MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XV. Band.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1879.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. II. Heft. A. u. d. T.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. XXIV. Jahrg. Supplement. [240 S.] gr. 8. geh. n. 5 ℳ.

Inhalt: I. Die deutsche Coss. Von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Carlsruhe. II. Der Traktat des Jordanus Nemorarius „de numeris datis". Herausgegeben von P. Treutlein. III. Zur Geschichte der Mathematik. 1. Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta. Von Dr. H. Weissenborn, Professor am Realgymnasium zu Eisenach. IV. Zur Geschichte der Mathematik. 2. Die Boetius-Frage. Von Dr. H. Weissenborn.

Fuhrmann, Dr. **Arwed,** ord. Professor am kgl. Polytechnikum zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Ein Uebungsbuch für Studirende der Mathematik, Physik, Technik etc. In zwei Theilen. Erster Theil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite verbesserte und vermehrte Aufl. [VI u. 138 S.] gr. 8. geh. n. 2 ℳ 40 ₰.

Lindemann, Dr. **Ferdinand,** a. o. Professor der Mathematik an der Universität in Freiburg im Br., Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz. Akademische Antrittsschrift. [40 S.] geh. 1 ℳ.

Mittheilungen des Sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Herausgegeben vom Verwaltungsrathe des Vereins. Neue Folge. Jahrg. 1878, zweite Hälfte. Mit sieben lithographirten Tafeln und einem Holzschnitte. [S. 47—92.] gr. 8. geh. n. 4 ℳ.

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser". Gesammelt und herausgegeben von L. Koenigsberger und G. Zeuner. II. Band. 3. u. 4. Heft.

Reye, Dr. **Th.,** o. Professor an der Universität zu Strassburg, synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. [VIII u. 93 S.] gr. 8. n. 2 ℳ 40 ₰.

Schell, Dr. **Wilhelm,** Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Mit besonderer Rücksicht auf das wissenschaftliche Bedürfniss technischer Hochschulen bearbeitet. Zweite umgearbeitete Auflage in zwei Bänden. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. I. Band. 1. Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. 2. Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). [XVI u. 580 S.] gr. 8. geh. n. 10 ℳ.

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

1.

(1877)

In einer, im Borchardt'schen Journale, Bd. 84, pag. 242 herausgegebenen Abhandlung habe ich für ein sehr weitreichendes Gebiet von geometrischen und arithmetischen, sowohl continuirlichen, wie discontinuirlichen Mannichfaltigkeiten den Nachweis geführt, dass sie eindeutig und vollständig einer geraden Strecke oder einem discontinuirlichen Bestandtheile von ihr sich zuordnen lassen.

Hierdurch gewinnen die letzteren Mannichfaltigkeiten, wir nennen sie *lineare Punktmannichfaltigkeiten* oder kürzer *lineare Punktmengen*, welche also entweder eine continuirliche, endliche oder unendliche, gerade Strecke bilden oder doch mit allen ihren Punkten in einer solchen, als Theile enthalten sind, ein besonderes Interesse, und es dürfte daher nicht unwerth sein, wenn wir denselben eine Reihe von Betrachtungen widmen und zunächst im Folgenden ihre Classification untersuchen wollen. Verschiedene Gesichtspunkte und damit verbundene Classificationsprincipien führen uns dazu, die linearen Punktmengen in gewisse Gruppen zu fassen. Um mit einem dieser Gesichtspunkte zu beginnen, erinnern wir an den Begriff der *Ableitung* einer gegebenen Punktmenge *P*, welcher in einer Arbeit über trigonometrische Reihen (Math. Annalen, Bd. V, pag. 129) dargelegt worden ist; in dem jüngst erschienenen Werke Dini's (Fondamenti per la teorica d. funzioni d. variabili reali, Pisa, 1878) sehen wir diesen Begriff noch weiter entwickelt, indem er als Ausgangspunkt für eine Reihe bemerkenswerther Verallgemeinerungen von bekannten analytischen Sätzen genommen wird.*) Der Begriff der *Ableitung* einer gegebenen Mannichfaltigkeit ist übrigens nicht auf die linearen Mannichfaltigkeiten beschränkt, sondern gilt in gleicher Weise auch für die *ebenen*, *räumlichen* und *n-fachen* stetigen und unstetigen Mannichfaltigkeiten. Auf ihn wird, wie wir später zeigen wollen, die einfachste und zugleich vollständigste Erklärung resp. Bestimmung eines *Continuums* gegründet.

*) Man vergleiche auch: Ascoli. Nuove richerche sulla serie di Fourier, Reale Academia dei Lincei (1877—78)

Die Ableitung P' einer linearen Punktmenge P ist nämlich die Mannichfaltigkeit aller derjenigen Punkte, welche die Eigenschaft eines *Grenzpunktes* von P besitzen, wobei es nicht darauf ankommt, ob der Grenzpunkt zugleich ein Punkt von P ist oder nicht.

Da hiernach die Ableitung einer Punktmenge P wieder eine bestimmte Punktmenge P' ist, so kann auch von dieser die Ableitung gesucht werden, welche alsdann *zweite Ableitung* von P genannt und mit P'' bezeichnet wird; durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man die ν^{te} Ableitung von P, welche mit $P^{(\nu)}$ bezeichnet wird.

Hier kann es nun vorkommen, dass der Progress der Ableitungen $P', P'', \cdots$ zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkten besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so dass $P^{(n)}$ *keine* Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat; in diesem Falle sagen wir von der Punktmenge P, dass sie von der *ersten Gattung* und von der n^{ten} *Art* sei. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von P, die Reihe $P', P'', P''', \cdots P^{(\nu)}, \cdots$ *nicht* ab, so sagen wir, dass die Punktmenge P von der *zweiten Gattung* sei.

Leicht erkennt man hieraus, dass wenn P von der ersten Gattung und n^{ter} Art ist, alsdann auch $P', P'', P''' \cdots$ zur ersten Gattung gehören und dabei resp. von der $\overline{n-1}^{\text{ten}}, \overline{n-2}^{\text{ten}}, \overline{n-3}^{\text{ten}} \cdots$ Art sind, dass ferner, wenn P zur zweiten Gattung gehört, ein gleiches auch von allen ihren Ableitungen $P', P'' \cdots$ gilt. Bemerkenswerth ist ferner, dass alle Punkte von $P'', P''' \cdots$ auch immer Punkte von P' sind, während ein zu P' gehöriger Punkt nicht nothwendig auch ein solcher von P ist.

Weiter ergeben sich wichtige Charaktere einer Punktmenge P, wenn ihr Verhalten zu einem gegebenen, continuirlichen Intervall $(\alpha \cdots \beta)$, (dessen Endpunkte wir als ihm zugehörig ansehen) ins Auge gefasst wird. Hier kann es vorkommen, dass einzelne oder auch alle Punkte dieses Intervalles zugleich Punkte von P sind, oder auch dass kein Punkt von $(\alpha \cdots \beta)$ Punkt von P ist; im letzteren Fall sagen wir, dass P ganz ausserhalb des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ liegt. Liegt P theilweise oder ganz im Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$, so kann der bemerkenswerthe Fall eintreten, dass *jedes noch so kleine* in $(\alpha \cdots \beta)$ enthaltene Intervall $(\gamma \cdots \delta)$ Punkte von P enthält. In einem solchen Falle wollen wir sagen, dass P *im Intervalle* $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dicht* sei. *Beispiele* von solchen im Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dichten* Punktmengen sind: 1) Jede Punktmenge, zu welcher alle Punkte des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ als Elemente mitgehören, 2) die Punktmenge, welche aus allen denjenigen Punkten des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ besteht, deren Abscissen rationale Zahlen sind, 3) die Punktmenge, welche aus allen denjenigen Punkten des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ besteht, deren Abscissen rationale Zahlen der Form $\frac{2n+1}{2^m}$ (wo n und m ganze, rationale Zahlen) sind.

Aus dieser Erklärung des Ausdruckes „*überall-dicht in einem gegebenen Intervalle*" folgt, dass wenn eine Punktmenge in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *nicht überall-dicht* ist, ein in jenem enthaltenes Intervall $(\gamma \cdots \delta)$ *nothwendig* existiren muss, in welchem kein einziger Punkt von P liegt. Ferner lässt sich zeigen, dass wenn P im Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ überall-dicht ist, alsdann von P' nicht nur ein Gleiches gilt, sondern dass auch P' *alle Punkte* des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ zu den ihren hat. Diese Eigenschaft von P' liesse sich auch zum Ausgangspunkte der Erklärung des *Ueberall-dicht-seins* in einem Intervalle nehmen, indem man sagen kann: eine Punktmenge P wird in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dicht* genannt, wenn ihre Ableitung P' alle Punkte von $(\alpha \cdots \beta)$ als Elemente enthält.

Ist P *überall-dicht* in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$, so ist P auch *überall-dicht* in jedem andern Intervalle $(\alpha' \cdots \beta')$, welches in jenem Intervalle enthalten ist.

Eine in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dichte* Punktmenge P ist nothwendig von der *zweiten Gattung*; denn auch P' und daher auch P'', P''', $\cdots$ sind alsdann im Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dicht*, dieser Progress der Ableitungen von P ist daher ein unbegrenzter, d. h. P gehört der *zweiten Gattung* an.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass eine Punktmenge P der *ersten Gattung* in irgend einem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ sicher *nicht* überall-dicht ist, dass folglich immer innerhalb $(\alpha \cdots \beta)$ ein Intervall $(\gamma \cdots \delta)$ gefunden werden kann, welches keinen einzigen Punkt von P enthält.

Ob nun auch umgekehrt *jede* Punktmenge der *zweiten Gattung* so beschaffen ist, dass ein Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ existirt, in welchem sie *überall-dicht* ist, diese Frage wird uns später beschäftigen.

Wir kommen nun zu einem ganz andern, nicht weniger bedeutungsvollen *Eintheilungsgrunde* für lineare Punktmannichfaltigkeiten, nämlich zu ihrer *Mächtigkeit*.

In der oben angeführten Abhandlung*) haben wir allgemein von zwei geometrischen, arithmetischen oder irgend einem andern, scharf ausgebildeten Begriffsgebiete angehörigen Mannichfaltigkeiten M und N gesagt, dass sie *gleiche Mächtigkeit* haben, wenn man im Stande ist, sie nach irgend einem bestimmten Gesetze so einander zuzuordnen, dass zu jedem Elemente von M ein Element von N und auch umgekehrt zu jedem Elemente von N ein Element von M gehört.

*) Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 242.

Je nachdem nun zwei Mannichfaltigkeiten von gleicher oder verschiedener Mächtigkeit sind, können sie *einer* und *derselben Classe* oder *verschiedenen Classen* zugetheilt werden. Diese allgemeinen Regeln lassen sich nun im Besondern auf die *linearen Punktmengen* anwenden und es zerfallen daher dieselben in *bestimmte Classen*; die Punktmengen einer Classe sind alle von gleicher *Mächtigkeit*, dagegen Punktmengen, welche verschiedenen Klassen zugetheilt sind, verschiedene Mächtigkeit haben.

Jede specielle Punktmenge kann als *Repräsentant* derjenigen Classe betrachtet werden, in welche sie gehört.

In *erster Linie* bietet sich hier die Classe der *in's Unendliche abzählbaren* Punktmengen dar, d. h. diejenigen Punktmengen, welche mit der natürlichen Zahlenreihe: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ gleiche Mächtigkeit haben und sich also in der Form einer einfach unendlichen Reihe, mit einem allgemeinen von ν abhängigen Gliede, vorstellen lassen. In diese Classe gehören beispielsweise alle Punktmengen *der ersten Gattung*; aber auch viele Punktmengen *der zweiten Gattung* fallen in diese Classe, wie beispielsweise: 1) die Punktmenge, welche aus allen Punkten eines Intervalles besteht, deren Abscissen *rationale* Zahlen sind*), 2) die Punktmenge, welche aus allen Punkten eines Intervalles besteht, deren Abscissen *algebraische* Zahlen sind**).

Sodann tritt uns diejenige Classe linearer Punktmengen entgegen, als deren Repräsentant wir ein beliebiges *stetiges Intervall*, z. B. die Menge aller Punkte betrachten, deren Abscissen ≥ 0 und ≤ 1 sind. In diese Classe gehören beispielsweise:

1) Jedes stetige Intervall $(\alpha \ldots \beta)$.

2) Jede Punktmenge, die aus mehreren getrennten, stetigen Intervallen $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'') \ldots$, in endlicher oder unendlicher Anzahl besteht.

3) Jede Punktmenge, welche aus einem stetigen Intervalle dadurch hervorgeht, dass man eine *endliche* oder *abzählbar unendliche* Mannichfaltigkeit von Punkten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ daraus entfernt***).

Ob diese beiden Classen die *einzigen* sind, in welche die linearen Punktmengen zerfallen, soll hier zunächst noch nicht untersucht werden; dagegen wollen wir den Nachweis führen, dass dieselben in *Wirklichkeit verschiedene* Classen sind; um dies zu beweisen ist zu zeigen nöthig, dass irgend zwei Repräsentanten dieser beiden Classen sich *nicht* eindeutig und vollständig einander zuordnen lassen.

Als Repräsentanten der zweiten Classe wählen wir auch hier

---

*) Man vergl. Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 250.

**) Man vergl. Borchardt's Journal, Bd. 77, pag. 258.

***) Man vergl. Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 254.

das stetige Intervall $(0 \ldots 1)$; würde diese Mannichfaltigkeit zugleich in die erste Classe gehören, so müsste eine einfach unendliche Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

existiren, die aus *allen reellen Zahlen* ≥ 0 und ≤ 1 besteht, so dass jede solche Zahl ζ an einer bestimmten Stelle in jener Reihe vorhanden wäre. Dem widerspricht aber ein sehr allgemeiner Satz, welchen wir in Borchardt's Journal, Bd. 77, pag. 260, mit aller Strenge bewiesen haben, nämlich der folgende Satz:

„*Hat man eine einfach unendliche Reihe*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

von reellen, ungleichen Zahlen, die nach irgend einem Gesetz fortschreiten, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η (*und folglich lassen sich deren unendlich viele*) *angeben, welche nicht in jener Reihe* (*als Glied derselben*) *vorkommt.*"

In Anbetracht des grossen Interesses, welches sich an diesen Satz, nicht blos bei der gegenwärtigen Erörterung, sondern auch in vielen anderen sowohl arithmetischen, wie analytischen Beziehungen, knüpft, dürfte es nicht überflüssig sein, wenn wir die dort befolgte Beweisführung, unter Anwendung vereinfachender Modificationen, hier deutlicher entwickeln.

Unter Zugrundelegung der Reihe:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

(welcher wir das Zeichen (ω) beilegen) und eines beliebigen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$, wo $\alpha < \beta$ ist, soll also nun gezeigt werden, dass in diesem Intervalle eine reelle Zahl η gefunden werden kann, welche in (ω) *nicht* vorkommt.

I. Wir bemerken zunächst, dass wenn unsre Mannichfaltigkeit (ω) in dem Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *nicht überall-dicht* ist, innerhalb dieses Intervalles ein anderes $(\gamma \ldots \delta)$ vorhanden sein muss, dessen Zahlen sämmtlich nicht zu (ω) gehören; man kann alsdann für η irgend eine Zahl des Intervalls $(\gamma \ldots \delta)$ wählen, sie liegt im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ und kommt sicher in unsrer Reihe (ω) *nicht* vor. Dieser Fall bietet daher keinerlei besondere Umstände; und wir können zu dem *schwierigeren* übergehen.

II. Die Mannichfaltigkeit (ω) sei im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dicht.* In diesem Falle enthält jedes, noch so kleine in $(\alpha \ldots \beta)$ gelegene Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ Zahlen unserer Reihe (ω). Um zu zeigen, dass *nichtsdestoweniger* Zahlen η im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ existiren, welche in (ω) nicht vorkommen, stellen wir die folgende Betrachtung an.

Da in unserer Reihe:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu \ldots$$

sicher Zahlen *innerhalb* des Intervalls $(\alpha \ldots \beta)$ vorkommen, so muss eine von diesen Zahlen den *kleinsten Index* haben, sie sei $\omega_{\varkappa_1}$, und eine andere: $\omega_{\varkappa_2}$ mit dem nächst grösseren Index behaftet sein.

Die kleinere der beiden Zahlen $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$ werde mit α', die grössere mit β' bezeichnet. (Ihre Gleichheit ist ausgeschlossen, weil wir voraussetzten, dass unsere Reihe aus lauter ungleichen Zahlen besteht.)

Es ist alsdann der Definition nach:

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

ferner:

$$\varkappa_1 < \varkappa_2;$$

und ausserdem ist zu bemerken, dass alle Zahlen ω_μ unserer Reihe, für welche $\mu \leqq \varkappa_2$ *nicht* im Innern des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ liegen, wie aus der Bestimmung der Zahlen $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$ sofort erhellt. Ganz ebenso mögen $\omega_{\varkappa_3}$, $\omega_{\varkappa_4}$ die beiden mit den kleinsten Indices versehenen Zahlen unserer Reihen sein, welche in das *Innere* des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ fallen und die kleinere der Zahlen $\omega_{\varkappa_3}$, $\omega_{\varkappa_4}$ werde mit α'', die grössere mit β'' bezeichnet.

Man hat alsdann:

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta',$$

$$\varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4,$$

und man erkennt, dass alle Zahlen ω_μ unserer Reihe, für welche $\mu \leqq \varkappa_4$ *nicht* in das *Innere* des Intervalls $(\alpha'' \ldots \beta'')$ fallen.

Nachdem man unter Befolgung des gleichen Gesetzes zu einem Intervall $(\alpha^{(\nu-1)}, \ldots \beta^{(\nu-1)})$ gelangt ist, ergiebt sich das folgende Intervall dadurch aus demselben, dass man die beiden ersten (d. h. mit niedrigsten Indices versehenen) Zahlen unserer Reihe (ω) aufstellt (sie seien $\omega_{\varkappa_{2\nu-1}}$ und $\omega_{\varkappa_{2\nu}}$), welche in das *Innere* von $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$ fallen; die kleinere dieser beiden Zahlen wird mit $\alpha^{(\nu)}$, die grössere mit $\beta^{(\nu)}$ bezeichnet.

Das Intervall $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ liegt alsdann im *Innern* aller vorangegangenen Intervalle und hat zu unserer Reihe (ω) die *eigenthümliche* Beziehung, dass alle Zahlen ω_μ, für welche $\mu \overline{\overline{<}} \varkappa_{2\nu}$, *sicher nicht in seinem Innern* liegen. Da offenbar:

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \ldots, \quad \varkappa_{2\nu-2} < \varkappa_{2\nu-1} < \varkappa_{2\nu}, \ldots$$

und diese Zahlen, als Indices, *ganze* Zahlen sind, so ist:

$$\varkappa_{2\nu} \overline{\overline{>}} 2\nu,$$

und daher:

$$\nu < \varkappa_{2\nu};$$

wir können daher, und dies ist für das Folgende ausreichend, gewiss sagen:

Dass, wenn ν eine beliebige ganze Zahl ist, die Grösse ω_ν ausserhalb des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ liegt.

Da die Zahlen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(\nu)}$, ... ihrer Grösse nach fortwährend wachsen, dabei jedoch im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eingeschlossen sind, so haben sie, nach einem bekannten Fundamentalsatze der Grössenlehre, eine Grenze, die wir mit A bezeichnen, so dass:

$$A = \operatorname{Lim} \alpha^{(\nu)} \text{ für } \nu = \infty.$$

Ein Gleiches gilt für die Zahlen β', β'', β''', ..., $\beta^{(\nu)}$, ..., welche fortwährend abnehmen und dabei ebenfalls im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ liegen; wir nennen ihre Grenze B, so dass:

$$B = \operatorname{Lim} \beta^{(\nu)} \text{ für } \nu = \infty.$$

Man hat offenbar:

$$\alpha^{(\nu)} < A \leqq B < \beta^{(\nu)}.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass der Fall $A < B$ hier *nicht* vorkommen kann; da sonst jede Zahl ω_ν unserer Reihe *ausserhalb* des Intervalles $(A \ldots B)$ liegen würde, indem ω_ν ausserhalb des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ gelegen ist; unsere Reihe (ω) wäre im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *nicht überalldicht*, gegen die Voraussetzung.

Es bleibt daher nur der Fall $A = B$ übrig und es zeigt sich nun, dass die Zahl:

$$\eta = A = B$$

in unserer Reihe (ω) *nicht* vorkommt.

Denn, würde sie ein Glied unserer Reihe sein, etwa das ν^{te}, so hätte man: $\eta = \omega_\nu$.

Die letztere Gleichung ist aber für keinen Werth von ν möglich, weil η im *Innern* des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, ω_ν aber *ausserhalb* desselben liegt.

Halle a. d. S., im Januar 1879. (Fortsetzung folgt.)

Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme.

Von A. Hurwitz in Hildesheim.

Es giebt in der Geometrie eine grosse Anzahl von Sätzen, die aussagen, dass ein gewisses Ereigniss unendlich oft Statt hat, sobald es nur ein Mal oder endlich oft eintritt.

Schon die äussere Form dieser Sätze weist auf den Zusammenhang hin, in welchem dieselben mit jenem Fundamentalsatze der Algebra stehen, dass eine Gleichung mit einer Unbekannten, die mehr Wurzeln hat als ihr Grad angiebt, unzählig viele Wurzeln besitzt, indem sie durch jeden Werth der Unbekannten befriedigt wird.

In der That zieht man aus diesem Satze sofort die Folgerung:

*Kann man bei einer, im Allgemeinen n-deutigen Aufgabe, deren Lösungen durch die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades bestimmt werden können, im speciellen Falle mehr als n Lösungen nachweisen, so hat sie in diesem Falle unzählig viele Lösungen.**)

Für die von uns zu gebenden Anwendungen dieses Kriteriums auf geometrische Aufgaben, ist es zweckmässig dasselbe in folgende speciellere Fassung zu bringen:

„*Findet zwischen den Elementen einer einstufigen rationalen Mannigfaltigkeit, z. B. den Punkten einer rationalen Curve, eine (algebraische) Correspondenz (m, n) Statt — eine Correspondenz, vermöge welcher jedem Elemente P n Elemente P' und einem Elemente P' m Elemente P entsprechen — und lassen sich bei dieser Correspondenz mehr als $(m + n)$ Coincidenzen aufweisen, d. h. Elemente, in denen zwei einander entsprechende Elemente zusammenfallen, so hat die Correspondenz unendlich viele solcher Elemente, und zwar ist jedes Element Coincidenzelement.*

Zu letzterem Schlusse, dass jedes Element Coincidenzelement ist, berechtigt uns der Umstand, dass die Gleichung, welche die Coincidenzen

*) Vgl. Schubert, diese Annalen Bd. X. „Beiträge etc.", den als Princip von der Erhaltung der Anzahl bezeichneten Satz.

der betreffenden Correspondenz bestimmt, unter der gemachten Voraussetzung, durch *jeden* Werth der Unbekannten befriedigt wird.

Ist die Correspondenz (m, n), welche mehr als $(m + n)$ Coincidenzen hat, eine symmetrische (wie z. B. sämmtliche weiter unten zu betrachtende Correspondenzen), so bemerkt man leicht, dass dann jedes Element mit mindestens *zwei* der ihm entsprechenden Elemente zusammenfällt.

Wir wenden nun den so eben aufgestellten Satz auf die Schliessungsprobleme an, und werden sehen, dass sich die bei letzteren auftretenden merkwürdigen Sätze mit grosser Leichtigkeit dabei ergeben.

I. Es mögen zwei Kreise M_1 und M_2 gegeben sein, und es liege, der leichteren Anschauung wegen, M_1 in M_2. Es giebt nun unendlich viele Kreise, welche, im Zwischenraum von M_1 und M_2 liegend, diese Kreise berühren. Nehmen wir einen derselben — er möge M_1 in P_1 berühren — und construiren wir, von ihm als erstem ausgehend, eine Reihe von Kreisen, von denen jeder den vorhergehenden und die beiden festen Kreise M_1 und M_2 berührt!

Der $(n + 1)^{\text{ste}}$ Kreis der Reihe berühre M_1 in P_{n+1}; soll derselbe mit dem Ausgangskreis zusammenfallen, so muss P_1 mit P_{n+1} coincidiren.

P_{n+1} lassen wir daher dem Punkte P_1 entsprechen. Alsdann haben wir auf M_1 eine symmetrische $(2, 2)$ Correspondenz. (Es ist hier nöthig zu wissen, dass die Berührungspunkte von M_1 mit den beiden, einen Kreis der construirten Reihe auf der einen und der andern Seite berührenden Kreisen, die ausserdem auch M_1 und M_2 berühren, durch eine quadratische Gleichung gefunden werden, um streng schliessen zu können, dass unsere Correspondenz wirklich eine algebraische $(2, 2)$ Correspondenz ist.)

Im Allgemeinen giebt es also 4 Coincidenzstellen.

Diese brauchen wir für unseren Zweck gar nicht aufzusuchen; wir können so fortfahren:

Schliesst sich eine solche Reihe von Kreisen dadurch, dass der n^{te} Kreis den ersten, Ausgangskreis wieder berührt, so hat unsere Correspondenz $2n$ Coincidenzpunkte, indem der Berührungspunkt eines jeden Kreises der Reihe mit M_1 ein zweifacher Coincidenzpunkt ist.

Sobald daher $2n > 4$ oder $n > 2$ ist, muss nach unserm Satze jeder Punkt des Kreises M_1 ein (zweifacher) Coincidenzpunkt sein.

Es ist klar, dass es für obige Deduction unwesentlich ist, ob M_1 in M_2 liegt, oder ob diese Kreise irgend welche andere Lage zu einander einnehmen.

Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

„*Liegen* 2 *Kreise* M_1 *und* M_2 *so, dass Eine Reihe von Kreisen existirt, welche* M_1 *und* M_2 *berühren und von denen jeder den vorher-*

gehenden, der erste den letzten, berührt, so giebt es unendlich viele solcher Kreisreihen, und der Ausgangskreis kann unter den M_1 und M_2 berührenden Kreisen willkürlich ausgewählt werden."*)

II. K_1 und K_2 seien zwei Kegelschnitte. Von einem Punkte P_1 des Kegelschnitts K_1 ausgehend, kann man durch fortgesetztes Tangentenziehen an K_2 ein $(n+1)$-Eck $P_1\,P_2\,...\,P_{n+1}$ construiren, dessen Ecken P sämmtlich auf dem Kegelschnitte K_1 liegen und dessen Seiten, mit Ausnahme der letzten, $P_{n+1}\,P_1$, den Kegelschnitt K_2 berühren.

Dieses $(n+1)$-Eck geht in ein, K_1 ein- und K_2 umbeschriebenes, n-Eck über, wenn der erste Eckpunkt P_1 desselben mit dem letzten P_{n+1} zusammenfällt.

Die Correspondenz zwischen Punkten P_1, P_{n+1} ist eine (symmetrische) (2, 2) Correspondenz; sie hat also im Allgemeinen 4 Coincidenzen.

Es zeigt sich nun bei näherer Untersuchung, dass die durch diese 4 Coincidenzstellen gelieferten geschlossenen Polygone uneigentliche Polygone sind.

Ist nämlich n eine gerade Zahl, so construire man ein $\frac{n+2}{2}$-Eck, $A_1\,A_2\,...\,A_{\frac{n+2}{2}}$, dessen erste Ecke A_1 einer der gemeinschaftlichen Punkte von K_1 und K_2 ist, dessen andere Ecken sämmtlich auf K_1 liegen und dessen Seiten bis auf die letzte, $A_{\frac{n+2}{2}}\,A_1$, Tangenten von K_2 sind.

Betrachtet man nun den letzten Eckpunkt, $A_{\frac{n+2}{2}}$, dieses $\frac{n+2}{2}$-Ecks als Punkt P_1, so sieht man sofort, dass derselbe mit einem der beiden ihm entsprechenden Punkte P_{n+1} zusammenfällt. Jeder der 4 gemeinschaftlichen Punkte liefert so *einen* Coincidenzpunkt der Correspondenz.

In ähnlicher Weise zeigt sich, dass bei ungeradem n, die 4 gemeinschaftlichen Tangenten von K_1 und K_2 die 4 Coincidenzen veranlassen.

Existirt nun ein wirkliches, sich schliessendes, zugleich K_1 ein- und K_2 umbeschriebenes n-Eck, so ist jede Ecke desselben eine 2-fache Coincidenz der (2, 2) Correspondenz, da sie, als Punkt P_1 oder P_{n+1} betrachtet, mit ihren beiden Punkten P_{n+1} resp. P_1 zusammenfällt. Die (2, 2) Correspondenz hat also in diesem Falle $4+2n$ Coincidenzen, daher nach unserem Satze unendlich viele, jeder Punkt des Kegelschnitts K_1 ist (zweifacher) Coincidenzpunkt. Also:

„*Giebt es Ein n-Eck, welches einem Kegelschnitte K_1 ein- und einem andern K_2 umbeschrieben ist, so giebt es deren unzählig viele, und jeder Punkt von K_1 ist Ecke eines solchen n-Ecks.*"**)

*) Steiner, Systematische Entwicklungen etc., im Anhang

**) Poncelet, Traité des propriétés projectives, Section IV.

Auch bei diesem Beispiele hätten wir nicht nöthig gehabt, die in *jedem* Falle auftretenden 4 Coincidenzen aufzusuchen, da schon allein aus der Existenz *eines* wirklichen, sich schliessenden Polygons gefolgert werden kann, dass die betrachtete (2, 2) Correspondenz mehr als 4 Coincidenzen hat. —

„Giebt es Ein Polygon von ungerader Seitenzahl, welches einem Kegelschnitte K_1 einbeschrieben ist, und dessen Eckpunkte die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten sind in Bezug auf einen festen Kegelschnitt K_2, so giebt es unzählig viele solcher Polygone von derselben Seitenzahl, und jeder Punkt von K_1 ist Eckpunkt eines derartigen Polygons.“

Dieser Satz ergiebt sich mittelst unserer Methode fast in derselben Weise, wie der Satz der Poncelet'schen Polygone. Er enthält als speciellen Fall das bekannte Theorem in sich, dass einem Kegelschnitte, welchem Ein in Bezug auf einen andern Kegelschnitt sich selbst conjugirtes Dreieck einbeschrieben werden kann, unendlich viele solcher Dreiecke eingezeichnet werden können.

III. In etwas anderer Weise leitet sich der Satz über die Steiner'schen Polygone her.

Es liege eine Curve 3^{ter} Ordnung vor. Auf derselben mögen 2 feste Punkte P und Q angenommen werden.

Von einem Punkte 1 der Curve ausgehend, kann man ein ihr einbeschriebenes $(2n+1)$-Eck $1\,2\,3 \ldots (2n+1)$ construiren, dessen Seiten, mit Ausnahme der letzten $\overline{1, (2n+1)}$, abwechselnd durch P und Q gehen; $\overline{1\,2}$ durch P, $\overline{2\,3}$ durch Q, $\overline{3\,4}$ durch P u. s. f.. Fällt der Punkt 1 mit dem Punkte $2n+1$ zusammen, so haben wir ein Steiner'sches Polygon — ein der Curve einbeschriebenes $2n$-Eck, dessen Seiten abwechselnd durch P und Q gehen.

Dies führt uns darauf, zwischen den Strahlen des Strahlbüschels P eine Correspondenz aufzustellen, so dass dem Strahle $\overline{P1}$ der Strahl $\overline{P(2n+1)}$ entspricht, wo der Punkt $2n+1$ in oben vorgeschriebener Weise aus dem Punkte 1 erhalten wird. Es entsteht eine (2, 2) Correspondenz; also giebt es 4 Coincidenzstrahlen.

Diese Coincidenzen werden aber im Allgemeinen nur dadurch eintreten, dass der Punkt 2 mit $2n+1$ zusammenfällt, in welchem Falle ja auch der Strahl $\overline{P1}$ mit dem Strahle $\overline{P, 2n+1}$ coincidirt.

In der That, da $P, 1, 2$; $Q, 2, 3$; $P, 3, 4$; ... $P, 2n-1, 2n$; $Q, 2n, 2n+1$; je drei Punkte der Curve dritter Ordnung sind, die in gerader Linie liegen, so sieht man sofort, dass wenn der Punkt 2 mit $2n+1$ zusammenfällt, auch Punkt 3 mit $2n$, Punkt 4 mit $2n-1 \ldots$, schliesslich $(n+1)$ mit $(n+2)$ zusammenfallen muss. Folglich werden sämmtliche 4 Coincidenzen der Correspondenz entweder durch die 4 von P oder durch die 4 von Q aus an die Curve gehenden Tangenten veranlasst, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

(Ist n gerade, so liegen die Punkte $(n+1)$ und $(n+2)$ mit P in gerader Linie, im andern Falle mit Q.)

Tritt es aber Ein Mal ein, dass ein Punkt 1 mit dem zugehörigen Punkte $2n+1$ zusammenfällt, dass also Ein Steiner'sches Polygon existirt, so hat unsere Correspondenz mehr als 4, nämlich $4+2n$, Coincidenzen, und folglich ist dann jeder Strahl ein Coincidenzstrahl der Correspondenz, jeder Punkt 1 fällt mit seinem entsprechenden Punkte $2n+1$ zusammen. Also:

„Giebt es für 2 Punkte P und Q einer Curve dritter Ordnung Ein Steiner'sches Polygon, so giebt es für dieselben unzählig viele, jeder Punkt der Curve ist Eckpunkt eines solchen Polygons.“ *)

IV. C_4 sei eine Raumcurve 4ter Ordnung erster Species; s und σ zwei Secanten derselben (sie doppelt schneidende Strahlen). Wir wollen nun sagen, ein Punkt a der Curve bestimme mit einer Secante derselben einen andern Punkt b, indem wir unter b den vierten Schnittpunkt verstehen, welchen die durch die Secante und a gehende Ebene mit der Curve gemein hat.

Ein beliebiger Punkt 1 der C_4 bestimmt in diesem Sinne mit der Secante s einen Punkt 2, 2 mit der Secante σ einen Punkt 3, 3 mit s einen Punkt 4, 4 mit σ einen Punkt 5 u. s. f. Fällt der, durch Fortsetzung dieser Construction erhaltene $(2n+1)^{\text{ste}}$ Punkt mit dem Ausgangspunkt 1 zusammen, so bilden die Punkte $1, 2, 3 \ldots 2n$ ein windschiefes $2n$-Eck, welches der C_4 einbeschrieben ist, und dessen unpaare Seiten sämmtlich mit der Secante s, dessen paare Seiten mit der Secante σ in einer Ebene liegen, oder, was dasselbe ist, diese Secanten schneiden.

Betrachten wir nun s als Axe eines Ebenenbüschels und stellen in diesem eine Correspondenz auf, so dass einer Ebene $\overline{s\,1}$ eine Ebene $\overline{s, 2n+1}$ entspricht, wo der Punkt $2n+1$ der Curve aus dem Punkte 1 derselben in der oben vorgeschriebenen Weise gefunden wird, so erhalten wir eine symmetrische (2, 2) Correspondenz; also im Allgemeinen 4 Coincidenzebenen.

Es zeigt sich aber durch eine ähnliche Betrachtung, wie sie oben bei den Steiner'schen Polygonen durchgeführt wurde, dass diese Coincidenzen entweder durch die 4 durch s oder durch die 4 durch σ an die C_4 gehenden Tangentialebenen (deren Berührungspunkte im Allgemeinen verschieden sind von den s und C_4 resp. σ und C_4 ge-

*) Steiner, Crelle's Journal Bd. 38, Clebsch ibid. Bd. 63, E. Weyr daselbst Bd. 71 und Bd. 73.

meinschaftlichen Punkten) hervorgerufen werden, und keine sich schliessende $2n$-Ecke liefern.

Existirt Ein solches, so giebt es unzählig viele, da unsere Correspondenz dann mehr als 4, nämlich $4+2n$ Coincidenzen hat. Daher:

„*Giebt es Ein (windschiefes) $2n$-Eck, welches einer C_4 einbeschrieben ist und dessen unpaare Seiten sämmtlich eine feste Secante s der C_4 und dessen paare Seiten sämmtlich eine feste Secante σ der C_4 schneiden, so giebt es unzählig viele solcher $2n$-Ecke.*“

Berücksichtigt man noch, dass alle Secanten einer C_4, die eine feste Secante derselben treffen, eine Regelschaar 2ten Grades bilden, so kann man den eben gefundenen Satz auch so aussprechen:

„*R_1 und R_2 seien zwei verschiedene durch eine Raumcurve C_4 vierter Ordnung, erster Species, gehende Regelschaaren zweiten Grades. Giebt es nun Ein der C_4 eingeschriebenes $2n$-Eck, dessen unpaare Seiten der Regelschaar R_1, dessen paare Seiten der Regelschaar R_2 angehören, so giebt es unzählig viele solcher $2n$-Ecke; jeder Punkt der C_4 ist Eckpunkt Eines $2n$-Ecks von genannter Eigenschaft.*“*)

Es sei nebenbei bemerkt, dass nicht nur aus den Strahlen der Regelschaaren R_1 und R_2 unter der gemachten Voraussetzung unzählig viele der C_4 einbeschriebene $2n$-Ecke gebildet werden können, sondern auch aus den Strahlen der Leitschaaren R_1' und R_2' von R_1 resp. R_2. Dieses erkennt man sofort, wenn man die Ecken eines aus den Strahlen von R_1 und R_2 gebildeten $2n$-Ecks aus einer der Spitzen S der 4 Kegel 2ter Ordnung, die durch die Raumcurve hindurchgehen, auf diese projicirt. Die Projectionspunkte bilden nämlich ein $2n$-Eck, dessen Seiten Strahlen von R_1' und R_2' sind. (Dabei ist unter der Projection eines Punktes A der C_4 von einer der Spitzen S aus auf die C_4, derjenige Punkt A' zu verstehen, in welchem die Gerade SA die Raumcurve, ausser in A, noch trifft.)

Durch Projection der C_4 von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene entsteht der Satz der Steiner'schen Polygone, durch Projection von einer der Spitzen S aus ein Satz, der den der Poncelet'schen Polygone als speciellen Fall in sich enthält.

V. Herr Darboux giebt in seinem Buche, „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces“ (Gauthiers-Villars, 1873) pag. 183 u. ff. mehrere Sätze als Erweiterungen des Poncelet'schen Theorems**). Zu derselben Klasse von Sätzen gehört auch der von Herrn Klein im XIV. Bande dieser Annalen pag. 168 bewiesene Satz.

---

*) Siehe E. Weyr, l. c.

**) Siehe auch Clifford, Proceedings of the London Mathem. Soc. Bd. 7, p. 34.

Mittelst unserer Methode lassen sich jedoch diese Sätze, wie diejenigen, welche Herr Darboux im Institut vom Mai 1870 mittheilt, nicht ohne Weiteres ableiten*).

Dieses liegt bei den Darboux'schen Sätzen z. B. daran, dass bei den zu betrachtenden Correspondenzen Voraussetzungen stattfinden, die durch die Anzahl der durch sie bedingten Coincidenzen nicht erschöpft werden.

Diese Sätze beziehen sich auf specielle Fälle, in denen überbestimmte Aufgaben (für welche mehr Bedingungen gegeben sind, als die zu bestimmenden Stücke im Allgemeinen gleichzeitig erfüllen können) unzählig viele Lösungen haben.

Um solche Sätze mittelst unseres Kriteriums zu beweisen, hat man folgendes Verfahren einzuhalten, welches in vielen Fällen zum Ziele führt.

Aus den Bedingungen der Aufgabe greife man so viele heraus, als für sich genommen eine, im Allgemeinen, endlich-deutige Aufgabe bestimmen. Nun untersuche man mittelst unseres Kriteriums, ob diese so entstehende Aufgabe in jenem speciellen Falle unzählig viele Lösungen hat.

Ist dieses der Fall, so nehme man von den unberücksichtigt gebliebenen Bedingungen der ursprünglichen Aufgabe wieder so viele heraus, als hinreichen, um aus jenen unzählig vielen Lösungen eine im Allgemeinen endliche Anzahl als diejenigen zu bestimmen, die die neu hinzugenommenen Bedingungen erfüllen.

Jetzt kann man wieder untersuchen, ob diese Lösungen in dem betreffenden speciellen Falle nicht in endlicher, sondern in unendlicher Anzahl vorhanden sind.

So fährt man fort, indem man immer mehr und mehr von den gegebenen Bedingungen in die Betrachtung hineinzieht.

Dieses Verfahren kann natürlich nur dann angewandt werden, wenn es möglich ist, die Bedingungen der betreffenden Aufgabe zu trennen.

Die soeben angegebene Methode gestattet z. B. den folgenden Satz zu beweisen — ein Beweis, der übrigens nicht ohne alle Umstände ist, weshalb ich ihn hier nicht entwickeln will:

„*Die* 8 *Seitenflächen von irgend* 2 *einer Raumcurve* 3*ter* *Ordnung einbeschriebenen Tetraeder sind Schmiegungsebenen einer anderen Raumcurve* 3*ter* *Ordnung. Beide Raumcurven haben eine solche Lage zu ein-*

*) Das Nämliche gilt von einem Satze, den mir Herr Klein mittheilt: *Man kann einer Kummer'schen Fläche fünffach unendlich viele Tetraeder gleichzeitig einschreiben und umschreiben.* Vergl. dessen bez. Abhandlung im II. Bande dieser Annalen.

ander, dass es, ausser jenen zwei, noch unzählig viele andere Tetraeder giebt, die der ersten einbeschrieben und der zweiten umschrieben sind, und zwar ist jeder Punkt der ersteren Raumcurve Eckpunkt Eines solchen Tetraeders."

Dieser Satz ist jedoch nur ein specieller Fall viel allgemeinerer Sätze, die ihre naturgemässe Begründung finden in der Betrachtung von Punkt-Involutionen auf Raumcurven 3ter Ordnung, und von involutorischen Beziehungen zwischen den Gruppen solcher Involutionen, und welche die in einer Richtung den Darboux'schen ebenen Sätzen entsprechenden räumlichen Sätze sind. Letztere lassen sich auch leicht durch die auf den Raum übertragenen Methoden Darboux's beweisen.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass unser Kriterium immer nur das Resultat ergiebt, dass gewisse Aufgaben unendlich viele Lösungen haben, wenn sie Eine oder eine endliche Anzahl von Lösungen besitzen; nicht aber auch die Möglichkeit, dass dieser Umstand wirklich eintreten kann, was in vielen Fällen nicht selbstverständlich ist.

Berlin, den 18. December 1878.

Sur la Théorie des Caractéristiques pour les Coniques.*)

Von Halphen in Paris.

Dans deux communications adressées à l'Académie des Sciences de Paris**), j'ai indiqué des modifications qu'il est nécessaire de faire subir à la théorie connue des caractéristiques pour les coniques. Je me propose de donner ici un aperçu des résultats que j'ai obtenus dans l'étude de cette théorie, et que j'ai développés dans un mémoire qui n'a pu être publié jusqu'à présent.***)

I. Position de la question.

1. On donne, je le rappelle, le nom de *système* de coniques dans un plan à l'ensemble des coniques de ce plan qui satisfont à quatre conditions communes. Le problème principal auquel se rapporte la théorie des caractéristiques est de trouver le nombre des coniques, appartenant à un système donné, qui satisfont, d'autre part, à une condition également donnée. En conséquence, cette théorie doit enseigner quels sont les éléments numériques, ou *caractéristiques*, qu'il faut connaître pour le système et pour la condition, et comment on doit combiner ces éléments numériques afin d'obtenir le nombre cherché. Pour qu'il y ait lieu à une théorie sur ce sujet, il faut évidemment supposer entre ces deux données, le système et la condition, une certaine *indépendance*; et on n'a jamais manqué de le faire. Mais cette indépendance doit être définie avec précision, et c'est par là que j'entrerai en matière.

2. Disons tout d'abord que la question est portée sur le terrain de la géométrie projective; par suite, toute condition imposée à une conique devra être mise sous forme projective. Pour la mettre sous une telle forme, on peut convenir d'employer un procédé unique, comme je vais l'expliquer.

---

*) Abgedruckt aus den Proceedings der London Mathematical Society, Vol. IX, No. 133, 134. (Sitzung vom 13. Juni 1878.)

**) 4 Septembre et 13 Novembre 1876. V. Comptes Rendus, T. lxxxiii., pp. 537 et 886.

***) Ce mémoire vient d'être publié (Journal de l'Ecole Polytechnique, XLV^{e} Cahier). [Februar 1879.]

Soient, dans un plan, quatre points fixes t, u, v, w et un autre point x, et désignons par $t, t', \ldots X, X'$ les coordonnées de ces points par rapport à deux axes. Pour abréger, employons la notation

$$(tuv) = \begin{vmatrix} t & t' & 1 \\ u & u' & 1 \\ v & v' & 1 \end{vmatrix},$$

et posons:

$$(1) \qquad x = \frac{(vwX)\,(uvt)}{(uvX)\,(vwt)}, \quad x' = \frac{(wuX)\,(uvt)}{(uvX)\,(wut)}.$$

Si les quatre points fixes occupaient des positions particulières, savoir u à l'infini sur l'axe des X, v à l'infini sur l'axe des X', w à l'origine des coordonnées, et que t eût ses deux coordonnées égales à l'unité, il résulterait de cette hypothèse: $x = X$, $x' = X'$. D'autre part, x et x' sont les rapports anharmoniques de deux faisceaux de droites obtenus en joignant soit v, soit u, aux quatre autres points. Si donc on fait le changement de coordonnées marqué par les équations (1), x, x' étant les anciennes coordonnées et X, X' les nouvelles, on exécute ainsi une transformation homographique quelconque en introduisant, à cet effet, quatre points t, u, v, w arbitraires, mais fixes. Donc *une condition quelconque imposée à une figure peut être traduite, sous forme projective, par une relation numérique entre les coordonnées de cette figure et celles de quatre points.*

3. Revenons maintenant aux coniques, et posons la question:

Soit Φ une condition projective donnée entre une conique et quatre points t, u, v, w;

Soit, d'autre part, S un système de coniques donné;

On envisage les coniques du système S qui satisfont à la condition Φ, et l'on demande de discuter le problème de la recherche de ces coniques, en examinant:

1°. *S'il y a des solutions indépendantes des points t, u, v, w, et quelles sont ces solutions;*

2°. *Quel est le nombre des solutions distinctes qui dépendent de ces points, lorsqu'ils restent indéterminés.*

La discussion complète exigerait, en troisième lieu, l'examen des diverses particularités que peuvent présenter ces dernières solutions, en se réunissant soit entre elles, soit avec les précédentes, lorsque les points arbitraires de Φ occupent des positions particulières. Cette dernière partie de la discussion est formellement exclue de notre programme, et c'est en quoi consiste *l'indépendance* supposée entre le système S et la condition Φ.

4. A l'égard de la première catégorie de solutions, on peut dès l'abord être fixé sur leur nature. Par une transformation homographique,

une conique a peut être transformée en une autre conique arbitraire a'. Soit a une conique, qui, dans un système S, satisfasse à une condition Φ. Par une transformation homographique, changeons a en a' et, en même temps, les points t, u, v, w de Φ en t', u', v', w'. La conique a' satisfait à la condition Φ ainsi transformée. Si maintenant on suppose que a satisfasse à Φ, quels que soient t, u, v, w, il en est de même de a'. Donc une conique arbitraire a' satisfait à la condition Φ, ce qui est impossible. Donc a ne peut être une conique. Donc *les solutions qui sont indépendantes des arbitraires de la condition* Φ *ne sont pas des coniques*, *mais des figures particulières*, *limites de coniques dans le système*, *ou coniques* dégénérées.

En second lieu, si S est un système de véritables coniques, les solutions qui dépendent des arbitraires de Φ, et qui, en conséquence, varient dans le système avec ces arbitraires, sont de véritables coniques. Ainsi la distinction ci-dessus des solutions en deux catégories, revient exactement à la distinction des solutions étrangères fournies par les coniques dégénérées, et des solutions fournies par de véritables coniques. C'est de ces dernières qu'il s'agit de déterminer le nombre. Je vais exposer ici la solution du problème dans un cas particulier, pour lequel les résultats se démontrent avec une extrême facilité, et ont exactement la même forme que dans le cas le plus général. En ce qui concerne le cas général, je renverrai, pour la démonstration, au mémoire dont j'ai parlé plus haut, et qui sera publié ultérieurement.

II. Systèmes de coniques, et coniques dégénérées.

5. Considérons d'abord, pour plus de simplicité, des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe. Soient $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ les équations des côtés de ce triangle, dont je désignerai par q, r, s les sommets respectivement opposés à ces côtés. L'équation d'une quelconque de ces coniques est:

$$g_1 Q^2 + g_2 R^2 + g_3 S^2 = 0. \tag{2}$$

Cette conique dégénère en deux droites ou en une droite suivant que un ou deux des coefficients g deviennent nuls. Mais, si l'on envisage un système de coniques (2), cette observation ne suffit pas. Les g sont alors des fonctions d'une variable ω, et il est nécessaire d'examiner quelles sont les diverses manières dont ces fonctions parviennent à la limite zéro. De là trois modes de dégénérescence à distinguer:

1°. *Dégénérescence* A. — Un seul coefficient devient nul, par exemple g_1. La conique se réduit à deux droites passant en q. Il est aisé de voir que, pour g_1 infiniment petit, les tangentes menées à la conique par un point arbitraire la touchent en deux points infiniment voisins de q. Ainsi ce mode de dégénérescence est caractérisé par ce fait que *les tangentes menées d'un point quelconque à la conique font entre elles un angle infiniment petit.*

2°. *Dégénérescence* A'. — Deux coefficients infiniment petits, mais *d'un même ordre;* par exemple g_1 et g_2. La conique-limite est la droite S. Ce mode de dégénérescence est caractérisé par ce fait que *la conique est rencontrée par une droite quelconque en deux points infiniment voisins;* mais les tangentes issues d'un point quelconque ne coïncident pas.

3°. *Dégénérescence* B. — Deux coefficients infiniment petits, mais d'ordres différents; par exemple g_2 du 1^er^ ordre, et g_1 d'ordre supérieur, $1+h$. Les deux caractères précédents existent alors simultanément. *Une droite quelconque coupe la conique en deux points dont la distance d est infiniment petite. Les tangentes issues d'un point quelconque font entre elles un angle δ infiniment petit. Il y a alors lieu de considérer un nombre positif h, tel que $d^h : \delta$ ait une limite finie, différente de zéro.*

On remarquera que, d'après les propriétés des fonctions algébriques, il existe toujours un tel nombre h commensurable, si, comme nous le supposerons, le système est algébrique.

6. En même temps que le système (a), contenant la conique dégénérée a, considérons un système corrélatif (a'), et soit a' la conique qui y correspond à a. Soient, pour a', désignés par d', δ', h' les éléments analogues. Il est visible que d' est du même ordre infinitésimal que δ, et δ' du même ordre que d. Donc h' est l'inverse de h. Donc: *dans deux systèmes corrélatifs, deux coniques dégénérées suivant le mode* B *se correspondent, et leurs nombres caractéristiques h sont réciproques. Les coniques dégénérées suivant le mode* A *correspondent à des coniques dégénérées suivant le mode* A'.

Ces résultats sont d'ailleurs mis en évidence au moyen de l'équation:

$$g_2 g_3 Q^2 + g_3 g_2 R^2 + g_1 g_2 S^2 = 0,$$

qui représente la polaire réciproque de (2) par rapport à une conique fixe.

7. Cette étude, faite pour un système de coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, s'applique à un système quelconque, en vertu d'une remarque très-simple.

Soit, dans un système (a), une conique a qui dégénère. Je prends arbitrairement un point s et une droite Q passant en s. Les points y, z, où a coupe Q, peuvent être différents ou infiniment voisins; mais, en tous cas, leurs limites diffèrent de s, qui est arbitraire sur Q. Donc le conjugué harmonique de s par rapport à y, z, a une limite différente de s. On peut répéter le même raisonnement pour toute droite Q menée par s, et conclure que la polaire de s a une limite qui ne passe par s. De même aussi le pôle de Q a une limite qui n'est pas sur Q. Donc, *dans la série des triangles respectivement con-*

jugués par rapport à chacune des coniques d'un système, et ayant un sommet fixe ainsi qu'un des côtés aboutissant à ce sommet, le triangle qui répond à une conique dégénérée est un triangle véritable, c'est-à-dire non dégénéré. On peut donc encore raisonner sur l'équation (2) comme ci-dessus, et en tirer les mêmes conclusions, que ne modifie en rien la mobilité du triangle qrs.

8. Pour la question qui nous occupe, ce n'est pas le nombre h lui-même, caractéristique du mode B de dégénérescence, qui doit intervenir, mais deux nombres entiers, dont h est le quotient.

Ayant un système algébrique (a) de coniques a, on peut d'une infinité de manières trouver une courbe (k), telle que ses points k correspondent *uniformément* aux coniques a du système. M. Clebsch a, par exemple, démontré*) que la courbe, lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques a, satisfait à cette condition. Ayant une pareille courbe, on peut lui substituer une quelconque de celles qui lui correspondent *point par point*, et varier ainsi à l'infini le mode de représentation du système (a) au moyen d'une courbe (k).

Soit K un point d'une telle courbe (k), et, s'il est singulier, considérons une des branches superlinéaires ou linéaires, disons abréviativement un des *cycles* (k_1), entre lesquels se répartissent les branches de la courbe en ce point. Si le point k se déplace sur ce cycle (k_1) aux environs de K, la conique a du système (a) varie aux environs de la conique limite A_1 qui correspond à K. Aux divers cycles dont l'origine est en K peuvent correspondre des limites diverses A de la conique a, comme aussi ces limites peuvent coïncider. De même aussi une pareille conique A peut correspondre à divers points K de la ligne (k). Mais ces diverses circonstances n'importent pas pour la question actuelle: le point k variant sur deux cycles différents (k_1), (k_2) de la courbe (k), la conique a aura deux limites A_1, A_2 qui, même si elles coïncident, devront être envisagées comme distinctes.

Supposons maintenant que A_1 soit une conique dégénérée suivant le mode B, et qu'ainsi deux des coefficients de (2), g_1, g_2, soient nuls. Soit λ l'ordre de multiplicité du cycle (k_1). Plaçons k sur ce cycle à une distance de K infiniment petite d'ordre λ. Pour ce point k, g_1 et g_2 sont infiniment petits. Soient m et $m+n$ leurs ordres respectifs. Ces deux nombres sont entiers, d'après la théorie des fonctions algébriques. Le quotient $n:m$ n'est autre que le nombre h ci-dessus défini. Mais les nombres m, n eux-mêmes sont caractéristiques de la conique dégénérée A_1. En effet, ils restent inaltérés si l'on change arbitrairement la courbe (k), comme cela résulte de la proposition suivante,**) appartenant à la théorie générale des fonctions algébriques:

*) Mathematische Annalen, T. VI. p. 4.

**) Bulletin de la Société Math. de France, T. IV. p. 32.

Soient (k), (k') *deux courbes algébriques se correspondant* point par point; *à un cycle* (k_1) *de l'une correspond un seul cycle* (k_1') *de l'autre. Soient* λ, λ' *les ordres de multiplicité de deux cycles correspondants: à un point placé sur* (k_1) *à distance infiniment petite d'ordre* λ *de l'origine de ce cycle correspond un point placé sur* (k_1') *à distance infiniment petite d'ordre* λ' *de l'origine de ce dernier cycle.*

J'appellerai le nombre m *l'ordre* et le nombre n *la classe* de la conique dégénérée. On peut résumer comme il suit la définition de ces deux nombres:

Soit (k) *une courbe dont les points* k *correspondent* uniformément *aux coniques* a *d'un système* (a). *Soit* K *un point de cette courbe, et soit aussi* (k_1) *un cycle de branches ayant son origine en* K, *et d'ordre de multiplicité* λ. *Prenons, sur ce cycle, à distance infiniment petite l'ordre* λ *un point* k, *et soit* a *la conique qui correspond à ce point. Soit* $\frac{1}{2}m$ *l'ordre infinitésimal du segment intercepté par* a *sur une droite arbitraire, et* $\frac{1}{2}n$ *l'ordre infinitésimal de l'angle des tangentes menées à* a *par un point arbitraire. Les nombres* m, n *ne changent pas si l'on change la courbe* (k). *Ils seront appelés, le premier* l'ordre, *le second* la classe *de la conique dégénérée* a.

D'après cette définition, il n'est plus besoin de considérer trois modes de dégénérescence des coniques, mais un seul; car *le mode* A *de dégénérescence correspond au cas où l'ordre est nul, et le mode* A′ *au cas où la classe est nulle.* Enfin, suivant le raisonnement du No. 6, on aperçoit que *dans deux systèmes corrélatifs, l'ordre d'une conique dégénérée de l'un quelconque d'entre eux est égal à la classe de la conique dégénérée correspondante dans l'autre.*

9. Pour bien préciser ces notions, prenons immédiatement un exemple que suggère naturellement le mode actuel d'exposition. Envisageons un système composé de coniques (2) conjuguées par rapport à un triangle fixe qrs, et, en outre, *unicursal;* c'est-à-dire que les rapports des variables g sont des fonctions *rationnelles* d'une variable indépendante ω. Il est manifeste qu'on peut choisir cette variable ω de telle sorte, 1°, qu'en égalant chacun des g à un polynôme entier en ω, les trois polynômes soient d'un même degré; 2°, qu'à chaque système de valeurs des g ne corresponde qu'une seule valeur de ω. Enfin il ne doit exister aucune racine commune à la fois aux trois polynômes, puisqu'il ne s'agit que des rapports des quantités g.

Ceci entendu, on aperçoit immédiatement qu'à une racine n'appartenant qu'à un seul polynôme correspond une conique dont la classe est précisément l'ordre de multiplicité de cette racine, et dont l'ordre est nul, ou, en d'autres termes, une conique dégénérée suivant le mode *A*. A une racine commune à deux polynômes et y ayant le même ordre de multiplicité, correspond une conique dégénérée suivant le mode

A', c'est-à-dire dont la classe est nulle et dont l'ordre est égal à l'ordre de multiplicité de la racine. Enfin, d'une manière générale, à une racine multiple d'ordre m dans un des polynômes, et d'ordre $m+n$ dans un autre, correspond une conique dégénérée d'ordre m et de classe n.

Dans cet exemple où l'on peut créer des coniques dégénérées en aussi grand nombre qu'on voudra, il est à remarquer que toutes celles du mode B se superposeront à un nombre limité d'entre elles, sans que cependant il y ait aucune difficulté à les distinguer les unes des autres.

III. Nombres caractéristiques relatifs à une condition pour une conique.

10. Ainsi que je l'ai montré plus haut (No. 2), une condition quelconque Φ pour une conique peut être envisagée comme une relation numérique entre cette conique et quatre points t, u, v, w, cette relation étant, en outre, projective. Supposons-la exprimée au moyen des coefficients de l'équation ponctuelle de la conique. Alors Φ est représentée par l'évanouissement d'un covariant de a_x^2, contenant les coordonnées de quatre points indépendants. Quelques-uns de ces points peuvent y manquer. S'ils manquent tous, on a un invariant de a_x^2, c'est-à-dire son discriminant. Je le mets de côté, et il demeure entendu qu'il ne s'agit ici que de covariants. En outre, l'équation $\Phi = 0$, entière par rapport aux coordonnées de $t, \ldots w$ et aux coefficients de a_x^2, doit être indécomposable en facteurs de même forme. En d'autres termes, il s'agit de conditions indécomposables.

Dans l'équation $\Phi = 0$ supposons que le triangle de référence soit conjugué par rapport à la conique a, c'est-à-dire supprimons tous les termes contenant les coefficients des rectangles, $a_{12}, \ldots$. Comme ci-dessus, appelons g les coefficients des trois carrés; groupons les termes par rapport à ces quantités; désignant par Φ_1 ce que devient Φ, écrivons alors:

$$\Phi_1 = \Sigma H g_1^{\pi} g_2^{\chi} g_3^{\sigma}. \tag{3}$$

Les coefficients tels que H sont des fonctions des coordonnées de t, u, v, w. Comme Φ est un covariant, il est visible que Φ_1 est symétrique par rapport aux g, *quant aux exposants*, c'est-à-dire qu'au terme mis en évidence dans (3) correspondent, comme existant effectivement, ceux qui s'en déduisent par la permutation des exposants, le coefficient H étant d'ailleurs changé. Considérons l'ensemble de ces divers termes, et caractérisons-le par les exposants, en l'appelant le *groupe* (π, χ, σ), et convenant de supposer $\pi \geq \chi \geqq \sigma$. Entre ces trois nombres existe d'ailleurs la relation

$$\pi + \chi + \sigma = c = \text{constante}. \tag{4}$$

Ce sont ces groupes d'exposants qui vont jouer ici le rôle prépondérant, et je dois entrer dans quelques détails à leur sujet.

11. Parmi les groupes (π, χ, σ), il en est un au moins pour lequel σ est nul. Sans quoi, Φ_1 contiendrait le facteur $g_1 g_2 g_3$, et, par suite, Φ contiendrait en facteur le discriminant de a_x^2, ce qui est contre l'hypothèse.

En même temps que Φ, considérons une condition corrélative Φ'. On pourra exprimer cette condition en remplaçant dans Φ les coefficients de l'équation ponctuelle de la conique par ceux de l'équation tangentielle, en même temps que les coordonnées de t, u, v, w par les coordonnées de quatre droites. On aura donc Φ_1' en remplaçant, dans Φ_1, les g par leurs inverses, et chassant les dénominateurs. Pour obtenir le résultat définitif, imaginons d'abord que nous multipliions par $(g_1 g_2 g_3)^c$. Alors au terme $g_1^\pi g_2^\chi g_3^\sigma$ correspond le terme $g_1^{c-\pi} g_2^{c-\chi} g_3^{c-\sigma}$. Si Π est le maximum de π, l'équation obtenue contient alors le facteur $(g_1 g_2 g_3)^{c-\Pi}$. Ce facteur doit être supprimé. Si l'on pose alors:

$$\beta = \text{minimum de } (\chi + \sigma), \quad \Pi = c - \beta,$$

on trouve qu'au groupe (π, χ, σ) correspond le groupe (π', χ', σ') ainsi défini:

$$(5) \qquad \begin{cases} \pi' = \pi + \chi - \beta, \\ \chi' = \pi + \sigma - \beta, \\ \sigma' = \chi + \sigma - \beta, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} c' = \pi' + \chi' + \sigma' = 2c - 3\beta, \\ \pi' \geqq \chi' \geqq \sigma'. \end{array}$$

On passera de même de (π', χ', σ') à (π, χ, σ) par des équations analogues:

$$(6) \qquad \begin{cases} \pi = \pi' + \chi' - \alpha, \\ \chi = \pi' + \sigma' - \alpha, \\ \sigma = \chi' + \sigma' - \alpha, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c' = 2\alpha + \beta, \\ c = 2\beta + \alpha. \end{array}$$

Ces équations conduisent à définir autrement les groupes d'exposants, en introduisant les nombres qui s'échangent entre eux par dualité. On considérera pour Φ les deux nombres α, β et pour chaque groupe de termes les deux nombres σ, σ'. On dira alors, au lieu du groupe (π, χ, σ), le groupe (σ, σ'). On aura d'ailleurs d'après (5) et (6)

$$(7) \qquad \chi = \sigma' - \sigma + \beta, \qquad \pi = \alpha + \beta - \sigma',$$

et on remarquera que la condition $\sigma \geqq \chi \geqq \sigma$ donne:

$$(8) \qquad \beta \geqq \text{maximum de } (2\sigma - \sigma'), \qquad \alpha \geqq \text{maximum de } (2\sigma' - \sigma).$$

12. Parmi les groupes (σ, σ'), quelques-uns sont à distinguer comme devant seuls jouer un rôle. Ce sont ceux que l'on peut appeler *minima*. Je dirai qu'un groupe (σ_1, σ_1') est *non-minimum* s'il en existe un autre (σ, σ') tel que l'on ait à la fois

$$\sigma < \sigma_1, \qquad \sigma' < \sigma_1',$$

une des deux inégalités pouvant se réduire à l'égalité. Tous les groupes non-minima éliminés, il en reste quelques-uns. Ce sont les derniers que j'appelle *minima*. On peut les obtenir ainsi: rangeons les divers groupes dans l'ordre croissant relativement à σ. Parmi ceux où σ est le même, prenons seulement celui où σ' est le plus petit, et omettons les autres. Puis, dans ceux qui restent, ne retenons que ceux qui se trouvent, à partir du premier, rangés par rapport à σ' dans l'ordre décroissant. Les groupes qui restent sont minima. Comme on l'a observé (No. 11), une des valeurs de σ est zéro. Il en est de même de σ'. Les groupes minima ainsi rangés forment donc une suite telle que

$$(9) \qquad (0\sigma_0')\,(\sigma_1\sigma_1')\,(\sigma_2\sigma_2')\,\ldots\,(\sigma\sigma')\,\ldots\,(\sigma_k 0),$$
$$\sigma_i < \sigma_{i+1}, \qquad \sigma_i' > \sigma_{i+1}',$$

et, en outre, les inégalités (8) ont lieu.

13. Je vais maintenant montrer que *si l'on donne à volonté la suite* (9) *et les deux nombres* α, β *satisfaisant aux inégalités* (8), *il existe des covariants* Φ *ayant les nombres caractéristiques* α, β *et les groupes minima donnés.*

Je prouve cette proposition en formant un tel covariant Φ comme il suit. Soit $P(\varrho)$ une fonction homogène, de degré ϱ, des coefficients de a_x^2, et à coefficients arbitraires. Soit de même $\Pi(\varrho)$ une fonction homogène, de degré ϱ, des coefficients de l'équation tangentielle de la conique, équation dont le premier membre est représenté par le symbole $(ab\xi)^2$. Soit enfin D le discriminant de a_x^2. Pour chacun des groupes donnés (9), par exemple pour le groupe (σ, σ'), considérons la fonction

$$(10) \qquad H(\sigma, \sigma') = D^\sigma \cdot \Pi\,(\beta - 2\sigma + \sigma')\,P(\alpha - 2\sigma' + \sigma),$$

dans laquelle, d'après (8), les degrés sont positifs, comme il convient. Pour chacun des groupes, nous varions, bien entendu, à volonté les coefficients des fonctions P et Π. Je fais maintenant

$$\Phi = \Sigma H(\sigma, \sigma'),$$

et je dis que la condition $\Phi = 0$ satisfait aux conditions demandées.

1°. *Φ est homogène par rapport aux coefficients de a_x^2.* Car D est du 3me degré, les coefficients de l'équation tangentielle sont du 2d degré; donc le degré de $H(\sigma, \sigma')$ est:

$$(11) \qquad 3\sigma + 2\,(\beta - 2\sigma + \sigma') + \alpha - 2\sigma' + \sigma = 2\beta + \alpha.$$

Donc $\Phi = 0$ exprime une condition pour la conique a_x^2.

2°. Un changement de coordonnées tel que (1) n'altère pas la forme des fonctions envisagées, mais rend seulement leurs coefficients des fonctions de t, u, v, w. *La forme de l'équation $\Phi = 0$ est donc inaltérée par une substitution homographique.*

3°. *Les groupes minima de Φ coïncident avec la suite* (9), *et les nombres caractéristiques sont α, β.* C'est là le point le plus important à prouver. L'égalité (11) prouve déjà que le degré de Φ est $(2\beta+\alpha)$. Si maintenant on remplace dans Φ les coefficients a de l'équation ponctuelle par ceux α de l'équation tangentielle, il faut comme on sait remplacer

$$a_{ij}, \qquad \alpha_{ij}, \qquad D$$

par

$$\alpha_{ij}, \qquad D\,a_{ij}, \qquad D^2.$$

Les degrés de P et Π dans (10) s'échangent entre eux, et D est affecté de l'exposant $(\beta+\sigma')$, dont le minimum est β. Le facteur D^β supprimé, on a le degré de Φ' en transposant les lettres dans celui de Φ. Donc le degré c' de Φ' est $(2\alpha+\beta)$. Donc α, β sont bien les nombres caractéristiques de Φ que définissent les équations (5) et (6).

En ce qui concerne les groupes minima de Φ, annulons, conformément au No. 10, les coefficients des rectangles de a_x^2, et remplaçons les coefficients des carrés par les lettres g. Au lieu de (10) nous pouvons alors écrire:

(11) $H_1(\sigma_1\sigma') = (g_1g_2g_3)^\sigma (g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1)^{(\beta-2\sigma+\sigma')} \times (g_1, g_2, g_3)^{(\alpha-2\sigma'+\sigma)}$.

Dans ce produit il existe évidemment un groupe de termes dans lesquels les exposants sont, en ordre croissant, σ, $\beta-\sigma+\sigma'$, $\alpha+\beta-\sigma'$, c'est-à-dire, d'après (7), un groupe (σ, σ'). Il reste à montrer que, relativement à tous les autres groupes déduits du même produit, le groupe (σ, σ') est minimum. Or deux lettres au moins, dans un terme quelconque, ont simultanément des exposants non inférieurs à la somme $(\beta-\sigma+\sigma')$ des deux premiers exposants dans (11). Soit donc (σ_1, σ_1') un autre groupe déduit de (11). L'exposant moyen χ, dans ce groupe, est, suivant (7), $\beta-\sigma_1+\sigma_1'$. Il n'est pas moindre que $\beta-\sigma+\sigma'$. Donc:

$$\sigma_1' - \sigma_1 \geqq \sigma' - \sigma.$$

Mais aucune lettre ne peut avoir un exposant moindre que σ. Donc σ_1 est au moins égal à σ. Donc aussi, d'après la dernière inégalité, σ_1' n'est pas moindre que σ'. Donc le groupe (σ_1, σ_1') différent de (σ, σ') n'est pas minimum. Donc (σ, σ') est le seul groupe minimum provenant de $H(\sigma, \sigma')$; ce qui démontre la proposition annoncée.

14. On peut former d'une manière plus géométrique un covariant Φ ayant des groupes minima choisis à volonté. A cet égard, je me contenterai ici d'un énoncé facile à démontrer au moyen des résultats du No. 13.

Soit, sur une droite L, trois points donnés y, z, t; soient x, x' les points où L est rencontrée par une conique a. Considérons les deux rapports anharmoniques (y, z, t, x) et (y, z, t, x'), et soit r leur différence.

Soit aussi, par un point l, trois droites données Y, Z, T; soient X, X' les tangentes menées par l à a. Considérons de même la différence R des deux rapports anharmoniques (Y, Z, T, X), (Y, Z, T, X').

Soit maintenant, pour une conique a, la condition

$$\Phi = f(r^2, R^2) = \Sigma A r^{2\tau'} R^{2\tau} = 0,$$

f étant un polynôme entier. Les groupes d'exposants minima (σ, σ') de la condition Φ coïncident avec les groupes minima formés avec les nombres τ et τ'. Les nombres α, β sont égaux respectivement au double du maximum de τ' et de τ.

On peut, dans l'énoncé de cette dernière condition, substituer à r la longueur de la corde interceptée par a sur L, et à R le sinus ou la tangente trigonométrique de l'angle des tangentes issues de l. Les conclusions ne seront pas altérées. Mais, de la sorte, la condition n'est plus énoncée sous forme projective.

15. Revenons maintenant à la considération d'un covariant Φ quelconque, et de la fonction Φ_1 qui s'en déduit (No. 10). Les coefficients H de cette fonction dépendent des arbitraires t, u, v, w. Si, comme on en est convenu (No. 3), on laisse ces arbitraires indéterminées, les quantités H jouissent de la propriété suivante, qu'il est essentiel de mentionner pour la rigueur des démonstrations subséquentes:

Entre les quantités H il n'existe aucune relation linéaire et homogène identique

$$pH + p'H' + p''H'' + \cdots = 0, \tag{12}$$

dans laquelle $p, p', p'', \ldots$ soient des constantes indépendantes de t, u, v, w.

Pour le prouver, rappelons-nous comment Φ a été supposé déduit d'une équation quelconque à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation d'une conique. C'est en faisant dans cette équation le changement de coordonnées (1). Or il est visible que ceci revient à remplacer dans les coefficients a_{ij}, symboliquement écrits $a_i a_j$, les symboles

$$a_1, \qquad a_2, \qquad a_3,$$

par

$$(tvw)\, a_u, \qquad (twu)\, a_v, \qquad (tuv)\, a_w.$$

Puis, pour obtenir Φ_1, on supprime les termes qui contiennent les coefficients des rectangles, et on remplace les coefficients des carrés par les lettres g. D'après cette observation, on se convaincra aisément que la quantité H, coefficient du terme mis en évidence dans (3), est par rapport aux lettres u, v, w affectées de l'indice 1 (en appelant u_1, u_2, u_3 les coordonnées de $u, \ldots$), homogène et du degré $2c + 2\pi$; par rapport à ces mêmes lettres, affectées de l'indice 2, du degré $2c + 2\chi$; et par rapport à ces lettres affectées de l'indice 3, du degré $2c + 2\sigma$. Donc les coefficients H de deux termes qui diffèrent entre eux par les exposants des g, diffèrent eux-mêmes par leur composition eu égard aux indices des lettres u, v, w. Donc l'identité (12) est impossible.

IV. Du nombre des coniques d'un système, qui satisfont à une condition.

16. Comme je l'ai annoncé au No. 4, je vais traiter le problème pour un cas particulier. La condition Φ sera quelconque, mais le système sera un de ceux dont la définition a été donnée au No. 9; il sera composé de coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et unicursal. Les trois quantités g sont alors des polynômes entiers d'une variable ω, et d'un même degré. Remplaçant les g par ces polynômes dans Φ_1, j'ai un nouveau polynôme entier en ω, dont les racines répondent aux coniques du système qui satisfont à Φ. La question proposée (No. 3) est donc ici ramenée à la discussion des racines de ce polynôme.

J'examinerai d'abord quelles sont les racines indépendantes des arbitraires t, u, v, w de la condition Φ, et quel est leur nombre. Je démontrerai ensuite que les autres racines sont simples; elles répondent, comme on sait, aux véritables solutions cherchées. Le nombre de ces racines sera donc celui des solutions. J'obtiendrai d'ailleurs le nombre de ces racines comme la différence entre le degré du polynôme et le nombre des racines de la 1ère catégorie.

17. Soit Ω une racine du polynôme, que je continuerai à désigner par Φ_1; et supposons que cette racine ne varie pas avec t, u, v, w. En désignant par p la valeur de $g_1^\pi g_2^\chi g_3^\sigma$ (No. 10) pour $\omega = \Omega$, et de même par $p', p'' \ldots$ les valeurs des autres termes, on a, d'après l'hypothèse:

$$pH + p'H' + p''H'' + \cdots = 0,$$

qui doit être une identité. D'après le No. 15, cette identité est impossible. Donc $p, p', p'' \ldots$ sont nuls séparément. Mais, parmi ces quantités, il en est qui ne contiennent pas le facteur $g_1 g_2 g_3$ (No. 11). Donc deux au moins des quantités g sont nulles. D'ailleurs les trois g ne sont pas nuls à la fois (No. 9). Donc la racine Ω correspond à une conique dégénérée dans le mode A' ou le mode B, ce qui est conforme aux observations du No. 4. Il s'agit maintenant de calculer l'ordre de multiplicité de cette racine. Soient $m, m+n$ les ordres de multiplicité de la racine Ω dans deux des polynômes g. Parmi les termes du groupe (π, χ, σ) (No. 10), celui qui contient le facteur $(\omega - \Omega)$ avec l'exposant le moindre, le contient au degré $\sigma(m+n) + \chi m$. Si maintenant, comme au No. 12, on introduit au lieu de π, χ, σ les nombres $\alpha, \beta, \sigma, \sigma'$, on a d'après (7):

$$\sigma(m+n) + \chi m = \sigma(m+n) + (\sigma' - \sigma + \beta)m = \sigma n + \sigma' m + \beta m.$$

Si donc, considérant les divers groupes (σ, σ') de Φ_1, on pose

(13) $$\gamma = \text{minimum de } (\sigma n + \sigma' m),$$

on en conclut que Φ_1 contient le facteur $(\omega - \Omega)$ au moins au degré $\beta m + \gamma$. Mais je dis aussi que Φ_1 ne contient pas ce facteur à un degré plus élevé. En effet, ce facteur étant supprimé $(\beta m + \gamma)$ fois, il reste dans Φ_1 des termes qui séparément ne contiennent plus le facteur $(\omega - \Omega)$. L'ensemble de ces termes ne peut pas le contenir de nouveau; car en faisant $\omega = \Omega$, on aurait encore une identité telle que (12), et qui est impossible, quand t, u, v, w restent indéterminés. Ainsi l'ordre de multiplicité de la racine Ω dans Φ_1 est précisément $\beta m + \gamma$.

Que l'on prenne successivement chacune des racines Ω qui appartiennent à deux des polynômes g, et que pour chacune d'elles on forme le nombre analogue à γ, que l'on fasse ensuite la somme Γ de ces nombres γ; que l'on désigne ensuite par M la somme des nombres m, c'est-à-dire la somme des ordres de multiplicité de ces racines Ω pris pour chacune d'elles dans celui des deux polynômes g où cette racine entre effectivement, mais le moins de fois; la somme des ordres de multiplicité de ces racines Ω dans Φ_1 est égale à $\beta M + \Gamma$.

On remarquera: 1°, que les nombres m, n sont l'ordre et la classe de la conique dégénérée qui répond à $\omega = \Omega$; 2°, que les groupes minima (σ, σ') de Φ_1 concourent seuls à former les nombres tels que γ, ce qui justifie l'introduction des groupes minima dont j'ai parlé plus haut; 3°, parmi les valeurs de σ, σ' il y a toujours les valeurs zéro. Donc, si l'un des nombres m, n est nul, γ l'est aussi, c'est-à-dire que les coniques dégénérées suivant le mode B concourent seules à la formation du nombre Γ; 4°, enfin, si Φ_1 ne contient qu'un seul groupe minimum, qui est alors (0, 0), γ est toujours nul, et par suite aussi Γ.

18. Démontrons maintenant que les autres racines du polynôme entier Φ_1 sont simples. S'il en était autrement, ce polynôme pourrait se décomposer en $\Psi^2\Theta$, Ψ et Θ ayant pour coefficients des fonctions entières des coefficients de Φ_1, par suite des fonctions entières des coordonnées de t, u, v, w. Ainsi Φ_1 se décomposerait de la sorte toutes les fois qu'on y mettrait pour la conique qui y figure une conique du système envisagé; par suite, en raisonnant comme au No. 4, on en conclurait que cette décomposition a lieu pour une conique quelconque. Donc la condition Φ serait décomposable, ce qui est contre l'hypothèse.

19. Les trois polynômes g sont, par hypothèse, d'un même degré a. En conséquence, le degré le plus élevé des termes de Φ_1 est $a(\pi + \chi + \sigma)$ ou (Nos. 10 et 11) $a(2\beta + \alpha)$. C'est précisément le degré de Φ_1; car un abaissement de ce degré exigerait une identité

telle que (12) et qui est impossible. Donc le nombre des racines variables avec t, u, v, w est:

$$\mathrm{N} = a(2\beta + \alpha) - \beta M - \Gamma = \alpha a + \beta(2a - M) - \Gamma.$$

Pour obtenir la signification géométrique des nombres a et $(2a - M)$ qui dépendent du système seul, il suffit de choisir deux exemples:

1°. Soit Φ la condition de passer par un point u. On a alors:

$$\Phi_1 = g_1 u_1^2 + g_2 u_2^2 + g_3 u_3^2.$$

Ici (Nos. 10 et 11) $\alpha = 1$, $\beta = 0$; et il y a un seul groupe d'exposants minima $(0, 0)$. Donc $\Gamma = 0$. Si donc μ est le nombre des coniques du système qui passent par le point *arbitraire* u, on a $\mu = a$.

2°. Envisageons maintenant la condition corrélative, toucher une droite. D'après le No. 11, il suffit d'échanger α, β et σ, σ'. Donc $\Gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Donc, si ν est le nombre des coniques qui touchent une droite arbitraire, on a $\nu = 2a - M$. La formule devient ainsi

$$\mathrm{N} = \alpha\mu + \beta\nu - \Gamma, \tag{14}$$

et satisfait explicitement au principe de dualité. Dans cette formule, les éléments relatifs à la condition Φ ont été ici définis pour une condition quelconque. La démonstration précédente a traît à un système particulier. Mais j'ai donné (Nos: 7 et 8) les définitions des nombres m, n relatifs à une conique dégénérée d'un système quelconque; d'autre part, les *caractéristiques* μ, ν ont une définition qui s'applique aussi à un système quelconque. Il n'y a donc aucune difficulté à appliquer à un tel système la formule (14). J'énonce ici, sans le démontrer, que cette application est légitime, et je renvoie, comme je l'ai dit précédemment, pour cette extension à un mémoire plus étendu qui sera publié ultérieurement.

20. Deux cas particuliers de la formule (14) sont à signaler, en se conformant aux remarques du No. 17.

Théorème I. — *Si un système de coniques, dont les caractéristiques sont μ, ν, ne contient aucune conique dégénérée suivant le mode* B, *le nombre des coniques de ce système qui satisfont, d'autre part, à une condition projective quelconque, dont les arbitraires restent indéterminées, est $\alpha\mu + \beta\nu$, α et β étant deux nombres entiers qui ne dépendent que de cette condition.*

Remarque. — Les nombres α, β ont été définis par une représentation algébrique de la condition (No. 11); mais le théorème I en donne maintenant une définition géométrique, que l'on obtiendra en appliquant ce théorème à la condition envisagée et à deux systèmes différents, qui n'aient point de coniques dégénérées du mode B.

Le second cas particulier à signaler est celui où la fonction Φ_1 ne contient qu'un groupe minimum $(0, 0)$. Dans ce cas, la formule (14) se réduit encore à $\alpha\mu + \beta\nu$, *quel que soit le système.* Pour substituer à ce critérium algébrique un critérium géométrique, il suffit de considérer un système particulier contenant une conique dégénérée du mode B. En se plaçant à ce point de vue, on verra aisément que l'on peut dire:

Théorème II. — *Soit S le faisceau des coniques qui ont, en un point donné, des contacts du* 3[me] *ordre avec une courbe donnée. Si le nombre des coniques de ce faisceau, qui satisfont à une condition* Φ *est* $\alpha + \beta$, *le nombre des coniques d'un système quelconque* (μ, ν) *qui satisfont à cette même condition* Φ *est toujours* $\alpha\mu + \beta\nu$.

Ajoutons maintenant que: *Si un système S envisagé ne satisfait pas à la restriction énoncée au théorème I, et si une condition* Φ *ne satisfait pas à la restriction énoncée au théorème II, le nombre des coniques de S qui satisfont à* Φ *est inférieur à* $\alpha\mu + \beta\nu$, *et en diffère d'un terme complémentaire* Γ.

21. Il reste maintenant à donner à ce terme complémentaire Γ une forme géométrique. Imaginons une fonction entière Ψ de deux variables x, y, ainsi composée

$$\Psi = \Sigma A x^{\sigma} y^{\sigma'},$$

les coefficients A étant arbitrairement choisis, et les exposants σ, σ' étant les exposants minima de Φ_1. L'équation $\Psi = 0$ représente, en coordonnées rectilignes, une courbe qui passe à l'origine des coordonnées, sauf au cas où existe le groupe $(0, 0)$. Dans tout autre cas, la nature de ses branches à l'origine des coordonnées définit complètement les groupes minima (σ, σ'), et en donne une *image.* Appelons cette courbe Ψ *attachée* à la condition Φ.

Envisageons maintenant le cycle de branches de courbe représentés par les équations:

$$x = \omega^n f(\omega), \quad y = \omega^m \varphi(\omega), \tag{15}$$

où f et φ sont des développements arbitraires suivant les puissances entières et ascendantes de ω, commençant par des termes de degré zéro. Le nombre des intersections des branches de ce cycle et de Ψ, réunies à l'origine des coordonnées est évidemment égal au minimum de $(\sigma n + \sigma' m)$. C'est justement l'expression (13) de l'élément γ. Composons donc une courbe Σ qui, pour chaque conique dégénérée, d'ordre m et de classe n, d'un système S, contienne un cycle de branches tel que (15). Alors le terme complémentaire Γ sera représenté par le nombre des points qu'ont en commun, à l'origine des coordonnées, les courbes Ψ et Σ. On peut varier à l'infini les courbes Ψ et Σ pour une même condition Φ et un même système S, puisque c'est la nature de leurs branches autour d'un point qui seule intervient. Je prendrai, par exemple, les définitions suivantes:

Pour chaque conique d'un système considérons les deux nombres R^2 et r^2 définis dans l'énoncé du No. 14, et prenons-les, le premier pour l'abcisse, le second pour l'ordonnée d'un point. La conique variant dans le système, ce point décrit une courbe, que nous dirons attachée au système. (On peut, suivant la remarque du No. 14, remplacer R et r par un sinus et une longueur.)

Soit une condition Φ pour une conique. Supposons une conique conjuguée par rapport à un triangle abc; soit p un des points où cette conique rencontre bc, et soit q un des points où elle rencontre ab. Pour cette conique, la condition peut s'exprimer par une relation $\psi(x,y)=0$ entre

$$x=\left(\frac{qa}{qb}\right)^2, \quad y=\left(\frac{pb}{pc}\right)^2.$$

La courbe représentée par l'équation $\psi(x,y)=0$ sera dite attachée à la condition Φ.

Ces définitions posées, on peut dire alors:

Théorème III. — *Le terme complémentaire relatif à un système et à une condition est égal au nombre des points qu'ont en commun à l'origine des coordonnées la courbe attachée au système et la courbe attachée à la condition.*

V. Exemples.

22. Je vais donner ici quelques exemples du calcul de la formule (14) en envisageant des conditions Φ, données sous des formes géométriques.

Je suppose que la condition Φ consiste en une relation projective entre la conique a et une conique donnée b. Cette condition s'exprime, comme on sait, par une relation entre les coefficients du discriminant de $a+\lambda b$, et cette relation est homogène par rapport aux coefficients de a, ainsi que par rapport à ceux de b. Il en résulte aisément que cette relation peut aussi être envisagée comme une équation symétrique et homogène entre les trois racines λ, λ', λ'' de ce discriminant, et réciproquement. Je suppose la relation mise sous cette dernière forme, et, sans la transformer, je vais faire le calcul de la formule (14) relatif à cette condition et à un système arbitraire.

En premier lieu, le degré de l'équation, par rapport à λ, λ', λ'', est aussi celui de Φ_1. Soit c ce degré, on a déjà

$$2\beta+\alpha=c,$$

suivant les formules (6). Si a est une conique dégénérée, d'ordre m et de classe n, il est visible que deux des λ sont infiniment petits, l'un d'ordre m, l'autre d'ordre $m+n$, exactement comme les g (No. 8).

Faisons donc λ infiniment petit d'ordre $m+n$, λ' infiniment petit d'ordre m. Si le premier membre de l'équation devient ainsi infiniment petit d'ordre p, on aura

$$p = \beta m + \gamma.$$

En choisissant de diverses manières les nombres m, n, on déterminera ainsi β et les groupes (σ, σ') de la condition.

Dans beaucoup de cas, la relation entre les λ n'est pas immédiatement donnée sous forme symétrique. Quand il en est ainsi, on la rend symétrique en faisant le produit des facteurs dissymétriques différents, obtenus par la permutation des lettres. Il est clair qu'alors on peut faire porter le calcul sur un seul facteur. Ces généralités admises, je prends des exemples concrets.

23. Soit d'abord pour Φ la condition que a touche b. Cette condition s'exprime par

$$\varphi = \lambda - \lambda' = 0.$$

Il y a six facteurs analogues à multiplier entre eux. Donc:

$$2\beta + \alpha = 6.$$

On en pourrait déduire $\alpha = \beta = 2$; car il est manifeste que α et β sont des nombres égaux. Mais appliquons ici notre méthode. Le facteur φ n'est infiniment petit que si λ et λ' sont tous deux infiniment petits; et si les ordres respectifs de λ et λ' sont $m+n$ et m, $\lambda - \lambda'$ est d'ordre m. Donc deux des six facteurs sont infiniment petits d'ordre m, les autres restent finis. Donc

$$\beta m + \gamma = 2m.$$

Donc γ est toujours nul, et β est égal à 2. Donc, suivant un théorème bien connu: *le nombre des coniques d'un système* (μ, ν) *quelconque qui touchent une conique donnée est égal à* $2(\mu+\nu)$. C'est un exemple du théorème II.

24. *Soit r le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de a avec une conique fixe b, considérés sur a; soit s le rapport anharmonique des quatre mêmes points, considérés sur b, dans le même ordre; et envisageons successivement les deux conditions définies, pour la conique a, par les équations*

$$\varphi = s^p - kr^q = 0, \qquad \psi = s^p r^q - k = 0,$$

k étant un nombre donné et p, q des entiers positifs premiers entre eux.

A l'égard de la condition φ, on trouvera sans peine, si $p > q$, que le facteur type est:

$$\varphi = \lambda'^q(\lambda' - \lambda'')^{p-q} - k\lambda^q(\lambda - \lambda'')^{p-q}.$$

En raisonnant, comme au No. 23, on trouvera que

Si $p > q$, le nombre des coniques d'un système (μ, ν) quelconque, qui satisfont à la condition φ, est $(6p - 4q)\mu + 2q\nu$; et aussi,

Si $p < q$, ce nombre se change en $2p\mu + (6q - 4p)\nu$.

Ces deux nombres se réduisent de moitié si $k = -1$; et, si $k = 1$, ils doivent être diminués de $2(\mu + \nu)$ et ensuite divisés par 2. Ces deux circonstances proviennent de ce que, dans le premier cas, φ est symétrique en λ, λ', et que, dans le second, il devient symétrique après suppression du facteur $(\lambda - \lambda')$.

Ainsi la condition φ donne encore exemple du théorème II.

Mais il n'en est plus de même de la condition ψ. Le facteur type est alors

$$\psi = (\lambda' - \lambda'')^{p+q}\,\lambda^q - k\,(\lambda - \lambda'')^{p+q}\,\lambda'^q,$$

et l'on en tire les conclusions suivantes:

Soient μ, ν les caractéristiques d'un système S, N' la somme des classes de celles des coniques dégénérées de S pour chacune desquelles le rapport de la classe à l'ordre est inférieur à $p:q$, et M'' la somme des ordres des autres coniques dégénérées. Le nombre des coniques de S qui satisfont à la condition Ψ est:

$$6(p\mu + q\nu) - 2N'q - 2M''p.$$

On voit qu'ici il y a un terme complémentaire $2(N'q + M''p)$ qui est nul dans le cas seulement où le système S ne contient aucune conique dégénérée suivant le mode B.

On remarquera encore que, *si $k = -1$, le résultat doit être divisé par 2, et si $k = 1$, il doit être diminué de $2(\mu + \nu)$ puis divisé par 2.*

25. Voici un dernier exemple où le calcul se fait d'une manière analogue. *On donne deux coniques fixes b, c, et l'on envisage, pour une conique a, la condition que le rapport anharmonique de ses points d'intersection avec b, pris sur a, soit égal au rapport anharmonique de ses points d'intersection avec c, pris sur c.*

Soient λ, λ', λ'' les racines du discriminant de $a + \lambda b$, et aussi l, l', l'' les racines du discriminant de $a + lc$. Le facteur est ici:

$$\varphi = \lambda(\lambda' - \lambda'')(l - l'') - \lambda'(\lambda - \lambda'')(l' - l'').$$

Il faut permuter entre elles les lettres λ et aussi les lettres l, ce qui donne 36 combinaisons. Mais, ainsi que je vais le montrer, 12 seulement de ces combinaisons sont distinctes, en sorte qu'on aura:

$$2\beta + \alpha = 3 \times 12 = 36,$$

d'où l'on pourrait déjà conclure $\alpha = \beta = 12$.

Si l'on désigne par r, s les deux rapports anharmoniques, on obtiendra six facteurs distincts en donnant successivement à s six déterminations distinctes sans altérer r. Ces six facteurs dérivent donc de $(r-s)$ par le changement de s seulement. Puis en changeant successivement r on aura six groupes de six facteurs chacun. Mais trois de ces groupes contiennent l'expression $(r-s)$ et trois autres l'expression $(s-r)$, comme on le voit en faisant le même changement à la fois sur r et sur s dans $(r-s)$. Donc il y a en tout 12 facteurs, savoir les 6 facteurs qu'on déduit de $(r-s)$ par le changement de s seul, puis 6 facteurs respectivement égaux et de signes contraires aux précédents. Il suffira donc d'opérer sur 6 facteurs déduits de $(r-s)$ par changement de s seulement, et de doubler les résultats. Ainsi je n'ai qu'à permuter les lettres l dans φ en supposant, par exemple:

λ, l infiniment petits d'ordre $m+n$,
λ', l' „ „ m
λ'', l'', finis.

Il est évident que les facteurs seront d'ordre m, à moins que le second terme, qui contient déjà $\lambda'(\lambda-\lambda'')$, ne contienne $(l-l')$. Donc 4 facteurs sont d'ordre m, et il y a exception pour les deux suivants:

$$\varphi_1 = \lambda(\lambda'-\lambda'')(l''-l') - \lambda'(\lambda-\lambda'')(l-l'),$$
$$\varphi_2 = \lambda(\lambda'-\lambda'')(l''-l) - \lambda'(\lambda-\lambda'')(l'-l),$$

qui sont d'ordre $m+n$ ou d'ordre $2m$ suivant que n est inférieur ou supérieur à m. De là enfin la conclusion suivante:

Soient, pour un système de coniques, μ, ν les caractéristiques, N' la somme des classes de celles des coniques dégénérées pour chacune desquelles la classe est inférieure à l'ordre, et M'' la somme des ordres des autres coniques dégénérées. Le nombre des coniques de ce système qui satisfont à la condition ci-dessus est $12(\mu+\nu) - 4(M''+N')$ *).

Si, au lieu de cette condition, on envisageait celle qui consisterait en ce que les deux mêmes rapports anharmoniques fussent égaux et *de signes contraires*, on verrait immédiatement que le résultat précédent devrait être simplement réduit de moitié.

26. Pour que l'on se rende compte des circonstances qui s'offrent dans les exemples précédents, j'ajoute ici quelques considérations géométriques au sujet du rapport anharmonique de quatre points, pris sur une conique qui dégénère.

Soient 1, 2, 3, 4 les points d'intersection de deux coniques a, b, et I, II, III, IV les points de contact de b avec les tangentes communes

*) Dans ma communication du 13 Nov. 1876, adressée à l'Académie des Sciences, j'ai énoncé fautivement ce résultat, en le divisant à tort par 2.

à a et b. On sait que le point de rencontre de deux cordes conjuguées quelconques du premier système est aussi un point de rencontre de deux cordes conjuguées du second. En conséquence, si à un point d'un des systèmes on associe un des points de l'autre, en le choisissant d'ailleurs à volonté, il en résulte une association parfaitement déterminée entre les points des deux systèmes, association définie par cette condition que deux cordes conjuguées quelconques d'un des systèmes concourent avec leurs associées.

Ceci entendu, on a cette proposition: *le rapport anharmonique des quatre points* 1, 2, 3, 4, *considérés sur la conique a dans un ordre quelconque, est égal au rapport anharmonique des points* I, II, III, IV *sur la conique b, pris dans l'ordre correspondant par association.*

Supposons que a, faisant partie d'un système, dégénère suivant le 3^{me} mode. Soient D et d la droite et le point, limites de a, le point d sur la droite D; p, q les points de rencontre de b et D; r, s les points de contact de b avec les tangentes issues de d. Les coniques a et b ont en commun deux points 1, 2 infiniment voisins de p, et deux points 3, 4, infiniment voisins de q. Leurs tangentes communes ont avec b deux points de contact infiniment voisins de r, et deux points de contact infiniment voisins de s. Si deux points associés portent le même numéro, on voit aisément que, suivant la disposition des points 1, 2, 3, 4, le point I étant censé voisin de r, ce sera en même temps le point III ou le point IV qui sera aussi voisin de r. Dans le premier cas, le rapport anharmonique

$$(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}) = \frac{\mathrm{I\,II}}{\mathrm{I\,III}} \cdot \frac{\mathrm{III\,IV}}{\mathrm{II\,IV}}$$

croît au-delà de toute limite; dans le second, il a l'unité pour limite. En même temps, le rapport anharmonique associé (1, 2, 3, 4), considéré sur b, a zéro pour limite. Par suite, le tableau suivant montre que ces deux cas n'en font qu'un, et qu'aux deux valeurs zéro du rapport anharmonique de 1, 2, 3, 4 sur b correspondent les valeurs 1 et ∞ du rapport anharmonique de I, II, III, IV.

ω	$\frac{1}{\omega}$	$1-\omega$	$\frac{1}{1-\omega}$	$\frac{\omega-1}{\omega}$	$\frac{\omega}{\omega-1}$
0	∞	1	1	∞	0
1	1	0	∞	0	∞

Mais, d'après la proposition rappelée plus haut, les rapports anharmoniques de I, II, III, IV coïncident avec ceux de 1, 2, 3, 4 envisagés sur a. Donc on voit que le rapport anharmonique de ces derniers points, envisagé sur l'une des coniques, devenant zéro, il devient 1 ou ∞ quand on l'envisage sur l'autre. C'est là ce qui explique les circonstances rencontrées dans les exemples précédents.

VI. Des équivalents.

27. Jusqu'ici j'ai considéré exclusivement des conditions indécomposables. J'introduis maintenant des conditions composées. Soient $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$, $\cdots$ diverses conditions. L'équation $0 = \Phi = \Phi' \Phi'' \cdots$ définit une condition composée, que l'on pourra dire la *somme* des composantes pour la raison suivante. Soit N' le nombre des coniques d'un système (a) qui satisfont à Φ'; soit N'' le nombre des coniques de (a) qui satisfont à Φ''; $\cdots$ soit enfin Φ le nombre des coniques de (a) qui satisfont à Φ; on a $N = N' + N'' + \cdots$

Soient Φ et Φ_1 deux conditions telles que le nombre des coniques d'un système (a) qui satisfont à l'une ou à l'autre soit le même, et que cette circonstance ait toujours lieu, quel que soit (a). Je dirai que Φ et Φ_1 sont deux conditions *équivalentes*.

28. Considérons, comme au No. 21, une courbe Ψ attachée à une condition Φ, supposons cette courbe décomposée, à l'origine des coordonnées, en ses branches linéaires ou superlinéaires, et soient

$$x = t^q, \quad y = t^p f(t)$$

les équations qui représentent une de ces branches. La lettre f désigne un développement suivant les puissances entières et ascendantes de t, commençant par un terme constant; et p et q sont deux nombres entiers positifs. De plus, les coefficients A de l'équation qui définit Ψ (No. 21) restant indéterminés, on sait par la théorie des courbes algébriques que p et q sont premiers entre eux. Soient (p, q), (p', q') $\cdots$ les couples de nombres analogues, l'identité de deux couples étant d'ailleurs possible.

Pour l'objet actuel, on peut remplacer la courbe Ψ par la courbe composée

$$0 = \Psi_1 = (x^p - By^q)(x^{p'} - B'y^{q'}) \cdots$$

En effet, en vertu de l'indétermination des coefficients $A, B, \cdots$ le nombre des intersections confondues à l'origine, avec une courbe quelconque, sera le même pour Ψ ou pour Ψ_1.

Or, d'après un résultat du No. 14, Ψ_1 est composée des courbes attachées aux diverses conditions

$$r^{2q} = CR^{2p}, \quad r^{2q'} = C'R^{2p'}, \cdots$$

Désignons par (p, q) une telle condition *élémentaire*. Nous avons ce premier résultat, que la courbe attachée à Φ est la superposition ou la *somme* des courbes attachées à plusieurs conditions élémentaires.

D'après le No. 14 encore, les nombres analogues à α et β sont, pour la condition (p, q), respectivement $2q$ et $2p$. Donc, pour la condition Φ_1, somme de (p, q), (p', q'), $\cdots$, on a:

$$\alpha = 2(q+q'+\cdots), \quad \beta_1 = 2(p+p'+\cdots).$$

Mais, suivant le No. 12, ces deux derniers nombres sont précisément égaux respectivement à $2\sigma_0'$ et $2\sigma_k$. Si l'on fait

$$a = \alpha - \alpha_1, \quad b = \beta - \beta_1,$$

les inégalités (8) montrent alors que a et b sont des nombres positifs.

Désignons par P et par D la condition, pour une conique, de passer par un point ou de toucher une droite; il résulte de ce qui précède l'équivalence

$$\Phi \equiv aP + bD + (p, q) + (p', q') + \cdots$$

En effet, la condition composée, représentée par le second membre, a la même courbe attachée et les mêmes nombres α, β que la condition Φ. Donc elle lui est équivalente. Donc

Théorème IV.— *Une condition quelconque est équivalente à la somme d'un nombre limité de conditions élémentaires.*

On peut dès lors remplacer les propositions précédentes par le Théorème IV et le suivant:

Théorème V.— *Soit, dans un système, de caractéristiques* μ, ν, *une conique dégénérée d'ordre* m *et de classe* n; *soit, pour cette figure,* γ *le plus petit des deux produits* mq, np. *Soit enfin* Γ *la somme des nombres analogues à* γ *pour toutes les coniques dégénérées du système. Le nombre des coniques de ce système qui satisfont à la condition* (p, q) *est* $2(q\mu + p\nu) - \Gamma$.

On pourra *conventionnellement* mettre au nombre des conditions (p, q) les deux conditions P, D, en supposant:

$$P \equiv (0, \tfrac{1}{2}), \quad D \equiv (\tfrac{1}{2}, 0).$$

Pour tout autre cas, p, q seront des entiers premiers entre eux. La convention précédente a l'avantage de réduire à sa plus simple expression la formule qui donne le nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions séparées, formule dont la recherche fait la suite naturelle du mémoire actuel.

29. Les exemples envisagés au paragraphe V revêtiront maintenant les formes suivantes:

Pour la condition φ du No. 24, on aura:

Si $p > q$, $\qquad \varphi \equiv (6p-4q)\,P + 2q\,D.$

Si $p < q$, $\qquad \varphi \equiv 2p\,P + (6q-4p)\,D.$

Pour la condition ψ de ce même No. 24, on a:

$$\psi \equiv 2p\,P + 2q\,D + 2\,(q,\,p);$$

et pour celle du No. 25,

$$\Phi \equiv 4P + 4D + 4\,(1,\,1).$$

Ces exemples me paraissent suffire à éclaircir les théories exposées dans ce mémoire.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von A. V. Bäcklund in Lund.

In zwei früheren Abhandlungen im XI. und XIII. Bande dieser Annalen habe ich mich mit partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung, die erste Integrale besitzen, beschäftigt, und in der letzten Abhandlung besonders das gegenseitige Verhalten der ersten Integrale einer solchen partiellen Differentialgleichung untersucht, die zwei oder mehrere vollständige erste Integralschaaren, jede Schaar ausgedrückt durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{eine arb. Function von } (f_1(z, x_1, \cdots x_n, 1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \cdots \text{Diffqu.v.} z),$$
$$f_2(z, x_1, \cdots x_n, 1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \cdots \text{Diffqu.v.} z)) = 0,$$

besitzt. Indem man den dort eingeschlagenen Weg verfolgt, gelangt man zu verschiedenartigen Systemen von Differentialgleichungen, für die gemeinsame Integralmannigfaltigkeiten von n Dimensionen (falls n die Zahl der unabhängigen Variablen ist) existiren. Systeme zweier partieller Differentialgleichungen 2. O. mit zwei unabhängigen Variablen, von denen jedes eine unendlichfach unendliche Schaar von Integralflächen besitzt, sind schon in der letzten der oben citirten Abhandlungen erörtert worden*). Das allgemeinere System zweier partieller Differentialgleichungen 2. O. mit zwei unabhängigen Variablen und mit gemeinsamen Integralflächen, deren Elemente $(zxypqrst)$ alle gemeinsamen Elemente $(zxypqrst)$ der Gleichungen umfassen, hat nur ∞^4 Integralflächen. — Das sind, im Falle $n = 2$, zwei verschiedene Arten von Paaren von Gleichungen 2. O., die Integralflächen zu einer grösstmöglichen Zahl**) gemein haben. — Zu den letzt angegebenen allgemeineren Gleichungspaaren kommt man auch durch

*) Solche Systeme sind, wie ich in der citirten Abhandlung bemerkt habe, auch schon früher betrachtet worden. (Darboux, Comptes rendus T. LXX.)

**) Ich behalte diesen Ausdruck bei, um zu bezeichnen, dass die Elemente der Integrale sämmtliche Elemente des Gleichungspaares umfassen.

die Entwickelungen der erwähnten Abhandlung, namentlich durch den Satz der 20. N. daselbst. Ich stelle daher hier zuerst eine Discussion dieses Satzes an.

Für $n > 2$ wird die Zahl der Arten von Paaren von partiellen Differentialgleichungen 2. O. mit Integral-M_n zu einer grösstmöglichen Zahl eine grössere. Der dritte Paragraph dieser Abhandlung soll sich mit einer besonderen Art von Gleichungspaaren mit drei unabhängigen Variablen und mit Integral-M_3 zu einer grösstmöglichen Zahl beschäftigen, für welche sodann im vierten Paragraphen allgemeine Beispiele gegeben werden.

Hier wird das Problem von der Integration der partiellen Differentialgleichungen 2. O. so gut wie nicht berührt. Aber es ist offenbar, dass, wenn partielle Differentialgleichungen bekannt sind, die mit einer vorgelegten Gleichung 2. O. Integralflächen gemein haben, *diese* Flächen durch einfachere Operationen erhalten werden müssen, als Integrale einer Gleichung 2. O., von der von vornherein keine anderen Gleichungen der genannten Art bekannt sind; ebenso ist leicht ersichtlich, worin diese Vereinfachungen bestehen. Man kann sogar, — ich habe es an verschiedenen Stellen der Abhandlung im XIII. Bd. d. A. bemerkt, — aus solchen Gründen Gattungen von Gleichungen 2. O. angeben, die durch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig gelöst werden. Eine ganz andere Art von Vereinfachung des Integrationsproblems ist die, welche für eine partielle Differentialgleichung 2. O. sich darbietet, von der eine infinitesimale Berührungstransformation, durch welche die Gleichung in sich selbst übergeht, bekannt ist. Ich habe die Frage, wie die Kenntniss einer infinitesimalen Berührungstransformation der Gleichung 2. O. in sich selbst zu verwerthen sei, nicht völlig unberührt lassen wollen, und desshalb die Entwickelungen des 2. Paragraphen gegeben. — Die drei letzten Paragraphen der gegenwärtigen Abhandlung setzen die Kenntniss der in meiner Abhandlung im XIII. Bd. d. A. S. 411 über Charakteristiken von Gleichungen 2. O. enthaltenen Theorie voraus.

§ 1.

Ueber Systeme von partiellen Differentialgleichungen des Raumes von drei Dimensionen.

1. Ich betrachte zunächst, ebenso wie in der 20. N. meiner Abhandlung im XIII. Bande dieser Annalen, eine lineare partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die zwei erste Integrale hat, die resp. zwei distincten Integralschaaren zugehören, und nehme an, dass ein jedes dieser Integrale selbst ein Integral hat, das durch eine partielle Differentialgleichung k^{ter} resp. m^{ter} Ordnung ausgedrückt ist. Diejenigen beiden partiellen Differentialgleichungen $n - 1^{\text{ter}}$ O., welche

die erwähnten ersten Integrale darstellen, müssen immer, da letztere nicht in derselben Integralschaar enthalten sind, einem jeden gemeinsamen Elemente ($z, x, y, p, q, \cdots n-1^{te}$ Diffqu. v. z) charakteristische Richtungen zuordnen, von denen $n-2$ für beide Gleichungen gemeinsam sind, — dies schon desshalb, weil sonst die Gleichung n^{ter} Ordnung ihren Elementen ($z, x, y, p, q \ldots n^{te}$ Diffqu. v. z) mehr als n charakteristische Richtungen, nämlich alle die charakteristischen Richtungen ihrer ersten Integrale, zuordnen würde, was unmöglich ist. Daneben müssen jene Gleichungen $n-1^{ter}$ O. Integralflächen zu einer grösstmöglichen Zahl gemein haben*). Das Alles ist übrigens damit äquivalent, dass von den ersten Derivirten in Bezug auf x, y der beiden partiellen Differentialgleichungen $n-1^{ter}$ O. die eine Derivirte eine algebraische Consequenz der anderen sein muss.

Die partielle Differentialgleichung k^{ter} O., die ein Integral der einen jener Gleichungen $n-1^{ter}$ O. darstellt, muss dann mit der anderen Gleichung $n-1^{ter}$ O. so verbunden sein, dass jedem ihrer gemeinsamen Elemente ($zxypq \ldots n-1^{ste}$ Diffqu. v. z.) k oder wenigstens $k-1$ für beide Gleichungen gemeinsam charakteristische Richtungen zugeordnet werden, und dass gemeinsame Integralflächen zu einer grösstmöglichen Zahl existiren. *Algebraisch*: es muss, wenn $F=0$, $\varphi=0$ die Gleichungen k^{ter} resp. $n-1^{ter}$ Ordnung sind, von den Gleichungen:

$$(1)\qquad \frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k}}=0,\quad \frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k-1}dy}=0,\ \cdots \frac{d^{n-k}F}{dy^{n-k}}=0,\quad \frac{d\varphi}{dx}=0,\quad \frac{d\varphi}{dy}=0,$$

wenigstens eine eine algebraische Consequenz der anderen sein, so dass sich also wenigstens ein Werthsystem von Verhältnissgrössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \mu_1, \mu_2$ muss finden lassen, das unabhängig von den besonderen Werthen der n^{ten} Differentialquotienten von z die Relation befriedigt:

$$(2)\qquad \lambda_1 \frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k}} + \lambda_2 \frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k-1}dy} + \cdots + \lambda_{n-k+1}\frac{d^{n-k}F}{dy^{n-k}} + \mu_1 \frac{d\varphi}{dx} + \mu_2 \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Nun schreibe ich:

$$\frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k}} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_{k+1}\varepsilon_{k+1} + A_0,$$

$$\frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k-1}dy} = a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_3 + \cdots + a_{k+1}\varepsilon_{k+2} + A_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-k}F}{dy^{n-k}} = a_1\varepsilon_{n-k+1} + a_2\varepsilon_{n-k+2} + \cdots + a_{k+1}\varepsilon_{n+1} + A_{n-k};$$

*) Beiläufig: Derjenige Streifen, der durch die eine Gleichung $n-1^{ster}$ O auf einer beliebigen (nicht gemeinsamen) Integralfläche der anderen Gleichung

und

$$\frac{d\varphi}{dx} = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n + B_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = b_1\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_3 + \cdots + b_n\varepsilon_{n+1} + B_1;$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n+1}$ die n^{ten} Differentialquotienten von z bezeichnen.

Als erste Bedingung eines Werthsystems der λ, μ, das der gestellten Forderung genügt, ergiebt sich dann die, dass identisch sein muss:

$$(3)\quad (\lambda_1 + \lambda_2 u + \lambda_3 u^2 + \cdots + \lambda_{n-k+1} u^{n-k})(a_1 + a_2 u + a_3 u^2 + \cdots + a_{k+1} u^k) \\ + (\mu_1 + \mu_2 u)(b_1 + b_2 u + b_3 u^2 + \cdots + b_n u^{n-1}) = 0,$$

d. h. dass die beiden Gleichungen in u:

$$(4)\qquad a_1 + a_2 u + a_3 u^2 + \cdots + a_{k+1} u^k = 0,$$

$$(5)\qquad b_1 + b_2 u + b_3 u^2 + \cdots + b_n u^{n-1} = 0$$

$k-1$ Wurzeln gemein haben, oder geometrisch ausgedrückt, dass $F=0$, $\varphi=0$ jedem gemeinsamen Elemente ($zxypq \cdots n - 1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. z) $k-1$ gemeinsame charakteristische Richtungen zuordnen müssen. Als zweite Bedingung eines solchen Werthsystems der λ, μ erhält man die, dass wirklich für die Gleichungen (1) gemeinsame Schaaren von Werthen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{n+1}$ existiren müssen*); geometrisch, dass jede für $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsame charakteristische Richtung auch zu für diese Gleichungen gemeinsamen charakteristischen Streifen führen muss. — Wenn die linke Seite der Gleichung (4) ein Factor der linken Seite der Gleichung (5) ist, so giebt es zu jedem für $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsamen Elemente ($zxypq \cdots n - 1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. z) k gemeinsame charakteristische Richtungen. Von den Gleichungen (1) müssen jetzt die zwei letzten aus den übrigen folgen, und jede für $F=0$ charakteristische Richtung muss daher auf für diese Gleichung und für $\varphi=0$ gemeinsame charakteristische Streifen führen.

Halten wir uns ein wenig bei diesem Falle auf. — Betrachten wir eine Integralfläche von $F=0$. Sie enthält wenigstens einen Streifen von Elementen ($zxypq \cdots n - 1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. z), die sämmtlich der Gleichung $\varphi=0$ zugehören. Wenn derselbe keine gemeinsame Charakteristik für $F=0$, $\varphi=0$ ist, so müssen, da nun, für ein

---

ausgeschieden wird, ist ein *charakteristischer* Streifen der letzteren Gleichung. — Dies wird in ganz derselben Weise hergeleitet wie der Satz p. 103 meiner Abh. im XIII. Bd.

*) D. i. die Relation:

$$\lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_1 + \cdots + \lambda_{n-k+1} A_{n-k} + \mu_1 B_0 + \mu_2 B_1 = 0$$

muss ebenfalls befriedigt werden.

jedes der genannten Elemente, $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{d\varphi}{dy}$ gleichzeitig mit den $(n-k)^{\text{ten}}$ Derivirten von F in Bezug auf x, y verschwinden, die Charakteristiken für $F=0$, die von jenen Elementen ausgehen und die Integralfläche erzeugen, ebenfalls der Gleichung $\varphi=0$ als Charakteristiken zugehören, und folglich jene Integralfläche auch ein Integral von $\varphi=0$ sein. Ist der anbemerkte Streifen eine gemeinsame Charakteristik für $F=0$, $\varphi=0$, so findet sich, wiederum wegen des für die Elemente des Streifens stattfindenden gleichzeitigen Verschwindens von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ mit dem der $(n-k)^{\text{ten}}$ Derivirten von F, ein zweiter unendlich benachbarter Streifen von Elementen ($zxypq\ldots n-1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. z) derselben Integralfläche, der ebenfalls der Gleichung $n-1^{\text{ster}}$ O. $\varphi=0$ genügt. Wir können diesen neuen Streifen in derselben Weise behandeln wie den früheren, und leiten so einen dritten ab, u. s. w., — so dass wir schliesslich die ganze vorgelegte Integralfläche als der Gleichung $\varphi=0$ zugehörig erhalten. Die vorgelegte Integralfläche war aber eine beliebige Integralfläche von $F=0$. Also: *$F=0$ muss jetzt ein Integral von $\varphi=0$ ausmachen.* *)

Hiernach gehen wir zu dem Falle zurück, wo nur $k-1$ der k charakteristischen Richtungen, die durch $F=0$ einem Elemente $(zxypq\ldots)$ zugeordnet werden, auch für $\varphi=0$ charakteristische Richtungen sind. Dabei ist besonders bemerkenswerth die Form derjenigen Gleichungen, durch welche der eben beschriebene Zusammenhang zwischen $F=0$ und $\varphi=0$ ausgedrückt wird. — Weil $k-1$ der Wurzeln der Gleichung (5) auch der Gleichung (4) als Wurzeln zugehören, und auf Grund von (3) die $n-k$ übrigen Wurzeln derselben Gleichung (5) die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda_1+\lambda_2 u+\lambda_3 u^2+\cdots+\lambda_{n-k+1}u^{n-k}=0$$

sind, so müssen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ proportional linearen Combinationen der Grössen b sein:

$$\lambda_i=A(\beta_1^{(i)}b_1+\beta_2^{(i)}b_2+\cdots),$$

wo A einen (unbekannten) Proportionalitätsfactor bezeichnet und $\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}\ldots$ Functionen der genannten $k-1$ für (4) und (5) gemeinsamen Wurzeln sind. — Ebenso hat man:

$$\mu_i=B(\alpha_1^{(i)}a_1+\alpha_2^{(i)}a_2+\cdots),$$

wo B einen (unbekannten) Proportionalitätsfactor, und $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots$

*) Vorausgesetzt jedoch, dass auch im Unendlichen jene Abhängigkeit der zwei letzten der Gleichungen (1) von den übrigen Statt hat. Denn sonst würde man aus dem Vorhandensein eines der Gleichung $\varphi=0$ zugehörenden Streifens einer Integralfläche von $F=0$, wenn dieser Streifen unendlich weit gelegen wäre, nichts schliessen können.

gewisse Functionen jener $k-1$ gemeinsamen Wurzeln von (4) und (5) bezeichnen.

Insbesondere hat man:

$$\lambda_1 = A b_1, \quad \mu_1 = B a_1,$$

und, wegen (3), $\lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1 = 0$, also: $A + B = 0$. Man kann daher in den obigen Ausdrücken der λ_i, μ_i setzen: $A = 1$, $B = -1$. Nun führen wir in die $n+2$ Gleichungen, in welche die Identität (2) zerfällt, für λ, μ jene Ausdrücke ein. Durch dieselben werden $n-k+2$ der $n+2$ Gleichungen erfüllt. Die übrigen k bleiben als Bedingungen für F, φ zurück. Sehen wir F als bekannt an; *jene k Gleichungen werden dann*, vermöge der oben angezeigten Form der Ausdrücke von λ, μ, *lineare homogene partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für* φ; — $z, x, y, p, q, \ldots n - 1^{\text{ste}}$ Differentialqu. v. z fungiren hierbei als unabhängige Variablen.

Daraus folgt u. A., dass, wenn eine partielle Differentialgleichung k^{ter} O. zu zwei Gleichungen $n-1^{\text{ster}}$ O.: $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$ (wo C eine willkürliche Constante bezeichnet) in einer solchen Beziehung steht, dass erstens jedem Elemente $(z, x, y, p, q, \ldots n - 1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. $z)$ der Gleichung k^{ter} O. eine Schaar von $k-1$ charakteristischen Richtungen zugehört, die zugleich charakteristische Richtungen von $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$ sind, und dass zweitens dieselbe Gleichung k^{ter} O. sowohl mit jeder Gleichung $\varphi_1 = C$ als auch mit jeder Gleichung $\varphi_2 = C$ Integralflächen zu grösstmöglicher Zahl gemein hat, — diese Gleichung k^{ter} O. in genau derselben Beziehung zu jeder Gleichung von der Form:

$$\textit{eine arb. Function von } (\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

steht.

Wenn nämlich φ_1, φ_2 zwei Lösungen eines Systems *linearer* homogener partieller Differentialgleichungen 1^{ster} O. sind, so ist auch: *eine arb.* $F(\varphi_1, \varphi_2)$, eine Lösung desselben Gleichungssystems.

Dieser Satz ist in der Abhandlung im XIII. Bd. d. A. zwar nicht ausdrücklich angegeben worden, aber er ergiebt sich ohne Mühe aus dem in der 20^{sten} N. daselbst Auseinandergesetzten. In dieser Nummer ist die Beziehung zwischen einer Gleichung k^{ter} O., die ein gemeinsames Integral von $n-k$, verschiedenen Schaaren zugehörenden ersten Integralen einer linearen Gleichung n^{ter} O. darstellt, und irgend einer der Gleichungen $n-1^{\text{ster}}$ O. einer anderen ersten Integralschaar derselben Gleichung n^{ter} O. entwickelt worden, und diese Beziehung ist genau die hier zwischen $F=0$ und $\varphi_1 = C$ dargelegte. Die Gleichungen $n-1^{\text{ster}}$ O. einer und derselben ersten Integralschaar sind von der Form: $F(\psi_1, \psi_2) = 0$. Die Gleichungen $\psi_1 = C$, $\psi_2 = C$ und $F(\psi_1, \psi_2) = 0$ haben zu jedem Elemente $(z, x, y, p, q, \cdots n - 1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. $z)$ dieselben $n-1$ charakteristischen Richtungen, und mit der Gleichung

k^{ter} O. dieselben $k-1$ charakteristischen Richtungen gemein. Jetzt brauchen wir blos das, was, wenn es sich nur um den Zusammenhang zwischen der Gleichung k^{ter} O. und $F(\psi_1, \psi_2)=0$ handelt, unwesentlich ist, abzustreifen, d. h. wir brauchen blos die Forderung fallen zu lassen, dass $\psi_1 = C$, $\psi_2 = C$ und somit alle $F(\psi_1, \psi_2) = 0$ mehr als die $k-1$ letztgenannten charakteristischen Richtungen gemeinsam besitzen, um für ψ_1, ψ_2 solche Functionen setzen zu können, wie die obigen φ_1, φ_2.

Jetzt betrachte ich die partielle Differentialgleichung m^{ter} O., durch welche das anfangs angenommene Integral von $\varphi = 0$ dargestellt wird, und setze dann $m = n - k + r$, wo r Null oder eine ganze positive Zahl $< k-1$ bedeutet. Die Gleichung m^{ter} O. selbst bezeichne ich mit $\Phi = 0$. — Von den Gleichungen für die n^{ten} Differentialquotienten von z:

$$\frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k}}=0,\quad \frac{d^{n-k}F}{dx^{n-k-1}dy}=0,\dots \quad \frac{d^{n-k}F}{dy^{n-k}}=0,\quad \frac{d^{k-r}\Phi}{dx^{k-r}}=0,\dots \quad \frac{d^{k-r}\Phi}{dy^{k-r}}=0$$

muss, da $\Phi=0$ ein Integral von $\varphi=0$ ist, wenigstens eine Gleichung eine algebraische Consequenz der anderen sein. Also müssen sich die λ, μ so bestimmen lassen, dass identisch wird:

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\lambda_2 u+\dots+\lambda_{n-k+1}u^{n-k})(a_1+a_2u+\dots+a_{k+1}u^k)\\ &+(\mu_1+\mu_2u+\dots+\mu_{k-r+1}u^{k-r})(c_1+c_2u+\dots+c_{n-k+r+1}u^{n-k+r})=0;\end{aligned}$$

folglich: *jedem gemeinsamen Elemente von $F=0$, $\Phi=0$ werden r gemeinsame charakteristische Richtungen zugeordnet.* Noch mehr, jedem, den beiden Gleichungen (und ihren Derivirten) gemeinsamen Werthsysteme von ($z, x, y, p, q, \dots n-1^{\text{ste}}$ Diffqu. v. z) kommt eine Schaar von ∞^r den beiden Gleichungen gemeinsam zugehörenden Werthsystemen der n^{ten} Differentialquotienten von z zu, jedem dieser Elemente ($z, x, y, p, q, \dots n^{\text{te}}$ Diffqu. v. z) eine Schaar von ebenfalls ∞^r denselben Gleichungen gemeinsam zugehörenden Werthsystemen der $(n+1)^{\text{sten}}$ Differentialquotienten von z, u. s. w. *So dass, wenn $r>0$, jede der genannten r charakteristischen Richtungen zu gemeinsamen charakteristischen Streifen Anlass giebt, und dass, sei $r=0$ oder >0, die gemeinsamen Elemente von $F=0$, $\Phi=0$ sich zu Integralflächen zusammenfügen.*

Selbstverständlich könnten mehr als r gemeinsame charakteristische Richtungen existiren; r ist nur eine Minimumszahl derselben. Immer existiren gemeinsame Integralflächen, die die gemeinsamen Elemente der Gleichungen erfüllen.

2. Wir werden jetzt sehen, wie diese Theorie für partielle Differentialgleichungen 2^{ter} O. sich gestaltet. Dann schreiben wir $k=2$. Eine Gleichung 2^{ter} O. kann, nach dem oben Entwickelten, in einer

solchen Beziehung zu einer Gleichung m^{ter} O. stehen, dass jedem ihr und der Gleichung m^{ter} O. gemeinsamen Elemente ($z, x, y, p, q, \ldots m^{\text{te}}$ Diffqu. v. z) eine für beide Gleichungen gemeinsame charakteristische Richtung, oder sogar (falls $m > 2$) dieselben zwei charakteristischen Richtungen zugeordnet werden, und dass in beiden Fällen gemeinsame charakteristische Streifen, die sich zu Flächen zusammensetzen, existiren. Auch ohne derartige gemeinsame charakteristische Richtungen zu besitzen, werden die beiden Gleichungen gemeinsame Integralflächen zu einer solchen Zahl besitzen können, dass diese Flächen alle den beiden Gleichungen gemeinsamen Elemente ($z, x, y, p, q, \ldots m^{\text{te}}$ Diffqu. v. z) umfassen. — Die analytischen Bedingungen eines solchen Systems von Gleichungen 2^{ter} und m^{ter} O. sind aus der vorangehenden allgemeinen Erörterung leicht zu gewinnen.

3. Ich setze jetzt $m = 1$ (wodurch $n = 3$, $r = 0$ wird) und schreibe die Bedingungen auf, die erfüllt werden müssen, damit eine partielle Differentialgleichung 1^{ster} O. $f = 0$, die alle ihre ∞^3 Charakteristiken mit der Gleichung 2^{ter} O. $F = 0$ gemein hat, zu Stande kommen könne. Man hat nur auszudrücken, dass von den fünf Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx\, dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

zwei Gleichungen aus den übrigen folgen. Entwickelt nach den dritten Differentialquotienten von z, die ich mit u, v, w, ϖ bezeichne, sind diese fünf Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} a^{(0)} + a_1 u + a_2 v + a_3 w &= 0, & b^{(00)} + b_1 u + b_2 v &= 0, \\ & & b^{(01)} + b_1 v + b_2 w &= 0, \\ a^{(1)} + a_1 v + a_2 w + a_3 \varpi &= 0, & b^{(11)} + b_1 w + b_2 \varpi &= 0, \end{aligned}$$

und die fraglichen Bedingungen werden diese:

$$\begin{aligned} & a_1 b_2^2 - a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^2 = 0, \\ (6) \qquad & a^{(0)} b_1 b_2 - b^{(00)} a_1 b_2 - b^{(01)} a_3 b_1 = 0, \\ & a^{(1)} b_1 b_2 - b^{(01)} a_1 b_2 - b^{(11)} a_3 b_1 = 0. \end{aligned}$$

Durch Einführung derjenigen Werthe von r, s, t, die durch Elimination aus den Gleichungen:

$$F = 0, \quad \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0$$

sich ergeben, werden jene Gleichungen (6) partielle Differentialgleichungen 1^{ster} O. für f. Die Forderung der Existenz einer Gleichung $f = c$ ist äquivalent der Bedingung, dass jene Gleichungen (6) eine gemeinsame Lösung zulassen sollen. Diese Bedingung ist in erster Hand als eine Bedingung für $F = 0$ aufzufassen.

Aus einem früheren, im Anfange der ersten Nummer bewiesenen Satze folgt, *dass* $f = c$ *ein erstes Integral von* $F = 0$ *sein muss.* — Später (N. 6.) werden wir diesen Satz auf etwas andere Weise begründet sehen.

Die Gleichungen (6), als partielle Differentialgleichungen 1ster O. für f betrachtet, können eine gemeinsame Lösung mit zwei arbiträren Constanten besitzen. Eine Lösung mit einer grösseren Zahl arbiträrer Constanten ist desshalb unmöglich, weil drei partielle Gleichungen 1ster O. zwischen fünf Variablen (x, y, z, p, q) höchstens eine Lösung mit zwei arbiträren Constanten gemein haben können. Wenn die Gleichungen (6) eine Lösung jener Art gestatten, so muss die zugehörende Gleichung 2ter O. $F = 0$ erste Integrale zu grösstmöglicher Zahl besitzen. Dieselben werden durch die genannte Lösung angegeben.

4. Aus dem am Ende der ersten Nummer Entwickelten folgt für $k = 2$, $n = 3$, $r = 0$, dass eine partielle Differentialgleichung 1ster O. $f = 0$ mit einer partiellen Differentialgleichung 2ter O. $F = 0$ zweifach unendlich viele Integralflächen gemein haben kann, ohne dass die beiden Gleichungen Charakteristiken gemein haben. Es ist hierzu nur erforderlich, dass von den fünf Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx\, dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

eine eine algebraische Folge der anderen sei. Diese Bedingung drückt sich so aus. Es muss sein:

$$b_1 a^{(0)} + b_2 a^{(1)} - a_1 b^{(00)} - a_2 b^{(01)} - a_3 b^{(11)} = 0, \tag{7}$$

was, wenn F bekannt ist, und für r, s, t ihre aus den Gleichungen:

$$F = 0, \quad \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0$$

hervorgehenden Werthe in z, x, y, p, q eingesetzt werden, eine partielle Differentialgleichung 2ter O. zur Bestimmung von f wird.

Die Gleichung $F = 0$ ist somit eine Gleichung 2ter O. allgemeinster Art.

5. $f(z, x, y, p, q) = 0$ sei eine partielle Differentialgleichung 1ster O., die zu einer gegebenen Gleichung 2ter O. $F = 0$ in der durch die Gleichung (7) ausgedrückten Beziehung steht. Durch irgend eine Berührungstransformation:

$$\begin{aligned} X &= f\,(z, x, y, p, q), \\ Y &= f_1(\qquad\qquad), \\ Z &= f_2(\qquad\qquad), \\ P &= \varphi_1(\qquad\qquad), \\ Q &= \varphi_2(\qquad\qquad), \end{aligned}$$

$$R = \psi_{11}(z, x, y, p, q, r, s, t),$$
$$S = \psi_{12}(\qquad\qquad\qquad),$$
$$T = \psi_{22}(\qquad\qquad\qquad),$$

bilden wir jene Gleichung $f = 0$ auf die YZ-Ebene ab. Die Linienelemente (Y, Z, Q) dieser Ebene werden dabei Bilder der Charakteristiken von $f = 0$. Die ∞^2 Integralflächen, die dieser Gleichung und $F = 0$ gemein sind, erscheinen als Bilder von ∞^2 Curven jener Ebene. Anderseits wird diese Curvenschaar analytisch durch eine Gleichung $\Phi(Z, Y, Q, T) = 0$ dargestellt. Auf eine solche Form muss also $F = 0$ mit Hülfe von $f = 0$ gebracht werden können. — Jede Gleichung 2ter O. der YZ-Ebene kann als Bild eines derartigen Gleichungssystems wie $F = 0$, $f = 0$ interpretirt werden.

6. Wenn $f = 0$ in der durch die Gleichungen (6) formulirten Beziehung zu $F = 0$ stände, so dass ∞^3 für beide Gleichungen gemeinsame Charakteristiken existirten, so würden auch unbegrenzt unendlich viele gemeinsame Integralflächen aus diesen sich zusammensetzen lassen.*) Dann aber müsste die entsprechende Gleichung 2ter O. der YZ-Ebene: $\Phi(Z, Y, Q, T) = 0$, eine solche zweifach unendliche Curvenschaar repräsentiren, für deren Curven unbegrenzt unendlich viele osculatorische Enveloppen sich ergeben würden. Solche Curvenschaaren kann es nicht geben, es sei denn, dass jede Curve einer solchen zweifachen Curvenschaar in jedem ihrer Punkte immer von einer unendlich benachbarten Curve derselben Schaar berührt würde. Aber nur in einem Punkte (oder in einigen Punkten) kann eine beliebige Curve einer zweifachen Schaar von einer unendlich benachbarten Curve derselben Schaar berührt werden.**) Und niemals gibt

---

*) Entsprechend nämlich den ∞^1 Werthen von u, v, w, ϖ, die jedem für $F = 0$, $f = 0$ gemeinsamen Elemente (z, x, y, p, q, r, s, t) durch die zweiten Derivirten der letzteren Gleichung (in denen die ersten Derivirten von $F = 0$ enthalten sind) zugeordnet werden.

**) Sei

$$f(y, z, \lambda, \mu) = 0$$

irgend eine zweifache Curvenschaar der YZ-Ebene. Durch Elimination von q, $d\lambda$, $d\mu$ aus den folgenden Gleichungen:

$$f'(y) + q f'(z) = 0, \qquad f'(\lambda)\, d\lambda + f'(\mu)\, d\mu = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} f'(y) + q \frac{\partial}{\partial \lambda} f'(z)\right) d\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} f'(y) + q \frac{\partial}{\partial \mu} f'(z)\right) d\mu = 0$$

gewinnt man die Gleichung einer Curve, welche die Curve: $f(y, z, \lambda, \mu) = 0$, in ihren Berührungspunkten mit unendlich benachbarten Curven:

$$f(y, z, \lambda + d\lambda, \mu + d\mu) = 0,$$

schneidet. Sollte also $f = 0$ eine zweifache Curvenschaar darstellen, von deren Curven jede beliebige von allen ihr unendlich benachbarten Curven der Schaar es mehr als ∞^1 osculatorische Enveloppen von Curven einer gegebenen zweifachen Curvenschaar.*)

Die Gleichung 2ter O. $F=0$, von der hier die Rede gewesen ist, kann also nicht, wie die in der vorigen Nummer besprochene allgemeinere, zu einer Gleichung 2ter O. der YZ-Ebene Anlass geben. Auf Gleichungen 3ter, 4ter ... O. derselben Ebene können nur Gleichungen 3ter, 4ter ... O. des Raumes führen. Es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, dass die Bilder aller gemeinsamen Integralflächen von $f=0$ und $F=0$ die ganze Ebene bedecken, so dass alle Curven dieser Ebene Bilder von solchen Integralflächen sind; d. h. aber, wie früher in N. 3. behauptet wurde: $f=0$ ist ein Integral von $F=0$.

7. Ich setze jetzt $m=2$, $k=2$. Zwei Fälle sind dann zu unterscheiden: der Fall $n=3$, $r=1$ und der Fall $n=4$, $r=0$. (Vgl. den Schluss von N. 1.)

Im ersten Falle besitzen die beiden Gleichungen 2ter O. $F=0$, $\Phi=0$ ∞^5 Charakteristiken gemein, die sich zu unbegrenzt unendlich vielen Flächen zusammensetzen. Die eine der ersten Derivirten jener Gleichungen muss jetzt eine algebraische Folge der anderen sein. Dieses drückt sich durch zwei lineare partielle Gleichungen 1ster O. zwischen

---

berührt würde, so müsste $f=0$ ein Integral der Gleichung der eben construirten zweiten Curvenschaar (λ, μ variable Parameter der Schaar), deren Gleichung ist:

$$\left(f'(z)\frac{\partial}{\partial\lambda}f'(y)-f'(y)\frac{\partial}{\partial\lambda}f'(z)\right)f'(\mu)-\left(f'(z)\frac{\partial}{\partial\mu}f'(y)-f'(y)\frac{\partial}{\partial\mu}f'(z)\right)f'(\lambda)=0,$$

sein.

Die letztere Gleichung schreibt man kürzer so:

$$f'(\mu)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{f'(y)}{f'(z)}\right)-f'(\lambda)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{f'(y)}{f'(z)}\right)=0,$$

und sieht dann sogleich ein, dass:

$$\frac{f'(y)}{f'(z)}=\text{eine Function von }(y,z,f)$$

sein muss. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$f=\text{eine arb. Function von }(\varphi(y,z,f),\lambda,\mu),$$

und die Curvenschaar $f=0$ wird also durch die Gleichung:

$$\text{eine arb. }F(\varphi(y,z,0),\lambda,\mu)=0,$$

ausgedrückt. Aber diese Gleichung, die äquivalent ist folgender:

$$\varphi(y,z)=\psi(\lambda,\mu),$$

ist nur einfach unendlich in Bezug auf λ, μ, und durch dieselbe wird also keine zweifache Curvenschaar repräsentirt. — Hierdurch ist die im Texte aufgestellte Behauptung bestätigt.

*) Sie sind als singuläre Lösungen der Gleichung 2ter O., die die zweifache Curvenschaar darstellt, zu bezeichnen.

F, Φ aus.*) Und F (oder Φ) muss also so beschaffen sein, dass diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung Φ (oder F) zulassen.

Im zweiten Falle wird von den zweiten Derivirten von $F=0$, $\Phi=0$:

$$
\begin{aligned}
&a^{(00)} + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 = 0, \qquad && b^{(00)} + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 = 0,\\
&a^{(01)} + a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_3 + a_3\varepsilon_4 = 0, && b^{(01)} + b_1\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_3 + b_3\varepsilon_4 = 0,\\
&a^{(11)} + a_1\varepsilon_3 + a_2\varepsilon_4 + a_3\varepsilon_5 = 0, && b^{(11)} + b_1\varepsilon_3 + b_2\varepsilon_4 + b_3\varepsilon_5 = 0,
\end{aligned}
$$

(unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ die vierten Differentialquotienten von z verstanden)

eine Gleichung eine algebraische Folge der anderen. D. h. es muss sein:

$$
(8) \qquad b_1 a^{(00)} + b_2 a^{(01)} + b_3 a^{(11)} - a_1 b^{(00)} - a_2 b^{(01)} - a_3 b^{(11)} = 0.
$$

Diese Gleichung wird, wenn für die in $a^{(00)}$ etc., $b^{(00)}$ etc. vorkommenden u, v, w, ϖ ihre Werthe in z, x, y, p, q, r, s, t aus den Gleichungen:

$$
\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0
$$

gesetzt werden, eine Gleichung, die Φ bestimmt, wenn F als bekannt angesehen wird.

Jetzt existiren blos ∞^4 für $F=0$, $\Phi=0$ gemeinsame Integralflächen. *Aber $F=0$ ist auch jetzt eine Gleichung 2^{ter} O. allgemeinster Art.*

§ 2.

Ueber partielle Differentialgleichungen 1ter und 2ter O., die von einer infinitesimalen Berührungstransformation ungeändert gelassen werden.

8. Man weiss aus den Arbeiten von Lie, dass, wenn von vornherein eine infinitesimale Berührungstransformation bekannt ist, durch welche eine partielle Differentialgleichung 1ster O. in sich selbst übergeht, die Lösung dieser Gleichung immer Vereinfachungen zulässt. Aehnliches gilt auch von partiellen Differentialgleichungen 2ter (und höherer) Ordnung. Hat man in irgend einer Weise von einer solchen Gleichung gefunden, dass sie eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet, so ist damit zugleich auch ein Schritt zur Reduction dieser Gleichung gemacht. — Ich werde jetzt erstens allgemein von infinitesimalen Berührungstransformationen des Raumes von drei Dimensionen sprechen, und sodann, wenn auch nur kurz und unvollständig, ihre Beziehung zu partiellen Differential-Gleichungen erörtern.

*) Auf S. 85 der Abh. im XIII. Bd. d. A. sind diese Gleichungen angegeben worden.

Damit eine infinitesimale Transformation:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
dx &= \varepsilon L(z, x, y, p, q),\\
dy &= \varepsilon M(\qquad\qquad),\\
dz &= \varepsilon N(\qquad\qquad),\\
dp &= \varepsilon P(\qquad\qquad),\\
dq &= \varepsilon Q(\qquad\qquad),
\end{aligned}
\qquad (\varepsilon \text{ eine unendlich kleine Constante})
$$

eine Berührungstransformation sein soll, müssen erstens L, M, N den folgenden Relationen genügen:*)

$$[x+\varepsilon L, y+\varepsilon M]=0,\quad [y+\varepsilon M, z+\varepsilon N]=0,\quad [z+\varepsilon N, x+\varepsilon L]=0,$$

oder, wenn zweite (und höhere) Potenzen der infinitesimalen constanten Grösse ε vernachlässigt werden:

$$\frac{\partial M}{\partial p}=\frac{\partial L}{\partial q},\quad \frac{\partial N}{\partial q}=p\frac{\partial M}{\partial p}+q\frac{\partial M}{\partial q},\quad \frac{\partial N}{\partial p}=p\frac{\partial L}{\partial p}+q\frac{\partial L}{\partial q},$$

woraus sich ergiebt:

$$(10)\qquad L=\frac{\partial \Phi}{\partial p},\quad M=\frac{\partial \Phi}{\partial q},\quad N=p\frac{\partial \Phi}{\partial p}+q\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\Phi.$$

(Φ eine beliebige Function von x, y, z, p, q.)

Und weiter folgt, weil die Gleichung: $dz'-p'dx'-q'dy'=0$, in der $x'=x+\varepsilon L, \cdots q'=q+\varepsilon Q$, eine Folge der Gleichung $dz-pdx-qdy=0$, sein muss:

$$\frac{dN}{dx}-p\frac{dL}{dx}-q\frac{dM}{dx}=P,\quad \frac{dN}{dy}-p\frac{dL}{dy}-q\frac{dM}{dy}=Q,$$

oder:

$$(11)\qquad P=-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+p\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),\quad Q=-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+q\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right).$$

Hier ist, ich wiederhole es, Φ eine beliebige Function von z, x, y, p, q. Die Transformation selbst bezeichne ich als eine Transformation Φ.**)

---

*) $$[\varphi,\psi]=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial q}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+p\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+q\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q}.$$

Vgl. Lie: Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen. M. A. Bd. VIII, p. 239. — Wegen der Anwendung der Theorie der infinitesimalen Berührungstransformationen auf partielle Differentialgleichungen 1ster O. vergleiche man die Abhandlung von Lie: Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zweite Abhandlung M. A. Bd. XI.

**) Ich will gleich hier bemerken, dass eine allgemeine Berührungstransformation, die $\Phi(z, x, y, p, q)$ in $\Phi'(Z, X, Y, P, Q)$ überführt, *nicht* die Transformation Φ in die Transformation Φ' verwandelt. Siehe weiter unten N. 15.

Eine infinitesimale Berührungstransformation führt einen jeden Streifen einer gewissen dreifach unendlichen Streifenschaar in sich selbst über. Für die Transformation Φ sind es die Charakteristiken von $\Phi = 0$, die in dieser Weise invariant bleiben. — Das ist eine unmittelbare Folge der Form der Ausdrücke (10), (11) für $L, M, \cdots Q$.*)

Man bemerke auch, — was eine einfache Consequenz hiervon ist, — *dass durch die Transformation Φ eine beliebige Fläche des Raumes in eine unendlich benachbarte Fläche übergeführt wird, die zur Schnittcurve mit der ersteren eben die Berührungscurve zwischen dieser Fläche und einer Integralfläche von $\Phi = 0$ hat.*

9. Sei $\Psi(z, x, y, p, q) = 0$ eine Gleichung, die durch die Transformation Φ nicht geändert wird. Wir betrachten ein Element $(z^0\, x^0\, y^0\, p^0\, q^0)$, das für $\Psi = 0$ und $\Phi = 0$ gemeinsam ist, und wenden auf dasselbe die Transformation Φ an. Das Element geht dadurch in ein unendlich benachbartes Element über, das der von $(z^0\, x^0\, y^0\, p^0\, q^0)$ ausgehenden Charakteristik von $\Phi = 0$ zugehört. Dieses neue Element muss auch ein Element von $\Psi = 0$ sein, weil diese Gleichung durch die Transformation Φ nicht geändert werden soll. Auf dasselbe wenden wir sodann die nämliche Transformation Φ an. So kommen wir zu einem dritten Elemente von $\Psi = 0$, das ein drittes Element der vorher genannten Charakteristik von $\Phi = 0$ ist. U. s. f. So dass sich also die ganze von $(z^0\, x^0\, y^0\, p^0\, q^0)$ ausgehende Charakteristik von $\Phi = 0$ als aus Elementen von $\Psi = 0$ bestehend herausstellt. Darum: *Die Gleichung $\Psi = 0$ muss mit $\Phi = 0$ einfach unendlich viele Integralflächen gemein haben* (Integralflächen nämlich, die von ∞^2, aus Elementen von $\Psi = 0$ zusammengesetzten, Charakteristiken von $\Phi = 0$ erzeugt werden). — Dieses folgt auch sofort aus der Gleichung (12) der folgenden N. 12.

10. Weiterhin gilt folgender Satz, der für die Theorie der Anwendung der infinitesimalen Berührungstransformationen von grundlegender Bedeutung ist: *Je zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die mit einander in Involution liegen, werden von jeder Berührungstransformation, also auch von einer jeden infinitesimalen Berührungstransformation, in zwei wiederum involutorische Gleichungen verwandelt.*

---

*) Die Grösse ε in den Gleichungen (9) ist eine unendlich kleine *Constante*. Eine Transformation: $dx = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \cdots dq = -\varepsilon\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$, in der ε eine Function von z, x, y, p, q, multiplicirt mit einer infinitesimalen Grösse, ist, ist keine Flächentransformation des ganzen Raumes. Sie besitzt diesen Charakter nur für die Elemente von $\Phi = 0$, oder es sind nur die Integralflächen dieser Gleichung, die wiederum in Flächen transformirt werden.

11. In Folge dieses Satzes muss die Gleichung:

$$[\Psi f] = 0, \quad \text{vereint mit } \Psi = 0,$$

von der Transformation Φ, die die Gleichung $\Psi = 0$ in sich überführt, unverändert gelassen, oder in $[\Psi f'] = 0$ verwandelt werden. D. h. wenn mit $\delta\Psi, \delta f, \delta [\Psi f]$ die von der Transformation Φ bewirkten Aenderungen von $\Psi, f, [\Psi f]$ verstanden werden: es muss für alle Elemente $(z\, x\, y\, p\, q)$ von $\Psi = 0$, wenn $[\Psi f] = 0$ ist, auch sein:

$$\delta [\Psi f] = 0 = [\Psi + \delta\Psi,\ f + \delta f] - [\Psi f].$$

Hier ist, — immer die Elemente von $\Psi = 0$ allein in Rechnung gebracht, — $\delta\Psi = 0$, weil $\Psi = 0$ durch die Transformation Φ ungeändert bleiben soll,

$$\delta f = -\varepsilon\left([\Phi f] + \Phi\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) \text{ und } \delta[\Psi f] = -\varepsilon\left(\big[\Phi, [\Psi f]\big] + \Phi\frac{\partial}{\partial z}[\Psi f]\right).$$

Also erhält man nun, unter Vernachlässigung infinitesimaler Grössen höherer Ordnung, aus dem Obigen:

$$\big[\Phi, [\Psi f]\big] + \Phi\,\frac{\partial}{\partial z}[\Psi f] = 0, \quad \text{und } [\Psi, \delta f] = 0, \quad \text{d. i.}$$

$$\left[\Psi, [\Phi f] + \Phi\,\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0.$$

Diese Relationen beweisen, dass die zwei Gleichungen:

$$[\Psi f] = 0, \quad [\Phi f] + \Phi\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

als lineare partielle Gleichungen für f aufgefasst, nachdem vermittelst $\Psi = 0$ eine der Variablen x, y, z, p, q entfernt worden ist, zwei gemeinsame Lösungen f besitzen. *Um eine Lösung zu erhalten, braucht man,* nach Lie's und Mayer's Theorien, *nur eine Lösung einer gewissen* (durch rein algebraische Operationen aus den gegebenen Gleichungen herzuleitenden) *linearen partiellen Gleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen aufzusuchen.* Hat man eine solche gefunden, so hat man damit ein involutorisches System:

$$\Psi = 0, \quad f = C$$

gewonnen, das von der Transformation Φ völlig ungeändert gelassen wird; so dass diese Transformation die Schaar der gemeinsamen Integralflächen von $\Psi = 0$, $f = C$, — welchen constanten Werth auch C habe, — in sich selbst überführt.

Wenn dann $\varphi(z, x, y, p, q) = C$ die Gleichungsschaar*) darstellt, die den zwei folgenden Gleichungen genügt:

$$[\Psi\varphi] = 0, \quad [f\varphi] = 0,$$

*) Es giebt nur eine solche.

aus denen vermittelst $\Psi = 0$ und $f = C$ zwei der Variablen x, y, z, p, q entfernt sind, so muss die Anwendung der Transformation Φ auf irgend eine der Gleichungen der Schaar $\varphi = C$ eine andere Gleichung derselben Schaar ergeben; d. i. es muss sein:

$$[\Phi\varphi] + \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = F(\varphi),$$

wenn vermittelst $\Psi = 0$, $f = C$ zwei der Variablen x, y, z, p, q entfernt werden. Also, wenn ψ statt $\int^{\varphi}\frac{d\varphi}{F(\varphi)}$ geschrieben wird, müssen die folgenden drei Gleichungen für ψ mit einander verträglich sein:

$$[\Psi\psi] = 0, \quad [f\psi] = 0, \quad [\Phi\psi] + \Phi\frac{\partial\psi}{\partial z} = 1.$$

Sind es nun p, q, die durch $\Psi = 0$, $f = C$ eliminirt worden sind, so haben wir jene drei Gleichungen zur Bestimmung einer Function ψ von x, y, z zu verwenden. Sie ergeben

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = A(x, y, z), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = B(x, y, z), \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = C(x, y, z),$$

woraus ψ durch eine Quadratur gefunden wird.

In A, B, C kommt der Parameter C der Gleichung $f = C$ vor. Daher erhält man durch die genannte Quadratur:

$$\psi = \psi(x, y, z, C) + C'.$$

Die Flächen $\psi(x, y, z, C) + C' = 0$ bilden eine vollständige Lösung der anfänglichen Gleichung $\Psi = 0$.

Es wird hieraus klar geworden sein, worin die Vereinfachung besteht, die sich jetzt zur Ermittelung der Lösung von $\Psi = 0$ darbietet.

12. Die Bedingung dafür, dass die Gleichung $\Psi = 0$ durch die Transformation Φ ungeändert bleibt, drückt sich so aus. Man muss haben:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial q}dq = 0,$$

wenn für $dx, dy, \cdots dq$ die Werthe (9) gesetzt werden. D. i. für die Elemente von $\Psi = 0$ muss identisch sein:

$$[\Phi\Psi] + \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Hieraus folgt: *Wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwei Transformationen ψ, χ gestattet, so gestattet sie auch die gesammte Schaar von infinitesimalen Berührungstransformationen: $\psi + \lambda\chi$, wo λ eine arbiträre Constante oder eine $f(z, x, y, p, q)$, die mit $\Psi = 0$ involutorisch liegt, bedeutet.*

Denn, wenn $\Phi = \psi$, $\Phi = \chi$ zwei Lösungen von (12) sind, so ist auch $\Phi = \psi + \lambda\chi$, vorausgesetzt, dass λ die angegebene Bedeutung hat, eine Lösung derselben Gleichung.

13. Kennt man zwei infinitesimale Transformationen ψ, χ einer Gleichung 1. O. $\Psi = 0$, so kennt man also auch, nach der 9. N., eine Schaar von Gleichungen, nämlich:

$$\frac{\psi}{\chi} = \text{eine arb. Constante},$$

die mit $\Psi = 0$ involutorisch sind. *Daher wird jetzt durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Variablen eine vollständige Lösung von* $\Psi = 0$ *erhalten.*

14. *Es ist leicht, nach den Auseinandersetzungen der* 11. *N., einen Fall anzugeben, wo die Lösung einer Gleichung* $\Psi = 0$, *die zwei Transformationen* ψ, χ *gestattet, bloss durch eine Quadratur erhalten werden kann.* Wenn nämlich die Transformation ψ das Gleichungssystem:

$$\Psi = 0, \quad \psi + \lambda\chi = 0,$$

welchen *constanten* Werth auch λ habe, immer in sich selbst überführt, so führt sie auch die Schaar der Integralflächen jenes Systems in sich selbst über. In Folge dessen wird, wie am Ende der 11. N. erklärt worden ist, diese Schaar durch eine Quadratur erhalten. Die Gleichung derselben lautet:

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = \text{eine arb. Const.},$$

und stellt eine vollständige Lösung mit zwei willkürlichen Constanten, von denen λ die eine ist, der Gleichung $\Psi = 0$ dar.

Die Bedingung, dass ψ jene Eigenschaft besitzt, drückt sich durch die Gleichung aus:

$$[\psi\chi] + \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung, welche auch ausdrückt, dass ψ, χ permutable Transformationen sein sollen. Demnach ist es für eine derartige Reduction des Problems der Lösung von $\Psi = 0$ nothwendig und hinreichend, dass die Transformationen ψ, χ permutabel sind.

Was unter permutablen Transformationen verstanden wird, und wie man die Bedingungsgleichung für permutable infinitesimale Berührungstransformationen findet, will ich kurz erklären.

Zwei Transformationen werden (von Lie und Klein), als vertauschbar oder permutabel bezeichnet, wenn es gleichgiltig ist, in welcher Ordnung man dieselben anwendet. D. h. falls die Transformation ψ, auf ein beliebiges Element $(z\ x\ y\ p\ q)$, das ich e nenne, angewandt, zu e', und die Transformation χ, auf dieses e' angewandt, zu e'' führt, und man findet, dass die Transformation χ, auf e angewandt, zu einem Elemente ε, und die Transformation ψ, auf dieses ε angewandt, wiederum zu e'' führt, so sind die Transformationen ψ und χ permutabel.

Von zwei permutablen Transformationen gilt also auch dieses, dass, wenn man auf ein Element e erst die eine Transformation, k Mal nach einander, und hierauf die zweite Transformation, m Mal wiederholt anwendet, dieselbe neue Lage e_1 für e resultirt, als wenn auf e erstens die letzte Transformation, m Mal wiederholt, und sodann die erste Transformation, k Mal wiederholt, angewandt worden wäre. k und m sind beliebige*) ganze Zahlen.

Der analytische Ausdruck dafür, dass zwei infinitesimale Berührungstransformationen permutabel sind, lässt sich folgendermassen entwickeln.

Wir fassen x, y, z, p, q als Punktcoordinaten eines Raumes R_5 von fünf Dimensionen, und also die Transformationen ψ, χ als infinitesimale Punkttransformationen dieses Raumes auf. Dann erkennen wir, dass die erste Transformation, auf einen und denselben Punkt (x, y, z, p, q) wiederholt angewandt, denselben längs einer Charakteristik der linearen Gleichung $[\psi f] + \psi \frac{\partial f}{\partial z} = 0$**), kurz $A(f) = 0$, führt, und dass die zweite Transformation, ebenfalls wiederholt auf einen und denselben Punkt angewandt, denselben längs einer Charakteristik von $[\chi f] + \chi \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, kurz $B(f) = 0$, führt. Wenn nun ein Punkt e durch k-malige Wiederholung der ersten Transformation nach e' kommt, und sodann e' durch m-malige Wiederholung der zweiten Transformation nach e'' geführt wird, so muss man, — falls die Transformationen permutabel sind, — zu derselben Lage e'' gelangen, wenn man erstens die zweite Transformation, m Mal wiederholt, auf e, und sodann auf die so erhaltene neue Lage dieses Punktes die erste Transformation, k Mal wiederholt, anwendet. Aber der Punkt e'' wird, auf Grund seiner ersten Entstehungsart, ein Punkt derjenigen, von Charakteristiken von $B(f) = 0$ erzeugten (Integral-) M_2, welche durch die, durch e zu ziehende Charakteristik von $A(f) = 0$ hindurchgeht, und, wegen seiner zweiten Entstehungsart, wird er ein Punkt derjenigen, von Charakteristiken von $A(f) = 0$ erzeugten (Integral-) M_2, welche durch die, durch den nämlichen Punkt e zu ziehende Charakteristik von $B(f) = 0$ hindurchgeht. Dies gilt, wie man auch k und m variire, — und sie sind ganz beliebig zu variiren. Also müssen die beiden in Rede stehenden M_2 in allen Theilen zusammenfallen.

D. h. falls die Transformationen ψ und χ permutabel sind, müssen die Gleichungen

---

*) Endliche oder unendlich grosse.

**) Wo f die unbekannte Function von (x, y, z, p, q) bezeichnet, die durch die partielle Gleichung definirt wird.

$$A(f) = [\psi f] + \psi \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad B(f) = [\chi f] + \chi \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ein vollständiges System, d. i. eines mit drei gemeinsamen Lösungen, bilden, also

$$A(B(f)) - B(A(f)) = \alpha A(f) + \beta B(f),$$

sein. Aber hierdurch sind die permutablen Transformationen ψ, χ keineswegs vollständig analytisch charakterisirt. Denn dass man durch jede der beiden oben angegebenen Operationen (ich nehme der Einfachheit wegen $k = m = 1$) gerade zu *demselben* Punkte e'' gelangt, wird hierdurch noch nicht ausgedrückt. Hierzu ist vielmehr, wie die wirkliche Berechnung der aus jeder Operation resultirenden Lage von e'' lehrt, nöthig, dass, — wenn man

$$A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial x} + A_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots, \quad B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x} + B_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$$

setzt, und also vom Punkte (x, y, z, p, q) durch die erste Operation zum Punkte $(x - \varepsilon A_1 - \varepsilon' B_1 + \varepsilon\varepsilon' B(A_1), y - \varepsilon A_2 - \text{etc.}, \cdots)$ und durch die zweite Operation zum Punkte $(x - \varepsilon' B_1 - \varepsilon A_1 + \varepsilon\varepsilon' A(B_1),$ $y - \varepsilon' B_2 - \text{etc.}, \cdots)$ kommt, — sich ergebe:

$$A(B_i) - B(A_i) = 0; \quad (i = 1, 2, \cdots 5)$$

m. a. W.: es muss*) $[\psi\chi] + \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}$ gleich Null sein. Die augenscheinliche Symmetrie in Bezug auf ψ, χ wird dadurch bedingt, dass, — damit ψ, χ permutabel seien, — die bezügliche Relation durch eine Permutation von ψ mit χ sich nicht ändern darf.

Es ist also die Relation:

$$[\psi\chi] + \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \tag{13}$$

eine für zwei permutable Transformationen ψ, χ nothwendige Bedingung. Dass sie auch hinreichend ist, so dass durch sie die Eigenschaft der Vertauschbarkeit von ψ, χ vollständig ausgedrückt ist, verificirt sich durch den obigen Nachweis, dass die Lage: $x + dx + d'x + d'dx$ etc., zu der die Ausführung erst der Transformation ψ, und dann der Transformation χ das Element $(z\ x\ y\ p\ q)$ führt, jetzt immer mit der Lage: $x + d'x + dx + dd'x$, etc. zusammenfällt, in welche die Anwendung der beiden Transformationen in umgekehrter Reihenfolge das Element $(z\ x\ y\ p\ q)$ bringt.

Note. Für ein weiteres Eindringen in die Anwendung von infinitesimalen Berührungstransformationen auf partielle Differentialglei-

*) Man ersieht dies am leichtesten, wenn man die Transformationen ψ, χ durch H_1, H_2 (siehe die Note am Ende dieser N.) ersetzt, und sodann von der Jacobi'schen Identität: $(H_1(H_2 f)) + (H_2(f H_1)) + (f(H_1 H_2)) = 0$ Gebrauch macht.

chungen 1. O. verweise ich auf Lie's oben citirte Arbeit im XI. Bande d. A. Das Obenstehende ist nur ein kleines Bruchstück seiner Theorie, und kann sogar kaum eine richtige Vorstellung von derselben geben. Denn Lie's Theorie verdankt ihre Ausbildung vornehmlich der geschickten Form, unter der dort die infinitesimalen Berührungstransformationen analytisch dargestellt sind. Zu dieser Form kann man aber sofort von der hier angewandten auf folgende Weise gelangen. Man setze nur etwa x_1, x_2, x_3 statt x, y, z und $-\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}$ statt p, q; und bestimme sodann H durch die Gleichung:

$$\mathsf{H} = p_3 \Phi(z, x, y, p, q).$$

H wird dann homogen vom ersten Grade in Bezug auf p_1, p_2, p_3. Die frühere Transformation Φ wird hernach die Transformation H genannt.

Die Gleichung (12) nimmt dann die sehr einfache Form an:

$$(\mathsf{H}\Psi) = 0^{*)} \tag{12'}$$

(wo selbstverständlich Ψ jetzt $= \Psi\left(x_3, x_1, x_2, -\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_1}{p_3}\right)$ ist),

denn es ist $(\mathsf{H}f) = -[\Phi f] - \Phi \frac{\partial f}{\partial z}$, wenn f vom nullten Grade in Bezug auf p_1, p_2, p_3 ist. — Aus der Form der Gleichung (12′) ersieht man (das ist eine Bemerkung von Lie, die in seiner Theorie gewissermassen eine Hauptrolle spielt), dass, wenn $\Psi = 0$ die zwei infinitesimalen Berührungstransformationen $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ gestattet, sie immer auch die Transformation $(\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2)$ gestattet. Denn wenn $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1$, $\mathsf{H} = \mathsf{H}_2$ zwei Lösungen von (12′) sind, so wird auch $\mathsf{H} = (\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2)$ eine Lösung derselben Gleichung, und, wenn $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ homogen vom ersten Grade in p_1, p_2, p_3 sind, so ist auch $(\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2)$ homogen vom ersten Grade in denselben Grössen. Setzt man $\mathsf{H}_1 = p_3 \psi(z, x, y, p, q)$, $\mathsf{H}_2 = p_3 \chi(z, x, y, p, q)$, so kommt:

$$(\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2) = -p_3 \left([\psi\chi] + \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right).$$

Wenn daher (bei Zugrundelegung der früheren Bezeichnungen) eine partielle Gleichung 1. O. $\Psi(z, x, y, p, q) = 0$ die Transformationen ψ, χ gestattet, so gestattet sie auch die Transformation

$$[\psi\chi] + \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

---

*) $(UV) = \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$. Die Frage nach den infinitesimalen Berührungstransformationen einer partiellen Gleichung 1. O.

$$\Psi\left(x_1, x_2, x_3, -\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}\right) = 0$$

findet also ihre Lösung durch diejenigen Integrale H von (12′), die in Bezug auf p_1, p_2, p_3 homogen vom ersten Grade sind.

Die Bedingung für die Vertauschbarkeit der Transformationen H_1, H_2 lautet einfach so: $(H_1 H_2) = 0$.

15. Führt man auf eine infinitesimale Berührungstransformation irgend eine endliche oder infinitesimale Berührungstransformation aus, so muss, nach dem Begriffe der Berührungstransformationen, hierdurch eine neue infinitesimale Berührungstransformation entstehen. — Wenden wir auf die infinitesimale Berührungstransformation:

$$dx = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad dy = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad dz = \varepsilon \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p} + q \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Phi\right),$$
$$dp = -\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \quad dq = -\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$

(ε eine infinitesimale Constante)

die Berührungstransformation:

$$\begin{aligned} X &= F_1 (z, x, y, p, q), \\ Y &= F_2 (\qquad\qquad), \\ Z &= F_3 (\qquad\qquad), \\ P &= \Phi_1 (\qquad\qquad), \\ Q &= \Phi_2 (\qquad\qquad), \end{aligned} \tag{14}$$

an, so resultirt die folgende Transformation:

$$dX = \varepsilon \left([F_1 \Phi] - \Phi \frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \quad dY = \varepsilon \left([F_2 \Phi] - \Phi \frac{\partial F_2}{\partial z}\right), \cdots$$
$$dQ = \varepsilon \left([\Phi_2 \Phi] - \Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right). \tag{15}$$

Nun wissen wir, dass, wenn U, V zwei beliebige Functionen von z, x, y, p, q, und U', V' ihre durch (14) hervorgehenden Ausdrücke in Z, X, Y, P, Q bedeuten:

$$[U V]_r = [F_1 \Phi_1]_r \, [U' V']_R \text{ *)} \tag{16}$$

ist. Wenn also $\Phi' (Z, X, Y, P, Q) = \Phi (z, x, y, p, q)$, so wird das System (15) identisch mit dem folgenden:

$$dX = \varepsilon \left([F_1 \Phi_1]_r \, [X \Phi']_R - \Phi' \frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \cdots$$
$$dQ = \varepsilon \left([F_1 \Phi_1]_r \, [Q \Phi']_R - \Phi' \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right),$$

oder wenn $[F_1 \Phi_1]_r$ gleich $\varrho (z, x, y, p, q) = \varrho' (Z, X, Y, P, Q)$ gesetzt wird:

---

*) $[UV]_r = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial z}\right) \frac{\partial V}{\partial p} + \cdots,$

$[U' V']_R = \left(\frac{\partial U'}{\partial X} + P \frac{\partial U'}{\partial Z}\right) \frac{\partial V'}{\partial P} + \cdots.$

$$
\begin{aligned}
dX &= \varepsilon\left(\varrho'\frac{\partial\Phi'}{\partial P} - \Phi'\frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\\
dY &= \varepsilon\left(\varrho'\frac{\partial\Phi'}{\partial q} - \Phi'\frac{\partial F_2}{\partial z}\right),\\
dZ &= \varepsilon\left(\varrho'\left(P\frac{\partial\Phi'}{\partial P} + Q\frac{\partial\Phi'}{\partial Q}\right) - \Phi'\frac{\partial F_3}{\partial z}\right),\\
dP &= -\varepsilon\left(\varrho'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial X} + P\frac{\partial\Phi'}{\partial Z}\right) + \Phi'\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right),\\
dQ &= -\varepsilon\left(\varrho'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial Y} + Q\frac{\partial\Phi'}{\partial Z}\right) + \Phi'\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Die hier auftretenden Differentialquotienten von $F_1, F_2 \cdots \Phi_2$ in Bezug auf z können in einer einfachen Weise durch die Function ϱ' und ihren Differentialquotienten ausgedrückt werden. Man hat zu dem Zwecke nur die Jacobi'sche Identität*):

$$
[f[\varphi\psi]] + [\varphi[\psi f]] + [\psi[f\varphi]] = -\frac{\partial f}{\partial z}[\varphi\psi] - \frac{\partial\varphi}{\partial z}[\psi f] - \frac{\partial\psi}{\partial z}[f\varphi]
\tag{18}
$$

anzuwenden.

Hieraus und aus (16) ergiebt sich, wenn man setzt: $f = F_1$, $\varphi = F_2$, $\psi = \Phi_2$ (und bemerkt, dass $[F_1F_2] = [F_1\Phi_2] = 0$, $[F_2\Phi_2] = \varrho$, wie übrigens schon aus (16) folgt):

$$
\varrho'\frac{\partial\varrho'}{\partial P} = \varrho'[X\varrho']_R = [F_1[F_2\Phi_2]]_r = -\frac{\partial F_1}{\partial z}[F_2\Phi_2]_r = -\frac{\partial F_1}{\partial z}\varrho',
$$

und aus ähnlichen Gründen:

$$
\varrho'\frac{\partial\varrho'}{\partial Q} = [F_2[F_1\Phi_1]_r]_r = -\frac{\partial F_2}{\partial z}\varrho'
$$

$$
\varrho'\left(P\frac{\partial\varrho'}{\partial P} + Q\frac{\partial\varrho'}{\partial Q}\right) = [F_3[F_1\Phi_1]_r]_r = -\frac{\partial F_3}{\partial z}\varrho + \frac{\partial F_1}{\partial z}\Phi_1\varrho + [F_1, \varrho\Phi_1]_r;
$$

aber

$$
[F_1, \varrho\Phi_1]_r = \varrho^2 + \Phi_1[F_1\varrho] = \varrho^2 - \frac{\partial F_1}{\partial z}\varrho\Phi_1,
$$

daher:

$$
\varrho'\left(P\frac{\partial\varrho'}{\partial P} + Q\frac{\partial\varrho'}{\partial Q}\right) = -\frac{\partial F_3}{\partial z}\varrho' + \varrho'^2.
$$

Weiter:

$$
-\varrho'\left(\frac{\partial\varrho'}{\partial X} + P\frac{\partial\varrho'}{\partial Z}\right) = [\Phi_1[F_2\Phi_2]_r]_r = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\varrho',
$$

$$
-\varrho'\left(\frac{\partial\varrho'}{\partial Y} + Q\frac{\partial\varrho'}{\partial Z}\right) = [\Phi_2[F_1\Phi_1]_r]_r = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\varrho'.
$$

Folglich:

*) Diese Formulirung derselben, für den Fall, dass z selbst in f, φ, ψ auftritt, ist gegeben von Mayer im IX. Bd. d. A. p. 370.

$$(19)\quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{\partial \varrho'}{\partial P},\quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{\partial \varrho'}{\partial Q},\quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = -\left(P\frac{\partial \varrho'}{\partial P} + Q\frac{\partial \varrho'}{\partial Q} - \varrho'\right),$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varrho'}{\partial X} + P\frac{\partial \varrho'}{\partial Z},\quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \varrho'}{\partial Y} + Q\frac{\partial \varrho'}{\partial Z}.^{*)}$$

In Folge hiervon nehmen die Gleichungen (17) die Form an:

$$dX = \varepsilon\left(\varrho'\frac{\partial \Phi'}{\partial P} + \Phi'\frac{\partial \varrho'}{\partial P}\right), \dots$$
$$dQ = -\varepsilon\left(\varrho'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial Y} + Q\frac{\partial \Phi'}{\partial Z}\right) + \Phi'\left(\frac{\partial \varrho'}{\partial Y} + Q\frac{\partial \varrho'}{\partial Z}\right)\right),$$

oder, wenn $\Psi(Z, X, Y, P, Q)$ durch die Gleichung:

$$(20)\qquad \Psi = \varrho'\Phi'$$

bestimmt wird:

$$(21)\quad \begin{aligned} dX &= \varepsilon\frac{\partial \Psi}{\partial P},\quad dY = \varepsilon\frac{\partial \Psi}{\partial Q},\quad dZ = \varepsilon\left(P\frac{\partial \Psi}{\partial P} + Q\frac{\partial \Psi}{\partial Q} - \Psi\right),\\ dP &= -\varepsilon\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} + P\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\right),\quad dQ = -\varepsilon\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} + Q\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\right). \end{aligned}$$

Dies ist genau die oben angegebene Form einer infinitesimalen Berührungstransformation Ψ. Also:

Eine Berührungstransformation, die $\Phi(z, x, y, p, q)$ in $\Phi'(Z, X, Y, P, Q)$ *verwandelt, führt die infinitesimale Berührungstransformation* Φ *in die infinitesimale Berührungstransformation* $\varrho'\Phi'$ *über. Hier bezeichnet* ϱ' *eine Function von* (Z, X, Y, P, Q) *und zwar die für die erst genannte Berührungstransformation charakteristische Function* $[XP]_r$, *— diese in ihren Ausdruck in* Z, X, Y, P, Q *übergeführt gedacht.*

Nur in einem einzigen Falle wird die neue infinitesimale Berührungstransformation (21) die Transformation Φ' sein, nämlich, wenn, wie aus den Gleichungen (17) ersichtlich, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{Const.}$ In diesem Falle und nur in diesem ist auch $\varrho = \text{Const.}$ Also:

Eine Berührungstransformation, die so eingerichtet ist, dass sie Functionen bloss von (x, y, p, q) in Functionen bloss von (X, Y, P, Q) überführt, und nur eine solche Transformation, führt die Transformation $\Phi(z, x, y, p, q)$ in die Transformation $\Phi'(Z, X, Y, P, Q)$, — wo $\Phi' = \Phi$ ist, — über.

---

*) Beiläufig sei bemerkt, was sich hieraus ohne Weiteres ergiebt: *Die infinitesimale Transformation*

$$dX = \varepsilon\frac{\partial F_1}{\partial z},\quad dY = \varepsilon\frac{\partial F_2}{\partial z},\quad dZ = \varepsilon\frac{\partial F_3}{\partial z},\quad dP = \varepsilon\frac{\partial \Phi_1}{\partial z},\quad dQ = \varepsilon\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}$$

ist selbst eine Berührungstransformation, nämlich die Transformation ϱ'.

16. Als Zusatz zu N. 13. können wir Folgendes zufügen. Falls von einer partiellen Differentialgleichung 1. O. bekannt ist eine infinitesimale Transformation ψ, die sie gestattet, und eine endliche Berührungstransformation, die zwar die Gleichung 1. O., aber nicht die Gleichung $\psi = 0$ unverändert lässt, so können wir hiervon denselben Gebrauch machen, als wenn von vornherein zwei infinitesimale Berührungstransformationen der Gleichung 1. O. bekannt wären. Denn die genannte endliche Berührungstransformation führt die Transformation ψ in eine zweite infinitesimale Berührungstransformation über, welche die partielle Gleichung 1. O. invariant lässt. —

17. *Zwei permutable Transformationen* $\varphi(z,x,y,p,q)$, $\psi(z,x,y,p,q)$ *werden von irgend einer Berührungstransformation* (14) *in zwei wiederum permutable Transformationen* $\Phi(Z, X, Y, P, Q)$, $\Psi(Z, X, Y, P, Q)$ *verwandelt.*

Denn die Transformation φ geht in die Transformation $\varrho\Phi'$ und die Transformation ψ in die Transformation $\varrho\Psi'$ über, — wo
$\Phi'(Z,X,Y,P,Q) = \varphi(z,x,y,p,q)$ und $\Psi'(Z,X,Y,P,Q) = \psi(z,x,y,p,q)$.
Jetzt aber ist:

$$[\varphi\psi]_r + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Also:

$$\text{(a)}\qquad \varrho[\Phi'\Psi']_R + \Phi'\frac{\partial\psi}{\partial z} - \Psi'\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Weiter:

$$[\Phi\Psi]_R = [\varrho\Phi', \varrho\Psi']_R = \varrho^2[\Phi'\Psi']_R + \varrho\Psi'[\Phi'\varrho]_R + \varrho\Phi'[\varrho\Psi']_R.$$

Nach (19):

$$[\Phi'\varrho]_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varrho\frac{\partial\Phi'}{\partial Z},\quad [\varrho\Psi']_R = \frac{\partial\psi}{\partial z} - \varrho\frac{\partial\Psi'}{\partial Z}.$$

Darum schliesslich, auf Grund von (a):

$$[\Phi\Psi]_R + \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial Z} = 0.$$

Wie zu erweisen war. —

---

18. Aus der 8. N. folgt, dass die Transformation $\Phi(z,x,y,p,q)$, angewandt auf ein Element $(zxypqrst)$ der Gleichungen $\Phi = 0$, $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, $\frac{d\Phi}{dy} = 0$*), ein unendlich benachbartes Element $(zxypqrst)$ derselben Gleichungen ergiebt, das zu gleicher Zeit der vom ersten Elemente bestimmten *charakteristischen* Reihe von Elementen $(zxypqrst)$ von $\Phi = 0$ $\left(\frac{d\Phi}{dx} = 0, \frac{d\Phi}{dy} = 0\right)$ zugehört. Wenn also eine Gleichung

*) D. i. angewandt auf eine unendlich kleine Flächencalotte von $\Phi = 0$.

2. O. $F(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ durch eine Transformation Φ in sich selbst übergeführt wird, so muss nothwendig eine unendlich-malige Wiederholung dieser Transformation aus einem jeden für $F = 0$, $\Phi = 0$ $\left(\frac{d\Phi}{dx} = 0,\ \frac{d\Phi}{dy} = 0\right)$ gemeinsamen Elemente $(zxypqrst)$ eine ganze Reihe von ∞^1 zu je zwei unendlich benachbarten vereinigt liegenden Elementen $(zxypqrst)$ liefern, die $F = 0$ zugehören und Elemente einer für $\Phi = 0$ charakteristischen Reihe sind. *Daher kennt man in diesem Falle von vornherein eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, nämlich $\Phi = 0$, die zweifach unendlich viele Integralflächen mit $F = 0$ gemein hat.* — Dies leuchtet auch aus der folgenden Gleichung (22) unmittelbar ein.

19. *Nicht jede partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung gestattet eine infinitesimale Berührungstransformation.* Die Bedingung für die Existenz einer solchen erhalten wir folgendermassen. Wird $F(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ durch die Transformation Φ nicht geändert, so muss nothwendig der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \cdots + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt = 0$$

genügt werden, wenn man für $dx, dy, \cdots dq$ die Werthe (9) und für dr, ds, dt die daraus folgenden Werthe, das sind die von u, v, w, ϖ freien Theile der Ausdrücke $-\varepsilon\frac{d^2\Phi}{dx^2}$, $-\varepsilon\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}$, $-\varepsilon\frac{d^2\Phi}{dy^2}$ *) einsetzt.

Die fragliche Bedingung lautet dann so:

$$(22)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial q}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial q}$$
$$-\frac{\partial F}{\partial r}b^{(00)}-\frac{\partial F}{\partial s}b^{(01)}-\frac{\partial F}{\partial t}b^{(11)}=\frac{\partial F}{\partial z}\Phi\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung, gleich Null gesetzt, ergiebt nach Vertauschung von Φ mit f die Gleichung (7); — jedoch mit dem Unterschiede, dass für die hier in den Differentialquotienten von F vorkommenden r, s, t beliebige der Gleichung $F = 0$ genügende, nicht wie in der Gleichung (7), — (in dieser Φ statt f geschrieben) — bloss die für $F = 0$, $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, $\frac{d\Phi}{dy} = 0$ gemeinsamen Werthe zu setzen sind.

Im Allgemeinen giebt es keine Function Φ von x, y, z, p, q allein, die der Gleichung (22) genügt, und daher auch im Allgemeinen keine infinitesimale Berührungstransformation von $F = 0$. Die Gleichung (22) ist als die Definition der Gleichungen 2. O., die infinitesimale Berührungstransformationen gestatten, aufzufassen. —

---

*) Theile, die ich jetzt, wie in N. 3. die entsprechenden Ausdrücke für f, mit $-\varepsilon b^{(00)}$, $-\varepsilon b^{(01)}$, $-\varepsilon b^{(11)}$ bezeichne.

Die erwähnte Gleichung (7) der 4. N. hat eine gegenüber allen (infinitesimalen und endlichen) Berührungstransformationen von $F = 0$ invariante Beziehung. — Dieser Satz entspricht dem in der 10. N. für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung angegebenen. — Entsprechend dem Satze der 12. N. findet man, dass, wenn die Transformationen ψ, χ*) die partielle Differentialgleichung 2. O. $F = 0$ unverändert lassen, diese Gleichung auch durch die Transformation $\psi + \lambda\chi$, — wo λ eine arbiträre Constante bedeutet, — nicht geändert wird.

20. Wenn die partielle Differentialgleichung 2. O. $F(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ die infinitesimale Berührungstransformation $\Phi(z, x, y, p, q)$ gestattet, so kann man in folgender Weise jener Gleichung 2. O. eine vereinfachte Form ertheilen.

Man sucht zunächst zwei Schaaren von je einfach unendlich vielen Integralflächen von $\Phi(z, x, y, p, q) = 0$. Es mögen

$$f(x, y, z) = \lambda,$$
$$\varphi(x, y, z) = \mu$$

die Gleichungen dieser Schaaren sein. Auch wird als bekannt vorausgesetzt eine Flächenschaar, die man aus irgend einer beliebigen Fläche, die kein Integral von $\Phi = 0$ bildet, durch unendlich-malige Wiederholung der Transformation Φ erhält. Sei

$$\psi(x, y, z) = \nu$$

die Gleichung einer solchen Schaar. Statt λ, μ, ν schreibe ich X, Y, Z und wende sowohl auf die vorgelegte partielle Differentialgleichung 2. O. wie auf die infinitesimale Berührungstransformation Φ die Punkttransformation

$$X = f(x, y, z), \quad Y = \varphi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z)$$

an. — Die infinitesimale Transformation Φ geht dann, wegen der Wahl der Functionsformen f, φ, ψ in die Transformation: $dX = 0$, $dY = 0$, $dZ = \varepsilon\Psi(Z)$ über. Wenn also z' durch die Gleichung:

$$z' = \int \frac{dZ}{\Psi(Z)},$$

statt Z eingeführt, und $x' = X$, $y' = Y$ gesetzt wird, so nimmt die fragliche Transformation die Form an: $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = \varepsilon$, — und wird also für den Raum (x', y', z') eine Transformation *Eins*.

Die Form $F_1(z', x', y', p', q', r', s', t') = 0$, worunter in den neuen Variablen x', y', z' die anfängliche partielle Differentialgleichung 2. O. erscheinen soll, muss daher eine Gleichung 2. O. darstellen, die die Transformation *Eins* gestattet. Nach der Gleichung (22) muss also

*) ψ, χ Functionen von x, y, z, p, q bezeichnend.

$$\frac{\partial F_1}{\partial z'} = 0,$$

sein, d. i. die Gleichung 2. O. $F = 0$ muss in den neuen Variablen sich so schreiben:

$$F_1(x', y', p', q', r', s', t') = 0.$$

21. Gesetzt, $F = 0$ gestatte zwei infinitesimale Berührungstransformationen, die permutabel sind; etwa die Transformationen:

$$\psi(z, x, y, p, q), \quad \chi(z, x, y, p, q),$$

wo:

$$[\psi\chi] + \psi\frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Man führe dann nach der vorigen N. die Transformation ψ über in die Transformation *Eins* und zugleich die Gleichung 2. O. über in die Gleichung: $F_1(x', y', p', q', r', s', t') = 0$. — Die Transformation χ geht dabei über in eine Transformation $\chi_1(z', x', y', p', q')$, die nach N. 17. mit der Transformation *Eins* permutabel sein, also die Gleichung $\frac{\partial \chi_1}{\partial z'} = 0$ befriedigen muss und somit von der Form ist $\chi_1 = \chi_1(x', y', p', q')$.

Durch eine Berührungstransformation von der Form:

$$x'' = \chi_1(x', y', p', q'),$$
$$y'' = \chi_2(x', y', p', q'),$$
$$z'' = z' + \chi_3(x', y', p', q'),$$

wird (N. 15. Schluss) die Transformation χ_1 in eine Transformation x'' und also die vorliegende Gleichung $F = 0$, da sie die Transformationen *Eins* und x'' gestatten soll, nach (22) in eine Gleichung von der Form:

$$F(x'', y'', q'', r'', s'', t'') = 0$$

verwandelt.

Von den Gleichungen der letzten Form habe ich aber im IX. B. dieser Annalen S. 318 gezeigt, dass ihre Lösung von derjenigen einer linearen Gleichung: $Rr + Ss + Tt + U = 0$, wo R, S, T, U gewisse Functionen von x, y, z, p, q bedeuten, abhängt. (Die lineare Gleichung wird durch Anwendung der mehrdeutigen Flächentransformation: $x = x''$, $y = y''$, $z = q''$, gewonnen.) Also: *das Problem der Lösung einer partiellen Differentialgleichung* 2. *O., die zwei bekannte permutable infinitesimale Berührungstransformationen gestattet, findet durch eine lineare partielle Differentialgleichung* 2. *O. mit ebenfalls nur zwei von einander unabhängigen Variablen seine Erledigung.**)

*) Dass das Resultat der von mir in N. 17. meiner Abhandlung im IX. B. d. A., S. 318—320 dargelegten Theorie in dieser Weise ausgesprochen werden kann, wurde mir von Lie im Febr. 1876 brieflich mitgetheilt.

§ 3.

Ueber Beziehungen, die zwischen partiellen Differentialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung des Raumes von vier Dimensionen stattfinden können.

22. Eine jede partielle Differentialgleichung 1. O.

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0^{*)} \tag{a}$$

lässt sich vermittelst irgend einer Berührungstransformation von der Form:

$$\begin{aligned} X_1 &= f\ (z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \\ X_2 &= f_1\ (\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ X_3 &= f_2\ (\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ Z &= f_3\ (\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ P_1 &= \varphi_1\ (\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ P_2 &= \varphi_2\ (\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ P_3 &= \varphi_3\ (\qquad\qquad\qquad\qquad), \end{aligned} \tag{23}$$

auf den Raum $X_1 = 0$, wie ich in der eben citirten Abhandlung im IX. B. d. A. beschrieben habe, abbilden. Betrachten wir nun weiter eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dieses Raumes $X_1 = 0$:

$$F(Z, X_2, X_3, P_2, P_3, P_{22}, P_{23}, P_{33}) = 0. \tag{b}$$

Durch dieselbe wird ein System von unbegrenzt unendlich vielen nach Curven (Charakteristiken) sich osculirenden Flächen vertreten. Führt man für Z, X_i, P_i, P_{ik} ihre, der Berührungstransformation (23) zugehörenden Werthe in z, x_i, p_i, p_{ik} ein, *so verwandelt sich die Gleichung* (b) *in eine partielle Differentialgleichung* 2. *O. des Raumes* (z, x_1, x_2, x_3) *von vier Dimensionen, die mit der partiellen Differentialgleichung* 1. *O.* (a) *so verbunden ist, dass sämmtliche für die beiden Gleichungen gemeinsamen Werthsysteme von* $(z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl} \cdots)$ *zu Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen zusammengefügt werden können.*

Entsprechend den Charakteristiken von (b) finden sich charakteristische M_2 der Gleichung 2. O., die zu gleicher Zeit der Gleichung 1. O. (a) als charakteristische M_2 zugehören. *Auf jeder gemeinsamen Integral-M_3 der beiden Gleichungen giebt es zwei Schaaren derartiger M_2. — Die Charakteristiken von* (a), *durch welche jene M_2 erzeugt sind, werden im Allgemeinen nicht charakteristische M_1 der Gleichung* 2. *O.*; *das sind sie nur dann, wenn die Gleichung* 1. *O. selbst ein Integral der Gleichung* 2. *O. ausmacht.*

---

*) Mit p_i, p_{ik}, p_{ikl} etc. werde ich die ersten, zweiten, dritten etc. Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}$ etc. von z bezeichnen.

Wenn nämlich die Charakteristiken von (a) charakteristische M_1 einer Gleichung 2. O.*) wären, und diese Gleichung vermöge (a) auf eine Form (b) reducirt werden könnte, so müssten allein durch die Gleichungen:

$$dZ = P_2 dX_2 + P_3 dX_3, \quad dP_i = P_{i2} dX_2 + P_{i3} dX_3, \text{ etc.}$$
$$(i = 2, 3),$$

wo das Verhältniss $dX_2 : dX_3$ arbiträr, die genannten M_1 zu charakteristischen M_2 sich zusammenfassen lassen; es würde also eine beliebige Richtung $(dX_2 : dX_3)$ eine charakteristische Richtung der Gleichung (b) ausmachen, was unmöglich ist. Also kann jetzt unser System von Gleichungen der 1. und 2. O. nicht durch eine Gleichung (b) ausgedrückt werden. D. h. aber, erst der ganze Raum (ZX_2X_3) ist ein vollständiges Bild dieses Gleichungssystems. Daher muss (a) ein erstes Integral der Gleichung 2. O. darstellen.

23. Die analytische Bedingung dafür, dass die Gleichungen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0,$$
$$\varphi(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, \ldots p_{33}) = 0,$$

ein System von der eben beschriebenen Beschaffenheit bilden, erhält man folgendermassen. Die zweiten Derivirten der Gleichung $f = 0$ bestimmen zusammen mit den ersten Derivirten von $\varphi = 0$ diejenigen Werthsysteme der p_{ikr}, die ich als für die beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ gemeinsame Werthsysteme der dritten Differentialquotienten von z bezeichne. Diese Gleichungen sind von der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
b^{(11)} + b_1 p_{111} + b_2 p_{211} + b_3 p_{311} &= 0,\\
b^{(12)} + b_1 p_{112} + b_2 p_{212} + b_3 p_{312} &= 0,\\
b^{(13)} + b_1 p_{113} + b_2 p_{213} + b_3 p_{313} &= 0,\\
b^{(22)} + b_1 p_{122} + b_2 p_{222} + b_3 p_{322} &= 0,\\
b^{(23)} + b_1 p_{123} + b_2 p_{223} + b_3 p_{323} &= 0,\\
b^{(33)} + b_1 p_{133} + b_2 p_{233} + b_3 p_{333} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^{(1)} + a_{11} p_{111} + a_{12} p_{121} + a_{13} p_{131} + a_{22} p_{221} + a_{23} p_{231} + a_{33} p_{331} &= 0,\\
a^{(2)} + a_{11} p_{112} + a_{12} p_{122} + a_{13} p_{132} + a_{22} p_{222} + a_{23} p_{232} + a_{33} p_{332} &= 0,\\
a^{(3)} + a_{11} p_{113} + a_{12} p_{123} + a_{13} p_{133} + a_{22} p_{223} + a_{23} p_{233} + a_{33} p_{333} &= 0;\text{**})
\end{aligned}$$

und sie sind nur dann mit einander vereinbar, wenn die folgende Relation Statt hat:

*) Vgl. meinen Aufsatz in diesen Annalen Bd. XIII, S. 411.

**) $a_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ik}}$, $b_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $i, k = 1, 2, 3.$

$$(24)\quad a_{11}b^{(11)} + a_{12}b^{(12)} + a_{13}b^{(13)} + a_{22}b^{(22)} + a_{23}b^{(23)} + a_{33}b^{(33)} - b_1 a^{(1)} - b_2 a^{(2)} - b_3 a^{(3)} = 0.$$

Durch diese einzige Gleichung in z, x_i, p_i, p_{ik}, vereint mit den Gleichungen: $\varphi = 0$, $\frac{df}{dx_1} = 0$, $\frac{df}{dx_2} = 0$, $\frac{df}{dx_3} = 0$, *wird die fragliche Beziehung zwischen $f = 0$, $\varphi = 0$ analytisch ausgedrückt.* Die durch Differentiation aus $f = 0$, $\varphi = 0$ herzuleitenden Gleichungen für die höheren Differentialquotienten von z reduciren sich nämlich jetzt, auf Grund der genannten Relation, auf eine Zahl, die immer um zwei Einheiten niedriger ist als die Zahl der in die Gleichungen eingehenden höchsten Differentialquotienten von z.

Wenn insbesondere $\varphi = 0$ die Charakteristiken von $f = 0$ zu eigenen charakteristischen M_1 besässe, also, nach dem Vorigen, $f = 0$ ein erstes Integral von $\varphi = 0$ wäre, so würden die drei letzten der obigen neun Gleichungen für die p_{ikl} eine algebraische Folge der sechs ersteren sein. —

Aus der vorangehenden Relation (24) *folgt, dass $\varphi = 0$ keine allgemeine Gleichung* 2. O. *ist.* Eine allgemeine Gleichung 2. O. lässt nämlich kein von den p_{ik} freies Integral $f = 0$ jener Relation zu. Vgl. N. 29.

Zu bemerken ist, dass jede partielle Differentialgleichung 2. O., die eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet, eine Gleichung jener Gattung ist (— aber nicht umgekehrt ist jede Gleichung dieser Gattung eine Gleichung, die eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet). Denn besitzt eine Gleichung 2. O. $\varphi = 0$ eine infinitesimale Berührungstransformation f, d. i. die Transformation:

$$dx_i = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_i}, \; dz = \varepsilon \left(\sum p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - f\right), \; dp_i = -\varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

so muss sie mit der Gleichung 1. O. $f = 0$, gerade in der oben von den gleich bezeichneten Gleichungen 2. und 1. O. angegebenen Weise, Integrale zur grösstmöglichen Zahl, — M_3 und charakteristische M_2, — gemein haben.

24. Zu der Gleichung (b) der N. 22 fügen wir eine zweite Gleichung 2. O.

$$(c)\qquad \Phi(Z, X_2, X_3, P_2, P_3, P_{22}, P_{23}, P_{33}) = 0$$

hinzu, die mit ihr Integralflächen zu grösstmöglicher Zahl gemein hat. Wenn die beiden Gleichungen (b) und (c) ein System mit gemeinsamen Charakteristiken bilden, so gehen sie, durch Einsetzung der Werthe von Z, X_i, P_i, P_{ik} in z, x_i, p_i, p_{ik} aus (23), in zwei partielle Differentialgleichungen 2. O. des Raumes $(zx_1x_2x_3)$ von vier Dimensionen über, *die mit einander und mit der partiellen Gleichung*

1. *O.* (a) *gemeinsame charakteristische M_2 zu grösstmöglicher Zahl und von diesen erzeugte Integral-M_3 besitzen.*

Wenn es aber keine für $F = 0$, $\Phi = 0$ gemeinsame Charakteristik giebt, so werden zwar die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen 2. O. des Raumes (zx) Integral-M_3 zu einer grösstmöglichen Zahl, aber keine charakteristische M_2 mit der Gleichung (a) gemein haben.

25. Statt der partiellen Differentialgleichung 2. O. (c) betrachte ich jetzt eine partielle Differentialgleichung der 1. O.:

(d) $$f(Z, X_2, X_3, P_2, P_3) = 0,$$

die mit (b) Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein hat. Sie ist das Bild in $(Z X_2 X_3)$ einer mit (a) involutorischen Gleichung 1. O.:

$$\varphi(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0.$$

Entsprechend dem Satze in der 3. N., dass, wenn eine Gleichung 2. O. (b) die Charakteristiken einer Gleichung 1. O. (d) zu eigenen Charakteristiken hat, die letztere Gleichung ein Integral der ersteren sein muss, folgt, *dass, wenn die von den Charakteristiken der Gleichungsschaar:*

$$f + \lambda \varphi = 0 \qquad (\lambda \text{ variabel})$$

erzeugten charakteristischen M_2 des involutorischen Systems $f=0$, $\varphi=0$ charakteristische M_2 einer Gleichung 2. O. des Raumes (zx) sind, diese Gleichung nothwendig jenes System als Integral besitzen muss, so dass alle Integral-M_3 jenes Systems Integrale der Gleichung 2. O. sind.

26. Zwei partielle Differentialgleichungen der 2. O. können in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass ihre sämmtlichen gemeinsamen Elemente $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ sich zu M_3 zusammensetzen. *In diesem Falle muss es, behaupte ich, auf jeder gemeinsamen Integral-M_3 ∞^1 gemeinsame charakteristische M_2 geben.*

Denn, seien $F = 0$, $\Phi = 0$ die zwei partiellen Differentialgleichungen der 2. O. Ihre ersten Derivirten $\frac{dF}{dx_i} = 0$, $\frac{d\Phi}{dx_i} = 0$ sind bezüglich von der Form:

$$A_{11} p_{11i} + A_{12} p_{12i} + \cdots + A_{33} p_{33i} + A_i = 0,$$
$$B_{11} p_{11i} + B_{12} p_{12i} + \cdots + B_{33} p_{33i} + B_i = 0, \text{*)}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

und zu jedem Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ einer gemeinsamen Integral-M_3 gehört daher eine Schaar von, jenen Gleichungen gemeinsam genügenden Werthen der p_{ikl}, die ausgedrückt ist durch die Gleichungen:

---

*) $A_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_{ik}}$, $B_{ik} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}}$.

$$(\alpha)\quad \begin{array}{l} p_{121}+\lambda_1 p_{111}=a_{121},\ p_{221}+\lambda_1 p_{121}=a_{221} \\ p_{131}+\lambda_2 p_{111}=a_{131},\ p_{231}+\lambda_2 p_{121}=a_{231},\ p_{331}+\lambda_2 p_{131}=a_{331}, \\ \text{etc.,} \end{array}$$

wo λ_1, λ_2 das folgende Gleichungspaar befriedigen:

$$(25)\quad \begin{array}{l} \Omega\equiv A_{11}-A_{12}\lambda_1-A_{13}\lambda_2+A_{22}\lambda_1^2+A_{23}\lambda_1\lambda_2+A_{33}\lambda_2^2=0, \\ \Omega'\equiv B_{11}-B_{12}\lambda_1-B_{13}\lambda_2+B_{22}\lambda_1^2+B_{23}\lambda_1\lambda_2+B_{33}\lambda_2^2=0, \end{array}$$

und a_{121} natürlich gleich $p^0_{121}+\lambda_1 p^0_{111}$, etc. ist, — unter p^0_{ikl} die der genannten Integral-M_3 zugehörenden Werthe der dritten Differentialquotienten von z verstanden. (Siehe meine Abhandlung im XIII. Bande dieser Annalen S. 414—417.)

Nach der über $F=0$, $\Phi=0$ gemachten Voraussetzung muss sich jetzt zu einem jeden, diesen Gleichungen (und ihren ersten Derivirten) gemeinsamen Werthsysteme von $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$, also insbesondere auch zu einem jeden der Werthsysteme (α), ein System von Werthen der vierten Differentialquotienten p_{iklm} von z finden lassen, das den zweiten Derivirten:

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k}=0,\quad \frac{d^2\Phi}{dx_i dx_k}=0,$$

gleichzeitig genügt. *Dann aber muss für alle diese Werthe von* $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ *die Relation:*

$$(26)\quad \sum_{ik}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_{ik}}\frac{d^2F}{dx_i dx_k}-\frac{\partial F}{\partial p_{ik}}\frac{d^2\Phi}{dx_i dx_k}\right)=0,\qquad (i,k=1,2,3)$$

die von den p_{iklm} *völlig frei ist, Statt haben.*

Hier ist, unter Vernachlässigung der Glieder mit den p_{iklm}, die sich aus der Relation (26) von selbst wegheben:

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial}{\partial z}+\sum_r p_{ri}\frac{\partial}{\partial p_r}+\sum_{rs} p_{rsi}\frac{\partial}{\partial p_{rs}}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial}{\partial z}+\sum_l p_{lk}\frac{\partial}{\partial p_l}+\sum_{mn} p_{mnk}\frac{\partial}{\partial p_{mn}}\right)F,$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx_i dx_k}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial}{\partial z}+\sum_r p_{ri}\frac{\partial}{\partial p_r}+\sum_{rs} p_{rsi}\frac{\partial}{\partial p_{rs}}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial}{\partial z}+\sum_l p_{lk}\frac{\partial}{\partial p_l}+\sum_{mn} p_{mnk}\frac{\partial}{\partial p_{mn}}\right)\Phi.$$

Berücksichtigt man nur die Glieder, welche die dritten Differentialquotienten von z enthalten, so erhält man:

$$\frac{d^2 F}{dx_i dx_k} = \sum_l p_{lki} \frac{\partial F}{\partial p_l} + \sum_{rs} p_{rsi} \frac{\partial}{\partial p_{rs}} \sum_{mn} p_{mnk} \frac{\partial}{\partial p_{mn}} F +$$

$$+ \sum_{mn} p_{mnk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z} + \sum_r p_{ri} \frac{\partial}{\partial p_r} \right) \frac{\partial F}{\partial p_{mn}}$$

$$+ \sum_{rs} p_{rsi} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial}{\partial z} + \sum_l p_{lk} \frac{\partial}{\partial p_l} \right) \frac{\partial F}{\partial p_{rs}} + \cdots$$

Um nun auszudrücken, dass die Relation (26) für alle p_{ikl}, die den Gleichungen (α) genügen, Geltung hat, führe man in dieselbe für die p_{ikl} ihre Ausdrücke in p_{111} und den p^0_{ikl} aus (α) ein, und setze sodann die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von p_{111} einzeln gleich Null.

