大學叢書

拓撲學

下　冊

沙愛福
施雷發　著

江澤涵　譯

商務印書館發行

大學叢書

拓撲學

下册

沙愛福
施雷發 著

江澤涵 譯

商務印書館發行

（全二册）
…ologie
L. Seifert
W. Threlfall
江澤涵
商務印書館
上海河南中路二一一號
商務印書館
上海及各地
商務印書館
新華書店★

1949年7月初版
1950年8月再版

基價55元

第八章 覆疊複合形

複合形的基本羣與複合形的覆疊形 (*Überlagerung*) 有密切的關係。設想一個單位半徑的圓環 (*Ring*, 有限高的圓柱面) 在平面上滾轉，他所滾轉過的平面域是一條無窮的長條(圖 98)。我們能用這長條(如同用帶子一樣) 纏繞圓環無窮多次，使他覆疊 (*Überlageren*) 圓環無窮多次，圓環滾轉的時候，他的閉道的起點 O 在這長條上印出許多點；這些點循環的出現，每隔 2π 單位距離出現一次。反之，這長條上連接這種的兩個點的一條道路，印 (*durchdrücken*) 到圓環上去，就是纏繞圓環若干次的一條閉道。而圓環的基本羣的每一元都由這種的一條閉道代表。從另一觀點說，這長條上的所有連接兩個固定點的道路都互相同倫；所以若是對於同倫的道路不加以區別，這長條上的一條道路就可以用起點與終點代表，因此也可以用由起點到終點的一個直移 (*Verschiebung*) 代表[illegible]是 O 在這長條上所印出的點，這些直移就組成這長條的"升騰羣" (*Deck[illegible]*)。所以這長條的基本羣與升騰羣間有一個一一的同構對應。每一個複合形的基本羣因此也就可以看作是一個確定的覆疊形——萬有 (*unirersal*) 覆疊複合形[illegible]。複合形的其他的無支點的覆疊形——我們只討論無支點的覆疊形——都與基本羣的子羣對應；因此我們能從基本羣，得着關于可能的覆疊複合形的一個概括的智識。

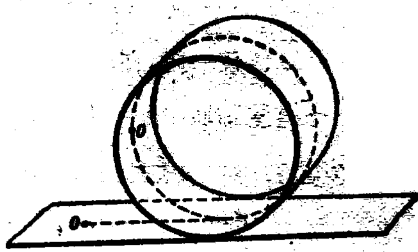


圖 98

§53 無支點的覆疊形

設 $\mathfrak{K}$ 與 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是有限的或無窮的連通複合形。若是有一個換 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 成 $\mathfrak{K}$ 的綿續變換 G 存在，適合下列條件，我們就說 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 覆疊 $\mathfrak{K}$，或說 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是 $\mathfrak{K}$

的覆疊形:

($\ddot{U}l_1$) $\mathfrak{K}$ 的每一個點 P 至少是 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的一個點 $\tilde{P}$ 的像點。$\tilde{P}$ 就說是在 P 之上,P 就說是 $\tilde{P}$ 的底點 (*Grundpunkt*)。

($\ddot{U}l_2$) 若是 $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \cdots$ 是所有的在 P 之上的點,就有有如次性質的"特出的鄰域" $\mathfrak{U}(P)$, $\mathfrak{U}(\tilde{P}_1)$, $\mathfrak{U}(\tilde{P}_2)$, $\cdots$ 存在;G 拓撲的變換 $\mathfrak{U}(\tilde{P}_1)$, $\mathfrak{U}(\tilde{P}_2)$, $\cdots$ 成 $\mathfrak{U}(P)$ (無支點的條件)。

($\ddot{U}l_3$) $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的任一點,在 $\mathfrak{U}(P)$ 中的一點之上的,至少屬於 $\mathfrak{U}(\tilde{P}_1)$, $\mathfrak{U}(\tilde{P}_2)$, $\cdots$ 這些鄰域中的一個 (無界點的條件)。

條件 ($\ddot{U}l_2$) 表明變換 G 是局部的拓撲變換。因此,如同在球面上展開的 *Riemann* 面的疊線與支點,就不會在覆疊形上出現。我們只討論這種的無支點的覆疊複合形。——有了條件 ($\ddot{U}l_3$),我們纔能證明 (見§54):在底複合形的每一條道路之上,都有一條覆疊道路 (*Überlagerungsweg*)。這並不是 ($\ddot{U}l_1$) 與 ($\ddot{U}l_2$) 的結論,我們可以用下述的例子表明。設底複合形是一個平環;另一個複合形是一個矩形的長條,含有兩個長邊,但不含有窄邊 a 與 b (圖 99);而且,這換長條成平環的變換 G 使長條的開的兩端互相重疊。這例子滿足 ($\ddot{U}l_1$) 與 ($\ddot{U}l_2$) 這兩個條件,但在 a 或 b 之下的一個點 P 的鄰域 $\mathfrak{U}(P)$ 就不能滿足 ($\ddot{U}l_3$)。給定了在平環上的一條道路,繞內圓周兩週的,矩形長條上就無一條道路存在,使他在這給定的道路之上,而且 G 換他成這給定的道路。

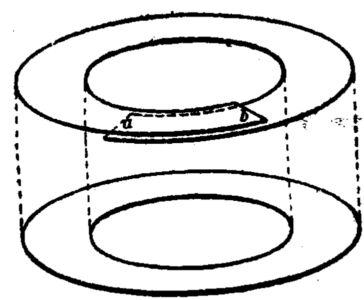
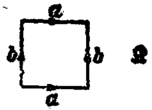


圖 99

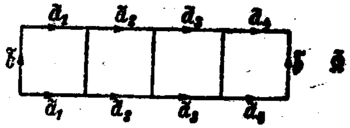
因為變換 G 換一個點 $\tilde{P}$ 的任一個鄰域成底點 P 的一個鄰域,我們可以應用 §8 中的定理;因此知道由疊合覆疊複合形上的有同一個底點的所有的點而成的空間就是底複合形。

環面是覆疊複合形的一個簡單的例子。設圖 100 中的正方形表示一個環面 $\mathfrak{K}$,圖 101 中的分成四個正方形的矩形表示一個環面 $\tilde{\mathfrak{K}}$。若是我們把 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的每一個正方形全合的 (*kon-*

gruent) 變換成 $\mathfrak{K}$ 這正方形，我們就有了 $\mathfrak{K}$ 的一個四層的覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$。我們也能換個看法，設想有四個全合的樣本或葉（*Blatt*）在 $\mathfrak{K}$ 之上，每一個都沿着一個經圈割開了（圖 100 中的垂直邊）；這四個樣本沿着割開的經圈循環的連接起來，就是這個覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$（圖 101）。若是設想環面是通常空間中的旋轉環面，這經圈就成爲 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的一條穿透的閉曲線（*Durchdringungskurve*）。但若是把 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 看作一個二維流形，不浸沒在一個空間中，這穿透的曲線上的點就與其他的點一樣，並無特異的地方。

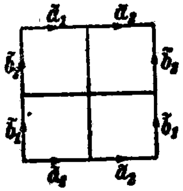


$\mathfrak{K}$ 圖 100



$\widetilde{\mathfrak{K}}$

圖 101



$\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 圖 102

若是兩個覆疊複合形間有一個拓撲對應，而且每兩個對應點在同一底點之上，這兩個覆疊形就當作相等。 兩個同胚的複合形即使是同一個底複合形的覆疊形，也可以不相等。

例：環面 $\mathfrak{K}$ 的四層的覆疊複合形，除去上文所說的 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 之外，還有一個 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$，與 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 不相等。我們只要把這四葉都沿着經圈與緯圈割開，然後再把他們相間的沿着經圈與緯圈聯接起來，就得着 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$，圖 102 表明 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 分割成四個正方形，代表四個樣本，而且樣本上每四個全合（*kongruent*）點在 $\mathfrak{K}$ 上有同一個底點。

我們再說明兩個將來有用的覆疊複合形。設 $\mathfrak{K}$ 是一個雙環面，即通常空間中有兩個環柄的球面。設想有三個與 $\mathfrak{K}$ 全合的樣本在 $\mathfrak{K}$ 之上，他們的環

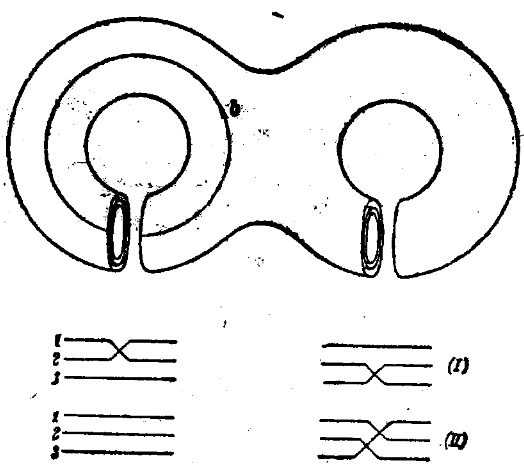
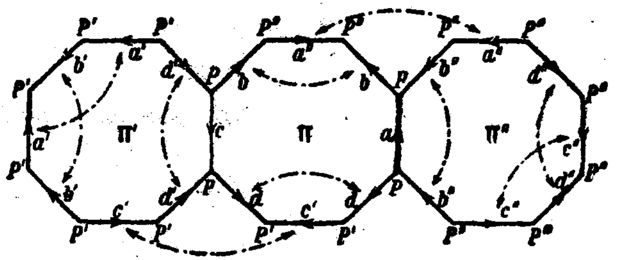


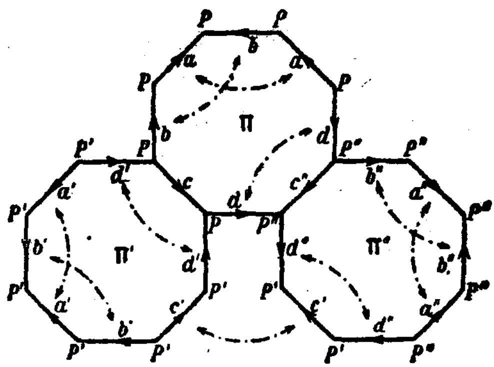
圖 103

柄都割開了。我們先沿着第一個與第二個的左環柄上的割痕(圖 103)把他們相間的聯接起來，把第三個樣本的左環柄上的割痕消去(即把第三個樣本的割開的左環柄再聯接起來，因此割痕不是穿透的曲線);再沿着第二個與第三個樣本的右環柄上的割痕把他們相間的聯接起來，把第一個樣本的右環柄上的割痕消去。這就做成了第一個覆疊形。但若是把這三個樣本的左環柄上的割痕都消去，而且把這三個樣本沿着他們的右環柄上的割痕循環的聯接起來，我們就得着第二個覆疊形。環柄上的未消去的經圓割痕是穿透的閉曲線;通過一條穿透的曲線的有兩個或全體三個樣本。圖 103 表示覆疊面在穿透的曲線處的剖面。



I

圖 104



II

圖 105

我們還可以把底面割開成基本多邊形——八邊形，再把他與另兩個全合的樣本適當的聯接起來，做成這兩個覆疊面的另一種模型。如此做成的每一個覆疊面都是一個多邊形，他的邊成對的相抵。在圖 104 與圖 105 中，相抵頂點與相抵棱都用同一個字母表示，而且在同一個底元素 (*Element*) 上的頂點，棱與面片用右上撇區別。——這兩個覆疊面都能定向。因爲在每一個頂點，棱與面片上都恰有三個元素，這兩個覆疊面的示性數也都是底面的示性數的三倍: $\tilde{N} = 3N = 6$。所以虧格都是 $h = 4$ (頁 197)。

§54 底道路與覆疊道路

若是 w 是 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 上的一條道路 $\widetilde{W}$ 的原底，而且 $\tilde{T}$ 是這換 w 成 $\widetilde{W}$ 的變換，$T = G\tilde{T}$ 就綿續的變換 w 到 $\mathfrak{R}$，因此也確定了 $\mathfrak{R}$ 上的一條道路 W。我們說，W 是屬於 $\widetilde{W}$ 的底道 (*Grundweg*)，$\widetilde{W}$ 覆疊 W。我們現在要證明，不但是 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 上的每一條道路 $\widetilde{W}$ 印成 $\mathfrak{R}$ 上的一條確定的底道 W，底複合形的每一條道路 W 也印到覆疊複合形上去，並且按照 W 的起點 A 之上有多少覆疊點，W 就恰有多少覆疊道路。

定理 I：設 W 是 $\mathfrak{R}$ 上的從 A 到 B 的一條道路，而且 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 上的 $\tilde{A}$ 是在 A 之上的一個點。$\tilde{\mathfrak{R}}$ 上就恰有一條以 $\tilde{A}$ 爲起點的覆疊 W 的道路 $\widetilde{W}$。

證明：我們取定向的單位線段 $w\ (0 \leqq s \leqq 1)$ 做 W 的原底，設 T 是這換 w 成 W 的變換。若是任一綿續變換 $\tilde{T}'$ 換 w 成 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 上的 $\widetilde{W}$，$\widetilde{W}$ 是 W 的覆疊道路的充要條件，就是 $G\tilde{T}'$ 換 w 成 W，也就是 w 有一個自身的拓撲變換 S，使 T 換 s 與 $G\tilde{T}'$ 換 $S(s)$ 成 $\mathfrak{R}$ 上的同一點：$T(s) = G\tilde{T}'S(s)$。但是根據道路相等的定義，$\tilde{T}'$ 與 $\tilde{T}'S = \tilde{T}$ 界說 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 上同一條道路。因此，若是有一個綿續變換 $\tilde{T}$ 換 w 成 $\tilde{\mathfrak{R}}$ 上的 $\widetilde{W}$，而且 $G\tilde{T} = T$，$\widetilde{W}$ 就是 W 的最普遍的覆疊道路。$G\tilde{T} = T$ 的意義是說：對於 w 上的任一點 s，$\tilde{T}(s)$ 這點總在 $T(s)$ 這點之上。所以只要能證明下述的預備定理，定理 I 就證明了：

預備定理：設 T 綿續的變換 $0 \leqq s \leqq 1$ 這單位線段到 $\mathfrak{R}$，而且 $\tilde{\mathfrak{R}}$

上的點 $\widetilde{A}$ 在 $A=T(0)$ 之上。則恰有一個綿續變換 $\widetilde{T}$ 存在，使 $\widetilde{T}(0)=\widetilde{A}$，而且每一點 $\widetilde{T}(s)$ 在 $T(s)$ 之上。

證明：*a*) $\widetilde{T}$ **的存在**。相當於 $\mathfrak{R}$ 上的每一點 P，我們任取一特出的鄰域 $\mathfrak{U}(P)$ 與他對應。把這單位線段分成 n 個相等的子線段 $r_1, r_2, \cdots, r_n$。根據頁 41 中的勻綿續定理 IV（用每一點 P 的特出的鄰域 $\mathfrak{U}(P)$ 當作這定理中的 $\mathfrak{U}^*(P|\mathfrak{B})$），我們還能設想 n 已如是之大，使每一子線段的像集 $T(r_i)$ 完全屬於（一點的，但不必注意究竟是那一點的）一特出的鄰域 $\mathfrak{U}_i$。現在再取一個在 $\mathfrak{U}_1$ 之上的，含有點 $\widetilde{A}$ 的特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1$。因爲 $(\dot{U}l_3)$，$\widetilde{\mathfrak{U}}_1$ 存在。因爲 G 拓撲的變換 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1$ 成 $\mathfrak{U}_1$，而且因爲 $T(r_1)$ 屬於 $\mathfrak{U}_1$，$\widetilde{\mathfrak{U}}_1$ 中有 $T(r_1)$ 的一個拓撲的像集。因此，有一個變換 $\widetilde{T}_1$ 存在，換第一個子線段 r_1 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1$，換 r_1 的起點 $s=0$ 成 $\widetilde{A}$。再同樣的討論 r_2。設特出的鄰域 $\mathfrak{U}_2$ 含有 $T(r_2)$；設特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_2$ 在 $\mathfrak{U}_2$ 之上，而且含有 r_1 的終點的像點 $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right)$。$\widetilde{\mathfrak{U}}_2$ 既然含有 $T(r_2)$ 的拓撲像集，因此有一個綿續變換 $\widetilde{T}_2$ 存在，換 r_2 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_2$，而且 $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right)=\widetilde{T}_2\left(\frac{1}{n}\right)$。如此繼續進行，結果我們求得一串分別換 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的變換 $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \cdots, \widetilde{T}_n$，而且 $\widetilde{T}_i\left(\frac{i}{n}\right)=\widetilde{T}_{i+1}\left(\frac{i}{n}\right)$。這些子線段的變換聯合成換這單位線段到 $\widetilde{\mathfrak{R}}$ 的一個具有應有的性質的變換。

b) $\widetilde{T}$ **的唯一性**。設 $\widetilde{T}'$ 是這單位線段的另一個綿續變換，滿足預備定理的條件。設在參數的一值 s^* $(\geqq 0)$ 以前，$\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 符合。因爲變換的綿續性，他們在 s^* 點處也符合。點 $\widetilde{T}(s^*)=\widetilde{T}'(s^*)$ 所以有一個特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$，$G$ 把他換成底點 $T(s^*)$ 的一個特出的鄰域 $\mathfrak{U}^*$。又

因爲 $\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 的綿續性，有一個有如次性質的正數 ε：若是 s 與 s^* 的差不大於 ε，所有的點 $\widetilde{T}(s)$ 與 $\widetilde{T}'(s)$ 都屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$。現在 $\widetilde{T}(s)$ 與 $\widetilde{T}'(s)$ 既然都在 $\mathfrak{U}^*$ 中的同一底點 $T(s)$ 之上，根據 $\mathfrak{U}^*$ 與 $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ 的一一對應，$\widetilde{T}(s)=\widetilde{T}'(s)$。所以 $\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 在 $s^*+\varepsilon$ 以前也符合。所以 $\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 完全符合，這就證明了我們的預備定理。

我們現在應用定理 I，去界說覆疊複合形的葉數 (*Blätterzahl*)。

設 P 與 Q 是 $\mathfrak{K}$ 上的二點，W 是從 P 到 Q 的一條道路。我們能在 P 之上的點與在 Q 之上的點間規定一個一一對應如下：若是 $\widetilde{P}_i$ 是在 P 之上的任一點，我們就說從 $\widetilde{P}_i$ 點起始的，在 W 之上的道路的終點與 $\widetilde{P}_i$ 對應。反之，若是 $\widetilde{Q}_k$ 是在 Q 之上的任一點，我們就說，從 $\widetilde{Q}_k$ 起始的，在 W^{-1} 之上的道路的終點與 $\widetilde{Q}_k$ 對應。根據定理 I，這些道路存在而且是唯一的。後一種對應恰是前一種的逆對應，所以在 P 之上的點與在 Q 之上的點間有一個一一的關係。**$\mathfrak{K}$ 的每一個點之上都有同樣多的覆疊點。若是 $\mathfrak{K}$ 的每一點之上恰有 g 點，g 就叫做這覆疊形的層數或葉數。**他可以有限，也可以無窮。

有了定理 I 纔能比較底複合形上的與覆疊複合形上的道路；同樣的要有了下述的定理 II，纔能比較他們的道路類。定理 II 告訴我們，覆疊複合形上的一條道路的變狀能印到底複合形上去，反之亦然。

定理 II：設 $\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的從 $\widetilde{A}$ 到 $\widetilde{B}$ 的兩條道路，W_0 與 W_1 是他們的從 A 到 B 的底道。若是 $\widetilde{W}_0$ 能變狀成 $\widetilde{W}_1$，W_0 就也能變狀成 W_1。——反之，若是 W_0 與 W_1 是 $\mathfrak{K}$ 上的從 A 到 B 的，能互

相變狀的兩條道路，$\widetilde{A}$ 是在 A 之上的一點，而且 $\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 是從 $\widetilde{A}$ 起始的覆疊道路，$\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 的終點就是同一個在 B 之上的點 $\widetilde{B}$，而且 $\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 也能互相變狀。

因爲變換 G 的綿續性，根據頁 219 上的討論，定理的第一部分成立。

雖然定理的第二部分也同樣的明顯，却比較不容易證明。因爲要證明第二部分，我們必須從底複合形的變狀矩形得着覆疊複合形的變狀矩形；但是我們現在只有在一個(特出的)鄰域中的拓撲變換，並無全局的單值綿續變換。——W_0 能變狀成 W_1 的意義是說，有一個綿續變換 T 存在，換變狀矩形 $\mathfrak{R}$ (他的點的坐標由 $0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 1$ 給定，圖 106) 到 $\mathfrak{K}$，使二定向邊 $t=0, t=1$ 分別換成道路 W_0 與 W_1，其他二邊 $s=0$ 與 $s=1$ 分別換成點 A 與 B。我們現在要求得一個換 $\mathfrak{R}$ 到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的綿續變換 $\widetilde{T}$，使相當於 $\mathfrak{R}$ 中任一點 (s, t) 的 $\widetilde{T}(s, t)$ 都在 $T(s, t)$ 之上，而且特別使 $\widetilde{T}(0, 0) = \widetilde{A}$。有了這樣的一個 $\widetilde{T}$ 之後，$t=0$ 這單位線段上就有一個綿續變換，換相當於每一值 s 的點 $\widetilde{T}(s, 0)$ 在 $T(s, 0)$ 之上，而且 $\widetilde{T}(0,0)=\widetilde{A}$。根據上文證明的預備定理，這線段恰換成在 W_0 之上的，從 $\widetilde{A}$ 起始的道路 $\widetilde{W}_0$。同樣的我們知道 $\widetilde{T}$ 分別換

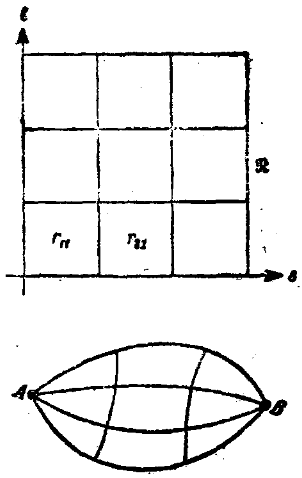


圖 106

單位線段 $s=0$ 與 $s=1$ 成 $\widetilde{A}$ 與 $\widetilde{W}_0$ 的終點 $\widetilde{B}$; 而且最後換邊 $t=1$ 成覆疊道路 $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_1$ 的終點也必定是 $\widetilde{B}$。這就證明了 $\widetilde{W}_0$ 能變狀成 $\widetilde{W}_1$。

要求得 $\widetilde{T}$, 我們先用 n 條等距的水平線與 n 條等距的垂直線把變狀矩形 $\mathfrak{R}$ 分成 n^2 個子矩形 r_{ik}:

$$\frac{i-1}{n}\leqq s\leqq\frac{i}{n}, \quad \frac{k-1}{n}\leqq t\leqq\frac{k}{n},$$

然後設想 n 已如是之大,使每一矩形的像域 $T(r_{ik})$ 完全屬於 (一個適當的點的) 一個特出的鄰域 $\mathfrak{U}_{ik}$。根據勻綿續定理,這是可能的。我們現在把子矩形一個一個的變換到 $\widetilde{\mathfrak{R}}$, 再一步一步的求 $\widetilde{T}$ 。 我們從 r_{11} 起始,選一個在 $\mathfrak{U}_{11}$ 之上的,含有 $\widetilde{A}$ 的特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{11}$; 根據 $(\dot{U}l_3)$, 這種鄰域存在 。 因爲 $T(r_{11})$ 完全屬於 $\mathfrak{U}_{11}$, $\widetilde{\mathfrak{U}}_{11}$ 所以含有 $T(r_{11})$ 的像域。我們因此得着一個換 r_{11} 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{11}$ 的綿續變換 $\widetilde{T}_{11}$,使 $\widetilde{T}_{11}(0,0)=\widetilde{A}$, $\widetilde{T}_{11}(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上。然後我們選一個在 $\mathfrak{U}_{21}$ 之上的,含有點 $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},0\right)$ (r_{11} 的右下角的頂點的像點) 的特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{21}$, 拓撲的變換 $T(r_{21})$ 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{21}$。$\widetilde{T}_{11}$ 與 $\widetilde{T}_{21}$ 這二變換在 r_{11} 與 r_{21} 的共邊上完全符合。因爲這二變換換這邊的起點 $\left(\frac{1}{n},0\right)$ 成同一點,而且既然 $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},t\right)$ 與 $\widetilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n},t\right)$ 在同一點 $T\left(\frac{1}{n},t\right)$ 上,根據預備定理, $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},t\right)=\widetilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n},t\right)$。現在再同樣的求得綿續變換 $\widetilde{T}_{31}$ 換下一個子矩形 r_{31} 到 $\widetilde{\mathfrak{R}}$, 使 $\widetilde{T}_{21}\left(\frac{2}{n},0\right)=\widetilde{T}_{31}\left(\frac{2}{n},0\right)$, 而且證明 $\widetilde{T}_{21}$ 與 $\widetilde{T}_{31}$ 同樣的變換 r_{21} 與 r_{31} 的共邊。經過 n 步就求得 $r_{11}, r_{21}, \cdots, r_{n1}$ 所組成的全個的長條的一個綿續變換 $\widetilde{T}_1$,使 $\widetilde{T}_1(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上,而且變換邊 $s=0, 0\leqq t\leqq\frac{1}{n}$ 成 $\widetilde{A}$。同樣的求其餘的長條 $r_{1i}, r_{2i}, \cdots, r_{ni}$ $(i=2,3,\cdots,n)$的

變換 $\widetilde{T}_i$，使 $\widetilde{T}_i(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上，而且 $\widetilde{T}_i(0,t)=\widetilde{A}$。既然 $\widetilde{T}_i$ 與 $\widetilde{T}_{i+1}$ 同樣的變換第 i 個與第 $i+1$ 個長條的共邊單位線段（仍根據預備定理），所以我們求得這全個的變狀矩形 $\mathfrak{R}$ 的一個綿續變換 $\widetilde{T}$，使 $\widetilde{T}(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上，而且 $\widetilde{T}(0,0)=\widetilde{A}$。

§55 覆疊形與基本羣的子羣

在底複合形 $\mathfrak{K}$ 上選一個定點 O 做閉道的起點，在覆疊複合形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上選一個在 O 之上的點 $\widetilde{O}_1$ 做閉道的起點。根據頁 219，綿續變換 G 使 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 的每一個道路類與 $\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的一個確定的道路類對應。這對應是換 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 成 $\mathfrak{F}$ 的一個確定的子羣 $\mathfrak{H}_1$ 的一個同構變換。

§54 中的定理 II 的第二部分已表明，與 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 中兩個非同倫的道路對應的，也是 $\mathfrak{F}$ 中非同倫的道路。這就是說，這換 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 成 $\mathfrak{H}_1$ 的同構變換並且是一一的同構變換。

覆疊複合形的基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 所以與底複合形的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的一個確定的子羣 $\mathfrak{H}_1$ 一一的同構。$\mathfrak{H}_1$ 就是 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 在底複合形上印出的子羣。

但是我們要注意這子羣 $\mathfrak{H}_1$ 並非已經由覆疊複合形完全確定了。我們就要說明起點 $\widetilde{O}_1$ 的選擇對於這子羣的影響。設

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_1\{F_{12}\}+\mathfrak{H}_1\{F_{13}\}+\cdots$$

是 $\mathfrak{F}$ 按照 $\mathfrak{H}_1$ 的剖分。這裏的 $\{F_{1i}\}$ 如同頁 216 上的一樣，表示道路 F_{1i} 的道路類。若 H_1 是 $\mathfrak{H}_1$ 中的任一道路，而且 $\widetilde{H}_1$ 是在 $\widetilde{O}_1$ 點起始的覆疊道路，$\widetilde{H}_1$ 就也是閉道。因此可知，一確定的剩餘類 $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 中

的道路的覆疊道路，從點 $\widetilde{O}_1$ 起始的，都有同一終點 $\widetilde{O}_i$；這終點 $\widetilde{O}_i$ 就是在 F_{1i} 之上的，從 $\widetilde{O}_1$ 起始的道路 $\widetilde{F}_{1i}$ 的終點。所以每一剩餘類確定一個在 O 之上的點 $\widetilde{O}_i$。不同的剩餘類 $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 與 $\mathfrak{H}_1\{F_{1j}\}$ 確定不同的點 $\widetilde{O}_i \neq \widetilde{O}_j$。因為，否則 $\widetilde{F}_{1i}\widetilde{F}_{1j}^{-1}$ 是閉道，是 $\mathfrak{H}_1$ 中的一元，這却與剩餘類 $\{F_{1i}\}$ 與 $\{F_{1j}\}$ 不同的假設矛盾。既然道路 $\widetilde{F}_{11}, \widetilde{F}_{12}, \cdots$ 的終點必包括所有的在 O 之上的點，所以 $\mathfrak{H}_1$ 的右剩餘類必與在 O 之上的點成一一對應。因此，特別知道，**覆疊形的葉數等於 $\mathfrak{H}_1$ 在 $\mathfrak{F}$ 中的指數** (*Index*)。

每一從 $\widetilde{O}_i$ 起始的閉道 $\widetilde{H}_i$ 都能變狀成如 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\widetilde{H}_1\widetilde{F}_{1i}$ 式的道路（例如 $\widetilde{H}_i$ 就能變狀成道路 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\cdot(\widetilde{F}_{1i}\widetilde{H}_i\widetilde{F}_{1i}^{-1})\cdot\widetilde{F}_{1i}$)；這裏的 $\widetilde{H}_1$ 是一條從 $\widetilde{O}_1$ 起始的閉道。$\widetilde{F}_{1i}^{-1}\widetilde{H}_1\widetilde{F}_{1i}$ 印成的道路是 $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$，是 $\mathfrak{H}_1$ 的相配子羣 (*konjugierte Untergruppe*) $\mathfrak{H}_i=\{F_{1i}\}^{-1}\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 的一條道路。反之，$\mathfrak{H}_i$ 的每一道路都印成 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上從 $\widetilde{O}_i$ 起始的閉道。因為如 $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$ 式的道路都印成一條從 $\widetilde{O}_i$ 起始的覆疊道路 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\widetilde{H}_1\widetilde{F}_{1i}$；而且這覆疊道路也是閉道，因為 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}$ 從 $\widetilde{O}_i$ 到 $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{H}_1$ 從 $\widetilde{O}_1$ 到 $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{F}_{1i}$ 從 $\widetilde{O}_1$ 再回到 $\widetilde{O}_i$。既然 $\mathfrak{H}_i$ 的任一道路能變狀成 $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$ 式的一條道路，既然這變狀能印到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上去，而且變狀時不改變道路的終點，所以 $\mathfrak{H}_i$ 的任一道路也有一從 $\widetilde{O}_i$ 起始的覆疊閉道。這就是說，若是用 $\widetilde{O}_i$ 替代 $\widetilde{O}_1$ 做 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的閉道的起點，$\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 就印成 $\mathfrak{H}_1$ 的相配子羣 $\{F_{1i}\}^{-1}\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$；而且，若是 $\widetilde{O}_i$ 選擇得適當，我們就可以得着 $\mathfrak{H}_1$ 的任一個預先指定的相配子羣。所以 $\mathfrak{K}$ 的覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 確定 $\mathfrak{F}$ 的一個完

全的相配子羣類 (*eine ganze Klasse konjugierter Untergruppe*)。

現在我們要反轉來證明，每一類相配子羣也確定一個覆疊形。因此，作所有的 g 葉的覆疊形的問題就變成羣論中的下述的問題：求底複合形的基本羣的所有的指數等於 g 的相配子羣類。我們在 §58 中再說明關於有限複合形的有限葉數的覆疊形的作法。

存在的證明

I. $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的作法。設 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的任一子羣。*) 我們是要求得一個覆疊複合形 $\tilde{\mathfrak{K}}$，他的閉道的起點 $\tilde{O}_1$ (在 O 之上的) 適當的選定之後，他的基本羣恰印成 $\mathfrak{H}$。我們能假設 O 是 $\mathfrak{K}$ 的一個單純剖分的頂點。因爲 O 若不是頂點，只需要重分 $\mathfrak{K}$ 一次，把 O 改成頂點。我們要使作出的覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 有如下的一個單純剖分：這換 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 成 $\mathfrak{K}$ 的變換平直的換 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的每一個單純形成 $\mathfrak{K}$ 的一個單純形。這單純剖分叫做從 $\mathfrak{K}$ 印到 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 上去的單純剖分。

我們用表格 (§11) 規定 $\tilde{\mathfrak{K}}$，用某種道路類當作表格的元。

設 A 是 $\mathfrak{K}$ 的一個頂點。我們把從 O 到 A 的道路分成類，叫做 $\mathfrak{H}$ 類：若是這種的二道路 U 與 U' 所成的閉道 UU'^{-1} 屬於子羣 $\mathfrak{H}$，我們就說 U 與 U' 屬於同一個 $\mathfrak{H}$ 類。屬於 $\mathfrak{K}$ 的每一個頂點 A 有若干 $\mathfrak{H}$ 類，用

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots$$

表示。子羣 $\mathfrak{H}$ 的道路組成這種的一個特別的 $\mathfrak{H}$ 類，"么 $\mathfrak{H}$ 類"。他屬

*) 爲簡單起見，現在用 $\mathfrak{H}$ 替代 $\mathfrak{H}_1$。

於 O, 我們用 $\overline{O}_1$ 表示。

若是兩個 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{A}_i$ 與 $\overline{B}_k$ 的終點 A 與 B 是 $\mathfrak{K}$ 的一個一維單純形 c 的頂點,而且 $\overline{A}_i$ 的一條道路 U 與 $\overline{B}_k$ 的一條道路 V 所成的閉道 UcV^{-1} 屬於 $\mathfrak{H}$, 這兩個 $\mathfrak{H}$ 類就說是鄰接的 (*benachbart*) $\mathfrak{H}$ 類。不管如何從 $\overline{A}_i$ 與 $\overline{B}_k$ 中分別選取 U 與 V, 我們得着的鄰接的 $\mathfrak{H}$ 類相同。

若是 $\overline{A}_i$ 這 $\mathfrak{H}$ 類預先給定了,屬於這頂點 B 的 $\mathfrak{H}$ 類中恰有一個 $\overline{B}_k$ 與 $\overline{A}_i$ 鄰接。設 U 是 $\overline{A}_i$ 的一條固定的道路。所有的道路 V, 使 UcV^{-1} 屬於 $\mathfrak{H}$ 的,就組成我們所需要的 $\overline{B}_k$。例如 $V=Uc$ 這道路是 $\overline{B}_k$ 的一條代表道路,就證明 $\overline{B}_k$ 的存在。

現在我們能證明下述的預備定理。

預備定理: 設 $\mathfrak{E}^i$ 是底複合形 $\mathfrak{K}$ 的一個單純形,他的頂點是 $A, B, \cdots, C$; 而且選定了屬於 A 的一個 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{A}_i$。屬於其餘的頂點 $B, \cdots, C$ 的 $\mathfrak{H}$ 類中,各恰有一個 $\overline{B}_k, \cdots, \overline{C}_l$, 使 $\overline{A}_i, \overline{B}_k, \cdots, \overline{C}_l$ 的每兩個鄰接。

因爲 $\overline{B}_k, \cdots, \overline{C}_l$ 的每一個必須與 $\overline{A}_i$ 鄰接,所以牠們都唯一的確定了。我們現在只要證明這些 $\mathfrak{H}$ 類中的每兩個鄰接。我們只證明 $\overline{B}_k$ 與 $\overline{C}_l$ 鄰接作例子。若是 U 是 $\overline{A}_i$ 中的一條道路 (圖 107), 而且 a, b, c 分別是 CB, AC, AB, 這三個定向的單純形, Ub 與 Uc 就是 $\overline{C}_l$ 與 $\overline{B}_k$ 的代表道路。$\overline{B}_k$ 與 $\overline{C}_l$ 互相鄰接的條件是:

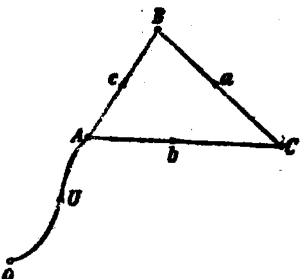


圖 107

$Ub \cdot a \cdot (Uc)^{-1}$ 屬於 $\mathfrak{H}$。這是正確的,因爲這道路零倫,所以屬於基本

羣的么道路類。

若是一組 $\mathfrak{H}$ 類中的每兩個鄰接，而且這些 $\mathfrak{H}$ 類的終點是 $\mathfrak{K}$ 的一個單純形的頂點，我們就規定他是一個特出的子集 (頁 63)。 我們很容易證明，所有的 $\mathfrak{H}$ 類所組成的集合與這種的特出的子集滿足表格的條件 (Sch_1), (Sch_2) 與 (Sch_3)。所以 $\mathfrak{K}$ 的 $\mathfrak{H}$ 類組成一個單純的複合形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的表格。

這單純的複合形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的表示法也可以改述如下：$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的頂點 $\tilde{A}_i$ 與 $\mathfrak{K}$ 的 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{A}_i$ 成一一對應，而且每一個 $\mathfrak{H}$ 類又與 $\mathfrak{K}$ 的一個確定的頂點——$\mathfrak{H}$ 類 $\overline{A}_i$ 中的道路的終點 A ——對應。若干頂點 $\tilde{A}_i, \tilde{B}_k, \cdots, \tilde{C}_l$ 是一個單純形的頂點的充要條件，就是 $\mathfrak{K}$ 上的對應的頂點 $A, B, \cdots, C$ 是一個單純形的頂點，而且 $\overline{A}_i, \overline{B}_k, \cdots, \overline{C}_l$ 這些 $\mathfrak{H}$ 類的每兩個鄰接。

[illegible] $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是一個連通的複合形。我們只需要證明，每一個 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{A}_i$ 能用一串 $\mathfrak{H}$ 類與么 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{O}_1$ 連接起來，而且其中每兩個銜接的 $\mathfrak{H}$ 類鄰接。在 $\overline{A}_i$ 中任取一條從 O 到 A 的棱道 U (這種棱道存在，因爲每一條從 O 到 A 的道路都能變狀成一條棱道 (頁 162))。U 上的從 O 到 U 的每一個頂點的子道路代表與這頂點對應的一個 $\mathfrak{H}$ 類。這一串子道路就代表有應有的性質的一串 $\mathfrak{H}$ 類。

II. 現在我們纔證明：若是我們規定 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的每一個頂點 $\tilde{A}_i$($\tilde{A}_i$ 與 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{A}_i$ 對應) 的底點是 A_i，而且把 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的每一個單純形平直的變換成他的頂點的底點所組成的單純形，$\tilde{\mathfrak{K}}$ 就是 $\mathfrak{K}$ 的一個覆疊複合形。覆疊形的三個條件都能滿足。因爲相當於 $\mathfrak{K}$ 的每一個單純形，有一組鄰接的 $\mathfrak{H}$

類存在,所以這單純形之上至少有一個覆疊單純形。所以($\ddot{U}l_1$)滿足了。——設 P 是 $\mathfrak{K}$ 的任一點,而且含有 P 做中間點的唯一的單純形是 $\mathfrak{E}^i$。所有的單純形含有 $\mathfrak{E}^i$ 做一個面單純形的,組成 P 在 $\mathfrak{K}$ 上的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P)$。我們說,$\mathfrak{U}(P)$ 就是一個特出的鄰域。設 $\widetilde{P}$ 是在 P 之上的一個點。有一組從 O 到 $\mathfrak{E}^i$ 的頂點的 $i+1$ 個鄰接的 $\mathfrak{H}$ 類存在,他們組成一個在 $\mathfrak{E}^i$ 之上的單純形 $\widetilde{\mathfrak{E}}^i_\lambda$,而且 $\widetilde{P}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{E}}^i_\lambda$ 的一個中間點。若是 $\mathfrak{E}^{i+k}$ 是一個與 $\mathfrak{E}^i$ 關聯的單純形,根據預備定理,恰有一組從 O 到 $\mathfrak{E}^{i+k}$ 的頂點的鄰接的 $\mathfrak{H}$ 類存在,含有前文所說的一組做子組。所以 $\mathfrak{E}^i$ 的關聯的單純形與 $\widetilde{\mathfrak{E}}^i_\lambda$ 的關聯的單純形成一一對應;那就是說,$\widetilde{P}$ 在 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的鄰域 $\mathfrak{U}(\widetilde{P})$,由 $\widetilde{\mathfrak{E}}^i_\lambda$ 的所有的連屬的單純形組成的,能拓撲的變換成 $\mathfrak{U}(P)$。所以 ($\ddot{U}l_2$) 滿足了。——設 $\widetilde{Q}_\mu$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的在 $\mathfrak{U}(P)$ 的一點 Q 之上的一個點。Q 屬於 $\mathfrak{U}(P)$ 中的一個與 $\mathfrak{E}^i$ 關聯的單純形 $\mathfrak{E}^{i+k}_\mu$,所以 $\widetilde{Q}_\mu$ 屬於在 $\mathfrak{E}^{i+k}$ 之上的,含有在 P 之上的一個點 $\widetilde{P}_\mu$ 的一個單純形 $\widetilde{\mathfrak{E}}^{i+k}_\mu$,所以 $\widetilde{Q}_\mu$ 屬於鄰域 $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_\mu)$,($\ddot{U}l_3$) 也滿足了。

III. **覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 屬於 $\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的子羣 $\mathfrak{H}$。** 設 $\widetilde{O}_1$ 是在 O 之上的,屬於么 $\mathfrak{H}$ 類的點。我們選取頂點 $\widetilde{O}_1$ 做 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的閉道的起點。設 U 是 $\mathfrak{K}$ 上從 O 到一個頂點 A 的棱道,U_c 是 U 的前 c 條棱道所組成的子道路。$U_0, U_1, \cdots, U_l = U$ 的 $\mathfrak{H}$ 類組成一串銜接的鄰接的 $\mathfrak{H}$ 類。這一串 $\mathfrak{H}$ 類與 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的一串頂點對應,兩個銜接的 $\mathfrak{H}$ 類確定 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的兩個鄰接的頂點,所以有一條在 U 之上的棱道 $\widetilde{U}$ 連接這一串頂點。$\widetilde{U}$ 的起點屬於 U_0 的 $\mathfrak{H}$ 類,所以是頂點 $\widetilde{O}_1$。

若是 U 是屬於 $\mathfrak{H}$ 的閉棱道，U 就屬於么 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{O}_1$，所以在 $\tilde{O}_1$ 點起始的這覆疊道路 $\tilde{U}$ 重回到 $\tilde{O}_1$。若是 U 不屬於 $\mathfrak{H}$，U 就屬於一個 $\mathfrak{H}$ 類 $\overline{O}_i \neq \overline{O}_1$，所以這印成的棱道 $\tilde{U}_i$ 從 $\tilde{O}_1$ 起到 $\tilde{O}_i \neq \tilde{O}_1$ 爲止，不是閉道。既然每一條從 O 點起始的閉道能變狀成一條棱道，這就證明了：U 屬於 $\mathfrak{H}$ 就是 U 有一個覆疊閉道 $\tilde{U}$ 的充要條件。這就是說，若是取定了 $\tilde{O}_1$ 作 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 上的閉道的起點，$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 恰印成 $\mathfrak{F}$ 的子羣 $\mathfrak{H}$。所以 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是屬於 $\mathfrak{H}$ 的一個覆疊形。

$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的唯一性

假設 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 是另一個覆疊形，*) 他與 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 確定 $\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的同一個相配子羣類：$\mathfrak{F}$ 的屬於子羣 $\mathfrak{H}$ 的相配子羣類。所以 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 上有一個點 $\tilde{O}_1'$，他在 O 之上，而且用他做閉道的起點而得着的 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 的基本羣恰印成子羣 $\mathfrak{H}$。(有時候 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 能有數個這種在 O 之上的點。) 我們現在要求得一個換 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 成 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 的變換，使 $\tilde{O}_1$ 換成 $\tilde{O}_1'$，而且對應點在 $\mathfrak{K}$ 的同一個點之上。

若是 $\tilde{P}$ 是 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 的任一點，我們取一條從 $\tilde{O}_1$ 到 $\tilde{P}$ 的道路 $\tilde{W}$。$\tilde{W}$ 的底道是一條從 O 起始的道路 W。設 $\tilde{W}'$ 是從 $\tilde{O}_1'$ 起始的，在 W 之上的這覆疊道路，他的終點是 $\tilde{P}'$。我們就規定 $\tilde{P}'$ 是 $\tilde{P}$ 的像點。我們必須證明這對應與選取的連接道路 $\tilde{W}$ 無干。設 $\tilde{V}$ 是另一條連接 $\tilde{O}_1$ 與 $\tilde{P}$ 的道路。因爲 $\tilde{W}\tilde{V}^{-1}$ 是閉道，所以 $\tilde{W}\tilde{V}^{-1}$ 屬於 $\mathfrak{H}$。因爲選定了

*) 我們並不假設 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 有一個單純剖分，印成 $\mathfrak{K}$ 的一個單純剖分；其實現在用不着單純剖分。

$\widetilde{O}_1'$ 做 $\widetilde{\mathfrak{R}}'$ 上閉道的起點之後，$\widetilde{\mathfrak{R}}'$ 的基本羣印成 $\mathfrak{H}$，所以在 WV^{-1} 之上的，從點 $\widetilde{O}_1'$ 起始的這覆疊道路也是閉道。所以 $\widetilde{W}'$ 與 $\widetilde{V}'$ 有同一個終點 $\widetilde{P}'$。——因爲我們能用相反的步驟從 $\widetilde{P}'$ 得着 $\widetilde{P}$，所以 $\widetilde{P} \to \widetilde{P}'$ 這種對應是一一對應。

因爲 $\widetilde{\mathfrak{R}}$ 與 $\widetilde{\mathfrak{R}}'$ 所佔的地位相等，要證明這對應的綿續性，我們只要證明 $\widetilde{P} \to \widetilde{P}'$ 這一方向有綿續性。所以給定了任一鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}'(\widetilde{P}')$，我們只要證明有一鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}(\widetilde{P})$ 存在，他的像集完全屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}'(\widetilde{P}')$。設 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1'$ 是 $\widetilde{P}'$ 的特出的鄰域，而且完全屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}'$。例如 $\widetilde{P}'$ 的任一特出的鄰域與 $\widetilde{\mathfrak{U}}'$ 的交集就是這種的一個 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1'$。設 $\mathfrak{U}_1$ 是 P 的特出的鄰域，與 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1'$ 成拓撲對應。再假設 $\widetilde{\mathfrak{U}}$ 是 $\widetilde{P}$ 的一個適當小的鄰域，能印成 $\mathfrak{U}_1$ 的一個子集 $\mathfrak{U}$。此外我們還假設 $\widetilde{\mathfrak{U}}$ 的每一點能用屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}$ 的一條道路與 $\widetilde{P}$ 連接。因爲 $\widetilde{\mathfrak{R}}$ 是一個複合形，我們顯然能有這種的一個 $\widetilde{\mathfrak{U}}$；例如以 $\widetilde{P}$ 做中心的一個適當的單純星形就滿足所有的這些條件。我們說，這換 $\widetilde{\mathfrak{R}}$ 成 $\widetilde{\mathfrak{R}}'$ 的變換就換 $\widetilde{\mathfrak{U}}$ 成 $\widetilde{\mathfrak{U}}'$ 的一個子集。證明如下：設 $\widetilde{W}$ 是從 $\widetilde{O}_1$ 到 $\widetilde{P}$ 的一條道路，$\widetilde{Q}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{U}}$ 的一個點，$\Delta\widetilde{W}$ 是從 $\widetilde{P}$ 到 $\widetilde{Q}$ 的而且完全屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}$ 的一條道路。我們就選取 $\widetilde{W} \cdot \Delta\widetilde{W}$ 當作從 $\widetilde{O}_1$ 到 $\widetilde{Q}$ 的一條道路，他的底道 $W \cdot \Delta W$ 先從 O 到 P，在 P 以後完全屬於 $\mathfrak{U}_1$。$W \cdot \Delta W$ 印到 $\widetilde{\mathfrak{R}}'$ 上去所成的道路 $\widetilde{W}' \cdot \Delta\widetilde{W}'$ 先從 $\widetilde{O}_1'$ 到 $\widetilde{P}'$，在 $\widetilde{P}'$ 以後完全屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1'$，所以當然完全屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}'$。$\widetilde{Q}$ 的像點就是道路 $\widetilde{W}' \cdot \Delta\widetilde{W}'$ 的終點，所以屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}'$。這就是我們所要證明的。

這些結果可以綜合成下述的定理：

定理：一個複合形的覆疊形與相配子羣間成一一對應。更正確的說：設 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是一個複合形 $\mathfrak{K}$ 的覆疊形，O 是 $\mathfrak{K}$ 上的閉道的起點，在 O 之上的一點 $\tilde{O}$ 是 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 上的閉道的起點。$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 就印成與 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 一一同構的，$\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的一個子羣 $\mathfrak{H}$。若是用別個在 O 之上的點替代 $\tilde{O}$，$\tilde{\mathfrak{F}}$ 就印成 $\mathfrak{H}$ 的一個相配子羣。

習題：1．一個有限的複合形的示性數與一個 g 葉的覆疊形的示性數有何關係？

2．若是 $\mathfrak{F}$ 是有 a 個母元的自由羣，而且 $\mathfrak{H}$ 是指數等於 i 的一個子羣，試證 $\mathfrak{H}$ 就是有 $i(a-1)+1$ 個母元的自由羣。［設想 $\mathfrak{F}$ 是示性數等於 $N=a-1$ 的一個棱複合形的基本羣（§ 47）］。

3．試證一個單連通的複合形是他自己的唯一的覆疊形。

§56 萬有覆疊形

每一個複合形 $\mathfrak{K}$ 有一個覆疊形屬於子羣 $\mathfrak{H}=1$。這覆疊形是所有的覆疊形中特別重要的一個，叫做 $\mathfrak{K}$ 的**萬有覆疊形**。他的特徵是他的基本羣只含有一個么元，所以他是一個單連通的複合形。根據上面的定理我們得着下述的定理：

定理 I：每一個連通的複合形 $\mathfrak{K}$ 恰有一個單連通的覆疊形——他的萬有覆疊形 $\hat{\mathfrak{K}}$。

因爲有關於萬有覆疊形 $\hat{\mathfrak{K}}$ 的下述的定理，我們還能說萬有覆疊形是最强的覆疊形。

定理 II：萬有覆疊形 $\hat{\mathfrak{K}}$ 也可以由下述的特徵規定：他覆疊 $\mathfrak{K}$ 的每一個覆疊形。

這定理的證明需要下述的預備定理。

預備定理：若是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 覆疊 $\mathfrak{K}$，而且 $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{K}}}$ 又覆疊 $\widetilde{\mathfrak{K}}$，$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{K}}}$ 就也覆疊 $\mathfrak{K}$。

條件 $(\dot{U}l_1)$ 顯然的滿足了；$\mathfrak{K}$ 的每一個點之上至少有一個點 $\widetilde{\widetilde{P}}$。要證明 $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{K}}}$ 與 $\mathfrak{K}$ 滿足 $(\dot{U}l_2)$ 與 $(\dot{U}l_3)$，我們先把 $\mathfrak{K}$ 的一個單純剖分印到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上去，然後再把 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的這單純剖分印到 $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{K}}}$ 上去。設在 P 之上的點是 $\widetilde{\widetilde{P}}_1, \widetilde{\widetilde{P}}_2, \cdots$。如同證明覆疊形的存在(頁 267)一樣，把含有 $P(\widetilde{\widetilde{P}}_i)$ 的單純形的全體規定做 $P(\widetilde{\widetilde{P}}_i)$ 的特出的鄰域。這些單純星形都互相拓樸的對應，所以 $(\dot{U}l_2)$ 與 $(\dot{U}l_3)$ 都滿足了，預備定理也證明了。

現在假設 $\widehat{\mathfrak{K}}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的萬有覆疊形，$\widetilde{\mathfrak{K}}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的覆疊形。根據預備定理，$\widehat{\mathfrak{K}}$ 覆疊 $\mathfrak{K}$。因為 $\widehat{\mathfrak{K}}$ 單連通，他就是 $\mathfrak{K}$ 的萬有覆疊形。所以 $\mathfrak{K}$ 的萬有覆疊形也覆疊 $\widetilde{\mathfrak{K}}$。——反之，若是 $\mathfrak{K}$ 的一個覆疊形覆疊每一個覆疊形，他就也覆疊 $\widehat{\mathfrak{K}}$。因為 $\widehat{\mathfrak{K}}$ 的單連通性，他是他自己的唯一的覆疊形(§55，習題 3)。

萬有覆疊形的例子我們已常遇見。§8 中說明的疊合把實數平面綿續的變換成環面，所以實數平面是環面的萬有覆疊形。同樣的，實數直線是圓周的萬有覆疊形。普遍的說，n 維的實數空間是 n 個圓周的拓樸積的萬有覆疊形，n 維球是 n 維投影空間的萬有覆疊形。

習題：1. 設 $\mathfrak{K}^1$ 是一個有公共頂點的兩個三邊形所組成的棱線複合形，試求 $\mathfrak{K}^1$ 的萬有覆疊形。

2. 設 $\mathfrak{K}^2$ 是由疊合單位圓域的，弧距等於 $\frac{2\pi}{p}$ 的，每兩個邊緣點而成的復合形(每一組疊合的點共有 p 個)。試證 $\mathfrak{K}^2$ 的基本群是級等於 p 的循環群，並證明萬有覆疊形 $\widehat{\mathfrak{K}}$ 由 p 個有公共邊緣的圓域組成。

§57 規則覆疊形

1. 定義： $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣所印成的 $\mathfrak{F}$ 的子羣，與我們選取的 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的閉道的起點（在 O 之上的）有關。假設起點是 $\widetilde{O}_1$，或 $\widetilde{O}_2$，或…的時候，這印成的子羣分別是 $\mathfrak{H}_1$，或 $\mathfrak{H}_2$，或…。這些子羣都是 $\mathfrak{F}$ 的相配子羣，組成一個完全相配子羣類。但是他們不一定都不相同。若是在極端的情形下，基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 所印成的子羣都相同，所以都是 $\mathfrak{F}$ 的一個法子羣，這覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 就叫做規則 (*regulär*) 覆疊形。

規則覆疊形的例子：環面的所有的覆疊形，因爲環面的基本羣是 *Abel* 羣；每一個萬有覆疊形，因爲他屬於法子羣 $\mathfrak{H}=1$；每一個兩葉的覆疊形，因爲指數等於 2 的每一個子羣都是法子羣。

2. 定義： 一個規則的覆疊形也可以由他另一個特徵規定：在一個閉底道之上的覆疊道路或者全是閉道，或者全不是閉道。設 $\widetilde{W}_i$ 是從 $\widetilde{O}_i$ 點起始的，在閉道 W 之上的一條覆疊道路。$\widetilde{W}_i$ 是否閉道，就完全按照 W 是否屬於 $\mathfrak{H}_i$ 而定。若是現在所有的相配子羣 $\mathfrak{H}_i$ 都是 $\mathfrak{H}$，W 就或者屬於所有的 $\mathfrak{H}_i$ ——所有 $\widetilde{W}_i$ 就都是閉道——，或者不屬於任一 $\mathfrak{H}_i$ ——所有的 $\widetilde{W}_i$ 就都不是閉道。另一方面，若是 $\mathfrak{H}_i$ 不都相同，例如 $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}_2$，就有一條道路 W 屬於 $\mathfrak{H}_1$ 而不屬於 $\mathfrak{H}_2$。因此 $\widetilde{W}_1$ 是閉道，$\widetilde{W}_2$ 不是閉道。這裏的證明中雖然任意的選取了 O 這一點做 W 的起點，但證明並不失去普遍性；因爲 $\mathfrak{K}$ 上的任一閉道，接上一條從 O 起始的往返走過的輔助道路，就成爲一條從 O 起始的道路。

圖 103，I 中的雙環面的第一個三葉覆疊形（頁 255）就不是規則

覆疊形；因爲在左環柄的緯圈 b 之上的覆疊道路，在第三葉上起始的是閉道，但在第二葉上起始的不是閉道。

3. **定義：** 我們用升騰 (*Deckbewegung*) 的概念，還可以說明規則覆疊形的第三個特徵。覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的一個自身的拓撲變換，使每一個點與他的像點都在同一底點之上的，叫做 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的一個升騰。至多只有一個升騰換點 $\widetilde{O}_1$ 成另一個在 O 之上的點，譬如 $\widetilde{O}_2$。設 $\widetilde{P}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的任一點，$\widetilde{W}_1$ 是從 $\widetilde{O}_1$ 到 $\widetilde{P}$ 的一條道路，W 是 $\widetilde{W}_1$ 的底道。一個換 $\widetilde{O}_1$ 成 $\widetilde{O}_2$ 的升騰必換 $\widetilde{W}_1$ 成從 $\widetilde{O}_2$ 起始的，在 W 之上的這道路 $\widetilde{W}_2$，所以這唯一的確定的 $\widetilde{W}_2$ 的終點就是 $\widetilde{P}$ 的像點。所以至多只有一個換 $\widetilde{O}_1$ 成 $\widetilde{O}_2$ 的升騰。$\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的所有的升騰組成一羣，叫做 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的升騰羣 $\mathfrak{D}$。他可以只含有一個么變換。在極端的情形下，給定了 $\widetilde{O}_1$，換 $\widetilde{O}_1$ 成其他的在 O 之上的每一個點 $\widetilde{O}_2, \widetilde{O}_3, \cdots$ 的升騰都存在。在這種情形下，升騰羣協換 (*transitiv vertauschen*) 所有的在 O 之上的點，他的級等於覆疊形的葉數。

我們現在能說明規則覆疊形的第三個特徵如下：$\widetilde{\mathfrak{K}}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的規則覆疊形的充要條件，就是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的升騰羣協換在 $\mathfrak{K}$ 的一個點之上的所有點。——若是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 不是規則覆疊形，我們知道 $\mathfrak{K}$ 上就有一條道路 W，他有閉的覆疊道路，也有不閉的覆疊道路。既然升騰換閉道成閉道，所以 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的升騰羣就不會是協換羣。——反之，設 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的一個規則覆疊形。設 $\widetilde{O}_1$ 是在 O 之上的一個點，而且用 $\widetilde{O}_1$ 做閉道的起點時，$\widetilde{\mathfrak{F}}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣。若是 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 是 $\mathfrak{K}$ 的另一個覆疊形，而且他與 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 確定同一類相配子羣(在現在的假設下，他們確定同一個法子羣 $\mathfrak{H}$)，根據 §55，$\widetilde{\mathfrak{K}}$ 與 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 間

就有一個拓樸對應,而且對應點在 $\mathfrak{K}$ 的同一個點之上。設 $\widetilde{O}_1'$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 上的任一點,而且用 $\widetilde{O}_1'$ 做閉道的起點時,$\widetilde{\mathfrak{F}}'$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 的基本羣。只要選定的 $\widetilde{O}_1'$ 使 $\widetilde{\mathfrak{F}}'$ 所印成的 $\mathfrak{F}$ 的子羣就是 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 所印成的子羣 $\mathfrak{H}$,我們還能假設 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 與 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 間的這拓樸對應換 $\widetilde{O}_1$ 成 $\widetilde{O}_1'$。既然現在 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的法子羣,而且 $\widetilde{O}_1'$ 也在 O 之上,這條件就滿足了。在這些假設下,我們能設想 $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ 就是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$,因此得着 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的一個升騰,換 $\widetilde{O}_1$ 成在 O 之上的任一預定點 $\widetilde{O}_1'$。

我們能用 §53 中的雙環面的兩個覆疊形來說明這特徵。我們已經說過,第一個覆疊形不是規則覆疊形。他的升騰羣只是一個么變換,不是協換羣。這是因為只有中間的一葉的兩個環柄都割開了,而第一葉與第三葉都只割開了一個環柄。第二個覆疊形的三葉能循環的變換,所以是一個規則覆疊形。

規則覆疊形的升騰羣 $\mathfrak{D}$ 與商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 一一的同構。——設 $\mathfrak{F}$ 按照子羣 $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}$ 剖分成下式:

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\{F_{11}\}+\mathfrak{H}\{F_{12}\}+\cdots。$$

剩餘類 $\mathfrak{H}\{F_{11}\}$, $\mathfrak{H}\{F_{12}\}, \cdots$ 與在 O 之上的點 $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \cdots$ 成一一對應。另一方面,相當於每一點 $\widetilde{O}_i$,恰有一個換 $\widetilde{O}_1$ 成 $\widetilde{O}_i$ 的升騰 D_{1i}。所以剩餘類 $\mathfrak{H}\{F_{1i}\}$ 與升騰 D_{1i} 也一一對應:

$$\mathfrak{H}\{F_{1i}\}\longleftrightarrow D_{1i}。$$

要想證明這對應在商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 與升騰羣 $\mathfrak{D}$ 間建立一個同構關係,我們先確定與二剩餘類的乘積 $\mathfrak{H}\{F_{1i}\}\cdot\mathfrak{H}\{F_{1j}\}=\mathfrak{H}\{F_{1i}\}\{F_{1j}\}=\mathfrak{H}\{F_{1k}\}$ 對應的升騰。這乘積確定一個點 $\widetilde{O}_k$:即是先從 $\widetilde{O}_1$ 沿着道路 $\widetilde{F}_{1i}$ 到

$\tilde{O}_i$，再沿着 F_{1j} 之上的，從 $\tilde{O}_i$ 起始的道路 $\tilde{F}_{ik}$ 到這個點 $\tilde{O}_k$（圖 108）。既然 $\tilde{F}_{ik}$ 與 $\tilde{F}_{1j}$ 在同一個底道 F_{1j} 之上，所以升騰 D_{1i} 換 $\tilde{F}_{1j}$ 成 $\tilde{F}_{ik}$，換 $\tilde{O}_j$ 成 $\tilde{O}_k$。所以乘積 $D_{1i}\cdot D_{1j}$（先 D_{1j}，後 D_{1i}）換 $\tilde{O}_1$ 成 $\tilde{O}_k$，而且 $D_{1i}\cdot D_{1j}=D_{1k}$。這就證明了：與乘積 $\mathfrak{H}\{F_{1i}\}\cdot\mathfrak{H}\{F_{1j}\}$ 對應的升騰就是對應的升騰的乘積 $D_{1i}D_{1j}$。這裏我們應當留意：道路的乘積是先用左邊的因子道路，後用右邊的因子道路（頁 211）；變換的乘積是先用右邊的因子變換，後用左邊的因子變換（頁 33）。

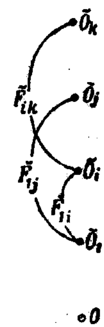


圖 108

在 $\mathfrak{H}=1$ 的特殊情形下，$\tilde{\mathfrak{K}}$ 是萬有覆疊形，$\mathfrak{F}/\mathfrak{H}=\mathfrak{F}$，升騰羣與底複合形的基本羣一一的同構。所以一個複合形 $\mathfrak{K}$ 的基本羣可以看作是 $\mathfrak{K}$ 的萬有覆疊形的升騰羣。

例：投影平面的基本羣的級等於 2。他的萬有覆疊形，即球面，的升騰羣恰含有兩個元，一個是么變換，一個是徑點的交換。這兩個事實是互相符合的。環面的基本羣有一個關係 $ABA^{-1}B^{-1}=1$，所以是有兩個母元的自由 *Abel* 羣（頁 238）。實數平面的直移，使一個矩形網目不變的，組成這個升騰羣（§8）。

不規則的覆疊形的升騰羣 $\mathfrak{D}$ 也可以看作是一個商羣。設與從前一樣，在用 O_i 作起點的時候，$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣印成 $\mathfrak{F}$ 的子羣 $\mathfrak{H}_i$。設 $\mathfrak{Z}_i$ 是 $\mathfrak{F}$ 中所有的適合 $\{W\}^{-1}\mathfrak{H}_i\{W\}=\mathfrak{H}_i$ 的元 $\{W\}$ 所組成的羣，叫做 $\mathfrak{H}_i$ 在 $\mathfrak{F}$ 中的法化羣（*Normalisator*），也就是所謂介間羣（*Zwischengruppe*）。$\mathfrak{D}$ 就與 $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{H}_i$ 一一同構。

