初中代數學提要

劉遂生編

中華書局印行

民國三十七年十二月發行
民國三十七年十二月初版

初中代數學提要（全一冊）

◎ 定價國幣四元
（郵運匯費另加）

編者 劉遂生

發行人 李虞杰
中華書局股份有限公司代表

印刷者 中華書局永寧印刷廠
上海澳門路八九號

發行處 各埠中華書局

（一四一九二）（中）

初中代數學提要

目　　次

初中代數學提要

I　基本運算

第一章　緒論

1. 代數學(Algebra)的定義　代數學係研究數(包括數字和文字)的科學.

2. 代數式(Algebraic expression)　用運算的記號,連結數字及文字的式,叫做代數式.或簡稱爲式.例如 $a+5$ 是.

3. 有理式 (Rational expression) 與無理式 (Irrational expression)

(1)有理式　沒有根號之式,叫做有理式.例如 $a+b$ 是.

(2)無理式　有根號之式,叫做無理式.例如$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是.

4. 恆等式 (Identity) 與方程式 (Equation)

(1)恆等式　用任何數值代入等式中之文字,兩邊恆能相等者,叫做恆等式.例如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 是.

(2)方程式　必須特別數值代入等式中之文字,兩邊始能相等者,叫做方程式.例如 $x+2=5$ 是.

5. 已知數 (Known numbers) 與未知數 (Unknown numbers)

(1)已知數　假設的數，叫做已知數。例如 1, 2, ……; a, b, ……是.

(2)未知數　所求的數，叫做未知數.例如 x, y, z……是.

6. 正數(Positive number)與負數(Negative number)

(1)正數　數之大於 0 者，叫做正數．例如 $+4$ 是.有時寫作 4.

(2)負數　數之小於 0 者，叫做負數.例如 -7 是.

7. 絕對値 (Absolute value)　撤去數前之'+''-'號，而僅稱其數者，叫做絕對値.例如 $+3$ 及 -3 之絕對値爲 3.

8. 加法法則(Rule of addition)及公式(Formula)

(1)同號二數相加，將絕對値相加，附以公有符號卽得．其公式爲:

I.　$(+a)+(+b)=+(a+b)$.

II.　$(-a)+(-b)=-(a+b)$.

(2)異號二數相加，取絕對値之差，附以絕對値較大者的符號卽得．其公式爲:

I.　$(+a)+(-b)=+(a-b)$.

II.　$(-a)+(+b)=-(a-b)$.

〔註〕$a>b$

(3)絕對値相等，而符號相反，則其和爲零．其公式爲:

$$(-a)+(+a)=0.$$

9. 減法法則(Rule of subtraction)及公式　從一數減另一

數，變減數的符號，而與被減數相加卽得．　其公式爲：

I.　$a-(+b)=a+(-b)$.

II.　$a-(-b)=a+(+b)$.

10.乘法法則(Rule of multiplication)**及公式**　二數之積，等於其絕對值之積．同號得正，異號得負．　其公式爲：

I.　$\begin{cases}(+a)\times(+b)=+ab, \\ (-a)\times(-b)=+ab.\end{cases}$

II.　$\begin{cases}(+a)\times(-b)=-ab, \\ (-a)\times(+b)=-ab.\end{cases}$

11.除法法則 (Rule of division) 及公式　一數以另一數除之，其商卽其絕對值之商．同號得正，異號得負．　其公式爲：

I.　$\begin{cases}(+a)\div(+b)=+\dfrac{a}{b}, \\ (-a)\div(-b)=+\dfrac{a}{b}.\end{cases}$

II.　$\begin{cases}(+a)\div(-b)=-\dfrac{a}{b}, \\ (-a)\div(+b)=-\dfrac{a}{b}.\end{cases}$

習　題

1.　$-6, +9$ 的絕對值爲何？

2.　試求 $-14, +5, -3, +10$ 之和？

答．　-2.

3. 試求 -4 與 -6 之差?

4. 試求$(x-y)$與$(-x-y)$之差.

答. $2x$.

5. 試求(-15)與$(+3)$之積.

6. 試求(-8)與(-6)之積.

7. 試求(-16)與$(+2)$之商.

8. 試求$(-20)\div(-4)$之商.

9. 試求$(+5)\div(-2)\div(+6)\div(-15)$之商.

10. 計算下式: $(-7)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(+\frac{7}{9}\right)$.

答. $-7\frac{1}{2}$.

第二章 括號

1. 括號的種類:

(1)線括(Vinculum), ——;

(2)圓括(Parenthesis), ( );

(3)方括(Bracket), [ ];

(4)曲括(Brace), { }.

2. 撤去括號法

(1)括號前是加號,括號內各數前的符號不變.

(2)括號前是減號,括號內各數前的符號,須變加爲減,變減爲加.

例 1. 撤去括號：

$$12a-\{(a+b)-[b-(a-b)]-a\}.$$

原式 $=12a-\{a+b-[b-a+b]-a\}$

$=12a-\{a+b-b+a-b-a\}$

$=12a-a-b+b-a+b+a$

$=11a+b.$

例 2. 撤去括號：

$$9a-\{(7a+5b)-[-6b+(-12b-\overline{a-b})]\}.$$

原式 $=9a-\{7a+5b-[-6b+(-12b-a+b)]\}$

$=9a-\{7a+5b-[-6b-12b-a+b]\}$

$=9a-\{7a+5b+6b+12b+a-b\}$

$=9a-7a-5b-6b-12b-a+b$

$=a-22b.$

例 3. 撤去括號：

$$84-7[-11x-4\{-17x+3(8-\overline{9-5x})\}].$$

原式 $=84-7[-11x-4\{-17x+3(8-9+5x)\}]$

$=84-7[-11x-4\{-17x+3(5x-1)\}]$

$=84-7[-11x-4\{-17x+15x-3\}]$

$=84-7[-11x-4\{-2x-3\}]$

$=84-7[-11x+8x+12]$

$=84-7[-3x+12]$

$=84+21x-84$

$=21x$.

習 題 一

撤去下列各式的括號：

1. $a+b-[(b+d)-(a-b)]$. 答. $2a-b-d$.

2. $a-(b-c)-[a-b-c-2(b+c)]$ 答. $2b+4c$.

3. $8(b-c)-[-\{a-b-3(c-b+a)\}]$.

答. $-2a+10b-11c$.

4. $5\{a-2[a-2(a+x)]\}-4\{a-2[a-2(a+x)]\}$.

答. $3a+4x$.

5. $2x-\{x-(x-y)-[x-\overline{x-y}]-y\}$ 答. $2x-y$.

6. $4a-[6b+(3a-c)-\{5b-\overline{c-a}\}]$. 答. $2a-b$.

7. $6\{a-2[b-3(c+d)]\}-4\{a-3[b-4\overline{c-d}]\}$.

答. $2a-12c+84d$.

8. $\frac{1}{4}\{a-5(b-a)\}-\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(b-\frac{a}{3}\right)-\right.$

$\left.\frac{2}{9}\left[a-\frac{3}{4}\left(b-\frac{4a}{5}\right)\right]\right\}$ 答. $\frac{11}{5}a-2b$.

3. 插入括號法

(1)括號前用加號，括號內各數前的符號不變.

(2)括號前用減號，括號內各數前的符號，須變加為減，變減為加.

例 1. 試將下式中之第二、第三項以及第四、第五項插入括

號內:

$$a-b+c+2d-e.$$

原式 $=a-(b-c)+(2d-e)$.

例 2. 試將下式中之後三項,括入括號內,而括號之前,須冠以'$-$'號:

$$2a+b-5c+2d.$$

原式 $=2a-(-b+5c-2d)$.

習題二

試將下式中之後三項,括入括號內,而括號之前,須冠以'$+$'號:

1. $b+c-d+e$.　　2. $x-2y+3z-d$.

3. $2p-q+p^2-q^2$.

試將下式中之後三項,括入括號內,而括號之前,須冠以'$-$'號:

4. $a-b-c-d$.　　5. a^2+a-b^2+b.

6. $1+a-2b-c-d$.

第三章　一次方程式

1. 解方程式(To solving the equation)

求方程式中未知數之值的方法,叫做解方程式. 求得之值,叫做根 (Root).

2. 解方程式應用的公理(Axiom)

(1)等量加等量,其和仍等.

(2)等量減等量,其差仍等.

(3)等量乘等量,其積仍等.

(4)等量除等量,其商仍等.

3. 解方程式的方法

(1)方程式中若含有括號,須先撤去.

(2)移未知數到左邊,已知數到右邊,依公理(1)、(2),應改變符號,再行合併.

(3)將合併所得簡式中未知數的係數除兩端,即得所求的根.

4. 驗算(Verification)的方法　解方程式所得之根,代入原方程式中,檢其是否兩邊相等,叫做驗算.如果驗得兩邊相等,便算正確.

例1.　解 $3x-8=x+12$.

〔解〕移項,　$3x-x=12+8$.

集合,　$2x=20$.

以2除之,　$\therefore\ x=10$.

例2.　解 $5(x-3)-7(6-x)=24-3(8-x)-3$.

〔解〕撤去括號,　$5x-15-42+7x=24-24+3x-3$.

集合,　$12x-57=3x-3$.

移項,　$12x-3x=57-3$.

集合,　$9x=54$.

以 9 除之，　$\therefore \quad x=6.$

例 3.　解 $7x-5[x-\{7-6(x-3)\}]=3x+1.$

〔解〕撤去括號，　$7x-5[x-\{7-6x+18\}]=3x+1.$

$$7x-5[x-25+6x]=3x+1.$$

$$7x-5x+125-30x=3x+1.$$

移項，　$7x-5x-30x-3x=1-125.$

集合，　$-31x=-124$

$$\therefore \quad x=4.$$

例 4.　解 $\dfrac{4(x+2)}{3}-\dfrac{6(x-7)}{7}=12.$

〔解〕用分母的最小公倍數 21 乘之，

$$28(x+2)-18(x-7)=12\times 21.$$

撤去括號，　$28x+56-18x+126=252.$

移項及集合，　$10x=70.$

$$\therefore \quad x=7$$

〔驗算〕　$x=7$，$\therefore$　左端 $=\dfrac{4(7+2)}{3}-\dfrac{6(7-7)}{7}=12$，

右端 $=12.$

兩端相等，故知根正確.

習　題

解下列各方程式：

1.　$3x+15=x+25.$　　答．5．

2.　$5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4)$　　答．5．

3. $8(x-3)-(6-2x)=2(x+2)-5(5-x)$　答. 3.

4. $5x-(3x-7)-\{4-2x-(6x-3)\}=10.$　答. 1.

5. $14x-(5x-9)-\{4-3x-(2x-3)\}=30.$

答. 2.

6. $2x-5\{3x-7(4x-9)\}=66.$　答. 3.

7. $3(5-6x)-5[x-5\{1-3(x-5)\}]=23.$　答. 4.

8. $x+2-[x-8-2\{8-3(5-x)-x\}]=0.$　答. 1.

解下列各方程式,並驗算之:

9. $7(25-x)-2x=2(3x-25).$　答. 15.

10. $25x-19-[3-\{4x-5\}]=3x-(6x-5)$　答. 1.

11. $\frac{x}{4}+\frac{x-5}{3}=10.$　答. 20.

12. $\frac{x+5}{6}-\frac{x+1}{9}=\frac{x+3}{4}.$　答. $-\frac{1}{7}$.

第四章　一次聯立方程式

1. 二元一次聯立方程式的解法　二元一次聯立方程式的解法,通用者有三:

(1)加減消去法(Elimination by addition or subtraction).

(2)代入消去法(Elimination by substitution).

(3)比較消去法(Elimination by comparision).

2. 加減消去法

(1)如有括號,先去括號,將含元的各項集於左邊,不含元的

各項集於右端.

(2)用一適當之數,乘第一方程式的兩邊;再用另數乘第二方程式的兩邊,使同元的係數,有相同的絕對值.

(3)若這兩係數同號,就用減法;若係異號,就用加法.如是即得一個一元一次方程式.

(4)解一元一次方程式,得一元的值;將這元的值,代入任一原方程式中,得另一元的值.

例 1. 解 $\begin{cases} 7x+2y=47, \cdots\cdots(1) \\ 5x-3y=7. \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)×3,　$21x+6y=141, \cdots\cdots(3)$

(2)×2,　$10x-6y=14. \cdots\cdots(4)$

(3)+(4),　$31x=155,$

$\therefore \quad x=5.$

代入(1),　$\therefore \quad 35+2y=47,$

$\therefore \quad y=6.$

答. $\begin{cases} x=5, \\ y=6. \end{cases}$

例 2. 解 $\begin{cases} 2x-y=9, \cdots\cdots(1) \\ 3x-7y=19. \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)×7,　$14x-7y=63. \cdots\cdots(3)$

(3)−(2),　$11x=44.$

$\therefore \quad x=4.$

代入(1),　$8-y=9,$

$\therefore \quad y=-1.$

答. $\begin{cases} x=4, \\ y=-1. \end{cases}$

習題一

試用加減消去法解下列各方程式:

1. $\begin{cases} 3x+4y=10, \\ 4x+y=9. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+8y=53, \\ 8x-y=34. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=5, \\ y=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 21x-50y=60, \\ 28x-27y=199. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=10, \\ y=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=5, \\ x-y=4. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=10, \\ y=6. \end{cases}$

〔提示〕 將第一方程式去分母.

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{7}=10, \\ \dfrac{x}{3}+y=50. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=45, \\ y=35. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5(x+2y)-(3x+11y)=14, \\ 7x-9y-3(x-4y)=38. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=8, \\ y=3. \end{cases}$

〔提示〕 撤去括號,並集合之.

3. 代入消去法

(1)先從任一方程式,解出任一元的相當式.

(2)將這元的相當式,代入另一方程式中,卽得一元一次方程式.

(3)解這一元一次方程式, 得一元的值; 代入任一原方程式

中，得另一元的值.

例. 解 $\begin{cases} 2x-7y=-8, & \cdots\cdots(1) \\ 3x+2y=13. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從(1)， $2x=7y-8.$

以 2 除之， $x=\dfrac{7y-8}{2}.$ ……(3)

代入(2)， $3\left(\dfrac{7y-8}{2}\right)+2y=13.$

去分母， $21y-24+4y=26$，即 $25y=50.$

$\therefore\ y=2.$

代入(3)， $\therefore x=\dfrac{14-8}{2}=3.$　　答. $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

習題二

試用代入消去法，解下列各方程式：

1. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x+5y=7. \end{cases}$　　答. $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9y-5x=2, \\ 3y+4x=29. \end{cases}$　　答. $\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 35x-17y=59, \\ 7x-5y=-9. \end{cases}$　　答. $\begin{cases} x=8, \\ y=13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4y=3x+4, \\ 5y=4x+3. \end{cases}$　　答. $\begin{cases} x=8, \\ y=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}=4, \\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{15}=3. \end{cases}$　　答. $\begin{cases} x=14, \\ 4y=15. \end{cases}$

〔提示〕 撤去分母，再依法解之.

6. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}+\dfrac{y+3}{4}=3, \\ \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y+2}{7}=1. \end{cases}$　　答. $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

4. 比較消去法

(1)將兩方程式解出同元的相當式.

(2)使這兩個相當式相等,得一元一次方程式.

(3)解這一元一次方程式,得一元的值; 代入任一原方程式,得另一元的值.

例.　解 $\begin{cases} 3x-2y=2, \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-7=-12y. \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

從(1),　$x=\dfrac{2+2y}{3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

從(2),　$x=7-12y$. $\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\therefore\quad \dfrac{2+2y}{3}=7-12y.$

去分母,　$2+2y=21-36y.$

移項并集合,　$38y=19.$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{2}.$

代入(4),　$x=1.$　　答. $\begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

〔驗算〕 (1)　$3\times1-2\times\dfrac{1}{2}=2$, 即 $2=2$.

(2)　$1-7=-12\times\dfrac{1}{2}$, 即 $-6=-6$.

故此根爲正確.

習題三

試用比較消去法,解下列方程式:

1. $\begin{cases} x+4y=37, \\ 2x+5y=53. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x=9, \\ y=7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x+3y=100, \\ 3x-y=20. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x=10, \\ y=10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x-7y=2, \\ 12x-25y=-2. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=6, \\ 3x-4y=4. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x=12, \\ y=8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(2x-y)+4(x-2y)=87, \\ 2(3x-y)-3(x-y)=82. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x=23, \\ y=13. \end{cases}$

〔提示〕 撤去括號,集合以後,再依法解之.

6. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y+5}{3}=7, \\ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{2y-3}{5}=2. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$

〔提示〕 去分母,集合以後,再依法解之.

5. 三元一次聯立方程式的解法

(1)先取任兩個方程式,消去一個未知數,得一個二元一次方程式.

(2)次取這兩個方程式中的任一方程式,和第三個方程式,消去相同的未知數,又得一個二元一次方程式.

(3)再用解二元一次聯立方程式的方法,解所得的兩個二元一次方程式,得這二元的值.

(4)將所得這二元的值，代入任一原方程式中，得其餘一元的值．

例 1. 解 $\begin{cases} 6x+2y-5z=13, \cdots\cdots(1) \\ 3x+3y-2z=13, \cdots\cdots(2) \\ 7x+5y-3z=26. \cdots\cdots(3) \end{cases}$

解 先消去y:

(1)×3, $18x+6y-15z=39, \cdots\cdots(4)$

(2)×2, $6x+6y-4z=26. \cdots\cdots(5)$

(4)−(5), $12x-11z=13. \cdots\cdots(6)$

(2)×5, $15x+15y-10z=65, \cdots\cdots(7)$

(3)×3, $21x+15y-9z=78. \cdots\cdots(8)$

(8)−(7), $6x+z=13. \cdots\cdots(9)$

次消去z:

(9)×11, $66x+11z=143. \cdots\cdots(10)$

(6)+(10), $78x=156.$

代入(9)，
代入(1)，
$\therefore \begin{cases} x=2, \\ z=1, \\ y=3. \end{cases}$

例 2. 解 $\begin{cases} x+y=5, \cdots\cdots(1) \\ y+z=7, \cdots\cdots(2) \\ z+x=6. \cdots\cdots(3) \end{cases}$

解 (1)+(2)+(3)， $2x+2y+2z=18,$

以 2 除之， $x+y+z=9. \cdots\cdots(4)$

(4)−(2)，
(4)−(3)，
(4)−(1)，
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=4. \end{cases}$

習題四

解下列聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+2y+2z=11, \\ 2x+y+z=7, \\ 3x+4y+z=14. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y-z=20, \\ 2x+3y+6z=70, \\ x-y+6z=41. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=5, \\ y=6, \\ z=7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-4y=6z-16, \\ 4x-y-z=5, \\ x=3y+2(z-1). \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=2, \\ y=-2, \\ z=5. \end{cases}$

〔提示〕 撤去括號,并使所有未知項移至左邊,然後解之.

4. $\begin{cases} x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=6, \\ y+\frac{z}{2}+\frac{x}{3}=-1, \\ z+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=17. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=\_\_, \\ y=\_\_, \\ z=\_\_. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=8, \\ y+z=12, \\ z+x=10. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=3, \\ y=5, \\ z=7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y=1, \\ 3y-4z=7 \\ 4z-5x=2 \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=-6, \\ y=-7, \\ z=-7. \end{cases}$

〔提示〕 第一和第二方程式消去 y 以後，和第三方程式比較卽得.

第五章 因式分解

1. 因式分解(Factorization) 從一乘積式逆求相乘因式的

方法，叫做因式分解. 重要公式如下:

Ⅰ. $ma+mb=m(a+b)$.

Ⅱ. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Ⅲ. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Ⅳ. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

Ⅴ. $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$.

Ⅵ. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. $ma+mb=m(a+b)$ 的應用.

例 1. 分解 $4ax-2bx$ 爲因式.

[解] $4ax-2bx=2x(2a-b)$.

例 2. 分解 $a(x-y)+b(x-y)$ 爲因式.

[解] $a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b)$.

例 3. 分解$(a^2+b^2)(x+y)-(x-y)(a^2+b^2)$爲因式.

[解] $(a^2+b^2)(x+y)-(x-y)(a^2+b^2)$

$$=(a^2+b^2)(x+y-x+y)$$

$$=(a^2+b^2)2y=2(a^2+b^2)y.$$

習題一

試分解下列各式爲因式:

1. $3xy+y$.

2. a^3+a^2.

3. $5a^3b^2c-15a^2bc+30ab^3c$.

4. $a(x-5y)-b(x-5y)$.

5. $1-a+x(1-a)$.　　答. $(1+x)(1-a)$.

6. $(a+b)(x-y)-(a+b)(x+y)$.

答. $-2y(a+b)$.

3. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$的應用,

例 1. 分解 x^2-9 爲因式:

〔解〕 $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$.

例 2. 分解 $(x+y)^2-(x-y)^2$ 爲因式.

〔解〕
$$\begin{aligned}&(x+y)^2-(x-y)^2\\&=(x+y+x-y)(x+y-x+y)\\&=2x\times 2y=4xy.\end{aligned}$$

例 3. 分解 x^4-y^4 爲因式.

〔解〕
$$\begin{aligned}x^4-y^4&=(x^2)^2-(y^2)^2\\&=(x^2+y^2)(x^2-y^2)\\&=(x^2+y^2)(x+y)(x-y).\end{aligned}$$

習題二

分解下列各式爲因式:

1. x^2-16.

2. $(x+y)^2-1$.

3.　$(2m+n)^2-(m+2n)^2$.

答.　$3(m+n)(m-n)$.

4.　x^8-y^8.

5.　x^5-36xy^4.　　答.　$x(x^2+6y^2)(x^2-6y)$.

6.　$50x^2-8$.　　答.　$2(5x+2)(5x-2)$.

4.　$\left.\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \end{array}\right\}$ 的應用.

例 1.　分解 $4x^2+12xy+9y^2$ 爲因式.

〔解〕　$4x^2+12xy+9y^2$

$$=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$

$$=(2x+3y)^2.$$

例 2.　分解 $9x^3-6x^2+x$ 爲因式.

〔解〕　$9x^3-6x^2+x=x(9x^2-6x+1)$

$$=x[(3x)^2-2(3x)\times 1+1^2]=x(3x-1)^2.$$

習 題 三

分解下列各式爲因式:

1.　x^2+6x+9.

2.　$49x^2+28xy+4y^2$.

3.　$3a^3+6a^2b+3ab^2$.

4.　$(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.　　答.　$(x+y+z)^2$.

5.　$(a+b)^2+4(a+b)(c+d)+4(c+d)^2$.

答.　$(a+b+2c+2d)^2$.

6. $(x^2+2x)^2-8(x^2+2x)(x^2-x)+16(x^2-x)$.

答. ________.

5. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$的應用

例 1. 分解 $x^2+8x+15$ 爲因式.

〔解〕 $x^2+8x+15$

$=x^2+(3+5)x+3\times5=(x+3)(x+5)$.

例 2. 分解 x^2-5x+6 爲因式.

〔解〕 x^2-5x+6

$=x^2-(2+3)x+2\times3=(x-2)(x-3)$.

例 3. 分解 $x^2+2xy-15y^2$ 爲因式.

〔解〕 $x^2+2xy-15y^2=x^2+(-3+5)xy+(-3)\times5y^2$

$=(x-3y)(x+5y)$.

習題四

分解下列各式爲因式:

1. $x^2+13x+12$.

2. $x^2-7x+12$.

3. x^2+6x-7.

4. $x^2-3x-18$.

5. $x^2y^2-11xy-12$. 答. $(xy+1)(xy-12)$.

6. $x^2+6xy-7y^2$.

7. x^4-5x^2+4.

8. $x^4-13x^2+36.$

答. $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3).$

6. $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$的應用.