Der Kürze wegen schreibe ich:

$$\frac{d' U}{dx_i} \text{ statt } \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z} + \sum_r p_{ri} \frac{\partial}{\partial p_r} \right) U,$$

$$\frac{\partial' U}{\partial v} \text{ statt } \left(\frac{\partial}{\partial p_{11}} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial p_{12}} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial p_{13}} + \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial p_{22}} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial p_{23}} + \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial p_{33}} \right) U,$$

und wenn sodann die genannten Werthe von p_{ikl}:

$$\begin{aligned}
p_{11i} &= - p_{111} \lambda_{i-1} + (p^0_{11i} + p^0_{111} \lambda_{i-1}), \\
p_{12i} &= - p_{11i} \lambda_1 \quad + (p^0_{12i} + p^0_{11i} \lambda_1 \quad), \\
p_{13i} &= - p_{11i} \lambda_2 \quad + (p^0_{13i} + p^0_{11i} \lambda_2 \quad), \\
p_{22i} &= \quad p_{11i} \lambda_1^2 \quad + (p^0_{22i} - p^0_{11i} \lambda_1^2 \quad), \\
p_{23i} &= \quad p_{11i} \lambda_1 \lambda_2 + (p^0_{23i} - p^0_{11i} \lambda_1 \lambda_2), \\
p_{33i} &= \quad p_{11i} \lambda_2^2 \quad + (p^0_{33i} - p^0_{11i} \lambda_2^2 \quad),
\end{aligned}$$

$$(\lambda_0 = -1)$$

benutzt werden, so kommt:

$$\frac{\partial^2 F}{dx_i dx_k} = \sum_l p_{ikl} \frac{\partial F}{\partial p_l} + \left(\lambda_{i-1} (p^0_{111} - p_{111}) \frac{\partial'}{\partial v} + \sum_{mn} p^0_{mni} \frac{\partial}{\partial p_{mn}} \right)$$

$$\cdot \left(\lambda_{k-1} (p^0_{111} - p_{111}) \frac{\partial'}{\partial v} + \sum_{rs} p^0_{rsk} \frac{\partial}{\partial p_{rs}} \right) F$$

$$+ \frac{d'}{dx_k} \left(\lambda_{i-1} (p^0_{111} - p_{111}) \frac{\partial' F}{\partial v} + \sum_{mn} p^0_{mni} \frac{\partial F}{\partial p_{mn}} \right)$$

$$+ \frac{d'}{dx_i} \left(\lambda_{k-1} (p^0_{111} - p_{111}) \frac{\partial' F}{\partial v} + \sum_{rs} p^0_{rsk} \frac{\partial F}{\partial p_{rs}} \right) + \cdots$$

Nun folgt aus der ersten Derivirten von $F = 0$ in Bezug auf x_l:

$$\sum_{ik} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} p_{ikl} = \text{eine Function von } (z, x_i, p_i, p_{ik});$$

ebenso aus der ersten Derivirten von $\Phi = 0$ in Bezug auf x_l:

$$\sum_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}} p_{ikl} = \text{eine Function von } (z, x_i, p_i, p_{ik}).$$

Der Coefficient für p_{111}^2 oder für $(p_{111}^0 - p_{111})^2$ in der Relation (26), nachdem man darin die eben gefundenen Ausdrücke für die $\frac{d^2 F}{dx_i dx_k}$ und die analogen für die $\frac{d^2 \Phi}{dx_i dx_k}$ substituirt hat, verschwindet auf Grund der Relationen (25). Bemerkt man weiter, dass $\lambda_0 = -1$, und:

$$\left(\frac{d'}{dx_i} + \sum_{mn} p_{mni}^0 \frac{\partial}{\partial p_{mn}}\right) \frac{\partial' F}{\partial v} = \frac{d\Omega}{dx_i},$$

$$\left(\frac{d'}{dx_i} + \sum_{mn} p_{mni}^0 \frac{\partial}{\partial p_{mn}}\right) \frac{\partial' \Phi}{\partial v} = \frac{d\Omega'}{dx_i}$$

ist, wo Ω, Ω' die linken Seiten der Gleichungen (25) bezeichnen, und λ_1, λ_2, bei den Differentiationen als constant betrachtet werden; — so kann man den Coefficienten für p_{111} oder für $(p_{111} - p_{111}^0)$ in der in der genannten Weise umgeformten Relation (26) so schreiben:

$$\begin{aligned}
&(2B_{11} - B_{12}\lambda_1 - B_{13}\lambda_2)\frac{d\Omega}{dx_1} + (B_{12} - 2B_{22}\lambda_1 - B_{23}\lambda_2)\frac{d\Omega}{dx_2} \\
&\qquad + (B_{13} - B_{23}\lambda_1 - 2B_{33}\lambda_2)\frac{d\Omega}{dx_3} \\
&- (2A_{11} - A_{12}\lambda_1 - A_{13}\lambda_2)\frac{d\Omega'}{dx_1} - (A_{12} - 2A_{22}\lambda_1 - A_{23}\lambda_2)\frac{d\Omega'}{dx_2} \\
&\qquad - (A_{13} - A_{23}\lambda_1 - 2A_{33}\lambda_2)\frac{d\Omega'}{dx_3},
\end{aligned}$$

d. i., wenn wieder auf die Relationen (25) Bezug genommen wird,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1}\left(\frac{d\Omega'}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\Omega'}{dx_1}\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_2}\left(\frac{d\Omega'}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\Omega'}{dx_1}\right) - \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda_1}\left(\frac{d\Omega}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\Omega}{dx_1}\right) \\
&\qquad - \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda_2}\left(\frac{d\Omega}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\Omega}{dx_1}\right).
\end{aligned}$$

Soll also die Relation (26) in der angeführten Weise, also für alle Elemente $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ der Gleichungen (α), gelten, so ist dafür in erster Hand erforderlich, dass:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1}\left(\frac{d\Omega'}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\Omega'}{dx_1}\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_2}\left(\frac{d\Omega'}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\Omega'}{dx_1}\right) - \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda_1}\left(\frac{d\Omega}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\Omega}{dx_1}\right) \\
&\qquad - \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda_2}\left(\frac{d\Omega}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\Omega}{dx_1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Aber in die Gleichungen $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$ hat man sich immer für z, p_i, p_{ik} diejenigen Werthe derselben ausgedrückt in x_1, x_2, x_3, die der betrachteten Integral-M_3 zukommen, eingesetzt zu denken. *Daher stellen diese Gleichungen* $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, *wenn* λ_1, λ_2 *als partielle Differential-*

quotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ *bez.* $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ *aufgefasst werden, zwei partielle Differentialgleichungen* 1. *O. für* x_1 *dar, die, wegen der jetzt gefundenen Relation zwischen* Ω, Ω', *einfach unendlich viele Lösungen:* $x_1 = \varphi(x_2, x_3, C)$, *gemein haben.*

Eine jede dieser Lösungen, vereint mit der Gleichung jener für $F = 0$, $\Phi = 0$ gemeinsamen Integral-M_3: $z = f(x_1, x_2, x_3)$, repräsentirt, nach den Auseinandersetzungen der zwei ersten Nummern meiner Abhandlung im XIII. Bde. d. A., S. 411, eine M_2, die eine für die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ gemeinsame charakteristische M_2 ist.

Also wird, wie oben behauptet wurde, jede gemeinsame Integral-M_3 unserer Gleichungen 2. *O. von für beide Gleichungen gemeinsamen charakteristischen M_2 erzeugt.*

Die zweite Relation, auf welche die Forderung der Unabhängigkeit der Relation (26) von den verschiedenen Werthen der p_{ikl} der Schaar (α) führt, nämlich die Bedingung dafür, dass das von $(p^0_{111} - p_{111})$ freie Glied der in der oben genannten Weise umgeformten Relation (26) verschwindet, wird diese:

$$\sum_{ik} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}} \frac{d^2 F}{dx_i dx_k} - \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \frac{d^2 \Phi}{dx_i dx_k} \right) = 0,$$

wenn für die p_{ikl} die Werthe p^0_{ikl} gesetzt werden. Dass dieser Relation genügt wird, ist aber schon in der Annahme einer durch jene charakteristischen M_2 gehenden Integral-M_3 $z = f(x_1, x_2, x_3)$ enthalten. —

Ein Beispiel zweier solcher Gleichungen 2. O. bildet ein Paar von Gleichungen, von deren ersten Derivirten in Bezug auf x_1, x_2, x_3 die eine hinsichtlich der dritten Differentialquotienten p_{ikl} von z eine algebraische Folge der anderen ist. Diese Gleichungen besitzen gemeinsame charakteristische M_2, aber dieselben werden, wie ich in meiner Abhandlung im XIII. Bde. d. A., S. 423–427 bewiesen habe*), von Mannigfaltigkeiten einer Dimension, *die für beide Gleichungen gemeinsame charakteristische M_1 sind,* erzeugt.

Ein zweites Beispiel eines derartigen Gleichungspaares liefern zwei erste Integrale zweier Gleichungen 3. O., die selbst wieder Integrale verschiedener Schaaren einer und derselben linearen Gleichung 4. O. sind. Die gemeinsamen Integral-M_3 jener Gleichungen 2. O. sind von (für die beiden Gleichungen nicht gemeinsamen) charakteristischen M_1' erzeugt, so dass eine jede der oben genannten für beide Gleichungen gemeinsamen charakteristischen M_2 in zweifacher Art aus derartigen M_1' zusammengesetzt ist, nämlich aus zwei distincten Schaaren solcher M_1', von denen die M_1' der einen Schaar für die eine Gleichung 2. O.

*) Vgl. auch unten N. 31.

allein, die M_1' der anderen Schaar für die zweite Gleichung 2. O. allein charakteristische M_1' ausmachen. (Vgl. N. 32.)

Dies ist noch nicht ein Beispiel zweier Gleichungen 2. O. allgemeinster Art, die in derselben Beziehung zu einander stehen wie $F=0$, $\Phi=0$. Zwei derartige Gleichungen haben nur den Charakter zweier solcher intermediärer zweiter Integrale einer linearen Gleichung 4. O., deren Derivirte $\frac{\partial F}{\partial p_{ik}}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}}$ nicht einander proportional sind. (Vgl. Nr. 33.)

27. Zu einer Gleichung 2. O. allgemeinster Form giebt es keine zweite Gleichung 2. O., die mit ihr ein solches System bildet, wie die obige Gleichung $\Phi=0$ mit $F=0$. Eine Gleichung 2. O., die mit einer gegebenen Gleichung 2. O., die von der allgemeinsten Form ist, Integral-M_3 zu einer grösstmöglichen Zahl gemein hat, bildet mit der gegebenen Gleichung ein solches System, dessen Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$, — eben die gemeinsamen Elemente der zwei Gleichungen des Systems, — einmal, und nur einmal zu M_3 zusammengesetzt werden können.

Die Gleichungen, durch welche diese Beziehung zwischen $F=0$, $\Phi=0$ analytisch auszudrücken ist, würden durch Differentiation und im Verein mit den Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx_i}=0,\quad \frac{d\Phi}{dx_i}=0,\quad \Psi=\sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}}\,\frac{d^2F}{dx_i dx_k}-\frac{\partial F}{\partial p_{ik}}\,\frac{d^2\Phi}{dx_i dx_k}\right)=0$$

solche Werthe für die dritten Differentialquotienten von z ausgedrückt durch z, x_i, p_i, p_{ik} geben, die wirklich Differentialquotienten einer Function von x_1, x_2, x_3 sein könnten; d. h. es müssten jene Gleichungen für die p_{ikl} so beschaffen sein, dass ihre ersten Derivirten (in Bezug auf x_1, x_2, x_3) von einem Werthsysteme der p_{iklm} befriedigt werden könnten.

Um die betreffenden Gleichungen wirklich aufzustellen, hätte man von den Gleichungen auszugehen, die für die $p_{k_1 k_2 \ldots}$ nöthig sind, damit diese Elemente einer für $F=0$, $\Phi=0$ gemeinsamen Integral-M_3 zugehören können. Für die p_{ikl} sind diese Gleichungen die schon genannten. Für die p_{iklm} sind es diese:

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k}=0,\quad \frac{d^2\Phi}{dx_i dx_k}=0,\quad \frac{d\Psi}{dx_m}=0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p_{ikl}}\,\frac{d^3F}{dx_i dx_k dx_l}-\frac{\partial F}{\partial p_{mn}}\,\frac{d^2\Psi}{dx_m dx_n}\right)=0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p_{ikl}}\,\frac{d^3\Phi}{dx_i dx_k dx_l}-\frac{\partial \Phi}{\partial p_{mn}}\,\frac{d^2\Psi}{dx_m dx_n}\right)=0.$$

28. Zwischen Gleichungspaaren $F=0$, $\Phi=0$ dieses allgemeinen Charakters und den in N. 26. behandelten fallen alle diejenigen, deren Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ sich so zu M_3 zusammenfügen, dass zwar nicht

alle gemeinsamen Elemente $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ der beiden Gleichungen (und ihrer ersten Derivirten) dadurch erfüllt werden, aber doch jene Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ durch die genannten M_3 mehrmals hervorgebracht werden, indem es unendlich viele (∞^∞) dieser M_3 giebt, die ein beliebiges jener Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ enthalten.

29. Eine Gleichung 2. O. allgemeinster Art kann mit einer Gleichung 1. O. Integral-M_3 höchstens zu einer solchen Zahl gemein haben, dass dadurch die Elemente $(z x_i p_i)$ der Gleichüng 1. O. nur einmal erfüllt werden; d. i. dreifach unendlich viele gemeinsame Integral-M_3. Das Problem, die Gleichungen aufzustellen, die einen solchen Zusammenhang zwischen den partiellen Differentialgleichungen definiren, fällt mit dem Probleme zusammen, Functionen p_{ik} von (z, x_i, p_i) zu bestimmen, die der Gleichung 2. O. und den ersten Derivirten der Gleichung 1. O. genügen, und deren erste Derivirte eben die Bedeutung von p_{ikl} haben.

§ 4.

Von partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung des Raumes von vier Dimensionen.

30. *Von Charakteristiken partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung.* — Durch eine jede Mannigfaltigkeit von ∞^2 vereinigt liegenden Elementen ($z x_i$ 1^ste^ 2^te^ ... k—1^ste^ Diffqu. v. z) lässt sich eine Integral-M_3 einer gegebenen Gleichung k. O. legen. Es folgt dies daraus, dass es zu jedem der genannten Elemente ($z x_i$ 1^ste^ 2^te^ ... k — 1^ste^ Diffqu. v. z) ∞^1 Werthe der k^{ten} Differentialquotienten von z giebt, die denjenigen M_3 zukommen, die durch jene Schaar von ∞^2 Elementen ($z x_i$ 1^ste^ .... k — 1^ste^ Diffqu. v. z) hindurchgehen. Aus diesen ∞^1 Werthsystemen der k^{ten} Differentialquotienten von z scheidet die Gleichung k. O. eines, oder wenigstens eines, aus. Diesem Werthsysteme kommen erstens ∞^1 Werthsysteme der $(k+1)^{\text{sten}}$ Differentialquotienten von z zu, die denjenigen M_3 angehören, welche durch die eben erhaltene Schaar von zweifach unendlich vielen der Gleichung k. O. zugehörenden Elementen ($z x_i$ 1^ste^ ... k^{te} Diffqu. v. z) hindurchzulegen sind; — zweitens aber wird, vermittelst der ersten Derivirten der Gleichung k. O. ein einziges derartiges Werthsystem bestimmt, das einer *Integral-M_3* zugehören kann.

Nur in einem Falle (— wegen der Ausführung des Beweises des Nächstfolgenden verweise ich auf die zwei ersten Nummern meiner Abhandlung im XIII. B. d. A., S. 411 —) werden alle jene ∞^1 Werthsysteme der $(k+1)^{\text{sten}}$ Differentialquotienten von z den ersten Derivirten der Gleichung k. O. genügen, so dass unbegrenzt unendlich viele Integral-M_3 jetzt durch die genannte zweifache Schaar von Elementen ($z x_i$ 1^ste^ ... k^{te} Differentialquotienten von z) hindurchgehen.

Wenn nämlich mit A_1, A_2, A_3 symbolisch so gerechnet wird, dass bei Ausführung der Potenz:

$$(A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3)^k$$

für den Coefficienten von $v_1^l v_2^m v_3^n$, der bis auf einen Zahlenfactor gleich $A_1^l A_2^m A_3^n$ ist, der partielle Differentialquotient von

$$F(z, x_i, p_i, 2^{\text{te}}, \cdots k^{\text{te}} \text{ Diffqu. v. } z)$$

in Bezug auf $\dfrac{\partial^k z}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^n}$ geschrieben wird, so hat man folgenden Satz:

Wird durch die Gleichung: $z = f(x_1, x_2, x_3)$ eine beliebige Integral-M_3 der partiellen Differentialgleichung k. O. $F = 0$ repräsentirt, und setzt man für $z, p_i, \cdots k^{te}$ Diffqu. v. z die Werthe ausgedrückt in x_1, x_2, x_3, die jener M_3 zukommen, so wird durch die Gleichung:

$$(27) \qquad \left(A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^k = 0$$

eine Function $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ bestimmt, welche die folgende Bedeutung für die partielle Differentialgleichung $F = 0$ hat. Die Gleichung $\varphi =$ Const. bestimmt zusammen mit der obigen Gleichung: $z = f(x_1, x_2, x_3)$, eine $M_2^{(k)}$, d. i. hier eine Schaar von zweifach unendlich vielen Elementen ($z x_i p_i \cdots k^{te}$ Diffqu. v. z), die unendlichfach unendlich vielen Integral-M_3 in derselben Weise wie der $M_3 : z = f(x_1, x_2, x_3)$, zugehört.

Solche $M_2^{(k)}$, d. i. solche Schaaren von zweifach unendlich vielen Elementen ($z x_i p_i \cdots k^{te}$ Diffqu. v. z) nenne ich *charakteristische M_2 der partiellen Differentialgleichung k. O.* — Unter Umständen kann die partielle Differentialgleichung k^{ten} Grades und erster Ordnung (27), die sie definirt, sich in Factoren auflösen, also in Gleichungen niederen Grades zerfallen. Giebt es einen linearen Factor von (27), so haben wir charakteristische M_2, die in einer ausgezeichneten Weise von besonderen M_1, — den Charakteristiken dieser linearen partiellen Differentialgleichung 1. O.: der angenommene lineare Factor gleich Null, — erzeugt sind. Diese M_1 sind als für die partielle Differentialgleichung k. O. *charakteristische* M_1 zu bezeichnen. (Vgl. die mehrmals citirte Abhandlung im XIII. Bd. dieser Annalen.)

31. Zwei partielle Differentialgleichungen der 3. O.: $F = 0$, $\Phi = 0$, zwischen deren ersten Derivirten eine lineare Relation Statt hat:

$$(28) \quad \mu_1 \frac{dF}{dx_1} + \mu_2 \frac{dF}{dx_2} + \mu_3 \frac{dF}{dx_3} - \lambda_1 \frac{d\Phi}{dx_1} - \lambda_2 \frac{d\Phi}{dx_2} - \lambda_3 \frac{d\Phi}{dx_3} = 0, \text{ —}$$

wo μ, λ nur $z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl}$ enthalten, — haben erstens Integral-M_3 zu einer solchen Zahl gemein, dass durch dieselben alle für die beiden Gleichungen gemeinsamen Elemente ($z x_i p_i p_{ik} p_{ikl}$) erschöpft werden. Diese Integrale gehören zugleich einer jeden der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen 4. O. an:

$$A \equiv \mu_1 \frac{dF}{dx_1} + \mu_2 \frac{dF}{dx_2} + \mu_3 \frac{dF}{dx_3} = 0,$$
$$B \equiv \lambda_1 \frac{d\Phi}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_3 \frac{d\Phi}{dx_3} = 0,$$

deren Differentialquotienten $\frac{\partial A}{\partial p_{iklm}}$, $\frac{\partial B}{\partial p_{iklm}}$ vermöge der Relation (28) einander gleich sind, so oft solche Werthe von (z, x_i, p_i, p_{ikl}) benutzt werden, die gemeinsamen Elementen von $F = 0$, $\Phi = 0$ zukommen.

Aus dieser letzten Bemerkung folgt, dass, wenn man eine der genannten Integral-M_3 betrachtet, und entweder diejenigen auf derselben verlaufenden M_2 bestimmt, die für die Gleichung 4. O. $A = 0$ charakteristisch sind, oder aber diejenigen M_2 bestimmt, die für die Gleichung 4. O. $B = 0$ charakteristisch sind, man in beiden Fällen dieselben M_2 erhalten muss. Denn die Gleichungen der auf der betrachteten Integral-M_3 verlaufenden charakteristischen M_2 von $A = 0$ resp. $B = 0$ sind (siehe die Gleichung (27)) von der Form:

$$\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^4 = 0, \quad \left(b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^4 = 0 \text{ bez.,}$$

und hier sind die symbolischen Producte $a_1^l a_2^m a_3^n$, $b_1^l b_2^m b_3^n$, nach dem was eben bemerkt wurde (nach Gleichung (28)), einander gleich, — so dass die zweite der zuletzt aufgeschriebenen Gleichungen mit der ersten identisch ist. —

Weiterhin, weil $F = 0$ ein erstes Integral von $A = 0$ ist, so müssen die Charakteristiken von $F = 0$ ebenfalls Charakteristiken von $A = 0$ sein, also muss, — wenn man sich immer dieselbe Integral-M_3 zu Grunde gelegt denkt, —

$$\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^4$$

einen Factor dritten Grades enthalten, so dass:

$$\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^4$$
$$= \left(\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^3 \left(u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right).$$

Es stellt dann

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^3 = 0$$

die Gleichung der charakteristischen M_2 von $F = 0$ dar.

Und weil $\Phi = 0$ ein Integral von $B = 0$ ausmacht, so ist

$$\left(b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^4,$$

d. i. hier

$$\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^4$$

von der Form:

$$\left(\beta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \beta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3 \left(v_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right),$$

wo

$$\left(\beta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \beta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3 = 0$$

die Gleichung der Charakteristiken von $\Phi = 0$ darstellt.

Folglich hat man identisch (für irgend eine den Gleichungen $F=0$, $\Phi=0$ gemeinsame Integral-$M_3: z = f(x_1, x_2, x_3)$):

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3 \left(u_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$$
$$= \left(\beta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \beta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3 \left(v_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right),$$

d. h.

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3$$
$$= \left(v_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) \left(\varpi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2\varpi_{12} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + \varpi_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right),$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \beta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3$$
$$= \left(u_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) \left(\varpi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2\varpi_{12} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + \varpi_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right).$$

Es giebt also auf jeder für $F=0$, $\Phi=0$ gemeinsamen Integral-M_3 eine Reihe von, für beide Gleichungen gemeinsamen charakteristischen M_2. Sie befriedigen durch ihre Gleichungen: $\varphi = C$ die partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades:

$$\varpi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2\varpi_{12} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + \varpi_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 = 0.$$

Ausserdem verlaufen auf jener M_3 zwei ausgezeichnete Schaaren von M_1, von denen die M_1 der einen Schaar Charakteristiken von

$$u_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0,$$

und also Charakteristiken von $\Phi = 0$, die M_1 der anderen Schaar Charakteristiken von

$$v_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0,$$

und also Charakteristiken von $F=0$ sind.

32. Ich nehme jetzt an, dass $F=0$ ein erstes Integral: $f=0$, und $\Phi=0$ ein erstes Integral: $\varphi = 0$ besitzt, und dass keines derselben zu gleicher Zeit ein Integral der anderen Gleichung 3. O. ist.

Die beiden Gleichungen 2. O. $f=0$, $\varphi=0$ haben Integral-M_3 zu einer solchen Zahl gemein, dass durch dieselben ihre sämmtlichen gemeinsamen Elemente $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik}\, p_{ikl})$ erschöpft werden, — denn die Gleichung (28) liefert eine lineare Relation zwischen den zweiten Derivirten von f, φ in Bez. auf x_1, x_2, x_3, die für alle Werthsysteme $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik}\, p_{ikl})$, die den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ nebst ihren ersten Derivirten genügen, erfüllt sein muss. (N. 26.)

Betrachten wir dann eine für $f=0$, $\varphi=0$ gemeinsame Integral-M_3. Die auf derselben verlaufenden Charakteristiken für $f=0$, $\varphi=0$ werden Charakteristiken für $F=0$ resp. $\Phi=0$. Also muss man haben:

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3,$$

d. i. hier:

$$\left(v_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\left(\varpi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+2\varpi_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+\varpi_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right),$$

gleich

$$\left(m_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + m_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\left(\varkappa_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varkappa_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \varkappa_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2,$$

wo

$$\left(\varkappa_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varkappa_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \varkappa_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 = 0$$

die Gleichung der zu $f=0$ zugehörigen Charakteristiken ist, — und

$$\left(\beta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \beta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^3,$$

d. i. hier

$$\left(u_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\left(\varpi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+2\varpi_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+\varpi_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right),$$

gleich

$$\left(n_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\left(\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2,$$

wo

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 = 0$$

die Gleichung der zu $\varphi=0$ zugehörigen Charakteristiken darstellt.

Da nun weder $f=0$ noch $\varphi=0$ ein für $F=0$, $\Phi=0$ gemeinsames Integral bildet, so kann

$$\varpi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2\varpi_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots,$$

weder gleich

$$\left(\varkappa_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varkappa_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \varkappa_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2,$$

noch gleich

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2$$

sein. Darum:

$$\left(\varkappa_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varkappa_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \varkappa_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2$$
$$= \left(v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)\left(n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right),$$

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2$$
$$= \left(u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)\left(m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + m_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right),$$

$$\varpi_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2\varpi_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + \varpi_{33}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2$$
$$= \left(m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + m_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)\left(n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right).$$

Die zwei ersten Gleichungen beweisen, dass die Charakteristiken für $f = 0$, $\varphi = 0$, $F = 0$, $\Phi = 0$, *die auf den gemeinsamen Integral-*M_3 *verlaufen, aus charakteristischen* M_1 *zusammengesetzt sind. Weiterhin folgt aus der dritten Gleichung, dass jede der vorhin erwähnten für* $F = 0$, $\Phi = 0$ *gemeinsamen charakteristischen* M_2 *jetzt, — wenn man nur die* M_2 *betrachtet, die auf einer für* $f = 0$, $\varphi = 0$ *gemeinsamen Integral-*M_3 *verlaufen, — aus* ∞^1 *für* $f = 0$ *und* ∞^1 *für* $\varphi = 0$ *charakteristischen* M_1 *zusammengesetzt ist.*

Früher (N. 26.) haben wir gesehen, dass auf jeder für $f = 0$, $\varphi = 0$ gemeinsamen Integral-M_3 eine Schaar von ∞^1 für beide Gleichungen gemeinsam charakteristischen M_2 gelegen ist. *Aus dem nun Entwickelten folgt, dass eine jede dieser* M_2 *einerseits aus* ∞^1 *für* $f = 0$ *charakteristischen* M_1, nämlich aus ∞^1 Charakteristiken von

$$n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0,$$

andererseits aus ∞^1 *für* $\varphi = 0$ *charakteristischen* M_1, nämlich aus ∞^1 Charakteristiken von

$$m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + m_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0,$$

erzeugt ist.

33. Zwei partielle Differentialgleichungen 2. O., — sie mögen $f = 0$, $\varphi = 0$ heissen, — die Integrale einer und derselben linearen partiellen Differentialgleichung 4. O. sind, müssen, wenn sonst die partiellen Differentialquotienten von f in Bezug auf die p_{ik} nicht denen von φ in Bezug auf dasselbe p_{ik} proportional sind, in dem durch die Gleichung (26) ausgedrückten Zusammenhange stehen. Die lineare partielle Differentialgleichung 4. O. muss nämlich für irgend eines der Elemente $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik}\, p_{ikl})$, die den ersten Derivirten jener partiellen Gleichungen 2. O. genügen, sowohl die Form:

$$\lambda_{11}\frac{d^2f}{dx_1^2}+\lambda_{12}\frac{d^2f}{dx_1\,dx_2}+\cdots+\lambda_{33}\frac{d^2f}{dx_3^2}=0,$$

als auch die Form:

$$\mu_{11}\frac{d^2\varphi}{dx_1^2}+\mu_{12}\frac{d^2\varphi}{dx_1\,dx_2}+\cdots+\mu_{33}\frac{d^2\varphi}{dx_3^2}=0$$

annehmen. Hieraus folgt aber die von den p_{iklm} unabhängige Relation zwischen f und φ:

$$\lambda_{11}\frac{d^2f}{dx_1^2}+\lambda_{12}\frac{d^2f}{dx_1dx_2}+\cdots=\mu_{11}\frac{d^2\varphi}{dx_1^2}+\mu_{12}\frac{d^2\varphi}{dx_1\,dx_2}+\cdots,$$

die genau die Relation (26) ist. (Die angeführte Gleichung zieht nämlich nach sich, dass $\lambda_{11}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_{11}}$, etc.)

Ueber die Beschaffenheit der gemeinsamen Integral-M_3 von $f=0$, $\varphi=0$ ist oben gesprochen worden. Ebenso haben wir gefunden, dass, wenn $f=0$, $\varphi=0$ in zwei ersten Integralen der Gleichung 4. O. enthalten sind, diejenigen Charakteristiken derselben, die auf einer gemeinsamen Integral-M_3 verlaufen, aus charakteristischen M_1 bestehen.

Umgekehrt, nur wenn das letztere der Fall ist, aber dann immer, können die λ, μ als Functionen von z, x_i, p_i, p_{ik} so bestimmt werden, dass durch

$$\lambda_1\frac{df}{dx_1}+\lambda_2\frac{df}{dx_2}+\lambda_3\frac{df}{dx_3}=0,\qquad \mu_1\frac{d\varphi}{dx_1}+\mu_2\frac{d\varphi}{dx_2}+\mu_3\frac{d\varphi}{dx_3}=0$$

zwei Gleichungen 3. O. von dem Charakter zweier erster Integrale der Gleichung 4. O., hinsichtlich der für $f=0$, $\varphi=0$ gemeinsamen Elemente $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik}\, p_{ikl})$, dargestellt werden. Von jenen Gleichungen 3. O. gilt nämlich jetzt der Satz, dass man, sobald Werthe von $(z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl})$, die den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ und ihren ersten Derivirten in Bezug auf x_1, x_2, x_3 genügen, benutzt werden, zwischen den ersten Derivirten der Gleichungen 3. O. eine lineare von den p_{iklm} unabhängige Relation von der Form (28) erhält.

Indem wir als allgemeinen Fall das festzuhalten haben, dass es für die lineare partielle Differentialgleichung 4. O. keine derartigen Gleichungen 3. O. giebt, haben wir auch keine für $f=0$, $\varphi=0$ charakteristische M_1 auszuzeichnen.

§ 5.

Ueber die Erweiterung auf den Raum von $n+1$ Dimensionen.

34. Entsprechend den vorangehenden Sätzen findet man ohne Mühe Sätze über partielle Differentialgleichungen des Raumes von $n+1$ Dimensionen. Nur auf einen Satz, zu dem die Erweiterung des in N. 22—25. Erörterten führt, will ich besonders aufmerksam machen.

Ich beschränke mich zuerst auf den Fall $n = 4$, also auf einen Raum von fünf Dimensionen.

Hat man eine partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0,$$

so kann man dieselbe auf einen Raum von vier Dimensionen so abbilden, dass dabei einer jeden Fläche des Raumes eine Integral-M_4 von $f = 0$, sogar einem jeden Flächenelemente des Raumes eine Charakteristik von $f = 0$ entspricht.

Betrachten wir nun eine partielle Differentialgleichung der 2. O. dieses letzten Raumes von vier Dimensionen, und nehmen wir an, dass sie eine Gleichung mit charakteristischen M_1 ist. Dann stellt sie sich als Bild einer Gleichung 2. O. des Raumes von fünf Dimensionen dar, die mit $f = 0$ charakteristische M_2 und aus ihnen erzeugte Integral-M_4 gemein hat. Die jene M_2 erzeugenden charakteristischen M_1 von $f = 0$ sind nur dann Charakteristiken der Gleichung 2. O., wenn die erstere Gleichung selbst ein Integral der letzteren bildet.

Eine partielle Differentialgleichung 2. O. allgemeinster Art jenes Raumes von vier Dimensionen kann als Bild einer partiellen Differentialgleichung 2. O. des Raumes von fünf Dimensionen aufgefasst werden, die mit der Gleichung 1. O. $f = 0$ charakteristische M_3 gemein hat, die ihrerseits sich zu Integral-M_4 zusammensetzen.

Zwei involutorische partielle Differentialgleichungen der 1. O.:

$$\begin{aligned} f(z, x_1, \cdots x_4, p_1, \cdots p_4) &= 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0, \end{aligned}$$

können auf einen Raum von drei Dimensionen so bezogen werden, dass jedem Flächenelemente des Raumes dabei eine charakteristische M_2 jenes Gleichungspaares entspricht. — Betrachten wir eine partielle Differentialgleichung 2. O. dieses Raumes von drei Dimensionen. Dieselbe ist als Bild einer partiellen Differentialgleichung 2. O. des Raumes von fünf Dimensionen anzusehen, die mit dem angegebenen Gleichungspaare charakteristische M_3 gemein hat.

Diejenigen M_2, die diese M_3 erzeugen und für das anfängliche Gleichungspaar charakteristisch sind, werden nur dann für die Gleichung 2. O. selbst charakteristische M_2, wenn diese das genannte Gleichungspaar als Integral enthält. Schliesslich würden wir partielle Differentialgleichungen 2. O. des Raumes von fünf Dimensionen erhalten können, die in ähnlicher Beziehung zu einem aus drei unter einander involutorischen Gleichungen 1. O. zusammengesetzten Systeme stehen.

Was ich hier besonders hervorheben möchte, ist das Auftreten von charakteristischen M_2 für partielle Differentialgleichungen 2. O. des Raumes von fünf Dimensionen. Denn in derselben Weise werden wir zu partiellen Differentialgleichungen 2. O. eines Raumes von $n+1$ Dimensionen gelangen, für welche nicht nur, wie immer, charakteristische M_{n-1}, sondern auch charakteristische M_{n-2}, M_{n-3}, etc. existiren. — Als Beispiel einer partiellen Differentialgleichung der 2. O., die charakteristische M_k zu einer solchen Zahl besitzt, dass dadurch alle Elemente $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik})$ der Gleichung erschöpft werden, können wir diejenige betrachten, die aus dem involutorischen Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} &f_1(z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n, c_1, c_2, \cdots c_\nu) = c', \\ &f_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = c'', \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &f_k(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = c^{(k)}, \text{---} \end{aligned}$$

wo

$$[f_i f_m] = 0 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{k(2n-k+1)}{2} - 1, \text{---}$$

durch vollständige Differentiation in Bezug auf $x_1, \cdots x_n$ und nachherige Elimination der willkürlichen Constanten c entsteht. — Die charakteristischen M_k jenes involutorischen Gleichungssystems werden nämlich eben Charakteristiken der in der genannten Weise resultirenden partiellen Differentialgleichung 2. O.

Aber es gilt weiter noch der Satz, dass jede Integral-M_n dieser Gleichung 2. O. eine sie ganz bedeckende Schaar von charakteristischen M_k enthält.

Ich beweise im Folgenden diesen Satz für den Fall $n=3$, $k=2$; der allgemeine Beweis kann analog geführt werden.

Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung 2. O., die aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, c_1, c_2, c_3, c_4) = c', \\ &\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = c'', \end{aligned}$$

wo

$$[f\varphi] = 0,$$

durch Differentiation nach x_1, x_2, x_3 und Elimination der willkürlichen Constanten c entsteht, und weiter irgend eine Integral-M_3 derselben. Ein Element $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik})$ dieser M_3 führt zu einem ganz bestimmten Gleichungspaare:

$$\begin{aligned} &f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, c_1^0, c_2^0, c_3^0, c_4^0) = c_0', \\ &\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = c_0'', \end{aligned}$$

dessen Gleichungen*) das Element enthalten; — und alle ∞^3 Elemente $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik})$ der M_3 bestimmen somit eine dreifache Schaar von Gleichungspaaren:

*) Mit ihren ersten Derivirten in Bezug auf x_1, x_2, x_3 vereint.

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0,$$

wo λ, μ, ν die Parameter der Schaar bedeuten. Es möge $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$ das Umhüllungsgebilde der ∞^3 Gleichungen $f=0$, $\Phi(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$ das Umhüllungsgebilde der ∞^3 Gleichungen $\varphi = 0$ bezeichnen. Dann haben die partiellen Differentialgleichungen 1. O. $F = 0$, $\Phi = 0$ die vorliegende M_3 als gemeinschaftliches Integral. Dieselbe M_3 ist auch ein Integral einer jeden der partiellen Differentialgleichungen 1. O.: $F + \lambda\Phi = 0$ (λ eine willkürliche Constante). Diejenigen Charakteristiken der letzteren Gleichungen, die von irgend einem Elemente $(z\,x\,p)$ der genannten M_3 ausgehen, erzeugen eine auf dieser M_3 liegende M_2, die selbst ein Umhüllungsgebilde von charakteristischen M_2 von zweifach unendlich vielen der anfänglichen Gleichungspaare: $f(z, x, p, c) = c'$, $\varphi(z, x, p, c) = c''$ wird.

In Folge hiervon werden alle die ∞^1 Werthsysteme der p_{ik}, die jener M_2, als zweifacher Schaar von Elementen $(z\,x\,p)$ aufgefasst, zugehören, eben der partiellen Differentialgleichung 2. O., die den Hauptgegenstand unserer Betrachtungen bildet, genügen. Desshalb gehen durch jene M_2 unendlich viele Integral-M_3 der Gleichung 2. O. hindurch; jene M_2 wird also eine für die Gleichung 2. O. charakteristische M_2. Auf jeder Integral-M_3 dieser partiellen Differentialgleichung 2. O. findet sich also eine Schaar von ∞^1 charakteristischen M_2, die Umhüllungsgebilde der erwähnten für die anfänglichen Gleichungspaare: $f(z, x, p, c) = c'$, $\varphi(z, x, p, c) = c''$ charakteristischen M_2 sind. — Dasselbe Raisonnement, auf die letzterwähnten Gleichungen 2. O. des Raumes R_{n+1} angewandt, führt zu dem oben angegebenen Satze.

Man bekommt nämlich Mannigfaltigkeiten von ∞^k zu je zwei unendlich benachbarten vereinigt liegenden Elementen $(z\,x_i\,p_i)$, deren sämmtliche Werthsysteme von p_{ik} der vorgelegten partiellen Differentialgleichung 2. O. genügen, — und auf jeder Integral-M_n findet man ∞^{n-k} derartige M_k. Weil ihre sämmtlichen Elemente $(z\,x_i\,p_i\,p_{ik})$ der Gleichung 2. O. genügen, müssen sie für diese Gleichung charakteristische M_k sein, wie ich die letzteren in der Abhandlung im XIII. Bande dieser Annalen S. 411. definirt habe. Die Eigenschaft einer jeden jener M_k, vermittelst sämmtlicher ihrer Elemente $(z\,x_i\,p_i\,p_{ik})$ der Gleichung 2. O. zu genügen, führt nämlich in erster Hand zu den Gleichungen $\Omega_{ik} = 0$ (siehe S. 421 d. citirten Abh.), die die charakteristischen M_k definiren. — Z. B. $k = n - 2$. Wenn die Gleichung 2. O. $F(z, x_i, p_i, p_{ik}) = 0$ von der gesammten Schaar der p_{ik} einer M_{n-2}, deren Gleichungen sind:

$$z = f(x_3, x_4, \cdots x_n),\quad x_1 = \varphi(x_3, x_4, \cdots x_n),\quad x_2 = \psi(x_3, x_4, \cdots x_n),$$
$$p_1 = \chi_1(\qquad\qquad),\quad p_2 = \chi_2(\qquad\qquad),$$

befriedigt werden soll, so ist diese Bedingung damit identisch, dass dieselbe Gleichung $F=0$ nach Substitution der folgenden Ausdrücke von $p_{13}, p_{14}, \cdots p_{23}, p_{24}, \cdots p_{nn}$ in p_{11}, p_{12}, p_{22}:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3} - p_{11}\,\varphi'(x_3) - p_{12}\,\psi'(x_3) - p_{13} = 0,$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial x_4} - p_{11}\,\varphi'(x_4) - p_{12}\,\psi'(x_4) - p_{14} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial p_2}{\partial x_3} - p_{21}\,\varphi'(x_3) - p_{22}\,\psi'(x_3) - p_{23} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial p_3}{\partial x_3} - p_{31}\,\varphi'(x_3) - p_{32}\,\psi'(x_3) - p_{33} = 0,$$

etc.

(siehe S. 418 der citirten Abhandlung)

von p_{11}, p_{12}, p_{22} frei werde. Desshalb muss sein:

$$\frac{\partial F}{\partial p_{11}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial p_{11}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}}\frac{\partial p_{14}}{\partial p_{11}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}\frac{\partial p_{23}}{\partial p_{11}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{nn}}\frac{\partial p_{nn}}{\partial p_{11}} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial p_{12}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}}\frac{\partial p_{14}}{\partial p_{12}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}\frac{\partial p_{23}}{\partial p_{12}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{nn}}\frac{\partial p_{nn}}{\partial p_{12}} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial p_{22}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial p_{22}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}}\frac{\partial p_{14}}{\partial p_{22}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}\frac{\partial p_{23}}{\partial p_{22}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{nn}}\frac{\partial p_{nn}}{\partial p_{22}} = 0.$$

Das sind aber gerade die Gleichungen $\Omega_{11}=0$, $\Omega_{12}=0$, $\Omega_{22}=0$ S. 420 d. c. A. Weil also durch die Gleichungen der obigen M_{n-2} diese drei: $\Omega_{11}=0$, $\Omega_{12}=0$, $\Omega_{22}=0$, befriedigt werden, so ist jene M_{n-2} eine für die Gleichung 2. O. charakteristische M_{n-2}.

Lund, im November 1878.

Ueber Multiplicatorgleichungen*).

Von Felix Klein in München.

Hier meine Methode zur Aufstellung der Multiplicatorgleichungen. — Betrachtet man ω_1, ω_2 als homogene Veränderliche, so sind $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ resp. von den Geraden -4, -6, -1 und reproduciren sich bei jeder linearen ganzzahligen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{cases}$$

sofern man bei $\sqrt[12]{\Delta}$ von einer zwölften Einheitswurzel absieht. Man kann nun zeigen, dass allgemein jede homogene Function von ω_1, ω_2 von einem negativen ganzen Grade, welche sich bis auf einen Factor bei den in Rede stehenden linearen Substitutionen reproducirt, eine *ganze* Function von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ ist. — Die Sache ist genau so, wie bei den endlichen Systemen linearer Substitutionen, und man hat z. B. auch folgende Sätze: dass g_2 die in Bezug auf ω_1, ω_2 genommene Hesse'sche Form von $\log \Delta$ ist, und g_3 die Functionaldeterminante beider (immer abgesehen von einem numerischen Factor).

Sei nun Δ' die Discriminante, welche bei einer Transformation vom Primzahlgrade n auftritt. So hat Δ' $(n+1)$ Werthe, also $\sqrt[12]{\Delta'}$ deren $12(n+1)$. Aber es zeigt sich, dass bereits die symmetrischen Functionen von nur $(n+1)$ richtig ausgewählten Werthen von $\sqrt[12]{\Delta'}$ unter die eben erwähnte Kategorie von Functionen fallen, also ganze Functionen von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ sind. Setzt man, der Kürze halber, für $\sqrt[12]{\Delta'}$ z, so erhält man also eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades für z. Da $\sqrt[12]{\Delta'}$ von der Dimension (-1) in ω_1, ω_2 ist, so hat der Coefficient von $z^{n+1-\varkappa}$ die Dimension $\varkappa$ und ist dementsprechend als ganze Function von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ aufzubauen.

*) Aus einem an Herrn Brioschi gerichteten Briefe, der in den Rendiconti del Istituto Lombardo abgedruckt wurde (Sitzungsbericht vom 2. Januar 1879). — Der Ausdruck „Multiplicator" bezieht sich auf das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirte Integral, siehe diese Annalen t. XIV, pag. 144, 148.

Jetzt betrachte man insbesondere den Werth:

$$\sqrt[12]{\Delta} \cdot \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right) = n \cdot q^{\frac{n}{6}} \cdot \Pi(1 - q^{2n\nu})^2 = z \cdot \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right).$$

Vermehrt man $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ um 1, so erhält dieses z die Einheitswurzel $e^{\frac{n i \pi}{6}}$ zum Factor, während bei dem ursprünglichen $\sqrt[12]{\Delta}$ die Einheitswurzel $e^{\frac{i\pi}{6}}$ zutritt. Bei dieser Aenderung muss die für z bestehende Gleichung ungeändert richtig bleiben; es muss sich also aus allen Gliedern derselbe Factor herausheben. Hieraus folgt, *dass der Coefficient von $z^{n+1-\varkappa}$ die Form hat: $\sqrt[12]{\Delta^\lambda}$. G, wo λ die kleinste positive ganze Zahl ist, welche in Bezug auf den Modul* 12 *zu $n\varkappa$ congruent ist, und G eine ganze Function von g_2, g_3 allein ist.* Insbesondere schliesst man: *So oft λ grösser als $\varkappa$ wird, ist der Coefficient von $z^{n+1-\varkappa}$ identisch Null.*

Auf Grund dieser Sätze kann man die Multiplicatorgleichung für ein beliebiges primzahliges n ohne Weiteres der Art nach anschreiben. Man findet, dass bei $n = 12\mu + 1$ nur g_2^3 und g_3^2 auftritt; bei $n = 12\mu + 5$ stellt sich das g_2 ein, bei $n = 12\mu + 7$ das g_3; bei $n = 12\mu + 11$ treten beide, g_2 und g_3, auf. Für $n = 5, 7, 13$ stimmt dies Resultat mit meinen früheren Formeln überein*); für $n = 11$ erhält man in Uebereinstimmung mit Ihren Angaben**):

$$z^{12} + a \cdot \Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^6 + b \cdot \Delta^{\frac{4}{12}} g_2 \cdot z^4 + c \cdot \Delta^{\frac{3}{12}} g_3 \cdot z^3 + d \cdot \Delta^{\frac{2}{12}} g_2^2 \cdot z^2$$
$$+ e \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} g_2 g_3 \cdot z + f = 0,$$

wo $a, b, \cdots$ numerische Coefficienten sind.

Was nun diese numerischen Coefficienten angeht, so beweist man ohne Weiteres, dass der letzte den Werth $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n$ hat, und dass alle anderen, bis auf den vorletzten, durch n theilbar sind. Man hat ausserdem folgende Regeln, welche freilich gerade den Fall $n \equiv 11$ (mod. 12) nicht betreffen:

1) *Für* $n = 12\mu + 1$ *oder* $= 12\mu + 5$.

Setzt man $g_3 = 0$, so verwandelt sich die linke Seite der Multiplicatorgleichung, nach Abtrennung eines quadratischen Factors, in ein vollständiges Quadrat.

---

*) Annalen XIV, pag. 143, 148.

**) Brioschi in den Annali die Matematica, (Ser. II) t. IX, pag. 167: Sopra una classe di equazioni modulari. (Nov. 1878).

2) *Für* $n = 12\mu + 1$ *oder* $12\mu + 7$.

Setzt man $g_2 = 0$, *so verwandelt sich die linke Seite der* ***Multiplicatorgleichung*** *nach Unterdrückung eines quadratischen Factors* ***in einen*** *vollen Cubus.*

Man kann überdies die numerischen Coefficienten der Gleichungen, welche für $g_2 = 0$ oder $g_3 = 0$ entstehen, allemal als rationale Functionen von Einheitswurzeln a priori angeben; doch habe ich diesen Gegenstand noch nicht hinlänglich untersucht. Um die bei $n = 11$ auftretenden Zahlencoefficienten zu bestimmen, habe ich mich daher einstweilen der Reihenentwickelungen nach aufsteigenden Potenzen von q bedient, und so das Resultat erhalten, welches ich Ihnen bereits in meinem vorigen Briefe*) mittheilte:

$$z^{12} - 90 \cdot 11 \cdot \sqrt[2]{\Delta} \cdot z^6 + 40 \cdot 11 \cdot 12 g_2 \cdot \sqrt[3]{\Delta} \cdot z^4 - 15 \cdot 11 \cdot 216 g_3 \cdot \sqrt[4]{\Delta} \cdot z^3$$
$$+ 2 \cdot 11 \cdot (12 g_2)^2 \cdot \sqrt[6]{\Delta} \cdot z^2 - 12 g_2 \cdot 216 g_3 \cdot \sqrt[12]{\Delta} \cdot z - 11 = 0 \text{**)}.$$

*) Vom 25. December 1878.

**) Untersuchungen derselben Art, wie die im Texte besprochenen, hat mit mir ungefähr gleichzeitig Hr. Kiepert aufgenommen und in neuerer Zeit weitergeführt. Seine Resultate, auf welche ich hiermit verweisen will, sollen demnächst im Borchardt'schen Journale veröffentlicht werden [März 1879.]

München, den 30. December 1878.

Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung.

Von M. Noether in Erlangen.

Sobald man bei einer Curve vierter Ordnung *eine* Wurzel der Gleichung 36[ten] Grades adjungirt, welche die 36 Schaaren von Berührungscurven dritter Ordnung bestimmt, so reducirt sich die Gleichung für die 28 Doppeltangenten auf eine allgemeine Gleichung vom achten Grade. Es sollen nun im Folgenden neue geometrische Eigenschaften der *Curve* dargelegt werden, die sich an die Untersuchung der Gleichungen vom 8[ten] Grade knüpfen.

Solche Untersuchungen sind aber von verschiedener Seite angestellt. Sie beziehen sich zunächst auf die *Modulargleichung achten Grades,* welche bei der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen zwischen den vierten Wurzeln aus dem ursprünglichen und dem transformirten Modul besteht. Nach den Andeutungen von Galois hat Betti*) deren Gruppe von 2.168 Substitutionen, bez. von 168 nach Adjunction der Wurzel aus der Discriminante, analytisch entwickelt und hiernach für die Existenz einer Resolvente siebenten Grades, mit einer Gruppe von 168 Substitutionen, den Beweis erbracht. Sodann hat Kronecker**) eine hieraus folgende Function von sieben Buchstaben, welche durch die 168 Substitutionen unverändert bleibt, also bei allen Permutationen der 7 Grössen nur 30 Werthe annimmt, angegeben. Endlich ist Hermite***) wiederholt auf die Darstellung der Gruppen von 168 Substitutionen bei 8 und bei 7 Grössen und auf die Bildung der Function der 8 Grössen, welche dabei 7 Werthe annimmt, eingegangen.

---

*) Betti, „Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari etc.", Ann. di Scienze m. e. f. da Tortolini, IV. (1853), und spätere Mittheilungen.

**) Kronecker, „Ueber Gleichungen des 7[ten] Grades", Monatsber. der Berl. Acad., April 1858. Die in dieser Note bezeichnete Eigenschaft der speciellen Gleichung 7[ten] Grades ist, wie unten anzugeben, etwas zu modificiren.

***) Hermite, „Sur la théorie des équations modulaires", Paris 1859; auch in den Compt. Rend. und den Ann. di Matem. von 1859 etc.

An allen diesen Orten ist die wesentlichste Eigenschaft der entsprechenden Gleichungen 7^{ten} Grades: *dass sich ihre 7 Wurzeln zu 7 Tripeln ordnen*, nicht angeführt. Aus diesem Grunde ist auch der Zusammenhang dieser Betrachtungen mit solchen, welche Mathieu*) von anderer Seite her über die Gleichungen achten Grades angestellt hat, nicht klargelegt worden, insbesondere in C. Jordan's „Théorie des substitutions" nicht angegeben. Mathieu bildet eine Function von 8 Grössen, welche durch 8.168 Substitutionen unverändert bleibt; unter Adjunction einer solchen Function der Wurzeln einer Gleichung achten Grades ordnen sich dieselben in Quadrupel, und man wird, da die Gruppe zusammengesetzt ist, direct zu einer Resolvente siebenten Grades geführt. Aber diese Resolvente hat dieselbe Tripeleigenschaft und Gruppe, wie die oben angeführte; es bleibt also hier noch zu entwickeln, wie man zugleich auch indirect auf diese Gleichung kommen kann, indem auch der Uebergang von der Mathieu'schen Gleichung zu einer Gleichung achten Grades mit der Gruppe der Modulargleichung muss ausgeführt werden können. Ich will dabei nur erwähnen, dass neuere noch zu citirende Arbeiten zeigen, dass die Gleichungen siebenten Grades mit Tripeleigenschaften, also auch die Mathieu'sche Gleichung, durch elliptische Functionen gelöst werden können.

Da sich diese Resultate und Zusammenhänge in äusserst einfacher Weise, welche von zahlentheoretischen Betrachtungen keinen Gebrauch macht, darstellen lassen, so entwickele ich dieselben zunächst. Ehe ich sodann die Anwendung auf gewisse, bei den Curven 4^{ter} Ordnung bisher noch nicht betrachtete Kegelschnittsysteme mache, bilde ich noch diejenige Bezeichnungsweise der Doppeltangenten in den Paaren von 8 Grössen aus, die, aus den Hesse'schen und Aronhold'schen Arbeiten von Cayley entwickelt, jetzt allgemein angewendet wird**). Ich führe diese Ausbildung über das eigentliche Bedürfniss des vorliegenden Aufsatzes hinaus, da hierdurch erst die Operationen für alle an der Curve zu studirenden Systeme leicht verwerthbar werden.

§ 1.

Die Sieben-Systeme. Tripelsysteme.

Acht Grössen

$$x_0, x_1, x_2, \cdots x_7$$

kann man auf $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ verschiedene Weisen in je 4 Paare ordnen; es giebt also symmetrische Functionen solcher 4 Paare, etwa

*) E. Mathieu, Comptes Rend. 1858 etc. Ferner: „Étude des fonctions de plusieurs quantités etc.", Liouville's Journ., Sér. II, VI (1861), und „Sur la résolution des équations etc.", Ann. di Mat. di Tortolini, IV (1861).

**) Siehe Salmon's „Higher plane curves", übers. von Fiedler, Cap. VI.

$$K = x_0 x_1 + x_2 x_3 + x_4 x_5 + x_6 x_7 ,$$

die unter allen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8$ Substitutionen, welche die Grössen x_i unter einander permutiren, 105 verschiedene Werthe annehmen. Eine solche Function sei zur Abkürzung im Folgenden mit

$$K = [01, 23, 45, 67]$$

bezeichnet. Wir behandeln zunächst die Aufgabe, alle *Systeme von je 7 Functionen K* anzugeben, derart, dass die 7 Functionen eines Systems alle 28 Paare ik, jedes einmal, enthalten.

Um ein solches System zu erhalten, zerlege man die 4 Paare von K auf die 3 möglichen Weisen in je 2 Doppelpaare:

(a) 01, 23; 45, 67,

(b) 01, 45; 23, 67,

(c) 01, 67; 23, 45,

und mache nun alle *innerhalb* der Doppelpaare möglichen Vertauschungen der 8 Grössen $0, 1, \cdots 7$. Aus (a) erhält man dann die beiden neuen Functionen:

$$A_1 = [02, 13, 46, 57], \qquad A_2 = [03, 12, 47, 56],$$

oder aber die beiden folgenden:

$$A_1' = [02, 13, 47, 56], \qquad A_2' = [03, 12, 46, 57];$$

ebenso aus (b):

$$B_1 = [04, 15, 26, 37], \qquad B_2 = [05, 14, 27, 36];$$

oder aber:

$$B_1' = [04, 15, 27, 36], \qquad B_2' = [05, 14, 26, 37],$$

und aus (c):

$$C_1 = [06, 17, 24, 35], \qquad C_2 = [07, 16, 25, 34],$$

oder

$$C_1' = [07, 16, 24, 35], \qquad C_2' = [06, 17, 25, 34].$$

Nimmt man nun K, ferner die beiden Functionen A *oder* die beiden Functionen A', weiter die beiden B oder die beiden B', endlich die beiden C oder die beiden C', so hat man 7 Functionen, welche offenbar ein System der gesuchten Art bilden.

Aber die 2^3 auf diese Weise aus der Function K gebildeten Systeme zerfallen wieder in *zwei wesentlich von einander verschiedene Gattungen.*

Aus zwei Paaren ik und il, welche eine Grösse i gemeinsam haben, leiten wir nämlich eindeutig ein neues Paar kl her. Verbindet man auf diese Weise alle Grössenpaare von K mit je zwei entsprechenden irgend einer andern der Functionen, welche aber kein Paar mit K gemein hat, etwa

$$K' = (0'1', 2'3', 4'5', 6'7'),$$

und umgekehrt die von K' mit jenen von K, so erhält man im Ganzen entweder 8 neue Paare oder aber nur 4 neue Paare; denn sobald zwei dieser 8 Paare zusammenfallen, etwa in 12, so wird K' von der Form

$$(02,\ 13,\ 46,\ 57)$$

und es fallen dann auch die übrigen 6 paarweise zusammen. Wir unterscheiden also unter den *Functionenpaaren* K, K', welche kein Grössenpaar gemeinsam haben, zwei Arten: die *erster* Art seien solche, welche auf nur 4 neue, die *zweiter* Art solche, welche auf 8 neue Grössenpaare führen. Diese Beziehungen bleiben bei jeder Substitution erhalten.

Die 4 Grössenpaare, auf welche ein Functionenpaar *erster* Art führt, bilden eine neue Function K''. Und da bei drei Grössenpaaren ik, il, kl *jedes* aus den beiden andern folgt, so muss dasselbe für die 3 Functionen K, K', K'' gelten. Von den 3 Functionen K, K', K'' führen also irgend zwei eindeutig auf die dritte, und wir bezeichnen daher solche 3 Functionen als ein *Functionentripel.* Ein solches Tripel geht ebenfalls durch jede auf die 8 Grössen $0, 1, \cdots 7$ ausgeführte Substitution wieder in ein ähnliches Tripel über.

Unter den Functionen K, A_i, $A_i' \cdots$ bilden

$$K,\ A_1,\ A_2$$

ein Functionentripel; ebenso:

$$K,\ A_1',\ A_2',$$
$$K,\ B_1,\ B_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Ferner bilden A_1, B_1 ein Functionenpaar erster Art, aber A_1, B_1' ein solches zweiter Art. Die aus A_1, B_1 abgeleitete Function ist C_1, und die Bildungsweise unserer Functionen zeigt, dass ebenso A_1, B_2, C_2, ferner auch A_1', B_1', C_1', etc. Tripel bilden. Hiernach folgen aus K zwei Systeme von je 7 Functionen, nämlich:

$$\Sigma = K,\ A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C_1,\ C_2,$$
$$\Sigma' = K,\ A_1',\ A_2',\ B_1',\ B_2',\ C_1',\ C_2',$$

von der Eigenschaft, dass man aus den 7 Functionen eines der Systeme auf sieben verschiedene Weisen Tripel bilden kann, wobei man zwei der Functionen eines Tripels in ganz willkürlicher Weise aus dem System herauswählen kann; nämlich aus Σ die Tripel

$$K\ A_1 A_2;\quad K\ B_1 B_2;\quad K\ C_1 C_2;$$
$$A_1 B_1 C_1;\quad A_1 B_2 C_2;\quad A_2 B_1 C_2;\quad A_2 B_2 C_1,$$

und aus Σ' die 7 Tripel

$$K\ A_1' A_2';\quad K\ B_1' B_2';\quad K\ C_1' C_2';$$
$$A_1' B_1' C_1';\quad A_1' B_2' C_2';\quad A_2' B_1' C_2';\quad A_2' B_2' C_1'.$$

Ein solches *Tripelsystem* Σ hat weiter die Eigenschaft, dass es aus jeder seiner Functionen auf gleiche Weise abgeleitet werden kann, wie es aus K geschehen ist. So kommt man offenbar, von A_1 ausgehend, zunächst auf die 3 Functionenpaare erster Art, welche je mit A_1 ein Tripel bilden:

$$KA_2, \quad B_1C_1, \quad B_2C_2,$$

und diese liefern, in Verbindung mit A_1, wiederum Σ. Dasselbe gilt vom Tripelsystem Σ'.

Die übrigen 6 oben aus K abgeleiteten 7-Systeme von Functionen besitzen wesentlich andere Eigenschaften, als diese beiden Tripelsysteme. In einem solchen, z. B.

$$K, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1', C_2',$$

zerfallen, wenn man K auszeichnet, die übrigen 6 Functionen zwar noch in 3 Paare der ersten Art, welche auch mit K je ein Tripel bilden; aber dies geschieht nicht mehr, wenn man irgend eine andere der 7 Functionen, als K, herausnimmt. Diese Systeme sind also einer ihrer Functionen, K, ausschliesslich zugeordnet und folglich uneigentliche.

Es giebt im Ganzen 30 *Tripelsysteme* von der Form Σ. Denn irgend eine der 105 Functionen K führt nach dem Gesagten auf zwei Tripelsysteme, und jedes solches System ist aus irgend einer seiner 7 Functionen ableitbar, so dass man $\frac{105 \cdot 2}{7} = 30$ derselben erhält.

Von den uneigentlichen Systemen giebt es 630; denn sie sind den 105 Functionen K zu je 6 einzeln zugeordnet.

§ 2.

Gruppe G eines Tripelsystems. Quadrupelsystem der acht Grössen.

Nach § 1. giebt es symmetrische Functionen der sieben Functionen, aus denen Σ besteht, etwa das Product derselben:

$$\begin{aligned}\Sigma &= [01, 23, 45, 67]\cdot[02, 13, 46, 57]\,[03, 12, 47, 56]\cdot \\ &\quad [04, 15, 26, 37]\,[05, 14, 27, 36]\,[06, 17, 24, 35]\,[07, 16, 25, 34], \\ &= K\cdot A_1\cdot A_2\cdot B_1\cdot B_2\cdot C_1\cdot C_2,\end{aligned}$$

welche unter allen auf die 8 Grössen $0, 1, \cdots 7$ ausgeführten Substitutionen genau 30 numerisch von einander verschiedene Werthe annehmen. Die Function Σ geht also durch $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8}{30} = 8\cdot 168$ Substitutionen in sich über, welche die *Gruppe* G von Σ bilden. Wir wollen diese Substitutionsgruppe G genauer untersuchen.

Es giebt eine in G *enthaltene Gruppe* H *von* 8 *Substitutionen*, *welche jede einzelne der sieben Functionen von Σ in sich überführt.* Sei nämlich (k) die Substitution

$$(k) = (01)\,(23)\,(45)\,(67),$$

welche nur die Grössen jedes Paares von K unter sich vertauscht, ebenso

$$\begin{aligned}(a_1) &= (02)\,(13)\,(46)\,(57),\\ (a_2) &= (03)\,(12)\,(47)\,(56),\\ (b_1) &= (04)\,(15)\,(26)\,(37),\\ (b_2) &= (05)\,(14)\,(27)\,(36),\\ (c_1) &= (06)\,(17)\,(24)\,(35),\\ (c_2) &= (07)\,(16)\,(25)\,(34),\end{aligned}$$

analog aus $A_1, A_2, \cdots$ definirt. Auch diese Substitutionen zerfallen in Tripel, so nämlich dass

$$(k)^2 = (a_1)^2 = (a_2)^2 = 1,$$
$$(k)\,(a_1)\,(a_2) = (k)\,(a_2)\,(a_1) = (a_1)\,(k)\,(a_2) = \cdots = 1,$$

also $(k), (a_1), (a_2)$ ein Tripel bilden. Aus irgend solchen drei dieser 7 Substitutionen, die kein Tripel bilden, z. B. aus (k), (a_1), (b_1) setzen sich also die übrigen zusammen; nämlich:

$$(k)\,(a_1) = (a_2), \qquad (k)\,(b_1) = (b_2), \qquad (a_1)\,(b_1) = (c_1),$$
$$(k)\,(a_1)\,(b_1) = (c_2),$$

und es folgen aus den dreien keine anderen Substitutionen, ausser der identischen 1. Die 7 Substitutionen bilden also eine Gruppe und sie lassen sich als das Product der drei gegen einander vertauschbaren Gruppen

$$1,\ (k_1);$$
$$1,\ (a_1);$$
$$1,\ (b_1),$$

darstellen. Ferner ändert keine der Substitutionen irgend eine der 7 Functionen von Σ, sie bilden also die oben bezeichnete Gruppe H.

Indem die 7 Functionen $K, A_1, \cdots C_2$ durch die 8 Substitutionen der Gruppe H ganz unverändert bleiben, erhält man, durch Anwendung aller $8 \cdot 168$ Substitutionen der zusammengesetzten Gruppe G auf die Grössen $0, 1 \cdots 7$, eine Gruppe Γ von nur 168 Substitutionen unter den 7 Grössen $K, A_1, \cdots C_2$. Diese, der Gruppe G isomorphe Gruppe Γ ergiebt sich auch direct durch Betrachtung der *Tripeleigenschaften*, welche die 7 Functionen von Σ besitzen. Denn dieselben erlauben nur, zwei der 7 Functionen an beliebige Stellen zu rücken, die dritte der Functionen ist dann unter den 7 eindeutig gegeben, aber die vierte kann noch alle 4 weiteren Werthe annehmen, wonach die übrigen eindeutig bestimmt sind; in der That $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ Substitutionen. Zugleich sieht man aus dieser Eigenschaft noch, dass diejenigen Substitutionen der Gruppe Γ, welche eine der 7 Functionen von Σ ungeändert lassen, eine solche Gruppe von 24 Substitutionen bilden, wie sie bei einer Gleichung 4ten Grades auftritt.

Aus der Betrachtung der Function Σ folgt noch eine Beziehung der Gruppe G zu einer Eigenschaft der 8 Grössen $0, 1, \cdots 7$, welche der Beziehung der Gruppe Γ zur Tripeleigenschaft der Functionen $K, A_1, \cdots C_2$ analog ist. Vermöge Σ ordnen sich nämlich die Grössen $0, 1 \cdots 7$ zu *Quadrupeln* an, indem 4 Zahlen eines solchen Quadrupels (wie $0, 1, 2, 3$) in jeder der 7 Functionen von Σ entweder nur in 2 oder in alle 4 Paare vertheilt auftreten, nie in 3 Paare; und die 4 ein solches Quadrupel zu $0, 1, \cdots 7$ ergänzenden Zahlen bilden ebenfalls ein Quadrupel von Σ (wie $4, 5, 6, 7$). Die 8 Grössen lassen sich also in *Quadrupelpaare* ordnen, und zwar kann man offenbar, um ein Quadrupel zu erhalten, *drei* Grössen ganz willkürlich aus den 8 Grössen herauswählen, wodurch dann die vierte *eindeutig* bestimmt ist. Hieraus ergiebt sich, dass $\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 7$ solcher Quadrupelpaare in Σ existiren. Alle Substitutionen, welche Σ in sich überführen, können auch diese Quadrupelpaare nur untereinander vertauschen; sie sind also in der Gruppe einer symmetrischen Function dieser 7 Quadrupelpaare, etwa:

$$\begin{aligned} S = &\{[0,1,2,3]+[4,5,6,7]\}\{[0,1,4,5]+[2,3,6,7]\}\{[0,1,6,7] \\ &\qquad +[2,3,4,5]\} \\ &\{[0,2,4,6]+[1,3,5,7]\}\{[0,2,5,7]+[1,3,4,6]\}\{[0,3,4,7] \\ &\qquad +[1,2,5,6]\}\{[0,3,5,6]+[1,2,4,7]\} \end{aligned}$$

(wo $[0, 1, 2, 3]$ eine symmetrische Function von $0, 1, 2, 3$ vorstellt)

enthalten. Umgekehrt sind vermöge der Quadrupeleigenschaft durch 4 Grössen, die kein Quadrupel bilden, wie $0, 1, 2, 4$, die übrigen eindeutig festgelegt; man kann also durch die aus dieser Eigenschaft folgende Gruppe drei der Grössen mit beliebigen andern aus den 8 Grössen $0, 1, \cdots 7$ vertauschen, was eine 4te Grösse festlegt, während eine fünfte dann noch alle 4 weiteren Werthe annehmen kann. Aus dieser Eigenschaft folgt daher eine Gruppe von der Ordnung $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 8 \cdot 168$, der Ordnung von G, so dass dieselbe mit G *identisch* wird. Die in G enthaltene Gruppe H lässt wieder jedes einzelne der 7 Quadrupelpaare von S unverändert, so dass diese 7 Paare nur wieder zu einer G isomorphen Gruppe von der Ordnung 168 führen.

§ 3.

Die Gleichung achten Grades.

Aus § 1. und § 2. ergeben sich für die allgemeine Gleichung $f = 0$ vom 8^{ten} Grade, deren Wurzeln $x_0, x_1, \cdots x_7$ seien, die folgenden Resultate. Zunächst existirt eine Resolvente vom Grade 30, $R = 0$, welcher Σ genügt. Wenn *eine* Wurzel Σ derselben bekannt ist, so reducirt sich die Gruppe der Gleichung $f = 0$ auf G, nämlich auf diejenigen $8 \cdot 168$ Substitutionen, welche Σ in sich überführen. Man kann, da sich auch die Function S rational durch Σ ausdrückt, den Affect der Gleichung dann dahin aussprechen, dass sich ihre Wurzeln zu Quadrupeln ordnen, d. h., dass zwischen *vier* ihrer Wurzeln eine symmetrische rationale Relation besteht:

$$\Theta(x_i, x_k, x_l, x_m) = 0,$$

in der drei Wurzeln ganz beliebig angenommen werden können, die vierte Wurzel aber dann eindeutig bestimmt ist. Aus 4 solchen Wurzeln, die kein Quadrupel bilden, ergeben sich dann, mit Hülfe von Σ, die 4 anderen *rational.*

Um, nach Adjunction von Σ, die Gleichung $f = 0$ zu lösen, hat man zunächst die Resolvente siebenten Grades aufzustellen, $P = 0$, welcher die sieben Functionen von Σ (deren symmetrische Functionen sich durch Σ rational ausdrücken) genügen. Der Affect *dieser* Gleichung siebenten Grades lässt sich so aussprechen, dass sich ihre Wurzeln zu Tripeln ordnen, d. h. dass zwischen drei ihrer Wurzeln eine symmetrische rationale Relation besteht, in der zwei Wurzeln beliebig ausgewählt werden können, wonach dann die dritte Wurzel eindeutig bestimmt ist. Aus drei solchen Wurzeln, die kein Tripel bilden, setzt sich dann jede andere rational zusammen. Die Gruppe dieser Gleichung ist die der zusammengesetzten Gruppe G isomorphe Gruppe Γ von 168 Substitutionen. Zur Lösung dieser Gleichung hat man von ihr *eine* Wurzel zu suchen, sodann eine Gleichung dritten Grades und zwei quadratische Gleichungen aufzulösen.

Nach Lösung dieser Gleichung siebenten Grades, $P = 0$, reducirt sich die Gruppe von $f = 0$ auf die Gruppe H von 8 Substitutionen. Und da diese Gruppe als Product dreier gegeneinander vertauschbarer Gruppen von je 2 Substitutionen, nämlich

$$1, (k); \quad 1, (a_1); \quad 1, (b_1),$$

darstellbar ist, so hat man noch nacheinander *drei quadratische* Gleichungen aufzulösen, um die Wurzeln der Gleichung 8^{ten} Grades selbst zu erhalten.

Die nacheinander auszuführenden Operationen sind also: die Bestimmung *einer* Wurzel einer Resolvente 30^{ten} Grades, die Auflösung einer speciellen Gleichung 7^{ten} Grades (mit Tripeleigenschaft), und die dreier quadratischer Gleichungen.

Dass die Resolvente 30^{ten} Grades auf eine solche vom 15^{ten} Grade, unter vorheriger Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante von $f=0$, zurückkommt, wird die weiter folgende Darstellung der Gruppe G von selbst zeigen.

§ 4.

Darstellung der Gruppe G.

Die zusammengesetzte Gruppe G von Σ lässt sich als Product der Gruppe H mit 168 geeignet bestimmten Substitutionen darstellen. Man kann sogar auch auf verschiedene Weisen *Gruppen* von 168 Substitutionen finden, welche, mit H verbunden, zu G führen, z. B. dadurch, dass man diejenige Gruppe von 168 Substitutionen aufstellt, welche *eine* der Grössen $x_0, x_1, \cdots x_7$ unverändert lässt, etwa x_7.

Innerhalb dieser Gruppe existiren wieder Untergruppen von $\frac{168}{7}=24$ Substitutionen, z. B. diejenige J, welche eine der 7 Functionen von S, etwa das Quadrupelpaar

$$[0, 1, 2, 3] + [4, 5, 6, 7]$$

unverändert lässt. Indem dieselbe die 4 Grössen $0, 1, 2, 3$ nur unter sich, und ebenso die 3 Grössen $4, 5, 6$ unter sich vertauschen kann, sieht man sogleich, dass dieselbe sich aus den 4 Gruppen

$$\begin{array}{l} 1, (01)(23); \\ 1, (02)(13); \\ 1, (123)(654), \quad (132)(645); \\ 1, (01)(45) \end{array}$$

als deren Product darstellt.

Verbindet man mit dieser Gruppe J die Potenzen $(i)^0, (i)^1, \cdots (i)^6$ der cyklischen Substitution

$$(i) = (0\,4\,1\,3\,2\,5\,6),$$

so hat man im Product dieser Gruppe I (von der Ordnung 7) mit J die Gruppe $I \cdot J$ von 168 Substitutionen, welche in G enthalten ist und x_7 unverändert lässt. Die Gruppe G stellt sich also als das Product $I \cdot J \cdot H$ dar.

Alle Substitutionen von G, welche zwei der Functionen von S, etwa

$$\begin{aligned} s_1 &= [0, 3, 5, 6] + [1, 2, 4, 7], \\ s_2 &= [1, 2, 5, 6] + [0, 3, 4, 7] \end{aligned}$$

unverändert lassen oder nur mit einander vertauschen, ändern auch die dritte Function von S

$$s_0 = [0, 1, 2, 3] + [4, 5, 6, 7]$$

nicht. Dieselben sind also in $H \cdot J$ enthalten, und sie ergeben sich als das Product von H mit den beiden in J enthaltenen Gruppen

$$1, (01)(23), \quad (02)(13), \quad (03)(12);$$
$$1, (03)(56).$$

Die eine Hälfte dieser Gruppe, nämlich das Product von H mit

$$1, (03)(12), \quad (03)(56), \quad (12)(56),$$

ändert weder s_1 noch s_2. Diese vier Substitutionen und die in H enthaltene Gruppe

$$1, \quad (a_2) = (03)(12)(47)(56)$$

erzeugen ferner eine Gruppe von 8 Substitutionen, welche die beiden Theile, aus welchen s_1 besteht, für sich unverändert lassen, ebenso die beiden Theile von s_2. Und durch dieselbe Gruppe von 8 Substitutionen gehen auch die beiden Theile von s_0 einzeln in sich über. Fügt man ferner diesen 8 Substitutionen die Substitution (01) (23) hinzu, so erhält man 8 neue Substitutionen, durch welche der erste bez. zweite Theil von s_1 in den ersten bez. zweiten Theil von s_2 übergeht, die beiden Theile von s_0 aber ebenfalls einzeln unverändert bleiben.

Diese Darstellung der Gruppe G lässt weitere Schlüsse für die Gleichung 8ten Grades und ihre Resolventen zu. Zunächst zeigt sie, dass alle $8 \cdot 168$ Substitutionen von G sich aus einer *geraden* Zahl von Transpositionen zusammensetzen. Unter der „alternirenden" Gruppe von allen $\frac{1 \cdot 2 \cdots 8}{2}$ *geraden* Substitutionen, denen man die 8 Grössen $x_0, x_1, \cdots x_7$ unterwerfen kann, nimmt daher Σ oder S nur 15 Werthe an; und die übrigen 15 Werthe werden durch ungerade Substitutionen aus jenen erhalten. Hierdurch ist die letzte Bemerkung des § 3. gerechtfertigt.

Nimmt man ferner für die Functionen, aus denen S besteht, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} s_0 &= \left\{(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) - (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)\right\}^2, \\ s_1 &= \left\{(x_0 + x_3 + x_5 + x_6) - (x_1 + x_2 + x_4 + x_7)\right\}^2, \\ s_2 &= \left\{(x_1 + x_2 + x_5 + x_6) - (x_0 + x_3 + x_4 + x_7)\right\}^2, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

so stellt sich, unter Adjunction von S, nicht nur s_2 als rationale, symmetrische Function von s_0, s_1 dar, sondern auch $\sqrt{s_2}$ als solche von $\sqrt{s_0}, \sqrt{s_1}$. Eine weitere Quadratwurzel $\sqrt{s_3}$ genügt, um alle übrigen $\sqrt{s_i}$ eindeutig zu erhalten, und damit auch die Grössen x_k selbst als lineare Functionen der $\sqrt{s_i}$.

§ 5.

Darstellung der Gruppe G' von 168 Substitutionen.

Die 15 Tripelsysteme, welche aus Σ durch alle ungeraden Substitutionen hervorgehen, zerfallen, wenn Σ bekannt ist, nach § 1. in *zwei* Arten: in *sieben* Systeme, von denen jedes je *eine* Function mit Σ gemein hat (wie das Tripelsystem Σ' des § 1.) und in *acht* weitere Systeme, $\Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_7$, die mit Σ keine Function gemein haben. Die 7 Systeme sind den 7 Functionen von Σ einzeln zugeordnet. Die 8 Systeme $\Sigma_0, \cdots \Sigma_7$ gehen durch die Gruppe G von $8 \cdot 168$ Substitutionen (sogar schon durch H, wie man sich leicht überzeugt) in sich über; und die Gleichung 8^{ten} Grades, welche diese 8 Systeme liefert, ist der ursprünglichen Gleichung 8^{ten} Grades, nach Adjunction von Σ, ganz äquivalent. Diejenigen Substitutionen, welche Σ und zugleich *eines* der 8 Systeme, Σ_0, in sich überführen, bilden eine Gruppe G' von 168 Substitutionen, die in G enthalten ist. Wir wollen eine solche aufstellen.

Transformirt man die oben genannte, in G enthaltene cyklische Substitution

$$(i) = (0\,4\,1\,3\,2\,5\,6)$$

durch die ungerade Substitution

$$(s) = (0\,6)\,(4\,5)\,(1\,2),$$

so geht dieselbe in $(s^{-1}is) = (i)^6$, also durch diese Transformation die Gruppe I der Potenzen von (i) in sich über. Die aus Σ vermittelst der Substitution (s) entstehende Function Σ_0 bleibt also durch I ebenfalls unverändert; ebenso — und wir wollen statt Σ hier diese Function betrachten — die aus S vermittelst (s) entstehende Function S_0:

$$\begin{aligned} S_0 = &\{[6,1,2,3]+[0,4,5,7]\}\{[6,2,4,5]+[0,1,3,7]\}\{[0,2,6,7]\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[1,3,4,5]\}\\ &\{[0,1,5,6]+[2,3,4,7]\}\{[1,4,6,7]+[0,2,3,5]\}\{[3,5,6,7]\\ &\qquad\qquad\qquad +[0,1,2,4]\}\{[0,3,4,6]+[1,2,5,7]\}. \end{aligned}$$

Aus den 168 Substitutionen G' soll nun die Gruppe von 24 Substitutionen ausgesondert werden, welche eine der Functionen von S, etwa

$$s_0 = [0,1,2,3] + [4,5,6,7]$$

unverändert lässt. Nimmt man zunächst aus $G = H \cdot I \cdot J$ diejenigen 24 Substitutionen, welche auch 7 in sich überführen, so ist dies die oben angegebene Gruppe J. Aus dieser Gruppe J, welche 4, 5, 6 unter einander vertauscht, können in G' nur diejenigen 6 Substitutionen enthalten sein, welche, neben 7, zugleich 2 ungeändert lassen, wie der Ausdruck S_0 zeigt; und von diesen führt nur die Gruppe J'

$$1,\ (j') = (013)\,(654),\quad (j')^2$$

S_0 in sich über. Da die Gruppe I durch (j') in sich transformirt wird, so liefert das Product von I und J' die Gruppe von 21 Substitutionen, die in G' enthalten ist und x_7 unverändert lässt.

Weitere Substitutionen von $G = H \cdot I \cdot J$, welche zugleich S_0 unverändert lassen, sind offenbar

$$(p) = (01)\,(23)\,(47)\,(56),$$
$$(p_1) = (02)\,(13)\,(45)\,(67),$$

und die hieraus gebildete Gruppe P oder $1,\ (p),\ (p_1),\ (p\,p_1)$. Da ferner diese Gruppe P durch J' in sich transformirt wird, so hat man im Product $P \cdot J'$ 12 in G' enthaltene Substitutionen. Nimmt man endlich die Gruppe

$$Q \cdots 1,\ (q) = (07)\,(15)\,(26)\,(34)$$

hinzu, welche in G und G' enthalten ist und wo ferner (q) die Gruppe $P \cdot J'$ in sich transformirt, so hat man im Product $P \cdot J' \cdot Q$ die in G' enthaltene Gruppe von 24 Substitutionen, welche

$$s_0 = [0, 1, 2, 3] + [4, 5, 6, 7]$$

unverändert lässt.

Endlich stellt auch das Product $IPJ'Q$ die Gruppe G' von 168 Substitutionen selbst dar.

Diejenigen Substitutionen von G', welche zwei der Grössen, etwa x_7 und x_2 unverändert lassen, also auch in $I \cdot J'$, enhalten sind, bilden die Gruppe von 3 Substitutionen

$$1,\ (j') = (013)\,(654),\quad (j')^2.$$

Unter ihnen giebt es, die Identität ausgenommen, keine Substitutionen mehr, welche noch eine dritte Grösse festlassen. Das Product dieser 3 Substitutionen mit der Gruppe $1,\ (q \cdot p_1)$ bildet in G' diejenige Gruppe von 6 Substitutionen, welche x_7, x_2 unverändert lässt oder mit einander vertauscht. Im letzteren Falle gehen auch $0, 1, 3$, in $4, 5, 6$ über.

Diejenigen in G' enthaltenen Substitutionen, welche drei beliebige der 8 Grössen $x_0, \cdots x_7$ nur unter sich vertauschen, bilden ebenfalls eine Gruppe von 3; sollen diese 3 Grössen z. B. x_4, x_5, x_6 sein, so muss durch diese Gruppe x_7 und x_2 fest bleiben, und man hat wieder die Gruppe

$$1,\ (j'),\ (j')^2.$$

Die Substitutionen von G', welche zwei der Functionen von S, z. B.

$$s_1 = [0, 3, 5, 6] + [1, 2, 4, 7]$$
$$s_2 = [1, 2, 5, 6] + [0, 3, 4, 7]$$

in sich überführen, bilden eine Gruppe von 4 Substitutionen:

$$1, (q), (p_1), \quad (qp_1)$$

und deren Product mit der Substitution (p) führt s_1 und s_2 in einander über. Durch diese 8 Substitutionen bleibt auch die dritte Function von S

$$s_0 = [0, 1, 2, 3] + [4, 5, 6, 7]$$

unverändert.

§ 6.

Die Gleichung 8^{ten} Grades unter Adjunction zweier Tripelsysteme.

Die Entwicklungen des § 5. sagen für die Gleichung 8^{ten} Grades Folgendes aus: Man adjungire zunächst die Quadratwurzel aus der Discriminante $\sqrt{D}$, sodann eine Wurzel S einer Resolvente 15^{ten} Grades; ferner eine analoge Grösse S_0, als Wurzel einer der ursprünglichen Gleichung nach den ersteren Adjunctionen äquivalenten Gleichung 8^{ten} Grades. Man gelangt dann, für die 7 Functionen von S, wieder zu einer Gleichung 7^{ten} Grades, welche die „Tripeleigenschaften" hat, mit einer Gruppe G' von $24 \cdot 7$ Substitutionen, und deren Auflösung liefert die Wurzeln der gegebenen Gleichung 8^{ten} Grades eindeutig.

Gegenüber der Auflösung des § 3. kommt also das Aufsuchen von S_0 hinzu, wofür nur die dort zuletzt aufzulösenden drei quadratischen Gleichungen fortfallen.

Die Gleichung 8^{ten} Grades erhält nun, nach Adjunction von $\sqrt{D}$, S und S_0, die Eigenschaft, dass sich alle ihre Wurzeln durch *irgend drei* derselben rational ausdrücken lassen, und zwar in folgender Form: seien etwa x_4, x_5, x_6 drei der Wurzeln, so hat man:

$$x_2 = \varphi(x_4, x_5, x_6),$$
$$x_7 = \psi(x_4, x_5, x_6),$$

wo φ und ψ rationale *cyklische* Functionen der 3 Argumente sind; ferner

$$x_0 = \chi(x_4, x_5, x_6),$$
$$x_1 = \chi(x_6, x_4, x_5),$$
$$x_3 = \chi(x_5, x_6, x_4),$$

wo χ eine rationale Function. Durch Vertauschung von x_4, x_5, x_6 bez. mit x_0, x_1, x_3 gehen nur x_2 und x_7 in einander über.

Die Gleichung 7^{ten} Grades ändert gegen § 3. ihren Charakter nicht; nur dass die am Ende des § 4. erwähnten $\sqrt{s_k}$ rationale Functionen von solchen drei Grössen s_i werden, die keine Tripel bilden.

Eine solche Gleichung 8^{ten} Grades, bei der nach Adjunction von $\sqrt{D}$ die beiden Functionen S und S_0 adjungirt sind, ist die *Modulargleichung*, welche in der Transformation 7^{ter} Ordnung der elliptischen

Functionen zwischen den 4ten Wurzeln aus den beiden Moduln auftritt. Dies zeigt sich bei einer analytischen Darstellung der Gruppe G'. Transformirt man die ganze Gruppe G' zunächst durch die Substitution (124) in die ihr ähnliche Gruppe G'', so geht (i) über in

$$(i'') = (0\,1\,2\,3\,4\,5\,6).$$

Schreibt man also ∞ statt des Index 7, so kann man diese Substitution darstellen durch

$$(i'') = (z \mid z+1), \quad (\text{mod. } 7)$$

wo der Index z alle Werthe $0, 1, \cdots 6, \infty$ anzunehmen hat. Die Substitution $(i^2 j'^2)$ von G' transformirt sich in

$$(j'') = (124)\,(365),$$

und (q) in

$$(q'') = (0\infty)\,(13)\,(25)\,(46),$$

und man hat

$$(l'') = (z \mid 2z), \quad (q'') = \left(z \mid \frac{3}{z}\right) \quad (\text{mod. } 7).$$

Verbindet man diese drei Substitutionen (i''), (j''), (q'') mit einander, so erhält man die Gruppe

$$\left(z \mid \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right), \quad (\text{mod. } 7), \quad (z = 0, 1, \cdots 6, \infty),$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle ganzzahligen Werthe annehmen können, für welche

$$\alpha\delta - \beta\gamma$$

einem quadratischen Rest (1, 2, oder 4) von 7 congruent wird. Diese Gruppe enthält 168 Substitutionen und wird mit G'' identisch; sie ist aber die Gruppe der oben bezeichneten Modulargleichung, nach Adjunction von $\sqrt{D}$ (wozu die von $\sqrt{-7}$ genügt, nach Hermite).

Die Gleichung siebenten Grades, auf welche die Modulargleichung direct zurückzuführen ist, hat die früher bezeichneten „Tripeleigenschaften". Die Bezeichnung des Affectes dieser Gleichung 7ten Grades, wie sie Kronecker ausspricht*): „dass irgend eine Wurzel aus je drei andern rational dargestellt werden könne", muss daher so aufgefasst werden, dass diese Darstellung nicht durch drei beliebige Wurzeln, sondern nur durch solche drei geschehen kann, welche kein Tripel bilden.

Umgekehrt kann man die Gleichungen 7ten Grades, mit deren Auflösbarkeit mittelst der bezeichneten Modulargleichung sich neuere Unter-

---

*) Monatsber. d. Berl. Akad., Apr. 1858. Statt der dort angegebenen Affectfunction kann auch ohne Aenderung der Gruppe die folgende genommen werden: $(a+b+d)\,(a+c+g)\,(a+e+f)\,(b+c+e)\,(b+f+g)\,(c+d+f)\,(d+e+g)$.

suchungen von Klein*) und Gordan, die erst theilweise publicirt sind, beschäftigen, kurz als *die allgemeinsten Gleichungen* 7^{ten} *Grades mit der Tripeleigenschaft* charakterisiren. Dieselbe Auflösung lassen dann auch die Mathieu'schen Gleichungen 8^{ten} Grades, d. h. *die allgemeinsten Gleichungen* 8^{ten} *Grades mit der Quadrupeleigenschaft* zu.

§ 7.

Anwendung auf die Doppeltangenten der allgemeinen Curve 4^{ter} Ordnung. Bezeichnungssystem.

Bei einer Curve 4^{ter} Ordnung, f, existiren bekanntlich zwei Arten von Curven 3^{ter} Ordnung, welche f in je 6 Punkten berühren: solche *erster* Art, bei welchen die 6 Berührungspunkte *nicht* auf einem Kegelschnitt liegen, und solche *zweiter* Art, bei welchen dieses der Fall ist. Von der ersteren Art existiren 36, von der zweiten Art 28 dreifach unendliche Schaaren. Die 28 Doppeltangenten sind den 28 Schaaren zweiter Art eindeutig zugeordnet; ihre gewöhnliche Bezeichnungsweise durch die Combinationen (ik) von 8 Zahlen

$$1, 2, \cdots 8$$

ist aus ihrer Beziehung zu *einer* Schaar erster Art, die aus den 36 beliebig ausgezeichnet wird, hergenommen. Ich will hier zunächst diese Bezeichnungsweise mit ihren Operationsregeln so erweitern, dass der Uebergang zu beliebigen Schaaren einfach wird. In Bezug auf die Begründung dieser Erweiterung sei jedoch auf frühere Arbeiten**) verwiesen.

Es mögen $i, k, l \cdots$ irgend welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots 8$, und aus ihnen zunächst die Zeichen

$$(ik) = (ki)$$

gebildet sein. Aus einer *ungeraden* Anzahl solcher Zeichen $(a), (b), \cdots$ werden neue Zeichen gebildet, durch die Aequivalenz:

$$(a) + (b) + (c) + \cdots \equiv (abc \cdots);$$

hierbei soll in $(abc\cdots)$ jede Vertauschung von Zahlen erlaubt sein, und zwei gleiche Zahlen sich gegenseitig aufheben; also

*) Ber. der Erlanger Soc., 10. Heft, p. 110, 119 (1878): „Ueber Gleichungen 7^{ten} Grades", sowie in diesen Annalen, Bd. XIV p. 428: „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen."

**) C. Jordan, Traité des subst. etc., pag. 229.
H. Weber, Theorie der Abel'schen Funct. vom Geschlecht 3, pag. 18.
M. Noether, Zur Theorie der Thetafunctionen etc., d. Ann. XIV, p. 250.

$$(ik) + (lm) + (np) \equiv (iklmnp) \equiv (ilkmnp)$$
$$\equiv (il) + (km) + (np) \equiv \cdots$$
$$(ik) + (ln) + (mn) \equiv (iklnmn) \equiv (iklm),$$
$$(ik) + (kl) + (li) \equiv (o).$$

Diese Zeichen combiniren wir wieder in ungerader Anzahl zu Summen; es folgt dann

$$(0) + (ik) + (lm) \equiv (ik) + (kl) + (li) + (ik) + (lm) \equiv (iklm),$$

und allgemeiner

$$(0) + (a) + (b) \equiv (ab),$$

wenn a, b irgend welche der Zeichen (ik), $(iklm)$, (0) $\cdots$ sind. Ferner sei auch

$$(0) = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8),$$

also:

$$(iklm) = (npqr), \quad (iklmnp) = (qr),$$

wenn sich die Zahlen $i, k, \cdots r$ zu $1, 2, \cdots 8$ ergänzen. So hat man z. B.

$$(0) = (123\cdots8) \equiv (81) + (82) + \cdots + (87).$$

Die Zeichen (ik), aus zwei von einander verschiedenen Zahlen gebildet, seien *ungerade*, die aus vier oder acht von einander verschiedenen Zahlen gebildeten Zeichen *gerade* Charakteristiken genannt. Von den ersteren Zeichen, mit welchen die aus 6 verschiedenen Zahlen gebildeten identisch werden, existiren 28, von den letzteren 36, und zwar 35 von der Form $(iklm)$, *eines* aus 8 Zahlen, nämlich $(12\cdots8) = (0)$.

Wir führen weiter Zeichen ein, welche der Summe einer *geraden* Anzahl von Charakteristiken äquivalent sind, nämlich:

$$[ik], \quad [iklm],$$

indem im Uebrigen dieselben Rechenregeln gelten, wie oben; also

$$(0) + (iklm) \equiv (ik) + (lm) = [iklm] \equiv (il) + (km) \equiv (im) + (kl);$$
$$(0) + (kl) \equiv (ik) + (il) \equiv [ikil] \equiv [kl] \equiv (klmn) + (mn).$$

Wenn sich in einer solchen Summe alle Zahlen gegenseitig aufheben, so wird die Summe gleich 0:

$$0 = (0) + (123\cdots8) \equiv (ik) + (ki) \equiv (1234) + (5678)$$
$$\equiv (12) + (34) + (56) + (78).$$

Diese Zeichen $[ik]$ und $[iklm]$ mögen „Gruppencharakteristiken" genannt werden. Es giebt 63 solcher, welche von 0 verschieden sind.

Auf alle Charakteristiken können wir nun weiter *Substitutionen* anwenden, nach folgenden Regeln: Sei (s) eine beliebige Charakteristik; eine daraus abgeleitete Substitution $\{s\}$

transformirt eine Charakteristik (a) in (as), wenn a und (as) beide gerade oder beide ungerade sind, und lässt im andern Falle (a) unverändert;

transformirt eine Gruppencharakteristik $[a]$ in $[as]$, wenn von den 3 Charakteristiken (a), (s), (as) keine oder zwei gerade sind, und lässt im andern Falle $[a]$ unverändert.

Durch diese Substitutionen $\{s\}$ gehen alle Gleichungen und Aequivalenzen zwischen den Charakteristiken wieder in richtige über; insbesondere wird eine Summe, die 0 ist, wieder 0.

Es ist bei der Anwendung dieser Substitutionen übrigens zu beachten, dass die 64 Substitutionen $\{0\}$, $\{ik\}$, $\{iklm\}$ für sich noch nicht eine *Gruppe* bilden. Diejenigen Substitutionen, welche (0) ungeändert lassen, können alle aus den $\{ik\}$ zusammengesetzt werden.

Die geometrische Bedeutung einer Gleichung

$$(i_1 k_1) + (i_2 k_2) + \cdots + (i_{2r} k_{2r}) = 0$$

ist, dass die $4r$ Berührungspunkte der $2r$ Doppeltangenten $(i_1 k_1)$, $(i_2 k_2) \cdots$ durch eine Curve r^{ter} Ordnung aus f ausgeschnitten werden. Daher bedeuten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
[12] &\equiv (13)+(23) \equiv (14)+(24) \equiv \cdots\cdots \equiv (18)+(28),\\
[1234] &\equiv (12)+(34) \equiv (13)+(24) \equiv (14)+(23) \equiv (56)+(78)\\
&\equiv (57)+(68) \equiv (58)+(67),
\end{aligned}$$

dass jede der 63 Gruppen 6 Paare von Doppeltangenten enthält, wobei die Berührungspunkte je zweier Paare einer Gruppe auf einem Kegelschnitt liegen.

Die Bedeutung einer Beziehung

$$(i_1 k_1) + (i_2 k_2) + \cdots + (i_{2r-1} k_{2r-1}) \equiv (0) \text{ oder } (lmnp) \qquad (l < m < n < p)$$

ist, dass die $4r - 2$ Berührungspunkte der $2r - 1$ Doppeltangenten $(i_1 k_1)$, $(i_2 k_2) \cdots$ nicht durch eine Curve r^{ter} Ordnung aus f ausgeschnitten werden können. Die $2r - 1$ Doppeltangenten und 3 weitere, deren Charakteristikensumme ebenfalls (0), bez. $(lmnp)$ ist, bilden vielmehr eine Berührungscurve, deren Berührungspunkte zusammen durch eine Curve $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus f ausgeschnitten werden. Solche $2r - 1$ Doppeltangenten gehören mit den 3 zum selben System, dem die Charakteristik (0), bez. $(lmnp)$ beigelegt wird.

Die Zuordnung der Charakteristiken (ik) zu den Doppeltangenten geschieht so: In der Aequivalenz

$$(0) \equiv (81) + (82) + \cdots + (87)$$

hat die rechte Seite die Eigenschaft, dass die Summe von irgend dreien der vorkommenden Charakteristiken einer geraden Charakteristik äquivalent ist; wobei dann zu der Summe kein achtes (ik) hinzugefügt werden kann, ohne dass diese Eigenschaft verloren geht.

Dieser Eigenschaft entsprechend ordnen wir die Charakteristiken

$$(81),\ (82), \cdots (87)$$

in beliebiger Folge irgend 7 solchen Doppeltangenten zu, bei denen nicht die Berührungspunkte von beliebigen dreien derselben auf einem Kegelschnitt liegen. Dem („Aronhold'schen") System dieser 7 Doppeltangenten ist zugleich die Charakteristik (0) beigelegt.

Hierdurch ist die Zuordnung aller übrigen (ik) eindeutig gegeben. So ist (12) diejenige Doppeltangente, welche, allein ausser der bekannten (81), zugleich in den 5 bekannten Gruppen

$$\begin{aligned}[13] &\equiv (81) + (83) \equiv (12) + (23),\\ [14] &\equiv (81) + (84) \equiv (12) + (24),\\ &\cdots\\ [17] &\equiv (81) + (87) \equiv (12) + (27)\end{aligned}$$

enthalten ist. Oder die Construction von (12) erfolgt auch daraus, dass das 7-System und das System der drei: $(81) + (82) + (12)$ dieselbe Charakteristik (0) besitzen.

Es giebt, der Charakteristik (0) zugeordnet, 8 verschiedene Aronhold'sche 7-Systeme:

$$\begin{aligned}(0) &\equiv (12) + (13) + \cdots + (18),\\ &\equiv (21) + (23) + \cdots + (28),\\ &\cdots\\ &\equiv (81) + (82) + \cdots + (87).\end{aligned}$$

Je zwei von denselben haben eine Charakteristik gemein, und man kann so die 8 Systeme selbst bezügl. durch $1, 2, \cdots 8$ bezeichnen.

Hiernach ist es klar, dass die Systeme der Charakteristik (0) von den Systemen der übrigen geraden Charakteristiken $(iklm)$ in unserer Bezeichnung ausgezeichnet sind. Um zu diesen zu gelangen, braucht man nur die Systeme von (0) durch die Substitution $\{iklm\}$ zu transformiren. So erhält man z. B.

$$\begin{aligned}(1234) &\equiv (34) + (24) + (23) + (15) + \cdots + (18)\\ &\equiv (51) + (52) + (53) + (54) + (67) + (68) + (78)\\ &\cdots\end{aligned}$$

Will man dann umgekehrt durch die Bezeichnung $0', 1', 2', \cdots 8'$ diese letzteren Systeme auszeichnen, so braucht man nur etwa

$$(34) = (1'2'),\ (24) = (1'3'),\ (23) = (1'4'),\ (15) = (1'5'), \cdots, (18) = (1'8'),$$
$$(1234) = (0')$$

zu setzen, woraus auch

$$(0) \equiv (34) + (24) + (23) \equiv (1'2'3'4'),$$
$$(12) \equiv (1234) + (34) + (0) = (0') + (1'2') + (1'2'3'4') \equiv (3'4'), \text{ etc.},$$

sodass die acht 7-Systeme von (1234) in die Form übergehen:

$$\begin{aligned}(0') &\equiv (1'2') + (1'3') + \cdots + (1'8'),\\ &\equiv (2'1') + (2'3') + \cdots + (2'8'),\\ &\;\;\cdots\end{aligned}$$

§ 8.

Die Systeme von sieben Kegelschnitten.

Adjungirt man irgend eine Wurzel (0) der Gleichung 36ten Grades, welche die den 36 geraden Charakteristiken zugeordneten Systeme, z. B. die 36 Schaaren von Berührungscurven 3ter Ordnung erster Art, bestimmt, so wird die Gleichung für die Doppeltangenten auf eine *Gleichung 8ten Grades* zurückgeführt, nämlich diejenige, welche die acht Aronhold'schen 7-Systeme von (0) bestimmt. Wir können daher die in den ersten Paragraphen dieses Aufsatzes für die Gleichung 8ten Grades aufgestellten Resolventen geometrisch deuten. Um dabei die frühere Bezeichnungsweise mit der des § 7. in Uebereinstimmung zu bringen, haben wir nur die dortige Wurzel x_0 oder den Index 0 überall durch den Index 8 zu ersetzen. Die Substitutionen, welche hier anzuwenden sind, ergeben sich dabei, da sie (0) unverändert lassen sollen, einfach aus denen der Paragraphen 1–6., indem man überall die Transposition (ik) durch $\{ik\}$ ersetzt.

Unter der Function

$$[i_1k_1,\ \ i_2k_2,\ \ i_3k_3,\ \ i_4k_4]$$

sei hier der *Kegelschnitt* verstanden, welcher durch die 8 Berührungspunkte der vier Doppeltangenten (i_1k_1), (i_2k_2), (i_3k_3), (i_4k_4), für welche

$$(i_1k_1) \dot{+} (i_2k_2) + (i_3k_3) + (i_4k_4) = 0$$

hindurchgeht. Aus den 6 Paaren von Doppeltangenten in jeder der 63 Gruppen werden 15 solcher Kegelschnitte erhalten und jeder dieser aus 3 verschiedenen Gruppen, so dass es, wie bekannt, 315 solcher Kegelschnitte giebt.

Jeder dieser Kegelschnitte ist 12 *verschiedenen geraden Charakteristiken* zugeordnet. Der Kegelschnitt

$$K = [81,\ 23,\ 45,\ 67]$$

gehört nämlich zu (0) insofern, als er aus jedem der 8 Aronhold'schen 7-Systeme von (0) *eine* und *nur* eine Doppeltangente herausnimmt; und da weiter die Substitutionen

$$\{8123\},\ \{8145\},\ \{8167\},\ \{8246\},\ \{8257\},$$
$$\{8347\},\ \{8356\},\ \{8247\},\ \{8256\},\ \{8346\},\ \{8357\}$$

K in sich überführen, so gehört K ebenso zu den Systemen der durch diese 11 Substitutionen aus (0) hervorgehenden:

$$(8123),\ (8145),\ \cdots\cdot$$

Umgekehrt sind jeder geraden Charakteristik 105 verschiedene Kegelschnitte K zugeordnet.

In § 1. haben wir nun aus den 105 Kegelschnitten, welche (0) zugeordnet sind, 30 eigentliche Systeme von je 7 Kegelschnitten, mit „Tripeleigenschaft", gebildet. Aus irgend einem der 7 Tripel eines solchen Systems

$$\Sigma = K,\ A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C_1,\ C_2$$

konnte man auf acht verschiedene Weisen 3 Doppeltangenten herausnehmen, deren Charakteristikensumme $\equiv$ (0) ist, die also eine (0) zugeordnete Berührungscurve 3^{ter} Ordnung erster Art bilden. Die Systeme Σ haben zugleich die Eigenschaft, dass die 7 Doppeltangenten irgend eines der 8 Aronhold'schen 7-Systeme von (0) auf die 7 Kegelschnitte von Σ *vertheilt* vorkommen.

Aber die 7 Kegelschnitte von Σ gehen durch die 8 Substitutionen

$$\{0\},\ \{8123\},\ \{8145\},\ \{8167\},$$
$$\{8246\},\ \{8257\},\ \{8347\},\ \{8356\}$$

alle in sich über. Hieraus folgt, dass das System Σ noch zu 7 weiteren geraden Charakteristiken

$$(8123),\ (8145),\ \cdots\cdot$$

auf gleiche Weise, wie zu (0) gehört. Wenn man daher aus den 3 Kegelschnitten irgend eines Tripels von Σ, etwa von K, A_1, A_2 irgend 3 Doppeltangenten, von jedem Kegelschnitt eine, herausnimmt, so muss deren Charakteristikensumme *gerade* und einer der 8 Grössen (0), (8123) $\cdots$ äquivalent sein. Und ferner muss dann in den 4 übrigen Ausdrücken B_1, B_2, C_1, C_2 immer je eine Doppeltangente enthalten sein, welche mit den 3 aus K, A_1, A_2 beliebig genommenen zusammen ein Aronhold'sches 7-System von (0), bez. (8123), $\cdots$ bilden.

Endlich folgt daraus, dass zu jeder der 36 geraden Charakteristiken 30 Systeme der Art Σ, jedes Σ aber zu 8 geraden Charakteristiken gehört:

es giebt bei der Curve 4^{ter} Ordnung $\frac{30 \cdot 36}{8} = 135$ *Sieben-Kegelschnittsysteme mit Tripeleigenschaft.*

In § 1. sind aus den (0) zugeordneten Kegelschnitten 630 weitere, aber uneigentliche Systeme von je 7 Kegelschnitten gebildet worden, wobei jedes System ebenfalls alle 28 Grössen (ik) umfasst. Bei diesen uneigentlichen Systemen, in welchen je *ein* Kegelschnitt ausgezeichnet ist, wird man nur nach der Anzahl der aus *einem* solchen Kegelschnitte folgenden Systeme fragen. Nun hat man für die aus

$$K = [81, 23, 45, 67]$$

zu bildenden Gruppen ausser den in K explicite stehenden Zerlegungen noch die folgenden:

$$\begin{aligned}
[8123] &\equiv (82) + (13) \equiv (83) + (12) \equiv (46) + (57) \equiv (47) + (56),\\
[8145] &\equiv (84) + (15) \equiv (85) + (14) \equiv (26) + (37) \equiv (27) + (36),\\
[8167] &\equiv (86) + (17) \equiv (87) + (16) \equiv (24) + (35) \equiv (25) + (34),
\end{aligned}$$

Fasst man hier die erste Reihe paarweise in zwei Kegelschnitte zusammen, was auf 3 Arten geschehen kann, ebenso die zweite und die dritte Reihe, so erhält man noch auf 3^3 verschiedene Arten je 6 Kegelschnitte, welche mit K verbunden, ein 7-Kegelschnittsystem geben. Drei dieser 27 aus K abgeleiteten Systeme sind eigentliche Systeme mit Tripeleigenschaft und von diesen wieder 2 der Charakteristik (0) zugeordnet. Von den übrigen 24 Systemen sind 18 nur aus solchen 7 Kegelschnitten zusammengesetzt, die zugleich 4 geraden Charakteristiken (6 davon der (0)) zugeordnet sind; 6 Systeme, bei welchen eine solche Zuordnung zu einer geraden Charakteristik überhaupt nicht stattfindet. In jedem dieser 24 Systeme ist K ausgezeichnet; es giebt also von diesen uneigentlichen 7-Kegelschnittsystemen bei der Curve 4ter Ordnung überhaupt:

$$315 \cdot 24 = 7560,$$

von Tripelsystemen aber

$$\frac{315 \cdot 3}{7} = 135,$$

wie schon oben gefunden ist*).

Um nun mit Hülfe der hier nachgewiesenen Systeme die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung zu bestimmen, wird man zunächst irgend eine der 36 Schaaren von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art, (0), aufzusuchen haben, sodann eines der 30 Tripelsysteme von 7 Kegelschnitten, welche der gefundenen Schaar zugeordnet sind; weiter die einzelnen Kegelschnitte dieses sehr speciellen Systems Σ selbst. Endlich bestimmt man die Doppeltangenten selbst durch 3 quadratische Gleichungen. Denn die 4 Doppeltangenten *eines* Kegelschnitts von Σ werden vermöge irgend eines der 6 übrigen Kegelschnitte schon in zweimal zwei Paare zerlegt und durch 2 quadratische Gleichungen be-

*) Hiernach ist eine beiläufige Bemerkung am Schlusse des § 4. meines Aufsatzes, d. Ann. XIV, S. 248, zu corrigiren.

stimmt; bei einem zweiten Kegelschnitte genügt alsdann schon eine quadratische Gleichung zur Aufsuchung seiner Doppeltangenten und die übrigen Doppeltangenten sind dann eindeutig gegeben. — Durch Auszeichnung von Σ zerfallen die übrigen 29 (0) zugeordneten Tripelsysteme in 14, 7 und 8. Kennt man auch von den letzteren 8 noch eines, so genügt die Aufsuchung der 7 Kegelschnitte von Σ zur Bestimmung aller 28 Doppeltangenten. Dieser Fall, in dem (0), Σ und das weitere Tripelsystem adjungirt ist, tritt bei der speciellen Curve 4^{ter} Ordnung auf, die F. Klein in dem oben citirten Aufsatze (Annalen Bd. XIV) behandelt hat.

Erlangen, Januar 1879.

Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet.*)

Von

Joseph Hahn in Bensheim.

I. Einleitung.

1. Es seien in symbolischer Darstellung die drei quadratischen Formen

$$f_1 = a_x{}^2 = a_x'^2, \quad f_2 = b_x{}^2 = b_x'^2, \quad f_3 = c_x{}^2 = c_x'^2$$

gegeben, die als von einander verschieden angenommen werden.**) Die Jacobi'sche Form derselben ist die Determinante ihrer ersten Ableitungen

$$\begin{vmatrix} a_x a_1 & a_x a_2 & a_x a_3 \\ b_x b_1 & b_x b_2 & b_x b_3 \\ c_x c_1 & c_x c_2 & c_x c_3 \end{vmatrix} = (abc)\, a_x b_x c_x \,.$$

Diese cubische ternäre Form soll symbolisch bezeichnet werden durch $D_x{}^3 = D_x'^3$. Die Hermite'sche Form von f_1, f_2, f_3 lässt sich in den Symbolen der letzteren darstellen durch den Ausdruck $-(bcu)(cau)(abu)$, wofür die Symbole $u_\Delta^3 = u_{\Delta'}^3$, eingeführt werden sollen. Ersetzt man die u_i durch die Determinanten $(xy)_i$, so dass $u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ u. s. w., so ist (Rosanes l. c. pag. 274):

$$u_\Delta^3 = -(bcu)(cau)(abu) = \begin{vmatrix} a_x{}^2 & a_x a_y & a_y{}^2 \\ b_x{}^2 & b_x b_y & b_y{}^2 \\ c_x{}^2 & c_x c_y & c_y{}^2 \end{vmatrix} .$$

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Beantwortung der Frage, von welcher Art Kegelschnittnetze sind, deren Jacobi'sche Form oder

*) Auszug aus der im Juni 1878 zu Giessen erschienenen Inaugural-Dissertation des Verfassers.

**) In Bezug auf Symbolik und Bezeichnungsweise herrscht völlige Uebereinstimmung mit der Arbeit des Herrn Rosanes (Ueber Systeme von Kegelschnitten. Math. Annalen, Bd. VI, S. 264), auf dessen Resultate sich die folgenden Untersuchungen überdies vielfach stützen werden.

Hermite'sche Form identisch verschwindet.*) Ich wurde zu diesen Untersuchungen durch Herrn Prof. Pasch in Giessen veranlasst und während derselben durch seinen freundlichen Rath auch mehrfach unterstützt.

2. Wenn in der Folge die Glieder einer Summe dadurch aus einem entstehen, dass die Buchstaben a, b, c cyklisch vertauscht werden, so werden wir, um diese Summe anzudeuten, einem der drei Glieder das Zeichen Σ vorsetzen; im Fall, dass die Buchstaben a', b', c' vertauscht werden, kommt das Zeichen Σ' zur Anwendung. Es ist somit

$$\Sigma(bcu)a_x = (abc)u_x, \quad \Sigma(bcu)(adu) = 0.$$

Folgende Identitäten werden später zur Anwendung kommen:

$$\text{(I)} \qquad 3D_x^2 D_y = (abc)\,\Sigma a_y b_x c_x,$$

$$\text{(II)} \qquad 6D_x D_y D_z = (abc)\,\Sigma(a_x b_y c_z + a_x b_z c_y),$$

$$\text{(III)} \qquad D_x^3 u_x = \Sigma a_x^2 (bcu) b_x c_x,$$

$$\text{(IV)} \qquad 3D_x^2 D_y u_y - 3D_x D_y^2 u_x = \Sigma a_y^2 (bcu) b_x c_x - \Sigma a_x^2 (bcu) b_y c_y.$$

II. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form identisch verschwindet.

3. Es wird nun zuerst gezeigt werden, dass zwischen den drei Formen f_1, f_2, f_3 eine quadratische Relation besteht, sobald die Jacobi'sche Form derselben identisch verschwindet. Wir gelangen zu dieser Relation, indem wir von der Form $(DD'u)^2 D_x D'_x$ ausgehen und ihren Werth, ausgedrückt durch die Symbole der Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2, aufsuchen.

Aus den Identitäten (I) und (II) leitet man die folgenden ab:

$$3(DD'u)^2 D_x D'_x = (abc) D'_x \Sigma a_x (bD'u)(cD'u),$$

$$6(bD'u)(cD'u)\,D'_x = (a'b'c')\;\Sigma'\left\{a'_x(b'bu)(c'cu) + a'_x(b'cu)(c'bu)\right\}.$$

Multiplicirt man die zweite mit $(abc)a_x$ und summirt dann über abc, so ergiebt sich:

$$18(DD'u)^2 D_x D'_x = (abc)(a'b'c')\,\Sigma\Sigma' a_x a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)],$$

und wenn man diese Gleichung mit u_x^2 multiplicirt und eine bekannte Identität berücksichtigt:

$$18(DD'u)^2 D_x D'_x u_x^2$$
$$= \Sigma\Sigma' a_x a'_x (bcu)(b'c'u) \cdot \Sigma\Sigma' a_x a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)].$$

---

*) Was das Verschwinden der Jacobi'schen Form betrifft, so wird in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch, herausgegeben von Lindemann, Bd. 1, S. 304 irrthümlich behauptet, dass es die Ausartung des Netzes in ein Büschel nach sich zieht. Dass der daselbst gegebene Beweis nicht ausreicht, findet sich in den „Zusätzen und Verbesserungen“ S. 1047 erwähnt.

Wegen $(bcu)(b'c'u) = (b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)$ ist ferner

$$18(DD'u)^2 D_x D'_x u_x^2 =$$
$$\Sigma\Sigma' a_x a'_x[(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)] \cdot \Sigma\Sigma' a_x a'_x[(b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)].$$

Löst man die ersten Summen auf, so erhält man $18(DD'u)^2 D_x D'_x u_x^2$ gleich dem Producte der beiden Factoren

$$a_x \Sigma' a'_x[(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)] + b_x \Sigma' a'_x[(b'cu)(c'au) + (b'au)(c'cu)]$$
$$+ c_x \Sigma' a'_x[(b'au)(c'bu) + (b'bu)(c'au)],$$
$$a_x \Sigma' a'_x[(b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)] + b_x \Sigma' a'_x[(b'cu)(c'au) - (b'au)(c'cu)]$$
$$+ c_x \Sigma' a'_x[(b'au)(c'bu) - (b'bu)(c'au)],$$

welches dargestellt werden kann in der Form

$$A_{11} a_x^2 + A_{22} b_x^2 + A_{33} c_x^2 + 2A_{23} b_x c_x + 2A_{31} c_x a_x + 2A_{12} a_x b_x,$$

wo zunächst

$$A_{11} = \Sigma' a'_x[(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)] \cdot \Sigma' a'_x[(b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)]$$

ist und wieder die Form

$$B_{11} a_x'^2 + B_{22} b_x'^2 + B_{33} c_x'^2 + 2B_{23} b'_x c'_x + 2B_{31} c'_x a'_x + 2B_{12} a'_x b'_x$$

hat. Es ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \quad (b'bu)^2(c'cu)^2 - (b'cu)^2(c'bu)^2,\\
B_{22} &= \quad (c'bu)^2(a'cu)^2 - (c'cu)^2(a'bu)^2,\\
B_{33} &= \quad (a'bu)^2(b'cu)^2 - (a'cu)^2(b'bu)^2,\\
2B_{23} &= -2(b'c'u)(bcu)(a'bu)(a'cu) = -2(b'c'u)u_\Delta^3,\\
2B_{31} &= -2(c'a'u)(bcu)(b'bu)(b'cu) = 0,\\
2B_{12} &= -2(a'b'u)(bcu)(c'bu)(c'cu) = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt der vereinfachte Ausdruck von A_{11} und analog fallen A_{22} und A_{33} aus, nämlich:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \Sigma' a_x'^2[(b'bu)^2(c'cu)^2 - (b'cu)^2(c'bu)^2] - 2u_\Delta^3(b'c'u)b'_x c'_x,\\
A_{22} &= \Sigma' a_x'^2[(b'cu)^2(c'au)^2 - (b'au)^2(c'cu)^2] - 2u_\Delta^3(c'a'u)c'_x a'_x,\\
A_{33} &= \Sigma' a_x'^2[(b'au)^2(c'bu)^2 - (b'bu)^2(c'au)^2] - 2u_\Delta^3(a'b'u)a'_x b'_x.
\end{aligned}$$

Wir gehen jetzt zu den Formen A_{23}, A_{31}, A_{12} über. Es ist

$$\begin{aligned}
2A_{23} = &\Sigma' a'_x[(b'cu)(c'au) + (b'au)(c'cu)] \cdot \Sigma' a'_x[(b'au)(c'bu) - (b'bu)(c'au)]\\
&+ \Sigma' a'_x[(b'cu)(c'au) - (b'au)(c'cu)] \cdot \Sigma' a'_x[(b'au)(c'bu) + (b'bu)(c'au)]\\
&= C_{11} a_x'^2 + C_{22} b_x'^2 + C_{33} c_x'^2 + 2C_{23} b'_x c'_x + 2C_{31} c'_x a'_x + 2C_{12} a'_x b'_x.
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$C_{11} = -2(bcu)(b'c'u)(b'au)(c'au) = -2(bcu)u_\Delta^3,$$
$$C_{22} = -2(bcu)(c'a'u)(c'au)(a'au) = 0,$$
$$C_{33} = -2(bcu)(a'b'u)(a'au)(b'au) = 0,$$
$$2C_{23} = 2(a'au)^2(bcu)(b'c'u),$$
$$2C_{31} = 2(b'au)^2(bcu)(c'a'u),$$
$$2C_{12} = 2(c'au)^2(bcu)(a'b'u).$$

Da A_{31} und A_{12} analog behandelt werden können, so erhält man:

$$2A_{23} = -2u_\Delta^3(bcu)a_x'^2 + 2(bcu)\Sigma'(a'au)^2(b'c'u)b_x'c_x',$$
$$2A_{31} = -2u_\Delta^3(cau)b_x'^2 + 2(cau)\Sigma'(a'bu)^2(b'c'u)b_x'c_x',$$
$$2A_{12} = -2u_\Delta^3(abu)c_x'^2 + 2(abu)\Sigma'(a'cu)^2(b'c'u)b_x'c_x'$$

und daraus endlich:

$$\text{(V)} \qquad 18(DD'u)^2D_xD_x'u_x^2$$
$$= \Sigma\Sigma' a_x^2a_x'^2[(b'bu)^2(c'cu)^2 - (b'cu)^2(c'bu)^2]$$
$$+ 2\Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_xc_x(b'c'u)b_x'c_x'$$
$$-2u_\Delta^3[a_x^2(b'c'u)b_x'c_x' + b_x^2(c'a'u)c_x'a_x' + c_x^2(a'b'u)a_x'b_x']$$
$$-2u_\Delta^3[a_x'^2(bcu)b_xc_x + b_x'^2(cau)c_xa_x + c_x'^2(abu)a_xb_x].$$

4. Die Grösse $\Sigma\Sigma' a_x^2a_x'^2[(b'bu)^2(c'cu)^2-(b'cu)^2(c'bu)^2]$ heisse F. Sie stellt eine quadratische Form der gegebenen Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 dar und nimmt, wenn $(a'au)^2$ durch F_{11}, $(bcu)^2$ durch F_{23} u. s. w. bezeichnet werden, folgende Gestalt an:

$$f_1^2(F_{22}F_{33}-F_{23}^2) + f_2^2(F_{33}F_{11}- F_{31}^2) + f_3^2(F_{11}F_{22}-F_{12}^2)$$
$$+2f_2f_3(F_{31}F_{12}-F_{11}F_{23})+2f_3f_1(F_{12}F_{23}-F_{22}F_{31})$$
$$+2f_1f_2(F_{23}F_{31}-F_{33}F_{12})$$

oder in Determinantenform

$$F = -\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & f_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & f_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Summe der beiden in (V) auftretenden Trinome ist $-4u_\Delta^3u_xD_x^3$ nach Identität (III). Das auf F folgende Glied in (V) lässt sich einfach berechnen, wenn man zunächst die Identität (IV) benutzt; substituirt man darin für y_i die Determinante $(a'u)_i$, so erhält man:

$$-3(a'Du)^2D_xu_x = \Sigma(a'au)^2(bcu)b_xc_x - \Sigma a_x^2(bcu)(ba'u)(ca'u)$$

und wenn man noch mit $(b'c'u)b_x'c_x'$ multiplicirt und über $a'b'c'$ summirt:

$$-3\,\Sigma'(a'Du)^2(b'c'u)b'_x c'_x D_x u_x$$
$$=\Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_x c_x(b'c'u)b'_x c'_x-\Sigma\Sigma' a_x{}^2(bcu)(ba'u)(ca'u)(b'c'u)b'_x c'_x$$
$$=\Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_x c_x(b'c'u)b'_x c'_x-u^3_\varDelta u_x D_x{}^3.$$

Zur Berechnung der linken Seite dieser Relation benutzen wir eine Identität, welche Herr **Rosanes** in der bereits citirten Abhandlung aufgestellt und mit Nummer 12 bezeichnet hat:

$$\Sigma' a'^2_y(b'c'u)b'_x c'_x=2u_y D'^2_x D'_y-u_x D'^2_y D'_x+(xy\Delta)^2 u_\varDelta.$$

Setzt man darin $y_i=(Du)_i$, so ergiebt sich:

$$\Sigma'(a'Du)^2(b'c'u)b'_x c'_x=-u_x D'_x(D'Du)^2+(D_x u_\varDelta-u_x D_\varDelta)^2 u_\varDelta,$$

folglich

$$\Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_x c_x(b'c'u)b'_x c'_x$$
$$=3(D'Du)^2 D_x D'_x u_x{}^2-3(D_x u_\varDelta-u_x D_\varDelta)^2 u_\varDelta u_x D_x+u^3_\varDelta u_x D^3_x,$$

und die Formel (V) geht also schliesslich über in:

$$18(DD'u)^2 D_x D'_x u_x{}^2$$
$$=F-4u^3_\varDelta u_x D_x{}^3+6(DD'u)^2 D_x D'_x u_x{}^2$$
$$-6(D_x u_\varDelta-u_x D_\varDelta)^2 u_\varDelta u_x D_x+2u^3_\varDelta u_x D^3_x$$
$$=F-2u^3_\varDelta u_x D_x{}^3+6(DD'u)^2 D_x D'_x u_x{}^2$$
$$-6u^3_\varDelta u_x D_x{}^3+12D_x{}^2 u_x{}^2 u^2_\varDelta D_\varDelta-6u_x{}^3 D_x D^2_\varDelta u_\varDelta.$$

Wir sind demnach zur Darstellung der Determinante F durch die Symbole der **Jacobi**'schen und **Hermite**'schen Form gelangt, welche lautet:

$$\text{(VI)}\qquad F=12(DD'u)^2 D_x D'_x u_x{}^2+8u^3_\varDelta u_x D_x{}^3$$
$$-12u^2_\varDelta D_\varDelta D_x{}^2 u_x{}^2+6u_\varDelta D^2_\varDelta D_x u_x{}^3.$$

5. In dieser Relation liegt nun die Beantwortung der ersten der gestellten Fragen; denn sie sagt aus, dass, *sobald die Jacobi'sche Form von drei ternären quadratischen Formen identisch verschwindet, zwischen diesen drei Formen eine Relation zweiten Grades besteht*, nämlich $F=0$ oder ausführlicher

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} & f_1 \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} & f_2 \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Sind die drei Formen f_1, f_2, f_3 binär, so existirt, ohne dass eine Bedingung hinzuzutreten braucht, zwischen denselben immer eine quadratische Gleichung, welche aus der soeben aufgestellten dadurch entsteht; dass statt der Contravarianten F_{ik} die entsprechenden Invarianten der binären Formen eintreten. (Vergl. Clebsch, Theorie der binären algebr. Formen, pag. 205, wo die betreffenden Invarianten mit D_{11} u. s. w. bezeichnet sind.) Fasst man in der That solche drei binäre Formen f_1, f_2, f_3 als ternäre auf, in denen die eine Variabele fehlt, so kommt ihnen eine identisch verschwindende Jacobi'sche Form zu und die citirte Gleichung erscheint der unsrigen gegenüber als ein besonderer Fall.

6. Wenn D_x^3 und mithin F verschwindet, so sind die drei Formen f_1, f_2, f_3 von sehr specieller Beschaffenheit. Wir haben dann eine Gleichung von der Gestalt $\Sigma A_{ik} f_i f_k = 0$, wo die A_{ik} von $x_1 x_2 x_3$ nicht abhängen, und untersuchen zuerst den Fall, wo die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ nicht verschwindet. Die Gleichung lässt sich in diesem Falle so transformiren, dass nur noch zwei Glieder vorkommen, d. h. in dem Netz der Kegelschnitte $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ giebt es drei Curven $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, welche dasselbe in gleicher Weise bestimmen, wie $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ und durch deren Einführung die einfachere Gleichung

$$g_1 g_2 = g_3^2$$

entsteht. Dieser kann auf zweifache Weise genügt werden. Entweder sind die drei Formen nur durch constante Factoren von einander verschieden, was aber das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ nach sich ziehen würde, oder sie sind reducibel und es ist $g_1 = y_1^2$, $g_2 = y_2^2$, $g_3 = y_1 y_2$, wobei die y lineare Functionen der x sind. Nun hängen f_1, f_2, f_3 in linearer Weise von g_1, g_2, g_3 ab und lassen sich daher als quadratische Formen der zwei Variabeln $y_1 y_2$ darstellen. *Demnach zerfallen sämmtliche Kegelschnitte des Netzes in zwei durch denselben Punkt* ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$) *gehende Gerade.*

7. Die Gleichung $F = 0$ enthält in den Coefficienten die Variabeln u_1, u_2, u_3 und es muss daher geprüft werden, ob durch Veränderung dieser Grössen verschiedene Gleichungen entstehen können. Nun haben wir gesehen, dass vermöge einer solchen Gleichung die Formen f_1, f_2, f_3 sich in binäre transformiren lassen. Es werde, in $y_1 y_2$ ausgedrückt, $f_1 = \alpha_y^2$, $f_2 = \beta_y^2$, $f_3 = \gamma_y^2$; dann ist

$$F_{11} = (\alpha\alpha')^2 u_3^2, \quad F_{23} = (\beta\gamma)^2 u_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Aus der Determinante F sondert sich demnach der Factor u_3^4 aus, nach dessen Beseitigung die Gleichung $F = 0$ die $u_1 u_2 u_3$ gar nicht mehr enthält.

8. Die Determinante F ist die adjungirte Form der in irgend welchen Variabeln $v_1 v_2 v_3$ quadratischen Form $V = \Sigma F_{ik} v_i v_k$. Die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ ist daher das Quadrat der Determinante von V, welche mit D bezeichnet werde, so dass

$$\Sigma \pm F_{11} F_{22} F_{33} = D, \qquad \Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33} = D^2.$$

Wenn demnach $F = 0$ eine reducible Gleichung zwischen f_1, f_2, f_3 darstellt, so ist dies nur dadurch möglich, dass sie das Quadrat einer linearen Gleichung wird.

Der Werth von D ergiebt sich folgendermassen. Es ist für $u_i = (xy)_i$:

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_x a'_y - a_y a'_x)^2 & (a_x b'_y - a_y b'_x)^2 & (a_x c'_y - a_y c'_x)^2 \\ (b_x a'_y - b_y a'_x)^2 & (b_x b'_y - b_y b'_x)^2 & (b_x c'_y - b_y c'_x)^2 \\ (c_x a'_y - c_y a'_x)^2 & (c_x b'_y - c_y b'_x)^2 & (c_x c'_y - c_y c'_x)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \\ c_x^2 & c_x c_y & a_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'^2_y & -2a'_y a'_x & a'^2_x \\ b'^2_y & -2b'_y b'_x & b'^2_x \\ c'^2_y & -2c'_y c'_x & c'^2_x \end{vmatrix} = 2u^3_\Delta u^3_{\Delta'},$$

d. i. gleich dem doppelten Quadrat der Hermite'schen Form. Mithin ist $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ gleich dem vierfachen Biquadrat derselben Form. Die Gleichung $F = 0$ reducirt sich demnach auf das Quadrat einer linearen dann und nur dann, wenn die Hermite'sche Form verschwindet. Damit erledigt sich die Frage, unter welchen Bedingungen zwischen den Formen f_1, f_2, f_3 eine lineare Relation besteht. *Es kann nämlich eine lineare Relation nur dann stattfinden, wenn ausser der Jacobi'schen Form auch die Hermite'sche Form identisch verschwindet;* nur für diesen Fall gehören die drei Kegelschnitte einem Büschel an. Wenn dagegen die Jacobi'sche Form verschwindet, ohne dass zugleich die Hermite'sche Form verschwindet, so existirt, wie in den Art. 5 und 6 gezeigt wurde, zwischen den drei Formen f_1, f_2, f_3 eine Relation zweiten Grades und die entsprechenden Kegelschnitte sind reducibel mit demselben Doppelpunkt.

In der bereits citirten Abhandlung hat Herr Rosanes folgende oben benutzte Identität nachgewiesen:

$$\begin{aligned} & a_x^2 b_y c_y (bcu) + b_x^2 c_y a_y (cau) + c_x^2 a_y b_y (abu) \\ & = 2u_x D_y^2 D_x - u_y D_x^2 D_y + (xy\Delta)^2 u_\Delta, \end{aligned}$$

aus der man schliessen kann, dass die Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 durch eine lineare homogene Gleichung verbunden sind, sobald ihre Jacobi'sche und ihre Hermite'sche Form verschwindet.

9. Insbesondere können die drei Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 Ableitungen einer cubischen Form sein. Die Jacobi'sche Form der drei ersteren ist dann die Hesse'sche Form der letzteren. Verschwindet dieselbe identisch, so zerfällt die cubische Form in drei lineare Factoren, zwischen welchen lineare Abhängigkeit stattfindet, wie Herr Pasch in Crelle's Journal, Band 80 pag. 169 nachgewiesen hat. Es existirt dann auch zwischen ihren ersten Ableitungen eine lineare Relation

und hieraus folgt, dass zugleich die Hermite'sche Form identisch verschwindet.

Die Hermite'sche Form von drei quadratischen Formen nimmt überhaupt, wenn sie sich nicht auf Null reducirt, in dem Fall, dass die Jacobi'sche Form identisch verschwindet, eine besondere Gestalt an; sie wird nämlich gleich dem Cubus einer linearen Form, welche gleich Null gesetzt die Gleichung des allen Kegelschnitten gemeinsamen Doppelpunktes darstellt. Um dies zu beweisen, machen wir von der Thatsache Gebrauch, dass die drei Formen f_1, f_2, f_3 als binäre betrachtet werden können (vergl. Art. 7.): $f_1 = \alpha_y^2$, $f_2 = \beta_y^2$, $f_3 = \gamma_y^2$. Für die Hermite'sche Form finden wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_x^2 & \alpha_x\alpha_y & \alpha_y^2 \\ \beta_x^2 & \beta_x\beta_y & \beta_y^2 \\ \gamma_x^2 & \gamma_x\gamma_y & \gamma_y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1y_1 & x_1y_2+x_2y_1 & x_2y_2 \\ y_1^2 & 2y_1y_2 & y_2^2 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma)\, u_3^3 .$$

Es ist aber $u_3 = 0$ die Gleichung des allen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Doppelpunktes ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$).

III. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Hermite'sche Form identisch verschwindet.

10. Suchen wir nun die Beschaffenheit von ternären quadratischen Formen zu ermitteln, deren Hermite'sche Form identisch verschwindet. Diese im Verhältniss zur vorhergehenden viel einfachere Untersuchung geht aus von einer Relation, in welcher Herr Rosanes (pag. 279 der citirten Abhandlung, Relation 14) den allgemeinen Kegelschnitt des durch die Formen f_1, f_2, f_3 erzeugten Netzes in den Symbolen der Jacobi'schen und Hermite'schen Form ausdrückt unter der Voraussetzung, dass das Netz sich nicht auf ein Büschel reducirt:

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = 4(xyz)D_xD_yD_z - 2(yz\Delta)(zx\Delta)(xy\Delta).$$

Verschwindet nämlich die Hermite'sche Form, die Jacobi'sche dagegen nicht, so bleibt rechts nur das Product $4(xyz)D_xD_yD_z$ stehen, d. h. alle Kegelschnitte des Netzes sind dann reducibel. Berücksichtigen wir jetzt, dass im Fall $u_\Delta^3 = 0$ die Bedingung für die Existenz einer doppelten Geraden im Netz

$$2(\Delta\Delta'\Delta'')^2 D_\Delta D_{\Delta'} D_{\Delta''} + (\Delta\Delta'\Delta'')(\Delta\Delta'\Delta''')(\Delta\Delta''\Delta''')(\Delta'\Delta''\Delta''') = 0$$

erfüllt ist. Ist $l_x = 0$ die Gleichung dieser Geraden und sind $m_x = 0$, $n_x = 0$ zwei andere Gerade, die jene in verschiedenen Punkten schneiden, so können wir durch Variiren von y und z bewirken, dass die

Gleichung $(xyz)=0$ einmal $m_x=0$, das andere Mal $n_x=0$ darstellt und demnach zu constituirenden Kegelschnitten des Netzes wählen

$$l_x^2=0,\quad m_x(L_1 l_x+M_1 m_x+N_1 n_x)=0,\quad n_x(L_2 l_x+M_2 m_x+N_2 n_x)=0,$$

wo weder L_1, M_1, N_1 noch L_2, M_2, N_2 zugleich verschwinden. Wird $l_x=z_1$, $m_x=z_2$, $n_x=z_3$ gesetzt, so muss der allgemeine Kegelschnitt des Netzes

$$\lambda z_1^2+\mu z_2(L_1 z_1+M_1 z_2+N_1 z_3)+\nu z_3(L_2 z_1+M_2 z_2+N_2 z_3)=0$$

reducibel sein, d. h. seine Determinante muss für alle λ, μ, ν verschwinden. In der cubischen Form der Grössen λ, μ, ν

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & \mu L_1 & \nu L_2 \\ \mu L_1 & 2\mu M_1 & \mu N_1+\nu M_2 \\ \nu L_2 & \mu N_1+\nu M_2 & 2\nu N_2 \end{vmatrix}$$

sind also die sämmtlichen Coefficienten gleich Null zu setzen. Dadurch erhält man:

$$M_1^2=0,\quad N_1^2=0,\quad 2M_1N_2-M_2N_1=0,\quad L_2(L_1M_2-L_2M_1)=0,$$
$$L_1(L_2N_1-L_1N_2)=0,$$

woraus man schliesst:

$$M_1=0,\quad N_1=0,\quad M_2=0,\quad N_2=0,$$

d. h. die constituirenden Kegelschnitte des Netzes nehmen die Formen an:

$$z_1^2=0,\quad z_1z_2=0,\quad z_1z_3=0;$$

demnach haben sie die Gerade $z_1=0$ gemein. *Sobald die Hermite'sche Form eines Kegelschnittnetzes verschwindet und nicht gleichzeitig die Jacobi'sche, sind alle Curven des Netzes reducibel und haben eine Gerade gemein.* Das Verschwinden der Hermite'schen Form hat also zur Folge, dass das Netz sich entweder auf ein Büschel reducirt oder aus reduciblen Kegelschnitten mit einer gemeinschaftlichen Geraden besteht. Es kann auch beides zugleich eintreten.

Die Jacobi'sche Form eines Netzes nimmt, sobald die Hermite'sche Form identisch verschwindet, eine besondere Gestalt an; sie wird gleich dem Cubus einer linearen Form, welche die allen Kegelschnitten gemeinschaftliche Gerade darstellt. Die Jacobi'sche Form von z_1^2, z_1z_2, z_1z_3 ist nämlich $2z_1^3$.

IV. Bemerkungen über den Zusammenhang der Kegelschnittnetze mit den Linien 3. O.

11. Die Polarkegelschnitte einer Linie 3. O. bestimmen im Allgemeinen ein Netz und man kann daher auch umgekehrt nach einer Linie 3. O. fragen, deren Polarkegelschnittnetz mit einem gegebenen

Netze congruent ist. Diese Frage lässt sich auf ein System von 18 homogenen linearen Gleichungen mit 19 Unbekannten zurückführen, welches immer auf eine oder unendlich viele Arten lösbar ist. Daraus darf man aber nicht schliessen, dass es immer eine Linie 3. O. giebt, deren Polarkegelschnittnetz sich mit dem gegebenen deckt; denn jenes System drückt nur aus, dass alle Polarkegelschnitte der unbekannten Linie 3. O. dem gegebenen Netz angehören, nicht aber das Umgekehrte, und es bleibt daher jedesmal zu untersuchen, ob diese Polarkegelschnitte das ganze Netz umfassen. Die Entscheidung hierüber hängt nun von einer Combinante ab, die Herr Gundelfinger (Ueber das simultane System von drei ternären quadratischen Formen, Crelle's Journal Bd. 80 pag. 73) mit s bezeichnet hat und die sich durch die Symbole der Jacobi'schen und Hermite'schen Form folgendermassen ausdrücken lässt:

$$s = 18(\Delta\Delta'\Delta'')^2 D_\Delta D_{\Delta'} D_{\Delta''} + 9(\Delta\Delta'\Delta'')(\Delta\Delta'\Delta''')(\Delta\Delta''\Delta''')(\Delta'\Delta''\Delta''').$$

Wenn s von Null verschieden ist, so ergiebt sich eine bestimmte Linie 3. O., deren Herstellung Herr Gundelfinger daselbst angegeben und von der er gezeigt hat, dass unter ihren Polaren alle Kegelschnitte des gegebenen Netzes vorkommen. Bei den vorstehend behandelten Netzen ist aber $s = 0$ und es mag daher ihr Zusammenhang mit den Linien 3. O. hier noch erörtert werden.

12. Verschwindet die Jacobi'sche Form eines Netzes, die Hermite'sche dagegen nicht, so sind alle seine Kegelschnitte reducibel und haben denselben Doppelpunkt. Die Polarkegelschnitte einer Linie 3. O. können ein solches Netz nicht bestimmen, weil ihre Hesse'sche Form verschwinden müsste und die Polarkegelschnitte einer Linie 3. O., deren Hesse'sche Form verschwindet, einem Büschel angehören. *Dagegen existirt eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Linien* 3. *O., deren Polarkegelschnitte einem Netz der beschriebenen Art angehören.* Denn eine solche Linie 3. O. zerfällt jedenfalls in drei durch den gemeinsamen Doppelpunkt der Kegelschnitte ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$) gehende Gerade und ihre Gleichung lässt sich daher schreiben:

$$a_0 y_1^3 + 3a_1 y_1^2 y_2 + 3a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3 = 0.$$

Umgekehrt liefert jede Curve 3. O., die jenen Punkt zum dreifachen Punkt hat, als Polarkegelschnitte ein Büschel und alle diese Büschel zusammen bilden das gegebene Netz.

13. Auch wenn die Hermite'sche Form eines Netzes verschwindet, ohne dass die Jacobi'sche sich auf Null reducirt, kann eine Linie 3. O. nicht existiren, deren Polarkegelschnitte jenes Netz bestimmen. *Es giebt jedoch eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Linien* 3. *O., deren Polarkegelschnitte dem gegebenen Netz angehören.* Ist $z_1 = 0$

die allen Kegelschnitten des gegebenen Netzes gemeinsame Gerade, so muss die Linie 3. O. eine Gleichung haben von der Form

$$z_1^2(A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3) = 0,$$

wo die drei Geraden $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ nicht durch einen Punkt gehen dürfen. Umgekehrt stellt jede Gleichung dieser Art eine Linie 3. O. mit der verlangten Eigenschaft dar.

14. Reducirt sich sowohl die Jacobi'sche als auch die Hermite'sche Form auf Null, so artet das Kegelschnittnetz in ein Büschel aus. Es hat aber jede Linie 3. O., deren Polarkegelschnitte ein Büschel bilden, einen dreifachen Punkt und jeder Polarkegelschnitt hat diesen Punkt zum Doppelpunkt. Demnach kann nur ein Büschel von Kegelschnitten in Betracht kommen, dessen sämmtliche Elemente reducibel sind mit demselben Doppelpunkt.

Es seien also zwei binäre quadratische Formen f_1 und f_2 gegeben; es soll eine binäre cubische Form gefunden werden, deren beide Ableitungen aus den gegebenen zwei Formen sich linear zusammensetzen lassen. Sind die Doppelelemente der Serie $f_1 + \lambda f_2$ von einander verschieden, so können wir zwei Formen y_1^2 und y_2^2 zu Grunde legen und schreiben $a_0 y_1^3 + 3a_1 y_1^2 y_2 + 3a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3$ für die gesuchte cubische Form. Hier müssen nun a_1 und a_2 verschwinden, während a_0 und a_3 unbestimmt bleiben. Fallen hingegen die Doppelelemente zusammen, so verschwindet die Resultante der Formen f_1 und f_2; wir dürfen setzen $f_1 = y_1 y_3$, $f_2 = y_2 y_3$, wo y_1, y_2, y_3 in linearem Zusammenhang stehen. Die cubische Form muss den Factor y_3 im Quadrat enthalten, also die Gestalt $y_3^2 u$ haben, wo u eine beliebige lineare Form von y_1 und y_2 ist. *Es ergiebt sich in beiden Fällen eine cubische Form, in welcher zwei Coefficienten unbestimmt bleiben, welcher also ein Büschel von Linien 3. O. entspricht.*

Die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischen Curven.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Die Schnittpunkte zweier algebraischen Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$, worin x, y beliebige projectivische Punktcoordinaten bedeuten, haben theils endliche, theils unendliche Coordinaten. Die Schnittpunkte der ersten Art werden mit Hilfe der Resultante beider Gleichungen — man eliminirt entweder y oder x — gefunden, die der zweiten Art, indem man die Gleichungen durch die Substitution

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}$$

homogen macht und diejenigen gemeinsamen Werthsysteme derselben bestimmt, wofür $x_3=0$ ist. Bekanntlich genügen die zugehörigen x_1, x_2 den Gleichungen

$$U_m(x_1,x_2)=0,\qquad V_n(x_1,x_2)=0,$$

wenn $U_m(x,y)$ die Glieder höchster Dimension in x, y von $F(x,y)$, $V_n(x,y)$ eben dieselben von $G(x,y)$ bezeichnen. Zur Bestimmung der Multiplicität jedes einzelnen Schnittpunktes werden nach dem Vorgange Plückers gewöhnlich Continuitätsbetrachtungen angewendet. Abgesehen davon, dass dieses Hilfsmittel für schwierigere Fälle kaum ausreichen dürfte, ist es bisher noch nicht genügend begründet, ja geradezu geeignet, den algebraischen Charakter des Problemes zu verdecken. Die Multiplicität eines Schnittpunktes ist eine demselben zugeordnete Zahl, welche vermöge ihrer Definition die Eigenschaft besitzt gegenüber allen linearen Transformationen der homogenen Coordinaten unveränderlich zu sein. Erst in diesem Sinne kann sie als eine geometrische Grösse betrachtet werden.

Ich lernte eine von dieser Auffassung geleitete Behandlung des Problems der Multiplicität zuerst durch die Vorlesungen des Herrn Kronecker über „algebraische Gleichungen“ im W. S. 1870/71 kennen. Herr Kronecker definirte die Multiplicität der *endlichen* Schnittpunkte $x_0\, y_0$ mittelst der im § 2. angeführten Resolvente

$E(u; \alpha_1, \alpha_2)$ und gab ausführlich die Begründung dieser Definition. Er erwähnte auch die in § 1. aufgestellte allgemeine Resolvente $E(u, v; \alpha, \beta)$, aus welcher ich nach seinem Vorgange die Definition der Multiplicität *aller* Schnittpunkte beider Curven abgeleitet habe. Die genannten Resolventen lassen sich auch betrachten als das Product der Gleichungen aller Schnittpunkte, dessen Bildung Clebsch gelehrt hat*). Die symbolische Rechnung zeigt dann unmittelbar die Unveränderlichkeit der Multiplicität gegenüber den linearen Transformationen, so dass auch auf diesem Wege die obige Forderung vollständig erfüllt ist.

Wenn somit theoretisch das in Rede stehende Problem vollständig gelöst ist, so gewinnt erhöhtes Interesse die Frage: *Wie kann die soeben definirte Multiplicität eines endlichen Schnittpunktes* x_0, y_0 *unmittelbar, d. i. ohne Hilfe von Transformationen aus den gegebenen Gleichungen* $F=0$ $G=0$ *bestimmt werden?* Die Antwort darauf ist leicht zu finden, aber schwierig zu begründen. „Man stelle alle Wurzeln y_s der Gleichung $F=0$ auf, welche für lim $x=x_0$ sich der Grenze y_r nähern, desgleichen alle Wurzeln y_s' der Gleichung $G=0$ von derselben Eigenschaft und entwickele das Product

$$\prod_{r,s}{}'(y_r - y_s')$$

nach steigenden (ganzen) Potenzen von $x - x_0$. Der Exponent des ersten Gliedes dieser Reihe giebt genau die Multiplicität des Punktes x_0 y_0 an.“**)

Der allgemeine Beweis dieses Satzes, um den ich mich seit mehreren Jahren bemüht habe, wird ermöglicht durch die von den Herren Halphen und H. I. S. Smith entdeckten *charakteristischen Zahlen* einer nach steigenden gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ fortschreitenden Reihenentwickelung (vgl. Nr. 6.). Vermittelst derselben kann nämlich bestimmt werden, wie oft das Product Π' den Factor $x - x_0$ enthält, wenn die y_r, y_s' auf je eine Gruppe von Wurzeln beschränkt werden — eine Zahl (vgl. Nr. 10.), die auch Herr Smith bereits gegeben hat (Proceedings of the London M. Society VI p. 160).

Durch den vorstehenden Satz lässt sich erklären, wie so der Grad der Resultanten von $F=0$ $G=0$ nach x oder nach y grösser sein

---

*) A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie etc. I. Band 1876 p. 281.

**) Bei Begründung der Multiplicität des Punktes x_0 y_0 als Schnittpunktes zweier Curven, von denen mindestens eine *nicht algebraisch* ist, müsste man zeigen, dass die in diesem Satze definirte Zahl bei allen Transformationen

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3, \qquad y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3$$

ungeändert bleibt. Auch dies kann mit Hilfe der im § 5. gebrauchten Sätze geleistet werden.

kann als die Gesammtmultiplicität der endlichen Schnittpunkte*), und wie so die Grade dieser beiden Resultanten von einander abweichen können (§ 6.).

Bezeichnungen. Die Functionen $F(x, y)$, $G(x, y)$, welche keinen gemeinsamen Factor in x, y besitzen sollen, seien in x bezüglich vom Grade $m-\mu$, $n-\nu$, in y bezüglich vom Grade $m-\mu'$, $n-\nu'$ ($\mu \geq 0$, $m \geq \mu + \mu'$ etc.) Es wird gesetzt

$$F(x, y) \equiv \sum_{0}^{m-\mu}{}_r\, x^{m-\mu-r} f_r(y) \equiv \sum_{0}^{m-\mu'}{}_r\, y^{m-\mu'-r} f_r'(x),$$

$$G(x, y) \equiv \sum_{0}^{n-\nu}{}_r\, x^{n-\nu-r} g_r(y) \equiv \sum_{0}^{n-\nu'}{}_r\, y^{n-\nu'-r} g_r'(x);$$

und nach dem Homogenmachen

$$x_3^m F(x, y) \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3), \qquad x_3^n G(x, y) \equiv \Psi(x_1, x_2, x_3).$$

Dabei sei der Grad in x_3 von Φ, Ψ bezüglich $m-\mu''$, $n-\nu''$. Für die Resultanten wird nach Herrn Kronecker geschrieben

$$\begin{cases} X = \underset{y}{R}\,\{F, G\} = f_0'^{\,n-\nu'} g_0'^{\,m-\mu'} \prod (y_r - y_s') \\ \qquad\qquad (r = 1, 2 \cdots m-\mu', \quad s = 1, 2 \cdots n-\nu'); \\ Y = \underset{x}{R}\,(F, G) = f_0^{\,n-\nu} g_0^{\,m-\mu} \prod (x_r - x_s') \begin{cases} r = 1, 2 \cdots m-\mu \\ s = 1, 2 \cdots n-\nu \end{cases}. \end{cases}$$

Hier bezeichnen y_r die Wurzeln von $F = 0$, y_s' die Wurzeln von $G = 0$ für einen Werth von x, wofür weder $f_0'(x)$ noch $g_0'(x)$ verschwindet. Die analoge Bedeutung haben x_r, x_s'.

Bei der geometrischen Interpretation ist im Folgenden $x_3 = 0$ gewöhnlich als Gleichung der *unendlich fernen* Geraden angenommen. Die Schnittpunkte $x_3 = 0$ heissen daher manchmal „unendlich ferne.“

---

§ 1.

Definition der Multiplicität aller gemeinsamen Punkte der Curven $\Phi = 0 \quad \Psi = 0$.

1. Es seien

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \qquad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

zwei lineare Functionen der x, deren Coefficienten ausser den folgenden Beschränkungen völlig beliebig gedacht werden können.

*) *Faà de Bruno* (Théorie générale de l'Elimination 1859 p. 93) hält den Grad der Resultanten und die Anzahl der gemeinsamen Lösungen für identisch. Er scheint hierbei von einer anderen Ansicht über die unendlichen gemeinsamen Werthsysteme (vgl. l. c. p. 101) auszugehen als die in der analytischen Geometrie übliche ist. Ich habe dieselbe im § 8. ausführlich begründet.

a) Die Ausdrücke

$$\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = A_1, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = A_2, \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = A_3$$

dürfen nicht sämmtlich verschwinden.

b) Ist A_h nicht Null, und man führt an Stelle der beiden Veränderlichen x_i, x_k, wo i, k die nach Weglassung des Zeigers h noch übrigen von den Nummern 1, 2, 3 bezeichnen, in $\Phi = 0$ $\Psi = 0$ u, v ein, so soll in den transformirten Gleichungen

$$A_h^m\,\Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv \Phi_h(x_h, u, v),$$
$$A_h^n\,\Psi(x_1, x_2, x_3) \equiv \Psi_h(x_h, u, v)$$

von den Gliedern x_h^m, x_h^n wenigstens *eines* nicht verschwinden. D. i. $u = 0$ $v = 0$ *ist nicht ein Schnittpunkt der Curven* $\Phi = 0$ $\Psi = 0$.

c) Der Ausdruck $u:v$ darf nicht für zwei der gemeinsamen Werthsysteme $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$ denselben Werth erhalten — oder der Punkt $u = 0$ $v = 0$ soll nicht auf der Verbindungslinie von zwei Schnittpunkten beider Curven liegen.

Bildet man nun die Resultante von Φ_h, Ψ_h in Beziehung auf x_h, so findet man

$$R_h(u, v) \equiv \underset{x_h}{R}(\Phi_h, \Psi_h) = A_h^{mn}\,\mathsf{E}(u, v;\ \alpha, \beta),$$

wo E eine ganze homogene Function der u, v von der Dimension mn, und eine ebensolche der α, β von derselben Dimension ist, welche niemals identisch verschwindet und falls vorstehende Bedingungen noch für andere Werthe des Index h als den eben gewählten zutreffen, *immer dieselbe bleibt.*

Satz. „*Jedem gemeinsamen Werthsysteme* $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$ *entspricht ein Wurzelfactor der Resolvente* E

$$uv^{(r)} - vu^{(r)} = u(\beta_1 x_1^{(r)} + \beta_2 x_2^{(r)} + \beta_3 x_3^{(r)}) \\ - v(\alpha_1 x_1^{(r)} + \alpha_2 x_2^{(r)} + \alpha_3 x_3^{(r)}).$$

und *die Zahl, welche anzeigt, wie oft derselbe in* E *vorkommt, bezeichnet genau die Multiplicität des Punktes* $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$ *als Schnittpunktes der Curven* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$."

„E *enthält keine anderen Factoren als die ebengenannten, so dass die Summe der Multiplicitäten aller Schnittpunkte* mn *beträgt.*"

Der Einfachheit wegen sei $h = 1$; so dass man zu setzen hat

$$(1) \quad A_1 x_2 = A_2 x_1 + \beta_3 u - \alpha_3 v, \quad A_1 x_3 = A_3 x_1 - \beta_2 u + \alpha_2 v.$$

Man sieht unmittelbar, dass der Coefficient von x_1^k in Φ_1 eine ganze homogene Function der u, v von der Dimension $m-k$, und eine ebensolche der α, β von der Dimension $m+k$. Da nach Voraussetzung das Glied $x_1^m\,\Phi(A_1, A_2, A_3)$ in Φ_1 und das Glied $x_1^n\,\Psi(A_1, A_2, A_3)$ in Ψ_1 nicht zugleich verschwinden sollen, so kann R_1 nicht identisch Null sein. R_1 ist homogen in u, v und von der Dimension mn; und ebenfalls homogen in Beziehung auf die sechs Coefficienten α, β und von der Dimension $3mn$.

Nach dem Vorgange des Herrn Kronecker lässt sich R_2 unmittelbar aus R_1 ableiten, woraus ersichtlich werden wird, *dass* R_1 *den Factor* A_1^{mn} *enthält und dass*

$$R_1 : A_1^{mn} = R_2 : A_2^{mn} = \mathsf{E}(u, v; \alpha\beta).$$

Um R_2 zu bilden hat man in Φ, Ψ für x_1, x_3 zu substituiren

$$A_2 x_1 = A_1 x_2 - \beta_3 u + \alpha_3 v, \quad A_2 x_3 = A_3 x_2 + \beta_1 u - \alpha_1 v$$

und nachher x_2 zu eliminiren. Statt von den ursprünglichen Coordinaten x überzugehen zu den eben angenommenen

$$y_1' = v, \quad y_2' = x_2, \quad y_3' = u$$

kann man auch zuerst auf das System

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = u, \quad y_3 = v$$

transformiren und hernach den Uebergang zum Systeme y' ausführen. Dabei ergeben sich, wie leicht zu ermitteln ist, folgende Transformationsformeln:

$$y_1 = \frac{\alpha_3}{A_1} y_1' + y_2' - \frac{\beta_3}{A_1} y_3', \quad y_2 = \frac{A_2 y_3'}{A_1}, \quad y_3 = \frac{A_2 y_1'}{A_1},$$

wodurch $\Phi_1(x_1, u, v) \equiv \Phi_1(y_1, y_2, y_3)$ in $\Phi_2(y_2', y_3', y_1') \equiv \Phi_2(x_2, u, v)$ übergeführt wird. Man findet daher nach dem Satze über die Transformation der Resultante

$$R_2 = \underset{y_2'}{R}\{\Phi_2, \Psi_2\} = R_1\left(\frac{A_2 y_3'}{A_1}, \frac{A_2 y_1'}{A_1}\right) = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{mn} R_1(u, v).$$

Nun ist R_2 eine ganze Function der α, β, sowie R_1, also muss R_1 den Factor A_1^{mn} enthalten. Setzt man wie oben

$$R_1 = A_1^{mn}\,\mathsf{E}(uv, \alpha\beta),$$

so folgt auch

$$R_2 = A_2^{mn}\,\mathsf{E}(uv, \alpha\beta),$$

und ebenso natürlich

$$R_3 = A_3^{mn}\,\mathsf{E}(uv, \alpha\beta).$$

Die Resolvente $\mathsf{E}(uv, \alpha\beta)$ zerfällt nun in mn Factoren $uv' - vu'$, worunter auch gleiche vorkommen können. Unter den Wurzeln der Gleichung $\mathsf{E} = 0$ erscheinen selbstverständlich alle folgenden

$$\frac{u^{(r)}}{\alpha_1 x_1^{(r)} + \alpha_2 x_2^{(r)} + \alpha_3 x_3^{(r)}} = \frac{v^{(r)}}{\beta_1 x_1^{(r)} + \beta_2 x_2^{(r)} + \beta_3 x_3^{(r)}}.$$

Umgekehrt: ist u', v' eine Wurzel von $\mathsf{E} = 0$, so existirt nothwendig ein Werth x_1', so dass

$$\Phi_1(x_1', u', v') = 0, \quad \Psi_1(x_1', u', v') = 0.$$

Setzt man x_1', u', v' in (1) ein, wodurch man x_2', x_3' erhalten möge, so folgt auch, da

$$A_1^m \Phi(x_1 x_2 x_3) \equiv \Phi(A_1 x_1, A_2 x_1 + \beta_3 u - \alpha_3 v, A_3 x_1 - \beta_2 u + \alpha_2 v)$$
$$\equiv \Phi_1(x_1, u, v)$$

u. s. w.,

$$\Phi(x_1', x_2', x_3') = 0, \quad \Psi(x_1', x_2', x_3') = 0.$$

Somit muss x_1', x_2', x_3' eines der Werthsysteme sein, welches beiden gegebenen Gleichungen genügt.

Nach c) erkennt man ferner, dass *verschiedenen* Punkten $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$ *verschiedene* Wurzelfactoren der Resolvente entsprechen.

2. Es ergiebt sich leicht, dass *die in dem Satze der vorhergehenden Nummer als Multiplicität des Punktes $x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)}$ bezeichnete Zahl von dem ursprünglich gewählten Coordinatensysteme der $x_1 x_2 x_3$ unabhängig, somit eine geometrische Grösse ist.*

In der That führen wir an Stelle dieser Coordinaten neue: $X_1 X_2 X_3$ ein durch die Formeln

(1) $$x_h = c_{h,1} X_1 + c_{h,2} X_2 + c_{h,3} X_3 \; (h = 1, 2, 3),$$

wodurch die Functionen Φ, Ψ bezüglich in Φ', Ψ' übergehen sollen, so dass

$$\Phi(c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + c_{13} X_3, \cdots) \equiv \Phi'(X_1, X_2, X_3)$$

u. s. w. Indem wir die linearen Functionen

(2) $$u' = \alpha_1' X_1 + \alpha_2' X_2 + \alpha_3' X_3, \quad v' = \beta_1' X_1 + \beta_2' X_2 + \beta_3' X_3$$

in der oben angegebenen Weise benutzen, bilden wir $E'(u', v'; \alpha', \beta')$. Dabei möge A_1' als von Null verschieden angesehen werden, so dass wir E' durch Elimination von X_1 aus den Gleichungen

$$A_1'^m \Phi' \equiv \Phi_1'(X_1, u', v'), \quad A_1'^n \Psi' \equiv \Psi_1'(X_1, u', v')$$

erhalten.

Um von den Gleichungen $\Phi = 0$ $\Psi = 0$ auf die letztgenannten zu kommen, wurden nach einander die Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ durch $X_1 X_2 X_3$ und diese durch $y_1 y_2 y_3$ d. i.

$$y_1 = X_1, \quad y_2 = u', \quad y_3 = v'$$

ersetzt. Wir können aber auch diesen Uebergang so ausführen, dass wir zunächst von $x_1 x_2 x_3$ zu $x_1 y_2 y_3$ transformiren und dann noch x_1 durch X_1 ersetzen. Es seien $\gamma_{r,s}$ die adjungirten Elemente des Schemas

$$| c_{r,s} | = C \,(\gtrless 0)$$

und

(3) $$\left\{\begin{aligned} \alpha_1' \gamma_{h,1} + \alpha_2' \gamma_{h,2} + \alpha_3' \gamma_{h,3} = \alpha_h \\ \beta_1' \gamma_{h,1} + \beta_2' \gamma_{h,2} + \beta_3' \gamma_{h,3} = \beta_h \end{aligned}\right\} (h = 1, 2, 3);$$

so dass man hat

$$A_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = C(c_{1,1} A_1' + c_{1,2} A_2' + c_{1,3} A_3'),$$
$$A_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = C(c_{2,1} A_1' + c_{2,2} A_2' + c_{2,3} A_3'),$$
$$A_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = C(c_{3,1} A_1' + c_{3,2} A_2' + c_{3,3} A_3').$$

Löst man die Gleichungen (1) nach $X_1\, X_2\, X_3$ auf und substituirt in (2), so folgt

(4) $C \cdot y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad C \cdot y_3 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3,$

durch welche Formeln die erste der obigen Transformationen vollzogen werden kann, falls man annimmt, dass $A_1 \gtrless 0$. Für die zweite folgt aus der Gleichung

$$x_1 = c_{1,1} X_1 + c_{1,2} X_2 + c_{1,3} X_3$$

in Verbindung mit beiden Gleichungen (2):

(5) $\frac{A_1}{C} X_1 = A_1' x_1 + (c_{13}\beta_2' - c_{12}\beta_3')\, y_2 + (c_{12}\alpha_3' - c_{13}\alpha_2')\, y_3.$

Vermöge der Gleichungen (4) findet man

$$A_1^m\, \Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi_1(x_1, Cy_2, Cy_3),$$

wo Φ_1 dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 1., und

$$\Phi_1\left(\frac{A_1}{CA_1'} X_1 - \cdots, \quad Cy_2, Cy_3\right) = \Phi_1'(X_1, y_2\, y_3) \cdot \left(\frac{A_1}{A_1'}\right)^m.$$

Aehnliche Formeln vermitteln die Functionen Ψ und Ψ_1'. Demnach ergiebt sich

$$\underset{X_1}{R}\{\Phi_1', \Psi_1'\} = A_1'^{mn}\, \mathsf{E}'(y_2, y_3;\, \alpha'\beta')$$
$$= \left(\frac{A_1'}{A_1}\right)^{2mn} \left(\frac{A_1}{CA_1'}\right)^{mn} \underset{x_1}{R}\{\Phi_1(x_1, Cy_2, Cy_3), \quad \Psi_1(\cdots)\},$$

worin der dritte Factor nach Nr. 1. $= A_1^{mn} C^{mn} \mathsf{E}(y_2 y_3, \alpha\beta)$. Substituirt man dafür diesen Werth, so folgt schliesslich *die Identität*

(6) $$\mathsf{E}'(u', v';\, \alpha'\beta') = \mathsf{E}(u'\, v';\, \alpha\beta);$$

dabei hat man für α_h, β_h die Ausdrücke (3) zu setzen.

Ist bei beliebigen α, β

$$\mathsf{E}(uv;\, \alpha\beta) = \prod_r \{uv^{(r)} - vu^{(r)}\}^{m_r},$$

so folgt nach (6)

$$\mathsf{E}'(u'v';\, \alpha'\beta') = \prod_r \{u'v^{(r)} - v'u^{(r)}\}^{m_r},$$

jedoch für α_h, β_h die Werthe (3) gesetzt. *Es kommt mithin in* E' *jeder Wurzelfactor genau so oft vor, als der entsprechende in* E. Denn da nach (3)

$$u^{(r)} = \alpha_1 x_1^{(r)} + \cdots = C\{\alpha_1' X_1^{(r)} + \alpha_2' X_2^{(r)} + \alpha_3' X_3^{(r)}\},$$
$$v^{(r)} = C\{\beta_1' X_1^{(r)} + \beta_2' X_2^{(r)} + \beta_3' X_3^{(r)}\},$$

so können zufolge der Bedingung c) in Nr. 1., der auch die Geraden $u' = 0$, $v' = 0$ genügen müssen, nicht zwei Factoren $u'v^{(r)} - v'u^{(r)}$ einander gleich werden.

§ 2.

Die Resolvente der endlichen Schnittpunkte.

3. Die Bedeutung der allgemeinen Resolvente $\mathsf{E}(uv, \alpha\beta)$, welche identisch verschwinden würde, falls der Punkt $u = 0$, $v = 0$ ein Schnittpunkt beider Curven wäre, besteht darin, dass sie durch ihre irreducibeln Factoren die irreducibeln Theile des Schnittpunktsystemes $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ kennen lehrt. Die unendlichen Schnittpunkte, wofür $x_3^{(r)} = 0$ ist, bilden immer solche Theile. Bezeichnen wir die Coordinaten derselben mit $\xi_1^{(i)}$, $\xi_2^{(i)}$, 0, so hat man dafür

$$\begin{aligned} uv^{(i)} - vu^{(i)} &= u(\beta_1 \xi_1^{(i)} + \beta_2 \xi_2^{(i)}) - v(\alpha_1 \xi_1^{(i)} + \alpha_2 \xi_2^{(i)}) \\ &= \xi_1^{(i)}(\beta_1 u - \alpha_1 v) + \xi_2^{(i)}(\beta_2 u - \alpha_2 v). \end{aligned}$$

Der Complex der Factoren

$$[uv^{(i)} - vu^{(i)}]^{m_i}$$

bildet einen in den Coefficienten der Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ ganzen rationalen Ausdruck.

Dies ergiebt sich sofort durch folgende Specialisirung von E. Setzen wir

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \qquad v = x_3,$$

so dass

$$A_1 = \alpha_2, \quad A_2 = -\alpha_1, \quad A_3 = 0,$$

so können $\alpha_1 \alpha_2$ noch immer auf unbegrenzt viele Arten so angenommen werden, dass die beiden ersten Bedingungen in Nr. 1. erfüllt bleiben, also E nicht identisch verschwindet. Man wird auch leicht bewirken, dass die Gerade $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ nicht zwei endliche Schnittpunkte beider Curven verbindet. Unter dieser Voraussetzung giebt die Resolvente, die wir nur mit $\mathsf{E}(u, x_3; \alpha_1, \alpha_2)$ bezeichnen, noch immer *die Multiplicität aller endlichen Schnittpunkte in der oben festgesetzten Weise* an. Es ist

$$\mathsf{E}(u, x_3; \alpha_1 \alpha_2)$$
$$= \prod_i \{-x_3(\alpha_1 \xi_1^{(i)} + \alpha_2 \xi_2^{(i)})\}^{m_i} \cdot \prod_k \{ux_3^{(k)} - x_3(\alpha_1 x_1^{(k)} + \alpha_2 x_2^{(k)})\}^{m_k},$$

wo der Index k sich auf die endlichen Schnittpunkte bezieht. Da dieser Ausdruck eine ganze Function der Coefficienten von Φ, Ψ darstellt, so kann man unmittelbar schliessen, dass auch der Coefficient der höchsten Potenz von u, d. i. wenn $x_3^{(k)} = 1$ gesetzt wird,

$$\prod_i \{\alpha_1 \xi_1^{(i)} + \alpha_2 \xi_2^{(i)}\}^{m_i}$$

eine ganze Function der genannten Coefficienten sei. Somit wegen der Willkürlichkeit von α_1, α_2 auch das Product

$$\prod_i (uv^{(i)} - vu^{(i)})^{m_i}$$

in der allgemeinen Resolvente.

Betrachtet man die Grössen α_1, α_2, $-u : x_3$ als Liniencoordinaten, so stellt die Gleichung

$$\mathsf{E}(u, x_3; \alpha_1, \alpha_2) : x_3^{mn} = 0$$

das Product der Gleichungen aller mn Schnittpunkte der beiden Curven dar.

4. Um zu den Coordinaten x, y zurückzukehren, hat man

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= 1, \\ x_1^{(k)} &= x_k, & x_2^{(k)} &= y_k, & x_3^{(k)} &= 1 \end{aligned}$$

zu setzen. Dann wird die *Resolvente der endlichen Schnittpunkte*

$$\mathsf{E}(u, 1; \alpha_1, \alpha_2) = \mathsf{E}(u; \alpha_1, \alpha_2)$$

definirt durch die Gleichungen:

$$\underset{x}{R}\left\{F\left(x, \frac{u-\alpha_1 x}{\alpha_2}\right), \quad (G \cdot \cdot \cdot)\right\} = \frac{1}{\alpha_2^{mn}} \mathsf{E}(u; \alpha_1 \alpha_2),$$

$$\underset{y}{R}\left\{F\left(\frac{u-\alpha_2 y}{\alpha_1}, y\right), \quad (G \cdot \cdot \cdot)\right\} = \left(-\frac{1}{\alpha_1}\right)^{mn} \mathsf{E}(u; \alpha_1 \alpha_2).$$

Um dieselbe zu erhalten, führt man demnach in die ursprünglichen Gleichungen statt einer der Veränderlichen x, y u ein durch die Formel $u = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ und eliminirt die andere.

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, *dass die Multiplicität eines endlichen Schnittpunktes $x_0 y_0$ beider Curven $F = 0$, $G = 0$, wie sie im Vorstehenden definirt wurde, übereinstimmt mit dem Exponenten von $x - x_0$ aus dem in der Resultante X vorkommenden Producte*

$$\prod_{r,s}{}' (y_r - y'_s),$$

worin y_r, y'_s nur auf diejenigen Wurzeln der Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ bezogen werden, welche für $x = x_0$ in $y = y_0$ übergehen, d. i. durch diejenigen Reihenentwickelungen dargestellt werden, welche in der Umgebung der Stelle $x_0 y_0$ stattfinden.

Der Beweis dieses Satzes gelingt nur in einfachen Fällen durch *directe Vergleichung* von $\mathsf{E}(u, \alpha_1 \alpha_2)$ mit X. Wenn $\mathsf{E}(u; 1, 0)$ nicht identisch verschwindet (was aber voraussetzt, dass wenigstens eine der Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ von demselben Grade in y ist, als ihre Dimension in x, y beträgt), so hat man

$$\mathsf{E}(x; 1, 0) = X,$$

woraus der Satz unmittelbar folgt, falls neben $x_0 y_0$ kein anderer (endlicher) Schnittpunkt mit der Abscisse x_0 vorhanden ist. — Auch wenn *wenigstens entweder die Function* $f_0'(x)$ *in* x *vom Grade* μ', *oder* $g_0'(x)$ *vom Grade* ν' *ist und wenn* $f_0'(x)$, $g_0'(x)$ *keinen Theiler in* x *gemein haben* (d. i. wenn die beiden Curven keine zur y-Axe parallele Asymptote gemein haben), lassen sich $\mathsf{E}(u;\alpha_1\alpha_2)$ und X in unmittelbare Beziehung setzen (vgl. Nr. 27.). Bei weiterer Specialisirung von F, G scheint dies in allgemeiner Weise nicht mehr möglich. Es wird daher nichts übrig bleiben als zu bestimmen, *wie oft das oben erwähnte Product* Π' *den Factor* $x - x_0$ *und wie oft* $\mathsf{E}(u;\alpha_1\alpha_2)$ *den Factor* $u - \alpha_1 x_0 - \alpha_2 y_0$ *enthält.*

§ 3.

Hilfssätze über die Umkehrung der Reihen.

5. 1. Satz. „Ist gegeben die nach ganzen positiven Potenzen von $x^{\frac{1}{l}}$ fortschreitende Reihe

$$(1)\qquad y = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha+\frac{1}{l}} + \cdots + a_r x^{\alpha+\frac{r}{l}} \cdots \quad (\alpha > 0),$$

so liefert dieselbe für x eine *einzige* Umkehrung nach Potenzen von $\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha l}}$.

$$(2)\qquad x = \left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + b_1\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha l}} + \cdots + b_r\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha l}} + \cdots,$$

wo $b_1 = -a_1 : \alpha a_0$ und allgemein

$$b_r = -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{a_r}{a_0} + \text{ganze Function von } \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} \cdots \frac{a_{r-1}}{a_0}.\text{“}$$

Daran schliesst sich folgender

2. Satz. „Wenn die Reihe (1) in Wirklichkeit nur die folgenden Glieder enthält

$$(3)\qquad y = a_0 x^\alpha + a' x^{\alpha'} + \cdots + a^{(s)} x^{\alpha^{(s)}} + \cdots +,$$

und die Exponenten $\alpha, \alpha' \cdots \alpha^{(s-1)}$ den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner $l_1 < l$ besitzen, so haben die auf das erste Glied folgenden Glieder der Reihe (2) Exponenten vom Nenner $l_1\alpha$.

Ist $\alpha^{(s)}$ der erste Exponent in (3), der sich nicht mehr auf den Nenner l_1 bringen lässt, so ist in (2) das erste Glied, dessen Exponent sich nicht mehr auf den Nenner $l_1\alpha$ bringen lässt, sammt seinem Coefficienten

$$-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{a^{(s)}}{a_0}\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{\alpha^{(s)}+1}{\alpha}-1}.\text{“}$$

Setzt man in (3) $x = \tau^l$ und $l = l_1 g\ (g > 1)$, so beginnt diese

Reihe mit s Gliedern, deren Exponenten Vielfache von g sind. Stellen wir daher der Gleichung

(4) $$y = a_0 \tau^{\alpha l} + \cdots + a^{(s)} \tau^{\alpha^{(s)} l} + \cdots$$

die folgende

$$y' = a_0 \tau'^{\alpha l} + \cdots + a^{(s-1)} \tau'^{\alpha^{(s-1)} l}$$

gegenüber, deren Umkehrung die Form hat

$$\tau' = \omega' \left\{1 + \omega'^{g} \varphi(\omega'^{g})\right\} \qquad y' = a_0 \omega'^{\alpha l},$$

so ist unmittelbar ersichtlich, dass der Anfang der Entwickelung von τ nach Potenzen von ω, wenn

$$y = a_0 \omega^{\alpha l}$$

ist, aus der Gleichung (4) von der Form sein muss

$$\tau = \omega \left\{1 + \omega^{g} \varphi(\omega^{g}) - \frac{1}{l\alpha} \frac{a^{(s)}}{a_0} \omega^{l(\alpha^{(s)} - \alpha)} + \cdots\right\},$$

woraus durch Erheben zur Potenz l obiger Satz unmittelbar folgt. Denn $l(\alpha^{(s)} - \alpha)$ kann unmöglich ein Vielfaches von g sein.

6. Nunmehr schreiten wir zur Definition der für eine Entwickelung von der Form (1) *charakteristischen Zahlen.* Für unseren Zweck wählen wir die folgenden:

1) *Die Werthe* der Exponenten $\alpha, \alpha_1 \cdots \alpha_s$, welche so bestimmt sind, dass α_1 der nächst höhere Exponent in der Entwickelung (1), der sich nicht mehr auf den Nenner bringen lässt, welchen α in seiner reducirten Form besitzt; α_2 der nächst höhere Exponent nach α_1, dessen Nenner nicht mehr in dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfache V_1 der *reducirten* Nenner von α_0 und α_1 enthalten ist u. s. f. α_s endlich ist der kleinste Exponent, dessen Nenner in der reducirten Form l selbst ist.

2) Ist in der reducirten Form

$$\alpha = \frac{p}{q}, \quad \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \cdots, \quad \alpha_s = \frac{p_s}{l},$$

so fügen wir zu den obigen $(s+1)$ Zahlen noch die folgenden $(s+1)$ *ganzen* Zahlen: $q, V_1, V_2 \cdots V_{s-1}, l$, wo V_1, wie schon bemerkt, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von q, q_1; V_2 das von $q, q_1, q_2 \cdots$, endlich V_{s-1} das von $q, q_1 \cdots q_{s-1}$ bedeutet.

Die genannten $2s + 2$ Zahlen mögen die Halphen'schen Zahlen heissen. Sie sind zwar von jenen Zahlen, welche Herr Halphen als charakteristische eingeführt hat (vgl. Liouville's Journ. 3. sér. Bd. II. p. 89), verschieden, doch lassen sich die letzteren durch die hier gebrauchten unmittelbar ausdrücken. Von den a. a. O. mit $q, q_1, \cdots q_s$ bezeichneten Zahlen stimmt q mit der oben ebenso bezeichneten Zahl überein, weiter ist

$$q_1 = \frac{V_1}{q}, \quad q_2 = \frac{V_2}{V_1}, \cdots, \quad q_s = \frac{l}{V_{s-1}}.$$

Die andere Gruppe $p, p_1, \cdots p_s$ wird durch die Formeln gefunden

$$p = \alpha q, \quad p_1 = V_1(\alpha_1 - \alpha), \quad p_2 = V_2(\alpha_2 - \alpha), \cdots, p_s = l(\alpha_s - \alpha).$$

7. Herr Halphen hat nun einen wichtigen Satz aufgestellt, den wir hier folgendermassen wiedergeben:

3. Satz. „Sind

$$0 < \alpha < \alpha_1 \cdots < \alpha_s; \quad q, V_1, V_2 \cdots, V_{s-1}, l$$

die charakteristischen Zahlen der Entwickelung

$$y = a_0 x^\alpha + \cdots + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_2 x^{\alpha_2} + \cdots + A_s x^{\alpha_s} + \cdots,$$

so sind für die umgekehrte Reihe die charakteristischen Zahlen

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha} - 1, \cdots, \beta_s = \frac{\alpha_s + 1}{\alpha} - 1;$$

$$\alpha q, \quad \alpha V_1, \quad \alpha V_2, \cdots, \alpha V_{s-1}, \alpha l.$$

Die Entwickelung selbst lautet:

$$x = \left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A_1}{a_0}\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\beta_1} + \cdots - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A_2}{a_0}\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\beta_2} + \cdots$$
$$\cdots - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A_s}{a_0}\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\beta_s} + \cdots \text{“}.$$

Herr Halphen hat a. a. O. einen Beweis dieses Satzes nicht mitgetheilt. Er folgt jedoch, wie ich bereits bei der ersten Durchsicht der genannten Abhandlung bemerkte, leicht aus dem 2. Satze. In der That ergiebt sich nach demselben, dass in der ersten Lücke Glieder stehen müssen, deren Exponenten sich auf den Nenner $q\alpha = p$ bringen lassen. Das Glied $\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\beta_1}$ ist das erste, welches diese Eigenschaft nicht mehr besitzt. *Dabei ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache* W_1 *von* p *und des Nenners* s_1 *der reducirten Form von* β_1 *genau* αV_1. Setzt man nämlich mit Herrn Halphen $V_1 = q l_1$ und

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{k_1}{q l_1},$$

so ist k_1 relativ prim zu l_1. Nun ist einerseits

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{k_1}{p l_1},$$

andererseits hat man $W_1 = p n_1$ und

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{m_1}{p n_1},$$

wo m_1 relativ prim zu n_1. Daraus folgt $m_1 = k_1$, $n_1 = l_1$ also $W_1 = p l_1 = \alpha V_1$.

In der zweiten Lücke stehen Glieder, deren Exponenten sich auf den Nenner $\alpha V_1 = W_1$ bringen lassen. Vom Exponenten β_2 gilt dies nicht mehr und zwar *ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache* W_2 *von* p *und der reducirten Nenner von* β_1, β_2 *genau* αV_2. Denn man hat wieder

$$V_2 = V_1 l_2, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{k_2}{V_1 l_2},$$

wo k_2 relativ prim zu l_2; und daraus

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha} - 1 = \beta_1 + \frac{k_2}{W_1 \cdot l_2}.$$

Andererseits sei $W_2 = W_1 \cdot n_2$ und

$$\beta_2 = \beta_1 + \frac{m_2}{W_1 \cdot n_2},$$

so ist m_2 relativ prim zu n_2 und daher $n_2 = l_2$, also

$$W_2 = W_1 \cdot l_2 = \alpha V_1 l_2 = \alpha V_2.$$

U. s. f.

8. Die Coefficienten a_r der nach Potenzen von $x^{\frac{1}{l}}$ fortschreitenden Entwickelung (1) sind, wenn diese Wurzel aus x als eindeutig definirt betrachtet wird, vieldeutig; man erhält aus einem Werthe alle übrigen durch Hinzufügung der w^{ten} Wurzeln der Einheit, wenn w der Nenner des Exponenten $\alpha + \frac{r}{l}$ in der reducirten Form ist. Wird gesagt, dass in einer zweiten Entwickelung

$$y = a_0' x^\alpha + \cdots$$

alle Glieder bis einschliesslich des Gliedes $x^{+\frac{r}{l}}$ dieselben Coefficienten besitzen, so ist damit eigentlich gemeint, dass $a_r^w = a_r'^w$ sei. Sollten aber $a_r\, a_r'$ das erste Paar verschiedener Coefficienten sein, so kann ihr Quotient nicht eine w^{te} Wurzel der Einheit sein.

§ 4.

Es wird bestimmt, wie oft der Ausdruck Π' den Factor $x - x_0$ enthält.

9. Um zu ermitteln wie oft der Factor $x - x_0$ in dem Producte jener Differenzen $y_r - y_s'$ erscheint, welche von solchen Wurzeln der beiden Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ gebildet werden, die für $\lim x = x_0$ in y_0 übergehen, stellen wir *jede Gruppe* dieser Wurzeln der ersteren Gleichung mit *jeder Gruppe* derselben aus der letzteren Gleichung zusammen. Die Summe der auf diese Weise erhaltenen Exponenten von $x - x_0$ zeigt an, wie oft dieser Factor in Π' vorkommt.

Für die Gleichung $F = 0$ bestehe irgend eine der genannten Gruppen aus l, für $G = 0$ irgend eine aus l' Wurzeln. Die erstere Gruppe sei dargestellt durch die Entwickelung

$$y - y_0 = a_0 (x - x_0)^\alpha + \cdots, \quad (\alpha > 0);$$

die letztere durch die Entwickelung

$$y - y_0 = a_0' (x - x_0)^{\alpha'} + \cdots, \quad (\alpha' > 0).$$

Bei der Untersuchung der von diesen Wurzelgruppen herrührenden

ll' Differenzen in Π' hat man zu unterscheiden, ob $\alpha > \alpha'$ *oder* $\alpha < \alpha'$ *oder* $\alpha = \alpha'$ ist. Setzt man

$$\alpha = \frac{e}{l}, \quad \alpha' = \frac{e'}{l'},$$

so ergiebt sich der Factor $x - x_0$ im ersten Falle *genau* $e'l$ mal, im zweiten *genau* el' mal, im dritten, wenn bereits die Coefficienten a_0, a_0' verschieden sind, zufolge Nr. 8. *genau* $el' = e'l$ Male.

10. *Ist aber* $\alpha = \alpha'$ *und* $a_0 = a_0'$, so mag $(x - x_0)^\beta$ $(\beta > \alpha)$ das erste Glied sein, dessen Coefficienten in den obigen Entwickelungen sich unterscheiden. Dann hat man folgenden Satz. „*Sind* $\alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_t$; q, $V_1, \cdots V_t$ *diejenigen charakteristischen Zahlen der einen, wie der anderen Entwickelung, welche auf den gemeinsamen Anfang der beiden Reihen — also bis zum Gliede* $(x - x_0)^\beta$ *ausschliesslich — entfallen; so liefern die betrachteten Gruppen den Factor* $x - x_0$ *genau* Q *mal:*

$$Q = ll' \left\{ \alpha\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \alpha_1\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{V_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \alpha_t\left(\frac{1}{V_{t-1}} - \frac{1}{V_t}\right) + \frac{\beta}{V_t} \right\}.\text{“}$$

Dieser Ausdruck hängt nur von den Halphen'schen Zahlen im gemeinsamen Theile beider Reihen und von dem Exponenten desjenigen Gliedes ab, bei dem die Reihen von einander sich zu unterscheiden beginnen.

Beweis. Es sei L das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von l, l', so dass wenn ϑ der grösste gemeinschaftliche Theiler dieser Zahlen und $l = \vartheta h$, $l' = \vartheta h'$ ist, $L = lh' = l'h$. Ferner bezeichne ι eine primitive L^{te} Wurzel der Einheit. Denn hat man für die l^{ten} Wurzeln der Einheit

$$\varepsilon_r = \iota^{rh'} \; (r = 0,\ 1 \cdots l - 1),$$

und für die l'^{ten} Wurzeln der Einheit

$$\varepsilon_s' = \iota^{sh} \; (s = 0,\ 1 \cdots l' - 1).$$

Setzt man $x - x_0 = \xi$, so kann man $\sqrt[l]{\xi}$ und $\sqrt[l']{\xi}$ so bestimmen, dass wenn u, u' ganze Zahlen sind von der Art, dass

$$\frac{u}{l} = \frac{u'}{l'} = \varrho,$$

auch ist

$$\xi^\varrho = \left(\xi^{\frac{r}{l}}\right)^u = \left(\xi^{\frac{s}{l'}}\right)^{u'}.$$

Die hierher gehörigen ll' Differenzen $y_2 - y_s'$ bestehen demnach anfänglich aus Gliedern von der Form

$$\text{(a)} \qquad \xi^\varrho \left\{ \varepsilon_r^u - \varepsilon_s'^{u'} \right\} = \xi^\varrho \left\{ \iota^{rh'u} - \iota^{shu'} \right\},$$

welche verschwinden, falls $(r - s)\, h'u \equiv 0 \pmod{L}$. Wenn nun die reducirte Form von ϱ

$$\varrho = \frac{u}{l} = \frac{v}{w},$$

so ist

$$h'u = \frac{Lv}{w}, \quad \frac{h'u(r-s)}{L} = \frac{v(r-s)}{w}.$$

Also verschwinden die Differenzen (a) dann und nur dann, wenn $r-s$ ein Vielfaches von w ist. Setzt man noch $l = fw$, $l' = f'w$, so entfällt das Glied (a) aus $fl' = f'l$ Differenzen $y_r - y_s'$.

Dieses vorausgesetzt seien in reducirter Form

$$\alpha = \frac{p}{q}, \quad \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1}, \cdots, \quad \alpha_t = \frac{p_t}{q_t}.$$

Das erste Glied (a) $\xi^\alpha(\varepsilon_r^{pg} - \varepsilon_s'^{pg'})$, wobei $l = q \cdot g$, $l' = q \cdot g'$ sei, verschwindet dann und nur dann, wenn $r-s$ durch q theilbar ist, in welchem Falle aber auch *alle Glieder von $y_r - y_s'$ bis zu dem mit Factor ξ^{α_1} ausschliesslich verschwinden.* Diejenigen Differenzen $y_r - y_s'$, in welchen schon das erste Glied stehen bleibt, liefern nun ξ in der Potenz

(b) $$\alpha(ll' - gl') = ll' \cdot \alpha\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Das Glied mit ξ^{α_1}, das nunmehr in gl' Differenzen $y_r - y_s'$ den Anfang macht, verschwindet aber, falls $r-s$ auch durch q_1 theilbar ist. Da jetzt $r-s$ durch V_1 ebenfalls theilbar ist, so verschwinden mit ihm alle Glieder bis zu ξ^{α_2}. Setzt man wie in Nr. 7. $V_1 = ql_1$, so muss in $r - s = qd$ d durch l_1 theilbar sein. Dies findet statt in $\frac{g}{l_1} \cdot l'$ von den zurückgebliebenen Differenzen. Diejenigen unter ihnen, in welchen ξ^{α_1} am Anfange sich behauptet, liefern somit ξ in der Potenz

(c) $$\alpha_1\left(gl' - \frac{gl'}{l_1}\right) = ll'\alpha_1\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{V_1}\right).$$

Von den noch übrigen Differenzen $y_r - y_s'$, deren Anzahl $gl' : l_1 = ll' : V_1$ beträgt, beginnen nur diejenigen wirklich mit ξ^{α_2}, wofür $r - s = V_1 d_1$ nicht durch q_2 theilbar ist d. i., wenn wieder $V_2 = V_1 l_2$, d_1 nicht durch l_2. Die Anzahl derselben ist

$$\frac{gl'}{l_1} - \frac{gl'}{l_1 l_2} = \frac{ll'}{V_1} - \frac{ll'}{V_2};$$

sie geben ξ in der Potenz

(d) $$\alpha_2\left(\frac{ll'}{V_1} - \frac{ll'}{V_2}\right).$$

Und so geht es fort bis zu denjenigen Differenzen $y_r - y_s'$, welche mit ξ^{α_t} beginnen und noch ξ in der Potenz

(e) $$\alpha_t\left(\frac{ll'}{V_{t-1}} - \frac{ll'}{V_t}\right)$$

liefern. In der That sind noch $\frac{ll'}{V_t}$ Differenzen vorhanden, in denen auch ξ^{α_t} und alle noch zum gemeinsamen Theile der beiden Entwickelungen gehörigen Glieder verschwinden. Sie beginnen aber *sicher* mit ξ^{β}; denn wie bereits in Nr. 8. bemerkt ist, kann der Quotient der Coefficienten von ξ^{β} keine w^{te} Wurzel der Einheit sein (w Nenner von β in reducirter Form). Demnach folgt aus ihnen ξ genau in der Potenz

(f) $$\frac{ll'}{V_t} \cdot \beta \cdot$$

Die Summe der Zahlen (b) — (f) ist eben Q.

11. Im 11. Bande dieser Annalen (p. 59) habe ich unter Voraussetzung, dass $l = l'$ sei, für die Multiplicität des Schnittpunktes $x_0 y_0$ den Ausdruck aufgestellt:

$$\mu = k_0(l - \varrho_0) + k_1(\varrho_0 - \varrho_1) + \cdots + k_{r-1}(\varrho_{r-2} - \varrho_{r-1}) + k_r \varrho_{r-1}.$$

Hier waren die Exponenten der im gemeinsamen Theile beider Entwickelungen wirklich vorhandenen Glieder

$$\frac{k_0}{l}, \quad \frac{k_1}{l} \cdots \frac{k_{r-1}}{l};$$

$k_r : l$ der Exponent des ersten Gliedes, das verschiedene Coefficienten besitzt. Ferner bezeichnete ϱ_0 den grössten gemeinsamen Theiler der Zahlen k_0, l; ϱ_1 den von k_1, ϱ_0 u. s. f. ϱ_{r-1} den von k_{r-1}, ϱ_{r-2}.

Lässt man aus dem Ausdrucke μ diejenigen Glieder weg, welche thatsächlich Null sind, so gelangt man ebenfalls auf die Zahl Q der vorigen Nr.

In der That es sei

$$\frac{k_0}{l} = \alpha = \frac{p}{q},$$

also $l = \varrho_0 q$. Nun sind durch eine Reihe von Gliedern

$$\frac{k_1}{l}, \quad \frac{k_2}{l} \cdots \frac{k_{i-1}}{l}$$

die reducirten Nenner q oder Theiler von q, folglich müssen $k_1, k_2 \cdots$ durch ϱ_0 theilbar sein, so dass

$$\varrho_0 = \varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_{i-1}.$$

Ist α_1 der erste Exponent, der sich nicht mehr auf den Nenner q bringen lässt, so folgt zunächst

$$\mu = l^2 \left\{ \alpha\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \alpha_1\left(\frac{1}{q} - \frac{\varrho_i}{l}\right) + \cdots \right\},$$

wobei ϱ_i den grössten gemeinsamen Theiler von ϱ_0 und k_i in

$$\frac{k_i}{l} = \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1}$$

bezeichnet. Setzt man $V_1 = q_i l_1$, so ist leicht zu sehen, dass $\varrho_0 : \varrho_i$ ein Vielfaches von l_1 sein muss; denn

$$\frac{l}{\varrho_i} = q \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho_i}$$

muss durch V_1 theilbar sein. — Man findet somit

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_i} = h \cdot l_1, \quad (h \geqq 1),$$

und da $k_i : \varrho_i$ noch durch h theilbar sein müsste, so folgt $h = 1$, indem ϱ_i grösster gemeinsamer Theiler von k_i, ϱ_0 sein soll. Es ist also

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_0} = \frac{1}{l_1}, \quad \frac{\varrho_i}{l} = \frac{1}{V_1}.$$

q. e. d. — Schliesst man in ähnlicher Art weiter, so gelangt man leicht zur Einsicht, dass μ mit Q übereinstimmt.

§ 5.

Es wird bestimmt, wie oft die Resolvente $\mathsf{E}(u; \alpha_1, \alpha_2)$ den Factor $u - u_0$ enthält.

12. Setzt man in der ersten Formel für $\mathsf{E}(u; \alpha_1 \alpha_2)$ in Nr. 4.

$$u = \alpha_2 v, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \sigma, \quad (v = \sigma x + y)$$

so folgt

$$\frac{1}{\alpha_2^{mn}} \mathsf{E}(\alpha_2 v; \alpha_2 \sigma, \alpha_2) = \underset{x}{R} \{F(x, v - \sigma x), \quad G(\cdot \cdot \cdot)\} = \mathsf{E}(v; \sigma, 1) \cdot$$

Demnach ist, wie bereits in Nr. 3. angedeutet wurde, $\mathsf{E}(u; \alpha_1 \alpha_2)$ in Beziehung auf u, α_1, α_2 eine ganze homogene Function von der Dimension mn und man hat

$$\mathsf{E}(u; \alpha_1 \alpha_2) = \alpha_2^{mn} \mathsf{E}(v; \sigma, 1).$$

Somit kann man sich darauf beschränken zu untersuchen, wie oft $\mathsf{E}(v; \sigma, 1)$ den Factor

$$v - v_0 = v - \{\sigma x_0 + y_0\}$$

enthält.

Die Gleichungen

(1) $\quad F_1(x, v) \equiv F(x, v - \sigma x) = 0, \quad G_1(x, v) \equiv G(x, v - \sigma x) = 0$

sind bei willkürlichem σ in x bezüglich vom Grade m, n. Und zwar haben x^m, x^n die Coefficienten

$$A_0 = U_m(1, -\sigma), \quad B_0 = V_n(1, -\sigma).$$

Bezeichnen nun $X_1 X_2 \cdots X_m$ die Wurzeln von $F_1 = 0$; $X_1' X_2' \cdots X_n'$ die von $G_1 = 0$ bei beliebigem v — welche Zahlen stets endlich sind —; so findet man

$$\mathsf{E}(v; \sigma, 1) = A_0^n B_0^m \prod_{r, s} (X_r - X_s'),$$

$$\begin{pmatrix} r = 1, 2 \cdots m \\ s = 1, 2 \cdots n \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung unserer Aufgabe stellen wir die Reihenentwickelungen von X, X' aus den Gleichungen

$$F_1(X, v) = 0, \quad G_1(X', v) = 0$$

in der Umgebung von $v = v_0$ auf. Dabei brauchen wir nur diejenigen zu berücksichtigen, welche für $v = v_0$ $X = X' = X_0$ geben. Aus (1) folgt aber, dass in diesem Falle X_0, $v_0 - \sigma X_0$ ein gemeinsamer Schnittpunkt der Curven $F = 0$, $G = 0$ sein muss. Würde man aber setzen

$$X_0 = x_1, \quad v_0 - \sigma X_0 = y_1,$$

unter $x_1 y_1$ einen von $x_0 y_0$ verschiedenen Schnittpunkt der Curven verstehend, so hätte man

$$y_0 - y_1 + \sigma(x_0 - x_1) = 0$$

d. i. σ würde einen der Werthe annehmen, welche in Nr. 3. ausdrücklich ausgeschlossen wurden. Demnach finden die hier in Betracht kommenden Entwickelungen nur in der Umgebung des den Gleichungen (1) gemeinsamen Punktes x_0, v_0 statt.

13. Solche Entwickelungen ergeben sich für jede der Gleichungen z. B. $F_1 = 0$ aus jeder Reihe

$$(2) \qquad y - y_0 = a_0(x - x_0)^\alpha + \cdots + A_1(x - x_0)^{\alpha_1} + \cdots$$

vermöge der Gleichung

$$(3) \qquad v - v_0 = \sigma(x - x_0) + y - y_0 = \sigma(x - x_0) + a_0(x - x_0)^\alpha + \cdots$$

Nach dem Satze in Nr. 7. erkennt man sofort, dass *im Falle* $\alpha \geqq 1$ *die charakteristischen Zahlen für die Entwickelung von* $x - x_0 = X - x_0$ *nach gebrochenen Potenzen von* $v - v_0$ *dieselben sind wie die der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung* (3), d. i. wenn

$$\alpha = \frac{p}{q}, \quad \alpha_1 \cdots \alpha_s; \quad q, \ V_1, \ V_2 \cdots V_{s-1}, \ l$$

diese Zahlen sind für die Reihe (2), so sind die Zahlen für die Entwickelung $X - x_0$, *falls* $q > 1$ ($\alpha > 1$):

$$1, \ \alpha, \ \alpha_1 \cdots \alpha_s; \qquad 1, \ q, \ V_1 \cdots V_{s-1}, \ l;$$

falls $q = 1$ ($\alpha \geqq 1$):

$$1, \ \alpha_1 \cdots \alpha_s; \quad 1, \ V_1, \ V_2 \cdots V_{s-1}, \ l.$$

Die genannte Entwickelung ist daher *im Falle* $q > 1$ $\alpha > 1$

$$(4a) \qquad X - x_0 = \frac{\omega}{\sigma} \cdots - \frac{a_0}{\sigma}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^\alpha + \cdots - \frac{A_1}{\sigma}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^{\alpha_1} + \cdots$$

(wobei $v - v_0 = \omega$ gesetzt ist); *im Falle* $q = 1$, $\alpha > 1$

$$(4b) \qquad X - x_0 = \frac{\omega}{\sigma} + \cdots - \frac{A_1}{\sigma}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^{\alpha_1} + \cdots.$$

Im Falle $q = \alpha = 1$ endlich hat man hier σ durch $\sigma + a_0$ zu ersetzen. Dann aber muss man zu den früheren Beschränkungen von σ (Nr. 3.) noch hinzufügen, dass $\sigma + a_0$ *nicht verschwinden darf.*

Wenn dagegen $\alpha < 1$, *so sind die charakteristischen Zahlen der Reihe für* $X - x_0$ *offenbar genau dieselben wie die der Reihe* $x - x_0$, *welche aus* (2) *erhalten wird.* Es gelten dafür genau die Formeln in Nr. 7., z. B. es ist

$$(5) \qquad X - x_0 = \left(\frac{\omega}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots - \frac{1}{\alpha}\frac{A_1}{a_0}\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^{\beta_1} + \cdots$$

Da umgekehrt aus *jeder* Entwickelung von $X - x_0$ nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von ω vermöge der Formel

$$y - y_0 = \omega - \sigma(x - x_0)$$

eine Entwickelung von $y - y_0$ nach positiven Potenzen von $x - x_0$ folgt, so erhellt, dass es ausser den durch die Formeln (4), (5) angedeuteten Entwickelungen von X in der Umgebung der Stelle u_0, x_0 keine anderen giebt, welche die Gleichung $F_1 = 0$ befriedigen.

14. Wenn wir nun die Entwickelungen von $X - x_0$ mit denen von $X' - x_0$ paarweise zusammenstellen, um zu sehen, wie oft jedes Paar den Factor $v - v_0$ liefert, so werden wir mit Rücksicht auf die Unterscheidungen, welche in Nr. 9. und 13. gemacht werden mussten, folgende Fälle zu trennen haben

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \alpha < \alpha', & 1 < \alpha < \alpha', \\ & & 1 = \alpha < \alpha', \\ & & \alpha < 1,\ \alpha' > 1, \\ & & \alpha < \alpha' = 1, \\ & & \alpha < \alpha' < 1; \\ \text{II.} & \alpha > \alpha' & \end{array}$$

mit den fünf analogen Unterarten;

$$\begin{array}{lll} \text{III.} & \alpha \doteq \alpha', & \alpha > 1, \\ & & \alpha = 1, \\ & & \alpha < 1. \end{array}$$

In den Fällen I, II und im Falle III, wenn schon die ersten Coefficienten der bezüglich den Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ genügenden Entwickelungen

$$(6) \qquad \begin{cases} y - y_0 = a_0(x - x_0)^{\alpha} + \cdots, \\ y - y_0 = a_0'(x - x_0)^{\alpha'} + \cdots \end{cases}$$

verschieden sind, erkennt man sofort, dass aus der betrachteten Gruppe von Differenzen $X_r - X_s'$ der Factor $v - v_0$ gerade so oft heraustritt, als der Factor $x - x_0$ aus der entsprechenden Gruppe der $y_r - y_s'$. Nehmen wir z. B. den Fall I, 5 vor. Ist

$$\alpha = \frac{e}{l}, \quad \alpha' = \frac{e'}{l'}$$

so tritt im letzteren Ausdrucke der Factor $x - x_0$ el'-mal auf. Die entsprechenden Zweige $X - x_0$, $X' - x_0$ sind jetzt bezüglich $\alpha l = e$- und $\alpha' l' = e'$fach. Wir erhalten somit $v - v_0$ aus dem ersteren Ausdrucke in der Potenz

$$\frac{l'}{e'} \cdot e e' = e l'.$$

15. Etwas ausführlicher gestaltet sich die Betrachtung des Falles III., *falls* $a_0 = a_0'$ *ist.* Dann sei $(x - x_0)^\beta$ das erste Glied, vom Anfange an gerechnet, dessen Coefficienten in den Reihen (6) sich von einander unterscheiden.

a) *Es sei* $\alpha > 1$. Zufolge des 1. Satzes in Nr. 5. stimmen in der Reihe (4a) und der entsprechenden für $X' - x_0$ überein alle Coefficienten bis zum Gliede mit ω^β, bei welchem verschiedene Coefficienten stehen müssen. Entfallen nun auf den gemeinsamen Anfang der Reihen (6) die charakteristischen Zahlen

$$\alpha, \alpha_1 \cdots \alpha_t; \quad q, V_1 \cdots V_t,$$

so stehen im gemeinschaftlichen Theile der Reihen (4a), *falls* $q > 1$, die beiden Reihen zugleich zukommenden charakteristischen Zahlen

$$1, \alpha, \alpha_1 \cdots \alpha_t; \quad 1, q, V_1 \cdots V_t.$$

Bildet man damit und mit der Zahl β den Werth Q in Nr. 10., so findet man, dass derselbe ungeändert bleibt:

$$ll' \left\{ 1\left(1 - \frac{1}{1}\right) + \alpha\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{q}\right) + \cdots \right\} = ll' \left\{ \alpha \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \cdots \right\}.$$

Aehnliches gilt, *wenn* $q = 1$ *ist* und wenn

b) $\alpha = 1$ *ist.*

c) *Es sei* $\alpha < 1$. Nach dem oben genannten Satze treten die Reihe (5) und die entsprechende für $X' - x_0$ in den Coefficienten auseinander beim Gliede mit dem Exponenten

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{\beta + 1}{\alpha} - 1, \tag{7}$$

woraus ersichtlich ist, dass zugleich mit der Ungleichung

$$\alpha_t < \beta \leqq \alpha_{t+1} \text{ (resp. } \alpha'_{t+1})$$

die folgende besteht

$$\beta_t = \frac{\alpha_t + 1}{\alpha} - 1 < \gamma \leqq \frac{\alpha_{t+1} + 1}{\alpha} - 1 = \beta_{t+1} \text{(resp. } \beta'_{t+1}).$$

Zusammengehalten mit Nr. 7. und 13. zeigt dies, dass auf den gemeinsamen Anfang der beiden Entwickelungen von $X - x_0$, $X' - x_0$ genau die charakteristischen Zahlen

$$\frac{1}{\alpha}, \beta_1, \cdots \beta_t; \quad \alpha q, \alpha V_1, \cdots \alpha V_t$$

entfallen, welche somit für beide Reihen diese Eigenschaft besitzen.

