與點用直尺作圖之諸點之投影，即 β 上能自諸與點之投影用直尺作圖之諸點，而因與點之投影中含一平行四邊形之四頂點，故可於 β 上採用笛卡兒坐標系，使平行四邊形四頂點之坐標各爲 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$，而謂 β 上能作圖之諸點其坐標皆爲與點投影之坐標之有理函數，而 α 上能作圖之諸點在 β 上之投影即此諸點． 故玆所當知者爲 β 上之笛卡兒坐標對 α 上諸點及自其中選出之四角形之意義． 此可以交比表示坐標得之，蓋投影不影響及交比也(51 頁)．

第一平面 α 上，設 $oaeb$ 爲所定四角形，fg 爲三對角

線中被投射於 β 成無窮遠線 FG 者. 用大寫字母表小



(圖 3)

寫同字母之投影,於是 $OAEB$ 爲平行四邊形. F 爲平行線 OA, BE 相交之無窮遠點,而 G 爲 OB, AE 相交之無窮遠點. 設 $P(x, y)$ 爲 β 上任一點, PQ 其縱標,平行於 OB 而交 OA 於 Q, 則 QP 延線必過 G 點於無窮遠,而爲直線 gp 之投影, gp 係 p 與四角形之對角點 g 之連線,其延線交 oa 於 q.

今 P 之坐標爲 x, y, 卽 OQ, QP 之數字値 (numerical measure), 因 OA 爲橫坐標之單位長,故 OQ 之數字値卽 $\frac{OQ}{OA}$. 因 F 在無窮遠, $\frac{QF}{AF}=1$, 故可以之除坐標而不變其値.

$$\therefore \quad x=\frac{OQ}{OA}=\frac{OQ}{OA}\cdot\frac{AF}{QF}$$

$=$兩點對 OF, QA 之交比，即 $\{OF, QA\}$

$=\{of, qa\}$，因交比不因投影而變

$=g\{of, qa\}$，即 of, qa 張於 (subtend at) g 之束線 (pencil of lines) 之交比，於是 p 點之投影之笛卡兒坐標等於一束線之交比，此束線之一射線爲 gp，他射線爲坐標系四角形之邊及對角線之過 g 點者。

同理，$y=f\{og, pb\}$。

故此二束線之交比可取爲 p 點之投影坐標。投影坐標不因投影而變，而於 fg 成爲無窮遠線時則與笛卡兒坐標相同。

於是諸點 o; a; b; e; f; g

之坐標爲 $0,0$; $1,0$; $0,1$; $1,1$; $\infty,0$; $0,\infty$。

設任取四點 o, a, b, e；以 oa, be 之交點爲 f，ob, ae 之交點爲 g。則投影坐標系已完全決定，前此所得對笛卡兒坐標之結果仍可應用。故得最後之結論：

如在一平面上已與一組點，投影坐標爲與點之投影坐標之有理函數之諸點皆可自諸與點僅用直尺作圖之，而亦僅此諸點爲然。諸與點中可任取四點，其中任三點皆不在一直線上者，使其坐標爲 $(0,0)$；$(1,0)$；$(0,1)$；$(1,1)$'

以決定坐標系.

瑣屑情款

前此假設諸與點中至少有其中任三點皆不在一直線上之四點，否則作圖卽當失敗. 如所與者僅爲一點，一切圖形皆不能作圖；如所與者爲兩點，可作其連線；如有三點，可作以該三點爲頂點之三角形之三邊(三邊有時可以全合). 一般言之，若所與者捨一點外其他諸點皆在一直線上，則所能作圖者僅此直線及線上諸點張於線外一點之束線. 故於此種種情款，皆無獲到新點之可能.

領域 (Domain)

若所與者恰爲無三點在一直線上之四點，此四點卽可取以爲坐標系四角形；所與坐標爲 $(0, 1, \infty)$，所能獲得之坐標爲一切有理數正、負、或零. 諸數皆爲 1 之有理函數，蓋 0 爲 $1-1$ 所得之差，而 ∞ 爲 0 之逆數. 於是謂此時坐標之領域爲一切有理數，而以 $[1]$ 表之.

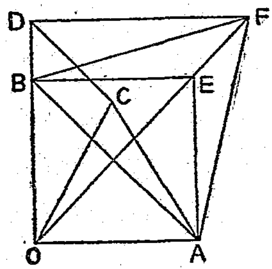
設今另增第五點 (a, b)，如 a, b 俱爲有理數，則領域並不增加，蓋 (a, b) 卽非已與點，亦可從作圖得之. 但若 a 爲一無理數，則所能作之點可大爲增加，而領域中亦可另增一切 a 之有理函數. 新領域可以 $[1, a]$ 表之，$[1,$

a〕包含舊領域〔1〕. 若 b 亦為一獨立無理數,領域復可增大成〔$1, a, b$〕;然不論 a 或 b,苟為他一數之有理函數,即可忽棄,因其不影響於領域也. 同理,不論有若干與點,設其坐標為 $a, b, c, \cdots\cdots$,則領域即為〔$1, a, b, c\cdots\cdots$〕,其中有理坐標及為其他無理坐標之有理函數之坐標皆須除去;且若 $a, b, c, \cdots\cdots, a', b', c', \cdots\cdots$, 兩組數皆可表作另一組數之有理函數,則 $a, b, c, \cdots\cdots$ 可以 $a', b', c', \cdots\cdots$ 置換之.

例如已與一正方形及立於正方形之一邊上之一正三角形. 以該邊及一鄰邊為軸,五與點之坐標可取之為

$$O(0, 0),\ A(1, 0),\ B(0, 1),\ E(1, 1),\ C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$$

而領域之最簡單表示式為〔$1, \sqrt{3}$〕. 於是即能作立於正方形諸邊及諸對角線上之正三角形,蓋所求各點之坐標除 $\sqrt{3}$ 外不含其他根數 (surd). 例如,若 ABF 為立於 AB 上在 O 點之他側之正三角形,F 之兩坐標各為 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$,故作 CD 平行於 AB 交 OB 於 D,作 DF 平行於 OA 交 OE 於 F,即得 F 點之作圖. 然欲於圖中任一線上作一正五角形即不可能,蓋五角形中必有一個以上之角點之坐標含 $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ 非 $\sqrt{3}$ 之有理函數,故不屬



(圖 4)

於自五與點僅用直尺能作圖之諸點之坐標領域內.

II. 兼用規尺

若吾人兼用圓規，則一新點捨爲兩直線之交點外，並可爲一直線與一圓或兩圓之交點之一. 兩圓之相交實同於一圓及一直線之相交，蓋第二圓可代以兩圓之公弦或根軸，如下 30 頁.

若已作一圓，則任兩直徑與圓之交點皆爲長方形之四頂點，故得採用直角笛卡兒坐標系；又因吾人能於兩軸上截相等長度，故得用同一比例尺於橫標及直標. 今連結兩點之直線之方程式爲一次的，其係數爲已得點之坐標 $1, a, b, \cdots\cdots$ 之有理式，故可書爲

$$lx+my+1=0.$$

爲圓心 $A_1(a_1, b_1)$，圓周上一點 $A_2(a_2, b_2)$ 所定之圓可稱爲圓 $A_1(A_2)$，其方程式爲

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2;$$

普通圓心爲 A_1 而半徑等於 A_2A_3 之圓，可稱爲圓 $A_1(A_2A_3)$，其方程式爲

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2,$$

是爲一 x, y 之二次方程式，其係數亦屬於領域〔$1, a, b, \cdots\cdots$〕. 欲得此圓與上直線之交點之横標，可於兩方程式中消去 y，而求 x 之值. 代第二方程式中之 y 以得自第一方程式之値 $-\dfrac{lx+1}{m}$，卽得

$$(x-a_1)^2+\left\{-\frac{lx+1}{m}-b_1\right\}^2=(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2,$$

或謂之 $$px^2+2qx+r=0,$$

是爲 x 之二次方程式，其係數 p, q, r 屬於與前此相同之領域. 自是所得 x 之値爲 $\dfrac{1}{p}(-q\pm\sqrt{q^2-pr})$，該式普通不屬於〔$1, a, b, \cdots\cdots$〕而含有理式 q^2-pr 之平方根；此平方根亦含於 y 之值中.

就兩圓相交之情款言，則方程式爲

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,$$

$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0,$$

其係數屬於 $[1, a, b, \cdots\cdots]$． 交點之坐標適合此兩方程式，而亦適合此兩方程式之差

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+c_1-c_2=0,$$

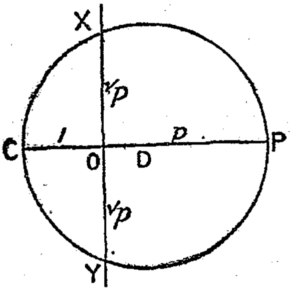
是爲一一次方程式，可代表兩虛交點或實交點之連線，卽兩圓之公弦． 故兩圓之交點實卽此直線與兩圓中任一圓之交點，而此一次方程式之係數屬於 $[1, a, b, \cdots\cdots]$ 中，卽此方程式屬於上述之 $lx+my+1=0$ 之形式，故本例可含於前例中．

於是以已與之圓心，半徑作一圓交一與線於兩點之幾何演算實等於包含開平方及有理運算之解析演算．

反之，設 p 爲能作圖之一點之坐標，吾人卽能得一幾何演算等於求 p 之平方根．

設 P 爲 (p, O) 點，而 C 爲 $(-1, O)$． 平分 CP 於 D；則圓 $D(P)$ 交 y 軸於 X, Y 兩點，而

$$YO\cdot OX=CO\cdot OP=1\cdot p;$$



(圖 5)

$$\therefore \quad OX=\sqrt{p}, \qquad OY=-\sqrt{p}.$$

二次根數 (Quadratic Surds)

故知等於規尺作圖之各步驟之解析手續包含有理演算及新得之開平方;此諸運算可重複,連合施行於諸與點之坐標 〔1, a, b,……〕任意有限次. 此種解析手續所得之結果,如非有理式,即稱爲二次根數;最簡者爲一有理式之平方根,而普通之二次根數可包含數項,每個根號下之數亦不必爲有理而可爲另一二次根數. 但全式中除平方根及四次根之類能以平方根表之者外,不含其他他次根;且不能含無窮之運算.

今若欲知某問題是否能用圓規及直尺解之,可以所欲作圖之諸元素所有之條件表作未知坐標及與點之已知坐標之聯立方程式;同前(11 頁),諸未知元素皆可以點表示之. 若問題爲一有定 (determinate) 問題,則方程式之數與未知數之數同. 若聯立方程式之解能僅用二次根數及有理函數表之,則問題可用規與尺解之,否則不能. 未知坐標之決定於一組代數方程式爲一必要條件. 蓋歐氏作圖之每個步驟,其決定一點爲圓或直線之交點也,非確定之於一位置,即限之於兩可能位置之一. 今者任一

作圖僅含有限次之步驟，故若總計所有可能位置，則最後之諸坐標必各爲一組有限數之可能數值之一，而其值可定自一組有有限之解答之方程式，即方程式之有限次者，故即代數方程式，其式如

$$F(x, y, \cdots\cdots, a, b, \cdots\cdots)=0,$$

其中 x, y 等爲未知坐標，$a, b\cdots\cdots$ 爲已知坐標，而 F 爲一代數式。

爲求研究之簡單，茲限於已知坐標皆爲有理數時之情款，如是領域爲〔1〕。然即就一般情形言，其研究程序亦全相若；且若易結論中之有理數爲領域〔$1, a, b\cdots\cdots$〕，即得相當之結論矣。自方程式論得知，$F=0$ 先可有理化之，使 F 成一含有理係數之多項式；次可消去其他未知坐標而僅留其一，而設每一未知數各含於一方程式中。再次，$F(x)$ 或爲未約 (reducible)，則可分解之爲二個以上含有理係數之因子，各因子中 x 之次數可自 1 至 $n-1$，n 爲 F 之次數；其分解因數及約方程式之法，詳方程式論中。故吾人此後僅須研究一含有理係數之既約 (irreducible) 單元代數方程式。

茲研究一二次根數 x；先有理化其分母 (36 頁)，然後

書全式於紙上. 其中包含有理數,代表有理運算之符號及表示開平方根之根號. 於是順序讀此式時,最先發見之根號下之數使等於 y_1^2, 則平方根可書如 y_1, 發見第二根號時可書如 y_2, 如是迭行之,以及於全式. 因每一平方根前皆可有一有理因子,故 x 可表如

$$x=c_1y_1+c_2y_2+\cdots\cdots+c_ky_k+c' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

其中諸 c 皆爲有理,諸 y^2 或爲有理或爲一較 x 簡單之二次根數,蓋即就最簡單之 $k=1$ 時言,y^2 之根號亦較 x 少一個.

以同法施於 $y_1^2, y_2^2, \cdots\cdots y_k^2$, 而得 k 個方程式,如

$$y_k^2=c_{k,1}\,y_{k,1}+c_{k,2}\,y_{k,2}+\cdots\cdots+c_{k,l}\,y_{k,l}+c_k',\cdots(\mathrm{II})$$

其中 c 皆有理數,而 $y_{k,l}^2$ 皆較簡於 y_k 之二次根數.

繼行此法於 $y_{1,1}^2, y_{1,2}^2, \cdots\cdots y_{k,l}^2$ 至根號盡去爲止. 於是 x 中有若干各異之平方根,吾人亦將得若干新未知數 y. 相當於 (II) 之最後一組方程式其式皆如

$$y_{k,l,m,\ldots\ldots}^2=c'_{k,l,m,\ldots\ldots}\,.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

例如,設

$$x=\sqrt{5a+\sqrt{6b}}+\sqrt{8b+\sqrt{7a}}$$

可置 $$x=y_1+y_2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$y_1^2=5a+y_{1,1},\quad y_2^2=8b+y_{2,1},\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$y_{1,1}^2=6b,\quad y_{2,1}^2=7a.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

又或設

$$x=\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{3},$$

則

$$x=y_1+y_2,$$

$$y_1^2=1+y_2,\quad y_2^2=3.$$

今更反轉諸方程式之次序．最後一組之諸 y 皆成有理項而位於方程式 (III) 中之一，即諸 y 皆自含有理係數之二次方程式定之；故能解此諸方程式而得此組 y 之值．其他諸組 y 各為一 (II) 式之方程式所決定，該方程式之係數或為有理，或為適所求之諸 y 之有理函數．每一步驟中，諸 y 之值皆一二次方程式其係數對已獲之 y 為有理者求得，如是至 $y_1,\cdots\cdots y_k$ 亦獲得而止，於是 x 之值亦可自連合此最後諸 y 與 x 之一次方程式得來．以是吾人能解一組一，二次之方程式以得 x；故若一方程式能以二次根數解之者，其解可自解一組一，二次方程式定之．第一步，一切一，二次方程式皆能如是解之，既約三次方程式即不然；蓋吾人即將普遍證明既約方程式之能以二次根數解之者，其次數必為 2 之冪；是蓋一必要之條件，然非充足者．

共軛根數 (Conjugate Surds)

若將 x 中數特殊根數 y 之符號全部更換 (即改正號為負號,改負號為正號),如得者為另一二次根數 x_1,稱之為與 x 相共軛. 如是所得之共軛根數為數凡 2^n, x 亦其中之一. 例如,若

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3},$$

其他三共軛根數為

$$-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3},\quad \sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3},$$

$$-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}.$$

但若書作 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$,則不能視三平方根皆為獨立之 y,蓋若改 $\sqrt{2}$ 之號而不同時改 $\sqrt{6}$ 之號者,則所得者非一共軛根數. 蓋此中有一關係 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 存在,若僅改 $\sqrt{2}$ 之號而不改 $\sqrt{6}$ 者,則此式不成立. 茲姑置此類合不獨立之諸 y 之例不言,至獨立根數之較詳討論可參考 Enriques, 140 頁. 方程式 (II),(III) 可用以消去所有已存在之關係中諸 y 之平方,若所得者不為恆等式,則必約成對每個 y 各為一次,故可以先消去諸 y 中之數者. 設此步工作已完成,則剩餘諸 y 必互為一次的獨立 (linearly independent), 即諸 y 之間無對每個 y

俱爲一次之有理關係存在。於是易推得任何已存在之關係若任一 y 之符號全部更變仍得成立。

茲更證明若 $X=x$ 適合一已與之有理方程式 $f(X)=0$，則若 x_1 爲 x 之任一共軛根數，$X=x_1$ 亦適合之。

有理化因子 (Rationalizing Factor)

一組完全之共軛根數之任何對稱函數皆爲有理數。蓋此式若爲無理數，其值必因某一根號而變，於是若易此根號之符號則全式之值必變。然變某一根號之符號實同於改每一根數爲其共軛根數，結果則全組根數重行排列而對其全部言實無所影響，因而於全部共軛根數之對稱函數亦無影響；故此種對稱函數與任何根號之符號無關而爲有理數。例如全組共軛根數之連乘積即係有理，其中任一根數可以其全體共軛根數之積爲有理化因子。設有前所述 (33 頁) 之分數，其分母，分子各爲諸 y 之有理整函數者可以共軛於分母之諸根數之積乘分母及分子而有理化其分母。若分母爲諸 y 之函數，則此有理化因子亦爲諸 y 及與 y 同類之 y 之共軛根數之整函數。

試觀以 x 代函數 $f(X)$ 中之 X 之結果。先以對各 y 爲一次之 (I) 式代 X，而施以 f 所代表之諸運算。因

$X=x$ 爲 $f(X)=0$ 之根,故最後所得一式恆等於 0,而此爲連合界定 x 之方程式 (I), (II) 所必得之直接結果,蓋 (I), (II) 以某種方法連結之必當歸於 $f(x)=0$ 也。

更以 x_1 易 x 以代入 f 中, x_1 與 x 僅有一根數 y_1 之符號不同。 若 y_1 位於某某根號之下,則此舉同於易某某數 y 爲其共軛根數 y', 但界定此諸新根數 y' 之諸方程式與上述之 (II),(III) 完全相同,故若以與前此完全相同之法連結諸 y' 必能得到 $f(x_1)=0$ 之結果。

例如,若有一根數

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

欲求一有理方程式爲其所適合者,可先移 $\sqrt{3}$ 項而平方之,

$$(x-\sqrt{3})^2=1+\sqrt{3},$$

整理之成

$$x^2+2=\sqrt{3}(2x+1)$$

而更平方之。 於是 x 爲方程式

$$f(X)=X^4-8X^2-12X+1=0$$

之一根。

以 x 之值代入之即可解釋前理:

$$f(x)=3^2+4\cdot 3\sqrt{3}\sqrt{1+\sqrt{3}}+6\cdot 3(1+\sqrt{3})$$
$$+4\sqrt{3}(1+\sqrt{3})\sqrt{1+\sqrt{3}}+(1+\sqrt{3})^2$$
$$-8\{3+2\sqrt{3}\sqrt{1+\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}\}$$
$$-12\{\sqrt{3}+\sqrt{1+\sqrt{3}}\}+1$$
$$=(9+18+1+3-24-8+1)+\sqrt{3}(18+2-8-12)$$
$$+\sqrt{1+\sqrt{3}}(12-12)+\sqrt{3}\sqrt{1+\sqrt{3}}(12+4-16),$$

其中各項皆等於 0. 若易 $\sqrt{3}$ 之符號，則第二獨立根數 $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ 成其共軛根數 $\sqrt{1-\sqrt{3}}$,而得四項

$$f(x_1)=(0)-\sqrt{3}(0)+\sqrt{1-\sqrt{3}}(0)-\sqrt{3}\sqrt{1-\sqrt{3}}(0),$$

如前,每項各等於 0. 然 $-\sqrt{3}+\sqrt{1+\sqrt{3}}$ 卽不適合此四次方程式,蓋因其非 x 之一共軛根數也.

一般言之,若更易 x 中任何其他獨立根數 y_2 之符號如易 y_1 之符號者然,所得之 x_1 之共軛根數亦適合 $f(X)=0$; 同理可推之於 $x_3,x_4,\cdots\cdots$. 若易 x 中任何共軛根數之符號,所得之共軛根數 x_p, 亦適合 $f(X)=0$.

由是,若一有理方程式之一根爲二次根數,則此二次根數之全部共軛根數皆爲此方程式之根. 然 2^n 個共軛根數之値未必全異,故若 $f(X)=0$ 之諸根中各異之此類之根(卽爲 x 之共軛根數者——譯者)爲數凡 N, 則 $N\leqq 2^n$.

例如，若

$$x=\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}},$$

若同時並易兩項中 $\sqrt{3}$ 之號，x 之值不變。

方程式之次數為 2 之冪

次當證明 N 為 2^n 之一因數，故亦為 2 之一冪。

設 $x_q'(q=1,\ 2,\ \cdots\cdots N)$ 代表 2^n 個共軛根數 x_p $(p=1,2,\cdots\cdots 2^n)$ 中 N 個各異之值。

試察兩乘積

$$F(X)=\Pi(X-x_p),\ F'(X)=\Pi(x-x_q'),$$

其次數各為 2^n 及 N。若於 x 中盡易某一平方根之號，則每一對 x 互易其值，結果僅改 F 之諸因子之次序而無所影響於 F 中 X 之任一冪之係數；故諸係數與任一平方根之符號無關而為有理數：即 F 為 X 之有理函數且有有理係數。其次，若易 x' 中任一平方根之號，諸 x' 即成為諸 x 中另一組 N 個不同之值，故所得者與 x' 僅有次序之不同，即此種變換僅易 F' 之因子次序而不影響及其係數，故 F' 亦為 X 之有理函數含有理係數者。更進一步，F' 當為既約；蓋若 F' 能分解為兩有理因子 F_1' 及 F_2'，則兩因子各為諸差 $X-x'$ 之一部之積而非全體之積，而 F_1'

$=0$ 必以 x 之一部(非全體)爲根;但已知若任何有理方程式以諸 x 中之一爲根,必亦以全體共軛根數爲根,故此說爲矛盾而 F' 必爲既約. 然 F' 中包含 F 中諸因子之 N 個,故 F' 爲 F 之一因子,而 F 之其餘因子 F'' 亦必爲有理式. F'' 或爲一常數;則 F 與 F' 之次數相同, $N=2^n$, 即諸 x 之値各異. 否則 F'' 之次數爲 2^n-N; F'' 爲 F 中數因子之積, $F''=0$ 至少以諸 x 中之一爲根,於是必以 N 個不同之共軛根數爲根,故與前同理, F'' 必以 F' 爲一因子. 因 F'' 與 F' 俱爲有理式,剩餘之因子 F''' 亦爲有理式,其次數爲 2^n-2N. 同理,可推之於 F''', F''' 或爲常數,或以 F' 爲一因子. 若 F''' 以 F' 爲一因子,則同理復可推之於其剩餘之因子. 繼續同樣之推論,則於每步中各去一因子 F'; 於剩餘之因子有正次數時,此法皆可繼行不斷. 因 F 之次數有限,上法施行之回數亦有限,故最後必獲一次數爲 0 之因子,即一常數. 故 F 爲此常數與 F' 之一冪之乘積,而其次數 2^n 爲 F' 之次數 N 之一倍數. 故 N 爲 2^n 之一因子,亦爲 2 之一冪,即 $N=2^k$.

茲已證明任一有理係數之方程式 $f(X)=0$.若以一二次根數 x 爲根,亦必以包含 x 之一組共軛根數中之 2^k 個

不同值 x' 爲其根；且 f 必以諸差 $X-x'$ 爲因子，因亦以其積 F' 爲因子，故 f 有一有理因子 F'. 故 f 若非未約即爲 F' 之一常數倍數 (constant multiple), 其次數爲 2^k. 故知：

若一含有理係數之既約代數方程式能以二次根數解之者，其次數必爲 2 之一冪. 注意其諸根成一組共軛根數.

三分角及倍立方 (Duplication and Trisection)

上述諸定理係對代數方程式其係數皆爲有理數，即皆屬於領域〔1〕者而言；然亦可推而用之於方程式之係數屬於任何已與領域〔1, a, b,……〕者.

於是知古代倍立方及三分角兩名題實不能以規尺解之. 已與一立方體之邊 a, 欲作一立方體之邊 x 使所作立方體之體積兩倍於所與立方體須解一三次方程式

$$x^3=2a^3,$$

其係數屬於領域〔1, a〕, 然其實根 $x=a\cdot\sqrt[3]{2}$, 則含一非二次之根數. 至三等分一任意角實同於已與 $\cos\theta$ (如 b) 而求 $\cos\frac{1}{3}\theta$ (如 y)；但因 $\cos\theta=4\cos^3\frac{1}{3}\theta-3\cos\frac{1}{3}\theta$, 故必須解一三次方程式

$$4y^3-3y-b=0,$$

此方程式若非所與之餘弦 b 屬於三數特殊數值之一皆爲既約. 以是此兩名題遂不得不被摒諸規尺作圖之外矣.

III. 正多角形

上述定理一極佳之例題爲決定何種正多角形能以規尺作圖. 若邊數 n 非質數,設 $n=a_1a_2$,則自正 n 角形可得一正 a_1 角形,法爲自 n 角形諸頂點中取出 a_1 個頂點,而所取每頂點與其次頂點間隔以 a_2-1 個連續頂點. 例如,正十二角形之第一、第四、第七、第十,四個頂點卽成一正方形. 故若能作正 n 角形,卽能作 a_1 角形;反之,若後者之作圖爲不可能,前者之作圖必亦不可能,而亦無須研究之矣. 故第一步先限於 n 之爲質數者. 其作圖有賴於求一方程式 $x^n-1=0$ 之無理根. 此方程式爲未約,但若取去因子 $x-1$ 而得

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+x+1=0,$$

如 n 爲質數,卽可證其爲既約 (Enriques, 142 頁). 於是若多角形能用規尺作圖,此方程式卽能以二次根數解之,而其次數 $n-1$ 必爲 2 之一冪;故

$$n=2^k+1.$$

因 n 爲質數，k 亦必爲 2 之一羃．蓋若 k 除 1 外尚有其他奇因數 l；設 $k=lm$，則

$$n=(2^m)^l+1$$

必非質數，蓋 2^m+1 爲其一因數也．故 k 無奇因數而

$$k=2^p,\ n=2^{2^p}+1.$$

$k=2^p$ 一條件之唯一例外即 $k=0$ 時之瑣屑情款；於是 $n=2$．

反之，若 n 爲如是之一質數，上列方程式能得解而多角形亦可作圖之理亦已爲學者所證明．例如，若 $p=1$，$n=5$，則得一根

$$x=\frac{1}{4}\left\{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}\right\},$$

與之相當之幾何作圖可如幾何原本第四篇所述者行之．

置 $p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$

即得 $$n=3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,$$

以次諸值 $p=5, 6, 7$ 不能使 n 爲質數，至關於此數羣 (series) 中更大之數目吾人所知者甚鮮．故若正 n 角形能用規尺作圖，則 n 之爲質數者在 10,000 以下僅有 3, 5, 17, 257.

