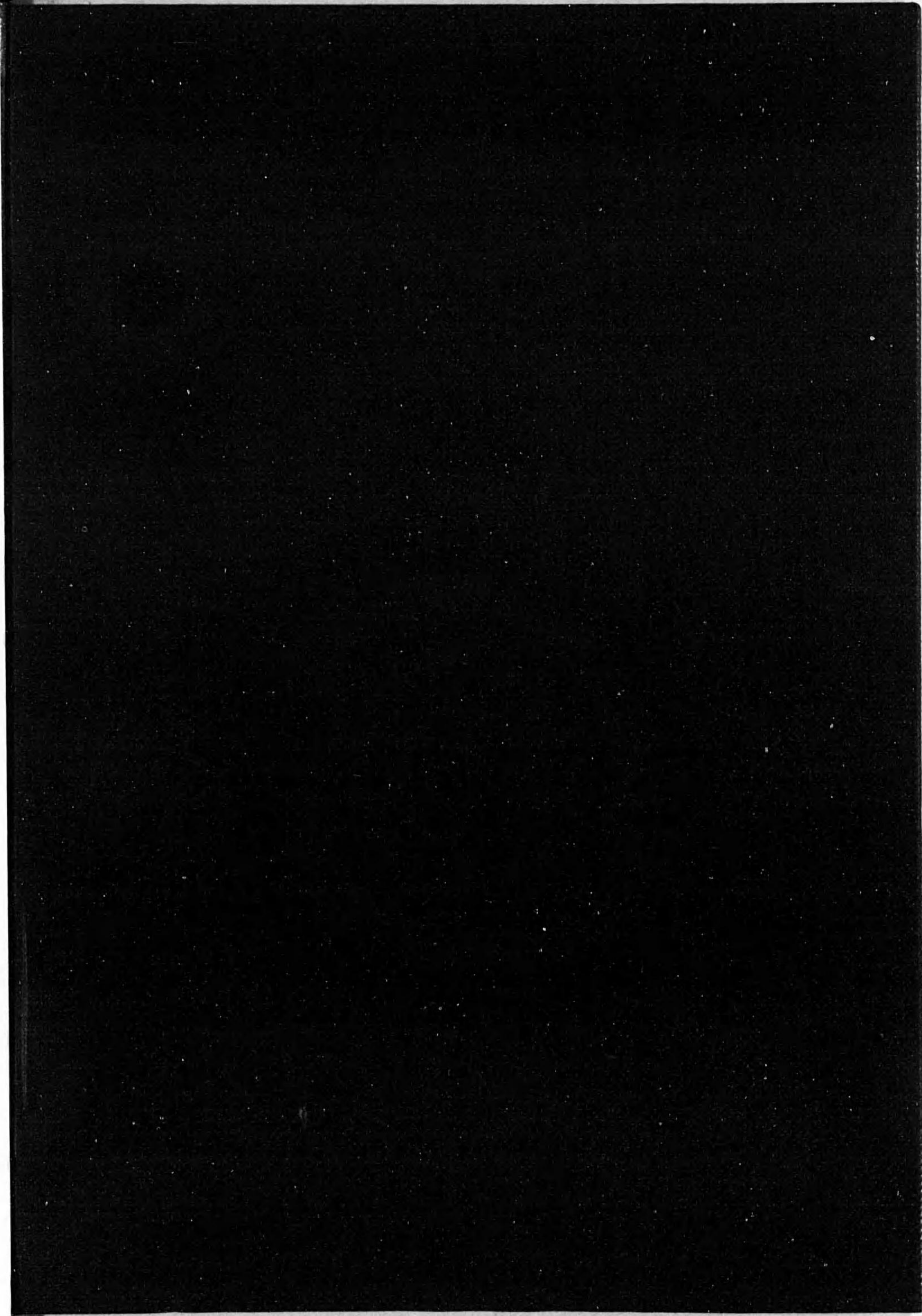
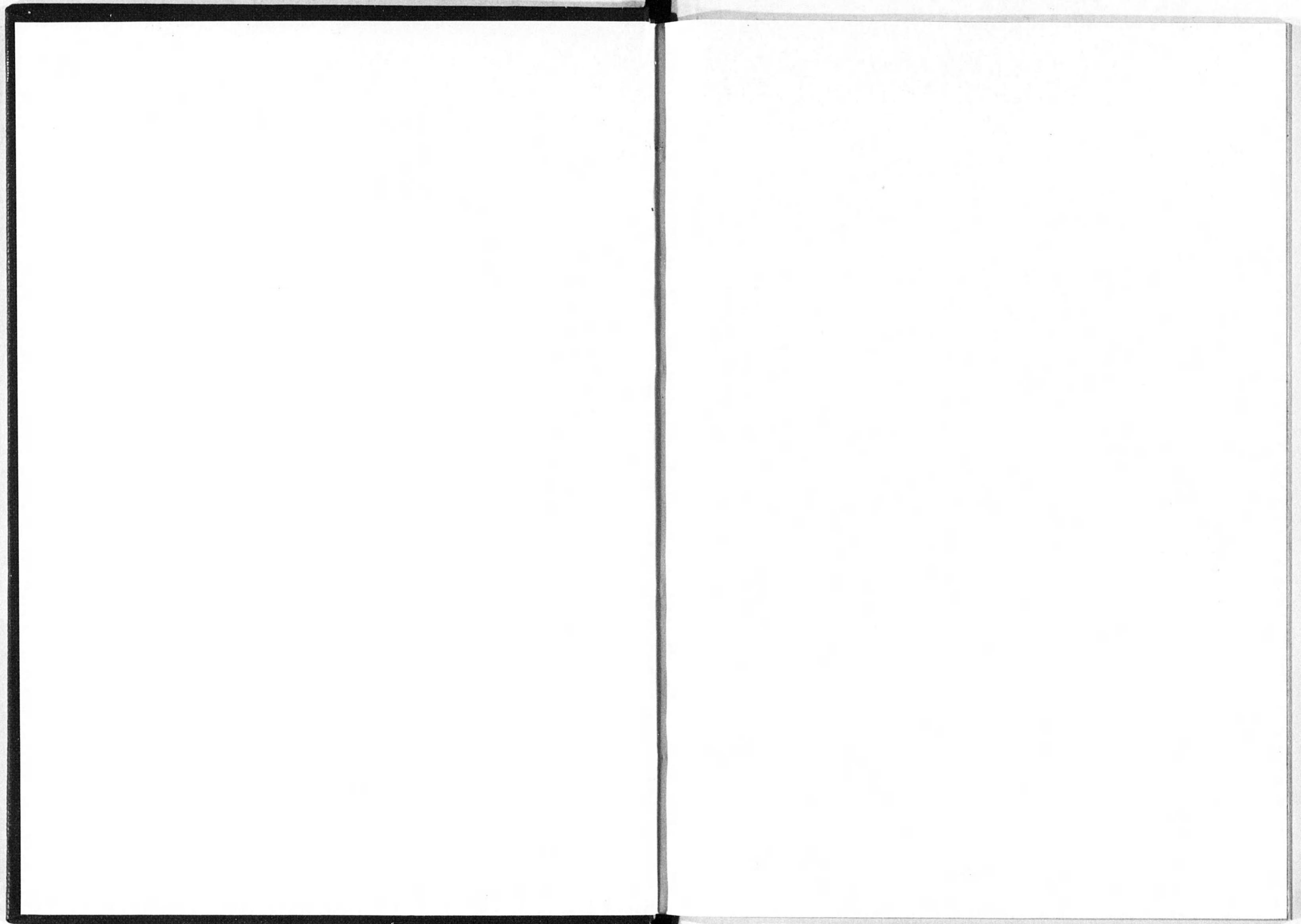




始





10-104

中央氣象臺彙報

第二十三冊

昭和十八年八月

中央氣象臺

4.6=

338



	頁
大氣の擾亂の研究(第七報).....	正野重方 1—12
降雨強度に就いて.....	伊東彊自 13—18
雨水の溫度.....	伊東彊自 18—26
日本の動氣候學.....	高橋浩一郎 27—37
相異なる物質部分より成る固體の熱傳導圖式解法.....	高橋喜彦 38—56
多方大氣.....	正野重方 57—68
垂直線偏倚より見た本邦近傍地殼均衡面の深さに就いて.....	{ 川畑幸夫 68—80 鮎田正
暖氣塊の侵入に依る降雨に就いて.....	高橋浩一郎 81—86
自由大氣中の輻射に就いて(I).....	{ 川畑幸夫 87—109 鮎田正
第二種假溫度と垂直安定度.....	正野重方 109—111
水の化學分析法檢討(第十一報)硝酸鹽.....	松居秀夫 112—114
雨水の化學(第二報).....	松居秀夫 115—120
統計渦動擴散論.....	高橋喜彦 121—147
氣象より見たる北海道の凶作に關する 2, 3 の報告	
特に昭和年間を中心として.....	{ 中原孫吉 147—155 五十嵐光彦
北東風による關東地方南部の局部的降雨に就いて.....	畠山久尙 155—158
東亞の上層氣溫及び濕度.....	荒川秀俊 158—167
統計理論による n 次元渦動擴散の計算例.....	高橋喜彦 167—172
赤道を越える氣流の運動(1).....	櫻庭信一 172—177
相異なる物質部分より成る固體に對する熱傳導の完全なる圖式解法.....	高橋喜彦 178—191
三つの固體がすれちがふ場合の二次元熱傳導圖式解法の一例.....	高橋喜彦 191—194
東北地方夏期氣溫と大氣透過率其他との關係	
—ジョルダン・カンベル日照率の差が大氣透過率を表はす事より兩者の關係に及ぶ—	
.....	須田瀧雄 194—206

寄贈本



大氣の擾亂の研究 (第八報).....	正野重方	207—213													
四季, 濠洲大陸に収斂(又は發散)する空氣の總量.....	<table border="0"> <tr> <td rowspan="4" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>崎藤星荒</td> <td>田井沼野川</td> <td>千春茂育保俊</td> <td rowspan="4" style="vertical-align: middle;">214—219</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	}	崎藤星荒	田井沼野川	千春茂育保俊	214—219									
}	崎藤星荒		田井沼野川	千春茂育保俊	214—219										
世界各地の日出没時刻推算圖表.....	<table border="0"> <tr> <td rowspan="4" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>川内川石</td> <td>畑海崎山</td> <td>幸夫誠弘一</td> <td rowspan="4" style="vertical-align: middle;">219—235</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	}	川内川石	畑海崎山	幸夫誠弘一	219—235									
}	川内川石		畑海崎山	幸夫誠弘一	219—235										
高倍率自記晴雨計の試作.....	矢龜紀一	236—239													
大麥の收量と氣象との關係 (第2報).....	大後美保	240—248													



## 大氣の擾亂の研究 (第七報)<sup>1)</sup>

正野重方

### 第十一章 帶狀大循環安定度に関する規準に就て

高低氣壓の發生發達に關して大氣の安定度が重要な役割を演ずる事は申す迄もない事である。然して大氣循環の水平安定度の問題は之に關聯して重要であり之に關して若干の勞作があり今後も盛んに論ぜられようとする傾向にある。

帶狀大循環の安定度に關して大體四つの流儀で研究されてゐる。

1. Helmholtz の方法
2. 擾亂方程式による方法
3. 勢力的考察による方法
4. 假想變位による方法

第1の方法は Helmholtz が地球を取捨く空氣輪の安定度に関する研究を行つたのが始まりで<sup>2)</sup>、その後 Möller<sup>3)</sup> は此の條件を用ひて帶狀循環の安定を論じた。更に櫻庭氏<sup>4)</sup> は同じ考へ方を連続體に應用して安定度の規準を求めた。

第2の方法は Ertel<sup>5)</sup> が直交 Lagrange 座標で表はした運動方程式を用ひ、その擾亂の方程式より安定の規準を求め、荒川博士<sup>6)</sup> は球座標で表はした擾亂の方程式より球面上の安定の規準を求めた。

第3の方法は Kleinschmidt がエネルギーの極大極小の考へより直交座標で Ertel と同じ水平

(1) 帶狀大循環の安定度に就て氣象事業國營移管記念論文集所載を本研究の第六報とする。

(2) H. von Helmholtz: Wirbel und Gewittlen 1875. F. Exner: Lehrbuch der dynamische Meteorologie 206 頁。

(3) Met. ZS. 57, 331, 1940.

(4) 氣象集誌 18, 393, 昭和 15 年及其後「海と空」に發表された論文。

(5) Met. ZS. 57, 1940.

(6) 氣象集誌 19, 205, 昭和 16 年。

方向に対する規準を求めた<sup>(1)</sup>。

第4の方法は従来垂直方向の安定度の問題に就て屢々用ひられた方法で假想變位を考へその假想變位が増々大きくなるか元に戻らうとする傾向を持つかを調べよりの安定度の規準を出すもので既に此の方法は低氣壓内の安定度の問題に關聯して第十章で用ひた方法である。此の方法により帶狀大循環の規準方程式は別の論文<sup>(2)</sup>にて發表した。その論文に於ては水平とか垂直とかに限らず地表面に斜めの方向に假想變位をした場合即ち一般安定度の規準式を求め、その傾斜を地面と平行又は垂直にすることにより水平及垂直安定度が直ちに得られた、更に Ertel, Kleinschmidt, 荒川博士等の規準の中に含まれて居る事を示した。其處で述べた通り此の一般安定度と Helmholtz 流の安定度の規準との關係が残された問題である。

本章に於ては著者の一般安定度と Helmholtz 流の規準との關係を論じようと思ふ。

著者の安定度は

$$\frac{1}{\theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial s} + \frac{1}{K} \left( \frac{\Delta K}{\Delta s} - \frac{\partial K}{\partial s} \right) \leq 0 \quad (11-1)$$

$$K = \left( \frac{GR^2}{r^2} - 2\omega \cos \varphi U - \frac{U^2}{r} \right) \sin \varepsilon + \left( 2\omega \sin \varphi U + tg \varphi \frac{U^2}{r} \right) \cos \varepsilon \quad (11-2)$$

即ち

$$\frac{1}{\theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial s} + \frac{2 \left( \omega + \frac{U}{r \cos \varphi} \right) \sin(\varphi - \varepsilon)}{K} \left\{ -\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{U \sin(\varphi - \varepsilon)}{r \cos \varphi} + 2\omega \sin(\varphi - \varepsilon) \right\} \geq 0 \quad (11-3)$$

と書ける。但し引用論文では  $K$  中重力に關する項は  $G \frac{R^2}{r^2}$  の代りに  $g$  としてある。茲に  $\Delta/\Delta s$ ,  $\partial/\partial s$  は  $s$  方向 (地表面と  $\varepsilon$  なる角をなす) に於ける假想變位による變化度と空間分布による變化度を表はす。

著者の論文は連続體を扱つてあり、Helmholtz は不連続面の兩側にある空氣輪を取扱つて居るのであるから Helmholtz 流の問題と比較するには連続體に變更する必要がある。それは別に困難な事はない。

空氣輪に固有の量は Helmholtz に於ては 1 及 2 なる添字を附して表はしてある。然して  $Q$  及  $\theta$  は保存的な量である事に注意すれば  $Q_1, \theta_1$  に對して  $Q(\rho), \theta(\rho)$ ,  $Q_2, \theta_2$  に對して  $Q(\rho+d\rho)$ ,  $\theta(\rho+d\rho)$  と置く事が出来る。即ち始めの平衡状態に於ける空間分布を採用することが出来るのである。兩氣輪が相接觸するからと云つて  $\rho_1 = \rho_2$  と置いて  $Q = r^2(\omega + \omega_0)$  を用ひて  $\omega$  のみを比較するのは正しくない。接觸するとは云つても同じ  $\rho$  の所へ來るのである。始めの位置とはずれて居るのであるから  $\omega$  は始めの平衡位置に於ける  $\omega$  とは同じではなく

(1) Met. ZS. 58, 157, 1941.

(2) 氣象事業國營移管記念論文集.

$$\rho_1^2(\omega_1 + \omega_0) = \rho^2(\omega_1' + \omega_0) = \text{const}$$

$$\rho_2^2(\omega_2 + \omega_0) = \rho^2(\omega_2' + \omega_0) = \text{const}$$

なる關係がある事に注意しなければならない。Möller は  $\omega_1', \omega_1$  及  $\omega_2'$  と  $\omega_2$  とを同一視して居るのは正しくない。

以上の注意をすれば

$$-\frac{1}{\rho^3} \left( \frac{Q_2^2}{\theta_2} - \frac{Q_1^2}{\theta_1} \right) + \rho \omega_0^2 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right) > 0 \quad (11-4)$$

は次の様になる。

$$-\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{Q^2}{\theta} \right) + \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\theta} \right) > 0 \quad (11-5)$$

左邊を  $I$  と置けば

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{\rho^3} \frac{2Q \partial Q}{\theta \partial \varphi} + \left( -\frac{Q^2}{\rho^3} + \rho \omega_0^2 \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\theta} \right) \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ -\frac{2Q \partial Q}{\rho^3 \partial \varphi} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \left( -\frac{Q^2}{\rho^3} + \rho \omega_0^2 \right) \right\} \\ &= \frac{\left( \frac{Q^2}{\rho^3} - \rho \omega_0^2 \right)}{\theta} \left\{ -\frac{2Q \partial Q}{\rho^3 \partial \varphi} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right\} \end{aligned} \quad (11-6)$$

然して

$$Q = r^2 \cos^2 \varphi (\omega + \omega_0) = r \cos \varphi (U + \omega_0 r \cos \varphi) \quad (11-7)$$

と置けば

$$\begin{aligned} -\frac{Q^2}{\rho^3} + \rho \omega_0^2 &= -\rho(\omega + \omega_0)^2 + \rho \omega_0^2 = -\frac{U^2}{r \cos \varphi} - 2\omega_0 U \\ \frac{\partial Q}{\partial \varphi} &= r^2 \cos \varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{U}{r} tg \varphi - 2\omega_0 \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

故に

$$\frac{2Q \partial Q}{\rho^3 \partial \varphi} = \frac{2 \frac{r}{\cos \varphi} \left( \frac{U}{r} + \omega_0 \cos \varphi \right) \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{U}{r} tg \varphi + 2\omega_0 \sin \varphi \right)}{\frac{U^2}{r \cos \varphi} + 2\omega_0 U}$$

従つて

$$I = \frac{U^2}{r \cos \varphi} + 2\omega_0 U \left\{ \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{2 \frac{r}{\cos \varphi} \left( \frac{U}{r} + \omega_0 \cos \varphi \right) \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{U}{r} tg \varphi + 2\omega_0 \sin \varphi \right)}{\frac{U^2}{r \cos \varphi} + 2\omega_0 U} \right\}$$

然して

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{2 \frac{r}{\cos \varphi} \left( \frac{U}{r} + \omega_0 \cos \varphi \right) \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{U}{r} tg \varphi + 2\omega_0 \sin \varphi \right)}{\frac{U^2}{r \cos \varphi} + 2\omega_0 U} \geq 0 \quad (11-8)$$

になり、之は (11 2), (11 3) に於て  $\varepsilon=0, s=r\partial\varphi$  と置いて得られる式と全く同じである。即ち著者の導いた一般安定度の式は Helmholtz の考へより導いた式をも含んで居るのが證明出来た譯である。結局大氣大循環の水平安定度乃至一般安定度に関する規準の一般形が得られ、今迄に求めた色々な形式の規準の相互関係が判然と判つた事になるのであるが實は大氣の安定度の問題は之で解決した譯でないのであつて、之から問題の攻撃が始まる譯である。既に規準式の Helmholtz, Möller, E. tel 等により若干の問題への應用が行はれて居るがもつと深く發展さして行かなければならぬ。帯狀大循環の一般安定度の大小は現實的に如何なる現象が結果として現はれるのであらうか。不安定領域では低氣壓の發生が實際に多いだらうか、又如何なる機構で一般安定度が解消して大氣の擾亂が發生するのであらうか。之等の事柄は具體的研究は今後順次行つて行く豫定であるが帯狀大循環の水平乃至一般安定度の問題はその現象の規模から考へて半句豫報の問題と關係がある様と思はれる。

第十二章 低型高氣壓の維持

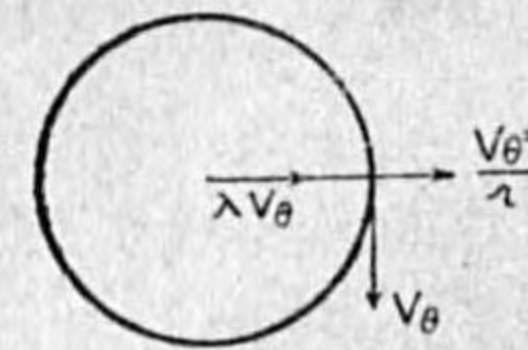
シベリア高氣壓は低い型の高氣壓で輻射に依つて發生したものである事は良く知られて居る。之は相對的に暖かい空氣の中に相對的に冷たい氣塊が第 1 圖の様に溜つたものと考へられる。所が重力場に於ては此の様な状態に不安定である。然るに此の様な状態が發生するのは如何した譯であらうか。

第 1 圖



今床の上に水を滲した場合を考へると、少量の水であればその様にまとまつて居るが多量の水は流れてしまう。之は表面張力の作用でその様になり、その極限以上になると支へ切れなくて破れてしまふためである。

之と同様に大氣中に溜つた冷氣塊もその支へる力が重力の不安定度に負けると破れて寒波の襲來と云ふ現象が起るのである。では水滴の表面張力に對應する力は何であらうか。之は轉向力である (第 2 圖参照)。



低型高氣壓の周りでは遠心力と重力ポテンシアルのために重い冷氣は外に流れださうとする傾向を持つのであるが轉向力のために内向きの力を受けて丁度釣合つて居るものと考へられる。

次に此の様な力が働いて居る場合此の冷氣塊の中よりその一部が外に飛び出した場合それが安定なりや否やの問題に就て考へよう。勿論寒波の襲來は決して此の様な小氣塊の飛出したものではないが此の小氣塊の水平安定度と寒波の襲來との關係は將來詳しく吟味するとして茲では小氣塊の貫入的安定度の問題に就て考へようと思ふ。

運動方程式の動徑成分を圓壙座標で書けば次の様になる。

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{V_\theta^2}{r} - \lambda V_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (12-1)$$

平衡状態では次の様になる。

$$+\frac{V_\theta^2}{r} + \lambda V_\theta = +\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (12-2)$$

垂直方向とを比較すれば

$$-\frac{V_\theta^2}{r} - \lambda V_\theta = K$$

が重力  $g$  の位置にある。今  $r_1$  なる半径の軌道にあつた氣塊が半径  $r_2$  の軌道に假想的變位をしたものとすれば、その氣塊が一層外に出るか元に戻るかは

$$(\rho_1 K_1)_2 - (\rho_2 K_2)_2 \geq 0 \quad (12-3)$$

で與へられる。即ち之が安定度の規準になる。假想變化による變化度を  $\Delta/\Delta r$ , 空間變化の變化度を  $\partial/\partial r$  に表はすと

$$(\rho_1 K_1)_2 = (\rho_1 K_1)_1 + \left( \frac{\Delta \rho_1 K_1}{\Delta r} \right)_1 (r_2 - r_1)$$

$$(\rho_2 K_2)_2 = (\rho_1 K_1)_1 + \left( \frac{\partial \rho_1 K_1}{\partial r} \right)_1 (r_2 - r_1)$$

なる故に (12-3) は  $r_2 - r_1 > 0$  であるから

$$\left( \frac{\Delta \rho_1 K_1}{\Delta r} \right)_1 - \left( \frac{\partial \rho_1 K_1}{\partial r} \right)_1 \geq 0 \quad (12-4)$$

になる。簡單のために添字 1 を省略する。K は實は正の量であるから (12-4) は

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta r} - \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{1}{K} \left( \frac{\Delta K}{\Delta r} - \frac{\partial K}{\partial r} \right) \geq 0 \quad (12-5)$$

と書ける。

今假想變位は自己正重多方等循環變化をするものとする。第 1 項は

$$\theta_p = T \left( \frac{P_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

を使ふと次式が證明出来る。

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta r} - \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \bar{\Gamma}_p \right) = \frac{1}{\theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial r} \quad (12-6)$$

但し

$$\bar{\Gamma}_p = \frac{k-1}{k} \frac{K}{R}$$

等循環變化をすれば

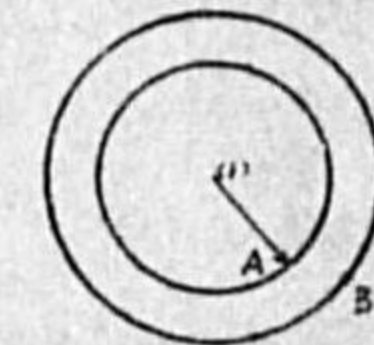
$$\frac{\Delta(C + 2\omega F) dr}{\Delta r dt} = 0$$

であるから

$$C = 2\pi r V_\theta, \quad F = \pi r^2 \sin \varphi$$

を代入すれば次式を得る。

第 2 圖



$$\frac{\Delta V_\theta}{\Delta r} = -\frac{V_\theta}{r} - 2\omega \sin \varphi \quad (12.7)$$

扱て

$$\frac{\Delta K}{\Delta r} = -\left(\lambda + \frac{2V_\theta}{r}\right) \frac{\Delta V_\theta}{\Delta r} + \frac{V_\theta^2}{r^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = -\left(\lambda + \frac{2V_\theta}{r}\right) \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta^2}{r^2}$$

なる故に

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K}{\Delta r} - \frac{\partial K}{\partial r} &= -\left(2\omega \sin \varphi + \frac{2V_\theta}{r}\right) \left(\frac{\Delta V_\theta}{\Delta r} - \frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) \\ &= 2\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right) \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} + 2\omega \sin \varphi\right) \end{aligned} \quad (12.8)$$

従つて (12.6), (12.8) を (12.5) に代入すれば

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \Gamma_p\right) + \frac{2\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right)}{K} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} + 2\omega \sin \varphi\right) \geq 0 \quad (12.9)$$

或は

$$\frac{1}{\theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial r} + \frac{2\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right)}{K} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} + 2\omega \sin \varphi\right) \geq 0 \quad \begin{matrix} \text{安定} \\ \text{不安定} \end{matrix} \quad (12.9')$$

$$\frac{1}{\theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial r} + \frac{2\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right)}{K} (\zeta + 2\omega \sin \varphi) \geq 0 \quad \begin{matrix} \text{安定} \\ \text{不安定} \end{matrix} \quad (12.9'')$$

上式が高気圧内に於ける水平安定度の規準式である。

高気圧に於ては普通は  $K = -2\omega \sin \varphi V_\theta - \frac{V_\theta^2}{r}$  は第 1 項は第 2 項に比較して大きく正である。従つて  $2\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right)$  も正である。K が零になる r と V<sub>θ</sub> の値の関係は次表で判る。

	V <sub>θ</sub>	5	10	15 米/秒
φ				
30°		68	137	206 軒
60°		40	79	119

上表に依ると 5 米/秒の風の場合緯度 30 度では 68 軒以内、緯度 60 度では 40 軒以内に於て遠心力が轉向力に打勝つて K が負になる。又 15 米/秒の場合は 200 軒及 120 軒以内で K が負になるが此の様に中心附近に於て高気圧内では風がある事は實際上殆どないから一般に K は正と考へてよい。2 $\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right)$  では r は上表の値の 2 倍が境になるがやはり大體正と考へてよいであらう。故に普通は 2 $\left(\omega \sin \varphi + \frac{V_\theta}{r}\right) / K$  は正と考へてよい。

高気圧の中心部は静穏であり外域も又静穏とすれば高気圧の周辺部に於て V<sub>θ</sub>(<0) が大きくなり

又小さくなる場合がある。即ち  $\partial V_\theta / \partial r < 0$  の部分と  $\partial V_\theta / \partial r > 0$  の部分がある筈である。今  $\partial V_\theta / \partial r$  に対して  $V_\theta / r$  は省略して考へると緯度 50 度に於ては  $2\omega \sin \varphi = 11 \times 10^{-5}$  秒である。従つて  $\partial V_\theta / \partial r = 10$  米/秒/100 軒以上の傾度があれば  $\partial V_\theta / \partial r < 0$  の部分で第 2 項は不安定項になる。

更に第 1 項に就て考へよう。便宜上 (12.9) の形を採用する。

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \Gamma_p\right) = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k-1}{k} \frac{K}{R}\right)$$

であり、第 2 項は  $\frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \frac{K}{g}$  と書ける。断熱変化の場合  $\frac{k-1}{k} \frac{g}{R} = 1$  度/100 米になるから、右邊は

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{K}{g} \text{ 度/100 米}$$

と書ける。K/g は正であるから、 $\partial T / \partial r < 0$  の場合即ち暖かい高気圧でも此の 2 項の和は正であり得るが  $\partial T / \partial r > 0$  の場合は勿論此の項は正である。従つて可成りに強い動力學的不安定度がない限り冷たい高気圧は水平方向には安定なものである。 $K = -2\omega \sin \varphi V_\theta - \frac{V_\theta^2}{r}$  は  $\varphi = 50$  度に於ては第 2 項を省略すると大體 10 米/秒に對して  $1.1 \times 10^{-1}$  の程度であり g は  $10^3$  であるから  $K/g = 10^{-4}$  位である、即ち 1000 軒に對して 1 度位の傾度 (外に向つて低温になる) 以上の場合は温度項は不安定項になるがそうでない場合は安定項である。

此の事を判り易い様に垂直方向の場合と比較すると

	力	力の方向	中立遞減率
垂直方向	g	垂直下方	1 度/100 米
水平方向	$-2\omega \sin \varphi V_\theta - \frac{V_\theta^2}{r}$	内向	1 度/100 軒

の関係がある。普通の垂直安定度と高気圧内の水平安定とは比較すれば冷たい高気圧は安定なることが判る。

以上の事よりシベリア高気圧の様に冷たい高気圧が水平方向に安定なることが判つた。従つて冷たい高気圧に就ては安定性が問題にならなくてむしろ不安定性が主な問題になる譯である。即ち冷たい高気圧が如何にして維持されるかではなく如何にして破壊されるかが主な問題である。此の問題には K の符號を變へる遠心力の項と此處では論じなかつた地面摩擦に注意しなければならない。遠心力に就て考へれば高気圧は決して一定の形で静止して居るものでなく、絶えず種々の影響で振動して居る。それで或る所に膨みが生じたとすればその部分は曲率が大きくなり、従つて K の第 2 項が大きくなり、K が小さくなり、又は符號が變ると云ふ事が考へられる。此の様になると此の部分が弱くなり、寒気が外に流れ出すのである。次に摩擦に就て考へる。

摩擦のある場合 (12.1) は



$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{V\theta^2}{r} - 2\omega \sin \varphi V\theta - \kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

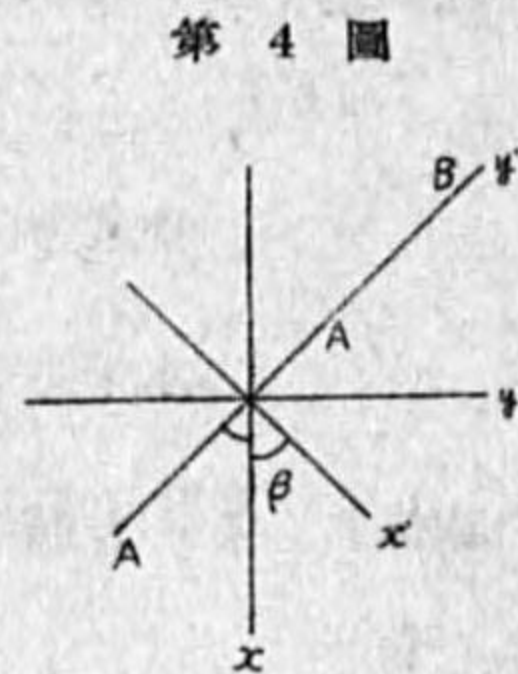
になり、第4項が増す。摩擦のある場合は \$V\theta\$ のみは存在せず \$v\_r\$ を伴つて居り、高気圧の場合 \$v\_r > 0\$ である。然して \$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)\$ に就て最も有効なのは \$\partial^2/\partial z^2\$ であるので之だけを考へれば \$\frac{\partial^2 v\_r}{\partial z^2} = dz^2\$ のときは正の値である。\$v\_r\$ は地上で5米/秒、1杆で5米/秒とすれば \$\partial^2 V/\partial z^2 = 10^{-7}\$ であるが \$\mu = 5 \times 10^5\$ e.g.s. とすれば \$\mu \partial^2 v\_r/\partial z^2 = 5 \times 10^{-2}\$ 位になり \$2\omega \sin \varphi V\theta = 5 \times 10^{-2}\$ 位になり同程度である。\$v\_r\$ の分布によつて此の値は種々に變るのであるが兎に角轉向力と同程度の事もあり、場合によつては大きい事も考へられる。此の影響は極く下層に限られた事であるが兎に角冷たい高気圧よりの寒気の氾濫には重要な事が判る。即ち少し不安定になり動徑方向の速度成分が出ればそれが轉向力の作用を減じ急に一層強い不安定になり寒気の爆發的氾濫が起ることになる。

結局高気圧よりの寒気の吹出しには轉向力遠心力摩擦力の正しい評價を行ひ、之等の相互作用に關して詳しく研究すれば實用上重要な問題が解ける譯である。之に關しては改めて詳しく吟味することにして本章では高気圧の水平安定度に關する事柄のみを論ずるに止めて置く。

第十三章 前線帯の安定度の問題

ノールウェイ學派に依れば發生期の低気壓は極前線に於ける不安定波なりとし、理想的零次不連続面の波動の安定度を問題にする譯である。所が實際の大氣では不連続面は決して零次不連続でなく、多かれ少かれ幅を持つものである。此處に取扱ふのは傾斜した前線帯に於ける一般安定度の問題である。之は低気壓發生に對して常に重要な問題である事は特に述べる必要はないであらう。

今前線帯の方向を \$y'\$ とし、それに直角に \$x'\$ を採る。南及東方向に \$x, y\$ 座標を採り、\$x\$ と \$x'\$ との間の角を \$\beta\$ とすれば \$x', y', z\$ 座標に關する運動方程式は次式で與へられる。



$$\frac{du'}{dt} - 2\omega \sin \varphi v' + 2\omega \cos \varphi \sin \beta w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'} \quad (13-1)$$

$$\frac{dv'}{dt} + 2\omega \sin \varphi u' + 2\omega \cos \varphi \cos \beta w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y'} \quad (13-2)$$

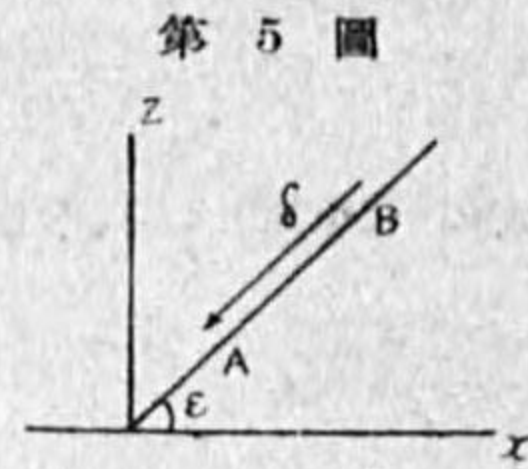
$$\frac{dw'}{dt} - 2\omega \cos \varphi \sin \beta u' - 2\omega \cos \varphi \cos \beta v' + g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (13-3)$$

平衡状態に於ては \$u'=0, w'=0\$ と假定すると (13-1) は次の様になる。

$$-2\omega \sin \varphi v' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'} \quad (13-4)$$

$$+g - 2\omega \cos \varphi \cos \beta v' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (13-5)$$

今 \$\delta\$ 方向に \$A\$ より \$B\$ 迄假想變位 \$\delta\$ を與へた時の安定度を問題にする。圖の如く \$z\$ を採る。重力及轉向力の合力は略 \$B\$ より \$A\$ の方向に向ふのであるから安定度に關して次式が成立する。



$$(\rho_A K_{As})_B - (\rho_B K_{Bs})_B \geq 0 \quad \begin{matrix} \text{安定} \\ \text{不安定} \end{matrix} \quad (13-6)$$

但し

$$K_s = K_z \sin \varepsilon + K_{z'} \cos \varepsilon \quad (13-7)$$

$$K_z = g - 2\omega \cos \varphi \cos \beta v' \quad (13-8)$$

$$K_{z'} = -2\omega \sin \varphi v' \quad (13-9)$$

然して假想變位に依る變分を \$\Delta/\Delta s\$, 空間分布による變化を \$\partial/\partial s\$ と表はせば

$$\left. \begin{aligned} (\rho_A K_{As})_B &= (\rho_A K_{As})_A + \frac{\Delta(\rho K_s)}{\Delta s} \delta \\ (\rho_B K_{Bs})_B &= (\rho_B K_{Bs})_A + \frac{\partial(\rho K_s)}{\partial s} \delta \end{aligned} \right\} \quad (13-10)$$

なる故に (13-6) は

$$\frac{\Delta(\rho K_s)}{\Delta s} - \frac{\partial(\rho K_s)}{\partial s} \geq 0 \quad (13-11)$$

になる。

\$\rho\$ は常に正であるが \$K\_s\$ は正、零、負の何れの値をも採り得る。故に (13-11) を次の様に書直し置く。

$$\frac{K_s}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + \left( \frac{\Delta K_s}{\Delta s} - \frac{\partial K_s}{\partial s} \right) \geq 0 \quad (13-11')$$

第1項に就て考へる。

\$P = \rho RT\$ を使ひ、自己正重の假定を用ひると

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{\Delta T}{\Delta s} \right) \quad (13-12)$$

(13-4) に \$\cos \varepsilon\$, (13-5) に \$\sin \varepsilon\$ を乗じて加へると

$$K_s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \quad (13-13)$$

になる事が容易に判る。多方變化の假定を使へば

$$T = C p^{\frac{k-1}{k}}$$

が成立するから

$$\frac{1}{T} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{k-1}{k} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta s} = \frac{k-1}{k} \frac{1}{RT \rho} \frac{\Delta p}{\Delta s} = -\frac{1}{T} \frac{k-1}{k} \frac{K_s}{R} = -\frac{1}{T} \Gamma_p \quad (13-14)$$

但し

$$\Gamma_{ps} = \frac{k-1K_s}{kR} \quad (13-15)$$

故に (13-12) は次の様になる。

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} + \Gamma_{ps} \right) \quad (13-16)$$

次に (13-11') の第 2 項に就て考へよう。

局所的直交座標を用ひて居るから

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K_s}{\Delta s} &= \frac{\Delta K_s \Delta x}{\Delta x \Delta s} + \frac{\Delta K_s \Delta z}{\Delta z \Delta s} = \frac{\Delta K_s \Delta \varphi}{\Delta \varphi \Delta \rho} + \frac{\Delta K_s \Delta z}{\Delta z \Delta s} \\ \frac{\partial K_s}{\partial s} &= \frac{\partial K_s \partial \varphi}{\partial \varphi \partial s} + \frac{\partial K_s \partial z}{\partial z \partial s} \end{aligned}$$

になり,  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ ,  $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial s}$  なることに注意すれば

$$\frac{\Delta K_s}{\Delta s} - \frac{\partial K_s}{\partial s} = -2\omega (\cos \beta \cos \varphi \sin \varepsilon + \sin \varphi \cos \varepsilon) \left( \frac{\Delta v'}{\Delta s} - \frac{\partial v'}{\partial s} \right) \quad (13-17)$$

を得る。

次に  $\frac{\Delta v'}{\Delta s}$  を求めよう。

變位は等循環的に行はれるから次式が成立する。

$$C + 2\omega F = \text{const}$$

但し

$$C = 2\pi r \cos \varphi v$$

$$F = \pi r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\frac{\Delta}{\Delta s} = \frac{\Delta}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} + \frac{\Delta}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{-\Delta}{r \Delta \varphi} \cos \varepsilon \cos \beta + \frac{\Delta}{\Delta z} \sin \varepsilon$$

なる故に

$$\begin{aligned} &2\pi \left( r \cos \varphi \frac{\Delta v}{\Delta s} + \cos \varphi v \sin \varepsilon + \sin \varphi v \cos \beta \cos \varepsilon \right) \\ &+ 2\pi (2 \sin \varphi \cos \varphi r \cos \varepsilon \cos \beta + 2r \sin \varepsilon \cos^2 \varphi) = 0 \end{aligned}$$

従つて

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} + \left( \frac{v}{r} + 2\omega \cos \varphi \right) (\sin \varepsilon + \tan \varphi \cos \varepsilon \cos \beta) = 0 \quad (13-18)$$

$$v'^2 = u^2 + v^2$$

なる故に  $\frac{\Delta u}{\Delta s} = 0$  を考慮すれば

$$v' \frac{\Delta v'}{\Delta s} = v \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

従つて

$$\frac{\Delta v'}{\Delta s} = \frac{v}{v'} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \cos \beta \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

上式に (13-18) を記入すれば

$$\frac{\Delta v'}{\Delta s} = -\cos \beta \left( \frac{v'}{r} \cos \beta + 2\omega \cos \varphi \right) (\sin \varepsilon + \tan \varphi \cos \varepsilon) \quad (13-19)$$

故に

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K_s}{\Delta s} - \frac{\partial K_s}{\partial s} &= 2\omega (\cos \beta \cos \varphi \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \sin \varphi) \\ &\times \left\{ \frac{\partial v'}{\partial s} + \left( \frac{v'}{r} \cos^2 \beta + 2\omega \cos \varphi \cos \beta \right) (\sin \varepsilon + \tan \varphi \cos \beta \cos \varepsilon) \right\} \quad (13-20) \end{aligned}$$

(13-16), (13-20) を (13-11) に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{K_s}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} + \Gamma_{ps} \right) + 2\omega (\cos \beta \cos \varphi \sin \varepsilon + \sin \varphi \cos \varepsilon) \\ &\times \left\{ \frac{\partial v'}{\partial s} + \left( \frac{v'}{r} \cos^2 \beta + 2\omega \cos \varphi \cos \beta \right) (\sin \varepsilon + \tan \varphi \cos \beta \cos \varepsilon) \right\} \geq 0 \quad \text{安定} \\ &\hspace{10em} \text{不安定} \quad (13-21) \end{aligned}$$

上式が前線帯に於ける一般安定度の規準方程式である。

(吟味)

(1)  $\beta = 0$  と置けば

$$\frac{K_s}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} + \Gamma_{ps} \right) + 2\omega \sin (\varphi + \varepsilon) \left\{ \frac{\partial v'}{\partial s} + \left( \frac{v'}{r \cos \varphi} + 2\omega \right) \sin (\varphi + \varepsilon) \right\} \leq 0,$$

更に  $\varepsilon \xi \pi - \varepsilon$  と置けば

$$\frac{K_s}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} + \Gamma_{ps} \right) + 2\omega \sin (\varphi - \varepsilon) \left\{ -\frac{\partial v'}{\partial s} + \left( \frac{v'}{r \cos \varphi} + 2\omega \right) \sin (\varphi - \varepsilon) \right\} \leq 0 \quad (13-22)$$

になる。之は帯狀大循環の一般安定度の式に於て遠心力を省略したものと全く同じである。

(2)  $\varepsilon = 0$  と置けば

$$\frac{K_s}{T} \left\{ \frac{\partial T}{\partial s} + \Gamma_{ps} \right\} + 2\omega \sin \varphi \left\{ \frac{\partial v'}{\partial s} + \left( \frac{v'}{r} \cos \beta + 2\omega \cos \varphi \right) \tan \varphi \cos^2 \beta \right\} \geq 0 \quad (13-23)$$

但し

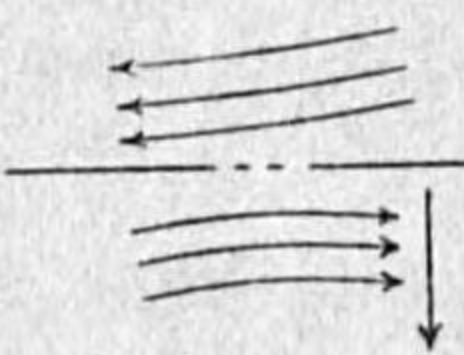
$$ds = -rd\varphi, \quad K_s = -2\omega \sin \varphi v', \quad \Gamma_{ps} = \frac{k-1K_s}{kR}$$

普通の場合  $\partial v'/\partial s > 0$  であり, 亦  $2\omega \sin \varphi \cos^2 \beta > 0$  であるから第 2 項は一般に安定項である。

(13-23) は更に  $\partial v'/\partial s$  に比べて  $\frac{v'}{r} \cos^2 \beta \tan \varphi$  を省略すれば

$$\frac{-v'}{T} \left\{ \frac{\partial T}{\partial s} + \Gamma_{ps} \right\} + \left( \frac{\partial v'}{\partial s} + 2\omega \sin \varphi \cos^2 \beta \right) \geq 0 \quad (13-24)$$

第 6 圖



の如くなる。或は更に簡単にして

$$-\frac{v'\partial\theta}{\theta\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial s} + 2\omega \sin\varphi \cos^2\beta \geq 0 \quad (13-25)$$

になる。  $2\omega = 1.46 \times 10^{-4}$  であるから

$$-\frac{v'\partial\theta}{\theta\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial s} + 1.46 \times 10^{-4} \sin\varphi \cos^2\beta \geq 0 \quad (13-26)$$

$$\theta \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v'}{\theta} \right) + 1.46 \times 10^{-4} \sin\varphi \cos^2\beta \geq 0 \quad (13-26')$$

を得る。  $\partial v'/\partial s > 0$  であるから、此の項も安定項である。  $-\frac{v'\partial\theta}{\theta\partial s}$  は  $v'$  の負正に従ひ、安定又は不安定項になる。

今  $\beta = 0$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\partial v'/\partial s = 10$  米/秒/100 杆 の場合を考へれば

$$2\omega \sin\varphi + \frac{\partial v'}{\partial s} = 1 \times 10^{-4} + 1 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} \text{ C.G.S.}$$

になる。  $\partial\theta/\partial s = 10$  度/100 杆  $\theta = 300$  とすれば

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{3} \times 10^{-8}$$

になる。従つて第 2 項の安定度を破るには  $v' = 600$  米/秒以上の風が必要であり、此の場合温度分布は餘り問題にならない。従つて此の事より frontal zone は水平方向には非常な力學的安定度を持つと云ふ事になる。茲に注意すべき事は之は frontal zone に於ける氣塊の位置交換に對する安定度であつて frontal zone 自身が移動することの安定度の問題は別に論ずる。

以上の様な理由で不連続線兩側に於ける氣塊が相接觸してもすぐ混合して運動量の交換が行はれてしまふことが案外少ない事が理解される。不連続線の構造は案外安定なものである。

此の様な構造的に見て安定な frontal zone に於て何故天氣が悪いのであらうか。之はやはり地表面摩擦を凝結による潜熱の放出に歸すべきであらうか。之に關しては改めて論ずる事にしよう。

## 降雨強度に就て

伊 東 彊 自

1) はしがき 降雨の機巧を調べるにはいろいろな要素を詳しく観測する必要があるが、降雨の強度もその一つであつて降雨強度と他の要素との關係には興味深いものがある様である。以下降雨強度の諸性質及雨滴や雨水温度との關係について調べたところを述べる。降雨強度はどの様な降雨についても観測され變化の様を見る事が出来るけれどもあまり強度の大きくない降雨については精密な観測を必要とし、充分注意して調べるべきである。それで今回は對流性の降雨丈について降雨の強度を読み取つてみた。

降雨強度の分布には種々な型があつてまちまちであるが對流性降雨丈についてみると大體第 1 圖に示した様な三つの型にわけられる。

a) 主山型 中央に著しい強度の山があり、その前後はほぼ對稱的な波状を示し、しかもこれらの強度は極大の強度に較べ非常に小さい。圖示したのは典型的な例であつて形の變つたものがある。例へば極大の強度の前又は後の小さな強度の缺けたものもあり、又時には極大位の大きさのものが多少時間が離れて二つあつたりする事がある。

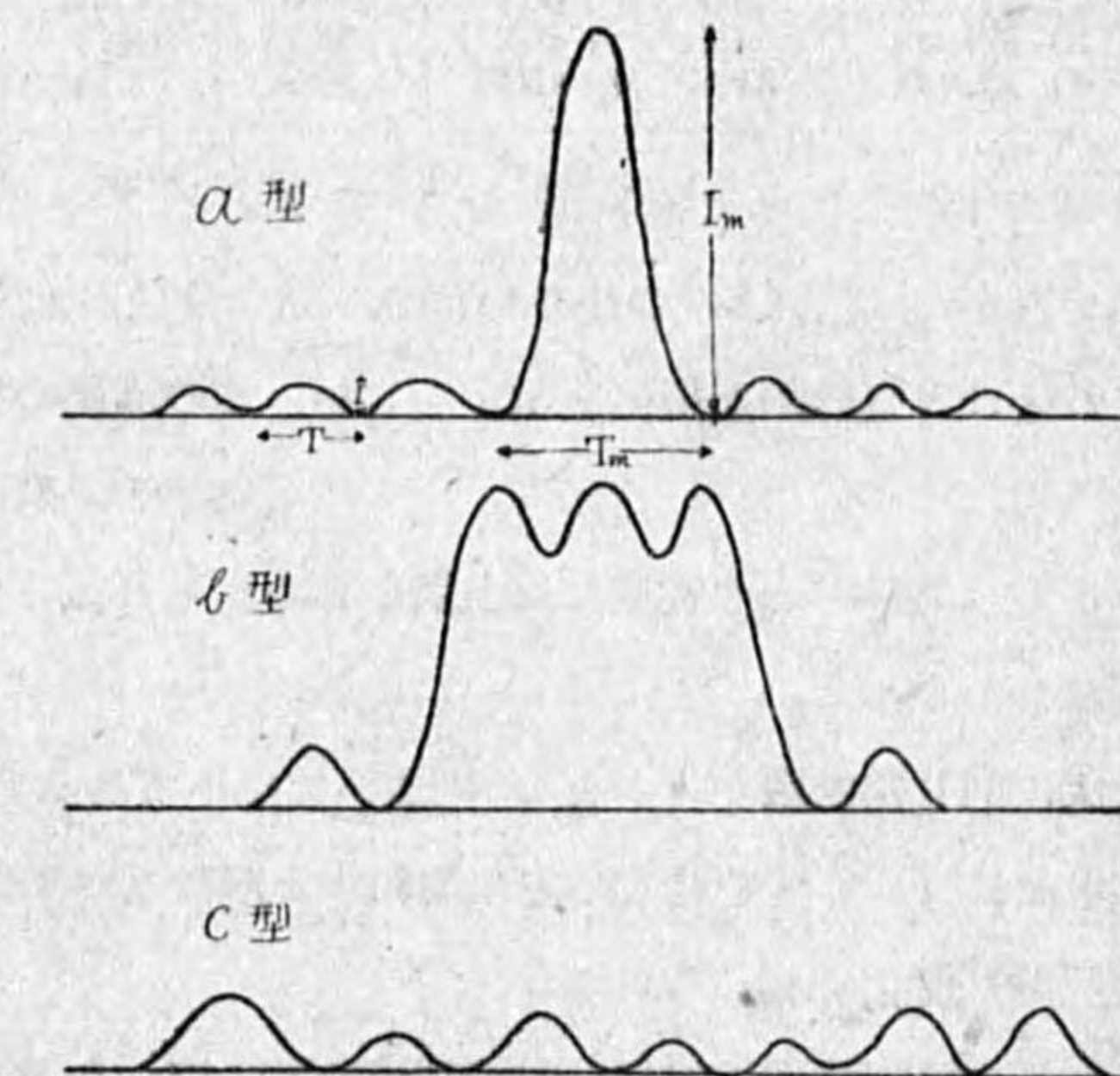
b) 連山型 最大強度の山がやはり中央にあり、そのすぐ前後の山がかなり大きくなり、その又隣りはほとんど認められない位となつてしまつて居る。全體がまとまつて連峯の様な形を示して居る。この型にも矢張り變形したものがある。

c) 群山型 この型は一般に對流性降雨以外の降雨に多く見られる型であるが、對流性の降雨の場合にも圖の様に大體同じ位の強度の山が連つて居る時がある。

以上三つにわけてみたものはつきりわけられない場合が非常に多く、どつちにもつかない様な事もある。

第 1 圖 降雨強度の型

a: 主山型 b: 連山型 c: 群山型



2) 降雨強度の性質 最大強度の週期を  $T_m$ 、一降雨について平均の週期を  $T$ 、最小の週期を  $T_{min}$ 、最大の強度を  $I_m$ 、平均の強度を  $I$ 、強度の最小を  $I_{min}$  とすると次の第1表に示した様になる。この表でわかる様に平均に於て週期は25分から60分位、強度は10分間に1mmから8mm位と云ふのがわかる。何れも大體(a),(b),(c)の順序になつて居り、降水量も平均では(a)が一番多く(b)が之に次いで大きく(c)型が一番少なくなつて居る。しかし  $T_m/T$  又は  $I_m/I$  を出してみると大凡一定であるらしい様子が認められる。