Demgemäss haben wir nach Nr. 10. — wenn $\alpha l = e$, $\alpha l' = e'$ ist — zu bilden den Ausdruck

$$R = ee' \left\{ \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha q}\right) + \beta_1\left(\frac{1}{\alpha q} - \frac{1}{\alpha V_1}\right) + \cdots + \beta_t\left(\frac{1}{\alpha V_{t-1}} - \frac{1}{\alpha V_t}\right) + \frac{\gamma}{\alpha V_t}\right\}.$$

Setzt man hier

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha} - 1 \cdots \beta_t = \frac{\alpha_t + 1}{\alpha} - 1$$

und für γ den Werth (7), so folgt ohne Schwierigkeit

$$R = ll' \left\{\alpha\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \cdots + \alpha_t\left(\frac{1}{V_{t-1}} - \frac{1}{V_t}\right) + \frac{\beta}{V_t}\right\} = Q.$$

Auch in diesem Falle liefert die Gruppe der ee' Differenzen $X_r - X_s'$ den Factor $v - v_0$ genau so oft, wie die Gruppe der ll' entsprechenden Differenzen $y_r - y_s'$ den Factor $x - x_0$.

Damit ist endlich der in Nr. 4. aufgestellte allgemeine Satz vollständig erwiesen.

§ 6.

Die Resultanten X und Y.

16. Aus dem im Vorstehenden entwickelten Satze erhellt unmittelbar, dass *die Resultante X den Factor $x - x_0$ genau so oft enthält, als die Summe der Multiplicitäten aller Schnittpunkte beträgt, welche die Abscisse $x = x_0$ besitzen* (d. i. der Punkte $x_1 = x_0$, $x_2 = y_0$, $x_3 = 1$), *wenn nur $x - x_0$ weder Factor von $f_0'(x)$ noch von $g_0'(x)$ ist.* Denn unter dieser Voraussetzung liefert keine der beiden Gleichungen $F=0$, $G=0$ für y Reihen nach steigenden, ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x_0$, welche mit einer negativen Potenz dieses Ausdruckes beginnen.

Da man in § 4. und § 5. die Veränderlichen x und y vertauschen kann, so folgt auch der analoge Satz für die Resultante Y. Sie enthält, *wenn $f_0(y)$ und $g_0(y)$ durch $y - y_0$ nicht theilbar sind, den Factor $y - y_0$ genau so oft, als die Summe der Multiplicitäten aller Schnittpunkte beträgt, welche die Ordinate $y = y_0$ besitzen.*

Es ist leicht zu zeigen, dass *der letztere Satz auch dann noch richtig bleibt, wenn nur eine der Functionen $f_0(y)$, $g_0(y)$ für $y = y_0 = b$ verschwindet.* Nehmen wir an, es enthalte $f_0(y)$ den Factor $y - b$ genau c-mal, während $g_0(b)$ nicht verschwinde. Ferner sei in

$$F(x, y) \equiv \sum_{0}^{m-\mu} x^{m-\mu-r} f_r(y) = 0,$$

r_0 der kleinste Index von der Art, dass $f_r(y)$ nicht mehr verschwindet für $y = b$. Setzt man in dieser Gleichung

$$x = \frac{1}{z}$$

und entwickelt z in der Umgebung von $y = b$, $z = 0$, so erhält man Potenzreihen von der Form

(a) $$z = b_0 (y - b)^{\frac{e}{l}} + \cdots,$$

entsprechend einer Gruppe von l Wurzeln. Nach einem bekannten Satze (vgl. den Aufsatz des Verfassers im VIII. Bande dieser Annalen p. 438) folgt

$$\Sigma l = r_0, \qquad \Sigma e = c.$$

Setzt man die Reihen

$$x = \frac{1}{b_0} (y - b)^{-\frac{e}{l}} + \cdots$$

in das Product der Wurzeln

(b) $$\prod_{r,s} (x_r - x_s'), \qquad (r = 1, 2 \cdots m - \mu;\ s = 1, 2 \cdots n - \nu)$$

ein, so ergiebt sich demnach, dass dasselbe $y - b$ auch noch in der Potenz

$$-(n - \nu)\, \Sigma e = -(n - \nu) c$$

liefert. Diese negative Potenz von $y - b$ wird aber durch den Factor $f_0^{n-\nu}$ in Y vollständig getilgt.

17. *Wenn aber $f_0(y)$, $g_0(y)$ beide für $y = b$ verschwinden, so wird die in dem Ausdrucke $f_0^{n-\nu} g_0^{m-\mu}$ vorkommende Potenz von $y - b$ nicht mehr völlig getilgt.* Bezeichnen d, s_0 dasselbe in Bezug auf die Gleichung $G = 0$, was c, r_0 bezüglich $F = 0$ — so ergeben sich auch aus der ersteren Entwickelungen für x von der Form

$$x = \frac{1}{b_0'} (y - b)^{-\frac{e'}{l'}} + \cdots,$$

wofür

$$\Sigma l' = s_0, \qquad \Sigma e' = d.$$

Demnach folgt aus (b) $y - b$ in der Potenz

(c) $$\begin{cases} -(n - \nu - s_0)\, \Sigma e - (m - \mu - r_0)\, \Sigma e' - T \\ = -(n - \nu - s_0) c - (m - \mu - r_0) d - T, \end{cases}$$

wenn $-T$ den Exponenten von $y - b$ in dem von den unendlichen Wurzeln, deren Anzahl bez. r_0, s_0 ist, herrührenden Theile von (b) bedeutet. Fügt man (c) zu $(n - \nu) c + (m - \mu) d$, so bleibt noch

(d) $$c s_0 + d r_0 - T = D$$

d. i. *eine Zahl, welche nicht Null sein kann.*

In der That folgt leicht, *dass D nicht kleiner sein kann als die kleinere der Zahlen c, d.* Stellt man die unendlichen Wurzeln gruppenweise zusammen, so ist entweder

$$\frac{e}{l} \geqq \frac{e'}{l'} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{l} < \frac{e'}{l'}.$$

Die entsprechenden ll' Wurzeldifferenzen liefern im ersteren Falle den Divisor $y - b$ höchstens el'-mal, im letzteren genau le'-mal. Ist L' das grösste l' in den Paaren der ersten, L das grösste l in denen der zweiten Art, so hat man

$$T \leqq cL' + dL.$$

Da nun unmöglich zugleich $L = r_0$, $L' = s_0$ sein kann; — denn sollten nur Paare einer z. B. der ersten Sorte vorhanden sein, so hätte man $L = 0$ zu setzen — so ergiebt sich

$$T < cs_0 + dr_0$$

und ferner vermöge

$$D \geqq c(s_0 - L') + d(r_0 - L)$$

auch der obige specielle Satz.

18. Da die Resultante Y nur verschwinden kann für solche Werthe von y, welche zu endlichen Schnittpunkten beider Curven oder zu gemeinsamen Factoren der Functionen $f_0(y)$, $g_0(y)$ gehören, so kann man jetzt bemerken: Sind keine solche Factoren vorhanden, so ist der Grad q in y von Y genau gleich der Gesammtmultiplicität ε der endlichen Schnittpunkte. Sind aber solche Factoren da, so ist q grösser als ε: $q = \varepsilon + \lambda$. — Aehnliches gilt bezüglich der Resultante X.

Die nächste Aufgabe wird nun sein, den vorstehenden Ueberschuss λ mit der Multiplicität m_1 des Punktes $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ als Schnittpunktes der gegebenen Curven zu vergleichen.

Um m_1 zu bestimmen, setzen wir in $\Phi = 0$, $\Psi = 0$

$$\frac{x_2}{x_1} = t, \qquad \frac{x_3}{x_1} = z$$

d. h. in $F = 0$, $G = 0$

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z}.$$

Es sei demnach

$$z^m F\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right) \equiv H(t, z), \quad z^n G\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right) \equiv J(t, z);$$

also, wenn $f_0(y)$, $g_0(y)$ bezüglich von den Graden $\mu - h$, $\nu - i$ in y sind und

$$z^{\mu-h} f_0\left(\frac{t}{z}\right) \equiv \varphi_0(t, z), \quad z^{\nu-i} g_0\left(\frac{t}{z}\right) \equiv \psi_0(t, z)$$

gesetzt werden, nach den Dimensionen der Glieder in t, z geordnet,

$$H(t, z) \equiv z^h \varphi_0(t, z) + \text{Glieder höherer als } \mu^{\text{ter}} \text{ Dimension},$$
$$J(t, z) \equiv z^i \psi_0(t, z) + \text{Glieder höherer als } \nu^{\text{ter}} \text{ Dimension}.$$

Die Ermittelung von m_1 erfordert die Aufstellung aller Entwickelungen von t in der Umgebung der Stelle $z = 0$, $t = 0$ aus den Gleichungen $H = 0$, $J = 0$. Sie haben die Form

$$\text{(e)}\left\{\begin{array}{ll} \text{für die erste,} & t = a_0 z^{\frac{e}{l}} + \cdots \\ & t = a_0' z^{\frac{e'}{l'}} + \cdots \end{array}\right.$$

für die zweite Gleichung.

Zunächst findet man, dass $H(t, 0)$ nur aus solchen Gliedern von F bestehen kann, die in x und y von der Dimension m sind. Sind diese in x vom Grade $m - \mu - M$, so ist in $H(t, 0)$ das niedrigste Glied vom Grade $\mu + M$ in t. Demnach hat man $\Sigma l = \mu + M$. — Ferner ist

$$\text{(f)} \qquad H(0, z) = z^m f'_{m-\mu'}\left(\frac{1}{z}\right)$$

und daher, wenn $f'_{m-\mu'}(x)$ vom Grade $m - \mu - \delta_0$ in x ist,

$$\Sigma e = \mu + \delta_0.$$

Dieses vorausgesetzt, ist es leicht über die Reihen (e) noch Näheres zu erfahren. Sie zerfallen in zwei Classen, je nachdem $\frac{e}{l} > 1$ oder $\frac{e}{l} < 1$. Für die Reihen der ersten Classe werde $\frac{e_1}{l_1}$, für die der zweiten $\frac{e_2}{l_2}$ geschrieben.

Setzt man in $H = 0$ wieder

$$t = zy,$$

so folgt nach Division mit z^μ

$$f_0(y) + z f_1(y) + \cdots + z^{m-\mu} f_{m-\mu}(y) = 0,$$

also für y, wenn die Wurzeln von $f_0(y)$ mit b bezeichnet werden, Entwickelungen von der Form

$$\text{(g)} \qquad y = b + c_1 z^{\frac{f_1}{l_1}} + \cdots$$

wobei

$$\text{(g*)} \qquad \Sigma l_1 = \mu - h, \quad \Sigma(e_1 - l_1) = \delta_0, \quad \Sigma e_1 = \mu - h + \delta_0$$

sind. Letzteres folgt leicht nach (f), wobei noch durch z^μ zu dividiren ist.

Setzt man aber in $H = 0$ $z = tu$ und dividirt durch t^μ, so ergiebt sich

$$u^h \varphi_0(1, u) + t\{\cdots\} = 0,$$

wo $\varphi_0(1, 0)$ von Null verschieden ist. Also haben wir Entwickelungen

$$\text{(h)} \qquad u = d_0 t^{\frac{f}{g}} + \cdots, \quad z = d_0 t^{\frac{f+g}{g}} + \cdots,$$

wobei

$$\Sigma g = h, \qquad \Sigma f = M,$$

und können demnach setzen, indem wir diese Reihen umkehren,

$$\Sigma l_2 = \Sigma (g + f) = h + M,$$
$$\Sigma e_2 = \Sigma g = h.$$

Da

$$\Sigma l_1 + \Sigma l_2 = \mu + M, \quad \Sigma e_1 + \Sigma e_2 = \mu + \delta_0,$$

so sind ausser den Entwickelungen (g), (h) keine mehr vorhanden.

Für die zweite Gleichung $J = 0$ findet man ähnlich

$$\frac{e_1'}{l_1'} \geqq 1, \qquad \Sigma l_1' = \nu - i, \qquad \Sigma e_1' = \nu - i + \varepsilon_0,$$
$$\frac{e_2'}{l_2'} < 1, \qquad \Sigma l_2' = i + N, \qquad \Sigma e_2' = i.$$

Dabei ist angenommen, dass in G die Glieder höchster Dimension in x nur vom Grade $n - \nu - N$, $g'_{n-\nu'}(x)$ vom Grade $n - \nu - \varepsilon_0$ ist.

Nun bilden wir $\Pi(t_r - t_s')$, ausgedehnt auf die Entwickelungen (e), welches wir nach den eben angegebenen Classen der Wurzeln in vier Theile zerlegen. Die Multiplicität m_1 setzt sich somit aus folgenden Theilen zusammen.

	$\mu - h$	$h + M$
$\nu - i$	I	II
$i + N$	III	IV

Aus (I) folgt z in der Potenz

$$(\mu - h)(\nu - i) + R, \quad (R \geqq 0);$$

aus (II) in der Potenz

$$(\nu - i) \Sigma e_2 = (\nu - i) h;$$

aus (III) in der Potenz

$$(\mu - h) \Sigma e_2' = (\mu - h) i;$$

aus (IV) in der Potenz S. Somit hat man

$$m_1 = \mu\nu - hi + R + S.$$

Dabei ist $S > hi$, *falls* $hi > 0$ *ist.* Theilt man nämlich die in (IV) vorkommenden Wurzeln in zwei Reihen von Paare

$$1 > \frac{\mathsf{E}_2}{L_2} \geqq \frac{\mathsf{E}_2'}{L_2'}, \quad \frac{\bar{\mathsf{E}}_2}{\bar{L}_2} < \frac{\bar{\mathsf{E}}_2'}{\bar{L}_2'} < 1,$$

so ist

$$S \geqq \sum \left(\frac{\mathsf{E}_2'}{L_2'} \cdot L_2 L_2' \right) + \sum \left(\frac{\bar{\mathsf{E}}_2}{\bar{L}_2} \cdot \bar{L}_2 \bar{L}_2' \right)$$

also

$$S > \sum (\mathsf{E}_2' \mathsf{E}_2) + \sum (\bar{\mathsf{E}}_2 \bar{\mathsf{E}}_2') = \sum e_2 \cdot \sum e_2' = hi.$$

Ist $hi = 0$, so reducirt sich m_1 auf $\mu\nu + R$. Denn wenn z. B. $h = 0$ ist, so verschwindet auch M, so dass in vorstehendem Schema nur die Felder I, III übrig bleiben. Das erstere liefert z in der Potenz $\mu(\nu - i) + R$, das letztere in der Potenz μi, so dass $m_1 = \mu\nu + R$ folgt.

Es ergiebt sich somit der *folgende Satz:*

„*Setzt man in den Gleichungen* $F=0$, $G=0$, $x=1:z$, $y=t:z$ *und stellt aus denselben sämmtliche Entwickelungen von* t *nach* z *in der Umgebung der Stelle* $z=0$, $t=0$ *her, — bezeichnet man ferner mit* R *den aus solchen Reihen für* $y=t:z$ *erwachsenden Exponenten von* z, *welche mit keiner negativen Potenz von* z *beginnen, mit* S *aber den Theil der Multiplicität* m_1 *des Punktes* $x_2=0$, $x_3=0$, *welcher von den mit einer niedrigeren als der ersten Potenz von* z *beginnenden Reihen für* t *stammt; so ist*

$$m_1 = \mu\nu + R + \delta.\text{“}$$

„*Dabei ist* $\delta = S - hi$ *und eine positive ganze Zahl, wenn* $f_0(y)$, $g_0(y)$ *in* y *nur den Grad bezüglich* $\mu-h$, $\nu-i$ *erreichen* ($h>0$, $i>0$). — $\delta=0$ *tritt dann und nur dann ein, wenn* $hi=0$, *d. i. wenn von den genannten Functionen wenigstens die erstere den Grad* μ, *oder die letztere den Grad* ν *in* y *erreicht.*“

19. Es lässt sich ferner zeigen, dass wenn $q=\varepsilon+\lambda$ *den Grad von* Y *in* y *bedeutet*, $R=\lambda$ *ist.*

Nach (d) hat man $\lambda = \Sigma(cs_0 + dr_0 - T)$, wobei das Summenzeichen auf sämmtliche verschiedene Factoren von $f_0(y)$ oder $g_0(y)$ bezogen werden kann. Die Entwickelungen, mittelst deren T in Nr. 16. bestimmt ist, d. i.

$$\text{(i)}\qquad \frac{1}{x} = z = b_0(y-b)^{\frac{e}{l}} + \cdots$$

sind aber die Umkehrungen der Reihen (g).*)

Um nun das Product der Differenzen der unendlichen Wurzeln in Nr. 16. zu bilden, setze man

$$x_r = \frac{1}{z_r},\quad x_s' = \frac{1}{z_s'},\quad x_r - x_s' = \frac{z_s'-z_r}{z_r z_s'}.$$

Die Sätze in Nr. 7. und 10. in Verbindung mit der in Nr. 15.c) vorgeführten Rechnung lehren, dass $\Pi(z_s'-z_r)$ $y-b$ genau in derselben Potenz liefern, wie die entsprechenden Reihen (g) z. Bezeichnet man ihren Exponenten mit U, so hat man demnach $\Sigma U = R$.

Unter Berücksichtigung aller Wurzelgruppen (i) in der Umgebung der Stelle $y=b$, $z=0$ folgt dann

$$T = \sum ll'\left(\frac{e}{l}+\frac{e'}{l'}\right) - U = \sum (el' + e'l) - U$$
$$= \sum e \cdot \sum l' + \sum e' \cdot \sum l - U = cs_0 + dr_0 - U,$$

somit

$$\lambda = \sum U = R \text{ q. e. d.}$$

) In den Formeln (i) ist $\Sigma e = c$. Vergleicht man damit (g), so folgt $l_1 = e$, daher $\Sigma l_1 = \Sigma c$, bezogen auf alle verschiedenen Factoren von $f_0(y)$. Man findet somit in Uebereinstimmung mit (g) $\Sigma l_1 = \mu - h$.

20. Analog der Formel $m_1 = \mu\nu + \lambda + \delta$ erhält man für die Multiplicität m_2 des Punktes $x_1 = 0$, $x_3 = 0$:

$$m_2 = \mu'\nu' + \lambda' + \delta'.$$

Dabei ist $\varepsilon + \lambda' = q'$ der Grad der Resultante X in x und δ' in ähnlicher Weise wie δ zu bilden.

Auch die Multiplicität m_3 des Punktes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ d. i. $x = 0$, $y = 0$ wird durch das Verfahren von Nr. 18. gefunden. Es wird sich ergeben

$$m_3 = \mu''\nu'' + R' + \delta''.$$

21. Bezeichnet ω die Gesammtmultiplicität aller unendlich fernen Schnittpunkte, ω_1 die derjenigen unter ihnen, welche weder auf $x_1 = 0$, noch auf $x_2 = 0$ liegen, so hat man $\omega = \omega_1 + m_1 + m_2$, also:

$$\omega = \mu\nu + \mu'\nu' + \lambda + \lambda' + \delta + \delta' + \omega_1.$$

Setzt man $mn - \mu\nu - \mu'\nu' = \Delta$, so ergiebt sich daraus für *die Gesammtmultiplicität* ε *der endlichen Schnittpunkte*

$$\text{(k)} \qquad \varepsilon = mn - \omega = \Delta - \lambda - \lambda' - \delta - \delta' - \omega_1 .\text{*)}$$

Somit beträgt ε *höchstens* $\Delta - \lambda - \lambda' - \omega_1$. Man kann hinzufügen: *Die Zahl* ε *ist gleich* $\Delta - \lambda - \lambda' - \omega_1$ *dann und nur dann, wenn von den Functionen* $f_0(y)$, $g_0(y)$ *wenigstens entweder die erste vom Grade* μ *oder die zweite vom Grade* ν *in* y *und ebenso von den Functionen* $f_0'(x)$, $g_0'(x)$ *wenigstens entweder die erste vom Grade* μ' *oder die zweite vom Grade* ν' *in* x *ist.* D. i. wenigstens in einer der beiden Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ müssen schon die Glieder höchster Dimension in x, y den Grad der Function F, bez. G in x erreichen und ebenso in einer den Grad derselben in y. — Denn unter den angegebenen Bedingungen ist $\delta = \delta' = 0$ und nur unter ihnen.

Aus (k) ergiebt sich ferner *für den Grad* q' *von* X *in* x

$$\text{(l)} \left\{\begin{array}{l} q' = \varepsilon + \lambda' = \Delta - \lambda - \delta - \delta' - \omega_1, \text{**)} \\ \textit{für den Grad } q \textit{ von } Y \textit{ in } y \\ q = \varepsilon + \lambda = \Delta - \lambda' - \delta - \delta' - \omega_1. \end{array}\right.$$

---

*) Chasles (Compt. Rend. T. 75, p. 736 und T. 76, p. 126) giebt für ε den Ausdruck $\Delta - \omega$, wobei ω zunächst als die Gesammtmultiplicität aller unendlich fernen Punkte ausserhalb der Axen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ erklärt wird. Später wird dieser Satz dahin berichtigt, dass ω auch Theile der Multiplicitäten der Punkte $x_1 = 0$ $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ enthalten könne. Unsere Untersuchung hat dazu geführt, die in die Chasles'sche Zahl ω eingehenden Theile der genannten Multiplicitäten zu präcisiren.

**) Man kann auch setzen

$$q' = mn - (\omega_1 + m_1) - \mu'\nu' - \delta'$$

und erhält so die von Hrn. Nöther (diese Annalen IX, S. 177) angegebene Formel. A. a. O. steht für m, n, μ', ν', $\omega_1 + m_1$, δ' bezüglich n, N, k, K; r, r''.

Sind die Zahlen λ, λ' von einander verschieden, *so weichen die Grade* q, q' *von einander ab.**)

Damit

$$q' = \Delta - \lambda - \omega_1, \qquad q = \Delta - \lambda' - \omega_1$$

seien, ist nothwendig und hinreichend das Bestehen der oben angeführten Bedingungen.

Besitzen die Functionen $f_0(y)$, $g_0(y)$ einen grössten gemeinschaftlichen Theiler in y vom Grade α; $f_0'(x)$, $g_0'(x)$ einen solchen in x vom Grade α', so hat man nach Nr. 17. $\lambda \geqq \alpha$, $\lambda' \geqq \alpha'$, somit nach (1)

$$q' \leqq \Delta - \alpha - \omega_1, \qquad q \leqq \Delta - \alpha' - \omega_1.$$

Es kann somit nicht sein $q' = mn - \alpha'$, $q = mn - \alpha$, wie Faà de Bruno versichert (a. a. O. p. 100 und dazu die unter „Errata" angegebene Abänderung).

Man bemerke endlich, *dass* $\varepsilon = \Delta$ *dann und nur dann, wenn neben* $\delta = \delta' = 0$ *auch noch* $\omega_1 = \lambda = \lambda' = 0$, d. i. wenn zu den vorstehenden Bedingungen noch hinzutritt das Fehlen unendlich ferner Schnittpunkte ausserhalb der Axen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und das Fehlen gemeinsamer zu diesen Axen paralleler Asymptoten. *Und* $q' = \Delta$ *wird stattfinden dann und nur dann, wenn neben* $\delta = \delta' = 0$ *noch* $\omega_1 = \lambda = 0$. Somit ist die letztere der eben erwähnten Forderungen dahin einzuschränken, dass wenigstens keine zur Axe $x_2 = 0$ parallele Asymptote beiden Curven gemein sei, oder dass $f_0(y)$, $g_0(y)$ keinen Factor $y - b$ gemein haben.

§ 7.

Die Multiplicität der unvollständigen Gleichungen gemeinsamen Werthsysteme $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

22. *Begriff einer in Bezug auf eine der Veränderlichen x, y unvollständigen Gleichung von beliebiger Ordnung.* Die Gleichung $F(x, y) = 0$, in x vom Grade $m - \mu$, heisst in Bezug auf x unvollständig von der *ersten* Ordnung, wenn die Glieder m^{ter} Dimension in x, y in x schon den Grad $m - \mu$ $(\mu > 0)$ erreichen. Sie heisst unvollständig von der *zweiten* Ordnung, wenn die Glieder m^{ter} Dimension in x, y in x nur den Grad $m - \mu - \mu_1$ $(\mu_1 > 0)$ erreichen und erst die Glieder von der Dimension $m - h$ in x von einem höheren und zwar vom Grade $m - \mu$ sind. Dabei muss $0 < h \leqq \mu$ sein. In einer bezüglich x von *dritter* Ordnung unvollständigen Gleichung erreichen die Glieder m^{ter} Dimension in x, y in x nur den Grad $m - \mu - \mu_2$, nach ihnen erst die Glieder von der Dimension $m - h_1$ in x einen

*) Dass, wenn $\lambda = \lambda' = 0$, $q = q'$ sei, hat Minding gezeigt. (Crelle's J. XXXI, p. 6.)

höheren und zwar den Grad $m - \mu - \mu_1$ und endlich erst die Glieder von der Dimension $m - h$ in x wieder einen höheren und zwar schon den Grad $m - \mu$. Dabei hat man $0 < h_1 < h \leqq \mu$, $0 < \mu_1 < \mu_2$ Allgemein nennt man die Gleichung $F = 0$, die in x überhaupt vom Grade $m - \mu$ ist, unvollständig von der $(k+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn die Glieder m^{ter} Dimension in x vom Grade $m - \mu - \mu_k$, nach ihnen erst die Glieder von der Dimension $m - h_{k-1}$ in x von einem höheren und zwar vom Grade $m - \mu - \mu_{k-1}$ sind u. s. f. Erst die Glieder von der Dimension $m - h_1$ erreichen in x den Grad $m - \mu - \mu_1$ und erst die von der Dimension $m - h$ wieder einen höheren und zwar endlich den Grad $m - \mu$. Die Zahlen $0 < h_{k-1}, h_{k-2} \cdots h_1, h$ wachsen beständig, ohne die Grenze μ zu überschreiten, die Zahlen $\mu_k, \mu_{k-1} \cdots \mu_1 > 0$ nehmen beständig ab.

Bezeichnet man mit $[y, r]$ eine ganze Function von y, welche den Grad r nicht überschreitet und setzt $m - \mu - \mu' = \varrho$, so hat man für unvollständige Gleichungen $F = 0$ von 1—3. Ordnung folgende Darstellung

$$(1) \qquad \sum_0^{\varrho} {}^r [y, \mu + r]_r x^{m-\mu-r} + \sum_{\varrho+1}^{m-\mu} {}^r [y, m - \mu']_r x^{m-\mu-r} = 0;$$

$$(2) \qquad \sum_0^{\mu_1-1} {}^r [y, \mu + r - h]_r x^{m-\mu-r} + \sum_{\mu_1}^{\varrho} {}^r [y, \mu + r]_r x^{m-\mu-r} + \sum_{\varrho+1}^{m-\mu} {}^r [y, m - \mu']_r x^{m-\mu-r} = 0;$$

$$(3) \qquad \sum_0^{\mu_1-1} {}^r [y, \mu + r - h]_r x^{m-\mu-r} + \sum_{\mu_1}^{\mu_2-1} {}^r [y, \mu + r - h_1]_r x^{m-\mu-r} + \sum_{\mu_2}^{\varrho} {}^r [y, \mu + r]_r x^{m-\mu-r} + \sum_{\varrho+1}^{m-\mu} {}^r [y, m - \mu']_r x^{m-\mu-r} = 0.$$

In ähnlicher Art unterscheide man die Gleichungen $F = 0$ hinsichtlich des *Auftretens der Potenzen von y*. Die darauf bezüglichen Zahlen mögen mit $h', h_1' \cdots; \mu', \mu_1', \mu_2' \cdots$ bezeichnet werden.

Für die zweite Gleichung $G(x, y) = 0$ bedeuten $\sigma = n - \nu - \nu'$; $i, i' \cdots; \nu_1, \nu_1' \cdots$ die den vorstehenden Grössen analogen.

Die eben gegebene Classification der Gleichungen $F = 0$ rührt der Hauptsache nach von Bézout her (Théorie générale des équations algébriques 1779, p. 139). Jedoch wird a. a. O. immer $h' = h$, $h_1' = h_1 \cdots$, $i' = i$, $i_1' = i_1 \cdots$, gesetzt, was eine ganz überflüssige Beschränkung bildet.

23. Bézout hat über den Grad der Resultanten X, Y zweier unvollständiger Gleichungen 1.—3. Ordnung Sätze aufgestellt (l. c. p. 45,

l. c. p. 156 ff.), womit die Ergebnisse der hier geführten Untersuchung jedoch nicht durchaus übereinstimmen. Auch fehlt überall die Angabe der zum Bestehen derselben ausreichenden Bedingungen.

Der erste Satz wurde bereits in Nr. 21. angeführt: „*Der Grad der Resultante X zweier Gleichungen, von denen wenigstens eine bezüglich x und eine bezüglich y von keiner höheren als der ersten Ordnung unvollständig ist, beträgt $mn - \mu\nu - \mu'\nu'$.*“ Dabei dürfen jedoch die beiden Gleichungen ausser den Systemen $x_2 = 0$ $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ $x_3 = 0$ kein unendliches Werthsystem gemein haben und die Functionen $f_0(y)$, $g_0(y)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler $y - b$ besitzen.

Der Satz kann auch auf die Fälle, dass eine der beiden Gleichungen in Bezug auf x oder eine in Bezug auf y *vollständig* ist oder dass beides zugleich stattfindet, angewendet werden. Ist z. B. $F = 0$ bezüglich x vollständig, d. i. kommt darin x^m vor, so hat man $\mu = 0$ zu nehmen (da in Nr. 21. $m_1 = 0$ zu setzen ist). Von den eben erwähnten ausreichenden Bedingungen bleibt noch die erste bestehen, welche besagt: $\omega_1 = 0$. U. s. f.

Um weitere Sätze zu entwickeln, müssen die Zahlen δ, δ' in den Formeln (1) von Nr. 21. bestimmt werden. Die Definition derselben gestattet, *jede für sich zu ermitteln*, wodurch die Rechnung möglichst vereinfacht wird.

Wir haben uns demnach mit den in Nr. 18. eingeführten Gleichungen $H(t, z) = 0$, $J(t, z) = 0$ näher zu beschäftigen, wobei die Betrachtung der ersteren genügt.

24. Zufolge des a. a. O. angedeuteten Verfahrens hat man

$$x = 1 : z = 1 : tu, \quad y = 1 : u$$

zu setzen und die Gleichung

$$U = u^m t^{m-\mu} F\left(\frac{1}{tu}, \frac{1}{u}\right) = 0$$

zu untersuchen. Nach den Formeln in Nr. 22. findet man, falls F bezüglich x von der $(k+1)^{\text{ten}}$ Ordnung unvollständig ist:

$$(4) \quad U \equiv u^h (A_0 + \cdots) + u^{h_1} t^{\mu_1} (A_1 + \cdots) + \cdots + u^{h_{k-1}} t^{\mu_{k-1}} (A_{k-1} + \cdots)$$
$$+ t^{\mu_k} (A_k + \cdots) + t^{\mu_k + 1} (\cdots) = 0.$$

Dabei ist

$$\mu \geqq h > h_1 > h_2 \cdots > h_{k-1} > 0; \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k.$$

Die Constanten A_0, $A_1 \cdots A_k$ sind sämmtlich von Null verschieden. In den Lücken stehen ganze Functionen von t, u, welche mit Ausnahme der in der letzten befindlichen sicher mit $t = u = 0$ verschwinden.

Aus (4) ist u nach steigenden Potenzen von t in der Umgebung der Stelle $u = 0$, $t = 0$ zu entwickeln.

Setzt man wie in Nr. 18.

(5) $$u = d_0 t^{\frac{f}{g}} + \cdots, \qquad \frac{f}{g} = \alpha$$

so *hat man*

(6) $$\Sigma g = h, \qquad \Sigma f = M = \mu_k.$$

a) $k = 1$. Die Gleichung (4) reducirt sich auf die folgende:

(7) $$u^h(A_0 + \cdots) + t^{\mu_1}(A_1 + \cdots) + t^{\mu_1+1}(\cdots) = 0.$$

Bezeichnet ϑ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von h, μ_1 und ist $h = \vartheta \cdot H$, $\mu_1 = \vartheta \cdot M_1$, so giebt es ϑ *Entwickelungen, deren jede nach Potenzen von* $t^{\frac{1}{H}}$ *fortschreitet.* Dabei ist $\alpha = M_1 : H$. Die Substitution $t = \tau^H$, $u = \omega \cdot \tau^{M_1}$ in (7) führt zu einer Gleichung, welche durch τ^{hM_1} theilbar ist und für $\tau = 0$ (d. i. $t = 0$ $u = 0$) in

$$\omega^{\vartheta \cdot H} A_0 + A_1 = 0$$

übergeht. Somit lässt sich ω nach ganzen positiven Potenzen von τ entwickeln, womit der Satz erwiesen ist.

2) $k = 2$. Dann liegt die Gleichung vor

(8) $$u^h(A_0 + \cdots) + u^{h_1} t^{\mu_1}(A_1 + \cdots) + t^{\mu_2}(A_2 + \cdots) + t^{\mu_2+1}(\cdots) = 0.$$

Es sind drei Hauptfälle zu unterscheiden. Der Kürze wegen sei

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{h_1} = \varrho_1, \quad \frac{\mu_1}{h - h_1} = \varrho_2 \cdot \left(\varrho_1 \lesseqgtr \frac{\mu_2}{h} \lesseqgtr \varrho_2\right)$$

α) $\varrho_1 < \varrho_2$. *Es giebt* ϑ *Entwickelungen* (5), *wofür* $g = H$, $\alpha = M_2 : H$. Dabei ist ϑ grösster gemeinschaftlicher Theiler von h, μ_2 und $h = \vartheta H$, $\mu_2 = \vartheta M_2$.

β) $\varrho_1 = \varrho_2 = \mu_2 : h$. *Alle Reihen beginnen mit* $t^{M_2 : H}$ (vgl. u. c)).

γ) $\varrho_1 > \varrho_2$. *Es giebt zwei Schaaren von Reihen.* Die Reihen der ersten Art beginnen sämmtlich mit t^{ϱ_1} und es ist dafür $\Sigma g = h_1$, $\Sigma f = \mu_2 - \mu_1$; die der zweiten Art beginnen sämmtlich mit t^{ϱ_2} und es ist dafür $\Sigma g = h - h_1$, $\Sigma f = \mu_1$. Um dies einzusehen genügen die Substitutionen in (8):

$$t = \tau^{H_1}, \quad u = \omega \tau^{N_1},$$

($N_1 : H_1$ reducirte Form von ϱ_1) und die analoge.

c) Auch bei Betrachtung der allgemeinen Gleichung (4) treten die eben erwähnten Fälle hervor.

α) Ist ϑ grösster gemeinschaftlicher Theiler von $h, \mu_k - h = \vartheta H$, $\mu_k = \vartheta M_k$ — *so giebt es* ϑ *Entwickelungen, wofür* $g = H$, $f = M_k$, *wenn*

$$h_r \cdot \frac{\mu_k}{h} + \mu_r > \mu_k \text{ d. i. } \frac{\mu_r}{h - h_r} > \frac{\mu_k}{h} > \frac{\mu_k - \mu_r}{h_r} \; (r = 1, 2 \cdots k - 1).$$

β) Wenn aber einige der Zahlen $\frac{\mu_k - \mu_r}{h_r} = \frac{\mu_k}{h}$ sind, *ohne dass eine derselben diesen Werth überschreitet, so ist noch für alle Reihen* $\alpha = M_k : H$. — Besteht in der That diese Gleichung für $r = s$, $s' \cdots (s < s' < \cdots)$, so setze man in (4) $t = \tau^H$, $u = \omega \cdot \tau^{M_k}$. Dann folgt nach Division durch $\tau^{h M_k}$ aus denselben für $\tau = 0$

$$A_0\, \omega^{\vartheta . H} + A_s \omega^{\vartheta_s H} + \cdots + A_k = 0, \tag{9}$$

$(h_s = \vartheta_s \cdot H \cdots)$. Diese Function zerfällt in Factoren von der Form

$$(\omega^H - \varkappa_p)^{i_p}, \quad \Sigma i_p = \vartheta.$$

Jeder Wurzel $\omega = \omega_0{}^{(p)}$ der Gleichung (9) entsprechen demnach Reihen von der Form

$$\omega - \omega_0^{(p)} = c_0 \tau^{\frac{e}{l}} + \cdots,$$

wobei $\Sigma l = i_p$. Es ergiebt sich also

$$u = t^{\frac{M_k}{H}} \left\{ \omega_0^{(p)} + c_0\, t^{\frac{e}{lH}} + \cdots \right\}$$

d. i. eine Reihe nach steigenden Potenzen von $t^{\frac{1}{lH}}$. Eine Reduction dieses Exponenten kann nicht erfolgen. Denn sollten sich alle Exponenten $r : Hl$, worin r relativ prim zu l ist, auf einen kleineren Nenner bringen lassen, so müsste H durch eine Zahl w theilbar sein, die zu l relativ prim ist. Dann aber hätte man im Exponenten des ersten Gliedes $\frac{Hl}{w} = Hv$ (v eine ganze Zahl) d. i. $l = vw$, was eben als unmöglich erklärt wurde. Es ist ferner

$$\Sigma g = \Sigma(\Sigma Hl) = H\, \Sigma i_p = \vartheta H = h,$$

ebenso $\Sigma f = \mu_k$.

γ) Ist ein Bruch vorhanden:

$$\frac{\mu_k - \mu_r}{h_r} > \frac{\mu_k}{h}, \text{ so ist auch } \frac{\mu_k}{h} > \frac{\mu_r}{h - h_r}.$$

Dieses vorausgesetzt, kann man folgende Sätze erweisen:

Angenommen es sei ϱ die grösste der Zahlen

$$\frac{\mu_k - \mu_r}{h_r}, \quad (r = 1, 3 \cdots k-1) \tag{10}$$

und $\varrho > \frac{\mu_k}{h}$ und σ sei die kleinste der Zahlen

$$\frac{\mu_r}{h - h_r}, \quad (r = 1, 2 \cdots k-1), \tag{11}$$

welche somit $< \frac{\mu_k}{h}$ *sein muss.*

1. *Bezeichnet* $\frac{\mu_k - \mu_a}{h_a}$ *den ersten der Brüche* (10), *dessen Werth* $= \varrho$, *so existiren Entwickelungen von u nach t, welche mit* t^ϱ *anfangen. Dafür ist* $\Sigma g = h_a$, $\Sigma f = \mu_k - \mu_a$.

2. *Bezeichnet* $\frac{\mu_b}{h - h_b}$ *den letzten der Brüche* (11), *dessen Werth* $= \sigma$, *so existiren Entwickelungen von u nach t, welche mit* t^σ *anfangen. Dafür ist* $\Sigma g = h - h_b$, $\Sigma f = \mu_b$.

Der Beweis dieser Sätze wird durch denselben Schluss geführt, welcher in dem gerade vorhergehenden Abschnitte β) angewandt ist. Man bezeichne mit ϑ_a den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\mu_k - \mu_a$, h_a, setze

$$\mu_k - \mu_a = \vartheta_a \cdot N_a, \qquad h_a = \vartheta_a \cdot H_a$$

und mache in (4) die Substitution

$$t = \tau^{H_a}, \qquad u = \omega \tau^{N_a},$$

u. s. w.

Da $\varrho > \frac{\mu_k}{h} > \sigma$, so sind die Entwickelungen der zweiten Classe von denen der ersten wesentlich verschieden. Man wird daher nach (6) schliessen:

$$h_a + (h - h_b) \leq h, \qquad (\mu_k - \mu_a) + \mu_b \leq \mu_k$$

d. i.

$$h_a \leq h_b, \; \mu_b \leq \mu_a \qquad \text{und } a \geq b.$$

Endlich folgt noch:

3. *Für alle noch ausserdem vorhandenen Entwickelungen* (5) *von u nach t liegt α zwischen den Grenzen σ und ϱ.*

Dass nicht $\alpha > \varrho$ sein kann, folgt daraus, dass

$$h\alpha > h\varrho > \mu_k, \qquad h_r\alpha + \mu_r > h_r\varrho + \mu_r > \mu_k,$$

somit alle Glieder von (4) mit alleiniger Ausnahme von τ^{μ_k} in t von einem höheren Grade als μ_k wären, was unmöglich ist. Entwickelt man aus (4) t nach Potenzen von u, so sieht man auf ähnliche Weise ein, dass $1 : \alpha$ nicht grösser als $1 : \sigma$ sein kann. In der That wären

$$\frac{\mu_k}{\alpha} > \frac{\mu_k}{\sigma} > h, \quad h_r + \frac{\mu_r}{\alpha} > h_r + \frac{\mu_r}{\sigma} \geq h.*)$$

---

*) Von den Reihen (5) kann man sofort zu den Entwickelungen von x aus der Gleichung $F(x, y) = 0$ nach fallenden Potenzen von y übergehen. Man findet

$$x = cy^{\frac{f+g}{f}} + \cdots, \qquad \frac{f+g}{f} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Bestimmt man den Grad in y dieser Entwickelungen nach dem bekannten Verfahren (vgl. Serret C. d'Algèbre sup. 4. éd. I. p. 641), so findet man leicht als grössten Werth von $1 + 1 : \alpha$ im Falle γ) $1 + (h - h_b) : \mu_b$, wozu $\Sigma f = \mu_b$ gehört. Auch ist nun ersichtlich, dass a nicht kleiner sein kann, als b.

25. Analog den Entwickelungen (5) von u nach t aus der Gleichung $U=0$ d. i. $H=0$, seien die aus $J=0$ bezeichnet mit

$$(12)\qquad u = d_0' t^{\frac{f'}{g'}} + \cdots, \qquad \frac{f'}{g'} = \alpha'.$$

Um die Zahl S von Nr. 18. zu finden, hat man die Gleichungen $z = tu$, worin u durch (5) bez. (12) zu ersetzen ist, umzukehren. Dadurch folgt entsprechend den Formeln (5), (12) bez.

$$(13)\qquad \begin{cases} t = \left(\frac{z}{d_0}\right)^{\frac{g}{f+g}} + \cdots, & \frac{g}{f+g} = \frac{1}{1+\alpha}, \\ t = \left(\frac{z}{d_0'}\right)^{\frac{g'}{f'+g'}} + \cdots, & \frac{g'}{f'+g'} = \frac{1}{1+\alpha'}. \end{cases}$$

1. Satz. *Sind beide Gleichungen $F=0$, $G=0$ in x genau von der zweiten Ordnung unvollständig, so ist δ gleich der kleineren der Zahlen $h\nu_1$, $i\mu_1$, falls dieselben ungleich sind. Ist aber $h\nu_1 = i\mu_1$, so ist δ sicher nicht kleiner als ihr gemeinsamer Werth.*

Man hat jetzt in (13) $\alpha = \mu_1 : h$, $\alpha' = \nu_1 : i$

$$\Sigma g = h, \quad \Sigma(f+g) = \mu_1 + h; \quad \Sigma g' = i, \quad \Sigma(f'+g') = \nu_1 + i.$$

Bei Betrachtung des Productes $\Pi(t_r - t_s') \equiv Z$ sind drei Fälle zu unterscheiden.

α) $\frac{\mu_1}{h} > \frac{\nu_1}{i}$ d. i. $\alpha > \alpha'$. Aus jeder der $(h+\mu_1) \cdot (i+\nu_1)$ Differenzen in Z tritt genau z in der Potenz $1:(1+\alpha) = h:(h+\mu_1)$. Somit ist $S = h(i+\nu_1)$, $\delta = S - hi = h\nu_1$. — Ebenso folgt, wenn

β) $\frac{\mu_1}{h} < \frac{\nu_1}{i}$ ist, $\delta = i\mu_1$.

γ) $\frac{\mu_1}{h} = \frac{\nu_1}{i}$. Es ist δ mindestens gleich $h\nu_1 = i\mu_1$; kann aber auch grösser sein. Da für die Curven $F=0$, $G=0$ die Entwickelungen nach fallenden Potenzen von x existiren bez.

$$y = \left(\frac{1}{d_0}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} x^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \cdots,$$

$$y = \left(\frac{1}{d_0'}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} x^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \cdots,$$

so besitzen dieselben im Punkte $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ nur krummlinige Asymptoten.

2. Satz. *Ist die Gleichung $F=0$ in x von höherer $[(k+1)^{\text{ter}}]$ als zweiter Ordnung unvollständig, $G=0$ dagegen genau von der zweiten Ordnung; so hat man, falls $i\mu_1 \geqq h\nu_1$ ist, $\delta = h\nu_1$; falls $i\mu_1 < h\nu_1$ ist, $\delta > i\mu_1$.*

Man weiss nun, dass $\alpha' = \nu_1 : i$ und dass Z aus $(h+\mu_k)\cdot(i+\nu_1)$ Factoren besteht. — Es sei

α) $\frac{\mu_1}{h} \geqq \frac{\nu_1}{i}$. Daher ist $\alpha' < \frac{\mu_k}{h}$ und $\alpha' < \frac{\mu_b}{h-h_b}$, somit sicher $\alpha' < \alpha$. Demnach hat man

$$S = (i+\nu_1)\,\Sigma g = (i+\nu_1)h, \quad \delta = h\nu_1.$$

β) $\frac{\mu_1}{h} < \frac{\nu_1}{i}$. Nun könnte $\frac{\nu_1}{i} \geqq \frac{\mu_k}{h}$ oder $\frac{\nu_1}{i} \geqq \frac{\mu_k - \mu_a}{h_a}$ sein d. i. $\alpha' \geqq \alpha$. Damit würde sich ergeben

$$S \geqq (i+\nu_1)(h+\mu_k)\cdot\frac{i}{i+\nu_1} \text{ oder } \delta \geqq i\mu_k > i\mu_1.$$

Wenn aber $\frac{\nu_1}{i} < \frac{\mu_k}{h}$ oder $\leqq \frac{\mu_b}{h-h_b}$ wäre, so dass $\alpha' \leqq \alpha$, so würde wie oben in α) folgen $\delta \geqq h\nu_1 > i\mu_1$.

Sind endlich Entwickelungen (5) vorhanden von der Art, dass der erste Exponent α grösser, gleich oder kleiner als $\nu_1 : i$ ist, so seien für die ersteren f, g bezeichnet mit f_1, g_1, für die letzteren mit f_2, g_2, mithin

$$\frac{f_1}{g_1} > \frac{\nu_1}{i}, \quad \frac{f_2}{g_2} \leqq \frac{\nu_1}{i}.$$

Man findet dann unmittelbar

$$S \geqq (i+\nu_1)\,\Sigma g_1 + i\,\Sigma(f_2+g_2) = hi + \nu_1\,\Sigma g_1 + i\Sigma f_2,$$

da $\Sigma g_1 + \Sigma g_2 = h$ nach (6). Es ist aber

$$\Sigma g_1 \geqq h_a, \quad \Sigma f_2 \geqq \mu_b,$$

also

$$\delta = S - hi \geqq \nu_1 h_a + i\mu_b > i\mu_1.$$

26. Mit Hülfe der in Nr. 24. b) gegebenen Erörterung kann die Zahl δ auch in dem Falle leicht bestimmt werden, dass *beide Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ in x genau von der dritten Ordnung unvollständig sind.* Es wird genügen das Resultat hier anzuführen. ϱ_1, ϱ_2 haben dieselbe Bedeutung wie a. a. O. und ihnen entsprechend sei

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{i_1} = \sigma_1, \quad \frac{\nu_1}{i_2 - i_1} = \sigma_2.$$

Man hat dann, falls

I. $\varrho_1 \leqq \varrho_2$, $\sigma_1 \leqq \sigma_2$,

1. $h\nu_2 \geqq i\mu_2$, $\qquad \delta = i\mu_2$,

II. $\varrho_1 > \varrho_2$, $\sigma_1 \leqq \sigma_2$,

2. $\frac{\nu_2}{i} > \varrho_1 > \varrho_2$, $\qquad \delta = i\mu_2$,

3. $\varrho_1 > \varrho_2 \geqq \frac{\nu_2}{i}$, $\qquad = h\nu_2$,

4. $\varrho_1 \geqq \frac{\nu_2}{i} \geqq \varrho_2$, $\qquad = i\mu_1 + h_1\nu_2$,

III. $\varrho_1 > \varrho_2$, $\sigma_1 > \sigma_2$,

5. $\sigma_1 > \sigma_2 \geqq \varrho_1 > \varrho_2$, $\qquad \delta = i\mu_2$,

6. $\sigma_1 \geqq \varrho_1 \geqq \sigma_2 \geqq \varrho_2$, $\qquad = h_1\nu_1 + i\mu_1 + i_1(\mu_2 - \mu_1)$,

7. $\varrho_1 \geqq \sigma_1 > \sigma_2 \geqq \varrho_2$, $\qquad = i\mu_1 + h_1\nu_2$.

Zu diesen sieben Fällen kommen noch sieben andere hinzu, welche aus ihnen durch Vertauschung der auf die Gleichung $F = 0$ sich beziehenden Zahlen mit den auf $G = 0$ sich beziehenden (und umgekehrt) abgeleitet werden. — Steht im Eingange links der vorstehenden Tafel in den Zeilen 1—7 ein Gleichheitszeichen, so kann die Zahl δ den angegebenen Werth auch überschreiten.

27. Bestimmt man durch Berücksichtigung der Ordnung der Unvollständigkeit der beiden Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ in Bezug auf y nach dem eben gegebenen Verfahren auch die Zahl δ', so findet man für den Grad q' der Resultante X in x nach Nr. 21.

$$q' = \Delta - \lambda - \delta - \delta' - \omega_1. \tag{14}$$

Z. B. *Sind beide Gleichungen sowohl nach x, als auch nach y genau von der zweiten Ordnung unvollständig und ist ausserdem*

$$h\nu_1 \gtrless i\mu_1, \qquad h'\nu_1' \gtrless i'\mu_1',$$

so hat man für δ die kleinere der Zahlen $h\nu_1$, $i\mu_1$; für δ' die kleinere der Zahlen $h'\nu_1'$, $i'\mu_1'$ zu setzen. Die für den in Rede stehenden Fall von Bézout gegebene Tafel der Werthe von q' (l. c. p. 156) stimmt damit nur in der 4. und 5. Zeile unbedingt überein.*)

Hätte es sich statt der Formel (14) bloss um die Relation

$$q' \leqq \Delta - \delta - \delta'$$

gehandelt, so hätte Minding's Verfahren (Crelle J. XXXI, p. 1) auch zum Ziele geführt. Aber es ist nicht abzusehen, wie es auf diesem Wege gelingen kann, die Zahl $\delta + \delta'$ in die Multiplicitäten m_1, m_2 zu zerlegen d. i. zu den Relationen

$$m_1 \geqq \delta, \quad m_2 \geqq \delta'$$

zu gelangen. Dies leistet zunächst die *Kronecker'sche Resolvente* $\mathsf{E}(u; \alpha_1, \alpha_2)$. Zufolge Nr. 3. hat man nur zu ermitteln, durch welche Potenz von α_1 bez. α_2 sie zum mindesten theilbar ist — zwei Fragen, welche sich getrennt behandeln lassen. Will man die genannte Potenz von α_1 erhalten, so betrachtet man wie in Nr. 12. $\mathsf{E}(v; \sigma, 1)$ d. i. die Resultante nach x der Gleichungen

$$F(x, v - \sigma x) = 0, \qquad G(x, v - \sigma x) = 0.$$

*) Zur Vergleichung mit den Formeln von Bézout hat man zu setzen: $m = t$, $\mu = t - \bar{a}$, $\mu_1 = \bar{a} - a$, $\mu' = t - \bar{a}_1$, $\mu_1' = \bar{a}_1 - a_1$, $h = h' = t - \bar{t}$, $\Delta = D'$, $q' = D$. Die auf die zweite Gleichung $G = 0$ bezüglichen Zahlen sind a. a. O. mit Accenten versehen $n = t'$ u. s. w.

Diese Gleichungen werden nach fallenden Potenzen von x und der Coefficient jeder solchen Potenz nach steigenden Potenzen von σ geordnet. Behält man nur das erste Glied eines jeden Coefficienten bei, so gelangt man durch Betrachtung der Resultante zweier binärer Formen des m^{ten} und n^{ten} Grades zu der oben verlangten Potenz von σ. Die Untersuchung erfordert die Herstellung von Entwickelungen nach steigenden Potenzen von σ. — Das Ergebniss derselben kann man mit Hülfe der Sätze von Nr. 21. leicht angeben. Ist $x = 0$ (d. i. haben die Functionen $f_0(y)$, $g_0(y)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler $y - b$), so folgt

$$q = \Delta - \lambda' - \delta - \delta'' - \omega_1 = \varepsilon,$$

somit ist $\mathsf{E}(v; \sigma, 1)$ von demselben Grade in v, wie $Y \equiv g(y)$ in y. *Demnach wird eine Identität von der folgenden Form bestehen:*

$$\mathsf{E}(v; \sigma, 1) \equiv \sigma^{\mu\nu+\delta} \left\{C \cdot g(v) \cdot \underset{y}{R}(f_0(y), g_0(y)) + \sigma H(\sigma)\right\}, \tag{15}$$

worin $H(\sigma)$ eine ganze Function von σ und der Coefficienten der Gleichungen $F = 0$, $G = 0$, C eine solche der letzteren allein bezeichnet.

Es ist nicht schwierig diesen Satz durch wirkliche Ausführung der oben angedeuteten Rechnung zu beweisen. Man findet insbesondere, falls wenigstens eine der Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ in Bezug auf x *genau von der ersten Ordnung* unvollständig ist,

$$\delta = 0, \qquad C = (-1)^{\mu n}.$$

Wenn beide Gleichungen in x *genau von der zweiten Ordnung* unvollständig sind und $h\nu_1 < i\mu_1$ ist, so ergiebt sich

$$\delta = h\nu_1, \qquad C = (-1)^l \mathsf{A}_0{}^i \mathsf{B}_1{}^h,$$

$$l = (m-h-1)(n-i-1) + 1 + n(m-\mu) + h\nu + i + \delta,$$

wo A_0 dieselbe Bedeutung hat wie in (4) von Nr. 24. und B_1 in der Gleichung $G = 0$ dem A_1 entspricht. U. s. f.

§ 8.

Definition der Multiplicität der gemeinsamen unendlichen Werthsysteme der Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ nach einer anderen Ansicht.

28. Man führe in die Gleichungen $F = 0$, $G = 0$, deren Grad in x bezüglich p, q, in y bezüglich r, s sein mögen, ein

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad y = \frac{y_1}{y_2}$$

und *betrachte x_2, y_2 als völlig unabhängig von einander.* Wird gesetzt

$$\underset{y}{R}(F, G) = f(x), \qquad \underset{x}{R}(F, G) = g(y),$$

so folgt unmittelbar

$$\underset{y}{R}\left\{x_2^p F\left(\frac{x_1}{x_2}, y\right), x_2^q G(\cdots)\right\} = x_2^P f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \varphi(x_1, x_2),$$

$$\underset{x}{R}\left\{x_2^r F\left(x, \frac{y_1}{y_2}\right), y_2^s G(\cdots)\right\} = y_2^P f\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \psi(y_1, y_2),$$

wo φ, ψ homogene Functionen bez. in x_1, x_2 und in y_1, y_2 von derselben Dimension $P = ps + qr$ sind.

Bei Begründung des Begriffes der Multiplicität der gemeinsamen Werthsysteme brauchen hier nur lineare Transformationen der Veränderlichen x_1, x_2 einer- und der Veränderlichen y_1, y_2 andererseits berücksichtigt zu werden. Dadurch erleidet aber die Zusammensetzung der Resultanten φ, ψ keine wesentliche Veränderung. Man wird daher die Multiplicität *nur* in folgender Weise definiren können.

Diejenigen gemeinsamen Werthsysteme, zu welchen weder $x_2=0$, noch $y_2=0$ gehört, fallen mit den endlichen Schnittpunkten der Curven $F=0$, $G=0$ nach der ersten Ansicht zusammen. *Mir legen jedem derselben die in* § 1. *und* 2. *definirte Multiplicität bei.* Die Summe der so erhaltenen Multiplicitäten sei ε wie in Nr. 18.

Trennt man von der Resultante $f(x)$ den Factor vom Grade ε ab, welcher den Abscissen der eben erwähnten Punkte entspricht, so bleibt nach § 6. noch ein Factor vom Grade λ' in x zurück. Die von einander verschiedenen Factoren desselben $(x-a)^\alpha$ liefern nach Nr. 18. *gemeinsame Werthsysteme* $x=a$, $y_2=0$ $(y_1 \gtrless 0)$ *und zwar sei die Multiplicität eines jeden derselben genau* α. Demnach ist $\Sigma\alpha = \lambda'$. In ähnlicher Art definiren wir die Multiplicitäten β *der gemeinsamen Werthsysteme* $(x_1 \gtrless 0)$ $x_2=0$, $y=b$. — Ist der Grad von $g(y)$ $\varepsilon+\lambda$, so hat man also $\Sigma\beta=\lambda$.

Der noch übrige Rest $P-\varepsilon-\lambda-\lambda'$ *sei die Multiplicität des gemeinsamen Werthsystemes* $x_2=0$, $y_2=0$ $(x_1 \gtrless 0, y_1 \gtrless 0)$.

Zufolge dieser Annahmen ist die Summe aller Multiplicitäten P.

29. Die letzte Definition bedarf aber der Begründung.

Das Werthsystem $x_2=0$, $y_2=0$ ist den Gleichungen

$$x_2^p y_2^r F\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}\right)=0, \qquad x_2^q y_2^s G\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}\right)=0$$

dann und nur dann gemeinsam, wenn die Grade in y von $f_0(y)$, $g_0(y)$ bezüglich niedriger sind als r, s; woraus von selbst folgt, dass auch $f_0'(x)$, $g_0'(x)$ bezüglich unter den Grad p, q sinken. Nun lässt sich leicht zeigen, dass unter der eben gemachten Voraussetzung $P-\varepsilon-\lambda-\lambda'>0$ ist, sonst aber — d. i. wenn wenigstens entweder $f_0(y)$ vom Grade r oder $g_0(y)$ vom Grade s in y ist — $P-\varepsilon-\lambda-\lambda'=0$ ist.

Im ersteren Falle verringern sich jedenfalls die Dimensionen m, n in x, y beider Gleichungen; es sei daher

$$m = p + r - d \quad (d \geq 1), \qquad n = q + s - e \quad (e \geq 1).$$

Um die Relation (k) in Nr. 21. anzuwenden, hat man

$$\mu = r - d, \quad r = s - e, \quad \mu' = p - d, \quad \nu' = q - e,$$

also $\Delta = P - de$ zu setzen. Man findet demnach wirklich

$$\varepsilon + \lambda + \lambda' \leq P - de < P.$$

Im letzteren Falle sind die Glieder höchster Dimension entweder in $F\, x^p y^r$ oder in $G\, x^q y^s$. Somit kommen nach der Ansicht der analytischen Geometrie über die Schnittpunkte von $F = 0$, $G = 0$ auf der Geraden $x_3 = 0$ keine anderen gemeinsamen Punkte dieser Curven vor als $x_2 = 0$ $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ $x_3 = 0$. Also ist $\omega_1 = 0$. Und da auch $f_0(y), g_0(y)$ einer- und $f_0'(x)$, $g_0'(x)$ andererseits der a. a. O. aufgestellten Bedingung entsprechen, so hat man $\varepsilon = \Delta - \lambda - \lambda'$ d. i. wegen $de = 0$, $\Delta = P$ eben $\varepsilon = P - \lambda - \lambda'$.

30. Zur Vergleichung beider Auffassungen möge der einfachste Fall, dass in F das Glied $x^p y^r$, in G das Glied $x^q y^s$ wirklich vorhanden sei, betrachtet werden.

Nach der *ersten* Ansicht sei für die endlichen Schnittpunkte zusammengenommen ε die Multiplicität. Ausserdem hat man nur noch die Schnittpunkte $x_2 = 0$ $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ $x_3 = 0$; zufolge Nr. 18. ff. mit den Multiplicitäten

$$m_1 = rs + \lambda, \qquad m_2 = pq + \lambda'.$$

Dabei muss sein

$$\varepsilon + m_1 + m_2 = (\varepsilon + \lambda + \lambda') + pq + rs = (p+q)(r+s).$$

Nach der *zweiten* Ansicht ist die Gesammtmultiplicität der endlichen gemeinsamen Werthsysteme ε, die der gemeinsamen Werthsysteme $x = a$, $y_2 = 0$ ist λ', endlich die der gemeinsamen Werthsysteme $x_2 = 0$, $y = b$ ist λ.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt in der That

$$\varepsilon + \lambda + \lambda' = ps + rq = P.$$

Innsbruck, 1. März 1879.

Um in den Fortschritten der Physik eine möglichst grosse Vollständigkeit zu erzielen und um deren Erscheinen möglichst beschleunigen zu können, werden die geschätzten Herren Verfasser von Arbeiten aus der Physik, Meteorologie und Physik der Erde dringend gebeten, der physikalischen Gesellschaft zu Berlin Separatabzüge Ihrer Abhandlungen einzusenden und an den Schriftführer der Gesellschaft Herrn Professor Rüdorff, Berlin, Niederwallstr. 12 zu adressiren.

INHALT.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XV. Band. 2. Heft.

6

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme.

Von

Julius König in Budapest.

Die Betrachtungen, die Gauss bei dem zweiten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra angewendet hat, lassen sich in zwei, ihrem Inhalte nach wesentlich verschiedene Schlussreihen zusammenfassen. Die erste derselben kann man als Anwendung eines Eliminationsprincips charakterisiren, das Gauss, wie aus der Abhandlung (Werke, Bd. 3, pag. 31) hervorgeht, wohl gekannt und benützt, aber nicht allgemein ausgesprochen hat. Hieran reiht sich dann, gewissermassen ganz selbständig, ein Gedanke, der eigentlich eine Methode zur Auflösung algebraischer Gleichungen angiebt, und darin besteht, dass man die Gleichung $f(x)=0$ als coexistirend mit der Gleichung $F(u, x)=0$ betrachtet. Wird nun die Form von F passend gewählt, so dass die Eliminationsgleichung in u aufgelöst werden kann, so wird damit die ursprüngliche Gleichung in Factoren zerlegt, also gleichfalls gelöst.

In dem Beweise, den Gordan im X. Bande der Annalen für das Fundamentalprincip der Algebra gegeben, besteht die wesentliche Vereinfachung eben in der passenden Wahl von $F(u, x)$, so dass Grad und alle weiteren Eigenschaften der u-Gleichung beinahe unmittelbar abgelesen werden können, und es ist damit ein algebraischer Beweis des in Rede stehenden Satzes gewonnen, der an Klarheit und Kürze kaum mehr übertroffen werden kann.

Trotzdem wird es vielleicht nicht ohne Interesse sein, wenn ich hier den andern Grundgedanken der Gauss'schen Abhandlung zum Gegenstande der Untersuchung mache. Dort wird das erwähnte Eliminationsprincip eigentlich nur dazu benützt, die in Folge der Wahl der Gleichung $F(u, x)=0$ complicirtere u-Gleichung vollständig zu discutiren. Dasselbe enthält aber, allgemein gefasst, die vollständige Lösung des Problems der Factorenzerlegung ganzer Functionen, so dass also die „Demonstratio nova altera" eigentlich das Material für zwei von einander ganz unabhängige Beweise des Fundamentalsatzes liefert, die beide rein algebraischer Natur sind, von denen der eine seinen naturgemässen Platz in der Theorie der Formen, der nun mitzutheilende hingegen in jenem Theile der Algebra findet, dessen Wesen in der Anwendung combinatorischer Methoden liegt.

1.

Das Gauss'sche Eliminationsprincip.

Es sei das System von algebraischen Gleichungen vorgelegt:

$$(1) \qquad \varphi_i(u_1, u_2, \cdots u_r;\ A_1, A_2, \cdots, A_n;\ B_1, B_2, \cdots B_s) = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, r+s),$$

mit der Aufgabe, durch Elimination der B hieraus ein System von Gleichungen in der Form

$$(2) \qquad \begin{array}{l} F_1\ (u_1,\ u_r,\ A_1 \cdots A_n) = 0, \\ F_2\ (u_2,\ u_r,\ A_1 \cdots A_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{r-1}(u_{r-1}, u_r,\ A_1 \cdots A_n) = 0, \\ F_r\ (u_r,\ A_1 \cdots A_n) = 0, \end{array}$$

zu bestimmen. Die Aufgabe ist bekanntlich immer und zwar durch algebraische Operationen an den ursprünglichen Gleichungen lösbar; die wirkliche Ausführung der verlangten Rechnungen stösst aber, mit Ausnahme der einfachsten Fälle, auf Schwierigkeiten, die wenn auch in gewisser Beziehung rein mechanischer Natur, doch in der That unüberwindlich sind.

Im Folgenden können aber die Eliminationsresultate mit Hilfe anderweitiger Betrachtungen direct hingeschrieben werden, wenn wir

$$A_k = C_k = (-1)^k\, \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k,$$

d. i. gleich der k-gliedrigen Combinationssumme von n Elementen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ setzen.*) Die α unterliegen keiner wie immer gearteten Beschränkung, und es existirt demnach, wie bekannt, keinerlei Relation zwischen den Grössen C.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass die unter diesen Voraussetzungen enthaltenen Resultate immer in die allgemeinsten übergehen, wenn statt der Grössen C die A gesetzt werden, oder mit anderen Worten, dass *jene Festsetzung für die A an den aus der Elimination hervorgehenden Gleichungen nichts ändert, also während des Eliminationsprocesses immer gestattet ist.*

*) Die folgenden Betrachtungen bleiben genau dieselben, wenn man die C als Functionen von $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ definirt, deren Functionaldeterminante nicht identisch verschwindet.

Sei, um dies nachzuweisen, die allgemeine Form einer der Gleichungen (2), wie sie die durchgeführt gedachte Rechnung ergiebt:

$$(3) \qquad \Sigma\, g_{k,l}(A_1, \cdots A_n)\, u_i^k u_r^l = 0$$

und die entsprechende unter der erwähnten Voraussetzung abgeleitete:

$$(4) \qquad \Sigma\, \gamma_{k,l}(C_1, \cdots C_n)\, u_i^k u_r^l = 0.$$

Setzt man nun statt der $A_1 \cdots A_n$ in (3) die $C_1 \cdots C_n$ ein, so muss die entstandene Gleichung mit (4) vollständig übereinstimmen.*) Der Quotient zweier entsprechender Coefficienten muss gleich werden; es ist also

$$\frac{g_{k,l}(C_1, \cdots C_n)}{g_{k',l'}(C_1, \cdots C_n)} = \frac{\gamma_{k,l}(C_1, \cdots C_n)}{\gamma_{k',l'}(C_1, \cdots C_n)}.$$

Wäre diese Gleichung nicht identisch erfüllt, so ergäbe sich daraus eine Relation zwischen den Grössen C, die nur für specielle α existirt, während die Elimination mit Hilfe solcher α ausgeführt werden kann, die diese Relation nicht erfüllen. Man erhält also sämmtliche γ Quotienten aus den g Quotienten durch einfache Vertauschung von C mit A. Mit anderen Worten: Die beiden Gleichungen müssen, mit Ausnahme der angewandten Zeichen A und C, identisch sein.

Ein Unterschied könnte nur noch darin bestehen, dass die ganze Gleichung (3) mit einem von den u unabhängigen Factor

$$\varphi(A_1 \cdots A_n)$$

multiplicirt erschiene, während der entsprechende Factor in (4) $\psi(C_1 \cdots C_n)$ wäre. Aber auch hier muss durch Vertauschung der A mit C φ in ψ übergehen, und zwar in identischer Weise, da sonst wieder eine Relation zwischen den α bestände. Es muss also der Form nach auch $\varphi = \psi$ sein.

Wir haben in den bisherigen Betrachtungen den Fall unberücksichtigt gelassen, dass zwischen den A irgend welche Relationen bestehen. Sind solche von der Form

$$\chi(A_1 \cdots A_n^{\cdot}) = 0,$$

so gelten natürlich ebenso viele zwischen den α, die durch die Gleichungen

$$\chi(C_1 \cdots C_n) = 0$$

gegeben sind. Dann ist der Satz von der Identität entsprechender Coefficienten natürlich so zu verstehen, dass die gegebenen χ-Relationen zur Transformation benutzt werden können, was aber bei (3)

*) Das System der Gleichungen (2) kann natürlicherweise noch in unendlich vielen verschiedenen Formen geschrieben werden; eine derselben, und diese sei eben (3), muss aber durch Vertauschung von A mit C die unter den erläuterten Voraussetzungen erhaltenen Eliminationsresultate von neuem liefern.

ebenso gut wie bei (4) geschehen kann. Dann kann man jeder der Gleichungen unendlich viele Formen geben, die aber wieder durch einfache Buchstabenvertauschung in einander übergehen müssen.

Das Wesen des soeben abgeleiteten Eliminationsprincips mag noch folgendermassen gefasst werden:

Wenn in einer Eliminationsaufgabe die Grössen $A_1, A_2, \cdots A_n$ als bleibende Constanten vorkommen, so kann man statt ihrer die Werthe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, gleichsam als ideale Zahlen einführen, und sie — ohne Voraussetzung des Fundamentalsatzes der Algebra — behandeln, wie wenn sie die Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

wären. In dem Schlussresultat können nur ihre symmetrischen Functionen vorkommen, die dann auf gewöhnlichem Wege durch die A auszudrücken sind.

In der erwähnten Abhandlung hat Gauss dieses Princip zweimal angewendet, allerdings ohne es von den Anwendungen losgelöst zu begründen; das erstemal (art. 6.—9.) zum Beweis des Satzes, dass $f(x)$ und $f'(x)$ dann und nur dann für ein gleiches x verschwinden, wenn die Discriminante gleich null ist. In dem Beweise kommt es darauf an, die Annahme zu vermeiden, dass $f(x) = 0$ überhaupt eine Wurzel haben muss. Für den Fall dass die Zerlegung von $f(x)$ bekannt ist, ist der Satz unmittelbar einzusehen; und da es sich um die Elimination von x aus die A enthaltenden Gleichung handelt, so darf derselbe nach den vorhergehenden Entwicklungen auf den Fall übertragen werden, wo diese Zerlegbarkeit nicht zugegeben wird. Das Eliminationsresultat muss nämlich eine Potenz des Differenzenproductes der α und zwar eine gerade Potenz sein, weil es eine symmetrische Function der α ist; also eine Potenz der Discriminante; die Gradvergleichung zeigt endlich, dass es die Discriminante selbst ist.

2.

Die Resolvente $\binom{n}{r}^{\text{ten}}$ Grades für die Gleichung n^{ten} Grades.

Sei nun die Gleichung n^{ten} Grades

$$f(x) \equiv x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

vorgelegt, von der wir in bekannter Weise voraussetzen, dass sie reelle Coefficienten und eine von 0 verschiedene Discriminante besitze. Dann betrachten wir statt $f(x) = 0$ die Gleichung

$$F(z) \equiv f(z+\mu) = z^n + B_1 z^{n-1} + \cdots + B_n = 0.$$

Alle Sätze über Factorenzerlegung, die in Bezug auf letztere Gleichung entwickelt werden, gelten dann natürlicher Weise auch für die erste Gleichung. Und die Annahme, dass die Coefficienten der ersten Gleichung die entsprechenden Combinationssummen der Werthe $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ sind, ist gleichbedeutend damit, dass die Coefficienten der zweiten Gleichung aus $\alpha_1 - \mu, \cdots \alpha_n - \mu$ in gleicher Weise gebildet sind.

Der Werth von μ soll im Laufe der Untersuchung in passender Weise bestimmt werden. Da die zweite Gleichung aus der ersten durch lineare Transformation entsteht, deren Determinante gleich 1 ist, so ist vor Allem klar, dass ihre Discriminante unverändert bleibt.

Wenn wir nun alle Werthe von

$$(-1)^r (\alpha_1 - \mu)(\alpha_2 - \mu) \cdots (\alpha_r - \mu)$$

bilden, die aus dem hingeschriebenen durch Permutation der α entstehen, so sind die Combinationssummen dieser Grössen symmetrische Functionen der α oder $\alpha - \mu$, und haben, wenn man diese durch die A oder B ausdrückt, eine bestimmte, reelle Bedeutung. Die in dieser Weise entstehende Gleichung vom Grade $\binom{n}{r}$,

$$F(u) = 0$$

hat demnach bestimmte, mittels eines fertigen Algorithmus zu berechnende Coefficienten, die rationale Functionen der B, oder anders ausgedrückt, der A und μ sein werden.

Es soll nun vor Allem nachgewiesen werden, *dass μ immer so gewählt werden kann, dass die Discriminante der Gleichung $F(u) = 0$ nicht verschwindet.* Diese Discriminante, in gewöhnlicher Weise berechnet, wird eine ganze Function von μ sein, deren Coefficienten ganze Functionen der A sind. Wenn diese Coefficienten nicht sämmtlich verschwinden, so giebt dies, als Bedingung für das Verschwinden der Discriminante, eine Gleichung in μ, und man kann dann in einfachster Weise einen Werth von μ bestimmen, der dieser Gleichung *nicht* genügt. Wir haben also nur nachzuweisen, dass ein Verschwinden sämmtlicher Coefficienten nicht stattfinden kann. In der That, würde hieraus folgen, dass auch die Discriminante der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ verschwindet. Wir bezeichnen diese mit D.

Unter der Voraussetzung, dass die A in erwähnter Weise als Combinationssumme der α darstellbar sind, ist diese Folgerung leicht zu ziehen. Denn es ist dann die Discriminante von $F(u) = 0$ ein Product von Ausdrücken folgender Form:

$$(\alpha_1 - \mu)(\alpha_2 - \mu) \cdots (\alpha_r - \mu) - (\alpha_1' - \mu)(\alpha_2' - \mu) \cdots (\alpha_r' - \mu)$$

und damit dieses Product unabhängig von dem Werthe, den wir μ ertheilen, verschwinde, muss dies mit irgend einem der Factoren der Fall sein. Für einen solchen folgt aber dann, dass der Coefficient jeder Potenz von μ für sich verschwinden, dass also das System von Gleichungen bestehen muss:

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r &= \alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_r, \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}+\cdots &= \alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_{r-1}'+\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r &= \alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_r'. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besagt aber, dass die Werthereihe

$$\alpha_1,\ \alpha_2\cdots\alpha_r,$$

von der Anordnung abgesehen, mit der Werthereihe

$$\alpha_1',\ \alpha_2',\cdots\alpha_r'$$

übereinstimmt. Da nun zwei solche Werthereihen nicht in allen Indices übereinstimmen, so folgt hieraus, dass zwei α, z. B. α_i und α_k gleiche numerische Werthe haben, also die Discriminante der ursprünglich vorgelegten Gleichung $f(x)=0$ verschwindet. Die Umkehrbarkeit dieser Folgerung ist evident.

Wir müssen uns aber nun wieder von der Voraussetzung befreien, unter welcher dieser Beweis geführt wurde. Im Allgemeinen erhalten wir die Discriminante der Gleichung $F(u)=0$ in der Form:

$$r_0+r_1\mu+r_2\mu^2+\cdots+r_k\mu^k$$

und es fragt sich, ob die Gleichungen:

$$r_0=0,\quad r_1=0,\ \cdots,\ r_k=0$$

überhaupt zusammenbestehen können. Dass für gewisse in bestimmter Weise gewählte A dies in der That der Fall ist, ist nach dem Vorhergehenden bekannt. Die Gleichungen widersprechen sich nicht, und die A-Werthe, die dem Gleichungssysteme entsprechen, müssen schliesslich auch einem reducirten Systeme Genüge leisten, welches die Form hat:

$$\varphi_i(A_i, A_{i+1},\cdots,A_n)=0,$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

Selbstverständlich können einige dieser Gleichungen identisch verschwinden. Da dies die Bedingungen für beliebige A sind, müssen dieselben auch bestehen, wenn man statt der A die Combinationssummen C setzt. So erhält man also:

$$\varphi_i(C_i, C_{i+1},\cdots C_n)=0.$$

Nun folgt aber aus $\alpha_i=\alpha_k$ nach dem Früheren $\varphi_i=0$. Und es muss φ_i durch $\alpha_i-\alpha_k$ theilbar sein. Da nun φ_i eine symmetrische Function der α, so folgt hieraus, dass φ_i durch D theilbar ist, und diese Eigenschaft bleibt natürlich bestehen, wenn wir auch statt der C die A setzen. Wenn aber der Ausdruck φ nicht alle A enthält, ist diese Theilbarkeit absurd, und es müssen also alle φ-Gleichungen mit Ausnahme der ersten identisch verschwinden.

Das Zusammenbestehen der Gleichungen $r = 0$ ist daher an die eine Bedingung:

$$\varphi_i(A_1, A_2, \cdots, A_n) = 0$$

geknüpft. Dann schliessen wir aber wie früher, dass φ_1 durch D theilbar ist. Sei q die höchste Potenz der Discriminante, die in φ_1 enthalten ist, so wird:

$$\varphi_1(A_1, \cdots, A_n) = D^q \psi(A_1, \cdots, A_n).$$

Nun können die r-Gleichungen auch dadurch zusammenbestehen, dass $\psi = 0$ ist. Gehen wir wieder zu den C über, so folgt aus

$$\psi(C_1, \cdots, C_n) = 0,$$

wieder:

$$\alpha_i = \alpha_k,$$

d. h. ψ als Gleichung in α_i aufgefasst hat die Wurzel α_k, ist also durch $\alpha_i - \alpha_k$ theilbar und, wie wieder hieraus folgt, auch durch D theilbar. Dies ist aber nicht möglich, da wir aus φ schon die höchste Potenz der Discriminante herausgehoben verlangten. ψ darf also ein bestimmtes α_i nicht enthalten und enthält also kein einziges α, also auch kein C; ψ muss also auch ursprünglich von den A unabhängig sein und ist demnach eine reine Constante.

Demnach ist in der That die Bedingung dafür, dass die Discriminante der Gleichung $F(u) = 0$ ohne Rücksicht auf den Werth von μ verschwinde: $D^q = 0$, wenn D die Discriminante der ursprünglich vorgelegten Gleichung bedeutet.

Da nun D als nicht verschwindend vorausgesetzt wird, kann die Gleichung

$$r_0 + r_1\mu + \cdots + r_k\mu^k = 0$$

nicht identisch erfüllt sein, und wir denken für das folgende μ immer so bestimmt, dass es diese Gleichung nicht befriedigt.

3.

Gleichungen, denen die Coefficienten eines beliebigen Factors für eine gegebene ganze Function genügen.

Die im Folgenden zu untersuchende Gleichung denken wir uns, den im vorhergehenden Artikel enthaltenen Erörterungen gemäss, durch eine einfache lineare Substitution so umgestaltet, dass die zugehörige Resolvente $F(u) = 0$ eine von Null verschiedene Discriminante besitzt. Diese schon transformirte Gleichung sei:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

und wir wollen nun direct die Bedingungen untersuchen, unter welchen man einen Factor r^{ten} Grades für das gegebene Gleichungspolynom bestimmen kann. Soll demnach

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n$$
$$= (x^r + u_1 x^{r-1} + \cdots + u_{r-1} x + u_r)(x^{n-r} + B_1 x^{n-r-1} + \cdots + B_{n-r})$$

sein, so erhält man durch Vergleichung der einzelnen Potenzen von x ein Gleichungssystem folgender Form:

$$u_1 + B_1 = A_1,$$
$$u_2 + B_1 u_1 + B_2 = A_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$u_r B_{n-r} = A_n.$$

Dieses System von Gleichungen muss nun wenigstens eine reelle Werthreihe der Grössen u und B zulassen, wenn das ursprüngliche Gleichungspolynom einen reellen Factor r^{ten} Grades haben soll. Da aus den u, vorausgesetzt, dass das System überhaupt möglich ist, die B sich linear bestimmen, wird es zur Discussion desselben am geeignetsten sein, durch Elimination der B ein System von r Gleichungen mit den Unbekannten u herzustellen. Die zu untersuchenden Gleichungen haben aber die in Art. 1 behandelte Form, und wir dürfen demnach während des Eliminationsprocesses die A in der Weise aus den α zusammengesetzt denken, dass das Gleichungspolynom

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

wird, während das Eliminationsresultat auch dann richtig bleibt, wenn wir diese Voraussetzung fallen lassen.

Nun lassen sich aber die Eliminationsgleichungen mit Hilfe der auf rationale Functionen von n Elementen bezüglichen Sätze unmittelbar hinschreiben. Denn der Factor r^{ten} Grades muss jetzt die Form

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)$$

besitzen, und die Werthe von u_r sind demnach:

$$(-1)^r \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$$

und die durch Permutation der α hieraus entstehenden. Die Gleichung für u_r ist demnach keine andere als die im vorigen Art. behandelte Resolvente vom Grade $\binom{n}{r}$, deren Discriminante in Folge unsrer Festsetzungen nicht verschwindet. Dann kann man aber die zugehörigen $u_1 \cdots u_{r-1}$ durch lineare Gleichungen bestimmen. Es ist z. B.

$$u_i = (-1)^i \Sigma \alpha_1 \cdots \alpha_i,$$

wo die Summation auf die Elemente $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ bezogen wird; dieser Ausdruck gestattet aber alle jene Permutationen der α, die u_r nicht verändern, und man hat aus dem Lagrange'schen Satz über ähnliche Functionen:

$$F'(u_r) u_i = \Theta_i(u_r),$$

eine lineare Gleichung für u_i. Die Ableitung dieser Gleichung wird nur dann illusorisch, wenn $F'(u_r)$ mit $F(u_r)$ zugleich verschwindet, und es tritt dann eine Gleichung höheren Grades an ihre Stelle. Um diesen — allerdings nur scheinbaren — Ausnahmefall zu vermeiden, mussten die im vorhergehenden Artikel enthaltenen Betrachtungen eingeschoben werden.

Das Eliminationsresultat ist demnach auch in allgemeingültiger Weise:

$$\begin{gathered} F(u_r) = 0, \\ F'(u_r) \cdot u_1 = \Theta_1(u_r), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F'(u_r) \cdot u_{r-1} = \Theta_{r-1}(u_r), \end{gathered}$$

wo $F'(u_r)$ für kein der ersten Gleichung entsprechendes u_r verschwinden kann. $F(u_r) = 0$ ist die früher behandelte Resolvente $\binom{n}{r}^{\text{ten}}$ Grades. *Und das Problem, einen reellen Factor r^{ten} Grades für eine ganze Function n^{ten} Grades zu bestimmen, ist somit darauf zurückgeführt, eine reelle Wurzel der Resolvente zu finden.* Beide Aufgaben werden zugleich möglich oder unmöglich sein.

Für $r = 2$ ergeben sich hieraus, in wenig geänderter Form, die in Gauss' Abhandlung enthaltenen Resultate. Hierauf weiter einzugehen, wäre wohl überflüssig; nur die Bemerkung möge noch Platz finden, dass dann die obigen Formeln die einfachste Anweisung zur numerischen Berechnung der complexen Wurzeln enthalten.

Im Folgenden wollen wir aber r so zu bestimmen suchen, dass die zu benutzende Resolvente direct von unpaarem Grade sei, also *das Problem der Factorenzerlegung direct auf die Bestimmung einer reellen Wurzel einer Gleichung von unpaarem Grade zurückgeführt werde.*

4.

Directe Bestimmung eines reellen Factors durch die reelle Wurzel einer Gleichung von ungeradem Grade.

Wir setzen selbstverständlich voraus, dass die Gradzahl der zu betrachtenden Gleichung eine gerade Zahl ist, da im entgegengesetzten Fall ein Factor ersten Grades immer bestimmt werden kann.

Sei nun zuerst der Grad der Gleichung keine Potenz von 2; dann wird derselbe:

$$n = 2^k \cdot q,$$

und wir setzen dann einfach:

$$r = 2^k.$$

Dann wird:

$$\binom{n}{r} = \frac{2^k q (2^k q - 1)(2^k q - 2) \cdots (2^k q - 2^k + 1)}{2^k \cdot (2^k - 1)(2^k - 2) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Nun ist $2^k q - s$ und $2^k - s$ immer durch dieselbe Potenz von 2 theilbar, und wenn man diese wegschafft, enthalten Zähler und Nenner nur ungerade Zahlen, und es wird demnach $\binom{n}{r} = \binom{2^k q}{2^k}$ in der That eine ungerade Zahl.

Wenn *zweitens* der Grad der Gleichung eine Potenz von 2 ist:

$$n = 2^k,$$

dann setzen wir

$$r = 2^{k-1},$$

und erhalten

$$\binom{n}{r} = \frac{2^k(2^k-1)(2^k-2)\cdots(2^k-s)\cdots(2^k-2^{k-1}+1)}{2^{k-1}(2^{k-1}-1)(2^{k-1}-2)\cdots(2^{k-1}-s)\cdots 2\cdot 1}.$$

Nun ist wieder $2^k - s$ und $2^{k-1} - s$ durch dieselbe Potenz von 2 theilbar, wenn s nicht null ist, und man erhält in diesem Falle

$$\binom{n}{r} = 2\nu,$$

wo ν eine ungrade Zahl bedeutet.

Der Grad unserer Resolvente enthält also in diesem Falle noch einmal den Factor zwei; dieselbe wird sich aber in Folge der unter ihren Coefficienten stattfindenden Relationen durch Auflösung einer Gleichung ν^{ten} Grades in quadratische Factoren zerlegen lassen.

Bevor wir hierauf näher eingehen, möge noch die Bemerkung Platz finden, dass unter den Resolventen, die dem untersuchten Typus angehören, sich überhaupt keine findet, deren Grad eine ungerade Zahl ist; denn es ist:

$$\binom{2^k}{2^{k-1}-r} = \binom{2^k}{2^{k-1}+r} = \binom{2^k-1}{2^{k-1}+r} \frac{2^k}{2^k-2^{k-1}-r},$$

wo der Nenner des zuletzt stehenden Bruchs höchstens die 2^{k-2}te Potenz von zwei enthält. Für alle der betrachteten Classe angehörigen Resolventen ist also, wenn r nicht gleich $\frac{n}{2}$, der Grad durch 4 theilbar.

Wir gehen nun näher auf die Relationen ein, die zwischen den Coefficienten der Resolvente $2r^{\text{ten}}$ Grades stattfinden, und sind nach dem Früheren berechtigt, während der Aufstellung dieser Relationen die Zerlegbarkeit der ursprünglichen Gleichung anzunehmen. Dann ist jede Wurzel der Resolvente ein Product von $\frac{n}{2}$ Elementen α, und je zwei derselben u_i und u_i' geben als Product das letzte Glied der ursprünglichen Gleichung A_n.

Das letzte Glied der Resolvente ist demnach A_n^{ν}.

Für das vorhergehende erhält man:

$$(-1)^{2\nu-1}\, \Sigma u_1 u_2 \cdots u_{2\nu-1} = (-1)\, A^{\nu-1}\, \Sigma u_1,$$

und ähnlich für die übrigen, und daher, wenn man die Resolvente ausführlicher:

$$F(u) = u^{2\nu} + K_1 u^{2\nu-1} + \cdots + K_{2\nu-1} u + K_{2\nu} = 0$$

schreibt, die folgenden Coefficientenrelationen:

$$K_{2\nu} = A^{\nu},$$
$$K_{2\nu-1} = A^{\nu-1} K_1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$K_{\nu 2-i} = A^{\nu-i} K_i,$$

so dass, wenn man noch der Kürze wegen

$$V_{\nu-r} = u^{\nu-r} + \frac{A^{\nu-r}}{u^{\nu-r}}$$

setzt, die Resolvente die Form:

$$V_{\nu} + K_1 V_{\nu-1} + \cdots + K_{\nu-1} V_{\nu} + K_{\nu} = 0$$

annimmt; hier wurde allerdings der Factor u^{ν} entfernt; dies ist aber gestattet, da die Resolvente durch den Werth $u = 0$ nicht befriedigt werden kann. Sonst müsste A_n verschwinden, und dies gäbe den Factor x für die ursprünglich vorgelegte Gleichung. Uebrigens enthielte dann auch die Resolvente die Wurzel u mehrfach, und dieser Fall würde durch die lineare Transformation umgangen. Nun hat man bekanntlich

$$V_2 = V_1^2 - 2A,$$

und weiter

$$V_s = V_{s-1} V_1 - A V_{s-2},$$

und erhält demnach die Resolvente in der Form

$$\Phi(V) = 0,$$

als Gleichung ν^{ten} Grades in

$$V = u + \frac{A_n}{u}.$$

Da nun aus derselben immer ein reeller Werth von V bestimmt werden kann, giebt die letzte Relation, als Gleichung in u aufgefasst, zwei Werthe des u. Diese Auflösung wird aber nicht immer genügen, denn wir verlangen eine reelle Factorenzerlegung, also auch reelle Werthe von u. Ohne tieferes Eingehen auf die Resolvente erhält man durch diese Auflösungsmethode nur dann mit Gewissheit reelle u-Werthe, wenn A_n negativ ist.

Um aber den Fall, dass A_n positiv ist, zu absolviren, betrachten wir statt der Resolvente $F(u) = 0$ die folgende Gleichung $F(u) \cdot F(-u) = 0$, wo es unmittelbar klar ist, dass eine Wurzel der letzteren auch immer eine Wurzel der ersten bestimmt.

Dies wird aber in der zuletzt erhaltenen Form:

$$\Phi(V) \, . \, \Phi(-V) = 0,$$

oder da bei der ausgeführt gedachten Multiplication die ungeraden Potenzen von V herausfallen:

$$\Psi(V^2) = 0,$$

wo Ψ abermals vom ν^{ten} Grade ist. Da aber

$$V^2 = u^2 + \frac{A^2}{u^2} + 2A$$

in der Form

$$\left(u - \frac{A}{u}\right)^2 + 4A$$

geschrieben werden kann, so erhält die Resolvente schliesslich die Form:

$$\mathrm{X}(U^2) = 0,$$

wo X wieder vom ν^{ten} Grade und

$$U = u - \frac{A}{u}$$

ist.

Von der X-Gleichung lässt sich aber nun zeigen, dass ihr constantes Glied negativ ist. Um dieses zu berechnen, dürfen wir wieder die u in bekannter Weise aus den α zusammengesetzt denken. Dann genügen der Gleichung, wenn wir wieder mit u_i und u_i' zwei solche Werthe bezeichnen, deren Product gleich A_n ist, alle Werthe $(u_i - u_i')^2$, deren Zahl eben ν, so dass das gesuchte letzte Glied der Gleichung wird:

$$(-1)^\nu \left\{(u_1 - u_1')(u_2 - u_2') \cdots (u_\nu - u_\nu')\right\}^2,$$

wo die Eintheilung der u so fixirt sein mag, dass alle jene u ohne Accent geschrieben sind, die α_1 enthalten. Nun ist aber schon:

$$(u_1 - u_1')(u_2 - u_2') \cdots (u_\nu - u_\nu')$$

eine symmetrische Function der α. Dass sie sich für eine Permutation der α, die α_1 ungeändert lässt, nicht ändert, ist unmittelbar klar; wir untersuchen nun, was bei einer Vertauschung von α_1 mit α_2 geschieht. Dort, wo u_i diese beiden enthält, geschieht gar keine Aenderung; in den übrigen geht u in ein u' über, und umgekehrt, es vertauschen sich zwei Factoren, indem sie zugleich das Zeichen wechseln; da dies aber bei beiden geschieht, bleibt der Werth derselbe. Dass der Factor $u_i - u_i'$ in sich selbst übergeht, und dabei nur das Zeichen wechselt, ist nur dann möglich, wenn die Zahl der α gleich zwei ist, was dem Fall der Gleichung zweiten Grades entspräche. Dieser Fall, den wir hier nicht zu betrachten haben, ist in der That ein Ausnahmsfall, der einzige, wo eine Zerlegung in reelle Factoren nicht immer möglich.

Da nun schon das Product $(u_1 - u_1') \cdots (u_\nu - u_\nu')$ durch die Coefficienten der Gleichung ausdrückbar ist, erhält das letzte Glied der Gleichung

$$\mathrm{X}(U^2) = 0$$

die Form:

$$(-1)^{\nu}\,[g(A_1 \cdots A_2)]^2,$$

was, da ν eine ungerade Zahl ist, in der That einen negativen Werth ergiebt.

Hieraus folgt aber ein positiver Werth für U^2, demnach ein reeller Werth für U, und schliesslich unter der Voraussetzung, dass A_n positiv ist, aus der Gleichung

$$u - \frac{A_n}{u} = U$$

ein reeller Werth von u, der — eventuell mit geändertem Vorzeichen — auch der Resolvente $F(u) = 0$ genügen muss.

Damit ist aber auch für diesen letzten Fall die *Zerlegung der Gleichung* $2^{n\text{ten}}$ *Grades in zwei reelle Factoren vom Grade* 2^{n-1} *geleistet*, und bis auf die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades mit reellen Wurzeln ist die einzige irrationale Operation, die hierbei auszuführen ist, die Bestimmung einer reellen Wurzel in einer Gleichung von ungeradem Grade.

Budapest, Februar 1879.

Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Im 4ten Hefte des 86ten Bandes des Borchardt'schen Journales habe ich die Frage behandelt, ob sich von vornherein charakteristische Eigenschaften für die Moduln derjenigen elliptischen Integrale angeben lassen, auf welche sich gewisse Abel'sche Integrale von der Form

$$\int f(x, \sqrt[m]{R(x)})\, dx$$

reduciren lassen, worin f eine rationale und R eine ganze Function von x bedeutet; ich fand dort, dass, wenn ein Abel'sches Integral erster Gattung — und auf Integrale erster Gattung sind, wie ich früher gezeigt habe, alle Transformationsprobleme zurückzuführen — von der Form

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[n]{R(x)})^r\, dx,$$

worin $n > 2$, auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, dies nur für $n = 3, 4, 6$ der Fall sein kann, und zwar haben die elliptischen Integrale, auf welche sich die Integrale

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[3]{R(x)})^r\, dx, \qquad \int \psi(x)\, (\sqrt[6]{R(x)})^r\, dx$$

reduciren lassen, wenn im ersten Falle $r = 1, 2$, im zweiten $r = 1, 2, 4, 5$ ist, den Modul der complexen Multiplication $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ oder einen aus diesem transformirten, während die elliptischen Integrale, auf welche die Abel'schen

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[4]{R(x)})^r\, dx$$

zurückführbar sein können, worin $r = 1, 3$ ist, den complexen Multiplicationsmodul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder einen aus diesem transformirten besitzen.

Mit Rücksicht auf die in der vorliegenden Arbeit folgenden Untersuchungen will ich auf Grund des in der oben citirten Arbeit bewiesenen Satzes, dass gleiche Multiplicatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln in einander transformirbar sind, und zufolge der Bemerkung, dass die elliptischen Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^3-1)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \ \left(\text{für } y = \frac{1}{t}\right)$$

die complexe Multiplication mit den Multiplicatoren

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}, \quad \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}$$

besitzen, den obigen Satz so aussprechen, dass die Integrale von der Form

$$\int \psi(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^r\,dx, \quad \int \psi(x)\,(\sqrt[4]{R(x)})^r\,dx, \quad \int \psi(x)\,(\sqrt[6]{R(x)})^r\,dx,$$

mit den oben angegebenen Beschränkungen für die Zahl r sich nur auf die resp. Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

welche die 3[te] und 4[te] Einheitswurzel zu Multiplicatoren haben, reduciren lassen können.

Es blieb jedoch noch eine wichtige Frage unerledigt, nämlich *alle Abel'schen Integrale der bezeichneten Form anzugeben, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind*, und die vollständige Beantwortung dieser Frage soll den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden, indem ich zugleich die Frage der Reduction selbst etwas zu verallgemeinern suchen werde.

Sei die irreductible algebraische Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

für welche wir die zugehörigen Abel'schen Integrale untersuchen wollen, eine algebraisch auflösbare, so dass in der bekannten Abel'schen Bezeichnungsweise y als algebraische Function μ^{ter} Ordnung dargestellt die Form hat

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

worin $q_0, q_1, \cdots q_{n-1}$ und p algebraische Functionen $\mu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten, und n für die folgende Untersuchung jede positive ganze Zahl vorstellen darf; sei ferner ein Integral

$$\int F(x, y)\,dx$$

vorausgesetzt, das sich durch eine algebraische Transformation auf elliptische und hyperelliptische Integrale reduciren lässt, so dass

$$(\alpha)\quad F(x,y)\,dx = F_1\left(z_1, \sqrt{R_{2p_1+1}(z_1)}\right)dz_1 + F_2\left(z_2, \sqrt{R_{2p_2+1}(z_2)}\right)dz_2 + \cdots$$
$$+ F_\nu\left(z_\nu, \sqrt{R_{2p_\nu+1}(z_\nu)}\right)dz_\nu + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots$$
$$+ A_\varrho \log v_\varrho$$

wird, worin

$$R_{2p_1+1}(z),\quad R_{2p_2+1}(z),\ \cdots\ R_{2p_\nu+1}(z)$$

ganze Functionen von z von dem Grade bedeuten, den der Index angiebt,

$$z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_\nu,\quad u,\ v_1,\ v_2,\ \cdots\ v_\varrho$$

algebraische Functionen von x, und $A_1, A_2, \cdots A$ Constanten vorstellen.

Mit Hülfe ähnlicher Schlüsse, wie ich sie in meinen „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale“ für die Behandlung des Transformationsproblems gemacht, kann leicht gezeigt werden, dass *dann jedenfalls auch eine Beziehung von der Form existirt*

$$\delta \cdot F(x,y)\,dx = \sum_1^{p_1}{}^{\alpha} F_1\left(\zeta_\alpha^{(1)}, \sqrt{R_{2p_1+1}(\zeta_\alpha^{(1)})}\right)d\zeta_\alpha^{(1)}$$
$$+ \sum_1^{p_2}{}^{\alpha} F_2\left(\zeta_\alpha^{(2)}, \sqrt{R_{2p_2+1}(\zeta_\alpha^{(2)})}\right)d\zeta_\alpha^{(2)} + \cdots$$
$$+ \sum_1^{p_\nu}{}^{\alpha} F_\nu\left(\zeta_\alpha^{(\nu)}, \sqrt{R_{2p_\nu+1}(\zeta_\alpha^{(\nu)})}\right)d\zeta_\alpha^{(\nu)}$$
$$+ M + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\sigma \log V_\sigma,$$

worin δ eine positive ganze Zahl, die Grössen

$$\zeta_1^{(r)},\ \zeta_2^{(r)},\ \cdots\ \zeta_{p_r}^{(r)}$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung p_r^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus x und y zusammengesetzt sind, die Irrationalitäten

$$\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_1^{(r)})},\quad \sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_2^{(r)})},\ \cdots \sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_{p_r}^{(r)})}$$

mit Hülfe eben dieser Grössen x und y durch die resp. Grössen $\zeta^{(r)}$ rational ausdrückbar sind, endlich die Grössen

$$U,\ V_1,\ V_2,\ \cdots\ V_\sigma$$

rationale Functionen von x und y bedeuten.

Und endlich wird ebenso, wie für die Transformation der hyperelliptischen Integrale hergeleitet worden, folgen — alle diese Sätze gelten ganz allgemein für die Transformation Abel'scher Integrale irgend eines Geschlechtes auf Abel'sche Integrale desselben oder eines andern Geschlechtes —, *dass für die Integrale erster Gattung*

$$\frac{\zeta_1^{(r)^k}\,d\zeta_1^{(r)}}{\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_1^{(r)})}}+\frac{\zeta_2^{(r)^k}\,d\zeta_2^{(r)}}{\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_2^{(r)})}}+\cdots+\frac{\zeta_{p_r}^{(r)^k}\,d\zeta_{p_r}^{(r)}}{\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_{p_r}^{(r)})}}=F_1(x,y)\,dx$$

ist, worin k irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots p_r - 1$ bedeutet und $F_1(x, y)\,dx$ ein Abel'sches Differential erster Gattung vorstellt, welches der obigen Annahme gemäss die Form haben wird

$$(\beta)\qquad \left(Q_0+Q_1p^{\frac{1}{n}}+Q_2p^{\frac{2}{n}}+\cdots+Q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}\right)dx.$$

Es ist somit das ursprüngliche Problem wieder auf die Behandlung des Reductionsproblems der Integrale erster Gattung zurückgeführt, indem gezeigt worden, dass *jedenfalls zur Gleichung $f(x, y) = 0$ gehörige Integrale erster Gattung existiren müssen, welche auf je ein zu jedem hyperelliptischen Integrale der rechten Seite von (α) gehöriges System gleichartiger hyperelliptischer Integrale erster Gattung reducirbar sind oder auf je ein elliptisches Integral erster Gattung von den in der Gleichung (α) befindlichen elliptischen Integralen.*

Von den Integralen erster Gattung der Form (β) wollen wir für jetzt nur die Fundamentalintegrale einer näheren Untersuchung unterwerfen und als solche die in den Formen

$$\int Q_0\,dx,\quad \int Q_1p^{\frac{1}{n}}\,dx,\quad \cdots \int Q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}\,dx$$

enthaltenen definiren; es seien die *nothwendigen und hinreichenden Bedingungen* dafür aufzustellen, dass ein Fundamentalintegral erster Gattung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}\,dx,$$

worin ϱ und n relativ prim sind, auf *ein* elliptisches Integral erster Gattung zurückgeführt werden kann, wobei wieder nach dem oben angeführten, allgemein gültigen Satze angenommen werden darf, dass die Gleichung

$$(1)\qquad \int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}\,dx=\int\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

so befriedigt werden kann, dass z und $\sqrt{\varphi(z)}$ rationale Functionen von x und $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}$ sind.

Ich könnte nun auf die aus der Theorie der complexen Multiplication hergeleiteten Resultate meiner oben erwähnten Arbeit mich stützend, unmittelbar schliessen, dass n nur die Werthe 2, 3, 4, 6 haben kann, ziehe es jedoch vor an dieser Stelle jenes Resultat noch einmal in einer etwas veränderten Form abzuleiten, wie es für den Uebergang zur Reduction auf hyperelliptische Integrale sich als nothwendig erweisen wird.

Lässt man nämlich die Variable x einen geschlossenen Umkreis von der Art beschreiben, dass $p^{\frac{\varrho}{n}}$ in den Werth $\alpha p^{\frac{\varrho}{n}}$ übergeht, worin

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

ist, und gehe vermöge des vorausgesetzten rationalen Zusammenhanges

$$z \text{ in } \zeta, \quad \sqrt{\varphi(z)} \text{ in } \sqrt{\varphi(\zeta)}$$

über, so wird sich die Beziehung ergeben

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}} = \alpha \cdot \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \tag{2}$$

für welche z und ζ durch eine algebraische Gleichung mit einander verbunden sind. Setzt man die Polynome $\varphi(z)$ und $\varphi(\zeta)$ in der Legendre'schen Normalform voraus — was nur der Kürze halber wegen der folgenden Einführung des ϑ-Moduls geschieht —, so liefert bekanntlich die Bedingung der algebraischen Beziehung zwischen z und ζ für die Perioden des elliptischen Integrales die Relationen

$$m\omega = \alpha r\,\omega + \alpha s\,\omega',$$
$$m\omega' = \alpha r'\omega + \alpha s'\omega',$$

worin m, r, s, r', s' positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, oder

$$\begin{vmatrix} \alpha r - m & \alpha s \\ \alpha r' & \alpha s' - m \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. *es muss α die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein.* Nun kann aber $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ nur die Lösung einer quadratischen ganzzahligen Gleichung sein, wenn $n = 2, 3, 4, 6$ ist, und diese Gleichungen lauten, wenn der Fall $n = 2$ ausgeschlossen wird,

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \quad \alpha^2 + 1 = 0, \quad \alpha^2 - \alpha + 1 = 0;$$

daraus ist aber auch die Form der zugehörigen Moduln der ϑ-Functionen sofort zu erkennen, denn aus den oben aufgestellten Periodenbeziehungen folgt durch Elimination von α, wenn $\frac{2\omega'}{\omega} = \tau$ gesetzt wird, die quadratische Gleichung

$$s \cdot \tau^2 + 2(r - s') \cdot \tau - 4r' = 0$$

also

$$\tau = -\frac{r-s'}{s} + \frac{1}{s}\sqrt{(r-s')^2 + 4r's} = -\frac{r-s'}{s} + \frac{1}{s}\sqrt{(r+s')^2 - 4(r's - rs')},$$

und da vermöge der obigen Bestimmungsgleichungen für α die drei Relationen zwischen den Transformationscoefficienten gelten müssen

$$\frac{m(r+s')}{rs'-r's} = -1, 0, 1, \qquad \frac{m^2}{rs'-r's} = 1,$$

so folgt leicht, dass die ϑ-Moduln in den drei in Frage kommenden Fällen die beiden verschiedenen Formen haben werden

$$\tau = -\frac{r-s'}{s} + \frac{m}{s}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad \tau = -\frac{2r}{s} + \frac{2m}{s}\sqrt{-1}.$$

Beachtet man ferner, dass, wenn zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}} = \alpha\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta_1}{\sqrt{\varphi_1(\zeta_1)}} = \alpha\frac{dz_1}{\sqrt{\varphi_1(z_1)}}$$

zu gleicher Zeit bestehen, die entsprechenden Periodenbeziehungen

$$m\omega = \alpha r\omega + \alpha s\omega', \qquad m_1\omega_1 = \alpha r_1\omega_1 + \alpha s_1\omega_1'$$

zwischen den ϑ-Moduln

$$\frac{2\omega'}{\omega} = \tau, \quad \frac{2\omega_1'}{\omega_1} = \tau_1$$

die Beziehung liefern

$$\tau_1 = \frac{m_1 s\tau + 2(rm_1 - r_1 m)}{ms_1},$$

und jeder linearen Beziehung zwischen ϑ-Moduln auch wirklich eine algebraische Transformation entspricht, so wird immer, wenn überhaupt eine Reduction auf elliptische Integrale möglich, diese Reduction auch auf die Integrale

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \int\frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}, \int\frac{dz}{\sqrt{z^6-1}} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^3-1)}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

ausführbar sein, und es folgt somit der Satz,

dass wenn ein Abel'sches Fundamentalintegral erster Gattung von der Form

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}\,dx$$

auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, dies nur für $n=2,3,4,6$ *der Fall sein kann, und zwar werden für* $n=3,4,6$ *die beiden einzigen Formen der reducirten elliptischen Integrale*

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^3-1}} \quad \text{und} \quad \int\frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

sein.

Es wird sich jetzt darum handeln, die Form aller jener reducirbaren Abel'schen Integrale festzustellen und die Transformationen anzugeben, welche diese Reduction leisten — eine Aufgabe, die vollständig gelöst werden soll für den Fall, dass Q_ϱ und p algebraische

Functionen 0^{ter} Ordnung sind oder dass die zu untersuchenden Abel'schen Integrale von der Form sind

$$\int \psi(x)\,(\sqrt[n]{R(x)})^{\varrho}\,dx.$$

Legen wir zuerst die Reductionsgleichung

$$(3) \qquad \int Q_1 p^{\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

unserer Betrachtung zu Grunde, aus welcher eine Bedingung für das Polynom $\varphi(z)$ sich aus der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen nicht ergiebt, und lässt man x einen geschlossenen Weg von der Art beschreiben, dass $p^{\frac{1}{2}}$ den entgegengesetzten Werth annimmt, während z und $\sqrt{\varphi(z)}$ in ζ und $\sqrt{\varphi(\zeta)}$ übergehen, so erhält man

$$2\int Q_1 p^{\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} - \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}}$$

und daher, wenn

$$\varphi(z) = (1-z^2)(1-k^2 z^2)$$

gesetzt wird,

$$(4) \qquad 2\int Q_1 p^{\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{\varphi(Z)}},$$

worin bekanntlich Z sich als das Product einer in x und $Q_1^2 p$ rationalen Function in $Q_1 p^{\frac{1}{2}}$ darstellt, während $\sqrt{\varphi(Z)}$ eine rationale Function von x und $Q_1^2 p$ bedeutet. Es ist aber auch leicht zu sehen, dass, wenn

$$(5) \qquad Z = f_1(x, Q_1^2 p)\, Q_1 p^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\varphi(Z)} = f_2(x, Q_1^2 p)$$

ist, wegen

$$dZ = \left[\frac{d f_1(x, Q_1^2 p)}{dx} + \frac{1}{2}\,\frac{f_1(x, Q_1^2 p)\,\frac{d(Q_1^2 p)}{dx}}{Q_1^2 p} \right] Q_1 p^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{dZ}{\sqrt{\varphi(Z)}} = F(x)\, Q_1 p^{\frac{1}{2}}\,dx$$

wird, worin $F(x)$ eine algebraische Function μ^{ter} Ordnung bedeutet, sich also ein auf elliptische Integrale reducirbares Abel'sches Integral der betrachteten Art ergiebt. Es ist die Untersuchung somit auf die Erfüllung der Gleichungen (5) zurückgeführt, oder darauf, dass

$$\sqrt{(1 - f_1(x, Q_1^2 p)^2 Q_1^2 p)\,(1 - k^2 f_1(x, Q_1^2 p)^2 Q_1^2 p)}$$

sich als rationale Function von x und $Q_1^2 p$ darstellen lässt.

Betrachten wir den speciellen Fall, dass $Q_1^2 p$ eine algebraische

Function 0^{ter} Ordnung, also eine rationale Function ist, so würde eine Function

$$Z = f(x)\sqrt{R(x)},$$

worin $f(x)$ eine rationale Function und $R(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, so zu bestimmen sein, dass

$$\sqrt{[1 - f^2(x)\,R(x)]\,[1 - k^2 f^2(x)\,R(x)]},$$

worin die Constanten in $f(x)$, in $R(x)$ und k selbst passend zu wählen sind, eine rationale Function von x wird, oder *es werden jene unbestimmten Coefficienten der Bedingung genügen müssen, dass*

$$(1 - f^2(x)\,R(x))\,(1 - k^2 f^2(x)\,R(x))$$

nur Doppelfactoren besitzt; alle diese und nur diese Fälle werden die auf je ein elliptisches Integral reducirbaren hyperelliptischen Integrale erster Gattung liefern; zugleich ist mit diesen Integralen die Substitution gefunden, welche sie in die elliptischen Integrale überführt.

Wie das Problem für den oben zu Grunde gelegten Fall der algebraischen Function μ^{ter} Ordnung weiter zu behandeln ist, soll hier nicht näher erörtert werden; ich gebe die dabei in Anwendung kommenden Betrachtungsweisen in einer im 3^{ten} Hefte des 87^{ten} Bandes des Borchardt'schen Journals demnächst erscheinenden Arbeit über die „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips" ausführlich an, in welcher die Unmöglichkeit der algebraischen Transformation für Abel'sche Integrale, deren $p > 2$ ist, nachgewiesen wird, eine Untersuchung, die mit dem Gegenstande der vorliegenden Arbeit in engem Zusammenhange steht.

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der Gleichung

$$\int Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}} \tag{6}$$

über, in welcher ϱ die Werthe 1 oder 2 annehmen darf und z sowie $\sqrt{z^3 - 1}$ wiederum als rationale Functionen von x und $Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}$ betrachtet werden dürfen. Dies Problem lässt eine bedeutende und für das Nachfolgende sehr wesentliche Vereinfachung zu.

Aus (6) gehen nämlich, wenn x geschlossene Wege durchläuft, welche, wenn $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gesetzt wird, $p^{\frac{1}{3}}$ successive in $\alpha p^{\frac{1}{3}}$ und $\alpha^2 p^{\frac{1}{3}}$ überführen, die Beziehungen hervor

$$Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^3 - 1}}, \quad \alpha\, Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^3 - 1}}, \quad \alpha^{2\varrho}\, Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^3 - 1}}, \tag{7}$$

in welchen

$$(8)\quad\begin{cases} z_1 = f\left(x,\ \ Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), & \sqrt{z_1^3-1} = F\left(x,\ \ Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), \\ z_2 = f\left(x, \alpha^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), & \sqrt{z_2^3-1} = F\left(x, \alpha^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), \\ z_3 = f\left(x, \alpha^{2\varrho} Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), & \sqrt{z_3^3-1} = F\left(x, \alpha^{2\varrho} Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right) \end{cases}$$

ist, worin f und F rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen und zwar in den drei Gleichungssystemen dieselben bedeuten.

Nun folgt aber aus (7) durch Addition der drei mit $1, \alpha^{-\varrho}, \alpha^{-2\varrho}$ multiplicirten Gleichungen

$$(9)\qquad 3 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^3-1}} + \alpha^{-\varrho}\frac{dz_2}{\sqrt{z_2^3-1}} + \alpha^{-2\varrho}\frac{dz_3}{\sqrt{z_3^3-1}},$$

und vermöge der mit Hilfe der Substitutionen

$$z_1 = Z_1, \quad z_2 = \alpha^\varrho Z_2, \quad z_3 = \alpha^{2\varrho} Z_3$$

hergeleiteten complexen Multiplicationsgleichungen

$$\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^3-1}} = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^3-1}}, \quad \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^3-1}} = \frac{\alpha^\varrho dZ_2}{\sqrt{Z_2^3-1}}, \quad \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^3-1}} = \frac{\alpha^{2\varrho} dZ_3}{\sqrt{Z_3^3-1}}$$

die Beziehung

$$(10)\qquad 3 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^3-1}} + \frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^3-1}} + \frac{dZ_3}{\sqrt{Z_3^3-1}},$$

worin, wenn der Kürze halber $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}} = y$ gesetzt wird, den Gleichungen (8) zufolge

$$(11)\quad\begin{cases} Z_1 = f(x, y) \quad , & \sqrt{Z_1^3-1} = F(x, y) \quad , \\ Z_2 = \alpha^{2\varrho} f(x,\ \alpha^\varrho y), & \sqrt{Z_2^3-1} = F(x,\ \alpha^\varrho y), \\ Z_3 = \alpha^\varrho f(x, \alpha^{2\varrho} y), & \sqrt{Z_3^3-1} = F(x,\ \alpha^{2\varrho} y), \end{cases}$$

sein wird.

Setzen wir nun zur Addition der drei elliptischen Integrale der Gleichung (10) nach dem Abel'schen Theorem

$$(12)\qquad a_2 z^2 + a_1 z + a_0 - b\sqrt{z^3-1} = 0,$$

welcher Gleichung die drei Werthe Z_1, Z_2, Z_3 mit den zugehörigen Irrationalitäten genügen sollen, so folgen nach (11), wie man leicht sieht, für die Constanten a_0, a_1, a_2, b die drei Bestimmungsgleichungen

$$(12)\begin{cases} a_2(P_2+Q_2y+R_2y^2)+a_1(P_1+Q_1y+R_1y^2) \\ \qquad\qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}y+\mathfrak{R}y^2)=0, \\ a_2\alpha^\varrho(P_2+\alpha^\varrho Q_2y+\alpha^{2\varrho}R_2y^2)+a_1\alpha^{2\varrho}(P_1+\alpha^\varrho Q_1y+\alpha^{2\varrho}R_1y^2) \\ \qquad\qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\alpha^\varrho\mathfrak{Q}y+\alpha^{2\varrho}\mathfrak{R}y^2)=0, \\ a_2\alpha^{2\varrho}(P_2+\alpha^{2\varrho}Q_2y+\alpha^\varrho R_2y^2)+a_1\alpha^\varrho(P_1+\alpha^{2\varrho}Q_1y+\alpha^\varrho R_1y^2) \\ \qquad\qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\alpha^{2\varrho}\mathfrak{Q}y+\alpha^\varrho\mathfrak{R}y^2)=0, \end{cases}$$

worin die Grössen

$$P_2,\ Q_2,\ R_2,\ P_1,\ Q_1,\ R_1\ ,\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{Q}_1,\ \mathfrak{R}_1$$

rationale Functionen von x und $y^3 = Q_\varrho{}^3 p^\varrho$ sind.

Multiplicirt man nun das Gleichungssystem (12) der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1; \\ 1 & \alpha^\varrho & \alpha^{2\varrho}, \\ 1 & \alpha^{2\varrho} & \alpha^\varrho, \end{matrix}$$

und addirt je drei Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} a_2R_2y^2+a_1Q_1y+a_0\cdot 1-b\mathfrak{P} &= 0, \\ a_2Q_2y^2+a_1P_1+a_0\cdot 0-b\mathfrak{R}y^2 &= 0, \\ a_2P_2+a_1R_1y^2+a_0\cdot 0-b\mathfrak{Q}y &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus wiederum durch Multiplication der drei Gleichungen mit $1, y, y^2$, wenn ausserdem die eine Constante $a_2 = 1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} a_1\cdot L_1y+a_0\cdot 1-b\cdot M_1 &= N_1y^2, \\ a_1\cdot L_2y+a_0\cdot 0-b\cdot M_2 &= N_2y^2, \\ a_1\cdot L_3y+a_0\cdot 0-b\cdot M_3 &= N_3y^2, \end{aligned}$$

worin

$$L_1;\ L_2,\ L_3,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ N_1,\ N_2,\ N_3$$

wiederum rationale Functionen von x und $y^3 = Q_\varrho{}^3p^\varrho$ sind. Somit wird also, wenn U, V, W den Charakter ebensolcher Functionen haben,

$$(13)\qquad a_1 = U\cdot y,\quad a_0 = V\cdot y^2,\quad b = W\cdot y^2$$

sein und sich daher vermöge der Gleichung

$$(z^2+a_1z+a_0)^2-b^2(z^3-1) = (z-Z_1)(z-Z_2)(z-Z_3)(z-Z),$$

aus welcher für $z = 0$

$$a_0{}^2+b^2 = Z_1Z_2Z_3Z$$

hervorgeht, nach (11) und vermöge des Umstandes, dass

$$Z_1Z_2Z_3 = f(x,y)\cdot f(x,\alpha^\varrho y)\,f(x,\alpha^{2\varrho}y)$$

sich als rationale symmetrische Function von y, $\alpha^\varrho y$, $\alpha^{2\varrho}y$ rational durch x und y^3 ausdrücken lässt, die Bestimmungsgleichung

$$(14)\qquad Z = T\cdot y$$

ergeben, worin T eine rationale Function von x und $Q_\varrho{}^3 p^\varrho$ bedeutet, und Z der Gleichung genügt

$$\frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^3-1}}+\frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^3-1}}+\frac{dZ_3}{\sqrt{Z_3^3-1}}=\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}.$$

Zugleich folgt aus der Gleichung (12) die zu Z gehörige Irrationalität in der Form

$$\sqrt{Z^3-1}=\frac{Z^2+a_1Z+a_0}{b}$$

oder nach (13)

$$\sqrt{Z^3-1}=\frac{T^2+TU+V}{W}=T_1$$

eine rationale Function von x und $Q_\varrho{}^3 p^\varrho$.

Wir erhalten somit den Satz, dass, *wenn ein Abel'sches Integral von der Form* $\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\,dx$ *auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, die Reductionsgleichung*

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\,dx=\int\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}$$

lauten muss, in welcher

$$Z=T\cdot Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\quad\text{und}\quad\sqrt{Z^3-1}=T_1$$

sind, wenn T und T_1 rationale Functionen von x und $Q_\varrho{}^3 p^\varrho$ bedeuten.

Betrachten wir jetzt wieder den Fall, in welchem Q_ϱ und p rationale Functionen von x bedeuten, so dass es sich um die Gleichung

$$\int\psi(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx=\int\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}} \tag{15}$$

handelt, worin, wie eben gezeigt worden,

$$Z=f(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho,\quad\sqrt{Z^3-1}=F(x) \tag{16}$$

sein muss, wenn $f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen, $R(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, und suchen wir nunmehr alle möglichen Formen von $\psi(x)$ und $R(x)$ anzugeben, für welche eine Reduction auf ein elliptisches Integral möglich ist. Da nun aus (16)

$$dZ=\left(\frac{\varrho}{3}f(x)\frac{R'(x)}{R(x)}+f'(x)\right)(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx,$$

also

$$\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}=\frac{\frac{\varrho}{3}f(x)R'(x)+f'(x)R(x)}{R(x)\,F(x)}\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx \tag{17}$$

folgt, die Existenz der Gleichungen (16) somit immer eine solche Reductionsformel für die betrachtete Gattung Abel'scher Integrale nach sich zieht, so wird das Problem jetzt darauf reducirt sein, Z der ersten der Gleichungen (16) gemäss so zu bestimmen, dass $\sqrt{Z^3-1}$ eine rationale Function von x wird, oder $f(x)$ *und* $R(x)$ *so zu wählen, dass*

$$\sqrt{f(x)^3\,R(x)^\varrho-1}$$

rational in x *ausdrückbar ist; sind die Constanten in* $f(x)$ *und* $R(x)$ *so bestimmt, dass der Ausdruck unter der Wurzel nur Doppelfactoren besitzt, so liefert für das nach Gleichung* (17) *hergestellte Abel'sche Integral die erste der Gleichungen* (16) *die zugehörige Transformation, und sämmtliche Abel'schen Integrale dieser Form, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, werden durch den Ausdruck dargestellt*

$$\int\frac{\frac{\varrho}{3}\,f(x)R'(x)+f'(x)R(x)}{R(x)\sqrt{f(x)^3R(x)^\varrho-1}}\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx.$$

Man findet leicht durch Abzählung der in $f(x)$ und $R(x)$ enthaltenen Constanten und Zusammenstellung dieser Zahl mit der Anzahl der durch die Existenz der Doppelfactoren geforderten Bedingungsgleichungen, dass nur wenn $R(x)$ vom dritten oder einem niedrigeren Grade ist, die Reduction auf elliptische Integrale stets möglich wird, dass jedoch, wenn der Grad dieses Polynoms grösser als 3 ist, zwischen den Coefficienten desselben gewisse Bedingungen stattfinden müssen, welche durch die obige Methode unmittelbar gegeben werden.

Genau dieselbe Entwickelung liefert für die Existenz der Gleichung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{6}}\,dx=\int\frac{dZ}{\sqrt{Z(Z^3-1)}}$$

die Beziehungen

$$Z=T\cdot y^2,\qquad \sqrt{Z(Z^3-1)}=U\cdot y,$$

wenn $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{6}}=y$ gesetzt wird und T und U rationale Functionen von x und $y^6=Q_\varrho{}^6p^\varrho$ bedeuten. Sind wieder Q_ϱ und p rationale Functionen, so folgen für die Gleichung

$$\int\psi(x)(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx=\int\frac{dZ}{\sqrt{Z(Z^3-1)}}\tag{18}$$

die nothwendigen Beziehungen

$$Z=f(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho \text{ und } \sqrt{Z(Z^3-1)}=F(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho,\tag{19}$$

in welchen $f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen von x sind. Da aber aus (19) wiederum

$$\frac{dZ}{\sqrt{Z(Z^3-1)}}=\frac{\frac{\varrho}{3}\,f(x)R'(x)-f'(x)R(x)}{R(x)\,F(x)}\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx$$

folgt, so wird man zur Auffindung *aller* zur 6ten Wurzel gehörigen Abel'schen Fundamentalintegrale erster Gattung der obigen Art, nur *die rationale Function $f(x)$ und die ganze Function $R(x)$ so zu bestimmen brauchen, dass*

$$f(x)\,[f(x)^3 R(x)^\varrho - 1]$$

ein vollständiges Quadrat wird; man erhält dann alle Integrale mit den zugehörigen Substitutionen.

Gehen wir endlich zur Untersuchung der Gleichung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

über, für welche die Untersuchung theils der Einfachheit wegen theils aber auch wegen der weiteren Reductionsfragen auf hyperelliptische Integrale in etwas veränderter Form geführt werden soll.

Genau in der früheren Weise erhält man aus den 4 Gleichungen

$$Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^4-1}},\quad i^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^4-1}},\quad -Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^4-1}},$$

$$-i^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \frac{dz_4}{\sqrt{z_4^4-1}}$$

die Beziehung

$$(20)\qquad 4 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^4-1}} + i^{-\varrho}\frac{dz_2}{\sqrt{z_2^4-1}} - \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^4-1}} - i^{-\varrho}\frac{dz_4}{\sqrt{z_4^4-1}},$$

worin, wenn zur Abkürzung $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}} = y$ gesetzt wird,

$$(21)\qquad \begin{cases} z_1 = f(x, y) & \sqrt{z_1^4-1} = F(x, y), \\ z_2 = f(x, i^\varrho y) & \sqrt{z_2^4-1} = F(x, i^\varrho y), \\ z_3 = f(x, -y) & \sqrt{z_3^4-1} = F(x, -y), \\ z_4 = f(x, -i^\varrho y) & \sqrt{z_4^4-1} = F(x, -i^\varrho y) \end{cases}$$

ist.

Bildet man nun

$$\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^4-1}} - \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^4-1}} = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4-1}}$$

nach dem Abel'schen Theorem, indem wir

$$(z-1)\,(a_1 z + a_0) - b\sqrt{z^4-1} = 0$$

setzen, so findet man leicht mit Berücksichtigung der Gleichungen (21) genau in der früher angegebenen Weise, wenn U und V rationale Functionen von x und $Q_\varrho^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$ bedeuten, für die Coefficienten die Bestimmungen

$$a_0 = 1, \quad a_1 = U, \quad b = V \cdot y,$$

sodass aus der Gleichung

$$(z-1)^2 (a_1 z + 1)^2 - b^2 (z^4 - 1) = (z-1)(z-z_1)(z-z_3)(z-Z_1)$$

für $z = 0$

$$Z_1 = \frac{1-b^2}{z_1 z_3} = T$$

folgt, während sich

$$\sqrt{Z_1^4 - 1} = \frac{(Z_1 - 1)(a_1 Z_1 + 1)}{b} = T_1 \cdot y$$

ergiebt, worin wieder T und T_1 rationale Functionen von x und $y^2 = Q_\varrho^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$ bedeuten.

Genau ebenso wird offenbar

$$\frac{dz_2}{\sqrt{z_2^4 - 1}} - \frac{dz_4}{\sqrt{z_4^4 - 1}} = \frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^4 - 1}}$$

folgen, worin die Werthe von Z_2 und $\sqrt{Z_2^4 - 1}$ aus den früheren hervorgehen, wenn nur $i^\varrho y$ an die Stelle von y gesetzt wird, und sich daher

$$Z_2 = T', \quad \sqrt{Z_2^4 - 1} = i^\varrho T_1' y$$

ergiebt, wenn T' und T_1' die entsprechenden rationalen Functionen von x und $-y^2 = -Q_\varrho^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$ sind.

Aus der Gleichung (20) folgt aber

$$4 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}} dx = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4 - 1}} + i^{-\varrho} \frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^4 - 1}}$$

oder, wenn

$$Z_2 = i_\varrho Z_1'$$

gesetzt wird,

$$4 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}} dz = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4 - 1}} + \frac{dZ_1'}{\sqrt{Z_1'^4 - 1}},$$

worin

$$Z_1 = \quad T = t + uy^2, \qquad \sqrt{Z_1^4 - 1} = \ T_1 y = y(t_1 + u_1 y^2),$$

$$Z_1' = i^{-\varrho} T' = i^{-\varrho}(t - uy^2), \quad \sqrt{Z_1'^4 - 1} = i^\varrho T_1' y = i^\varrho y (t_1 - u_1 y^2)$$

und t, u, t_1, u_1 rationale Functionen von x und $y^4 = Q_\varrho^4 p^\varrho$ sind.

Setzt man aber

$$\frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4 - 1}} + \frac{dZ_1'}{\sqrt{Z_1'^4 - 1}} = \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}},$$

so ist nach dem Additionstheorem

$$Z = \frac{Z_1 \sqrt{Z_1'^4 - 1} + Z_1' \sqrt{Z_1^4 - 1}}{1 + Z_1^2 Z_1'^2}$$

oder wie unmittelbar zu sehen,

$$Z = L \cdot y^3$$

und ebenso

$$\sqrt{Z^4 - 1} = M \cdot y^2,$$

worin L und M rationale Functionen von x und $y^4 = Q_3{}^4 p^\varrho$ bedeuten.

Wir sehen somit, dass, wenn ein Abel'sches Fundamentalintegral erster Gattung der betrachteten Art auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, die Transformationsgleichung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}}$$

lauten muss, worin

$$Z = L \cdot Q_\varrho{}^3 p^{\frac{3\varrho}{4}}, \quad \sqrt{Z^4 - 1} = M Q_\varrho{}^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$$

ist, und L und M rationale Functionen von x und $Q_\varrho{}^4 p^\varrho$ bedeuten.

Aber es lässt sich noch eine weitere Transformation mit dieser Beziehung vornehmen; setzt man nämlich $-p^{\frac{1}{4}}$ statt $p^{\frac{1}{4}}$, so erhält man

$$-\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dZ'}{\sqrt{Z'^4 - 1}}$$

worin

$$Z' = -L Q_\varrho{}^3 p^{\frac{3\varrho}{4}}, \quad \sqrt{Z'^4 - 1} = M Q_\varrho{}^2 p^{\frac{\varrho}{2}},$$

und durch Subtraction der beiden Integralgleichungen nach dem Additionstheorem

$$2\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^4 - 1}},$$

worin, wie leicht zu entwickeln,

$$\zeta = U \cdot Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}, \quad \sqrt{\zeta^4 - 1} = V$$

wird, und U und V rationale Functionen von x und $Q_\varrho{}^4 p^\varrho$ bedeuten.

Führen wir somit die früher gebrauchten Bezeichnungen wieder ein, so *ergiebt sich für die als nothwendig erkannte Gestalt der Reductionsformel*

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}}$$

die Beziehung

$$Z = T \cdot Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}, \quad \sqrt{Z^4 - 1} = T_1,$$

worin T und T_1 rational aus x und $Q_\varrho{}^4 p^\varrho$ zusammengesetzt sind.

Sind jetzt wiederum Q_ϱ und p rationale Functionen von x, handelt es sich also um die Beziehung

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[4]{R(x)})^\varrho\, dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}},$$

in welcher

$$Z = f(x)\,(\sqrt[4]{R(x)})^{\varrho}, \quad \sqrt{Z^4 - 1} = F(x),$$

und $f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, so folgt wieder unmittelbar, dass, weil aus diesen letzten Bestimmungsgleichungen

$$\frac{dZ}{\sqrt{Z^4-1}} = \frac{\frac{\varrho}{4} f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x) F(x)} (\sqrt[4]{R(x)})^{\varrho}\, dx$$

sich ergiebt, *alle jene reducirbaren Fundamentalintegrale erhalten werden, wenn man die in*

$$f(x)^4 R(x)^{\varrho} - 1$$

enthaltenen Constanten so bestimmt, dass dieses Polynom nur Doppelfactoren enthält.

Somit wäre die Frage nach den auf je ein elliptisches Integral reducirbaren Fundamentalintegralen erster Gattung der obigen Art vollständig beantwortet, da die Form derselben und die Transformationen selbst festgestellt worden sind.

Gehen wir noch in Kurzem auf die Frage der Reduction der Abel'schen Integrale erster Gattung von der Form

$$\int \psi(x)\,(\sqrt[n]{R(x)})^r\, dx$$

auf hyperelliptische Integrale derselben Gattung näher ein — es handelte sich, wie gezeigt worden, stets nur um das Transformationsproblem der Integrale *erster Gattung* — so wird die zu untersuchende Gleichung nach den am Anfange dieser Arbeit gemachten Auseinandersetzungen folgendermassen lauten

$$(22)\quad \int \psi(x)(\sqrt[n]{R(x)})^r dx = \int \frac{f(z_1)\,dz_1}{\sqrt{\varphi(z_1)}} + \int \frac{f(z_2)\,dz_2}{\sqrt{\varphi(z_2)}} + \cdots + \int \frac{f(z_p)\,dz_p}{\sqrt{\varphi(z_p)}},$$

worin $f(z)$ eine ganze Function höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, $\varphi(z)$ ein ganzes Polynom vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, und

$$z_1,\ z_2,\ \cdots z_p$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(23)\qquad z^p + f_1\left(x, (\sqrt[n]{R(x)})^r\right) z^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, (\sqrt[n]{R(x)})^r\right) = 0$$

sind, deren Coefficienten rational in x und $(\sqrt[n]{R(x)})^r$ ausgedrückt sind, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind

$$(23\text{a})\qquad \sqrt{\varphi(z_r)} = F\left(z_r,\ x, (\sqrt[n]{R(x)})^r\right),$$

in der F eine rationale Function bedeutet.

Nimmt man r wiederum relativ prim zu n an, und lässt x einen geschlossenen Umkreis derart beschreiben, dass $(\sqrt[n]{R(x)})^r$ in

$$e^{\frac{2\pi i}{n}}(\sqrt[n]{R(x)})^r = \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r$$

übergeht — die Wahl grade dieses Umkreises geschieht nur der Kürze der Darstellung halber — so mögen

$$z_1, z_2, \cdots z_p, \sqrt{\varphi(z_1)}, \sqrt{\varphi(z_2)}, \cdots \sqrt{\varphi(z_p)}$$

in

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_p, \sqrt{\varphi(\zeta_1)}, \sqrt{\varphi(\zeta_2)}, \cdots \sqrt{\varphi(\zeta_p)}$$

übergehen, und wir erhalten die Beziehung

$$(24) \quad \alpha\int\psi(x)(\sqrt[n]{R(x)})^r dx = \int\frac{f(\zeta_1)d\zeta_1}{\sqrt{\varphi(\zeta_1)}} + \int\frac{f(\zeta_2)d\zeta_2}{\sqrt{\varphi(\zeta_2)}} + \cdots + \int\frac{f(\zeta_p)d\zeta_p}{\sqrt{\varphi(\zeta_p)}},$$

welche mit (22) verbunden die Gleichung

$$(25) \qquad \sum_1^p{}_r\int\frac{f(\zeta_r)d\zeta_r}{\sqrt{\varphi(\zeta_r)}} = \alpha\sum_1^p{}_r\int\frac{f(z_r)dz_r}{\sqrt{\varphi(z_r)}}$$

liefert, worin $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_p$ die Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(26) \quad \zeta^p + f_1\left(x, \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r\right)\zeta^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r\right) = 0$$

darstellen, während die zugehörigen Irrationalitäten durch den Ausdruck

$$\sqrt{\varphi(\zeta_r)} = F\left(\zeta_r, x, \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r\right)$$

bestimmt sind.

Bezeichnen wir die Periodicitätsmoduln des Integrales erster Gattung an den $2p$ Querschnitten mit

$$\omega_1, \omega_1', \omega_2, \omega_2', \cdots \omega_p, \omega_p'$$

und bemerken, dass vermöge der Gleichungen (23) und (26) ein algebraischer Zusammenhang zwischen z und ζ besteht, so folgt leicht, dass, wenn man in der Gleichung (25) einen der Integrationswege der z-Variablen den ersten Querschnitt einmal schneiden lässt, auf der linken Seite, da die rechte Seite in den Grenzen unverändert geblieben ist und nur um eine additive Constante vermehrt worden, die Grenzen nur in die anderen Lösungen der zwischen z und ζ bestehenden algebraischen Gleichung übergegangen sein können, und dass, weil die Anzahl dieser ζ-Werthe nur eine endliche ist, wir jedenfalls den ersten Querschnitt so oft werden durchschneiden können, bis einmal zwei Werthsysteme der p Grössen ζ einander gleich werden; dann wird auf der linken Seite die der rechts hinzutretenden constanten Grösse, welche ein ganzes Multiplum von ω_1 ist, äquivalente Constante nur von dem Durchschneiden der Querschnitte durch die Integrationswege der linken

Seite herstammen, somit nur ein ganzes Vielfaches der $2p$ Periodicitätsmoduln sein können. Verfährt man ebenso mit jedem der $2p$ Periodicitätsmoduln, so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha m_1 \omega_1 &= a_{11}\omega_1 + b_{11}\omega_1' + a_{12}\omega_2 + b_{12}\omega_2' + \cdots + a_{1p}\omega_p + b_{1p}\omega_p', \\
\alpha m_1'\omega_1' &= a_{11}'\omega_1 + b_{11}'\omega_1' + a_{12}'\omega_2 + b_{12}'\omega_2' + \cdots + a_{1p}'\omega_p + b_{1p}'\omega_p', \\
\alpha m_2 \omega_2 &= a_{21}\omega_1 + b_{21}\omega_1' + a_{22}\omega_2 + b_{22}\omega_2' + \cdots + a_{2p}\omega_p + b_{2p}\omega_p', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha m_p'\omega_p' &= a_{p1}'\omega_1 + b_{p1}'\omega_1' + a_{p2}'\omega_2 + b_{p2}'\omega_2' + \cdots + a_{pp}'\omega_p + b_{pp}'\omega_p',
\end{aligned}$$

und daher die Bestimmungsgleichung für α

$$(27)\qquad \begin{vmatrix}
a_{11}-\alpha m_1 & b_{11} & a_{12} & b_{12} & \cdots & a_{1p} & b_{1p} \\
a_{11}' & b_{11}'-\alpha m_1' & a_{12}' & b_{12}' & \cdots & a_{1p}' & b_{1p}' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
a_{p1}' & b_{p1}' & a_{p2}' & b_{p2}' & \cdots & a_{pp}' & b_{pp}'-\alpha m_p'
\end{vmatrix} = 0.$$

Wir finden somit, *dass, wenn eine Reductionsgleichung von der Form* (22) *möglich sein soll,* $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ *die Lösung einer Gleichung* $2p^{\text{ten}}$ *Grades mit rationalen Coefficienten sein muss* — woraus nach bekannten Principien die Feststellung der möglichen Werthe für die Zahl n hervorgeht.

So wird die Möglichkeit der Reduction auf hyperelliptische Integrale erster Ordnung, für welche $p = 2$ ist, für n die Werthe

$$2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$$

erfordern, und wenn man nur diejenigen hyperelliptischen Integrale complexer Multiplication mit den Multiplicatoren

$$e^{\frac{2\pi i}{5}},\quad e^{\frac{2\pi i}{8}},\quad e^{\frac{2\pi i}{10}},\quad e^{\frac{2\pi i}{12}}$$

in Betracht zieht, welche binomischen Polynomen vom Grade 5, 8, 10, 12 entsprechen, so wird leicht zu sehen sein, dass sie sämmtlich der ersten Ordnung angehören, da von den dieser Ordnung unmittelbar angehörigen Integralen erster Gattung

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{x^5-1}}$$

abgesehen,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^8-1}} &= -\frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^4+1)}} \\
&= \frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{4}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)(2t^2-1)}} \mp \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(2t^2-1)}}\right\}
\end{aligned}$$

vermöge der Substitutionen $x^2 = e^{\frac{\pi i}{4}} y$, $y + \frac{1}{y} = 2t$,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^8-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4-1}} \quad \text{vermöge } x^2 = y,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^8-1}} = -\frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{2}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y^4-1)}}$$

$$= -\frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{2}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)(2t^2-1)}} \pm \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(2t^2-1)}}\right\}$$

vermöge derselben Substitutionen, ferner

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^5-1)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^5}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^5-1}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y^5-1)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^5-1}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = -\frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^6-1)}}$$

$$= \frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2^{\frac{3}{2}}}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3-3t}} \mp \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(4t^3-3t)}}\right\}$$

vermöge der Substitutionen $x^2 = ye^{\frac{\pi i}{6}}$, $y + \frac{1}{y} = 2t$,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^6-1}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \quad \text{vermöge } x^2 = y,\ y^2 = \frac{1}{t},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4-1}}, \quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^6+1)}}$$

$$= \frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2^{\frac{3}{2}}}\left\{\int \frac{dy}{\sqrt{4t^3-3t}} \pm \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(4t^3-3t)}}\right\}.$$

Es sei nun die Aufgabe gestellt, die Abel'schen Fundamentalintegrale erster Gattung von der Form

$$\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx$$

zu ermitteln, welche auf hyperelliptische Integrale mit der Irrationalität

$$\sqrt{x^{2p+1}-1}$$

zurückführbar sind, oder die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der Gleichung

$$(28)\qquad \int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{f(z_1)\,dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+1}-1}} + \int \frac{f(z_2)\,dz_2}{\sqrt{z_2^{2p+1}-1}} + \cdots + \int \frac{f(z_p)\,dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+1}-1}}$$

aufzustellen, in welcher $f(z)$ eine ganze Function höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, während $z_1, z_2, \cdots, z_p$, wie früher gezeigt worden, die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades

$$(29)\qquad z^p + f_1\left(x, \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) z^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) = 0$$

bedeuten, in welcher $f_1, f_2, \cdots, f_p$ rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind, und die zu jenen z-Grössen gehörigen Irrationalitäten durch einen Ausdruck von der Form bestimmt sind

$$(30)\qquad \sqrt{z_\varrho^{2p+1}-1} = F\left(z_\varrho, x, \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right),$$

in welchem F wiederum eine rationale Function vorstellt.

Nehmen wir wieder an, dass r und $2p+1$ relativ prim sind, und lassen x successive geschlossene Umläufe beschreiben, welche $\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r$ resp. in

$$\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r,\quad \alpha\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r,\quad \alpha^2\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r, \cdots, \alpha^{2p}\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r$$

überführen, worin

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{2p+1}}$$

gesetzt ist, bezeichnen wir ferner die der Multiplication der Irrationalität mit α^s entsprechende, aus (29)hergeleitete algebraische Gleichung, deren Lösungen

$$z_{1s},\ z_{2s}, \cdots, z_{ps}$$

sein sollen, mit

$$(31)\qquad z^p + f_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)z^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) = 0,$$

und drücken die zugehörigen Irrationalitäten durch

$$\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1} = F\left(z_{\varrho s}, x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)$$

oder mit Hilfe von Gleichung (31) durch

$$(32)\quad \sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}=\varphi_1\left(x,\,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)z_{\varrho s}^{p-1}$$
$$+\varphi_2\left(x,\,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)z_{\varrho s}^{p-2}+\cdots+\varphi_{p-1}\left(x,\,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)$$

aus, so erhält man die Integralgleichung

$$(33)\quad \alpha^s\int\psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx=\int\frac{f(z_{1s})\,dz_{1s}}{\sqrt{z_{1s}^{2p+1}-1}}$$
$$+\int\frac{f(z_{2s})\,dz_{2s}}{\sqrt{z_{2s}^{2p+1}-1}}+\cdots+\int\frac{f(z_{ps})\,dz_{ps}}{\sqrt{z_{ps}^{2p+1}-1}},$$

und indem man die letzte Gleichung mit α^{-s} multiplicirt und die Summe der so entstehenden Gleichungen für $s=0,1,2,\cdots 2p$ nimmt,

$$(34)\quad (2p+1)\int\psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx=\sum_0^{2p}{}_s\,\alpha^{-s}\sum_1^{p}{}_\varrho\int\frac{f(z_{\varrho s})\,dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}}.$$

Setzt man

$$f(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_{p-1}z^{p-1},$$

so geht (34) in

$$(35)\quad (2p+1)\int\psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx=\sum_0^{p-1}{}_\varkappa A_\varkappa\sum_0^{2p}{}_s\,\alpha^{-s}\sum_1^{p}{}_\varrho\int\frac{z_{\varrho s}^\varkappa\,dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}}$$

über, und mit einer solchen Theilsumme

$$(\mathrm{A}_\varkappa)\qquad \sum_0^{2p}{}_s\,\alpha^{-s}\sum_1^{p}{}_\varrho\int\frac{z_{\varrho s}^\varkappa\,dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}}$$

wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Macht man auf den Ausdruck $(\mathrm{A}_\varkappa)$ die Substitution

$$(36)\qquad z_{\varrho s}=\alpha^{m_s}t_{\varrho s},$$

worin m_s aus der Congruenz bestimmt wird

$$(37)\qquad m_s(\varkappa+1)\equiv s \mod (2p+1),$$

welche, wenn wir $2p+1$ als Primzahl annehmen, wie es für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung der Fall ist, stets auflösbar ist*), so geht $(\mathrm{A}_\varkappa)$ in

---

*) Diese Annahme ist jedoch für das Folgende nicht nothwendig; denn wenn ein Integral der Form

$$\int\frac{z^\varkappa\,dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}}$$

$$(\mathrm{B}_\varkappa) \qquad \sum_0^{2p}{}_s \sum_1^{p}{}_\varrho \int \frac{t_{\varrho s}^\varkappa \, dt_{\varrho s}}{\sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1}-1}}$$

über, und die in diesen Integralen vorkommenden Variabeln und Irrationalitäten genügen nach den Beziehungen (31), (32), (36) den Gleichungen

$$(38) \quad \alpha^{pm_s} t^p + \alpha^{(p-1)m_s} f_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) = 0$$

und

$$(39) \quad \begin{aligned} \sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1}-1} &= \alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{p-1} \\ &+ \alpha^{(p-2)m_s}\varphi_2\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{p-2} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$(40) \quad \sum_0^{2p}{}_s \sum_1^{p}{}_\varrho \int \frac{t_{\varrho s}^\varkappa \, dt_{\varrho s}}{\sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1}-1}} = \int \frac{Z_1^\varkappa \, dZ_1}{\sqrt{Z_1^{2p+1}-1}} + \cdots + \int \frac{Z_p^\varkappa \, dZ_p}{\sqrt{Z_p^{2p+1}-1}},$$

so ist nach dem Abel'schen Theorem eine Function $p(t)$ vom $p(p+1)^{\text{ten}}$ Grade

$$(41) \qquad p(t) = t^{p(p+1)} + a_{p(p+1)-1}\, t^{p(p+1)-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

und eine Function $q(t)$ vom p^2-1^{ten} Grade

$$(42) \qquad q(t) = b_{p^2-1}\, t^{p^2-1} + b_{p^2-2}\, t^{p^2-2} + \cdots + b_1 t + b_0$$

so zu wählen, dass die Gleichung

$$(43) \qquad p(t) - q(t)\sqrt{t^{2p+1}-1} = 0$$

befriedigt wird durch die $p(2p+1)$ Werthe $t_{\varrho s}$ und die dazu gehörigen Irrationalitäten; nach Bestimmung der Coefficienten a und b in den Polynomen $p(t)$ und $q(t)$ wird durch

$$(44) \quad p(t)^2 - q(t)^2(t^{2p+1}-1) = \prod_0^{2p}{}_s \prod_1^{p}{}_\varrho (t - t_{\varrho s}) \cdot (t - Z_1) \cdots (t - Z_p)$$

---

vorkommt, in welchem $\varkappa+1$ und $2p+1$ den grössten gemeinsamen Theiler δ haben, so dass $\varkappa+1 = \delta.\varepsilon$, $2p+1 = \delta.\eta$ ist, so setze man

$$z^\delta = y, \quad \text{also } z^{\varkappa+1} = y^\varepsilon, \quad z^{2p+1} = y^\eta$$

und erhält

$$\int \frac{z^\varkappa \, dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}} = \frac{\varepsilon}{\varkappa+1}\int \frac{y^{\varepsilon-1}\, dy}{\sqrt{y^\eta - 1}},$$

somit ein ebensolches Integral, jedoch von einer niedrigeren Ordnung und so beschaffen, dass jetzt $\varepsilon - 1 + 1 = \varepsilon$ und η relativ prim sind, wie es oben zur Auflösung der Congruenz (37) gefordert ist.

die Gleichung geliefert, deren Lösungen die gesuchten neuen Integralgrenzen sind.

Beachtet man, dass die in Gleichung (43) vorkommende Irrationalität nach (39) durch eine ganze Function $p-1^{\text{ten}}$ Grades des entsprechenden t dargestellt ist, so wird der Factor des unbestimmten Coefficienten b_ν die Form haben

$$b_\nu : \alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)t_{\varrho s}^{p+\nu-1}$$
$$+\alpha^{(p-2)m_s}\varphi_2\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)t_{\varrho s}^{p+\nu-2}+\cdots+\varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)t_{\varrho s}^{\nu};$$

setzt man ferner die Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (38)

$$t_{1s}^\mu+t_{2s}^\mu+\cdots+t_{ps}^\mu=S_{s\mu},$$

und addirt von den $p(2p+1)$ Gleichungen (43) je p, die zu den Lösungen derselben Gleichung (38), also zu demselben s gehören, nachdem sie der Reihe nach mit

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
t_{1s}^{\varkappa+1} & t_{2s}^{\varkappa+1} & \cdots & t_{ps}^{\varkappa+1} \\
t_{1s}^{2(\varkappa+1)} & t_{2s}^{2(\varkappa+1)} & \cdots & t_{ps}^{2(\varkappa+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
t_{1s}^{(p-1)(\varkappa+1)} & t_{2s}^{(p-1)(\varkappa+1)} & \cdots & t_{ps}^{(p-1)(\varkappa+1)}
\end{array}$$

multiplicirt sind, so erhält man das folgende System von Gleichungen, in welchem $s=0, 1, 2, \cdots 2p$ zu setzen ist:

$$(45)\quad S_{s\,p(p+1)}+a_{p(p+1)-1}S_{s\,p(p+1)-1}+\cdots+a_1S_{s1}+a_0S_{s0}$$
$$+b_{p^2-1}\Big\{\alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p(p+1)-2}$$
$$+\alpha^{(p-2)m_s}\varphi_2\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p(p+1)-3}+\cdots+\varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p}$$
$$+b_{p^2-2}\Big\{\alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p(p+1)-3}+\cdots+\varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p-}$$
$$+\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+\quad b_0\Big\{\alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p-1}+\cdots+\varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s0}\Big\}=$$

und noch $p-1$ ähnlich gestaltete, die sich von der Gleichung (45) nur dadurch unterscheiden, dass alle zweiten Indices des S um resp. $\varkappa+1$, $2(\varkappa+1)$, $3(\varkappa+1)$, $\cdots$, $(p-1)(\varkappa+1)$ Einheiten erhöht sind.

Fassen wir jetzt die gleichartigen $2p+1$ Gleichungen (45) auf, welche den Werthen $s=0, 1, 2, \cdots 2p$ entsprechen, und beachten, dass, wenn für $S_{0\lambda}$ als Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (29)

$$S_{0\lambda} = \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r + \mathfrak{C}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2r} + \cdots + \mathfrak{L}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2pr}$$

gesetzt wird, sich

$$(46) \qquad S_{s\lambda} = \alpha^{-\lambda m_s} \Big\{ \mathfrak{A}_\lambda + \alpha^s \mathfrak{B}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r + \alpha^{2s} \mathfrak{C}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2r} + \cdots + \alpha^{2ps} \mathfrak{L}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2pr} \Big\}$$

ergiebt, so wird, wenn bemerkt wird, dass aus den einzelnen Klammern, welche die Factoren der b-Coefficienten bilden, die resp. Einheitswurzeln

$$\alpha^{-(p^2-1)m_s}, \quad \alpha^{-(p^2-2)m_s}, \ldots, \alpha^{-0.m_s}$$

heraustreten, während die Klammern wieder die Form annehmen

$$(47) \qquad b_\nu \cdot \alpha^{-\nu m_s} \Big\{ \mathsf{A}_\nu + \alpha^s \mathsf{B}_\nu \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r + \alpha^{2s} \Gamma_\nu \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2r} + \cdots + \alpha^{2ps} \mathsf{M}_\nu \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2pr} \Big\},$$

die Addition der $2p+1$ Gleichungen (45), wenn der Kürze halber

$$\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r = y$$

gesetzt wird, wie leicht zu sehen, folgendermassen bewerkstelligt werden.

Bezeichnen nämlich ε und η gegebene ganze Zahlen und bestimmt man, was immer möglich ist, zwei ganze Zahlen τ_ε und u_η aus den Congruenzen

$$(48) \qquad \left.\begin{aligned} \tau_\varepsilon (\varkappa+1) &\equiv \varepsilon \\ u_\eta (\varkappa+1) &\equiv \eta \end{aligned}\right\} \bmod (2p+1),$$

wo $\varkappa$ die oben definirte Zahl bedeutet, so wird in der Additionsgleichung der Coefficient von a_ε lauten

$$(49) \qquad \mathfrak{A}_\varepsilon \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s} + \mathfrak{B}_\varepsilon y \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + s} + \mathfrak{C}_\varepsilon y^2 \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + 2s} + \cdots + \mathfrak{L}_\varepsilon y^{2p} \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + 2ps},$$

und der von b_η:

$$(50) \qquad \mathsf{A}_\eta \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\eta m_s} + \mathsf{B}_\eta y \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\eta m_s + s} + \cdots + \mathsf{M}_\eta y^{2p} \sum_0^{2p} {}_s\, \alpha^{-\eta m_s + 2ps},$$

und wenn man berücksichtigt, dass nach den Congruenzen (37) und (48)

$$-\varepsilon m_s + \tau_\varepsilon s \equiv 0 \bmod (2p+1) \quad \text{und} \quad -\eta m_s + u_\eta s \equiv 0 \bmod (2p+1)$$

ist, so folgt, dass der Coefficient von $\dot{a}_s$ nur noch lautet

$$\mathfrak{T}_s y^{\tau_s},$$

während der Coefficient von b_η

$$T_\eta y^{u_\eta}$$

wird, und somit das Resultat der Addition:

$$(51)\quad \mathfrak{T}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_1 \mathfrak{T}_1 y^{\tau_1} + a_0 \mathfrak{T}_0 y^{\tau_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}} + \cdots + b_1 T_1 y^{u_1} + b_0 T_0 y^{u_0} = 0$$

worin die $\mathfrak{T}$ und T rationale Functionen von x bedeuten.

Multiplicirt man die $2p+1$ Gleichungen (45) der Reihe nach mit

$$\begin{array}{lllll} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{2p} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \cdots & \alpha^{4p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{2p} & \alpha^{4p} & \cdots & \alpha^{4p^2}, \end{array}$$

wodurch also, wenn mit $(\alpha^\varrho)^0, (\alpha^\varrho)^1 \cdots (\alpha^\varrho)^{2p}$ multiplicirt wird, in (45) jede der a und b-Grössen nur mit $\alpha^{\varrho s}$ multiplicirt wird, so lautet, wenn die Gleichungen addirt werden, der Coefficient von a_s:

$$(52)\quad \mathfrak{A}_s \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-sm_s+\varrho s} + \mathfrak{B}_s y \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-sm_s+(\varrho+1)s} + \cdots + \mathfrak{L}_s y^{2p} \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-sm_s+(2p+\varrho)s}$$

und der von b_η:

$$(53)\quad \mathsf{A}_\eta \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s+\varrho s} + \mathsf{B}_\eta y \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s+(\varrho+1)s} + \cdots + \mathsf{M}_\eta y^{2p} \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s+(2p+\varrho)s}.$$

oder es wird mit Berücksichtigung der obigen Congruenzen und Wahl ähnlicher Bezeichnungen wie oben, das Resultat der Addition die Form haben:

$$(54)\quad \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}-\varrho} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}-\varrho} + \cdots + a_1 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_1 y^{\tau_1-\varrho} + a_0 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_0 y^{\tau_0-\varrho}$$
$$+ b_{p^2-1} T^{(\varrho)}_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}-\varrho} + b_{p^2-2} T^{(\varrho)}_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}-\varrho} + \cdots + b_1 T^{(\varrho)}_1 y^{u_1-\varrho} + b_0 T^{(\varrho)}_0 y^{u_0-\varrho} = 0$$

worin für ϱ der Reihe nach $0, 1, 2, \cdots 2p$ zu setzen ist, oder wenn mit y^ϱ multiplicirt wird:

$$(55)\quad \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_0 y^{\tau_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T^{(\varrho)}_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T^{(\varrho)}_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{(\varrho)}_0 y^{u_0} = 0.$$

Man sieht leicht, dass in all' den Gleichungen, welche man auf dieselbe Weise aus der Gleichung (45) herleitet, nachdem in derselben die zweiten Indices von S um resp. $\varkappa+1, 2(\varkappa+1), \cdots (p-1)(\varkappa+1)$ Einheiten erhöht worden, nur statt ε und η die Grössen $\varepsilon+(\varkappa+1)\delta$ und $\eta+(\varkappa+1)\delta$ auftreten werden, wenn der Index von S um $(\varkappa+1)\delta$ Einheiten erhöht ist, und wenn man daher wieder zwei ganze Zahlen v_ε und w_η aus den Congruenzen bestimmt:

$$(56)\qquad \left.\begin{aligned} v_\varepsilon(\varkappa+1) &\equiv \varepsilon+(\varkappa+1)\delta \\ w_\eta(\varkappa+1) &\equiv \eta+(\varkappa+1)\delta \end{aligned}\right\} \bmod (2p+1),$$

so wird die der Gleichung (51) analoge Gleichung folgendermassen lauten:

$$\mathfrak{T}^{0\delta}_{p(p+1)} y^{v_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{0\delta}_{p(p+1)-1} y^{v_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_1\mathfrak{T}^{0\delta}_1 y^{v_1} + a_0\mathfrak{T}^{0\delta}_0 y^{v_0}$$
$$+ b_{p^2-1}T^{0\delta}_{p^2-1} y^{w_{p^2-1}} + b_{p^2-2}T^{0\delta}_{p^2-2} y^{w_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{0\delta}_0 y^{w_0} = 0;$$

wenn man aber berücksichtigt, dass wegen

$$(\varkappa+1)(v_\varepsilon-\delta) \equiv \varepsilon \quad \text{und} \quad (\varkappa+1)\tau_\varepsilon \equiv \varepsilon \bmod (2p+1)$$

auch

$$v_\varepsilon \equiv \tau_\varepsilon + \delta \pmod{2p+1} \quad \text{ebenso} \quad w_\eta \equiv u_\eta + \delta \pmod{2p+1}$$

folgt, so ergeben sich, wenn die Gleichungen mit $y^{-\delta}$ multiplicirt werden, endlich die $p(2p+1)$ Bestimmungsgleichungen für die im Abel'schen Theorem vorkommenden Constanten a und b in der Form:

$$(57)\quad \mathfrak{T}^{\varrho\delta}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{\varrho\delta}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0\mathfrak{T}^{\varrho\delta}_0 y^{\tau_0}$$
$$+ b_{p^2-1}T^{\varrho\delta}_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}} + b_{p^2-2}T^{\varrho\delta}_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{\varrho\delta}_0 y^{u_0} = 0,$$

worin für ϱ alle Zahlen $0, 1, 2, \cdots 2p$, für δ die Zahlen $0, 1, 2, \cdots p-1$ zu setzen sind.

Aus diesem Gleichungssystem (57) ist nun unmittelbar zu ersehen, dass, wenn

$$\tau_{p(p+1)} - \tau_{p(p+1)-\sigma} = \mu_\sigma, \qquad \tau_{p(p+1)} - u_{p^2-\sigma} = \nu_\sigma$$

gesetzt wird,

$$a_{p(p+1)-\sigma} = U_\sigma \cdot y^{\mu_\sigma}, \qquad b_{p^2-\sigma} = V_\sigma \cdot y^{\nu_\sigma}$$

wird, worin U_σ und V_σ rationale Functionen von x sind, und man erhält somit

$$(58)\qquad p(t)^2 - q(t)^2(t^{2p+1}-1)$$
$$= \left[t^{p(p+1)} + U_1 y^{\mu_1} t^{p(p+1)-1} + \cdots + U_{p(p+1)-1} y^{\mu_{p(p+1)-1}} t + U_{p(p+1)} y^{\mu_{p(p+1)}}\right]^2$$
$$- \left[V_1 y^{\nu_1} t^{p^2-1} + V_2 y^{\nu_2} t^{p^2-2} + \cdots + V_{p^2-1} y^{\nu_{p^2-1}} t + V_{p^2} y^{\nu_{p^2}}\right]^2 \left[t^{2p+1}-1\right].$$

Da nun nach den Congruenzen (48)

$$\left.\begin{aligned} \tau_{p(p+1)}(\varkappa+1) &\equiv p(p+1) \\ \tau_{p(p+1)-\sigma}(\varkappa+1) &\equiv p(p+1)-\sigma \end{aligned}\right\} \bmod (2p+1)$$

also

(59) $(\varkappa+1)\left[\tau_{p(p+1)}-\tau_{p(p+1)-\sigma}\right]=(\varkappa+1)\mu_\sigma \equiv \sigma \bmod (2p+1)$

und ebenso

$$\tau_{p(p+1)}(\varkappa+1) \equiv p(p+1)$$
$$u_{p^2-\sigma}(\varkappa+1) \equiv p^2-\sigma$$

also

(60) $(\varkappa+1)\left[\tau_{p(p+1)}-u_{p^2-\sigma}\right]=(\varkappa+1)\nu_\sigma \equiv p+\sigma \bmod (2p+1)$

ist, so wird, wenn man für t die Substitution macht

(m) $$t=w\cdot y^\lambda,$$

worin λ eine Lösung der Congruenz

(61) $$\lambda(\varkappa+1)\equiv 1 \bmod (2p+1)$$

sein soll, ein Posten des ersten Quadrates der Gleichung (58) lauten

$$U_\sigma y^{\mu_\sigma+\lambda[p(p+1)-\sigma]}\cdot w^{p(p+1)-\sigma}$$

oder vermöge der Congruenzen (59) und (61), wie leicht zu sehen,

$$\mathfrak{U}_\sigma y^{\lambda p(p+1)} w^{p(p+1)-\sigma},$$

worin $\mathfrak{U}_\sigma$ wieder eine rationale Function von x ist; ferner wird ein Posten des zweiten Quadrates der Gleichung (58)

$$V_\sigma y^{\nu_\sigma+\lambda(p^2-\sigma)} w^{p^2-\sigma}$$

oder vermöge der Congruenzen (60) und (61)

$$\mathfrak{V}_\sigma y^{\lambda p(p+1)}\cdot w^{p^2-\sigma},$$

worin $\mathfrak{V}_\sigma$ auch wieder eine rationale Function von x bedeutet.

Die Gleichung (58) nimmt daher die Form an:

(62) $$p(t)^2-q(t)^2(t^{2p+1}-1)$$
$$=y^{2\lambda p(p+1)}\left[(w^{p(p+1)}+\mathfrak{U}_1 w^{p(p+1)-1}+\cdots+\mathfrak{U}_{p(p+1)})^2\right.$$
$$\left.-(\mathfrak{V}_1 w^{p^2-1}+\cdots+\mathfrak{V}_{p^2})^2(w^{2p+1}y^{\lambda(2p+1)}-1)\right],$$

wobei in der Klammer [ ] die Coefficienten der Potenzen von w rationale Functionen von x sind.

Untersuchen wir jetzt die rechte Seite der Gleichung (44); es ist offenbar nach Gleichung (38)

$$\prod_{0}^{2p}{}_{s}\prod_{1}^{p}{}_{\varrho}(t-t_{\varrho s})$$

$$=\prod_{0}^{2p}{}_{s}\left\{\alpha^{pm_s}t^p+\alpha^{(p-1)m_s}f_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)t^{p-1}+\cdots+f_p\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)\right\}$$

und wenn auch hier die vorher gebrauchte Substitution (m) angewandt wird,

$$\prod_{0}^{2p}{}_{s}\prod_{1}^{p}{}_{\varrho}(t-t_{\varrho s})$$

$$=\prod_{0}^{2p}{}_{s}\left\{\alpha^{pm_s}y^{\lambda p}w^p+\alpha^{(p-1)m_s}y^{\lambda(p-1)}f_1(x,\alpha^s y)(w^{p-1}+\cdots+f_p(x,\alpha^s y)\right\}$$

oder endlich, wenn man beachtet, dass aus den beiden Congruenzen (37) und (61)

$$m_s\equiv s\lambda \mod (2p+1)$$

folgt,

(63)
$$\prod_{0}^{2p}{}_{s}\prod_{1}^{p}{}_{\varrho}(t-t_{\varrho s})$$

$$=\prod_{0}^{2p}{}_{s}\left\{(\alpha^s)^{p\lambda}y^{\lambda p}w^p+(\alpha^s)^{(p-1)\lambda}y^{(p-1)\lambda}f_1(x,\alpha^s y)w^{p-1}+\cdots+f_p(x,\alpha^s y)\right\},$$

woraus zu erkennen, dass das Product eine symmetrische Function von

$$y,\ \alpha y,\ \alpha^2 y,\ \cdots\ \alpha^{2p}y$$

ist und dasselbe somit eine ganze Function von w wird, deren Coefficienten rationale Functionen von x vorstellen.

Beachtet man nun, dass die aus den Beziehungen (44), (62), (63) hervorgehende Gleichung des Abel'schen Theorems als Coefficienten der höchsten w-Potenz auf der linken Seite die Grösse

$$y^{2\lambda p(p+1)}$$

hat, während (63) als Coefficienten der höchsten w-Potenz

$$y^{\lambda p(2p+1)}$$

liefert, so wird der vermöge der Substitution (m) nach Gleichung (44) übrig bleibende Theil

$$(y^\lambda w-Z_1)(y^\lambda w-Z_2)\cdots(y^\lambda w-Z_p)$$
$$=y^{\lambda p}[w^p+\mathfrak{M}_1 w^{p-1}+\cdots+\mathfrak{M}_{p-1}w+\mathfrak{M}_p]$$

sein, worin $\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \cdots\ \mathfrak{M}_p$ rationale Functionen von x bedeuten, oder

$$(t-Z_1)\cdots(t-Z_p)=t^p+\mathfrak{M}_1 y^\lambda t^{p-1}+\mathfrak{M}_2 y^{2\lambda} t^{p-2}+\cdots+\mathfrak{M}_p y^{p\lambda}$$

d. h. die Grössen $Z_1, Z_2, \cdots Z_p$, welche die Grenzen der p Additionsintegrale der Gleichung (40) sind, sind die Lösungen einer algebraischen Gleichung der Form

$$t^p+\mathfrak{M}_1 y^\lambda t^{p-1}+\mathfrak{M}_2 y^{2\lambda} t^{p-2}+\cdots+\mathfrak{M}_p y^{p\lambda}=0 \tag{64}$$

in welcher

$$y=\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r$$

ist und $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_p$ rationale Functionen von x sind.

Endlich werden sich nach Gleichung (43) die zu den Z-Grenzen gehörigen Irrationalitäten in der Form ergeben

$$\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}=\frac{p(Z_\varrho)}{q(Z_\varrho)}.$$

Dieses hiermit erhaltene Resultat können wir auch so aussprechen: *die Gleichung* (40) *ist so beschaffen, dass, wenn man*

$$Z_\varrho=W_\varrho y^\lambda \tag{65}$$

setzt, worin

$$y=\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r \quad \text{und} \quad \lambda(\varkappa+1)\equiv 1 \bmod (2p+1)$$

ist, die Grössen

$$W_1,\ W_2,\ \cdots\ W_p$$

die Lösungen einer Gleichung

$$W^p+\mathfrak{M}_1 W^{p-1}+\cdots+\mathfrak{M}_{p-1}W+\mathfrak{M}_p=0 \tag{66}$$

sind, deren Coefficienten rational aus x zusammengesetzt sind, während die Irrationalitäten

$$\sqrt{W_\varrho^{2p+1}y^{\lambda(2p+1)}-1}$$

oder

$$\sqrt{W_\varrho^{2p+1}R(x)^{\lambda r}-1} \tag{67}$$

sich als rationale Functionen von W_ϱ darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus x zusammengesetzt sind.

Es ist aber auch leicht zu sehen, dass alle durch die Gleichungen (65), (66), (67) definirten Z-Grössen auch wirklich eine Reductionsformel eines Abel'schen Integrales der angegebenen Art auf hyperelliptische Integrale p^{ter} Ordnung liefern. Denn da aus (65) folgt

$$dZ_\varrho=\left(\frac{r\lambda}{2p+1}W_\varrho\frac{R'(x)}{R(x)}+\frac{dW_\varrho}{dx}\right)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{r\lambda}dx, \tag{68}$$

worin $\frac{dW_\varrho}{dx}$ nach Gleichung (66) sich als rationale Function von W_ϱ und x darstellen lässt, ferner nach (67)

$$\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1} = f(W_\varrho, x),$$

worin f eine rationale Function bedeutet, so wird

$$\sum_1^p \frac{Z_\varrho^\varkappa \, d Z_\varrho}{\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}} = \sum_1^p \frac{\frac{r\lambda}{2p+1} W_\varrho \frac{R'(x)}{R(x)} + \frac{dW_\varrho}{dx}}{f(W_\varrho, x)} \cdot W_\varrho^\varkappa \cdot \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{r\lambda(\varkappa+1)} dx,$$

und da die rationale symmetrische Function der W-Grössen sich aus der Gleichung (66) als rationale Function von x ausdrücken lässt, ausserdem der Exponent der Irrationalität in Folge der Congruenz $\lambda(\varkappa+1) \equiv 1 \bmod (2p+1)\, r$ ist, so erhalten wir die Beziehung

$$\sum_1^p \int \frac{Z_\varrho^\varkappa \, d Z_\varrho}{\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}} = \int \varphi(x) \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx,$$

also eine Reductionsformel der betrachteten Art; *in den obigen Formeln* (65), (66), (67) *sind also sämmtliche Beziehungen enthalten, welche derartige Transformationen liefern.*

Ist $p=2$, haben wir es also mit dem Reductionsproblem

(68) $$\int \psi(x) (\sqrt[5]{R(x)})^r dx = \int \frac{Z_1^\varkappa \, dZ_1}{\sqrt{Z_1^5-1}} + \int \frac{Z_2^\varkappa \, dZ_2}{\sqrt{Z_2^5-1}}$$

zu thun, so werden, wenn eine Zahl λ aus der Congruenz bestimmt ist

$$\lambda(\varkappa+1) \equiv 1 \pmod{5},$$

und

(69) $$Z_1 = W_1 (\sqrt[5]{R(x)})^{r\lambda}, \quad Z_2 = W_2 (\sqrt[5]{R(x)})^{r\lambda}$$

gesetzt wird, W_1 und W_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung

(70) $$W^2 + \mathfrak{M}_1 W + \mathfrak{M}_2 = 0$$

sein müssen, deren Coefficienten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ rationale Functionen von x sind, während

$$\sqrt{W_1^5 R(x)^{\lambda r} - 1} \quad \text{und} \quad \sqrt{W_2^5 R(x)^{\lambda r} - 1}$$

rationale Functionen von W_1 resp. W_2 und x sein sollen.

Da aus (70)

$$W = -\frac{\mathfrak{M}_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}$$

folgt, so wird, wenn

$$W^5 R(x)^{\lambda r} - 1 = \mathfrak{N}_1 \pm \mathfrak{N}_2 \sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}$$

gesetzt wird, worin $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ rationale Functionen von x bedeuten, welche sich aus $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und $R(x)$ zusammensetzen,

$$\sqrt{\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 \sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 \sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}$$

und

$$\sqrt{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2\sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}} = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2\sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}$$

sein müssen, wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ wieder rational aus x zusammengesetzt sind, und daraus endlich

$$\sqrt{\mathfrak{N}_1^2 - \mathfrak{N}_2^2(\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2)} = \mathfrak{P}_1^2 - \mathfrak{P}_2^2(\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2),$$

wonach die rationalen Functionen von x $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und $R(x)$ so beschaffen sein werden, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{N}_1^2 - \mathfrak{N}_2^2(\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2)$$

nur Doppelfactoren hat, alle diesen Bedingungen genügenden Functionen und nur diese werden nach Gleichung (68) auf $\varkappa^{\text{te}}$ hyperelliptische Fundamentalintegrale erster Ordnung reducirbare Abel'sche Integrale der betrachteten Form liefern.

Wie für hyperelliptische Integrale höherer Ordnung die Bedingungsgleichungen herzustellen sind, denen nach den Gleichungen (66) und (67) die Coefficienten der Substitutionsfunctionen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_p$ und des Polynoms des Abel'schen Integrales unterliegen müssen, zeige ich in der schon oben erwähnten, demnächst im 3ten Hefte des 87ten Bandes von Borchardt's Journal erscheinenden Arbeit „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips" und ich behalte mir die Anwendung der dort gegebenen Methoden auf die oben behandelten Probleme bis zur Veröffentlichung dieser Arbeit vor.

Wir fügen zum Schlusse noch ein Wort zur Lösung der allgemeinen, ursprünglich gestellten Aufgabe hinzu, die durch die Gleichung (35) ausgedrückt war; nachdem die Summe $(A_\varkappa)$ in die Form (40) gebracht worden, worin die Grössen $Z_1, Z_2, \cdots Z_p$ und die dazu gehörigen Irrationalitäten den durch die Gleichungen (65), (66), (67) ausgedrückten Bedingungen genügen, werden wir die Gleichung (35) in die Form setzen können

$$(70)\quad (2p+1)\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \sum_0^{p-1}{}_\varkappa A_\varkappa\left\{\int\frac{Z_{1\varkappa}^\varkappa\, dZ_{1\varkappa}}{\sqrt{Z_{1\varkappa}^{2p+1}-1}} + \cdots + \int\frac{Z_{p\varkappa}^\varkappa\, dZ_{p\varkappa}}{\sqrt{Z_{p\varkappa}^{2p+1}-1}}\right\}$$

und die Grössen $Z_{1\varkappa}, Z_{2\varkappa}, \cdots Z_{p\varkappa}$ mit den dazu gehörigen Irrationalitäten genügen den (65), (66), (67) analogen Gleichungen.

Da nun aber, wie oben gezeigt worden, sich bei Erfüllung dieser Bedingungen stets

$$\sum_1^p{}_\varrho \int\frac{Z_{\varrho\varkappa}^\varkappa\, dZ_{\varrho\varkappa}}{\sqrt{Z_{\varrho\varkappa}^{2p+1}-1}} = \int \varphi_\varkappa(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx$$

ergiebt, so folgt, dass

$$\sum_0^{p-1} A_\varkappa \sum_1^p \varrho \int \frac{Z_{\varrho\varkappa}^\varkappa \, d\, Z_{\varrho\varkappa}}{\sqrt{Z_{\varrho\varkappa}^{2p+1} - 1}}$$

$$= \int (A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_{p-1} \varphi_{p-1}(x)) \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx$$

wird, d. h. dass dann die Reduction für willkürlich gewählte $A_1, A_2, \cdots A_p$ möglich ist und

$$\psi(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_{p-1} \varphi_{p-1}(x)$$

wird. Die Lösung des oben behandelten Problems giebt also auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe.

Wien.

Sur une propriété des formes algébriques préparées;

par C. LE PAIGE, de Liége.

M. Sylvester à récemment fait connaître différentes propriétés des formes algébriques dont les termes sont affectés des racines carrées des coefficients polynomiaux. Dans ce cas, il appelle la forme algébrique, *préparée*.

Par exemple

$$a_x^n = a_0 x_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}\, a_1 x_1^{n-1} x_2 + \sqrt{\binom{n}{2}}\, a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

est une forme binaire préparée.

Il remarque que si l'on effectue sur les variables d'une forme quelconque une substitution

$$\delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} \cdots & k_{nn} \end{vmatrix},$$

les paramètres sont soumis à une certaine substitution dépendante de la première et il exprime ce fait en disant que la substitution effectuée sur les variables en induit une autre sur les coefficients.

Si l'on désigne, en général, par K_{ab}, le mineur de k_{ab} dans le déterminant δ, on dit que la substitution

$$\begin{vmatrix} \frac{K_{11}}{\delta}, & \frac{K_{12}}{\delta}, & \cdots & \frac{K_{1n}}{\delta} \\ \frac{K_{21}}{\delta}, & \frac{K_{22}}{\delta}, & \cdots & \frac{K_{2n}}{\delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{K_{n1}}{\delta}, & \frac{K_{n2}}{\delta}, & \cdots & \frac{K_{nn}}{\delta} \end{vmatrix}$$

est contraire à la première.

Cela posé, le théorème de M. Sylvester prend la forme suivante:

Deux substitutions contraires opérées sur les variables d'une forme *algébrique préparée, induisent deux substitutions contraires, opérées sur les coefficients.*

M. le Prof. Lipschitz a démontré ce théorème d'une façon tout à fait générale et fort élégante*).

Nous nous proposons de faire connaître une seconde propriété de ces formes, relative aux substitutions, propriété en quelque sorte corrélative de la première.

Le théorème que nous allons énoncer permet de démontrer la proposition fondamentale de M. Sylvester et nous semble offrir, sur l'autre, quelque avantage au point de vue de la simplicité: nous n'aurons d'ailleurs à employer, dans le cours de cette démonstration, que des considérations purement algébriques.

Nous appelons substitutions transposées les deux substitutions

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix}.$$

On a ce théorème:

Deux substitutions transposées opérées sur les variables d'une forme préparée induisent deux substitutions transposées sur les coefficients.

Nous en donnerons une démonstration fondée sur la notation symbolique de M. Aronhold, en nous bornant d'abord aux formes binaires: nous ferons voir ensuite qu'elle est générale.

Soient

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}$$

deux substitutions transposées opérées sur une forme:

$$a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$$
$$= b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} b_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + b_n x_2^n.$$

Cette forme deviendra, successivement

$$(a_1' x_1' + a_2' x_2')^n = b_0' x_1'^n + \binom{n}{1} b_1' x_1'^{n-1} x_2' + \cdots + b_n' x_2'^n,$$

$$(\mathsf{A}_1' x_1' + \mathsf{A}_2 x_2')^n = \mathsf{A}_0' x_1'^n + \binom{n}{1} \mathsf{A}_1' x_1'^{n-1} x_2' + \cdots + \mathsf{A}_n' x_2'^n.$$

On sait que

$$a_1' = k_{11} a_1 + k_{12} a_2,$$
$$a_2' = k_{21} a_1 + k_{22} a_2,$$

et que

*) American Journal of Mathematics, t. I; p. 336.

$$A_1 = k_{11} a_1 + k_{21} a_2,$$
$$A_2 = k_{12} a_1 + k_{22} a_2.$$

Par suite

$$b'_p = (k_{11} a_1 + k_{12} a_2)^{n-p} (k_{21} a_1 + k_{22} a_2)^p,$$
$$A_q' = (k_{11} a_1 + k_{21} a_2)^{n-q} (k_{12} a_1 + k_{22} a_2)^q.$$

Les coefficients de $a_1^{n-q} a_2^q$ et de $a_1^{n-p} a_2^p$, dans ces deux développements sont respectivement

$$A_{p,q} = \sum \binom{n-p}{q-s} \binom{p}{s} k_{11}^{n-p-q+s} k_{12}^{q-s} k_{21}^{p-s} k_{22}^{s},$$

$$[A_{q,p}] = \sum \binom{n-q}{p-s} \binom{q}{s} k_{11}^{n-p-q+s} k_{12}^{q-s} k_{21}^{p-s} k_{22}^{s}.$$

On a

$$\binom{n}{p} A_{p,q} = \binom{n}{q} [A_{q,p}],$$

à cause de la relation

$$\binom{n-p}{q-s} \binom{p}{s} \binom{n}{p} = \binom{n-q}{p-s} \binom{q}{s} \binom{n}{q}.$$

On peut écrire .

$$a'_p = A_{p,0}\, a_0 + A_{p,1}\, a_1 + \cdots + A_{p,q}\, a_q + \cdots + A_{p,n} a_n,$$
$$A_q' = [A_{q,0}] a_0 + [A_{q,1}] a_1 + \cdots + [A_{q,p}] a_p + \cdots + [A_{q,n}] a_n.$$

Si nous désignons par α_p, α'_p, ω_p les coefficients des formes préparées correspondantes, nous aurons

$$\alpha_p = \sqrt{\tbinom{n}{p}}\, a_p; \quad \alpha'_p = \sqrt{\tbinom{n}{p}}\, a'_p; \quad \omega_p = \sqrt{\tbinom{n}{p}}\, A'_p.$$

Par suite

$$\alpha'_p = \sum_{q=0}^{q=n} \frac{\sqrt{\binom{n}{p}}}{\sqrt{\binom{n}{q}}}\, A_{p,q} \cdot \alpha_q,$$

$$\omega_q = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\sqrt{\binom{n}{q}}}{\sqrt{\binom{n}{p}}}\, [A_{q,p}]\, \alpha_p;$$

or il résulte de l'égalité

$$\binom{n}{q} [A_{q,p}] = \binom{n}{p} A_{p,q},$$

cette propriété:

Le coefficient de α_q dans α'_p est égal au coefficient de α_p dans ω_q.

Ceci démontre le théorème. Il nous parait inutile d'insister sur ce point. Supposons maintenant qu'il s'agisse de la forme générale

$$a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^n.$$

Par deux substitutions contraires, cette forme deviendra

$$(a_1'x_1' + a_2'x_2' + \cdots + a_n'x_n')^n$$

et

$$(A_1x_1' + A_2x_2' + \cdots + A_nx_n')^n,$$

et l'on aura

$$a_p' = (k_{p1}a_1 + k_{p2}a_2 + \cdots + k_{pn}a_n),$$

et

$$A_p = (k_{1p}a_1 + k_{2p}a_2 + \cdots + k_{np}a_n).$$

Appelons

$$b_1, b_2, \cdots b_\nu;\ b_1', b_2', \cdots b_\nu';\ B_1, B_2, \cdots B_\nu$$

les coefficients de ces trois formes développées et

$$P_1, P_2, \cdots P_\nu$$

les coefficients polynomiaux correspondants.

Soit, par exemple

$b_p = a_1^q\ a_2^r \cdots a_n^s,$ où $q + r + \cdots + s = n$, et de même

$b_{p'}' = a_1'^{q'} a_2'^{r'} \cdots a_n'^{s'},$ où $q' + r' + \cdots + s' = n$.

Nous aurons ainsi

$$b_p' = (k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \cdots + k_{1n}a_n)^q (k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{2n}a_n)^r \cdots$$
$$\cdots (k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + \cdots + k_{nn}a_n)^s.$$

Le coefficient de $b_{p'} = a_1^{q'} a_2^{r'} \cdots a_n^{s'}$, dans ce développement sera

$$\sum Q(t_1, v_1, \cdots u_1)\, R(t_2, v_2, \cdots u_2) \cdots S(t_n, v_n, \cdots u_n)\, k_{11}^{t_1} k_{21}^{t_2} \cdots$$
$$k_{n1}^{t_n} k_{12}^{v_1} k_{22}^{v_2} \cdots k_{n2}^{v_n} \cdots k_{1n}^{u_1} k_{2n}^{u} \cdots k_{nn}^{u_n},$$

où

$$(1) \begin{cases} t_1 + t_2 + \cdots + t_n = q',\ v_1 + v_2 + \cdots + v_n = r', \cdots u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s', \\ \text{et} \\ t_1 + v_1 + \cdots + u_1 = q,\ t_2 + v_2 + \cdots + u_2 = r, \cdots t_n + v_n + \cdots + u_n = s, \end{cases}$$

$Q(t_1, v_1, \cdots u_1)$, $R(t_2, v_2, \cdots u_2) \cdots$ etc. désignent les coefficients polynomiaux correspondants.

De même, le coefficient de $b_p = a_1^q a_2^r \cdots a_n^s$, dans le développement de $B_{p'} = B_1^{q'} B_2^{r'} \cdots B_n^{s'}$ sera

$$\sum Q'(t_1', v_1', \cdots u_1')\, R'(t_2', v_2', \cdots u_2') \cdots S'(t_n', v_n', \cdots u_n')\, k_{11}^{t_1'} k_{21}^{v_1'} \cdots k_{n1}^{u_1'}$$
$$k_{12}^{t_2'} k_{22}^{v_2'} \cdots k_{n2}^{u_2'} \cdots k_{1n}^{t_n'} k_{2n}^{v_n'} \cdots k_{nn}^{u_n'},$$

où

$$(2) \begin{cases} t_1' + t_2' + \cdots + t_n' = q,\ v_1' + v_2' + \cdots + v_n' = r, \cdots u_1' + v_2' + \cdots + u_n' = s, \\ t_1' + v_1' + \cdots + u_1' = q',\ t_2' + v_2' + \cdots + u_2' = r', \cdots t_n' + v_n' + \cdots + u_n' = s'. \end{cases}$$

On voit, d'après cela, qu'à chaque terme du premier développement en correspondra un, dans le second, dont la partie littérale sera la même, à cause des conditions (1) et (2).

Si l'on a

$$t_1 = t_1', \quad t_2 = v_1', \cdots t_n = u_1',$$
$$v_1 = t_2', \quad v_2 = v_2', \cdots v_n = u_n', \text{ etc.},$$

les coefficients numériques

$$Q \cdot R \cdots S, \qquad Q' \cdot R' \cdots S'$$

seront dans le rapport de $P_{p'}$ à P_p.

Si nous désignons par $\mathsf{A}_{p,p'}$ le premier développement, par $[\mathsf{A}_{p',p}]$ le second, on aura donc

$$P_{p'}\,[\mathsf{A}_{p',p}] = P_p \cdot \mathsf{A}_{p,p'}.$$

Cette relation établie le reste de la démonstration se fait comme précédemment.

Liége, 28 février 1879.

Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen.

Von

H. Krey in Göttingen.

Von den anzahlgeometrischen Problemen, welche sich auf die singulären Tangenten algebraischer Flächen beziehen, waren bis vor einigen Jahren nur wenige gelöst. So lange man darauf bestand, die betreffenden Gleichungen wirklich zu bilden, was wohl in den meisten Fällen unausführbar ist, musste man auf grosse Schwierigkeiten stossen. Dagegen haben die Methoden der Gradabzählung, welche in den letzten Jahren, besonders durch Zeuthen und Schubert, zu einer hohen Ausbildung gelangt sind, die Bestimmung der Anzahlen in manchen Fällen ermöglicht. So hat Schubert (Math. Ann. XI) für die punktallgemeine Fläche viele derartige Probleme gelöst.

Im Folgenden sind einige dieser Resultate verallgemeinert. Die zu Grunde gelegte Fläche wird nicht punktallgemein vorausgesetzt, sondern soll die gewöhnlichen Singularitäten besitzen; ferner sollen im Falle einer Punktfläche die sog. points-pinces der Doppelcurve und die points-clos der Cuspidalcurve, für eine Classenfläche die plans-pinces und plans-clos nicht ausgeschlossen sein.

Die Bezeichnung der Singularitätenzahlen ist dieselbe wie in der Zeuthen'schen Abhandlung: Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques (Math. Ann. X). Um ferner eine kurze Ausdrucksweise zu haben für die Bedingungen, denen die hier zu betrachtenden Geraden genügen, deute ich diese Bedingungen symbolisch an, und setze ihre Zeichen in Parenthese neben einander. Es möge bedeuten

b^ν die Bedingung, die Doppelcurve ν mal zu treffen;
c^ν „ „ „ Cuspidalcurve ν „ „ „
T^ν „ „ „ Fläche an ν Stellen einfach zu berühren;
E^ν „ „ ν ebene Schnittcurven der Fläche an ν verschiedenen Stellen zu treffen;
g die Bedingung, eine Gerade zu schneiden;

B die zweiwerthige Bedingung, die Doppelcurve zu treffen, und im Schnittpunkte eine eigentliche Berührung mit der Fläche zu haben; und zwar der Art, dass der Schnittpunkt ein dreifacher ist;

C die entsprechende Bedingung für die Cuspidalcurve.

Sind vier Bedingungen gegeben, so soll durch die neben einander gesetzten Bedingungszeichen zugleich die Anzahl der ihnen genügenden Geraden, bei drei Bedingungen dagegen die Ordnung der Regelfläche derjenigen ∞^1 Geraden angedeutet werden, welche ihnen genügen. Hiernach ist z. B.

$(b^2 T)$ die Ordnung der Regelfläche derjenigen Geraden, welche die Doppelcurve zweimal treffen, und anderswo eine eigentliche Berührung mit der Fläche haben;

$(b^2 TE)$ die Ordnung der von den weiteren einfachen Schnittpunkten der Geraden dieser Regelfläche gebildeten Curve;

(T^3) die Ordnung der Regelfläche der dreifachen Tangenten; u. s. f.

Ferner soll mit T_3 eine Haupttangente, mit T_4 eine vierpunktige Tangente bezeichnet werden, u. s. f., so dass z. B.

$(T_3 T)$ = Grad der Regelfläche der noch einmal berührenden Haupttangenten;

$(T_4 T)$ = Anzahl der noch einmal berührenden vierpunktigen Tangenten.

Von den Schubert'schen Correspondenzsätzen, welche hier zur Anwendung kommen, sind besonders die folgenden drei wichtig:

$$\text{(I)} \quad \varepsilon = c + d - g,$$
$$\text{(II)} \quad \varepsilon g = c^2 + d^2 + g_e - g_p,$$
$$\text{(III)} \quad \varepsilon b = cd - g_e.$$

Hinsichtlich der Bedeutung und des Beweises dieser Formeln muss auf Schubert's „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. X) verwiesen werden. Die erste bezieht sich auf ∞^1 Punktepaare im Raum, und ist eine leichte Verallgemeinerung des gewöhnlichen Chasles'schen Correspondenzprincips; die zweite und dritte beziehen sich auf ∞^2 Punktepaare, und sind Folgerungen aus (I). So erhält man z. B. (II), wenn man aus einem irgendwie algebraisch definirten zweistufigen Systeme von Punktepaaren diejenigen ∞^1 Paare heraushebt, welche ihren Verbindungsstrahl eine gegebene Gerade schneiden lassen, und auf letzteres System, unter Zuhülfenahme des Princips der speciellen Lage, die Formel (I) anwendet.

Die Ergebnisse obiger Formeln bedürfen einer Reduction wegen der unbrauchbaren Coincidenzen; die Bestimmung der Vielfachheit der letzteren kann wohl in einigen Fällen Schwierigkeiten machen, ihre Controle wird aber erleichtert durch den Umstand, dass in der Raumgeometrie die eigentliche Tangente, sie sei einfach oder singulär, sich selbst dualistisch entspricht. Ein grosser Theil der von Schubert erhaltenen Resultate z. B. lässt sich von der ordnungsallgemeinen Fläche sofort auf die classenallgemeine Fläche übertragen; man braucht nur n mit n' zu vertauschen. In dem allgemeineren Falle einer weder ordnungsallgemeinen noch classenallgemeinen Fläche wird man verlangen müssen, dem Endresultate eine Form zu geben, aus welcher das dualistische Entsprechen ersichtlich ist; die Zwischenresultate, welche die genannte Eigenschaft nicht haben, können mehr oder weniger complicirt ausfallen.

1. Die Regelfläche der dreifachen Tangenten. Hülfssätze.

Wendet man die Correspondenzformel (II) an auf je zwei der $n-4$ weiteren Schnittpunkte der ∞^2 Doppeltangenten der Fläche, so ergiebt sich als Zahl der Coincidenzen

$$(1) \qquad 2n(n-5)(\delta-2a+12)+(n-4)(n-5)(\delta'-\delta),$$

die jedoch zum Theil in die Doppel- und Cuspidalcurve fallen; abzuziehen ist also

$$2(bT^2)+3(cT^2).$$

Zur Berechnung dieser Zahlen müssen einige Hülfssätze vorausgeschickt werden.

Sei B eine Curve der Ordnung b, mit k scheinbaren Doppelpunkten, zunächst ohne wirkliche vielfache Punkte. Ihre Sehnen, welche eine feste Gerade schneiden, beschreiben eine Regelfläche vom Grade

$$(2) \qquad R=\frac{b(b-1)}{2}+k,$$

wie sofort aus dem Princip der speciellen Lage folgt.

Diese Regelfläche hat B zur $(b-1)$fachen Curve; die Classe des Ortes ihrer Tangentialebenen längs dieser Curve ist

$$(3) \qquad b(b-1)(b-2)-2(b-1)k.$$

Damit nämlich eine Tangentialebene eines Punktes A der Curve durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehe, muss eine durch A gehende Erzeugende der Regelfläche den aus P über der Curve construirten Kegel in A berühren. Man erhält nun eine Correspondenz, wenn man jedem der beiden Schnittpunkte einer Erzeugenden von R mit B jeden der $b-2$ weiteren Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Kegel entsprechen lässt. Der Ort der letzteren ist von der Ordnung $bR-b(b-1)$;

Coincidenzen treten ein, wenn entweder die Erzeugende von R den Kegel berührt, oder durch einen der $2k$ Punkte von B geht, welche zu Doppelkanten des Kegels Anlass geben; nach (I) erhält man also

$$b(b-1)(b-2)+2[bR-b(b-1)]-2(b-2)R-2k(b-1),$$

d. i. die oben angegebene Zahl.

Eine andere Correspondenz entsteht, wenn man einem Punkte X der Curve die $R-(b-1)$ Punkte Y entsprechen lässt, in welchen die Regelfläche von der Geraden PX noch getroffen wird; es tritt eine Coincidenz eines Punktes Y mit einem Punkte X nur dann ein, wenn entweder der Punkt X Schnittpunkt mit einer dreifachen Sehne ist, oder wenn er eine Tangentialebene der Regelfläche durch P schickt. Zieht man also von dem Ergebnisse der Formel (I), d. h. von

$$b(R-b+1)+b(R-b+1)-b(R-b+1)$$

die Zahl (3) ab, und dividirt die Restzahl durch drei, so erhält man die Anzahl der dreifachen Sehnen der Curve B, welche eine feste Gerade schneiden:

$$(4)\qquad (b-2)k-\frac{1}{6}b(b-1)(b-2).\,^{*})$$

Geht ein scheinbarer Doppelpunkt in einen wirklichen Doppelpunkt über, so gehen $b-2$ dreifache Sehnen verloren; der vorige Ausdruck wird also auch dann noch gelten, wenn man unter k die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte versteht. Nähert sich ein dritter Curvenzweig einem wirklichen Doppelpunkte D, so giebt es $2(b-3)$ dreifache Sehnen, welche zwei Schnittpunkte in der Nähe von D haben, und eine dreifache Sehne, welche alle drei Schnittpunkte in der Nähe von D hat; diese letztere ist nach demjenigen Punkte der festen Geraden gerichtet, von welchem aus die beiden Zweige des wirklichen Doppelpunktes einen scheinbaren Selbstberührungspunkt bilden. Für einen dreifachen Punkt der Curve gehen mithin verloren

$$b-2+2(b-3)+1$$

dreifache Sehnen, und man hat

$$(5)\qquad (bbb)=(b-2)k-\frac{1}{6}b(b-1)(b-2)-(3b-7)t.$$

An die Stelle des Ausdrucks (2) tritt die Zahl

$$(6)\qquad (bbg)=\frac{b(b-1)}{2}+k-3t.$$

Unter der Voraussetzung $f'=0$ hat man ebenso für die Cuspidalcurve

*) Dieses Resultat ist wohl zuerst von Salmon gefunden; vgl. dessen Raumgeometrie, ältere Ausgabe, pag. 462 der Fiedler'schen Uebersetzung; man vgl. auch Zeuthen: Annali di matematica Serie II T. III pag. 184.

(5a) $$(ccc) = (c-2)\,h - \tfrac{1}{6}\,c\,(c-1)\,(c-2),$$

(6a) $$(ccg) = \frac{c(c-1)}{2} + h.$$

Weiter folgt hieraus

(7) $$(bbc) = c\cdot\left[\frac{b(b-1)}{2} + k - 3t\right] - \gamma\cdot(2b-3) - 3\beta\,(b-1),$$

(7a) $$(ccb) = b\cdot\left[\frac{c(c-1)}{2} + h\right] - 2\gamma\,(c-1) - \beta\,(3c-4),$$

mit Berücksichtigung des Umstandes, dass durch eine Spitze der Cuspidalcurve (Punkt β) die Doppelcurve in der Richtung der Spitzentangente hindurchgeht (Zeuthen, l. c. pag. 467 Anm.).

Wendet man jetzt die Formel (II) an auf je zwei der $n-4$ weiteren Schnittpunkte der Sehnen der Doppelcurve, so erhält man, nach Abzug der unbrauchbaren Coincidenzen

(8) $$(bbT) = 2n\,(n-5)\,(k-3t) + \frac{b(b-1)}{2}\,(n-4)\,(n-5) - (k-3t)\,(n-4)\,(n-5) - 3\cdot 2\,(bbb) - 3\cdot(bbc),$$

oder, nach Einsetzen der in (5) und (7) angegebenen Ausdrücke, und nach einigen Umformungen mittelst der zwischen den Singularitäten bestehenden Relationen*)

(8) $$(bbT) = 2ak - 4b^2 + 4nb - 4b\varrho + b\beta - 3at + 18t + \tfrac{1}{2}\,aq + 2bq + 4q + \tfrac{3}{2}\,a\gamma + 3\gamma - 9\beta - 4b.$$

Auf ganz analoge Weise ergiebt sich

(8a) $$\begin{aligned}(ccT) &= 2n(n-5)\,h + \frac{c(c-1)}{2}\,(n-4)\,(n-5) - h\cdot(n-4)\,(n-5) - 2\cdot(ccb) - 3\cdot 3\cdot(ccc)\\ &= a\,(c^2-c) + 4nc - c\beta - \frac{a}{2}\,(r+3\beta) - 2c^2 - 6c - 4\gamma + r - 5\beta - 8c\sigma + 3cr;\end{aligned}$$

und

(9) $$\begin{aligned}(bcT) &= 2n\,(n-5)\,(bc-2\gamma-3\beta) + bc\,(n-4)\,(n-5) - (n-4)(n-5)(bc-2\gamma-3\beta) - 2\cdot2\cdot(bbc) - 2\cdot3\cdot(ccb)\\ &= 2abc - 6bc - 8b\sigma - b\beta + 3br - 2a\gamma + 16\gamma - 3a\beta + 2cq - 4c\varrho + c\beta + 24\beta.\end{aligned}$$

---

*) Man erhält diese Relationen aus den Zeuthen'schen Gleichungen (1)—(23) pag. 454 ff., nach Weglassung der dort eingeführten aussergewöhnlichen Singularitäten.