例 1. 分解 $3x^2-2x-1$ 爲因式.

〔解〕 $ac=3,\qquad bc+ad=-2,\qquad bd=-1.$

從$\left.\begin{array}{ll} a=3 & b=1\\ c=1 & d=-1\end{array}\right\}$, $bc+ad=1\times1+3\times(-1)=-2.$

$\therefore\quad 3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1).$

例 2. 分解 $6x^2+5x-6$ 爲因式.

〔解〕

從 $\left.\begin{array}{ll} 2 & 3\\ 3 & -2\end{array}\right\}$, $bc+ad=3\times3+2\times(-2)=5.$

$\therefore\quad 6x^2+5x-6=(2x+3)(3x-2).$

習 題 五

分解下列各式爲因式:

1. $5x^2+3x-2.$

2. $15x^2-22x+8.$

3. $2x^2+11x+12.$

4. $3x^2+7x-6.$

5. $3x^2+xy-2y^2.$

6. $10x^2-3xy-18y^2.$　　答. $(2x-3y)(5x+6y).$

7. $\left.\begin{array}{l} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{array}\right\}$ 的應用

例 1. 分解 $8x^3+y^3$ 爲因式.

〔解〕 $8x^3+y^3=(2x)^3+y^3$

$$=(2x+y)\{(2x)^2-(2x)y+y^2\}$$
$$=(2x+y)(4x^2-2xy+y^2).$$

例 2. 分解 $(a+b)^3+(a-b)^3$ 爲因式.

$$(a+b)^3+(a-b)^3$$
$$=\{(a+b)+(a-b)\}\{(a+b)^2-(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$$
$$=2a(a^2+2ab+b^2-a^2+b^2+a^2-2ab+b^2)$$
$$=2a(a^2+3b^2).$$

例 3. 分解 a^6-b^6 爲因式.

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

習題六

分解下列各式爲因式:

1. x^3+64y^3.
2. $125a^3-27b^3$. 答. $(5a-3b)(25a^2+15ab+9b^2)$.
3. a^3b^3-1.
4. $64x^6-1$.
5. $a^3+(a-b)^3$.

 答. $(2a-b)(a^2-ab+b^2)$.

6. x^9-y^6. 答. $(x^3-y^2)(x^6+x^3y^2+y^4)$.

8. 化爲 $ma+mb$ 的形式,再行分解因式

例 1. 分解 $6x^2-9ax+4bx-6ab$ 爲因式.

〔解〕 $6x^2-9ax+4bx-6ab$

$=(6x^2-9ax)+(4bx-6ab)$

$=3x(2x-3a)+2b(2x-3a)$

$=(2x-3a)(3x+2b)$.

例 2. 分解 $a^2b-a^2c+b^2c-b^2a$ 爲因式.

〔解〕 $a^2b-a^2c+b^2c-b^2a$

$=(a^2b-ab^2)-(a^2c-b^2c)$

$=ab(a-b)-c(a^2-b^2)$

$=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)$

$=(a-b)\{ab-c(a+b)\}$

$=(a-b)(ab-ac-bc)$.

例 3. 分解 $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$ 爲因式.

〔解〕 $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

$=abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy$

$=(abx^2+a^2xy)+(b^2xy+aby^2)$

$=ax(bx+ay)+by(bx+ay)$

$=(bx+ay)(ax+by)$.

例 4. 分解 $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ 爲因式.

〔解 1〕 $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$

$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)$

$=(x^2+1)(x^2+1+2x)$

$$=(x^2+1)(x^2+2x+1)$$

$$=(x^2+1)(x+1)^2.$$

〔解 2〕 $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$$=(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)$$

$$=x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)$$

$$=(x^2+2x+1)(x^2+1)$$

$$=(x+1)^2(x^2+1).$$

習題七

分解下列各式爲因式：

1. $x^2+xy-yz-xz$.　　答. $(x+y)(x-z)$.
2. $ax^2+1+ax+x$.　　答. $(x+1)(ax+1)$.
3. $ax^3+x+a+1$.　　答. $a(x+1)(x^2-x+2)$.
4. $x^3+y^3-x^2y-xy^2$.　　答. $(x+y)(x-y)^2$.
5. $x^3p^2-8y^3p^2-4x^3q^2+32y^3q^2$.

　　答. $(p+2q)(p-2q)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.
6. $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$.

　　答. $ab(a-b)$.
7. $x(x+3)-y(y+3)$.　　答. $(x-y)(x+y+3)$.
8. $1+(b-a^2)x^2-abx^3$.

　　答. $(1-ax)(1+ax+bx^2)$.
9. $2x^3+3x^2-1$.　　答. $(x+1)(x+1)(2x-1)$.

〔提示〕 將 $3x^2$ 析成 $2x^2+x^2$.

10. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$. 答. $(x-1)^2(x^2+1)$.

9. 化爲 a^2-b^2 的形式,再行分解因式

例 1. 分解 $2ab-a^2-b^2+c^2$ 爲因式.

〔解〕 $2ab-a^2-b^2+c^2$

$$=c^2-(a^2-2ab+b^2)=c^2-(a-b)^2$$

$$=(c+a-b)(c-a+b).$$

例 2. 分解 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$ 爲因式.

〔解〕 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$

$$=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$$

$$=(1-2ab+a^2b^2)-(a^2+2ab+b^2)$$

$$=(1-ab)^2-(a+b)^2$$

$$=(1-ab+a+b)(1-ab-a-b).$$

例 3. 分解 $x^4+x^2y^2+y^4$ 爲因式.

〔解〕 $x^4+x^2y^2+y^4$

$$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

習 題 八

分解下列各式爲因式:

1. $x^2+2xy+y^2-a^2$.　答. $(x+y+a)(x+y-a)$.

2. $4ab+1-4a^2-b^2$　答. $(1+2a-b)(1-2a+b)$.

3. x^4+x^2+1.　答. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

4. x^4-3x^2+1.　答. ________.

[提示]　將 $-3x^2$ 析爲 $-2x^2$ 及 $-x^2$.

5. $x^4-34x^2y^2+y^4$.　答. ________.

[提示]　將 $-34x^2y^2$ 析爲 $2x^2y^2$ 及 $-36x^2y^2$.

10. 化爲 $x^2+(a+b)x+ab$ 的形式,再行分解因式.

例 1. 分解 $(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$ 爲因式.

[解]　設 $x^2-4x=X$,

原式 $=X^2-2X-15=(X-5)(X+3)$

$=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)$

$=(x-5)(x+1)(x-1)(x-3)$.

例 2. 分解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$ 爲因式.

[解]　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$.

設　$x^2+5x=X$,

原式 $=(X+4)(X+6)-24$

$=X^2+10X+24-24$

$=X^2+10X=X(X+10)$

$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$

$$=x(x+5)(x^2+5x+10).$$

習 題 九

分解下列各式爲因式：

1. $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8.$

答．$(x+1)(x-1)(x-2)(x-4).$

2. $(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)-24.$

答．________.

3. $(x+4)(x-1)(x-3)(x+2)-24.$

答．________.

第六章　最高公因式與最低公倍式

1. 最高公因式（Highest common factor）　幾個式的公因式，往往不止一個；其中次數最高的一個，叫做最高公因式．通常用 $H.C.F.$ 表之．

2. 最高公因式的求法

(1)分解因式法．　(2)輾轉相除法．

3. 分解因式法　先分解各式爲因式．次取各公因式的指數最低者連乘之，便得各式的 $H.C.F.$

(1)獨項式（Monomial）的求法．

例 1.　求 $20x^2y^6z$ 與 $25x^3y^2z^2$ 的 $H.C.F.$

〔解〕　$20x^2y^6z=2^2\cdot5\cdot x^2\cdot y^6\cdot z,$

$25x^3y^2z^2=5^2\cdot x^3\cdot y^2\cdot z^2.$

$\therefore\ H.C.F.=5x^2y^2z.$

例 2. 求 $(a+b)^3$ 與 $(a+b)^2(a-b)^4$ 的 $H.C.F.$

〔解〕 $(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b).$

$(a+b)^2(a-b)^4=(a+b)^2\cdot(a-b)^4.$

$\therefore\ H.C.F.=(a+b)^2.$

例 3. 求 $3(a+b)^3,24(a+b)^2$ 與 $12(a+b)^2(a-b)$ 的 $H.C.F.$

〔解〕 $3(a+b)^3=3\cdot(a+b)^2\cdot(a+b),$

$24(a+b)^2=3\cdot 8\cdot(a+b)^2,$

$12(a+b)^2(a-b)=3\cdot 4(a+b)^2\cdot(a-b),$

$\therefore\ H.C.F.=3(a+b)^2.$

習 題 一

求下列各組式的 $H.C.F.$

1. $6a^3b,\ 2a^2b^3.$
2. $17a^4b^3c,\ 51c^4d.$
3. $4a^2x^2,\ 6a^3x^3,\ 12ax^2.$
4. $15a^2bx^2y^2,\ -45b^3y^4,\ -90a^4b^4x^4y^4.$
5. $6a^2(a+b)^6,8a(a+b)^5,10a^3(a+b)^7.$

(2)多項式 (Polynomial) 的求法

例 1. 求 $x^2-4xy+4y^2$ 與 $x^2-3xy+2y^2$ 的 $H.C.F.$

〔解〕 $x^2-4xy+4y^2=(x-2y)(x-2y)$,

$x^2-3xy+2y^2=(x-2y)(x-y)$.

$\therefore$ $H.C.F.=x-2y$.

例 2. 求 $6a^3-12a^2b+6ab^2$, $2a^3-8a^2b+6ab^2$ 與 $12a^4-12a^2b^2$ 的 $H.C.F.$

〔解〕 $6a^3-12a^2b+6ab^2=6a(a^2-2ab+b^2)$

$=6a(a-b)^2$,

$2a^3-8a^2b+6ab^2=2a(a^2-4ab+3b^2)$

$=2a(a-b)(a-3b)$,

$12a^4-12a^2b^2=12a^2(a+b)(a-b)$.

$\therefore$ $H.C.F.=2a(a-b)$.

習題二

求下列各組式的 $H.C.F.$

1. a^2-b^2, $4a^2b+4ab^2$. 答. $a+b$.
2. m^2-4x^2, m^2+2mx. 答. $m+2x$.
3. $x^2-7x+12$, $x^2-8x+15$. 答. $x-3$.
4. x^4-16y^4, $x^2-4xy+4y^2$. 答. $x-2y$.
5. x^2-3x-4, $x^2-8x+16$, x^3-16x.

   答. ________.
6. $x^2+3x-54$, x^2+x-42, $x^2+2x-48$.

   答. ________.

7. $2a^2+9a+4$, $2a^2+11a+5$, $2a^2-3a-2$.

答. ______.

8. $a^2+4ab+3b^2$, $a^2+2ab-3b^2$, $a^2+9ab+18b^2$.

答. ______.

4. **輾轉相除法**　用低次式除高次式，至餘式次數低於除式時，再用餘式來除除式. 如是輾轉相除，至餘式爲零時的最後除式，便是兩式的 $H.C.F.$

例 1. 求 $2x^3+x^2+x-1$ 與 x^3-2x^2-2x-3 的 $H.C.F.$

〔解〕

$x+1$	x^3-2x^3-2x-3		$2x^3+x^2+x-1$	2
	x^3+x^2+x		$2x^3-4x^2-4x-6$	
-3	$-3x^2-3x-3$	5	$5x^2+5x+5$	
	x^2+x+1		x^2+x+1	
	x^2+x+1			
	0			

$\therefore\ H.C.F.=x^2+x+1.$

例 2. 求 $24x^4-2x^3-60x^2-32x$ 與 $18x^4-6x^3-39x^2-18x$ 的 $H.C.F.$

〔解〕 $24x^4-2x^3-60x^2-32x=2x(12x^3-x^2-30x-16)$;

$18x^4-6x^3-39x^2-18x=3x(6x^3-2x^2-13x-6)$.

先求出 $H.C.F.=x$. 次求 $12x^3-x^2-30x-16$ 與 $6x^3-2x^2-13x-6$ 的 $H.C.F.$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
2x & 6x^3-2x^2-13x-6 & 12x^3-x^2-30x-16 & 2 \\
 & 6x^3-8x^2-8x & 12x^3-4x^2-26x-12 & \\
\hline
2 & 6x^2-5x-6 & 3x^2-4x-4 & x \\
 & 6x^2-8x-8 & 3x^2+2x & \\
\cline{2-3}
 & 3x+2 & -6x-4 & -2 \\
 & & -6x-4 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$\therefore\ H.C.F.=x(3x+2).$

習題三

求下列各組式的 $H.C.F.$

1. $x^3+2x^2-13x+10$, $x^3+x^2-10x+8$.

答. x^2-3x+2.

2. x^3-x^2-5x-3, $x^3-4x^2-11x-6$.

答. x^2+2x+1.

3. $a^3-5a^2x+7ax^2-3x^3$, $a^3-3ax^2+2x^3$.

答. $a^2-2ax+x^2$.

4. $3x^4-3x^3-2x^2-x-1$, $9x^4-3x^3-x-1$.

答. $3x^2+1$.

5. $9x^2-15x^3-45x^4-12x^5$,

$42x-49x^2-203x^3-84x^4$. 答. $x(3+4x)$.

〔提示〕 仿例2.

5. 最低公倍式 (Lowest common multiple)　幾個式的公倍式，不止一個；其中次數最低的一式，叫做最低公倍式．通常用 $L.C.M.$ 表之．

6. 最低公倍式的求法

(1)分解因式法．　(2)先求 $H.C.F.$，再求 $L.C.M.$ 法．

7. 分解因式法　先將各式分解因式，次取各不同因式，及公因式的指數最高者連乘之，便得各式的 $L.C.M.$

例 1.　求 $4ab^2$ 與 $4a^4-4a^2b^3$ 的 $L.C.M.$

〔解〕　$4ab^2=4ab^2.$

$4a^4-4a^2b^3=4a^2(a^2-b^3).$

$\therefore\quad L.C.M.=4a^2b^2(a^2-b^3).$

例 2.　求 $a^2-b^2, a^2+2ab+b^2$ 與 $b-a$ 的 $L.C.M.$

〔解〕　$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$

$b-a=-(a-b).$

$\therefore\quad L.C.M.=(a+b)^2(a-b).$

例 3.　求 $x^2+5x+6,\ x^2+4x+3$ 與 x^2+x 的 $L.C.M.$

〔解〕　$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),$

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3),$

$x^2+x=x(x+1).$

$\therefore\quad L.C.M.=x(x+1)(x+2)(x+3).$

習 題 四

求下列各組式的 $L.C.M.$

1. $9x$, $3xy$, $2(x+y)$.

2. $4(x-y)^2$, $3(x+y)^3$, $12(x^2-y^2)$.

3. $6(x+y)$, $3x-3y$, $6xy+6y^2$. 答. ________.

4. a^2-b^2, $a^2+ab-2b^2$. 答. ________.

5. $3x^2+3x$, $5x^2-5$, $15x$. 答. ________.

6. $2x^2-x-1$, $2x^2+x-3$, $4x^2+8x+3$. 答. ________.

7. x^3-x^2+x-1, x^3-x. 答. ________.

8. $12a^2+23ab+10b^2$, $4a^2+9ab+5b^2$, $3a^2+5ab+2b^2$. 答. ________.

8. 先求 $H.C.F.$ 再求 $L.C.M.$ 法

先用輾轉相除法,求得 $H.C.F.$;再用 $H.C.F.$ 除兩式的乘積,便得 $L.C.M.$

例. 求 $x^3-9x^2+26x-24$ 與 $x^3-12x^2+47x-60$ 的 $L.C.M.$

〔解〕

1	$x^3-9x^2+26x-24$	$x^3-12x^2+47x-60$	$x-5$
	$x^3-12x^2+47x-60$	x^3-7x^2+12x	
3	$3x^2-21x+36$	$-5x^2+35x-60$	
	$x^2-7x+12$	$-5x^2+35x-60$	
		0	

$$H.C.F.=x^2-7x+12.$$

$$\therefore L.C.M.=\frac{(x^3-9x^2+26x-24)(x^3-12x^2+47x-60)}{x^2-7x+12}$$

$$=(x-2)(x^3-12x^2+47x-60).$$

習題五

求下列各組式的 $L.C.M.$

1. $x^2-10x+16$, $x^3-15x^2+48x+64$.

答. ______.

2. x^3-2x+1, $x^4+5x^5-3x^2+6$.

答. ______.

3. $4x^2+11x-3$, $3x^3+7x^2-6x$, $12x^2-11x+2$.

答. ______.

〔提示〕 先求(1)(2)兩式的 $L.C.M.$，再以 $L.C.M.$ 與(3)式又求一次.

第七章　分式

1. 分式(Fraction) 兩式相除，被除式叫做分子(Numerator)，除式叫做分母(Denominator). 除式(分母)中含文字的代數式，叫做分式.

2. 基本原則(Fundamental principle) 一分式可用不為零的任何數乘或除分子、分母，分式之值不變：

$$\frac{x}{y}=\frac{ax}{ay}；\text{或}\frac{ax}{ay}=\frac{ax\div a}{ay\div a}=\frac{x}{y}.$$

3. 約分（Reduction） 約一分式爲最簡分式的方法，叫做約分，係根據基本原則，用分母、分子的 $H.C.F.$ 除分子、分母，使成互質式，卽是最簡分式.

例 1. 約 $\dfrac{6xy^2z^4}{9x^2y^2z^3}$ 爲最簡分式.

〔解 1〕 分子、分母的 $H.C.F. = 3xy^2z^3$.

$$\therefore \quad \frac{6xy^2z^4}{9x^2y^2z^3} = \frac{6xy^2z^4 \div 3xy^2z^3}{9x^2y^2z^3 \div 3xy^2z^3} = \frac{2z}{3x}.$$

〔解 2〕 $$\frac{6xy^2z^4}{9x^2y^2z^3} = \frac{\cancel{3}\cdot 2\cancel{x}\cancel{y^2}\cancel{z^3}\cdot z}{\cancel{3}\cdot 3\cancel{x}\cdot x\cdot \cancel{y^2}\cdot \cancel{z^3}} = \frac{2z}{3x}.$$

例 2. 約分 $\dfrac{a^3-6a^2+8a}{6a^4-24a^2}$.

〔解〕 $$\frac{a^3-6a^2+8a}{6a^4-24a^2} = \frac{a(a^2-6a+8)}{6a^2(a^2-4)}$$
$$= \frac{a(a-2)(a-4)}{6a^2(a-2)(a+2)}$$
$$= \frac{a-4}{6a(a+2)}.$$

習題一

約分下列各式：

1. $\dfrac{48a^3b^5}{16a^2b^2}$.

2. $\dfrac{34a^5b^5c^5}{85a^7b^9c^4}$.

3. $\dfrac{9a^2b+12ab^2}{9a^3b-15ab^3}$.

4. $\dfrac{4a^2-9b^2}{2a+3b}$.

5. $\dfrac{3x^2-10x+3}{9x^2-6x+1}$. 答. $\dfrac{x-3}{3x-1}$.

6. $\dfrac{a^2-7a+12}{a^2-8a+15}$. 答. $\dfrac{a-4}{a-5}$.

7. $\dfrac{2m^2-mn-6n^2}{3m^2-7mn+2n^2}$. 答. ______.

8. $\dfrac{ax+ay-cx-cy}{ax+ay+cx+cy}$. 答. $\dfrac{a-c}{a+c}$.

4. 通分(Reduction to common denominator) 將不同分母的分式,變成分母相同的分式的方法,叫做通分.

5. 通分的法則 先求各分式分母的 $L.\ C.\ M.$,再用原分母除 $L.\ C.\ M.$,用除得之商,乘各分式的分子與分母.

例 1. 通分$\dfrac{7a}{6b^2x^2}$, $\dfrac{2b}{3a^3}$與$\dfrac{5xy}{4ab^2}$.

〔解〕 分母的 $L.\ C.\ M.=12a^3b^2x^2$.

$12a^3b^2x^2\div6b^2x^2=2a^3$,

$12a^3b^2x^2\div3a^3=4b^2x^2$,

$12a^3b^2x^2\div4ab^2=3a^2x^2$.

$$\therefore\ \frac{7a}{6b^2x^2}=\frac{7a\cdot2a^3}{12a^3b^2x^2}=\frac{14a^4}{12a^3b^2x^2},$$

$$\frac{2b}{3a^3}=\frac{2b\cdot4b^2x^2}{12a^3b^2x^2}=\frac{8b^3x^2}{12a^3b^2x^2},$$

$$\frac{5xy}{4ab^2}=\frac{5xy\cdot3a^2x^2}{12a^3b^2x^2}=\frac{15a^2x^3y}{12a^3b^2x^2}.$$

例 2. 通分$\dfrac{3x}{x^2-9}$, $\dfrac{3x-2}{x^2-4x+3}$與$\dfrac{5}{x^2+2x-3}$.

〔解〕 原式的分母,先分解爲因式,因之上式可改爲

$\dfrac{3x}{(x+3)(x-3)}$, $\dfrac{3x-2}{(x-1)(x-3)}$與$\dfrac{5}{(x-1)(x+3)}$.

分母的 $L.C.M.=(x+3)(x-3)(x-1)$.

$$\therefore\quad \frac{3x}{x^2-9}=\frac{3x\cdot(x-1)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$$
$$=\frac{3x^2-3x}{(x+3)(x-3)(x-1)},$$
$$\frac{3x-2}{x^2-4x+3}=\frac{(3x-2)\cdot(x+3)}{(x-3)(x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{3x^2+7x-6}{(x+3)(x-3)(x-1)},$$
$$\frac{5}{x^2+2x-3}=\frac{5\cdot(x-3)}{(x-1)(x+3)(x-3)}$$
$$=\frac{5x-15}{(x+3)(x-3)(x-1)}.$$

習題二

通分下列各組分式:

1. $\dfrac{2a^2}{3x^2}$, $\dfrac{5x^2}{4a^2}$.

2. $\dfrac{a^2b}{4c^2d}$, $\dfrac{3ab}{2c^4d^3}$.

3. $\dfrac{3a+2}{3a-9}$, $\dfrac{2a^2+1}{a^2-9}$.

4. $\dfrac{3}{x+a}$, $\dfrac{5}{x-a}$, $\dfrac{6}{x^2-a^2}$.

5. $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$, $\dfrac{2b}{a^2-ab}$, $\dfrac{ab}{ab-b^2}$. 答. ______.

6. $\dfrac{p}{p-q}$, $\dfrac{6p}{p^2+2pq+q^2}$, $\dfrac{9p}{p^2-q^2}$. 答. ______.

7. $\dfrac{3a}{a^2+2ab+b^2}$, $\dfrac{4a}{a^2-2ab+b^2}$, $\dfrac{6a}{a^2-b^2}$.

答. ______.

8. $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$, $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

答. ________.

6. 分式加減法 (Addition and subtraction of fractions)

(1)分母相同的分式相加減，即以各分子加減的結果爲新分子，分母不變.

(2)分母不同的分式相加減，應先通分，再依(1)運算.

例 1.　化簡　$\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}-\dfrac{x}{x+y}$.

〔解〕

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+y}+\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x+y}&=\frac{2x+y-x}{x+y}\\&=\frac{x+y}{x+y}\\&=1.\end{aligned}$$

例 2.　化簡　$\dfrac{a}{a^2+ab}+\dfrac{a+b}{ab-b^2}-\dfrac{b}{a^2-b^2}$.