第1表 各降雨型に於ける強度及強度の週期の平均其他

	$T$	$T_m$	$T_{min}$	$I$	$I_m$	$I_{min}$	$T_m/T$	$I_m/I$	降水量
(a) 主山型	38.5分	58.7分	30.3分	3.23 mm/10 min	8.20	1.25	1.45	3.65	35.8 mm
(b) 連山型	34.5	48.3	25.7	3.11	7.05	1.48	1.27	2.22	26.9
(c) 群山型	31.4	43.0	26.1	1.19	2.45	0.87	1.45	2.15	22.1

第2圖に一つ一つの降雨について  $T_m$  と  $T$  との間の関係を圖示した。(a),(b),(c)各異なる印で描いたが、 $T$  と  $T_m$  の小さい部分で點の分散が大きい。しかし數は少いが  $T_m$  及び  $T$  が大きくなるとほぼ直線的な變化を示すらしい。この直線の實驗式は圖示した様に

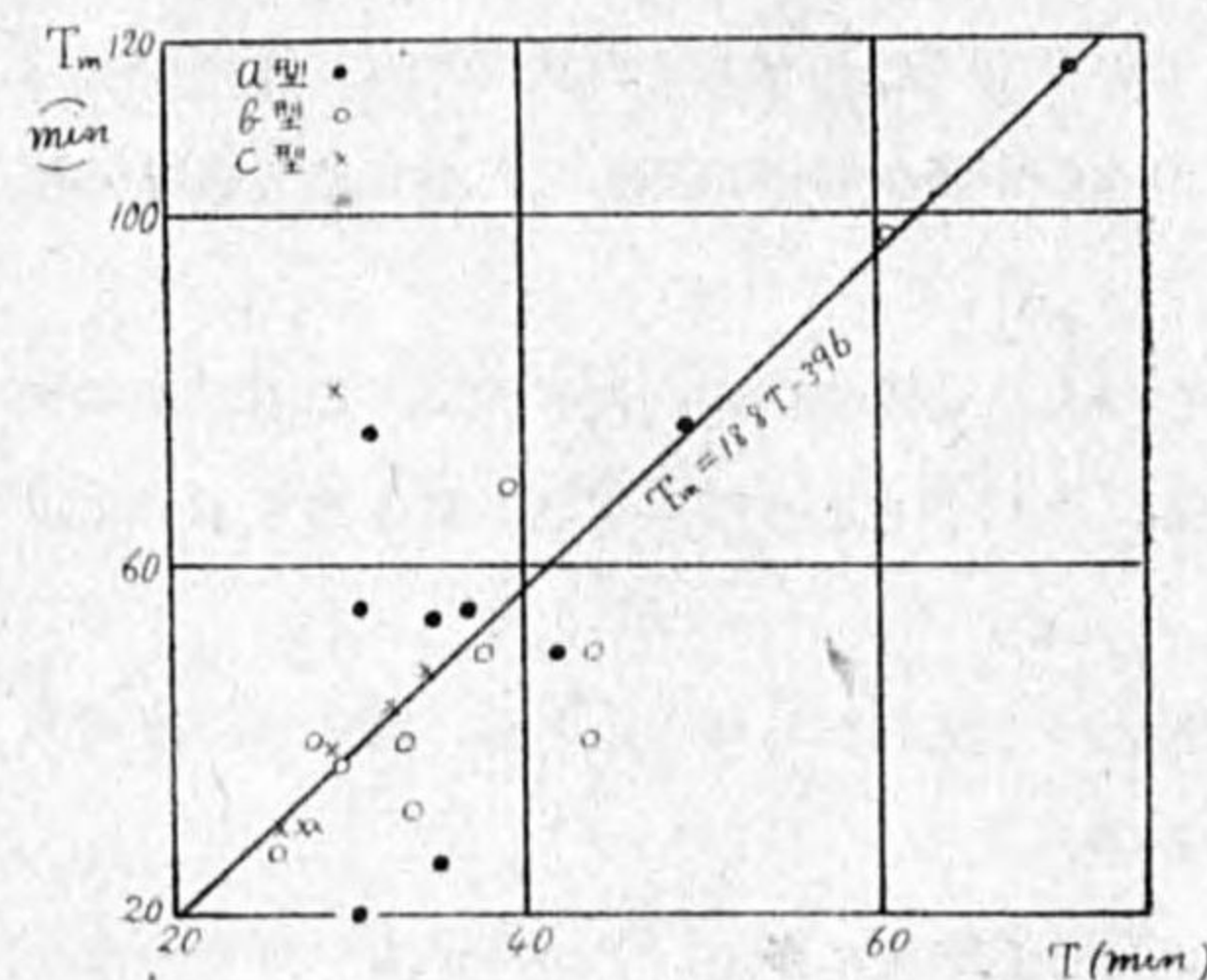
$$T_m = 18.8T - 396$$

となる。 $T_m, T$  とも實際には上限があるがそれ以下の範囲内では  $T$  が増せば直線的に  $T_m$  も増す事がわかる。

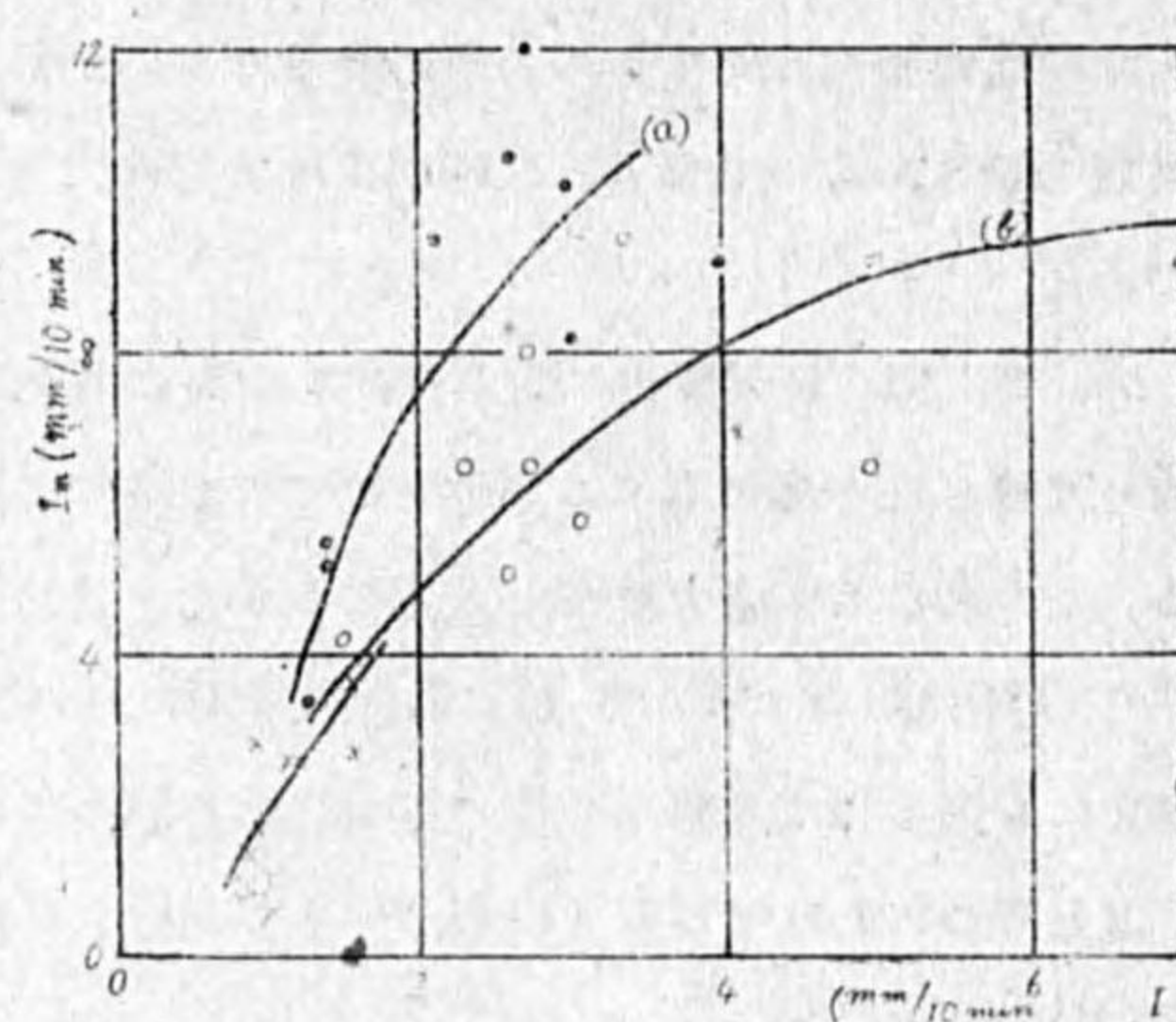
次に同じ様な圖を  $I_m$  と  $I$  について描いてみると第3圖の様になり、この方は直線的でなく  $I$  が増せば  $I_m$  も増すが増し方は飽和する形になつて居る。たゞ(c)型については範囲がせまいので直線的な變化が認められる。

平均の降雨強度と週期の間の関係は第4圖の如くであつてかなり各點はバラついて居るが、圖示

第2圖  $T$  と  $T_m$  との間の關係



第3圖  $I$  と  $I_m$  との間の關係



した曲線の如く大體の傾向は認められると思ふ。即ち降雨強度と週期との間にはかなりの關係があり、強度が増すと週期の方は急激に増すのがわかる。但し全體としてみると圖の閉曲線の範囲内に大部分の觀測點が入つてしまひ其他は

極めて少い。それで降雨強度が増せば強度の雨期を増すが、兩方とも比較的せまい範囲内に入つてしまふ様である。即ち  $I$  も  $T$  も例外はあるが普通に觀測される範囲は割合にせまく、

$$24分 < T < 47分,$$

$$0.6 \text{ mm}/10 \text{ 分} < I < 5.1 \text{ mm}/10 \text{ 分}$$

位のところが最も多い。

$T_m$  と  $I_m$  との間の關係についてもほぼ同じ事が云へる(第5圖)。この方の頻度の多い範囲は

$$17分 < T_m < 70分,$$

$$1.4 \text{ mm}/10 \text{ 分} < I_m$$

$$< 10.3 \text{ mm}/10 \text{ 分}$$

である。たゞこゝに面白いこと

は  $T$  の最小の限度よりも  $T_m$  の最小の限度の方が大きい様に見える事で  $I_m$  が極大の時の  $T_m$  は必ずしも實際の極大の週期ではないわけである。即ち降雨の強度最大時には週期の最大が現はれるとは限らず、最大以外の週期の現はれる場合がかなりあるらしい。

3) 降水量との關係 一降雨の全降水量は觀測してあるのでその全量と  $I_m$  又は  $T_m$  との關係をしらべて見ると第6圖に示した様な形となる。各點の分散度はかなり大きい各降雨の型とも降水量が増せば  $T_m$  も  $I_m$  もともに増加するのがつきりわかる。即ち對流性の降雨では全降水量が多い程最大強度は大きくなりその時の週期も長くなる。この間の變化の様は大凡圖の如く二次曲線的であるから

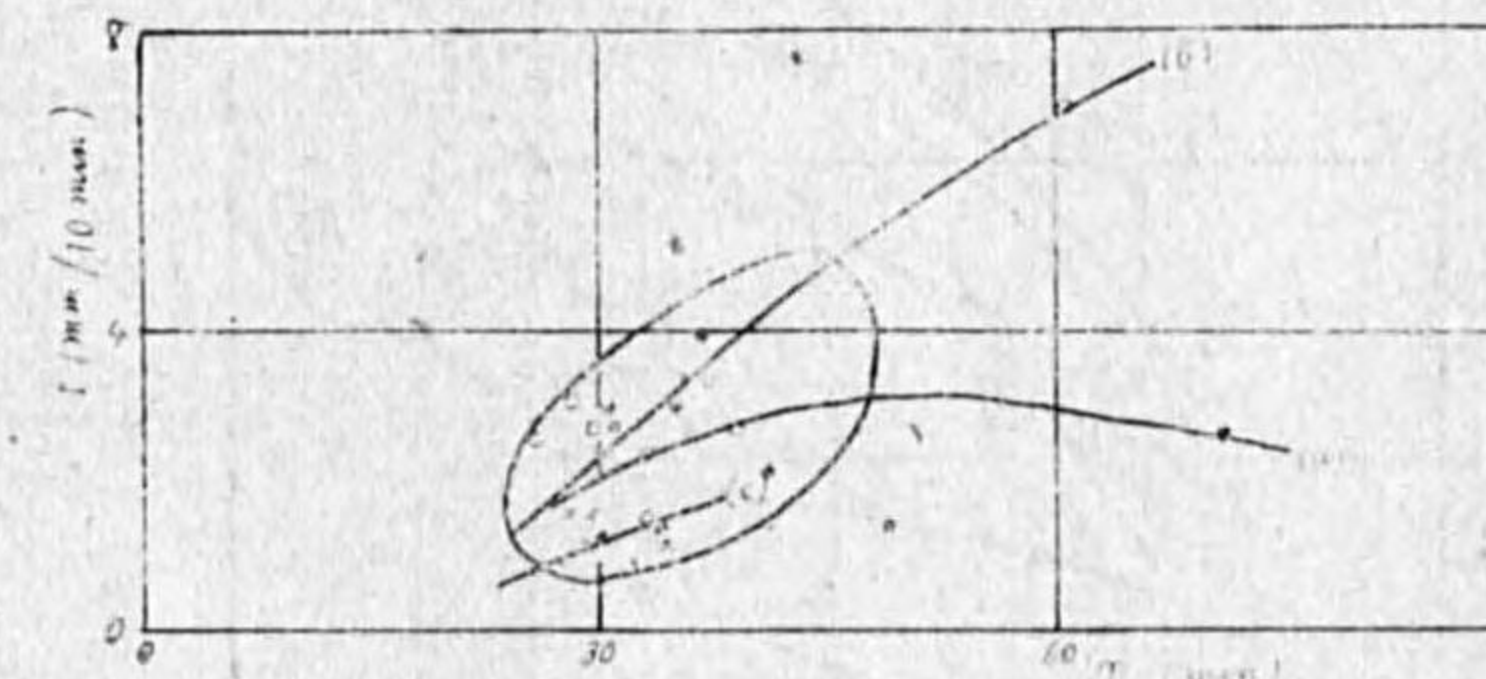
$$I_m = C_1 A^\alpha$$

$$T_m = C_2 A^\beta$$

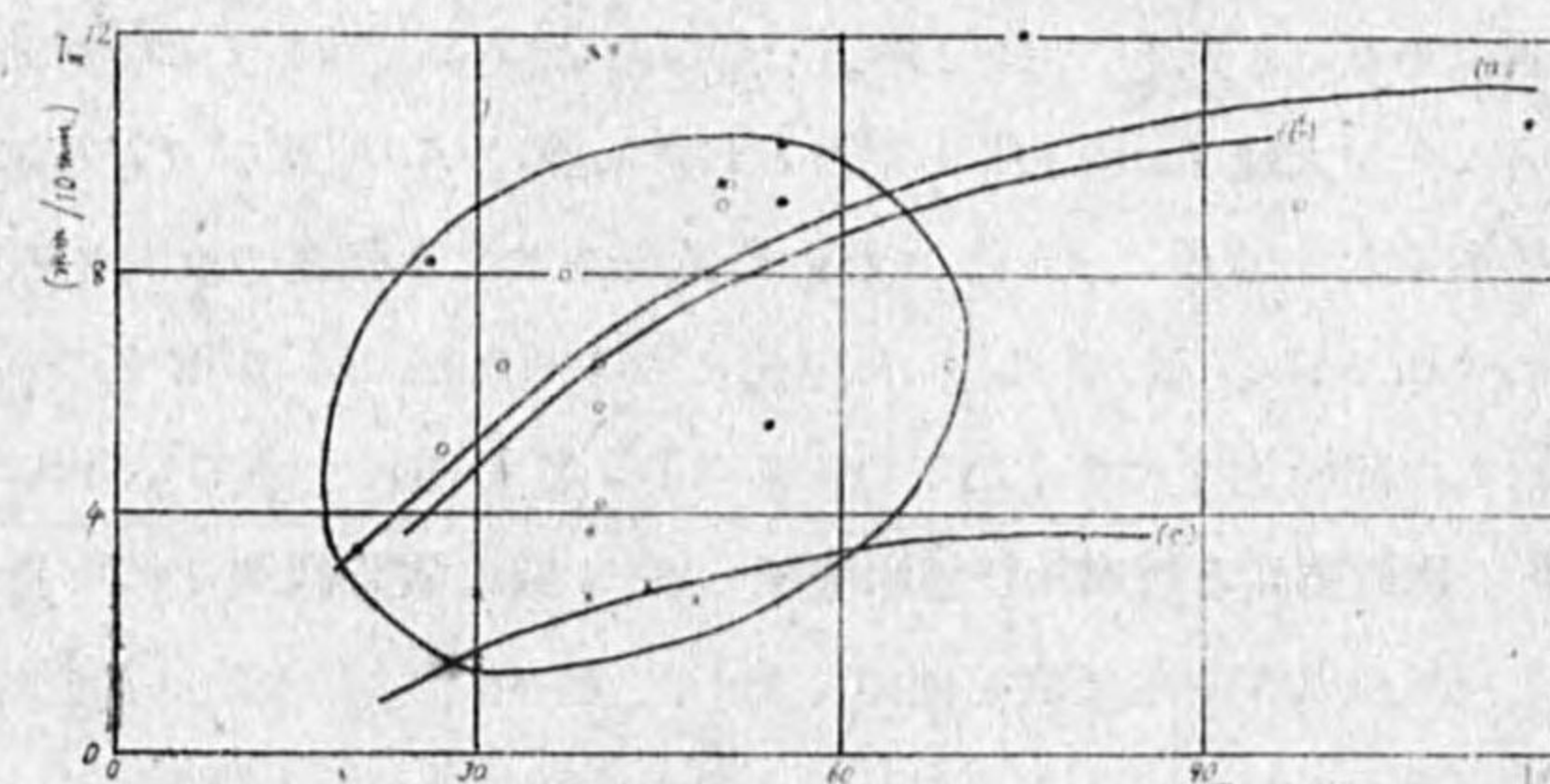
と云ふ様な形で大體の様子は現はせるであらう。

4) 次に降雨の強度の變化につれて  $I_m/I$  又は  $T_m/T$  の値がどの様に變化するかを調べたのが第

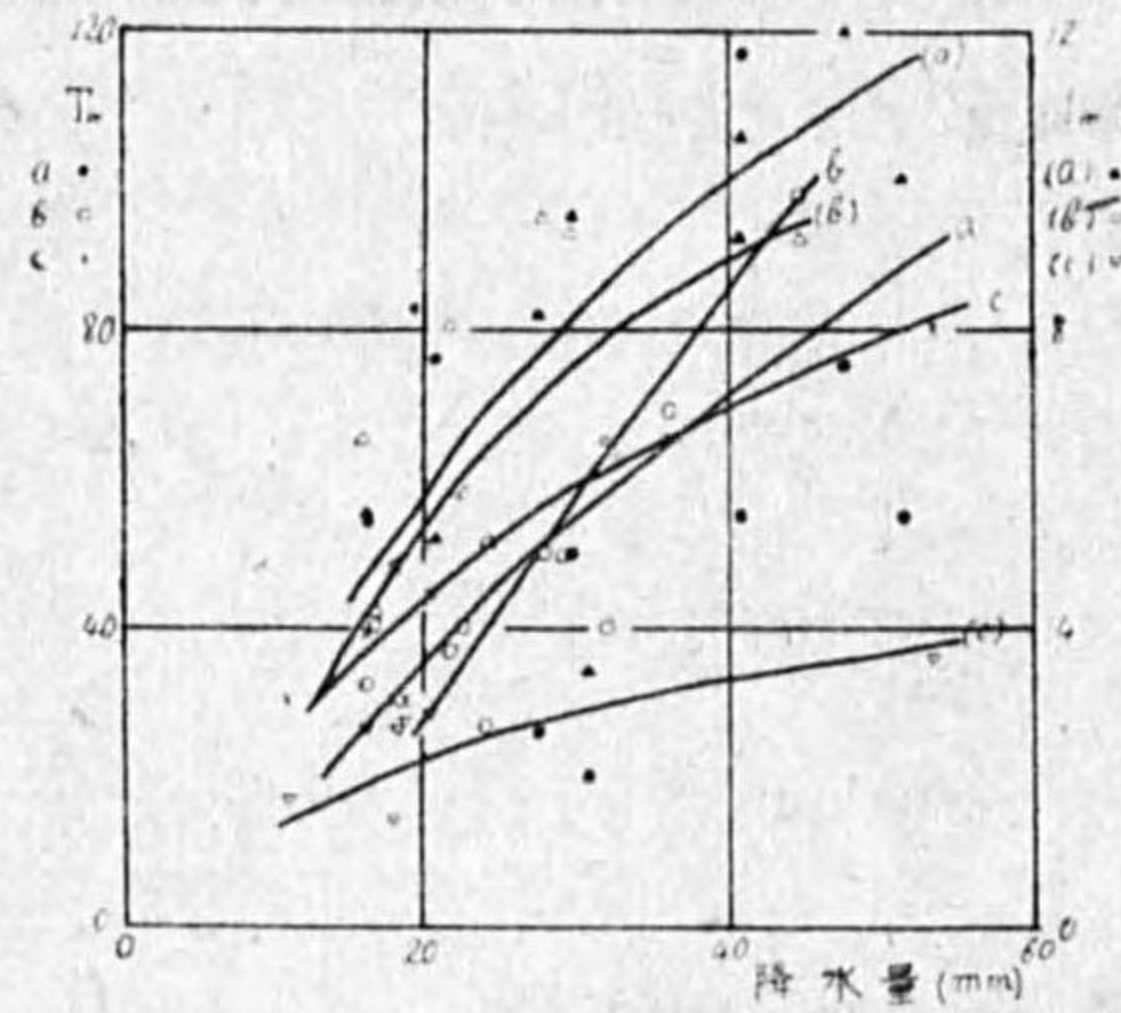
第4圖  $T$  と  $I$  との間の關係



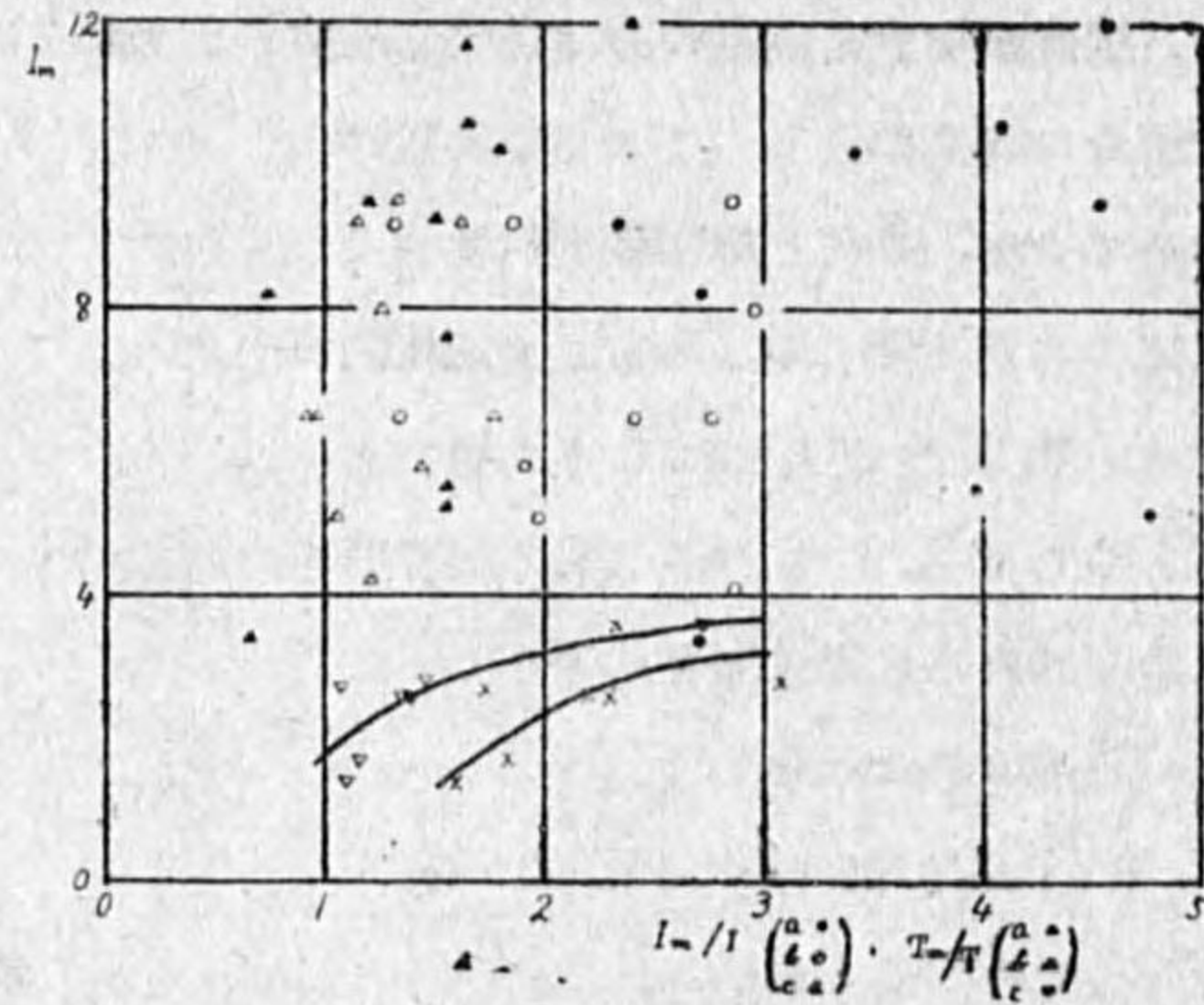
第5圖  $T_m$  と  $I_m$  との間の關係



第6圖 降水量と  $T_m$  及び  $I_m$  との関係



第7圖  $I_m$  と  $I_m/I$  及び  $T_m/T$  の関係



7. 圖である。a 型と b 型の降雨では  $I_m$  と  $I_m/I$  又は  $T_m/T$  の間にあまり密接な関係が認められない。たゞ大體  $I_m$  に上限と下限とがある様に  $I_m/I$  及び  $T_m/T$  にも變化し得る範圍が定つて居る模様が見えて居る。さらに c 型の降雨即ちあまり強度の最大の顯著でない降雨の時には強度が増すにつれて  $I_m/I$  及び  $T_m/T$  は急速に大きくなる。 $I_m$  が増すにつれて  $I$  の方はあまり増加しない爲にこの間の比は大きくなるのであらう。 $T$  の方についても同様の事が云はれる。

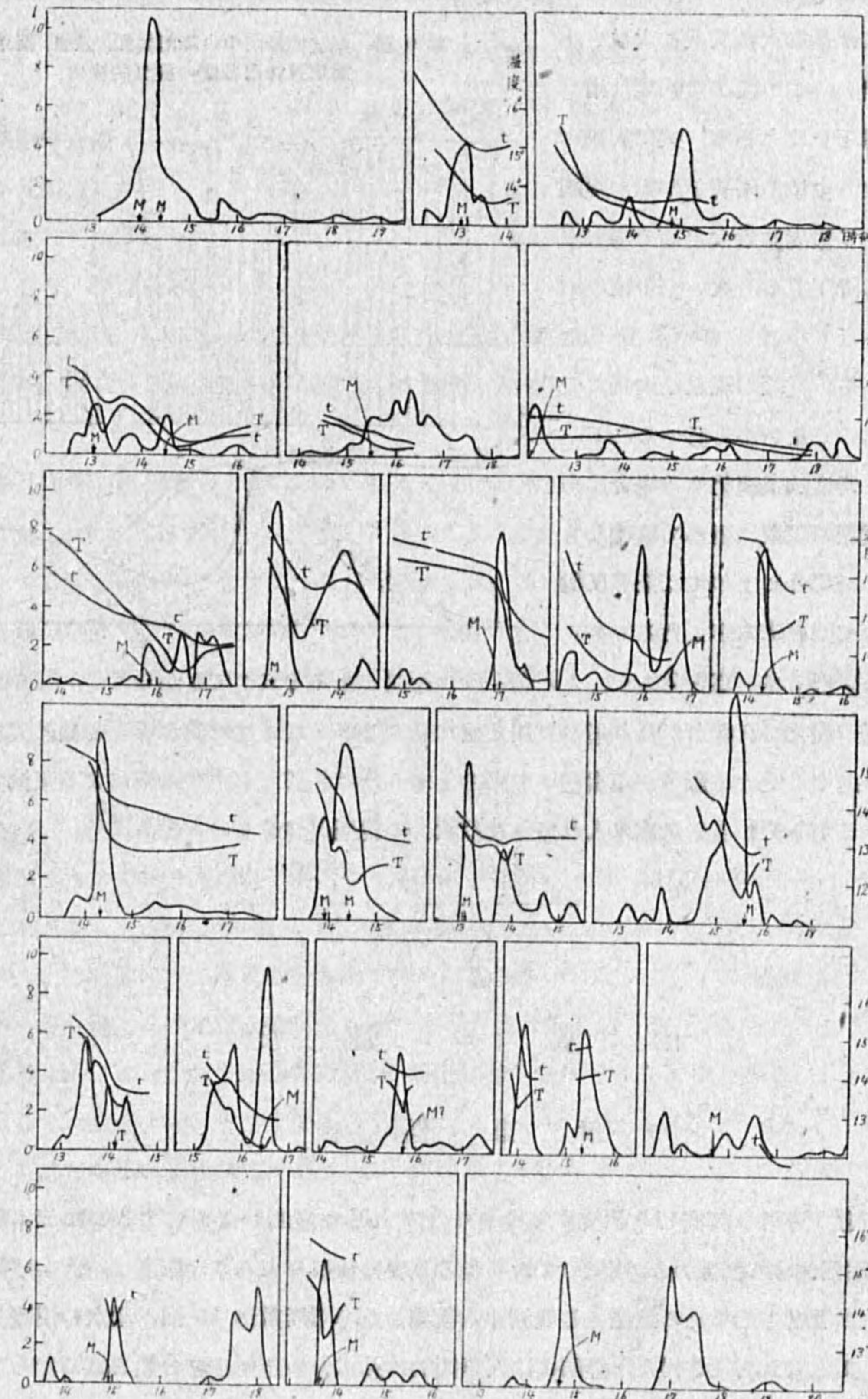
5) 降雨強度と雨滴及び雨水温度 第8圖に實際觀測された降雨強度の變化の模様と同時に觀測した気温及び雨水温度を圖示した。又  $M$  印<sup>1)</sup>示したのは單位時間内に單位面積上に降つた雨滴の数の最大の時刻である。これによると最初にのべた各降雨についての變化の様子がよくわかり、a 型 b 型 c 型にわけられる事、かなり規則的な週期のある事等が認められる。雨滴と雨水温度については次の様な點が云はれると思ふ。

雨滴の数が最大になる時刻は降雨強度が最大になる附近にあり、多くの場合降雨強度の最大とは一致せず強度の最大が現はれる時刻の少し前になる。即ち降雨強度が最大にならうとする傾向にある時に雨滴の数の最大の現はれる場合が多い。降水量の最も多い時は雨滴数から云へば最大ではないわけであるから、この時個々の雨滴が大きくなるか中位の雨滴が特に多くなるかしなければならぬ。著者が前に指摘した様に<sup>1)</sup>雨滴の大きさの最大が現はれるのも雨滴の数と同様降雨強度最大の一寸前であるから、降雨強度最大の時は中位の雨滴が特に多くなると見做して差支へあるまいと思ふ。

雨水温度の方は雨滴の数や大きさはむしろ逆になつて居て降雨強度の最大が現はれる頃から急激に下り始め最大強度が弱まり始める頃に雨水温度の最低が現はれるらしい。

(1) 伊東：阿里山に於ける雨滴觀測。日本學術協會報告 10 (昭和 10 年) 355-359.

第8圖 降雨強度 ( $I$ )、気温 ( $t$ )、雨水温度 ( $T$ ) 及び雨滴數最大發生時刻 ( $M$ )



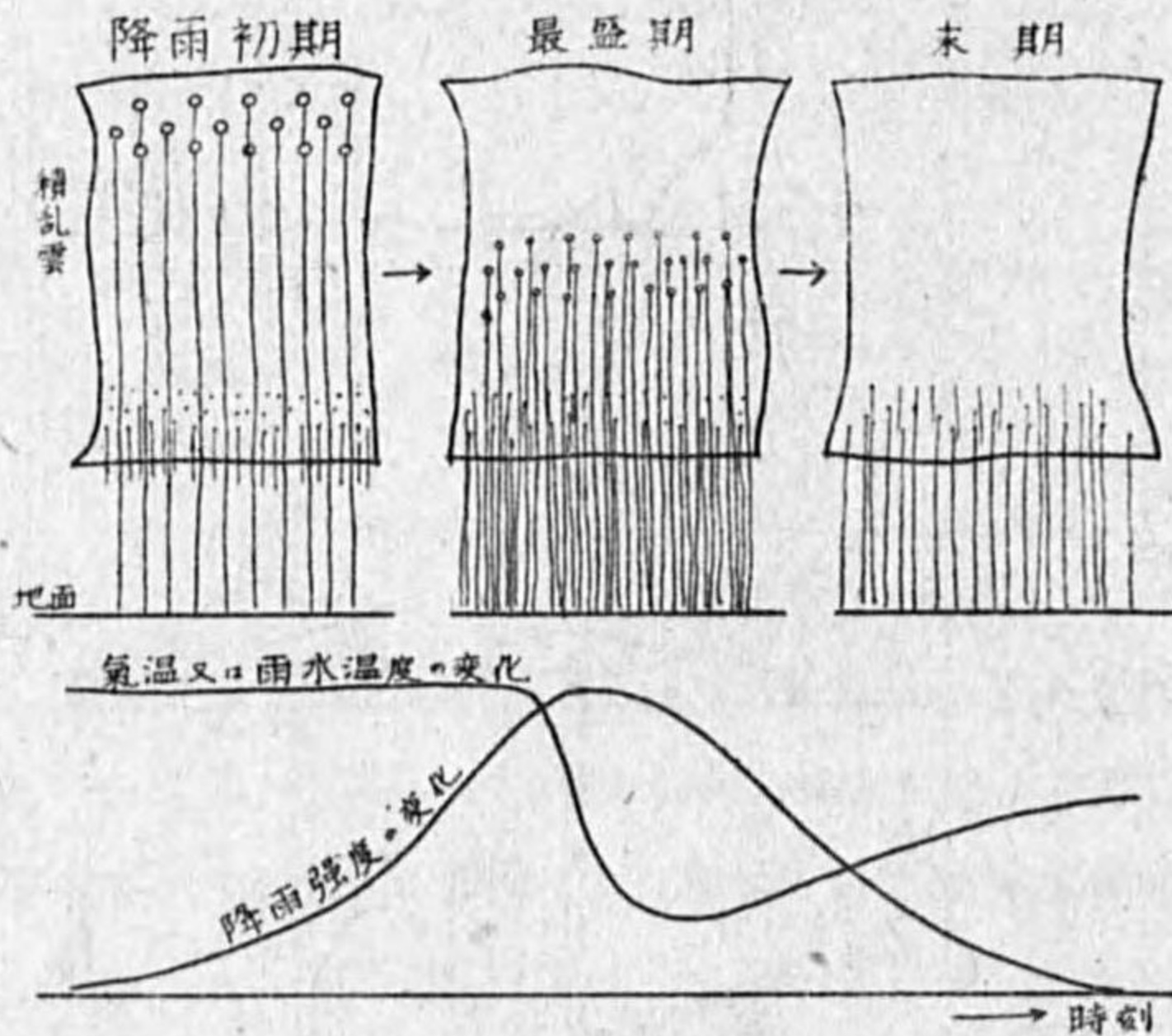
以上を総合してみると第9圖の様な模型的な形となる。對流性降雨では初め雲頂に近いところに発生した最大の雨滴が落下し始めそれに刺戟されて積亂雲中の水滴は全部落下し始めるが、地上で

觀測して居れば最初大粒丈次に大粒と小粒とが降り出し、この頃から強度は増し雨水温度は降下しはじめる。次に大粒の雨滴が少くなり中位の雨滴と小粒の雨滴とが優勢となり強度は最大となり雨水温度はぐんぐん降下する。次いで中位の雨滴も数が少くなり小粒のものが多くなり強度は弱まる。實際の現象は大體この様に移り變るのでないかと考へられる。

尤もこの様に典型的に變化する場合はあまりなく、實際の現象は極めて複雑なものであらうし又場合によつては全然反對の経過をとつて雨が降る事もあるであらうし變化した降雨も多い事と思ふが、とに角一つの説明となると云つてよからう。

尙雨水温度の變化の有様がかなり違つて居る様に見えるがこれには雨滴が落下し始めてから地上に達する迄の途中で受ける影響が相當利いて來ると考へなければならず又降雨による氣流の變化もあるわけであるからそれらを考慮に入れてみれば大凡の説明がつくものと思ふ。

第9圖 對流性降雨中の降雨模様、氣温、雨水温度及降雨強度の模型的變化



## 雨水の温度

伊 東 彊 自

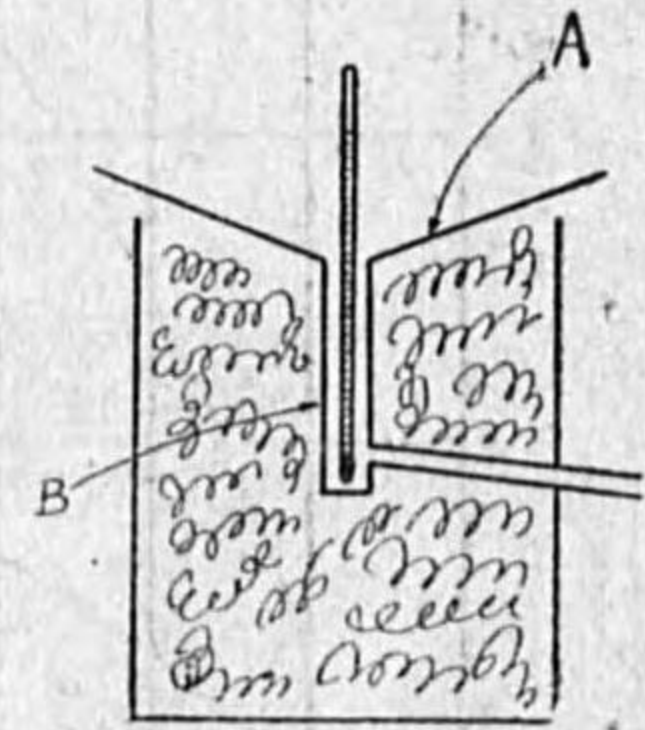
1. はしがき 降雨の諸機巧を研究するにあつて上層の觀測を必要とするのは云ふ迄もないが、地表面で雨水の温度を精しく觀測しておくのも重要な仕事であらう。筆者は約1ケ年間降雨のある度に雨水の温度とその時の氣温とを觀測し、觀測した降雨回数が56回、雨水の温度を觀測したのが、218回と云ふ結果を得た。降雨には天氣圖的に見てもいろいろに分類されるだらうが、似通つた個々の降雨でも大なり小なりの差があり、各の場合を考へる事は煩に堪えない、それで極め

て大まかな分類であるが降雨を次の第1表の如く四つに分けて考へる事とした。勿論この分類は天氣圖と日毎の氣象觀測とから分けたのであつて完全なものとは云へないが、以下これに従つていろいろ性質を調べてみる事にする。

第1表 觀測した降雨回数と觀測回数

降雨の種類	觀測降雨回数	觀測回数
對流性降雨	20	114
高氣壓性降雨	5	22
低氣壓性降雨	9	35
中間性降雨	22	47
合計	56	218

第1圖 觀測装置



2. 觀測の方法 觀測に用いた装置は第1圖の如く極めて幼稚なものであるが、手近に

適當な器械がなかつたのでやむを得なかつた。この装置全體は木で作りに表面に白色のペイントを塗り内部の空隙には鉋屑を詰め込んだ。形は四角である。

雨が降れば普通の雨量計の様にAの斜面で受け、雨は中心部Bに流れ込む。Bの圓筒には底より一寸上にCなる排水口があつて一定量の雨水丈しかBの中に貯へられない。即ちBの中の雨水はいつも新しいもので置きかへられる様にした。この様な装置であるから細雨や數滴位の降雨の時には觀測不能で、相當量の降水の時丈しか觀測に信用はおけない。尙比較のために觀測した氣温は百葉箱内のものであり、この爲に雨水温度觀測装置は出来る丈百葉箱に接近せしめた。

3. 氣温との差 氣温を  $t$ 、雨水の温度を  $T$  としこの間の温度差を  $\tau$  とすれば

$$\tau = t - T$$

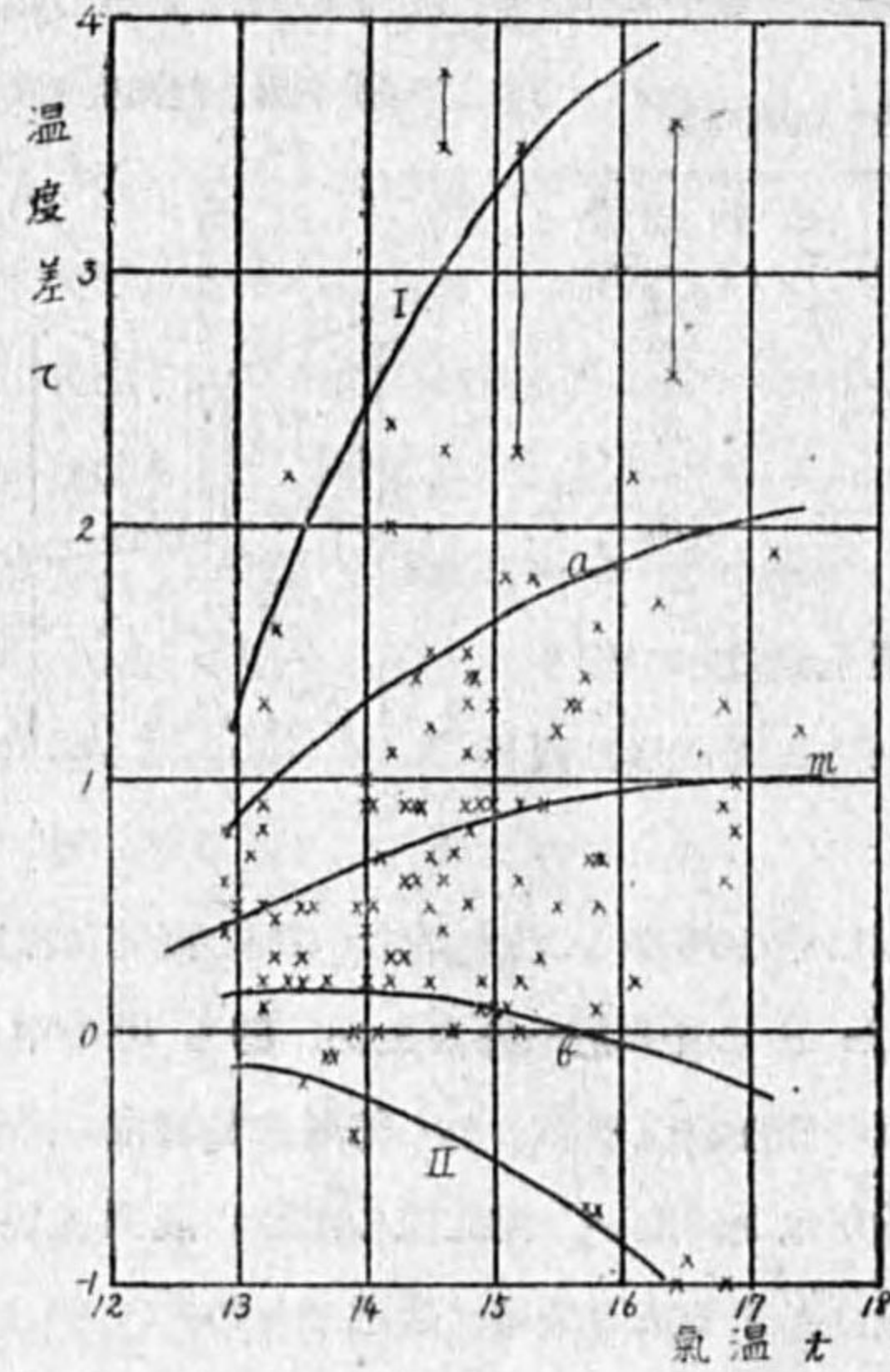
そこで  $t$  を横軸にとり  $\tau$  を縦軸にとつて各觀測點の分布の狀態は第2圖の様になる。各降雨の型別に圖示したが夫々分布の様子が違つて居るのが明かである。對流性降雨では  $\tau$  が0以下の場合がほとんどなく、大部分0以上であるばかりでなくかなり大きな數字を示して居る。大體の分布はIとIIの曲線にはさまれた範圍内で特に回数が多いのはaとbの曲線の間にはさまれた部分である。各曲線とも手加減で描いたものであるが  $\tau$  は氣温が12°C位のところに收斂しそれから氣温が昇るにつれて  $\tau$  の觀測される範圍は急激に廣くなつて居るのがわかる。しかし全體の傾向を示す中心の線はmの如くで氣温が増す程いくらでも  $\tau$  が増加するのではなく1°C位となればそれ以上にはならない模様が見えて居る。

第2圖の(2)は高氣壓性のもので  $\tau$  の平均はほぼ0となる。

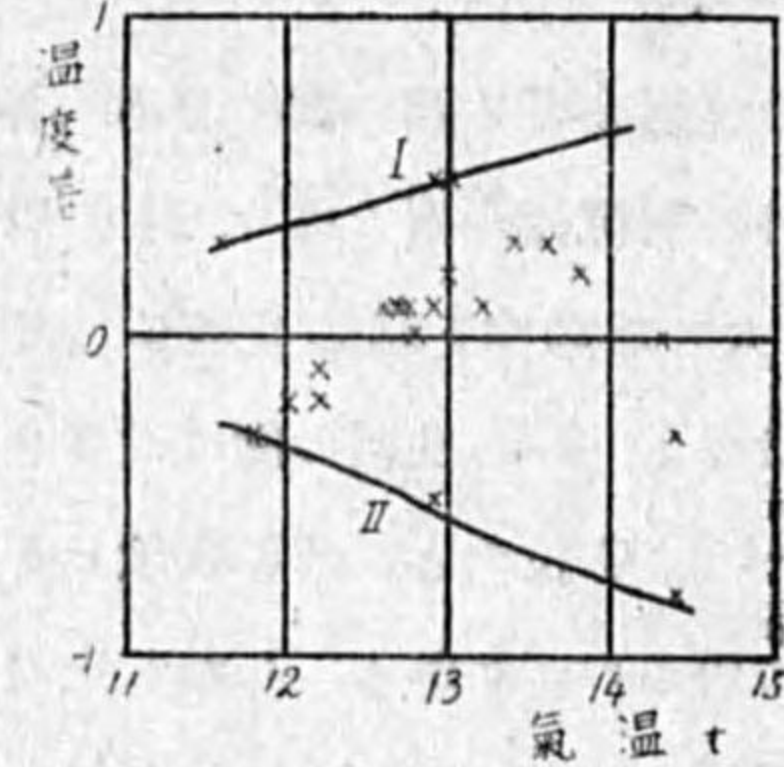
第2圖の(3)は低氣壓性の降雨の場合丈で各點が  $\tau$  の負の側に散布する傾向を持つて居る。

第2圖の(4)はどれとはつきり區別のつき難い降雨の場合であり各點はほぼ0に近いがたゞ一回丈3.7°から5.1°まで變化した場合があつた。この一回はおそらく對流性降雨の性質を持つて居たのが他の方面ではつきりせず中間性降雨に挿入されたと見るべきであらう。

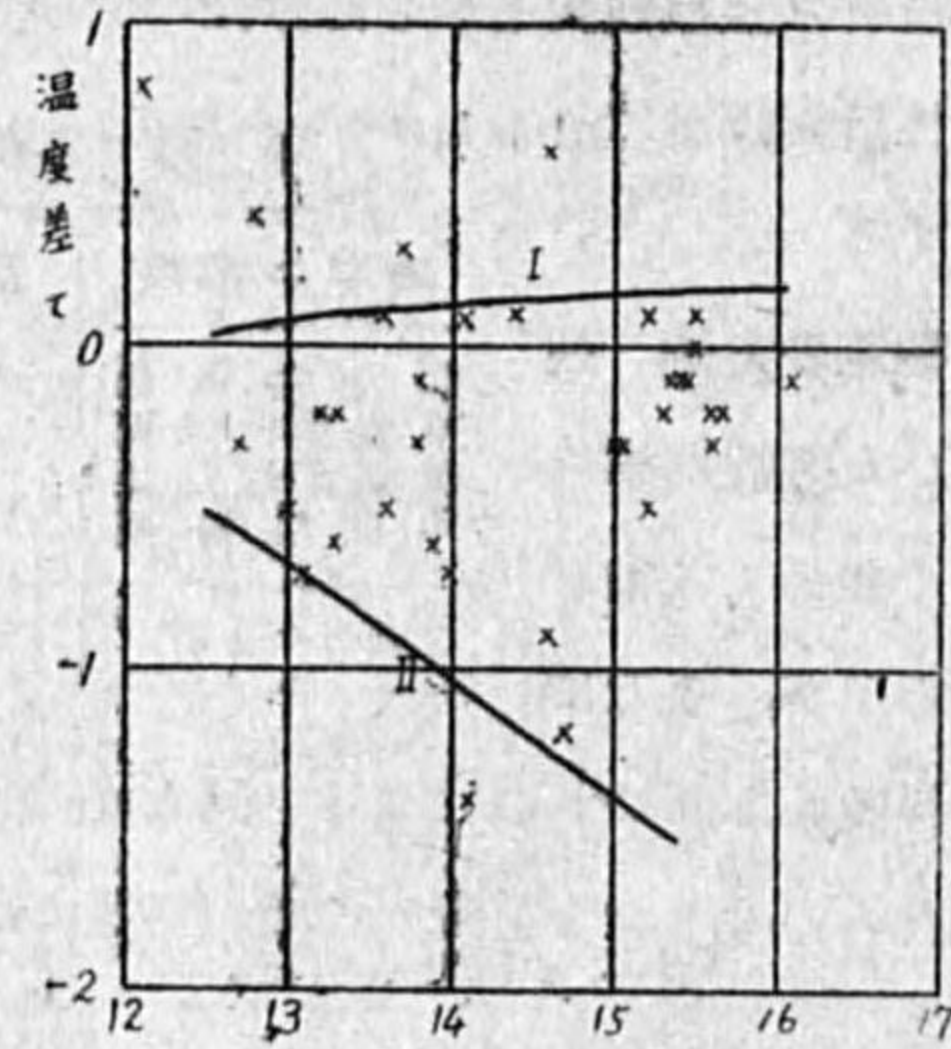
第2圖 気温と温度差との関係  
(1) 対流性降雨



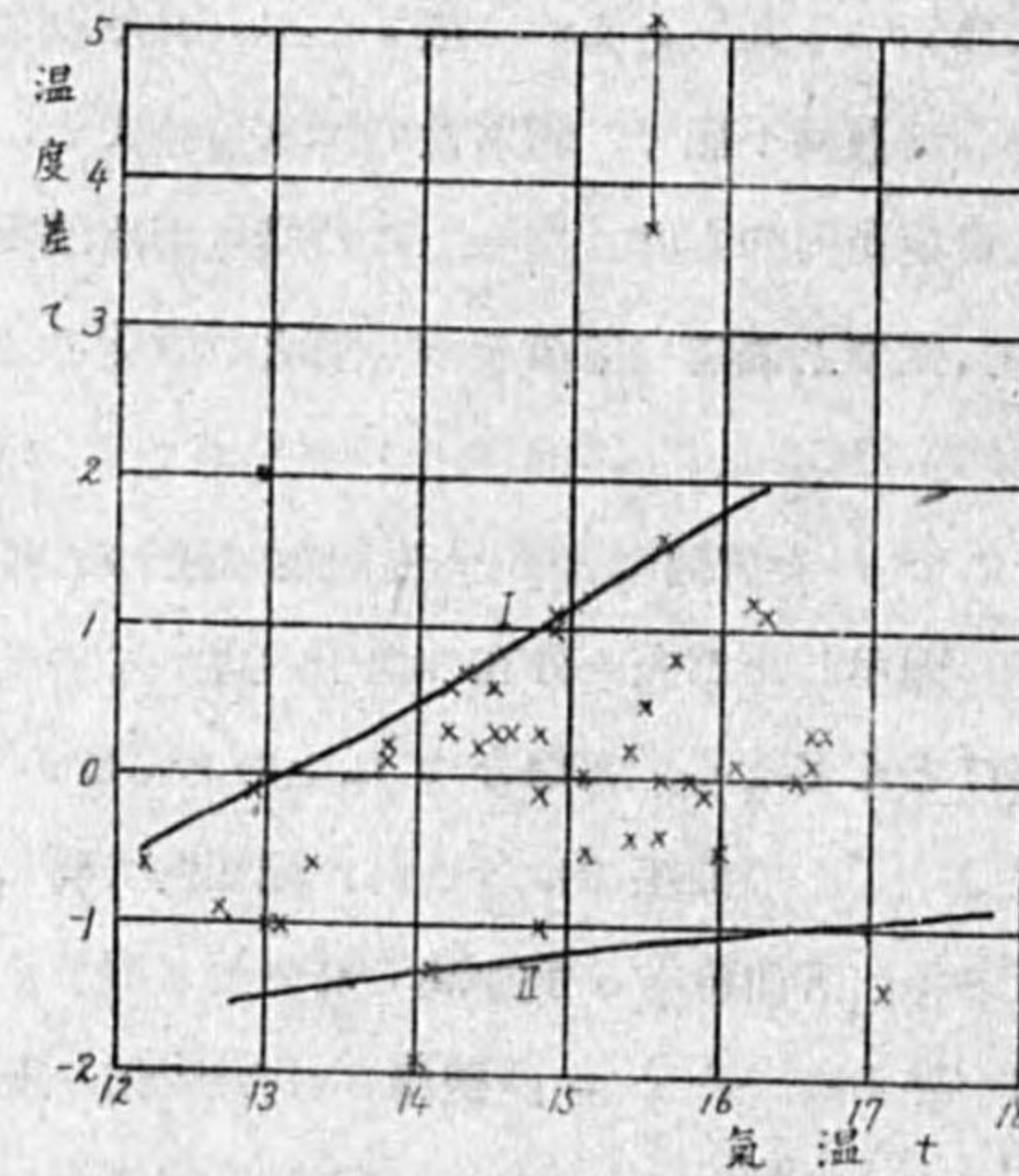
第2圖  
(2) 高気圧性降雨



第2圖  
(3) 低気圧性降雨



第2圖  
(4) 中間性降雨



さて以上の結果を総合してみると気温が昇る程観測される $\tau$ の範囲が廣くなると云ふ點が各降雨の型について共通である。これから各型の降雨とも気温が昇る程雨水の発生する範囲が上下に廣がり従て観測される雨水の温度も範囲が廣がるものであらう。