Dieselbe Correspondenzformel (II) wende man jetzt an auf je zwei der $n-4$ weiteren Schnittpunkte der ∞^2 die Doppelcurve schneidenden, anderswo die Fläche berührenden Tangenten, und erhält

$$(10)\quad (bT^2)=\frac{1}{2}\,[2n(n-5)\,((a-2)b-2\varrho-j)+b(a-4)(n-4)(n-5)$$
$$-(n-4)(n-5)(ab-2\varrho-j)-2\cdot 2\cdot(bbT)-3\cdot(bcT)]$$
$$=a^2b-\frac{j}{2}(n^2-n-20)+32\,\varrho+2bj-8b-8q$$
$$+\frac{3}{2}\,cj+\frac{3}{2}\,b\chi$$
$$-2a\varrho-\frac{1}{2}\,aj-2b\varkappa-\frac{3}{2}\,bc+4nb-10ab+6\beta$$
$$+6\gamma+\frac{1}{2}\,b\sigma;$$

analog

$$(10\text{a})\quad (cT^2)=\frac{1}{2}\,[2n(n-5)((a-2)c-3\sigma-\chi)+c(a-3)(n-4)(n-5)$$
$$-(n-4)(n-5)(ac-3\sigma-\chi)-2(bcT)-2\cdot 3\,(ccT)]$$
$$=a^2c-\frac{1}{2}\chi(n^2-n-20)+30\sigma+cj+(b+3c-\frac{1}{2}a)\chi-2c\varkappa$$
$$-3r-12c-4\gamma-9\beta+8nc+\frac{1}{2}c\sigma-3a\sigma-\frac{3}{2}c^2-9ac.$$

Hiernach ergiebt sich nun die Gradzahl der Regelfläche der dreifachen Tangenten zunächst in folgender Form:

$$(11)\quad 3\cdot(T^3)=2n(n-5)(\delta-2a+12)+(n-4)(n-5)(\delta'-\delta)$$
$$-2\Big[a^2b-\frac{1}{2}j(n^2-n-20)+32\varrho+2bj-8b-8q$$
$$+\frac{3}{2}\,cj+\frac{3}{2}\,b\chi-2a\varrho-\frac{1}{2}\,aj-2b\varkappa-\frac{3}{2}\,bc+4nb$$
$$-10ab+6\beta+6\gamma+\frac{1}{2}\,b\sigma\Big]$$
$$-3\Big[a^2c-\frac{1}{2}\,\chi(n^2-n-20)+30\sigma+cj+(b+3c-\frac{1}{2}\,a)\,\chi$$
$$-2c\varkappa-3r-12c-4\gamma-9\beta+8nc+\frac{1}{2}\,c\sigma$$
$$-3a\sigma-\frac{3}{2}\,c^2-9ac\Big]\cdot$$

Es giebt bekanntlich zwei Combinationen der Singularitätenzahlen, welche sich selbst dualistisch entsprechen; die eine ist a; als die zweite kann man wählen

$$(12)\qquad \sigma+2r-3c+4j+3\chi\quad [\text{Zeuthen, Gl. (23)}].$$

Man suche nun auf der rechten Seite der Gleichung (11) möglichst viel durch $a, c, c', r, r', \sigma, \sigma', j, j', \chi, \chi'$ auszudrücken, wobei u. a. die folgenden Relationen nützlich sind:

$$\begin{aligned}
4n' &= 4a + c' - \sigma - 2j - 3\chi,\\
4\varkappa &= c' + 3\sigma + 6j + 9\chi,\\
2\delta &= a(a-1) - n' - 3\varkappa,\\
4\varrho &= 4na - 8a - c' - 11\sigma - 6j - 9\chi,\\
\beta &= c + 3r - 5\sigma + \chi + 4\chi',\\
2q &= 2\varrho - \beta - j.
\end{aligned}$$

Bei der Herleitung des Ausdrucks (11) ist χ' vernachlässigt; nach Zeuthen's Untersuchungen ist der singuläre Punkt einer plan-clos χ' vierfacher Punkt der Cuspidalcurve; es erfährt also die Zahl (5a), d. i. der Grad der Regelfläche der dreifachen Sehnen dieser Curve, eine Reduction; dem Ausdrucke (6a) würde $-6\chi'$ hinzuzufügen sein; endlich würde (10a) um ein Vielfaches von χ' vermindert werden müssen.

Dem Ausdrucke (13) sind diese vernachlässigten Terme bereits hinzugefügt. Man erhält die gesuchte Zahl in ihrer normalen Form:

$$\begin{aligned}
(13)\quad 3(T^3) = a^3 - 6a^2 - 40a - (3a-12)(\sigma+\sigma') - \left(\tfrac{3}{2}a - 22\right)(c+c')\\
- 3a(2j+2j'+3\chi+3\chi') + 24(j+j') + 100(\chi+\chi')\\
+ 15(\sigma+2r-3c+4j+3\chi).
\end{aligned}$$

2. Die Anzahl der vierfachen Tangenten.

Um die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten unter der Voraussetzung $j'=0$, $\chi'=0$ zu bestimmen, mögen hier diejenigen Sätze aufgestellt werden, welche den Schubert'schen Sätzen (13), (30), (28), (29), (31), (32), (51) entsprechen.

Von den ∞^2 Tangenten, welche ihren Berührungspunkt auf einer ebenen Schnittcurve E_1 der Fläche haben, gehen a durch einen Punkt, und liegen n in einer Ebene; daher $a+n=$ Grad der Regelfläche der eine feste Gerade schneidenden, auf E_1 berührenden Tangenten. Diese Regelfläche trifft eine zweite ebene Curve E_2 der Fläche in

$$n(a+n) - 2n$$

nicht auf E_1 liegenden Punkten; dieselbe Zahl ist also auch der Grad der Regelfläche derjenigen Tangenten, welche auf E_1 berühren und E_2 schneiden; ihr Restschnitt hat die Ordnung

$$(14)\quad n(na+n^2-2n) - 2n^2 - an = n^3 - 4n^2 + a(n^2-n);$$

dieses ist die Zahl der Tangenten, welche auf E_1 berühren und E_2 und E_3 schneiden.

Man wende jetzt die Correspondenzformel (III) an auf je zwei der $n-2$ weiteren Schnittpunkte der Tangenten mit Berührungspunkt in einer gegebenen Ebene. Da aus einem gegebenen Punkte der Doppeloder Cuspidalcurve a Tangenten gehen, welche auf E berühren, so sind $2ba + 3ca$ unbrauchbare Coincidenzen in Abzug zu bringen; man erhält

$$(15)\quad n^3 - 4n^2 + a(n^2-n) - n\cdot(n-2)(n-3) - 2ba - 3ca = a^2 + n^2 - 6n$$

für die Ordnung der Curve der zweiten Berührungspunkte derjenigen Doppeltangenten, welche einen Berührungspunkt auf E haben.

Die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der eine feste Gerade schneidenden Doppeltangenten (= Grad der Regelfläche derjenigen Doppeltangenten, welche einen Berührungspunkt in einer gegebenen Ebene haben) ist

$$(16)\quad n(a-6) + 2\delta' \quad \text{[Satz (28) bei Schubert].}$$

Die Ordnung des Ortes der einfachen Schnittpunkte dieser Doppeltangenten ist also

$$(17)\quad n(\delta+\delta') - 2[n(a-6)+2\delta']$$

= Grad der Regelfläche der eine ebene Curve treffenden, anderswo die Fläche berührenden Doppeltangenten, $=(ET^2)$.

Von der Regelfläche ausgehend, deren Grad in (16) bestimmt ist, findet man mit Hülfe von (15)

$$(18)\quad n[n(a-6) + 2\delta'] - 2(a^2+n^2-6n) - 2n(a-6) = (n^2-2n)(a-6) + 2n\delta' - 2a^2 - 2n^2 + 12n$$

als Zahl der Doppeltangenten, welche in einer E_1 einen einfachen Schnittpunkt, in einer E_2 einen Berührungspunkt haben, = Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der eine gegebene ebene Schnittcurve treffenden, anderswo die Fläche berührenden Doppeltangenten.

Dieses Resultat, combinirt mit (17), wenn für den Augenblick die Ausdrücke nur angedeutet werden, giebt für die Ordnung des Ortes der sonstigen einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten, welche in einer Ebene schon einfache Schnittpunkte besitzen

$$(19)\quad n\cdot(17) - 2\cdot(18) - n(\delta-2a+12) = (n^2-n)\delta + (n^2-8n)\delta' + 4a^2 - 4an^2 + 6an + 28n^2 - 60n$$

= Anzahl der Doppeltangenten, welche auf E_1 und E_2 je einen einfachen Schnittpunkt haben.

Nunmehr kann man die Correspondenzformel (III) anwenden auf je zwei der $n-4$ weiteren Schnittpunkte der ∞^2 Doppeltangenten; das Symbol cd ist die in (19) berechnete Zahl; $g_e = \delta'\cdot(n-4)(n-5)$; da ferner durch einen gegebenen Punkt der Doppelcurve, bez. Cuspidalcurve $\delta - 4a + 28$, bz. $\delta - 3a + 18$ anderswo berührende Doppeltangenten gehen, so ist noch hinzuzufügen

$$-2b(\delta-4a+28) - 3c(\delta-3a+18).$$

Man erhält so für die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten

(20) $\quad a\delta + (n-20)\,\delta' + 28a + 2an - 3ac + 30c - 32n.$

Hiermit ist auch die Ordnung des Ortes der einfachen Schnittpunkte der dreifachen Tangenten gegeben, da (T^3) bereits bekannt ist. Auf je zwei dieser Schnittpunkte würde man das Correspondenzprincip (I) anzuwenden haben, um die Zahl der vierfachen Tangenten zu finden; ein Theil der Coincidenzen fällt jedoch wieder in die Doppel- oder Cuspidalcurve; ihre Anzahl muss zunächst berechnet werden.

Berechnung von (bT^3) und (cT^3).

Nach (6) schneidet die Regelfläche (b^2g) noch in einer Curve der Ordnung

(21) $$(b^2E) = n\left[\frac{b(b-1)}{2} + k - 3t\right] - 2b(b-1);$$

analog ist

(21a) $$(c^2E) = n\left[\frac{c(c-1)}{2} + h\right] - 2c(c-1).$$

Aus

$$(bcg) = bc + (bc - 2\gamma - 3\beta)$$

folgt ebenso

(22) $$(bcE) = (2n-4)\,bc - n(2\gamma + 3\beta).$$

Die Regelfläche der Tangenten, welche eine feste Gerade schneiden und ihren Berührungspunkt auf einer ebenen Curve E der Fläche haben, ist vom Grade $a+n$; sie schneidet die Doppelcurve in

$$b\,(a+n) - 4b$$

nicht auf E gelegenen Punkten; mit anderen Worten: Die Tangenten, welche die Doppelcurve schneiden und ihren Berührungspunkt auf E haben, bilden eine Regelfläche vom Grade $b\,(a+n) - 4b$. Da diese die Doppelcurve zur a-fachen, die E zur b-fachen Curve hat, so folgt für die Ordnung ihres Restschnittes

(23) $\quad n\,[b(a+n) - 4b] - 2ab - 2bn = (n-2)\,ab + (n^2 - 6n)\,b$

= Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der Tangenten (bET). Die entsprechende Zahl für die Cuspidalcurve ist

(23a) $$(n-2)\,ac + (n^2 - 5n)\,c.$$

Man wende die Correspondenzformel (II) an auf je zwei der $n-3$ weiteren Schnittpunkte der Geraden, welche die Doppelcurve und eine ebene Curve treffen, und erhält, mit Berücksichtigung der nach (21) und (22) zu bestimmenden Ausnahmecoincidenzen

$$(24)\quad (bET) = (n-4)(2n^2-2n-6)\,b - 2\cdot 2\,(b^2E) - 3\,(bcE)$$
$$= (2na-2n-8a+16)\,b - 8b^2 - 12bc + 12nt + 2nq + 12n\gamma + 9n\beta;$$

ebenso

$$(24\text{a})\quad (cET) = (n-4)(2n^2-2n-6)\,c - 2\cdot 3\,(c^2E) - 2\,(bcE)$$
$$= (2na-8a+12)c - 8bc - 12c^2 + 3nr + 4n\gamma + 15n\beta.$$

Aus (23) und (24) folgt, da die Regelfläche (bET) die Doppelcurve zur $[n(a-4)-2a]$-fachen, die ebene Curve zur $[(a-2)b-2\varrho-j]$-fachen Curve hat, für die Ordnung ihres Restschnittes

$$(25)\quad (bE^2T) = n\,(bET) - 2\,(23) - n\,[(a-2)b-2\varrho-j] - 2b\,[n(a-4)-2a]$$
$$= 2n^2ab - 4n^2b - 13nab - 8nb^2 - 12nbc + 38nb + 8ab + 2n^2q + n^2(12t+12\gamma+9\beta) + 2n\varrho + nj$$

$$(25\text{a})\quad (cE^2T) = n\,(cET) - 2\,(23a) - n\,[(a-2)c-3\sigma-\chi] - 2c\,[n(a-3)-2a]$$
$$= 2n^2ac - 13nac + 30nc + 8ac - 8nbc - 12nc^2 + 4n^2\gamma + 3n^2r + 15n^2\beta - 2n^2c + n\,(3\sigma+\chi).$$

Um die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der Doppeltangenten (bTT) zu bestimmen, wende man (III) an auf je zwei der $n-4$ weiteren Schnittpunkte der ∞^2 die Doppelcurve schneidenden, anderswo die Fläche berührenden Tangenten. Die Symbole cd und g_e der Formel (III) haben hier folgende Werthe:

$$cd = (bE^2T);\qquad g_e = b\,(a-4)(n-4)(n-5);$$

man erhält daher, mit Berücksichtigung der Ausnahmecoincidenzen:

$$(26)\quad (bE^2T) - b(a-4)(n-4)(n-5)$$
$$- 2b\,[(b-1)(a-4)-2(\varrho-4)-j] - 3c[b(a-3)-2\varrho-j]$$
$$= a^2b + nab + 56b - aj - 14ab - 2nb - 2a\varrho - 3bc$$

für die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der Doppeltangenten (bTT).

Die entsprechende Zahl für die Cuspidalcurve ist

$$(26\text{a})\quad (cE^2T) - c(a-3)(n-4)(n-5)$$
$$- 2b[c(a-4)-3\sigma-\chi] - 3c[(c-1)(a-3)-3(\sigma-2)-\chi-1]^{*)}$$
$$= a^2c + nac + 2bc - 12ac + 36c - n^2c - 3a\sigma - a\chi.$$

---

*) Die durch einen gegebenen Punkt P der Cuspidalcurve gehenden, diese Curve noch einmal treffenden und an einer dritten Stelle die Fläche berührenden Tangenten machen einen Theil der Schnittkanten zweier Kegel $(c-1)$ter und $(a-3)$ter Ordnung aus. Von den Schnittkanten der beiden Kegel liegt eine in der Tangente der Cuspidalcurve in P.

Die Bestimmung von (bT^3) und (cT^3) lässt sich nun auf zwei verschiedene Arten erreichen. Der erste, mehr directe, aber ziemlich beschwerliche Weg würde etwa folgender sein.

Von den Regelflächen (b^2E), (c^2E), (bcE) ausgehend, deren Grade in (21), (21a), (22) bestimmt sind, erhält man

(27) $(b^2E^2) = n(b^2E) - n(k-3t) - 2b[(b-1)n - 2b]$,

(27a) $(c^2E^2) = n(c^2E) - nh - 2c[(c-1)n - 2c]$,

(28) $(bcE^2) = n(bcE) - n(bc - 2\gamma - 3\beta) - 2b(nc - 2c) - 2c(nb - 2b)$.

Die Anwendung von Formel (III) auf die weiteren Schnittpunkte der Sehnen der Doppelcurve u. s. w. giebt für die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der Tangenten (b^2T), (c^2T), (bcT)

(29) $(b^2E^2) - \frac{b(b-1)}{2}(n-4)(n-5) - 2b(k-3t-b+2) - 3c(k-3t)$,

(29a) $(c^2E^2) - \frac{c(c-1)}{2}(n-4)(n-5) - 2bh - 3c(h-c+2)$,

(30) $(bcE^2) - bc(n-4)(n-5) - 2b(bc-c-2\gamma-3\beta)$
$-3c(bc-b-2\gamma-3\beta)$.

Die Ordnung des Ortes der einfachen Schnittpunkte dieser Tangenten ist also bezw.

(31) $(b^2TE) = n(b^2T) - 2\cdot(29) - 2b[(a-4)(b-1) - 2(\varrho-4) - j]$,

(31a) $(c^2TE) = n(c^2T) - 2\cdot(29a) - 2c[(a-3)(c-1) - 3(\sigma-2) - \chi - 1]$,

(32) $(bcTE) = n(bcT) - 2\cdot(30) - 2b[c(a-4) - 3\sigma - \chi]$
$-2c[b(a-3) - 2\varrho - j]$.

Die rechts vorkommenden Zahlen (b^2T), (c^2T), (bcT) sind bereits in (8) und (9) berechnet.

Da die Regelfläche (b^3) die Doppelcurve zur $(k-3t-b+2)$fachen Curve hat, so folgt

(33) $(b^3E) = n(b^3) - 2b(k-3t-b+2)$,

(33a) $(c^3E) = n(c^3) - 2c(h-c+2)$,

(34) $(b^3c) = c(b^3) - \gamma[2(k-3t-b+2)-1] - 3\beta[k-3t-b+2]$,

(34a) $(c^3b) = b(c^3) - 2\gamma(h-c+2) - \beta[3(h-c+2)-1]$.

Durch Anwendung von (I) auf die weiteren Schnittpunkte der Geraden (b^3), (c^3), (b^2c), (c^2b) ergiebt sich

(35) $(b^3T) = 2(n-7)(b^2E) - (n-6)(n-7)(b^3) - 4\cdot 2(b^4) - 3\cdot(b^3c)$,

(35a) $(c^3T) = 2(n-7)(c^3E) - (n-6)(n-7)(c^3) - 2(bc^3) - 4\cdot 3(c^4)$,

(36) $(b^2cT) = 2(n-7)(b^2cE) - (n-6)(n-7)(b^2c) - 3\cdot 2(b^3c) - 2\cdot 3(b^2c^2)$,

(36a) $(c^2bT) = 2(n-7)(c^2bE) - (n-6)(n-7)(c^2b) - 2\cdot 2(b^2c^2) - 3\cdot 3(c^3b)$.

Dieselbe Formel giebt, auf je zwei der $(n-6)$ weiteren Schnittpunkte der Tangenten (b^2T), (c^2T), (bcT) angewendet, mit Berücksichtigung von (31) und (32)

$$(37)\quad 2(b^2T^2)=2(n-7)\cdot(31)-(n-6)(n-7)(b^2T)-3\cdot 2(b^3T)-3(b^2cT),$$

$$(37a)\quad 2(c^2T^2)=2(n-7)\cdot(31a)-(n-6)(n-7)(c^2T)-2(c^2bT)-3\cdot 3(c^3T),$$

$$(38)\quad 2(bcT^2)=2(n-7)\cdot(32)-(n-6)(n-7)(bcT)-2\cdot 2(b^2cT)-2\cdot 3(bc^2T).$$

Endlich giebt die nochmalige Anwendung von (I) auf die weiteren Schnittpunkte der Doppeltangenten (bT^2) und (cT^2)

$$(39)\quad 3(bT^3)=2(n-7)(bT^2E)-(n-6)(n-7)(bT^2)-2\cdot 2(b^2T^2)-3(bcT^2),$$

$$(39a)\quad 3(cT^3)=2(n-7)(cT^2E)-(n-6)(n-7)(cT^2)-2(bcT^2)-2\cdot 3(c^2T^2).$$

Auf der rechten Seite lassen sich (bT^2E) und (cT^2E) mit Hülfe von (26) berechnen:

$$(40)\qquad (bT^2E)=n(bT^2)-2\cdot(26)-2b(\delta-4a+28),$$

$$(40a)\qquad (cT^2E)=n(cT^2)-2\cdot(26a)-2c(\delta-3a+18).$$

In (36) und (36a) ist

$$(b^2cE)=n(b^2c)-2b[(b-1)c-2\gamma-3\beta]-2c(k-3t),$$
$$(c^2bE)=n(c^2b)-2bh-2c[(c-1)b-2\gamma-3\beta].$$

Somit wären alle zur Berechnung von (bT^3) und (cT^3) dienenden Zahlen bestimmt, bis auf die in (35) und (36) vorkommenden

$$(b^4),\quad (c^4),\quad (b^2c^2),$$

über welche noch Folgendes bemerkt werden möge.

Setzt man zunächst die Doppelcurve ohne wirkliche vielfache Punkte voraus, so ergiebt sich (b^4) aus (b^3) in ganz analoger Weise wie (b^3) aus (b^2g), durch zweimalige Anwendung von (I). Die Tangentialebenen der Fläche (b^3) längs ihrer $(k-b+2)$ fachen Curve bilden einen Ebenenort von der Classe

$$(b^2-6b-2k)(k-b+2)+9(b^3).$$

Ist wieder P ein beliebiger Punkt, und lässt man einem Punkte X der Curve die $(b^3)-(k-b+2)$ Punkte entsprechen, in welchen die Fläche (b^3) von der Geraden PX noch getroffen wird, so erhält man

$$b[(b^3)-k+b-2]$$

Coincidenzen; in Abzug zu bringen ist die vorige Zahl; von dem Reste ist alsdann der vierte Theil zu nehmen, und man erhält das bekannte Resultat*)

$$\frac{1}{2}k^2 - 2bk + \frac{11}{2}k - \frac{1}{24}b(b-2)(b-3)(b-13) \tag{41}$$

für die Zahl der die Curve viermal schneidenden Geraden. Diese Zahl vermindert sich um

$$\frac{d(d-1)}{2} + d[k - 2b + 5 - (d-1)],$$

wenn d scheinbare Doppelpunkte in wirkliche übergehen; man braucht dann in (41) nur k durch $k - d$ zu ersetzen.

Rückt einem wirklichen Doppelpunkte D ein dritter Curvenzweig unendlich nahe, so hat die Curve noch

$$(k-d) - 3b + 9$$

in endlicher Entfernung von D liegende Punktepaare, welche, für diesen Punkt, je einen scheinbaren Doppelpunkt liefern; da ferner die gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Curvenzweige von D $b-5$ in endlicher Entfernung von D gelegene Punkte der Curve bestimmt, so gehen bei dem Uebergange zu einem dreifachen Punkte

$$2[(k-d) - 3b + 9] + b - 5$$

vierfache Sehnen verloren.

Gehen von den $d = t + d_0$ wirklichen Doppelpunkten t in dreifache Punkte über, so gehen

$$4\frac{t(t-1)}{2} + 2t[k - d - 3b + 9 - 2(t-1)] + t(b-5) \tag{42}$$

vierfache Sehnen verloren; die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte reducirt sich um $2t$, wird also $k - 3t - d_0$.

Schreibt man k statt $k - d_0$, so erhält man nach Abzug der Zahl (42)

$$\begin{aligned}(b^4) = \frac{1}{2}(k-3t)^2 + \frac{11}{2}(k-3t) - 2b(k-3t) + (b-4)t \\ - \frac{1}{24}b(b-2)(b-3)(b-13).\end{aligned} \tag{43}$$

Aus (41) erhält man (c^4), wenn man k durch h, b durch c ersetzt; die β Spitzen der Cuspidalcurve machen keine Reduction erforderlich.

Um (b^2c^2) zu finden, denke man sich die beiden Curven B und C ein wenig aus ihrer Lage entfernt, und, der grösseren Deutlichkeit wegen, die Spitzen β der Curve C im Uebergange aus einem Doppelpunkt begriffen, so dass die beiden Curven keine wirklichen Schnittpunkte mehr haben, die Gesammtcurve dagegen $2\gamma + 3\beta$ neue scheinbare Doppelpunkte erhält. Auf diese Gesammtcurve der Ordnung $b + c$,

*) Man vergl. z. B. Zeuthen: Annali di matematica. T. III. pag. 189.

mit $k - 3t + h + bc$ scheinbaren Doppelpunkten, t dreifachen Punkten kann man die Formel (43) anwenden; von dem Ergebnisse ist abzuziehen (b^4), (c^4), (b^3c), (bc^3); ferner die Zahl der die Gesammtcurve viermal schneidenden Geraden, welche aus den $2\gamma + 3\beta$ scheinbaren Doppelpunkten entstehen, bei dem Uebergange in die ursprüngliche Lage der beiden Curven also verloren gehen. Die Aufstellung des ziemlich weitläufigen Resultates möge hier unterbleiben.

Wenn j' und χ' von Null verschieden sind, kann der Ausdruck (43) keine Gültigkeit mehr haben; es hat nämlich die Doppelcurve die sehr specielle Eigenschaft, mit der ganz in der Fläche liegenden singulären Geraden einer plan-pince $(n-7)$ Punkte gemeinschaftlich zu haben [Zeuthen, pag. 478].

Der zweite Weg, den man zur Berechnung von (bT^3) und (cT^3) einschlagen kann, ist folgender.*)

Die Punkte der Doppelcurve, welche der Regelfläche (T^3) angehören, sind:

1) die Punkte, von welchen die dreifachen Tangenten (bT^3) ausgehen;
2) solche Punkte, in welchen ein dreifacher Schnittpunkt einer dreifachen Tangente liegt;
3) diejenigen Punkte der Doppelcurve, welche die Tangente dieser Curve die Fläche noch einmal berühren lassen; eine solche Tangente ist Doppelerzeugende der Regelfläche (T^3);
4) die points-pinces; durch jeden derselben gehen $\delta - 4a + 29$ Erzeugende der Regelfläche [vgl. Zeuthen pag. 473]; die letztere hat eben so viele Flächenschalen, welche den scharf gewölbten Kamm, den die Fläche in der Nähe eines Punktes j besitzt, berühren.

Analoges gilt für die Schnittpunkte der (T^3) mit der Cuspidalcurve; nur fallen hier diejenigen Punkte weg, welche den unter 3) genannten entsprechen würden, weil die Tangenten der Cuspidalcurve überhaupt nicht als Doppeltangenten angesehen werden können.

Zur Berechnung der Anzahl der unter 2) genannten Punkte dient (26) oder (40). Man lasse einem Punkte der Doppelcurve die $(n-6)(\delta - 4a + 28)$ Punkte entsprechen, in welchen die von ihm ausgehenden Doppeltangenten (bT^2) die Fläche noch treffen, und wende (I) an; die Ordnung des Ortes der erwähnten weiteren Schnittpunkte ist in (40) angegeben. Ausnahmecoincidenzen treten ein für die Punkte β, γ, t (dreifache Punkte der Fläche). Man findet

---

*) Ein ähnliches Verfahren würde zur Bestimmung von (bT^2) und (cT^2) geführt haben.

$$(BT^2) = b(n-6)(\delta-4a+28) + 6(bT^2) - 2\cdot(26)$$
$$-2b(\delta-4a+28) - 2\beta(\delta-4a+26) - 3\gamma(\delta-5a+36)$$
$$-3t(\delta-6a+48).$$

Hinsichtlich der Coefficienten von β, γ, t vgl. man Zeuthen pag. 463; insbesondere ist zu bemerken, dass von den $\delta - 4a + 28$ Doppelkanten des Tangentenkegels mit Scheitel β zwei in die Selbstberührungskante (Tangente der Doppelcurve) fallen. Die Ausrechnung giebt, nach einigen Reductionen:

$$(44)\quad (BT^2) = 8nb - 9ab - 4a\beta - 3a\gamma + 72\gamma - 14a\varrho$$
$$+ a^2b + 192\varrho + 9b\chi - 4aj + 6bj + 84j - 3b\varkappa$$
$$+ 3b\sigma - 3bc + \varrho\delta + 3bn' + 104\beta - 288b.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(44\,a)\quad 2(CT^2) = c(n-6)(\delta-3a+18) + 6(cT^2) - 2\cdot(26a)$$
$$-2c(\delta-3a+18) - 4\beta(\delta-4a+26) - \gamma(\delta-5a+36)$$
$$= 4a^2c - 12c\varkappa - 18r - 60\gamma - 6c\delta + 2\sigma\delta - 22a\sigma$$
$$+ 3c\sigma - 158\beta + 68nc - 3c^2 - 14ac - 4a\beta - a\chi$$
$$- 288c + 180\sigma + 18c\chi + 6b\chi + 6cj - 3\chi(n^2-n-20).$$

Es bleibt noch übrig, die Zahl der unter 3) aufgeführten Punkte zu berechnen.

Unter den Tangenten der Doppelcurve giebt es

$$b(q-2) - 2s - 4\gamma - 12t,$$

welche dieselbe Curve noch einmal treffen. Man wende nun (I) an auf je zwei der $n-4$ weiteren Schnittpunkte der Tangenten der Doppelcurve, und erhält als Zahl der brauchbaren Coincidenzen:

$$(45)\quad 2(n-5)(nq-4b) - (n-4)(n-5)q - 2[b(q-2) - 2s - 4\gamma - 12t]$$
$$-3[cq - 3\gamma - 6\beta] - 2\beta\,{}^{*)}$$
$$= (a-16)q + 16b - 4\beta - 3\gamma - 4j.$$

Jeder dieser Schnittpunkte der Doppelcurve mit der Regelfläche (T^3) ist ein vierfacher.

Hiernach ergiebt sich:

$$(46)\qquad b\,(T^3) = (bT^3) + 2\cdot(BT^2) + 4\,(45) + j(\delta-4a+29);$$

$$(46\,a)\qquad c\,(T^3) = (cT^3) + 3\cdot(CT^2) + \chi\,(\delta-5a+46).$$

*) Die Tangente der Doppelcurve in einem Punkte β schneidet die Fläche sechspunktig. Die Coefficienten von β, γ und t controlirt man durch Betrachtung des speciellen Falles der classenallgemeinen Fläche. Für eine solche ist die gesuchte Anzahl

$$n'^6 - 8n'^5 + 7n'^4 + 28n'^3 + 220n'^2 - 992n' + 960.$$

wie aus den Schubert'schen Sätzen (56) und (58) folgt.

Damit sind (bT^3) und (cT^3) auf schon berechnete Anzahlen zurückgeführt.

Berechnung von (T^4).

Die weiteren Schnittpunkte der dreifachen Tangenten bilden eine Curve, deren Ordnung aus (20) zu entnehmen ist; durch Anwendung der Correspondenzformel (I) erhält man

$$4(T^4) = 2(n-7)[n(T^3) - 2\cdot(20)] - (n-6)(n-7)(T^3)$$
$$-2(bT^3) - 3(cT^3),$$

und mit Benutzung von (46)

$$(47)\quad 4(T^4) = (a-42)(T^3) - 4(n-7)\cdot(20) + 8\cdot(45)$$
$$+ 4(BT^2) + 9(CT^2) + 2j(\delta - 4a + 29) + 3\chi(\delta - 5a + 46),$$

wo nun der erste Term rechts bereits die verlangte, sich selbst dualistisch entsprechende Form hat. Die Ausrechnung giebt, nach gehöriger Umformung:

$$12(T^4) = a^4 - 12a^3 - 148a^2 + 2256a - (6a^2 - 60a - 1464)(\sigma + \sigma')$$
$$-(3a^2 - 94a + 1404)(c + c') + 6(\sigma^2 + \sigma'^2) + \tfrac{3}{2}(c^2 + c'^2) + 6(c\sigma' + c'\sigma)$$
$$+(60a - 1827)(\sigma + 2r - 3c + 4j + 3\chi)$$
$$-6a^2(2j + 3\chi + 2j' + 3\chi') + 120a(j + j') + 436a(\chi + \chi')$$
$$+2178(j + j') - 4422(\chi + \chi') + (4\sigma + 2c')(6j + 9\chi)$$
$$+(4\sigma' + 2c)(6j' + 9\chi') + 6(2j + 3\chi + 2j' + 3\chi')^2,$$

wo wieder die bisher vernachlässigten j', χ' hinzugefügt sind.

Von den Ausdrücken (20), (44) und (44a) kann man noch eine andere Anwendung machen. Lässt man einem Berührungspunkte einer dreifachen Tangente die weiteren Schnittpunkte derselben entsprechen, so erhält man nach (I) die Anzahl der noch zwei mal berührenden Haupttangenten

$$(48)\quad (T_3T^2) = 18(T^3) + (n-12)(20) - (BT^2) - 2(CT^2).$$

Auf die Umformung der rechten Seite soll hier nicht eingegangen werden.

3. Die Regelflächen (T_3T) und (T_4).

Lässt man einem Punkte der Doppelcurve die $n-4$ weiteren Schnittpunkte der durch ihn gehenden Sehnen entsprechen, so erhält man ein zweistufiges System von Punktepaaren, welches insofern von besonderer Beschaffenheit ist, als die Punkte erster Art nur ein einstufiges System bilden. Wie Schubert an vielen Beispielen gezeigt hat, gilt die Formel (II) auch für diesen Fall; man hat nur für das Symbol c^2 Null zu setzen. Es ergiebt sich so:

$$(Bb) = 2n(k-3t) + \frac{b(b-1)}{2} \cdot 2(n-4) - 2(n-4)(k-3t)$$
$$- 2\beta(b-1) - 3\gamma(b-2) - 3t(b-3).$$

Die Coefficienten der in den Punkten β, γ, t stattfindenden Ausnahmecoincidenzen werden mit bestimmt durch die Ordnung des Kegels über der Doppelcurve aus einem solchen Punkte.

In ähnlicher Weise findet man

$$(Bc) = n(bc-2\gamma-3\beta) + bc(n-4) - (bc-2\gamma-3\beta)(n-4)$$
$$-2\beta(c-2) - 3\gamma(c-1) - 3tc$$
$$= nbc - 2\beta c - 3\gamma c - 3tc - 5\gamma - 8\beta.$$

$$2(Cb) = n(bc-2\gamma-3\beta) + bc(n-4) - (bc-2\gamma-3\beta)(n-4)$$
$$-4\beta(b-1) - \gamma(b-2)$$
$$= nbc - 4b\beta - b\gamma - 8\beta - 6\gamma.$$

$$2(Cc) = 2nh + \frac{c(c-1)}{2} \cdot 2(n-4) - 2h(n-4) - 4\beta(c-2) - \gamma(c-1)$$
$$= 8h + c(c-1)(n-4) - 4\beta c - \gamma c + 8\beta + \gamma.$$

Dieselbe Formel (II) wende man jetzt an auf je zwei der $n-3$ weiteren Schnittpunkte der Tangenten mit Berührungspunkt auf der Doppelcurve, und erhält

$$(49)\qquad (BT) = 2(n-4)n\varrho + 2b(n-3)(n-4) - \varrho(n-3)(n-4)$$
$$-2(Bb) - 3(Bc)$$
$$= 2ab + 4b + a\varrho - 4\beta - 3\gamma - 14\varrho - 4j;$$

analog:

$$(49a)\qquad (CT) = 2(n-4)n\sigma + c(n-3)(n-4) - \sigma(n-3)(n-4)$$
$$-2(Cb) - 3(Cc)$$
$$= ac + a\sigma + 2c + 3r - 16\sigma - 3\beta - \chi.$$

Es sei bemerkt, dass diese Ausdrücke zur Berechnung von (bT^2) und (cT^2) hätten dienen können. Da nämlich die Regelfläche der eine feste Gerade schneidenden Doppeltangenten vom Grade $\delta + \delta'$ ist, so hat man mit Berücksichtigung des Verhaltens dieser Fläche in den Punkten j und χ

$$b(\delta+\delta') = (bT^2) + 2(BT) + 4q + (a-4)j;$$
$$c(\delta+\delta') = (cT^2) + 3(CT) + (a-5)\chi;$$

man bestätigt so die in (10) und (10a) auf anderem Wege hergeleiteten Resultate.

Lässt man jedem der beiden Berührungspunkte einer Doppeltangente jeden der $n-4$ weiteren Schnittpunkte entsprechen, so giebt

(II) den Grad der Regelfläche der noch einmal berührenden Haupttangenten:

$$(50)\quad \begin{aligned}(T_3 T) &= n(n-4)(a-6)+2n(\delta-2a+12)\\ &+2(n-4)(\delta'-\delta)-(BT)-2(CT)\\ &=\left(\tfrac{1}{4}a-\tfrac{15}{2}\right)(c+c')+\left(\tfrac{3}{4}a-\tfrac{9}{2}\right)(\sigma+\sigma')+24a\\ &+\tfrac{3}{4}a(2j+3\chi+2j'+3\chi')-33(j+j')-\tfrac{111}{2}(\chi+\chi')\\ &-6(\sigma+2r-3c-4j'-3\chi').\end{aligned}$$

Die Haupttangenten, welche ihren Berührungspunkt in einer gegebenen Ebene haben, bilden eine Regelfläche vom Grade

(51) $2n+\varkappa'$ [Satz (22) bei Schubert],

dagegen bilden die Haupttangenten mit einem einfachen Schnittpunkte in einer gegebenen Ebene eine Regelfläche vom Grade

(52) $n(\varkappa-6)+(n-3)\varkappa'$ [Satz (23) bei Schubert].

Der Restschnitt der Regelfläche (51) ist von der Ordnung

$$n(n+\varkappa')-6n;$$

diese Zahl ist zugleich die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der Regelfläche (52). Die Ordnung des Ortes der weiteren einfachen Schnittpunkte dieser Regelfläche ist also

$$(53)\quad n[n(\varkappa-6)+(n-3\varkappa']-3[n(2n+\varkappa')-6n]-n(\varkappa-6)$$

= Anzahl der Haupttangenten mit einem einfachen Schnittpunkte in je einer von zwei gegebenen Ebenen.

Man bedarf der Kenntniss dieser Zahl, um die Correspondenzformel (III) auf je zwei der $n-3$ weiteren Schnittpunkte der Haupttangenten anwenden zu können. Das Symbol cd ist (53), g_e ist $(n-3)(n-4)\varkappa'$; wegen der unbrauchbaren Coincidenzen ist in Abzug zu bringen

$$2b(\varkappa-12)+3c(\varkappa-8).$$

Die Ordnung des Ortes der einfachen Berührungspunkte der Tangenten $(T_3 T)$ ist hiernach

(54) $a\varkappa+(n-12)\varkappa'-12n(n-2)+24b+24c.$

Die Zahl der Doppeltangenten, welche einen einfachen Schnittpunkt in einer Ebene, einen Berührungspunkt in einer zweiten gegebenen Ebene besitzen, ist in (18) berechnet. Durch Anwendung von (III) auf die Punktepaare, welche aus dem Berührungspunkte einer Doppeltangente und einem einfachen Schnittpunkte bestehen, erhält man

$$(55)\quad \begin{aligned}&(n^2-2n)(a-6)+2n\delta'-2a^2-2n^2+12n\\ &-2(n-4)\delta'-2(a-8)b-2(a-6)c\\ &=(2a-24)n+(a-24)\varkappa'+24a\end{aligned}$$

für die Ordnung des Ortes der Inflexionspunkte der Tangenten $(T_3 T)$. — Unter den Haupttangenten der Fläche sind diejenigen ausgezeichnet, welche ihren Inflexionspunkt auf der Doppelcurve haben. Um den Grad ihrer Regelfläche zu finden, wende man (II) an auf die Punktepaare, welche aus einem Punkte der Doppelcurve und aus einem der weiteren Schnittpunkte der daselbst dreipunktig schneidenden Geraden bestehen, und erhält

$$(56)\qquad \begin{aligned} &n\varrho + 2b(n-3) - \varrho(n-3) - 2q - 3\beta - 5\gamma - 6t \\ &\quad = 5\varrho - 2b - 2q + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Ist die Doppelcurve als vollständiger Schnitt zweier Flächen gegeben, und ohne singuläre Punkte, so kann man die Gleichung der in Rede stehenden Regelfläche wirklich bilden durch Elimination der x aus

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} X_i X_k = 0, \quad \sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} X_i X_k X_h = 0$$

in Verbindung mit den Gleichungen der Doppelcurve; als überflüssigen Factor enthält die Resultante zweimal die Gleichung der Tangentenfläche der Doppelcurve.

Von den Haupttangenten geht man zu vierpunktigen Tangenten über durch Hinzufügen der Bedingung, dass einer der $n-3$ weiteren Schnittpunkte mit dem Inflexionspunkte zusammenfalle. Bei einer Fläche mit Singularitäten wird man eine Tangente T_4 mit Berührungspunkt P und Tangentialebene E nur dann zu den im eigentlichen Sinne vierpunktigen Tangenten zählen, wenn nicht nur T_4 in P vierpunktig schneidet, sondern auch E vier mal zählt unter den n' durch T_4 an die Fläche zu legenden Tangentialebenen. Die Regelfläche (56) wird man also nicht als der (T_4) angehörig betrachten wollen; ebenso wenig die Tangentenfläche der Cuspidalcurve. Durch Anwendung von (II) auf die Berührungspunkte und weiteren Schnittpunkte der Haupttangenten würde man also für (T_4) erhalten

$$(57)\quad 2n(n-3) + n(\varkappa-6) + \varkappa'(n-3) - \varkappa(n-3) - 3r - (56).$$

Aber eine weitere Reduction ist erforderlich wegen der Punkte χ*). Die Haupttangenten eines Punktes, welcher einem beliebigen Punkte der Cuspidalcurve unendlich nahe liegt, weichen in ihrer Richtung von einander und von der Tangente der Cuspidalcurve unendlich wenig ab. Ganz anders verhalten sich die Haupttangenten in der Nähe eines point-clos, wie die analytische Darstellung zeigt. So lange $\frac{x}{y}$ endlich und von Null verschieden ist, verhält sich die Fläche in der Nähe eines solchen Punktes wie die folgende:

*) Man vergl. die ausführliche Discussion der Eigenschaften dieser Punkte bei Zeuthen, l. c. pag. 479 ff.

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 \pm dx\sqrt{xy} \quad \text{[Zeuthen, pag. 482]}.$$

Die Gleichung der Projection des Haupttangentenpaares in der z-Ebene für den unendlich nahen Punkt x_0, y_0, z_0 ist, wenn zur Abkürzung $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$, $\frac{x_0}{y_0} = \lambda$ gesetzt wird:

$$\left(\tfrac{3}{4}d + 2a\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\xi^2 + \left(4b\lambda^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}d\lambda\right)\xi\eta + \left(2c\lambda^{\frac{1}{2}} - \tfrac{d}{4}\lambda^2\right)\eta^2 = 0.$$

Damit diese Gleichung für einen gegebenen Werth von $\frac{\xi}{\eta}$ bestehe, hat $\lambda^{\frac{1}{2}}$ einer Gleichung vierten Grades zu genügen; d. h. die Haupttangenten in der Nähe eines point-clos nehmen in der singulären Ebene alle möglichen Lagen, und zwar eine gegebene Lage viermal an.

Von den weiteren Schnittpunkten einer solchen Haupttangente liegt einer dem Berührungspunkte unendlich nahe, und zwar in einer Entfernung, welche im Allgemeinen proportional ist zu x_0 oder y_0.

Der Ausdruck (57) ist daher noch um 4χ zu vermindern; man erhält

$$(58) \quad (T_4) = -8a + (\sigma + \sigma') + \tfrac{3}{2}(c + c') + 8(j + j') + \tfrac{23}{2}(\chi + \chi') + \tfrac{3}{2}(\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi').$$

Die Curve S_4 der Berührungspunkte der vierpunktigen Tangenten wird ausgeschnitten durch die von Clebsch berechnete Fläche S der Ordnung $11n - 24$, welche die Doppel- und Cuspidalcurve ganz enthalten muss; der Restschnitt hat die Ordnung

$$(59) \qquad S_4 = n(11n - 24) - 22b - 27c.\text{*)}$$

Die Coefficienten 22 und 27 erschliesst man entweder durch Anwendung der Correspondenzformel (III) [vgl. Satz (44) bei Schubert], oder auch durch Betrachtung des speciellen Falles der classenallgemeinen Fläche; für eine solche ist die Curve der Berührungspunkte der eigentlichen vierpunktigen Tangenten von der Ordnung $n'(11n' - 24)\cdot(n' - 1)$, die Fläche S von der Ordnung $11n'(n' - 1)^2 - 24$; der weitere Schnitt beider Flächen, von der Ordnung

$$n'(n' - 1)^2[11n'(n' - 1)^2 - 24] - n'(11n' - 24)(n' - 1),$$

muss ganz in der Doppel- und Cuspidalcurve liegen, deren Ordnungszahlen bekannt sind; daher die Coefficienten 22 und 27.

*) Wegen der ganz in der Fläche liegenden singulären Geraden j' und χ' wäre noch eine Reduction anzubringen; die Angabe derselben fehlt auf pag. 612 von Salmon-Fiedler's Raumgeometrie.

4. Die Anzahl der fünfpunktigen Tangenten.

Zu ihrer Bestimmung kann man von der Regelfläche $(T_3 T)$ oder auch von der (T_4) ausgehen. Schlägt man den letzteren Weg ein, so geben die folgenden Punkte zu unbrauchbaren Lösungen Anlass:

1) die Punkte β; die Tangente der Doppelcurve schneidet daselbst sechspunktig;
2) die sonstigen Punkte der Doppelcurve, welche der Curve S_4 angehören;
3) die $\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi'$ Punkte der Cuspidalcurve, in welchen die Schmiegungsebene mit der Tangentialebene zusammenfällt; die Tangente der Cuspidalcurve schneidet daselbst sechspunktig;
4) die Punkte χ; in jedem derselben giebt es vier fünfpunktig schneidende Tangenten.

Der Berechnung der Anzahl der unter 2) genannten Punkte muss Folgendes vorausgeschickt werden.

Lässt man der Schmiegungsebene eines Punktes der Doppelcurve die beiden zugehörigen Tangentialebenen entsprechen, so kann man auf das so definirte einstufige System von Ebenenpaaren die Formel (I) anwenden, und erhält

$$2s + \varrho - 2q$$

als Zahl der Punkte der Doppelcurve, in welchen die Schmiegungsebene mit einer Tangentialebene zusammenfällt; zu ihnen gehören auch die Punkte γ; es bleiben also noch

$$\varrho + \gamma + 4q - 6b \tag{60}$$

nicht singuläre Punkte der Doppelcurve, welche die erwähnte Eigenschaft haben; die Tangente der Doppelcurve schneidet fünfpunktig; sie hat mit der einen Flächenschale eine Inflexion, mit der anderen eine einfache Berührung.

Die in (56) bestimmte Regelfläche schneidet die Fläche noch in einer Curve der Ordnung

$$n(5\varrho - 2b - 2q + \beta + \gamma) - 16b;$$

lässt man daher einem Punkte der Doppelcurve die $4(n-4)$ einfachen Schnittpunkte der daselbst berührenden Haupttangenten entsprechen, so ergiebt sich zunächst als Zahl der Coincidenzen:

$$4nb - 32b + 4(5\varrho - 2b - 2q + \beta + \gamma);$$

abzuziehen ist die Zahl (60); ferner veranlassen die Punkte β, γ, t Reductionen; man erhält so

$$
\begin{aligned}
(61) \qquad & 4nb - 32\beta + 4(5\varrho - 2b - 2q + \beta + \gamma) \\
& - (\varrho + \gamma + 4q - 6b) - 8\beta - 9\gamma - 12t^{*})
\end{aligned}
$$

als Zahl der unter 2) aufgeführten Punkte.

Die Anzahl der Punkte 3) entspricht sich selbst dualistisch; aus diesem Grunde würde die Controle ihres Coefficienten durch Uebergang zur Reciprocalfläche illusorisch werden; ihre Vielfachheit lässt sich aber auf folgendem Wege ermitteln.

Man betrachte die Fläche sechster Ordnung

$$(z - axy)^2 - (y - bx^2)^3 = 0$$

mit der Cuspidalcurve $y = bx^2$, $z = abx^3$. Für den Punkt

$$P(x = y = z = 0)$$

fallen sowohl die Schmiegungsebene der Cuspidalcurve als die Tangentialebene der Fläche in die Ebene $z = 0$.

Sei $P_1 (x = \varepsilon,\ y = b\varepsilon^2,\ z = ab\varepsilon^2)$ ein dem Punkte P benachbarter Punkt der Cuspidalcurve, und ε von der ersten Ordnung unendlich klein; es sind zu untersuchen die Eigenschaften der Haupttangenten in solchen Punkten der Fläche, welche von P_1 um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung entfernt liegen. Ein solcher Punkt sei

$$P_2 \left(x = \varepsilon,\ y = b\varepsilon^3 + \lambda\varepsilon^2,\ z = ab\varepsilon^3 + (\lambda^{\frac{3}{2}} + a\lambda)\,\varepsilon^3\right)$$

wo λ endlich und von Null verschieden ist; nimmt man ihn zum neuen, innerhalb des genannten Spielraums veränderlichen Anfangspunkt, und bezieht auf ihn die Coordinaten ξ, η, ζ, so hat man in der ursprünglichen Gleichung der Fläche zu setzen:

$$x = \varepsilon + \xi, \quad y = (b + \lambda)\varepsilon^2 + \eta, \quad z = \left(ab + a\lambda + \lambda^{\frac{3}{2}}\right)\varepsilon^3 + \zeta.$$

Die Gleichung der Tangentialebene in P_2 ist

$$\zeta = p\xi + q\eta,$$

wo

$$p = \left(ab + a\lambda - 3b\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\varepsilon^2; \quad q = \left(a + \frac{3}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\varepsilon.$$

Man findet hieraus weiter für die Gleichung der Projection des Haupttangentenpaares in der z-Ebene

$$\frac{3}{4}\eta^2 + (2a\lambda^{\frac{1}{2}} - 3b)\varepsilon \cdot \eta\xi + 3(b^2 - b\lambda)\varepsilon^2 \cdot \xi^2 = 0,$$

woraus beiläufig folgt, dass man einen Punkt der parabolischen Curve erhält für $\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{12ab}{4a^2 + 9b}$, dass also die parabolische Curve einen Zweig durch den Punkt P schickt.

---

*) Die Coefficienten von β, γ, t verificirt man durch Betrachtung des speciellen Falles der classenallgemeinen oder ordnungsallgemeinen Fläche.

Zur Abkürzung sei

$$m = 2b - \frac{4}{3} a \lambda^{\frac{1}{2}} \pm 2\sqrt{\frac{4}{9} a^2 \lambda + b\lambda - \frac{4}{3} ab\lambda^{\frac{1}{2}}},$$

also

$$\eta = m\varepsilon\xi, \quad \zeta = (p + qm\varepsilon)\xi$$

die Gleichungen einer Haupttangente; setzt man diese in die Gleichung der Fläche ein, so erhält man nach Theilung mit ξ^3 die cubische Gleichung, von welcher die ξ-Coordinaten der drei weiteren Schnittpunkte abhängen:

$$b^3 \cdot \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^3 - 3b^2(m-2b) \cdot \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2 + \left((a^2+3b)m^2 - 12b^2 m - 3b^2\lambda + 12b^3\right) \cdot \frac{\xi}{\varepsilon}$$
$$+ (m-2b)\left[-3am\lambda^{\frac{1}{2}} - (m-2b)^2 + 6b\lambda\right] = 0.$$

Das Verschwinden des letzten Gliedes dieser Gleichung ist die Bedingung für eine vierpunktige Tangente; durch Einsetzen des Werthes von m und durch Rationalmachen erhält man

$$\left(\lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}a\right)\left[(3a^2+9b)\lambda - 6ab\lambda^{\frac{1}{2}} + a^2 b\right] = 0.$$

Die Curve S_4 schickt also drei Zweige durch den Punkt P; von den weiteren Schnittpunkten liegen zwei dem Berührungspunkte in erster Ordnung unendlich nahe. Der gesuchte Coefficient ist somit $3 \cdot 2$.*)

Durch jeden Punkt χ endlich schickt die Curve S_4 vier Zweige, welche die daselbst fünfpunktig schneidenden Geraden berühren; die letzteren sind Grenzlagen eigentlicher vierpunktiger Tangenten, sind also auch Erzeugende der Regelfläche (T_4). Daher die Reduction -8χ; ein fünfter Schnittpunkt liegt dem Berührungspunkte in zweiter Ordnung unendlich nahe.

Nach (59) beschreiben die einfachen Schnittpunkte der vierpunktigen Tangenten eine Curve der Ordnung

$$n(T_4) - 4(11a - 13n + 6c);$$

die Formel (I) giebt also als Zahl der Coincidenzen eines weiteren Schnittpunktes mit dem Berührungspunkte:

$$(n-8)(11a - 13n + 6c) + 4(T_4).$$

Hiervon ist abzuziehen

$$4\beta + (61) + 6(\sigma + 2r - 3c) + 8\chi.$$

Das Resultat ist

$$(62) \qquad (T_5) = -20a + \frac{35}{4}(c + c') - \frac{75}{4}(\sigma + \sigma') + \frac{85}{2}(j + j')$$
$$+ \frac{291}{4}(\chi + \chi') + 15(\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi').$$

---

*) Man vgl. die von Zeuthen in „Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Curver" gegebene Regel in Betreff der Vielfachheiten der Coincidenzen.

Zur Bestätigung kann man von der Regelfläche $(T_3 T)$ ausgehen, und dem Inflexionspunkte den einfachen Berührungspunkt entsprechen lassen. Diese Herleitung ist insofern bequemer, als die Punkte β, χ und die erwähnten $\sigma + 2r - 3c$ Punkte der Cuspidalcurve nicht zu Coincidenzen Anlass geben; nur die Tangenten in den Punkten (60) kommen als uneigentliche fünfpunktige Tangenten in Wegfall. Man erhält

$$(54) + (55) - (50) - (60),$$

übereinstimmend mit (62).

5. Berechnung von $(T_4 T)$ und (T_3^2).

Auch hier kann man zwei Wege einschlagen; will man von den vierpunktigen Tangenten ausgehen, so müssen zuvor (bT_4) und (cT_4) berechnet werden; weit schneller gelangt man zum Ziel, wenn man von den dreifachen Tangenten ausgeht, und jedem der Berührungspunkte jeden der beiden anderen entsprechen lässt.

Man braucht dann nur zu kennen die Zahlen (13), (20) und (45); die Anwendung von (I) giebt

$$(63)\quad (T_4 T) = 4 \cdot (20) - 6 \cdot (T^3) - 2 \cdot (45)$$
$$= -8a^2 + 112a + \left(\tfrac{3}{2}a - 52\right)(c + c') + (a + 84)(\sigma + \sigma')$$
$$- 224(j + j') - 394(\chi + \chi')$$
$$+ \left(\tfrac{3}{2}a - 78\right)(\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi').$$

Weniger einfach ist die Berechnung von (T_3^2); man muss von den Tangenten $(T_3 T)$ ausgehen, und dem einfachen Berührungspunkte die $n - 5$ weiteren Schnittpunkte entsprechen lassen. Nach (I) erhält man als Zahl der Coincidenzen

$$(64)\qquad (n - 7) \cdot (54) - 3 \cdot (55) + 5 \cdot (50).$$

Aber zu unbrauchbaren Coincidenzen geben Anlass diejenigen Tangenten $(T_3 T)$, welche ihren einfachen Berührungspunkt auf der Doppel- oder Cuspidalcurve haben; man bedarf also noch der Kenntniss der Zahlen (BT_3) und (CT_3).

Da die Haupttangenten, welche eine feste Gerade schneiden, eine Regelfläche vom Grade $\varkappa + \varkappa'$ bilden, so hat man nach (56)

$$(bT_3) = b(\varkappa + \varkappa') - 3(5\varrho - 2b - 2q + \beta + \gamma);$$

analog ist

$$(cT_3) = c(\varkappa + \varkappa') - 8r - 8\chi.$$

Die Coefficienten von r und χ sind nicht leicht direct zu erkennen; man verificirt sie aber durch eine andere Herleitung von (cT_3). Auf den ∞^2 Geraden, welche die Cuspidalcurve treffen, und anderswo die Fläche berühren, betrachte man den Berührungspunkt und einen weiteren Schnittpunkt als Punktepaar, und wende (II) an; es ergiebt sich so

$$(c\,T_3) = cn(n-4) + n(ac-2c-3\sigma-\chi) + c(a-3)(n-4)$$
$$-(n-4)(ac-3\sigma-\chi) - (cB) - 2(cC);$$

die Ausrechnung bestätigt die obigen Coefficienten.

Die Tangenten mit einem Berührungspunkt in einer Ebene, einem einfachen Schnittpunkt in einer zweiten Ebene bilden eine Regelfläche vom Grade $na + n^2 - 2n$ [vgl. (14)]; unter ihnen giebt es also

$$b(na+n^2-2n) - 2ba - 4bn,$$

welche die Doppelcurve treffen in Punkten, die in keiner der beiden Ebenen liegen. Die entsprechende Zahl für die Cuspidalcurve ist

$$c(na+n^2-2n) - 2ca - 3cn.$$

Durch Anwendung von (III) auf die oben erwähnten ∞^2 Punktepaare erhält man für die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der Tangenten $(b\,T_3)$

$$b(na+n^2-2n) - 2ba - 4bn$$
$$- b(a-4)(n-4) - 2b(b-2) - 2cb$$
$$= b(3a-n+c-12);$$

und für die der Tangenten $(c\,T_3)$:

$$c^2 - nc + 3ac - 8c.$$

Damit ist auch gegeben die Ordnung des Ortes der einfachen Schnittpunkte dieser Tangenten, nämlich

$$n\cdot(b\,T_3) - 3(3ab-nb+bc-12b) - 2b(\varkappa-12)$$

bzw.

$$n\cdot(c\,T_3) - 3(c^2-nc+3ac-8c) - 2c(\varkappa-8).$$

Lässt man die weiteren Schnittpunkte einer Tangente $(b\,T_3)$ dem Schnittpunkte mit der Doppelcurve entsprechen, so kann man (I) anwenden, um $(B\,T_3)$ zu erhalten, muss aber wegen der Punkte β, γ, t

$$2\beta(\varkappa-12) + 3\gamma(\varkappa-14) + 3t(\varkappa-18)$$

in Abzug bringen; man erhält

$$(B\,T_3) = \varrho\varkappa - 9nb + 150b - 9ab + 27\gamma + 54t + 9\beta$$
$$- 75\varrho + 30q + 5b\varkappa' - 3bc.$$

Für die Cuspidalcurve ist abzuziehen:

$$4(\sigma+2r-3c) + 4\beta(\varkappa-12) + \gamma(\varkappa-14) + 8\beta;$$

es wird

$$2(C\,T_3) = 2\sigma\varkappa - 5nc + 80c - 3c^2 + 5c\varkappa' - 40r - 40\chi$$
$$- 4(\sigma+2r-3c) - 9ac + 40\beta + 14\gamma.$$

Aus (64) erhält man jetzt

$$2\cdot(T_3^2) = (n-7)\cdot(54) - 3\cdot(55) + 5\cdot(50) - (B\,T_3) - 2(C\,T_3),$$

und nach Einsetzen der berechneten Zahlen und gehöriger Umformung:

$$(65)\quad 2(T_3^2) = \varkappa^2 + \varkappa'^2 + 108a + \frac{333}{4}(\sigma+\sigma') - \frac{213}{4}(c+c')$$
$$- \frac{489}{2}(j+j') - \frac{1717}{4}(\chi+\chi') - 81(\sigma+2r-3c-4j'-3\chi').$$

6. Einfluss der singulären Geraden j' und χ'.

Da diese ganz in der Fläche liegen, so treten sie in den meisten Fällen mit auf als uneigentliche Lösungen in der Zahl derjenigen Geraden, welche, in Bezug auf die Fläche, vier Bedingungen genügen. So gilt z. B. der Satz

$$(E^4) = n^2(2n^2 - 6n + 3), \text{*)}$$

welchen Schubert [a. a. O. Satz (7)] einem grossen Theile seiner weiteren Resultate zu Grunde legt, nicht mehr, wenn Gerade j' oder χ' vorhanden sind; die Coefficienten der dann erforderlichen Reduction scheinen nicht leicht zu bestimmen zu sein.

Die Curve der Berührungspunkte solcher in einstufiger Mannigfaltigkeit vorhandenen Tangenten, welche noch zwei Berührungsbedingungen zu genügen haben, enthält ebenfalls die Geraden j' und χ' ganz; handelt es sich also um die Restcurve, so sind Vielfache von j' und χ' in Abzug zu bringen. Anstatt nun zu versuchen, diese Reductionen anzubringen bei denjenigen Sätzen, welche zur Bestimmung der Ordnungszahl gedient haben, thut man besser, den folgenden Schluss zu Hülfe zu nehmen: Ist die Ordnung der Curve bekannt bis auf Glieder mit j' und χ', so ist die Classe des Ortes der Tangentialebenen der Fläche längs dieser Curve bekannt bis auf Glieder mit j und χ. Um über die Coefficienten zu entscheiden, braucht man dann nur j' und χ' gleich Null zu setzen, d. h. man kann sich auf die Betrachtung der Punktfläche beschränken. Es möge dieses an einigen Beispielen gezeigt werden.

Nach (59) bilden die Berührungspunkte der vierpunktigen Tangenten eine Curve der Ordnung

$$S_4 = 11a - 13n + 6c + \tau_1 j' + \tau_2 \chi';$$

die bei der Herleitung vernachlässigten j' und χ' sind hier mit vorläufig unbestimmten Coefficienten hinzugefügt. Geht man zu einer Punktfläche über, so hat man also für die Classe des Ortes der Tangentialebenen der Fläche längs der Curve

$$\mathsf{K} = 11a - 13n' + 6c' + \tau_1 j + \tau_2 \chi.$$

*) Es ist bemerkenswerth, dass dieser Ausdruck für $n = 3$ die Zahl 27 der Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung giebt; aus diesem Beispiele scheint hervorzugehen, dass eine einfache Gerade, welche man einer Punktfläche beilegt, in der Zahl (E^4) einfach zählt.

Es ist K die Anzahl der mit P beweglichen Schnittpunkte der Curve S_4 mit der ersten Polarfläche eines beliebigen Punktes P; die festen Schnittpunkte liegen in der Doppel- und Cuspidalcurve; es sind die Punkte β, die Punkte (61), die $\sigma + 2r - 3c$ Punkte der Cuspidalcurve und die Punkte χ, durch welche letztere die Curve vier Zweige schickt. Man hat mithin die Gleichung

$$\mathsf{K} = (n-1)\,S_4 - 8\beta - (61) - 9(\sigma+2r-3c) - 4\cdot 3\chi,$$

wo nun in S_4 j' und χ' gleich Null zu setzen sind, oder es muss identisch sein

$$\begin{aligned}(n-1)(11a-13n+6c) - 8\beta - (6\gamma-26b+6j+11\varrho+10\beta)\\ -(11a-13n'+6c'+\tau_1 j+\tau_2\chi) - 9(\sigma+2r-3c) - 12\chi = 0.\end{aligned}$$

Die Entwicklung der linken Seite giebt

$$(4-\tau_1)\,j + (9-\tau_2)\,\chi = 0,$$

also $\tau_1 = 4$, $\tau_2 = 9$, und

$$S_4 = 11a - 13n + 6c + 4j' + 9\chi'.$$

Die Curve der einfachen Berührungspunkte der Tangenten (T_3T) hat mit der Doppelcurve gemeinschaftlich die $\varrho + \gamma + 4q - 6b$ Punkte [vgl. (60)], die Punkte (BT_3), und die Punkte j, durch welche sie $\varkappa - 12$ Zweige schickt, welche hier einander und die nach Zeuthen sog. singuläre Tangente berühren; mit der Cuspidalcurve die Punkte (CT_3) und die Punkte χ, durch welche sie $\varkappa - 20$ Zweige schickt. Ihre Ordnung ist nach (54)

$$O = a\varkappa + (n-12)\,\varkappa' + 12n - 12a - 12c + \tau_1 j' + \tau_2\chi',$$

und man hat wieder für eine Punktfläche die identische Gleichung

$$\begin{aligned}(n-1)\,O = O' + 3(\varrho+\gamma+4q-6b) + (BT_3) + 3\,(CT_3)\\ + 2j\,(\varkappa-12) + 3\chi\,(\varkappa-20).\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von den für (BT_3) und (CT_3) erhaltenen Ausdrücken reducirt sie sich auf

$$(-3-\tau_1)\,j + (24-\tau_2)\,\chi = 0,$$

womit denn die Coefficienten bestimmt sind.

Ein ähnliches Verfahren könnte man anwenden zur Bestimmung der Ordnung des Ortes der Inflexionspunkte der Tangenten (T_3T). Diese Curve geht nicht durch die points-pinces; es würde sich also nur handeln um die Anzahl der sonstigen Punkte der Doppel- und Cuspidalcurve, welche als feste Schnittpunkte der Curve mit der ersten Polarfläche auftreten.

März 1879.

On the correspondence of Homographies and Rotations.

By

A. Cayley at Cambridge.

It is a fundamental notion in Prof. Klein's theory of the „Icosahedron“ that homographies correspond to rotations (of a solid body about a fixed point): in such wise that considering the homographies which correspond to two given rotations, the homography compounded of these corresponds to the rotation compounded of the two rotations.

Say the two homographies are $A + Bp + Cq + Dpq = 0$, $A_1 + B_1 q + C_1 r + D_1 qr = 0$, then, eliminating q, the compound homography is $A_2 + B_2 p + C_2 r + D_2 pr = 0$, where

$$A_2, B_2, C_2, D_2 = B_1 A - A_1 C,\ B_1 B - A_1 D,\ D_1 A - C_1 C,\ D_1 B - C_1 D,$$

and the theorem is, that corresponding to these, we have rotations depending on the parameters (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ respectively, such that the third rotation is that compounded of the first and second rotations. The question arises to find the expression for the parameters of the homography in terms of the parameters of the corresponding rotation.

The rotation (λ, μ, ν) is taken to denote a rotation through an angle ϑ about an axis the inclinations of which to the axes of coordinates are f, g, h, the values of λ, μ, ν then being $= \tan\frac{1}{2}\vartheta\cos f$, $\tan\frac{1}{2}\vartheta\cos g$, $\tan\frac{1}{2}\vartheta\cos h$ respectively: $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ and $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ have of course the like significations; and then, if (λ, μ, ν) refer to the first rotation, and $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ to the second rotation, the values of $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ for the rotation compounded of these are taken to be*):

---

*) The numerators might equally well have been $\lambda + \lambda_1 - (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)$, etc.: but there is no essential difference, we pass from one set of formulae to the other by reversing the signs of all the symbols: and hence by properly fixing the sense of the rotations, the signs may be made to be $+$ as in the text.

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda_1 + \mu\nu_1 - \mu_1\nu,$$
$$\mu_2 = \mu + \mu_1 + \nu\lambda_1 - \nu_1\lambda,$$
$$\nu_2 = \nu + \nu_1 + \lambda\mu_1 - \lambda_1\mu,$$

each divided by

$$1 - \lambda\lambda_1 - \mu\mu_1 - \nu\nu_1;$$

and if we then write for λ, μ, ν the quotients x, y, z each divided by w, and in like manner for λ_1, μ_1, ν_1 and λ_2, μ_2, ν_2, the quotients x_1, y_1, z_1 each divided by w_1, and x_2, y_2, z_2 each divided by w_2, the formulae for the composition of the rotations are

$$x_2 = xw_1 + x_1w + yz_1 - y_1z,$$
$$y_2 = yw_1 + y_1w + zx_1 - z_1x,$$
$$z_2 = zw_1 + z_1w + xy_1 - x_1y,$$
$$w_2 = ww_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1;$$

and the question is to express A, B, C, D as functions of (x, y, z, w), such that A_1, B_1, C_1, D_1 denoting the like functions of (x_1, y_1, z_1, w_1), A_2, B_2, C_2, D_2 shall denote the like functions of (x_2, y_2, z_2, w_2).

It is found that the required conditions are satisfied by assuming

$$A, B, C, D = ix - y, \quad -iz + w, \quad -iz - w, \quad -ix - y,$$

(where $i = \sqrt{-1}$ as usual): in fact we then have

$$\begin{aligned} A_2 &= B_1A - A_1C \\ &= (-iz_1 + w_1)(ix - y) - (ix_1 - y_1)(-iz - w) \\ &= i(xw_1 + x_1w + yz_1 - y_1z) - (yw_1 + y_1w + zx_1 - z_1x) \\ &= -y_2 + ix_2, \end{aligned}$$

as it should be: and we verify in like manner the values of B_2, C_2 and D_2 respectively.

The result consequently is that we have the homography

$$(ix - y) + (-iz + w)p + (-iz - w)q + (-ix - y)pq = 0$$

corresponding to the rotation $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$: where $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ are the parameters of rotation, $\tan\frac{1}{2}\vartheta\cos f$, $\tan\frac{1}{2}\vartheta\cos g$, $\tan\frac{1}{2}\vartheta\cos h$.

I remark as regards the geometrical theory that if we consider

---

Assuming this to be so, if we then reverse the order of the component rotations, we have for the new compound rotation the like formulae with the signs $-$ instead of $+$; but this in passing. The formulae, virtually due to *Rodrigues*, are given in my paper „on the motion of rotation of a solid Body" Camb. Math. Journal t. III (1843).

two lines J, K fixed in space, and a third line L fixed in the solid body and moveable with it; then, for any given position of the solid body, the three lines J, K, L are directrices of a hyperboloid the generatrices whereof meet each of the three lines: and these generatrices determine, say on the fixed lines J, K, two series of points corresponding homographically to each other: that is, corresponding to any given position of the solid body we have a homography. But it is not immediately obvious how we can thence obtain the foregoing analytical formulae.

Cambridge, 3. April 1879.

Ueber die Jacobi'sche Modulargleichung vom achten Grad.

Von F. Brioschi in Mailand.

§ 1.

Die wichtigen Resultate, welche Prof. Klein*) neuerdings hinsichtlich der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen erhalten hat, haben meine Aufmerksamkeit auf einige Untersuchungen zurückgelenkt, die ich vor mehreren Jahren hinsichtlich der Jacobi'schen Modulargleichungen vom achten Grad begonnen hatte. In einer kurzen Note, welche dem Istituto Lombardo di Scienze im Januar 1868 vorgelegt wurde, veröffentlichte ich die ausgerechneten Werthe der Coefficienten dieser Gleichung, aber die scheinbare Complicirtheit dieser Ausdrücke gestattete mir damals nicht zu den Folgerungen zu gelangen, welche Hr. Klein auf anderem Wege gewonnen hat.

Die Berechnung der allgemeinen Jacobi'schen Modulargleichung vom achten Grad lässt sich sehr leicht auf folgende Weise bewerkstelligen. Es seien $z_\infty, z_0, z_1, \cdots z_6$ die Wurzeln, und

$$\sqrt{z_\infty} = -a_0\sqrt{-7}, \qquad \sqrt{z_s} = a_0 + p_s, \qquad (s = 0, 1, \cdots 6)$$

wo

$$p_s = \varrho^{6s}a_1 + \varrho^{3s}a_2 + \varrho^{5s}a_3, \qquad \left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right).$$

Setzt man nun:

$$s_r = \sum_0^6 {}_s\, p_s^r,$$

so hat man zuvörderst:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 6\cdot 7\cdot a, \quad s_4 = 4\cdot 7\cdot b, \quad s_5 = 10\cdot 7\cdot c,$$
$$s_6 = 6\cdot 7(d + 14a^2), \qquad s_7 = 7(e + 98ab),$$

wo a, b, c, d, e folgende cyklische Functionen der a_1, a_2, a_3 bezeichnen:

$$(1)\quad \begin{aligned} &a = a_1a_2a_3, \quad b = a_2^3a_3 + a_3^3a_1 + a_1^3a_2, \quad c = a_2^2a_3^3 + a_3^2a_1^3 + a_1^2a_2^3, \\ &d = a^2 + a_2a_3^5 + a_3a_1^5 + a_1a_2^5, \quad e = 7ab + a_1^7 + a_2^7 + a_3^7. \end{aligned}$$

*) Ueber Gleichungen 7. Grades (Sitzungsberichte der Societät zu Erlangen, 4. März, 20. Mai 1878; vergl. auch Mathematische Annalen, Bd. XIV).

Diese fünf Grössen sind nicht unabhängig, sondern es bestehen zwischen ihnen folgende zwei Relationen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &ae - bd + c^2 - 7a^2b = 0,\\ &ce - d^2 - a^2d - b^3 - 2abc - 7a^4 = 0. \end{aligned}$$

Aus den Formeln für die Potenzsummen ergiebt sich nun unmittelbar:

$$\prod_s (x-p_s) = x^7 - 14ax^4 - 7bx^3 - 14cx^2 - 7dx - e,$$

und die Jacobi'sche Modulargleichung achten Grades entsteht durch Ausmultipliciren folgender drei Factoren:

$$(z+7a_0^2)\prod_s(\sqrt{z}-a_0-p_s)\prod_s(\sqrt{z}+a_0+p_s) = 0.$$

Die Coefficienten der Jacobi'schen Gleichung sind also aus a_0 und den fünf Grössen a, b, c, d, e, zwischen denen die Relationen (2) bestehen, zusammengesetzt. Man findet:

$$(3)\qquad z^8 - 14Az^6 + 14Bz^5 - 7Cz^4 + 14Dz^3 - 7Ez^2 + (7^2\cdot a_0^2\cdot F - H^2)z - 7a_0^2H^2 = 0,$$

wo offenbar:

$$H = \prod_s (a_0+p_s) = a_0^7 + 14a_0^4a - 7a_0^3b + 14a_0^2c - 7a_0d + e$$

und

$$F = 7^5.a_0^{12} - 14\cdot 7^3\cdot a_0^8A - 14\cdot 7^2\cdot a_0^6B - 7\cdot 7a_0^4C - 14a_0^2D - E.$$

Die Coefficienten A, B, C, D, E haben folgende Werthe:

$$A = 2a_0^4 + 6a_0a + b;\quad B = 8a_0^6 - 20a_0^3a - 10a_0^2b - 10a_0c - 14a^2 - d;$$

$$\begin{aligned} C = {} & 30a_0^8 - 252a_0^5a + 14a_0^4b + 140a_0^3c + 42a_0^2(2a^2+d) +\\ & + 2a_0(14ab+e) + 7(8ac-b^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = {} & 16a_0^{10} - 184a_0^7a + 84a_0^6b + 28a_0^5c + 14a_0^4(22a^2 - 7d) -\\ & - 4a_0^3(14ab+3c) + 14a_0^2(b^2 - 12ac) + 14a_0(bc - 3ad) + 7bd -\\ & - 14c^2 - 2ae; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = {} & 20a_0^{12} - 172a_0^9a + 190a_0^8b - 360a_0^7c + 28a_0^6(38a^2 - d) -\\ & - 4a_0^5(126ab - 19e) + 14a_0^4(9b^2 - 32ac) - 28a_0^3(5bc - 19ad) -\\ & - 2a_0^2(49bd - 70c^2 - 26ae) + 2a_0(14cd - 3be) + 4ce - 7d^2. \end{aligned}$$

Eliminirt man zwischen den beiden Relationen (2) die Grösse e, so erhält man folgende Beziehung, welche man an Stelle der zweiten Bedingung (2) setzen kann:

$$c^3 + ab^3 + 27a^5 - 9a^2bc = (d - 4a^2)(bc - ad - 5a^3).$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerlegt sich in die beiden Factoren:

$$P = c + a^{\frac{1}{3}} b + 3a^{\frac{5}{3}}, \quad Q = c^2 + a^{\frac{2}{3}} b^2 + 9a^{\frac{10}{3}} - 3a^2 b - 3a^{\frac{5}{3}} c - a^{\frac{1}{3}} bc.$$

Setzt man also, unter k einen numerischen Coefficienten verstanden:

$$(4) \qquad d - 4a^2 = k a^{\frac{1}{3}} P,$$

so folgt:

$$Q = k a^{\frac{1}{3}} \left(bc - 9a^3 - k a^{\frac{4}{3}} P\right)$$

oder:

$$c^2 + a^{\frac{2}{3}} b^2 + 3(k^2 + 3k + 3) a^{\frac{10}{3}} + (k^2 - 3) a^2 b + (k^2 - 3) a^{\frac{5}{3}} c - (k+1) a^{\frac{1}{3}} bc = 0.$$

Nimmt man nun $k = -3$, so ist das erste Glied dieser Gleichung nichts anderes als das Quadrat von P, und also hat man in diesem Falle folgende Relationen:

$$d = 4a^2, \qquad c + a^{\frac{1}{3}} b + 3a^{\frac{5}{3}} = 0,$$

aus denen vermöge der ersten Gleichung (2) folgt:

$$a^{\frac{1}{3}} e = -b^2 + 5a^{\frac{4}{3}} b - 9a^{\frac{8}{3}}.$$

Unter der hiermit eingeführten Voraussetzung werden also die Coefficienten $A, B, C, \cdots$ Functionen von a_0, a, b allein, und man hat z. B.:

$$B = (a - a_0^3)(12a - 8a_0^3) + 10(a^{\frac{1}{3}} - a_0)(a_0 b - 3a^{\frac{5}{3}}),$$

also $B = 0$, wenn man überdiess $a^{\frac{1}{3}} = a_0$ setzt.

Führt man dementsprechend in die oben angegebenen Werthe von $A, B, C, \cdots$ statt a, c, d, e folgende Werthe ein:

$$(5) \quad a = a_0^3, \; c = -a_0(b + 3a_0^4), \; d = 4a_0^6, \; a_0 e = -b^2 + 5a_0^4 b - 9a_0^8,$$

so kommt:

$$A = b + 8a_0^4, \quad B = 0, \quad C = -9A^2, \quad D = 0, \quad E = 10A^3,$$

$$a_0 H = A^2, \quad F = 7^5 \cdot a_0^{12} - 14 \cdot 7^3 \cdot a_0^8 A + 63 \cdot 7 a_0^4 A^2 - 10A^3,$$

und also:

$$7^2 \cdot a_0^2 \cdot F - H^2 = \frac{1}{7a_0^2}\left[7^8 a_0^{16} - 14 \cdot 7^6 a_0^{12} A + 63 \cdot 7^4 a_0^8 A^2 - 70 \cdot 7^2 a_0^4 A^3 - 7A^4\right].$$

Schreibt man endlich

$$z = y\sqrt{-A}, \qquad \frac{7a_0^2}{\sqrt{-A}} = m,$$

so *erhält man statt* (3) *folgende einfache Gleichung:*

$$(6) \qquad y^8 + 14y^6 + 63y^4 + 70y^2 + 4ty - 7 = 0,$$

wo

$$t=\frac{1}{4m}(m^8+14m^6+63m^4+70m^2-7).$$

Diese Gleichung (6) [offenbar die einfachste unter den Jacobi'schen Gleichungen achten Grades] wurde von Prof. Klein der Erlanger Societät zuerst in der Sitzung vom 4. März 1878 mitgetheilt.

Betonen wir noch ausdrücklich, dass wir, um zu ihr zu gelangen, nur folgende zwei Annahmen gemacht haben:

$$a=a_0^3,\quad d-4a^2=-3a^{\frac{4}{3}}P;$$

denn die anderen Relationen (5) sind nur Folgerungen aus diesen Gleichungen und den Identitäten (2). Nun lässt sich die zweite dieser Gleichungen folgendermassen schreiben:

$$d-a^2+3a^{\frac{2}{3}}b+3a^{\frac{1}{3}}c+6a^2=0.$$

Substituirt man hier für a, b, c, d die Werthe (1), so erweist sich die linke Seite als Cubus der linken Seite folgender Gleichung:

$$\text{(7)}\qquad \sqrt[3]{a_2a_3^5}+\sqrt[3]{a_3a_1^5}+\sqrt[3]{a_1a_2^5}=0,$$

und die beiden eingeführten Annahmen reduciren sich also auf (7) und diese:

$$a_0=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichung (7) mit dem Factor $\sqrt[3]{a_1^2a_2}$, so kommt:

$$\text{(8)}\qquad a_0^2a_3+a_0a_1^2+a_1a_2^2=0,$$

und in ähnlicher Weise bei Multiplication mit a_3 bez. a_2:

$$\text{(9)}\quad a_0^2a_2+a_0a_3^2+a_3a_1^2=0,\quad a_0^2a_1+a_0a_2^2+a_2a_3^2=0.$$

Daher ist für $A_0=7a_0^3$:

$$z_\nu\sqrt{z_\nu}=A_0+\varrho^\nu A_1+\varrho^{4\nu}A_2+\varrho^{2\nu}A_3,\quad z_\infty\sqrt{z_\infty}=A_0\sqrt{-7},$$

und also genügen die Cuben der Wurzeln z der Jacobi'schen Gleichung (6) *selbst einer Jacobi'schen Gleichung.*

§ 2.

Wir wollen jetzt mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ fünf Grössen bezeichnen, welche ebenso aus drei Zahlen c_1, c_2, c_3 zusammengesetzt sind, wie die a, b, c, d, e nach Formel (1) aus den a_1, a_2, a_3. Dann bestehen zwischen den $\alpha, \beta, \cdots$ jedenfalls zwei Relationen nach Art der (2).

Betrachtet man jetzt

$$\beta=c_2^3c_3+c_3^3c_1+c_1^3c_2$$

als eine ternäre biquadratische Form, setzt

$$\beta_1=\frac{1}{4}\frac{\partial\beta}{\partial c_1},\quad \beta_{11}=\frac{1}{4\cdot 3}\frac{\partial^2\beta}{\partial c_1^2}\cdots,$$

so berechnen sich für die drei Covarianten:

$h=2^5\cdot\Sigma(\pm\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33})$; $k=2^6\cdot 3^2\cdot\Sigma(\beta h)^{rs}\beta_r h_s$; $\Theta=2^3\cdot 3\cdot\Sigma(\pm\beta_1 h_2 k_3)$
folgende Ausdrücke:

$$h=6\alpha^2-\delta;\quad k=\varepsilon^2-24\alpha\beta\varepsilon+584\alpha^2\beta^2+40\beta\gamma^2-960\alpha^3\gamma-232\alpha\gamma\delta,$$
$$\Theta=-\varepsilon^3-4\alpha(129\delta^3+3147\alpha^2\delta^2+7447\alpha^4\delta+20648\alpha^6)+4\beta\delta(7\beta\varepsilon+66\gamma\delta+$$
$$+2792\alpha^2\gamma-25\alpha\beta^2)+32\beta(\beta^3\gamma-209\alpha^3\beta^2-76\alpha\beta\gamma^2+1297\alpha^4\gamma).$$

Man setze nunmehr $\beta=0$. Dann reduciren sich die Relationen zwischen den $\alpha, \beta, \gamma\cdots$ auf folgende:

$$\alpha\varepsilon=-\gamma^2,\quad \gamma\varepsilon=\delta^2+\alpha^2\delta+7\alpha^4,$$

also:

$$\gamma^3=-\alpha(\delta^2+\alpha^2\delta+7\alpha^4),\quad \alpha\varepsilon^2=-\gamma(\delta^2+\alpha^2\delta+7\alpha^4),$$
$$\alpha\varepsilon^3=-(\delta^2+\alpha^2\delta+7\alpha^4)^2.$$

Die Werthe von k, Θ werden somit:

$$\alpha k=-\gamma(\delta^2+233\alpha^2\delta+967\alpha^4),$$
$$\alpha\Theta=\delta^4-514\alpha^2\delta^3-12573\alpha^4\delta^2-29774\alpha^6\delta-82592\alpha^8,$$

und setzt man hier, dem Werthe von h entsprechend, für $\delta\equiv 6\alpha^2-h$, so kommt:

$$\alpha k=-\gamma(h^2-5\cdot 7^2\cdot\alpha^2 h+7^4\alpha^4),$$
$$\alpha\Theta=h^4+10\cdot 7^2\alpha^2h^3-9\cdot 7^4\alpha^4h^2+2\cdot 7^6\alpha^6 h-7^7\alpha^8.$$

Ferner folgt vermöge derselben Substitution:

$$7^2\gamma^3=-\alpha(49h^2-13\cdot 7^2\alpha^2h+7^4\alpha^4)$$

und also

$$\Theta^2-k^3=12^3h^7.$$

Die Bedingung $\beta=0$ wird vermöge der Gleichungen (7), (8), (9) befriedigt, wenn man setzt:

$$(10)\qquad c_1=\sqrt[3]{a_3a_1^2},\quad c_2=\sqrt[3]{a_1a_2^2},\quad c_3=\sqrt[3]{a_2a_3^2},$$

also:

$$a_1=a_0\frac{c_1}{c_3},\quad a_2=a_0\frac{c_2}{c_1},\quad a_3=a_0\frac{c_3}{c_2},$$

und da dann gleichzeitig

$$\alpha=a_0^3,\quad \delta=-a_0^2(b+3a_0^4)$$

so folgt:

$$h=a_0^2A,$$

wo A wie früher $=b+8a_0^4$. *Der Werth* (t) *in Gleichung* (6) *kann also folgendermassen ausgedrückt werden:*

$$4t=\frac{\Theta}{h^3\sqrt{-h}},$$

und nimmt man jetzt mit Prof. Klein $k=g_2$, $\Theta=g_3\sqrt{27}$, $\Delta=g_2^3-27g_3^2=-12^3h^7$, *so ergiebt sich:*

$$(11)\qquad 4t=216\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}.$$

§ 3.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei:

$$u_s = \varrho^s c_2{}^2 + \varrho^{4s} c_3{}^2 + \varrho^{2s} c_1{}^2,$$
$$v_s = \varrho^{6s} c_2 c_3 + \varrho^{3s} c_3 c_1 + \varrho^{5s} c_1 c_2.$$

Dann findet man folgende Relationen:

$$\Sigma u = \Sigma v = 0, \qquad \Sigma u^2 = \Sigma v^2 = 0, \qquad \Sigma uv = 7\beta,$$
$$\Sigma u^3 = \Sigma v^3 = 7\cdot 6\alpha^2, \qquad \Sigma u^2 v = 7(\delta + \alpha^2), \qquad \Sigma uv^2 = 7\cdot 3\alpha^2,$$
$$\Sigma u^4 = 7\cdot 4(\beta^2 - 2\alpha\gamma), \quad \Sigma u^3 v = 7\cdot 3\alpha\gamma, \quad \Sigma u^2 v^2 = 7(\beta^2 + 2\alpha\gamma),$$
$$\Sigma uv^3 = 7\cdot 3\alpha\gamma, \qquad \Sigma v^4 = 7\cdot 4\alpha\gamma;$$
$$\Sigma u^5 = 7\cdot 10(\gamma^2 - 2\alpha^2\beta), \quad \Sigma u^4 v = 7(\beta\delta - \gamma^2 + 17\alpha^2\beta), \quad \Sigma u^3 v^2 = 7(2\beta\delta + \gamma^2),$$
$$\Sigma v^5 = 7\cdot 10\alpha^2\beta, \qquad \Sigma uv^4 = 7(10\alpha^2\beta + \gamma^2), \qquad \Sigma u^2 v^3 = 7\cdot 11\cdot\alpha^2\beta;$$
$$\Sigma u^6 = 7\cdot 6(\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma + 20\alpha^4), \quad \Sigma u^5 v = 7\cdot 5(\beta^3 - \alpha\beta\gamma - 5\alpha^4 + 2\alpha^2\delta),$$
$$\Sigma u^4 v^2 = 7(\delta^2 - 4\alpha^2\delta + 10\alpha\beta\gamma + 9\alpha^4),$$
$$\Sigma v^6 = 7\cdot 6(\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta + 13\alpha^4), \quad \Sigma uv^5 = 7\cdot 5(\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta + 8\alpha^4),$$
$$\Sigma u^2 v^4 = 7(4\alpha^2\delta + 8\alpha\beta\gamma + 11\alpha^4), \quad \Sigma u^3 v^3 = 7(\beta^3 + 6\alpha^2\delta + 6\alpha\beta\gamma + 6\alpha^4);$$
$$\Sigma u^7 = 7(\varepsilon^2 - 14\alpha\beta\varepsilon + 156\alpha^2\beta^2 - 2\beta\gamma^2 - 208\alpha^3\gamma + 2\alpha\gamma\delta),$$
$$\Sigma v^7 = 7(\beta\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\gamma\delta + 104\alpha^3\gamma),$$
$$\Sigma u^6 v = 7(14\beta\gamma^2 - 29\alpha^2\beta^2 + 6\alpha^2\delta - 11\alpha\gamma\delta + 52\alpha^3\gamma - 6\alpha^4),$$
$$\Sigma uv^6 = 7(15\alpha^2\beta^2 + 56\alpha^3\gamma),$$
$$\Sigma u^5 v^2 = 7(27\alpha^2\beta^2 - 2\beta\gamma^2 + 2\alpha^2\delta + 8\alpha\gamma\delta - 6\alpha^3\gamma - 2\alpha^4),$$
$$\Sigma u^2 v^5 = 7(13\alpha^2\beta^2 + 2\beta\gamma^2 + 3\alpha\gamma\delta + 38\alpha^3\gamma),$$
$$\Sigma u^4 v^3 = 7(9\alpha^2\beta^2 + 3\beta\gamma^2 + 3\alpha^2\delta + 3\alpha\gamma\delta + 10\alpha^3\gamma - 3\alpha^4),$$
$$\Sigma u^3 v^4 = 7(23\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\gamma\delta + 18\alpha^3\gamma).$$

Daher sind die Coefficienten der Gleichung siebenten Grades, welche, unter ω eine unbestimmte Grösse verstanden, folgende Wurzeln hat:

$$x_s = u_s + \omega\cdot v_s, \qquad (s = 0, 1, \cdots 6)$$

Functionen der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Nimmt man nun ω als Wurzel folgender Gleichung:

$$\omega^2 + \omega + 2 = 0$$

so ergiebt sich als Gleichung siebenten Grades diese:

$$x^7 - 7\omega\beta x^5 + 7\omega h x^4 - 7(2\omega + 5)\beta^2 x^3 + 14(2\omega + 3)\beta h x^2 +$$
$$+ 7((3\omega - 2)\beta^3 - (\omega + 3)h^2)\, x - k - (7\omega - 38)\beta^2 h = 0,$$

wo h, k die im vorigen Paragraphen eingeführten Covarianten von β sind.

Nimmt man endlich noch an, dass c_1, c_2, c_3 die Werthe (10) haben und also $\beta = 0$ ist, *so wird die Gleichung siebenten Grades für* $x = \xi h^{\frac{1}{3}}$:

$$\xi^7 + 7\omega\xi^4 - 7(\omega+3)\xi - \frac{k}{h^2\sqrt[3]{h}} = 0$$

oder:

$$\xi^7 + 7\omega\xi^4 - 7(\omega+3)\xi + 12\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = 0.$$

Diese Gleichung, der man verschiedene Formen geben kann (man vergl. die citirten Arbeiten von Prof. Klein), ist dieselbe, zu der Hr. Hermite in seiner Note *Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré* (Annali di Matematica, 1859) seiner Zeit gelangt ist.

§ 4.

Bezeichnet man mit $f(y)$ die linke Seite der Gleichung (6) und mit $\varphi(y)$ folgenden Ausdruck:

(12) $$\varphi(y) = 2y^7 + 29y^5 + 139y^3 + 187y + 7t$$

so folgt aus (6):

(13) $$f'(y) \cdot \varphi(y) = 28(108 + t^2);$$

andererseits aber, ebenfalls aus (6):

(14) $$f'(y) \cdot \frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

und also:

$$14(108 + t^2)\frac{d\sqrt{y}}{dt} = -\varphi(y)\sqrt{y}.$$

Der Ausdruck $\varphi(y)\sqrt{y}$ ist daher seinerseits Quadratwurzel der Wurzel einer Jacobi'schen Gleichung achten Grades. Schreibt man dementsprechend

(15) $$\sqrt{y'} = -\varphi(y)\sqrt{y}$$

so hat man zunächst:

$$14(108 + t^2)\frac{d\sqrt{y}}{dt} = \sqrt{y'},$$

und beachtet man jetzt, dass für $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ aus (11) folgende Beziehungen hervorgehen:

$$t = 6\sqrt{3}\sqrt{J-1}, \qquad 108 + t^2 = 108J,$$

so erhält man weiter:

(16) $$168\sqrt{3}\,J\sqrt{J-1} \cdot \frac{d\sqrt{y}}{dJ} = \sqrt{y'}.$$

Jetzt seien:

$$\sqrt{y''} = (y^5 + 11y^3 + 33y)\sqrt{y},$$
$$\sqrt{y'''} = (y^4 + 9y^2 + 14)\sqrt{y}.$$

Man berechnet dann leicht:

$$
(17)\begin{cases}
168\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\dfrac{d\sqrt{y'}}{dJ}=7\cdot 108\cdot J\cdot\sqrt{y}+4t(2\sqrt{y'}-\sqrt{y''})+48\sqrt{y'''},\\[2ex]
168\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\dfrac{d\sqrt{y''}}{dJ}=11\,(t\sqrt{y''}-12\sqrt{y'''}),\\[2ex]
168\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\dfrac{d\sqrt{y'''}}{dJ}=32\sqrt{y'}+81\sqrt{y''}+9t\sqrt{y'''}.
\end{cases}
$$

Hiermit ist Zweierlei bewiesen: 1) *dass die Ausdrücke* $\sqrt{y'}$, $\sqrt{y''}$, $\sqrt{y'''}$ *ebenso wie* $\sqrt{y}$ *die Quadratwurzeln aus den Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung achten Grades sind*, 2) *dass jeder dieser Ausdrücke einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung genügt.*

Des Weiteren ergiebt sich aus (15) vermöge (6):

$$y\sqrt{y'}=-\psi(y)\sqrt{y}$$

wo

$$\psi(y)=y^6+13y^4+47y^2-ty+14.$$

Bezeichnet man jetzt mit $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Y'}$ die Ausdrücke:

$$\sqrt{Y}=y\sqrt{y}\,,\qquad \sqrt{Y'}=-\psi(y)\sqrt{y}$$

so ergiebt sich aus (16):

$$56\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\frac{d\sqrt{Y}}{dJ}=\sqrt{Y'}\,.$$

Die Eigenschaft also, welche am Ende von § 1. *für* $\sqrt{Y}$ *bewiesen wurde,* — nämlich Quadratwurzel der Wurzel einer Jacobi'schen Gleichung achten Grades zu sein —, *überträgt sich auf* $\sqrt{Y'}$. *Sie überträgt sich zugleich auf* $\sqrt{Y''}$, $\sqrt{Y'''}$:

$$\sqrt{Y''}=(y^7+14y^5+62y^3+67y+4t)\sqrt{y}\,,\qquad \sqrt{Y'''}=-(y^2+5)\sqrt{y}\,;$$

denn man findet folgende Relationen:

$$168\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\frac{d\sqrt{Y'}}{dJ}=108J\sqrt{Y}+16t\sqrt{Y'}+120\sqrt{Y''}+40t\sqrt{Y'''};$$

$$168\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\frac{d\sqrt{Y''}}{dJ}=-16\sqrt{Y'}+7t\sqrt{Y''}-252\sqrt{Y'''}$$

$$168\sqrt{3}\cdot J\sqrt{J-1}\cdot\frac{d\sqrt{Y'''}}{dJ}=5\,[3\sqrt{Y''}+t\sqrt{Y'''}]\,.$$

§ 5.

Unter $\varphi(y)$ den Ausdruck (12) verstanden werde jetzt gesetzt:

$$\xi=\varrho\,\varphi(y),$$

wo ϱ einen von y unabhängigen Parameter bedeuten soll. Dann folgt aus (13):

(18) $$\xi = \frac{m}{f'(y)} \text{ und } m = 28 \cdot 108 \cdot \varrho \cdot J.$$

Sei ferner $\Sigma \xi^\nu = \sigma_\nu$, so erhält man durch abwechselnden Gebrauch der beiden für ξ gegebenen Darstellungsweisen:

$$\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = 2m\varrho,\ \sigma_3 = 12m\varrho^2 t,\ \sigma_4 = 86m\varrho,\ \sigma_5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 m\varrho^2 t,$$

$$\sigma_6 = \frac{22}{9} m\varrho(1159 + 20m\varrho^3 t^2),\quad \sigma_7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 817 m\varrho^2 t,$$

$$\sum \frac{1}{\xi} = -\frac{2^6 \cdot 3}{m} \cdot t,$$

und also für $m\varrho = 28$ (was $\varrho t = \sqrt{\frac{J-1}{J}}$ bedingt):

$$\xi^8 - 28\xi^6 - 2^4 \cdot 7 \cdot \sqrt{\frac{J-1}{J}} \cdot \xi^5 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \xi^4 - 2^5 \cdot 7\sqrt{\frac{J-1}{J}} \cdot \xi^3 - \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 23}{3^3} \cdot \xi^2$$

$$- \frac{2^6 \cdot 7^2}{3^3} \cdot \frac{J-1}{J} \cdot \xi - 2^4 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{J-1}{J}}\, \xi - 7 = 0.$$

Bezeichnet man nun mit $p(u)$ die bekannte Weierstrass'sche Function, so ist*):

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{3g_2}}\left[p\left(\frac{2\omega}{7}\right) + p\left(\frac{4\omega}{7}\right) + p\left(\frac{6\omega}{7}\right)\right].$$

Ich zeigte ferner schon vor einigen Jahren**), dass, unter v den Jacobi'schen Coefficienten $B_{\frac{n-1}{2}}$ verstanden, der im Zähler und Nenner der einer Primzahl n entsprechenden Transformationsformel auftritt, und der durch die Formel definirt ist:

(19) $$v = \mu\sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{\varkappa\varkappa'}}\, \mu,$$

wo μ den Multiplicator, λ, k die beiden Moduln bedeutet, — dass dann folgende Formel Statt hat:

$$\sum p\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right) = -\frac{n}{2\sqrt{3}}\sqrt{g_2}\,\frac{\varkappa\varkappa'^2}{\sqrt{1-\varkappa^2\varkappa'^2}}\,\frac{d\log v}{d\varkappa},\qquad \left(\alpha = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}\right).$$

Es folgt also:

$$\xi = -\frac{7}{3} \cdot \frac{\varkappa\varkappa'^2}{\sqrt{1-\varkappa^2\varkappa'^2}} \cdot \frac{d\log v}{d\varkappa} = -\frac{28}{3}\sqrt{J(J-1)}\,\frac{d\log v}{dJ},$$

indem J, wie bekannt, $= \frac{4}{27} \cdot \frac{(1-\varkappa^2\varkappa'^2)^3}{\varkappa^4\varkappa'^4}$ ist.

Andererseits geben die Gleichungen (14), (18):

$$\xi = -\frac{m}{4}\,\frac{d\log y}{dt} = -14\sqrt{J(J-1)} \cdot \frac{d\log y}{dJ}.$$

Ein Vergleich der beiden Werthe giebt:

---

*) Müller. De transformatione functionum ellipticarum. Dissertatio inauguralis.

**) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Janvier 1875.

$$\sqrt{y} = \nu^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{Y} = \nu,$$

d. h. *ebensowohl* ν *als* $\sqrt[3]{\nu}$ *sind Quadratwurzeln von Wurzeln Jacobi'scher Gleichungen*, ein Satz, der für eine beliebige Primzahl n mit Leichtigkeit aus der Reihenentwickelung geschlossen wird.

Der so definirte neue Multiplicator y, den ich als *Klein'schen Multiplicator* zur Unterscheidung von dem gewöhnlich gebrauchten *Jacobi'schen Multiplicator* bezeichnen will, hängt mit letzterem durch die Formel (19) zusammen:

$$y = \mu \left(\frac{\lambda \lambda'}{\varkappa \varkappa'}\right)^{\frac{1}{3}},$$

die sich auch so schreiben lässt:

$$y = \mu \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^{\frac{1}{12}}$$

wo Δ, Δ' die Discriminanten der beiden biquadratischen Polynome sind, welche sich unter den Quadratwurzeln der beiden durch die Transformation verbundenen elliptischen Differentiale befinden. Unter $f(x)$ die fraglichen Polynome verstanden, bezeichne ich dementsprechend mit Hrn. Klein als *Normalform* des elliptischen Integrals die folgende:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta} \cdot dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

April 1879.

Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade.

Von

Felix Klein in München.

Die Modulargleichung, welche der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen entspricht, hat eine Galois'sche Gruppe von 168 Substitutionen. Wird es möglich sein, solche Gleichungen siebenten oder achten oder auch 168^{ten} Grades, welche dieselbe Gruppe besitzen, durch ausführbare Processe auf die Modulargleichung zurückzuführen? Und welches sind die einfachsten Mittel, deren man sich zu diesem Zwecke zu bedienen hat? Dies sind diejenigen Fragen, welche sich naturgemäss aufdrängen mussten, als es gelungen war, die allgemeinen Gleichungen *fünften* Grades mit der Modulargleichung für Transformation fünfter Ordnung in Verbindung zu setzen*). Ich glaube, dass diese Fragen unerledigt geblieben waren, als ich, vor nun einem Jahre, mich denselben zum ersten Male zuwandte. In einer ersten Note, welche am 4. März 1878 der Erlanger Societät vorgelegt wurde**), zeigte ich, *dass sich die fragliche Zurückführung in der That ermöglicht, dass man dabei aber einer Hülfsgleichung vierten Grades bedarf, welche man nicht vermeiden kann.* In einer zweiten, gleichbenannten Note vom 20. Mai desselben Jahres entwickelte ich sodann in allgemeinen Umrissen, *wie man rechnerisch diese Zurückführung zu realisiren hat.* — Ein Hauptheil dieser Untersuchungen bezog sich auf die Formulirung des Transformationsproblems siebenter Ordnung der elliptischen Functionen; ich habe denselben seitdem für sich in ausgeführter Form in diesen Annalen veröffentlicht***). Indem ich im Folgenden an diese Formulirung anknüpfe,

*) Vergl. Kronecker: Ueber Gleichungen siebenten Grades, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1858; vergl. ferner wegen der Gruppirungsverhältnisse den neuen Aufsatz von Nöther im 15. Bande dieser Annalen, p. 89 ff.

**) Ueber Gleichungen siebenten Grades.

***) Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen; diese Annalen XIV, pag. 428 ff.

gelingt es mir die allgemeine Beantwortung des Hauptproblems auf einige wenige Sätze zurückzuführen; ein Eingehen in das rechnerische Detail, welches jedenfalls auch von grossem Interesse sein würde, habe ich um so eher unterlassen können, als sich Herr Gordan bereits seit einiger Zeit mit demselben beschäftigt und seine Resultate demnächst in diesen Annalen veröffentlichen wird. Dagegen habe ich in meiner Darstellung den Principien eine solche Form gegeben, dass sie nicht nur das zunächst in Betracht kommende Problem der Gleichungen mit 168 Substitutionen erledigen, sondern überhaupt erkennen lassen, *wie man ähnliche Probleme bei beliebigen höheren Gleichungen zu behandeln, und, was wichtiger ist, wie man sie aufzustellen hat.* Die so entstehende *allgemeine Methode zur Behandlung höherer Gleichungen* (welche natürlich noch mannigfacher Entwickelung fähig sein wird) schliesst ebensowohl die Auflösung cyklischer Gleichungen durch Wurzelzeichen, als die Kronecker'sche Behandlung der Gleichungen fünften Grades in sich. Man kann meine Methode geradezu als eine Verallgemeinerung der letzteren betrachten, wie mir auch andere zerstreute Bemerkungen Kronecker's von Nutzen gewesen sind*). Doch glaube ich, dass der Gesichtspunkt, unter dem ich Kronecker's und Brioschi's hierher gehörige Untersuchungen auffasse, und vermöge dessen ich zu meiner Verallgemeinerung schreite, neu ist und erst aus meinen Untersuchungen über das Ikosaeder**), resp. aus meinen früheren Bemühungen, eine geometrische Deutung für die Resolventen algebraischer Gleichungen zu finden***), erwachsen ist. Bei Kronecker oder Brioschi wird nirgends ein allgemeiner Grund angegeben, *wesshalb* die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades als die einfachsten rationalen Resolventen der Gleichungen fünften Grades anzusehen sind; indem ich diese Jacobi'schen Gleichungen als Vertreterinnen eines *Systems von* 60 *ternären linearen Substitutionen auffasse, welches mit der Gruppe der* 60 *geraden Vertauschungen von fünf Dingen isomorph ist,* habe ich von Anfang an das Princip, nach welchem man in allen Fällen die Normalgleichungen, in die sich die gegebenen durch rationale Resolventenbildung transformiren lassen, a priori charakterisiren kann. Diess sind dann z. B. im Falle der Gleichungen siebenten Grades mit 168 Substitutionen *nicht* die Jacobi'schen Gleichungen achten Grades.

Mit diesem Probleme *der rationalen Transformation gegebener Gleichungen auf gewisse Normalformen* beschäftigt sich der erste

---

*) Vergl. zumal eine Notiz in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1861, pag. 615, über die Zurückführung gewisser Gleichungen $(2n+2)^{\text{ten}}$ Grades auf die Jacobi'schen Gleichungen vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade.

**) Annalen XII, vergl. besonders daselbst Abschnitt II, pag. 527 ff.

***) Annalen IV, pag. 346 ff.

Abschnitt des Folgenden. Ich habe mich dabei, was die speciellen Probleme des fünften, siebenten oder achten Grades betrifft, mit Vorliebe wieder geometrischer Ueberlegungen bedient, obwohl das algebraische Schlussresultat ebenso durch den allgemeinen analytischen Ansatz erzielt werden kann. Denn die Geometrie veranschaulicht und erleichtert nicht nur, sie hat auch in diesen Untersuchungen das Vorrecht der *Erfindung*. Die geometrische Theorie der Jacobi'schen Gleichungen achten Grades, wie ich sie in § 8. des Folgenden auseinandersetze, ist es gewesen, von der ich bei allen diesen Untersuchungen ausging, und zwar war es hier wieder der l. c. angegebene Paul Serret'sche Satz, der mich von vorneherein die Existenz eines ausgezeichneten Netzes von Flächen zweiter Ordnung erkennen liess. — Uebrigens schliesst dieser erste Abschnitt mit der Angabe gewisser Gruppen linearer Substitutionen, welche für die allgemeine Theorie der Modulargleichungen von Wichtigkeit sein müssen.

Im zweiten Abschnitte handelt es sich, allgemein zu reden, um *algebraische* Transformation gegebener Gleichungen auf Normalformen mit nur einem Parameter. Inzwischen lasse ich, um der Klarheit der Darstellung nicht durch Unbestimmtheit derselben Eintrag zu thun, nunmehr den Ausblick auf beliebig gegebene Gleichungen bei Seite und beschäftige mich nur mit den Problemen mit 168 Substitutionen. Ich möchte namentlich hervorheben, dass ich nicht nur die Zurückführung auf die Modulargleichung, wie sie gewünscht wird, explicite bewerkstellige, sondern dass ich auch zeige, wesshalb man die Modulargleichung in der von mir gegebenen Form zweckmässigerweise als Definition einer Fundamentalirrationalität erachtet.

Abschnitt I.

Normalformen, welche sich durch rationale Transformation herstellen lassen.

§ 1.

Fundamentalsatz.

Was unter einem endlichen Systeme (einer endlichen Gruppe) von N homogenen linearen Substitutionen der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_n$ zu verstehen sei, ist durch die Benennung selbst wohl hinreichend erklärt. Man beachte im Folgenden vor Allem, dass ein analoges System homogener linearer Substitutionen allemal auch für die contragredienten Variabelen $u_1, u_2, \cdots u_n$ gegeben ist, sofern man verlangt, dass die bilineare Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

bei den simultanen Substitutionen der x und u ungeändert bleibt. Dieses contragrediente System umfasst ev. in seiner Gesammtheit dieselben Substitutionen, wie das ursprüngliche; aber darum sind die Substitutionen der x und u, welche simultan auftreten, noch nicht nothwendig identisch.

Ich will nun annehmen, dass ein anderes System von $\frac{N}{\nu}$ homogenen linearen Substitutionen bei μ Variablen $y_1, y_2, \cdots y_\mu$ gegeben sei, und zwar sei dieses System mit demjenigen, dem die x unterworfen werden, *isomorph* *). Der Isomorphismus kann entweder ein *holoedrischer* sein, also so beschaffen, dass jeder Substitution der x nur *eine* Substitution der y entspricht, sowie umgekehrt jeder Substitution der y nur *eine* Substitution der x (dann ist $\nu = 1$), oder er mag in der Weise meriedrisch sein, dass freilich einer Substitution der y beliebig viele (ν) Substitutionen der x entsprechen, doch einer Substitution der x immer nur *eine* Substitution der y. — Die zu den y gehörigen contragredienten Variablen nenne ich weiterhin $v_1, v_2, \cdots v_\mu$.

Dann sage ich, *dass es immer solche ganze homogene Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$ giebt:*

$$Y_1, Y_2, \cdots Y_\mu,$$

welche sich bei den linearen Substitutionen, denen die x unterworfen werden, ihrerseits wie die $y_1, y_2, \cdots y_\mu$ homogen linear substituiren.

Der Beweis ergiebt sich, indem man einen allgemeinen Process betrachtet, der solche Functionen $Y_1, Y_2, \cdots Y_\mu$ liefert. Man wähle irgend eine ganze homogene Function der x:

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

welche nur *der* Bedingung genügen muss, dass zwischen den Werthen, welche sie bei den N Substitutionen der x annimmt und die ich der Reihe nach

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots \varphi^{(N)}$$

nennen will, gewisse sogleich zu definirende lineare homogene Relationen mit numerischen Coefficienten *nicht* bestehen. Durch die entsprechenden Substitutionen wird eine der contragredienten Variablen v, etwa v_1, ebenso in N Ausdrücke übergeführt, welche aber alle lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von $v_1, v_2, \cdots v_\mu$ sind. Man nenne diese Werthe einen Augenblick $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots v^{(N)}$ und ordne sie den entsprechenden φ zu, indem man die bilineare Function bildet:

$$\varphi^{(1)} v^{(1)} + \varphi^{(2)} v^{(2)} + \cdots + \varphi^{(N)} v^{(N)}.$$

Offenbar bleibt diese bilineare Form völlig ungeändert, wenn man die x und die y, und also die v, *simultan* den zusammengehörigen Sub-

*) Siehe C. Jordan, Traité des substitutions etc. pag. 56.

stitutionen unterwirft. Ersetzt man also jetzt die $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots v^{(N)}$ durch ihre Ausdrücke in $v_1, v_2, \cdots v_\mu$, ordnet nach letzteren und schreibt

$$\varphi^{(1)} v^{(1)} + \varphi^{(2)} v^{(2)} + \cdots + \varphi^{(N)} v^{(N)} = Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + \cdots Y_\mu v_\mu,$$

so sind die $Y_1, Y_2, \cdots Y_\mu$ ohne Weiteres Functionen der geforderten Beschaffenheit. Sie müssen sich bei den Substitutionen der x wie die y substituiren, damit die bilineare Form $Y_1 v_1 + \cdots + Y_\mu v_\mu$ bei den simultanen Substitutionen der x, v völlig ungeändert bleiben kann. — Wie man sieht, sind die Y lineare Aggregate der $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \cdots \varphi^{(N)}$, und die einzige Bedingung, der die Function φ genügen muss, ist daher die, *dass diese linearen Aggregate nicht identisch verschwinden.*

Der so geschilderte allgemeine Process kann auf mannigfache Weise modificirt werden, wenn man eingehendere Kenntniss der Substitutionssysteme der x und der y besitzt. Ein Beispiel, dem sich in der Folge noch andere anreihen (§§ 5., 9., 10.), sei dieses. Es mögen Functionen der y und v bekannt sein:

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots,$$

welche sich bei den in Betracht kommenden Substitutionen gar nicht ändern. Es sollen andererseits gewisse Functionen

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots$$

der y, v und

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots$$

der x bekannt sein, welche bei den simultanen Substitutionen gleichzeitig folgende s Werthe annehmen:

$$f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \cdots f_s^{(i)},$$

resp.

$$\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \cdots \varphi_s^{(i)}.$$

Gelingt es dann, von den Formen:

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, \sum_{k=1,\ldots s}' f_k^{(i)} \cdot \varphi_k^{(i)},$$

in denen die y, v als Veränderliche betrachtet werden sollen, irgend eine lineare Contravariante zu bilden:

$$Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + \cdots + Y_\mu v_\mu,$$

wo die Y neben numerischen Coefficienten nur noch die x enthalten werden, so sind die Y wieder Functionen der geforderten Beschaffenheit.

In der That, da die Grundformen $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, \Sigma' f_k^{(i)} \cdot \varphi_k^{(i)}$ bei den zusammengehörigen Substitutionen der x, y völlig ungeändert bleiben, so wird es auch jede Covariante thun, insbesondere unsere lineare Contravariante. —

§ 2.

Anwendung auf die Theorie der Gleichungen.

Mit jedem endlichen Systeme von N Substitutionen der Variablen $x_1, x_2, \cdots x_n$ hängt ein algebraisches Problem zusammen, das mit einer Gleichung, deren Galois'sche Gruppe N Permutationen enthält, äquivalent ist. Es seien

$$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$$

die Gesammtheit derjenigen ganzen Functionen der x, welche bei den linearen Substitutionen, denen die x unterworfen werden, ungeändert bleiben. Die Zahlenwerthe, welche diese $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \cdots$ bei unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_n$ annehmen, seien gegeben. Dann besteht das gemeinte Problem in der Aufgabe: *aus den Φ die x zu bestimmen.* Ich werde dementsprechend von einem Probleme „der x" sprechen.

Ebenso giebt es ein Problem „der y"; und die Bedeutung des im vorigen Paragraphen aufgestellten Satzes ist offenbar die: *dass es ganze rationale Functionen der x giebt, welche von einem Probleme „der y" abhängen,* oder auch: *dass es möglich ist, das Problem „der x" auf rationalem Wege auf das Problem „der y" zurückzuführen.*

Unter diesen allgemeinen Begriff des Problems „der x" ordnet sich nun, wenn man will, als besonderer Fall die Auflösung jeder Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ ein. Die linearen Substitutionen, denen die x unterworfen werden, sind dann blosse *Vertauschungen* der x unter einander, nämlich diejenigen, welche in ihrer Gesammtheit die Galois'sche Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ ausmachen. Besteht diese Gruppe aus der Gesammtheit aller Vertauschungen, so decken sich die ungeändert bleibenden Functionen der x mit den symmetrischen Functionen; die Functionen $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \cdots$, welche gegeben sein sollen, sind also nichts Anderes als die *Coefficienten* der Gleichung. Ist aber die Galois'sche Gruppe kleiner, so sind die $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \cdots$ die Gesammtheit derjenigen *ganzen* Functionen der x, welche man nach Galois als *adjungirt* bezeichnet*).

Mit diesem besonderen Systeme linearer Substitutionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$ mag jetzt, im Sinne des vorigen Paragraphen, ein System linearer Substitutionen der $y_1, y_2 \cdots y_n$ holoedrisch oder auch meriedrisch isomorph sein. Dann ist es also nach dem Gesagten möglich, *die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ auf rationalem Wege auf das Problem der y zurückzuführen.*

---

*) Dieser Auffassung entsprechend stelle ich für alle Gleichungen, welche einen Affect besitzen, das Problem auf, das volle System dieser ganzen Functionen zu bilden (selbstverständlich mit den zwischen seinen Formen bestehenden identischen Relationen). Eine solche Gleichung sollte dann nicht in der Weise angeschrieben werden, dass man nur die Werthe ihrer Coefficienten mittheilt, sondern es sollten die Werthe aller dieser ganzen Functionen explicite angegeben werden.

Die allgemeine Methode nun, welche ich behufs rationaler Umformung der algebraischen Gleichungen vorschlage, besteht einfach darin, *dass ich zunächst die kleinste Zahl μ suche, bei welcher ein Isomorphismus der gewollten Art zwischen den Vertauschungen der x und linearen Substitutionen der $y_1 \cdots y_\mu$ möglich ist, und dass ich dann die Gleichung $f(x) = 0$ durch das „Problem der y“ ersetze.*

Ich will annehmen, dass man aus $f(x) = 0$ durch rationale Substitutionen das Glied mit x^{n-1} fortgeschafft habe, dass also $\Sigma x = 0$ ist. So sind die Vertauschungen der x im Grund ein System linearer Substitutionen bei nur $(n-1)$ Veränderlichen, und die Minimalzahl μ daher jedenfalls nicht grösser als $(n-1)$. Ist sie aber kleiner als $(n-1)$, so ist durch meine Umformung ein Fortschritt erzielt, der sich einmal darin ausspricht, dass ein Problem, welches von Hause aus $(n-1)$ Parameter enthält, deren nur mehr μ umfasst, der aber andererseits auch die Reihenentwickelungen vereinfacht, deren man sich bei Berechnung der Wurzeln x zu bedienen hat. Ist $\Sigma x = 0$, so lassen sich die x, wie selbstverständlich, immer als Integrale von linearen Differentialgleichungen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung betrachten*); meine Reduction zeigt, dass man bis zu linearen Differentialgleichungen der μ^{ten} Ordnung hinabsteigen kann.

An der so formulirten Methode möchte ich übrigens nur dann unbedingt festhalten, wenn die Galois'sche Gruppe von $f(x) = 0$ *einfach* ist. Ist sie zusammengesetzt, so kann man sie durch eine Reihenfolge einfacher Gleichungen ersetzen und jede für sich nach der angegebenen Methode behandeln. Aber es kann sein, dass sich die so entstehenden Probleme der y in zweckmässiger Weise zu einem einzigen Probleme von etwas complicirterem Charakter zusammenziehen lassen. In diesem Sinne fasse ich die Methode auf, mit der Gordan diejenigen Gleichungen fünften Grades behandelt hat, in welcher die vierte und dritte Potenz der Unbekannten fehlt (diese Annalen Bd. XIII). Den 120 Vertauschungen der fünf Wurzeln x wird hier ein isomorphes System linearer Substitutionen entsprechend gesetzt, welches *zwei* Reihen von je zwei Variabelen in der Art betrifft, dass einer *geraden* Permutation der x eine binäre lineare Substitution jeder Variablenreihe entspricht, einer *ungeraden* Permutation überdies eine Vertauschung der beiden Reihen.

§ 3.

Einfachste Beispiele.

1) Es sei $f(x) = 0$ *cyklisch.* Die Aufeinanderfolge der x in dem einen in Betracht kommenden Cyklus werde durch die Reihenfolge der

*) Dies die sog. Methode der *Differentialresolventen*, mit der sich englische Algebristen: Boole, Cockle, Harley u. A. beschäftigt haben.

Indices angegeben, und da diese Indices modulo n betrachtet werden, so schreibe ich $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$. Dann ist die Minimalzahl $\mu = 1$, die entsprechende Gruppe linearer Substitutionen ersetzt die *eine* Variable y_1 der Reihe nach durch:

$$y_1, \ \varrho^{-1} y_1, \ \varrho^{-2} y_1, \ \cdots \varrho^1 y_1$$

wo ϱ eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Das contragrediente v_1 geht gleichzeitig über in:

$$v_1, \ \varrho v_1, \ \varrho^2 v_1, \ \cdots \varrho^{n-1} v_1.$$

Als Functionen φ der x wähle man x_0 selbst. So entsteht die bilineare Form:

$$x_0 \cdot v_1 + x_1 \cdot \varrho v_1 + x_2 \cdot \varrho^2 v_1 + \cdots + x_{n-1} \cdot \varrho^{n-1} v_1,$$

oder, wenn man den Coefficienten von v_1 mit Y_1 bezeichnet:

$$Y_1 = x_0 + \varrho x_1 + \varrho^2 x_2 + \cdots + \varrho^{n-2} x_{n-2}.$$

Unser Ansatz liefert also den Ausdruck des Lagrange. Zugleich ist die einzige ungeändert bleibende ganze Function von y_1 die n^{te} Potenz: y_1^n; das Problem „der y“ besteht also im vorliegenden Falle einfach darin, aus einer bekannten Grösse die n^{te} Wurzel zu ziehen.

2) Es sei n eine Primzahl und die Gleichung $f(x) = 0$ *metacyklisch*. Die Vertauschungen der $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$, welche die Galois'sche Gruppe ausmachen, sind durch folgende Formel gegeben:

$$x_\nu' = x_{\alpha\nu+\beta},$$

wo α alle Werthe $1, 2, \cdots (n-1)$, β die Werthe $0, 1, 2, \cdots (n-1)$ durchlaufen soll. Alle diese Vertauschungen erwachsen, wenn man folgende zwei Substitutionen beliebig wiederholt und combinirt:

$$(1) \qquad \begin{cases} 1) & x_\nu' = x_{\nu+1}, \\ 2) & x_{g\nu}' = x_\nu, \end{cases}$$

g bedeutet dabei eine Primitivwurzel modulo n. Man bilde nunmehr folgende $(n-1)$ Ausdrücke:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_0 + \varrho x_1 + \varrho^2 x_2 + \cdots + \varrho^{n-1} x_{n-1}, \\ y_2 &= x_0 + \varrho^2 x_1 + \varrho^4 x_2 + \cdots + \varrho^{2(n-1)} x_{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= x_0 + \varrho^{n-1} x_1 + \varrho^{2(n-1)} x_2 + \cdots + \varrho x_{n-1}. \end{aligned}$$

Offenbar erhält man, den Vertauschungen 1), 2) entsprechend, folgende Substitutionen der y:

$$\text{ad 1)} \quad y_k' = \varrho^{-k} y_k,$$
$$\text{ad 2)} \quad y_k' = y_{gk}.$$

Ich werde nunmehr unter der Gesammtheit der metacyklischen Vertauschungen $x_\nu' = x_{\alpha\nu+\beta}$ die Hälfte herausgreifen, indem ich dem α auferlege, quadratischer Rest zu sein. An Stelle der beiden Substitutionen (1) muss ich dann als erzeugende Substitutionen die folgenden nehmen:

$$(2)\qquad \begin{cases} 1) & x_\nu' = x_{\nu+1}, \\ 2) & x_{g^2\nu}' = x_\nu . \end{cases}$$

Dann sondern sich die y in zwei Aggregate von nur $\frac{n-1}{2}$ Variablen, die sich unter sich permutiren: die einen haben nur quadratische Reste als Indices, die anderen quadratische Nichtreste. Indem ich die ersteren herausgreife, *habe ich für die halbe metacyklische Gruppe ein isomorphes System linearer Substitutionen bei nur $\frac{n-1}{2}$ Variablen, das aus Combination, resp. Wiederholung folgender Operationen erwächst:*

$$\text{ad 1)}\quad y_{k^2}' = \varrho^{-k^2}\cdot y_{k^2},$$
$$\text{ad 2)}\quad y_{k^2}' = y_{g^2k^2}.$$

Hier schreibe man statt k^2 wieder k, indem man unter k denjenigen Werth von $\sqrt{k^2}$ versteht, der unterhalb $\frac{n}{2}$ liegt. Dergleichen verstehe man unter $\pm gk$ den kleinsten positiven Rest (mod. n) von $+gk$ oder von $-gk$, der unterhalb $\frac{n}{2}$ liegt. Dann hat man bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_{\frac{n-1}{2}}$$

folgende zwei Substitutionen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{ad 1)} & y_k' = \varrho^{-k^2} y_k, \\ \text{ad 2)} & y_k' = y_{\pm gk}. \end{cases}$$

Ich werde später auf diese Formeln zurückkommen. — Offenbar ist das so erzielte Substitutionssystem, was die *Zahl* der Variablen angeht, das beste, das man zur Darstellung der metacyklischen Gruppe aufstellen kann, sobald $\frac{n-1}{2}$, wie bei $n = 5, 7, 11$, eine Primzahl ist.

§ 4.

Die Formeln von Kronecker und Brioschi für den fünften Grad.

Ich zeige nunmehr, wie sich die von Kronecker und Brioschi für den fünften Grad gegebenen Formeln in den hier entwickelten Gedankengang einordnen.

Es sei eine Gleichung fünften Grades $f(x) = 0$ gegeben, bei der die Quadratwurzel aus der Discriminante adjungirt ist, und deren Galois'sche Gruppe demnach nur die 60 geraden Vertauschungen der fünf Wurzeln $x_0, x_1, \cdots x_4$ umfasst. Dann handelt es sich zunächst darum, ein isomorphes System linearer Substitutionen bei möglichst wenig

Variablen zu finden. Die Zahl μ dieser Variablen kann nicht 2 sein: denn es giebt keine endliche Gruppe von 60 binären linearen Substitutionen der hier gewollten Beschaffenheit (die Zahl der binären Ikosaedersubstitutionen ist 120). Dagegen kann $\mu = 3$ gewonnen werden. Denn wir kennen für $\mu = 3$ ein isomorphes Substitutionssystem: *das ist das System, welches bei den Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades auftritt.* Nennt man die Variablen A_0, A_1, A_2, so entsteht das fragliche System durch Combination folgender drei Operationen (siehe Annalen XII, pag. 529, 530):

$$(4)\quad \begin{cases} 1)\ A_0' = A_0, \quad A_1' = \varepsilon^4 A_1, \quad A_2' = \varepsilon A_2, \\ 2)\ A_0' = -A_0, \quad A_1' = -A_2, \quad A_2' = -A_1, \\ 3)\ \begin{cases} \sqrt{5}\, A_0' = A_0 + A_1 + A_2, \\ \sqrt{5}\, A_1' = 2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\, A_1 + (\varepsilon + \varepsilon^4) A_2, \\ \sqrt{5}\, A_2' = 2A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\, A_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) A_2. \end{cases} \end{cases}$$

(Unter ε ist hier eine fünfte Einheitswurzel verstanden.) — Ungeändert bleiben bei diesen Substitutionen vier Functionen von A_0, A_1, A_2, die ich früher als A, B, C, D bezeichnete; das Problem „der A" besteht also darin, aus den gegebenen Werthen von A, B, C, D die A_0, A_1, A_2 zu berechnen.

Mit diesem Probleme ist nun *ungefähr* gleichbedeutend, dass man die Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades löst, deren Wurzeln sind:

$$z_\infty = 5 A_0^2, \qquad z_\nu = (A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{4\nu} A_2)^2;$$

denn die Coefficienten dieser Gleichung setzen sich aus A, B, C, und umgekehrt diese aus jenen zusammen. Dagegen ist D *nicht* durch die Coefficienten der Jacobi'schen Gleichung gegeben; D stellt sich vielmehr als vierte Wurzel aus der Discriminante der Gleichung dar und diese Wurzel muss ausdrücklich adjungirt werden, wenn sich die Lösung der Jacobi'schen Gleichung mit dem Probleme der A decken soll (Annalen XII, pag. 534, Note). Es ist also richtiger, in dieser Theorie nicht von der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades sondern von dem „Probleme der A" zu sprechen, und *implicite* ist das in den hierher gehörigen Untersuchungen von Kronecker und Brioschi auch der Fall. Jedenfalls müssen wir hier, getreu unserem allgemeinen Ansatze, die Aufgabe nunmehr so stellen: *aus fünf beliebigen Grössen x_0, x_1, $\cdots x_4$ soll man solche drei Functionen bilden, welche sich bei den 60 geraden Vertauschungen der x wie die A_0, A_1, A_2 ternär linear substituiren.*

Zu dem Zwecke seien zunächst die Substitutionen angegeben, welche drei den A_0, A_1, A_2 contragrediente Variable, die ich B_0, B_1, B_2 nennen will, bei den Operationen (4) erleiden. Man findet:

$$(5)\quad \begin{cases} \text{ad 1)}\ B_0' = B_0, \quad B_1' = \varepsilon B_1, \quad B_2' = \varepsilon^4 B_2, \\ \text{ad 2)}\ B_0' = -B_0, \ B_1' = -B_2, \ B_2' = -B_1, \\ \text{ad 3)} \begin{cases} \sqrt{5}\cdot B_0' = B_0 + 2B_1 + 2B_2, \\ \sqrt{5}\cdot B_1' = B_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)B_1 + (\varepsilon+\varepsilon^4)B_2, \\ \sqrt{5}\cdot B_2' = B_0 + (\varepsilon+\varepsilon^4)B_1 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)B_2. \end{cases} \end{cases}$$

Es handelt sich ferner darum, zu wissen, welche Vertauschungen der x man den Substitutionen (4) entsprechend zu setzen hat. Zu dem Zwecke identificire man die x_ν einen Augenblick mit folgenden fünfwerthigen Functionen der A (Annalen XII, pag. 521):

$$\varepsilon^\nu(-A_1(4A_0^2-A_1A_2)) + \varepsilon^{4\nu}(+A_2(4A_0^2-A_1A_2)) \\ + \varepsilon^{2\nu}(+2A_0A_1^2-A_2^3) \quad + \varepsilon^{3\nu}(-2A_0A_2^2+A_1^3).$$

Dann findet man folgende Permutationen der x:

$$\begin{array}{llllll} \text{ad 1)} & x_0' = x_4, & x_1' = x_0, & x_2' = x_1, & x_3' = x_2, & x_4' = x_3; \\ \text{ad 2)} & x_0' = x_0, & x_1' = x_4, & x_2' = x_3, & x_3' = x_2, & x_4' = x_1; \\ \text{ad 3)} & x_0' = x_0, & x_1' = x_2, & x_2' = x_1, & x_3' = x_4, & x_4' = x_3. \end{array}$$

Nehmen wir jetzt, um dem Resultat nicht vorzugreifen, zuvörderst eine völlig unsymmetrische Function der x:

$$\varphi(x_0x_1\cdots x_4),$$

multipliciren sie mit B_0 und sehen, was entsteht, wenn wir alle Werthe zusammenaddiren, welche dieses Product annimmt, wenn wir auf dasselbe gleichzeitig die 60 Permutationen der x und die entsprechenden Substitutionen der B anwenden! Machen wir zunächst die fünf Operationen, welche aus der unter 1) angegebenen durch Wiederholung entstehen. So bleibt B_0 ungeändert, während aus $\varphi(x_0x_1\cdots x_4)$ der Reihe nach wird $\varphi(x_4x_0\cdots x_3)$, $\varphi(x_3, x_4, \cdots, x_2)$ etc.: fünf Ausdrücke, deren Summe eine *cyklische* Function der x ist, welche ich kurz mit $v(x_0x_1\cdots x_4)$ bezeichnen will. Wir haben also als ersten Bestandtheil unserer bilinearen Function $B_0\cdot v$. Nun machen wir die Operationen (2). So wechselt B_0 sein Zeichen, v verwandelt sich in $v(x_0x_4x_3x_2x_1) = v'$. Setzen wir $v - v' = u_\infty$, so haben wir jetzt als Bestandtheil unserer bilinearen Form $B_0\cdot u_\infty$. Wir combiniren ferner die Operation 3) mit den fünf Operationen, welche aus 1) durch Wiederholung entstehen. So erhält B_0 die Werthe

$$\frac{B_0 + 2\varepsilon^\nu B_1 + 2\varepsilon^{4\nu} B_2}{\sqrt{5}}$$

für $\nu = 0, 1, \cdots 4$; u_∞ aber geht in folgende Functionen über:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(x_0\, x_2\, x_1\, x_4\, x_3),\\
u_1 &= u(x_0\, x_3\, x_2\, x_4\, x_1),\\
u_2 &= u(x_0\, x_4\, x_2\, x_1\, x_3),\\
u_3 &= u(x_0\, x_2\, x_4\, x_3\, x_1),\\
u_4 &= u(x_0\, x_4\, x_1\, x_3\, x_2).
\end{aligned}
$$

Unsere Summe wird also im Ganzen:

$$B_0 \cdot u_\infty + \sum_\nu \frac{B_0 + 2\varepsilon^\nu B_1 + 2\varepsilon^{4\nu} B_2}{\sqrt{5}} \cdot u_\nu .$$

Ordnen wir hier nach B_0, B_1, B_2, multipliciren alle Glieder mit $\sqrt{5}$ und nennen endlich die entstehenden Coefficienten A_0, A_1, A_2, *so kommt als Resultat:*

$$
(7) \qquad \begin{cases}
\mathsf{A}_0 = \sqrt{5} \cdot u_\infty,\\
\mathsf{A}_1 = 2\Sigma \varepsilon^\nu u_\nu,\\
\mathsf{A}_2 = 2\Sigma \varepsilon^{4\nu} u_\nu .
\end{cases}
$$

Wie man sieht, sind dies genau die allgemeinen Brioschi'schen Formeln).*

§ 5.

Andere Formeln für den fünften Grad.

Ich werde nun andere Formeln mittheilen, welche dasselbe leisten, welche aber eine andere, neue und, wie mir scheint, wesentliche Seite der Frage hervortreten lassen. Es sind dieselben Formeln, auf welche sich die Anmerkung Annalen Bd. XIV, pag. 169 bezieht. Ich habe dieselben zunächst durch geometrische Ueberlegungen gefunden und werde sogleich auf eine solche zurückkommen. Fürs erste gebe ich eine rein algebraische Ableitung, welche geeignet ist, die Schlussbemerkungen des § 1. zu illustriren.

Nach den Entwickelungen meiner Arbeit im zwölften Annalenbande, pag. 527 ff., kann man die Jacobi'schen A_0, A_1, A_2 als Coefficienten einer quadratischen Form

$$A_1 \eta_1^2 + 2A_0 \eta_1 \eta_2 - A_2 \eta_2^2$$

auffassen, die den 120 *binären* Ikosaedersubstitutionen unterworfen wird. Bei diesen Ikosaedersubstitutionen sind u. A. folgende Ausdrücke fünfwerthig:

$$
\begin{aligned}
t_\nu &= -\varepsilon^\nu \cdot 5\eta_1^2\eta_2^4 + \varepsilon^{2\nu}(\eta_1^6 - 2\eta_1\eta_2^5) + \varepsilon^{3\nu}(\eta_2^6 + 2\eta_1^5\eta_2) - \varepsilon^{4\nu} \cdot 5\eta_1^4\eta_2^2,\\
W_\nu &= (\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(-\eta_1^7 + 7\eta_1^2\eta_2^5) + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(-7\eta_1^5\eta_2^2 - \eta_2^7).
\end{aligned}
$$

*) Atti del Istituto Lombardo, vol. II (1858), Math. Annalen Bd. XIII, pag. 156.

Jetzt seien $x_0 \cdots x_4$ wieder die Wurzeln einer gegebenen Gleichung fünften Grades, X_ν und X_ν' seien fünfwerthige Functionen derselben. Bildet man dann

$$\Sigma X_\nu t_\nu, \qquad \Sigma X_\nu' W_\nu,$$

so hat man zwei Formen vom sechsten resp. achten Grade in den η_1, η_2, welche völlig ungeändert bleiben, wenn man η_1, η_2 den Ikosaedersubstitutionen unterwirft und gleichzeitig die x in zweckmässiger Weise auf 60 Arten permutirt. Dasselbe gilt dann auch von jeder Covariante dieser beiden Formen, insbesondere von der quadratischen Covariante, welche durch sechsmaliges Ueberschieben entsteht:

$$(\Sigma X_\nu t_\nu, \ \Sigma X_\nu' W_\nu)_6.$$

Rechnet man also diese Covariante aus und setzt sie gleich:

$$\mathsf{A}_1 \eta_1^2 + 2\mathsf{A}_0 \eta_1 \eta_2 - \mathsf{A}_2 \eta_2^2,$$

so sind die A_0, A_1, A_2 *Functionen der* x *von der geforderten Beschaffenheit.* Denn die A_1, A_0, $-\mathsf{A}_2$ erfahren bei den 60 Permutationen der x nothwendig solche ternäre lineare Substitutionen, welche contragredient sind zu denjenigen, die η_1^2, $2\eta_1\eta_2$, $-\eta_2^2$ bei den Ikosaedersubstitutionen erfahren, — und das ist die Definition des zu den Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades gehörigen Substitutionssystems.

Die Ausrechnung ergiebt nun folgendes Resultat. Sei

$$P_i = X_0 + \varepsilon^i X_1 + \varepsilon^{2i} X_2 + \varepsilon^{3i} X_3 + \varepsilon^{4i} X_4,$$
$$P_i' = X_0' + \varepsilon^i X_1' + \varepsilon^{2i} X_2' + \varepsilon^{3i} X_3' + \varepsilon^{4i} X_4'.$$

So kommt nach Unterdrückung eines Zahlenfactors

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathsf{A}_0 = \ (P_2 P_3' - P_2' P_3) + (P_1 P_4' - P_1' P_4), \\ \mathsf{A}_1 = 2(P_3 P_1' - P_3' P_1), \quad \mathsf{A}_2 = 2(P_4 P_2' - P_4' P_2). \end{cases}$$

Hätte man, was eben so berechtigt ist, statt $\Sigma X_\nu t_\nu$, $\Sigma X_\nu' W_\nu$ die beiden Formen $\Sigma X_{2\nu} t_\nu$, $\Sigma X_{2\nu}' W_\nu$ benutzt, so hätte man erhalten:

$$(7) \qquad \begin{array}{l} \mathsf{A}_0' = \ (P_2 P_3' - P_2' P_3) - (P_1 P_4' - P_1' P_4), \\ \mathsf{A}_1' = 2(P_1 P_2' - P_1' P_2), \quad \mathsf{A}_2' = 2(P_3 P_4' - P_3' P_4). \end{array}$$

Dabei ist identisch:

$$\mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_0'^2 + \mathsf{A}_1' \mathsf{A}_2',$$

und übrigens stehen die A, A' in der bekannten Beziehung zu einander, dass sich die jedesmalige lineare Transformation der A' aus der Transformation der A ergiebt, indem man ε in ε^2 verwandelt*).

*) So wie Gordan im 13ten Bande dieser Annalen in diesem Sinne zusammengehörige *binäre* Ikosaedersubstitutionen betrachtet und dadurch die Theorie derjenigen Gleichungen fünften Grades, in denen x^4 und x^3 fehlt, wesentlich gefördert hat, so verlangt offenbar eine abschliessende Behandlung der *allgemeinen* Gleichungen fünften Grades ein Studium des simultanen Systems der A, A'.

Was mir an diesen Formeln interessant und wichtig scheint, ist, dass sie sich aus den *zweigliedrigen Unterdeterminanten* der P, P' aufbauen. Deutet man die P, P', wie ich früher that, als Punktcoordinaten im Raume (Annalen XII, pag. 547), so sind die A resp. A' die Werthe, welche entstehen, wenn man die Coordinaten der Verbindungslinie der Punkte P, P', oder, was dasselbe ist, der Punkte X, X' in die linke Seite der Gleichungen *gewisser linearer Complexe* einträgt. Diese Complexe haben die einfachste geometrische Deutung und vermitteln dadurch den Zusammenhang der hier gegebenen Betrachtungen mit meiner geometrischen Theorie der Gleichungen fünften Grades ohne x^4 und x^3 (Annalen XII, pag. 545 ff.). Die Fläche zweiten Grades $\Sigma x^2 = 0$, von deren Studium ich damals ausging, hat auf das Coordinatensystem der P_i bezogen die Punktcoordinatengleichung:

$$P_1 P_4 + P_2 P_3 = 0.$$

Von ihr ausgehend constatirt man sofort, dass die Complexe

$$\lambda \cdot \mathsf{A}_0 + \mu \cdot \mathsf{A}_1 + \nu \cdot \mathsf{A}_2 = 0$$

eben diejenigen sind, welche alle Linien *zweiter* Erzeugung der fraglichen Fläche enthalten, und ebenso die Complexe

$$\lambda \cdot \mathsf{A}_0' + \mu \cdot \mathsf{A}_1' + \nu \cdot \mathsf{A}_2' = 0$$

diejenigen, welche alle Linien *erster* Erzeugung enthalten. Die Complexe der ersten Art enthalten also von den Linien der ersten Erzeugung noch je ein Paar, ebenso die Complexe der zweiten Art von den Linien zweiter Erzeugung. Und nun ist die Sache so, dass die Complexe, welche durch Nullsetzen der Wurzeln der Jacobi'schen Gleichung erster Art entstehen:

$$\sqrt{5}\, \mathsf{A}_0 = 0, \qquad \mathsf{A}_0 + \varepsilon^{\nu} \mathsf{A}_1 + \varepsilon^{4\nu} \mathsf{A}_2 = 0$$

eben diejenigen sechs Paare von Erzeugenden erster Art enthalten, welche die früher (Annalen XII, pag. 548) sogenannten 12 Linien f_1 ausmachen. Die entsprechenden Complexe:

$$\sqrt{5}\, \mathsf{A}_0' = 0, \qquad \mathsf{A}_0' + \varepsilon^{4\nu} \mathsf{A}_1' + \varepsilon^{\nu} \mathsf{A}_2' = 0$$

haben natürlich dieselbe Beziehung zu den zwölf Linien f_2 der zweiten Erzeugung*).

---

*) Ohne hier näher auf die Theorie der allgemeinen Gleichungen fünften Grades einzugehen, möchte ich bei dieser Gelegenheit anführen, wie ich die Kronecker'sche Angabe (Berliner Monatsberichte 1861, Crelle's Journal Bd. 59) verstehe, dass es unter den aus einer Gleichung fünften Grades hervorgehenden A_0, A_1, A_2 insbesondere solche *gebrochene* Functionen giebt, für welche die entstehende Jacobi'sche Gleichung nur von *zwei* Parametern abhängt. Die Sache ist äusserst einfach. Man kennt, bei beliebig angenommenen A_0, A_1, A_2, die Werthe der Ausdrücke A, B, C, D (siehe die Note unter dem Text, Annalen XII, pag. 534). Setzt man also jetzt etwa:

§ 6.

Die Probleme mit 168 Substitutionen.

Als „Probleme mit 168 Substitutionen“ will ich kurz alle die Gleichungen siebenten, achten, ... 168ten Grades bezeichnen, deren Galois'sche Gruppe mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph ist. Es handelt sich für uns zunächst darum, für diese Probleme die Minimalzahl μ und das zugehörige Problem der y aufzustellen. Dies aber ist implicite bereits in meiner vorigen Arbeit (Ueber Transformation siebenter Ordnung, Annalen XIV) geleistet, und ich habe nunmehr nur die dort gewonnenen Resultate in neuer Form auszusprechen.

Zuvörderst ist klar, dass μ mindestens gleich 3 ist. Denn bei 2 Variablen giebt es keine Gruppe von 168 linearen Substitutionen der hier geforderten Beschaffenheit. Für $\mu = 3$ habe ich aber in der genannten Arbeit in der That die Existenz eines brauchbaren Systems von 168 Substitutionen nachgewiesen. Dasselbe entsteht durch Wiederholung und Combination folgender drei Operationen:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1) & y_1' = \gamma y_1, \quad y_2' = \gamma^4 y_2, \quad y_3' = \gamma^2 y_3, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right) \\ 2) & y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_1, \\ 3) & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{-7}\cdot y_1' = (\gamma^5-\gamma^2)y_1 + (\gamma^3-\gamma^4)y_2 + (\gamma^6-\gamma)y_3, \\ \sqrt{-7}\cdot y_2' = (\gamma^3-\gamma^4)y_1 + (\gamma^6-\gamma)\,y_2 + (\gamma^5-\gamma^2)y_3, \\ \sqrt{-7}\cdot y_3' = (\gamma^6-\gamma)\,y_1 + (\gamma^5-\gamma^2)y_2 + (\gamma^3-\gamma^4)y_3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ungeändert bleiben bei diesen Substitutionen folgende vier Functionen:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} f = y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1, \\ \nabla = 5 y_1^2 y_2^2 y_3^2 - (y_1^5 y_2 + y_2^5 y_3 + y_3^5 y_1), \\ C = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_3} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \nabla}{\partial y_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_2} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_3} & 0 \end{vmatrix}, \end{array}\right.$$

$$a_0 = \frac{A_0 D}{BC}, \quad a_1 = \frac{A_1 D}{BC}, \quad a_2 = \frac{A_2 D}{BC}$$

so hängen diese neuen Grössen von einer Jacobi'schen Gleichung, resp. einem „Probleme der a“ ab, für deren Constanten man findet:

$$a = \frac{AD^2}{B^2C^2}, \quad b = \frac{BD^6}{B^6C^6}, \quad c = \frac{CD^{10}}{B^{10}C^{10}}, \quad d = \frac{D^{16}}{B^{15}C^{15}}.$$

Ersetzt man hier D^2 durch einen Ausdruck in A, B, C (Bd. XII, pag. 534, Formel (10)), schreibt dann etwa $\frac{B}{A^3} = m$, $\frac{C}{A^5} = n$, so sind die a, b, c, d offenbar Functionen nur von den *zwei* Parametern m, n.

$$K = \frac{1}{14}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_1} & \frac{\partial C}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_2} & \frac{\partial C}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial \nabla}{\partial y_3} & \frac{\partial C}{\partial y_3} \end{vmatrix},$$

wobei die einzige Relation besteht, dass sich K^2 als ganze Function von f, ∇, C darstellt. —

Das „Problem der y" besteht also jetzt im Folgenden: *Es sind in Uebereinstimmung mit dieser Relation für f, ∇, C, K Zahlenwerthe gegeben; man soll die unbekannten y_1, y_2, y_3 berechnen.*

Man sieht, dass ein besonderer Fall dieses Problems dasjenige ist, auf welches ich in meiner vorigen Arbeit die Modulargleichung selbst zurückführte: *es ist der Fall, in welchem f insbesondere den Werth Null hat.* Hieran anknüpfend habe ich im zweiten Abschnitte des Folgenden nur zu zeigen, wie man das allgemeine hier aufgestellte Problem der y auf das besondere mit $f = 0$ reducirt. —

Ich setze noch, ebenfalls aus meiner vorigen Arbeit, die einfachsten ganzen Functionen der y her, welche bei den 168 Substitutionen 7 oder 8 Werthe annehmen. Es sind unter den siebenwerthigen Functionen diese:

$$(10)\quad c_\nu = (\gamma^{2\nu}y_1^2 + \gamma^{\nu}y_2^2 + \gamma^{4\nu}y_3^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6\nu}y_2y_3 + \gamma^{3\nu}y_3y_1 + \gamma^{5\nu}y_1y_2),$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots 6)$$

(wo das Vorzeichen von $\sqrt{-7}$ beliebig aber fest anzunehmen ist), und unter den achtwerthigen Functionen:

$$(11)\quad \begin{cases} \delta_\infty = -7y_1y_2y_3, \\ \delta_\nu = y_1y_2y_3 + 2\gamma^{\nu}y_3^2y_2 + 2\gamma^{4\nu}y_1^2y_3 + 2\gamma^{2\nu}y_2^2y_1 \\ \qquad + \gamma^{6\nu}(y_1^2y_2 - y_3^3) + \gamma^{3\nu}(y_2^2y_3 - y_1^3) + \gamma^{5\nu}(y_3^2y_1 - y_2^3). \end{cases}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots 6).$$

Diese zweierlei Functionen genügen, wie man leicht berechnet, resp. folgenden Gleichungen siebenten und achten Grades*):

$$(12)\quad c^7 + 7\cdot\frac{1 \mp \sqrt{-7}}{2}f\cdot c^5 + 7\cdot\frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}\nabla\cdot c^4 - 7(4 \pm \sqrt{-7})f^2\cdot c^3$$
$$+ 14(2 \pm \sqrt{-7})f\nabla\cdot c^2 + \left(-7\cdot\frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}\cdot\nabla^2 - \tfrac{1}{2}\cdot(7 \mp 3\sqrt{-7})\cdot f^3\right)c$$
$$+ \left(-C + \frac{131 \mp 7\sqrt{-7}}{2}f^2\nabla\right) = 0,$$

$$(13)\quad \delta^8 - 14\nabla\cdot\delta^6 + (63\nabla^2 - 42f^3)\delta^4 - (70\nabla^3 - 7\cdot 19f^3\nabla)\delta^2$$
$$- K\delta - 7(fC\nabla + \nabla^4 + 18f^3\nabla^2 + f^6) = 0.$$

*) In meiner vorigen Arbeit theilte ich sie nur für $f = 0$ mit.

Ich werde diese Gleichungen siebenten und achten Grades im Folgenden nicht benutzen; doch schien es mir interessant, dieselben herzusetzen, weil man sie als einfachste *Normalformen* betrachten kann, auf die sich alle anderen Gleichungen siebenten und achten Grades mit 168 Substitutionen auf rationalem Wege reduciren lassen. In der That: gelingt es, die letzteren, wie ich nun zeigen werde, auf das Problem der y zurückzuführen, so ist damit und durch die Formeln (10), (11) die Transformation in diese Normalformen eo ipso geleistet.

§ 7.

Die Gleichungen siebenten Grades mit 168 Substitutionen.

Es seien jetzt $x_0, x_1, \cdots x_6$ die sieben Wurzeln einer Gleichung siebenten Grades mit 168 Substitutionen. Die Indices der x sollen dabei so gewählt sein, dass die Vertauschungen der x_ν, die in der Galois'schen Gruppe vorkommen, eben dieselben sind, welche die Ausdrücke c_ν (10) bei den 168 Substitutionen der y erfahren. Es seien ferner $X_0 \cdots X_6$, $X_0' \cdots X_6'$, $X_0'' \cdots X_6''$ die Werthe, welche irgendwelche rationale Functionen X, X', X'' von x für $x = x_0, x_1, \cdots x_6$ annehmen. So bilde man etwa:

$$\Sigma X_\nu c_\nu, \quad \Sigma X_\nu' c_\nu, \quad \Sigma X_\nu'' c_\nu.$$

Man beachte ferner, dass für Variable v_1, v_2, v_3, die den y contragredient sind, eben dasselbe System ungeändert bleibender Functionen existirt, wie für die y. Ich will diese Functionen zum Unterschiede durch einen Accent bezeichnen und also schreiben:

$$f' = v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_1 \text{ etc.}$$

Man betrachte nun in $\Sigma X_\nu c_\nu$, $\Sigma X_\nu' c_\nu$, $\Sigma X_\nu'' c_\nu$, in f, ∇, C, K und in f', ∇', C', K' die x als fest, die y, v als veränderlich. *Gelingt es dann, eine lineare Contravariante zu bilden:*

$$Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + Y_3 v_3,$$

wo die Y die x nur noch numerisch enthalten, so sind die Y offenbar solche Functionen der x, welche sich bei Permutation der x ternär linear wie die y substituiren. Und also ist die Lösung der Gleichung siebenten Grades auf das Problem der y zurückgeführt.

Ich will diesen allgemeinen Gedanken hier nur in einer Weise ausführen, die mir desshalb besonders einfach scheint, weil sich die entstehenden Y aus den *dreigliedrigen Determinanten* der X, X', X'' zusammensetzen. Mein Process ist dieser. Ich bilde die Functionaldeterminante in Bezug auf die y:

$$|\,\Sigma X_\nu c_\nu, \quad \Sigma X_\nu' c_\nu, \quad \Sigma X_\nu'' c_\nu\,| = \Sigma a_{ikh}\, y_i y_k y_h$$

und schiebe sie dreimal über $f' = v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_1$. So kommt, bis auf einen Zahlenfactor:

$$Y_1 = 3a_{112} + a_{333}, \quad Y_2 = 3a_{223} + a_{111}, \quad Y_3 = 3a_{331} + a_{222}.$$

Ausgerechnet giebt dies folgendes Resultat. Man bezeichne der Kürze wegen $\Sigma\gamma^{\nu} X_\nu$ mit p_1, $\Sigma\gamma^{4\nu} X_\nu$ mit p_4, $\Sigma\gamma^{2\nu} X_\nu$ mit p_2, ferner

$$\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}\cdot\Sigma\gamma^{6\nu}X_\nu \text{ mit } p_6, \quad \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}\cdot\Sigma\gamma^{3\nu}X_\nu \text{ mit } p_3,$$
$$\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}\cdot\Sigma\gamma^{5\nu}X_\nu \text{ mit } p_5.$$

Unter p', p'' mögen die analogen Ausdrücke in X', X'' verstanden sein. *Dann findet man nach leichten Reductionen:*

$$(14) \qquad \begin{cases} Y_1 = (4,3,5) + (1,6,5) + (4,2,6), \\ Y_2 = (2,5,6) + (4,3,6) + (2,1,3), \\ Y_3 = (1,6,3) + (2,5,3) + (1,4,5). \end{cases}$$

Unter (i, k, l) *ist dabei die Determinante verstanden*:

$$\begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ p_i' & p_k' & p_l' \\ p_i'' & p_k'' & p_l'' \end{vmatrix}.$$

§ 8.

Die Jacobi'schen Gleichungen achten Grades*).

Die Jacobi'schen Gleichungen achten Grades sind bekanntlich dadurch definirt, dass sich die Quadratwurzeln aus ihren Wurzeln folgendermassen aus vier Grössen A_0, A_1, A_2, A_3 zusammensetzen lassen:

$$\begin{cases} \sqrt{z_\infty} = \sqrt{-7}\cdot A_0, \\ \sqrt{z_\nu} = \qquad A_0 + \gamma^{\nu}A_1 + \gamma^{4\nu}A_2 + \gamma^{2\nu}A_3. \quad (\nu = 0, 1, \cdots 6) \end{cases}$$

Ich erlaube mir, mit Rücksicht auf die Einführung contragredienter Variabler, zunächst die kleine Abweichung (die ebenso bereits bei den Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades am Platze gewesen wäre), dass ich A_0, A_1, A_2, A_3 durch $x_0, \sqrt{2}\cdot x_1, \sqrt{2}\cdot x_2, \sqrt{2}\cdot x_3$ ersetze. Ich gestalte ferner die Fragestellung in der Weise um, dass ich nicht sowohl die Lösung der Jacobi'schen Gleichung als die Behandlung des mit ihr zusammenhängenden „Problemes der x“ als Hauptaufgabe

---

*) Vergl. den hier vorangehenden Aufsatz von Brioschi: *Ueber die Jacobi'schen Modulargleichungen vom achten Grade.*

betrachte. Dementsprechend lasse ich die Bezeichnung z bei Seite, und indem ich $\sqrt{z} = P$ setze, schreibe ich:

$$(15) \quad \begin{cases} P_\infty = \sqrt{-7} \cdot x_0\,, \\ P_\nu = \qquad x_0 + \sqrt{2}\,(\gamma^\nu x_1 + \gamma^{4\nu} x_2 + \gamma^{2\nu} x_3)\,. \quad (\nu = 0, 1, \cdots 6)\,. \end{cases}$$

Die Substitutionen, welche dem fraglichen „Probleme der x" zu Grunde liegen, erwachsen durch Wiederholung und Combination aus folgenden drei:

$$(16) \quad \begin{cases} 1)\; x_0' = x_0\,, \quad x_1' = \gamma x_1\,, \quad x_2' = \gamma^4 x_2\,, \quad x_3' = \gamma^2 x_3\,, \\ 2)\; x_0' = x_0\,, \quad x_1' = x_2\,, \quad x_2' = x_3\,, \quad x_3' = x_1\,, \\ 3) \begin{cases} \sqrt{-7} \cdot x_0' = x_0 + \sqrt{2} \cdot x_1 + \sqrt{2} \cdot x_2 + \sqrt{2} \cdot x_3\,, \\ \sqrt{-7} \cdot x_1' = \sqrt{2} \cdot x_0 + (\gamma^5 + \gamma^2) x_1 + (\gamma^3 + \gamma^4) x_2 + (\gamma^6 + \gamma) x_3\,, \\ \sqrt{-7} \cdot x_2' = \sqrt{2} \cdot x_0 + (\gamma^3 + \gamma^4) x_1 + (\gamma^6 + \gamma) x_2 + (\gamma^5 + \gamma^2) x_3\,, \\ \sqrt{-7} \cdot x_3' = \sqrt{2} \cdot x_0 + (\gamma^6 + \gamma) x_1 + (\gamma^5 + \gamma^2) x_2 + (\gamma^3 + \gamma^4) x_3\,, \end{cases} \end{cases}$$

Die contragredienten Variablen werde ich u_0, u_1, u_2, u_3 nennen; man sieht sofort, dass sie jedesmal diejenige Substitution erfahren, welche sich aus der Substitution der x durch Verwandlung von γ in γ^6 und also von $\sqrt{-7}$ in $-\sqrt{-7}$ ergiebt.

Bei diesen Substitutionen (16) werden nun, wie man findet, die Ausdrücke $\pm P$ in folgender Weise unter einander vertauscht:

$$\begin{array}{ll} \text{ad 1)} & P_\nu' = P_{\nu+1}\,, \\ \text{ad 2)} & P_{4\nu}' = P_\nu\,, \\ \text{ad 3)} & \begin{cases} P_\infty' = P_0\,, \\ P_0' = -P_\infty\,, \\ P_\nu' = \left(\frac{\nu}{7}\right) P_{-\frac{1}{\nu}}\,, \quad (\text{für } \nu = 1, 2, \cdots 6.) \end{cases} \end{array}$$

Die Permutation der Indices der P ist also dieselbe, wie man sie von den Modulargleichungen her kennt. Aber die Gruppe der Permutationen der P selbst ist doppelt so gross wie die Gruppe der Modulargleichung. Iterirt man nämlich die Substitution 3), so rückt jeder Index an seine alte Stelle, aber $+P_\nu$ geht in $-P_\nu$ über. *Daher bilden die Permutationen der* $\pm P$ *und also die Substitutionen der* x, *welche aus* 1), 2), 3) *durch Wiederholung und Combination entstehen, eine Gruppe von* $2 \cdot 168$ *Operationen, die der Gruppe der Modulargleichung hemiedrisch isomorph ist.*

Dies implicirt einen wesentlichen Unterschied von der analogen Theorie der Jacobi'schen Gleichungen *sechsten* Grades, bei denen dieser Isomorphismus ein *holoedrischer* war. Wir können sofort sagen:

Es ist unmöglich, die Probleme mit 168 *Substitutionen rational auf das hier vorliegende Problem der x zu reduciren;* wir können weiter folgern:

Es ist unmöglich, die betr. Probleme rational in Jacobi'sche Gleichungen achten Grades überzuführen.

Die Jacobi'sche Gleichung nämlich bestimmt an sich die x_0, x_1, x_2, x_3 zwar nur bis auf das Vorzeichen. Sollen aber die *Verhältnisse* $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$, unter x Functionen vollkommen willkürlicher Grössen verstanden, bei Permutation dieser Grössen diejenigen Substitutionen erfahren, welche den Formeln (16) entsprechen, so müssen die x_0, x_1, x_2, x_3 es selbst thun, und das ist unmöglich, so lange die Zahl der fraglichen Permutationen nur $1 \cdot 168$ beträgt. (Denselben Schluss machte ich in einem analogen Falle, Annalen XII, pag. 541.)

Dagegen zeigt der allgemeine Ansatz des § 1., dass sich das umgekehrte Problem sehr wohl erledigen lässt: *man soll das hier definirte Problem der x rational auf das Problem der y des* § 6. *zurückführen.* Wie dies am einfachsten geschehen kann, werde ich nun entwickeln. Ich bediene mich dabei aus den in der Einleitung angegebenen Gründen der geometrischen Redeweise.

§ 9.

Geometrische Theorie der Jacobi'schen Gleichungen achten Grades.

Die x_0, x_1, x_2, x_3 des vorigen Paragraphen mögen als homogene Coordinaten eines Raumpunktes gedeutet werden. Dann stellen die Ausdrücke P, gleich Null gesetzt, acht Ebenen dar, welche die *Hauptebenen* heissen sollen. Desgleichen spreche ich von acht *Hauptpunkten*. Man erhält ihre Gleichungen, indem man diejenigen Ausdrücke gleich Null setzt, welche den P dualistisch entsprechen:

$$(17) \qquad \begin{cases} \Pi_\infty = -\sqrt{-7} \cdot u_0, \\ \Pi_\nu = \qquad u_0 + \sqrt{2}\,(\gamma^{6\nu} u_1 + \gamma^{3\nu} u_2 + \gamma^{5\nu} u_3). \end{cases}$$

Offenbar sind die acht Hauptpunkte den acht Hauptebenen in einer durch die linearen Substitutionen (16) unzerstörbaren Weise einzeln zugeordnet.

Diese linearen Substitutionen (16) gewinnen jetzt die Bedeutung von *Collineationen* des Raumes. Da aber ein Zeichenwechsel aller x geometrisch ohne Bedeutung ist, so haben wir den homogenen $2 \cdot 168$ Substitutionen entsprechend doch nur $1 \cdot 168$ Collineationen, deren Gruppe somit mit der Gruppe der Modulargleichung holoedrisch isomorph ist.

Meine ganze Betrachtung geht nun davon aus, dass vermöge der Definition der P, Π die Quadratsummen ΣP^2, $\Sigma \Pi^2$ identisch Null sind. Dies giebt auf Grund einer Schlussweise, die wohl zuerst von

Paul Serret methodisch ausgebildet wurde*), sofort folgende beide Sätze:

Die acht Hauptpunkte sind die Grundpunkte eines Netzes von Flächen zweiter Ordnung.

Die acht Hauptebenen sind die gemeinsamen Tangentenebenen eines Gewebes von Flächen zweiter Classe.

Die Gleichungen dieses Netzes, resp. Gewebes werden äusserst einfach. In der That sieht man sofort, dass die Flächen zweiter Ordnung, welche durch Nullsetzen folgender Ausdrücke definirt sind:

$$(18)\qquad Y_1=\sqrt{2}\cdot x_0x_1-x_2^2,\quad Y_2=\sqrt{2}\cdot x_0x_2-x_3^2,\quad Y_3=\sqrt{2}\cdot x_0x_3-x_1^2$$

durch die acht Hauptpunkte hindurchgehen, ebenso, dass die Flächen zweiter Classe, welche durch Nullsetzen folgender Ausdrücke dargestellt werden:

$$(19)\qquad V_1=\sqrt{2}\cdot u_0u_1-u_2^2,\quad V_2=\sqrt{2}\cdot u_0u_2-u_3^2,\quad V_3=\sqrt{2}\cdot u_0u_3-u_1^2$$

die acht Hauptebenen berühren. *Daher hat man für das Netz die Gleichung:*

$$(20)\qquad v_1Y_1+v_2Y_2+v_3Y_3=0,$$

und für das Gewebe:

$$(21)\qquad y_1V_1+y_2V_2+y_3V_3=0.$$

Die v_1, v_2, v_3 resp. y_1, y_2, y_3 sollen dabei Parameter bezeichnen.

Ich habe die Benennungen bereits so gewählt, dass die Zusammengehörigkeit dieser Betrachtungen mit dem Probleme des § 6. hervortritt. In der That ist a priori deutlich, dass sich die Ausdrücke (18) bei den $2\cdot 168$ linearen Substitutionen der x selbst auf $1\cdot 168$ Weisen ternär linear substituiren müssen. Denn die acht Grundpunkte des Netzes (20) werden bei den betr. 168 Collineationen unter sich permutirt; das Netz als solches bleibt also bei den Collineationen ungeändert; überdies ändern sich die Ausdrücke (18) bei einem simultanen Zeichenwechsel aller x nicht. Das Analoge gilt von den V_1, V_2, V_3 (19). — Die Rechnung vervollständigt diese Ueberlegung folgendermassen. Man unterwerfe die x den drei Substitutionen (16); *dann findet man für die Y_1, Y_2, Y_3 genau die drei Substitutionen* (8) *des* § 6. Eine analoge Beziehung besteht natürlich zwischen den u und den V_1, V_2, V_3. *Handelt es sich also darum, wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen verlangten, das Problem der x auf das Problem der y, oder auch, das Problem der u auf das Problem der v zurückzuführen, so wird dem in einfachster Weise durch die Ausdrücke* Y_1, Y_2, Y_3 (18) *oder auch die Ausdrücke* V_1, V_2, V_3 (19) *entsprochen.*

---

*) Géométrie de direction, Paris 1869.

Ich will dem hier nur noch zwei Bemerkungen zufügen.

Einmal möchte ich aussprechen, dass mir mit der Aufstellung des Flächennetzes der Y und des Gewebes der V der eigentliche Ausgangspunkt zu einer principiellen Behandlung der Jacobi'schen Gleichungen achten Grades gegeben scheint. Die Functionen der x, resp. u, welche bei den $2 \cdot 168$ linearen Substitutionen ungeändert bleiben, werden sich vermuthlich decken mit den *Combinanten* der drei quadratischen Formen Y, resp. V.

Es sei ferner angegeben, welche Bedeutung unter den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen achten Grades die specielle hat, auf welche ich in meiner vorigen Arbeit (pag. 453 ff.) die Modulargleichung reducirte. Ersetzt man die dort gebrauchten λ, μ, ν durch y_1, y_2, y_3 und wendet auf letztere die erste der Substitutionen (8) an, so verwandeln sich die dort (pag. 454, Formel (38)) definirten A_0, A_1, A_2, A_3 in $A_0, \gamma^6 A_1, \gamma^3 A_2, \gamma^5 A_3$. Die fragliche Jacobi'sche Gleichung gehört also zu den *contragredienten* und ich habe, um Uebereinstimmung mit der hier gebrauchten Bezeichnungsweise herbeizuführen, $A_0 = u_0$, $A_1 = \sqrt{2} \cdot u_1$, $A_2 = \sqrt{2} \cdot u_2$, $A_3 = \sqrt{2} \cdot u_3$ zu setzen. Zwischen diesen u hat man dann (nach der damaligen Angabe, pag. 455, Note) alle die Relationen, welche durch Nullsetzen folgender Matrix entstehen:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_0 & -\sqrt{2} \cdot u_2 & 0 \\ u_2 & 0 & u_0 & -\sqrt{2} \cdot u_3 \\ u_3 & -\sqrt{2} \cdot u_1 & 0 & u_0 \end{vmatrix}.$$

Diese Relationen gewinnen jetzt eine einfache Bedeutung. Unter den Flächen des Gewebes:

$$y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 = 0$$

giebt es ∞^1, welche in ebene Curven ausgesetzt sind; *die Ebenen dieser Curven sind es, welche durch die vorstehenden Relationen definirt sind.* Diese Ebenen umhüllen bekanntlich eine Developpable der sechsten Classe (welche der schon von Hesse untersuchten Kegelspitzencurve sechster Ordnung dualistisch gegenüber steht). Und die Beziehung dieser Developpablen auf die ebene Curve vierter Ordnung $f = 0$, wie sie sich aus meiner vorigen Arbeit ergiebt, ist nichts Anderes als die bekannte Hesse'sche Abbildung. In der That, setzt man die nach u_0, u_1, u_2, u_3 gebildete Discriminante von $y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3$ gleich Null, so kommt:

$$y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1 = f = 0.$$

§ 10.

Siebenwerthige Functionen der x.

Man kann fragen, welches die einfachsten Gebilde im Raume der x_0, x_1, x_2, x_3 sind, welche bei den 168 Collineationen nur *sieben* Lagen annehmen. Durch geometrische Betrachtungen, deren Auseinandersetzung hier zu weit führen würde, habe ich gefunden, *dass es zweimal sieben lineare Complexe der geforderten Eigenschaft giebt.* Ich will dies hier nur analytisch nachweisen. Es seien x, x' zwei Raumpunkte. So betrachte man als Coordinaten ihrer Verbindungslinie die folgenden:

$$(22)\qquad \begin{cases} a_1 = x_0 x_1' - x_0' x_1, & \sqrt{2}\cdot a_6 = x_3 x_2' - x_3' x_2, \\ a_4 = x_0 x_2' - x_0' x_2, & \sqrt{2}\cdot a_3 = x_1 x_3' - x_1' x_3, \\ a_2 = x_0 x_3' - x_0' x_3, & \sqrt{2}\cdot a_5 = x_2 x_1' - x_2' x_1. \end{cases}$$

Nun wende man auf die x, x' die Substitutionen (16) an. Da ein simultaner Zeichenwechsel aller x, x' die Grössen a nicht beeinflusst, so erhält man drei lineare Substitutionen der a, welche wiederholt und zusammengesetzt nur $1\cdot 168$ Operationen erzeugen. Aber genau zu denselben Substitutionen wird man geführt, wenn man die y_1, y_2, y_3 des § 6. den Substitutionen (8) unterwirft und zusieht, wie sich dabei die sechs Ausdrücke zweiten Grades $y_2^2, y_3^2, y_1^2, y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2$ substituiren. Nun setzen sich aus letzteren die siebenwerthigen c_ν linear zusammen (Formel (10)):

$$\begin{aligned} c_\nu = {} & (\gamma^{2\nu} y_1^2 + \gamma^\nu y_2^2 + \gamma^{4\nu} y_3^2) \\ & + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} (\gamma^{6\nu} y_2 y_3 + \gamma^{3\nu} y_3 y_1 + \gamma^{5\nu} y_1 y_2). \end{aligned}$$

Daher sind folgende zweimal sieben lineare Functionen der a ebenfalls siebenwerthig:

$$(23)\qquad \begin{aligned} C_\nu = {} & (\gamma^\nu a_1 + \gamma^{4\nu} a_4 + \gamma^{2\nu} a_2) \\ & + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} (\gamma^{6\nu} a_6 + \gamma^{3\nu} a_3 + \gamma^{5\nu} a_5). \end{aligned}$$

Sie stellen, gleich Null gesetzt, die fraglichen linearen Complexe dar.

Es scheint mir nun sehr nützlich, den Betrachtungen, die sich in der Ebene auf die c_ν beziehen, im Raume solche entgegenzustellen, welche mit den C_ν operiren. Ich will dies hier nur bezüglich des § 7. ausführen. Es seien $x_0, x_1 \cdots x_6$, wie dort, die sieben Wurzeln einer Gleichung siebenten Grades. Man bilde ferner, wie damals, drei Reihen von sieben Grössen X_ν, X_ν', X_ν'', welche den x_ν einzeln entsprechen. Sodann schreibe man die Gleichungen folgender linearer Complexe hin:

$$\Sigma X_\nu C_\nu = 0, \quad \Sigma X_\nu' C_\nu = 0, \quad \Sigma X_\nu'' C_\nu = 0$$

und suche in *Ebenencoordinaten* u_0, u_1, u_2, u_3 die Gleichung des ihnen gemeinsamen Hyperboloids:

$$\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung schiebe man sodann zweimal über die linke Seite der Gleichung des Flächennetzes (20):

$$v_1 (\sqrt{2} \cdot x_0 x_1 - x_2^2) + v_2 (\sqrt{2} \cdot x_0 x_2 - x_3^2) + v_3 (\sqrt{2} \cdot x_0 x_3 - x_1^2).$$

So entsteht eine lineare Form

$$Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + Y_3 v_3,$$

wo

$$Y_1 = \sqrt{2} \cdot \alpha_{01} - \alpha_{22}, \quad Y_2 = \sqrt{2} \cdot \alpha_{02} - \alpha_{33}, \quad Y_3 = \sqrt{2} \cdot \alpha_{03} - \alpha_{11},$$

und diese Y_1, Y_2, Y_3 *müssen nun solche Functionen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung siebenten Grades sein, welche sich, bei den* 168 *Permutationen dieser Wurzeln, wie die* y_1, y_2, y_3 *des* § 6. *substituiren.* — Führt man die Rechnung durch, so kommt man in der That zu den Schlussformeln des § 7.

§ 11.

Die allgemeinen Gleichungen achten Grades mit 168 Substitutionen.

Die einfachsten achtwerthigen Ausdrücke der x sind die Quadrate der Grössen P (15), zugleich die Wurzeln der Jacobi'schen Gleichung achten Grades. Hiervon ausgehend will ich das Problem behandeln, eine *beliebige* Gleichung achten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen auf das Problem der y des § 6. rational zurückzuführen. Die Wurzeln der Gleichung mögen $z_\infty, z_0, z_1 \cdots z_6$ genannt werden und den $P_\infty^2, P_0^2, P_1^2, \cdots P_6^2$ entsprechend gesetzt sein. So bilde man zunächst die quadratische Form:

$$z_\infty P_\infty^2 + z_0 P_0^2 + z_1 P_1^2 + \cdots + z_6 P_6^2,$$

ordne nach Eintragung der Werthe der P nach x_0, x_1, x_2, x_3, und stelle endlich die zugeordnete quadratische Form der u_0, u_1, u_2, u_3 auf. Ich will der Einfachheit wegen annehmen, dass $\Sigma z = 0$ sei, ich will ferner abkürzend schreiben:

$$p_\nu = \sum_{0,1,\ldots 6} \gamma^{\nu i} z_i.$$

Dann lautet die zugeordnete Form:

$$(24) \quad \begin{vmatrix} -6z_\infty & \sqrt{2} \cdot p_1 & \sqrt{2} \cdot p_4 & \sqrt{2} \cdot p_2 & u_0 \\ \sqrt{2} \cdot p_1 & 2p_2 & 2p_5 & 2p_3 & u_1 \\ \sqrt{2} \cdot p_4 & 2p_5 & 2p_1 & 2p_6 & u_2 \\ \sqrt{2} \cdot p_2 & 2p_3 & 2p_6 & 2p_4 & u_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma \alpha_{ik} u_i u_k.$$

Diese Form schiebe man nun der Reihe nach zweimal über:

$$\sqrt{2} \cdot x_0 x_1 - x_2^2, \quad \sqrt{2} \cdot x_0 x_2 - x_3^2, \quad \sqrt{2} \cdot x_0 x_3 - x_1^2.$$

So kommt (wie im vorigen Paragraphen):

$$Y_1 = \sqrt{2} \cdot \alpha_{01} - \alpha_{22}, \quad Y_2 = \sqrt{2} \cdot \alpha_{02} - \alpha_{33}, \quad Y_3 = \sqrt{2} \cdot \alpha_{03} - \alpha_{11},$$

und diese Y_1, Y_2, Y_3 sind Functionen der $z_\infty, z_0 \cdots z_6$, wie wir sie suchen. Ausgerechnet ergiebt sich (nach Wegwerfung eines Zahlenfactors):

$$(25)\quad \begin{cases} Y_1 = 2 \begin{vmatrix} p_1 & p_5 & p_3 \\ p_4 & p_1 & p_6 \\ p_2 & p_6 & p_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6z_\infty & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}, \\[2ex] Y_2 = 2 \begin{vmatrix} p_4 & p_6 & p_5 \\ p_2 & p_4 & p_3 \\ p_1 & p_3 & p_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6z_\infty & p_4 & p_1 \\ p_4 & p_1 & p_5 \\ p_1 & p_5 & p_2 \end{vmatrix}, \\[2ex] Y_3 = 2 \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_6 \\ p_1 & p_2 & p_5 \\ p_4 & p_5 & p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6z_\infty & p_2 & p_4 \\ p_2 & p_4 & p_6 \\ p_4 & p_6 & p_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

§ 12.

Die Gleichungen 168ten Grades mit 168 Substitutionen.

Hinsichtlich der hierher gehörigen Gleichungen 168ten Grades will ich nur eine Bemerkung machen. Man mag bei ihnen, um Functionen Y_1, Y_2, Y_3 zu finden, den allgemeinen Process des § 1. anwenden. Als Function φ der Wurzeln kann man dann eine beliebige Wurzel selbst wählen: denn zwischen den 168 Wurzeln der allgemeinen hier in Betracht kommenden Gleichung bestehen keine a priori angebbaren linearen Relationen. Dann liefert uns der allgemeine Process des § 1. solche Functionen Y_1, Y_2, Y_3, *welche lineare Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.* Etwas Aehnliches tritt offenbar immer ein, wenn eine Gleichung gegeben ist, die ihre eigene Galois'sche Resolvente ist, und man verlangt, diese auf ein niederes „Problem" zurückzuführen. Das einfachste Beispiel geben die cyklischen Gleichungen; man vergl. § 3.

§ 13.

Substitutionssysteme bei $\frac{n+1}{2}$ und bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen.

Ich schliesse diesen Abschnitt, indem ich zeige, dass ähnliche Substitutionssysteme, wie wir sie im Vorstehenden für $n = 5$ und

$n = 7$ benutzten, bei beliebigem primzahligem n bestehen. Wir hatten einmal das Substitutionssystem der Jacobi'schen Gleichungen sechsten bez. achten Grades; dasselbe zeigte bei $n = 5$ einen holoedrischen, bei $n = 7$ einen hemiedrischen Isomorphismus zur Gruppe der Modulargleichung. Wir hatten andererseits bei $n = 5$ die binären Ikosaedersubstitutionen, bei $n = 7$ die ternären Substitutionen des § 6., und diese Substitutionen erwiesen sich bei $n = 5$ hemiedrisch, bei $n = 7$ holoedrisch mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph. Ich sage nun, *dass, unter n eine Primzahl verstanden, allemal Substitutionssysteme bei* $\frac{n+1}{2}$ *und bei* $\frac{n-1}{2}$ *Variablen bestehen, welche mit der Gruppe der Modulargleichung* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades isomorph sind. Und zwar ist der Isomorphismus des einen Systems immer hemiedrisch, wenn der des anderen holoedrisch ist. Ob das Eine oder Andere eintritt, hängt davon ab, ob* $n \equiv 1$ *(mod. 4) oder* $\equiv 3$ *(mod. 4) ist*).*

1) Das System bei $\frac{n+1}{2}$ Variabelen $x_0, x_1, \cdots x_{\frac{n-1}{2}}$ erwächst durch Wiederholung und Combination folgender drei Operationen:

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1) & x_k' = \varrho^{k^2} \cdot x_k\,, \\[1ex] 2) & x_k' = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\, x_{\pm g k}\,, \\[1ex] 3) & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n} \cdot x_0' = x_0 + \sqrt{2} \cdot \sum\limits_{l=1,\cdots\frac{n-1}{2}} x_l\,, \\[2ex] \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n} \cdot x_k' = \sqrt{2} \cdot x_0 + \sum\limits_{l=1,\cdots\frac{n-1}{2}} (\varrho^{2lk} + \varrho^{-2lk}) x_l \left(k = 1, \cdots \frac{n-1}{2}\right). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Hier bedeutet ϱ eine n^{te} Einheitswurzel, g ist eine Primitivwurzel modulo n, und das doppelte Vorzeichen $\pm g k$ ist so zu verstehen, wie am Schlusse des § 3. auseinandergesetzt ist.

Zum Beweise der hinsichtlich dieses Systems aufgestellten Behauptungen genügt es, die Aenderungen zu beachten, welche die Jacobi'schen Ausdrücke

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} P_\infty = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n} \cdot x_0 \\[1ex] P_\nu = x_0 + \sqrt{2} \cdot \sum\limits_{k=1,\cdots\frac{n-1}{2}} \varrho^{\nu k^2} \cdot x_k \end{array}\right.$$

bei den Operationen 1), 2), 3) erfahren. Man findet nämlich:

---

*) Dass diese Substitutionssysteme existiren, habe ich zuerst in einem an Hrn. Brioschi gerichteten Briefe ausgesprochen, der in den Rendiconti des Istituto Lombardo vom 2. Januar 1870 abgedruckt ist.

ad 1) $P_\nu' = P_{\nu+1}$,

ad 2) $P_{g\nu}' = (-1)^{\frac{n+1}{2}} P_\nu$,

$$\text{ad 3)} \begin{cases} P_\infty' = P_0 \\ P_0' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} P_\infty \\ P_\nu' = \left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot P_{-\frac{1}{\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots (n-1)). \end{cases}$$

2) Das System bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen $y_1, y_2, \cdots y_{\frac{n-1}{2}}$ ergiebt sich folgendermassen. Ist $n \equiv 3 \pmod{4}$, so combinire man folgende Operationen:

$$(28) \quad \begin{cases} 1) \qquad y_k' = \varrho^{k^2} y_k, \\ 2) \qquad y_k' = y_{\pm gk}, \\ 3) \; \sqrt{-n} \cdot y_k' = -\sum\limits_{l=1,\cdots\frac{n-1}{2}} \left(\frac{kl}{n}\right) (\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, y_l. \end{cases}$$

Hier bedeutet $\left(\frac{kl}{n}\right)$ das Legendre'sche Zeichen. — Ist dagegen $n \equiv 1 \pmod{4}$, so schreibe man einfach:

$$(29) \quad \begin{cases} 1) \qquad y_k' = \varrho^{k^2} y_k \quad , \\ 2) \qquad y_k' = \pm\, y_{\pm gk}, \\ 3) \quad \sqrt{n} \cdot y_k' = \sum\limits_{l=1,\cdots\frac{n-1}{2}} (\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, y_l. \end{cases}$$

Beidemal ergiebt sich der Beweis unserer Behauptungen wieder durch Beachtung der Umänderungen, welche gewisse $(n+1)$ Functionen bei Eintritt der Substitutionen erfahren. Dies sind im Falle (28):

$$(30) \quad \begin{cases} \delta_\infty = (-n)^{\frac{n-1}{4}} \cdot y_1 y_2 \cdots y_{\frac{n-1}{2}}, \\ \delta_\nu = -\prod\limits_{k=1,\cdots\frac{n-1}{2}} \left(\sum\limits_{l=1,\cdots\frac{n-1}{2}} \left(\frac{kl}{n}\right) (\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, \varrho^{l^2\nu} \cdot y_l \right), \end{cases}$$

und ähnlich im Falle (29):

$$(31) \quad \begin{cases} \delta_\infty = n^{\frac{n-1}{4}} \cdot y_1 y_2 \cdots y_{\frac{n-1}{2}}, \\ \delta_\nu = \prod\limits_{k=1,\cdots\frac{n-1}{2}} \left(\sum\limits_{l=1,\cdots\frac{n-1}{2}} (\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, \varrho^{l^2\nu} \cdot y_l \right). \end{cases}$$

Man findet nämlich bei (30), den Operationen 1), 2), 3) (Formel (28)) entsprechend, folgende Permutationen:

$$
\begin{array}{ll}
\text{ad } 1) & \delta_\nu' = \delta_{\nu+1}\ , \\
\text{ad } 2) & \delta_{g^2\nu}' = \delta_\nu\ , \\
\text{ad } 3) & \left\{\begin{array}{l} \delta_\infty' = \delta_0\ , \\ \delta_0' = \delta_\infty\ , \\ \delta_\nu' = \delta_{-\frac{1}{\nu}}\ , \qquad\qquad (\nu = 1, 2 \cdots (n-1).) \end{array}\right.
\end{array}
$$

und bei (31) sind die Formeln ganz ähnlich, nur dass an einigen Stellen rechter Hand ein Minuszeichen zutritt. —

Fügen wir noch hinzu, dass die so bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen definirte Substitutionsgruppe jedenfalls dann die *kleinste* Zahl Variabler benutzt, bei denen ein Isomorphismus mit der Gruppe der Modulargleichung möglich ist, *wenn* $\frac{n-1}{2}$ *eine Primzahl ist.* Denn aus Verbindung der beiden sub 1) und 2) angegebenen Operationen erwächst bereits die „halbe" metacyklische Gruppe, mit der wir uns in § 3. beschäftigten und von der wir sahen, dass sie sich im angegebenen Falle nicht durch weniger als $\frac{n-1}{2}$ Variable darstellen lässt.

Abschnitt II.

Zurückführung der Gleichungen mit 168 Substitutionen auf die Modulargleichung.

§ 1.

Bedeutung der Modulargleichung für diese Probleme.

Man muss es als eine offene Frage betrachten, ob für jede Galois'sche Gruppe Gleichungen mit einem *rational* vorkommenden Parameter existiren, bei denen die Permutationen der Wurzeln durch ihre Verzweigung in Bezug auf diesen Parameter zu Stande kommen. Wenn das aber der Fall ist, so gilt es, unter allen möglichen Gleichungen dieser Art die einfachste herauszugreifen. Im 14. Bande dieser Annalen pag. 170 stellte ich in dieser Hinsicht das Princip auf, dass immer diejenige Gleichung als die einfachste erachtet werden soll, *deren Galois'sche Resolvente das kleinstmögliche Geschlecht hat**). Von diesem Principe ausgehend gelangt man bei den Problemen mit 168 Substitutionen, wie ich nun zeigen werde, genau zu derjenigen Form der *Modulargleichung*, welche ich in meiner vorigen Arbeit entwickelt habe. Der Beweis ruht in der Betrachtung der *linearen Transformationen*, welche gewisse, auf einer Curve vom Geschlechte p existirende *Functionen* bei eindeutiger Transformation der Curve in

*) In höheren Fällen wird man neben der Geschlechtszahl p die Existenz besonderer „Specialgruppen" berücksichtigen müssen.

sich erfahren müssen. Hiermit ist zugleich der Zusammenhang mit den Betrachtungen des vorigen Abschnitts und der Gegensatz gegen dieselben bezeichnet. Denn allerdings haben wir es auch jetzt mit linearen Substitutionen zu thun, aber nicht mehr mit homogenen.

Ich sage zunächst, dass bei einer Gleichung mit 168 Substitutionen der hier betrachteten Art keine Galois'sche Resolvente vom Geschlechte *Null* existiren kann. Denn auf den Curven vom Geschlechte Null giebt es eine Function λ, welche jeden Werth nur in einem Punkte annimmt, und die sich also bei eindeutiger Transformation der Curve in sich linear substituirt. Dagegen giebt es bekanntlich keine Gruppe von 168 (gebrochenen) linearen Substitutionen einer Variablen von der hier geforderten Beschaffenheit.

Ebenso wenig kann das Geschlecht gleich *Zwei* sein. Denn bei $p=2$ setzt sich aus den zwei überhaupt vorhandenen Riemann'schen φ eine Function $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ zusammen, welche in ihrer Art einzig ist, welche also bei jeder eindeutigen Transformation der Curve in sich wieder linear transformirt werden muss.

Die Unmöglichkeit einer Resolvente vom Geschlecht *Eins* ergiebt sich folgendermassen. Auf einer Curve $p=1$ giebt es *ein* überall endliches Integral; dasselbe soll u genannt werden, seine beiden Perioden mögen ω_1, ω_2 heissen. Die einzigen im allgemeinen Falle möglichen eindeutigen Transformationen der Curve in sich sind, wie bekannt, durch folgende Transformation des Integrals gegeben:

$$u' = \pm u + C;$$

nur wenn $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bei richtiger Wahl der Perioden gleich der dritten Einheitswurzel α, oder gleich der vierten Einheitswurzel i ist, können noch Transformationen folgender Form:

$$u' = \alpha u, \qquad u' = iu$$

hinzutreten. — Will man nun aus den eindeutigen Transformationen der Curve in sich eine endliche Gruppe zusammensetzen, so hat man einfach solche Transformationen des Integrals unter den vorgenannten herauszusuchen, welche *modulo* ω_1, ω_2 etwas Endliches erzeugen. Man kann hiernach ohne Weiteres alle möglichen endlichen Gruppen aufstellen und discutiren; man sieht sofort, dass unter ihnen keine enthalten ist, die mit der hier vorliegenden Gruppe von 168 Substitutionen isomorph wäre.

Es bleibt also, als kleinstmöglicher Werth, $p=3$. Dass eine Resolvente vom Geschlechte *Drei* existirt, zeigt meine vorige Arbeit; sie zeigt zugleich, dass nur *eine* solche Resolvente existirt, das ist die Modulargleichung, wie ich sie damals formulirte. *Die Modulargleichung erweist sich also als wahre Normalgleichung für die Probleme mit* 168 *Substitutionen.*

Handelt es sich jetzt darum, die allgemeinen Gleichungen mit 168 Substitutionen auf die Modulargleichung zurückzuführen, so ist dem durch die Entwickelungen der §§ 6.—12. des vorigen Abschnittes vorgebaut. Ich zeigte, dass man alle in Betracht kommenden Gleichungen auf das in § 6. definirte Problem der y rational reduciren kann. Die Modulargleichung ist nur ein specieller Fall dieses Problems, derjenige, in welchem $f=0$ ist. Daher haben wir jetzt nur noch folgende Aufgabe vor uns: *Man soll das allgemeine Problem des* § 6. *auf das specielle mit* $f=0$ *zurückführen.* Hiermit werde ich mich jetzt beschäftigen.

§ 2.

Zurückführung des allgemeinen Problems der y auf das specielle.

Ich beschränke mich darauf, nur die sehr einfachen Principien anzugeben, nach denen die gewünschte Zurückführung zweckmässigerweise zu erfolgen hat. Dabei finde zunächst folgende Bemerkung ihre Stelle. Für die Modulargleichung gab ich in meiner vorigen Arbeit (pag. 449) im Grunde *zwei* Formulirungen an, indem ich das eine Mal:

$$f=0, \quad \nabla=-\sqrt[7]{\Delta}, \quad C=12g_2, \quad K=216g_3$$

setzte, das andere Mal nur die Verhältnisse der y ins Auge fasste und schrieb:

$$f=0, \quad \frac{-C^3}{1728\nabla^7}=J. \tag{32}$$

Nur von dieser zweiten Formulirung ist im vorigen Paragraphen die Rede, und an sie werde ich mich auch im Folgenden anschliessen.

Dann hat man noch eine doppelte Möglichkeit. Entweder sind die y der Modulargleichung den y des ursprünglichen Problems *cogredient*, — dann sollen sie y' heissen —, oder sie sind ihnen *contragredient*, — dann werde ich sie in der Folge v nennen. Dementsprechend haben wir geometrisch folgendes doppelte Problem vor uns:

Man soll einem beliebigen Punkte y_1, y_2, y_3 *der Ebene in einer durch die* 168 *linearen Substitutionen unzerstörbaren Weise entweder einen Punkt* y' *der Curve vierter Ordnung* $f=0$ *oder eine Tangente* v *der Curve vierter Classe* $f'=0$ *zuordnen.*

Beides erledigt sich offenbar, und das ist der Kern der hier auseinanderzusetzenden Methode — folgendermassen mit Hülfe einer Gleichung vierten Grades. Entweder man schneidet die Curve vierter Ordnung mit der linearen Polare des Punktes y und berechnet also $y_1' : y_2' : y_3'$ aus folgenden beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{c}(3y_1^2y_2+y_3^3)y_1'+(3y_2^2y_3+y_1^3)y_2'+(3y_3^2y_1+y_2^3)y_3'=0,\\ y_1'^3y_2'+y_2'^3y_3'+y_3'^3y_1'=0,\end{array}\right. \tag{33}$$

oder man zwingt die Tangente v der Curve vierter Classe, durch den

Punkt y *selbst* hindurchzulaufen, und hat dementsprechend die Bestimmungsgleichungen:

$$(34) \qquad \begin{cases} y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0, \\ v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^2 v_1 = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist die contragrediente Zuordnung einfacher, und es kann also keine Frage sein, dass wir die Gleichungen (34) benutzen werden. —

Die Lösung des vorgelegten Problems der y wird jetzt folgendermassen erfolgen können. Man eliminire zuvörderst zwischen den Gleichungen (34) und der Gleichung:

$$\frac{-C'^3(v_1, v_2, v_3)}{1728\nabla'^7(v_1, v_2, v_3)} = J$$

die v_1, v_2, v_3. So erhält man eine Gleichung vierten Grades für das J, deren Coefficienten solche ganze Functionen der y sind, welche sich bei den 168 linearen Substitutionen nicht ändern, also ganze Functionen der *gegebenen* f, ∇, C, K sind. Von dieser Gleichung bestimme man eine Wurzel; sie heisse J_1. Sodann betrachte man das Gleichungssystem

$$f(v_1, v_2, v_3) = 0,$$
$$\frac{-C'^3(v_1, v_2, v_3)}{1728\nabla'^7(v_1, v_2, v_3)} = J_1$$

als Modulargleichung und bestimme die Verhältnisse der $v_1 : v_2 : v_3$ etwa durch die Formeln der pag. 456, Bd. XIV. Dann hat man zur Berechnung der y_1, y_2, y_3 ausser den gegebenen Werthen von f, ∇, C, K die Gleichung

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0$$

und kann somit ebensowohl ihre Verhältnisse als ihre absoluten Werthe rational berechnen. —

§ 3.

Ueber die Nothwendigkeit der benutzten Gleichung vierten Grades.

Es fragt sich nun, ob der so geschilderte Gang noch in einem wesentlichen Punkte verbessert werden kann. Ich möchte dabei betonen, dass ich die Auflösung durch elliptische Functionen für nebensächlich und sogar für einen Umweg halte; an ihre Stelle wird man brauchbarere, directere Annäherungsprocesse setzen können*). Dies thut der Wichtigkeit derjenigen Gleichung, welche ich immer als Modulargleichung bezeichne, keinerlei Abbruch: sie giebt die Definition der hier in Betracht kommenden *algebraischen* Fundamentalirrationalität, und wie man nun letztere numerisch berechnen will, ist eine Frage für sich.

---

*) Ganz ebenso war es bei der Ikosaedergleichung, Annalen XIV, pag. 158.

Dagegen scheint mir, dass sich der algebraische Process, welchen ich schildere, nicht noch vereinfachen lässt, und ich bringe in dieser Hinsicht hier noch *den* Beweis, *dass man die Hülfsgleichung vierten Grades zur Bestimmung von J nicht vermeiden kann.*

Die Frage kann so gestellt werden: *Ist es möglich, einem beliebigen Punkte y der Ebene in einer durch die* 168 *Collineationen unzerstörbaren Weise auf unserer Curve* $f = 0$ *eine Gruppe von weniger als vier beweglichen Punkten* y' *auf rationalem Wege zuzuordnen?* Denn ob wir hier von den Punkten y' der Curve $f = 0$, oder ob wir von den Tangenten v der Curve $f' = 0$ sprechen, ist offenbar für den vorliegenden Zweck gleichgültig.

Die so gestellte Frage ist nun auf Grund folgender Ueberlegungen zu verneinen:

1. *Dem Punkte y kann auf* $f = 0$ *nicht ein beweglicher Punkt* y' *rational zugeordnet werden.* Man denke sich $y_1 : y_2 : y_3$ irgendwie von einer Grösse λ rational abhängig. Dann würde der auf $f = 0$ bewegliche Punkt y' von λ ebenfalls rational abhängen, also $f = 0$ eine rationale Curve sein, was absurd ist.

2. *Dem Punkte y kann auf* $f = 0$ *nicht ein bewegliches Paar von Punkten* y' *rational zugeordnet werden.* Wieder denke man sich $y_1 : y_2 : y_3$ von einer Grösse λ rational abhängig. Dann bekommt man auf $f = 0$ eine rationale, einfach unendliche Schaar von Punktepaaren. Es müsste also auf $f = 0$ eine rationale Function geben, welche jeden Werth nur in zwei Punkten annimmt, was unmöglich ist.

3. *Dem Punkte y kann auf* $f = 0$ *nicht ein bewegliches Tripel von Punkten zugeordnet sein.* Um dies einzusehen, lasse man $y_1 : y_2 : y_3$ über eine gerade Linie v laufen. Dann bekommen wir auf $f = 0$ eine einfach unendliche, rationale Schaar von Punktetripeln. Dementsprechend muss es eine rationale Function auf $f = 0$ geben, welche jeden Werth nur in den drei Punkten *eines* Tripels der Schaar annimmt. Daher werden, nach einem Riemann'schen Satze, die fraglichen Tripel auf $f = 0$ von geraden Linien ausgeschnitten, und zwar von solchen geraden Linien, die durch einen *festen* Punkt auf $f = 0$ hindurchlaufen. Dieser Punkt müsste fest bleiben, auch wenn die gerade Linie v ändert. Denn die gerade Linie hat mit ihrer ursprünglichen Lage immer einen Punkt gemein, und diesem Punkte entspricht auf $f = 0$ ein Tripel, durch welches der fragliche feste Punkt bereits definirt ist. Es müsste also auf $f = 0$ einen Punkt geben, der bei den 168 Collineationen fest bliebe, und das ist nicht der Fall.

Die Gleichung vierten Grades ist also in der That nicht zu vermeiden.

Düsseldorf, Ende März 1879.

Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.

Von

Hrn. Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Die Grundsätze und Grundbegriffe der Variationsrechnung sind durchaus nicht unbedenklich für den, welcher nicht blos an der Beherrschung einiger bekannter Methoden zur Lösung von Minimums- oder Maximumsproblemen sich erfreuen will, sondern der ein genaues Verständniss jener Lehre erstrebt. Vor ihm bäumen Fragen sich auf, denen scheinbar keine Anstrengung gewachsen ist. Die gebräuchlichen Methoden waren mir längst geläufig wie meine Muttersprache, als gelegentlich ein mir räthselhaft falsches Ergebniss mich auf die Unklarheit in meinen Grundbegriffen aufmerksam machte.

Die Variationsrechnung lässt sich, wie andere Theile der Integralrechnung, kaum noch gegen die Gebiete abgrenzen, in welchen der neuere Functions- und Integralbegriff massgebend ist. Hierin scheint mir der Grund zu liegen, weshalb sie heute uns nicht mehr dieselbe Befriedigung gewährt, wie unseren mathematischen Vorfahren. Was uns zum Bedürfniss geworden, den wünschenswerthen oder nothwendigen Umfang unserer Probleme und ihrer Lösungen zu kennen, kümmert sie nicht, und ihre Beweise entbehren der Schärfe. So weit ich die Dinge kenne, treten die angedeuteten Schwierigkeiten nicht allein gleich bei den ersten Anfangsgründen der Rechnungsart auf, sondern sie machen sich später bei gewissen mechanischen Problemen (Gleichgewicht und Bewegung faden- und flächenförmiger Gebilde und darauf vertheilter Massen) in anderer Form wieder bemerklich. Auf diese letzteren Probleme, bei denen bis jetzt noch nicht bekannte oder doch nicht beachtete eigenthümliche Paradoxa auftreten, beabsichtige ich später einmal einzugehen. Mein gegenwärtiger Vorwurf ist lediglch die Untersuchung der elementarsten Operationen der Variationsrechnung vom Standpunkt der allgemeinen Functionentheorie. Ich habe, um den Betrachtungen eine feste Richtung zu geben, sie in die Form gekleidet, dass ich die einfachste Variationsaufgabe, welcher man an der Spitze der ganzen Theorie zu begegnen pflegt, das Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten in voller Strenge zu lösen versuche. Und wenn mir dies, wie ich glaube, gelungen ist, so darf man im Nachstehenden den *ersten wirklichen* Beweis dafür erblicken, dass *unter allen rectificirbaren Linien die Gerade die kürzeste sei.* Auf dem Wege zu diesem Ergebniss sammeln wir einige neue Sätze der Integrabilitätslehre. Endlich werden zum Abschluss zwei ebenfalls neue Beweise für die isoperimetrische Regel gegeben.

1.

Ueber Sinn und Allgemeinheit der Variation δy einer Function y.

Zunächst wird die Variation selbst sehr verschieden aufgefasst. Mir sagt am meisten zu die spätere Lagrange'sche Auffassung, nach welcher $\delta y = \varepsilon\eta$ ist, wo ε eine differentialische Grösse bedeutet, und $\eta = \lambda(x)$ eine zunächst durch nichts beschränkte Function, so dass gleichsam ε die Kleinheit, η die Willkürlichkeit der Variation vorstellt. Die Umkehrung $\delta dy = d\delta y$ ist Definition. Wenn wir nämlich y und $y' = \frac{dy}{dx}$ variiren in y_1 und $y_1' = \frac{dy_1}{dx}$, und annehmen $\delta y = \varepsilon\eta$, $\delta y' = \varepsilon h$, so folgt aus $y_1' - y' = \varepsilon h = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\varepsilon\eta}{dx} - \frac{dy}{dx}$, dass $\varepsilon h = \frac{d\varepsilon\eta}{dx}$ ist. Nun ist $\varepsilon h = \delta y'$, $\frac{d\varepsilon\eta}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$, also, wie man es gewöhnlich schreibt, $\delta dy = d\delta y$.

Was hat man sich nun unter der Function $\lambda(x)$ in $\delta y = \varepsilon\lambda(x)$ vorzustellen? Wie beschaffene Functionen kann $\lambda(x)$ bedeuten? *Bequem* ist es allerdings, um Weiterungen wegen der Bedeutung der Differentialquotienten von $\delta y = \varepsilon\lambda(x)$ aus dem Wege zu gehen, $\lambda(x)$ mit einer angemessenen Anzahl Differentialquotienten *stetig* anzunehmen. Aber wenn die Aufgaben der Variationsrechnung ihrem eigentlichen Sinne nach verstanden werden, so ist diese Annahme einfach *falsch*, insofern sie nicht mehr die ursprüngliche, sondern irgend eine andere zu Gunsten der Rechnung beschränkte Aufgabe voraussetzt.

Betrachten wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die Aufgabe von der kürzesten ebenen Linie zwischen zwei Punkten. Ist $y =$ einer Function von x die Gleichung der kürzesten Linie, so sei also $y + \delta y = y + \varepsilon\lambda(x) =$ einer Function von x die Gleichung der variirten also längeren Linie. Die kürzeste Linie muss die kürzeste von allen *möglichen rectificirbaren* ebenen Linien sein. Wenn wir die Variation δy nur zu Gunsten der Rechnung beschränken, so erhalten wir ein Minimum nur aus einer Gruppe von Linien und nicht die kürzeste unter *allen* möglichen Linien, welche die Endpunkte verbinden. Andererseits darf man aber auch auf $\delta y = \varepsilon\lambda(x)$ den allgemeinen Functionsbegriff der neuern Mathematik nicht ohne Weiteres anwenden, eben weil die variirte Linie eine *Länge* haben muss. (Mehrdeutigkeiten der

Function $\lambda(x)$ sind durch die Forderung der *kürzesten* Linie offenbar von vornherein ausgeschlossen.) Es fragt sich, wie man den Bereich der Function $\lambda(x)$ am richtigsten bestimmt, damit das Minimumsproblem nicht beschränkt und auch nicht über seine natürlichen Grenzen hinaus verallgemeinert werde. Es scheint, dass folgende Vorstellung diesen Forderungen am besten sich anpasst.

Die variirte „Linie" muss aus rectificirbaren Strecken bestehen, so dass der Differentialquotient der Variation integrirbar sein muss. Wo $\lambda(x)$ von einem Werth zu einem endlich verschiedenen plötzlich aufspringt, müssen, der Rectificirbarkeit wegen, die beiden Werthe durch eine geradlinige Strecke verbunden sein. Diese Unstetigkeiten dürfen sich nach einzelnen Punkten hin unendlich verdichten, die sich wieder nach einzelnen Punkten hin verdichten können, u. s. f. Dies scheint mir die allgemeinste Form der Variation $\lambda(x)$ zu sein, bei welcher man der variirten Linie eine *Länge* zusprechen kann. Ich sage, dass diese Form mir die allgemeinste zu sein *scheint*, weil man solche Anschauungen natürlich nicht beweisen kann.