〔解〕

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab-b^2}-\frac{b}{a^2-b^2}\\&=\frac{a}{a(a+b)}+\frac{a+b}{b(a-b)}-\frac{b}{(a+b)(a-b)}\\&=\frac{ab(a-b)+(a+b)a(a+b)-bab}{ab(a+b)(a-b)}\\&=\frac{a^2b-ab^2+a^3+2a^2b+ab^2-ab^2}{ab(a+b)(a-b)}\\&=\frac{a^3+3a^2b-ab^2}{ab(a+b)(a-b)}\\&=\frac{\cancel{a}(a^2+3ab-b^2)}{\cancel{a}b(a+b)(a-b)}\\&=\frac{a^2+3ab-b^2}{b(a+b)(a-b)}.\end{aligned}$$

例 3. 化簡$\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

〔解〕 調整分母:

$$b-a=-(a-b),$$

$$c-a=-(a-c),$$

$$c-b=-(b-c).$$

$$\therefore 原式=\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(a-b)(b-c)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0.$$

習 題 三

化簡下列各式:

1. $\dfrac{2m+n}{m+mn}+\dfrac{2n+m}{m+mn}$.

2. $\dfrac{a^3-a^2}{a+1}-\dfrac{2a^2}{a+1}$.

3. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$. 答. $\dfrac{4ab}{(a+b)(a-b)}$.

4. $\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{2}{3-2a}+\dfrac{15}{9-4a^2}$. 答. ________.

5. $\dfrac{x^2}{x^2-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x}{1-x}$. 答. ________.

6. $a-3-\dfrac{a^2+6}{a-2}$.　　答. ________.

〔提示〕 $a-3=\dfrac{a-3}{1}$.

7. $a^2-1-\dfrac{a^2-1}{a-1}$.　　答. ________.

8. $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{x+1}{6+x-x^2}-\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}$.

答. ________.

9. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

答. ________.

10. $\dfrac{p-a}{(p-q)(p-r)}+\dfrac{q-a}{(q-r)(q-p)}+\dfrac{r-a}{(r-p)(r-q)}$.

答. 0.

7. 分式乘法(Multiplication of fractions)

(1)各分子相乘爲新分子，各分母相乘爲新分母.

(2)各分子與分母間有公因式時，應先約分.

例 1. 化簡 $\dfrac{4a^3b}{3cd^5}\times\dfrac{6c^2d^2}{5ax}\times\dfrac{7x^4y}{2ab^2}$.

〔解〕 原式 $=\dfrac{4\cdot6\cdot7a^3bc^2d^2x^4y}{3\cdot5\cdot2\cdot a\cdot ab^2cd^5x}$

$=\dfrac{28acx^3y}{5bd^3}$.

例 2. 化簡 $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-5ab+6b^2}\times\dfrac{a^3-4ab^2}{3a^2+3ab+3b^2}$

$\times\dfrac{6a-18b}{7(a-b)^2}$.

〔解〕 原式 $=\dfrac{\cancel{a^2+ab+b^2}}{(\cancel{a-2b})(\cancel{a-3b})}\times\dfrac{a(a+2b)(\cancel{a-2b})}{\cancel{3}(\cancel{a^2+ab+b^2})}$

$$\times \frac{{}^{2}\cancel{6}(\cancel{a}-\cancel{3}\cancel{b})}{7(a-b)^2}=\frac{2a(a+2b)}{7(a-b)^2}.$$

習題四

化簡下列各式:

1. $\dfrac{14x^2y^3}{15z^2}\times\dfrac{20z^3}{21x^3z^3}$.　　答. ________.

2. $\dfrac{3x^2y^2}{8z^4}\times\dfrac{6y^2z^3}{5x^5}\times\dfrac{10a^2z^2}{9y^2}$.　　答. ________.

3. $\dfrac{4a^2-9b^2}{2a+3b}\times\dfrac{1}{2a-3b}$.　　答. 1.

4. $\dfrac{5a}{a^2-5a+6}\times\dfrac{a^2-6a+9}{5a^2+5a}$.　　答. $\dfrac{a-3}{a(a+1)(a-2)}$

5. $\dfrac{x^2-1}{x+3}\times\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x}\times\dfrac{7}{(x-1)^2}$.

答. ________.

6. $\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2b-ab^2}\times\dfrac{a^3-ab^2}{a^3+ab^2}$.　　答. $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$.

7. $\dfrac{1}{(x-1)^2}\times\dfrac{x^2-6x+5}{6x+6}\times\dfrac{5x^2-5}{x}$.

答. ________.

8. $\dfrac{a^2+18a+80}{a^2+5a-50}\times\dfrac{a^2+6a-7}{a^2+15a+56}\times\dfrac{a-5}{a-1}$.

答. ________.

8. 分式除法 (Division of fractions)　顚倒除式的分子、分母,去乘被除式即得.

例 1. 化簡　$\dfrac{4a^3b}{3x^2y}\div\dfrac{4ab^3}{3xy}$.

〔解〕　原式　$=\dfrac{4a^3b}{3x^2y}\times\dfrac{3xy}{4ab^3}=\dfrac{a^2}{b^2x}.$

例 2.　化簡　$\dfrac{x-y}{x^3+xy^2}\div\dfrac{x^2-y^2}{x^2y+y^3}.$

〔解〕　原式　$=\dfrac{\cancel{x}-\cancel{y}}{x(\cancel{x}^2+\cancel{y}^2)}\times\dfrac{y(\cancel{x}^2+\cancel{y}^2)}{(x+y)(\cancel{x}-\cancel{y})}$

$=\dfrac{y}{x(x+y)}.$

習題五

化簡下列各式:

1. $\dfrac{17a^4b^4}{7xy^2}\div\dfrac{3a^4b^3}{14x^2y^2}.$　　答. $\dfrac{34bx}{3}.$

2. $\dfrac{2n-1}{15ax^3}\div\dfrac{6n-3}{5x}.$　　答. $\dfrac{1}{9ax^2}.$

3. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}\div\dfrac{a^3+a^2b}{ab^2+b^3}.$　　答. $\dfrac{b^2(a+b)}{a^2(a-b)}.$

4. $\dfrac{x^2+14x-15}{x^2+4x-5}\div\dfrac{x^2+12x-45}{x^2+6x-27}.$　　答. $\dfrac{x+9}{x+5}.$

5. $\left(\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}\right)\div\left(\dfrac{3x}{x-3}-\dfrac{2x}{x-2}\right).$

答. __________.

6. $\dfrac{3b^2}{a^2-ab}\times\dfrac{a(a+2b)}{ab+b^2}\div\dfrac{2ab}{a^2-b^2}.$

答. __________.

7. $\dfrac{2a^2-13a+15}{4a^2-9}\times\dfrac{2a+1}{2a-1}\div\dfrac{9a-5}{2a-1}.$

答. __________.

8. $\dfrac{a^2+4ab+3b^2}{a^2-b^2}\times\dfrac{(a-b)^2}{a+3b}\div\dfrac{a-b}{a+b}$.

答. ________.

9. 叠分式（Complex fraction） 分子、分母含分式的分式，叫做叠分式.

10. 叠分式運算法則 認清分子、分母，依分式四則化爲最簡分式.

例 1. 化簡 $\dfrac{\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{a}{x}+1}{\dfrac{b^2}{x^2}-\dfrac{b}{x}+1}$.

〔解〕 原式 $=\dfrac{\dfrac{a^2+ax+x^2}{x^2}}{\dfrac{b^2-bx+x^2}{x^2}}$

$$=\frac{a^2+ax+x^2}{\cancel{x^2}}\times\frac{\cancel{x^2}}{b^2-bx+x^2}$$

$$=\frac{a^2+ax+x^2}{b^2-bx+x^2}.$$

例 2. 化簡 $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}}$.

〔解〕 原式 $=\dfrac{\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}}{\dfrac{x+y-x+y}{(x+y)(x-y)}}$

$$=\frac{\cancel{2}(x^2+y^2)}{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}\times\frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{2}y}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{y}.$$

例 3. 化簡 $$\frac{a}{1+\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{a}}}.$$

〔解〕 原式
$$=\frac{a}{1+\dfrac{a}{\dfrac{a+1}{a}}}$$
$$=\frac{a}{1+\dfrac{a^2}{a+1}}$$
$$=\frac{a}{\dfrac{a^2+a+1}{a+1}}$$
$$=a\times\frac{a+1}{a^2+a+1}$$
$$=\frac{a^2+a}{a^2+a+1}.$$

習 題 六

化簡下列各式:

1. $$\frac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}}.$$ 答. ________

2. $$\frac{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}}.$$ 答. ________

3. $$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}}.$$ 答. ________

4. $$\frac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}+\frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}.$$ 答. ______

5. $$\frac{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}}{1+\dfrac{1}{x^2-5x+6}}.$$ 答. ______

6. $$\frac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}\div\frac{1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$ 答. $\dfrac{b}{a}$.

7. $$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}.$$ 答. $\dfrac{a+1}{2a+1}$.

8. $$\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\frac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$$ 答. $\dfrac{2}{x^3}$.

第八章 分方程式與文字方程式

1. 分方程式 (Fractional equation) 分式分母含有未知數的方程式，叫做分方程式.

2. 分方程式的解法

(1)先用各分式分母的 $L.\ C.\ M.$ 徧乘方程式，化爲整方程式，再依法解之.

(2)解出的結果，必須代入原方程式驗算.

例 1. 解 $$\frac{4}{5x}-\frac{7}{10x}=\frac{1}{10}.$$

〔解〕用分母的 $L.\ C.\ M.$ 偏乘方程式的兩邊，　得$8-7=x$，

$\therefore \qquad x=1.$

〔驗算〕
$$\frac{4}{5\times 1}-\frac{7}{10\times 1}=\frac{1}{10},$$
$$\frac{8-7}{10}=\frac{1}{10},$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10}.$$

$\therefore \qquad x=1$ 爲此方程式的根.

例 2.　解　$\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{14}{x^2-9}.$

〔解〕　用分母的 $L.\ C.\ M.=(x+3)(x-3)$ 偏乘方程式的兩邊，得

$$3(x+3)-7(x-3)=14,$$
$$3x+9-7x+21=14,$$
$$-4x=-16,$$

$\therefore \qquad x=4.$

〔驗算〕
$$\frac{3}{4-3}-\frac{7}{4+3}=\frac{14}{16-9},$$
$$3-1=2,$$
$$2=2.$$

$\therefore \qquad x=4$ 爲此方程式的根.

例 3.　解$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+6}.$

〔解〕　方程式的兩邊分別通分，

$$\frac{x^2+6x+5-x^2-6x-8}{(x+2)(x+5)}=\frac{x^2+8x+12-x^2-8x-15}{(x+3)(x+6)}.$$

卽
$$\frac{-3}{(x+2)(x+5)}=\frac{-3}{(x+3)(x+6)}.$$
以 -3 除之，且去分母，
$$x^2+9x+18=x^2+7x+10.$$
移項及集合，
$$2x=-8,$$
$$\therefore \quad x=-4.$$
［驗算］
$$\frac{-4+1}{-4+2}-\frac{-4+4}{-4+5}=\frac{-4+2}{-4+3}-\frac{-4+5}{-4+6},$$
$$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$
$\therefore$ $x=-4$ 爲此方程式的根.

習 題 一

解下列方程式：

1. $\dfrac{42}{x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x}=20.$ 答. ________

2. $\dfrac{12+x}{2x}=\dfrac{12+2x}{3x}.$ 答. ________

3. $\dfrac{20-x}{x-8}=\dfrac{x-6}{15-x}.$ 答. ________

4. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{x+2}.$ 答. ________

5. $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{24}{x^2-9}.$ 答. ________

6. $\dfrac{4x-7}{6x+18}=\dfrac{7x+2}{10x+30}-\dfrac{11}{45}.$ 答. ________

7. $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{3}{x-5}=\dfrac{1}{x}.$ 答. ________

8. $\frac{10x+1}{5}-\frac{4x+7}{6x+11}=\frac{6x-2}{3}$. 答. ______

9. $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}$. 答. ______

10. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-8}{x-9}$. 答. ______

3. 分式聯立方程式

例 1. 解 $\begin{cases} \frac{8}{x}-\frac{9}{y}=1, & \cdots\cdots(1) \\ \frac{10}{x}+\frac{6}{y}=7. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解 1〕

(1)×2, $\frac{16}{x}-\frac{18}{y}=2,$ ……(3)

(2)×3, $\frac{30}{x}+\frac{18}{y}=21.$ ……(4)

(3)+(4), $\frac{46}{x}=23,$

代入(1) $\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$

〔解 2〕 設 $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$,則原方程式爲:

$$8u-9v=1, \quad \cdots\cdots(3)$$

$$10u+6v=7. \quad \cdots\cdots(4)$$

依前法解之,得 $u=\frac{1}{2}$,

$v=\frac{1}{3}$.

代入,則得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$, $\therefore \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

例 2. 解
$$\begin{cases}\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4y}-\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{4}, & \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3y}=0, & \cdots\cdots(2)\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{5y}+\dfrac{4}{z}=2\dfrac{2}{15}. & \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

〔解〕

(1)×12, $\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{z}=3$, ……(4)

(2)×3 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=0$, ……(5)

(3)×15 $\dfrac{15}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{60}{z}=32$. ……(6)

(4)×15+(6)得 $\dfrac{105}{x}+\dfrac{42}{y}=77$.

以 7 除之, $\dfrac{15}{x}+\dfrac{6}{y}=11$, ……(7)

(5)×6, $\dfrac{18}{x}-\dfrac{6}{y}=0$. ……(8)

(7)+(8), $\dfrac{33}{x}=11$,

代入(5) $\therefore\begin{cases}x=3,\\ y=1,\\ z=2.\end{cases}$

習 題 二

解下列方程式:

1. $\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=3,\\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{3}{y}=4.\end{cases}$　　答. $\begin{cases}x=5,\\ y=3.\end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{6}{x}-\dfrac{7}{y}=2, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{14}{y}=3. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=2, \\ y=7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{12}{x}-\dfrac{4}{y}=2, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=0. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+4=0, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}+1=0, \\ \dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{x}=14. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{1}{3}, \\ z=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=36, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=28, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{2z}=20. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8}, \\ y=\dfrac{1}{12}, \\ z=\dfrac{1}{16}. \end{cases}$

4. 文字方程式（Literal equation） 用文字表已知數的方程式,叫做文字方程式. 其解法與數字方程式（Numeral equation）同.

例 1. 解 $$\frac{a+x}{a-x}=\frac{a+b}{a-b}.$$

〔解〕 去分母，$(a+x)(a-b)=(a+b)(a-x)$,

撤去括號， $$a^2-ab+ax-bx=a^2-ax+ab-bx,$$

即 $$2ax=2ab,$$

$$\therefore \quad x=b.$$

〔驗算〕 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}.$$

$\therefore$ $x=b$ 爲此方程式的根.

例 2. 解 $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=-\frac{3b+a}{a}$.

〔解〕 去分母, $ax-a^2+bx-b^2=-3b^2-ab$.

移項, $ax+bx=a^2+b^2-3b^2-ab$.

集合及分解因式, $(a+b)x=a^2-ab-2b^2$.

用 $a+b$ 除之, $\therefore\quad x=a-2b$.

〔驗算〕 $$\frac{a-2b-a}{b}+\frac{a-2b-b}{a}=-\frac{3b+a}{a},$$

$$-2+\frac{a-3b}{a}=-\frac{3b+a}{a},$$

$$-\frac{3b+a}{a}=-\frac{3b+a}{a}.$$

$\therefore$ $x=a-2b$ 爲此方程式的根.

習 題 三

解下列各方程式:

1. $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9$. 答. $\frac{b-a}{8}$.

2. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a}{b}$. 答. $\frac{a+b}{a-b}$.

3. $\frac{a+x}{a-x}=\frac{a+b}{a-b}$. 答. b.

4. $\frac{a-bm}{mx}-\frac{c-bn}{nx}=1$. 答. ________

5. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-c}{x-a}=2$. 答. ________

6. $\frac{x-2a}{a+b}-\frac{x+2b}{2a+2b}=\frac{3x-3a}{3b}$. 答. ________

5. 文字聯立方程式 (Literal simultaneous equations)

例 1. 解 $\begin{cases} ax+by=c, & \cdots\cdots(1) \\ mx+ny=p. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

［解］ $(1)\times n$, $anx+bny=cn$, ……(3)

$(2)\times b$ $bmx+bny=bp$. ……(4)

$(3)-(4)$ $anx-bmx=cn-bp$,

卽 $(an-bm)x=cn-bp$.

用 $an-bm$ 除之， $\therefore x=\dfrac{cn-bp}{an-bm}$. ……(5)

$(1)\times m$, $amx+bmy=cm$, ……(6)

$(2)\times a$, $amx+any=ap$. ……(7)

$(7)-(6)$ $any-bmy=ap-cm$,

卽 $(an-bm)y=ap-cm$.

用 $an-bm$ 除之， $\therefore y=\dfrac{ap-cm}{an-bm}$.

例 2. 解 $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1, & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=1. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

［解 1］ $(1)\times d$, $\dfrac{ad}{x}+\dfrac{bd}{y}=d$, ……(3)

$(2)\times b$, $\dfrac{bc}{x}+\dfrac{bd}{y}=b$. ……(4)

$(3)-(4)$ $\dfrac{ad}{x}-\dfrac{bc}{x}=d-b$,

卽 $(d-b)x=ad-bc$.

用 $d-b$ 除之，得 $x=\dfrac{ad-bc}{d-b}$. ……(5)

(1)×c,　$$\frac{ac}{x}+\frac{bc}{y}=c, \cdots\cdots(6)$$

(2)×a,　$$\frac{ac}{x}+\frac{ad}{y}=a. \cdots\cdots(7)$$

(6)−(7),　$$\frac{bc}{y}-\frac{ad}{y}=c-a,$$

即　$$(c-a)y=bc-ad.$$

用 $c-a$ 除之,得　$$y=\frac{ad-bc}{a-c}.$$

〔解 2〕 設$\frac{1}{x}=X$,　$\frac{1}{y}=Y$,

則原方程式為 $\begin{cases} aX+bY=1, \\ cX+dY=1. \end{cases}$

解之,得　$$X=\frac{d-b}{ad-bc},$$

$$Y=\frac{c-a}{bc-ad}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{d-b}{ad-bc},\quad \text{即 } x=\frac{ad-bc}{d-b}.$$

$$\frac{1}{y}=\frac{c-a}{bc-ad},\quad \text{即 } y=\frac{ad-bc}{a-c}.$$

習題四

解下列各組方程式:

1.　$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b. \end{cases}$　答. $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$.

2.　$\begin{cases} ax+by=a, \\ bx-ay=b. \end{cases}$　答. $x=$　　, $y=$　　.

3.　$\begin{cases} ax+by=1, \\ bx+ay=0. \end{cases}$　答. $x=$　　, $y=$　　.

4. $\begin{cases} ax+by=c, \\ mx-ny=0. \end{cases}$　　答．$x=$＿＿＿＿，$y=$＿＿＿＿．

5. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y}=a, \\ \dfrac{y+1}{x}=b. \end{cases}$　　答．$x=$＿＿＿＿，$y=$＿＿＿＿．

6. $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{y}=b, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{b}{y}=a. \end{cases}$　　答．$x=$＿＿＿＿，$y=$＿＿＿＿．

7. $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=c, \\ \dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=p. \end{cases}$　　答．$x=$＿＿＿＿，$y=$＿＿＿＿．

第九章　比　比例　變數法

1. 比 (Ratio)　$a:b$ 或用$\dfrac{a}{b}$，a 爲前項(Antecedent)，b 爲後項 (Consequent).

2. 量的比　二量相比，必係同類而且同單位．　例如 1 小時與10分鐘的比，應爲60分：10分＝6．　比值爲不名數．

3. 比的原則　比之前、後項，以同數乘之或除之，其比值不變．

例如　　$6:4=6\times5:4\times5=30:20.$

又　　$6:4=6\div2:4\div2=3:2.$

例 1.　化簡　　$2\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}.$

〔解〕　　$2\dfrac{1}{2}:3\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{2}:\dfrac{10}{3}$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{4}=3:4.$$

或用 6 乘前、後項，更爲簡捷.

例 2. 化簡 $a^2-2ab+b^2:a-b$

〔解〕 $$\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)(a-b)}{a-b}$$
$$=\frac{a-b}{1}=a-b.$$

4. 比例(Proportion) 兩比相等時，卽成比例.

例如 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(1)比例的項 就 $a:b=c:d$ 而言:

(a) 內項 (Mean) b 與 c.

(b) 外項 (Extremes) a 與 d.

(c) 第一、第二、第三、第四比例項順次爲 a, b, c, d.

就 $a:m=m:b$ 而言:

(d) 比例中項 (Mean proportion) m 爲 a 和 b 的比例中項. b 爲第一與第二項的第三比例項 (Third proportion).

(2)比例定理

(a) 比例式中兩外項之積，等於兩內項之積.

例如 $a:b=c:d$，則有 $ad=bc$.

(b) 如二數乘積與另二數乘積相等時，則以二數爲外項，另二數爲內項，成爲比例.

例如 $ad=bc$，則有 $a:b=c:d$.

(c) 二數的比例中項，等於其積之平方根.

例如　　$a:m=m:b$，則有 $m=\sqrt{ab}$.

例 1.　設　　$6:x=12:7$，求 x.

〔解 1〕　　$12x=6\times 7$　　(§(2) a.)

$\therefore$　　$x=3\frac{1}{2}$.

例 2.　求　　27 與 3 的比例中項.

〔解〕　　$27:m=m:3$

$\therefore$　　$m=\sqrt{27\times 3}=9$.

習 題 一

化簡下列各比：

1. $\frac{5}{3}:\frac{15}{7}$.　　　2. $x^2-y^2:x+y$.

3. $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-9}:\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$.

求下列各題的第四比例項：

4. 2，3，4.　　　5. a^2，ab，ac.

求下列各題的第三比例項：

6. 9 與 6.　　　7. a^3b^3 與 a^2b.

8. m 與 n.

求下列各題的比例中項：

9. 2 與 18.　　　答. 6.

10. $\frac{ab}{c}$ 與 $\frac{ac}{b}$.　　　答. a.

11. $a+b$ 與 $a-b$.　　　答. $\sqrt{a^2-b^2}$.

12. a^2-6a+9與a^2+4a+4. 答. $(a-3)(a+2)$.

13. 設 $8:3=x:6$, 求 x.

14. 設 $a^2-b^2:a+b=a-b:x$, 求x.

答. 1.

5. 正變 (Direct variation) 兩變數之比爲一常數 (Constant), 則每一變數均與另變數成正變.

即 $\frac{x}{y}=k$, x 與 y 成正變.

6. 變號 (Sign of variation) 設 $\frac{x}{y}=k$, 則 $x\alpha y$.

7. 設 $x\alpha y$, 則 $x=ky$.

因從定義, $\frac{x}{y}=k$, $\therefore x=ky$.

例. 設 $x\alpha y$, 而 $y=4$ 時, $x=3$; 如 $y=10$ 時, 則 x 之值如何?

〔解〕 $x\alpha y$, 則 $x=ky$,

$\therefore$ $3=4k$, 即 $k=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ $x=\frac{3}{4}y$.

今 $y=10$, $\therefore x=\frac{3}{4}\cdot 10=7\frac{1}{2}$.

8. 反變 (Inverse variation) 一量對於另量的倒數 (Reciprocal) 成正變, 即是一量與另量成反變.

9. 設 x 對於 y 成反變, 則 xy 爲一常數.

設 $x\alpha\frac{1}{y}$, 則 $x=k\cdot\frac{1}{y}$, 即 $xy=k$.

例.　設　$x\alpha\dfrac{1}{y}$，而 $y=4$ 時，$x=7$；如 $y=10$ 時，則 x 之值如何？

〔解〕　$x\alpha\dfrac{1}{y}$，則 $xy=k$，

$\therefore\quad k=7\times4=28.$

$\therefore\quad 10x=28$，　即 $x=2.8$.