其次，若 n 為合數 (composite number)，可使

$$n=a_1^k a_2^k \cdots\cdots\cdots,$$

此中 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 為 n 之各不同質因數。於是，若正 n 角形可作圖，a_1 角形亦能作圖；而因 a_1 為質數，故若 a_1 不等於 2，其式必為 $2^{2^p}+1$。

今 $\dfrac{x^n-1}{x-1}=0$ 之諸根皆為二次根數；但式之左邊有因數 $\dfrac{x^{a^k}-1}{x-1}$ (k 可有任一下標)，而此式復有因數 $\dfrac{x^{a^k}-1}{x^{a^{k-1}}-1}$；故次數為 $a^{k-1}(a-1)$ 之有理方程式

$$x^{a^{k-1}(a-1)}+x^{a^{k-2}(a-2)}\cdots\cdots\cdots+x^{a^{k-1}}+1=0$$

必能以二次根數解之。今若 a 為質數，此方程式能證其為既約，即其次數 $a^{k-1}(a-1)$ 必為 2 之一冪，於是而 a^{k-1} 及 $(a-1)$ 二數皆為 2 之冪。若 $a=2$，k 為任何數，此二條件均能適合；但若 $a=2^{2^p}+1$，則 $a-1$ 為 2 之一冪，而除非 $k=1$，即 $a^{k-1}=a^0=1=2^0$，a 與 a^{k-1} 皆非 2 之冪。如是非 $a=0$，即 $k=1$，而 n 捨 2 外無其他重複因數；故

$$n=2^k(2^{2^{p_1}}+1)(2^{2^{p_2}}+1)\cdots\cdots\cdots,$$

其中 $p_1, p_2, \cdots\cdots$ 為不同之整數，而諸 $2^{2^p}+1$ 皆為質數。

反之，若 a_1, a_2 為二互質數，且正 a_1 角形及 a_2 角形

均能作圖，則正 a_1a_2 角形亦能作圖。 蓋吾人必能得二數 N_1, N_2 使 $N_1a_2-N_2a_1=\pm1$. 於是第一多角形之 N_1 邊與第二者之 N_2 邊所張於多角形中心之角其差爲

$$N_1\frac{2\pi}{a_1}-N_2\frac{2\pi}{a_2}=(N_1a_2-N_2a_1)\frac{2\pi}{a_1a_2}=\pm\frac{2\pi}{a_1a_2},$$

是卽正 a_1a_2 角形之一邊張於其中心之角；故此角可作圖，因而整個正 a_1a_2 角形亦能作圖. 此說可推之於任意數之互質因數. 又任一角可二等分至任意次，故尙可另加一因數 2^k. 故若 n 之式如上所書者，正 n 角形必可作圖；卽 $n=2^k(2^{2^{p_1}}+1)(2^{2^{p_2}}+1)\cdots\cdots$ 爲正 n 角形能用規尺作圖之充要條件.

因此用圓規及直尺，吾人所能作之正多角形有

2,3,4,5,6, 8, 10, 12, 15,16,17, 20, …邊者，

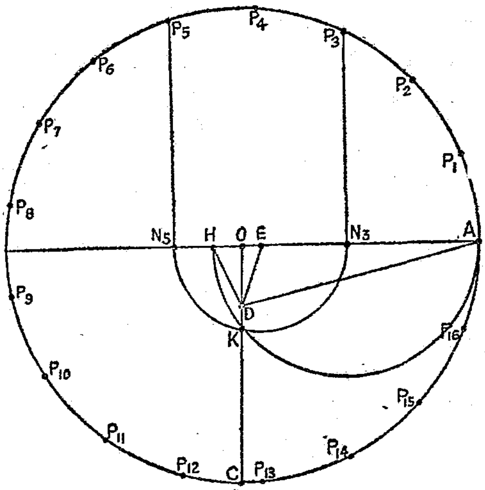
然 7, 9, 11, 13,14, 18,19, ……邊者

則否.

正十七角形

茲介紹一十七邊正多角形之作圖 (Richmond).

於圓心 O 之一圓中取互垂直半徑 OA, OC；平分 OC 而再平分之 (卽四等分之)，使 $OD=\frac{1}{4}OC$. 連 DA. 平



(圖 6)

分 $\angle ODA$ 而復平分之,使 $\angle ODE=\frac{1}{4}\angle ODA$. 於 D 點作 DE 之垂線;平分此直角,使 $\angle EDH=\frac{1}{4}\pi$, 其兩臂交 OA 於 E, H. 以 AH 爲直徑畫一圓交 OC 於 K, 再作圓 $E(K)$ 交 OA 於 N_3, N_5. 過此兩點作縱標垂直 OA 而交圓 $O(A)$ 於 P_3, P_5; 此二點卽正十七角形諸頂點中之第三個及第五個,而其中 A 爲其最末一個.

第三章

直尺作圖 (Ruler Construction)

前章中已述及何種直尺作圖於平面上已有一組與點時爲可能，本章則擇其中數者而研究其實際作圖方法。第一步，當區別與點相互之地位間有或無何種特殊關係。若投射所得之點及直線於另一平面則得第二平面上之一圖形，此圖形於第二平面上已與第一平面上之與點之投影時即可作圖。兩平面上之作圖步步相對應，任一平面上每點對一線之接合 (incidence) 與他一平面上其投影之接合相對應。

若已知件中無何種特殊關係存在，則先完成之圖形(即第一平面之圖形——譯者)之性質僅與作圖諸步驟中所含之接合有關；蓋作圖諸步驟所包含者非作一新線過兩已得點，即定一點爲兩已作直線之交點也。此諸接合者亦存在於第二圖形中，故兩圖形中任一圖形所有之性

質皆爲他一圖形所有；此種性質卽稱爲畫法 (descriptive) 或投影性質. 因其不受任何投影之影響，故可謂爲屬於某一組圖形，該組圖形中之任一個可自另一個以一投影或數連續投影得之. 組中諸圖形對其投影性質言可謂爲完全相同.

若一圖形有任何不屬於投影性質之性質，此種性質卽謂爲非投影的，或如普通所云者，爲數量的. 若作圖爲僅用直尺者，此種性質與作圖之諸步驟無關，而必來自已知件；故已知件中所含一組點，其相互之地位必非一般的，而非爲其投影所無之某種特殊關係，因此第二圖形（卽投影圖形——譯者）不能有此性質. 但第二圖形中必有某種性質相當於第一圖形之一數量性質，此性質因其爲第一圖形之一切投影所有故當爲投影性質；且必爲諸投影之投影所有，因亦爲原來之第一圖形所有. 因此，自一數量性質必引起屬於一組包含第一圖形之投影圖形之一投影性質；若對原來圖形言，則此投影與數量性質所述者必同爲一事. 於是任何數量性質能用投影語言敍述之；然後此性質於原圖形所屬之一組投影語言皆爲眞；若以數量語言敍述之，自較簡單；然而僅於原圖形爲眞矣.

反之，若一圖形有某投影性質，亦可投射之成他一圖形，使其中某一元素有一特殊位置而得一對應數量性質。最常見者卽投射一線於無窮遠，則交於此線上一點之兩線成兩平行線。此處之"交於此特殊線上之一點"及"平行"各爲同一性質之投影及數量敍述法。

試應用此種觀察法於24頁所用之投影。該第一圖有一數量性質，卽直線 FG 位於無窮遠，然其投影 fg 則不然。若欲避免此種歧異，可以"交於 FG 之直線"代"平行線"，或特以"過 F 或 G 之直線"代"平行於一軸之直線"；第二圖形中與此相當者爲"交於 fg 之直線"及"過 f 或 g 之直線。"故僅需上述之敍述法之更換，卽可自第二章所述對於笛卡兒坐標之作圖演繹得完成第二平面上諸點之投影坐標之有理運算之直尺作圖。是爲任何一次問題之理論解法。

最簡單之數量性質爲關於長度及角度之計算者，該二量可各視爲一比。一切數量的敍述中之最簡單者有：一已與線段被平分於一與點，兩直線相平行，兩直線相正交。面積含數量的意義，"相似"亦然，卽圓之通常定義亦全爲數量的。最簡單之投影性質爲上所解釋之接合，

其次則一直線上四點所成之列點之交比或過一點之四直線所成直束線之交比。

I. 投影性質

Desargues 定理

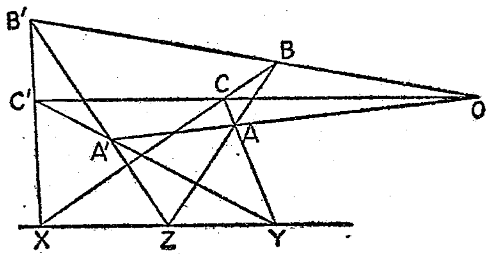
投影性質之關於接合者 Desargues 定理爲其最佳一例：若兩三角形互相透視，則三對對應邊交於共線點 (collinear points). 其詳細研究，參考 Mathews, 第五章.

其三角形 $ABC, A'B'C'$ 之對應頂點之連線 AA', BB', CC' 皆通過一點 O, 則兩三角形稱爲互相透視 (in perspective), O 稱爲透視或透射中心 (center of perspective or of homology). 上述定理卽謂若三對對應邊 $BC, B'C'$; $CA, C'A'$; $AB, A'B'$ 各交於 X, Y, Z, 則三點 X, Y, Z 在一直線上，此直線稱爲透視或透射軸 (axis of perspective or of homology).

兩三角形 $ABC, A'B'C'$ 不論在同一平面上或在異平面上，上理皆眞；若在異平面上，XYZ 軸卽兩三角形之平面之交線。

Desargues 定理可利用以作一直線使過一與點及兩

與線之交點，此法雖在直尺之邊以某種原因不能過該兩直線之交點時仍可照行(參閱第六章). 圖 7 中,設 AA', BB' 爲兩與直線，其不可見之交點爲 O. 若 C 爲與點，先於兩與線上各取一點 A 及 B, 更以 O 爲透視中心作一



(圖 7)

三角形 $A'B'C'$ 與 ABC 互相透視,於是 CC' 爲所求之直線. 任取一透視軸而設其截三角形 ABC 於 X, Y, Z. 過 Z 點任作一直線交兩與線於 A' 及 B'. 連 YA', XB' 交於 C'; CC' 必過 AA', BB' 之交點 O. 若在 AA', BB' 相平行，卽 O 點在無窮遠之特殊情形,用上法卽可過任意與點 C 作一第三平行線. 至普通問題尙有數個其他作法見下 135 頁,例一.

交比

多數投影性質皆與交比有關. 交比之不受投影影

響前此屢已提及。 此理若研究投影頂點處之諸角易證其爲眞。

已與一直線上 A, B, C, D 四點所成之列點，設其自任意頂點 O 被投射於另一截線．作 OP 垂直於 AB．於是，因

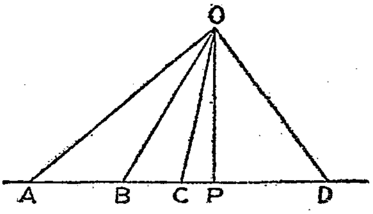
$$AC \cdot OP = 2\triangle AOC = OA \cdot OC \sin AOC,$$

該列點之交比遂爲

$$\{AB, CD\} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = \frac{AC \cdot OP \cdot DB \cdot OP}{CB \cdot OP \cdot AD \cdot OP}$$

$$= \frac{OA \cdot OC \cdot \sin AOC \cdot OD \cdot OB \cdot \sin DOB}{OC \cdot OB \cdot \sin COB \cdot OA \cdot OD \cdot \sin AOD}$$

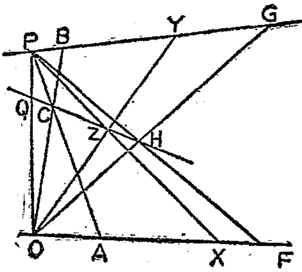
$$= \frac{\sin AOC \cdot \sin DOB}{\sin COB \cdot \sin AOD},$$



(圖 8)

故僅與 O 點之諸角有關，與特殊之截線 AB 無關，而與任何其他截線上截出之列點之交比相同．

於是得一問題卽已與一列點之交比求作此列點，更確切言之，卽一直線上已與三點 O, A, F，於同線上求一點 X 使 $\{OF, XA\}=\frac{OX}{XF}\cdot\frac{AF}{OA}=\lambda$, λ 爲一與數．若 $\lambda=0, 1, \infty$，可使 X 各合於 O, A, F. 設所與値 λ 以另一直線上一交比 $\{PG, YB\}$ 定之，作圖之步驟如下．



(圖 9)

設 PA, OB 交於 C，而 PF, OG 交於 H. 設 CH 交 OP 於 Q，交 OY 於 Z. 則 PZ 交 OA 於 X；蓋

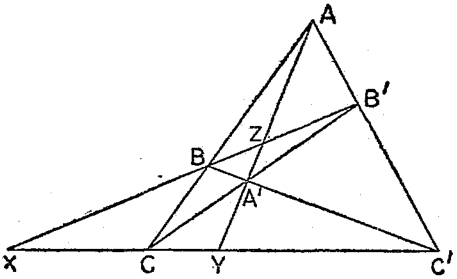
$$\{OF, XA\}=\{QH, ZC\}=\{PG, YB\},$$

投影頂點各爲 P 與 O.

若所與及所求之列點在同一直線上，則可先投射前者於另一直線上，然後作圖如前．

調和列點 (Harmonic Range)

$\lambda=-1$ 之情款特別重要，此時 OF 以同比被內分於 A, 外分於 X; 此列點稱爲調和的。 其所以重要者蓋由於四邊形 (Quadrilateral) 之調和性質：完全四邊形之任一對角線爲其他兩對角線所調和分。 此性質亦可取爲調和列點之定義(參考 Mathews, 第六章)。



(圖 10)

設 X, Y, Z 爲四直線 ABC, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ 所成之四邊形之三對角線 AA', BB', CC' 之交點。 則上定理謂

$$\{AA', YZ\},\ \{BB', ZX\},\ \{CC', XY\},$$

皆爲調和列點。 此理可將一對角線上之列點以第二對角線之兩端爲頂點依次投影於第三對角線上而證明之。

對合 (Involution)

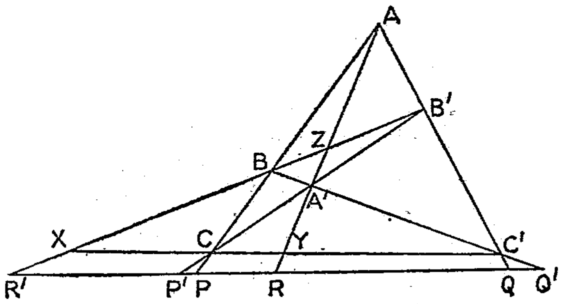
四邊形之調和性質爲一更普遍之四角形對合性質之

一特例，該性質謂 (Mathews, 83 頁)：完全四角形各對對邊截任何截線成對合列點。此定理復爲關於過四點之圓錐曲線之一相似定理之一特例(參閱 84 頁)。對合者，謂一直線上之一組點對 (pairs of points)，每點對中之一點皆與另一點相共軛，而任四點之交比等於其四共軛點之交比。

設 P, P'; Q, Q'; R, R' 爲四角形 $ABA'B'$ 各對對邊 $AB, A'B'$; $AB', A'B$; AA', BB' 與任一截線 PQ 之交點。則例如

$$\{PQ, RR'\} = A\{BB', ZR'\} = A'\{Q'P', RR'\} = \{P'Q', R'R\},$$

同理，此列點中任四點之對合性質皆能驗證之。今若使此截線合於 CC'，即可使 P, P' 重於 C；Q, Q' 重於 C'；R



(圖 11)

重於 Y, 而 R' 重於 X. 上所證明之對合性質即變爲 $\{CC', YX\} = \{CC', XY\}$, 即謂此列點爲調和的.

若已與對合中之兩點對 PP', QQ'; 即能利用四角形性質而作 PQ 線上任一點 R 之共軛點 R'. 於平面上任取不在直線 PQR 上之一點 A, 連 AR; 於 AR 上任取另一點 A'. 使 AP, $A'Q'$ 交於 B, AQ, $A'P'$ 交於 B'; 連 BB' 而使其交 PQ 於 R', 即所求 R 之共軛點. 所得之 R' 與補助點 A, A' 之選擇完全無關, 而完全由方程式 $\{PQ, RR'\} = \{P'Q', R'R\}$ 所決定爲兩組與點 PP', QQ' 所決定之對合中 R 之共軛點.

等畫 (Homography)

對合爲等畫之一特例, 後者之定義如下. 設在同直線或異直線上之兩不同列點 $PQR\cdots\cdots$, $P'Q'R'\cdots\cdots$ 中諸點對 P, P'; $Q'Q'$; R, R' 互爲對應點. 則若第一列點之任四點之交比等於第二列點其四對應點之交比, 兩列點即謂爲相等畫 (Homographic) 而諸點間之對應關係則謂爲等畫. 最簡單之等畫爲互相透視之兩列點, 然兩等畫列點不必皆互相透視.

欲完全界定一等畫, 必先與一列點上之三點 P, Q, R

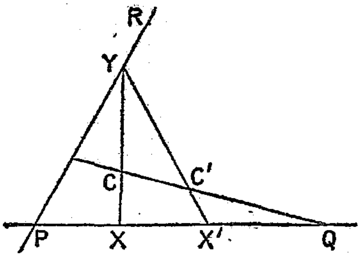
及第二列點上其三對應點 P', Q', R'. 然後若任取一點 X 屬於第一列點，而 X' 爲第二列點上之對應點，則

$$\{P'Q', R'X'\} = \{PQ, RX\};$$

卽 X' 與三與點成一已與交比之列點，而能以 53 頁之法僅用直尺作圖之。第一列點上動點 X 於列點之底線上變動時，其對應點 X' 亦動於第二列點之底線上。若兩直線相合，則 X, X' 普通爲此線上不同之二點；X 在 P 時，X' 在 P'；X 移至 P' 時，X' 之位置 P'' 通常異於 P'，亦異於 P. 然有時不論 P 之位置如何，P'' 皆合於 P 者；是卽，對直線上之每點 P，不論視其爲屬於第一或第二列點，其對應點皆爲 P 點。於是直線上之點遂可分成一組共軛點對，而吾人不必注意於每點對中之何點屬於某一列點；任四點之交比等於其四共軛點之交比，卽等畫成爲對合。

公　點

例如，設同直線 PQ 上兩列點 (X), (X') 各以 C, C' 爲透視中心與直線 PR 上同一列點 (Y) 互相透視。三列點皆爲等畫者，首二者之公點爲二與線 PQ, PR 之交點 P, 及 CC', PQ 之交點 Q.



(圖 12)

又如，同軸上之諸點，其笛卡兒坐標爲 x 及 λx 者亦成等畫列點，λ 可爲任何常數。若 p 爲 P 之坐標，則 P' 之坐標爲 λp 而 P'' 者爲 $\lambda^2 p$. 若此等畫爲一對合，則不論 p 爲任何值，必 $\lambda^2 p=p$, 或 $\lambda=\pm 1$. 若 $\lambda=+1$, 兩列點相合;若 $\lambda=-1$, 任一列點皆爲另一列點對於原點之翻摺 (Reflexion). 此等畫中，原點自相對應，無窮遠點亦如是;於在一直線上之任何等畫或於任何對合中，必有兩點 X_1, X_2, 虛或實者,與其對應點或共軛點 X_1', X_2' 相合;其作圖需解一二次方程式，故於特殊情形外僅用直尺不能解之。

一對合中之兩重點有調和分任一對共軛點 P, P' 之重要性質;蓋若 X_1, X_2 自爲共軛點，則

$$\{X_1X_2\ PP'\}=\{X_1X_2, P'P\},$$

而此卽調和列點之特徵 對合亦可界說爲與一對與點 X_1, X_2 成調和列點之諸點對 P, P'.

在一直線上之任何等畫皆有兩重點之理可以解釋法證明之. 設 X 及 X' 之位置以其量自線上一定原點之笛卡兒坐標 x, x' 定之. 於是 x, x' 之關係必能表成一方程式;茲因若 x 已與,x' 卽能用直尺作圖,故方程式必能解爲 $x'=$(x 之一有理函數)之式,若化簡之,必對 x' 爲一次的;同理,對於 x 亦爲一次;故其式當如

$$axx'+bx+cx'+d=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

a, b, c, d 爲常數. 解之,得

$$x'=-\frac{bx+d}{ax+c}, \qquad x=-\frac{cx'+d}{ax'+b}.$$

若 p 爲 P 之坐標,q 爲 Q 之坐標…;而 $PQR, P'Q'R'$ 爲定此等畫之諸與點,則 $\{PQ, RX\}=\{P'Q', R'X'\}$, 或

$$\frac{(r-p)(q-x)}{(q-r)(x-p)}=\frac{(r'-p')(q'-x')}{(q'-r')(x'-p')},$$

此式若整理之卽成 (I) 式. 係數 a, b, c, d 爲已與六坐標 $p, \cdots\cdots r'$ 之有理函數,而此諸係數或其任何有理函數皆能僅用直尺從六與點作圖之.

今公點 X_1, X_2 可於方程式 (I) 中置 $x=x'$ 求得之,其

坐標 x_1, x_2 遂爲二次方程式

$$ax^2+(b+c)x+d=0 \quad\text{.................}(\text{II})$$

之根，故必有兩公點之存在，或爲實，或相重合，或爲虛；或爲有限，或爲無窮大。

x_1, x_2 普通含有平方根 $\sqrt{(b+c)^2-4ad}$，故不能僅用直尺作圖；唯於三數特殊情形，例如一根已知爲有理數者時，爲例外。 若 $a=0$，且 $b+c=0$，兩根皆爲無窮大。 此時 x 與 x' 間之關係 (I) 成爲

$$x'=x+\frac{d}{b},$$

於是第二列點爲第二列點移動一常數距離 d/b 所成者；有限公點之不存在，自幾何即可明瞭。

若等畫爲一對合，則與 x 之任何定值 p 對應之 x' 之值與 x' 爲 p 時 x 之值相同；換言之，雙一次關係 (billinear relation) (I) 對 x, x' 必爲對稱，其條件爲 $b=c$。 於是該關係卽成

$$axx'+b(x+x')+d=0,$$

而兩重點之坐標 x_1, x_2 爲二次方程式

$$ax^2+2bx+d=0$$

之根.

兩重點之中心 O 點稱爲對合中心 (center of involution). 其坐標爲 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{a}$.

若欲移原點於 O, 可使

$$x=\xi-\frac{b}{a}, \qquad x'=\xi'-\frac{b}{a},$$

而新坐標 ξ, ξ' 間之關係卽化爲

$$\xi\xi'=\frac{b^2}{a^2}-\frac{d}{a}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2=e^2,$$

e 爲任一重點與中心間之距離.

此中心前以數量性質界說之，實亦爲無窮遠點之共軛點. 若能作平行線，此點卽可用直尺作圖之 (63 頁). 故對合性質若以數量的語言表之，則爲任一對共軛點與中心之距離之乘積爲常數. 若對合被投影於任何其他直線上，共軛點投影成共軛點，重點投影成重點，但設非在第一直線上之無窮遠點能投影成第二直線上之無窮遠點者，第一線上之中心並不投射於第二線上之中心. 常數 e 可爲實數或虛數；若爲實數，則複點亦實，若爲純虛數，則無實複點而任兩共軛點分位於中心之兩側.

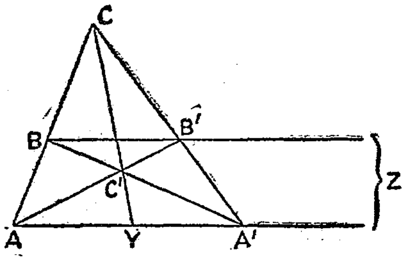
II. 數量性質

(i) 長度

一圖形若有數量性質，其中之數元素必有特殊位置。四邊形之調和性質 (54 頁) 仍爲討論之基礎。先使對角點 (diagonal point) 之一，設爲圖 10 之 Z, 位於無窮遠，由是直線 AA', BB' 相平行，而 Z 可界說爲兩平行線之交點。但若欲僅以 AA' 線上之點界說 Z 點，則必須進究下方程式所表之調和性質：

$$\{AA', YZ\} = \frac{AY}{YA'} \cdot \frac{ZA'}{AZ} = -1.$$

因 Z 在無窮遠，故此時之 $\frac{ZA'}{ZA} = 1$, 而 $AY = YA'$.



(圖 13)

無窮遠之 Z 點可視爲 A, A' 及被平分之線段 AYA' 之

中點 Y 之第四比例項． 於是一對平行線與任一線上之中分線段 (bisected segment) 實爲相等之已知件． 若已與兩平行線 AA', BB', 即能平分其一線上之一已與線段 AA': 於平行線 BB' 上任取一點 B, 更於 AB 上任取一點 C;於是完成圖 13, 即連 $A'C$ 使交 BB' 於 B'; 連 AB', $A'B$ 使交於 C', 連 CC' 交 AA' 於 Y, 即所求之 AA' 之中點．反之,若已與一中分線段 AYA', 亦能過任意與點 B 作一線平行於 AA': 於 AB 上任取一點 C; 完成上圖,先連 $A'B$, YC 使交於 C'; 連 AC', $A'C$ 使交於 B'; 連 BB', 即所求之 AA' 之平行線過與點 B 者． 於第一例，吾人藉過 Z 點之第二直線 BB' 而定無窮遠點 Z, 故能作調和列點 AA', YZ 之第四點 Y． 於第二例,吾人藉 Z 所屬之一調和列點之其他三點 A, A', Y 而定 Z, 遂能作 BB' 使過 Z. 兩例中, Z 點皆已確定,蓋吾人能作其與任意與點之連線,即能過任意與點作 AA' 之平行線． 是亦如謂一有限點如第二例中之 B' 爲兩線 AC', $A'C$ 之相交所定: 而其決定之程度已足以用之於作圖之次一步,即連之於 B 點.

無窮遠

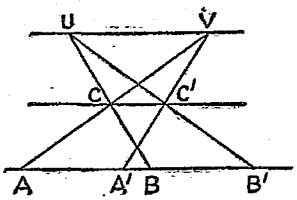
此處有必須注意者若 AA' 被延長至任何有限點 Z,

線段 AZ 必較線段 $A'Z$ 爲大，蓋其差 AA' 大於 0，且其比 $\frac{AZ}{A'Z}$ 亦大於一. 對有限線段言，零差 (zero difference) 與單位比 (unit ratio) 兩性質不可分開，皆暗指兩線段之相等: 其逆可以全部大於部分一語表之；此語若謂爲公理，不如謂爲有限之定義之爲愈也. Z 沿 AA' 後退時，$AZ-A'Z$ 之差常爲有限且常等於 AA'；但 $AZ/A'Z$ 之比則常大於一而趨一爲其限. Z 到達無窮遠時，此比趨於極限而等於一，差則仍爲有限；但兩線段 AZ 及 $A'Z$ 皆成無窮大. 兩線段實已相等，所謂相等者於無窮大線段之意義蓋謂其比爲一而不必謂其差有何特値. 零差，單位比兩性質至此已爲可分開的，此事實可用以爲無窮大之定義: 若從全體中除去一部分，而全體與剩餘部分相等(卽與之成單位比)，則全體與此部分皆爲無窮大.

線段之相加

AA' 上之無窮遠點已確定，卽能作 AA' 之平行線時，吾人於平分線上任何線段外尙能移之至同直線上之任何其他部分. 設欲自 AA' 延線上之一點 B 截一線段等於 AA'.