Der Gegenstand ist gleichwohl so wichtig, dass wir diese unsere Ansicht von der grössten Allgemeinheit des Begriffs einer rectificirbaren Linie etwas genauer durchführen und begründen wollen.

Ueber den Begriff rectificirbarer Linien.

2.

Construction des Begriffs der Rectificirbarkeit.

Der allgemein verbreitete Begriff von der *Länge* krummer Linien ist zwar kein eigentlich geometrischer, ist aber doch wohl der unmittelbaren Naturanschauung entsprossen, indem ihn die Verbiegung gerader und die Streckung krummer linienförmiger Gegenstände erzeugt. Der *mathematisch-ideale* Begriff der Länge krummer Linien ist aber ein wesentlich *analytischer* Begriff, insofern er einen Grenzübergang enthält. Diese Länge ist nämlich die Grenze einer Summe nach bestimmtem Gesetz ins Unbegrenzte sich vermehrender und dabei angemessen sich verkürzender *wirklich vorgestellter Längen.* Sie ist also ein Integral. Der *Grenzübergang* ist es, welcher den Begriff zu einem analytischen macht, weil er stets den Fluss der sinnlichen Vorstellungen unterbricht. Aehnlich verhält es sich mit den krummlinig begrenzten ebenen und krummen Flächenräumen und mit dem Rauminhalt.

Hiernach möchte die Frage nach der grösstmöglichen Ausdehnung des Functionsgebiets, auf welches der Längenbegriff angewendet werden kann, nicht aus der Vorstellung Länge, welche wir nur bei der geradlinigen Strecke haben, sondern aus dem Erfolg jenes Grenzübergangs, ob er eine feste Grenze liefert oder nicht, zu entscheiden sein.

Nur wo die Function geradlinige Strecken ergiebt, werden diese wirklichen Längen entsprechen und unmittelbar als solche einzurechnen sein. Dergleichen geradlinige Strecken werden u. A. auftreten, wenn wir den Begriff der *rectificirbaren Functionen* nicht auf stetige beschränken. Falls die Function $f(x)$ für $x = x_1$ von einem Werthe $f(x_1 - 0)$ zu einem endlich verschiedenem $f(x_1 + 0)$ überspringt, und sie ist auf beiden Seiten von x_1 rectificirbar, so rechnen wir*), wo dies, wie in der Variationsrechnung, einen guten Sinn hat, zur Länge die positiv genommene Strecke $f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)$ hinzu. Wir sind dazu um so mehr berechtigt, ja aufgefordert, als wir eben eine wirkliche Länge hinzurechnen, und wir die Analogie der Länge einer treppenprofilartig gebrochenen geraden Linie vor Augen haben, welche von einem Ende zum andern eine wirkliche Länge und keine Grenze von Längen ist.

Zwischen zwei Sprüngen, z. B. für die Argumentwerthe $x = x_1$, $x = x_2$, verstehen wir unter Länge der Curve (für Function) $y = f(x)$ das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

wenn auch z. B. ein zweiter Differentialquotient $f''(x)$ gar nicht existirt.

Dieses Integral existirt stets, wenn $f'(x)$ eine integrirbare**) Function ist, d. i. $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ ist gleichzeitig mit $f'(x)$ eine integrirbare Function. Denn mit $f'(x)$ ist $f'(x)^2$ integrirbar, weil, wie ich gezeigt habe***), das Product integrirbarer Functionen ebenfalls integrirbar ist.

Nun sei in einem Intervall δ:

$$f'(x_1)^2 - f'(x_2)^2 = 1 + f'(x_1)^2 - \left(1 + f'(x_2)^2\right) = u$$

der grösste Werthunterschied von von $f'(x)^2$. Betrachtet man aber, $a = \sqrt{1 + f'(x_1)^2}$, $b = \sqrt{1 + f'(x_2)^2}$ gesetzt, die Unterschiede:

$$u = a^2 - b^2,$$
$$v = a - b,$$

so ist $u > v$, wegen $u = v(a + b)$. Daher sind die grössten Werthunterschiede von $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ kleiner, wie die von $f'(x)^2$, also ist, wie behauptet, *mit* $f'(x)$ *zugleich* $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ *integrirbar*.

---

*) Siehe meinen Aufsatz: *Ueber die sprungsweisen Werthänderungen analytischer Functionen*, diese Annalen Bd. VII, pag. 241.

**) In einem Intervall $b - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ integrirbar heisst eine dort, wie folgt, beschaffene Function: Bildet man für jede Theilstrecke δ_p den grössten Unterschied der darin auftretenden Functionalwerthe, und bezeichnet ihn, positiv gerechnet, mit Δf_p, so muss $\delta_1 \Delta f_1 + \delta_2 \Delta f_2 + \cdots + \delta_n \Delta f_n$ zugleich mit sämmtlichen δ_p Null zur Grenze haben.

***) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 24.

Man fällt nicht sogleich auf dieselbe Beziehung bei der Nichtintegrirbarkeit von $f'(x)$. Falls $f'(x)$ z. B. nur von -1 zu $+1$ schwankte, wäre $\sqrt{1+f'(x)^2}=\sqrt{2}$. Ob freilich Differentialquotienten möglich sind, die nur derartige Schwankungen zeigen, ist mindestens fraglich, jedenfalls aber würden wir nicht ohne Weiteres behaupten dürfen, dass die Nichtintegrirbarkeit von $f'(x)$ diejenige von $\sqrt{1+f'(x)^2}$ bedingt. Aus diesem Grunde lassen wir es bei der Integrirbarkeit von $\sqrt{1+f'(x)^2}$ als der möglich allgemeinsten Bedingung für die Rectificirbarkeit von $f(x)$ bewenden.

Doch gestattet der Begriff der Rectificirbarkeit noch diese erhebliche Verallgemeinerung, dass wir die Anzahl der Sprungstellen nicht endlich anzunehmen brauchen. Es bezeichne x_ν allgemein einen solchen Argumentwerth, für welchen $f(x)$ springt, so ist nur erforderlich, dass die Summe:

$$\sum \mathrm{mod}\,\big(f(x_\nu+0)-f(x_\nu-0)\big),$$

über alle Sprungstellen erstreckt Null sei. Nur *pantachisch**) vertheilte Sprünge verträgt der Begriff der Rectificirbarkeit auch nicht im kleinsten Intervall, weil es alsdann dort keinen Differentialquotienten giebt. Die Sprungstellen können sich nach einzelnen Punkten ins Unbegrenzte verdichten, indem die Sprunghöhe in solchem Masse abnimmt, dass die Summen der unendlichen Reihen, welche die Sprunghöhen bilden, convergent sind. Die Verdichtungspunkte I. Ordnung können sich wieder nach einzelnen Punkten zu unbegrenzt verdichten, u. s. f. *Charakteristisch für diese Art Punktvertheilung ist, dass man stets durch eine endliche Anzahl Strecken des betrachteten Intervalls, die zusammengefügt eine beliebig kleine Strecke geben, so viel Sprungstellen ausschliessen kann, dass der Rest eine endliche Anzahl bildet.*

Somit gelangen wir zu folgender *Definition der Rectificirbarkeit einer Function $f(x)$:*

Die Function muss in dem Intervall, in welchem sie rectificirbar sein soll, stets endlich sein. Sie darf sprungweise Werthänderungen erleiden in einer endlichen Anzahl Punkte oder in Punkten, die Verdichtungspunkte endlicher Ordnung bilden. Die Summe ihrer positiv genommenen Sprünge muss endlich sein. Zwischen je zwei benachbarten Sprungstellen muss die Function $\sqrt{1+f'(x)^2}$ integrirbar sein.

---

*) Ich nenne *pantachische Vertheilung einer Punktart in einem Intervall* eine solche Vertheilung, bei der in jeder kleinsten Strecke des Intervalls Punkte, die zu jener Punktart gehören, angetroffen werden.

3.

Polygonale und mit allen Differentialquotienten stetige Linien, als deren Grenze eine rectificirbare Linie angesehen werden kann.

An solche Function schliesst sich alsdann stets eine aus geradlinigen Strecken bestehende gebrochene Linie $\varphi(x)$ an, die mit ihr in den Eckpunkten übereinstimmt, und ihr in der Länge beliebig nahe kommt. Dies lässt sich, wie folgt, einsehen.

Wir schliessen zunächst durch geradlinige Strecken, welche Punkte von $f(x)$ verbinden, die Verdichtungspunkte der Sprungstellen aus. Die Summe dieser Strecken sei s_1, und dies s_1 lässt sich durch Verkürzung der Strecken beliebig verkleinern. Es bleibt also nur noch eine endliche Anzahl Sprungstellen übrig. Die Sprünge lassen wir zu $\varphi(x)$ gehören, ihre Summe sei s_2, und dieses s_2 gehört sowohl zu $f(x)$ als zu $\varphi(x)$. Endlich bleiben die stetigen Strecken von $f(x)$ übrig, und von diesen ist es bekannt, dass man sie durch polygonale Linien s_3 ersetzen kann, deren Länge von $\int dx \sqrt{1+f'(x)^2}$ beliebig wenig abweicht, und deren Eckpunkte mit $f(x)$ übereinkommen. Also wird es sich nur um die Vergleichung der Strecken s_1 mit den entsprechenden Längen von $f(x)$ handeln können. Doch auch diese müssen mit den s_1 zugleich beliebig klein sein. Denn sie zerfallen in zwei Theile: in die in ihnen enthaltenen stetigen Strecken, die offenbar beliebig klein sind, und in die in ihnen enthaltenen Sprünge. Auch diese müssen zusammengerechnet etwas beliebig Kleines ergeben. Es reicht aus, dies an einem Verdichtungspunkt erster Ordnung zu bestätigen. Sind x_p, $x_{p+1}, \cdots$ die sich ihm nähernden Sprungstellen, so muss die Reihe $\Sigma \operatorname{mod}[f(x_p+0)-f(x_p-0)]$ convergent sein. Die Strecke, welche den Verdichtungspunkt ausschneidet, enthält den Rest dieser Reihe, den man ihrer Convergenz wegen beliebig verkleinern kann. Da also die Strecken s_1 und die ausgeschnittenen entsprechenden Curventheile $f(x)$ beliebig klein sind, die Strecken s_2 sowohl $f(x)$ wie $\varphi(x)$ angehören, und der übrige Theil der Länge von $\varphi(x)$ der Länge von $f(x)$ beliebig nahe gebracht werden kann, so gilt das Gleiche von der Gesammtlänge von $\varphi(x)$ und $f(x)$.

Was im gewöhnlichen Sinne die Rectificirbarkeit kennzeichnet, dass man z. B. den Kreisumfang als Grenze einer Reihe ein- oder umschriebener Polygone auffasst, gilt, wie aus dem eben Gesagten folgt, auch für im allgemeinsten Sinne rectificirbare Linien: *Man kann der Länge von $f(x)$ sich mit Längen polygonaler Linien $\varphi(x)$ so nähern, dass die Länge von $f(x)$ die Grenze der Längen von $\varphi(x)$ ist, während allerwärts der Unterschied $f(x)-\varphi(x)$ unter jede Grenze sinkt.*

Man kann übrigens, wie ich kurz berühren will, noch weiter gehen und zeigen, dass wir jeder polygonalen Linie $\varphi(x)$ mit einer anderen $\Phi(x)$, die mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig ist, uns in derselben Weise nähern können. Wir brauchen nur die Ecken der polygonalen Linien in geeigneter Weise durch kurze Bögen zu ersetzen*). Weiter unten werden wir Veranlassung haben etwas Aehnliches wie diese Abrundung durchzuführen, woraus das Verfahren, wie sie zu bewirken ist, einleuchten wird, so dass ich darauf nicht weiter eingehe. Ich nehme also an, dieser Punkt sei erledigt, und dass wir schliesslich das Ergebniss haben:

Man kann stets zu einer zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ rectificirbaren Function $f(x)$ andere zwischen denselben Grenzen mit allen ihren Differentialquotienten stetige Functionen $\Phi(x)$ finden, der Art, dass die Längen von $f(x)$ und $\Phi(x)$ zwischen den Grenzen a und b sich beliebig wenig unterscheiden, und dass der Unterschied $f(x) - \Phi(x)$ im ganzen Intervall unter einer beliebig kleinen Grenze sich befindet.

Das Problem von der kürzesten ebenen Linie zwischen zwei Punkten.

4.

Das Problem der kürzesten rectificirbaren Linie wird auf das der kürzesten rectificirbaren und stetigen Linie zurückgeführt.

Die Aufgabe wird also, wie oben verlangt, so ausgesprochen und gelöst werden müssen:

Es soll unter allen möglichen rectificirbaren Functionen, welche zwischen den Punkten p_1 und p_2 gegeben sein können, die kürzeste angegeben werden.

Die Methode Lagrange's zur Lösung solcher Aufgaben beginnt nun, wie folgt. Man nimmt an, die gesuchte Function existire und sei $y = f(x)$. Wenn wir mit S_{ab} die Länge der Linie (für Function) von $f(x)$ bezeichnen, mit S'_{ab} die irgend einer anderen Linie $\eta = \psi(x)$, so muss also $S'_{ab} > S_{ab}$ sein. Aber, den Grundsätzen der Theorie der Maxima und Minima gemäss, wird die Linie $\psi(x)$ dahin beschränkt, dass ihr Unterschied von $f(x)$ längs des Intervalles eine gewisse Grösse nicht überschreiten darf. Um diese Bedingung gleich auch formal zu

---

*) Es kann übrigens auf sehr mannigfaltige Weise eine solche Function $\Phi(x)$ bestimmt werden. Man verbinde z. B. die Endpunkte von $\varphi(x)$ durch eine nicht in der Ebene von $\varphi(x)$ gelegene Linie, so dass man im Ganzen eine geschlossene Linie erhält. Die Niveaulinie der durch diese geschlossene Linie gelegten Minimalfläche nähert sich in der verlangten Weise der Linie $\varphi(x)$, als einer Grenzfigur.

Ein Abrundungsverfahren, wie das im Text gemeinte, habe ich auch schon durchgeführt bei Gelegenheit der Functionen, deren Fourier'sche Entwickelung nicht convergirt (Abh. d. Münch. Akad. II. Cl. XII. Bd. II. Abth. Unters. über die Convergenz und Divergenz etc. Art. 42 sqq.).

erfüllen, setzt man, wie oben bemerkt, $\psi(x) = f(x) + \varepsilon\lambda(x)$, wo ε die kleine Grösse.

Hier aber fangen schon die Schwierigkeiten an, wenn man nach den üblichen Regeln die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit in Formeln kleiden will, um die Bedingungen zu finden, aus denen $f(x)$ bestimmt werden kann.

Wenn wir $f(x)$ nicht durchweg stetig voraussetzen, so besteht die Länge S_{ab} aus den Integralen

$$\int_\alpha^\beta dx \sqrt{1 + f'(x)^2}\,,$$

zwischen deren Grenzen $f(x)$ stetig und $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ integrirbar ist, und den Strecken

$$\Sigma \bmod [f(x_p + 0) - f(x_p - 0)],$$

und wenn man nun die analogen Aggregate für die variirte Function $\psi(x)$ aufstellte und beide vergleichen wollte, so wäre dies auf dem Wege der gewöhnlichen Variationsrechnung nicht möglich wegen der Summen, die zu den Integralen treten, und wegen der Zerfällung des Integrals von a bis b in die unbestimmte, ja unbegrenzte Zahl Theilintegrale von α bis β.

Hier muss also irgend ein Kunstgriff helfen, sonst wären wir sogleich gezwungen die Bedingungen der Aufgabe einzuschränken, und blos nach der kürzesten *stetigen* Linie zu fragen.

Ich habe mir Mühe gegeben ein allgemeines analytisches Verfahren auszusinnen, um den bekannten Methoden der Variationsrechnung die volle Allgemeinheit zu ertheilen, ohne jedoch zum Ziele zu gelangen. Mein Ziel war, unter Benutzung des Satzes am Schlusse des vorigen Artikels die Grössen unter dem Integral in geeigneter Weise in einen stetigen und einen zu vernachlässigenden unstetigen Theil zu zerlegen. Es scheint dies aber schwierig zu sein. Allein ich wurde für diese Misserfolge einigermassen schadlos gehalten durch die Bemerkung, dass es nicht allein bei dem Problem der kürzesten Linie, sondern auch bei zahlreichen andern Aufgaben der Variationsrechnung durch ein blosses Raisonnement, aber mit Hilfe jenes Satzes, gelingt, den Fall der Unstetigkeit auf den der Stetigkeit zurückzuführen. Der Schluss lautet so:

Wir suchen zuerst die kürzeste unter allen stetigen Linien. Ich nenne sie L. Dann suchen wir die kürzeste unter allen rectificirbaren Linien überhaupt. Sie heisse L_1 und sei stetig oder unstetig. Ist sie stetig, so kann es keine andere als L sein, da sie auch die kürzeste unter den Stetigen sein muss. Ist sie unstetig, so sei $L - L_1 = \varepsilon$. Alsdann kann man nach dem Satz am Schluss des vorigen Artikels stets eine stetige Linie L_1' finden, welche L_1 in der Länge beliebig nahe kommt, also sich von L_1 um weniger als ε unterscheidet. Sie müsste kleiner als L sein gegen die Voraussetzung, also giebt es keine solche unstetige Linie, die kürzer ist als die kürzeste stetige Linie. Nun ist durch diesen Gedankengang noch nicht ausgeschlossen, dass es mehrere kürzeste (gleich lange) stetige oder unstetige Linien geben kann. Dass es nur eine stetige giebt, wird der Calcül zu beweisen haben. Dann könnte es aber noch, und dies ist das logische Residuum, unstetige kürzeste Linien geben, die *gleich* lang wären wie die kürzeste stetige. Diese letzte Möglichkeit widerlegen wir so. Der Calcül ergiebt die Gerade als kürzeste stetige Linie. Also sind in der hypothetischen kürzesten unstetigen Linie alle stetigen Strecken, die nicht gerade sind, durch gerade zu ersetzen. Dann wird sie eine polygonale, aus geraden Strecken zusammengesetzte Linie, und von einer solchen lehrt die Elementargeometrie, dass sie keine kürzeste Linie ist, wenn ihre Winkel nicht alle zwei Rechte betragen.

So ist denn das Problem vollständig auf die stetigen Functionen zurückgeführt. Verfolgen wir nun die Methode weiter.

5.

Die Methode verlangt abermals eine Beschränkung der Functionen, aus welcher die der kürzesten Länge gesucht wird, jedoch ergiebt sich wieder, dass diese Beschränkung das Resultat nicht beschränkt.

Wir nehmen also die hypothetische kürzeste Linie $y = f(x)$ und eine andere beliebige, mit der sie verglichen werden soll, $\eta = f(x) + \varepsilon\lambda(x)$, stetig an, und es soll

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + (f'(x) + \varepsilon\lambda'(x))^2} - \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + f'(x)^2} > 0$$

sein. Wonach wir streben ist $\lambda(x)$ nicht weiter zu beschränken, als durch die Bedingung der Rectificirbarkeit von $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$.

Hier aber erhebt sich ein neues Bedenken. Wenn nämlich ε nicht beschränkt wird, so kann allerdings $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$ jede nahe und ferne Linie vorstellen. Wenn $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$ z. B. gleich $\varphi(x)$ sein soll, und $f(x) - \varphi(x)$ ist durchweg klein, so können wir eine nach dem Parameter ε variable Curvenschaar $f(x) + \varepsilon\lambda(x)$ annehmen, wo $\lambda(x) = \frac{\varphi(x) - f(x)}{\varepsilon_1}$, und ε_1 den grössten Unterschied zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ vorstellt. Dann gehört $\varphi(x)$ in der That zu dieser Schaar. Aber wenn, wie es die analytische Methode heischt, für ε eine Grenze besteht, die von der Beschaffenheit von $\lambda(x)$ abhängt, so ist dadurch wieder ein Theil Functionen $\varphi(x)$ ausgeschlossen, und wir erhalten wieder zunächst nur ein partielles Minimum. Indessen hilft folgende Erwägung über diese Schwierigkeit hinweg:

Wir erhalten eine Bedingung für das partielle Minimum $f(x)$, welcher auch das wirkliche genügen muss, denn wenn die ihm entsprechende Function bekannt und von vornherein eingesetzt wäre, so könnte durch die weitere Unterstellung, dass sie auch einem partiellen Minimum entspricht, was ja doch auch zutrifft, nichts Falsches herauskommen. Das wirkliche Minimum muss also ebenfalls der Bedingung genügen. Findet sich sodann nur *eine* Function, die der Bedingung genügt, so muss sie mit der wirklichen Minimumsfunction identisch sein. So dass also auch diese neue Einschränkung der Functionen, unter denen die kürzeste Linie zu suchen ist, die Allgemeinheit des Resultats nicht beeinträchtigt.

Eine letzte Einschränkung, die jedoch eben wahrscheinlich keine ist, lässt sich aber nicht vermeiden. Es ist die, dass wir $f'(x)$ und $\lambda'(x)$ integrirbar annehmen, und die Integrirbarkeit also nicht blos von $\sqrt{1+(f'(x)+\varepsilon\lambda'(x))^2}$ voraussetzen. Denn durch die Anwendung der Methode erhalten wir die erste Potenz von $f'(x)$ und $\lambda'(x)$ unter dem Integral.

6.

Die Gleichung, aus der die Variationsrechnung die Differentialgleichungen für die unbekannte Function mit Hilfe partieller Integration schliesslich findet, wird auch hier nach Beseitigung einiger Bedenken erhalten.

Nun also wird unsere Bedingung (I) des vor. Art., wenn wir darin das Differential des ersten Integrals (nicht das Integral selbst*)) nach Potenzen von ε mit dem Lagrange'schen Rest entwickeln:

$$\text{(II)}\quad \varepsilon\int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{\lambda'(x)\,f'(x)}{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{\lambda'(x)^2}{[1+(f'(x)+\varepsilon_1\lambda'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}>0,\ 0\leqq\varepsilon_1\leqq\varepsilon.$$

Es giebt ohne Zweifel für jede Function $\lambda'(x)$ ein hinreichend kleines ε, damit das erste Glied das Vorzeichen bestimme. Schreiben wir die vorstehende Formel einen Augenblick $\varepsilon A+\varepsilon^2 B>0$, so braucht nur $(\varepsilon B)^2<A^2$ zu sein. Dies wird stattfinden, wenn dem numerischen Werthe nach:

---

*) Weil man, wenn man das Integral selbst nach ε entwickeln wollte, erst seine Differenzirbarkeit untersuchen müsste, was bei Integralen nur integrirbar angenommener Differentiale nicht einfach ist. Der Unterschied bei den Operationen thut sich darin kund, dass ε_1 bei Entwickelung des Integrals von den Integrationsvariabeln unabhängig wird, was bei Entwickelung des Differentials nicht der Fall ist.

$$\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} dx \, \lambda'(x)^2 < \int_{x_0}^{x_1} dx \, \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$$

ist. Es muss also wirklich für jede Function $\lambda(x)$ sein:

$$\text{(III)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \, \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0 \cdot$$

Doch wir haben etwas versäumt. Wenn wir ein Integral einer integrirbaren Function zerlegen, müssen wir erst zeigen, dass *jedes von ihnen für sich integrirbar ist.* Wir haben:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+(f'(x)+\varepsilon\lambda'(x))^2} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+f'(x)^2} + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} dx \, \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x)^2}{[1+(f'(x)+\varepsilon_1\lambda'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = C + \varepsilon A + \varepsilon^2 B \cdot$$

Das erste Integral rechts hat ein integrirbares Differential. Wenn man bei dem dritten die $-\frac{3}{2}$ Potenz vor das Integral nimmt, so ist deren Mittelwerth < 1, und in das Integral $\int_{x_0}^{x_1} dx \lambda'(x)^2$ multiplicirt, welches ein integrirbares Differential hat. Es ist gleichgültig, ob der Factor dieses Integrals unbestimmt ist. Es reicht aus, dass er kleiner als Eins ist. Zunächst muss $\varepsilon A + \varepsilon^2 B$ zusammen bestimmt sein, weil der übrige Theil der Gleichung es ist. Dann muss aber sowohl A wie B bestimmt sein, denn da sowohl A wie εB endlich sind, also, falls sie unbestimmt wären, zwischen endlichen Grenzen schwanken müssten, so könnte die gleichzeitige Unbestimmtheit von εB diejenige von A nicht aufheben, weil ja εB durch Verkleinerung von ε gegen A beliebig klein gemacht werden kann, so dass also doch $\varepsilon A + \varepsilon^2 B$ unbestimmt wäre. Dieser Beweis für die Integrirbarkeit der Function unter dem Integral A lässt sich auf andere ähnliche Fälle ausdehnen. Uebrigens kann man die Integrirbarkeit dieser *besonderen* Function auch direct beweisen, was bei einer späteren Gelegenheit (Art. 14) geschehen wird.

Nun endlich kann uns die Gleichung

$$\text{(III)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0$$

nicht mehr streitig gemacht werden. Wir haben sie in ihrer vollen Allgemeinheit glücklich durch alle Klippen geführt.

7.

Die Gleichung (III) und die aus ihr mit Hülfe partieller Integration erhaltene werden discutirt. Wir können von nun an die Allgemeinheit nicht mehr wahren, sondern müssen einschränkende Voraussetzungen machen. Indessen kann das allgemeine Resultat auf anderem Wege erhalten werden. Ein Satz der Variationsrechnung.

Aber was ist nun mit der Gleichung (III) anzufangen? Sie steht da, allein die partielle Integration, zu der man nun weiter seine Zuflucht nehmen soll, hier dürfen wir sie nicht anwenden, wenn wir nicht die Allgemeinheit unserer Voraussetzungen, die wir bisher so sorglich geschützt, plötzlich zum besten Theile preisgeben wollen.

Der Umfang, in welchem die gewöhnliche Formel für partielle Integration angewendet werden kann, wurde von mir bestimmt, wie folgt:*)

Falls im Intervall $a \cdots b$ von x $f(x)$ und $\varphi'(x)$ nicht in denselben Punkten und nur so unendlich werden, dass die Integrale convergent sind, und übrigens diese Functionen die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllen, während $\varphi(x)$ stetig sein muss, hat man:

$$\int_a^b d\alpha\,\varphi(\alpha)f(\alpha) = \varphi(b)\int_a^b d\alpha f(\alpha) - \int_a^b d\alpha\,\varphi'(\alpha)\int_a^\alpha d\beta f(\beta)\cdot$$

In unserer Formel entsprechen $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ und $\lambda'(x)$ den Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ in dieser.

Wären jene Bedingungen der Formel für partielle Integration erfüllt, so hätte man:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\lambda'(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \frac{\lambda(x_1)f'(x_1)}{\sqrt{1+f'(x_1)^2}} - \frac{\lambda(x_0)f'(x_0)}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}} - \int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}},$$

und wenn zudem $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ nur darin die Bedingungen nicht erfüllte, dass sie einzelne Sprungstellen hätte für die Punkte x_p, so käme noch (der Kürze halber $F(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ gesetzt) rechts der Term

$$\Sigma\lambda(x_p)\,[F(x_p+0) - F(x_p-0)]$$

hinzu.

---

*) Abh. d. K. baier. Acad. d. Wissensch. II. Cl. XII. Bd., I. Abth., Beweis dass die Coefficienten etc. Art. 12. Mittheilungen des Hrn. Thomä in *Schlömilchs Zeitschrift.*

Wenn wir an unser Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten und an unsere bisherige Untersuchung denken, so hat $\lambda(x)$ folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Es ist $\lambda(x_0)=0$, $\lambda(x_1)=0$,

2. $\lambda'(x)$ ist im Intervalle von x_0 bis x integrirbar, und $\lambda(x)$ stetig.

Wie wir $\lambda(x)$ diesen Bedingungen gemäss auch bestimmen mögen, stets ist Formel (III) richtig, wenn nur $f(x)$ die oben besprochene Minimalfunction ist.

Die Bedingungen für die partielle Integration sind von $\lambda(x)$ jedenfalls erfüllt. Aber die Stetigkeit von $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ beschränkt die Gruppe der rectificirbaren Function bedeutend.

Um so erfreulicher ist es, dass es doch noch einen Weg giebt auf dem man wenigstens im Falle der kürzesten Linie die Allgemeinheit aus dieser letzten und bedenklichsten Gefahr unverkümmert retten kann. Ich werde ihn weiter unten (Art. 14.) mittheilen.

Zuvörderst will ich die gewöhnliche Methode verfolgen, und ihren Schlüssen die grösste Allgemeinheit und Strenge zu ertheilen suchen, wobei sich neue Sätze der Integrabilitätslehre ergeben werden.

Wir nehmen zu diesem Zwecke an, wir hätten unsere Voraussetzungen den Bedingungen der Formel für partielle Integration gemäss beschränkt, und wollen die durch partielle Integration umgeformte Gleichung (III) so schreiben:

$$\lambda(x_1)F(x_1)-\lambda(x_0)F(x_0)+\Sigma\lambda(x_p)\,[F(x_p+0)-F(x_p-0)]$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}dx\,\lambda(x)\,F'(x)=0,$$

indem wir vorerst vereinzelte Sprünge von $F(x)$ zulassen. Ich habe um die Formel in ihrer Vollständigkeit zu geben $\lambda(x_1)$ und $\lambda(x_0)$, die bei der kürzesten Linie eigentlich Null sind, noch nicht unterdrückt.

Nun ist $\lambda(x)$ blos rectificirbar anzunehmen. Wir werden also, ich werde alsbald zeigen, wie dergleichen Functionen analytisch darzustellen sind, $\lambda(x)$ Null annehmen dürfen ausser in Strecken $x_p-\delta\cdots x_p+\delta$, in denen sie von Null verschieden ist, und zwar so, dass $\lambda(x_0)$ dennoch durch das ganze Intervall x_0 und x_1 stetig bleibt.

Setzen wir noch $\lambda(x_1)=0$, $\lambda(x_0)=0$, so reducirt sich der Ausdruck auf:

$$\sum\lambda(x_p)[F(x_p+0)-F(x_p-0)]+\sum\int_{x_p-\delta}^{x_p+\delta_1}dx\,\lambda(x)\,F'(x)=0\cdot$$

Wir können ihn noch weiter kürzen, indem wir alle $\lambda(x_p)$ bis auf eines, $\lambda(x_r)$, Null annehmen:

$$\lambda(x_r)[F(x_p+0)-F(x_p-0)]+\int_{x_r-\delta}^{x_r+\delta_1} dx\,\lambda(x)\,F'(x)=0\cdot$$

Den Werth des Integrals können wir durch in unserem Belieben stehende Zusammenziehung der Grenzen verkleinern, bis es kleiner wie der von Null verschieden gedachte Werth von $\lambda(x_r)[\quad]$ wird. Also kann dieser Werth nicht wirklich von Null verschieden sein, also kann $F(x)$ keine einzelnen Unstetigkeiten haben, wenn sie sonst stetig angenommen wird.

Es ergiebt sich hieraus ein Satz der Variationsrechnung:*)

Wenn in

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)F(x)=0$$

$\lambda'(x)$ den integrirbaren Differentialquotienten einer stetigen Function darstellt, die beliebig ist bis auf die Endwerthe $\lambda(x_0)$ und $\lambda(x_1)$, die gegeben und zwar der Einfachheit halber $=0$ angenommen werden, und wenn man von $F(x)$ weiss, dass sie eine bis auf einzelne Sprungstellen stetige Function ist, so sind auch diese einzelnen Sprungstellen nicht vorhanden, und $F(x)$ ist im ganzen Intervall $x_0\cdots x_1$ stetig.

Hiernach bleibt von der transformirten Gleichung (III) übrig:

$$\text{(IV)}\qquad \int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)\,F'(x)=0$$

und wir haben nun zu untersuchen, was aus der Willkürlichkeit von $\lambda(x)$ in Betreff der Function $F'(x)$ folgt, *die, da wir von $F(x)$ nichts als die Stetigkeit wissen, nur integrirbar zu sein braucht.*

---

*) Was diese Annalen Bd. II, pag. 190 von Hrn. Heine erörtert wird, hat zwar die Richtung obigen Satzes, erreicht ihn jedoch nicht ganz, da wir von $F'(x)$ nur die Integrirbarkeit brauchen, l. c. aber $F'(x)=0$ zu Grunde gelegt wird.

Ueber den Hauptgrundsatz der Variationsrechnung.

8.

Besondere Bestimmung der Variation $\lambda(x)$ und Formulirung des Hauptgrundsatzes im Falle die Function $F'(x)$ Stetigkeitseigenschaften hat.

Wir dürfen nicht, wie in der Variationsrechnung geschieht, aus

$$\text{(IV)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx\, \lambda(x) F'(x) = 0$$

sogleich schliessen $F'(x) = 0$. Man kann dies ohne Zweifel ihren *Hauptgrundsatz* nennen, es müssen jedoch die Bedingungen seiner Gültigkeit sorgfältig untersucht werden. Wir setzen zuerst Stetigkeitseigenschaften der Function $F'(x)$ voraus.

Um die Formel (IV) alsdann discutiren zu können, ist es zweckmässig, in besonderer Weise über die Variation $\lambda(x)$ zu verfügen.

Ich habe schon von einer solchen Bestimmungsweise der willkürlichen Function $\lambda(x)$ Gebrauch gemacht, bei der sie bis auf gewisse Strecken Null und dennoch stetig ist. Dergleichen Functionen lassen sich auf mannigfache Art construiren. Zwei solche Constructionsmethoden werde ich hier mittheilen, deren erste eine so beschaffene Function ergiebt, dass sie mit einer beliebigen Anzahl Differentialquotienten stetig ist, während die zweite Functionen liefert, die mit allen ihren Differentialquotienten stetig sind, und die, weil sie sich beliebig nahe an polygonale Linien anschliessen, in allen Theilen der Variationsrechnung sich gut verwenden lassen, indem man sie namentlich auch leicht als Flächenvariationen darstellen kann.

Nach der ersten Constructionsmethode nehmen wir zwei Argumentwerthe α und β an, die der Ungleichheit

$$a < \alpha < \beta < b$$

genügen, und bestimmen $\lambda(x)$ so:

$$\begin{array}{llll} \text{für} & a \leqq x < \alpha & \text{ist} & \lambda(x) = 0, \\ \text{für} & \beta < x \leqq b & \text{ist} & \lambda(x) = 0, \\ \text{für} & \alpha \leqq x \leqq \beta & \text{ist} & \lambda(x) = [(x-\alpha)(\beta-x)]^{n+1}. \end{array}$$

Alsdann ist $\lambda(x)$ im Intervall a und b nirgends negativ und sammt seinen n ersten Differentialquotienten stetig.

Die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\, \lambda(x) F'(x) = 0$$

ergiebt also:

$$0 = F'(\xi)\int_{\alpha}^{\beta}\lambda(x)\,dx, \quad \alpha \leqq \xi \leqq \beta,$$

oder $F'(\xi) = 0$, $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. Lassen wir α und β einem Argument x' bis auf beliebig kleine Unterschiede sich nähern, so ist $\lim F'(\xi) = 0$. Der Werth $F'(\xi)$ ist irgend ein unbekannter Werth, der zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth liegt, den die Function $F'(x)$ im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ erhält. Wird nun eine Grösse ε alle Zahlen von einer gewissen an durchlaufend unbegrenzt klein, und werden es mit ε zugleich entweder $F'(x') - F'(x' - \varepsilon)$ oder $F'(x') - F'(x' + \varepsilon)$, oder diese beiden Unterschiede zugleich, so ist nothwendigerweise $F'(x') = 0$. Wenn also $F'(x)$ für $x = x'$ nach links oder nach rechts oder nach beiden Seiten stetig ist, so folgt immer $F'(x) = 0$, und da der Punkt x' irgendwo liegen kann, *so ist die Function $F'(x)$ allerwärts, wo sie die angegebenen Stetigkeitseigenschaften hat, Null.*

9.

Die Anwendung des Hauptgrundsatzes auf das Problem der kürzesten Linie, und die Probleme der Variationsrechnung überhaupt, verlangt eine neue Einschränkung der Allgemeinheit der Voraussetzungen. Der ganze Inbegriff rectificirbarer Linien wird durch sie sehr verkümmert, und man erhält die kürzeste Linie nur von einem beschränkten Theil rectificirbarer Linien.

In der Bedingung für die kürzeste Linie

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)\frac{d}{dx}\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0$$

wird, wie gesagt, von $F'(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ keineswegs Stetigkeit verlangt, $F'(x)$ braucht entschieden nur integrirbar zu sein, nur so weit waren wir behufs Anwendung der üblichen Regeln der Variationsrechnung gezwungen von der Allgemeinheit unserer Ausgangsannahmen nachzulassen. Wenn wir also aus

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x)F'(x)$$

den Schluss ziehen

$$F'(x) = 0,$$

so können wir dies nur auf Grund einer neuen Einschränkung thun. Wir greifen eben aus dem Inbegriff der rectificirfachen Functionen einen noch engeren Inbegriff heraus. Die erste wirkliche Einschränkung war, dass wir die Stetigkeit von $F(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ voraussetzen mussten, also wohl die Stetigkeit von $f'(x)$, nachdem wir schon früher $f(x)$

selbst hatten stetig annehmen müssen, allerdings *ohne* dabei die Allgemeinheit der Lösung zu beschränken. Nun also würde

$$F'(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

auch stetig sein sollen, also gewiss $f''(x)$. Wenn mithin die Variationsrechnung auf die Gleichung

$$F'(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} = 0$$

d. i. $f''(x) = 0$ der kürzesten Linie führt, so gelangt sie dahin nur durch folgende Beschränkung der natürlich sich darbietenden Voraussetzungen:

*Die Variationsrechnung schliesst aus, um zum Resultat zu gelangen, von dem Inbegriff aller Functionen, die den Begriff der Länge zulassen, alle solche Functionen, die nicht sammt ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig sind.**)

Jene Methode bringt es also nur zu einem sehr verkümmerten Ergebniss, und es ist durchaus falsch, wenn man ihr nachrühmt, sie liefere den Beweis, dass die Gerade die kürzeste Linie ist. Wie angekündigt, werden wir den Beweis dafür wirklich führen, allein durch ein ausserhalb der Methode sich bewegendes Verfahren. Dieser Beweis erscheint vom Standpunkt der allgemeinen Raumtheorie aus keineswegs überflüssig, abgesehen davon, dass man es der Mathematik doch nicht gern vorhalten lassen will, sie sei noch nicht im Stande solche Anschauungswahrheiten zu beweisen.

Zunächst aber wenden wir uns im Anschluss an das Vorstehende zu einer Untersuchung, welche auch der Integrabilitätstheorie zu Gute kommt. Es werde also $F'(x)$ nicht mehr stetig vorausgesetzt, und von Neuem die Bedingung $\int\limits_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda(x) F'(x)$ betrachtet. Wir schreiben sie behufs dieser allgemeinen Untersuchung etwas anders, und stellen uns zuerst die Frage:

Wenn über $\lambda(x)$ und $f(x)$ nichts als die Integrirbarkeit vorausgesetzt ist und $\lambda(x)$ ist eine sonst willkürliche Function, was folgt aus der Gleichung

$$\int\limits_a^b dx\,\lambda(x)\,f(x)$$

in Bezug auf $f(x)$?

*) Durch unsere Richtigstellung des Hauptgrundsatzes (Art. 12, I. Satz) wird die Beschränkung, dass $f''(x)$ stetig sein müsse, auf die Bedingung der Integrirbarkeit herabgesetzt.

10.

Einführung der begrenzten mit allen ihren Differentialquotienten stetigen Variationen.

Als bequemes Instrument für diese Untersuchung wollen wir jetzt nach der zweiten der (Art. 8.) angekündigten Constructionsweisen eine Function $\lambda(x)$ angeben, die bis auf eine oder mehrere beliebig lange Strecken Null ist. Sie hat vor der ersten im Art. 8. angegebenen voraus, erstens, dass sie in den Strecken, in denen sie nicht Null ist, bis auf beliebig zu verkleinernde Intervalle an den Enden der Strecken constant ist, und zweitens, dass sie im ganzen Intervall $a \cdots b$ mit *allen* ihren Differentialquotienten stetig ist. Dies können freilich algebraische Functionen nicht leisten, und wir werden eine Exponentialfunction zu Hülfe nehmen müssen.

Wir theilen das Intervall $a \cdots b$ in fünf Theile wie folgt:

$$a \cdots \alpha \cdots \alpha' \cdots \beta' \cdots \beta \cdots b$$

und verfügen über λ so, dass diese Function Null ist in den Strecken

$$a \leqq x \leqq \alpha, \quad \beta \leqq x \leqq b$$

und Eins in der Strecke

$$\alpha' \leqq x \leqq \beta'.$$

In den übrigbleibenden Strecken $\alpha < x < \alpha'$, $\beta' < x < \beta$ soll sie so bestimmt werden, dass sie von α bis α' stetig von 0 bis 1 wächst, von β' bis β stetig von 1 bis 0 abnimmt, und dass in α, α', β', β ihre sämmtlichen Differentialquotienten stetig sind. Es genügt, dies für die Strecke $\alpha \cdots \alpha'$ einzurichten.

Wir setzen zu diesem Zweck:

$$\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg} \varrho(x) + \frac{\pi}{2}\right\}$$

und:

$$\varrho(x) = \left(x - \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) e^{\frac{1}{(x-\alpha)(\alpha'-x)}}.$$

Das Minimum des Exponenten fällt auf $x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$. Während daher x von $\alpha + 0$ bis $\alpha' - 0$ wächst, steigt nur zunehmend $\varrho(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ und der arctg $\varrho(x)$ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, und $\lambda(x)$ von 0 bis 1.

Weiter ist:

$$\pi \lambda'(x) = \frac{\varrho'}{1+\varrho^2}, \quad \pi\lambda''(x) = -\frac{2\varrho\varrho'^2}{(1+\varrho^2)^2} + \frac{\varrho''}{1+\varrho^2}, \quad \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten bestehen aus Brüchen, deren Zähler eine niedere Potenz der Exponentialfunction enthält als der Nenner, und welche differenzirt immer ähnlich zusammengesetzte Brüche ergeben. Sie sind Producte rationaler Functionen in Brüche der Form:

$$\frac{e^{r\mu}}{(1+ue^{2\mu})^n}$$

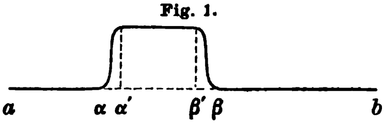
wo $\mu = \frac{1}{(x-\alpha)(\alpha'-x)}$, und $r < 2n$. Der Differentialquotient ist:

$$-n(u'+2u\mu')\frac{e^{(r+2)\mu}}{(1+ue^{2\mu})^{n+1}} + \frac{r\mu' e^{r\mu}}{(1+ue^{2\mu})^n}.$$

Im ersten Bruch steht im Zähler die $r+2^{\text{te}}$, im Nenner die $2n+2^{\text{te}}$ Potenz der Exponentialfunction. Also werden in der That sämmtliche Differentialquotienten von $\lambda(x)$ bei Annäherung an α und α' Null. Wenn man daher $\lambda(x)$ im Intervall $\beta' \cdots \beta$ ähnlich bestimmt, wie im Intervall $\alpha \cdots \alpha'$, so hat diese Function die verlangten Eigenschaften im ganzen Intervall $a \cdots b$.

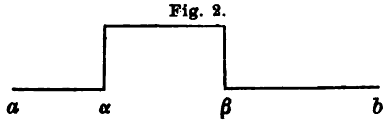
Der Verlauf der Function $\lambda(x)$ ist etwa dieser:

Fig. 1.



und da die Strecken $\alpha\alpha'$ und $\beta'\beta$ beliebig kurz im Verhältniss zu $\alpha\beta$ gemacht werden können, so ist die Function $\lambda(x)$ beliebig wenig verschieden von dieser:

Fig. 2.



in dem Sinne, dass die Unterschiede der Integrale, in welchen die Function $\lambda(x)$, und derer, in welchen die letztere unstetige auftritt, beliebig verringert werden können. Dabei ist aber $\lambda(x)$ stets mit allen Differentialquotienten stetig. Die in diesem Artikel construirte Form der Variation soll *begrenzte Variation* genannt werden.

11.

Anwendung der mit allen Differentialquotienten stetigen begrenzten Variationen um unstetige Variationen durch stetige zu ersetzen.

Führen wir die Function $\lambda(x)$ in unserem Integral

$$0 = \int_a^b dx\,\lambda(x) f(x)$$

ein, so folgt zunächst, weil $\lambda(x)$ ausserhalb des Intervalls $\alpha \cdots \beta$ Null, im Intervall $\alpha' \cdots \beta'$ Eins ist:

$$0 = \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\alpha'} dx(\lambda(x) - 1)f(x) + \int_{\beta'}^{\beta} dx(\lambda(x) - 1)f(x).$$

Da in den beiden letzteren Integralen $\lambda(x) - 1$ nur wächst oder nur abnimmt, so können sie, unter der Voraussetzung, dass $\int f(x)\,dx$ zwischen keinen innerhalb a und b gelegenen Grenzen eine gewisse Grösse überschreitet, auf Grund meines Mittelwerthsatzes beliebig klein angenommen werden. Setzt man daher:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\alpha'} dx(1 - \lambda(x))f(x) + \int_{\beta'}^{\beta} dx(1 - \lambda(x))f(x),$$

so kann die rechte Seite durch Verkleinerung der Unterschiede $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ beliebig klein gemacht werden. Sie enthält aber die Grössen $\alpha'\beta'$ gar nicht, weil die linke sie nicht enthält, also muss sie so klein sein, wie eine Grösse überhaupt sein kann, d. i. Null.

12.

Die mit der Variationsrechnung in Zusammenhang stehenden allgemeinen Sätze der Integrabilitätstheorie.

Hieraus ergiebt sich:

I. *Wenn das Integral*

$$\int_a^b dx\,\lambda(x)f(x)$$

Null ist, welche Function mit stetigen Differentialquotienten man auch an die Stelle von $\lambda(x)$ setzen möge, so ist $f(x)$ eine solche integrirbare Function, deren Integral zwischen beliebigen dem Intervall $a \cdots b$ angehörigen Grenzen Null ist.

Es hat Interesse, festzustellen, ob nicht *mehr* über die Function $f(x)$ folgt. Zu diesem Zweck wollen wir den umgekehrten Satz, jedoch in dieser allgemeineren Form beweisen:

II. *Wenn die Function $f(x)$ integrirbar ist und ihr Integral, genommen zwischen dem Intervall $a \cdots b$ angehörigen Grenzen, stets Null ist, so ist auch*

$$\int_a^b dx\,\lambda(x)f(x)$$

Null, wenn die Function $\lambda(x)$ ebenfalls integrirbar ist. Der Einfachheit halber werden beide Functionen $\lambda(x)$ und $f(x)$ endlich angenommen.

Beweis. Wenn $f(x)$ im Intervall $a \cdots b$ integrirbar ist, und wir in einem Theilintervall δ_p mit f_{0p}, f_{up} den grössten und kleinsten Werth von $f(x)$ bezeichnen, so ist nach dem Begriff der Integrirbarkeit:

$$\int f(x)\,dx = \lim \sum f_{up}\delta_p = \lim \sum f_{0p}\delta_p,$$

wo die δ_p in jeder der Summen rechts beliebig sind, und in der einen Summe anders wie in der andern angenommen werden dürfen.

Falls weiter $\int f(x)\,dx = 0$ ist, so muss in einem Intervall δ_p, wo der kleinste und grösste Werth nicht verschiedenes Vorzeichen haben, entweder der kleinste oder der grösste Werth Null sein, wobei ich — um Einwendungen vorzubeugen — ausdrücklich betonen will, dass ich nicht behaupte, die grössten und kleinsten Werthe würden von den Functionalwerthen wirklich erreicht.

Da demnach in $\Sigma f_{up}\,\delta_p$ die Grössen f_{up} Null oder negativ, in $\Sigma f_{0p}\,\delta_p$ die Grössen f_{0p} Null oder positiv sind, so wird, wenn man die positiven Werthe der Function $f(x)$ durch Null ersetzt, und die so definirte Function $f_2(x)$ nennt, $\int f_2(x)\,dx$ Null sein. Desgleichen muss, wenn man die negativen Werthe von $f(x)$ durch Null ersetzt, und die so entstandene Function $f_1(x)$ nennt, $\int f_1(x)\,dx$ Null sein. Auch ist $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.

Sodann setze man:

$$\int dx\,\lambda(x) f(x) = \int dx\,\lambda_1(x) f(x),$$

wo $\lambda_1(x) = \lambda(x) + c$ positiv sei. Endlich zerlege man:

$$\int dx\,\lambda_1(x) f(x) = \int dx\,\lambda_1(x) f_1(x) + \int dx\,\lambda_1(x) f_2(x).$$

Beide Integrale rechts sind Null, wie sich ergiebt, wenn man mittlere Werthe von $\lambda_1(x)$ herausnimmt. Es fragt sich aber, was diese Herleitung in Bezug auf $\lambda(x)$ für Forderungen stellt. Offenbar nur, dass $\lambda(x)f(x)$, $\lambda(x)f_1(x)$ und $\lambda(x)f_2(x)$ integrirbare Functionen seien. Nun habe ich aber gezeigt, dass das Product zweier integrirbarer Functionen wieder eine integrirbare Function ist. Also braucht $\lambda(x)$ nur eine integrirbare Function zu sein, *muss* es aber andererseits sein, wenn nichts über $f(x)$ als die Integrirbarkeit und das Nullsein ihres Integrals vorausgesetzt ist. Q. e. d.

Nun nehmen wir an, für irgend eine Functionengruppe $\lambda(x)$, die der Gruppe der integrirbaren Functionen angehört, sei stets

$$\int dx\,\lambda(x) f(x) = 0,$$

wobei über die Function $f(x)$ nichts als die Integrirbarkeit vorausgesetzt wird, und es folge daraus zunächst das Nullsein des Integrals $\int f(x)\,dx$.

Wenn noch mehr in Betreff der Function $f(x)$ daraus folgen soll, so muss es eine jener Gruppe angehörige Function $\lambda^*(x)$ und eine Function $f^*(x)$ geben, der Art, dass

$$\int dx \lambda^*(x) f^*(x)$$

nicht Null ist, auch wenn $f^*(x)$ die Bedingung der Integrirbarkeit und des Nullseins seines Integrals erfüllt. Es ergiebt sich aber aus dem umgekehrten Satze, dass dann immer $\int dx \lambda^*(x) f^*(x) = 0$ sein muss, also kann aus der Willkürlichkeit von $\lambda(x)$ über $f(x)$ auch nichts weiter geschlossen werden, wie deren Integrirbarkeit und das Nullsein ihres Integrals, auch wenn man die Willkürlichkeit von $\lambda(x)$ bis zur blos integrirbaren Function erweitert.

Hiermit sind die allgemeinen Sätze der Integrabilitätstheorie, auf welche die Variationsrechnung führt, im Reinen.

Ich bemerke noch, dass die Function $f(x)$ in einzelnen Punkten unendlich werden darf mit den üblichen Einschränkungen, auf welche näheren Ausführungen ich indessen nicht eingehen will.

Beide Sätze, der Satz I. und der Satz II., haben gleichsam entgegengesetzte Ziele. Bei Satz I. besteht das Interesse darin, *wie sehr man die Function $\lambda(x)$ beschränken darf*, ohne dass ein anderes Ergebniss über $f(x)$ als das in ihm behauptete hervorgeht. Wir werden wohl mit der Bedingung, dass die Function $\lambda(x)$ sammt allen ihren Differentialquotienten stetig sei, hart an die Grenze streifen. Bei Satz II. handelt es sich darum, wie wenig $\lambda(x)$ zu beschränken sei, damit aus dem Nullsein des Integrals der integrirbaren Function $f(x)$ das Nullsein des Integrals $\int dx \lambda(x) f(x)$ folge. Hier haben wir mit der Integrirbarkeit von $\lambda(x)$ die Grenze wirklich erreicht.

Unterwirft man $\lambda(x)$ grösseren Beschränkungen, setzt z. B. $\lambda(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_n)$, so ergeben sich in Bezug auf $f(x)$ Folgerungen, welche diese Function in dem Masse, wie die Function $\lambda(x)$, mehr und mehr beschränken. Man hat dann nicht mehr den Vortheil die Function $\lambda(x)$ in einer Strecke gleich Eins, im übrigen Theil des Integrationsintervalls Null setzen zu können, und muss vielmehr den Umstand benutzen, dass ein Integral mit nicht negativem Differential Null sein kann, nur wenn sein Differential es ebenfalls ist. Der Variationsrechnung ist mit der weiteren Verfolgung dieser Frage kaum gedient, während in der Integralrechnung sonst wohl Fälle vorkommen, in denen willkürliche ganze rationale Functionen unter dem Integralzeichen eine ähnliche Rolle wie Variationen spielen.

INHALT.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XV. Band. 3. u. 4. Heft.

Mit 1 lithogr. Tafel.

6

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

13.

Anwendung dieser allgemeinen Principien auf die Variationsrechnung.

Aus dem Obigen folgt zunächst, dass die Function $f(x)$ zwar, wie bereits gezeigt, Null ist, wo für einen Punkt x' entweder an der Seite $x'-0$ oder an der Seite $x'+0$ oder an beiden die Stetigkeitsbedingung erfüllt ist. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass $f(x)$ in unzähligen Punkten von Null verschieden ist. Wenn bei den gewöhnlichen Problemen der Variationsrechnung die allgemeine Folgerung, dass nur das Integral $\int f(x)\,dx$ Null zu sein braucht, durch die einfachere, dass $f(x)$ selbst Null ist, ersetzt zu werden pflegt, und sich auch Irrthümer daraus nicht ergeben haben, so ist es doch möglich, dass bei tiefer liegenden Aufgaben auf die allgemeine und correcte Bedingung wird Rücksicht genommen werden müssen. Uebrigens auch bei den gewöhnlichen Aufgaben können „durch Abänderung einzelner Functionswerthe hebbare" Unstetigkeiten der sonst überall verschwindenden Function $f(x)$ auftreten, deren Unschädlichkeit für die Aufstellung der Differentialgleichung hiermit dargethan ist.

Nehmen wir, um noch den gewöhnlichen bei der Variation der Integrale betrachteten Fall besonders zu erwähnen, an, dass es sich um das Maximum oder Minimum von $\int_a^b V\,dx$ handele, wo V von $x, y, y', \cdots y^{(n)}$ abhängt. Es hat sich also ergeben (wenn man nur auf das durch partielle Integration erhaltene Integral Rücksicht nimmt), *dass die Bedingung des Nullseins von:*

$$\int_a^b dx\,\delta y\left\{\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'}+\cdots\right\}$$

für das Maximum oder Minimum unter Voraussetzung einer dergestalt unbeschränkten Variation δy, dass sie nur eine integrirbare Function zu sein braucht, stets erfüllt ist, wenn das Integral

$$\int dx\left\{\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'}+\cdots\right\}$$

zwischen Grenzen, die dem Intervall $a\cdots b$ angehören, immer Null ist.

Und wenn diese Bedingung durch

$$0=\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'}+\cdots\pm\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}$$

ersetzt wird, so kommt dies mit der Annahme überein, dass die Minimalfunction y und die Functionenclasse, aus der sie ausgesucht werden soll, beschränkt wird durch die Vorschrift, dass sie sammt ihren $2n$ ersten Differentialquotienten stetig sei, welcher Vorschrift auch die

Variation genügen muss, da sie zur Klasse, aus welcher das Minimum bestimmt werden soll, gehört. Nur vereinzelte Sprungstellen bei der $2n^{\text{ten}}$ Ableitung schliesst die Methode nicht aus.

Was endlich unsere Einführung auf eine beliebige begrenzte Strecke bezüglicher Variationen anlangt, in welcher sie bis auf die unmittelbare Nähe der Enden constant, und ausserhalb deren sie Null sind, so erleichtert sie in der That manche Untersuchungen ungemein, und ist auch sofort auf Flächen etc. zu übertragen.

Der Vortheil besteht darin, dass man von der kurzen Strecke oder dem kleinen Gebiet, in welchem die Variation von Null zu einem anderen Werth stetig ansteigt, *in praxi* absehen kann. Man kann, was bequemer ist, sie sich plötzlich, sprungweise von Null aus ihren anderen Werth annehmend denken, weil man ja in der Idee die unstetige Function durch stetige ohne Weiteres ersetzen kann.

Wir können z. B. in dem Oberflächenintegral $\int dO\,\delta N U$ das δN Null annehmen bis auf ein Oberflächenstück O, wo δN einen constanten Werth hat. Man hat sich dies wohl schon immer so gedacht, wenigstens ich bekenne es. Allein ich habe das Bewusstsein mit einer legitimen Vorstellung zu operiren, erst seitdem ich die Function $\lambda(x)$ mir bereit zu halten gewohnt bin, um meinen Schlüssen erforderlichen Falles sogleich volle Strenge ertheilen zu können.

Das Problem über die kürzeste Linie.

14.

Vergleichung der Willkürlichkeit der Variationen selbst mit derjenigen der Differentialquotienten der Variation. Der Beweis dafür, dass die gerade Linie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte ist, wird nach einem ersten Verfahren zu Ende geführt.

Wir betrachteten bis jetzt möglichst unbeschränkte Variationen und wollen zum Abschluss dieser Erläuterungen auch mit einigen Beschränkungen der Willkürlichkeit der Variationen uns beschäftigen.

Deren einfachste wurde zuerst verkannt und man fand darin kurz nach Lagrange's Veröffentlichung in den Turiner Mémoiren einen Einwand gegen die Allgemeingültigkeit seiner Methode, welcher freilich bald genug entkräftet wurde. Es handelt sich darum, dass wenn die Variation δy als vollkommen willkürlich (innerhalb der Grenzen der Integrale) angenommen wird, die Variationen $\delta y', \delta y'', \cdots$ es dort nicht zu sein brauchen, falls nämlich die Variation δy in gewissen *Punkten*, z. B. an den Grenzen der Integrale, gewisse Bedingungen erfüllen muss. Also um umständlichere Auseinandersetzungen zu vermeiden, kehren wir zu unserem Problem von der kürzesten Linie, die zwei Punkte verbindet, zurück. Wenn man $f(x)$ aus:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x) F(x), \quad F(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}},$$

zu bestimmen hat, so untersagt es die Methode den Coefficienten von $\lambda'(x)$, also $F(x)$ Null zu setzen, sondern erst muss eben durch partielle Integration $\lambda'(x)$ durch $\lambda(x)$ ersetzt worden sein, und dann ist der Coefficient von $\lambda(x)$ gleich Null zu setzen.

Man hat in der That:

$$\int_{x_0}^{x} dx\,\lambda'(x) = \lambda(x) - \lambda(x_0).$$

Nehmen wir nun für $\lambda'(x)$ etwas Willkürliches an, z. B. eine *begrenzte Variation*, welche in der Strecke $\alpha \cdots \beta$ gleich einer von Null verschiedenen Function $\gamma(x)$ ist, ausserhalb, also in den Strecken $a \cdots \alpha$, $\beta \cdots b$, Null, so hat man:

$$\lambda(x_1) - \lambda(x_0) = \int_{\alpha}^{\beta} dx\,\gamma(x).$$

Für $\gamma(x)$ können wir entweder $((x-\alpha)(\beta - x))^{n+1}$, oder die Function $\frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arctg} \varrho(x) + \frac{\pi}{2}\right\}$ des Art. 10., oder einfach eine Constante, jedenfalls, um den Mittelwerthsatz anwenden zu können, nur eine positive Grösse setzen. Dann können die Variationen $\lambda(x_1)$, $\lambda(x_0)$ nicht, wie die Aufgabe verlangt, Null sein. Umgekehrt, wenn man $\lambda(x)$ willkürlich annimmt, und diese Grösse so bestimmt, dass sie von a bis α und von β bis b Null ist, von α bis β positiv, so ist $\lambda'(x)$ im Intervall $\alpha \cdots \beta$ entweder durchweg Null oder wechselt dort sein Zeichen, so dass auf das Integral mit $\lambda'(x)$ der Mittelwerthsatz nicht angewendet werden kann, und dass also auch nicht bewiesen werden kann, dass der Coefficient von $\delta y'$ verschwindet, was eben auch nicht der Fall ist.

Nehmen wir aber die Aufgabe der kürzesten Linie so gestellt an, dass sie die kürzeste Verbindung zwischen den zwei auf den Abscissen $x = a$, $x = b$ errichteten Ordinaten sei, so liegen die Dinge ganz anders. *Alsdann sind die Variationen* $\lambda(x_1)$, $\lambda(x_0)$ *ganz willkürlich, da die Endpunkte der kürzesten Linie auf den Geraden* $x = x_0$, $x = x_1$ *beliebig verschoben werden können.* Hier also ist auch $\lambda'(x)$ ganz willkürlich, und somit setzen wir nach der Regel der Variationsrechnung

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0,$$

woraus folgt $f'(x) = 0$, welches demnach auch die richtige Lösung der Aufgabe ist.

Nun endlich können wir das allgemeine Problem der kürzesten Linie lösen.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe der kürzesten rectificirbaren Linie zwischen den zwei Geraden $x = x_0$, $x = x_1$. Es muss also Null sein das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}},$$

wenn $\lambda'(x)$ eine willkürliche endliche integrirbare Function, und auch $f'(x)$ eine integrirbare Function ist.

Ich bemerke zunächst, dass wenn in einem Intervall $x_0 \cdots x_1$ eine Function $\varphi(x)$ integrirbar und $\geqq 1$ ist, so ist im nämlichen Intervall $\frac{1}{\varphi(x)}$ integrirbar*). Denn es seien φ_0 und φ_u der grösste und kleinste Werth von $\varphi(x)$ in der Theilstrecke δ, so ist

$$\frac{1}{\varphi_u} - \frac{1}{\varphi_0} = \frac{\varphi_0 - \varphi_u}{\varphi_u\,\varphi_0}$$

jedenfalls nicht grösser als $\varphi_0 - \varphi_u$, und jede andere Differenz $\frac{1}{\varphi_0}, -\frac{1}{\varphi_u}$, ist *a fortiori* nicht grösser. Da also $\sqrt{1+f'(x)^2}$ integrirbar ist, so ist es auch $\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$. Weiter setzen wir

$$\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \Lambda(x).$$

Alsdann ist in

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\Lambda(x) f'(x)$$

$\Lambda(x)$ nicht minder willkürlich als $\lambda'(x)$ und ist integrirbar. Dann folgt aber aus dem allgemeinen Satze Art. 12.:

$$\int f'(x)\,dx = 0$$

zwischen irgend welchen dem Intervall $x_0 \cdots x_1$ angehörigen Grenzen: d. h. $f(x)$ ist im ganzen Intervall $x_0 \cdots x_1$ constant, so dass wir hier in der That auf die horizontale Gerade fallen.

Das weitere Raisonnement ist sehr einfach. Die Gerade ist also die kürzeste Verbindungslinie zwischen den beiden Geraden $x = x_0$, $x = x_1$, also jedenfalls zwischen ihren eigenen Endpunkten, denn könnte man zwischen diesen eine kürzere Verbindung herstellen, so wäre sie es ja auch zwischen den Geraden $x = x_0$, $x = x_1$. Von der *Lage* der Punkte ist aber die Eigenschaft der kürzesten Verbindung

*) Wenn $\varphi(x) >$ als eine beliebig kleine positive Grösse ist, kann man sie stets mit einer Grösse multipliciren, dass sie $\geqq 1$ ist.

unabhängig, was aus den Symmetrieeigenschaften des Raumes folgt, also wird man durch je zwei Punkte zwei auf ihrer Verbindungslinie senkrechte Gerade legen können, und durch unsere bisherigen Betrachtungen beweisen können, dass sie die kürzeste ist. Q. e. d.

15.

Die isoperimetrischen Probleme.

Man kann noch auf einem anderen Wege bei Problemen wie das der kürzesten Linie die letzte Differentiation unter dem Integralzeichen umgehen, indem man sie nämlich als *isoperimetrische* Probleme auffasst. Bevor ich dies zeige, will ich einige Bemerkungen über die isoperimetrischen Probleme voranstellen.

Es sind Probleme der Variationsrechnung, bei denen die Willkürlichkeit der Variationen eine allgemeinere Art Beschränkung erfährt, als die im vorigen Artikel erörterte. Die isoperimetrische Beschränkung besteht darin, dass die Variationen δy, $\delta y'$, $\cdots$ einer Bedingung für ihren *ganzen* Verlauf:

$$\delta \int_a^b V dx = \int_a^b dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y' \cdots \right\} = 0$$

zu genügen haben, um ein Integral $\int_a^b U dx$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, so dass gleichzeitig:

$$\delta \int_a^b U dx = \int_a^b dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' + \cdots \right\} = 0$$

ist.

Die isoperimetrische Regel, dass alsdann das Integral

$$\int_a^b dx \, (U + \sigma V)$$

zu variiren und so zu behandeln ist, als ob die Variation δy unbeschränkt wäre, die Constante σ aber so bestimmt werden muss, dass $\int_a^b V dx$ den gegebenen Werth erhält, diese Regel ist daraus entstanden, dass bei der älteren vor-Euler'schen und der Euler'schen Behandlung der isoperimetrischen Probleme die Bedingungen für die Variation wirklich auf Eliminationen führten, die dann durch Einführung solcher Multiplicatoren geleistet wurden. Seit Lagrange findet man die Regel meist so begründet, dass man sagt, wegen

$\int \delta V dx = 0$ stehe es nicht in Widerspruch mit $\int \delta U dx = 0$, wenn man $\int (\delta U + \sigma \delta V)\, dx = 0$ setze, während eben σ dazu dient, nachträglich $\int V dx =$ seinem gegebenen Werth zu machen.

Wenn dies nun auch richtig scheint, so behält man doch das Gefühl, dass eine genauere Begründung der Regel nicht überflüssig ist.

Ich kenne solcher Beweise Manche, die hier und da mitgetheilt sind. Zwei weitere habe ich aber noch nicht gedruckt gesehen, und so mögen sie hier noch ihre Stelle finden. Der erstere ist die Anwendung auf den gewöhnlichen Fall eines Gedankens des Hrn. R. Reiff*), den anderen erlaube ich mir vorzulegen.

16.

Erster Beweis für die isoperimetrische Regel.

Es sei $\int\limits_a^b U dx$ ein Maximum oder Minimum, während $\int\limits_a^b V dx$ einen vorgeschriebenen Werth behalten soll, so dass also

$$\Big|_a^b U'' + \int\limits_a^b dx\, U' \delta y = 0$$

ist, während die Variation δy die Bedingung:

$$\Big|_a^b V'' + \int\limits_a^b dx\, V' \delta y = 0$$

erfüllen muss.

Wir nehmen U'', V'' an den Grenzen Null an, und setzen δy Null ausser in zwei gleichen, kleinen Strecken $\alpha_0 \cdots \beta_0$, $\alpha_1 \cdots \beta_1$, wo δy constant sei und resp. gleich δy_0 und δy_1. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\delta y_0 \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} dx\, U' + \delta y_1 \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} dx\, U' = 0,$$

und hieraus folgt wegen $\beta_0 - \alpha_0 = \beta_1 - \alpha_1$:

$$\delta y_0\, U_0' + \delta y_1\, U_1' = 0,$$

wo, wenn man $\beta_0 - \alpha_0$ unendlich klein annimmt, U_0' und U_1', die ursprünglich Mittelwerthe waren, den Werthen $x_0 = \alpha_0 = \beta_0$, $x_1 = \alpha_1 = \beta_1$ zugehören. Ebenso folgt aus der Variation $\delta \int V dx$:

$$\delta y_0\, V_0' + \delta y_1\, V_1' = 0,$$

was beweist, dass unsere Annahme über die Variation δy erlaubt war, da die Bedingungsgleichung erfüllt werden kann.

---

*) *Inaugural-Dissertation über den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit*, *Tübingen*, 1879, pag. 8.

Aus beiden Relationen folgt aber:

$$U_0' V_1' - U_1' V_0' = 0.$$

Denken wir uns nun den Punkt x_0 fest, den Punkt x_1 beweglich, den wir sodann x nennen, und setzen noch $\frac{U_0'}{V_0'} = -\sigma$, so ergiebt sich:

$$U' + \sigma V' = 0$$

entsprechend der hypergeometrischen Regel.

Wenn die Variation $\delta \int dx\, U$ verschwinden soll, während δy die zwei Bedingungen

$$\delta \int dx\, V = 0, \quad \delta \int dx\, W = 0,$$

zu erfüllen hat, so ist der Beweis ebenso einfach.

Man setzt $\delta y = 0$, ausser in den drei gleichen, unendlich kleinen Strecken $\alpha_0 \cdots \beta_0$, $\alpha_1 \cdots \beta_1$, $\alpha_2 \cdots \beta_2$, in welchen δy die constanten Werthe δy_0, δy_1, δy_2 erhalten möge. So erhält man die drei Gleichungen:

$$\delta y_0 U_0' + \delta y_1 U_1' + \delta y_2 U_2' = 0,$$
$$\delta y_0 V_0' + \delta y_1 V_1' + \delta y_2 V_2' = 0,$$
$$\delta y_0 W_0' + \delta y_1 W_1' + \delta y_2 W_2' = 0.$$

Eliminirt man δy_0, δy_1, δy_2, nimmt die Punkte $x_0 = \alpha_0 = \beta_0$, $x_1 = \alpha_1 = \beta_1$ fest an, und den Punkt $x = \alpha_2 = \beta_2$ beweglich und lässt den Index 2 fort, so ergiebt sich wieder

$$U' + \sigma_1 V' + \sigma_2 W' = 0,$$

wo die σ_1 und σ_2 nur von den festen Punkten x_0 und x_1 abhängen, welches wieder die isoperimetrische Bedingung ist, die man so auf eine unbegrenzte Zahl Integrale ausdehnen kann.

17.

Zweiter Beweis für die isoperimetrische Regel.

Der zweite Beweis ist dieser:

Es soll sein:

$$0 = \int \delta U\, dx = \int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' + \cdots \right\},$$
$$0 = \int \delta V\, dx = \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \cdots \right\},$$

wo wieder die zweite Gleichung die Bedingungsgleichung für die δy vorstellt.

Nun seien $\delta_1 y$ und $\delta_2 y$ zwei unbeschränkte Variationen, die man sich also von vornherein beliebig aussuchen kann.

Stets lässt sich in

$$\delta y = \delta_1 y + C\delta_2 y$$

C so bestimmen, dass die Bedingung erfüllt ist. Denn aus

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}(\delta_1 y + C\delta_2 y) + \frac{\partial V}{\partial y'}(\delta_1 y' + C\delta_2 y') + \cdots \right\}$$

folgt:

$$C = -\frac{\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_1 y' + \cdots \right\}}{\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_1 y' + \cdots \right\}}.$$

Diese Form der Variation δy führen wir in $\int \delta U dx = 0$ und $\int \delta V dx = 0$ ein, und erhalten:

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta_1 y' + \cdots \right\} + C \int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta_2 y' + \cdots \right\},$$

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_1 y' + \cdots \right\} + C \int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_2 y' + \cdots \right\}.$$

Durch Elimination von C folgt:

$$0 = \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(U + \sigma V)\delta_1 y + \frac{\partial}{\partial y'}(U + \sigma V)\delta_1 y' + \cdots \right\} = \int dx \delta_1 (U + \sigma V)$$

wo

$$\sigma = \frac{\int dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta_2 y' + \cdots \right\}}{\int dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta_2 y' + \cdots \right\}}$$

von $\delta_1 y$ unabhängig ist, $\delta_1 y$ aber eine unbeschränkte Variation vorstellt.

Dies scheint die beste Begründung der isoperimetrischen Regel zu sein, weil sie in keiner Beziehung unserer Verfügung über die Natur der Variationen und der Functionen U und V, ob wir sie blos integrirbar, oder stetig, oder wie sonst annehmen wollen, vorgreift. Es wird ohne irgend welche Einschränkung das relative in ein absolutes Maximums- oder Minimumsproblem übergeführt. Dagegen ist die im vorigen Art. mitgetheilte Reiff'sche Ableitung der Regel dienlich, um die isoperimetrische Beschränkung der Variation schnell in die Rechnung einzuführen, falls, wie bei physikalischen Aufgaben, die Stetigkeit der zu variirenden Functionen nicht in Frage steht.

18.

Die kürzeste Linie als isoperimetrisches Problem.

Wir sahen, dass in der Bedingung:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \lambda'(x) \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = 0$$

die Willkürlichkeit von $\lambda'(x)$ durch die vorgeschriebenen Werthe $\lambda(x_1)=0$, $\lambda(x_0)=0$ beschränkt wird, so dass man nicht den Coefficienten von $\lambda'(x)$ Null setzen darf. Dies veranlasst zu prüfen, ob man die Beschränkung von $\lambda'(x)$ nicht als isoperimetrische auffassen, und die Aufgabe nach der isoperimetrischen Regel behandeln könne.

In der That muss:

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda'(x)\,dx = \lambda(x_1) - \lambda(x_0) = 0$$

sein. Damit ist jedenfalls ein Theil der Beschränkung in die entsprechende Form gebracht. Nun soll noch ausserdem $\lambda(x_0)$ oder $\lambda(x_1)$ für sich Null sein. *Hieraus kann aber eine weitere Beschränkung von $\lambda'(x)$ nicht entspringen, denn, wie $\lambda'(x)$ auch beschaffen sein mag, ein Functionalwerth der zu $\lambda'(x)$ gehörigen Function $\lambda(x)$ ist stets willkürlich*, so dass also wirklich die Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda'(x)\,dx = 0$$

die ganze Beschränkung darstellt, welche die Bedingungen $\lambda(x_1)=0$, $\lambda(x_0)=0$ dem $\lambda'(x)$ auferlegen.

Nach der isoperimetrischen Regel ist daher in

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\,\lambda'(x)\left\{\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}+\sigma\right\}$$

$\lambda'(x)$ eine unbeschränkte Variation. Wenn nun auch, um hieraus $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}+\sigma=0$ folgern zu können, die Stetigkeit von $f'(x)$ vorausgesetzt werden muss, und für die Lösung des Problems der kürzesten Linie also nicht dieselbe Allgemeinheit wie durch den Kunstgriff des Art. 14. erreicht wird, so setzt dies Verfahren doch die Beschränkungen der allgemeinen Methode herab, indem der zweite Differentialquotient aus dem Spiele bleibt. Ich habe diese Bemerkung, weil sie unter Umständen nützlich sein kann, nicht unterdrücken wollen.

19.

Schluss der Untersuchung des Problems über die kürzeste Linie.

Unser Hauptzweck war, wie in der Einleitung angegeben, nicht die Lösung des Problems der kürzesten Linie, sondern dies Problem diente uns als leitender Faden durch das Labyrinth der Schlüsse, aus denen die Methode der Variationsrechnung zusammengesetzt ist.

Handelt es sich aber nur um den Nachweis, dass die Gerade die kürzeste Linie ist, so empfiehlt es sich den geometrischen Beweis und den analytischen möglich von einander zu trennen. Der geometrische ist offenbar schon in dem Satze enthalten, dass man der rectificirbaren Strecke sich mit einer geradlinig-polygonalen beliebig nähern kann.

Denn es sei eine andere Linie L zwischen zwei Punkten kürzer als die Gerade, so giebt es also eine an L sich anschliessende Polygonale Λ, die L beliebig nahe verläuft, und an Länge ihr beliebig nahe kommt. Diese müsste mithin bei hinreichender Annäherung von L kürzer als die Gerade werden. Nun setzen wir den elementaren Satz voraus, dass zwischen zwei Punkten die Gerade die kürzeste aus geradlinigen Strecken bestehende Linie sei. Daraus folgt dann, dass eine solche Linie L, die kürzer als die Gerade ist, nicht existiren kann.

Unter Voraussetzung dieses letzteren Satzes können wir auch die analytische Lösung des Problems der kürzesten Linie von dem Satze betreffend die unbegrenzte Annäherung geradlinig-polygonaler Linien an stetig gekrümmte Linien unabhängig machen. Allerdings gewährt dieser Satz, sowie seine weiteste Consequenz (am Schluss des Art. 3.) den grossen Vortheil, dass man durch ganz ähnliche Schlüsse, wie die am Ende des Art. 4. mitgetheilten, die Art. 7. und 9. gerügte Beschränkung der Voraussetzungen, welche durch die Methode der Variationsrechnung gefordert wird, in vielen Fällen unschädlich machen kann. Man wird es aber bei einer rein analytischen Frage vorziehen, von den Sätzen Art. 3., wenn möglich, keinen Gebrauch zu machen, weil sie auf Anschauung beruhen, theilweise casuistischer Natur sind, und folglich nur sehr mühsam rein analytisch sich beweisen lassen würden.

Bei dem Problem der kürzesten Linie können wir die Benutzung dieser Sätze wie folgt umgehen. Wir suchen zuerst die kürzeste unter allen stetigen rectificirbaren Linien, und finden nach dem Obigen rein analytisch die Gerade. Würde nun eine unstetige Linie kürzer sein, so müsste sie jedenfalls aus lauter geradlinigen Strecken bestehen, denn eine stetig gekrümmte Strecke ist ja bewiesenermassen durch eine kürzere geradlinige zu ersetzen. Nun braucht man nur noch den oben schon benutzten elementaren Satz, dass die Gerade die kürzeste geradlinig-polygonale Verbindungslinie zwischen zwei Punkten ist, womit auch das analytische Problem, wie ich glaube, auf das Befriedigendste gelöst ist.

Tübingen im März 1879.

Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche.

Von

Karl Rohn in Leipzig.

Einleitung.

Die Bedeutung der hyperelliptischen Functionen für die Kummer'sche Fläche war schon mehrmals Gegenstand mathematischer Untersuchungen; es scheint mir desshalb angemessen, hier eine historische Erwähnung dieser Arbeiten zu geben, um im Anschluss daran den Zweck der vorliegenden Abhandlung und ihre Stellung zu den übrigen klar hervortreten zu lassen. Die erste hierher gehörige Bemerkung finden wir bereits im 5. Bande der math. Annalen pag. 302 in einer Abhandlung von Klein über Liniengeometrie, wo derselbe die Möglichkeit einer Verknüpfung der Kummer'schen Fläche mit den hyperelliptischen Integralen nachweist und bereits die Form der fraglichen Integrale angiebt. Auf seine Veranlassung hin verfolgte ich mehrere Jahre später diesen Gedanken an Hand der Liniengeometrie weiter. Inzwischen erschienen im 83. Bande des Crelle'schen Journals zwei Abhandlungen über den gleichen Gegenstand; die erste von Cayley, welche sich an die Arbeit von Göpel im 35. Bd. des Crelle'schen Journals anschliesst und von der übereinstimmenden Gruppirung der hyperelliptischen Thetas und der Singularitäten der Kummer'schen Fläche Gebrauch macht, die zweite von Borchardt, welcher die Identität der Göpel'schen biquadratischen Relation mit der Gleichung der Kummer'schen Fläche nachweist. Gleich darauf erschien noch eine Arbeit von Weber (Borchardt's Journal Bd. 84), worin er die Cayley'sche Methode weiter ausführt und im Anschluss daran eine Zusammenstellung der Relationen zwischen den Thetafunctionen giebt. Ich überzeugte mich bald, dass diese Untersuchungen von den meinigen wesentlich verschieden seien, und dass diese Thatsache ihre Erklärung darin finde, dass die Kummer'sche Fläche nicht nur als Repräsentant *eines* Integralsystems der hyperelliptischen Functionen dient, sondern dass sie auch die quadratische Transformation dieser Functionen, sowie ihre Zweitheilung veranschaulicht.*) Einen Theil der durch diese Bemerkung gewonnenen Resultate habe ich bereits in meiner Promotionsschrift niedergelegt im Anschluss an die daselbst entwickelten geometrischen Vorstellungen**). In der vorliegenden Arbeit stelle ich mir dagegen die Aufgabe, zuerst die quadratische Transformation und die daraus fliessende Zweitheilung für sich zu studiren, und dann die erhaltenen Resultate an der Kummer'schen Fläche zu interpretiren.

Allerdings ist eine Theorie der quadratischen Transformation schon von Hermite, Königsberger und dessen Schüler Pringsheim angebahnt worden, allein ihre Darstellungsweise lässt sich durch eine weit einfachere ersetzen, falls man alle Transformationen, welche dieselben Beziehungen zwischen den Thetas liefern, als nicht wesentlich verschieden auffasst. Bei der Theorie der elliptischen Functionen ist jene allgemeine Behandlung vorzuziehen, weil sie sich noch einfach gestaltet und geometrisch leicht verfolgen lässt, dagegen fehlt ihr bei der Theorie der hyperelliptischen Functionen jede Anschaulichkeit. Die Wahrheit dieser Behauptung erhellt aus Folgendem. Das doppelt periodische Integralsystem der elliptischen Functionen wird durch eine complexe Ebene repräsentirt; sie wird durch zwei Schaaren von parallelen Geraden in Parallelogramme zerlegt, deren Eckpunkte die Perioden und ihre Multipla darstellen. Eine lineare Transformation heisst hier nichts Anderes, als dass man die Ebene in ein neues System von Parallelogrammen theilt, deren Eckpunkte mit den früheren zusammenfallen, und dann ein neues Parallelogramm eindeutig auf ein altes bezieht. Zerlegt man durch weiteres Ziehen von Parallelen die neuen Parallelogramme in n kleinere, und bezieht ein solches eindeutig auf eins der ursprünglich gegebenen Parallelogramme, so erhält man eine Transformation n^{ten} Grades. Diese hiermit geschilderten Operationen sind geometrisch klar und einfach und lassen auch demgemäss eine einfache zahlentheoretische Behandlung zu. Nicht so verhält es sich bei den hyperelliptischen Functionen. Hier haben wir es mit zwei von einander unabhängigen Integralen zu thun, und müssen desshalb um das Gesammtwerthsystem dieser beiden Integrale zu repräsentiren zu einem Raume von 4 Dimensionen aufsteigen. Dieser Raum ist durch 4 Schaaren von parallelen Ebenen in Parallelepipeda (wie ich der Kürze halber mich ausdrücken will, obgleich dieselben 4 Dimensionen besitzen) zerlegt, und wir müssen die Frage lösen, denselben durch 4 neue Schaaren von Ebenen abermals in Parallel-

*) So wird für die elliptischen Functionen die ebene Curve 3. Ordnung die cubische Transformation, die Raumcurve 4. Ordnung die quadratische Transformation und die Zweitheilung geometrisch wiedergeben.

**) München, F. Straub, 1878.

epipeda zu theilen, so zwar, dass ihre Eckpunkte in die früheren hineinfallen. Haben wir diese Frage allgemein beantwortet, so erhalten wir daraus die allgemeine lineare Transformation. Die Transformation n^{ten} Grades verlangt, dass wir das neue Parallelepipedum durch geeignete zu den Seitenflächen parallele Ebenen in n^2 congruente Theile zerlegen und einen solchen Theil auf das ursprüngliche Parallelepipedum beziehen. Diese Betrachtungen sind offenbar nicht mehr unserer geometrischen Auffassung geläufig und auch die entsprechende zahlentheoretische Behandlung ist zunächst wenig geeignet den wirklichen Sachverhalt bei einer Transformation uns vor Augen zu führen. Ich habe desshalb in dieser Arbeit gesucht dem erwähnten Uebelstande abzuhelfen, und ein *einfaches geometrisches Bild in der Ebene der Transformation* zu Grunde gelegt, welches die Zuordnungen der Thetas, sowie der Perioden leicht erkennen lässt, allerdings blos *mod.* 2 *Perioden,* während ich die Zuordnung *mod.* 4 *Perioden* auf die Relationen zwischen den Thetas basirt habe*). Dieser Gedanke findet seine Verwerthung in den ersten 3 Abschnitten, während in dem übrigen Theil die dort gewonnenen Resultate für die Kummer'sche Fläche gedeutet und dadurch *der wechselseitige Zusammenhang* der von Cayley, Borchardt und mir gegebenen Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen klar gelegt wird. Im letzten Abschnitte finden sich einige Folgerungen, welche durch den Zusammenhang der hyperelliptischen Functionen mit der Kummer'schen Fläche bedingt werden, und sich demgemäss theils auf das eine, theils auf das andere dieser beiden Gebiete beziehen. Dieselben tragen gegenwärtig noch den Stempel der Unvollständigkeit an sich, ich werde sie desshalb in einer weiteren Abhandlung einer mehr systematischen Behandlung unterwerfen.

I. Lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen.

Wir betrachten in diesem Abschnitte zwei durch lineare Transformation aus einander hergeleitete Integralsysteme, und bezeichnen das eine mit $v_1 \mid v_2$ und seine Perioden mit τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, das andere durch lineare Transformation abgeleitete mit $v_1' \mid v_2'$, seine Perioden mit τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}'.

Eine lineare Transformation will nun sagen, dass die beiden Integralsysteme ein-eindeutig auf einander bezogen sind, oder was

*) Eine Behandlung der Transformationstheorie, welche dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft entspricht, muss nothwendig auf die Gruppentheorie, wie sie z. B. C. Jordan giebt, basiren. Dieselbe findet sich implicite auch hier schon; die Gruppentheorie als fundamentalen Ausgangspunkt zu verwerthen behalte ich mir als nächste Arbeit vor.

damit gleichbedeutend ist, dass die Thetafunctionen des einen Systems sich als lineare Functionen der Thetas des zweiten Systems darstellen lassen. Soll aber das eine Integralsystem in das andere bei der Transformation übergehen, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Integrale zwischen den Verzweigungspunkten wieder in solche übergehen, oder mit anderen Worten: dass den Perioden des einen Systems die Perioden des anderen entsprechen, unter Perioden alle Combinationen: $\alpha + \beta\tau_{11} + \gamma\tau_{12} \mid \delta + \beta\tau_{12} + \gamma\tau_{22}$ verstanden, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten. Wenn jedoch jede Periode des einen Systems im anderen eine entsprechende finden soll und umgekehrt, so ist die Zuordnung an gewisse Bedingungen geknüpft. Ordnet man nach Königsberger*)

den Perioden:	$1 \mid 0$	$0 \mid 1$	$\tau'_{11} \mid \tau'_{12}$	$\tau'_{12} \mid \tau'_{22}$
die Perioden	$\omega_{11} \mid \omega_{21}$	$\omega_{12} \mid \omega_{22}$	$\omega'_{11} \mid \omega'_{21}$	$\omega'_{12} \mid \omega'_{22}$

zu, wobei:

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= \rho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} &= \rho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22},\\
\omega_{12} &= \rho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} &= \rho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22},\\
\omega'_{11} &= \rho'_{11} + \sigma'_{11}\tau_{11} + \sigma'_{21}\tau_{12}, & \omega'_{21} &= \rho'_{21} + \sigma'_{11}\tau_{21} + \sigma'_{21}\tau_{22},\\
\omega'_{12} &= \rho'_{12} + \sigma'_{12}\tau_{11} + \sigma'_{22}\tau_{12}, & \omega'_{22} &= \rho'_{22} + \sigma'_{12}\tau_{21} + \sigma'_{22}\tau_{22},
\end{aligned}$$

während $\rho, \rho', \sigma, \sigma'$ ganze Zahlen bedeuten, so sind dieselben an die 6 Bedingungen geknüpft:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}\rho'_{21} - \rho_{21}\rho'_{11} + \rho_{12}\rho'_{22} - \rho_{22}\rho'_{12} &= 0,\\
\sigma_{11}\sigma'_{21} - \sigma_{21}\sigma'_{11} + \sigma_{12}\sigma'_{22} - \sigma_{22}\sigma'_{12} &= 0,\\
\rho_{11}\sigma'_{21} - \sigma_{21}\rho'_{11} + \rho_{12}\sigma'_{22} - \sigma_{22}\rho'_{12} &= 0,\\
\sigma_{11}\rho'_{21} - \rho_{21}\sigma'_{11} + \sigma_{12}\rho'_{22} - \rho_{22}\sigma'_{12} &= 0,\\
\rho_{11}\sigma'_{11} - \sigma_{11}\rho'_{11} + \rho_{12}\sigma'_{12} - \sigma_{12}\rho'_{12} &= 1,\\
\rho_{21}\sigma'_{21} - \sigma_{21}\rho'_{21} + \rho_{22}\sigma'_{22} - \sigma_{22}\rho'_{22} &= 1.
\end{aligned}$$

Die Integrale und Perioden des neuen Systems stellen sich dann folgendermassen durch diejenigen des alten dar:

$$\begin{aligned}
v_1' &= \frac{\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2}{N}, & v_2' &= \frac{\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1}{N},\\
\tau'_{11} &= \frac{\omega'_{11}\omega_{22} - \omega'_{21}\omega_{12}}{N}, & \tau'_{21} &= \frac{\omega'_{12}\omega_{22} - \omega'_{22}\omega_{12}}{N},\\
\tau'_{12} &= \frac{\omega'_{21}\omega_{11} - \omega'_{11}\omega_{21}}{N}, & \tau'_{22} &= \frac{\omega'_{22}\omega_{11} - \omega'_{12}\omega_{21}}{N},
\end{aligned}$$

$$N = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}.$$

Mit Hilfe dieser Relationen gelingt es leicht die transformirten Thetas durch die gegebenen auszudrücken, indem man sich sofort überzeugt,

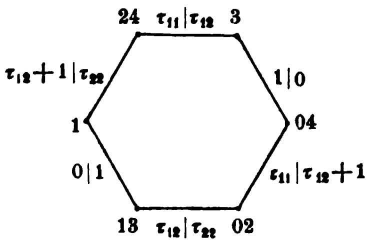
*) Königsberger, Crelle's Journ. Bd. 59.

dass jene Thetafunctionen einzeln diesen gleich werden bis auf einen Factor, und zwar werden die geraden Thetas *geraden*, die ungeraden wieder *ungeraden* gleich.

Eine lineare Transformation ist also durch folgende Eigenthümlichkeiten charakterisirt. Einerseits geht das System der 16 Thetas in das System der transformirten Thetas über, und zwar die ungeraden und die geraden Functionen für sich; andererseits entspricht dem System der unendlich vielen Perioden der gegebenen Integrale das Periodensystem der transformirten Integrale, und zwar *ein-eindeutig*. Diese Bestimmung bedingt, dass den 15 Perioden, welche wir mod. 2 Perioden unterscheiden können, dass den 80 Perioden, welche sich mod. 3 Perioden unterscheiden, etc. im transformirten Systeme 15 resp. 80 Perioden von gleicher Eigenschaft entsprechen, und diese Folgerung aus dem ein-eindeutigen Entsprechen ist es, worauf ich mich später stützen werde.

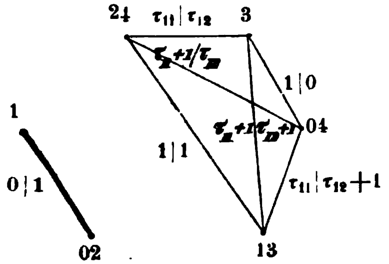
Wir haben soeben gesehen, welcher Art die Bedingungen zwischen zwei Integralsystemen sind, die sich durch lineare Transformation aus einander ableiten, wir fragen uns weiter, inwieweit die einzelnen Beziehungen für sich eine lineare Transformation kennzeichnen. Sicher reicht die gegenseitige Zuordnung der unendlichen Periodensysteme, so wie sie oben angegeben wurde, vollständig aus; aber diese Zuordnung führt grosse Unbequemlichkeiten mit sich durch die dabei auftretenden Bedingungsgleichungen, und erscheint für die Untersuchungen, welche an die Thetas anknüpfen, unzweckmässig, da es sich im letzten Falle nur um Zuordnung zweier *endlichen*, im ersten Falle dagegen um Zuordnung zweier unendlichen Systeme handelt. Wir werden uns desshalb weiterhin direct mit der Zuordnung der Thetafunctionen befassen (wie das gewöhnlich den Ausgang der Transformationstheorie bildet), und die gegenseitige Beziehung der Periodensysteme nur soweit studiren, als sie Einfluss auf jene Betrachtungen ausüben. Den unendlich vielen Zuordnungen der Periodensysteme entsprechend, müssen wir eine unendliche Anzahl von linearen Transformationen unterscheiden; die 16 Thetas dagegen gestatten nur eine endliche Anzahl von Zuordnungen. Wir können desshalb die Gesammtheit aller linearen Transformationen in Gruppen zusammenfassen, so dass die Transformationen einer und derselben Gruppe die nämlichen Zuordnungen zwischen den Thetafunctionen herstellen. Da nun alle 16 Thetas bei Vermehrung ihrer Argumente um doppelte Perioden (Perioden mit dem Factor 2) in sich übergehen, so folgt daraus, dass alle Transformationen *einer* Gruppe angehören, welche sich nur *mod. 2 Perioden* unterscheiden, oder genauer ausgedrückt, für welche die Perioden: $\omega_{11} \mid \omega_{21}$, $\omega_{12} \mid \omega_{22}$, $\omega'_{11} \mid \omega'_{21}$, $\omega'_{12} \mid \omega'_{22}$ (mod. 2 Perioden) denselben Werth haben. Mit diesen Gruppen werden wir uns zunächst beschäftigen, indem wir darauf verzichten Transformationen auseinander zu halten, welche sich um doppelte Perioden unterscheiden. Dadurch gewinnen wir bedeutend an Uebersichtlichkeit, denn wir haben nur noch eine endliche Anzahl von Transformationen zu unterscheiden, und ebenso nur eine endliche Anzahl von Perioden, während wir auf der anderen Seite doch alle überhaupt möglichen Beziehungen zwischen den gegebenen und transformirten Thetas erhalten.

Wie schon oben erwähnt wurde, gehen bei der Transformation die geraden und die ungeraden Thetas in sich über, wir werden desshalb den nachfolgenden Betrachtungen die Gruppe der 6 ungeraden Thetas zu Grunde legen, da sie die kleinste in sich übergehende Gruppe ist. Zur besseren Vorstellung diene folgendes geometrische Bild. Auf einem Kreise markire man 6 vielleicht äquidistante Punkte, sie sollen die 6 ungeraden Thetas repräsentiren und desshalb mit den Indices derselben bezeichnet werden; die Reihenfolge sei die in der Figur gegebene.



Die 15 Perioden, welche mod. 2 Perioden in Betracht kommen, werden dann durch die 15 Verbindungslinien der 6 Punkte dargestellt; bei Vermehrung der Argumente der ungeraden Thetafunctionen um irgend eine *halbe* Periode gehen nämlich immer zwei dieser 6 Functionen in einander über, sie werden in der Figur durch 2 Punkte repräsentirt, und ihre Verbindungslinie soll dann die betr. *ganze* Periode darstellen; so kommen den gezeichneten Linien die angeschriebenen Perioden zu. Dieser Festsetzung gemäss ist die Summe der Periodenwerthe dreier Linien, welche alle 6 markirten Punkte enthalten, $\equiv 0$ (mod. 2 Perioden); jeder ungeraden Thetafunction und somit jedem der 6 gezeichneten Punkte gehört nämlich ein Verzweigungspunkt zu, die Perioden sind das Doppelte der zwischen den betr. Verzweigungspunkten hinerstreckten Integrale; die Summe dreier Integrale ist aber $\equiv 0$ (mod. 2 P.), wenn jeder Verzweigungspunkt einmal als Grenze auftritt. Wir werden von der genannten Eigenschaft sowohl hier als auch bei der quadratischen Transformation Gebrauch machen.

Bei einer linearen Transformation müssen den 15 Perioden, welche sich mod. 2 Perioden unterscheiden lassen, 15 Perioden des neuen Systems von gleicher Eigenschaft entsprechen, d. h. wir müssen die obige Figur auf eine zweite beziehen, welche dieselbe Bedeutung für das neue Integralsystem hat, wie jene für das alte. Nehmen wir nun an, eine Transformation ordne der Periode p des geg. Systems die Periode p' des transformirten zu, so giebt es gerade 2 ungerade Thetas in jedem Systeme, deren Argumente sich um $\frac{p}{2}$ resp. $\frac{p'}{2}$ unterscheiden, es sind dies die Thetas, welche durch die Endpunkte jener Perioden repräsentirt werden; jene lineare Transformation hat dann auch die Eigenschaft diese Thetas beider Systeme in einander überzuführen. Einer weiteren Periode p_1, welche mit p keinen Endpunkt gemein hat, entspricht in Folge dessen im transformirten System eine Periode p_1', welche in gleicher Weise mit p' keinen Endpunkt gemein hat. Dieser einfache Umstand, der sich hier ganz von selbst ergiebt, wird in der Theorie der linearen Transformationen, wie sie Hermite und Königsberger geben, durch die 6 oben citirten Gleichungen vertreten. Ein Beispiel wird die Sache noch näher erläutern. Ich treffe die Bestimmung, dass der Periode $0 \mid 1$ wieder die Periode $0 \mid 1$ entspricht, dann gehen ϑ_{02} und ϑ_1 über in ϑ_{02}' und ϑ_1' (wobei jedoch ϑ_{02} sowohl in ϑ_{02}' wie in ϑ_1' übergehen kann). Es entsteht dann die Frage, welche Perioden des transformirten Systems kann ich noch der Periode $1 \mid 0$ des gegebenen Systems entsprechen lassen? $1 \mid 0$ hat zu Endpunkten 3 und 04, hat also keinen Endpunkt mit $0 \mid 1$ gemein, folglich ergeben sich als entsprechende Perioden zu $1 \mid 0$ nur noch die 6 Möglichkeiten:



$$1 \mid 0,\quad \tau_{11}' \mid \tau_{12}'+1,\quad \tau_{11}'+1 \mid \tau_{12}'+1,\quad \tau_{11}'+1 \mid \tau_{12}',\quad 1 \mid 1,\quad \tau_{11}' \mid \tau_{12}'.$$

Ordnen wir $0 \mid 1$ wieder $0 \mid 1$ zu und $1 \mid 0$ etwa $\tau_{11}' \mid \tau_{12}'$, so entspricht der Linie $1 \mid 1$ die neue Linie $\tau_{11}' \mid \tau_{12}'+1$. Damit ist jedoch die gegenseitige Zuordnung noch nicht völlig bestimmt, vielmehr sind noch 8 verschiedene Fälle möglich. Sollen nämlich die 12 übrigen Perioden einander eindeutig zugeordnet werden, so können wir bei jenen 3 Perioden auch noch festsetzen, wie ihre Endpunkte den Endpunkten der 3 zugeordneten Perioden entsprechen sollen. Wir erhalten so 720 verschiedene Transformationen, da die erste Zuordnung 15, die zweite 6 und die letzte 8 Möglichkeiten einschliesst. Ebenso viele Permutationen besitzen aber 6 Elemente, woraus wir erschliessen, dass jeder Permutation*) der ungeraden Thetas eine lineare Transformation entspricht. Diese Untersuchung lehrt uns in jedem Falle eine directe Ablesung der sich entsprechenden Perioden, und es bleibt uns nur

*) Dieses Resultat war schon vorauszusehen, denn während das System der 15 Perioden, und ebenso das der 10 geraden Thetas noch gewisse Untergruppen besitzt, die bei der Transformation erhalten bleiben müssen, lassen die 6 ungeraden Thetas keine Gruppirung mehr zu, so dass alle Permutationen gleich berechtigt sind.

noch übrig zu den geraden Thetas die entsprechenden zu finden. Diese geraden Thetas finden in der Figur ebenfalls ihre Repräsentation und zwar durch Dreieckspaare; die 6 Punkte lassen sich 10 mal in 2 Dreiecke zusammenfassen, jedes solches Paar stellt eine gerade Thetafunction dar. Addirt man nämlich zu dem Argumente der Thetafunction, welche einem Eckpunkte eines solchen Dreiecks zukommt, die Hälfte der durch die gegenüberliegende Seite repräsentirten Periode, so kommt man immer zu demselben geraden Theta, so lange man von dem nämlichen Dreieckspaare ausgeht. Diese Darstellung ergiebt folgendes Schema:

$$\begin{array}{llll}
24,\ 3,\ 04;\ 13,\ 02,\ 1 = 14, & & 24,\ 3,\ 1;\ 13,\ 04,\ 02 = 0, \\
24,\ 3,\ 13;\ 04,\ 02,\ 1 = 03, & & 24,\ 04,\ 13;\ 3,\ 02,\ 1 = 4, \\
24,\ 3,\ 02;\ 13,\ 04,\ 1 = 12, & & 24,\ 04,\ 02;\ 3,\ 13,\ 1 = 5, \\
24,\ 04,\ 1;\ 3,\ 13,\ 02 = 34, & & 24,\ 13,\ 1;\ 3,\ 04,\ 02 = 01, \\
24,\ 13,\ 02;\ 3,\ 04,\ 1 = 2, & & 24,\ 02,\ 1;\ 3,\ 04,\ 13 = 23.
\end{array}$$

An der Figur des Sechsecks lassen sich auch alle Gruppirungen der Thetas leicht verfolgen. Bekanntlich lassen sich aus den Thetas 16 mal 6 so zusammenfassen, dass zwischen den Quadraten von je 4 eine lineare Relation besteht; *eine* solche Gruppe wird von den 6 ungeraden Thetas gebildet, in den übrigen 15 sind immer 2 ungerade und 4 gerade enthalten, z. B. 24; 3; 24, 3, 04; 24, 3, 13; 24, 3, 02; 24, 3, 1; das Bildungsgesetz ist aus dem Beispiel ohne weitere Beschreibung klar. Es giebt aber noch 15 weitere Gruppen von 4 geraden Thetas, welche in den Göpel'schen biquadratischen Relationen auftreten; um eine solche Gruppe zu erhalten, theile man die 6 Punkte in 3 Paare, etwa: 24, 3; 04, 13; 02, 1, und nehme aus jedem Paare einen Punkt; so kommt hier:

$$24,\ 04,\ 02 = 5;\ 24,\ 04,\ 1 = 34;\ 24,\ 13,\ 02 = 2;\ 24,\ 13,\ 1 = 01.$$

Kehren wir jetzt wieder zu unserer Transformation zurück. Wir haben gesehen, wie die Thetafunctionen des gegebenen und transformirten Systems einander entsprechen und gefunden, dass dieses Entsprechen nur von einer Zuordnung der Perioden mod. 2 Perioden abhängig ist; aber wir wissen auch, dass die Thetas der beiden Systeme nur bis auf constante Factoren in einander übergehen; es bleibt uns also noch übrig diese Factoren zu bestimmen. Da es uns jedoch nur auf die Verhältnisse der Thetas ankommt, so wird es auch genügen, die Verhältnisse jener Factoren zu ermitteln. Diesen Zweck erreicht man leicht, sobald man die Zuordnung der Perioden *mod.* 8 *Perioden* kennt. Man hat nämlich als allgemeine Transformationsgleichung:

$$\varrho \cdot \vartheta_\alpha' = \varkappa_\alpha \cdot \vartheta_\alpha;$$

wobei der Proportionalitätsfactor ϱ eine von den Integralen noch abhängige Exponentialgrösse, die 16 Werthe $\varkappa_\alpha$ aber achte Einheitswurzeln sind. Aus den Quotienten je zweier solcher Gleichungen bestimmt man dann die Werthe der Quotienten $\frac{\varkappa_\alpha}{\varkappa_\beta}$, indem man die Argumente der Thetas um zusammengehörige halbe Perioden ändert, und dadurch immer zwei Gleichungen für jeden Thetaquotienten erhält.*)

Diese Constantenbestimmung setzt, wie schon bemerkt, eine Kenntniss der zusammengehörigen Perioden mod. 8 Perioden voraus, und ist immerhin noch etwas umständlich. Wir werden desshalb zur Auswerthung der Constanten von einem anderen Umstande Gebrauch machen, und um so mehr, da wir die Zuordnung der Perioden bloss mod. 2 P. studirt haben. Zwischen den Thetafunctionen bestehen eine grosse Anzahl identischer Relationen, und eine lineare Transformation muss natürlich die Eigenschaft haben *dieselben wieder in identische Relationen* überzuführen. Daraus folgt zunächst, dass 4 Thetas, zwischen welchen eine Göpel'sche Relation besteht, bei der Transformation wieder in 4 Functionen von gleicher Eigenschaft übergehen müssen, wie wir das schon früher gesehen haben; aber es folgt daraus noch weiter, dass diese Functionen mit gewissen Coefficienten zu versehen sind, damit wieder eine richtige Relation entsteht. Diese Coefficienten ersieht man aus folgendem Schema,**) worin $i = \sqrt{-1}$ und $j = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ bedeutet.

$$\vartheta_5, \vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}; \vartheta_{12}, \vartheta_{03}, \vartheta_{02}, \vartheta_{13}; \vartheta_{34}, \vartheta_3, \vartheta_2, \vartheta_{24}; \vartheta_0, \vartheta_{04}, \vartheta_1, \vartheta_{14}.$$
$$\vartheta_5, \vartheta_4, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}; \vartheta_{01}, \vartheta_{23}, i\vartheta_{02}, i\vartheta_{13}; \vartheta_{34}, \vartheta_3, \vartheta_0, \vartheta_{04}; \vartheta_2, \vartheta_{24}, i\vartheta_1, i\vartheta_{14}.$$
$$j\vartheta_{01}, j\vartheta_{23}, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}; \vartheta_5, \vartheta_4, j\vartheta_{02}, j\vartheta_{13}; \vartheta_{34}, \vartheta_3, j\vartheta_1, j\vartheta_{14}; j\vartheta_2, j\vartheta_{24}, \vartheta_0, \vartheta_{04}.$$
$$\vartheta_5, \vartheta_{34}, \vartheta_{01}, \vartheta_2; \vartheta_4, i\vartheta_3, \vartheta_{23}, i\vartheta_{24}; \vartheta_0, \vartheta_{12}, \vartheta_1, \vartheta_{02}; i\vartheta_{04}, \vartheta_{03}, i\vartheta_{14}, \vartheta_{13}.$$
$$j\vartheta_4, \vartheta_{34}, j\vartheta_{23}, \vartheta_2; \vartheta_5, j\vartheta_3, \vartheta_{01}, j\vartheta_{24}; j\vartheta_{03}, \vartheta_0, j\vartheta_{13}, \vartheta_1; \vartheta_{12}, j\vartheta_{04}, \vartheta_{02}, j\vartheta_{14}.$$
$$\vartheta_5, \vartheta_0, \vartheta_{14}, \vartheta_{23}; \vartheta_0, i\vartheta_1, i\vartheta_{04}, \vartheta_4; \vartheta_{12}, \vartheta_{34}, \vartheta_{13}, \vartheta_{24}; \vartheta_{02}, i\vartheta_2, i\vartheta_3, \vartheta_{03}.$$
$$j\vartheta_4, \vartheta_0, \vartheta_{14}, j\vartheta_{01}; j\vartheta_{03}, \vartheta_{34}, \vartheta_{24}, j\vartheta_{02}; j\vartheta_3, \vartheta_{12}, \vartheta_{13}, j\vartheta_2; j\vartheta_{04}, \vartheta_5, \vartheta_{23}, j\vartheta_1.$$
$$\vartheta_5, \vartheta_{34}, \vartheta_{12}, \vartheta_0; \vartheta_{01}, \vartheta_2, i\vartheta_{02}, i\vartheta_1; \vartheta_4, i\vartheta_3, \vartheta_{03}, i\vartheta_{04}; \vartheta_{23}, i\vartheta_{24}, i\vartheta_{13}, -\vartheta_{14}.$$
$$j\vartheta_4, \vartheta_{34}, j\vartheta_{03}, \vartheta_0; j\vartheta_{23}, \vartheta_2, ij\vartheta_{13}, i\vartheta_1; \vartheta_5, j\vartheta_3, \vartheta_{12}, j\vartheta_{04}; \vartheta_{01}, j\vartheta_{24}, i\vartheta_{02}, ij\vartheta_{14}.$$
$$\vartheta_5, \vartheta_{03}, i\vartheta_{14}, \vartheta_2; \vartheta_{12}, \vartheta_4, i\vartheta_{24}, \vartheta_1; \vartheta_{34}, \vartheta_{04}, i\vartheta_{13}, \vartheta_{01}; \vartheta_0, \vartheta_3, i\vartheta_{23}, \vartheta_{02}.$$
$$j\vartheta_{34}, \vartheta_{03}, i\vartheta_{14}, j\vartheta_{01}; j\vartheta_0, \vartheta_4, i\vartheta_{24}, j\vartheta_{02}; j\vartheta_5, \vartheta_{04}, i\vartheta_{13}, j\vartheta_2; j\vartheta_{12}, \vartheta_3, i\vartheta_{23}, j\vartheta_1.$$
$$j\vartheta_{01}, j\vartheta_2, \vartheta_{12}, \vartheta_0; \vartheta_5, \vartheta_{34}, j\vartheta_{02}, j\vartheta_1; j\vartheta_{23}, ij\vartheta_{24}, i\vartheta_{03}, \vartheta_{04}; i\vartheta_4, \vartheta_3, ij\vartheta_{13}, j\vartheta_{14}.$$
$$i\vartheta_{23}, j\vartheta_2, j\vartheta_{03}, \vartheta_0; i\vartheta_{13}, j\vartheta_1, j\vartheta_4, \vartheta_{34}; i\vartheta_{24}, j\vartheta_{01}, j\vartheta_{04}, \vartheta_{12}; i\vartheta_{14}, j\vartheta_{02}, j\vartheta_3, \vartheta_5.$$
$$j\vartheta_{14}, \vartheta_{34}, j\vartheta_{23}, \vartheta_{12}; ij\vartheta_{04}, \vartheta_2, j\vartheta_4, i\vartheta_{02}; j\vartheta_{24}, \vartheta_0, j\vartheta_{13}, \vartheta_5; j\vartheta_3, i\vartheta_1, ij\vartheta_{03}, \vartheta_{01}.$$
$$j\vartheta_4, j\vartheta_{12}, i\vartheta_{14}, \vartheta_2; j\vartheta_{03}, j\vartheta_5, i\vartheta_{24}, \vartheta_1; j\vartheta_3, j\vartheta_0, i\vartheta_{13}, \vartheta_{01}; j\vartheta_{04}, j\vartheta_{34}, i\vartheta_{23}, \vartheta_{02}.$$

*) Die 16 Constanten $\varkappa$ ändern, wie man sich leicht überzeugt, ihren Werth nicht bei einer Vermehrung der sich entspr. Perioden um 8 P.

**) Vergl. die Abh. von Borchardt, Crelle's Journal Bd. 83, S. 240.

Hierzu ist noch zu bemerken, dass in jedem Quadrupel, deren jede Reihe vier enthält, beliebig 2 Thetas mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt werden können, da sich dadurch die betr. Göpel'sche Relation nicht ändert, dann muss dies aber gleichmässig für alle 4 Quadrupel einer Horizontalreihe geschehen. Ein Beispiel wird den Gebrauch der Tabelle klar machen. Treffen wir die Bestimmung, dass den 6 ungeraden Thetas:

$$\vartheta'_{04},\quad \vartheta'_{02},\quad \vartheta'_{24},\quad \vartheta'_{13},\quad \vartheta'_{1},\quad \vartheta'_{3}$$

der Reihe nach die Functionen:

$$\vartheta_{24},\quad \vartheta_{3},\quad \vartheta_{04},\quad \vartheta_{13},\quad \vartheta_{02},\quad \vartheta_{1}$$

entsprechen, so finden wir aus der obigen Tabelle folgende genauere Zuordnung:

$$\begin{array}{llll}
\vartheta'_5,\ \vartheta'_4,\ \vartheta'_{01},\ \vartheta'_{23}; & \vartheta'_{12},\ \vartheta'_{03},\ \vartheta'_{02},\ \vartheta'_{13}; & \vartheta'_{34},\ \vartheta'_3,\ \vartheta'_2,\ \vartheta'_{24}; & \vartheta'_0,\ \vartheta'_{04},\ \vartheta'_1,\ \vartheta'_{14}, \\
\vartheta_{24},\ j\vartheta_4,\ \vartheta_0,\ j\vartheta_{01}; & i\vartheta_2,\ j\vartheta_{12},\ i\vartheta_3,\ j\vartheta_{13}; & \vartheta_5,\ j\vartheta_1,\ \vartheta_{23},\ j\vartheta_{04}; & \vartheta_{03},\ ij\vartheta_{24},\ \vartheta_{02},\ ij\vartheta_{34}.
\end{array}$$

Aus dieser Transformation fliessen noch 31 weitere, welche dieselbe Zuordnung zwischen den Thetas treffen, und die man aus jener erhält, wenn man die 2te und 3te oder 3te und 4te oder 2te und 4te Thetafunction eines jeden Quadrupels mit i multiplicirt und alle Functionen der einzelnen Quadrupel mit dem Factor 1 oder i versieht. Solche 32 zusammengehörige Transformationen haben die Eigenschaft, dass die durch sie definirte Zuordnung zwischen den Perioden mod. 2 P dieselbe, dagegen mod. 4 P. verschieden ist, und man kann hieraus die Zuordnung mod. 4 P. bestimmen, nachdem man über die Coefficienten der Thetas in der angegebenen Weise verfügt hat. Wir können noch einen Schritt weiter gehen und aus jeder dieser 32 Transformationen 15 weitere herleiten. Nehmen wir nämlich auch noch auf die Vorzeichen der obigen Coefficienten Rücksicht, und bezeichnen dieselben für die 4 Functionen ϑ_{12}, ϑ_{34}, ϑ_{01}, ϑ_4, welche sich aus ϑ_5 durch Vermehrung der Argumente um $\frac{1}{2}\left|0,0\right|\frac{1}{2},\frac{\tau_{11}}{2}\left|\frac{\tau_{12}}{2},\frac{\tau_{12}}{2}\right|\frac{\tau_{22}}{2}$ ergeben, mit ε, ε', ε'', ε''' (den Coefficienten von ϑ_5 als $+1$ vorausgesetzt), so zeigt sich leicht, dass hieraus die Vorzeichen der übrigen Thetas bereits durch Festsetzung der Perioden mod. 4 P. folgen, während die Bestimmung von ε, ε', ε'', ε''' identisch ist mit einer Zuordnung der Periodensysteme mod. 8 P.

Fassen wir die Hauptresultate der linearen Transformation noch einmal kurz zusammen, so können wir sagen:

Zwei Periodensysteme lassen sich mod. 2 *P. auf* 720 *verschiedene Arten ein-eindeutig einander zuordnen; jeder dieser* 720 *Fälle lässt noch* 32 *verschiedene Zuordnungen mod.* 4 *P. zu, und jeder von diesen* 32 *Fällen noch* 16 *weitere Zuordnungen mod.* 8 *P. Die Zuordnung mod.* 2 *P. definirt vollständig das Entsprechen der Thetafunctionen* *beider Systeme und bestimmt die Coefficienten bis auf vierte Einheitswurzeln, die Zuordnung mod. 4 P. lässt nur noch die Vorzeichen dieser Coefficienten unentschieden, die sich dann durch eine Zuordnung mod. 8 P. ebenfalls bestimmen.*

II. Quadratische Transformation der hyperelliptischen Functionen.

Die lineare Transformation stellte sich die Aufgabe, ein doppelt periodisches Integralsystem, wie es durch die unzerschnittene Riemann'sche Fläche definirt wird, auf ein zweites solches System ein-eindeutig zu beziehen. Dazu war es nothwendig und hinreichend, die ganzen Integrale (Integrale zwischen den Verzweigungspunkten) ein-eindeutig denjenigen des anderen Systems zuzuordnen, d. h. eine solche Zuordnung zwischen den Perioden zu treffen. Wie man diesen Zweck erreicht, zeigen die Formeln des vorigen Paragraphen. Die quadratische Transformation behandelt das ganz analoge Problem zwei Integralsysteme, die die Punkte*paare* zweier Riemann'scher Flächen repräsentiren, ein-vierdeutig einander zuzuordnen. Auch hier genügt es mit den Perioden zu operiren, da durch sie das ganze Integralsystem bestimmt ist, und man erhält diese Zuordnung, wenn man den unendlich vielen Perioden des gegebenen Systems im transformirten System nur den vierten Theil aller Perioden entsprechen lässt. Analytisch wird dieses Entsprechen durch analoge Gleichungen*) vermittelt, wie bei der linearen Transformation.

Den Perioden:

$$1 \mid 0, \qquad 0 \mid 1, \qquad \tau'_{11} \mid \tau'_{12}, \qquad \tau'_{12} \mid \tau'_{22}$$

entsprechen:

$$\frac{\omega_{11}}{2} \Big| \frac{\omega_{21}}{2}, \qquad \frac{\omega_{12}}{2} \Big| \frac{\omega_{22}}{2}, \qquad \frac{\omega'_{11}}{2} \Big| \frac{\omega'_{21}}{2}, \qquad \frac{\omega'_{12}}{2} \Big| \frac{\omega'_{22}}{2},$$

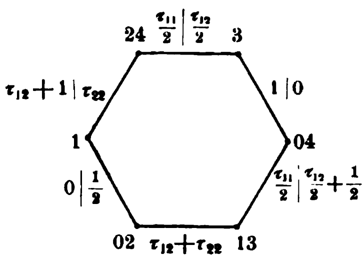
wobei die ω und ω' die frühere Bedeutung haben und die darin auftretenden Grössen $\varrho, \varrho', \sigma, \sigma'$ denselben Bedingungsgleichungen genügen, nachdem man deren rechte Seiten mit dem Factor 2 multiplicirt hat, was nur bei den beiden letzten Gleichungen eine Aenderung hervorbringt.

Die Ausdrücke für die Integrale $v_1' \mid v_2'$ und die Perioden $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$ sind ebenfalls die früheren, wenn man an Stelle der ω und ω' ihre halben Werthe einsetzt.

Beschränken wir uns auch hier vorerst darauf Transformationen als wesentlich gleich aufzufassen, welche sich in den Zuordnungen nur um doppelte Perioden unterscheiden, so gewinnt die Darstellung wesentlich an Kürze und Uebersichtlichkeit, während wir doch alle überhaupt möglichen Relationen zwischen den Thetas zweier durch eine beliebige

*) Königsberger, Crelle's Journal, Bd. 67.

quadratische Transformation aus einander abgeleiteten Systeme erhalten*), falls wir wiederum blos auf die Verhältnisse der Thetafunctionen achten. Wir denken uns desshalb auch hier alle Perioden mod. 2 P. auf 15 reducirt und bedienen uns wieder der alten Figur. Hier suchen wir 3 Verbindungslinien auf, welche keinen Eckpunkt gemein haben, die also die früher besprochene Eigenschaft besitzen, dass die Summe der zugehörigen Perioden $\equiv 0$ (mod. 2 P.) ist, und legen denselben die halben Werthe der betreffenden Perioden bei; alsdann vervollständigen wir sie durch 3 weitere Linien (welche natürlich auch die Eigenschaft haben, dass die Summe ihrer Perioden $\equiv 0$ (mod. 2 P.) ist) zu einem Sechsecke und theilen diesen die bezüglichen ganzen Periodenwerthe zu. Alle übrigen Linien erhalten Periodenwerthe, welche aus diesen 6 Werthen zusammengesetzt sind, indem die Summe der Werthe der Seiten eines Dreiecks, mit den richtigen Vorzeichen versehen, verschwinden muss, gerade so wie es bei der linearen Transformation der Fall war. Stellen z. B. die Linien 24,3; 04,13 und 02,1 die halben Perioden $\frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2}$, $\frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{1}{2}$ und $0\Big|\frac{1}{2}$



dar, während 3, 04; 13, 02 und 1, 24 ihre Werthe $1\,|\,0$, $\tau_{12}\,|\,\tau_{22}$, $\tau_{12}+1\,|\,\tau_{22}$ beibehalten, so erhält 24,04 den Werth $\frac{\tau_{11}}{2}+1\Big|\frac{\tau_{12}}{2}$, 24, 13 den Werth $1\Big|\frac{1}{2}$ etc. Beziehen wir nun eine solche Figur auf eine zweite, deren Seiten, genau wie bei der linearen Transformation, nur ganze Perioden darstellen, so haben wir die Zuordnung vor uns, wie sie eine quadratische Transformation verlangt. Um dieses zu beweisen, gehen wir von zwei sich entsprechenden Perioden P und P' aus; dann erhalten wir aus P' durch Addition der 15 Perioden, welche sich mod. 2 P. unterscheiden, 15 weitere Perioden, während aus P durch Addition der entsprechenden 15 Werthe, die theils aus halben, theils aus ganzen Perioden bestehen, nur 3 ganze Perioden hervorgehen; von 16 Perioden des transformirten Systems sind es also nur 4, denen auch im geg. System ganze Perioden entsprechen, wodurch gerade die Zuordnung der Periodensysteme bei einer quadratischen Transformation charakterisirt ist.

Nachdem wir so die verschiedenen quadratischen Transformationen definirt haben, können wir sogleich einige Folgerungen daraus ziehen. Zunächst ersieht man, dass die quadratische Transformation *wesentlich*

---

*) Diese Behauptung erfährt eine kleine Abänderung, wie wir später sehen werden, indem erst zwei Transformationen, welche sich nur um vierfache Perioden unterscheiden, völlig gleiche Formeln liefern, während sonst noch der Factor ± 1 vor die Thetas treten kann.

nur davon abhängt, welche Seiten in der zu Grunde gelegten Figur halbe und welche ganze Perioden repräsentiren; zwei Transformationen, welche hierin übereinstimmen, können durch lineare Transformation aus einander hergeleitet werden, und man erhält dieselbe, wenn man diejenigen Seiten der Figuren der beiden transformirten Systeme auf einander bezieht, welche derselben Seite der Grundfigur entsprechen. Weiter lässt sich leicht zeigen, dass auch bei der Grundfigur nur die Wahl der 3 Seiten, denen halbe Perioden zukommen, eine *wesentliche* Aenderung bewirkt, nicht aber die Wahl der 3 Seiten, welche jene zu einem Sechseck ergänzen. Stellen z. B. (wie in der oben angegebenen Figur) 24, 3; 04, 13 und 02, 1 die halben Perioden $\frac{\tau_{11}}{2} \Big| \frac{\tau_{12}}{2}$, $\frac{\tau_{11}}{2} \Big| \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2}$ und $0 \Big| \frac{1}{2}$ dar, und ist einmal 3, 04, das andere Mal 3, 13 eine weitere Seite des Sechsecks, so kommen den Linien 3, 04 und 3, 13 das erste Mal die Werthe $1 \mid 0$ und $\frac{\tau_{11}}{2} + 1 \Big| \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2}$, das andere Mal die Werthe $\frac{\tau_{11}}{2} + 1 \Big| \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2}$ und $\tau_{11} + 1 \mid \tau_{12} + 1$ zu, man erhält also beide Mal dieselbe quadratische Transformation, wenn man die geeignete Beziehung auf die zweite Figur, welche die Perioden des transformirten Systems repräsentirt, vornimmt. Aus diesen Bemerkungen resultirt, dass es nur 15 von einander wesentlich verschiedene Classen*) quadratischer Transformationen giebt, denn ebenso oft lassen sich in der Sechseckfigur 3 Linien finden, von welchen keine 2 einen Endpunkt gemein haben. Jeder dieser 15 Classen gehören 3 Perioden als charakteristisch zu; um eben solche halbe Perioden unterscheiden sich die Argumente der 4 Thetas einer Göpel'schen Relation, deren es eben auch 15 giebt. Wir ordnen desshalb den einzelnen Classen die bezüglichen 4 geraden Thetas zu und bezeichnen dieselben geradezu durch die Indices dieser Thetas, so z. B. die oben geschilderte Transformation durch 5, 01, 2, 34.

Diese Eintheilung der quadratischen Transformationen in 15 Classen hat bereits Hermite**) eingeführt; derselbe hat weiter aus jeder der 15 Classen *eine* Transformation ausgewählt und sie als Repräsentanten der betr. Classe aufgestellt. Hermite hat jedoch bei der Wahl der einzelnen Repräsentanten nur darauf geachtet, dass sich die Grössen $\varrho, \varrho', \sigma, \sigma'$ einfach gestalten, dagegen kommen diesen Repräsentanten keine anderen besonderen Eigenschaften zu. Da es aber überhaupt keine einzelne Transformation giebt, welche sich vor allen übrigen derselben Classe auszeichnet, so ziehe ich es vor, diese Repräsentanten ganz fallen zu lassen und an ihrer Stelle in jeder Classe eine Gruppe von

*) Die Transformationen einer Classe lassen sich durch Anwendung einer linearen Transformation alle auf *eine* zurückführen.

**) Hermite, Comptes rendus Bd. 40.

24 Transformationen hervorzuheben, welche eine hervorragende Eigenthümlichkeit besitzen. Ich will diese Gruppen sogleich definiren, ihre Eigenschaften werden wir später kennen lernen. Erinnern wir uns an unsere Figur; 3 Seiten stellen halbe Perioden dar, wir wollen sie mit $\frac{p_1}{2}$, $\frac{p_3}{2}$, $\frac{p_5}{2}$ bezeichnen; durch sie ist die Classe bestimmt. Diese 3 Linien können wir auf 8 verschiedene Weisen durch 3 weitere zu einem Sechseck vervollständigen; diese letzteren repräsentiren ganze Perioden, die wir mit p_2, p_4, p_6 bezeichnen. Die Perioden des transformirten Systems werden durch eine zweite Figur dargestellt; ihre zu jenen 6 Seiten homologen Seiten seien resp. $p_1', p_3', p_5', p_2', p_4', p_6'$. Nun beziehen wir $\frac{p_1}{2}$, $\frac{p_3}{2}$, $\frac{p_5}{2}$ auf p_2', p_4', p_6' und p_2, p_4, p_6 auf p_1', p_3', p_5' und zwar in der Weise, dass wenn $\frac{p_1}{2}$ und p_2' einander entsprechen, dann auch p_2 und p_1' es thun. Diese Bestimmung giebt noch zu 3 Möglichkeiten Anlass, wie man sich sofort überzeugt, nämlich den Werthen:

$$\frac{p_1}{2},\quad p_2,\quad \frac{p_3}{2},\quad p_4,\quad \frac{p_5}{2},\quad p_6$$

entsprechen der Reihe nach:

$$p_2',\quad p_1',\quad p_6',\quad p_5',\quad p_4',\quad p_3'$$

oder:

$$p_4',\quad p_3',\quad p_2',\quad p_1',\quad p_6',\quad p_5'$$

oder:

$$p_6',\quad p_5',\quad p_4',\quad p_3',\quad p_2',\quad p_1'.$$

Wir haben also hiermit wirklich eine geschlossene Gruppe von 24 Transformationen definirt. Eine solche Transformation, von der ich später Gebrauch machen werde, mag gleich hier erwähnt werden; den Perioden:

$$\frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2},\ 1 \mid 0,\ \frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{1}{2},\ \tau_{12}\mid\tau_{22},\ 0\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \tau_{12}+1\mid\tau_{22}$$

entsprechen mod. 2 P. die neuen

$$1\mid 0,\ \tau_{11}'\mid\tau_{12}',\ \tau_{12}'+1\mid\tau_{22}',\ 0\mid 1,\ \tau_{12}'\mid\tau_{22}',\ \tau_{11}'\mid\tau_{12}'+1. -$$

Nachdem ich nun die Beziehungen zwischen den Perioden des gegebenen und transformirten Systems so weit gefördert habe, gehe ich dazu über die Relationen zwischen den Thetas beider Systeme aufzustellen, und zwar werde ich zunächst Einiges über die Formeln im Allgemeinen anzuführen haben, und erst dann mich dem Formelsystem eines bestimmten Falles zuwenden können. Königsberger*) hat ge-

*) Königsberger, Crelle's Journal. Bd. 67.

zeigt, dass sich die transformirten Thetas entweder als Summe von 4 Quadraten oder als Summe von 2 doppelten Producten in den gegebenen Thetas darstellen lassen; Pringsheim*) wies weiter nach, dass es für jede quadratische Transformation 4 und nur 4 gerade Thetas giebt, welche sich als Summen von Quadraten ergeben. Im Anschluss hieran habe ich in meiner Promotionsschrift dargethan, dass man alle 10 geraden Thetas durch die *nämlichen* 4 Thetas des gegebenen Systems ausdrücken kann; es sind das eben diejenigen 4 Thetas, welche die Classe charakterisiren, der die betr. Transformation angehört. Ich habe ferner dort gefunden, dass die Constanten in einer und derselben Relation unter einander *gleich* werden bis auf vierte Einheitswurzeln. Um zu erfahren, welche der 10 geraden Thetas sich als Quadratsummen und welche sich als Summen zweier Producte darstellen lassen, hat man auf diejenigen 3 Perioden des transformirten Systems zu achten, welchen im gegebenen Systeme ganze Perioden entsprechen. Es lassen sich dann 4 gerade Thetas angeben, deren Argumente sich um die Hälfte jener 3 Perioden unterscheiden, sie nehmen die Form von Quadratsummen an, während die 6 übrigen sich als Productsummen darstellen. Der Beweis hierfür ist leicht zu erbringen, ich werde ihn desshalb hier unterdrücken, um so mehr da er sich schon in meiner vorhin erwähnten Dissertation vorfindet. Wenden wir nun das soeben ausgesprochene Resultat auf eine unserer Gruppen von 24 Transformationen an, so fliesst daraus der Satz, dass sich die Argumente der 4 Thetas, die sich durch Quadratsummen ausdrücken, um $\frac{p_1'}{2}$, $\frac{p_3'}{2}$, $\frac{p_5'}{2}$ unterscheiden müssen; es sind dies aber gerade diejenigen Thetas, welche die Classe charakterisiren, der unsere Gruppe angehört. Die Gruppe der 24 Transformationen hat also die Eigenschaft, dass die 4 Thetas des gegebenen Systems, durch welche sich alle geraden Thetas des transformirten Systems ausdrücken, übereinstimmen mit den 4 Thetas des transformirten Systems, welche als Quadratsummen erscheinen.

Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen gehe ich zur Aufstellung des Formelsystems für einen bestimmt gegebenen Fall über. Ich stelle mir dabei die Aufgabe alle 16 transformirten Thetas durch die nämlichen 4 Thetas des geg. Systems darzustellen, und ebenso auch umgekehrt, die gegebenen Thetas durch 4 Thetas des transformirten Systems. Ich gehe dabei von der Arbeit von Göpel „Theoriae transcendentium Abelianarum adumbratio levis" im Crelle'schen Journal Bd. 35 aus. Es findet sich daselbst ein Formelsystem,**) das ich hier in der Weierstrass'schen Bezeichnungsweise wiederhole.

---

*) Pringsheim, Math. Annalen Bd. IX.

**) Vergl. auch Cayley, Crelle's Journal, Bd. 83.

$$\vartheta_0^2 = k_5\Theta_5 - k_{01}\Theta_{01} - k_4\Theta_4 + k_{23}\Theta_{23}, \quad \vartheta_1^2 = k_{01}\Theta_5 - k_5\Theta_{01} - k_{23}\Theta_4 + k_4\Theta_{23},$$
$$\vartheta_{34}^2 = k_5\Theta_5 + k_{01}\Theta_{01} - k_4\Theta_4 - k_{23}\Theta_{23}, \quad \vartheta_2^2 = k_{01}\Theta_5 + k_5\Theta_{01} - k_{23}\Theta_4 - k_4\Theta_{23},$$
$$\vartheta_{12}^2 = k_5\Theta_5 - k_{01}\Theta_{01} + k_4\Theta_4 - k_{23}\Theta_{23}, \quad \vartheta_{02}^2 = k_{01}\Theta_5 - k_5\Theta_{01} + k_{23}\Theta_4 - k_4\Theta_{23},$$
$$\vartheta_5^2 = k_5\Theta_5 + k_{01}\Theta_{01} + k_4\Theta_4 + k_{23}\Theta_{23}, \quad \vartheta_{01}^2 = k_{01}\Theta_5 + k_5\Theta_{01} + k_{23}\Theta_4 + k_4\Theta_{23},$$

$$\vartheta_{04}^2 = k_4\Theta_5 - k_{23}\Theta_{01} - k_5\Theta_4 + k_{01}\Theta_{23}, \quad \vartheta_{14}^2 = k_{23}\Theta_5 - k_4\Theta_{01} - k_{01}\Theta_4 + k_5\Theta_{23},$$
$$\vartheta_3^2 = k_4\Theta_5 + k_{23}\Theta_{01} - k_5\Theta_4 - k_{01}\Theta_{23}, \quad \vartheta_{24}^2 = k_{23}\Theta_5 + k_4\Theta_{01} - k_{01}\Theta_4 - k_5\Theta_{23},$$
$$\vartheta_{03}^2 = k_4\Theta_5 - k_{23}\Theta_{01} + k_5\Theta_4 - k_{01}\Theta_{23}, \quad \vartheta_{13}^2 = k_{23}\Theta_5 - k_4\Theta_{01} + k_{01}\Theta_4 - k_5\Theta_{23},$$
$$\vartheta_4^2 = k_4\Theta_5 + k_{23}\Theta_{01} + k_5\Theta_4 + k_{01}\Theta_{23}, \quad \vartheta_{23}^2 = k_{23}\Theta_5 + k_4\Theta_{01} + k_{01}\Theta_4 + k_5\Theta_{23}.$$

Dabei ist

$$\vartheta_\lambda = \vartheta_\lambda(v_1 \mid v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

und

$$\Theta_\lambda = \vartheta_\lambda(v_1' \mid v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \vartheta_\lambda(2v_1 \mid 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}).$$

Die Nullwerthe von ϑ_λ sind dabei wie gewöhnlich mit c_λ, die Nullwerthe von Θ_λ mit k_λ bezeichnet.

Nehmen wir in den obigen Formeln $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ und dementsprechend auch $v_1' \mid v_2' = 0 \mid 0$, so kommen die Formeln für die 10 Nullwerthe:

$$c_0^2 = k_5^2 - k_{01}^2 - k_4^2 + k_{23}^2,$$
$$c_{34}^2 = k_5^2 + k_{01}^2 - k_4^2 - k_{23}^2,$$
$$c_{12}^2 = k_5^2 - k_{01}^2 + k_4^2 - k_{23}^2,$$
$$c_5^2 = k_5^2 + k_{01}^2 + k_4^2 + k_{23}^2,$$

$$c_{03}^2 = 2(k_4 k_5 - k_{01} k_{23}), \quad c_4^2 = 2(k_4 k_5 + k_{01} k_{23}),$$
$$c_2^2 = 2(k_5 k_{01} - k_4 k_{23}), \quad c_{01}^2 = 2(k_5 k_{01} + k_4 k_{23}),$$
$$c_{14}^2 = 2(k_5 k_{23} - k_4 k_{01}), \quad c_{23}^2 = 2(k_5 k_{23} + k_4 k_{01}).$$

Zu diesem System von Formeln erhält man das inverse ebenfalls durch Anwendung der von Göpel gebrauchten Methoden; ich theile das Resultat ohne weitere Ableitung mit.

$$4k_5\,\Theta_5 = \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2,$$
$$4k_{01}\Theta_{01} = \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2,$$
$$4k_4\,\Theta_4 = \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2,$$
$$4k_{23}\Theta_{23} = \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2,$$

$$
\begin{aligned}
2k_{12}\Theta_{12} &= \vartheta_5\vartheta_{12} + \vartheta_0\,\vartheta_{34}, & 2k_{03}\Theta_{03} &= \vartheta_5\vartheta_{12} - \vartheta_0\,\vartheta_{34},\\
2k_{34}\Theta_{34} &= \vartheta_5\vartheta_{34} + \vartheta_0\,\vartheta_{12}, & 2k_2\,\Theta_2 &= \vartheta_5\vartheta_{34} - \vartheta_0\,\vartheta_{12},\\
2k_0\,\Theta_0 &= \vartheta_5\vartheta_0 + \vartheta_{12}\vartheta_{34}, & 2k_{14}\Theta_{14} &= \vartheta_5\vartheta_0 - \vartheta_{12}\vartheta_{34}.
\end{aligned}
$$

Will man auch die ungeraden Θ durch die nämlichen 4 Thetas des anderen Systems ausdrücken, so muss man zu den Producten zweier ungeraden Functionen, welche gleiche Indices aber verschiedene Argumente besitzen, seine Zuflucht nehmen. Man findet dann die 6 Formeln:

$$
\begin{aligned}
4\Theta_{02}(u')\cdot\Theta_{02}(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_{12}(u+v) - \vartheta_{12}(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad + \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_0\,(u+v) - \vartheta_0\,(u-v)\vartheta_{34}(u+v),\\
4\Theta_{13}(u')\cdot\Theta_{13}(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_{12}(u+v) - \vartheta_{12}(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad - \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_0\,(u+v) + \vartheta_0\,(u-v)\vartheta_{34}(u+v),\\
4\Theta_3\,(u')\cdot\Theta_3\,(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_{34}(u+v) - \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad + \vartheta_{12}(u-v)\vartheta_0\,(u+v) - \vartheta_0\,(u-v)\vartheta_{12}(u+v),\\
4\Theta_{24}(u')\cdot\Theta_{24}(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_{34}(u+v) - \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad - \vartheta_{12}(u-v)\vartheta_0\,(u+v) + \vartheta_0\,(u-v)\vartheta_{12}(u+v),\\
4\Theta_{04}(u')\cdot\Theta_{04}(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_0\,(u+v) - \vartheta_0\,(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad + \vartheta_{12}(u-v)\vartheta_{34}(u+v) - \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_{12}(u+v),\\
4\Theta_1\,(u')\cdot\Theta_1\,(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_0\,(u+v) - \vartheta_0\,(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad - \vartheta_{12}(u-v)\vartheta_{34}(u+v) + \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_{12}(u+v).
\end{aligned}
$$

Um das Formelsystem vollständig zu machen, gebe ich auch noch die 10 inversen Relationen der Nullwerthe:

$$
\begin{aligned}
4k_5^2 &= c_5^2 + c_{12}^2 + c_{34}^2 + c_0^2,\\
4k_{01}^2 &= c_5^2 - c_{12}^2 + c_{34}^2 - c_0^2,\\
4k_4^2 &= c_5^2 + c_{12}^2 - c_{34}^2 - c_0^2,\\
4k_{23}^2 &= c_5^2 - c_{12}^2 - c_{34}^2 + c_0^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2k_{12}^2 &= c_5c_{12} + c_0\,c_{34}, & 2k_{03}^2 &= c_5c_{12} - c_0\,c_{34},\\
2k_{34}^2 &= c_5c_{34} + c_0\,c_{12}, & 2k_2^2 &= c_5c_{34} - c_0\,c_{12},\\
2k_0^2 &= c_5c_0 + c_{34}c_{12}, & 2k_{14}^2 &= c_5c_0 - c_{34}c_{12}.
\end{aligned}
$$

Die beiden hier in Betracht kommenden Systeme von Integralen bilden eben zwei durch quadratische Transformation aus einander hergeleitete Systeme; ihre gegenseitige Beziehung ist dargestellt durch folgende Zuordnung der Perioden:

$$\tau_{11}\mid\tau_{12},\quad \tau_{12}\mid\tau_{22},\quad \tfrac{1}{2}\Big|\,0,\quad 0\,\Big|\tfrac{1}{2}$$

entsprechend

$$\tau'_{11}\mid\tau'_{12},\quad \tau'_{12}\mid\tau'_{22},\quad 1\mid 0,\quad 0\mid 1.$$

Unsere obigen Formeln geben also wirklich die Beziehungen bei einer quadratischen Transformation. Wir haben allerdings nur einen ganz speciellen Fall vor uns, aber die Formeln behalten auch im allgemeinen Falle ganz dieselbe Gestalt. Ja noch mehr; wir können diese ein Mal aufgestellten Relationen benutzen, um aus ihnen die Formeln für eine beliebige andere quadratische Transformation abzuleiten mit alleiniger Anwendung zweier Lineartransformationen, die eine angewendet auf die gegebenen Thetas, die andere auf die transformirten. Die Sache verhält sich des Näheren wie folgt.

Eine beliebige quadratische Transformation ist, wie wir wissen, gegeben durch die Zuordnung zweier Sechsecke; die Seiten des Sechsecks des gegebenen Systems repräsentiren abwechselnd ganze und halbe Perioden, die wir in ihrer Aufeinanderfolge mit: $\frac{p_1}{2}, p_2, \frac{p_3}{2}, p_4, \frac{p_5}{2}, p_6$ bezeichnen, die entsprechenden Linien des transformirten Systems stellen alle ganze Perioden dar, und sollen mit: $p'_h, p'_i, p'_k, p'_l, p'_m, p'_n$ bezeichnet werden. Anstatt nun direct den Perioden:

$$\frac{p_1}{2},\ p_2,\ \frac{p_3}{2},\ p_4,\ \frac{p_5}{2},\ p_6$$

die neuen Perioden $p'_h, p'_i, p'_k, p'_l, p'_m, p'_n$ zuzuordnen, wie es die quadratische Transformation verlangt, führe man die 3 aufeinanderfolgenden Zuordnungen aus, nämlich:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{p_1}{2}, & p_2, & \frac{p_3}{2}, & p_4, & \frac{p_5}{2}, & p_6; \\[4pt]
\frac{1}{2}\,\Big|\,0, & \tau''_{11}+\tau''_{12}\,|\,\tau''_{12}+\tau''_{22}, & 0\,\Big|\,\frac{1}{2}, & \tau''_{12}\,|\,\tau''_{22}, & \frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{2}, & \tau''_{11}\,|\,\tau''_{12}, \\[4pt]
1\,|\,0, & \tau'''_{11}+\tau'''_{12}\,|\,\tau'''_{12}+\tau'''_{22}, & 0\,|\,1, & \tau'''_{12}\,|\,\tau'''_{22}, & 1\,|\,1, & \tau'''_{11}\,|\,\tau'''_{12}, \\[4pt]
p'_h, & p'_i, & p'_k, & p'_l, & p'_m, & p'_n.
\end{array}$$

Die erste und dritte Zuordnung bestimmen lineare Transformationen, die zweite dagegen ist gerade die oben durchgeführte quadratische Transformation. —

Zum Schluss will ich diese Methode benutzen, um für den schon früher erwähnten Fall der quadratischen Transformation das Formelsystem abzuleiten.

Dieser Fall hat, wie schon bemerkt, besonderes Interesse, weil er einer solchen Gruppe von 24 Transformationen angehört; es treten desshalb auf den rechten Seiten aller Formeln (sowohl des directen wie des inversen Systems) dieselben 4 Thetas auf. Ich werde im nächsten Abschnitt hierauf zurückkommen.

Zunächst sind die einzelnen Transformationen, durch welche die besprochene Transformation ersetzt werden kann, durch das Schema fixirt:

$$\frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2},\quad 1\,|\,0,\quad \frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{1}{2},\ \tau_{12}\,|\,\tau_{22},\quad 0\Big|\frac{1}{2},\quad \tau_{12}+1\,|\,\tau_{22},$$
$$\frac{1}{2}\Big|0,\ -\tau''_{11}\,|\,-\tau''_{12},\quad \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2},\quad \tau''_{12}\,|\,\tau''_{22},\quad 0\Big|\frac{1}{2},\quad -\tau''_{11}+\tau''_{12}\,|\,-\tau''_{12}+\tau''_{22},$$
$$1|0,\ -\tau'''_{11}\,|\,-\tau'''_{12},\quad 1\,|\,1,\quad \tau'''_{12}\,|\,\tau'''_{22},\quad 0\,|\,1,\quad -\tau'''_{11}+\tau'''_{12}\,|\,-\tau'''_{12}+\tau'''_{22},$$
$$1|0,\ -\tau'_{11}\,|\,-\tau'_{12},\ \tau'_{12}+1\,|\,\tau'_{22},\quad 0\,|\,-1,\ \tau'_{12}\,|\,\tau'_{22},\quad -\tau'_{11}\,|\,-\tau'_{12}-1.$$

Die beiden linearen Transformationen ergeben uns diejenigen Thetas, welche wir in das vorige Formelsystem an Stelle der dortigen Functionen einzuführen haben. Dadurch erhalten wir für die quadratische Transformation, welche den Perioden: $\frac{\tau_{11}}{2}\Big|\frac{\tau_{12}}{2},\ \tau_{12}\,|\,\tau_{22},\ 1\,|\,0,\ 0\Big|\frac{1}{2}$ die neuen Perioden: $1\,|\,0,\ 0\,|\,-1,\ -\tau'_{11}\,|\,-\tau'_{12},\ \tau'_{12}\,|\,\tau'_{22}$ zuordnet, falls wir wieder die Thetas des gegebenen Systems mit ϑ und die des transformirten mit Θ bezeichnen, folgende Relationen, in denen η, η', η'', ε, ε', ε'' die Grössen ± 1 bezeichnen:*)

$$\begin{aligned}
\vartheta_2^2 &= k_5\Theta_5 - k_{01}\Theta_{01} - k_{34}\Theta_{34} + k_2\Theta_2, & -\eta\vartheta_1^2 &= k_{01}\Theta_5 - k_5\Theta_{01} - k_2\Theta_{34} + k_{34}\Theta_2,\\
\vartheta_{34}^2 &= k_5\Theta_5 + k_{01}\Theta_{01} - k_{34}\Theta_{34} - k_2\Theta_2, & \eta\vartheta_0^2 &= k_{01}\Theta_5 + k_5\Theta_{01} - k_2\Theta_{34} - k_{34}\Theta_2,\\
\vartheta_{01}^2 &= k_5\Theta_5 - k_{01}\Theta_{01} + k_{34}\Theta_{34} - k_2\Theta_2, & -\eta\vartheta_{02}^2 &= k_{01}\Theta_5 - k_5\Theta_{01} + k_2\Theta_{34} - k_{34}\Theta_2,\\
\vartheta_5^2 &= k_5\Theta_5 + k_{01}\Theta_{01} + k_{34}\Theta_{34} + k_2\Theta_2, & \eta\vartheta_{12}^2 &= k_{01}\Theta_5 + k_5\Theta_{01} + k_2\Theta_{34} + k_{34}\Theta_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta'\cdot\vartheta_{24}^2 &= k_{34}\Theta_5 - k_2\Theta_{01} - k_5\Theta_{34} + k_{01}\Theta_2, & -\eta''\vartheta_{14}^2 &= k_2\Theta_5 - k_{34}\Theta_{01} - k_{01}\Theta_{34} + k_5\Theta_2,\\
\eta'\cdot\vartheta_3^2 &= k_{34}\Theta_5 + k_2\Theta_{01} - k_5\Theta_{34} - k_{01}\Theta_2, & \eta''\vartheta_{04}^2 &= k_2\Theta_5 + k_{34}\Theta_{01} - k_{01}\Theta_{34} - k_5\Theta_2,\\
\eta'\cdot\vartheta_{23}^2 &= k_{34}\Theta_5 - k_2\Theta_{01} + k_5\Theta_{34} - k_{01}\Theta_2, & -\eta''\vartheta_{13}^2 &= k_2\Theta_5 - k_{34}\Theta_{01} + k_{01}\Theta_{34} - k_5\Theta_2,\\
\eta'\cdot\vartheta_4^2 &= k_{34}\Theta_5 + k_2\Theta_{01} + k_5\Theta_{34} + k_{01}\Theta_2, & \eta''\vartheta_{03}^2 &= k_2\Theta_5 + k_{34}\Theta_{01} + k_{01}\Theta_{34} + k_5\Theta_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4k_5\,\Theta_5 &= \vartheta_5^2 + \vartheta_{01}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_2^2,\\
4k_{01}\Theta_{01} &= \vartheta_5^2 - \vartheta_{01}^2 + \vartheta_{34}^2 - \vartheta_2^2,\\
4k_{34}\Theta_{34} &= \vartheta_5^2 + \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{34}^2 - \vartheta_2^2,\\
4k_2\,\Theta_2 &= \vartheta_5^2 - \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{34}^2 + \vartheta_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon\, k_{03}\Theta_{03} &= \vartheta_5\vartheta_2 + \vartheta_{01}\vartheta_{34}, & -2\varepsilon\, k_{14}\Theta_{14} &= \vartheta_5\vartheta_2 - \vartheta_{01}\vartheta_{34},\\
2\varepsilon'\, k_{12}\Theta_{12} &= \vartheta_5\vartheta_{01} + \vartheta_2\,\vartheta_{34}, & 2\varepsilon'\, k_0\,\Theta_0 &= \vartheta_5\,\vartheta_{01} - \vartheta_2\,\vartheta_{34},\\
2\varepsilon'' k_4\,\Theta_4 &= \vartheta_5\vartheta_{34} + \vartheta_2\,\vartheta_{01}, & 2\varepsilon'' k_{23}\Theta_{23} &= \vartheta_5\vartheta_{34} - \vartheta_2\,\vartheta_{01},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4\varepsilon\cdot\Theta_{04}(u')\Theta_{04}(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_2\,(u+v) - \vartheta_2\,(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad + \vartheta_{01}(u-v)\vartheta_{34}(u+v) - \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_{01}(u+v),\\
4\varepsilon\,.\,\Theta_{13}(u')\Theta_{13}(v') &= \vartheta_5\,(u-v)\vartheta_2\,(u+v) - \vartheta_2\,(u-v)\vartheta_5\,(u+v)\\
&\quad - \vartheta_{01}(u-v)\vartheta_{34}(u+v) + \vartheta_{34}(u-v)\vartheta_{01}(u+v),
\end{aligned}$$

---

*) Dieselben befinden sich bereits in meiner Promotionsschrift, mit Ausnahme der letzten sechs.

$$
\begin{aligned}
4\varepsilon'\cdot\Theta_{02}(u')\Theta_{02}(v') &= \vartheta_5(u-v)\vartheta_{01}(u+v)-\vartheta_{01}(u-v)\vartheta_5(u+v)\\
&\quad+\vartheta_{34}(u-v)\vartheta_2(u+v)-\vartheta_2(u-v)\vartheta_{34}(u+v),\\
4\varepsilon'\cdot\Theta_1(u')\Theta_1(v') &= \vartheta_5(u-v)\vartheta_{01}(u+v)-\vartheta_{01}(u-v)\vartheta_5(u+v)\\
&\quad-\vartheta_{34}(u-v)\vartheta_2(u+v)+\vartheta_2(u-v)\vartheta_{34}(u+v).\\
-4\varepsilon''\cdot\Theta_3(u')\Theta_3(v') &= \vartheta_5(u-v)\vartheta_{34}(u+v)-\vartheta_{34}(u-v)\vartheta_5(u+v)\\
&\quad+\vartheta_{01}(u-v)\vartheta_2(u+v)-\vartheta_2(u-v)\vartheta_{01}(u+v),\\
-4\varepsilon''\cdot\Theta_{24}(u')\Theta_{24}(v') &= \vartheta_5(u-v)\vartheta_{34}(u+v)-\vartheta_{34}(u-v)\vartheta_5(u+v)\\
&\quad-\vartheta_{01}(u-v)\vartheta_2(u+v)+\vartheta_2(u-v)\vartheta_{01}(u+v).
\end{aligned}
$$

Die Abhängigkeit der beiden Integralsysteme ist dabei definirt durch:

$$
v_1' = \frac{2(\tau_{12}v_2-\tau_{22}v_1)}{N}, \quad v_2' = \frac{\tau_{11}v_2-\tau_{12}v_1}{N},
$$

$$
\tau_{11}' = \frac{2\tau_{22}}{N}, \quad \tau_{12}' = \frac{\tau_{12}}{N}, \quad \tau_{22}' = \frac{\tau_{11}}{2N}.
$$

$$
N = \tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}.
$$

Die hier angeschriebenen Gleichungen sind wohlbemerkt nur in ihren Verhältnissen richtig, indem man sich auf Seite der kleinen Thetas einen Proportionalitätsfactor ϱ hinzuzudenken hat.

Aus den 6 Gleichungen für die ungeraden Thetas folgen noch 12 weitere, welche auf der linken Seite nur noch *eine* ungerade Function enthalten; sie mögen ebenfalls hier Platz greifen, da ich später darauf zurückkommen werde.

$$
\begin{aligned}
\varrho k_{03}\Theta_{04} &= \vartheta_4\vartheta_{24}+\vartheta_3\vartheta_{23}, & \varrho k_{14}\Theta_{13} &= \vartheta_4\vartheta_{24}-\vartheta_3\vartheta_{23},\\
\varrho k_4\Theta_3 &= \vartheta_4\vartheta_3+\vartheta_{24}\vartheta_{23}, & \varrho k_{23}\Theta_{24} &= \vartheta_4\vartheta_3-\vartheta_{24}\vartheta_{23},\\
\varrho k_{03}\Theta_{13} &= \vartheta_{12}\vartheta_1+\vartheta_{02}\vartheta_0, & \varrho k_{14}\Theta_{04} &= \vartheta_{12}\vartheta_1-\vartheta_{02}\vartheta_0,\\
\varrho k_{12}\Theta_{02} &= \vartheta_{12}\vartheta_{02}+\vartheta_0\vartheta_1, & \varrho k_0\Theta_1 &= \vartheta_{12}\vartheta_{02}-\vartheta_0\vartheta_1,\\
\varrho k_0\Theta_{02} &= \vartheta_{03}\vartheta_{13}+\vartheta_{04}\vartheta_{14}, & \varrho k_{12}\Theta_1 &= \vartheta_{03}\vartheta_{13}-\vartheta_{04}\vartheta_{14},\\
\varrho k_4\Theta_{24} &= \vartheta_{03}\vartheta_{04}+\vartheta_{13}\vartheta_{14}, & \varrho k_{23}\Theta_3 &= \vartheta_{03}\vartheta_{04}-\vartheta_{13}\vartheta_{14}.
\end{aligned}
$$

III. Zweitheilungsproblem der hyperelliptischen Functionen.

Dieses Problem beschäftigt sich damit ein Integralsystem in der Art auf sich selbst zu beziehen, dass jedem Integral des Systems ein Integral von doppeltem Werthe entspricht. Gleiches gilt auch für die Integrale zwischen den Verzweigungspunkten, d. h. die *halben* Perioden müssen auf die *ganzen* bezogen werden. Erinnern wir uns aber an die Zuordnung, wie sie durch eine quadratische Transformation vermittelt wird, welche einer Gruppe von 24 Transformationen angehört. Eine solche Transformation zweimal nach einander angewendet bezieht die Perioden:

$$\frac{p_1}{2},\ \frac{p_2}{2},\ \frac{p_3}{2},\ \frac{p_4}{2},\ \frac{p_5}{2},\ \frac{p_6}{2}$$

auf:

$$p_1'',\ p_2'',\ p_3'',\ p_4'',\ p_5'',\ p_6''\ (\text{mod. } 2\ \text{P.})$$

Soll diese Zuordnung nicht nur mod. 2 P., sondern absolut gelten, so müssen wir noch nachträglich eine einfache lineare Transformation anwenden, die sich von der Identität nur mod. 2 P. unterscheidet, also die Thetafunctionen in sich überführt noch multiplicirt mit vierten Einheitswurzeln. So führt die zu Ende des vorigen Abschnittes gegebene quadratische Transformation zweimal angewendet die Perioden:

$$\frac{\tau_{11}}{2} \Big| \frac{\tau_{12}}{2},\quad \frac{1}{2} \Big| 0,\quad \frac{\tau_{11}}{2} \Big| \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2},\quad \frac{\tau_{12}}{2} \Big| \frac{\tau_{22}}{2},\quad 0 \Big| \frac{1}{2},\quad \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2} \Big| \frac{\tau_{22}}{2},$$

über in:

$$-\tau_{11}'' \mid -\tau_{12}'',\ -1 \mid 0,\ -\tau_{11}'' \mid -\tau_{12}'' - 1,\ -\tau_{12}'' \mid -\tau_{22}'',\ 0 \mid 1,\ -\tau_{12}''\ \ 1 \mid -\tau_{22}'',$$

und eine weitere lineare Transformation in:

$$\tau_{11}' \mid \tau_{12}',\quad 1 \mid 0,\quad \tau_{11}' \mid \tau_{12}' + 1,\quad \tau_{12}' \mid \tau_{22}',\quad 0 \mid 1,\quad \tau_{12}' + 1 \mid \tau_{22}'.$$

Da aber durch eine solche Zuordnung die betr. Transformation völlig bestimmt ist, so wird dann gleichzeitig: $v_1' \mid v_2' = 2v_1 \mid 2v_2$ und $\tau_{11}' = \tau_{11}$, $\tau_{12}' = \tau_{12}$, $\tau_{22}' = \tau_{22}$; wie auch die Rechnung leicht ergiebt. Wir sind somit in den Stand gesetzt mit Hülfe der Formeln jener quadratischen Transformation die Relationen für das Zweitheilungsproblem sofort hinzuschreiben, wie dies in der auf der folgenden Seite wiedergegebenen Tabelle geschehen ist.

Man ersieht hieraus zugleich, dass für die 16 Gruppen von 6 Thetas, zwischen deren Quadraten lineare Relationen bestehen, der Satz gilt, dass die Summe der (mit dem richtigen Vorzeichen genommenen) vierten Potenzen dieser Thetas verschwindet.

IV. Die Geometrie der Kummer'schen Fläche.

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten die Eigenschaften der Thetafunctionen kennen gelernt, soweit sie weiterhin Verwendung finden sollen, und wenden uns jetzt einer geometrischen Beleuchtung der übrigens bekannten Eigenschaften der Kummer'schen Fläche zu, um gestützt auf beide Untersuchungen die Frage nach der Bedeutung der hyperelliptischen Functionen für diese Fläche mit Erfolg in Angriff nehmen zu können*). Den naturgemässen Ausgangspunkt für das Studium der Kummer'schen Fläche bietet die Liniengeometrie in der Behandlung der Complexe 2. Grades. Hier ist die erste Bedingung für eine sachgemässe Behandlung die, ein geeignetes Coordinatensystem zu finden. Man wählt dazu ein System von 6 in Involution liegenden linearen Complexen,

*) Siehe die Abhandlungen von Klein im 2ten u. 5ten Bande dieser Annalen.

Tabelle zum Zweitheilungsproblem.

$$4\vartheta_2^4(v) = c_5^3\vartheta_5(2v) + c_{01}^3\vartheta_{01}(2v) + c_{34}^3\vartheta_{34}(2v) + c_2^3\vartheta_2(2v) + c_{03}^3\vartheta_{03}(2v) + c_{14}^3\vartheta_{14}(2v) - c_{12}^3\vartheta_{12}(2v) - c_0^3\vartheta_0(2v) - c_4^3\vartheta_4(2v) - c_{23}^3\vartheta_{23}(2v),$$

	$c_5^3\vartheta_5$	$c_{01}^3\vartheta_{01}$	$c_{34}^3\vartheta_{34}$	$c_2^3\vartheta_2$	$c_{03}^3\vartheta_{03}$	$c_{14}^3\vartheta_{14}$	$c_{12}^3\vartheta_{12}$	$c_0^3\vartheta_0$	$c_4^3\vartheta_4$	$c_{23}^3\vartheta_{23}$	
$4\vartheta_{34}^4(v) =$	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	,
$4\vartheta_{01}^4(v) =$	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	,
$4\vartheta_5^4(v) =$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	,
$4\vartheta_1^4(v) =$	+	−	+	−	+	−	−	−	−	+	,
$4\vartheta_0^4(v) =$	+	−	+	−	−	+	+	+	−	+	,
$4\vartheta_{02}^4(v) =$	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	,
$4\vartheta_{12}^4(v) =$	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	,
$4\vartheta_{24}^4(v) =$	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	,
$4\vartheta_3^4(v) =$	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−	,
$4\vartheta_{23}^4(v) =$	+	+	−	−	−	+	−	+	+	+	,
$4\vartheta_4^4(v) =$	+	+	−	−	+	−	+	−	+	+	,
$4\vartheta_{14}^4(v) =$	+	−	−	+	+	+	−	+	−	+	,
$4\vartheta_{04}^4(v) =$	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	,
$4\vartheta_{13}^4(v) =$	+	−	−	+	−	−	−	+	+	−	,
$4\vartheta_{03}^4(v) =$	+	−	−	+	+	+	+	−	+	−	,

die mit: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\cdots x_6 = 0$ bezeichnet sein sollen. Diese Complexe bestimmen zu je zwei 15 Congruenzen und zu je vier 15 Geradenpaare, welche jenen Congruenzen als Directricen zugehören, und zwar gehören sie immer der Congruenz derjenigen beiden Complexe als Directricen zu, denen sie nicht als Geradenpaar angehören. Je drei Complexe bestimmen die eine Erzeugung einer Fläche 2. Ord., während die 3 übrigen Complexe die andere Erzeugung bestimmen, es entstehen so 10 Flächen 2. Ord.; jeder Erzeugung gehören 3 Directricenpaare an. Diese Directricenpaare bilden noch eine andere interessante Gruppirung; es lassen sich nämlich 15mal 3 Paare so bestimmen, dass von den zugehörigen Congruenzen keine zwei einen linearen Complex gemein haben (dem entsprechend dass man 6 Elemente 15mal in 3 Paare spalten kann), und solche 3 Paare bilden dann die Kanten eines Tetraeders*).

Auf ein solches System von 6 in Involution liegenden linearen Complexen, dessen Einzelheiten wir uns soeben vor Augen geführt haben, bezieht man die Complexschaar:

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \cdots + \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0,$$

wobei die Liniencoordinaten immer der Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0$$

zu genügen haben.

Dieses Complexsystem giebt zu einer Begründung „elliptischer“ Liniencoordinaten Anlass. Jedem Complexe gehört nämlich ein Parameter λ zu, jeder Geraden also 4 Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, da sie 4 Complexen angehört. Nun schneiden sich aber 4 Complexe 2. Grades in 32 geraden Linien, demnach kommen die Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 immer 32 Geraden in gleicher Weise zu. Die Coordinaten dieser Geraden sind bis auf die Vorzeichen gleich und bestimmen sich durch die Gleichung:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}; \quad \alpha = 1, 2, \cdots 6,$$

*) Diese 15 Tetraeder bilden den bequemsten Uebergang von dem System der Liniencoordinaten, welches sich auf die 6 linearen Complexe $x_1 = 0 \cdots x_6 = 0$ bezieht, zu Punktcoordinaten. Ersteres gruppirt die Geraden des Raumes zu je 32 zusammen (ihre Coordinaten unterscheiden sich nur in den Vorzeichen), die Punkte und Ebenen dagegen zu je 16, während ein Coordinatensystem bezogen auf eins der 15 Tetraeder diese Gruppen in 4 Untergruppen zerlegt. Die vier Punkte resp. Ebenen einer Untergruppe unterscheiden sich in den Coordinaten durch *zwei* Vorzeichenwechsel, dagegen gelangt man von einer Untergruppe zur anderen, indem man die Coordinaten in zwei Paare theilt und die Elemente jedes Paares mit einander vertauscht.

wenn $f = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda) \cdots (k_6 - \lambda)$ und $f'(k_\alpha) = \frac{df}{d\lambda}$ gebildet für $\lambda = k_\alpha$ ist.

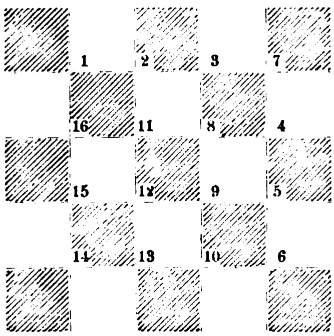
Dieses elliptische Coordinatensystem, welches durch die obige Complexschaar definirt ist, steht natürlich in fundamentaler Beziehung zu der Kummer'schen Fläche, die wir als gemeinschaftliche Singularitätenfläche aller Complexe jener Schaar erhalten. Eine Linie mit zwei gleichen Parametern ist Tangente der Fläche z. B. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$; lassen wir den Parameter λ sein ganzes Werthsystem durchlaufen, während wir λ_1 und λ_2 festhalten, so bekommen wir das Tangentenbüschel in einem bestimmten Punkt der Fläche, den wir deshalb mit λ_1, λ_2 bezeichnen wollen. Für $\lambda = \lambda_1$ resp. $\lambda = \lambda_2$ erhalten wir die beiden Haupttangenten des betr. Punktes, so dass die Haupttangenten *drei* gleiche Parameter aufweisen.

Die hier besprochene Parameterdarstellung der Punkte der Kummer'schen Fläche erhält eine grosse Einfachheit und Uebersichtlichkeit dadurch, dass die Curven $\lambda =$ Const. die Haupttangentencurven darstellen; es erhält also jeder Punkt die Parameter der beiden durch ihn verlaufenden Haupttangentencurven. Die Curven schneiden sich zu je zwei in 32 Punkten, welche gleiche Parameter besitzen. Solche 32 zusammengehörige Punkte bilden 2 Gruppen von je 16 Punkten; die Punkte einer Gruppe zusammengenommen mit den Tangentialebenen in den Punkten der anderen bilden ein System, wie es das zu Grunde gelegte Coordinatensystem der 6 in Involution liegenden linearen Complexe definirt. Ein solches System bilden auch die 16 Knotenpunkte und 16 Doppelebenen der Kummer'schen Fläche, deren Gruppirung ich sogleich angeben werde.

Vorher sei nur noch der Fall erwähnt, dass einer der beiden Parameter eines Punktes *einen der 6 Werthe* k_α annimmt. Der obigen Schaar quadratischer Complexe gehören nämlich doppelt zählend auch die 6 Fundamentalcomplexe $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots x_6 = 0$ zu und wir erhalten unter den Curven $\lambda =$ Const., den Werthen Const. $= k_1, k_2, \cdots k_6$ entsprechend, 6 ausgezeichnete Haupttangentencurven. Diese haben die Eigenschaft, dass sie von einer beliebigen anderen Curve $\lambda =$ Const. nur noch in 16 Punkten geschnitten werden, die 32 Punkte des allgemeinen Falles sind hier paarweise zusammengefallen und bilden nur noch eine einzige Gruppe von 16 Punkten. Sodann sei noch hervorgehoben, dass die Geraden, deren Parameter λ_1, λ_2 und $\lambda_3 = \lambda_4 = k_\alpha$ sind, die 6 Doppeltangentensysteme der Kummer'schen Fläche bilden. Die Geraden endlich, deren Parameter paarweise gleich werden, also $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$, liegen in den 16 Doppelebenen oder verlaufen durch die 16 Knotenpunkte.

Um nunmehr die gegenseitige Lage der 16 Knotenpunkte und 16

Doppelebenen zu besprechen, bediene ich mich der beistehenden Figur.*) Sie stellt uns schematisch eine Kummer'sche Fläche dar, die in ein doppelt zählendes Hyperboloid übergegangen ist; man sieht, dass das Hyperboloid bei diesem Grenzübergange durch 8 Erzeugende (von jeder Art 4) in 16 Theile zerlegt wird; *acht* von diesen Theilen (sie sind in der Figur schraffirt) denken wir uns doppelt überdeckt, dann haben wir eine vollständige Vorstellung der betr. Kummer'schen Fläche. Die 16 Durchschnittspunkte der 8 Erzeugenden des Hyperboloids stellen die 16 Knotenpunkte vor, die hier willkürlich numerirt sind. Markiren wir einen Knotenpunkt, so liegen auf den durch ihn verlaufenden Erzeugenden noch 6 weitere Knotenpunkte, sie gehören einer Doppelebene an; der in ihr befindliche Tangentialkegelschnitt ist zerfallen und wird von den beiden genannten Geraden gebildet. Werden die Doppelebenen durch römische Ziffern benannt, und legt man ihnen die nämliche Zahl bei, welche der Durchschnittspunkt der beiden in ihr liegenden Geraden trägt, so erhält man eine übersichtliche Lagerung der Knotenpunkte in den 16 Doppelebenen; so liegen z. B. in der Ebene VII die Knotenpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6.



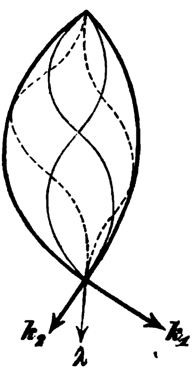
Ausser dieser Anordnung der Knotenpunkte zu je 6 ist noch Folgendes anzuführen. Es lassen sich 60 mal 4 aus ihnen so aussuchen, dass keine 2 in einer Doppelebene liegen; 4 solcher Quadrupel gehören immer zusammen, insofern sie die sämmtlichen 16 Knotenpunkte enthalten. Um diese Quadrupel zu finden, wähle man eine Doppelebene beliebig aus, theile ihre Knotenpunkte in 3 Paare, und lege dann durch jedes Paar die weitere Tangentialebene; in diesen 4 Ebenen liegen dann 12 Knotenpunkte, die natürlich auf einer F_2 liegen, während die 4 restirenden Punkte eins der Quadrupel bilden. Sechs Knotenpunkte kann man aber 15 Mal in 3 Paare spalten, *eine* Doppelebene giebt also zu 15 Quadrupeln Anlass; alle 16 Ebenen aber zu $4 \cdot 15 = 60$ Quadrupeln, da man zu jedem Quadrupel von 4 Ebenen aus gelangt. Wir haben gesehen, dass 4 dieser Quadrupel immer zusammengehören; diese können 3 Mal in 2 Paare getheilt werden, so dass sich im Ganzen 15 Paare von je 8 zusammengehörigen Punkten ergeben.

*) Weitere Auseinandersetzungen finden sich in meiner Promotionsschrift: „Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche etc." Modelle dieser Fläche, von mir im math. Institut des Münchener Polytechnikums ausgeführt, finden sich im Verlag von Brill in Darmstadt.

V. Zusammenhang der hyperelliptischen Functionen $p=2$ mit der Kummer'schen Fläche.*)

Wir kennen dreierlei Thetafunctionen, welche sich alle drei auf der nämlichen Kummer'schen Fläche deuten lassen, und haben in den ersten Abschnitten das nöthige Material in ihren gegenseitigen Beziehungen aufgehäuft, um zusammengenommen mit den bekannten Relationen, welche zwischen den 16 Thetas eines und desselben Systems bestehen, diese Deutung mit Leichtigkeit ausführen zu können. Zu diesem Zweck wollen wir eine bestimmte Bezeichnung für die verschiedenen Integralsysteme und ihre Thetas festsetzen. Das zu Grunde gelegte Integralsystem bezeichnen wir mit $v_1 \mid v_2$, seine Perioden mit $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$; das daraus durch quadratische Transformation abgeleitete sei $v_1' \mid v_2'$ und die zugehörigen Perioden $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$, jedoch soll nur von solchen quadratischen Transformationen die Rede sein, welche einer der besprochenen Gruppen von 24 Transformationen angehören, also zweimal angewendet zur Zweitheilung führen; das Integralsystem endlich, welches aus dem ersten Systeme durch Zweitheilung hervorgeht, (also aus dem zweiten durch nochmalige quadratische Transformation) bezeichnen wir mit $v_1'' \mid v_2''$ und seine Perioden mit $\tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}''$, so dass also: $v_1''|v_2''=2v_1|2v_2$ und $\tau_{11}'', \tau_{12}'', \tau_{22}''=\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$. Die den Integralsystemen zugehörigen Thetas sollen den Integralen entsprechend *ohne* Accent, mit *einem* Accent oder mit *zwei* Accenten geschrieben werden.

Nachdem wir diese Bezeichnungen festgesetzt haben, wenden wir uns der Ausbreitung der Integralsysteme auf der Kummer'schen Fläche zu und beginnen im Anschluss an die liniengeometrischen Entwickelungen des vorigen Paragraphen mit dem Integralsystem $v_1''|v_2''$.**) Wir haben bereits eine Parameterdarstellung der Punkte der Kummer'schen Fläche angegeben, indem wir jeder Haupttangentencurve einen Parameter λ beilegten, und haben dabei gleichzeitig bemerkt, dass den Parametern $k_1, k_2, \cdots k_6$ entsprechend die Punkte der Haupttangentencurve paarweise zusammenfallen, dass also die betr. Curven doppelt zählend der Schaar der Haupttangentencurven angehört. In der beistehenden Figur***) sehen wir ein Stück einer Curve λ, und bemerken, wie die beiden Aeste einer solchen Curve in dem Grenzfalle der Curven k_1 und k_2 aufeinanderfallen. Jeder Erzeugenden der Tangentialkegel in den Knotenpunkten kommt dabei ein Parameter



*) Vgl. die Abhandl. von Cayley u. Borchardt im Crelle'schen Journal Bd. 83.

**) Die Irrationalität dieser Integrale ist: $f(\lambda)=(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)\cdots(k_6-\lambda)$.

***) Vergl. Klein und Lie im Monatsbericht der Berliner Acad. von Dec. 1870.

λ zu, und ebenso den Punkten der Tangentialkegelschnitte (dieselben sind projectivisch auf einander bezogen). Deuten wir also das ganze Werthgebiet der Variablen λ, das reelle und imaginäre, auf einer Riemann'schen Fläche, welche in den 6 Punkten $k_1, k_2, \cdots, k_6$ Verzweigungspunkte besitzt, so kommen den beiden Zweigen einer und derselben Haupttangentencurve zwei über einander liegende Punkte der Riemann'schen Fläche zu; den 6 Curven $k_1, k_2, \cdots k_6$, deren Zweige zusammenfallen, entsprechen die Verzweigungspunkte. Den Punkten der Kummer'schen Fläche entsprechen auf der Riemann'schen Fläche Punktepaare, und zwar repräsentirt *ein* Punktepaar λ_1, λ_2 die 32 Durchschnittspunkte der Curven λ_1 und λ_2. Ein solches Punktepaar λ_1, λ_2 der Riemann'schen Fläche repräsentirt aber auch 32 verschiedene Integralwerthe mod 2 P., verschiedenen Integrationswegen entsprechend, wir können desshalb diese 32 Werthe jenen Punkten *einzeln* zuordnen. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir, wie schon gesagt, die Normalintegrale, welche jener Riemann'schen Fläche zugehören, mit $v_1''|v_2''$, ferner die Punkte des oberen Blattes mit $\lambda +$, die des unteren mit $\lambda -$, und bilden die Integrale:*)

$$\int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda_2^+} dv_1'' \Big| \int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda_2^+} dv_2'' \text{ und } \int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda_2^-} dv_1'' \Big| \int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda_2^-} dv_2''.$$

Durch Abänderung des Integrationsweges erhalten wir so je 16 verschiedene Parameterpaare mod. 2 Perioden; zu denselben Werthen, nur negativ genommen, gelangen wir, wenn wir λ_1^-, λ_2^- resp. λ_1^-, λ_2^+ als Grenzen einführen. Jedem der genannten 32 Punkte können wir nun ein solches Werthepaar zuordnen, wobei das Vorzeichen beliebig ist; zugleich ersieht man, dass diese Punkte in 2 Gruppen zerfallen, die Parameterwerthe der Punkte einer Gruppe unterscheiden sich unter sich nur um ganze Perioden. Auch durch ihre Lage auf der Kummer'schen Fläche unterscheiden sich beide Gruppen leicht. Achten wir nämlich auf obige Figur; der von 2 Kegelschnitten begrenzte Theil der Kummer'schen Fläche zerfällt durch die Curven k_1 und k_2 in 4 Theile, 2 grenzen an die Knotenpunkte und 2 an die Kegelschnitte; die ersten beiden Theile werden von Punkten der einen Gruppe, die letzteren von Punkten der anderen Gruppe erfüllt, da sich in diesen Curvenzweige derselben Art, in jenen Zweige verschiedener Art schneiden.

Die Knotenpunkte und die Punkte der Kegelschnitte in den Doppelebenen sind als Schnittpunkte unendlich naher Haupttangentencurven aufzufassen und zwar estere als Schnittpunkte verschiedener, letztere

*) Die unteren Grenzen α, β sind nach *Prim* „Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen" so gewählt, dass: $\vartheta\left(\int_\alpha^\lambda dv_1 \,\Big|\, \int_\beta^\lambda dv_2\right) = 0$ ist.

als Schnittpunkte gleichartiger Zweige; die Parameter der Knotenpunkte erhalten desshalb die Werthe:

$$\int_\alpha^{\lambda+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda-} dv_1'' \,\Big|\, \int_\beta^{\lambda+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda-} dv_2'' = \text{ganzen Perioden},$$

die Parameter der Punkte der Kegelschnitte die Werthe:

$$2\int_\alpha^{\lambda} dv_1'' \,\Big|\, 2\int_\beta^{\lambda} dv_2''.$$

Besonderes Interesse haben auch die Parameter der Punkte der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven, für die Curve k_1 erhalten wir z. B.

$$\int_{k_1}^{\lambda} dv_1'' \,\Big|\, \int_{k_2}^{\lambda} dv_2'',$$

analog für die Curven $k_2, k_3, \cdots k_6$; d. h. aber mit anderen Worten *für jede dieser Curven verschwindet eine ungerade Thetafunction, oder diese Functionen* $= 0$ *gesetzt stellen jene Curven dar.* Die 8 Durchschnittspunkte je zweier Curven k_α endlich erhalten als Parameterwerthe die Integrale zwischen den betr. Verzweigungspunkten.

Diese Resultate genügen um durch Continuitätsbetrachtungen die Gruppirung der ganzen Perioden auf der Fläche anzugeben. Wir wissen, dass die Knotenpunkte in einer Doppelebene die Parameter $2\int_\alpha^{k_\alpha} dv_1'' \,\Big|\, 2\int_\beta^{k_\alpha} dv_2''$ erhalten, abgesehen von einer ganzen Periode, die jedoch für alle 6 Knotenpunkte in gleicher Weise auftritt. Nehmen wir nun noch an, dass für unsere Normalintegrale:

$$\int_{k_1}^{k_2} dv_1'' \,\Big|\, \int_{k_1}^{k_2} dv_2'' = \tau_{11}'' \mid \tau_{12}'',$$

$$\int_{k_4}^{k_3} dv_1'' \,\Big|\, \int_{k_4}^{k_3} dv_2'' = \tau_{12}'' \mid \tau_{22}'',$$

$$\int_{k_2}^{k_3} dv_1'' \,\Big|\, \int_{k_2}^{k_3} dv_2'' = 1 \mid 0,$$

$$\int_{k_5}^{k_6} dv_1'' \,\Big|\, \int_{k_5}^{k_6} dv_2'' = 0 \mid 1,$$

wird, und setzen fest, dass dem Punkte 1 der Werth $0 \mid 0$ zugehört, so folgt mit Rücksicht auf die Figur der pag. 25 die Zuordnung:

$$\overset{1}{0|0},\quad \overset{2}{\tau''_{11}|\tau''_{12}},\quad \overset{3}{\tau''_{11}+1|\tau''_{12}},\quad \overset{4}{1|1},\quad \overset{5}{\tau''_{12}+1|\tau''_{22}+1},\quad \overset{6}{\tau''_{12}+1|\tau''_{22}},\quad \overset{7}{1|0},$$

$$\overset{8}{\tau''_{11}+1|\tau''_{11}+1},\quad \overset{9}{\tau''_{11}+\tau''_{12}+1|\tau''_{12}+\tau''_{22}+1},\quad \overset{10}{\tau''_{11}+\tau''_{12}+1|\tau''_{12}+\tau''_{22}},$$

$$\overset{11}{\tau''_{11}|\tau''_{12}+1},\ \overset{12}{\tau''_{11}+\tau''_{12}|\tau''_{12}+\tau''_{22}+1},\ \overset{13}{\tau''_{11}+\tau''_{12}|\tau''_{12}+\tau''_{22}},\ \overset{14}{\tau''_{12}|\tau''_{22}},\ \overset{15}{\tau''_{12}|\tau''_{22}+1},\ \overset{16}{0|1}.$$

Man übersieht hierbei sofort, was die 720 linearen Transformationen der Integralsysteme für die Kummer'sche Fläche bedeuten, nämlich eine Vertauschung der 6 Fundamentalcomplexe $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \cdots x_6 = 0$, was eine bestimmte Vertauschung der 10 Flächen 2. Grades und der 15 Congruenzen zur Folge hat. Die Vertauschung der Congruenzen ist mit einer Vertauschung der 15 Perioden (mod. 2 P.) identisch, während die Permutation der 6 Complexe und damit der 6 Curven k_α eine gleiche Permutation der ungeraden Thetas und die Permutation der 10 F_2 eine gleiche Vertauschung der geraden Thetas bedingt; denn die ungeraden Functionen stellen $= 0$ gesetzt die Curven k_α dar, *und die geraden, wie wir sehen werden, die* 10 F_2. Bei einer solchen linearen Transformation werden 16 zusammengehörige Punkte vertauscht und zwar in der Art, dass 6 Punkte, welche vorher in einer Ebene lagen, wieder in eine solche zu liegen kommen; hieraus ergiebt sich rückwärts die im ersten Abschnitte gegebene Darstellung der linearen Transformation.

Wir wenden uns jetzt der zweiten Darstellung der Kummer'schen Fläche durch Thetafunctionen zu, nämlich der Borchardt'schen. Sie ergiebt sich aus der soeben erörterten durch Anwendung einer quadratischen Transformation; wir wählen hier, um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, die im zweiten Abschnitte ausführlicher behandelte Transformation. Die 16 Knotenpunkte erhalten dann die Parameterwerthe:

$$\overset{1}{0|0},\ \overset{2}{1|0},\ \overset{3}{\frac{\tau'_{11}}{2}+1\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}},\ \overset{4}{\frac{\tau'_{11}}{2}+\tau'_{12}\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}+\tau'_{22}},\ \overset{5}{\frac{\tau'_{12}}{2}+\tau'_{12}\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}+\tau'_{22}+\frac{1}{2}},$$

$$\overset{6}{\frac{\tau'_{11}}{2}\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}+\frac{1}{2}},\ \overset{7}{\frac{\tau'_{11}}{2}\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}},\ \overset{8}{\frac{\tau'_{11}}{2}+\tau'_{12}+1\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}+\tau'_{22}},\ \overset{9}{\frac{\tau'_{11}}{2}+\tau'_{12}+1\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}+\tau'_{22}+\frac{1}{2}},$$

$$\overset{10}{\frac{\tau'_{11}}{2}+1\Big|\frac{\tau'_{12}}{2}+\frac{1}{2}},\ \overset{11}{\tau'_{12}+1|\tau'_{22}},\ \overset{12}{\tau'_{12}+1\Big|\tau'_{22}+\frac{1}{2}},\ \overset{13}{1\Big|\frac{1}{2}},\ \overset{14}{0\Big|\frac{1}{2}},\ \overset{15}{\tau'_{12}\Big|\tau'_{22}+\frac{1}{2}},\ \overset{16}{\tau'_{12}|\tau'_{22}}.$$

Diese Punkte sind jetzt nicht mehr gleich berechtigt, nur 4 von ihnen weisen noch *ganze* Perioden als Parameter auf, während die anderen Werthe besitzen, wie sie vorher die Schnittpunkte zweier Curven k_α (Doppelinflexionspunkte) besassen. Würde man diese Parameter in liniengeometrischer Weise deuten, so würde die bez. Kummer'sche Fläche nur zum vierten Theile von denselben überdeckt. Während sich bei der liniengeometrischen Darstellung 16 zusammengehörige Punkte nur um ganze Perioden unterscheiden, so unterscheiden sie sich hier um die obigen 16 Werthepaare, welche durch die Wahl der quadratischen Transformation bedingt sind. Erinnern wir uns nun daran, dass der hier benutzten quadratischen Transformation die vier Thetafunctionen ϑ_5', ϑ_{01}', ϑ_{34}', ϑ_2' als charakteristisch zugehören, und bedenken, dass dieselben bei Vermehrung ihrer Argumente um jene 16 Werthepaare entweder paarweise ihr Vorzeichen ändern, oder sich in bestimmter Weise vertauschen, so kommen wir zu folgendem wichtigen Schluss: *Die vier Thetafunctionen ϑ_5', ϑ_{01}', ϑ_{34}', ϑ_2' mit ihren Vorzeichenänderungen und Vertauschungen bedeuten die homogenen Punktcoordinaten von* 16 *zusammengehörigen Punkten der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der* 15 *Fundamentaltetraeder* (Tetraeder, deren Kantenpaare von den Directricenpaaren der 15 Congruenzen gebildet werden). In der That besitzen, wie wir aus einer Anmerkung des vorigen Abschnittes ersehen, die Coordinaten von 16 zusammengehörigen Punkten bezogen auf ein solches Tetraeder die genannte Eigenthümlichkeit. — Um alle Punkte der Kummer'schen Fläche zu erhalten, müssen wir den Integralen $v_1' \mid v_2'$ alle möglichen Werthe beilegen, daraus folgt, dass die Functionen ϑ_5', ϑ_{01}', ϑ_{34}', ϑ_2' immer Coordinaten der Punkte der nämlichen Fläche darstellen, welche Werthe wir auch den Argumenten ertheilen mögen. Das heisst aber nichts anderes, als dass die Gleichung der Kummer'schen Fläche eine identische Relation wird, wenn wir an Stelle der x, y, z, w jene Thetas einführen. Die zwischen vier Thetafunctionen bestehende biquadratische Göpel'sche Relation, welche Borchardt*) in die Form gebracht hat:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_5'^4+\vartheta_{01}'^4+\vartheta_{34}'^4+\vartheta_2'^4\\
&+2\frac{c_5'c_{01}'c_{34}'c_2'\prod_{\varepsilon,\varepsilon'}(c_5'^2+\varepsilon c_{01}'^2+\varepsilon' c_{34}'^2+\varepsilon\varepsilon' c_2'^2)}{(c_5'^2c_{01}'^2-c_{34}'^2c_2'^2)(c_5'^2c_{34}'^2-c_{01}'^2c_2'^2)(c_5'^2c_2'^2-c_{34}'^2c_{01}'^2)}\vartheta_5'\vartheta_{01}'\vartheta_{34}'\vartheta_2'\\
&-\frac{c_5'^4+c_{01}'^4-c_{34}'^4-c_2'^4}{c_5'^2c_{01}'^2-c_{34}'^2c_2'^2}(\vartheta_5'^2\vartheta_{01}'^2-\vartheta_{34}'^2\vartheta_2'^2)\\
&-\frac{c_5'^4+c_{34}'^4-c_{01}'^4-c_2'^4}{c_5'^2c_{34}'^2-c_{01}'^2c_2'^2}(\vartheta_5'^2\vartheta_{34}'^2-\vartheta_{01}'^2\vartheta_2'^2)\\
&-\frac{c_5'^4+c_2'^4-c_{01}'^4-c_{34}'^4}{c_5'^2c_2'^2-c_{01}'^2c_{34}'^2}(\vartheta_5'^2\vartheta_2'^2-\vartheta_{01}'^2\vartheta_{34}'^2)
\end{aligned}\right\}=0,$$

geht also für:

---

*) Borchardt, Crelle's Journal Bd. 83.

$$\vartheta_5' = x\,,\quad \vartheta_{34}' = y\,,\quad \vartheta_2' = z\,,\quad \vartheta_{01}' = w\,,$$
$$c_5' = x_0,\quad c_{34}' = y_0,\quad c_2' = z_0,\quad c_{01}' = w_0,$$

in die Gleichung einer Kummer'schen Fläche, bezogen auf ein Fundamentaltetraeder, über, deren einer Knotenpunkt in $x_0\,y_0\,z_0\,w_0$ liegt, während sich die übrigen in der oben geschilderten Weise daraus ableiten.

Diese neue Darstellung lässt sich auf 15 verschiedene Arten effectuiren, da die Kummer'sche Fläche auf irgend eins ihrer Fundamentaltetraeder bezogen werden kann, jedem Tetraeder gehört eine der 15 verschiedenen Classen quadratischer Transformationen zu; der Umstand, dass jede Classe eine Gruppe von 24 Transformationen enthält, findet darin seine Begründung, dass nach Auswahl des Tetraeders die Ecken desselben noch 24 Permutationen gestatten.

Kehren wir nun wieder zu jener Gleichung zurück; unsere Fläche ist bezogen auf das Tetraeder 12, 34, 56, wobei 12, 34 und 56 die Directricenpaare der Congruenzen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; und $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ sind. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Linien- und Punktcoordinaten sind bekanntlich gegeben durch die 6 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{\tfrac{1}{i}(}x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2 - w_1 z_2\,,\\
x_2 &= \tfrac{1}{i}(x_1 y_2 - y_1 x_2 - z_1 w_2 + w_1 z_2)\,,\\
x_3 &= \phantom{\tfrac{1}{i}(}x_1 z_2 - z_1 x_2 + w_1 y_2 - y_1 w_2\,,\\
x_4 &= \tfrac{1}{i}(x_1 z_2 - z_1 x_2 - w_1 y_2 + y_1 w_2)\,,\\
x_5 &= \phantom{\tfrac{1}{i}(}x_1 w_2 - w_1 x_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2\,,\\
x_6 &= \tfrac{1}{i}(x_1 w_2 - w_1 x_2 - y_1 z_2 + z_1 y_2)\,.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Complexe $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\cdots$, $x_6 = 0$ mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so haben wir ferner folgende Gleichungen für die Flächen 2^{ten} Grades:

135, 246 $\cdots\; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0,$
136, 245 $\cdots\; x^2 - y^2 - z^2 + w^2 = 0,$
145, 236 $\cdots\; x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 0,$
146, 235 $\cdots\; x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0,$
124, 356 $\cdots\; 2(xz + yw) = 0,$ 123, 456 $\cdots\; 2(xz - yw) = 0,$
125, 346 $\cdots\; 2(xw + yz) = 0,$ 126, 345 $\cdots\; 2(xw - yz) = 0,$
134, 256 $\cdots\; 2(xy + zw) = 0,$ 156, 234 $\cdots\; 2(xy - zw) = 0.$

Achten wir *nur* auf den Durchschnitt mit der Kummer'schen Fläche, so können wir für x, y, z, w die obigen Werthe einsetzen und finden, *dass jene* 10 *Flächen zweiten Grades der Reihe nach dargestellt werden durch die* 10 *geraden Thetas:*

$$\vartheta_5'' = 0,\quad \vartheta_{31}'' = 0,\quad \vartheta_2'' = 0,\quad \vartheta_{01}'' = 0,\quad \vartheta_{03}'' = 0,$$
$$\vartheta_{14}'' = 0,\quad \vartheta_{12}'' = 0,\quad \vartheta_0'' = 0,\quad \vartheta_4'' = 0,\quad \vartheta_{23}'' = 0,$$

welches Resultat mit unserer ersten Parametervertheilung in vollem Einklang steht. Weiter hatten wir bereits gefunden, dass die 6 ungeraden Thetas verschwinden für die 6 Curven $k_1, k_2, \cdots k_6$, und zwar werden diese Curven der Reihe nach dargestellt durch:

$$\vartheta_{24}'' = 0,\quad \vartheta_3'' = 0,\quad \vartheta_{04}'' = 0,\quad \vartheta_{13}'' = 0,\quad \vartheta_{02}'' = 0,\quad \vartheta_1'' = 0.$$

Auch dieses Resultat stimmt mit der gemachten Transformation überein, indem die 6 Liniencoordinaten $x_1, x_2, \cdots x_6$, wenn wir in ihre auf der vorigen Seite angegebenen Werthe die Functionen ϑ_5', ϑ_{01}', ϑ_{34}', ϑ_2' einführen und sie alsdann durch die transformirten Functionen ersetzen, als Producte zweier ungeraden Thetas mit gleichem Index und verschiedenen Argumenten erscheinen, nämlich:

$$x_1 = \vartheta_{24}''(u)\vartheta_{24}''(v);\qquad x_2 = \frac{1}{i}\,\vartheta_3''(u)\vartheta_3''(v);$$
$$x_3 = \vartheta_{04}''(u)\vartheta_{04}''(v);\qquad x_4 = \frac{1}{i}\,\vartheta_{13}''(u)\vartheta_{13}''(v);$$
$$x_5 = \vartheta_{02}''(u)\vartheta_{02}''(v);\qquad x_6 = \frac{1}{i}\,\vartheta_1''(u)\vartheta_1''(v)\cdot$$

Die Bedeutung für das Verschwinden der Thetas haben wir, soweit sie dem Integralsystem $v_1''\,|\,v_2''$ angehören, hiermit angegeben, es erübrigt noch die Bedeutung des Verschwindens derselben für das durch quadratische Transformation abgeleitete Integralsystem $v_1'\,|\,v_2'$ zu ermitteln. Vier dieser Thetafunctionen, nämlich ϑ_5', ϑ_{34}', ϑ_2', ϑ_{01}' geben uns $= 0$ gesetzt die Durchschnittscurven 4. Ord. der Kummer'schen Fläche mit den Seitenflächen des Fundamentaltetraeders 12, 34, 56. Die Quadrate der 12 übrigen Thetas lassen sich durch die Quadrate jener 4 ausdrücken; wenn man also an deren Stelle in jenen $= 0$ gesetzten Ausdrücken die Coordinaten x, y, z, w einführt, so erhält man Flächen 2. Grades, die das genannte Tetraeder zum Polartetraeder haben. Gehen wir von diesen Gleichungen wieder zu den Gleichungen in den Thetas zurück, so erhalten wir die Durchschnittscurven der F_2 mit der Kummer'schen Fläche; da aber eine solche Gleichung ein volles Quadrat wird, so folgt, *dass jene Flächen 2. Grades die Kummer'sche Fläche längs einer C_4 berühren.* Jede dieser 12 Flächen resp. Curven geht durch 8 Knotenpunkte; so gehen:

$\vartheta_{12}'=0$, $\vartheta_0'=0$	durch die beiden Quadrupel	3, 4, 7, 8	und 5, 6, 9, 10;
$\vartheta_{03}'=0$, $\vartheta_{14}'=0$	„ „ „ „	3, 4, 7, 8	„ 12, 13, 14, 15;
$\vartheta_3'=0$, $\vartheta_{24}'=0$	„ „ „ „	3, 4, 7, 8	„ 1, 2, 11, 16;
$\vartheta_{04}'=0$, $\vartheta_{13}'=0$	„ „ „ „	5, 6, 9, 10	„ 1, 2, 11, 16;
$\vartheta_{02}'=0$, $\vartheta_1'=0$	„ „ „ „	12, 13, 14, 15	„ 1, 2, 11, 16;
$\vartheta_4'=0$, $\vartheta_{23}'=0$	„ „ „ „	12, 13, 14, 15	„ 5, 6, 9, 10.

Wollte man Curven durch anders gruppirte Knotenpunkte haben, so müsste man von den v_1'', v_2'' ausgehend andere quadratische Transformationen anwenden.

Auf diesen Gegenstand werde ich im nächsten Abschnitte wieder zurückkommen; jetzt gehe ich zur dritten Methode, die Kummer'sche Fläche mit den hyperelliptischen Functionen zu verknüpfen, über; sie findet sich in einem Aufsatz von Cayley*) im 83. Bd. des Crelle'schen Journals.