10. 聯變 (Joint variation)　一量對於另數量之積成正變，則一量對於其積成聯變.

設　$x\alpha yz$，　則 $x=kyz$.

例.　x 與 y 及 z 爲聯變，而 $y=3$，$z=2$ 時，$x=6$；如 $y=5$，$z=7$ 時，則 x 之值如何？

〔解〕　$x\alpha yz$，則 $x=kyz$.

$\therefore\quad 6=3\cdot2\cdot k$，　$\therefore\quad k=1$.

$\therefore\quad x=1\cdot5\cdot7=35.$

習題二

1. 設 $x\alpha y$，而 $y=2$ 時，$x=6$；如 $y=7$ 時，問 x 之值若何？　答. 21.

2. 設 $x\alpha y$，而 $y=3$ 時，$x=1$；如 $y=2$ 時，問 x 之值若何？　答. $\dfrac{2}{3}$.

3. 設 $x\alpha\dfrac{1}{y}$，而 $y=6$ 時，$x=2$；如 $y=8$ 時，問 x 之值若何？　答. $1\dfrac{1}{2}$.

4. 設 $x\alpha\dfrac{y}{z}$，而 $y=12$，$z=2$ 時，$x=2$；如 $y=7$，$z=3$

時，問 x 之值若何？ 答. $\frac{7}{9}$.

5. x 與 y 及 z 爲聯變，而 $y=5, z=7$ 時，$x=9$；如 $x=54$，$z=10$ 時，問 y 之值若何？ 答. 21.

第十章 乘方與開方

1. 乘方（Involution） 將一算式（或數）自乘而求其冪（Power），叫做乘方.

2. 單項式的乘方（Involution of monomial）

例 1. $(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^6$.

例 2. $(-3a^2b^3)^4=(-3a^2b^3)\cdot(-3a^2b^3)$

$\cdot(-3a^2b^3)\cdot(-3a^23b^3)=81a^8b^{12}$.

例 3. $\left(-\frac{2m^2}{3n^5}\right)^3=-\frac{(2m^2)}{(3n^5)^3}=-\frac{8m^6}{27n^{15}}$.

3. 二項式的乘方（Involution of binomials）

例 1. $(2x+y)^2=(2x)^2+2(2x)y+y^2$

$=4x^2+4xy+y^2$.

例 2. $(9x-2y)^2=(9x)^2-2(9x)(2y)+(2y)^2$

$=81x^2-36xy+4y^2$.

例 3. $\left(a-\frac{b}{3}\right)^3=a^3-3a^2\left(\frac{b}{3}\right)+3a\left(\frac{b}{3}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3$

$=a^3-a^2b+\frac{ab^2}{3}-\frac{b^3}{27}$.

習 題 一

求下列各式之值：

1. $(a^3b^3)^2$.　　2. $(-a^4b^2)^2$.

3. $(-5p^2q^3)^3$.　　4. $(a^4b^4c^6)^5$.

5. $\left(\frac{3a}{4}\right)^2$.　　6. $\left(-\frac{3a^2}{b}\right)^4$.

7. $\left(-\frac{2a^m}{c^n}\right)^4$.　　8. $(2x+3y)^2$.

9. $(9x-2y)^2$.　　10. $(x^2-1)^3$.

11. $\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{b}\right)^3$.　　答. $\frac{a^3}{27}-\frac{a^2}{b}+\frac{9a}{b^2}-\frac{27}{b^3}$.

12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$.　　答. $x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$.

4. 開方 (Evolution)　求一算式(或數)的根,叫做開方;係乘方的逆運算.

5. 單項式的開方 (Evolution of monomial)

例 1. $\sqrt[4]{a^{12}}=\pm a^3$,　因$(\pm a^3)^4=a^{12}$.

例 2. $\sqrt[3]{8a^6b^3c^{12}}=2a^2bc^4$.

例 3. $\sqrt[5]{-\frac{32a^{15}}{243b^{10}c^{20}}}=-\frac{2a^3}{3b^2c^4}$.

6. 多項式的平方根(Square root of polynomials)

例 1. $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=?$

〔解〕

$$
\begin{array}{rl}
 & a \quad +b \\
\hline
 & a^2+2ab+b^2 \\
(a)^2= & a^2 \\
\hline
(2\cdot a+b)\times b & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

〔說明〕　依 a 的降冪列式. 先求第一項的平方根得 a, 爲根的初項. 從原式減 a^2,餘式的第一項,以 a 的二倍除之,得 b,爲根

的次項 $2a+b$ 再以 b 乘之，從第一次餘式減之，無餘數，則 $a+b$ 卽爲所求的平方根.

例 2. $\sqrt{9x^2-42xy+49y^2}=?$

〔解〕

$$\begin{array}{l|l}
 & \quad 3x-7y \\
\hline
 & 9x^2-42xy+49y^2 \\
(3x)^2 = & 9x^2 \\
\hline
(2\cdot 3x-7y)(-7y) & \quad -42xy+49y^2 \\
 & \quad -42xy+49y^2 \\
\hline
\end{array}$$

例 3. $\sqrt{16a^4-24a^3+4-12a+25a^2}=?$

〔解〕

$$\begin{array}{l|l}
 & \quad 4a^2-3a \quad +2 \\
\hline
 & 16a^4-24a^3+25a^2-12a+4 \\
 & 16a^4 \\
\hline
(2\cdot 4a^2-3a)(-3a) & \quad -24a^3+25a^2 \\
 & \quad -24a^3+\ \ 9a^2 \\
\hline
2(4a^2-3a)=8a^2-6a & \qquad 16a^2-12a+4 \\
(8a^2-6a+2)\times 2 & \qquad 16a^2-12a+4 \\
\hline
\end{array}$$

例 4. $\sqrt{4x^2+25-\dfrac{24}{x}-12x+\dfrac{16}{x^2}}=?$

〔解〕

$$\begin{array}{l|l}
 & \quad 2x-3 \quad +\dfrac{4}{x} \\
\hline
 & 4x^2-12x+25-\dfrac{24}{x}+\dfrac{16}{x^2} \\
(2x)^2=4x^2 & \\
\hline
(2\cdot 2x-3)(-3) & \quad -12x+25 \\
 & \quad -12x+\ \ 9 \\
\hline
2(2x-3)=4x-6 & \qquad 16-\dfrac{24}{x}+\dfrac{16}{x^2} \\
\left(4x-6+\dfrac{4}{x}\right)\left(\dfrac{4}{x}\right) & \qquad 16-\dfrac{24}{x}+\dfrac{16}{x^2} \\
\hline
\end{array}$$

7. 多項式的立方根 (Cube root of polynomials)

例 1.　$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=?$

〔解〕

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad a+b \\
 & \overline{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} \\
(a)^3= & a^3 \\
\hline
3(a)^2=3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
3\cdot a\cdot b=+3ab & \\
(b)^2=\qquad\qquad +b^2 & \\
\overline{(3a^2+3ab+b^2)b} & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
\end{array}
$$

〔說明〕 依 a 的降冪列式，求第一項 a^3 的立方根，得 a，爲根的初項. 從原式減 a^3，餘式的第一項 $3a^2b$ 以 $3a^2$ 除之，得根的次項 b. $3a^2+3ab+b^2$ 再以 b 乘之，得積，再從餘式減之. 無餘數，則 $a+b$ 即爲所求的立方根.

例 2.　$\sqrt[3]{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}=?$

〔解〕

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad 2x-3y \\
 & \overline{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3} \\
(2x)^3=8x^3 & \\
\hline
3(2x)^2=12x^2 & -36x^2y+54xy^2-27y^3 \\
3\cdot 2x\cdot(-3y)=-18xy & \\
(-3y)^2=\qquad\qquad +9y^2 & \\
\overline{(12x^2-18xy+9y^2)(-3y)} & -36x^2y+54xy^2-27y^3 \\
\hline
\end{array}
$$

習題二

化簡下列各式：

1. $\sqrt{25a^2.}$　　答. $5a.$

2. $\sqrt{9x^6y^3.}$　　答. $3x^3y^4$

3. $\sqrt[3]{\dfrac{-a^6}{64c^3x^3}}.$　　答. $-\dfrac{a^2}{4cx}.$

4. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3b^9}{c^6}}$. 答. $\dfrac{ab^3}{c^2}$.

5. $\sqrt[3]{-8(x-y)^6}$. 答. $-2(x-y)^2$.

求下列各式的平方根:

6. $x^2-10xy+25y^2$. 答. $x-5y$.

7. $4a^4+4a^3-7a^2-4a+4$. 答. $2a^2+a-2$.

8. $4-\dfrac{12}{x}+\dfrac{25}{x^2}-\dfrac{24}{x^3}+\dfrac{16}{x^4}$. 答. $2-\dfrac{4}{x^2}$.

求下列各式的立方根:

9. $8x^3-12x^2+6x-1$. 答. $2x-1$.

10. $64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$. 答. $4a-3b$.

第十一章 指數

1. 指數 (Exponent) 一數置於一式的上方，以表示冪數者，叫做指數.例如 a^3，3 即是指數.

2. 指數的定律

Ⅰ. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Ⅱ. $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

Ⅲ. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Ⅳ. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Ⅴ. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Ⅵ. $a^0 = 1$.

Ⅶ. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

3. 指數定律的應用

例 1.　化簡　$\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot 6a^{-\frac{7}{3}}}{9a^{-\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}$.

〔解〕　$\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot 6a^{-\frac{7}{3}}}{9a^{-\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{4}{3}a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}}$

$$=\frac{4}{3}a^{-1}=\frac{4}{3a}.$$

例 2.　化簡　$\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2}}\cdot\sqrt[4]{x^6}}$.

〔解〕　$\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2}}\sqrt[4]{x^6}}=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{3}{2}}}$.

$$=x^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$$

$$=x^0\cdot y$$

$$=y.$$

例 3.　化簡　$\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^6$

〔解〕　$\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{b^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^6$

$$=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{ba^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt{\frac{ab^{-2}}{ba^{-1}}}\right)^6$$

$$=(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\div\sqrt{a^2b^{-3}})^6$$

$$=(a^{\frac{1}{3}})^6=a^2.$$

例 4.　化簡　$\dfrac{3\cdot 2^n-4\cdot 2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}$.

〔解〕　$\dfrac{3\cdot 2^n-4\cdot 2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}=\dfrac{3\cdot 2^n-2^2\cdot 2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}$

$$=\frac{3\cdot 2^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}=\frac{2^n(3-1)}{2^n(1-2^{-1})}$$

$$=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=2\times\frac{2}{1}=4.$$

習 題

化簡下列各式:

1. $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{7^2}\cdot\sqrt[6]{7}$. 答. 7.

2. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\div\sqrt[6]{a}$. 答. ________

3. $\sqrt{a^{-2}b}\cdot\sqrt[3]{ab^{-3}}$. 答. $\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$.

4. $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{4c^2}\right)^{-2}$ 答. $16ac^4$.

5. $\sqrt[4]{\dfrac{x^2y^2}{a^6b^4}}$. 答. ________

6. $\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}}{\sqrt[4]{a^2x}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{ax^2}}{\sqrt[3]{a^2x}}$ 答. ________

7. $\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{ab^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^5$. 答. $\dfrac{1}{a^5}$.

8. $\left(\dfrac{x^{-3}y}{x^2y^{-3}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{x^{-2}y^{-1}}{x^3y^3}\right)^5$. 答. ________

9. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b^{-1}}}\cdot\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}}\div\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right)^6$ 答. $b^{\frac{3}{2}}$.

10. $\left(\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{-1}a}\right)^2\div\sqrt[3]{\dfrac{a^{-1}}{x^{-3}}}$. 答. $\dfrac{x^2}{a^3}$.

11. $\left(\sqrt[5]{\dfrac{a^{\frac{1}{2}}x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}a^{-}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a\sqrt{x}}{x^{-1}\sqrt{a}}}\right)^{-4}$ 答. $\dfrac{1}{a^{\frac{8}{3}}}$.

12. $\dfrac{3^{n+4}-6\cdot3^{n+1}}{3^{n+2}\times7}$.　　答. 1.

第十二章　根式

1. 根式 (Radical)　凡算式含有根號者，叫做根式．根式分爲兩種：

(1)有理根式　根之適可開盡者，叫做有理根式．

(2)無理根式　根之不能開盡者，叫做無理根式．有時叫做不盡根式 (Surd)．

2. 不盡根式的次數 (Order)　根之指數，係表示不盡根式的次數．　例如 $\sqrt[3]{a}$ 係三次．

3. 不盡根式的種類

(1)雜不盡根式　有理因式與不盡根因式之積，叫做雜不盡根式．　例如 $5\sqrt{a}$ 是．5 係不盡根式的係數．

(2)完全不盡根式　不盡根式的係數爲 1 者，叫做完全不盡根式．　例如 $\sqrt{a}$ 是．

4. 相似不盡根式　不盡根式之含有相同無理因式者，叫做相似不盡根式．　例如 $3\sqrt{5}$ 與 $7\sqrt{5}$ 是．

5. 不盡根式的化簡

例 1.　化簡　$\sqrt{25a^4b}$.

〔解〕　$\sqrt{25a^4b}=\sqrt{25a^4}\cdot\sqrt{b}=5a^2\sqrt{b}$.

例 2.　化簡　$\sqrt[3]{80}$.

〔解〕　$\sqrt[3]{80}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{10}=2\sqrt[3]{10}$.

例 3. 化簡 $\sqrt[4]{48a^5b^{10}}$.

〔解〕 $\sqrt[4]{48a^5b^{10}}=\sqrt[4]{16a^4b^8}\cdot\sqrt[4]{3ab^2}$

$=2ab^2\sqrt[4]{3ab^2}$.

例 4. 化簡 $\sqrt[3]{\dfrac{4x^2y^3}{9a^2b}}$.

〔解〕 $\sqrt[3]{\dfrac{4x^2y^3}{9a^2b}}=\sqrt[3]{\dfrac{4x^2y^3}{9a^2b}\cdot\dfrac{3ab^2}{3ab^2}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{12ab^2x^2y^3}{27a^3b^3}}=\dfrac{y}{3ab}\sqrt[3]{12ab^2x^2}$.

6. 化爲完全不盡根式

例 1. 化 $4a\sqrt{b}$ 爲完全不盡根式.

〔解〕 $4a\sqrt{b}=\sqrt{16a^2}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{16a^2b}$.

例 2. 化 $\dfrac{a}{b}\sqrt[6]{\dfrac{b^7}{a^7}}$ 爲完全不盡根式.

〔解〕 $\dfrac{a}{b}\sqrt[6]{\dfrac{b^7}{a^7}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^6}{b^6}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{b^7}{a^7}}$

$=\sqrt[6]{\dfrac{a^6\cdot b^7}{a^7b^6}}=\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}$.

7. 化爲同次的不盡根式

例 1. 化 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt[4]{5}$ 爲最低同次不盡根式.

〔解〕 因 2, 3, 4 的 L. C. M. $=12$,

$\therefore$ $\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$.

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$.

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$.

例 2. 化 $\sqrt[5]{a^{10}b^{10}}$, $\sqrt[3]{a^2b^2}$ 及 $\sqrt[6]{a^5b^7}$ 爲最低同次不盡根式.

〔解〕　$\sqrt[5]{a^{10}b^{10}}=\sqrt[30]{a^{60}b^{60}}$.

$\sqrt[3]{a^2b^2}=\sqrt[30]{a^{20}b^{20}}$.

$\sqrt[6]{a^5b^7}=\sqrt[30]{a^{25}b^{35}}$.

習題一

化簡下列各式:

1. $\sqrt{96}$.　　答. $4\sqrt{6}$.

2. $\sqrt{24a^3}$.　　答. $2a\sqrt{6a}$.

3. $\sqrt[5]{a^{10}b^{11}c^{12}}$.　　答. $a^2b^2c^2\sqrt[5]{bc^2}$.

4. $\sqrt{\dfrac{5a^3}{6x^5}}$.　　答. ________.

5. $\dfrac{3x}{2y^2}\sqrt[4]{\dfrac{32y^4}{3x^3}}$.　　答. ________.

將下列各式化爲完全不盡根式:

6. $3\sqrt[3]{2}$.　　答. $\sqrt[3]{54}$.

7. $\dfrac{3}{x}\sqrt{x^4}$.　　答. $\sqrt{9x^2}$.

8. $\dfrac{2a}{3b}\sqrt[3]{\dfrac{27b}{a^4}}$.　　答. ________.

9. $\dfrac{2a}{b}\sqrt[4]{\dfrac{b^4}{8a^3}}$.　　答. $\sqrt{2a}$.

將下列各式化爲最低同次的不盡根式:

10. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[6]{7}$.

11. $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[6]{a^5}$, $\sqrt[3]{a^2}$.

12. $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[8]{x^6}$, $\sqrt[20]{x^5}$.

8. 根式加減法 (Addition and subtraction of radicals)

例 1. 化簡 $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}+4\sqrt{72}$.

〔解〕 $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}+4\sqrt{72}$

$$=3\sqrt{2^2\cdot 2}+2\sqrt{4^2\cdot 2}+4\sqrt{6^2\cdot 2}$$

$$=6\sqrt{2}+8\sqrt{2}+24\sqrt{2}=38\sqrt{2}.$$

例 2. 化簡 $\sqrt{\frac{1}{2}}+3\sqrt{18}-2\sqrt{50}$.

〔解〕 $\sqrt{\frac{1}{2}}+3\sqrt{18}-2\sqrt{50}$.

$$=\sqrt{\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}}+3\sqrt{3^2\cdot 2}-2\sqrt{5^2\cdot 2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}+9\sqrt{2}-10\sqrt{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

例 3. 化簡 $\sqrt[3]{a^3x}-3\sqrt[3]{\frac{b^6}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{27x}{y^3}}$.

〔解〕 $\sqrt[3]{a^3x}-3\sqrt[3]{\frac{b^6}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{27x}{y^3}}$

$$=a\sqrt[3]{x}-\frac{3b^2}{x}\sqrt[3]{x}+\frac{3}{y}\sqrt[3]{x}$$

$$=\left(a-\frac{3b^2}{x}+\frac{3}{y}\right)\sqrt[3]{x}.$$

習題二

化簡下列各式:

1. $\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}$. 答. ________

2. $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-4\sqrt{80}$.　答. ______

3. $2\sqrt{150}-4\sqrt{54}+6\sqrt{24}$.　答. ______

4. $\frac{3}{2}\sqrt{44}+4\sqrt{99}+5\sqrt{176}$.　答. ______

5. $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}$.　答. ______

6. $4\sqrt{a^2x}+3\sqrt{b^2x}-2a\sqrt{x}$.　答. ______

7. $\sqrt{6a}+\sqrt{\frac{3a}{2}}-\sqrt{24a}$.　答. ______

8. $\sqrt{2x}+\sqrt[3]{16x}+\sqrt{50x}+\sqrt[3]{2x}$.

答. $3(2\sqrt{2x}+\sqrt[3]{2x})$.

9. $\sqrt[4]{81a^5}+2\sqrt[4]{16a^5}-\sqrt[4]{256a^5}$.　答. ______

10. $\sqrt{a^2x}+\sqrt{b^2x}-\sqrt{c^2x}$.　答. $(a+b-c)\sqrt{x}$.

11. $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}}+\sqrt{\frac{a^2c^3}{bx^2}}+\sqrt{\frac{a^2cx^2}{by^2}}$.　答. ______

12. $\sqrt[10]{x^5}-\sqrt[8]{\frac{1}{x^4}}$.　答. ______

9. 根式乘法 (Multiplication of radicals)

例 1. 化简 $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$.

〔解〕
$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}&=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2^2\cdot 3}\\&=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\\&=4\times 3=12.\end{aligned}$$

例 2. 化简 $3\sqrt[3]{25y^2}\cdot 5\sqrt[3]{50y^2}$.

〔解〕
$$\begin{aligned}&3\sqrt[3]{25y^2}\cdot 5\sqrt[3]{50y^2}\\&=15\sqrt[3]{5^2\cdot 2\cdot 5^2\cdot y^4}\\&=75y\sqrt[3]{10y}.\end{aligned}$$

例 3. 化簡 $(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})\sqrt{5}$.

〔解〕 $(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})\sqrt{5}$

$$=\sqrt{15}+2\sqrt{5}+5.$$

例 4. 化簡 $(5\sqrt{7}-2\sqrt{5})(3\sqrt{7}+10\sqrt{5})$.

〔解〕

$$\begin{array}{rrr}
5\sqrt{7} & -2\sqrt{5} & \\
3\sqrt{7} & +10\sqrt{5} & (\times \\
\hline
105 & -6\sqrt{35} & \\
 & +50\sqrt{35}-100 & \\
\hline
105 & +44\sqrt{35}-100 & =5+44\sqrt{35}.
\end{array}$$

習題三

化簡下列各式:

1. $2\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$.　　　答. 28.

2. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$.　　　答. 2.

3. $5\sqrt{ax}\cdot 3\sqrt{5x}$.　　　答. $15x\sqrt{5a}$.

4. $3\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a^5}$.　　　答. $3a^2$.

5. $(3\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})\sqrt{6}$.

　　　答. $3(2+2\sqrt{2}+\sqrt{30})$.

6. $(\sqrt{3a}+\sqrt{2b})(\sqrt{3a}-\sqrt{2b})$.

　　　答. $3a-2b$.

7. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$.　　　答. $5+2\sqrt{6}$.

8. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.　　　答. $x-2+\dfrac{1}{x}$.

9. $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2$.　　　答. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2$.

10. $(5\sqrt{3}+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2)$　答. $23\sqrt{6}-20\sqrt{3}$.

10. 根式除法 (Division of radicals)

例 1. 化簡 $4\sqrt{48}\div 3\sqrt{6}$.

〔解〕 $4\sqrt{48}\div 3\sqrt{6}=\frac{4}{3}\sqrt{8}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

例 2. 化簡 $(\sqrt{50}+3\sqrt{12})\div\sqrt{2}$.

〔解〕 $(\sqrt{50}+3\sqrt{12})\div\sqrt{2}$

$$=\sqrt{25}+3\sqrt{6}=5+3\sqrt{6}.$$

例 3. 化簡 $\sqrt{11}\div\sqrt{7}$.

〔解〕 $\sqrt{11}\div\sqrt{7}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{77}}{7}=\frac{1}{7}\sqrt{77}$.

〔註〕 除數須爲有理數，故用$\sqrt{7}$乘分母$\sqrt{7}$.

例 4. 化簡 $4\sqrt[3]{3a}\div 3\sqrt[3]{2b^2}$.

〔解〕 $\frac{4\sqrt[3]{3a}}{3\sqrt[3]{2b^2}}=\frac{4\sqrt[3]{3a}}{3\sqrt[3]{2b^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4b}}{\sqrt[3]{4b}}=\frac{4\sqrt[3]{12ab}}{3\cdot 2b}$

$$=\frac{2\sqrt[3]{12ab}}{3b}.$$

例 5. 化簡 $(12\sqrt{3}+4\sqrt{5})\div\sqrt{8}$.

〔解〕 $\frac{12\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=\frac{12\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{12\sqrt{6}+4\sqrt{10}}{4}=3\sqrt{6}+\sqrt{10}.$$

習 題 四

化簡下列各式:

1. $\sqrt{12}\div\sqrt{6}$.　答. $\sqrt{2}$.

2. $\sqrt[3]{81}\div\sqrt[3]{3}$ 答. 3.

3. $(4\sqrt{6}+4\sqrt{2})\div\sqrt{2}$. 答. $4(\sqrt{3}+1)$.

4. $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$ 答. $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

5. $\dfrac{48}{5\sqrt{32}}$. 答. $\dfrac{6}{5}\sqrt{2}$.

6. $\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y}}$. 答. $\sqrt{x+y}$.