習題：1. 試證明最後的一句話。

2. 若是一個 n 維的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的萬有覆疊形是 n 維球 $\mathfrak{S}^n$，在 n 是偶數的時候，$\mathfrak{K}^n$ 的基本羣的級必等於 1 或 2。[$\mathfrak{K}^n$ 的示性數是 $\mathfrak{S}^n$ 的示性數的一個因子。]

3. 試證：虧格 4 的能定向的曲面的基本羣是虧格 2 的能定向的曲面的基本羣中的一個法子羣，或三個相配子羣中的一個。[參看 § 53 中的雙環面的覆疊形的例子。]

4. 投影平面上的未定向的線素組成一個叫做四維數空間 (*Quaternionenraum*) 的三維流形。他的基本羣就是四維數羣 (*Quaternionengruppe*)。根據四維數羣的所有的子羣的智識，*) 確定這流形的二葉的，四葉的，八葉的覆疊形，並指出何者是投影平面上的定向的線素所組成的空間，何者是球面上的未定向的或定向的線素所組成的空間。[參看頁 80 上的習題 3 與頁 143 上的附註 (*Anmerkung*)[12]。]

§58　單價羣

設 $\mathfrak{K}$ 是一個有限的複合形，g 是任一正整數。我們現在要解決下列問題：求出 $\mathfrak{K}$ 的所有的 g 葉的覆疊形。

若是 W 是 $\mathfrak{K}$ 上的從點 O 起始的閉道，他就有 g 個覆疊道路 $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2, \cdots, \widetilde{W}_g$, 分別從點 $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \cdots, \widetilde{O}_g$ 起始。設他們的終點分別是 $\widetilde{O}_{k_1}, \widetilde{O}_{k_2}, \cdots, \widetilde{O}_{k_g}$。這些終點也必同樣的完全不同。我們就說道路 W 確定

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & g \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_g \end{pmatrix}$$

這個置換。同倫的道路顯然確定同一個置換，兩個道路的乘積 W_1W_2 所確定的置換就是 W_1 與 W_2 所確定的置換的乘積。因此有一個同構變換存在，換基本羣 $\mathfrak{F}$ 成一個確定的，g 個數字的置換羣 $\mathfrak{M}$。$\mathfrak{M}$ 叫做覆疊形的**單價羣** (*Monodromiegruppe*)。

$\mathfrak{F}$ 中的元，變換成 $\mathfrak{M}$ 的么元的，並不難求出。$\mathfrak{F}$ 的元是 $\mathfrak{K}$ 上的從

*) 可參看 *A. Speiser, Gruppen von endlicher Ordnung* (*Berlin* 1927), 頁 76。

O 起始的閉道。若是一條閉道 W 的從 $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \cdots, \tilde{O}_g$ 中任一點起始的覆疊道路都是閉的，道路類 $\{W\}$ 就變換成 $\mathfrak{M}$ 的么元，而且也只在這種情形下纔變換成 $\mathfrak{M}$ 的么元。還與從前一樣，在用 $\tilde{O}_i$ 做起點的時候，$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣所印成的子羣就叫做 $\mathfrak{H}_i$。$\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_g$ 是相配子羣。所以 W 所確定的置換是么置換的充要條件，就是 W 屬於子羣 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_g$ 的交羣 $\mathfrak{T}$。因此下述的定理成立：

定理：設底複合形的基本羣是 $\mathfrak{F}$，覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 屬於 $\mathfrak{F}$ 的一類相配子羣 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_g$，而且這些子羣的交羣是 $\mathfrak{T}$。$\tilde{\mathfrak{K}}$ 的單價羣 $\mathfrak{M}$ 就與 $\mathfrak{F}/\mathfrak{T}$ 一一同構。所以 $\mathfrak{M}$ 的級 $\geqq g$ (葉數)。

若是 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_g$ 完全相等，那就是說，若是 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是規則覆疊形，$\mathfrak{M}$ 的級纔等於 g。然後單價羣纔與 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}_1$ 一一同構，而且也與升騰羣(§57,3)一一同構。

給定了一羣 $\mathfrak{F}$ 的每一個元，若是有 g 個數字的一個置換與他對應，而且與兩個元的乘積對應的置換就是這對應的兩個置換的乘積，我們就說 $\mathfrak{F}$ 有了一個表示法 (*Darstellung*)。若是同一羣有兩個表示法，但適當的改變數字 $1, 2, \cdots, g$ 的次序之後，其中的一個表示法就改變成另一個，這兩個表示法就看作相同。所以覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 引出底複合形 $\mathfrak{K}$ 的基本羣的一個表示法。若是 $\mathfrak{K}$ 是一個連通的複合形，$\mathfrak{F}$ 的每一個表示法，都有協換性。因為，若是 i 與 j 是 g 個數字中的任意兩個，$\tilde{\mathfrak{K}}$ 上就有一條道路 $\tilde{W}$ 從 $\tilde{O}_i$ 到 $\tilde{O}_j$，而相當於底道 W 的道路類 $\{W\}$ 的置換就換 i 成 j。

我們現在要證明這反面的事實：若是 $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的任一協換的表示法，$\mathfrak{K}$ 就恰有一個覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 屬於 $\mathfrak{P}$。設所有的 $\mathfrak{F}$ 的元，相當於不變換 1 這個數字的置換的，所組成 $\mathfrak{F}$ 的子羣是 $\mathfrak{H}_1$。若是有一個覆疊形屬於 $\mathfrak{P}$，這覆疊形的用 $\tilde{O}_1$ 做起點的閉道恰印成 $\mathfrak{H}_1$；那就是說，這覆疊形必屬於 $\mathfrak{H}_1$。但是一個子羣 $\mathfrak{H}_1$ 恰確定一個覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$。所以我們必須證明：$\tilde{\mathfrak{K}}$ 所引出的 $\mathfrak{F}$ 的表示法 $\mathfrak{P}'$ 就是這預先給定的 $\mathfrak{P}$。因為在表示法 $\mathfrak{P}'$ 中，與 $\mathfrak{H}_1$ 對應的置換也恰是所有的不變換 1 這數字的置換，所以我們只要證明下述的羣論中的定理：

預備定理： 設 $\mathfrak{H}_1$ 是 $\mathfrak{F}$ 的一個子羣。$\mathfrak{F}$ 只有一個協換的表示法 $\mathfrak{P}$，使 $\mathfrak{H}_1$ 的元與所有不變換 1 這個數字的置換對應。

證明： 設羣 $\mathfrak{F}$ 按照子羣 $\mathfrak{H}_1$ 剖分成下式*)

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1\{F_{11}\} + \mathfrak{H}_1\{F_{12}\} + \cdots。$$

同一個剩餘類的元換 1 這數字成同一個數字，不同的剩餘類的元換 1 這數字成不同的數字。我們可以假設剩餘類 $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 的元換 1 成 i。既然在表示法 $\mathfrak{P}$ 的置換中只有 1 到 g 的數字出現，而且 $\mathfrak{F}$ 中有元換 1 成 $1, 2, \cdots, g$ 中的每一個數字，——因為 $\mathfrak{P}$ 有協換性——，所以 $\mathfrak{F}$ 按照 $\mathfrak{H}_1$ 剖分，恰分成 g 個剩餘類：

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1\{F_{11}\} + \mathfrak{H}_1\{F_{12}\} + \cdots + \mathfrak{H}_1\{F_{1g}\}。$$

設 $\{W\}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的任一元。要想知道 $\{W\}$ 如何變換數字 i，我們只要先看

---

*) 雖然這預備定理中所討論的是抽象羣，$\mathfrak{F}$ 的元不必是道路類，但是我們爲記號一致起見，還用彎括弧表示羣元。

$\{F_{1i}\}\{W\}$。$\{F_{1i}\}\{W\}$屬於一個確定的剩餘類，姑且說是 $\mathfrak{H}_1\{F_{1k}\}$。所以 $\{F_{1i}\}\{W\}$ 變換 1 成 k，所以 $\{W\}$ 變換 i 成 k。這就證明了我們的預備定理。

所以確定一個有限複合形 $\mathfrak{K}$ 的所有的 g 葉覆疊形的問題，就化成了羣論中下述的問題：求出 $\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的所有的 g 個數字的協換的置換羣表示法。[32] 因此我們先用 §46 中的方法，求出基本羣 $\mathfrak{F}$ 的母元

$$A_1, A_2, \cdots, A_\alpha$$

與關係

$$R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \cdots, R_r(A_i) = 1。$$

若是知道了與母元對應的置換，顯然就可以確定一個表示法。所以我們先任意的選定 g 個數字的置換 $P_1, P_2, \cdots, P_\alpha$ 與母元 $A_1, A_2, \cdots, A_\alpha$ 對應，然後看他們是否適合下列兩個條件：

(M_1) 與 $\mathfrak{F}$ 的一個界說的關係的左端 $R_j(A_i)$ 對應的置換 $R_j(P_i)$ 是么置換。

(M_2) 用 $P_1, P_2, \cdots, P_\alpha$ 做母元的置換羣有協換性。

(M_1) 這條件就是說，若是兩個乘積 $\prod_i (A_i)$ 與 $\prod_i' (A_i)$ 代表 $\mathfrak{F}$ 的同一元，他們就確定同一置換，所以 $\mathfrak{F}$ 的每一元只確定一個置換。與二元的乘積對應的置換，顯然就是這對應的二置換的乘積。既然只有有限個方法指定 g 個數字的置換與母元 $A_1, A_2, \cdots, A_\alpha$ 對應，所以在理論上說，我們就能用試探的方法 (*Probieren*) 求出 $\mathfrak{F}$ 的所有的表示法。求出一個表示法之後，我們就能求出 $\mathfrak{F}$ 的不變換 1 這數字的元

所組成的子羣 $\mathfrak{H}_1$，然後用 §55 中的方法作出覆疊形。

既然每一個升騰使在 O 之上的 g 個點 $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \cdots, \tilde{O}_g$ 間產生出一個確定的置換，一個規則覆疊形的升騰羣 $\mathfrak{D}$ 也如同單價羣 $\mathfrak{M}$ 一樣，能用一個規則置換羣*）表示。只在升騰羣是 *Abel* 羣的時候，這些置換纔與單價羣 $\mathfrak{M}$ 的置換相同。設 $X_1, X_2, \cdots, X_g$ 代表羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 的元，Q 是這羣的任一元。我們從羣論知道，羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 恰有兩個用規則的置換羣的表示法：一個是使

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_g \\ X_1Q & X_2Q & \cdots & X_gQ \end{pmatrix}$$

與 Q 對應，另一個是使

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_g \\ QX_1 & QX_2 & \cdots & QX_g \end{pmatrix}$$

與 Q 對應。我們只要把這些置換中的 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 的元用點 $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \cdots, \tilde{O}_g$ 替代（$\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 的每一個剩餘類只確定 $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \cdots, \tilde{O}_g$ 中的一個點），就可以知道第一個置換羣是單價羣，第二個是升騰羣。只有在任一元 Q 都使 $X_iQ = QX_i$ 的時候，那就是說，只有在 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 是 *Abel* 羣的時候，這兩個羣中的置換纔能完全相同。

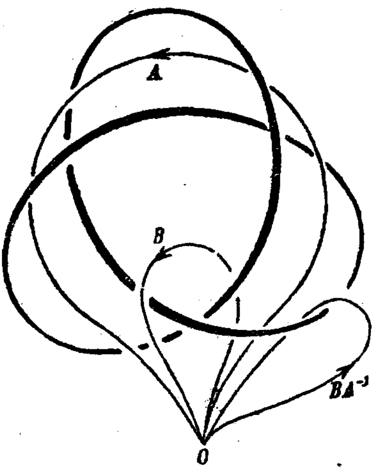


圖 109

我們現在求三叉紐結的外空間的三葉與四葉的覆疊形，作爲應用覆疊形理論的例子**）。圖 109 中的粗線表示這個扭結的投影。外空間的基本羣只有一個界說的關係（頁 252）

$$A^2 = B^3。$$

關係中的 A 與這有限的環體的心線同倫，從通常空間封閉所成的三維球減去一個有限的環體，還是一個環體。關係中的 B 與後一個環體的心線同倫。

要求得三葉的覆疊形，我們必須選三個數字的一個置換與 B 對應，使他的三次方等於另一個置換的二次方。我們只有兩種可能的選擇；或者選么置換，或者選循環置換。因爲置換羣必須有協換性，么置換已不可能。所以***）

*）若是一個置換羣的級等於他所置換的數字的個數，這置換羣就叫作規則置換羣。

**）這足以啓發人的例子，是從 *H. Kneser* 先生的通信中摘錄出來的。

***）關於用環節（*Zyklus*）表示置換的寫法，可參看 *A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (*Berlin* 1927)，頁 106。

$$B \longrightarrow (1\,2\,3)。$$

然後 A 可以是么置換

$$A \longrightarrow (1)(2)(3) \qquad (I)$$

或

$$A \longrightarrow (1\,2)(3)。 \qquad (II)$$

在 (I) 的時候,單價羣是級等於 3 的循環羣,所以覆疊形是規則覆疊形。在 (II) 的時候,單價羣是級等於 6 的四分羣 (*Diedergruppe*) 或交比羣 (*Doppelverhältnisgruppe*); 因爲級 6 大於葉數 3,覆疊形不是規則覆疊形。在 (I) 的時候,循環置換 $(1\,2\,3)$ 與"經圓" BA^{-1} 對應;所以沿着經圓圍繞扭結三次之後,覆疊道路纔同到起點。在 (II) 的時候,$BA^{-1} = (1)(2\,3)$。 所以在 $\tilde{O}_1$ 點起始的覆疊道路是閉道;而且沿着經圓兩次之後,在 $\tilde{O}_2$ 點起始的覆疊道路纔回到 $\tilde{O}_2$。這就求得了所有的三葉的覆疊形。

要求得四葉的覆疊空間,不能選取循環置換 $(1\,2\,3\,4)$, 或 $(1\,2)(3)(4)$ 與 B 對應;因爲他們的三次方都不是另一個置換的二次方。因爲單價羣的協換性,也不能選取么置換。所以只剩下下列兩個可能的對應:

$$B \longrightarrow (1\,2\,3)(4), \qquad (I)$$

$$B \longrightarrow (1\,3)(2\,4)。 \qquad (II)$$

在 (I) 的時候,因爲 $B^3 = (1)(2)(3)(4)$, 所以 $A^2 = (1)(2)(3)(4)$。所以與 A 對應的置換,或者是只兩個數字的交換,或者是四個數字分成兩對,每對數字交換。因爲單價羣的協換性,所以在 (I) 的時候只有兩個可能的對應:

$$A \longrightarrow (1\,4)(2)(3), \qquad (I_1)$$

$$A \longrightarrow (1\,4)(2\,3); \qquad (I_2)$$

在 (II) 的時候只有一個可能的對應:

$$A \longrightarrow (1\,2\,3\,4)。 \qquad (II)$$

所以三叉扭結有三個四葉的覆疊形,只最後的這一個是規則覆疊形,他的升騰羣是循環羣。在 (I_1) 的時候,單價羣是四個數字的對稱羣卽八面體羣,在 I_2 的時候是交錯羣 (*alternierende Gruppe*) 卽四面體羣。在這三個覆疊形上,與經圓 BA^{-1} 對應的,分別是

$$(1\,2\,3\,4), \qquad (I_1)$$

$$(1\,3\,4)(2), \qquad (I_2)$$

$$(1\,2\,3\,4) \qquad (II)$$

三個置換。

若是沿着一個圍繞扭結的小圓走 g 次之後,這扭結的 g 葉的覆疊形上的覆疊道路纔是閉道,這覆疊形就說是有局部的循環性。若是一個規則覆疊形的升騰羣是循環羣,這覆疊形就說是有全局的循環性。所以相當於 (I_1) 與 (II) 的覆疊形都有局部的循環性,但只相當於 (II) 的覆疊形有全局的循環性。在 § 77 中我們再立下一個有全局的循環性的覆疊形的另一

定義，並且說明每一個有全局的循環性的覆疊形也有局部的循環性。此後我們說循環的覆疊形的時候，就是指有全局的循環性的覆疊形而言。

給定了任意的葉數 g，三叉扭結總有一個 g 葉的有全局的循環性的覆疊形，由對應

$$B \longrightarrow (1\,2\cdots g)^2,\ A \longrightarrow (1\,2\cdots g)^3$$

確定。這裏的上指標 2 與 3 表示置換的乘冪。將來在 §77 中，我們還要證明，任一扭結恰有一個循環的，有給定了的葉數的覆疊形。

習題：1. 試求三叉扭結所有的五葉的覆疊形（只有兩個）。

2. 試證雙環面有 15 個不同的兩葉的覆疊形。

我們前此是應用羣論，去推測一個複合形的覆疊形。反之，要從羣 $\mathfrak{F}$ 的母元與關係去推求一個子羣 $\mathfrak{H}$ 的母元與關係，覆疊形的理論對於羣論也有幫助。設 $\mathfrak{F}$ 的母元是 $A_1, \cdots, A_a$，關係是 $R_1(A_\nu) = 1, \cdots, R_r(A_\nu) = 1$。先作一個複合形 $\mathfrak{K}$，只有一個頂點 O，a 條棱 $A_1, \cdots, A_a$（定向後成爲 $\mathfrak{K}$ 的基本羣的母元），與張在閉道 $R_1(A_\nu), \cdots, R_r(A_\nu)$ 間的 r 個面片。根據 §46，$\mathfrak{F}$ 恰是 $\mathfrak{K}$ 的基本羣。子羣 $\mathfrak{H}$ 現在可以看作是屬於 $\mathfrak{H}$ 的覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣。爲簡單起見，假設葉數 g（$\mathfrak{H}$ 在 $\mathfrak{F}$ 中的指數）是有限數。複合形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 所以只有 g 個頂點，ag 條棱，與 rg 個面片。然後用 §46 的方法，就能求出 $\mathfrak{H}$ 的母元與關係。——我們也能按照 *K. Reidemeister* 所創始的方法，只用純粹羣論的理論，全究不用幾何的術語。可參看 *K. Reidemeister* [1]，[7]。

第九章 三維流形

§59 普遍的性質

一個三維閉流形 $\mathfrak{M}^3$ 是一個三維的,連通的,有限的,勻齊的複合形。如同在討論曲面時一樣,"閉"這個形容詞表示有限與無邊緣兩個意義。因爲我們先只討論閉流形,我們通常把這閉字省去。勻齊性是說,$\mathfrak{M}^3$ 的每一點有一個鄰域,與單位球體的內域成拓撲對應。根據§33的定理 II,在 $\mathfrak{M}^3$ 的一點處的同調羣與一個二維球面的同調羣相同,所以鄰域複合形的 *Betti* 數是 $p^0 = p^2 = 1, p^1 = 0$。

我們要從組合的觀點去推究勻齊性這條件的意義。爲達到這目的起見,我們取 $\mathfrak{M}^3$ 的一個確定的單純剖分。因爲二維單純形的中間點的鄰域複合形的 $p^2 = 1$,根據§32(例2),每一個二維單純形恰與兩個三維單純形關聯。因此,所有的二維與三維的單純形,與 $\mathfrak{M}^3$ 的一條棱 $\mathfrak{E}^1$ 關聯的,組成若干串二維與三維互相間隔的關聯的單純形。若是串的數目是 l, $\mathfrak{E}^1$ 的中間點的鄰域複合形的第二個 *Betti* 數必是 l; 因爲這鄰域複合形恰由 l 個球面組成,而他們的共點只是 $\mathfrak{E}^1$ 的兩個邊緣點。但這第二個 *Betti* 數是1,所以 $l = 1$。最後我們考慮 $\mathfrak{M}^3$ 的以一個頂點 $\mathfrak{E}^0$ 爲中心的單純星形。他的外邊緣是一個二維複合形,其中每一個一維單純形恰與兩個二維單純形關聯,而且與其中的一個頂點關

聯的單純形恰組成一串（因爲在 $\mathfrak{E}^0$ 處投影而成的二維與三維的單純形有這性質）。所以這外邊緣是由一個或數個閉曲面組成的。但是外邊緣的 $p^0=1$，所以外邊緣只是一個閉曲面（§18）。這曲面只能是球面或投影平面，因爲 $p^1=0$；但不會是投影平面，因爲 $p^2=1$（§41）。——反之，若是一個單純的複合形中的每一個頂點的鄰域複合形是一個球面，這單純的複合形必定是一個三維流形。因爲根據假設，每一個二維單純形恰與兩個三維單純形關聯，每一條棱又恰與一串單純形關聯；所以複合形在每一點處有勻齊性。這結果是下述的定理：

定理 *I*：一個三維的，連通的，有限的，單純的複合形是一個閉三維流形的充要條件，就是他的每一個頂點的鄰域複合形都是一個球面。

因此我們又有下述的定理：

定理 *II*：每一個閉的三維流形也是一個閉假流形。

我們還需要證明的只是每兩個三維單純形都能連接起來。所有的三維單純形，能與一個固定的三維單純形連接起來的，組成一個子複合形。設若他不是整個的 $\mathfrak{M}^3$，他與剩餘的子複合形就只有公共的頂點或棱，而無公共的二維單純形。但這種的一個頂點或棱的中間點的鄰域複合形，絕不能是球面，却至多是有公共頂點的兩個子複合形。

有了定理 *II*，我們就能區別能定向的與不能定向的三維流形。

將來我們要證明 n 維流形的對偶定理（*Dualitätssatz*）。這定理是說一個閉的 n 維流形的連通數適合關係 $q^i=q^{n-i}$（§69）。所以在 $n=3$

的時候，

$$q^0 = q^3, \quad q^1 = q^2, \tag{1}$$

所以示性數

$$N = -q^0 + q^1 - q^2 + q^3 = 0。\tag{2}$$

定理 *III*：一個三維閉流形的示性數等於零。

根據 §23，示性數也等於 *Betti* 數減加相間的和：

$$N = -p^0 + p^1 - p^2 + p^3。$$

因爲連通的複合形的 $p^0 = 1$，而且 $p^3 = 1$ 或 0 按照 $\mathfrak{M}^3$ 能定向或不能定向而定（§24），所以

若是流形能定向， $p^2 = p^1$，

若是流形不能定向， $p^2 = p^1 - 1$。

我們從 §24 還知道，只有不能定向的流形有一個二維的撓係數，而且等於 2。所以若是知道了一個三維閉流形能否定向，就能從他的一維不變數斷定他的所有的不變數。根據 §48，一維的不變數又可以從基本羣斷定。所以對於區別三維流形說，基本羣是最重要的不變性。

關於不能定向的流形，上文中的方程式 $p^1 = p^2 + 1$ 成立，所以 $p^1 > 0$，這就是說

定理 *IV*：一個不能定向的三維流形的一維同調羣是一個無窮羣，他的基本羣當然也是無窮羣。

這定理只在三維的時候成立。投影平面與 $n-2$ 維球面的拓撲積就是例證（參看 §43, 1）。

§60 用多面體表示

我們設想一個多邊形的邊成對的對應，就得着一個曲面；同樣的我們也能設想一個三維的多面體的邊緣面成對的對應，得着一個三維流形。其實每一個三維流形 $\mathfrak{M}^3$ 都是由疊合（§10）有限個三維單純形的若干面而成的，我們先從 $\mathfrak{M}^3$ 的一個三維單純形着手，再沿着他的一個邊緣面把他與第二個連接起來，然後再連接第三個，一步一步的繼續下去。結果我們得着一個與球體同胚的單純的複合形。這球體的邊緣已單純的剖分了，而且他的二維單純形已成對的分開，每對相當於 $\mathfrak{M}^3$ 的一個三邊形。所以若是我們用這個球體，設想他的邊緣的二維單純形成對的相抵，然後把他們疊合起來，就得着 $\mathfrak{M}^3$。

這裏的邊緣面都是三邊形。這限制還能取消。爲達到這目的起見，我們界說三維多面體如下：一個球體（或一個球體的拓撲像）的邊緣 $\mathfrak{R}$ 若是剖分成了多邊形，而且這剖分滿足下列條件，這球體就說是一個三維多面體：

每一個多邊形至少是一個二邊形；$\mathfrak{R}$ 的每一點至少屬於一個多邊形；每兩個多邊形或無共點，或只有公共頂點或棱。*）邊緣 $\mathfrak{R}$ 的頂點，棱與多邊形分別叫做多面體的頂點，棱與面（邊緣面）。——例如一個十二面體是一個 12 個面，30 條棱與 20 個頂點的多面體。一個球體用一個大圓切成兩半，大圓又至少用兩個點分開，也同樣是一個多面體。

*）多面體的邊緣是 §37 中所說的一種特殊的，覆蓋球面的多面形。我們說他是特殊的，因爲現在他的面片都是多邊形，所以他的每一面片不自相啣接（*Selbstberührung*）。

多面體的法重分是一個單純的複合形。法重分的步驟如下：先用一個中間點把多面體的每一條棱剖分成兩個子單純形；這就等於說，把一個平直的一維單純形的法重分——一個單純星形 $\mathfrak{St}^1$ ——拓撲的換成多面體的棱。——多面體的面 $\mathfrak{a}^2$ 的邊緣因此剖分成與圓線同胚的單純的複合形。我們現在取一個單純星形 $\mathfrak{St}^2$，他的外邊緣如同 $\mathfrak{a}^2$ 的邊緣一樣的單純剖分了；把這星形拓撲的換成 $\mathfrak{a}^2$，使 $\mathfrak{St}^2$ 的外邊緣的單純剖分恰覆蓋着 $\mathfrak{a}^2$ 的邊緣的單純剖分。$\mathfrak{a}^2$ 因此也是一個單純星形。多面體的所有其餘的面都如此剖分了之後，這多面體 $\mathfrak{a}^3$ 的邊緣就變成了一個單純的複合形，然後取一個單純星形 $\mathfrak{St}^3$，他的外邊緣也如此剖分了；再把他拓撲的換成 $\mathfrak{a}^3$，使 $\mathfrak{St}^3$ 的外邊緣的單純剖分覆蓋着 $\mathfrak{a}^3$ 的邊緣的單純剖分。這多面體的如此得着的單純剖分就叫做他的（第一次）法重分。

設有一個多面體，他的面成對的對應，而且對應面有同樣多的頂點，而且這種對應是拓撲對應，換頂點成頂點，換棱成棱。我們還要求這種拓撲對應，在成對的面的法重分的子單純形間，是平直對應。因為面的對應，多面體的頂點成組的相抵，棱也成組的相抵。我們還能從此假設，在這些對應下，一個定向的棱與他的定向相反的棱決不相抵，所以一條棱上無相抵的中間點。這假設並未含有任何限制；因為若是一條定向的棱與他的定向相反的棱相抵，他的法重分就不會再有相抵的中間點。——但是一條棱的兩個頂點可以相抵。

面的對應所確定的相抵的頂點，用 $'\mathfrak{a}_\nu^0$, $''\mathfrak{a}_\nu^0$, $\cdots$ 表示，相抵的頂點

叠合成同一個頂點 $\mathfrak{a}_\nu^0$；下指標 ν 從 1 到 α^0。同樣的一組相抵的稜用 $'\mathfrak{a}_\nu^1$, $''\mathfrak{a}_\nu^1$, $\cdots$ 表示*)；設共有 α^1 組稜相抵，這裏的 ν 就從 1 到 α^1。兩個相抵的面用 $'\mathfrak{a}_\nu^2$ 與 $''\mathfrak{a}_\nu^2$ 表示；設共有 α^2 對這種相抵面。最後用 $'\mathfrak{a}^3$ 表示這全個的多面體。由叠合 $'\mathfrak{a}^3$ 的相抵點而成的顯然是一個複合形。不過 $'\mathfrak{a}^3$ 的法重分還不能叠合成一個單純的複合形。因為 $'\mathfrak{a}^3$ 的若干不相抵的子單純形能有相抵的頂點；所以由叠合而成的點集雖然已經剖分成單純形，却能有頂點相同的兩個不同的單純形，這就不滿足 § 10 中的條件 (k_3)。只有把 $'\mathfrak{a}^3$ 的法重分的所有的單純形再法重分一次，然後叠合而成的纔是一個單純的複合形 $\mathfrak{K}^3$ (§13，習題)。

這表示法還表明：多面體的"表格"(表示所有的頂點，稜，面，與他們的關聯與對應的一個記號) 對於同胚性說，完全確定了這 $\mathfrak{K}^3$。因為這麼一個表格顯然確定了第一次法重分的表格，因而也確定了第二次的法重分與所有的對應關係，所以最後也確定了 $\mathfrak{K}^3$ 的表格。

若是任意規定多面體的面成對的對應，$\mathfrak{K}^3$ 通常不是三維流形。我們現在要問，這種對應要滿足何種條件，$\mathfrak{K}^3$ 纔是一個三維流形 $\mathfrak{M}$：

$\mathfrak{K}^3$ 至多在他的頂點

$$\mathfrak{a}_1^0,\ \mathfrak{a}_2^0, \cdots, \mathfrak{a}_{\alpha^0}^0$$

處無勻齊性。他的這些頂點相當于多面體的頂點。

因為，若是 P 是 $'\mathfrak{a}^3$ 的一個中間點，P 顯然有一個鄰域，與球體的內域同胚。

*) 這裏所說的是多面體的，不是他的法重分的頂點，稜與面。

若是 P' 是一個面 $'\mathfrak{a}_\nu^2$ 的中間點,而且 P'' 是對應面 $''\mathfrak{a}_\nu^2$ 上的對應點,他們各有一個半球形的鄰域; $'\mathfrak{a}_\nu^2$ 與 $''\mathfrak{a}_\nu^2$ 的疊合使這兩個鄰域合成一個球形鄰域。最後,若是 $'\mathfrak{a}_\nu^1, ''\mathfrak{a}_\nu^1, \cdots, {}^{(r)}\mathfrak{a}_\nu^1$ 是多面體的一組相抵棱, $P', P'', \cdots, P^{(r)}$ 是這組棱上的相抵的中間點,他們各有一個扇形體 (*Kugelsektor*) 鄰域;多面體的面的疊合使這 r 個鄰域合成一個球形鄰域。

但是,若是 P 是 $\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \cdots, \mathfrak{a}_{\alpha^0}^0$ 中的一點,我們很容易舉例表明,P 的鄰域複合形可以是任意一個閉曲面。{但不會是二個以上的閉曲面。}

我們知道,若是 $\mathfrak{K}^3$ 在這些點處也有勻齊性,因而是一個三維流形,他的示性數必等於零 (§59)。但可注意的是這條件也充足;那就是說,下述的定理成立:

定理 I: 設 $\mathfrak{K}^3$ 是由成對的疊合一個多面體的面而成的複合形。$\mathfrak{K}^3$ 是流形的充要條件是他的示性數 $N = 0$。

N 是很容易計算的。所以這定理所供給的一個標準,很容易用來判斷這種複合形的勻齊性。

證明: 因爲 $\mathfrak{K}^3$ 是由成對的疊合一個多面體的面而成的複合形,$\mathfrak{K}^3$ 只可能在有限個點 $\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \cdots, \mathfrak{a}_{\alpha^0}^0$ 處無勻齊性,而且,在 $\mathfrak{K}^3$ 的一個單純剖分中,這些點的鄰域複合形都是閉曲面。我們選擇一個單純剖分,使

$$\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \cdots, \mathfrak{a}_{\alpha^0}^0$$

都是頂點，而且以他們爲中心的單純星形

$$\mathfrak{St}_1^3,\ \mathfrak{St}_2^3,\cdots,\mathfrak{St}_{\alpha^0}^3$$

無共點。假設 $\mathfrak{St}_\nu^3$ 的外邊緣 $\mathfrak{A}_\nu$ 是示性數等於 N_ν 的一個閉曲面。我們必須從 $N=0$ 證明 $N_\nu=-2$，那就是說，證明這鄰域複合形是一個球面。從 $\mathfrak{K}^3$ 消去所有的星形 $\mathfrak{St}_1^3,\ \mathfrak{St}_2^3,\cdots,\mathfrak{St}_{\alpha^0}^3$，但保留他們的外邊緣。設如此得着的複合形是 $\overline{\mathfrak{K}}^3$。他是一個有邊緣的三維複合形，他的邊緣由 α^0 個曲面 $\mathfrak{A}_\nu$ 組成。因爲一個星形的示性數總等於 -1（§23，習題 1），從 $\mathfrak{K}^3$ 消去 $\mathfrak{St}_\nu^3$ 的所有的單純形（也消去外邊緣的單純形），使 $\mathfrak{K}^3$ 的示性數增加 1。若是再加上 $\mathfrak{A}_\nu$ 的單純形，$\mathfrak{K}^3$ 的示性數又增 N_ν。所以 $\overline{\mathfrak{K}}^3$ 的示性數等於

$$N+\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu+1)。$$

現在再取 $\overline{\mathfrak{K}}^3$ 的兩個樣本，疊合他們的相當的邊緣點，做成 $\overline{\mathfrak{K}}^3$ 的雙層 $\overline{\mathfrak{K}}_2^3$。$\overline{\mathfrak{K}}_2^3$ 的示性數所以是 $\overline{\mathfrak{K}}^3$ 的兩倍減去邊緣曲面的示性數的和，所以等於

$$2N+2\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu+1)-\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}N_\nu=2N+\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu+2)。$$

顯然 $\overline{\mathfrak{K}}_2^3$ 在每一點處都有勻齊性，所以是一個三維流形，所以示性數 $=0$。既然假設 $N=0$，所以

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu+2)=0。$$

但是一個閉曲面的示性數 $N_V \geqq -2$，所以 $N_V = -2$。這就是我們要證明的。

設 $\mathfrak{R}^3$ 的一個單純剖分有 $\bar{\alpha}^i$ 個 i 維單純形，或更普遍的說，$\mathfrak{R}^3$ 的一個塊形組有 $\bar{\alpha}^i$ 個 i 維塊形（§ 23），$\mathfrak{R}^3$ 的示性數就是

$$N = -\bar{\alpha}^0 + \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^3。$$

我們在下一節中就要證明，若是 $\mathfrak{R}^3$ 是由成對的疊合一個多面體 $'\mathfrak{a}^3$ 的對應面而成的複合形，而且我們把這多面體的相抵的頂點，棱與面看作是相同的塊形，定向的頂點，棱，面與這定向的多面體就組成 $\mathfrak{R}^3$ 的一組塊形。所以我們只要用 $'\mathfrak{a}^3$ 的不相抵的頂點，棱與面的個數 $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$ 代替 $\bar{\alpha}^0, \bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2$，命 $\bar{\alpha}^3 = 1$，就得着示性數 N 的正確值了。

為後來的需要起見，我們還舉幾個多面體的例子。

例：1．透鏡空間。若是用多面體的對應面的多少做多面體的繁簡的標準，透鏡（*Linse*）就是最簡單的多面體。一個透鏡是空間中兩個球形帽所包成的一個三維域，其中的銳棱（這兩個球形帽的交綫）分成 p 個相等的圓弧，因此這兩個球形帽變成兩個 p 邊形 $'\mathfrak{a}^2$ 與 $''\mathfrak{a}^2$。$'\mathfrak{a}^2$ 與 $''\mathfrak{a}^2$ 間能有許多種對應；例如用交綫的平面做反射平面，使下面的球形 $'\mathfrak{a}^2$ 反射上去，與上面的 $''\mathfrak{a}^2$ 疊合。更普遍是在這反射之前，把要反射的球形帽 $'\mathfrak{a}^2$ 剛體的旋轉 $\frac{2\pi q}{p}$ 弧度，變換成他自身。為簡單起見，$'\mathfrak{a}^2$ 與 $''\mathfrak{a}^2$ 間的這對應就叫做經過 $\frac{2\pi q}{p}$ 弧度的螺體旋轉。這旋轉的弧度就完全確定了透鏡的表面點間的對應。所以我們假設 p 與 q 是互質的整數也並不限制了這種對應的普遍性；而且不管螺體旋轉的方向是向左或向右，我們還得着相同的流形，所以我們還能假設 $0 \leqq q \leqq \frac{p}{2}$。交綫上的 p 個頂點把交綫分成 p 條棱，這些頂點或棱都相抵。所以 $\alpha^0 = \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 1$，$N = 0$。如此疊合而成的複合形所以有勻齊性（這也容易直接證明），就叫做透鏡空間 (p, q)。在圖 110 中，$p = 3$，$q = 1$。在 $p = 2$ 的時候，若是我們取球體做透鏡，赤道圓做交綫，這對應就是徑點的交換。根據 § 14，這透鏡空間是投影空間 $\mathfrak{P}^3$。在 $p = 1$ 的時候，透鏡的銳棱上只有一個點；因為多面體的棱是不准

自相啣接的，所以這透鏡並不是一個多面體。若是再加上第二個點，我們纔有一個多面體；但因爲 $q=0$，赤道平面的反射把這多面體封閉成一個三維球 $\mathfrak{S}^3$ (§ 14)。我們也把三維球當作一個透鏡空間。

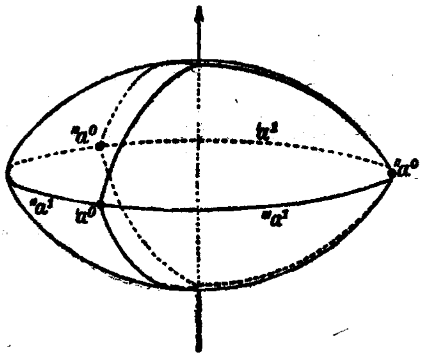


圖 110

這些簡單的透鏡空間的同胚問題現在還沒有解決，我們現在還不能普遍的斷定何種的兩個透鏡空間 (p, q) 與 (p', q') 纔同胚(參看頁 298 與頁 392)。這也可見三維拓撲學的困難了。

2. 三個圓的拓撲積。 兩個圓的拓撲積(環面)能用一個矩形代表，用直移規定這矩形的對立邊對應。同樣的，我們能用直移疊合一個立方體的對立面，用這立方體代表三個圓的拓撲積。所以他有三條不相抵的棱，三個不相抵的面，所有的頂點都相抵。所以 $N=0$。

§61 同調羣

我們在前一節中，已經推得由疊合多面體的面而成的複合形是一個流形的條件。但是應當注意，我們並不假設這一節中所討論的多面體滿足這條件，所以複合形 $\mathfrak{K}^3$ 在多面體的頂點處可以無勻齊性。

多面體 $'\mathfrak{a}^3$，他的面 $'\mathfrak{a}_v^2$ 與 $''\mathfrak{a}_v^2$，他的棱 $'\mathfrak{a}_v^1, ''\mathfrak{a}_v^1, '''\mathfrak{a}_v^1, \cdots$，與他的頂點 $'\mathfrak{a}_v^0, ''\mathfrak{a}_v^0, '''\mathfrak{a}_v^0, \cdots$ 分別是三維的，二維的，一維的，與零維的元素，所以都是能定向的有邊緣的假流形。所以我們能協合的給定這些元素的任意的一個單純剖分的定向。我們只討論 $'\mathfrak{a}^3$ 的第二次的法重分所規定的這些元素的單純剖分。頂點都用 + 號定向。我們給定相抵的面與棱的定向，使疊合時定向相符。用圖表示時，我們並不畫出這個單純

剖分，但在棱上附一個箭頭表明棱的定向，面中畫一個環形箭頭表明面的定向。若是 $'\mathfrak{a}_\nu^k, ''\mathfrak{a}_\nu^k, '''\mathfrak{a}_\nu^k, \cdots$ 是多面體的一組相抵的 k 維元素，就用相當的拉丁字母，例如 $'a_\nu^k, ''a_\nu^k, '''a_\nu^k, \cdots$ 表示由一個定向的元素所組成的 k 維鍊。由疊合這些鍊的相抵點而成的是單純的複合形 $\mathfrak{K}^3$ 中的一個 k 維鍊，用 a_ν^k 表示。所以 $\mathfrak{K}^3$ 上有下列從零維到三維的鍊：

$$
\begin{aligned}
&a_1^0,\ a_2^0,\ \cdots,\ a_{\alpha^0}^0,\\
&a_1^1,\ a_2^1,\ \cdots,\ a_{\alpha^1}^1,\\
&a_1^2,\ a_2^2,\ \cdots,\ a_{\alpha^2}^2,\\
&a^3。
\end{aligned}
$$

我們說，這三維鍊是 $\mathfrak{K}^3$ 上的一組塊形鍊（§ 22）。因為他們中的每兩個無公共的單純形，他們當然平直無關。而且每一個 $a_\varkappa^k$ 的邊緣是由鍊 a_ι^{k-1} 組成。所以現在只需要證明 (Bl_3) 與 (Bl_4) 也滿足了。我們取 $\mathfrak{K}^3$ 上的任一單純鍊 U^k；他的邊緣是鍊 a_ι^{k-1} 的平直組合，或是 0 這 $k-1$ 維鍊。我們要求出一個與 U^k 同調的，完全由鍊 $a_\varkappa^k$ 組成的鍊 V^k。為便於達到這目的起見，相當於 U^k 的每一個單純形，我們在多面體 $'\mathfrak{a}^3$ 上取一個對應的單純形，而且取同樣的定向與倍數，因此得着 U^k 在 $'\mathfrak{a}^3$ 上的一個"原底"，一個 k 維鍊 $'U^k$。若是 $k=3$，$'\mathfrak{a}^3$ 的每一個協合定向的三維單純形必都在 $'U^k$ 中出現，而且有相同的倍數。因為否則 $F[U^k]$ 不會是鍊 a_ν^{k-1} 的平直組合。所以 $'U^k$ 是 $'a^3$ 的一個倍數；所以在 $k=3$ 的時候，我們的目的已經達到了。若是 $k=2$，設 $'U^k$ 的

所有單純形,不在 $'\mathfrak{a}^3$ 的邊緣上的,組成的鍊是 $'U^2_m$。他的邊緣全在 $'\mathfrak{a}^3$
的邊緣上;而且因爲是二維球面上的一個一維閉鍊,所以是 $'\mathfrak{a}^3$ 的邊緣
上的一個鍊 $'U^2_r$ 的邊緣。$'U^2_m-'U^2_r$ 所以是一個閉鍊,而且在 $'\mathfrak{a}^3$ 上
零調。在 $\mathfrak{R}^3$ 上 $U^2_m\sim U^2_r$ 當然也成立。所以鍊 U^2 中的 U^2_m 用 U^2_r 替
換之後,就得着一個同調的鍊 V^2。他的一個原底 $'V^2$ 不含有 $'\mathfrak{a}^3$ 的中
間單純形。V^2 的每一個單純形只有兩個可能的原底;我們能使 $'V^2$ 的
單純形都屬於 $'\mathfrak{a}^2_\nu$ (不屬於 $''\mathfrak{a}^2_\nu$)。所以 $'V^2$ 是 $'\mathfrak{a}^2_\nu$ 的一個平直組合。既
然 V^2 的邊緣是 a^1_ν 的一個平直組合,所以 $'\mathfrak{a}^2_\nu$ 的每一個協合定向的單
純形在 $'V^2$ 中都有相同的倍數。所以 V^2 是我們所需要的一個鍊。同
樣在 $k=1$ 的時候,能用這種推擠的方法 (*Verdrängungsverfahren*) 去
達到目的:我們先把 $'U^1$ 推擠到 $'\mathfrak{a}^3$ 的邊緣上去,然後再把他推擠到只
在 $'\mathfrak{a}^2_\nu$ 的邊緣上。所以從 U^1 得着的鍊 V^1 自己是鍊 a^1_ν 的一個平直組
合。

因此我們可以用 §22 的方法,從 a^k_ν 這組塊形計算 $\mathfrak{R}^3$ 的同調羣。
這也就特別證明了 §60 中關於示性數的簡單的計算。

$\mathfrak{R}^3$ 能定向的充要條件顯然是 $F[a^3]=0$,或

$$F['a^3]=\sum_{\nu=1}^{\alpha^2}('\varepsilon_\nu\, 'a^2_\nu+''\varepsilon_\nu\, ''a^2_\nu)$$

中的 $'\varepsilon_\nu+''\varepsilon_\nu=0$。這就是說,對於這多面體的邊緣的一個協和的定
向說,$'a^2_\nu$ 與 $''a^2_\nu$ 必定有相反的定向。換個說法,若是一個人站在多面
體上,而且在外面,從他看起來,每兩個對應面上的環形箭頭指着相反

的方向。如此兩個對應面就說是屬於第一種的對應，否則說是屬於第二種的對應。所以 $\mathfrak{R}^3$ 能定向的充要條件，就是所有面的對應都是屬於第一種的。透鏡空間與三個圓的拓樸積都能定向。

例：1. 透鏡空間。透鏡空間 (p,q) 的塊形關聯矩陣是

$$\begin{array}{c|c} E^0 & a^1 \\ \hline a^0 & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} E^1 & a^2 \\ \hline a^1 & p \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} E^2 & a^3 \\ \hline a^2 & 0 \end{array},$$

已經都是法式。元素的個數 α^k，秩 γ^k，與從公式 $p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$（頁 109）計算出來的 *Betti* 數 p^k，可列表如下：

$k=$	0	1	2	3
α^k	1	1	1	1
γ^k	0	1	0	—
p^k	1	0	0	1

只有一個一維的撓係數等於 p。數目 q 並不在同調羣中出現。

從這例子看來，一維的撓係數的幾何意義就明顯了。有一個等於 p 的撓係數，就是說，有一個一維閉鍊存在，他的 p 倍纔能是一個二維鍊的邊緣。其實，透鏡的銳棱是由 p 條相抵的棱 $'a^1, ''a^1, \cdots, {}^{(p)}a^1$ 組成的，是透鏡的球形帽這面片的邊緣。在 $p=2$ 的時候（投影空間 $\mathfrak{P}^3$），只有兩個相抵棱，疊合之後與一條投影直綫同倫；我們已經知道一條投影直綫的兩倍是一個元面片——沿着這直綫割開的投影平面（頁 87）——的邊緣。"撓係數"這名稱的來源現在也明白了。這多面體必須繞着透鏡的軸扭撓之後，那就是說，下面的球形帽經過螺體旋轉再與上面的球形帽疊合之後，這多面體纔變成透鏡空間。

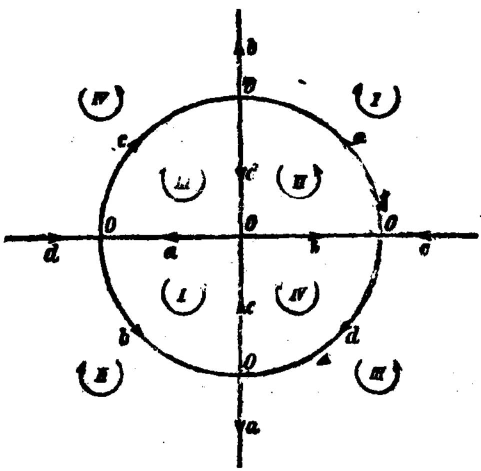


圖 111

2. 八面體空間（*Oktaederraum*）。

把一個八面體的對立的三邊形相對的旋轉 $\frac{\pi}{3}$ 弧度,然後使他們互相對應而且疊合。 如此得着的複合形就叫做八面體空間。圖 111 中是一個八面形的網目,用畫形投影法把八面體的表面投影到平面上而成的。我們設想增加了一個無窮遠點,把平面封閉成一個球面。這無窮遠點是網目的一個頂點。為看得清楚起見,圖中的對應元素都用相同的記號表示,不用通常用的 ${}^{(\lambda)}a^k_\nu$。

應用 §87 的方法,塊形關聯矩陣可以變成下列法式:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如同在前一個例子中一樣,相抵的頂點,棱,面的組數,關聯矩陣的秩,與 Betti 數 p^k 可列表如下:

$k =$	0	1	2	3
α^k	1	4	4	1
γ^k	0	4	0	—
p^k	1	0	0	1

只有一個等於 3 的一維撓係數。一維同調群的級所以等於 3。

習題: 試證八面體空間的四棱 a, b, c, d 互相同調,而且每一棱的三倍能零調。

§62 基本羣

如同在前一節中推斷同調羣一樣,我們現在要從多面體 $'\alpha^3$ 着手,推求三維流形 $\mathfrak{R}^3$ 的基本羣。我們要求助於下列定理:

定理 I: 設 $\mathfrak{R}^2$ 是由疊合多面體 $'\alpha^3$ 的邊緣的相抵點而成的面複合形。 $\mathfrak{R}^3$ 的基本羣與 $\mathfrak{R}^2$ 的基本羣相同。

證明: 我們必須證明兩點: I. 從 $\mathfrak{R}^2$ 的一個固定點 O 起始的,在 $\mathfrak{R}^3$ 上的,每一條閉道 w 能變狀成 $\mathfrak{R}^2$ 的一條道路 w_1。 II. 若是 $\mathfrak{R}^2$ 的一條

道路 w_1 在 $\mathfrak{K}^3$ 上零倫,他在 $\mathfrak{K}^2$ 上也零倫。證明 I. 設多面體 $'\mathfrak{a}^3$ 的所有的點,變換成 w 的點的,組成點集 w'。若是 $'\mathfrak{a}^3$ 有一個中間點 P 不屬於 w', 用"在 P 點的投影"把 w' 變狀到 $'\mathfrak{a}^3$ 的邊緣上去;那就是說,使 w' 的每一個點沿着那從 P 點起始的平直射線以常速度向 $'\mathfrak{a}^3$ 的邊緣運動。這投影相當於 $\mathfrak{K}^3$ 的一個變狀,變 w 成 $\mathfrak{K}^2$ 上的 w_1。若是 w' 含有 $'\mathfrak{a}^3$ 的所有中間點, w' 必須先從一個點 P 處挪開;例如先用 w 在 $\mathfrak{K}^3$ 上的一個單純逼近 (根據頁 162, 這就是 w 的一個變狀) 替代 w。——我們能同樣的證明 II. 設變狀 w_1 成 O 的"畸形的變狀矩形"是 $\mathfrak{A}$, 而且 $'\mathfrak{a}^3$ 中的所有的點,變換成 $\mathfrak{A}$ 的組成點集 $'\mathfrak{A}$。設 $'\mathfrak{a}^3$ 有一點 P, 不屬于 $'\mathfrak{A}$。用 P 做中心,把 $'\mathfrak{A}$ 投影到 $'\mathfrak{a}^3$ 的邊緣。這就相當於推擠 $\mathfrak{K}^3$ 上的 $\mathfrak{A}$ 到複合形 $\mathfrak{K}^2$ 上去。若是這樣的一個點 P 不存在, $\mathfrak{A}$ 就必須先有一個單純逼近;那就是說,換適當細密的單純重分了的變狀矩形 $\overline{\mathfrak{A}}$ 成 $\mathfrak{A}$ 的連綿續變換,必須先在 $\mathfrak{K}^3$ 上有一個單純逼近。

根據 § 46 中的方法,我們就能確定基本羣的關係。最簡單的情形是多面體的所有頂點都相抵,他們都相當於 $\mathfrak{K}^3$ 中的同一點 O。 我們就取這點作閉道的起點。旣然輔助道路都是 O 這一點,所以多面體的定向棱,更適當的說, $\mathfrak{K}^3$ 中的相當於這些定向棱的閉道,就是基本羣的母元。多面體的面的邊緣就給定基本羣的關係。

透鏡空間 (p, q) 是一個簡單的例子。這空間的唯一的母元是 a (前節中的指標現在省去了)。沿着兩個相抵的多邊形的一個的邊緣,我們就得着這空間的唯一的關係: $a^p = 1$。所以透鏡空間的基本羣是 p 級的循環羣,而且與 q 無干。

現在可以想像的情形有兩種: 在 $q \neq q'$ 的時候,(p, q) 與 (p, q') 這兩個空間同胚,或者,我們現在所已知道的不變性 (基本群與同調群) 都太弱了,還不能證明他們不同胚。 實

際，我們可以選擇 q 與 q'，使這兩種情形都出現。關於同胚的問題我們很容易證明下述的定理：

定理 *II*：若是 q 與 q' 適合同餘式

$$q\,q' \equiv \pm 1\,(\text{模}\ p), \tag{1}$$

透鏡空間 (p, q) 與 (p, q') 同胚。

既然在 q 給定了之後，這同餘式恰有一個解 q' 適合簡化條件 $0 \leqq q' \leqq \frac{p}{2}$，所以 q 與 q' 的任一個由另一個唯一的確定了。

證明：設 $\mathfrak{L}$ 是螺體旋轉弧度等於 $\frac{2\pi q}{p}$ 的透鏡。取 p 個通過 $\mathfrak{L}$ 的軸的半平面，把他分成 p 個相等的（像一瓣橘子的形狀的）四面體 $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots, \mathfrak{T}_p$（圖 110 中表明 $p=3$ 的情形），然後再把他們聯接成一個螺體旋轉弧度等於 $\frac{2\pi q'}{p}$ 的新 $\mathfrak{L}'$。$\mathfrak{T}_i$ 與透鏡下面的球形帽有一個公共三邊形 $\underline{\Delta_i}$，與上面的球形帽有一個公共的三邊形 $\overline{\Delta_i}$。透鏡的軸 b 是所有的 $\mathfrak{T}_i$ 的共棱；而與 b 對立的 p 條棱也同樣的互相相抵，做成透鏡空間同一條棱 a。因爲透鏡的球形帽的對應，這些三邊形成對的相抵：$\underline{\Delta_i}$ 與 $\overline{\Delta_{i+q}}$ 相抵，這裏的 $i+q$ 必須用模 p 化成 $1, 2, \cdots, p$ 中的一個數。我們把 $\mathfrak{T}_1$ 與 $\mathfrak{T}_{1+q}$ 沿着 $\underline{\Delta_1}$ 與 $\overline{\Delta_{1+q}}$ 這兩個三邊形聯接起來，再把 $\mathfrak{T}_{1+q}$ 與 $\mathfrak{T}_{1+2q}$ 沿着 $\underline{\Delta_{1+q}}$ 與 $\overline{\Delta_{1+2q}}$ 聯接起來，等等，從這 p 個四面體做成這新透鏡空間 $\mathfrak{L}'$。$\mathfrak{L}'$ 與 $\mathfrak{L}$ 所不同的，只是 a 與 b 這兩條棱的地位交換了。設這些四面體在 $\mathfrak{L}'$ 中圍繞軸 a 的循環次序是 $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_{1+q}, \mathfrak{T}_{1+2q}, \cdots, \mathfrak{T}_2, \cdots$。若是 $\frac{2\pi q'}{p}$ 是 $\mathfrak{L}'$ 的螺體旋轉的弧度，$\mathfrak{T}_1$ 與 $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_{2+xp}$ 之間就必定有 q' 個或 $p-q'$ 個四面體。所以 $\mathfrak{T}_{2+xp}$ 與 $\mathfrak{T}_1$ 的指標的差在這個循環次序中，一方面等於 $q\,q'$ 或 $q(p-q')$，另一方面等於 $(2+xp)-1$。所以

$$(2+xp)-1 = qq' \text{ 或 } q(p-q'),$$

即

$$qq' \equiv \pm 1 \quad (\text{模}\ p)。$$

因此，透鏡空間 $(7, 2)$ 與 $(7, 3)$ 同胚，因爲 $2\cdot 3 \equiv -1$（模 7）。但是透鏡空間 $(p, 1)$ 與 $(p, 2)$ 是否同胚，定理 *II* 並不能斷定。將來我們從基本群推出另一個不變性（§ 77），能用來斷定某種透鏡空間不同胚，例如 $(5, 1)$ 與 $(5, 2)$。至於 $(7, 1)$ 與 $(7, 2)$ 是否同胚，仍舊是未解決的問題。

我們還附帶說明，每一個透鏡空間能分成有一個公共環面的兩個環體。在透鏡 $\mathfrak{L}$ 中挖去圍繞 b 的一個同心圓柱體 $\mathfrak{B}$。疊合透鏡的球形帽的時候，$\mathfrak{B}$ 封閉成一個環體。$\mathfrak{L}$ 挖去 $\mathfrak{B}$ 的剩餘空間 $\mathfrak{A}$ 也同樣的變成一個環體。要證實這句話，我們只要同先前一樣，把 $\mathfrak{L}$ 分成 p 個四面體，再用他們做成透鏡空間 $\mathfrak{L}'$。現在在 $\mathfrak{L}'$ 中，$\mathfrak{A}$ 是圍繞軸 a 的一個圓柱體，而且相抵點的疊合使他封閉成一個環體；可參看頁 304。

我們再討論球式十二面體空間 (*Sphärischer Dodekuederraum*)*) 這另一個例子。把十二面體的每兩個對立五邊形相對的旋轉 $\frac{\pi}{5}$ 弧度,然後把他們疊合。如此疊合而成的叫做球式十二面體空間,圖112中所表明的十二面體的網目完全確定這空間。網目中共有五個不相抵的頂點 O, P, Q, R, S; 其中的棱每三條相抵。示性數是 $N=-5+10-6+1=0$, 所以是一個流形。取 O 做閉道的起點,取 $a, h, f^{-1}, f^{-1}d$ 做到 P, Q, R, S 的輔助道路。基本群的母元就是下列道路所代表的道路類:

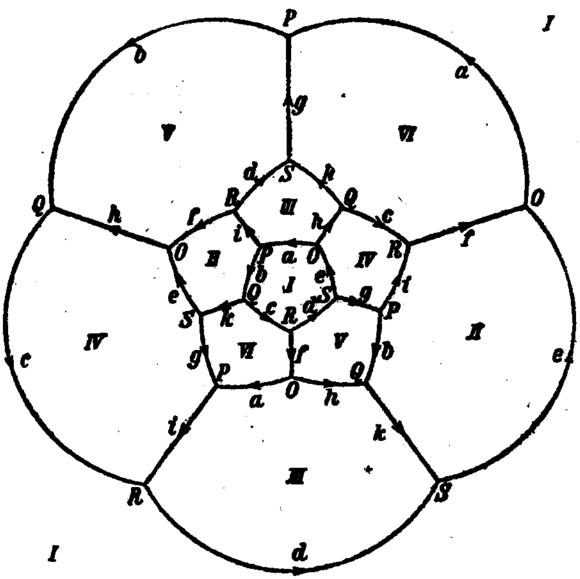


圖 112

$$A = aa^{-1}$$
$$B = abh^{-1}$$
$$C = hcf$$
$$D = f^{-1}d(d^{-1}f)$$
$$E = (f^{-1}d)e$$
$$F = f^{-1}f$$
$$G = (f^{-1}d)ga^{-1}$$
$$H = hh^{-1}$$
$$J = aif$$
$$K = hk(d^{-1}f)。$$

我們把右邊的小寫字母全改作大寫字母,就得着第 I 種的關係。我們得着 $A=D=F=H=1$;因此其餘的關係都是顯明的關係。

*) *H. Kneser* [8], 頁 256。

用五邊形的邊緣我們得着下列六個第 II 種的關係：

$$\left.\begin{array}{ll} ABCDE & =1 \\ BKEF^{-1}J^{-1} & =1 \\ AJDK^{-1}H^{-1} & =1 \\ CJ^{-1}G^{-1}EH & =1 \\ BH^{-1}F^{-1}DG & =1 \\ AG^{-1}K^{-1}CF & =1 \end{array}\right\} \quad \text{或} \quad \left.\begin{array}{ll} BCE & =1 \\ BKEJ^{-1} & =1 \\ J=K & \\ CJ^{-1}G^{-1}E & =1 \\ B=G^{-1} & \\ G^{-1}K^{-1}C & =1 \end{array}\right\}。$$

消去 G 與 K，結果是

$$\begin{array}{ll} BCE & =1 \\ BJEJ^{-1} & =1 \\ CJ^{-1}BE & =1 \\ BJ^{-1}C & =1。\end{array}$$

由於第一個與第四個關係，

$$E=C^{-1}B^{-1}, \quad J=CB。$$

用這兩個關係消去第二個與第三個關係中的 E 與 J，我們得着

$$BCBC^{-1}\cdot B^{-2}C^{-1}=1 \tag{I}$$

與

$$CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1}=1。\tag{II}$$

我們要想確定第一個同調群，所以使關係 (I)、與 (II) *Abel* 化。*Abel* 群我們仍舊用加法寫法，而且同調群的元用一上橫區別。於是便有

$$-\bar{C}=0 \tag{$\overline{I}$}$$

$$-\bar{C}-\bar{B}=0, \tag{$\overline{II}$}$$

卽 $\bar{B}=\bar{C}=0$。這就是說，第一個同調群只是一個零元。既然十二面體空間能定向，所以他的 *Betti* 數是：

$$p^0=1,\ p^1=p^2=0,\ p^3=1;$$

撓係數不存在。

這恰是三維球的不變數。所以要想斷定十二面體空間與三維球是否同胚，同調群並不够用。所以我們需要研究他們的基本群是否相同；爲達到這目的起見，要再化簡那頗爲繁雜的關係 (I) 與 (II)。我們把 (II) 放在 (I) 中有點的地方；我們不用 (I)，用由此得着的關係

$$BCBC^{-1}\cdot CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1}\cdot B^{-2}C^{-1}=1,$$

或化簡後的關係

$$B^2C^{-1}B^{-3}C^{-1}=1。\tag{I'}$$

再用 $C = U^{-1}B$ 規定的新母元 U, 把 (I') 與 (II) 分別變成

$$B^{2} \cdot B^{-1}U \cdot B^{-3} \cdot B^{-1}U = 1, \quad U^{-1}B \cdot B^{-1} \cdot B^{-1}U \cdot B \cdot B^{-1}U \cdot B^{-1} = 1,$$

或

$$B^{4} = UBU, \quad U^{2} = BUB,$$

或

$$B^{5} = (BU)^{2} = U^{3}。\tag{III}$$

我們從關係 (III) 知道，十二面體空間決不與三維球同胚。因爲前者的基本群不只是一個么元。其實，若是 B 代表二十面體繞着一個頂點，經過 $\frac{2\pi}{5}$ 弧度，的旋轉，U 代表他繞着表面上的一個三邊形的中心，經過 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度的同向的旋轉，二十面體群 (*Ikosaedergruppe*) 就也適合關係 (III)。所以二十面體群或就是群 (III)，或是群 (III) 的一個商群，所以這基本群決不只是一個么元。我們還能證明群 (III) 的級等於 120，就是“二元的二十面體群 (*binäre Ikosaebergruppe*)”。*)

這球式十二面體空間是第一個流形的例子，他的同調羣與三維球的相同，但他不與三維球同胚。這種的流形叫做 *Poincaré* 空間。我們知道有無窮多的 *Poincaré* 空間。但是我們所知道的基本羣是有限羣的這種空間，還只有球式十二面體空間這一個。[33]

所以同調羣決不能確定三維球的特徵。*Poincaré* 的“猜想” (*Vermutung*) 是說：三維球的基本羣確定三維球的特徵。但至今還未證明。既然三維球的基本羣只是一個么元，所以這問題能述如下式：除三維球之外是否還有别個三維的閉流形，他上面的每一條閉道都可以縮成一點 (都零倫)?