各降雨について観測點の分布を $\tau$ について百分率ではしてみると次表の様になる。

頻度の山が対流性降雨では $0^\circ$ と $1^\circ$ の間にははれ、それから正の側に特に多く分布して居るのがこれからもわかる。其他の型の降雨では山が何れも $0^\circ$ のど二つにははれ低気圧性では負の

側に傾いて居る。

第2表 温度差の頻度(百分率)

$\tau^\circ\text{C}$	-2	-1	0	1	2	3	4						
対流性降雨	—	—	3	3	21	28	21	14	5	3	—	3	1
高気圧性降雨	—	—	5	14	59	23	—	—	—	—	—	—	—
低気圧性降雨	—	3	6	33	47	8	3	—	—	—	—	—	—
中間性降雨	2	4	13	13	28	21	15	2	—	—	—	2	—

対流性降雨の時は一般に著しい気温の逆轉はなく上に昇る程気温は下つて居り、雨はかなり廣い範囲で發生するが、低気圧性の降雨の時は気温の逆轉の認められる時が比較的多く、しかも逆轉の面で降雨が始まるものゝ様である。

なほ各降雨型についての極値と平均とを掲げておく。

第3表  $\tau$ の極値と平均

	$\tau$ の正の極大値	$\tau$ の負の極小値	$\tau$ の平均
対流性降雨	$3.8^\circ\text{C}$	$-1.0^\circ\text{C}$	0.77
高気圧性降雨	$0.5^\circ\text{C}$	$-0.8^\circ\text{C}$	-0.0045
低気圧性降雨	$0.8^\circ\text{C}$	$-1.4^\circ\text{C}$	-0.23
中間性降雨	$5.1^\circ\text{C}$	$-1.9^\circ\text{C}$	0.966

この表からも上述の事が裏書きされる。

4. 時間的的变化 次に $t, T$ 及び $\tau$ が時間的にどう變化するかを圖示したのが第3圖である。この圖は対流性の降雨の場合を示したが其他の場合は大體似て居り観測點が少なくなつて居る。この圖からうかがはれる諸性質を拾つてみると次の如くである。

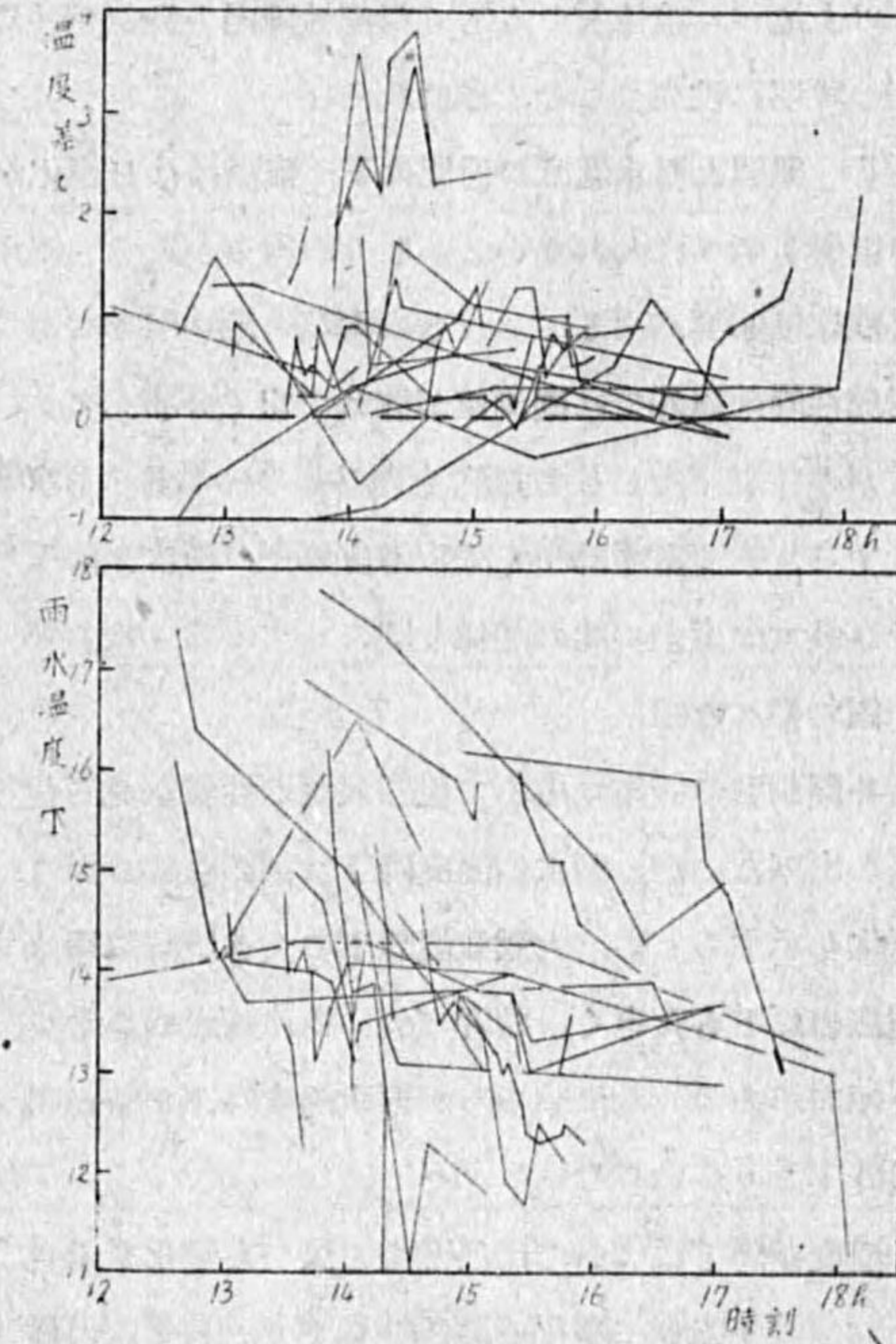
1) 対流性降雨 $\tau$ は気温も雨水温度も降雨繼續中は降下する方向にあり、一度降下してから又上昇する場合はほとんどない。

個々の場合に温度差 $\tau$ は時間とともにいろいろ變るが全體として一方向き丈の變化は示して居ない。

2) 高気圧性降雨では $t$ も $T$ も矢張り降下する傾向を示すが $\tau$ にははつきりとした特徴がない。

3) 低気圧性降雨では $t$ 及 $T$ に日變化が大きく現はれて居て特徴を示さないが、 $\tau$ の方は朝と

第3圖 対流性降雨中雨水温度及温度差の時間的變化



夜は正が現はれやすく日中は負の値のあらはれる傾向を示す。

4) 中間性のもについて気温の方は大體日變化が著しくあらはれて居るが、中には急激に気温の降下して居る場合がある。

雨水の温度も日變化に支配されるのが大部分であるが、中には著しく雨水の温度が下り對流性の場合にも見られない程のものがあるのは見逃さない。

温度差  $\tau$  は午前中負が現はれやすく午後になるとどつちかと云へば正があらはれやすい傾向にある。

以上述べた諸性質のうちで對流性降雨と低氣壓性降雨とに關するものが特に注目し、降雨機巧の説明に役立つものと思はれる。

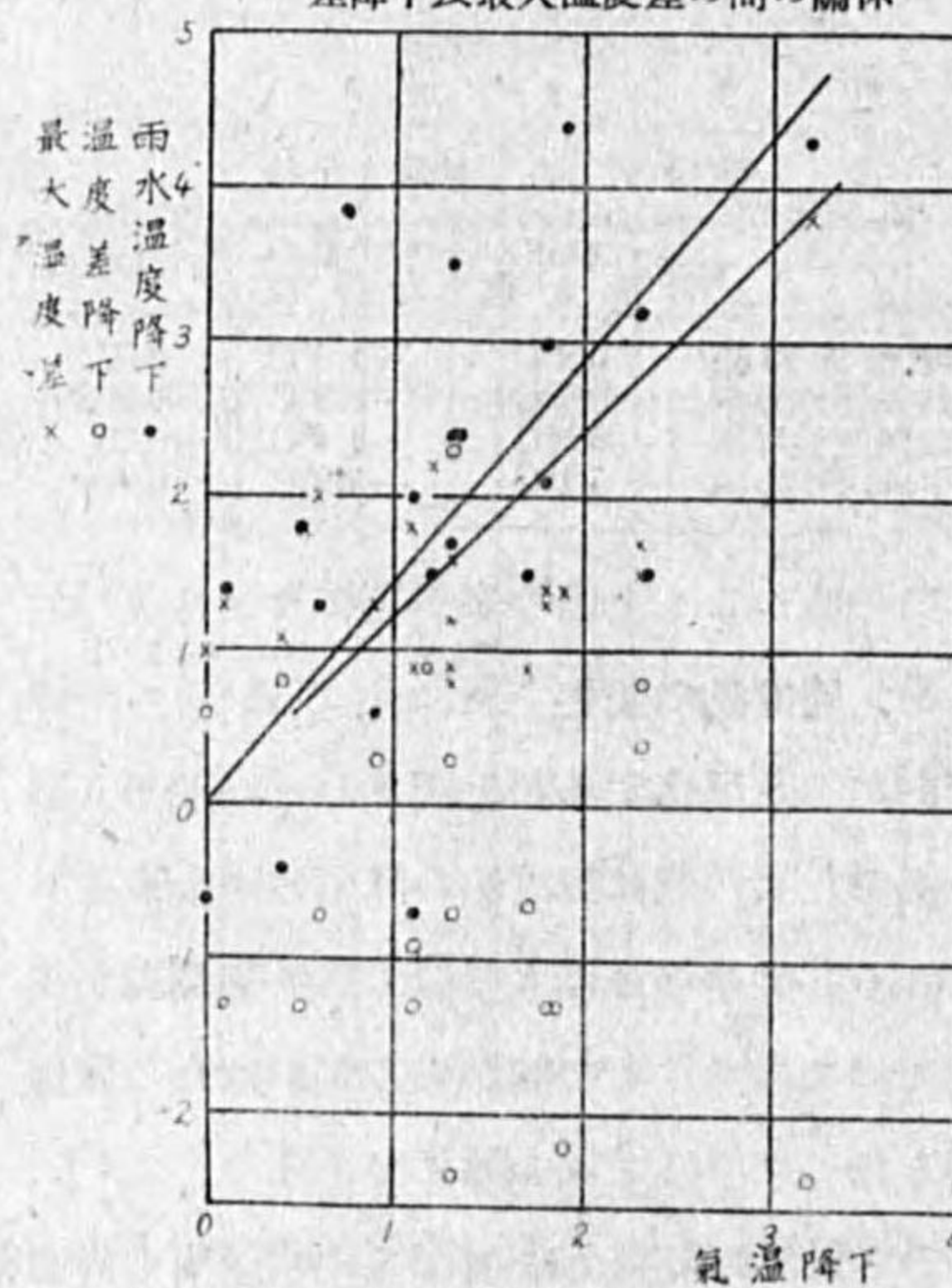
5. 気温と雨水温度の温度降下 気温には日變化があるから温度降下を読み取る時には、日變化の影響を考へに入れないとかなりの誤差が入る。雨水の温度についても日變化に類する變化の影響を取除く必要がある。これらの影響を除いてみても對流性降雨以外では觀測値が極めて粗く分布してしまふので以下主として對流性降雨について考へる事とする。先づ気温降下と雨水温度降下、温度差降下及び最大温度差の間の關係を圖にしてみると次の第4圖の様になる。

各觀測點の分布は極めて粗く大體の性質を見る位しか出來ないが、雨水の温度降下は圖の直線の如き變化を示すらしい。大體気温降下の大きい時に雨水温度の降下も大きく、前者の少い時に後者の最も少い傾向がある。たゞいくらか雨水温度降下の方が気温降下より多いらしい。

温度差降下についてはほとんど決つた變化を示さない。たゞ強ひて變化の模様を見やうとして圖の様な曲線を描いてみたが極めてあやしいと云ふより以外にない。気温降下がいくらか増すと温度差降下の正の場合と負の場合とがあるらしい事は興味ある點と云へやう。

最大温度差はたゞ一點丈の例外を除いて他の各點とも割合によくまとまつて居て気温降下が多少變化しても温度差の最大値はほとんど變化しないのが面白いところである。最大温度差はいろいろ條件が異つても大體一定と云へるのではなからうかと思はれる。

第4圖 気温降下と雨水温度降下、温度差降下及最大温度差の間の關係



6. 降雨繼續時間 次に問題となるのは降水が何時間続いたかの繼續時間であつて、時間が長く続けばいろいろな要素がどう變るかは興味深いところである。第5圖に各降雨の型について気温降下が降水繼續時間でどう變るかを

示した。對流性降雨は多少觀測點が多いので大凡の傾向は認められるが其他の降雨型は數も少く又點が散在して居るのではつきりした傾向は認められない。對流性降雨についてみると大體降水繼續時間が5時間位のところに山のある圖の様な曲線

で示される變化を示すらしい傾向がある様である。各點は非常に散在して居るので降水繼續時間の少い方は不明であるが時間が0の時に気温降下も0のところを通るとするところの曲線はかなり左右對稱の型に近くなる。尤も對位性の雨の繼續時間に大體の範圍があるであらうから、その範圍外迄の變化は考へる必要はないわけである。

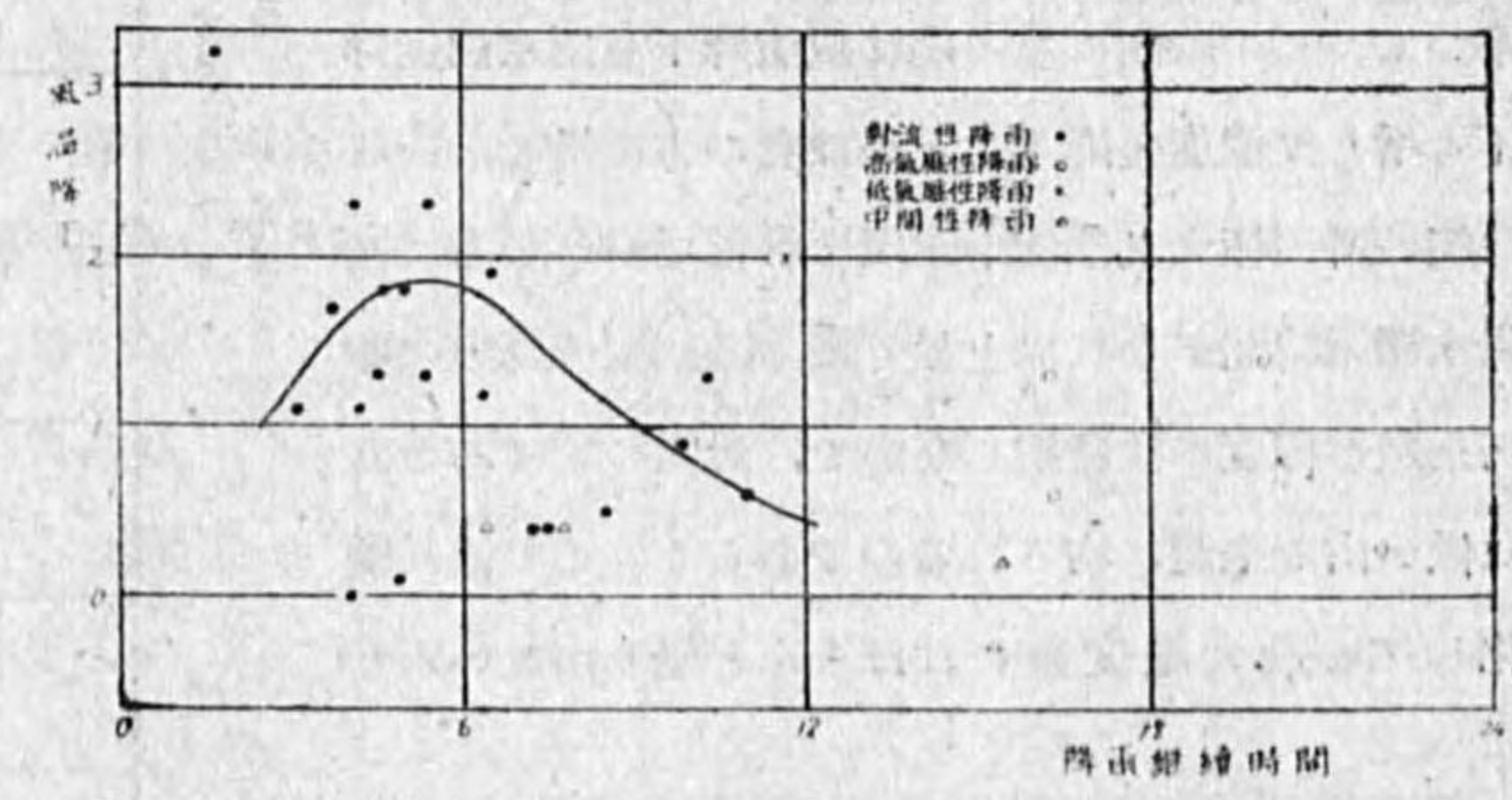
次に雨水の温度降下についても對流性の降雨丈しか考へられない(第6圖)。この方も圖の如く大體6時間半位のところに一つの山を持つ左右ほど對稱な曲線的な變化を示して居る。

第7圖には對流性降雨丈についての温度差降下と最大温度差と降水繼續時間との關係を示した。温度差降下の方は極めて興味ある變化を示し、圖の如く正の側と負の側とに各一つの山を持つ變り方をして居る傾向が見られる。どちらの山も矢張り降水繼續時間が6時間か7時間位のところに山及谷がある。

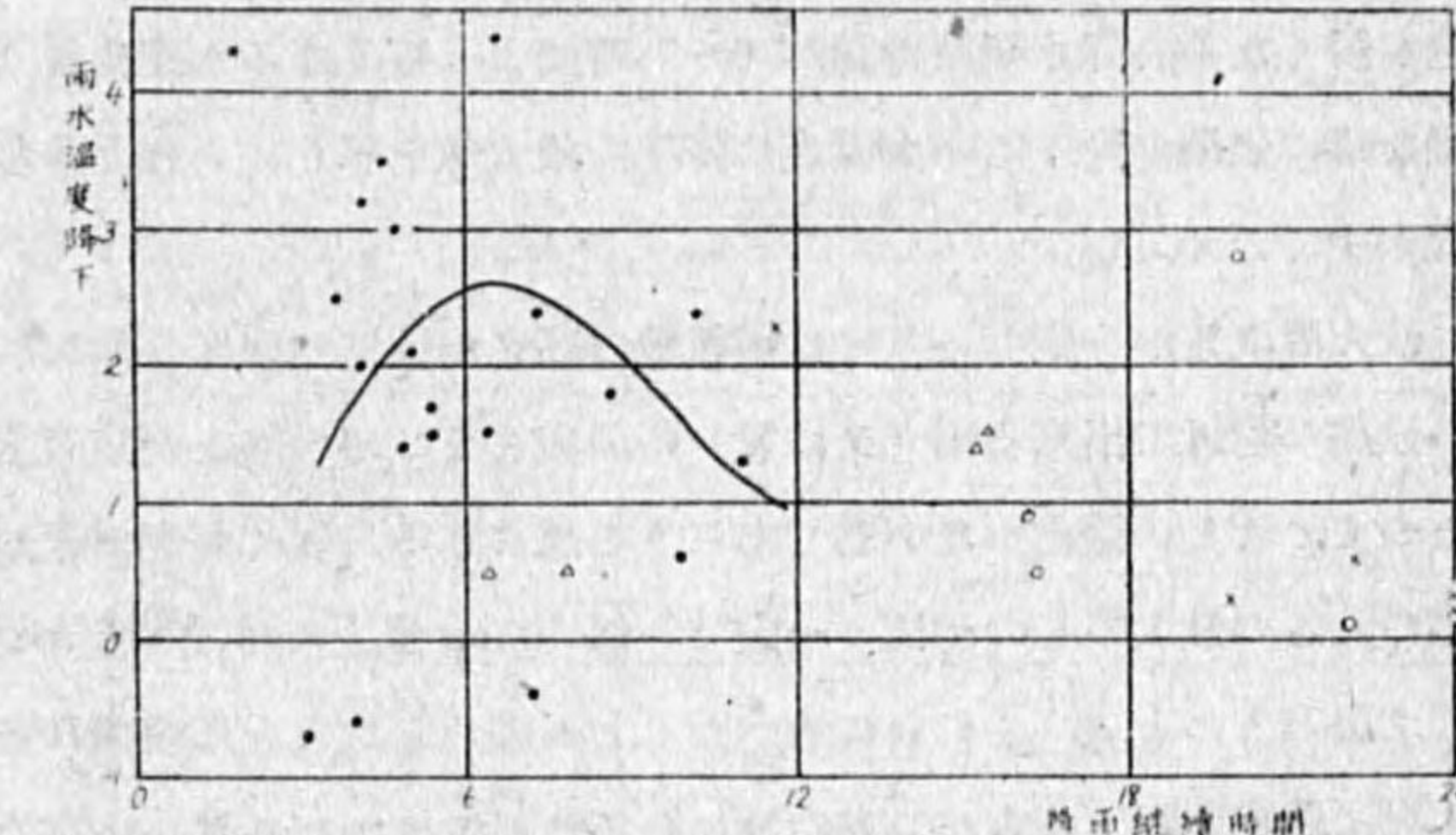
最大温度差の方は降水繼續時間にあまり影響されずに1度乃至2度のあたりに決つた値を示して居る。このことは前にも一寸述べた様にどの降雨についても對流性降雨である限り最大温度差は一定の關係

$T_{MAX} = \text{一定}$

第5圖 降雨繼續時間による各型の降雨の気温降下



第6圖 降雨繼續時間による各型の降雨の雨水温度降下





を示すものと云へよう。

以上を総合してみると対流性降雨は降水継続時間が6時間か7時間のところに活動の最も盛な山があつて、この時間になる迄は気温降下も雨水温度降下も増し又温度差降下も正又は負の方に増し、6~7時間の所に極大又は極小が現はれるのがわかる。又降水継続時間がこれ以上長くなる時は対流降雨の機巧全體が極度には發達しないで、最大のところよりは低い山で全體に均されるのであらう。この様に變化しても最大温度差にはほとんど變りがないらしい。

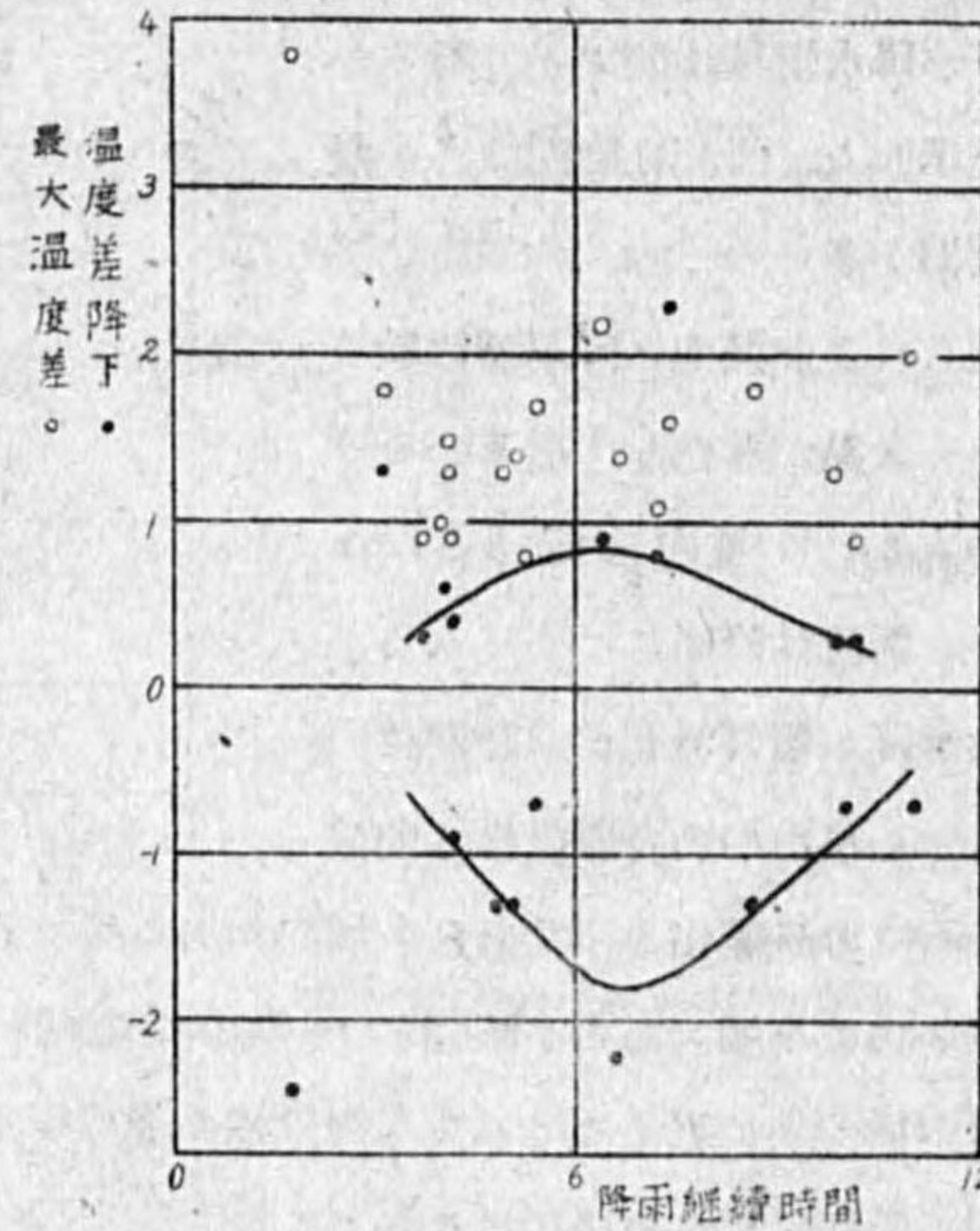
対流性降雨は積亂雲による雨であるから、積亂雲として考へてみると、積亂雲が最も發達する時の擴がりや活動の程度はほぼ一定であつて、この時の降水継続時間は6~7時間になつて居る。積亂雲の發達が弱くなると降水継続時間が6~7時間より短くなるか或は長くなるかである。この發達の最も盛な時に気温の降下も雨水温度の降下も最大値を示し、それより發達が弱ければそれ丈兩方の降下度が少くなる。

最大温度差が一定であるのは積亂雲の高さが發達の程度の如何にかゝらず大體一定であつてこの最高の附近で出来る雨(又は雹)の温度とその時の地上の気温との差がいつもほとんど恒定的であつて、著しい變化がない爲であらうと思はれる。前に筆者が雨滴についての觀測を行つた時に雨滴の大きさの最大のものがほぼ一定で一個60mg以上にはならなかつた<sup>(1)</sup>が、この場合と同じ事を示して居るものと考へられ前に述べたことが確められたと見做される。

次に温度差降下の方が2本の枝にわかれるのはかなり著しい事で興味深いが簡単に説明が出来ない。たゞ強ひて考へれば、地表面から積亂雲の頂上迄の間の気温の分布に異常がないものとし、積亂雲の底の附近から雨が降り始める場合と、積亂雲の頂附近から雨が降り始める場合と二つの型があるのを示すのかも知れない。この關係を詳しく知るには雨水温度の觀測と同時に、雨滴の大きさとその諸性質を出来る丈詳しく觀測する必要がある。この圖から見ると温度差降下の各點はかなりよく二本の曲線の上に乗ししかも降水継続時間が6~7時間のところに他の要素と同じく活動の最も盛なところがあるのが明瞭である。積亂雲の底の附近から雨が降り始めると、雨の降る位置は

(1) 伊東彌自：阿里山に於ける雨滴觀測。日本學術協會報告第10卷(1935), 355-359.

第7圖 降雨継続時間と對流性降雨の温度差降下の最大温度差との關係



次第に積亂雲の上の方に波及して行き温度差は比較的小さな値から大きな値に變化して行き温度差降下は負の値を示す。これに對し雨が積亂雲の頂の附近から降り始めるとこの範圍は段々下の方に波及し、温度差は矢張り反對に大きな値から小さな値に變化し温度差降下は正の値を示すであらう尚その上この二本の曲線以外の點が極めて少いところから上の説を押し廣めると積亂雲の途中で雨が降り始めて温度差降下が正や負へ勝手に變化する場合がほとんどないと云へる。

要するに對流性の降雨は積亂雲の底から降り始めて上方に及ぶ場合と逆に積亂雲の頂から始まつて底に及ぶ場合とがありその他の場合は

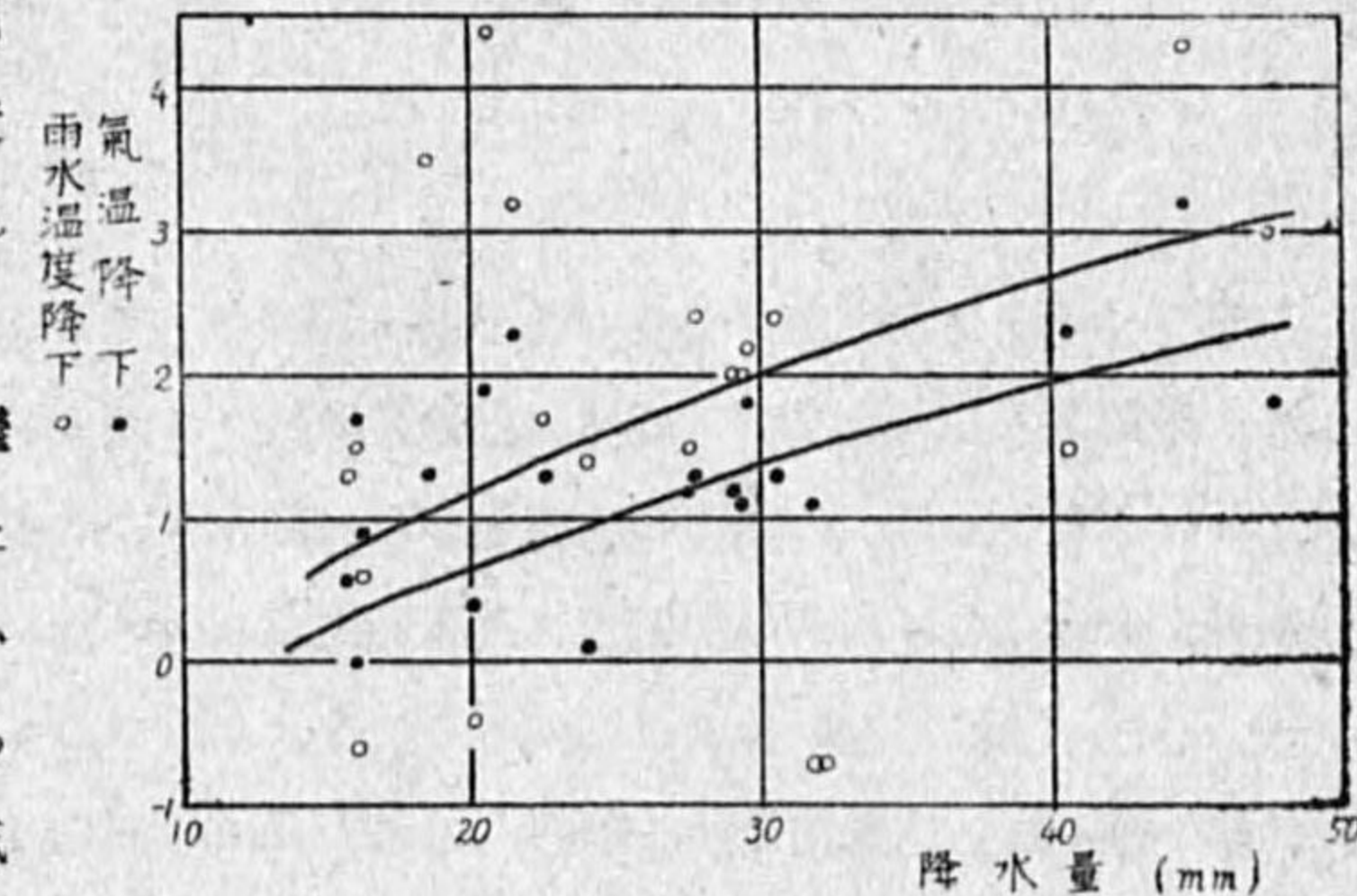
ほとんどないと云ふ結果になる。この關係は前に示した第4圖の気温降下と温度差降下との關係圖からも多少考へられるところの現象である。

7. 降水量との關係 前節では降水継続時間と気温降下其他の關係を調べたが、これらの變化は降水量が多いか少いかによつてかなり支配されると思はれるので、對流性降水丈について降水量と気温降下と雨水温度降下とを調べたのが第8圖であり、最大温度差と温度差降下とを調べたのが第9圖である。

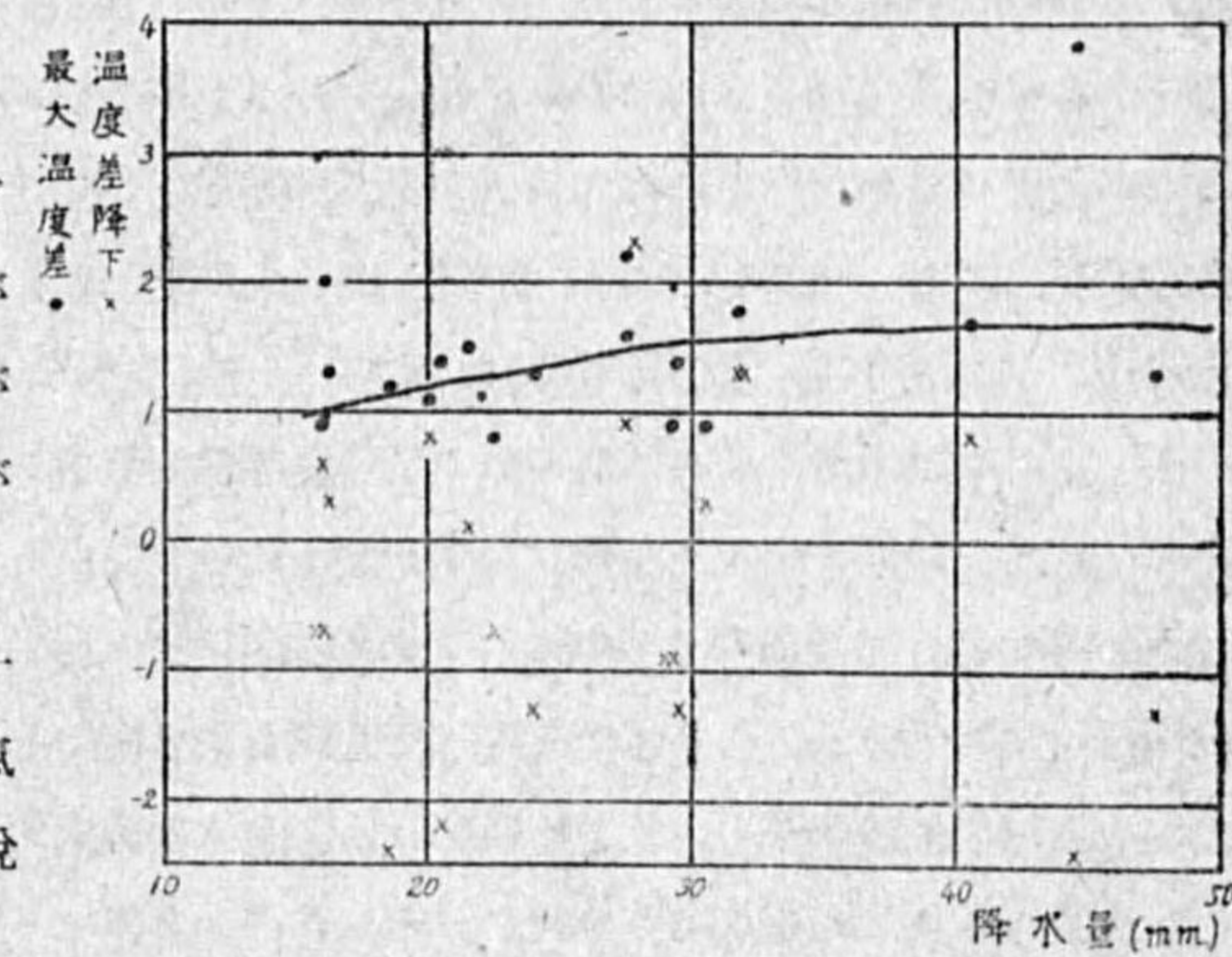
気温降下と雨水温度降下とはほとんど同じ様に變化し降水量が増す程降下が多くなつて居る。對流性降雨の降水量が多いと云ふのは積亂雲全體が大きく擴がつて居る事を意味すると思はれるから、前に述べた積亂雲の最高の高さがほぼ一定して居ると云ふのと矛盾しないで、気温降下が増し又雨水温度降下も増すと説明出来るであらう。

第9圖によつて最大温度差は降水量とともに増して居るのがわかる。第7圖で示した様に最大温度差は降水継続時間に關係なく一定であるが降水量が増すと気温降下の方が雨水の温度降下よりも小さく従て最大温度差は極めて少量ながら増す傾向にあるのであらう。

第8圖 對流性降雨の場合の降水量と気温降下及び雨水温度降下



第9圖 對流性降雨の場合の最大温度差及温度差降下



次に温度差降下の方は各観測点の分散が甚しくはつきりした性質を認め難いが、圖示した様に正の側と負の側とに一本づきの曲線で大凡の形を表はせるらしい。この二つの曲線は降水量が多くなる程互に開いてゆく様子があり、降水量の多い少いに關係なく積亂雲の下の方から雨の降り出す場合と頂の方から雨の降り出す場合とがある。尤もこの二つの降雨型式の何れに従つて降雨が始まるかを支配するものは何んな條件が如何様に働いた場合であるか今のところ明瞭でない。そして降水量が多くなる程この兩方の差が大きくなつて居る。

## 日本の動氣候學

高橋浩一郎

§1. 緒言 我々は今迄に二月づきに分け、各季節に特有な日本の天候を調べて來た。今度はそれらの結論と云ふ様な意味を含め、一年を通じて動氣候學的に觀察して見よう。さて氣候と云ふには元來二つの意味があり、地域的の分け方と時間的の分け方とがある<sup>(1)</sup>。然し日本に於いては四季の變化が顯著にあらはれ、その推移は我々の日常生活と重要な關係がある。この意味で日本の動氣候學の出發點はまづ季節の分類にある様に思ふ。まづこの問題から考へて行かう。

§2. 季節 季節は昔から日常生活と密接な關係があり、四季とか七二候<sup>(2)</sup>と云ふ様に整然と分けられてゐた。然しこの分け方は總べて天文學的結果に氣候學的結果を加味して分けたものであつた。例へば立春、立夏と云つても太陽の位置で定まるのであつて、決して氣象學的に春になるとか夏になるのではない。又在來の靜氣候學では單に月平均とか旬平均の値などを論じてゐるから冬から春になるにしても連続的に變るのであつて不連続的な變りと云ふものは出て來なかつた。然し季節の變りは我々の經驗に依るとはつきりとしてゐる。例へば9月の中旬頃急に秋になる日を感じ、又6月の上旬には明かに梅雨の入りを知る。そしてこれは必ずしも曆の上の秋とか梅雨の入りとは一致しないのである。この様な點に在來の氣候學の足りない點があつた様に思はれる。

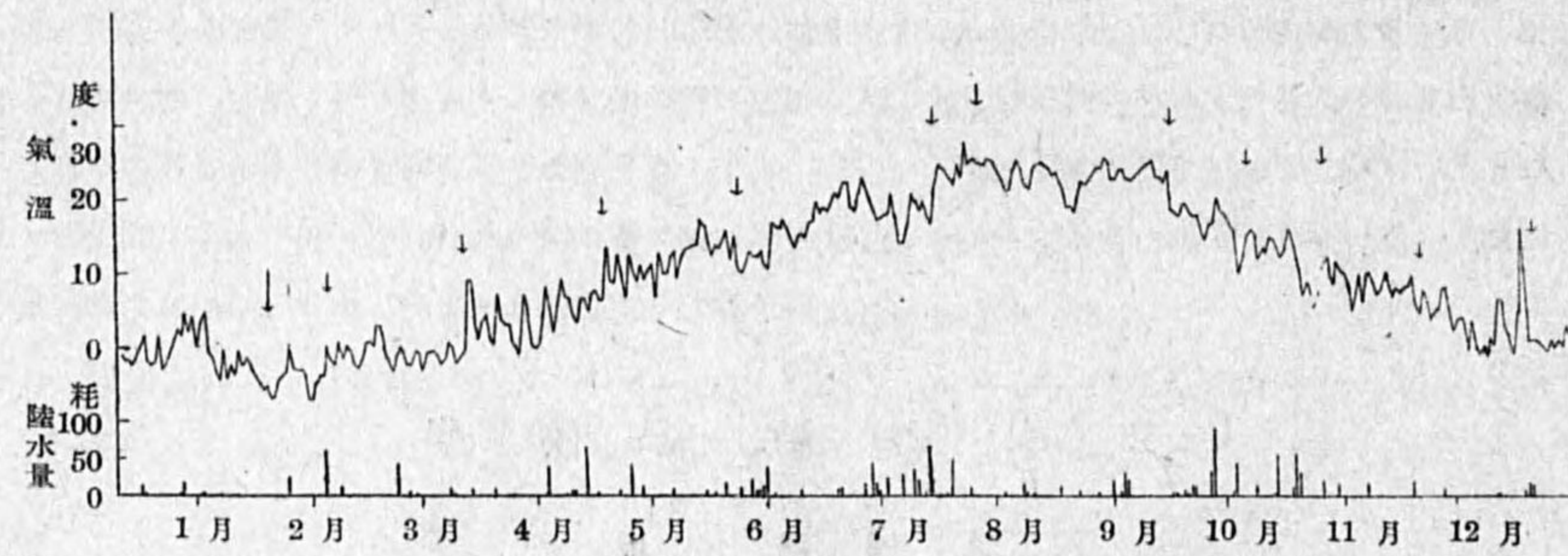
勿論此の様な氣候の變り、梅雨の入りとか明けと云ふ様なものは農業上重要な問題であり、いろいろ調べたものもないではない。例へば佐々木氏<sup>(3)</sup>は梅雨の入りや明けを季節豫想の爲に調べられた如きその一例である。然し、この重要性の割合には調査が不充分であるので、昭和6年から昭和11年迄6年間のいろいろの氣象要素、天氣圖等を參考として調べて見た。その結果に依ると、大抵の氣象要素に大なり小なりに季節の變りが現れてゐる。そして前に夏から秋への變りに見た如く毎日の最低氣温に良く現れ、又天氣圖の上でもよく見られる。次にその模様を述べよう。

(1) 福井著、氣候學、1頁。

(2) 同前、446頁。

(3) 佐々木：東京地方の梅雨豫想。測候時報、8、195頁、昭和12年。

第 1 圖



第1圖は一例として東京の昭和11年の毎日の最低気温と降水を示したものであるが、更に天気圖を参照しながら見て行くと次の様な特徴が見られる。まづ冬の間は気温が低く、氣壓配置は所謂西高東低で表日本は晴、裏日本は連日の様に雪でこれから崩れる事はあまりない。然し1月下旬頃、二度低氣壓が内地に沿ひ東進しアリウシヤンで發達し、この際あとは季節風が強くなつて内地一帯は著しく冷える。圖の1月31日頃がこれに當る。これが所謂“寒”に當り、年に依つて異なるが大凡そ1月26日頃起るか年に依り12日位前後する。

寒がすぎ、しばらくすると気温はやや昇り氣味になり、氣壓配置は大體西高東低であるが次第に崩れ初める。そして時折り臺灣坊主が發生し内地に沿ひ東進し表日本に雨を齎す様になる。この初めが曆の上の立春に相當させる事が出来、圖では2月5日頃に當る。平年は2月3日頃で年に依り13日位前後する。

さらに3月に入ると大陸の高氣壓がちぎれて移動性高氣壓となつて東進し、その後颶風が日本海に入る様になる。こうなると急に気温が昇り初めて春めいてくる。圖の3月13日がこれに當る。これ以後は移動性高氣壓と颶風が4日位の週期で交互に現れ、雨も週期的になり、所謂春雨となる。この3月頃の初めての気温の上昇が春の入りで2日位前の移動性高氣壓の通過がその前兆となる。この時期は平年3月1日頃で年に依り16日位前後する。

春が段々にすぎ5月に入ると五月晴で暫らく天気が續く様になる。圖では4月15日頃がこれで、春の間は気温が週期的に變化するが、この頃になると天気がつづく様になる。この時期は天気圖上で見ると小笠原方面に高氣壓が出来、然も帶狀に東西にのびる時期であり、初夏の入りと見られよう。平年は4月30日頃年に依り8日位の前後がある。この時期に入る前にしばしば移動性高氣壓の通過に際し晩霜を見る事がある。従つて晩霜は初夏に入る前兆でもある。

さらに季節がすすみ6月に入ると再び雨期に入る。この時は気温は一般に下り氣壓配置は梅雨型となる。圖の5月24日頃がこの時期に當り、この1週間位前から高氣壓が北の方に現れ氣壓

配置は東高西低となり雨が多くなる傾向が見られる。これが梅雨の入りで例年6月5日頃、年に依り10日位前後する、この入りは曆の上の梅雨の入りと大體同じである。この様な天候は約1ヶ月位續くが、途中一時気温が昇つて天気が良くなる。圖の6月18日前後がこれで、梅雨の中休みと呼ばれてゐる。普通1週間位つづく。

7月の中旬になると氣壓配置は次第に南高北低の夏型に移り、不明瞭な温前線で大雨を起す事がある。そしてこれがすぎると急に気温が昇り今迄の陰鬱な雨は晴れて夏に入る。これが梅雨明けであり、夏の入りである。この時期は圖では7月16日で、平年は7月18日前後、年に依つて7日位の前後がある。夏に入ると氣壓配置は南高北低の氣壓配置となり、時折り驟雨はあるが天気良く稀に颶風が本邦を襲ふのが普通である。そして7月の下旬頃、日本海に低氣壓が入つた時など殊にあつくなる。これが“暑”で圖では7月27日頃、平年は8月4日頃で年に依り12日位の前後がある。この時期は大體は曆の暑と一致するが實際の暑の方が遅れる氣味がある。

暑がすぎ、10日もすると気温は次第に下り氣味となり時に颶風が内地を襲ふ様になり、大陸の方に高氣壓が見える様になる。これが立秋と云へよう。圖では8月14日頃、平年では8月19日前後で年に依り5日位の前後がある。

更に9月中旬になると急に気温が降り、再び秋の雨期に入る。この雨期は梅雨にも比すべきもので秋の霖雨とも云へよう。この現象は天気圖上では大陸の高氣壓が發達し、小笠原の高氣壓との間に出來た不連続線が次第に南下し、その通過に依り南西氣流から北東氣流に入る時に見られる。圖では9月16日がこの時期に當り、例年は9月11日頃で年に依り6日位前後する。そしてこの現象が起る時は大抵相當に強い颶風がこの不連続線にそひ北東に進行するのが普通である。

大陸の高氣壓が次第次第に發達し、本邦附近一帯がその勢力下に入ると秋の霖雨はやみ、秋晴れの候に入る。この時期は圖では10月3日頃、例年は10月10日前後で、年に依り9日位違ふ。そしてこの頃からまた移動性高氣壓や颶風が4日位の週期で交互に現れ、雨や気温が週期的に變化する様になる。

しかしこの週期的變化も11月下旬になると次第に週期が長く振幅が小さくなり、氣壓配置は略々西高東低の冬型となり冬に入つて行く。そして内地の太平洋側は連日の様に晴がつづき、日本海側は陰鬱な天氣に變る。この時期は圖では11月29日頃、例年は11月20日頃で年に依り10日位の前後がある。曆の上の立冬に略々相當する。然しなほ時に移動性高氣壓や日本海に低氣壓が入る事の爲に小春日和と云ふ様な暖かい日があるが12月中旬になると最早西高東低の氣壓配置は崩れる事なく、ただ内地の南東の沖を低氣壓が通過する位にとどまる。この時期は圖では12月20日頃、例年は12月18日頃で年に依り5日位の前後がある。

以上が1年間の天候の變遷の模様で大體毎年現れる。然しこの季節は本州を中心として見てゐ

るから地方に依つて違ふ。例へば満洲邊りでは梅雨期の現象は現れないし、秋は早く来る。又年に依つて季節の變りの日はかなり違ひ、1週間乃至2週間位前後する。従つて年に依るとある季節は現れない事もある。例へば梅雨は稀に現れない事があり潤梅雨と呼ばれてゐる事はここに改めて述べる必要もなからう。又上述の日付は僅か6年間の値であるからかなりの誤差が期待され、4,5日位前後するかもしれない。又上述中の年々の日付の變動は平均値からのずれの絶対値の平均をとつてあるから、年に依るとこの2倍位の進み、遅れがあると思はなければならない。従つて寒は普通1月下旬に起るが、年に依つては1月上旬、又は2月の中旬頃になつて起る事もある。

次に以上を一括し、それを基にして本州附近の季節をわけて見ると第1表の様になる。

第1表 日本の季節

季節	季節の變り	日付	暦の上の日付	兆候	天気圖上の特徴
初冬	立冬	11月20日±10日	11月8日頃	天気略々安定す。	氣壓配置略々西高東低となるもなほ不完全、時に崩れる。
	冬の入り	12月8日±5日	(冬至12月22日頃)	氣温急降す。	颶風通過後季節風強くなつて安全な西高東低となる。
真冬	寒	1月26日±12日	1月20日頃	氣温著しく低し。	低氣壓アリウシヤンで發達し、季節風強くなつて非常に冷える。
初春	立春	2月3日±13日	2月3日頃	氣温昇り始む。	なほ西高東低なるもやや崩れ初め、小笠原方面へ高氣壓出初める。
	春の入り	3月1日±16日	(彼岸3月18日頃)	氣温急昇し、天氣週期的に變り始む。	移動性高氣壓數日前本州を通過し、その後颶風がつづき、高低氣壓週期的に通過す。
真春	立夏	4月30日±8日	5月6日頃	天気略々安定す。	週期的な高低氣壓の通過略々終り、带状、高氣壓小笠原方面に出来る。
初夏	梅雨の入り	6月5日±10日	6月11日頃	氣温降り、雨期に入る。	10日位前氣壓配置は東高西低となり、後オホツク海に高氣壓出来、梅雨型となる。
	梅雨の明け	7月18日±7日	(土用7月20日頃)	氣温昇り、雨期終る。大雨を伴ふ事多し。	低氣壓日本海入り、オホツク海高氣壓崩れ、南高北低の氣壓配置となる。
真夏	暑	8月4日±12日	7月23日頃	氣温著るしく昇る。	小笠原高氣壓發達し、日本海に低氣壓が入つて非常に暑くなる。
初秋	立秋	8月19日±5日	8月8日頃	氣温次第に降り初む。	南高北低の氣壓配置崩れ始め、大陸へ高氣壓形成し始める。
	霖雨の入り	9月11日±6日	(彼岸9月20日頃)	氣温急降し、雨期に入る。	大陸高氣壓と小笠原高氣壓との間の不連続線南下す。颶風を伴ふ事多し。
真秋	霖雨の明け	10月10日±9日	—	雨期終り、天氣週期的に變り始む。	大陸高氣壓發達し、高低氣壓次々と通過し始める。
	立冬	11月20日±10日	11月8日頃	天気略々安定す。	氣壓配置略々西高東低となるもなほ不完全時に崩れる。

§3. 各季節の天氣の週期性、持続性 前節で季節の區別が定まつた故、次には各季節の天候のいろいろの性質を調べて見よう。まづ第一に問題になる事は天候の變化の性質、例へば秋の雨は何

日位つゞくだらうか、又一雨來たら次には何日目位にくるだらうかと云ふ様な問題である。この値は單に學問上ばかりでなく、實際の天氣豫報を行ふ際にも甚だ重要であり、既に多くの研究がある<sup>(1)</sup>。例へば週期性<sup>(2)</sup>に関しては岡田博士の三寒四溫の研究、天氣の持続性<sup>(3)</sup>に関しては藤原博士、高山博士の研究などその一例である。週期性から調べて行かう。

まづ我々は天氣の週期性の意義から調べて行かなければならない。天氣の週期性と云つても日變化や年變化は別としてこの外に云はれてゐる5日週期とか1週間週期と云つてもそれははつきりとした週期をもつものでない。この事は昔から多くの人が調和分析に依り正確な週期を求めようとしてあまり成功してゐない事からも判る。しかしながら天氣が大體ある時間で週期的に變つてゐるのは確かである。例へば毎日の東京の氣壓及び1耗以上の降水量について、極大から極大までの間隔の頻度を調べて見ると次の表の如くなり、季節に依つて多少の違ひはあるが、3.5日頃が最も多くなつてゐる<sup>(4)</sup>。

第2表 天氣の週期性

間隔(日)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
冬 (11.12.1.2)	11	35	32	16	11	6	1	2	2	
春 (3.4.5)	15	24	21	15	15	8	2			
梅雨 (6.7)	1	8	12	7	5	8	3	2	1	1
夏 (8)	1	5	5	4	1	6	1	1	1	
秋 (9.10)	4	16	15	14	9	4	1	1		
年	37	88	85	56	41	32	8	6	4	1

間隔(日)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	其の他
冬	9	11	9	9	6	3	6	2	4	3	2	—	1	4	17, 20, 23, 25, 26
春	10	12	14	14	4	6	4	1	—	3	1				16, 20
梅雨	7	5	12	7	2	4	1	1	1	1	—	1			18
夏	4	5	3	5	1	1	—		1	1					16, 23, 30
秋	6	8	10	4	9	1	2	2	3	2	2	—	1		
年	33	51	48	39	22	15	14	7	9	10	5	1	2	4	

この事は確かにある意味で天氣に週期性がある事を示すもので、偶然性に依る變動ではない。然らば天氣の週期性はどの様に考へたらば良いだらうか。これに大別して二つの考へ方がある様に思はれる。一つは灣の副振動の様に外から力を受けながら振動をしてゐる種類の週期性、今一つは藤

(1) 岡田著：氣象學下卷、183-192頁。

(2) T. Okada: On the Seven Day Period in the Winter Temperature of Korea and Manchuria, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 8, 1932.