7. $\dfrac{5(1+a^2)}{3\sqrt[3]{1+a^2}}$. 答. ________

8. $\dfrac{a}{\sqrt[7]{a^5}}$. 答. ________

9. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}}$. 答. ________

10. $(3\sqrt[3]{12}+5\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{28})\div\sqrt[3]{4}$. 答. ________

11. 共軛不盡根(Conjugate surds) 凡是 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的形式者,叫做共軛不盡根.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

即二項共軛不盡根之積,必為有理式.

例 1. 化簡 $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

〔解〕 $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$=\frac{4+\sqrt{6}}{3-2}=4+\sqrt{6}.$$

例 2. 化簡 $\dfrac{a^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$.

［解］ $$\frac{a^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$
$$=\frac{a^3-a^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-(a^2-b^2)}$$
$$=\frac{a^3-a^2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}.$$

例 3. 化簡 $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

［解］ $$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{(1+2\sqrt{2}+2)-3}$$
$$=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+2+\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}.$$

習題五

化簡下列各式：

1. $\dfrac{\sqrt{6}}{4-2\sqrt{3}}$.　　答. $\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

2. $\dfrac{9\sqrt{10}}{4+2\sqrt{5}}$.　　答. ________

3. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.　　答. $3-\sqrt{2}$.

4. $\dfrac{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.　　答. ________

5. $\dfrac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$.　　答. $\dfrac{25+10\sqrt{x}+x}{25-x}$.

6. $\dfrac{ax-bx}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.　　答. ________

7. $\dfrac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.　　答. ________

8. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.　　答. ________

12. 根式方程式（Radical equation）　方程式中含有未知數的根式,叫做根式方程式.

13. 根式方程式的解法

(1)用兩邊自乘方法,除去根號,再依法運算.

(2)所得的根,必須驗算.

例 1.　解　$\sqrt{x^2+12}-x=2$.

〔解〕　移項，　$\sqrt{x^2+12}=x+2$.

兩邊自乘，　$x^2+12=x^2+4x+4$.

移項及集合，　$-4x=-8$.

用 -4 除之，　$\therefore x=2$.

〔驗算〕　$\sqrt{4+12}-2=2$.

$4-2=2$.

$2=2$.

例 2.　解　$\sqrt{7x+1}=\sqrt{7x+18}-1$.

〔解〕　兩邊自乘，$7x+1=7x+18-2\sqrt{7x+18}+1$.

移項及集合，　$\sqrt{7x+18}=9$.

兩邊再自乘，　$7x+18=81$.

移項及集合，　$7x=63.$

$$\therefore\quad x=9.$$

〔驗算〕　$\sqrt{7\times9+1}=\sqrt{7\times9+18}-1.$

$$8=9-1.$$

$$8=8.$$

例3.　解　$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-\sqrt{4x+9}=0.$

〔解〕　移項　$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}.$

兩邊自乘，　$x+5+2\sqrt{x^2+5x}+x=4x+9.$

移項及集合，　$2\sqrt{x^2+5x}=2x+4.$

用2除之，　$\sqrt{x^2+5x}=x+2.$

兩邊再自乘，　$x^2+5x=x^2+4x+4.$

移項及集合，　$x=4.$

〔驗算〕　$\sqrt{4+5}+\sqrt{4}-\sqrt{16+9}=0$

$$3+2-5=0$$

$$0=0.$$

例4.　解　$\sqrt{14-x}+\sqrt{11-x}=\dfrac{3}{\sqrt{11-x}}.$

〔解〕　去分母，　$\sqrt{154-25x+x^2}+11-x=3.$

移項，　$\sqrt{154-25x+x^2}=x-8.$

兩邊自乘，　$154-25x+x^2=x^2-16x+64.$

移項及集合，　$-9x=-90.$

$$\therefore\quad x=10.$$

〔驗算〕　$\sqrt{14-10}+\sqrt{11-10}=\dfrac{3}{\sqrt{11-10}}.$

$$2+1=3,$$

$$3=3.$$

習題六

解下列各方程式:

1. $5-3\sqrt{2x-1}=2.$ 答. ________
2. $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=2.$ 答. ________
3. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x+25}=12.$ 答. ________
4. $\sqrt{x+60}=2\sqrt{x+5}+\sqrt{x}.$ 答. ________
5. $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}.$ 答. ________
6. $\sqrt{9x-5}-2\sqrt{4x-15}-\sqrt{x-5}=0.$

   答. ________
7. $\sqrt{19-x}+\sqrt{11-x}=\dfrac{4}{\sqrt{11-x}}.$ 答. ________
8. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-9}=\sqrt{x-18}-\sqrt{x-25}.$

   答. ________

14. 增根 (Extraneous root) 根式方程式兩邊自乘的結果,往往增加不能適合原方程式的新根,叫做增根.

例 1. 解 $x+\sqrt{x+7}=5.$

〔解〕 $$\sqrt{x+7}=5-x.$$

兩邊自乘, $$x+7=25-10x+x^2.$$

即 $$x^2-11x+18=0.$$

分解因式, $$(x-2)(x-9)=0.$$

$\therefore \qquad x=2$，或9.

〔驗算〕 $x=2$，則 $2+\sqrt{2+7}=2+3=5$.

$x=9$，則 $9+\sqrt{9+7}=9+4=13\neq 5$.

$\therefore$ $x=2$ 係方程式的根. $x=9$ 係方程式的增根.

例2. 解 $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}-2=0$.

〔解〕 $\sqrt{3x+1}=2-\sqrt{x+1}$.

兩邊自乘， $3x+1=4-4\sqrt{x+1}+x+1$.

移項， $2x-4=-4\sqrt{x+1}$.

即 $x-2=-2\sqrt{x+1}$.

兩邊自乘， $x^2-4x+4=4x+4$,

即 $x^2-8x=0$, 即 $x(x-8)=0$.

$\therefore$ $x=0$，或 $x=8$.

〔驗算〕 $x=0$，則 $\sqrt{0+1}+\sqrt{0+1}-2=1+1-2=0$.

$x=8$，則 $\sqrt{8+1}+\sqrt{24+1}-2=3+5-2\neq 0$.

$\therefore$ $x=0$ 係方程式的根. $x=8$ 係方程式的增根.

習題七

解下列各方程式：

1. $5-\sqrt{x+4}=6$. 答. 無根，-3 係增根.
2. $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}-2=0$. 答. $x=0$, 8 係增根.
3. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}=2$. 答. 無根，9 係增根.
4. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=5$. 答. 無根，6 係增根.

5. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$. 答. 無根, 4 係增根.

第十三章 虛數與複數

1. 虛數 (Imaginary number) 凡負數的平方根,叫做虛數. 虛數的單位爲$\sqrt{-1}$,通常用 i 表之.

2. 複數 (Complex number) 凡實數與虛數之和,叫做複數.例如 $a+bi$ 及 $2-\sqrt{3}i$ 均係複數.

3. 基本原則

$$(\sqrt{-1})^2=-1,\quad \text{即}\ i^2=-1.$$

由此可以推求 $\sqrt{-1}$的高次方:

$$i=\sqrt{-1}.$$

$$i^2=-1.$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i.$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=+1.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i^n=i^{n-4r}. \qquad (r\text{係整數})$$

4. 虛數加減法 (Addition and subtraction of imaginary numbers)

例 1. 化簡 $\sqrt{-3}+2\sqrt{-3}-\sqrt{-27}$.

[解] $\sqrt{-3}+2\sqrt{-3}-\sqrt{-27}$.

$=\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i$

$=0$.

例 2.　化簡　$\sqrt{-8}+\sqrt{-\frac{1}{2}}-\sqrt{-\frac{2}{9}}$.

〔解〕　$\sqrt{-8}+\sqrt{-\frac{1}{2}}-\sqrt{-\frac{2}{9}}$

$$=2\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$=(2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})\sqrt{2}i$$

$$=2\tfrac{1}{6}\cdot\sqrt{2}i.$$

例 3.　化簡 $(\sqrt{-9ab}-\sqrt{-4ab})-(\sqrt{-ab}-\sqrt{-4ab})$.

〔解〕　$(\sqrt{-9ab}-\sqrt{-4ab})-(\sqrt{-ab}-\sqrt{-4ab})$

$$=(3\sqrt{ab}i-2\sqrt{ab}i)-(\sqrt{ab}i-2\sqrt{ab}i)$$

$$=\sqrt{ab}i+\sqrt{ab}i=2\sqrt{ab}i.$$

例 4.　化簡　$i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$.

〔解〕　$i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$

$$=-1-i+1+i-1$$

$$=-1.$$

習題一

化簡下列各式:

1. $(4+2\sqrt{-2})+(3+\sqrt{-4})+(6-\sqrt{-8})$.

答.　$13+2i$.

2. $\sqrt{-4x^2y^2}+x\sqrt{-9y^2}-y\sqrt{-36x^2}$.

答.　$-xyi$.

3. $\sqrt{-25x}-\sqrt{-49y}+\sqrt{-4x}-8\sqrt{-y}$.

答.　$(7\sqrt{x}-15\sqrt{y})i$.

4. $i^2+2i^7-6i^9+i^{16}$. 答. $-4i$.

5. $\sqrt{-9}+\sqrt{-\frac{1}{3}}-\sqrt{-\frac{1}{9}}$. 答. $\frac{(8+\sqrt{3})i}{3}$.

5. 虛數乘除法 (Multiplication and division of imaginary numbers)

例 1. 化簡 $\sqrt{-7}\cdot\sqrt{-28}$.

〔解〕 $\sqrt{-7}\cdot\sqrt{-28}=\sqrt{7}\,i\cdot 2\sqrt{7}\,i$

$$=14i^2=-14.$$

例 2. 化簡 $(4+\sqrt{-7})(1+\sqrt{-7})$

〔解〕 $(4+\sqrt{-7})(1+\sqrt{-7})$

$$=(4+\sqrt{7}\,i)(1+\sqrt{7}\,i)$$

$$=(4+\sqrt{7}\,i+4\sqrt{7}\,i+7i^2$$

$$=4+\sqrt{7}\,i+4\sqrt{7}\,i-7$$

$$=-3+5\sqrt{7}\,i.$$

例 3. 化簡 $(2+5\sqrt{-1})\div(3-2\sqrt{-1})$

〔解〕 $\frac{2+5i}{3-2i}=\frac{2+5i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$

$$=\frac{6+15i+4i+10i^2}{9+4}=\frac{6+19i-10}{13}=-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i.$$

習題二

化簡下列各式:

1. $\sqrt{-2a}\cdot\sqrt{-50a}$. 答. $-10a$.

2. $(3\sqrt{-8}+\sqrt{-18}+\sqrt{-50}-2\sqrt{-72})\cdot\sqrt{-2}$.

答. ________

3. $(3+\sqrt{-25})(3-\sqrt{-25})$. 答. 34.

4. $(11-12i)(11-10i)$. 答. $1-242i$.

5. $(1+\sqrt{-2})^2$. 答. $2\sqrt{2}i-1$.

6. $\sqrt{-6}\div\sqrt{-3}$. 答. $\sqrt{2}$.

7. $\dfrac{4}{1+\sqrt{-3}}$ 答. $1+\sqrt{3}i$.

8. $\dfrac{1+i}{1-i}$. 答. i.

9. $(1+i)^3+(1-i)^3$. 答. 0.

10. $\dfrac{3+\sqrt{-2}}{2-\sqrt{-1}}+\dfrac{3-\sqrt{-2}}{2+\sqrt{-1}}$. 答. ________

第十四章 一元二次方程式

1. 二次方程式 (Quadratic equation) 方程式中一未知數的次數,最高爲二次者,叫做一元二次方程式.

2. 二次方程式分爲:

(1)純二次方程式 (Pure quadratic equation) 例如 $ax^2=b$ 是.

(2)雜二次方程式 (Affected quadratic equation) 例如 $ax^2+bx+c=0$ 是.

3. 純二次方程式的解法

例. 解 $13x^2-19=7x^2+5$.

〔解〕 移項, $13x^2-7x^2=5+19$.

集合，$6x^2=24.$

用 6 除之，$\therefore\ x^2=4.$

兩邊開方，$\therefore\ x=\pm 2.$

習題一

解下列各方程式：

1. $17x^2-7=418.$ 答. $\pm 5.$

2. $13x^2=3x^2+40.$ 答. $\pm 2.$

3. $4x(x-1)=-4(x-2).$ 答. $\pm\sqrt{2}.$

4. $(a+x)(b-x)+(a-x)(b+x)=0.$

答. $\pm\sqrt{ab}.$

5. $\dfrac{ax+b}{a+bx}=\dfrac{cx+d}{c+dx}.$ 答. 1.

4. 雜二次方程式的解法

(1)配方解法 (Solution by complete the square)

(2)公式解法 (Solution by formula)

(3)因式解法 (Solution by factoring)

5. 配方解法　二次方程式的標準式 (Standard form)爲：$ax^2+bx+c=0.$

$a\neq 0$，用 a 除之，得 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0.$

移項，$x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}.$

兩邊各加 x 係數之半之平方，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

兩邊各開方， $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

移項， $$\therefore\ x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

故方程式的二根爲：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

例．　解　$2x^2-5x-3=0$.

〔解〕移項，　$2x^2-5x=3$.

用 2 除之， $$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}.$$

兩邊各加x的係數之半之平方，

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16},$$

即 $$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

兩邊各開方， $$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4},$$

即 $$x=\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}=3,\text{或}-\frac{1}{2}.$$

習題二

用配方法解下列各方程式：

1. $12x^2+x=35$. 答. ________

2. $28x^2-65=17x$. 答. ________

3. $x(x+5)-84=0$. 答. 7, -12.

4. $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$. 答. 5, $-\frac{5}{2}$.

5. $\frac{3x-8}{x-2}=\frac{5x-2}{x-5}$. 答. 11, 2.

6. $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{35}$. 答. 13, $\frac{2}{3}$.

6. 公式解法 二次方程式的標準式為：$ax^2+bx+c=0$. 其二根依上節之理，得二公式：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

例 1. 解 $5x^2=26x-5$.

〔解〕 移項， $5x^2-26x+5=0$.

$$a=5,\quad b=-26,\quad c=5.$$

$$\therefore x_1=\frac{26+\sqrt{(-26)^2-4\cdot5\cdot5}}{2\cdot5}=\frac{26+24}{10}=5;$$

$$x_2=\frac{26-\sqrt{(-26)^2-4\cdot5\cdot5}}{2\cdot5}=\frac{26-24}{10}=\frac{1}{5}.$$

例 2. 解 $px^2-p^2x-x=-p$.

〔解〕 化為標準式， $px^2-(p^2+1)x+p=0$.

$$a=p,\qquad b=-(p^2+1),\qquad c=p.$$

$$\therefore\qquad x_1=\frac{p^2+1+\sqrt{(p^2+1)^2-4\cdot p\cdot p}}{2p}$$

$$=\frac{p^2+1+(p^2-1)}{2p}=p;$$

$$x_2=\frac{p^2+1-\sqrt{(p^2+1)^2-4\cdot p\cdot p}}{2p}$$
$$=\frac{p^2+1-(p^2-1)}{2p}=\frac{1}{p}.$$

習題三

用公式法解下列各方程式：

1. $7x^2+9x-10=0.$　　答．$\frac{5}{7}$，$-2.$

2. $3x^2-2=5z.$　　答．2，$-\frac{1}{3}.$

3. $7x^2-39=8x.$　　答．$\frac{4\pm\sqrt{273}}{7}.$

4. $4x^2-12qx+9q^2=0.$　　答．________

5. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0.$　　答．________．

6. $m^2x^2-m(a-b)x-ab=0.$　　答．________

7. 因式解法

例 1.　解　　$3x^2+7x=6.$

〔解〕　移項，　　$3x^2+7x-6=0.$

分解因式，　　$(3x-2)(x+3)=0.$

$\therefore$　　$3x-2=0$，$x=\frac{2}{3}$；或　$x+3=0$，$x=-3.$

例 2.　解　　$x^2+ab=(a+b)x.$

〔解〕　移項，　　$x^2-(a+b)x+ab=0.$

分解因式，　　$(x-a)(x-b)=0.$

$\therefore$　　$x-a=0$，$x=a$；　或　$x-b=0$，$x=b.$

習題四

用因式法解下列各方程式：

1. $x^2-9x+20=0.$ 答. 4, 5.

2. $26x-21+11x^2=0.$ 答. $\frac{7}{11}$, -3.

3. $6x(x-3)=5(x-3)$ 答. 3, $\frac{5}{6}$.

4. $x^3+x^2-4x-4=0.$ 答. ±2, -1.

5. $x^2-2ax+4ab=2bx.$ 答. $2a$, $2b$.

6. $x^4-13x^2+36=0.$ 答. ±2, ±3.

7. $x^4+4=5x^2.$ 答. ±2, ±1.

8. $2x^2-ax+2bx=ab.$ 答. $\frac{a}{2}$, $-b$.

8. 根的性質 (Character of the roots) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根爲：

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{及}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

b^2-4ac 叫做 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式 (Discriminant).

根的性質，依下列條件而有區別：

(1)若 b^2-4ac 爲正或等於 0，則根爲實數. b^2-4ac 爲負，則根爲虛數.

(2)若 b^2-4ac 爲完全平方，則根爲有理數. b^2-4ac 非完全平方，則根爲無理數.

(3)若 b^2-4ac 等於 0，則兩根相等$\left(=\frac{-b}{2a}\right)$. b^2-4ac 不等

於 0，則兩根不等.

例 1. 試決定 $3x^2-2x-5=0$ 的根之性質.

〔解〕 $b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-5)=64.$

$\therefore$ 根係實數，有理且不相等.

例 2. 試決定 $4x^2-12x+9=0$ 的根之性質.

〔解〕 $b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=0.$

$\therefore$ 根係實數，有理且相等.

例 3. 試證 $x^2+2px+p^2-q^2-2qr-r^2=0$ 的根係有理數.

〔證〕 $$\begin{aligned} b^2-4ac &= (2p)^2-4(p^2-q^2-2qr-r^2) \\ &= 4(q^2+2qr+r^2) \\ &= 4(q+r)^2. \end{aligned}$$

因知此方程式的根係有理數.

例 4. 若方程式 $(k+5)x^2+3kx-4(k-5)=0$ 係等根，試決定 k 之值.

〔解〕 兩根相等，則必判別式為 0.

因之 $b^2-4ac=(3k)^2+4(k+5)\cdot4(k-5)=0.$

即 $25k^2-400=0$，　即 $k^2=16.$

$\therefore$ $k=+4$，　或 $-4.$

〔驗算〕 方程式 $9x^2+12x+4=0$ 及 $x^2-12x+36=0$ 均係等根.

習 題 五

不用解出而決定下列各方程式根的性質:

1. $x^2-7x+12=0$. 答. 實數,有理不等.
2. $9x^2-6x+1=0$. 答. 實數,有理且相等.
3. $2x^2+x+1=0$. 答. 虛數.
4. $6x^2-5x-1=0$. 答. 實數,有理不等.
5. $9x^2=24x-16$. 答. 實數,有理且相等.
6. $x^2+15x=17$. 答. 實數,無理且不等.

若下列各方程式之二根相等,試決定 k 之值:

7. $2x^2-8x+k=0$. 答. 8.
8. $4x^2-2x=3k$. 答. $-\frac{1}{12}$.
9. $kx^2-14x-7=0$. 答. -7.
10. $x^2-(k+3)x+3k=0$. 答. 3.
11. $x^2+2(1+k)x+k^2=0$. 答. $-\frac{1}{2}$.
12. 試證 $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$ 的根係有理數.

9. 根與係數的關係 (Relation between roots and coefficients)

$ax^2+bx+c=0$ 的兩根:

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore \quad r_1+r_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

$$r_1r_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

設將標準式方程式寫為：

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

可改為　$x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2=0,$

即　$x^2-(\text{兩根之和})x+\text{兩根之積}=0.$

10. 方程式的作成（Formation of equation）　依上節所得

$$x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

分解為因式，　$(x-r_1)(x-r_2)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

例 1.　已知二根為 2 與 -3，試作成方程式．

〔解〕　依(2)　$(x-2)(x+3)=0$，　即　$x^2+x-6=0$.

例 2.　已知二根為 $2+\sqrt{2}$ 與 $2-\sqrt{2}$，試作方程式．

〔解〕　$r_1+r_2=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4.$

$$r_1r_2=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2.$$

依(1)，　$\therefore \quad x^2-4x+2=0.$

習題六

已知二根,試作方程式.

1. $-1,\ 6.$ 　　答. $x^2-5x-6=0.$

2. $-5,\ -6.$ 　　答. $x^2+11x+30=0.$

3. $\frac{1}{3},\ 3.$ 　　答. $3x^2-10x+3=0.$

4. $4+\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3}.$ 　　答. $x^2-8x+13=0.$

5. $\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$ 　　答. $2x^2-2x-1=0.$

6. 不用解方程式法,求 $x^2+px+q=0$ 兩根平方之和之值. 　　答. $p^2-2q.$

〔提示〕 $r_1+r_2=-p,\ r_1r_2=q.$

$\because\qquad (r_1+r_2)^2=r_1{}^2+2r_1r_2+r_2{}^2,$

$\therefore\qquad r_1{}^2+r_2{}^2=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2.$

7. 不用解方程式法,求 $3x^2-4x-1=0$ 兩根之差以及兩根平方之和之值. 　　答. $r_1-r_2=\frac{2\sqrt{7}}{3},\ r_1{}^2+r_2{}^2=\frac{22}{9}.$

〔提示〕 $(r_1+r_2)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$

$$\begin{array}{r} 4r_1r_2=-\dfrac{4}{3} \\ \hline (r_1-r_2)^2=\dfrac{28}{9}, \end{array}(-$$

由是即得 r_1-r_2 之值.

8. 設 $\alpha,\ \beta$ 為 $px^2+qx+r=0$ 的二根,求(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$; (2) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ 之值. 　　答. (1) $-\frac{rq}{p^2}$; (2) $\frac{q(3pr-q^2)}{p^3}.$

〔提示〕 (1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

(2) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$.

$\because$ $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$,

$\therefore$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

第十五章　聯立二次方程式

1. 聯立二次方程式 (Simultaneous quadratic equations) 的解法　含兩未知數的聯立二次方程式的解法，分爲：

(1)一方程式係一次，另方程式係二次者；

(2)兩方程式均係二次者.

2. 一方程式係一次，另方程式係二次者.其解法分：

I. 用代入法解：

例. 解 $\begin{cases} 2x+3y=7, & \cdots\cdots(1) \\ x^2+2y^2-y=5. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從(1)得， $x=\dfrac{7-3y}{2}$. $\cdots\cdots(3)$

代入(2)， $\left(\dfrac{7-3y}{2}\right)^2+2y^2-y=5$. $\cdots\cdots(4)$

化簡及移項， $17y^2-46y+29=0$.

分解因式， $(y-1)(17y-29)=0$.