Während die vorhergehende Methode an die Gleichungsform der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder anknüpfte, gründet sich diese Methode auf die schon von Kummer gegebene Gleichungsform, welche voraussetzt, dass die Seiten des Coordinatentetraeders Doppelebenen und seine Eckpunkte Knotenpunkte der Fläche sind. Auf diese Gestalt der Gleichung wird man aber geführt, wenn man jene biquadratische Relation zwischen 4 Thetas in der irrationalen Form schreibt:

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{\begin{array}{l}(c_5'^2+c_{01}'^2+c_{34}'^2+c_2'^2)(c_5'^2-c_{01}'^2+c_{34}'^2-c_2'^2)\cdot \\ (c_5'\vartheta_5'+c_{01}'\vartheta_{01}'+c_{34}'\vartheta_{34}'+c_2'\vartheta_2')(c_5'\vartheta_5'-c_{01}'\vartheta_{01}'+c_{34}'\vartheta_{34}'-c_2'\vartheta_2')\end{array}} \\
-\sqrt{\begin{array}{l}(c_5'^2-c_{01}'^2-c_{34}'^2+c_2'^2)(c_5'^2+c_{01}'^2-c_{34}'^2-c_2'^2)\cdot \\ (c_5'\vartheta_5'-c_{01}'\vartheta_{01}'-c_{34}'\vartheta_{34}'+c_2'\vartheta_2')(c_5'\vartheta_5'+c_{01}'\vartheta_{01}'-c_{34}'\vartheta_{34}'-c_2'\vartheta_2')\end{array}} \\
-\sqrt{\begin{array}{l}2\,(c_5'c_{34}'-c_2'c_{01}')\,2\,(c_5'c_{34}'+c_2'c_{01}')\cdot \\ \quad (c_{34}'\vartheta_5'-c_2'\vartheta_{01}'+c_5'\vartheta_{34}'-c_{01}'\vartheta_2')(c_{34}'\vartheta_5'+c_2'\vartheta_{01}'+c_5'\vartheta_{34}'+c_{01}'\vartheta_2')\end{array}}
\end{array}\right\} = 0,$$

und an Stelle dieser Thetas die durch quadratische Transformation daraus abgeleiteten Functionen einführt; es kommt dann:

$$\sqrt{c_5^2\,c_{01}^2\,\vartheta_5^2\,\vartheta_{01}^2} - \sqrt{c_2^2\,c_{34}^2\,\vartheta_2^2\,\vartheta_{34}^2} - \sqrt{c_4^2\,c_{23}^2\,\vartheta_4^2\,\vartheta_{23}^2} = 0.$$

Setzen wir hierin noch: $\vartheta_5^2 = \xi$, $\vartheta_2^2 = \eta$, $\vartheta_4^2 = \zeta$, $\vartheta_{24}^2 = \omega$, so fliesst die Gleichung, welche Kummer in den Berliner Abh. 1866 in dem Aufsatze: „Ueber die algebraischen Strahlensysteme etc.“ gegeben hat:

$$\begin{aligned}\sqrt{c_5^2 c_{01}^2\,\xi\,(c_{12}^2\eta+c_{14}^2\zeta-c_{03}^2\omega)} - \sqrt{c_2^2 c_{34}^2\,\eta\,(-c_{03}^2\zeta+c_{12}^2\xi+c_{14}^2\omega)}& \\ - \sqrt{c_4^2 c_{23}^2\,\zeta\,(c_{14}^2\xi+c_{03}^2\eta-c_{12}^2\omega)} &= 0.\end{aligned}$$

Hiermit ist die dritte Darstellung der Punkte unserer Fläche durch Thetafunctionen gegeben; es folgt daraus unmittelbar, dass die Gleichungen der 16 Doppelebenen die $=0$ gesetzten Thetaquadrate sind und dass demgemäss die Kegelschnitte in diesen Ebenen durch die $=0$ gesetzten Thetas selbst bestimmt sind. Lassen wir die Bestimmung

*) Vergl. ausserdem die in der Einleitung citirte Abhandlung von Weber.

eintreten, dass $\vartheta_5 = 0$, $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_4 = 0$, $\vartheta_{24} = 0$ resp. die Ebenen IX, VI, VIII, VII darstellen, so kommen den 16 Knotenpunkten genau die Hälften der Perioden zu, die denselben bei der liniengeometrischen Darstellung zukamen, während die Doppeltangentialebenen dargestellt werden durch:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV}, & \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, \\ \vartheta_{14} = 0, & \vartheta_{04} = 0, & \vartheta_3 = 0, & \vartheta_{23} = 0, & \vartheta_{01} = 0, & \vartheta_2 = 0, & \vartheta_{24} = 0, \\ \text{VIII}, & \text{IX}, & \text{X}, & \text{XI}, & \text{XII}, & \text{XIII}, & \text{XIV}, \\ \vartheta_4 = 0, & \vartheta_5 = 0, & \vartheta_{34} = 0, & \vartheta_{03} = 0, & \vartheta_{12} = 0, & \vartheta_0 = 0, & \vartheta_1 = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{XV}, & \text{XVI}. \\ \vartheta_{02} = 0, & \vartheta_{13} = 0. \end{array}$$

Wir haben nunmehr drei verschiedene Parameterbestimmungen der Punkte der Kummer'schen Fläche kennen gelernt; wir können uns an denselben leicht die Bedeutung der quadratischen Transformation und der Zweitheilung klar machen, und nachdem wir einen solchen Zusammenhang erkannt haben, umgekehrt aus den algebraischen Beziehungen die Formeln für die quadratische Transformation sowie für die Zweitheilung erschliessen. In gleicher Weise sind diese Wechselbeziehungen zwischen der Kummer'schen Fläche und den hyperelliptischen Functionen geeignet, die identischen Relationen, welche zwischen den letzteren bestehen, erkennen und übersehen zu lassen. Die Gruppirung der Thetaquadrate 16 mal zu je 6, so dass zwischen je 4 derselben eine lineare Relation besteht, beruht darauf, dass sich die Doppeltangentialebenen 16 mal zu je 6 in einem Punkte schneiden. Die Relationen zwischen je 3 Producten sind nichts Anderes als die in Thetafunctionen geschriebenen Gleichungen der Kummer'schen Fläche bezogen auf ein Berührungstetraeder, während die biquadratischen Relationen uns die Flächengleichung bezogen auf ein Fundamentaltetraeder geben. Die liniengeometrische Darstellung endlich basirt auf der Gleichung:

$$\vartheta_{24}^2(u)\vartheta_{24}^2(v) - \vartheta_3^2(u)\vartheta_3^2(v) + \vartheta_{04}^2(u)\vartheta_{04}^2(v) - \vartheta_{13}^2(u)\vartheta_{13}^2(v) + \vartheta_{02}^2(u)\vartheta_{02}^2(v) - \vartheta_1^2(u)\vartheta_1^2(v) = 0.$$

VI. Folgerungen aus dem vorigen Abschnitte.

Die Folgerungen, welche sich aus unserer Parameterdarstellung ziehen lassen, sind von verschiedener Natur. Die ersten Fragen, denen ich mich hier zuwende, basiren auf der liniengeometrischen Methode und beschäftigen sich mit den Eigenschaften der Parameter gewisser

Punktgruppen auf der Kummer'schen Fläche. Wir haben bereits früher gesehen, dass die Liniencoordinaten gegeben sind durch die Gleichung:

$$\varrho \cdot x_i = \frac{\sqrt{(k_i-\lambda_1)(k_i-\lambda_2)(k_i-\lambda_3)(k_i-\lambda_4)}}{\sqrt{f'(k_i)}}; \qquad i = 1, 2, \cdots, 6.$$

Daraus folgt in Uebereinstimmung mit einem früheren Resultate, dass sich die Liniencoordinaten als Producte zweier Thetafunctionen darstellen lassen, nämlich:

$$\varrho \cdot x_1 = \vartheta_{24}''(u_1+u_2)\,\vartheta_{24}''(u_3+u_4), \quad \varrho \cdot x_2 = \frac{1}{i}\,\vartheta_3''(u_1+u_2)\,\vartheta_3''(u_3+u_4),$$

$$\varrho \cdot x_3 = \vartheta_{04}''(u_1+u_2)\,\vartheta_{04}''(u_3+u_4), \quad \varrho \cdot x_4 = \frac{1}{i}\,\vartheta_{13}''(u_1+u_2)\,\vartheta_{13}''(u_3+u_4),$$

$$\varrho \cdot x_5 = \vartheta_{02}''(u_1+u_2)\,\vartheta_{02}''(u_3+u_4), \quad \varrho \cdot x_6 = \frac{1}{i}\,\vartheta_1''(u_1+u_2)\,\vartheta_1''(u_3+u_4),$$

wobei:*)

$$u_1 = \int_\alpha^{\lambda_1} du, \quad u_2 = \int_\alpha^{\lambda_2} du, \quad u_3 = \int_\alpha^{\lambda_3} du, \quad u_4 = \int_\alpha^{\lambda_4} du.$$

Nun hatten wir früher gefunden, dass 2 Durchschnittspunkte einer solchen Geraden $u_1+u_2+u_3+u_4$ und $u_1+u_2-u_3-u_4$ sind; die beiden übrigen werden also: $u_1-u_2+u_3-u_4$ und $u_1-u_2-u_3+u_4$, da wir zur Darstellung der Coordinaten $x_1, x_2 \cdots x_6$ ebensogut die Functionen $\vartheta(u_1+u_3)$ und $\vartheta(u_2+u_4)$ resp. $\vartheta(u_1+u_4)$ und $\vartheta(u_2+u_3)$ hätten wählen können. Aendern wir zwei der 4 Integrale u_1, u_2, u_3, u_4 um eine Periode, oder kehren wir bei zwei Integralen das Vorzeichen um, so kommen wir zu derselben Geraden $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4$ zurück, vermehren wir dagegen blos ein Integral um eine der 15 Perioden, so erhalten wir die 15 weiteren Geraden, deren Coordinaten aus den Coordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_6$ der gegebenen Geraden durch Umkehrung zweier Vorzeichen hervorgehen. Durch Umkehrung von *einem* oder *drei* Vorzeichen der Coordinaten erhält man die noch übrigen 16 Geraden $\lambda_1\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4$, deren Parameter man dadurch gewinnt, dass man bei *einem* der vier Integrale das Vorzeichen wechselt. Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, die Parameter der Punkte der Durchschnittscurve einer Tangentialebene zu bestimmen. Die Tangenten in dem Punkte $\lambda_1\,\lambda_2$ der Kummer'schen Fläche haben ja die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$; der Berührungspunkt der Tangentialebene hat dann etwa die Parameter: $u_1-u_2 \,|\, u_1'-u_2'$, die beiden weiteren Durchschnittspunkte der Tangente haben demgemäss

*) Der Kürze halber habe ich immer nur ein Integral geschrieben an Stelle der beiden $\int_\alpha^\lambda du \,|\, \int_\beta^\lambda du'$, wo $u \,|\, u'$ die Normalintegrale sind.

die Parameter $u_1 + u_2 + 2u \mid u_1' + u_2' + 2u'$ resp. $u_1 + u_2 - 2u \mid u_1' + u_2' - 2u'$. Den 6 Berührungspunkten der durch den Doppelpunkt der Tangentialebene laufenden Doppeltangenten kommen, wie wir auch schon früher gesehen, die Werthe:

$$u_1 + u_2 + \tau_{11} + \tau_{12} \mid u_1' + u_2' + \tau_{12} + \tau_{22} + 1, \text{ etc.}$$

zu.

Diese Untersuchungen über die Parameter der vier Durchschnittspunkte einer Geraden, sowie der Punkte der Durchschnittscurve einer Tangentialebene führen zu manchen interessanten Resultaten. Ich erwähne hier nur das Wichtigste, ohne jedoch auf den Beweis einzugehen. Bezeichnen wir wie seither mit:

$$u_i \mid u_i' = \int_\alpha^{\lambda_i} du \,, \int_\beta^{\lambda_i} du',$$

und bilden die 16 Werthepaare:

$$u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon' u_3 + \varepsilon'' u_4 + \varepsilon''' u_5 + \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' u_6 \mid u_1' + \varepsilon u_2' + \varepsilon' u_3' + \varepsilon'' u_4' + \varepsilon''' u_5' + \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' u_6',$$

indem wir $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ die Werthe ± 1 beilegen, so stellen uns dieselben 16 Punkte der Kummer'schen Fläche vor, die folgende merkwürdige Gruppirung besitzen. Die Punkte liegen zu je 6 in 16 Tangentialebenen der Kummer'schen Fläche, und zwar liegen solche 6 Punkte auf einem *Kegelschnitte, der durch den Berührungspunkt der betr. Ebene hindurchgeht*; umgekehrt schneiden sich die 16 Tangentialebenen zu je 6 in jenen 16 Punkten, solche 6 Ebenen umhüllen einen Kegel, der die Tangentialebene des betr. Punktes berührt. Wir haben also auf unserer Kummer'schen Fläche ein System von 16 Punkten und 16 Ebenen, die als Knotenpunkte und Doppelebenen einer zweiten Kummer'schen Fläche aufgefasst werden können; solcher Flächen giebt es sechsfach unendlich viele, indem die Grenzen $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_6$ der obigen Integrale beliebig gewählt werden können.*)

Wir wenden uns jetzt der zweiten Frage zu, welche uns zum Schlusse auf das zuletzt erwähnte System von Kummer'schen Flächen zurückführen wird; es ist dies die Frage nach *denjenigen Curven auf der Kummer'schen Fläche, längs welcher sie von anderen Flächen berührt wird, sowie nach diesen Flächen selbst.* Die Gleichungen dieser Flächen müssen die Eigenschaft haben, dass sie zu einem reinen Quadrate werden, sobald man an Stelle der laufenden Coordinaten die

*) Eine ausführlichere Darlegung denke ich in einer neuen Abhandlung zu geben, vergl. die Bemerkung auf pag. 38.

bezüglichen Thetafunctionen einsetzt, denn durch diese Operation erhalten wir ja den Durchschnitt jener Fläche mit der Kummer'schen. Ist umgekehrt die Gleichung der Berührungscurve in den Thetas gegeben, so muss sich ihr Quadrat, nicht aber sie selbst, in eine Gleichung zwischen den Variablen $x\ y\ z\ w$ umschreiben lassen. Beachten wir weiter, dass bei einer quadratischen Transformation die linearen Ausdrücke des einen Systems gleich quadratischen Ausdrücken des andern werden, so gelangen wir leicht zu Gleichungen der gesuchten Art.

So erhalten die 16 Doppelebenen die Gleichungen:

$$\vartheta_5^2 = c_5'\vartheta_5' + c_{01}'\vartheta_{01}' + c_{34}'\vartheta_{34}' + c_2'\vartheta_2' = 0 \text{ etc.}$$

oder in

$$x,\ y,\ z,\ w \quad \text{und} \quad x_0,\ y_0,\ z_0,\ w_0$$

geschrieben:

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z + w_0 w = 0, \text{ etc.},$$

während die Berührungskegelschnitte: $\vartheta_5 = 0$, $\vartheta_{12} = 0$, $\vartheta_{34} = 0$, $\vartheta_0 = 0$ etc. werden.

Wir kommen weiter zu den Gleichungen der berührenden Flächen 2. Grades und ihrer Berührungscurven 4. Ordnung. Letztere müssen in den ϑ' linear und in den ϑ quadratisch sein. Ihre Gestalt ergiebt sich nach den obigen Forderungen leicht, es kommt:

$$\begin{array}{lcl}
\vartheta_{12}' + \lambda\vartheta_0' = 0, & \text{resp.} & \vartheta_5\,\vartheta_{01} + \mu\vartheta_2\,\vartheta_{34} = 0,\\
\vartheta_{03}' + \lambda\vartheta_{14}' = 0, & ,, & \vartheta_5\,\vartheta_2 + \mu\vartheta_{01}\vartheta_{34} = 0,\\
\vartheta_4' + \lambda\vartheta_{23}' = 0, & ,, & \vartheta_5\,\vartheta_{34} + \mu\vartheta_2\,\vartheta_{01} = 0,\\
\vartheta_{04}' + \lambda\vartheta_{13}' = 0, & ,, & \vartheta_4\,\vartheta_{24} + \mu\vartheta_3\,\vartheta_{23} = 0,\\
\vartheta_{02}' + \lambda\vartheta_1' = 0, & ,, & \vartheta_{03}\vartheta_{13} + \mu\vartheta_{04}\vartheta_{14} = 0,\\
\vartheta_3' + \lambda\vartheta_{24}' = 0, & ,, & \vartheta_{03}\vartheta_{04} + \mu\vartheta_{13}\vartheta_{14} = 0;
\end{array}$$

die letzten Gleichungen lassen sich wirklich durch quadratische Transformation aus den ersten ableiten. Die ϑ' geben uns nur 6 solcher Curvenbüschel, da die Kummer'sche Fläche, der Auswahl der quadratischen Transformation entsprechend, auf ein ganz bestimmtes Fundamentaltetraeder bezogen ist. Die ϑ dagegen liefern 30 Curvenbüschel; jedes Büschel geht durch 8 Knotenpunkte, welche in 2 Quadrupel der früher beschriebenen Art zerfallen; zwei Büschel gehören immer in der Weise zusammen, dass sie keinen Knotenpunkt gemein haben. Den 15 Relationen*) $c_5 c_{01}\vartheta_5\vartheta_{01} - c_2 c_{34}\vartheta_2\vartheta_{34} = c_4 c_{23}\vartheta_4\vartheta_{23}$ etc. entsprechend ergeben sich 15 Curvenbüschel, und die zugehörigen 15 durch Vermehren der Argumente um halbe Perioden. Um die Gleichung des Flächenbüschels, welches längs der Curven $\vartheta_5\vartheta_{01} + \mu\vartheta_2\vartheta_{34} = 0$ berührt, zu erhalten, führen wir in das Quadrat dieser Gleichung die

*) Siehe weiter unten.

Coordinaten x, y, z, w oder ξ, η, ζ, ϖ an Stelle der Thetas ein, und finden so die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} c_5^2 c_{01}^2 \xi (c_{12}^2 \eta + c_{14}^2 \zeta - c_{03}^2 \varpi) + c_2^2 c_{34}^2 \eta (-c_{03}^2 \zeta + c_{12}^2 \xi + c_{14}^2 \varpi)& \\ - \frac{1}{1+\mu} \zeta (c_{14}^2 \xi + c_{03}^2 \eta - c_{12}^2 \varpi) &= 0,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}(x_0^2+y_0^2+z_0^2+w_0^2)(x_0^2+y_0^2-z_0^2-w_0^2)\cdot\\ &\quad(x_0x+y_0y+z_0z+w_0w)(x_0x+y_0y-z_0z-w_0w)\\ &+(x_0^2-y_0^2+z_0^2-w_0^2)(x_0^2-y_0^2-z_0^2+w_0^2)\cdot\\ &\quad(x_0x-y_0y+z_0z-w_0w)(x_0x-y_0y-z_0z+w_0w),\\ &-\frac{1}{1+\mu}\cdot 2(x_0y_0+z_0w_0)\cdot 2(x_0y_0-z_0w_0)\cdot\\ &\qquad(x_0y+y_0x+z_0w+w_0z)(x_0y+y_0x-z_0w-w_0z)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Die erste Gleichung ist auf ein Tetraeder bezogen, dessen Seiten Doppelebenen der Kummer'schen Fläche sind, die zweite dagegen auf ein Fundamentaltetraeder dieser Fläche.

Von den Gleichungen der Berührungscurven 4. Ord. gelangen wir leicht zu der Gleichung der Berührungscurven 8. Ord.; sie müssen in den ϑ biquadratisch, in den ϑ' quadratisch und in den ϑ'' linear sein; ihre dreifache Gestalt ist:

$$(\vartheta_{12}' + \lambda \vartheta_0')(\vartheta_{02}' + \mu \vartheta_1') + \nu (\vartheta_{03}' + \varrho \vartheta_{14}')(\vartheta_{04}' + \sigma \vartheta_{13}') = 0,$$

oder:

$$(\vartheta_5\vartheta_{01} + \lambda \vartheta_2 \vartheta_{34})(\vartheta_{12}\vartheta_{02} + \mu \vartheta_0 \vartheta_1) + \nu (\vartheta_5 \vartheta_2 + \varrho \vartheta_{01}\vartheta_{34})(\vartheta_{12}\vartheta_1 + \sigma \vartheta_{02}\vartheta_0) = 0,$$

oder endlich:

$$\varkappa \vartheta_{24}'' + \lambda \vartheta_3'' + \mu \vartheta_{04}'' + \nu \vartheta_{13}'' + \varrho \vartheta_{02}'' + \sigma \vartheta_1'' = 0.$$

Diese Gleichungen gehen aus einander hervor durch Benutzung der Formeln der quadratischen Transformation. Die mittlere Gleichung kann noch in die Form gesetzt werden:

$$\begin{aligned}0 = \varkappa \vartheta_5 \vartheta_{01} \vartheta_{02} \vartheta_{12} + \lambda \vartheta_{34} \vartheta_2 \vartheta_1 \vartheta_0 + \mu \vartheta_5 \vartheta_{01} \vartheta_1 \vartheta_0 + \nu \vartheta_{34} \vartheta_2 \vartheta_{02} \vartheta_{12}& \\ + \varrho \vartheta_5 \vartheta_{02} \vartheta_2 \vartheta_0 + \sigma \vartheta_{34} \vartheta_1 \vartheta_{01} \vartheta_{12}&,\end{aligned}$$

welche erkennen lässt, dass dem Curvenbüschel 8. Ord. 16 dreifach unendliche Büschel 6. Ord. angehören, indem sich jedes Mal einer der 16 Tangentialkegelschnitte absondert*). Die diesen Curven zugehörigen Berührungsflächen 3ter und 4ter Ord. gedenke ich später weiter zu untersuchen; hier sei nur noch erwähnt, dass Klein schon lange auf liniengeometrischem Wege das Resultat erzielt hat, dass eine gegebene Kummer'sche Fläche von sechsfach unendlich vielen Kum-

*) Zwei Berührungsflächen 2. Ord., welche zusammen durch alle 16 Knotenpunkte gehen, gehören ebenfalls zu jenem Systeme der Flächen 4. Ord.

mer'schen längs Curven 8. Ord. berührt wird; dieses System von Flächen ist offenbar mit dem hier untersuchten identisch; die Knotenpunkte etc. einer solchen Fläche besitzen die auf Seite 36 angegebenen Parameterwerthe.

Der dritte Theil dieses Abschnittes stellt sich die Aufgabe, die identischen Relationen zwischen den Thetas unter einen allgemeineren Gesichtspunkt zu bringen. Wir gehen dabei von der früher aufgestellten Gleichung:

$$\vartheta_{24}^2(u)\vartheta_{24}^2(v) - \vartheta_3^2(u)\vartheta_3^2(v) + \vartheta_{04}^2(u)\vartheta_{04}^2(v) - \vartheta_{13}^2(u)\vartheta_{13}^2(v) + \vartheta_{02}^2(u)\vartheta_{02}^2(v) - \vartheta_1^2(u)\vartheta_1^2(v) = 0,$$

aus, und von der weiteren Gleichung:*)

$$\left.\begin{array}{l}
\vartheta_{24}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{24}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{24}\left(u+\frac{P}{2}\right)\vartheta_{24}\left(u+\frac{P'}{2}\right)\\
-\vartheta_{3}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{3}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{3}\left(u+\frac{P}{2}\right)\vartheta_{3}\left(u+\frac{P'}{2}\right)\\
+\vartheta_{04}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{04}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{04}\left(u+\frac{P}{2}\right)\vartheta_{04}\left(u+\frac{P'}{2}\right)\\
-\vartheta_{13}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{13}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{13}\left(u+\frac{P}{2}\right)\vartheta_{13}\left(u+\frac{P'}{2}\right)\\
+\vartheta_{02}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{02}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{02}\left(u+\frac{P}{2}\right)\vartheta_{02}\left(u+\frac{P'}{2}\right)\\
-\vartheta_{1}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{1}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{1}\left(u+\frac{P}{2}\right)\vartheta_{1}\left(u+\frac{P'}{2}\right)
\end{array}\right\} = 0.$$

Aus der ersten Gleichung fliessen durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden 15 weitere Gleichungen, und diese ergeben uns alle denkbaren Relationen zwischen den Thetaquadraten, wenn wir u gleich halben Perioden machen. Die zweite Gleichung giebt ebenfalls zu 15 verschiedenen Relationen Anlass, die man dadurch erhält, dass man P und P' Werthe beilegt, welche nur 3 Glieder zum Verschwinden bringen;**) man muss zu diesem Zweck P und P' so wählen, dass sie beide eine und dieselbe ungerade Function z. B. ϑ_{02} überführen in irgend zwei andere *ungerade* Functionen, z. B. ϑ_1 und

*) Für zwei sich schneidende Geraden gilt die Gleichung:

$$x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' + \cdots + x_6x_6' = 0;$$

diese Gleichung geht in die obige über für

$$x_1 = \vartheta_{24}\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_{24}\left(u+\frac{P'}{2}\right), \text{ etc. und } x_1' = \vartheta_{24}\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_{24}\left(u+\frac{P}{2}\right) \text{ etc.};$$

diese beiden Linien schneiden sich im Punkte $u+\frac{P}{2}+\frac{P'}{2}$ der Kummer'schen Fläche.

**) Bei 2 ganz beliebigen Perioden würden 4 Glieder verschwinden, die beiden anderen gleich werden.

ϑ_{13}; so kommt die Relation: $c_2 c_{23} \vartheta_2 \vartheta_{23} - c_{34} c_4 \vartheta_{34} \vartheta_4 + c_0 c_{03} \vartheta_0 \vartheta_{03} = 0$. Aus diesen 15 Relationen zwischen den Producten der geraden Thetas erhalten wir solche zwischen geraden und ungeraden Functionen, indem wir die Argumente um halbe Perioden ändern.

Was endlich die biquadratischen Relationen anlangt, so haben wir hier eine bequeme Methode um auch *ihr* ganzes System anzugeben. Die 15 biquadratischen Relationen, welche nur gerade Thetas enthalten, gehen nach Borchardt aus der Gleichung der Kummer'schen Fläche, bezogen auf ein Fundamentaltetraeder, welche die Coordinaten eines Knotenpunktes als Constante enthält, hervor. Man hat in dieser Gleichung nur die Variablen x, y, z, w und die Coordinaten x_0, y_0, z_0, w_0 eines Knotenpunktes zu ersetzen durch die Thetas eines der früher geschilderten Quadrupel und ihrer Nullwerthe. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Thetas der Quadrupel und ihre Nullwerthe noch mit achten Einheitswurzeln zu versehen sind, in der Weise wie es zu Ende des ersten Abschnittes angegeben ist. Der Grund hierfür liegt darin, dass solche mit achten Einheitswurzeln multiplicirten Thetas bei Vermehrung der Argumente um halbe Perioden geradezu vertauscht werden ohne weitere Factoren zu erhalten.

Leipzig im Mai 1879.

Zur Theorie der linearen Connexe.

Von

A. Voss in Darmstadt.

In seinen Untersuchungen über Connexe*) hat Clebsch den folgenden Satz ausgesprochen:

Bei allen Collineationen, bei welchen die zu fünf gegebenen Punkten gehörigen Punkte auf fünf gegebenen Geraden liegen, existirt immer noch ein sechster Punkt, dessen entsprechende Punkte sämmtlich auf einer Geraden liegen, und zwar wird der sechste Punkt und diese Gerade linear construirt.

Man kann dem Beweise dieses Satzes, der von verschiedenen Seiten in Zweifel gezogen ist, das folgende allgemeinere Theorem zu Grunde legen:

*In einer vierfach unendlichen linearen Schaar linearer Connexe befinden sich sechs specielle Connexe***).

Sei:

$$A_j = \sum \alpha^j_{ik} x_i u_k = 0$$

die Gleichung eines linearen Connexes, so ist zu beweisen, dass die Gleichung:

$$(1) \qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 + \lambda_5 A_5 = \alpha_x u_\beta$$

für ein sechsfaches System der Zahlen λ eine Identität wird. Die Gleichung sechsten Grades, von der die Bestimmung jenes Systems abhängt, kann auf folgendem Wege gebildet werden.

Die neun Coefficienten

$$\alpha^j_{11},\ \alpha^j_{12},\ \alpha^j_{13};\ \alpha^j_{21},\ \alpha^j_{22},\ \alpha^j_{23};\ \alpha^j_{31},\ \alpha^j_{32},\ \alpha^j_{33},$$

von A_j seien der Reihe nach bezeichnet durch:

$$a_{j1},\ a_{j2},\ a_{j3};\ b_{j1},\ b_{j2},\ b_{j3};\ c_{j1},\ c_{j2},\ c_{j3}.$$

Setzt man ferner:

*) Math. Ann. VI, 205.

**) Die speciellen Connexe einer fünffach unendlich linearen Schaar bilden mit ihren Punkten eine Curve dritter Ordnung und reciprok.

$$a_k = \sum a_{jk} \lambda_j,$$
$$b_k = \sum b_{jk} \lambda_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5,$$
$$c_k = \sum c_{jk} \lambda_j, \quad k = \quad 1, 2, 3,$$

so werden diejenigen Werthe der Verhältnisse der λ zu bestimmen sein, für welche die zweireihigen Determinanten der a_k, b_k, c_k sämmtlich verschwinden, d. h. für welche:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mu a_1 + b_1 &= 0, & \nu a_1 + c_1 &= 0, \\ \mu a_2 + b_2 &= 0, & \nu a_2 + c_2 &= 0, \\ \mu a_3 + b_3 &= 0, & \nu a_3 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man die Zahlen:

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$$

so, dass die Gleichung:

$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = 0$$

für beliebige Werthe der λ eine Identität wird, so hat man aus (2):

$$a_1(\mu\beta_1 + \nu\gamma_1) + a_2(\mu\beta_2 + \nu\gamma_2) + a_3(\mu\beta_3 + \nu\gamma_3) = 0,$$
$$\nu b_1 - \mu c_1 = 0,$$
$$\nu b_2 - \mu c_2 = 0,$$
$$\nu b_3 - \mu c_3 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die λ proportional mit homogenen Functionen vierten Grades in μ und ν. Setzt man die λ in eine der Unterdeterminanten, etwa:

$$c_1 a_2 - c_2 a_1 = 0$$

ein, so erhält man eine Gleichung achten Grades für $\frac{\mu}{\nu}$, welche ersichtlich die beiden unbrauchbaren Lösungen $\nu = 0$, $\mu\beta_3 + \nu\gamma_3 = 0$ besitzt, während die sämmtlichen Unterdeterminanten für die anderen sechs Lösungen verschwinden.

Befinden sich unter den gegebenen Connexen m specielle, so hat die Gleichung sechsten Grades m rationale Wurzeln. Mithin folgt für $m = 5$:

Fünf specielle lineare Connexe lassen sich linear zu einem sechsten combiniren, dessen Bestimmung von einer linearen Gleichung abhängt.

Auf diesem letzteren Satze, den wir in der Form:

$$(3) \qquad \sum \lambda_i \eta_x^i u_y^i = \mu \eta_x u_y$$

schreiben, beruht aber der von Clebsch angegebene Satz. Werden nämlich die Coefficienten derjenigen Collineationen, bei denen die den fünf Punkten:

$$u^i_y = 0 \quad \text{oder} \quad y^i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

entsprechenden bezüglich auf den Geraden:

$$\eta^i_x = 0 \quad \text{oder} \quad \eta^i$$

liegen sollen, mit α_{mk} bezeichnet, so ist vermöge der aus der Identität (3) folgenden Gleichungen:

$$\sum \lambda_i \eta^i_k y^i_m = \mu \eta_k y_m, \quad k, m = 1, 2, 3 \tag{4}$$

auch $\sum\sum \lambda_i y^i_m \eta^i_k \alpha_{mk} = \mu \sum \eta_k y_m \alpha_{mk}$ eine Identität, d. h. für alle Systeme der α_{mk}, welche die fünf Gleichungen:

$$\sum y^i_m \eta^i_k \alpha_{mk} = 0$$

befriedigen, ist auch $\sum \eta_k y_m \alpha_{mk} = 0$.

Es erübrigt noch zu zeigen, wie die Gleichungen (4) direct zur Bestimmung der λ_i sowie der Coordinaten y und η führen. Die dreireihigen Determinanten der Form:

$$\begin{vmatrix} y^\alpha_1 & y^\alpha_2 & y^\alpha_3 \\ y^\beta_1 & y^\beta_2 & y^\beta_3 \\ y^\gamma_1 & y^\gamma_2 & y^\gamma_3 \end{vmatrix}$$

mögen dazu durch $(\alpha\,\beta\,\gamma)$; die aus den η^i analog gebildeten durch $[\alpha\,\beta\,\gamma]$ bezeichnet werden. Ersetzt man dagegen die y^α durch die y, die η^α durch die η, so soll die entsprechende Determinante $(y\,\beta\,\gamma)$ resp. $[\eta\,\beta\,\gamma]$ heissen. Multiplicirt man das System der neun Gleichungen (4) mit geeigneten Unterdeterminanten aus den $[\alpha\beta\gamma]$, so entsteht:

$$\sum \lambda_i [i\,\alpha\,\beta]\, y^i_m = \mu' y_m, \quad \text{wo} \quad \mu' = \mu\,[\eta\,\alpha\,\beta]$$

und hieraus:

$$\sum \lambda_i [i\,\alpha\,\beta]\,(i\,y\,\gamma) = 0. \tag{5}$$

Giebt man den α, β, γ irgend drei verschiedene Werthe, etwa in der Reihenfolge:

$$4, 5, 2; \quad 2, 5, 4; \quad 2, 4, 5,$$

so entstehen aus (5) drei Gleichungen zwischen λ_1 und λ_3. Die Elimination derselben liefert zur Bestimmung von y Gleichungen zweiten Grades oder Kegelschnitte, von denen je zwei durch drei der gegebenen Punkte y^i gehen und zur linearen Construction des Punktes y führen. Eine dieser Gleichungen ist:

$$\frac{(1\,4\,y)}{(1\,2\,y)} : \frac{(3\,4\,y)}{(3\,2\,y)} = \frac{[1\,4\,5]}{[1\,2\,5]} : \frac{[3\,4\,5]}{[3\,2\,5]}. \tag{6}$$

Nun ist die linke Seite in (6) das Doppelverhältniss der Geraden von y nach den vier Punkten y^1, y^2, y^3, y^4, die rechte das entsprechende Doppelverhältniss der Schnittpunkte von η^5 mit den entsprechenden Geraden. Jedem Punktquadrupel y^1, y^2, y^3, y^4 wird auf diese Weise ein Doppelverhältniss auf der Geraden η^5 adjungirt. Und man hat so den Satz:

Die fünf Kegelschnitte, welche durch je vier der gegebenen Punkte gehen, und für welche das Doppelverhältniss ihrer Punkte gleich dem jedesmaligen adjungirten ist, schneiden sich in dem gesuchten Punkte y.
Hiernach übersieht man ohne weiteres, wie die Construction desselben (und analog die der Geraden η) auszuführen sein wird.

In ähnlicher Weise kann man auch die fünf Zahlen λ berechnen. Dieselben sind bestimmt durch das Verschwinden sämmtlicher zweireihiger Determinanten, welche sich aus den linken Seiten der Gleichungen (4) bilden lassen. Man erhält dann sehr leicht:

$$\sum \lambda_\alpha \lambda_\beta [\gamma \alpha \beta] (\delta \alpha \beta) = 0,$$

und hieraus durch geeignete Annahme der Zahlen γ, δ die Verhältnisse der λ, beispielsweise:

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_5} = \frac{(315)(245)[215][345] - (215)(345)[315][245]}{(214)(315)[314][215] - (314)(215)[214][315]},$$

sowie die Verhältnisse:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3, \quad y_1 : y_2 : y_3$$

durch Eintragen der λ in die Gleichungen (4).

Bezeichnet man das Sextupel von Punkten und Geraden, von denen je fünf Punkte und ihre zugehörigen Geraden vermöge der nämlichen linearen Construction den betreffenden sechsten Punkt sowie die sechste Gerade ergeben, als ein *Clebsch'sches System*, so hat man noch folgenden Satz:

Die sechs speciellen Connexe, welche in einer vierfach unendlichen linearen Schaar linearer Connexe enthalten sind, bilden ein Clebsch'sches System.

Darmstadt, d. 9. Mai 1879.

Recherches sur les courbes planes du troisième degré.

Par G. H. Halphen à Paris.

Introduction.

Je me propose, dans le présent mémoire, de traiter, au sujet des courbes planes du 3ème degré ou *cubiques,* certaines questions générales, dont je vais tout d'abord expliquer sommairement l'origine.

Par $(3m-1)$ points, arbitrairement choisis sur une cubique C, passe une infinité de courbes M du degré m, sauf si m est égal à 1, 2, cas dans lesquels il n'existe qu'une seule de ces courbes. Mais toujours le dernier point d'intersection de M et de C est déterminé par le choix des autres. Cette conclusion subsiste si les $(3m-1)$ points sont choisis infiniment près d'un seul et même point x. Conséquemment, à chaque point x de la cubique C correspond, sur cette même courbe, un point x'_m commun à toutes les courbes M, du degré m, qui ont avec C, au point x, des contacts de l'ordre $(3m-2)$. Il existe certains points x jouissant de cette propriété de coïncider avec leur correspondant x'_m. Désignons ces points par la notation x_m. Ce sont, comme on voit, les points en chacun desquels il existe des courbes du degré m, ayant avec la cubique des contacts de l'ordre $(3m-1)$. Pour $m=1$, les points x_m sont les *points d'inflexion*; pour $m=2$ les points *sextactiques;* pour $m=3$, les points que j'ai appelés *de coïncidence.*

Les points x_m ont une définition très-simple quand on emploie la représentation des courbes du 3ème degré par les fonctions elliptiques, introduite par M. Clebsch. Si l'on a choisi l'argument de telle sorte qu'il soit nul pour un point d'inflexion, alors les points x_m sont ceux dont les arguments, multipliés par $3m$, reproduisent les périodes.

Au sujet de ces points x_m, je me suis tout d'abord posé la question de trouver le covariant qui s'évanouit en chacun d'eux. Je n'ai pas tardé à reconnaître que ce covariant est un *combinant* pour le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs. Cette propriété était connue pour le cas le plus simple, $m=2$. On sait, en effet, que les 27 points sextactiques d'une cubique C sont distribués sur 9 droites, qui restent les mêmes quand à la cubique C on en substitue une autre C' ayant les mêmes points d'inflexion que C. La question se présentait dès lors sous une autre forme, et se posait ainsi: *On envisage le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs, et on demande le lieu des points x_m de ces cubiques.* Comme je viens de le rappeler, ce lieu, pour $m=2$, se décompose en 9 droites. J'ai trouvé ensuite que, pour $m=3$, il se décompose en 8 cubiques, et j'ai pu reconnaître que cette décomposition est un fait général:

Le lieu des points x_m se compose de 9 *courbes distinctes quand m n'est pas divisible par* 3; *de* 8 *courbes distinctes quand m est un multiple de* 3.

Si $m=3^\alpha$, chacune des 8 *courbes est du degré* $3^{2\alpha-1}$.

Si $m=3^\alpha\mu$, μ n'étant plus divisible par 3, *et α pouvant être zéro, et que $p, p', p'', \cdots$ désignent les facteurs premiers du nombre μ, distincts entre eux, chacune des* 8 *courbes* (pour $\alpha \geqq 1$) *ou des* 9 *courbes* (pour $\alpha=0$) *est d'un degré égal à*

$$3^{2\alpha-1}\mu^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots$$

Telle est la proposition principale dont on trouvera la démonstration dans ce mémoire.

Recherches préliminaires; lieux géométriques des points x_3 et x_4.

1. Je rappelle tout d'abord quelques propriétés élémentaires. Une cubique peut être transformée en elle-même par trois groupes de substitutions homographiques, savoir:

1° *Substitutions homologiques* α. Le centre d'homologie est un point d'inflexion J. Ces substitutions sont au nombre de *neuf*. Chacune d'elles, adjointe à un point d'inflexion J, laisse inaltéré, dans chaque triangle d'inflexions, le côté qui passe par J, et permute entre eux les deux autres.

2° *Substitutions* β, au nombre de *huit*. A chaque triangle d'inflexion deux d'entre elles sont adjointes. Une substitution β laisse inaltérés les côtés du triangle auquel elle est adjointe, et permute circulairement les côtés de chacun des autres triangles. Une substitution β est le produit de deux substitutions α successives. Les substitutions β forment un *groupe*, c'est-à-dire que les 8 points, transformés d'un seul et même point par ces huit substitutions, forment, avec ce point même, un groupe inaltérable par les substitutions β.

3° *Substitutions* γ, qui permutent entre eux les triangles d'inflexion. Dans les questions qui font l'objet de ce mémoire, il est utile de considérer ces substitutions. Elles transforment en elles-mêmes toutes les cubiques qui ont les mêmes points d'inflexion; et, par suite, elles transforment en eux-mêmes les lieux geométriques que nous aurons à envisager.

Soit choisi pour triangle de référence un triangle d'inflexions, relativement auquel l'équation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3 = 0 \tag{1}$$

représente une cubique C quelconque du faisceau. Celle des substitutions α qui est adjointe au point d'inflexion $x_3 = 0$, $x_1 + \Theta x_2 = 0$, Θ étant une racine cubique de l'unité, fait correspondre au point x celui dont les coordonnées sont $(\Theta x_2, \Theta^2 x_1, x_3)$. Celles des substitutions β qui sont adjointes au triangle de référence font correspondre entre eux les trois points $(x_1, \Theta x_2, \Theta^2 x_3)$. Les six autres substitutions β font correspondre à l'un quelconque de ces trois points ceux que l'on obtient par la permutation circulaire des indices.

2. Je rappelle encore les propriétés connues des points sextactiques. Chacun d'eux est l'intersection de la cubique avec la polaire d'un point d'inflexion. Pour le point $x_3 = 0$, $x_1 + \Theta x_2 = 0$, cette polaire est $x_1 - \Theta x_2 = 0$. Donc *le lieu des points sextactiques des cubiques ayant neuf points d'inflexion communs se compose de neuf droites; ce sont les neuf axes d'homologie relatives aux substitutions α.* Chacune des parties du lieu peut être considérée comme adjointe à un point d'inflexion. L'ensemble du lieu est représenté par l'équation

$$(x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3) = 0.$$

3. J'arrive maintenant aux points de coïncidence, qui sont aussi, comme on le sait, les sommets des triangles inscrits et circonscrits aux cubiques. La tangente de la courbe (1) au point x a pour équation

$$x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^2 y_3 + 2a(x_1 x_2 y_3 + x_2 x_3 y_1 + x_3 x_1 y_2) = 0.$$

Si l'on y fait, Θ étant imaginaire,

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \Theta x_2, \quad y_3 = \Theta^2 x_3,$$

l'équation sera verifiée pourvu qu'on ait

$$A_1 = x_1^3 + \Theta x_2^3 + \Theta^2 x_3^3 = 0. \tag{2}$$

Donc, si le point x est situé sur cette courbe A_1, son transformé x' par l'une des substitutions β est situé sur la tangente de la cubique C en x. Mais ce point x' est aussi sur A_1. Donc la tangente de C en x' passe aussi au transformé x'' de x' par la même substitution; et de même la tangente en x'' passe aussi au point transformé de x''. Mais ce dernier n'est autre que x. Donc le triangle $xx'x''$ est inscrit et circonscrit à la cubique C. Donc la cubique A_1 coupe chaque cubique C en neuf points qui sont les sommets de trois triangles inscrits et circonscrits à C, c'est-à-dire en neuf points x_3 ou de coïncidence. La seconde substitution β, adjointe au triangle de référence fournit de même une seconde cubique A_1',

$$(3) \qquad A_1' = x_1^3 + \Theta^2 x_2^3 + \Theta x_3^3 = 0,$$

qui fait également partie du lieu des points cherchés. On aura d'autres parties du lieu en considérant les autres substitutions β. Par exemple, si l'on fait, Θ étant réel ou imaginaire,

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = \Theta x_3, \quad y_3 = \Theta^2 x_1$$

on obtient l'équation

$$(x_1^2 x_2 + \Theta x_2^2 x_3 + \Theta^2 x_3^2 x_1)\,[1 + 2a(\Theta^2 + \Theta + 1)] = 0.$$

Il en résulte ces six autres parties du lieu, Θ étant imaginaire:

$$(4) \quad \begin{cases} A_2' = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2, & A_2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1, \\ A_3' = x_1 x_2^2 + \Theta\, x_2 x_3^2 + \Theta^2 x_3 x_1^2, & A_3 = x_1^2 x_2 + \Theta^2 x_2^2 x_3 + \Theta\, x_3^2 x_1, \\ A_4' = x_1 x_2^2 + \Theta^2 x_2 x_3^2 + \Theta\, x_3 x_1^2, & A_4 = x_1^2 x_2 + \Theta\, x_2^2 x_3 + \Theta^2 x_3^2 x_1. \end{cases}$$

On obtient ainsi, pour chaque cubique C, 24 triangles inscrits et circonscrits. C'est précisément le nombre de ceux qui existent. On a donc là le lieu total. Ces cubiques A jouissent de diverses propriétés évidentes sur leurs équations, et que je résume dans l'énoncé suivant:

Pour le faisceau des cubiques ayant neuf points d'inflexion communs, le lieu des points de coïncidence se compose de huit cubiques équianharmoniques. Chacune d'elles a pour triangle d'inflexions un des triangles d'inflexions du faisceau, et est inscrite et circonscrite aux trois autres.

4. Les deux cubiques A_n et A_n' ont pour triangle d'inflexions commun un triangle d'inflexions T_n du faisceau, et se coupent aux neuf sommets des trois autres triangles.

Deux cubiques d'indices différents et accentuées de même se touchent aux trois sommets du triangle de référence T_1, et se coupent aux trois sommets du triangle dont l'indice n'est ni l'unité, ni celui de l'une ou l'autre de ces cubiques. Ainsi A_2 et A_3 se coupent aux sommets de T_4. De même A_2' et A_3'. Au contraire, A_2 et A_3' se coupent aux sommets de T_1 et se touchent aux sommets de T_4.

Ces considérations prouvent aisément que deux courbes quelconques du réseau

$$\lambda x_1 x_2 x_3 A_1 A_1' + \mu A_2 A_3 A_4 + \nu A_2' A_3' A_4' = 0,$$

qui sont du 9ème degré, ont 72 intersections fixes confondues six par six aux sommets des quatre triangles T. En conséquence, si l'on transforme le plan par la substitution

$$(5) \qquad \sigma y_1 = A_2 A_3 A_4, \quad \sigma y_2 = A_2' A_3' A_4', \quad \sigma y_3 = x_1 x_2 x_3 A_1 A_1',$$

à chaque point y correspondent *neuf* points x. Il est d'ailleurs visible que ces neuf points x constituent un groupe complet de points *conjugués* suivant les substitutions β.

Cette substitution (5) que je nommerai (A) jouera un rôle prépondérant dans les recherches actuelles.

5. Je vais encore chercher directement le lieu des points x_4, qui sont les points de contact des tangentes menées des points sextactiques. Je ferai usage de la proposition suivante:

Si, par rapport à toutes les cubiques C qui ont neuf points d'inflexion communs, on prend les premières polaires d'un point z, ces coniques forment un faisceau dont les pivots sont situés sur celle des cubiques qui passe par le point z.

Cette proposition se démontre ainsi. Deux des polaires sont représentées par les équations

$$z_1 x_1^2 + z_2 x_2^2 + z_3 x_3^2 = 0,$$
$$z_1 x_2 x_3 + z_2 x_3 x_1 + z_3 x_1 x_2 = 0.$$

Je tire de là les z en fonction des x:

(6) $\tau z_1 = x_1(x_2^3 - x_3^3), \quad \tau z_2 = x_2(x_3^3 - x_1^3), \quad \tau z_3 = x_3(x_1^3 - x_2^3)$

et ensuite

$$\frac{z_1^3 + z_2^3 + z_3^3}{z_1 z_2 z_3} = \frac{x_1^3(x_2^3 - x_3^3)^3 + x_2^3(x_3^3 - x_1^3)^3 + x_3^3(x_1^3 - x_2^3)^3}{x_1 x_2 x_3 (x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3)}.$$

Mais, en vertu de l'identité

$$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

la dernière équation se change en

$$\frac{z_1^3 + z_2^3 + z_3^3}{z_1 z_2 z_3} = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3},$$

ce qui démontre la proposition annoncée. On a ainsi le moyen de passer du lieu des points x_m au lieu des points x_{2m}. Il suffit, en effet, de changer dans l'équation du premier, les x en z, puis de substituer aux z les expressions (6). En particulier, à chacune des neuf droites dont l'ensemble constitue le lieu des points x_2 correspond une courbe du 4ème degré B, lieu partiel des points x_4. Les neuf courbes B sont données par l'équation

(7) $$B = x_1(x_2^3 - x_3^3) - \Theta x_2(x_3^3 - x_1^3) = 0$$

et celles qu'on en déduit en remplaçant Θ par une quelconque des trois racines cubiques de l'unité, puis en permutant les indices. Ces courbes jouissent, par rapport aux triangles d'inflexions, de nombreuses propriétés dont l'énoncé suivant résume quelques-unes:

Pour le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs, le lieu des points x_4 se compose de neuf courbes distinctes du 4ème degré. Chacune d'elles est adjointe à un point d'inflexion. L'ad-

jointe d'un point d'inflexion J a elle-même quatre points d'inflexion sur chacune des quatre droites d'inflexions passant en J et un contact du 3ème ordre avec sa tangente en chacun des sommets des triangles d'inflexions opposés aux côtés qui contiennent J. Les tangentes en ces quatres sommets passent en J.

Si l'on a égard à ce que le contact du 3ème ordre avec une tangente compte pour deux inflexions, on voit que cet énoncé fait connaître les 24 points d'inflexion de la courbe du 4ème degré B.

On ne manquera pas de remarquer que, par l'emploi continu de la substitution (6), ou substitution (B), le théorème général relatif aux décompositions et au degré du lieu des points x_m est dès à présent démontré pour $m = 2^n$.

Propriétés d'une certaine transformation du plan.

6. Je vais actuellement faire une étude spéciale de la substitution (A), définie par les équations (5), et tout d'abord je vais montrer, que cette substitution, comme celle que j'ai appelée (B), transforme en elles-même toutes les cubiques C du faisceau (1).

Soit Θ une racine cubique imaginaire de l'unité, et considérons la substitution composée suivante

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda x_1^3 = t_3^{\frac{1}{3}} + \Theta^2 t_2^{\frac{1}{3}} + \Theta t_1^{\frac{1}{3}}, & 8\mu a^3 t_1 = 2a y_3 - \Theta y_2 - \Theta^2 y_1, \\ \lambda x_2^3 = t_3^{\frac{1}{3}} + \Theta\, t_2^{\frac{1}{3}} + \Theta^2 t_1^{\frac{1}{3}}, & 8\mu a^3 t_2 = 2a y_3 - \Theta^2 y_2 - \Theta y_1, \\ \lambda x_3^3 = t_3^{\frac{1}{3}} + \quad t_2^{\frac{1}{3}} + \quad t_1^{\frac{1}{3}}, & \mu(1+8a^3) t_3 = 2a y_3 - y_2 - y_1. \end{cases}$$

Transformons par cette substitution la cubique

$$(9)\qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Voici le détail du calcul:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^3 + 6^3 a^3 x_1^3 x_2^3 x_3^3 = 0,$$

$$t_3 + 8a^3\left(t_1 + t_2 + t_3 - 3 t_1^{\frac{1}{3}} t_2^{\frac{1}{3}} t_3^{\frac{1}{3}}\right) = 0,$$

$$[8a^3 t_1 + 8a^3 t_2 + (1+8a^3) t_1]^3 - 3^3\cdot 2^9 a^9 t_1 t_2 t_3 = 0,$$

$$y_3^3 - \frac{1}{1+8a^3}(8a^3 y_3^3 - y_2^3 - y_1^3 - 6a y_1 y_2 y_3) = 0,$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6a y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Ainsi la substitution (8) transforme en elle-même la cubique (9).

7. Dans les formules (8), je peux substituer au paramètre a son expression tirée de (9). J'obtiendrai ainsi une substitution applicable à tout le plan, et qui transformera en elle-même chaque cubique du faisceau (9).

Tirons d'abord des formules (8) les expressions des y en fonction des x, ce qui donne:

$$
(10)\quad \begin{cases}
-\frac{3^4}{\lambda^3\mu}y_2 = (1+8a^3)(x_3^3+x_2^3+x_1^3)^3 + 8a^3\Theta(x_3^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_1^3)^3 \\
\qquad\qquad +8a^3\Theta^2(x_3^3+\Theta x_2^3+\Theta^2 x_1^3)^3, \\
-\frac{3^4}{\lambda^3\mu}y_1 = (1+8a^3)(x_3^3+x_2^3+x_1^3)^3 + 8a^3\Theta^2(x_3^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_1^3)^3 \\
\qquad\qquad +8a^3\Theta(x_3^3+\Theta x_2^3+\Theta^2 x_1^3)^3, \\
\frac{2\cdot 3^4 a}{\lambda^3\mu}y_3 = (1+8a^3)(x_3^3+x_2^3+x_1^3)^3 + 8a^3(x_3^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_1^3)^3 \\
\qquad\qquad +8a^3(x_3^3+\Theta x_2^3+\Theta^2 x_1^3)^3.
\end{cases}
$$

Pour développer les seconds membres de ces équations, remarquons qu'on a en général:

$$
\begin{aligned}
&A(u_3+u_2+u_1)^3+B(u_3+\Theta^2u_2+\Theta u_1)^3+C(u_3+\Theta u_2+\Theta^2 u_1)^3 \\
&=(A+B+C)(u_1+u_2+u_3)^3+3(\Theta-1)(C-\Theta^2B)(u_1u_2^2+u_2u_3^2+u_3u_1^2) \\
&\qquad +3(\Theta-1)(B-\Theta^2C)(u_2u_1^2+u_3u_2^2+u_1u_3^2).
\end{aligned}
$$

Au moyen de cette identité on reconnait que le second membre de la première équation (10) se réduit à

$$(x_1^3+x_2^3+x_3^3)^3 + 3\cdot 24a^3(x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6).$$

En vertu de l'équation (9), on peut remplacer cette expression par

$$3\cdot 24a^3(x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6-3x_1^3x_2^3x_3^3).$$

De même, le second membre de la deuxième équation (10) peut être remplacé par une expression qui diffère de la précédente par la permutation de deux indices. Quant à la troisième équation (10), son second membre devient, par des transformations analogues

$$
\begin{aligned}
&24a^3(x_1^9+x_2^9+x_3^9-3x_1^3x_2^3x_3^3) \\
&=24a^3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^3+\Theta x_2^3+\Theta^2x_3^3)(x_1^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_3^3).
\end{aligned}
$$

Ce qui peut encore s'écrire, eu égard à (9):

$$-6\cdot 24a^4x_1x_2x_3(x_1^6+x_2^6+x_3^6-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3).$$

Si je pose maintenant $\sigma = \frac{-9}{8\lambda^3\mu a^3}$, les formules (10) se changent en

$$
(11)\quad \begin{cases}
\sigma y_2 = x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6-3x_1^3x_2^3x_3^3, \\
\sigma y_1 = x_2^3x_1^6+x_3^3x_2^6+x_1^3x_3^6-3x_1^3x_2^3x_3^3, \\
\sigma y_3 = x_1x_2x_3(x_1^6+x_2^6+x_3^6-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3)
\end{cases}
$$

et nous avons ce résultat: *la substitution* (11) *transforme en elle-même toute cubique du faisceau* $x_1^3+x_2^3+x_3^3+6ax_1x_2x_3=0$.

Si l'on observe maintenant que les seconds membres des équations (11) sont décomposables en facteurs, on reconnait que *la substitution* (11) *coïncide avec la substitution* (*A*) *du* No. 4. Effectivement les équations (11) peuvent s'écrire:

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma y_2 = (x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2)(x_1x_2^2+\Theta x_2x_3^2+\Theta^2x_3x_1^2)\cdot \\ \qquad\qquad (x_1x_2^2+\Theta^2x_2x_3^2+\Theta x_3x_1^2)=A_2'A_3'A_4', \\ \sigma y_1 = (x_2x_1^2+x_3x_2^2+x_1x_3^2)(x_2x_1^2+\Theta x_3x_2^2+\Theta^2x_1x_3^2)\cdot \\ \qquad\qquad (x_2x_1^2+\Theta^2x_3x_2^2+\Theta x_1x_3^2)=A_2A_3A_4, \\ \sigma y_3 = x_1x_2x_3(x_1^3+\Theta x_2^3+\Theta^2x_3^3)(x_1^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_3^3)=x_1x_2x_3A_1A_1'. \end{cases}$$

L'origine actuelle de cette substitution (A), qui réside dans les formules (8), met de nouveau en évidence qu'à chaque point y correspondent neuf points x.

8. Pour avancer dans l'étude de la substitution (A), je vais chercher comment elle transforme quelques-unes des lignes considerées précédemment.

Observons tout d'abord que le point d'inflexion $x_3=0$, $x_1+x_2=0$ a pour transformé $y_3=0$, $y_1+y_2=0$, c'est-à-dire se transforme en lui-même. Désignons par J ce point d'inflexion. Il résulte de là que, considéré dans la figure (y) il a pour transformés, dans la figure (x), les neuf points d'inflexion.

La droite $x_1-x_2=0$ a évidemment pour transformée la droite $y_1-y_2=0$. Il en résulte, ce que d'ailleurs les formules (11) permettent de vérifier aisément, que l'axe d'homologie $y_1-y_2=0$, conjugué du point J, a pour transformée la figure composée des neuf axes d'homologie. C'est ce qu'exprime l'équation

$$(13)\qquad \sigma(y_1-y_2) = -(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3).$$

9. Désignons par A le produit des 8 quantités $A_1\cdots A_4'$. On a, d'après les formules (12)

$$\sigma^3y_1y_2y_3 = Ax_1x_2x_3$$

et puisque toute cubique du faisceau est transformée en elle-même, il en résulte

$$\sigma^3(y_1^3+y_2^3+y_3^3) = A(x_1^3+x_2^3+x_3^3).$$

$$(14)\quad \sigma^3(y_1^3+y_2^3+y_3^3+6ay_1y_2y_3) = A(x_1^3+x_2^3+x_3^3+6ax_1x_2x_3).$$

Au moyen de cette relation (14), nous pouvons trouver aisément la transformée d'une droite d'inflexions quelconque, en observant qu'un triangle d'inflexions est une cubique du faisceau. Considérons, par exemple, le triangle T_2 dont les côtés x_1', x_2', x_3' sont donnés par

$$(15)\quad x_1'=x_3+\Theta x_2+\Theta^2x_1,\quad x_2'=x_3+\Theta^2x_2+\Theta x_1,\quad x_3'=x_3+x_2+x_1,$$

le côté x_3' passant par J. Posons de même:

$$y_1'=y_3+\Theta y_2+\Theta^2y_1,\quad y_2'=y_3+\Theta^2y_2+\Theta y_1,\quad y_3'=y_3+y_2+y_1.$$

Comme conséquence de (14), on aura:

$$\sigma^3y_1'y_2'y_3' = Ax_1'x_2'x_3'.$$

Il résulte de là que les trois expressions des y', qui sont chacune du

9ième degré, se partagent entre elles les facteurs du second membre comme le font les expressions des y: deux d'entre elles contiennent trois facteurs A; la troisième, les deux autres facteurs A et le produit $x_1'x_2'x_3'$. La droite $y_3'=0$ contenant le point J, c'est l'expression de y_3' qui contient le facteur $x_1'x_2'x_3'$. La substitution α, adjointe à J, permute y_1 et y_2 sans altérer y_3, et, de même, permute y_1', y_2' sans altérer y_3'. D'autre part, on reconnait sans peine que les deux cubiques A, adjointes à un même triangle, s'échangent entre elles par toute substitution α. Donc les deux facteurs A qui complètent l'expression de y_3' correspondent à deux cubiques adjointes à un même triangle. Je dis que ce triangle est précisément celui dont nous transformons en ce moment les côtés, le triangle T_2. Observons, en effet, que les deux cubiques A, adjointes à un triangle T_n, ne passent pas aux sommets de ce triangle. Si donc $y_3'=x_1'x_2'x_3'A_nA_n'$, n étant autre que 2, la courbe composée qu'on obtient en égalant à zéro le second membre de cette expression, ne passe pas aux sommets de T_n. Or cette conclusion est impossible, puisque cette courbe composée fait partie du réseau envisagé au No. 4., et dont chaque courbe passe aux sommets des quatre triangles. Donc $n=2$, c'est-à-dire que: *une droite d'inflexions passant par le point J, et envisagée dans la figure (y), a pour transformée, dans la figure (x), l'ensemble des trois côtés du triangle d'inflexions dont elle fait partie, et, en outre, les deux cubiques A, qui sont adjointes à ce triangle. Les deux autres côtés du triangle ont ensemble, pour transformées, les six autres cubiques A.*

Comme conséquence, l'ensemble des 8 droites d'inflexions qui ne passent pas en J, se transforme en l'ensemble des 8 cubiques A, pris trois fois. Voici maintenant la conséquence algébrique, qui sera utile plus loin.

Considérons les équations analogues à (15), et qui définissent les autres triangles d'inflexions:

$$x_1''=\Theta\, x_1+x_2+x_3,\quad x_2''=x_1+\Theta\, x_2+x_3,\quad x_3''=x_1+x_2+\Theta\, x_3,$$
$$x_1'''=\Theta^2x_1+x_2+x_3,\quad x_2'''=x_1+\Theta^2x_2+x_3,\quad x_3'''=x_1+x_2+\Theta^2x_3.$$

On aura:

$$\sigma^8 y_1y_2y_1'y_2'y_1''y_2''y_1'''y_2'''=(A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'A_4A_4')^3, \tag{16}$$

égalité que le raisonnement précédent démontre, sauf un facteur numérique. En faisant $x_3=0$, $x_1=x_2$, ce qui entraîne $y_3=0$, $y_1=y_2$; on reconnaîtra que l'égalité (16) est complètement exacte.

10. J'ai maintenant en vue d'obtenir la transformée de la courbe B, lieu partiel des points x_4. A cet effet, je vais établir une autre propriété de la substitution (A). Considérons les quatre quantités:

$$\begin{aligned} X &= x_1^9 + x_2^9 + x_3^9, \\ Y &= x_1^3 x_2^3 x_3^3, \\ Z &= x_1^3 x_2^6 + x_2^3 x_3^6 + x_3^3 x_1^6, \\ U &= x_2^3 x_1^6 + x_3^3 x_2^6 + x_1^3 x_3^6. \end{aligned}$$

Si on les envisage pour un point x de la cubique

$$C = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3 = 0, \tag{17}$$

elles sont liées par la relation linéaire:

$$X + 3Y + 3Z + (6^3 a^3 + 6)\, U \equiv 0.$$

Si donc on considère une quelconque des courbes D représentées par l'équation

$$D = \lambda X + \mu Y + \nu Z + \varrho U = 0,$$

on peut prendre arbitrairement deux points seulement de la cubique C pour y faire passer la courbe D. Les autres points, au nombre de 25 sont par là déterminés. Je dis que *les 27 points d'intersection de la cubique C et d'une quelconque des courbes D sont distribués sur* 9 *lignes droites, transformées les unes des autres par les substitutions homographiques β.*

Pour le prouver, considérons une droite b_x; prenons ses transformées b_x', b_x'' par les deux substitutions β qui sont conjuguées du triangle de référence, et faisons le produit. Il vient:

$$b_x b_x' b_x'' = b_1^3 x_1^3 + b_2^3 x_2^3 + b_3^3 x_3^3 - 3 b_1 b_2 b_3 x_1 x_2 x_3.$$

Ce qui, pour un point de la cubique C, peut s'écrire:

$$b_x b_x' b_x'' \equiv \left(b_1^3 + \frac{b_1 b_2 b_3}{2a}\right) x_1^3 + \left(b_2^3 + \frac{b_1 b_2 b_3}{2a}\right) x_2^3 + \left(b_3^3 + \frac{b_1 b_2 b_3}{2a}\right) x_3^3.$$

Pour obtenir le produit de b_x et de ses huit transformées par les substitutions β, il suffit de permuter circulairement les indices dans cette dernière formule. Il en résulte manifestement que le produit de ces neuf facteurs est de la forme D, sauf des multiples de C. D'ailleurs, la droite b_x peut, ainsi que la courbe D, être menée par deux points arbitraires de C. Donc la proposition est démontrée.

11. Il résulte de là une conséquence immédiate pour la substitution (A). On peut l'écrire:

$$\sigma y_1 = Z - 3Y, \quad \sigma y_2 = U - 3Y, \quad \sigma y_3 \equiv -\frac{1}{6a}(X - 3Y).$$

Donc la transformée par (A) d'une droite de la figure (y) coupe une cubique quelconque du faisceau dans les mêmes points qu'une certaine courbe D. D'où cette conséquence: *A trois points x en ligne droite, et sur une même cubique C, correspondent par la substitution* (A), *trois points y en ligne droite.*

A deux points x infiniment voisins correspondent deux points y

infiniment voisins. Donc: *si la tangente d'une cubique C au point x rencontre de nouveau la cubique au point x', et que y, y' soient les transformés de x, x' par la substitution (A), y' est sur la tangente de C en y.* En d'autres termes, si *l'on effectue successivement les substitutions (A), (B), on peut en intervertir l'ordre sans changer le résultat.*

Pour plus de clarté, appelons substitution (A) celle qui transforme un point y en neuf points x, et substitution (A^{-1}) celle qui transforme un point x en un point y. La substitution (A^{-1}) change en elle-même la droite $E = x_1 - x_2 = 0$. La substitution (B) la change en la courbe $\boldsymbol{B}$, lieu partiel des points x_4 (No. 5.). Transformer E par les substitutions successives (A^{-1}), (B), (A) dans cet ordre, c'est donc transformer la courbe B par la substitution (A). Mais les deux dernières substitutions effectuées sur E peuvent être interverties, comme je viens de le prouver. L'opération effectuée sur E est donc la même que celle-ci (A^{-1}) (A) (B). Mais l'opération (A^{-1}) (A) change la droite E en l'ensemble des 9 axes d'homologie analogues. Donc la transformée de la courbe B par la substitution (A) coïncide avec l'ensemble des transformées par (B) des 9 axes d'homologie, c'est-à-dire avec l'ensemble des neuf courbes analogues à B. Cette propriété s'exprime par l'égalité

$$(18)\quad y_1(y_2^3 - y_3^3) - y_2(y_3^3 - y_1^3) = [x_1^3(x_2^3 - x_3^3)^3 - x_2^3(x_3^3 - x_1^3)^3] \times \cdot [x_2^3(x_3^3 - x_1^3)^3 - x_3^3(x_1^3 - x_2^3)^3]\ [x_3^3(x_1^3 - x_2^3)^3 - x_1^3(x_2^3 - x_3^3)^3],$$

qui est prouvée, sauf un facteur numérique. Il suffira de faire $x_3 = y_3 = 0$ pour achever la démonstration de cette formule (18).

Ici se termine la partie purement algébrique et géométrique de ce mémoire, que je vais poursuivre en introduisant les fonctions elliptiques.

Solution des problèmes proposés au moyen des fonctions elliptiques.

12. Le mode de représentation des points d'une courbe cubique par les fonctions elliptiques, imaginé par M. Clebsch, peut être, comme on sait, varié de diverses manières. Ainsi que l'a fait voir M. Hermite*), le mode le plus général consiste à prendre les rapports de deux des coordonnées à la troisième, et à égaler séparément ces deux rapports à deux fonctions doublement périodiques, ayant trois infinis, les mêmes pour toutes deux, dans le parallélogramme des périodes communes ω, ω', et dépendant du même argument t, à chaque valeur duquel correspond ainsi un point de la courbe. Les équations obtenues de la sorte définissent, de la manière la plus générale, une cubique plane.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXXII.

Je rappelle sommairement les propositions suivantes:

L'argument t *étant choisi de manière à être nul pour un point d'inflexion* J, *la somme des arguments des* $3m$ *points d'intersection de la cubique avec une courbe de degré* m *ne diffère de zéro que par des multiples des périodes;* et comme conséquences: *les points* x_m, *en chacun desquels il existe des courbes de degré* m *ayant avec la cubique des contacts de l'ordre* $(3m-1)$ *sont ceux dont les arguments ont la forme* $\frac{n\omega+n'\omega'}{3m}$, *n et n' étant des nombres entiers;*

les points x_2 *ou sextactiques sont les points de contact des tangentes menées des points d'inflexion, les points* x_4 *sont les points de contact des tangentes menées des points* x_2*;*

les points x_3 *sont les sommets des triangles inscrits et circonscrits.* Car le triangle dont les sommets ont pour arguments

$$\frac{n\omega+n'\omega'}{9}, \quad \frac{-2n\omega-2n'\omega'}{9}, \quad \frac{4n\omega+4n'\omega'}{9}$$

est inscrit et circonscrit, et ses sommets sont des points x_3. *Les points* x_3 *sont au nombre de* 72; car l'expression $\frac{n\omega+n'\omega'}{9}$ a 81 valeurs, d'où il faut défalquer les 9 valeurs $\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$ qui répondent aux points d'inflexion.

Enfin, *si le point* x *a pour argument* t, *les huit points transformés de* x *par les substitutions* β *ont pour arguments* $t+\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$; *et les* 9 *points transformés de* x *par les substitions* α *ont pour arguments* $-t+\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$.

13. Je rappelle maintenant quelques formules relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. Je vais reproduire ces formules telles que je les ai employées dans un travail inséré aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* (3, 17, 31 Mars 1879). Je rappelle toutefois que, sous une forme peu différente, elles ont déjà été mises en usage par M. Kiepert*) et par M. Max Simon**), et bien antérieurement par M. Moutard***).

Considérons la fonction $\mathsf{H}(t)$ de Jacobi. Si l'on écrit H_a au lieu de $\mathsf{H}(at)$, cette fonction satisfait à la relation

$$(19) \qquad \mathsf{H}_{a-b}\mathsf{H}_{a+b}\mathsf{H}_c^2+\mathsf{H}_{b-c}\mathsf{H}_{b+c}\mathsf{H}_a^2+\mathsf{H}_{c-a}\mathsf{H}_{c+a}\mathsf{H}_b^2=0.$$

Dans cette relation (19) existe une double homogénéité; homogénéité par rapport à la lettre H, tous les termes étant du 4ème *degré*; homo-

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. LXXVI.

**) ibid. Bd. LXXXI.

***) Poncelet, applications d'analyse et de Géométrie, T. I. p. 545.

généité par rapport aux carrés des indices, tous les termes étant, à ce point de vue, du *poids* $2(a^2+b^2+c^2)$. Prenons la fonction

$$(20)\qquad g_m(t) = \frac{\mathsf{H}(mt)\,\mathsf{H}(t)^{\frac{m^2-4}{3}}}{\mathsf{H}(2t)^{\frac{m^2-1}{3}}},$$

qui est du degré et du poids zéro, et il est manifeste que la fonction g_m satisfait, elle aussi, à la relation (19). Les quantités g_1 et g_2 sont toutes deux l'unité. Pour éviter les exposants fractionnaires, prenons $g_3{}^3$ au lieu de g_3 et posons:

$$(21)\qquad \xi(t) = g_3{}^3(t) = \frac{\mathsf{H}^3(3t)\,\mathsf{H}^5(t)}{\mathsf{H}^8(2t)}, \quad \eta(t) = g_4(t) = \frac{\mathsf{H}(4t)\,\mathsf{H}^4(t)}{\mathsf{H}^5(2t)}.$$

Nous avons alors cette proposition: *la quantité $g_m(t)$ est un polynome entier en $\xi(t)$, $\eta(t)$, quand l'entier m n'est pas divisible par* 3. *Quand m est un multiple de* 3, *$g_m(t)$ est le produit de $\xi^{\frac{1}{3}}(t)$ par un tel polynome.* Effectivement la formule (19) de Jacobi donne pour le calcul de g_m ces deux formules récurrentes

$$(22)\qquad g_{2n+1} = g_{n+2}g_n^3 - g_{n-1}g_{n+1}^3, \quad g_{2n} = g_n\left(g_{n+2}g_{n+1}^2 - g_{n-2}g_{n+1}^2\right).$$

On en tire g_m en fonction entière de η, $\xi^{\frac{1}{3}}$, et l'on reconnait sans peine que cette fonction entière est composée en ξ comme l'indique l'énoncé précédent.

14. Les fonctions g_m sont paires et, pour les valeurs entières de m, doublement périodiques. Pour $t=0$, $g_m(t)$ se réduit à $\frac{m}{2^{\frac{m^2-1}{3}}}$. La fonction $\xi(t)$, dans un parallélogramme des périodes ω, ω', a 8 zéros triples $\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$, n et n' n'étant pas nuls ensemble. Elle a 3 infinis octuples $\frac{n\omega+n'\omega'}{2}$. La fonction $\eta(t)$ a 12 zéros simples $\frac{n\omega+n'\omega'}{4}$, n et n' n'étant pas pairs en même temps, et 3 infinis quadruples, les mêmes que ceux de $\xi(t)$.

L'argument t correspondant au point x d'une cubique C, je vais calculer les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ au moyen des coordonnées du point x.

Soit $x_3=0$, $x_1+x_2=0$ le point d'inflexion J pour lequel t est nul.

Les points pour lesquels on a $2t\equiv 0$ mais non $t\equiv 0$, sont les trois points sextactiques situés sur la polaire de J, $x_1-x_2=0$.

Les points pour lesquels on a $4t\equiv 0$, mais non $2t\equiv 0$, sont les 12 points x_4 situés sur la courbe du 4ème degré B (No. 5.)

$$B = x_1(x_2{}^3-x_3{}^3) - x_2(x_3{}^3-x_1{}^3) = 0.$$

Considérons la fonction

$$\eta' = \frac{x_1(x_2^3 - x_3^3) - x_2(x_3^3 - x_1^3)}{(x_1 - x_2)^4},$$

et envisageons-la le long de la cubique donnée C.

Il est manifeste que cette fonction, ainsi envisagée, a les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $\eta(t)$, et avec les mêmes ordres de multiplicité. Comme elle est homogène et de degré zéro, c'est aussi une fonction doublement périodique de t, aux mêmes périodes que $\eta(t)$. C'est donc $\eta(t)$ sauf un facteur numérique. Pour connaître ce facteur, observons qu'au point J, η' se réduit à $-\frac{1}{8}$, tandis que, pour $t = 0$, $\eta(t)$ se réduit à $\frac{1}{8}$. Donc η' et $\eta(t)$ ne diffèrent que par le signe.

Prenons maintenant, le long de C, la fonction

$$\xi' = \frac{x_1 x_2 x_1' x_2' x_1'' x_2'' x_1''' x_2'''}{(x_1 - x_2)^8},$$

dont le numérateur est composé du produit des huit droites d'inflexion ne passant pas en J, et explicitement données au No. 9. Cette fonction, également homogène et de degré zéro, est aussi doublement périodique, et a les mêmes périodes que $\xi(t)$. Mais elle a aussi, comme $\xi(t)$, pour zéros les 8 valeurs de $\frac{n\omega + n'\omega'}{3}$, sauf la valeur zéro, et elle les a trois fois, attendu que les huit droites qui figurent en son numérateur contiennent chacune trois des huit points d'inflexion autres que J. La fonction ξ' a aussi les mêmes infinis que $\xi(t)$, octuples aussi. Donc ξ' et $\xi(t)$ ne diffèrent que par un facteur numérique. D'ailleurs, au point J, ξ' se réduit à $-\frac{3^3}{2^8}$ et $\xi(t)$ à $\frac{3^3}{2^8}$. Donc ξ' et $\xi(t)$ ne diffèrent que par le signe. Nous avons donc ces formules

$$(23) \quad \begin{cases} \xi(t) = -\dfrac{x_1 x_2 x_1' x_2' x_1'' x_2'' x_1''' x_2'''}{(x_1 - x_2)^8}, \\[2ex] \eta(t) = -\dfrac{x_1(x_2^3 - x_3^3) - x_2(x_3^3 - x_1^3)}{(x_1 - x_2)^4}. \end{cases}$$

Si l'on développe le numérateur de $\xi(t)$, on a encore:

$$(24) \quad \xi(t) = -\frac{x_1 x_2 [(x_1 + x_3)(x_1 + x_3 - x_2) + x_2^2][(x_2 + x_3)(x_2 + x_3 - x_1) + x_1^2] \times [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3 - x_2 x_1 - x_3 x_1]}{(x_1 - x_2)^8}.$$

15. Les formules (23) permettent de calculer la fonction $g_m(t)$, exprimée par les coordonnées du point x. Mais, comme ce sont les points $3mt \equiv 0$ qui nous intéressent ici, je vais calculer directement $\xi(3t)$ et $\eta(3t)$, par un raisonnement tout semblable. Si nous faisons $t' = 3t$, nous savons que:

les points $2t' \equiv 0$ sont les points sextactiques, situés sur le lieu

$$(x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3) = 0;$$

les points $4t' \equiv 0$ sont les points x_4, dont le lieu complet se compose des 9 courbes B, représentées par:

$$[x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3-x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3]\,[x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3-x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3]$$
$$[x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3-x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3]=0;$$

les points $3t' \equiv 0$ sont les points x_3, dont le lieu complet est l'ensemble des 8 courbes $A_1 \cdots A_4'$. En reproduisant alors le raisonnement précédent, j'obtiens ces nouvelles formules:

$$(25)\quad \begin{cases} \xi(3t) = -\dfrac{(A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'A_4A_4')^3}{[(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3)]^8}, \\[2ex] \eta(3t) = -\dfrac{[x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3-x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3]\,[x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3-x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3]\times [x_3^3(x_1^3-x_2^3)-x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3]}{[(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3)]^4}. \end{cases}$$

Ou en développant le numérateur de $\xi(3t)$:

$$(26)\quad \xi(3t) = -\frac{(x_1^6+x_2^6+x_3^6-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3)^3(x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6-3x_1^3x_2^3x_3^3)^3\times (x_2^3x_1^6+x_3^3x_2^6+x_1^3x_3^6-3x_1^3x_2^3x_3^3)^3}{[(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3)]^8}.$$

16. La comparaison des formules (23) et (25) va nous faire connaître enfin la véritable nature de la substitution (A), dont nous nous sommes précédemment occupés. Mettons, par la pensée, dans les seconds membres de (23), y au lieu de x, et désignons par t' l'argument du point y. Les formules (23) donnent alors $\xi(t')$ et $\eta(t')$. Substituons maintenant aux y leurs expressions données par la substitution (A), et rappelons-nous les formules (13), (16) et (18) qui nous fournissent le résultat de cette substitution. La conclusion est celle-ci:

$$\xi(t') = \xi(3t), \quad \eta(t') = \eta(3t).$$

L'étude que j'ai faite des fonctions ξ, η dans le travail précité, conduit à cette conséquence, que ces deux fonctions étant données numériquement, l'argument, à des multiples près des périodes, est déterminé sauf le signe. On a donc $t' \equiv \pm 3t$, et nous n'avons plus qu'à lever cette ambiguïté de signe.

Soit x' le point de rencontre de la droite Jx avec la cubique C, z le point de rencontre de la tangente en x avec C. Si l'on a $t' \equiv 3t$, le point y est en ligne droite avec x' et z. Si l'on a, au contraire, $t' \equiv -3t$, x' et z sont en ligne droite avec le point y' situé sur la droite Jy. Examinons si ce second cas a lieu. Le point x' a pour coordonnées x_2, x_1, x_3 et le point y' a pour coordonnées y_2, y_1, y_3. Il faut donc examiner le déterminant:

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_1 & y_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

dans lequel les y sont données par (11), et les z par (6). Il est aisé de vérifier que ce déterminant n'est pas nul; car le terme du plus haut degré en x_1, du 10ème degré, est unique et ne peut, par conséquent, se réduire. Au contraire, dans le déterminant que l'on obtient par échange de y_1 et y_2, il y a deux termes du 10ème degré en x_1, et qui se détruisent. Ainsi:

Si le point x a l'argument t sur la cubique du faisceau qui y passe, le point y qui lui correspond par la substitution (A), a l'argument $3t$; ou encore: *Si l'on inscrit à une cubique du faisceau un triangle $xx'z$ de manière que le côté xz soit tangent à la cubique en x, et que le côté xx' passe au point d'inflexion J, le troisième côté passe au point y, correspondant au sommet opposé x par la substitution (A).*

17. Arrivons maintenant à la solution définitive des problèmes qui nous occupent. Calculons, au moyen des formules récurrentes (22), $g_m(3t)$, en mettant pour ξ, η les valeurs (25), et égalons le résultat à zéro. Nous obtenons ainsi l'équation d'une courbe qui coupe toute cubique du faisceau dans les points dont les arguments sont les zéros de $g_m(3t)$, et ne la coupe en aucun autre. Si m est un nombre composé, g_m se décompose en autant de facteurs que m a de diviseurs. On prendra simplement le facteur qui répond à m lui-même, et l'on aura l'équation d'une courbe coupant chaque cubique du faisceau, et la coupant simplement, en tous les points x_m, et ne la coupant en aucun autre.

Mais nous pouvons aussi calculer $g_m(t)$ en mettant pour ξ, η les valeurs (23), et nous obtenons de même une courbe coupant simplement chaque cubique du faisceau en tous les points dont les arguments vérifient $mt \equiv 0$, sans vérifier $m't \equiv 0$, m' étant moindre que m. Cette courbe est une partie du lieu des points x_m, si m est premier avec 3. Nous pouvons calculer le degré de ce lieu partiel d'après le nombre des points où il rencontre une cubique du faisceau. Or le nombre des solutions, distinctes suivant les périodes, de l'équation $mt \equiv 0$, et qui n'appartiennent à aucune autre équation $m't \equiv 0$, où m' soit moindre que m, se calcule aisément. C'est

$$m^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots,$$

si $p, p', p'' \cdots$ sont les facteurs premiers de m, distincts entre eux. Le tiers de ce nombre est donc le degré de ce lieu partiel que nous envisageons.

18. Pour connaître le lieu complet, donnons aux deux entiers n, n' les valeurs 0, 1, 2 sans leur donner en même temps la valeur zéro. La relation $mt \equiv 0$ ne coïncide avec aucune des relations

$$m\left(t+\frac{n\omega+n'\omega'}{3}\right) \equiv 0.$$

Si donc on transforme le lieu partiel par les substitutions β, on obtient chaque fois un nouveau lieu partiel. Si, au contraire, on change t en $-t$, la relation $mt \equiv 0$ n'est pas altérée, et les huit autres s'échangent toutes entre elles. Donc: *Quand le nombre m n'est pas divisible par 3, le lieu des points x_m se compose de 9 courbes distinctes, dont chacune coupe une cubique quelconque du faisceau en des points x_m, et non en d'autres points. Chacun des lieux partiels est adjoint à un point d'inflexion; il reste inaltéré par la substitution homologique dont ce point d'inflexion est le centre, et qui laisse inaltérées les cubiques du faisceau. Cette substitution permute entre eux tous les autres lieux partiels. Si $p, p', p'' \cdots$ sont les facteurs premiers du nombre m, distincts entre eux, le degré de chaque lieu partiel est*

$$\frac{1}{3}\, m^2 \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots.$$

19. Au lieu d'effectuer sur le lieu partiel $mt \equiv 0$ les substitutions β, nous aurions pu passer de $g_m(t)$ à $g_m(3t)$ en remplaçant les x par les y, puis mettant au lieu des y les valeurs données par les formules de la substitution (A). En d'autres termes, le lieu complet est le transformé du lieu partiel par la substitution (A). C'est ce qui résulte de la proposition établie au No. 16. On reconnait ainsi, de nouveau, que le lieu complet est d'un degré égal à celui du lieu partiel, multiplié par 9. Mais on voit aussi que, *le nombre m n'étant pas divisible par 3, le lieu partiel des points x_m, adjoint au point d'inflexion J se transforme en lui-même par la substitution* (A^{-1}). C'est ce que nous avons reconnu précédemment pour le lieu des points x_2 et x_4.

Prenons maintenant le lieu complet des points x_m, et appliquons-lui la substitution (A). Chacun des lieux partiels se transforme en un lieu séparé, de degré neuf fois plus grand. Mais le lieu partiel adjoint au point J se change en le lieu total des points x_m. Le lieu complet des points x_{3m} se compose donc seulement de 8 courbes. Le degré de chacune d'elles est égal à neuf fois celui des précédentes. En outre, chacun de ces lieux partiels reste inaltéré par les substitutions β.

Répétons encore la substitution (A) sur le lieu complet des points x_{3m}; chaque lieu partiel donne un nouveau lieu partiel des points x_{9m}, de degré neuf fois plus grand, et ainsi de suite. Donc: *Si $m = 3^\alpha \mu$, μ étant premier avec 3, et que $p, p', p'' \cdots$ soient les facteurs premiers de μ, le lieu des points x_m se compose de huit courbes distinctes, dont chacune est du degré* $3^{2\alpha-1}\mu^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots$.

Même raisonnement, appliqué au lieu des points x_3, donne cette conséquence: *le lieu des points x_{3^α} se compose de 8 courbes, dont chacune est du degré* $3^{2\alpha-1}$.

Dans ces deux cas, chaque lieu partiel reste inaltéré par les substitutions homographiques β; il est conjugué avec un autre lieu partiel, de telle sorte que deux conjugués s'échangent entre eux par les substitutions α.

Introduction des covariants.

20. Je termine ce mémoire en montrant comment les résultats précédents permettent de résoudre le problème que je m'étais primitivement posé: *pour une courbe du 3ème degré, trouver le covariant qui s'évanouit en chaque point x_m de cette courbe.* On voit maintenant que ce problème peut aussi s'énoncer ainsi: *Soit $f=0$ l'équation d'une cubique et Δ le hessien de f, exprimer en égalant à zéro un combinant de la forme $\varkappa f+\lambda\Delta$, l'équation du lieu des points x_m pour les courbes du faisceau $\varkappa f+\lambda\Delta=0$.*

Pour résoudre ce problème, il suffira de mettre sous forme de combinants les expressions (25) de $\xi(3t)$ et $\eta(3t)$, ce qui sera facile grâce à l'étude approfondie qui a été faite des formes cubiques ternaires.

J'emploierai les notations mêmes des *Vorlesungen über Geometrie von Clebsch*, publiées par M. Lindemann, et je poserai, en considérant la forme

$$\begin{aligned} f &= a_x^3, \\ \Delta &= (abc)^2 a_x b_x c_x = \alpha_x^3, \\ N &= (a\alpha x) a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n, \qquad N_i = \frac{\partial N}{\partial u_i}, \\ \psi_x^6 &= N_{x'} N_n' N_x^3 N_x'^3, \\ \Omega &= (a\alpha\psi) a_x^2 \alpha_x^2 \psi_x^5. \end{aligned}$$

Je désignerai par R le discriminant, pris de manière à ce qu'il soit égal à 6^2 pour $a_x'^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

21. Il est très aisé d'obtenir l'expression de $\eta(3t)$. Considérons effectivement l'expression

$$\eta' = \frac{R(N_1^3-N_2^3)(N_2^3-N_3^3)(N_3^3-N_1^3)}{\Omega^4}.$$

On vérifie sans peine que, pour la forme $a_x'^3$, η' se réduit à $\eta(3t)$, sauf un facteur numérique. Mais η' est aussi un combinant *absolu*, c'est-à-dire qu' il reste absolument invariable quand on remplace f par $\varkappa f+\lambda\Delta$. Effectivement, si l'on pose

$$G(\varkappa,\lambda) = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4, \tag{27}$$

T, S désignant les deux invariants de f, on sait que la substitution de $\varkappa f+\lambda\Delta$ à f a pour effet de multiplier R par G^3, Ω par G^3 et N par G, en sorte que η' n'est pas altéré. L'expression analytique de η' est donc la même pour $a_x'^3$ et pour

$$a_x^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3.$$

Donc, dans tous les cas, η' ne diffère de $\eta(3t)$ que par un facteur numérique, facile à déterminer.

22. Pour obtenir l'expression de $\xi(3t)$, considérons les deux facteurs A_1, A_1' de son numérateur.

$$A_1 = x_1^3 + \Theta x_2^3 + \Theta^2 x_3^3, \quad A_1' = x_1^3 + \Theta^2 x_2^3 + \Theta x_3^3.$$

Ces deux quantités sont précisément les deux covariants irrationels, désignés dans les *Vorlesungen* (p. 572) par la notation M, N. Si l'on prend l'expression qui est donnée pour ces deux covariants dans l'ouvrage cité, en y faisant $f = 0$, on voit, qu'à un facteur indépendant des x près, leur produit coïncide avec $(4\lambda\psi + \varkappa\Delta^2)$, où λ, $\varkappa$ satisfont à l'équation $G = 0$. Les 4 couples de facteurs qui composent le numérateur de $\xi(3t)$ s'obtiendront si l'on prend successivement pour $\lambda : \varkappa$ les quatre racines de $G = 0$. On peut donc écrire, pour ce numérateur, à un facteur près, le cube de

(27a) $$G(4\psi, -\Delta^2) = 2^8\psi^4 - 2^4 S\psi^2\Delta^4 + \frac{2^4}{3} T\psi\Delta^6 - \frac{1}{12} S^2\Delta^8.$$

En divisant le cube de cette expression par Ω^8, on aura, à un facteur près, une expression de $\xi(3t)$. Mais elle ne sera pas sous forme de combinant. En ajoutant des multiples de f, on peut varier l'expression trouvée; une de ces formes est un combinant absolu. Pour trouver cette forme, envisageons les deux combinants $S_{\Delta,-f}$, $T_{\Delta,-f}$, c'est-à-dire, comme dans l'ouvrage cité, les invariants S, T, calculés pour la forme $\varkappa f + \lambda\Delta$, et dans lesquels on fait, après le calcul, $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$. Les expressions de ces combinants sont données dans les *Vorlesungen* (page 640). Si l'on y néglige les multiples de f, ces expressions se réduisent à

$$S_{\Delta,-f} \equiv S\Delta^4, \quad T_{\Delta,-f} \equiv T\Delta^6.$$

Je peux dès lors écrire au lieu de (27a) le combinant suivant

(28) $$A = 2^8\psi^4 - 2^4\psi^2 S_{\Delta,-f} + \frac{2^4}{3}\psi T_{\Delta,-f} - \frac{1}{12}(S_{\Delta,-f})^2,$$

et j'ai pour $\xi(3t)$ l'expression suivante:

(29) $$\xi(3t) = \frac{A^3}{3\cdot 2^8\Omega^8},$$

dans laquelle il est très-facile de vérifier le facteur numérique, seul inconnu jusqu'à présent. Effectivement, pour $f = 0$, $\Delta = 0$, c'est-à-dire pour un point d'inflexion de la courbe f, A se réduit à $2^8\psi^4$, et $\xi(3t)$ à $\frac{3^3}{2^8}\cdot\left(\frac{2^6\psi^3}{3\Omega^2}\right)^4$. Or l'identité suivante, due à M. Brioschi

$$24^7\Omega^2 = 384\psi^3 - 12\psi S_{\Delta,-f} + 2T_{\Delta,-f}$$

donne, pour $f = \Delta = 0$

$$3\Omega^2 = 2^6\psi^3.$$

On voit donc que l'expression précédente se réduit à $\frac{3^3}{2^8}$ pour $3t = 0$. Eu égard à sa provenance, c'est donc bien $\xi(3t)$.

23. Le calcul direct de l'expression η' pour la forme

$$a_x' = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

donne facilement le facteur qui lui est relatif, et l'on a finalement

$$(30) \qquad \eta(3t) = \frac{9R(N_2^3 - N_3^3)(N_3^3 - N_1^3)(N_1^3 - N_2^3)}{2^7\Omega^4} = \frac{B}{\Omega^4}.$$

En prenant les valeurs (29) et (30) de ξ, η, on exprimera au moyen des trois combinants A, B, Ω les équations des lieux des points x_m. Il suffira de faire usage des formules récurrentes (22). Voici, par exemple, les premières équations:

$g_5 = \eta - \xi$, *lieu des points* x_5: $B\Omega^4 - A^3 = 0$,

$g_6 = \xi^{\frac{1}{2}}(\eta - \xi - \eta^2)$, *lieu des points* x_6: $B\Omega^4 - A^3 - B^2 = 0$,

$g_7 = (\eta - \xi)\xi - \eta^3$, *lieu des points* x_7: $(B\Omega^4 - A^3)A^3 - B^3\Omega^4 = 0$,

$g_8 = \eta[(\eta - \xi)(2\xi - \eta) - \xi\eta^2]$,

lieu des points x_8: $(B\Omega^4 - A^3)(2A^3 - B\Omega^4) - A^3B^2 = 0$,

et ainsi de suite.

24. Il existe une autre classe de lieux géométriques dont les équations peuvent se trouver aussi par l'emploi des fonctions ξ, η. Pour développer ce nouvel ordre d'idées, il me faudrait entrer ici dans trop de détails sur les *invariants différentiels*, dont j'ai fondé la théorie dans ma *Thèse**). Je me contente d'énoncer quelques résultats.

Appelons, en modifiant un peu un nom proposé par M. Fouret, *courbe anharmonique* la courbe telle qu'en chacun de ses points la tangente et les trois droites qui unissent ce point à trois poles fixes, fassent un rapport anharmonique constant h. Pour chaque point d'une courbe quelconque C, il existe une courbe anharmonique ayant, en ce point, avec C un contact de l'ordre le plus élevé possible, le 7ème ordre. Disons-la *osculatrice;* et, quand, en un point particulier, l'ordre de ce contact s'élève encore, disons-la *surosculatrice*. Ces définitions posées, on a cette proposition:

Pour le faisceau des cubiques $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$, le lieu du point pour lequel la courbe anharmonique osculatrice de la cubique du faisceau qui passe en ce point, a le rapport anharmonique h, est représenté par l'équation:

---

*) Paris, Gauthiers-Villars, 1878.

$$2^4 \cdot 7^3 (h-2)^2 (h+1)^2 (2h-1)^2 A^3 - 3^2 \cdot 5^2 (h^2-h+1)^3 \Omega^8 = 0.$$

Le lieu du point pour lequel il existe une courbe anharmonique surosculatrice, est représenté par

$$8B - \Omega^4 = 0.$$

Le lieu du point pour lequel la cubique du faisceau a un contact du 8ème ordre avec une courbe du 4ème degré et de la 3ème classe, est représenté par

$$[2^4 B^2 + 2^6 B \Omega^4 - 7^2 \Omega^8 + 3 \cdot 2^7 A^3]^2 - 2^4 \Omega^4 (8B - \Omega^4)^3 = 0.$$

Je pourrais multiplier de tels exemples qui sont des cas particuliers de cette proposition généiale: *Le lieu du point pour lequel, sur la cubique du faisceau qui y passe, un invariant différentiel s'évanouit, se représente par une équation dont le premier membre est une fonction entière des trois combinants A^3, B, Ω^4.*

Paris, Mai 1879.

Beitrag zur Sphärik.

Von Dr. Meissel in Kiel.

Sind in einem sphärischen Dreieck gegeben die Differenzen der Winkel und der gegenüberliegenden Seiten, also

$$\alpha - a = A;\quad \beta - b = B;\quad \gamma - c = C,$$

so setze man:

$$\mu = 45^0 + \frac{A+B+C}{4},$$

$$\cos\lambda = \frac{2\sqrt{\cos\mu \sin\left(\mu - \frac{A}{2}\right)\sin\left(\mu - \frac{B}{2}\right)\sin\left(\mu - \frac{C}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\lambda};\quad \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\lambda};\quad \operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\lambda}.$$

Dann wird:

$$\alpha = p + \frac{A}{2};\quad \beta = q + \frac{B}{2};\quad \gamma = r + \frac{C}{2},$$

$$a = p - \frac{A}{2};\quad b = q - \frac{B}{2};\quad c = r - \frac{C}{2}$$

oder:

$$\alpha_1 = 180^0 - a \quad \text{u. s. w.}$$

$$a_1 = 180^0 - \alpha \quad \text{u. s. w.}$$

Ich fand diese Auflösung aus der Transformation zweiter Ordnung der sphärischen Dreiecke.

Ist nämlich ein sphärisches Dreieck gegeben mit den Elementen $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$; so existirt stets ein zweites sphärisches Dreieck mit den Elementen $a_1, b_1, c_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, wo:

$$\alpha_1 = \frac{\pi + a - \alpha}{2};\quad \beta_1 = \frac{\pi + b - \beta}{2};\quad \gamma_1 = \frac{\pi + c - \gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{a_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)};\quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{b_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)};\quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{c_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Zu bemerken ist noch, dass das transformirte Dreieck dasselbe bleibt, wenn man statt des Grunddreiecks das Supplementardreieck setzt.

Sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Von

A. Markoff in St. Petersburg.

Dans le mémoire „Sur les formes quadratiques" de M. M. A. Korkine et G. Zolotareff*) a été mentionné que la limite précise des minima pour l'ensemble des formes binaires

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le déterminant $b^2 - ac = D$ est positif, est égal à $\sqrt{\frac{4}{5}D}$. Cette quantité est le minimum des formes équivalentes à

$$f_0 = \sqrt{\tfrac{4}{5}D}\,(x^2 - xy - y^2);$$

pour toutes les autres formes f la limite précise de leurs minima est

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}D}.$$

La démonstration de ces théorèmes m'étant communiquée par M. A. Korkine, ainsi que la forme

$$f_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}D}\,(x^2 - 2xy - y^2)$$

dont les équivalentes ont $\sqrt{\frac{1}{2}D}$ pour leur minimum, je me suis proposé d'abord de trouver la quantité qui doit remplacer $\sqrt{\frac{1}{2}D}$ pour toutes les formes non équivalentes à f_0 et f_1. Il résulte de mes recherches que cette quantité $\sqrt{\frac{100}{221}D}$ est le minimum des formes équivalentes à

$$f_2 = \sqrt{\frac{4D}{221}}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2).$$

Pour ne pas nous occuper des cas particuliers, abordons les questions générales et proposons nous de trouver les formes f, dont les valeurs ne puissent être inférieures à $l\sqrt{D}$. Nous allons démontrer, que pour

*) Mathematische Annalen, Band VI, S. 366.

$l > \frac{2}{3}$ le nombre de différentes classes de telles formes f est toujours fini, le déterminant D et le coëfficient l étant donnés.

Ce nombre croit indéfiniment, si l approche de plus en plus à $\frac{2}{3}$.

Quant aux formes qui satisfont à notre condition pour $l > \frac{2}{3}$, chacune d'elles devient égale (numériquement) à son minimum pour quelques valeurs finies de x et y et les rapports entre ses coëfficients sont des nombres rationelles. Il résulte de là que, si les nombres $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ sont irrationelles, la différence

$$(f) - \frac{2}{3}\sqrt{D},$$

(f) étant la valeur numérique de f*), peut être faite négative ou, si elle est toujours positive, parmi ses valeurs on trouvera aussi petites, qu'on voudra.

Nous allons voir encore qu'il existe un nombre infini des formes non équivalentes entre elles de même déterminant D, dont le minimum est pour toutes la même quantité $\frac{2}{3}\sqrt{D}$. Comme exemple peut servir la forme

$$\frac{2}{3}\sqrt{D}\,(x^2 - \sqrt{5}\,xy - y^2).$$

Avant de commencer la démonstration des théorèmes mentionées faisons quelques remarques sur la transformation des formes.

Soit

(1) $$\varphi_0 = (a_0, b_0, c_0) = a_0 x_0^2 + 2b_0 x_0 y_0 + c_0 y_0^2$$

une forme donnée de déterminant positif.

L'équation correspondante

(2) $$a_0 \xi^2 + 2b_0 \xi + c_0 = 0$$

a deux racines réelles.

Développons l'une d'elles ξ_0 en fraction continue, de sorte que

(3) $$\pm \xi_0 = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n}}}},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ étant des nombres entiers positifs (α_0 peut être égal à zéro).

*) Dans la suite nous allons représenter en général la valeur absolue d'une quantité quelconque A par (A).

La quantité ξ_n est une racine de l'équation

$$(4) \qquad a_n\xi^2 + 2b_n\xi + c_n = 0,$$

qui s'obtient de la manière connue.

Comme le déterminant $D = b_0^2 - a_0c_0$ est positif, les racines de l'équation (2) sont différentes et quelque soit leur différence, on peut toujours donner à n une valeur assez grande, pour que l'équation (4) ait une seule racine positive.

Dans ce cas a_n et c_n auront des signes contraires.

Considérons les subsitutions

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{llll} x_0 = \pm(\alpha_0 x_1 + y_1) &, & y_0 = x_1 &, \\ x_1 = \alpha_1 x_2 + y_2 &, & y_1 = x_2 &, \\ x_2 = \alpha_2 x_3 + y_3 &, & y_2 = x_3 &, \\ \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & \cdots & \\ x_{n-2} = \alpha_{n-2}x_{n-1} + y_{n-1} &, & y_{n-2} = x_{n-1} &, \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + y_n &, & y_{n-1} = x_n &, \end{array}\right.$$

qui correspondent à la fraction continue ξ_0; la forme (a_0, b_0, c_0) se transformera en

$$(a_n, b_n, c_n) = a_n x_n^2 + 2b_n x_n y_n + c_n y_n^2$$

où a_n, b_n, c_n sont les mêmes que dans l'équation (4). Ainsi toute forme (a_0, b_0, c_0) peut être transformée en une autre (a_n, b_n, c_n) dans laquelle a_n et c_n ont des signes contraires.

Soit h le plus grand nombre entier contenu dans la valeur absolue de la racine négative de l'équation (4). En faisant

$$x_n = X - hY, \quad y_n = Y$$

la forme (a_n, b_n, c_n) se change en une autre

$$(6) \qquad (A, B, C) = AX^2 + 2BXY + CY^2$$

La racine positive de l'équation correspondante

$$A\xi^2 + 2B\xi + C = 0$$

sera plus grande que l'unité et la valeur numérique de la racine négative en est moindre. —

Supposons donc que les racines de l'équation

$$(2) \qquad a_0\xi^2 + 2b_0\xi + c_0 = 0$$

satisfont à cette dernière condition; car dans le cas contraire on peut remplacer la forme (a_0, b_0, c_0) par son équivalente (A, B, C).

Soit

(7) $$\xi_0 = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n}}}}$$

la racine positive de l'équation (2) et

(8) $$-\frac{1}{\eta_0} = -\cfrac{1}{\alpha_{-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-2} + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{-m} + \cfrac{1}{\eta_{-m}}}}}$$

la racine négative de la même équation.

Les substitutions

(9) $$\begin{cases} x_0 = \alpha_0 x_1 + y_1, & y_0 = x_1, \\ x_1 = \alpha_1 x_2 + y_2, & y_1 = x_2, \\ x_2 = \alpha_2 x_3 + y_3, & y_2 = x_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + y_n, & y_{n-1} = x_n, \end{cases}$$

donnent la série des formes transformées

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \cdots (a_n, b_n, c_n).$$

En désignant par $\frac{-1}{\eta_n}$ la racine négative de l'équation

(10) $$a_n \xi^2 + 2 b_n \xi + c_n = 0$$

il est clair, qu'on aura

(11) $$\eta_n = \alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_{n-2} + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_0 + \cfrac{1}{\eta_0}}}.$$

et ξ_n sera la racine positive de la même équation.

Les substitutions

(12) $$\begin{cases} x_0 = y_{-1}, & y_0 = -\alpha_{-1} y_{-1} + x_{-1}, \\ x_{-1} = y_{-2}, & y_{-1} = -\alpha_{-2} y_{-2} + x_{-2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{-m+1} = y_{-m}, & y_{-m+1} = -\alpha_{-m} y_{-m} + x_{-m} \end{cases}$$

donnent la série des formes transformées

$$(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), \quad (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), \cdots, (a_{-m}, b_{-m}, c_{-m}).$$

Dans ce cas la racine négative de l'équation

$$(13) \qquad a_{-m}\xi^2 + 2b_{-m}\xi + c_{-m} = 0$$

est égale à $\frac{-1}{\eta_{-m}}$ et la racine positive de la même équation étant designée par ξ_{-m} donne le developpement

$$(14) \qquad \xi_{-m} = \alpha_{-m} + \cfrac{1}{\alpha_{-m+1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{-1} + \cfrac{1}{\xi_0}}}.$$

Remarquons enfin que les substitutions (9) et (12) peuvent être en général représentées par les formules

$$(15) \qquad \begin{cases} x_\mu = \alpha_\mu x_{\mu+1} + y_{\mu+1}, \\ y_\mu = x_{\mu+1}, \end{cases}$$

μ étant un entier quelconque positif ou négatif.

Donc si nous considérons une forme quelconque $(a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa)$ de la série

$$(\mathrm{F}) \quad \cdots (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), (a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \cdots$$

qui provient de la forme (a_0, b_0, c_0) par les transformations (15), la racine positive de l'équation

$$a_\varkappa \xi^2 + 2b_\varkappa \xi + c_\varkappa = 0$$

est égale à

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

et la racine négative à

$$-\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-3} + \cdots}}}$$

La différence de ces racines, c'est à dire la quantité $2\frac{\sqrt{D}}{(a_\varkappa)}$ est égale à

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \cdots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cdots}}.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que la valeur absolue de (a_0, b_0, c_0) ne peut s'abaisser au dessous du plus petit des nombres

$$\cdots, (a_{-3}), (a_{-2}), (a_{-1}), (a_0), (a_1), (a_2), (a_3), \cdots$$

dont la suite doit être prolongée indéfiniment dans les deux directions.

Pour le démontrer remarquons d'abord que parmi les racines

$$\cdots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots$$

relatives à l'ensemble des formes (F) il existera toujours au moins une qui surpasse 2, si la forme (a_0, b_0, c_0) n'est pas équivalente à

$$\sqrt{\frac{4}{5}D}\left(x-y-\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}\right)\left(x+\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}\right)$$

c'est à dire à la forme

$$\sqrt{\frac{4}{5}D}(x^2-xy-y^2).$$

Nous omettons cette forme parce qu'on voit facilement que son minimum est $\sqrt{\frac{4}{5}D}$.

Toutes les formes (F) sont équivalentes entre elles et chacune d'elles se transforme dans les autres au moyen des substitutions mentionnées.

Cela étant nous pouvons supposer

$$\xi_0 > 2.$$

Nous excluons encore les cas $y_0 = 0$ et $a_0 = 0$; car dans le cas $y_0 = 0$ la valeur absolue de la forme (a_0, b_0, c_0) ne peut être moindre que (a_0), et, si $a_0 = 0$, le minimum de la forme (a_0, b_0, c_0) est égal à zéro.

En vertu de nos notations on peut écrire

$$(16)\qquad \frac{\varphi_0}{a_0 y_0^2} = \frac{(a_0, b_0, c_0)}{a_0 y_0^2} = \left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right)\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0}\right)$$

Quant à $\frac{x_0}{y_0}$ on peut faire trois suppositions

$$\frac{x_0}{y_0} = 0,\qquad \frac{x_0}{y_0} > 0,\qquad \frac{x_0}{y_0} < 0$$

que nous discuterons séparement.

(I) $\frac{x_0}{y_0} = 0.$

En remarquant, que

$$c_0 = a_{-1}$$

notre forme $\varphi_0 = (a_0, b_0, c_0)$ devient

$$a_{-1} y_0^2;$$

donc

$$(\varphi_0) \geq (a_{-1}).$$

(II) $\frac{x_0}{y_0} > 0.$

Comme on a

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0} \geq \frac{1}{(y_0)},$$

on déduit de la formule (16), que l'inégalité

$$(\varphi_0) \leq (a_0)$$

est possible seulement sous la condition

$$\left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right) < \frac{1}{(y_0)}.$$

Comme nous avons supposé $\xi_0 > 2$, il résultera de l'inégalité

$$\left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right) < \frac{1}{(y_0)}$$

la suivante

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0} > 2.$$

Donc, si l'on a

$$(\varphi_0) \leqq (a_0),$$

il viendra de là

$$\left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right) < \frac{1}{2y_0^2}.$$

Cette inégalité montre, que la valeur de $\frac{x_0}{y_0}$ est égale à une des fractions convergentes à ξ_0.

En posant

$$\frac{x_0}{y_0} = \alpha_0, \quad \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, \ldots$$

les valeurs correspondantes de la forme φ_0 sont

$$a_1 i^2, \; a_2 i^2, \; a_3 i^2, \; \ldots$$

i étant le plus grand commun diviseur de x_0 et y_0.

Donc si $\frac{x_0}{y_0}$ est positif, la valeur numérique de (a_0, b_0, c_0) ne peut être moindre que le plus petit des nombres

$$(a_0), \; (a_1), \; a_2), \; (a_3), \; \ldots$$

(III) $\frac{x_0}{y_0} < 0$.

On conclue de la formule (16) que l'inégalité

$$(\varphi_0) \leqq (a_0)$$

est possible seulement sous la condition

$$\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2y_0^2},$$

car évidemment on a

$$-\frac{x_0}{y_0} + \xi_0 > 2.$$

Quant à la condition

$$\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2y_0^2},$$

il en résulte que $\frac{-x_0}{y_0}$ est égal à une des fractions convergentes à $\frac{1}{\eta_0}$.

Si l'on attribue à $\frac{-x_0}{y_0}$ successivement les valeurs

$$\frac{1}{\alpha_{-1}},\quad \frac{1}{\alpha_{-1}+\cfrac{1}{\alpha_{-2}}},\quad \frac{1}{\alpha_{-1}+\cfrac{1}{\alpha_{-2}+\cfrac{1}{\alpha_{-3}}}},\ \cdots$$

les valeurs correspondantes de φ_0 sont respectivement

$$c_{-1}i^2 = a_{-2}i^2,\quad a_{-3}i^2,\quad a_{-4}i^2,\cdots$$

i étant le plus grand commun diviseur de x_0 et y_0.

Donc dans le cas $\frac{x_0}{y_0} < 0$ la valeur absolue de (a_0, b_0, c_0) ne peut s'abaisser au dessous du plus petit des nombres

$$(a_0),\ (a_{-2}),\ (a_{-3}),\ (a_{-4}),\cdots$$

Il résulte de tout ce que nous avons dit, qu'il suffira pour la recherche du minimum de la forme (a_0, b_0, c_0) de considérer la suite

$$\text{(J)} \qquad \cdots,\ \alpha_{-2},\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\cdots$$

dont la liaison avec la forme (a_0, b_0, c_0) a été expliquée, et de chercher le minimum $\frac{2}{L}$ de la somme

$$(17) \qquad \alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1}+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2}+\cdots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1}+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2}+\cdots}} = \frac{2}{L_\varkappa}.$$

Le minimum de (a_0, b_0, c_0) est égal à $L\sqrt{D}$ et pour chaque valeur de l'indice $\varkappa$ correspond une valeur de la forme (a_0, b_0, c_0)

$$a_\varkappa = L_\varkappa\sqrt{D}.$$

Comme la suite (F) est complétement déterminée par la suite (J) nous discuterons dans ce, qui va suivre, seulement la suite (J) et la formule (17) qui lui correspond.

Remarquons de plus, que, si les coefficients a' et c' d'une forme quelconque

$$(a', b', c') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

ont des signes contraires et la racine positive ξ' de l'équation correspondante

$$a'\xi^2 + 2b'\xi + c' = 0$$

surpasse l'unité tandisque la valeur absolue $\frac{1}{\eta}$ de la racine négative en est moindre*), les formes (a', b', c') et (a_0, b_0, c_0) ne sont équivalentes entre elles que sous les conditions exprimées par les équations

---

*) Toute forme (a', b', c') qui satisfait à ces conditions nous appellerons *réduite*. —

$$\xi' = \alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \cdots}},$$

$$\eta' = \alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-3} + \cdots}},$$

ou par les suivantes

$$\xi' = \alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-3} + \cdots}},$$

$$\eta' = \alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

$\varkappa$ étant un indice quelconque

En effet soit

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

la substitution par laquelle la forme (a_0, b_0, c_0) peut être transformée en (a', b', c'); $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers et satisfont à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

qui exprime l'équivalence des formes (a_0, b_0, c_0) et (a', b', c').

On aura par conséquent

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha \frac{x'}{y'} + \beta'}{\gamma \frac{x'}{y'} + \delta'}$$

et

$$\pm \frac{x}{y} = \frac{(\alpha) \cdot \frac{\pm x'}{y'} + (\beta)}{(\gamma) \cdot \frac{\pm x'}{y'} + (\delta)} \tag{18}$$

les signes $\pm$ dans le premier et le second terme de cette équation étant choisies convenablement.

En développant $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ et $\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$ en fraction continue, il résulte de la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

qu'on trouvera

$$\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} + \cfrac{1}{\varepsilon_h}}},$$

et

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{k-1}}},$$

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k$ étant des entiers positifs (ε_0 et ε_k peuvent être égaux à zéro*).

Au moyen de ces developpements la formule (18) peut être remplacée par la suivante

$$(19) \qquad \pm\frac{x}{y} = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{k-1} + \cfrac{1}{\varepsilon_k \pm \cfrac{x'}{y'}}}}$$

Quant aux valeurs de ε_0 et ε_k, on peut faire quatre suppositions

1) $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_k = 0$; 2) $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_k = 0$; 3) $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_k > 0$; 4) $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_k > 0$.

Discutons ces cas séparement.

1) $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_k = 0$.

En combinant de différentes manières les racines des équations

$$a_0\xi^2 + 2b_0\xi + c_0 = 0,$$
$$a'\xi^2 + 2b'\xi + c' = 0$$

pour les substituer à la place de $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ dans la formule (19) et choisissant convenablement les signes $\pm$ dans les deux termes de cette formule, on verra facilement, qu'avec les conditions

$$\xi_0 > 1, \quad \eta_0 > 1, \quad \xi' > 1, \quad \eta' > 1$$

n'est compertible que la combinaison

$$\xi_0 = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{k-1} + \cfrac{1}{\xi'}}}}, \qquad -\frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \ddots \cfrac{1}{\varepsilon_{k-1} - \eta'}}}.$$

Par conséquent

$$\eta' = \varepsilon_{k-1} + \cfrac{1}{\varepsilon_{k-2} + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_0 + \cfrac{1}{\eta_0}}}$$

Si l'on compare ces formules et les équations (7) et (8), on aura

---

*) Dans le cas $\varepsilon_k = 0$ an aura

$$\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{k-2}}}.$$

$$\varepsilon_0 = \alpha_0,\ \varepsilon_1 = \alpha_1,\ \cdots\ \varepsilon_{h-1} = \alpha_{h-1},$$

$$\xi' = \alpha_h + \cfrac{1}{\alpha_{h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{h+2} + \ddots}}, \quad \eta' = \alpha_{h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{h-2} + \ddots}$$

2) $\varepsilon_0 = 0,\ \varepsilon_h = 0.$

De la même manière que dans le cas précédent on aura

$$-\xi_0 = \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} - \eta'}}}, \qquad \eta_0 = \varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} + \cfrac{1}{\xi'}}}$$

$$\eta' = \varepsilon_{h-1} + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-2} + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\xi_0}}},$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_{-1},\ \varepsilon_2 = \alpha_{-2},\ \cdots,\ \varepsilon_{h-1} = \alpha_{-(h-1)},$$

$$\xi' = \alpha_{-h} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-2} + \ddots}}, \qquad \eta' = \alpha_{-h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+2} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+3} + \ddots}}$$

3) $\varepsilon_0 > 0,\ \varepsilon_h > 0.$

On aura

$$\xi_0 = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_h + \cfrac{1}{\eta'}}}, \qquad -\frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_h - \xi'}}$$

$$\xi' = \varepsilon_h + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_0 + \cfrac{1}{\eta_0}}},$$

$$\varepsilon_0 = \alpha_0,\ \varepsilon_1 = \alpha_1,\ \cdots,\ \varepsilon_h = \alpha_h,$$

$$\xi' = \alpha_h + \cfrac{1}{\alpha_{h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{h-2} + \ddots}}, \qquad \eta' = \alpha_{h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{h+2} + \cfrac{1}{\alpha_{h+3} + \ddots}}$$

4) $\varepsilon_0 = 0,\ \varepsilon_h > 0.$

On aura

$$-\xi_0 = \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_h - \xi'}}}, \qquad \eta_0 = \varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_h + \cfrac{1}{\eta'}}},$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_{-1},\ \varepsilon_2 = \alpha_{-2},\ \cdots,\ \varepsilon_h = \alpha_{-h},$$

$$\xi' = \alpha_{-h} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+2} + \cdots}}, \qquad \eta' = \alpha_{-h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-2} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-3} + \cdots}}.$$

La proposition énoncée est donc démontrée.

Maintenant proposons nous de trouver la composition de la suite (J) à la condition d'avoir pour toutes les indices x

$$L_x \geqq \frac{2}{3}. \tag{20}$$

Remarquons d'abord, que cette suite ne contiendra que le nombres 1 et 2, les nombres plus grands ne pouvent figurer parmi ses élements; car en supposant

$$\alpha_x \geqq 3$$

la formule (17) donne

$$\frac{2}{L_x} > 3 \quad \text{et} \quad L_x < \frac{2}{3}.$$

En suite on voit facilement, que les 1 et les 2 ne peuvent figurer isolément; car si l'on a

$$\alpha_{x-1} = 1,\quad \alpha_x = 2,\quad \alpha_{x+1} = 1,$$

la formule (17) donne

$$L_x < \frac{2}{3}.$$

De même en supposant

$$\alpha_{x-1} < 3,\quad \alpha_x = 2,\quad \alpha_{x+1} = 1,\ \alpha_{x+2} = 2$$

on aura

$$\frac{2}{L_x} > 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} + \frac{1}{3} = 3 \quad \text{et} \quad L_x < \frac{2}{3}.$$

Soit maintenant

$$\alpha_{x-1} = 2,\quad \alpha_x = 2,\quad \alpha_{x+1} = 1,\quad \alpha_{x+2} = 1.$$

En consérvant nos notations, nous aurons

$$\frac{2}{L_x} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\xi_{x+3}}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{x-1}}},$$

$$\frac{2}{L_{x-1}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\xi_{x+3}}}}} + \frac{1}{\eta_{x-1}}.$$

En ayant égard à l'identité

$$\frac{1}{2+\frac{1}{g}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{g}}}=1$$

on voit facilement, que les conditions

$$L_x \geqq \frac{2}{3}, \quad L_{x-1} \geqq \frac{2}{3}$$

équivalent aux suivantes

$$(21) \qquad \xi_{x+3} \geqq \eta_{x-1}, \quad \eta_{x-1} \geqq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\xi_{x+3}}}}}.$$

De là on déduit facilement

$$(22) \quad \xi_{x+3} \geqq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\xi_{x+3}}}}}, \qquad \eta_{x-1} \geqq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\eta_{x-1}}}}}.$$

Nous allons distinguer les deux cas suivans

$$1) \quad \xi_{x+3} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$2) \quad \xi_{x+3} \text{ n'est pas égal à } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dans le cas $\xi_{x+3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la première des inégalités (21) donne

$$\eta_{x-1} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et la seconde

$$\eta_{x-1} \geqq \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

donc il faut, que l'on ait

$$\eta_{x-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dans le second cas η_{x-1} n'est pas égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, car, si l'on avait

$$\eta_{x-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

les conditions (21) donneraient

$$\xi_{x+3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent on aura dans ce cas

$$(23)^{*})\quad \begin{cases} \xi_{x+3} = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+}}}}_{\mu-2} \cfrac{1}{\xi_{x+\mu+1}} > 2, \\[2ex] \eta_{x-1} = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+}}}_{\mu'} \cfrac{1}{\xi_{x-\mu'-1}} > 2, \\[2ex] \xi_{x+1} = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+}}}_{\mu} \cfrac{1}{\xi_{x+\mu+1}} > 2, \end{cases}$$

μ et μ' étant des entiers positifs finis (μ' peut être égal à zéro).

De plus il résulte des inégalités (22), que

$$(24)\qquad \mu = 2r, \quad \mu' = 2r'$$

où r et r' sont des entiers.

En substituant les expressions (23) dans les inégalités (21) en déduit enfin, qu'on ne peut faire que les trois suppositions

$$(25)\qquad \begin{cases} 1)\ \ r = r' + 1, & \xi_{x+2r+1} \geqq \eta_{x-2r'-1}, \\ 2)\ \ r = r', & \\ 3)\ \ r = r' - 1, & \xi_{x+2r+1} < \eta_{x-2r'-1}. \end{cases}$$

Dans chacune de ces suppositions L_x et L_{x-1} ne sont pas inférieurs à $\frac{2}{3}$.

Soit maintenant

$$r' = 0$$

et par conséquent

$$r = 1;$$

on obtient dans ce cas en vertu des formules (23)

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi_{x+1} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\xi_{x+5}}}}}, & \eta_{x-1} = 2 + \cfrac{1}{\eta_{x-2}}, \\[3ex] \xi_{x+3} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\xi_{x+5}}}, & \eta_{x+3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\eta_{x-1}}}}}. \end{cases}$$

---

*) Par les formules (23) nous voulons exprimer, que dans les développements en fraction continue de ξ_{x+3}, η_{x-1}, ξ_{x+1}, respectivement $\mu-2$, μ', μ premiers quotiens sont égaux à l'unité, les suivans étant plus grands que l'unité. —

Ainsi on aura

$$\frac{2}{L_{x+3}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi_{x+5}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{x-1}}}}}}.$$

Cette équation avec l'identité

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{g}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{g}}} = 1$$

montre, que la condition

$$L_{x+3} \geqq \frac{2}{3}$$

en vertu de la supposition $r' = 0$ équivaut à la suivante

$$\xi_{x+5} < 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{x-1}}}. \tag{27}$$

La formule (27) combinée avec (21) et (26) donne

$$\xi_{x+3} \leqq 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi_{x+3}}}}}, \qquad \eta_{x-1} \leqq 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{x-1}}}}};$$

il résulte de là, qu'on doit supposer

$$\xi_{x+3} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}} = 1 + \sqrt{2} = \eta_{x-1}$$

ou, encore,

$$\xi_{x+3} = \underbrace{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots + \cfrac{1}{2 +}}}_{2\varrho} \cfrac{1}{\xi_{x+2\varrho+3}} < 2,$$

$$\eta_{x-1} = \underbrace{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots + \cfrac{1}{2 +}}}_{2\varrho_1} \cfrac{1}{\eta_{x-2\varrho_1-1}} < 2,$$

ϱ et ϱ_1 étant des entiers positifs.

De toutes ces considérations il suit, que la suite cherchée (J) preséntera l'une des formes suivantes

(J_0) $\qquad \cdots, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots,$

(J_1) $\qquad \cdots, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots,$

$$(\mathrm{J}_\infty) \qquad \cdots, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, \cdots,$$

$$(\mathrm{J}^\infty) \qquad \cdots, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, \cdots,$$

$$(\mathrm{J}') \cdots \underbrace{1, 1, \cdots 1}_{2r_{-2}}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \cdots}_{2r_{-1}}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \cdots 1}_{2r_0}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \cdots}_{2r_1}, 2, 2, \underbrace{1, \cdots 1}_{2r_2}, \cdots$$

Le nombre $r_\varkappa$ en général est fini, $\varkappa$ étant fini.

Nous supposons de plus, que pour quelques-uns des indices $\varkappa$ $r_\varkappa$ n'est pas égal à zéro; car en faisant $r_\varkappa = 0$ pour toute indice $\varkappa$, on aura la série (J_1) au lieu de (J').

Les séries (J_0) et (J_1) satisfont à la condition

$$L_\varkappa > \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$; car pour la première de ces séries

$$\frac{2}{L_\varkappa} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} = \sqrt{5},$$

et pour la seconde

$$\frac{2}{L_\varkappa} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = 2\sqrt{2}.$$

Les séries (J_∞) et (J^∞) satisfont aussi à la condition

$$L_\varkappa \geq \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$.

De plus ces dernières séries satisfont pour un certain indice $\varkappa$ à la condition

$$L_\varkappa = \frac{2}{3}$$

car, évidemment, on a

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = 3$$

et

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = 3.$$

L'une des formes (F), qui correspondent à la série (J_∞) est la suivante

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}\left(x-2y-\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}\right),\quad\left(x+\cfrac{y}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{2}{3}\sqrt{D}\left(x-y\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+y\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}\,(x^2-\sqrt{5}\,xy-y^2).$$

Ainsi nous avons trouvée l'une des formes, dont le minimum est égal à $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}$.

De la même manière au moyen de la série (J^∞) on obtient une autre forme

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}\left\{x-2y-\cfrac{y}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}\right\}\left\{x+\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}\right\}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{D}\,.\,\{x^2-(2\sqrt{2}-1)\,xy-\sqrt{2}\,y^2\}$$

dont le minimum est aussi égal à $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}$.

Enfin si la suite cherchée (J) présentera la forme (J'), il suit des considérations précédentes, que la série des nombres

(R) $\qquad \cdots, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$

doit satisfaire aux conditions suivantes:

1) Les différences

$$\cdots, r_{-3}-r_{-2}, r_{-2}-r_{-1}, r_{-1}-r_0, r_0-r_1, r_1-r_2, \cdots$$

ne peuvent avoir que les trois valeurs $+1$, 0, -1.

2) Si l'on a pour un indice λ

$$r_\lambda - r_{\lambda+1} = +1,$$

la première des différences

$$r_{\lambda+2}-r_{\lambda-1},\quad r_{\lambda+3}-r_{\lambda-2},\quad r_{\lambda+4}-r_{\lambda-3},\cdots$$

qui ne s'évanouit pas doit être *positive*.

3) Si l'on a pour un indice λ

$$r_\lambda - r_{\lambda+1} = -1,$$

la première des différences

$$r_{\lambda+2}-r_{\lambda-1},\quad r_{\lambda+3}-r_{\lambda-2},\quad r_{\lambda+4}-r_{\lambda-3},\cdots$$

qui ne s'évanouit pas doit être *negative**).

---

*) S. 394. On ne doit pas excepter les cas où $r_\lambda - r_{\lambda+1} = \pm 1$ et pour tous les indices $\mu > 0$, $r_{\lambda-\mu} = r_{\lambda+\mu+1}$.

Supposons maintenant que ces conditions sont effectivement satisfaites.

Dans ce cas en vertu de tout ce, que nous avons dit, on aura

$$L_{x-1} \geqq \frac{2}{3}, \quad L_x \geqq \frac{2}{3},$$

si

$$\alpha_{x-1} = 2, \quad \alpha_x = 2, \quad \alpha_{x+1} = 1, \quad \alpha_{x+2} = 1.$$

De la même manière il est facile de voir, que les inégalités

$$L_x \geqq \frac{2}{3}, \quad L_{x+1} \geqq \frac{2}{3},$$

auront lieu, si l'on choisie x de manière à avoir

$$\alpha_{x-2} = 1, \quad \alpha_{x-1} = 1, \quad \alpha_x = 2, \quad \alpha_{x+1} = 2.$$

Par conséquent l'inégalité

$$L_x \geqq \frac{2}{3},$$

est satisfaite dans les deux cas suivans

$$1) \quad \alpha_{x-1} = 2, \quad \alpha_x = 2, \quad \alpha_{x+1} = 1;$$

$$2) \quad \alpha_{x-1} = 1, \quad \alpha_x = 2, \quad \alpha_{x+1} = 2.$$

Dans tous les autres cas on aura

$$\alpha_x = 1,$$

ou encore

$$\alpha_{x-1} = 2, \quad \alpha_x = 2, \quad \alpha_{x+1} = 2;$$

la formule (17) donne immédiatement dans l'une et l'autre supposition

$$\frac{2}{L_x} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad L_x > \frac{2}{3}.$$

Il suit de là, que les conditions énoncées ci-dessus sont suffisantes.

En vertu de ces conditions la différence des deux nombres quelconques de la série (R) ne peut surpasser l'unité en valeur absolue.

En effet supposons, que le cas contraire a lieu, savoir, que la série (R) contient deux nombres w et $w' \leqq w - 2$.

Cela posé, nous trouverons dans la série (R) en vertu de sa première propriété enoncée ci-dessus l'une de deux combinaisons suivantes

$$\text{(A)} \qquad w, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s}, \quad w-2$$

$$\text{(A')} \qquad w-2, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s}, \quad w$$

s étant un nombre entier positif.

En vertu de la seconde propriété de la série (R) à gauche de la combinaison (A) doit se trouver la combinaison

(B) $$w-2,\ \underbrace{w-1,\ w-1,\cdots}_{s-\varkappa}$$

et de la même manière en vertu de la troisième propriété à droite de la combinaison (A′) doit figurer la combinaison

(B′) $$\underbrace{w-1,\ w-1,\cdots}_{s-\varkappa},\ w-2$$

$\varkappa$ étant un entier positif.

Ainsi nous obtenons l'une des combinaisons suivantes

(C) $$w-2,\ \underbrace{w-1,\ w-1,\cdots}_{s-\varkappa},\ w,\ \underbrace{w-1,\ w-1,\cdots}_{s},\ w-2,$$

(C′) $$w-2,\ \underbrace{w-1,\ w-1,\cdots}_{s},\ w,\ \underbrace{w-1,\ w-1,\cdots}_{s-\varkappa},\ w-2,$$

dont (C) est en contradiction avec la troisième propriété de la série (R) et (C′) avec la seconde.

Si l'on avait $s=\varkappa$ les combinaisons (C) et (C′) se trouveraient aussi en contradiction avec la première.

Par conséquent la série (R) doit présenter l'une des formes suivantes

(R_1) $$\cdots,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ \cdots$$

(R_∞) $$\cdots,\ r^0-1,\ r^0-1,\ r^0-1,\ r^0,\ r^0-1,\ r^0-1,\ \cdots$$

(R^∞) $$\cdots,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ r^0-1,\ r^0,\ r^0,\ r^0,\ \cdots$$

(R') $$\cdots,\ \underbrace{r^0-1,\cdots,r^0-1}_{s_{-2}},\ r^0,\ \underbrace{r^0-1,\cdots}_{s_{-1}},\ r_0,\ \underbrace{r^0-1,\cdots}_{s_0},$$
$$r^0,\ \underbrace{r^0-1,\cdots}_{s_1},\ r^0,\ \underbrace{r^0-1,\cdots}_{s_2},\ \cdots$$

r^0 étant le plus grand des nombres de la série (R).

Le nombre $s_\varkappa$ en général est fini, $\varkappa$ étant fini. Les séries (R_1), (R_∞) et (R^∞) satisfont évidemment aux nos trois conditions demontrées pour la série (R).

Par conséquent toute la question consiste maintenant dans les propriétés de la série

$$\cdots,\ s_{-3},\ s_{-2},\ s_{-1},\ s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\cdots$$

Il est facile de voir, que les valeurs des différences

$$\cdots,\ s_{-3}-s_{-2},\ s_{-2}-s_{-1},\ s_{-1}-s_0,\ s_0-s_1,\ s_1-s_2,\cdots$$

sont $+1, 0, -1$.

De plus en vertu de la seconde propriété de la série (R′) toutes les fois, qu'on aura

$$s_\lambda-s_{\lambda+1}=-1$$

la première des différences

$$s_{\lambda+2} - s_{\lambda-1}, \quad s_{\lambda+3} - s_{\lambda-2}, \quad s_{\lambda+4} - s_{\lambda-3}, \cdots$$

qui n'est pas égale à zéro doit être négative.

De même en vertu de la troisième propriété la première des différences

$$s_{\lambda+2} - s_{\lambda-1}, \quad s_{\lambda+3} - s_{\lambda-2}, \quad s_{\lambda+4} - s_{\lambda-3}, \cdots$$

qui ne s'évanouit pas, est positive, si l'on a

$$s_\lambda - s_{\lambda+1} = +1\cdot$$

La série (S) doit donc posséder les mêmes trois propriétés que la série (R).

Il est evident de plus, que la série (R') doit posséder les propriétés mentionnés, lorsque les posséde la série (S).

En discutant la série (S) de la même manière que (R), nous verrons, qu'elle doit présenter l'une des formes suivantes

$$(S_1) \qquad \cdots, s^0, \; s^0, \; s^0, \; s^0, \; s^0, \cdots$$

$$(S_\infty) \quad \cdots, s^0-1, \; s^0-1, \; s^0-1, \; s^0, \; s^0-1, \; s^0-1, \; s^0-1, \cdots$$

$$(S^\infty) \quad \cdots, s^0, \; s^0, \; s^0, \; s^0, \; s^0-1, \; s^0, \; s^0, \; s^0, \; s^0, \cdots$$

$$(S') \quad \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_{-2}}, \; s_0, \; \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_{-1}}, \; s_0, \; \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_0}, \; s^0, \; \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_1}, \; s^0, \; \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_2}.$$

La série

$$(T) \qquad \cdots, t_{-2}, \; t_{-1}, \; t_0, \; t_1, \; t_2, \cdots$$

aura les propriétés mentionnées des séries (R) et (S).

On peut prolonger ces considérations aussi loin, qu'on voudra et toutes les séries

$$(\Phi) \qquad R, S, T, \cdots$$

qui seront obtenues de cette manière, doivent posséder les propriétés mentionnées.

En autre, si l'une des séries (Φ) a ces trois propriétés, toutes les précédentes les auront aussi et la série (J') satisfait à la condition

$$L_x \geqq \frac{2}{3}$$

pour tout indice x.

Supposons d'abord, que nous obtenons de cette manière la série, qui ne contient que des nombres égaux.

Dans ce cas les précédentes séries (Φ) et aussi la série (J') sont périodiques.

Il est facile de voir de plus, que toutes les fois, qu'on a

$$\alpha_{x-1} = 2, \quad \alpha_x = 2, \quad \alpha_{x+1} = 1, \quad \alpha_{x+2} = 1,$$

le nombre $2i$ des égalités successives

$$\alpha_{x-2} = \alpha_{x+3}, \quad \alpha_{x-3} = \alpha_{x+4}, \cdots \alpha_{x-2i-1} = \alpha_{x+2i+2}$$

doit être moindre, que le nombre des termes dans la période de la série (J'); et si l'on a

$$\alpha_{\varkappa-2}=1, \quad \alpha_{\varkappa-1}=1, \quad \alpha_\varkappa=2, \quad \alpha_{\varkappa+1}=2,$$

le nombre $2i$ des égalités successives

$$\alpha_{\varkappa+2}=\alpha_{\varkappa-3}, \quad \alpha_{\varkappa+3}=\alpha_{\varkappa-4}, \; \cdots, \; \alpha_{\varkappa+2i+1}=\alpha_{\varkappa-2i-2}$$

doit aussi être moindre que le nombre des termes dans la période de la série (J').

Par conséquent $L_\varkappa$ ne peut avoir qu'un nombre fini de différentes valeurs et toutes ces valeurs sont plus grandes que $\frac{2}{3}\cdot$

Donc on peut trouver une infinité des séries (J) pour lesquelles les minima de $L_\varkappa$ sont plus grands que $\frac{2}{3}\cdot$

Or il résulte de ce, que nous avons demontré ci-dessus, le théorème suivant:*)

Si deux formes (a_0, b_0, c_0) et (a', b', c') réduites sont équivalentes entre elles et la forme (a_0, b_0, c_0) correspond à la série

(J) $\quad \cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$

la forme (a', b', c') correspond à la même série (I) ou à la série inverse

(J) $\quad \cdots, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \cdots$

La série (J) est composée des mêmes termes que la série (J), avec cette seule différence, que les termes y sont rangés dans un ordre inverse.

Donc on peut trouver une infinité des classes de formes de déterminant D, dont les minima sont plus grands que $\frac{2}{3}\sqrt{D}\cdot$

Supposons maintenant, que l'une des séries (Φ) peut être mise sous la forme

$$\cdots, \delta, \delta, \delta, \delta \pm 1, \delta, \delta, \delta, \cdots$$

Dans cette hypothèse toutes les séries, qui la précédent dans l'ensemble (Φ) sont de la forme suivante

$$\cdots, \omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega, \omega \pm 1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$$

et la serie (J') se présentera sous la forme

$$\cdots, \eta_3, \eta_3, \eta_2, \eta_2, \eta_1, \eta_1, 2, 2, 1, 1, \eta_1, \eta_1, \eta_2, \eta_2, \eta_3, \eta_3, \cdots$$

ou sous cette autre forme

$$\cdots, \eta_3, \eta_3, \eta_2, \eta_2, \eta_1, \eta_1, 1, 1, 2, 2, \eta_1, \eta_1, \eta_2, \eta_2, \eta_3, \eta_3, \cdots$$

Par conséquent la condition

$$L_\varkappa > \frac{2}{3}$$

*) Seite 389.

pour un certain indice x sera satisfaite avec le signe $=$, car évidemment on a

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_2+\cfrac{1}{\eta_2+\ddots}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_2+\cfrac{1}{\eta_2+\ddots}}}}}=3\,.$$

Donc on peut trouver une infinité des séries (J), pour lesquels le minimum de L_x est égal à $\frac{2}{3}\cdot$

En d'autres termes, il y a une infinité de classes de formes (a, b, c) d'un déterminant donné D, dont le minimum est égal à $\frac{2}{3}\sqrt{D}\cdot$

Nous allons enfin trouver parmi les séries (J′) celles, qui satisfont à une nouvelle condition

$$L_x > l$$

pour tout indice x, l étant un nombre donné plus grand que $\frac{2}{3}\cdot$

Posons dans la série cherchée (J′) pour un certain indice x

$$\alpha_{x\mp1}=2,\quad \alpha_x=2,\quad \alpha_{x\pm1}=1,\quad \alpha_{x\pm2}=1$$

et soit aussi $2j$ le nombre des égalités successives

$$\alpha_{x\mp2}=\alpha_{x\pm3},\quad \alpha_{x\mp3}=\alpha_{x\pm4},\quad \cdots,\quad \alpha_{x\mp2j\mp1}=\alpha_{x\pm2j\pm2}\cdot$$

Ce nombre $2j$ ne peut surpasser un nombre suffisement grand $2j''$, car quelques soient les nombres

$$\alpha_{x\mp2}=\alpha_{x\pm3}>1,\quad \alpha_{x\mp3}=\alpha_{x\pm4}\geq 1,\quad \cdots\quad \alpha_{x\mp2j\mp1}=\alpha_{x\pm2j\pm2}\geq 1,$$

la différence

$$3-\frac{2}{L_x}=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha_{x\pm3}+\cfrac{1}{\alpha_{x\pm4}+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_{x\pm2j\pm2}+\ddots}}}}}$$

$$-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha_{x\mp2}+\cfrac{1}{\alpha_{x\mp3}+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_{x\mp2j\mp1}+\ddots}}}}$$

pour des valeurs j assez grandes sera aussi petite, qu'on voudra.

Donc, en désignant le maximum de j par j_0, on aura

$$j_0 \leq j'.$$

On voit encore que si l'on a

$$r_\lambda - r_{\lambda+1} = \pm 1$$

et

$$r_{\lambda-1} = r_{\lambda+2}, \quad r_{\lambda-2} = r_{\lambda+3}, \quad \cdots \quad r_{\lambda-\varrho} = r_{\lambda+\varrho+1},$$

le nombre ϱ doit satisfaire à la condition

$$(\varrho + 2)\, r^0 \leq j_0 + 1.$$

Désignons maintenant par ϱ_0 le maximum de ϱ et par $\sigma_0, \tau_0, \cdots$ les valeurs qui dépendent respectivement des séries $S, T, \cdots$ de la même manière que ϱ_0 de la série R.

On aura

$$(28) \qquad \begin{cases} j_0 \leq j' \\ (\varrho_0 + 2)\, r^0 \leq j_0 + 1 \\ (\sigma_0 + 2)\, s^0 < \varrho_0 + 1 \\ (\tau_0 + 2)\, t^0 \leq \sigma_0 + 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Ces inégalités montrent, que l'une des séries

$$(\Phi) \qquad R, S, T, \cdots$$

n'est composée que des entiers positifs égaux, c'est à dire présente la forme suivante

$$(\mathrm{W}) \qquad \cdots, w^0, w^0, w^0, w^0, w^0, w^0, \cdots$$

Par conséquent la série précédente (V) peut être mise sous la forme

$$(\mathrm{V}) \qquad \cdots, v^0, \underbrace{v^0-1, v^0-1 \cdots}_{w^0}, v^0, \underbrace{v^0-1, v^0-1 \cdots}_{w^0}, v^0, \underbrace{v^0-1, \cdots}_{w^0}, \cdots$$

Quant au nombre des séries

$$R, S, T, \cdots U, V, W,$$

il ne surpasse pas $j' + 1$.

En effet dans le cas contraire la série des entiers positifs (le dernier de ces nombres peut être égal à zéro)

$$\varrho_0, \sigma_0, \tau_0, \cdots$$

qui satisfont aux inégalités (28) contient au moins $j' + 1$ termes; ce qui est impossible.

Supposons encore, que parmi les nombres $\varrho_0, \sigma_0, \tau_0, \cdots$ les deux ψ_0 et χ_0 correspondent respectivement aux séries (U) et (V).

Alors au lieu des inégalités (28), on aura

$$(29)^{*)}\quad \begin{cases} j_0 \leqq j' \\ (\varrho_0+2)\, r^0 \leqq j_0+1 \\ (\sigma_0+2)\, s^0 \leqq \varrho_0+1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (\chi_0+2)\, v^0 \leqq \psi_0+1 \\ w^0 \leqq \chi_0+1 \end{cases}$$

Puisque les entiers

$$j^0,\ r^0,\ \varrho_0,\ s^0,\ \sigma_0,\ \cdots,\ v^0,\ \chi_0,\ w^0$$

qui satisfont à ces conditions ne peuvent avoir, qu'un nombre fini de différentes valeurs, le nombre des séries cherchées (J′) est aussi un nombre fini.

Par conséquent le nombre des séries (J) qui satisfont pour tout indice $\varkappa$ à la condition

$$L_\varkappa \geqq l > \frac{2}{3}$$

est aussi fini; car nous avons démontré ci-dessus, qu'en excluant les séries (J′), la condition

$$L_\varkappa > \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$ n'est remplie que par les deux séries

(J_0) $\cdots, 1, 1, 1, 1, \cdots$

(J_1) $\cdots, 2, 2, 2, 2, \cdots$

En d'autres termes il n'y a qu'un nombre fini des classes de formes (a, b, c) de déterminant positif D, dont les valeurs absolues ne peuvent pas être moindre que $l\sqrt{D}$, l étant un nombre donné plus grand que $\frac{2}{3}$.

Remarquons enfin, que ces séries (J) sont périodiques.

Par conséquent pour toute forme (a', b', c') reduite, qui correspond à l'une de ces séries, la racine positive ξ' de l'équation

$$a'\,\xi^2 + 2b'\,\xi + c' = 0$$

peut être developpée en fraction continue de la forme

$$\xi' = \beta_0 + \cfrac{1}{\beta_1 + \ddots + \cfrac{1}{\beta_{q-1} + \cfrac{1}{\xi'}}}$$

et le développement de la racine négative $\frac{-1}{\eta'}$ de la même équation sera de la forme

---

*) Si la série (W) est la même que série (R), ces inegalités deviennent

$$j_0 \leqq j', \quad r^0 \leqq j_0 + 1.$$

$$\frac{-1}{\eta'} = -\cfrac{1}{\beta_{q-1}+\cfrac{1}{\beta_{q-2}+\cdots+\cfrac{1}{\beta_0+\cfrac{1}{\eta'}}}},$$

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \cdots\ \beta_{q-1},\ \beta_q$$

étant la période de la série correspondante (J).

Il résulte de là, que $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont des nombres rationnels.

En outre il est évident, que cette forme (a', b', c') devient égale à son minimum pour quelques valeurs finies de x' et y'.

Donc toutes les fois que les valeurs absolues d'une forme binaire indéterminée

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

ne peuvent être moindre que $l\sqrt{b'^2 - a'c'}$, l étant un nombre donné plus grand que $\frac{2}{3}$, les quantités

$$\frac{b'}{a'} \text{ et } \frac{c'}{a'}$$

sont rationnelles et le minimum de cette forme correspond à quelques valeurs finies de x' et y'.

En déterminant successivement les limites précises des minima des formes binaires indeterminées nous obtenons la table suivante:

La valeur absolue de toute forme (a, b, c) indeterminée non équivalente à la forme	peut être faite moindre que la quantité	qui est le minimum des formes equivalentes à
$f_0 = \sqrt{\frac{4}{5}D}\,(x^2 - xy - y^2)$	$\sqrt{\frac{4}{5}D}$	f_0
$f_0,\ f_1 = \sqrt{\frac{D}{2}}\,(x^2 - 2xy - y^2)$	$\sqrt{\frac{1}{2}D}$	f_1
$f_0, f_1, f_2 = \sqrt{\frac{4D}{221}}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2)$	$\sqrt{\frac{100}{221}D}$	f_2
$f_0,\ f_1,\ f_2,$ $f_3 = \sqrt{\frac{4D}{1517}}\,(13x^2 - 29xy - 13y^2)$	$\sqrt{\frac{676}{1517}D}$	f_3
$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3$ $f_4 = \sqrt{\frac{4D}{7565}}\,(29x^2 - 63xy - 31y^2)$	$\sqrt{\frac{3364}{7565}D}$	f_4

La valeur absolue de toute forme (a, b, c) indeterminée non équivalente à la forme	peut être faite moindre que la quantité	qui est le minimum des formes équivalentes à
f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 $f_5 = \sqrt{\frac{D}{650}}(17x^2 - 38xy - 17y^2)$	$\sqrt{\frac{289}{650}D}$	f_5
$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ $f_6 = \sqrt{\frac{4D}{71285}}(89x^2 - 199xy - 89y^2)$	$\sqrt{\frac{31684}{71285}D}$	f_6
$f_0, f_1, f_2, f_2, f_4, f_5, f_6$ $f_7 = \sqrt{\frac{4D}{257045}}(169x^2 - 367xy - 181y^2)$	$\sqrt{\frac{114244}{257045}D}$	f_7
$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ $f_8 = \sqrt{\frac{D}{21170}}(97x^2 - 216xy - 98y^2)$	$\sqrt{\frac{9409}{21170}D}$	f_8
$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ $f_9 = \sqrt{\frac{4D}{488597}}(233x^2 - 521xy - 233y^2)$	$\sqrt{\frac{217156}{488597}D}$	f_9

Nous nous proposons de revenir en detail sur ce sujet dans une autre occasion.

St. Petersbourg, 1879.

Vereinfachung des Problems der räumlichen Projectivität.

Von

Rudolf Sturm in Münster i/W.

1. Das Problem der räumlichen Projectivität, welches ich in den Math. Ann. Bd. VI, S. 513 (citirt mit R. P.) behandelt habe, lässt sich in wesentlich einfacherer Weise erledigen, wenn man auf dasselbe die Methoden der abzählenden Geometrie anwendet. Es muss dann aber zugleich dual erweitert werden, so dass es folgendermassen lautet*).

In dem einen von zwei Räumen sind k Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_k$, *l Ebenen* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ *gegeben, ihnen homolog im andern k Punkte* $B_1, B_2, \cdots, B_k$, *l Ebenen* $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$. Dies sind die *Grundelemente* und $[k\,l]$ ihre *Signatur.*

Es sollen nun solche associirte Geraden a, b gefunden werden, dass gleichzeitig der Ebenenbüschel $a(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ *und die Punktreihe* $a(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l)$ *beziehlich projectiv sind zu* $b(B_1, B_2, \cdots, B_k)$ *und* $b(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$.

Damit das System der Grundpunkte A_i, B_i oder der Grundebenen α_i, β_i von Einfluss sei, muss k, bez. l mindestens 4 sein; im andern Falle kann das betreffende Grundsystem als nicht vorhanden angesehen werden, und die Signaturen $[k\,3]$, $[3\,l]$ werden sich im Folgenden auf solche Fälle beziehen, wo nur Grundpunkte oder nur Grundebenen vorhanden sind; die ersteren sind also die im früheren Aufsatze behandelten.

2. Die *Ausartung der Projectivität einstufiger Gebilde* besteht bekanntlich darin, dass jedes der beiden Gebilde ein singuläres Element enthält, dem alle Elemente des andern entsprechen**). Es arte also z. B. die Projectivität der Ebenenbüschel um zwei associirte Geraden a, b aus; enthält dann die singuläre Ebene von a eine gewisse Anzahl der Punkte A_i, so wird die in b, welche den nach den übrigen Punkten

*) In dieser Erweiterung bedarf es auch Herr Hirst für seine Untersuchung correlativer Räume.

**) Steiner-Schröter's Vorlesungen § 19. Anf.

A_i gehenden Ebenen von a zu entsprechen hat, durch deren homologe Punkte B_i, also die den ersteren nicht homologen gehen. Beide zusammen enthalten mithin k Punkte A_i, B_i. Folglich wird, wenn sonst keine andern Bedingungen vorhanden sind, bei $k > 6$ die Ebenenbüschelprojectivität und bei $l > 6$ die der Punktreihen nicht mehr ausarten können. Hat aber etwa a eine feste Lage, so sind die Ausartungen schon bei $k > 4$, bez. $l > 4$ nicht mehr möglich; u. s. w.

3. *Den Geraden a, b werden nun so viele Lagenbedingungen auferlegt werden, dass man eine endliche Zahl von Paaren associirter Geraden a, b hat, und um die Ermittelung dieser Zahl handelt es sich.*

Bei $k = l = 3$ ist jeder Geraden a jede Gerade b associirt.

Bei $k + l = 7$ kann man also die eine Gerade, etwa a, fest sein lassen, die andere b einem Strahlbüschel zuweisen und demnach untersuchen, welchen Complex die einer festen a associirten b erzeugen.

Bedeuten nun, wie bei Herrn Schubert*), a, a_p, a_e, a_s, a_f die Bedingungen, dass a eine gegebene Gerade treffe, durch einen gegebenen Punkt gehe, in einer gegebenen Ebene liege, einem gegebenen Strahlbüschel angehöre, eine gegebene Lage habe, und haben b, b_p etc. dieselbe Bedeutung für b, so werden bei $k + l = 7$ die beiden Geraden a, b, ausser den Projectivitätsbedingungen, den Lagenbedingungen $a_f b_s$ unterworfen.

Bei $k + l = 8$ werden wir die Lagenbedingungen $a_f b_p$, $a_f b_e$, $a_s b_s$ hinzufügen, also haben wir die Fragen: Welches ist der Bündel- und der Feldgrad**) der Congruenz der Geraden b, welche einer festen a entsprechen; welches der Grad des Complexes der b, die den Strahlen a eines Büschels associirt sind?

$k + l = 9$; hinzugefügte Lagenbedingungen $a_f b$, $a_s b_p$, $a_s b_e$; also: welches ist der Grad der Fläche der Geraden b, die einer festen Geraden a correspondiren; welches der Feld- und der Bündelgrad der Congruenz der b, die einem Büschel von Geraden a entsprechen, oder, was dasselbe, der Grad des Complexes der a (oder b), die einem Bündel oder Felde von Geraden b (oder a) associirt sind?

$k + l = 10$; a_f, $a_s b$, $a_p b_p$, $a_e b_e$, $a_p b_e$; also: wie viele Geraden b correspondiren einer festen Geraden a; welche Regelfläche erzeugen die b, welche den Strahlen a eines Büschels entsprechen, oder, was dasselbe, welchen Complex die Geraden a (oder b), welche einem

---

*) Math. Ann. Bd. X, S. 18; nur mit der Bezeichnung a_f, b_f (statt A, B) weiche ich, um an der üblichen Bezeichnung der Geraden durch kleine lateinische Buchstaben festzuhalten, von Schubert ab.

**) D. i. nach Schubert's prägnanter Benennung die Zahl der in einem Bündel, bez. einem Felde (ebenen Systeme) befindlichen Strahlen der Congruenz (bisher Ordnung und Classe derselben).

speciellen linearen Complexe*) von Geraden b (oder a) associirt sind; welches ist der Feldgrad und der Bündelgrad der Congruenz des einen Raumes, die einem Bündel oder Felde im andern correspondirt?

$k+l=11$; a_s, $a_p b$, $a_e b$, oder welches ist der Complex der Geraden a, welche noch correspondirende haben; welche Regelfläche erzeugen die einem Bündel oder Felde associirten?

$k+l=12$; a_p, a_e, ab; welche beiden Grade hat die Congruenz der Geraden a, welche noch associirte besitzen; welche Regelflächen erzeugen diejenigen, deren associirte eine Gerade treffen?

$k+l=13$; a; welche Regelfläche erzeugen in jedem Raume die Geraden, die noch associirte haben?

$k+l=14$; wie viele Paare correspondirender Geraden giebt es?

Es leuchtet ein, dass eine Reihe von diesen Fragen durch Vertauschung der beiden Räume oder durch Dualität erledigt werden.

4. *Lässt man in jedem Falle ein Paar homologe Elemente eines der Grundsysteme fallen, so erhält man einfach unendliche Paare von correspondirenden Geraden* a, b und in einem solchen Systeme von „Doppelprojectivitäten“ wird es 1) eine endliche Zahl μ von solchen Doppelprojectivitäten geben, wo in der Projectivität der Ebenenbüschel, der „ersten Projectivität,“ auch noch die nach zwei weiteren gegebenen homologen Punkten gehenden Ebenen sich entsprechen, 2) eine endliche Zahl ν von solchen, bei denen in der Projectivität der Punktreihen, der „zweiten Projectivität“, auch noch die in zwei weiteren gegebenen homologen Ebenen befindlichen Punkte entsprechend sind, 3) *eine endliche Zahl* ω *von solchen, wo die erste Projectivität ausartet,* 4) *eine endliche Zahl* Θ *von solchen, wo es die zweite thut.*

Die beiden ersteren Zahlen μ, ν heissen die Charakteristiken des Systems und geben, bei einer Signatur $[kl]$ ermittelt, die Zahlen der denselben Lagenbedingungen unterworfenen Paare a, b für $[k+1, l]$, bez. $[k, l+1]$ und damit *die eigentlich gewünschten Zahlen.* Weil das ν bei $[kl]$ und μ bei $[k-1, l+1]$ übereinstimmen, so erhält man auf diese Weise eine Reihe von Zahlen doppelt.

5. *Zwischen den 4 Zahlen* μ, ν, ω, Θ *und zwei anderen Zahlen* χ_a, χ_b *oder vielmehr deren Summe* $\chi_a+\chi_b=\chi$ *bestehen zwei Relationen,* mit Hülfe deren man, wenn χ, ω, Θ bekannt sind, μ, ν berechnen kann.

*) Leider ist, weil Plücker jedem linearen Complexe eine Axe zugelegt hat, das Wort „Axen-Complex“ für diesen speciellen Complex aller eine feste Gerade treffenden Strahlen, der ein Grundgebilde ist und für welchen ein besonderer Name nothwendig ist, nicht mehr verfügbar. Vielleicht ist „*Strahlengewinde*“ ein nicht ungeeignetes Wort. Schubert sagt: Strahlenaxe, doch, glaube ich, denkt man dabei eher an die gemeinsame Transversale.

Es sei ein einfach unendliches System betrachtet; $\bar{a}$, $\bar{b}$ seien zwei feste Gerade, B', B'' zwei feste Punkte auf der letzteren, A' ein beweglicher auf der ersteren. Für jede Lage desselben giebt es μ Doppelprojectivitäten, in denen auch noch die Ebenen aA', bB' homolog sind; die in jeder derselben der Ebene bB'' homologe Ebene des Büschels a schneide $\bar{a}$ in A''. Demnach correspondiren jedem Punkte A' von $\bar{a}$ μ Punkte A'' und offenbar auch umgekehrt jedem A'' μ Punkte A'.

Die 2μ Coincidenzen vertheilen sich auf folgende 3 Fälle:

1) wenn die erste Projectivität entartet; dann ist beiden Ebenen $b(B', B'')$ die singuläre Ebene im Büschel a homolog;

2) wenn a die Gerade $\bar{a}$ trifft;

3) wenn b die Gerade $\bar{b}$ trifft; dann vereinigen sich $b(B', B'')$ und also auch ihre homologen Ebenen.

Es seien χ_a, χ_b die Zahlen der beiden letzteren Fälle, so ist:

(I) $$2\mu = \chi_a + \chi_b + \omega = \chi + \omega.$$

Die duale Betrachtung führt zu:

(II) $$2\nu = \chi_a + \chi_b + \Theta = \chi + \Theta.$$

Woraus noch durch Elimination von χ folgt:

(III) $$2(\mu - \nu) = \omega - \Theta,$$

die jedoch weniger brauchbar ist.

Es handelt sich also, wie gesagt, um die Ermittelung der Zahl χ und der beiden Ausartungszahlen ω, Θ.

Wenn a eine feste Lage hat oder die Bedingung a_f zu erfüllen hat, so ist $\chi_a = 0$; die Bedingungen a_s, a_p, a_e, a gehen durch Hinzufügung der Bedingung χ_a in a_f, a_s, a_s, a^2 oder, was dasselbe, in $a_p + a_e$ über*); Aehnliches gilt für b.

6. *Wird noch ein weiteres Paar der Grundelemente fallen gelassen*, so dass die Zahl der Projectivitätsbedingungen sich noch um eine vermindert, während die Lagenbedingungen je dieselben bleiben, *so erhält man doppelt unendliche Systeme von allgemeinen Doppelprojectivitäten und in jedem ein einfach unendliches System von jeder der beiden Ausartungen.*

---

*) a^2 ist die Bedingung, dass a zwei Gerade treffen soll, hier die der Bedingungen a und χ_a; es ist aber bekannt, dass, bei Uebereinstimmung der übrigen Bedingungen, die Zahl der Geraden, welche a^2 erfüllen, stets gleich der Summe der Zahlen derer, die a_p, und derer, die a_e erfüllen. Die übrigen Bedingungen bestimmen ein zweifach unendliches System von Geraden, eine Congruenz, und die Zahl der zwei Gerade treffenden Strahlen derselben ist gleich dem Grade der Regelfläche, welche von den eine Gerade treffenden erzeugt wird.

In einem solchen Systeme von Ausartungen der ersten Art, d. h. wo die erste Projectivität (die der Ebenenbüschel) exceptionell geworden ist, giebt es 1) eine endliche Zahl ν', bei denen in der nicht ausgearteten Punktreihenprojectivität auch noch die in zwei weiteren gegebenen Ebenen befindlichen Punkte homolog sind, und 2) *eine endliche Zahl τ, bei denen auch diese andere Projectivität ausartet.*

Eben so giebt es in einem Systeme von Ausartungen der zweiten Art, d. h. bei denen die Punktreihen in exceptioneller Projectivität sich befinden, 1) eine endliche Zahl μ'', bei denen zwei homologe Ebenen der nicht exceptionell projectiven Büschel nach zwei weiteren gegebenen Punkten gehen, und 2) eine endliche Zahl τ, bei denen beide Projectivitäten ausarten; die natürlich dieselbe Zahl ist wie in dem vorigen Systeme, wenn die Projectivitäts- und Lagenbedingungen übereinstimmen.

Da die auf eine ausgeartete Projectivität bezüglichen Projectivitätsbedingungen ebenfalls Lagenbedingungen sind, so haben wir es bei der Bedingung τ mit lauter Lagenbedingungen zu thun.

7. Für jedes der beiden Systeme von Ausartungen erhält man je eine Relation, und zwar für das System mit ausgearteten Ebenenbüschelprojectivitäten entsprechend (II) in Nr. 5.:

$$\text{(IV)} \qquad 2\nu' = \chi_a' + \chi_b' + \tau,$$

worin χ_a', bez. χ_b' die Zahl der Fälle bedeutet, in denen a, bez. b eine gegebene Gerade trifft; und für das andere System, entsprechend (I):

$$\text{(V)} \qquad 2\mu'' = \chi_a'' + \chi_b'' + \tau,$$

wo χ_a'', χ_b'' analoge Bedeutung haben.

Diese Formeln (I), (II), bez. (IV), (V) sind natürlich nur für solche Signaturen richtig, wo wirklich eine allgemeine, beziehlich exceptionelle Projectivität bestimmt ist; d. h. es darf k oder l nicht kleiner als 3, bez. 2 sein.

Aus τ, χ_a', χ_b', bez. τ, χ_a'', χ_b'' wird nun ν', bez. μ'' berechnet und giebt ν', bez. μ'' für $[kl]$ berechnet die Zahl ω für $[k, l+1]$, bez. Θ für $[k+1, l]$. Wir erhalten also damit nicht alle ω, bez. Θ. Denn wenn z. B. (IV), (V) auf die Signaturen [73], [64], [55], [46], [37] angewandt werden, so liefert (IV) die Werthe von ω für [74], [65], [56], [47], [38] und (V) die von Θ für [83], [74], [65], [56], [47]; wir erhalten nicht ω für [83] und Θ für [38], welche demnach direct ermittelt werden müssen. Doch machen diese directen Ermittelungen wenig Schwierigkeit, da jederzeit, wie man aus diesem Beispiel ersehen kann, das auf die nicht ausartende Projectivität bezügliche k oder l gleich 3 ist, diese Projectivität also gerade und zwar eindeutig bestimmt ist, mithin nicht weiter beachtet zu werden braucht. Da aber die auf die ausartende Projectivität bezügliche Zahl bald über 6 steigt, so sind die meisten dieser direct zu ermittelnden Zahlen schon a priori als gleich 0 zu erkennen.

8. Für den Fall $\sigma = k + l = 7$ und die Bedingung $a_f b_s$ haben wir die beiden Signaturen [43], [34]; durch Fallenlassen einer Bedingung gelangen wir bei beiden zu [33]. Bei dieser ist χ_a, χ_b, ω, Θ zu berechnen. Wollten wir noch weiter zu [32], [23] zurückgehen, so würde dies in diesem Fall ohne Nutzen sein; denn aus ihnen erhalten wir bez. Θ für [42], ω für [24], aber nicht für [33], wofür wir sie gerade brauchen; die für [42], [24] können wir nicht benutzen, denn auf diese Signaturen sind die Formeln (I), (II) nicht anwendbar, weil bei ihnen eine der beiden allgemeinen Projectivitäten nicht bestimmt ist. Wir ermitteln also ω, Θ direct für die Projectivitätsbedingung [33] und die Lagenbedingung $a_f b_s$ und finden leicht $\omega = \Theta = 3$. $\chi_a = 0$, weil a fest, und $\chi_b = 1$, da in Bezug auf [33] jeder Geraden jede Gerade auf eine einzige Weise associirt ist, so dass in dem Strahlbüschel, dem b wegen der Bedingung b_s angehören soll, ein dem festen a associirter Strahl existirt, der die Gerade der Bedingung χ_b trifft. Hieraus folgt nach (I), (II) $\mu = \nu = 2$; also ist für [43], [34] die Zahl ζ_7 der Paare associirter Geraden a, b, die der Bedingung $a_f b_s$ genügen, d. h. von denen eine fest ist, die andere einem gegebenen Büschel angehört, gleich 2; oder *die einer festen Geraden in Bezug auf* [43] *oder* [34] *associirten Geraden erzeugen einen Complex* 2. *Grades*. (R. P. Nr. 2.; dies Citat bezieht sich jederzeit nur auf die erste Signatur, die damals allein behandelt wurde). Das eine Resultat ist offenbar zu dem andern dual.

9. Wir gehen zu den Signaturen $\sigma = 8$ und zunächst zu der Lagenbedingung $a_f b_p$. Werden zwei Projectivitätsbedingungen fallen gelassen, so gelangen wir zu [33], auf welche wir die Formeln (IV) und (V) anwenden; $\chi_a' = \chi_a'' = 0$, weil a fest; χ_b' und χ_b'' sind die in der vor. Nr. gefundenen ω, Θ, denn $a_f b_p$ geht durch diese Bedingungen χ_b', χ_b'' in $a_f b_s$ über. Wir ermitteln $\tau = 9$ direct*), finden nun $\mu'' = \nu' = 6$, d. i. ω für [34] und Θ für [43], müssen direct ermitteln: $\omega = 0$ für [43], $\Theta = 4$ für [34].

Also:

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν
[43]	0	2	0	6	1	4,
[34]	0	2	6	4	4	3;

χ_b ist ζ_7 der vorigen Nr.; μ, ν geben also die Lösung für [53], [44], [35], nämlich 1, 4, 3 Paare associirter Geraden, von denen die eine

*) Einige solche directen Ermittelungen werde ich in Nr. 21. geben.

fest ist, die andere einem Bündel angehört, oder der Bündelgrad $\zeta_8{}^I$ der Congruenz, die einer festen Geraden für diese Signaturen correspondirt, ist 1, 4, 3. Das mittlere Resultat ist zweifach erhalten als ν bei [43], μ bei [34].

10. Das Problem $a_f b_e$ bei denselben Signaturen ergiebt sich durch Dualisirung, wodurch sich χ_a' und χ_a'', χ_b' und χ_b'', μ'' und ν', ω und Θ, μ und ν, k und l vertauschen. Der Feldgrad $\zeta_8{}^{II}$ der eben genannten Congruenz ist demnach bez. 3, 4, 1.

Demnach correspondirt für die 3 *Signaturen* [53], [44], [35] *einer festen Geraden eine Congruenz* (1, 3), (4, 4), (3, 1). (R. P. Nr. 8.).

11. Es ist noch bei den Signaturen $\sigma = 8$ das Problem $a_s b_s$ zu behandeln, d. h. die Zahl der Paare associirter Geraden a, b zu ermitteln, von denen jede in einem gegebenen Büschel (ihres Raumes) sich befindet.

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''
[33]	18	3	3	3	3	12	12;

$\tau = 18$ ist direct ermittelt, χ_a', χ_b' sind die ω für $a_f b_s$ (oder $b_f a_s$, was dasselbe) in Nr. 8., χ_a'', χ_b' die Θ; ν', μ'' sind vermittelst der Formeln (IV), (V) ermittelt und führen zu $\Theta = 12$ bei [43], $\omega = 12$ bei [34], wozu $\omega = 6$ bei [43] und $\Theta = 6$ bei [34] direct zu ermitteln sind.

Die Dualität des jetzigen Problems erspart die Hälfte der Rechnungen.

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν	
[43]	2	2	6	12	5	8	dual,
[34]	2	2	12	6	8	5	

χ_a, χ_b sind ζ_7 in Nr. 8.

Demnach ist bei [53], [44], [35] *der Grad* $\zeta_8{}^{III}$ *des Complexes der Geraden, die denen eines Büschels im andern Raume associirt sind,* 5, 8, 5. (R. P. Nr. 13).

12. Bei den Signaturen $\sigma = 9$ haben wir drei Probleme: $a_f b$, $a_s b_p$, $a_s b_e$.

Bei dem ersten ist also die Gerade a fest, b soll eine gegebene Gerade treffen.

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''	
[43]	12	0	4	0	12	8	12	dual,
[34]	12	0	12	0	4	12	8	

χ_b' ist (nach Nr. 5. Anm.) die Summe von ω bei $a_f b_p$ in Nr. 9. und bei $a_f b_e$ in Nr. 10., oder, was dasselbe, χ_b' für $[kl]$ ist die Summe von ω für $[kl]$ und von Θ für $[lk]$, beidemal bei $a_f b_p$ (Nr. 9.). Aehnlich ist χ_b'' für $[kl]$ die Summe von Θ für $[kl]$ und von ω für $[lk]$ bei $a_f b_p$. Wir erhalten hieraus die ω, Θ der nächsten Tabelle, mit Ausnahme der gesternten, welche direct gefunden sind.

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν	
[53]	0	4	0*	12	2	8	[53] und [35] zu einander,
[44]	0	8	8	8	8	8	[44] zu sich dual.
[35]	0	4	12	0*	8	2;	

χ_b ist die Summe von ζ_8^I und ζ_8^{II} in Nr. 9. und 10.

Es ergiebt sich als Grad ζ_9^I *der Regelfläche der Geraden des einen Raumes, die einer festen Geraden im andern associirt sind, für* [63], [54], [45], [36] *bez.* 2, 8, 8, 2 (R. P. Nr. 18).

13. Bei $a_s b_p$ soll die Gerade a einem Büschel, b einem Bündel angehören.

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''
[43]	18	0	6	6	12	12	18
[34]	30	6	12	4	6	24	20.

χ_a', χ_a'' sind ω, Θ bei $a_f b_p$ Nr. 9., χ_b', χ_b'' hingegen bei $a_s b_s$ in Nr. 11.

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν
[53]	1	5	0*	18	3	12
[44]	4	8	12	20	12	16
[35]	3	5	24	10*	16	9.

χ_a, χ_b sind bez. ζ_8^I, ζ_8^{III} in Nr. 9., 11.

Also ergiebt sich als Bündelgrad ζ_9^{II} *der Congruenz, die einem Büschel correspondirt, oder, als Grad des Complexes, der einem Bündel associirt ist, für* [63], [54], [45], [36] *bez.* 3, 12, 16, 9, *und* da das Problem $a_s b_e$ hierzu dual ist, so *ist der Feldgrad* ζ_9^{III} *der genannten Congruenz, oder der Grad des Complexes, der einem Felde correspondirt, bez.* 9, 16, 12, 3 (R. P. Nr. 22—28). Mithin correspondirt für diese 4 Signaturen einem Büschel bez. eine Congruenz (3, 9), (12, 16), (16, 12), (9, 3).

14. Bei den Signaturen $\sigma = 10$ haben wir fünf Probleme: a_f, $a_s b$, $a_p b_p$, $a_e b_e$, $a_p b_e$.

Bei dem ersten a_f ist a fest, die andere Gerade keiner Lagenbedingung unterworfen.

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''	
[53]	0	0	0	0	12	0	6	χ_b', χ_b'' sind ω, Θ bei $a_f b$ in Nr. 12.
[44]	0	0	8	0	8	4	4	
[35]	0	0	12	0	0	6	0;	

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν	
[63]	0	2	0*	6	1	4	
[54]	0	8	0	4	4	6	χ_b ist ζ_9^I in Nr. 12.
[45]	0	8	4	0	6	4	
[36]	0	2	6	0*	4	1.	

Also ist die Zahl ζ_{10}^{I} *der Geraden des einen Raumes, die in Bezug auf* [73], [64], [55], [46], [37] *einer Geraden des andern Raumes correspondiren, bez.* 1, 4, 6, 4, 1. (R. P. Nr. 29.)

15. Bei $a_s b$ gehört a einem Büschel, b einem speciellen linearen Complexe an (d. h. trifft eine gegebene Gerade).

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''
[53]	30	0	10	12	42	20	42
[44]	48	8	32	8	32	44	44
[35]	30	12	42	0	10	42	20;

χ_a', χ_a'' sind ω, Θ für $a_f b$ in Nr. 12., χ_b' ist die Summe von ω für $[kl]$ und Θ für $[lk]$ bei $a_s b_p$, χ_b'' die von Θ für $[kl]$ und ω für $[lk]$ bei $a_s b_p$ in Nr. 13.

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν
[63]	2	12	0*	42	7	28
[54]	8	28	20	44	28	40
[45]	8	28	44	20	40	28
[36]	2	12	42	0*	28	7.

χ_a ist ζ_9^{I} in Nr. 12.,
χ_b ist $\zeta_9^{II} + \zeta_9^{III}$ in Nr. 13.

Der Grad ζ_{10}^{II} *der Regelfläche, welche in Bezug auf* [73], [64], [55], [46], [37] *einem Strahlbüschel associirt ist, oder, was dasselbe, der Grad des Complexes, der einem Strahlengewinde (speciellen linearen Complexe) correspondirt, ist* 7, 28, 40, 28, 7. (R. P. Nr. 37, 38.)

16. Bei $a_p b_p$ soll jeder der beiden Strahlen a, b einem Bündel angehören.

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''
[53]	0	0	0	6	6	0	18
[44]	36	12	12	18	18	30	38
[35]	60	24	24	20	20	54	40;

$\left.\begin{array}{l}\chi_a', \chi_b' \text{ sind } \omega\\ \chi_a'', \chi_b'' \text{ sind } \Theta\end{array}\right\}$ bei $a_s b_p$ (oder $b_s a_p$), Nr. 13.

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν
[63]	3	3	0*	18	3	12
[54]	12	12	0	38	12	31
[45]	16	16	30	40	31	36
[36]	9	9	54	20*	36	19.

χ_a und χ_b sind ζ_9^{II} Nr. 13.

Demnach ist der Bündelgrad ζ_{10}^{III} *der Congruenz, die für* [73], [64], [55], [46], [37] *einem Bündel associirt ist, bez.* 3, 12, 31, 36, 19 (R. P. Nr. 33); und da das folgende Problem $a_e b_e$, wobei jede der beiden Geraden a, b einer gegebenen Ebene angehören soll, hierzu dual ist, *ergiebt sich als Feldgrad* ζ_{10}^{IV} *der Congruenz, welche einem Felde correspondirt, bez.* 19, 36, 31, 12, 3 (R. P. Nr. 35).

17. Es erübrigt das Problem $a_p b_e$: die Gerade a soll einem Bündel, b einem Felde angehören.

	τ	χ_a'	χ_b'	χ_a''	χ_b''	ν'	μ''
[53]	30	10	0	24	18	20	36
[44]	52	20	12	12	20	42	42
[35]	30	18	24	0	10	36	20;

χ_a', χ_a'' sind ω, Θ bei $a_s b_e$ oder, was dasselbe, die zu $[kl]$ gehörigen χ_a', χ_a'' sind Θ, ω für $[lk]$ bei $a_s b_p$ in Nr. 13.; χ_b', χ_b'' sind ω, Θ für $a_s b_p$ (oder $b_s a_p$) in Nr. 13.

	χ_a	χ_b	ω	Θ	μ	ν
[63]	9	3	0*	36	6	24
[54]	16	12	20	42	24	35
[45]	12	16	42	20	35	24
[36]	3	9	36	0*	24	6.

χ_a ist ζ_9^{III}, χ_b ist ζ_9^{II} in Nr. 13.

Also correspondirt einem Bündel für [73], [64], [55], [46], [37] *eine Congruenz vom Feldgrade* ζ_{10}^{V} *gleich* 6, 24, 35, 24, 6, *oder einem Felde eine Congruenz von diesem Bündelgrade* (R. P. Nr. 33, 35). Dies mit dem vorigen zusammenfassend, erhalten wir: In Bezug auf die genannten 5 Signaturen ist einem Bündel bez. eine Congruenz (3, 6), (12, 24), (31, 35), (36, 24), (19, 6) und einem Felde bez. eine Congruenz (6, 19), (24, 36), (35, 31), (24, 12), (6, 3) associirt.

18. Bei den Signaturen $\sigma = 11$ haben wir drei Probleme: a_s, $a_p b$, $a_e b$; also 1) a einem Büschel angehörig, b keiner Lagenbedingung unterworfen, 2) und 3) a einem Bündel oder Felde angehörig, b einer Geraden begegnend. Die beiden letzteren sind dual zu einander, das erstere zu sich selbst.

Wir begnügen uns nun, Wiederholungen von Zahlenangaben vermeidend, mit kürzerer Darstellung und fassen die zwei ersten Probleme zusammen:

		[63]	[54]	[45]	[36]
a_s	τ	0	0	0	0
$a_p b$	τ	0	60	100	60

Bei a_s sind χ_a', χ_a'' die ω, Θ bei a_f in Nr. 14., die χ_b', χ_b'' hingegen die ω, Θ bei $a_s b$ in Nr. 15.; dasselbe sind χ_a', χ_a'' bei $a_p b$, während hierbei χ_b', χ_b'' die Summen der ω, bez. der Θ bei $a_p b_p$ und bei $a_p b_e$ sind (Nr. 16, 17).

		[73]	[64]	[55]	[46]	[37]
a_s	ω	0*	0	10	24	24
	Θ	24	24	10	0	0*
$a_p b$	ω	0*	0	50	108	96
	Θ	48	92	90	40	0*.

Die χ_a, χ_b sind bei a_s bez. ζ_{10}^{I}, ζ_{10}^{II}, bei $a_p b$ bez. ζ_{10}^{II}, $\zeta_{10}^{III} + \zeta_{10}^{V}$ (Nr. 14—17).

Wir erhalten hieraus für die Signaturen [83], [74], [65], [56], [47], [38] *als Grad* ζ_{11}^{I} *des Complexes der Geraden jedes Raumes, welche associirte im andern haben, bez.* 4, 16, 28, 28, 16, 4 (R. P. Nr. 41, 53); *als Bündelgrad* ζ_{11}^{II} *der Congruenz derjenigen, deren associirte einer gegebenen Geraden begegnen, oder als Grad der Regelfläche derjenigen Geraden, deren associirte einem gegebenen Bündel angehören, bez.* 8, 32, 78, 98, 64, 16, *und (durch Dualität) als Feldgrad* ζ_{11}^{III} *der genannten Congruenz, oder als Grad der einem Felde correspondirenden Regelfläche bez.* 16, 64, 98, 78, 32, 8. (R. P. Nr. 42—48.)

19. Bei $\sigma = 12$ haben wir ebenfalls drei Probleme: a_p, a_s, ab; also 1) und 2) a soll einem Bündel oder Felde angehören, b keiner Lagenbedingung unterworfen sein, 3) beide Geraden sollen je eine gegebene Gerade treffen. Das zweite Problem ist zum ersten dual.

Der Werth von τ für die Signaturen $\sigma = 10$ ist bei den beiden ersten Problemen durchweg 0, beim letzten ist er für [64], [55], [46] bez. 120, 200, 120, sonst auch 0.

Beim ersten Probleme sind die χ_a', χ_a'' bez. die ω, Θ bei a_s, die χ_b', χ_b'' die ω, Θ bei $a_p b$ in Nr. 18., beim dritten hingegen ist $\chi_a' = \chi_b'$ für $[kl]$ die Summe von ω für $[kl]$ und Θ bei $[lk]$ bei $a_p b$, $\chi_a'' = \chi_b''$ umgekehrt.

		[83]	[74]	[65]	[56]	[47]	[38]
a_p	ω	0*	0	0	30	66	60
	Θ	36	58	50	20	0	0*
ab	ω	0*	0	100	240	260	144
	Θ	144	260	240	100	0	0*.

Bei a_p sind χ_a, χ_b bez. ζ_{11}^{I}, ζ_{11}^{II}, bei ab sind beide $\zeta_{11}^{II} + \zeta_{11}^{III}$.

Es ergiebt sich daraus der Bündelgrad ζ_{12}^{I} *der Congruenz der Geraden des einen Raumes, welche associirte im andern haben, für* [93], [84], [75], [66], [57], [48], [39] *beziehlich gleich* 6, 24, 53, 78, 73, 40, 10 *und der Feldgrad* ζ_{12}^{II} *gleich* 10, 40, 73, 78, 53, 24, 6; (R. P. Nr. 45.); *der Grad* ζ_{12}^{III} *der Regelfläche der Geraden jedes Raumes,* *deren associirte eine gegebene Gerade schneiden, ist resp.* 24, 96, 226, 296, 226, 96, 24 (R. P. Nr. 47, 57).

19. Bei $\sigma = 13$ giebt es nur ein Problem a: eine der beiden Geraden a, b soll eine gegebene Gerade treffen. Für die Signaturen $\sigma = 11$ ist τ durchweg 0. Die χ_b', χ_b'' sind ω, bez. Θ für ab in der vor. Nr., hingegen ist χ_a', einer Signatur $[kl]$ zugehörig, die Summe von ω für $[kl]$ und Θ für $[lk]$ bei a_p in der vor. Nr., χ_a'' umgekehrt die Summe von Θ für $[kl]$ und ω für $[lk]$. Man erhält für

		[93],	[84],	[75],	[66],	[57],	[48],	[39]:
a	ω	0*	0	0	60	160	192	120
	Θ	120	192	160	60	0	0	0*;

χ_a ist $\zeta_{12}^{I} + \zeta_{12}^{II}$, χ_b ist ζ_{12}^{III} Nr. 19.

Demnach ist der Grad ζ_{13} *der Regelfläche der Geraden jedes Raumes, welche associirte im andern haben, für* [10, 3], [94], [85], [76], [67], [58], [49], [3, 10] *resp. gleich* 20, 80, 176, 256, 256, 176, 80, 20 (R. P. Nr. 59).

20. Endlich bei den Signaturen $\sigma = 14$ liegt auch nur ein Problem vor: keine der beiden Geraden a, b ist einer Lagenbedingung unterworfen; den Projectivitätsbedingungen allein genügt nur eine endliche Zahl von Paaren associirter Geraden.

Bei allen Signaturen $\sigma = 12$ ist $\tau = 0$; die $\chi_a' = \chi_b'$ und $\chi_a'' = \chi_b''$ sind bez. die ω, Θ der vorigen Nr. Es ergiebt sich jetzt:

	[10, 3]	[94]	[85]	[76]	[67]	[58]	[49]	[3, 10]
ω	0*	0	0	0	60	160	192	120
Θ	120	192	160	60	0	0	0	0*;

$\chi_a = \chi_b$ ist ζ_{13}.

So ergiebt sich als Zahl ζ_{14} *der Paare associirter Geraden* a, b *für* [11, 3], [10, 4], [95], [86], [77], [68], [59], [4, 10], [3, 11] *bez.* 20, 80, 176, 256, 286, 256, 176, 80, 20 (R. P. Nr. 61, 62). Es ist nicht uninteressant, dass diese Zahlenreihe, abgesehen von der mittelsten Zahl, mit der der vorigen Nr. übereinstimmt.

21. *Es erübrigt noch, ein paar Beispiele der directen Ermittelung von* τ *zu geben.* Wir wählen als Projectivitätsbedingung die Signatur [43], als Lagenbedingung $a_s b_p$ (Nr. 13.). Die Grundelemente sind also

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$$
$$B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3;$$

ferner soll a in einem Büschel (A, α) sich befinden, b einem Bündel B angehören. Beide Projectivitäten sollen exceptionell sein. Beide singulären Ebenen α', β' der ersten Projectivität müssen zusammen durch 4 Grundpunkte gehen, denn wenn α' durch eine Anzahl der

A_i geht, so muss β' gerade die diesen nicht homologen B_i enthalten; ausserdem muss α' durch A, β' durch B gehen. Ebenso müssen die singulären Punkte A', B' der zweiten Projectivität zusammen in 3 Grundebenen liegen, A' überdies in α. Wir verbinden demnach A mit zweien der Punkte A_i, z. B. mit A_1, A_2 durch α'; $\alpha'\alpha$ ist dann a; ferner β' ist BB_3B_4; im Büschel (B, β') ziehen wir b so, dass sie die Schnittlinie zweier der Ebenen β_i, z. B. $\beta_1\beta_2$ trifft; der Begegnungspunkt ist B', der andere singuläre Punkt A' ist der Punkt $a\alpha_3$. Es erhellt, dass es hierbei $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 \times \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = 18$ Combinationen giebt; also ist $\tau = 18$.

Als zweites Beispiel wähle ich die Projectivitätsbedingung [44] mit der Lagenbedingung $a_p b_e$ (No. 17.). Grundelemente sind:

$$A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$$
$$B_1\, B_2\, B_3\, B_4\, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4;$$

ausserdem soll a einem Bündel A, b einem Felde β angehören.

Wir ziehen die Gerade a aus A, so dass sie eine Verbindungslinie zweier A_i, z. B. A_1A_2, und eine Schnittlinie zweier α_i, etwa $\alpha_1\alpha_3$ trifft; so ist die singuläre Ebene α' die Ebene (a, A_1A_2), der singuläre Punkt A' der Punkt $(a, \alpha_1\alpha_3)$. β' muss demnach B_3, B_4 enthalten, B' auf $\beta_2\beta_4$ liegen; b muss in β' liegen, B' enthalten und sich noch in β befinden; sie ist also die Gerade in β, welche B_3B_4 und $\beta_2\beta_4$ trifft, und erzeugt mit der ersteren die Ebene β', mit der letzteren den Punkt B'. Dies giebt $6 \times 6 = 36$ Combinationen.

Zweitens ziehe man a von A nach dem Schnittpunkte dreier Ebenen α_i, z. B. nach $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, der dann A' ist; α' als durch sie gehende Ebene kann nun höchstens einen der Punkte A_i enthalten, etwa A_1; es muss demnach β' durch B_2, B_3, B_4 gehen, wodurch sie bestimmt ist; ihr Schnitt mit β ist b und deren Schnitt mit β_4 ist B'. Dies giebt $4 \times 4 = 16$ Combinationen. Andere Weisen, zweifach ausgeartete Projectivitäten zu erhalten, sind nicht möglich. Also ist $\tau = 52$.

22. Bei den Signaturen von $\sigma = 7$ bis $\sigma = 10$ können associirte Geraden sich vereinigen, und es entsteht dann die Frage nach *der Vertheilung der Geraden c, bei welchen sowohl die nach den Punkten A_i und B_i gehenden Ebenenbüschel projectiv sind, als auch die durch die Ebenen α_i, β_i entstehenden Punktreihen.* Die einfachste Weise, diese Vertheilung zu ermitteln, ist, nach dem Vorgang des Herrn Schubert, dessen Correspondenzprincipien für Strahlen anzuwenden (Math. Ann. X, S. 68, 69). Er hat selbst schon (S. 89) für die Signaturen [k 3], die ich in „R. P." behandelt habe, die Berechnung gemacht und meine auf umständlicherem Wege gefundenen Resultate bestätigt; ich begnüge mich, die *Resultate* der einfachen Berechnung für *alle* Signaturen mitzutheilen.

Bei $\sigma = 7$ erfüllen die Geraden c einen Complex, bei $\sigma = 8$ eine Congruenz, bei $\sigma = 9$ eine Regelfläche und bei $\sigma = 10$ sind sie in endlicher Zahl vorhanden. Wir finden als Zahlen der Geraden c, welche bez. den Lagenbedingungen c_s; c_p, c_e; c; keiner Lagenbedingung genügen:

$$\begin{array}{cll} & & c_s \\ \sigma = 7 & [43] & 4 \\ & [34] & 4; \end{array} \qquad \begin{array}{clrr} & & c_p & c_e \\ & [53] & 7 & 11 \\ \sigma = 8 & [44] & 16 & 16 \\ & [35] & 11 & 7; \end{array}$$

$$\begin{array}{cll} & & c \\ & [63] & 28 \\ \sigma = 9 & [54] & 72 \\ & [45] & 72 \\ & [36] & 28; \end{array} \qquad \begin{array}{clr} & [73] & 38 \\ & [64] & 112 \\ \sigma = 10 & [55] & 154 \\ & [46] & 112 \\ & [37] & 38. \end{array}$$

Bei $\sigma = 7$ *erzeugen also die Geraden c bei beiden Signaturen einen Complex* 4. *Grades; bei* $\sigma = 8$ *eine Congruenz* (7, 11), (16, 16), (11, 7), *bei* $\sigma = 9$ *eine Regelfläche vom Grade* 28, 72, 72, 28; *bei* $\sigma = 10$ *sind sie in der endlichen Zahl* 38, 112, 154, 112, 38 *vorhanden.* (R. P. Nr. 4, 9, 13, 63—65.)

Ebenso könnten, wie es von Schubert mit Hilfe meiner früheren Zahlen geschehen, auch aus den neuen noch Resultate über sich schneidende associirte Strahlen abgeleitet werden. Doch unterlasse ich dies.

23. Ich wende mich noch zu einem Specialfalle, den man sowohl aus den eben erhaltenen Zahlen für vereinigte Strahlen a, b ableiten kann (Nr. 25.), den man aber auch direct angreifen kann. Ich will nämlich noch *die Vertheilung der Geraden d* untersuchen, *aus welchen eine gegebene Zahl k von Punktenpaaren durch Ebenenpaare einer Involution projicirt werden.* Bei $k = 3, 4, 5$ werden die Geraden d einen Complex, eine Congruenz, eine Regelfläche erzeugen, bei $k = 6$ in endlicher Zahl vorhanden sein.

In jedem System von einfach unendlich vielen Geraden d wird es wiederum eine Zahl μ von solchen geben, bei denen auch nach zwei weiteren gegebenen Punkten zugeordnete Ebenen der Involution gehen, und eine endliche Zahl ω von ausgearteten (parabolischen) Involutionen, in denen alle Paare eine gemeinsame Ebene besitzen. Begegnen ferner χ der Geraden dieses Systems einer gegebenen Geraden, so ergiebt sich durch eine ähnliche Betrachtung wie in Nr. 5. zwischen μ, ω, χ die Relation:

$$2\mu = 2\chi + \omega \cdot$$

Ist $k = 2$, so ist jede Gerade des Raumes eine Gerade d; wir betrachten demnach einen Strahlenbüschel; es ergiebt sich ohne weiteres $\chi = 1$ und $\omega = 4$, da es im Büschel 4 Strahlen giebt, welche eine Verbindungslinie von zwei Punkten treffen, die nicht zu demselben Paare gehören. Also ist $\mu = 3$.

Die Geraden d, aus denen die 3 *Punktenpaare* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *durch drei Ebenenpaare einer Involution projicirt werden, bilden einen Complex* 3. *Grades.*

Wir betrachten jetzt bei drei Paaren die Geraden d, welche einem Bündel D angehören, also einen Kegel 3. Ordnung bilden. In diesem einfach unendlichen Systeme ist $\chi = 3$, $\omega = 0$; demnach $\mu = 3$. In ein Feld δ hingegen wirft der Complex 3. Grades eine Curve 3. Classe; in dem System 1. Stufe, das deren Tangenten bilden, ist $\chi = 3$ und $\omega = 8$; denn parabolisch wird die Involution für die Schnitte von δ mit den 8 Ebenen, welche durch 3 Punkte aus verschiedenen der gegebenen Paare gehen. Daraus ergiebt sich $\mu = 7$, und *ist demnach die Congruenz der Geraden d, aus denen* 4 *Paare von Punkten* $A_1B_1, \cdots, A_4B_4$ *durch Ebenenpaare in Involution projicirt werden, vom Bündelgrad* 3 *und vom Feldgrad* 7.

Diejenigen unter ihren Geraden, die einer Geraden d begegnen, erzeugen eine Fläche 10. Grades. In dem von ihnen gebildeten System 1. Stufe ist $\chi = 10$, $\omega = 0$; also $\mu = 10$.

Die Geraden d, aus denen 5 *Punktenpaare* $A_1B_1, \cdots, A_5B_5$ *durch Ebenenpaare in Involution projicirt werden, erzeugen eine Fläche* 10. *Grades.*

In dem Systeme 1. Stufe dieser Geraden ist $\chi = 10$, $\omega = 0$; folglich $\mu = 10$.

Es giebt mithin 10 *Gerade, aus denen* 6 *Punktenpaare* A_1B_1, $A_2B_2, \cdots, A_6B_6$ *durch Ebenenpaare in Involution projicirt werden.*

24. Zu dem Complexe 3. Grades, der sich bei 3 Punktenpaaren ergab, gehören ersichtlich die Bündel der 6 Punkte, die Felder in den Ebenen durch je 3 aus verschiedenen Paaren, sowie die 6 linearen Congruenzen von der Art derer, welche A_1A_2, B_1B_2 oder A_1B_2, A_2B_1 zu Leitlinien haben. Bildet man also bei 4 Paaren 2 Gruppen von 3 Paaren, etwa bez. aus dem 1., 2., 3., und dem 1., 2., 4. bestehend, so haben die beiden Complexe 3. Grades die 4 Bündel A_1, B_1 A_2, B_2 und die beiden linearen Congruenzen (A_1A_2, B_1B_2), (A_1B_2, A_2B_1) gemein; der Rest des Schnittes ist die Congruenz (3, 7). Diese Congruenz erhält aus jedem der 8 Punkte einen Kegel 3. Ordnung, z. B. aus A_4 den, welcher zu dem Complexe 3. Grades für die 3 ersten Paare gehört. Ferner schneidet die Gerade A_1A_2 aus ihr eine Fläche vom Grade $3+7 = 10$ aus, zu der die beiden Kegel 3. Ordnung aus A_1, A_2 gehören und also ausserdem noch eine Fläche 4. Grades; man über-

zeugt sich leicht, dass jede Gerade dieser letzteren Fläche auch der $B_1 B_2$ begegnet; eine ähnliche Fläche 4. Grades, zu unserer Congruenz gehörig, befindet sich in $(A_1 B_2, A_2 B_1)$ u. s. f..

Bei 5 Paaren bilden wir zwei Gruppen, eine etwa aus den 3 ersten, die andere aus den beiden ersten, dem 4. und 5. Paare. Der Complex 3. Grades und die Congruenz (3, 7), welche diesen Gruppen zugehören, durchschneiden sich in einer Fläche vom Grade 3 (3+7); zu dieser gehören die 4 Kegel 3. Ordnung aus A_1, A_2, B_1, B_2 und die beiden Flächen 4. Grades in den linearen Congruenzen $(A_1 A_2, B_1 B_2)$, $(A_1 B_2, A_2 B_1)$. Es bleibt die obige Fläche 10. Grades. Auf derselben ist jeder der 10 Punkte der 5 Paare dreifach; denn z. B. durch A_5 gehen die 3 Geraden der den 4 ersten Paaren zugehörigen Congruenz. Demnach trifft $A_1 A_2$ die Fläche noch auf 4 Erzeugenden, welche ausserdem noch $B_1 B_2$ treffen. So enthält jede der 20 linearen Congruenzen 4 dieser Fläche angehörige Geraden. Bei 6 Paaren bilden wir wieder zwei Gruppen, eine aus den 3 ersten, die andere aus den beiden ersten und den 3 letzten bestehend, erhalten einen Complex 3. Grades und eine Regelfläche 10. Grades, welche ausser den $4 \cdot 3$ Erzeugenden durch die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 und den $2 \cdot 4$ in den linearen Congruenzen $(A_1 A_2, B_1 B_2)$, $(A_1 B_2, A_2 B_1)$ noch 10 Erzeugende gemein haben: die oben gefundenen 10 Geraden.

25. Lässt man bei 4 Paaren von Punkten A_4 mit B_3, B_4 mit A_3 zusammenfallen, so löst sich von dem Complex 4. Grades der Geraden c (für [43] Nr. 22), welche also zugleich mit $A_1, \cdots, A_4$ und mit $B_1, \cdots, B_4$ projective Büschel bilden, der lineare Complex der Geraden ab, welche $A_3 B_3$ treffen; es bleibt der Complex 3. Grades der Geraden d für drei Paare.*)

Lässt man ebenso bei 5 Paaren, wo die Geraden c (für [53] Nr. 22.) eine Congruenz (7, 11) bilden, A_5, B_5 resp. mit B_4, A_4 identisch sein, so gehört zu dieser Congruenz auch die Congruenz (4, 4) von Geraden c bei 4 Paaren, welche $A_4 B_4$ treffen, (dieselbe zerfällt in die zwei Bündel A_4, B_4 und eine Congruenz (2, 4)); es bleibt die Congruenz (3, 7) der Geraden d für 4 Paare.

Fallen bei 6 Paaren A_6, B_6 mit B_5, A_5 zusammen, so besteht die Regelfläche 28. Grades der Geraden c (bei [63] Nr. 22.) aus der Regelfläche vom Grade 7 + 11 der die $A_5 B_5$ treffenden Geraden c bei 5 Paaren, und der Fläche 10. Grades der Geraden d bei 5 Paaren.

Sind endlich bei 7 Paaren A_7, B_7 mit B_6, A_6 identisch, so sind von den 38 Geraden c (für [73] Nr. 22.) die 28 Geraden c der Regel-

---

*) So habe ich diesen Complex schon im Jahre 1875 ermittelt, und theilte mir damals Herr Voss mit, dass er auch in seinen Untersuchungen denselben gefunden habe.

fläche 28. Grades bei 6 Paaren, welche $A_6 B_6$ treffen, abzuziehen; es bleiben die 10 Geraden d, die wir bei 6 Paaren gefunden.

26. Die beiden Doppelebenen der Involution um eine Gerade d bilden ein Ebenenpaar, in Bezug auf welches die 3, 4, 5, 6 Paare je aus zwei conjugirten Punkten bestehen.

3, 4, 5, 6 Paare conjugirter Punkte bestimmen aber ein lineares System von Flächen 2. Grades von der 6., 5., 4., 3. Stufe. Der Complex 3. Grades, die Congruenz vom Bündelgrad 3 und Feldgrad 7, die Regelfläche 10. Grades, die 10 Geraden werden demnach gebildet durch, bez. sind die Doppellinien der Ebenenpaare, welche in dem betreffenden Systeme vorkommen. Wir erhalten so von einer andern Seite her die Sätze, welche Herr Reye in seiner Abhandlung über lineare Systeme und Gewebe von Flächen 2. Grades*) Nr. 29, 30, 35, 42, 13 bewiesen hat.

27. Projicirt man in den Fällen von 3, 4 Paaren diese auf eine Ebene, so ergiebt sich:

Sind in einer Ebene 3, bez. 4 Paare von Punkten gegeben, so bilden die Punkte, aus denen sie durch Strahlenpaare einer Involution projicirt werden, eine Curve 3. Ordnung, bez. es giebt 3 solche Punkte.

Die 3 Paare bestimmen ein Netz, die 4 Paare einen Büschel von Kegelschnitten, in Bezug auf welche je ihre beiden Punkte conjugirt sind. Die Curve 3. Ordnung ist die Hesse'sche Curve jenes Netzes, die 3 Punkte sind die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks dieses Büschels. Die 3 Punktenpaare anderseits (als ausgeartete Kegelschnitte betrachtet) constituiren ein Gewebe von Kegelschnitten (in dem engern Sinn, wie Herr Schröter dies Wort gebraucht, das duale Gebilde zu einem Netze), und die Curve 3. Ordnung ist die Cayley'sche Curve desselben, der Ort der Punkte aller Punktenpaare des Gewebes, welche Curve nach Herrn Schröter**) an jede 3 Kegelschnitte des Gewebes 3 Tangentenpaare in Involution sendet. Dass die Kegelschnitte des Gewebes auf die des Netzes sich stützen (ihnen harmonisch eingeschrieben sind), leuchtet ein, weil die 3 Constituenten es thun.***)

Münster i/W., den 1. Mai 1879.

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 82, S. 54.

**) Mathem. Annalen, Bd. V, S. 73.

***) Ich benutze diesen Raum für eine ergänzende Notiz zu dem Aufsatze über H. Grassmann in Bd. XIV dieser Annalen; Cremona hat im Jahre 1860 (Nouv. Ann. 1. Ser., Bd. 19, S. 356) eine kurze Auseinandersetzung von Grassmann's geometrischen Arbeiten gegeben und dazu bemerkt, dass ausser Möbius und Bellavitis kaum ein Geometer diesen Untersuchungen die Aufmerksamkeit gewidmet habe, die sie verdienen.

Ueber einige bestimmte Integrale.

Von

P. Bachmann in Münster.

§ 1.

Denkt man sich um den Nullpunkt der z-Ebene einen Kreis mit unendlich grossem Radius R beschrieben, nimmt das Integral $\int f(z)\,dz$ über die Begrenzung des Sectors (α, β), dessen Schenkel mit der reellen Axe die Winkel α, β bilden, und bezeichnet mit Δ die Summe der um die Unstetigkeitspunkte innerhalb des Sectors in positiver Richtung erstreckten Integrale, so besteht die Relation

$$(1) \qquad e^{\alpha i} \cdot \int_0^\infty f(re^{\alpha i})\,dr = e^{\beta i} \cdot \int_0^\infty f(re^{\beta i})\,dr + \Delta$$

allemal, wenn das auf den Kreisbogen bezügliche Integral für $R = \infty$ die Null zur Grenze hat. Es sei gestattet, aus dieser Quelle einige weniger bekannte Integralformeln hier zu entwickeln.

Bekanntlich ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,(e^{-hx} - e^{-kx}) = \log \frac{k}{h},$$

so lange h, k positive Constanten sind. Nimmt man daher

$$\int \frac{dz}{z}\,(e^{-hz} - e^{-kz})$$

längs der Begrenzung des Sectors, der durch die Strahlen 0 und $\alpha < \frac{\pi}{2}$ begrenzt wird, so ergiebt sich leicht

$$\log \frac{k}{h} = \int_0^\infty \frac{dr}{r}\,(e^{-hr(\cos\alpha + i\sin\alpha)} - e^{-kr(\cos\alpha + i\sin\alpha)})$$

und durch Vergleichung der reellen Bestandtheile die Formel

$$(2) \quad \log \frac{k}{h} = \int_0^\infty \frac{dr}{r}\,(e^{-hr\cos\alpha}\cos(hr\sin\alpha) - e^{-kr\cos\alpha}\cos(kr\sin\alpha)).$$

Wird zweitens das Integral $\int e^{-z^m}\,dz$, in welchem m eine positive ganze Zahl sei, über die Begrenzung des Sectors $(0, \alpha)$ genommen, so ist der Modulus des auf den Kreisbogen bezüglichen Integrales

$$\int_0^\alpha e^{-R^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)}\,.\,Rie^{\varphi i}\,d\varphi$$

sicher kleiner als

$$\int_0^\alpha e^{-R^m\cos m\varphi}\,.\,R\,d\varphi,\quad \text{d. i.}\quad e^{-R^m\cos m\psi}\,.\,R\alpha,$$

wenn ψ einen gewissen Mittelwerth zwischen 0 und α bezeichnet. So lange daher $\alpha \overline{\gtrless} \frac{\pi}{2m}$, wird jenes Integral für $R = \infty$ die Null zur Grenze haben, und daher die Gleichung (1) bei Trennung des Reellen vom Imaginären die nachstehenden liefern:

$$\int_0^\infty e^{-\varrho^m\cos m\alpha}\,.\,\cos(\alpha - \varrho^m\sin m\alpha)\,d\varrho = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-\varrho^m\cos m\alpha}\,.\,\sin(\alpha - \varrho^m\sin m\alpha)\,d\varrho = 0,$$

aus denen ohne Mühe diese andern hervorgehen:

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-\varrho^m\cos m\alpha}\,.\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\varrho^m\sin m\alpha)\,d\varrho = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\alpha).$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2m}$ insbesondere nehmen sie die einfachere Gestalt an:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\int_0^\infty \cos(\varrho^m)\,d\varrho &= \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\cos\frac{\pi}{2m},\\ \int_0^\infty \sin(\varrho^m)\,d\varrho &= \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\sin\frac{\pi}{2m}.\end{aligned}$$

Werden nunmehr, während $\alpha < \frac{\pi}{2m}$ ist, die Gleichungen (3) zu wiederholten Malen nach α differenzirt und darauf in passender Weise combinirt, so geben sie die allgemeineren, welche folgen:

$$(5)\qquad \int_0^\infty e^{-\varrho^m\cos m\alpha}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\varrho^m\sin m\alpha)\cdot\varrho^{nm}\,d\varrho$$
$$= \frac{1}{m}\cdot\Gamma\left(n + \frac{1}{m}\right)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(nm+1)\,\alpha,$$
$$\left(\text{für } \alpha < \frac{\pi}{2m}\right)$$

Formeln, welchen man durch die Substitution $\varrho^m \cos m\alpha = x$ die andere Gestalt

(6)
$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (x \operatorname{taug} m\alpha)\cdot x^{n-1+\frac{1}{m}}\, dx$$
$$= \Gamma\left(n+\frac{1}{m}\right) \cos^{n+\frac{1}{m}}(m\alpha)\cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (nm+1)\,\alpha$$

geben kann, in welcher sie bekannter sind.

§ 2.