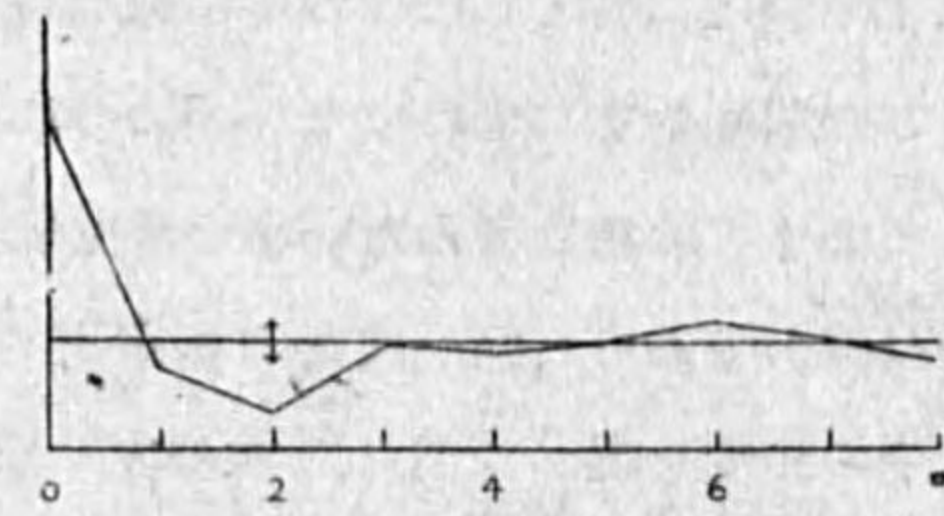
(3) 藤原、中田: On the persistence of weather, Geophys. Mag., 3, 27, 1930.

高山: 天氣の持続性に就いて。氣象集誌, 11, 昭和8年。

(4) 宮本、三石: 天氣の週期。氣象集誌, 8, 140頁, 昭和5年。にも同じ結果が得られてゐる。

原博士が云はれる様な間歇温泉の様な種類の週期性<sup>(1)</sup>である。もし前者の様な週期性ならば、かつて筆者が提出した方法で分析出来る筈である。それで最も週期性が顕著に現れてゐる春の東京の毎日の気圧について調べて見ると第2圖の如くなる。これを見ると自己振動の減衰比は相當に大きなもので、自己振動はあまり明かには出ない筈である。然し実際にはかなりはつきりしてゐる所を見ると間歇的週期で、週期が崩れると見た方が適當の様である。

第 2 圖



尚、筆者の提出した週期分析法は間歇的な週期性の場合にも用ひられ、週期の變動が大きい時にはあたかも減衰が甚だしいかの様になる。そして數學的には勝手な函数をフーリエの級數で展開出来る様に、間歇的な現象の週期性も振動體の週期性で置き代へて調べる事も出来る。

天氣の週期性の意義は大體以上で明かになつたと思はれるから、次にはこの様な週期性がいかにして起るのか考へて見よう。春や秋のこの週期性は明かに大陸から低氣壓と移動性高氣壓が交互に出てくる爲に起るのであつて1年中で一番明瞭に感じられる。これは良く知られた事であり議論の餘地はないであらう。冬や夏は我々の感じから云ふと週期はもつと長く、普通1週間と云はれてゐる。然し毎日の天氣をよく眺めて行くと、上に得られた3.5日週期は低氣壓が次々に東進する爲に起るもので、春や秋のものとは本質的には大差ない。

然らば何故冬や夏この週期を問題にしないかと云ふと、冬や夏になると氣壓の配置が略々定まり、シベリヤ高氣壓や小笠原高氣壓が壓倒的に優勢で、弱い低氣壓の通過は氣壓の大勢に大きな影響を及ぼさず、従つて屢々顯著な天氣變化は起さない。我々が感じる冬や夏の週期性はもつと大規模な冬のシベリヤ高氣壓や夏の小笠原高氣壓の動靜に大きく影響されるものである。これは多く北極の方から出てくると思はれる冷氣塊の吹出しである。冬支那で云はれる三寒四溫は岡田博士の云はれる如くシベリヤ高氣壓の吹き出しに依る事はあきらかである。夏の天氣はオホツク海方面の狀況が重要な影響を及ぼし、この狀況もやはり極から出てくる冷氣塊の影響に依る。この様な冷氣塊がほぼ1週間毎に吹き出てくる爲冬や夏には1週間週期が感じられるのであらう。

尚ここで注意すべきは1週間週期は前の3.5日週期の倍となつてゐる事である。これは偶然の一致ではない様に思はれる。高氣壓の吹き出しは大體間歇的の現象であり、大陸が冷えて出来た冷氣塊が吹き出す現象と見なし得る。そして一度吹き出すとすつかりエネルギーがなくなる故少し位の刺戟では吹き出さない。然るに櫻庭氏に依れば大陸高氣壓が充分發達するには數日を要する。そし

(1) S. Fujiwhara: On the Periodicity of Intermittent Phenomena such as a Geyser, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16, 294, 1940.

て暫らくは水平安定度に依りささへられてゐる。ここに3.5日週期の低氣壓がくると一つめではまだ充分エネルギーがないから吹き出さないが、二つめがくるとこんどは充分エネルギーが蓄へられてゐる故、高氣壓の吹き出しとなる。かくして1週間位の週期では天氣が變化する事になるのであらう。

以上の様に季節に依つて我々の感ずる天氣の週期はちがふのであつて、次に我々の感ずる天氣の平均の週期を求めて見よう。

第3表 各季節の平均週期(日)

季 節	真 冬	初 春	真 春	初 夏	梅 雨	真 夏	初 秋	霖 雨	真 秋	初 冬
天氣圖より	8.1	5.2	4.4	5.5	5.5	8.3	6.0	5.1	4.3	5.1
東京降水より	8.5	5.8	4.3	5.5	4.1	6.3	5.9	4.4	5.7	5.9
筑波氣温より	5.8	4.7	4.4	5.4	5.2	7.1	5.9	4.6	4.3	5.1
平 均	7.8	5.3	4.4	5.5	4.9	7.3	6.0	4.7	4.6	5.3

上表に見られる様に確かに經驗的に感ずる如く春秋の頃は夏冬にくらべ天氣の週期は小さいので半分位である。即ち春秋の頃は天氣が變り易く、夏冬は割合つづくのである。又梅雨の候とか霖雨の時の週期性は上表の様に一應求めたが甚だあいまいなものである。

尚上表に見られる如く、5日とか6日位の週期も見られ、前に得た3.5日週期とか7日週期とは必ずしも一致しない。しかし、これはこの2つの週期が互ひに干渉し合つてこの様になるものと思はれる。そして天氣の豫報と云ふ様な立場からはこの2つの週期が多少崩れるとし、組合せて考へた方が上表の値そのものを使用するより良いと思へる。又實際の天氣にはもつと長い週期の變化も確かに存在してゐるが、これは又次の機会に譲り、一應週期の事は一段落させよう。

さて、次に問題になる事は天氣の持續性である。これは昔から多くの研究がありこれも大體の天氣の豫想をつける場合の参考材料として重要である。しかしこの値は天氣の週期性が割合廣い範圍

第4表 各季節の天氣の平均持續回數及降雨率

持續日數	真 冬	初 春	真 春	初 夏	梅 雨	真 夏	初 秋	霖 雨	真 秋	初 冬
新 京	晴	9.7	10.2	7.2	4.4	2.4	3.4	3.5	5.0	6.0
	雨	1.3	1.7	1.7	2.3	3.0	2.9	1.9	1.4	1.4
新 湯	晴	1.2	1.6	1.8	2.7	1.8	5.7	2.7	2.4	1.6
	雨	19.6	5.9	2.4	2.4	2.8	2.1	1.3	4.5	5.7
東 京	晴	6.1	2.8	2.5	3.9	2.2	4.6	3.4	1.7	4.9
	雨	2.0	2.4	2.3	2.1	2.9	1.3	3.0	3.9	1.6
父 島	晴	1.6	1.9	2.4	3.1	3.6	3.8	2.6	1.9	1.9
	雨	3.4	2.5	2.5	3.8	2.1	2.8	2.3	3.3	3.4
降 雨 率	真 冬	初 春	真 春	初 夏	梅 雨	真 夏	初 秋	霖 雨	真 秋	初 冬
新 京	京	0.12	0.14	0.24	0.34	0.56	0.46	0.35	0.36	0.22
	湯	0.94	0.61	0.57	0.47	0.61	0.27	0.33	0.67	0.54
東 京	京	0.25	0.46	0.48	0.35	0.57	0.22	0.47	0.66	0.31
	島	0.68	0.57	0.51	0.55	0.37	0.42	0.47	0.59	0.62

で成立するに對し地方に依りひどく違ふ。又季節に依つても著るしく違ふ。もつとも天氣とせず等歴線型式に對して考へるならば、比較的ひろい範圍について云へる。

第4表は2,3の地點の平均の晴の持続日數、雨の持続日數及び降雨率を求めたもので、雨とは1日0.1耗以上の降雨を見た日、晴とはそれ以外の日を意味する。

上表で判る様に天氣の持続日數は季節に依り著るしく異なり、例へば東京の晴は冬では平均6日位つづくのに、梅雨時や霖雨の季節には2日位しかつづかない。又東京と新潟とでは著るしく異なる時がある。唯これを見て氣が付く事は持続日數と降雨率とが密接な關係があるらしい事である。

この關係は次の様に考へると説明出来る。即ち先人の研究によると天氣の持続の統計的性質として晴の次の日が雨になる確率を  $q$ 、雨の次の日が晴になる確率を  $p$  とすると  $p, q$  は前の歴史に關係のない一定の値を有してゐる。勿論  $p, q$  は季節に依つては異ふ。従つて一般に  $n$  日晴の續く確率は  $q(1-p)^{n-1}$  であるし、 $n$  日雨の續く確率は  $p(1-p)^{n-1}$  である。これから晴の平均持続日數  $l$  は

$$l = (1-q)q + 2(1-q)^2q + 3(1-q)^3q + \dots = \frac{1}{q} \quad (3-1)$$

で、雨の平均持続日數  $l'$  は

$$l' = (1-p)p + 2(1-p)^2p + 3(1-p)^3p + \dots = \frac{1}{p} \quad (3-2)$$

である。次にある任意の日が雨になる確率、即ち降雨率  $Q$  は明かに

$$Q = \frac{l'}{l+l'} = \frac{q}{p+q} \quad (3-3)$$

となる。一般に  $q$  と  $Q$  は違ふ値で、 $q$  の方が小さい。それで  $q=fQ$  とおくと (3-2), (3-3) より降雨率  $Q$  と雨の持続日數  $l'$  の關係として

$$l' = \frac{1}{p} = \frac{1}{f(1-Q)} \quad (3-4)$$

を得。又晴の持続日數  $l$  との關係として

$$l = \frac{1}{q} = \frac{1}{fQ} \quad (3-5)$$

を得る。 $f$  の値は嚴密に云ふと季節や地方に依つて異なる筈である。所が  $f=0.80$  とおいて (3-4) の式から降雨率  $Q$  と、雨の平均持続日數との關係をかいいて見ると、第4表と良く一致する。この事は  $f$  を定數と見る事が出来る事を意味し、従つて降雨率が判ると晴や雨の平均持続日數が (3-4), (3-5) から簡単に計算出来る。これは甚だ具合のよい關係で、降雨率は降雨日數として既に多くの統計がとられてゐるからそれがそのまま用ひる事が出来る。次に一月を30日として (3-4) 及び (3-5) から降雨日數と平均持続日數との關係を計算して見ると次表の如くなる。

第5表 降雨日數と平均持続日數

降雨日數	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
晴	$\infty$	18.8	9.4	6.3	4.7	3.8	3.1	2.6	2.3	2.0	1.8	1.7	1.5	1.4	1.3	1.2
雨	1.2	1.3	1.4	1.5	1.7	1.8	2.0	2.3	2.6	3.1	3.8	4.7	6.3	9.4	18.8	$\infty$

尙目的に依つては單に平均持続日數ばかりでなく、その分布曲線も必要であるが、これも上の結果を用ひると次の式で與へられる。

$$P(n) = (1-q)q^{n-1} = (1-fQ)^n fQ \quad (3-6)$$

$$Q(n) = (1-p)p^{n-1}(1-f+fQ)^n f(1-Q) \quad (3-7)$$

但し  $P(n), Q(n)$  は晴や雨が  $n$  日つづく確率である。又、時には同じ天氣が最も持続する場合の日數がほしい事もあるが、これは實用的には平均持続日數の四倍をとれば良い。實際持続日數が平均持続日數の四倍以上になる確率を求めて見ると平均持続日數が少しく大きくなると  $e^{-4}$  即ち凡そ  $1/53$  となる。そして持続日數が少なく例へば2日の時は  $1/256$  となる故、相當に小さく、これ以上になる事はあまりないと考へてよい。これは實例についても云へる。

§4. 天氣の移動速度 天氣現象に於ける一つの重要な性質は天氣が次第に動いて行くと云ふ性質で、天氣豫報の一つの指導原理である。在來の氣候學では天氣の移動と云ふ事はあまり研究の對照とはならなかつた。天氣豫報と云ふ立場から見ると一つの甚だ重要な問題である。高氣壓や低氣壓の各季節の平均速度は既にふるくから求められてゐるが<sup>(1)</sup>、天氣とか、不連続線、黃沙の様なものの速度も合せて今一度調べておくのも無駄ではあるまい。

まづ昭和10年の7月から13年の6月迄の印刷天氣圖に依り、1日の間の移動速度を求めた平均を示すと次表の如くである。

第6表 日本附近に於ける氣象狀況の移動の早さ(軒/時)

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
高氣壓	42	40	35	43	40	34	13	14	22	38	38	41
低氣壓	52	44	48	45	41	31	22	28	32	34	41	54
不連続線	35	19	23	21	15	10	9	9	19	23	30	23
雨域	33	35	38	35	34	25	14	21	27	29	38	35

低氣壓の速度(氣象要覽より)

1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
39	41	41	39	34	30	26	27	29	34	39	38

尙上表の平均速度を求めるに際し、定常性高氣壓、季節風に依る降雨などはとつてない。又低氣壓もはつきりしたものを取りあいまいなものは除いた。又黃沙は3月と4月に現れ、それ以外に

(1) 例へば氣象要覽。



は殆んど出ない。その速度は大體 27 軒毎時である。なほ参考までに氣象要覽にのつてゐる低氣壓の速度を示すと上の如くである。これと上表を比較して見ると大體は一致するが 2 割位の差がある。これはおそらくとつた區域及び低氣壓の種類に依ると思はれる。

上表の結果を見ると年變化がはつきりと現れ、どれも夏遅く、冬早い。又低氣壓が一番早く次が高氣壓、雨域、不連続線の順となつてゐる。そして高氣壓と低氣壓の早さの差はあまり大きくないが、不連続線は著るしく小さく凡そ高、低氣壓の半分しかない。この事は既に春の動氣候學を論じた時に言及したが、高、低氣壓の動く理由と、不連続線の動く理由とが全く別である事に依る。これは進行方向を見ても判る事である。又雨域は低氣壓や不連続線に伴ふから、その速度が高、低氣壓と不連続線の間にあるのも當然の事である。

以上は平均の値であるが、然らば速度分布はどうなつてゐるだらうか。これは今迄あまり論じられてなかつたが重要な問題と思ふ。氣象要覽の原簿を拜借して、昭和 9, 10 年及び昭和 13, 14, 15 年の材料について調べた結果は第 7 表の如くである。

第 7 表 低 氣 壓 の 速 度

	最 多 値	算 術 平 均	偏 差	最 大 値
8 月 日 本 海	20 (0.77)	26	16 (0.61)	78 (3.0)
9 月 南 方 洋	17 (0.74)	23	13 (0.55)	72 (3.1)
1, 2 月 日 本 海	24 (0.76)	32	17 (0.55)	87 (2.8)
4 月 支 那 東 海	22 (0.71)	31	18 (0.58)	107 (3.4)
4 月 南 方 洋 上	32 (0.80)	40	19 (0.49)	112 (2.8)
4 月 東 方 洋 上	40 (0.81)	49	20 (0.41)	143 (2.9)
1 月 日 本 近 海	35 (0.82)	43	20 (0.48)	117 (2.7)
平 均	0.77	1.00	(0.52)	(3.0)

速 度 分 布

速 度 (軒/時)	4 月 高 氣 壓	10 月 高 氣 壓	1 月, 2 月 東 方 洋 上 低 氣 壓	10 月 東 方 洋 上 低 氣 壓	9 月 南 方 洋 上 低 氣 壓	8 月 南 洋 低 氣 壓
0	0	0	0	1	0	0
5	1	4	4	1	11	21
10	4	5	20	6	27	67
15	14	12	22	25	35	109
20	13	34	37	31	21	45
25	16	34	63	38	12	34
30	21	42	70	38	7	17
35	21	36	62	38	8	9
40	17	32	62	34	3	10
45	20	34	58	31	6	1
50	15	38	70	24	1	3
55	11	40	49	19	2	3
60	18	37	37	19	1	2
65	9	19	30	23	0	0
70	7	12	14	15	1	3
75	5	7	8	15		0
80	6	9	11	2		0
85	7	3	4	4		0
90	2	3	4	8		1
95	6	3	4	0		0
100 以上	8	3	4	5		

これを見るといろいろの事が知れる。第一に速度の頻度には極大があり、従つて平均速度を用ひる事に意義がある。唯、注意すべきは普通平均速度と云ふと算術平均を意味し、最も頻度の多いものを統計してあるわけではない。分布曲線がガウスの分布曲線の様な場合にはこの二つは一致するが、現在の速度分布の様な場合には決して一致しない。表中括弧内はこの速度分布の最多値、平均値、偏差、最大値を、算術平均値を 1 とした場合の割合を示した。

上表から速度の最多値は算術平均の凡そ 8 割である事が知れる。従つて第 7 表を實際に使用する場合、8 割を乗じた値の方が實際に使用するのにはよいので、例へば 1 月の低氣壓の速度は平均として 40 軒/毎時とつた方がよい事がわかる。又上表から低氣壓の速度の最大は算術平均の凡そ 3 倍である事がわかる。従つて 1 月の低氣壓の速度として 156 軒/毎時をこえる事なく、もしそれをこすやうに出たら大抵誤りと考へて良い。

次に重要な事は速度の極大が良く見ると 2 つあるらしい事である。例へば 10 月の高氣壓の速度分布を調べて見ると 30 軒の所と 55 軒の所とに極大が認められる。この様な事は統計の誤差として起り得ない事もないが、この場合にはあまりにもはつきりと現れてゐる。又低氣壓の方についても同じ様な事が見られる。そしてこの大きい方の速度は小さい方の速度の凡そ倍となつてゐる。これが事實とすれば面白い事である。二つの極大が出る事は低氣壓の移動すると云ふ現象に二つの形式がある事を物語る。この二つの形式は次の様なものではなからうか。即ち一つは夏季の颱風の如く渦が大きな流れにのつて移動して行く事、今一つは低氣壓の波動論で知られる如く波動して移動して行く事である。前の場合には一般流と低氣壓の速度とは一致するが、後の場合にはこの外に波としての速度が加はる。この波としての速度は温度の傾度に略々比例し、見方に依れば上層氣流と一致する事は前に示した。さすれば波動として見ると上層氣流の速度の凡そ倍となるべきである。

實際、筆者の経験に依るとこの様に低氣壓が上層氣流の早さの凡そ倍になる事が屢々ある。さすればこの様に二つの極大が出来る事は當然の事となる。そして低氣壓の性質を見極め早い方か遅い方を決定すれば、單に全體の平均速度を用ひるよりもつと實際に近い値がえらび得るわけであり、重要な事と思ふ。然しこの理論などに關してはなほ今後の研究が必要である。

## 相異なる物質部分より成る固体の熱傳導圖式解法

高橋喜彦

## §1. 流熱量の數値計算式

こゝでは一次元の熱傳導に就いて述べる。併し一次元の解法さへ分れば、二次元又は三次元の場合でも一次元の熱の流れが直交する二つ又は三つの方向に交互に順次起るものとして計算することが出来る<sup>(1)</sup>。

先に發表した渦動擴散量の數値計算法<sup>(2)</sup>を固体の熱傳導にも應用することが出来るから、今或る時刻  $t$  に於ける固体の温度分布を  $u(x, t)$  とすれば、一點  $x=0$  に於いて  $x$  方向に垂直な單位面積を通し時刻  $t$  より  $t+\tau$  までの間に  $x$  正の方向に流れる熱量  $Q_\tau(t)$  は

$$Q_\tau(t) = c\rho \int_0^s \frac{s-\xi}{2s} \{u(-\xi, t) - u(\xi, t)\} d\xi \quad (1)$$

と與へられる。此の式は前論文の (6) 式に相當するものである。但し

$$s = a\sqrt{\kappa\tau} = a\sqrt{\frac{K}{c\rho}\tau} \quad (2)$$

なる關係がある。茲に  $c, \rho, K, \kappa$  は夫々固体の比熱、密度、熱傳導率、熱擴散率とする。又常數  $a$  は  $\tau$  従つて  $s$  が充分小さければ  $\sqrt{6}$  といふ値を取るが、實際の計算では多少之と違つた値を取る。

次に固体の表面温度が時間の函数  $\varphi(t)$  なる場合に此の表面に於ける流熱量を求めてみよう。今表面を  $x=0$  に取り、或る時刻  $t$  に於ける固体の温度分布を  $u(x, t)$  とすれば、これに對し

$$u(\mp x, t) = 2\varphi(t+\tau) - u(\pm x, t) \quad (3)$$

なる温度分布  $u(\mp x, t)$  を固体の外部に考へるならば、此の部分にも固体が続いて擴つてゐるものとして取扱ふことが出来る<sup>(3)</sup>。

故に (3) の關係を (1) 式に入れば、固体の表面  $x=0$  に於ける流熱量  $Q_\tau(t)$  が求められて

$$\begin{aligned} Q_\tau(t) &= \pm c\rho \int_0^s \frac{s-\xi}{s} \{\varphi(t+\tau) - u(\pm\xi, t)\} d\xi \\ &= \pm \frac{c\rho s}{2} \varphi(t+\tau) \mp c\rho \int_0^s \frac{s-\xi}{s} u(\pm\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (4)$$

(1) 文献 2 (本論文の末尾にあり)

(2) 文献 3.

(3) 文献 1, §2.

となる。但し固体が  $x>0$  にある場合は上の符號、 $x<0$  にある場合は下の符號を取るものとする。

## §2. 相異なる物質部分より成る固体の熱傳導圖式解法

今第 1 圖 I の如く、相異なる二つの物質部分より成る固体があり、或る時刻  $t$  に於ける 1 なる物質部分  $x<0$  の温度分布を  $u_1(x, t)$ 、2 なる物質部分  $x>0$  の温度分布を  $u_2(x, t)$  とする。而して最初の瞬間、例へば温度の相異なる二つの固体を接觸させた瞬間を除けば、物質不連続面  $x=0$  に於ける兩物質部分の温度は常に相等しく、且つ此の面に於ける兩物質部分に對する流熱量も等しくなくてはならないから、次の時刻  $t+\tau$  に於ける物質不連続面の温度を  $u_{12}(t+\tau)$  とすれば、(4) 式により

$$\begin{aligned} -c_1\rho_1 \int_0^{s_1} \frac{s_1-\xi}{s_1} u_1(-\xi, t) d\xi - \frac{c_1\rho_1 s_1}{2} u_{12}(t+\tau) \\ = \frac{c_2\rho_2 s_2}{2} u_{12}(t+\tau) - c_2\rho_2 \int_0^{s_2} \frac{s_2-\xi}{s_2} u_2(\xi, t) d\xi \end{aligned}$$

なる關係が得られる。或ひはこれを書き換えれば、

$$u_{12}(t+\tau) = 2 \frac{c_1\rho_1 \int_0^{s_1} \frac{s_1-\xi}{s_1} u_1(-\xi, t) d\xi + c_2\rho_2 \int_0^{s_2} \frac{s_2-\xi}{s_2} u_2(\xi, t) d\xi}{c_1\rho_1 s_1 + c_2\rho_2 s_2} \quad (5)$$

となる。但し

$$s_1 = a\sqrt{\kappa_1\tau} = a\sqrt{\frac{K_1}{c_1\rho_1}\tau}, \quad s_2 = a\sqrt{\kappa_2\tau} = a\sqrt{\frac{K_2}{c_2\rho_2}\tau} \quad (6)$$

なる關係があり、1 及び 2 なる添字は夫々物質 1 及び 2 に関する量を示すものとする。

實際の計算に便利のために (5) 式の中の積分の項を Simpson 1/3 則により書き換えれば、最も簡単な式として

$$u_{12}(t+\tau) = \frac{c_1\rho_1 s_1 \left\{ 3u_1\left(-\frac{s_1}{2}, t\right) + c_2\rho_2 s_2 \left\{ 3u_2\left(\frac{s_2}{2}, t\right) \right\} \right\}}{c_1\rho_1 s_1 + c_2\rho_2 s_2} \quad (5 I)$$

が得られ、更に一段詳しい式としては

$$\begin{aligned} u_{12}(t+\tau) \\ = \frac{c_1\rho_1 s_1 \left\{ 3u_1\left(-\frac{s_1}{4}, t\right) + u_1\left(-\frac{s_1}{2}, t\right) + u_1\left(-\frac{3s_1}{4}, t\right) \right\} + c_2\rho_2 s_2 \left\{ 3u_2\left(\frac{s_2}{4}, t\right) + u_2\left(\frac{s_2}{2}, t\right) + u_2\left(\frac{3s_2}{4}, t\right) \right\}}{5(c_1\rho_1 s_1 + c_2\rho_2 s_2)} \end{aligned} \quad (5 II)$$

が得られる。或ひは (6) の關係を用ひて上記 2 式を書換へると、夫々

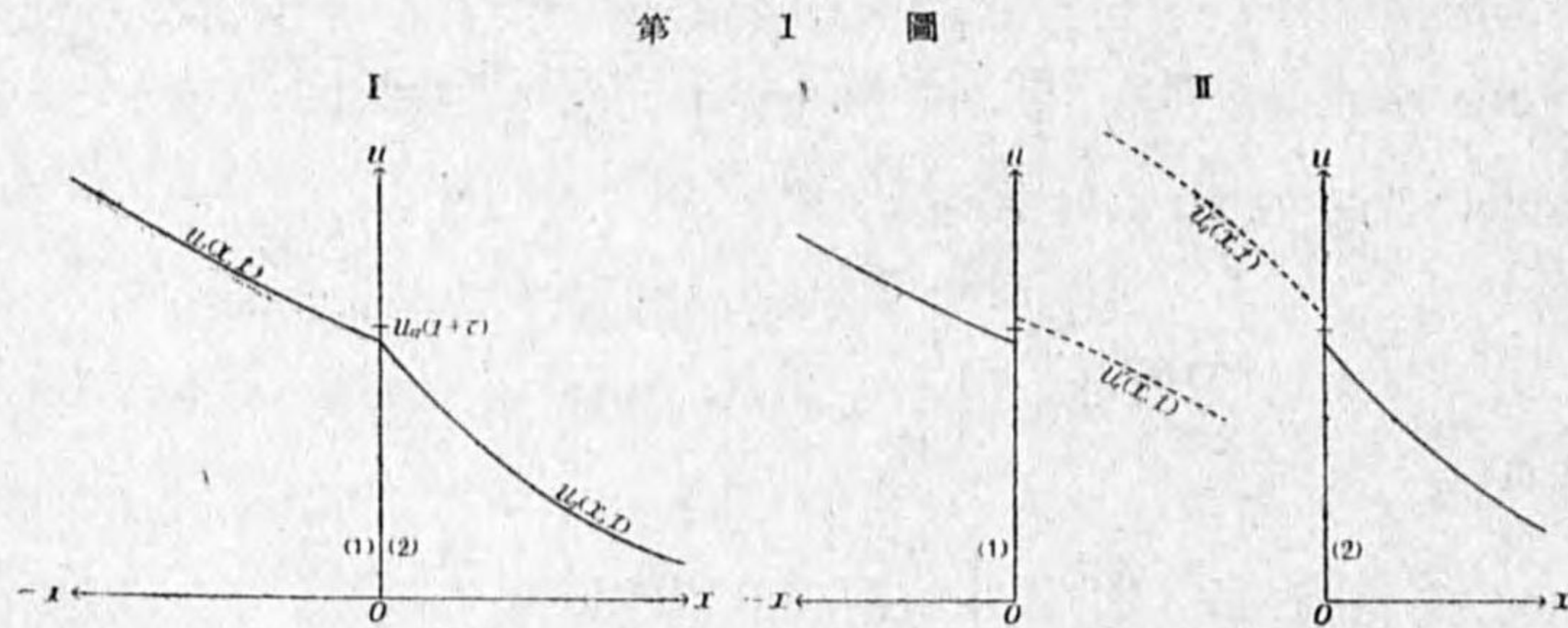
$$u_{12}(t+\tau) = \frac{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} u_1\left(-\frac{s_1}{2}, t\right) + \sqrt{c_2\rho_2 K_2} u_2\left(\frac{s_2}{2}, t\right)}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}}, \quad (5 I')$$



$$u_{12}(t+\tau) = \frac{\sqrt{c_1\rho_1K_1} \left\{ 3u_1\left(-\frac{s_1}{4}, t\right) + u_1\left(-\frac{s_1}{2}, t\right) + u_1\left(-\frac{3s_1}{4}, t\right) + \sqrt{c_2\rho_2K_2} \left\{ 3u_2\left(\frac{s_2}{4}, t\right) + u_2\left(\frac{s_2}{2}, t\right) + u_2\left(\frac{3s_2}{4}, t\right) \right\} \right\}}{5(\sqrt{c_1\rho_1K_1} + \sqrt{c_2\rho_2K_2})} \quad (5II)'$$

となる。併し実際の計算には(5I), (5II)の方が√がないだけ便利であるが、形式的な取扱ひをする場合には(5I)', (5II)'の方が便利ことがある。

以上の如く或る時刻の温度分布が與へられると、物質不連続面の温度は常にτ時間先の値が定つてしまふ。故に先づ此の温度を求めたならば、二つの物質部分を不連続面で切離してしまつて各々單獨に、表面温度が時間の函数なる場合と全く同じ取扱ひをすればよい。



例へば第1圖Iの如く、或る時刻tに於ける二つの物質部分の温度分布  $u_1(x, t)$  及び  $u_2(x, t)$  が與へられたとすれば、先づ  $s_1$  及び  $s_2$  を適當に取り、次の時刻  $t+\tau$  に於ける物質不連続面  $x=0$  の温度  $u_{12}(t+\tau)$  を求める。但し常に  $s_1:s_2 = \sqrt{\kappa_1}:\sqrt{\kappa_2}$  なる關係を保たなくてはならぬことは(6)式より明らかである。次に同圖IIの如く、二つの物質部分を  $x=0$  の面で切離し各々單獨に、表面温度が時間の函数なる場合と同様に、破線の如き補助温度分布を用ひ1なる部分では幅  $2s_1$ 、2なる部分では幅  $2s_2$  を以て夫々移動平均を行へば、次の時刻  $t+\tau$  に於ける各部分の温度分布  $u_1(x, t+\tau)$  及び  $u_2(x, t+\tau)$  が得られる。

斯くの如き操作を繰返へすことにより最初の温度分布より出發してτ時間毎の温度分布が順次求められて行く。

§3. 定常温度分布の場合と解法の吟味

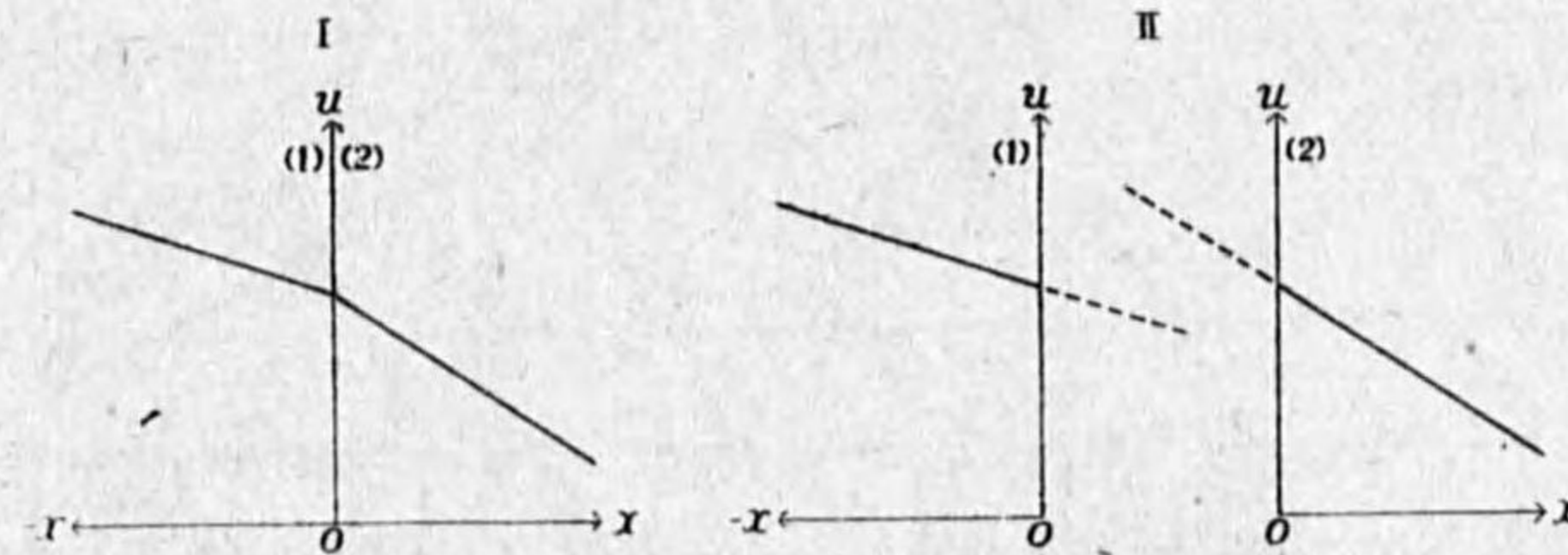
相異なる二つの物質部分より成る固体の定常温度分布は第2圖Iの如く、物質不連続面で折曲つた一つの直線で表はされ、且つ各部分の温度勾配は其の物質の熱傳導率に逆比例する。今  $x<0$  に1なる物質、 $x>0$  に2なる物質が擴つてゐるものとすれば、此の定常温度分布は一般に

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= u_{12} + \frac{b}{K_1} x & (x < 0) \\ u_2(x) &= u_{12} + \frac{b}{K_2} x & (x > 0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

で表はされる。茲に  $u_{12}$  は物質不連続面の温度、 $b$  は常數とする。

斯くの如き定常温度分布に圖式解法を用ひて次の時刻に於ける温度分布を求めても、矢張り前と變りのないことが云へる。これは定常温度分布である以上當然であるが、亦圖式解法の一つの吟味ともなるから一應述べて置かう。

第2圖



上記(7)の温度分布より物質不連続面の或る時間先の温度を求めて見ると、(5)或ひは(5I), (5II) いづれの式によるも矢張り前と變りなく  $u_{12}$  となる。故に二つの物質部分を切離して移動平均する時に用ひる補助温度曲線は第2圖II破線の如く、實在の温度曲線を真直ぐに延長したものに外ならない。而して一本の直線は何回移動平均しても矢張り同じ直線の儘である。故に上記の如き定常温度分布はいつまでも一定不變である。

§4. 簡単な計算例と解法の吟味

二つの相異なる物質部分より成る無限固体に於ける熱傳導の一つの簡単な計算例を示し、其の結果により圖式解法を吟味して見よう。

今物質不連続面を  $x=0$  とし、 $x<0$  に1なる物質、 $x>0$  に2なる物質がいつでも半無限に擴つてゐるものとする。各物質の性質は

	$c\rho$	$K$	$\kappa$
物質 1	1.5	6	4
物質 2	1	1	1

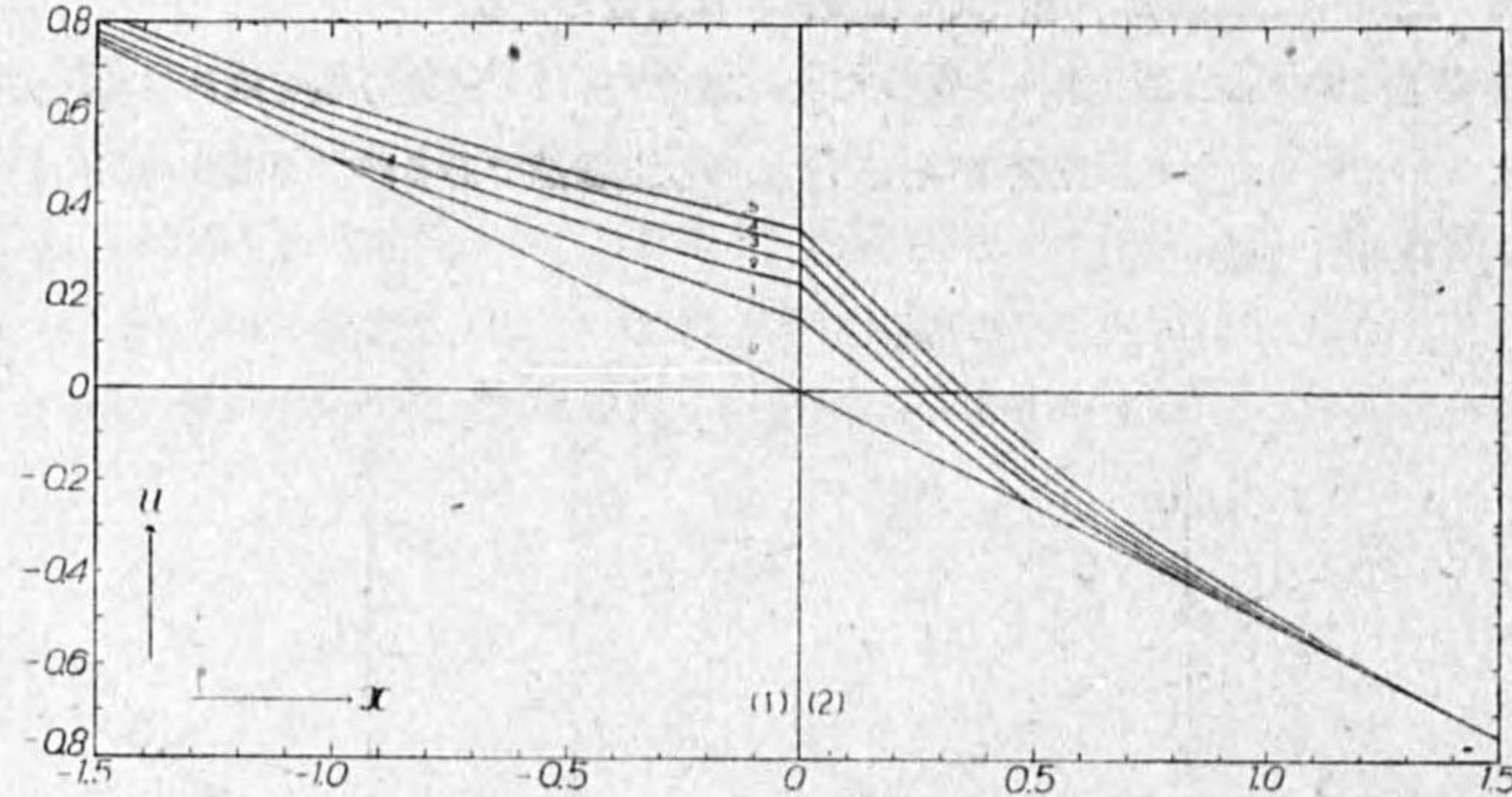
とし、最初の温度分布は第3圖に示す如く、二つの部分を通じて一本の直線で表はされ、其の勾配を  $-0.5$  とする。上記  $\kappa_1:\kappa_2=4:1$  なる關係により  $s_1:s_2=2:1$  となる。

(1) 先づ  $s_1=1.0$ 、従つて  $s_2=0.5$  として、物質不連続面の温度は最も簡単な(5I)式によるものとすれば、

$$u_{1,2}(t+\tau) = \frac{3u_1(-0.5, t) + u_2(0.25, t)}{4} \quad (8)$$

で與へられる.