習題：1. 把十二面體的對立的五邊形相對的旋轉 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度 (非如同在討論球式十二面體空間的時候，旋轉 $\frac{\pi}{5}$ 弧度)，然後把他們叠合。如此叠合而成的是一個流形，叫做雙曲式 (*hyperbolisch*) 十二面體空間。試求出這空間的基本群，因而證明他有三個等於 5 的撓係數，而且 *Betti* 數 $p^{1} = 0$。

---

*) *Jhber. Deutsch. Math. Vereinig.* 42 (1932)，習題 84 頁 3。

2. 試證：八面體空間（§ 61）的基本群的關係是

$$abc = adb = acd = bdc = 1,$$

而且四面體群（*Tetraedergruppe*）是這個群的商群。［若是 a, b, c, d 代表四面體繞着四個頂點的，經過 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度的四個旋轉，這些關係在四面體中也成立。］

3. 從兩個三維流形 $\mathfrak{M}_1$ 與 $\mathfrak{M}_2$ 我們可以用“求和法（*Summenbildung*）”，得着一個新流形：從每一個流形中挖去一個小球體，然後把如此得着的“有邊緣的流形”沿着邊緣聯接起來；有兩種本質不同的聯接，即同向的或反向的聯接。設已知 $\mathfrak{M}_1$ 與 $\mathfrak{M}_2$ 的基本群。試求如此聯接成的閉流形的基本群與第一個同調群。

4. 試利用習題 3，求作有任意給定的第一個同調群的一個三維流形。

§63 *Heegaard* 圖式

我們前此雖證明了三維流形的若干普遍定理，但只知道流形的幾個個別的例子。列舉所有的三維流形的問題，與二維的這問題不同，至今還沒有解決，對於這個問題的解決，*Heegaard* **圖式**（*Diagramm*）供給我們一條途徑，我們現在要加以說明。

在一個三維球體的表面上，取 $2h$ 個無共點的元面片，使他們成對的成第一種的對應（頁 295）。疊合這些元面片，這三維球體就變成一個**虧格 h 的環柄統**（*Henkelkörper*）。我們也可以在平常的空間中實現這種疊合：把球體變狀，使對應的元面片互相疊合。如此得着的環柄統也可以看作是安裝上了 h 個環柄體的球體。他的表面是一個虧格 h 的能定向的曲面。成對的疊合元面片時，他們的邊緣所疊合成的 h 個圓，叫做這環柄統的**徑圓**。虧格 1 的環柄統就是一個平常的環柄體。我們有下述定理：

定理：每一個能定向的三維流形 $\mathfrak{M}^3$ 都能由聯接兩個等虧格的環

柄統的表面而成；聯接表面的意義是先規定他們的表面間一個拓撲對應，然後疊合對應點。

證明：設想這三維流形已經單純剖分了。取 α^0 個小球體分別圍繞這 α^0 個頂點；同樣的，取 α^1 個細圓柱體，分別圍繞着這 α^1 條棱，而且連接棱的兩個頂點處的球體。挖去這些球體與圓柱體的內域——為簡單起見，我們就說挖去頂點與棱。剩下的子空間 $\overline{\mathfrak{M}}_1^3$ 是由 α^3 個，沿着棱斜截 (*abstumpfen*) 的，三維單純形所組成的。我們可以如下的做成 $\overline{\mathfrak{M}}_1^3$，因而看出他是一個環柄統：我們從一個斜截的單純形 $\mathfrak{E}_1^3$ 着手，沿着一個面聯接一個鄰近的 $\mathfrak{E}_2^3$，再沿着 $\mathfrak{E}_1^3$ 或 $\mathfrak{E}_2^3$ 的一個面聯接一個單純形 $\mathfrak{E}_3^3$ 等等。所有的單純形都聯接了之後，結果是一個拓撲的球體，而且他的表面上有偶數個無共點的面片成對的疊合。這些面片的對應顯然都是第一種的，因為，否則 $\overline{\mathfrak{M}}_1^3$，而且因此 $\mathfrak{M}^3$，都不能定向了。我們同樣的能證明，這挖去的，由 α^0 個球體與 α^1 個圓柱體所組成的部分也是一個環柄統。

由此每一個能定向的三維流形都能用一個虧格 h 的能定向的閉曲面 $\mathfrak{M}^2$ 規定；我們只要取這流形的兩個環柄統 $\overline{\mathfrak{M}}_1^3$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_2^3$ 的公共表面做 $\mathfrak{M}^2$，而且在 $\mathfrak{M}^2$ 上標明如何聯接這兩個環柄統，就得着這流形。其實 $\mathfrak{M}^2$ 上任意給定了 $\overline{\mathfrak{M}}_1^3$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_2^3$ 的徑圓，這兩個環柄統的聯接就確定了。這些徑圓分成 Σ_1 與 Σ_2 兩組，每組有 h 個。他們無重點，每一組中的徑圓無共點(不同組的徑圓可能有共點)，而且把 $\mathfrak{M}^2$ 沿着 $\Sigma_1(\Sigma_2)$

的徑圓割開 (*aufschneiden*)*)，結果是一個有 $2h$ 個洞的球面。反之，若是一個虧格 h 的能定向的曲面 $\mathfrak{M}^2$ 上任意的給定了這麼兩組 Σ_1 與 Σ_2，就唯一的確定了一個三維流形 $\mathfrak{M}^3$。其實，我們把 $\mathfrak{M}^2$ 沿着 Σ_1 中的圓割開成一個有 $2h$ 個洞的球面，用元面片把洞封蓋，再把這無洞的球面塞滿成一個球體。成對的疊合這些元面片的結果是一個環柄統，他的表面是 $\mathfrak{M}^2$，他的徑圓是 Σ_1 中的圓。同樣的我們用 Σ_2 做成另一個環柄統。一個閉曲面 $\mathfrak{M}^2$ 與他上面的這兩組 Σ_1 與 Σ_2，就叫做他們所確定的流形 $\mathfrak{M}^3$ 的一個 *Heegaard* 圖式。

環面上的 *Heegaard* 圖式很容易斷定：他是由任意兩個不零倫的紐形剖線（即一個單純剖分中的無重點的閉棱道）組成的。用環面做 *Heegaard* 圖式的流形中必有透鏡空間；因為若挖去透鏡空間的軸，就把透鏡空間分成兩個環體。規定兩個環體間的一個拓撲對應，然後只疊合他們表面上的對應點而成的空間，就是 §36 中所說的環體的雙層，也就是圓與球面的拓撲積。這拓撲積所以也是用環面做 *Heegaard* 圖式的流形。這裏的 *Heegaard* 圖式的兩個徑圓是同一個圓。我們還能證明用環面做 *Heegaard* 圖式的流形只有這兩種。[34]

關於高虧格的 *Heegaard* 圖式，我們所知道的極少，球式十二面體空間有一個虧格 2 的 *Heegaard* 圖式。*H. Poincaré* 就是從這個 *Heegaard* 圖式意外的發見這空間。[33]

我們也能界說不能定向的流形的 *Heegaard* 圖式。但我們必須只

*) 我們假設 Σ_1 與 Σ_2 中的圓由一個單純剖分中的棱組成，所以割開有確定的意義。

引用不能定向的環柄統。一個這種的環柄統是一個球體，他的表面上有成對的對應的，無共點的多邊形，而且至少有一對多邊形成第二種的對應。這表面所以是一個不能定向的曲面，他的示性數 N 是偶數，因此他的虧格 $k = 2k'$（因為根據頁 197，不管對應屬於第一種或第二種，示性數都相等）。如同上文能定向的情形一樣，我們能證明每一個不能定向的三維閉流形能分成兩個不能定向的環柄統。

利用 *Heegaard* 圖式，作三維流形的問題就化成一個二維的問題——列舉所有的 *Heegaard* 圖式的問題。不過即使我們能列舉所有的 *Heegaard* 圖式，這三維的同胚問題還是沒有解決，我們還須討論兩個不同的 *Heegaard* 圖式是否確定同一個流形。在虧格 1 的 *Heegaard* 圖式這最簡單的情形下，列舉的問題已經完全解決了，但是透鏡空間的同胚問題還仍舊存在。

三維流形也可以由成對的疊合多面體的面而成。作所有的這種多面形也是列舉所有的三維流形的一條途徑，也是一個二維的問題。但這問題的解決，也如同列舉所有的 *Heegaard* 圖式的一樣，少有成就。

我們從函數論知道，每一個能定向的閉曲面能看作是實數球面的一個有有限個支點的覆疊曲面。同樣的我們也能用三維球的有支點的覆疊形表出任一能定向的三維閉流形。[35] 這種覆疊形中出現的支點可以組成三維球中的閉曲綫（扭結）。列舉與區別個別的這種覆疊空間也引到未解決的問題。一個流形有時候可以用不同的方法從完全不同的支點扭結求出；例如對於球式十二面體空間，我們就知道有三個不同的

支點扭結。[33]

習題：若是一個三維流形用一個有 h 對對應面的多面形表出，這流形就有一個虧格 h 的 *Heegaard* 圖式。（反命題在何種情形下成立，還未解決。）

§64 有邊緣的三維流形

若是一個有邊緣的，純粹的，有限的，連通的複合形 $\mathfrak{R}^3$ 有一個有如次性質的單純剖分，$\mathfrak{R}^3$ 就叫做一個有邊緣的三維流形：

1. $\mathfrak{R}^3$ 的每一個中間點的鄰域複合形是一個球面；

2. $\mathfrak{R}^3$ 的每一個邊緣點的鄰域複合形是一個圓域。

我們只要考慮在 $\mathfrak{R}^3$ 的各點處的同調羣，就容易證明 $\mathfrak{R}^3$ 的任一剖分都有這兩個性質。

球體，空心的球體 (*Hohlkugel*)，環體都是有邊緣的三維流形。

我們也能採用下述的界說：若是一個有邊緣的，純粹的複合形 $\mathfrak{R}^3$ 的雙層是一個三維閉流形，$\mathfrak{R}^3$ 就叫做一個有邊緣的三維流形。

$\mathfrak{R}^3$ 的邊緣 $\mathfrak{R}^2$ 由一個或數個閉曲面組成。

既然 $\mathfrak{R}^3$ 的一個邊緣點 Q 在 $\mathfrak{R}^3$ 中的鄰域複合形是一個圓域，Q 在 $\mathfrak{R}^2$ 中的鄰域複合形是一個圓周。所以若是 $\mathfrak{R}^2$ 分成爲孤立的子複合形 $\mathfrak{R}^2_1, \mathfrak{R}^2_2, \cdots, \mathfrak{R}^2_r$，他們中的每一個就是一個有限的，連通的，二維的，勻齊的複合形，因此是一個閉曲面（頁 199）。

我們現在要問，是否每一個閉曲面都可以是一個三維的有邊緣的流形的邊緣，而且邊緣曲面的性質可以確定 $\mathfrak{R}^3$ 自己的性質到何種程

度。

若是 $\mathfrak{R}^3$ 能定向，所有的三維單純形的一個協合的定向確定一個三維鍊，他的邊緣是 $\mathfrak{R}^2$ 上的一個二維閉鍊。$\mathfrak{R}^2$ 的每一個二維單純形都眞正的在這鍊中出現。所以 $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \cdots, \mathfrak{R}_r^2$ 上都必定有不等於零的二維鍊存在，所以這些曲面都能定向。這就是下述的定理：

定理 I：一個能定向的有邊緣的三維流形只有能定向的邊緣曲面。

這定理的反定理自然不成立，因爲從一個不能定向的閉流形減去一個三維單純形，結果就是一個以球面爲邊緣的（有邊緣的）不能定向的流形。

推論：投影平面 $\mathfrak{P}^2$ 不能安置在三維的實數空間（用一個假點封閉成的三維球 $\mathfrak{S}^3$）中。更正確的說：$\mathfrak{P}^2$ 不能是 $\mathfrak{S}^3$ 的一個單純剖分的子複合形。[36] ——因爲 $\mathfrak{P}^2$ 是一個純粹的無邊緣的二維複合形（§12）。若是他是 $\mathfrak{S}^3$ 的一個子複合形，他就是一個二維閉模 2 鍊（§23）。既然現在 $\mathfrak{S}^3$ 的第二個連通數 $q^2=0$，每一個二維閉模 2 鍊是一個三維的子複合形的邊緣。若是 $\mathfrak{R}^3$ 的一個點 Q 不屬於 $\mathfrak{P}^2$，他在 $\mathfrak{R}^3$ 中的鄰域複合形就是一個球面；若是 Q 屬於 $\mathfrak{P}^2$，他在 $\mathfrak{R}^3$ 中的鄰域複合形就把 $\mathfrak{P}^2$ 分成兩個有邊緣的，有一個公共邊緣圓周的曲面。既然這兩個有邊緣的曲面必須聯接成一個球面，他們必定都是圓域。既然 $\mathfrak{R}^3$ 還能定向——因爲 $\mathfrak{S}^3$ 能定向——，所以與定理 I 矛盾。

若是我們做 $\mathfrak{R}^3$ 的雙層 $\mathfrak{R}_2^3$，同時也就做成了每一個邊緣點的鄰域複合形的雙層。但是一個圓域的雙層是一個球面。$\mathfrak{R}_2^3$ 因此有勻齊性，

所以是一個閉的三維流形。他的示性數必定等於零 (§59)。若是 N 與 $\overline{N}$ 分別表示 $\mathfrak{R}^3$ 與 $\mathfrak{R}^2$ 的示性數,即有

$$2N - \overline{N} = 0, \tag{1}$$

因此下述的定理成立:

定理 *II*: **一個三維流形的示性數與邊緣的示性數互相唯一的確定。**

從 (1), 我們又有下述的定理:

定理 *III*: **一個有邊緣的三維流形的邊緣的示性數是偶數。因此投影平面,更普遍的說,一個奇數虧格的不能定向的曲面,不會組成一個有邊緣的三維流形的邊緣。**

但是兩個投影平面可能組成一個有邊緣的流形的邊緣,例如投影平面與綫段的拓撲積。

若是 $\mathfrak{R}^3$ 能定向,而且邊緣曲面 $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \cdots, \mathfrak{R}_r^2$ 的虧格 (環柄的個數) 分別是 $h_1, h_2, \cdots, h_r$, 根據 § 38,

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{r}(2h_i - 2) = 2\sum_{i=1}^{r}h_i - 2r。$$

並且

$$N = -p^0 + p^1 - p^2 + p^3$$

中的 Betti 數 $p^0 = 1$; 因為 $\mathfrak{R}^3$ 上無單純的不等於零的三維的閉鍊, $p^3 = 0$。把 N 與 $\overline{N}$ 的值代入(1),我們就得着

$$p^1 = 1 + p^2 + \frac{1}{2}\left(2\sum_{i=1}^{r} h_i - 2r\right) = p^2 - (r-1) + \sum_{i=1}^{r} h_i。$$

但是，邊緣曲面 $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \cdots, \mathfrak{R}_{r-1}^2$ 協合的定向了之後，他們不是一個三維子複合形的邊緣，所以代表 $r-1$ 個同調無關的二維鍊，所以 p^2 至少等於 $r-1$。因此，

$$p^1 \geqq \sum_{i=1}^{r} h_i,$$

卽下述的定理成立：

定理 IV：一個能定向的有邊緣的三維流形的第一個 *Betti* 數至少等於邊緣曲面的環柄的個數的總和。 p^1 能達到這下限 (*Grenze*)，例如虧格 h 的環柄統 (§63)。

我們還有一條推論；若是一個有邊緣的三維流形上的每一條閉道都零調，這流形的邊緣曲面只能是球面。每一個單連通的這種流形當然如此。[37]

§65 從扭結着手作三維流形

在三維流形的許多作法中[38]，我們選擇 *M. Dehn* [2] 的一個作法做例子。這作法是先挖去一個扭結，然後再裝進去一個扭結；可以簡單的說明如下。設實數空間已經用了一個無窮遠點封閉成一個三維球。從實數空間中挖去一個扭結。剩下的有邊緣的流形就是這扭結的外空間。再取一個環體 (封閉的環體 *Verschlussring*)，而且在他的邊緣與

外空間的邊緣間規定一個拓撲對應。疊合邊緣上的對應點，卽外空間中裝進封閉的環體，結果是一個新的閉流形。

我們先說明扭結與挖去的意義。設想這用一個無窮遠點把實數空間封閉成的三維球 $\mathfrak{S}^3$ 已經有了一個確定的單純剖分。這剖分還用 $\mathfrak{S}^3$ 表示。若是這單純剖分中的一個一維的子複合形的每一個頂點恰與兩條棱關聯，這子複合形就叫做一個扭結 $\mathfrak{k}$。一個扭結所以是一個拓撲圓。但並非 $\mathfrak{S}^3$ 中任意一個拓撲圓就是一個扭結。例如圖 113 所表出的拓撲圓，由無窮多逐漸小的，趨近於一個點的環套 (*Schling*) 組成，卽"扭成無窮多次結的圓"，就不是一個扭結，因爲他不是 $\mathfrak{S}^3$ 的一個單純剖分的子複合形。我們有時候也說扭結就是 $\mathfrak{R}^3$ 中有限條直線段所組成的無重點的閉棱道。因爲我們很容易單純的剖分 $\mathfrak{R}^3$，使這些線段都變成剖分中的棱，所以這種的棱道按照我們的定義也是一個扭結。

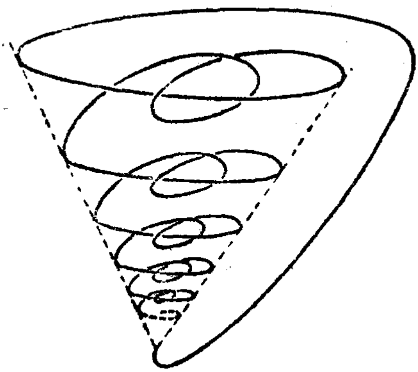


圖 113

給定了兩個扭結，若是 $\mathfrak{S}^3$ 有一個同向的自身的拓撲變換，使其中的一個扭結換成另一個，這兩個扭結就說是相極。[89]

要說明挖去的意義，我們還要假設 $\mathfrak{S}^3$ 的這個單純剖分有下述的性質：若是一個 i 維單純形的 $i+1$ 個頂點都在 $\mathfrak{k}$ 上，這單純形自己就屬

於 $\mathfrak{k}$；所以一個三邊形的三個頂點不會都在 $\mathfrak{k}$ 上，而且一條棱不會是的弦。其實只需要一次法重分，$\mathfrak{S}^3$ 的單純剖分就有這性質。

設 $\mathfrak{k}$ 的頂點按照他們的循環次序寫下來是 $P_1, P_2, \cdots, P_r$，而且 $\mathfrak{St}_1, \mathfrak{St}_2, \cdots, \mathfrak{St}_r$ 是他們在 $\mathfrak{S}^3$ 的法重分 $\dot{\mathfrak{S}}^3$ 中的單純星形。因為關於 $\mathfrak{S}^3$ 的假設，只有相連的兩個星形 $\mathfrak{St}_\rho$，$\mathfrak{St}_{\rho+1}$（$\rho+1$ 必須用模 r 化成 1 至 r 的一個數）纔有共點，而且他們的共點恰組成一個元面片 $\mathfrak{E}_{\rho,\rho+1}$。*）這些元面片的每兩個無共點。因此，由這些單純星形 $\mathfrak{St}_1, \mathfrak{St}_2, \cdots, \mathfrak{St}_r$ 所組成的子複合形是一個以 $\mathfrak{k}$ 為心綫的環體 $\mathfrak{V}_0$。因為我們可以設想從一個星形 $\mathfrak{St}_1$ 着手，每一次沿着一個元面片聯接次一個星形，每一次作成的都是一個球體；最後一步的球體上有兩個對應的無共點的元面片，這樣的球體疊合成一個環體。挖去這扭結 $\mathfrak{k}$，就是消去這環體 $\mathfrak{V}_0$ 的中間點。剩下的空間 $\mathfrak{A}$ 是一個三維的有邊緣的流形，他的邊緣是一個環面 $\mathfrak{T}$。

我們現在要求出這"外空間" $\mathfrak{A}$ 的一維的同調羣 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$。在環面 $\mathfrak{T}$ 上取一個經圓 m_0，例如 $\mathfrak{E}_{r0}$ 這元面片的一條邊緣道；取一個緯圓 b_0 與那定向的心綫在 $\mathfrak{V}_0$ 上同調的一條道路。除去可以接上 m_0 的倍數之外，b_0 完全確定了。我們現在應用 § 52 中的定理 *II* 到 $\mathfrak{S}^3$ 的兩個子複合形 $\mathfrak{V}_0$ 與 $\mathfrak{A}$ 上去。$\mathfrak{V}_0$ 的第一個同調羣的一組母元是 m_0 與 b_0，關係只是 $m_0 \sim 0$。**）若是設想同調羣 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 也用母元與關係表出，我們

*）若是我們把 $\mathfrak{S}^3$ 這單純剖分看作是一個胞腔剖分（*Zellteilung*）（§68），這三維星形 $\mathfrak{St}_\rho$ 與元面片 $\mathfrak{E}_{\rho,\rho+1}$ 就是 $\mathfrak{k}$ 的頂點與棱的對偶胞腔（*duale Zelle*）。

**）這同調群的母元是由 m_0 與 b_0 所確定的同調類。正確的說，應當用 m_0 的同調類替代 m_0，用聯合群元的等號替代 $\sim$。

能假設 m_0 與 b_0 也是 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 的母元。$\mathfrak{B}_0$ 的同調羣的關係 $m_0\sim 0$（同調式採用加法的寫法，就已經包含有對易的關係；所以這些關係不再寫出），加上 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 的未知關係，我們應該得着 $\mathfrak{S}^3$ 的同調羣 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}}$ 的關係。現在 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}}$ 只是一個零元。所以若是在同調羣 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 中使 $m_0\sim 0$，所有的元都應該零調。這只有在 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 是以 m_0 爲母元的循環羣的時候纔可能。這循環羣是一個自由循環羣。*）因爲根據 §64 中的定理 IV，$\mathfrak{A}$ 的第一個 *Betti* 數至少等於邊緣曲面的環柄數的總和；因此至少等於 1，所以 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 是無窮羣。我們只能找着一個確定的 x，使 $b_0\sim x\,m_0$ 在 $\mathfrak{A}$ 中特別成立。若是 $x\neq 0$，我們就用緯圓 $b_0^*\sim b_0-xm_0$ 替代 b_0。b_0^* 在 $\mathfrak{A}$ 中零調。

我們再從 $\mathfrak{A}$ 作成一個閉流形 $\mathfrak{M}^3$ 如下：我們規定一個環體 $\mathfrak{B}'$ 的邊緣面 $\mathfrak{T}'$ 與 $\mathfrak{A}$ 的邊緣面 $\mathfrak{T}$ 間的一個拓撲對應，然後疊合對應點。**）$\mathfrak{B}'$ 的經圓 m' 在 $\mathfrak{T}$ 上的像集是 $\mathfrak{T}$ 上的一條閉道，所以與 m_0 及 b_0^* 的一個平直組合同調：

$$m\sim\alpha\, m_0+\beta\, b_0^*\ (\text{在}\,\mathfrak{T}\,\text{上})。\tag{1}$$

既然 m 無重點，我們可以附帶的聲明，α 與 β 是互質的整數。我們再應用 §52 中的定理 II，從 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ 去求 $\mathfrak{M}^3$ 的同調羣 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$。使封閉的環體的經圓等於零，即得

*）這事實在頁 394 中有一個更簡單的證明。

**）我們說如此得着的必是複合形，就等於說在這拓撲對應下，由 $\mathfrak{T}$ 的這單純剖分引出的 $\mathfrak{T}'$ 的單純剖分能推廣成全個的 $\mathfrak{B}'$ 的一個單純剖分。我們不在這裏證明這事實，但假設這換 $\mathfrak{T}$ 成 $\mathfrak{T}'$ 的拓撲變換有這性質。

$$\alpha m_0 + \beta b_0^* \sim 0 \quad (\text{在 } \mathfrak{M}^3 \text{ 中})。$$

因爲在 $\mathfrak{A}$ 中 $b_0^* \sim 0$,

$$\alpha m_0 \sim 0$$

就是 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$ 的界說關係。所以 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$ 是 α 級的循環羣。

若是 (1) 中的 α 特別等於 ± 1，我們就得着 *Poincaré* 空間或三維球。因爲 β 的選擇,我們還有無限多不同的可能的封閉方法。

我們用三叉扭結的例子來說明上述的步驟。根據 § 52, $\mathfrak{A}$ 的基本群的關係是

$$A^2 = B^3。 \tag{2}$$

取 $\mathfrak{T}$ 的一個點做閉道的起點。我們能選取閉道

$$m_0 = BA^{-1}$$

做經圈 m_0 (頁 280, 圖 109),閉道

$$b_0 = A^2$$

做緯圈；因爲按照 § 52 中的記號, A^2 是平環 $\mathfrak{D}$ 的中綫。要求出外空間中零調的緯圈 b_0^*,我們用未定係數 x 做成

$$b_0^* = A^2 (BA^{-1})^{-x} \sim A^{2+x} B^{-x}。 \tag{3}$$

我們必須命 $x = -6$。因爲根據 (2),

$$b_0^* \sim A^{-4}B^6 \sim (A^{-2}B^3)^2 \sim 0 \quad (\text{在 } \mathfrak{A} \text{ 中})。$$

要想得着一個 *Poincaré* 空間,我們選取道路

$$m = m_0\, b_0^{*\beta} = BA^{-1}[A^2 (BA^{-1})^6]^\beta \tag{4}$$

做封閉的環體的經圈。m 在封閉的環體中零倫,所以在 $\mathfrak{M}^3$ 中也零倫。所以 $\mathfrak{M}^3$ 的基本群的關係,除 (2) 之外,還有

$$(BA^{-1}) [A^2(BA^{-1})^6]^\beta = 1。 \tag{5}$$

而且根據 § 52 中的定理 I, 這兩個關係就是 $\mathfrak{M}^3$ 的基本群的一組界說關係。

$\mathfrak{A}$ 的最簡單的封閉法相當於 $\beta = 0$。這時候的 $m = m_0$, 結果 $\mathfrak{M}^3$ 就是我們所從出發的三維球。若是 $\beta = -1$, $\mathfrak{M}^3$ 的基本群的關係 (2) 與 (5) 就變成

$$A^2 = B^3,\ BA^{-1}(BA^{-1})^{-6}A^{-2} = 1 \quad \text{或} \quad A^2 = (BA^{-1})^{-5},$$

即

$$A^2 = B^3 = (BA^{-1})^{-5}。$$

用方程式 $A = CB$ 規定一個新母元 C 去替代 A，最後這兩個關係又變成

$$(CB)^2 = B^3 = C^5。$$

他們除了記號不同之外，也就是球式十二面體空間的基本群的關係（§62）。要證明不但是這兩個基本群相同，而且這兩個空間也相同，需要的預備材料却越出本書的範圍了。[33]

相當於 β 的別個值的空間也是 *Poincaré* 空間。既然可以證明他們的基本羣不同，他們都不同胚。

第十章 n 維流形

因爲勻齊性的直覺的幾何意義，勻齊的複合形在複合形中佔一個特出的地位。我們已經把二維與三維的勻齊複合形特別叫做流形；我們的目的是要把他們完全分類。二維流形的分類已經完成了。至于三維流形，即使稍有系統的列舉相關的例子，我們也未能做到。完全列舉 n 維的流形在現在還是一個無希望的問題。所以在高于三維的討論中，我們無法著重同胚問題，只能證明若干普遍定理，這些定理的根據却是流形有對偶的胞腔剖分這性質。這種定理中，我們這裏要討論的，是 *Poincaré* 對偶定理，交點數（*Schnittzahl*）與環繞數（*Verschlingungszahl*）的理論。高於三維的流形的定義中，若還用勻齊性，已無若何意義。所以我們有意的要用更普遍的概念替代勻齊性。我們先說明星形複合形（*Sternkomplex*），以爲界說流形與介紹對偶的胞腔剖分的預備。

§66 星形複合形

簡單的說，星形複合形就是一個有限的單純複合形，其中從零維到 n 維的單純形按照確定的方法分成星形*），使每一個 i 維星形的外邊緣都完全由 $i-1$ 維星形組成。我們用對於複合形的維數的歸納法，正確的界說星形複合形如下：

一個零維的星形複合形 $\mathfrak{K}_a^0$ 由有限個點

$$\mathfrak{a}_1^0,\ \mathfrak{a}_2^0,\ \cdots,\ \mathfrak{a}_\alpha^0.$$

組成。這些點叫做 $\mathfrak{K}_a^0$ 的零維星形。一個零維的星形複合形 $\mathfrak{K}_a^0$ 加上

---

*）〈本節與下節中所說的星形就是 § 14 中的單純星形。因爲，否則，下文所說的星形的中心將無意義。〉

有限個一維星形

$$\mathfrak{a}_1^1,\ \mathfrak{a}_2^1,\ \cdots,\ \mathfrak{a}_{\alpha^1}^1,$$

使每一個 $\mathfrak{a}_\nu^1$ 的外邊緣由 $\mathfrak{K}_a^0$ 的若干零維星形組成，我們就得着一個一維的星形複合形 $\mathfrak{K}_a^1$。設已有一個 $n-1$ 維的星形複合形 $\mathfrak{K}_a^{n-1}$，他的 k 維星形 $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 是

$$\mathfrak{a}_1^k,\ \mathfrak{a}_2^k,\ \cdots,\ \mathfrak{a}_{\alpha^k}^k。$$

$\mathfrak{K}_a^{n-1}$ 加上有限個 n 維星形 $\mathfrak{a}_1^n,\ \mathfrak{a}_2^n,\ \cdots,\ \mathfrak{a}_{\alpha^n}^n$,使每一個 $\mathfrak{a}_\nu^n$ 的外邊緣由若干個 $\mathfrak{K}_a^{n-1}$ 中的 $n-1$ 維星形組成,我們就得着一個 n 維的星形複合形 $\mathfrak{K}_a^n$。

$\mathfrak{K}_a^n$ 的星形的所有單純形組成一個單純複合形,叫做 $\mathfrak{K}_a^n$ 的法重分,用 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 表示。圖 114 中表出的是一個二維的星形複合形的一部份；圖中粗線表出的多邊形是二維星形。

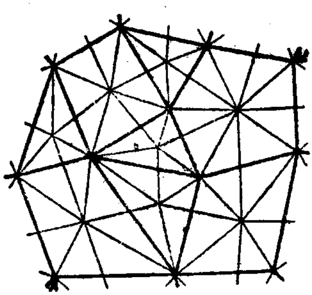


圖 114

例：我們能從每一個有限的複合形 $\mathfrak{K}^n$,做成一個星形複合形如下：先任意的單純剖分 $\mathfrak{K}^n$,然後法重分如此得着的單純複合形。k 維星形就是 $\mathfrak{K}^n$ 的法重分了的 k 維單純形。

若是一個 $k-1$ 維星形 $\mathfrak{a}_\nu^{k-1}$ 在一個 k 維星形 $\mathfrak{a}_\kappa^k$ 的外邊緣上，$\mathfrak{a}_\nu^{k-1}$ 與 $\mathfrak{a}_\kappa^k$ 就說是密接(*unmittelbar*)關聯。若是兩個星形 $\mathfrak{a}^i$ 與 $\mathfrak{a}^k$ $(i<k)$ 之間有一列維數遞增的星形 $\mathfrak{a}^i,\mathfrak{a}^{i+1}$,

$\cdots, \mathfrak{a}^{k-1}, \mathfrak{a}^k$ 存在，其中每一個星形與次一個星形密接關聯，$\mathfrak{a}^i$ 與 $\mathfrak{a}^k$ 就說是間接 (*mittelbar*) 關聯，或只說是關聯。

從星形複合形的定義可知：要作成一個星形複合形，只要使每一個 k 維星形 $(k>0)$ 至少與一個 $k-1$ 維的星形密接關聯：至於從零維到 n 維的星形的個數 $\alpha^0, \alpha^1, \cdots, \alpha^n$ 與他們間的密接關聯的關係都可以任意的預先給定。這星形複合形在 $\alpha^0+\alpha^1+\cdots+\alpha^n$ 維的實數空間中有一個平直的代表。設 P^k_κ 是星形 $\mathfrak{a}^k_\kappa$ 的中心。*) 在這空間中取 $\alpha^0+\alpha^1+\cdots+\alpha^n$ 個平直無關的點

$$P^0_1, P^0_2, \cdots, P^0_{\alpha^0}; \cdots; P^n_1, P^n_2, \cdots, P^n_{\alpha^n}。$$

若是 $\mathfrak{a}^1_\nu$ 的外邊緣由 $P^0_1, P^0_2, \cdots, P^0_{\alpha^0}$ 中的若干點組成，就在 P^1_ν 處投影這些點。餘類推。

我們並未要求每一個 k 維星形與一個 $k+1$ 維星形關聯。若是一個星形複合形有這性質，他就說是純粹的星形複合形。一個星形複合形 $\mathfrak{K}^n_a$ 純粹的充要條件顯然是他的法重分 $\dot{\mathfrak{K}}^n_a$ 是一個純粹的單純複合形。但不管 $\mathfrak{K}^n_a$ 純粹與否，他的一個 k 維星形 $\mathfrak{a}^k$ 總是 $\dot{\mathfrak{K}}^n_a$ 的一個純粹的 k 維子複合形。那就是說，$\mathfrak{a}^k$ 的每一個 i 維單純形 $(i<k)$ 至少是一個 k 維單純形的一個面。

我們現在要用星形的關聯來表出一個 n 維的星形複合形與他的法重分的性質。

*) 由此處起，我們用一個頂點的上指標表示以這頂點為中心的星形的維數。

下述的定理對於這個目的很有用處。

定理 I: 若是 $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}^1, \cdots, \mathfrak{a}^k$ $(k \geqq 0)$ 是一列星形，其中每一個與次一個密接關聯，他們的中心 $P^0, P^1, \cdots, P^k$ 就組成一個屬於 $\mathfrak{a}^k$ 的 k 維單純形的頂點。反之，星形 $\mathfrak{a}^k$ 的每一個 k 維單純形都能用這種的一列星形求得。

證明: 在 $k=0$ 時這定理成立。假設這定理對於 $k-1$ 維成立，我們能證明這定理對於 k 維也成立。因爲 $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}^1, \cdots, \mathfrak{a}^{k-1}$ 是一列密接關聯的星形，根據假設，他們的中心 $P^0, P^1, \cdots, P^{k-1}$ 組成一個屬於 $\mathfrak{a}^{k-1}$ 的 $k-1$ 維單純形的頂點。因爲 $\mathfrak{a}^{k-1}$ 與 $\mathfrak{a}^k$ 密接關聯，單純形 $(P^0 P^1 \cdots P^{k-1})$ 在 $\mathfrak{a}^k$ 的外邊緣上，所以頂點 $P^0, P^1, \cdots, P^k$ 佈成一個屬於 $\mathfrak{a}^k$ 的 k 維單純形。——反之，若 $\mathfrak{E}^k$ 是 $\mathfrak{a}^k$ 中的任意一個 k 維單純形，P^k 必是他的一個頂點，而且對立面 $\mathfrak{E}^{k-1}$ 在 $\mathfrak{a}^k$ 的外邊緣上，屬於一個與 $\mathfrak{a}^k$ 關聯的星形 $\mathfrak{a}^{k-1}$。根據歸納法的假設，$\mathfrak{E}^{k-1}$ 的頂點是一列依次關聯的星形 $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}^1, \cdots, \mathfrak{a}^{k-1}$ 的中心。$\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}^1, \cdots, \mathfrak{a}^k$ 所以也是一列依次關聯的星形，他們的中心是 $\mathfrak{E}^k$ 的頂點。

定理 I 能推廣成下述定理。

定理 II: 若 $\mathfrak{a}^i, \mathfrak{a}^k, \cdots, \mathfrak{a}^l$ $(i<k<\cdots<l)$ 是一列維數遞增的星形，其中每一個與次一個關聯(但不必密接關聯)，他們的中心必是 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的一個單純形的頂點。$\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的所有單純形都可如此求得。

證明: 在 $\mathfrak{a}^i, \mathfrak{a}^k, \cdots, \mathfrak{a}^l$ 一列星形間加入別個星形，做成一列星形 $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}^1, \cdots, \mathfrak{a}^{l-1}, \mathfrak{a}^l$，使其中每相連的兩個密接關聯。根據定理 I，這些

星形的中心組成一個屬於 $\mathfrak{a}^l$ 的單純形，所以原來給定的星形的中心佈成這單純形的一個面。——反之，設 $\mathfrak{S}^j$ 是 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的任一單純形。考慮子複合形 $\mathfrak{K}_a^0, \mathfrak{K}_a^1, \cdots, \mathfrak{K}_a^n$: $\mathfrak{K}_a^0$ 由所有的零維星形組成，$\mathfrak{K}_a^1$ 由所有的零維與一維星形組成，最後 $\mathfrak{K}_a^n$ 由所有的星形組成。設這一列子複合形中第一個含有 $\mathfrak{S}^j$ 的是 $\mathfrak{K}_a^h$。$\mathfrak{S}^j$ 的一個頂點必是一個 h 維星形 $\mathfrak{a}^h$ 的中心，$\mathfrak{S}^j$ 的對立面必屬於 $\mathfrak{a}^h$ 的外邊緣。$\mathfrak{S}^j$ 是一個 h 維單純形 $\mathfrak{S}^h$ 的一面（或 $\mathfrak{S}^j = \mathfrak{S}^h$）。根據定理 I, $\mathfrak{S}^h$ 的頂點是一列依次關聯的星形的中心。所以 $\mathfrak{S}^j$ 的頂點是一列依次（密接或間接）關聯的星形的中心。

若是知道了 $\mathfrak{K}_a^n$ 中每一個維數的星形的個數，與 $\mathfrak{K}_a^n$ 中什麼星形密接關聯，就也知道了星形的間接關聯的關係。根據定理 II, 能作 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的單純形；而且根據定理 I, 就知道什麼單純形組成 $\mathfrak{K}_a^n$ 的一個星形。所以，若是兩個星形複合形 $\mathfrak{K}_a^n$ 與 $'\mathfrak{K}_a^n$ 的星形成一一對應，其中 $\mathfrak{K}_a^n$ 的密接關聯的星形與，而且只與，$'\mathfrak{K}_a^n$ 的密接關聯的星形對應，法重分 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 與 $'\dot{\mathfrak{K}}^n$ 間就也有了一個一一的而且同關聯的 (*inzidenzerhaltend*) 對應，其中 $\mathfrak{K}_a^n$ 的一個星形的單純形換成 $'\mathfrak{K}_a^n$ 的一個星形的單純形。如此的兩個星形複合形 $\mathfrak{K}_a^n$ 與 $'\mathfrak{K}_a^n$ 叫做一一同構。

從定理 II, 可推出下述定理。

定理 III: 若是

$$P^i, P^k, \cdots, P^l \qquad (i<k<\cdots<l)$$

是 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的一個單純形的頂點，

$$P^l, P^m, \cdots, P^z \qquad (l<m<\cdots<z)$$

是另一個單純形的頂點,

$$P^i, P^k, \cdots, P^l, P^m, \cdots, P^z$$

就也是 $\mathfrak{K}^n_a$ 的一個單純形的頂點。因為星形 $\mathfrak{a}^i, \mathfrak{a}^k, \cdots, \mathfrak{a}^l, \mathfrak{a}^m, \cdots, \mathfrak{a}^z$ 雖不必密接關聯,但必依次關聯。

現在我們要特別討論純粹的星形複合形 $\mathfrak{K}^n_a$。每一個純粹的星形複合形有一個對偶的星形複合形存在。這存在定理極為重要;也因其如此,我們纔把星形複合形做我們討論的主要對象。

定理 IV:每一個純粹的星形複合形 $\mathfrak{K}^n_a$ 有一個對偶的星形複合形 $\mathfrak{K}^n_b$。若不區別一一同構的星形複合形,這對偶的 $\mathfrak{K}^n_b$ 就完全確定了。

$\mathfrak{K}^n_b$ 是由下述的特徵確定的:給定了 $\mathfrak{K}^n_a$ 的一個 k 維星形 $\mathfrak{a}^k$, $\mathfrak{K}^n_b$ 恰有一個"對偶的" $n-k$ 維星形 $\mathfrak{b}^{n-k}$ 與 $\mathfrak{a}^k$ 對應,而且這種對應是可逆的一一的對應,使關聯的星形與關聯的星形對應。

證明:我們要作出的星形複合形 $\mathfrak{K}^n_b$,他的每一個維數的星形的個數,與星形間的密接關聯的關係都給定了。因為 $\mathfrak{K}^n_a$ 有純粹性,$\mathfrak{K}^n_a$ 的每一個 $n-k$ 維星形至少與一個 $n-k+1$ 維星形關聯。所以 $\mathfrak{K}^n_b$ 必須滿足的唯一條件——每一個 k 維的星形至少與一個 $k-1$ 維的星形關聯——也滿足了。——圖 115 中,粗線表出的多邊形是原來的星形複合形(與圖 114 同)的二維星形,虛線表出的多邊形是對偶星形複合形的二維星形。

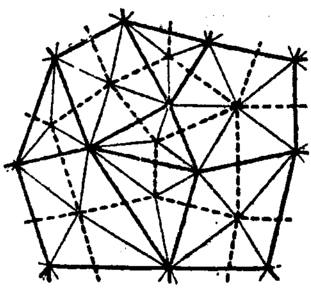


圖 115

$\mathfrak{K}_b^n$ 的對偶星形複合形就是 $\mathfrak{K}_a^n$。所以 $\mathfrak{K}_a^n$ 與 $\mathfrak{K}_b^n$ 間的這種對偶關係是對稱的。

既然 $\mathfrak{K}_a^n$ 的星形 $\mathfrak{a}_\kappa^k$ 與 $\mathfrak{K}_b^n$ 的對偶星形 $\mathfrak{b}_\kappa^{n-k}$ 間有一個一一對應，中心 P_κ^k 與 Q_κ^{n-k} 間，也就是法重分 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 與 $\dot{\mathfrak{K}}_b^n$ 的頂點間，有同樣的對應。設 $(P^i P^k \cdots P^l)(i<k<\cdots<l)$ 是 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的一個單純形，根據定理 II，這些頂點所屬的星形 $\mathfrak{a}^i, \mathfrak{a}^k, \cdots, \mathfrak{a}^l$ 中每一個與次一個關聯。他們的對偶星形 $\mathfrak{b}^{n-i}, \mathfrak{b}^{n-k}, \cdots, \mathfrak{b}^{n-l}$ 因此也有這種性質。根據定理 II，他們的中心 $Q^{n-i}, Q^{n-k}, \cdots, Q^{n-l}$ 也組成 $\dot{\mathfrak{K}}_b^n$ 的一個單純形的頂點。這就是說，$P_\kappa^k \longleftrightarrow Q_\kappa^{n-k}$ 這變換換 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的單純形成 $\dot{\mathfrak{K}}_b^n$ 的單純形，而且也換 $\dot{\mathfrak{K}}_b^n$ 的單純形成 $\dot{\mathfrak{K}}_a^n$ 的單純形。**因此我們能夠把這對偶的星形複合形 $\mathfrak{K}_a^n$ 與 $\mathfrak{K}_b^n$ 看作是同一個單純複合形 $\dot{\mathfrak{K}}^n = \dot{\mathfrak{K}}_a^n = \dot{\mathfrak{K}}_b^n$ 的不同的星形剖分，而且此後就採用這個看法。**

我們現在規定，$\dot{\mathfrak{K}}^n$ 的任一單純形的頂點都按照他的上指標遞增的次序寫下。根據定理 II，這些頂點是不同維數的星形的中心，所以他們的上指標都不同。$\dot{\mathfrak{K}}^n$ 的每一個單純形所以有確定的第一個頂點與確定的末一個頂點。既然我們從定理 I 知道，$\dot{\mathfrak{K}}^n$ 的一個 k 維單純形，屬於 $\mathfrak{K}_a^n$ 的 k 維星形 $\mathfrak{a}^k$ 的，由一列 $k+1$ 個依次關聯的星形 $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{a}^1, \cdots, \mathfrak{a}^k$ 給定，而且這對偶星形 $\mathfrak{b}^{n-k}$ 的一個單純形同樣的由一列 $\mathfrak{a}^k, \mathfrak{a}^{k+1}, \cdots, \mathfrak{a}^n$ 給定，所以星形與他們的對偶星形的相關位置可述成下述定理：

定理 V：星形 $\mathfrak{a}^k$ 由所有以 $\mathfrak{a}^k$ 的中心 P^k 爲末一個頂點的 k 維單純形組成；$\mathfrak{a}^k$ 的對偶星形 $\mathfrak{b}^{n-k}$ 由所有以 P^k 爲第一個頂點的 $n-k$ 維

單純形組成。

所以兩個對偶星形祇有這中心一個共點，兩個非對偶的星形根本無共點。

下述的更普遍的定理仍成立。

定理 VI: 設 $\mathfrak{a}^k$ 與 $\mathfrak{b}^{n-i}$ 兩個星形的中心分別是 P^k 與 P^i。這兩個星形的交集，由 $\mathfrak{K}^n$ 的所有以 P^i 為第一個頂點與以 P^k 為末一個頂點的 $k-i$ 維單純形組成。只有在 $i\leqq k$ 而且同時 $\mathfrak{b}^{n-i}$ 的中心屬於 $\mathfrak{a}^k$ 的時候，他們纔有一個非空的交集。

證明: α) 若是 $(P^i\,P^{i+1}\cdots P^k)$ 是一個 $k-i$ 維單純形，他必屬於一個單純形 $(P^0\cdots P^i\cdots P^k\cdots P^n)$。根據定理 V，$(P^0\cdots P^k)$ 屬於 $\mathfrak{a}^k$，而且 $(P^i\cdots P^n)$ 屬於 $\mathfrak{b}^{n-i}$，所以他們的共面 $(P^i\,P^{i+1}\cdots P^k)$ 屬於 $\mathfrak{a}^k$ 與 $\mathfrak{b}^{n-i}$ 的交集。

β) 還要證明 $\mathfrak{a}^k$ 與 $\mathfrak{b}^{n-i}$ 的交集中的每一個單純形必是一個 $k-i$ 維單純形 $(P^i\cdots P^k)$ 的一個面。設 $\mathfrak{S}=(P^r\cdots P^s)$ 是 $\mathfrak{a}^k$ 與 $\mathfrak{b}^{n-i}$ 的一個（不必是 $s-r$ 維的）公共單純形。因為 $\mathfrak{S}$ 是一個 n 維單純形的面，必有一個 $s-r$ 維單純形 $\mathfrak{S}^{s-r}$ 存在，以 P^r 為第一個，P^s 為末一個頂點。並且有一個單純形 $\mathfrak{S}^{k-s}$ 存在，以 P^s 為第一個，P^k 為末一個頂點（因 P^s 屬於 $\mathfrak{a}^k$）；與一個單純形 $\mathfrak{S}^{r-i}$ 存在，以 P^i 為第一個，P^r 為末一個頂點（因 P^r 屬於 $\mathfrak{b}^{n-i}$）。根據定理 IV，$\mathfrak{S}^{r-i}$，$\mathfrak{S}^{s-r}$，$\mathfrak{S}^{k-s}$ 這三個單純形都是一個以 P^i 為第一個，P^k 為末一個頂點的 $k-i$ 維單純形的面。

我們用八面形這單純複合形 $\mathfrak{K}^2_a$ 說明上文的概念。把他的八個三邊形的法重分當作二維星形。這八個以 $P^2_1, P^2_2, \cdots, P^2_8$ 爲中心的二維星形組成一個星形複合形 $\dot{\mathfrak{K}}^2$，八面形的棱的中點 $P^1_1, P^1_2, \cdots, P^1_{12}$ 是這複合形的十二個一維星形的中心。八面形的頂點 $P^0_1, P^0_2, \cdots, P^0_6$ 是這複合形的六個零維星形。零維星形 P^0_1 的對偶星形由八個，以 P^0_1 爲第一個頂點的，三邊形組成。他的外邊緣由四個一維星形組成，所以是這對偶星形 $\mathfrak{S}^2_b$ 的一個四邊形。$\mathfrak{K}^2_b$ 就是圖 116 中虛線所表出的立方形。圖 116 所表出的平面的兩種剖分，分別是用球形投影法所得着的八面形式剖分與對偶的立方形式剖分。

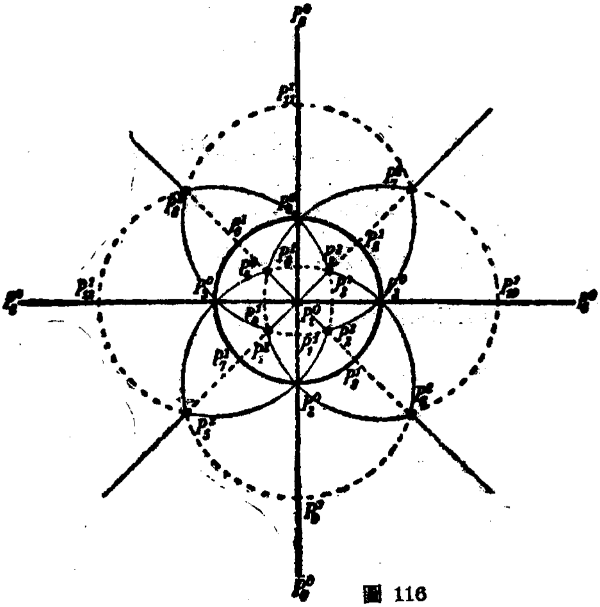


圖 116

§67 胞腔複合形

若是一個 k 維星形的外邊緣的同調羣與 $k-1$ 維球的相同，而且在 $k>1$ 的時候，外邊緣還是一個閉假流形，這 k 維星形就叫做一個 k 維胞腔。零維胞腔是單獨的一個點；一維胞腔由兩條有一公共端點的線段組成；二維胞腔是一個圓域，因爲外邊緣是一個圓周；三維胞腔是一個球體，因爲外邊緣是一個球面（參看 § 39，習題 1）。我們還不能列

舉四維及高維的胞腔。這種的 k 維胞腔可以不與 k 維球體同胚。例如以三維的 *Poincaré* 空間為外邊緣的一個四維的單純星形。

若是一個星形複合形的星形都是胞腔，這複合形就叫做**胞腔複合形**。

既然每一個法重分了的 k 維單純形是一個 k 維胞腔，每一個有限的單純複合形經過法重分之後，卽成一個胞腔複合形。胞腔所以能看作是單純形的一種推廣：他在胞腔複合形中佔的地位與單純形在單純複合形中佔的地位相同。我們不限於討論單純形的原因，將在下一節中研究流形時說明。

在 $k>1$ 的時候，k 維胞腔 α^k 的外邊緣是一個 $k-1$ 維的能定向的假流形。因為，他的第 $k-1$ 個同調羣與一個 $k-1$ 維球的相同，所以是自由循環羣；根據 § 24，他能定向。根據頁 128，α^k 自身是一個能定向的有邊緣的假流形。他的 k 維單純形所以能協合的定向。如此定向之後，α^k 變成一個**定向的 k 維胞腔**，用 a^k 表示。在 $k=1$ 時，組成一維胞腔的兩個一維單純形也能協合的定向。零維胞腔也如同零維單純形一樣的定向（頁 57）。從此一個定向的 k 維胞腔 $(k\geq 0)$ 是定向單純形的一個集合，能當作一個確定的 k 維鍊，其中每一個單純形用 1 做倍數。一個定向的胞腔 a^k 的邊緣鍊由 α^k 的協合定向的外邊緣組成（頁 128）。因此，一個胞腔複合形的所有的 $k-1$ 維胞腔，組成一個 k 維胞腔的外邊緣的，都有了定向，叫做這定向的 k 維胞腔所**引出的定向**。

此後我們設想胞腔複合形的胞腔都有了固定的**定向**。每一個 k 維單純形都有了兩個可能的相反定向中的任一個。設如此定向的胞腔是 a_κ^k $(k=0,1,\cdots,n;\ \kappa=1,2,\cdots,\alpha^k)$。因爲每兩個定向的 k 維胞腔都無公共的 k 維單純形,所有的定向的 k 維胞腔是平直無關的 k 維鍊。

把一個胞腔複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的每一個 a_κ^k 看作是 $\mathfrak{K}^n$ 的**法重分** $\dot{\mathfrak{K}}^n$ 上的單純鍊,

$$q_1 a_1^k + q_2 a_2^k + \cdots + q_{\alpha^k} a_{\alpha^k}^k \tag{1}$$

就叫做一個 k **維胞腔鍊**。一個胞腔鍊所以是一個特別的單純鍊;一個單純鍊中的單純形必須能按照 (1) 組成胞腔,這單純鍊纔是胞腔鍊。若是能如此組成胞腔,因爲 k 維胞腔的平直無關性,就只有一個組成胞腔的方法:這單純鍊就唯一的確定了係數 $q_1, q_2, \cdots, q_{\alpha^k}$。

若是相當於一個胞腔鍊的單純鍊是閉鍊或零調鍊,這胞腔鍊也分別叫做閉鍊或零調鍊。一個胞腔鍊的邊緣鍊還是一個胞腔鍊,因爲單獨的一個胞腔 a_λ^{k+1} 的邊緣就是一個胞腔鍊:

$$F[a_\lambda^{k+1}] = \sum_{\kappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\kappa\lambda}^k a_\kappa^k \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \alpha^{k+1})。\tag{2}$$

這裏的 $\varepsilon_{\kappa\lambda}^k = +1, -1$, 或 0, 按照 a_κ^k 的定向與 a_λ^{k+1} 所引出的定向相同,相反,或 a_κ^k 與 a_λ^{k+1} 並不關聯而定。

給定了任一個 k 維的閉單純鍊,就有一個同調的胞腔鍊存在。其實,下述更普遍的定理成立:

定理 I：若是 U^k 是一個胞腔複合形 $\mathfrak{K}^{n'}$ 上的一個單純鍊，而且 $F[U^k]$ 是一個 $k-1$ 維胞腔鍊*)（也能是 0 這個鍊），就有一個與 U^k 同調的胞腔鍊存在。

證明：先假設 $k=0$。設 E^0 是 U^0 的一個零維單純形。E^0 或者已經是一個零維胞腔，或者是一個 l 維胞腔的中心。在後者的情形下，外邊緣上與 E^0 同調的零維胞腔存在。所以每一個零維單純形有一個同調的零維胞腔，因此每一個零維單純鍊有一個同調的零維胞腔鍊。——再假設 $k>0$。U^k 的所有的 k 維單純形與一個 n 維胞腔 $\mathfrak{a}^n$ 的中心 P^n 關聯的，組成一個子鍊 V^k。既然 $F[U^k]$ 全由 $k-1$ 維胞腔組成，U^k 的邊緣單純形都不與 P^n 關聯，因此 V^k 的邊緣單純形也都不與 P^n 關聯。$F[V^k]$ 所以在 $\mathfrak{a}^n$ 的外邊緣上。假設

a) $k=n$。現在 V^n 是胞腔 $\mathfrak{a}^n$ 上的一個 n 維鍊，而且他的邊緣在 $\mathfrak{a}^n$ 的外邊緣上。根據頁 128，V^n 是 $\mathfrak{a}^n$ 的一個倍數。所以 U^n 完全由 n 維胞腔組成。

b) $0<k<n$。現在 $F[V^k]$ 是 $\mathfrak{a}^n$ 的外邊緣上的一個閉 $k-1$ 維鍊。因為這外邊緣的同調羣與 $n-1$ 維球的相同，$F[V^k]$ 在 $\mathfrak{a}^n$ 的外邊緣上零調。（在 $k=1$ 時，結果相同；因為任一個一維鍊的邊緣的代數値等於零，$F[V^k]$ 這零維鍊的代數値當然等於零。）所以 $\mathfrak{a}^n$ 的外邊緣上有一個以 $F[V^k]$ 為邊緣的鍊 $'V^k$ 存在。$V^k-{}'V^k$ 所以是 $\mathfrak{a}^n$ 上的一個閉鍊。因為他在一個 n 維星形上，他必定零調（頁 95）。用 $'V^k$

*) 在 $k=0$ 的時候，邊緣是一個胞腔鍊這條件，自然不存在。

替代 U^k 中的子鍊 V^k，結果是一個與 U^k 同調的鍊，不含 $\mathfrak{a}^n$ 的中間的單純形。同樣的考慮所有的 n 維胞腔，最後得着一個與 U^k 同調的鍊 U_1^k，在 $\mathfrak{K}^n$ 的所有零維至 $n-1$ 維胞腔所組成的子複合形 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 上。若是 $k=n-1$，根據 a)，U_1^k 已經是一個胞腔鍊。否則，再對於 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 應用方法 b)，得着一個與 U_1^k 同調的，在 $\mathfrak{K}^{n-2}$ ($\mathfrak{K}^n$ 的所有零維至 $n-2$ 維的胞腔所組成的子複合形）上的鍊 U_2^k。累次應用這推擠的方法，直到最後得着一個與 U^k 同調的，在 $\mathfrak{K}^k$ ($\mathfrak{K}^n$ 的所有零維至 k 維的胞腔所組成的子複合形）上的鍊 U_{n-k}^k。對於 U_{n-k}^k，a)中的結論可以應用。

因此我們得着下述的重要結果：

定理 *II*：**一個胞腔複合形的定向胞腔組成一組塊形。**因為定向胞腔滿足 §22 的條件 (Bl_1) 至 (Bl_4)。我們因此能從胞腔鍊着手計算同調羣，用邊緣關係 (2) 中的矩陣 ($\varepsilon_{\kappa\lambda}^k$) 作關聯矩陣。因為一個星形複合形能由他的星形與密接關聯的關係確定，這個關聯矩陣（在不區別一一同構的複合形時）也完全確定了這胞腔複合形。

如同定向與未定向的單純形分別組成單純鍊與模 2 單純鍊，定向的胞腔與模 2 胞腔也分別組成胞腔鍊與模 2 胞腔鍊。一個 k 維模 2 胞腔（也叫做未定向的 k 維胞腔）是一個 k 維的模 2 單純鍊。由這胞腔的所有未定向的 k 維單純形組成。一個 k 維模 2 胞腔鍊是 k 維模 2 胞腔的一個平直組合，其中的係數是模 2 餘數類 $\breve{0}$ 或 $\breve{1}$。與在單純形的討論中一樣，關於胞腔鍊的定理也能引伸為對於模 2 胞腔鍊的定理。我們只要把所有關係中的係數從整數換成模 2 餘數類。——所有的模

2 胞腔組成一組模 2 塊形。

§68 流形

我們在二維與三維流形的定義中，都說勻齊的複合形是流形。這種二維或三維的複合形的每一個點，有一個鄰域，分別與二維或三維球體的內域同胚。若是在高于三維的時候，我們也界說勻齊的複合形纔是流形，勻齊的這條件就失去了他的作用。在現時的拓樸學中，高於三維的複合形是否有勻齊性，還不能用組合的方法斷定。一個高於三維的單純複合形，若是用他的表格給定了，我們就無方法斷定他是否勻齊{例如，有一個單純複合形 $\mathfrak{K}^n$ $(n>3)$，他的任一點處的同調羣與 $n-1$ 維球的相同。} 我們就不知道 $\mathfrak{K}^n$ 的一個頂點的 $n-1$ 維鄰域複合形是否與 $n-1$ 維球同胚。而且即使同胚，我們也不能斷定一個給定的 $n-1$ 維的單純複合形 {例如 *Poincaré* 空間} 是否是一個 $n-1$ 維球。這就是至今還未解決的高於二維的"球面問題 (*Sphärenproblem*)"。但是我們不用勻齊複合形的同倫性質，只用勻齊複合形的同調性質，也能證明許多定理。只要任一複合形在每一點處的同調性質 (非同倫性質) 與勻齊複合形的相同，對於這複合形，這些定理仍舊成立。所以我們只須要求下述的條件：每一點處的同調羣與 $n-1$ 維球的相同。因此我們採用下述定義：

一個連通的有限的 n 維複合形 $(n>0)$ 其中每一點處的同調羣與 $n-1$ 維球的相同，就是一個 n 維 (閉) 流形。[40]

若是 $n \neq 1$，每一點處的第零個與第 $n-1$ 個同調羣都是自由循環羣，其餘的羣都只含有零元；若是 $n=1$，第零個同調羣是有兩個母元的自由羣。

我們在本章中只討論閉流形。其實如同討論曲面時一樣，我們也能討論有邊緣的與無窮的流形。[41] 閉流形是無邊緣的有限的流形。

定理 *I*：所有的連通的有限的勻齊複合形都是流形。這是 § 33 中定理 *II* 的結果。

因此在第六與第九章中所討論的二維流形與三維流形，以及 n 維球與 n 維投影空間 $(n>0)$，也都是現在所界說的流形。一維流形只有一個，與圓周同胚。因爲，一維單純複合形的一個頂點與若干個單純形關聯，這頂點處的第零個同調羣就有若干個自由母元；而且一維流形的每一點處的第零個同調羣應該是有兩個母元的自由循環羣。所以一維流形的每一個頂點恰與兩個一維單純形關聯。我們此後的討論都不包括 $n=1$ 這顯明的情形。

若是一個複合形 $\mathfrak{K}^n$ 有了一個單純剖分，$\mathfrak{K}^n$ 是否流形必能斷定。既然一個 k 維單純形的所有中間點處的第 i 個同調羣都相同，我們只要攷慮所有的 k 維單純形的中心處的同調羣，即 $\mathfrak{K}^n$ 的法重分的頂點處的同調羣。*)

現在證明：*I*. 每一個流形是一個純粹的複合形，那就是說，任一單純剖分中的一個 k 維單純形 $(k<n)$ 至少與一個 n 維單純形關聯。因

*) 〈參看頁 284 的定理 *I*。〉

爲,否則,這 k 維單純形的一個中間點處的第 $n-1$ 個同調羣就不是自由循環羣而只含有零元。

II. 每一個 $n-1$ 維單純形恰與兩個 n 維單純形關聯。因爲,假使是 ν 個, $\nu \neq 2$, 這 $n-1$ 維單純形的一個中間點處的第 $n-1$ 個同調羣就要是有 $\nu-1 \neq 1$ 個母元的自由 *Alel* 羣。(§ 32, 例 2)

由此可知,一個頂點 P 的鄰域複合形 $\mathfrak{A}^{n-1}$,卽以 P 爲中心的那個單純星形的外邊緣,也是一個純粹的 $n-1$ 維複合形,其中每一個 $n-2$ 維單純形恰與兩個 $n-1$ 維單純形關聯。而且,既然 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 的同調羣與 $n-1$ 維球的相同, $\mathfrak{A}^{n-1}$ 的第 $n-1$ 個連通數 $q^{n-1}=1$。所以這鄰域複合形 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 是一個 $n-1$ 維的假流形 (頁 124)。*) ——因此更有下述性質。

III. 一個流形 $\mathfrak{M}^n$ 的每兩個 n 維單純形能用一列依次聯關的 n 維與 $n-1$ 維相間的單純形連接。假設此不可能。先任意取一個確定的 n 維單純形;凡能與他如此連接的 n 維單純形組成一個子複合形,其餘的 n 維單純形組成另一個子複合形。因此 $\mathfrak{M}^n$ 分成兩個子複合形,他們的交集至多是一個 $n-2$ 維的複合形 $\mathfrak{K}^k$。設 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 是 $\mathfrak{K}^k$ 的一個頂點的鄰域複合形。$\mathfrak{A}^{n-1}$ 與這兩個子複合形的交集是兩個 $n-1$ 維的子複合形,後二者的交集或是空集或至多是 $n-3$ 維的子複合形。所以 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 上的任意兩個 $n-1$ 維單純形都不能用一列連接。這與 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 是假流形的事實矛盾。

*) 〈下文的定理 *III* 證明他也是一個流形。〉

這裏證明的性質 I 至 III 與假流形的界說性質 (PM_1) 至 (PM_3) 相同 (§ 24)。所以下述定理成立：

定理 II：每一個流形是一個假流形。

因此，從前關於假流形的定理對於流形也成立。特別可知，流形也能分爲能定向的與不能定向的兩種。

要再求得更多的流形的性質，我們先證明下述的

預備定理：設複合形 $\mathfrak{B}^{k+1}$ 由以 $\mathfrak{A}^k$ $(k \geqq 0)$ 爲公共外邊緣的兩個單純星形 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$ 與 $\mathfrak{St}_2^{k+1}$ 組成。若是 $\mathfrak{B}^{k+1}$ 的同調羣與 $k+1$ 維球的相同，$\mathfrak{A}^k$ 的同調羣就也與 k 維球的相同。 圖 117 表出 $k=1$ 的情形。