任作 AA' 之兩平行線 CC'，UV；於其中一線上任取



(圖 14)

一點 V, 而連 VA, VA' 使截他一平行線於 C, C'; 連 BC 使交 UV 於 U, 連 UC' 使交 AB 於 B'. 於是 B' 即所求之點,蓋自相似三角形定理,

$$\frac{BB'}{CC'}=\frac{BU}{CU}=\frac{AV}{CV}=\frac{AA'}{CC'},$$

由是 $$BB'=AA'.$$

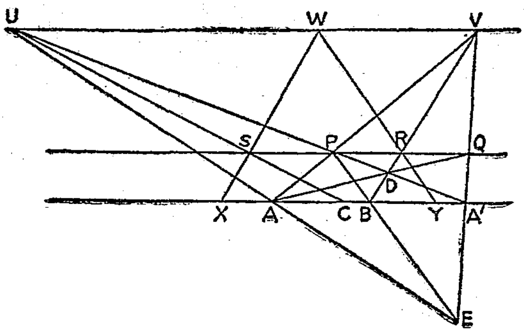
若欲此線段截於 B 點另一側,可連 BC' 以代 BC.

於是予線上之一中分線段即足以供此線上任兩已與線段之和或差之作圖,或重復施行之,即得同直線上任意數之線段之整係數一次函數之作圖.

例如,已與中分線段 ABA' 及直線 AB 上之他一點 C, 設欲自 AB 上一與點 X 截一線段 XY 等於 $3b-c$, 而 $AB=b$, $AC=c$.

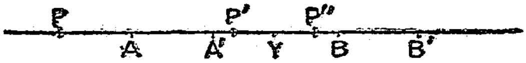
先利用中分線段 ABA' 作兩線平行於 AB. 於是移

線段 CA' 至 FA, 再移 FB 至 XY. 全部作圖欲求其更簡潔, 可佈置之如下.



(圖 15)

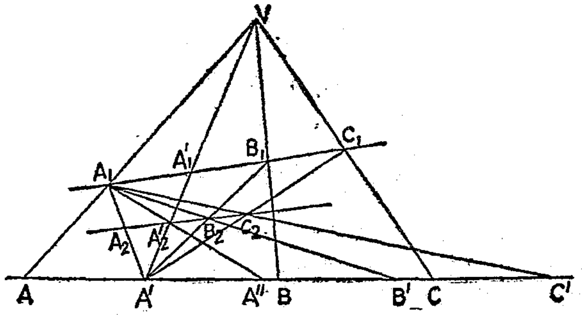
過 A 點任作一直線 APV, 於其上任取兩點 P, V; 連 PA', VB 使交於 D, 更連 DA, VA' 使交於 Q. 連 PB 使交 VA' 於 E, 連 EA 交 PA' 於 U. 由是 PQ, UV 皆平行於 AB. 設 VB 交 PQ 於 R. 連 UC 交 PQ 於 S, 連 XS 交 V 於 W, 連 WR 交 AB 於 Y. 由是 XY 卽所求之線段; 讀者可自證之.



(圖 16)

若僅與直線上相等而不相鄰之兩線段 AA', BB', 卽

不能作平行線． 例如，設四點之次序恰如上舉者，因此兩線段不相超覆． 於是，取 AA', BB' 爲兩點對，卽定一對合其中心爲 AB' 或 $A'B$ 之中點 Y, 其重點爲實點；取 AB, $A'B'$ 爲兩點對，所定之對合有中心 Y 及虛重點；取 AB', $A'B$ 爲兩點對，所定之對合之中心及一重點在無窮遠，另一重點爲 Y． 若任一點 P 於第一對合中與 P' 爲共軛，於第二對合中與 P'' 爲共軛；則 P' 與 P'' 在第三對合中爲共軛，且與 Y 點成等距． 故吾人能作任一點對於 Y 之翻摺，然不能作 Y 點，亦不能作 AA' 上之無窮遠點 Z, 蓋 Y, Z 兩點爲一二次方程式之兩未知根所定也． 但若所與線段相鄰接，則 A', B, Y 皆相合，二次方程式之一根已知爲有理數，故 Z 卽能作圖．



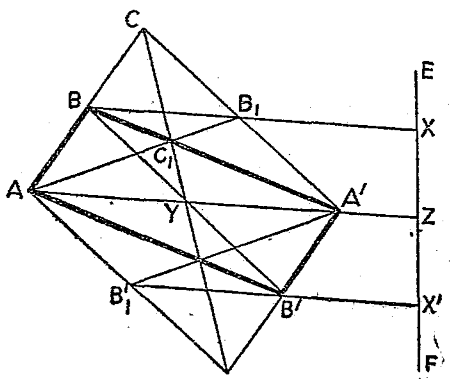
(圖 17)

但若已與三相等線段 AA', BB', CC'，此三點對決定一對應點之距離爲常數之等畫(60 頁)。故視 A' 爲第一列點 ABC 中之一點，即能作其對應點 A''；可用 54 頁之法使 $\{A'B'C'A''\}=\{ABCA'\}$ 以得之。於是 $A'A''=AA'$，即已得一中分線段 $AA'A''$，故能作平行線。A'' 之實際作圖示於圖 17. 列點 $ABCA'$ 先自任一頂點 V 投射於一任意直線成 $A_1B_1C_1A_1'$；於是以 A' 爲頂點投射之成 $A_2B_2C_2A_2'$，更以 A_1 爲頂點投射之成 $A'B'C'A''$.

已與一平行四邊形

然若僅有上述之諸已知件，尙不能作一線平行於一任意線，該線之方向異於所與之兩平行線或所與之有理分開 (rationally divided) 之線段者. 換言之，吾人僅得無窮遠線上一點，即其與所與平行線之交點，以是不能謂之爲完全確定，更不能求其與任何其他直線之交點，即該線上之無窮遠點，故吾人不能作平行線於他一方向. 但若已與兩對平行線，即能得無窮遠線上之兩點，此線遂完全確定，故能得其與任何其他直線之交點，即能作任何方向之平行線. 因兩對異向平行線等於一平行四邊形之四邊，故可謂若已與一平行四邊形，即能僅用直尺作任

一直線之平行線． 此即第二章 19 頁所假設之定理．事實上，若已有或能得到一中分線段 BYB'，又若能過此三點作三線段 $BX, YZ, B'X'$ 皆平行於一第二方向，此三等距平行線截任一直線 EF 成一中分線段 XZX'，利用之即能作 EF 之諸平行線． 若已與一平行四邊形時，其對角線互相平分；吾人即能過一對角線之兩端作他一對角線之兩平行線，而該兩平行線能自任意一直線截一線段爲該平行對角線所平分．



(圖 18)

圖中，AYA', BYB' 爲所與平行四邊形 $ABA'B'$ 之對角線，互平分於 Y． 自 63 頁之作圖，可利用中分線段

AYA' 作一線 BX 過 B 點平行於 AA'；所與平行四邊形之兩邊 AB, $A'B$ 可用以爲所需之完全四邊形之邊，而 AA' 爲其一對角線。故可過 Y 點任作一直線 YC_1C 交 AB, $A'B$ 於 C, C_1；連 $A'C$, AC_1 使交於 B_1, 更連 BB_1 卽所求之平行線。欲過 B' 點作另一平行線，可用第一四邊形對於 Y 之翻摺之四邊形而作直線 AB', $A'B'$, CY 延線及第三平行線 $B'B_1'$. 於是此三平行線交任何直線 EF 於 X, Z, X' 諸點而予吾人一中分線段，利用之卽能作 EF 之一切平行線。

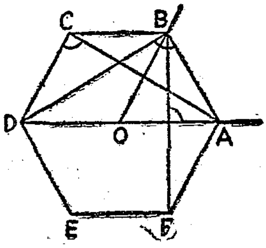
旋轉 (Rotation)

於是如第三章所云，吾人能完成諸與點坐標之任何有理運算，其中包括橫直坐標之互換。但所謂坐標云者，非謂絕對長度，僅指軸上線段與同軸上單位線段之比；兩單位不能設其爲相等，卽橫直坐標之比例尺 (scale) 不比相同；故坐標能自一軸移至他軸，而長度則不然。若能於兩軸上取相等之長度爲單位，則已知件中當另有一獨立之數量關係。若已與該關係，必能作一菱形，是爲單位平行四邊形之一特殊形式，其對角線爲一對正交直線者。一長度能自任何方向之一直線上移至其依於單位

菱形任一對角線之翻摺上。 蓋坐標爲 (p,q) 與 (r,s) 之兩點之距離與坐標爲 (q,p), (s,r) 者相同。 但捨非兩軸間之角 α 有某特值，吾人所能爲者僅止於此。 蓋若兩點 (p,q), (r,s) 間之距離 d 能移至一軸上，d 必屬於 p,q,r,s 所屬爲與點坐標所定之領域 $[1, a, b, \cdots\cdots]$ 中，但斜坐標之兩點間距離公式爲

$$d^2=(r-p)^2+(s-q)^2+2(r-p)(s-q)\cos\alpha,$$

此式於 $r=p$, 或 $s=q$, 卽線段 d 已平行於一軸者外，所定之 $\cos\alpha$ 之值皆屬於同領域。 但兩軸夾角之餘弦普通必非有理數亦非已與坐標之有理函數，否則吾人所討論者必爲一特殊情形。



(圖 19)

例如，若 $OA=OB$ 且 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{3}\pi$, 卽得一等邊三角形 AOB 爲單位菱形之半；更作平行線卽得一正六

邊形 $ABCDEF$, 於是得三對正交線 AB, BD; AC, CD; AD, BF. 因而能依六角形之任一對角線翻摺任何線段, 兩次同樣之翻摺卽得一 $\frac{2}{3}\pi$ 角之旋轉,故能於任一已與線段之每側各作一等邊三角形, 而連結兩三角形之頂點卽得一垂線, 故能作直角且能三等分之,然不能平分之.

若單位不相同而兩軸相正交, 則單位平行四邊形爲一長方形,其對角線成另一組軸, 不正交, 但兩軸上有相等之長度; 因此直角軸而單位不等之情款實與斜角軸而單位相等之情款相等. 但若同時有此兩個數量已知件, 則單位平行四邊形爲一正方形, 其對角線成第二組有相等單位之直角軸. 吾人可依單位正方形之對角線及邊翻摺任何線段, 卽能旋轉該線段一直角, 蓋坐標爲 (p, q) 與 (r, s) 之兩點之連線等於且垂直於 (q, r) 與 (s, p) 之連線. 吾人能於任何已與線段上立一正方形而作其對角線;能作直角且平分之,但不能三等分之.

(ii) 角度

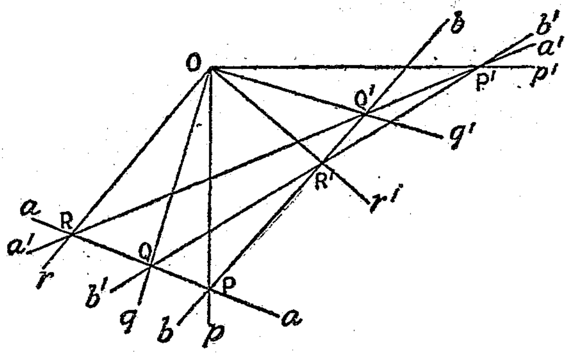
角之數量性質之主要關係基於直角,直角之理論能用對合束線以投影語言獲得之. 對合性質中僅含交比, 故自對偶原理 (Mathews, 第一章) 此性質可屬於一線上

之列點，亦可屬於過一點之射線束。對極於 (reciprocate to) 四角形之對合性質 (55 頁) 者爲四邊形之對合性質：一完全四邊形之諸對相對頂點張一對合束線於任何點。用於對極定理之證明亦可用於本定理，即須互換所有之"直線"及"點"即可。且亦如前定理所云，吾人可僅用直尺作同頂點之兩對射線所定之對合中任何射線之共軛。

正交對合 (Orthogonal Involution)

對合原理對直角之應用基於"過任一點之諸對正交直線成一對合束線，稱爲在該點之正交對合"之定理。蓋若 OA' 垂直於 OA, OB' 垂直於 OB, …束線 $O\{A'B'C'D'\}$ 同於旋轉束線 $O\{ABCD\}$ 一直角所成者；相對應之兩對射線間之角相等，故兩束線之交比相同。但除非於同一頂點 O, 已與，或能作圖，兩對相異之正交直線，則此對合不能確定；若此條件已具，則任何其他過 O 點之直線之垂線皆能以之爲兩對已與直線所定之對合中之該線之共軛線而作圖之。

附圖詳示過一點 O 之與線 r 之垂線之實際直尺作圖，於 O 點蓋已與兩直角。小寫字母表直線；p, p'；q, q'



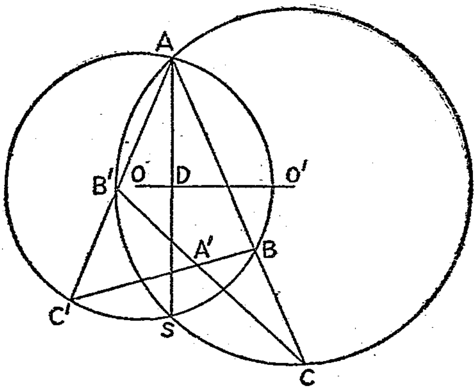
(圖 20)

爲兩對互直交之與線，r 爲一直線，茲所求者即其垂線 r'. 於平面上任取不過頂點 O 之一直線 a, 設其截 p, q, r 於 P, Q, R; 過 R 點任取一直線 a' 使其截 p', q' 於 P', Q'. 作直線 b 以連 P, Q' 及 b' 以連 P', Q; 設 b, b' 交於 R'. 由是連 O, R' 之直線 r' 即所求之垂線. 蓋 p, p'; q, q'; r, r' 爲完全四邊形 $aba'b'$ 中連 O 於諸相對頂點 P, P'; Q, Q'; R, R' 之諸對直線，故成對合，且因有兩對射線相正交，故此對合爲 O 點之正交對合；而任何其他共軛線對(包括 r, r')之兩射線亦互爲正交. 附圖之字母記法恰爲圖 11 之反. 兩作圖之步驟互相對應(55 頁).

拋物線之焦點

舉一例如：求切於四與線之拋物線之焦點. 因焦點業已確切決定，此題之直尺作圖爲可能. 自問題之形式得知已有某種數量已知件爲已與. 蓋拋物線之所以異於其他圓錐曲線者以其有切於無窮遠線之性質，或其他某種相等之性質，此其含義爲無窮遠線已確定. 至焦點之定義直接或間接包含直角. 拋物線通常之焦點及準點定義謂爲一點 P 之軌跡，P 與一與點 S 之距離等於其與一與線 NX 之垂直距離 PN. 應用此定義時當假設吾人能比較一隨意方向之線段 PS 及一定向線段 PN，故除直尺外必需另有一其他儀器等於一單位旋轉器者(94頁)；玆假定此畫具業已應用以首先供給作平行線及垂線之數量的已知件.

欲自四已與切線 $AB, AB', A'B, A'B'$ 作焦點 S，可利用一已知之性質，即 S 同時在四直線中每三線所成功之四三角形之諸外接圓上，即在諸圓中任兩圓之公弦上. 此諸圓不須作圖即能得其公弦，蓋每一對圓皆已與一公共點也. 以 Euclid 之法垂直平分諸邊而求得圓 ABC'，$AB'C$ 之中心 O, O'. 作 AD 垂直於 OO'，延長之至 S，使



(圖 21)

$DS=AD$; 則 AD 爲公弦,而 S 爲所求焦點.

直尺作圖理論提要

若已知件無數量的已知件,一切與點坐標之有理運算皆能完成,但此種坐標當爲投影坐標,即用交比表示者.

若已與兩平行直線或一中分線段或一相等之數量事實,可以笛卡兒之坐標代相當之坐標,即以長度之比代交比. 吾人能作某一方向之平行線,且能完成任一平行線中諸線段之長度之有理運算,但不能自一平行線移長度至另一平行線. 一無窮遠點已確定,但無窮遠線之全部則否. 若於兩不同方向中之各向皆有一獨立之數量性

質，便能完成一有兩坐標之笛卡兒坐標系之運算；能作任一方向之平行線而自一線移長度至其平行線，但不能自一方向移長度至另一向，無窮遠線完全確定。

若更與一直角，或兩不同方向之相等長度，則能選一組有相同單位長之斜角軸，且能於直角之臂翻摺任何長度．但不能作臂在其他方向之直角．

若已與兩對平行線及兩直角，則能作任何平行線及垂線．能依任一軸翻摺一長度，但不能移之至隨意之方向；無窮遠線全部確定．此卽僅用直尺所能得之最大作圖能力．因一正方形之邊與對角線供給兩對平行線及兩直角，故一正方形予吾人以直尺作圖之全部數量已知件．

第四章

規尺作圖

I. 直尺及圓規

若可兼用直尺及圓規，則作圖中利用直尺一部分所需之數量的已知件立能獲得. 以已與圓心畫一圓後，任何直徑皆爲中分線段，於是能作任一線之平行線；任兩直徑定一長方形之諸角頂，於是能作直角；且一切半徑皆相等，於是於任何方向皆能取同一之量度單位. 利用規與尺亦能平分任意角，但不能三等分之；此外又能完成其他一切作圖之見於幾何原本首六篇者.

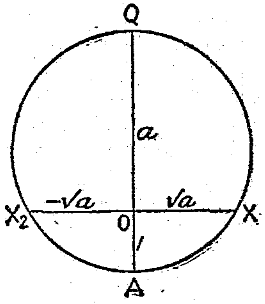
如昔所云者，需用圓規之規尺作圖之各步驟各等於解一二次方程式.

(i) 方程式

$$x^2 = a \quad 或 \quad x = \pm\sqrt{a}$$

之解答可視爲 a 與 1 間之比例中項，利用一以 $1+a$ 爲直

徑之圓內之縱標而作圖之.



(圖 22)

取一單位長度 A 而延長之至於 Q 使 OQ 等於 a; 以 AQ 爲直徑作一圓, 使之交過 O 點之 AQ 垂線於 X_1, X_2.

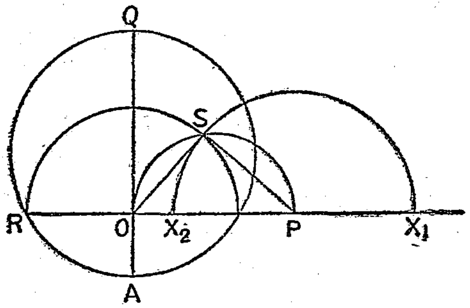
由是 $OX_1=\sqrt{a}$, $OX_2=-\sqrt{a}$.

(ii) 方程式

$$x^2-2px+q=0, \text{ 或 } x=p\pm\sqrt{p^2-q}$$

之根可自一長度 p 之線段之一端向兩方各取一長度 $\sqrt{p^2-q}$ 而作圖之. 若 OX_1, OX_2 爲兩根, 而 $OP=p$, 皆量取於同軸上, 則 P 爲 X_2X_1 之中點, 而 $PX_1=-PX_2=\sqrt{p^2-q}$.

故可取一單位長度 AO 而延長之至於 Q, 使 $OQ=q$;



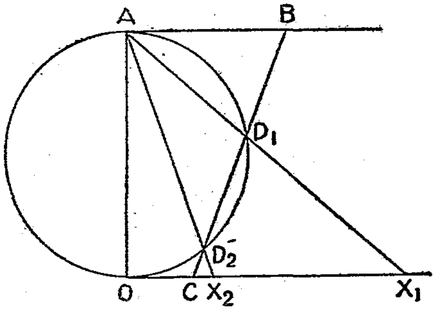
(圖 23)

以 AQ 爲直徑畫一圓，使之交 O 點之 AQ 垂線於 R; 則 $RO=\sqrt{q}$. 延長 RO 於 P, 使 $OP=p$, 更以 OP 爲直徑畫一圓交圓 $O(R)$ 於 S; 由是 OSP 爲一直角三角形，以 $OP=p$ 爲斜邊，$OS=OR=\sqrt{q}$ 爲一腰; 故另一腰 $PS=\sqrt{p^2-q}$. 畫圓 $P(S)$ 使交 OP 於 X_1, X_2; 由是 X_1, X_2 與 O 點之距離卽所與方程式之根.

若圓 $O(R)$ 不與半圓 OSP 交於實點,則作圖失敗;此種情形唯在後圓完全在前圓之中時始爲可能,卽 $p<\sqrt{q}$; 然此時該二次根數爲虛數矣.

V. Staudt 曾述一較精簡而稍覺難解之作圖.

取一單位半徑之圓，而自兩平行切線 OC, AB 上截兩長度 $OC=\frac{q}{2p}$, $AB=\frac{2}{p}$, 量自切點 O, A. 連 BC 使交



(圖 24)

圓於 D_1, D_2, 連 AD_1, AD_2 交 OC 於 X_1, X_2; 由是 XO_1 OX_2 爲所與方程式之兩根.

此理可自解析學證驗之. 取 OC, OA 爲 x 軸及 y 軸; 由是 AB 之方程式爲 $\qquad y=2,$

而圓 OD_2D_1A 之方程式爲 $\qquad x^2+y^2-2y=0.$

若 X_1 之坐標爲 $(x_1, 0)$, X_2 之坐標爲 $(x_2, 0)$, x_1, x_2 爲所與方程式之根, 則 AX_1 之方程式爲

$$\frac{x}{x_1}=\frac{2-y}{2}.$$

此線重交圓於 D_1, 其坐標求得爲 $\frac{4x_1}{x_1{}^2+4}, \frac{2x_1{}^2}{x_1{}^2+4}$, 同理 D_2 之坐標亦類是.

故 D_1D_2 之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4x_1 & 2x_1^2 & x_1^2+4 \\ 4x_2 & 2x_2^2 & x_2^2+4 \end{vmatrix}=0,$$

但因 x_1, x_2 爲 $x^2-2px+q=0$ 之根,故可以 $2p$ 代替 x_1+x_2, q 代替 x_1x_2; 用此等關係, D_1D_2 之方程式可化爲

$$4(px-y)+q(y-2)=0.$$

置 $y=2$, 得 B 之橫坐標 $x=AB=\dfrac{2}{p}$; 置 $y=0$, 得 C 之橫坐標 $x=OC=\dfrac{q}{2p}$; 即證明作法之無誤.

過四點之圓錐曲線

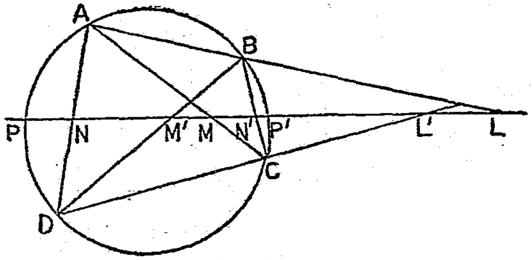
四邊形有一基本之交比性質討論一次作圖之基礎,圓亦有一交比性質爲大部分二次作圖之基礎,即:圓上四定點張 (subtend) 一有定交比之束線於圓上可變之第五點. 此理自任兩定點張於定點之角於後者在圓周上變動時爲一常數之事實易推得之. 故束線之射線間之角爲一定,而因交比能以角之正弦表之,此束線之交比亦爲一定. 於是可下一定義謂圓上四點張於同圓上任一第五點之束線之交比即該四點之交比,此即吾人所給予圓上四點之交比之意義. 一平面之四點若在一直線上,該四點於任何頂點皆張同一交比之束線;若不在一直線上,

若頂點能爲平面上任何點，則交比可有任何值；但若四點皆在一圓上，而頂點亦取於同圓上，則交比之值亦爲固定不變。

此爲一投影性質，故對於任何圓錐曲線皆爲眞；因圓錐曲線皆能投影成圓也。於是得一圓錐曲線之投影定義：若四定點張於一動點之束線有一定之交比，則該動點之軌跡爲一圓錐曲線。

自是理又能證明一四角形對合性質之推廣定理。

第一步：若一四角形內接於一圓；任一直線與圓之交點爲各對對邊截該弦所成之對合中之一對共軛點。蓋設 PP' 爲該弦而 $ABCD$ 爲四角形，諸交點如圖 25 所示。由是



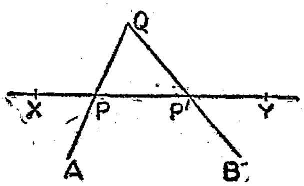
(圖 25)

$$\{PLMP'\} = A\{PBCP'\} = D\{PBCP'\} = \{PM'L'P'\}$$
$$= \{P'L'M'P\},$$

因此 PP' 屬於爲兩點對 LL', MM' 所定之對合中. 此爲一投影性質，故於一截線爲一四角形及過其四頂點之任一圓錐曲線所截之列點皆爲眞；故一切如是之圓錐曲線與該截線之交點同爲諸對對邊所定之對合中之共軛點. 但兩對對邊之本身亦爲過該四點之圓錐曲線之特殊的，退縮的情款 (particular, degenerate cases)，故上定理可以一較簡單，普遍之形式述之曰：過四定點之諸圓錐曲線截任一截線成對合列點.

故若已與一圓錐曲線上之五點 A, B, C, D, E, 過其中一點之任一直線 EX 與圓錐曲線之另一交點 X 實即 E 在四角形 $ABCD$ 之諸邊與 EX 之交點所定之對合中之共軛點；故此點可僅用直尺作圖之. 因是吾人能得到過五與點之圓錐曲線上不論多少點之直尺作圖，蓋可求圓錐曲線與過諸與點中任一點不論多少之直線之交點也. 於是僅用直尺，不須計算，即能描此曲線，其精確可至爲時間，忍耐及其他限制所允許之程度；此於用 Euclid 之畫具所已得之法中蓋最近於實際畫此曲線矣.

但問題若爲求此圓錐曲線與不過五與點中任一點之任一直線之兩交點，則不能僅用直尺解之. 設欲求一直



(圖 26)

線與過五與點 A,B,C,D,E 之圓錐曲線之交點 X,Y. 於 XY 上任取一點 P; 連 AP 且定其與圓錐曲線之他一交點 Q; 連 BQ 使交 XY 於 P'. P 若在曲線上,必與 Q 相合,因亦與 P' 相合;反之,P 若合於 P',必在該圓錐曲線上. 不然,則可任取 P 之四位置 P_1, P_2, P_3, P_4, 以 $\{P\}$ 表其交比. 同樣記法亦施之於 Q,P'. 由是,因 $ABQ_1\cdots\cdots Q_4$ 在同一圓錐曲線上,

$$\{P\}=A\{Q\}=B\{Q\}=\{P'\},$$

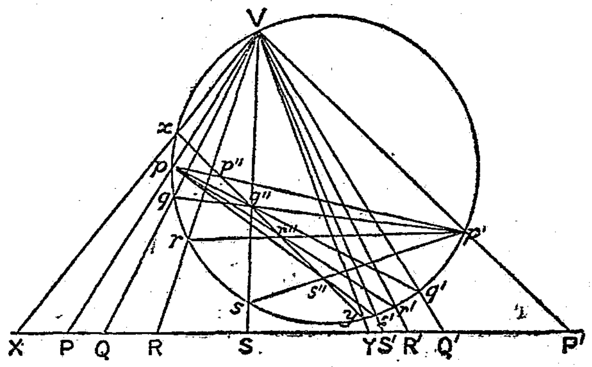
因此 P, P' 描一等畫列點,所求點卽其公點 X,Y; 故可用後此所述二次作圖獲得之. 但 XY 若過五與點之一,如 E 時,其一公點已知為 E, 另一點卽僅需直尺作圖,如適所述者.