第3圖 計算例



第3圖は  $t=5\tau$  まで計算した結果  $\tau$  時間毎の温度分布を示したもので、物質不連続面の附近に熱量が次第に蓄積して行くことが分る、而して此の圖式解法により得られた温度曲線が果して正しいかどうかは、之を比較すべき理論解がないから分らないので、取敢へず蓄積熱量及び不連続面に於ける  $\partial u_1/\partial x : \partial u_2/\partial x$  に就いて吟味することにしよう。

先づ蓄積熱量に就いて考へれば、物質不連続面より充分離れた部分の温度勾配は最初の儘であるから、時刻  $t$  までの蓄積熱量  $H(t)$  は  $x$  方向に垂直な単位断面を有する部分に付き

$$H(t) = 0.5(6-1)t$$

で與へられる。之は嚴密な理論値である。或ひは  $\tau = s_1^2/a^2 \kappa = 1.0/4a^2$  により

$$H(t) = \frac{0.625}{a^2} \cdot \frac{t}{\tau} \quad (9)$$

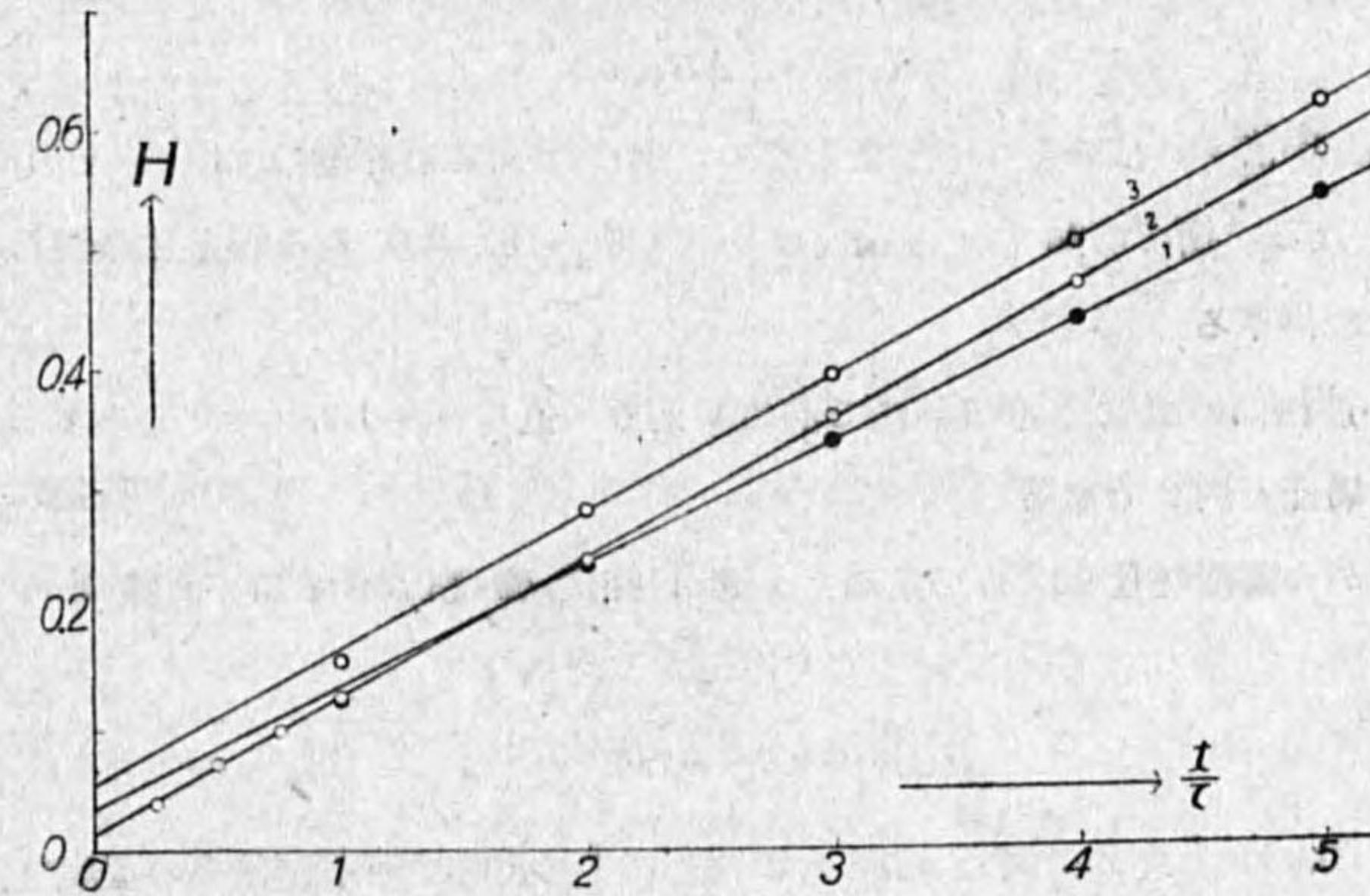
となる。

此の蓄積熱量は圖式解法の結果、即ち第3圖の温度曲線の膨みからも計算が出来る。第4圖の○點は此の結果を示したもので、 $t=2\tau$  以後の各點は直線3の上によく載るけれども、此の直線は原點を通らず、

$$H(t) = 0.055 + 0.114 \frac{t}{\tau} \quad (10)$$

で表はされる。而して理論上は  $H(0)=0$  となるべきであるから、上記圖式解法の誤差として始め二回の計算で  $\Delta H=0.055$  だけの熱量が餘分に加つたことになる。

第4圖 第3圖計算例に於ける物質不連続面附近の蓄積熱量  $H$  と時間  $t$  との関係



尚 (9), (10) 二式の時間係数を等しくするには  $a=2.34$  と置けばよい。

(2) 次に始めの4回は  $s_1=0.5, s_2=0.25$  とし、5回目より  $s_1=1.0, s_2=0.5$  とする。但し  $\tau$  は  $s_1=1.0, s_2=0.5$  に相當するものを取ることにするから、始めの4回は  $\tau/4$  時間毎の計算となる。

第4圖の○點は此の結果を示したもので各點は直線2の上によく載る。此の直線は

$$H(t) = 0.014 + 0.115 \frac{t}{\tau} \quad (11)$$

で表はされ、 $\Delta H=0.014$  となり、前の場合に比べて誤差はずつと小さくなる。

尚 (9), (11) 二式の時間係数を等しくするには  $a=2.33$  と置けばよい。

(3) 以上二つの計算例より、圖式解法の誤差として蓄積熱量に  $\Delta H$  なる誤差が生ずるが、併し  $s$  を小さく取ることによつて此の誤差は幾らでも小さく出来るといふことが分る。

此の事は最初の温度分布が特殊な形、例へば今の場合の如く直線で與へられてゐる場合には、一々計算しなくても次の様にして分る。

$s_i (i=1, 2)$  といふ値を以つて  $n$  回計算して得られる  $t=n\tau$  に於ける温度曲線は、 $ks_i (i=1, 2)$  として  $n$  回計算して得られる  $t=nk^2\tau$  に於けるものと全く相似であるが、後者は前者に比べて長さで  $k$  倍、面積では  $k^2$  倍の大きさとなる。故に  $s_i$  で計算した蓄積熱量  $H(t)$  と  $ks_i$  で計算したものの  $H_k(k^2t)$  との間には

$$H_k(k^2t) = kH(t) \quad (12)$$

なる関係が成り立つ。今 (10), (11) 式の如く  $H(t)$  が

$$H(t) = \Delta H + bt \quad (13)$$

の形で與へられるとすれば、

$$H_k(k^2 t) = k^2 \Delta H + bk^2 t,$$

或ひは

$$H_k(t) = k^2 \Delta H + bt \tag{14}$$

となる。即ち  $s$  を  $k$  倍すれば誤差は  $k^2$  倍となる。例へば前記計算例の如く  $s$  を  $1/2$  倍に取れば、誤差は  $1/4$  となる。斯くの如く  $s$  を適當に小さく取れば、 $\Delta H$  なる誤差は無視し得る程度まで小さくすることが出来る。

(4) 次は物質不連続面の温度を (5 II) 式で求めて見る。但し  $s_1=1.0, s_2=0.5$  とするから、 $\tau$  の數値は前記二つの場合と同じである。

此の計算の結果から蓄積熱量を求めて見ると、第 4 圖に ● 點で示す如く直線 1 の上によく載る。此の直線は

$$H(t) = 0.035 + 0.102 \frac{t}{\tau} \tag{15}$$

で表はされ、 $\Delta H = 0.035$  となり、同じ  $s_i (i=1, 2)$  で (5 I) 式により不連続面の温度を計算した場合の誤差よりは小さくなる。

尙時間係数を理論値と一致せしめるには  $a=2.48$  と置けばよい。

以上の結果から見ると、物質不連続面の温度を (5 II) 式により詳しく計算する割には、 $\Delta H$  なる誤差は案外小さくならないが、 $a$  の値が  $\sqrt{6}=2.45$  に近いといふことは一應注目する必要がある。

§ 5. 物質不連続面に於ける温度勾配に就いて

1 及び 2 なる物質部分の接觸面に於ける各温度勾配は理論上

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} / \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{K_1}{K_2} \tag{16}$$

なる関係になくなくてはならない。前節の例では  $K_1 : K_2 = 6 : 1$  であるから、温度勾配の比は 6 であるべきだが、圖式解法で求めた各温度曲線より求めた此の値は第 1 表の如く 6 より可なり相違してゐる。

第 1 表 物質不連続面に於ける  $\frac{\partial u_2}{\partial x} / \frac{\partial u_1}{\partial x}$  の計算例  
(理論上は 6 となるべき場合)

t		$\tau/4$	$\tau/2$	$3\tau/4$	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
(5 I) 式	$s_1=1.0, s_2=0.5$				0.24	0.36	0.39	0.41	0.42
	始めの 4 回だけ $s_1=0.5, s_2=0.25$	0.24	0.36	0.39	0.41	0.30	0.36	0.38	0.41
(5 II) 式	$s_1=1.0, s_2=0.5$				0.20	0.30	0.30	0.36	0.39

實は此の計算例に限らず、今回發表した物質不連続面に對する取扱ひの方法では一般に (16) の関係を満足させることが出来ないのである。

今物質不連続面を  $x=0$  に取り、 $x < 0$  及び  $x > 0$  に夫々 1 及び 2 なる物質部分が擴つてゐるものとし、或る時刻  $t$  に於ける各部分の温度分布  $u_1(x, t)$  及び  $u_2(x, t)$  より今回の方法により次の時刻  $t+\tau$  に於ける温度分布を求めた時、之が (16) の関係を一般に満足しないといふことを證明しよう。

先づ 1 なる物質部分に於いて、 $0 < \Delta x < s_1$  とすれば、

$$u_1(-\Delta x, t+\tau) = \frac{1}{2s_1} \left\{ \int_{-\Delta x-s_1}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{-\Delta x+s_1} u_1'(\xi, t) d\xi \right\},$$

茲に  $u_1'$  は實在の温度分布  $u_1$  に對する補助の温度分布であるから、時刻  $t+\tau$  に於ける不連続面の温度を  $u_{12}(t+\tau)$  とすれば、

$$u_1'(x, t) = 2u_{12}(t+\tau) - u_1(-x, t)$$

なる関係があり、之を上式に入れれば、

$$u_1(-\Delta x, t+\tau) = \frac{1}{2s_1} \int_{-\Delta x-s_1}^{-\Delta x} u_1(-\xi, t) d\xi + \left(1 - \frac{\Delta x}{s_1}\right) u_{12}(t+\tau),$$

$$\text{或ひは } \frac{u_{12}(t+\tau) - u_1(-\Delta x, t+\tau)}{\Delta x} = \frac{1}{2s_1 \Delta x} \int_{-\Delta x-s_1}^{-\Delta x} u_1(-\xi, t) d\xi - \frac{1}{s_1} u_{12}(t+\tau)$$

となる。

今  $\Delta x \rightarrow 0$  とすれば、

$$\int_{-\Delta x-s_1}^{-\Delta x} u_1(-\xi, t) d\xi = 2\Delta x u_1(-s_1, t)$$

となる。故に

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(0, t+\tau)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{12}(t+\tau) - u_1(-\Delta x, t+\tau)}{\Delta x} \\ &= \frac{u_1(-s_1, t) - u_{12}(t+\tau)}{s_1} \end{aligned} \tag{17}$$

となる。

同様に 2 なる物質部分に於いて

$$\frac{\partial u_2(0, t+\tau)}{\partial x} = \frac{u_{12}(t+\tau) - u_2(s_2, t)}{s_2} \tag{18}$$

となる。

若し (16) の関係が成り立つものとすれば、

$$K_1 \frac{u_1(-s_1, t) - u_{12}(t+\tau)}{s_1} = K_2 \frac{u_{12}(t+\tau) - u_2(s_2, t)}{s_2}$$

でなくてはならぬから、之を満足すべき  $u_{12}(t+\tau)$  を  $u_{12}^*(t+\tau)$  とすれば、上式より

$$u_{12}^*(t+\tau) = \frac{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} u_1(-s_1, t) + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2} u_2(s_2, t)}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} \tag{19}$$

となる。

然るに今回の方法では  $u_{12}(t+\tau)$  は (5) 或ひは (5I)', (5II)' によつて與へられるのであるが、之等の式は (19) 式と一般に違ふことは明らかである。故に今回の方法で求める温度分布は一般に (16) の関係を満足しないことが分る。

次に  $s_i (i=1, 2)$  を小さく取れば、(5) 式に於ける積分變數  $\xi$  も亦小さくなるから、

$$u_1(-\xi, t) = u_1(-s_1, t) + (s_1 - \xi) \frac{\partial u_1(-s_1, t)}{\partial x},$$

$$u_2(\xi, t) = u_2(s_2, t) + (\xi - s_2) \frac{\partial u_2(s_2, t)}{\partial x}$$

となり、(5) 式は

$$u_{12}(t+\tau) = \frac{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} u_1(-s_1, t) + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2} u_2(s_2, t) + \frac{2}{3} a \sqrt{\tau} \left\{ K_1 \frac{\partial u_1(-s_1, t)}{\partial x} - K_2 \frac{\partial u_2(s_2, t)}{\partial x} \right\}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}}$$

$$= u_{12}^*(t+\tau) + \frac{2}{3} a \sqrt{\tau} \left\{ K_1 \frac{\partial u_1(-s_1, t)}{\partial x} - K_2 \frac{\partial u_2(s_2, t)}{\partial x} \right\} \quad (20)$$

と書換へることが出来る。

此の式で見ると、 $\tau$  即ち  $s_i (i=1, 2)$  を小さく取れば  $u_{12}(t+\tau) - u_{12}^*(t+\tau)$  を幾らでも小さくすることが出来る様に思はれる。即ち今回の方法で求める温度分布も  $s_i$  さへ小さく取れば、(16) の関係を満足するかの様に思はれるが、併し此の場合は  $u_{12}^*(t+\tau) - u_{12}(t)$  夫れ自身も亦小さくなるから、 $u_{12}(t+\tau)$  の  $u_{12}^*(t+\tau)$  に対する誤差としては  $u_{12}(t+\tau) - u_{12}^*(t+\tau) / u_{12}^*(t+\tau) - u_{12}(t)$  なる量を取らなくてはならない。若し  $s_i$  を小さく取つた時之が 0 となれば、今回の方法で求める温度分布は元來 (16) の関係を満足すべきものであるが、 $s_i$  を小さく取らぬための誤差として此の關係が満足されないことになるので、此の點を更に調べて見よう。

今  $s_i (i=1, 2)$  を小さいとすれば、

$$u_{12}(t) = u_1(0, t) = u_1(-s_1, t) + s_1 \frac{\partial u_1(-s_1, t)}{\partial x},$$

即ち

$$u_1(-s_1, t) = u_{12}(t) - s_1 \frac{\partial u_1(-s_1, t)}{\partial x}$$

となる。同様に

$$u_2(s_2, t) = u_{12}(t) + s_2 \frac{\partial u_2(s_2, t)}{\partial x}$$

となるから、(19) 式は

$$u_{12}^*(t+\tau) = u_{12}(t) - \frac{a \sqrt{\tau} \left\{ K_1 \frac{\partial u_1(-s_1, t)}{\partial x} - K_2 \frac{\partial u_2(s_2, t)}{\partial x} \right\}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} \quad (21)$$

と書換へられる。

故に (20) 及び (21) 式より

$$\frac{u_{12}(t+\tau) - u_{12}^*(t+\tau)}{u_{12}^*(t+\tau) - u_{12}(t)} = -\frac{2}{3} \quad (22)$$

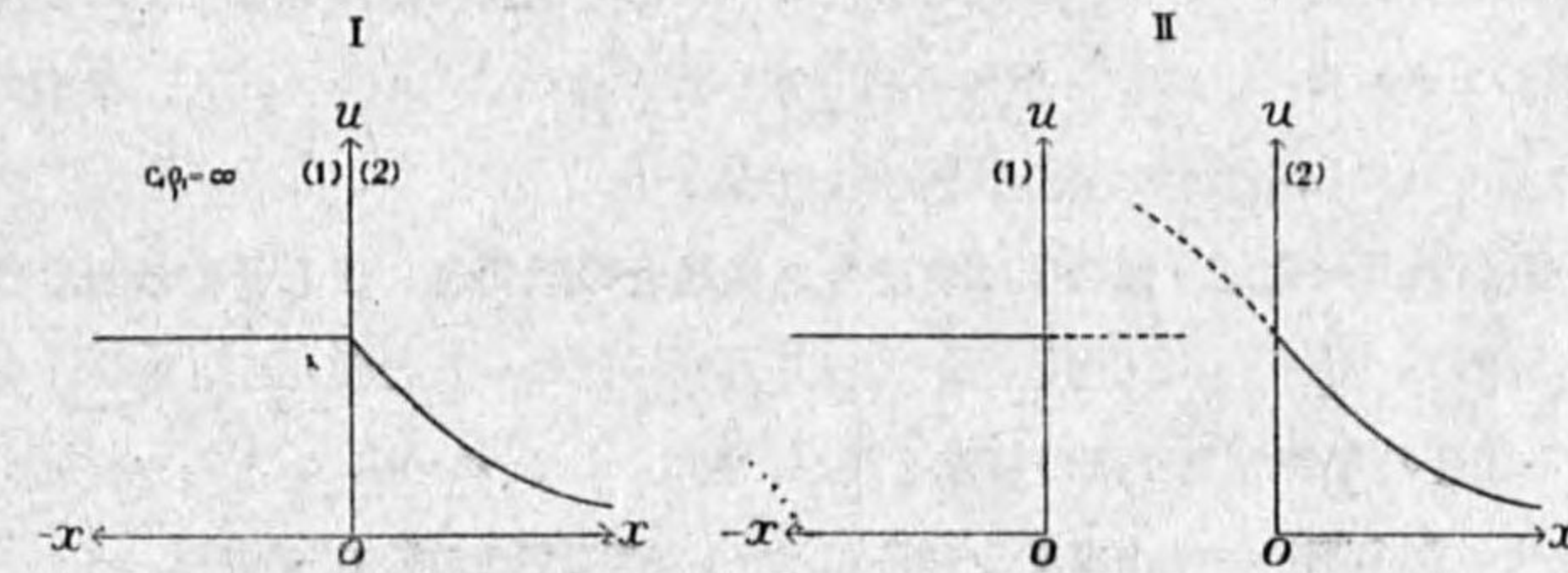
となる。即ち今回の方法では  $s_i$  を充分小さく取つて計算しても一般に (16) の關係は満足されないことが分る。

但し定常温度分布の場合には (20) 及び (21) 式より、 $s_i$  の値如何に拘らず  $u_{12}(t+\tau) = u_{12}^*(t+\tau) = u_{12}(t)$  となり、(16) の關係は完全に満足されると同時に物質不連続面の温度は一定不變となることが分るが、之は既に §3 に於いて論じた所に含まれてゐる。

### §6. 均一固体の表面温度が一定なる場合及び表面が熱を通さぬ場合への應用と解法の吟味

均一物質の固体表面が一定温度に保たれる場合及び熱を通さぬ場合には既に之に対する完全な解法があるが、此處では表面温度を一定に保つ代りに、此の面に接して熱傳導率  $K=0$ 、熱容量  $c\rho=\infty$  で且つ温度が一樣なる物質部分があると考へ、又表面が熱を通さないとする代りに、此の面に接して  $K=0$ 、 $c\rho=\infty$  なる物質部分があるものと考へて、今回の解法を應用し、以つて之を吟味して見よう。

第 5 圖



先づ第 5 圖 I に於いて物質不連続面を  $x=0$  とし、 $x < 0$  及び  $x > 0$  に夫々  $c_1 \rho_1 = \infty$ 、 $K_1 \neq 0$  及び  $c_2 \rho_2$ 、 $K_2$  なる物質部分があるものとし、或る時刻  $t$  に於ける温度分布を  $x < 0$  の部分では一樣に  $u_1(t)$ 、 $x > 0$  では  $u_2(x, t)$  であるものとするれば、次の時刻  $t+\tau$  に於ける物質不連続面の温度  $u_{12}(t+\tau)$  は (5I)', (5II)' 孰れの式によるも、 $c_1 \rho_1 = \infty$  と置けば、

$$u_{12}(t+\tau) = u_1(t)$$

で與へられる。

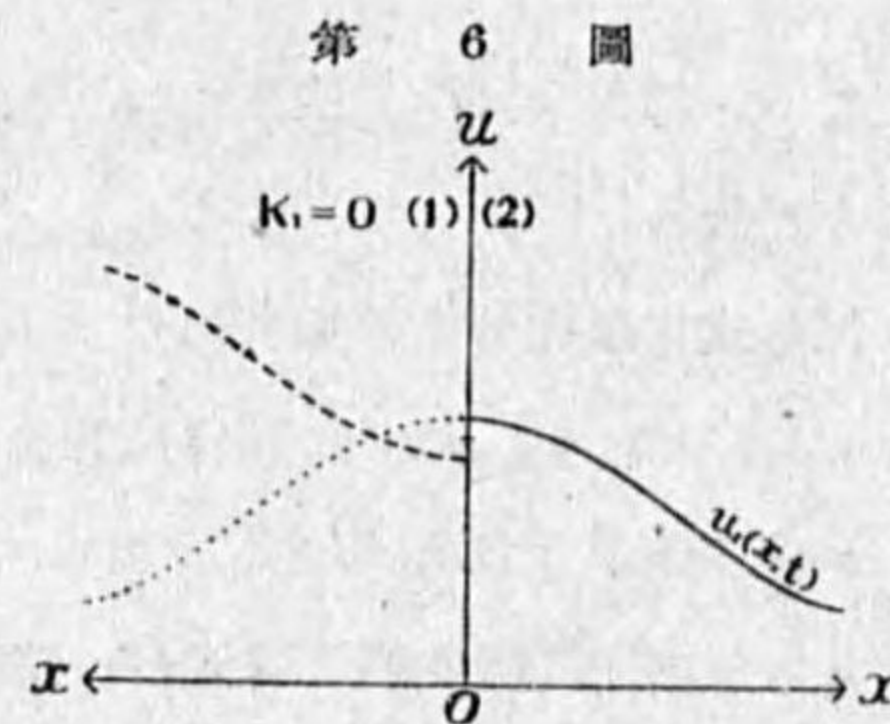
故に  $c_1 \rho_1 = \infty$  なる部分に対する補助温度分布は第 5 圖 II に破線で示したものとなるから、此の部分の温度は元の儘となり、且つ  $u_1(t)$  は實は最初から一定不變のものであることが分る。

$c_2 \rho_2$  なる部分に対する補助温度曲線は第 5 圖 II に破線で示したものとなり、且つ  $u_1$  は常に一定であるから、之は  $c_1 \rho_1 = \infty$  なる部分を考へない場合の解法と全く一致する。

次に第6圖に於いて物質不連続面を  $x=0$  とし,  $x<0$  及び  $x>0$  に夫々  $K_1=0, c_1\rho_1=\infty$  及び  $K_2, c_2\rho_2$  なる物質部分があるものとし, 或る時刻  $t$  に於ける各部分の温度分布を夫々  $u_1(x, t)$  及び  $u_2(x, t)$  とすれば, 次の時刻  $t+\tau$  に於ける物質不連続面の温度  $u_{12}(t+\tau)$  は, (5I)' 及び (5II)' 式で  $K_1=0$  と置けば, 夫々

$$u_{12}(t+\tau) = u_2\left(\frac{s_2}{2}, t\right) \quad (23\text{I})$$

$$\text{及び } u_{12}(t+\tau) = \frac{1}{5} \left\{ 3u_2\left(\frac{s_2}{4}, t\right) + u_2\left(\frac{s_2}{2}, t\right) + u_2\left(\frac{3s_2}{4}, t\right) \right\} \quad (23\text{II})$$



となり,  $u_{12}(t+\tau)$  は孰れの式によるも  $K_1=0$  の部分とは全く無関係に決定される. 従つて  $K_2$  の部分に対する補助温度曲線も  $K_1=0$  の部分には全く無関係に求められる.

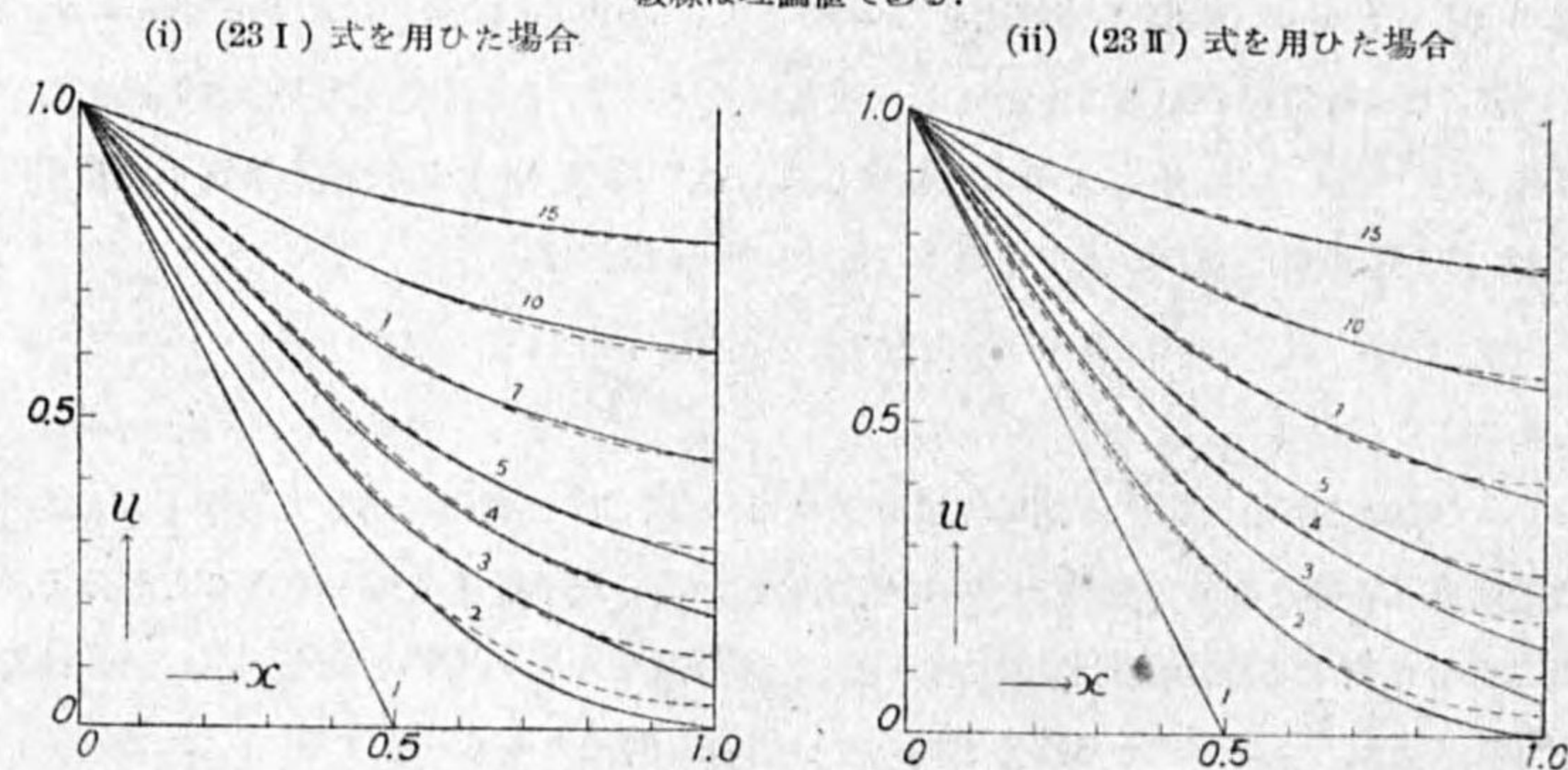
一方  $K_1=0$  の部分では  $s_1=0$  であるから, 温度分布  $u_1(x, t)$  は實は最初に與へられた儘で變化なく, 之は別に調べる必要もない.

前記第6圖に破線で示したのは此の場合  $K_2$  の部分に対する補助温度曲線である. 今見方を換へて,  $K_2$  なる固体の表面  $x=0$  が熱を通さぬと考へれば, 同圖に點線で示したのが完全なる解法の補助温度曲線である. 此の二つは一般に一致しないことは明らかであるから, 今回の解法は完全でないことが分る. 此の點を實例に就いて吟味して見よう.

§7. 板の一面が温度一定で, 他の面は熱を通さぬ場合の熱傳導, 但し最初の温度は0とする.

今厚さ1なる板の一面  $x=0$  の温度を1に保ち, 他の面  $x=1$  は熱を通さない. 但し最初板の温度は0である場合の熱傳導を今回の解法を用ひ, 即ち  $x>1$  に  $K=0$  なる物質部分があるもの

第7圖  $x=0$  を温度1に保ち,  $x=1$  は熱を通さぬ場合の計算例  
破線は理論値である.



と考へて調べて見ると, 第7圖に實線で示す如き  $\tau$  時間毎の温度分布が得られる. 但し同圖 (i) は物質不連続面と考へた  $x=1$  の温度を (23I) 式により求めた場合, (ii) は (23II) 式により求めた場合のもので ( $x$  座標は適當に變へて考へる), 孰れも  $s=0.5$  として15回まで計算した. 尙圖では餘り複雑になるので途中數個の曲線は除いて書いてない.

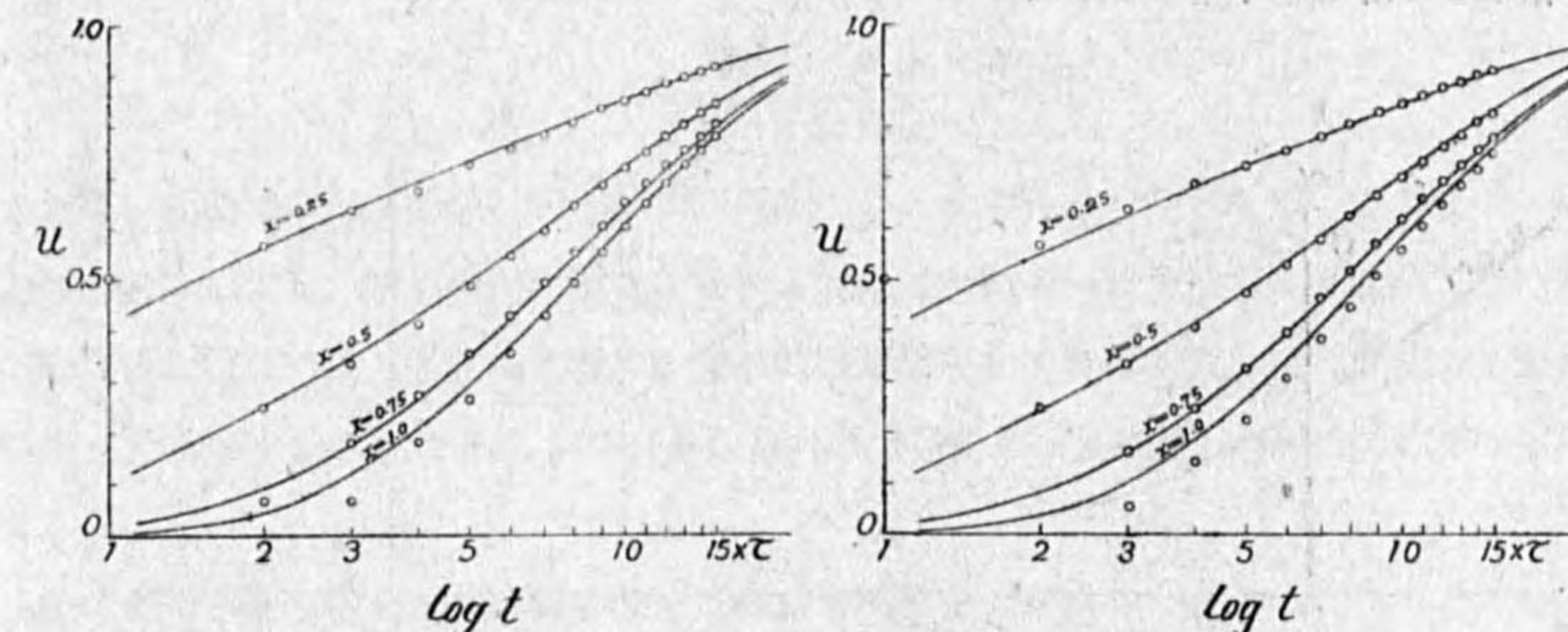
今回の解法の結果では §5 で述べた様に, 矢張り (16) の關係, 此の場合では  $x=1$  に於いて  $\partial u/\partial x = 0$  を満足してゐないことが此の圖から一層よく分る.

此の問題の理論解は

$$u = u_0 + \frac{2}{a} \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{(2s+1)^2\pi^2\kappa t}{4a^2}} \sin \frac{(2s+1)\pi x}{2a} \left\{ \int_0^a f(\lambda) \sin \frac{(2s+1)\pi\lambda}{2a} d\lambda - \frac{2au_0}{(2s+1)\pi} \right\} \quad (24)$$

に於いて  $u_0=1, a=1, f(x)=0$  と置いたものである. 第8圖は數値解を此の理論解と比較したもので, 同圖 (i) は (23I) 式を用ひた場合で, 圖の如く數値解を理論解と一致させるには  $\tau=0.0471/\kappa$ , 即ち  $s=a\sqrt{\kappa\tau}$  の  $a$  は 2.30 となり, (ii) は (23II) 式を用ひた場合で  $\tau=0.0442/\kappa$ , 即ち  $a=2.38$  となる.

第8圖 第7圖計算値と理論値との比較



此の問題は先に均一固体に対する圖式解法で計算したことがあり<sup>(1)</sup>, 其の時の數値解は理論解と非常によく一致してゐる. 之に比べると今回の解法の結果は幾分悪くなつてはゐるが, 併し心配した程の誤差はなく, 又次に述べる如く比較的容易に修正し得るものである.

更に數値解と理論解とを一層よく比較するため,  $\tau$  時間毎の温度分布の數値解の曲線に夫々相當する理論曲線を書いて見ると, 第7圖に破線で示したものとなる. 但し同圖 (ii) では  $t=n\tau$  に対して (24) 式に於いて  $t = \frac{0.0471}{\kappa} n$  とし, (ii) では  $t = \frac{0.0442}{\kappa} n$  として計算したものである.

此の圖で見ると  $\tau$  時間毎の温度が急激に變化する間は物質不連続面より  $s$  の範圍 (此の場合は  $x=1.0 \sim 0.5$  の範圍) では可なりの誤差があるが, 此の誤差は比較的修正し易い様に思はれる. 即

(1) 文獻 I, §4, 第7圖.

ち  $x=1$  で  $\partial u/\partial x=0$  になる様に此の附近の数値曲線を一部分書き直せば、理論曲線と大差のないものが得られる。

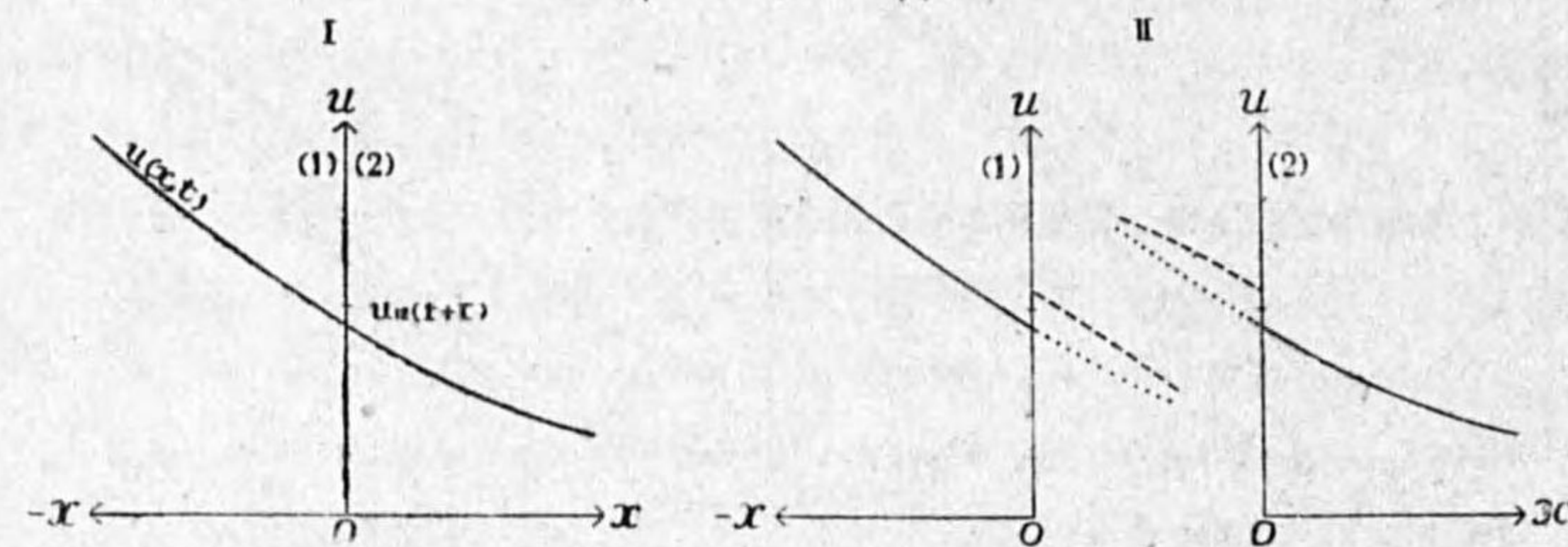
以上吟味せる所より大體次の様なことが分る。即ち今回の解法では、物質不連続面附近の誤差を出来るだけ小さくするために  $s$  を可成く小さく取つて、 $\tau$  時間毎の温度の變化が急激にならぬ様に計算すれば、物質不連続面附近を除けば大體正しい温度分布が得られるから、其の後で必要があれば (16) の關係が満足する様に不連続面附近 (大體此の面より左右に  $s_t$  の範圍) の曲線を手加減で多少修正すればよいと思はれる。併し大體の温度分布を見るだけなら、此の修正は行はなくても構はない。

尙此の修正は先づ  $\tau$  時間毎の全部の温度曲線を求めてしまつた後で行つた方がよい。一つの温度曲線を求める度に修正して、此の修正された曲線から次の時刻の温度曲線を求めて行くと、計算の途中で手加減即ち人爲的な操作が何回となく入ることになるから、之は避けた方がよいと思ふ。

§ 8.  $c_1\rho=c_2\rho, K_1=K_2$  なる場合と解法の吟味

均一固體をわざと二つの物質部分より成るものと考へ、今回の解法により温度分布の變化を計算して、其の結果より解法を吟味して見よう。

第 9 圖

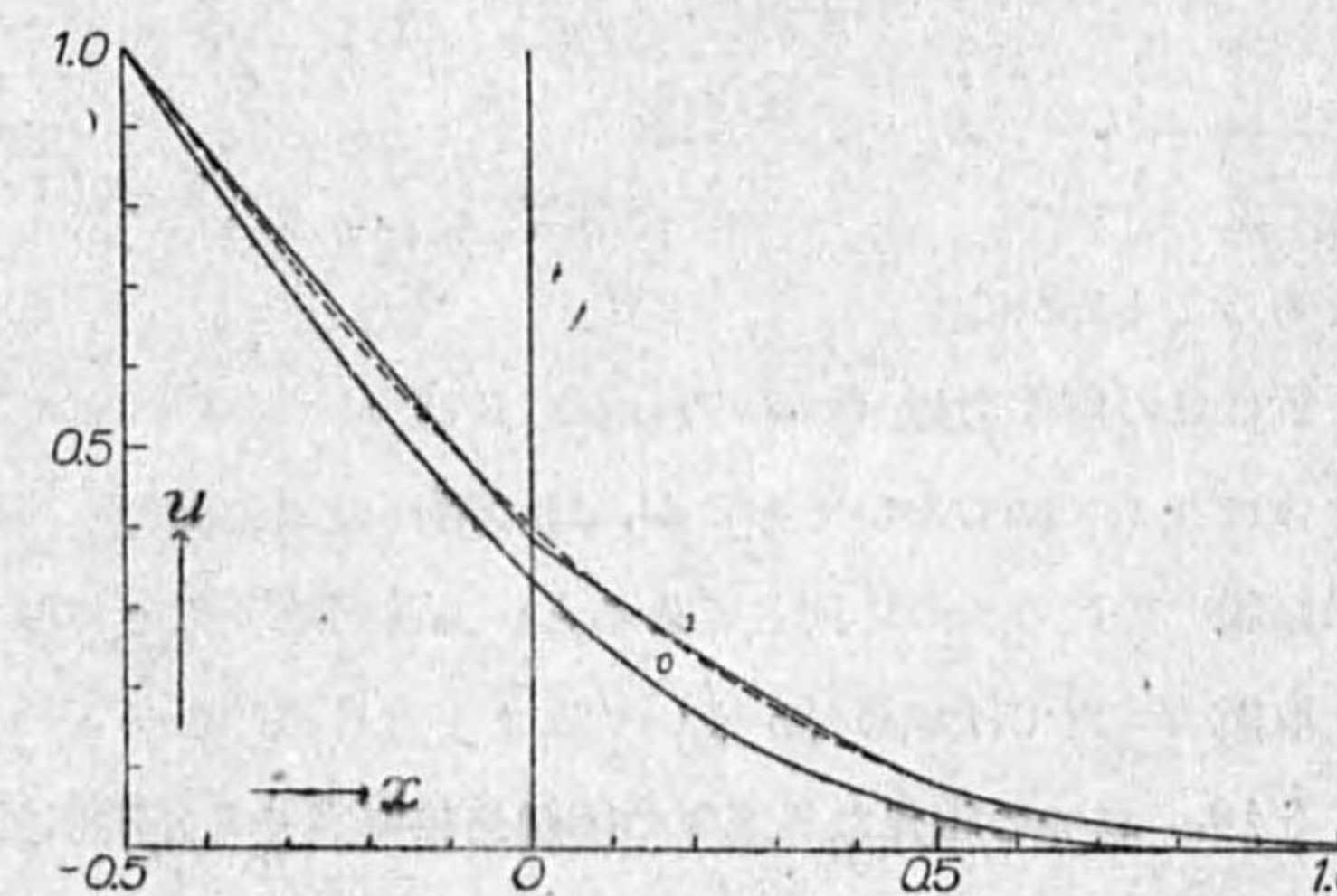


今第 9 圖に於いて  $x=0$  に物質不連続面があるものと想像すれば、或る時刻  $t$  に於ける温度分布  $u(x,t)$  より次の時刻  $t+\tau$  に於ける  $x=0$  の温度  $u_{12}(t+\tau)$  を求めるには、(5) 或ひは (5 I), (5 II)' で  $c_1\rho_1=c_2\rho_2, K_1=K_2, s_1=s_2$  と置き、 $u_1(x,t)$  及び  $u_2(x,t)$  の代りに  $u(x,t)$  を用ふればよい。そして例へば  $x<0$  に於ける次の時刻  $t+\tau$  の温度分布  $u(x,t+\tau)$  を求めるには同圖に破線で示す如き補助温度曲線を用ひることになる。併し初めから均一固體として取扱へば、何等補助曲線を用ひずに  $x>0$  に於ける實在の温度曲線を其の儘用ひるのであるが、此の兩者は一般に等しくない。故に今回の解法により計算した結果は、均一固體に於ける完全な解法の結果と一般に一致しない。即ち誤差のあることが分る。

第 10 圖は計算の一例を示すもので、實際は  $x=-0.5$  を一定温度に保つ均一固體であるが、態

と  $x=0$  に物質不連続面があり、其の左右の物質は共に同じ  $c, \rho, K$  を有するものと考へて、今回の方法で計算した結果、例へば同圖の 0 なる曲線から  $s=0.5$  として 1 回計算すると 1 といふ曲線が得られる。併し破線で示した正しいものと比べると、矢張り不連続面と看做した  $x=0$  の附近  $\pm s$  の範圍では多少誤差の現れることが分る。

第 10 圖



§ 9. 2 つの相異なる半無限物質部分の最初の温度が夫々一様である場合

$x=0$  を物質不連続面として  $x<0$  及び  $x>0$  に夫々 1 及び 2 なる物質が半無限的に擴つて居り、且つ最初の温度は夫々一様に 0 及び  $U$  であるとす

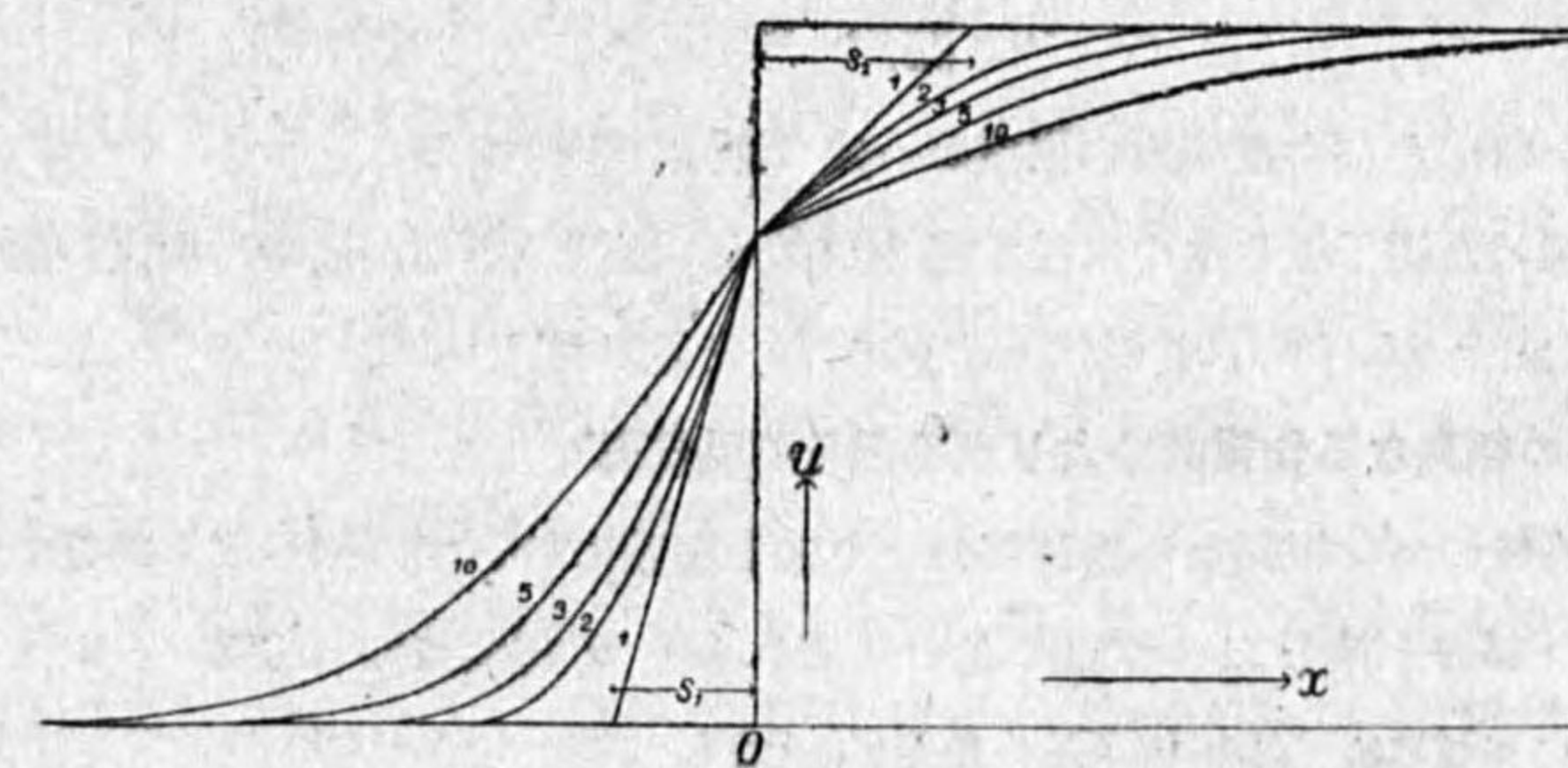
る。先づ  $t=\tau$  の不連続面の温度  $u_{12}$  を求めて見ると、(5), (5 I), (5 II) いづれの式からでも、

$$u_{12} = \frac{\sqrt{c_2\rho_2 K_2} U}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} \quad (25)$$

となり、此の時の温度曲線は例へば第 11 圖に 1 で示す如きものとなる。所が更に  $t=2\tau, 3\tau, \dots$  と何回計算しても、不連続面の温度は常に一定に保たれる。即ち最初の温度が二つの部分とも夫々一様である場合には、丁度半無限均一固體の表面温度を一定に保ち、且つ最初の温度が一様である場合の熱傳導を二つ組合せたものに外ならぬこと、此の一定温度は (25) 式で與へられることが分る。

故に此の場合の嚴密な理論解は微分方程式を解くまでもなく、直ちに

第 11 圖 相異なる物質より成る二つの半無限部分の最初の温度が夫々一様である場合の熱傳導の計算例



$$\left. \begin{aligned}
 u_1(x, t) &= u_{12} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \frac{\sqrt{c_2 \rho_2 K_2} U}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right), \\
 u_2(x, t) &= U - (U - u_{12}) \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) \\
 &= \frac{U}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} \left( \sqrt{c_2 \rho_2 K_2} - \frac{2\sqrt{c_1 \rho_1 K_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right)
 \end{aligned} \right\} (26)$$

であることが分る。

實は此の解が最近 C. J. Tranter 及び H. S. Carslaw<sup>(1)</sup> によつて出されたものと一致することを後になつて知つたのであるが、此の解が表面温度を一定に保ち、且つ最初の温度が一様なる半無限固体に於けるものと同じであるといふ具體的なことは原著にも書いてない。斯くの如く數式のみを取扱つてゐては氣の付かないことまでも具體的に分るのは、圖式解法の強味である。

§ 10. 二つの相異なる温度の固体を接觸させた瞬間に於ける接觸面の温度

前節では最初夫々一様な温度を有する二つの半無限固体を接觸させた場合、其の接觸面の温度は常に (25) 式で與へられる値に保たれるといふことを述べた。

併し有限の大きさの固体であつても、二つを接觸させてから暫くの間は接觸面より有限距離にある他の面の影響が現はれないから、此の間だけは半無限固体と看做して接觸面の温度は前節で得た結果を其の儘用ひることが出来る。

次に此の半無限固体と看做し得る時間、即ち接觸面の温度が一定である時間を求めて見よう。今二つの固体の厚さを夫々  $L_1$  及び  $L_2$  とし、外側になつた両面では熱の出入がないものとすれば、二つの固体を接觸させた瞬間に起る接觸面の温度の變化の影響が再び此の面へ現はれるまでの時間を二つの固体に就いて夫々  $t_1$  及び  $t_2$  とすれば、大體

$$2L_1 = a\sqrt{\kappa_1 t_1}, \quad 2L_2 = a\sqrt{\kappa_2 t_2}$$

なる關係があるから、 $a = \sqrt{6}$  と置いて、

$$t_1 = \frac{4L_1^2}{6\kappa_1}, \quad t_2 = \frac{4L_2^2}{6\kappa_2} \quad (29)$$

の二つの中で短い時間が即ち接觸面の温度が一定である時間である。

若し、例へば温めた硝子板を水中に浸す場合の如く、固体の両面が同時に温度の變化を受ける場合には上記 (29) 式で  $2L_i (i=1, 2)$  の代りに單に  $L_i$  を取ればよい。

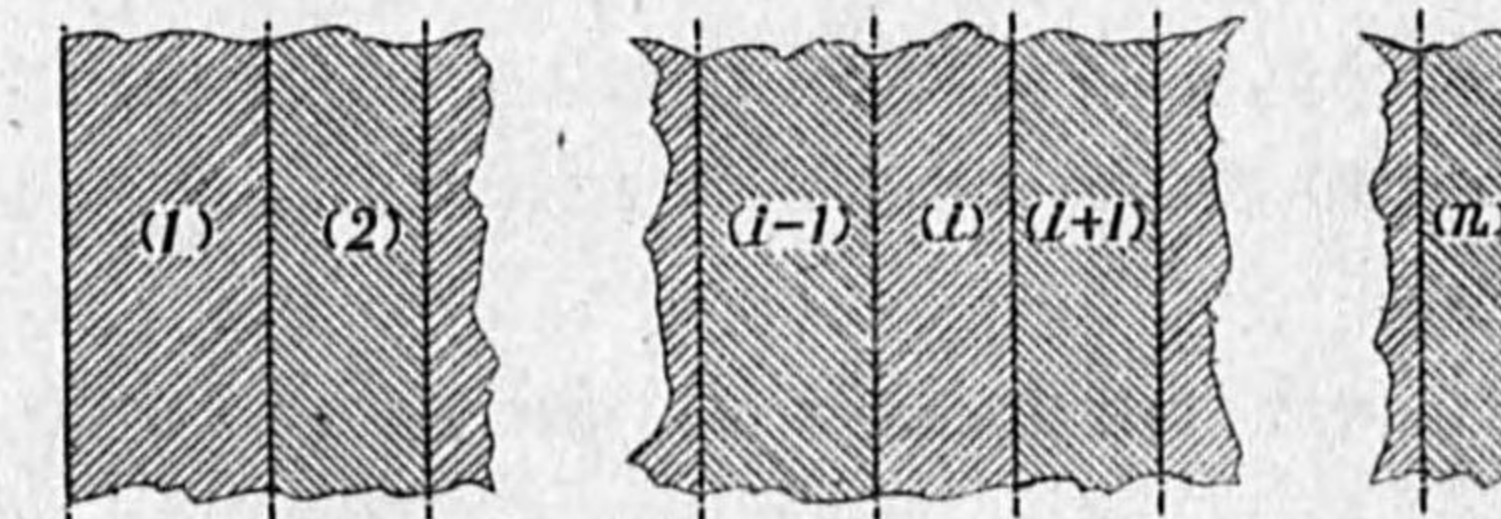
§ 11. 幾つかの相異なる物質部分より成る固体の熱傳導

第 12 圖の如く幾つかの相異なる物質部分より成る固体に於いて、例へば  $i$  部分の温度の變化を求めるとは、此の部分を含む二つの面に於ける夫れより  $\tau$  時間先の温度が  $i-1$  と  $i$  及び  $i$  と

(1) 川下研介：熱傳導論（昭和 16 年）に紹介されてゐる。

$i+1$  の温度分布より夫々求められるから、後は  $i$  部分だけを切離して考へ、其の両面の温度が時間の函数として與へられた場合の取扱ひをすればよい。又 1 及び  $n$  部分の如く最兩端にある部分は、其の一面の温度は時間の函数であり、他の一面は其の時の境界條件に應じた取扱ひをすればよい。

第 12 圖



次に計算例として銅及び鐵の間に鉛を挟んだ場合、但し外側の二面は熱を通さぬものとし、最初の温度は銅及び鐵は 1、鉛は 0 である場合の熱傳導を調べて見よう。

第 3 表

物 質 (記 號)		銅 (1)	鉛 (2)	鐵 (3)
(I) 與へられた數値	厚 　　さ	26.7	13.3	18.6
	熱傳率 $K$	0.918	0.083	0.149
	比 熱 $c$	0.0909	0.0302	0.1045
	密 度 $\rho$	8.63	11.35	7.37
(II) 計算に必要な數値	熱擴散率 $\kappa$	1.171	0.2421	0.1935
	$\sqrt{\kappa}$	1.082	0.4920	0.4399
	$\sqrt{c\rho K}$	0.849	0.1687	0.599
	移動平均に用ふる $s^*$	5.85	2.66	2.38
(III) 方眼紙上の數値	伸 縮 率 <sup>†</sup>	0.0342	0.752	0.0840
	厚 　　さ	0.912	1.000	1.563
	移動平均に用ふる $s^{\ddagger}$	0.2	0.2	0.2

備 考 方眼紙上の數値以外はすべて c.g.s. 單位を用ふ。  
\* の値は †, ‡ の値より求めたものである。

第 2 表 (I) は問題として與へられた諸數値である。

(1) 方眼紙上で移動平均を行ふ時其の幅が例へば 0.2, 0.4, 0.5, 1.0 の如く簡単な値でない、操作が非常に手間取り、且つ計算が間違ひ易い。

二つ以上の物質部分より成る固体の場合には、1 回の移動平均に相當する時間  $\tau$  は各部分に對して共通であるから、各部分に於ける移動平均の幅  $2s_i (i=1, 2, \dots)$  は夫々の  $\sqrt{\kappa_i}$  に比例する。例へば之から取扱はうとする問題では、第 2 表 (II) の中に示した  $\sqrt{\kappa_i} (i=1, 2, 3)$  の値から分る様に、各部分の移動平均の幅は 1.082 : 0.4920 : 0.4399 の如く簡単な比にならない。従つて若し銅の部分に都合がよい様に  $s_1$  を簡単な數、例へば 1 に取れば、 $s_1 : s_2 : s_3 = 1 : 0.455 : 0.405$  となり、他の二つの部分の  $s$  は簡単な數にならない。又鉛或ひは鐵の部分に對して  $s$  を簡単な數に取れば、残る二つの部分に對するものが簡單にならなくなる。

之は方眼紙上で各部分の長さを同一目盛で取るために起る計算上の障害であるが、既に述べた様に、計算を行ふ場合は各部分を夫々切離して考へればよいのであるから、各部分夫々移動平均の操

作に便利な様に目盛を取ればよい。即ち各部分を夫々の  $\sqrt{\kappa_i}$  に逆比例して伸縮させた圖を書けばよい。斯うすると方眼紙で各部分の  $s$  が等しくなるから、操作も一層便利になる。

第2表(Ⅲ)に示した伸縮率は勿論  $1/\sqrt{\kappa_i}$  に比例させてあるから、方眼紙上で各部分の  $s$  が等しくなるが、尖れと同時に鉛の部分の丁度 1.0 になる様を取つてある。どうせ各部分とも夫々伸縮させて圖に書くのであれば、二つの部分に挟まれた鉛を 1.0 の厚さになる様にした方が計算に便利である。

(2) 物質不連続面の温度は (5I)' 式によることとし、之に第2表(Ⅱ)の数値を入れると、

$$u_{12}(t+\tau) = \frac{0.849u_1\left(-\frac{s}{2}, t\right) + 0.1687u_2\left(\frac{s}{2}, t\right)}{1.018}$$

$$u_{23}(t+\tau) = \frac{0.1687u_2\left(-\frac{s}{2}, t\right) + 0.399u_3\left(\frac{s}{2}, t\right)}{0.568}$$

となる。但し  $s$  は方眼紙上の値で、之は既に各部分ともすべて等しくなつて居り、又各不連続面を夫々  $x$  の座標原点と考へる。

斯くの如く方眼紙上で各部分に對する  $s$  を等しくするといふことは、不連続面の温度を計算する上からも便利である。即ち方眼紙の上では不連続面から左右同じ距離  $s/2$  の二點の温度を用ひればよい。

(3) 方眼紙上で  $s=0.2$  とした。従つて各部分に於ける實際の長さは同表(Ⅱ)に示す如きものとなる。又計算を速進させるため第3表に示す如く、 $s$  の値を途中で變へるけれども、計算回数即ち  $\tau$  を單位とせる時間はすべて  $s=0.2$  として換算する。同表には各計算回数に相當する實際の時間を  $a=\sqrt{b}$  として計算したものを示してある。

第 3 表

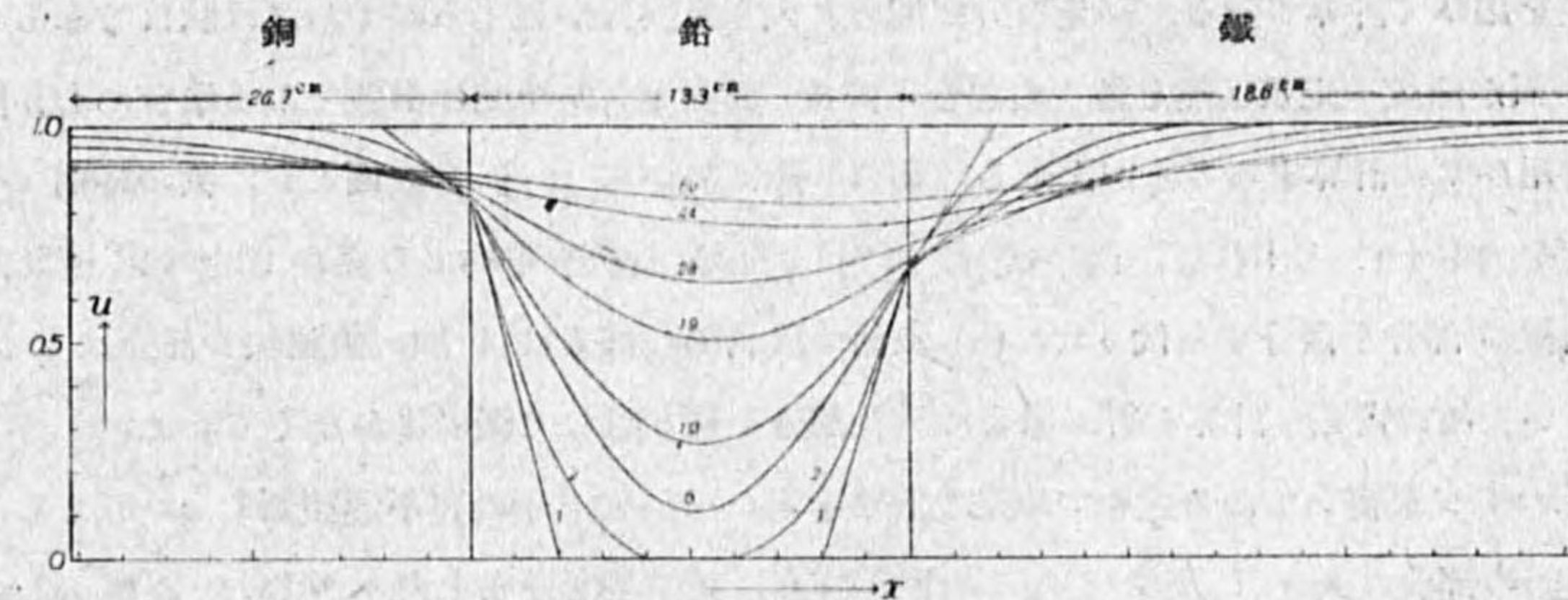
計算回数	0	1	2	6	10	19	28	44	60
時間 (sec)	0	4.9	9.7	29	49	93	136	214	292
$s$		0.2		0.4		0.6		0.8	

(4) 第13圖は計算の結果を方眼紙に書いた儘の圖で示したものである。此の圖の横軸を各部分とも元の長さに直せば、實際の温度分布圖となる。

(5) 以上の計算結果を吟味するために、各時刻の温度曲線より固体の總熱量を求め、最初の總熱量(但し固体は外部と絶縁されてゐるから之は最後まで變らない)と比較して見ると、第4表に示す如く極めて僅かな誤差しかない。 $s$  を更に小さく取れば、此の誤差は一層小さくすることが出来る。

尚  $t=10\tau$  までは前節に述べた通り、物質不連続面の温度は一定に保たれてゐることが分る。

第 13 圖 銅、鉛、鐵の三部分より成る場合の計算例  
各部分は方眼紙に書いたまゝの厚さで、其の實長は圖の上に示してある。



第 4 表

計算回数	6	10	19	28	44	60	
總熱量 cal. (單位斷面積を有する部分に付)	計算値	35.30	35.24	35.28	35.33	35.52	35.61
	誤差 (%)	+0.1	-0.0	+0.1	+0.2	+0.8	+1.0

最初の總熱量、即ち正しい値 = 35.25 cal.