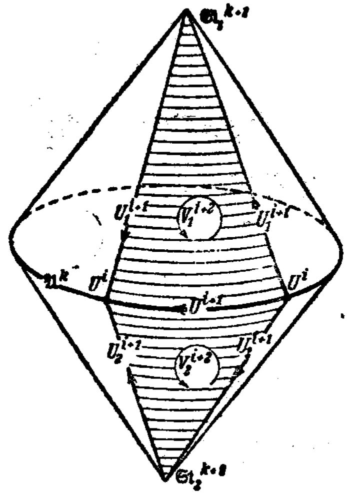


圖 117

證明： 設 U^i 是 $\mathfrak{A}^k$ 上的一個 i 維閉鍊*)，$0 \leqq i \leqq k$。若是 $i=0$，再假設 U^i 的代數值等於零。(圖中表出的 U^i 由兩個點組成；一點的倍數是 $+1$，一點的倍數是 -1)。根據頁 95，在 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$ 上與在 $\mathfrak{St}_2^{k+1}$ 上，$U^i \sim 0$ 都成立。所以 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$ 上與 $\mathfrak{St}_2^{k+1}$ 上分別有鍊 U_1^{i+1} 與 U_2^{i+1} 適合

$$F[U_1^{i+1}] = U^i, \tag{1}$$

*) 證明中的鍊都假設爲非廣義的（即單純的）鍊。——在 $k=0$ 的時候定理顯然成立。所以證明中假設 $k>0$。

$$F[U_2^{i+1}]=U^i。\tag{2}$$

因此這二鍊的差

$$U_1^{i+1}-U_2^{i+1}\tag{3}$$

是閉鍊。——先討論 I, $i<k$。既然鍊(3)的維數 $i+1>0$ 又 $<k+1$，而且 $\mathfrak{B}^{k+1}$ 的同調羣與 $k+1$ 維球的相同，鍊(3)在 $\mathfrak{B}^{k+1}$ 上零調；即 $\mathfrak{B}^{k+1}$ 上有一個鍊 V^{i+2} 適合

$$F[V^{i+2}]=U_1^{i+1}-U_2^{i+1}。\tag{4}$$

用 V_1^{i+2} 表示 V^{i+2} 中的與 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$ 的中心關聯的所有單純形的全體；把 V^{i+2} 分成

$$V^{i+2}=V_1^{i+2}+V_2^{i+2}。\tag{5}$$

根據(4)與(5)，

$$F[V_1^{i+2}]=F[V^{i+2}]-F[V_2^{i+2}]=U_1^{i+1}-U_2^{i+1}-F[V_2^{i+2}]。\tag{6}$$

(6)式左端的鍊與右端中的 U_1^{i+1} 都屬於 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$，所以 $U_2^{i+1}+F[V_2^{i+2}]=U^{i+1}$ 這鍊也必屬於 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$。但是下指標 2 表明他屬於 $\mathfrak{St}_2^{k+1}$。所以他在 $\mathfrak{A}^k$ 上。從(6)得 $U_1^{i+1}-U^{i+1}\sim 0$。U_1^{i+1} 與 U^{i+1} 有相同的邊緣 U^i。因此 U^i 這鍊給定了，我們就能作一個在 $\mathfrak{A}^k$ 上的，以 U^i 為邊緣的鍊 U^{i+1}。這就證明了 $\mathfrak{A}^k$ 的一維至 $k-1$ 維的同調羣都只含有零元，而第零個同調羣是自由循環羣。——現在討論 II, $i=k$。既然 $\mathfrak{B}^{k+1}$ 的第 $k+1$ 個同調羣是自由循環羣，所以有一個鍊 B^{k+1} 存在，每一個 $k+1$ 維閉鍊都是他的一個倍數。特別對於鍊(3)如此：

$$U_1^{k+1} - U_2^{k+1} = m\, B^{k+1}。$$

B^{k+1} 可以唯一的分成分別屬於 $\mathfrak{St}_1^{k+1}$ 與 $\mathfrak{St}_2^{k+1}$ 的兩個鍊 B_1^{k+1} 與 B_2^{k+1}。因此 $U_1^{k+1} = m\, B_1^{k+1}$, $U^k = F[U_1^{k+1}] = m\, F[B_1^{k+1}]$。 U^k 所以是 $F[B_1^{k+1}]$ 這閉鍊的 m 倍。那就是說，$\mathfrak{A}^k$ 的第 k 個同調羣是自由循環羣。

由此可以證明下述這重要定理：

定理 III: **若是 P 是一個單純剖分了的流形 $\mathfrak{M}^n$ 的一個頂點，以 P 爲中心的那個單純星形 $\mathfrak{St}^n$ 的外邊緣 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 就是一個 $n-1$ 維的流形；$(n \geqq 2)$。**

證明：I. $\mathfrak{A}^{n-1}$ 是一個連通的，有限的 $n-1$ 維複合形，因爲 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 是一個假流形。II. 要想證明在 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 的每一點 A 處的同調羣與 $n-2$ 維球的相同，設想所有不屬於 $\mathfrak{St}^n$ 的單純形都從 $\mathfrak{M}^n$ 中消去了，而且假設 A 是 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 的單純剖分中的一個頂點。 這假設並未加任何限制，因爲我們能先重分 $\mathfrak{A}^{n-1}$，使 A 是他的頂點；然後從 P 處投影使 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 的重分推廣成 $\mathfrak{St}^n$ 的一個重分。用 $\mathfrak{St}^{n-1}$ 表示 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 上的以 A 爲中心的那個單純星形，用 $\mathfrak{A}^{n-2}$ 表示 $\mathfrak{St}^{n-1}$ 的外邊緣（圖 118）。若是 $(A_0\, A_1 \cdots A_{n-2})$ 是 $\mathfrak{A}^{n-2}$ 的一個 $n-2$ 維單純形，就有一個含有線段 (PA) 的，以 $P, A, A_0, A_1, \cdots, A_{n-2}$ 爲頂點的 n 維單純形。用 (PA) 的中點 Q，把這 n 維單純形剖分成下列兩個 n 維單純形：

$$(P\, Q\, A_0\, A_1 \cdots A_{n-2}), \quad (A\, Q\, A_0\, A_1 \cdots A_{n-2})。$$

同樣的剖分 $\mathfrak{St}^n$ 中所有與 (PA) 關聯的 n 維單純形。在如此重分的 $\mathfrak{St}^n$ 中，Q 是一個頂點。我們現在攷慮以 Q 爲中心的那個單純星形的外

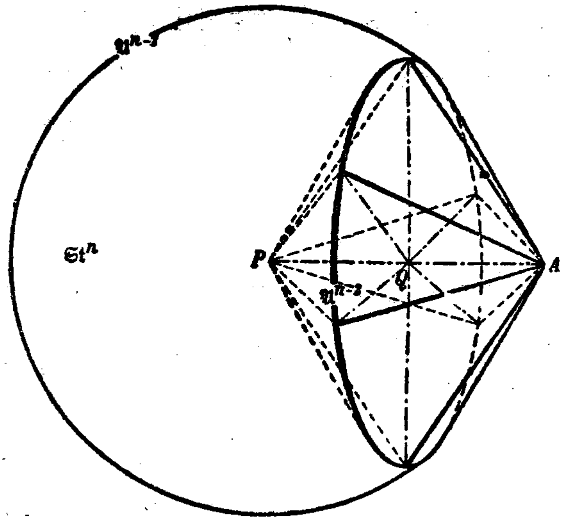


圖 118

邊緣 $\mathfrak{B}^{n-1}$。設 $(A_0A_1\cdots A_{n-2})$ 代表 $\mathfrak{A}^{n-2}$ 的任一個 $n-2$ 維單純形。$\mathfrak{B}^{n-1}$ 卽分成兩部分：一部分由所有 $n-1$ 維單純形 $(PA_0A_1\cdots A_{n-2})$ 組成，另一部分由所有 $n-1$ 維單純形 $(AA_0A_1\cdots A_{n-2})$ 組成。這就是說，Q 的鄰域複合形由以 $\mathfrak{A}^{n-2}$ 爲公共外邊緣的兩個單純星形組成。根據流形的定義，Q 的鄰域複合形的同調羣與 $n-1$ 維球的相同。所以從預備定理，$\mathfrak{A}^{n-2}$ 的同調羣，卽外邊緣 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 在 A 點處的同調羣，與 $n-2$ 維球的相同。這就是我們所要證明的。

我們已經說過，每一個連通的有限的勻齊複合形是一個流形。反之，我們現在要證明下述定理。

定理 IV：在而且只在 $n=1,2,3$ 的時候，每一個 n 維閉流形都有勻齊性。

圓周是唯一的一維流形；一維流形顯然有勻齊性。——設 P 是二

維流形的一個點。單純的剖分這二維流形,使 P 是一個頂點。根據定理 III, P 的鄰域複合形是一維流形,與圓周同胚;因此,以 P 爲中心的那個單純星形是圓域的拓撲像。所以在二維的時候,一個閉流形是一個有限的連通的勻齊複合形,也就是一個閉曲面(頁 199)。閉曲面在第六章中已完全分類了。——三維流形 $\mathfrak{M}^3$ 中的一個點的鄰域複合形是一個二維流形,而且他的同調羣與二維球的相同。根據曲面拓撲學的基本定理,有這性質的唯一閉曲面是二維球。所以以 $\mathfrak{M}^3$ 的一點爲中心的單純星形與三維球體同胚,也就是說 $\mathfrak{M}^3$ 有勻齊性。所以三維流形就是我們在第九章中所討論的複合形。對於高于三維的流形,相同的結論已不能成立。三維流形中的 *Poincaré* 空間不與三維球同胚,但是他們的同調羣與三維球的相同。非勻齊的四維流形確有存在。例如,以球式十二面空間爲公共外邊緣的兩個單純星形 $\mathfrak{St}_1^4$ 與 $\mathfrak{St}_2^4$ 組成一個複合形 $\mathfrak{K}^4$。除 $\mathfrak{St}_1^4$ 與 $\mathfrak{St}_2^4$ 的中心 P_1 與 P_2 外,任一點的鄰域複合形都是三維球。P_1 與 P_2 處的同調羣仍舊與三維球的相同;因爲 P_1 與 P_2 的鄰域是球式十二面體空間,他的同調羣與三維球的相同(頁 300)。$\mathfrak{K}^4$ 所以是一個流形。但 $\mathfrak{K}^4$ 無勻齊性:在 P_1 與 P_2 處的基本羣都是二元的二十面體羣(頁 301),不是只含有零元的羣,所以 P_1 與 P_2 的鄰域都不與球體的內域同胚。

說明了流形是什麼複合形之後,我們進而討論流形的最重要的性質,卽對偶胞腔的存在。先單純的剖分一個給定的流形 $\mathfrak{M}^n$,然後適當的合併他的單純形成星形,使他成一個星形複合形。例如 $\mathfrak{M}^n$ 的任一

單純剖分的法重分就是這種的一個星形剖分(頁 316)。我們證明：**流形 $\mathfrak{M}^n$ 上每一個星形剖分也是一個胞腔剖分。**

證明：我們首先證明所有的 n 維星形都是胞腔。根據頁 330，一個 n 維星形的外邊緣是假流形。因為在 n 維星形的中心處的同調羣與 $n-1$ 維球的相同，外邊緣的同調羣也與 $n-1$ 維球的相同。所以 n 維星形都是胞腔。這也就證明了 $n-1$ 維流形的 $n-1$ 維星形是胞腔。既然 $\mathfrak{M}^n$ 的一個 n 維胞腔的外邊緣是一個 $n-1$ 維流形(定理 III)，既然他由 $n-1$ 維的星形組成，而且 $\mathfrak{M}^n$ 的每一個 $n-1$ 維星形至少與一個 n 維星形關聯 ($\mathfrak{M}^n$ 的純粹性)，即至少在這種的一個外邊緣上，所以 $\mathfrak{M}^n$ 的每一個 $n-1$ 維星形都是胞腔。同樣的可以證明 $\mathfrak{M}^n$ 的 $n-2$ 維星形以至于零維星形都是胞腔。這定理的證明於是完成。

對偶的星形剖分所以也是一個胞腔剖分。**每一個流形所以有兩個對偶的胞腔剖分。**——此後我們用

$\mathfrak{M}_a^n$ 表示 $\mathfrak{M}^n$ 的一個給定的胞腔剖分，

$\mathfrak{M}_b^n$ 表示他的對偶的胞腔剖分，

$\dot{\mathfrak{M}}^n$ 表示他們的公共法重分；

把 $\mathfrak{M}_a^n$ 的定向胞腔叫做 a_κ^k，$\mathfrak{M}_b^n$ 中的對偶胞腔叫做 b_κ^{n-k}，把 a_κ^k 與 b_κ^{n-k} 的公共中心叫做 P_κ^k $(k=0,1,\cdots,n;\ \kappa=1,2,\cdots,\alpha^k)$。

§69 Poincaré 對偶定理

設一流形 $\mathfrak{M}^n$ 有了兩個固定的對偶的胞腔剖分。設 $\mathfrak{M}^n$ 能定向，

而且有了固定的定向;那就是說,按照法重分 $\dot{\mathfrak{M}}^n$ 的兩個相反定向中的一個,$\dot{\mathfrak{M}}^n$ 的 n 維單純形都協合的定向了。若是 a_κ^k 與 b_κ^{n-k} 是定向的對偶胞腔,我們用下述規律界說這兩個胞腔的交點數 $\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})$:

規律: 從 a_κ^k 的法重分中取一個 k 維單純形

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \cdots P^k)。$$

E^k 的定向就是由 a_κ^k 所給定的。同樣從 b_κ^{n-k} 的法重分中取一個 $n-k$ 維單純形

$$E^{n-k} = \eta(P^k P^{k+1} \cdots P^n)。$$

根據 § 66 中的定理 III, $(P^0P^1 \cdots P^k \cdots P^n)$ 是一個 n 維單純形。今取 ζ 使

$$E^n = \zeta(P^0P^1 \cdots P^k \cdots P^n)$$

的定向就是由 $\dot{\mathfrak{M}}^n$ 的定向所給定的。於是乘積 $\xi\eta\zeta$ 就界說作交點數 (*Schnittzahl*) $\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})$: [42]

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k}) = \xi\eta\zeta。 \tag{1}$$

交點數所以必是 ± 1。圖 119 中的 $n=2, k=1, \xi=1, \eta=\zeta=-1$。

在這定義中,E^k 與 E^{n-k} 的頂點並不必按照上指標遞增的次序寫下,但只要 P^k 是寫作 E^k 的末一個頂點與 E^{n-k} 的第一個頂點,而且 E^n 中頂點的次序與 E^k 及 E^{n-k} 中的相同。因爲,若是交換 E^k 中的兩個頂點($\neq P^k$),ξ 與 ζ 變號,η 不變;若

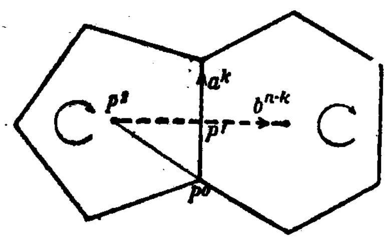


圖 119

是交換 E^{n-k} 中的兩個頂點,結果相同。這定義也與如何從 a_κ^k 與 b_κ^{n-k} 的法重分中選取 E^k 與 E^{n-k} 無干。假設我們選取的不是 E^k,而是 $'E^k$,而且 $'E^k$ 的頂點是 $'P^0 \neq P^0, P^1, \cdots, P^k$。因為按照 a_κ^k 中所假設的協合定向,E^k 與 $'E^k$ 在他們的公共 $n-1$ 維面上引出相反的定向,所以 $'E^k = -\xi('P^0 P^1 \cdots P^k)$。我們現在作成的不是 E^n,而是

$$'E^n = -\zeta('P^0 P^1 \cdots P^k \cdots P^n);$$

因為 E^n 與 $'E^n$ 必須在他們的公共 $n-1$ 維單純形上引出相反的定向。現在所得着的交點數是

$$(-\xi)\,\eta\,(-\zeta) = \xi\eta\zeta,$$

與前相同。因為 a_κ^k 的外邊緣是一個假流形,我們還能用 a_κ^k 中與 $'E^k$ 鄰接的單純形替代 $'E^k$。屢次應用此法,我們能用任一個 k 維單純形替代 E^k。交點數總不改變。對於 b_κ^{n-k},我們能施以同樣的討論。

但是改變 a_κ^k 的,或 b_κ^{n-k} 的,或 $\mathfrak{M}^n$ 的定向,却使交點數變號。

若是 $k=0$, a_κ^k 就是一個頂點 P^0,而且這頂點也是對偶的 n 維胞腔 b_κ^n 的中心。這裏的

$$E^0 = \xi(P^0),\ E^n = \eta(P^0 P^1 \cdots P^n)。$$

因為還用 $+1$ 給定 a_κ^0 的定向,$\xi = +1$,而且

$$\mathcal{S}(a_\kappa^0, b_\kappa^n) = \eta\zeta = +1 \text{ 或 } -1,$$

按照 b_κ^n 與 $\mathfrak{M}^n$ 的定向協合與否而定。所以我們也可以把這交點數叫做胞腔 b_κ^n 在 P^0 處的覆蓋層數 (*Überdeckungszahl*)。

兩個對偶胞腔交換地位,有時候使交點數變號。實際上

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)}\mathcal{S}(b_\kappa^{n-k}, a_\kappa^k)。 \tag{2}$$

證明：我們知道

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \dots P^k) = \xi(-1)^k(P^k P^0 \dots P^{k-1})$$

$$E^{n-k} = \eta(P^k P^{k+1} \dots P^n) = \eta(-1)^{n-k}(P^{k+1} \dots P^n P^k)$$

$$E^n = \zeta(P^0 P^1 \dots P^{k-1} P^k P^{k+1} \dots P^n)$$

$$= \zeta(-1)^{k+(n-k)(k+1)}(P^{k+1} \dots P^n P^k P^0 \dots P^{k-1})。$$

按照上述規律，$\mathcal{S}(b_\kappa^{n-k}, a_\kappa^k)$ 是前三個方程式的右端中的係數的乘積：

$$\mathcal{S}(b_\kappa^{n-k}, a_\kappa^k) = \xi\eta\zeta(-1)^{k(n-k)} = (-1)^{k(n-k)}\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})。$$

這就是我們所要證明的。

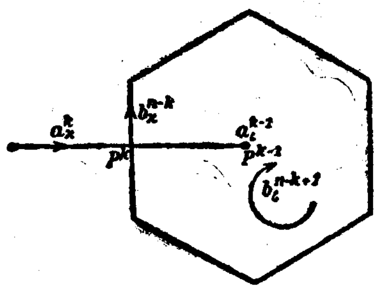


圖 120

現在在 a_κ^k 與 b_κ^{n-k} 之外，再攷慮兩個與他們關聯的對偶胞腔 a_ι^{k-1} 與 b_ι^{n-k+1}。而且假定後二者的定向適合

$$F[a_\kappa^k] = a_\iota^{k-1} + \cdots, \tag{3}$$

$$F[b_\iota^{n-k+1}] = b_\kappa^{n-k} + \cdots。 \tag{4}$$

設 P^k 與 P^{k-1} 是 a_κ^k 與 a_ι^{k-1} 的中心，而且

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \dots P^k)$$

是 a_κ^k 中的一個定向單純形，

$$E^{n-k+1} = \eta(P^{k-1} P^k \dots P^n)$$

是 b_ι^{n-k+1} 中的一個定向單純形。因此

$$E^{k-1} = \xi(-1)^k(P^0 P^1 \dots P^{k-1}),$$

$$E^{n-k}=\eta(P^k P^{k+1}\cdots P^n)$$

分別是 a_ι^{k-1} 與 b_κ^{n-k} 中的單純形。若是最後 $\mathfrak{M}^n$ 的定向仍由

$$E^n=\zeta(P^0 P^1\cdots P^n)$$

給定；按照上述的規律，當有

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})=\xi\eta\zeta,$$

$$\mathcal{S}(a_\iota^{k-1}, b_\iota^{n-k+1})=(-1)^k\xi\eta\zeta,$$

所以

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})=(-1)^k\mathcal{S}(a_\iota^{k-1}, b_\iota^{n-k+1})。\tag{5}$$

現在假設胞腔 a_ι^{k-1} 與 b_ι^{n-k+1} 的定向任意的給定，不必適合方程式 (3) 與 (4)。我們就有下列方程式 (6) 與 (7) 替代 (3) 與 (4)：

$$F[a_\kappa^k]={}^{(a)}\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}a_\iota^{k-1}+\cdots=\rho a_\iota^{k-1}+\cdots,\tag{6}$$

$$F[b_\iota^{n-k+1}]={}^{(b)}\varepsilon_{\kappa\iota}^{n-k}b_\kappa^{n-k}+\cdots=\sigma b_\kappa^{n-k}+\cdots。\tag{7}$$

因為改變 a_ι^{k-1} 或 b_ι^{n-k+1} 的定向，使 (5) 的右端變號，我們即知

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})=\rho\sigma(-1)^k\mathcal{S}(a_\iota^{k-1}, b_\iota^{n-k+1})。\tag{8}$$

我們現在設想胞腔 a_κ^k ($k=0,1,\cdots,n$; $\kappa=1,2,\cdots,\alpha^k$) 都任意的給了定向。但是對偶的胞腔剖分中，胞腔 b_κ^{n-k} 的定向，我們如是給定，使所有的交點數

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k})=1。$$

因此，從 (8) 即有 $\rho\sigma(-1)^k=1$，即

$$\rho=(-1)^k\sigma。\tag{9}$$

但是 ρ 就是胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a^n$ 的關聯矩陣 E_a^{k-1} 的係數 ${}^{(a)}\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$，$\sigma$ 就是胞腔剖分 $\mathfrak{M}_b^n$ 的關聯矩陣 E_b^{n-k} 的係數 ${}^{(b)}\varepsilon_{\kappa\iota}^{n-k}$。所以方程式 (9) 是說 E_a^{k-1} 等於 $(-1)^k$ 乘 E_b^{n-k} 的轉置矩陣 (*transponierte Matrix*)*)：

$$\mathsf{E}_a^{k-1} = (-1)^k \overset{\diagdown}{\mathsf{E}}{}_b^{n-k}。\tag{10}$$

這也就等於說，$\mathfrak{M}_a^n$ 與 $\mathfrak{M}_b^n$ 有下列的邊緣關係（$\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$ 的左上指標 ${}^{(a)}$ 與 ${}^{(b)}$ 現在都省去不用）：

$$\begin{aligned} F[a_\kappa^k] &= \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}\, a_\iota^{k-1}, \\ F[b_\iota^{n-k+1}] &= \sum_{\kappa=1}^{\alpha^k} (-1)^k\, \varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}\, b_\kappa^{n-k}。\end{aligned}\tag{11}$$

這就證明了下述定理：

定理 *I*： 設 $\mathfrak{M}_a^n$ 是一個給定的胞腔剖分，$\mathfrak{M}_b^n$ 是他的對偶的胞腔剖分。若是給定 $\mathfrak{M}_b^n$ 的胞腔的定向，使 $\mathfrak{M}_a^n$ 的每一個胞腔與 $\mathfrak{M}_b^n$ 中的對偶胞腔的交點數（依此次序）$=1$，$\mathfrak{M}_a^n$ 的關聯矩陣 E_a^{k-1} 就等於 $\mathfrak{M}_b^n$ 的關聯矩陣 E_b^{n-k} 的轉置矩陣的 $(-1)^k$ 倍。

若是我們計算 $\mathfrak{M}^n$ 的同調羣，一方面用胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a^n$，一方面又用胞腔剖分 $\mathfrak{M}_b^n$ 而且應用矩陣方程式(10)，我們就能證明 *Poincaré* 對偶定理。第 k 個 *Betti* 數

---

*) 轉置一個矩陣，就是交換矩陣的橫列與縱列，也就是作矩陣對角線的反射。E 的轉置矩陣用 $\overset{\diagdown}{\mathsf{E}}$ 表示；上加的斜橫綫的方向與主對角綫平行。

$$p^k = \alpha_a^k - \gamma_a^k - \gamma_a^{k-1} = \alpha_b^k - \gamma_b^k - \gamma_b^{k-1} \quad (k=0,1,\cdots,n)。$$

這裏的 α_a^k 表示 $\mathfrak{M}_a^n$ 的 k 維胞腔的個數，γ_a^k 表示 E_a^k 的秩，而且 $\gamma_a^0 = \gamma_a^n = 0$ (§ 22)；以 b 爲右下指標的數有相當的意義。現在，因爲每一個 k 維胞腔恰有一個對偶的 $n-k$ 維胞腔，我們知道 $\alpha_a^k = \alpha_b^{n-k}$；而且因爲 (10)，我們知道 $\gamma_a^{k-1} = \gamma_b^{n-k}$。所以

$$p^k = \alpha_b^{n-k} - \gamma_b^{n-k-1} - \gamma_b^{n-k} = p^{n-k}。$$

k 維的撓係數一方面是 E_a^k 的不等於 1 的不變因子，另一方面又是 $\mathsf{E}_b^k = (-1)^{n-k}\,\overline{\mathsf{E}}_a^{n-k-1}$ 的不等於 1 的不變因子，所以等於 $n-k-1$ 維的撓係數。因此有下述定理：

定理 *II* (*Poincaré* 對偶定理)：一個能定向的閉流形的第 k 個與第 $n-k$ 個 *Betti* 數相等 ($k=0,1,\cdots,n$)；k 維與 $n-k-1$ 維的撓係數相等 ($k=0,1,\cdots n-1$)。

我們已經證明零維的撓係數不存在 (頁 91)，因此又特別的證明了我們所已經知道的這件事實：能定向的閉流形無 $n-1$ 維的撓係數。

對偶定理的主要根據是流形的能定向性。不能定向的流形的 E_a^0 的秩是 α_a^0-1，E_b^{n-1} 的秩是 $\alpha_b^n = \alpha_a^0$ (§ 24)。所以對於不能定向的流形，我們不能從 n 維胞腔的定向的選取求得矩陣方程式 (10)。

但是關於不能定向的流形，我們也能證明一條對偶定理。這裏因爲無須考慮胞腔的定向，這定理反較易推證。對於不能定向的流形，關聯矩陣 E_a^{k-1} 與 E_b^{n-k} 自然不適合方程式 (10)，但適合同餘式

$$\mathrm{E}_a^{k-1} \equiv \grave{\mathrm{E}}_b^{n-k} \quad (\text{模} 2)。$$

E_a^{k-1} 與 $\grave{\mathrm{E}}_b^{n-k}$ 的元至多相差一個正負號。換句話說,模 2 關聯矩陣 $\breve{\mathrm{E}}_a^k$ 與 $\breve{\mathrm{E}}_b^{n-k}$ 互爲轉置矩陣,他們有相等的秩 $\delta_a^{k-1} = \delta_b^{n-k}$。根據 §23 中的公式 (8),第 k 個連通數

$$q^k = \alpha_a^k - \delta_a^k - \delta_a^{k-1} = \alpha_b^k - \delta_b^k - \delta_b^{k-1}$$

$$= \alpha_a^{n-k} - \delta_a^{n-k-1} - \delta_a^{n-k} = q^{n-k}。$$

所以下述定理成立。

定理 *III* (模 2 的對偶定理): **一個能定向的或不能定向的閉流形的第 k 個與第 $n-k$ 個連通數相等。**根據頁 122 上的公式 (12),我們有下述定理:

定理 *IV*: **一個奇維數的閉流形的** *Euler* **示性數** $N = 0$。

§70 胞腔鍊的交點數

在前一節中我們從關聯矩陣推證對偶定理。但對偶定理的拓撲內容,要在我們從 *Betti* 數進而求 *Betti* 基,表明 k 維與 $n-k$ 維的基底也有對偶的關係之後,纔爲明顯。爲達到這目的起見,我們必須先界說兩個胞腔鍊的交點數。在下一節中,我們再用胞腔鍊作成對偶的 *Betti* 基。設

$$A^k = \xi_1 a_1^k + \xi_2 a_2^k + \cdots + \xi_{\alpha^k} a_{\alpha^k}^k,$$

$$B^{n-k} = \eta_1 b_1^{n-k} + \eta_2 b_2^{n-k} + \cdots + \eta_{\alpha^k} b_{\alpha^k}^{n-k}$$

是對偶的胞腔剖分上的兩個鍊。因爲 α_b^{n-k} 與 α_a^k 相等，所以同是一個數 α^k，這兩個鍊中的下指標的值都從 1 到相同的 α^k。a_κ^k 只與他的對偶胞腔 b_κ^{n-k} 有一個共點（他們的中心），與其他的胞腔 b_λ^{n-k} 都無共點。所以這兩個鍊的共點至多祇有有限個。兩個對偶胞腔的交點數，在上節開始時已有了定義。{適定義假設 $\mathfrak{M}^n$ 能定向。} 至於對偶剖分上兩個非對偶胞腔的交點數，我們現在界說作 0。兩個鍊 A^k 與 B^{n-k} 的交點數就是單獨的胞腔的交點數之和：

$$\mathcal{S}(A^k,B^{n-k})=\sum_{\kappa=1}^{\alpha^k}\sum_{\lambda=1}^{\alpha^k}\xi_\kappa\eta_\lambda\,\mathcal{S}(a_\kappa^k,b_\lambda^{n-k})=\sum_{\kappa=1}^{\alpha^k}\xi_\kappa\eta_\kappa\,\mathcal{S}(a_\kappa^k,b_\kappa^{n-k})。\qquad(1)$$

A^k 與 B^{n-k} 兩個鍊可以用 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{\alpha^k})$ 與 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{\alpha^k})$ 兩個矢代表。所以兩個鍊的交點數也可以表作代表矢的雙一次方式 (*Bilinearform*)。

利用 $\mathfrak{M}^n$ 的一個固定的定向，確定 $\mathfrak{M}_b^n$ 的所有 n 維胞腔的定向。如此定向的所有 n 維胞腔的和用 M_b^n 表示。若在公式(1)中，令 $k=0$，$B_b^{n-k}=M_b^n$，從頁 338 卽知：一個鍊 A^0 與這流形的規定定向的鍊 M_b^n 的交點數，等於 A^0 的代數值。

下列計算規律顯然成立：

$$\mathcal{S}(A_1^k+A_2^k,B^{n-k})=\mathcal{S}(A_1^k,B^{n-k})+\mathcal{S}(A_2^k,B^{n-k})\qquad(2)$$

與

$$\mathcal{S}(A^k,B^{n-k})=(-1)^{k(n-k)}\mathcal{S}(B^{n-k},A^k)。\qquad(3)$$

(3) 是頁 339 中公式 (2) 的結果。

§ 69 中關於對偶胞腔的公式 (5):

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, b_\kappa^{n-k}) = (-1)^k \mathcal{S}(a_\iota^{k-1}, b_\iota^{n-k+1})$$

也可以推廣到關於任意的 k 維鍊與 $n-k$ 維鍊的公式。我們知道 b_ι^{n-k+1} 的所有邊緣胞腔,除 b_κ^{n-k} 之外,都與 a_κ^k 無共點。所以這公式的左端中的 b_κ^{n-k} 能用 $F[b_\iota^{n-k+1}]$ 替代,同樣的右端中的 a_ι^{k-1} 能用 $F[a_\kappa^k]$ 替代。如此卽得

$$\mathcal{S}(a_\kappa^k, F[b_\iota^{n-k+1}]) = (-1)^k \mathcal{S}(F[a_\kappa^k], b_\iota^{n-k+1})。 \tag{4}$$

我們證明這公式,還用了一個假設: b_ι^{n-k+1} 的對偶胞腔 a_ι^{k-1} 與 a_κ^k 關聯。但這假設並不必要。因為,只有在 a_κ^k 的對偶胞腔 b_κ^{n-k} 在 b_ι^{n-k+1} 中出現的時候,卽只有在 b_ι^{n-k+1} 與 b_κ^{n-k} 關聯,也就是他們的對偶胞腔 a_ι^{k-1} 與 a_κ^k 關聯的時候,公式的左端纔 $\neq 0$。同樣的,只有在 b_ι^{n-k+1} 的對偶胞腔 a_ι^{k-1} 在 a_κ^k 的邊緣中出現的時候,右端纔 $\neq 0$。所以公式(4)對於任意兩個胞腔 a_κ^k 與 b_ι^{n-k+1} 都成立。因此,根據 (2),對於對偶的胞腔剖分上的任意兩個胞腔鍊 A^k 與 B^{n-k+1},

$$\mathcal{S}(A^k, F[B^{n-k+1}]) = (-1)^k \mathcal{S}(F[A^k], B^{n-k+1}) \tag{5}$$

這重要的公式成立。

在 A^k 特別是閉鍊,卽 $F[A^k] = 0$ 的時候,(5) 的右端就等於 0。左端中的 $F[B^{n-k+1}]$ 是任意一個零調 $n-k$ 維鍊。所以應用 (5),得着下述定理:

定理 I：一個 $n-k$ 維的零調胞腔鍊 B^{n-k}，與對偶的胞腔剖分上的每一個 k 維閉鍊 A^k 的交點數等於零。

只要 $B^{n-k}\approx 0$（能除的零調），這定理仍成立。B^{n-k} 能除的零調，就是說

$$cB^{n-k}\sim 0 \qquad (c\neq 0)。$$

但是

$$\mathcal{S}(A^k, cB^{n-k}) = c\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})。$$

根據定理 I，左端等於 0，所以右端也等於 0。又因爲 $c\neq 0$，所以我們有 $\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = 0$。因此有下述定理：

定理 II：若是 $A^k\approx{}'A^k$ 與 $B^{n-k}\approx{}'B^{n-k}$ 是對偶的胞腔剖分上的閉鍊，就有

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k}),$$

那就是說，兩個閉鍊的交點數等於他們能除的同調的兩個鍊的交點數。

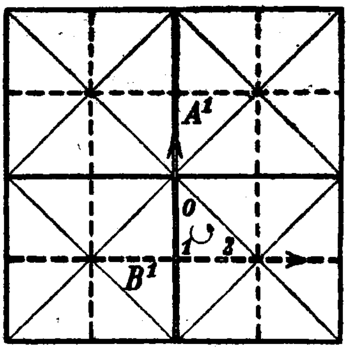


圖 121

我們用環面做例子。設環面用圖 121 中的大正方形代表；疊合大正方形的對立邊成環面。胞腔剖分 $\mathfrak{M}^2_a$ 由圖中粗綫表出的 4 個小正方形組成。圖中虛綫所表出的 4 個小正方形組成對偶的胞腔剖分 $\mathfrak{M}^2_b$。公共的法重分 $\dot{\mathfrak{M}}^2$ 所以由 4×8 個三邊形組成。圖中有一個三邊形中有一環形箭頭表示這三邊形的定向。利用這定向協合的定向 $\mathfrak{M}^2$ 的所有三邊形。圖中的雙綫表出 $\mathfrak{M}^2_a$ 與 $\mathfrak{M}^2_b$ 上兩個一維閉胞腔鍊 A^1 與 B^1，每一個由兩個胞腔組成。因爲 $n=2$, $k=1$，所以這裏的 $k=n-k=1$。我們要用前述的規律求 A^1 與 B^1 的交點數。在 A^1 上取 $-(P^0P^1)$ 這一維單純形*），在 B^1

*）圖中只用上指標表出頂點。

上取 $+(P^1\ P^2)$ 這一維單純形。作成二維單純形 $(P^0\ P^1\ P^2)$。$+(P^0\ P^1\ P^2)$ 的定向與給定的協合定向符合。所以交點數是

$$\mathcal{S}(A^1, B^1) = (-1)(+1)(+1) = -1。$$

流形的能定向性是交點數的定義中主要的假設。若是要推廣交點數的理論到不能定向的流形,我們只能限於模 2 鍊。對於對偶的剖分上的兩個模 2 胞腔鍊,$\mathfrak{A}^k$ 與 $\mathfrak{B}^{n-k}$,我們用整數的模 2 餘數類界說作模 2 的交點數。所以,按照 $\mathfrak{A}^k$ 與 $\mathfrak{B}^{n-k}$ 的共點數是偶數或奇數,

$$\mathcal{S}(\mathfrak{A}^k, \mathfrak{B}^{n-k}) = \breve{0} \text{ 或 } \breve{1}。$$

公式(1) 至 (5)中出現的那些整數只要用他們的模 2 餘數類替代,結果對於模 2 鍊仍舊成立。公式中的正負號自然消去。

§71　對偶的基底

設給定了兩列"變量"或"未知量"

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \quad \text{與} \quad y_1, y_2, \cdots, y_m,$$

他們分別經過兩個整數的么模的平直變換

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_{1m}\bar{x}_m \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m = \alpha_{m1}\bar{x}_1 + \alpha_{m2}\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_{mm}\bar{x}_m \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \mathsf{A}_{11}\bar{y}_1 + \mathsf{A}_{12}\bar{y}_2 + \cdots + \mathsf{A}_{1m}\bar{y}_m \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = \mathsf{A}_{m1}\bar{y}_1 + \mathsf{A}_{m2}\bar{y}_2 + \cdots + \mathsf{A}_{mm}\bar{y}_m \end{array}\right\} \qquad (\mathsf{A})$$

換成新的帶有上橫的變量。若是變換方陣 α 與 A 中的一個是另一個

的轉置逆方陣：

$$\mathsf{A}=\check{\alpha}^{-1},$$

這兩個變換與這兩列變量都說是逆步的 (*kontragredient*)。

所以 A_{ik} 等於 α_{ik} 的代數餘子式(即子行列式乘以適當的正負號)除以行列式 $|\alpha|=\pm 1$。逆步的關係顯然是對稱的關係。

因爲 $\mathsf{A}^{-1}=\check{\alpha}$, 方程式 (A) 的解是

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_1&=\alpha_{11}\,y_1+\alpha_{21}\,y_2+\cdots+\alpha_{m1}\,y_m\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{y}_m&=\alpha_{1m}\,y_1+\alpha_{2m}\,y_2+\cdots+\alpha_{mm}\,y_m\end{aligned}\right\}\qquad(\mathsf{A}^{-1})$$

所以

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\,y_i=\sum_i\sum_k\alpha_{ik}\bar{x}_ky_i=\sum_k\bar{x}_k\Big(\sum_i\alpha_{ik}y_i\Big)=\sum_{k=1}^{m}\bar{x}_k\bar{y}_k。$$

所以兩個逆步的變換使 $\sum x_i\,y_i$ 這單位的雙一次方式 (*Einheitslinearform*) 不變。這性質也能用作逆步的變換的定義。

若是兩列變量同樣的變換我們就說他們經過同步的 (*kogredient*) 變換。

在頁 104 上，我們已經有過同步變換與逆步變換的例子。

設 $\mathfrak{M}^n$ 還是一個能定向的流形，有對偶的胞腔剖分 $\mathfrak{M}^n_a$ 與 $\mathfrak{M}^n_b$。設對偶胞腔 a^k_κ 與 b^{n-k}_κ 的定向使 $\mathcal{S}(a^k_\kappa,b^{n-k}_\kappa)=1$。若是用么模變換 (α) 變換

$$a^k_1,\ a^k_2,\cdots,\ a^k_{\alpha^k},$$

結果得着 $\mathfrak{M}^n_a$ 的所有 k 維胞腔鍊的框格的一個新基底

$$\bar{a}_1^k,\ \bar{a}_2^k,\ \cdots,\ \bar{a}_{\alpha k}^k。$$

設鍊 $A^k = \xi_1 a_1^k + \xi_2 a_2^k + \cdots + \xi_{\alpha k} a_{\alpha k}^k$ 變換成 $\bar{\xi}_1 \bar{a}_1^k + \bar{\xi}_2 \bar{a}_2^k + \cdots + \bar{\xi}_{\alpha k} \bar{a}_{\alpha k}^k$。因爲

$$A^k = \sum_{\kappa=1}^{\alpha k} \xi_\kappa a_\kappa^k = \sum_{\kappa=1}^{\alpha k} \bar{\xi}_\kappa \bar{a}_\kappa^k,$$

我們知道 A^k 的係數 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{\alpha k}$ 經過逆步的變換 (A) 而成 $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_{\alpha k}$。我們現在再變換這些對偶胞腔

$$b_1^{n-k},\ b_2^{n-k},\ \cdots,\ b_{\alpha k}^{n-k},$$

使他們所經過的變換與 a_κ^k 所經過的逆步;那就是說,用(A)變換 b_κ^{n-k}。鍊

$$B^{n-k} = \sum_{\kappa=1}^{\alpha k} \eta_\kappa b_\kappa^{n-k} = \sum_{\kappa=1}^{\alpha k} \bar{\eta}_\kappa \bar{b}_\kappa^{n-k}$$

的係數 η_κ 所經過的變換同樣的與 b_κ^{n-k} 所經過的逆步,所以也與 ξ_κ 所經過的逆步。所以 $\sum \xi_\kappa \eta_\kappa$ 這雙一次方式不變:

$$\sum_{\kappa=1}^{\alpha k} \xi_\kappa \eta_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\alpha k} \bar{\xi}_\kappa \bar{\eta}_\kappa。$$

既然左端是交點數 $S(A^k, B^{n-k})$,這就證明了:如果用 $\bar{a}_\kappa^k$ 與 $\bar{b}_\kappa^{n-k}$ 做新基底,任意兩個鍊 $\sum \bar{\xi}_\kappa \bar{a}_\kappa^k$ 與 $\sum \bar{\eta}_\kappa \bar{b}_\kappa^{n-k}$ 的交點數還等於這單位的雙一次方式。

我們把有這種性質的兩個胞腔基底 $\bar{a}_\kappa^k$ 與 $\bar{b}_\kappa^{n-k}$ 叫做互相對偶的基

底。所以任意的給定了一個胞腔基底 $\bar{a}_1^k, \bar{a}_2^k, \cdots, \bar{a}_{\alpha^k}^k$，恰有一個對偶的胞腔基底 $\bar{b}_1^{n-k}, \bar{b}_2^{n-k}, \cdots, \bar{b}_{\alpha^k}^{n-k}$ 存在。而且，從特別的一對對偶的基底，我們能利用么模的逆步的變換得着任意預定的一對。

對偶的基底的特徵也可以說成下式：對偶的基底的交點數的方陣

$$\mathcal{S}(\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k}) = \delta_{\mu\nu}$$

是 α^k 列的么方陣。

現在我們研究，對偶的基底經過逆步的變換之後，§ 69 中的邊緣關係 (11)：

$$F[a_\kappa^k] = \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1} a_\iota^{k-1} \tag{1}$$

$$F[b_\iota^{n-k+1}] = (-1)^k \sum_{\kappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1} b_\kappa^{n-k} \tag{2}$$

有什麼改動。胞腔 a_κ^k 經過一個整數的么模變換。我們先看指標 ι 固定的 $\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$；方程式 (1) 中的這些 $\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$ 所經過的變換與 a_κ^k 所經過的同步，而方程式 (2) 中的 $\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$ 所經過的變換與 b_κ^{n-k} 所經過的逆步。既然 a_κ^k 與 b_κ^{n-k} 應當經過逆步的變換，所以方程式 (1) 中與方程式 (2) 中這些 $\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$ 所經過的變換都與 a_κ^k 所經過的同步。同樣的，利用兩個逆步的變換，使對偶的基底 a_ι^{k-1} 與 b_ι^{n-k+1} 換成新的對偶的基底的時候，這兩組方程式中，指標 κ 固定的 $\varepsilon_{\iota\kappa}^{k-1}$ 所經過的變換與 b_ι^{n-k+1} 所經過的都同步（因此與 a_ι^{k-1} 所經過的逆步）。所以在如此變換對偶的基底之

後，兩組新的邊緣關係中的係數 $\bar{\varepsilon}_{\iota\kappa}^{k-1}$ 仍舊相同：

$$F[a_\kappa^k] = \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \bar{\varepsilon}_{\iota\kappa}^{k-1}\ \bar{a}_\iota^{k-1} \tag{$\bar{1}$}$$

$$F[b_\iota^{n-k+1}] = (-1)^k \sum_{\kappa=1}^{\alpha^k} \bar{\varepsilon}_{\iota\kappa}^{k-1}\ \bar{b}_\kappa^{n-k}。 \tag{$\bar{2}$}$$

根據頁 111，我們能利用從零維到 n 維的基底 a_κ^k 的整數么模變換，使胞腔的剖分 $\mathfrak{M}_a^n$ 的胞腔關聯矩陣

$$\mathsf{E}^0, \mathsf{E}^1, \cdots, \mathsf{E}^{n-1}$$

同時化成法式。我們假設，按照我們所選取的記號，矩陣$(\bar{\varepsilon}_{\iota\kappa}^{k-1})$ 就是法式。

基底鍊 $\bar{a}_\kappa^k$ 因此分成三種

$$\begin{array}{ll} {}^1A_\lambda^k & (\lambda=1,2,\cdots,\gamma^k=\gamma^{n-k-1}) \\ {}^2A_\mu^k & (\mu=1,2,\cdots,p^k=p^{n-k}) \\ {}^3A_\nu^k & (\nu=1,2,\cdots,\gamma^{k-1}=\gamma^{n-k}) \end{array} \tag{3}$$

（從前在 §22 中是用 $\overline{A}_\lambda^k$, $\overline{B}_\mu^k$, $\overline{C}_\nu^k$ 表示的）。胞腔鍊 ${}^1A_\lambda^k$ 能除的零調，${}^2A_\mu^k$ 組成一個 *Betti* 基，${}^3A_\nu^k$ 不是閉鍊。邊緣關係 $(\bar{1})$ 現在是

$$F[{}^1A_\lambda^k] = 0, \quad F[{}^2A_\mu^k] = 0, \quad F[{}^3A_\nu^k] = c_\nu^{k-1}\ {}^1A_\nu^{k-1}。 \tag{4}$$

與 (3) 對偶的基底中的鍊依次用

$$\begin{array}{ll} {}^3B_\lambda^{n-k} & (\lambda=1,2,\cdots,\gamma^{n-k-1}=\gamma^k) \\ {}^2B_\mu^{n-k} & (\mu=1,2,\cdots,p^{n-k}=p^k) \\ {}^1B_\nu^{n-k} & (\nu=1,2,\cdots,\gamma^{n-k}=\gamma^{k-1}) \end{array} \tag{5}$$

表示。因爲 $(\bar{1})$ 與 $(\bar{2})$ 中的 $\bar{s}$ 相同,所以現在的邊緣關係 $(\bar{2})$ 是

$$F[{}^3B_\nu^{n-k+1}]=(-1)^k c_\nu^{k-1}\,{}^1B_\nu^{n-k},\ F[{}^2B_\varsigma^{n-k+1}]=0,\ F[{}^1B_\delta^{n-k+1}]=0\text{。}\quad(6)$$

由此可知,基底 b_κ^{n-k} 的關聯矩陣也都同時是法式;胞腔鍊 ${}^3B_\lambda^{n-k}$ 不是閉鍊, ${}^2B_\mu^{n-k}$ 組成一個 *Betti* 基, ${}^1B_\nu^{n-k}$ 能除的零調。

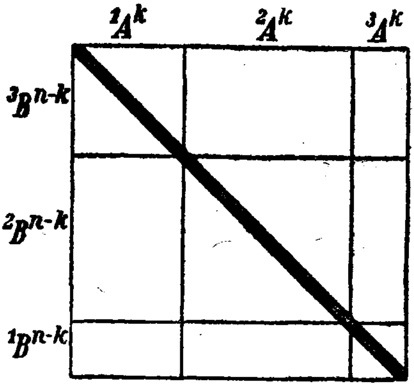


圖 122

既然兩個對偶的基底的交點數的方陣(圖 122)是么方陣,所以

$$\mathcal{S}({}^2A_\varrho^k, {}^2B_\sigma^{n-k}) = \delta_{\varrho\sigma} \quad (7)$$

$(\varrho,\sigma=1,2,\cdots,p^k)$

這些交點數所組成的中間子方陣也是么方陣。

若是我們界說,對偶的胞腔剖分上的 *Betti* 基 ${}^2A_\mu^k$ 與 ${}^2B_\mu^{n-k}$ $(\mu=1,2,\cdots,p^k)$,使交點數方陣 (7) 成么方陣的,叫做對偶的 *Betti* 基,這就證明了對偶的 *Betti* 基的存在。

只要從此更進一步,卽得下述深入的結果:

定理 I: 每一個預先給定了的 k 維的 *Betti* 基,除去能除的零調鍊的相差之外,有一個唯一的對偶的 *Betti* 基。

證明: 要從 ${}^2A_\mu^k$ 這特殊的 *Betti* 基得着最普遍的,只要利用整數的么模變換再加上能除的零調鍊。 如果我們限制交點數的方陣,要他在變換之後仍然是么方陣 (7), ${}^2A_\mu^k$ 的變換就唯一的確定了這特殊的

對偶的 Betti 基 ${}^2B_\mu^{n-k}$ 的變換,即前者的逆步的變換。既然加上能除的零調鍊不改變交點數,新的 k 維與 $n-k$ 維的 Betti 基都還可以加上能除的零調鍊。

對偶的 Betti 基的存在顯示出 Poincaré 的 Betti 數的對偶關係 $p^k=p^{n-k}$ 的更深基礎。對偶定理 (§ 69) 中所說的 k 維與 $n-k-1$ 維的撓係數間的對偶關係也能同樣的用拓撲的方法建立。

(3) 中的鍊 ${}^1A_\lambda^k$ 中的前 ρ^k 個鍊,即

$$ {}^1A_1^k,\ {}^1A_2^k,\cdots,{}^1A_{\rho^k}^k $$

組成一個 k 維的撓基 (頁 98);鍊

$$ {}^1B_1^{n-k-1},\ {}^1B_2^{n-k-1},\cdots,{}^1B_{\rho^k}^{n-k-1} $$

組成一個 $n-k-1$ 維的撓基。交點數

$$ \mathcal{S}({}^1A_\sigma^k,\ {}^3B_\tau^{n-k})=\delta_{\sigma\tau} \qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots,\rho^k) $$

也是圖 122 中的方陣的子方陣,所以是么方陣。爲簡單起見,令 ${}^1A_\sigma^k=A_\sigma^k$, $(-1)^{k+1}\,{}^1B_\tau^{n-k-1}=B_\tau^{n-k-1}$, ${}^3B_\tau^{n-k}=B_\tau^{n-k}$,即有下述定理:

定理 II: 有一個 k 維的撓基 A_τ^k, $(\tau=1,2,\cdots,\sigma^k)$ 與一個 $n-k-1$ 維的撓基 $B_\tau^{n-k-1}(\tau=1,2,\cdots,\rho^k)$ 存在,具下述性質:若 B_τ^{n-k} $(\tau=1,2,\cdots,\rho^k)$ 是任意鍊,使

$$ F[B_\tau^{n-k}]=c_\tau^k\ B_\tau^{n-k-1} \qquad (\tau=1,2,\cdots,\rho^k) $$

(c_τ^k 是 k 維的撓係數),交點數

$$\mathcal{S}(A_\sigma^k,\ B_\tau^{n-k}) = \delta_{\sigma\tau}$$

的方陣就是 ρ^k 列的么方陣。[43]

只在以 $c_\tau^k\ B_\tau^{n-k-1}$ 爲邊緣的 $n-k$ 維鍊 B_τ^{n-k} 是 ${}^3B_\tau^{n-k}$ 這特殊鍊時，這定理已經證明了。但是這定理對於任意鍊 B_τ^{n-k} 成立。因爲 A_σ^k 是能除的零調，而且 $B_\tau^{n-k} - {}^3B_\tau^{n-k}$ 是閉鍊，所以根據 § 70 中的定理 I，

$$\mathcal{S}(A_\sigma^k,\ B_\tau^{n-k} - {}^3B_\tau^{n-k}) = 0,$$

卽 $\mathcal{S}(A_\sigma^k,\ B_\tau^{n-k}) = \mathcal{S}(A_\sigma^k,\ {}^3B_\tau^{n-k})$。

這一節中的討論也能引伸成模 2 鍊的討論，得着相當於定理 I 的下述定理：

定理 III：對於每一個 k 維連通基

$$\mathfrak{A}_1^k,\ \mathfrak{A}_2^k,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_{q^k}^k$$

有一個對偶的 $n-k$ 維連通基

$$\mathfrak{B}_1^{n-k},\ \mathfrak{B}_2^{n-k},\ \cdots,\ \mathfrak{B}_{q^k}^{n-k}$$

存在，他們的模 2 交點數的方陣是 q^k 列的么方陣。

§ 75 中有說明這節的例子。

§72　胞腔式逼近

我們前此只討論對偶的胞腔剖分上的胞腔鍊的交點與交點數。我們的次一目的，是要使我們的結論不依賴於所用的特殊的胞腔剖分，而

且界說對於任何廣義鍊的交點數。要達到這目的，仍舊要利用廣義鍊的逼近。但是現在要用的逼近不是從前的單純逼近，却是對偶的胞腔剖分上的逼近。這種胞腔式逼近 (*zellenmässige Approximation*) 我們現在必須加以解說。以下的研究對于任意的一個胞腔複合形 $\mathfrak{K}^n$ 都成立，并不必假設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個流形。

下述的定理是這種研究的基本。這定理引伸第四章中的單純逼近的定理到胞腔複合形。

定理 I：若 A^k 是胞腔複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個廣義鍊，而且他的邊緣*) A^{k-1} 是 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個胞腔鍊（特别可以是 0 這 $k-1$ 維鍊），就有一個與 A^k 同調的胞腔鍊 $\bar{A}^k$ 存在。

證明：既然邊緣 A^{k-1} 是一個胞腔鍊（在 $k>0$ 時），當然也是一個單純鍊。根據 § 28 中的逼近定理，A^k 有一個同調的單純鍊 $'A^k$（$'A^k$ 所以是胞腔複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的法重分 $\dot{\mathfrak{K}}^n$ 上的一個鍊）；再根據 § 67 中的定理 I，$'A^k$ 有一個同調的胞腔鍊 $\bar{A}^k$。在 $k=0$ 的時候，這定理仍舊成立；因爲不必攷慮邊緣，更易證明。

系：若 $[A^k]$ 是含有 A^k 的最小的胞腔子複合形，就能假設 $\bar{A}^k$ 在 $[A^k]$ 上，而且在 $[A^k]$ 上同調式 $A^k \sim \bar{A}^k$ 成立。

先看所有的，含有 A^k 的胞腔子複合形。他們的交集界說作這最小的子複合形 $[A^k]$。$[A^k]$ 是空集的充要條件，即 A^k 是 0 這 k 維鍊。**)

*) 在 $k=0$ 的時候，自然不需要這條件。

**) 在這情形下，$[A^k]$ 就不是頁 66 中所說的子複合形；頁 66 中並不把空集當作子複合形。

系是定理 I 的直接推論：從 $\mathfrak{R}^n$ 中消去所有不屬於 $[A^k]$ 的胞腔，把 A^k 看作胞腔複合形 $[A^k]$ 的鍊，再把定理 I 中的 $\mathfrak{R}^n$ 用 $[A^k]$ 替代。

現在再說明如何胞腔式的逼近 $\mathfrak{R}^n$ 上的任一"廣義的複合形" $\mathfrak{C}^m$。一組有限個廣義的非降秩的單純形，其中每一個單純形的非降秩的面也屬於這組，就叫做一個廣義的複合形。我們界說廣義的複合形 $\mathfrak{C}^m$ 的胞腔式逼近如下：先任意的給定所有廣義的單純形的定向。設他們是

$$X_1^0,\ X_2^0,\ \cdots,\ X_{\beta^0}^0,\ \cdots,\ X_1^m,\ X_2^m,\ \cdots,\ X_{\beta^m}^m。$$

對於每一個 X_κ^k，我們取一個 k 維的胞腔鍊 $\mathcal{A}p\, X_\kappa^k$ 與一個 $k+1$ 維的廣義鍊 $\mathcal{V}er6\, X_\kappa^k$ 與他對應。這取定的鍊，前者叫做 X_κ^k 的逼近鍊，後者叫做連接 X_κ^k 與他的逼近鍊的連接鍊。對於每一個廣義鍊

$$U^k = \sum u_\kappa X_\kappa^k,$$

有唯一的一個逼近鍊

$$\mathcal{A}p\, U^k = \sum u_\kappa\, \mathcal{A}p\, X_\kappa^k$$

與一個廣義的連接鍊

$$\mathcal{V}er6\, U^k = \sum u_\kappa\, \mathcal{V}er6\, X_\kappa^k。$$

我們取 $\mathcal{A}p\, X_\kappa^k$ 與 $\mathcal{V}er6\, X_\kappa^k$ 時，還使他們對於每一個 U^k $(k=1, 2, \cdots, m)$ 滿足下列條件：

$a)$ $\mathcal{A}p\, U^k$ 與 $\mathcal{V}er6\, U^k$ 在 U^k 所屬的最小的胞腔複合形上。

$b)$ $F[\mathcal{A}p\, U^k] = \mathcal{A}p\, F[U^k]$。

$c)$ $F[\mathcal{V}er6\, U^k] = U^k - \mathcal{A}p\, U^k - \mathcal{V}er6\, F[U^k]$。*)

*) 在 $k=0$ 的時候，$b)$ 這條件不存在，而且 $c)$ 中的 $\mathcal{V}er6\, F[U^k]$ 當作 0：公式 $c)$ 的構造恰與頁 145 上的連接公式的相同。

若是每一個廣義的單純形有了這麼一個胞腔鍊與他對應，我們就說這廣義的複合形 $\mathfrak{C}^m$ 在 $\mathfrak{R}^n$ 中有了一個胞腔式逼近。

其實，定義中的條件 $a)$, $b)$, $c)$ 只須對於所有的廣義的單純形 $U^k = X^k_\kappa$ 都滿足。因為若已如此，這些條件對於任意的一個鍊 U^k 當然也滿足了。

我們現在說

定理 II：任意一個廣義的複合形 $\mathfrak{C}^m$ 有一個胞腔式逼近。

我們還證明：若是 $\mathfrak{C}^m$ 的一個廣義的子複合形 $\mathfrak{C}_1$*) 已經有了一個逼近，這逼近必能擴充成 $\mathfrak{C}^m$ 的一個逼近。

證明：先看 $\mathfrak{C}^m$ 中所有不屬於 $\mathfrak{C}_1$ 的單純形。從他們之中取出可能的最低維的一個單純形 X^k。X^k 或者是一個零維單純形，或者在 $k>0$ 時，他的所有非降秩的面都屬於 $\mathfrak{C}_1$。然後作 X^k 的逼近鍊與連接鍊。

先設 $k>0$。X^k 的非降秩的面都屬于 $\mathfrak{C}_1$，所以這些面的逼近鍊與連接鍊都已經有了定義。所以特別

$$X^k - \mathcal{V}er6\, F[X^k] \tag{1}$$

是一個已知的廣義鍊。他的邊緣是

$$F[X^k] - F[\mathcal{V}er6\, F[X^k]].$$

若是預先用 U^{k-1} 表示 $F[X^k]$，我們就能應用在維數是 $k-1$ 時的公式 $c)$ 的第二項，求得上述的邊緣

*) 一個廣義的複合形的所有單純形同時也是 $\mathfrak{C}^m$ 的單純形，這複合形就叫做 $\mathfrak{C}^m$ 的子複合形。

$$=F[X^k]-(F[X^k]-\mathcal{A}p\,F[X^k]-\mathcal{V}erb\,F[F[X^k]])=\mathcal{A}p F[X^k]。\quad(2)$$

這是一個逼近鍊，所以也是一個胞腔鍊（圖 123）。若是預先用 A^k 表示鍊(1)，我們就可以應用定理 I 求得一個胞腔鍊 $\bar{A}^k\sim A^k$，而且 $\bar{A}^k$ 的邊緣也是 (2)。現在再把 $\bar{A}^k$ 這胞腔鍊界說作 $\mathcal{A}p\,X^k$。即由 $F[\bar{A}^k]=F[A^k]$得:

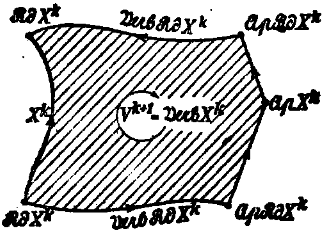


圖 123

$$F[\mathcal{A}p\,X^k]=\mathcal{A}p\,F[X^k]。\quad(3)$$

因 $[X^k]$ 表示在 $\mathfrak{R}^n$ 上的，含有 X^k 的最小的胞腔子複合形，所以 $F[X^k]$ 屬於 $[X^k]$。因爲｛對於 $\mathfrak{C}_1$ 的所有單純形｝，a) 成立，所以 $\mathcal{V}erb\,F[X^k]$ 與鍊 (1) 也屬於 $[X^k]$。根據定理 I 的系，X^k 的逼近鍊 $\bar{A}^k=\mathcal{A}p\,X^k$ 也屬於 $[X^k]$。再用同一定理，在 $[X^k]$ 上 $A^k\sim\bar{A}^k$，也就是在 $[X^k]$ 上有一個廣義鍊 V^{k+1} 存在，他的邊緣是 $A^k-\bar{A}^k$。我們把 V^{k+1} 規定作 X^k 的連接鍊 $\mathcal{V}erb\,X^k$:

$$V^{k+1}=\mathcal{V}erb\,X^k。$$

因此

$$F[\mathcal{V}erb\,X^k]=F[V^{k+1}]=A^k-\bar{A}^k=(X^k-\mathcal{V}erb\,F[X^k])-\mathcal{A}p\,X^k。$$

這就完成了鍊 $\mathcal{A}p\,X^k$ 與 $\mathcal{V}erb\,X^k$ 的作法，而且對於 $U^k=X^k$ 證明了條件 a), b), c)。既然由假設，$\mathfrak{C}_1$ 的所有單純形滿足 a), b), c)，所以由 $\mathfrak{C}_1$ 的單純形與新取的這單純形 X^k 所組成的廣義鍊，也滿足這三條件。我們可以一個一個的取 $\mathfrak{C}^m$ 的單純形的這種逼近，直到最後整個的 $\mathfrak{C}^m$ 有了一個胞腔式逼近爲止。

還待討論 $k=0$ 這特別簡單的情形。這裏選取的單純形 X^0 零維。最小的胞腔複合形 $[X^0]$ 是含有 X^0 的最低維的一個胞腔。根據定理 I 的系，$[X^0]$ 上有一個胞腔式逼近鍊 $\mathcal{A}p\,X^0 \sim X^0$，與一個以 $X^0 - \mathcal{A}p\,X^0$ 爲邊緣的廣義的連接鍊 $\mathcal{V}er\mathfrak{b}\,X^0$ 存在。這就完全證明了我們的定理。

現在再設 A^k 是任意的一個 k 維的廣義鍊。他的 k 維單純形與他的零維到 $k-1$ 維的非降秩的面組成一個廣義的複合形 $\mathfrak{A}^k$。$\mathfrak{A}^k$ 有一個逼近使 A^k 有一個胞腔式逼近。

設

$$A_1^{k_1},\ A_2^{k_2},\ \cdots,\ A_r^{k_r} \tag{4}$$

是任何維的廣義鍊。他們的單純形與所有的非降秩的面同樣組成一個廣義的複合形 $\mathfrak{C}$。若是 $\mathfrak{C}$ 有了一個胞腔式逼近，我們就說鍊 (4) 都同時有了胞腔式逼近。鍊 (4) 與他們的邊緣間的平直關係對於他們的逼近鍊仍舊成立：那就是說，若

$$\Phi(A_1^{k_1}, A_2^{k_2}, \cdots, A_r^{k_r},\ F[A_1^{k_1}],\ F[A_2^{k_2}], \cdots, F[A_r^{k_r}])=0$$

是以整數爲係數的方程式，

$$\Phi(\mathcal{A}p\,A_1^{k_1}, \mathcal{A}p\,A_2^{k_2}, \cdots, \mathcal{A}p\,A_r^{k_r}, F[\mathcal{A}p\,A_1^{k_1}], F[\mathcal{A}p\,A_2^{k_2}], \cdots,$$
$$F[\mathcal{A}p\,A_r^{k_r}]) = 0$$

也成立。因爲，我們已經知道 $\mathcal{A}p(A+B) = \mathcal{A}p\,A+\mathcal{A}p\,B$，與 $\mathcal{A}p\,F = F[\mathcal{A}p]$。若是鍊 (4) 不是同時有了胞腔式逼近，只是其中的每一個