$\therefore$ 代入(3) $\begin{cases} y_1=1, \\ x_1=2. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_2=\dfrac{29}{17}, \\ x_2=\dfrac{16}{17}. \end{cases}$

II. 化成 $x+y$ 及 $x-y$ 形式後求解.

例 1.　解 $\begin{cases} x+y=5, & \cdots\cdots(1) \\ xy=4. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

［解］　$(1)^2$,　$x^2+2xy+y^2=25,$ ……(3)

$(2)\times 4$,　$4xy=16.$ ……(4)

$(3)-(4)$,　$x^2-2xy+y^2=9.$ ……(5)

即　$x-y=\pm 3.$ ……(6) ……(7)

將(1)與(6)、(1)與(7)合組：

$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=3. \end{cases}$　或　$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-3. \end{cases}$

$\therefore$　$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=1. \end{cases}$　或　$\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=4. \end{cases}$

例 2.　解 $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=8, & \cdots\cdots(1) \\ x-y=1. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

［解］　$(2)^2$,　$x^2-2xy+y^2=1,$ ……(3)

$(3)\times 2$,　$2x^2-4xy+2y^2=2.$ ……(4)

$(1)-(4)$,　$xy=6,$ ……(5)

$\therefore$　$4xy=24.$ ……(6)

$(3)+(6)$,　$x^2+2xy+y^2=25,$ ……(7)

$\therefore$　$x+y=\pm 5.$ ……(8) ……(9)

將(1)與(8)、(1)與(9)合組：

$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1. \end{cases}$　或　$\begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=1. \end{cases}$

$\therefore$　$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2. \end{cases}$　或　$\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-3. \end{cases}$

習 題 一

解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y=61, \\ xy=876. \end{cases}$　答. ________

3. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x+y=5. \end{cases}$　答. ________

4. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x-y=1. \end{cases}$　答. ________

5. $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x+y=6. \end{cases}$　答. ________

6. $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ xy=7. \end{cases}$　答. $\begin{cases} x_1= \quad, \\ y_1= \quad. \end{cases}$ $\begin{cases} x_3= \quad, \\ y_3= \quad. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2= \quad, \\ y_2= \quad. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4= \quad, \\ y_4= \quad. \end{cases}$

〔提示〕 $2xy=14$,　$\therefore (x^2+2xy+y^2)=64$,

$(x^2-2xy+y^2)=36$;　即 $x+y=\pm 8$.　$x-y=\pm 6$.

分四組解之即得.

3. 兩方程式均係二次者. 其解法分：

I. 兩方程式中有一爲齊次方程式 (Homogeneous equation)者，可化成前節形式求解：

例. 解 $\begin{cases} x^2-3y^2+2y=3, & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x^2-7xy+6y^2=0. & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

分解齊次方程式(2)成因式，

$$(x-2y)(2x-3y)=0. \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

因得兩組聯立方程式：

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x^2-3y^2+2y=3. \end{cases}$$

用代入法解之,得

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-6, \\ y_2=-3. \end{cases}$$

或 $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x^2-3y^2+2y=3. \end{cases}$

同法,得

$$\begin{cases} x_3=2+\sqrt{5}\,i, \\ y_3=\dfrac{4+2\sqrt{5}\,i}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=2-\sqrt{5}\,i, \\ y_4=\dfrac{4-2\sqrt{5}\,i}{3}. \end{cases}$$

II. 兩方程式除絕對項外,均係齊次者.其解法有三:

(1)消去絕對項法.

(2)特殊形式者可用加減法.

(3)設 $y=mx$, 用代入法求解.

例 1. 解 $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=74, & \cdots\cdots(1) \\ 2x^2+2xy+y^2=73. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

消去絕對項74與73,

$(1)\times 73$, $\quad 73x^2+73xy+146y^2=74\times 73$, $\cdots\cdots(3)$

$(2)\times 74$, $\quad 148x^2+148xy+74y^2=73\times 74$. $\cdots\cdots(4)$

$(4)-(3)$ $\quad 75x^2+75xy-72y^2=0$,

即 $\quad 25x^2+25xy-24y^2=0$. $\cdots\cdots(5)$

分解因式, $\quad (5x-3y)(5x+8y)=0$. $\cdots\cdots(6)$

因得分成兩組聯立方程式:

$$\begin{cases} 5x-3y=0, \\ x^2+xy+2y^2=74. \end{cases}$$

依前法解之,得

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=5. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-5. \end{cases}$$

或 $\begin{cases} 5x+8y=0, \\ x^2+xy+2y^2=74. \end{cases}$

同法,得

$$\begin{cases} x_3=8, \\ y_3=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-8, \\ y_4=5. \end{cases}$$

例 2. 解 $\begin{cases} 2x^2+3y^2=30, & \cdots\cdots(1) \\ 3x^2-5y^2=7. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕 用加減法解之:

$(1)\times 3,\qquad 6x^2+9y^2=90,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)\times\overline{-2},\qquad -6x^2+10y^2=-14.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4),\qquad 19y^2=76,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$\therefore\qquad y^2=4,$

即 $\qquad y=\pm 2.$

代入(1)或(2),得 $\qquad x=\pm 3.$

此方程式之根有四組:

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=3,\\ y_2=-2.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_3=-3,\\ y_3=2.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=-2.\end{cases}$$

例 3. 解 $\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 3x^2-xy+3y^2=13.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔解〕 設 $y=mx$, 代入(1)及(2),

$$x^2(1-3m+m^2)=-1,\ \cdots\cdots(3)$$

$$x^2(3-m+3m^2)=13.\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

$(3)\div(4)\qquad \dfrac{1-3m+m^2}{3-m+3m^2}=\dfrac{-1}{13}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

去分母及移項等, $\qquad 2m^2-5m+2=0.$

分解因式, $\qquad (2m-1)(m-2)=0.$

$\therefore\qquad m=\dfrac{1}{2},$

取 $m=\dfrac{1}{2}$, 代入(3)或(4).

$$x^2\left(1-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)=-1.$$

$\therefore\ x^2=4,$

$\therefore\ x=\pm 2.$

$\therefore\quad y=mx=\dfrac{1}{2}\times(\pm 2)$

$=\pm 1.$

或 $m=2.$

取 $m=2$, 代入(3)或(4).

$$x^2(1-6+4)=-1.$$

$\therefore\qquad x^2=1,$

$\therefore\qquad x=\pm 1.$

$\therefore\quad y=mx=2\times(\pm 1)$

$=\pm 2.$

此方程式的根有四組:

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=1, \\ y_3=2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=-2. \end{cases}$$

Ⅲ. 兩方程式除含相似項外,餘均係齊次者可用加減法求解.

例. 解 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9y, \quad \cdots\cdots(1) \\ 2x^2-3xy+2y^2=4y. \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕 消去 y,

(1)×4, $\quad 4x^2+8xy+4y^2=36y, \cdots\cdots(3)$

(2)×9, $\quad 18x^2-27xy+18y^2=36y. \cdots\cdots(4)$

(4)−(3) $\quad 14x^2-35xy+14y^2=0,$

即 $\quad 2x^2-5xy+2y^2=0.$

分解因式, $\quad (2x-y)(x-2y)=0.$

因得兩組聯立方程式:

$$\begin{cases} 2x-y=0, \\ x^2+2xy+y^2=9y. \end{cases}$$

再依前法解之,得

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=4. \end{cases}$$

或 $\begin{cases} x-2y=0, \\ x^2+2xy+y^2=9y. \end{cases}$

同法,得

$$\begin{cases} x_3=0, \\ y_3=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=2, \\ y_4=1. \end{cases}$$

習題二

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2-9y^2=7, \\ xy+4y^2=8. \end{cases}$ 答. ________

2. $\begin{cases} 3x^2-xy-2y^2=0, \\ 4x^2-9xy+2y^2=-3. \end{cases}$ 答. ________

3. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-3y^2=5. \end{cases}$　　答. ________

4. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 3x^2-4y^2=8. \end{cases}$　　答. ________

5. $\begin{cases} 3xy+y^2=28, \\ 4x^2+xy=8. \end{cases}$　　答. ________

6. $\begin{cases} 6x^2-4xy-8=0, \\ 2xy+5y^2-28=0. \end{cases}$　　答. ________

7. $\begin{cases} 6x^2-5y^2=-21, \\ x^2-y^2=-5. \end{cases}$　　答. ________

8. $\begin{cases} 3x^2-3xy+2y^2=2x, \\ 2x^2+3y^2-4x=xy. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=0, \\ y_3=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=\frac{2}{23}, \\ y_4=\frac{8}{23}. \end{cases}$

第十六章　級數

1. 級數(Progression)　級數有:

(1)算術級數(Arithmetic progression)

(2)幾何級數(Geometric progression)

2. 算術級數 (*A. P.*)　相隣二數,差數均相等,如是所成的一組數,叫做等差級數,亦名算術級數.例如 3, 6, 9, 12, 15 是.所有名詞列後:

(1)項 (Term)　各數均叫項;

(2)首項(First term)　第一個數叫做首項;通常用 a 表之.

(3)末項(Last term)　最末一個數叫做末項;通常用 l 表之.

(4)公差 (Common difference) 每一項減去相鄰前項之差,叫做公差;通常用 d 表之.

(5)總和 (Total sum) 所有各項之和,叫做級數的總和;通常用 S 表之.

(6)項數 (Number of terms) 即級數所有的項數,叫做幾項數,通常用 n 表之.

3. 算術級數的公式:

Ⅰ. $l=a+(n-1)d.$

Ⅱ. $S=\frac{n}{2}(a+l).$

例 1. 求 $A.P.$ 4, 7, 10,……………中的第15項.

〔解〕 $a=4$, $d=7-4=3$, $n=15$, 代入Ⅰ., 即得 $l=4+(15-1)\cdot 3=46.$

例 2. $A.P.$ 的首項爲 12, 末項爲 144, 項數爲 13. 求級數之和.

〔解〕 $a=12$, $l=144$, $n=13$.

代入Ⅱ.,
$$\begin{aligned} S&=\frac{13}{2}(12+144)\\ &=\frac{13}{2}\times 156\\ &=1014. \end{aligned}$$

例 3. 設 $S=204$, $d=6$, $l=49$. 求 n.

〔解〕 代入Ⅰ.與Ⅱ.,

得
$$\begin{cases} 49=a+(n-1)\cdot 6, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 204=\frac{n}{2}(a+49). \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從(1)　$a=49-(n-1)6$,

代入(2),得　$204=\frac{n}{2}[98-(n-1)6]$,

即　$3n^2-52n+204=0$.

解之,得　$n=6$,　或　$11\frac{1}{3}$.

因 n 不能爲分數,故 $n=6$.

習題一

1. 求 $A.P.$ 11, 22, 33, ……的第11項.　答. 121.

2. 求 $A.P.$ $-7, -1, +5, \cdots$的第15項.　答. 77.

3. 求 $A.P.$ $-2, -1, 0, \cdots\cdots$至第14項之和.

答. 63.

4. 求 $A.P.$ 2, 4, 6, 8,…至第40項之和.　答. 1640.

5. 求 $A.P.$ 1, 3, 5, 7,…至第49項之和.　答. 2401.

6. $A.P.$ 的首項爲 62, 末項爲 7, 公差爲 -5.

求項數.　答. 12.

7. 已知 $a=4$, $l=25$, $n=8$. 求 d.　答. 3.

8. 已知 $a=1$, $n=35$, $S=1225$. 求 d 及 l.　答. ______

9. $a=-7$, $d=3$, $S=430$. 求 n 及 l.　答. ______

10. 已知 $l=97$, $d=3$, $S=1612$. 求 a 及 n.　答. ______

4. 等差中項(Arithmetic mean)　兩數 a 與 b 間的等差中項 x, 等於兩數之和之半,即

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

例 1. 求 $\frac{m-n}{2}$ 與 $\frac{3m+n}{2}$ 間的等差中項.

〔解〕

$$x=\frac{\frac{m-n}{2}+\frac{3m+n}{2}}{2}$$

$$=\frac{m-n+3m+n}{2}\times\frac{1}{2}=m.$$

例 2. 試在14與62之間,插入五個等差中項.

〔解〕 $n=7,\ a=14,\ l=62.$

代入公式 I. $62=14+(7-1)d.$ $\therefore\ d=8.$

故 $A.P.$ 爲 $14,[22,30,38,46,54]62.$

例 3. $A.P.$ 的第十一項爲 39, 第十九項爲 67. 求此級數.

〔解〕用公式 I., $39=a+10\,d,\quad 67=a+18\,d.$

兩方程式相減,得 $d=\frac{7}{2}.$

代入任一方程式,得 $a=4.$

故此級數爲 $4,\ 7\frac{1}{2},\ 11,\ 14\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots$.

習題二

1. 求 $\frac{m^2-n^2}{m}$ 與 $\frac{m^2+n^2}{m}$ 間的等差中項.

答. m

2. 試在25與 4 之間,插入六個等差中項.

答. $25,[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]4.$

3. 試於 -9 與12之間,插入兩個等差中項.

答. $-9,[\quad ,\quad]12.$

4. $A.P.$ 的第五項為 19，第八項為 31. 求此級數.

答. ________

5. $A.P.$ 的第十二項為 14，第二十項為 -6. 求第二十八項.

答. -26.

〔提示〕 先求出 a 與 d；再用公式 I. 求之卽得.

5. 幾何級數 ($G.P.$) 相隣二數的比均相等，如是所成的一組數，叫做等比級數，亦名幾何級數. 例如 2, 6, 18, 54, 162 是.

所有名詞，除公比 (Common ratio) 係每一項與相隣前項之比用 r 表之外，餘均與算術級數所用者同，卽首項為 a，末項為 l，項數用 n，及總和用 S 表之.

6. 幾何級數的公式

I. $l = ar^{n-1}$.

II. $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$.

例 1. 求 $G.P.$ 3, 6, 12,……中的第八項.

〔解〕 $a = 3$, $\quad r = \dfrac{6}{3} = 2$, $n = 8$,

代入公式 I. 得 $\quad l = 3 \cdot 2^{8-1}$

$$= 3 \cdot 2^7 = 384.$$

例 2. 求 $G.P.$ $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}$, ……至第十二項之和.

〔解〕 $a = 1$, $\quad r = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2}$, $\quad n = 12$.

代入公式 II., 得 $\quad S = \dfrac{1\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{12} - 1\right]}{-\frac{1}{2} - 1}$

$$=\frac{\frac{1}{4096}-1}{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4095}{4096}\times\frac{2}{3}=\frac{1365}{2048}.$$

7. 等比中項 (Geometric mean) 在 a 與 b 間的等比中項 x, 等於兩數之積之平方根, 即

$$x=\sqrt{ab}.$$

例 1. 求 m^2-n^2 與 $\frac{m+n}{m-n}$ 間的等比中項.

〔解〕 $x=\sqrt{(m^2-n^2)\cdot\frac{m+n}{m-n}}$

$$=\sqrt{(m+n)(\cancel{m-n})\cdot\frac{m+n}{\cancel{m-n}}}=m+n.$$

例 2. 試在 5 與 160 之間, 插入四個等差中項.

〔解〕 $a=5$, $l=160$, $n=6$.

代入公式 I., 得 $160=5\cdot r^{6-1}$,

即 $r^5=32$, $\therefore r=2$.

$\therefore$ 四個等比中項為 10, 20, 40, 80.

例 3. G. P. 的第三項為 2, 第七項為 162. 求此級數首項至第七項。

〔解〕 用公式I., $\begin{cases} ar^2=2, & \cdots\cdots\cdots(1) \\ ar^6=162. & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ÷ (1), 得 $r^4=81$,

即 $r=\pm 3$.

代入(1), $\therefore a=\frac{2}{9}$.

$\therefore$ 所求得的 $G.P.$ 爲 $\frac{2}{9}$, $\pm\frac{2}{3}$, $2, \pm 6, 18, \pm 54, 162.$

習題三

1. 求 $G.P.$ $2, 4, 8, \cdots\cdots$ 的第十五項. 答. ________

2. 求 $G.P.$ $x, 1, \frac{1}{x}$, $\cdots\cdots$ 的第三十項.

答. ________

3. 求 $G.P.$ $2, -4, 8, \cdots\cdots$ 至第十二項之和.

答. ________

4. 求 $G.P.$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, 至$\cdots\cdots$第八項之和.

答. ________

5. 求 2 與50的等比中項. 答. 10.

6. 求 p^2+2p+1 與 p^2-2p+1 間的等比中項.

答. $(p+1)(p-1)$.

7. 試在 4 與 324 之間,插入三個等比中項.

答. 4[, , ,]324.

8. 試在 56 與 $-\frac{7}{16}$ 之間,插入六個等比中項.

答. 56[-28, , , , , ,]$-\frac{7}{16}$.

9. $G.P.$ 的第十項爲 320, 第六項爲 20. 求此級數.

答. ________

10. $G.P.$ 的第三項爲 $\frac{9}{16}$, 第六項爲 $-4\frac{1}{2}$. 求此級數首項至第六項.

答. , , $\frac{9}{16}$, , , $-4\frac{1}{2}$.

8. 無窮項等比級數 (Infinite geometric progression)　$G.P.$ 中 r 如小於 1, 則 n 愈增, r^n 卽愈減. 依前公式 II.,

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

當 n 之值非常之大時, 則 r^n 及 $\frac{ar^n}{1-r}$ 卽非常之小, 因得無窮項級數之和(S_∞)的公式:

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}.$$

例 1.　求 $G.P.$ $1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}$……無窮項級數之和.

〔解〕　$a=1,\qquad r=-\frac{1}{3}.$

$$\therefore\qquad S_\infty=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

例 2.　求 0.3727272……

〔解〕　$0.3727272=0.3+.072+.00072+\cdots\cdots$ 除 0.3 外, 餘成一 $G.P.$

$$a=.072,\qquad r=.01.$$

$$\therefore\qquad S_\infty=\frac{.072}{1-.01}=\frac{.072}{.99}=\frac{72}{990}=\frac{4}{55}.$$

$$\therefore\quad 0.37272\cdots\cdots=\frac{3}{10}+\frac{4}{55}=\frac{41}{110}.$$

習 題 四

1.　求下列各級數的 S_∞:

a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$……　答. $\frac{2}{3}$.

b. $4, 1, \frac{1}{4}$……　答. 1.

c. $3, -\frac{3}{4}, \frac{3}{16}$……　答. $\frac{12}{19}$.

2. 求下列各題之值：

a. 0.777……　答. ______

b. 0.545454……　答. ______

c. 0.126126……　答. ______

d. 0.42727……　答. ______

II　應用問題

第十七章　應用問題的例解

1. 概說　有許多問題，可以應用方程式而獲得解答. 其步驟大致分爲三層：

(1)設未知數爲 x、y 等；

(2)依題意列出方程式而解之；

(3)將所得的答數，加以檢驗，是否合乎題意.

2. 一元一次方程式的應用問題

例 1. 某人15年後的年齡，將爲 5 年前年齡的三倍. 求其現在的年齡.

〔解〕 設 x 爲某人現在的年齡數.

依題意得 $x+15=3(x-5)$.

解之，得 $x=15$.

〔驗算〕 某人 15 年後爲 30 歲；5 年以前爲 10 歲；$\therefore 30=3\times 10$.

例 2. 兩數之差爲 8，其和爲 14. 求兩數.

〔解〕 設 x 爲小數. 則 $x+8$ 爲大數.

依題意得 $x+(x+8)=14$.

解之，得 $x=3$ 小數，

$x+8=11$ 大數.

〔驗算〕 兩數之差爲 $11-3=8$；兩數之和爲 $3+11=14$.

例 3. 甲有球爲乙之三倍. 若甲給乙25隻，則乙有球爲甲之兩倍. 求各有之球數.

〔解〕 設 x 爲乙有球的隻數，

則 $3x$ 爲甲有球的隻數.

依題意得 $x+25=2(3x-25)$.

解之，得 $x=15$，乙有球的隻數.

$3x=45$，甲有球的隻數.

〔驗算〕 $45-25=20$， $15+25=40$，

$\therefore$ $40=2\times 20$.

例 4. 法幣11張，計有100圓與500圓兩種，共值3100圓. 求每種的張數.

〔解〕 設 x 爲100圓的張數，

則　　$11-x$為500圓的張數.

依題意得　$500(11-x)+100x=3100$.

解之,得　$x=6$,　100圓的張數,

$11-x=5$,　500圓的張數.

例5. 甲、乙、丙三人共有法幣900圓,而乙所有為甲之三倍.若甲、乙各給丙50圓,則甲、乙之和之三倍,適比丙多甲原有之圓數.求三人各有的圓數.

〔解〕　設x為甲所有的圓數,

則　　$3x$ 為乙所有的圓數,$900-4x$ 為丙所有圓數.

依題意得　$3[(x-50)+(3x-50)]-(900-4x)=x$.

解之,得　$x=80$,　甲所有的圓數.

$3x=240$,乙所有的圓數.

$900-x-3x=580$,丙所有的圓數.

例6. 某人以法幣11850圓購自來水筆、毛筆、鉛筆三種.每種筆一枝之價為900圓、350圓、150圓,而毛筆之數比自來水筆多4枝,鉛筆之數則為自來水筆與鉛筆枝數之二倍.求每種筆的枝數.

〔解〕　設　x 為自來水筆的枝數,

則　　$x+4$ 為毛筆的枝數,

$2(x+x+4)=4x+8$ 為鉛筆的枝數.

依題意得　$900x+350(x+4)+150(4x+8)=11850$.

解之,得　$x=5$,　自來水筆的枝數.

$$x+4=9,\qquad \text{毛筆的枝數.}$$

$$4x+8=28,\qquad \text{鉛筆的枝數.}$$

〔驗算〕 $5\times 900+9\times 350+28\times 150=11850;$

$$9-5=4,\qquad 28=2(9+5).$$

習 題 一

1. 甲、乙、丙三數：計乙為甲的三倍，丙為甲的四倍，乙、丙之差為 5，求各數。　答．甲　；乙　；丙

2. 甲、乙、丙三數：計甲、乙之和為 14，丙為甲之二倍．丙比乙多 4．求各數．　答．甲　；乙　；丙

3. 甲、乙、丙三數：計甲、乙之和為 8，乙比丙多 1，丙之平方比甲之平方多 7．求各數．　答．甲　；乙　；丙

4. 甲比乙大 5 歲，比丙小 3 歲．17 年前丙為乙年之兩倍．求各人之年歲．　答．甲　；乙　；丙

5. 甲、乙、丙三人分法幣若干．甲比乙多得50圓．甲與丙合得 300 圓．乙比丙少得 150 圓．問每人各得若干圓？

答．甲　；乙　；丙

6. 甲、乙、丙三人共有羊 240 頭．乙比甲多 20 頭，丙為甲、乙之和．問各有羊若干頭？　答．甲　；乙　；丙

7. 某校三級共有學生 120 人．乙級學生數比甲級多10人，甲級與丙級學生之和為80人．問各級應有若干人？

答．甲級　；乙級　；丙級

8. 室中的婦女二倍於兒童數，而男子比兒童多 3 人，今男子與婦女共有 9 人. 問有兒童若干人？　　答. 2人.

3. 多元一次聯立方程式的應用問題

例 1. 兩數之差爲 11；其和之五分之一爲 9. 求兩數.

〔解〕 設 x 爲大數，y 爲小數.

依題意得

$$\begin{cases} x-y=11, & \cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x+y}{5}=9. & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解之，得　$x=28$，大數.　$y=17$，小數.

例 2. 六兩茶葉與十一兩咖啡共值法幣 1920 圓；十一兩茶葉與六兩咖啡共值法幣1820圓. 求茶葉及咖啡每兩之價格.

解　設 x 爲茶葉一兩之圓數，y 爲咖啡一兩之圓數.

依題意得

$$\begin{cases} 6x+11y=1920, & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 11x+6y=1820. & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解之，得　$x=100$，茶葉每兩的圓數.

$y=120$，咖啡每兩的圓數.

例 3. 某數在 100 至1000之間，其中間一數爲 0，其他兩數字之和爲11；若反轉其數字，則所成之數比原數多495. 求其數.

〔解〕 設 x 爲個位上的數字，y 爲百位上的數字.

則原數爲　$100y+x$，　反轉之數爲　$100x+y$.

依題意得

$$\begin{cases} x+y=11, & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 100x+y-(100y+x)=495. & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解之，得　$x=8$，　$y=3$.

故原數爲 308.

習題二

1. 兩數之和爲34;其差爲10.求兩數. 答. 22, 12.