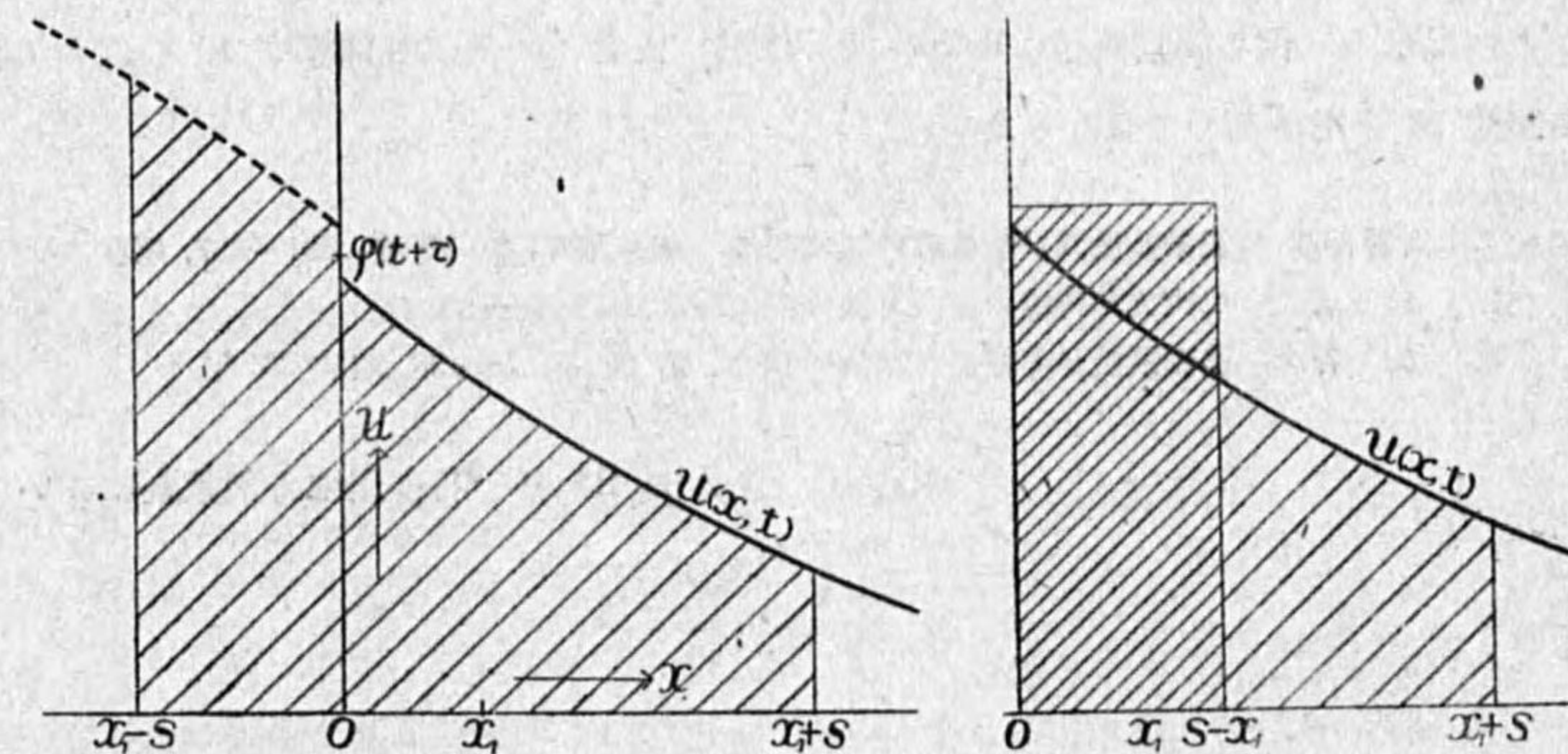
§ 12. 附 記

(1) 今回の解法で求めた結果は、§ 5, 6, 7 で述べた如く物質不連続面及び其の附近で多少誤差が現はれる。併し熱量保存則、即ち計算の途中で不自然な熱の發生、消失は起らない。之は此の解法の基本である (5) 式が物質不連続面に於ける熱量保存則に外ならないことから明かである。例へば § 4 及び § 11 の計算例に於いて、熱量に関する限りは計算夫れ自身の誤差、即ち  $\tau$  を餘り小さく

第 14 圖 表面温度が  $\varphi(t)$  なる場合の取扱ひ方

(i) 補助曲線を用ひる場合

(ii) 補助曲線を用ひない場合





取らぬとか、(5)式の代りに近似式(5I)等を用ひるために生ずる誤差以外の大きな誤差はない。

(2) 物質不連続面に於ける温度勾配の条件(16)を満足させるため、(19)式で與へられる不連続面の温度を用ひて計算すると、熱量の方に極めて大きな誤差が生ずるので、之は駄目である。

(3) 表面が温度一定及び熱を通さぬ場合と同様、表面温度が時間の函数である場合にも亦補助温度曲線を用ひずに計算することが出来る。第14圖に於いて $x=0$ を表面とし、次の時刻 $t+\tau$ の表面温度を $\varphi(t+\tau)$ とすれば、例へば $x_1$ に對して温度曲線を平均する場合(i)の如く補助曲線を用ひて斜線の部分を積分する代りに、(ii)の如く淡斜線の部分は1回、濃斜線の部分は2回積分すればよい。故に實際に計算を行ふ場合に、各部分を切り離して圖に書かなくてもよい。

(4) 此の論文を書いてゐる途中で完全な解法を考へついた。今物質不連続面を $x=0$ とし、 $x<0$ 及び $x>0$ の部分に夫々1及び2なる物質が擴り、其の温度分布を夫々 $u_1(x,t)$ 及び $u_2(x,t)$ とすれば、1及び2なる部分の温度を計算する場合、夫々不連続面の向ふ側へ考へるべき補助温度曲線 $u_1'(x,t)$ 及び $u_2'(-x,t)$ として、

$$\left. \begin{aligned} u_1'(x,t) &= \frac{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} - \sqrt{c_2\rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} u_1(-x,t) + \frac{2\sqrt{c_2\rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} u_2(x,t), \\ u_2'(-x,t) &= \frac{\sqrt{c_2\rho_2 K_2} - \sqrt{c_1\rho_1 K_1}}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} u_2(x,t) + \frac{2\sqrt{c_1\rho_1 K_1}}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} u_1(-x,t) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

で與へられるものを取れば、全く完全な結果が得られる。之に就いてはいづれ詳細に發表する豫定である。

併し今回の解法も、物質不連続面及び其の附近で多少誤差が現はれるけれども、計算が非常に簡單である點から見て、大體の温度分布を知るには廣く用ひられるべきものと思ふ。

(5) 今回の解法は渦動擴散にも其の儘應用することが出来るばかりでなく、熱傳導の場合には一方が固体、他方が渦動流体であつても差支へない、即ち固体熱傳導と渦動熱傳導とを組合はせて計算することが出来る。但し渦動流体の場合には、比熱×密度 $cp$ 及び熱傳導率 $K$ の代りに密度 $\rho$ 及び交換係數 $A$ を用ひなくてはならない。

- 文獻 1. 高橋喜彦：渦動擴散及び熱傳導の圖式解法。氣象集誌，第19卷，321~327，昭和16年。  
2. 同著：二次元熱傳導の圖式解法の一例。同上，418~425。  
3. 同著：渦動擴散量の數値計算法。同誌，第20卷，18~28，昭和17年。

昭和17年2月23日 名古屋地方氣象臺に於いて

## 多 方 大 氣

正 野 重 方

### 第1章 多方温位

著者は前に大氣の安定度の問題と關聯して

$$\theta_k = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (1-1)$$

にて定義される多方温位なる量を導入した。此の量は單に温位の定義式に於て $\gamma$ の代りに $k$ と置いて一般化したに過ぎないものであるが將來實用上も屢々用ひられるものと考へるので之に關聯した事柄を述べる。本論文で述べる事柄の一部には既に斷熱大氣に就て知られて居る事柄を $\gamma$ の代りに $k$ と書直した事に過ぎない様に見える部分もあるが之は他の新しい部分と關聯上必要と考へたので敢へて述べることにした。

第一に $\theta_k = \text{const.}$ なる垂直分布を持つ大氣の氣温遞減率を求めらる。

垂直座標にて對數微分すれば

$$\frac{1}{\theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} = 0 \quad (1-2)$$

になり、之は(1-1)を使ふと、

$$\frac{1}{\theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1-3)$$

靜力學方程式と狀態方程式を用ひれば、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho = -\frac{gp}{RT} \quad (1-4)$$

を得る。之を(1-3)に代入すれば

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \quad (1-5)$$

を得る。即ち此の様な大氣は遞減率一定である。此の大氣は多方大氣と呼ばれて居る。 $k = \gamma = 1.404$

の場合  $\partial T/\partial z = 0.986$  度/100 米になる。今 0.5 度/100 米に対する  $k$  は  $1.171 \div 7/6$  である。

次に遞減率  $\alpha$  を持つた大氣中を空氣塊が多方變化をしながら上昇する場合その空氣塊の温度の變化率を求めよう。多方變化をするから、

$$T' p'^{\frac{1-k}{k}} = \text{const.} \quad (k \text{ を此の場合の多方常數とする}) \quad (1.6)$$

但し  $'$  は上昇氣塊に関する量を表はす。

此の量の時間的變化を考へれば、

$$\frac{1}{T'} \frac{dT'}{dt} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{p'} \frac{dp'}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

である。此の空氣塊が  $dz/dt = V$  ( $V \neq 0$ ) なる速度で上昇するものとすれば次式を得る：

$$\frac{1}{T'} \frac{\partial T'}{\partial z} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

上昇する空氣塊の壓力は常に同じ高度の周圍の氣壓と等しくなるものとすれば（之は自己正重の假定である） $p' \equiv p$  と採れるから (1.4) を使ふ事が出来る。

$$\text{即ち} \quad \frac{1}{T'} \frac{\partial T'}{\partial z} = \frac{k-1}{k} \frac{g}{RT} \quad (1.9)$$

$$\text{故に} \quad \frac{\partial T'}{\partial z} = \frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \frac{T'}{T} \quad (1.10)$$

上式に於ては普通は  $T'/T = 1$  と置いて居る。此の事は簡単に許されるであらうか。

周圍の空氣の中に於ける温度は假定により

$$T = T_0 - \alpha z \quad (1.11)$$

で與へられる。然るに上昇する空氣の温度は (1.10) を積分して求められるのであるが第一近似では直線と見做せることが後に證明出来るから

$$T' = T_0 - \varepsilon z \quad (1.12)$$

と置ける。然して  $\varepsilon$  は一般には  $\alpha$  とは等しくない。

$$\text{故に} \quad \frac{T'}{T} = \frac{T_0 - \varepsilon z}{T_0 - \alpha z} \doteq 1 + \frac{(\alpha - \varepsilon)z}{T_0} + \dots \quad (1.13)$$

周圍の空氣の遞減率が 0.5 度/100 米で上昇する空氣遞減率が 1 度/100 米とすれば  $T_0 = 300$  度に対して第二項は  $\frac{0.5}{300} z = \frac{z}{600}$  になる。 $z$  が 1 杆では第二項は  $1/60$  であるが 5 杆では  $1/12$ , 10 杆では  $1/6$  になる。即ち遞減率が  $z=10$  杆では 16% の誤差を持つことになる。之は 100 米に對して 0.16 度/杆の誤差になり、看過出来ないものである。

次に任意の點の温度を求めて見る。

(1.10) を書直せば

$$\frac{\partial \log T'}{\partial z} = -\frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \frac{1}{T_0 - \alpha z} \quad (1.10')$$

であるから、 $z=0$  より  $z=s$  迄積分すれば

$$\log T' - \log T_0' = \frac{k-1}{k} \frac{g}{R\alpha} (\log(T_0 - \alpha s) - \log T_0) \quad (1.14)$$

或は

$$T' = T_0' \left(1 - \frac{\alpha}{T_0'} s\right)^{\frac{k-1}{k} \frac{g}{R\alpha}} \quad (1.14')$$

簡單のために上昇する空氣が  $z=0$  で周圍と同温であつたとすれば、

$$T' = T_0 \left(1 - \frac{\alpha}{T_0} s\right)^{\frac{k-1}{k} \frac{g}{R\alpha}} \quad (1.15)$$

上式に於て  $\alpha s/T_0 < 1$  であるからテラー級數に展開すれば

$$T' = T_0 - \frac{k-1}{k} \frac{g}{R} s + \frac{1-k}{2k^2} \left(\frac{g}{R\alpha}\right)^2 \frac{(\alpha s)^2}{T_0} + O\left(\left(\frac{\alpha s}{T_0}\right)^3\right) \quad (1.16)$$

(1.16) の第二項迄を考へれば  $T'$  は  $-\frac{k-1}{k} \frac{g}{R}$  なる遞減率で減少してゆき、周圍の空氣の遞減率には無關係であるが第三項以下迄考へれば  $T'$  は周圍の空氣の温度分布に關係する項である。此の事は (1.15) より判ることであるが此の事は今迄比較的看過されて居た重要な事實である。

即ち**上昇する空氣塊の温度遞減率は周圍の空氣の温度分布により變化する。**

次に實際に  $T'$  の温度決定に對して  $T'/T = 1$  と置いた場合即ち (1.16) の第二項のみを採用した場合と (1.15) を用いた場合とでは幾何位の差が起るかを吟味してみよう。

假定  $T_0 = 300^\circ$ ,  $\alpha = 0.5$  度/100 米

第 1 表

$z$	$\varepsilon=1$			$\varepsilon=0.7$			$\varepsilon=5$			$\varepsilon=0.3$		
	$T_1$	$T_2$	$\Delta T$	$T_1$	$T_2$	$\Delta T$	$T_1$	$T_2$	$\Delta T$	$T_1$	$T_2$	$\Delta T$
1 杆	290	290	0	293	293	0	295	295	0	297	297	0
5	250	252	2	265	266	1	275	275	0	285	285	0
10	200	208	8	230	232	2	250	250	0	270	269	-1
15	150	169	19	195	200	5	225	225	0	255	252	-3

第 1 表で  $T_1$  は (1.16) の第二項迄を採つた場合の値で、 $T_2$  は (1.15) を用ひて計算して得た値であり、 $\varepsilon = \frac{k-1}{k} \frac{g}{R}$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$  とする。上表によれば空氣塊が斷熱變化をしながら、遞減率 0.5 度/100 米の多方大氣中を上昇する場合近似式を用ひたのと完全式を用ひたのでは 10 杆に於て 8 度の差異が出る。此の値は最早無視出来ない量である。若し 15 杆迄上昇すれば 19 度にもなる（實際は此の附近では成層圏にはいつて居るので此の差違は一層大きいものである）。一般に周圍の空氣の氣温遞減率もつと小さくなれば  $\Delta T$  の値はもつと大きくなる。等温大氣では略 2 倍位になる。

第1表に於て猶注意すべき事は  $\epsilon=0.5=\alpha$  の場合  $\Delta T=0$  になることである。即ち  $k$  次なる多方大氣中を  $k$  次の方變をしながら、上昇する場合に限り空氣塊の温度は高さに対して一次的に變化することを意味して居る。此の事は (1.15) より嚴密に成立することが判る。

即ち  $\frac{k-1}{k} \frac{g}{R} = \epsilon = \alpha$  であるから、 $\frac{k-1}{k} \frac{g}{R\alpha} = 1$  になり

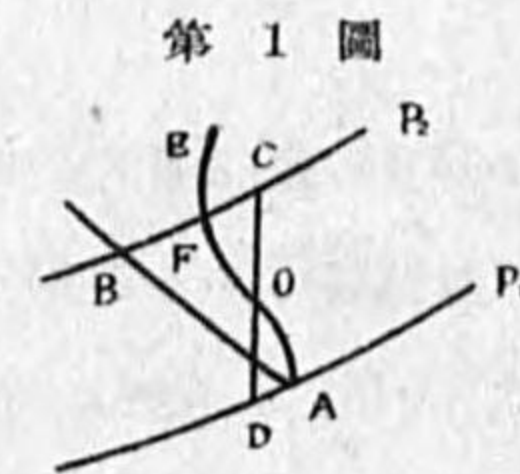
$$T = T_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{T_0} z \right) = T_0 - \frac{k-1}{k} \frac{g}{R} z \quad (1.17)$$

を得るからである。

今空氣塊が  $k$  次の方變をしながら上昇する場合周囲の空氣の温度分布が  $k$  と異つた次數の多方大氣であれば、上昇する空氣は  $k$  次の方變と同じ遞減率で温度が降るものではない。

以上の事柄は斷熱圖を用ひて上昇氣流の高度と氣温との關係を求める場合は避けられる。

即ち  $A$  にあつた空氣塊が上昇した場合を考へると  $AB$  なる乾燥斷熱線に沿つて昇る。 $B$  點の温度は乾燥斷熱線上で氣壓を與へれば直ちに讀めるがその高度は  $B$  を通る等壓線  $P_2$  を考へ、此の等壓線が狀態曲線と  $F$  で交はる場合、疑似三角形  $CFO, DAO$  が等しくなる様に垂線  $CD$  を引き、此の長さが  $B$  の高さを與へるのである故に狀態曲線  $AE$  の形により (1)



の長さは變る。上に述べた事は此の事を述べたのである。猶此の様に  $B$  の高度を決定するのは自己正重の假定が許される場合で此の假定が成立しなければ上述の高度計算方法は使へないことに注意しなければならない。

$k$  次の方變大氣とは  $\theta_k = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}$  の高度分布が一定なる大氣であるとは前に述べたが此の大氣では空氣塊の狀態變化は  $k$  次の方變をすることは限らないのである。第3章に於て述べる如く狀態變化の多方常數  $k$  は一定ではなく、運動の種類、速度、規模その他により變化するものである。

自然大氣では 0.5 度/100 米附近の遞減率を持つことはよく知られて居る。此の大氣は略  $k=7/6$  次の方變大氣であるが然しその大氣中に於ける空氣塊の狀態變化の多方常數は  $k=7/6$  であるとは限らないのである。従つて此の様な大氣では  $\theta_k$  を保存量と考へることは證明がない限り許されない事である。勿論  $\theta$  が保存量であるかどうかは同様不確かなものである。従來  $\theta$  を徹底的な研究なしに保存量として採用し之に信用を置き過ぎて居た様に思ふ。

氣塊が温度の違つた陸地又は海面上を移動する場合亂渦性熱傳導や輻射のために變質することは周知の事であるが此の場合も近似的に多方變化をしながら移動して居ると考へられるから、此の場合適當な次數の疑似多方温位が保存量となるであらう。(但し此の現象は可逆的に起るとは限らない) 然し此の場合例へば冬季大陸より氾濫し來るシベリア氣塊に關する値と夏季小笠原高氣壓より内地に北上し來る小笠原氣塊とは勿論  $k$  の値は異なるであらうし、之等迄顯著な差違がなくても

氣塊の移動時の諸條件により  $k$  の値は異なるのである。此の様に個々の現象に就て  $k$  を調べ、又平均の  $k$  を求めることは實用氣象上重要な事であらうと思ふ(例氣温の豫報)。

但し茲に注意すべき事柄がある。

今薄い氣層が垂直に氣壓  $p$  より  $p'$  の層迄移動し、水平の擴がりは  $S$  より  $S'$  になる場合を考へ、變化は多方的に起るものとする。

此の氣層中の空氣量は一定であるから、

$$S dp = S' dp'$$

であり、又  $\theta_k$  は一定であるから、

$$\frac{1}{S} \frac{\partial \theta_k}{\partial p} = \frac{1}{S'} \frac{\partial \theta_k}{\partial p'}$$

である。運動により  $\frac{1}{S \theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial p}$  も不變である。

故に  $\frac{1}{S} \frac{\partial \theta_k}{\partial p} = \frac{1}{S \theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g \rho S \theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} = -\frac{R}{S g p} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma_k \right)$ ,

依つて  $\frac{1}{S p} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma_k \right) = \frac{1}{S' p'} \left( \frac{\partial T'}{\partial z'} + \Gamma_k \right)$

になる。但し

$$\Gamma_k = -\frac{k-1}{k} \frac{g}{R}$$

上式は Margules の公式の擴張したものであるが、此の式の意味はよく知られた様に上昇する氣層の氣温分布は多方遞減率に近づき、下降する氣層は多方遞減率より遠ざかることを意味する。従つて氣流の上昇域に於いては遞減率より求めた多方常數は多方變化の常數に近いと考へてよい。

例へば  $\Gamma_k = -0.5$  度/100 米の場合に就て考へよう。

地上附近で  $-0.7$  度/100 米であつた氣層が等面積の儘で上昇した場合の遞減率と高度との關係を見ると、

竿	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\partial T / \partial z$	-0.68	-0.66	0.64	0.62	0.61	0.59	0.58	0.57	0.56	0.55

上表の如くなる。即ち 5 竿では略  $-0.6$  度/100 米、10 竿では  $-0.55$  度/100 米になる。始め  $-0.6$  度/100 米であつた氣層では 5 竿で  $-0.55$  度/100 米、10 竿では  $-0.52$  度/100 米になる。更に上に行く程  $S$  が減じ、上下に厚さを増す場合には一層此の傾向は増大し、一層速かに多方遞減率に近づく。

前に大氣の垂直安定度なる論文<sup>(1)</sup>に於て多方變化をする大氣はその中立狀態に近くなる傾向があ

(1) 測候時報, 第 12 卷, 第 10 號。

るといふ意味を述べたが以上の事柄がその理論的根據である。此の様に多方大氣に近づく傾向があるために實際大氣では中立状態より隔たることが非常に少なく、そのために力學的安定度といふ様な小さな項が問題になつて來るのではなからうと考へられる。

然し上昇する場合  $p$  は小さくなつても  $S$  が大きくなり  $Sp$  が増加する場合は上の事は成立しない。上昇氣層の水平的の擴がりが増大するか減少するかは研究を要する問題である。

## 第 2 章 温位遞減率並びに温位分布に就て

多方温位  $\theta_k$  の定義式

$$\theta_k = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (2-1)$$

を  $z$  にて對數微分すれば、

$$\frac{1}{\theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2-2)$$

$p = \rho RT$ ,  $dp = -g\rho dz$  を代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} &= \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{R\rho T} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \right), \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\therefore \frac{\partial \theta_k}{\partial z} = \frac{\theta_k}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \right) \quad (2-4)$$

$$= \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{k-1}{k} \frac{g}{R} \right) \quad (2-4')$$

$k = \gamma$  (斷熱變化) の場合

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) \quad (2-5)$$

但し  $\Gamma = 1$  度/100 米 (乾燥斷熱遞減率)

上式の結果によれば、温位遞減率と氣温遞減率との間には非常に簡単な關係が在ることが判る。

即ち氣温遞減率 +1 に温位係數を乗じたものが温位遞減率となる。(單位は度/100 米である)

此の結果は 1 の温位の定義から直接自明の事と連斷出來ない。何故ならば 2) の右邊第三項は如何なる形になるか豫め不明であるからである。

第 2 表<sup>(1)</sup>は (5) の關係を表にしたものである。

上式に依れば氣温遞減率が一定でも氣壓が小さくなる程温位遞減率は増加することが判るが下表

(1) 本表は野島弘氏を煩はして作つたものである。

第 2 表

$- \frac{\partial T}{\partial z}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
800	0.88	0.79	0.69	0.59	0.49	0.39	0.29	0.20	0.10
750	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
700	0.92	0.82	0.71	0.61	0.51	0.41	0.31	0.20	0.10
650	0.94	0.83	0.73	0.63	0.52	0.42	0.31	0.21	0.10
600	0.96	0.85	0.75	0.64	0.53	0.43	0.32	0.21	0.11
550	0.98	0.87	0.77	0.66	0.55	0.44	0.33	0.22	0.11
500	1.01	0.90	0.79	0.67	0.56	0.45	0.34	0.22	0.11
450	1.04	0.93	0.81	0.70	0.58	0.46	0.35	0.23	0.12
400	1.08	0.96	0.84	0.72	0.60	0.48	0.36	0.24	0.12
350	1.12	1.00	0.87	0.75	0.62	0.50	0.37	0.25	0.12

に依れば 6 籽 (353 耗) 程度では地上附近より 2~3 割程度の増加といふ事になる。

## 第 3 章 垂直運動と擬似多方常數

大氣では亂渦、輻射、收斂、摩擦、その他により斷熱變化と云ふことが實際には餘り起らないのにも拘はらず斷熱變化といふ假定が大氣熱力學に於て普通に用ひられて居る。現象の規模經過速度種類等によつては斷熱變化に近い場合もあるかも知れないが、それならば如何なる現象では變化は略斷熱的に起り又如何なる現象では斷熱でないかと云ふ事の吟味が今後論すべき最も必要な問題である。氣塊論に於て氣塊の變質なる概念が立派に採用されて居るにも拘らず斷熱温位その他の斷熱量を使用するのは果して適當であらうか。

本章及次章では斷熱といふ概念を離れて熱力學的考察を行つて見たいと思ふ。

本章では多方大氣中を外部と熱の交換を行ひながら單位質量の空氣が上昇する場合を考へる。

$$dQ = C_v dT + p dv \quad (3-1)$$

であるが  $dQ = K dt$ , 即ち單位時間に  $K$  なる熱量がはいるものとすれば、

$$K dt = C_v dT + p dv = C_p dT - \frac{RT}{p} dp \quad (3-2)$$

が成立する。然るに上昇速度を  $V$  とすれば、

$$V = \frac{dz}{dt} \quad \text{或は} \quad dt = \frac{dz}{V} \quad (3-3)$$

となり、又自己正重の假定を用ひれば

$$dp = -g\rho dz \quad (3-4)$$

と置けるから、

$$dt = \frac{dz}{V} = - \frac{dp}{Vg\rho} = - \frac{RT dp}{Vg\rho} \quad (3-5)$$

従つて

$$C_p dT = \frac{RT}{p} dp - \frac{KRT}{Vg\rho} dp \quad (1)$$

(1) 周囲の氣温と上昇する氣塊の氣温の差は氣温自身に比べて省略してある。

$$\therefore \frac{C_p dT}{RT} = \frac{dp}{p} \left(1 - \frac{K}{gV}\right) \quad (3-6)$$

$$T^{\frac{C_p}{R}} = C_p \left(1 - \frac{K}{gV}\right) \quad (3-7)$$

$$T p^{-\frac{K}{C_p} \left(1 - \frac{K}{gV}\right)} = \text{const.} \quad (3-8)$$

然して多方變化に於ては

$$T p^{\frac{1-k}{k}} = \text{const.} \quad (3-9)$$

なる故兩式を比較すれば、

$$\frac{1-k}{k} = \frac{R}{C_p} \left(\frac{K}{gV} - 1\right), \quad (3-10)$$

$$\text{或は} \quad k = \frac{1}{\frac{R}{C_p} \left(\frac{K}{gV} - 1\right) + 1} = \frac{C_p}{R \left(\frac{K}{gV} - 1\right) + C_p} = \frac{C_p}{R \frac{K}{gV} + C_p} \quad (3-11)$$

上式に於て  $K=0$  と置けば、

$$k = \frac{C_p}{C_v} = \gamma \quad (3-12)$$

になり断熱變化になる。

$K$  が 0 より大きくなる程  $k$  が小さくなり、 $K=gV$  の場合  $k=1$  即ち等温變化になる。即ち重力ポテンシャルの増加だけ他より熱の流入があれば等温變化であるといふ事になる。普通は  $0 < K < gV$  の間にある。

$g=980$  C.G.S.,  $V=10^3$  cm/sec とすれば 1 疋の空氣塊が上昇する場合の重力に對する單位時間になす仕事は  $98 \times 10^6$  エルグである。之をカロリーに直せば 2.3 カロリーになる。即ち毎秒 2.3 カロリーの熱を外より供給されながら上昇する場合等温變化をする事になる。之は 0.0043 瓦の水蒸氣の凝結の潜熱である。然し之は 1 米/秒の速度で上昇する空氣塊に關した事柄であつて若し 10 米/秒の速度で上昇する空氣塊に對しては之の 10 倍即ち 23 カロリーだけ毎秒供給しなければ等温變化をしない。同様に (3-11) より判る様に多方常數が同じ爲めには速く運動する空氣に對しては多くの熱量を與へなければならない。従つて單位時間に空氣塊に供給される熱量が一定の場合上昇速度が大きくなる程  $k$  の値は大きくなる。即ち断熱變化に近くなる。此の事は當然常識的に豫期される事柄である。

以上は上昇する場合に就て考へたものであるが下降する場合には等温變化のためにはその空氣塊より  $gV$  だけ熱を外に出さなければならない。

従つて同じ多方變化をする場合上昇する空氣塊と下降する空氣塊とでは熱の交換の關係が逆になる。

以上に於ては定性的半定量的吟味のために  $K$  は一定の値で外より強制的に與奪する熱量と考へたものであるが實際は  $K$  は上の假定を満足しないで、輻射、エネルギー、凝結の潜熱、運動量の變化、熱傳導、收斂、摩擦の影響等の總和であり、従つて一般には  $p, T$  の函數であるから、嚴密な意味では多方變化ではない。此の意味で擬似多方變化をなして居ると云へる。即ち實際の空氣の状態變化は擬似多方的であるといふべきである。上の計算は極く特別な場合に就て計算した様であるが (3-11) は垂直運動に關する限り可成りに一般の場合を取扱つてあるのであつて、 $K$  の値は前の諸現象の總和に關する量であり各現象は何れも數式的に表現可能の量であるから、(3-11) により述理論的に  $k$  の値が算出出来るのである。

次に安定度に就て一言しよう。濕潤断熱的に上昇する場合と乾燥断熱的に上昇する場合には安定の限界値が可成りに異つて居ることは誰でも知つて居るが、之は氣化潜熱の放出によるものであるが、之に似た事柄が上の場合にも起る。然し今の場合單位時間に定まつた量の熱の交換があるものとすれば  $K/V$  は速度により異なる。(凝結の場合は  $K/V$  は速度に關係がない) 従つて  $V$  の大きい場合には  $K/V$  は小さくなり、断熱に近くなるが、 $V$  が小さい場合には  $K/V$  は大きくなり、熱交換の影響が大きくなる。 $K$  と  $V$  の符號によりその影響が逆になる。例へば水蒸氣を多く含んだ空氣は日射の吸収が多い、故に上昇運動に對しては  $K/V$  は正になり、 $k$  は 1 に近くなり、周囲の空氣が一定の遞減率の場合には不安定性作用があり、下降運動に對しては  $K/V$  は負になり、安定化作用がある。その作用は速度の遅い程大きい。渦性熱交換の場合には  $K$  の値は周囲との温度差に關係するので常に中位に近くなる様に此の項は働かし、充分遅い運動は著しい不安定性は持ち得ないといふ結果になる。

#### 第 4 章 水平運動と擬似多方常數

氣塊が

$$-2\omega \sin \varphi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4-1)$$

$$2\omega \sin \varphi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4-2)$$

なる運動方程式に従つて水平運動をする場合に就て考へる。

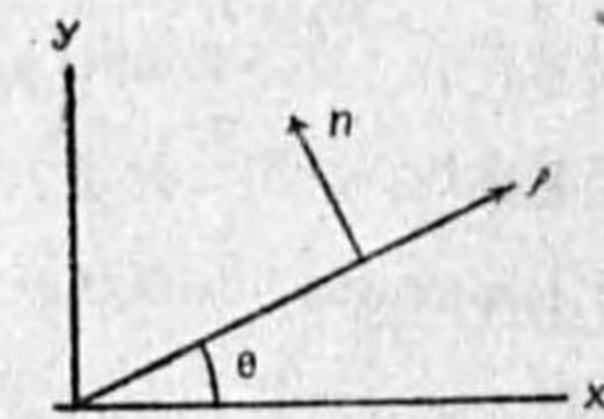
(4-1) に  $\cos \theta = dx/ds$ , (4-2) に  $\sin \theta = dy/ds$  を乘じて加へると、

$$2\omega \sin \varphi (u \cos \theta - v \sin \theta) = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} (\cos \theta + v \sin \theta) \right)$$

$$\text{或は} \quad -2\omega \sin \varphi V_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) \quad (4-3)$$

$$dp = \left( 2\omega \sin \varphi \rho V_n + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) \right) ds$$

第 2 圖



$$= \rho \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right) ds. \quad (4.4)$$

$ds = V_s dt$  と置ける故に

$$dp = \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right) V_s dt,$$

故に

$$dt = \frac{dp}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)}.$$

之を (3.2) に代入すれば,

$$\frac{K}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)} \frac{dp}{p} = C_p dT - \frac{RT}{p} dp$$

故に

$$\left( 1 + \frac{K}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)} \right) \frac{dp}{p} = \frac{C_p dT}{R T}.$$

之を積分すれば,

$$\frac{C_p}{R} \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{K}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)} \right) = \text{const}$$

或は

$$T p^{-\frac{R}{C_p}} \left( 1 + \frac{K}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)} \right) = \text{const}.$$

之を (3.9) と比較すれば,

$$\frac{1-k}{k} = -\frac{R}{C_p} \left( 1 + \frac{K}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)} \right). \quad (4.6)$$

$$\text{故に } k = \frac{C_p}{C_p - R - \frac{RK}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)}} = \frac{C_p}{C_p - \frac{RK}{V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right)}}. \quad (4.8)$$

上式に於て,

$$2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = G \quad (4.9)$$

であるから,  $\frac{\partial p}{\partial s} > 0$  の場合  $V_n > 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) > 0$ ,  $V_s < 0$  なる故に分母第二項は  $K > 0$  の場合正である。

之は次の様に解釋出来る。空氣塊が氣壓傾度に依り動く場合單に地衝風の場合には等壓線に沿つて動くが地面摩擦に依り氣壓の低い方への速度成分を持つために氣壓減少により外に對して仕事をなす故に此の仕事はなすだけのエネルギーを外部より加へれば等温變化をなす筈である。此の事は

(4.8) の第二式の分母より判る。

$$\text{即ち } -K = V_s \left( 2\omega \sin \varphi V_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \right) = V_s G$$

の場合

$$k = 1$$

即ち等温變化である。  $K=0$  の場合  $k=C_p/C_v$  になり、断熱變化である。此の場合問題になるのは摩擦のエネルギーである。  $K=0$  即ち外部より熱の交換がない場合断熱變化であると云ふのは判つて居るが、今扱つて居るのは粘性流體である。故に移動する場合に摩擦熱が出て完全なる断熱にはならない。此の事が上式にはいつて居ないといふ疑問がある。此の問題は次の様に解釋すべきである。摩擦熱は  $K$  の中に含まるべきもので分母第二項の分母は形式上摩擦項がいつて居るが實は此の分母は氣壓の傾度を意味するものであつて決して摩擦熱に関するものではないのである。

之等の項の意味は今の式の導來法を詳しく見れば判ることである。即ち  $dt$  といふ時間を  $ds$  にて表はし、之を更に  $dp$  にて表はした所に意味があるのである。此の摩擦項がなく只の地衝風の場合には  $\partial p/\partial s$  の場合には  $V_s$  なる速度成分を持たず氣塊は  $s$  方向に動かない。従つて  $dt=ds/V_s$  なる如き式が成立しないのである。

此の場合に就て考へれば、 $dt$  は  $dn$  にて置換へなければならぬのである。

故に

$$dt = dn/V_n$$

が成立する。然るに  $\partial p/\partial n = 0$  であるから、氣塊は等壓線に沿つて動く、即ちその氣塊は自己正重であれば等壓變化をするのである。従つて (3.2) より

$$K \frac{dn}{V_n} = C_p dT$$

になる。即ちその氣塊は  $dT/dn = K/V_n C_p$  にて温度遞減率を持つ或は時間的には  $dT/dt = K/C_p$  即ち加へた熱は只その氣塊の温度上昇を與へるのみで、別に新しい事はない。

以上の理論には移動する氣塊は常にその周囲の空氣の氣壓と等しくなるといふ最も有りさうな假定を使つて時間を距離に、更に距離を氣壓差にて表現することに依り、多方常數に運動の概念を導入することに成功したのであるが、若し此の假定を採用しなければ異つた形の多方常數の表現式を得る。

例へば極端な例として上昇する氣塊は常に周囲の空氣と同温であると云ふ場合を假定すれば

$$dt = \frac{dz}{w} = -\frac{dT}{\alpha w}$$

但し

$$T = T_0 - \alpha z$$

になり、之を (3.9) に代入すれば

$$-\frac{K}{\alpha w} dT = C_p dT - \frac{RT}{p} dp$$

即ち

$$\left(C_p + \frac{K}{\alpha w}\right) \frac{dT}{T} = \frac{R}{p} dp$$

を得る。之を積分すれば

$$T^{C_p + \frac{K}{\alpha w}} p^{-R} = \text{const}$$

即ち

$$T p^{-R/C_p + \frac{K}{\alpha w}} = \text{const}$$

になり、之を (3.9) とを比較すれば

$$\frac{1}{k} - 1 = -R \left( C_p + \frac{K}{\alpha w} \right)$$

即ち

$$k = 1 \left/ 1 - \frac{R}{C_p + \frac{K}{\alpha w}} \right. = \frac{C_p + \frac{K}{\alpha w}}{C_p - R + \frac{K}{\alpha w}} = \frac{C_p + \frac{K}{\alpha w}}{C_v + \frac{K}{\alpha w}}$$

を得る。

此の場合  $K=0$  とすれば  $k=C_p/C_v$  即ち断熱変化、 $\alpha$  又は  $w$  が零に近いと  $K$  が非常に大きい場合  $K=1$  になり等温変化になる。

### 垂直線偏倚より見た本邦近傍地殻均衡面の深さに就いて

川畑 幸夫, 鮎田 正

1. 緒言 本邦は四面海に囲まれて居り、日本弧島其れ自身は世界中で最も著明な地震帯に沿って居る。そればかりで無く、和達博士に依つて発見せられた深発地震帯は本邦を伊勢湾近傍で横断する。このやうな特殊な地域に於ても亦、印度や亞米利加の如き場合と同様に地殻均衡の假説が成立するであらうかといふことは地球物理學的に見て一つの重要な研究項目である。若し假に斯くの如き機巧が成立して居るとすれば、次に其の深さは幾何かといふ問題が起るであらう。元來本邦の如き狭小な地域に於ける測定結果から、地殻均衡の問題を論議することそれ自身が、既に困難な問題であり、従つて更に進んで均衡面の深さを求めることは更に困難なことであるのは言ふ迄もない。地球物理學的に考へて見ても、均衡面といふ一つの確然たる不連続面状のものが存在するわけではない。然しともかく、在來の意義の均衡面が、深いか或は浅いかといふことは或種の地殻性状を表示してゐることには間違が無く、殊に地下に於ける歪は可成の程度逆彈性によつて支へられてゐると

は言へ、兩者の間にはそれ相應の相違が存在する筈である。

従來本邦に於ても均衡面の深さを求めんとする試みは若干行はれたことがある。就中熊谷博士<sup>1)</sup>は海洋に於ける重力測定の結果から其の深さを 170 km と推定せられた。従來の概念に従へば非常に深いのである。著者等の一人<sup>2)</sup>も嘗て垂直線偏倚の立場から本問題を論じたことがあつた。然し當時は計算が充分進行してゐなかつた爲に、使用した観測材料が少く、充分に信頼することは出来ない状態であつた。其の後更に、計算を續行し若干の観測を追加することが出来たので其の結果を茲に報告して置き度と思ふ。

2. 地形の補正 地形に因る引力補正の計算方法は前論文に詳述し置きたるを以て、茲に改めて述べる必要はない。要するに最初、先づ地表上にあらはれた山岳は比重 2.70 の單なる過剩物質として平均海面上に乗つて居り、又海洋の部分では比重が岩石と海水の密度差  $2.70 - 1.03 = 1.67$  に相當する缺損物質が存在すると考へて観測點から周圍 936 km の範圍内にある地形に基く引力を子午線成分及び平行圈成分の各々について計算し、之を垂直線偏倚に換算して實測値を補正するのである。従つて斯くして補正せる垂直線偏倚は観測點を中心として海面高零なる平原が涯しもなく擴がつて居り、且つ地下の密度が一定なるものと考へた場合に、實測せらるべき偏倚量を示すのである。地下に於ける密度が此の假定の通り一定であるならば地形補正をなせる垂直線偏倚は偶然的分布をなすべき筈であり、又若し、補正し過ぎた結果となれば、地殻は均衡の状態にあると推定せられる。ベクトルの如く見做した此の殘存偏倚量と地形との相關程度は同時に又均衡状態の良否を判断する目安を與へる筈である。計算の手續を極くざつと説明すれば次の通りである。(記號其の他すべて前論文を参照せられ度い)。

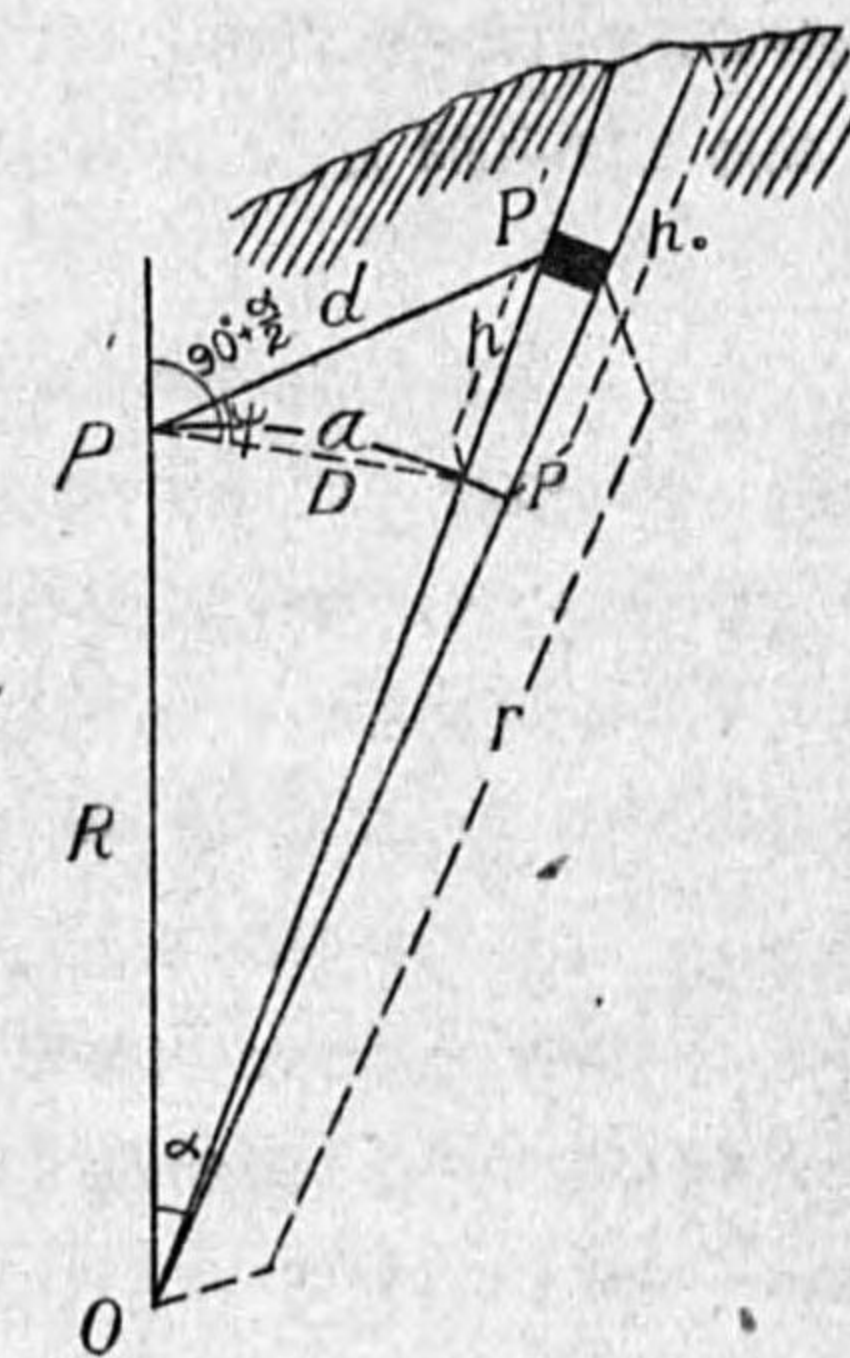
地形に因つて、観測點を通る鉛直線は

$$\delta A_{h_0}' = \delta A_{h_0} \sqrt{1 + \frac{h_0}{R} + \frac{h_0^2}{R^2}} \quad (1)$$

なる水平引力を受ける。但し  $\delta A_{h_0}'$  は

$$\delta A_{h_0}' = f \frac{R^2 \rho_0 \cos \frac{\alpha}{2} d \omega}{D^2} h_0 \\ = f \rho_0 h_0 (\sin \beta_1 - \sin \beta_2) \left( \log \frac{a_2}{a_1} - \frac{5}{48} \frac{a_2^2 - a_1^2}{R^2} \right) \quad (2)$$

第 1 圖



1) Rep. Imp. Jap. Geod. Comm. No. XI.

2) 天文月報, 第 33 卷第 7, 8, 9, 10 號, 第 34 卷第 5, 6, 7 號.