關於圓錐曲線,與其諸點之交比性質相當者為其切線之交比性質: 一圓錐曲線之四定切線於曲線之可變動

之第五切線上截一定交比之列點. 於是得一個切於五定切線之圓錐曲線之切線之作法，此作法之諸步驟與過五定點之圓錐曲線上之點之任何作法之步驟步步相應.

等畫之公點

爲欲完成上述之理論，茲先追究等畫原理，而求兩等畫列點之公點之作法. 設在同直線上已與兩等畫列點 $PQR\cdots\cdots$, $P'Q'R'\cdots\cdots$, 求其公點 X, Y. 任取一圓及其上之一點 V, 以 V 爲頂點投射兩列點於圓上成 $pqr\cdots\cdots$, $p'q'r'\cdots\cdots$. 今知若於直線上已與三對對應點 P, P'; $Q,$



(圖 27)

Q'; R, R'; 則任意點 S 之對應點 S' 業已確定; 此點可由下法求之.

連 pq'，$p'q$ 交於 q''；連 pr'，$p'r$ 交於 r''；連 $q''r''$ 交 pp' 於 p''，交 $p's$ 於 s''，交圓於 x, y. 連 ps'' 交圓於 s'；更連 Vs' 交 PQ 於 S'，於是 S' 為 S 之對應點；蓋

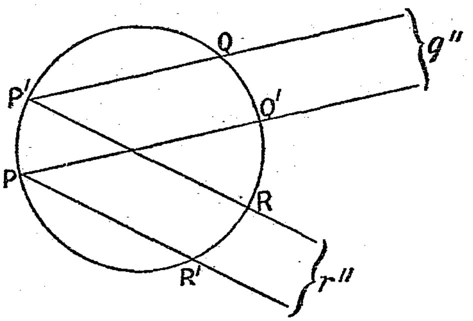
$$\{PQRS\}=V\{pqrs\}=p'\{pqrs\}=\{p''q''r''s''\}$$
$$=p\{p'q'r's'\}=V\{p'q'r's'\}=\{P'Q'R'S'\}.$$

吾人所得者不僅為 PQ 上兩已與等畫列點，且又得圓上之兩列點 $pqr\cdots\cdots$，$p'q'r'\cdots\cdots$，與前兩列點等畫，且亦自相等畫；故直線上之公點遂投影為圓上之公點．但圓上之公點為 $q''r''$ 與圓周之交點 x, y，故所與兩等畫之公點為 x, y 以 V 為頂點之投影 X, Y.

若 Vx 平行於 PQ，則一公點 X 在無窮遠，此時需用該等畫之有限公點之任何問題皆只有一解，故只需直尺作圖．若 $q''r''$ 切圓於過 V 之 PQ 之平行線與圓之交點，則 X 與 Y 皆在無窮遠．普遍言之，公點之為實；為相合，或為虛皆視 $q''r''$ 之交圓於實點，切於圓，或與圓不相交．

若等畫列點位於圓上，而不在一直線上，作圖自較簡單，蓋斯時無須以 V 為頂點之投影也．其一特例為歷史上舊題．設列點 $P'Q'R'\cdots\cdots$ 等於列點 $PQR\cdots\cdots$ 於圓周

上轉一定角距 (angular distance) α 而成者。 於是 PQ', $P'Q$ 互平行，q'' 在無窮遠，r'' 亦然，而 $q''r''$ 全線俱在無窮遠。 公點 X, Y 爲圓與無窮線之交點，且爲虛點。 由

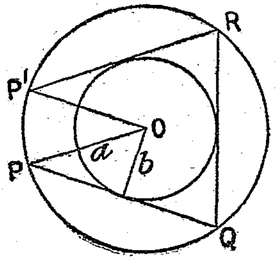


(圖 28)

是唯 $\alpha=0$ 或 $n\pi$ 時始有公點，然此時兩列點相合，即每點皆與其對應點相同。

不定設題 (Porisms)

例如，設欲作一三角形，其頂點在一圓上，而其邊切於該圓之一同心圓。 於外圓上任取一點 P，而依次作切線 PQ, QR, RP' 切於內圓，各重交外圓於 Q, R, P'。 若 P, P' 相合，PQR 即所求三角形，問題亦已得解；否則 P 與 P' 成圓上之等畫列點，其公點即問題之解答。 但若 O 爲圓心，a, b 爲內外圓之半徑，則 $\angle POP'=6\cos^{-1}(b/a)$



(圖 29)

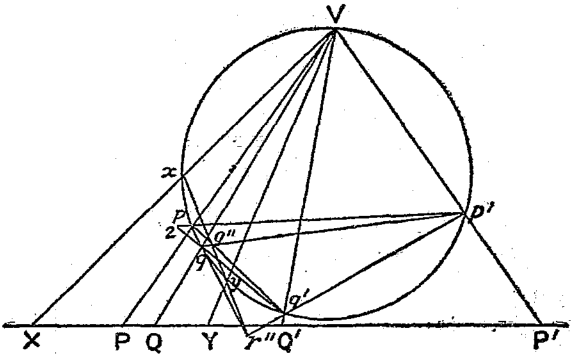
＝常數；所成之等晝列點屬於上節所述之一類，P, P' 之位置除非有下列條件

$$6\cos^{-1}\frac{b}{a}=2n\pi, \text{ 或 } a=2b,$$

均不能相合；若合此條件，則 P, P' 常爲相合，而上述之三角形其數無窮，三角形之一頂點可爲外圓上任意點 P. 此類問題爲不定設題 (porism)；即謂，雖獨立條件之數等於變數之數，而此諸條件通常爲矛盾的，故除非常數間有某種特殊的關係，無有解答，然此時諸條件非復獨立，解答之數亦爲無窮. 若易三角形以有任何與數之邊之多角形上理亦眞；此理並可推於任一對圓，且用投影方法亦可推之於任一對圓錐曲線：外切同時內接一多角形於兩已與圓錐曲線爲一不定設題.

對合之重點

至於對合重點之作圖則較簡單，蓋對合之一對共軛點，反其次序則成該等畫列點之第二對對應點。於圖 27 中，可用 Q', Q (其次序必須如是) 以代 R, R'，該圖遂變爲



(圖 30)

圖 30，其中 $q''r''$ 爲 $pq, p'q', pq', p'q$ 諸邊所成之四角形之一對角線。

從此圖可察知兩點對 PP', QQ' 如何始能得一有實重點之對合。條件爲 $q''r''$ 必交圓於實點。設 pp', qq' 交於 z，則因 $q''r''$ 調和分過 z 點之兩弦 zpp', zqq'，故 $q''r''$ 爲 z 之極線；而若 z 在圓外，$q''r''$ 卽交圓於實點，z 在圓內，$q''r''$ 卽交圓於虛點。

今若 z 在圓內，必 q, q' 分在 p, p' 所分成之圓周之兩弧上．此時，V 不論在任何弧上，Vq, Vq' 中必有一線而亦僅有一線在 Vp, Vp' 之間，因此 Q, Q' 中必有一點而亦僅有一點在 P 及 P' 間．故若所與兩點對互相超覆，則重點爲虛；若一對全部在另一對之間（如點之次序爲 $PQQ'P'$ 時）或各對皆在另一對之外（如 $PP'QQ'$），則重點爲實．

任何二次方程式之圖解 (graphical solution) 皆可使之倚於求一個對合之重點．普通方程式

$$x^2-2px+q=0$$

可視爲一對合之重點之坐標之方程式，此對合中任一組共軛點之坐標 x, x' 間之關係爲

$$xx'-p(x+x')+q=0.$$

作圖時可先定兩對共軛點，例如

$$x=0, x'=\frac{q}{p};\ x=1, x'=\frac{q-p}{p-1}.$$

若 p 及 q 已與，此四點可以直尺作圖之，如定，遂能以上述作法求對合之重點，即解上述之二次方程式．

一個定圓錐曲線

上述作圖只須作一圓，且爲隨意圓；所利用者又僅爲

該圓之投影性質，即交比性質與交任意線於兩點之性質．故此圓可代以業已作圖之任一圓錐曲線．至作圖之其餘部分則僅須直尺矣．因是知旣畫成一個任何種類之圓錐曲線後，即可用直尺獲得任一已與兩對共軛點之對合之重點，故可獲得任何係數爲已與數之二次方程式之根之直尺作圖．但是即並用規尺所多於僅用直尺之能力，故一個定圓錐曲線能完全代替圓規之應用．此定圓錐曲線爲一圓時之作圖方法，詳第七章，該章中並有三數實際之作圖。

II. 其他基本畫具

現代之幾何作圖與 Euclid 當日者大不相同．近世學生論述 Pythagoras 定理時，其所用之儀器必遠多於其發明者之所有；但於精確及普遍應用兩方面，Euclid 之兩畫具猶執牛耳。更進一步言，大多數近世畫具之製造皆有賴於規尺作圖，而於其一切尋常作用上言，尤不能使吾人作 Euclid 方法所不能作之圖，Euclid 之法僅稍需時間，麻煩已耳．

本節中將討論尋常與規尺并用之三數畫具．至推

廣幾何作圖之範圍於三次，高次或超越問題之解之畫具，如三分角器或積分器等，本書不能盡述之以免離題太遠。但下列三畫具已足夠吾人之注意，蓋雖不能增廣歐氏作圖之範圍，然能縮短其作法也；是即分線器，平行尺與三角板。其能力範圍將以第二章之解析觀念決定之。

(i) 分線器

言及圓規而謂為 Euclid 畫具時，當知尋常近世所用者實爲一複雜之儀器，含兩完全相異之作圖能力。第一，可置其兩脚於兩與點之上，其距離等於所求圓之半徑者，然後取開圓規，而以其一脚立於一與點 C，即所求圓圓心上；然後即可以另一脚畫一圓。茲則當 Euclid 作圖時，彼或竟行之於砂礫上，與畫圓周之前，必先得所求圓之圓心 C 及圓周上一點 A。僅於他一位置與一半徑 AB 實不足供其作圖，其中一點，如 B，必重合於 C。

幾何原本 I. 2（即第一篇定理二，下做此）已能除去此種限制，因是於作圖之可能方面言，兩種圓規實無以異；但幾何原本 I. 2 之圖形含三直線及四圓，雖尚可代以一較簡之含五圓之圖形（參閱 172 頁），而兩種畫具於作圖之繁簡方面言，已大有異點在。

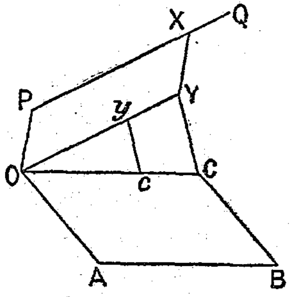
Mascheroni，十八世紀末期之作者，發見當時之科學儀器製造者於製作需求極大之準確度之望遠鏡刻度盤時，應盡量採用圓規，蓋較直尺爲精確也．彼以爲圓規之一特性爲能正確保持一度取於其上之半徑，至彼欲改變之之時"(compas fidèle")．若同一半徑於作圖中屢次用及，彼必特取一圓規以保存之，彼置圓規於一側至重需之時始復取之；蓋如是圓規滑脫之錯誤機會必較重新量取半徑之錯誤機會爲少．若兩種圓規有加以分別之必要時，可用歐氏 (Euclidian) 圓規及近世 (modern) 圓規二語；於極多數作圖中近世用法不能優於古法．近世圓規連合兩種畫具之能力；其一爲畫圓，屬於歐氏圓規者；另一爲移動距離，則屬於他一畫具稱爲分線器者，後者之基本作用如幾何原本 I. 2 所述者："自兩直線中之大者截一部分等於小者．"

用直尺及分線器所能爲之一切，用直尺及歐氏圓規均能爲之，唯或稍勞費耳．其逆定理即不眞；直尺及分器線所能爲者較直尺爲多，而遜於直尺及圓規．

單位旋轉器

分線器能供給作平行線及垂線所需之一切數量的已

知件；蓋可作兩直線交於一點，如 O，於線上截相等長度 AO, OA', BO, OB'，卽得長方形 $ABA'B'$ 之諸角點。此已足供作平行線之需，若重行此作圖則得第二直角其臂之方向異於前者，於是亦能作垂線。因吾人能作平行線卽能作相似圖形，故分線器之作圖範圍實不能稍廣於一畫具如有兩固定刻號之直尺或紙條之類能自平面上一部分移一有定線段，如單位長，至另一部分者。若於一固定端點上旋轉單位長度，卽能於過定原點之直線上截一單位長，則作圖範圍亦不稍改；具此能力之一畫具 Hilbert 稱之爲單位旋轉器 (unit rotator, 德文 Einheitsdreher)。蓋用一單位旋轉器卽能作上述之菱形，然後卽可用直尺作平行線。茲設欲自一已與線段 PQ 上截一部分 PX 等

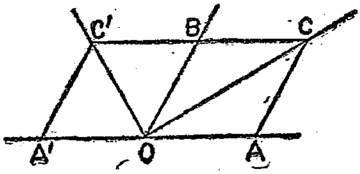


(圖 31)

於一已與線段 AB. 設 O 為原點;作 OC; OY 各平行於 AB, PQ, 於其上各截單位長 Oc, Oy. 完成平行四邊形 $OABC$; 作 CY 平行於 cy, YX 平行於 OP 交 PQ 於 X. 於是 PX 卽所求線段,蓋自平行線定理,

$$PX = OY = OC = AB.$$

Hilbert 於其"幾何學之基礎"一書中證明一定理謂此畫具之可能作圖範圍,相當於一組二次根數,此二次根數須為實數,且不論其所倚而變之諸變量於其領域內如何變動皆為實者;其證明之全部以其過於艱深本書不加敍述。例如,吾人能平分任意角;此為一二次問題,不論與角如何變動常有兩實解,卽內外平分線。 其作法為於與角之兩臂上截相等長度 OA, OA', OB; 完成菱形 $OACB$, $OA'C'B$; 由是 OC, OC' 卽兩平分線。 又若已與一圓之圓心及半徑,卽能作過圓心之直線而於其上各截其與圓



(圖 32)

周之兩交點,其與圓心之距離等於所與半徑;故吾人能得

到圓與任何直徑之交點，因其常爲實點；但不能求其與不過圓心之隨意線之交點；蓋此種交點於與線有某特種位置時成爲虛點。

若轉而研究解析學，則當更能明確認識用單位旋轉器所能爲之一切。取圓心爲原點，則圓 $x^2+y^2=1$ 與過圓心之任何直線 $y=mx$ 之交點皆可求得，唯 $y=mx$ 須爲能作圖者，即 m 當屬於領域中。諸交點之坐標爲

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\ \pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right),$$

而因此諸坐標之有理運算皆可完成，結果遂同於加 $\sqrt{1+m^2}$ 於領域之內，此新領域遂得自與點坐標之有理運算及自 m 而 $\sqrt{1+m^2}$ 之新運算，m 爲屬於領域內之任何數量。推廣之，若 m, n 爲領域內任兩數，可依次作 $\frac{m}{n}$, $\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}$ 及 $n\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}$，或 $\sqrt{m^2+n^2}$；因此新運算遂等於平方和之開平方。此運算實不及領域內任意數之開平方之普遍，蓋於 m 取某種可用值，即負實數時，$\sqrt{m}$ 爲一虛數；但 $\sqrt{m^2+n^2}$ 於 m 及 n 爲一切可用值時皆爲實數。

(ii) 平行尺

兩直邊密接固釘之使夾一定角則成一畫具，此畫具

有多種形式皆爲吾人所常見. 若兩邊間之角爲直角,則成丁字尺 (T-square), 若爲 $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi$ 則三角板中多有之;後當加以詳論. 若此角爲零,則成平行尺.

第一步,此具可用之爲尋常直尺. 其次, 又能供給數量的已知件,蓋若置之任何處而作線於其兩邊,繼復移兩邊於另一方向而行之,卽得一菱形;其高等於平行尺之闊,卽吾人所取之單位長,而自其對角線又能得一直角. 兩邊之位置於其各過平面上一點時卽完全確定; 玆根據平行尺之同一邊過兩與點,或兩邊各過一與點而區別其兩種應用.

第一應用等於分線器

第一個應用爲置一邊合於一與線卽兩與點 A, B 之連線,而作一平行線使與 AB 成單位距;實則吾人可在與線兩側各作一平行線. 因能得此兩位置,平行尺之此基本運用遂等於解一二次方程式,但同前,此方程式之根必爲實根. 第一應用恰等於分線器之作用,蓋於任何直線 OA 上皆可截一單位長度,其法先作垂線 OB, 然後畫 OB 之平行線與 OB 成單位距者, 使其交 OA 於所求之點;反之,分線器可用以作一線平行於一與線 OB 而與之

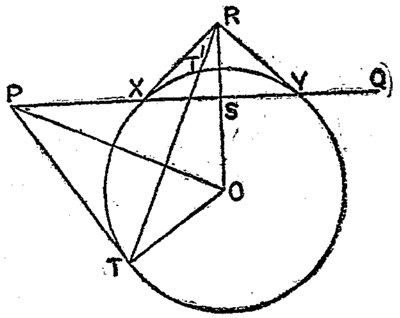
成單位距，其法先於垂線 OA 上截一單位長然後作圖之．用分線器，可求得單位圓與任何直徑之交點而於此諸點作垂直於半徑之切線；用平行尺，可作平行於任何已與半徑之單位圓之切線，然後求自圓心至切線之垂足，而定其切點．

第二應用等於圓規

第二應用中，一邊過一與點 A，他一邊則過另一與點 B． 此僅在 $AB \geqq 1$ 時始爲可能． 於是於第二邊畫線，卽可用此基本運用解下列問題： 過一與點 B 作一直線 BC 與另一定點 A 成單位距，卽謂，自 B 作一線切於一圓心 A，單位半徑之圓． 普通有二解，而亦等於解一二次方程式；但此方程式之根於 B 在單位圓內時，卽在變數 $m=AB$ 爲小於 1 之實値時成爲虛根，而此爲平面上兩隨意點間之距離之可能値． 今若 C 爲切點，卽自 A 至 BC 之垂線之足，卽得 $BC=\sqrt{m^2-1}$，因是此二次根數之作圖爲可能；但由是一切二次根數之作圖皆爲可能，蓋若 a 爲領域內之與値，而 $m=\dfrac{a+1}{a-1}$，便可順序作 m，$\sqrt{m^2-1}$ 及 $\dfrac{a-1}{2}\sqrt{m^2-1}$ 或 $\sqrt{a}$． 故平行尺之第二應用可完全代替圓規．

例如，設欲求一與直線 PQ 與一圓之交點；該圓之圓心 O 及半徑已與，但不能實際畫出。先假設半徑等於平行尺之闊，否則可先作所求圖之相似圖其中之圓爲單位圓者，然後放大至所欲得之大小比例。

若 X, Y 爲所求交點；切圓於 X, Y 之切線相交於 PQ 之極點 R. 若獲得 R，此兩切線可作圖。今 R 在 TT' 上，TT' 爲 PQ 上任一點之極線，而亦在 OS 上，OS 爲自 O 至 PQ 之垂線。故可於 PQ 上任取一點 P，過 P 作 PT 與 O 成單位距，作 OT 垂直於 PT；再作 TR 垂直於 OP，OSR 垂直於 PQ，則二線相交於 R；作 RX, RY 與 O 成單位距交 PQ 於 X, Y，卽所求之交點.



(圖 33)

於平行尺之第二應用中，吾人僅用及第一邊之一點，而畫具之主要部分爲一直邊及與之有定距之一點，此點可使之合於平面上之任何與點，同時第二直邊則使之過與第一點有相當大之距離之第二定點.

(iii) 三角板

若一尺有不平行而夾一定角 α 之兩邊，其位置非兩直邊過三定點，兩點在一邊上，另一點在另一邊上者，不能確定；基本運用爲過一與 A 作一直線與連兩定點 B, C 之直線成一角 α, 因之能作一平行四邊形且能作平行線，又特能作一菱形，以 BC 爲對角線使 B 角成 2α; 他一對角線遂與 BC 正交，而吾人得有全部的數量已知件. 但如此並無所增益於直尺作圖之範圍，唯 $\tan\alpha$ 若爲無理數，則可加入所與之獨立坐標其有理函數皆可作圖者之中.

但若能使一邊上一刻號之點合於平面上一定點，同時第二邊過另一定點，則因刻點與第二邊間之距離一定，三角板之此項應用恰同於平行尺之第二應用，即能代替圓規之應用. 三角板另有一可以代替圓規作用之應用，即假設能使兩邊各過兩與點 A, B 中之一，而頂點即兩邊之交點在一與線 c 上時之作用. 頂點之兩位置即 c 與

立於 AB 上能容一角 α 之一圓弧之交點;而因任何直線與此定圓之交點皆能決定,故吾人能(92 頁)完成規與尺能解決之一切作圖.

第五章

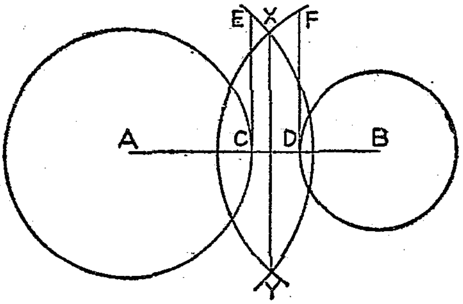
標準解題法

規尺作圖唯一最普遍之法即於任何例題中，皆按照問題之解析討論之步驟作圖之，是法未必皆爲最佳之法。此外有數種標準解法者，則各能應用於有相當界限之一組例題，唯諸組之界限間自亦稍有出入。諸法中多數皆以性質分離爲基礎。問題若爲有定者，則作圖之目的爲與已知件有某某關係之數元素，每元素各須適合數獨立條件，其條件之數須爲足以決定此元素者：於點或直線爲二，於圓爲三。若諸條件之解答不止一個，則必有其他要求能除去合於原諸條件之諸元素之一部，但非全體。今欲分開諸條件成兩個各異之條文，各表一個或一組要求；且視爲兩個問題而分究之，常爲可能。故一般言之，每條文各定一組無窮之點，而兩組之公共點即問題之解答。

(i) 軌跡法 (Method of Loci)

最簡之例爲軌跡法，此時所求者爲有兩種性質之一點，每個性質各爲一軌跡上之諸點所適合；由是兩軌跡相交之一點或多數點卽問題之解。應用是法時性質之分離要能使兩軌跡皆易於發見且能作圖：欲合於吾人之所需，則必爲圓及直線所構成。若兩軌跡中有一個爲圓以外之曲線，則不能用是法以求一規尺作圖。簡單之例題有三角形外心及內心之通常作法及其他類似問題。

例一 三角形 ABC 之外心 S 可界說爲與頂點 A,B,C 成等距之點。此定義可分爲兩個條文，卽 $SA=SB$，及 $SA=SC$。有第一個性質之點之軌跡爲 AB 之垂直平分線；有第二性質之點之軌跡，則爲 AC 之垂直平分線；同時在兩軌跡上之一點 S 卽問題之解答。



(圖 34)

例二 作兩與圓之根軸 (radical axis).

根軸爲一點之軌跡，自該點至兩圓之切線相等者；自幾何得知其爲連圓心 A, B 之直線之一垂線。故可先求該根軸上之一點 X，然後自 X 作 AB 之垂線而作圖之；或求其上之兩點 X, Y 而連之，亦可。

若 X 爲至兩圓之切線各等於一已與長度 t 之一點，則 X 點可用軌跡法求之。X 點有兩性質：(i) 至第一圓之切線長度爲 t，(ii) 至第二圓之切線長度爲 t. 相當於條文 (i) 之軌跡爲與第一圓同心之一圓；若於任何切線上自切點 C 起量一長度 $CE=t$ 而求得圓周上一點 E，然後畫 $A(E)$，則 $A(E)$ 即該軌跡。同理，相當於條文 (ii) 之軌跡爲另一圓 $B(F)$. 取兩軌跡交點中任一點爲 X，他一點即 Y；X, Y 之連線即兩與圓之根軸。全部作圖可整理如下。

設連心線 (line of centers) AB 交圓周於 C, D. 作 CE, DF 垂直於 AB，截 CE, DF 各等於任何適宜之長度 t. 畫圓 $A(E), B(F)$ 交於 X, Y；連 X, Y，即所求之根軸。取 t 之長度時必使之能令兩圓 $A(E), B(F)$ 交於實點。若兩與圓不同心，此必爲可能；而兩圓同心時

根軸之全部皆在無窮遠. 根軸之一較短作法見 142 頁及 153 頁.

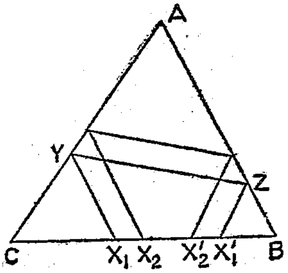
(ii) 試驗錯誤法 (Method of Trial and Error)

此法頗似軌跡法，所欲作之點以一對有關係之點代之，合兩點則適合問題之全部條件，故若兩點相重，問題卽可解決. 卽謂，吾人視所求點爲該兩點之一特例，而有一獨立性質謂兩點當相重者. 於能用此法以得規尺作圖之大多數例題中，兩點中第一點之軌跡爲一直線或一圓，第二點之軌跡亦爲同線或同圓；該軌跡上兩點之對應位置則成兩等畫列點. 由是求兩等畫之公點卽可得問題之解答，公點可用前章之法作圖之 (86 頁). 本法與軌跡法之一異點在乎前法所求者爲第一軌跡中一點與第二軌跡中任何位置之一點相重者，而本法所求者爲第一列點中之一點與第二列點中其確定的對應點，卽因所採作法與第一點對應之點相重者.

例一 84 頁中已述本法之一例，卽定一隨意線與過五定點之圓錐曲線之交點.

例二 作一三角形 XYZ, 其諸邊各平行於一定向，諸頂點各在定三角形 ABC 之一邊上.

從 BC 上任一點 X 開始;依次作 XY, YZ, ZX',各平行於其正確之方向,各交 CA 於 Y, AB 於 Z, BC 於 X'. 於是若 X' 能合於 X,問題即已解決. 普通 X' 不合於 X,但若 X 動於 BC 上而成一列點,則 X' 亦於 BC 上成一等畫列點. 蓋 X 之任四個位置之交比等於其對應位置之 Y 之交比,等於對應位置之 Z 之交比,亦等於對應位置之 X' 之交比. 故求等畫 X, X' 之公點即得問題之解.