2. 兩數之和的三分之一爲14;其差的二分之一爲4.求兩數. 答. 25, 17.

3. 六隻橘子與七隻梨子共值250圓;十三隻橘子與十一隻梨子共值475圓.問橘子與梨子每隻各值若干圓?

答. 橘子每隻值23圓;梨子每隻值16圓.

4. 兩數字之和爲13;某數與其反轉後之數之差爲27.求某數. 答. 85,58.

5. 某數在10與100之間.八倍於其數字之和;若從某數減去45,適成反轉之數.求某數. 答. 72.

6. 袋中盛白、黑球若干枚.白球之半數,等於黑球數的三分之一;但所有球數之二倍,比黑球三倍多4.問袋中盛白、黑球各若干? 答. 白球8枚;黑球12枚.

4. 一元二次方程式的應用問題

例1. 某數的平方加以某數的14倍,等於275.求某數.

〔解〕 設x爲某數.

依題意得 $x^2+14x=275$.

解之,得 $x^2+14x-275=0$.

即 $(x+25)(x-11)=0$.

$\therefore$ $x=-25$, 或11.

例 2.　某人比其子之年歲大五倍.父、子兩人年歲平方之和為 2106.求兩人的年歲.

〔解〕　設　　x 為其子之年歲,

則　　$5x$ 為其父之年歲。

依題意得　　$x^2+(5x)^2=2106$.

解之,得　　$x=\pm 9$,

$\therefore$　　$5x=\pm 45$.

負數不合理,故子年 9 歲;父年45歲.

例 3.　有一工程,甲乙二人合作須$6\frac{2}{3}$日可成.若一人獨作,則乙須比甲多費 3 日.求一人獨作所須的日數.

〔解〕　設　　x 為甲獨作的日數.

則　　$x+3$ 為乙獨作的日數.

依題意得　　$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6\frac{2}{3}}$.

解之,得　　$3x^2-31x-60=0$,

即　　$(3x+5)(x-12)=0$.

$\therefore$　　$x=-\frac{5}{3}$,　或 $x=12$.

負數不合理,故甲獨作須12日;乙獨作須 $x+3=15$ 日.

例 4.　一火車以等速行駛 300 哩,若每小時的速率多 5 哩,則可早 2 小時達到.求火車的速率.

〔解〕　設 x 為火車每小時的速率,則 $\frac{300}{x}$ 即為所費的時數,

$\frac{300}{x+5}$為增加速率後所需的時數.

依題意得　$\frac{300}{x+5}=\frac{300}{x}-2.$

解之,得　$x^2+5x-750=0,$

卽　$(x+30)(x-25)=0.$

$\therefore\quad x=25$, 或 -30.

負數不合理,故此火車的速率爲每小時25哩.

習題三

1. 某數加17,等於某數倒數的60倍.求某數.　答. 3.

2. 甲乙兩數之和等於其差的9倍,而兩數平方之差爲81.求兩數.　答. 15, 12.

3. 父子二人歲數之和適爲100歲.兩人歲數的相乘積的$\frac{1}{10}$,比父之歲數多180.求父子兩人的歲數.

答. 父60歲;子40歲.

4. 大小兩管同時注水於池中,歷22.5分鐘可滿.若單用大管比單用小管要少24分鐘.問單用大管及單用小管所費的時間.

答. 大管須36分鐘;小管須60分鐘.

5. 有一工程,甲獨作可比乙獨作少4日.今甲乙合作1日後,讓乙獨作,又經9.5日而成.求各人獨作此事所需的日數.

答. ________

6. 一人旅行於108哩的路程.設每小時多行2哩,則可早到4.5小時.求此人的速率.　答. 6哩.

5. 多元聯立二次方程式的應用問題

例 1.　甲乙兩數之和爲 44；其平方之和爲 1000．求兩數．

〔解〕　設　　x 爲甲數，

y 爲乙數．

依題意得　$\begin{cases} x+y=44, & \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=1000. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解之，得　$x=26$，　或　18．

$y=18$，　或　26．

故此兩數爲26及18．

例 2.　某人做工若干日，應得工資法幣7500圓；若每日所得多50圓，則可少做 5 日而得同數工資．問某人做工幾日？

〔解〕　設　　x 爲某人工作的日數，

y 爲每日所得的工資．

依題意得　$\begin{cases} xy=7500, & \cdots\cdots(1) \\ (x-5)(y+50)=7500. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解之，從(2)，　$xy+50x-5y-250=7500.$ ……(3)

將(1)代入(3)，　$7500+50x-5y-250=7500,$

即　$10x-y=50,$

$\therefore$　$y=10x-50.$ ……(4)

將(4)代入(1)，得　$10x^2-50x-7500=0,$

即　$x^2-5x-750=0,$

即　$(x-30)(x+25)=0.$

$\therefore$　$x=30$，或　$-25.$

負數不合理，$\therefore$ $x=30$ 日．

習題四

1. 甲乙兩數之差爲2;兩數平方之和比其積多103.求兩數. 答. ________

2. 甲乙兩數平方之和爲40,兩數之積等於其差之三倍.求兩數. 答. ________

3. 甲乙兩數的比例中項爲10;兩數平方之和爲2504.求兩數. 答. ________

4. 甲乙兩數平方之和,加以其差,適爲292;平方之和乘以其差等於3091.求兩數. 答. ________

5. 某人做工若干日,應得工資法幣3600圓;若每日多得100圓,則可少做3日而得同數之工資.求某人工作之日數以及每日所得的工資. 答. 12日, 300圓.

6. 某人賣練習簿若干本,應得法幣1320圓;若售價每本增加10圓,而少賣1本,亦得同數價格.求每本之價格.

答. 110圓.

7. 兩正方形面積之和爲74平方尺;長方形之邊長各爲兩正方形的邊長.其面積比兩正方形面積之和之半少2平方尺.求兩正方形之邊長. 答. 5, 7.

附錄一 比較繁複的例解

本書至此，正文已畢；茲將比較繁雜的材料，摘錄於次，以便學者有暇時，作進一步的研究：

I. 因子分解法(續)

1. 二項式呈 $a^n \pm b^n$ 形式者：

(1) $a^n - b^n$ 常可分解為因式：

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + b^{n-1}).$$

但 n 若為偶數，如 $a^6 - b^6$ 者，更可用下法析成因式：

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

(2) $a^n + b^n$ 中 n 為奇數時，可以分解為：

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots\cdots + b^{n-1}).$$

n 若為偶數時，不能分解為 $a+b$，或 $a-b$ 因式.但如是之式，通常可視作奇數方之和.例如 $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

2. 用綜合除法 (Synthetic division)分解因式：

因式定理 (Factor theorem)： 若含 x 的有理整多項式中，用 m 代入 x 中，其式為 0 時，則 $x - m$ 卽為其一因式.

例 1. 將 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ 分解為因式.

〔解〕 可以除盡12一數者有 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

代入 x 中：

$+1$, $\quad x^3+3x^2-4x-12=1+3-4-12=-12.$

-1, $\quad x^3+3x^2-4x-12=-1+3+4-12=-6.$

$+2$, $\quad x^3+3x^2-4x-12=8+12-8-12=0.$

$\therefore\quad x-2$ 爲其一因式.

$\therefore\quad x^3+3x^2-4x-12=(x-2)(x^2+5x+6).$

$$=(x-2)(x+2)(x+3).$$

例 2. 將 x^4-5x^2+4 分解爲因式.

〔解〕 可以除盡 4 一數者有 ± 1, ± 2, ± 4.

用綜合除法分解：

$$\begin{array}{rl|l} & 1+0-5+0+4 & 1 \\ +) & \underline{\quad\;\; 1+1-4-4} & \\ & 1+1-4-4+0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl|l} & 1+1-4-4 & -1 \\ +) & \underline{-1+0+4} & \\ & 1+0-4+0 & \end{array}$$

$\therefore\quad x-1$爲一因式. $\qquad\therefore\quad x+1$爲一因式.

$\therefore\quad x^4-5x^2+4=(x-1)(x+1)(x^2-4)$

$$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2).$$

〔註〕 依降冪排列，有缺項時，應加 0 補足.

3. 二次式的分解爲因式法

例. 分解 $x^2+xy-2xy^2-2y^2+8y^3-8y^4$ 爲因式.

〔解〕 上式對於 x 而言，係二次式：

$$x^2+(y-2y^2)x-(2y^2-8y^3+8y^4)=0.$$

用公式法解之，得

$$x=-2y+4y^2, \quad 或\ y-2y^2.$$

$$\therefore\quad x^2+xy-2xy^2-2y^2+8y^3-8y^4$$
$$=(x+2y-4y^2)(x-y+2y^2).$$

習 題 一

試分解下列各式為因式：

1. m^5-n^5.
2. a^7-b^7.
3. $a^{10}+1$.
4. x^8-y^8. 答. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.
5. $a^{12}-b^{12}$. 答. ________
6. a^9+729. 答. ________
7. $a^{10}+b^{10}c^{10}$. 答. ________

用因式定理分解下列各式為因式：

8. $3x^3-8x+5$. 答. $(x-1)(3x-5)$.
9. $p^3+7p^2+14p+8$. 答. $(p+1)(p+2)(p+4)$.
10. $x^4+x^3-7x^2-x+6$.
 答. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-2)$.
11. $x^4-x^3-2x^2+x+1$.
 答. $(x+1)(x-1)(x^2-x-1)$.
12. $a^4-5a^3+5a^2+5a-6$.
 答. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$

用二次式的分解因式法，分解下列各式為因式：

13. $3x^2-4xy+8xz-4y^2+8yz-3z^2$.

答. (   )(   )

14. $8p^2-16pq-8pr+6q^2-8qr-30r^2$.

答. (   )(   )

II. 聯立方程式(續)

4. 對稱方程式 (Symmetrical equations) 可用代入法解:

例. 解 $\begin{cases} x^4+y^4=2, & \cdots\cdots(1) \\ x-y=2. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] 設 $x=u+v$, $y=u-v$.

代入(1) $(u+v)^4+(u-v)^4=2$,

即 $u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4+u^4-4u^3v$

$+6u^2v^2-4uv^3+v^4=2$.

合併, $2u^4+12u^2v^2+2v^4=2$,

用 2 除之, $u^4+6u^2v^2+v^4=1$. ……(3)

代入(2), $v=1$. ……(4)

將 v 之值代入(3), $u^4+6u^2+1=1$,

即 $u^4+6u^2=0$.

分解爲因式, $u^2(u^2+6)=0$.

$\therefore$ $u=0$, 或 $u=\pm\sqrt{-6}=\pm\sqrt{6}\,i$.

$\therefore \begin{cases} x_1=\pm\sqrt{6}\,i+1, \\ y_1=\pm\sqrt{6}\,i-1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=+1, \\ y_2=-1. \end{cases}$

5. 高次方程式可用邊邊相除,化成二次方程式解:

例. 解 $\begin{cases} x^3+y^3=28, & \cdots\cdots(1) \\ x+y=4. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕 (1)÷(2)，　$x^2-xy+y^2=7$，………(3)

$(2)^2$，　$x^2+2xy+y^2=16$．….(4)

(4)−(3)，　$3xy=9$，

$xy=3$．…………….(5)

(3)−(5)，　$x^2-2xy+y^2=4$，

∴　$x-y=\pm2$.

與(2)聯合，得　$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=1. \\ y_2=3. \end{cases}$

6. 聯立方程式中有$\frac{1}{x}$，xy，x^2，$(x+y)$，x^2y 等，可視作一未知數以求解：

例 1.　解 $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20, & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y-\sqrt{x-y}=6. & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕 設　$\sqrt{x+y}=u$，$\sqrt{x-y}=v$，

∴ (1)　$u^2+u=20$，………………(3)

(2)　$v^2-v=6$．………………(4)

解之，得　$u=4$，或 -5，

$v=3$，或 -2.

負根係增根，應棄去，

故得　$\begin{cases} x+y=16, \\ x-y=9. \end{cases}$　∴　$\begin{cases} x=12.5, \\ y=\ \ 3.5. \end{cases}$

例 2.　解 $\begin{cases} x^2y^2+xy-12=0, & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=4. & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕 (1)　$(xy-3)(xy+4)=0$，

∴　$xy=3$　或 $xy=-4$.

與(2)聯合， $\begin{cases} xy=3, \\ x+y=4. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} xy=-4, \\ x+y=4. \end{cases}$

解之，得四組根：

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=3. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=2+2\sqrt{2}, \\ y_3=2-2\sqrt{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=2-2\sqrt{2}, \\ y_4=2+2\sqrt{2}. \end{cases}$$

例 3. 解 $x^2+4y^2-2x+4y=27$, ……………(1)

$xy=6$. ……………(2)

〔解〕 (2)×4， $4xy=24$. ……………(3)

(1)−(3)， $x^2-4xy+4y^2-2x+4y=3$,

即 $(x-2y)^2-2(x-2y)-3=0$. ….(4)

分解為因式， $[(x-2y)-3][(x-2y)+1]=0$,

∴ $x-2y=3$, 或 $x-2y=-1$.

與(2)聯合， $\begin{cases} x-2y=-1, \\ xy=6. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=3, \\ xy=6. \end{cases}$

解之，得四組根：

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2. \end{cases} \begin{cases} x_2=-4, \\ y_2=-\dfrac{3}{2}. \end{cases} \begin{cases} x_3=\dfrac{3+\sqrt{57}}{2}, \\ y_3=\dfrac{-3+\sqrt{57}}{4}. \end{cases} \begin{cases} x_4=\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}, \\ y_4=\dfrac{-3-\sqrt{57}}{4}. \end{cases}$$

7. 二次項可以消去時，可依一方程係一次，及另方程式係二次的聯立方程式的解法解之：

例. 解 $\begin{cases} 2xy-x+2y=16, & \text{……………(1)} \\ 3xy+2x-4y=10. & \text{……………(2)} \end{cases}$

〔解〕 (1)×3， $6xy-3x+6y=48$, …………(3)

(2)×2， $6xy+4x-8y=20$. …………(4)

(4)−(3)， $7x-14y=-28$.

用 7 除之， $x-2y=-4$.

∴ $x=2y-4$.

代入(1)， $$2y(2y-4)-(2y-4)+2y=16.$$

解之，得 $$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2=-6, \\ y_2=-1. \end{cases}$$

習題二

用對稱方程式的方法，解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} x^3-y^3=218, \\ x-y=2. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x_1=7, \\ y_1=5. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-5, \\ y_2=-7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^4+y^4=337, \\ x-y=1. \end{cases}$ 答. ________

用邊邊相除法解下列各聯立方程式：

3. $\begin{cases} x^3+y^3=637, \\ x+y=13. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x_1=8, \\ y_1=5. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=5, \\ y_2=8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=2613, \\ x^2+xy+y^2=67. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x_1=7, \\ y_1=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-7, \\ y_2=-2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=2, \\ y_3=7. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-2, \\ y_4=-7. \end{cases}$

用 § 6 的方法解下列各聯立方程式：

5. $\begin{cases} 3x^2-5y^2=7, \\ 5x^2+2y^2=22. \end{cases}$ 答. ________

6. $\begin{cases} x^2y^2+6=5xy, \\ x^2+4y^2=5. \end{cases}$ 答. ________

7. $\begin{cases} x+y=25, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7. \end{cases}$ 答. ________

〔提示〕 設 $\sqrt{x}=u$，$\sqrt{y}=v$， 則 $x=u^2$，$y=v^2$.

用消去二次項式解下列各聯立方程式：

8. $\begin{cases} xy+x=15, \\ xy+y=16. \end{cases}$ 答. ________

9. $\begin{cases} 4x^2-5y^2-3x+y+3=0, \\ 8x^2-10y^2-7x+9y=0. \end{cases}$ 答. ________

試用適當方法解下列各聯立方程式:

10. $\begin{cases} x^2+xy=150, \\ y^2+xy=75. \end{cases}$ 答. ________

11. $\begin{cases} x^2+xy-y^2=-31, \\ x^2-xy+y^2=49. \end{cases}$ 答. ________

12. $\begin{cases} x^4-y^4=65, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ 答. ________

13. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$ 答. ________

14. $\begin{cases} x^4+y^4=97, \\ x+y=5. \end{cases}$ 答. ________

15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{9}. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}, \\ y_1=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1, \\ \dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{6}, \\ y_1=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{1}{5}, \\ y_2=-\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^3+y^3=126, \\ x^2-xy+y^2=21. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2-3(x-y)=0, \\ 2x^2+xy-y^2-9(x-y)=0. \end{cases}$ 答. ________

III. 可用二次方程式解法的方程式

8. 下列方程式，雖非二次方程式，却可利用解二次方程式的方法解之:

例 1. 解 $x^6-9x^3+8=0,$ ……………(1)

〔解〕 用公式法，
$$x^3=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{2}\cdots\cdots(2)$$
$$=\frac{9\pm7}{2}=8,\cdots\cdots(3)$$
或 $$=1.\cdots\cdots(4)$$

$\therefore\quad x=\sqrt[3]{8}=2$，或 $x=\sqrt[3]{1}=1.$

若用因式法解，卽得

$$(x^3-8)(x^3-1)=0.$$

$\therefore\quad x^3-8=0$，或 $x^3-1=0.$

卽 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$，或$(x-1)(x^2+x+1)=0.$

解之，得 $x=2$，$x=-1\pm\sqrt{3}\,i$, $x=1$，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$

〔注意〕 應用因式法，可得所有之根．若用別種方法求解，僅得部分之根．

例 2. 解 $x^{-\frac{5}{2}}-33x^{-\frac{5}{4}}+32=0.$

〔解〕 用因式法解，

$$(x^{-\frac{5}{4}}-32)(x^{-\frac{5}{4}}-1)=0.$$

$\therefore\quad x^{-\frac{5}{4}}=32$，或 1，

$\therefore\quad x=32^{-\frac{4}{5}}$，或 $1^{-\frac{4}{5}}$.

$$=\frac{1}{16}，或\ 1.$$

例 3. 解 $\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^2+15=\dfrac{8(x+4)}{x}.$

〔解〕 設 $\dfrac{x+4}{x}=y$，$\therefore\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^2=y^2.$

$\therefore\quad y^2+15=8y,$

即 $$y^2-8y+15=0,$$

即 $$(y-3)(y-5)=0.$$

$\therefore$ $\dfrac{x+4}{x}=3$, 或 $\dfrac{x+4}{x}=5$.

解之， $x=2$, $x=1$.

例 4. 解 $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x+40}=-5$.

〔解〕 兩邊各加40,

$$x^2-8x+40-2\sqrt{x^2-8x+40}=35.$$

設 $\sqrt{x^2-8x+40}=y$, $\therefore x^2-8x+40=y^2$.

$\therefore$ $$y^2-2y-35=0,$$

$\therefore$ $$(y-7)(y+5)=0,$$

即 $y=7$, 或 -5.

$\sqrt{x^2-8x+40}=7$, 或 $\sqrt{x^2-8x+40}=-5$.

$x^2-8x+40=49$, $x^2-8x+40=25$,

$(x-9)(x+1)=0$. $(x-5)(x-3)=0$,

$\therefore$ $x=9$, 或 -1. $\therefore$ $x=5$, 或 3.

〔註〕 由驗算的結果，知 5 與 3 係增根. 且$\sqrt{x^2-8x+40}$不應等於負數，故右方程式應即棄去，不必驗算.

習 題 三

解下列各方程式：

1. $x^4-5x^2=36$. 答. ±3, $\pm2i$.

2. $x^6-26x^3-27=0$. 答. ________

3. $x^{-4}+16=17x^{-2}$. 答. ________

4. $3x^{\frac{1}{6}}+3x^{-\frac{1}{6}}=10$. 答. ________

5. $x-2\sqrt{x}-3=0$. 答. 9, 4

6. $3\sqrt[5]{x^2}+2\sqrt[5]{x}=24$. 答. ________

7. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$. 答. ________

8. $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{34}{15}$. 答. ________

〔提示〕 設 $\frac{x^2+1}{x^2-1}=y$, $\therefore \frac{x^2-1}{x^2-1}=\frac{1}{y}$.

9. $(x^2-3)^2+4(x^2-3)=5$. 答. ________

10. $x^2+x=4\sqrt{x^2+x+3}-6$. 答. ________

〔提示〕 兩邊各加 3，且設 $\sqrt{x^2+x+3}=y$, $\therefore x^2+x+3=y^2$.

IV. 比例定理(續)

9. 更理(Alternando)　一比例式中，二內項可以交換，二外項亦可互換.

設　$a:b=c:d$,　則 $a:c=b:d$

或　$d:b=c:a$.

10. 反比定理 (Invertendo)　一比例式中，二內項可和二外項同時交換.

設　$a:b=c:d$,　則 $b:a=d:c$.

11. 合比定理 (Componendo)　一比例式中，前二數之和與

第二數之比，等於後二數之和與第四數之比.

設 $a:b=c:d$,, 則 $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{d}$.

12. 分比定理（Dividendo） 一比例式中，前二數之差與第二數之比，等於後二數之差與第四數之比.

設 $a:b=c:d$, 則 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$.

13. 合分比定理（Componendo and dividendo） 一比例式中，前二數之和與差，與後二數之和與差，亦成比例.

設 $a:b=c:d$, 則 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$.

定理的應用

例 1. 解 $\dfrac{2x+2}{2x-1}=\dfrac{5}{3}$.

〔解〕 按分比定理：

$$\frac{2x+2-(2x-1)}{2x-1}=\frac{5-3}{3}.$$

即

$$\frac{3}{2x-1}=\frac{2}{3}.$$

$$2(2x-1)=3\cdot 3,$$

$$4x-2=9, \qquad 4x=11,$$

$$\therefore \quad x=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}.$$

例 2. 解 $\dfrac{x^2+x-2}{2-x}=\dfrac{4x^2+5x-6}{6-5x}$.

〔解〕 按合比定理：

$$\frac{x^2+x-2+(2-x)}{2-x}=\frac{4x^2+5x-6+(6-5x)}{6-5x}$$

即 $$\frac{x^2}{2-x}=\frac{4x^2}{6-5x}.$$

$$x^2(6-5x)=4x^2(2-x).$$

$$x^2[(6-5x)-4(2-x)]=0.$$

$$-x^2(x+2)=0.$$

$\therefore$　$x=0$，或 -2.

習題四

已知 $a:b=c:d$. 試證:

1. $d:c=b:a$.

2. $a+b:c+d=b:d$.

3. $a+b:c+d=a-b:c-d$.

4. 解 $\dfrac{2x-1}{x^2+2x-1}=\dfrac{x+4}{x^2+x+4}$.　　答. 5 或0.

5. 解 $\dfrac{x^2-2x+3}{2x-3}=\dfrac{x^2-3x+5}{3x-5}$.　　答. 2 或0.

6. 設 $p+q:p-q=m+n:m-n$,

試證 $p:q=m:n$.

附錄二　總習題

1. 化簡　$7a-4b-\{5a-3[b-2(a-b)]\}$

答．$-4a+5b$.

2. 化簡　$12a-[6a-2\{3a-4(b-a)\}-(9a+8b)]$

答．$29a$.

3. 化簡　$2\{3a-(4b-5c)\}+4\{4a-(5b-2c)\}$
$+4\{5a-3(b-c)\}$.　　答．$42a-40b+30c$.

4. 試將下式開平方：
$8x^4+16x^2+1-8x-2x^3+x^6$.　　答．x^3+4x-1.

5. 分解爲因式：
(a) $a^2x^2-2ax-15$.　　答．$(ax-5)(ax+3)$.
(b) $4m^4-81p^2q^2$.　　答．$(2m^2+9pq)(2m^2-9pq)$.

6. 分解爲因式：
(a) x^3y-4xy^3.　　答．$xy(x+2y)(x-2y)$.
(b) $2m^4+m^2n^2-3n^4$.