獨自有了逼近，而且每一個的逼近與其他的無干，在普遍情形下，上文所說的自然不能成立。例如，設 $A_1^{k_1}$ 與 $A_2^{k_2}$ 有相同的邊緣；他們的分開而無干的逼近鍊 $\mathscr{A}_p A_1^{k_1}$ 與 $\mathscr{A}_p A_2^{k_2}$ 就不必如此。——若是

$$A_1^{k_1},\ A_2^{k_2},\ \cdots,\ A_s^{k_s} \tag{5}$$

是 (4) 中的一部分，而且已經同時有了胞腔式逼近，這些逼近就能擴充成鍊 (4) 的全體的一個同時的胞腔式逼近。因爲屬於鍊 (5) 的廣義的複合形是 $\mathfrak{C}$ 的一個子複合形。

這裏的討論能引伸到模 2 鍊。

§73　廣義鍊的交點數

設 $\mathfrak{M}^n$ 是一個能定向的流形，他的定向利用一個規定定向的鍊 O^n (頁 182) 確定。$\mathfrak{M}^n$ 的一個單純剖分的 n 維單純形恰只能有一個協合的定向，使如此得着的 n 維鍊 $\sim O^n$。我們的目的是要界說任二廣義鍊 A^k 與 B^{n-k} 的交點數 $\mathcal{S}(A^k,\ B^{n-k})$。我們必須立下如下的限制：

(E) A^k 的邊緣 A^{k-1} 與 B^{n-k} 無共點，B^{n-k} 的邊緣 B^{n-k-1} 與 A^k 無共點。

在對偶的胞腔剖分上，一個 k 維的胞腔與一個 $n-k$ 維的胞腔或者無共點，或者只有中心這一個共點。所以對偶的胞腔剖分上的兩個胞腔鍊 A^k 與 B^{n-k} 根本就適合這條件。對於廣義鍊，我們需要利用胞腔式逼近，所以 (E) 這限制就必須加上。例如圖 124 中所表出的兩個

廣義的一維鍊 A^1 與 B^1 就不滿足 (E)。不管他們所屬的流形的胞腔剖分如何細密，我們總可以使他們的胞腔式逼近鍊 {在對偶的胞腔剖分上} 是兩個相交的鍊，或者是兩個無共點的鍊。

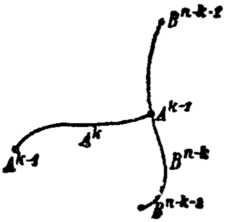


圖 124

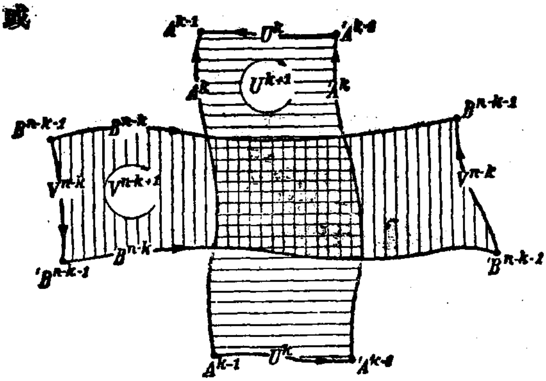


圖 125

在預先給定的廣義鍊 A^k 與 B^{n-k} 之外，我們現在再考慮兩個廣義鍊 $'A^k$ 與 $'B^{n-k}$，他們同樣滿足 (E) (圖 125)。他們的邊緣用

$$F[A^k] = A^{k-1}, \quad F['A^k] = 'A^{k-1} \tag{1 a}$$

$$F[B^{n-k}] = B^{n-k-1}, \quad F['B^{n-k}] = 'B^{n-k-1} \tag{1 b}$$

表出。其次假設有廣義的"連接鍊" U^k, U^{k+1}, V^{n-k}, V^{n-k+1} 存在，適合下列連接公式*)：

$$\left.\begin{aligned} F[U^k] &= A^{k-1} - 'A^{k-1} \\ F[U^{k+1}] &= A^k - 'A^k - U^k \end{aligned}\right\} \tag{2 a}$$

*) 圖 125 中，A^{k-1} ($'A^{k-1}$，B^{n-k-1}，$'B^{n-k-1}$ 也同樣的) 由兩個定向 (正負號) 相反的點組成。

$$\left.\begin{aligned} F[V^{n-k}] &= B^{n-k-1} - 'B^{n-k-1} \\ F[V^{n-k+1}] &= B^{n-k} - 'B^{n-k} - V^{n-k} \end{aligned}\right\}。 \tag{2b}$$

最後假設不但 A^k 與 B^{n-k-1} 兩鍊無共點，下列鍊

$$A^k,\quad 'A^k,\quad U^{k+1} \tag{3a}$$

中的每一個應該與下列鍊

$$B^{n-k-1}\quad 'B^{n-k-1}\quad V^{n-k} \tag{4b}$$

中的每一個無共點；而且，同樣的，下列鍊

$$B^{n-k},\quad 'B^{n-k},\quad V^{n-k+1} \tag{3b}$$

中的每一個與下列鍊

$$A^{k-1},\quad 'A^{k-1},\quad U^k \tag{4a}$$

中的每一個無共點。

在有這種連接鍊存在時，我們就說這兩對鍊 A^k, B^{n-k} 與 $'A^k$, $'B^{n-k}$ 互相相通 (*verbunden*)。例如流形 $\mathfrak{M}^n$ 上的一個够小的變狀，使鍊 A^k, B^{n-k} 換成鍊 $'A^k$, $'B^{n-k}$，他們就成爲兩對相通鍊。因爲，經過變狀，A^k, A^{k-1}, B^{n-k}, B^{n-k-1} 描出某種連接鍊 U^{k+1}, U^k, V^{n-k+1}, V^{n-k}，恰使公式 (2a) 與 (2b) 成立 (參看頁 162)；而且在變狀够小的時候，鍊 (3a) 與 (4b) 無共點，鍊 (3b) 與 (4a) 無共點。

在够細密的對偶胞腔剖分 $\mathfrak{M}^n_a$ 與 $\mathfrak{M}^n_b$ 上，A^k, B^{n-k} 的逼近鍊就是與 A^k, B^{n-k} 相通的一對鍊。證明如下。設 $[A^k]$ 與 $[A^{k-1}]$ 是 A^k 與 A^{k-1} 所屬的，$\mathfrak{M}^n_a$ 的最小的胞腔子複合形；同樣的 $[B^{n-k}]$ 與 $[B^{n-k-1}]$ 是 B^{n-k} 與 B^{n-k-1} 所屬的，$\mathfrak{M}^n_b$ 的最小的胞腔子複合形。若是 $\mathfrak{M}^n_a$ 與

$\mathfrak{M}_b^n$ 的胞腔充分的小，使 $[A^k]$ 與 $[B^{n-k-1}]$ 無共點，$[B^{n-k}]$ 與 $[A^{k-1}]$ 無共點，則 $A^k, A^{k-1}, B^{n-k}, B^{n-k-1}$ 的胞腔式逼近及這些逼近的廣義的連接鍊都在這些最小的子複合形上。因此，關於兩對相通鍊的無共點條件滿足了。至於如此細密的胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a^n$ 與 $\mathfrak{M}_b^n$ 的存在可證明如下：設想 $\mathfrak{M}^n$ 在一個實數空間中，就在這空間中（沿直綫）度量他的點與點間的距離。A^k 與 B^{n-k-1} 的點集是實數空間中的閉點集，所以有一個大於零的距離 δ'。同樣的，設 $\delta'' > 0$ 是 A^{k-1} 與 B^{n-k} 的距離。再設 δ 是 δ' 與 δ'' 二數中較小的一個。只要使 $\mathfrak{M}_a^n$ 與 $\mathfrak{M}_b^n$ 的胞腔小於 $\frac{\delta}{2}$，$[A^k]$ 就必然與 $[B^{n-k-1}]$ 無共點，$[A^{k-1}]$ 就必然與 $[B^{n-k}]$ 無共點。因爲 $\mathfrak{M}^n$ 就能任意細密的單純剖分，而且每一個（法重分了的）單純剖分就是一個胞腔剖分，如此小的胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a^n$ 與 $\mathfrak{M}_b^n$ 斷然存在。

現在，我們能界說滿足條件 (E) 的廣義鍊 A^k 與 B^{n-k} 的交點數如下：先在對偶的胞腔剖分 $'\mathfrak{M}_a^n$ 與 $'\mathfrak{M}_b^n$ 上取一對胞腔鍊 $'A^k, 'B^{n-k}$ 與 A^k, B^{n-k} 相通，我們就可以用 $'A^k, 'B^{n-k}$ 替代 A^k, B^{n-k}，用 §70 中所界說的

$$\mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k})$$

這交點數來界說作 A^k 與 B^{n-k} 的交點數。

§74 交點數的不變性

我們現在必須證明，交點數的定義與所選擇的胞腔剖分 $'\mathfrak{M}_a^n$, $'\mathfrak{M}_b^n$ 無干，也與這兩個剖分上所選擇的，與 A^k, B^{n-k} 相通的一對胞腔鍊無

干。在完成這證明之前，$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$ 只對於對偶的剖分上的兩個胞腔鍊有意義。*)

定理 I：設 A^k, B^{n-k} 與 $'A^k, 'B^{n-k}$ 是兩對相通的廣義鍊，$\bar{A}^k$, $'\bar{A}^k$ 是 A^k, $'A^k$ 在一個胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a$ 上的同時的逼近鍊，$\bar{B}^{n-k}$, $'\bar{B}^{n-k}$ 是 B^{n-k}, $'B^{n-k}$ 在對偶的胞腔剖分 $\mathfrak{M}_b$ 上的同時的逼近鍊。只要 $\mathfrak{M}_a$ 與 $\mathfrak{M}_b$ 的胞腔小於一個適當的 δ，就有

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k})' = \mathcal{S}('\bar{A}^k, '\bar{B}^{n-k})$$

證明： 取 δ 如是之小，不但使前節中的鍊 $(3\,a)$ 與 $(4\,b)$，鍊 $(3\,b)$ 與 $(4\,a)$ 無共點，而且含有他們的最小的胞腔子複合形也無共點。這裏含有鍊 $(3\,a)$ 與 $(4\,a)$ 的子複合形在 $\mathfrak{M}_a$ 上，含有鍊 $(3b)$ 與 $(4b)$ 的子複合形在 $\mathfrak{M}_b$ 上。我們能把 A^k 與 $'A^k$ 在 $\mathfrak{M}_a$ 上的預先給定的同時的逼近，擴充成 $(3\,a)$ 與 $(4\,a)$ 中所有鍊的同時的逼近；同樣的能把 B^{n-k}, $'B^{n-k}$ 的同時的逼近擴充成 $(3\,b)$ 與 $(4\,b)$ 中所有鍊的同時的逼近。加一上橫表示逼近鍊。公式 $(1\,a)$, $(1\,b)$, $(2\,a)$, $(2\,b)$ 中的鍊都加一上橫後所成的公式 $(\bar{1}\,a)$, $(\bar{1}\,b)$, $(\bar{2}\,a)$, $(\bar{2}\,b)$ 當然成立（根據頁 359）。而且相當於 $(3\,a)$ 的，加了一上橫的鍊 $(\bar{3}\,a)$ 與鍊 $(\bar{4}\,b)$ 無共點；同樣的，$(\bar{3}\,b)$ 與 $(\bar{4}\,a)$ 也無共點。

從此我們只要討論加了一上橫的鍊。此中 $(\bar{3}\,a)$, $(\bar{4}\,a)$ 是 $\mathfrak{M}_a$ 的胞腔鍊，$(\bar{3}\,b)$ 與 $(\bar{4}\,b)$ 是 $\mathfrak{M}_b$ 的胞腔鍊。加了一上橫的鍊與未加的鍊

*) 爲簡單起見，$\mathfrak{M}$ 的維數指標 n 有時省去。——在定理 I 至 III 中，我們都設想 $\mathfrak{M}$ 在一個實數空間中。我們說一個胞腔 $< \delta$，就是說在這空間中這胞腔的直徑 $< \delta$。

距離可任意的近，能用圖 125 表明。

因爲此後所注意的鍊都在對偶的剖分上，此後的攷慮是純粹組合的性質。交點數 $\mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k})$ 等於交點數 $\mathcal{S}('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k})$ 的證明將分爲兩步。因 $\overline{A}^{k-1}\ (= F[\overline{A}^k])$ 與 $\overline{V}^{n-k+1}$ 無共點，從 § 70 中的公式 (5)，可知

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k, F[\overline{V}^{n-k+1}]) = (-1)^k\ \mathcal{S}(F[\overline{A}^k], \overline{V}^{n-k+1}) = 0。$$

另一方面，因爲 $\overline{A}^k$ 與 $\overline{V}^{n-k}$ 無共點，用公式 $(\bar{2}\,b)$ 的 $F[\overline{V}^{n-k+1}]$ 的值替入，卽得

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k, F[\overline{V}^{n-k+1}]) = \mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k} - '\overline{B}^{n-k} - \overline{V}^{n-k})$$
$$= \mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k} - '\overline{B}^{n-k}),$$

所以

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k})。\tag{1}$$

同樣的，因爲 $\overline{U}^{k+1}$ 與 $'\overline{B}^{n-k-1}$ 無共點，

$$\mathcal{S}(F[\overline{U}^{k+1}], '\overline{B}^{n-k}) = (-1)^{k+1}\ \mathcal{S}(\overline{U}^{k+1}, F['\overline{B}^{n-k}]) = 0。$$

另一方面，因爲 $\overline{U}^k$ 與 $'\overline{B}^{n-k}$ 無共點，用公式 $(\bar{2}\,a)$ 的 $F[\overline{U}^{k+1}]$ 的值替入，卽得

$$\mathcal{S}(F[\overline{U}^{k+1}], '\overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(\overline{A}^k - '\overline{A}^k - \overline{U}^k, '\overline{B}^{n-k})$$
$$= \mathcal{S}(\overline{A}^k - '\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k})。$$

所以

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k})。\tag{2}$$

從 (1) 與 (2) 卽得着所求的結果：

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k})。$$

下述的定理使我們能從一個胞腔剖分改成另一個：

定理 II^k：設 $\mathfrak{M}$ 的對偶的胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a$ 與 $\mathfrak{M}_b$ 上的 a^k 與 b^{n-k} 是定向的對偶胞腔，而且他們的交點數

$$\eta = \mathcal{S}(a^k, b^{n-k}) = \pm 1。$$

設 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 是兩個新的對偶的剖分，他們的胞腔都小於一個適當的 δ。設 $\bar{a}^k$ 與 $\bar{b}^{n-k}$ 分別是 a^k 與 b^{n-k} 在 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 上的逼近胞腔鍊。如此，他們就也有相同的交點數*)

$$\eta = \mathcal{S}(\bar{a}^k, \bar{b}^{n-k})。$$

a^k 是 $\mathfrak{M}_a$ 的法重分 $\dot{\mathfrak{M}}$ 的一個協合定向的單純形，所以代表 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 上的一個廣義的 k 維鍊，能有 § 72 中所說的一個胞腔式逼近。所以 $\bar{a}^k$ 是 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 上的一個胞腔鍊。同樣的，$\bar{b}^{n-k}$ 是 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 上的一個胞腔鍊。

定理 II^k 的證明用對於 k 的歸納法。我們先證明 II^0。因此我們將考慮兩個對偶胞腔 a^0 與 b^n。把胞腔剖分 $\mathfrak{M}_b$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 如此協合的定向，使所成的鍊 M_b^n 與 $\overline{M}_b^n$ 都與規定定向的鍊 O^n 同調：

$$M_b^n \sim \overline{M}_b^n \sim O^n。\tag{3}$$

設 ε_b 是 b^n 在 M_b^n 中出現的正負號，$'b^n$ 表示 M_b^n 中所有與 b^n 不同的 n 維胞腔的和。即有

$$M_b^n = \varepsilon_b b^n + {'b^n}。\tag{4}$$

---

*) 注意 $\mathcal{S}$ 這記號在這裏有兩個不同的意義：一次是對於對偶的剖分 $\mathfrak{M}_a$ 與 $\mathfrak{M}_b$ 而說的交點數，一次是對於 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 而說的交點數。

b^n 在 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 中的已給定的逼近能擴充成 b^n 與 $'b^n$ 的同時的逼近。設 $'b^n$ 的逼近鍊是 $'\bar{b}^n$。$M_b^n=\varepsilon_b b^n+'b^n$ 的逼近鍊所以是鍊 $\varepsilon_b \bar{b}^n+'\bar{b}^n$。既然一個閉鍊與他的逼近鍊同調，而且 $\overline{M}_b^n$ 是 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 上唯一的與 M_b^n 同調的鍊，所以

$$\overline{M}_b^n=\varepsilon_b b^n+'\bar{b}^n。\tag{$\bar{4}$}$$

現在假設 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 的胞腔如是之小，不但 a^0 與 $'b^n$ 無共點，就是 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 上含有 a^0 的最小子複合形與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 上含有 $'b^n$ 的最小子複合形也無共點。逼近鍊 $\bar{a}^0$ 與 $'\bar{b}^n$ 屬於這最小子複合形，他們也無共點。再用 $\varepsilon_a=\pm 1$ 表示 a^0 的代數值。因為 a^0 與他的逼近鍊 $\bar{a}^0$ 同調，ε_a 也是 $\bar{a}^0$ 的代數值。所以

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(a^0,b^n)&=\varepsilon_b\,\mathcal{S}(a^0,\varepsilon_b b^n)=\varepsilon_b\,\mathcal{S}(a^0,\varepsilon_b b^n+'b^n)\\&=\varepsilon_b\,\mathcal{S}(a^0,M_b^n)=\varepsilon_b\,\varepsilon_a;\end{aligned}\tag{5}$$

第三個等式根據於 a^0 與 $'b^n$ 無共點的事實，末一個等式根據頁 345。同樣的，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\bar{a}^0,\bar{b}^n)&=\varepsilon_b\,\mathcal{S}(\bar{a}^0,\varepsilon_b\bar{b}^n)=\varepsilon_b\,\mathcal{S}(\bar{a}^0,\varepsilon_b\bar{b}^n+'\bar{b}^n)\\&=\varepsilon_b\,\mathcal{S}(\bar{a}^0,\overline{M}_b^n)=\varepsilon_b\,\varepsilon_a。\end{aligned}\tag{$\bar{5}$}$$

(5) 與 ($\bar{5}$) 就證明了

$$\mathcal{S}(a^0,b^n)=\mathcal{S}(\bar{a}^0,\bar{b}^n),$$

即定理 II^0。

現在假設 II^{k-1} 已經證明，再進而證明 II^k。設 a^{k-1} 是 $\mathfrak{M}_a$ 上的與 a^k 關聯的一個胞腔。a^{k-1} 的對偶胞腔 b^{n-k+1} 所以也與 b^{n-k} 關聯。取定 a^{k-1} 與 b^{n-k+1} 的定向，使 a^{k-1} 在 a^k 的邊緣中出現的倍數，與 b^{n-k}

在 b^{n-k+1} 的邊緣中出現的倍數都是 $+1$（圖 126）：

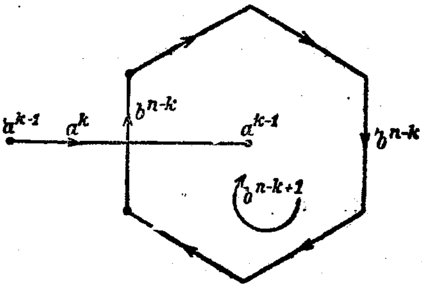


圖 126

$$F[a^k] \quad = a^{k-1} + 'a^{k-1},$$

$$F[b^{n-k+1}] = b^{n-k} + 'b^{n-k}。$$

這從 b^{n-k} 到 $\bar{b}^{n-k}$ 的逼近能擴充成 b^{n-k}, $'b^{n-k}$, b^{n-k+1} 的同時的逼近。再取如是細密的胞腔剖分 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$，一方面使 $'a^{k-1}$ 與 b^{n-k+1}，另一方面使 $'b^{n-k}$ 與 a^k 在逼近後還無共點：

α) $\qquad\qquad$ $'\bar{a}^{k-1}$ 與 $\bar{b}^{n-k+1}$ 無共點，

β) $\qquad\qquad$ $'\bar{b}^{n-k}$ 與 $\bar{a}^k$ 無共點。

此外，根據定理 II^{k-1}，有

γ) $\qquad \mathcal{S}(a^{k-1}, b^{n-k+1}) = \mathcal{S}(\bar{a}^{k-1}, \bar{b}^{n-k+1})$。

現在根據 § 69 中的公式 (5)，

$$\mathcal{S}(a^k, b^{n-k}) = (-1)^k \mathcal{S}(a^{k-1}, b^{n-k+1})。\qquad (6$$

相當於 (6) 的是

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\bar{a}^k, \bar{b}^{n-k}) &= \mathcal{S}(\bar{a}^k, \bar{b}^{n-k} + '\bar{b}^{n-k}) \quad \text{因爲 } \beta),\\
&= \mathcal{S}(\bar{a}^k, F[\bar{b}^{n-k+1}])\\
&= (-1)^k \mathcal{S}(F[\bar{a}^k], \bar{b}^{n-k+1}) \quad \text{根據 § 70 的 (5)},\\
&= (-1)^k \mathcal{S}(\bar{a}^{k-1} + '\bar{a}^{k-1}, \bar{b}^{n-k+1})\\
&= (-1)^k \mathcal{S}(\bar{a}^{k-1}, \bar{b}^{n-k+1}) \quad \text{因爲 } \alpha)。
\end{aligned} \qquad (\bar{6})$$

因爲 γ),(6) 與 $(\bar{6})$ 的右端相等,所以左端也相等。這就是所要證明的。

定理 II^k 容易推廣成對於胞腔鍊的定理:

定理 III: **設** $\mathfrak{M}_a$ **與** $\mathfrak{M}_b$ **是能定向的流形** $\mathfrak{M}$ **的對偶的胞腔剖分,**

$$A^k = \sum \xi_\mu\, a_\mu^k \qquad \text{與} \qquad B^{n-k} = \sum \eta_\nu\, b_\nu^{n-k}$$

是 $\mathfrak{M}_a$ **與** $\mathfrak{M}_b$ **上的胞腔鍊,** $\bar{A}^k$ **與** $\bar{B}^{n-k}$ **是他們在另外兩個對偶的胞腔剖分** $\overline{\mathfrak{M}}_a$ **與** $\overline{\mathfrak{M}}_b$ **上的逼近鍊。只要** $\overline{\mathfrak{M}}_a$ **與** $\overline{\mathfrak{M}}_b$ **的胞腔小於某一個** δ, **就有**

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k})。$$

證明: 我們取如是細密的 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$, 使 A^k 與 B^{n-k} 中的每兩個胞腔 a_μ^k 與 b_ν^{n-k} 的逼近鍊 $\bar{a}_\mu^k$, $\bar{b}_\nu^{n-k}$ 具有下述性質:

$$\mathcal{S}(\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k}) = \mathcal{S}(a_\mu^k, b_\nu^{n-k})。$$

在 $\mu=\nu$ 的時候,從定理 II^k, 我們知道這是可能的。在 $\mu \neq \nu$ 的時候, a_μ^k 與 b_ν^{n-k} 無共點,因而在够細密的胞腔剖分中,他們的逼近鍊也無共點。於是

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(\sum \xi_\mu\, a_\mu^k, \sum \eta_\nu\, b_\nu^{n-k}) = \sum \xi_\mu\, \eta_\nu\, \mathcal{S}(a_\mu^k, b_\nu^{n-k}),$$

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(\sum \xi_\mu\, \bar{a}_\mu^k, \sum \eta_\nu\, \bar{b}_\nu^{n-k}) = \sum \xi_\mu\, \eta_\nu\, \mathcal{S}(\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k})。$$

右端既然相等,左端自然也相等:

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k})。$$

現在從上述的結果,我們證明交點數的不變性如下: 設已給定了廣義鍊 A^k 與 B^{n-k}。設一次在兩個對偶的胞腔剖分 $'\mathfrak{M}_a$ 與 $'\mathfrak{M}_b$ 上取

一對胞腔鍊 $'A^k$, $'B^{n-k}$ 與 A^k, B^{n-k} 相通，另一次在兩個對偶的胞腔剖分 $''\mathfrak{M}_a$ 與 $''\mathfrak{M}_b$ 上取一對胞腔鍊 $''A^k$, $''B^{n-k}$ 與 A^k, B^{n-k} 相通。在第三個剖分 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 中，同時的逼近 A^k, $'A^k$, $''A^k$ 而得着逼近鍊 $\overline{A}^k$, $'\overline{A}^k$, $''\overline{A}^k$; 同樣的，在對偶的剖分 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 中同時的逼近 B^{n-k}, $'B^{n-k}$, $''B^{n-k}$ 而得着 $\overline{B}^{n-k}$, $'\overline{B}^{n-k}$, $''\overline{B}^{n-k}$。根據定理 I，若 $\overline{\mathfrak{M}}_a$ 與 $\overline{\mathfrak{M}}_b$ 相當細密，卽有

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k,\ \overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}('\overline{A}^k,\ '\overline{B}^{n-k}),$$

而且

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k,\ \overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(''\overline{A}^k,\ ''\overline{B}^{n-k})。$$

所以

$$\mathcal{S}('\overline{A}^k,\ '\overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(''\overline{A}^k,\ ''\overline{B}^{n-k})。\tag{7}$$

因爲 $'A^k$, $'B^{n-k}$ 是對偶的胞腔剖分上的胞腔鍊，根據定理 III 又有

$$\mathcal{S}('\overline{A}^k,\ '\overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}('A^k,\ 'B^{n-k});$$

同樣的，

$$\mathcal{S}(''\overline{A}^k,\ ''\overline{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(''A^k,\ ''B^{n-k})。$$

替入(7)，卽得

$$\mathcal{S}('A^k,\ 'B^{n-k}) = \mathcal{S}(''A^k,\ ''B^{n-k})。$$

上述的證明能用下表簡明的表出：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{''A^k,\ ''B^{n-k}} \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{A^k,\ B^{n-k}} & \boxed{'A^k,\ 'B^{n-k}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{''\overline{A}^k,\ ''\overline{B}^{n-k}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\overline{A}^k,\ \overline{B}^{n-k}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{'\overline{A}^k,\ '\overline{B}^{n-k}}
\end{tikzcd}$$

給定了廣義鍊 A^k, B^{n-k}, 取兩對不同的對偶的胞腔剖分，在每對剖分上各取一對胞腔鍊 $'A^k$, $'B^{n-k}$ 與 $''A^k$, $''B^{n-k}$, 都與 A^k, B^{n-k} 這一對相通。用每一對胞腔鍊替代這廣義鍊。每一對胞腔鍊的交點數可從 § 70 組合的求出。要證明這兩對的交點數相等，在第三個胞腔剖分中，胞腔式的逼近這六個鍊，得着加一上橫的逼近鍊（表中的下列）。然後對於垂直箭頭所指的兩對鍊，應用本節中的定理 III；對於水平箭頭所指的兩對鍊，應用本節中的定理 I。[44]

§ 70 中對於胞腔鍊所證明的定理很容易引伸到廣義鍊。我們永遠假設記號 $\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$ 中的 A^k 與 B^{n-k} 滿足 § 73 中的條件 (E)。

若是兩個廣義鍊 A^k, B^{n-k} 無共點，他們的交點數 $=0$。因爲我們能如是細密的逼近他們，使他們的逼近鍊也無共點。

對於交點數，分配律成立：

$$\mathcal{S}(A^k, B_1^{n-k} + B_2^{n-k}) = \mathcal{S}(A^k, B_1^{n-k}) + \mathcal{S}(A^k, B_2^{n-k})。\qquad (8)$$

因爲，若是在一個剖分 $\mathfrak{M}_a$ 中逼近 A^k, 在對偶的剖分 $\mathfrak{M}_b$ 中同時的逼近 B_1^{n-k} 與 B_2^{n-k}，則對於逼近鍊方程式

$$\mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}_1^{n-k} + \overline{B}_2^{n-k}) = \mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}_1^{n-k}) + \mathcal{S}(\overline{A}^k, \overline{B}_2^{n-k}) \qquad (\overline{8})$$

成立。(8) 是 $(\overline{8})$ 的結果；因爲在胞腔剖分 $\mathfrak{M}_a$ 與 $\mathfrak{M}_b$ 適當細密的時候，二鍊的交點數與他們的逼近的交點數相同。

如同 (8)，我們能證明下列二公式

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)}\ \mathcal{S}(B^{n-k}, A^k), \qquad (9)$$

$$\mathcal{S}(A^k, F[B^{n-k}]) = (-1)^k \mathcal{S}(F[A^k], B^{n-k+1}), \tag{10}$$

這裏的 A^k, B^{n-k+1} 是廣義鍊，他們的邊緣無共點。

如同從前一樣，由此可知：一個閉 k 維鍊與一個能除的零調 $n-k$ 維鍊的交點數等於 0；兩個閉鍊的交點數，不因每一鍊換成能除的同調鍊而改變。根據後一定理，只要一個 k 維的與一個 $n-k$ 維的（能除的）同調類的次序給定了，我們就能說他們有確定的交點數。在 §71 的定理 I 與 II 中我們雖未特別申明，但需要假設：對偶的 Betti 基與撓基的鍊必須在對偶的胞腔剖分上。現在無須假設如此，我們能用任何廣義鍊。

設有兩個能定向的而且確定了定向的假流形 $\mathfrak{K}^k$ 與 $\mathfrak{K}^{n-k}$，分別經過兩個綿續變換 f 與 g，換到一個能定向的流形 $\mathfrak{M}^n$。這假流形的規定定向的鍊 B^k 與 B^{n-k} 因此換成二廣義閉鍊 $f(B^k)$ 與 $g(B^{n-k})$ (頁 137)，而後二者有一個確定的交點數。若是不用 B^k 與 B^{n-k}；另用別個規定定向的鍊 $'B^k \sim B^k$ (在 $\mathfrak{K}^k$ 上) 與 $'B^{n-k} \sim B^{n-k}$ (在 $\mathfrak{K}^{n-k}$ 上)，當然

$$\left.\begin{aligned} f(B^k) &\sim f('B^k) \\ g(B^{n-k}) &\sim g('B^{n-k}) \end{aligned}\right\} \text{在 } \mathfrak{M}^n \text{ 上},$$

所以

$$\mathcal{S}(f(B^k), g(B^{n-k})) = \mathcal{S}(f('B^k), g('B^{n-k}))。$$

定向的假流形 $\mathfrak{K}^k$ 與 $\mathfrak{K}^{n-k}$ 在 $\mathfrak{M}^n$ 中的廣義像所以有一個確定的交點數，只與 $\mathfrak{K}^k$ 及 $\mathfrak{K}^{n-k}$ 的定向及綿續變換有關。在 $\mathfrak{K}^k$, $\mathfrak{K}^{n-k}$, 或 $\mathfrak{M}^n$ 不能定向的時候，模 2 的交點數還存在。

利用對偶的胞腔剖分來建立交點數的普遍理論，是非常簡捷的辦法。因此，在討論實例的時候，我們利用對偶的胞腔剖分中的胞腔式逼近，來確定兩個鍊的交點數。因此在從事討論實例以前，我們要證明對於求交點數有用的一條預備定理。

預備定理：設 $\mathfrak{M}^n$ 是一個能定向的流形，有了一個協合定向的單純剖分，而且 E^n 是這剖分上的一個定向的 n 維單純形。設 E^n 上有兩個平直的定向單純形 X^k 與 X^{n-k}，他們除中心 P_k 之外無其他共點。設 $\xi(P_0 P_1 \cdots P_k)$ 是 X^k 的法量分的一個定向單純形，$\eta(P_k P_{k+1} \cdots P_n)$ 是 X^{n-k} 的法量分的一個定向單純形。若是如是選取 ζ，使 n 維單純形 $\zeta(P_0 P_1 \cdots P_k \cdots P_n)$ 與 E^n 的定向相等（§29），即有

$$\mathcal{S}(X^k, X^{n-k}) = \xi\eta\zeta。$$

圖 127 中的 $n-k=2, k=1$。E^3 是含有 X^1 與 X^2 的一個大單純形，圖中未畫出。

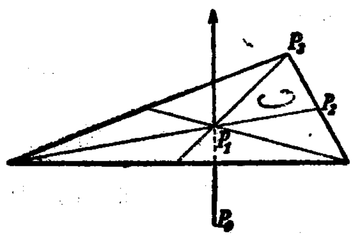


圖 127

證明：我們利用下述事實：兩對相通的廣義鍊的交點數相等。若是固定 X^k，綿續的變狀 X^{n-k} 成一新單純形 $'X^{n-k}$，使 X^{n-k} 的邊緣在變狀時與 X^k 無共點，X^k 的邊緣在變狀時與 X^{n-k} 無共點。因為 X^k, X^{n-k} 與 $X^k, 'X^{n-k}$ 組成兩對相通鍊（頁 162，定理 II），

$$\mathcal{S}(X^k, X^{n-k}) = \mathcal{S}(X^k, 'X^{n-k})。$$

先攷慮 $k=0$。在這情形下，我們能假設 X^0 的符號 $\xi=+1$，X^n

的定向與 E^n 的相等，即 $\eta=\zeta$。這假設並不限制普遍性。我們然後證明 $\mathcal{S}(X^0,X^n)=1$ 如下。我們分三步，使 X^n 變狀成 E^n，X^0 成 E^n 的中心。第一步，變狀 X^n 成以 X^0 爲相似中心，與 E^n 佔相似的地位的 X_1^n。我們還能假設，在變狀時，固定點 X^0 不與 X^n 的邊緣相遇。如此即有

$$\mathcal{S}(X^0,X^n)=\mathcal{S}(X^0,X_1^n)。$$

然後把 X_1^n 在相似中心 X^0 處投影成 E^n。投影時，X^0 並不與 X_1^n 的邊緣相遇，所以

$$\mathcal{S}(X^0,X^n)=\mathcal{S}(X^0,E^n)。$$

最後，把 X^0 變狀成 E^n 的中心 X_1^0，而且如像 X^0 一樣，把 X_1^0 用 $\xi=1$ 定向。因此又有

$$\mathcal{S}(X^0,E^n)=\mathcal{S}(X_1^0,E^n)。$$

結果

$$\mathcal{S}(X^0,X^n)=\mathcal{S}(X_1^0,E^n)。$$

$\mathfrak{M}^n$ 的單純剖分能看作是一個胞腔剖分，而且在這剖分中 E^n 是一個 n 維胞腔，X_1^0 是對偶胞腔。所以

$$\mathcal{S}(X_1^0,E^n)=1。$$

現在我們假設預備定理對於 $k-1$ 維與 $n-k+1$ 維的兩個單純形已經證明了，再證明他對於單純形 X^k 與 X^{n-k} 也成立。X^k 與 X^{n-k} 的定向分別由下列子單純形給定：

$$\xi(P_0\,P_1\cdots P_k), \qquad (X^k)$$

$$\eta(P_k\,P_{k+1}\cdots P_n)。 \qquad (X^{n-k})$$

我們能假設 P_{k-1} 是 X^k 的一個 $k-1$ 維面 X^{k-1} 的中心（不是一個更低維的面的中心）。於是有一個單純形 X^{n-k+1} 存在，以 X^{n-k} 為面，以 P_{k-1} 為中心。X^k 與 X^{n-k+1} 的交集是綫段 $(P_{k-1}P_k)$。*) 設 X^{k-1} 如是定向，使他在 X^k 的邊緣中的倍數是 $+1$。他的定向所以由子單純形

$$(-1)^k\xi(P_0P_1\cdots P_k) \qquad (X^{k-1})$$

給定。同樣的，設 X^{n-k+1} 如是定向，使 X^{n-k} 在 X^{n-k+1} 的邊緣中的倍數是 $+1$，他的定向就由子單純形

$$\eta(P_{k-1}P_k\cdots P_n) \qquad (X^{n-k+1})$$

給定。現在根據歸納法的假設

$$\mathcal{S}(X^{k-1},X^{n-k+1})=(-1)^k\xi\eta\zeta。$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(X^k,X^{n-k})&=\mathcal{S}(X^k,F[X^{n-k+1}])\\&=(-1)^k\mathcal{S}(F[X^k],X^{n-k+1})\quad[\text{用公式}(10)]\\&=(-1)^k\mathcal{S}(X^{k-1},X^{n-k+1})。\end{aligned}$$

所以我們得着要證明的結果

$$\mathcal{S}(X^k,X^{n-k})=\xi\eta\zeta。$$

設 A^k 與 B^{n-k} 是兩個廣義鍊，他們的點集的交集是 $\mathfrak{D}$。在求 A^k

*) 若是 X^{n-k+1} 在 E^n 中突出來，我們可以先用 P_k 為中心，縮小單純形 X^k 與 X^{n-k}。交點數 $\mathcal{S}(X^k,X^{n-k})$ 與係數 ξ,η,ζ 都不因此而改變。

與 B^{n-k} 的交點數之先，我們可以消去所有與 $\mathfrak{D}$ 無共點的單純形。因爲，根據公式 (8)，交點數可以分開，而且無共點的鍊的交點數等於 0。我們所要特別討論的只是下述情形：交集只由有限個點組成，而且總共祇有兩個單純形通過每一個交點，其通過情形與預備定理中所說的一樣。在這種情形下，我們說這兩個廣義鍊流暢的通過(*glatt durchsetzen*) 共點。先用預備定理確定個別的交點處的交點數；這些交點數的和就是交點數 $\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$。

這一節的方法與定理也能直接引伸到模 2 鍊上去。

§75 例子

1. 我們用能定向的曲面做例子。爲簡單計，我們只取虧格 $h=2$ 的閉曲面（雙環面）。設想這曲面已割開成基本八邊形（圖 128）。§41 中已證明閉鍊 a, b, c, d 組成他的一個 Betti 基。我們現在要求出他的一個對偶的基底。a, b, c, d 四鍊我們用八邊形的內域中的同調鍊 a', b', c', d' 替代，使交點易於表出。經過適當的單純剖分之後，這四個鍊流暢的通過交點。設曲面的定向由邊緣圓 $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,c\,d\,c^{-1}\,d^{-1}$ 給定。我們從這特殊的剖分知道

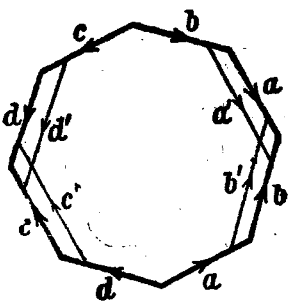


圖 128

$$\mathcal{S}(a', b') = 1, \quad \mathcal{S}(b', a') = -1,$$

與 § 74 中的公式 (9) 符合。因爲 a' 與 c' 無共點，$\mathcal{S}(a', c') = 0$。因爲 $a' \sim a$，$\mathcal{S}(a', a') = \mathcal{S}(a', a)$，而且 a 與 a' 無共點，$\mathcal{S}(a', a') = 0$。所以交點數方陣是*)

$$\begin{array}{c|cccc} \mathcal{S} & a & b & c & d \\ \hline a & & 1 & & \\ b & -1 & & & \\ c & & & & 1 \\ d & & & -1 & \end{array} \tag{1}$$

方陣中空白地位都是 0。

利用元變換與上橫列中的改變定向，(1) 就變成么方陣

$$\begin{array}{c|cccc} \mathcal{S} & b & -a & d & -c \\ \hline a & 1 & & & \\ b & & 1 & & \\ c & & & 1 & \\ d & & & & 1 \end{array} \tag{2}$$

所以

$$b,\ -a,\ d,\ -c$$

這四個鍊組成我們所求的，與

$$a,\ b,\ c,\ d$$

對偶的基底。

a, b, c, d 這四個鍊有下述的特別性質："他們能分成兩對，每對中

*) 第 i 個鍊在前與第 k 個鍊在後的交點數是方陣中第 i 橫列與第 k 縱列交點處的數。

的兩個鍊的交點數是 ± 1，不屬於同一對中的兩個鍊的交點數是 0。這不但是曲面的一個特別性質，而且是所有 $2(2m+1)$ 維的流形的共同性質 $(m=0,1,2,\cdots)$。證明如下。考慮一個流形 $\mathfrak{M}^{2k}$ 的"中間"維 k 的鍊。根據 §74 中的公式 (9)，

$$\mathcal{S}(A^k, B^k)=(-1)^{kk}\mathcal{S}(B^k, A^k)。$$

所以

$$\mathcal{S}(A^k, B^k)=\pm\mathcal{S}(B^k, A^k),$$

按照 k 是偶數或奇數而定。所以一個 Betti 基

$$B_1^k,\ B_2^k,\cdots,\ B_p^k,$$

的交點數方陣

$$\mathcal{S}(B_\mu^k,\ B_\nu^k)$$

在奇數 k 時，是反稱 (*schiefsymmetrisch*) 方陣，在偶數 k 時，是對稱方陣。但他們的行列式都等於 ± 1。因為我們能利用互相無關的整數么模變換來換縱橫列，得着兩個對偶的基底 (§71)，而對於對偶的基底，交點數方陣是么方陣。

在我們所注意的，k 等於奇數的情形下，我們得着下述的代數定理：利用同步的整數么模變換，一個整數么模的反稱方陣能變成 (1) 這種"方格式 (*Kästchenform*)"，其中沿主對角綫上的主子式都是互相連接的如下式的方陣

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

其他的元都是 0。*) $2(2m+1)$ 維流形上的如此得着的對偶的基底與能定向的 2 維閉曲面上的相配紐形剖綫類似。[45]

由此還可以看出，一個 $2(2m+1)$ 維的能定向的流形的中間維 ($k=2m+1$) 的 *Betti* 數是偶數。不但如此，根據 *Poincaré* 對偶定理

$$N=-\sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^{\nu}p^{\nu}$$
$$=-2p^0+2p^1-\cdots\pm 2p^{k-1}\mp p^k,$$

所以 N 也是偶數。

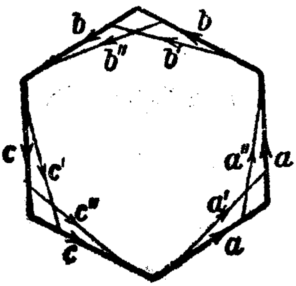


圖 129

2. 討論**不能定向的曲面**，必須用模 2 的交點數。今以虧格 3 的不能定向的曲面爲例。基本多邊形的未定向的棱 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ 組成一個一維的連通基 (§ 41)。圖 129 中表明棱 $\mathfrak{a}$ 由兩個不同的方法改變成同調的模 2 鍊 $\mathfrak{a}'$ 與 $\mathfrak{a}''$。既然 $\mathfrak{a}'$ 與 $\mathfrak{a}''$ 流暢的通過交點，模 2 的交點數是

$$\mathcal{S}(\mathfrak{a},\mathfrak{a})=\mathcal{S}(\mathfrak{a}',\mathfrak{a}'')=\breve{1},$$

而 $\mathfrak{a}'$ 與 $\mathfrak{b}$ 或 $\mathfrak{c}$ 的交點數都 $=\breve{0}$。所以模 2 的交點數方陣是

$\mathcal{S}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
$\mathfrak{a}$	$\breve{1}$		
$\mathfrak{b}$		$\breve{1}$	
$\mathfrak{c}$			$\breve{1}$

*) 參看 *K. Hensel* 與 *G. Landsberg, Theorie d. algebr. Funkt. einer Var.* 頁 636 以下 (*Leipzig* 1902)。

可見這連通基自成對偶。

3. **定向沿着一條道路進展。** 設一個 n 維流形 $\mathfrak{M}^n$ 有一個確定的胞腔剖分 $\mathfrak{M}^n_a$。$\mathfrak{M}^n_a$ 的零維胞腔與一維胞腔我們分別叫做 $\mathfrak{M}^n_a$ 的頂點與棱。設 w 是 $\mathfrak{M}^n_a$ 上的一條閉棱道。每一個頂點與對偶的胞腔剖分 $\mathfrak{M}^n_b$ 上的一個 n 維胞腔對應，每一條棱與 $\mathfrak{M}^n_b$ 的一個 $n-1$ 維胞腔對應。因為這閉道，這些 n 維與 $n-1$ 維的胞腔按照確定的次序互相間隔。現在給定他們的定向；與起點 O 相對應的 n 維胞腔任意的定向，次一個 n 維胞腔如是定向，使這兩個定向的胞腔在公共的 $n-1$ 維面上引出相反的定向，等等。如此我們能沿着整個的閉道進展 (*fortsetzen*) 第一個 n 維胞腔的定向。在沿着閉道回到起點的時候，在第一個 n 維胞腔所引出的定向或者是原來的定向，或者與原來的相反。在這兩種情形下，我們分別說，定向沿着這閉道不變或改變。給定了一個確定的胞腔剖分與這剖分中的一條棱道，這定義纔有意義；但我們可以利用交點數來證明這定義不依賴於胞腔剖分。

按照 § 24 中的意義，$\mathfrak{M}^n$ 能定向的充要條件是定向沿着 $\mathfrak{M}^n_a$ 上的每一條閉棱道不變。因此，我們此後只限于討論不能定向的流形。這種的流形恰有一個 $n-1$ 維撓係數等於 2 (頁 126)，所以恰有一個級 2 的 $n-1$ 維的同調類。這同調類中的 (廣義) 鍊的特徵，是他自身不零調，但兩倍零調。我們可以求得如此的一個 $n-1$ 維鍊 U^{n-1} 如下：任意的給定 $\mathfrak{M}^n_b$ 中的 n 維胞腔的定向，但給定之後就固定不變。再從全體如此定向的 n 維胞腔所組成的鍊 U^n 作他的邊緣。一個 $n-1$

維胞腔或不在 $F[U^n]$ 中出現，或出現的倍數是 2，按照關聯的兩個 n 維胞腔在這 $n-1$ 維胞腔上引出相反的或相同的定向而定。所以 $F[U^n]$ 等於一個鍊 U^{n-1} 的兩倍；而且 $2U^{n-1}\sim 0$, $U^{n-1} \nsim 0$ (參看頁 126，所不同的，只是我們現在用胞腔替代單純形)。

現在容易證明：定向沿着棱道 w 不變的充要條件，是 w 與 U^{n-1} 有偶數個交點。因為，$\mathfrak{M}^n_0$ 中的全體 $n-1$ 維胞腔，他的兩個關聯 n 維胞腔在其中引出相同的定向的，恰組成 U^{n-1}。所以我們能够這樣說：**定向沿着 w 不變的充要條件，是 w 與 U^{n-1} 的模 2 交點數等於 $\breve{0}$。***) 這定義可以推廣到任意的綿續道路，並不必限於棱道。既然我們已經證明，除去零調鍊相差之外，U^{n-1} 拓撲不變的確定了，所以這定義不依賴于 $\mathfrak{M}^n$ 的單純剖分。

兩個鍊的交點數，不因其中一個用同調鍊替代而有改變。所以定向沿着若干同調道路同時改變或同時不變。

定向沿着若干同倫道路，當然也同時改變或同時不變。用定向沿着道路改變與否做標準，$\mathfrak{M}^n$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的元分為兩組。**) 道路使定向不變的，組成 $\mathfrak{F}$ 的一個級 2 的子羣 $\mathfrak{H}$。因為，使定向改變的兩個道路的乘積，是一個使定向不變的道路。因此，屬於 $\mathfrak{H}$ 的 (兩葉的) 覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ (§ 55) 與流形 $\mathfrak{M}^n$ 的關係拓撲不變。

---

*) 正確的說，是屬於 w 與 U^{n-1} 的模 2 鍊的交點數等於 $\breve{0}$。

**) 此後所說的 $\mathfrak{M}^n$ 的道路 w，都從一個固定點 O 起始，所說的道路 $\tilde{w}$，都從 $\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 的在 O 之上的一個固定點 $\tilde{O}$ 起始。

$\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 能定向。證明如下：對偶的胞腔剖分 $\mathfrak{M}^n_a$ 與 $\mathfrak{M}^n_b$ 能印到 $\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 上去。若是定向沿着 $\widetilde{\mathfrak{M}}^n_a$ 的棱道 $\tilde{w}$ 改變，定向沿着 $\mathfrak{M}^n_a$ 中所屬的底道 w 也改變。w 將不屬於 $\mathfrak{H}$，即 $\tilde{w}$ 將不閉。這與假設矛盾。—— $\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 是唯一的兩葉的覆疊形。因爲，若 $'\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 是另一個兩葉的覆疊形，$'\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 的一條閉棱道 $'\tilde{w}$ 印成 $\mathfrak{M}^n$ 的一條閉棱道 $'w$，而且沿着 $'w$ 定向不變，所以 $'\tilde{w}$ 屬于 $\mathfrak{H}$。這屬于 $'\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ 的羣 $'\mathfrak{H}$ 所以是 $\mathfrak{H}$ 的一個子羣；既然 $'\mathfrak{H}$ 也是級 2 的子羣，$'\mathfrak{H}$ 與 $\mathfrak{H}$ 相同。[46]

§76 能定向性與雙側性

曲面的能定向性是把曲面看作是二維流形的一個性質，不依賴於含有這曲面的空間。能定向性與不能定向性之外，還有對于含有曲面的三維流形而說的單側性 (*Einseitigkeit*) 與雙側性 (*Zweiseitigkeit*)。爲使曲面在三維流形 $\mathfrak{M}^3$ 中的雙側性顯而易見，設想有一個小箭頭"垂直"的按裝在這曲面上，而且使他沿着曲面上一條閉道運動，回到起點。若是這箭頭沿着任一閉道回到起點，都不改變他的原來方向，這曲面在 $\mathfrak{M}^3$ 中就有雙側性，否則有單側性。

從前有時候把能定向的曲面叫做雙側的曲面。其實這兩種性質並不相同。下列所有可能的四種情形都存在：

1. 能定向的雙側的曲面，例如三維實數空間（封閉成三維球）中的球面與環面；

2. 不能定向的單側的曲面，例如投影空間中的投影平面；

3. 能定向的單側的曲面與

4. 不能定向的雙側的曲面。

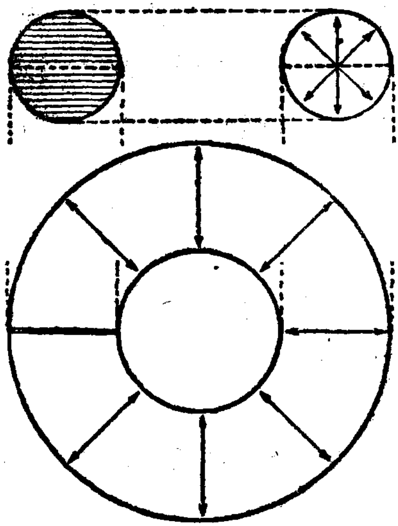


圖 130/131

在投影平面與圓周的拓撲積中,有後兩種曲面的例子。用一個環體,疊合他的邊緣環面上的每一經圓的每兩個徑點,作成這乘積。在一個經圓中張開的圓域就疊合成這不能定向的投影平面,他在這三維流形中顯然有雙側性。圖 130 中表出經平面與環體相交于兩個圓域,其中的一個畫有水平綫。——赤道平面却與環體相交於一個平環(圖 131),疊合徑點後,這平環封閉成一個環面,是流形中一個能定向的單側的曲面。

這一章中所介紹的概念,使我們能用算學的方式討論這直覺的事實,而且能推廣到任何維數。

設 $\mathfrak{M}^n$ 是一個 n 維流形,其中一個子集是一個 $n-1$ 維的流形 $\mathfrak{M}^{n-1}$。關于 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 浸沒在 $\mathfrak{M}^n$ 中,我們還要要求 $\mathfrak{M}^n$ 具有一個如次性質的單純剖分:$\mathfrak{M}^{n-1}$ 在這剖分中是一個子複合形。我們先利用如此一個確定的剖分,來界說 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的單側性與雙側性。把這剖分的法重分看作

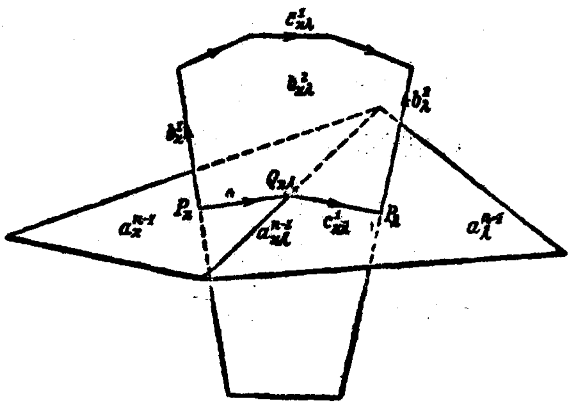


圖 132

一個胞腔剖分 $\mathfrak{M}^n_a$,法重分了的單純形當作 $\mathfrak{M}^n_a$ 的胞腔。因此 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 也有了一個胞腔剖分 $\mathfrak{M}^{n-1}_a$。$\mathfrak{M}^{n-1}_a$ 的 $n-1$ 維胞腔用 a^{n-1}_κ 表示。再假設——見圖 132——

P_κ 是 a^{n-1}_κ 的中心。

b^1_κ 是 a^{n-1}_κ 在 $\mathfrak{M}^n_a$ 中的對偶的一維胞腔,

$a^{n-2}_{\kappa\lambda}$ 是 $\mathfrak{M}^{n-1}_a$ 上的 a^{n-1}_κ 與 a^{n-1}_λ 的公共的 $n-2$ 維面,

$Q^{n-2}_{\kappa\lambda}$ 是 $a^{n-2}_{\kappa\lambda}$ 的中心,

$b^2_{\kappa\lambda}$ 是 $a^{n-2}_{\kappa\lambda}$ 在 $\mathfrak{M}^n_a$ 中的對偶胞腔,

$c^1_{\kappa\lambda}$ 是 $a^{n-2}_{\kappa\lambda}$ 在 $\mathfrak{M}^{n-1}_a$ 中的對偶胞腔;他的起點與終點分別是 P_κ 與 P_λ。

我們說過要用算學的方式處置直覺的事實;現在我們用 b^1_κ 這些定向胞腔替代按裝在曲面上的箭頭,叫做 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的橫貫的 (*transversal*) 一維胞腔。若是兩個 $n-1$ 維胞腔 a^{n-1}_κ 與 a^{n-1}_λ 有一個共面,我們就說與他們對偶的這兩個橫貫的一維胞腔 b^1_κ 與 b^1_λ 鄰接。既然關聯胞腔的對偶胞腔仍舊關聯,b^1_κ 與 b^1_λ 必在 $b^2_{\kappa\lambda}$ 的邊緣中出現:

$$F[b^2_{\kappa\lambda}] = \varepsilon_\kappa b^1_\kappa + \varepsilon_\lambda b^1_\lambda + \cdots。$$

按照係數 ε_κ 與 ε_λ 相反或相等,b^1_κ 與 b^1_λ 就分別說是等向 (*gleichgerichtet*) 或反向 (*entgegengesetzt gerichtet*)。現在可以正確的界說單側性與雙側性如下:

若是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 在 $\mathfrak{M}^n$ 中所有橫貫的一維胞腔能如是定向,使每鄰接

的兩個等向，$\mathfrak{M}^{n-1}$ 就說是在 $\mathfrak{M}^n$ 中雙側；否則說是單側。我們將來證明，這定義只表面的依賴于所選用的胞腔剖分。

$\mathfrak{M}^{n-1}_a$ 的胞腔中，只有含有 $b^2_{\kappa\lambda}$ 的中心 $Q_{\kappa\lambda}$ 的胞腔 $a^{n-2}_{\kappa\lambda}, a^{n-1}_\kappa, a^{n-1}_\lambda$，纔能與 $b^2_{\kappa\lambda}$ 有共點(根據 § 66 中的定理 VI)。所以 $c^1_{\kappa\lambda}$ 能看作是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 與 $b^2_{\kappa\lambda}$ 的交集。$b^2_{\kappa\lambda}$ 與 a^{n-1}_κ 相交於線段(一維單純形)$(P_\kappa\, Q_{\kappa\lambda})$。——這一維胞腔 $c^1_{\kappa\lambda}$ 可以叫做 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的棱。在 b^1_κ 與 b^1_λ 等向的時候，$b^2_{\kappa\lambda}$ 的邊緣圓上從 b^1_κ 的終點到 b^1_λ 的終點的弧，不與 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 相交的叫做 $c^1_{\kappa\lambda}$ 的補弧(*Ersatzbogen*)。現在設 C 是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 上的一條閉棱道，完全由 $c^1_{\kappa\lambda}$ 這種的棱連接而成的棱道。設這棱道依次連接下列諸點

$$P_1, P_2, \cdots, P_r, P_{r+1} = P_1。$$

我們給定橫貫的一維胞腔 $b^1_1, b^1_2, \cdots, b^1_r, b^1_{r+1}$ 的定向，使每相連的兩個等向；只要 b^1_1 的定向任意的給定了，其餘的定向都唯一的確定了。如此定向時，同一個橫貫的胞腔可以出現多次，而且可以有相反的定向。按照 $b^1_{r+1}=+b^1_1$ 或 $=-b^1_1$，我們說箭頭方向沿着 C 不變或改變。在 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 雙側的時候，顯然箭頭方向沿着每一條棱道 C 不變，而在單側的時候，箭頭方向至少沿着一條棱道改變。若是 C 中的每一條棱 $c^1_{\kappa\lambda}$ 用所屬的補弧 $\bar{c}^1_{\kappa\lambda}$ 替代，在箭頭方向不變的時候，結果是一條不與 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 相交的閉道 $\overline{C}$。在箭頭方向沿着 C 改變的時候，這道路只從 b^1_1 的終點到 b^1_1 的起點；接上胞腔 b^1_1 之後，就成一條以 P_1 爲起點的閉道 $\overline{C}$。C 顯然能變狀成他的補道(*Ersatzweg*)。其實，只要在胞腔 $b^2_{\kappa\lambda}$ 的半個上綿續的變狀每一棱 $c^1_{\kappa\lambda}$ 成補弧 $\bar{c}^1_{\kappa\lambda}$，同時使 $c^1_{\kappa\lambda}$ 的起點與終點沿着 b^1_κ 與 b^1_λ 走

到 b_κ^1 與 b_λ^1 的終點。假如箭頭方向沿着 C 不變，C 及其同倫的 $\overline{C}$ 與 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的模 2 交點數等於 $\breve{0}$；因爲 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 與 $\overline{C}$ 無共點。假如箭頭方向改變，$\mathfrak{M}^{n-1}$ 與 $\overline{C}$ 恰相交於一點 P_1，所以交點數是 $\breve{1}$。給定了 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的任一條閉道，既然有一條同調的棱道存在——因爲所有的棱 $c_{\kappa\lambda}^1$ 組成 $\mathfrak{M}_a^{n-1}$ 的對偶的胞腔剖分的棱複合形——，所以

定理 I：若是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 雙側，對於 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 上的任一條道路 C，模 2 的交點數 $\mathcal{S}(\mathfrak{M}^{n-1}, C) = \breve{0}$；若是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 單側，就有一條道路 C 存在，使 $\mathcal{S}(\mathfrak{M}^{n-1}, C) = \breve{1}$。這裏的 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 與 C 自然都看作是模 2 鏈。

交點數不依賴于單純剖分，所以這定理表出雙側性與單側性的，不依賴單純剖分的特徵。

我們還能說明雙側性與單側性的另一特徵。既然 C 是 $\mathfrak{M}_a^{n-1}$ 的對偶胞腔的一條棱道，這 $n-1$ 維的"面胞腔(*Flächenzelle*)" a_κ^{n-1} 的定向能沿着 C 進展：即任意的給定 a_1^{n-1} 的定向，而且如是依次給定下列胞腔的定向

$$a_1^{n-1},\ a_2^{n-1}, \cdots, a_r^{n-1},\ a_{r+1}^{n-1} = \pm\ a_1^{n-1},$$

使每一個與次一個在公共的 $n-2$ 維胞腔中引出相反的定向。按照 $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$ 或 $= -a_1^{n-1}$，我們說 C 是不變或改變"面定向(*Flächenorientierung*)"的一條道路。同樣的，這 n 維的"體 (*räumlich*)" 胞腔的定向也能沿着補道 $\overline{C}$ 進展。因爲 $\overline{C}$ 由 $\mathfrak{M}_a^n$ 的對偶的胞腔剖分的一維胞腔組成，我們說 $\overline{C}$ 是不變或改變體定向的一條道路，就能有意義。設 a_κ^n 表示與 a_κ^{n-1} 關聯的，而含有 b_κ^1 的終點的 n 維胞腔 $(b_1^1, b_2^1, \cdots, b_r^1, b_{r+1}^1$

中每相連的兩個我們還假設等向);而且設 a_κ^n 已如是定向,使 a_κ^{n-1} 在他的邊緣中出現的倍數是 $+1$:

$$F[a_\kappa^n] = a_\kappa^{n-1} + \cdots。 \tag{1}$$

若是在道路 $c_{\kappa\lambda}^1$ 上從 a_κ^n 的中心走到 a_κ^n $(\lambda=\kappa+1)$的中心,而且令 a_κ^n 定向沿着 $\bar{c}_{\kappa\lambda}^1$ 進展,所得着的定向必是 $+a_\kappa^n$(只要注意所有經過的 n 維胞腔都有一面是 a_κ^{n-2},此事實就顯然)。所以若是沿着 $\overline{C}$ 進展體定向,從 $+a_1^n$ 所得着的必是 $+a_{r+1}^n$。

現在區別下列諸款:

款 I: 箭頭方向沿着 C 不變;

a: 面定向沿着 C 不變;即 $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$,所以根據(1) $a_{r+1}^n = a_1^n$,那就是說,體定向沿着 $\overline{C}$ 也不變。

b: 面定向沿着 C 改變,即 $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$,所以 $a_{r+1}^n = -a_1^n$,那就是說,體定向沿着 $\overline{C}$ 也改變。

款 II: 箭頭方向沿着 C 改變;

a: 面定向沿着 C 不變: $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$。此時 a_{r+1}^n 與 a_1^n 在 a_1^{n-1} 的兩邊。根據(1),他們在 a_1^{n-1} 中引出相等的定向,那就是說,體定向沿着 $\overline{C}$ 改變。

b: 面定向沿着 C 改變: $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$。$a_{r+1}^n$ 與 a_1^n 在 a_1^{n-1} 中引出相反的定向。所以體定向沿着 $\overline{C}$ 不變。

因為我們也可以拓撲不變的界說定向沿着任一綿續道路進展(§ 75),而且同倫的道路,例如 C 與 $\overline{C}$,或同時改變定向或同時不變定

向，我們得着下述定理：

定理 II：若是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 在 $\mathfrak{M}^n$ 中雙側（款 I），面定向與體定向沿着 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的一條道路或者同時改變，或者同時不變。若是 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 在 $\mathfrak{M}^n$ 中單側（款 II），就至少有一條道路存在，只有面定向或只有體定向沿着他改變。

若是 $\mathfrak{M}^n$ 能定向，體定向沿着每一條道路不變。所以有下述定理：

定理 III：在一個能定向的 $\mathfrak{M}^n$ 中的 $\mathfrak{M}^{n-1}$，能定向即雙側，不能定向即單側。

特別的，三維實數空間中的每一個能定向的曲面雙側，每一個不能定向的曲面單側。

§77 環繞數

對於能定向的 n 維流形 $\mathfrak{M}^n$ 中的兩個零調的，或更普遍的，兩個能除的零調的，而無共點的廣義鍊 A^{k-1} 與 B^{n-k}，我們要界說一個環繞數。

先假設 A^{k-1} 零調，B^{n-k} 能除的零調（所以也可能零調）。A^{k-1} 所以是一個廣義鍊 A^k 的邊緣。我們界說環繞數

$$\mathcal{V}(A^{k-1},\ B^{n-k})$$

就是交點數

$$\mathcal{S}(A^k,\ B^{n-k})。$$

因爲閉鍊 B^{n-k} 已假設與 A^k 的邊緣無共點，這交點數存在。換句話說，環繞數 $\mathcal{V}(A^{k-1},\ B^{n-k})$ 就是 A^{k-1} 中張開的一個 k 維鍊與 B^{n-k} 的交