Betrachten wir nunmehr das Integral $\int \frac{e^{azi}\,dz}{z^{2n}+b^{2n}}$ und verstehen dabei unter a, b positive Werthe. Die Function unter dem Integralzeichen hat die Unstetigkeitspunkte

$$z_h = b\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi + i\sin\frac{2h+1}{2n}\pi\right)$$
$$\text{für } h = 0, 1, 2, \cdots 2n-1,$$

von welchen *über* der reellen Axe nur die Punkte $z_0, z_1, \cdots z_{n-1}$ liegen. Ist n gerade, $n = 2m$, so liegen z_{m-1}, z_m symmetrisch zu beiden Seiten der imaginären Axe; ist dagegen n ungerade, $n = 2m+1$, so fällt z_m *auf* dieselbe. Beschreiben wir nun um den Punkt z_h einen unendlich kleinen Kreis und erstrecken in positiver Richtung über ihn die Integration, so erhalten wir das Integral

$$\lim_{\varrho=0}\int_0^{2\pi} \frac{e^{abi\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2h+1}{2n}\pi\right)+a\varrho i(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{\left(\frac{z^{2n}+b^{2n}}{z-z_h}\right)_{z=z_h+\varrho e^{\varphi i}}}\cdot i\,d\varphi$$
$$= -\frac{\pi i}{nb^{2n-1}}\cdot e^{abi\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2h+1}{2n}\pi\right)+\frac{2h+1}{2n}\pi i}.$$

Wird ferner die Integration längs der Begrenzung eines *oberhalb* der reellen Axe liegenden Sectors (α, β) ausgeführt, so wird das auf den Kreisbogen bezügliche Integral

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{aRi(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\,Rie^{\varphi i}\,d\varphi}{b^{2n}+R^{2n}e^{2n\varphi i}}$$

einen Modulus haben, der jedenfalls kleiner ist, als

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{-aR\sin\varphi}\,R\,d\varphi}{R^{2n}-b^{2n}} \quad \text{d. i.} \quad \frac{e^{-aR\sin\psi}\,R\,(\beta-\alpha)}{R^{2n}-b^{2n}}$$

wenn ψ passend zwischen α, β gewählt wird; es convergirt also sicher gegen Null, wenn R unendlich wächst.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir zunächst über die Begrenzung des Quadranten zwischen den positiven Axen integriren. Im Falle eines *geraden* n erhalten wir aus Gleichung (1) unmittelbar

$$\int_0^\infty \frac{e^{axi}\,dx}{b^{2n}+x^{2n}} = i\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\,dy}{b^{2n}+y^{2n}}$$
$$-\frac{\pi i}{n b^{2n-1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}-1} e^{-ab\sin\frac{2h+1}{2n}\pi + \left(\frac{2h+1}{2n}\pi + ab\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)i}.$$

Ist aber n ungerade, so muss der auf der imaginären Axe liegende Unstetigkeitspunkt durch einen unendlich kleinen Halbkreis ausgeschlossen gedacht werden, und folglich ist zunächst

$$\int_0^\infty \frac{e^{axi}\,dx}{b^{2n}+x^{2n}} = i\int_0^{b-\varepsilon} \frac{e^{-ay}\,dy}{b^{2n}-y^{2n}} + i\int_{b+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-ay}\,dy}{b^{2n}-y^{2n}}$$
$$-\frac{\pi i}{n b^{2n-1}} \cdot \sum_{h=0}^{h=\frac{n-3}{2}} e^{-ab\sin\frac{2h+1}{2n}\pi + \left(\frac{2h+1}{2n}\pi + ab\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)i}$$
$$+\lim_{\varepsilon=0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ab+a\varepsilon i(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\cdot i\varepsilon e^{\varphi i}\,d\varphi}{b^{2n}+(bi+\varepsilon e^{\varphi i})^{2n}}.$$

Hier ist der angedeutete Grenzwerth gleich $\frac{e^{-ab}\pi}{2nb^{2n-1}}$. Ersetzt man ferner im ersten Integrale rechts y durch by, im zweiten durch $\frac{b}{y}$, so lässt ihre Summe sich folgendermassen schreiben:

$$\frac{i}{b^{2n-1}} \cdot \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{b}} \frac{e^{-aby}y^{1-n} - e^{-\frac{ab}{y}}y^{n-1}}{1-y^{2n}} \cdot y^{n-1}\,dy$$
$$+\frac{i}{2nb^{2n-1}}\int_{1-\frac{\varepsilon}{b}}^{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{b}}} \frac{e^{-\frac{ab}{y}}}{y} \cdot d\log(1-y^{2n}).$$

Der zweite Bestandtheil aber ist gleich einem Ausdrucke $M\log(1+\delta)$, in welchem δ gleichzeitig mit ε gegen Null, M aber gegen den endlichen Werth $\frac{ie^{-ab}}{2nb^{2n-1}}$ convergirt, und nähert sich daher mit ε der Null. So gewinnt man für ein *ungerades* n das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{e^{axi}\,dx}{b^{2n}+x^{2n}} = \frac{i}{b^{2n-1}}\int_0^1 \frac{e^{-aby}y^{1-n}-e^{-\frac{ab}{y}}y^{n-1}}{1-y^{2n}}\cdot y^{n-1}\,dy$$

$$-\frac{\pi i}{nb^{2n-1}}\sum_{h=0}^{h=\frac{n-1}{2}}{}' e^{-ab\sin\frac{2h+1}{2n}\pi+\left(\frac{2h+1}{2n}\pi+ab\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)i},$$

wo der Accent beim Summenzeichen andeuten soll, dass das letzte, dem Werthe $h=\frac{n-1}{2}$ entsprechende Glied nur halb zu nehmen ist.

Trennt man nun in den beiden so erhaltenen Gleichungen das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich für das Cosinus-Integral die zuerst von Poisson ermittelten Werthe; indessen stellt man leicht folgende, *für beide Fälle* giltige Formel her:

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{b^{2n}+x^{2n}}$$

$$=\frac{\pi}{2nb^{2n-1}}\cdot\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{-ab\sin\frac{2h+1}{2n}\pi}\cdot\sin\left(\frac{2h+1}{2n}\pi+ab\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right).$$

Auch die beiden auf das Sinus-Integral bezüglichen, soviel mir bekannt ist, noch nicht gegebenen Formeln lassen sich vereinigen, indem man schreibt:

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{b^{2n}+x^{2n}}\cdot dx = \frac{1}{b^{2n-1}}\cdot\int_0^1 \frac{e^{-aby}y^{1-n}\pm e^{-\frac{ab}{y}}y^{n-1}}{1\pm y^{2n}}\cdot y^{n-1}\,dy$$

$$-\frac{\pi}{nb^{2n-1}}\cdot\sum_{h=0}^{h=m-1} e^{-ab\sin\frac{2h+1}{2n}\pi}\cdot\cos\left(\frac{2h+1}{2n}\pi+ab\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right),$$

worin das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, jenachdem $n=2m$ oder $n=2m+1$ ist.

Die Gleichung (7) liefert für $n=1$ die bekannte Relation

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2b}\,e^{-ab},$$

welche, nach a zwischen den Grenzen 0 und a integrirt, die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{b^2+x^2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right),$$

und folglich

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos ax + bx \sin ax}{b^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2b},$$

oder, mittelst der Substitution $x = b \cdot \operatorname{tg} u$ und wenn $ab = k$ gesetzt wird, diese, von Herrn Kummer auf anderm Wege*) erhaltene Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u + k \operatorname{tg} u)}{\sin u}\, du = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$(k > 0)$$

ergiebt.

Aus (8) dagegen entspringt für $n = 1$ die Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{e^{-aby} - e^{-\frac{ab}{y}}}{1 - y^2}\, dy,$$

sodass das Sinus-Integral durch ein anderes ersetzt wird, welches Herr Schlömilch (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrgg. X, pag. 155 u. XVIII, pag. 317) auf den Integrallogarithmus zurückgeführt hat.

§ 3.

Wenn man in gleicher Weise über die Begrenzung des Sectors $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$ integrirt, so gehen die nachstehenden Gleichungen hervor:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{b^{2n} + x^{2n}} = \frac{\pi}{2nb^{2n-1}} \cdot e^{-ab \sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2n} + ab \cos \frac{\pi}{2n}\right)$$
$$+ \frac{1}{b^{2n-1}} \int_0^1 \left[\varphi(y) - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right] \frac{y^{n-1}\, dy}{1 - y^{2n}}; \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{b^{2n} + x^{2n}} = -\frac{\pi}{2nb^{2n-1}} \cdot e^{-ab \sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + ab \cos \frac{\pi}{2n}\right)$$
$$+ \frac{1}{b^{2n-1}} \int_0^1 \left[\psi(y) - \psi\left(\frac{1}{y}\right)\right] \frac{y^{n-1}\, dy}{1 - y^{2n}}, \tag{11}$$

in welchen zur Abkürzung

*) Vergl. Crelle's Journal, Bd. XX, pag. 10, die letzte Formel für $n = 1$.

$$e^{-aby\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2n}+aby\cos\frac{\pi}{2n}\right)\cdot y^{1-n}=\varphi(y)$$

$$e^{-aby\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2n}+aby\cos\frac{\pi}{2n}\right)\cdot y^{1-n}=\psi(y)$$

gesetzt ist.

Wird nun bei geradem n die Formel (10), bei ungeradem n die Formel (11) $n-1$ Mal nach a differenzirt, so entsteht die folgende:

$$(12)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax\cdot x^{n-1}\,dx}{b^{2n}+x^{2n}}=\frac{\pi}{2nb^n}\cdot e^{-ab\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\left(ab\cos\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$+\frac{1}{b^n}\int_0^1\frac{y^{n-1}\,dy}{1-y^{2n}}\left[e^{-aby\sin\frac{\pi}{2n}}\cos\left(aby\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{ab}{y}\sin\frac{\pi}{2n}}\cos\left(\frac{ab}{y}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Da der Werth der linken Seite dieser Gleichung für den Fall eines geraden n aus Gleichung (7) berechnet werden kann, muss das Integral zur Rechten dann auch als bekannt angesehen werden. Heben wir nur das specielle Resultat hervor, welches für $n=2$ sich ergiebt! Es ist, sofern $\frac{ab}{\sqrt{2}}=k$ gesetzt wird,

$$(13)\quad \int_0^1\frac{y\,dy}{1-y^4}\left(e^{-ky}\cos ky-e^{-\frac{k}{y}}\cos\frac{k}{y}\right)=\frac{\pi}{4}\,e^{-k}\sin k,$$

$$(k>0)$$

insbesondere für $k=1$:

$$(14)\quad \int_0^1\frac{y\,dy}{1-y^4}\left(\frac{\cos y}{e^y}-\frac{\cos\frac{1}{y}}{e^{\frac{1}{y}}}\right)=\frac{\pi\sin(1)}{4e}.$$

Die Formel (12) vermittelt den Uebergang zu zwei andern, scheinbar fern liegenden Integralen, wenn wir sie mit der Gleichung (2) verbinden. Diese liefert zunächst, wenn darin $r=a$, $h=by$, $k=\frac{b}{y}$ und $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}$ gesetzt wird, die andere:

$$\int_0^\infty\frac{da}{a}\left[e^{-aby\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\cos\left(aby\cos\frac{\pi}{2n}\right)-e^{-\frac{ab}{y}\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\cos\left(\frac{ab}{y}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$=-2\log y.$$

Wenn man daher die beiden Seiten der Gleichung (12) mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und ∞ nach a integrirt, so gewinnt man mittelst der bekannten, für ein positives x giltigen Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, da}{a} = \frac{\pi}{2}$$

nach Umkehrung der Integrationsordnung leicht folgendes Resultat:

$$\frac{\pi^2}{4n} = \frac{\pi}{2n} \cdot \int_0^\infty e^{-ab \sin \frac{\pi}{2n}} \sin\left(ab \cos \frac{\pi}{2n}\right) \frac{da}{a} + 2\int_0^1 \frac{y^{n-1} \log y\, dy}{y^{2n}-1}.$$

Für $n = 1$ giebt diese Gleichung

$$(15) \qquad \int_0^1 \frac{\log y\, dy}{y^2-1} = \frac{\pi^2}{8}$$

und damit eine neue Begründung der bekannten Reihenformel

$$(16) \qquad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

Benutzt man aber dies Ergebniss, sowie die offenbare Gleichheit

$$\int_0^1 \frac{y^{n-1} \log y\, dy}{y^{2n}-1} = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\log y\, dy}{y^2-1},$$

so findet man für jedes ganzzahlige n

$$\int_0^\infty e^{-ab \sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \sin\left(ab \cos \frac{\pi}{2n}\right) \frac{da}{a} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

oder

$$(17) \qquad \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin\left(x \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}\right) \frac{dx}{x} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

einen speciellen einfachen Fall einer bekannten Integralformel.

Münster, im Mai 1879.

Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades*).

Von

F. Schur in Berlin.

In dem Folgenden habe ich den Versuch gemacht, das so interessante Gebiet der Strahlencomplexe 2. Grades einer rein geometrischen Behandlung zu unterziehen. Eine Untersuchung der in einem solchen Complexe enthaltenen Regelflächen 2. Grades zeigte bald, dass sich derselbe immer durch zwei reciproke Bündel von linearen Strahlencomplexen erzeugen lässt. Nachdem so ein geometrischer Ausgangspunkt gewonnen war, zeigte eine weitere Behandlung, wie eng alle bisher bekannten, von Plücker**) und Herrn F. Klein***) gefundenen Eigenschaften der Complexe 2. Grades mit den in denselben enthaltenen Regelflächen 2. Grades zusammenhängen. Dieser Zusammenhang liefert die von den genannten Geometern erhaltenen Resultate ungezwungen und setzt sie in ein neues Licht. Besonders dürfte der durch diese Regelflächen vermittelte Zusammenhang aller zu einer Singularitätenfläche gehörigen Complexe 2. Grades interessant sein. Der eigentlichen Behandlung der Complexe 2. Grades musste eine Untersuchung der Strahlensysteme 2. Ordnung und 2. Classe vorausgehen. Dieselben haben zwar kürzlich von Herrn Reye†) eine geometrische Behandlung erfahren; jedoch konnte ich mich darauf

*) Vergl. die unter gleichem Titel erschienene Inauguraldissertation des Verf. Berlin 1879.

**) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig 1868, 69.

***) F. Klein, Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung 2. Grades in Liniencoordinaten auf eine kanonische Form. Diss. inaug. Bonn. 1868. Zur Theorie der Liniencomplexe 1. und 2. Grades. Math. Annalen von Clebsch und Neumann. Bd. II. S. 198.

†) Reye, Ueber Strahlensysteme 2. Classe und die Kummer'sche Fläche mit 16 Knotenpunkten. Borchardt's Journal f. r. u. a. M. Bd. 86. S. 89.

nicht stützen, da für mich die Beziehung derselben zu dem sie enthaltenden linearen Complexe wesentlich war. Auch war ein Eingehen auf die speciellen Arten dieser Strahlensysteme für meinen Zweck nothwendig. An diese Untersuchung schloss sich naturgemäss einiges Allgemeinere über die in einem linearen Complexe enthaltenen Strahlensysteme. Dabei wird von einer Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum ausgegangen, die gewissermassen durch eine Projection des linearen Complexes vermittelt wird. Diese Abbildung führt für einen speciellen Fall auf eine schon bekannte, von Herrn Noether*) entdeckte. Zuletzt bemerke ich noch, dass ich mich überall bemüht habe, an den Principien der Geometrie der Lage festzuhalten, d. h. nur wirklich construirte Gebilde zu betrachten.

Erstes Capitel.

Die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum.

§ 1.

Bezeichnungen.

Der Bequemlichkeit halber werden wir uns im Folgenden immer nachstehender Bezeichnungen bedienen. Mit den Buchstaben des kleinen deutschen Alphabets bezeichnen wir Punkte, mit denen des kleinen lateinischen Alphabets Linien, endlich mit denen des kleinen griechischen Alphabets Flächen. Weiter mit den Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets Strahlen, mit denen des grossen deutschen Alphabets Regelflächen, insofern sie Strahlen enthalten, mit denen des grossen griechischen Alphabets Strahlensysteme (Congruenzen) und endlich mit den Buchstaben des grossen lateinischen Alphabets Strahlencomplexe. Obere Indices mögen die Ordnung oder Classe des betreffenden Gebildes angeben, untere verschiedene Individuen derselben Art unterscheiden. Bei Strahlencomplexen bezeichnet die Ordnung zugleich die Classe; auch die Strahlensysteme, welche wir betrachten, werden ausnahmslos von derselben Ordnung und Classe sein, wir werden sie daher kurz Strahlencomplexe oder -Systeme des betreffenden Grades nennen. Sind Gebilde des 1. Grades (Ordnung) gemeint, so werden wir den oberen Index fortlassen.

*) Nöther, Zur Theorie der algebraischen Functionen. Göttinger Nachrichten. 1869.

§ 2.

Das zur Abbildung dienende Gebüsch von linearen Complexen.

Durch 2 Strahlen q_1 und q_2 geht ein lineares System 3. Stufe von linearen Complexen hindurch (ein Complexgebüsch 1. Grades). Dasselbe denke man sich collinear auf die Ebenen des Raumes bezogen, sodass also jeder Ebene σ ein Complex S, jeder Geraden m ein Strahlensystem 1. Grades M entspricht und jedem Punkte $\mathfrak{p}$ eine Regelfläche 2. Grades $\mathfrak{P}$. Beschreibt die Ebene σ ein Ebenenbüschel durch m, so beschreibt der entsprechende Complex S ein dazu projectivisches Büschel durch M. Beschreibt der Punkt $\mathfrak{p}$ die Gerade m, so beschreibt die Fläche $\mathfrak{P}$ in M ein Büschel durch q_1, q_2 und die beiden Leitstrahlen von M. Mit einem nicht durch q_1 und q_2 gehenden linearen Complexe C hat nun jeder Complex S ein Strahlensystem 1. Grades Σ gemein, jedes Strahlensystem M eine Regelfläche $\mathfrak{M}$ und jede Regelfläche $\mathfrak{P}$ ein Strahlenpaar $p_1\, p_2$. Hierdurch entspricht also jedem Punkte $\mathfrak{p}$ des Raumes ein Strahlenpaar $p_1\, p_2$ des Complexes C, jeder Geraden m eine Regelfläche $\mathfrak{M}$ und jeder Ebene σ ein Strahlensystem Σ. Beschreibt der Punkt $\mathfrak{p}$ die Gerade m, so beschreibt das Strahlenpaar $p_1\, p_2$ eine dazu projectivische Involution auf $\mathfrak{M}$, und beschreibt σ ein Büschel durch m, so beschreibt Σ ein Büschel durch $\mathfrak{M}$, d. h. die Strahlen dieser Systeme, die durch irgend einen Punkt gehen, beschreiben ein zu dem Ebenenbüschel projectivisches Strahlenbüschel.

§ 3.

Die Leitgeraden der Strahlensysteme, welche C mit den Complexen S gemein hat, bilden einen linearen Complex.

Jeder Complex S hat mit C ein Strahlensystem 1. Grades Σ gemein, welches zwei Leitgerade s_1 und s_2 besitzt. Hat die Regelfläche $\mathfrak{P}$ durch $q_1\, q_2$ mit C die Strahlen $p_1\, p_2$ gemein, so sind alle Geraden, welche p_1 und p_2 gleichzeitig schneiden, solche Leitgeraden; und lässt man $\mathfrak{P}$ ein Strahlensystem M durchlaufen, so erhält man die Leitgeraden aller Strahlensysteme Σ. Denn die Σ, welche diesen Leitgeraden zugehören, entsprechen den Ebenen, welche eine Gerade m schneiden, d. h. alle Ebenen des Raumes. Da nun die Strahlenpaare $p_1\, p_2$ auf $\mathfrak{M}$ eine Involution bilden, so erkennt man leicht, dass die Strahlen s, welche in einer Ebene α liegen, durch einen Punkt $\mathfrak{a}$ gehen. Denn $\mathfrak{M}$ schneidet α in einem Kegelschnitt, dessen Punkte durch die Strahlenpaare $p_1\, p_2$ involutorisch gepaart sind; die Strahlen s sind aber die Verbindungslinien der Punkte je eines Paares und bilden daher ein Strahlenbüschel, welches zur Involution der $p_1\, p_2$ projectivisch ist.

Daher erfüllen die Leitgeraden s einen linearen Complex K. Seine Strahlen $s_1\, s_2$ sind einander in Bezug auf C conjugirt und die Strahlen $p_1\, p_2$ sind einander in Bezug auf K conjugirt. Von zwei solchen Complexen sagt man, sie liegen in Involution*).

Jeder Ebene σ entspricht also ein Strahlenpaar $s_1\, s_2$ von K und den Ebenen, welche durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen, die Strahlen eines Strahlensystems 1. Grades Π, dessen Leitgeraden $p_1\, p_2$ sind. Beschreibt $\mathfrak{p}$ die Gerade m, so beschreibt Π ein dazu projectivisches Büschel durch $\mathfrak{M}$, wo aber jetzt die Leitschaar von $\mathfrak{M}$ gemeint ist. Denn wir sahen, dass die Strahlen s, welche diese Systeme mit einer Ebene α gemein haben, ein zur Involution der $p_1\, p_2$ projectivisches Büschel bilden. Ferner beschreiben die Strahlen $s_1\, s_2$, wenn σ sich um m dreht, auf $\mathfrak{M}$ eine dazu projectivische Involution.

Man erkennt ausserdem leicht, dass die Regelflächen, welche die Strahlenpaare $s_1\, s_2$ von K mit irgend einer Geraden r_1 verbinden, sämmtlich noch durch eine zweite Gerade r_2 gehen, sodass also dann die Ebenen σ des Raumes zu dem Complexgebüsch 1. Grades durch $r_1\, r_2$ in reciproker Beziehung stehen.

§ 4.

Die Fläche 2. Ordnung, welche dem Strahlensysteme entspricht, das C und K gemein haben.

Während jedem Punkte $\mathfrak{p}$ des Raumes i. A. 2 Strahlen $p_1\, p_2$ in C entsprechen, entspricht jedem Punkte einer gewissen Fläche 2. Grades χ^2 immer nur ein Strahl. Man sieht unmittelbar, dass dies die Strahlen des Systems X sind, welche C mit K gemein hat. Und in der That entspricht den Strahlen dieses Systems eine Fläche 2. Grades. Denn jedes Strahlensystem M, welches in dem Gebüsche durch $q_1\, q_2$ einer Geraden m des Raumes entspricht, hat mit C und K zwei Strahlen gemein. Ebenso werden auch die Ebenen, welche den Strahlen von X, insofern es K angehört, entsprechen, von einer Fläche 2. Classe umhüllt, welche mit χ^2 identisch ist. Denn der Strahl s, welcher einer solchen Ebene σ entspricht, vertritt zugleich die beiden Leitgeraden des Systems Σ, welches der Ebene σ in C entspricht; dieses hat daher mit X die beiden durch s und die Leitgeraden von X bestimmten Strahlenbüschel gemein. Jedes derselben kann mit $q_1\, q_2$ durch ein Strahlensystem 1. Grades M verbunden werden; diesen entsprechen also die beiden Geraden m, in denen σ die Fläche χ^2 schneidet. Dem Strahle s selbst entspricht der Schnittpunkt derselben, d. i. der Berührungspunkt von σ. Einem Punkte $\mathfrak{p}$ entspricht in K ein Strahlen-

*) Klein, Zur Theorie u. s. w. Math. Ann. Bd II. S. 201.

system Π, welches die Leitgeraden der Systeme enthält, die den Ebenen durch $\mathfrak{p}$ in C entsprechen. Daher enthält die Regelfläche $\mathfrak{R}$, welche Π mit X gemein hat, die Leitgeraden der Systeme, welche den Tangentialebenen von χ^2 durch $\mathfrak{p}$ entsprechen, und den Geraden von $\mathfrak{R}$ entsprechen, insofern sie C angehören, die Berührungspunkte. Dem linearen Complexe also, welcher $\mathfrak{R}$ mit $q_1\, q_2$ verbindet, entspricht die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf χ^2. Hat umgekehrt das System Σ, welches in C einer Ebene σ entspricht, mit X die Regelfläche $\mathfrak{S}$ gemein, so entspricht dem Complexe, welcher $\mathfrak{S}$ mit $r_1\, r_2$ verbindet, der Pol von σ in Bezug auf χ^2.

Jeder Geraden a entspricht i. A. eine Regelfläche $\mathfrak{A}$ in C; berührt aber a die χ^2 in $\mathfrak{p}$, so zerfällt diese in 2 Strahlenbüschel, welche den Strahl p gemein haben. Denn p vertritt ja die beiden Leitgeraden des Systems, welches der Tangentialebene von χ^2 in $\mathfrak{p}$ entspricht. Die beiden Strahlenbüschel mögen die Centren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und die Ebenen α_1, α_2 haben. Den Ebenen durch a entsprechen dann in K ebenfalls zwei Strahlenbüschel mit den resp. Centren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und den Ebenen α_1, α_2. Hat man umgekehrt einen Punkt $\mathfrak{a}_1$ und gehört ihm im Complexe C die Ebene α_1 zu, dieser Ebene aber im Complexe K der Punkt $\mathfrak{a}_2$ und endlich diesem Punkte in C die Ebene α_2, so hat das Strahlensystem A, welches das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{a}_1$ in α_1 mit $q_1\, q_2$ verbindet, mit C noch das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{a}_2$ in α_2 gemein, und es entspricht ihm eine Gerade a, welche χ^2 in dem Punkte $\mathfrak{p}$ berührt, der dem Strahle $p = \overline{\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2}$ entspricht. Analoges gilt in Bezug auf den Complex K.

Auch jeder Ebene β_1 entspricht mit der ihr zugehörigen Ebene β_2 eine Tangente b von χ^2. Geht β_1 durch $\mathfrak{a}_1$, also auch β_2 durch $\mathfrak{a}_2$, so haben a und b den Punkt gemeinsam, welcher dem Strahlenpaar (α_1, β_1), (α_2, β_2) entspricht. Beschreibt daher $\mathfrak{a}_1$ die Ebene β_1, so beschreibt a das Strahlensystem 2. Grades, welches aus den Tangenten von χ^2 besteht, die b treffen. Beschreibt $\mathfrak{a}_1$ eine Gerade g_1, so beschreibt a eine Regelfläche 2. Grades $\mathfrak{G}$, und zugleich beschreibt b die andere Geradenschaar dieser Fläche, wenn β_1 sich um dieselbe Gerade g_1 dreht. Diese Regelflächen degeneriren in Kegelflächen, wenn g_1 dem Complexe C, in die Tangentenbüschel von Kegelschnitten, wenn g_1 dem Complexe K angehört, und endlich in Strahlenbüschel, wenn g_1 beiden Complexen zugleich angehört.

Zuletzt erwähnen wir noch, dass man die collineare Beziehung zwischen den Ebenen des Raumes und den Complexen durch $q_1\, q_2$ immer so einrichten kann, dass dem Systeme X eine vorgelegte Fläche 2. Grades χ^2 entspricht, vorausgesetzt, dass letztere im allgemeinen Falle nicht degenerirt. Denn entspricht bei irgend einer Beziehung dem X eine Fläche χ_1^2, so kann man wiederum den Raum so collinear auf sich selbst beziehen, dass der Fläche χ_1^2 eine vorgelegte Fläche χ^2 entspricht.

§ 5.

Der Complex C sei ein specieller.

Ist der Complex C ein specieller mit der Directrix d, so besteht K aus allen Geraden, welche der Geraden d in Bezug auf die Complexe S durch $q_1\, q_2$ conjugirt sind, d gehört also auch selbst dem Complexe K an, und es besteht daher X aus Strahlenbüscheln, deren Centren auf d liegen und deren Ebenen durch d gehen. Die Fläche χ^2 ist desshalb eine Kegelfläche mit dem Centrum in dem Punkte $\mathfrak{d}$, welcher der Directrix d entspricht. Jeder Ebene σ entspricht jetzt ausser d nur ein Strahl s von K. Ausgenommen sind nur die Tangentialebenen von χ^2, deren jeder ein Strahlenbüschel von X entspricht. Denn da nun r_2 mit d zusammenfällt, so enthält jede Regelfläche durch r_1, r_2 und einen d schneidenden Strahl s von K das ganze Strahlenbüschel (d, s).

§ 6.

Der Complex K sei ein specieller*).

Ist der Complex K ein specieller mit der Directrix e, so fällt etwa q_2 mit e zusammen, und es entspricht jedem Punkte $\mathfrak{p}$ ausser e nur ein Strahl p; denn e ist nun ein Strahl von C. Das Strahlensystem X besteht wieder aus Strahlenbüscheln, deren Centren auf e liegen und deren Ebenen durch e gehen. Die Fläche χ^2 degenerirt daher in einen Kegelschnitt k^2, welcher in der Ebene ε liegt, die dem Strahle e entspricht, insofern er K angehört. Jedem Punkte dieses Kegelschnittes k^2 entsprechen die Strahlen eines der Strahlenbüschel von X; jedem Punkte von ε immer derselbe Strahl e. Den Geraden a durch die Punkte $\mathfrak{p}$ von k^2 entsprechen Punkte $\mathfrak{a}$ in der Ebene des $\mathfrak{p}$ entsprechenden Strahlenbüschels und Ebenen α durch das Centrum desselben.

§ 7.

Beide Complexe C und K seien specielle.

Ist auch C ein specieller Complex mit der Directrix d, so haben d und e einen Punkt $\mathfrak{c}$ gemein und liegen in einer Ebene γ. X besteht daher erstens aus den Strahlen, die durch $\mathfrak{c}$ gehen, und dann aus denen, die in γ liegen. Die Fläche χ^2 degenerirt daher in zwei Gerade c und g, die in ε liegen und sich in $\mathfrak{d}$ schneiden. Die Strahlen durch $\mathfrak{c}$ entsprechen den Punkten von c, und den Punkten von g die Strahlen in γ, sodass jedem Punkte von c die Strahlen eines Büschels

*) Vergl. Anm. *) auf pag. 435.

mit dem Centrum $\mathfrak{c}$ und der Ebene durch e entsprechen, und jedem Punkte von g die Strahlen eines Büschels mit dem Centrum auf e und der Ebene γ; dies gilt in Bezug auf C. In K entsprechen jeder Ebene durch c die Strahlen eines Büschels mit dem Centrum $\mathfrak{c}$ und der Ebene durch d, jeder Ebene durch g die Strahlen eines Büschels mit dem Centrum auf d und der Ebene g. Sonst entspricht jedem Punkte $\mathfrak{p}$ in C ausser e nur ein Strahl p, und jeder Ebene σ in K ausser d nur ein Strahl s. Ferner entspricht jedem Punkte $\mathfrak{a}$ ein Strahl a durch c und jeder Ebene β ein Strahl b durch g. Nur jedem Punkte von d entsprechen die Geraden eines Büschels mit dem Centrum $\mathfrak{b}$ und der Ebene durch g, und jedem Punkte von e die Geraden eines Büschels mit dem Centrum auf c und der Ebene ε. Analoges gilt in Beziehung auf die Ebenen durch d und e, sodass die Beziehung in diesem Falle eine vollkommen wechselseitige wird.

§ 8.

Die Strahlensysteme, welche den Flächen des Raumes in C entsprechen. Ihre Brennflächen.

Beschreibt der Punkt $\mathfrak{p}$ eine Fläche φ^n n. Ordnung, so beschreiben die entsprechenden Regelflächen $\mathfrak{P}$ durch q_1, q_2 einen Complex F^n n. Grades, welcher mit C ein Strahlensystem n. Grades Φ^n gemein hat. Jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von φ^n entsprechen also 2 Strahlen $p_1\, p_2$ von Φ^n und ebenso jedem zu $\mathfrak{p}$ benachbarten Punkte $\mathfrak{p}'$ zwei Strahlen p_1', p_2', von denen der eine p_1' unendlich nahe an p_1, der andere p_2' an p_2 liegt. Sollen nun p_1 und p_1' und also auch p_2 und p_2' sich schneiden, so muss die Regelfläche $\mathfrak{A}$, welche der Tangente $a = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ entspricht, in 2 Strahlenbüschel zerfallen, d. h. a muss auch Tangente von χ^2 sein. Die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und die Ebenen α_1, α_2 heissen die Brennpunkte*) und Brennebenen von p_1, p_2 resp. Ausser a geht von p aus nur noch eine Tangente a' an χ^2, welche zugleich φ^n in $\mathfrak{p}$ berührt. Daher besitzt jeder Strahl p_1 von Φ^n zwei Brennpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ und zwei zugehörige Brennebenen α_1, α_1'; in diesen Punkten wird also p_1 von benachbarten Strahlen des Systems geschnitten, die ihrerseits in den Ebenen α_1, α_1' liegen. Der Ort der Punkte $\mathfrak{a}_1$ heisst nun die Brennfläche von Φ^n; sie entspricht dem Systeme der gemeinsamen Tangenten von χ^2 mit φ^n und ist daher von der $2n(n-1)$ten Ordnung. Denn jede Regelfläche $\mathfrak{G}$, welche irgend einer Geraden g in dem Tangentialcomplexe von χ^2 entspricht, hat mit dem Tangentialcomplexe von φ^n $2n(n-1)$ Strahlen gemein. Die Kegelfläche aber,

*) Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Crelle's Journal f. r. u. a. M. Bd. 57. S. 189.

welche p_1 entspricht, hat ausser a und a' mit diesem Tangentialcomplexe nur noch $2n(n-1)-4$ Strahlen gemein, also berührt p_1 die Brennfläche $\psi^{2n(n-1)}$ in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$. Nun entspricht ferner den Tangentialebenen σ von φ^n in K ein Strahlensystem, das ebenfalls $\psi^{2n(n-1)}$ zur Brennfläche hat; also berührt auch jeder Strahl s desselben die $\psi^{2n(n-1)}$ in seinen Brennpunkten. Berührt nun σ die φ^n in $\mathfrak{p}$, so schneidet s_1 und s_2 das Paar p_1, p_2. Da nun a auch in σ liegt, so liegt $\mathfrak{a}_1$ auf s_1 oder s_2, wir nehmen an, auf s_1; dann schneidet s_1 den p_2 in $\mathfrak{a}_2'$, ferner s_2 den p_1 in $\mathfrak{a}_2$ und p_2 in $\mathfrak{a}_1'$. Ebenso muss auch α_1 durch s_1 oder s_2 gehen; ginge sie durch s_1, so wäre s_1 ein Strahl von X. Daher geht α_1 durch s_2, α_1' durch s_1, α_2 durch s_1 und α_2' durch s_2. Also berühren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2'$ die $\psi^{2n(n-1)}$ in resp.: $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$. Es berührt daher jede Brennebene in dem andern Brennpunkte des ihr zugehörigen Strahles. Da also $\psi^{2n(n-1)}$ von allen Brennebenen berührt wird, so ist sie auch $2n(n-1)$ter Classe.

Ist eine Tangente a von χ^2 ganz in φ^n enthalten, so entsprechen ihr zwei $2n(n-1)$-fache Punkte von $\psi^{2n(n-1)}$ mit Osculationskegeln $2(n-1)$ter Ordnung und n. Classe, und die a entsprechenden Ebenen berühren $\psi^{2n(n-1)}$ längs je einer Curve n. Ordnung und $2(n-1)$ter Classe, schneiden sie also noch in einer Curve $2n(n-2)$ter Ordnung. Das Strahlensystem Φ^n enthält dann die Strahlenbüschel durch $\mathfrak{a}_1$ in α_1 und durch $\mathfrak{a}_2$ in α_2; solche Punkte und Ebenen heissen singuläre Punkte und Ebenen des Strahlensystems.

Diese Strahlensysteme n-ter Ordnung sind jedoch nicht die allgemeinsten in C enthaltenen; sie besitzen nämlich die Eigenthümlichkeit, in Bezug auf K sich selbst conjugirt zu sein. Einem allgemeinen Strahlensysteme n. Grades $\Phi_1{}^n$, sowie dem ihm in Bezug auf K conjugirten $\Phi_2{}^n$ entspricht vielmehr, wie hier nicht näher ausgeführt werden mag, eine Fläche $2n$. Ordnung, welche die Schnittcurve einer Fläche n. Ordnung mit einer Fläche $(n-1)$ter Ordnung zur Doppelcurve hat und die χ^2 längs einer Curve $2n$. Ordnung berührt. Daraus folgt, dass nur noch für allgemeine Strahlensysteme 1. und 2. Grades der Complex K so gewählt werden kann, dass ihnen Ebenen resp. Flächen 2. Grades entsprechen. Die in diesen Strahlensystemen enthaltenen Regelflächen 2. Grades führen in der That immer zu solchen Complexen K.

Zweites Capitel.

Die Strahlensysteme zweiten Grades.

§ 1.

Die in dem Strahlensysteme 2. Grades enthaltenen Regelflächen 2. Grades.

Das allgemeine Strahlensystem 2. Grades in C entspricht also einer Fläche 2. Grades φ^2. Diese enthält 2 Schaaren von geraden Linien, denen in Φ^2 2 Schaaren von Regelflächen entsprechen. (Unter Regelflächen schlechthin werden wir im Folgenden immer die 2. Grades verstehen.) Zwei Regelflächen derselben Schaar haben keine Strahlen gemein, dagegen hat jede Regelfläche der einen Schaar mit jeder der andern Schaar ein Strahlenpaar gemein, oder zwei solche Regelflächen liegen in demselben Strahlensysteme 1. Grades. Man kann sich daher Φ^2 durch zwei projectivische Büschel von Strahlensystemen 1. Grades erzeugt denken. Die Regelflächen, welche alle Strahlensysteme je eines Büschels gemein haben, gehören dann der einen Schaar an und diejenigen, welche je zwei entsprechende Strahlensysteme gemein haben, der andern Schaar.

Nun entsprechen aber auch denjenigen Kegelschnitten von φ^2, welche χ^2 doppelt berühren, Regelflächen von Φ^2. Die Ebenen, welche solche Kegelschnitte enthalten, sind bekanntlich die Tangentialebenen der 4 Kegel 2. Grades, welche in dem durch φ^2 und χ^2 bestimmten Büschel vorkommen. In Bezug auf diese Tangentialebenen gilt nun folgender Satz:

„Zwei Tangentialebenen desselben Kegels schneiden φ^2 in Kegelschnitten, durch welche eine χ^2 längs eines Kegelschnittes berührende Fläche 2. Grades geht; und umgekehrt geht durch die Kegelschnitte, die zwei solche Tangentialebenen mit φ^2 gemein haben, eine χ^2 längs eines Kegelschnittes berührende Fläche 2. Grades, so gehören die Tangentialebenen zu demselben Kegel.“

Daraus ergiebt sich nun leicht, dass die Regelflächen, die den zu einem Kegel gehörigen Kegelschnitten entsprechen, zwei analoge Schaaren bilden, wie die eben beschriebenen. Zwei solchen Kegelschnitten r^2 und s^2 entsprechen nämlich 4 Regelflächen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, wo $\mathfrak{R}_1$ mit $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{S}_1$ mit $\mathfrak{S}_2$ in je einem Strahlensysteme 1. Grades liegt. Durch r^2 und s^2 geht aber eine χ^2 längs eines Kegelschnittes berührende Fläche 2. Grades, welchen in C zwei Strahlensysteme 1. Grades Ψ_1 und Ψ_2 entsprechen. Nehmen wir nun an, dass Ψ_1 durch $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{S}_1$ geht, so geht Ψ_2 durch $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{S}_2$. Diese Regelflächen erhält man also aus einer gerade so wie oben dadurch, dass man durch $\mathfrak{R}_1$ etwa ein Strahlensystem 1. Grades Ψ_1 legt, welches mit Φ^2 eine zweite Regelfläche $\mathfrak{S}_1$ gemein hat, durch diese wieder ein Strahlensystem 1. Grades u. s. f. Und aus dem zweiten Theile des erwähnten Satzes erkennt man auch, dass allen so erhaltenen Regelflächen Kegelschnitte entsprechen, die zu demselben Kegel gehören. Die Geraden der drei Regelflächen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{R}_2$, die nicht C angehören, bestimmen einen linearen Complex, in Bezug auf welchen Φ^2 ebenfalls sich selbst conjugirt ist. Wird daher die Beziehung zwischen den Strahlen von C und den Punkten des Raumes so eingerichtet, dass K mit diesem Complex zusammenfällt, so entspricht Φ^2 ebenfalls einer Fläche 2. Grades, deren Geraden nun die aus $\mathfrak{R}_1$ abgeleiteten Regelflächen entsprechen.

„Jedes Strahlensystem 2. Grades enthält also 5 Paare von Regelflächenschaaren. Eine Regelfläche irgend einer Schaar hat mit keiner Regelfläche derselben Schaar einen Strahl gemeinsam, dagegen zwei mit jeder Regelfläche der Schaar, die mit ihr ein Paar bildet, und einen Strahl mit jeder andern Regelfläche.“

§ 2.

Die Polareigenschaften der Strahlensysteme 2. Grades.

Jedem Punkte $\mathfrak{p}$ entspricht eine Polarebene σ in Bezug auf φ^2; entspricht dann $\mathfrak{p}$ in C das Strahlenpaar $p_1\ p_2$ und σ das System Σ, so wollen wir Σ ein Polarsystem von $p_1\ p_2$ in Bezug auf Φ^2 nennen. Offenbar kann man dasselbe auch folgendermaassen definiren: Man lege durch p_1 und eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ von Φ^2, welche einer Geraden von φ_2 entspricht, ein Strahlensystem 1. Grades P, das mit Φ^2 noch eine zweite Regelfläche $\mathfrak{S}$ gemein hat. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ bestimmen dann ein Büschel, von dem auch eine Fläche $\mathfrak{T}$ durch p_1 geht, und in ihm bestimme man die Fläche, welche von $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ harmonisch getrennt ist; dann wird, wenn $\mathfrak{R}$ ihre Schaar beschreibt, diese Fläche das Polarsystem Σ von p_1 beschreiben. — Durch jeden Punkt $\mathfrak{a}_1$ von p_1 geht ein Strahl des Systems Σ, und man erkennt leicht, dass derselbe von p_1 harmonisch getrennt ist durch das Strahlenpaar von Φ^2 durch $\mathfrak{a}_1$. Den 5 Paaren von Regelflächenschaaren von Φ^2 entsprechend gehören nun zu jedem Strahle p_1 von C 5 Polarsysteme; sie müssen aber hiernach die von den p_1 treffenden Strahlen gebildete Regelfläche alle gemein haben.

Bleiben wir bei einem Paare von Regelflächenschaaren stehen, so ist weiter ersichtlich, dass, wenn p_1 das Strahlenbüschel um $\mathfrak{a}_1$ beschreibt, das Polarsystem Σ ein dazu projectivisches Büschel durch eine Regelfläche $\mathfrak{A}_1$ beschreibt, welche wir die Polarfläche von $\mathfrak{a}_1$ nennen wollen. — Geht das Polarsystem Σ von p_1 durch einen Strahl

q_1, so geht umgekehrt das Polarsystem von q_1 durch p_1. — Geht ferner die Polarfläche $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{b}_1$, so geht die Polarfläche $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{b}_1$ durch $\mathfrak{a}_1$. Denn ist q_1 der in $\mathfrak{A}_1$ liegende Strahl durch $\mathfrak{b}_1$, so enthält das Polarsystem von q_1 das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{a}_1$, dieses also einen Strahl von $\mathfrak{B}_1$. — Geht ferner die Polarfläche von $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{a}_1$ selbst, so ist $\mathfrak{a}_1$ ein Punkt der Brennfläche von Φ^2. Denn die den Strahlen von $\mathfrak{a}_1$ entsprechenden Polarsysteme schicken dann durch $\mathfrak{a}_1$ immer denselben in $\mathfrak{A}_1$ liegenden Strahl, also fallen die beiden durch $\mathfrak{a}_1$ gehenden Strahlen von Φ^2 zusammen. Umgekehrt entspricht auch jedem Punkte der Brennfläche eine durch ihn gehende Polarfläche.

§ 3.

Die singulären Punkte und Ebenen*).

Von den Geraden der beiden Schaaren auf φ^2 berühren je 4 die Fläche χ^2. Diesen 8 Geraden entsprechen 8 Paare von singulären Punkten und Ebenen des Strahlensystems Φ^2; auch sind dies alle singulären Punkte und Ebenen von Φ^2. Offenbar gehen die Regelflächen, welche den Geraden der einen Schaar von φ^2 entsprechen, durch die 8 singulären Punkte, welche den 4 χ^2 berührenden Geraden der andern Schaar entsprechen, und berühren die diesen Punkten zugehörigen singulären Ebenen. Da nun jedes Paar singulärer Ebenen ebenfalls eine solche Regelfläche ist, so geht es ausser durch die beiden ihm zugehörigen singulären Punkte noch durch 8 andere, jede singuläre Ebene also im Ganzen durch 6 singuläre Punkte, und reciprok gehen auch durch jeden singulären Punkt 6 singuläre Ebenen. Die 16 singulären Punkte theilen sich also in zwei Gruppen zu je 8; von den 6 singulären Punkten, die in einer singulären Ebene α_1 liegen, gehören zwei $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der einen Gruppe an und die andern vier der andern. Wird daher die Beziehung zwischen den Strahlen von C und den Punkten des Raumes so eingerichtet, dass K mit irgend einem der vier andern Complexe zusammenfällt, in Bezug auf welche Φ^2 sich selbst conjugirt ist, so gehört $\mathfrak{a}_1$ mit einem dieser vier andern Punkte zu einer Gruppe und $\mathfrak{a}_2$ mit den drei übrigen zur andern. Die 16 singulären Punkte von Φ^2 theilen sich also auf fünffache Weise in zwei Gruppen zu je acht derart, dass die Regelflächen einer Schaar durch 8 Punkte einer Gruppe gehen und die Regelflächen der Schaar, welche mit der ersten ein Paar bildet, dann durch die übrigen 8 Punkte gehen. Von den 6 singulären Punkten, die in einer singulären Ebene

*) Kummer, Monatsber. der K. Ak. d. W. zu Berlin. 1864. S. 246; und: Ueber die algebraischen Strahlensysteme. Abh. d. K. Ak. d. W. zu Berlin. 1866. S. 65 ff.

α_1 liegen, gehören so 5 successive mit dem Punkte $\mathfrak{a}_1$ einer Gruppe an. Das Strahlenbüschel in α_1 durch $\mathfrak{a}_1$ bestimmt also mit den 5 Strahlenbüscheln durch die übrigen 5 in α_1 gelegenen Punkte 5 Regelflächen, von denen aus man alle Regelflächen von Φ^2 mit Hülfe von Strahlensystemen 1. Grades construiren kann. Für die singulären Ebenen gelten die reciproken Sätze.

§ 4.

Die Brennfläche des Strahlensystems.

Die Brennfläche von Φ^2 entspricht also den gemeinsamen Tangenten von φ^2 und χ^2. Sie ist daher eine Fläche ψ^4 4. Ordnung und 4. Classe; die 16 singulären Punkte von Φ^2 sind conische Knotenpunkte derselben und jede der 16 singulären Ebenen berührt sie längs eines Kegelschnittes. Ihre Vertheilung ist im vorigen Paragraphen erörtert worden; es bleibt nur noch zu erwähnen, dass die 6 singulären Punkte in einer singulären Ebene auf einem Kegelschnitt liegen und die 6 singulären Ebenen durch einen singulären Punkt einen Kegel 2. Grades berühren.

Die Fläche ψ^4 ist aber auch Brennfläche des Strahlensystems 2. Grades in K, welches den Tangentialebenen von φ^2 entspricht. Dasselbe besteht aus den nicht in C liegenden Geraden der Regelflächen, welche den Geraden von φ^2 entsprechen. Da nun Φ^2 auf fünffache Weise auf eine Fläche 2. Grades abgebildet werden kann, so ist ψ^4 im Ganzen Brennfläche von 6 Strahlensystemen 2. Grades. Wie die übrigen 5 Strahlensysteme aus Φ^2 entstehen, so müssen überhaupt je 5 aus dem sechsten entstehen. Denn die 5 Strahlensysteme, die aus jedem derselben entstehen, müssen mit den 5 übrigen identisch sein, weil die 12 Strahlen derselben, die in irgend einer Ebene α liegen, und die 16 Geraden, in denen α die singulären Ebenen schneidet, gerade die 28 Doppeltangenten von ψ^4 ausmachen, die in α liegen.

Jedoch lässt sich dasselbe auch direct beweisen. Sei nämlich Ψ^2 das Strahlensystem 2. Grades in K, welches den Tangentialebenen von φ^2 entspricht, so giebt es in Ψ^2 ausser den Regelflächen, die den Geraden von φ^2 entsprechen, noch vier Paare von Schaaren, welche den Tangentialkegeln von φ^2 entsprechen, die χ^2 doppelt berühren. Die Spitzen dieser Kegel liegen in den vier Ebenen des sich selbst conjugirten Tetraeders des Büschels (φ^2, χ^2). $\mathfrak{R}_1$ sei nun eine Regelfläche, welche einem Kegelschnitt r^2 von φ^2 entspricht, der χ^2 doppelt berührt, und g_1 eine nicht in C liegende Gerade derselben. Dieser entspricht eine Regelfläche $\mathfrak{S}$, welche durch r^2 geht und χ^2 längs eines Kegelschnittes berührt; sie schneidet ferner φ^2 in einem 2. Kegelschnitt s^2, der auch χ^2 doppelt berührt, und dessen Ebene mit der von

r^2 durch denselben Eckpunkt des sich selbst conjugirten Tetraeders geht (vergl. den Satz auf S. 440). Es entspricht dem s^2 eine ebenfalls g_1 enthaltende Regelfläche $\mathfrak{S}_1$, die mit $\mathfrak{R}_1$ demselben Paare angehört. Da nun $\mathfrak{G}$ von φ^2 in zwei Kegelschnitten geschnitten wird, so hat sie mit ihr auch zwei Tangentialkegel 2. Grades gemein. Nun berührt jeder derselben die χ^2 doppelt, da die Kegelschnitte, längs deren sie $\mathfrak{G}$ berühren, die χ^2 doppelt berühren; also entsprechen ihnen in Ψ^2 zwei Regelflächen, welche g_1 enthalten. Die Spitzen dieser Kegel liegen in der dem oben erwähnten Eckpunkte gegenüberliegenden Ebene des sich selbst conjugirten Tetraeders. Wir sehen daher, dass jedes Strahlensystem 2. Grades, das aus einem der 4 Paare von Regelflächenschaaren von Φ^2 sich ergiebt, identisch ist mit einem der aus Ψ^2 sich ergebenden.

Sind a und a' zwei in φ^2 enthaltene und χ^2 berührende gerade Linien, die verschiedenen Schaaren angehören, so bilden die ihnen entsprechenden singulären Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$ ein Tetraeder, dessen Seitenflächen α_1, α_2, α_1', α_2' alle singulären Punkte von Φ^2 enthalten; die Ebene α_1 enthält z. B. die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1'$ und die drei singulären Punkte, welche den andern drei a schneidenden und χ^2 berührenden Geraden von φ^2 entsprechen. Betrachten wir nun das Strahlensystem, in welchem der Ebene α_1 der Punkt $\mathfrak{a}_2$ zugehört, so gehören den resp. Ebenen α_2, α_1', α_2' die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_1'$ zu; in dem Strahlensysteme ferner, in welchem der Ebene α_1 der Punkt $\mathfrak{a}_1'$ zugehört, gehören den resp. Ebenen α_2, α_1', α_2' die Punkte $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ zu. Nehmen wir daher ein Strahlensystem, in welchem der Ebene α_1 keiner der in ihr liegenden Eckpunkte des Tetraeders entspricht, so gilt dasselbe von den 3 andern Seitenflächen desselben. Daraus folgt, dass jeder Reye'sche Complex, welcher $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}_2'$ als Fundamentaltetraeder hat, mit diesem Strahlensysteme 8 ebene Strahlenbüschel gemein hat. Ein zu diesem Tetraeder gehöriger Reye'scher Complex also, welcher noch einen andern Strahl dieses Systems enthält, enthält alle Strahlen dieses Systems. Da nun jede singuläre Ebene eines Strahlensystems 2. Grades mit dem ihr zugehörigen singulären Punkte zu 10 solchen Tetraedern Veranlassung giebt, so erhalten wir den Satz*):

> „Durch jedes Strahlensystem 2. Grades gehen 40 Reye'sche Complexe."

---

*) Caporali, Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado. Reale Accademia dei Lincei (1877—78).

§ 5.

Die Fläche 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt*).

Aus dem Bisherigen ergeben sich die Eigenschaften der Fläche φ^4 mit einem Doppelkegelschnitt leicht. Wird nämlich der Complex C so auf den Raum bezogen, dass K ein specieller Complex ist und k^2 der Doppelkegelschnitt von φ^4 (vergl. 1. Capitel, § 6.), so entspricht der φ^4 ein Strahlensystem 2. Grades Φ^2. Den Strahlensystemen 1. Grades durch e und den Regelflächen von Φ^2 entsprechen die Tangentialebenen von 5 Kegeln 2. Grades, die φ^4 doppelt berühren; die Tangentialebenen schneiden φ^4 in Kegelschnitten. Da Φ^2 in Bezug auf 5 lineare Complexe sich selbst conjugirt ist, so schneiden die Geraden durch je eine der Kegelspitzen die φ^4 in Punktepaaren einer Involution, deren Doppelelemente auf je einer durch k^2 gehenden Fläche 2. Grades liegen; jede dieser Flächen geht also auch durch die Curve 4. Ordnung, längs welcher der Kegel durch die zugehörige Spitze die φ^4 berührt. Den 16 singulären Punkten und Ebenen von Φ^2 entsprechen 16 gerade Linien von φ^4, deren also jede von 5 andern geschnitten wird. Wird C so auf den Raum bezogen, dass e ein Strahl von Φ^2 ist, so entspricht dem Strahlensysteme Φ^2 eine allgemeine Fläche 3. Ordnung. Daher verhalten sich die 16 Geraden von φ^4 ihrer Lage nach so, wie die 16 Geraden einer Fläche 3. Ordnung, die von den 27 derselben übrig bleiben, wenn man eine derselben und die 10, welche diese treffen, ausnimmt. Diese letzteren entsprechen nämlich den 10 Regelflächen von Φ^2, die e enthalten.

§ 6.

Die Erzeugung des Strahlensystems 2. Grades durch zwei reciproke Bündel von Strahlensystemen 1. Grades.

In C seien zwei Bündel von Strahlensystemen 1. Grades durch resp. p, q und s, t gegeben und reciprok auf einander bezogen, sodass also jedem Strahlensysteme Σ durch p, q eine Regelfläche $\mathfrak{S}$ durch s, t entspricht und umgekehrt; beschreibt Σ ein Büschel um eine Regelfläche $\mathfrak{R}$, so beschreibt $\mathfrak{S}$ ein dazu projectivisches Büschel in dem $\mathfrak{R}$ entsprechenden Strahlensysteme P. Die Strahlenpaare, welche jedes Σ mit dem ihm entsprechenden $\mathfrak{S}$ gemein hat, erfüllen ein Strahlensystem 2. Grades Φ^2. Denn bezieht man C so auf den Raum, dass K der specielle Complex mit der Directrix q ist, so entspricht dem Bündel durch p, q ein Ebenenbündel durch $\mathfrak{p}$, und dem durch

*) Kummer, Ueber die Flächen 4. Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. Crelle's Journal f. r. u. a. M. Bd. 64. S. 66.

s, t ein Flächenbündel 2. Grades durch k^2 und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$. Diese beiden reciproken Bündel erzeugen daher eine Fläche 3. Grades, der, wie wir eben gesehen, ein Strahlensystem 2. Grades Φ^2 entspricht. Weiter sieht man aber, dass dasselbe Strahlensystem noch auf unendlich vielfache Weise durch zwei reciproke Bündel von Strahlensystemen 1. Grades erzeugt werden kann. Seien nämlich $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{s}$ irgend zwei Punkte auf φ^3 und α, β irgend zwei Ebenen durch $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$, so schneiden diese φ^3 in 2 Curven 3. Ordnung a^3, b^3, und in ihnen liegen zwei Punkte $\mathfrak{a}$ resp. $\mathfrak{b}$, in denen sich alle Kegelschnitte schneiden, die durch $\mathfrak{s}$, die Schnittpunkte von α resp. β mit k^2 und die Punktepaare gehen, in denen die Geraden durch $\mathfrak{p}$ in α resp. β die φ^3 noch schneiden. Wählt man dann $\mathfrak{t}$ auf der Schnittcurve von φ^3 mit der Fläche 2. Grades ψ^2 durch k^2, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{s}$ und den 3. Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$ mit φ^3, so bilden die Flächen 2. Grades durch k^2, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und die Punktepaare, in denen die Strahlen des Bündels durch $\mathfrak{p}$ die φ^3 noch treffen, ein zu diesem Bündel reciprokes Flächenbündel 2. Grades, das mit ihm die φ^3 erzeugt. Denn bezieht man die Bündel so reciprok auf einander, dass den Strahlen in α und β die eben beschriebenen Flächen 2. Grades durch k^2, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ entsprechen, womit die Beziehung gerade fixirt ist, so erzeugen diese eine Fläche 3. Ordnung, welche mit φ^3 die a^3, b^3, k^2, die Gerade, welche die Ebene von k^2 noch mit φ^3 gemein hat, und den Punkt $\mathfrak{t}$ gemein hat, also mit φ^3 identisch ist. Da ψ^2 die φ^3 in $\mathfrak{s}$ berührt, so erhalten wir folgendes Resultat:

„Von den Grundstrahlen zweier reciproken, ein gegebenes Strahlensystem 2. Grades Φ^2 erzeugenden Bündel von Strahlensystemen 1. Grades kann man ein Paar p, q beliebig annehmen, ebenso noch den einen Strahl s des andern Paares; der andere t muss aber dann in dem Strahlensysteme 1. Grades liegen, das mit Φ^2 eine Fläche mit einem Doppelstrahl s gemein hat und durch den Strahl geht, den die Regelfläche durch p, q, s noch mit Φ^2 gemein hat"

§ 7.

Die speciellen Arten der Strahlensysteme 2. Grades*).

Ist der Complex K nun wieder ein allgemeiner, so entspricht einer Fläche 2. Ordnung φ^2 ein allgemeines Strahlensystem 2. Grades Φ^2. Geben wir daher der φ^2 alle möglichen speciellen Lagen zu χ^2, so werden wir alle in einem allgemeinen linearen Complexe C enthaltenen Strahlensysteme 2. Grades erhalten, die noch in Bezug auf einen allgemeinen linearen Complex sich selbst conjugirt sind. Wir wollen dies im Einzelnen durchführen.

*) Weiler, Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. Annalen von Clebsch und Neumann. Bd. VII. S. 145.

1. φ^2 berühre die χ^2 in einem Punkte $\mathfrak{p}$. Dann ist der entsprechende Strahl p ein Doppelstrahl von Φ^2. Denn jede Ebene durch p, die ja einer Tangente von $\mathfrak{p}$ an χ^2 entspricht, hat mit Φ^2 nur diesen Strahl p gemein; ausgenommen sind nur die 4 Ebenen und Punkte, welche den beiden Geraden von φ^2 durch $\mathfrak{p}$ entsprechen, diese enthalten Strahlenbüschel von Φ^2. Der Strahl p enthält also 4 singuläre Punkte von Φ^2 und ist daher eine Doppelgerade von ψ^4. Die Tangentialebenen des Kegels 2. Grades, welcher die Schnittcurve von φ^2 mit χ^2 von $\mathfrak{p}$ aus projicirt, schneiden φ^2 in Kegelschnitten, denen in Φ^2 ein Paar von Regelflächenschaaren entspricht, die alle p enthalten. An diesen Kegel gehen von jeder der beiden in φ^2 enthaltenen Geraden durch $\mathfrak{p}$ 2 Tangentialebenen, welche also aus φ^2 noch die 4 χ^2 berührenden Geraden ausschneiden. Daher hat Φ^2 nur noch 8 singuläre Punkte. Diese liegen zu je zweien in einer der 4 singulären Ebenen durch p, und ihre Ebenen gehen zu je zweien durch die entsprechenden 4 singulären Punkte auf p. Dem erwähnten Paare von Regelflächenschaaren entspricht offenbar ein specieller Complex und in ihm ein Strahlensystem 2. Grades, das aus den p treffenden und ψ^4 berührenden Geraden besteht. Ausser diesem Paar von Regelflächenschaaren enthält Φ^2 nur noch drei. Das eine entspricht den Geradenschaaren von φ^2, die beiden andern den Kegelschnitten, die aus φ^2 von den Tangentialebenen der beiden die Schnittcurve von φ^2 mit χ^2 projicirenden Kegel 2. Grades ausgeschnitten werden. Φ^2 enthält also jetzt nur 4 Paare von Regelflächenschaaren, also ist ψ^4 Brennfläche von nur 5 Strahlensystemen 2. Grades, unter denen eines ein specielles ist. Fällt K mit dem Complexe zusammen, dem dieses angehört, so entspricht dem Φ^2 eine allgemein zu k^2 liegende Fläche 2. Grades, deren Geraden jetzt die durch p gehenden Regeflächen entsprechen; die drei andern Paare entsprechen den Kegelschnitten, die aus φ^2 von den Ebenen ausgeschnitten werden, die durch je zwei gegenüberliegende Seiten des von k^2 und φ^2 bestimmten Vierecks gehen. Vertauschen andrerseits C und K ihre Rollen, so entspricht dem speciellen Strahlensysteme eine allgemein zu dem Kegel χ^2 gelegene Fläche 2. Grades*).

2. Berührt ferner φ^2 die χ^2 in zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so sind p und q Doppelstrahlen von Φ^2. Hat nun zunächst φ^2 mit χ^2 eine Gerade und eine Raumcurve 3. Ordnung c^3 gemein, so schneiden sich p und q; die Ebene (p, q) ist singulär, ebenso der Schnittpunkt von p mit q. Ausserdem liegen sowohl auf p als auf q noch je zwei singuläre Punkte, welche den auf φ^2 enthaltenen Geraden entsprechen, die ausser $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ noch durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gehen. Die Tangentialebenen des c^3 von $\mathfrak{p}$ resp.

*) Kummer, Ueber die algebraischen Strahlensysteme S. 70, 71.

$\mathfrak{q}$ aus projicirenden Kegels 2. Grades schneiden φ^2 in Kegelschnitten, denen ein Paar von Regelflächenschaaren entspricht, die p resp. q enthalten. Auf φ^2 giebt es nur noch 2 zu derselben Schaar wie $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ gehörende und χ^2 berührende gerade Linien m und n, denen 4 singuläre Punkte $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_2$ entsprechen. Liegen nun $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$ also auch $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_2$ in je einer singulären Ebene durch p, so liegen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_1$ in je einer singulären Ebene durch q; ebenso schneiden sich μ_1, ν_1 und μ_2, ν_2 in singulären Punkten auf p und μ_1, ν_2; μ_2, ν_1 auf q. Den beiden erwähnten Paaren von Regelflächenschaaren entsprechen zwei specielle Complexe P und Q und in ihnen Strahlensysteme 2. Grades, welche aus den Strahlen bestehen, die p resp. q treffen und ψ^4 berühren. Ausserdem besitzt Φ^2 nur noch das Paar von Regelflächenschaaren, das den Geraden von φ^2 entspricht. ψ^4 ist also eigentliche Brennfläche von nur 2 Strahlensystemen 2. Grades. Fällt K mit P oder Q zusammen, so entspricht dem Systeme Φ^2 eine Fläche 2. Ordnung, welche k^2 berührt. Fällt P mit C zusammen und Q mit K, so entspricht dem Strahlensysteme 2. Grades in P eine allgemein zu den Geraden c, g gelegene Fläche 2. Grades (vergl. Cap. 1, § 7.). Dasselbe hat also zwei singuläre Punkte in p, deren Ebenen mit (p, q) zusammenfallen und zwei singuläre Ebenen durch p, deren Punkte mit $[p, q]$ zusammenfallen. Ausserdem besitzt es 4 singuläre Punkte, deren Ebenen zu zweien zusammenfallen und durch q gehen, und 4 singuläre Ebenen, deren Punkte zu zweien zusammenfallen und in q liegen.

3. Die Fläche φ^2 möge χ^2 wieder in zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ berühren, aber jetzt in zwei Kegelschnitten schneiden. Dann schneiden sich die beiden Doppelstrahlen p und q von Φ^2 nicht. Den 2 in φ^2 enthaltenen Geraden durch $\mathfrak{p}$ resp. $\mathfrak{q}$ entsprechen je 4 singuläre Punkte und Ebenen auf p resp. q und durch p resp. q, und zwar schneiden die 4 singulären Ebenen durch p resp. q den Strahl q resp. p in seinen 4 singulären Punkten. Die Brennfläche ψ^4 ist jetzt eine Regelfläche 4. Grades. Den Kegelschnitten auf φ^2 durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entspricht ein Paar von Regelflächenschaaren, welche alle p und q enthalten. Diesem Paare entspricht das doppelt zu zählende Strahlensystem 1. Grades, dessen Leitgeraden p, q sind. Ausserdem enthält Φ^2 noch 3 Paare von Regelflächenschaaren, von denen eins den Geraden von φ^2 entspricht und die beiden andern den Kegelschnitten, welche von den Tangentialebenen der beiden Kegel 2. Grades aus φ^2 ausgeschnitten werden, welche die beiden φ^2 und χ^2 gemeinsamen Kegelschnitte projiciren. Daher ist ψ^4 Brennfläche von 4 Strahlensystemen 2. Grades. Ist K so gewählt, dass q_1 und q_2 mit p und q auf derselben Regelfläche liegen (vergl. Cap. 1, § 2.), so entspricht dem Strahlensysteme Φ^2 ein allgemein zu χ^2 gelegener Kegel 2. Grades. — Ist K ein specieller

Complex mit der Directrix p oder q, so entspricht dem Φ^2 ebenfalls ein allgemein zu k^2 gelegener Kegel 2. Grades*).

4. Berührt φ^2 die χ^2 in drei Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{t}$, schneiden sich also φ^2 und χ^2 in einem Kegelschnitt und zwei Geraden $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{t}}$ und $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{t}}$, so sind p, q, t Doppelstrahlen von Φ^2, die Ebenen (p, t) und (q, t) singuläre Ebenen. Der in φ^2 enthaltenen Geraden durch $\mathfrak{p}$ resp. $\mathfrak{q}$ entsprechen zwei singuläre Punkte und Ebenen in p resp. q und durch p resp. q; und zwar gehen die singulären Ebenen von p resp. q durch die singulären Punkte von q resp. p. Die Brennfläche ψ^4 ist jetzt auch eine Regelfläche 4. Grades. Den Kegelschnitten von φ^2 durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entspricht ein Paar von Regelflächenschaaren, die alle p und q enthalten. Ausserdem enthält Φ^2 noch zwei Paare von Regelflächenschaaren. Das eine entspricht den Kegelschnitten von φ^2, welche in den Tangentialebenen des Kegels 2. Grades liegen, der von $\mathfrak{t}$ aus den φ^2 und χ^2 gemeinsamen Kegelschnitt projicirt; diese Regelflächen enthalten alle den Strahl t. Ihnen entspricht daher ein specieller Complex T und in ihm ein Strahlensystem 2. Grades, das aus den Strahlen besteht, die t treffen und ψ^4 berühren. Der Geradenschaar von φ^2 entspricht ein drittes Paar von Regelflächenschaaren, so dass ψ^4 eigentliche Brennfläche von nur zwei Strahlensystemen 2. Grades ist. Ist K so gewählt, dass q_1, q_2 mit p und q auf einer Regelfläche liegen, so entspricht dem Φ^2 ein χ^2 in einem Punkte berührender Kegel 2. Grades. — Fällt T mit K zusammen, so entspricht dem Φ^2 eine Fläche 2. Grades, welche k^2 doppelt berührt. Fällt K mit dem Complexe P zusammen, dessen Directrix p, so entspricht dem Φ^2 ein k^2 berührender Kegel 2. Grades. Fällt endlich C mit T und K mit P zusammen, so entspricht dem in T enthaltenen Strahlensysteme 2. Grades ein allgemein zu g, c gelegener Kegel 2. Grades.

5. Berühren sich φ^2 und χ^2 in 4 Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, schneiden sich also φ^2 und χ^2 in 4 Geraden $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{t}}$, $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{t}}$, $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$, $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{s}}$, so hat Φ^2 4 Doppelstrahlen p, q, s, t, also zerfällt ψ^4 in zwei Regelflächen 2. Grades ψ_1^2 und ψ_2^2. Den Kegelschnitten durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ resp. $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ auf φ^2 entsprechen 2 Paare von Regelflächenschaaren, welche alle p, q resp. s, t enthalten. Den Geraden von φ^2 endlich ein drittes Paar von Regelflächenschaaren, sodass das aus den gemeinschaftlichen Tangenten von ψ_1^2 und ψ_2^2 bestehende Strahlensystem 4. Grades in zwei Strahlensysteme 2. Grades zerfällt. Ist nun $\mathfrak{o}$ ein Punkt von φ^2 und a, a' die beiden Tangenten von $\mathfrak{o}$ aus an φ^2 und χ^2, so sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ Brennpunkte des einen dem Punkte $\mathfrak{o}$ entsprechenden Strahles o_1 und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2'$ die des andern o_2. Die Geraden $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2'}$ und $\overline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1'}$ gehören daher dem andern der erwähnten Strahlensysteme 2. Grades an, das in K liegt, und es

*) S. 28. Kummer, Ueber die algebraischen Strahlensysteme. S. 71.

entsprechen desshalb dem Strahle a zwei Punkte derselben Fläche ψ_1^2 und dem a' zwei Punkte der andern Fläche ψ_2^2. Daher zerfällt auch das System der gemeinsamen Tangenten von φ^2 und χ^2 in zwei Strahlensysteme 2. Grades. Offenbar wird ψ_1^2 von den Ebenen berührt, welche den Punkten von ψ_2^2 in Bezug auf C und K conjugirt sind und umgekehrt. Man überzeugt sich daher leicht, dass Φ^2 das Strahlensystem 2. Grades ist, das C mit dem Tangentencomplex irgend einer Fläche 2. Grades gemein hat. — Wird K so gewählt, dass q_1, q_2 mit p und q auf einer Regelfläche liegt, so entspricht dem Φ^2 eine χ^2 doppelt berührende Kegelfläche 2. Grades. Fällt K mit P zusammen, so entspricht Φ^2 ein k^2 doppelt berührender Kegel 2. Grades.

Rückt $\mathfrak{t}$ nach $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nach $\mathfrak{s}$, so degenerirt die eine der Flächen ψ^2 in einen Kegelschnitt, welcher in der $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$ entsprechenden Ebene liegt, und die andere in einen Kegel mit der Spitze in dem $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$ entsprechenden Punkt. Φ^2 besteht also dann aus den C angehörenden Strahlen, die irgend einen Kegelschnitt treffen. Fällt K mit irgend einem der Complexe zusammen, deren Directrix ein in der Ebene des Kegelschnitts liegender Strahl von C ist, so entspricht dem Φ^2 ein Kegel 2. Grades, dessen Spitze in k^2 liegt. Zusammenfallen können die Flächen ψ_1^2 und ψ_2^2 nur, wenn eine ihrer Geradenschaaren dem Complexe C angehört; dann zerfällt Φ^2 in zwei Strahlensysteme 1. Grades.

Ueberhaupt ergeben sich aus den letzten 4 Arten weitere Unterarten, wenn man von den Doppelstrahlen einige zusammenfallen lässt. Da es uns aber nur um die Aufzählung der wesentlich unterschiedenen Arten zu thun ist, so übergehen wir diese und haben somit nur noch diejenigen Strahlensysteme 2. Grades aufzuzählen, die in Bezug auf keinen linearen Complex mehr sich selbst conjugirt sind; wir setzen also jetzt C und K als specielle Complexe voraus (vgl. 1. Cap. § 7.).

6. Berührt φ^2 die Gerade c in $\mathfrak{p}$, so entspricht ihr ein Strahlensystem Φ^2, dessen Brennfläche ψ^4 eine Steiner'sche Fläche ist mit d, e und einem Strahl p durch $\mathfrak{c}$ als Doppelgeraden. Die Kegelschnitte nämlich von φ^2 durch $\mathfrak{p}$ und einen der Schnittpunkte von φ^2 mit g berühren in $\mathfrak{p}$ ein Strahlenbüschel in einer durch c gehenden Ebene π. Die diesen Kegelschnitten entsprechenden Regelflächen müssen daher erstens immer einen Strahl p des $\mathfrak{p}$ in C und zugleich einen Strahl s des π in K entsprechenden Strahlenbüschels gemein haben. Da sie ausserdem d enthalten müssen, so müssen sie daher alle denselben Strahl p durch $\mathfrak{c}$ enthalten. Daher ist p auch eine Doppelgerade von ψ^4 und diese eine Steiner'sche Fläche. Sie ist jetzt nicht mehr eigentliche Brennfläche eines Strahlensystems 2. Grades. Denn die 4 Doppeltangenten von ψ^4, die jede Ebene noch enthalten muss, liegen in den 4 singulären Ebenen, welche den 4 in φ^2 enthaltenen Geraden

$g_1 g_2$ und $r_1 r_2$ entsprechen, die von den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{r}$ von g mit φ^2 ausgehen. Diese schneiden sich zunächst zweimal zu je zweien auf d, nämlich in den Mittelpunkten der $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{r}$ entsprechenden Strahlenbüschel. Ferner muss die g_1 entsprechende Ebene sich mit der r_2 und die g_2 entsprechende sich mit der r_1 entsprechenden auf e schneiden, nämlich in den Centren der Strahlenbüschel, die den Ebenen $(g_1 r_2)$ und $(g_2 r_1)$ in K entsprechen. Da endlich den Geraden $p_1 p_2$ von φ^2 durch $\mathfrak{p}$ zwei Strahlenbüschel mit den Centren auf p entsprechen, so muss die g_1 entsprechende Ebene sich mit der r_1 und die g_2 entsprechende sich mit der r_2 entsprechenden auf p schneiden, sodass also jede der 4 singulären Ebenen von jeder der andern entweder auf d, e oder p getroffen wird. ψ^4 ist also Brennfläche von drei Strahlensystemen 2. Grades, welche aus den d, e oder p treffenden Strahlen bestehen, die ψ^4 berühren.

7. Man übersieht sofort, dass man den reciproken Fall erhält, wenn φ^2 die g in einem Punkte $\mathfrak{q}$ berührt, nämlich ein Strahlensystem 2. Grades, dessen Brennfläche eine durch d, e und eine Gerade q in γ gehende Fläche 3. Ordnung, die 4 conische Knotenpunkte besitzt.

8. Berührt φ^2 die c in $\mathfrak{p}$ und die g in $\mathfrak{q}$, so wird die Brennfläche eine Regelfläche 3. Ordnung, deren Doppelgerade p ist, von der d und e zwei Generatricen und für die q die Gerade ist, in der sich die Verbindungsebenen je zweier Generatricen schneiden.

9. Ist φ^2 ein Kegel mit der Spitze $\mathfrak{r}$, so entspricht dieser ein neuer Doppelstrahl r, der p schneidet und durch den Schnittpunkt von d mit p geht, die Fläche 3. Ordnung zerfällt also in eine Ebene durch p, r, d und eine Fläche 2. Grades ψ^2 durch e, p, q, r. Φ^2 ist jetzt das Strahlensystem 2. Grades, das C mit dem Tangentencomplex irgend einer Fläche 2. Grades gemein hat. Beschreibt φ^2 ein Büschel durch $\mathfrak{r}$ und die Berührungspunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, so beschreibt ψ^2 ein Büschel durch p, q, r, e und degenerirt in die beiden Ebenen (p, e) und (r, q), wenn φ^2 in die doppelt zu zählende Ebene $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ degenerirt. Die Brennfläche ist also ein Tetraeder und als solches Brennfläche von drei doppelt zu zählenden Strahlensystemen 1. Grades, deren eines Φ^2 der Ebene $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ entspricht.

Auch hier beschränken wir uns auf die Aufzählung dieser vier Hauptarten und verlassen hiermit die Strahlensysteme 2. Grades, um auf Grund der gewonnenen Resultate die Complexe 2. Grades zu untersuchen.

Drittes Capitel.

Die Complexe 2. Grades.

§ 1.

Erzeugung des Complexes 2. Grades.

Von dem linearen Complexe gingen wir gewissermassen als Grundelement aus und hatten daher nicht nöthig, seine Erzeugung zu untersuchen, zumal dieser Complex schon oft geometrisch behandelt worden ist*). Anders bei dem Complexe 2. Grades. Bei seiner Untersuchung ging man bisher immer von seiner Gleichung in Liniencoordinaten aus, wir werden aber sehen, dass gerade seine geometrische Erzeugung zur Ableitung seiner Eigenschaften auch sehr geeignet ist. Hat man zwei Bündel von linearen Complexen, d. h. die sämmtlichen linearen Complexe, welche eine feste Regelfläche $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ enthalten, so kann man dieselben reciprok, d. h. so auf einander beziehen, dass jedem Complexe A durch $\mathfrak{A}$ ein Strahlensystem 1. Grades B durch $\mathfrak{B}$ entspricht und jedem Complexe B durch $\mathfrak{B}$ ein Strahlensystem 1. Grades A durch $\mathfrak{A}$ derart, dass wenn B ein Büschel durch B durchläuft, die Strahlensysteme A in A ein zu ihm projectivisches Büschel beschreiben. Dann hat jeder Complex mit dem ihm entsprechenden Strahlensysteme eine Regelfläche gemein und die Gesammtheit dieser Regelflächen erfüllt einen allgemeinen Complex 2. Grades C^2. Dass die beiden Bündel wirklich einen Complex 2. Grades erzeugen, ist leicht zu beweisen (vergl. Cap. 2, § 6.), ungleich schwieriger, dass jeder Complex zweiten Grades sich durch zwei reciproke Bündel von linearen Complexen erzeugen lässt.

Um dies zu beweisen, müssen wir uns natürlich den Complex durch seine Gleichung gegeben denken. Von diesem wissen wir aber, dass er mit jedem linearen Complexe ein Strahlensystem 2. Grades gemein hat und daher immer Regelflächen enthält. Sei nun $\mathfrak{S}$ irgend eine solche Regelfläche, so wird ein sie enthaltendes Strahlensystem 1. Grades Σ_1 mit C^2 eine zweite Regelfläche $\mathfrak{S}_1$ gemein haben, ein Strahlensystem Σ_2 durch sie eine dritte $\mathfrak{S}_2$, ein ebensolches Σ_3 durch $\mathfrak{S}_2$ eine vierte $\mathfrak{S}_3$ und endlich ein Strahlensystem Σ_4 durch $\mathfrak{S}_3$ eine fünfte $\mathfrak{S}_4$; dann gehören $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_4$ demselben linearen Complexe an. Der lineare Complex durch $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ hat nämlich mit dem linearen Complexe durch $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ ein Strahlensystem 1. Grades gemein, das mit C^2 ausser $\mathfrak{S}_2$ noch eine zweite Regelfläche $\mathfrak{R}$ gemein hat. Aus

*) Z. B. Reye, Lehrsätze über die Strahlensysteme 1. Grades und den linearen Complex. Borchardt's Journal f. r. u. a. M. Bd. 69, S. 365.

den Eigenschaften des Strahlensystems 2. Grades erkennt man aber leicht, dass $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_4$ je ein Strahlenpaar gemein hat, daher liegen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_4$ in demselben linearen Complexe. So entspricht also jedem Strahlensysteme Σ_1 durch $\mathfrak{S}_1$ ein linearer Complex S durch $\mathfrak{S}_4$, der mit Σ_1 eine in C^2 enthaltene Regelfläche gemein hat. Beschreibt nun Σ_1 ein Büschel in dem linearen Complexe S durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, also $\mathfrak{S}$ eine Schaar des Strahlensystems 2. Grades, das S mit C^2 gemein hat, so beschreiben die Strahlensysteme 1. Grades durch $\mathfrak{R}$ und die $\mathfrak{S}$ ein dazu projectivisches Büschel, die den Σ_1 entsprechenden Complexe durch $\mathfrak{S}_4$ also ebenfalls ein dazu projectivisches Büschel durch $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{R}$. Da nun S ein ganz beliebiger Complex durch $\mathfrak{S}_1$, so ist somit bewiesen, dass C^2 durch zwei reciproke Complexbündel durch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_4$ erzeugt werden kann.

Solche Regelflächen $\mathfrak{S}_4$, wie wir eine von $\mathfrak{S}_1$ aus construirt haben, können wir nun noch unendlich viele andere construiren, aber immer lässt sich zeigen, dass eine solche Regelfläche $\mathfrak{R}_4$ mit $\mathfrak{S}_4$ demselben linearen Complexe angehört. Denn entstehe $\mathfrak{R}_4$ aus $\mathfrak{S}_4$ durch die Zwischenglieder $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, so gehören in der Reihe: $\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ je zwei aufeinanderfolgende Regelflächen demselben Strahlensysteme 1. Grades an, daher giebt es nach dem Vorigen eine Regelfläche $\mathfrak{R}_1$ in C^2 so, dass in der Reihe: $\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ je zwei aufeinanderfolgende demselben Strahlensysteme 1. Grades angehören; also gehören $\mathfrak{R}_4$ und $\mathfrak{S}_4$ demselben linearen Complexe an. Haben wir also zu einer Regelfläche $\mathfrak{S}_1$ eine $\mathfrak{S}_4$ so construirt, dass diese beiden Grundflächen zweier C^2 erzeugenden Complexbündel sind, so entstehen alle übrigen aus $\mathfrak{S}_4$ dadurch, dass man durch $\mathfrak{S}_4$ lineare Complexe legt und in den Strahlensystemen 2. Grades, welche dieselben mit C^2 gemein haben, die Regelflächen aufsucht, die zu derselben Schaar wie $\mathfrak{S}_1$ gehören. Da niemals zwei lineare Complexe durch $\mathfrak{S}_4$ eine solche Regelfläche gemein haben, so bilden die zu einer Grundfläche $\mathfrak{S}_1$ zugehörigen Grundflächen eine dreifache Mannigfaltigkeit; wir wollen sie ein System zu $\mathfrak{S}_1$ gehöriger Grundflächen nennen. Ebenso gehört auch zu $\mathfrak{S}_4$ ein solches System von Grundflächen und man erkennt, dass dies dasselbe System ist, wie das zu $\mathfrak{R}_4$ zugehörige, da der $\mathfrak{R}_4$ ebenfalls die $\mathfrak{S}_1$ zugehört.

Wir sind so von einer Regelfläche $\mathfrak{S}$ ausgehend zu zwei Systemen von in C^2 enthaltenen Regelflächen gelangt, die folgende Eigenschaften besitzen: Jedes System besteht aus einer dreifachen Mannigfaltigkeit von Regelflächen. Jede Fläche des einen Systems bildet mit jeder des andern Systems ein Paar von Grundflächen zweier reciproken, die C^2 erzeugenden Bündel von linearen Complexen. Je zwei Flächen eines Systems gehören demselben linearen Complexe an, jede Fläche des einen Systems mit einer der andern nicht einmal demselben linearen

Complexe oder aber demselben Strahlensysteme 1. Grades; denn sonst müsste jede Fläche des einen Systems mit jeder des andern in demselben linearen Complexe liegen. Man erhält daher auch alle Flächen des einen Systems aus denen des andern, wenn man die Regelflächen sucht, welche mit den Flächen dieses Systems demselben Strahlensysteme 1. Grades angehören.

Man beweist leicht, dass die Regelflächen, welche mit den Flächen dieser beiden Systeme in Involution liegen, ebenfalls zwei zusammengehörige Systeme von Grundflächen eines Complexes 2. Grades bilden; er möge ein mit C^2 in Involution liegender Complex heissen.

§ 2.

Die Tangentialcomplexe und Polarcomplexe.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien die Grundflächen zweier C^2 erzeugenden reciproken Bündel und A ein Complex durch $\mathfrak{A}$, der einem Strahlensysteme B durch $\mathfrak{B}$ entspricht, das durch einen Strahl p von $\mathfrak{A}$ geht. A hat nun mit B eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ gemein, welche in dem Strahlensysteme A^2, das A mit C^2 gemein hat, zu derselben Schaar wie $\mathfrak{A}$ gehört. Daher hat A^2 den Strahl p zum Doppelstrahl und ist das in Cap. 2, § 7, 1. beschriebene Strahlensystem. Durch p gehen daher alle in A enthaltenen Regelflächen des zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Systems. Nun ist klar, dass auch umgekehrt, wenn ein durch $\mathfrak{A}$ gehender Complex A mit C^2 ein einen in $\mathfrak{A}$ liegenden Doppelstrahl p enthaltendes Strahlensystem A^2 gemein hat, diesem Complexe A ein durch p gehendes Strahlensystem B entsprechen muss. Daher liegen auch alle durch p gehenden Regelflächen des zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Systems in dem Complexe A, welcher dem durch p gehenden Strahlensysteme B entspricht. Aber auch die durch p gehenden Flächen des zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Systems gehören dem Complexe A an. Denn sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zwei solche Flächen, so muss sowohl $\mathfrak{R}$ als $\mathfrak{S}$, da sie mit $\mathfrak{A}$ den Strahl p gemein haben, also mit ihm in je demselben linearen Complexe liegen, noch je einen zweiten Strahl gemein haben (vergl. § 1.). Man kann also durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ einen linearen Complex legen, welcher mit C^2 ein Strahlensystem gemein hat, das in p einen Doppelstrahl besitzt; daher ist dieser Complex mit A identisch. Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

„Die Regelflächen zweier zusammengehörigen Systeme von Grundflächen, die durch einen Strahl p von C^2 gehen, gehören einem linearen Complexe an, der mit C^2 ein in p einen Doppelstrahl besitzendes Strahlensystem 2. Grades gemein hat; wir nennen diesen Complex einen Tangentialcomplex von p."

Sei nun p ein beliebiger Strahl des Raumes, so lege man durch ihn und die Grundflächen eines Systems von C^2 Strahlensysteme

1. Grades. Jedes von ihnen wird dann mit C^2 noch eine Grundfläche des andern Systems gemein haben und man suche nun wie in Cap. 3, § 2. in jedem Strahlensysteme zu p die 4. harmonische Fläche in Bezug auf die beiden in ihm liegenden Grundflächen; diese Regelflächen beschreiben dann einen linearen Complex S, einen Polarcomplex von von p in Bezug auf C^2. Sei nämlich P ein solches Strahlensystem, das mit C^2 die Flächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ gemein haben mag und $\mathfrak{T}$ die zu p gehörige 4. harmonische Fläche in ihm; jeder lineare Complex durch P schneidet dann C^2 in einem Strahlensysteme 2. Grades, in Bezug auf welches dem p immer ein durch $\mathfrak{T}$ gehendes Polarsystem entspricht. Da ferner die Strahlen, welche diese Polarsysteme durch einen Punkt α von p schicken, die Polarebene von p in Bezug auf den durch α gehenden Kegel von C^2 bilden, so sind die Polarsysteme alle in einem linearen Complexe S enthalten, welcher das Strahlensystem 1. Grades Π enthält, das diejenigen Strahlen bilden, die p in Bezug auf die Kegel 2. Grades von C^2 durch die Punkte von p conjugirt sind. Sei nun $\mathfrak{R}_1$ irgend eine in den Complexen durch P nicht enthaltene Grundfläche von C^2, die mit $\mathfrak{R}$ zu einem Systeme gehöre, dann wird diese zu p ebenso wie $\mathfrak{R}$ einen durch Π gehenden Complex S_1 bestimmen. In jedem linearen Complexe durch p und $\mathfrak{R}_1$ ist aber eine in C^2 liegende Regelfläche $\mathfrak{R}_2$ enthalten, welche mit $\mathfrak{S}$ demselben Strahlensysteme 1. Grades angehört, woraus folgt, dass S_1 mit S ausser Π noch eine in dem linearen Complexe durch p, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}_2$ liegende Regelfläche gemein hat, also mit S zusammenfällt. Hiermit ist also bewiesen, dass die harmonischen Flächen von p in Bezug auf die Paare $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ einen linearen Complex S erfüllen.

Offenbar gilt in Bezug auf die Polarcomplexe folgender Satz:

„Geht der Polarcomplex von p durch q, so geht der Polarcomplex von q durch p.“

Ferner hieraus:

„Beschreibt p ein ebenes Strahlenbüschel, so beschreibt der Complex ein dazu projectivisches Complexbüschel.“

Endlich:

„Beschreibt p ein Bündel durch α, so beschreibt S ein dazu polares Bündel durch eine Regelfläche $\mathfrak{A}$, die wir eine Polarfläche von α in Bezug auf C^2 nennen wollen; ebenso wenn p eine Ebene β beschreibt, beschreibt S ein dazu polares Bündel durch eine Regelfläche $\mathfrak{B}$, die Polarfläche von β in Bezug auf C^2.“

Ist p ein Strahl von C^2, so ist S offenbar der zugehörige Tangentialcomplex; denn jedes Strahlensystem 1. Grades P durch p und eine Grundfläche von C^2 hat mit C^2 noch eine zweite durch p gehende Regelfläche gemein, die nach der Definition von S in S liegen muss.

Den Strahlen p einer Regelfläche $\mathfrak{M}$ entsprechen die Polarcomplexe

S, die durch die Strahlen q einer zweiten Regelfläche $\mathfrak{N}$ gehen; denn irgend 3 Complexe S haben eine Regelfläche $\mathfrak{N}$ gemein, deren Strahlen q Polarcomplexe durch $\mathfrak{M}$ entsprechen müssen, also gehen auch die Polarcomplexe aller Strahlen von $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ enthält also zugleich alle Strahlen, deren Polarcomplexe durch $\mathfrak{M}$ gehen, es müssten denn die Polarcomplexe der Strahlen p auf $\mathfrak{M}$ alle ein Strahlensystem 1. Grades N gemein haben. Das kann aber nur dann eintreten, wenn jede Grundfläche des einen Systems von C^2 mit jeder des andern in einem linearen Complexe liegt. Dann liegen nämlich in N unendlich viele solche Regelflächen, deren Strahlen die Polarcomplexe durch ein Strahlensystem 1. Grades entsprechen und zwar geht durch je zwei Strahlen von N eine solche Regelfläche; sie entspricht einem Strahlensysteme 1. Grades durch $\mathfrak{M}$. Beschreibt dies durch $\mathfrak{M}$ ein Büschel, so beschreibt die entsprechende Regelfläche in N ebenfalls ein Büschel, in welchem es also immer eine Fläche giebt, die mit irgend zwei Strahlen des Raumes in einem Strahlensysteme 1. Grades liegt. Daraus folgt also, dass durch irgend zwei Strahlen des Raumes eine Regelfläche geht, deren Strahlen Polarcomplexe zugehören, die durch ein Strahlensystem 1. Grades gehen. Liegen nun diese beiden Strahlen p und q auf einer Grundfläche $\mathfrak{R}$ von C^2, so ist $\mathfrak{R}$ diese Regelfläche. Denn wäre sie es nicht, so müssten doch die Polarcomplexe der Strahlen von $\mathfrak{R}$ durch ein Strahlensystem 1. Grades gehen, weil sie an und für sich durch $\mathfrak{R}$ gehen. Aus der Definition der Tangentialcomplexe erkennt man aber leicht, dass die Tangentialcomplexe der Strahlen einer Grundfläche nur dann durch ein Strahlensystem 1. Grades gehen können, wenn $\mathfrak{R}$ mit jeder Grundfläche $\mathfrak{S}$ des ihm zugehörigen Systems in demselben linearen Complexe liegt. Dann enthält also jedes Strahlensystem 1. Grades durch $\mathfrak{S}$ und einen Strahl p von $\mathfrak{R}$ noch einen zweiten Strahl p' von $\mathfrak{R}$, sodass also der Tangentialcomplex von p auch Tangentialcomplex von p' ist, dieser also mit C^2 ein Strahlensystem 2. Grades gemein hat, das p und p' zu Doppelstrahlen hat (vergl. 2. Cap. § 7, 3.). Diesen Fall werden wir später näher zu erörtern haben; wir sehen vorläufig von ihm ab, da ja die Grundflächen der erzeugenden Systeme in ganz allgemeiner Lage vorausgesetzt sind.

§ 3.

Das vollständige System der in C^2 enthaltenen Regelflächen.

Durch die Erzeugung von C^2 waren zwei Systeme zusammengehöriger Grundflächen von selbst gegeben. Nun enthält aber C^2 jedenfalls noch andere Regelflächen, und aus jeder derselben können wir, wie in § 1. geschehen, zwei Systeme zusammengehöriger Grundflächen ableiten. Jedes wird zu einem Strahle p einen Polarcomplex bestimmen, diese werden aber alle durch das im vorigen Paragraphen definirte Strahlensystem 1. Grades Π gehen müssen. Ist p ein Strahl von C^2, so ist Π bestimmt durch die 4 in C^2 enthaltenen ebenen Strahlenbüschel, welche ihre Centren auf p und ihre Ebenen durch p haben (vergl. 2. Cap. § 7, 1.). Jeder Complex S durch Π hat also mit C^2 ein Strahlensystem 2. Grades mit einem Doppelstrahl in p gemein und die Regelflächen in demselben durch p gehören einem Systeme an, welches S als Tangentialcomplex zu p zuordnet. Hieraus ist ersichtlich, dass es in C^2 einfach unendlich viele Paare von Systemen zusammengehöriger Grundflächen giebt. Halten wir zwei Paare fest, so ordnen beide den Strahlen p durch einen Punkt $\mathfrak{a}$ in einer Ebene α zwei projectivische Büschel von Polarcomplexen durch zwei Strahlensysteme 1. Grades Α und Α′ zu. Diese erzeugen also einen Complex 2. Grades A^2, in welchem alle zu den Strahlen p gehörigen Strahlen Π enthalten sind. Nehmen wir daher ein drittes Paar von Systemen zusammengehöriger Grundflächen, so ordnen diese zu den Strahlen p ein drittes Complexbüschel durch Α″ zu, das sowohl mit dem durch Α als mit dem durch Α′ denselben Complex A^2 erzeugt. Zu irgend zwei Strahlen p und p' in α durch $\mathfrak{a}$ ordnet daher jedes Paar von Systemen zusammengehöriger Grundflächen zwei Polarcomplexe S und S' zu, welche immer ein Strahlensystem 1. Grades von A^2 gemein haben, die also, wenn successive alle Paare genommen werden, zwei einander projectivische Complexbüschel durch Π und Π′ bilden. Daraus ergiebt sich dann leicht, dass die Polarcomplexe, welche irgend zwei Strahlen p und p' für alle Paare von Systemen zusammengehöriger Grundflächen entsprechen, zwei projectivische Büschel durch Π und Π′ bilden.

§ 4.

Zwei mit dem gegebenen Complexe 2. Grades verbundene Complexe 2. Grades.

In dem Folgenden nehmen wir nun wieder nur auf ein Paar von Systemen zusammengehöriger Grundflächen Rücksicht. Nach § 2. entspricht dann jedem Punkte $\mathfrak{a}$ eine Polarfläche $\mathfrak{A}$ und ebenso jeder Ebene β eine Polarfläche $\mathfrak{B}$. Durchlaufen $\mathfrak{a}$ und β den ganzen Raum, so beschreibt $\mathfrak{A}$ ein System von Grundflächen eines Complexes 2. Grades K^2 und $\mathfrak{B}$ das zugehörige System desselben Complexes. Ordnet man nämlich die Punkte einer Ebene π den durch sie gehenden Strahlen eines Punktes $\mathfrak{p}$ zu, so ist dadurch das Bündel von Polarcomplexen, das den Strahlen von $\mathfrak{p}$ entspricht, reciprok auf das den Strahlen von π entsprechende Bündel von Polarcomplexen bezogen, indem jedem Polarcomplexe eines Strahles p durch $\mathfrak{p}$ das Strahlensystem entspricht, welches die Polarcomplexe der Strahlen in π durch den Schnittpunkt von p mit π gemein haben. Diese beiden Bündel erzeugen dann den Complex K^2, wie man einsieht, wenn man folgenden Satz zu Hülfe nimmt: „Beschreibt $\mathfrak{a}$ eine Punktreihe in p, und β ein Ebenenbüschel um p, so beschreiben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Schaaren eines Paares eines Strahlensystems 2. Grades in S.“

Welche Bedeutung hat nun der Complex K^2 für C^2? Er ist der Ort der Strahlen p, deren Polarcomplexe in Bezug auf C^2 specielle sind. Ist l seine Directrix, so ist der Polarcomplex von l Tangentialcomplex von p für K^2. Denn da die l treffenden Strahlen alle dem Polarcomplexe von p angehören, so müssen die Polarflächen der Ebenen durch l und der Punkte in l alle durch p gehen. Die Directricen l bilden einen zweiten Complex 2. Grades L^2, der mit K^2 in Involution liegt, wenn die Polarflächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ das Paar der Systeme von Grundflächen sind. Beschreibt p den Kegel von K^2 durch $\mathfrak{a}$, so beschreibt l die zu $\mathfrak{A}$ in Involution liegende Regelfläche, und beschreibt l den Kegel von L^2 durch $\mathfrak{a}$, so beschreibt p die Fläche $\mathfrak{A}$ selbst; Aehnliches gilt von den in einer Ebene β gelegenen Strahlen. Beschreibt überhaupt p eine Regelfläche $\mathfrak{M}$ in K^2, so beschreibt l die zu $\mathfrak{N}$ in Involution liegende Regelfläche in L^2 (S. 455 u. 456), und beschreibt l eine Regelfläche in L^2, die zu $\mathfrak{N}$ in Involution liegt, so beschreibt p die Regelfläche $\mathfrak{M}$ in K^2. Denn die den Strahlen von $\mathfrak{N}$ entsprechenden Polarcomplexe haben hier nur die Regelfläche $\mathfrak{M}$ gemein, den Strahlen dieser müssen also die speciellen durch $\mathfrak{N}$ gehenden Polarcomplexe entsprechen. Beschreibt $\mathfrak{M}$ ein System von Grundflächen in K^2, so beschreibt die zu $\mathfrak{N}$ in Involution liegende Regelfläche in L^2 eben ein solches. — Diese projectivische Abbildung der beiden Complexe K^2 und L^2 auf einander wird für den schon erwähnten speciellen Fall, wo die Grundflächen verschiedener Systeme von C^2 immer demselben linearen Complexe angehören, von besonderem Interesse sein. Dann degenerirt nämlich L^2 in einen linearen Complex.

§ 5.

Die Singularitätenfläche und das System der singulären Strahlen.

Geht die Polarfläche $\mathfrak{A}$ eines Punktes $\mathfrak{a}$ durch ihn selbst, so zerfällt der durch $\mathfrak{a}$ gehende Kegel von C^2 in zwei ebene Strahlenbüschel. Denn die Polarcomplexe aller Strahlen von $\mathfrak{a}$ müssen dann den durch $\mathfrak{a}$ gehenden Strahl s von $\mathfrak{A}$ enthalten, diesen haben also auch die beiden ebenen Strahlenbüschel gemeinschaftlich. Der Punkt $\mathfrak{a}$ heisst jetzt ein singulärer Punkt und s der zugehörige singuläre Strahl. Man erkennt auch leicht, dass umgekehrt, wenn der Kegel von C^2 durch einen Punkt $\mathfrak{a}$ in zwei ebene Strahlenbüschel durch s zerfällt, die Polarfläche von $\mathfrak{a}$ durch s geht. Der Strahl s gehört offenbar auch dem Complexe K^2

an. Ebenso folgt: Hat die Polarfläche $\mathfrak{B}$ von β einen Strahl s mit β gemein, so zerfällt das Tangentenbüschel 2. Ordnung von C^2 in β in zwei ebene Strahlenbüschel mit s als gemeinschaftlichen Strahl; s ist ein Strahl von K^2. Die Ebene β heisst eine singuläre Ebene, s der zugehörige singuläre Strahl.

Ist umgekehrt s ein gemeinsamer Strahl von C^2 und K^2, so ist der Tangentialcomplex S von s ein specieller mit der Directrix l, die s in α schneiden mag und mit s in einer Ebene β liegen mag. Nun hat (vergl. 2. Cap. § 7, 2.) das Strahlensystem, das S mit C^2 gemein hat, in s zwei singuläre Punkte, deren Ebenen mit β zusammenfallen und durch s zwei singuläre Ebenen, deren Punkte mit α zusammenfallen. Daraus folgt, dass α ein singulärer Punkt und β eine singuläre Ebene von C^2, beide mit s als dem zugehörigen singulären Strahl. Es folgt dies auch daraus, dass die Polarfläche von α, da α auf l liegt, und ebenso die Polarfläche von β, da β durch l geht, s enthalten müssen (vergl. S. 458). Das Strahlensystem Π, durch welches alle die einfach unendlich vielen Polarcomplexe von s gehen müssen, besteht jetzt erstens aus den Strahlen, welche in β liegen, und dann aus denen, welche durch α gehen. Daraus folgt, dass bei Zugrundelegung irgend eines andern Systems von Grundflächen dem Strahle s doch immer ein specieller Complex mit seiner Directrix l in β durch α als Polarcomplex entspricht; l durchläuft offenbar das Büschel durch α in β, wenn man successive alle Systeme von Grundflächen zu Grunde legt. Die Complexe K^2, welche man so erhält, gehen also alle durch dasselbe Strahlensystem 4. Grades Φ^4, das aus den singulären Strahlen von C^2 besteht.

Die singulären Punkte erfüllen eine Fläche 4. Ordnung ψ^4. Denn das Strahlensystem 2. Grades, das aus den Strahlen von C^2 besteht, die eine Gerade p treffen, liegt mit dem im 2. Cap. § 7, 1. beschriebenen in Involution, es liegen daher auf p 4 singuläre Punkte desselben, von denen jeder zwei singulären Ebenen zugehört. Aber auch 4 singuläre Ebenen gehen durch p, also werden die singulären Ebenen von einer Fläche 4. Classe umhüllt; jedoch sind beide Flächen identisch. Denn die singuläre Ebene β, die zu s gehört, berührt ψ^4 in dem zu s gehörigen singulären Punkte α, weil jede Gerade l durch α in β ausser α nur noch zwei singuläre Punkte enthält (vergl. 2. Cap., §. 7, 2, Ende). Diese Fläche 4. Ordnung und 4. Classe, welche die singulären Punkte enthält und von den singulären Ebenen berührt wird, heisst die Singularitätenfläche von C^2. Die 4 singulären Punkte auf einer Geraden p bilden dasselbe Doppelverhältniss, wie die 4 singulären Ebenen durch p.

Die Polarfläche des singulären Punktes α geht durch s und l, berührt also die singuläre Ebene β, also auch ψ^4 in α; dasselbe gilt von der Polarfläche von β.

Offenbar ist a ein Brennpunkt von s in dem Strahlensysteme Φ^4 und die Tangentialebene von s an den durch a gehenden Kegel von K^2 ist die zugehörige Brennebene; β ist dann die zweite Brennebene von s und der Berührungspunkt des in β liegenden Tangentenbüschels 2. Ordnung von K^2 der zugehörige Brennpunkt.

§ 6.

Die sechs Fundamentalcomplexe.

Die singuläre Ebene β hat mit der Singularitätenfläche ψ^4 eine Curve c^4 4. Ordnung gemein, welche in a einen Doppelpunkt hat. Jede Gerade l durch a in β schneidet also c^4 noch in zwei Punkten, welche singuläre Punkte eines zu s gehörigen Tangentialcomplexes sind, der l zur Directrix hat. Berührt daher l die c^4, so fallen diese beiden singulären Punkte zusammen und der zugehörige Tangentialcomplex S von s hat daher mit C^2 das in Cap. 2 § 7, 4, Ende beschriebene Strahlensystem 2. Grades gemein, das ausser s noch einen zweiten Doppelstrahl s' hat. S ist daher Tangentialcomplex von s und s', und wir kommen also hier auf das specielle System von Grundflächen von der Eigenschaft, dass jede Grundfläche des einen Systems mit jeder des zugehörigen in einem linearen Complexe liegt. Denn eine durch s und s' gehende Grundfläche des einen Systems muss mit jeder Grundfläche des andern Systems in einem linearen Complex liegen, also gilt dasselbe auch von jeder Grundfläche des ersten Systems. Die beiden Systeme zusammengehöriger Grundflächen gehen also in einander über. Der Tangentialcomplex, der irgend einem Strahle p_1 von C^2 entspricht, ist auch Tangentialcomplex eines andern Strahles p_2. Die Strahlen, die irgend zwei Grundflächen gemein haben, sind solch' ein Strahlenpaar. Daraus folgt, dass die Strahlen eines Paares p_1, p_2, die in einem eine Grundfläche enthaltenden linearen Complexe L liegen, einander in Bezug auf einen linearen Complex C conjugirt sind. Da nun hierbei jedes Paar p_1, p_2 ein Paar von Leitgeraden eines in C enthaltenen Strahlensystems 1. Grades ist, so folgt, dass die Strahlen der Paare, die in irgend einem eine Grundfläche $\mathfrak{R}$ in L enthaltenden linearen Complexe liegen, einander in Bezug auf denselben Complex C conjugirt sind; denn die in L enthaltenen Paare von Leitgeraden bestimmen C vollständig. D. h.: die Strahlen jedes Paares p_1, p_2 von C^2 sind einander in Bezug auf denselben linearen Complex C conjugirt; er heisse ein Fundamentalcomplex von C^2. In Bezug auf diesen ist also C^2 sich selbst conjugirt. Da hierbei jede Grundfläche sich selbst conjugirt ist, so erfüllen die zu ihnen in Involution liegenden Regelflächen den Complex C, dieser ist also ein specieller zu C^2 in Involution liegender Complex 2. Grades.

Aus der Definition des Polarcomplexes S einer Geraden p_1 folgt leicht, dass er auch Polarcomplex der p_1 in Bezug auf C conjugirten Geraden p_2 ist.

Ist T ein durch p_1, p_2 gehender Tangentialcomplex von t_1, t_2, so gehen durch p_1, p_2 in T zwei Strahlensysteme 1. Grades, welche mit C^2 nur je eine Regelfläche gemein haben, durch welche also auch S gehen muss. Jeder Polarcomplex S enthält daher Grundflächen und ist also sich selbst in Bezug auf C conjugirt; jedes Strahlensystem 1. Grades durch p_1, p_2 und eine dieser Grundflächen hat daher mit C^2 nur diese eine also doppelt zu zählende Grundfläche gemein. Daraus beweist man auch leicht, dass jeder eine Grundfläche enthaltende lineare Complex ein Polarcomplex ist. Ebenso enthält jede Regelfläche durch p_1, p_2 und t_1, t_2 nur das doppelt zu zählende Strahlenpaar t_1, t_2 von C^2.

Auch existiren jetzt Regelflächen, deren Strahlen die Polarcomplexe eines Büschels entsprechen, und zwar geht durch je zwei Strahlenpaare p_1, p_2 und q_1, q_2 eine solche; es sind dies also alle Regelflächen, welche zu Regelflächen von C in Involution liegen. Die Strahlensysteme, durch welche die den Strahlen einer solchen Regelfläche entsprechenden Polarcomplexe jedesmal gehen, sind die Congruenzen irgend zweier Polarcomplexe.

Da nun von $\mathfrak{a}$ aus an c^4 i. A. 6 Tangenten gehen, so giebt es 6 solche specielle Systeme von Grundflächen in C^2 und ihnen entsprechen 6 Fundamentalcomplexe C, für welche C^2 sich selbst conjugirt ist. Der folgende Paragraph wird die weiteren Beziehungen dieser 6 Fundamentalcomplexe erläutern.

§ 7.

Die Singularitätenfläche als Brennfläche von 6 auf das System der singulären Strahlen abgebildeten Strahlensystemen 2. Grades.

Die Polarfläche $\mathfrak{A}$ jedes Punktes $\mathfrak{a}$ ist nun auch Polarfläche der Ebene α, welche zu $\mathfrak{a}$ in Bezug auf den Complex C gehört. Daraus folgt, dass die beiden Systeme von Polarflächen in K^2 in ein ebensolches specielles System wie das zu Grunde gelegte System von C^2 übergehen. Da nun überdies $\mathfrak{A}$ alle Strahlenpaare enthalten muss, deren Polarcomplexe ihre Directrix l durch $\mathfrak{a}$ schicken, so ist $\mathfrak{A}$ in Bezug auf C sich selbst conjugirt und der Complex L^2 fällt mit C zusammen; was auch schon daraus folgt, dass l jedesmal auch in α liegen muss. Jetzt ist also der Complex K^2 auf einen linearen Complex C abgebildet so, dass jedem Strahle p_1 von K^2 ein Strahl l von C entspricht, aber umgekehrt jedem Strahle l von C ein Strahlenpaar p_1, p_2 von K^2. Beschreiben p_1, p_2 eine Polarfläche in K^2, so beschreibt

l eine Complexebene in C. Beschreibt überhaupt p_1 eine Regelfläche von K^2, also p_2 die conjugirte, so beschreibt l eine Regelfläche in C; aber nicht umgekehrt, i. A. entspricht jeder Regelfläche 2. Grades von C eine in einem Strahlensysteme 1. Grades enthaltene Regelfläche 4. Grades.

Hier ist es nun von besonderem Interesse, nach dem Strahlensysteme zu fragen, welches dem Systeme der singulären Strahlen Φ^4 entspricht. Wir werden zeigen, dass es sich durch zwei reciproke Bündel von Strahlensystemen 1. Grades erzeugen lässt, also ein Strahlensystem 2. Grades ist. Man wähle nämlich irgend zwei Grundflächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ von C^2; dieselben mögen mit Φ^4 die Strahlenpaare $p_1\, p_2$, $r_1\, r_2$ und $q_1\, q_2$, $s_1\, s_2$ gemein haben, denen in C die Strahlen p, r und q, s entsprechen mögen. Ist M ein Strahlensystem 1. Grades durch $\mathfrak{R}$, so liegen die den M und Φ^4 gemeinsamen Strahlen entsprechenden Strahlen von C in einer Regelfläche $\mathfrak{M}$. Dieselben beschreiben, wenn M sich um $\mathfrak{M}$ dreht, ein dazu projectivisches Bündel durch p, r. Ist ferner N der M entsprechende Complex durch $\mathfrak{S}$, so liegen die den N und Φ^4 gemeinsamen Strahlen entsprechenden Strahlen von C in einem Strahlensystem 1. Grades, dessen Leitgeraden die Geraden n_1, n_2 sind, deren Polarcomplex N ist. Beschreibt N das Bündel um $\mathfrak{S}$, so beschreibt N ein dazu projectivisches Bündel durch q, s, während die Strahlenpaare n_1, n_2 das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Strahlensystem 1. Grades beschreiben. Jedes Strahlensystem N hat nun mit der ihm entsprechenden Regelfläche $\mathfrak{M}$ zwei Strahlen des Φ^4 entsprechenden Strahlensystems gemein, dieses wird also in der That durch zwei reciproke Bündel von Strahlensystemen 1. Grades erzeugt, ist also ein Strahlensystem 2. Grades Φ^2.

Ist nun $\mathfrak{a}_1$ ein singulärer Punkt, s_1 der zugehörige singuläre Strahl und l die Directrix des s_1, s_2 entsprechenden Polarcomplexes, so ist $\mathfrak{a}_1$ ein Brennpunkt von l und $\mathfrak{a}_2$, der Schnittpunkt von s_2 mit l, der andere. Denn die Polarfläche $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{a}_1$ geht durch s_1, s_2 und l und enthält alle Strahlenpaare, auch die von Φ^4, deren Polarcomplexe ihre Directricen durch $\mathfrak{a}_1$ schicken. Da diese aber, wenn ihr zugehöriges Strahlenpaar Φ^4 angehört, dieses Strahlenpaar schneiden muss, so kann nur l selbst wieder ein solcher durch $\mathfrak{a}_1$ gehender Strahl von Φ^2 sein. $\mathfrak{A}_1$ hat also mit Φ^4 das doppelt zu zählende Strahlenpaar s_1, s_2 gemein, und $\mathfrak{a}_1$ ist daher Brennpunkt von Φ^2 für l; dasselbe gilt für $\mathfrak{a}_2$. Wir erhalten also das wichtige Resultat, dass die Singularitätenfläche ψ^4 Brennfläche von Φ^2 ist, also 16 Knotenpunkte und 16 singuläre Tangentialebenen von der in Cap. 2. § 2. beschriebenen Lage besitzt. Ebenso enthalten die 5 anderen Fundamentalcomplexe je ein Strahlensystem 2. Grades, dessen Brennfläche ψ^4 ist. Es ergiebt sich also, dass die 6 Fundamentalcomplexe zu einander in Involution liegen.

Ist nun $\mathfrak{a}_1$ ein in einer singulären Tangentialebene β_1 von ψ^4 gelegener singulärer Punkt, so muss der zugehörige singuläre Strahl s_1 in β_1 liegen. Beschreibt dann $\mathfrak{a}_1$ den in β_1 liegenden Kegelschnitt k^2 von ψ^4, so muss dieser Strahl s_1 mit den 6 von $\mathfrak{a}_1$ nach den in β_1 gelegenen Knotenpunkten von ψ^4 gerichteten Strahlen immer dasselbe Doppelverhältniss bilden (cfr. § 3.). Daraus ergiebt sich, dass die in β_1 gelegenen singulären Strahlen durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{b}_1$ von k^2 gehen. Dies sind zugleich alle Strahlen von C^2, die in β_1 liegen, und alle, die durch $\mathfrak{b}_1$ gehen. Ebenso liegen diejenigen Strahlen von C^2, die durch einen Knotenpunkt von ψ^4 gehen, in einer Tangentialebene seines Osculationskegels und sind alle singulär.

§ 8.

Die zu C^2 in Involution liegenden Complexe haben dieselbe Singularitätenfläche wie C^2.

Denken wir uns nun wieder irgend ein Paar von Systemen zusammengehöriger Grundflächen von C^2 zu Grunde gelegt, so erfüllen die zu diesen Grundflächen in Involution liegenden Regelflächen einen Complex 2. Grades A^2, welcher dieselbe Singularitätenfläche ψ^4 wie C^2 hat. Denn hat man ein in C^2 enthaltenes ebenes Strahlenbüschel durch $\mathfrak{a}$ in α, so bildet dieses mit einem zweiten Strahlenbüschel durch $\mathfrak{a}'$ in α' eine Grundfläche unseres Systems und die zu dieser in Involution liegende Regelfläche besteht aus den Strahlenbüscheln durch $\mathfrak{a}$ resp. $\mathfrak{a}'$ in α' resp. α.

Sei nun s wiederum ein singulärer Strahl von C^2 und $\mathfrak{a}$ der zugehörige singuläre Punkt, β die zugehörige singuläre Ebene, endlich l die Directrix des s entsprechenden Tangentialcomplexes S. Hat nun s mit ψ^4 noch die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gemein, so sind die Strahlenbüschel durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in β in C^2 enthalten, die Strahlenbüschel also, welche mit ihnen Grundflächen unseres Systems bilden, haben ihre Centren auf l (vergl. S. 27). Also ist l der zu $\mathfrak{a}$ gehörige singuläre Strahl von A^2; ebenso gehört er auch zu β. D. h. das System der singulären Strahlen von A^2 besteht aus den A^2 und L^2 gemeinsamen Strahlen.

Legt man nun successive alle Paare von Systemen zusammengehöriger Grundflächen zu Grunde, so durchlaufen die Geraden l in den Tangentialebenen β von ψ^4 durch deren Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ einander projectivische Strahlenbüschel (vergl. § 3.); sobald also diese projectivische Zuordnung etwa durch die Fundamentalcomplexe fixirt ist, ist jeder Complex A^2 durch einen singulären Strahl l und natürlich ψ^4 bestimmt. Denn mit l sind dann auch alle singulären Strahlen gegeben und auf jedem zwei singuläre Punkte bestimmt, welche je ein Strahlenbüschel in der zu dem singulären Strahl zugehörigen singulären Ebene haben. Daraus ergiebt sich nun sogleich, dass die zu A^2 in Involution liegenden Complexe dieselben sein müssen, wie die zu C^2 in Involution liegenden; denn die 6 Fundamentalcomplexe sind dieselben geblieben, also auch die projectivische Zuordnung der Geraden l. D. h. also:

„Die zu C^2 in Involution liegenden Complexe liegen wieder zu einander in Involution."

Dies folgt auch daraus, dass, wenn A^2 und B^2 zwei solche zu den Grundflächensystemen (a) und (b) gehörige Complexe sind, man immer dreifach unendlich viele lineare Complexe construiren kann, die Grundflächen beider Systeme enthalten. Diese haben also mit C^2 Strahlensysteme 2. Grades gemein, denen Strahlensysteme von A^2 und B^2 conjugirt sind, die wieder in Involution liegen. Nun müssen aber die Regelflächen, welche diese Involution vermitteln, immer demselben Systeme von A^2 resp. B^2 angehören; denn da es in A^2 resp. B^2 nur eine einfache Mannigfaltigkeit verschiedener Systeme giebt, so müssen die Regelflächen von mehr als zwei dieser Strahlensysteme 2. Grades demselben Systeme angehören, also alle.

Dass die 6 Fundamentalcomplexe zu einander in Involution liegen, ist also nur ein specieller Fall dieses allgemeineren Satzes.

Dass die zu C^2 in Involution liegenden Complexe auch alle Complexe sind, deren Singularitätenfläche ψ^4 ist, ist nach der für sie aus ψ^4 gegebenen Construction evident.

Durch jeden Strahl p des Raumes gehen 4 von diesen Complexen 2. Grades. Denn das Strahlensystem, das aus den p treffenden Strahlen von C^2 besteht, enthält ausser den Kegeln und Tangentenbüscheln 2. Ordnung noch 4 Paare von Regelflächenschaaren (vergl. 2. Cap., § 7, 1.).

Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.*)

II. Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.

Von

Sophus Lie in Christiania.

Björling bestimmte zuerst diejenige Minimalfläche, die eine vorgelegte Developpable nach einer vorgelegten Curve berührt. Später gab Bonnet eine selbständige Lösung des Björling'schen Problems. Hiermit war, wie Bonnet ausdrücklich bemerkt, insbesondere auch die Bestimmung derjenigen Minimalfläche, die eine vorgelegte Curve als Krümmungslinie, Haupttangentencurve oder geodätische Curve enthält, geleistet. Endlich gab auch Weierstrass eine schöne und strenge Erledigung des besprochenen Problems, indem er sich auf den Fall einer *reellen* Developpable und einer *reellen* Berührungscurve beschränkte. Er zeigte, dass es dann immer eine und *nur eine* reelle Minimalfläche giebt, die die gestellten Forderungen erfüllt.**)

Unter den verschiedenen expliciten Formeln, die zur Erledigung des Björling'schen Problems dienen, sind die folgenden von Schwarz herrührenden oft besonders zweckmässig:

$$U = \mathbf{x} + i\int(Z d\mathbf{y} - Y d\mathbf{z}),$$
$$V = \mathbf{y} + i\int(X d\mathbf{z} - Z d\mathbf{x}),$$
$$W = \mathbf{z} + i\int(Y d\mathbf{x} - X d\mathbf{y}),$$
$$x = RU, \quad y = RU, \quad z = RW.$$

Hier sind $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ die Coordinaten der vorgelegten reellen Curve, X, Y, Z die Richtungscosinus der längs dieser Curve gegebenen Tangentenebenen; R bezeichnet den reellen Theil der complexen Grössen U, V, W; x, y, z sind die Coordinaten der Punkte der bestimmten

---

*) Vergl. die erste Abhandlung in Bd. XIV pag. 331—416.

**) Aus einem Citate sehe ich, dass auch Mathet sich mit dem Björling-schen Probleme beschäftigt hat.

Fläche. Diese Formeln dehnen sich ohne grosse Aenderung auf den Fall aus, dass $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, X, Y, Z imaginär sind, wie im § 1. der nachstehenden Abhandlung gezeigt wird. In diesem allgemeinen Falle bleibt aber der soeben genannte Satz von Weierstrass nicht mehr gültig.

Im Jahre 1872 wurde den mathematischen Schülern des Züricher Polytechnikums folgende Aufgabe gestellt: „Eine Minimalfläche ist durch die Bedingung analytisch zu bestimmen, dass eine vorgeschriebene ebene Curve eine kürzeste Linie derselben sein soll.“ Nun ist diese Aufgabe allerdings, wie Bonnet längst bemerkt hat, nur ein sehr specieller Fall des Björling'schen Problems, dessen allgemeine Lösung man kennt. Nichts destoweniger sind die von Henneberg und Herzog gegebenen Beantwortungen des speciellen Problems bemerkenswerth. Und insbesondere sind die beiden folgenden Sätze, die von Henneberg herrühren, sehr schön:

I. Enthält eine reelle Minimalfläche eine reelle ebene geodätische Curve, so ist die Fläche nur dann algebraisch, wenn die Curve die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist.

II. Der orthogonale Querschnitt eines jeden um eine reelle algebraische Minimalfläche umgeschriebenen reellen Cylinders ist die Evolute einer ebenen algebraischen Curve.

Ich habe mir die allgemeine Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob in eine vorgelegte algebraische Developpable algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden können. Ich frage ferner, wie man in jedem einzelnen Falle sämmtliche eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen findet. Nun ist es mir allerdings nicht gelungen, diese beiden Probleme vollständig zu erledigen. Doch habe ich eine Reihe allgemeiner Resultate, die mir wichtig scheinen, gefunden, wie ich in der nachstehenden Abhandlung zeigen werde. Wenn die vorgelegte Developpable ein beliebiger algebraischer Kegel ist, so giebt es immer ∞^∞ eingeschriebene algebraische Minimalflächen, die durch eine elegante Construction bestimmt werden. In jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene Developpable können ∞^∞ algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden. Auch diese Flächen lassen sich durch eine gemeinsame Construction bestimmen. Beispiele solcher Developpablen sind einerseits alle Developpable, deren Ebenen Normalebenen einer beliebigen algebraischen Raumcurve sind, andererseits alle Developpable, deren Ebenen eine feste Gerade unter constantem Winkel schneiden. [Diejenigen Nummern der nachstehenden Abhandlung, die eingeklammert sind, mag der Leser zunächst überspringen.]

Den Schluss meiner Abhandlung bilden einige Noten. In der ersten Note bestimme ich alle reellen Minimalflächen, deren Classenzahl, dividirt durch 2, eine vorgelegte Primzahl ist. In der zweiten Note gebe ich

Formeln zur Bestimmung der Classe einer algebraischen Minimalfläche, die eine ebene geodätische Curve enthält. Endlich in der dritten Note bestimme ich jede Minimalfläche, die auf ∞^1 mit ihr ähnliche Flächen abgewickelt werden kann.*)

In meiner nächsten (dritten) Abhandlung über Minimalflächen bestimme ich alle reellen und imaginären Minimalflächen, die durch Translationsbewegung einer reellen oder imaginären Curve erzeugt werden können. Gleichzeitig bestimme ich jede Minimalfläche, die durch unendlich viele lineare Transformationen wiederum in eine Minimalfläche übergeführt wird. Dabei brauchen diese Transformationen keineswegs den imaginären Kugelkreis invariant zu lassen.

In weiteren Abhandlungen gedenke ich eine vollständige Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen zu entwickeln. Diese Theorie subsumirt sich unter umfassende Untersuchungen, die ich über die Transformationstheorie der allgemeinen Gleichung

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

angestellt habe. Zugleich werde ich einen interessanten Zusammenhang der Theorie der Minimalflächen mit der Theorie des linearen Liniencomplexes und mit der Theorie des tetraedralen Liniencomplexes nachweisen.

§ 1.

Bestimmung derjenigen Minimalfläche, die eine gegebene Developpable nach einer gegebenen Curve berührt.

Nach Weierstrass giebt es immer eine und nur eine (reelle) Minimalfläche, die eine vorgelegte reelle Developpable nach einer gegebenen reellen Curve berührt. Dies bleibt nicht mehr immer wahr, wenn die gegebene Developpable oder die gegebene Curve imaginär sind. Für das Folgende ist es mir nothwendig, zuerst die hiermit angedeutete kleine Lücke in der analytischen Theorie der Minimalflächen auszufüllen.**)

1. Indem wir die developpablen Minimalflächen, die den Kugelkreis enthalten, vorläufig ausschliessen, können wir bekanntlich die Gleichungen einer jeden Minimalfläche auf die Form bringen

$$x = U_1(t) + U_2(\tau); \quad y = V_1(t) + V_2(\tau); \quad z = W_1(t) + W_2(\tau),$$

wo

$$(1) \qquad dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0, \quad dU_2^2 + dV_2^2 + dW_2^2 = 0$$

*) Diese Flächen gestatten eine Gruppe linearer Transformationen, die den Kugelkreis invariant lassen.

**) Auch nicht Björling oder Bonnet sind, soviel mir bekannt, auf die betreffenden Ausnahmefälle eingegangen.

ist. Soll diese Fläche die gegebene Curve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ enthalten, so muss es möglich sein, eine solche Relation zwischen t und τ anzunehmen, dass

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = U_1 + U_2, \quad \mathfrak{y} = V_1 + V_2, \quad \mathfrak{z} = W_1 + W_2$$

wird. Soll andererseits die Fläche längs der gegebenen Curve die gegebenen Richtungscosinus X, Y, Z besitzen, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

oder die beiden äquivalenten Gleichungen

$$(3) \quad X dU_1 + Y dV_1 + Z dW_1 = 0, \quad X dU_2 + Y dV_2 + Z dW_2 = 0$$

bestehen. Unser Problem wird daher analytisch formulirt durch die vereinigten Gleichungen (1), (2), (3). Wie man sieht, befriedigen sowohl die Grössen U_1, V_1, W_1 wie die Grössen U_2, V_2, W_2 die Gleichungen

$$\begin{aligned} dU^2 + \quad dV^2 + \quad dW^2 &= 0, \\ X dU + Y dV + Z dW &= 0, \\ (d\mathfrak{x} - dU)^2 + (d\mathfrak{y} - dV)^2 + (d\mathfrak{z} - dW)^2 &= 0, \end{aligned}$$

die im Allgemeinen jene Grössen vollständig bestimmen. Man erhält zuerst die äquivalenten Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} dU^2 + \quad dV^2 + \quad dW^2 = 0, \\ X dU + Y dV + Z dW = 0, \\ 2(d\mathfrak{x} dU + d\mathfrak{y} dV + d\mathfrak{z} dW) = ds^2 = d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 + d\mathfrak{z}^2, \end{cases}$$

aus denen folgt:

$$\begin{aligned} Z ds^2 - 2(Z d\mathfrak{y} - Y d\mathfrak{z}) dV &= 2(Z d\mathfrak{x} - X d\mathfrak{z}) dU, \\ X ds^2 - 2(X d\mathfrak{y} - Y d\mathfrak{x}) dV &= 2(X d\mathfrak{z} - Z d\mathfrak{x}) dW, \end{aligned}$$

und

$$\left[\frac{Z}{2} ds^2 - (Z d\mathfrak{y} - Y d\mathfrak{z}) dV\right]^2 + \left[\frac{X}{2} ds^2 - (X d\mathfrak{y} - Y d\mathfrak{x}) dV\right]^2 + (Z d\mathfrak{x} - X d\mathfrak{z})^2 dV^2 = 0,$$

oder durch Ausführung, indem man die Identität

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

berücksichtigt,

$$ds^2 \left\{(X^2 + Y^2 + Z^2)(dV^2 - dy\, dV) + \frac{ds^2}{4}(Z^2 + X^2)\right\} = 0.$$

Jetzt setzen wir voraus: einerseits, dass die vorgelegte Curve nicht die Gleichung $ds^2 = 0$ erfüllt, andererseits, dass der Ausdruck $X^2 + Y^2 + Z^2$ von Null verschieden ist, geometrisch ausgesprochen, dass die längs der Curve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gegebenen Tangentenebenen nicht sämmtlich den Kugelkreis berühren. Wir können daher mit ds^2 dividiren und darnach $X^2 + Y^2 + Z^2$ gleich 1 setzen. Dies giebt

$$dV^2 - d\mathrm{y} \cdot dV + \frac{ds^2}{4}(Z^2 + X^2) = 0,$$

woraus folgt

$$2dV = d\mathrm{y} \pm i\,(Xd\mathrm{z} - Zd\mathrm{x}).$$

Durch analoge Rechnungen findet man die Grössen dU und dW. Die Gleichungen (4) werden daher in allgemeinster Weise befriedigt, indem man setzt

$$2dU = d\mathrm{x} \pm i(Zd\mathrm{y} - Yd\mathrm{z}),$$
$$2dV = d\mathrm{y} \pm i(Xd\mathrm{z} - Zd\mathrm{x}),$$
$$2dW = d\mathrm{z} \pm i(Yd\mathrm{x} - Xd\mathrm{y}),$$

wo man entweder überall das Zeichen $+$ oder überall das Zeichen $-$ zu nehmen hat. Nimmt man das eine Zeichen, so erhält man die Grössen dU_1, dV_1 und dW_1; nimmt man das andere Zeichen, so erhält man die Grössen dU_2, dV_2, dW_2. Durch Quadratur findet man darnach die Grössen U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2 selbst.

Denkt man sich die bekannten Grössen x, y, z, X, Y, Z als Functionen eines Parameters u gegeben, so sind hiermit die Werthe der Grössen $U_1 \cdots W_2$ *längs der gegebenen Curve* als Functionen von u gefunden. Und dies genügt zur Erledigung unseres Problems. Man setze in der That

(5) $x = U_1(u_1) + U_2(u_2);\quad y = V_1(u_1) + V_2(u_2);\quad z = W_1(u_1) + W_2(u_2),$

und fasse dabei u_1 und u_2 als *unabhängige* Variabeln auf. Alsdann definiren unsere Gleichungen eine Minimalfläche, die die gestellten Forderungen erfüllt.

Nimmt man daher eine beliebige (reelle oder imaginäre) Developpable, die jedoch den Kugelkreis nicht enthält, und wählt eine beliebige auf derselben gelegene Curve, die die Gleichung $ds^2 = 0$ nicht befriedigt, so giebt es immer eine und nur eine Minimalfläche, die jene Developpable nach der gewählten Curve berührt.

[2. Ich werde jetzt voraussetzen, dass die vorgelegte Curve die Gleichung $ds^2 = 0$ befriedigt, während der Ausdruck $X^2 + Y^2 + Z^2$ von Null verschieden ist. Alsdann lehren die Sätze 3. und 9. meiner ersten Abhandlung über Minimalflächen (Math. Ann. Bd. XIV, S. 336 und 338), dass sämmtliche längs der vorgelegten Curve gegebenen Tangentenebenen durch einen gemeinsamen Punkt des Kugelkreises hindurchgehen müssen. Ist dies der Fall, so giebt es unbeschränkt viele Minimalflächen, die die gestellten Forderungen erfüllen.*) Man

*) Betrachtet man eine jede Minimalcurve als eine Minimalfläche, was bei einer dualistischen Auffassung erlaubt ist, so müssen die Entwickelungen des Textes modificirt werden.

findet dieselben, indem man die vorgelegte Minimalcurve nach den Regeln meiner Abhandlung mit einer ganz beliebigen zweiten Minimalcurve in passender Weise verbindet.

Sei andererseits

$$ds^2 = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

In diesem Falle giebt es nach den Entwickelungen meiner soeben citirten Abhandlung ebenfalls unbeschränkt viele Minimalflächen, die unsere Forderungen erfüllen. Lässt man in der That eine ganz beliebige Minimalcurve längs der vorgelegten Minimalcurve in Translationsbewegung *gleiten*, so erzeugt die bewegliche Curve immer eine Minimalfläche, die die gestellten Forderungen erfüllt.

Wir haben also nur noch die Hypothese

$$ds^2 \gtrless 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

zu betrachten. Da eine Developpable, die gleichzeitig um den Kugelkreis und eine Minimalfläche von der Gleichungsform (5) umgeschrieben ist, die betreffende Minimalfläche immer nach einer Minimalcurve berührt, so schliessen wir, dass unsere Hypothese durch diejenige Developpable, die gleichzeitig um die vorgelegte Curve $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und den Kugelkreis geschrieben ist, und nur durch diese Developpable befriedigt wird.

3. Zugefügt möge hier der Vollständigkeit wegen noch das Folgende werden.

Im Vorangehenden ist, können wir sagen, eine Minimalfläche durch eine continuirliche Schaar von ∞^1 auf der Fläche liegenden Flächenelementen bestimmt worden. Dabei setzten wir ausdrücklich voraus, dass diese Flächenelemente nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Es liegt nahe zu fragen, ob eine Minimalfläche sich auch durch ∞^1 durch einen gemeinsamen Punkt gehende Flächenelemente bestimmen lässt. Dieser Punkt wäre dann ein Doppelpunkt mit gegebenem Tangentenkegel.

Die soeben aufgeworfene Frage ist mit Nein zu beantworten. Denn nach einer Bemerkung von Geiser muss der Tangentenkegel eines auf einer Minimalfläche gelegenen Doppelpunktes immer den Kugelkreis enthalten. Es giebt andererseits unbeschränkt viele Minimalflächen mit einem solchen conischen Punkt und es wäre leicht, dieselben sämmtlich zu bestimmen.*)]

4. Ich will nun annehmen, dass eine algebraische Minimalfläche

*) Bewegt man eine beliebige Minimalcurve derart, dass sie immer durch einen festen Punkt hindurchgeht, so beschreibt sie immer eine Minimalfläche mit einem conischen Punkt der verlangten Art. Und in dieser Weise werden alle derartigen Flächen beschrieben.

$$x = U_1(t) + U_2(\tau); \quad y = V_1 + V_2; \quad z = W_1 + W_2$$

in eine algebraische Developpable eingeschrieben ist. Alsdann können wir bekanntlich voraussetzen, dass $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ *algebraische* Functionen bez. von t und τ sind. Die Berührungscurve, deren Punkte die Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ besitzen mögen, wird dann bestimmt durch eine gewisse *algebraische* Relation zwischen t und τ. Also sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ algebraische Functionen von t (oder von τ). Ist daher $\mathfrak{x}$ keine Constante, so ist eine jede der Grössen $U_1, V_1, \cdots, W_2$ eine algebraische Function von $\mathfrak{x}$. Diese Bemerkung wird uns später nützlich sein.

§ 2.

Algebraische Minimalflächen mit einer ebenen Krümmungslinie.

In diesem Paragraphen beschäftige ich mich mit algebraischen Minimalflächen, die einander unter constantem Winkel schneiden. Dabei setze ich zunächst voraus, dass die eine Fläche eine Ebene ist. Alsdann hat die zweite Fläche eine ebene Krümmungslinie.

5. Ich suche die Minimalflächen, die eine vorgelegte krumme Linie als Krümmungslinie enthalten. Dabei setze ich voraus, dass diese Curve in einer Ebene liegt, und dass diese Ebene nicht den Kugelkreis berührt. Die gesuchten Flächen schneiden die Ebene nach einem bekannten Satze unter constantem Winkel. Und daher lehren die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen, dass es einfach unendlich viele Flächen giebt, die die gestellten Forderungen erfüllen.

Da die vorgelegte Ebene den Kugelkreis nicht berührt, kann ich durch eine zweckmässige (reelle oder imaginäre) Bewegung immer erreichen, dass jene Ebene mit der Ebene $z = 0$ eines Cartesischen Coordinatensystems zusammenfällt. Alsdann wird die vorgelegte Curve definirt durch zwei Gleichungen der Form

$$\mathfrak{z} = 0, \quad \varphi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0.$$

Und da die Tangentenebene längs dieser Curve einen constanten Winkel mit der z-Axe bilden soll, können wir setzen

$$Z = \gamma = \text{Const.}, \quad X d\mathfrak{x} + Y d\mathfrak{y} = 0,$$

woraus, wenn wir die Bogenlänge der Curve $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ mit s bezeichnen,

$$\frac{d\mathfrak{x}}{Y} = \frac{d\mathfrak{y}}{-X} = \frac{ds}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{Y d\mathfrak{x} - X d\mathfrak{y}}{1-\gamma^2}.$$

Also werden die Minimalcurven der gesuchten Fläche bestimmt (Nr. 1.) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2U &= \mathfrak{x} \pm i\gamma\mathfrak{y}, \\ 2V &= \mathfrak{y} \mp i\gamma\mathfrak{x}, \\ 2W &= \pm is\sqrt{1-\gamma^2}. \end{aligned}$$

Und also wird die gesuchte Minimalfläche bestimmt (Nr. 1.) durch die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{cases} 2U = \mathbf{x} \mp i\int Y dz, \\ 2V = \mathbf{y} \pm i\int X dz, \\ 2W = \mathbf{z} \pm is. \end{cases}$$

Soll diese Minimalfläche algebraisch sein, so muss sowohl der Cylinder $\varphi(\mathbf{x}\,\mathbf{y}) = 0$ wie die Berührungscurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ algebraisch sein. Endlich sahen wir in § 1. (Schluss), dass W eine algebraische Function von $\mathbf{z}$ sein muss. Also wird s eine algebraische Function von $\mathbf{z}$ und zugleich eine algebraische Function von $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{y}$. Hiermit ist nachgewiesen, dass der Querschnitt eines jeden um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebenen Cylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Curve sein muss, wie der zweite Henneberg'sche Satz lehrt.

Diese nothwendige Forderung ist indess keineswegs hinreichend, indem überdies die beiden Integrale $\int Y dz$, $\int X dz$ algebraisch sein müssen. Ich werde später zeigen, wie man die allgemeinste Curve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ findet, die diese Forderungen erfüllt. Hier beschränke ich mich auf das Folgende.

Ich werde annehmen, dass die Curve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ eine geodätische Curve des Cylinders ist. Alsdann besteht eine Relation der Form

$$\mathbf{z} = ks, \quad (k = \text{Const.})$$

und also kommt (6), (7)

$$\begin{aligned} 2U &= \mathbf{x} \mp ik\mathbf{x} = (1 \mp ik)\mathbf{x}, \\ 2V &= \mathbf{y} \mp ik\mathbf{y} = (1 \mp ik)\mathbf{y}, \\ 2W &= ks \pm is \;\; = (k \pm i)s, \end{aligned}$$

sodass die gesuchte Minimalfläche algebraisch wird. Dies giebt

Satz 3. *Die Minimalfläche, die einen Cylinder nach einer geodätischen Curve*) berührt, ist algebraisch, wenn der Querschnitt des Cylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist, sonst nicht.*

Dieser Satz kann übrigens auch folgendermassen ausgesprochen werden:

Die Minimalfläche, die einen Cylinder nach einer (nicht ebenen) geodätischen Curve berührt, ist algebraisch, wenn die Curve selbst algebraisch ist.

8. Ich suche jetzt die Minimalfläche, die die geodätische Curve einer Cylinderfläche als *Haupttangentencurve* enthält.

Seien wie früher $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die Coordinaten einer geodätischen Curve eines Cylinders, und sei s die Bogenlänge des orthogonalen Quer-

---

*) Ist die vorgelegte geodätische Curve selbst eine Minimalcurve, und also $k = \pm i$, so reducirt sich die gesuchte Fläche auf die vorgelegte Minimalcurve.

schnitts und $z = ks$. Bezeichne ich dann mit X, Y, Z die Richtungscosinus einer Osculationsebene der Curve, so finde ich durch elementare Ueberlegungen, dass

$$X = \frac{dx}{ds}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad Y = \frac{dy}{ds}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$$

ist. Und also kommt (Nr. 1.)

$$2U = \mathrm{x} \mp i\mathrm{y}\sqrt{1+k^2},$$
$$2V = \mathrm{y} \pm i\mathrm{x}\sqrt{1+k^2},$$
$$2W = \mathrm{z}.$$

Ist daher die Curve $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ algebraisch, so ist dasselbe der Fall mit der gesuchten Minimalfläche.

Die gefundene Minimalfläche schneidet den Cylinder und also zugleich die in der vorangehenden Nummer betrachtete Minimalfläche orthogonal. Also erhalten wir durch Anwendung von Satz 2. den folgenden Satz:

Satz 4. *Ist der Querschnitt eines Cylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Curve, so giebt es einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die einander nach einer beliebigen geodätischen Curve des Cylinders schneiden. Je zwei Flächen schneiden einander dabei unter constantem Winkel.*

9. Ich nehme eine beliebige Raumcurve C, deren Osculationsebenen einen festen (doch nicht rechten) Winkel mit einer Geraden L bilden. Alsdann ist C geodätische Curve auf einem Cylinder, dessen Erzeugende mit L parallel sind. Soll daher die Minimalfläche, auf der C Haupttangentencurve ist, algebraisch sein, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass der Querschnitt des Cylinders die Evolute einer algebraischen Curve ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Curve C algebraisch ist. Dies giebt

Satz 5. *Enthält eine Minimalfläche eine Haupttangentencurve, deren Osculationsebenen constanten Winkel mit einer festen Geraden bilden, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Curve algebraisch ist; sonst nicht.*

§ 4.

Ueber eine Transformation der Minimalflächen, die die Biegung als speciellen Fall umfasst.

[**10.** Sei vorgelegt die Minimalfläche

$$x = U_1(t) + U_2(\tau), \quad y = V_1(t) + V_2(\tau), \quad z = W_1(t) + W_2(\tau).$$

Ich führe die Minimalcurve

$$x = U_1, \quad y = V_1, \quad z = W_1$$

durch eine orthogonale Transformation in eine neue Lage

$$x = U_1', \quad y = V_1', \quad z = W_1'$$

über. Ebenso führe ich die Minimalcurve

$$x = U_2, \quad y = V_2, \quad z = W_2$$

durch eine andere orthogonale Transformation in die Lage

$$x = U_2', \quad y = V_2', \quad z = W_2'$$

über. Ich bilde die Minimalfläche

$$x = U_1'(t) + U_2'(\tau), \quad y = V_1'(t) + V_2'(\tau), \quad z = W_1'(t) + W_2'(\tau)$$

und betrachte dieselbe als die transformirte der ursprünglichen Fläche. Dabei betrachte ich zwei solche Punkte dieser Flächen, die demselben Werthsysteme t, τ gehören, als einander entsprechend.

Die hiermit definirte allgemeine Kategorie von Transformationen, unter denen bis jetzt nur specielle Fälle betrachtet sind, verdient, wenn ich nicht irre, allgemein untersucht zu werden. Hier beschränke ich mich auf einige Bemerkungen, die, wenn es sich darum handelt, die einfachsten algebraischen Minimalflächen zu studiren, nicht ohne Interesse sind.

Satz 6. *Ist sowohl die ursprüngliche wie die transformirte Fläche eine Doppelfläche, so haben beide Flächen dieselbe Classe. Ebenso wenn beide keine Doppelflächen sind. Ist dagegen die eine und nur die eine Doppelfläche, so ist ihre Classe nur halb so gross wie diejenige der zweiten Fläche.*

Ist die ursprüngliche Fläche reell, und sind dabei die beiden orthogonalen Transformationen imaginär-conjugirte Operationen, so ist auch die neue Fläche *reell.*

Sind die beiden orthogonalen Transformationen Aehnlichkeitstransformationen, so sind die Tangentenebenen in je zwei entsprechenden Punkten parallel.

Sind die beiden orthogonalen Transformationen imaginär-conjugirte Aehnlichkeitstransformationen:

$$x' = (a + \alpha i)\, x, \quad y' = (a + \alpha i)\, y, \quad z' = (a + \alpha i)\, z,$$
$$x'' = (a - \alpha i)\, x, \quad y'' = (a - \alpha i)\, y, \quad z'' = (a - \alpha i)\, z,$$

und ist dabei $a^2 + \alpha^2$ gleich 1, so ist das Bogenelement der neuen Fläche gleich dem entsprechenden Bogenelement der ursprünglichen Fläche*). Daher nennt man eine solche Transformation eine Biegung. (Die Theorie der Biegung der Minimalflächen rührt von *Bonnet* her.)

---

*) Dabei braucht die vorgelegte Fläche keineswegs reell zu sein.

11. Die Bemerkungen der letzten Nummer finden eine interessante, wenn auch particulare Anwendung auf die in den vorangehenden Paragraphen betrachteten Flächenfamilien.

Die Minimalflächen, die eine vorgelegte ebene Curve $\mathbf{z} = 0$, $\varphi(\mathbf{x}\,\mathbf{y}) = 0$ als Krümmungslinie enthalten, werden nach dem Vorangehenden bestimmt durch die Formeln

$$(8) \qquad 2U = \mathbf{x} \pm i\gamma\mathbf{y}, \quad 2V = \mathbf{y} \mp i\gamma\mathbf{x}, \quad 2W = \pm is\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Setzt man insbesondere $\gamma = 0$, so erhält man die Minimalfläche

$$(9) \qquad 2U_0 = \mathbf{x}, \quad 2V_0 = \mathbf{y}, \quad 2W_0 = \pm is,$$

die die vorgelegte Curve als geodätische Curve enthält. Nun aber ist klar, dass die Minimalcurve (8) aus der Minimalcurve (9) durch eine imaginäre orthogonale Transformation hervorgeht.

Also hat die Minimalfläche, die eine gewisse ebene Evolute als Krümmungslinie enthält, dieselbe Classe wie die Minimalfläche, die jene Evolute als geodätische Curve enthält, dabei vorausgesetzt, dass entweder beide Flächen Doppelflächen, oder auch dass keine unter ihnen Doppelfläche ist. Ist nur die eine Fläche Doppelfläche, so ist ihre Classe nur halb so gross.

Jetzt betrachte ich den Cylinder $\varphi(xy) = 0$, eine geodätische Curve desselben, und die nach dieser Curve berührende Minimalfläche, die nach Nr. 7. durch die Gleichungen

$$2U_1 = (1 \mp ik)\,\mathbf{x}, \quad 2V_1 = (1 \mp ik)\,\mathbf{y}, \quad 2W_1 = (k \pm i)\,s$$

bestimmt wird. Auch diese Minimalcurve geht aus der Minimalcurve (9) durch eine orthogonale Transformation hervor.

Die Minimalfläche, die einen Cylinder nach einer nicht ebenen geodätischen Curve berührt, geht durch Biegung verbunden mit einer Aehnlichkeitstransformation über in die Minimalfläche, die den orthogonalen Querschnitt des Cylinders als ebene geodätische Curve enthält.

Endlich sahen wir, dass die Minimalfläche, auf der die besprochene geodätische Curve Haupttangentencurve ist, durch die Gleichungen

$$2U_2 = \mathbf{x} \mp i\mathbf{y}\sqrt{1+k^2}, \quad 2V_2 = \mathbf{y} \pm i\mathbf{x}\sqrt{1+k^2}, \quad 2W_2 = ks$$

bestimmt wird. Auch diese Minimalcurve geht aus der Curve (9) durch eine orthogonale Transformation hervor. Dasselbe gilt für die einfach unendlich vielen Minimalflächen, die sich (Satz 4.) nach unserer geodätischen Curve unter constantem Winkel schneiden.

Also haben die im Satze 4. betrachteten einfach unendlich vielen algebraischen Minimalflächen im Allgemeinen dieselbe Classe. Und zwar bleibt diese Classenzahl invariant, wenn man von einer geodätischen Curve des vorgelegten Cylinders zu einer anderen solchen Curve übergeht.

Zu einem Cylinder, dessen Querschnitt die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist, gehören somit *dreifach unendlich viele alge-*

braische Minimalflächen, die im Allgemeinen dieselbe Classe besitzen.

Wenn man z. B. auf die Henneberg'sche Minimalfläche *fünfter* Classe die angegebenen Operationen ausführt, so erhält man ∞^3 reelle Minimalflächen *zehnter* Classe.

12. Man nehme eine beliebige reelle ebene Curve mit Mittelpunkt. Ihre Evolute besitzt dann ebenfalls einen Mittelpunkt und lässt sich daher darstellen durch die beiden äquivalenten Gleichungen

$$\varphi(\mathbf{x}\,\mathbf{y}) = 0, \quad \varphi(-\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = 0.$$

Diejenige Minimalfläche, die diese Evolute als geodätische Curve enthält, wird bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen

$$(10) \qquad 2U = \mathbf{x}, \quad 2V = \mathbf{y}, \quad 2W = \pm is.$$

Ihre Bonnet'sche Biegungsfläche wird bestimmt durch

$$(11) \qquad 2U_1 = i\mathbf{x}, \quad 2V_1 = i\mathbf{y}, \quad 2W_1 = -s.$$

Bestimmen nun die Gleichungen (10), wie ich annehmen werde, eine irreductible Minimalcurve, so entspricht jedem Punkte $x, y, + is$ auf dieser Curve ein anderer Punkt mit den Coordinaten $-x, -y, +is$. In Folge dessen ist die durch die Gleichungen (11) dargestellte Curve sich selbst conjugirt, indem zu jedem Punkte $ix, iy, -s$ ein anderer Punkt $-ix, -iy, -s$ zugeordnet ist.

In Folge dessen sind die beiden genannten Flächen Doppelflächen und haben somit dieselbe Classe.]

§ 5.

Die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumcurve nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch.

Die Normalebenen einer Raumcurve umhüllen bekanntlich eine Developpable, die ich der Kürze wegen die *Evolute* der Raumcurve nennen werde. In diesem Paragraphen bestimme ich einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die in die Evolute einer algebraischen Raumcurve eingeschrieben sind. Alle diese Flächen sind ähnlich mit den Biegungsflächen einer beliebigen unter ihnen gewählten Fläche.

13. Seien $x\,y\,z$ die Coordinaten eines Punktes einer *algebraischen* Raumcurve. Die Coordinaten $x_1\,y_1\,z_1$ des Krümmungsmittelpunktes sind bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen

$$x_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$
$$y_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$
$$z_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

wo die Bogenlänge s der Raumcurve als unabhängige Variable gewählt ist. Die Tangentenebene der Evolute in einem Krümmungsmittelpunkte besitzt die Richtungscosinus x', y', z'. Daher wird die Minimalfläche, die die Evolute nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, bestimmt durch die Formeln

$$\begin{aligned} 2U &= x_1 \pm i\int(z'\,dy_1 - y'\,dz_1), \\ 2V &= y_1 \pm i\int(x'\,dz_1 - z'\,dx_1), \\ 2W &= z_1 \pm i\int(y'\,dx_1 - x'\,dy_1). \end{aligned}$$

Man findet

$$2U = x_1 \pm i\int\left(z'\cdot d\frac{y''}{x''^2+y''^2+z''^2} - y'\cdot d\frac{z''}{x''^2+y''^2+z''^2}\right),$$

oder wenn man die Integration ausführt, und darnach die analogen Ausdrücke der Grössen V und W hinzufügt:

$$\begin{aligned} 2U &= x + \frac{x''}{x''^2+y''^2+z''^2} \pm i\,\frac{z'y''-y'z''}{x''^2+y''^2+z''^2}, \\ 2V &= y + \frac{y''}{x''^2+y''^2+z''^2} \pm i\,\frac{x'z''-z'x''}{x''^2+y''^2+z''^2}, \\ 2W &= z + \frac{z''}{x''^2+y''^2+z''^2} \pm i\,\frac{y'x''-x'y''}{x''^2+y''^2+z''^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass die gesuchte Minimalfläche algebraisch ist. Also

Satz 7. *Die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumcurve nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch.*

14. Alle auf der Evolute gelegenen Punkte ξ, η, ζ werden bekanntlich erhalten, wenn man in den Formeln

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{x''}{x''^2+y''^2+z''^2} + k\,\frac{z'y''-y'z''}{x''^2+y''^2+z''^2}, \\ \eta &= y + \frac{y''}{x''^2+y''^2+z''^2} + k\,\frac{x'z''-z'x''}{x''^2+y''^2+z''^2}, \\ \zeta &= z + \frac{z''}{x''^2+y''^2+z''^2} + k\,\frac{y'x''-x'y''}{x''^2+y''^2+z''^2}, \end{aligned}$$

der Grösse k successiv alle möglichen Werthe ertheilt. Giebt man dagegen k einen bestimmten Werth, so erhält man eine auf der Evolute gelegene Curve. Die nach dieser Curve berührende Minimalfläche wird bestimmt durch die Formeln

$$\begin{aligned} 2U_1 &= \xi \pm i\int(z'\,d\eta - y'\,d\zeta), \\ 2V_1 &= \eta \pm i\int(x'\,d\zeta - z'\,d\xi), \\ 2W_1 &= \zeta \pm i\int(y'\,d\xi - x'\,d\eta), \end{aligned}$$

woraus durch Ausführung

$$
(12)\quad \begin{cases}
2U_1 = (1 \mp ik)\left(x + \dfrac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\dfrac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right), \\
2V_1 = (1 \mp ik)\left(y + \dfrac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\dfrac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right), \\
2W_1 = (1 \mp ik)\left(z + \dfrac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\dfrac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right).
\end{cases}
$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass diese Minimalfläche algebraisch ist, welchen Werth auch die Constante k haben mag. Also:

Satz 8. *In die Evolute einer algebraischen Raumcurve kann man jedenfalls einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen einschreiben.*

In späteren Paragraphen zeige ich, dass es ∞^∞ algebraische Minimalflächen giebt, die in unsere Evolute eingeschrieben sind.

[**15.** Wie man sieht, bestehen Relationen der Form

$$U_1 = (1 \mp ik)\, U, \quad V_1 = (1 \mp ik)\, V, \quad W_1 = (1 \mp ik)\, W.$$

In Folge dessen geht die in Nummer 13. betrachtete Minimalfläche durch Biegung verbunden mit einer reellen Aehnlichkeitstransformation in die Flächen der Nummer 14. über.

Die Berührungscurven $\xi\eta\zeta$ dieser letzten Flächen können folgendermassen geometrisch definirt werden. Durch die Tangenten der vorgelegten Curve $x\,y\,z$ legen wir Ebenen, die mit den entsprechenden Osculationsebenen constanten Winkel bilden. Jede solche Ebene schneidet die entsprechende Krümmungsaxe in einem Punkte, der sicher auf der Evolute liegt. Der Inbegriff der hiermit erhaltenen Punkte ist eine Curve ξ, η, ζ.*)]

§ 6.

Jede algebraische Minimalfläche ist eingeschrieben in ∞^4 Evoluten von algebraischen Raumcurven.

Die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen führen zu der Frage: Wie viele algebraische Raumcurven giebt es, in deren Evolute eine vorgelegte algebraische Minimalfläche eingeschrieben ist? Mit dieser Frage werde ich mich jetzt beschäftigen.

16. Sei

$$x = U_1^0(t) + U_2^0(\tau), \quad y = V_1^0(t) + V_2^0(\tau), \quad z = W_1^0(t) + W_2^0(\tau)$$

eine vorgelegte Minimalfläche. Ich setze

*) Wickelt man die Evolute in eine Ebene ab, so wird die Curve ξ, η, ζ die schiefe Fusspunktcurve eines gewissen Punktes hinsichtlich derjenigen Curve, in welche die Rückkehrkante übergegangen ist.

$$U_1^0 + A = U_1\,, \qquad U_2^0 - A = U_2\,,$$
$$V_1^0 + B = V_1\,, \qquad V_2^0 - B = V_2\,,$$
$$W_1^0 + C = W_1\,, \qquad W_2^0 - C = W_2\,,$$

wo A, B und C arbiträre Constanten bezeichnen sollen. Alsdann definiren die Gleichungen

$$x = U_1 + U_2, \qquad y = V_1 + V_2, \qquad z = W_1 + W_2$$

wiederum die vorgelegte Minimalfläche.

Ich führe drei neue Grössen ξ, η, ζ ein, indem ich setze

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi - 2U_1}{dU_1} = \dfrac{\eta - 2V_1}{dV_1} = \dfrac{\zeta - 2W_1}{dW_1}, \\[2mm] \dfrac{\xi - 2U_2}{dU_2} = \dfrac{\eta - 2V_2}{dV_2} = \dfrac{\zeta - 2W_2}{dW_2}; \end{cases}$$

hierdurch werden die Parameter t und τ durch *eine* Relation verbunden. Die variablen Grössen ξ, η, ζ interpretire ich als die Coordinaten der Punkte einer algebraischen Raumcurve. Ich werde zeigen, dass die vorgelegte Minimalfläche in die Evolute dieser Curve eingeschrieben ist.

Es ist

$$dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0 = dU_2^2 + dV_2^2 + dW_2^2,$$

also kommt

$$(14) \qquad \begin{cases} (\xi - 2U_i)^2 + (\eta - 2V_i)^2 + (\zeta - 2W_i)^2 = 0 \\ (\xi - 2U_i)^2\, dU_i + (\eta - 2V_i)\, dV_i + (\zeta - 2W_i)\, dW_i = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2) \end{cases}$$

und durch Differentiation der Gleichungen (14), indem man die übrigen Relationen berücksichtigt

$$dU_1\xi' + dV_1\eta' + dW_1\zeta' = 0 = dU_2\xi' + dV_2\eta' + dW_2\zeta',$$
$$(\xi - 2U_1)\xi' + (\eta - 2V_1)\eta' + (\zeta - 2W_1)\zeta' = 0 = (\xi - 2U_2)\xi' + \cdots.$$

Durch Differentiation dieser letzten Gleichungen kommt

$$(\xi - 2U_1)\xi'' + (\eta - 2V_1)\eta'' + (\zeta - 2W_1)\zeta'' + (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 0,$$
$$(\xi - 2U_2)\xi'' + (\eta - 2V_2)\eta'' + (\zeta - 2W_2)\zeta'' + (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 0.$$

Wir wählen die Bogenlänge der Curve $\xi\,\eta\,\zeta$ zur unabhängigen Variable. Alsdann wird

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1.$$

In Folge dessen werden die Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} (\xi - 2U)^2 + (\eta - 2V)^2 + (\zeta - 2W)^2 = 0, \\ (\xi - 2U)\xi' + (\eta - 2V)\eta' + (\zeta - 2W)\zeta' = 0, \\ (\xi - 2U)\xi'' + (\eta - 2V)\eta'' + (\zeta - 2W)\zeta'' + 1 = 0 \end{cases}$$

sowohl durch $U_1\,V_1\,W_1$ wie durch $U_2\,V_2\,W_2$ befriedigt. Die drei letzten Gleichungen geben durch Auflösung

$$2U = \xi + \frac{\xi''}{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2} \pm i\,\frac{\zeta'\eta''-\eta'\zeta''}{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2}\,,$$
$$2V = \eta + \frac{\eta''}{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2} \pm i\,\frac{\xi'\zeta''-\zeta'\xi''}{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2}\,,$$
$$2W = \zeta + \frac{\zeta''}{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2} \pm i\,\frac{\eta'\xi''-\xi'\eta''}{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2}\,.$$

Diese Gleichungen zeigen in der That (Nr. 13.), dass die vorgelegte Minimalfläche in die Evolute der Raumcurve $\xi\,\eta\,\zeta$ eingeschrieben ist. Und da diese Curve von den *drei* arbiträren Parametern A, B, C abhängt, erhalten wir den Satz:

Satz 9. *Jede algebraische Minimalfläche berührt dreifach unendlich viele Evoluten algebraischer Raumcurven nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte*).*

Zerfällt die Raumcurve $\xi\,\eta\,\zeta$, so nennt man bekanntlich jeden Theil derselben *Focalcurve* der übrigen Theile. Dies giebt den Satz:

Satz 10. *Berührt eine Minimalfläche die Evolute einer Raumcurve nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte, so steht sie in demselben Verhältniss zu den Evoluten aller Focalcurven.*

17. Ich betrachte wiederum eine beliebige algebraische Minimalfläche

$$(16)\qquad x = U_1^0(t) + U_2^0(\tau),\quad y = V_1^0 + V_2^0,\quad z = W_1^0 + W_2^0.$$

Ich setze

$$\frac{m+n}{m}(U_1^{(0)}+A) = U_1\,,\qquad \frac{m+n}{n}(U_2^{(0)}-A) = U_2\,,$$
$$\frac{m+n}{m}(V_1^{(0)}+B) = V_1\,,\qquad \frac{m+n}{n}(V_2^{(0)}-B) = V_2\,,$$
$$\frac{m+n}{m}(W_1^{(0)}+C) = W_1\,,\qquad \frac{m+n}{n}(W_2^{(0)}-C) = W_2\,,$$

wo A, B, C und $\frac{n}{m}$ *arbiträre* Constanten bezeichnen sollen. Alsdann definiren die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{m}{m+n}\,U_1 + \frac{n}{m+n}\,U_2\,,\\ y &= \frac{m}{m+n}\,V_1 + \frac{n}{m+n}\,V_2\,,\\ z &= \frac{m}{m+n}\,W_1 + \frac{n}{m+n}\,W_2 \end{aligned}\right.$$

wiederum die vorgelegte Minimalfläche.

---

*) Vergleiche hierzu Satz 12.

Sodann führe ich drei Variable ξ, η, ζ ein, indem ich setze

$$\frac{\xi - U_1}{dU_1} = \frac{\eta - V_1}{dV_1} = \frac{\zeta - W_1}{dW_1},$$
$$\frac{\xi - U_2}{dU_2} = \frac{\eta - V_2}{dV_2} = \frac{\zeta - W_2}{dW_2};$$

hierdurch werden die Parameter t und τ durch *eine* Relation verbunden. Ausserdem ist

$$dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0 = dU_2^2 + dV_2^2 + dW_2^2.$$

Also erhält man, indem man ganz wie in der vorangehenden Nummer verfährt, die Formeln

$$U = \xi + \frac{\xi''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i \frac{\zeta'\eta'' - \eta'\zeta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$
$$V = \eta + \frac{\eta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i \frac{\xi'\zeta'' - \zeta'\xi''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$
$$W = \zeta + \frac{\zeta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i \frac{\eta'\xi'' - \xi'\eta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

wo das eine Zeichen die Grössen U_1, V_1, W_1, das zweite Zeichen die Grössen U_2, V_2, W_2 liefert.

Es giebt nun immer eine Constante k, die die beiden Relationen

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{m}{m+n} &= \frac{1 - ik}{2}, \\ \frac{n}{m+n} &= \frac{1 + ik}{2} \end{aligned} \right.$$

befriedigt. Also ist unsere Minimalfläche (§ 5., Nr. 14.) eingeschrieben in die Evolute der Raumcurve $\xi\,\eta\,\zeta$. Und da diese Curve vier *arbiträre* Parameter, $A, B, C, \frac{m}{n}$ enthält, erhalten wir den Satz:

Satz 11. *Jede algebraische Minimalfläche ist jedenfalls in vierfach unendlich viele Evoluten algebraischer Raumcurven eingeschrieben.*

Ich will insbesondere annehmen, dass die Minimalfläche (16) reell ist, und dementsprechend setzen

$$A = ia, \quad B = ib, \quad C = ic, \quad m = \mu + \nu i, \quad n = \mu - \nu i,$$

wo a, b, c, μ und ν reelle Constanten bezeichnen. Alsdann kommt (17)

$$k = -\frac{\nu}{\mu},$$

und folglich ist die Curve $\xi\,\eta\,\zeta$ reell, das heisst, sie wird bestimmt durch reelle Gleichungen.

Jede reelle algebraische Minimalfläche ist daher eingeschrieben in ∞^4 Evoluten von reellen algebraischen Raumcurven.

Auch bei den Entwickelungen dieser Nummer ist zu bemerken, dass die Raumcurve $\xi\,\eta\,\zeta$ in mehrere Curven, deren jede Focalcurve zu den übrigen ist, zerfallen kann.

§ 7.

Synthetische Betrachtungen.

[Ich werde kurz zeigen, wie ich die interessanten Theorien der letzten Paragraphen ursprünglich fand.

18. Seien

$$x_1 = 2\,U_1(t), \quad y_1 = 2\,V_1(t), \quad z_1 = 2\,W_1(t) \tag{18}$$

und

$$x_2 = 2\,U_2(\tau), \quad y_2 = 2\,V_2(\tau), \quad z_2 = 2\,W_2(\tau) \tag{19}$$

die Gleichungen zweier algebraischer Minimalcurven. Ich verbinde einen beliebigen Punkt $x_1\,y_1\,z_1$ mit einem beliebigen Punkte $x_2\,y_2\,z_2$ und suche den Mittelpunkt

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

dieser beiden Punkte. Der Ort dieser Mittelpunkte,

$$x = U_1 + U_2, \quad y = V_1 + V_2, \quad z = W_1 + W_2 \tag{20}$$

ist bekanntlich eine Minimalfläche (Math. Ann. Bd. XIV, p. 334 u. 337).

Zu bemerken ist hierbei, dass die Tangentenebene der Fläche zwei Gerade enthält, die mit den entsprechenden Tangenten der Curven (18) und (19) parallel sind. Construirt man daher die um diese beiden Curven umgeschriebene Developpable D, so berührt dieselbe die Minimalfläche nach einer gewissen Curve S.

Ich werde zeigen, dass die Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve ist, und dass S der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist.

Man construire in der That die beiden Developpablen, deren Rückkehrkanten die Minimalcurven (18) und (19) sind. Diese Flächen schneiden sich nach einer Raumcurve C, deren Evolute bekanntlich eben D ist. Dabei ist die Curve S der Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Hiermit erkennen wir also wie früher, dass die Minimalfläche (20) in die Evolute der Curve C eingeschrieben ist. Und da die Gleichungen unserer Minimalfläche auch folgendermassen geschrieben werden können,

$$\begin{aligned} x &= (U_1 + A) + (U_2 - A), \\ y &= (V_1 + B) + (V_2 - B), \\ z &= (W_1 + C) + (W_2 - C), \end{aligned}$$

wo A, B, C arbiträre Constanten sind, so sehen wir, dass unsere Minimalfläche dreifach unendlich viele Evoluten algebraischer Raumcurven nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt.

Es ist möglich, diesen schon früher bewiesenen Satz zu vervollständigen. Soll in der That die Minimalfläche (20) die Evolute einer Raumcurve C' nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berühren, so müssen nach dem Vorangehenden die auf der Minimalfläche gelegenen Minimalcurven mit denjenigen beiden Minimalcurven, deren Developpablen durch C' hindurchgehen, ähnlich und gleichgestellt sein. Und dabei soll das Aehnlichkeitsverhältniss gleich $\frac{1}{2}$ sein. Hieraus aber fliesst, dass es nicht mehr als dreifach unendlich viele Curven C' giebt, die die gestellten Forderungen erfüllen.

Satz 12. *Jede Minimalfläche berührt ∞^3 und auch nicht mehr Evoluten von algebraischen Raumcurven nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte.*

Ist insbesondere die vorgelegte Fläche reell, so können wir annehmen, dass U_1 und U_2, V_1 und V_2, W_1 und W_2 conjugirte Functionen ihrer Argumente sind. Setzen wir daher

$$A = ia, \quad B = ib, \quad C = ic,$$

wo a, b und c beliebige reelle Grössen sind, so erhalten wir ∞^3 umgeschriebene Evoluten, deren jede durch eine *reelle* Gleichung dargestellt wird.

Zerfällt die Schnittcurve zwischen den Developpablen der Minimalcurven (18) und (19), so ist jede Theilcurve Focalcurve zu den übrigen Theilen. Alsdann zerfällt eo ipso die umgeschriebene Evolute in die Evoluten der gegenseitigen Focalcurven.

Man wähle z. B. eine Raumcurve mit einer Symmetrieebene, die wir als yz-Ebene wählen. Es ist dann klar, wenn wir voraussetzen, dass die Developpable, die gleichzeitig um die Curve und den Kugelkreis umgeschrieben ist, *irreductibel* ist, dass dann ihre Gleichung die Grösse x nur als Quadrat enthält. Und da die Developpable die yz-Ebene weder berührt, auch nicht orthogonal schneidet, so ist die betreffende Schnittcurve eine Doppelcurve der Developpable.

Nimmt man daher eine Raumcurve mit einer Symmetrieebene und construirt diejenige Minimalfläche, die ihre Evolute nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, so hat diese Fläche immer dann eine ebene geodätische Curve in der Symmetrieebene, wenn die um die Raumcurve und den Kugelkreis umgeschriebene Developpable irreductibel ist.

Ist z. B. die vorgelegte Curve eine Parabel, so erkennen wir, dass die Minimalfläche, die die Evolute dieser Parabel als ebene geodätische Curve enthält, zugleich die Evolute der Focalparabel als ebene geodätische Curve enthält. (Vergleiche Henneberg's früher citirte Arbeit.)

Andererseits ist klar, dass die Minimalfläche, die die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel als ebene geodätische Curve enthält, zugleich die Evoluten der *beiden* Focalkegelschnitte als ebene geodätische Curven enthält.

An dieser Stelle scheint es mir nützlich den folgenden Satz, der an und für sich ziemlich selbstverständlich ist, der übrigens im Vorangehenden schon als bekannt vorausgesetzt worden ist, ausdrücklich auszusprechen:

Satz 13. *Enthält eine Developpable zwei algebraische Minimalcurven (oder eine solche, die alle Erzeugende zweifach schneidet), so ist die Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve, nämlich der Schnittcurve zwischen den Developpablen der beiden Minimalcurven.*

17. Seien wiederum

$$x_1 = U_1, \quad y_1 = V_1, \quad z_1 = W_1$$

und

$$x_2 = U_2, \quad y_2 = V_2, \quad z_2 = W_2$$

zwei Minimalcurven. Alsdann bestimmen die Gleichungen

$$x = \frac{m}{m+n} U_1 + \frac{n}{m+n} U_2,$$
$$y = \frac{m}{m+n} V_1 + \frac{n}{m+n} V_2,$$
$$z = \frac{m}{m+n} W_1 + \frac{n}{m+n} W_2,$$

was auch die Constanten m und n sind, immer eine Minimalfläche. Construirt man nun diejenige Developpable, die gleichzeitig um jene beiden Minimalcurven umgeschrieben ist, so erkennt man wie in der vorangehenden Nummer, dass die Minimalfläche in diese Developpable eingeschrieben ist. Und andererseits lehrt der vorangehende Satz, dass die Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve ist. Hiermit haben wir eine synthetische Begründung der Sätze 8. und 11. erhalten.]

§ 8.

Bestimmung aller algebraischen Minimalflächen, die in einen algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

Der zweite Henneberg'sche Satz lehrt, dass algebraische Minimalflächen sich nicht in alle algebraische Cylinder einschreiben lassen. Es liegt somit nah zu vermuthen, dass sich auch nicht in alle algebraische Kegel algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. Merkwürdigerweise stellt sich die Sache anders. Ich werde in der That jetzt zeigen, dass sich in jeden algebraischen Kegel, dessen Spitze im endlichen Raume liegt, und welcher dabei keine infinitesimale Kugel ist, unbeschränkt viele (∞^∞) algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. Gleichzeitig bestimme ich alle diese Flächen.

20. Sind x, y, z die Coordinaten der Punkte einer algebraischen Raumcurve, so wird die Minimalfläche, die die Evolute nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, bestimmt durch die früher gefundenen Formeln:

$$U = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = x_1 \pm i x_2,$$

$$V = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = y_1 \pm i y_2,$$

$$W = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = z_1 \pm i z_2.$$

Die Bonnet'sche Biegungsfläche wird bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen

$$U_1 = -x_2 \pm i x_1, \quad V_1 = -y_2 \pm i y_1, \quad W_1 = -z_2 \pm i z_1.$$

Hierbei ist die Curve $x_1\, y_1\, z_1$ der vorgelegten Fläche in die Curve $x_2\, y_2\, z_2$ der neuen Fläche übergegangen. Die Tangentenebenen der neuen Fläche längs dieser Curve besitzen die Richtungscosinus x', y', z', das heisst dieselben Richtungscosinus wie die entsprechenden Tangentenebenen der vorgelegten Fläche.

Wir werden zeigen, dass die besprochenen Tangentenebenen der neuen Fläche durch einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Coordinatenanfangspunkt gehen. Dies geht unmittelbar daraus hervor, dass die Gleichung

$$x'x_2 + y'y_2 + z'z_2 = 0,$$

wie man durch Ausführung findet, identisch besteht. So folgt:

Satz 14. *Berührt eine Minimalfläche die Evolute einer Raumcurve längs dem Orte der Krümmungsmittelpunkte, so ist die Bonnet'sche Biegungsfläche eingeschrieben in einen Kegel, dessen Tangentenebenen mit den Tangentenebenen der Evolute parallel sind. Die Distanz der Kegelspitze von einem beliebigen Punkte $x_2\, y_2\, z_2$ der Berührungscurve ist gleich dem Krümmungsradius der ursprünglichen Raumcurve in demjenigen Punkte, dessen Tangente zu der betreffenden Tangentenebene der Biegungsfläche senkrecht steht.*

Der letzte Theil dieses Satzes beruht darauf, dass die Gleichung

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

wie man durch Ausführung zeigt, identisch stattfindet.

Früher fanden wir, dass eine jede (algebraische) Minimalfläche ∞^3 Evoluten von (algebraischen) Raumcurven nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt. Den betreffenden Berührungscurven entsprechen dabei auf der Bonnet'schen Biegungsfläche die ∞^3 Curven, nach denen diese Fläche von ihren Tangentenkegeln berührt wird. Und da die Beziehung zwischen den beiden Minimalflächen eine gegenseitige ist, folgt, dass auch die Berührungscurven der ursprünglichen Fläche mit ihren Tangentenkegeln diejenigen Curven der Biegungsfläche liefern, nach denen dieselbe von umgeschriebenen Evoluten nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt wird.

21. Ist nun gegeben ein beliebiger algebraischer Kegel

$$f\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right) = 0,$$

der jedoch keine infinitesimale Kugel sein darf, so findet man folgendermassen vermöge des letzten Satzes unbeschränkt viele algebraische Minimalflächen, die in ihn eingeschrieben sind. Ich setze

$$f\left(\frac{t}{v}, \frac{u}{v}\right) = 0$$

und interpretire dabei mit Plücker die Grössen t, u, v als Coordinaten der allgemeinen Ebene

$$tx_2 + uy_2 + vz_2 - 1 = 0.$$

Sodann füge ich eine arbiträre algebraische Relation zwischen t, u, v

$$\varphi(tuv) = 0$$

hinzu. Alsdann bestimmen die vereinigten Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ die Osculationsebenen einer algebraischen Raumcurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden des vorgelegten Kegels parallel sind. Sodann nehme ich auf jeder Erzeugenden einen Punkt p, dessen Distanz vom Coordinatenanfangspunkte, das heisst von der Kegelspitze, gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumcurve ist. Der Inbegriff der Punkte p bildet eine Curve, und diejenige Minimalfläche, die den Kegel nach dieser Curve berührt, ist nach den Entwickelungen der vorangehenden Nummer die Biegungsfläche einer algebraischen Minimalfläche, und in Folge dessen selbst *algebraisch*. Also

Satz 15. *Es giebt unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die in einen beliebigen algebraischen Kegel eingeschrieben sind. Um eine solche Fläche zu finden, nimmt man eine beliebige algebraische Raumcurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden des vorgelegten Kegels parallel sind. Auf jeder Erzeugenden bestimmt man denjenigen Punkt p, dessen Distanz von der Kegelspitze gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumcurve ist. Diejenige Minimalfläche, die den Kegel nach dem Orte der Punkte p berührt, ist algebraisch.*

Ist der vorgelegte Kegel insbesondere reell, so ist es immer möglich eine solche reelle Gleichung $\varphi(tuv) = 0$ zu wählen, dass die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ die Osculationsebenen einer *reellen* Raumcurve bestimmen. Alsdann giebt die Methode des vorangehenden Satzes eine algebraische Minimalfläche, die den vorgelegten Kegel nach einer reellen Curve berührt, das heisst eine reelle eingeschriebene Minimalfläche.

22. Der letzte Satz erhält dadurch eine noch grössere Wichtigkeit, dass die angegebene Construction *sämmtliche* algebraische Minimalflächen liefert, die in den vorgelegten Kegel eingeschrieben sind.

Seien in der That

$$\xi = x_2, \quad \eta = y_2, \quad \zeta = z_2$$

die Gleichungen der Berührungscurve zwischen dem vorgelegten Kegel und einer beliebigen eingeschriebenen algebraischen Minimalfläche. Die Richtungscosinus X, Y, Z der Tangentenebenen des Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte liegen mag, sind bestimmt durch die Gleichungen

$$Xx_2 + Yy_2 + Zz_2 = 0, \qquad Xdx_2 + Ydy_2 + Zdz_2 = 0,$$

woraus

$$\frac{X}{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ dy_2 & dz_2 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ dz_2 & dx_2 \end{vmatrix}} = \frac{Z}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ dx_2 & dy_2 \end{vmatrix}}.$$

Setze ich dann

(21) $dx_1 = Zdy_2 - Ydz_2, \quad dy_1 = Xdz_2 - Zdx_2, \quad dz_1 = Ydx_2 - Xdy_2,$

so wird die nach der Curve $x_2\, y_2\, z_2$ berührende Minimalfläche bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen

$$U = x_2 \pm ix_1, \quad V = y_2 \pm iy_1, \quad W = z_2 \pm iz_1.$$

Es bestehen, wie man leicht verificirt, die folgenden Formeln

$$(22) \qquad \begin{aligned} dx_2 &= Ydz_1 - Zdy_1, \\ dy_2 &= Zdx_1 - Xdz_1, \\ dz_2 &= Xdy_1 - Ydx_1, \\ Xx_2 &+ Yy_2 + Zz_2 = 0, \\ Xdx_2 &+ Ydy_2 + Zdz_2 = 0, \\ x_2dX &+ y_2dY + z_2dZ = 0, \\ Xdx_1 &+ Ydy_1 + Zdz_1 = 0. \end{aligned}$$

Wir führen drei neue Grössen x, y, z ein, indem wir setzen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + Yz_2 - Zy_2, \\ y &= y_1 + Zx_2 - Xz_2, \\ z &= z_1 + Xy_2 - Yx_2; \end{aligned}$$

dabei interpretiren wir x, y, z als Coordinaten der Punkte einer Raumcurve, deren Bogenlänge s heissen mag. Diese Raumcurve ist *algebraisch*. Durch Berücksichtigung von (21) folgt

$$(23) \qquad \begin{aligned} dx &= z_2dY - y_2dZ, \\ dy &= x_2dZ - z_2dX, \\ dz &= y_2dX - x_2dY, \end{aligned}$$

woraus

$$(24) \qquad x_2dx + y_2dy + z_2dz = 0.$$

Andererseits findet man (23), (22)

$$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y & Z \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ Z & X \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} dz$$
$$= (z_2 y_2 Z - z_2^2 Y - x_2^2 Y + x_2 y_2 X)\, dY$$
$$+ (x_2 z_2 X - x_2^2 Z - y_2^2 Z + y_2 z_2 Y)\, dZ$$
$$+ (y_2 x_2 Y - y_2^2 X - z_2^2 X + z_2 x_2 Z)\, dX$$
$$= -(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(X dX + Y dY + Z dZ) = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die drei Geraden, deren Richtungscosinus bez. $x_2 y_2 z_2$; $X Y Z$; $dx\, dy\, dz$ sind, in derselben Ebene liegen. Und da nach (22), (24) die beiden letzten Richtungen auf ersten senkrecht stehen, so müssen sie identisch sein, das heisst, es ist

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{ds}{1}.$$

Also kommt

$$X = \frac{dx}{ds} = x', \quad Y = \frac{dy}{ds} = y', \quad Z = \frac{dz}{ds} = z'.$$

Die obenstehenden Formeln erlauben die Grössen $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ als Functionen von $x\, y\, z$, $x' y' z'$, $x'' y'' z''$ auszudrücken.

Setzt man in der That

$$U_1 = x_1 \pm i x_2, \quad V_1 = y_1 \pm i y_2, \quad W_1 = z_1 \pm i z_2,$$

wobei $U_1\, V_1\, W_1$ *zwei* Grössensysteme darstellt, so bestehen, wie man durch Ausführung ohne Schwierigkeit verificirt, die drei folgenden Relationen

$$(25) \qquad (U_1 - x)^2 + (V_1 - y)^2 + (W_1 - z)^2 = 0,$$

$$(26) \qquad (U_1 - x)x' + (V_1 - y)y' + (W_1 - z)z' = 0,$$
$$x' dU_1 + y' dV_1 + z' dW_1 = 0.$$

Differentiirt man die nächstletzte und berücksichtigt dabei die letzte Gleichung, so findet man

$$(27) \qquad (U_1 - x)\, x'' + (V_1 - y)\, y'' + (W_1 - z)\, z'' - 1 = 0.$$

Die Gleichungen (25), (26), (27) geben durch Auflösung

$$U_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\, \frac{z' y'' - y' z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = x_1 \pm i x_2,$$

$$V_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\, \frac{x' z'' - z' x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = y_1 \pm i y_2,$$

$$W_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\, \frac{y' x'' - x' y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = z_1 \pm i z_2,$$

woraus

$$x_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad x_2 = \pm \frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$
$$y_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad y_2 = \pm \frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$
$$z_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad z_2 = \pm \frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Diese Formeln zeigen, dass die vorgelegte eingeschriebene Minimalfläche erhalten wird, wenn die Operationen der vorangehenden Nummer auf die Raumcurve $x\,y\,z$ angewendet werden. Dies giebt

Satz 16. *Die Operationen der vorangehenden Nummer liefern alle algebraischen Minimalflächen, die in einen vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind.*

Insbesondere findet man alle *reellen* algebraischen Minimalflächen, die sich in einen *reellen* algebraischen Kegel $f = 0$ einschreiben lassen, wenn man, wie im Schlusse der vorangehenden Nummer geschehen, zu der reellen Gleichung $f\left(\frac{t}{v}\ \frac{u}{v}\right) = 0$ eine arbiträre reelle Gleichung $\varphi\,(t\,u\,v) = 0$ hinzufügt.

§ 9.

Ueber die in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen.

In diesem Paragraphen zeige ich, dass in jede um *eine* algebraische Minimalfläche umgeschriebene Developpable unbeschränkt viele (∞^∞) algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden können. Ich gebe ferner eine bemerkenswerthe Construction dieser eingeschriebenen Flächen.

23. Sei t ein Parameter, dessen verschiedene Werthe den verschiedenen Erzeugenden einer algebraischen Developpablen zugeordnet sind, und seien X, Y, Z die Richtungscosinus der Tangentenebenen der Developpable. Da eine Developpable nur ∞^1 Tangentenebenen besitzt, und da jede Ebene längs einer Erzeugenden berührt, so sind X, Y, Z Functionen von t, und von t allein.

Seien ξ_1, η_1, ζ_1 die Coordinaten der Punkte, in denen eine vorgelegte *algebraische* Minimalfläche die Developpable berührt. Ebenso seien ξ_2, η_2, ζ_2 die Punktcoordinaten der Berührungscurve unserer Developpable mit einer *beliebigen* anderen Minimalfläche. Dabei sind sowohl ξ_1, η_1, ζ_1 wie ξ_2, η_2, ζ_2 Functionen von t.

Unsere Voraussetzung, dass die erste Minimalfläche algebraisch sein soll, kommt darauf hinaus, dass die drei Integrale

$$\int(Zd\eta_1 - Yd\zeta_1), \quad \int(Xd\zeta_1 - Zd\xi_1), \quad \int(Yd\xi_1 - Xd\eta_1)$$

algebraische Functionen von t sind. Und die Forderung, dass auch die zweite Fläche algebraisch sein soll, kommt darauf hinaus, dass auch die drei Integrale

$$\int(Zd\eta_2 - Yd\zeta_2), \quad \int(Xd\zeta_2 - Zd\xi_2), \quad \int(Yd\xi_2 - Xd\eta_2)$$

algebraische Functionen von t sein sollen. Diese Forderung ist aber, wenn wir

$$\xi_2 - \xi_1 = x_2, \quad \eta_2 - \eta_1 = y_2, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = z_2$$

setzen, und darnach x_2, y_2, z_2 als unbekannte Grössen anstatt ξ_2, η_2, ζ_2 einführen, mit der Forderung äquivalent, dass die drei Integrale

$$(28) \quad \int Zdy_2 - Ydz_2, \quad \int Xdz_2 - Zdx_2, \quad \int Ydx_2 - Xdy_2$$

algebraische Functionen von t sein sollen

Es ist

$$Xd\xi_1 + Yd\eta_1 + Zd\zeta_1 = 0,$$
$$Xd\xi_2 + Yd\eta_2 + Zd\zeta_2 = 0,$$

woraus folgt

$$Xdx_2 + Ydy_2 + Zdz_2 = 0.$$

Es ist ferner

$$X(\xi_2 - \xi_1) + Y(\eta_2 - \eta_1) + Z(\zeta_2 - \zeta_1) = 0,$$

da $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$, $\zeta_2 - \zeta_1$ mit den Richtungscosinus der Erzeugenden proportional sind. Also kommt

$$Xx_2 + Yy_2 + Zz_2 = 0.$$

Endlich sind die Richtungscosinus der Erzeugenden durch eine Relation

$$f\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \quad \frac{\eta_2 - \eta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = 0$$

verbunden*), und daher sind die Verhältnisse der Grössen x_2, y_2, z_2 durch die entsprechende Gleichung

$$f\left(\frac{x_2}{z_2} \quad \frac{y_2}{z_2}\right) = 0$$

verbunden.

Hiermit gewinnt unser Problem die folgende Gestalt:

Man soll drei Grössen x_2, y_2, z_2, deren Verhältnisse durch eine vorgelegte algebraische Relation $f = 0$ verknüpft sind, in allgemeinster Weise als algebraische Functionen einer Hülfsgrösse bestimmen derart, dass die drei Integrale (28), in denen X, Y, Z durch die Gleichungen

$$Xx_2 + Yy_2 + Zz_2 = 0,$$
$$Xdx_2 + Ydy_2 + Zdz_2 = 0,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

bestimmt sind, algebraische Functionen der Hülfsgrösse werden.

*) Wäre die Developpable eine Cylinderfläche, so gäbe es *zwei* solche Relationen. Diesen Ausnahmefall schliessen wir daher vorläufig aus.

Nach den Entwickelungen des letzten Paragraphen kann dieses letzte Problem auch folgendermassen formulirt werden.

Vorgelegt ist ein algebraischer Kegel

$$f\left(\frac{x_2}{z_2}\ \frac{y_2}{z_2}\right)=0.$$

Man soll in allgemeinster Weise eine auf diesem Kegel gelegene Curve $x_2\ y_2\ z_2$ bestimmen derart, dass die nach dieser Curve berührende Minimalfläche algebraisch ist.

Und da diese letzte Aufgabe eben in dem letzten Paragraphen erledigt wurde, so ist auch die in diesem Paragraph gestellte Aufgabe als erledigt zu betrachten. Dies giebt den folgenden merkwürdigen Satz:

Satz 17. *Ist eine algebraische Developpable und eine eingeschriebene algebraische Minimalfläche vorgelegt, so findet man folgendermassen beliebig viele* (∞^∞) *eingeschriebene algebraische Minimalflächen. Man nimmt eine algebraische Raumcurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden der Developpable parallel sind. Sodann bestimmt man auf jeder Erzeugenden einen Punkt p, dessen Distanz von dem Berührungspunkte der Erzeugenden mit der vorgelegten Minimalfläche dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumcurve gleich ist. Diejenige Minimalfläche, die die Developpable nach dem Orte der Punkte p berührt, ist algebraisch, und in dieser Weise werden alle eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen erhalten.*

Ist insbesondere die vorgelegte Developpable und die vorgelegte eingeschriebene Minimalfläche *reell*, so lehrt der vorangehende Satz beliebig viele und sogar alle eingeschriebenen reellen algebraischen Minimalflächen zu finden.

24. Früher zeigte ich (§ 5., Nr. 13.), dass in die Evolute einer algebraischen Raumcurve eine algebraische Minimalfläche eingeschrieben werden kann. Hieraus ergiebt sich nach dem Vorangehenden der Satz:

Satz 18. *In die Evolute einer algebraischen Raumcurve C kann man immer unendlichfach unendlichviele* (∞^∞) *algebraische Minimalflächen einschreiben.*

Um eine solche Fläche zu finden, benutzt man nach dem Satze 17. als Hülfscurve eine beliebige Raumcurve, deren Tangenten bezüglich mit den Tangenten der Curve C parallel sind. Wählt man insbesondere als Hülfscurve eine mit C ähnliche und gleichgestellte Curve, so erhält man die in Nummer 14. betrachteten eingeschriebenen Minimalflächen.

Ist eine Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve, so enthält sie (§ 7.) zwei algebraische Minimalcurven. Enthält auf der anderen Seite eine Developpable zwei algebraische Minimalcurven, so ist sie die Evolute einer algebraischen Raumcurve. In Folge dessen kann der letzte Satz auch folgendermassen formulirt werden:

Satz 19. *Enthält eine Developpable zwei algebraische Minimalcurven, so giebt es unendlichfach unendlichviele algebraische Minimalflächen, die in die Developpable eingeschrieben sind.*

Erinnert man sich jetzt, dass eine Minimalcurve, als Ebenengebilde aufgefasst, eine Minimalfläche ist, so erkennt man einerseits, dass der letzte Satz eine unmittelbare Consequenz von Satz 17. ist, andererseits, dass man den allgemeineren Satz aussprechen kann:

Satz 20. *Enthält eine algebraische Developpable eine algebraische Minimalcurve, so giebt es* ∞^∞ *eingeschriebene algebraische Minimalflächen.*

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch den folgenden Satz aussprechen:

Satz 21. *In eine algebraische Developpable, deren Ebenen eine feste Ebene unter constantem Winkel (doch nicht senkrecht) schneiden, kann man immer* ∞^∞ *algebraische Minimalflächen einschreiben.*

Denn die Rückkehrcurve ist geodätische Curve auf einer Cylinderfläche (Nr. 9.), und daher ist die Minimalfläche, auf der diese Rückkehrcurve Haupttangentencurve ist, algebraisch. Hiermit kennen wir eine in die vorgelegte Developpable eingeschriebene algebraische Minimalfläche, und also ist unser Satz richtig.

Dieser Beweis hat keinen Sinn, wenn die Ebenen der vorgelegten Developpable die feste Ebene senkrecht schneiden. Und in diesem Falle ist unser Satz, wie der zweite Henneberg'sche Satz uns lehrt, auch nicht mehr richtig.

25. Die vorangehenden Entwickelungen dieses Paragraphen bleiben nicht mehr gültig, wenn die vorgelegte Developpable eine Cylinderfläche ist. Wir behandeln nunmehr diesen Ausnahmefall.

Ist $\varphi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$ die Gleichung einer vorgelegten Cylinderfläche, so wird jede eingeschriebene Minimalfläche bestimmt durch Gleichungen der Form

$$U = \mathfrak{x} \pm i\xi, \quad V = \mathfrak{y} \pm i\eta, \quad W = \mathfrak{z} \pm i\zeta.$$

Und da

$$dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0$$

ist, folgt

$$(28) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{x}d\xi + d\mathfrak{y}d\eta + d\mathfrak{z}d\zeta = 0, \\ d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 + d\mathfrak{z}^2 - (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir andererseits die Richtungscosinus der Tangentenebenen des Cylinders wie gewöhnlich mit X, Y, Z, so ist

$$XdU + YdV + ZdW = 0, \quad Z = 0,$$

woraus

$$Xd\mathfrak{x} + Yd\mathfrak{y} = 0, \quad Xd\xi + Yd\eta = 0.$$

Wenn wir daher voraussetzen, dass der vorgelegte Cylinder sich nicht auf eine Gerade reducirt, und dass daher nicht dx und dy beide gleich Null sind, so können wir setzen

$$d\xi = \varrho\, dx, \quad d\eta = \varrho\, dy,$$

$$dz = \lambda\, ds = \lambda \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad d\zeta = \mu\, ds,$$

wo die Functionen ϱ, λ, μ im Allgemeinen endliche Werthe haben.

Durch Substitution in (28) kommt

$$ds^2(\varrho + \lambda\mu) = 0,$$
$$ds^2(1 - \varrho^2 + \lambda^2 - \mu^2) = 0,$$

woraus, da ds nicht verschwindet,

$$\varrho + \lambda\mu = 0, \quad 1 - \varrho^2 + \lambda^2 - \mu^2 = 0.$$

Ist nun $\lambda \gtrless 0$, so kommt

$$\mu = -\frac{\varrho}{\lambda}, \quad (1+\lambda^2)(\lambda^2 - \varrho^2) = 0,$$

wo wir zunächst annehmen werden, dass

$$\lambda^2 = \varrho^2$$

ist. In diesem Falle kommt, wenn wir die Bogenlänge der Curve $\xi\eta$ mit σ bezeichnen

$$U = \mathfrak{x} \pm i\xi, \quad V = \mathfrak{y} \pm i\eta, \quad W = \sigma \pm is.$$

Nimmt man zweitens an, dass

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ist, so wird $\lambda = i$ und $z = is$.

Es bleibt somit nur die Hypothese $\lambda = 0$ zu discutiren. Alsdann wird $\varrho = 0$,

$$U = \mathfrak{x}, \quad V = \mathfrak{y}, \quad W = \pm is,$$

was dem Henneberg'schen Falle einer ebenen geodätischen Curve entspricht.

Hiermit ist der folgende allgemeine Satz gefunden:

Satz 22. *Ist der Querschnitt eines Cylinders $\varphi(xy) = 0$ die Evolute einer ebenen algebraischen Curve, so findet man folgendermassen alle eingeschriebenen Minimalflächen. Man nimmt eine andere Evolute $\psi(\xi\eta) = 0$ einer ebenen algebraischen Curve und betrachtet je zwei solche Punkte der beiden Evoluten, die parallele Tangenten haben, als zusammengehörend. Bezeichnet man sodann die Bogenlänge der Curve $\psi = 0$ mit σ und construirt die Curve*

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y, \quad \mathfrak{z} = \sigma,$$

so ist diejenige Minimalfläche, die den Cylinder nach dieser Curve berührt, immer algebraisch.

Die allgemeine Methode der Nummer 23. bleibt also noch gültig, wenn die vorgelegte Developpable eine Cylinderfläche ist.

Zugefügt möge endlich noch sein, dass der Satz 22. sich derart formuliren lässt, dass derselbe gültig bleibt, wenn die vorgelegte Cylinderfläche sich auf eine gerade Linie reducirt.

§ 10.

Synthetische Betrachtungen.

[Auch die Theorie des letzten Paragraphen fand ich ursprünglich durch synthetische Betrachtungen, die ich hier kurz reproduciren werde, da sie an und für sich Interesse darbieten.

26. Legendre gab zuerst der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen durch Einführug von Ebenencoordinaten

$$z - px - qy = w,\ p,\ q$$

eine *lineare* Form. Hieraus folgt sogleich, wie Weierstrass zuerst explicite bemerkt hat, dass die Auffindung *zweier* (reeller) Minimalflächen

$$w = F(pq) \quad \text{und} \quad w = \Phi(pq)$$

die Bestimmung von einfach unendlich vielen solchen Flächen

$$w = F + \lambda\Phi \qquad (\lambda = \text{Const.})$$

leistet; sind dabei die vorgelegten Flächen algebraisch, so werden auch die derivirten Flächen algebraisch.

Eine solche Construction von neuen Minimalflächen vermöge zweier gegebenen Flächen wird geliefert durch den folgenden Satz, den ich vielleicht zuerst in dieser Form aufgestellt habe:

Gleitet eine Minimalfläche in Translationsbewegung längs einer festen Minimalfläche, so beschreibt jeder mit der beweglichen Fläche fest verbundene Punkt wiederum eine Minimalfläche.

Diese Form der Construction ist deswegen wichtig, weil sie unmittelbar eine ausgedehnte Kategorie von Berührungstransformationen liefert, die Minimalflächen in Minimalflächen überführen.*)

Man führe in der That auf eine vorgelegte (algebraische) Minimalfläche

$$f(x, y, z) = 0$$

und einen mit derselben fest verbundenen Punkt $x'y'z'$ alle möglichen Translationen aus. Alsdann erhält die Fläche ∞^3 Lagen

$$f(x+a,\ y+b,\ z+c) = 0$$

und gleichzeitig erhält der Punkt $x'y'z'$ die Lagen

$$x' = -a, \quad y' = -b, \ z' = -c.$$

---

*) In meiner vierten Abhandlung über Minimalflächen bestimme ich sämmtliche Berührungstransformationen, die alle Minimalflächen in Minimalflächen umwandeln.

Daher wird das Entsprechen zwischen den verschiedenen Lagen der Fläche und des Punktes durch die Gleichung

$$f(x-x', y-y', z-z') = 0$$

bestimmt. Aber diese Gleichung definirt eine Berührungstransformation. Wenn insbesondere der Punkt $x'y'z'$ eine Minimalfläche durchläuft, so umhüllt die entsprechende Fläche nach unserem Satze eine Minimalfläche. Die aufgestellte Berührungstransformation besitzt daher wirklich die Eigenschaft, Minimalflächen in Minimalflächen überzuführen.

Hieraus folgt insbesondere, was übrigens schon aus der Form der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen hervorgeht, dass die Punkte des Raumes, als Ebenengebilde aufgefasst, Minimalflächen sind.

Man erkennt ferner, dass jede Ebene in eine parallele Ebene übergeht, und dass in Folge dessen jede Developpable in eine Developpable mit parallelen Ebenen umgewandelt wird.

27. Dies vorausgesetzt nehme man einen beliebigen algebraischen Kegel und sämmtliche algebraische Minimalflächen, die nach § 8.*) in diesen Kegel eingeschrieben sind, und führe sodann unsere Berührungstransformation, die nach unserer Voraussetzung algebraisch ist, aus. Hierbei geht der Kegel in eine algebraische Developpable mit parallelen Ebenen über; die in den Kegel eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen liefern algebraische Minimalflächen, die in die Developpable eingeschrieben sind.

Hiermit erkennen wir sogleich, dass es möglich ist, beliebig viele algebraische Developpable, in die sich ∞^∞ algebraische Minimalflächen einschreiben lassen, anzugeben. Die vorangehenden Entwickelungen führen indess weiter.

Sei in der That eine algebraische Developpable mit einer eingeschriebenen algebraischen Minimalfläche gegeben. Ich behaupte, dass es ∞^∞ algebraische Minimalflächen giebt, die in die Developpable eingeschrieben sind. Zum Beweis führe ich diejenige Berührungstransformation der früher besprochenen Art aus, bei welcher die vorgelegte Minimalfläche in einen beliebig gewählten Punkt p übergeht. Hierbei wird die vorgelegte Developpable eine um den Punkt p umgeschriebene Developpable, das heisst ein *Kegel*, dessen Spitze eben p ist. In diesen Kegel lassen sich jetzt ∞^∞ algebraische Minimalflächen, die sich sämmtlich angeben lassen, einschreiben. Führt man daher die inverse Transformation aus, so erhält man ∞^∞ algebraische Minimalflächen, die in die ursprünglich vorgelegte Developpable eingeschrieben sind. Und es ist andererseits klar, dass man in dieser Weise sämmt-

*) Auch die Theorien des Paragraphen 8. liessen sich in einfacher Weise aus synthetischen Betrachtungen herleiten, worauf ich jedoch in dieser Abhandlung nicht eingehen werde.

liche in unsere Developpable eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen wirklich erhält.*)

Die Betrachtungen dieses Paragraphen bilden eine Methode, vermöge deren Sätze über Minimalflächen in neue Sätze über Minimalflächen übergeführt werden können.]

§ 11.

Enthält jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene algebraische Developpable eine algebraische Minimalcurve?

Die Entwickelungen des Paragraphen 9. sind geeignet auf die Vermuthung zu führen, dass jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene algebraische Developpable eine algebraische Minimalcurve enthält. Wäre diese Vermuthung richtig, so liesse sich leicht nachweisen, dass jede um eine *reelle* algebraische Minimalfläche umgeschriebene Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve sein müsste. Der Zweck dieses Paragraphen ist die hiermit aufgeworfene interessante Frage zu beantworten.**)

28. Ich stelle mir überhaupt die Aufgabe, die auf unserer umgeschriebenen Developpable gelegenen Minimalcurven zu bestimmen.

Ich bezeichne mit x, y, z die laufenden Punktcoordinaten der Berührungscurve, mit x', y', z' die laufenden Punktcoordinaten der umgeschriebenen Developpable, mit λ, μ, ν die Richtungscosinus der Erzeugenden der Developpable, mit X, Y, Z die Richtungscosinus der Ebenen der Developpable, mit ϱ den Abstand eines Punktes x, y, z von einem auf der hindurchgehenden Erzeugenden liegenden Punkte x', y', z', mit $d\varphi$ den Winkel zwischen zwei benachbarten Erzeugenden.

Das Bogenelement

$$dS' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

ist bestimmt durch die Gleichung

$$\begin{aligned} dS'^2 = {} & [d\varrho + (\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz)]^2 \\ & + [\varrho\,d\varphi + \sqrt{dS^2 - (\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz)^2}]^2 \end{aligned}$$

wo

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dS^2$$

gesetzt ist. Die auf unserer Developpable gelegenen Minimalcurven sind daher bestimmt durch die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & d\varrho + (\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz) + i\varrho\,d\varphi \\ & + i\sqrt{dS^2 - (\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz)^2} = 0, \end{aligned}$$

*) Wenn man hierzu die Bemerkung hinzufügt, dass unsere Berührungstransformation eine jede Ebene und eine in derselben gelegene Figur in eine parallele Ebene und eine *congruente* Figur überführt, so erhält man den Satz 17.

**) Die Schnittcurve einer Fläche mit der unendlich entfernten Ebene ist immer eine Minimalcurve. Von derselben wird jedoch im Texte abgesehen.

die wir jetzt durch Einführung von zweckmässigen unabhängigen Variabeln auf eine bemerkenswerthe Form bringen werden.

Unsere Minimalfläche ist durch die Formeln gegeben:

$$dx = (1-s^2)F'''(s)ds + (1-\sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma,$$
$$dy = i(1+s^2)F'''(s)ds - i(1+\sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma,$$
$$dz = 2sF'''(s)ds + 2\sigma\Phi'''(\sigma)d\sigma;$$

ferner ist

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

daher findet man

$$X = \frac{\sigma + s}{1 + s\sigma}, \quad Y = i\,\frac{\sigma - s}{1 + s\sigma}, \quad Z = \frac{s\sigma - 1}{1 + s\sigma}$$

und

$$s = \frac{X + iY}{1 - Z}, \quad \sigma = \frac{X - iY}{1 - Z}.$$

Längs der Berührungscurve sind s und σ verbunden durch eine Relation, die σ als Function von s bestimmt. Giebt man daher s einen bestimmten Werth, so erhält man einen bestimmten Punkt x, y, z der Berührungscurve, und zugleich eine bestimmte hindurchgehende Erzeugende. Giebt man darnach ϱ einen bestimmten Werth, so erhält man einen bestimmten Punkt x', y', z' auf jener Erzeugenden. Daher kann man x', y', z' als Functionen von s und ϱ auffassen; und da nach dem Vorangehenden x, y, z; λ, μ, ν; $X, Y, Z, d\varphi$ Functionen von s und ds sind, so können wir die Grössen s und ϱ als unabhängige Variable in die Differentialgleichung der gesuchten Minimalcurven einführen.