で表される。引力を垂直線偏倚に換算するには単に  $\rho''/g$  ( $\rho''=206265''$ ,  $g$ =重力加速度) をかければよい。

計算の便宜のため、観測点を中心として全地域を第2圖の如く分割する。方向線は  $\sin \beta_k - \sin \beta_0$  が恰度 0.25 となるように引いてあり、又同心圓の半徑は (2) の最後の項  $\log \frac{a_k}{a_0} \frac{5}{48} \frac{a_k^2 - a_0^2}{R^2}$  がとなる 0.5263 ように分けてある。このように分割すると観測点が海面高零の高さにあるときは (2) は陸地の各分割に對しては

$$\delta A_{h_0}' = \pm 0''.0050 h_0 \quad (h_0 \text{ は米突單位})$$

となる。観測点の周圍の全面積に對する補正は、此等を總和すればよい。

$$\sum \delta A_{h_0}' = \pm 0''.0050 \sum h_0 \quad (3)_1$$

$h_0$  は各分割内の平均高度 (米) であつて、(3) の符號は原方向の存在する半面側が正で他面が負である。(3) を (2) に代入すれば全地域の補正偏倚量が得られる。

海洋部分の引力も全く同様にして求められる。即ち海水の比重を 1.03 岩石の平均比重を 2.70 とし、結局 2.70-1.03 なる比重の缺損物質があるとすれば

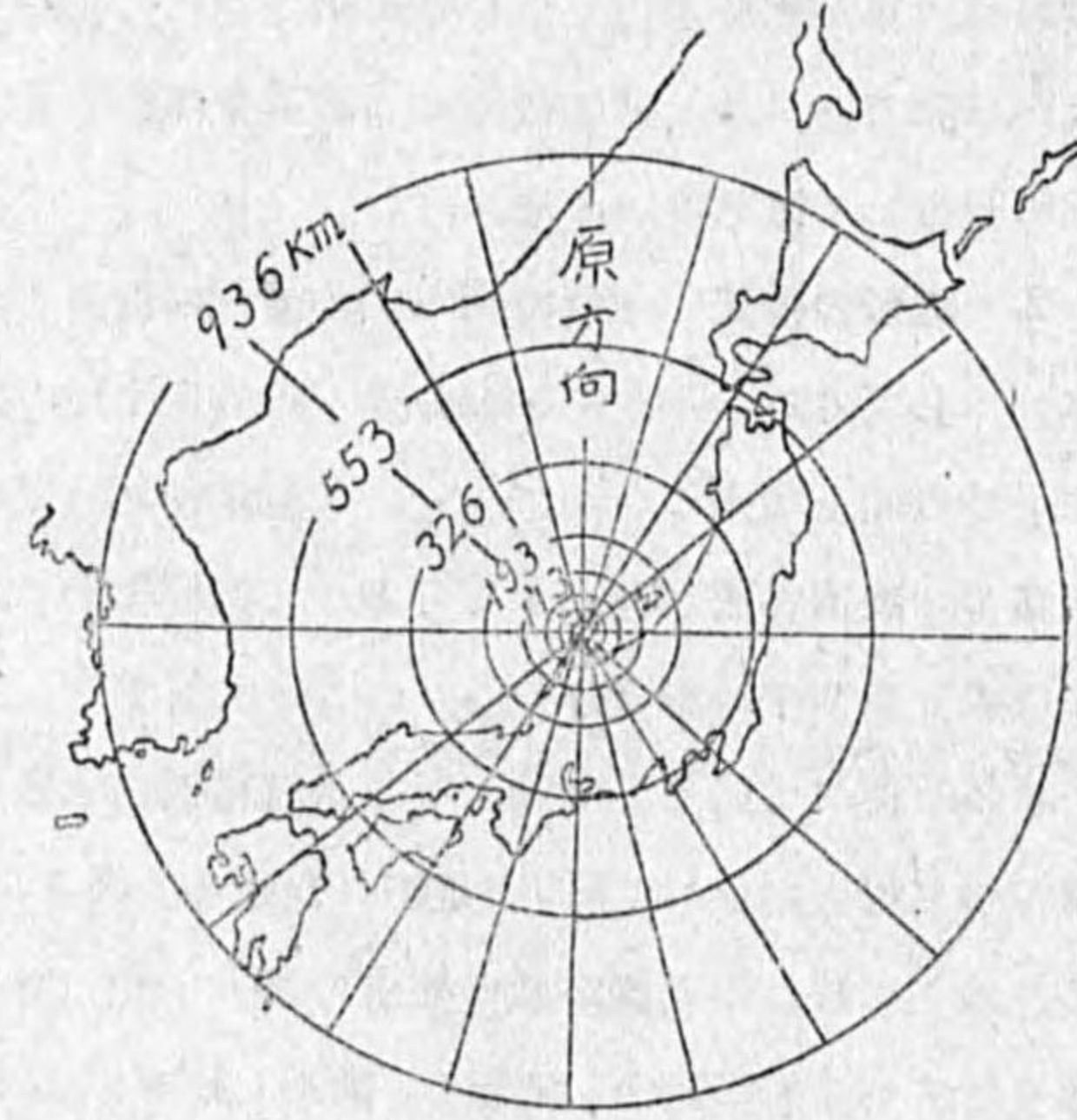
$$\sum \delta A_{h_0}' = \mp 0''.0031 \sum h_0 \quad (3)_2$$

此の場合  $h_0$  は該分割の平均水深 (米) である。

地殻の平均比重を 2.70 とすることは此の種の研究に於て凡そ容認せられたる處なるも、尙ほ疑念ある方もあらうかと考へる。然し乍らそれは (1), (2) 式に於て見らるゝ如く、 $\rho_0$  は單に一次の係數としてかゝつて居るだけであり、従つて (3)<sub>1</sub>, (3)<sub>2</sub> に於ける 0''.0050, 0''.0031 なる値を單に多少變更するだけにすぎない。例へば平均密度を 3.50 とすれば 0''.0050 なる係數は 0''.0065 となるだけである。一方に於て次の第1表よりも推定せらるゝ如く、地形の補正は観測点の極く近傍では極めて小さく、遠方の地形が大きく影響する。これは陸地の平均高度が 1000 米ともなることは極めて稀であるが、海の平均の深さは通常數千米に及ぶからである。従つて大體に於て——多少の變化はあるが—— $\rho_0$  を多少變更しても後に述べる第3圖に於ける矢印の方向は殆んど變らず、其の大きさのみが伸縮するだけの結果となり、吾々の將來の論議には何等不都合を來すことはないのである。

観測点平均海面上若干の高さ  $H_0$  (米) がある場合には、其のために更に又上式に若干の修正を要する。此の修正を行ひ且つ微小な項は省略すれば結局

第 2 圖



第 1 表 地形の補正例 観測点: 養安寺臺 (1892 水路部測定)

$\varphi_0 = 35^\circ 33'$ ,  $\lambda_0 = 140^\circ 20'$ ,  $H_0 = 81$  m,  $\xi = +47''.90$ ,  $\gamma \sec \varphi = -23''.60$ ,  
 整約せる偏倚  $\gamma$  成分  $\gamma = +15''.21$ ,  $\gamma$  成分  $\gamma = -24''.93$

中心距離 km	ε-成分												計	
	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'		
0.21~0.35	-0.031	-0.019	-0.030	-0.019	-0.030	-0.019	-0.030	-0.019	-0.030	-0.019	-0.030	-0.019	-0.030	+0.004
0.35~0.59	-0.029	-0.018	-0.028	-0.018	-0.027	-0.018	-0.026	-0.018	-0.025	-0.018	-0.024	-0.018	-0.023	+0.004
0.59~1.00	-0.031	-0.017	-0.032	-0.017	-0.031	-0.017	-0.030	-0.017	-0.029	-0.017	-0.028	-0.017	-0.027	+0.004
1.0~1.7	-0.024	-0.016	-0.022	-0.016	-0.021	-0.016	-0.020	-0.016	-0.019	-0.016	-0.019	-0.016	-0.021	+0.004
1.7~2.9	-0.021	-0.015	-0.020	-0.015	-0.019	-0.015	-0.018	-0.015	-0.017	-0.015	-0.018	-0.015	-0.020	+0.004
2.9~4.9	-0.021	-0.014	-0.020	-0.014	-0.019	-0.014	-0.018	-0.014	-0.017	-0.014	-0.018	-0.014	-0.019	+0.004
4.9~8.2	-0.017	-0.013	-0.017	-0.013	-0.016	-0.013	-0.016	-0.013	-0.015	-0.013	-0.016	-0.013	-0.017	+0.004
8.2~13.9	-0.015	-0.012	-0.016	-0.012	-0.015	-0.012	-0.015	-0.012	-0.014	-0.012	-0.015	-0.012	-0.014	+0.004
13.9~23.5	-0.006	-0.006	-0.010	-0.006	-0.009	-0.006	-0.009	-0.006	-0.008	-0.006	-0.008	-0.006	-0.008	+0.004
23.5~39.8	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	+0.004
39.8~67.4	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	+0.004
67.4~112.7	-0.180	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	+0.004
112.7~193	-0.177	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	+0.004
193~327	-0.177	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	+0.004
327~553	-0.177	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	-0.173	+0.004
553~938	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	-0.805	+0.004
計														-27.559

中心距離 km	γ-成分												計	
	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'	14°30'		
0.21~0.35	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019
0.35~0.59	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013
0.59~1.00	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017	-0.017
1.0~1.7	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006
1.7~2.9	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005
2.9~4.9	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005
4.9~8.2	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005
8.2~13.9	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
13.9~23.5	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009	+0.009
23.5~39.8	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030	+0.030
39.8~67.4	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464	+0.464
67.4~112.7	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657	+1.657
112.7~193	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849	+1.849
193~327	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034	+2.034
327~553	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821	+1.821
553~938	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878	+1.878
計														+47.086

$$47''.086 \times \cos \varphi = 33''.31, \theta = \sqrt{12.15^2 + 13.38^2} = 18.1, \alpha = \tan^{-1} \frac{12.15}{13.38} = -45^\circ$$



$$\sum \Delta h_0 = \sum \left[ \frac{h_0 - H_0}{\sqrt{1 + \frac{(h_0 - H_0)^2}{a^2}}} + \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{H_0^2}{a^2}}} \right] \frac{1}{h_0} \quad (4)$$

となる。(4)の括弧内は豫め圖表としておくことが出来る。 $h_0$ は既述の如く、各區劃に對する平均海拔或は水深であつて、地形圖、海圖を用ひて適當な經緯度の網目を作り各交叉點の値を讀取つて其の平均をとるのである。これが實際上最も繁雜な仕事である。各分劃内に少くとも10個位は交叉點が含まれるように、觀測點からの距離に應じて豫め作製せる圖を用ひた。即ち1/5萬地形圖並に觀測點附近の成可く詳細な海圖から、經緯度各々15'隔きの網目を作り、それで $a=1.7\sim 4.9$ km迄の範圍を補正する。同様30'隔きの讀取によつて $a=8.2$ km迄各1'毎の交叉點に其の中央點の平均高によつて13.9km迄を補正する。次に全國の1/5萬地形圖及び適當な海圖を撰び各1'隔きの交叉點の高さを讀取り、それを1/20萬等距投影圖上に轉記し、それに基づいて39.8km迄を補正する。同様な手段によつて、1/100萬等距投影圖上に轉寫せる補正用圖を作つて、193km迄、1/1000萬補正用圖によつて936km迄補正する。觀測點の極く近傍は寫眞引伸ばしにより、同様な原理で補正し全地域の補正值を算出した。

一區劃中に海と陸が共存するような場合、其の他種々特殊な場合に於ける詳細は前論文を参照せられたい。地形の補正をなすべき地域はどれ位の範圍まで及べばよいかといふことは難かしい問題であるが、東に太平洋、西に日本海を有する日本のやうな場合であると、1000kmより遠方の地形は日本内地の各觀測點に對し殆んど一定の引力を與へることが實際上知られる(若干の點について吾々は1500kmまで補正して比較してみた)。従つて1000km以上は全體に常數を加へさへすればよいやうな結果となり、而も太平洋の方が深いから1000kmまで補正しさへすれば吾々の將來の論議や結論は質的に何等の變更を受けないのである。

一例として、觀測點養安寺臺に對する地形補正の計算を掲げる(第1表)。實測せる垂直線偏倚は、其の儘では原點に於ける垂直線偏倚を含む。換言すれば採用せる準據橢圓體は本邦のゼオイドと多少の傾斜を有するのである。此の傾斜を修正し、本邦に於けるゼオイドに最もよく適合する様な位置に置かれた準據橢圓體に對する垂直線偏倚を求めるには原點に於ける垂直線偏倚量 $\xi_0, \eta_0$ を誤差方程式

$$a\xi_0 + b\eta_0 = l_1, \quad a'\xi_0 + b'\eta_0 = l_2$$

より求め、各觀測方程式に對する剩餘を算出すればよいのである。 $l_1, l_2$ は實測垂直線偏倚量で、又 $a, b, a', b'$ 等は前論文の附表を用ひる。

前論文發表以後文部省測地學委員會に於ては、更に下記9點に於て精密な測定を實施せられた。

第 2 表

觀測點	89* 高聳山	89** 朝日山	109* 島星山	38* 男和佐 羅比山	40* 十二神山	46* 筧峰嶽	99* 尾本宮山	108* 高根山	120* 朝熊山
位置 { $\phi$ $\lambda$	35°31' 134 15	35°31' 132 59	34°59' 132 14	40°03' 141 46	39°32' 141 59	38°34' 141 10	35°20' 136 59	35°03' 136 57	34°28' 136 46
$\xi$ $\eta$	-19.13 +15.21	-14.97 +11.46	-16.48 +16.04	-20.83 -13.08	-14.11 -13.19	-11.07 + 5.45	- 7.94 +21.70	-11.50 +20.69	-16.60 +18.97

以上9點に對する觀測方程式は次の如くなる。

$$\begin{aligned} 38^* & 0.996\xi_0 - 0.021\eta_0 + 20.83 = 0 & +0.022\xi_0 + 0.997\eta_0 + 13.08 = 0 \\ 40^* & 0.996\xi_0 - 0.023\eta_0 + 14.11 = 0 & +0.024\xi_0 + 0.997\eta_0 + 13.19 = 0 \\ 46^* & 0.996\xi_0 - 0.015\eta_0 + 11.07 = 0 & +0.015\xi_0 + 0.998\eta_0 - 5.45 = 0 \\ 89^* & 0.994\xi_0 + 0.056\eta_0 + 19.13 = 0 & -0.055\xi_0 + 0.998\eta_0 + 15.57 = 0 \\ 89^{**} & 0.993\xi_0 + 0.069\eta_0 + 14.97 = 0 & -0.069\xi_0 + 0.998\eta_0 + 12.18 = 0 \\ 99^* & 0.996\xi_0 + 0.029\eta_0 + 7.94 = 0 & -0.028\xi_0 + 1.000\eta_0 - 21.70 = 0 \\ 108^* & 0.996\xi_0 + 0.029\eta_0 + 11.50 = 0 & -0.028\xi_0 + 1.000\eta_0 - 20.69 = 0 \\ 109^* & 0.992\xi_0 + 0.077\eta_0 + 16.48 = 0 & -0.076\xi_0 + 0.997\eta_0 - 13.50 = 0 \\ 120^* & 0.997\xi_0 + 0.030\eta_0 + 16.60 = 0 & -0.029\xi_0 + 0.999\eta_0 - 18.97 = 0 \end{aligned}$$

此の18個の觀測方程式を前論文の觀測方程式に補足して Normal equation

$$12.699\xi_0 + 2.22\eta_0 = -1297''.04, \quad 2.22\xi_0 + 113.72\eta_0 = +635''.89$$

を解けば

$$\xi_0 = -10''.31, \quad \eta_0 = +5''.79 \quad (5)$$

となり、前に求めた値と殆んど大差は無いが、以下此の(5)を用ひて各觀測方程式から剩餘を算出する。

斯くて全國に成るべく觀測點が平等に分布するように26點を撰んで地形の補正を行つた結果が第3表である。第一行の $\xi, \eta$ は上記の各觀測方程式の剩餘として求められた偏倚量で、第二行はトポグラフィの補正量、第三行 $\xi', \eta'$ は上記二量の和で、即ち地形の補正をなせる偏倚量である。

第 3 表

觀測點	38* 男和佐羅比山	40 赤山	40* 十二神山	44 飯盛山	46* 筧峰嶽	47 栗島	48 松ヶ崎
位置 { $\phi$ $\lambda$	40°03' 141 46	39°40' 140 04	39°32' 141 59	38°54' 139 49	38°34' 141 10	38°27' 139 14	37°57' 139 08
$\xi$ .....	-10.44	- 2.01	- 3.71	- 5.19	- 0.71	- 4.05	- 6.16
地形補正 ..	- 2.26	+ 1.64	-15.32	+ 5.67	-10.65	+ 8.97	+ 7.39
$\xi'$ .....	-12.70	+ 0.37	-19.03	+ 0.48	-11.36	+ 4.92	+ 1.23
$\eta$ .....	-18.62	+18.05	-18.71	+16.83	- 0.18	+11.41	+14.32
地形補正 ..	+33.15	- 1.90	+37.23	+ 0.50	+27.87	- 0.73	- 0.52
$\eta'$ .....	+14.53	+16.15	+18.52	+17.33	+27.69	+10.68	+14.84
$\theta$ .....	19.3	16.2	26.6	17.4	30.0	11.7	14.9
$\alpha$ .....	-49°	-89°	-44°	-92°	-68°	-115°	-95°

観測点	50 松川崎	54 緑剛岬	55 名倉山	57 大瀧根山	59 坂戸山	60 七尾	63 須坂
位置 {φ λ	37°49' 140 59	37°32' 137 19	37°31' 140 02	37°21' 140 43	37°04' 138 54	37°03' 136 58	36°41' 138 18
ξ	+ 2.25	- 5.77	- 4.11	+ 4.43	-14.33	- 8.37	- 9.02
地形補正	-10.76	+15.19	- 9.42	-14.68	+12.24	+13.42	+ 8.62
ξ'	- 8.51	+ 9.42	-13.53	-10.25	- 2.09	- 50.5	- 0.40
η	-17.88	+21.57	+11.59	-19.29	+21.00	+ 6.99	+13.14
地形補正	+32.75	+ 5.06	+21.48	+32.20	- 1.14	- 0.36	+ 2.65
η'	+14.87	+26.63	+33.07	+12.91	+22.14	+ 6.63	+15.79
θ	17.1	33.9	35.9	16.5	22.2	8.33	15.8
α	-61°	-52°	-68°	-52°	-85°	-127°	-89°

観測点	65 宇都宮	70 霧ヶ峰	77 鹽崎村	78 三鷹	83 田君谷山	84 養安寺臺	87 長尾鼻
位置 {φ λ	36°34' 139 53	36°03' 138 03	35°40' 138 30	35°40' 139 33	35°35' 134 27	35°33' 140 20	35°32' 134 0
ξ	+ 1.99	- 8.11	+ 6.19	+ 9.96	- 9.56	+15.21	-10.19
地形補正	-19.92	+ 4.87	-24.20	-21.86	+12.09	-27.36	+10.04
ξ'	-17.93	-12.98	-18.01	-11.87	+ 2.53	-12.15	- 0.15
η	- 5.24	+ 7.13	- 2.83	-11.82	+ 8.97	-24.93	+ 8.60
地形補正	+26.46	+10.45	+16.25	+28.61	+ 4.29	+38.31	+ 5.06
η'	+21.22	+17.58	+13.42	+16.79	+13.26	+13.38	+13.66
θ	27.8	21.8	22.5	20.5	13.5	18.1	13.7
α	-50°	-54°	-37°	-55°	-101°	-45°	-89°

観測点	89* 朝日山	99* 尾本宮山	108* 高根山	109* 島星山	120* 朝熊山
位置 {φ λ	35°31' 132 59	35°20' 136 59	35°03' 136 57	34°59' 132 14	34°28' 136 46
ξ	- 5.13	+ 2.16	- 1.40	- 6.70	- 6.49
地形補正	+ 8.49	-20.63	-23.85	+ 7.50	-29.73
ξ'	+ 3.36	-18.47	-25.25	+ 0.80	-36.23
η	-18.67	+15.62	+14.61	-20.05	-12.89
地形補正	+ 2.13	- 2.11	+ 6.22	+ 0.25	+13.93
η'	-16.54	+17.73	+20.83	-19.80	+ 1.04
θ	16.9	25.6	32.7	19.8	36.2
α	+102°	-44°	-40°	+92°	-2°

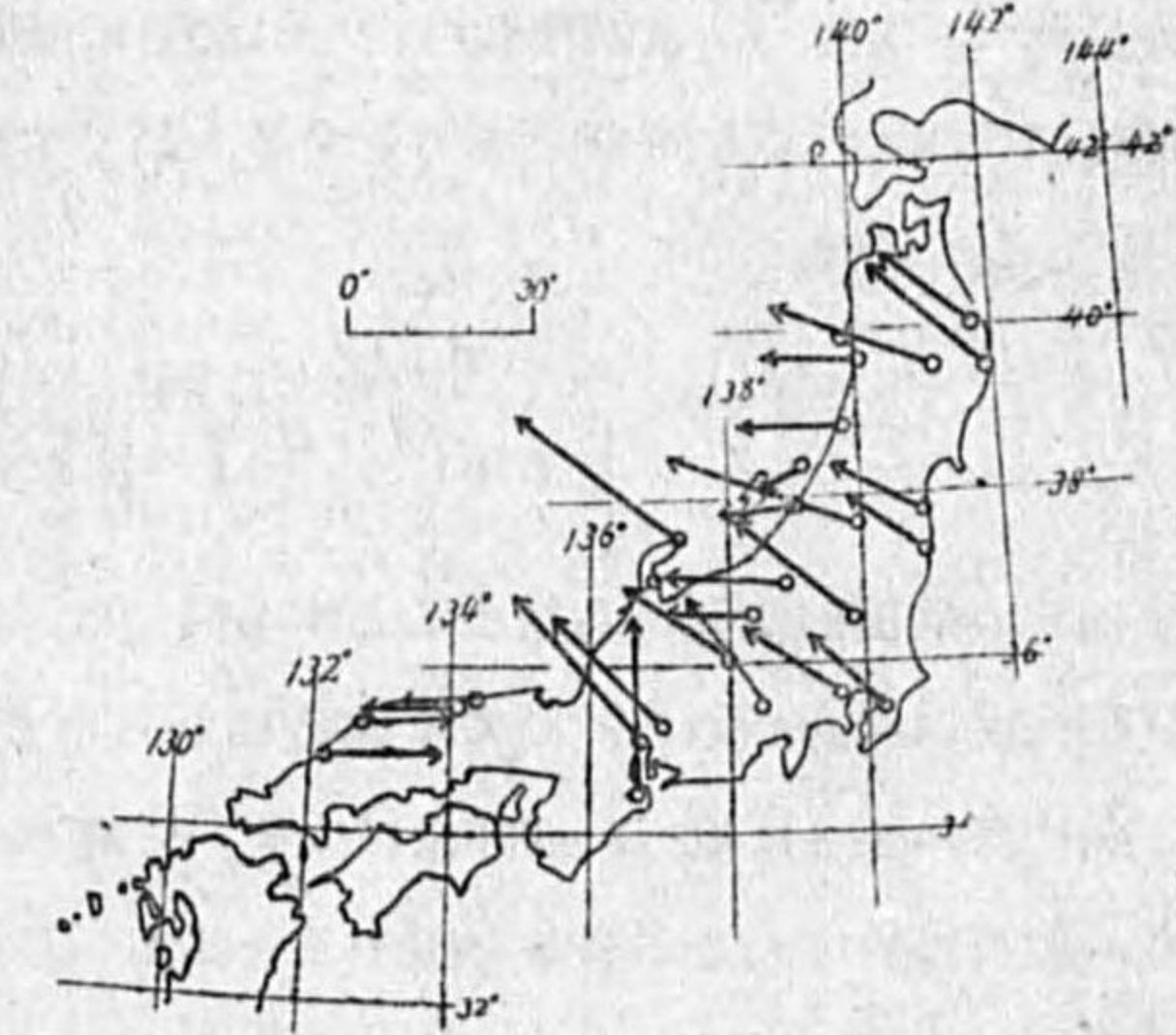
θ は  $\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$  を表し、最後の行の α は  $\alpha = \tan^{-1} \frac{\eta'}{\xi'}$  で表される量で、偏倚量が何れの方角を向くかを示すものである。

本表に依れば、吾々は地形の影響を今迄考へ來つたような假定に基いて補正せる垂直線偏倚は、極めて顯著な系統差を有することを知らることが出来る。

夫れをもつと解り易くする爲に試に圖に表したものが第3圖である。圖に於ける矢印の向きは、天文學的天頂が測地學的天頂に對し矢の方角に偏れてゐることを示すもので、通常の如く、錘を吊り下げた場合として考へるならば、該錘の下端が矢と反對の方角に引かれてゐることを意味

し、又矢の長さは偏れの大きさ θ を代表する。之を換言すれば本州各地は概して、太平洋の方角から強い引力を受けてゐるのである。

第3圖



元來著者等が此處に試みた地形補正の意味は何であつたかと言ふに、既述せる如く海面より高い陸地は平均比重 2.70 の過剩質量として單に地表上に乗つてゐると考へて其の引力を差引き、又海水の部分は、平均比重 -1.67 の缺損質量が海の表面から海底面まで存在すると考へ、其の引力を補填したのである。即ち観測點の周圍 1000 km の遠方迄山も谷も無く、又海もなく、一望の平原が遠く連り、且つ又地下の構造は一樣で密度は何處でも一定と考へた場合に観測さるべき偏倚量を求めることに他ならなかつた。若し此の假定がよく事實に近いならば、換言すれば地下構造が眞實一樣で、地殻内密度は地心を中心として楕圓層狀に分布し、日本海より遙か日本海溝に及ぶ全地域に於て、水平の方角には少しも不規則な分布が存在しないならば、地形の影響を補正した垂直線偏倚即ち第3圖の偏倚量は向きに於ても大きさに於ても不規則な偶然的分布をなすか或は全く零となるべき性質を有してゐる筈である。然るに事實は之に反して、常に太平洋の方角から引き付けられる様な引力が残留するのである。此の事實は極めて重要な事柄であつて、確かに本州太平洋方面の海底物質は日本海方面の海底物質に比較して相對的に密度が大なることを示すものである。翻つて、太平洋の深さは一般に日本海の深さよりも、概して深きに想到すれば地殻均衡説に述べられて居るような機巧が、ともかく本邦の近傍に於ても亦成立して居ると推論することが出来る。然し乍ら斯くの如き機巧を考へることに依つて、どの程度まで正しく事實を説明することが出来るか、之を諸外國、例へば印度、アメリカ等の場合に較べて、尙一層よく成立して居るか、或は其の反對であるかといふような事は此處では今は何も解らない。然し何れにしても本邦近傍に於ても、斯くの如き機巧が成立してゐること又は確かである。

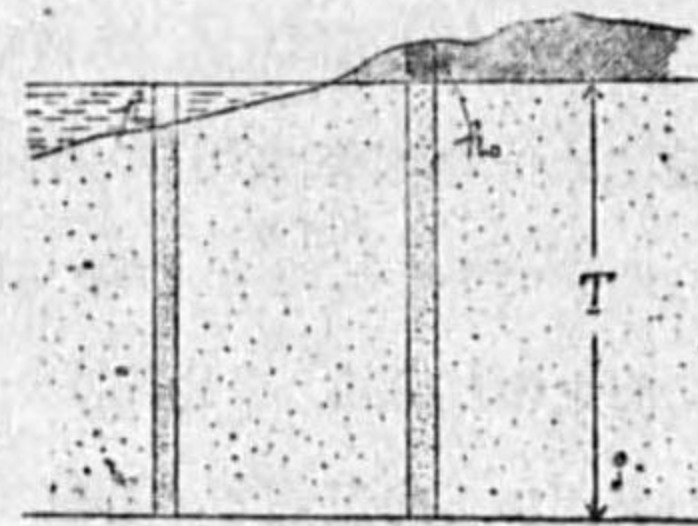
3. 均衡面の深さの決定

そこで當然次に問題となるのは、然らば均衡面の深さは幾ら位であらうかといふことである。それが深いと淺いとでは地殻内比重分布に自ら輕重があるべき筈である。更に進んで問題となるのは、斯くして求められた均衡面の深さに相當する補正を計算し所謂均衡補正を第3圖に加へたならばどのような剩餘が残るであらうかといふことである。次に此等の問題を若干調べてみよう。

今概念を出来る丈單純にして置く爲に地表附近の過剩或は缺損質量は平均海面から此の均衡面迄

一樣に分布するものとし、且つ又均衡面の深さは場所に關せず一定なものとする。即ち第4圖に於て、平均海面から、深さ T までの間に分布せしめるべき補償物質の密度は單に h<sub>0</sub> なる地形のみに依つて定まり、當該地殻柱内では深さに無關係に海面附近でも、

第4圖



深さ T の附近でも同一であるとする。斯くすれば、均衡の補正は (4) と全く同様にして

$$\sum \Delta A h_0 = \left[ \frac{T+H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{T+H_0}{a}\right)^2}} + \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{H_0}{a}\right)^2}} \right] \quad (6)$$

となる。補償が海面から始まるとする假定は、實は嚴密では無く、實際海底の場合の如きに於ては海底面から始まるとすべきではあるが、實際に於ては T は山の高さ或は海の深さに較べれば非常に大きいと考へられるから、此のような假定に立脚して計算しても、結果に於て大なる誤差を生ずるとは考へられない。

そこで今 T を順次に 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 240, 320 km として上式で補正を計算し、其の剩餘を求めてみると第4表の如くなる。今ξはηに較べて、測定精度がすつとよいことを考慮し、ξのみを用ひ、普通の最小自乗法に於けるが如く、vvの總和 [vv] が最小となる深さを以

第4表

Table with 4 columns of mountain names and their corresponding ξ values, and rows for T km (20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 240, 320) showing equilibrium correction values (均 補, v, vv) for each mountain.

Table for mountains 54 (綠剛岬), 55 (名倉山), 57 (大瀧根山), and 59 (坂戸山) with columns for T km and equilibrium correction values.

Table for mountains 60 (七尾), 63 (須坂), 65 (宇都宮), and 70 (霧ヶ峰) with columns for T km and equilibrium correction values.

Table for mountains 77 (鹽崎村), 78 (三鷹), 田君谷山, and 養安寺臺 with columns for T km and equilibrium correction values.

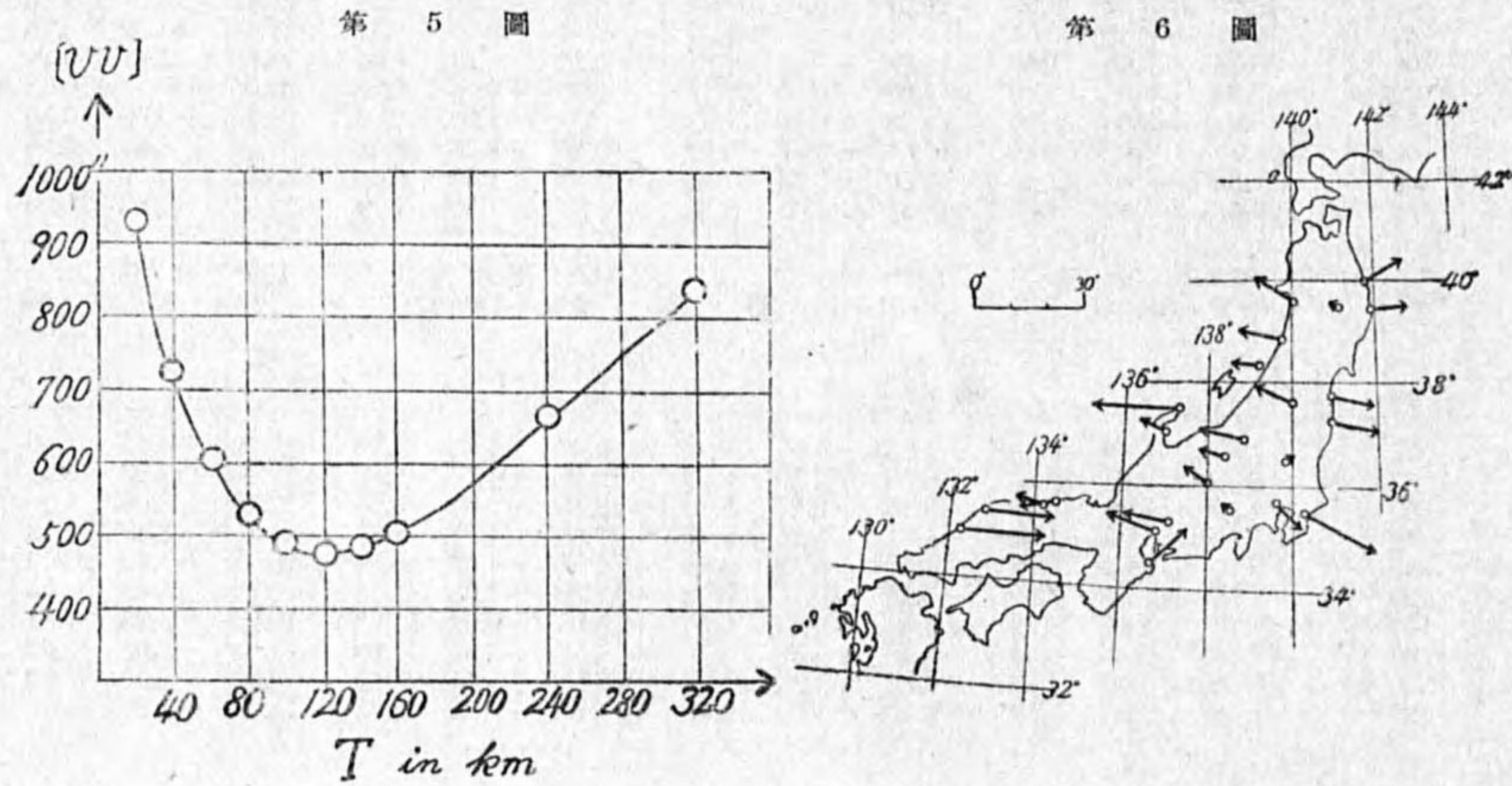
Table for mountains 87 (長尾鼻), 89 (朝日山), 99 (尾本宮山), and 108 (高根山) with columns for T km and equilibrium correction values.

第3表より T km	109° 島星山 ξ' = +0''.80			120° 朝熊山 ξ' = -36''.22		
	均衡補正	v	vv	均衡補正	v	vv
20	-5.04	-4.24	17.98	+32.80	-3.42	11.70
40	-3.32	-2.52	6.35	+31.42	-4.80	23.04
60	-2.24	-1.44	2.07	+30.20	-6.02	36.24
80	-1.46	-0.66	0.44	+29.01	-7.21	51.98
100	-0.86	-0.06	0.00	+27.85	-8.37	70.06
120	-0.36	+0.44	0.19	+26.74	-9.48	89.87
140	+1.06	+1.86	3.46	+25.68	-10.54	111.09
160	-0.17	+0.63	0.40	+24.69	-11.53	132.94
240	+1.46	+2.26	5.11	+21.26	-14.96	223.80
320	+1.88	+2.68	7.18	+18.57	-17.65	311.52

て、求める深さ  $T$  と考へると、 $T=120$  km となる (第5圖)。即ち均衡面の深さは大體 120 km 位と考へられる。

此の値は殆んど諸外國の値と大差がない。然し著者が前論文に算出した値は 185 km であつた。當時の計算は僅かに 16 點の観測から求めたもので、今回の値は 26 個の観測を使用したものであると言へ、結果は可成り相違して居る。單に計算に加ふべき観測點の數をこれ丈増したために、これ位も異つた數値を得たことは、 $T$  が數値としては未だ充分正しくはないことを意味するが、たゞ均衡的補償分布が行はれて居り、且つ其の深さは大體これ位のものであらうと言ふことは言へると思ふ。

$T=120$  km として各點に均衡補正を加へそれを前と同様に圖上に記入せるものが第5表及び第6圖である。此の圖でわかることは、均衡の機巧まで考へに入れて補正を加へても剩餘として得られた垂直線偏倚は明かに本州の山岳地帯から強い引力を受けてゐるのである。而かも此の引力の方向は極めて規則正しく、明かに日本島弧に直角的な成分が極めて顯著である。是は結局するところ、



第5圖

第6圖

第5表

観測點	ξ	均衡補正 (120 杆)	η	均衡補正 (120 杆)	θ	α
55 名倉山	-13.53	+ 8.29	- 5.14	+ 33.07	- 21.45	+ 11.62
54 鎌副岬	+ 9.42	- 9.67	- 0.25	+ 36.63	- 2.04	+ 24.59
50 松川崎	- 8.51	+ 10.39	+ 2.48	+ 14.87	- 26.92	- 12.05
48 松ヶ崎	+ 1.23	- 3.49	- 2.26	+ 14.84	- 4.28	+ 10.56
47 栗島	+ 4.92	- 5.50	- 0.58	+ 10.11	- 2.24	+ 8.44
46* 竜峰嶽	- 11.36	+ 9.39	- 1.97	+ 27.69	- 24.48	+ 3.21
44 飯盛山	+ 0.48	- 2.83	- 2.35	+ 17.33	- 4.74	+ 12.59
40* 十二神山	- 19.03	+ 14.02	- 5.01	+ 18.52	- 28.46	- 9.94
40 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
38* 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
37 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
36 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
35 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
34 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
33 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
32 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
31 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
30 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
29 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
28 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
27 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
26 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
25 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
24 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
23 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
22 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
21 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
20 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
19 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
18 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
17 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
16 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
15 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
14 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
13 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
12 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
11 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
10 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
9 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
8 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
7 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
6 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
5 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
4 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
3 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
2 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
1 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
0 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
観測點	ξ	均衡補正 (120 杆)	η	均衡補正 (120 杆)	θ	α
84 養安寺臺	- 12.15	+ 22.68	+ 10.53	+ 13.38	- 34.37	- 20.89
78 田君谷山	+ 2.53	- 1.59	+ 0.94	+ 13.26	- 5.44	+ 7.82
77 三鷹	- 11.87	+ 18.67	+ 6.80	+ 16.79	- 23.61	- 6.82
77 鹽崎村	+ 18.01	- 15.64	- 2.37	+ 13.42	- 10.53	+ 2.89
70 霧ヶ峰	- 12.98	+ 7.57	- 5.41	+ 17.58	- 9.95	+ 7.63
190* 朝熊山	- 36.22	+ 26.74	- 9.48	+ 1.04	- 10.91	- 9.87
109* 島星山	+ 0.80	- 0.36	- 0.44	- 19.80	- 4.22	+ 24.02
108* 高根山	- 25.25	+ 20.55	- 4.70	+ 20.83	- 7.16	+ 13.67
99* 尾本宮山	- 18.47	+ 16.51	- 1.96	+ 17.73	- 5.76	+ 11.97
89** 朝日山	+ 3.36	- 4.07	- 0.71	- 16.54	- 3.30	- 19.84
87 長尾鼻	- 0.15	- 2.79	- 2.94	+ 13.66	- 5.17	+ 8.49
86 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
85 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
84 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
83 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
82 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
81 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
80 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
79 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
78 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
77 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
76 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
75 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
74 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
73 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
72 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
71 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
70 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
69 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
68 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
67 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
66 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
65 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
64 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
63 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
62 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
61 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
60 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
59 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
58 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
57 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
56 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
55 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
54 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
53 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
52 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
51 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
50 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
49 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
48 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
47 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
46 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
45 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
44 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
43 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
42 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
41 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
40 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
39 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
38 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
37 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
36 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
35 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
34 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
33 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
32 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
31 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
30 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
29 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
28 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
27 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
26 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
25 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
24 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
23 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
22 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
21 男和佐羅山	- 12.70	+ 6.74	- 5.96	+ 14.53	- 24.61	- 10.08
20 大瀬根山	- 10.25	+ 13.09	+ 2.84	+ 12.91	- 25.41	- 13.50
19 坂戸山	- 2.09	- 0.48	- 2.57	+ 22.14	- 8.58	+ 13.56
18 須坂	+ 0.40	- 1.65	- 2.05	+ 15.79	- 8.26	+ 7.53
17 尾七	+ 5.05	- 8.34	- 3.29	+ 6.63	- 0.85	+ 7.48
16 山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92
15 赤山	- 0.37	- 0.53	- 0.90	+ 16.51	- 3.23	+ 12.92

本州近傍の地下構造は極部的には非常に複雑であつても、大局から見ると極めて単純であつて大きな規模の地質構造に強く支配されてゐることを示すものである。之を如何に解釋すべきか？

解釋の方法はいくらでもあるであらう。強ひて之を均衡面の深さの不均一として解釋するならば、陸地下の補償面は海底下の補償面に比較してもつと深いといふことになる。斯くの如く考へれば、海洋側が陸地側を引き付ける様な引力が存在するわけであるから、吾々の第6圖の矢印しは大體に於て消失し、剩餘は偶然的分布をなすであらう。即ち換言すれば、在來の考へに従ふときはエアの如く考へた方がもつとよく日本の地下構造をあらはすと考へ得られるのである。然し乍ら之は單に一つの見方にすぎない。吾々は補償密度が海面から均一に分布すると假定したのであるが、此の假定は實際には自然でない。叙上の剩餘を消失せしめる如き補償密度分布法則をこそ寧ろ追求すべきであらうと考へる。

#### 4. 結 論

垂直線偏倚から測地學的系統差を除き、更に地形の補正を加へると、本邦に於ても亦地殻均衡の假説があてはまつて居ることがわかる。均衡面をプラットの如く考へると其の深さは大體 120 km 位と推定せられる。然し乍ら 120 km の均衡補正を加へると、本州山岳地帯に引かるゝ引力が、小さい乍らも見事に残留する。之は極めて興味深いことで將來充分に吟味すべき事實と考へる。

本研究は文部省自然科學研究費を以て遂行せられたものである。茲に厚く御禮を申述べる。

## 暖氣塊の浸入に依る降雨に就いて

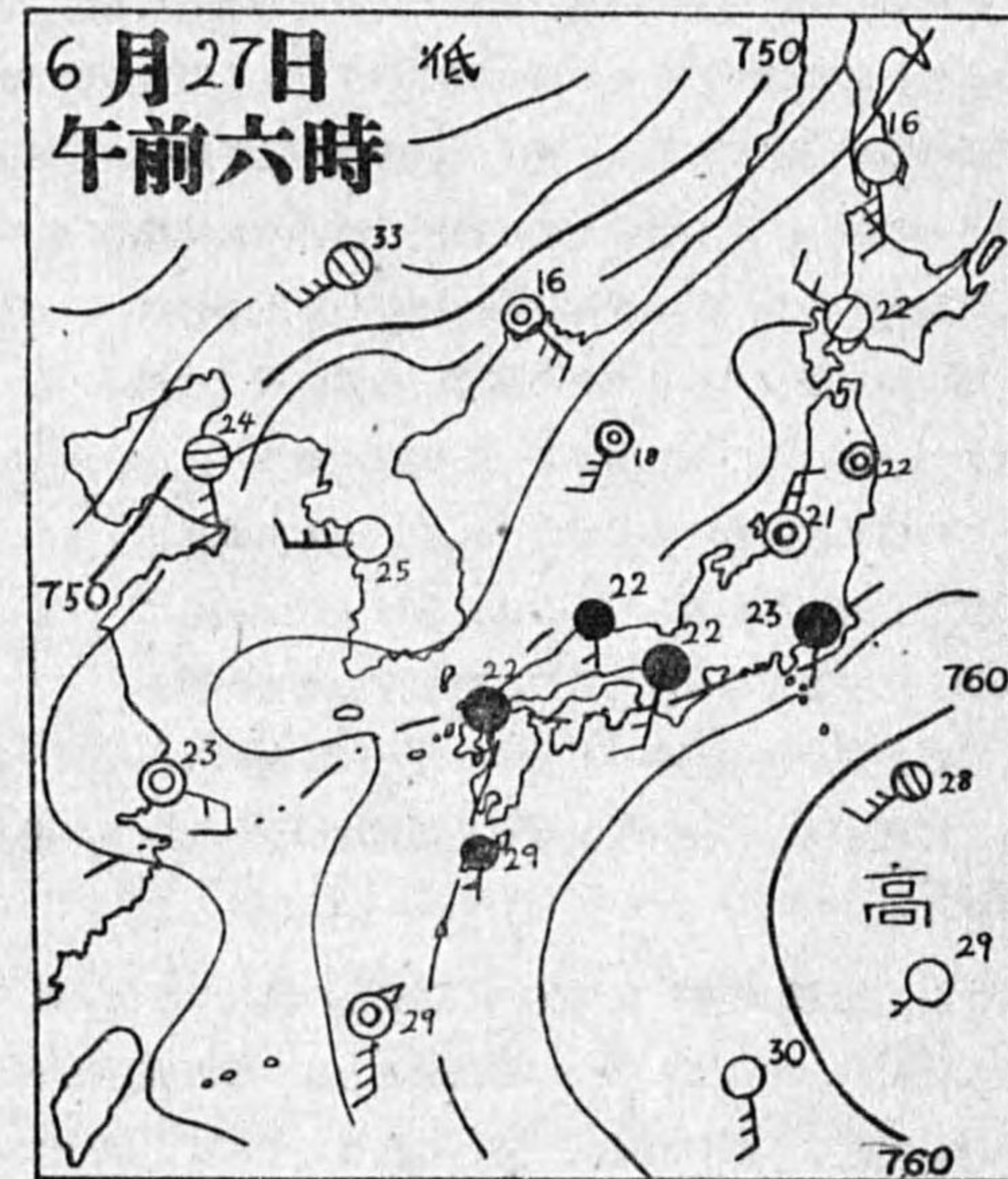
高橋 浩一郎

§1. 緒言 降雨には低氣壓に依るもの、不連続線に依るもの、成層が不安定になつて起るものなどいろいろの種類があり、西村博士<sup>(1)</sup>がくはしく研究されてゐる。この各種の降雨の中で梅雨期の終りに略々様な南西氣流内ではつきりとした原因がなく降る雨がある。昭和16年6月下旬の西日本に於ける豪雨はこの一例で、

第 1 圖

参考迄に當時の天氣圖を示すと第1圖の如くである。この時九州では一日に300 耗位も降つてゐるが、この圖に見られるように顯著な低氣壓もなければ又不連続線もなく、強ひて原因を求めれば九州附近の弱い不連続線の爲と云へるが、これだけでは到底この様な豪雨は起り得さうもない。又春低氣壓が東支那海に入り、東海道が南西氣流となつた時にもこの種の雨が屢々ある。この雨は現在の所如何なる機構で降るのか判つてをらず、従つて豫報も甚だ困難である。

§2. 暖氣塊の浸入に依る降雨 この種の雨を調べて見てすぐ氣付く共通した特徴は水蒸氣張力が著るしく増す



(1) 日本の降雨に就いて、氣象集誌, 8, 109, 昭和5年。

事である。気温も増す傾向があるが、水張程顯著ではない。そして雲を見てみるとまづ上層雲が現れ、次に中層雲が多くなり、次第に雲が低くなって遂に雨雲となり降雨が始まる事が多い。一例として昭和8年4月30日に於ける長崎の例をあげて見る。當時の氣象要素の變化は下の如くである。

時刻	29日6時	14時	22時	30日6時	14時	22時
水張(耗)	4.7	9.5	9.7	9.9	11.0	14.9
気温(度)	10.0	22.7	16.4	16.1	20.1	18.5
雲	0	1cs,c	10sk	10n	10n	10n

30日1時、4時にちよつとした雨あり、13時から本降りとなる。總降水量29耗。

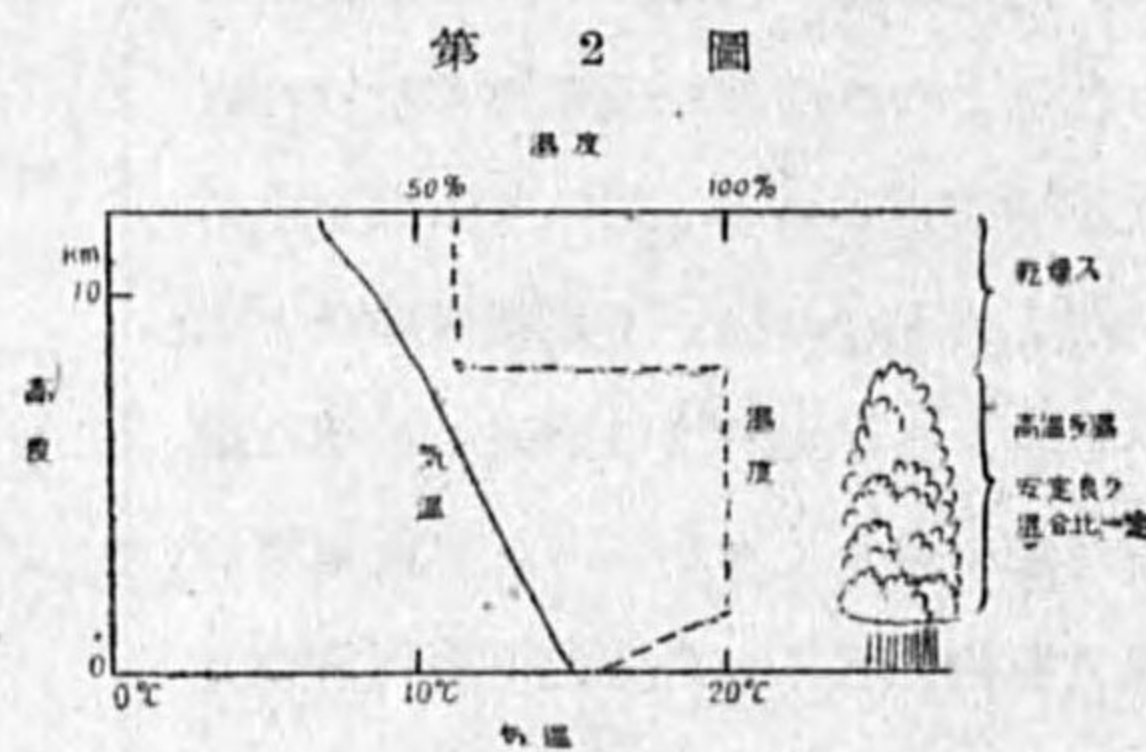
この時風向は殆んど南東ばかりで、風向の變化は起きてゐない。気温は高くなつてゐるが水張程顯著ではなく一般には變らないと見られる。これから考へるとこの雨は濕つた氣塊の浸入に依つて起きた雨と見てよからう。そして同じ様な氣壓配置の場合でもこの様な濕つた氣塊の浸入がなければ降雨は起きない。即ちこの種の降雨は暖前線に依る降雨と非常に良く類似してゐる。唯、暖前線と違ふ點は風や気温に顯著な不連続がない事である。

次にこの様な折りに上空の様を見るとき具体的な數字はあげられないが常に高温、多濕になつてゐる。これは必ずしもこの種の雨ばかりでなく相當の雨がある時は常に上層は高温、多濕となつて成層は甚だ安定して居る。著るしい時は非常に高層まで地上と殆んど同じ温度となつてゐる事すらある。しかし、この層の上には高温ではあるが乾燥した空氣があり、その狀況を圖に模型的に示すと第2圖の如くなる。そしてこの高温、多濕の層では混合比が一定してゐるのが著るしい特徴である。

この結果は理論的に甚だ考へにくい。もし成層が安定でも對流不安定とでも云ふならば安定が破れて降雨を起す事も考へられるが、相當温位も上が高かく絶對安定の状態となつて居るのでこれも考へられない。それにも拘らず降雨があるのである。そうして見るとこれはどうしても收斂氣流があつて地上の暖たかい氣層が上昇して行つたと考へるより外はない。

§3. 理論的考察 まづ第一に暖氣塊の浸入の狀況を調べて見る。今温度の遞減率が場所に依つて大差ないとすれば、地上の等温線と上空の等温線とは平行になる。次に地上の等壓線と等温線が平行してをらず風が傾度風で與へられるとすれば、移行に依り気温の狀況が變化する。

變化は大體 
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial X} u - \frac{\partial T}{\partial y} v \quad (1)$$



第2圖

で與へられよう。但し  $T$  は温度、 $u, v$  は氣流である。正確に云ふならば上昇氣流、熱の出入、氣壓の變化などに依り温度の變化があるがこれは省略する。今風として傾度風をとり、ラプラスの測高公式を使用すると

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{RT}{l} \frac{\partial \log P_0}{\partial y} + T \frac{\partial T}{\partial y} \int_0^z \frac{g}{lT^2} dh \\ v &= \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{RT}{l} \frac{\partial \log P_0}{\partial X} + T \frac{\partial T}{\partial X} \int_0^z \frac{g}{lT^2} dh \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる故、上式に入れると

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \log P_0}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial X} \frac{\partial \log P_0}{\partial X} \quad (3)$$

となる。従つて  $\partial T / \partial X, \partial T / \partial y$  が高さに依つて變りなしとすれば地上も上空も同様に気温が昇る事になる。即ち暖氣塊は地上でも上空でも一様に浸入し、特別に上空が早く現れると云ふ事はない事になる。勿論地上には摩擦がある故、この影響でおくれる事は考へられるが、それにしても多くの場合大きなものではなからう。

以上の結果は上層観測の結果からも大體はうなづける。これに依り暖氣塊が地上から上空まで一つの塊となつて北上すると見てもよい事がわかつたから、次の問題としてこの際、氣塊が如何に變化して行くか調べよう。この種の問題は荒川博士<sup>(1)</sup>等に依り研究されたものがあるが、なほ考ふべき點が澤山にある。荒川博士の結果に依ると気温の變化は下層に限られ、到底雨を降らす様な濕つた氣塊は生じ得ない。従つて單に渦擴散に依る熱傳導だけでは説明つかず、收斂氣流を考へないと都合が悪い。