點數。不管在 A^{k-1} 中所張開的是 A^k 或 $'A^k$, 結果相同。因爲,既然 B^{n-k} 是能除的零調鍊,而且 $A^k-'A^k$ 是閉鍊,所以

$$\mathcal{S}(A^k-'A^k,\ B^{n-k})=0,\ \text{即}\ \mathcal{S}(A^k,\ B^{n-k})=\mathcal{S}('A^k,\ B^{n-k})。$$

例如 $\mathfrak{M}^n$ 是封閉三維實數空間而成的三維球, A^{k-1} 與 B^{n-k} 是一個環體的經圓與心線,兩個環繞的圓周。我們能用經圓中張開的一個圓域作 A^k。A^k 與環體的心線流暢的通過交點。所以經圓與心線的環繞數是 ± 1。

若是 A^{k-1} 只能除的零調,就有一數 $\alpha\neq 0$ 存在使 $\alpha A^{k-1}\sim 0$。(α 不必是使 $\alpha A^{k-1}\sim 0$ 成立的最小的數)。設 A^k 是在 αA^{k-1} 中張開的鍊;即

$$F[A^k]=\alpha A^{k-1}。$$

我們用下述方程式界說**環繞數** (*Verschlingungszahl*):[47]

$$\mathcal{V}(A^{k-1},\ B^{n-k})=\frac{1}{\alpha}\mathcal{S}(A^k,\ B^{n-k})。$$

在普遍的情形下, $\mathcal{V}$ 是一個分數。假設 $'A^k$ 的邊緣是 $'\alpha A^{k-1}$, 而且我們用的是 $'A^k$, 不是 A^k。我們所得着的環繞數就又是 $\frac{1}{'\alpha}\mathcal{S}('A^k,\ B^{n-k})$。但現在 $\alpha\,'A^k-'\alpha\,A^k$ 是閉鍊,他與每一個能除的零調鍊的交點數是 0,所以

$$\alpha\,\mathcal{S}('A^k,\ B^{n-k})='\alpha\,\mathcal{S}(A^k,\ B^{n-k}),$$

即

$$\frac{1}{'\alpha}\mathcal{S}('A^k,\ B^{n-k})=\frac{1}{\alpha}\mathcal{S}(A^k,\ B^{n-k}).$$

可見我們的定義與 A^k 的選取無干。

我們還能不用 B^{n-k} 與一個在 αA^{k-1} 中張開的鍊 A^k 的交點，而用 A^{k-1} 與一個在 βB^{n-k} 中張開的鍊 B^{n-k+1} 的交點。至多除去正負號的相差之外，我們還得着相同的環繞數。因爲

$$\mathcal{V}(A^{k-1}, B^{n-k}) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta}\mathcal{S}(A^k, \beta B^{n-k})$$
$$= (-1)^k\frac{1}{\alpha\beta}\mathcal{S}(\alpha A^{k-1}, B^{n-k+1})$$ [根據§74 中的主要公式(10)]
$$= (-1)^k\frac{1}{\beta}\mathcal{S}(A^{k-1}, B^{n-k+1})。$$

相當於 §74 中的公式 (8) 與 (9)，關於環繞數有下列公式：

$$\mathcal{V}(A^{k-1}, B_1^{n-k}+B_2^{n-k}) = \mathcal{V}(A^{k-1}, B_1^{n-k}) + \mathcal{V}(A^{k-1}, B_2^{n-k}),$$

$$\mathcal{V}(A^{k-1}, B^{n-k}) = (-1)^{(k-1)(n-k)+1}\mathcal{V}(B^{n-k}, A^{k-1})。$$

若是 A^{k-1} 用 B^{n-k} 在 $\mathfrak{M}^n$ 中的"餘空間 (*Komplementärraum*)"中的一個同調鍊 $'A^{k-1}$ 替代，環繞數並不改變。因爲，若是 U^k 與 B^{n-k} 無共點，而且

$$F[U^k] = A^{k-1} - 'A^{k-1},$$

我們就有

$$\mathcal{V}(A^{k-1} - 'A^{k-1}, B^{n-k}) = \mathcal{S}(U^k, B^{n-k}) = 0。$$

同樣的，B^{n-k} 能用 A^{k-1} 在 $\mathfrak{M}^n$ 中的餘空間中的一個同調鍊 $'B^{n-k}$ 替代。

然而若把 A^{k-1} 用 $\mathfrak{M}^n$ 中任一個同調的，而且與 B^{n-k} 無共點的

鍊替代，$\mathcal{V}(A^{k-1}, B^{n-k})$ 就增加一個整數。因為現在 $A^{k-1}-'A^{k-1}$ 零調，應用本節起始時所說的定義，我們就知道他與 B^{n-k} 的環繞數是一個整數。設兩個同調類 H^{k-1} 與 H^{n-k} 是同調羣的有限級的元。任意在這兩個同調類中取兩個不相交的代表，他們就有一個確定的環繞數。任意兩個這種的環繞數只相差一個整數。所以相當於 H^{k-1} 與 H^{n-k}，除去一個整數相差之外，有一個確定的環繞數存在。特別在 $2m+1$ 維的流形中，相當於每一個 m 維的有限級的同調類，有（兩個無共點的同調的 m 維鍊的）一個環繞數存在。這環繞數叫做示性環繞數（*Eigenverschlingungszahl*）。示性環繞數是流形的不變性，有時候可以用來區別不同胚的流形。我們用透鏡空間來說明示性環繞數的應用。

要想求出透鏡空間 (p, q) 中 b 軸的示性環繞數，先變狀 b，使他的起點 P 在下半個球形帽上運動，變成透鏡的銳棱上的一點 P'。相抵的終點 Q 因此在上半個球形帽上運動，變成透鏡的棱上的一個確定的點 Q'。使 b 的其他點在透鏡的內域中運動，變成透鏡的棱上的連接弧 $b'=P'Q'$。b' 是全個的棱的 $\frac{q}{p}$ 倍。b 與 b' 是兩個同調的一維閉鍊。要想求出示性環繞數，先取 b' 的 p 倍，也就是透鏡的棱的 q 倍；再取其中張開的一個二維鍊，例如剖分透鏡成兩個對稱的半球體的圓域 K^2 的 q 倍。既然 b 與 K^2 流暢的通過交點，他們的交點數等于 ± 1。所以 $\mathcal{S}(b, qK^2)=\pm q$，而所求的示性環繞數是

$$\mathcal{V}(b, b')=\pm\frac{q}{p}。$$

其他同調類的示性環繞數也能同樣的求出。因為閉鍊 b 組成一個一維的同調基，所有的同調類可用 b 的 ν 倍 $(\nu=0, 1, \cdots, p-1)$ 代表。因此

$$\mathcal{V}(\nu b, \nu b')=\pm\nu^2\frac{q}{p}。$$

這裏的正負號按照透鏡空間的定向而定。

若是兩個透鏡空間 (p, q) 與 (p', q') 同胚，他們的基本羣必須相同，那就是說 $p=p'$ 是一個必要條件。此外，在 (p, q') 中出現的示性環繞數 $\frac{q'}{p}$ 也必須在 (p, q) 中出現。所以

$\frac{q'}{p}$ 必須與 $\pm\nu^2\frac{q}{p}$ 中的一個數模 1 同餘。因此必有一個整數 ν 存在，使

$$q'\equiv\pm\nu^2 q\ (\text{模 } p)。$$

例如 $(p,q)=(5,1)$ 時，就只有 $q'=\pm1$ 纔適合這同餘式；$q'=2$ 不是解。因此透鏡空間 (5,1) 與 (5,2) 斷然不同胚 (*Alexander* [2],[10])。

一個三維流形的一維鏈的所有可能的示性環繞數的全體，構成一個拓撲不變性。在迄今所知道的最强的區別標誌——基本群——失效的時候，這不變性有時候還可以用來區別不同胚的流形。

對於透鏡空間 (7,1) 與 (7,2)，我們很容易證明，可能的示性環繞數相同。所以利用示性環繞數，仍舊不能斷定這兩個透鏡空間是否同胚。

透鏡空間 (3，1) 中的可能的示性環繞數，在用一個定向時是

$$0,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{4}{3}\equiv\tfrac{1}{3}\ (\text{模 } 1)。$$

在用另一個定向時是

$$0,\ -\tfrac{1}{3}。$$

因爲這兩組示性環繞數的不同，所以透鏡空間 (3，1) 無反向的拓撲的自身變換。我們也說：透鏡空間 (3，1) 非對稱 (*asymmetrisch*)。三維以下的流形無這種性質。[48]

習題：1．取兩個相同的透鏡空間 (3，1)，用求和法 (參看 § 62 中的習題 3) 做成兩個新流形。這兩個新流形雖有相同的基本羣，但不同胚。[舉出這拚聯的流形的一個 *Betti* 基，然後求出所有可能的示性環繞數。]

2．設能定向的流形 $\mathfrak{M}^n$ 有如次性質的一個 k 維的撓基：$A_1^k, A_2^k, \cdots, A_{Q^k}^k$ 與一個 $n-k-1$ 維的撓基：$B_1^{n-k-1}, B_2^{n-k-1}, \cdots, B_{Q^k}^{n-k-1}$：環繞數 $\mathfrak{V}(A_\mu^k, B_\nu^{n-k-1})=0$ 或 $=\frac{1}{c_\mu}$，按照 $\nu\neq\mu$ 或 $\mu=\nu$ 而定。這裏的 c_μ 是屬於 A_μ^k 的撓係數 (參看 § 71)。

3．若是一個能定向的三維流形 $\mathfrak{M}^3$ 恰有一個一維的撓係數，就至少有一個一維鏈存在，他的示性環繞數不等於 1。

4．若是一個能定向的三維流形的一維撓係數中，有一個是 $4x+3$ 式的質數，這流形就非對稱。

我們已經累次討論一個紐結的外空間。有一次我們用環面紐結來說明基本羣 (§52)，另一次我們從任一個紐結着手作成三維流形 (§65)，而且在 § 58 中我們曾用三叉紐結來表明覆疊複合形。最後這一種應

用與環繞數有密切的關係。

設在一個單純剖分了的三維球 $\mathfrak{S}^3$ 中，有一個確定了定向的紐結 k。設 k 由這單純剖分中的棱聯結而成；他不但不通過一個三邊形的三個頂點，而且無一維單純形是他的弦。用 $\mathfrak{S}^3$ 的法重分了的單純形，當作一個胞腔剖分 $\mathfrak{S}^3_a$ 中的胞腔。§65 中所界說的"挖去一個紐結"，就是消去對偶胞腔剖分 $\mathfrak{S}^3_b$ 中的，以 k 的頂點爲中心的三維胞腔。k 的棱的對偶二維胞腔是挖去的環體 $\mathfrak{B}$ 的經圓域，他們的邊緣是 $\mathfrak{B}$ 的經圓。這些經圓適當的定向之後，在 $\mathfrak{B}$ 的邊緣環面 $\mathfrak{T}$ 上同調。在 $\mathfrak{S}^3_b$ 上的，而且在外空間 $\mathfrak{A}$ 中的任一個一維胞腔鍊 u，在 $\mathfrak{S}^3$ 上零調，所以是一個胞腔鍊 U^2 的邊緣。從 U^2 中消去 k 的棱的對偶胞腔(即環體的經圓域)，結果是一個鍊 $'U^2$，他的邊緣由 u 與 $\mathfrak{B}$ 的某些經圓組成。既然所有的經圓在 $\mathfrak{T}$ 上與一個固定的經圓 m_0 同調，所以

$$u \sim \alpha\, m_0 \qquad (\text{在 } \mathfrak{A} \text{ 上})。$$

$\mathfrak{S}^3$ 適當的定向之後，m_0 與 k 的環繞數是 1。所以 α 就是 u 與 k 的環繞數：

$$\mathcal{V}(k, u) = \mathcal{V}(k, \alpha\, m_0) = \alpha。$$

若是兩個胞腔鍊 u, v 與 k 的環繞數都是 α，他們就都 $\sim \alpha\, m_0$，所以他們在 $\mathfrak{A}$ 上同調。既然每一個廣義的閉鍊在 $\mathfrak{A}$ 上與一個胞腔鍊同調，我們有下述定理：

定理：一個紐結 k 的外空間 $\mathfrak{A}$ 中，兩個廣義鍊 u 與 v 在 $\mathfrak{A}$ 上同調的充要條件，是他們與 k 的環繞數相等。

這就重新證明了，$\mathfrak{A}$ 的同調羣是自由循環羣（§ 65）。

在 $\mathfrak{A}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$（即紐結羣）中，所有的道路，與 k 的環繞數能被一個固定數 g 整除的，組成一個子羣 $\mathfrak{H}$。

我們要研究 $\mathfrak{A}$ 的，屬於子羣 $\mathfrak{H}$ 的覆疊形 $\tilde{\mathfrak{A}}$。

相當于 $\mathfrak{F}$ 的每一個元，有一個對應的環繞數，即這元的任一代表道路與 k 的環繞數。使 $\mathfrak{F}$ 的每一個元與對應的環繞數的模 g 餘數對應。這對應就規定了換 $\mathfrak{F}$ 成 g 級循環羣的一個同構變換。子羣 $\mathfrak{H}$ 換成的恰是循環羣的么元。所以 $\mathfrak{H}$ 是法子羣，而且 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 是 g 級的循環羣。因此 $\tilde{\mathfrak{A}}$ 是規則的覆疊形，升騰羣是循環羣；那就是說按照頁281中的意義，$\tilde{\mathfrak{A}}$ 是一個循環的覆疊形。$\tilde{\mathfrak{A}}$ 的特徵如下：底複合形 $\mathfrak{A}$ 的一條閉道印成 $\tilde{\mathfrak{A}}$ 上的一條閉道的充要條件，是他與 k 的環繞數 $\equiv 0$（模 g）。

如此得着的覆疊形並且是唯一的 g 葉的循環覆疊形。證明如下。設給定了一個循環覆疊形，而且 $\mathfrak{H}$ 屬於這覆疊形，即紐結羣 $\mathfrak{F}$ 的法子羣。$\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 就是 g 級的循環羣。同構變換 $\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 換每一個換位元 $F_iF_kF_i^{-1}F_k^{-1}$ 成 $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ 的么元。那就是說，$\mathfrak{F}$ 的每一個換位元屬於 $\mathfrak{H}$，所以 $\mathfrak{H}$ 含有 $\mathfrak{F}$ 的換位羣 $\mathfrak{K}$。所以 $\mathfrak{H}$ 由 $\mathfrak{F}$ 按照 $\mathfrak{K}$ 分開的若干剩餘類組成，而且這些剩餘類看作是 $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ 的元的時候，就組成 $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ 的一個 g 級的子羣。但是 $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ 是紐結羣的 *Abel* 化羣，所以是循環羣。他只有一個 g 級的子羣。這就證明了 $\mathfrak{H}$ 的唯一性，而且用羣論的方法證明了循環覆疊形的存在。

我們可以證明，每一個紐結中能張開一個無支點的能定向的曲面，

以這紐結爲邊緣。把外空間 $\mathfrak{A}$ 沿着這曲面切成一葉，再循環的聯結這樣的 g 葉。如此得着的顯然是一個覆疊形，而且有一個 g 級的循環的升騰羣。所以他就是這 g 葉的覆疊形。

循環覆疊形在紐結論中佔一個重要的地位。紐結羣的 *Abel* 化羣總是一個自由循環羣，而在普遍情形下，有限葉的循環覆疊形有一個一維的撓係數。兩個紐結相等的一個必要條件，是這 g 葉循環覆疊形的撓係數相同。*)

用紐結 k 的餘空間 $\mathfrak{S}^3-k$（三維球減去了紐結的點）替代外空間 $\mathfrak{A}$（三維球中挖去了紐結的空間），這一節中的定理仍然成立。因此我們也能同樣的界說 $\mathfrak{S}^3-k$ 的循環覆疊形。其實，若 u 與 v 是 $\mathfrak{S}^3-k$ 中的兩個廣義鍊，我們就能用一個細環體，挖去 k，使 u 與 v 完全在外空間 $\mathfrak{A}$ 中。若是 u, v 與紐結的環繞數相等：$\mathfrak{V}(u, k) = \mathfrak{V}(v, k)$，$u$ 與 v 就在外空間 $\mathfrak{A}$ 中同調，當然也在 $\mathfrak{S}^3-k$ 中同調。——$\mathfrak{A}$ 是有限複合形，$\mathfrak{S}^3-k$ 是無窮複合形。

*) *J. W. Alexander* [17], *K. Reidemeister* [6], 及其中所列舉的其他文獻。

第十一章 綿續變換

§78 變換度

前此所講述的方法，在複合形與流形的變換論中，可能的應用極多。我們現在只討論兩種：變換度 (*Abbildungsgrad*) 與不變點公式 (*Fixpunktformel*)。

一個複合形 $\mathfrak{K}$ 換到一個複合形 K 的綿續變換，我們在 § 31 中已把他們分成變換類(能互相同倫變狀的變換所組成的變換類)。給定了兩個複合形，列舉所有可能的變換類，是拓樸學的一個重要問題。如此普遍的問題，自然只對於特別的複合形是解決了，例如 K 是 n 維球，$\mathfrak{K}$ 是任意一個 n 維複合形的情形。*) 至于兩個變換 φ 與 ψ 屬于同一類的必要條件，我們已經知道的如下：由 φ 與 ψ 所引出的，換 $\mathfrak{K}$ 的同調羣到 K 的同調羣的同構變換相同；同樣的，由 φ 與 ψ 所引出的，換 $\mathfrak{K}$ 的基本羣到 K 的基本羣的（除去一個內在的自身的一一同構變換之外，唯一的確定了的）自身的一一同構變換相同。

設 $\mathfrak{K}$ 與 K 是能定向的，而且給定了定向的，n 維的閉假流形。他們的第 n 個同調羣都是自由循環羣。$\mathfrak{K}$ (K)的一個確定的單純剖分中的所有協合定向的單純形，組成 $\mathfrak{K}$ (K) 的一個同調基 B^n (B^n)。設換

*) 參看 *H. Hopf* [19]。

$\mathfrak{K}$ 到 K 的一個綿續變換 φ 換鍊 B^n 成一個與 γB^n 同調的鍊。φ 在第 n 個同調羣中,所引出的同構變換就由 γ 這一個數決定了。γ 叫做 φ 的變換度。[49] 變換度所以是一個變換類的不變性。若是 φ(在 $\mathfrak{K}$ 有了一個够細密的重分之後)變狀成一個單純變換 ψ, $\mathfrak{K}$ 的單純形有時候被 ψ 換成 K 的降秩單純形,但是鍊 B^n 的像鍊不但與 γB^n 同調,實際與 γB^n 相同。設 Σ^n 是 K 的單純剖分中的一個確定的單純形。若是 $\mathfrak{K}$ 中有 a 個單純形同向的換成 Σ^n, b 個單純形反向的換成 Σ^n, 我們就有 $\gamma = a - b$。用直覺的說法,變換度就是表示 $\mathfrak{K}$ 的像覆蓋 K 的代數層數。

例:頁 165 中所討論的一個 n 維單純形的邊緣的自身變換,交換兩個頂點,而使其他的頂點都不變。這變換的變換度等于 -1。我們能舉一個變換,他的變換度等于任一數 γ 如下:設 λ 與 θ 分別是球面 $\mathfrak{S}^2$ 上的經緯度,λ' 與 θ' 是另一球面 $'\mathfrak{S}^2$ 上的經緯度。下列公式

$$\lambda' = \gamma\lambda, \quad \theta' = \theta$$

就表出一個換 $\mathfrak{S}^2$ 成 $'\mathfrak{S}^2$ 的綿續變換。適當的給定 $\mathfrak{S}^2$ 與 $'\mathfrak{S}^2$ 的定向後,變換度就是 γ。若是 $\gamma \neq 0$, 用赤道圓與 $3|\gamma|$ 個等距的經圓單純的剖分 $\mathfrak{S}^2$。這剖分就換成 $'\mathfrak{S}^2$ 的一個單純剖分,由 $'\mathfrak{S}^2$ 的赤道圓與 3 個等距的經圓所分成。$'\mathfrak{S}^2$ 的每一個三邊形被 $\mathfrak{S}^2$ 上 $|\gamma|$ 個三邊形的像等向的 (*gleichsinnig*) 覆蓋着。但若 $\gamma = 0$, 整個的 $\mathfrak{S}^2$ 換成 $'\mathfrak{S}^2$ 的一個經圓;根據下述定理,這變換的變換度是零。

若是經過綿續變換 φ, $\mathfrak{K}$ 的像不覆蓋 K 的一個點 P, 或 φ 能變

狀成具有此性質的一個變換 ψ, φ 的變換度就等于零。

證明：取 K 的一個單純剖分，使 P 爲一個頂點。我們能假設這剖分如此細密，以 P 爲中心的單純星形 $\mathfrak{St}^n$ 與 $\psi(\mathfrak{K})$ 無共點。設從 K 消去 $\mathfrak{St}^n$ 的 n 維單純形而成的複合形是 $\overline{\mathrm{K}}$。廣義鍊 $\psi(B^n)$ 必在 $\overline{\mathrm{K}}$ 上。再根據逼近定理，$\overline{\mathrm{K}}$ 上有一個與 $\psi(B^n)$ 同調的單純鍊存在。因爲 $\overline{\mathrm{K}}$ 不含有 $\mathfrak{St}^n$ 的單純形，這單純鍊等于 0。所以 $\psi(B^n)\sim 0$, 即 ψ 的變換度等于 0。

設 $\mathfrak{K}$ 與 K 是同一個複合形。我們即知：一個複合形的自身變狀的變換度等於 $+1$。因爲自身么變換的變換度等于 $+1$。

設 $\mathfrak{K}$ 經過 φ 綿續的換到 K, K 又經過 φ_1 綿續的換到 K_1。$\varphi_1\varphi$ 是換 $\mathfrak{K}$ 到 K_1 的一個綿續變換。若 γ 與 γ_1 分別是 φ 與 φ_1 的變換度，$\varphi_1\varphi$ 的變換度就等于 $\gamma_1\gamma$。其實，設 B_1^n 在 K_1 上的意義與 B^n 在 $\mathfrak{K}$ 上，B^n 在 K 上的相同，即有

$$\varphi(B^n)\sim\gamma\mathrm{B}^n \qquad (\text{在 K 上}), \tag{1}$$

$$\varphi_1(B^n)\sim\gamma_1\mathrm{B}_1^n \qquad (\text{在 } \mathrm{K}_1 \text{ 上})。 \tag{2}$$

同調式 (1) 經過變換 φ_1 不變 (§ 27, 定理 I)。所以

$$\varphi_1(\varphi(B^n))\sim\gamma\varphi_1(\mathrm{B}^n)\sim\gamma\gamma_1\mathrm{B}_1^n \qquad (\text{在 } \mathrm{K}_1 \text{ 上}),$$

即所要證明的。

若 φ 特別是一個換 $\mathfrak{K}$ 成 K 的拓撲變換，而且 φ_1 是他的逆變換，$\varphi_1\varphi$ 即是么變換。所以 $\gamma\gamma_1=1, \gamma=\gamma_1=\pm 1$。所以換 $\mathfrak{K}$ 成 K 的一個拓撲變換的變換度等于 ± 1。我們在 § 36 中已知道這事實。根

據這事實，我們按照變換度等于 $+1$ 或 -1，區別拓撲變換爲同向的或反向的兩種。

若 K 是一個流形，變換度也能看作是 K 的一個（以正號 + 定向的）點 P 與像鍊 $\varphi(B^n) \sim \gamma \mathsf{B}^n$ 的交點數。因爲，$\mathcal{S}(P, \varphi(B^n)) = \mathcal{S}(P, \gamma\mathsf{B}^n) = \gamma\mathcal{S}(P, \mathsf{B}^n) = \gamma$（頁 345）。在 $\mathfrak{K}$ 是一個有邊緣的能定向的假流形，而且 K 是一個能定向的閉流形的時候，例如 $\mathfrak{K}$ 是一個圓域，K 是一個球面的時候，這定義也還能採用。在這種情形下，我們只考慮 K 的一個確定的，而且不屬于 $\mathfrak{K}$ 的邊緣像的點；變換度的定義，只對于如此一點而言。

習題：設一個能定向的有邊緣的 n 維假流形 $\mathfrak{K}$ 綿續的換到一個能定向的 n 維流形 K。

a) 若是 K 的兩個點 P 與 Q 能用一條道路連接，而且這道路不與 $\mathfrak{K}$ 的邊緣像相遇，則在 P 處與在 Q 處的變換度相同。

b) 若在這變換變狀時，K 的這點 P 自始至終不與 $\mathfrak{K}$ 的邊緣像相遇，則 P 點處的變換度在變狀的每一階段中都不變。

§79　跡數公式

我們現在要從事討論綿續變換的不變點的存在定理。爲證明這定理計，我們先推證 *H. Hopf* 的"跡數公式 (*Spurformel*)"。

設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的 n 維複合形，而且有一個確定的單純剖分。設 k 維單純形的個數是 α^k，

$$V_1^k,\ V_2^k,\ \cdots,\ V_{\alpha^k}^k$$

是所有 k 維鍊所組成的框格 $\mathfrak{L}^k$ 的一個基底。若是利用平直變換

$$'V_\varkappa^k = \sum_{\lambda=1}^{\alpha^k} r_{\varkappa\lambda}^k V_\lambda^k \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, \alpha^k) \quad (1^k)$$

規定 $'V^k_\varkappa$ 與每一個 $V^k_\varkappa$ 間的對應，這對應就確定了框格 $\mathfrak{T}^k$ 的一個自身同構變換 T^k。設對于所有維數 $k=0,1,\cdots,n$, 都同樣有了自身同構變換。我們並不取完全互相無關的變換 T^k, 我們却要要求他們保存邊緣 (*randtreu*)。保存邊緣就是說：若是一個鍊

$$U^k=\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}u_\varkappa V^k_\varkappa$$

根據方程式 (1^k) 換成鍊

$$'U^k=\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}u_\varkappa{}'V^k_\varkappa,$$

$F[U^k]$ 也應該根據方程式 (1^{k-1}) 換成 $F['U^k]$。下節中，我們再利用複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的一個自身的單純變換，規定保存邊緣的變換 T^k；現在我們却只運用所假設的保存邊緣性質。

我們從保存邊緣的條件知道，閉鍊換成閉鍊，零調鍊換成零調鍊，能除的零調鍊換成能除的零調鍊。我們只證明最後一事實爲例。設 $U^{k-1}\approx 0$, 卽有 $F[U^k]=c\,U^{k-1}$。因爲保存邊緣，$F['U^k]=c\,'U^{k-1}$, 卽 $'U^{k-1}$ 能除的零調。所以相當于一類互相能除的同調 k 維鍊，有一個確定的像類，因此保存邊緣的變換 T^k 也使 $0,1,\cdots,n$ 各維的 *Betti* 羣都各自有一個自身同構變換 B^k。

若是 B^k_ϱ $(\rho=1,2,\cdots,p^k)$ 組成一個 k 維的 *Betti* 基，k 維的 *Betti* 羣的同構變換 B^k 就可以用一個能除的同調式如像

$$'B^k_\varrho\approx\sum_{\sigma=1}^{p^k}\beta^k_{\varrho\sigma}B^k_\sigma\qquad(\varrho=1,2,\cdots,p^k)\qquad(2^k)$$

給定。我們所要推證的公式是變換 T^k 的跡數與變換 B^k 的跡數間的一個關係。所謂一個平直變換的跡數 (*Spur*)，就是方陣的主對角線上的係數的和；例如 T^k 的跡數便是

$$\mathcal{S}p\,\mathsf{T}^k = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \tau^k_{\varkappa\varkappa},$$

B^k 的跡數是

$$\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k = \sum_{\varrho=1}^{p^k} \beta^k_{\varrho\varrho}。$$

跡數是變換的不變性，不依賴于基底元 $V^k_\varkappa$ 與 B^k_ϱ 的選擇。*)

我們所要表明的公式是關聯矩陣 (§ 21) 的法式 H^k ($k = 0, 1, \cdots, n-1$) 的直接結論。H^k 的上橫列中是 A^k, B^k, C^k 三種鍊。A^k 能除的零調，B^k 組成一個 *Betti* 基 (我們假設這些 B^k 即是 (2^k) 中用相同字母所表示的基底)，C^k 不是閉鍊。而且

$$F[C^k_\mu] = c^{k-1}_\mu A^{k-1}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \gamma^{k-1})。 \tag{3}$$

A^k, B^k, C^k 全體組成 k 維鍊的框格 $\mathfrak{T}^k$ 的一個基底。我們就用他們作平直變換 (1^k) 中的 V^k。方程組 (1^k) 的方陣 $(\tau^k_{\varkappa\lambda}) = \mathsf{T}^k$ 因此分成九個小長方形

*) 參看 *A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 頁 148 (*Berlin* 1927)。跡數有時候也叫做方陣的"示性數 (*Charakter*)"。

T^k	A^k	B^k	C^k	
$'A^k$	$\alpha^k_{\rho\sigma}$	(1 2)	(1 3)	$\uparrow \gamma^k \downarrow$
$'B^k$	(2 1)	$\beta^k_{\rho\sigma}$	(2 3)	$\uparrow p^k \downarrow$
$'C^k$	(3 1)	(3 2)	$\gamma^k_{\rho\sigma}$	$\uparrow \gamma^{k-1} \downarrow$

(T^k)

我們現在要運用變換 T^k 的保存邊緣的性質。 從這性質，我們立即得出幾條推論。第一，既然 A^k 與 B^k 是閉鍊，$'A^k$ 與 $'B^k$ 也是閉鍊。所以 $'A^k$ 與 $'B^k$ 的式子中無 C^k，小長方形 (1 3) 與 (2 3) 中的係數必全是零。所以係數 $\beta^k_{\rho\sigma}$ 與能除的同調式 (2^k) 中同樣表示的係數 $\beta^k_{\rho\sigma}$ 相同。第二，既然鍊 A^k 能除的零調，像鍊 $'A^k$ 也如此，(12) 中的係數必全是零。第三，方程式 (3) 中的鍊用像鍊替代，所得着的方程式

$$F[{}'C^k_\mu] = c^{k-1}_\mu \; {}'A^{k-1}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \gamma^{k-1})$$

必須成立。經過 k 維鍊的平直變換 T^k 所得着的 $'C^k_\mu$ 是 A^k, B^k, C^k 的一個確定的平直組合，同樣的，經過 $k-1$ 維鍊的平直變換 T^{k-1} 的 $'A^{k-1}_\mu$ 只是 A^{k-1} 的一個確定的平直組合。若是把這些平直組合替入上述的方程式，而且注意到閉鍊 A^k 與 B^k 的邊緣等于零，我們就得着

$$F[\sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} \gamma^k_{\mu\nu} \; C^k_\nu] = c^{k-1}_\mu \sum_\nu \alpha^{k-1}_{\mu\nu} \; A^{k-1}_\nu \, .$$

再應用 (3)，得

$$\sum_{\nu} \gamma_{\mu\nu}^{k}\, c_{\nu}^{k-1}\, A_{\nu}^{k-1} = c_{\mu}^{k-1} \sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu}^{k-1}\, A_{\nu}^{k-1},$$

所以

$$\gamma_{\mu\nu}^{k}\, c_{\nu}^{k-1} = c_{\mu}^{k-1}\, \alpha_{\mu\nu}^{k-1}。$$

特別在 $\mu = \nu$ 時,

$$\gamma_{\mu\mu}^{k} = \alpha_{\mu\mu}^{k-1} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \gamma^{k-1})。$$

子方陣 $\Gamma^{k} = (\gamma_{\mu\nu}^{k})$ 的跡數與子方陣 $\mathsf{A}^{k-1} = (\alpha_{\mu\nu}^{k-1})$ 的跡數所以相等:

$$\mathcal{S}p\, \Gamma^{k} = \mathcal{S}p\, \mathsf{A}^{k-1}。 \tag{4}$$

作方程式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\mathsf{T}^{k} &= \sum(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\mathsf{A}^{k} + \sum(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^{k} + \sum(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\Gamma^{k}\\ &= \sum(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^{k} + \mathcal{S}p\,\Gamma^{0} + (-1)^{n}\mathcal{S}p\,\mathsf{A}^{n}。\end{aligned}$$

因爲 n 維的能除的零調鍊不存在，$\mathcal{S}p\,\mathsf{A}^{n} = 0$; 又因爲所有 0 維鍊都是閉鍊，$\mathcal{S}p\,\Gamma^{0} = 0$。即此證明了 *H. Hopf* 的跡數公式:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\mathsf{T}^{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^{k}。 \tag{H}$$

這公式是 *Euler* 公式 (§ 23) 的推廣。因爲，若是變換 T^{k} 都是么變換，矩陣 T^{k} 就是 α^{k} 列的么方陣，B^{k} 是 p^{k} 列的么方陣。所以

$$\mathcal{S}p\,\mathsf{T}^{k} = \alpha^{k}, \quad \mathcal{S}p\,\mathsf{B}^{k} = p^{k},$$

跡數公式就變成 *Euler* 公式。

§80 不變點公式

現在我們考慮我們的有限複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的任一個綿續自身變換 g_0。取 $\mathfrak{K}^n$ 的兩個單純剖分，一個粗疏，一個細密。設細密的剖分是粗疏的剖分的 m 次法重分，根據勻綿續定理，我們還能假設 m 如是之大，使每一個單純星形的像，完全屬于粗疏的剖分中一個單純星形的內域。

根據逼近定理，g_0 能變狀成一個單純變換 g_1。經過 g_1，細密剖分中每一個定向的 k 維單純形 e_ν^k 換成一個定向的單純形 E_ν^k：

$$e_\nu^k \longrightarrow E_\nu^k。 \tag{1}$$

這裏的 E_ν^k 或者是粗疏的剖分中的一個 k 維單純形，或者，在經過單純變換 e_ν^k 換成一個低于 k 維的單純形時，他是一個降秩的單純形，所以與 0 的意義相同。既然 E_ν^k 的 m 次法重分 $\dot{E}_\nu^k$ 是細密剖分中的一個 k 維鍊，單純變換 g_1 就使每一個 k 維單純形 e_ν^k 與細密的剖分中一個確定的 k 維鍊 $\dot{E}_\nu^k$ 與他對應：

$$e_\nu^k \longrightarrow \dot{E}_\nu^k。 \tag{2}$$

與任一鍊 $\sum\limits_\nu u_\nu e_\nu^k$ 對應的所以是鍊 $\sum\limits_\nu u_\nu \dot{E}_\nu^k$。這就給定了細密的剖分中所有 k 維鍊的框格 $\mathfrak{T}^k$ 的一個同構變換 T^k。

T^k 保存邊緣，因爲 $F[e_\nu^k]$ 換成 $F[E_\nu^k]$ 的法重分，即換成 $F[\dot{E}_\nu^k]$（頁 149，一個單純形的法重分的邊緣等于邊緣的法重分）。所以對于這些同構變換我們能應用 § 79 中的公式 (H)。

我們現在再假設 g_0 無不變點；設想 $\mathfrak{K}^n$ 在實數空間中。因此，一點 P 與他的像點 $g_0(P)$ 間的距離是 P 的一個綿續函數。根據頁 40 中的定理 III，確有一點存在，使這函數的值等于這些距離的下限 δ。因爲 g_0 無不變點，δ 是正數。若是所取的粗疏剖分已如是細密，使每一個單純形的直徑小于$\frac{\delta}{2}$，任一點 P 與他的像點 $g_0(P)$ 就屬于兩個無共點的單純形。既然變狀時，每一點不離開他原來所屬的單純形 (§ 31)，任一點 P 與這逼近的單純變換下的像點 $g_1(P)$，也屬于兩個無共點的單純形。e_{v}^k 的像鍊 E_{v}^k 因此不含有 e_{v}^k，所以

$$\mathcal{S}p\,\mathsf{T}^k = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n)。$$

對于無不變點的變換 (2)，跡數公式所以變成

$$\sum (-1)^k\,\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k = 0。$$

但是一個閉鍊經過 (2) 的像鍊是他經過 (1) 的像鍊的重分，所以這兩個像鍊同調。所以 (2) 在 *Betti* 羣中所實現的同構變換也就是(1) 在 *Betti* 羣中所實現的。而且，既然 g_0 與 g_1 這兩個變換能互相變狀 (§31，定理 III)，(1)所實現的同構變換也就是 g_0 所實現的。

因此我們得着下述定理：

定理：若是一個有限複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的一個綿續的自身變換無不變點，他在 *Betti* 羣中所產生的同構變換的跡數適合下列方程式：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k = 0 \qquad (\text{不變點公式})。^{[50]} \qquad (F)$$

所有的逼近在這定理中都不出現。

§81 應用

對于下述的應用公式 (F) 的例子，有三點極重要：

設 $\mathfrak{K}^n$ 是連通的複合形。一個以 + 號定向的點作成一個零維的 *Betti* 基（頁 90）。經過綿續變換，這以 + 號定向的點換成一個以 + 號定向的點。所以第零個 *Betti* 羣的變換的跡數 = 1。換句話說，

(I) 若 $p^0=1$，則 $\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^0=1$。

若是 $p^k=0$，k 維的 *Betti* 基只由 0 這 k 維鍊組成。所以

(II) 若 $p^k=0$，則 $\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k=0$。

(III) 若 $\mathfrak{K}^n$ 是一個能定向的 n 維流形，則 $p^n=1$，而且所有協合定向的單純形所組成的 n 維鍊 M^n 作成一個 *Betti* 基。若是 M^n 的像鍊 $\sim\gamma M^n$，$\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^n$ 就等于變換度 γ。

例：1. n 維球體。根據 §19，

$$p^0=1,\quad p^1=p^2=\cdots=p^n=0。$$

所以從 (I) 與 (II)，即知

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k=1-0+0-\cdots=1\neq 0。$$

球體的一個綿續的自身變換至少有一個不變點。

2. n 維球：根據 §19，

$$p^0=1,\quad p^1=p^2=\cdots=p^{n-1}=0,\quad p^n=1。$$

現在從不變點公式知道：若變換無不變點，就應當有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k = 1 + (-1)^n \gamma = 0。$$

所以 n 維球的一個自身變換若無不變點，他的變換度 $\gamma=(-1)^{n+1}$。這定理也可以用初等方法證明如下：設 g_0 是單位 n 維球的一個無不變點的自身變換，而且 P' 是一個點 P 的像點。因為 $P' \neq P$, P 與 P' 確定一個大圓。使 P 沿着他的大圓運動，走到他的徑點。這就規定了一個同倫變狀；變變換 g_0 成徑點的交換 g_1。g_0 與 g_1 所以有相同的變換度（頁 397）。既然 g_1 能看作是 $n+1$ 個反射的乘積，而且每一個反射的變換度等于 -1，g_1 的變換度所以等于 $(-1)^{n+1}$。在維數 $n=1,2,3$ 時，這結論顯而易見。

3. **無不變點的變狀**。若是一個複合形的綿續變換是這複合形的自身變狀，*Betti* 羣的同構變換都是么變換（§ 31，定理 *IV*），所以

$$\mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k = p^k。$$

根據 § 23 中的公式 (12)，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathcal{S}p\,\mathsf{B}^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha^k = -N。$$

與不變點公式相比較，即知 *Euler* 示性數等于零是無不變點的變狀的存在的一個必要條件。[51]

設複合形 $\mathfrak{K}^n$ 特別是一個 n 維流形 $\mathfrak{M}^n$。在奇數 n 時，這條件都滿足了（§ 69，定理 *IV*）；但是如果 n 是偶數，就只有在這流形有一個不變點的變狀的時候，這條件纔能滿足。例如有 h 個環柄或 k 個交叉

帽的閉曲面 $(n=2)$,

$$N = 2\,(h-1),\ 或 = k-2。$$

只在 $h=1$ 或 $k=2$ 時,卽只在能定向的與不能定向的環面時, N 等于零。所以這兩種閉曲面纔可能有不變點的變狀。其實他們的這種變狀的存在,顯然易證。

4. **挖去了若干個 n 維單純形的 n 維球體。** 設 $\mathfrak{V}^n$ 是單純剖分了的 n 維球體: $E_1^n, E_2^n, \cdots, E_l^n$ 是剖分中 l 個定向單純形,與 $\mathfrak{V}^n$ 的邊緣無共點。挖去了這 l 個單純形的中間點,結果是一個複合形 $\overline{\mathfrak{V}}^n$。$\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的 $p^0=1$。在 $k>0$ 時, $\mathfrak{V}^n$ 的剖分中的任一閉 k 維鍊 U^k 在 $\mathfrak{V}^n$ 上零調 (§ 19); 所以有一個單純鍊 U^{k+1} 存在,使

$$U^k = F[U^{k+1}]。\tag{1}$$

若是 $k<n-1$, 這挖去的 n 維單純形不在 U^{k+1} 中出現, U^{k+1} 已經在 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 上,所以在 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 上已經零調。所以 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的前 $n-1$ 個 *Betti* 數是

$$p^0 = 1,\quad p^1 = p^2 = \cdots = p^{n-2} = 0。\tag{2}$$

現在假設 $k=n-1$。因爲方程式 (1), 這給定的鍊 U^{n-1} 是一個單純鍊

$$U^n = \alpha_1 E_1^n + \cdots + \alpha_l E_l^n + {}'U^n \quad ({}'U^n\ 在\ \overline{\mathfrak{V}}^n\ 上)$$

的邊緣。所以

$$U^{n-1} = F[U^n] = \alpha_1 F[E_1^n] + \cdots + \alpha_l F[E_l^n] + F[{}'U^n],$$

卽

$$U^{n-1} \sim \alpha_1 F[E_1^n] + \cdots + \alpha_l F[E_l^n] \quad (在\ \overline{\mathfrak{V}}^n\ 上)。$$

這就是說，$\overline{\mathfrak{V}}^n$ 上的每一個 $n-1$ 維鍊與

$$F[E_1^n], \cdots, F[E_l^n] \tag{3}$$

這 l 個邊緣鍊的一個平直組合同調。但是 (3) 中的邊緣鍊同調無關。證明如下：若假設一個同調式

$$\beta_1 F[E_1^n], + \cdots + \beta_l F[E_l^n] \sim 0$$

在 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 上成立，$\overline{\mathfrak{V}}^n$ 上就有一個 n 維鍊 $W^n \neq 0$ 存在，使

$$F[W^n] = \beta_1 F[E_1^n] + \cdots + \beta_l F[E_l^n]。$$

設想把 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的 l 個洞塞滿，卽知 $W^n - \beta_1 E_1^n - \cdots - \beta_l E_l^n$ 是 $\mathfrak{V}^n$ 上的一個閉 n 維鍊。但因爲 $\mathfrak{V}^n$ 上只有 0 這閉 n 維鍊，而且 W^n 不含有 E_i^n 這些單純形，所以 $\beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$。所以 (3) 中的 l 個鍊組成 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的一個 $n-1$ 維 Betti 基，$\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的 $p^{n-1} = l$。

關于 $\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的外邊緣，我們假設他變換成自身，或更普遍的假設他變換成一個同調的 $n-1$ 維鍊；他也可以縮成點。若是這 l 個邊緣球 (3) 中的 a 個各變換成自身，或變換成同調鍊，而其餘的 $b = l-a$ 個互相交換，變換方陣 B^{n-1} 的主對角線上就有 a 個 $+1$，與 b 個 0。所以

$$\mathcal{S}p\, \mathsf{B}^{n-1} = a;$$

因爲(2)，

$$\mathcal{S}p\, \mathsf{B}^0 = 1, \quad \mathcal{S}p\, \mathsf{B}^1 = \cdots = \mathcal{S}p\, \mathsf{B}^{n-2} = 0。$$

因此，從不變點公式得着的無不變點的必要條件是

$$1 - 0 + \cdots + (-1)^{n-1} a = 0,$$

卽

$$a=(-1)^n。$$

既然 a 必須是一個正數，n 若是奇數，$\overline{\mathfrak{V}}^n$ 的變換都有不變點。n 若是偶數，只有 $a=1$ 時，無不變點的變換纔存在。例如一個平環，他的繞中心的旋轉無不變點；反之，一個球殼不能有一個無不變點的自身變換存在，使他的兩個邊緣球換成同調鍊。

習題：1．若是 n 維球經過一個單值而綿續的自身變換，他有一個點不是像點，這變換必有一個不變點。

2．投影空間 $\mathfrak{P}^n$ 的一個綿續的自身變換，n 若是偶數，必有一個不變點；n 若是奇數，在變換度等于 1 的時候，纔有一個無不變點的變換存在。

3．球面的一個綿續的自身變換或有一個不變點，或有一個點換成徑點，或二者兼有。

4．球面上無綿續的矢集（*Vektorfeld*）。

第十二章 羣論中的定理

§82 母元與關係

拓撲學與羣論的關係密切交錯。我們在前面研究拓撲學時所引用過的羣論中的定理，我們現在彙集在這一章中，加以簡短的說明。但是在拓撲學中佔重要地位的羣，多數是由母元（*Erzeugende*）與關係（*Relation*）確定的，與代數學或幾何學中通常的羣不同。所以我們先要說明如此確定羣的方法。

設 $\mathfrak{F}$ 是一個有限羣或無窮羣*)，

$$A_1, A_2, \cdots, A_a \tag{1}$$

是 $\mathfrak{F}$ 中的一組元（不必完全不同）。若是 $\mathfrak{F}$ 中的每一元都可以寫作 $A_1, A_2, \cdots, A_a$ 與他們的逆元

$$A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_a^{-1} \tag{2}$$

的乘積，(1)中的元就叫做 $\mathfrak{F}$ 的母元。這種的一個乘積叫做一個"字"（*Wort*）。如例 $A_1A_1^{-1}$ 或 $A_2^{-4}A_6A_3^5$ 都是字。為形式劃一起見，我們也用一個空無所有的，不含有母元的字。每一字代表羣的一元，但是不同的字可以代表羣的同一元。至於這空無所有的字，就是羣的么元，用 1

*) 羣的定義與基本定理，可參考 B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra I* (Berlin 1930) 第二章，或 K. *Reidemeister* [7]。

表示。我們簡單的用 $W(A_i)$ 代表一個字。若是 $W_1(A_i)$ 與 $W_2(A_i)$ 兩個字中的元依次一一相同，我們就說他們全同 (*identisch*)，用

$$W_1(A_i) \equiv W_2(A_i)$$

表示。若是 $W_1(A_i)$ 與 $W_2(A_i)$ 代表羣中相等的元，但他們的元不一定依次一一相同，我們就說他們相等，寫作

$$W_1(A_i) = W_2(A_i)。$$

若是顛倒 $W(A_i)$ 中的元的次序，同時完全改變每元的指標的正負號，如此得着的一個字叫做逆字 $W^{-1}(A_i)$；如同通常羣論中一樣，他代表羣元 $W(A_i)$ 的逆元。

若是二字 $W_1(A_i)$ 與 $W_2(A_i)$ 相等，我們說這方程式

$$W_1(A_i) = W_2(A_i)$$

是羣 $\mathfrak{F}$ 的母元 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 間的一個關係。這方程式通常寫作

$$W_1(A_i)\, W_2^{-1}(A_i) = 1,$$

等號右邊的 1 代表羣的么元。所以求出所有的關係的問題，就是求出么元的所有的表示法的問題。所有的關係自然也包括下列顯明關係

$$A_i\, A_i^{-1} = 1, \quad A_i^{-1}\, A_i = 1 \tag{3}$$

在內。

設 $R(A_i) = 1$ 是一個關係，$W(A_i)$是 $\mathfrak{F}$ 的任一字。我們"應用這關係 $R(A_i) = 1$"，能從 $W(A_i)$ 得着新字。所謂應用這關係 $R(A_i) = 1$，即是消去 W 中含有的 $R^{\pm1}$，從 $W = W_1R^{\pm1}W_2$ 得着新字 W_1W_2，或在 W 中加入 $R^{\pm1}$ 這個字，因為 $R^{\pm1} = 1$，如此得着的字與舊字

都代表羣中相等的元。

設

$$R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\cdots,R_r(A_i)=1 \tag{4}$$

是 $\mathfrak{F}$ 中有限個關係；r 也可以 $=0$。若是能應用關係 (4) 與顯明關係 (3)，把一個字 $W(A_i)$ 化成空無所有的字，

$$W(A_i)=1$$

就也是 $\mathfrak{F}$ 中的一個關係，叫做關係 (4) 的**隨從關係** (*Folgerelation*)。若是 $\mathfrak{F}$ 中每一關係都是 (4) 的隨從關係，(4) 就叫做 $\mathfrak{F}$ 的**一組界說關係** (*ein System definierender Relationen*)。(4) 成爲一組界說關係的特徵是：表示么元的任一字都可以由應用關係 (4) 與顯明關係 (3) 化成空無所有的字。因此任一字也可以由應用這些關係變成他的任一相等的字。——對于一組界說關係，我們並未要求他們互相獨立，那就是說，並未要求每一關係都不是其餘的關係的隨從關係。

母元 (1) 與一組界說關係 (4) 完全確定了 $\mathfrak{F}$ 這羣。因爲有了(4)，(4)的所有的隨從關係都已經確定，因此羣的么元的所有表示法也已經確定了。而且給定了二字，就可以斷定他們是否相等。可是要用一種計算的方法去確定二字是否相等，除去特別的羣之外，還是一個未解決的問題 (字的問題)。

我們假定母元與關係都只有有限個。這種限制在羣論中並無理由，常見的羣也有只能用無窮多個母元表示的。例如除去零之外的所有的有理數，用代數的乘法作羣中的乘法，就組成一羣；因爲有無窮多

的質數，所以這羣只能用無窮多個母元表出。但是我們研究的中心只是有限的複合形；在這種複合形的討論中，只需要有有限個母元與關係的羣。所以爲簡單起見，我們加上這個限制。

例：1. 若是用代數的加法當作羣的乘法，所有的整數組成一個無窮羣。+1 這數可以當作母元 A。0 這數是羣的么元。A^k 是 $+k$ 這數。一個字 $A^{\varepsilon_1}A^{\varepsilon_2}\cdots(\varepsilon_i=\pm 1)$ 可以應用顯明關係變成 A^k；只有 $k=0$ 的時候，他纔能等于羣的么元。所以每一關係都是顯明關係的隨從關係，一組界說關係是空無所有的，不含有關係的組。這羣只有一個母元，無界說關係。這種羣叫做自由循環群。

2. 整數模 g 的餘數類用通常的加法聯合，組成一個 g 級的羣。母元是含有 1 這數的餘數類。界說關係只有一個，就是 $A^g=1$；這裏的 1 代表么元，是含有 0 這數的餘數類。這種羣叫做 g 級的循環群。

一個羣若是用一組母元與界說關係給定的，可以用下列的運算法從這一組得着其他組：

1. 增減一個隨從關係。

若是

$$R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\cdots,R_r(A_i)=1 \tag{5}$$

是 $\mathfrak{F}$ 的一組界說關係，而且 $R_{r+1}(A_i)=1$ 是 (5) 的一個隨從關係，

$$R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\cdots,R_r(A_i)=1,\ R_{r+1}(A_i)=1 \tag{6}$$

就也是一組界說關係；反之亦然。因爲(5)的所有的隨從關係與(6)的所有的隨從關係相同。

2. 增減一個母元。

設

$$A_1,\ A_2,\cdots,A_a \tag{7}$$

是 $\mathfrak{F}$ 的母元，(5) 是一組界說關係。我們總可以增加任意一個乘積

$W(A_i)=A_{a+1}$，當作新母元。對於母元

$$A_1, A_2, \cdots, A_a, A_{a+1} \tag{8}$$

說，

$$R_1(A_i)=1, R_2(A_i)=1, \cdots, R_r(A_i)=1, A_{a+1}^{-1}W(A_i)=1 \tag{9}$$

是一組界說關係。這句話可以證明如下：設

$$R(A_1, A_2, \cdots, A_{a+1})=1$$

是 $\mathfrak{F}$ 的任一關係。應用 $A_{a+1}=W(A_i)$ 這關係，我們可以寫成

$$R(A_1, A_2, \cdots, W(A_i))=1; \tag{10}$$

A_{a+1} 這新元在這裏不出現。因為 (5) 是 $\mathfrak{F}$ 的一組界說關係，(10) 必定是 (5) 的隨從關係。因此，應用 (5) 與顯明關係，可以把 (10) 的左邊化成空無所有的字。

反之，假設 (9) 是母元 (8) 間的一組界說關係，我們要證明 (7) 也是 $\mathfrak{F}$ 的母元，(5) 是這些母元間的一組界說關係。因為 $A_{a+1}=W(A_i)$，母元 (8) 的每一乘積也可以用母元 (7) 表示。根據假設，任一關係 $R(A_1, A_2, \cdots, A_a)=1$ 是 (9) 的一個隨從關係。所以有一列有限個字：

$$R\ (A_1, A_2, \cdots, A_a)$$
$$R'\ (A_1, A_2, \cdots, A_a, A_{a+1})$$
$$R''(A_1, A_2, \cdots, A_a, A_{a+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其中最後一字空無所有，其餘任一字由應用一個關係 (9) 或一個顯明

關係 $A_i^{\varepsilon} A_i^{-\varepsilon} = 1$ $(\varepsilon = \pm 1; i = 1, 2, \cdots, a+1)$ 化成下一字。用 $W(A_i)$ 替代每一個 A_{a+1}，得着下面這一列字：

$$R\ (A_1, A_2, \cdots, A_a)$$

$$R'\ (A_1, A_2, \cdots, A_a, W(A_i))$$

$$R''(A_1, A_2, \cdots, A_a, W(A_i))$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot。$$

所以我們只需證明，應用關係 (5) 與顯明關係 $A_i^{\varepsilon} A_i^{-\varepsilon} = 1$ $(\varepsilon = \pm 1; i = 1, 2, \cdots, a)$，每一字可以化成下一字。若是應用 (9) 中前 r 個關係中之一或一個顯明關係 $A_i^{\varepsilon} A_i^{-\varepsilon} = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, a)$，可以從

$$R^{(k)}(A_1, A_2, \cdots, A_a, A_{a+1})$$

得着

$$R^{(k+1)}(A_1, A_2, \cdots, A_a, A_{a+1}),$$

應用同一關係也可以從

$$R^{(k)}(A_1, A_2, \cdots, A_a, W(A_i))$$

得着

$$R^{(k+1)}(A_1, A_2, \cdots, A_a, W(A_i))。$$

若從

$$R^{(k)}(A_1, A_2, \cdots, A_{a+1}) \quad 得着 \quad R^{(k+1)}(A_1, A_2, \cdots, A_{a+1})$$

是由於應用關係 $A_{a+1}^{-1} W(A_i) = 1$ 或顯明關係 $A_{a+1}^{\varepsilon} A_{a+1}^{-\varepsilon} = 1$；應用 $W^{\varepsilon}(A_i)\, W^{-\varepsilon}(A_i) = 1$，當然可以從

$$R^{(k)}(A_1, A_2, \cdots, A_a, W(A_i))$$

得着

$$R^{(k+1)}(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_a,\ W(A_i))。$$

$W^{\varepsilon}(A_i)\ W^{-\varepsilon}(A_i) = 1$ 這關係是可以完全化成顯明關係的。

應用有限次上面所說的基本運算，可以把確定 $\mathfrak{F}$ 的任意一組母元與界說關係，改變成任意另一組母元與界說關係。這定理後面並不需要。要證明這定理，只須增加新母元與隨從關係，做成第三組的母元與界說關係，使第一第二兩組中的母元都在第三組中出現，然後從第一組或第二組推出這第三組。

§83 同構變換與商羣

設相當于羣 $\mathfrak{F}$ 中每一元 F，第二羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 中恰有一元 $\overline{F}$ 與他對應；而且乘積 $F_1F_2 = F_3$ 的像元 $\overline{F}_3$ 等于因子的像元的乘積 $\overline{F}_1\overline{F}_2$。這種對應叫做換 $\mathfrak{F}$ 到 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的同構變換。若 $\overline{\mathfrak{F}}$ 中每一元是 $\mathfrak{F}$ 中的一元的像元，這個同構變換就說是換 $\mathfrak{F}$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}$。若換 $\mathfrak{F}$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的變換是一一的變換，$\mathfrak{F}$ 與 $\overline{\mathfrak{F}}$ 就說是一一同構的 (*isomorph*) 羣。關于二羣的同構變換，有下列基本定理，表明換 $\mathfrak{F}$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的同構變換與 $\mathfrak{F}$ 的商羣的關係：

同構定理：設有一個同構變換，換 $\mathfrak{F}$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}$，$\mathfrak{F}$ 中所有的元，與 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的么元對應的，必定組成一個法子羣 $\mathfrak{N}$，而且 $\overline{\mathfrak{F}}$ 與商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 一一同構。反之，若 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的任一法子羣，必有一個同構變換，換 $\mathfrak{F}$ 成 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$。這定理的證明，讀者可參看 *B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I*, 頁 35 (*Berlin* 1930)。

$\mathfrak{F}$ 若是用母元與界說關係給定的[§ 82, (1),(4)], 商羣 $\overline{\mathfrak{F}}=\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 必能用母元與關係表出。假定有有限個元 $S_1(A_i), S_2(A_i), \cdots, S_s(A_i)$ 存在, $\mathfrak{N}$ 是含有這些元的最小的法子羣（假若這有限個元是 $\mathfrak{N}$ 的一組母元,這假設總可滿足的)。因爲 $\mathfrak{N}$ 是法子羣,每一如下式的元

$$F(A_i)\ S_\lambda^\varepsilon(A_i)\ F^{-1}(A_i) \qquad (\varepsilon=\pm 1) \quad (1)$$

屬于 $\mathfrak{N}$。因此有限個這種元的乘積也屬于 $\mathfrak{N}$。反之,因爲這種乘積已組成一個法子羣,而且因爲 $\mathfrak{N}$ 是最小的法子羣, $\mathfrak{N}$ 的每一元必是這種的一個乘積。

若某一字母代表 $\mathfrak{F}$ 的一元, $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 中的含有這元的剩餘類,就用這字母加一上橫線代表。

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_a \quad (2)$$

顯然是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的母元,而且他們有下列關係:

$$\left.\begin{array}{l} R_1(\overline{A}_i)=\overline{1}, \cdots, R_r(\overline{A}_i)=\overline{1}, \\ S_1(\overline{A}_i)=\overline{1}, \cdots, S_s(\overline{A}_i)=\overline{1}。\end{array}\right\} \quad (3)$$

$\overline{1}$ 這剩餘類含有 $\mathfrak{F}$ 的么元,就是這法子羣 $\mathfrak{N}$。

我們說, (3) 是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的一組界說關係,那就是說,任一關係 $R(\overline{A}_i)=\overline{1}$ 是 (3) 的一個隨從關係。$R(\overline{A}_i)=\overline{1}$ 的意義是說 $R(A_i)$ 屬于 $\mathfrak{N}$。$\mathfrak{N}$ 的每一元都等于如式 (1) 的元的一個乘積。所以應用關係 $R_1(A_i)=1, \cdots, R_r(A_i)=1$ 與顯明關係,能把 $R(A_i)$ 化成如式 (1) 的元的一個乘積。應用關係 $R_1(\overline{A}_i)=\overline{1}, \cdots, R_r(\overline{A}_i)=\overline{1}$ 與顯明關係,同樣的能把 $R(\overline{A}_i)$ 化成 $S_1^{\pm1}(\overline{A}_i), \cdots, S_s^{\pm1}(\overline{A}_i)$ 的變形元的一個乘積。然

後應用關係 $S_1(\overline{A}_i)=\overline{1},\cdots,S_s(\overline{A}_i)=\overline{1}$ 與顯明關係,這乘積卽變成空無所有的乘積。

所以一個羣的關係加上某種補助的關係，就組成一個商羣的界說關係。

這裏證明的是下述定理:

定理 I: 設羣 $\mathfrak{F}$ 的母元是

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_a,$$

界說關係是

$$R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\ \cdots,\ R_r(A_i)=1。$$

設 $\mathfrak{N}$ 是含有下列 s 個元

$$S_1(A_i),\ S_2(A_i),\ \cdots,\ S_s(A_i)$$

的最小法子羣，設 $\overline{A}_i$ 代表商羣 $\overline{\mathfrak{F}}=\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 中含有 A_i 的剩餘類。

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \cdots,\ \overline{A}_a$$

卽組成 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的一組母元,而且

$$R_1(\overline{A}_i)=\overline{1},\ R_2(\overline{A}_i)=\overline{1},\ \cdots,\ R_r(\overline{A}_i)=\overline{1},$$

$$S_1(\overline{A}_i)=\overline{1},\ S_2(\overline{A}_i)=\overline{1},\ \cdots,\ S_s(\overline{A}_i)=\overline{1}$$

卽組成 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的一組界說關係。

推證定理 I 的時候,我們從一個給定的法子羣 $\mathfrak{N}$ 着手,然後求出 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 的關係。我們也能採取相反的步驟,在 $\mathfrak{F}$ 的關係之外,任意的增加補助的關係,把含有補助的關係的左邊的最小法子羣叫做 $\mathfrak{N}$，得着商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$。

我們要應用同構定理,推證 § 20 中用過的一條定理。假設三個羣

$$\mathfrak{F},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{N} \tag{4}$$

之中,$\mathfrak{D}$ 與 $\mathfrak{N}$ 都是 $\mathfrak{F}$ 的法子羣,而且 $\mathfrak{D}$ 含有 $\mathfrak{N}$。$\mathfrak{N}$ 確定一個換 $\mathfrak{F}$ 成商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}=\overline{\mathfrak{F}}$ 的同構變換。這變換分別換 (4) 中的三個羣成下列的三個羣:

$$\overline{\mathfrak{F}}=\mathfrak{F}/\mathfrak{N},\ \overline{\mathfrak{D}}=\mathfrak{D}/\mathfrak{N},\ \overline{\mathfrak{N}}=\mathfrak{N}/\mathfrak{N}=\overline{1}。$$

因爲 $\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的法子羣,所以 $\overline{\mathfrak{D}}$ 也是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的法子羣,而且確定一個換 $\overline{\mathfrak{F}}$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}/\overline{\mathfrak{D}}$ 的同構變換。這兩個同構變換的乘積是一個換 $\mathfrak{F}$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}/\overline{\mathfrak{D}}$ 的同構變換,而且恰好換 $\mathfrak{D}$ 中的元成 $\overline{\mathfrak{F}}/\overline{\mathfrak{D}}$ 的么元。所以 $\mathfrak{F}/\mathfrak{D}$ 與 $\overline{\mathfrak{F}}/\overline{\mathfrak{D}}$ $=(\mathfrak{F}/\mathfrak{N})/(\mathfrak{D}/\mathfrak{N})$ 一一同構。

§84 羣的 *Abel* 化

我們要應用上節的定理 I 到一個重要的特例。設羣 $\mathfrak{F}$ 的母元是

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_a, \tag{1}$$

界說關係是

$$(\mathfrak{F})\qquad R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\ \cdots,\ R_r(A_i)=1。 \tag{2}$$

設 $\mathfrak{N}$ 是含有所有的這種換位元

$$A_i\, A_k\, A_i^{-1}\, A_k^{-1} \qquad (i,k=1,2,\cdots,a)$$

的最小法子羣,設 $\overline{A}_i$ 代表商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}=\overline{\mathfrak{F}}$ 中 A_i 的剩餘類。根據 § 83 中的定理 I,

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \cdots,\ \overline{A}_a \tag{$\overline{1}$}$$

是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的一組母元，而且

$$(\overline{\mathfrak{F}}) \qquad R_1(\overline{A}_i)=\overline{1},\ R_2(\overline{A}_i)=\overline{1},\cdots,\ R_r(\overline{A}_i)=\overline{1}; \qquad (\overline{2})$$

$$\overline{A}_i\,\overline{A}_k\,\overline{A}_i^{-1}\,\overline{A}_k^{-1}=\overline{1}, \qquad (i,k=1,2,\cdots,a) \qquad (\overline{3})$$