(圖 35)

若諸線之位置如圖 35 所示者,於 X 自 X_1 而 X_2 向 X' 前進時,Y 及 Z 均向 A 進行,而 X' 亦向 X 進行. 故 X, X' 必於 B 與 C 間之某點相合,因此此等畫至少有一有限實公點. 自是推知另一公點亦為實點,但該點在

無窮遠；通常本問題有一個而亦僅有一個解答． 若另用一不同之圖形，B, C 之間或無公點；但一般言之，於 X 於 BC 延線上向無窮遠進行時，Y, Z, X' 皆向無窮遠進行，而 X, X' 最終皆與 BC 上之無窮遠點相重，是爲等晝之第二公點． 有三數特殊情形爲例外． 若第一定向平行於 BC，則 Y 常合於 C，而 Z, X' 爲定點． 同理，若 YZ 平行於 CA，或 ZX' 平行於 AB，則 X' 亦爲固定． 此類情款自當置之不論；其他類似情款如 XY 平行於 CA，YZ 平行於 AB，或 ZX' 平行於 BC，而 X' 常在無窮遠者亦然．

上述關於公點之事實亦可以解析證明之． 設 a, b, c 爲三角形 ABC 之三邊，設 $CX=x$，$CX'=x'$． 因三角形 XCY, YAZ, ZBX' 之諸邊各有定向，其形狀自已確定，其中任一三角形之諸邊之比皆爲一定． 故可加入三常數 α, β, γ，使

$$CY=\alpha\, CX=\alpha\, x,$$

$$AZ=\beta\, AY=\beta(b-\alpha\, x),$$

$$BX'=\gamma\, BZ=\gamma\,(c-AZ)=\gamma\{c-\beta(b-\alpha\, x)\},$$

$$x'=CX'=a-BX'=a-\gamma\{c-\beta(b-\alpha\, x)\};$$

故　$$x'+\alpha\beta\gamma x=a-\gamma c+\beta\gamma b=\text{常數}.$$

上所述應忽棄之例相當於 α,β, 或 γ 之值爲 0 與 ∞ 時之情款. 欲求公點,置 $x=x'$; 卽得 x 之一有限值

$$x=\frac{a-\gamma c+\beta\gamma b}{1+\alpha\beta\gamma};$$

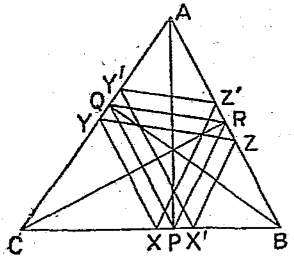
若視上方程式爲一退縮 (degenerated) 二次方程式,他一根卽爲無窮大.

於 $\alpha\beta\gamma=1$ 之特例中,等畫之方程式對 x,x' 爲對稱,故所代表者爲一對合; 自 X' 重行作圖卽得 X 點. 例如,若 XY, YZ, ZX' 平行於 A, B, C 至其各對邊之垂足之連線所成之垂足三角形 (pedal triangle) 之三邊時,該條件卽能適合. 是時垂足三角形之本身卽問題之解. 於是三角形 $XYC, AYZ, X'BZ$ 各相似於 ABC, 故知

$$\alpha=\frac{a}{b},\ \beta=\frac{b}{c},\ \gamma=\frac{c}{a};\ \alpha\beta\gamma=1.$$

XY, YZ 對 CB 之傾角相等,在 Z, X' 亦有類此之情形,因是 $XYZX'Y'Z'X$ 爲光線自 $Z'X$ 射入而依次反射於諸邊之徑路;若此光線三次反射後平行於原方向,則六次反射後卽復回原來之徑路.

另一特例爲 $\alpha\beta\gamma=-1$, 則兩公點皆在無窮遠,而



(圖 36)

$$XX'=x'-x=a-\gamma c+\beta\gamma b=\text{常數},$$

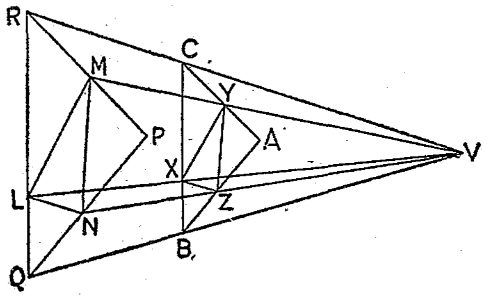
於是若該常數不等於零，則 X, X' 永不相合；若常數爲零，則兩點常爲相合． 此特殊關係 $\alpha\beta\gamma=-1$ 成立時，問題爲不定設題（88 頁），除非另有 $a-\gamma c+\beta\gamma b=0$ 之關係，問題必不能得解，而若有此關係，則解答之數無窮．然若兩條件均能適合，所謂三定向者實合於一個方向．

(iii) 相似形法 (Method of Similar Figures)

前題亦可用相似形法解之，本法中與其他性質分離者爲所求形之大小，位置． 於平面之他一部分上可先作一圖形相似於所求圖形，然後移此圖形至適當之位置且放大或縮小之至適當之大小比例． 相似形有時可倒置問題之已知件及待求件 (desiderata) 而作圖之． 該倒置

問題法常可與他法並用。

例一 於適所論之問題中，設有所與三定向之任三線成一三角形 LMN。 過 LMN 之頂點作所與三角形 ABC 之三邊之平行線，成第三三角形 PQR。 於是 $PQRLMN$ 成一與所求圖形 $ABCXYZ$ 相似之圖形，而 X 分 BC 之比與 L 分 QR 之比相同；若 QB, RC 交於 V，則 VL 交 BC 於所求點 X。 兩圖形不僅相似，且復有相似之位置 (similarly situated)，其相似中心爲 V； 至 Y, Z 則可過 X 點作 LM 及 LN 之平行線，或連 VM, VN 使各交於 CA, AB 而定之。



(圖 37)

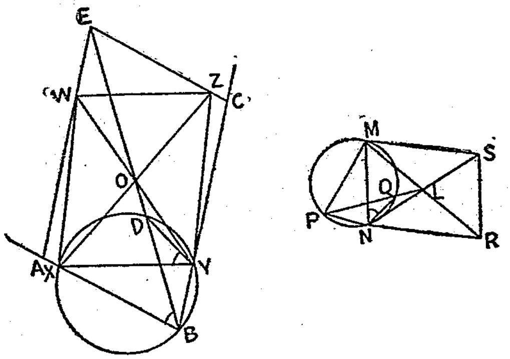
例二 作一三角形 OXY 使其一頂點在與點 O，他頂點分在兩與線 AB, BC 上，且相似於一已與三角形

LMN.

若能得一點 P，其與 LMN 之關係同於 B 與 OXY 所有者，即能作相似圖形以完成作圖；蓋此時 PM, PN 遂相當於 BA, BC 也．茲 P 在立於 MN 上能含一等於 $\angle ABC$ 之角之圓弧，而吾人又能藉 LP 與同圓之第二交點 Q 而定 LP．蓋 Q 對應於 OB 與圓 XBY 之交點 D．且

$$\angle MNQ = \angle XYD = \angle XBD \text{ 或 } \angle ABO,$$

而此固一已與之角．故吾人可作 NQ 以定 Q，作 LQ 以定 P，然後作 $OXBY$ 相似於 $LMPN$．

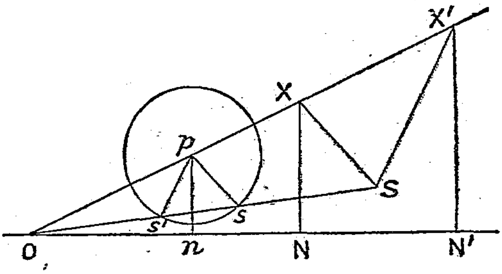


(圖 38)

茲設 AB, BC 爲平行四邊形 $ABCE$ 之兩鄰邊，且設 O 爲其中心；更設 MN 爲另一已與平行四邊形 $MNRS$ 之一邊而 L 爲其中心。由是若 XO, YO 之延線交 CE, EA 於 Z, W, $XYZW$ 卽爲相似於 $MNRS$ 之一平行四邊形，由是得下列問題之解法：於一已與平行四邊形內內接一平行四邊形相似於另一已與平行四邊形。

例三 離心圓 (eccentric circle)——求一與線與一已與焦點，準線及離心率 (eccentricity) 之圓錐曲線之交點. 若吾人有一作圓錐曲線之畫具，自可採用軌跡法，蓋在直線上及在圓錐曲線上兩性質之軌跡顯卽該直線及該圓錐曲線. 若僅用直尺及圓規，則第二軌跡不能作圖，然本題仍可用相似形法解之。

設與線交所與之準線 QN 於 Q, 交圓錐曲線於 X, X'; 設 S 爲焦點而 e 爲離心率. 連 SQ. 於 QX 上任取一點 p, 作 pn 垂直於 QN, 以 p 爲圓心，$e\cdot pn$ 爲半徑畫一圓；是卽 p 點之離心圓；設其交 QS 於 s, s'. 作 SX, SX' 平行於 $sp, s'p$ 而交 QX 於 X, X'; 卽得所求之兩點. 蓋若作 XN 垂直於 QN, 因兩圖形 $SXQN$, $spQn$ 爲相似，故知



(圖 39)

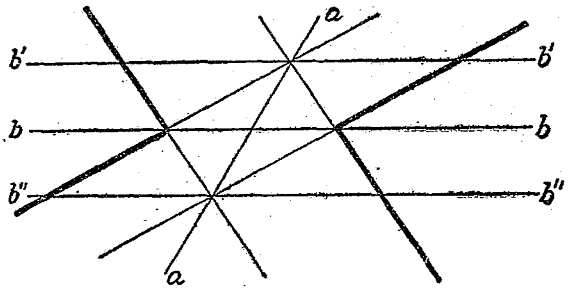
$$\frac{SX}{XN}=\frac{sp}{pn}=e,$$

故 X 在該圓錐曲線上，同理 X' 亦然. SQ 若交 p 之離心圓於實點，本題即有實解. 若 SQ 切於該圓，則與線亦切於該圓錐曲線，作圖所得者即切點.

(iV) 透視，平移，旋轉，翻摺諸法 (Method of Perspective, Translation, Rotation, Reflexion)

諸法皆爲相似形法之特例，所取以研究者僅爲決定所求圖形之位置，大小之諸性質中之一部(而非全體). 111, 113 兩頁之例一及例三已示透視之法. 此諸法若能施行於圖形中之一部而化簡之於問題之解決上往往有用.

例一 求一點之軌跡，此點與兩與線 a, b 之垂直距離 x, y 之差爲一定長 d.



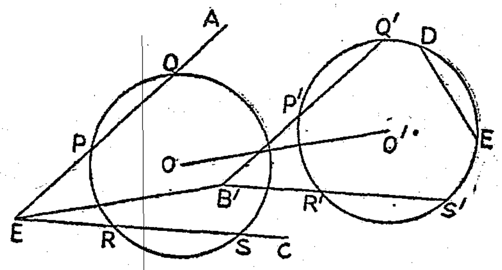
(圖 40)

平移 b 至一距離 d, 仍平行於原線，此線之位置或爲 b', 或爲 b'', 視移行之方向而定. 由是所求點與 a, b' 成等距，或與 a, b'' 成等距，故必在兩對直線兩夾角之四平分線之一上. 若 x, y 常取爲正數，圖 40 卽示平分線上 $x-y=d$ 之部分；平分線之其他部分上則或 $x+y=d$, 或 $y-x=d$.

例二 以已與半徑 a 作一圓使其於兩與線 AB, BC 上之截距 (intercept) PQ, RS 各等於與長.

以 a 爲半徑任作一圓 $O'(a)$; 置之於長 PQ 之一弦 DE 上；使 DE' 繞 O 點旋轉一角等於 DE, AB 間之角.

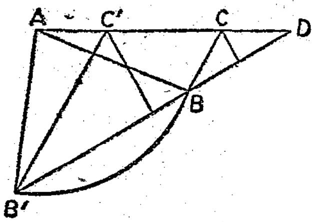
於是得一弦 $P'Q'$ 等於且平行於所求截距 PQ. 同樣,於同圓中得一弦 $R'S'$ 等於且平行於所求 BC 上之截距 RS, 且設 $P'Q'$, $R'S'$ 交於 B'. 連 $B'B$, 作 $O'O$ 平行且等於 $B'B$; 於是 O 爲所求圓心. 蓋若全圖 $O'P'Q'R'S'B'$ 不易方向而平移於 $B'B$ 上,則 B' 至於 B, 而直線 $B'P'Q'$ 亦合於其平行線 BA 而 $B'R'S'$ 合於 BC; 有所求長度之兩弦亦搬至兩定線上,同時圓之半徑不變.



(圖 41)

例三　已與底之長，兩邊之和與頂角,作一三角形.

若 ABC 爲所求三角形,依頂角 C 之外平分線翻摺 B. 若 D 爲其翻摺 (reflexion),則 ACD 成一直線, BCD 爲等腰三角形，而 $AD=AC+CB=$ 所與之和，同時 $\angle ADB$ 爲所與頂角 ACB 之半. 故有下列之作圖.



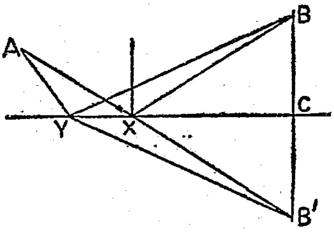
(圖 42)

取一直線 AD 等於所與之和，作一角 ADB 等於與角之半. 以 A 爲圓心，所與底之長爲半徑畫一圓截 DB 於 B, B'. 若所得者爲兩實點，作 DB, DB' 之垂直平分線使交 AD 於 C, C'. 由是 $ABC, AB'C'$ 皆爲所求三角形.

翻摺法之舊例自可從幾何光學之理論中得之.

例四 光之影——求光線自一點經一與平面之反射而至另一點之徑路，且證明其爲如是連此兩點之折線中之最短者.

於與面 XC 上當先求一點 X，使與點 A, B 間之光



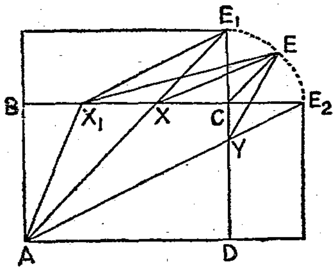
(圖 43)

線 AXB 卽於 X 點被反射。 光學反射定律謂 AX, XB 之平面含在 X 點之反射面之法線 (normal), 且 AX, XB 分在法線之兩側而其與法線之夾角相等。 故若 B' 爲 B 依平面 XC 之翻摺，作 BC 垂直於平面 XC 且延長之至一相等之長度而得之者，則 $AXBB'$ 在一平面上而 AXB' 成一直線。 故可求 AB' 與所與平面之交點以得 X。

又因 B, B' 與平面上任一點成等距，故任何其他自 A 至 B 之折線 AYB 之全長必等於 $AY+YB'$, 卽大於三角形 AYB' 之第三邊 AB', 故亦大於光線之實際徑路之長。

又下題之含義與本題頗相類似。

例五　一蜘蛛在室中一角欲爬過地板，緣牆以抵天花板之對角之一蠅；其最短之徑路當何如？



(圖 44)

設 $ABCD$ 爲地板，A 蜘蛛，E 蠅，E 在 C 之直上。則徑路有兩種，視蜘蛛之從長邊，設爲 BC，上之一點，或從短邊 CD 上之一點離開地板而異。至地板上及牆上之徑路必爲直線。於 BC 上當先定一點 X 使 AXE 成極小值，更於 CD 上定一點 Y 使 AYE 成極小值，卽能比較兩極小值中何者更小。今使牆 BCE 繞 BC 而旋轉至地板之平面上。由是 E 達於 DC 延線上之 E_1，而 $CE_1=CE$，XE 合於 XE_1。於是 $AX+XE_1\geqq AE_1$，而此種徑路之極小長度遂爲 AE_1，此時 AXE_1 爲一直線；故 X 點可視爲 AE_1 與 BC 之交點而作圖之，而 X 以 $AB:CE$ 之比分 BC。同理，在 CD 上一點 Y 離開地板之徑路中，極小長度爲 AE_2，E_2 爲 BC 延線上之一點而 $CE_2=CE$。故所求之最短徑路之長度當爲 AE_1，AE_2 中之較小者。今

$$AE_1{}^2=AL^2+(AB+CE)^2=AD^2+AB^2+CE^2+2AB\cdot CE,$$

$$AE_2{}^2=(AD+CE)^2+AB^2=AD^2+AB^2+CE^2+2AD\cdot CE,$$

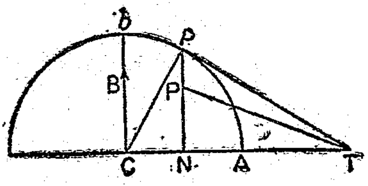
故如 $AB<AD$，前者卽較小。故最短徑路當於長邊之一點上離開地板，此點以室之闊與高之比分長邊。

(V) 投影法 (Method of Projection)

相似形法及其各分類皆爲投影法之特例，投影法中所求圖形之投影性質當與數量性質分離． 用適宜之投影可變換問題，使同樣之投影性質與另一組數量性質結合，而使問題易於得解． 然後倒行該投影，而或自變換問題 (transformed problem) 之最後解答以求原問題之解答，或自第二圖形之作圖之每一步驟而求所求圖形之作圖之相當步驟皆可．

自某一觀點言之，投影法自爲性質分例之一例；但自他一觀點言之，則其所解釋者實爲一更重要之變換原理 (principle of transformation)． 是理謂，吾人並不直接解所擬之題，而解另一問題，其中之每個元素，不論已與或待求，與所與問題及其解答中之相當元素間皆存在某種一定之關係． 若修改之問題不能得解，或較原題並不易於得解，則所用之一變換即不能謂爲“適宜”． 若變換問題已得解，則倒行該變換即可返至原圖形，於是得原問題之作圖． 其多數例題已見於第三章．

例一 輔圓——於已與主軸 (principal axes) 之一橢圓上之一與點作其切線．



(圖 45)

投射橢圓使成一圓. 取投影頂點於橢圓平面之法線方向之無窮遠點，而投射橢圓於過長軸且與橢圓平面夾一角 $\cos^{-1}\frac{CB}{CA}$ 之平面上，CA, CB 爲所與之半長軸及半短軸. 橢圓上之與點遂投影成圓上之一點，而所求之切線亦成過此點之圓之切線. 若投影面繞長軸而旋轉至合於橢圓面時；此圓即合於大輔圓 (major auxiliary circle)；兩圖形之對應點在垂直 CA 之一直線上，兩點與 CA 之距離之比同於兩軸之比. CA 上諸點之對應點即其本身，而兩對應切線必交於 CA 上，於是得下述本題之直尺作圖：

設 CA, CB 爲所與半軸，而 P 爲與點. 作 PN 垂直於 CA，延長 NP 至 p，使 $\frac{PN}{pN}=\frac{CA}{CB}$. 連 Cp，更作 pT 垂直於 Cp 交 CA 於 T. 連 PT，即所求 P 點之橢圓切

線.

(Vi) 反形法 (Method of Inversion)

是亦變換法之另一要例，本法於某種情形下能變圓爲直線，於是問題乃大爲簡單. 反形云者，蓋謂每一點皆代以其對於一定圓之反形(inverse)，而所謂兩點 P, P' 對於圓 $O(k)$ 互爲反形之條件爲 OPP' 爲一直線且 $OP\cdot OP'=k^2$. O 及 k 各稱爲反形中心及半徑 (center and radius of inversion)；若半徑可爲任意長，則謂爲對於 O 點之反形. 若半徑 k 爲純虛數，則 $OP\cdot OP'$ 爲負數，而 P, P' 在中心 O 之異側.

下列反形之諸性質茲不加證明而採用之，諸性質皆爲本章及以後諸章所常用者.

(1) 反形爲一對稱的變換：若 P' 爲 P 之反形，則 P 爲 P' 之反形；因是倒行此變換同於重行之. 任一點 P 皆有一固定之反點 (inverse point) P' 與之對應，唯中心 O 則與全部無窮遠線對應.

(2) 若 P 在圓外，P' 卽在圓內；故反形實交換圓所分成之平面上之兩區. 圓周上之各點則爲兩區域之公共邊界，其反形卽其本身.

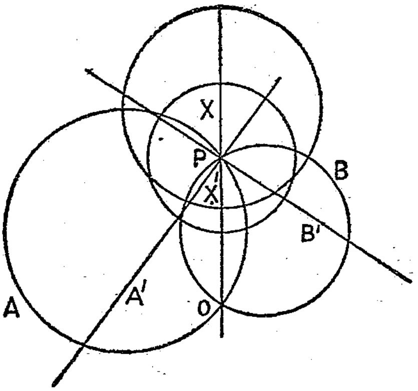
(3)　任一圓皆反形成 (invert into) 一圓，唯過 O 點之圓則反形成一直線；原圓之圓心反形成 O 對於反圓 (inverse circle) 之反點.

(4)　任何直線反形成過 O 點之一圓，唯過 O 點之直線則自爲其反形.

(5)　反形原圓 (circle of inversion, 即上文所述之 $O\ (k)$) 之正交圓自爲其反形.

(6)　兩曲線之交角與其兩反形之交角同；其特例爲曲線之相切不受反形影響.

例一　求正交於兩與圓之圓之圓心之軌跡.



(圖 46)

設與圓 OAP, OBP 交於 O, P. 以 O 爲中心，OP 爲半徑而行反形；則 P 之反點卽其自身，與圓反形成直線 PA', PB' 相交於 P. 以 X 爲中心而與兩與圓正交之一圓之反形亦爲一圓，PA', PB' 均爲其法線，卽其半徑，故其圓心爲 P. 今 X 之反點 X' 爲 O 對於此最後之圓心 P 之圓之反點；故 X' 在 OP 上；而因 X, X' 對中心 O 互爲反點，故 X 在同直線 OPX' 上. 故所求軌跡爲兩與圓之根軸 OP. 本定理自亦有其他證明. 應用反形法之證明則不論 O 點與反形所得之圖形之爲實或爲虛皆爲健全.

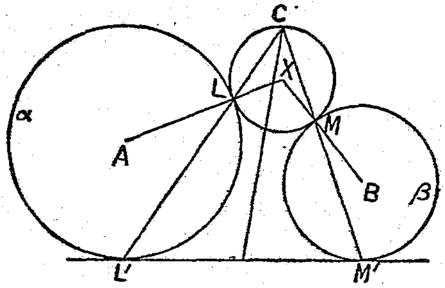
因對於公共正交圓行反形使兩與圓各反形成其自身，故所得之軌跡亦可謂爲使兩與圓不受影響之反形中心之軌跡.

選三圓之根心爲反形中心，可使三圓同時各自爲其反形；但四個以上之圓除非其根軸交於一點，於是諸圓有一公共正交圓，則必不能使之各自爲其自身之反形.

例二　畫一圓切兩與圓而過其根軸上之一與點.

對於與點 C 行反形，選反形半徑使等於自 C 至任一與圓 α, β 之切線；自(5)得知兩圓 α, β 皆自爲其反形.

所求之圓則成 α, β 之一公切線．　故當先作公切線，然後求其反形．　若 α, β 互在另一圓之外，普通有四實公切線，故問題有四解．　但與點 C 在一公切線上時爲一



(圖 47)

例外情款，蓋此時自 (4)，此直線自爲其反形，卽反形成一直線而非一圓，故僅能得該題之三個解答．　若 α, β 外切，則有三實公切線，但其中之一，卽在切點之切線，同時亦爲根軸而過 C 點，因此此線不能反形成一圓，故僅得兩解．　若 α, β 交於實點，普通有兩解，但若 C 在兩實切線之一上時則只有一解；至於 α, β 中之一內切於他一圓或全部在他一圓內時，問題無解答．　實際作圖如下．

用Euclid方法或其他任何法作一公切線切與圓 α, β 於 L', M'．　若 A, B 爲圓心而 C 爲根軸上之與點，連

CL', CM 各交 α 於 L, β 於 M. 連 AL, BM 使交於 X; 則 X 爲所求圓心, XC 其半徑, 而此圓切 α 於 L, β 於 M'. 證明留俟讀者.

若視 C 點爲一半徑爲零之圓,則上述者爲 Apollonius 問題之一特例, Apollonius 問題爲:

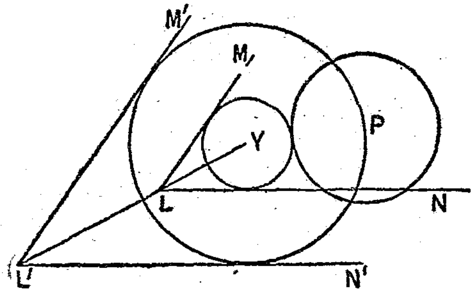
例三 畫一圓切於三與圓.

若三圓皆互在他圓之外,則解答之數可多至八,蓋各與圓皆可在切圓之內又可在切圓之外也. 若第二圓在第一圓內, 第三圓在第二圓內, 例如三圓爲同心圓之時, 則無實解; 於其他情形, 則解答之數可爲 0 與 ∞ 間之任何數; 諸切圓中之一成一直線或化爲一點時則失一實解, 一對切圓先相合更變成虛圓時則失兩實解.

若有兩圓相交於實點, 則以交點之一爲中心而施反形於全圖形, 該兩圓皆成直線, 而問題變爲一較簡單者: 作一圓切於兩與線及一與圓. 玆先求本題之解; 然後指示如何進而解"與圓中無交於實點者"時之較複雜之例.

設 LM, LN 爲兩與線, 而 $P(p)$ 爲與圓. 若 $Y(y)$ 爲所求圓, 此圓可內切或外切於 $P(p)$. 先擬其爲外切, 而增 y 成 $y+p$. 所得之一圓, 中心爲 Y, 過 P 點而切於

平行於 LM, LN 之兩直線 $L'M'$, $L'N'$; $L'M'$, $L'N'$ 對其平行線言皆與 Y 異側，且與其平行線之距離皆爲 p.



(圖 48)

故 Y 亦爲下問題之解：求一點與兩與線 $L'M'$, $L'N'$ 及一與點 P 成等距. 第一條件謂 Y 在 $\angle M'L'N'$ 之一平分線之上，第二條件則謂其在焦點 P, 各以 $L'M'$, $L'N'$ 爲準線之兩拋物線上. 因 Y 不僅與 $L'M'$, $L'N'$ 成等距，而亦與 LM, LN 成等距，故在 $\angle M'L'N'$ 之平分線 LL' 上而不在他一平分線上. 與此假設相當者有 Y 之兩實位置，即 LL' 與一已與焦點，準線之拋物線之交點. 此兩點之決定法爲 113 頁，例三之一特例. 若假設 Y 有他種位置，或假設 $Y(y)$ 與 $P(p)$ 爲內切，則平行線可作於 LM, LN 中一者或兩者之他一側，於是吾人所當研究之

情形有四，每個情形中均當求 $\angle LMN$ 之一平分線與一焦點爲 P 之拋物線之交點．故於 $P(p)$ 與 LM, LN 之交點各爲分在 L 之兩側之兩實點時，所得者爲 Y 之八個實位置．於是吾人能完成 Y 之一切實位置之作圖．*此諸點在當初求 LM, LN 所用之反形中之反點卽係 Apollonius 問題所求之圓心 X 之位置*.

茲更論普通之情款，卽諸與圓中無交於實點者時之情款．設 $A(a), B(b), C(c)$ 爲與圓，而 $X(x)$ 所求圓．今兩圓相切時，其中心距離不等於半徑之和卽等於其差之正值．故相切之條件爲

$$XA = \pm a \pm x,\ XB = \pm b \pm x,\ XC = \pm c \pm x,$$

其中符號之選擇當使各方程式之右側爲正值．若加任意量 d 於 x；且於 a, b, c 在相當方程式中與 x 同號時則自 a, b, c 中減去同量 d，於異號時則加以同量 d；結果，上述諸方程式仍能適合．於是吾人可先解另一問題，其中三與圓之圓心同於前此，而半徑則加以增減，所得解答

此處根據 123 頁，(3)，當改爲

"以所求之 Y 之諸位置爲圓心畫諸切圓．設用以求 LM, LN 之原反形中心爲 O．則 O 對於諸切圓之反點在原來以 O 爲中心之反形中之反點卽係 Apollonius 問題所求之圓心 X 之位置"．——譯者

之圓心 X 卽原問題之解. 行此種手續時當注意於圓之有負半徑者. 該圓可假設爲與有相當正半徑之圓相合,但若兩圓中之一圓內切於一圓,則他一圓必外切於相當圓,反之亦然. 於 X 確有任何實位置之例中,必能選 d 使更改之圓交於實點,於是 X 可由上法求得. 由是所求圓之相當半徑爲 $\pm XA\pm a$. 蓋若有切於三與圓之一圓存在,則三個相切中必有兩者皆爲內切或兩者皆爲外切,而兩相當方程式中之符號遂皆爲相同,或皆爲相反. 於是加一正量或負量於 x, 卽可同時增或減兩圓之半徑以相同之任意量. 今若此兩圓互在他圓之外,則增半徑以一適當之量卽可改成交於實點;若一圓在他圓之內則減半徑以一適當之量亦能得同樣結果,較小半徑成負數,內圓遂移至切圓之外. 若兩圓中任一圓皆不在他一圓之內,亦不在他一圓之外,則無須更改已交於實點矣.