答．$(m+n)(m-n)(2m^2+3n^2)$.

7. 分解爲因式：
(a) $x^3y-x^2y^2-42xy^3$.　　答．$xy(x+6y)(x-7y)$.
(b) $(a^2b^2-1)^2-x^2+2xy-y^2$.

答．$(a^2b^2-1+x-y)(a^2b^2-1-x+y)$

(c) $x^4-2x^2-y^2-z^2+2yz+1$.

答. $(x^2-1+y-z)(x^2-1-y+z)$.

(d) $ab(x^2+1)-x(a^2+b^2)$. 答. $(bx-a)(ax-b)$.

(e) $m^3-n^3-(x^2-mn)(m-n)$.

答. $(m-n)(m+n+x)(m+n-x)$.

8. 化簡 $\dfrac{2x-7}{(x-3)^2}-\dfrac{2(x+2)}{x^2-9}$. 答. $\dfrac{x-9}{(x^2-9)(x-3)}$.

9. 化簡 $\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

答. $\dfrac{4}{(1-x^2)^2}$.

10. 化簡 $\left\{\dfrac{f}{g-\dfrac{g^2}{f}}+\dfrac{g}{f-\dfrac{f^2}{g}}\right\}\times\dfrac{1}{\dfrac{f^2}{g}-\dfrac{g^2}{f}}$.

答. $\dfrac{1}{f-g}$.

11. 化簡 $\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{2}}}\times\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}\div\dfrac{x}{2x-\dfrac{x+4}{x+1}}$.

答. $\dfrac{1}{x+1}$.

12. 化簡 $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{b-a}-(a+b)}{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{a-b}}$

$\div\dfrac{(a+b)^3+(b-a)^3}{(a+b)^2-(a-b)^2}$. 答. $a+b$.

13. 化簡

(a) $\left[\dfrac{a^{-1}b^3}{\sqrt[3]{a}}\right]^{\frac{5}{4}}\div\sqrt[6]{\dfrac{a^2\sqrt{b}}{b^2}}$ 答. $\dfrac{b^4}{a^2}$.

(b) $\dfrac{2^{n+4}-2\times 2^n}{2^{n+2}\times 4}$. 答. $\dfrac{7}{8}$.

14. *A. P.* 10 項之和爲 145，第四項與第九項之和等於第三項的 5 倍. 求此級數. 答. 1,4,7,……

15. 求下列級數10項之和：

(a) $5+10+15+20+\cdots\cdots\cdots$. 答. 275.

(b) $5-10+20-40+\cdots\cdots\cdots$. 答. -1705.

16. 化簡 $b-\{b-(a+b)-[b-(b-\overline{a-b})]+2a\}$.

答. 0.

17. 解 $\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x-4}{x-6}=2$. 答. $4\dfrac{1}{3}$.

18. 求 a^3-2a-4 及 a^3-a^2-4 的 *H. C. F.*

答. $a-2$.

19. 化簡 $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\times\dfrac{x^4-y^4}{xy+y^2}\times\dfrac{y}{x}$. 答. x^2-y^2.

20. 求 x^4+x^3+2x-4 及 x^3+3x^2-4 的 *H. C. F.* 與 *L. C. M.* 答. $(x+2)(x-1)$；$(x-1)(x+2)^2(x^2+2)$.

21. 化簡 $\left(\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{x}{x-a}\right)\div\dfrac{x^2+a^2}{x^2+ax}$. 答. $\dfrac{x}{a-x}$.

22. 分解爲因式：

(a) $10x^2+79x-8$. 答. $(10x-1)(x+8)$.

(b) $729x^6-y^6$.

答. $(3x-y)(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)(9x^2-3xy+y^2)$.

23. 求 $7x^3-10x^2-7x+10$ 及 $2x^3-x^2-2x+1$ 的 *H. C. F.* 答. x^2-1.

24. 化簡 $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy}\times\dfrac{xy-y^2}{x^4-y^4}\times\dfrac{x}{y}$. 答. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

25. 解 $\begin{cases}\dfrac{x-11}{3}+y=18,\\ 2x+\dfrac{y-13}{4}=29.\end{cases}$ 答. $x=14, y=17$.

26. 化簡 $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(-a+b+c)^2$. 答. $8ab$.

27. 化簡 $\dfrac{a+\dfrac{ab}{a-b}}{a^2-\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}\times\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$.

答. $\dfrac{a^2+b^2}{ab(a-b)^2}$.

28. 化簡

$$4\left\{a-\frac{3}{2}\left(b-\frac{4c}{3}\right)\right\}\left\{\frac{1}{2}(2a-b)+2(b-c)\right\}.$$

答. $4a^2-9b^2+24bc-16c^2$.

29. 化簡 $\dfrac{x+\dfrac{y}{2}}{2x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}}-\dfrac{4^2-\dfrac{y^2}{2}}{4\left(x^3-\dfrac{y^3}{8}\right)}$ 答. $\dfrac{2x^2}{8x^3-y^3}$.

30. 解 $\dfrac{x-7}{x+7}+\dfrac{1}{2(x+7)}=\dfrac{2x-15}{2x-6}$. 答. 8.

31. 解 $\begin{cases}\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{3b}=a+b\\ \dfrac{3x}{a}-\dfrac{2y}{b}=6(b-a).\end{cases}$ 答. $\begin{cases}x=2ab,\\ y=3ab.\end{cases}$

32. 分解爲因式:

(a) a^3-8b^{15}. 答. $(a-2b^5)(a^2+2ab^5+4b^{10})$.

(b)　$-x^2+2x-1+x^4$.

答．$(x^2+x-1)(x^2-x+1)$.

33. 化簡

$$\frac{y^2-\dfrac{2y}{y-1}}{y^2-\dfrac{2y}{y+1}}\div\left(\frac{y^2-5y-6}{y^2-6y+5}\times\frac{y-2}{y+2}\right).$$

答．$\dfrac{(y+1)(y-5)}{(y-1)(y-6)}$.

34. 解　$\dfrac{x-5}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}$.　　答．$4\dfrac{1}{2}$.

35. 化簡　$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^2\div\dfrac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.　　答．$x^{-\frac{5}{12}}y^{\frac{13}{12}}$.

36. 解　$5\sqrt{3x}-1=\sqrt{75x-29}$.　　答．3.

37. 化簡

(a)　$(8^{\frac{3}{2}}+4^{\frac{2}{3}})\times16^{-\frac{3}{4}}$.　　答．$\dfrac{3}{2}$.

(b)　$\dfrac{\left\{9^n\cdot3^2\times\dfrac{1}{3^{-n}}\right\}-27^n}{3^{3n}\times9}$.　　答．$\dfrac{8}{9}$.

38. 化簡

$$\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x^3-1}{x^6+1}\cdot\frac{(x-1)^2(x+1)^2+x^2}{x^4+x^2+1}.$$

答．$\dfrac{1}{x^3+1}$.

39. 解$\begin{cases}2x+3y=1\frac{1}{2},\\4x^2+9xy+9y^2=11.\end{cases}$

答．$\begin{cases}x_1=2\frac{1}{2},\\y_1=-1\frac{1}{6}.\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-1\frac{3}{4},\\y_2=1\frac{3}{2}.\end{cases}$

40\. 求 $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{48}$ 之值.

答. $4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

41\. 求 $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}-\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$ 之值.

答. 0.

42\. 解 $\begin{cases} 2x^2-3y^2=23, \\ 2xy-3y^2=3. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-5, \\ y_2=-3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=2\sqrt{3}, \\ y_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-2\sqrt{3}, \\ y_4=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

43\. $\dfrac{\sqrt{x}}{y^{-\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{y}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)\div\dfrac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

答. $x^{\frac{7}{12}}y^{\frac{5}{6}}$.

44\. 化簡 $\dfrac{ax+\dfrac{a}{y}}{x-\dfrac{1}{y}}\times\dfrac{x^2+\dfrac{1}{y^2}}{bx^2-\dfrac{b}{y^2}}\times\dfrac{\dfrac{1}{5}(xy-1)^2}{\dfrac{1}{3}(x^4y^4-1)}$.

答. $\dfrac{3a}{5b(x^2y^2-1)}$.

45\. 解 $\dfrac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-b}=\dfrac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}}$.

答. $\left(\dfrac{ab}{2a+b}\right)^2$.

46\. 化簡 $\left(a^{1+\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{p+q}}\div\sqrt[p]{\dfrac{a^{2p}}{(a^{-1})^{-p}}}$.

答. 1.

47\. 化簡

(*a*) $\dfrac{b}{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{ac}\times\dfrac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$.

答. $c^{\frac{13}{12}}$.

(*b*) $\left\{\dfrac{(9^{n+\frac{1}{4}})\times\sqrt{3\cdot3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^n$.

答. 27.

48\. 解 $\dfrac{5}{6-\dfrac{5}{6-\dfrac{5}{6-x}}}=x$.

答. 5, 1.

49. 解 $\begin{cases} x+y=8, \\ x^2y^2+192=28xy. \end{cases}$

答. $\begin{matrix} x_1=6, & x_2=2, & x_3=4, \\ y_1=2. & y_2=6. & y_3=4. \end{matrix}$

50. 化簡 $\dfrac{\left(p+\dfrac{1}{q}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^p\left(q-\dfrac{1}{p}\right)^q}$.　　答. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{p+q}$.

51. 設 $(2k+3)x^2-4kx+4=0$ 有等根,求 k 之値.

答. 3,　-1.

52. 設 $4x^2-2(k+3)x+k^2=0$ 有等根,求 k 之値.

答. 3,　-2.

53. 已知二根,為 $3+\sqrt{5}$ 與 $3-\sqrt{5}$. 試作方程式.

答. $x^2-6x+4=0$.

54. 解下方程式: $x^2+bx=12b^2$.　　答. $3b$,　$-4b$.

55. 解下方程式: $5m^2x^2+2mnx=16n^2$.

答. ＿＿＿＿

56. 解下方程式: $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{4ax}{x^2-a^2}-\dfrac{2x-a}{x-a}=0$.

答. ＿＿＿＿

57. 解下方程式: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$.

答. ＿＿＿＿

58. 解下方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{6}, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{6}{z}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

答. $x=$ ____, $y=$ ____, $z=$ ____.

59. 解 $(x^2-6)^2-(x^2-6)-6=0$. 答. ______

60. 不用解方程式,試決定下方程式根的性質:

(a) $2x^2+11x-21=0$. 答. ______

(b) $3x^2-10x+1=0$. 答. ______

61. 化簡 $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$. 答. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$.

62. 化簡 $\left\{\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x^2+\dfrac{x-1}{2}}\right\}\div\left\{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right\}$

答. 1.

63. 解下方程式:

(a) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4}{x+5}=1$. 答. 3.

(b) $\dfrac{7x-1}{x-1}=\dfrac{7x-26}{x-3}$. 答. $\dfrac{7}{4}$.

64. 解 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$. 答. ______

65. 設 $3x^2-7x+5=0$ 之二根爲 α 與 β. 求下式之值:

(a) $\alpha^2+\beta^2$. 答. $\dfrac{19}{9}$.

(b) $\alpha^3+\beta^3$. 答. $\dfrac{28}{27}$.

66. 分解爲因式:

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

答. $(a-b)(a-c)(b-c)$.

67. 解 $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44, \\ 2x^2-xy+y^2=16. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=\sqrt{2}, \\ y_3=3\sqrt{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-\sqrt{2}, \\ y_4=-3\sqrt{2}. \end{cases}$

68. 解 $\begin{cases} x^2+xy=8x+3, \\ y^2+xy=8y+6. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=6. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\frac{1}{3}, \\ y_2=-\frac{2}{3}. \end{cases}$

69. 解 $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10, \\ (x+y)(5-y)=20. \end{cases}$ 答. ________

70. 化簡 $(3\sqrt{5}+\sqrt{2})(3\sqrt{5}-\sqrt{2})$. 答. 43.

71. 化簡 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

答. $4+2\sqrt{10}$.

72. 化簡 $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

答. $-2(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

73. 分解爲因式: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

答. $3(x+y)(x+z)(y+z)$.

74. 分解爲因式: $(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$.

答. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.

75. 分解爲因式: $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$.

答: $ab(a-b)$.

76. 解 $x^3+x^2-4x-4=0$. 答. -1, ± 2.

77. 解 $x^3-4x^2-20x+48=0$. 答. ________

78. 求 $\sqrt{-n}\,i\cdot\sqrt{4n}+\sqrt{-\frac{1}{2}n}\cdot\sqrt{-18}$.

答. ________

79. 求 $(1+i)^3-(1-i)^3$ 之值.　　答. $4i$.

80. 解 $(x^2+3x-2)^2-4(x^2+3x-2)=32$.

答. ________

81. $x^2-12x-k=0$ 的一根為 -15. 求 k 之值.

答. 405.

82. 求 S_∞:

$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots\cdots$　　答. $\frac{3}{5}$.

83. 求 $0.545454\cdots\cdots$之值.　　答. ________

84. 解 $x^3=1$.　　答. $1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

85. 解 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

答. $1\pm\sqrt{5}$, $1\pm2\sqrt{5}$.

86. 解 $\begin{cases}\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}+1=0.\\[2mm]\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{x^2}{y}-4=0.\end{cases}$

答. $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=-2.\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\\[2mm] y_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\\[2mm] y_3=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$

87. 解 $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{34}{15}$.　　答. ±2, $\pm\sqrt{2}i$.

88. 求五時後時針與分針始成直角的時刻.

答. 5 時$10\frac{10}{11}$分.

89. 某工程乙獨作,經 4 日可成;甲獨作之,12日可成.今甲作此事,中途停止而以乙代之.計自甲開工至乙完工共經 6 日,問甲作工幾日? 答. 3 日.

90. 父之年齡為子之年齡 6 倍;自今 4 年以後,父年為子年的 4 倍.求父子之年齡. 答. 父36歲,子 6 歲.

91. 有一工程,甲乙二人合作,12 日可成;甲丙二人合作,15日可成;甲乙丙三人合作,10日可成.問各人獨作各需若干日可成? 答. 甲20日,乙30日,丙60日.

92. 甲乙兩港相距10里.一船往返須10小時;而下行 3 里之時間,等於上行 2 里之時間.求船下行兩港之時間.

答. 4 小時.

93. 甲乙二人在相隔80里之兩城相向而行,同時出發,甲比乙每日多行 4 里;至兩人相會之日數,等於乙每日所行里數之半.求每人每日所行之里數. 答. 甲12里,乙 8 里.

94. 一船在靜水中每時行 4 里;而上下 12 里之河流須 8 小時.問水於 3 小時內流若干里. 答. 3 里.

95. 有甲乙丙三水管,注滿水槽.甲與乙須 12 分鐘;乙與丙須20分鐘;丙與甲須15分鐘.今三管齊開,問須幾分鐘方能注滿?

答. 10分鐘.

96. 甲乙兩地相距 450 里. 有 A 車自甲地向乙地,B 車自乙地向甲地同時出發,10小時後相遇;若 A 車出發後經 5 小時後,B 車始行出發,則須經 8 小時始可相會. 求兩車每小時的速

度. 答. A車18里,B車27里.

97. 若干人均分法幣若干圓. 若人數增3人,則每人少得1圓;若減少2人,則每人多得1圓.求人數及每人原得之圓數.

答. 12人,5圓.

98. 甲乙二人,從A,B二地同時出發.但甲在A地出發,乙向同方向進行若干時之後,甲追及乙;其時兩人經過之距離合計為15里;又甲於4時之前通過B地,而乙與A地之距離,依其進行之速度計算,適當9小時之行程.求A,B兩地間之距離.

答. 3里.

99. 一水槽備有甲乙丙三水管. 自甲管流入,同時乙管流出,則6分鐘注滿;自乙管流入,同時自丙管流出,則24分鐘注滿;若甲丙兩管同時注入,則4分鐘注滿.問僅用甲管注入,須幾分鐘方能注滿? 答. $4\frac{4}{11}$分鐘.

100. 男女工人共計1100名.男工與女工於同時日間得成同一之工程;今將男女工之數交換,則男工25日間得成之工程,女工須36日.問男女工各若干名? 答. 男工500名,女工600名.

附錄三 重要參考用書表

1.	初中代數	余介石等	中華
2.	復興初中代數	虞明禮	商務
3.	代數方程式	張鵬飛	中華
4.	代數學要覽	匡文濤	商務
5.	代數學問題解法研究	張鵬飛	中華
6.	代數學問題新選集	中川千之助	大阪文進堂
7.	代數學解法講義	藤森良藏等	東京高岡
8.	近世初等代數學	吳在淵	商務

9. Elementary and Intermediate Algebra by Schultze and Breckanridge. Macmillan Co.

10. Elementary Algebra for Schools by Hall and Knight. Macmillan Co.

11. School Algebra by Paterson. Oxford.

12. Algebra by Longley and Marsh. Macmillan Co.

中 西 名 詞 對 照 表

(一) 從中名找到英名

二 畫

二次方程式 Quadratic equation
二項式的乘方 Involution of binomials

三 畫

已知數 Known numbers

四 畫

分子 Numerator
分母 Denominator
分式 Fraction
分方程式 Fractional equation
分式加減法 Addition and subtraction of fractions
分式乘法 Multiplication of fractions
分式除法 Division of fractions
分式聯立方程式 Fractional simultaneous equations
分比定理 Dividendo
方括 Bracket
方程式 Equation
方程式的作成 Formation of equation
文字方程式 Literal equation
文字聯立方程式 Literal simultaneous equations
比例中項 Mean proportion
比 Ratio
比例 Proportion
比較消去法 Elimination by comparision
反變 Inverse variation
反比定理 Invertendo
內項 Mean
不盡根式 Surd
公式 Formula
公比 Common ratio
公差 Common difference
公式解法 Solution by formula

五 畫

代數學 Algebra
代數式 Algebraic expression
代入消去法 Elimination by substituting
正數 Positive number
正變 Direct variation
加法法則 Rule of addition
加減消去法 Elimination by addition or subtraction
末項 Last term
未知數 Unknown numbers
外項 Extremes

六 畫

因式分解 Factorization
因式解法 Solution by factoring
因式定理 Factor theorem
合比定理 Componendo
合分比定理 Componendo and dividendo
多項式 Polynomial
多項式的平方根 Square root of polynomials
多項式的立方根 Cube root of polynomials
有理式 Rational expression
共軛不盡根 Conjugate surds
次數 Order

七 畫

判別式 Discriminant
曲括 Brace
更比定理 Alternando

八 畫

負數 Negative number
恆等式 Identity

九 畫

指數 Exponent
首項 First term
約分 Reduction
前項 Antecendent
後項 Consequent
係數 Coefficient

十 畫

根式 Radical
根的性質 Character of the roots
根式乘法 Multiplication of radicals
根式除法 Division of radicals
根式加減法 Addition and subtraction of radicals
根與係數的關係 Relation between roots and coefficients
純二次方程式 Pure quadratic equation
乘方 Involution
乘法法則 Rule of multiplication
除法法則 Rule of division
級數 Progression
倒數 Reciprocal
通分 Reduction to common denominator
配方解法 Solution by complete the square

十一畫

虛數 Imaginary number
虛數加減法 Addition and subtraction of imaginary numbers
虛數乘除法 Multiplication and division of imaginary numbers
項 Term

項數 Number of terms
基本原則 Fundamental principle
常數 Constant
第三比例項 Third proportion
開方 Evolution

十 二 畫

等差中項 Arithmetic mean
等比中項 Geometric mean
最高公因式 Highest common factor
最低公因式 Lowest common multiple
幾何級數 Geometric progression
無窮項等比級數 Infinite geometric progression
無理式 Irrational expression
絕對值 Absolute value
減法法則 Rule of subtraction

十 三 畫

單項式的乘方 Involution of monomial
單項式的開方 Evolution of monomial
圓括 Parenthesis
對稱方程式 Symmetrical equations

十 四 畫

綜合除法 Synthetic division
算術級數 Arithmetic progression

十 五 畫

數字方程式 Mumeral equation
齊次方程式 Homogeneous equation
標準式 Standard form
增根 Extraneous root
獨項式 Monomial

十 六 畫

聯變 Joint variation
聯立二次方程式 Simultaneous quadratic equations
線括 Vinculum
複數 Complex number

十 七 畫

雜二次二程式 affected quadratic equation
總和 Total sum

十 八 畫

冪 Power

二十二畫

疊分式 Complex fraction

二十三畫

變號 Sign of variation

(二)從英名找到中名

Absolute value 絕對值
Addition and subtraction of frac

tions 分式加減法
Addition and subtraction of imaginary numbers 虛數加減法
Addition and subtraction of radicals 根式加減法
Affected quadratic equation 雜二次方程式
Algebra 代數學
Alternando 更比定理
Antecendent 前項
Arithmetic mean 等差中項
Arithmetic progression 等差級數
Brace 曲括
Braket 方括
Character of the roots 根的性質
Coefficient 係數
Common difference 公差
Common ratio 公比
Complex fraction 疊分式
Complex number 複數
Componendo 合比定理
Componendo and dividendo 合分比定理
Conjugate surds 共軛不盡根
Consequent 後項
Constant 常數
Cube root of polynomials 多項式的立方根
Denominator 分母
Direct variation 正變
Discriminant 判別式
Dividendo 分比定理
Division of fractions 分式除法
Division of radicals 根式除法
Elimination by addition or subtraction 加減消去法
Elimination by comparision 比較消去法
Elimination by substitution 代入消去法
Equation 方程式
Exponent 指數
Extraneous root 增根
Extreme term 外項
Evolution 開方
Evolution of monomial 單項式的開方
Factorization 因式分解
Factor theorem 因式定理
First term 首項
Formation of equation 方程式的作成
Formula 公式
Fraction 分式
Fractional equation 分方程式
Fractional simultaneous equation 分式聯立方程式
Fundamental principle 基本原則
Geometric mean 等比中項
Geometric progression 幾何級數
Highest common factor 最高公因式
Homogeneous equation 齊次方程式
Identity 恆等式

Imaginary number 虛數
Infinite geometric progression 無窮項等比級數
Inverse variation 反變
Invertendo 反比定理
Involution 乘方
Involution of binomials 二項式的乘方
Involution of monomials 單項式的乘方
Irrational expression 無理式
Joint variation 聯變
Known numbers 已知數
Last term 末項
Literal equation 文字方程式
Literal simultaneous equations 文字聯立方程式
Lowest common multiple 最低公倍式
Mean 內項
Mean proportion 比例中項
Monomial 獨項式
Multiplication and division of imaginary numbers 虛數乘除法
Multiplication of fractions 分式乘法
Multiplication of radicals 根式乘法
Negative numbers 負數
Number of terms 項數
Numeral equation 數字方程式
Numerator 分子
Order 次數
Parenthesis 圓括
Polynomial 多項式
Positive numbers 正數
Power 冪
Progression 級數
Proportion 比例
Pure quadratic equation 純二次方程式
Quadratic equation 二次方程式
Radical 根式
Ratio 比
Rational expression 有理式
Reciprocal 倒數
Reduction 約分
Reduction to common denominator 通分
Relation between roots and coefficients 根與係數的關係
Rule of addition 加法法則
Rule of division 除法法則
Rule of multiplication 乘法法則
Rule of subtraction 減法法則
Sign of variation 變號
Simultaneous quadratic equations 聯立二次方程式
Solution by complete the square 配方解法
Solution by factoring 因式解法
Solution by formula 公式解法
Square root of polynomials 多項式的平方根

Standard form 標準式
Surd 不盡根式
Symmetrical equations 對稱方程式
Synthetic division 綜合除法
Term 項
Third proportion 第三比例項
Total sum 總和
Unknown numbers 未知數
Vinculum 線括

(14192)

基價 6 圓 角 分