是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的一組界說關係。$(\overline{3})$ 也能寫成

$$\overline{A}_i\,\overline{A}_k=\overline{A}_k\,\overline{A}_i,$$

那就是說，$\overline{\mathfrak{F}}$ 的母元能互相對易。所以 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的所有的元都能互相對易，$\overline{\mathfrak{F}}$ 是一個 *Abel* 羣，也叫做羣 $\mathfrak{F}$ 的 *Abel* 化羣。$\mathfrak{F}$ 加上對易性的關係 $(\overline{3})$，就變成這羣 $\overline{\mathfrak{F}}$。

我們還必須證明，$\overline{\mathfrak{F}}$ 完全由羣 $\mathfrak{F}$ 確定，與 $\mathfrak{F}$ 的母元與界說關係的選擇無關。要證明這一點，我們只要給 $\overline{\mathfrak{F}}$ 另外立一個定義如下，表明他與 $\mathfrak{F}$ 的表示法無關：$\mathfrak{F}$ 被換位羣 $\mathfrak{K}$ 除的商羣叫做 $\mathfrak{F}$ 的 *Abel* 化羣。設 F_ϱ 與 F_σ 是 $\mathfrak{F}$ 中任意兩個元。用所有的換位元 $F_\varrho F_\sigma F_\varrho^{-1} F_\sigma^{-1}$ 做母元產生一個法子羣 $\mathfrak{K}$，通常叫做換位羣(*Kommutatorgruppe*)。所以我們只要證明 $\mathfrak{N}=\mathfrak{K}$。根據假設，$\mathfrak{N}$ 是含有 $\mathfrak{F}$ 中的 $A_iA_kA_i^{-1}A_k^{-1}$ 這些特別的換位元的最小法子羣。所以 $\mathfrak{N}$ 屬于 $\mathfrak{K}$。但是因爲 $\overline{\mathfrak{F}}$ 是 *Abel* 羣，$\mathfrak{F}\longrightarrow\overline{\mathfrak{F}}$ 這同構變換把任一換位元 $F_\varrho F_\sigma F_\varrho^{-1} F_\sigma^{-1}$ 換成么元 $\overline{1}$；所以 $\mathfrak{N}$ 含有所有的換位元，$\mathfrak{N}$ 含有 $\mathfrak{K}$。所以 $\mathfrak{N}=\mathfrak{K}$。

§85 自由乘積與直接乘積

設羣 $\mathfrak{F}$ 含有子羣 $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2,\cdots,\mathfrak{F}_h$。設除么元外，$\mathfrak{F}$ 中每一元恰能用一乘積

$$F_{i\iota}F_{k\varkappa}\cdots F_{z\zeta} \tag{1}$$

表出;這裏的 $F_{i\iota}, F_{k\varkappa}, \cdots, F_{z\zeta}$ 分別是 $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_k, \cdots, \mathfrak{F}_z$ 中的元,都不是么元;而且每兩個接連的元不屬于同一子羣,即 $i \neq k$ 等等。$\mathfrak{F}$ 這羣就叫做子羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 的自由乘積 (*Freies Produkt*),寫作

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{F}_h。 \tag{2}$$

子羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 的構造完全確定 $\mathfrak{F}$ 的構造。因爲要求如式 (1) 的二元

$$F_{i'\iota'}F_{k'\varkappa'}\cdots F_{z'\zeta'}, \quad F_{i''\iota''}F_{k''\varkappa''}\cdots F_{z''\zeta''}$$

的乘積,我們先接連的寫下

$$F_{i'\iota'}F_{k'\varkappa'}\cdots F_{z'\zeta'}F_{i''\iota''}F_{k''\varkappa''}\cdots F_{z''\zeta''}。 \tag{3}$$

若是 $z' \neq i''$, (3) 中的元就已如式 (1)。若是 $F_{z'\zeta'}$ 與 $F_{i''\iota''}$ 屬于同一子羣, $F_{z'\zeta'}F_{i''\iota''}$ 就是 $\mathfrak{F}_{z'}$ 中一個確定的元 $F_{z'}$。$F_{z'} \neq 1$ 的時候,乘積的形式已如式 (1);否則,我們能消去 $F_{z'}$,從新應用這種步驟。所以乘積或恰有一個如式 (1) 的標準式,或是么元。

任意給定了 h 個羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$, 就有一個自由乘積存在。這存在定理我們不在這裏證明,讀者可參看 *F. Klein* 在他的 *Höhere Geometrie*, 第三版, 頁 361 (*Berlin* 1926) 中的證明。

若是 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 各羣的母元與界說關係都給定了,就可求得自由乘積的母元與界說關係。我們只取 $h = 2$ 爲例,證明如下。設下列母元與界說關係

$$\left.\begin{array}{l} A_1,\ A_2,\cdots,A_a \\ R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\cdots,R_r(A_i)=1 \end{array}\right\} \qquad (\mathfrak{F}_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1,\ B_2,\cdots,B_b \\ S_1(B_k)=1,\ S_2(B_k)=1,\cdots,S_s(B_k)=1 \end{array}\right\} \qquad (\mathfrak{F}_2)$$

分別確定羣 $\mathfrak{F}_1$ 與 $\mathfrak{F}_2$。

$$A_1,\ A_2,\cdots,A_a,\ B_1,\ B_2,\cdots,B_b$$

顯然是自由乘積 $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}_2$ 的一組母元，而且在 $\mathfrak{F}$ 中適合下列關係：

$$R_1(A_i)=1,\cdots,R_r(A_i)=1,\ S_1(B_k)=1,\cdots,S_s(B_k)=1。\quad(\mathfrak{F})$$

這些關係就是這自由乘積的一組界說關係。那就是說，這自由乘積的每一關係都是這些關係的隨從關係。因為，若是任一這些 A_i 與 B_k 的乘積等于 $\mathfrak{F}$ 中的么元，我們能把他分成滿足下列二條件的若干因子：每一因子只含有若干 A_i 或只含有若干 B_k；每二相隣的因子不同時只含有 A_i，也不同時只含有 B_k。根據 (1) 每一因子必等于么元，所以應用顯明的關係與 ($\mathfrak{F}$) 中前 r 個或後 s 個關係，這因子就可化成空無所有的字。原來的乘積也可同樣的化成空無所有的字。——這證明也顯然的可以應用到任意 h 個羣的自由乘積。這就證明了下述定理：

定理 I：設 h 個羣的自由乘積是羣 $\mathfrak{F}$。這 h 個羣的母元的全體就是 $\mathfrak{F}$ 的一組母元，這 h 個羣的界說關係的全體就是 $\mathfrak{F}$ 的一組界說關係。

h 個自由循環羣 $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2,\cdots,\mathfrak{F}_h$ 的自由乘積 $\mathfrak{F}$ 就是一例。這裏的 $\mathfrak{F}_i$ 只有一個母元 A_i，沒有關係。所以 $\mathfrak{F}$ 有 h 個母元，沒有關係。因

爲這個原故,我們把 $\mathfrak{F}$ 叫做 h 個母元 $A_1, A_2, \cdots, A_h$ 的自由羣。

我們從此還可以知道,若是母元的數目,關係的數目與形式任意的給定了,總有一個羣 $\mathfrak{F}$ 存在,他的母元就是給定的母元,他的關係就是給定的關係。要求得這羣 $\mathfrak{F}$, 先用給定的母元組成一個自由羣,然後增加關係。根據 §83 中的定理 I, 如此得着的商羣就有應有的性質。

習題: 試證: 若是兩個羣的級都不是一,他們的自由乘積的級決不會是有限數。

設羣 $\mathfrak{F}$ 含有子羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$。設 $\mathfrak{F}$ 的每一元恰能用一乘積如

$$F_{1\iota} F_{2\varkappa} \cdots F_{h\varsigma} \tag{4}$$

表示,而且 $\mathfrak{F}_\nu$ 的每一元能與 $\mathfrak{F}_\mu$ 的每一元對易 $(\mu \neq \nu)$。這羣 $\mathfrak{F}$ 就叫做子羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 的直接乘積 (*direktes Produkt*),寫作

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_h。 \tag{5}$$

因爲方程式

$$F_{1\iota'} F_{2\varkappa'} \cdots F_{h\varsigma'} \cdot F_{1\iota''} F_{2\varkappa''} \cdots F_{h\varsigma''} = (F_{1\iota'} F_{1\iota''})(F_{2\varkappa'} F_{2\varkappa''}) \cdots (F_{h\varsigma'} F_{h\varsigma''}) \tag{6}$$

把直接乘積 $\mathfrak{F}$ 中的乘法化成子羣中的乘法,所以子羣的構造也完全確定了直接乘積的構造。

任意給定了因子羣,我們只需要把形式的乘積(4),或者說,字母的敍列(4),當作羣元,然後用 (6) 規定羣元如何運算,就證明了這些因子羣的直接乘積的存在。

若是 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 各羣的母元與界說關係都給定了,直接乘積的母元與界說關係也就確定了。我們還只討論兩個羣的直接乘積。設他們的母元與界說關係是 $(\mathfrak{F}_1)$ 與 $(\mathfrak{F}_2)$, 下列羣元

$$A_1, A_2, \cdots, A_a, B_1, B_2, \cdots, B_b$$

顯然就是直接乘積 $\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2=\mathfrak{F}$ 的一組母元，下列關係

$$R_1(A_i)=1, \cdots, R_r(A_i)=1,\ S_1(B_k)=1, \cdots, S_s(B_k)=1$$

與母元的對易性的關係

$$A_i\, B_k\, A_i^{-1}\, B_k^{-1}=1 \qquad (i=1, 2, \cdots, a;\ k=1, 2, \cdots, b)$$

也顯然的在 $\mathfrak{F}$ 中成立。這些關係就是一組界說關係。因爲應用對易性的關係，A_i 與 B_k 的每一乘積能够寫成下式

$$\prod_i A_i \cdot \prod_k B_k\text{。}$$

因爲根據定義，直接乘積的每一元恰有一如式 (4) 的乘積表示，所以特別是么元也只有 $1\cdot 1$ 表示。所以若是這乘積 $=1$，必定有 $\prod_i A^i=1$，$\prod_k B^k=1$，但是 $\prod_i A_i$ 與 $\prod_k B_i$ 都可以應用羣 $\mathfrak{F}_1$ 與 $\mathfrak{F}_2$ 的關係與顯明關係化成空無所有的字。

我們已經證明了下述定理：

定理 II：設直接乘積 $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\cdots\times\mathfrak{F}_h$。這 h 個羣的母元的全體就是 $\mathfrak{F}$ 的一組母元。這 h 個羣的界說關係的全體，加上每兩個羣 $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_k$ $(i\neq k)$ 的母元的對易性的關係，就是 $\mathfrak{F}$ 的一組界說關係。

習題：直接乘積的級等於因子羣的級的乘積。

我們用 h 個自由循環羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 的直接乘積做一個例子。設 A_i 是 $\mathfrak{F}_i$ 的母元。直接乘積的母元就是 $A_1, A_2, \cdots, A_h$，他的關係就只是對易性關係：

$$A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1} = 1 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, h)。$$

因爲這裏的羣都是 Abel 羣，所以直接乘積也是 Abel 羣。這直接乘積叫做 h 個母元的自由 Abel 羣。因爲 $\mathfrak{F}_i$ 的每一元恰有一個如像 $A_i^{\alpha_i}$ 這樣的表示法，所以 h 個母元的自由 Abel 羣的每一元也恰有一個如像

$$F = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_h^{\alpha_h}$$

這樣的表示法，

$$A_1^{\alpha'_1} A_2^{\alpha'_2} \cdots A_h^{\alpha'_h} \quad 與 \quad A_1^{\alpha''_1} A_2^{\alpha''_2} \cdots A_h^{\alpha''_h}$$

二元的乘積是

$$A_1^{\alpha'_1+\alpha''_1} A_2^{\alpha'_2+\alpha''_2} \cdots A_h^{\alpha'_h+\alpha''_h}。$$

因此，$\mathfrak{F}$ 的元 F 與整數矢 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h)$ 對應，羣 $\mathfrak{F}$ 與所有的 h 維整數矢所組成的羣（矢的加法當作羣元的運算）一一同構。所以 $\mathfrak{F}$ 的每一元可以用一個 h 維的整數矢，或 h 維的實數空間中以整數爲坐標的一點代表。這些點組成一個 h 維的點框格 (*Gitter*)。所以 h 個母元的自由 Abel 羣有時候也叫做"h 維的框格"。一個矢確定一個直移。所以羣元 F 也同樣的可以用與他相當的矢所確定的直移代表。我們知道羣 $\mathfrak{F}$ 與 h 維的點框格的升騰直移 (*Decktranslation*) 羣一一同構。以零維的框格就是只含有么元的羣。

還有，直接乘積 $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\cdots\times\mathfrak{F}_h$ 中的因子羣 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots, \mathfrak{F}_h$ 都是法子羣。設按 $\mathfrak{F}_1$ 把 $\mathfrak{F}$ 分成剩餘類，做成商羣 $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_1$。若是使 (4) 中的元 $F_{2\kappa}, \cdots, F_{h\varsigma}$ 都不變，只使 $F_{1\iota}$ 在 $\mathfrak{F}_1$ 中變動，如此得着的羣元的全體恰組成一個剩餘類。所以這商羣與羣 $\mathfrak{F}_2\times\cdots\times\mathfrak{F}_h$ 一一同構。

§86 *Abel* 羣

前此我們都用代數中的乘號表示羣論中的聯合運算。討論 *Abel* 羣的時候，通常的習慣都用加號替代乘號。所以用零元 0 替代羣中的么元 1；用和替代乘積，用負元替代逆元，用直接和替代直接乘積。改換了這些名稱，更能明白的表出 *Abel* 羣與整數線性方程式的密切關係。我們用加法的寫法；用加號聯合羣元的時候，我們總把這種聯合運算看作是有對易性的，不另特別寫出對易性的關係。用加法的寫法，p 級的循環羣的關係就是 $pA=0$，不是 $A^p=1$。(應當注意這種方程式只在形式上與代數方程式一樣。實際上這種方程式的兩端是羣中的元，不是普通的數，不能從 $pA=0$ 得着 $A=0$。)

我們先討論 m 個母元

$$A_1, A_2, \cdots, A_m \tag{1}$$

的自由 *Abel* 羣 $\mathfrak{F}_m$。根據頁 426，$\mathfrak{F}_m$ 的每一元恰能用一個如像

$$\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\cdots+\alpha_m A_m \tag{2}$$

這樣的和表出。

若是有一組元存在，$\mathfrak{F}_m$ 的每一元都恰用他們的一個平直組合表出，這一組元就叫做 $\mathfrak{F}_m$ 的基底；(1)中的元所以組成一個基底。若

$$A_1', A_2', \cdots, A_n' \tag{3}$$

是 $\mathfrak{F}_m$ 的另一個基底，m 與 n 必定相等。否則，且試假設 $m<n$，而且用舊基底表出新基底中的元：

$$A'_\nu=\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{\nu\mu}\,A_\mu \qquad (\nu=1,2,\cdots,n)。\tag{4}$$

因爲 $m<n$, 矩陣 $(\alpha_{\nu\mu})$ 中的橫列適合一個係數不全等于零的，以有理數爲係數的關係，所以也適合一個係數不全等于零的，以整數爲係數的關係。所以 A'_ν 也適合一個這種的關係；這與 A'_ν 組成基底的性質矛盾。所以矩陣 $(\alpha_{\nu\mu})$ 是方陣；這也就同時證明了 m 這數（框格的維數）是框格的一個特徵：

定理 I: 兩個框格的維數相等，是他們一一同構的充要條件。

反之，用 A'_ν 表出 A_μ:

$$A_\mu=\sum_{\lambda=1}^{m}\beta_{\mu\lambda}\,A'_\lambda \qquad (\mu=1,2,\cdots,m)。\tag{5}$$

把 (5) 中 A_μ 的表示法替入 (4)，結果是

$$A'_\nu=\sum_{\mu,\lambda=1}^{m}\alpha_{\nu\mu}\,\beta_{\mu\lambda}\,A'_\lambda。\tag{6}$$

因爲 A'_ν 組成基底，所以

$$\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{\nu\mu}\,\beta_{\mu\lambda}=\delta_{\nu\lambda}\qquad\begin{cases}=1, & 若\ \nu=\lambda,\\ =0, & 若\ \nu\neq\lambda。\end{cases}\tag{7}$$

利用矩陣的寫法，就是

$$(\alpha_{ik})(\beta_{ik})=(\delta_{ik})。$$

取行列式，即得

$$|\alpha_{ik}|\,|\beta_{ik}|=1;$$

因爲這裏的數都是整數，所以

$$|\alpha_{ik}|=\pm 1,$$

而 (7) 表明 (β_{ik}) 是 (α_{ik}) 的逆矩陣。所以基底的變換可以由一個整數的么模變換實現。

定理 *II*：m 維框格 $\mathfrak{F}_m$ 的一個子羣 $\mathfrak{G}$ 還是一個框格，他的維數至高是 m。

證明：設 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 $\mathfrak{F}_m$ 的母元，$\mathfrak{F}_{m-1}$ 是用 $A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ 做母元的子框格，$\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 與 $\mathfrak{F}_{m-1}$ 的共元所成的子羣。我們用歸納法，假設定理中的 $\mathfrak{F}_m$ 在換成 $\mathfrak{F}_{m-1}$ 的時候，這定理已經證明了。因此 $\mathfrak{H}$ 是一個子框格，他的維數至高是 $m-1$。設 $B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}$ 是 $\mathfrak{H}$ 的基底 $(k\leqq m)$。在 $\mathfrak{G}$ 的所有的元

$$G=g_1 A_1+\cdots+g_m A_m$$

之中，求出一個元

$$B_k=g_1^* A_1+\cdots+g_m^* A_m,$$

他的末一個係數 g_m^* 是可能的最小的正數。（若是 g_m 全等于零，則 $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}$，本定理成立。）所以 g_m 總是 g_m^* 的倍數，

$$G-\frac{g_m}{g_m^*}B_k$$

也是 $\mathfrak{H}$ 的一元，是 $B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}$ 的一個平直組合。所以 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一組母元；$\mathfrak{G}$ 的每一元輸有一個用 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 的

表示法。因爲，否則必有一關係

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_k B_k = 0$$

存在，他的係數不全等于零。{特別是 $x_k \neq 0$，因爲 $B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}$ 是 $\mathfrak{H}$ 的基底。} 若是把 B_K 寫成諸 A_i 的平直組合，這關係就化成 A_i 間的一個關係，其中 A_m 的係數是 $x_k g_m^* \neq 0$。因爲諸 A_i 作成 $\mathfrak{F}_m$ 的一個基底，A_i 間的如此一個關係是不存在的。所以 $\mathfrak{G}$ 是一個用 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 做母元的 k 維框格 $(k \leqq m)$。因爲定理對于 $m = 0$ 顯然成立，所以這定理普遍的證明了。

因爲定理 *II*，我們有時候把框格的子羣叫做子框格。

現在設 $\overline{\mathfrak{F}}$ 是任一 *Abel* 羣，他的一組母元是

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_m;$$

$\mathfrak{F}_m$ 是一個 m 維框格，他的一個基底是

$$A_1, A_2, \cdots, A_m。$$

給定了 $\mathfrak{F}_m$ 的每一元

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_m A_m,$$

使 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的

$$a_1 \overline{A}_1 + a_2 \overline{A}_2 + \cdots + a_m \overline{A}_m$$

這元與之對應；這種對應是一個換 $\mathfrak{F}_m$ 成 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的同構變換。$\mathfrak{F}_m$ 中的所有的元，換成 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的零元的，組成 $\mathfrak{F}_m$ 的一個子框格 $\mathfrak{N}$，$\overline{\mathfrak{F}}$ 的元與按照 $\mathfrak{N}$ 分開 $\mathfrak{F}_m$ 而得着的剩餘類一一對應。$\overline{\mathfrak{F}}$ 就是商羣 $\mathfrak{F}_m/\mathfrak{N}$。

因爲子框格 $\mathfrak{N}$ 的維數至高是 m，我們能在 $\mathfrak{N}$ 中選定任一組 n 個

母元

$$N_1, N_2, \cdots, N_{n_0}$$

這一組母元不必是 $\mathfrak{N}$ 的基底。設

$$N_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu} A_\mu \qquad (\nu=1,2,\cdots,n),$$

這係數矩陣

$$(a_{\nu\mu}) \tag{8}$$

就完全確定了這些母元 N_ν，所以也完全確定了 $\mathfrak{N}$ 與 $\mathfrak{F}_m/\mathfrak{N}=\overline{\mathfrak{F}}$。反之則不盡然，因爲同一個羣 $\overline{\mathfrak{F}}$，却能用無限多不同的矩陣 $(a_{\nu\mu})$ 確定。例如用整數的么模的變換，分別變換框格 $\mathfrak{F}_m$ 的母元 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 與 $\mathfrak{N}$ 的母元 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 成 $A_1' A_2', \cdots, A_m'$ 與 $N_1', N_2', \cdots, N_n'$，係數矩陣也就改變了。我們現在要研究的，就是如何用這種變換，使矩陣 $(a_{\nu\mu})$ 化成一種法式。要達到這目的，只需一步一步的用有限次下列的特殊的變換（元變換）：

a) 用 $A_\sigma-A_\tau$ 替代 A_σ $(\sigma\neq\tau)$。因爲

$$\begin{aligned} N_\nu = \sum a_{\nu\mu} A_\mu &= \cdots + a_{\nu\sigma} A_\sigma + \cdots + a_{\nu\tau} A_\tau + \cdots \\ &= \cdots + a_{\nu\sigma}(A_\sigma - A_\tau) + \cdots + (a_{\nu\tau}+a_{\nu\sigma})A_\tau + \cdots, \end{aligned}$$

所以在矩陣 $(a_{\nu\mu})$ 中，相當于第 τ 縱列改成第 τ 與第 σ 縱列之和。

b) 用 $-A_\tau$ 替代 A_τ。在矩陣 $(a_{\nu\mu})$ 中相當于第 τ 縱列中的元完全改變正負號。

母元 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 也能相當的變換：

a') 用 $N_\varkappa+N_\lambda$ 替代 $N_\varkappa$ ($\varkappa\neq\lambda$)。 在矩陣中相當于第 $\varkappa$ 橫列改成第 $\varkappa$ 與第 λ 橫列之和。

b') 用 $-N_\lambda$ 替代 N_λ。 在矩陣中相當于第 λ 橫列中的元完全改變正負號。

適當的聯合這四種運算——橫列或縱列的相加，橫列或縱列的變號——還可得別種運算，例如二橫列或二縱列的交換。用這種變換，我們能（證明在 § 87 中）把秩爲 γ 的係數矩陣變成對角線式：

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\quad m \quad} \\ n\updownarrow\begin{pmatrix} c_1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & c_\gamma & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

這裏的 c_{i+1} 是 c_i 的因子 $(1\leqq i\leqq\gamma-1)$; 前 ρ 個因子不等于 1，後 $\gamma-\rho$ 個等于 1 。這裏的 $c_1, c_2, \cdots, c_\gamma$ 叫做矩陣 $(a_{\nu\mu})$ 的**不變因子**。

設 $A_1', A_2', \cdots, A_m'$ 是 $\mathfrak{F}_m$ 的這新基底。

$$c_1 A_1', c_2 A_2', \cdots, c_\gamma A_\gamma'$$

與他們的所有的平直組合恰即是 $\mathfrak{N}$ 的所有的元，而且 $\mathfrak{F}_m$ 中的二元

$$\begin{gathered} p_1 A_1' + p_2 A_2' + \cdots + p_m A_m', \\ q_1 A_1' + q_2 A_2' + \cdots + q_m A_m' \end{gathered}$$

屬于 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathfrak{F}_m$ 中的同一個剩餘類的充要條件就是

$$(p_1-q_1) A_1' + (p_2-q_2) A_2' + \cdots + (p_m-q_m) A_m'$$

屬于 $\mathfrak{N}$, 也就是

$$p_1 \equiv q_1 \ (\text{模 } c_1),\ p_2 \equiv q_2 \ (\text{模 } c_2), \cdots, p_\gamma \equiv q_\gamma \ (\text{模 } c_\gamma),$$

$$p_{\gamma+1} = q_{\gamma+1}, \cdots, p_m = q_m。$$

所以每一剩餘類恰有一個如下式的元代表:

$$\xi_1 A_1' + \xi_2 A_2' + \cdots + \xi_\gamma A_\gamma' + \eta_{\gamma+1} A_{\gamma+1}' + \cdots + \eta_m A_m' \tag{9}$$

$$(0 \leqq \xi_\mu < c_\mu,\ \eta_\mu \text{ 任意}) \tag{10}$$

換句話說: 若是保留法化的條件 (10), 商羣 $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_m/\mathfrak{N}$ 的元 (我們還在字母上加一橫線表明) 恰可以用

$$\xi_1 \overline{A}_1' + \xi_2 \overline{A}_2' + \cdots + \xi_\gamma \overline{A}_\gamma' + \eta_{\gamma+1} \overline{A}_{\gamma+1}' + \cdots + \eta_m \overline{A}_m' \tag{11}$$

這樣的一個形式表出。

因爲商羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的元 $\overline{A}_\mu'$ 的級是 $c_1, c_2, \cdots, c_\gamma$, 或 ∞, 所以 $\overline{\mathfrak{F}}$ 是以 $\overline{A}_1', \overline{A}_2', \cdots, \overline{A}_m'$ 爲母元的循環子羣的直接和。

綜合上面的結果, 成下述定理:

定理 *III*: 每一個有有限個母元的 *Abel* 羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 是 ρ 個有限的 $c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ 級的循環羣與 p 個無窮的循環羣的直接和。這裏的 c_{i+1} 可以假定是 c_i 的因子 $(1 \leqq i \leqq \rho-1)$。設 $\overline{\mathfrak{F}}$ 由矩陣 $(a_{\nu\mu})$ 給定。$c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ 就是這矩陣的不等于 1 的不變因子, p 就等于矩陣的縱列數 m 減去秩數 γ。$c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ 與 $p = m-\gamma$ 都由這個 *Abel* 羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 唯一的確定了, 分別叫做這羣的撓係數與 *Betti* 數。

$\overline{\mathfrak{F}}$ 若是一個複合形的同調羣, 撓係數有幾何意義。撓係數這名稱就是根據這種幾何意義得來的 (§§18,61)。

唯一性還需要證明。以 $\overline{A}'_1, \overline{A}'_2, \cdots, \overline{A}'_\rho$ 爲母元，$c_1 c_2 \cdots c_\rho$ 爲級的子羣 $\overline{\mathfrak{U}}$，恰含有 $\overline{\mathfrak{F}}$ 中所有的有限級的元，所以 $\overline{\mathfrak{U}}$ 與母元的選擇無關。根據頁 426，$\overline{\mathfrak{F}}/\overline{\mathfrak{U}}$ 與用 $\overline{A}'_{\gamma+1}, \cdots, \overline{A}'_m$ 做母元的子羣一一同構，所以是一個 p 維的框格。這就證明了 p 是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的一個不變數。還要討論的是這有限羣 $\overline{\mathfrak{U}}$。以 $\overline{A}_\mu$ 爲母元，c_μ 爲級的循環子羣中的元，都乘以正整數 x；這些 x 倍的元組成一個 $c_\mu/(c_\mu, x)$ 級的子羣。*) $\overline{\mathfrak{U}}$ 中所有的元的 x 倍組成 $\overline{\mathfrak{U}}$ 的一個子羣，他的級等于

$$M(x)=\frac{c_1}{(c_1,x)}\frac{c_2}{(c_2,x)}\cdots\frac{c_\rho}{(c_\rho,x)}。$$

只在所有的因子都等于 1 的時候，那就是說，只在 x 是 c_1 的倍數的時候，$M(x)$ 纔能等于 1。這就表明了 c_1 的不變性的特徵。假設 $c_1, c_2, \cdots, c_\mu$ $(\mu<\rho)$ 的不變性的特徵都證明了，我們問什麼 x，纔可以使

$$M(x)=\frac{c_1}{(c_1,x)}\frac{c_2}{(c_2,x)}\cdots\frac{c_\mu}{(c_\mu,x)}.$$

這方程式成立的充要條件，就是其餘這些因子

$$\frac{c_{\mu+1}}{(c_{\mu+1},x)},\cdots,\frac{c_\rho}{(c_\rho,x)}$$

都等于 1，那就是說，x 是 $c_{\mu+1}$ 的倍數，所以 $c_{\mu+1}$ 的不變性的特徵也表明了。

Abel 羣的不變數也能用來區別非 *Abel* 羣。每一非 *Abel* 羣 $\mathfrak{F}$ 可以 *Abel* 化，恰確定一個 *Abel* 羣 $\overline{\mathfrak{F}}$。若是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的撓係數與 *Betti* 數也

*) (a, b) 代表正整數 a, b 的最大公因子。

分別叫做 $\mathfrak{F}$ 的撓係數與 *Betti* 數，$\mathfrak{F}_1$ 與 $\mathfrak{F}_2$ 兩羣相同的一個必要條件就是他們的撓係數與 *Betti* 數分別相同。若是 $\mathfrak{F}$ 由母元

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m \tag{12}$$

與界說關係

$$R_1(A_i)=1,\ R_2(A_i)=1,\ \cdots,\ R_r(A_i)=1 \tag{13}$$

給定，就可以求得撓係數與 *Betti* 數如下：關係 (13) 與對易性關係

$$A_i\,A_k = A_k\,A_i \qquad (i,k=1,2,\cdots,m) \tag{14}$$

是 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的界說關係。$\overline{\mathfrak{F}}$ 是 $\mathfrak{F}$ 被對易羣除的商羣；但是也能換一個看法，把 $\overline{\mathfrak{F}}$ 看作是由關係 (14) 界說的 m 維框格 $\mathfrak{F}_m$，再加上補助關係 (13) 所確定的羣。設 $\mathfrak{N}$ 是用 (13) 的左端做母元的框格。$\overline{\mathfrak{F}}$ 就是框格 $\mathfrak{F}_m$ 被這子框格 $\mathfrak{N}$ 除的商羣。把 (13) 的左端用加法寫出，他們的係數矩陣就是那確定 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{F}_m$ 的子羣的矩陣。用前文中的方法，可以從這矩陣確定撓係數與 *Betti* 數。

我們用一個有三個母元四個界說關係

$$A^2=B^3=C^4=ABC=1$$

的羣 $\mathfrak{F}$ 來說明這種計算的步驟。這羣是八面體羣；A,B,C 代表八面體的三種旋轉，A 的旋轉軸連接二對立稜的中點；B 的旋轉軸連接兩個對立的，與已經取過的二稜鄰接的，三邊形的中心；C 的旋轉軸連接二對立端點。*) *Abel* 化羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 的關係是

$$2\overline{A}=3\overline{B}=4\overline{C}=A+B+C=0。$$

這羣的係數矩陣是

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\\1&1&1\end{pmatrix},\ \text{他的法式是}\ \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

*) 證明見於 *W. v. Dyck, Math. Ann.* 20 (1882)，頁 35。

所以有一個撓係數等於 2, *Betti* 數是 0。

若是 $\mathfrak{F}$ 的 *Betti* 數不等于零，這 *Abel* 化羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 就是無窮羣，所以 $\mathfrak{F}$ 自身也是無窮羣。若是 $\mathfrak{F}$ 的 *Betti* 數等于零，我們就無法斷定 $\mathfrak{F}$ 是否無窮。例如級等于 2 的兩個羣的自由乘積與直接乘積（四分羣是 *Vierergruppe*）都有兩個撓係數等于 2, *Betti* 數都等于 0。但是這自由乘積是無窮羣，這直接乘積是有限羣。[52]

習題：試求 n 個字母的對稱置換羣的撓係數。

§87 整數矩陣的法式

我們在 § 86 中用過下述定理：應用元變換（二橫列或縱列的加減，一橫列或縱列中所有的元的變號，二橫列或縱列的交換），可以把任意一個整數矩陣化成對角線式。現在我們要證明這定理。

設給定的矩陣是

$$\mathsf{E}=(\varepsilon_{\iota\varkappa}) \qquad (\iota=1, 2, \cdots, n;\ \varkappa=1, 2, \cdots, m),$$

整數 $\varepsilon_{\iota\varkappa}$ 的地位是第 ι 橫列與第 $\varkappa$ 縱列的交點。設 E 的秩是 γ。

若 $\gamma=0$，這矩陣就已經是法式矩陣。若 $\gamma>0$，就可以選定一個不等于零的元，然後把他移在 $(\iota, \varkappa)=(1, 1)$ 這地位。我們還把這元叫做 ε_{11}。若是第一橫列與第一縱列的元不完全能被 ε_{11} 整除，且假設第一橫列的元 ε_{1k} 被 ε_{11} 除時，有一個餘數 ε'_{11}，$0<|\varepsilon'_{11}|<|\varepsilon_{11}|$。第 k 縱列加上或減去第一縱列；經過適當的次數的加或減之後，在 $(1, k)$ 這地位的數就變成 ε'_{11}。交換第一與第 k 縱列，ε'_{11} 就移在 $(1, 1)$ 這地位。

若是第一縱列有某一元不能被 ε_{11} 整除，我們也同樣進行。因爲 ε_{11} 的絕對值每次都降低，繼續用這種方法有限次之後，第一橫列與第一縱列中所有的元必都能被 (1, 1) 那裏的元（還叫做 ε_{11}）整除。然後再把第一縱(橫)列加到其餘的每一縱(橫)列上去，加到適當的次數之後，第一橫(縱)列除 ε_{11} 這元之外都是 0。若是這新矩陣中有一元 $\varepsilon_{ik}(i\neq 1, k\neq 1)$，不能被 ε_{11} 整除，經過橫列相加，可以把他移在第一橫列再重新應用上面的方法。如此繼續，到每一元都能被 (1, 1) 這地位的元整除，而且第一橫列與第一縱列中的元除 ε_{11} 之外都是 0 爲止。——用 E_1 表示塗去 E 中第一橫列與第一縱列後所得的矩陣。E_1 的任一個元變換，可以由 E 的一個元變換實現，而且因爲 E 的第一橫列與第一縱列中的 0，E 的這種元變換並不改變他的第一橫列與第一縱列。用這種變換，把一個元 ε_{22} 移在 (2, 2) 這地位；ε_{22} 是 E_1 中所有的元的因子，而且第二橫列與第二縱列中除 ε_{22} 外都是 0。E_1 中所有的元本來都能被 ε_{11} 整除，而且 E_1 的元變換並不改變這種性質，所以 ε_{22} 能被 ε_{11} 整除。繼續應用這種方法，最後得着一個矩陣，其中除去對角線上若干元外，所有的元都是 0。因爲元變換不改變 E 的秩，所以不等于零的元的個數必是 γ。對角線上的元 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \cdots, \varepsilon_{\gamma\gamma}$ 中每一個是次一個的因子。他們叫做矩陣 E 的**不變因子**。他們的次序與頁 432 上寫的相反，$\varepsilon_{11} = c_\gamma, \cdots, \varepsilon_{\gamma\gamma} = c_1$；但是用橫列的交換與縱列的交換，這種次序是可以任意改變的。

我們已經在 § 86 中證明了，不變因子是這矩陣所給定的 *Abel* 羣的

特徵，因而也證明了如此得着的法式有唯一性，不依賴法化的步驟。法式與這種步驟無干，也可以很容易的證明如下。設 D_i 代表 E 的所有的 i 級行列式的最大公因子。根據行列式論中常用的定理，元變換不改變 D_i。*) 從法式看，D_i 是對角線上前 i 個元 $\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{ii}$ 的乘積，所以

$$\varepsilon_{ii} = \frac{D_i}{D_{i-1}}$$

已經由 E 確定了。

討論實際的例子的時候，完全遵從前文所說的步驟並不一定是最好的辦法；有時候改變元變換的次序，較易達到目的。我們可以用頁 125 上假流形的關聯矩陣 E 爲例，說明這一點。這裏的 E 有 n 橫列與 m 縱列，還有下列性質：

(a) 每一橫列中恰有兩個不等于 0 的元，他們的絕對值都是 1。

(b) 若是任意的把縱列分爲兩組，至少有一橫列，他的絕對值等于 1 的二元不屬于同一組。

只需要四步就可以把這矩陣化成法式：

第一步：交換橫列與交換縱列把矩陣化成下式：

$$\underset{\longleftarrow\quad m\quad\longrightarrow}{\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 & \cdot & 0 \\ * & * & \pm 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ * & * & * & \cdot & \pm 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot & * \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \updownarrow\, m-1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \updownarrow\, n \qquad (I)$$

*) M. Bôcher, *Einführung in die höhere Algebra* (Leipzig 1910)。

這裏的星號表示不能斷定是 0 或 ± 1 的元。要把 E 變成 (I)，先交換縱列，把第一橫列中兩個絕對值等于 1 的元移到第一與第二縱列。因爲 (b)，必定有一橫列，姑且設是第 i 橫列，他的一個絕對值等于 1 的元在第一或第二縱列，另一個在第 k $(k>2)$ 縱列。然後交換第三與第 k 縱列，第 i 與第二橫列。這新矩陣前兩橫列與 (I) 的相同。我們再依次改變其餘的橫列。

第二步：改變縱列的正負號，使前 $m-1$ 個橫列的每一個中恰有一個 $+1$ 與一個 -1。

第三步：第一縱列加上第二，第三到第 m 縱列，如此得着的矩陣成下式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & * & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & * & * & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot & * \end{pmatrix} \qquad (II)$$

第一縱列中只有 0 或（至多在最後 $n-m+1$ 橫列中有）2。適當的改變正負號，使這裏寫出來了的絕對值等于 1 的元都改成 $+1$。

第四步：最後 $n-m+1$ 橫列中的每一橫列，適當的加上或減去前 $m-1$ 個橫列，使第二，第三，$\cdots$，與第 m 縱列的每一縱列中只有一個 $+1$。如此得着的矩陣成下式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad (III)$$

最後 $n-m+1$ 橫列中的元,除去同時也在第一縱列中的元外,都是 0。第一縱列並不因這一步改變。若是第一縱列中沒有 2,只有 0,法式就如下:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad (IV)$$

若是第一縱列中不止有一個 2,用橫列的加減,可以使他只有一個 2;再交換橫列,把這個 2 移在左上角:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad (V)$$

所以按照原來的 E 的秩等於 $m-1$ 或 m,我們就分別得着法式 (IV) 或 (V)。

附　註

1.（頁 3）$\mathfrak{R}^4$ 中的扭結。三維的 xyz 空間中的一個扭結或者是一個圓周，或者不是。在後者的情形下，如果要想把這扭結在這空間中變狀成一圓周，只有在變狀時聽任其自相割裂，纔屬可能。但是如果這三維空間是安置在一個四維的 $xyzt$ 空間中，即使在變狀時不准自相割裂，xyz 空間中的每一個扭結也能在這四維的空間中變狀成一個圓周。設這三維空間中的一個扭結，在這空間中變狀成圓周的時候，自相割裂的兩條短弧是 a 與 b。我們可以設想 a 是 $-1 \leqq x \leqq +1,\ y = z = 0$ 這線段；b 是 $y^2+z^2 = 1,\ x = 0,\ z \geqq 0$ 這半個圓周。在這四維的空間中，我們能把 b 變狀成 $y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ z \leqq 0$ 這半個圓週 b'，而且在變狀時，不使他割裂在 xyz 空間中的這個扭結。例如在 yzt 空間中，用繞 y 軸的剛體旋轉，就可以把 b 轉到 b'。

2.（頁 8）雙環面的包成，*Hilbert* 與 *Cohn-Vossen* [1] 頁 265 中用圖表明的特別清楚。此書中還有其他關于直覺材料的討論，值得參考。

3.（頁 12）不能定向的曲面的浸沒。我們不能把投影平面浸沒在歐幾里得 $\mathfrak{R}^3$ 中。這就是說，在歐幾里得 $\mathfrak{R}^3$ 中我們不能求得一個代表投影平面的圖形，使這代表的圖形不沿着曲線自相穿割。但若是聽任代表的圖形沿着無重點的曲線自相穿割，可能的浸沒方法究竟有多少？這問題在 *Boy* [1] 中解答了。更可參看 *Schilling* [1]，第一卷的末尾：“用空間中的一個無歧點的曲面，拓撲的實現投影平面”。——投影平面能浸沒在歐幾里得 $\mathfrak{R}^4$ 中而不自相穿割。其實，若是在 $\mathfrak{R}^4$ 的子空間 $\mathfrak{R}^3$（三維的歐幾里得空間）中取一條 *Möbius* 帶，再從不屬於這子空間的一點，投影這 *Möbius* 帶的邊緣，這投影錐面就封閉 *Möbius* 帶成一個投影平面。—— *Hilbert* 與 *Cohn-Vossen* [1] 的附錄 *I* 中，還表明了投影平面能用 $\mathfrak{R}^4$ 中的一個代數曲面代表。在他們的書中，關于在 $\mathfrak{R}^3$ 中 *Möbius* 帶的封閉與交叉帽的形狀，還有很有趣味的討論。

4.（頁 18）無窮的曲面。在 *B. v. Kerékjártó* [6] 的第五章：“開曲面”中，關於無窮的曲面有系統的討論。

5.（頁 22）利用群來封閉空間。我們很自然的發生下述問題：如果不利用等角變換羣與投影變換羣，却利用別種變換羣，再要求這羣中的變換都是一一的變換，我們能否得着歐幾里得空間的別種封閉法？關於這一類的別種封閉法的例子，可參看 *Seifert* [1]，頁 30。等角羣與投影羣這兩個羣與別種羣不同；只有他們這兩個羣在這閉空間中滿足 *Lie-Helmholtz*

的能運動的條件(*Beweglichkeitsbedingung*)。*) ——關於利用有理變換羣來封閉複數空間,參看 *H. Behnke* 與 *P. Thullen*, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (*Berlin* 1934),頁 3。

6.(頁 22)**力學中的位置空間**。假設一個力學系統的能量的總和固定不變,位能是位置的已知函數。這系統的位置空間的拓撲性質,不但對於這系統的運動狀態很重要,而且根據 *Jacobi* 的意見**),這空間還有一種特殊的性質:在這空間中能引進一種度量,使軌跡(*Bahnkurve*)恰是對於這度量而言的短程線(*geodätische Linie*)。可參看 *E. T. Whittaker*, *Analytische Dynamik* (*Berlin* 1914), §104。例如引力場中的平面雙擺,若是他的能量的總和大到使雙擺能經過每一個位置,他的位置空間就是整個的環面。既然環面上的每一條閉曲線(在這特例所滿足的某種條件之下***))能拉緊成對于這度量而言的一條短程線,而且既然環面上有無窮多的不同倫的閉曲線,平面雙擺就有無窮多的不同的循環運動。

7.(頁 24)**關於力學中的相空間**,參看 *Birkhoff* [5]。

8.(頁 29)**拓撲空間**。本書中所用的隣域空間的概念,完全由公設 A 與 B 確定。我們如此界說隣域空間,只是爲了要界說拓撲學中的開子集,閉子集,綿續變換,拓撲變換,及疊合等基本概念:我們的目的,不過是用隣域空間作爲達到複合形的橋梁。若是要證明主要的幾何定理,我們並用不着如此廣泛的隣域空間。所以在集合論的拓撲學中,所謂隣域空間或拓撲空間,都是比較狹義的空間。*Tietze-Vietoris* [8] 的頁 156 中的定義卽是一例。那裏的公設 $(\bar{A})$ 與 $(\bar{B})$ a) 與我們的公設 (A) 與 (B) 相同。此外還有下列三條公設:$(\bar{B})$ b) 一個點的兩個隣域的交集還是這點的一個隣域;$(\bar{C})$ 若是集合 $\mathfrak{U}$ 是 P 的一個隣域,$\mathfrak{U}$ 的全體"內點"也組成 P 的一個隣域(若是 $\mathfrak{U}$ 是一點 X 的隣域,X 就叫做 $\mathfrak{U}$ 的內點);$(\bar{D})$ 若 $P \neq Q$, P 與 Q 就有無共點的隣域。*Tietze* 的隣域空間所以實際上比我們的狹窄。他與常爲人所援引的 *Hausdorff* 拓撲空間大致相同。後者的公設如下(*Hausdorff* [1] 頁 213 與 260):(A) 本書中的公設 A;(B) 給定了一點 P 的任意兩個隣域,必有一個隣域,是前兩個隣域的子集;(C) 若是一個點 Q 在一個點 P 的一個隣域 $\mathfrak{U}(P)$ 中,他就有一個隣域 $\mathfrak{U}(Q)$,是 $\mathfrak{U}(P)$ 的一個子集(所以隣域是開集);(D) 上面的 $(\bar{D})$。例如實數空間的開的球體隣域與開的方體隣域都滿足這些公設。因爲 *Hausdorff* 的隣域空間不用 *Tietze* 的公設 $(\bar{B})$,所以依照 *Hausdorff* 的意義的隣域比依照 *Tietze* 的意義的狹窄。因此,用球體隣域使實數空間變成的拓撲空間,與用開的方體隣域使實數空間變成的拓撲空間開初還有區別;於是纔又規定:如果兩組隣域中的任一組中的每一隣域,含有另一組中的一個隣域,這兩組就說是等價。

---

*) *H. Weyl*, *Mathematische Analyse des Raumproblems* (*Berlin* 1923),頁 30。

**) *C. G. J. Jacobi*, *Gesammelte Werke*, *Supplementband* (*Berlin* 1884),頁 44。

***) 可參看 *B. L. Bieberbach*, *Differentialgleichungen*, 第三版(*Berlin* 1930),頁 195。

9.（頁 29）實數空間的勻齊性。依照我們所用的定義，n 維的實數空間中的一個點就是一組有次序的 n 個實數；n 維的實數空間的點並非另一種算學的物體，能與所有的這種實數組一一對應。在實數空間中引進平行坐標系（頁 50）之後，一個點或一組 n 個實數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 纔有平行坐標 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，纔能用另一組 n 個實數 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 代表。雖然在特別的情形下 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n$，我們還應當區別這界說點的 n 個實數組與平行坐標的 n 個實數組。——依照邏輯的意義，若是從公設出發，一個空間的任意兩點都無區別，這空間纔說是勻齊的空間。*) 實數空間並非這種意義下的勻齊；因為實數有互相足以區別的性質。但我們採用的是 §12 中所界說的勻齊性；根據這定義，實數空間勻齊。這種勻齊性在算學中纔有重要的意義。

10.（頁 65）純粹組合的拓撲學。*Kneser* [4] 與 *Tietze-Vietoris* [8] 中指出純粹組合方法的重要性。關於曲面的拓撲學，*Reidemeister* [7] 中完成了純粹組合的討論；前此，*Levi* [1] 與 *Chuard* [1] 中也有這類討論的綱領。*Reidemeister* [6] 這一本書是組合的扭結論。*Enzyklopädie* 中論拓撲學的一篇論文（*Dehn-Heegaard* [1]）中也是用組合的方法，但純粹組合方法的嚴密討論之困難，並未能完全顯明的表出。這些困難，在討論基礎時即已出現，而且關于高于三維的討論至今還無法解除；從 *Bilz* [1], *Kneser* [4], *Furch* [2], [3], [5], *Weyl* [2] 可以看出這些困難來。*Newman* [1], [4], *Alexander* [18], *Tucker* [3] 中，除別種討論之外，都企圖從適當的元變換的定義，去解除這些困難。此外還可參看與 *Weyl* [2] 關聯的論文 *de Rham* [1]；還有 *Mayer* [1] 與 *Bergmann* [2]。

11.（頁 74）嚴格的說，我們只證明了，由疊合兩個全合的球體的邊緣而成的是一個球。其實，若是給定兩個球體 $\mathfrak{B}_1$ 與 $\mathfrak{B}_2$ 的邊緣間任意一個拓撲變換 A，由疊合對應點而成的也是一個球。證明如下：設 A' 是一個全合變換，換 $\mathfrak{B}_1$ 的邊緣成另一個球體 $\mathfrak{B}'_2$ 的邊緣。因此 $A'A^{-1}$ 拓撲的變換 $\mathfrak{B}_2$ 的邊緣成 $\mathfrak{B}'_2$ 的邊緣。這邊緣間的拓撲變換 $A'A^{-1}$ 能擴充成換 $\mathfrak{B}_2$ 成 $\mathfrak{B}'_2$ 的一個拓撲變換；例如平直的變換 $\mathfrak{B}_2$ 的半徑成 $\mathfrak{B}'_2$ 的對應半徑。根據頁 46，由疊合 $\mathfrak{B}_1$ 與 $\mathfrak{B}'_2$ 的邊緣而成的鄰域空間與由疊合 $\mathfrak{B}_1$ 與 $\mathfrak{B}_2$ 的邊緣而成的同胚。但是前者是一個球，因為 $\mathfrak{B}_1$ 與 $\mathfrak{B}'_2$ 的邊緣間的對應是全合對應。

12.（頁 80）線素（*Linienelement*）組成的空間。在這習題中我們有線素組成的空間的兩個例子。這種空間中的"點"是一個閉曲面的線素。討論所有的由定向的或未定向的線素組成的空間這問題，有下列各論文：*Nielsen* [6] 頁 306（闡明所有的由定向的線素所組成的空間的基本羣），*Hotelling* [1], [2], *Threlfall* [3]。還可參看 *v. d. Waerden, Jahresber.*

*) *H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, Sonderausgabe aus dem Handbuch des Philosophie* (*München* 1927)，頁 *A* 7。

Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1933), 問題 124, 頁 112 (投影平面的未定向的綫束) 與本書頁 276, 習題 4。

13. (頁 97) 也有人把整個的同調羣叫做 *Betti* 羣，而把本書中的 *Betti* 羣叫做既約 (*reduzierte*) *Betti* 羣; *Pontrjagin* [3] 就是這樣。

14. (頁 100) *Poincaré* (特别在 [4] 中) 引進關聯矩陣，在拓撲學的算術化方面是具決定性的步驟。

15. (頁 114) 模 m 鍊。從代數的觀點看來，一個鍊就是一個一次方式，其中的未知量是定向的單純形。這一次方式的係數屬于一個確定的係數域 (*Koeffizientenbereich*)。若是這係數域由整數組成，我們就得着通常的鍊，如 §15 到 §22 中所討論的。若是用模 2 的餘數類做係數，就得着模 2 鍊。我們還能更普遍的，用模 m (m 是 $\neq 1$ 的整數)的餘數類做係數，因而得着模 m 的同調羣與 *Betti* 數。模 m 的同調羣與 *Betti* 數的拓撲不變性，也能够像通常的同調羣與 *Betti* 數一樣的證明。模 m 的 *Betti* 數能從通常的 *Betti* 數 (也叫做模 0 的 *Betti* 數) 與撓係數確定;反之，從模 m ($m=0, 2, 3, \cdots$) 的 *Betti* 數也能計算出撓係數。對於同調的問題，模 m 的 *Betti* 數並不比通常的 *Betti* 羣有什麼特別的優點。但近來研究問題 (對偶定理，變換定理) 時，模 m 的 *Betti* 數表現了特別意義;例如 *Hopf* [13], [19], *Pontrjagin* [3]。*Tietze* [1] 先引進模 2 的 *Betti* 羣，後來 *Veblen* [5] 作更進一步的研究。*Alexander* [15] 最先討論模 m 的 *Betti* 羣。

16. (頁 129) 對於更普遍的隣域空間，我們總想採用一個合適的同調羣的定義，使複合形論中的定理，儘可能的仍舊成立。下述的簡單的例子可以說明這點。考慮實數平面中適合下列方程式 (用笛卡兒坐標)

$$y = \sin\frac{1}{x}, \qquad 當\ x \neq 0,$$
$$-1 \leqq y \leqq +1, \qquad 當\ x = 0,$$

的點，再加上一個無窮遠點。這無窮遠點使實數平面變成一個二維球 $\mathfrak{S}^2$，而且使我們的點集變成 $\mathfrak{S}^2$ 的一個閉子集 $\mathfrak{M}$。$\mathfrak{M}$ 上的每一個廣義的閉一維鍊顯然 ~ 0。但在另一方面，$\mathfrak{S}^2$ 恰被 $\mathfrak{M}$ 剖分成兩個開域。若是仍舊用我們的廣義的同調羣的定義，*Alexander* 的對偶定理 (參看附註 47) 對於普遍的閉點集就不成立了。他的定理是說，開域的個數比那浸沒的複合形的第一個 *Betti* 數大一個。關於如何合適的界說同調羣，以討論實數空間的任意閉子集，參看 *Alexandroff* [7], [10], *Čech* [2], *Lefschetz* [12], *Vietoris* [2], [4]。

17. (頁 158) 同調羣的不變性的證明。用單純鍊去逼近廣義鍊，以證明單純的同調羣的拓撲不變性，這觀念源于 *J. W. Alexander*。在他的第一個證明 [1] 中，他並不用本書中這樣界說的拓撲不變的廣義的同調羣，他是證明從一個複合形的兩個不同的單純剖分計算出的單純的同調羣相同。他的證明中只需用一個較簡單的廣義鍊的概念 (一個單純鍊的綿續

像)；只用廣義鍊的能相加性，而不像本書中用他來拓撲不變的界說同調羣。——*Alexander* 的第二個證明 [15] 完全不用廣義鍊，但只在一個複合形的一個單純剖分中逼近第二個剖分的重分，與在第二個剖分中逼近第一個剖分的重分。

在本書中我們用 *Betti* 數與撓係數表示連通數，因而證明連通數的不變性。我們也能直接用模 2 的廣義鍊，也就是能用模 2 的餘數類替代整數做係數域，證明連通數的不變性。係數域如此改變了之後，逼近定理的證明，因而連通數的不變性的證明，並不改變。

18.（頁 168）複數投影空間。用同樣的方法，證明複數投影空間（一個 $2n$ 維的流形）中，偶維 $(0, 2, 4, \cdots, 2n$ 維) 的同調羣是自由循環羣，奇維的同調羣只含有零元。同調基由複數投影子空間組成。（複數投影空間的點，是 $n+1$ 個複數的比，各自獨立的經過所有的複數；但 $n+1$ 個零的比除外。鄰域的定義與實數投影空間中的相同，已見頁 76。）參看 *v. d. Waerden* [2]。

19.（頁 169）全局的不變性。閉假流形的維數的不變性是第四章的結論。因爲維數 n 有下述的不變的特徵：n 是最小的數，使第 $n+1$ 個與所有以次的連通數都等于零。

20.（頁 170）在一點處的同調群。我們是利用一個確定的單純剖分，去界說在一點處的同調羣，然後進而表出他的不變性。我們也能開始就用拓撲不變的定義，與用廣義的同調羣的定義一樣（§27）。我們依照 *van Kampen* [3] 的辦法，規定若是一個複合形 $\mathfrak{K}$ 的兩個廣義的 k 維鍊 U^k 與 V^k 的差 U^k-V^k 不含有 P 這點，這兩個廣義鍊就說是“在 P 點處相等”。若是一個鍊 U^k 的邊緣 $F[U^k]$ 不通過 P，這鍊就說是“在 P 點處的一個閉鍊或環”；若是 U^k-V^k 與一個不含有 P 點的鍊同調，我們就寫作：在 P 點處 $U^k \sim V^k$。換句話說，我們只是把不含有 P 的鍊，也就是只把屬于 $\mathfrak{K}-P$ 的單純形，置諸不問；這也就是說，我們只考慮“模 $\mathfrak{K}-P$ 的鍊”。在 P 點處的 k 維環可以分成同調類。他們組成一個 *Abel* 羣，而且根據定義這羣就有拓撲不變性。用單純逼近即能證明，這 k 維同調羣在 $k>1$ 時就與 P 的鄰域複合形的 $k-1$ 維的同調羣相同。——設 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的任意一個閉子集，我們就有模 $\mathfrak{L}$ 的鍊與同調羣。*Lefschetz* [12] 充分的應用模 $\mathfrak{L}$ 的鍊與同調羣，例如他把閉流形的討論包括在有邊緣的流形的討論之中；參看附註 41。

21.（頁 178）所謂維數不變定理，通常是指 §32 的習題 2 中的定理。*Brouwer* [6] 首先證明維數的不變性；以後還有 *Alexandroff* [16]，*Lefschetz* [12]，*Sperner* [1] 的證明。

22.（頁 198）在純粹組合的曲面拓撲學中，基本的事物是有限個或無窮多的頂點，稜與面片，主要的問題只是元變換問題而非同胚問題。按照這觀點，書中此處的定理就已經是曲面拓撲學的基本定理了。*Dehn* 與 *Heegaard* [1] 的頁 190 最先證明這定理。他們所用的法式不是基本多邊形，而是由三個面片組成的。*Levi* [1] 的頁 71 應用基本多邊形，組合的證明這基本定理；*Reidemeister* [7] 也是這樣的。關於另一個法式，參看 *Threlfall* [1]；關于組合的證明，還可參看 *Chuard* [1]。

23．(頁 208) 解決了曲面的同胚問題，並非就已經解決了曲面拓撲學的所有問題。三維的拓撲學就引起曲面拓撲學中困難的問題，例如求作與區別所有可能的 *Heegaard* 圖式(參看附註 34)。解決同胚問題，只要應用曲面上的曲線的同調性質，但上述的問題與同倫性質，同痕性質有關。根據頁 246，曲面上的兩條曲線何時自由同倫的問題純粹是一個羣論的問題：即列舉曲面的基本羣的所有相配元的類。*Dehn* [3]，[4] 完全解決了這問題，並且決定了可反的曲線 (*amphidrome Kurve*) 的存在與否。一條曲線若是在曲面上能同倫變狀成相反定向的曲線，就叫做可反的曲線；所以可反的曲線的定向能由同倫的變狀而改變。關于曲面上的曲線的同痕，參看 *Baer* [1]，[2]。——屬于這一類的定理，有 *Nielsen* [6] 證明的下述定理：一個能定向的曲面的基本羣的每一個自身同構變換，能由這曲面的一個自身的拓撲變換實現。——關於曲面上的變換與不變點定理，參看 *Nielsen* [2] 至 [6]，*Brouwer* [1]，[5]，[14]，[15]，*Kneser* [7]，[9]，*Hopf* [14]。——*Reidemeister* [7] 系統的敘述純粹組合的曲面拓撲學。

24．(頁 210) 道路的相等的定義，與廣義的定向的一維單純形的不同；在後者中，我們規定原底須能互相平直變換。假如我們對于道路也如此規定，道路的乘積就不能普遍的適合締合律 $(ab)c = a(bc)$。

25．(頁 216) 基本羣的概念源于 *Poincaré* [2]，[7]。我們利用輔助道路以列舉母元與關係(§46)，是援用 *Tietze* [1]。

26．(頁 221) 定理：實數平面是唯一的一個二維的，單連通的，無窮的，勻齊的複合形。設 $\mathfrak{K}$ 是一個給定的有這種性質的複合形。我們求作一個變換，換 $\mathfrak{K}$ 成實數平面。先固定 $\mathfrak{K}$ 的一個單純剖分，證明每一個組形剖線 $\mathfrak{k}$ 恰從 $\mathfrak{K}$ 割下一個確定的元面片。因為 $\mathfrak{k}$ 零倫，因此也 ~ 0 模 2，所以是一個二維的子複合形 $\mathfrak{E}$ 的邊緣。$\mathfrak{E}$ 是一個有邊緣的曲面。要證明他是一個元面片，根據 § 40，只要證明 $\mathfrak{E}$ 上任意一個模 2 的一維鍊 $\mathfrak{u}$ 都是模 2 零調。在 $\mathfrak{K}$ 上，顯然 $\mathfrak{u} \sim 0$ 模 2；所以有一個有限的子複合形 $\mathfrak{U}$，以 $\mathfrak{u}$ 為邊緣。因為 $F[\mathfrak{U}]$ 在 $\mathfrak{E}$ 上，若是 $\mathfrak{U}$ 含有 $\mathfrak{E}$ 以外的一個三邊形，他就含有 $\mathfrak{E}$ 以外的每一個三邊形。既然 $\mathfrak{U}$ 是有限的，他所含有的三邊形都屬于 $\mathfrak{E}$，所以 $\mathfrak{u}$ 在 $\mathfrak{E}$ 上已經 ~ 0 模 2。而且 $\mathfrak{E}$ 也唯一的確定了。因為，若是有第二個曲面 $\mathfrak{E}'$ 以 $\mathfrak{k}$ 為邊緣，$\mathfrak{E}$ 與 $\mathfrak{E}'$ 就組成一個模 2 的閉鍊。但是除 0 這個鍊之外，$\mathfrak{K}$ 上無閉鍊；因為一個閉鍊若含有一個三邊形，他就必須含有每一個三邊形。——現在再設 $\mathfrak{E}_1$ 是 $\mathfrak{K}$ 上任一個由三邊形組成的元面片，而且以 $\mathfrak{k}_1$ 為邊緣。把所有的三邊形，與 $\mathfrak{E}_1$ 的三邊形有一條公共棱或一個公共頂點的，加到 $\mathfrak{E}_1$ 上去。$\mathfrak{E}_1$ 因此唯一的擴充成一個子複合形 $\mathfrak{T}$。$\mathfrak{T}$ 可能有"洞"。在有洞的時候，就又把所有的元面片，以 $\mathfrak{T}$ 上的組形剖線為邊緣的，加到 $\mathfrak{T}$ 上去。——我們說，如此得着的複合形 $\overline{\mathfrak{T}}$ 是一個元面片。因為 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的作法，$\overline{\mathfrak{T}}$ 滿足頁 123 上的連接條件 (PM_3)。我們再看由 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的邊緣棱組成的一條組形剖線 $\mathfrak{k}_2$。因為從 $\mathfrak{T}$ 作成 $\overline{\mathfrak{T}}$ 時我們並未增加新的邊緣棱，$\mathfrak{k}_2$ 也在 $\mathfrak{T}$ 的邊緣上。所以根據 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的作法，以 $\mathfrak{k}_2$ 為邊緣的元面片

$\mathfrak{E}_2$ 屬于 $\overline{\mathfrak{T}}$。從另一方面說，因爲 (PM_3)，所有的三邊形，能與 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的一個三邊形［不沿着 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的邊緣棱］連接的，也就特別是能與 $\mathfrak{E}_2$ 的一個三邊形［不沿着 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的一條邊緣棱］連接的，組成 $\overline{\mathfrak{T}}$。但 $\mathfrak{E}_2$ 的邊緣也屬于 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的邊緣，所以組成 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的三邊形就只是 $\mathfrak{E}_2$ 的三邊形，所以 $\overline{\mathfrak{T}}$ 也屬于 $\mathfrak{E}_2$，即 $\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{E}_2$ 是一個元面片。——現在 $\mathfrak{E}_2$ 的所有三邊形，不屬于 $\mathfrak{E}_1$ 的，組成一個有一個洞的元面片，即一個平環 $\mathfrak{Z}_1$，以 $\mathfrak{k}_1$ 爲內邊緣，$\mathfrak{k}_2$ 爲外邊緣。把 $\mathfrak{E}_1$ 拓撲的變換成實數平面的單位圓域；把 $\mathfrak{Z}_1$ 拓撲的變換成實數平面上的，內半徑等于 1 而外半徑等于 2 的平環，而且使 $\mathfrak{E}_1$ 與 $\mathfrak{Z}_1$ 的公共圓 $\mathfrak{k}_1$ 上的變換相同；然後再把 $\mathfrak{Z}_2$ 變換成內半徑等于 2，外半徑等于 3 的平環等等。這樣我們就得着一個換 $\mathfrak{R}$ 成整個的實數平面的拓撲變換。

27.（頁 225）由此可知，若是兩條從 O 起始的閉道 w_1 與 w_2 能繼續的互相變狀，他們也就能組合的互相變狀。因爲，$w_1 w_2^{-1}$ 既然繼續的零倫，根據 (II)，也就組合的零倫，所以我們能先把 w_1 組合的變狀成 $w_1 \cdot w_2^{-1} w_2$，然後再組合的變狀成 w_2。