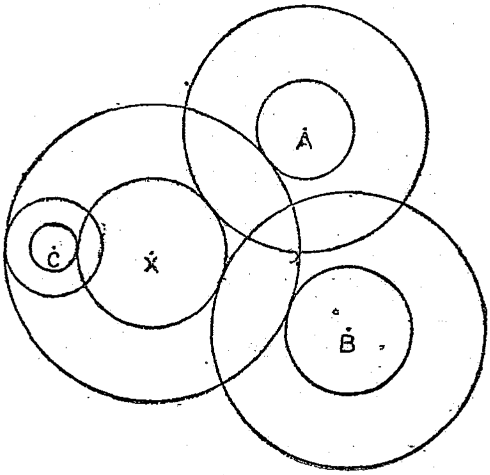
下圖示

$$XA=x+a,\ XB=x+b,\ XC=x-c$$

之一例. 增減後之半徑爲

$$a+d,\ b+d,\ c-d,\ x-d,$$

其中第三者爲負,相當之圓卽自切圓之內移至其外.



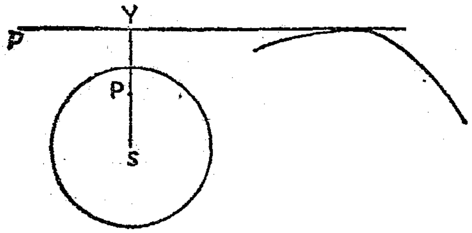
(圖 49)

(Vii) 對極法(Method of Reciprocation)

對極法爲使點與直線對應，直線與點對應之一種變換. 以其最簡形式敍述之，則對於一固定對極圓 (circle of reciprocation)，一點與其極線對應而一線與其極點對應. 半徑可爲隨意長時，則當謂爲對於此圓心之對極. 與一定線上之點對應者爲過一定點之線，而交比之不受對極影響，亦爲可證明之定理. 可認爲一點之軌跡之任意曲線之對應爲一直線之包線，即另一曲線. 與對極圓上之諸點對應者爲過該各點之切線，此諸切線之包線爲

同圓；故此曲線自爲其對極.

下述定理表示反形與對極之關連：任一曲線之對極爲對於對極中心之同曲線之垂足線 (pedal) 之反形.



(圖 50)

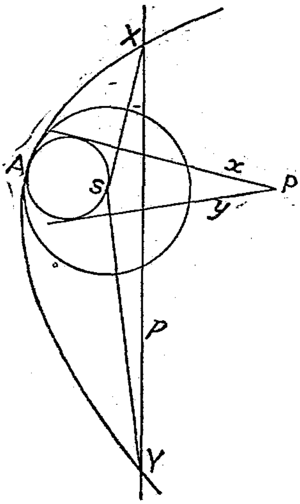
若 SY 爲自對極中心 S 至任一直線 p 之垂線，則 p 對於對極圓之極點 P 同於 Y 之反點. 若 p 移動而包一曲線，則 Y 之軌跡稱爲此線之垂足線，而 P 之軌跡則爲同曲線之對極；故對極爲垂足線之反形.

例一 圓錐曲線對於焦點之對極爲一圓.

圓錐曲線對於焦點 S 之垂足線爲輔圓，故若對 S 行對極，圓錐曲線即對極成輔圓之反形，即另一圓. 圓錐曲線之中心亦爲輔圓之中心，該中心反形成 S 對於圓錐曲線之對極圓之反點 T, 123 頁, (3). 故同焦點之一組圓錐曲線能同時行對極使成一組圓；而 S, T 對於共焦

(自亦同心) 圓錐曲線對極成功之各圓皆互爲反點，卽各圓成一組共軸圓，以 S, T 爲極限點.

若圓錐曲線爲拋物線,則垂足線爲過頂點 A 之切線，而對極圖形爲過 S 之一圓. 於是得知一與線 p 與一已與焦點 S, 頂點 A 之拋物線之交點 X, Y 之另一作圖(113頁). 卽求 p 對於圓 $S(A)$ 之極點 P, 更作自 P 至以 SA



(圖 51)

爲直徑之圓之切線 x, y. 由是 x, y 對於 $S(A)$ 之極點 X, Y 卽所求 p 與拋物線之交點.

第 六 章

作圖方法之比較

吾人前此所述者僅及作圖之可能與否，對於每個例題亦僅述其能達到作圖目的之一個或多個方法，而不及此種種方法之比較．實則，一法之是否較佳於他法，其所依倚者多端；有如與問題有關係之上下文，畫具之能力範圍及準確度，及運用畫具之技巧等；亦有倚於所含之意義甚於所用之作圖手續者；或亦倚於作圖之能否易於表成文字，倚於解答之美觀及對稱；而吾人所選之作圖或將爲一連合此種種便利使各達一適中之程度者．

有如，以言語爲觀點，於作圖過程中言"作一圖相似於某圖"或"對於某圓反形全圖"似極簡單；但其實際作圖則或竟含幾打之直線及圓．幾何原本 II, 9 及 10 之證明簡潔動人；但若欲討論 II, 1—11 之全部，吾人或將全以分割正方形及長方形之法處理之矣．簡單與經濟極

相類似，茲則當先定吾人之所欲使之經濟者：圖形之空間抑或敍述之語句，思想，工作抑或錯誤之機會，或難於界定而令人厭倦之性質． 本書後此諸章所致力之作圖當使其能盡量避免：第一，過大之圖形；其次，某種不明確界定之交點；第三，超乎必需之數之演繪動作；及最後，如七、八兩章所述之圓規或直尺之運用．

I. 有限空間內之作圖

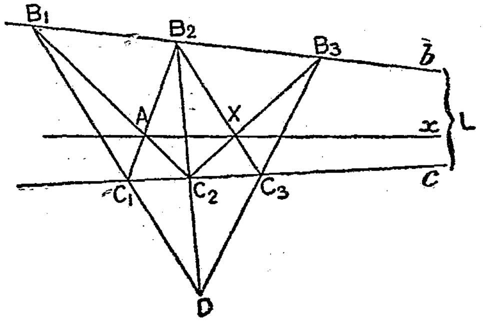
常見有作圖中所欲作之點落於紙外，或過遠非直尺之所能及；或於大規模測量之進行中，重要之點竟落於湖中，懸崖絕壁之上，或其他不能到達 (inaccessible) 之地點者． *反形法*為避免此項困難之一"簡單"方法． 反形可對於合於下列兩條件之任何圓行之：(i) 任何點在此圓內者皆可到達；(ii) 任何已與或所求之點及線皆在此圓之外． 由是，自 122 頁 (2)，反形圖形中之各點皆在圓之內，故皆能到達． 若某問題之作圖僅因其需要不能到達之點而失敗，即可如是行反形，而作全部反形圖形，最後再行反形，即能將所求圖形之可見於紙上者盡量畫出． 此理已證明吾人所需之圖形常能用不甚遠之點及線作圖

之，故當更進而求更實際之作圖進行方法．相似形法為常用法之一；即謂，任何圖形皆可縮小之成一小型者，使其可到達之部分大為增加；然後於完成此模型作圖後，即可盡量放大之至前此之大小比例．此法應用之要點在相似中心之選擇能使大小比例之變換盡量簡易．

例一　連與點 A 至兩與線 b, c 之不能到達之交點 L．

若能得 AL 上一能到達之點 X，問題即告解決．

(i)　一法為過 A 點任取一線 AD 而於其上定一點 D 使 A, D 為 b, c 所調和分．過 D 點另取一直線 DX 而決定其上一點 X 使 D, X 亦為 b, c 所調和分．此兩調和列點以 L 為頂點而互相透視，故 AX 當過 L．

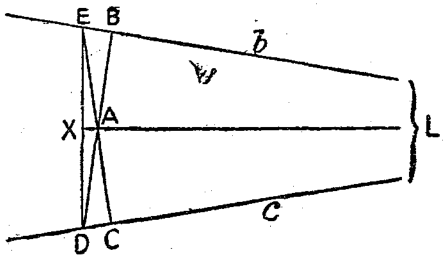


(圖 52)

先任取兩直線 B_1AC_2, B_2AC_1, 過 A 點而交 b, c 於圖 52 所示之交點．連 B_1C_1, B_2C_2 使交於 D．由是 AD 爲四角形 $B_1B_2C_1C_2$ 之一對角線,故爲同四角形之一組對邊 b, c 所調和, AD 不必畫出．任作他一直線 DB_3C_3 過 D 而交於 b, c, 連 B_2C_3, B_3C_2 使交於 X; 由是 DX 亦爲 b, c 所調和分,其理與前同．連 AX, 卽所求之直線．

本作圖僅合投影性質．若 A 幾在 b 與 c 之正中,作圖或將失敗,蓋此時不論 B_1, B_2 在任何可到達之位置, D 或均不能到達也．

(ii) 此時可用一基於垂心性質之方法．作 DAB 垂直於 b 而交 b 於 B, 交 c 於 D; 作 EAC 垂直於 c 而交



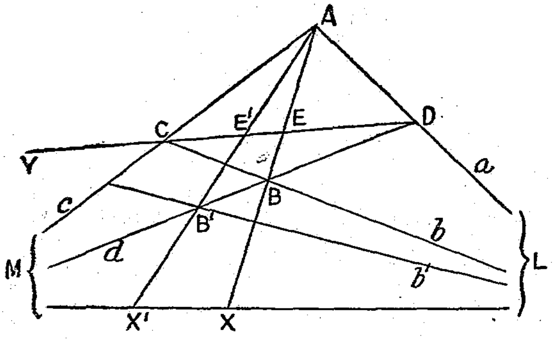
(圖 53)

c 於 C, 交 b 於 E; 連 DE, 作 AX 垂直於 DE．由是 A 爲三角形 LDE 之垂心,而 AX 過 L 點．

(iii) 若 b, c 幾爲平行，直線 BD, CE, DE 或將密合而不便於作圖；則可用應用 Desargues 定理之作圖 (51 頁)。

例二 作一直線連兩對與線 $a, b; c, d$ 之不能到達之兩交點 L, M。

(i) 所求直線爲四與線所成之四邊形之對角線。此線與其他對角線之交點 X, Y 各與他一對角點 E 及一對相對角點，AB 或 CD，成調和列點。 X 及 Y 未必皆能到達，蓋僅有一點，設爲 X 在 L 及 M 之間。若僅 X

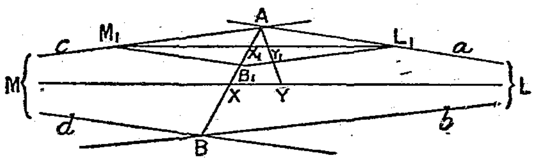


(圖 54)

能到達，則於 LM 上可另得一點 X'，與 X 適當接近，故亦可到達，法爲以例一中之任一法自 d 上一相當接近於

B 之點 B' 作一直線 b' 使過不可見之點 L 以代 b. 於是利用 a, b', c, d 所成之四邊形即可如前得到所求線上第二點 X', 所求線遂為 X, X' 之連線.

(ii) 若 C 或 D 亦不能到達, 因是 E 點亦不能立即得到, 則當追究相似形法; 而以 A 為相似中心, 蓋如是則 a, c, 及 AX 三直線皆不變也. 取 AB_1 為 AB 之任何適宜分數 $\frac{1}{\lambda}$; 作 B_1L_1, B_1M_1 平行於 b, d 各交 a, c 於可達之

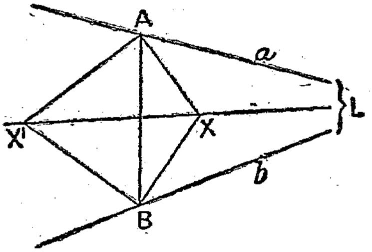


(圖 55)

點 L_1, M_1. 於是於小型圖中作對角線 L_1M_1 對應於 LM 而交 AB_1 於 X_1, X_1 點與 X 點對應. 於 AB 上取 X 使 $AX = \lambda AX_1$; 則 X 為 LM 上一點, 而過 X 且平行於 L_1M_1 之直線 XY 即所求直線. 或於 L_1M_1 上任取一點 Y_1 延長 AY_1 至 Y 使 $AY = \lambda AY_1$; 則 Y 為 LM 上之第二點. 取 λ 為 2 之一冪最為便利, 蓋 B_1, X, Y 均可重復平分或雙倍一線段若干次而得之.

例三 平分頂點 L 爲不可到達之一角。

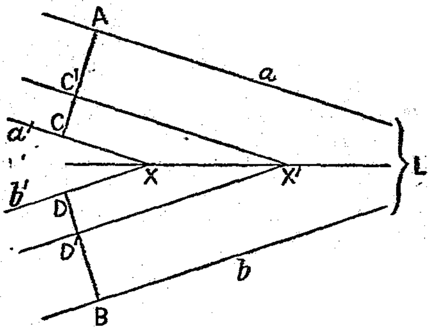
(i) 利用三角形內接圓之性質。於 a, b 上任取 A 及 B；連 AB 而平分 LAB, LBA 兩角使交於 X。則 X 爲三角形 ALB 之內心，故在 L 角平分線上。欲求平分



(圖 56)

線上第二點 X'，最易之法爲作 A, B 處之外角平分線使交於 X'，X' 即對 L 之 ALB 之傍切圓之圓心。於是 XX' 爲所求平分線。

(ii) 因該平分線爲與所與臂 a, b 成等距之一點之軌跡，故可以 a, b 之平行線 a', b' 之交點定 X 之位置，a' 與 a 及 b' 與 b 之垂直距離相同。於 a 上任取一點 A，作 AC 垂直於 a 而於其上任取一點 C。過 C 作 CX 平行於 a。於 B 上任取一點 B，作 BD 垂直於 b，使 $BD = AC$，更作 DX 平行於 b。於該兩垂線上更截他一相等

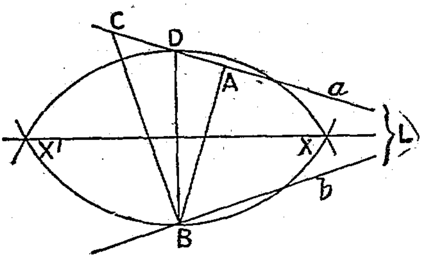


(圖 57)

長度 AC', BD', 而作 $C'X', D'X'$ 各平行於 a, b 而交於 X'. 連 XX', 卽所求 a, b 夾角之平分線.

作 X' 之法, 尙有利用 XX' 亦爲 $\angle CXD$ 之平分線之性質者. 是則平移法也.

(iii) 因 XX' 爲兩臂 a, b 之對稱軸, 故 XX' 垂直

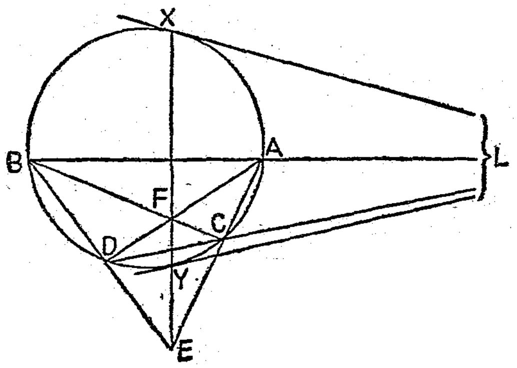


(圖 58)

平分與 a, b 成相等之夾角之任一截線 BD. 故欲作此軸,可於 a 上任取一點 A, 作 AB 垂直於 a 交 b 於 B;作 BC 垂直於 b;作 BD 平分 $\angle ABC$ 而交 A 於 D. 由是 BD 之垂直平分線 XX', 亦即 a, b 間之角平分線;蓋 BD 與 AB, CB 所夾之角相同,故各垂直於 AB, CB 之 a, b 亦夾等角; LBD 爲一等腰三角形,而垂直平分底邊之 XX' 亦平分頂角 DLB.

例四 自一不能到達之點作一圓之切線.

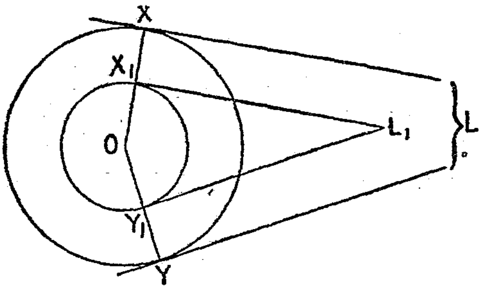
(i) 若該點 L 爲兩條交圓於實點之直線之交點,設諸交點爲 $A, B; C, D$. 否則於圓周上取兩點 A, C, 從例一卽可作 AB, CD 使過 L 而各重交圓周於 B, D. 設



(圖 59)

AD, BC 交於 F，而 AC, BD 交於 E。若能使 AB 幾爲直徑而 CD 幾爲切線，則 E 及 F 必均可到達。連 EF 使交圓於 X, Y。由是此二點卽自 L 至圓之切線之切點，而兩切線則可作圖爲過 X, Y 之半徑之垂線。蓋完全四邊形 AB, AD, BC, BD 之對角線 EF 調和分兩弦 LAB，LCD；故爲 L 之極線且過自 L 至圓之切線之切點。

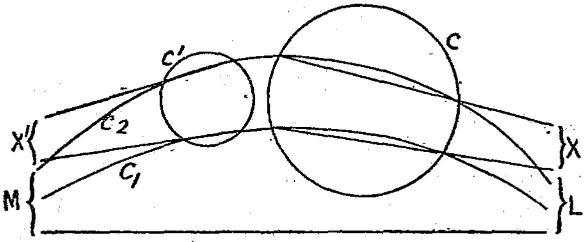
(ii) 否則可作相似形以得之，以圓心 O 爲相似中心。縮小比例尺使 L 之對應點 L_1 成爲可到達之點，自 L_1 作切線 L_1X_1, L_1Y_1 切於小圓。則 OX_1, OY_1 交大圓於 X, Y，卽所求過 L 之切線之切點。



(圖 60)

例五 作交於不可到達之實點之兩圓 c_1, c_2 之公弦。

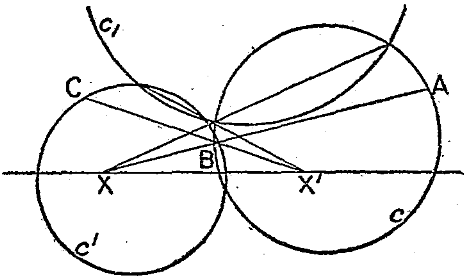
任取補助圓 c 使交 c_1, c_2 於可到達之實點。於是



(圖 61)

c, c_1; c, c_2 之兩公弦交於三圓之根心X, X 在所求 c_1, c_2 之公弦上。另用一補助圓 c'，卽能得公弦上另一點 X'。X 及 X' 或均爲不可到達，然用例二之法亦能作 XX' 之連線。

例六 已作一圓 c_1 之一部分；他一圓 c_2 亦知其過三與點 A, B, C；兩圓心俱不可見。求作其根軸。



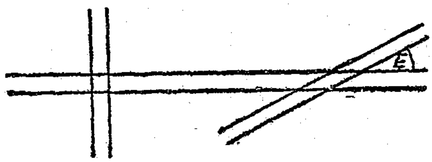
(圖 62)

此可用前例之法解之，當取 c 使過 A, B, c' 當使過

B, C. c, c_2 及 c', c_2 之公弦卽直線 AB 及 BC, 因此不必畫圓 c_2. c, c' 與 c_1 之交點當使在已作之弧上此點必須注意.

II. 不明確界定之交點

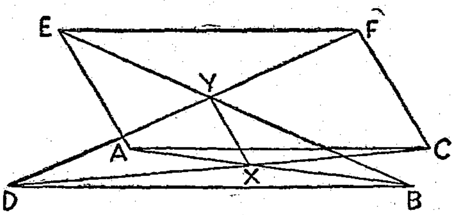
作圖時當注意於錯誤機會之減少: 錯誤發生之途徑極多; 最常見者則爲決定夾一極小角度之兩直線或曲線之交點. 實際圖形中, 所謂直線者皆以有小闊度, 如 b 之狹片代表之, 故僅能決定一交點爲兩狹度公有之菱形中之一點. 若兩狹條之方向直交, 則菱形爲一正方形, 其中任一點至中心之距離皆不大於 $\frac{1}{2}b\sqrt{2}$. 但若兩方向夾一極小角 ϵ, 則菱形中一點至其中心之距離之最大値爲 $\frac{1}{2}b\csc\frac{1}{2}\epsilon$, 此量於 ϵ 減小時無上限 (upper limit), 故常能引起一極顯著之錯誤. 故有時此類不明確界定之



(圖 63)

交點常宜易以其他條件較好之點.

例一　第一問題爲:已與兩直線 AB, CD 以一小角度交於 X, 求一線 XY 過該交點而與兩線皆夾一適度之角度. AC 可使之平行於 BD; 蓋若 A, C 爲兩直線上之任意點,而設 AC 上已有一中分線段,則 64 頁之過第一直線上任一點 B 作 AC 之平行線之直尺作圖於 B 極近於 AC 之時不需任何不明確界定之交點. B 可取之於 AX 延線上,於是問題即改爲:定一已與之狹不平行四邊形 $ABCD$ 之內對角點 X.



(圖 64)

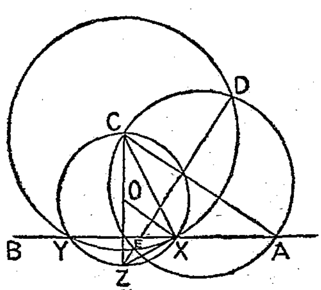
以 AC 爲一邊任作一平行四邊形 $AEFC$. 連 BE, DF 使交於 Y, 過 Y 作一線平行於 AE 或 CF; 該線必過 AB, CD 之交點 X. 蓋若連 XY, 則自相似三角形定理,

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AC}{BD}=\frac{EF}{BD}=\frac{EY}{YB},$$

故 XY 平行於 AE.

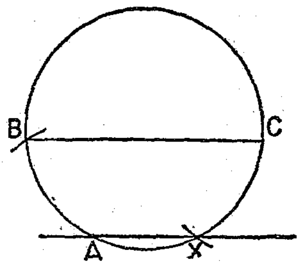
例二 定一直線 AB 與一圓之兩交點 X, Y, 直線與圓幾爲相切. 設 C 爲圓心, 而 AB 對於圓之極點爲 Z. 則 X, Y 爲自 Z 至此圓之切線之切點, 兩角 CXZ, CYZ 爲直角而 $CXYZ$ 在一圓上, 該圓之圓心爲 CZ 之中點 O. 今 AB 與切於 X 點之與圓切線 XZ 之交角等於其垂線 CZ, CX 之夾角 $\angle ZCX$; 同理, AB 與圓 $O(X)$ 之交角等於 $\angle ZOX$. 但圓 $O(X)$ 之中心角 $\angle ZOX$ 兩倍於其圓周角 $\angle ZCX$; 故 AB 與圓 $O(X)$ 之相交之定 X 點其準確度實兩倍其與與圓之相交.

欲求 Z 點, 可於與線上任取一點 A, 以 AC 爲直徑畫一圓交與圓於 D, E; 連 DE, 是爲 A 之極線, 故必過 AB 之極點 Z. 作 CZ 垂直於 AB 使交 DE 於 Z, 以 Z 爲直徑畫一圓卽交 AB 於所求點 X, Y.



(圖 65)

例三 一直線幾切於圓, 已與其與圓之一交點 A, 求定其第二交點 X.



(圖 66)

畫一平行弦 BC, 於圓周上截一弧 CX 使等於 AB. BC 之位置當使之與 AX 相當遠離, B 及 C 始能有明確之界定. 若使 AB 及 CX 各等於圓之半徑, 則 B, C, X 各點均可以交角幾等於 $\frac{1}{3}\pi$ 之兩線之交點定之.

III. 幾何繪圖學 (Geometrography)

若吾人不甚受制於空間之狹少或畫具之鈍禿，則最好能節省完成一個作圖之演繪動作. 問題在於何謂"一個"動作; 及如何比較規尺作圖之各種不同動作. 其答案自極隨意; 然必須擬定一固定之價值標準始能決定各種作圖中之幾何繪圖學的 (geometrogaphical) 作圖，或上述意義之最經濟之作圖. 計算法之最簡單者爲計算

作圖所需之直線及圓之數，而以此總數爲所費工作量之大略估計. 否則亦可視畫圓較作直線爲繁勞. 若謂此兩動作各需一定之能力消費，其比爲 $R:C$，則若一作圖需 l 直線及 m 圓，其"量"(measure) 爲 $lR+mC$，而同問題之各種不同作圖中，"量"最少者即爲最佳之作圖. 若取 $\frac{C}{R}=\infty$，即謂須避免圓規之應用，不論 l 之將如何增大必須使 m 盡量減小. 僅用直尺能完成何種作圖本書前已詳論之，是即 $m=0$ 時之情形；實則 m 決不必大於 1(參閱第七章). 若取 $\frac{R}{C}=\infty$，而欲盡量避免直尺之應用，則 $l=0$ 亦常爲可能(參閱第八章).

但同畫具之各種不同運用尙可加以區別. 若僅限於已定作圖 (defined construction)，則凡用直尺之時皆須使其邊合於兩與點，然後劃直線於其邊；然亦有只需一點之重合或不須一個重合之不定作圖，則自爲一較簡之動作. 再者，欲畫一圓 $C(AB)$ 當使圓規之一脚合於一點者三次：先合於所與半徑之兩端 A,B，然後合於圓心 C. 但畫一圓 $C(A)$ 僅需兩個重合，其一合於圓心 C，其一則合於圓周上一與點 A；又以已與圓心及任意半徑畫一圓或過任意點畫一圓，則只需一個重合. 又，用近世圓

規(94頁)連續以同半徑畫兩圓時，第二者只需在圓心之一個重合.

Lemoine 曾規擬一組精詳之幾何繪圖學標準. 彼對下列諸演繪動作加以區別:

R_1　使直邊過一與點,

R_2　劃一直線,

C_1　使圓規一腳合於一與點,

C_2　使圓規一腳合於一與線上任意點,

C_3　畫一圓.