Es ist

$$dX = \frac{(1-\sigma^2)ds + (1-s^2)d\sigma}{(1+s\sigma)^2},$$
$$dY = i\,\frac{-(1+\sigma^2)ds + (1+s^2)d\sigma}{(1+s\sigma)^2},$$
$$dZ = \frac{2\sigma ds + 2s d\sigma}{(1+s\sigma)^2},$$

ferner ist

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$
$$\lambda dX + \mu dY + \nu dZ = 0,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

also kommt

$$\lambda = i\,\frac{(\sigma^2-1)ds + (1-s^2)d\sigma}{2(1+s\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}},$$
$$\mu = -\frac{(1+\sigma^2)ds + (1+s^2)d\sigma}{2(1+s\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}},$$
$$\nu = i\,\frac{-2\sigma ds + 2s d\sigma}{2(1+s\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}}.$$

Durch Einsetzung findet man

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = i\,\frac{(1+s\sigma)(-F''' ds^2 + \Phi''' d\sigma^2)}{\sqrt{ds\,d\sigma}},$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 4(1+s\sigma)^2 F''' \Phi''' ds\,d\sigma,$$

$$\sqrt{dS^2 - (\lambda dx + \mu dy + \nu dz)^2} = \pm\,\frac{(1+s\sigma)(F''' ds^2 + \Phi''' d\sigma^2)}{\sqrt{ds\,d\sigma}}.$$

Es bleibt übrig die Grösse

$$d\varphi = \sqrt{(\mu d\lambda - \lambda d\mu)^2 + (\nu d\mu - \mu d\nu)^2 + (\lambda d\nu - \nu d\lambda)^2}$$

zu berechnen. Es ist

$$\frac{\mu d\lambda - \lambda d\mu}{Z} = \frac{\nu d\mu - \mu d\nu}{X} = \frac{\lambda d\nu - \nu d\lambda}{Y} = \frac{d\varphi}{\pm 1}$$

und

$$\mu d\lambda - \lambda d\mu = -\frac{i(1-s\sigma)}{(1+s\sigma)^2}\left\{(1+s\sigma)\,d\left(\log\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \sigma ds - s d\sigma\right\};$$

also kommt

$$d\varphi = \pm\, i\left\{d\left(\log\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma}\right\}.$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe erhält die Differentialgleichung der gesuchten Minimalcurven die folgende Gestalt

$$d\varrho + \varrho\left\{d\left(\log\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma}\right\} + 2i\,\frac{1+s\sigma}{\sqrt{ds\,d\sigma}}\;F''' ds^2 = 0,$$

woraus durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}$

$$d\left(\varrho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \varrho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\cdot\frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma} + 2i(1+s\sigma)F''' ds = 0,$$

oder, wenn man $\varrho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}} = u$ setzt,

$$du + u\,\frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma} + 2i(1+s\sigma)F''' ds = 0^{*})$$

Die im Anfange dieses Paragraphen gestellte Frage kommt nun darauf hinaus, ob die gefundene Differentialgleichung immer dann eine algebraische Particularlösung besitzt, wenn σ und F algebraische Functionen von s sind. Zur Entscheidung dieser Frage genügt es das folgende Beispiel zu betrachten.

Ich will voraussetzen, dass die Ebenen der umgeschriebenen Developpablen constanten Winkel mit der z-Axe bilden, dass also

---

*) In diesem Paragraphen sind an *mehreren* Stellen zweideutige Zeichen vorgekommen. Ich bin nicht auf die Zeichenbestimmung eingegangen, da es keinen wesentlichen Einfluss auf die Rechnungen des Textes haben würde, wenn man die Zeichen anders gewählt hätte.

$$s\sigma = \text{Const.}$$

ist; und sei

$$F(s) = \frac{L}{s-a}. \quad (L = \text{Const.})$$

Alsdann nimmt unsere Differentialgleichung die Form an

$$du + \varepsilon u \frac{ds}{s} + \frac{B\,ds}{(s-a)^4} = 0,$$

wobei ε und B Constanten sind. Setze ich nun z. B. $\varepsilon = 3$, so besitzt das allgemeine Integral die Form

$$u = Ds^{-3}\log(s-a) + A(s),$$

wobei A eine algebraische Function von s und der Integrationsconstanten bezeichnet, während D nur von B und a abhängt, und dabei im Allgemeinen von Null verschieden ist. In diesem Falle existirt somit keine algebraische Particularlösung.

Die Evoluten von algebraischen Raumcurven sind somit nicht die einzigen Developpablen, in die sich eine, und in Folge dessen ∞^∞ *algebraische Minimalflächen einschreiben lassen.*

Note 1.

Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Classenzahl dividirt durch 2 eine Primzahl ist.

In meiner ersten Abhandlung über Minimalflächen (Bd. XIV.) bestimmte ich alle Minimalflächen, deren Classenzahl eine Primzahl ist. Ich werde jetzt alle Minimalflächen, deren Classenzahl dividirt durch 2 eine vorgelegte Primzahl ist, bestimmen.

Die Classe einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, wird nach der citirten Abhandlung gegeben durch die Formel

$$2M(R-M),$$

wo R den Rang einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve bezeichnet, während M die Multiplicität des Kugelkreises auf der Developpable einer solchen Minimalcurve darstellt. Die Classe einer Doppelfläche ist gleich

$$M(R-M).$$

Ich werde zeigen, dass eine Relation der Form

$$M(R-M) = 2P,$$

wo P eine Primzahl ist, nicht bestehen kann. Wir wissen nämlich, dass

$$R - M \gtreqless 3$$

ist. Also käme entweder

$$M = 2, \quad R = 2 + P$$

oder

$$M = 1, \quad R = 2P + 1,$$

so dass der Rang eine ungerade Zahl sein müsste. Wenn aber eine imaginäre Developpable sich selbst imaginär-conjugirt ist, so muss ihr Rang eine grade Zahl sein. Die Annahme $M(R-M)=2P$ führt somit auf Widerspruch.

Wir müssen daher

$$2M(R-M)=2P$$

setzen. Also kommt

$$M(R-M)=P,$$

woraus bekanntlich folgt, dass

$$M=1, \quad R=P+1$$

ist. Und es ist leicht, wie ich in meiner vorigen Abhandlung zeigte, die allgemeinste Minimalcurve, die der Annahme $M=1$, $R=P+1$ entspricht, anzugeben. Die in dieser Weise gefundenen Flächen erfüllen die gestellten Forderungen, wenn sie nicht zufälligerweise Doppelflächen sind; in welchem Falle ihre Classe gleich P, und nicht gleich $2P$ wäre. Meine früher gegebenen Regeln erlauben für jeden Werth von P unter den gefundenen Flächen alle Doppelflächen auszuscheiden. Dies giebt:

Ist die Classe einer reellen Minimalfläche gleich $2P$, wo P eine Primzahl bezeichnet, so ist

$$2P=2M(R-M)$$

und in Folge dessen $M=1$, $R=P+1$. Die der Annahme $M=1$, $R=P+1$ entsprechenden Flächen, die sämmtlich bestimmt werden können, besitzen die Classenzahl $2P$, wenn sie nicht zufälligerweise Doppelflächen sind. In jedem einzelnen Falle ist es möglich alle Doppelflächen auszuscheiden.

Note 2.

Bestimmung der Classe einer Minimalfläche mit einer ebenen geodätischen Curve.

Wir werden jetzt insbesondere Minimalflächen mit einer ebenen geodätischen Curve E

$$z=0, \quad f(xy)=0$$

betrachten. Dabei setzen wir mit Henneberg voraus, dass E die Evolute einer reellen algebraischen Curve C

$$z=0, \quad \varphi(xy)=0$$

ist. Sei o_e und c_e die Ordnung und Classe der Evolute; und sei ε die Zahl der parallelen Tangenten, die an die Curve C gezogen werden können.

Wünscht man diejenige Minimalfläche, auf der E geodätische

Curve ist, zu bestimmen, so muss man die gleichzeitig um C und den Kugelkreis umgeschriebene Developpable construiren. Die zugehörige Rückkehrcurve ist ähnlich und gleichgestellt mit den auf der gesuchten Fläche gelegenen Minimalcurven.

Dabei sind zwei Fälle denkbar, je nachdem diese Rückkehrcurve in Theile zerfällt oder nicht zerfällt. Ist sie irreductibel, so ist die gesuchte Fläche eine Doppelfläche und ihre Classe also gleich

$$M(R-M);$$

dabei ist R im Allgemeinen gleich $2c_e$ (siehe den Schluss dieser Note), während M immer gleich ε ist. Man ziehe in der That die Tangente des Kugelkreises in einem Punkte π. Diese Tangente trifft die Ebene $z=0$ im Punkte p. Durch p gehen ε Tangenten der Curve C, deren Berührungspunkte q im endlichen Raume liegen. Die ε Geraden $\overline{\pi q}$ sind die durch π gehenden Tangenten der früher besprochenen Rückkehrcurve. Also ist wirklich $M=\varepsilon$. Unter der gemachten Voraussetzung ist daher die Classe der Minimalfläche gleich

$$\varepsilon(2c_e-\varepsilon).$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass die Rückkehrcurve in zwei Theile zerfällt. Alsdann ist im Allgemeinen

$$R=c_e$$

und jedenfalls

$$M=\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Also wird die Classe der Fläche in diesem Falle gleich

$$2M(R-M)=\varepsilon\left(c_e-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Wünscht man die Ordnung der Fläche zu bestimmen, so ist es nützlich, zu bemerken, dass die Ordnung der gesammten Rückkehrcurve gleich $2o_e$ ist. Im Uebrigen kann ich auf die betreffenden Entwickelungen meiner ersten Arbeit über Minimalflächen verweisen.

Die früher benutzten Formeln $R=2c_e$ und $R=c_e$ sind, wie man leicht verificirt, richtig, wenn die Curve C nicht durch die Kreispunkte der Ebene $z=0$ hindurchgeht. Auch wenn C diese specielle Lage hat, können jene Formeln richtig bleiben. Es hat keine Schwierigkeit diese Ausnahmefälle zu erledigen.

Note 3.

Minimalflächen, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich sind.

Es ist bekannt, dass die Minimalfläche, auf der ein vorgelegter Kreis geodätische Curve oder Krümmungslinie ist, selbst eine Rotationsfläche ist. Dies lässt sich a priori daraus schliessen, dass der Inbegriff aller Flächenelemente, die den Kreis berühren und dabei die Ebene dieses Kreises unter constantem Winkel schneiden, dieselbe Rotation wie der Kreis gestattet.

Man nehme andererseits eine Schraubenlinie und ∞^1 Flächenelemente, die diese Curve berühren und welche dabei mit der entsprechenden Osculationsebene constanten Winkel bilden. Der Inbegriff dieser Flächenelemente gestattet dieselbe Schraubenbewegung wie die Curve. Daher ist die Minimalfläche, die durch diese Elemente bestimmt wird, selbst eine Schraubenfläche.

Diese Schlussweise führt indess weiter. Man nehme in der That eine logarithmische Spirale $r = Ae^{mv}$ und ∞^1 Flächenelemente, die diese Curve berühren, und welche dabei die Ebene derselben unter constantem Winkel schneiden. Der Inbegriff dieser Elemente gestattet dieselben ∞^1 Aehnlichkeitstransformationen wie die Curve. *Daher ist die Minimalfläche, die eine logarithmische Spirale als geodätische Curve, oder als Krümmungslinie enthält, unendlich oft mit sich selbst ähnlich.*

Führt man auf diese Fläche eine Biegung aus, so erhält man nach meinen früheren Entwickelungen Minimalflächen, die sich auch folgendermassen definiren lassen. Man nehme einen Cylinder, dessen orthogonaler Querschnitt eine logarithmische Spirale ist, und lege durch eine beliebige geodätische Curve derselben eine Minimalfläche, die den Cylinder unter constantem Winkel schneidet. *Alle in dieser Weise erhaltenen Minimalflächen sind unendlich oft mit sich selbst ähnlich.* Und es giebt auch keine andere Minimalflächen, die diese Eigenschaft besitzen. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass man die Grenzfälle mitnimmt.

Man erhält die in Rede stehenden Flächen, wenn man der Weierstrass'schen Function $F(s)$ die Form

$$F(s) = (C_1 + C_2 i)\, s^{m_1 + m_2 i}$$

ertheilt.

Die hiermit angedeutete Theorie subsumirt sich unter eine viel allgemeinere Theorie. Sei in der That das Bogenelement einer *beliebigen* Fläche durch die Gleichung

$$ds^2 = e^w\, dy\, dx$$

gegeben. Alsdann werden die geodätischen Curven dieser Fläche bestimmt durch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dw}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dw}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Ich verlange, dass diese Differentialgleichung eine infinitesimale Transformation gestatten soll. Anders ausgesprochen, es soll möglich sein jedem Punkte der Fläche eine solche benachbarte Lage zu geben, dass vermöge dieser Verschiebung jede geodätische Curve in eine ebensolche Curve übergeführt wird. Diese Forderung wird z. B. erfüllt von jeder Rotations- oder Schraubenfläche, wie auch von jeder auf einer solchen Fläche abwickelbaren Fläche, zugleich aber von jeder Fläche, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich ist, wie auch von allen auf einer solchen Fläche abwickelbaren Flächen. Es giebt aber noch weitere hierher gehörige Flächenfamilien, wie ich in einer Arbeit über diesen Gegenstand nachgewiesen habe.*)

Hier beschränke ich mich auf das Folgende. Ich suche die allgemeinste *reelle* Minimalfläche, die in unendlich viele mit ihr ähnliche**) Flächen gebogen werden kann. Eine solche Fläche gestattet unendlich viele Transformationen in sich selbst, und zwar sind diese Umformungen conforme Transformationen, bei denen geodätische Curven in ebensolche Curven übergehen. Seien r und r' die Krümmungsradien in einem Punkte der Fläche; und seien R und R' die Krümmungsradien desjenigen Punktes, in den der gewählte Punkt durch eine solche Transformation übergeführt wird. Alsdann ist

$$RR' = K^2 \cdot rr' \quad (K = \text{Const.}),$$
$$R + R' = r + r' = 0,$$

woraus

$$R = Kr, \quad R' = Kr'.$$

Hieraus folgt, dass das sphärische Bild der transformirten Figur mit dem sphärischen Bilde der ursprünglichen Figur congruent ist. Definirt man nun, wie Weierstrass, das Bogenelement durch die Gleichung

$$dS^2 = (1+s\sigma)^2 F'''(s)\Phi'''(\sigma)\, ds\, d\sigma$$

und setzt dabei

$$s = x + yi, \quad F'''(s) = X + iY,$$

so erkennt man ohne Schwierigkeit, dass man

$$X^2 + Y^2 = \Psi(x^2+y^2)e^{m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}$$

setzen kann. Diese Functionalgleichung genügt zur Bestimmung von X und Y.

Setzt man in der That

$$\log(X^2+Y^2) = W = f(x^2+y^2) + m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

so ist

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d^2W}{dy^2} = 0,$$

woraus

$$f' + (x^2+y^2)f'' = 0$$

und

$$f = n \cdot \log(x^2+y^2) + \text{Const.}$$

*) Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven, Universitätsprogramm 1879, Christiania.

**) Ersetzt man das Wort „ähnlich“ durch „congruent“, so reducirt sich unser Problem auf ein von Bour erledigtes Problem, welches Schwarz neuerdings in seinen Miscellen, Crelle, Bd. 80 in neuer Weise behandelt hat.

und endlich

$$X^2 + Y^2 = A(x^2+y^2)^n e^{m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}.$$

Setzt man andererseits $\frac{Y}{X} = \Phi$, so kommt

$$2\frac{d\Phi}{dx} = -(1+\Phi^2)\frac{dW}{dy},$$

$$2\frac{d\Phi}{dy} = \quad (1+\Phi^2)\frac{dW}{dx},$$

oder

$$2\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg}\Phi) = \frac{-2ny-mx}{x^2+y^2},$$

$$2\frac{d}{dy}(\operatorname{arc\,tg}\Phi) = \frac{2nx-my}{x^2+y^2},$$

woraus

$$2\operatorname{arc\,tg}\Phi = 2n\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{m}{2}\log(x^2+y^2) + \text{Const.}$$

Nun ist

$$X + iY = \sqrt{X^2+Y^2}\, e^{i\operatorname{arc\,tg}\Phi};$$

also kommt

$$X + iY = (C_1+C_2 i)(x^2+y^2)^{\frac{n}{2} - i\frac{m}{4}} e^{\left(\frac{m}{2}+in\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$

oder

$$X + iY = (C_1+C_2 i)(x+iy)^{n - \frac{m}{2}i},$$

so dass wir nur die im Anfange dieser Note betrachteten Flächen wiederfinden.*)

*) Es ist leicht, zugleich alle imaginären Minimalflächen, die die gestellte Forderung erfüllen, zu bestimmen.

Christiania 20. Juni 1879.

Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven.

Von

M. Noether in Erlangen.

Auf einer algebraischen Curve f wird die *allgemeinste* Schaar g_Q von Gruppen von je Q Punkten, welche einer gegebenen solchen Gruppe G_Q corresidual ist, als Schnitt von f mit einer Schaar von f *adjungirten* Curven — d. h. solchen Curven, die jeden vielfachen, $\varkappa_i$-fachen, Punkt von f zum $(\varkappa_i-1)$-fachen Punkt haben — erhalten. Legt man durch G_Q eine beliebige f adjungirte Curve irgend einer Ordnung s, welche f noch in einer Gruppe G_R treffe, so wird g_Q aus f von den adjungirten Curven s^{ter} Ordnung ausgeschnitten, welche man durch G_R legen kann. Ueber diese Punktgruppen existirt eine Reihe von Sätzen von unbeschränkter Giltigkeit, welche in der Abhandlung von Herrn Brill und mir „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", d. Ann. VII., geometrisch ausgesprochen und algebraisch begründet worden sind.

Sobald die durch G_Q gelegte, f in einer Gruppe G_R treffende Curve und die durch G_R gelegten Curven solche sind, welche f *nicht-adjungirt* sind, gelangt man im Allgemeinen nur zu einem *Theil* γ_Q der Schaar g_Q, welcher auch noch von G_R abhängt. Die Frage, ob trotz der speciellen Bedingungen, welchen diese Schaaren γ_Q unterliegen, für dieselben noch Sätze von derselben unbeschränkten Giltigkeit existiren, wie für die allgemeinsten Schaaren g_Q, ist zwar von Herrn Lindemann untersucht, aber nicht entschieden worden.*) Indem ich nun denselben

*) S. dessen Programmschrift: „Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz", Teubner 1879. Diese Schrift bezweckt die Erweiterung des Hauptsatzes der Theorie, des Riemann-Roch'schen, auf nicht-adjungirte Curven. Aber in der auf dem Roch'schen, nicht algebraischen Wege gegebenen Beweisführung findet sich (p. 29) eine Lücke, und die beiden Sätze der Schrift, pag. 30 u. 35, verlangen daher Modificationen. — Diese können dem Satze (VII') des vorliegenden Aufsatzes entnommen werden; danach ist der Satz pag. 30, ausser für $\sigma_i=0$, nur für $\sigma_i=\varkappa_i-2$ richtig.

algebraischen Weg verfolgte, der in der o. c. Abhandlung, diese Annalen Bd. VII., eingeschlagen worden ist, bin ich in der That dahin gelangt, die Sätze dieser Abhandlung, insbesondere also den *Restsatz* und den Riemann-Roch'schen Satz, der die Constantenzahl einer algebraischen Function bestimmt, auf die Schaaren γ_Q in einer in allen Fällen giltigen Form zu erweitern. Diese Erweiterung bildet den Inhalt der §§ 1—7. der vorliegenden Abhandlung*); durch Einführung zweier Zahlen π und π' an Stelle des Geschlechts p der Grundcurve (§ 4.) nehmen die Sätze denselben einfachen Ausdruck an, wie bei adjungirten Curven, mit dem Unterschiede, dass sich hier jeder Satz in eigenthümlicher Weise in *zwei* einander entsprechende Sätze auflöst. In § 8. wird noch die Aufsuchung einiger specieller Punktgruppen behandelt.

§ 1.

Nicht-adjungirte Curven.

Die zu Grunde gelegte irreducible Curve f,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sei von der Ordnung n und dem Geschlecht p. Die vielfachen Punkte von f seien $a_1, a_2, a_3, \cdots$, und zwar a_i ein $\varkappa_i$-facher Punkt; so dass

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_i \varkappa_i(\varkappa_i - 1).$$

Im Folgenden werden die Schnittpunktsysteme von f mit solchen Curven betrachtet, welche die Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ bez. zu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$-fachen Punkten haben, wo $\sigma_i \gtreqless \varkappa_i - 1$ sei; und diese Curven werden zur Abkürzung als „*σ-Curven*" bezeichnet. Dieselben sind für $\sigma = \varkappa - 1$ f adjungirte, andernfalls nicht-adjungirte Curven. Es handelt sich zunächst um die Aufstellung der Bedingungen, durch welche aus der allgemeinsten einer Gruppe G_Q auf f corresidualen**) Schaar g_Q von Gruppen von je Q Punkten eine solche Schaar γ_Q ausgeschieden wird, die durch σ-Curven aus f ausgeschnitten wird.

Sei G_Q^1 eine Gruppe, welche der Schaar γ_Q angehören soll. Man lege nun durch diese Gruppe G_Q^1 eine σ-Curve χ_1***), von einer

---

*) Die Resultate sind im Auszuge schon in den Erlanger Ber., Juli 1879, mitgetheilt.

**) Vgl. für die hier gebrauchten Ausdrücke immer die o. c. Abhandlung, Math. Ann. VII.

***) Unter solchen ausgezeichneten Curven χ_1, ψ_1, φ_1, welche hier und in den folgenden §§ auftreten, sind immer *eigentliche σ-Curven* gemeint, d. h. solche, welche die Punkte a_i auch nicht zu höheren vielfachen Punkten als σ_i-fachen haben.

beliebigen Ordnung s, und nehme eine ganz beliebige $(\varkappa-\sigma-1)$-Curve φ, von irgend einer Ordnung s'. χ_1 treffe f noch in einer Gruppe G_R, φ treffe f (ausser in den Punkten a_i) in einer Gruppe $G_{R'}$. Dann wird nach dem Restsatze die ganze G_Q^1 corresiduale Schaar g_Q durch die (f adjungirten) $(\varkappa-1)$-Curven $(s+s')^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch G_R und $G_{R'}$ hindurchgehen:

$$X=\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2+\cdots=0$$

ausgeschnitten. Eine dieser Curven ist $X_1=\chi_1\varphi$.

Die Schaar von σ-Curven s^{ter} Ordnung, welche durch G_R gehen und die in g_Q enthaltene Schaar γ_Q ausschneiden, sei

$$\chi=\lambda_1\chi_1+\lambda_2\chi_2+\cdots=0,$$

so dass also die Schaar $\chi\varphi$ in der Schaar X enthalten ist. Soll sich nun X auf diese Schaar reduciren, so hat man die Identität zu erfüllen:

$$X\equiv\chi\cdot\varphi+A\cdot f. \tag{1}$$

Ist umgekehrt diese Identität (1) bei gegebener Function f, gegebener $(\varkappa-\sigma-1)$-Curve φ und gegebener Schaar von $(\varkappa-1)$-Curven X durch Bestimmung von ganzen Functionen χ und A zu erfüllen, so ist in Bezug auf $f=0$ die Schaar X durch diese Schaar χ ersetzt, welche sodann, wie (1) sogleich zeigt, eine Schaar von σ-Curven wird. Damit diese Bestimmung von χ und A möglich wird, herrschen Bedingungen für X, welche man dem Satze zu entnehmen hat, welchen ich in diesen Annalen, Bd. VI., p. 351, entwickelt habe und den man so aussprechen kann:

(I) Zum Bestehen von (1) ist erforderlich und genügend, X so zu bestimmen, dass für jeden einzelnen Schnittpunkt b_i von φ und f zwei ganze Functionen $\chi^{(i)}$, $A^{(i)}$ von unbegrenzter Ordnung existiren, derart, dass in

$$X\equiv\chi^{(i)}\varphi+A^{(i)}f$$

die beiderseitigen aufsteigenden Entwickelungen im Punkte $\varkappa_i$ identisch gemacht werden können.

Da X durch die einfachen Schnittpunkte von φ mit f hindurchgelegt ist, so entstehen nach diesem Satze nur in den vielfachen Punkten a_i von f Bedingungen für X. Man erhält dieselben, indem man in a_i die Glieder $(\varkappa_i-1)^{\text{ter}}$, $\varkappa_i^{\text{ter}}$, $\cdots$, $(2\varkappa_i-\sigma_i-3)^{\text{ter}}$ Dimension auf beiden Seiten vergleicht und die unbestimmten Coefficienten von $\chi^{(i)}$, $A^{(i)}$ eliminirt. Dies giebt für die Coefficienten dieser Glieder von X bez.

$$\varkappa_i-\sigma_i-1,\quad \varkappa_i-\sigma_i-2,\ \cdots\ 2,\ 1$$

lineare Relationen; so dass man überhaupt

$$\frac{1}{2}\sum_{i}(\varkappa_i - \sigma_i)(\varkappa_i - \sigma_i - 1)$$

lineare Relationen für die Coefficienten von X vermöge der Beziehung (1) erhält. Diese Relationen brauchen nicht von einander unabhängig zu sein; ausserdem ist zu beachten, dass bei besonderer Singularität von f in a_i (wenn mehrere der vielfachen Punkte in a_i zusammenrücken) der Satz (I) noch den Vergleich von Gliedern höherer Dimension, als der $(2\varkappa_i - \sigma_i - 3)^{\text{ten}}$ fordert und noch weitere Relationen in a_i für X mit sich bringt. Die Gesammtheit der so für die Identität (1) folgenden Bedingungen sei als Relationssystem (A) bezeichnet.

Diese Relationen (A) *sind die erforderlichen und hinreichenden Bedingungen, dass die Schaar adjungirter Curven X sich auf eine Schaar von σ-Curven χ reducirt.* Während jedoch die ganze Schaar g_Q von Punktgruppen durch *eine* Gruppe G_Q^1 vollständig bestimmt und unabhängig von den weiteren festen Schnittpunkten der Curve X_1 ist, ist die in g_Q enthaltene specielle Schaar γ_Q durch *eine* Gruppe G_Q^1 und durch die Bedingungen (A) für die X *noch nicht festgelegt;* dieselbe hängt dann zwar nicht von der willkürlich gewählten $(\varkappa - \sigma - 1)$-Curve φ ab, aber wesentlich von den festen Grundpunkten, welche man für χ_1, also für die Schaar χ, gewählt hat, und enthält somit noch eine Reihe von willkürlichen Parametern in *nicht linearer* Weise. Zur Angabe dieser *zweiten Reihe* (B) *von Bedingungen*, welche zur Ausscheidung der Schaar γ_Q aus g_Q dienen, führt der erste der jetzt zu entwickelnden Restsätze.

§ 2.

Erster Restsatz der σ-Curven.

Eine Schaar γ_Q von Punktgruppen von je Q Punkten:

$$G_Q^1,\ G_Q^2,\ G_Q^3, \cdots$$

sei aus f durch die Schaar von σ-Curven:

$$\psi \equiv \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \lambda_3\psi_3 + \cdots = 0,$$

welche alle weiter durch eine feste Gruppe G_R von f hindurchgehen, ausgeschnitten; und zwar G_Q^1 von ψ_1.

Man lege durch G_Q^1 eine weitere σ-Curve χ_1, welche f ausserdem noch in einer Gruppe G_S treffe. Die Schaar der σ-Curven, von gleicher Ordnung mit χ_1, welche durch G_S gehen, sei

$$\chi \equiv \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 + \lambda_3\chi_3 + \cdots = 0.$$

Diese Curven treffen nun f ebenfalls in der Schaar γ_Q, d. h. die Schaar χ wird, für $f = 0$, völlig äquivalent der Schaar ψ, sobald die Gleichung

$$(2) \qquad \chi_1 \psi \equiv \chi \psi_1 + Bf$$

bei gegebenen Functionen ψ_1, ψ, f auf eine solche Weise identisch erfüllt wird, *dass* χ_1 *unabhängig wird von den Parametern* λ. Denn alsdann treten diese in ψ linear und homogen enthaltenen Parameter ebenso in χ auf.

Zunächst ergeben sich nun die Bedingungen für χ_1, vermöge welcher $\chi_1 \psi$ bei gegebenen Functionen ψ_1, f, ψ überhaupt in die Form (2) gesetzt werden kann, aus dem oben angeführten Satze (I). Da $\chi_1 \psi$ durch die einfachen Schnittpunkte G_Q^1 und G_R von ψ_1 mit f hindurchgeht, folgen aus (I) nur Bedingungen in den vielfachen Punkten a_i von f. In einem solchen Punkte a_i, der $\varkappa_i$-facher Punkt von f, σ_i-facher Punkt von ψ_1 ist, ergeben sich nach (I) lineare Relationen für die Coefficienten der Glieder von $\chi_1 \psi$, bis zur $(\varkappa_i + \sigma_i - 2)^{\text{ten}}$ Dimension incl., d. h. — da die Glieder $(\sigma_i - 1)^{\text{ter}}$ und niedrigerer Dimension von ψ identisch 0 sind — Relationen für die Coefficienten der Glieder von χ_1 bis zur $(\varkappa_i - 2)^{\text{ten}}$ Dimension incl.

Diese Relationen lassen sich nun ganz unabhängig von den Coefficienten von ψ *erfüllen.* In der That, sei ψ' *irgend* eine ganze Function, so sind die Bedingungen, dass sich $\chi_1 \psi'$ in der Nähe von a_i in die Form setzen lässt

$$(3) \qquad \chi_1 \psi' \equiv \chi^{(i)} \psi_1 + B^{(i)} f,$$

so zu befriedigen: χ_1 hat in a_i einen σ_i-fachen Punkt; die Glieder $\sigma_i{}^{\text{ter}}$ Dimension von χ_1 stimmen überein mit denen von ψ_1, d. h. die Tangenten der σ_i Zweige von χ_1 fallen mit denen der σ_i Zweige von ψ_1 in a_i zusammen; die Glieder $(\sigma_i + 1)^{\text{ter}}$ Dimension von χ_1 sind durch σ_i Relationen so bestimmt, dass die σ_i Zweige von χ_1 noch je einen weiteren Schnittpunkt mit den entsprechenden Zweigen von ψ_1 gemein haben, ebenso die Glieder $(\sigma_i + 2)^{\text{ter}}, \cdots, (\varkappa_i - 2)^{\text{ter}}, (\varkappa_i - 1)^{\text{ter}}$ Dimension; sodann folgen Relationen anderer Art für die Glieder $\varkappa_i{}^{\text{ter}}$, $(\varkappa_i + 1)^{\text{ter}}, \cdots, (\varkappa_i + \sigma_i - 2)^{\text{ter}}$ Dimension von χ_1 in a_i. Man hat also hier für die Glieder bis zur $(\varkappa_i - 2)^{\text{ten}}$ Dimension incl. von χ_1 die Bestimmung getroffen, *dass die Curve* χ_1 *den Punkt* a_i *ebenfalls zum* σ_i-*fachen Punkt haben und dass ihre* σ_i *Zweige in* a_i *je einen entsprechenden der* σ_i *Zweige von* ψ_1 *in* a_i *noch ausserdem in* $\varkappa_i - \sigma_i - 1$ *aufeinanderfolgenden Punkten treffen sollen.* Diese Bestimmung ist völlig unabhängig von den Coefficienten von ψ'; sie befriedigt also auch noch die Relationen, welche für die Coefficienten von χ_1 bis zur $(\varkappa_i - 2)^{\text{ten}}$ Dimension in a_i aus der Identität (2) fliessen. Und da nach dem Obigen die Identität (2) auch keine höheren Relationen für χ_1 in a_i verlangt, als bis zu den Gliedern $(\varkappa_i - 2)^{\text{ter}}$ Dimension incl., so haben wir eine von den Coefficienten von ψ, also den Parametern λ, ganz unabhängige Bestimmung von χ_1.

Eine derartig bestimmte σ-Curve χ_1, welche in jedem Punkte a_i von f eine zweite σ-Curve ψ_1 in $(\varkappa_i - 1)\sigma_i$ Punkten so trifft, dass auf jeden der σ_i Zweige von ψ_1, ausser den vom σ_i-fachen Punkte von χ_1 herrührenden σ_i Schnittpunkten, noch weitere $\varkappa_i - \sigma_i - 1$ Schnittpunkte fallen, wird im Folgenden als „*mit* ψ_1 *gleichsingulär*" bezeichnet.*)

Wenn χ_1 als mit ψ_1 gleichsingulär bestimmt ist, so besteht die Identität (2). Es folgt sodann weiter aus (2), dass alsdann *jeder* der σ_i Zweige der Curve ψ_1 in a_i von $\chi_1\psi$, also auch von Bf, in $\varkappa_i + \sigma_i - 1$ Punkten getroffen wird; also von B in $\sigma_i - 1$ Punkten, was nur möglich ist, wenn B in a_i einen $(\sigma_i - 1)$-fachen Punkt hat. Hieraus ergiebt sich weiter, dass χ den Punkt a_i zum σ_i-fachen Punkt haben muss, und dass jeder der σ_i Zweige der σ-Curve χ in a_i von $\chi_1\psi$, weil von Bf, in $\varkappa_i + \sigma_i - 1$ Punkten getroffen wird, also von ψ in $\varkappa_i - 1$ Punkten. Dies letztere sagt aber aus, *dass die σ-Curve χ mit der σ-Curve ψ gleichsingulär wird.* Zugleich ist die ganze lineare Schaar ψ durch die lineare Schaar χ ersetzt, von welch letzterer jede einzelne Curve mit der *entsprechenden* der Schaar ψ gleichsingulär wird. Man hat daher den folgenden *ersten Restsatz der σ-Curven:*

(II). *Eine Schaar γ_Q von Punktgruppen von je Q Punkten:*

$$G_Q^1,\ G_Q^2,\ \cdots,$$

— ausgeschnitten aus f durch die ganze Schaar von σ-Curven, welche noch weiter durch eine feste Gruppe G_R von f gehen:

$$\psi \equiv \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \cdots = 0,$$

und zwar G_Q^1 durch ψ_1 —, wird auch durch die Schaar von σ-Curven

$$\chi \equiv \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 + \cdots = 0$$

aus f ausgeschnitten, wenn χ_1 eine beliebige durch G_Q^1 gehende, mit ψ_1 gleichsinguläre σ-Curve ist und unter χ die ganze Schaar der durch die übrigen festen Schnittpunkte G_S von f mit χ_1 gehenden σ-Curven, gleicher Ordnung mit χ_1, verstanden ist. — Jede Curve der Schaar χ wird dann mit der entsprechenden Curve der Schaar ψ gleichsingulär.

*) Diese Definition ist hier für den Fall ausgesprochen, dass nicht mehrere der vielfachen Punkte von f zusammenrücken. Wie in diesem letzteren Falle die Definition von „gleichsingulär" zu modificiren ist, ergiebt sich entweder aus der Identität (2) und (3), oder durch die Principien meines Aufsatzes über singuläre Punkte, s. Math. Annalen Bd. IX. Mit dieser Modification bleiben alle Resultate des vorliegenden Aufsatzes erhalten.

§ 3.

Zweiter Restsatz der σ-Curven.

Die Art, wie in § 2. die Relation (2) bei gegebenen Functionen f, ψ_1 identisch erfüllt wurde, lässt sich so aussprechen: Die Curve $\chi_1 \psi$ geht durch die einfachen Schnittpunkte von ψ_1 mit f hindurch; sowohl χ_1 als ψ sind σ-Curven und *eine* von diesen beiden Curven ist mit ψ_1 gleichsingulär. Enthält alsdann eine dieser beiden Curven noch eine Anzahl von willkürlichen Parametern, so treten dieselben nothwendig, und in derselben Weise, auch in χ auf.

Nimmt man demnach an, dass in (2) ψ eine Schaar von Curven vorstellt, die alle mit ψ_1 gleichsingulär sind, so hat χ_1 keiner weiteren Bedingung zu unterliegen, als eine σ-Curve zu sein, die durch die Schnittpunkte von ψ_1 mit f hindurchgeht, welche nicht allen ψ gemeinsam sind. Man erhält dann an Stelle von ψ vermöge (2) eine neue Schaar χ von σ-Curven, welche alle mit der einen Curve χ_1 gleichsingulär sind. Dieses liefert einen *zweiten Restsatz der σ-Curven*, der sich auf besondere Punktgruppen bezieht:

(II′) *Eine Schaar γ_R von Punktgruppen von je R Punkten:*

$$G_R^1, \; G_R^2, \cdots$$

— ausgeschnitten aus f durch eine Schaar von σ-Curven, welche durch eine feste Gruppe G_Q von f gehen und alle mit irgend einer von ihnen gleichsingulär sind —, wird auch durch die Schaar von σ-Curven

$$\varphi \equiv \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots = 0$$

aus f ausgeschnitten, wenn φ_1 eine ganz beliebige durch G_R^1 gehende σ-Curve ist, und unter φ die Schaar der durch die übrigen festen Schnittpunkte $G_{Q'}$ von f mit φ_1 gehenden σ-Curven, gleicher Ordnung mit φ_1, welche zugleich alle mit der Curve φ_1 gleichsingulär sind, verstanden ist.

§ 4.

Bestimmung von linearen Schaaren von σ-Curven.

Um eine Schaar γ_Q von Gruppen $G_Q^1, G_Q^2, \cdots$, welche von einer Schaar von σ-Curven

$$\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \cdots = 0,$$

und zwar G_Q^1 von ψ_1, aus f ausgeschnitten wird, festzulegen, muss erstens *eine* Gruppe, G_Q^1, der Schaar gegeben sein; sodann sind nach § 1. für die dort betrachtete Schaar X adjungirter Curven die Bedingungen (A) des § 1. zu erfüllen; und endlich folgt aus dem ersten

Restsatz, § 2., *dass man für die durch G_Q^1 gelegte σ-Curve χ_1 eine solche zu wählen hat, welche mit ψ_1 gleichsingulär ist.** Dies giebt die zweite Reihe (B) der Bedingungen, welche in § 1. noch verlangt war.

Diese zweite Reihe besteht, da jeder der σ_i Zweige von χ_1 in a_i mit je einem der σ_i Zweige von ψ_1 noch $\varkappa_i - \sigma_i - 1$ weitere auf a_i folgende Schnittpunkte gemein haben soll, aus

$$\sum_i \sigma_i(\varkappa_i - \sigma_i - 1)$$

linearen Relationen für die Coefficienten der Schaar X. Diese Relationen können natürlich, ganz oder theilweise, ersetzt werden durch die Angabe von entsprechenden festen Grundpunkten für die Schaar X, bez. χ.

Die Relationen (A) und (B), an Zahl

$$\frac{1}{2}\sum(\varkappa_i-\sigma_i)(\varkappa_i-\sigma_i-1)+\sum\sigma_i(\varkappa_i-\sigma_i-1)$$
$$=\frac{1}{2}\sum\varkappa_i(\varkappa_i-1)-\frac{1}{2}\sum\sigma_i(\sigma_i+1)$$

werden im Allgemeinen von einander und von denen, welche durch die Gruppe G_Q^1 gegeben sind, nicht unabhängig sein. Man kann daher für die Anzahl der Curven, welche die Bedingungen (A) erfüllen, d. h. der σ-Curven, und zugleich durch eine gegebene Punktgruppe hindurchgehen, desgleichen für die Anzahl der σ-Curven, welche durch eine gegebene Punktgruppe gehen und weiter auch den Bedingungen (B) unterworfen sind, zunächst nur *untere Grenzen* angeben. Die Aufgabe der folgenden Paragraphen ist es sodann, an Stelle dieser Grenzen Sätze zu liefern, welche in allen Fällen Gültigkeit haben.

An Stelle des Geschlechts p der zu Grunde gelegten Curve n^{ter} Ordnung

$$f=0$$

führe ich zunächst die Zahlen

$$\pi=p+\frac{1}{2}\sum(\varkappa_i-\sigma_i)(\varkappa_i-\sigma_i-1),$$
$$\pi'=p+\frac{1}{2}\sum\varkappa_i(\varkappa_i-1)-\frac{1}{2}\sum\sigma_i(\sigma_i+1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\sum\sigma_i(\sigma_i+1)$$
$$=\pi+\sum\sigma_i(\varkappa_i-\sigma_i-1)$$

ein.

Die σ-Curven χ, von der Ordnung s, treffen f in Punktgruppen von je

$$ns-\sum\varkappa_i\sigma_i$$

Punkten. Um die Anzahl der σ-Curven s^{ter} Ordnung zu bestimmen, ist zu beachten, dass für $s \geqq n$ auch die Curven

$$A\cdot f=0,$$

wo A irgend eine Curve $(s-n)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellt, unter denen enthalten sind, welche die Abzählung der σ-Curven liefert; man erhält also auf f im Allgemeinen nur eine

$$\left[\frac{1}{2}(s+1)(s+2)-1-\frac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)-\frac{1}{2}\sum\sigma_i(\sigma_i+1)\right]\text{-}=$$
$$=\left[ns-\sum\varkappa_i\sigma_i-\pi\right]\text{-}$$

-fach unendliche Schaar von Punktgruppen von je

$$ns-\sum\varkappa_i\sigma_i$$

Punkten, ausgeschnitten von den σ-Curven s^{ter} Ordnung $(s \geqq n)$. Und diese Zahl bleibt auch noch für $s=n-1$ und $s=n-2$ gültig.

Für $s=n-3$ folgt, dass man auf f im Allgemeinen nur eine

$$\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1-\frac{1}{2}\sum\sigma_i(\sigma_i+1)\right]\text{-}=$$
$$=[\pi'-1]\text{-}$$

-fach unendliche Schaar von Punktgruppen von je

$$n(n-3)-\sum\varkappa_i\sigma_i=\pi+\pi'-2$$

Punkten, ausgeschnitten von den σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, hat.

Daher sind von den ausserhalb der a_i gelegenen Schnittpunkten einer σ-Curve s^{ter} Ordnung mit f:

1) für
$$s>n-3:$$
höchstens π durch die übrigen
$$ns-\sum\varkappa_i\sigma_i-\pi$$
bestimmt;

2) für
$$s=n-3:$$
höchstens $\pi-1$ durch die übrigen
$$\pi'-1$$
bestimmt.

Es bilden also die Gruppen $G_Q^1, G_Q^2, \cdots,$ aus f ausgeschnitten die ganze Schaar von σ-Curven s^{ter} Ordnung, welche durch eine feste Gruppe G_R von f hindurchgehen, eine Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ mit einer Mannigfaltigkeit q, für die

$$\text{für}\quad s>n-3:\qquad q\geqq Q-\pi;$$
$$\text{für}\quad s=n-3:\qquad q\geqq Q-\pi+1.$$

Analoge Grenzbestimmungen hat man für die σ-Curven, welche zugleich noch den Bedingungen (B) unterliegen, nämlich mit einer gegebenen σ-Curve gleichsingulär zu sein.

Auch zu solchen σ-Curven φ der Ordnung $s \geq n$, welche mit einer gegebenen σ-Curve φ_1 gleichsingulär sind, werden die Curven

$$A \cdot f = 0,$$

wenn A irgend eine Curve $(s-n)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, bei der Constantenzählung gerechnet. Man erhält also auf f im Allgemeinen nur eine

$$\Big[\tfrac{1}{2}(s+1)(s+2)-1-\tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)-\tfrac{1}{2}\sum\sigma_i(\sigma_i+1)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum\sigma_i(\varkappa_i-\sigma_i-1)\Big]-$$
$$=\Big[ns-\sum\varkappa_i\sigma_i-\pi'\Big]-$$

-fach unendliche Schaar von Punktgruppen von je

$$ns-\sum\varkappa_i\sigma_i$$

Punkten, ausgeschnitten von den σ-Curven s^{ter} Ordnung $(s \geq n)$, welche mit einer gegebenen σ-Curve gleichsingulär sind. Diese Zahl bleibt auch bei $s = n-1$ und $s = n-2$ gültig.

Ferner hat man auf f im Allgemeinen nur eine

$$[\pi-1]-$$

fach unendliche Schaar von Punktgruppen von je

$$\pi+\pi'-2$$

Punkten, ausgeschnitten von den σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit einer gegebenen solchen Curve gleichsingulär sind.

Daher sind von den ausserhalb der a_i gelegenen Schnittpunkten von f mit einer σ-Curve s^{ter} Ordnung, welche mit einer gegebenen Curve gleichsingulär sein soll:

1) für

$$s > n-3:$$

höchstens π' durch die übrigen bestimmt;

2) für

$$s = n-3:$$

höchstens $\pi'-1$ durch die übrigen

$$\pi-1$$

bestimmt.

Und die Gruppen G_R^1, G_R^2, $\cdots$, aus f ausgeschnitten durch die Schaar der σ-Curven s^{ter} Ordnung, welche durch eine feste Gruppe G_Q von f gehen und mit einer gegebenen σ-Curve gleichsingulär sind, bilden eine Schaar $\gamma_R^{(r)}$ mit einer Mannigfaltigkeit r, für die

$$\text{für}\quad s > n-3: \qquad r \geq R-\pi',$$
$$\text{für}\quad s = n-3: \qquad r \geq R-\pi'+1.$$

§ 5.

Die σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Ich gehe nun, in diesem und dem folgenden Paragraphen, dazu über, die Umkehrung der im vorigen Paragraphen entwickelten Angaben abzuleiten, wodurch dann die σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vor allen übrigen ausgezeichnet werden. Es soll zunächst der Satz bewiesen werden:

(III) *Eine lineare, q-fach unendliche Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ von Punktgruppen von je Q Punkten, welche aus f durch eine Schaar ψ von σ-Curven ausgeschnitten wird, kann immer dann durch eine Schaar χ von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit den entsprechenden Curven von ψ gleichsingulär sind, ausgeschnitten werden, wenn*

$$q \geqq Q - \pi + 1.$$

Zum Beweise beachte man, dass dieser Satz jedenfalls für eine Gruppe von $Q < \pi - 1$ Punkten, für die $q = 0$ ist, gilt; denn da es eine wenigstens $(\pi' - 1)$-fach unendliche Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, so kann durch *diese* Gruppe sicher eine σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt werden; und dieselbe kann noch mit der gegebenen durch die Gruppe gehenden σ-Curve gleichsingulär gemacht werden, da hierzu nur $\pi' - \pi$ lineare Bedingungen zu erfüllen sind.

Es wird daher nur nöthig zu zeigen, dass der Satz für die Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ richtig ist, wenn er für jede von σ-*Curven* ausgeschnittene Schaar $\gamma_{Q-1}^{(q-1)}$ als richtig angenommen wird.

Die Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ sei aus f durch die Schaar von σ-Curven:

$$\psi \equiv \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \cdots = 0$$

ausgeschnitten, und zwar die Gruppe G_Q^1 durch ψ_1. Sei α ein Punkt dieser Gruppe, welcher nicht zugleich sämmtlichen Gruppen von $\gamma_Q^{(q)}$ angehört. Derjenige Theil ψ' der Curvenschaar ψ, welcher noch durch α hindurchgeht, bildet eine $(q-1)$-fach unendliche Schaar von σ-Curven, welche f in einer Schaar $\gamma_{Q-1}^{(q-1)}$ trifft, darunter ψ_1 in der Gruppe G_{Q-1}^1, welche α zu G_Q^1 ergänzt. Diese Schaar $\gamma_{Q-1}^{(q-1)}$ wird nun, da für sie die Ungleichung des Satzes erfüllt ist, nach der Annahme durch eine Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aus f ausgeschnitten, welche mit den entsprechenden Curven von ψ' gleichsingulär sind; und darunter die Gruppe G_{Q-1}^1 durch eine σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung χ_1, welche mit ψ_1 gleichsingulär ist.

Um nun die ganze Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ aus f auszuschneiden, kann man durch den Punkt α eine beliebige Gerade A legen, welche f noch in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ treffe, und durch den übrigen Theil

G^1_{Q-1} der Gruppe G^1_Q die eben nachgewiesene, mit ψ_1 gleichsinguläre, σ-Curve χ_1 von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche f ausser G^1_{Q-1} noch in einer Gruppe G_{R+1} treffe. Nach dem ersten Restsatze (II) wird dann die Schaar $\gamma^{(q)}_Q$ aus f von denjenigen σ-Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten, welche durch G_{R+1} und die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ hindurchgehen, darunter G^1_Q von der mit ψ_1 gleichsingulären Curve:

$$\chi_1 \cdot \mathsf{A}.$$

Aber da diese Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sämmtlich mit der Geraden A noch $n-1$ Punkte gemein haben sollen, so zerfallen dieselben alle in A und eine Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\chi \equiv \lambda_1 \chi_1 + \lambda_2 \chi_2 + \cdots = 0.$$

Sei nun G^2_Q *irgend* eine in $\gamma^{(q)}_Q$ enthaltene Gruppe, in welcher der Punkt α nicht vorkommt, so wird diese Gruppe auch von einer Curve $\chi_2 \cdot \mathsf{A}$ der Schaar von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten, also, da die feste beliebige Gerade A keinen der Punkte von G^2_Q enthält, von der in der Schaar χ enthaltenen Curve χ_2 allein. Diese Schaar χ ersetzt also die ursprünglich gegebene Schaar ψ vollständig, und da eine der Curven, χ_1, mit der entsprechenden ψ_1 gleichsingulär ist, so wird es jede Curve der Schaar χ, nach dem Restsatze (II). Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Umstande, dass in diesem Beweise von keiner oberen Grenze für die Zahl Q Gebrauch gemacht wird, kann man noch weitere Sätze folgern. Denn da die von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausschneidbaren Gruppen nicht mehr als $\pi + \pi' - 2$ Punkte enthalten können, hat man aus (III) den Satz:

(IV) *Punktgruppen von je Q Punkten, aus einer q-fach unendlichen Schaar $\gamma^{(q)}_Q$, welche aus f durch σ-Curven ausgeschnitten wird und für welche*

$$q \geq Q - \pi + 1,$$
$$Q > \pi + \pi' - 2,$$

existiren nicht auf der Curve f.

Hieraus kann man weiter schliessen:

(V) *Es giebt nur eine*

$$\pi' - 1$$

-fach unendliche Schaar von σ-Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, d. h. nur π' linear von einander unabhängige σ-Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung.

Denn existirte eine $\infty^{\pi'}$-Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so erhielte man durch Hinzunahme eines willkürlichen, aber festen Punktes β zu ihrem Schnitt eine Schaar

$$\gamma^{(\pi')}_{n+\pi'-1}$$

von Gruppen (in denen allen derselbe Punkt β vorkäme), welche jedenfalls durch σ-Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, also nach (III) auch durch σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von f auszuschneiden ist, was aber nach (IV) unmöglich ist.

Endlich kann man auch, als speciellen Fall von (III), den Satz aussprechen:

(VI) *Die Gruppen von*

$$ns - \sum \varkappa_i \sigma_i$$

Punkten, welche aus f durch die σ-Curven s^{ter} Ordnung $(s > n-3)$ ausgeschnitten werden, bilden genau eine

$$\left[ns - \sum \varkappa_i \sigma_i - \pi\right]\text{-} = [\pi' - 2 + n(s-n+3)]\text{-}$$

-fach unendliche Schaar.

§ 6.

σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit einer gegebenen gleichsingulär sind.

Auch die am Schlusse des § 4. über solche Curven, welche mit einer gegebenen gleichsingulär sind, gemachten Angaben lassen sich durch folgenden Satz umkehren:

(III') *Ein lineare, r-fach unendliche Schaar $\gamma^{(r)}_R$ von Punktgruppen von je R Punkten, welche aus f durch eine Schaar ψ von σ-Curven ausgeschnitten wird, die alle mit irgend einer von ihnen gleichsingulär sind, kann immer dann durch eine Schaar φ von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die alle mit einer gleichsingulär sind, ausgeschnitten werden, wenn*

$$r \geq R - \pi' + 1.$$

Zum Beweise ist wieder zu beachten, dass dieser Satz jedenfalls für *eine* Gruppe, für die $r = 0$ und $R \leq \pi' - 1$ ist, gilt; denn durch $\pi' - 1$ oder weniger Punkte kann immer eine σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt werden. Es ist daher nur nöthig zu zeigen, dass der Satz für die Schaar $\gamma^{(r)}_R$ richtig ist, wenn er für jede von mit einander gleichsingulären σ-Curven ausgeschnittene Schaar $\gamma^{(r-1)}_{R-1}$ als richtig angenommen wird.

Sei G^1_R eine Gruppe der zu betrachtenden Schaar $\gamma^{(r)}_R$, und α ein Punkt derselben, welcher nicht zugleich sämmtlichen Gruppen der Schaar angehört; G^1_R bestehe aus α und G^1_{R-1}. Derjenige Theil ψ' der Curvenschaar ψ, welcher noch durch α hindurchgeht, bildet eine

$(r-1)$-fach unendliche Schaar von miteinander gleichsingulären σ-Curven, welche f noch in einer Schaar $\gamma_{R-1}^{(r-1)}$ trifft. Diese letztere Schaar wird, da für sie die Ungleichung des Satzes erfüllt ist, nach der Annahme durch eine Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit einander gleichsingulär sind, aus f ausgeschnitten; darunter G_{R-1}^1 durch eine solche Curve χ_1.

Um nun die ganze Schaar $\gamma_R^{(r)}$ aus f auszuschneiden, kann man durch den Punkt α eine beliebige Gerade A legen; sodann durch die übrigen $n-1$ Schnittpunkte von A mit f, sowie durch die weiteren G_{Q+1} Schnittpunkte von χ_1 mit f (ausser G_{R-1}^1) noch alle σ-Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, welche mit einander, also mit χ_1, gleichsingulär sind. Diese Curven treffen f, nach (II'), in $\gamma_R^{(r)}$. Aber diese Curven, als von $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, müssen sämmtlich zerfallen in die Gerade A und in eine Schaar φ von mit χ_1 gleichsingulären σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung. Und da es in der Schaar $\gamma_R^{(r)}$ Gruppen giebt, welche keinen Punkt mit der festen, aber beliebig angenommenen Geraden A gemein haben, so werden diese Gruppen von Curven der Schaar φ, also, nach dem Restsatze (II'), auch die ganze Schaar $\gamma_R^{(r)}$ von den Curven der Schaar φ ausgeschnitten, was aber die Aussage des Satzes (III') ist.

Auch hier kann man nun wieder ähnliche Folgerungen ziehen, wie in § 5. Da die Zahl R die Grenze $\pi+\pi'-2$ nicht übersteigen kann, ohne dass es möglich ist, eine σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zu legen, so hat man:

(IV') *Punktgruppen von je R Punkten, aus einer r-fach unendlichen Schaar $\gamma_R^{(r)}$, welche aus f durch miteinander gleichsinguläre σ-Curven ausgeschnitten wird und für welche*

$$r \geqq R-\pi'+1,$$
$$R > \pi+\pi'-2,$$

existiren nicht auf der Curve f.

Ferner:

(V') *Die σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit einer gegebenen solchen Curve gleichsingulär sind, bilden genau eine $(\pi-1)$-fach unendliche Schaar.*

Denn bildeten sie eine ∞^π-Schaar, so erhielte man durch Hinzunahme eines willkürlichen Punktes β zu ihrem Schnitt eine Schaar

$$\gamma_{\pi+\pi'-1}^{(\pi)}$$

von Gruppen, welche durch einander gleichsinguläre σ-Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, nämlich durch die gegebene Curvenschaar, verbunden mit einer beliebigen festen Geraden durch β, aus f ausgeschnitten wird;

also auch nach (III') durch solche Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, was aber nach (IV') unmöglich ist.

Endlich hat man, als speciellen Fall von (III'):

(VI') *Die Gruppen von*

$$ns - \Sigma \varkappa_i \sigma_i$$

Punkten, die aus f durch diejenigen σ-Curven s^{ter} Ordnung $(s > n-3)$ ausgeschnitten werden, welche mit einer gegebenen solchen Curve gleichsingulär sind, bilden genau eine

$$[ns - \Sigma \varkappa_i \sigma_i - \pi']\text{-} = [\pi - 2 + n(s-n+3)]\text{-}$$

-fach unendliche Schaar.

§ 7.

Der erweiterte Riemann-Roch'sche Satz.

Die im Satze (III) behandelten Punktgruppen $G_Q^{(q)}$, für die

$$q \geqq Q - \pi + 1,$$

und die in (III') behandelten Gruppen $G_R^{(r)}$, für die

$$r \geqq R - \pi' + 1$$

ist, lassen sich in bestimmter Weise einander zuordnen, wodurch dann die Constantenbestimmung in speciellen Schaaren nicht-adjungirter Curven ihre Grundlage erhält.

Eine q-fach unendliche Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ von Gruppen von je Q Punkten

$$G_Q^1, \quad G_Q^2, \cdots$$

sei aus f durch die ganze Schaar der σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\chi \equiv \lambda_1 \chi_1 + \lambda_2 \chi_2 + \cdots = 0$$

ausgeschnitten, welche durch die feste Gruppe G_R^1 von f hindurchgehen. Hier ist also:

$$Q + R = \pi + \pi' - 2,$$

und es sei:

$$q = Q - \pi + 1 + r,$$

wo $r \geqq 0$ wird.

Man füge nun zu jeder Gruppe der Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ noch r festliegende, aber beliebig gewählte (und zwar zu jeder Gruppe dieselben) Punkte Γ_r hinzu. Hierdurch erhält man auf f eine Schaar

$$\gamma_{Q+r}^{(q)}$$

von Gruppen

$$G_Q^1 + \Gamma_r, \quad G_Q^2 + \Gamma_r, \cdots,$$

welche durch eine ∞^q-Schaar von σ-Curven, die mit den entsprechenden Curven der Schaar χ gleichsingulär sind, aus f ausgeschnitten wird;

nämlich, wenn χ' eine beliebige, aber festgewählte, durch Γ_r gehende Curve ist, durch die Schaar

$$\chi' \cdot \chi .$$

Ferner ist für diese Schaar $(\chi' \chi)$

$$q = (Q+r) - \pi + 1;$$

also sind alle Bedingungen des Satzes (III) erfüllt, und die Gruppenschaar

$$\gamma_{Q+r}^{(q)}$$

kann aus f durch eine Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, welche mit den entsprechenden Curven der Schaar $(\chi' \chi)$, also mit denen der Schaar χ, gleichsingulär sind. Da nun die Gruppe Γ_r von r festen Punkten ganz willkürlich gewählt war, so folgt:

(a) *Durch eine solche Gruppe G_Q^1 gehen noch wenigstens r-fach unendlich viele σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zugleich alle mit der durch (G_Q^1, G_R^1) gehenden σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, χ_1, gleichsingulär sind.*

Es sei ferner auf f eine r-fach unendliche Schaar $\gamma_R^{(r)}$ von Punktgruppen

$$G_R^1, \quad G_R^2, \cdots$$

betrachtet, ausgeschnitten aus f durch die ganze Schaar

$$\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots = 0$$

der σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch eine feste Gruppe G_Q^1 von f gehen und mit einer gegebenen solchen Curve gleichsingulär sind. Hierbei ist wieder

$$Q + R = \pi + \pi' - 2,$$

und es sei

$$r = R - \pi' + 1 + q,$$

wo $q \geqq 0$ wird.

Man füge zu jeder Gruppe der Schaar $\gamma_R^{(r)}$ noch q *festliegende*, aber beliebig gewählte Punkte Γ_q hinzu. Hierdurch ergiebt sich auf f eine Schaar

$$\gamma_{R+q}^{(r)}$$

von Gruppen

$$G_R^1 + \Gamma_q, \quad G_R^2 + \Gamma_q, \cdots,$$

welche durch eine ∞^r-Schaar von *mit einander* gleichsingulären σ-Curven aus f ausgeschnitten wird; nämlich, wenn φ' eine beliebige, aber festgewählte, durch Γ_q gehende Curve ist, durch die Curvenschaar

$$\varphi' \cdot \varphi .$$

Da ferner für diese Schaar $(\varphi' \varphi)$:

$$r = (R+q) - \pi' + 1,$$

so sind die Bedingungen des Satzes (III') erfüllt, und die Gruppenschaar

$$\gamma_{R+q}^{(r)}$$

kann aus f durch eine Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, welche zugleich alle *mit einander* gleichsingulär werden. Aendert man die Gruppe Γ_q in $\Gamma_{q'}$, so erhält man analog σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die *mit einander*, aber nicht mit der zu Γ_q gefundenen Schaar gleichsingulär werden. Und da Γ_q eine ganz beliebige Gruppe von q Punkten auf f war, so folgt:

(b) *Durch eine solche Gruppe G_R^1 gehen noch wenigstens q-fach unendlich viele σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.*

Vergleicht man nun die beiden Resultate (a) und (b) dieses Paragraphen mit einander, so sieht man zunächst, dass vermöge der Beziehung

$$Q+R=\pi+\pi'-2$$

die beiden Gleichungen aus (a) und (b):

$$q=Q-\pi+1+r,$$
$$r=R-\pi'+1+q$$

in *eine* zusammenfallen. Man kann nun unter den Gruppen G_Q^1, $G_R^1, \cdots$, die in der Entwickelung des Satzes (a) auftreten, dieselben Gruppen verstehen, welche auch bei der von (b) auftreten. Bilden alsdann die Gruppen G_Q^1, $G_Q^2, \cdots$ eine q-fach unendliche Schaar $\gamma_Q^{(q)}$, so kann man durch G_Q^1 auch *nicht mehr* als ∞^r σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, welche mit der σ-Curve χ_1 gleichsingulär sind; da sonst, nach (b), die Schaar der Gruppen G_Q^1, $G_Q^2, \cdots$ von höherer Ordnung der Vielfachheit, als der q^{ten}, würde. Und umgekehrt kann man auch durch G_R^1, wenn die Gruppen G_R^1, $G_R^2, \cdots$ die Schaar $\gamma_R^{(r)}$ bilden, nach (a) nicht mehr als ∞^q σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen. Man hat also an Stelle von (a) und (b) den Satz:

(VII) *Theilt man die*

$$Q+R=\pi+\pi'-2$$

Schnittpunkte von f mit einer σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, φ, in zwei Gruppen G_Q und G_R, und es giebt q-fach unendlich viele σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch G_R gehen, dagegen r-fach unendlich viele solcher σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch G_Q gehen und zugleich mit φ gleichsingulär sind, so ist:

$$q-r=Q-\pi+1=\pi'-R-1,$$

oder, was dasselbe ist:

$$R-Q=2(r-q)+(\pi'-\pi).$$

Durch Verbindung dieses Satzes mit (III), bez. (III′) ergeben sich zwei verschiedene Formen desselben, welche als die *Erweiterungen des Riemann-Roch'schen Satzes* über die Constantenzahl einer speciellen algebraischen Function anzusehen sind:

(VII′) *Hat man auf f eine Schaar γ_Q von Punktgruppen von je Q Punkten,*

$$G_Q^1,\ G_Q^2,\ \cdots,$$

ausgeschnitten durch eine Schaar von σ-Curven, insbesondere G_Q^1 durch ψ_1, und gehen durch G_Q^1 noch r-fach unendlich viele σ-Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche zugleich mit ψ_1 gleichsingulär sind ($r \geqq 0$), so ist die Mannigfaltigkeit q der Schaar γ_Q bestimmt durch

$$q = Q - \pi + 1 + r.$$

(VII″) *Hat man auf f eine Schaar γ_R von Punktgruppen von je R Punkten*

$$G_R^1,\ G_R^2,\ \cdots,$$

ausgeschnitten durch eine Schaar von σ-Curven, welche mit einander gleichsingulär sind, und gehen durch G_R^1 noch q-fach unendlich viele σ-Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung ($q \geqq 0$), so ist die Mannigfaltigkeit r der Schaar γ_R bestimmt durch

$$r = R - \pi' + 1 + q.$$

§ 8.

Das Problem der speciellen Gruppen.

Für alle in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Sätze ist als wesentlicher Charakter zu betrachten, dass sie für alle, auch die speciellsten, irreducibeln Curven f Gültigkeit haben. Dagegen gehört die *Aufsuchung* der speciellen auf einer Curve f liegenden Punktgruppen, welche durch die Sätze (III) und (III′) definirt sind, nicht mehr in dieses Gebiet. Die hierher gehörigen, auf allgemeinere Curven f bezüglichen Angaben erleiden bei besonderen Curven f Ausnahmen, welche aber eben zur Charakterisirung der besondern Curve f von vornherein mitgegeben sein müssen. Einige solcher allgemeineren Angaben sollen in diesem Paragraphen abgeleitet werden.

Es sei, ausser der Grundcurve f, noch eine t-fach unendliche lineare Schaar von Curven, ψ, gegeben. Soll nun eine Gruppe G_S von S Punkten auf f so bestimmt werden, dass die durch G_S gehenden Curven der Schaar ψ noch eine t'-fach unendliche Schaar ψ' bilden, so sind, für

$$S > t - t',$$

Bedingungen zwischen den S Punkten G_S nöthig, und zwar*)

$$(t'+1)(S-t+t')$$

Bedingungen. Und von den Punkten G_S bleiben daher noch

$$S-(t'+1)(S-t+t')$$

willkürlich; vorausgesetzt indess, dass diese Zahl nicht negativ wird.

Insbesondere seien hier zwei Fälle näher betrachtet. Einmal sei die Schaar ψ die $\infty^{\pi'-1}$-Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zu f gehören, also

$$t = \pi' - 1.$$

Ferner sei

$$S = R, \quad t' = q,$$

also G_S eine Gruppe G_R^1, durch die noch ∞^q- der σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, ψ', gehen sollen, welche f noch in den Gruppen

$$G_Q^1, \; G_Q^2, \; \cdots$$

schneiden, wo

$$Q + R = \pi + \pi' - 2.$$

Von den R Punkten von G_R^1 können dann nach dem Obigen

$$R-(q+1)(R-\pi'+1+q)$$

willkürlich genommen werden; aber da G_R^1 nach dem Satze (VII'') noch einer ∞^r-Schaar angehört, wo

$$r = R - \pi' + 1 + q,$$

so hat man, wenn das Problem überhaupt im Allgemeinen lösbar sein soll, nothwendig:

$$R-(q+1)(R-\pi'+1+q) \geqq r,$$

und hieraus

$$(\alpha) \qquad R \geqq \frac{r(r+\pi'+1)}{r+1}.$$

Die Differenz

$$\tau' = R(r+1) - r(r+\pi'+1) = \pi' - (q+1)(r+1)$$

giebt an, dass es auf f ein $\infty^{\tau'}$-System von ∞^r-Schaaren $\gamma_R^{(r)}$ giebt, von denen jede Schaar durch σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die einander gleichsingulär sind, ausgeschnitten werden kann. Durch $\tau' + r$ Punkte von f ist eine Gruppe G_R^1 einer solchen Schaar $\gamma_R^{(r)}$ endlich-

*) S. den in der Einleitung citirten Aufsatz von Hrn. Brill und dem Verf., Math. Ann. VII., pag. 290.

vieldeutig bestimmt, und alsdann durch *eine* Gruppe die ganze Schaar eindeutig.

Es sei zweitens für die oben genannte ∞^t-Schaar ψ die $\infty^{\pi-1}$-Schaar von σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet, welche alle mit einer gegebenen solchen Curve, φ, gleichsingulär sind, also

$$t = \pi - 1.$$

Die Aufgabe sei, eine Gruppe G_Q^1 so zu bestimmen, dass noch ∞^r-Curven aus dieser Schaar hindurchgehen, also

$$S = Q, \quad t' = r.$$

Von den Q Punkten können dann

$$Q - (r+1)(Q-\pi+1+r)$$

willkürlich genommen werden; aber da G_Q^1 nach dem Satze (VII′) noch einer ∞^q-Schaar angehört, wo

$$q = Q - \pi + 1 + r,$$

so hat man, wenn das vorgelegte Problem lösbar sein soll:

$$Q - (r+1)(Q-\pi+1+r) \geqq q,$$

und hieraus

$$(\beta) \qquad Q \geqq \frac{q(q+\pi+1)}{q+1}.$$

Die Differenz

$$\tau = Q(q+1) - q(q+\pi+1) = \pi - (q+1)(r+1)$$

giebt hier an, dass es auf f ein ∞^τ-System solcher ∞^q-Schaaren $\gamma_Q^{(q)}$ giebt, von denen jede Schaar durch σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden kann, und die ausserdem immer je *eine* Gruppe enthalten, welche durch eine mit der gegebenen Curve φ gleichsinguläre σ-Curve ausgeschnitten wird. Durch $\tau + q$ Punkte von f ist eine Gruppe G_Q^1 einer solchen Schaar $\gamma_Q^{(q)}$, wenn zugleich die G_Q^1 ausschneidende Curve mit φ gleichsingulär sein soll, endlich-vieldeutig bestimmt; und durch diese Gruppe und φ dann die ganze Schaar eindeutig.

Ist φ nicht gegeben, und stellt man also die Bedingung nur so, dass die durch G_Q^1 gehenden ∞^r σ-Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung *mit einander* gleichsingulär sein sollen, so kann man von G_Q^1 $\tau' + q$ Punkte willkürlich annehmen, wenn $\tau' + q \overline{\gtrless} Q$, und alle, wenn $\tau' + q > Q$; denn da sich nach (VII) die Schaaren $\gamma_Q^{(q)}$ und $\gamma_R^{(r)}$ eindeutig entsprechen, so giebt es von beiden gleichviel Systeme, nämlich $\infty^{\tau'}$. — Ein eindeutiges Entsprechen zweier endlich-vieldeutigen Probleme findet aber im Allgemeinen nicht statt, da hierzu die Differenz

$$\tau' - \tau = \pi' - \pi$$

und τ zu 0 werden müsste.

Die Bedingung (α) giebt die Minimalwerthe der Zahl R von Punkten, für welche specielle Schaaren $\gamma_R^{(r)}$, die von mit einander gleichsingulären σ-Curven ausgeschnitten werden, auf f im Allgemeinen bestehen können; und die Bedingung (β) die Minimalwerthe der Zahl Q von Punkten, für welche specielle Schaaren $\gamma_Q^{(q)}$, die von σ-Curven ausgeschnitten werden, auf f im Allgemeinen bestehen können.

Als *Beispiel* sei eine

$$f_6(a_1{}^3, a_2{}^3),$$

d. h. eine Curve 6^{ter} Ordnung, welche die Punkte a_1 und a_2 zu dreifachen Punkten hat, zu Grunde gelegt. Für die σ-Curven sei

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1;$$

also:

$$n = 6, \quad p = 4, \quad \pi = 6, \quad \pi' = 8.$$

Die 12 Schnittpunkte von f_6 mit einer σ-Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $C_3(a_1, a_2)$, seien zunächst in zwei Gruppen

$$G_Q = G_5, \quad G_R = G_7$$

zerlegt. Wenn nun durch eine solche G_7 noch ∞^1 der $C_3(a_1, a_2)$ hindurchgehen, so müssen nach (VII) durch die G_5 noch ∞^1 solcher $C_3(a_1, a_2)$ gehen, welche zugleich mit der durch (G_5, G_7) gehenden gleichsingulär sind, d. h. dieselbe in a_1 und in a_2 berühren. Um die Gruppe G_7 zu construiren, kann man $\tau' + r = 4 + 1 = 5$ Punkte Γ_5 derselben willkürlich auf f annehmen; die übrigen 2 Punkte sind dann auf 11 verschiedene Weisen wählbar. Denn transformirt man die Curve f_6 eindeutig mittelst der ∞^2-Schaar von $C_3(a_1, a_2)$, welche durch die Γ_5 gehen, so erhält man eine Curve F_7, deren 11 Doppelpunkten die gesuchten Paare von f_6 entsprechen. Um eine G_5 zu construiren, kann man entweder die Tangentenrichtungen in a_1, a_2 der durch G_5 gehenden mit einander gleichsingulären $C_3(a_1, a_2)$ und ausserdem 3 Punkte von G_5 beliebig annehmen, wodurch dann die übrigen 2 Punkte von G_5 auf 18 verschiedene Weisen bestimmt werden können; denn die durch Transformation von f_6 mittelst der ∞^2-Schaar von C_3 entstehende Curve F_9 hat zwei 3-fache und 18 Doppelpunkte. Oder man kann alle 5 Punkte von G_5 willkürlich wählen, hat aber dann für die durch G_5 gehenden $C_3(a_1, a_2)$, welche eine ∞^1-Schaar bilden sollen, gemeinsame Richtungen in a_1, a_2, welche wieder auf eine endliche Anzahl von Arten (eindeutig, wie man zeigen kann) bestimmt sind.

Nach Formel (β) wird es weiter auf f_6 auch ∞^1-Schaaren von Gruppen G^Q von je 4 Punkten geben, ausgeschnitten von $C_3(a_1, a_2)$.

Nimmt man in der That für $G_R = G_8$ die 6 Schnittpunkte einer Geraden und zwei Punkte b_1, b_2 von f_6, so werden die $G_4^{(1)}$ ausgeschnitten von den Kegelschnitten $C_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Durch eine solche G_4 gehen dann noch ∞^2 Curven $C_3(a_1, a_2)$, welche den betreffenden Kegelschnitt C_2 in a_1 und a_2 berühren; nämlich C_2, verbunden mit sämmtlichen Geraden. Die Gruppe G_8 ist durch 4 Punkte, aber dann auf 6 Weisen, indem man nämlich durch irgend 2 dieser Punkte eine Gerade legt, bestimmt. Die Gruppe G_4 ist, wenn die Richtungen der durch sie hindurchgehenden ∞^2 Curven $C_3(a_1, a_2)$ in a_1, a_2 gegeben sind, durch 1 Punkt c_1 auf $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ Weisen bestimmt, da man die 3 übrigen Punkte aus dem Schnitt der zu den $C_3(a_1, a_2)$ gehörigen $C_2(a_1, a_2, c_1)$ auswählen kann; wenn aber jene Richtungen nicht gegeben sind, durch 3 Punkte auf 3 Weisen.

Endlich liegen auf f_6 Schaaren von Gruppen von je 3 Punkten, ausgeschnitten durch $C_3(a_1, a_2)$, auf welche aber die Betrachtungen dieses Paragraphen nach dem am Anfange desselben Gesagten nicht mehr anwendbar sind, wohl aber die Sätze der vorhergehenden Paragraphen: es sind die Gruppen, welche von den Geraden durch a_1, bez. von den Geraden durch a_2 ausgeschnitten werden.

Erlangen, Juli 1879.

Beschreibung der Ausartungen der Raumcurve dritter Ordnung.

(Statt der dritten Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie", cf. Math. Ann. Bd. X, S. 6 oben und Bd. XIII, S. 480).

Von

H. Schubert in Hamburg.

In meinen beiden ersten Abhandlungen der „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X, S. 1—116 und Bd. 13, S. 429—539) versprach ich die Redaction einer dritten Abhandlung, welche die *Raumcurve dritter Ordnung* vom Standpunkte der abzählenden Geometrie aus behandeln sollte. Inzwischen habe ich jedoch ein bei Teubner 1879 erscheinendes Buch abgefasst, welches unter dem Titel „Kalkül der abzählenden Geometrie" die Grundlagen des Abzählungskalküls mit Hinzuziehung leichter Beispiele von neuem entwickelt, und ausser einem grossen Theile meiner früheren Untersuchungen auch viele, bisher noch nicht publicirte Ergebnisse enthält. Zu diesen letzteren gehören auch die wichtigsten von denjenigen Resultaten, welche, obwohl sie schon 1874 (cf. Zeuthen's Bericht über meine Preisschrift in d. Kopenhag. Acad.-Ber. v. 1875, Heft 1) von mir gefunden sind, dazu bestimmt waren, den wesentlichsten Inhalt jener dritten Abhandlung zu bilden. (Cf. § 25. meines Kalk. d. abz. Geom.) Unter diesen Umständen darf ich wohl die Fortsetzung meiner „Beitr. zur abz. Geom." unterlassen und die Leser der beiden ersten Abh. auf mein Buch verweisen. Nur eine kurze Beschreibung der von mir aufgefundenen 11 *Ausartungen* der Raumcurve dritter Ordnung soll hier für diejenigen Mathematiker Platz finden, welche der neueren Abzählungsmethode fern stehen, aber trotzdem sich für die Gestalt jener Ausartungen, vielleicht aus analytisch-geometrischen Gründen, interessiren.

Unsere Raumcurve C_3 ist dritter Ordnung, vierten Ranges, dritter Classe, d. h. sie besitzt immer auf einer beliebigen Ebene drei ihrer Punkte, lässt vier ihrer Tangenten eine beliebige Gerade schneiden und schickt durch einen beliebigen Punkt drei ihrer Schmiegungsebenen. Diese Eigenschaften muss auch eine *ausgeartete* C_3 haben, d. h. eine solche C_3, bei welcher der Ort der Punkte oder der Ort der Tangenten oder der Ort der Schmiegungsebenen oder zwei dieser Oerter oder alle drei Oerter *zerfallen* sind. Wir denken uns nun zur Bestimmung einer C_3 eine einzelne oder zusammengesetzte, 11-*fache* Bedingung gegeben, welche keine andern Festsetzungen enthalte, als solche über die Lage der drei eben erwähnten Oerter, wie z. B. die 11-fache Bedingung, 11 gegebene Flächen zu berühren, oder die $(2+2\cdot1+2\cdot1+3+2)$-fache Bedingung, dass die C_3 durch einen gegebenen Punkt gehen, zwei gegebene Gerade schneiden, zwei gegebene Ebenen berühren, sowie eine gegebene Gerade als Tangente und eine gegebene Ebene als Schmiegungsebene besitzen soll. Durch eine derartige Bedingung sind im Allgemeinen ∞^1 Raumcurven C_3 bestimmt, da die Constantenzahl der C_3 12 beträgt. Unter den so bestimmten Raumcurven befindet sich aber auch eine endliche Anzahl von ausgearteten Raumcurven, und zwar kann das Ausarten, wie auch die gegebene, 11-fache Lagebedingung beschaffen sein mag, nur gemäss einer oder mehrerer der folgenden 11 Ausartungsdefinitionen stattfinden. Man beachte, dass jede dieser Definitionen eine Curve C_3 mit der Constantenzahl **11** ergiebt und dabei die gegenseitige Lage des Punktorts, des Tangentenorts und des Schmiegungsebenenorts genau feststellt.

1) Bei der Ausartung λ bilden die Punkte der C_3 eine *ebene* Curve dritter Ordnung vierten Ranges. Die Tangenten der C_3 sind die Tangenten dieser Curve, und die Schmiegungsebenen der C_3 bilden drei Ebenenbüschel, welche die drei Wendetangenten der ebenen Curve als Axen haben.

2) Bei der Ausartung $\varkappa$ wird der Punktort durch eine ebene Curve dritter Ordnung dritten Ranges gebildet. Der Tangentenort setzt sich aus den Tangenten dieser ebenen Curve und den Strahlen eines Strahlbüschels zusammen, dessen Scheitel in dem Rückkehrpunkte der Curve liegt, und dessen Ebene durch ihre Rückkehrtangente geht, ohne im Allgemeinen mit der Ebene der Curve zusammenzufallen. Der Ort der Schmiegungsebenen besteht aus dem doppelt zu rechnenden Ebenenbüschel, dessen Axe die Rückkehrtangente ist, und aus dem einfach zu rechnenden Ebenenbüschel, dessen Axe die Wendetangente ist.

3) Bei der Ausartung ω wird der Punktort durch einen Kegelschnitt und eine Gerade g gebildet, welche den Kegelschnitt in p *schneidet*. Der Tangentenort besteht aus den Tangenten des Kegelschnitts und den Strahlen *eines doppelt zu rechnenden* Strahlbüschels, dessen Scheitel p ist, und dessen Ebene die Gerade g mit der den Kegelschnitt in p berührenden Tangente t verbindet. Die Schmiegungsebenen bilden einen dreifach zu rechnenden Ebenenbüschel, dessen Axe die Tangente t ist.

4) Bei der Ausartung ϑ bilden die Punkte einen Kegelschnitt und

eine Gerade g, welche den Kegelschnitt in p *berührt*. Der Tangentenort besteht aus den Tangenten des Kegelschnitts und den Strahlen *zweier* Strahlbüschel, deren Scheitel der Punkt p ist und deren Ebenen durch g gehen, ohne im Allgemeinen mit einander oder mit der Ebene des Kegelschnitts zusammenzufallen. Die Schmiegungsebenen bilden einen dreifach zu rechnenden Ebenenbüschel, dessen Axe die Kegelschnitttangente g ist.

5) Bei der Ausartung δ bilden die Punkte eine doppelt zu rechnende Gerade g und eine einfach zu rechnende Gerade h, welche g in p schneidet. Der Ort der Tangenten besteht aus den Strahlen eines doppelt zu rechnenden Strahlbüschels, dessen Scheitel in den Punkt p fällt, und dessen Ebene die Verbindungsebene von g und h ist, und aus den Strahlen zweier einfach zu rechnender Strahlbüschel, deren Scheitel auf g liegen, und deren Ebenen durch g gehen, jedoch so, dass die beiden Scheitel und die beiden Ebenen sowohl von einander, wie auch von dem Punkte p resp. der Verbindungsebene von g und h *verschieden* sind. Der Ort der Schmiegungsebenen ist der dreifach zu rechnende Ebenenbüschel, dessen Axe g ist.

6) Bei der Ausartung η bilden die Punkte eine dreifach zu rechnende Gerade g, welche zugleich die Axe eines Ebenenbüschels ist, dessen dreifach zu rechnende Ebenen die Schmiegungsebenen sind. Der Ort der Tangenten ist in 4 verschiedene Strahlbüschel zerfallen, deren 4 Scheitel auf g liegen und deren 4 Ebenen durch g gehen. Jedoch sind diese 4 auf g liegenden Punkte und diese 4 durch g gehenden Ebenen in ihrer Lage von einander *abhängig*, und zwar so, dass, wenn die 4 Punkte und 3 Ebenen resp. die 4 Ebenen und 3 Punkte festgelegt sind, sich die vierte Ebene resp. der vierte Punkt *vierdeutig* bestimmt. Hiermit hängt zusammen, dass es im Allgemeinen überhaupt keine Raumcurve giebt, welche 4 willkürlich gegebene Gerade zu Tangenten hat, dass vielmehr diejenigen Strahlen des Raums, welche mit 3 gegebenen Geraden zusammen ein Tangentenquadrupel einer cubischen Raumcurve bilden können, einen *Liniencomplex vierten Grades* ausfüllen. (Cf. Voss in d. Math. Ann. Bd. XIII, S. 169.)

Die Beschreibung der 5 übrigen Ausartungen der C_3 erhält man aus den Beschreibungen von λ, $\varkappa$, ω, ϑ, δ durch duale Uebertragung. Die Ausartung η entspricht *sich selbst* dual.

Aus den aufgestellten Definitionen kann man durch weitere Specialisirung höhere Ausartungen mit noch niederer Constantenzahl auf mannigfache Weise gewinnen. Nimmt man z. B. bei der Ausartung ω statt des allgemeinen Kegelschnitts diejenige Kegelschnittausartung, bei welcher die Punkte zwei Gerade bilden, so erhält man folgende Ausartung der C_3 mit der Constantenzahl 10:

Die Punkte bilden drei Gerade g, h, k, so dass h und k sich nicht schneiden, g aber sowohl h wie k schneidet, und zwar h in p und k in q. Die Tangenten bilden zwei doppelt zu rechnende Strahlbüschel, und zwar hat der eine seinen Scheitel in p, seine Ebene in der Verbindungsebene von g und h, der andere seinen Scheitel in q, seine Ebene in der Verbindungsebene von g und k. Die Schmiegungsebenen bilden einen dreifach zu rechnenden Ebenenbüschel, dessen Axe g ist.

Es ist nicht schwer, einige der obigen 11 Beschreibungen auch analytisch-geometrisch aus den Gleichungen der C_3 zu erkennen. Der Auffindung der *genauen* Definitionen *sämmtlicher* 11 Ausartungen nach analytisch-geometrischer Methode steht jedoch der Umstand entgegen, dass man bei dieser Methode entweder ein punktgeometrisches oder ein liniengeometrisches oder ein ebenengeometrisches Verfahren einschlägt, nicht aber gleichzeitig nach allen 3 Arten verfährt. Es erwächst daher für die analytische Geometrie die Aufgabe, die Darstellung der cubischen Raumcurve so einzurichten, dass man daraus *alle* Ausartungen ohne Schwierigkeit gewinnen kann.

Potsdam, im Juli 1879.

Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen.

Von Felix Klein in München.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Im Verfolg meiner Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen behandele ich im Nachstehenden die Transformation *elfter* Ordnung. Es ist dabei mein besonderes Ziel gewesen, die Gleichung *elften* Grades, welche in diesem Falle auftritt, in einfachster Form explicite herzustellen. Im XIV^ten Bande dieser Annalen, p. 423—424, habe ich bereits gezeigt, dass man dieser Gleichung folgende Gestalt geben kann:

$$J = F(z),$$

wo $F(z)$ eine *ganze* Function elften Grades der Unbekannten z mit nur numerischen Coefficienten ist, die einen cubischen Factor dreifach enthält, während $(F(z) - 1)$ einen biquadratischen Doppelfactor besitzt. Aber zugleich bemerkte ich, dass diese Angaben noch nicht zur vollen Bestimmung der Function F ausreichen. Ich combinire daher mit den damaligen Betrachtungen nunmehr ein im XV^ten Bande pag. 277 für einen beliebigen Transformationsgrad ausgesprochenes Resultat. *Dasselbe lehrt bei* $\frac{n-1}{2}$ *Variablen* y *ein System von Collineationen kennen, welches mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph ist.* Dementsprechend giebt es ein „Problem der y", bei uns vom 660^ten Grade, und eine geeignete Specialisirung desselben liefert zunächst in übersichtlichster Weise die Galois'sche Resolvente 660^ten Grades der Modulargleichung, dann weiter die gewollte Gleichung elften Grades, und zwar in zwei Formen, von denen jede ihre Vorzüge hat und deren eine eben jene $J = F(z)$ ist. Ich habe in § 10. die so gefundenen Resultate zusammengestellt. Die folgenden Paragraphen vermitteln sodann den Uebergang zu der einfachen Multiplicatorgleichung *zwölften* Grades, die ich Bd. XV, pag. 88, angab, und liefern so die Möglichkeit, die neuen Gleichungen elften und 660^ten Grades auf transcendentem Wege zu lösen.

Die hiermit aufgezählten Resultate habe ich bereits, doch ohne Beweis, in zwei an Herrn Brioschi gerichteten Briefen vom 9. April und 11. Juni 1879, von denen der eine der *Accademia dei Lincei*, der andere dem *Istituto Lombardo* vorgelegt wurde, veröffentlicht; andererseits habe ich die ganze Entwickelung, wie ich sie hier gebe, im Laufe des verflossenen Sommersemesters in einer Vorlesung über algebraische Gleichungen zum Vortrag gebracht.

§ 1.

Ueber gewisse elfblättrige Riemann'sche Flächen*).

Die Wurzel z der Gleichung

$$J = F(z), \tag{1}$$

von der soeben die Rede war, ist, wie ich l. c. zeigte, so in Bezug auf J verzweigt, dass bei $J = \infty$ sämmtliche elf Blätter im Cyklus zusammenhängen, bei $J = 0$ dreimal drei, bei $J = 1$ viermal zwei. Nun behauptete ich ebendort, *dass es nicht weniger als zehn wesentlich verschiedene Riemann'sche Flächen giebt, welche dieselbe Eigenschaft besitzen* (von denen aber nur zwei bei der Transformationstheorie in Betracht kommen). Es ist heute meine nächste Aufgabe, diese Behauptung auf dem damals bereits angedeuteten, rein geometrischen Wege zu beweisen.

Die elf Blätter der Riemann'schen Fläche will ich vorab, wie ich es früher that, der Anschaulichkeit halber zur Hälfte schraffiren, nämlich soweit sie die positive Halbebene J überdecken. Sodann zerschneide man die Blätter sämmtlich längs desjenigen Stückes der reellen Axe J, welches im Endlichen von $J = 0$ bis $J = 1$ reicht. Unsere Fläche geht dann, wie aus der vorausgesetzten Multiplicität der Verzweigungspunkte folgt, in eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche über, deren Blätter nach wie vor bei $J = \infty$ im Cyklus verbunden sind. Offenbar kann man dieselbe durch stetige Deformation in das Innere eines Kreises ausbreiten, das von einem beliebigen seiner Punkte aus in 22 abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte Sectoren zerlegt ist. Will man die Punkte $J = 0$ als Ecken gestalten und die zwischen ihnen befindlichen Stücke der Kreisperipherie geradlinig zeichnen, so hat man das Elfeck der Figur (8) auf der meiner früheren Arbeit (Bd. XIV) beigegebenen Tafel.

Die so hergestellte Figur modificire ich nun mit Rücksicht auf den speciellen hier vorliegenden Zweck in der Art, wie es Figur a auf der diesesmal beigefügten Tafel versinnlichen soll. Statt das *Innere*

*) Dieser Paragraph knüpft unmittelbar an die schon soeben citirte Arbeit an: *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen*, Ann. XIV, p. 417—427.

des Elfecks als Abbildung der zerschnittenen Fläche zu betrachten, wähle ich das *Aeussere* desselben und ersetze die früher im Mittelpunkte zusammenlaufenden 22 Halbdiagonalen durch ebensoviele ins Unendliche auslaufende gerade Linien. Ausserdem habe ich zur Bezeichnung der verschiedenen Blätter in die nicht schraffirten Felder die Ziffern $1, 2, \cdots, 11$ hineingesetzt.

Will man nun wissen, wie viele verschiedene elfblättrige Flächen es giebt, welche die von uns verlangte Lage und Multiplicität der Verzweigungspunkte besitzen, so ist die Frage augenscheinlich die (Annalen XIV, pag. 424): *Auf wie viele Weisen ist es möglich, die* 22 *Halbkanten der in Figur a vorhandenen inneren Begränzung derart zu einem aus* 11 *Stücken bestehenden, doppelt überdeckten Linienzuge zusammenzubiegen, dass von den* 11 *Punkten* $J=0$ *dreimal drei und von den* 11 *Punkten* $J=1$ *viermal zwei zusammenkommen?* — Die Figur b (die wohl ohne besondere Erläuterung verständlich ist) soll an einem Beispiele erläutern, wie dieses Zusammenbiegen gemeint ist.

Die so formulirte Frage wird durch die Schemata I, $\cdots$, VI (auf der beigegebenen Tafel) beantwortet. Dieselben sollen nur die Gestalt des elfgliedrigen Linienzuges in jedem Falle angeben. Die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte entsprechen allemal $J=0$, die durch gerade Striche markirten $J=1$. Das Schema V bezieht sich auf den in Figur b dargestellten Fall; die Schemata I sind, meinen früheren Erläuterungen zufolge, die einzigen, welche auf die aus der Transformationstheorie hervorgehenden Gleichungen elften Grades passen. —

Es giebt, diesen Schematen nach, in der That *zehn* Möglichkeiten der Zusammenbiegung. Dass es auch nicht mehr giebt, ist ebenso evident; denn offenbar gelingt es nicht, noch andere elfgliedrige Linienzüge der von uns gewünschten Art herzustellen. — Somit ist der zu Eingang des Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 2.

Gruppe der Monodromie.

Es wird sich nunmehr darum handeln, unter diesen zehn Fällen diejenigen beiden, welche allein für die Transformationstheorie Bedeutung haben, durch ein einfaches Kriterium zu kennzeichnen. Ich wähle als solches die *Gruppe der Monodromie**). Wenn man J in seiner Ebene beliebige geschlossene Wege beschreiben lässt, so werden, wie man weiss, in den beiden in Betracht kommenden Fällen die 11 Wurzeln der Gleichung $J=F(z)$ nur auf 660 Weisen vertauscht, und diese 660 Vertauschungen bilden die bekannte Gruppe, welche Galois zu-

*) Hermite in den Comptes Rendus von 1851.

erst auffand und über die Betti*) die ersten ausführlichen Untersuchungen veröffentlichte. Diese Gruppe enthält nur solche Vertauschungen, deren Periode 1, 2, 3, 5, 6, 11 ist; und diesen Umstand will ich hier dazu benutzen, um zu zeigen, dass die Gruppe der Monodromie in den acht für uns unbrauchbaren Fällen eine andere ist, *dass also die beiden in Betracht kommenden Flächen durch ihre Verzweigungspunkte und die Gruppe der Monodromie zusammen völlig charakterisirt sind.*

Der betr. Nachweis stellt sich in sämmtlichen Fällen durchaus analog. Ich erläutere daher nur den Fall der Figur b (Schema V). Man lasse J in seiner Ebene einmal den Unendlichkeitspunkt umkreisen, eine Operation, die ich S nennen will. Dann gehen (wie die Figur aufweist) die Wurzeln

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

bei richtig gewähltem Bewegungssinne in folgende über:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 1.$$

Andererseits lasse man J den Punkt $J = 1$ umkreisen, eine Operation, die T heissen soll. So wird aus

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

wie wieder die Figur zeigt, resp.

$$2,\ 1,\ 10,\ 4,\ 9,\ 7,\ 6,\ 8,\ 5,\ 3,\ 11.$$

Jetzt mache man zuerst die Operation T, dann dreimal die Operation S. So entsteht aus

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

bez.

$$5,\ 4,\ 2,\ 7,\ 1,\ 10,\ 9,\ 11,\ 8,\ 6,\ 3;$$

die Operation TS^3 *vertauscht also folgende Wurzeln cyklisch:*

$$(1,\ 5)\ (2,\ 4,\ 7,\ 9,\ 8,\ 11,\ 3)\ (6,\ 10).$$

Diese Cyklen enthalten bez. 2 und 7 Buchstaben; die Periode von TS^3 ist also 14, und die Gruppe der Monodromie von der Gruppe der 660 Substitutionen verschieden, was zu beweisen war**).

§ 3.

Die Gruppe der 660 y-Substitutionen.

Den soeben bewiesenen Satz benutze ich jetzt in der Art, dass ich mich fortan mit einem Probleme beschäftige, welches jedenfalls die richtige Gruppe von 660 Vertauschungen besitzt; *gelingt es mir dann, im Verlaufe der Untersuchung auf eine Gleichung* $J = F(z)$ *zu kommen, wo* $F(z)$ *einen cubischen Factor cubisch und* $(F(z) - 1)$ *einen*

*) Annali di Scienze matematiche etc. di Tortolini, t. IV (1853).

**) Auch in den anderen Fällen genügt es, die Operation TS^3 zu betrachten.

biquadratischen Factor doppelt enthält, so habe ich die gesuchte Gleichung gefunden.

Zu diesem Zwecke betrachte ich das System von 660 Collineationen bei 5 Variablen, von dem schon in der Einleitung die Rede war. Indem ich die quadratischen Reste modulo 11 als Indices wähle und so ordne, wie sie aus einem derselben durch Multiplication mit 4 hervorgehen, nenne ich die Variablen

$$y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_9,\ y_3.$$

Die 660 Collineationen erwachsen dann durch Wiederholung und Combination der folgenden zwei Operationen $\left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)$:

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} S) & y_1' = \varrho y_1,\quad y_4' = \varrho^4 y_4,\quad y_5' = \varrho^5 y_5,\quad y_9' = \varrho^9 y_9,\quad y_3' = \varrho^3 y_3, \\ T) & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{-11}\cdot y_1' = (\varrho^9-\varrho^2)y_1 + (\varrho^4-\varrho^7)y_4 + (\varrho^3-\varrho^8)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^5-\varrho^6)y_9 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_4' = (\varrho^4-\varrho^7)y_1 + (\varrho^3-\varrho^8)y_4 + (\varrho^5-\varrho^6)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^1-\varrho^{10})y_9 + (\varrho^9-\varrho^2)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_5' = (\varrho^3-\varrho^8)y_1 + (\varrho^5-\varrho^6)y_4 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^9-\varrho^2)y_9 + (\varrho^4-\varrho^7)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_9' = (\varrho^5-\varrho^6)y_1 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_4 + (\varrho^9-\varrho^2)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^4-\varrho^7)y_9 + (\varrho^3-\varrho^8)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_3' = (\varrho^1-\varrho^{10})y_1 + (\varrho^9-\varrho^2)y_4 + (\varrho^4-\varrho^7)y_5 \\ \qquad\qquad + (\varrho^3-\varrho^8)y_9 + (\varrho^5-\varrho^6)y_3, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

denen sich als einfachste Combination die cyklische Vertauschung zugesellt:

$$(2\text{b})\quad C)\quad y_1' = y_4,\quad y_4' = y_5,\quad y_5' = y_9,\quad y_9' = y_3,\quad y_3' = y_1.$$

Und zwar lassen sich sämmtliche 660 Collineationen durch die beiden Symbole angeben:

$$C^\alpha S^\beta,\qquad C^\alpha S^\beta T S^\gamma,$$

wo man dem α die fünf Werthe 0, 1, 2, 3, 4, dem β und dem γ die 11 Werthe 0, 1, 2, $\cdots$, 10 zu ertheilen hat. —

Diesem Substitutionssysteme entspricht im Sinne meines letzten Aufsatzes (Annalen XV, pag. 256) ein „*Problem der y*“, welches in allgemeinster Fassung so lautet: *Es sind sämmtliche ganze Functionen der y, die sich bei den* 660 *Collineationen* (2) *nicht ändern, ihrem Zahlenwerthe nach gegeben; man soll die unbekannten y berechnen.* Diess Problem hat jedenfalls die gewünschte Galois'sche Gruppe, und mit ihm werde ich mich daher jetzt eine Zeit lang beschäftigen.

§ 4.

Ungeändert bleibende ganze Functionen der y.

Es ist nicht meine Absicht, alle ungeändert bleibenden ganzen Functionen der y mitzutheilen; dies würde jedenfalls eine weitläufige und vielleicht eine schwierige Aufgabe sein. Vielmehr definire ich nur drei solche Functionen, die ich später gebrauche. Die erste ist die Function *dritten* Grades:

$$(3) \qquad \nabla = y_1^2 y_9 + y_4^2 y_3 + y_5^2 y_1 + y_9^2 y_4 + y_3^2 y_5,$$

offenbar die niedrigste ungeändert bleibende Function. Die zweite ist ihre *Hesse'sche Determinante* vom fünften Grade:

$$(4) \qquad H = \begin{vmatrix} y_9 & 0 & y_5 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_9 & y_4 \\ y_5 & 0 & y_1 & 0 & y_3 \\ y_1 & y_9 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & y_4 & y_3 & 0 & y_5 \end{vmatrix},$$

deren erste Unterdeterminanten später von Interesse werden. Die dritte ist eine *Function elften Grades:*

$$(5) \qquad C = (y_1^{11} + y_4^{11} + y_5^{11} + y_9^{11} + y_3^{11}) \cdots,$$

die man etwa definiren kann als numerisches Multiplum der Summe der elften Potenzen derjenigen 660 Werthe, deren y_1 bei den 660 Collineationen theilhaftig wird. Mit Rücksicht auf das erste in (5) angegebene Glied finde ich:

$$(5\text{b}) \qquad C = \frac{11}{124}(\Sigma y^{11}).$$

Aus C und ∇ werde ich später die rationale Function 33ten Grades und nullter Dimension:

$$\frac{C^3}{\nabla^{11}}$$

zusammensetzen.

§ 5.

Elfwerthige ganze Functionen der y.

Um die niedrigsten elfwerthigen Functionen der y zu finden beginne ich damit, aus der Gesammtheit der Collineationen (2) eine Untergruppe vom Index 11 (die sonach 60 Substitutionen enthält) auszuscheiden. Dies geschieht leicht, wenn man die eindeutige Beziehung benutzt, welche zwischen den 660 Collineationen und denjenigen ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv R \pmod{11},$$

die modulo 11 verschieden sind, besteht, und dann die Betti'schen Formeln heranzieht, welche ich Annalen XIV, p. 419 reproducirt habe.

Offenbar kann man die beiden Collineationen S, T den folgenden beiden ω-Substitutionen entsprechend setzen:

$$\omega' = \omega + 1, \qquad \omega' = -\frac{1}{\omega},$$

(aus denen wieder alle anderen durch Wiederholung und Combination hervorgehen). Dann entsprechen den cyklischen Vertauschungen C^α der fünf y:

$$(y_1, y_4, y_5, y_9, y_3),$$

wie man leicht findet, die Wiederholungen von

$$\omega' = 4\omega.$$

Nun erwächst nach den genannten Formeln eine Untergruppe vom Index 11, wenn man die Substitution

$$\omega' = 4\omega$$

mit folgender Substitution von der Periode 2 verbindet:

$$\omega' = \frac{\omega - 2}{\omega - 1} = \frac{-1}{\omega - 1} + 1;$$

die Untergruppe enthält dann von selbst die Substitution

$$\omega' = -\frac{1}{\omega}.$$

Indem wir zu den y zurückgehen, haben wir also die cyklische Vertauschung C der y mit der Collineation $S^{-1}TS$ zu combiniren. Die entstehende Untergruppe umfasst von selbst die Collineation T.

Aber man kennt von vorneherein eine sehr einfache Function der y, die bei den Operationen C und T invariant bleibt: das ist die *Summe* der y:

$$p_\infty = y_1 + y_4 + y_5 + y_9 + y_3. \tag{6}$$

Wendet man auf sie die Collineation $S^{-1}TS$ an, so kommt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} p_0 = \frac{1}{\sqrt{-11}} \{ & y_1(2(\varrho^7 - \varrho^1) + (\varrho^9 - \varrho^{10})) \\ & + y_4(2(\varrho^6 - \varrho^4) + (\varrho^3 - \varrho^7)) \\ & + y_5(2(\varrho^2 - \varrho^5) + (\varrho^1 - \varrho^6)) \\ & + y_9(2(\varrho^8 - \varrho^9) + (\varrho^4 - \varrho^2)) \\ & + y_3(2(\varrho^{10} - \varrho^3) + (\varrho^5 - \varrho^8))\}, \end{aligned} \tag{7}$$

und vertauscht man hier die fünf y cyklisch, so entstehen noch vier weitere Ausdrücke, die

$$(8) \qquad p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$$

genannt werden sollen. — Da p_∞ bei 10 Collineationen der Untergruppe ungeändert bleibt, so ist es gegenüber der Gesammtheit ihrer Collineationen sechswerthig; *d. h. die sechs Ausdrücke p werden bei den 60 Collineationen der Untergruppe unter sich permutirt.* Die symmetrischen Functionen der sechs p bleiben also bei sämmtlichen Collineationen der Untergruppe ungeändert; sie sind also gegenüber den 660 Collineationen (2) elfwerthig, sie müssten denn zu den überhaupt ungeändert bleibenden Functionen gehören.

Demnach berechne man, um möglichst niedrige elfwerthige Functionen zu haben, die niedrigsten nicht verschwindenden symmetrischen Functionen der p, also etwa die Summe der Quadrate und die Summe der Cuben. So findet man folgende Functionen:

1) *Die Function zweiten Grades:*

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varphi_0 = \; & (y_1^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_9^2 + y_3^2) \\ & - (y_1 y_9 + y_4 y_3 + y_5 y_1 + y_9 y_4 + y_3 y_5) \\ & + \frac{-1+\sqrt{-11}}{2} (y_1 y_4 + y_4 y_5 + y_5 y_9 + y_9 y_3 + y_3 y_1), \end{aligned}$$

2) *Die Function dritten Grades:*

$$(10) \qquad \begin{aligned} f_0 = \; & (y_1^3 + y_4^3 + y_5^3 + y_9^3 + y_3^3) \\ & + 3(y_1^2 y_3 + y_4^2 y_1 + y_5^2 y_4 + y_9^2 y_5 + y_3^2 y_9) \\ & - 3(y_1 y_4 y_9 + y_4 y_5 y_3 + y_5 y_9 y_1 + y_9 y_3 y_4 + y_3 y_1 y_5) \\ & + \frac{1+\sqrt{-11}}{2} (y_1^2 y_5 + y_4^2 y_9 + y_5^2 y_3 + y_9^2 y_1 + y_3^2 y_4) \\ & - \frac{1+\sqrt{-11}}{2} (y_1 y_4 y_5 + y_4 y_5 y_9 + y_5 y_9 y_3 + y_9 y_3 y_1 + y_3 y_1 y_4) \\ & - (1+\sqrt{-11}) (y_1^2 y_4 + y_4^2 y_5 + y_5^2 y_9 + y_9^2 y_3 + y_3^2 y_1). \end{aligned}$$

Die Function φ_0 stimmt mit $\frac{-1+\sqrt{-11}}{12} \Sigma p^2$ überein; die Function f_0 ist von $\frac{-\sqrt{-11}}{12} \Sigma p^3$ nur um ein Glied verschieden, das ein numerisches Multiplum von ∇ (3) ist. — Die elf Werthe, welche φ_0 oder f_0 bei den 660 Collineationen annimmt, und die ich φ_ν, bez. f_ν nennen will, erwachsen aus φ_0 und f_0, wenn man der Collineation S^ν entsprechend statt $y_{\varkappa^2}$ einträgt $\varrho^{\varkappa^2 \nu} \cdot y_{\varkappa^2}$. — Aendert man in diesen Formeln das Vorzeichen von $\sqrt{-11}$, so bekommt man Ausdrücke φ_ν', f_ν', welche ebenfalls elfwerthig sind und die sich auf die zweite Serie von Untergruppen vom Index 11 bezieht, die Betti l. c. ebenfalls angiebt. Da sich aber für sie alle Betrachtungen ganz geradeso gestalten, wie für die φ_ν, f_ν, so werde ich sie in der Folge durchaus bei Seite lassen. — Als elfwerthige Functionen nullter Dimension werde ich später

$$\frac{f_\nu}{\nabla} \text{ und } \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{3}{2}}}$$

gebrauchen.

§ 6.

Specialisirung des y-Problems.

Für unseren speciellen Zweck bedürfen wir nicht des *allgemeinen* Problems der y: in der Schlussgleichung $J = F(z)$, die wir suchen, soll nur der *eine* Parameter J vorkommen. Es handelt sich also darum, aus der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der $y_1 : y_4 : y_5 : y_0 : y_3$ nunmehr in richtiger Weise eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, *eine Curve*, auszuscheiden, die bei den 660 Collineationen in sich übergeht, und das specielle auf sie bezügliche Problem der y durchzuführen.

Von dieser Curve wissen wir, *dass sie das Bild der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung sein muss.* Nun ist, wie ich früher ausführte (Ann. XIV, p. 151) die Galois'sche Resolvente vorgestellt durch eine Riemann'sche Fläche, die 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet ist und deren Blätter bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je 11, sonst aber nirgends zusammenhängen, deren Geschlecht also $= 26$ ist. Auf unserer Curve muss es dementsprechend eine rationale Function J geben, welche jeden Werth in 660 und nur in 660 solchen Punkten annimmt, die durch die 660 Collineationen auseinander hervorgehen; es darf unter diesen Gruppen von je 660 zusammengehörigen Punkten nur drei geben, welche aus einer geringeren Zahl von mehrfach zählenden Punkten bestehen: eine Gruppe von 220 dreifach zählenden Punkten, eine von 330 zweifach zählenden und eine von 60 elffach zählenden. Das Geschlecht der Curve ist natürlich auch gleich 26. — Beachten wir ferner die Gleichung (1) $J = F(z)$. Sie sagt vor allen Dingen aus, dass es auf unserer Curve eine rationale Function z giebt, welche jeden Werth in 60 und nur in solchen 60 Punkten annimmt, die durch die Collineationen einer Untergruppe vom Index 11 auseinander hervorgehen. Die weiteren Eigenschaften der Function F: dass $F(z)$ eine rationale *ganze* Function elften Grades ist, dass es einen cubischen Factor cubisch und $F(z) - 1$ einen biquadratischen Factor doppelt enthalten soll, sind blosse Consequenzen des Gesagten*). Dass $F(z)$ eine ganze

*) Vergl. bei diesen Ueberlegungen die analogen Betrachtungen für die Transformation siebenter Ordnung, welche ich Annalen XIV, p. 434, 456 etwas ausführlicher entwickelt habe.

Function elften Grades ist, ergiebt sich daraus, dass die 660 einem beliebigen Werthe von J entsprechenden Punkte sich gegenüber den 60 Collineationen der Untergruppe in $11 \cdot 60$ spalten, dass aber die 60 Punkte $J = \infty$ alle auseinander durch die Collineationen der Untergruppe hervorgehen. Die anderen Eigenschaften folgen aus dem Verhalten der 220 Punkte $J = 0$ und der 330 Punkte $J = 1$. Es giebt unter den 660 Collineationen, wie bekannt, $2 \cdot 55$ von der Periode 3, 55 von der Periode 2*). Bei jeder Collineation von der Periode 3 bleiben daher 4 Punkte $J = 0$ fest, bei jeder Collineation von der Periode 2 6 Punkte $J = 1$. Aber die Untergruppe vom Index 11 enthält $2 \cdot 10$ Collineationen von der Periode 3, 15 von der Periode 2. Die 220 Punkte $J = 0$ sondern sich also ihr gegenüber in $2 \cdot 20 + 3 \cdot 60$ und die 330 Punkte $J = 1$ in $3 \cdot 30 + 4 \cdot 60$. Und eben dies wird durch die gemeinten Eigenschaften von F ausgesagt.

Wenn es also gelingt, eine Raumcurve zu finden, auf welcher die Function J in der angegebenen Weise, auf welcher überdies eine Function z existirt, so muss sie von selbst zu einer Gleichung $J = F(z)$ hinleiten, die alle charakteristischen Eigenschaften besitzt und also die von uns gesuchte Gleichung ist.

Jetzt ist die niedrigste nur von den Verhältnissen der y abhängige rationale Function, die bei den 60 Collineationen einer Untergruppe ungeändert bleibt, nach § 5.:

$$z = \frac{f_\nu}{\nabla}, \tag{11}$$

eine Function vom dritten Grade. Sie soll, will ich voraussetzen, diejenige Function sein, welche auf unserer Curve jeden Werth in 60 Punkten annimmt; ich werde also die Hypothese machen, *dass unsere Curve von der 20^{ten} Ordnung sei, und weder auf $f_\nu = 0$, noch auf $\nabla = 0$ gelegen sei, noch auch dem gemeinsamen Schnitte von $f_\nu = 0$, $\nabla = 0$ begegne.* Ich will ferner annehmen, *dass sie nicht auf $C = 0$ liegt und auch nicht dem Schnitte von $C=0$, $\nabla=0$ begegnet.* Dann ist $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ eine Function, welche jeden Werth in 660 zusammengehörigen Punkten annimmt; für $C = 0$ erhält man nur 220 getrennte Punkte, für $\nabla = 0$ nur 60. Man sieht: *es müsste $J = k \cdot \frac{C^3}{\nabla^{11}}$ gesetzt werden*, wo k eine numerische Constante ist. Nun sage ich: *Wenn nur das Geschlecht unserer Curve gleich 26 ist, so giebt es von selbst ausser der Gruppe der dreifach zählenden 220 Punkte und der Gruppe der elffach zählenden 60 nur noch eine Gruppe von mehrfach zählenden Punkten, nämlich*

*) Vergl. hier und im Folgenden bei solchen Angaben die betr. Capitel in Serret's Traité d'algèbre supérieure, vol. II.

von 330 *zweifach zählenden.* Denn denken wir uns die Curve als Riemann'sche Fläche 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet, so bekommen wir, wegen der 660 Transformationen der Curve in sich, bei denen J ungeändert bleibt, jedenfalls eine *reguläre* Verzweigung (Annalen XIV, p. 458), und wenn also irgendwo ν Blätter zusammenhängen, so hängen an dieser Stelle alle Blätter zu je ν zusammen. Man hat also

$$2p - 2 = 660\left(-2 + \sum \frac{\nu - 1}{\nu}\right),$$

wo sich die Summe rechter Hand auf die verschiedenen Stellen der Ebene J bezieht, an denen Verzweigungen stattfinden. Soll nun $p = 26$, ein Werth von ν gleich 3, ein anderer gleich 11 sein, so kann, wie man sofort zeigt, nur noch *ein* drittes ν unter dem Summenzeichen vorkommen, und dieses muss gleich 2 sein. Auch können wir, durch zweckmässige Wahl von k, erreichen, dass J an der betr. Stelle gleich 1 wird.

Man sieht, wie sich alle diese Hypothesen zusammenschliessen. *Es gilt, in dem Raume der y eine Curve von der 20^{ten} Ordnung und dem Geschlechte 26 zu finden, welche bei den 660 Collineationen in sich übergeht, und weder auf $f_\nu = 0$, noch auf $\nabla = 0$, noch endlich auf $C = 0$ gelegen ist, auch nicht dem Schnitte von $f_\nu = 0$ und $\nabla = 0$, oder dem Schnitte von $C = 0$ und $\nabla = 0$ begegnet.*

§ 7.

Die Doppelcurve von $H = 0$.

Falls unsere Curve 20^{ter} Ordnung existirt, muss sie jedenfalls auf der Fläche (4): $H=0$ liegen*). Denn sonst gäbe es mit $H=0$ 100 Schnittpunkte, und diese 100 Punkte müssten durch die 660 Collineationen unter sich permutirt werden, was unmöglich ist. — Nun erinnere man sich der Untersuchungen, vermöge deren man in der gewöhnlichen Raumgeometrie zeigt, dass die Hesse'sche einer Fläche dritter Ordnung 10 Knotenpunkte besitzt. Man setzt zu dem Zwecke gleichzeitig alle ersten Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante gleich Null. Genau so kann man bei 5 Variabelen verfahren und erhält dann durch bekannte Methoden den allgemeinen Satz: *dass bei 5 Variablen die Hesse'sche einer Fläche dritter Ordnung eine Doppelcurve von der 20^{ten} Ordnung und dem Geschlechte 26 besitzt.* Es wird also

*) Ich nenne *Fläche* jede Mannigfaltigkeit, die durch *eine* Gleichung dargestellt wird, also im vorliegenden Falle eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen, *Curve* ein Gebiet von nur einer Dimension.

auch, falls nicht besondere Verhältnisse störend einwirken, die Fläche $H = 0$ eine solche Doppelcurve besitzen, und diese Doppelcurve wird durch die 660 Collineationen in sich übergehen, da die Fläche $H = 0$ es thut. Kann man zweifeln, dass eben diese Doppelcurve die von uns gesuchte Curve ist? Dabei ist freilich Zweierlei noch nachzuweisen: nämlich erstens, dass die im allgemeinen Falle richtigen Zahlen 20 und 26 für Ordnung und Geschlecht im besonderen Falle keine Modification erfahren, und zweitens, dass unsere Curve auch die anderen, negativen Eigenschaften besitzt, welche wir angegeben haben.

Indem ich dem Beweise, zu dem ich mich sofort wende, vorgreife, spreche ich schon hier den Satz aus:

Die von uns gesuchte Curve 20ter *Ordnung ist die Doppelcurve der Hesse'schen Fläche* $H = 0$.

Zum Beweise bilde man zunächst alle Unterdeterminanten von H und setze sie gleich Null. So bekommt man ein Gleichungssystem, welches ich

$$H_{ik} = 0 \tag{12}$$

nennen will, und dessen Gleichungen aus folgenden drei

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1, \\ 0 &= y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9, \\ 0 &= y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1 \end{aligned}\right. \tag{13}$$

durch cyklische Permutation der y hervorgehen.

Ich will nun die fünf Punkte, in denen vier von den fünf y verschwinden, als die Punkte I, IV, V, IX, III bezeichnen. Dann sieht man sofort:

Die fünf Punkte I, IV, V, IX, III *gehören unserer Curve an.*

Und da sie den Flächen (5): $C = 0$ und $f_\nu = 0$ (§ 5.): offenbar nicht angehören, so folgt:

Unsere Curve liegt weder auf $C = 0$ *noch auf* $f_\nu = 0$.

Setzt man in (13) und die übrigen Gleichungen $H_{ik} = 0$ für eins der y den Werth Null, so folgt, dass noch drei, übrigens beliebige y verschwinden müssen. Daher:

Jede Ebene $y_{k^2} = 0$ *schneidet unsere Curve nur in vier Punkten, nämlich in denjenigen vier unter den fünf Punkten* I, IV, V, IX, III, *welche nicht nach dem Index von* y_{k^2} *benannt sind.*

Man lasse nunmehr in einem der fünf Punkte, etwa im Punkte III, eine Reihenentwickelung eintreten, indem man $y_3 = 1$, $y_5 = dt$ setzt. Dann bekommt man aus den Gleichungen $H_{ik} = 0$ bis auf Glieder von höherer als der zehnten Ordnung:

$$y_1 = dt^{10}, \quad y_4 = dt^6, \quad y_5 = dt, \quad y_9 = -dt^3, \quad y_3 = 1,$$

und also für das Verhalten der y in sämmtlichen fünf Punkten folgende Tabelle:

(14)

	y_1	y_4	y_5	y_9	y_3
I	1	dt^{10}	dt^6	dt	$-dt^3$
IV	$-dt^3$	1	dt^{10}	dt^6	dt
V	dt	$-dt^3$	1	dt^{10}	dt^6
IX	dt^6	dt	$-dt^3$	1	dt^{10}
III	dt^{10}	dt^6	dt	$-dt^3$	1

Man sieht:

Die fünf Punkte sind einfache Punkte unserer Curve.

Dann aber vor Allem:

Die Curve ist von der 20^{ten} *Ordnung.*

Denn die Summe der beim einzelnen y in der Tabelle vorkommenden Exponenten von dt ist $3 + 1 + 6 + 10 = 20$.

Jeder unserer fünf Punkte bleibt bei der Collineation S: $y'_{k^2} = \varrho^{k^2} y_{k^2}$ ungeändert, bei der cyklischen Vertauschung C der y werden sie unter einander permutirt. Es entstehen aus den 5 Punkten bei den 660 Collineationen daher nur 60. In ihnen sämmtlich verschwindet ∇, weil es z. B. in I verschwindet. Dagegen verschwindet ∇ nicht identisch. Denn tragen wir in ∇ z. B. die auf I bezügliche Reihenentwickelung (14) ein, so kommt (mit dem von uns gewählten Maasse der Genauigkeit) $\nabla = dt$. Also:

$\nabla = 0$ *hat mit unserer Curve* 60 *und nur* 60 *Schnittpunkte gemein, und in diesen verschwindet weder* C *noch* f_ν.

Um alle charakteristischen Eigenschaften der von uns gesuchten Curve beisammen zu haben, bleibt nur noch zu zeigen, *dass das Geschlecht gleich* 26 *ist.* Dies gelingt sehr einfach durch die Betrachtung gewisser Ungleichheiten. Sicher ist p kleiner als das Geschlecht der allgemeinen Durchdringungscurve dreier Flächen vierter Ordnung: denn unsere Doppelcurve bildet ja nur einen Theil einer solchen. Dies giebt in bekannter Weise*):

$$p < 71.$$

Andererseits ist p jedenfalls nicht kleiner als das Geschlecht einer in gerade Linien zerfallenen Curve; also:

$$p \geqq -19.$$

*) Durch Aufstellung der überall endlichen Differentiale.

Endlich aber lässt sich, wie ich im vorigen Paragraphen zeigte, folgende Gleichung anschreiben:

$$2p-2=660\left(-2+\sum\frac{\nu-1}{\nu}\right).$$

Hier muss, wegen des Schnittes mit $C=0$ *ein* ν gleich 3, und wegen des Schnittes mit $\nabla=0$ ein anderes ν gleich 11 genommen werden. Nähme man nun kein drittes ν dazu, so würde

$$2p-2=-280, \quad p=-139$$

sein. Nähme man aber das dritte ν gleich 3 oder noch grösser, oder nähme man gar mehrere ν an, so käme:

$$2p-2\geqq 160, \quad p\geqq 81.$$

Also ist nur noch ein ν *da; dasselbe ist gleich* 2; *und* p *wird* $=26$, was zu beweisen war.

§ 8.

Die Gleichung $J=F(z)$.

Jetzt ist es eine einfache Rechenaufgabe, die Gleichung $J=F(z)$ zu bilden. Wir haben

(15) $$J=k\cdot\frac{C^3}{\nabla^{11}}, \quad z_\nu=\frac{f_\nu}{\nabla}$$

zu setzen und zunächst mit unbestimmten Coefficienten anzuschreiben*):

(16) $$J=k\,(z^2+Az+B)\,(z^3+az^2+bz+c)^3,$$

oder auch:

(16b) $$J-1=k\,(z^3+\mathsf{A}z^2+\mathsf{B}z+\Gamma)\,(z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta)^2.$$

Sodann trage man eine der Reihenentwickelungen (14) in C, ∇ und f_ν ein. So kommt bis auf Glieder von höherer als der zehnten Dimension:

(17) $$\begin{cases} C=1, \quad \nabla=dt, \\ f_\nu=\rho^{9\nu}+\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\rho^{2\nu}\cdot dt^2-2\rho^{4\nu}\cdot dt^3+\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\rho^{6\nu}\cdot dt^4 \\ \quad +(1+\sqrt{-11})\cdot dt^5-\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot\rho^{10\nu}\cdot dt^6+3\rho^{8\nu}\cdot dt^8 \\ \quad +2\rho^{5\nu}\cdot dt^9-(1+\sqrt{-11})\,\rho^{7\nu}\cdot dt^{10}. \end{cases}$$

Dies in (16) und (16b) eingesetzt giebt mit einer grossen Zahl von Controlen:

---

*) Das hier rechter Hand stehende k ist in der That dasselbe, wie das k in (15). Denn in $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ wie in z^{11} kommt im Zähler das Glied y_1^{33} mit $+1$ multiplicirt vor.

$$(18) \qquad A=-3, \quad B=5-\sqrt{-11}, \quad a=1, \quad b=-3\,\frac{1+\sqrt{-11}}{2}, \quad c=\frac{7-\sqrt{-11}}{2};$$

$$(18\text{b}) \qquad \mathsf{A}=4, \quad \mathsf{B}=\frac{7-5\sqrt{-11}}{2}, \quad \Gamma=4-6\sqrt{-11}, \quad \alpha=-2,$$

$$\beta=3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}, \quad \gamma=5+\sqrt{-11}, \quad \delta=-3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2},$$

und die beiden so erhaltenen Werthe von J und $J-1$ stimmen in der That überein (was wieder eine Menge von Bestätigungen einschliesst), wenn

$$(19) \qquad k=-\frac{1}{1728}$$

gesetzt wird.

Daher lautet die fertige Gleichung $J=F(z)$ folgendermassen:

$$(20)\quad J:J-1:1=(z^2-3z+(5-\sqrt{-11}))\cdot \left(z^3+z^2-3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z+\frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3 : \left(z^3+4z^2+\frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z+(4-6\sqrt{-11})\right)\cdot \left(z^4-2z^3+3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2+(5+\sqrt{-11})z-3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2 : -1728.$$

§ 9.

Die zweite Form der Gleichung elften Grades.

Neben die so gewonnene Gleichung stellt sich nun noch eine zweite, ebenfalls sehr einfache, wenn man nicht von der elfwerthigen Function *dritten* Grades f_ν (10), sondern von der Function *zweiten* Grades φ_ν (9) ausgeht. Ich beweise zunächst den Satz:

Vermöge der Relationen $H_{ik}=0$ (12) reduciren sich alle bei den 660 Collineationen ungeändert bleibenden ganzen Functionen der y auf ganze Functionen von ∇ und C.

Eine ungeändert bleibende Function der y, gleich Null gesetzt, stellt eine Fläche vor, welche entweder unsere Curve enthält — und dann wird die Function vermöge der $H_{ik}=0$ identisch Null sein — oder dieselbe in solchen Punkten schneidet, die bei den 660 Collineationen unter einander permutirt werden. Unter ihnen können sich eine gewisse Anzahl von Malen die 60 Punkte $\nabla=0$ finden, ebenso beliebig oft die 220 Punkte $C=0$, dann irgendwelche Gruppen von 660 getrennten Punkten, die durch $C^3-\lambda\nabla^{11}=0$ dargestellt sind, wo λ eine geeignete Constante bedeutet. Dagegen kann die Gruppe der 330 Punkte $J=1$ nur eine *paare* Anzahl von Malen auftreten, weil die Gesammtzahl der Punkte durch 20 theilbar sein muss, 330 aber nur durch 10 theilbar ist. *Doppeltzählend* wird diese Gruppe aber auch durch eine Combination von C und ∇ dargestellt, nämlich, da $J=1$ ist, durch $C^3+1728\,\nabla^{11}=0$; sämmtliche Schnittpunkte also können mit der richtigen Multiplicität ausgeschnitten werden, indem man eine geeignete ganze Function von ∇ und C gleich Null setzt, was zu beweisen war. —

Daher genügen vermöge der Relationen $H_{ik}=0$ die elf φ_ν einer Gleichung elften Grades, deren Coefficienten ganze Functionen von ∇ und C sind.

Mit Rücksicht auf den Grad der in Betracht kommenden Functionen können wir sofort mit unbestimmten Zahlenfactoren anschreiben:

$$(21)\quad \varphi^{11}+\alpha\nabla^2\cdot\varphi^8+\beta\nabla^4\cdot\varphi^5+\gamma\nabla C\cdot\varphi^4+\delta\nabla^6\cdot\varphi^2+\varepsilon\nabla^3 C\cdot\varphi + \zeta\cdot C^2=0.$$

Die Zahlenfactoren bestimmt man wieder vermöge der Reihenentwickelungen (14). Man hat ihnen zufolge:

$$(22)\qquad \varphi_\nu=\varrho^{6\nu}-\varrho^{8\nu}\cdot dt+\varrho^{10\nu}\cdot dt^2+\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\varrho^\nu\cdot dt^3 + \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\varrho^{3\nu}\cdot dt^4+\cdots$$

und findet also:

$$(23)\quad \alpha=-22,\quad \beta=11(9-2\sqrt{-11}),\quad \gamma=11,\quad \delta=88\sqrt{-11},\quad \varepsilon=\frac{11(-3+\sqrt{-11})}{2},\quad \zeta=-1.$$

Ich will noch

$$(24)\qquad \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{2/3}}=\xi_\nu$$

setzen und für $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ einführen: $-1728\,J=-1728\,\frac{g_2^3}{\Delta}$. *Dann erhält die neue Gleichung elften Grades folgende Form:*

$$(25)\quad \xi^{11}-22\cdot\xi^8+11(9-2\sqrt{-11})\xi^5-11\cdot\frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4+88\sqrt{-11}\cdot\xi^2 -11\cdot\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi-\frac{144 g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}=0.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, wie diese Gleichung mit Gleichung (20) zusammenhängt. Die Fläche $\varphi_\nu=0$ schneidet aus unserer Curve 40 Punkte aus, die sich bei den 60 Collineationen der Untergruppe unter einander permutiren. Dies können, dem Früheren zufolge, nur diejenigen $2 \cdot 20$ Punkte sein, welche je bei 2 Collineationen von der Periode 3 festbleiben, d. h. dieselben Punkte, für welche man nach Gleichung (20) hatte:

$$z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}) = 0.$$

In der That zeigen die Reihenentwickelungen (14), dass folgende Relation besteht (natürlich immer vermöge der $H_{ik} = 0$):

$$(26) \qquad \varphi_\nu^3 = f_\nu^2 - 3f_\nu \nabla + (5 - \sqrt{-11})\nabla^2,$$

und *dass man also von der Gleichung* (25) *zu der Gleichung* (20) *kommt, indem man setzt:*

$$(27) \qquad \xi^3 = z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}).$$

Die directe Verification dieser Angabe, die wieder eine Reihe von Controlen für die Zahlencoefficienten einschliesst, hat keinerlei Schwierigkeit.

§ 10.

Zusammenstellung der bisherigen Resultate.

Fassen wir zusammen, so sind wir für *die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* nunmehr zu folgenden Resultaten gekommen:

1) *Die Galois'sche Resolvente* 660*ten* *Grades lässt sich folgendermassen anschreiben:* Man unterwerfe die fünf Verhältnissgrössen

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3$$

den 15 Relationen $H_{ik} = 0$ (vergl. (12) resp. (13)) und setze:*)

$$\frac{-C^3}{1728\,\nabla^{11}} = J,$$

wo ∇ die Function dritten Grades (2), C die Function elften Grades (4) bezeichnet. — Hat man *ein* Lösungssystem dieser Gleichungen gefunden, so ergeben sich alle anderen durch die Collineationen des § 3.

2) *Es giebt zwei einfachste Formen der Resolvente elften Grades.* Die eine, von uns zu Anfang allein betrachtete, lautet (20):

---

*) Wollte man nicht die Verhältnisse der y, sondern die y selbst betrachten, so könnte man schreiben:

$$C = 12 g_2, \qquad \nabla = -\sqrt[11]{\Delta},$$

man müsste dann also g_2 und $\sqrt[11]{\Delta}$ adjungiren.

$$J:J-1:1=\left(z^2-3z+(5-\sqrt{-11})\right)\cdot$$
$$\cdot\left(z^3+z^2-3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z+\frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3$$
$$:\left(z^3+4z^2+\frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z+(4-6\sqrt{-11})\right)\cdot$$
$$\cdot\left(z^4-2z^3+3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2+(5+\sqrt{-11})z-3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2$$
$$:-1728;$$

ihre 11 Wurzeln sind durch die Formel gegeben:

$$z_\nu=\frac{f_\nu}{\nabla},$$

wo f_ν durch Gleichung (10) definirt ist.

Die zweite Form wird durch (25) vorgestellt:

$$0=\xi^{11}-22\cdot\xi^8+11(9-2\sqrt{-11})\cdot\xi^5-11\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4+88\cdot\sqrt{-11}\cdot\xi^2$$
$$-11\cdot\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi-\frac{144g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}};$$

und ihre Wurzeln sind:

$$\xi_\nu=\frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{2}{3}}},$$

unter φ_ν die Functionen (9) verstanden.

§ 11.

Zusammenhang mit der Gleichung zwölften Grades.

Ich wünsche nun noch zu zeigen, wie die Grössen y mit der Multiplicatorgleichung zwölften Grades, die ich neuerdings mittheilte*), zusammenhängen und wie man dementsprechend das vorstehend formulirte Problem 660ten Grades, resp. die Gleichungen elften Grades auf transcendentem Wege lösen kann. Ich setze zunächst die ausgerechnete Gleichung zwölften Grades noch einmal her:

$$\text{(28)}\quad \mathrm{z}^{12}-90\cdot11\cdot\sqrt[2]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^6+40\cdot11\cdot12g_2\cdot\sqrt[3]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^4-15\cdot11\cdot216g_3\cdot\sqrt[4]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^3$$
$$+2\cdot11\cdot(12g_2)^2\cdot\sqrt[6]{\Delta}\cdot\mathrm{z}^2-12g_2\cdot216g_3\cdot\sqrt[12]{\Delta}\cdot\mathrm{z}-11\cdot\Delta=0,$$

und gebe vor allen Dingen an, wie sich ihre Wurzeln als Functionen des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\omega$ des elliptischen Integrals, resp. als

*) Vergl. diese Annalen XV, p. 88.

Functionen von $q = e^{i\pi\omega}$ darstellen lassen. Bekanntlich ist (28) eine Jacobi'sche Gleichung. Setzt man dementsprechend:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{z_\infty} = \sqrt{-11}\cdot A_0, \\ \sqrt{z_\nu} = \qquad A_0 + \varrho^{\nu} A_1 + \varrho^{4\nu} A_4 + \varrho^{5\nu} A_5 + \varrho^{9\nu} A_9 + \varrho^{3\nu} A_3, \\ \qquad\qquad (\nu = 0,\, 1,\, \cdots\, 10) \end{array}\right.$$

(worin ich nur dadurch von der Jacobi'schen Bezeichnung abweiche, dass ich als Indices der A die quadratischen Reste modulo 11 verwende), so erhält man auf bekanntem Wege für *ein* Werthsystem der A folgende Formeln.

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu A_0 = q^{\frac{121}{132}} \cdot \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+55h+22}, \\ \mu A_1 = q^{\frac{1}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+h} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+13h+14} \right\} \\ \mu A_4 = q^{\frac{37}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+13h+1} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+31h+7} \right\} \\ \mu A_5 = q^{\frac{49}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+37h+10} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+7h} \right\} \\ \mu A_9 = q^{\frac{97}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} \cdot q^{33h^2+19h+2} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+25h+4} \right\} \\ \mu A_3 = q^{\frac{25}{132}} \cdot \left\{ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+49h+18} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h} \cdot q^{33h^2+61h+28} \right\} \end{array}\right.$$

wo μ den Proportionalitätsfactor $\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}$ bedeutet.

Solcher Werthsysteme giebt es $660 \cdot 24$, nämlich 660 wegen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung, und 24 wegen der in (28) vorkommenden zwölften Wurzel und der in (29) stehenden Quadratwurzel. Aber man sieht leicht, dass sich je 24 Werthsysteme nur durch eine 24te Einheitswurzel unterscheiden, *dass also die Verhältnisse der A blos 660-werthig sind.* In der That, lässt man in den Formeln (30) ω um 11 Einheiten wachsen, so erhalten sämmtliche A eine vierundzwanzigste Einheitswurzel, aber diese ist bei allen A dieselbe, und rührt nur von dem rechter Hand gemeinsam auftretenden Factor $q^{\frac{1}{132}}$ her. — Ebenso waren, nach den früheren Betrachtungen, die Verhältnisse der y 660-werthig. Es ergiebt sich also die Möglichkeit: *die Verhältnisse der y durch die Verhältnisse der A und diese* *durch jene rational auszudrücken*, und dies ist die präcise Formulirung des Problems, mit dem wir uns jetzt noch zu beschäftigen haben.

§ 12.

Zugehörige Formeln.

Die Betrachtungen, welche nöthig sind, um das äusserst einfache Resultat abzuleiten, fasse ich in eine Reihe einzelner Bemerkungen zusammen. Dabei will ich ausdrücklich betonen, dass ich wohl kaum zu diesem Gedankengange geführt worden wäre, hätte nicht bei den Transformationsgraden 5 und 7 ein ganz ähnliches Resultat vorgelegen*).

1) Die 660 Werthsysteme der $A_0 : A_1 : A_4 : A_5 : A_9 : A_3$ ergeben sich nach meiner Darstellung im XV. Bande dieser Annalen p. 276 aus einem derselben durch 660 a priori bekannte Collineationen, aus denen ich folgende zwei herausgreife:

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{lllll} S' & A_0' = A_0, & A_1' = \varrho A_1, & A_4' = \varrho^4 A_4, & A_5' = \varrho^5 A_5, \\ & & & A_9' = \varrho^9 A_9, & A_3' = \varrho^3 A_3, \\ C' & A_0' = A_0, & A_1' = A_4, & A_4' = A_5, & A_5' = A_9, \\ & & & A_9' = A_3, & A_3' = A_1. \end{array}\right.$$

2) Die eindeutige Zuordnung zwischen den Verhältnissen der A und den Verhältnissen der y lässt sich auf 660 verschiedene Weisen treffen. Denn hat man eine solche Zuordnung durchgeführt, so kann man nachträglich die y oder die A noch einer beliebigen der 660 Collineationen unterwerfen. Daher kann man es jedenfalls erreichen, dass den Wiederholungen von S:

$$y_1' = \varrho y_1, \quad y_4' = \varrho^4 y_4, \quad y_5' = \varrho^5 y_5, \quad y_9' = \varrho^9 y_9, \quad y_3' = \varrho^3 y_3$$

die Wiederholungen von S' und den cyklischen Vertauschungen

$$(y_1\, y_4\, y_5\, y_9\, y_3)$$

die Wiederholungen von C' entsprechen.

3) Ich sage nun, dass unter dieser Voraussetzung der cyklischen Substitution C:

$$y_1' = y_4, \quad y_4' = y_5, \quad y_5' = y_9, \quad y_9' = y_3, \quad y_3' = y_1$$

nothwendig die cyklische Vertauschung C' selbst, nicht irgend eine Wiederholung derselben entspricht. Denn sei etwa:

$$\frac{A_1}{A_0} = R\,(y_1, y_4, y_5, y_9, y_3),$$

*) Wie sich das analoge Theorem bei beliebigem Transformationsgrade gestaltet, beabsichtige ich demnächst zu zeigen.

wo R eine rationale Function von nullter Dimension sein soll. Multipliciren wir jetzt, der Collineation S entsprechend, jedes y_{k^2} mit ϱ^{k^2}, so erhält R, nach Voraussetzung, irgend eine elfte Einheitswurzel ϱ^{ν} als Factor. Nun bilden wir, indem wir die Collineation C anwenden:

$$R(y_4, y_5, y_9, y_3, y_1).$$

Schreiben wir jetzt statt y_{k^2} bez. $\varrho^{k^2} \cdot y_{k^2}$, so muss $\varrho^{4\nu}$ als Factor vortreten. Daher kann $R(y_4, y_5, y_9, y_3, y_1)$ nur gleich $\frac{A_4}{A_0}$ sein, was zu beweisen war.

4) Die fünf Punkte I, IV, V, IX, III (vergl. § 7.) waren auf der y-Curve dadurch charakterisirt, dass sie gleichzeitig bei der Collineation S (und ihren Wiederholungen) ungeändert bleiben. Ihnen werden auf der Curve der A (wenn diese geometrische Redeweise gestattet ist!) fünf Punkte entsprechen, welche die Substitution S' zulassen. *Offenbar sind es diejenigen fünf Punkte, in denen A_0 und vier der übrigen A verschwinden.* Denn erstens bleiben diese Punkte, wie evident ist, bei der Collineation S' ungeändert, und zweitens gehören sie der Curve der A an. Hebt man nämlich aus den Ausdrücken rechter Hand in (30) zunächst den gemeinsamen Factor $q^{\frac{1}{132}}$ fort und setzt dann $q = 0$, so erhält man

$$A_0 = 0, \quad A_1 \gtrless 0, \quad A_4 = A_5 = A_9 = A_3 = 0,$$

so dass unsere Behauptung für einen der fünf Punkte richtig ist; aus dem einen Punkte gehen aber die vier anderen durch die cyklische Vertauschung C' hervor. Ich werde diese Punkte I′, IV′, V′, IX′, III′ nennen.

5) Den Bemerkungen 2), 3) zufolge kann man den Punkt I einem beliebigen der Punkte I′ ⋯ III′ zuordnen; hat man aber z. B. I dem IV′ entsprechend gesetzt, so correspondiren IV, V, IX, III nothwendig dem V′, IX′, III′, I′.

6) A_0 kann nur in den Punkten I′ ⋯ III′ zu Null werden. Denn wenn A_0 gleich Null ist, so ist nach Gch. (29) eine der Wurzeln z gleich Null, also, nach (28), $\Delta = 0$ oder $J = \infty$. Es giebt 60 Punkte $J = \infty$, aber nur in 5 derselben kann die einzelne Wurzel z gleich Null sein. Denn in den 5 Punkten I′ ⋯ III′ verschwindet, (29) zufolge, nur z_∞, keine der anderen Wurzeln z_ν.

7) Nachdem ich in (30) rechter Hand den gemeinsamen Factor $q^{\frac{1}{132}}$ weggehoben, will ich $q^{\frac{2}{11}} = -ds$ setzen. Dann erweisen sich die

$$A_0, A_1, A_4, A_5, A_9, A_3$$

in erster Annäherung proportional zu:

$$-ds^5,\ 1,\ -ds^7,\ -ds^2,\ ds^{15},\ ds.$$

Dies giebt folgende Tabelle für das Verhalten der A in den Punkten $I' \cdots III'$:

(32)

	A_0	A_1	A_4	A_5	A_9	A_3
I′	$-ds^5$	1	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$
IV′	$-ds^5$	$+ds$	1	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$
V′	$-ds^5$	$+ds^{15}$	$+ds$	1	$-ds^7$	$-ds^2$
IX′	$-ds^5$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$	1	$-ds^7$
III′	$-ds^5$	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$	1

8) *Die Curve der A hat die 25te Ordnung.* Denn die Summe der Exponenten von ds in der auf A_0 bezüglichen Colonne der vorstehenden Tabelle ist 25. Aber auch die Summe der Exponenten von ds in einer auf ein beliebiges anderes A bezüglichen Colonne ist 25. *Also werden die anderen A ebenfalls ausser in den Punkten $I' \cdots III'$ nirgendwo gleich Null.*

Insbesondere ergiebt sich:

(33) $$A_0^5 + A_1 A_4 A_5 A_9 A_3 = 0,$$

eine Relation, von der Brioschi gelegentlich Gebrauch macht*).

9) Man bilde jetzt folgende Verhältnisse der y:

$$\frac{y_4}{y_5},\ \frac{y_5}{y_9},\ \frac{y_9}{y_3},\ \frac{y_3}{y_1},\ \frac{y_1}{y_4}.$$

Da die y nirgendwo ausser in den Punkten I $\cdots$ III Null werden, so erhält man für das Null- und Unendlichwerden dieser Functionen folgende Tabelle (vergl. (14)):

(34)

I	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$
IV	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$
V	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$
IX	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$
III	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$

*) Sopra una classe di equazioni modulari. Annali di Matematica, ser. 2, t. IX; p. 167 ff.

10) Andererseits bilde man folgende Verhältnisse der A:

$$-\frac{A_0}{A_1},\quad -\frac{A_0}{A_4},\quad -\frac{A_0}{A_5},\quad -\frac{A_0}{A_9},\quad -\frac{A_0}{A_3}.$$

Sie werden nur in den Punkten $\mathrm{I}' \cdots \mathrm{III}'$ Null oder unendlich, und zwar findet man aus (32) folgendes Schema:

(35)

I′	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$
IV′	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$
V′	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$
IX′	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$
III′	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$

11) Jetzt ordne man dem I das IV′, und also, nach 5), dem IV, V, IX, III resp. das V′, IX′, III′, I′ zu. Dann werden, wie ein Blick auf die Tabellen lehrt,

$$\frac{y_4}{y_5},\quad \frac{y_5}{y_9},\quad \frac{y_9}{y_3},\quad \frac{y_3}{y_1},\quad \frac{y_1}{y_4}$$

und

$$-\frac{A_0}{A_1},\quad -\frac{A_0}{A_4},\quad -\frac{A_0}{A_5},\quad -\frac{A_0}{A_9},\quad -\frac{A_0}{A_3}$$

an entsprechenden Stellen und in demselben Maasse Null und Unendlich, und sind demnach resp. einander gleich zu setzen. *Man hat also folgende Formeln, die das von uns gestellte Problem erledigen und die in* §. 10. *zusammengestellten Resultate im angegebenen Sinne ergänzen:*

$$(36)\qquad \frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1},\quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4},\quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5},\quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{A_0}{A_9},$$
$$\frac{y_1}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}.$$

Ebenhausen, den 15. August 1879.

Ueber die Grenzwerthe der Quotienten.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

(Nachtrag zum Aufsatze im XIV. Bande dieser Annalen S. 231.)

Bei Verfassung des genannten Artikels ist mir eine Note des Hrn. V. Rouquet (N. Annal. de Mathém. 2. Sér. T. XVI, p. 113) über den in Rede stehenden Gegenstand entgangen. Hr. Rouquet geht von einem Lemma aus, welches ich folgendermassen wiedergebe:

Lemma. *Ist die eindeutige Function $F(x)$ von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an für alle endlichen Werthe von $x > x_1$ stetig und mit einem Differentialquotienten $F'(x)$ begabt*), der für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth besitzt, so existirt bei dem nämlichen Grenzübergange auch ein Grenzwerth für den Bruch $F(x) : x$ und es ist*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} F'(x) \text{ **)}.$$

Dabei ist es nicht einmal nothwendig, dass $F(x)$ selbst für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth haben muss. Es ist z. B. für

---

*) Vergl. die Anmerkung zu Ann. XIV, S. 236.

**) Der von Hrn. Rouquet gegebene Beweis setzt voraus, dass $\lim F'(x)$ endlich sei. Er passt jedoch auch für den Fall, dass dieser Grenzwerth als *bestimmt unendlich* angenommen wird. In der That ist z. B. $\lim F'(x) = +\infty$, so sei G eine vorgegebene positive Zahl und $G' > G$ gewählt. Zufolge Voraussetzung hat man für *alle* $x > x'$ $F'(x) > G'$. Demnach nimmt die Function $F(x) - G'x + k$, wo k eine positive Constante bezeichnet, mit wachsendem x beständig zu. Nimmt man k so gross an, dass $F(x') - G'x' + k > 0$, so folgt für $x > x'$

$$\frac{F(x)}{x} > G' - \frac{k}{x}$$

und somit für *alle* x, die ausserdem noch der Bedingung

$$\frac{k}{x} < G' - G$$

genügen, $\frac{F(x)}{x} > G$ d. h. es ist

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

$$F(x) = \sin\sqrt{x} \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} F'(x) = 0.$$

Hr. Rouquet schliesst weiter so. Sind

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x)$$

zwei stetige Functionen von x, die beide ins Unendliche wachsen, während x einem endlichen Werthe a sich nähert oder selbst ins Unendliche wächst, so kann man y als Function von z betrachten. Da nun

(a) $$\frac{dy}{dz} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

so folgt der Satz: „Wenn in dem angegebenen Falle lim $\{f'(x):\varphi'(x)\}$ existirt, so auch lim $\{f(x):\varphi(x)\}$ und beide Grenzwerthe sind einander gleich.“

Es trifft jedoch dieser Satz nicht immer zu. Z. B. setzt man

(b) $$f(x) = x + \sin x \cos x \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = e^{\sin x},$$

so folgt für

$$\lim x = +\infty, \quad \lim f = \lim \varphi = +\infty,$$

ferner aus

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = e^{-\sin x} \cdot \frac{2\cos x}{x + \sin x \cos x + 2\cos x}.$$

$$\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\} = 0,$$

während

$$f(x) : \varphi(x) = e^{-\sin x}$$

für

$$\lim x = +\infty$$

die Unbestimmtheitsgrenzen $\frac{1}{e}$ und e besitzt, so dass *kein Grenzwerth dieser Function vorhanden ist.*

Man wird demnach die Formel (a) nicht unbedingt gebrauchen dürfen. Eine selbstverständliche Voraussetzung derselben bildet die Annahme, dass man y als *eindeutige und stetige Function von* z (für alle endlichen Werthe von z, von einem bestimmten $z = z_1$ an gegen $+\infty$ oder $-\infty$) erklären könne. Dies ist, soviel bis jetzt bekannt ist, nur dann möglich, wenn man für dieselben Werthe z x als eindeutige und stetige Function von z erklären kann. Die Gleichung $z = \varphi(x)$ liefert aber eine eindeutige und stetige Umkehrung ($x = \psi(z)$) nur in einem solchen Intervalle $x = a \pm \delta (\delta > 0) \cdots a$ (bez. $x_1 \cdots \pm\infty$), in welchem $\varphi(z)$ den Sinn seiner Aenderung nicht wechselt, d. h. entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt. — Ferner hat die Formel (a) nur dann einen Sinn, wenn $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ nicht zugleich Null oder Unendlich sind. (Auch dies findet in obigem Beispiele (b) statt.)

Aus dem Lemma des Hrn. Rouquet kann demnach mit Hülfe der Formel (a) geschlossen werden:

Satz. „Wenn von den eindeutigen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, welche in dem Intervalle $a \pm \delta (\delta > 0) \cdots a$ (bez. $x_1 \cdots \pm \infty$) — mit Ausschluss des letzteren Endwerthes — endlich, stetig und mit Differentialquotienten begabt sind, die weder zugleich Null, noch zugleich Unendlich sind, — *wenigstens eine sich in dem genannten Intervalle nicht in verschiedenen Sinnen ändert und dabei für* $\lim x = a \pm 0 (\pm\infty)$ *den Grenzwerth* $+\infty$ *oder* $-\infty$ *besitzt: so folgt aus der Existenz des Grenzwerthes* $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ *auch die Existenz des Grenzwerthes für den Bruch* $f(x) : \varphi(x)$ *bei dem in Rede stehenden Grenzübergange* und es sind beide Grenzwerthe einander gleich:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.“$$

Dabei kann jedoch, falls $f(x)$ *allein* der eben erwähnten Bedingung genügt, also z. B. $\lim \varphi(x)$ endlich ist, das Zeichen der unendlichen Grenzwerthe $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ und $\lim \{f(x) : \varphi(x)\}$ verschieden sein (vgl. Ann. XIV, S. 238).

Es ist übrigens nicht erforderlich, dass *beide* Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ einen Grenzwerth besitzen müssen. Man hat z. B. für

$$f(x) = \sin x, \quad \varphi(x) = x^2, \quad \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0, \quad (\lim x = +\infty).$$

Der eben abgeleitete Satz stimmt überein mit dem von Herrn du Bois-Reymond im XIV. Bde. dieser Annalen (S. 502) aufgestellten Satze. Es ist auch nicht schwierig, denselben auf dem von mir eingeschlagenen Wege zu erhalten, so dass er an Stelle des 4. Satzes (a. a. O. p. 238) treten kann. Es gilt nämlich der 2. Satz (a. a. O. p. 234) auch dann, wenn *von den stetigen Functionen* $f(x)$, $\varphi(x)$ *nur die letztere sich für alle endlichen Werthe von* x *von einem bestimmten* $x = x_1$ *an in demselben Sinne ändert und dabei für* $\lim x = +\infty$ *einen unendlichen Grenzwerth besitzt**).

---

*) Man setze in dem Beweise statt der Stelle: „Da gemäss den Voraussetzungen u. s. w.“ (a. a. O. p. 235 Z. 6 v. o.) das Folgende. „Es sei, während x das Intervall ph bis $ph + h$ (mit Einschluss dieser Grenzen) durchläuft, g da Maximum, k das Minimum von $f(x)$, so dass

$$k \leq f(x_0 + ph) \leq g.$$

Dann ergiebt sich wegen

$$\varphi(ph) \leq \varphi(x_0 + ph) < \varphi(h + ph),$$

$$k - K\varphi(ph+h) < f(x_0+ph) - K\varphi(x_0+ph) < g - K\varphi(ph).$$

Bezeichnet man mit P den grösseren u. s. w.“

Bei dieser Gelegenheit mögen folgende Verbesserungen auf p. 234 angebracht werden. Z. 11 v. o. muss es heissen: „in demselben Sinne *zu ändern*“ und in Formel (4) statt $\lim x = +\infty$ „$\lim r = +\infty$“.

Vermittelst des Lemma des Hrn. Rouquet kann der vorstehende Satz der Differentialrechnung, wie man sieht, sehr einfach abgeleitet werden. Namentlich bedarf es hierzu nicht der von mir in § 1. meines Aufsatzes bewiesenen Hülfssätze. Dieselben sind jedoch auch abgesehen von dem Gebrauche, den ich dort von ihnen gemacht habe, von Wichtigkeit und lassen sich nicht umgekehrt aus dem genannten Satze gewinnen, wenn man nicht die Voraussetzung aufnehmen will, dass $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ für $\lim x = +\infty$ existire.*)

*) Mit Rücksicht auf eine Bemerkung des Hrn. du Bois-Reymond (Ann. XIV, p. 506) habe ich noch meine Aeusserung (a. a. O. p. 232) zu begründen, dass eine stetige Function $f(x)$, welche bei einem beliebigen Grenzübergange des x einen unendlichen Grenzwerth besitzt, *bestimmt* unendlich werden müsse. Auf diesen Satz führen die von Hrn. Weierstrass in seinen Vorlesungen angewendeten Definitionen. Hiernach sagt man z. B., die abhängige Veränderliche $f(x)$ wird beim Grenzübergange $\lim x = +\infty$ positiv unendlich, wenn sie die folgende Eigenschaft hat. Ist H eine gegebene beliebige positive Zahl, so muss eine positive Zahl G existiren, so dass für *alle* der Veränderlichen x vermöge ihrer Definition zukommenden Werthe, welche $> G$ sind, $f(x) > H$ ist. Gilt dieses aber nur bezüglich des absoluten Betrages von $f(x)$, so wird $f(x)$ unbestimmt unendlich. Daher kann eine stetige Function für $\lim x = +\infty$ nicht unbestimmt unendlich werden; denn sie müsste für Werthe von x, grösser als jede beliebige Zahl, entgegengesetzt bezeichnete Werthe annehmen, somit müsste es auch Werthe von x, grösser als jede beliebige Zahl, geben, wofür sie verschwindet. — Zu derselben Ansicht führt die Theorie der von Hrn. du Bois-Reymond erfundenen *Unbestimmtheitsgrenzen*. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x)$ z. B. für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth besitze, ist die *Gleichheit* der Unbestimmtheitsgrenzen für $\lim x = +\infty$; d. h. falls sie nicht endlich sind, müssen beide $+\infty$ oder beide $-\infty$ sein. Im Falle des „Unbestimmt-Unendlich Werdens" gilt dieses zwar nicht mehr von $f(x)$ selbst, wohl aber vom absoluten Betrage von $f(x)$. Die Unbestimmtheitsgrenzen des absoluten Betrages einer solchen stetigen Function wie $x \sin x$ für $\lim x = +\infty$ sind aber 0 und $+\infty$.

Innsbruck, im August 1879.

Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurve zweier Flächen 2ter Ordnung.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Stellt man die Aufgabe, die beiden weiteren Punkte ξ und η zu bestimmen, in denen die Tangentialebene eines Curvenpunktes $y: a_x a_y = 0$ die Raumcurve: $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$ schneidet, so folgt aus der für die Covarianten:

$$H_x^2 = \alpha_x \beta_x (\alpha a b c)(\beta a b c) - \frac{\Theta}{2} \alpha_x^2, \qquad \Theta = (a b c \alpha)^2,$$

$$J_x^2 = a_x b_x (a \alpha \beta \gamma)(b \alpha \beta \gamma) - \frac{\Theta'}{2} a_x^2, \qquad \Theta' = (a \alpha \beta \gamma)^2$$

bei allen Werthen von x und y geltenden Identität:*)

$$\alpha_x^2 H_y^2 + \alpha_y^2 H_x^2 - a_x^2 J_y^2 - a_y^2 J_x^2 = 2\left\{\alpha_x \alpha_y H_x H_y - a_x a_y J_x J_y\right\}$$

der Satz: die Resultante R der Formen $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$, $a_x a_y = 0$, $w_x = 0$ ist nach Absonderung des Factors w_y^2 identisch bis auf einen von den Variabelen w_i unabhängigen Factor mit der Resultante R' der Formen:

$$a_x^2 = 0, \; a_x a_y = 0, \; H_x H_y = 0, \; w_x = 0.$$

Nun ist:

$$R = [b_y c_y (b a \alpha w)(c a \alpha w)]^2 - [c_y d_y (c a b w)(d a b w)]\,[a_y b_y (a \alpha \beta w)(b \alpha \beta w)].$$

Werden diese Ausdrücke mit Hilfe bekannter Identitäten so umgeformt, dass sich aus ihnen der Factor w_y absondert, so findet man:

$$c_y d_y (c a b w)(d a b w) = -\frac{1}{12} w_y^2 \Delta, \qquad \Delta = (a b c d)^2,$$

$$b_y c_y (b a \alpha w)(c a \alpha w) = w_y \left[\frac{1}{3} \alpha_y (a b c w)(a b c \alpha) - \frac{1}{6} w_y \Theta\right].$$

---

*) Diese für die Theorie des simultanen Systemes wichtige Identität hat Herr Westphal in seiner Abhandlung: „Ueber das simultane System zweier quaternären Formen 2ten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve 4ter Ordnung $p = 1$." Math. Ann. Bd. XIII, S. 1 ff. aufgestellt. Nur lässt die Form, in welcher dort schliesslich die Parameterdarstellung gegeben wird, nicht ohne weiteres erkennen, welche Formen des Systemes für diese Untersuchung in Betracht kommen; dies zu ergänzen ist der Zweck dieser Notiz.

Wir setzen:

$$\alpha_y(abcw)(abc\alpha) = L = L_y w_\iota$$

ferner:

$$a_y b_y(a\alpha\beta w)(b\alpha\beta w) = P = P_y{}^2 w_p{}^2.$$

Die geometrische Bedeutung der Formen L und P ist bekannt: Es stellt bei variabelen Werthen von w $L = 0$ den Pol der Ebene $\alpha_x\alpha_y = 0$ in Bezug auf die Fläche $a_x{}^2 = 0$ dar, während $P = 0$ die Ebenen liefert, welche den Durchschnitt der Fläche $\alpha_x{}^2 = 0$ mit $a_x a_y = 0$ tangiren.

Es wird demnach:

$$R = w_y{}^2\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right]$$

und es besteht, da

$$R' = (abHw)(acH'w)b_y c_y H_y H_y',$$

die Gleichung:

$$(1)\quad (abHw)(acH'w)b_y c_y H_y H_y' = m\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right].$$

Der Factor m von w_i unabhängig wird am einfachsten bestimmt, indem man $w_x{}^2 = a_x{}^2$ setzt. Dadurch geht die linke Seite der Gleichung über in den Ausdruck:

$$(2)\quad (abHd)(acH'd)b_y c_y H_y H_y' = \frac{1}{3}(abHd)(acbd)c_y H_y \cdot H_y{}^2 = -\frac{1}{12}\Delta(H_y{}^2)^2,$$

während an Stelle von P die Form:

$$a_y b_y(a\alpha\beta c)(b\alpha\beta c) = \frac{1}{3}H_y{}^2$$

tritt.

Endlich wird durch diese Substitution:

$$\left[\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y H\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}\alpha_y(abcd)(abc\alpha) - \frac{1}{6}d_y\Theta\right]\left[\frac{1}{3}\alpha_y'(a'b'c'd)(a'b'c'\alpha) - \frac{1}{6}d_y\Theta\right]$$

$$= \frac{1}{36}\Delta H_y{}^2.$$

Bei allen diesen Berechnungen kommen die Bedingungen $a_y{}^2 = 0$, $\alpha_y{}^2 = 0$ zur Geltung.

Demnach ist

$$-\frac{1}{12}\Delta(H_y{}^2)^2 = m\left[\frac{1}{36}\Delta H_y{}^2 + \frac{1}{36}\Delta H_y{}^2\right] \text{ d. h. } m = -\frac{3}{2}H_y{}^2.$$

Man hat also die Relation:

$$(3)\quad (abHw)(acH'w)b_y c_y H_y H_y'$$

$$= -\frac{3}{2}H_y{}^2\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right] = w_\xi w_\eta.$$

Um nun zu einer gesonderten Darstellung der Punkte ξ und η zu gelangen, bezeichne man die links stehende Resultante kurz mit $(a\varrho\sigma w)^2$, indem man $\varrho = a_y a_x$, $\sigma = H_y H_x$ setzt. Aus der Gleichung:

$$w_\xi w_\eta = (a\varrho\sigma w)^2$$

folgt:

$$w_\xi u_\eta + u_\xi w_\eta = 2(a\varrho\sigma w)(a\varrho\sigma u)$$

$$w_\xi u_\eta - u_\xi w_\eta = \sqrt{[2(a\varrho\sigma w)(a\varrho\sigma w)]^2 - 4(a\varrho\sigma u)^2(a\varrho\sigma u)^2}$$

$$= 2(\varrho\sigma u w)\sqrt{-\tfrac{1}{2}(ab\varrho\sigma)^2}$$

also:

$$w_\xi u_\eta = (a\varrho\sigma w)(a\varrho\sigma u) + (\varrho\sigma u w)\sqrt{-\tfrac{1}{2}(ab\varrho\sigma)^2}\,.$$

Explicite geschrieben lautet diese Gleichung zufolge der Relation (2) und (3):

$$(4)\ w^\xi u_\eta = -\tfrac{3}{2}H_y{}^2\left[\left(\tfrac{1}{3}L_y u_\iota - \tfrac{1}{6}w_y\Theta\right)\left(\tfrac{1}{3}L_y u_\iota - \tfrac{1}{6}u_y\Theta\right) + \tfrac{1}{12}\Delta\,P_y{}^2 w_p u_p\right]$$
$$+ (aHuw)\,a_y H_y\cdot H_y{}^2\sqrt{\tfrac{1}{24}\Delta}\,.$$

Vergleicht man die Gleichungen (3) und (4), so folgt, dass für alle Werthe von u und w die Identität besteht:

$$(5)\qquad [(aHuw)\,a_y H_y]^2 =$$
$$9\left(\tfrac{1}{3}L_y w_\iota - \tfrac{1}{6}w_y\Theta\right)\left(\tfrac{1}{3}L_y u_\iota - \tfrac{1}{6}u_y\Theta\right)P_y{}^2 w_p u_p$$
$$-\tfrac{9}{2}\left[\left(\tfrac{1}{3}L_y w_\iota - \tfrac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 P_y{}^2 u_p{}^2 + \left(\tfrac{1}{3}L_y u_\iota - \tfrac{1}{6}u_y\Theta\right)^2 P_y{}^2 w_p{}^2\right]$$
$$+\tfrac{3}{8}\Delta\left[(P_y{}^2 w_p u_p)^2 - P_y{}^2 u_p{}^2\cdot P_y{}^2 w_p{}^2\right].$$

Diesen Gleichungen kann noch eine besondere Form gegeben werden, indem man für u_x $\alpha_x\alpha_y$ substituirt.

Es wird

$$L_y\alpha_y\alpha_\iota = \alpha_y(abc\alpha)(abc\beta)\beta_y = H,$$

$$P_y{}^2 w_p\alpha_p\alpha_y = a_y b_y(a\alpha\beta w)(b\alpha\beta\gamma)\gamma_y = \tfrac{1}{3}a_y b_y(a\alpha\beta\gamma)(b\alpha\beta\gamma)w_y = \tfrac{1}{3}w_y J_y{}^2,$$

$$P_y{}^2\alpha_p\beta_p\alpha_y\beta_y = 0.$$

Vereinigt man also in (4) $-H_y{}^2$ mit dem Proportionalitätsfactor, so werden die Coordinaten eines Schnittpunktes in der Form erhalten:

$$(6)\qquad \varrho w_\xi = +\tfrac{3}{2}\left[\left(\tfrac{1}{3}L - \tfrac{1}{6}w_\eta\Theta\right)\tfrac{1}{3}H_y{}^2 + \tfrac{1}{36}\Delta J_y{}^2 w_y\right]$$
$$+ (a\alpha Hw)\,a_y\alpha_y H_y\sqrt{\tfrac{1}{24}\Delta}$$

und die Relation (5) giebt die Gleichung:

$$(7)\qquad [(a\,\alpha H w)\, a_y \alpha_y H_y]^2$$
$$= \left[\left(\frac{1}{3} L - \frac{1}{6} w_y \Theta\right) H J w_y - \frac{1}{2} H^2 P\right] + \frac{1}{24} \Delta J^2 w_y^2.$$

Die Functionaldeterminante stellt gleich Null gesetzt den Punkt dar, in welchem die Verbindungslinie $\xi\eta$ die Tangente des Punktes y trifft.

Um nun noch die allgemeine Aufgabe zu lösen, hat man in diesen Gleichungen für a_x^2 die Form $\varkappa a_x^2 + \lambda \alpha_x^2$ einzusetzen. Es tritt an Stelle von:

$\Delta \qquad \varkappa^4 \Delta + 4\varkappa^3 \lambda \Theta + 6\varkappa^2 \lambda^2 \Phi + 4\varkappa \lambda^3 \Theta' + \lambda^4 \Delta' = \Delta(\varkappa, \lambda),$

$H \quad \varkappa^3 H + \varkappa^2 \lambda J = \varkappa^2(\varkappa H + \lambda J)$ weil $\alpha_y \beta_y (\alpha a b \gamma)(\beta a b \gamma) = \frac{1}{3} J$
und $\alpha_y \beta_y (\alpha a \delta \gamma)(\beta a \delta \gamma) = 0,$

$J \quad \varkappa^2 J,$

$\Theta \quad \varkappa^3 \Theta + 3\varkappa^2 \lambda \Phi + 3\varkappa^2 \lambda \Theta' + \lambda^3 \Delta' = \Theta(\varkappa, \lambda),$

$L \quad \varkappa^3 L + 3\varkappa^2 \lambda M + 3\varkappa \lambda^2 N + \frac{1}{4} \lambda^3 \Delta' w_y = L(\varkappa, \lambda)$

worin
$$M = \alpha_y (a b \beta w)(a b \beta \alpha), \quad N = \alpha_y (a \gamma \beta w)(a \gamma \beta \alpha).$$

Der Factor $\varkappa^2$ lässt sich ohne Weiteres auf der rechten Seite absondern und mit dem Proportionalitätsfactor vereinen, so dass:

$$(8)\quad \varrho w_\xi = \left(\frac{1}{6} L(\varkappa,\lambda) - \frac{1}{12} w_y \Theta(\varkappa, \lambda)\right)(\varkappa H_y^2 + \lambda J_y^2) + \frac{1}{24} \Delta(\varkappa,\lambda) J_y^2 w_y$$
$$+ \varkappa a_y \alpha_y [\varkappa (a \alpha H w) H_y + \lambda (a \alpha J w) J_y] \sqrt{\frac{1}{24} \Delta(\varkappa,\lambda)}\,.$$

Bei der expliciten Darstellung tritt auf der rechten Seite der Factor $\varkappa$ auf; die einfachste Form, welche man derselben geben kann, wird schliesslich durch Einführung der Werthe:

$$2L' = \frac{1}{3} L - \frac{1}{6} w_y \Theta, \quad 2M' = M - \frac{1}{4} \Phi w_y, \quad 2N' = N - \frac{1}{6} w_y \Theta'$$

erzielt, nämlich:

$$(9)\quad \varrho w_\xi = (\varkappa^2 L' + \varkappa \lambda M' + \lambda^2 N')(\varkappa H + \lambda J)$$
$$- \lambda H w_y \left(\frac{1}{8} \varkappa^2 \Phi + \frac{1}{6} \varkappa \lambda \Theta' + \frac{1}{24} \lambda^2 \Delta'\right)$$
$$+ \varkappa J w_y \left(\frac{1}{24} \varkappa^2 \Delta + \frac{1}{6} \varkappa \lambda \Theta + \frac{1}{8} \lambda^2 \Phi\right)$$
$$+ a_y \alpha_y [\varkappa (a \alpha H w) H_y + \lambda (a \alpha J w) J_y] \sqrt{\frac{1}{24} \Delta(\varkappa, \lambda)}.$$

Diese Form hat die Eigenschaft, dass bei einer Vertauschung der Symbole a und α der erste und letzte der 4 Terme der rechten Seite nur ihr Vorzeichen ändern, während der zweite und dritte sich vertauschen, womit explicite ausgedrückt ist, dass die ursprünglich eingeführte Unterscheidung dieser Symbole in Wegfall gekommen ist.

Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.

Von

Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Ich fand, dass die Lagrange'sche Methode der Variationsrechnung zur Bestimmung des Minimums oder Maximums eines Integrals $\int V(x, y, y', \cdots y^{(n)})\, dx$ die Stetigkeit der $2n$ ersten Differentialquotienten von y verlangt. Diese übermässige Beschränkung des ursprünglichen Problems vermag ich jetzt bedeutend herabzusetzen. Dies, ferner einige vervollständigende Bemerkungen zu meinen ersten „*Erläuterungen etc.*", darunter eine kürzere und dem Gedankengang angemessenere Erledigung des Bedenkens des Art. 5. jenes Aufsatzes*) bilden den Gegenstand vorliegender Mittheilung.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir eine neue Namengebung in Vorschlag zu bringen. Es ist so oft nöthig, von dem Vorhandensein eines Maximums *oder* Minimums und damit Zusammenhängendem zu reden, dass diese schleppende Alternative schliesslich lästig wird. Ich schlage vor, diese beiden Fälle mit dem *einen* Wort *Extremum* zu bezeichnen, und z. B. den Begriff: Maximum Maximorum *oder* Minimum Minimorum durch *Extremum Extremorum* wiederzugeben.

1.

Wenn innerhalb einer Functionenclasse ein Extremum durch die Variationsrechnung zu bestimmen ist, so zerfällt die Aufgabe wesentlich in drei Theile.

Es ist festzustellen, ob überhaupt ein solches Extremum vorhanden ist, zweitens sind dessen Differentialgleichungen zu finden, endlich ist die Natur des hypothetischen Extremums zu untersuchen, ob es ein Maximum oder Minimum oder keins von Beiden, d. i. kein Extremum sei.

---

*) Diese Annalen, XV. Bd., pag. 283. Alle Citate von numerirten Art. in diesem Aufsatz beziehen sich auf jene Abhandlung.

Die beiden ersten Theile der Aufgabe trennt die Methode nicht. Mit Hilfe der *ersten* Variation findet man sogleich die Differentialgleichungen, die aber, wie die Dinge noch liegen, auch einem partiellen Extremum angehören können. Die *zweite* Variation, welcher die Entscheidung über die Art des Extremums zufällt, werde ich hier nicht weiter betrachten. Es scheint mir durch den (s. weiter unten) leicht zu beweisenden Satz, dass das Integral $\int_a^b dx\,\delta^2 V$ bestimmt ist, dass also

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,\delta y^2 + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}\,\delta y\,\delta y' + \cdots$$

integrirbar ist, und durch die in diesem Aufsatz vorgelegte Behandlung des gewöhnlichen Variationsproblems die Bahn zu den Untersuchungen, welche sich mit ihr befassen, frei gelegt. Meine Aufgabe soll vornehmlich sein, die an die *erste* Variation sich knüpfende Analyse so anzuordnen, dass man gewiss ist, kein partielles Extremum, sondern, wenn überhaupt ein Extremum, ein Extremum Extremorum zu erhalten.

2.

Im Allgemeinen verlangen die Extremumsprobleme der Variationsrechnung, um den gewöhnlichsten Fall zu Grunde zu legen, die Darstellung einer Function y, für welche das Integral

$$\int_a^b dx\; V(x, y, y', \cdots y^{(n)})$$

mit allen Integralen

$$\int_a^b dx\; V(x, y_1, y_1', \cdots y_1^{(n)})$$

Unterschiede desselben Zeichens lässt. Wenn die Unterschiede:

$$y_1 - y, \quad y_1' - y', \cdots y_1^{(n)} - y^{(n)}$$

sämmtlich hinreichend klein sind, erhält man als Bedingungsgleichung für y das Verschwinden der ersten Variation. Hieraus kann aber zunächst nur ein *Extremum inter propinquas* (functiones) folgen, nicht aber sogleich ein *Extremum extremorum*, geschweige, wie es doch vorstehend verlangt wird, ein *Extremum inter omnes* (functiones). Dass man bei dem Problem über die kürzeste Linie schliesslich auf die Gerade als Extremum inter omnes fallen werde, und dass unter den von mir als rectificirbar definirten Functionen ein Extremum inter omnes vorhanden sei, wer bezweifelt es! Die Aufgabe ist nur, das Resultat mit den denkbar weitesten Ausgangsdefinitionen in *nothwendigen* Zusammenhang zu bringen. Die rectificirbaren Linien könnten ja auch kein

Minimum zulassen. Da meine Beschreibung der Rectificirbarkeit Uebergänge in überhaupt integrirbare oder auch in nicht integrirbare Functionen auf die mannigfaltigste Weise zulässt, so könnte ja die „Länge" gewisser unter den Rectificirbaren bis zu der Uebergangsstelle in die Nichtrectificirbaren abnehmen, so dass, weil diese Uebergangsstelle ebenso wenig wie die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz eine feste Grenze zu sein braucht, ein Minimum inter omnes möglicherweise wirklich nicht vorhanden wäre. Wer solche Bedenken für übertrieben halten will, den mache ich darauf aufmerksam, dass die Anschauung nichts mehr hilft, z. B. um die Existenz einer kürzesten Linie in einem Raum von mehr als drei Dimensionen zu beweisen.

Im Falle der kürzesten Linie erledigt sich die Frage, ob sie, wie verlangt, ein Extremum inter omnes sei, sehr einfach. Da man, wegen der Invarianteneigenschaften des Linienelements, die Endpunkte der kürzeten Linie so legen kann, dass ihre Coordinaten bis auf eine gleich werden, so wird das Integral ein Minimum inter omnes, wenn die Differentialquotienten der Coordinaten nach jener einen Coordinate Null sind. Die dem Minimum entsprechenden Functionen sind dann im Integrationsintervall mit Einschluss der Endpunkte stetig.

In anderen Fällen kann der Nachweis, dass man es mit einem Extremum inter omnes zu thun habe, sehr schwierig sein. Sicherlich ist er nicht Aufgabe der eigentlichen Variationsrechnung, die ihrem Wesen nach nur Extrema inter *propinquas* liefern kann. Es war vielleicht nicht überflüssig, diesen Punkt zur Sprache zu bringen, eben weil, wie gesagt, die Variationsprobleme häufig auf Extrema inter omnes gerichtet sind. Dagegen vermag die Variationsrechnung innerhalb eines möglich allgemeinen, wenngleich angemessen beschränkten Functionsbegriffs das Vorhandensein *eines einzigen Extremums inter propinquas* nachzuweisen, das ich auch, im Hinblick auf etwaige Extrema beschränkterer Functionsclassen ein *Extremum Extremorum* nenne. Hierauf wollen wir etwas näher eingehen.

Die jetzt hinreichend wenig von einander verschieden angenommenen Functionen y und y_1 gehören selbstverständlich derselben Functionenart an, was ihre allgemeinen Eigenschaften, Stetigkeit u. dergl. betrifft. Nun setzen wir:

$$y_1 - y = \delta y,$$

$$y_1' - y' = \frac{d(y_1 - y)}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} = \delta y',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1^{(n)} - y^{(n)} = \frac{d^n(y_1 - y)}{dx^n} = \frac{d\ \delta y}{dx^n} = \delta y^{(n)}.$$

Es gehört auch δy derselben Functionenclasse wie y und y_1 an, und wenn wir in der Rechnung nur noch behalten:

$$y \text{ und } \delta y,$$

und deren Differentialquotienten, so beschränken wir beide Functionen gleichzeitig, sobald wir *eine* von ihnen beschränken, es sei denn, dass die Voraussetzungen des Problems die einseitige Beschränkung z. B. von δy gestatten. Falls wir beispielsweise bereits wissen, dass ein Extremum Extremorum unter den Functionen, die y bedeuten kann, vorhanden ist, so wird eine zum Zwecke seiner Auffindung getroffene Verfügung über δy, die y unberührt lässt, an Stelle des Extremum Extremorum nicht ein blos partielles Extremum treten lassen können. Falls aber die Existenz des Extremum Extremorum nicht bewiesen ist, so muss die Function δy allgemein gelassen werden, bis man eben zeigen kann, dass eine Einschränkung auf das Resultat ohne Einfluss ist. Dies wird der Fall sein, wenn nach geschehener partieller Integration nur noch die Variation δy selbst oder einer ihrer nachweislich nicht minder willkürlichen Differentialquotienten unter dem Integral steht. Dann folgt, wie ich Art. 12 gezeigt, aus der vollen Unbeschränktheit der Variation nicht mehr, wie aus deren zweckentsprechender Beschränkung.

Hinsichtlich der Frage, wie man die Variation δy zu definiren habe, entschied ich mich für die Lagrange'sche Darstellung $\varepsilon\lambda(x)$, bemerkte aber, dass in dieser Form bereits eine Beschränkung enthalten sei, deren Unschädlichkeit ich Art. 5 zu zeigen suchte. Ich muss jedoch auf diesen Punkt zurückkommen, weil ich an dieser Stelle meinem Gedankengang untreu wurde, und die Existenz des Extremums Extremorum zu Grunde legte, die doch eben erst bewiesen werden soll. Man wird dieser Schwierigkeit auf andere Weise leicht Herr, wie folgt.

3.

Die Variation $\delta y = y_1 - y$ soll durchweg beliebig klein sein, beliebig verkleinert werden können, ohne dass die Function y_1 einer anderen Beschränkung als dieser unterliegt. Es sei ε der grösste Werth von $y_1 - y$ im Intervall des Integrals $\int V dx$, so wird $\delta y = \varepsilon\lambda(x)$, wenn $\lambda(x)$ eine durch Nichts beschränkte Function vorstellt, ohne Zweifel alle solche Variationen darstellen, die im Maximum um ε die Extremalfunction verändern. Denkt man sich nun ε fort und fort kleinere Werthe annehmend, so wird für jeden besonderen Werth ε die Grösse $\varepsilon\lambda(x)$ stets den ganzen Functioneninbegriff vorstellen, für welche $y_1 - y$ im Maximum ε beträgt, so dass allerdings $\varepsilon\lambda(x)$ ein völlig allgemeiner Ausdruck für die unbeschränkte Variation ist. Wenn man aber ε für einen Werth x abnehmend sich denkt, so läge eine Beschränkung darin, dass in $\varepsilon\lambda(x)$ $\lambda(x)$ dieselbe Function bliebe. Es kann, wenn ε abnimmt, $\lambda(x)$ stets andere Functionen des jedesmaligen Inbegriffs bedeuten. *Dies drücken wir aus, indem wir setzen:*

$$\delta y = \varepsilon \lambda (\varepsilon, x).$$

Es wird dadurch nichts geändert in der übrigen Theorie. Im Zusammenhang hiermit lässt sich auch die Herleitung des Art. 6. der Bedingung, dass die erste Variation verschwindet, etwas einfacher durchführen.

Es wird sich aber empfehlen dies in Verbindung mit der angekündigten Aufhebung der durch die gewöhnliche Methode auferlegten weitgehenden Beschränkungen zu zeigen und zwar sogleich an dem ersteren etwas allgemeineren Fall, den man in der Variationsrechnung zu behandeln pflegt. Wir wollen uns also diese Aufgabe stellen:

Es soll das Extremum festgestellt werden der Functionen, die sammt ihren $n-1$ ersten Differentialquotienten stetig sind, während der n^{te} mindestens integrirbar sein muss, so zwar, dass

$$V(x, y, y', \cdots y^n)$$

eine im Intervall $a \cdots b$ integrirbare Function sei. Das Extremum hat die Bedingung zu erfüllen, 1. *dass*

$$\int_a^b dx\, V(x, y, y', \cdots y^{(n)})$$

mit allen Integralen

$$\int_a^b dx\, V(x, y_1, y_1', \cdots y_1^{(n)})$$

Unterschiede desselben Zeichens lässt, wenn y_1 den nämlichen Beschränkungen wie y unterworfen wird, und die Unterschiede $y_1 - y$, $y_1' - y'$, etc. hinlänglich klein sind, und dass 2.

$$y, y', \cdots y^{n-1}$$

für a und b in beiden Integralen dieselben sind, was man so zu schreiben pflegt:

$$\delta y_a = 0, \quad \delta y_a' = 0, \cdots \delta y_a^{(n)} = 0,$$
$$\delta y_b = 0, \quad \delta y_b' = 0, \cdots \delta y_b^{(n)} = 0.$$

4.

Die Stetigkeit der Differentialquotienten

$$y, y', \cdots y^{(n-1)}$$

wird zu den Bedingungen der Aufgabe gehören müssen, ebenso die

Integrirbarkeit von $y^{(n)}$. Da übrigens nichts darüber vorausgesetzt werden kann, wie $y^{(n)}$ in der Function V enthalten ist, so wird, damit das Integral $\int V dx$ einen Sinn habe, auch gelegentlich die Stetigkeit von $\varphi^{(n)}$ nöthig sein können. Die nämlichen Voraussetzungen werden für die Variationen

$$\delta y = \varepsilon\lambda(\varepsilon, x), \quad \delta y' = \varepsilon \frac{\partial \lambda(\varepsilon, x)}{\partial x}, \ldots \delta y^{(n)} = \varepsilon \frac{\partial^n \lambda(\varepsilon, x)}{\partial x^n}$$

gelten.

5.

In

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right) + \left(\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y\,\partial y'}\delta y\,\delta y' + \cdots\right)$$

möge $\overline{V}$ bedeuten, dass darin statt $y, y', \cdots$ steht $y + \delta\bar{y}, y' + \delta\bar{y}', \cdots$, d. i. Mittelwerthe zwischen y und $y + \delta y$, zwischen y' und $y' + \delta y', \cdots$.

Nun setze man:

$$\delta\int_a^b V dx = \int_a^b dx\left\{\delta y\frac{\partial V}{\partial y} + \delta y'\frac{\partial V}{\partial y'} + \cdots\right\}$$
$$+ \int_a^b dx\left\{\delta y\left[\delta y\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2} + 2\delta y'\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y\,\partial y'} + \cdots\right]\right.$$
$$+ \delta y'\left[\delta y'\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y'^2} + 2\delta y''\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y''} + \cdots\right]$$
$$\left. + \text{etc.}\right\}.$$

Es leuchtet ein, dass man für jeden Werth von x das Argument des zweiten Integrals durch Verkleinern von ε kleiner machen kann, als das Argument des ersten Integrals. Vorausgesetzt ist dabei, dass keiner der Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial y}$, etc., $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}$, etc. innerhalb der Grenzen $a \cdots b$ unendlich wird, wenn man die hypothetische Extremalfunction einsetzt. Ein solches Unendlichwerden kann ausgeschlossen sein durch die Form der Function V und unabhängig von der Extremalfunction, wie im Falle der kürzesten Linie und anderer bekannter Probleme der Variationsrechnung. Andernfalls aber kann die Endlichkeit jener Differentialquotienten nachträglich, wenn man zur Differentialgleichung der Extremalfunction gelangt ist, bestätigt werden.

Statt wie im Vorstehenden die Functionen unter dem Integralzeichen zu vergleichen, können wir auch wie im Art. 6. nach dem ε, welches in $\lambda(\varepsilon, x)$ multiplicirt ist, entwickeln und die Integrale vergleichen. Da Eins der grösste Werth von $\lambda(\varepsilon, x)$ ist, so ist das angeführte Verfahren völlig streng.*)

Somit bestimmt denn in der That die erste Variation das Zeichen von $\delta\int V dx$ und muss Null sein. Man hat also:

$$0 = \int_a^b dx \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \right\},$$

was ich schreiben will:

$$0 = \int_a^b dx \left\{ V_0 \delta y + V_1 \delta y' + \cdots + V_n \delta y^{(n)} \right\}.$$

6.

Hier nun sind wir an dem Punkt angelangt, wo, wie ich betonte, die Hauptbeschränkungen durch die Lagrange'sche Methode, die aus der partiellen Integration entspringen, ihren Anfang nehmen. Indem aus

$$0 = \int_a^b dx \left\{ V_0 \delta y + \cdots + V_n \delta y^{(n)} \right\}$$

gefolgert wird:

$$0 = \int_a^b dx\, \delta y \left\{ V_0 - \frac{dV_1}{dx} + \cdots \pm \frac{d^n V_n}{dx^n} \right\},$$

müssen also stetig sein die ferneren Differentialquotienten

$$y^{(n)},\ y^{(n+1)},\ \ldots,\ y^{(2n-1)}$$

und $y^{(2n)}$ muss integrirbar sein. Und wenn man noch setzen will

$$0 = V_0 - \frac{dV_1}{dx} + \cdots \pm \frac{d^n V_n}{dx^n},$$

so muss auch $y^{(2n)}$ stetig sein, da aus der Willkürlichkeit von δy nur folgt, dass das Integral

$$\int dx \left\{ V_0 - \frac{dV_1}{dx} + \cdots \pm \frac{d^n V_n}{dx^n} \right\},$$

zwischen beliebigen Grenzen genommen, Null ist.

*) Die zweite Variation kann gegen die erste beliebig verkleinert werden. Wenn die erste unbestimmt werden könnte, so wäre es also unmöglich, dass die zweite diese Unbestimmtheit aufhöbe. Da aber $\delta\int V dx$ bestimmt ist, so muss also die erste Variation zugleich bestimmt sein. Entwickelt man bis zur dritten Variation, die gegen die zweite beliebig verkleinert werden kann, so muss auch die zweite Variation bestimmt sein, da die zweite und dritte zusammen es sind, u. s. f. Alle Variationen sind bestimmt.

Falls man, wie vorstehend, die partielle Integration anwendet, um unter dem Integralzeichen nur δy und keinen Differentialquotienten davon zu behalten, so sind die Beschränkungen der Differentialquotienten $y^{(n)} \cdots y^{(2n-1)}$ nicht zu vermeiden. Die weitere $y^{(2n)}$ betreffende haftet ebenfalls der Methode an.

Wenn man aber umgekehrt, wie nach der Lagrange'schen Methode, verfährt, und alle $\delta y, \delta y', \cdots \delta y^{(n-1)}$ entfernt und nur $\delta y^{(n)}$ unter dem Integrale lässt, so ergiebt sich, dass die Beschränkungen $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, etc. betreffend wegfallen. Nur um die Bedingungsgleichung zu finden, deren Integral die correcte Methode liefert statt ihrer selbst, muss von Neuem die Beschränkung von $y^{(n)}$ eingeführt werden, dass sie stetig sei.

7.

Die Transformation von

$$\delta \int_a^b V \delta x = \int_a^b dx \{ V_0 \delta y + V_1 \delta y' + \cdots + V_n \delta y^{(n)} \},$$

welche ich meine, ist folgende:

Man setzt zunächst:

$$\int_a^b dx \delta y\, V_0 = \delta y_b \int_a^b dx\, V_0 - \delta y_b' \int_a^b dx \int_a^x dx_1\, V_0 + \cdots$$

$$\pm \delta y_b^{(n-1)} \int_a^b dx \int_a^x dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1}\, V_0 \mp \int_a^b dx\, \delta y^{(n)} \int_a^x dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n\, V_0 .$$

Im letzteren Gliede bedeutet $\mp : (-1)^n$.

Weil die Variationen von $y, y', \cdots y^{(n-1)}$ an den Grenzen verschwinden, und wegen der allgemeinen Formel:

$$\int_{x_0}^X dx \int_{x_0}^x dx_1 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} dx_n\, U = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^X dx (X-x)^n\, U$$

findet man:

$$\int_a^b dx \delta y\, V_0 = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_a^b dx\, \delta y^{(n)} \int_a^x d\xi (x-\xi)^{n-1}\, V_0,$$

so dass

$$\delta \int_a^b V dx = \int_a^b dx\,\delta y^{(n)} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} - \int_a^x d\xi \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} + \int_a^x d\xi (x-\xi) \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} - \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_a^x d\xi (x-\xi)^{n-1} \frac{\partial V}{\partial y} \right\}.$$

Wir dürfen aber hierin $\delta y^{(n)}$ nicht als willkürliche Variation behandeln, sondern sie ist durch die Bedingungen beschränkt, dass an den Grenzen δy, $\delta y'$, $\cdots \delta y^{(n-1)}$ verschwinden müssen.

8.

Wir eliminiren diese Beschränkungen, indem wir, ähnlich wie Art. 18. gezeigt, das Problem in ein isoperimetrisches verwandeln.

Die Bedingungen $\delta y_a = 0$, $\delta y_b = 0$ beschränken $\delta y'$, und diese Beschränkung drückt sich aus, indem man setzt,

$$0 = \int_a^b \delta y' \, dx$$

und, wie ich l. c. angab, $\delta y'$ unterliegt in Folge der Bedingungen $\delta y_a = 0$, $\delta y_b = 0$ keiner weiteren Beschränkung, weil, wie wir auch die Ableitung $\delta y'$ bestimmen mögen, ein Werth ihres unbestimmten Integrals beliebig ist.

Aber auch die übrigen Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} \delta y_a' = 0, & \delta y_a'' = 0, \\ \delta y_b' = 0, & \delta y_b'' = 0, \end{array} \quad \text{etc.}$$

betreffen nur die *Endpunkte* der Function $\delta y'$.

Daher stellt die Gleichung:

$$\int_a^b dy' \, dx = 0$$

die gesammte Beschränkung von $\delta y'$ im *Intervall* $a \cdots b$ dar.

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass

$$\int_a^b \delta y'' \, dx = 0$$

diejenige gesammmte Beschränkung von $\delta y''$ im *Intervall* $a \cdots b$ darstellt, welche herrührt von den Bedingungen

$$\begin{array}{ll} \delta y_a' = 0, & \delta y_a'' = 0, \\ \delta y_b' = 0, & \delta y_b'' = 0, \end{array} \quad \text{etc.}$$

Denn die Bedingungen $\delta y_a = 0$, $\delta y_b = 0$ beschränken $\delta y''$ nicht, da, wie $\delta y''$ auch bestimmt werden mag, *zwei* Werthe von δy willkürlich bleiben.

So ergiebt sich successive, dass die Variationen

$$\delta y', \ \delta y'', \ \cdots \ \delta y^{(n)}$$

im Intervall $a \cdots b$ nur den Beschränkungen

$$0 = \int_a^b \delta y' \, dx, \quad 0 = \int_a^b \delta y'' \, dx, \cdots 0 = \int_a^b \delta y^{(n)} dx$$

unterliegen. Führt man diese als isoperimetrische Bedingungen ein, indem man sie mit Constanten multiplicirt und zu $\delta \int_a^b V dx = 0$ hinzuaddirt, so werden die Variationen von ihren Beschränkungen befreit.

9.

Hier muss die allgemeine Ableitung der isoperimetrischen Regel zu Grunde gelegt werden, welche ich im Art. 17. mittheilte, allerdings in ihrer übrigens naheliegenden Ausdehnung auf mehrere Bedingungsintegrale.

Es soll sein

$$\delta \int V dx = 0$$

mit den Bedingungen:

$$\delta \int U_1 dx = 0, \quad \delta \int U_2 dx = 0, \cdots \delta \int U_n dx = 0.$$

Man setze:

$$\delta y = \delta_0 y + C_1 \delta_1 y + C_2 \delta_2 y + \cdots + C_n \delta_n y,$$

wo die $\delta_0 y, \cdots \delta_n y$ unbeschränkte Variationen bedeuten. Die C lassen sich so bestimmen, dass sämmtlichen Bedingungsgleichungen genügt wird.

Denn man hat:

$$\begin{gathered}
\delta_0 \int U_1 \, dx + C_1 \delta_1 \int U_1 \, dx + \cdots + C_n \delta_n \int U_1 \, dx = 0, \\
\delta_0 \int U_2 \, dx + C_1 \delta_1 \int U_2 \, dx + \cdots + C_n \delta_n \int U_2 \, dx = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_0 \int U_n \, dx + C_1 \delta_1 \int U_n \, dx + \cdots + C_n \delta_n \int U_n \, dx = 0.
\end{gathered}$$

Es muss also auch sein:

$$\delta_0 \int V dx + C_1 \delta_1 \int V dx + \cdots + C_n \delta_n \int V dx = 0.$$

Durch Elimination der C erhalten wir eine Gleichung der Form:

$$\delta_0 \left\{ \int V dx + \sigma_1 \int U_1 dx + \cdots + \sigma_n \int U_n dx \right\} = 0.$$

10.

Um die isoperimetrischen Bedingungen:

$$\int_a^b \delta y' dx = 0, \quad \int_a^b \delta y'' dx = 0, \cdots \int_a^b \delta y^{(n)} dx = 0$$

einzuführen, geben wir ihnen die Formen:

$$\int_a^b dx \delta y^{(n)}, \quad \int_a^b dx \int_a^x dx \delta y^{(n)}, \cdots \int_a^b dx \int_a^x dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \delta y^{(n)}$$

oder

$$\int_a^b dx \delta y^{(n)}, \quad \int_a^b dx \delta y^{(n)} (b-x), \cdots \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b dx \delta y^{(n)} (b-x)^{n-1},$$

somit wird unsere Gesammtvariation:

$$\Delta = \int_a^b dx \delta y^{(n)} \left\{ W + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} - \int_a^x d\xi \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} \right.$$

$$\left. + \int_a^x d\xi (x-\xi) \frac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_a^x d\xi (x-\xi)^{n-1} \frac{\partial V}{\partial y} \right\}$$

worin W eine ganze rationale Function $(n-1)$sten Grades vorstellt, deren n Coefficienten durch die n Constanten der isoperimetrischen Transformation ausgedrückt werden können.

Setzen wir $\Delta = 0$, so ist also über $\delta y^{(n)}$ keine neue Voraussetzung eingeführt, sie erfreut sich derselben Willkürlichkeit wie δy, und derselben Unbeschränktheit wie $y^{(n)}$, d. i. braucht im Allgemeinen nur integrirbar zu seien. Es folgt also (Art. 12.)

$$\int dx \left\{ W + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} - \int_a^x d\xi \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} + \cdots \right\} = 0$$

zwischen beliebigen dem Intervall $a \cdots b$ angehörigen Grenzen. Nun tritt die einzige Beschränkung der Functionenclasse ein, zu welcher das Extremum Extremorum gehören soll, die nicht im ursprünglichen Problem zu liegen braucht. Wir nehmen $y^{(n)}$ stetig an, um aus vorstehender Gleichung zu erhalten:

$$W + \frac{\partial V}{\partial y^n} - \int_a^x d\xi \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_a^x d\xi (x-\xi)^{n-1} \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Diese Beschränkung ist die *einzige*, sage ich, denn die weiteren durch die Lagrange-Methode geforderten, dass

$$y^{(n+1)}, \ldots y^{(2n)}$$

stetig seien, umgeht man wie folgt:

Das betreffende Extremum Extremorum der Functionenclasse mit stetigen Differentialquotienten

$$y', y'', \cdots y^n$$

genügt der Gleichung:

$$0 = W + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} - \int_a^x d\xi \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} + \cdots$$

weil wir sie ohne weitere Hypothese aus den Bedingungen der Aufgabe gefunden haben. Differenziren wir diese Gleichung, so ergiebt sich, da alles Uebrige stetig ist, dass auch $y^{(n+1)}$ stetig sein muss, allerdings bis auf einzelne Punkte, in denen einer der Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(p)} \partial y^{(n)}}$ etwa unstetig wird. Diesen Schluss kann man fortsetzen, und findet, dass y sammt allen seinen Differentialquotienten mit den Differentialquotienten $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}, \cdots$ gestatteter Ausnahme *einzelner* Punkte stetig sein muss, und der Gleichung:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial V}{\partial y'} + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}$$

genügt.

Giebt es also nur eine Function, die mit ihren Differentialquotienten $y', y'', \cdots y^{(n)}$ im Intervall $a \cdots b$ stetig ist, und dieser Differentialgleichung und den Grenzbedingungen, dass $y, y', \cdots y^{(n-1)}$ für a und b gegebene Werthe annehmen, genügt, so ist sie das Extremum Extremorum.

Es darf aber die Lösung nicht auch einer Gleichung $\frac{\partial V}{\partial y^{(p)}} = \infty$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}} = \infty$ genügen; und wenn sie in einzelnen Punkten einen dieser Differentialquotienten unendlich macht, so muss das Integral über einen solchen Punkt genommen unbedingt convergent sein. Vielleicht jedoch, worüber ich nicht nachgedacht habe, liegt in der Methode selbst ein Hinderniss für das Eintreten solcher Denkbarkeiten.

Jedenfalls sind die Beschränkungen, welche die Methode zu denen des Problems fügte, durch die vorstehende Analyse bedeutend herabgesetzt. Es bleibt eben nur noch diese eine übrig, dass $y^{(n)}$, statt dass sie nur integrirbar zu sein braucht, stetig sein muss. Dies ist nun, ich wiederhole es, im Allgemeinen eine wirkliche Beschränkung, die, wie aus dem Problem über die kürzeste Linie folgt, durchaus nicht im ursprünglichen Problem ihren Grund findet.

Das Verfahren, welches diente (Art. 14.), um diese Beschränkung bei der kürzesten Linie aufzuheben, gestattet zwar keine vollständige Verallgemeinerung. Ich glaube aber, dass es sich ausdehnen lässt auf eine Classe von Problemen, bei denen die Differentialgleichung eine sofortige erste Integration zulässt.

So würden denn doch einige der classischen Aufgaben, die man seit Erscheinen des Methodus inveniendi ... in den Büchern findet, und die mit seltener Vollständigkeit und Eleganz in Herrn Lindelöffs vortrefflichem Werke behandelt sind, eine vom Standpunkte der Functionentheorie aus völlig strenge und allgemeine Lösung zulassen, worauf ich zurückzukommen beabsichtige.

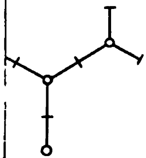
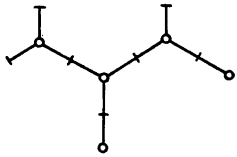
Das allgemeine Ergebniss unserer bisherigen Untersuchung über die Tragweite der Variationsrechnung ist also dieses:

Erstens darf man von ihr nicht verlangen, dass sie ein *Extremum inter omnes* liefere. Sie ergiebt nur ein *Extremum inter propinquas*, unter diesen aber meistens ein *Extremum extremorum.* Der Schluss vom *Extremum der Variationsrechnung* auf das *Extremum inter omnes* heischt eine besondere in der Methode nicht vorgesehene Begründung.

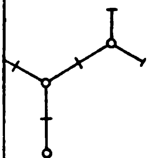
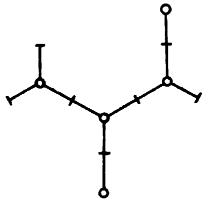
Zweitens, und dies ist ein — nicht wie der vorige eigentlich der Aufgabe, sondern wirklich — der Methode anhaftender Mangel, fügt die Variationsrechnung zu den hinsichtlich der Stetigkeitsverhältnisse der gesuchten Function *nothwendigen* Beschränkungen solche hinzu, welche die Aufgabe offenbar nicht verlangt, und die wir im Obigen auf ihr geringstes Maass, *das aber nicht Null ist,* zurückgeführt zu haben glauben.

Freiburg i. B., im September 1879.

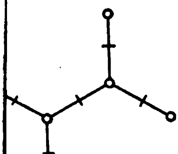
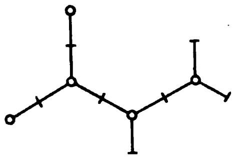
I.

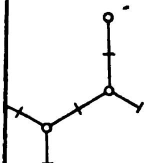
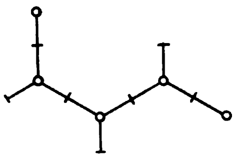
II.

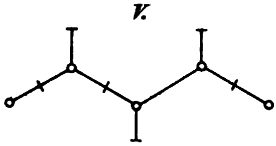
III.

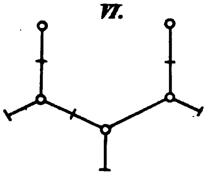
IV.

V.



VI.



Die Eintheilung dieses Papiers ist mathematisch genau, dasselbe liegt aufgerollt völlig flach.

Wir senden an Jeden der sich franco an uns wendet ein komplettes Mustersortiment unserer Zeichenpapiere gratis und portofrei.

Carl Schleicher & Schüll

Specialität: Zeichenpapiere aller Art

DÜREN

RHEINPREUSSEN

überreichen in vorliegendem Blatt eine Probe ihres neuen metrisch eingetheilten

Satinirten Rollen-Skizzirpapiers

Nr. 106

in Rollen von 75 Centimeter Höhe, 10 Meter Länge

zu Rm. 13,35 per Rolle loco Düren.

Das Papier kann auch mit viel dunklerer Liniatur geliefert werden, es ist dann weniger geglättet wie diese Probe.

Vorzüge dieses Papiers gegen das bisher gebräuchliche:

1. Mattsatinirte Oberfläche, zum angenehmen Zeichnen wie Wegradiren gleich geeignet.
2. Schönere reinere weisse Qualität des verwandten Papiers.
3. Gleichmässiger klarer Druck durch die ganze Rolle.
4. Die matte Farbe desselben greift die Augen nicht an.

Unsere Papiere sind auch durch jede solide Papierhandlung zu beziehen.

INHALT.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein** und **A. Mayer.**