28.（頁 246）斷定何種閉曲面上有可反的曲線（附註 23）。——在投影空間中，零倫的曲線都可反，投影直線也可反；所以所有的曲線都可反。但是，在透鏡空間 (3,1) 中，只有零倫的曲線纔可反。

29.（頁 246）我們還可用另一種變狀，即所謂“破裂的變狀 (*Deformation mit Zerreissung*)”，使一條閉道 w_1 變狀成一條同調的道路。這種變狀如下：先變狀 w_1 成一條有一個重點（自相啣接的點）P 的道路 $\bar{w}_1$，然後把 $\bar{w}_1$ 看作是以 P 爲起點的兩條閉道 w_1' 與 w_1'' 的乘積，然後再把 w_1' 與 w_1'' 互相獨立的自由變狀，使他們最後又連接成單獨的一條道路 w_2。我們能再同樣的變狀 w_2。經過 r 次如此變狀之後，我們得着 w_r，與原來的 w_1 同調。我們很容易看出，每一條與 w_1 同調的道路都能如此得到。頁 246 上的道路類，相配元類，與同調類三類即相當于我們的三種變狀：限制的變狀，自由的變狀，與破裂的變狀。

30.（頁 251）Vietoris [6] 已計算得一個拚聯的複合形的同調群。更參看 Mayer [1]。關于基本羣，參看 Seifert [1]。

31.（頁 252）有下述的更普遍的事實。只有在兩對整數 m,n 與 m',n'（不管次序）相同的時候，有一個關係 $A^m = B^n$ 的羣與有一個關係 $\bar{A}^{m'} = \bar{B}^{n'}$ 的羣纔一一的同構。證明如下：前一個羣的中心 (*Zentrum*) 以 A^m 爲母元。這前一個羣除以他的中心的商羣有關係 $\bar{A}^m = \bar{B}^n = 1$，這商羣的每一個有限級的元都是 $\bar{A}$ 或 $\bar{B}$ 的冪的變形元。因此 m,n 這兩個數是羣的不變的特徵。參看 Schreier [1]。所以若是兩個扭結 m,n 與 m',n' 相抵 (§65)，這兩對整數必相同。但反之，若是 $m = m'$，$n = n'$，這兩個扭結却不一定相抵；因爲我們必須區別一個扭結與他的反射像。例如有一個“右”三叉扭結與一個“左”三叉扭結存在。參看 Dehn [5]，Goeritz [2]，Seifert [4]。

32.（頁 279）參看 Reidemeister [4]。

33.（頁 301）關于 Poincaré 空間的發現，參看 Poincaré [7]。那裏（頁 106）的例子

就是球式十二面體空間(參看 *Weber* 與 *Seifert* [1])。*M. Dehn* 首先找出一個方法,作無窮多不同的 *Poincaré* 空間,參看§65。流線空間(*gefaserter Raum*)論(參看附註 38 與 *Seifert* [3],頁 207)供給我們另一個方法。據流線空間論的研究,如果一個 *Poincaré* 空間是一個流線空間,也就只能有一個剖分成流線的方法(三維球有無窮多剖分成流線的方法,但他不算作 *Poincaré* 空間);這種 *Poincaré* 空間由他的例外流線(*Ausnahmefaser*)的相重次數(*Vielfachheit*)$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 唯一的確定了,而且反之亦然(相重次數只需要滿足每兩個互質的條件)。——能剖分成流線的 *Poincaré* 空間之中,只有球式十二面體空間有一個有限的基本羣。依照 *Dehn* 的方法從三叉扭結作成的流形(頁 314)與球式十二面體空間都能剖分成流線空間,所以同胚(參看 *Threlfall* 與 *Seifert* [2],*II*,頁 568)。同樣的,我們能證明這球式十二面體空間不但是三叉扭結的五葉的循環的覆疊形,而且是環面扭結 3,5 的二葉的覆疊形,與環面扭結 5,2 的三葉的覆疊形(見 *Seifert* [3],頁 222)。

34.(頁 304)參看 *Seifert* [1],*Goeritz* [1]。關於更高虧格的 *Heegaard* 圖式,參看 *Goeritz* [4],*Kreines* [1],*Reidemeister* [8],[9];*Singer* [1]。

35.(頁 305)參看 *Alexander* [3],[8]。

36.(頁 307)書中所給的證明只是對于投影平面而言,但對於任何不能定向的曲面都成立。從 *Alexander* 的對偶定理(附註 47),還可推證,這種的一個曲面不但不是一個單純剖分的子複合形,而且不能拓撲的浸沒在三維的實數空間中。

37.(頁 309)*Kneser* [5] 是用別種方法得着這結果的。

38.(頁 309)空間型問題與流線空間論供給我們三維閉流形的另外兩種作法。所謂一個空間型,就是具有下述兩個性質的 n 維流形。第一,這流形中引進了球空間的,或歐幾里得空間的,或雙曲式空間的度量;這就是說,每一點有一個鄰域,全合於這三種度量的基型(*Grundform*)之一的一個球體(度量的勻齊性的條件)。第二,這空間型滿足無止境條件(*Unendlichkeitsbedingung*);這就是說,從每一點起,沿着每一個方向,能無限制的延長一條短程線(有時候重回到起點);有了這條件,纔不會一個空間型的每一個開子集都是一個空間型。這三個基型佔一個特出的地位:在所有的空間型中,只有這三個基型是單連通的空間。(橢圓空間是由疊合度量的球空間的每對徑點而成的。若是我們在這三個基型之外,再增加橢圓空間這空間型,就只有這四個空間型滿足 *Lie-Helmholtz* 的運動條件。)每一個二維的閉曲面都是這三個度量的基型(球面,歐幾里得平面,雙曲式平面)之一的無不變點的一個運動羣的間斷域(*Diskontinuitätsbereich*);參看 *Koebe* [1]。三維中却無相當的定理;球面與圓周的拓撲積就是一例。但是三維的間斷域至少供給豐富的例子;從這來源我們得着第九章中所有的例子。球空間與歐幾里得空間的運動羣,有有限的間斷域的,我們已能够列舉;參看 *Hopf* [2],*Threlfall* 與 *Seifert* [2],*Hantzsche* 與 *Wendt*, *Dreidimensionale euklidische Raumformen* (*Math. Annalen* 110 (1935),頁 593—611)。關于雙曲式空間的間

斷域，我們知道的很少；參看 *Löbell* [4]，*Weber* 與 *Seifert* [1]。

球空間的一個運動羣的間斷域，或閉曲面的線素所組成的空間，都是流線空間。間斷域的流線是三維球（也叫做超球 *Hypersphäre*）的綿續運動羣的軌跡；線素空間的流線是通過同一個點的線素所組成的。因此間斷域與線素空間都引起流線空間的研究。—— 一個流線空間是一個三維流形，他的點分成 ∞^2 條閉曲線（叫做流線）；每一點恰在一條流線上，而且每一條流線 H 有一個"流線隣域（*Faserumgebung*）"。H 的一個流線隣域是流線所組成的，含有 H 的一個子集，而且能在保存流線（*fasertreu*）的條件之下，變換成"流線環體（*gefaserter Vollring*）"，使 H 變換成中間流線。一個流線環體是把歐幾里得空間中的一個正圓柱體的頂面與底面相對的旋轉一個有理角度之後再互相叠合而成的，他的流線即是原來與軸平行的直線。三維點流形的同胚問題（列舉在拓撲變換下的不變性的一個完全組）我們還不能解決；我們却能斷定流線空間在保存流線的變換下的不變性的一個完全組（見 *Seifert* [3]）。從如此得着的流線不變性（*Faserinvariant*）能計算基本羣。但流線不變性當然不是點流形的拓撲不變性，只是關于點流形的流線的，在保存流線的變換下的不變性。所以有時候兩個不同的流線空間是否是同胚的點流形，還成問題。不但如此，既然成為流線空間的流形的基本羣有確定的必要性質，就有不是流線空間的流形存在。例如所有的閉雙曲式空間型，與差不多所有的拓撲和（參看頁 301），都不是流線空間。但是流線不變性對于流形的拓撲學仍有貢獻；利用這種不變性，能够斷定很多流形的不同胚。例如單位三維球的有不變點的運動羣的間斷域，與附註 33 中所提到的 *Poincaré* 空間；前者是流線空間可以列舉。

39.（頁 310）扭結的相抵。我們也許想採用下述的相抵的定義，說如果兩個扭結的一個能經過他的原底的變換的一個同痕變狀（§31）變成另一個，這兩個扭結就相抵。根據這定義，每一個扭結都能變成一個圓周；只要扯緊這個扭結，使打成的結結成一點。——相抵的另一個定義，與直覺接近的，是要求兩個扭結的一個能經過整個的空間的一個同痕變狀，變成另一個。這定義與書中所用的相同，我們姑且不證明。其實空間的每一個同痕變狀顯然是空間的一個拓撲的，同向的自身變換。但反之，每一個這種的拓撲變換是否都可以從一個同痕變狀得來，我們姑且不談。——我們若是用直線段的多邊形做扭結的定義，我們就能用組合的變狀。組合的變狀是原底的變換的同痕變狀的特例，而且不允許打成的結結成一點。因此我們可以界說，一組能互相組合變狀的空間中的多邊形是一個扭結，*Reidemeister* [6] 即是如此。

40.（頁 328）這是一個拓撲不變的定義。因為我們已經證明了在一點處的同調羣是拓撲不變性（§32）。—— 流形的定義中不用勻齊性，用在一點處的同調羣替代；許多作者如 *Alexander*, *Pontrjagin*（未發表），*Vietoris* [2]，*Weyl* [2] 都不約而同的有這種意見。採用這定義的最先的完全討論，我們應該感謝 *van Kampen* [3]。*Pontrjagin* [3] 把這種流形叫做 h 流形。

41.（頁 329）有邊緣的流形。按照 van Kampen [3]，頁 37，一個有邊緣的純粹 n 維複合形，如果他的雙層是一個閉流形，就叫做一個有邊緣的 n 維流形。既然有邊緣的流形的一個胞腔剖分的對偶星形複合形不再是一個胞腔複合形，Poincaré 的對偶定理（§69）的證明，對于有邊緣的流形，在形式上已不能再用，而且這定理也不再成立。但如果從對偶的星形複合形中消去所有以邊緣上的點爲中心的星形，我們還得着一個胞腔複合形。所以若是要想把對偶定理引伸到有邊緣的流形上去，我們可以按照 Lefschetz [12]，頁 154 的方法進行，採用模邊緣 $\mathfrak{B}$ 的鍊（參看附註 20）。於是（通常的）Betti 數 p^k 就等于模 $\mathfrak{B}$ 的第 $n-k$ 個 Betti 數，（通常的）第 k 個撓係數就與模 $\mathfrak{B}$ 第 $n-k-1$ 個撓係數相同。——但是交點數論無需特別修改，就可以引伸到有邊緣的流形上去。廣義鍊也只要滿足頁 360 上的條件（E）之外，再滿足下述條件：廣義鍊所覆蓋的點集與邊緣 $\mathfrak{B}$ 無共點；參看 van Kampen [3]。

42.（頁 337）交點數的定義在文獻中並未固定，各人所採用的不一致。書中命 $S(a^k, b^{n-k})=\xi\eta\varsigma$。但我們也能設 $\omega(k,n)$ 是 k 與 n 的一個函數，他的值等于 ± 1，用 $\xi\eta\varsigma\omega(k,n)$ 作交點數。例如 van Kampen [3] 用 $\omega(k,n)=(-1)^k$。——同樣的，邊緣的定義，環繞數的定義也不一致。

43.（頁 354）這裏所給的理定 I 與 II 的證明源于 Veblen [4]。

44.（頁 371）從一個胞腔剖分到另一個，我們是用 Lefschetz [6]，[7]，[12] 的方法；從易于證明爲拓撲不變性的交點數 $S(A^0, B^n)$ 着手，然後用完全歸納法把交點數 $S(A^k, B^{n-k})$ 化成 $S(A^0, B^n)$。Lefschetz 用同樣的方法證明，在 $r+s\geqq n$ 的時候，兩個閉的廣義鍊 A^r 與 B^s 產生一個 $r+s-n$ 維的交鍊 C^{r+s-n}，他的同調類由 A^r 與 B^s 的同調類唯一的確定。C^{r+s-n} 的同調類叫做 A^r 與 B^s 的同調類的"乘積"。同調類從此不但能相加，而且還能相乘。他們組成一個環 (Ring)。我們按照 H. Hopf 的說法，把這個環與基本羣叫做這流形的代數間架。這間架能告訴我們這流形的許多情況，但斷然不能盡其所有的性質。在綿續變換論中，這個特別重要 (Hopf [12]，[14])。

45.（頁 379）一個能定向的閉曲面上的兩條紐形剖線，若恰在一點處流暢的通過，就叫做相配的紐形剖線。例如頁 376 上的圖 128 中的 a, b 或 c, d 都是一對相配的紐形剖線。

46.（頁 382）交點數在拓撲學對于代數幾何學 (algebraische Geometrie) 的應用中，佔一個特出的地位。試考慮一個三元 m 次方式等于零的方程式。這方程式代表複數投影平面中的一條 m 級的代數曲線 C_m，我們能證明，在複數投影平面這四維流形中，C_m 的點組成一個子複合形，而且，在剖分爲複合形與協合的給定他的二維單純形的定向之後，可以看作是一個廣義的二維鍊。C_m 與一條選取得適當的投影直線 C_1（複數投影平面中的一個球面）恰有 m 個交點。我們現在能證明，C_m 與 C_1 這兩個二維鍊的拓撲交點數 $S(C_m, C_1)$ 也等于 m。然後，因爲任一條投影直線 $C_1' \sim C_1$（附註 18），C_m 與 C_1' 的拓撲交點數也 $=m$。雖然，例如 C_1 是 C_m 的切線的時候，C_m 與 C_1 的公共交點實際上可以少于 m。若是兩個

任意的代數曲線的交點數界說作相當的廣義鍊的拓撲交點數，我們就很容易得着 *Bézout* 定理：一條 m 級的曲線與一條 n 級的曲線的交點數是 mn。證明：旣然這投影直線組成一個二維的同調基，所以 $C_m \sim \mu C_1$。$C_m - \mu C_1$ 這零調鍊與 C'_1 這投影直線的交點數是 0。所以 $S(C_m, C'_1) = \mu S(C_1, C'_1)$。但是如上文所說，$S(C_m, C'_1) = m$，$S(C_1, C'_1) = 1$，所以 $\mu = m$。這就是說，m 級的一條曲線與投影直線的 m 倍同調。因此 $S(C_m, C_n) = S(mC_1, nC'_1) = mn\,S(C_1, C'_1) = mn$，這就是我們所要證明的。

這個例子只是表明，我們能在代數幾何學中應用拓撲學。在 *v. d. Waerden* [2]，[3]，*Lefschetz* [2]，[4]，[12] 中有拓撲學的這方法的詳盡敍述；更參看 *F. Severi* [1]。

47.（頁 389）環繞數是 *Brouwer* [9] 首先介紹的。——*Alexander* 對偶定理（拓撲學中最美麗而結果又最豐富的定理之一）就與環繞數論相關連。設 n 維的實數空間 $\mathfrak{R}^n (n>1)$ 中有一個有限的 r 維的複合形 $\mathfrak{K}^r$，卽 $\mathfrak{K}^r$ 是 $\mathfrak{R}^n$ 的一個子集。用 $\mathfrak{R}^n - \mathfrak{K}^r$ 表示 $\mathfrak{K}^r$ 在 $\mathfrak{R}^n$ 中的剩餘集合。他是實數空間中的一個開集，所以是一個複合形，而且必定是無窮的複合形（頁 80）。用一個無窮遠點把 $\mathfrak{R}^n$ 封閉成一個 n 維球 $\mathfrak{S}^n$。$\mathfrak{S}^n - \mathfrak{K}^r$ 也有相同的性質。*Alexander* 對偶定理說出 $\mathfrak{K}^r$ 的 *Betti* 數與 $\mathfrak{S}^n - \mathfrak{K}^r$ 的 *Betti* 數間的關係。定理如下：若 p^k 與 $\bar{p}^k$ 分別是 $\mathfrak{K}^r$ 與 $\mathfrak{S}^n - \mathfrak{K}^r$ 的第 k 個 *Betti* 數，卽有

$$p^k = \bar{p}^{n-k-1} \qquad (k \neq 0,\ k \neq n-1),$$

而且在 k 是例外兩值時，$p^0 = \bar{p}^{n-1} + 1$，$p^{n-1} = \bar{p}^0 - 1$。（我們也可以更改 p^0 的定義，使上面這普遍公式對于 k 的值無例外。）

取定 $\mathfrak{K}^r$ 與 $\mathfrak{S}^n - \mathfrak{K}^r$ 的一個 *Betti* 基之後，*Betti* 數間的這些關係的深刻意義更爲明瞭。我們能選取 $\mathfrak{K}^r$ 的 k 維 *Betti* 基

$$B^k_1, B^k_2, \cdots, B^k_{p^k}$$

與 $\mathfrak{S}^n - \mathfrak{K}^r$ 的 $n-k-1$ 維的 *Betti* 基

$$\bar{B}^{n-k-1}_1, \bar{B}^{n-k-1}_2, \cdots, \bar{B}^{n-k-1}_{\bar{p}^{n-k-1}}$$

$(k \neq 0,\ k \neq n-1)$，使環繞數矩陣中的元

$$\mathfrak{V}(B^k_i, \bar{B}^{n-k-1}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{當其 } i = j, \\ 0, & \text{當其 } i \neq j。\end{cases}$$

在 $k = 0$ 時，我們不用 *Betti* 基（若是一個複合形恰含有 τ 個連通的孤立的子複合形，他的零維 *Betti* 基就由 τ 個點組成），却用代數值等于零的（頁 91）同調無關的零維鍊的一個完全組（*vollständiges System*）。（這完全組含有 $p^0 - 1$ 個這種的零維鍊。）在 $k = n-1$ 時，對於 $\bar{B}^0_j$ 我們用同樣的辦法。

若只論模2鍊，這定理仍舊成立；我們只要用連通基與連通數分別替代 *Betti* 基與 *Betti* 數，(見 *Alexander* [5]，*Pontrjagin* [3])。這定理不但對于 n 維球成立，已經推廣成對於任一流形的定理 (見 *van Kampen* [3]，*Pontrjagin* [3])。

Alexander 對偶定理的推論：

1. $\mathfrak{K}^r$ 浸沒在 n 維球 $\mathfrak{S}^n$ 中，把 $\mathfrak{S}^n$ 分開成若干開域。開域的個數完全由浸沒的複合形 $\mathfrak{K}^r$ 確定，與如何浸沒無關。開域的個數等于 $\mathfrak{K}^r$ 的 $n-1$ 維的 *Betti* 數加一，也等於 $\mathfrak{K}^r$ 的 $n-1$ 維的連通數加一，因此可知，一個 $n-1$ 維的不能定向的假流形不能浸沒在 $\mathfrak{S}^n$ 中 (*Brouwer* [10])。因爲這種的假流形的 $p^{n-1}=0$，$q^{n-1}=1$。若是他能浸沒在 $\mathfrak{S}^n$ 中，開域的個數，豈不是既等于1，又等于2？關于不能定向的曲面不能浸沒在 $\mathfrak{S}^3$ 中，頁307上已經證明了。不過那裏的證明只是對于單純浸沒而說，並非對于任意的拓撲浸沒而說罷了 (附註36)。反之，一個浸沒在 $\mathfrak{S}^n$ 中的能定向的 $n-1$ 維的流形 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 把 $\mathfrak{S}^n$ 分成兩個開域，因爲他的 $p^{n-1}=1$。那含有 $\mathfrak{S}^n$ 的無窮遠點的開域叫做 $\mathfrak{M}^{n-1}$ 的外域，另一個開域叫做內域。這定理的一個特款是 *Jordan* 曲線定理，謂實數平面被圓周的拓撲像分成兩個開域。

2. 開域的不變性定理。若是 n 維的實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 的一個開域 (一個開子集) $\mathfrak{G}$ 拓撲的變換成另一個 n 維的實數空間 $'\mathfrak{R}^n$ 的一個子集 $\mathfrak{G}'$，$\mathfrak{G}'$ 也就是一個開域 (*Brouwer* [12])。我們先證明下述輔助定理：設 $\mathfrak{S}^n$ 是用一個無窮遠點 P 封閉 $\mathfrak{R}^n$ 而成的 n 維球，$\mathfrak{E}^n$ 是 $\mathfrak{R}^n$ 中的一個拓撲的 n 維的單純形，$\mathfrak{S}^{n-1}$ 是 $\mathfrak{E}^n$ 的邊緣球。若 $\mathfrak{J}$ 與 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{S}^n$ 被 $\mathfrak{S}^{n-1}$ 所分成的內域與外域，$\mathfrak{E}^n$ 就恰好是 $\mathfrak{J}+\mathfrak{S}^{n-1}$。證明：因爲 P 不屬于 $\mathfrak{E}^n$，P 與 $\mathfrak{E}^n$ 的模2交點數等於零。因爲 $\mathfrak{A}$ 的任意二點有一條連接的道路，與 $\mathfrak{S}^{n-1}$ 無共點，$\mathfrak{E}^n$ 與 $\mathfrak{A}$ 的任一點的交點數也等于零。同理，若是 $\mathfrak{J}$ 中有一點不屬於 $\mathfrak{E}^n$，$\mathfrak{E}^n$ 與 $\mathfrak{J}$ 的每一點的模2交點數也必定等于零。因此，若是 $\mathfrak{U}^0$ 是 $\mathfrak{S}^n-\mathfrak{S}^{n-1}$ 中的，而且在 $\mathfrak{S}^n$ 中零調的任意一個模2的零維鍊，則必 $\mathfrak{V}(\mathfrak{S}^{n-1},\mathfrak{U}^0)=S(\mathfrak{S}^n,\mathfrak{U}^0)=0$，與 *Alexander* 對偶定理矛盾。所以 $\mathfrak{J}$ 的每一點都屬于 $\mathfrak{E}^n$。$\mathfrak{A}$ 的點顯然不屬于 $\mathfrak{E}^n$；因爲一個單純形中的任兩個中間點都能用線段連接，與邊緣無共點。——從這輔助定理立刻知道，對於 $\mathfrak{R}^n$ 而言，$\mathfrak{E}^n$ 的中心是 $\mathfrak{E}^n$ 的一個內點。開域的不變性定理現在可證明如下。設 X 是 $\mathfrak{G}$ 的任一點，取一個以 X 爲中心的，屬於 $\mathfrak{G}$ 的，小的平直 n 維單維形，他的像就屬于 $\mathfrak{G}'$ 的一個拓撲單純形。X' 所以是 $\mathfrak{G}'$ 的內點。

48. (頁 392) *Kneser* 指出透鏡空間 (3, 1) 的非對稱性。*Alexander* [10]，*de Rham* [1]，*Reidemeister* [9]，*Seifert* [4] 利用環繞數，得着其他的特性，用以區別流形。

49. (頁 397) 變換度是 *Brouwer* [8] 最先介紹的。——給定了變換度，並不一定有一個換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^n 的綿續變換存在，以給定的變換度爲他的變換度。例如，若 $\mathfrak{K}^n$ 是一個虧格 $p>0$ 的能定向的曲面，K^n 是虧格 q 的能定向的曲面，變換度 γ 必須使 $|\gamma|(q-1)\leqq(p-1)$。尤其是一個虧格 $p>1$ 的曲面的綿續的自身變換的變換度 γ 只能是 $0,+1,-1$ (*Kneser*[9])。——相關連的一個問題是：變換度等于 γ 的一個變換是否總能如此變狀，使 K^n 的一個(小)

開域恰被覆蓋了$|\gamma|$次？這問題已被 *Hopf* [19]（部分 *II*）與 *Kneser* [9] 肯定的解答了。變換度論只是用代數的羣論的方法，來討論綿續變換的一例。關于這種變換的代數學，參看 *Hopf* [12],[14],[19]。這些論文中還指出了其他文獻。

50.（頁 405）不變點公式。本書中推證不變點公式的方法根據于 *Hopf* [9]。本書中的不變點公式是 *Lefschetz-Hopf* 的不變點的普遍公式的一個特款。普遍公式說：若 f 是一個純粹複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的任意一個綿續的自身變換，$\sum(-1)^k\ Sp\ \mathfrak{B}^k$ 就等於所有不變點的指數的負的代數和。在一個孤立的不變點 P 是一個 n 維單純形的中間點時，他的指數的定義如下。取一個以 P 爲中心的小球 $\mathfrak{S}^{n-1}$。設 $\mathfrak{v}_Q$ 是從 $\mathfrak{S}^{n-1}$ 的一點 Q 到他的像點 $f(Q)$ 的矢。通過 P 而與 $\mathfrak{v}_Q$ 平行的射線交 $\mathfrak{S}^{n-1}$ 于一點 $\varphi(Q)$。φ 是 $\mathfrak{S}^{n-1}$ 的一個綿續的自身變換。不變點的指數就是這變換的變換度。不變點的指數的概念，主要起源于 *Poincaré* [1]，部分 3 與 4。*Hopf* [7]，[11] 把不變點的普遍公式化成本書中所推證的特殊公式，因而證明普遍公式。*Lefschetz* [6]，[7] 的原來的證明是用"拓撲積的方法"，我們現在簡略的表明這種方法。

換一個複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到一個複合形 K^m 的一個綿續變換能表出如下：先做成拓撲積 $\mathfrak{K}^n\times\mathsf{K}^m$。相當于 $\mathfrak{K}^n$ 的每一點 P，在積上有一點 $P\times f(P)$。這種點 $P\times f(P)$ 組成積的一個子集，與 $\mathfrak{K}^n$ 同胚，叫做 f 在這積中的示性子複合形（*charakteristischer Teilkomplex*）。若是在 f 之外，另有一個換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的綿續變換 g，而且 $f(P)=g(P)$，P 就叫做變換 f 與 g 的叠點（*Koinzidenzpunkt*）。所以叠點相當于 f 與 g 的示性子複合形的共點。在 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^m 特別是兩個維數相等的流形時，這兩個示性子複合形就有一個交點數，叫做這些叠點的代數的個數。*Lefschetz* 得着一個公式；在知道了 f 與 g 在同調羣中所實現的同構變換的時候，就可以從這公式計算叠點的代數的個數。若 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^m 相同，而且 g 是么變換，我們就從這公式得着不變點的普遍公式。*Lefschetz* 公式的證明只適用于（有邊緣的與無邊緣的）流形，但也包含多値變換。這拓撲積的方法在研究別種變換問題時也很有用（例如 *Hopf* [12]，[14]）。

不變點公式與綿續矢集論有密切關係。設 f 是一個"微小變換（*kleine Transformation*）"，那就是說，f 是一個綿續的自身變換，而且使點的位置僅有微小的移動。除 f 的不變點之外，一個底點與他在 f 下的像點確定一個從底點到像點的矢。f 的不變點確定一個零矢，叫做 f 所確定的矢集中的異素（*singuläre Stelle*）。除異素之外，這矢集綿續。假設這矢集中只有有限個異素。所謂矢集中一個異素的指數，就是這微小變換的相當的不變點的指數。既然 f 是微小變換，他的 $Sp\ \mathfrak{B}^i=p^i$，而且 *Betti* 數加減相間的和等于負 *Euler* 示性數，所以有 *Hopf* [5] 的定理：一個矢集的異素的指數和等於這流形的負 *Euler* 示性數。

利用不變點公式，有時候可以斷定一個不變點的存在（§81）。不變點的存在這問題與一個變換類的不變點的最少個數（*Mindestzahl*）的問題有區別。後者是問一個給定的變換變

狀後，最少有多少不變點。*J. Nielsen* 把不變點分成不變點類（*Fixpunktklasse*），因而證得不變點的最少個數的一個下界（*Abschätzung*）。不變點類的定義如下：若是兩個不變點能用一條道路 w 連接，使 w 與他的像道路組成一條零倫的閉道，這兩個不變點就說是屬于同一個不變點類。還有下述的等價的定義：把底複合形的變換印到萬有覆疊形上去，（在普遍情形下可能有許多不同的印法），得着萬有覆疊形的一個變換。這樣的一個覆疊變換印到底複合形上去的不變點，屬于同一個不變點類。參看 *Nielsen* [4],[6] 與 *Hopf* [6]。這幾篇論文中還指出 *Alexander*, *Brouwer*, *Birkhoff*, *Feigl* 與別人的，一部分與本問題有關的論文。

51.（頁 407）一個 $2k+1$ 維的流形有不含不變點的變狀。這定理普遍的成立；參看 *Hopf* [5]。

52.（頁 436）群論中的結果有時候可以用拓撲學證明，而不能用算術的方法證明，或不能還樣容易的證明。頁 282 中利用覆疊複合形推證的羣論中的結果就是一例。下述的問題也屬于這一類。這問題就是要從給定的母元與關係，去推斷羣的構造；特別是要解決這同構問題：推斷兩個由母元與關係給定的羣是否一一同構。*Artin* [2] 的編辮論（*Theorie der Zöpfe*）是一個特別簡而妙的例子。他證明了 n 個字母的對稱置換羣可以由兩個母元 a 與 σ，與下列三種關係給定：$a^n=(a\sigma)^{n-1}$，$\sigma^2=1$，與 σ 能與 $a^i\sigma a^{-i}$ $\left(2\leqq i\leqq \frac{n}{2}\right)$ 對易的關係。另一例見 *Threlfall* 與 *Seifert* [2]，頁 577。羣圖（*Gruppenbild*）的作法，在原則上說，能使我們對于任一羣都明瞭他的構造；而實際上，對于許多羣，羣圖確有這種功效。羣圖是從羣的母元與關係作成的拓撲的棱複合形或面複合形（參看 *Dehn* [4]，*Threlfall* [1]）。例如把一個流形任意的割開成一個多面體（根據 §60），再作他的萬有覆疊複合形，這多面體就印成一個胞腔剖分。對偶的胞腔剖分的棱複合形就是基本羣的一個 *Dehn* 羣圖。例如球式十二面體空間就使我們知道他的以 $A^5=B^3=C^2=ABC$ 爲關係的基本羣就是 120 級的二元的二十面體羣。但是一個流形有不可想像那麼多的割開方法。我們取任意兩個割開方法，根據 § 62 求得兩組母元與關係，然後研究如何從一組母元與關係換成另一組的時候，就已經可以看出同構問題是非常困難的了。

文獻索引

這索引中的文獻並非搜羅得完備無遺漏。到 1907 止的文獻，看 M. Dehn [1]; 到 1923 的，看 B. v. Kerékjártó [6]; 到 1930 的，看 B. L. v. d. Waerden [1]; 到 1930 的，看 S. Lefschetz [12]; 到1930 的 (其中到 1926 的完備)，看 H. Tietze 與 L. Vietoris; 到 1932 的，看 K. Reidemeister [6]。

Alexander, J. W.

1. A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), 頁 148—154.
2. Note on two threedimensional manifolds with the same group. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), 頁 339—342.
3. Note on Riemann spaces. Amer. Math. Soc. Bull. 26 (1919), 頁 370—372.
4. On transformations with invariant points. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), 頁 89—95.
5. A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), 頁 333—349.
6. On the deformation of an n-cell. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), 頁 406—407.
7. Invariant points of a surface transformation of given class. Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), 頁 173—184.
8. A lemma on a system of knotted curves. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), 頁 93—95.
9. On the subdivision of 3-Space by a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 10 (1924), 頁 6—8.
10. New topological invariants expressible as tensors. Ebenda 頁 99—101.
11. On certain new topological invariants of a manifold. Ebenda 頁 101—103.
12. Topological invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 10 (1924), 頁 493—494.
13. On the intersection invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 11 (1925), 頁 143—146.
14. Note on a theorem of H. Kneser. Ebenda 頁 250—251.
15. Combinatorial Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. 28(1926), 頁 301—329.
16. (與 G. B. Briggs). On types of knotted curves. Ann. of Math. (2) 28 (1927), 頁 562—586.
17. Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), 頁 275—306.
18. The combinatorial theory of complexes. Ann. of Math. (2) 31 (1930), 頁 294—322.
19. (與 L. W. Cohen). A classification of the homology groups of compact spaces. Ann. of Math. (2) 33 (1932), 頁 538—566.
20. Some problems in topology. Verh. internat. Math.-Kongr. 1 (1932), 頁

249—257.
21. A matrix knot invariant. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 19 (1933), 頁 272—275.
22. (見 Veblen.)

Alexandroff, P.
1. Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie. Math. Ann. 94 (1925), 頁 296—308.
2. Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie. Math. Ann. 96 (1927), 頁 489—511.
3. Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven. Ebenda 頁 512—554.
4. Über stetige Abbildungen kompakter Räume. Ebenda 555—571.
5. Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehung zur elementaren geometrischen Anschauung. Math. Ann. 98 (1928), 頁 617—636.
6. Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1927, 頁 323—329.
7. Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque. Comptes Rendus 184 (1927), 頁 317—319.
8. Sur la décomposition de l'espace par des ensembles fermés. Comptes Rendus 184 (1927), 頁 425—428.
9. Zum allgemeinen Dimensionsproblem. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, 頁 25—44.
10. Untersuchungen über Gestalt und Lage beliebiger abgeschlossener Mengen. Ann. of Math. 30 (1928), 頁 101—187.
11. (與 P. Urysohn). Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam (1) 14 Nr. 1 (1929).
12. Sur la notion de dimension des ensembles fermés. Journ. Math. pures appl. (9) 11 (1932), 頁 283—298.
13. Über einen Satz von Herrn Borsuk. Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), 頁 127—128.
14. Über die Urysohnschen Konstanten. Fundam. Math. 20 (1933), 頁 140—150.
15. Dimensionstheorie, ein Beitrag zur Theorie der abgeschlossenen Mengen. Math. Ann. 106 (1932), 頁 161—238.
16. Einfachste Grundbegriffe der Topologie (Berlin 1932).

Antoine, L.
1. Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. Journ. Math. pures appl. (8) 4 (1921), 頁 221—325.
2. Sur les ensembles parfaits partout discontinus. Comptes Rendus 173 (1921), 頁 284—285.

Artin, E.
1. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 4 (1925), 頁 174—177.
2. Theorie der Zöpfe. Ebenda 頁 47—72.
3. (更參看 Klein [1], 頁 346.)

Baer, R.
1. Kurventypen auf Flächen. Journ. reine angew. Math. 156 (1927), 頁 231—246.

2. Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen. Journ. reine angew. Math. 159 (1928), 頁 101—116.

Bankwitz, C.

1. Über die Torsionszahlen der zyklischen Überlagerungsräume des Knotenaußenraumes. Ann. of Math. 31 (1930), 頁 131.
2. Über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. Ebenda 頁 129.
3. Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten. Math. Ann. 103 (1930), 頁 145—162.

Bergmann, G.

1. Zwei Bemerkungen zur abstrakten und kombinatorischen Topologie. Monatsh. f. Math. 38 (1931), 頁 245—256.
2. Zur algebraisch-axiomatischen Begründung der Topologie. Math. Ztschr. 35 (1932), 頁 502—511.

Betti, E.

1. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Ann. Mat. pura appl. (2) 4 (1871), 頁 140—158.

Bilz, E.

1. Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis Situs. Math. Ztschr. 18 (1923), 頁 1—41.

Birkhoff, G. D.

1. Proof of Poincaré's geometric theorem. Trans. Am. Math. Soc. 14 (1913), 頁 14—22.
2. Dynamical Systems with two degrees of freedom. Trans. Am. Math. Soc. 18 (1917), 頁 199—300.
3. Une généralisation à n dimensions du dernier théoréme de géométrie de Poincaré. Comptes Rendus 192 (1921), 頁 196—198.
4. (與 O. D. Kellogg). Invariant points in function space. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), 頁 96—115.
5. Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. IX (New York 1927).
6. (與 P. A. Smith). Structure Analysis of surface transformations. Journ. Math. pures appl. (9) 7 (1928), 頁 345—379.
7. Einige Probleme der Dynamik. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 38(1929), 頁 1—16.

Borsuk, K.

1. Über Schnitte der n-dimensionalen euklidischen Räume. Math. Ann. 106 (1932), 頁 239—248.
2. Über bie Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie. Fundam. Math. 20 (1933), 頁 224—231.
3. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Ebenda 頁 177—190.

Boy, W.

1. Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Math. Ann. 57 (1903), 頁 151—184.

Brauner, K.

1. Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. II. Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), 頁 1—55.

Briggs, G. B.

1. (見 Alexander.)

Brouwer, L. E. J.

1. On one-one continuous transformations of surfaces into themselves. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 11 (1908), 頁 788—798; 12 (1909), 頁 286—297; 13 (1910), 頁 767—777; 14 (1911), 頁 300—310; 15 (1912), 頁 352—360; 22 (1920), 頁 811—814; 23 (1920), 頁 232—234.
2. On continuous vector distributions on surfaces. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 11 (1908), 頁 850—858; 12 (1909), 頁 716—734; 13 (1910), 頁 171—186.
3. Zur Analysis situs. Math. Ann. 68 (1910), 頁 422—434.
4. Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Math. Ann. 69 (1910), 頁 169—175.
5. Über eindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich. Ebenda 頁 176—180.
6. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Ann. 70 (1911), 頁 161—165.
7. Sur le théorème de M. Jordan dans l'espace à n dimensions. Comptes Rendus 153 (1911), 頁 542—544.
8. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), 頁 97—115 及頁 598.
9. On looping coefficients. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 15 (1912), 頁 113—122.
10. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), 頁 320—327.
11. Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum. Math. Ann. 71 (1912), 頁 314—319.
12. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebietes. Math. Ann. 71 (1912), 頁 305—313 及 72 (1912), 頁 55—56.
13. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. Jahrb. f. Math. 142 (1913), 頁 146—152; Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 26 (1923), 頁 795—800; Math. Ztschr. 21 (1924), 頁 312—314.
14. Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen. Math. Ann. 82 (1921), 頁 280—286.
15. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. Math. Ann. 82 (1921), 頁 94—96.
16. On transformations of Projective Spaces. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), 頁 864—865.

Brown, A. B.

1. An extension of the Alexander duality theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), 頁 407—408.
2. On the join of two complexes. Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 頁 417—420.

3. Group invariants and torsion coefficients. Ann. of Math. (2) 33 (1932), 頁 373—376.
4. (見 Koopman.)
5. Topological invariance of subcomplexes of singularities. Amer. Journ. Math. 54 (1932), 頁 117—122.

Burau, W.
1. Über Zopfinvarianten. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9 (1932), 頁 117—124.
2. Kennzeichnung der Schlauchknoten. Ebd. 頁 125—133.

Carathéodory, C.
1. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. 73 (1913), 頁 323—370.
2. Reelle Funktionen. 第二版 (Leipzig 1927).

Čech, E.
1. Trois théorèmes sur l'homologie. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 144 (1931). 頁 1—21.
2. Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. Fundam. Math. 19 (1932), 頁 149—183.
3. Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes. Erg. math. Kolloqu. H. 5 (1933), 頁 29—31.
4. Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité. Ann. of Math. (2) 34 (1933), 頁 621—730.
5. Introduction à la théorie de l'homologie. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk No. 184 (1933). 頁 1—34 (Tschechisch, franz. Zusammenfassung 頁 35—36).

Chuard, J.
1. Questions d'analysis situs. Rend. Circ. mat. Palermo 46 (1922), 頁 185—224.

Cohen, L. W.
1. (見 Alexander.)

Cohn-Vossen
1. (見 D. Hilbert.)

Dehn, M.
1. (與 P. Heegaard). Analysis Situs. Enz. Math. Wiss. III A B 3 (Leipzig 1907).
2. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. 69 (1910), 頁 137—168.
3. Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. 72 (1912), 頁 413—421.
4. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. 71 (1912), 頁 116—144.
5. Die beiden Kleeblattschlingen. Math. Ann. 75 (1914), 頁 402—413.

Dyck, W. v.
1. Beiträge zur Analysis Situs. I. Math. Ann. 32 (1888), 頁 457—512; II. Math. Ann. 37 (1890), 頁 273—316.
2. Beiträge zur Analysis Situs. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 37 (1885), 頁 314—325

(I); 38 (1886), 頁 53—69 (II); 39 (1887), 頁 40—52 (III).

Ehresmann, C.

1. Sur la Topologie de certaines variétés algébriques. Comptes Rendus 196 (1933), 頁 152—154.

Ephraimowitsch, W.

1. Zur Theorie der nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten. Math. Ztschr. 29 (1928), 頁 55—59.

Errera, A.

1. L'origine et les problèmes de l'analysis situs. Revue de l'Univ. de Bruxelles 7—8 (1921), 頁 1—15.
2. Sur les polyèdres réguliers de l'analysis situs. Mém. Acad. Belgique (2) 7 (1922).

Feigl, G.

1. Fixpunktsätze für spezielle n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 98 (1927), 頁 355—398.
2. Geschichtliche Entwicklung der Topologie. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 37 (1928), 頁 273—286.

Fenchel, W.

1. Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidsskr. BH. 3/4 (1932), 頁 66—87.

Fischer, A.

1. Gruppen und Verkettungen. Comment. math. helv. 2 (1930), 頁 253—268.

Flexner, W. W.

1. (與 S. Lefschetz). On the duality theorem for the Betti numbers of topological manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), 頁 530—533.
2. The Poincaré duality theorem for topological manifolds. Ann. of Math. (2) 32 (1931), 頁 539—548.
3. On topological manifolds. Ann. of Math. (2) 32 (1931), 頁 393—406.

Frankl, F.

1. Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen usw. S.-B. Akad. Wiss. Wien 136 (1927), 頁 689—699.
2. (與 L. Pontrjagin). Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. Math. Ann. 102 (1930), 頁 785—789.
3. Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes. Monatsh. f. Math. Phys. 38 (1931), 頁 357—364.

Furch, R.

1. Orientierung von Hyperflächen im projektiven Raum. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 1 (1922), 頁 210—212.
2. Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), 頁 69—88.
3. Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes. Ebd. 頁 237—245.
4. Über den Schnitt zweier Sphären im R^4. Math. Ztschr. 28 (1928), 頁 556 至 566.

5. Polyedrale Gebilde verschiedener Metrik. Math. Ztschr. 32 (1930), 頁 512 至 544.

Gawehn, J.

1. Über unberandete zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 98 (1927), 頁 321—354.

Gieseking, H.

1. Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen (Hilchenbach 1912).

Goeritz, L.

1. Die Heegaard-Diagramme des Torus. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1932), 頁 187—188.
2. Knoten und quadratische Formen. Math. Ztschr. 36 (1933), 頁 647—654.
3. Normalformen der Systeme einfacher Kurven auf orientierbaren Flächen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), 頁 223—243.
4. Die Abbildungen der Brezelfläche und der Vollbrezel vom Geschlecht 2. Ebenda 頁 244—259.

Hadamard, J.

1. La géométrie de situation et son rôle en mathématiques. Rev. du mois 8 (1909), 頁 38—60.
2. Sur quelques applications de l'indice de Kroneker. Appendice à J.Tannery, Théorie des Fonctions (Paris 1910).

Hausdorff, F.

1. Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914).
2. 同書第二版 (Berlin 1927).

Heegaard, P.

1. (見 Dehn.)
2. Sur l'Analysis Situs. Bull. Soc. Math. France. 44 (1916), 頁 161—242.

Heesch, H.

1. Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen. Nachr. Ges Wiss. Göttingen I. Nr. 27 (1932), 頁 268—273.

Hilbert, D.

1. (與 S. Cohn-Vossen). Anschauliche Geometrie (Berlin 1932).

Hopf, H.

1. Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, 頁 131—141.
2. Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. Math. Ann. 95 (1925), 頁 313—339.
3. Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen. Ebenda 頁 340—367.
4. Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 96 (1927), 頁 209—224.
5. Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Ebenda 頁 225—250.
6. Über Mindestzahlen von Fixpunkten. Math. Ztschr. 26 (1927), 頁 726—774.
7. A new proof of the Lefschetz formula on invariant points. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 14 (1928), 頁 149—153.

8. On some properties of one-valued transformations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 14 (1928), 頁 206—214.
9. Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, 頁 127—136.
10. Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. I. Neue Darstellung der Theorie des Abbildungsgrades für topologische Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 100 (1928), 頁 579—608; II. Klasseninvarianten von Abbildungen. Math. Ann. 102 (1929), 頁 562—623.
11. Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Ztschr. 29 (1929), 頁 493—524.
12. Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Journ. reine angew. Math. 163 (1930), 頁 71—88.
13. Über wesentliche und unwesentliche Abbildung von Komplexen. Moskau Math. Samml. (1930), 頁 53—62.
14. Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen. Journ. reine angew. Math. 165 (1931), 頁 225—236.
15. Géométrie infinitesimale et Topologie. L'Enseignement math. 30 (1931), 頁 233—240.
16. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. 104 (1931), 頁 637—665.
17. (與 W. Rinow). Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. math. helv. 3 (1931), 頁 209—225.
18. Differentialgeometrie und topologische Gestalt. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41 (1932), 頁 209—229.
19. Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre. Comment. math. helv. 5 (1933), 頁 39—54.
20. (與 Erika Pannwitz). Über stetige Deformationionen von Komplexen in sich. Math. Ann. 108 (1933), 頁 433—465.

Hotelling, H.

1. Threedimensional manifolds of states of motions. Trans. Amer. Math Soc. 27 (1925), 頁 329—344.
2. Multiple-sheeted spaces and manifolds of states of motions. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), 頁 479—490.

Johansson, J.

1. Topologische Untersuchungen über unverzweigte Überlagerungsflächen. Skr. norske Vid. Akad. Oslo Math.-naturv. Kl. Nr. 1 (1931), 頁 1—69.
2. Zu den zweidimensionalen Homotopiegruppen. Norsk Mat. Forenings. Skr., (2) Nr. 1/12 (1933), 頁 55—59.

Kähler, E.

1. Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle. Math. Ztschr. 29 (1929), 頁 188—204.

Kampen, E. R. van.

1. Eine Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 31 (1928), 頁 899—905.

2. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. Abhandl Math. Sem. Hamburg. Univ. 6 (1928), 頁 216.
3. Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze (Den Haag. 1929).
4. Komplexe in euklidischen Räumen. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9 (1932), 頁 72—78 及頁 152—153.
5. Some remarks on the join of two complexes and on invariant subsets of a complex. Amer. J. Math. 54 (1932), 頁 543—550.
6. On the Fundamental Group of an algebraic curve. Amer. Journ. Math. 55 (1933), 頁 255—260.
7. On the connection between the fundamental groups of some related spaces. Ebenda 頁 261—267.
8. On some lemmas in the theory of groups. Ebenda 頁 268—273.

Kellogg, O. D.
1. (見 Birkhoff.)

Kerékjártó, B. v.
1. Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Ber. Ungar. Akad. Wiss. 38 (1919), 頁 194—198.
2. Über die Brouwerschen Fixpunktsätze. Math. Ann. 80 (1919), 頁 29—32.
3. Über Transformationen des ebenen Kreisringes. Ebenda 頁 33—35.
4. Zur Gebietsinvarianz. Ber. Ung. Akad. Wiss. 39 (1921), 頁 220—221.
5. Kurvenscharen auf Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1922, 頁 71—79.
6. Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923).

Kiang, Tsai-Han.
1. On the groups of orientable two-manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 17 (1931), 頁 142—144.

Klein, F.
1. Höhere Geometrie (Berlin 1926).

Kneser, H.
1. Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 30 (1921), 頁 83—85.
2. Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. Math. Ann. 91 (1924), 頁 135—154.
3. Ein topologischer Zerlegungssatz. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 27 (1924), 頁 601—616.
4. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 34 (1925), 頁 1—14.
5. Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, 頁 128—130.
6. Die Deformationssätze der einfachzusammenhängenden Flächen. Math. Ztschr. 25 (1926), 頁 362—372.
7. Glättung von Flächenabbildungen. Math. Ann. 100 (1928), 頁 609—617.
8. Geschlossene Flächen in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 38 (1929), 頁 248—260.
9. Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. Math. Ann. 103 (1930), 頁 347—358.

Koebe, P.

1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. I. S. Ber. Preuß. Akad. Wiss. (1927) 頁 164—196; II. (1928) 頁 345—348; III. (1928) 頁 385—442; IV. (1929) 頁 414—457; V. (1930) 頁 304—364; VI. (1930) 頁 505—541; VII. (1931) 頁 506—534; VIII. (1932) 頁 249—284.

Koopman, B. O.

1. (與 A. B. Brown) On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 頁 231—251.

Kreines, M.

1. Zur Konstruktion der Poincaré-Räume. Rend. circ. mat. Palermo 56 (1932), 頁 277—280.

Kronecker, L.

1. Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen. Monatsberichte Berl. Akad. (1869), 頁 159—193 及頁 688—698.

Künneth, H.

1. Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Produktmannigfaltigkeit. S.-Ber. physik.-med. Soz. Erlangen 54/55 (1922/23), 頁 190—196.
2. Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit. Math. Ann. 90 (1923), 頁 65—85.
3. Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 91 (1924), 頁 125—134.

Kuratowski, C.

1. Topologie I. Espaces métrisables, espaces complets. (Warschau 1933).

Landsberg, G.

1. Beträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie. Math. Ann. 70 (1911), 頁 563—579.

Lefschetz, S.

1. Algebraic Surfaces, their cycles and integrals. Ann. of Math. 21 (1920), 頁 225—258.
2. On certain numerical invariants of algebraic varieties, with application to Abelian varieties. Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), 頁 327—482.
3. Continuous transformations of manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), 頁 90—93.
4. L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique (Paris 1924).
5. Intersections of complexes and manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 11 (1925), 頁 287—289.
6. Intersections and transformations of complexes and manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), 頁 1—49.
7. Manifolds with a boundary and their transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), 頁 429—462.
8. The residual set of a complex on a manifold and related questions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 13 (1927), 頁 614—622 及頁 805—807.
9. Closed point sets on a manifold. Ann. of Math. 29 (1928), 頁 232—254.
10. Duality relation in topology. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 15 (1929), 頁 367—369.

11. On transformations of closed sets. Ann. of Math. (2) 32 (1930), 頁 273—282.
12. Topology (New York 1930).
13. On compact spaces. Ann. of Math. (2) 32 (1931), 頁 521—538.
14. On singular chains and cycles. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933); 頁 124—129.
15. On generalized manifolds. Amer. Journ. Math. 55 (1933), 頁 469—504.
16. (見 Flexner.)

Lennes, N. J.
1. Theorems on the simple finite polygon and polyhedron. Amer. Journ. Math. 33 (1911), 頁 37—62.
2. Curves and surfacs in analysis situs. Bull. Amer. Math. Soc. (2) 17 (1911), 頁 525.

Lense, J.
1. Über die Indikatrix der projektiven Räume. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 34 (1926), 頁 243—244.

Levi, F.
1. Geometrische Konfigurationen (Leipzig 1929).

Listing, J. B.
1. Vorstudien zur Topologie. Gött. Studien 1847, 頁 811—875.
2. Der Census räumlicher Komplexe. Abh. Ges. Wiss. Göttingen 10 (1861), 頁 97—180 及 Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1861), 頁 352—358.

Löbell, F.
1. Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen. Math. Ztschr. 30 (1929), 頁 572—607.
2. Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich. Journ. reine angew. Math. 162 (1930), 頁 114—125.
3. Zur Frage der Struktur der geschlossenen geodätischen Linien in den offenen Clifford-Kleinschen Flächen mit positiver Charakteristik. Journ. reine angew. Math. 162 (1930), 頁 125—131.
4. Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), 頁 168—174.

Mayer, W.
1. Über abstrakte Topologie. Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), 頁 1—42 及 頁 219—258.

Menger, K.
1. Dimensionstheorie (Leipzig 1928).

Morse, H. M.
1. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), 頁 84—100.
2. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. Trans. Amer. Math. Soc. 26 (1924), 頁 25—60.
3. Singular points of vector fields under general boundary conditions. Amer. Journ. Math. 51 (1929), 頁 165—178.

Newman, M. H. A.
1. On the foundations of Combinatory Analysis Situs. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), 頁 611—641; 30 (1927), 頁 670—673.

2. A property of 2-dimensional elements. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), 頁 1401—1405.
3. On the superposition of n-dimensional manifolds. Journ. London. Math. Soc. 2 (1927), 頁 56—64.
4. Topological equivalence of complexes. Math. Ann. 99 (1928), 頁 399—412.
5. Combinatory topology of convex regions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), 頁 240—242.
6. Combinatory topology and Euclidean n-space. Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1930), 頁 339—346.
7. Intersection-complexes. I. Combinatory theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 27 (1931), 頁 491—501.
8. A theorem in combinatory topology. Journ. Lond. Math. Soc. 6 (1931), 頁 186—192.
9. A theorem on periodic transformations of spaces. Quart. Journ. Math. Oxford. ser. 2 (1931), 頁 1—8.
10. On the products $C_h\,C_k$ and $C_h \times C_k$ in topology. Journ. London Math. Soc. 7 (1932), 頁 143—147.

Nielsen, J.

1. Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. Math. Ann. 78 (1918), 頁 385—397.
2. Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen. Math. Ann. 81 (1920), 頁 94—96.
3. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen. Math. Ann. 82 (1920), 頁 83—93.
4. Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), 頁 246—260.
5. Zur Topologie der geschlossenen Flächen. Vorträge 6. skand. Math.-Kongr. Kopenhagen (1925).
6. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. Acta math. 50 (1927), 頁 189—358; II. 53 (1929), 頁 1—76; III. 58 (1932), 頁 87—167.
7. Über reguläre Riemannsche Flächen (丹麥文). Mat. Tidsskr. BH. 1 (1932), 頁 1—18.

Nöbeling, G.

1. Die neuesten Ergebnisse der Dimensionstheorie. Jhber. Deutscher Math.-Vereinig. 41 (1931), 頁 1—17.

Pannwitz, E.

1. Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten. Math. Ann. 108 (1933), 頁 629—672.
2. (見 Hopf.)

Poincaré, H.

1. Sur les courbes définies par une équation différentielle. Journ. Math. pures appl. (3) 7 (1881), 頁 375—424; (3) 8 (1882), 頁 251—296; (4) 1 (1885), 頁 167—244; (4) 2 (1886), 頁 151—217.
2. Analysis situs. Journ. École polytechn. (2) 1 (1895), 頁 1—121.

3. 1^r Complément à l'analysis situs. Rend. circ. mat. Palermo 13 (1899), 頁 285—343.
4. 2^d Complément. Proc. London Math. Soc. 32 (1900), 頁 277—308.
5. 3^e Complément. Bull. Soc. Math. France 30 (1902), 頁 49—70.
6. 4^e Complément. Journ. Math. pures appl. (5) 8 (1902), 頁 169—214.
7. 5^e Complément. Rend. circ. mat. Palermo 18 (1904), 頁 45—110.
8. Sur un théorème de Géométrie. Rend. circ. mat. Palermo 33 (1912), 頁 375—407.

Pontrjagin, L.
1. Zum Alexanderschen Dualitätssatz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1927), 頁 315—322 及頁 446—456.
2. Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension. Comptes Rendus 190 (1930), 頁 1105—1107.
3. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. Math. Ann. 105 (1931), 頁 165—205.
4. (見 Frankl.)

Radó, T.
1. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Litt. Sci. Szeged, 2 (1925) 頁 101—121.

Reidemeister, K.
1. Knoten und Gruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1926), 頁 7—23.
2. Elementare Begründung der Knotentheorie. Ebd. 頁 24—32.
3. Über Knotengruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), 頁 56—64.
4. Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, 頁 69—76.
5. Knoten und Verkettungen. Math. Ztschr. 29 (1929), 頁 713—729.
6. Knotentheorie (Berlin 1932).
7. Einführung in die kombinatorische Topologie (Braunschweig 1932).
8. Zur dreidimensionalen Topologie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), 頁 189—194.
9. Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10 (1934).
10. Homotopiegruppen von Komplexen. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. (1934).

Rey Pastor, J.
1. Sulla topologia dei domini di uno spazio ad n dimensioni. Atti.Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 15 (1932), 頁 524—527.

Rham, G. de.
1. Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions. Journ. math. pures appl. (9) 10 (1931), 頁 115—120.
2. Sur la théorie des intersections et les integrales multiples. Comment. math. helv. 4 (1932), 頁 151—154.

Riemann, B.
1. Fragment aus der Analysis Situs. Werke 第二版, 頁 474.
2. Abelsche Funktionen § 19. Werke 頁 84.

Rinow, W.
1. (見 Hopf.)
Rybarz, J.
1. Über drei Fragen der abstrakten Topologie. Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 頁 215—244.
Scherrer, W.
1. Geometrische Deutung des Gaußschen Verschlingungsintegrals. Comment. math. helv. 5 (1933), 頁 25—27.
Schilling, F.
1. Projektive und nichteuklidische Geometrie (Leipzig 1931).
Schreier, O.
1. Über die Gruppen $A^a B^b=1$. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), 頁 167—169.
2. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1927), 頁 233—244.
Seifert, H.
1. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), 頁 26—66.
2. Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ztschr. 35 (1932), 頁 609—611.
3. Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. Acta math. 60 (1932), 頁 147—238.
4. Verschlingungsinvarianten. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. 16 (1933), 頁 811—828.
5. (見 Threlfall.)
6. (見 Weber.)
Severi, F.
1. Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), 頁 335—364.
2. Sulla topologia e sui fondamenti dell' analisi generale. Rend. Semin. mat. Roma (2) 7 (1931), 頁 5—37.
Singer, C.
1. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), 頁 88—111.
Smith, P. A.
1. (見 Birkhoff.)
Sperner, E.
1. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), 頁 265—272.
2. Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene (Hamburg. math. Einzelschr. H. 14, Leipzig 1933).
Steinitz, E.
1. Beiträge zur Analysis situs. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. 7 (1908), 頁 29—49.
2. Polyeder und Raumeinteilungen. Encykl. Math. Wiss. III AB 12, (Leipzig 1916), 頁 139.
Tait, P. G.
1. On Knots. Trans. Roy. Soc. Edinburgh 28 (1879), 頁 145—190; 32 (1887),

頁 327—339 及 493—506.

T h r e l f a l l, W.

1. Gruppenbilder. Abh. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. 41 Nr. 6 (1932), 頁 1—59.

2. (與 H. Seifert). Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. Math. Ann. 104 (1930), 頁 1—70; II. Math. Ann. 107 (1932), 頁 543—586.

3. Räume aus Linienelementen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1932) 頁 88—110.

T i e t z e, H.

1. Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), 頁 1—118.

2. Sur les representations continues des surfaces sur elles-mêmes. Comptes Rendus 157 (1913), 頁 509—512.

3. Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst. Rend. circ. mat. Palermo 38 (1914), 頁 247—304.

4. Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 29 (1920), 頁 95—123.

5. Über Analysis Situs. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 2 (1923), 頁 37—68.

6. Zur Topologie berandeter Mannigfaltigkeiten. Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), 頁 25—44.

7. Beiträge zur allgemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs. Math. Ann. 88 (1923), 頁 290—312. II. Über die Einführung uneigentlicher Elemente. Math. Ann. 91 (1924), 頁 210—224. III. Über die Komponenten offener Mengen. Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), 頁 15—17.

8. (與 L. Vietoris). Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Encykl. Math. Wiss. III AB 13 (Leipzig 1930).

T u c k e r, A. W.

1. On combinatorial topology. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 18 (1932), 頁 86—89.

2. Modular homology characters. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 18 (1932), 頁 467—471.

3. An abstract approach to manifolds. Ann. of Math. 34 (1933), 頁 191—243.

U r s e l l, H. D.

1. Intersections of complexes. Journ. London Math. Soc. 3 (1928), 頁 37—48.

U r y s o h n, P.

1. (見 Alexandroff.)

V e b l e n, O.

1. Theory of plane curves in non-metrical analysis situs. Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 頁 83—98.

2. (與 J. W. Alexander). Manifolds of n dimensions. Ann. of Math. 14 (1913), 頁 163—178.

3. On the deformation of an n-cell. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 3 (1917), 頁 654—656.

4. The intersection numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), 頁 540—550.

5. Analysis situs. 第二版. Amer. Math. Soc. Colloquium publ. 5 Pt. II. New York Amer. Math. Soc. (1931).

Vietoris, L.

1. Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), 頁 443—453.
2. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97 (1927), 頁 454—472.
3. Über die Symmetrie der Zusammenhangszahlen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten Monatsh. f. Math. 35 (1928), 頁 165—174.
4. Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume. Math. Ann. 101 (1929), 頁 219—225.
5. Erzeugung der regulären Unterteilung von simplizialen Komplexen durch wiederholte Zweiteilung. Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), 頁 97—102.
6. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe. Monatsh. Math. Phys. 37 (1930), 頁 159—162.
7. (見 Tietze.)
8. Über den höheren Zusammenhang von Vereinigungsmengen und Durchschnitten. Fundam. math. 19 (1932), 頁 265—273.

Waerden, B. L. van der.

1. Kombinatorische Topologie. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 39 (1930), 頁 121—139.
2. Topologische Begründung des Kalkuls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. 102 (1929), 頁 337—362.
3. Zur algebraischen Geometrie. IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen der Liniengeometrie. Math. Ann. 109 (1933), 頁 7—12.

Weber, C.

1. (與 H. Seifert) Die beiden Dodekaederräume. Math. Ztschr. 37 (1933), 頁 237—253.

Weyl, H.

1. Über die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913).
2. Análysis Situs Combinatorio. Rev. mat. hisp.-amer. 5 (1923), 頁 209—218; 241—248; 273—279; 6 (1924), 頁 33—41.

Wilder, R. L.

1. Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs. Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 頁 649—692.

Wilson, W. A.

1. Representation of a simplicial manifold on a locally simplicial manifold. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), 頁 1129—1133.
2. Representation of manifolds. Math. Ann. 100 (1928), 頁 552—578.

Wirtinger, W.

1. Über die Verzweigungen bei Funktionen von zwei Veränderlichen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 14 (1905), 頁 517.

Zariski, O.

1. On the topology of algebroid singularities. Amer. Journ. Math. 54 (1932), 頁 453—465.

德中索引

亞拉伯數目字指頁數，置於圓括符內上方的數字指頁441以後的附註。

A

B

C

D

E

G

H

I

K

L

O

P

Q

R

T

U

Z

中德索引

亞拉伯數目字指頁數，置於圓括符內上方的數字指頁 441 以後的附註。

一 畫

二 畫

三 畫

四 畫

五 畫

六 畫

七　畫

八畫

九 畫

十 畫

十一畫

十 二 畫

十 三 畫

十四畫

十 五 畫

十六畫

十七畫

十八畫

十九畫

二十畫

二十三畫

勘 誤 表

頁	行	誤	正
3	3,4,–3,–4,–8	週	周
4	4	週	周
6	10	…*bereiche*),	…*bereich*),
12	–7	…曲面。但是…	…曲面。[3] 但是…
16	–6	不能定向	不能定向
20	1	…*klass*)。	…*klasse*)。
24	8	…流形。所謂…	…流形。[7] 所謂…
50	–6	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}^*$
68	–10	勻齊的	勻齊的
103	–1	矩陣四種	矩陣的四種
208	7	這 r 個紐	這 r 條紐
307	11	球 $\mathfrak{S}^8$) 中。	球 $\mathfrak{S}^3$) 中。

勘誤表二

頁	行	誤	正
328	9至10	{例如，有一個單純複合形 $\mathfrak{K}^n$ (n>3)，他的任一點處的同調羣與 n—1 維球的相同。}	例如，$\mathfrak{K}^n$ 是一個高於三維的單純複合形，有一個確定的單純剖分，而且有匀齊性。我們就無方法推斷他的一個頂點的 n—1 維鄰域複合形與 n—1 維球的同胚。
474	-13右	零調	同調
475	19右	*in ein*……在 R^3 中	*in den* $\mathfrak{R}^3$……在 $\mathfrak{R}^3$ 中
477	-13左	道路的自由同倫	自由同倫的道路
478	-16右	不變性	拓撲不變性
479	-5右	))	)
482	9右	)	))
483	19右	流形	假流形
483	21右	流形	假流形
487	-6左	餘數類	餘數類 $\breve{0}$ 與 $\breve{1}$
491	12右	點集	複合形
493	18右	連涵數	連涵數 q^b