於是若諸動作在一作圖中各發現 l_1, l_2; m_1, m_2, m_3 次,其記號 (symbol) 爲

$$l_1R_1+l_2R_2+m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3;$$

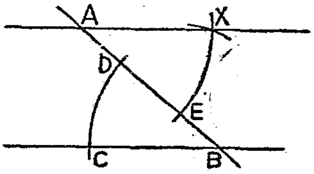
諸係數之和 $l_1+l_2+m_1+m_2+m_3$, 即演繪動作之總數,稱爲簡單係數;而重合總數 $l_1+m_1+m_2$ 稱爲正確係數. 根據 Lemoine 之理論,則此兩係數所計量者實非簡單及正確,而爲複雜度及錯誤機會. 直線之數爲 l_2, 而圓之數則爲 m_3, 故所作之線之總數爲 l_2+m_3, 即簡單係數與正確係數之差. 作兩點 A,B 之連線實爲一複雜之動作, 其記號爲 $2R_1+R_2$; 畫一圓 $C(AB)$ 之記號爲 $3C_1+C_3$.

利用此諸條例，Lemoine 遂更進而定多數問題之幾何繪圖學的作圖，即作圖之有最小之簡單係數者. 欲確述一已與作圖之簡單不遜於任何其他"可能"方法(簡單之意義如上所述者)僅於某種特別容易之情款始爲可能；普通則僅能謂其不遜於任何其他"已知"方法. 且，若一作法對某獨立存在之問題可謂爲最簡單者，則於該問題爲他一題之一部分時卽未必爲最簡單. 因一作圖之本身雖較煩瑣，然與其上下文相合或反較他法爲優，蓋可利用已作之線或使所作之線應用於後此更複雜之作圖也.

此外自有其他系統，較上述者或精詳或否，而其觀點則各自不同. 本章後此諸例題則仍應用上述定義.

例一 過與點 A 作一直線平行於與線 BC.

(i) 通常作法所利用者爲內錯角定理. 過 A 任作一

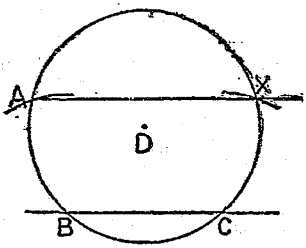


(圖 67)

直線交 BC 於 B(記號 R_1+R_2). 以圓心 B，任意半徑 ρ 畫圓 $B(\rho)$ 交 BC 於 C，BA 於 $D(C_1+C_3)$. 畫圓 $A(\rho)$ 交

AB 於 $E(C_1+C_3)$，畫圓 $E(CD)$ 交 $A(\rho)$ 於 $X(3C_1+C_3)$，連 $AX(2R_1+R_2)$，即所求之平行線。全部作圖之記號爲 $3R_1+2R_2+5C_1+3C_3$；簡單係數 13，正確係數 8。

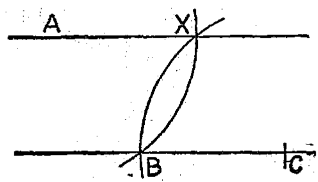
(ii) 試以之與下述作圖比較。任用一圓心 D 畫圓



(圖 68)

$D(A)$ 使交與線於 $B, C\ (C_1+C_3)$。畫圓 $C(AB)$ 使交 $D(A)$ 於 $X(3C_1+C_3)$；連 $AX(2R_1+R_2)$。於是記號爲 $2R_1+R_2+4C_1+2C_3$；簡單係數 9，正確係數 6。

(iii) 或與下法比較。以任意半徑 ρ 畫一圓 $A(\rho)$ 交 BC 於 B；畫 $B(\rho)$ 交 BC 於 C；畫 $C(\rho)$ 交 $A(\rho)$ 於 X。連 AX。則 $ABCX$ 爲一菱形而 AX 平行於 BC。記號爲 $2R_1+R_2+3C_1+3C_3$，簡單係數 9，正確係數 5。本法雖較前法多作一線，其優點在用同一半徑(且爲隨意長)於一切諸圓，而上法所用者爲兩不同半徑，其一且爲固定者。

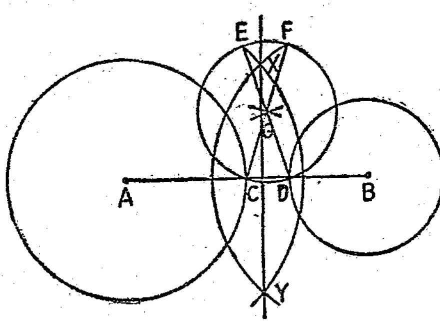


(圖 69)

例二　茲更分析前上述公點或爲虛點或不可到達之兩圓之根軸之作圖．設已與圓心 A, B．

(i) 105 頁例二之作圖中，先連 $AB(2R_1+R_2)$ 使交圓於 C, D．然後則作 CE 垂直於 AC．此垂線之最簡作法爲畫任意圓 $G(C)$ 過 C 點而交 AC 於 H，連 HG 交 $G(C)$ 於 E．則 CE (不必畫出) 垂直於 AC．若無其他作圖，則此法卽垂線上一點 E 之最佳作法；但本作圖中尙有另求一垂線 DF 之必要，故若能使補助圓過 C 點而亦過 D 點，因而可以之求兩個垂線，則作圖必較簡單．故 G 不當爲任意點，而當以他兩圓 $C(\rho), D(\rho)$ (ρ 爲任意長) 之交點充之 $(2C_1+2C_3)$，然後畫圓 $G(\rho)(C_1+C_3)$，該圓過 C 及 D．更作 CGF, DGE 兩直徑 $(4R_1+2R_2)$，則兩直徑不僅能決定兩垂線 DF, CE (不必畫出)，且使兩垂線爲等長，蓋圖形 $GCDEF$ 爲對稱的．作圖之其餘工作遂僅

畫圓 $A(E)$, $B(F)(4C_1+2C_3)$ 交於 X, Y, 連 $XY(2R_1+R_2)$, 即所求之根軸。 全部記號爲 $8R_1+4R_2+7C_1+5C_3$; 簡



(圖 70)

單係數 24, 正確係數 15。

(ii) 142 頁例五之作圖利用一個補助圓及兩公弦而得根軸上之一點 X; 然後用同法得 X', 而連 XX'. 記號爲 $10R_1+5R_2+2C_3$; 簡單係數 17, 正確係數 10。

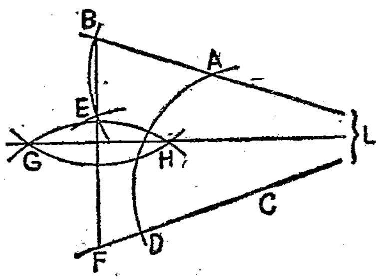
(iii) 前法中, 若圓心 A, B 爲已與, 即可不求 X' 而求 X 依於 AB 之翻摺 Y, 視之爲圓 $A(X)$, $B(X)$ 之他一交點而作圖之; 然後連 XY. 則記號爲 $6R_1+3R_2+4C_1+2C_3$; 簡單係數 16, 正確係數 10。

例三　平分一頂點不可見之角。

試取 139 頁, 例三之法以與下法比較: 以一臂上任一

點 C 爲圓心及任何適便半徑 ρ 畫 $C(\rho)$ 使交兩臂 AB, CD 於 A, D. 畫 $A(\rho)$ 交 AB 於 B,更畫 $D(\rho)$ 交 $A(\rho)$ 於 E. 連 BE 使交 CD 於 F,畫 $B(\rho)$, $F(\rho)$ 交於 G, H; 連 GH,即所求之角平分線.

蓋圖形 $CAED$ 爲菱形,而 BAE 爲一等腰三角形,其邊平行於所與之兩臂; BEF 垂直於所求之平分線,該平分線又必平分 BF. 記號 $4R_1+2R_2+4C_1+C_2+5C_3$; 簡單係數 16,正確係數 9.



(圖 71)

第七章

單圓作圖

若已與一定圓及其圓心，則任何點能用規與尺作圖者均可僅用直尺作圖之。此定理來自 Poncelet 及 Steiner，自 79，80 頁所示以一圓作任何二次根數之法已可完全證明之；故任何問題均可化其解答成一組二次方程式之解答，然後對每個方程式各完成一個其所需之作圖而解之。後此所研究者爲三數必須解決之較簡單之作圖及其最佳解法，而本章中所謂“最佳”，意謂需最少之直線者.

此後稱定圓爲 Γ，稱其圓心爲 O。若圓心爲未與，則必須有充分之已知件以構成之。例如，若有一平行四邊形即可作平行弦而平分之，於是得直徑。O 求得之後，一切數量性質皆可應手而得.

本章中所用諸法宜於與試驗錯誤法 (106 頁) 或其他

需要一可投射於一定圓以得之之等晝公點之諸法並用．諸法對於與兩圓之相似中心有關係之問題亦極有用，後將詳釋之．

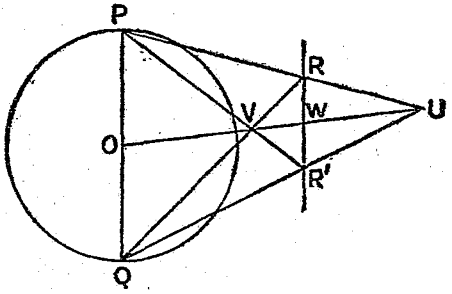
玆先分論作平行線之最佳方法，而平行線固一切基本作圖所必需者．

引　過一與點 R 作一線平行於一與直線 PQ．

與線上當先能得一中分線段 PZQ；然後卽可如 63 頁之法作一完全四邊形而置一對角線於無窮遠．

款 (i)　PQ 過 Γ 之圓心 O．題爲過 R 作一線平行於 Γ 之一已與直徑．

於是若 P, Q 爲直徑之兩端，POQ 卽一已與之中分線段，而作圖可完成如下．連 PQ, QR；於 PR 上任取一



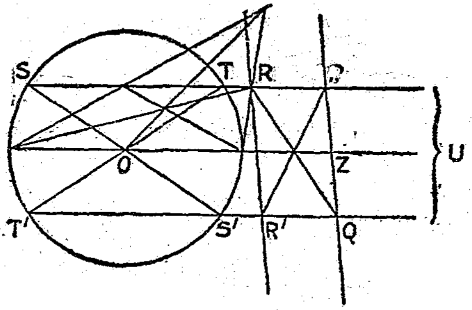
(圖 72)

點 U. 連 UO 交 QR 於 V;連 QU, PV 交於 R'. 由是 RR' 即所求之平行線;蓋 UV, RR' 調和分四邊形 PR, PR', QR, QR' 之第三對角線 PQ, 而因 UV 平分 PQ, 故 RR' 交之於無窮遠,於是 PQ, RR' 互平行. 圖中含一四邊形及其三對角線,即七條直線,其一爲已與.

本圖形之一重要點表現於視 RR' 爲一圓 γ 之直徑之時, γ 未曾完成. 因四邊形之對角線 RR', UV 交於 RR' 之中點 W, 此點 W 爲圓 γ 之圓心,而 UV 爲 Γ, γ 之外,內相似中心. 第一相似中, P 對應於 R 而 Q 對應於 R';第二相似中,則 P 對應於 R' 而 Q 對應於 R.

款 (ii) PQ 及 R 之位置爲普通的.

欲求一中分線段 PZQ, 可任作一直線 OZ 過 O 點而



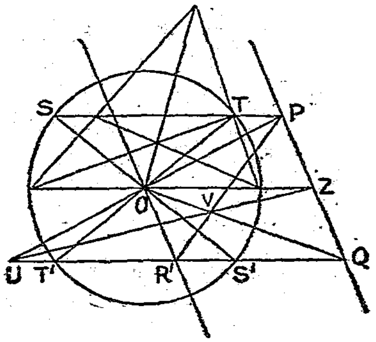
(圖 73)

交 PQ 於 Z，然後用款 (i) 之法作一平行弦 ST，注意其與 Γ 之交點 S, T 當爲實．連 SO, TO 而延長之使重交圓周於 S', T'；則 $S'T'$ 爲 ST 依 OZ 之翻摺，因此，此三直線平行且等距而截一中分線段 PZQ 於與線 PQ 上．既得此線段，即可如前作平行線 RR'．

本作圖所需者爲兩個完全四邊形及每四邊形之三對角線，以完成兩對平行線 OZ, ST 及 PQ, RR'；此外尙有兩直徑 SS', TT' 及第三平行線 $S'T'$：若作圖之先不加預算，則全部圖形必含十七直線．但若能使某某數線用於兩種目的，此數可以減少．若能取 OZ 使與 R 相當接近，弦 ST 可使之過 R 點而仍交 Γ 於實點．於是置 U 於無窮遠，即可變第二四邊形爲一平行四邊形；蓋是時 UP, UZ, UQ 合於已作之三平行線；第二四邊形已有兩邊及一對角線見圖中，故僅另須四線．全圖含十四直線．

款 (iii)．R 合於 O．問題爲作 Γ 之一直徑平行於一與直線．

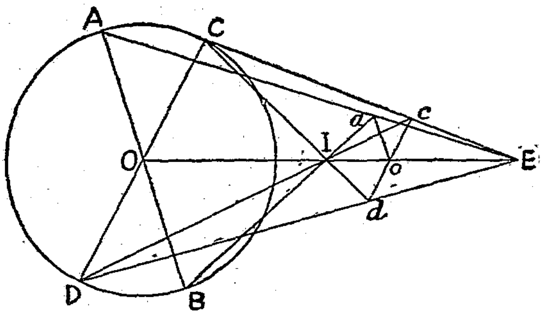
上述作圖之簡化法於 R 合於 O 時失敗，蓋 ST 不能使過 Γ 之圓心也．此時吾人所知之唯一良法爲使第二四邊形之一邊，如 $QR'U$，合於平行弦之一如 $S'T'$．全



(圖 74)

圖含十六直線.

故若已與圓心 o 及圓周上一點 a 以定一圓 γ, 則可以作圖者第一爲平行於 ao 之 Γ 之直徑 AOB. 若欲得 γ 圓周上之他點, 可利用 Γ, γ 之外, 內相似中心 E, I.



(圖 75)

卽連心線 Oo 與 Aa 及 Ba 之交點． 然後若 COD 為 Γ 之其他任何直徑，於中心為 E 之相似關係中對應於 C 之 γ 中平行直徑 cod 之端點 c 為 CE, DI 之交點；至 d 則為 DE, CI 之交點．

基 本 問 題

普通規尺作圖中，新點決定之法有三：

(i) 以為兩直線之交點：此法本章中可盡量採用；

(ii) 以為一直線與一圓之交點：此法之應用限於圓為 Γ 而非他圓之時；

(iii) 以為兩圓之交點：本章絕對不能應用．

故吾人茲當另求下列問題之其他解法，該二題為本章之基本問題，其解答亦可用為本章篇首所述之定理之另一證明：

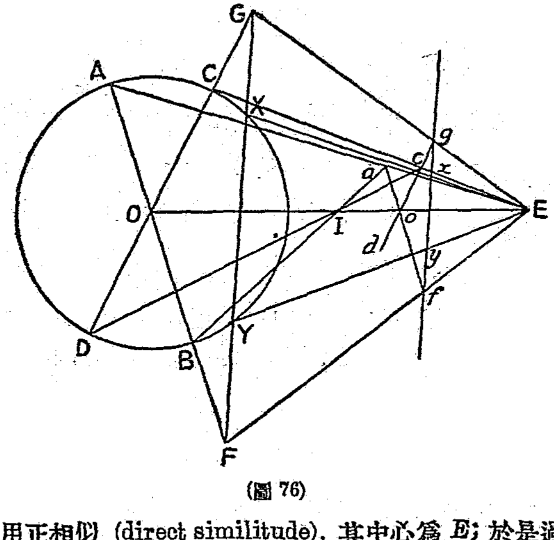
I. 定一與線與 Γ 外一與圓之交點．

II. 定兩與圓之交點——款 (i) 其中一圓為 Γ, 卽已畫出，款 (ii) 兩圓俱非 Γ, 因是無一能實際畫出；兩款當分別論之．

此後若已得一圓之圓心及圓周上一點，該圓卽視為已與或已獲得． Γ 以外諸圓皆不能實際畫出．

題一 求與線 fg 與非 Γ 之一圓 γ 之交點 x, y.

假設直線 fg 已畫出，而圓 γ 則以其圓心 o 及圓周上一點 a 定之，卽謂一半徑 oa 之大小及位置均爲已與．所用作法爲相似形法． 先作一直線 FG 使與 Γ 連合成一圖形相似於 fg 與 γ 所成者；則若 FG 交 Γ 於 X, Y，在本相似關係中與 X, Y 對應之 x, y 兩點卽所求之 fg 與 γ 之交點． 第一步須如前作 Γ, γ 之外、內相似中心 E, I.



(圖 76)

可用正相似 (direct similitude)，其中心爲 E；於是過 E 點之任一直線交 Γ, γ 中任兩平行半徑於對應點． 茲設

已有兩對平行半徑 AO, ao 及 CO, co, 而 f, g 爲與線與 ao, co 之交點. 則其對應點爲 Ef, AO 之交點 F, 及 Eg, CO 之交點 G. 若 FG 交 Γ 於 X, Y, 所求點 x, y 卽爲 fg 與 EX, EY 之交點.

作圖之成敗,恃乎 FG 之交 Γ 於實點或虛點,卽恃乎 fg 之交 γ 於實點或虛點. 故若 x, y 爲實點,則必能用上法作圖之.

作圖述詳

全圖含二十七直線. 自已作之直線 fg 開始. 先完成引 (iii) 之作圖以求 Γ 之直徑 AOB 使平行於 ao; 此需十六直線. 唯吾人當佈置該作圖使十六直線中捨 ao, AO 之外尙可有兩直線皆取可以重用於作圖之後部之位置; 蓋 Γ 中最先作圖之直徑 (圖 74 中之 OZ) 可使合於 Oo, 而其他直徑中之一 (如同圖中之 SS') 則可以之代欲求之 Γ 中任意第二直徑 CD. f 可以 oa, fg 之交點定之. 作圖之剩餘部分另需十線,見下表:

Aa	Ba	CE, DI	oc	Ef	Eg	FG	EX	EY
Oo	Oo		fg	OA	OC	Γ	fg	fg
E	I	c	g	F	G	X,Y	x	y

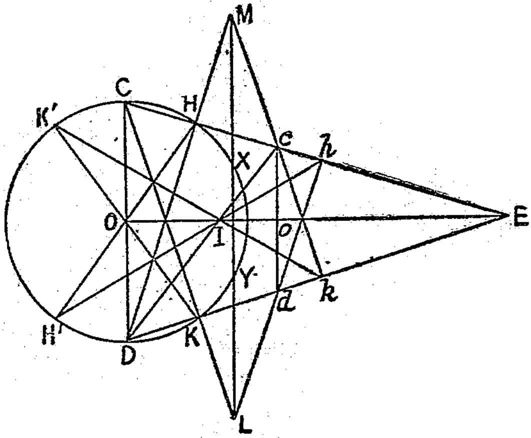
第一横行按作圖次序示新作之直線，第三横行中各該直線下之字母示該線所定之一個或多個新點．該新點皆自新線與已作之一線之交點定之，而該已作直線示於同直行之第二横行．

平行於 Γ 之直徑 CD 之直線 oc 實自引 (i) 之法定之；然在完全四邊形 Cc, Cd, Dc, Dd 中，有 COD, cod 爲平行直徑，故可利用第三對角線 IE 上獨立獲得之調和列點 Oo, IE 而得 c 點，無須作此四邊形之兩邊 Cd, Dd．

題二款 (i)． 求 Γ 與一與圓 γ 之交點．

本題同於求兩圓之根軸；蓋若兩圓交於實點，則根軸卽公弦，故交 Γ 於所求兩圓交點 X, Y． 求根軸上兩點最速之法如下：

設 o 爲 γ 之中心，而 co 其所與半徑． 作 Γ 之平行直徑 COD 及兩圓之外內相似中心 E, I． 設 EC, ED 重交 Γ 於 H, K． 定 γ 上對應於 D, H, K 之 d, h, k；設 CK, hd 交於 L，而 DH, kc 交於 M． 則 LM 卽根軸而交 Γ 於所求點 X, Y．



(圖 77)

此理自 C, K, h, d 四點在一補助圓上，而 L 爲其與 Γ 之公弦 CK 及其與 γ 之公弦 hd 之交點可推得之. 蓋於圖 77,

$$\begin{aligned} \angle hCK &= \angle hck, \quad \text{平行線} \\ &= \angle hdk, \quad \text{同在圓 } \gamma \text{ 中} \\ &= \pi - \angle hdk; \end{aligned}$$

故 C, K, d, h 諸點爲共圓 (concyclic). 同理，M 亦在 Γ, γ 之根軸上.

作圖述詳

已有 Γ 及兩點 o, c. 應用引 (iii) 之法，作 Γ 之直徑

COD 平行於 co. 該作圖需十六直線，包括 co, COD 及如前可使其合於 Oo 之一線 (圖 74 之 OZ). 其餘作圖如下表:

Cc	DE	Dc	HO	KO	$H'I$	$K'I$	CK, hd	DH, kc	LM
Oo, Γ	oc, Γ	Oo	Γ	Γ	Cc	DE			Γ
E, H	d, K	I	H'	K'	h	k	L	M	X, Y

全圖含二十八直線.

款 (ii). 求兩與圓 γ, γ_1 之交點.

若先求兩圓之根軸 lm, 問題即可用題一之法解之. 於是 lm 與一圓，如 γ 之交點 x, y, 卽所求之 γ, γ_1 之交點. 故吾人所首當獲得者，爲根軸上之兩點 l, m. 兩點各可作圖爲交兩與圓於四共圓點之兩弦之交點. 第一當先求 γ, γ_1 之兩平行直徑 cod, $c_1o_1d_1$. 則 cc_1, dd_1 交於 γ, γ_1 之外相似中心. 設 γ 與 cc_1, dd_1 之其他交點爲 h, k. 於是如上 (題二 (i) 及圖 77,81), 四點 h, k, c_1, d_1 爲共圓點，而 hk, c_1d_1 交於 γ, γ_1 之根軸上之 l. 同理，若 cc_1, dd_1 交 γ_1 於 h_1, k_1, 且 cd, h_1k_1 交於 m, m 卽根軸上之另一點; 故直線 lm 卽爲根軸. 兩四邊形 $ckdh$ 及 $c_1k_1d_1h_1$ 之相似且有相似之位置當加以注意.

但 h, k, h_1, k_1 諸點不能以爲 cc_1, dd_1 與圓 γ, γ_1 之交點而直接得來，因後者(兩圓)固未嘗畫出也。故當用題一之法求之，各利用 Γ, γ 及 Γ, γ_1 間之相似關係；所用者爲有外相似中心 E, E_1 者。所欲作圖之內接 γ, γ_1 之四邊形 $ckdh$, $c_1k_1d_1h_1$ 同相似於(各在該兩相似關係之中)內接於 Γ 之四邊形 $CKDH$ (圖 80)。吾人需 Γ, γ 之兩對平行直徑，且當使之平行於 γ, γ_1 之已與半徑 oa, o_1c_1; 諸平行線後此尙可利用以定 lm 與 γ 之交點，卽所求點 x, y。

全部作圖可分成下列諸步驟：

第一步，圖 78. 從引 (iii)，作 Γ 之直徑 AOB, COD 平行於與圓之已與半徑 ao, c_1o_1。

第二步，圖 79. 利用相似中心 E, I, E_1，定 γ, γ_1 之直徑 aob, $c_1o_1d_1$ 之他一端點 b_1, d_1，及平行於 COD 或 $c_1o_1d_1$ 之 γ 之直徑 cod。於是已得 Γ, γ 之兩對平行直徑 AOB, aob; COD, cod; 而利用與此諸直徑之交點遂能得兩圓中任一者之弦與他一圓之任意弦對應者。

第三步，圖 80. 作 $cc_1\, dd_1$，更利用 Γ 之對應弦 CH, DK 定其與 γ 之其他交點 h, k 及與 γ_1 之其他交點 h_1, k_1。

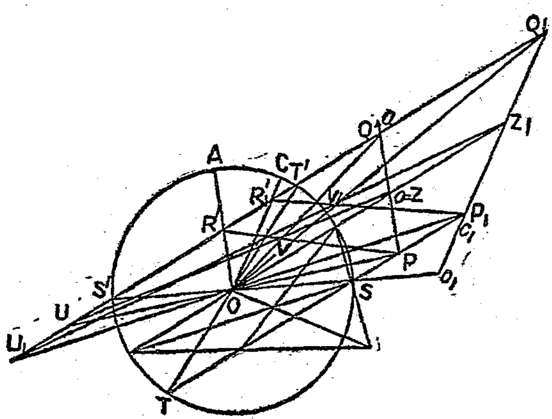
第四步，圖 81. 應用圓周四角形 (cyclic quadrilateral) hkc_1d_1, cdh_1k_1 定 l, m；於是作 γ, γ_1 之根軸 lm.

第五步，圖 82. 從題一法，定 lm 與 γ 之交點 x, y.

作圖述詳

已與者：全部畫出之圓 Γ 及其心 O；與圓 γ, γ_1 之心 o, o_1 及各圓圓周上一點 a, c_1.

第一步. 用引 (iii) 之法，作 Γ 之直徑 AOB 使平行於 ao 連線. 所需者為圖 74 之十六直線. 次作 COD 平行於 c_1o_1；亦需十六直線，但可用同組之三條平行線，



(圖 78)

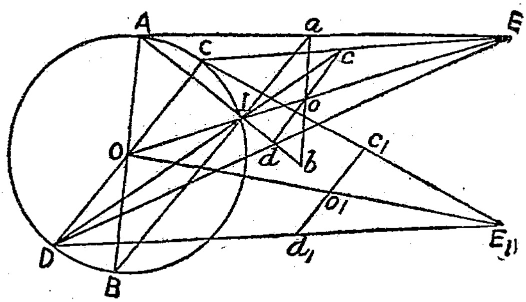
故亦可用同組之十直線：即圖 74, 78 中之 $OZ, ST, S'T'$,

SS', TT' 及未加標字之用於 ST 之作圖之五直線. 故本步驟所作直線數爲 $2\times16-10=22$.

其中包括 ao, c_1o_1, AO, CO, 皆爲此後所需;此外又可使之更包括 Oo 及 Oo_1. 蓋開始作圖時圖 74 之 Z 點可取 o 充之,然後 S 可取 Oo_1 與 Γ 之一交點充之,因此圖 78 之 Oo, Oo_1 各合於圖 74 之 OZ 及 SOS'.

其餘諸步驟之作圖示於下列之圖表. 爲求圖形之盡量簡明,第五步中當用 Γ, γ 間之反相似 (inverse similitude),其中心爲 I,而不用中心爲 E 之正相似.

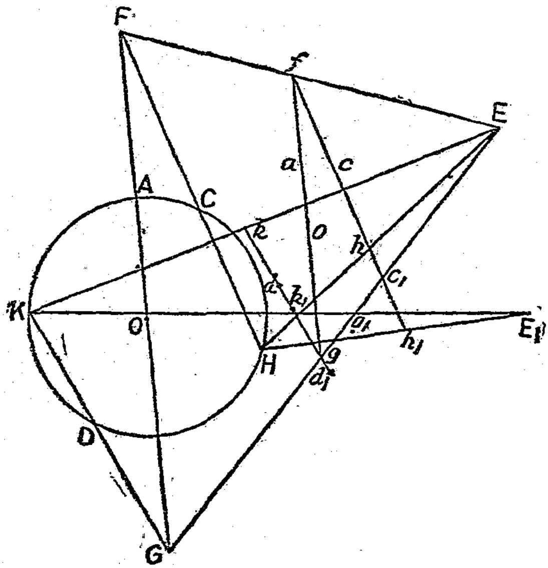
第二步



(圖 79)

Aa	Ba	Cc_1	AI	DE_1	CE, DI	DE, co
Oo	Oo	Oo_1	ao	c_1o_1		
E	I	E_1	b	d_1	c	d

第三步

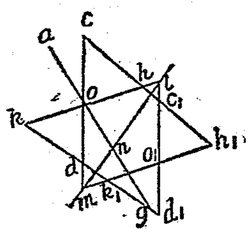


(圖 80)

cc_1	dd_1	Ef	Eg	CF	DG	EH	EK	E_1H	E_1K
ao	ao	AO	AO	Γ	Γ	cc_1	dd_1	cc_1	dd_1
f	g	F	G	H	K	h	k	h_1	k_1

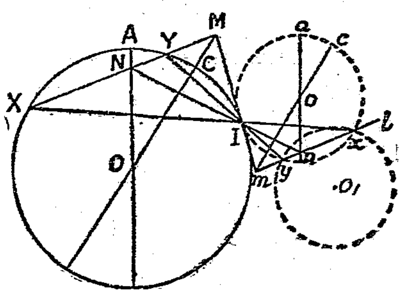
第四步

hk	h_1k_1	lm
c_1o_1	co	co
l	m	n



(圖 81)

第五步



(圖 82)

In	Im	MN	IX	IY
AO	CO	Γ	lm	lm
N	M	X,Y	x	y

故直線之總數爲

$$22+9+10+3+5=49,$$

然苟能運用更大之機巧，則著者信此數目之減小極爲可能.

第八章

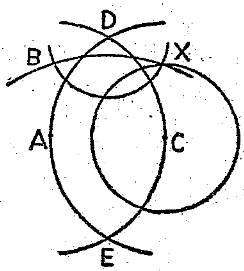
圓規作圖

若吾人僅有之直尺不幸而破碎扭曲，則作圖過程中寧可畫多數圓而不能作一直線. 於是以兩線交點定一點之法當盡量避免，Mascheroni 及 Adler 兩氏皆已證明其爲完全可能.

當然，僅用圓規不能得一直線之全部；故若已知某直線上之兩點，該直線即當謂爲已與或已獲得. 本章之主要目的在於指示僅用圓規仍可得到所需之該直線上之任何點；即其與任意與圓，或任意同樣已與其上兩點之直線之交點.

Mascheroni 者爲舊法；大體上言，其法皆以依一直線之翻摺爲基礎. 其作法中頗有較 Adler 法爲佳者，亦因 Mascheroni 隨意以其圓規爲分線器耳. Adler 之法則基於對於一圓之反形. 其方法較有系統，理論亦有

力，且所用者全為歐氏圓規．根據 Mascheroni 氏之畫法，畫一圓 $C(AB)$ 只算一個動作，然若所用者為歐氏圓規，則必需一包含五個圓之作圖．下列者為最簡作法之一．



(圖 83)

畫圓 $A(C)$, $C(A)$ 交於 D,E．則 DE 為垂直平分 AC 之軸．畫 $D(B)$, $E(B)$ 使重交於 X．則 X 為 B 依軸 DE 之翻摺，而 CX 等於其翻摺 AB．畫 $C(X)$；即所求圓，蓋其中心為所求點 C，而半徑 CX 等於所求半徑 AB．

此類先決定一軸，然後依之翻摺已得圖形之一部之雙重手續，後此仍屢用之．若該手續含於其他作圖中而為其一部時，則必能使五圓中之數者為前此所已用過者，或後此將再用之者．

基本問題

Mascheroni 對於其方法之可能性之證明實際上僅對決定一點之三標準方法 (160 頁) 中需用直尺之兩者各覓一圓規作圖以代替之．已知件外之一切點；不論為問

題所需求者或爲作圖過程中所應用者，僅能從第三標準方法以各對圓之交點定之。如前章然，本章之基本問題有二：

I. 決定一與圓及連兩與點之直線之交點，

II. 決定連兩對與點之兩直線之交點。

該兩問題獲得解決後，至少在理論上任何已知其有一規尺作圖之問題均可獲得一圓規作圖。只須換前者中需用直尺之各步驟以相當之題 I 或題 II 之步驟便可。

但在述此基本問題之解法以前，當先研究 Adler 對於全體之檢討。其證明根據反形理論。若含直線及圓之任何圖形對於圓心不在圖中任一線上之一圓施行反形，則該反形所含者皆爲圓，123 頁 (3), (4)。若原圖形屬於任何所與問題之已知之規尺作圖中，則反形圖形包含 (i) 與點之反形，(ii) 用於作圖過程中之點，直線及圓之反形，及 (iii)所求點之反形。根據引一：求對於一圓心爲 O 之與圓之 A 之反點 A'，則僅用圓規，從與點能得到其對於一補助圓 (圓心 O) 之反形 (i)。同一證明亦指示若已得諸點 (iii), (iii) 爲所求點之反形，可立卽求得所求點之本身。茲更證明吾人能完成自 (i) 至 (ii)，自 (ii) 至

(iii) 之一切步驟，是皆各對應於原規尺作圖之一步驟者．下列者爲兩不同步驟：作一直線 AB 及畫一圓 $C(D)$．反形中對應於第一種步驟者爲：畫一圓 $A'B'O$，此步驟可利用引二先求其圓心以解之；而引二爲：求過三與點之圓之圓心．

反形中，與第二種步驟，卽於原圖中畫一圓 $C(D)$，對應者爲：過 D' 點畫一圓，使 O 及 C' 對於該圓互爲反點，123 頁 (3)． 本步驟亦可變化之使依藉於同兩引． 設 C', D' 已獲到；若 C, D 不在圖形中，則可用引 (i) 法作 C', D' 對於補助圓之反點而得 C, D；然後畫 $C(D)$ 圓． 若 $C(D)$ 交補助圓於異實點 E, F，則此兩點不因反形而變，122 頁 (2)，故在 $C(D)$ 之反形上，故此反形卽可從引(ii)法畫爲過 D', E, F 之圓． 或在任何情形 (如 $C(D)$ 不交補助圓於實點時) 皆可如引(i)求得 O 對於 $C(D)$ 之反點 O_1，然後更求 O_1 對於補助圓之反點 O_1'． 於是 O_1' 卽所求之 $C(D)$ 之反圓之圓心，123 頁 (3)．

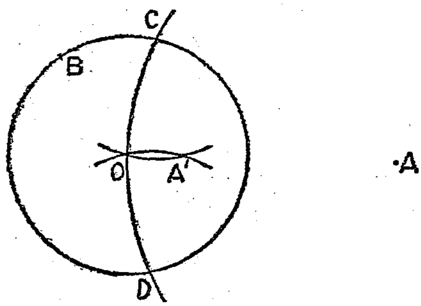
若所欲施以反形之已知作圖爲一 Steiner 作圖，則原圖形中僅含一個隨意圓 Γ，及多數直線． 於是於反形圖形中，可自補助圓心 O 及一隨意圓 Γ' 著手而使 Γ' 之反

形爲Γ；則反形圖形中之其他各圓皆可自其圓周上之三點定之，其中一點爲O. 若卽取Γ爲補助圓，通常不甚妥當；蓋原圖形中必有過其圓心之直線，此種直線不反形成圓而仍反形成直線.

引(i) 求與點A對於與圓$O(B)$之反點A'.

款1 $OA>\frac{1}{2}OB$.

畫圓$A(O)$. 因其直徑$2OA$大於與圓之半徑OB，故必交$O(B)$於異實點C及D. 畫$C(O)$及$D(O)$重交於A'. 則A'爲A對於$O(B)$之反點. (3圓)



(圖 84)

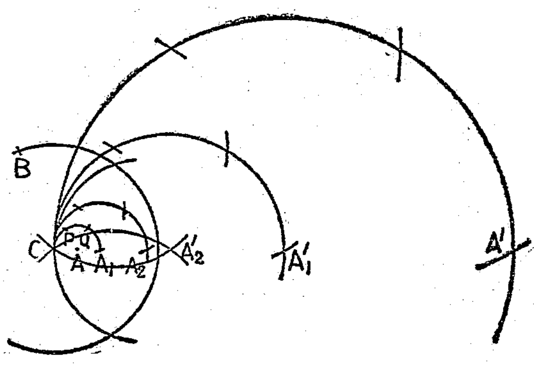
蓋自對稱定理，OAA'爲一直線. 又三角形OAC，OCA'從作圖知其皆爲等腰，且在O點有一公共底角；故爲相似，而

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OA'}, \text{或} \; OA\cdot OA'=OC^2,$$

即證明 A, A' 互爲反點.

款 2 $OA \leqq \frac{1}{2}OB$.

上述作圖於 C, D 相合或爲虛點時失敗. 於是當先於 OA 延線上求一點 A_1 使 $OA_1=2OA$. 此點僅須先畫 $A(O)$, 然後依次畫 $O(A), P(A), Q(A)$ 使各交 $A(O)$ 於 P, Q; A_1 而得之. 蓋如是則 O, P, Q, A_1 順序爲 $A(O)$ 之一內切正六角形之角點; 故 OA_1 爲一直徑而爲半徑 OA 之二倍.



(圖 85)

若 $OA_1>\frac{1}{2}OB$, 可從款 1 法求得 A_1 之反點 A_1'; 如

前，於 OA_1' 延線上求得 A'，使 $OA'=2OA_1'$. 則 A' 爲 A 之反點. (11 圓)

蓋因 $OA\ OA'=\frac{1}{2}OA\cdot 2OA_1'=OA_1\cdot OA_1'=OB^2$.

若 $OA_1\leqq\frac{1}{2}OB$，則必須繼行上述雙倍之法，順序於 OA 延線上獲 $A_2, A_3\cdots\cdots A_p$ 諸點，而

$$OA_2=2OA_1,\ OA_3=2OA_2\cdots\cdots OA_p=2OA_{p-1}=2^pOA,$$

至 $OA_p>\frac{1}{2}OB$ 而止. 於是更求 A_p 之反點 A_p'，然後雙倍之 p 次，順序得 $A'_{p-1}\cdots\cdots A_2', A_1', A'$，使

$$OA'=2OA_1'=2^pOA_p'.$$

則 A' 爲 A 之反點. ($8p+3$ 圓*)

蓋 $OA\cdot OA'=2^{-p}OA_p\cdot 2^pOA'_p=OA_p\cdot OA'_p=OB^2$.

圖示 $p=2$ 時之作圖，已與之 $O(B)$ 外另含十九圓*.

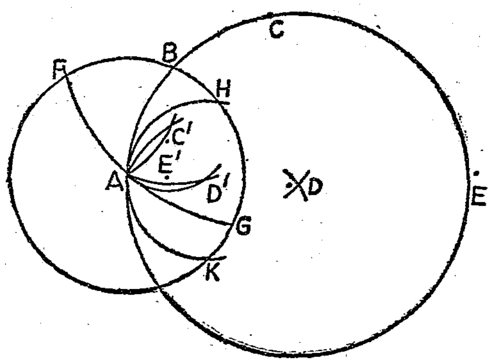
引(ii) 求過三與點 A, B, C 之圓之圓心 D.

---

* 此處實無需畫($8p+3$)圓，蓋作圖包含 (i) 一次款 1 之作圖，及 (ii) $2p$ 次之雙倍一線段. (i)需 3 圓，(ii)中有兩次各需 4 圓，其餘則每次只需 3 圓. 蓋從 OA 求 OA_1 需作第一圓 $A(O)$，第二圓 $O(A)$，第三圓 $P(A)$，第四圓 $Q(A)$；然更進而求 A_2，則第一圓 $A_1(O)$ 與第二圓 $O(A_1)$ 之交點可代以 $A_1(O)$ 與 $P(A)$ 之交點，故只需 3 圓. 此後求 $A_3, A_4\cdots\cdots A_p$ 諸點時皆如是. 得 A_p' 後第一次雙倍 OA_p' 以求 OA'_{p-1} 需四圓，其餘求 $A'_{p-2}, A'_{p-3}\cdots\cdots A'$ 亦只各需 3 圓. 故所畫圓之總數爲 $3\times 2p+2+3=6p+5$. —— 譯者

畫 $A(B)$． 求 C 對於 $A(B)$ 之反點 C'；求 A 以 BC' 爲軸之反射 D'；求 D' 對於 $A(B)$ 之反點 D． 則 D 爲所求之圓 ABC 之圓心． (9 圖)

蓋設 AE 爲圓 ABC 之過 A 點之直徑． 則若對於 $A(B)$ 行反形，此圓卽成一直線，過 B (不受影響)及 C'，垂直於 AE，因此 E 之反點 E' 爲自 A 至 BC' 之垂足，亦卽 AD' 之中點． 玆則所求圓心 D 爲 AE 之中點；故



(圖 86)

$$AD \cdot AD' = \tfrac{1}{2}AE \cdot 2AE' = AB^2,$$

因此 D, D' 互爲對於 $A(B)$ 之反點．

否則可視直線 BC' 爲一無窮大半徑之圓，A, D' 對於是圓互爲反點． 對於 $A(B)$ 行反形時，圓心 A 成一無

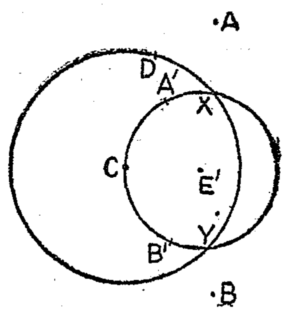
窮遠點 A'，而 D' 成爲 A' 對於圓 ABC 之反點，即成圓 ABC 之圓心，122 頁 (1)。

作圖見下表：

$A(B),C(A)$	$F(A),G(A)$	$B(A),C'(A)$	$D'(A)$	$H(A),K(A)$
			$A(B)$	
F,G	C'	D'.	H,K	D

第一橫行依作圖次序示圖中之諸圓，第三橫行各示其第一橫行之圓所決定之新點。 若新點自其與一已畫之圓之交點定之者，同直行之第二橫行即示此已畫之圓。

題一 定與圓 $C(D)$ 與連兩與點 A,B 之直線之交點 X,Y。



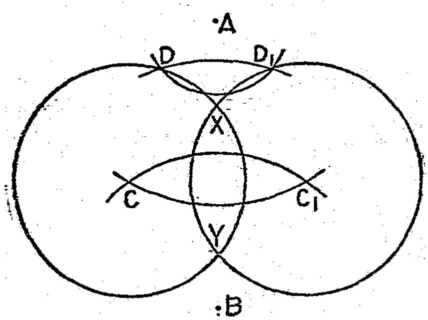
(圖 87)

(i) 根據反形理論之作圖之基本原理爲在 $C(D)$ 上之所求點 X,Y 不受對於此圓之反形之影響，122 頁 (2)。

先求 A,B 對於 $C(D)$ 之反點 A',B'。 求圓 $A'B'C$ 之圓心 E'，畫圓 $A'B'C$；是即直線 AB 之反形，故交圓

$C(D)$ 於所求點 X, Y。　　(16 圖)

(ii) Mascheroni 氏作圖遠簡於前法。$C(D)$與直線 $A(B)$ 之交點同於其與其依 AB 之翻摺之交點。故可先應用圓 $A(C)$, $B(C)$ 求得 C 依 AB 之翻摺 C_1, 然後畫 $C_1(CD)$; 此圓即交 $C(D)$ 於所求點 X, Y。　　(3 圖)



(圖 88)

若圓規為歐氏的,作圓 $C_1(CD)$ 為不可能,故必先求得 D 依 AB 之翻摺 D_1, 然後畫 $C_1(D_1)$。　　(5 圖)

此兩作圖於 AB 過圓心 C 時皆失敗; 蓋是時直線 ABC 之反形非一圓而為一直線,故不能作圖之;而 $C(D)$ 依 AB 之翻摺即其自身,故亦不能定 X, Y。

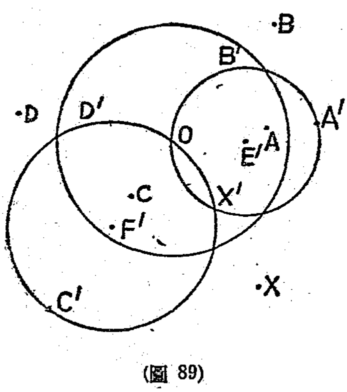
例如,若已與一圓弧 DE 及其圓心 C 而欲平分之,可於平分該弧之直徑上定一點 A, 然後即須定弧 DE 與直

徑 CA 之交點 X. 欲解決此項困難，可完成平行四邊形 $DECF$, $EDCG$, 然後畫圓 $F(E)$, $G(D)$ 使交於 A. 自對稱定理，A 遂在平分直徑上；而 $FX=CA$ 亦易證明. 作圖見下表；DE 弧及 C 點已與.

$D(C),C(DE)$	$E,C)$	$F(E),G(D)$	$F(CA)$
	$C(DE)$		$C(D)$
F	G	A	X

題二 決定連兩對與點 A,B；C,D 之兩直線之交點 X.

(i) 在任意圓心 O 任畫一適便之圓；求諸與點之反點 A',B',C',D'；求各圓 $OA'B'$, $OC'D'$ 之中心 E', F', 而

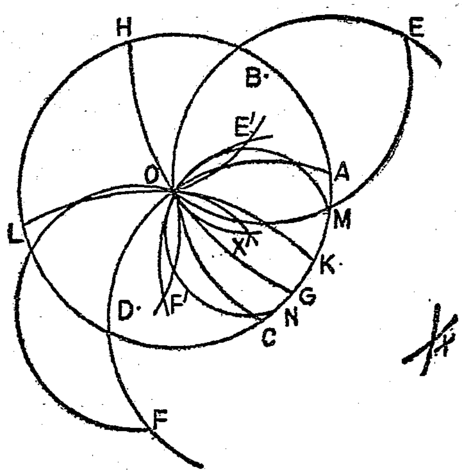


(圖 89)

畫此兩圓使重交於 X'，求 X' 對於補助圓之反點 X. 則 X 為所求 AB, CD 之交點. 若不預先加以計劃而貿然作圖，則作圖之全部需

$$1+4\times3+2\times10+3=36 \text{ 圓}.$$

然僅稍加注意，即可使此數大為減小. 第一，補助圓可使之過 A；則 A' 合於 A 而無須作圖. 同時亦不必作 B'；蓋於求 OAB' 之心 E' 時，實不需 B' 而僅需 B' 對於 $O(A)$ 之反點，即 B 自身. 求 E' 時，只須利用 $A(O)$，$B(O)$ 以定 O 對於 AB 之反射 E，然後 E' 即 E 對於補助



(圖 90)

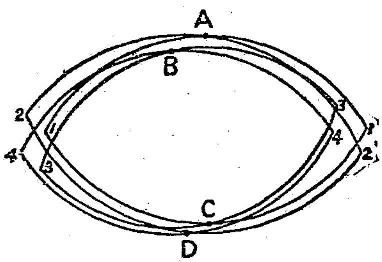
圓 $O(A)$ 之反點。

若使補助圓並過 C 點，亦能同樣減輕作圖之手續。最好方法爲取 $A(C)$, $C(A)$ 交點之一爲 O。於是開始作圖時即須作此兩圓，但圓 $A(C)$ 同於 $A(O)$，後此可用於求 E；同理，$C(A)$ 亦可用於求對應點 F。

全部作圖需十六圓，其中八個之半徑皆等於 AC；茲示於下表：

$A(C)$ $C(A)$	$B(O)$	$E(O)$ $O(A)$	$G(O)$ $H(O)$	$D(O)$	$F(O)$	$K(O)$ $L(O)$	$E'(O)$ $F'(O)$	$X'(O)$	$M(O)$ $N(O)$
	$A(C)$			$C(A)$	$O(A)$			$O(A)$	
O	E	G,H	E'	F	K,L	F'	X'	M,N	X

然各反形之條件皆設其爲最佳者，即 OE, OF, OX' 諸量皆大於 $\frac{1}{2}OA$。若選 O 爲 $A(C)$, $C(A)$ 兩交點中距



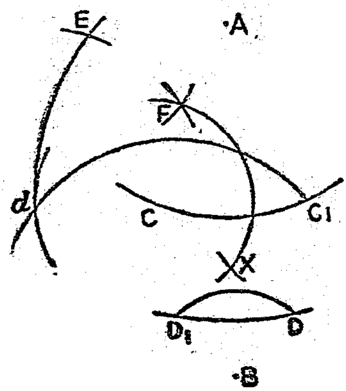
(圖 91)

AB 較遠之一，則第一條件常爲可能. 蓋如是則自 O 至 AB 之垂直距離之最小值，卽 $\angle BAC=\frac{1}{2}\pi$ 時，爲 $\frac{1}{2}AC$，而 OE 之最小值爲 AC，因此得 $OE>\frac{1}{2}AC$. 但亦有 O 之位置距 AB 太遠以致過於接近 CD 者. 則可不自 A,C 著手作圖，而自 $A,C;A,D;B,C;B,D$ 四對點中選其他一對充之，其中每對各定 O 之兩可能位置. 最不幸之情形則爲 O 之八個位置皆不適合 $OE>\frac{1}{2}OA$ 及 $OF>\frac{1}{2}OA$ 兩條件，此時 AB,CD 極短且幾至平行，而與 AC 之夾角幾近於 $\frac{1}{3}\pi$. 此時必須引用引 (i) 之款 2，而全圖所需者遂不止十六圓.

(ii) 若承認圓規之近世用法，則 Mascheroni 氏之作圖較上法爲短；然若僅限於 Euclid 之用法，則尚不如上法之簡. 求 C,D 依 AB 之翻摺 C_1,D_1. 則所求 AB,CD 之交點 X 亦爲 CD 及 C_1D_1 之交點；三角形 CXC_1,DXD_1 互相似，而

$$\frac{CX}{CD}=\frac{C_1C}{C_1C+DD_1}.$$

長度 C_1C+DD_1 可完成平行四邊形 CDD_1d 而作圖之，而 d 爲圓 $C(DD_1)$ 及 $D_1(CD)$ 之交點. 於是 $C_1d=C_1C+Cd=C_1C+DD_1$. 然後作 C_1d,C_1C,CD 之第



(圖 92)

四比例項。 此可自各界以同心圓之兩半徑之兩相似三角形得之. 畫 $C_1(d), C_1(C)$, 而利用圓 $d(CD)$ 於前者中置一弧 dE 等於 CD. 半徑 C_1E 與 $C_1(C)$ 之交點 F 可求 $C_1(C)$ 與圓 $E(dC)$ 之切點而得之, 若以爲任一圓 ($E(dC)$ 或 $C_1(C)$) 與 $d(CE)$ 之交點而求之更佳. 於是 C_1dE, C_1CF 爲相似等腰三角形, 而

$$\frac{CF}{dE}=\frac{C_1C}{C_1d}$$

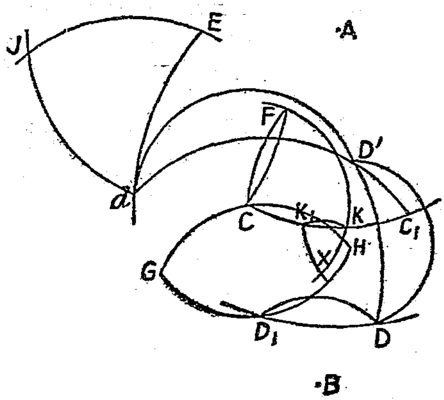
故 $CF=CX=C_1X$, 而 X 可求 $C(F)$ 與 $C_1(CF)$ 之交點而得之.

本作圖需下列之十一圓; 三個半徑, 即 CD, DD_1, 及

CF，各用過兩次。

$A(D)$ $B(D)$	$A(C)$ $D_1(CD)$	$C(DD_1)$	$C_1(d)$ $d(CD)$	$d(CE)$ $E(DD_1)$	$C(F)$ $C_1(CF)$
		$D_1'(CD)$			
D_1	C_1	d	E	F	X

(iii) 若用歐氏圓規於本作圖，則著者實不能使圓之線數減至十七以下。



(圖 93)

欲作 d 點，可先求 D'，使 CD' 爲 D_1D 依於垂直平分 CD_1 之一軸 GH 之翻摺 (GH 當先求得) 然後乃能畫同於 $C(DD_1)$ 之圓 $C(D')$。 D_1 之作圖如前，但 C_1 爲求 d 時所

需之圓 $D_1(D')$ 及後此仍可再用之圓 $A(C)$ 之交點. 欲求 F, 可依垂直平分 dE 而亦平分 $\angle dC_1E$ 之軸 C_1J 翻摺 C 點. J 點在 $d(E)$ 上, $d(E)$ 同於 $d(D_1)$, 圖中蓋已有之. 最後, 欲畫 $C_1(CF)$, 可先依 AB 翻摺 CF, 然翻摺圓 $C(F)$ 之另一半徑 CK 更為簡單, 蓋如是又可再用 $A(C)$.

全部作圖示於下表:

$A(D)$ $B(D)$	$C(D_1)$ $D_1(C)$	$G(D)$ $H(D)$	$C(D')$ $D_1(D')$	$A(C)$	$d(D_1)$ $C_1(d)$	$E(d)$	$J(C)$ $C_1(C)$	$C(F)$	$B(K)$	$C_1(K_1)$
				$D_1(D')$		$d(D_1)$		$A(C)$	$A(C)$	$C(F)$
D_1	G,H	D'	d	C_1	E	J	F	K	K_1	X

参考書目

Enriques, Fragen der Elementargeometrie 初等幾何問題. Fleischer 德譯. 二卷. Leipzig, 1907.

Vahlen, Konstruktionen und Approximationen 作圖與近似. Leipzig, 1911.

Klein, Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie 初等幾何問題選. Göttingen, 1895.

Hilbert, Grundlagen der Geometrie 幾何學之基礎. Leipzig, 第二版, 1903.

Richmond, To Construct a Regular Polygon of 17 Sides 正十七角形作法. 數學年報, LXVII. p. 459, 1909.

Gérard, Construction du polygone régulier de 17 Côtés au möyen du seul compas 正十七邊形圓規作圖法. 數學年報, XLVIII. p. 390, 1896.

Mathews, Projective Geometry 投影幾何學. London, 1914.

Zühlke, Ausführung elementargeometrischer Konstructionen bei ungünstigen Lageverhältnissen 施不簡便的位置比例於初等幾何學上作圖的緒論. Leipzig, 1906.

Lemoine, Géométrographie ou art des constructions géométriques 幾何繪圖學. Paris, 1902.

Poncelet, Traité des propriétés Projectives des figures 圖形之投影性質論. Paris, 1822.

Steiner, Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt Mittlest der geraden Linie und Eines festen Kreises 用直線及一定圓之幾何作圖法. Berlin, 1833.

Mascheroni, Geometria del Compasso 圓規幾何學. Pavia, 1797.

Adler, Zur The rie der Mascheronischen Construktionen 關於 Mascheroni 氏作圖之理論. Wiener 會議報告, 1890.

Hobson, On Geometrical Constructions by Means of the Compass 論應用圓規之幾何作圖. 數學公報, 1913 三月.

引用上述諸書時僅書作者之名. 作者受助於 Mr. C. S. Jackson 及 Dr. F. S. Macaulay 者頗多,於此敬致謝意.

中華民國二十六年十月初版

(54777)
算學小叢書 直尺與圓規一冊
Ruler and Compasses

每冊實價國幣五角五分
外埠酌加運費匯費

周

原著者 H. P. Hudson

譯述者 林辰 福州三牧坊福州中學

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)