ところが、一般に氣塊が北上すると收斂氣流がおき、暖氣塊の厚さが北上すると次第に厚くなつて行く。そして緯度  $\varphi_1$  に於ける厚さを  $h_1, \varphi_2$  に於ける厚さを  $h_2$  とすると近似的に

$$h_2 = h_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \quad (4)$$

となる<sup>(2)</sup>事が計算される。従つて例へば緯度25度の氣塊が35度まで北上すると高さは1.35倍になる。これ位の收斂氣流があれば當然凝結も起きてよいわけで、雲が出来ても不思議はない。

次にはこの様に氣塊の高さが一様の割合で高くなつて行くとした時、如何に雲が出来るか調べて見よう。この爲にまづ準備として凝結高度を求めよう。凝結高度は気温、氣壓、濕度で定まり、斷熱圖を用ひれば簡単に求められる。その結果に依ると凝結高度は大體濕度と平行して變化し、気温も多少關係するが、氣壓はあまり影響がない事が知れる。そして相對濕度を  $H$ 、気温を  $t$ 、凝結

(1) 荒川：南下する氣塊内に来る積亂雲と北進する氣塊内に来る霧、氣象集誌, 18, 81, 昭和15年。  
 (2) 荒川著：氣象力學, 128頁。

高度を  $L$  軒とすると次の様な実験式が成立する。

$$L = (0.148 + 0.00146t) \left( \frac{100-H}{H} \right)^{1.22} \quad (5)$$

参考迄に上式から計算した値とシュペルト<sup>(1)</sup>の式に依つて計算した値とを示す。

凝結高度 (軒)

気温 湿度	30	20	10	0	90	80	70
90	0.19 (0.22)	0.18 (0.21)	0.16 (0.20)	0.15 (0.19)	0.13 (0.17)	0.12	0.10
80	0.45 (0.48)	0.41 (0.45)	0.38 (0.43)	0.35 (0.39)	0.31 (0.36)	0.28	0.24
70	0.73 (0.75)	0.68 (0.70)	0.62 (0.65)	0.56 (0.62)	0.51 (0.57)	0.45	0.40
60	1.04 (1.08)	0.96 (1.01)	0.89 (0.93)	0.81 (0.89)	0.72 (0.81)	0.65	0.57
50	1.37 (1.44)	1.26 (1.34)	1.17 (1.29)	1.06 (1.19)	0.95 (1.09)	0.85	0.74
40	1.71 (1.89)	1.58 (1.72)	1.45 (1.61)	1.32	1.19	1.06	0.93
30	2.07 (2.43)	1.91 (2.27)	1.76 (2.11)	1.60	1.45	1.39	1.12
20	2.44 (3.19)	2.25 (2.95)	2.08 (2.75)	1.88	1.69	1.51	1.32
10	2.80 (4.35)	2.58 (3.98)	2.38 (3.75)	2.16	1.94	1.74	1.52

この二つの値の間には少しく不一致があるが、定性的性質は一致してゐる。又 (7) 式から計算した値は断熱圖から求めた値とは一致して居り、どちらの式が良いかは簡単には結論出来ない様に見える。

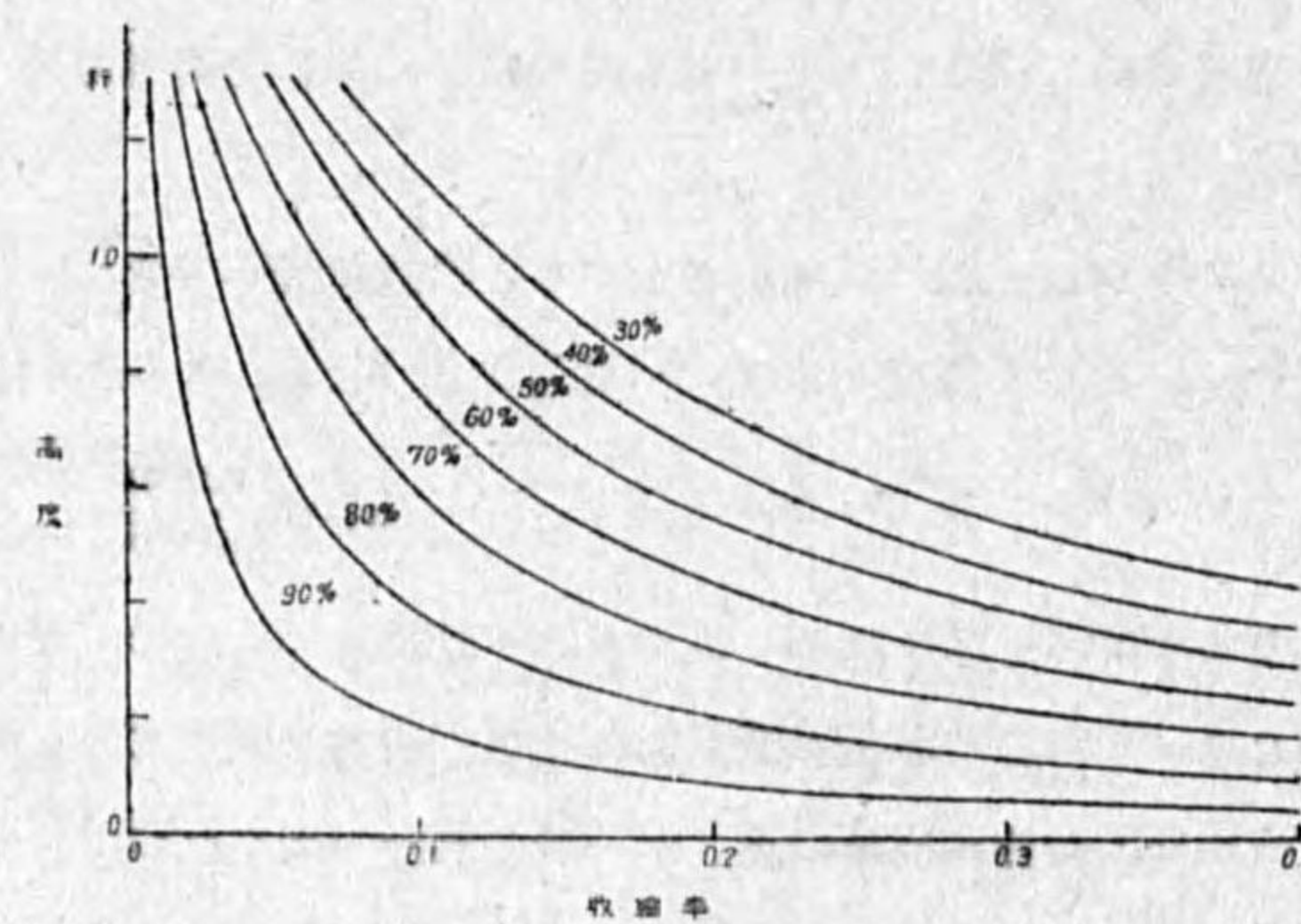
さて北上した氣塊は一樣な割合で收縮して高さが高くなるので、氣塊の上の上方上昇の程度が大きくなる。従つて凝結はまづ上の方から始まり、收縮の割合が大きくなるに従ひ凝結は下に迄及ぶ。今地上で 30°、温度の遞減率が 100 m

につき 0.5°C の氣塊が北上して行つた場合、如何に雲が出来るかを計算して見よう。氣塊の高さの増加率を  $\sigma$  とすれば、高さ  $h$  では  $(1-\sigma)h$  だけの上昇が起る。この上昇が前表の凝結高度より大きくなれば雲が生じ始める。従つてこの高さは簡単に計算出来る筈であつて、この生じ始める高さを初期の氣塊の温度が上空まで一定として計算して見ると第 3 圖の様な結果を得る。

これから暖氣塊が北上し、その高さが次第に増して行くとまづ高い雲が出来、それが次第に厚くなつて行く事が判る。これは前の實際の場合とも一致するのであつてこの様に考へると上層雲が出来、中層雲が出来、遂に下層雲となるのも説明がつく。又數値的に考へて見ても、前に示した様に

(1) 岡田著：氣象學礎石，24 頁。

第 3 圖



氣塊の高さが 2 割位増す事は充分考へられ、この時初期の温度が一樣に 70% とすると雲の底は 3 軒位となり、如何にもあり得る値となる。若し初期の温度が小さければ當然の事ではあるが雲はなかなか低くならず、温度が大きいとすぐ雲が低くなる事が知られる。そして相當の厚さの雲が出来、地形的にでも上昇氣流が出来れば降雨が起る事は容易に理解出来る。

かくして雲が生ずる事は判つたが、今一つ解決を要する問題がある。それは降雨中に於ける大氣の温度の遞減率である。大氣熱力學に依れば降雨の原因となる氣層の上昇があれば不安定になる傾向があるのに、實測に依れば雲の中では反つて遞減率が小さい。これはもし大氣熱力學の假定が正しければ不思議な現象であるが、輻射に依る熱の流れを考へれば説明がつく様である。これを調べて見よう。

雲は水滴の集合であり、水滴は熱線のような輻射線に対しては殆んど完全な黒體と考へられる。今  $Z, Z+dZ$  なる氣層を考へ、下から  $J$  なる熱が入り、上へ  $J+dJ$  なる熱が流れ出るものとする。この  $dJ$  は二つの部分から成立つ。一つはこの層で吸収されるもの、他はこの層から輻射されるものである。従つてこの層の吸収率を  $A$  とすれば

$$dJ = -AJdZ + A\sigma T^4 dZ \quad (6)$$

となる。但し  $\sigma$  はステファン・ボルツマンの常數、 $T$  は氣層の温度である。従つて

$$\frac{dJ}{dZ} = -AJ + A\sigma T^4 \quad (7)$$

となる。これを積分すると

$$J = J_0 e^{-AZ} + e^{-AZ} \int_0^Z e^{A\xi} A\sigma T^4 d\xi \quad (8)$$

となる。 $A$  が大きいとすると、 $Z$  が少しく大きくなれば第一項は省略され

$$\begin{aligned} J &= \sigma T^4 z_{z=0} + 4\sigma T^4 \frac{\partial T}{\partial Z} z_{z=0} - \frac{4\sigma T^3 \partial T}{A \partial Z} \\ &= \sigma T^4 - \frac{4\sigma T^3 \partial T}{A \partial Z} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。同様に上から下へ流れる輻射流を考へると

$$J = \sigma T^4 + \frac{4\sigma T^3 \partial T}{A \partial Z} \quad (10)$$

となる。この差引きが實質的な熱の流れとなる故、輻射に依る熱の流れ  $Q$  は結局

$$Q = -\frac{8\sigma T^3 \partial T}{A \partial Z} \quad (11)$$

となる事を知る。これは丁度熱傳導の式と同じであり、プラントの云ふ輻射傳導<sup>(1)</sup>になる。彼の見

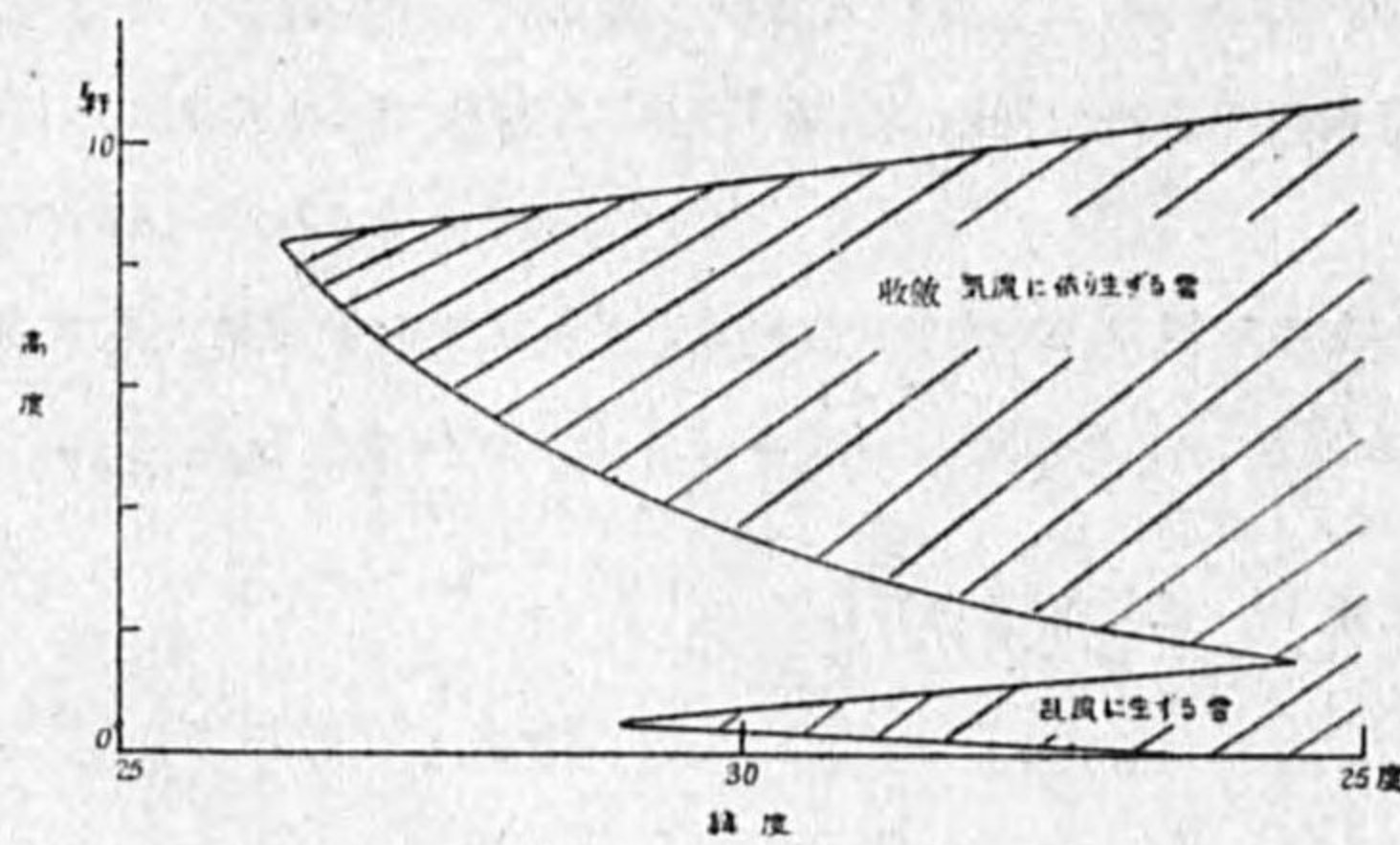
(1) Brunt: Physical and Dynamical Meteorology, 119 頁。

積りに依ると、水蒸氣を考へてみるのでこの項は小さいが、雲の中では小さくない。Aの値の精確な所は判らないが、水滴が殆んど完全黒體と見ると大體視程と同じ様に考へてもよいであらう。さすれば雲、即ち霧の中の視程を500mとするとAは1/500mとなる。一方 $\sigma T^4$ は $0^\circ\text{C}$ で0.6 al/cm<sup>2</sup>/min位であるから、係數の値は溫度熱傳導に直して $5 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{sec}$ となる。これは所謂渦溫度傳導率と同じ桁である。しかも降雨中の様に成層が安定してゐると熱傳導は甚だ小になると考へられるので、輻射傳導が主な項となる。従つて等温に近づく筈で雲の中で溫度の遞減率が小さくなるのも不思議はない事になる。

§4. 暖氣塊の北進に依つて生ずる雲の模様 以上の考察に依り南氣流で雲が如何に厚くなつて行くかが知れた。然し實際の現象はなほ複雑であり、この結果はそのまま成立つものでなく、いろいろ考へべき點がある。例へば氣塊が北上する際雲が出来るのは上空ばかりでなく、下層からも出来る。又南方では一般に背の高い高氣壓圈内に居る故、下層は充分濕つてゐても上空は乾燥してゐると思はれる。従つて假りに下層8杆位が充分濕度が多く75パーセント位とし、その上では非常に乾燥してゐるとする。この様な氣塊が北緯25度邊りから北上したとするとその時出る雲の模様は第4圖の如くなる。これは大體實際の狀況と一致する様に思はれる。

猶同じ様に北上する氣流でありながら夏期の夏型氣壓配置となつた時は天氣よくせいぜい上層雲が出る位である。これは高氣壓に依る下降氣流が強い爲氣塊の濕度が小さいと考へれば説明はつく。しかしこの様な點になると又別に考へる必要があり、この問題は未だ解決したわけではない。

第4圖



## 自由大氣中の輻射に就いて(I)

川畑幸夫, 鮎田正

## §1. 序言

地球及び其の大氣は毎年略々一定量のエネルギーを太陽輻射の形に於て受けて居る。直接太陽より來射するものもあり、又大氣の散亂光——一次二次或は更に高次の——として到達する部分もある。此等を總稱し假に日射と呼び、前者を直達日射、後者を天空輻射と名づけておく。

日射の一部は雲、大氣中の浮遊細末、地面等から、其の儘の形で——性質は何等の變化なく——單に反射せられ、其の殘餘並に前の反射光のうちで再び或は繰返し反射せられたものが地面並に大氣中に吸収せられ、空氣や地面等を高め、或は水分を蒸發せしめる等、諸種の氣象現象の源泉エネルギーとなるが、結局それも最後には地面及び大氣から長波長の熱輻射として空間へ返送されて仕舞ふことは茲に事改めて言ふ迄も無い。此の返送は如何なる機巧に依つて爲されて居るであらうか？ 一つ或は又何處で行はれて居るか？ それは重要な問題であるが、詳細に考へると非常に複雑、且つ困難な問題である。地面の輻射は從來の考へに従ひ、地面を黒體と見做すならば、Stefan-Boltzmannの法則に依り比較的簡単に計算せられるが、大氣中の瓦斯體に因る輻射はそれに比較するときは極めて複雑である。Wienの變位則に依ればミクロン( $\mu$ )を單位とすれば、エネルギー曲線中の最大輻射に對する波長 $\lambda_m$ は

$$\lambda_m T = 2918$$

で與へられる故、通常の氣温例へば $19^\circ\text{C}$  ( $292^\circ\text{K}$ )に對して $\lambda_m$ は $10\mu$ 内外となり、大氣及び地面輻射に對する有效波長域は大體 $5\mu$ 乃至 $20\mu$ の範圍にある。大氣輻射に與かる主な瓦斯體が水蒸氣と炭酸瓦斯の二者であることは、實驗的に疑問の餘地無き所とするも、叙上の波長域内に於ける此等二者の吸収帯は極めて強く、従つて大氣輻射は氣温、水蒸氣量及び炭酸瓦斯量の空間的分布並に兩瓦斯體の吸収係數の波長別強度に著しく左右せられ、此等が精密に知られざる限り計算は不可能である。上述の有効波長域内に於ける炭酸瓦斯の吸収帯は極めて狭く波長範圍が僅かに $1.5\mu$ に及ばないといふ實驗的事實に照し、炭酸瓦斯を少時除外し、大氣輻射は全く水蒸氣のみに因るとするも、其の吸収係數の波長別分布は極めて複雑で、單に其れだけの理由のみよりするも精密な計算は事實殆んど不可能に近い。況んや吸収係數の實驗値そのものが未だ充分精密ならざるに想到せば、問題の困難なること元より明かである。

然し乍ら、翻つて考へてみるに、一年を通じ地球及び大氣を包括して之を見るときは、日射とし





なるから、之を補はんが爲には吸収係数  $a_\lambda$  を割増し置くを要する。今此の割増係数を  $\beta(>1)$  とすれば (5) の代りに

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_\lambda}{dz} &= -\beta a_\lambda \alpha(z) U_\lambda + \beta a_\lambda \alpha(z) S_\lambda, \\ \frac{dG_\lambda}{dz} &= +\beta a_\lambda \alpha(z) G_\lambda - \beta a_\lambda \alpha(z) S_\lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

とすることが出来る。既に斯く考ふる以上は  $U_{\lambda 0}, G_{\lambda 0}$  は最早や  $\theta$  には無関係なる故、それらの代りに單に  $U_\lambda, G_\lambda$  と書く。

$\beta$  は  $\lambda$  にも  $z$  にも無関係な常數で (5) と (6) の解が同一となる如く決定すればよい。Philipp's に依れば

$$\beta = 1.5 \quad (7)$$

とすれば此の條件は可成り精密に満足される故、以下 (6) を用ひ  $\beta = 1.5$  として凡ゆる論議を進める

### § 3. 解

(6) を解けば

$$\left. \begin{aligned} U_\lambda(z) &= e^{-\beta a_\lambda \int_0^z \alpha(\zeta) d\zeta} \left[ c + \beta a_\lambda \int_0^z \alpha(\eta) S_\lambda(\eta) e^{\beta a_\lambda \int_0^\eta \alpha(\zeta) d\zeta} d\eta \right], \\ G_\lambda(z) &= e^{-\beta a_\lambda \int_z^\infty \alpha(\zeta) d\zeta} \left[ C + \beta a_\lambda \int_z^\infty \alpha(\eta) S_\lambda(\eta) e^{\beta a_\lambda \int_\eta^\infty \alpha(\zeta) d\zeta} d\eta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

雲の全く無き快晴の時を考へれば、境界條件は

$$\left. \begin{aligned} G_\lambda(\infty) &= 0, \\ U_\lambda(0) &= S_\lambda(0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。 $S_\lambda(0)$  は地面を黒體と考へれば單に温度のみによつて簡単に知られる函数(黒體輻射)である。

(9) と (8) とより

$$\left. \begin{aligned} U_\lambda(z) &= S_\lambda(0) e^{-\beta a_\lambda \int_0^z \alpha(\zeta) d\zeta} + \beta \int_0^z a_\lambda \alpha(\eta) S_\lambda(\eta) e^{-\beta a_\lambda \int_\eta^z \alpha(\zeta) d\zeta} d\eta, \\ G_\lambda(z) &= +\beta \int_z^\infty a_\lambda \alpha(\eta) S_\lambda(\eta) e^{-\beta a_\lambda \int_z^\eta \alpha(\zeta) d\zeta} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$\alpha(z)$  は既述の如く、1 輻<sup>2</sup>中に含まれた吸収物質質量で、吾々は今炭酸瓦斯は除外し吸収物質はすべて水蒸気のみより成ると假定する。炭酸瓦斯に因る吸収帯は極めて狭い波長域に限られる故、斯くしても近似的に差支へないものと考へられる。又水蒸気量は高さと共に

$$\left. \begin{aligned} \alpha(z) &= \epsilon 10^{-6} e^{-\frac{3g}{RT_m} z} = \epsilon 10^{-6} e^{-nz}, \\ n &= \frac{3g}{RT_m} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

で遞減するものとしよう。 $\epsilon$  は地表の水蒸気張力、 $g$  は重力加速度、 $R$  は瓦斯常數、 $T_m$  は  $z$  の平均温度である。

$$n = \frac{3g}{RT_m} = \frac{3 \times 980}{2.87 \times 10^6 \times T_m} = \frac{1024}{T_m}$$

を種々の  $T_m$  (地面上の高さと考へてもよい) について豫め計算し置く。

第 1 表  $n \times 10^5$  の値

$T_m$	163°	173°	183°	193°	203°	213°	223°	233°
$n \times 10^5$	0.6282	0.5919	0.5596	0.5306	0.5044	0.4808	0.4592	0.4395
$T_m$	243°	253°	263°	273°	283°	293°	303°	313°
$n \times 10^5$	0.4214	0.4048	0.3893	0.3751	0.3619	0.3495	0.3380	0.3272

簡便のために

$$k_\lambda' = \frac{10^{-6} \epsilon \beta a_\lambda}{n} \quad (12)$$

更に又

$$k_\lambda(z, \xi) = k_\lambda' (e^{-nz} - e^{-n\xi}) \quad (13)$$

と置けば (10) は

$$\left. \begin{aligned} U_\lambda(z) &= S_\lambda(0) e^{k_\lambda(z, 0)} + \int_0^z \frac{d}{d\eta} e^{k_\lambda(z, \eta)} S_\lambda(\eta) d\eta, \\ G_\lambda(z) &= - \int_z^\infty \frac{d}{d\eta} e^{-k_\lambda(z, \eta)} S_\lambda(\eta) d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

第一式は部分積分を施して

$$U_\lambda(z) = S_\lambda(z) - \int_0^z e^{k_\lambda(z, \eta)} \frac{d}{d\eta} S_\lambda(\eta) d\eta \quad (15)'$$

となる。

第二式は、對流圈の高さを  $H$  とし、0 から  $H$  迄と、 $H$  から  $\infty$  迄に分けて部分積分すれば

$$G_\lambda(z) = S_\lambda(z) - e^{-k_\lambda(z, \infty)} S_\lambda(\infty) + \int_z^H e^{-k_\lambda(z, \eta)} \frac{d}{d\eta} S_\lambda(\eta) d\eta + \int_H^\infty e^{-k_\lambda(z, \eta)} \frac{d}{d\eta} S_\lambda(\eta) d\eta$$

となるが、成層圏内に於ける温度は一定なりと考へれば最後の項  $\int_H^\infty \dots$  は零となる故

$$G_\lambda(z) = S_\lambda(z) - e^{-k_\lambda(z, \infty)} S_\lambda(\infty) + \int_z^H e^{-k_\lambda(z, \eta)} \frac{d}{d\eta} S_\lambda(\eta) d\eta \quad (15)''$$

(15)', (15)'' が求むる解であるが、此の儘では數値計算は困難である。そこで輻射は地面から成層圏の底まで直線的に遞減するものとする。即ち

$$\left. \begin{aligned} S_\lambda(z) &= S_\lambda(0) - \gamma_\lambda z, \\ \gamma_\lambda &= \frac{S_\lambda(0) - S_\lambda(H)}{H} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

対流圏の高さ  $H$  は温帯から赤道に行くに従い高くなる事はよく知られた處ではあるが、それは季節によつても違ふから假に年中緯度に関せず一定で約 8 軒と假定してみよう。

一方に於て又成層圏内では温度は一定なる故

$$S_\lambda(z) = S_\lambda(H), \quad z > H. \quad (17)$$

此等の (16), (17) を用ひて上記 (15)', (15)'' を變形すれば

$$\left. \begin{aligned} U_\lambda(z) &= S_\lambda(z) + \gamma_\lambda e^{-k_\lambda z} \int_0^z e^{k_\lambda \eta} e^{-n\eta} d\eta, \\ G_\lambda(z) &= S_\lambda(z) - e^{-k_\lambda z} S_\lambda(H) - \gamma_\lambda e^{-k_\lambda z} \int_z^H e^{k_\lambda \eta} e^{-n\eta} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

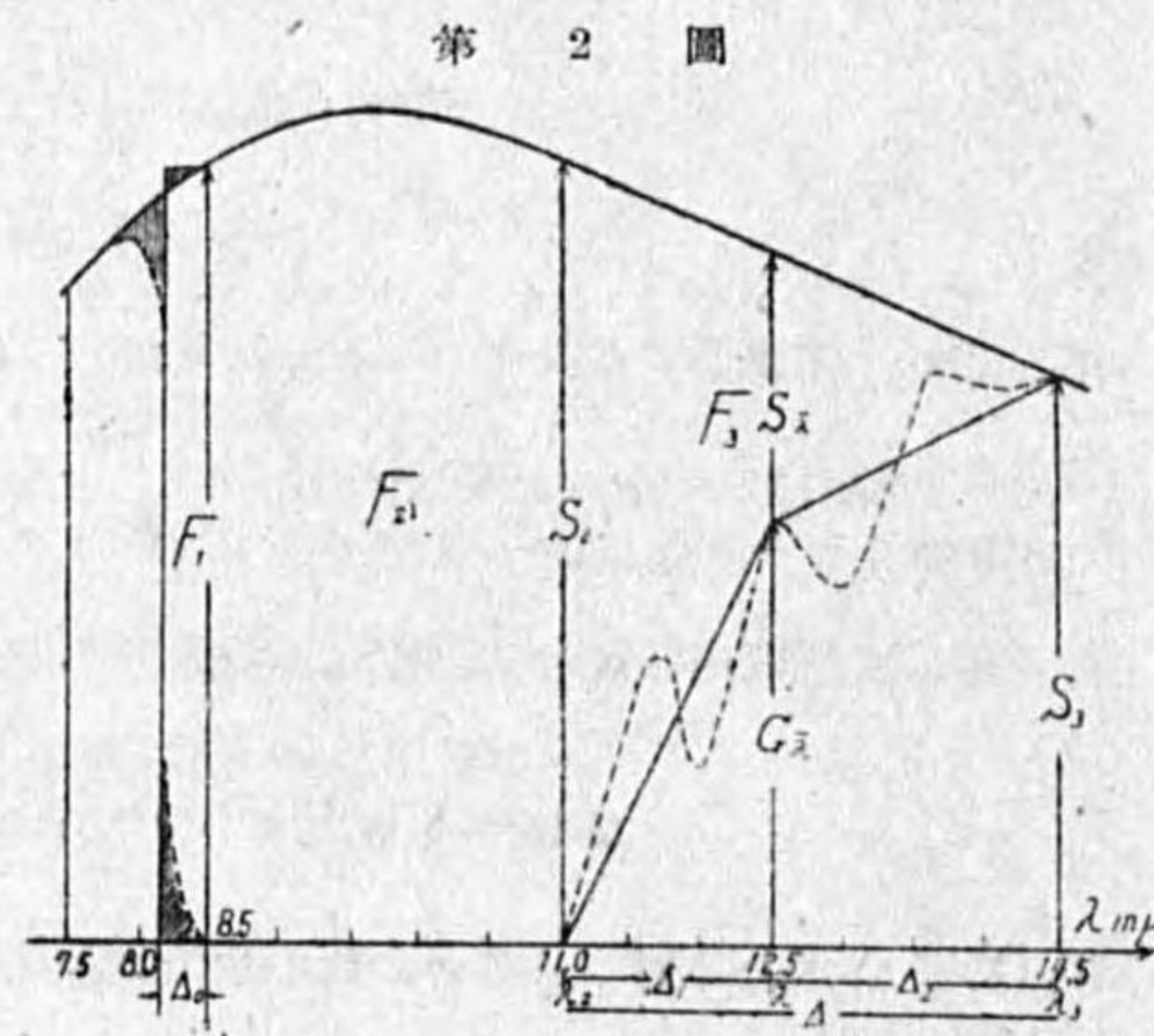
実際に高さ  $z$  にある水平なる單位面積を横切つて上方へ向つて流れる輻射量は  $U$  と  $G$  の差で、之を有效輻射 (Effective outgoing radiation) なる意味に於て  $E_\lambda$  と書けば

$$\begin{aligned} E_\lambda &= U_\lambda - G_\lambda \\ &= e^{-k_\lambda(z, \infty)} S_\lambda(H) + \gamma_\lambda \left[ e^{k_\lambda z} \int_0^z e^{-k_\lambda \eta} e^{-n\eta} d\eta + e^{-k_\lambda z} \int_z^H e^{k_\lambda \eta} e^{-n\eta} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

これが快晴で且つ水蒸氣の分布が標準的な場合に於ける有效輻射を與へる式である。吾々は此の式の中に入つて來る吸収係數に適當な値を與へ、然る後波長について積分すればよい。此の式を導くために假定したことは、(i) 水蒸氣の垂直分布は (11) 式で與へられること (ii) 対流圏の高さは一定で、それを 8 軒とし、成層圏内の温度は一定とせること (iii) 輻射は地面からトロポポーズ迄直線的に減小すること、以上三點である。

#### §4. 近似計算

(19) でも實際の數値計算は甚だ困難である。積分が初等函数を以て實行し難いのも其の理由の一つではあるが、それより更にもつと困難な障碍は  $k_\lambda, k'_\lambda$  が吸収係數  $a_\lambda$  の函数で、此の  $a_\lambda$  が既述せる如く波長と共に極めて複雑に變化するに因る。そこで吾々は Philipps と同様な近似計算を行ふ。今  $\mu$  を單位とせる波長を横軸にとり、それを圖に示す如く幾つかの波長域 ( $\Delta_0 = 8.0 - 8.5\mu, \lambda_1 - \lambda_2, \Delta_1 = 11.0 - 12.5\mu,$



第 2 圖

$\Delta_2 = 12.5 - 14.5\mu, \Delta = 11.0 - 14.5\mu$ ) に分割して考へる。或る温度に對する黒體輻射を上限の曲線で、又 Fowle<sup>(1)</sup> の吸収係數を點線で表す。吸収係數の値としては Hettner<sup>(2)</sup> の實測、Albrecht<sup>(3)</sup> の計算等あるも、前者は人工的に熱したる水蒸氣に對するものであり、諸家の研究によれば現實の大氣に對してはよくあてはまらぬことが分つて居り、又 Albrecht の値も亦同様なることが認められて居る。夜間輻射の實測よりすれば、Fowle がウィルソン山天文臺で空氣清澄なるとき實際の大氣につき分光學的測光法によりて求めたる結果が最も事實に近き結果を與へると考へられるから、此の理由から本計算はすべて Fowle の吸収係數に依ることとする。

今或る温度に對する有效輻射を考へて見るに、それは (i)  $S_\lambda$ -曲線 (ii) 縱軸 (iii) 吸收曲線、以上三曲線を以て圍まれた面積で表される。先づ各波長域について考へてみるに

- (a)  $\lambda < 7.5\mu$  では吸收は殆んど完全なる故、此の外延波長域は有效輻射に何等關與しない。
- (b)  $\lambda = 7.5 \sim 8.5\mu$  の範圍では吸收係數が非常に急激に減小する故、此の波長域内の有效輻射は圖より明かなる如く  $F_1 = \Delta_0 S_1$  で與へられる。
- (c)  $\lambda = 8.5 \sim 11.0\mu$  の範圍内では水蒸氣は輻射に對して全く透明なる故、此の波長域内の有效輻射は單に  $F_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda$  で與へられる。
- (d)  $\lambda = 11.0 \sim 14.5\mu$  の範圍内が最も困難な部分で、吸收係數は波長と共に極めて複雑に變化するが、然し之を平滑すれば圖の點線に示す如くなる故、今  $\bar{\lambda} = 12.5\mu$  で圖に示す如く大體之を二つの直線を以て代用し得ることとなり

$$F_3 = (S_2 + S_3) \frac{\Delta}{2} - G_{\bar{\lambda}} \frac{\Delta}{2} - (G_{\bar{\lambda}} + S_3) \frac{\Delta}{2} = S_2 \frac{\Delta}{2} + E_{\bar{\lambda}} \frac{\Delta}{2},$$

但し  $E_{\bar{\lambda}} = S_{\bar{\lambda}} - G_{\bar{\lambda}}$  となる。

- (e)  $\lambda > 14.5\mu$  になると吸收が再び完全となる故、此の外延波長域は又考へなくてもよい。有效輻射量  $E$  は結局以上すべてを總和すればよく

$$E = \Delta_0 S_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda + S_2 \frac{\Delta}{2} + E_{\bar{\lambda}} \frac{\Delta}{2} \quad (20)$$

となり、之を (19) に代入すれば

$$\begin{aligned} E &= \Delta_0 S_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda + S_2 \frac{\Delta}{2} \\ &+ \frac{\Delta}{2} \left[ e^{-k_{\bar{\lambda}} z} S_{\bar{\lambda}}(H) + \gamma_{\bar{\lambda}} \left\{ e^{k_{\bar{\lambda}} z} \int_0^z e^{-k_{\bar{\lambda}} \eta} e^{-n\eta} d\eta + e^{-k_{\bar{\lambda}} z} \int_z^H e^{k_{\bar{\lambda}} \eta} e^{-n\eta} d\eta \right\} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

(1) Smithsonian Physical Table.  
 (2) Ann. Phys. 55 (1918).  
 (3) Met. Z. (1931).

$S$  は Planck の輻射則より一般に計算されるも、更に Wien の變位則を併用すれば極めて簡単に求まる<sup>(1)</sup>。即ち Planck の法則に依る輻射を  $S_\lambda$ , Wien の變位則  $\lambda_m T = 2918.4 \mu (\text{K})$  に於ける  $\lambda_m$  に對する輻射を  $S_m$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_\lambda}{S_m} &= 4.71666 \times 10^{-2} \frac{(c_2/\lambda T)^5}{e^{c_2/\lambda T} - 1}, \\ c_2 &= 14490 \mu (\text{K}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる故、波長と温度を與へれば  $S_\lambda/S_m$  が求まり、他方  $S_m$  も亦  $T$  を與へれば知られる故、それによつて  $S_\lambda$  が計算される。  $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda$  は斯くの如き方法により波長を各々  $0.5 \mu$  毎に切つて計算せるものを  $\lambda_1$  から  $\lambda_2$  迄總和したものである (第 2 表)。

第 2 表  $100 \times S$  (カロリー/厘分)

氣 温	183°	193°	203°	213°	223°	233°	243°
$S_1 = S_{\lambda=8.3\mu}$	0.09806	0.16065	0.25085	0.37557	0.54234	0.75931	1.03389
$\Delta_0 S_1$	0.02942	0.04820	0.07525	0.11267	0.16370	0.22779	0.31017
$S_2 = S_{\lambda=11.0\mu}$	0.24912	0.36174	0.50642	0.68710	0.90653	1.17194	1.48031
$\frac{\Delta_1 S_2}{2}$	0.17438	0.25322	0.35449	0.48097	0.63597	0.82036	1.03622
$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda$	0.47150	0.71746	1.04843	1.47020	2.02831	2.67323	3.45092
$P(T)$ (次節参照)	0.6753	1.0189	1.4782	2.0638	2.8270	3.7214	4.7973

氣 温	253°	263°	273°	283°	293°	303°	313°
$S_1 = S_{\lambda=8.3\mu}$	1.37372	1.78564	2.27842	2.85728	3.52883	4.29760	5.16976
$\Delta_0 S_2$	0.41212	0.53569	0.68353	0.85718	1.05865	1.28928	1.55093
$S_2 = S_{\lambda=11.0\mu}$	1.83574	2.23962	2.69476	3.19981	3.75799	4.36653	5.02747
$\frac{\Delta_1 S_2}{2}$	1.28502	1.56773	1.88633	2.23987	2.63059	3.05657	3.51923
$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda$	4.37595	5.15601	6.70834	8.13789	9.75858	11.57229	13.59450
$P(T)$ (次節参照)	6.0731	7.2594	9.2782	11.2349	13.4478	15.9181	18.6647

$S_\lambda(H)$  及び  $\gamma_\lambda$  は  $s=0$  並に  $s=H$  に於ける氣温によつて定まる。今地表附近の氣温を與へ、氣温の遞減率をすべて  $6^\circ/\text{km}$  とすれば、 $S_\lambda(H)$  及び  $\gamma_\lambda$  の値は次表の如くなる。

第 3 表  $S_\lambda(H)$  及び  $\gamma_\lambda$  の値

地表面の氣温	223°	233°	243°	253°	263°	273°	283°	293°	303°	313°
$S_\lambda(H) \times 10^2$	0.2256	0.3244	0.4497	0.6040	0.7894	1.0074	1.2600	1.5478	1.8643	2.2300
$\gamma_\lambda \times 10^2 (s=0 \text{ km})$	0.1643	0.1966	0.2305	0.2578	0.3016	0.3383	0.3750	0.4116	0.4493	0.4843
" ( " 1 )	0.1364	0.1643	0.1937	0.2374	0.2557	0.2877	0.3199	0.3519	0.3852	0.4150
" ( " 2 )	0.1099	0.1334	0.1584	0.1845	0.2113	0.2386	0.2662	0.2952	0.3240	0.3494
" ( " 3 )	0.0863	0.1055	0.1261	0.1477	0.1700	0.1927	0.2155	0.2385	0.2628	0.2838
" ( " 4 )	0.0653	0.0805	0.0967	0.1139	0.1316	0.1499	0.1681	0.1863	0.2060	0.2226
" ( " 5 )	0.0456	0.0568	0.0688	0.0816	0.0949	0.1085	0.1222	0.1357	0.1509	0.1628
" ( " 6 )	0.0296	0.0371	0.0452	0.0537	0.0625	0.0717	0.0808	0.0898	0.1002	0.1031
" ( " 7 )	0.0159	0.0187	0.0228	0.0272	0.0317	0.0364	0.0410	0.0454	0.0512	0.0540
" ( " 8 )	0.0067	0.0027	0.0031	0.0035	0.0038	0.0041	0.0042	0.0047	0.0050	0.0053

(1) Z. Miduno: Proc. Physico. Math. Soc. Japan, Vol. 20, 1938. 又 T. Terada: Geophys. Mag. 13, No. 2 (1939).

§ 5. 實測との比較

此處で吾々は今迄の計算を一應實測と比較し其の正否を確かめておき度いと思ふ。

實測は數多あるが、嘗て A. Ångström<sup>(1)</sup> が日射の無い晴夜長期に互つて觀測した結果は代表的なもの一つと考へられる。同氏は此の觀測の結果から夜間輻射はエンピリカルに

$$E = [A + B10^{-N\epsilon}] \sigma T_0^4 \quad (23)$$

で與へられ、 $A, B$  は常數で

$$A = 0.27, B = 0.26, N = 0.069 \quad (24)$$

なることを述べた。  $\sigma$  は黒體輻射に關する Stefan-Boltzmann の常數で  $T_0$  は地表の氣温である。

今此の Ångström の式と比較するために吾々の求めた結果を變形してみよう。

(21) に於ける  $k_\lambda, k'_\lambda$  は  $a_\lambda = 0.415$  を含む。従つて  $T$  の最低を  $163^\circ$ , 最高を  $313^\circ$  とすれば

$$0.099e < k'_\lambda < 0.190e$$

となる。然るに  $T = 163^\circ$  では  $\epsilon$  は實際上殆んど零に近く、 $T = 313^\circ$  では假に  $s = 30 \text{ mm}$  とすれば

$$0 < k'_\lambda < 5.7$$

一方に於て  $n = 0.63 \times 10^{-5} \sim 0.32 \times 10^{-5}$ ,  $s = 0 \sim 8 \times 10^5$  の程度なる故  $e^{-ns}$  は 0 と 1 の間にあり、 $e^{-k'_\lambda e^{-ns}}$  は  $e^{-1}$  と 1 の間にあることとなる。實際上記の極限について計算してみると  $0.827 \sim 1.000$  の範囲内にあることが知られる。故に (21) に於て右邊の括弧内を

$$e^{-k'_\lambda e^{-ns}} \left( S_\lambda(H) + \gamma_\lambda \int_s^H e^{k'_\lambda e^{-n\eta}} d\eta \right) + \gamma_\lambda e^{k'_\lambda e^{-ns}} \int_0^s e^{-k'_\lambda e^{-n\eta}} d\eta$$

と書けば  $S_\lambda(H)$  と  $\gamma_\lambda$  は第 3 表からわかるように數值的に同じオーダーの量であるから  $S_\lambda(H) \ll \gamma_\lambda \int_s^H e^{-k'_\lambda e^{-n\eta}} d\eta$  となり、 $S_\lambda(H)$  は棄却することが出来る。即ち

$$E = \left( \Delta_0 S_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda + S_2 \frac{\Delta_1}{2} \right) + \frac{\Delta}{2} \gamma_\lambda \left( e^{-k'_\lambda e^{-ns}} \int_0^s e^{-k'_\lambda e^{-n\eta}} d\eta + e^{-k'_\lambda e^{-ns}} \int_s^H e^{k'_\lambda e^{-n\eta}} d\eta \right). \quad (25)$$

Ångström の式と同形にするために  $s=0$  と置き且つ又  $P, Q$  を

$$\left. \begin{aligned} P(T) &= \Delta_0 S_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_\lambda d\lambda + S_2 \frac{\Delta_1}{2}, \\ Q(T, \epsilon) &= \frac{\Delta}{2} \gamma_\lambda \int_0^s e^{k'_\lambda e^{-n\eta}} d\eta = \frac{\Delta}{2} \gamma_\lambda \frac{10^{-6} \beta a_\lambda}{3g} RT H \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} E &= P(T) + Q(T, \epsilon) e^{-m\epsilon}, \\ \text{但し } m &= -\frac{10^{-6} \beta a_\lambda}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(1) A. Ångström: Met. Z. 33 (1916) 或は又 Medd. Stat. Meteo-hydrogr. Anst. 3 (1927) Nr. 12 (1936.)

となる。これは Ångström が實測より求めた (23), (24) と全く同型である。

然らば實際數値的にはどうであるかを調べて見る。

吾々の場合  $P(T)$  は第 2 表の最後の行に與へてあり、又 Ångström の場合には  $0.27\sigma T^4$  を作ればよい。 $Q(T, \varepsilon)$  の方は、吾々の場合の計算結果は次節第 4 表  $z=0$  秆の場合に當り、Ångström の場合には同式が 10 を底とする對數と

吾々の理論と Ångström の實測の比較

なつて居るから吾々の場合に比較するために 0.43429 をかけて 0.43429  $\times 0.26\sigma T^4$  を求め兩者を比較すればよい。比較の結果を右表に示す。

此の比較表より見らるゝ如く、兩者は可成りよく一致して居ると見做すことが出来る。

§ 6. 種々の場合に對する計算結果 (雲無し)

(25) の各常數に既述の如き夫々の値を與へ、地表の氣温、地表の水蒸氣張力を引數として各層高毎に實際グラフィカルに積分せる結果を次表に示す。

本表に見らるゝ如く、有效輻射量は一般に地表の氣温と共に増大する。これは常識的にも然るべき處と考へられる。

又高空に行くに従ひ有效輻射量は一般に減小することが認められる。然し乍ら地表の極く近くで

第 4 表  $E$  (カロリー/糧<sup>2</sup>分) ( $T$ =地表氣温,  $\varepsilon$ =地表水蒸氣張力)

	$z=0$ 秆				$z=1$ 秆			
	$T$	$\varepsilon$	$e^{-0.139\varepsilon}$	$e^{-0.145\varepsilon}$	$T$	$\varepsilon$	$e^{-0.086\varepsilon}$	$e^{-0.071\varepsilon}$
$T=233^\circ$	0.037	+0.033	$e^{-0.139\varepsilon}$	$e^{-0.145\varepsilon}$	0.031	+0.030	$e^{-0.086\varepsilon}$	+0.003 $e^{-0.071\varepsilon}$
243	0.048	+0.040	$e^{-0.145\varepsilon}$	$e^{-0.151\varepsilon}$	0.048	+0.036	$e^{-0.092\varepsilon}$	+0.004 $e^{-0.075\varepsilon}$
253	0.061	+0.046	$e^{-0.151\varepsilon}$	$e^{-0.157\varepsilon}$	0.053	+0.042	$e^{-0.097\varepsilon}$	+0.005 $e^{-0.080\varepsilon}$
263	0.076	+0.055	$e^{-0.157\varepsilon}$	$e^{-0.162\varepsilon}$	0.067	+0.051	$e^{-0.103\varepsilon}$	+0.005 $e^{-0.084\varepsilon}$
273	0.093	+0.065	$e^{-0.162\varepsilon}$	$e^{-0.168\varepsilon}$	0.082	+0.059	$e^{-0.108\varepsilon}$	+0.006 $e^{-0.088\varepsilon}$
283	0.112	+0.074	$e^{-0.168\varepsilon}$	$e^{-0.174\varepsilon}$	0.100	+0.068	$e^{-0.114\varepsilon}$	+0.007 $e^{-0.093\varepsilon}$
293	0.134	+0.084	$e^{-0.174\varepsilon}$	$e^{-0.179\varepsilon}$	0.120	+0.077	$e^{-0.119\varepsilon}$	+0.007 $e^{-0.097\varepsilon}$
303	0.159	+0.095	$e^{-0.179\varepsilon}$		0.143	+0.088	$e^{-0.124\varepsilon}$	+0.008 $e^{-0.102\varepsilon}$

	$z=2$ 秆				$z=3$ 秆			
	$T$	$\varepsilon$	$e^{-0.162\varepsilon}$	$e^{-0.168\varepsilon}$	$T$	$\varepsilon$	$e^{-0.031\varepsilon}$	$e^{-0.022\varepsilon}$
$T=233^\circ$	0.027	+0.026	$e^{-0.162\varepsilon}$	+0.007 $e^{-0.168\varepsilon}$	0.022	+0.023	$e^{-0.031\varepsilon}$	+0.010 $e^{-0.022\varepsilon}$
243	0.035	+0.032	$e^{-0.168\varepsilon}$	+0.008 $e^{-0.174\varepsilon}$	0.030	+0.028	$e^{-0.034\varepsilon}$	+0.011 $e^{-0.024\varepsilon}$
253	0.046	+0.038	$e^{-0.174\varepsilon}$	+0.009 $e^{-0.179\varepsilon}$	0.040	+0.033	$e^{-0.038\varepsilon}$	+0.013 $e^{-0.026\varepsilon}$
263	0.058	+0.045	$e^{-0.179\varepsilon}$	+0.011 $e^{-0.185\varepsilon}$	0.050	+0.040	$e^{-0.041\varepsilon}$	+0.016 $e^{-0.029\varepsilon}$
273	0.072	+0.053	$e^{-0.185\varepsilon}$	+0.012 $e^{-0.191\varepsilon}$	0.063	+0.047	$e^{-0.045\varepsilon}$	+0.018 $e^{-0.031\varepsilon}$
283	0.089	+0.061	$e^{-0.191\varepsilon}$	+0.013 $e^{-0.197\varepsilon}$	0.078	+0.055	$e^{-0.049\varepsilon}$	+0.020 $e^{-0.034\varepsilon}$
293	0.108	+0.070	$e^{-0.197\varepsilon}$	+0.014 $e^{-0.203\varepsilon}$	0.096	+0.063	$e^{-0.053\varepsilon}$	+0.022 $e^{-0.037\varepsilon}$
303	0.130	+0.080	$e^{-0.203\varepsilon}$	+0.016 $e^{-0.209\varepsilon}$	0.116	+0.072	$e^{-0.057\varepsilon}$	+0.024 $e^{-0.040\varepsilon}$

$T=233^\circ$	$z=4$ 秆					$z=5$ 秆				
	$\varepsilon$	$e^{-0.017\varepsilon}$	$e^{-0.020\varepsilon}$	$e^{-0.022\varepsilon}$	$e^{-0.025\varepsilon}$	$\varepsilon$	$e^{-0.010\varepsilon}$	$e^{-0.011\varepsilon}$	$e^{-0.014\varepsilon}$	$e^{-0.015\varepsilon}$
243	0.018	+0.020	$e^{-0.017\varepsilon}$	+0.014 $e^{-0.010\varepsilon}$	$e^{-0.011\varepsilon}$	0.015	+0.016	$e^{-0.010\varepsilon}$	+0.017 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.004\varepsilon}$
253	0.025	+0.024	$e^{-0.020\varepsilon}$	+0.016 $e^{-0.013\varepsilon}$	$e^{-0.013\varepsilon}$	0.021	+0.020	$e^{-0.011\varepsilon}$	+0.020 $e^{-0.006\varepsilon}$	$e^{-0.006\varepsilon}$
263	0.033	+0.029	$e^{-0.022\varepsilon}$	+0.018 $e^{-0.016\varepsilon}$	$e^{-0.016\varepsilon}$	0.028	+0.024	$e^{-0.014\varepsilon}$	+0.023 $e^{-0.009\varepsilon}$	$e^{-0.009\varepsilon}$
273	0.044	+0.035	$e^{-0.025\varepsilon}$	+0.021 $e^{-0.019\varepsilon}$	$e^{-0.019\varepsilon}$	0.037	+0.030	$e^{-0.015\varepsilon}$	+0.026 $e^{-0.012\varepsilon}$	$e^{-0.012\varepsilon}$
283	0.055	+0.041	$e^{-0.028\varepsilon}$	+0.024 $e^{-0.022\varepsilon}$	$e^{-0.022\varepsilon}$	0.048	+0.035	$e^{-0.017\varepsilon}$	+0.030 $e^{-0.015\varepsilon}$	$e^{-0.015\varepsilon}$
293	0.070	+0.048	$e^{-0.031\varepsilon}$	+0.026 $e^{-0.025\varepsilon}$	$e^{-0.025\varepsilon}$	0.061	+0.042	$e^{-0.020\varepsilon}$	+0.033 $e^{-0.018\varepsilon}$	$e^{-0.018\varepsilon}$
303	0.085	+0.056	$e^{-0.034\varepsilon}$	+0.029 $e^{-0.028\varepsilon}$	$e^{-0.028\varepsilon}$	0.076	+0.049	$e^{-0.022\varepsilon}$	+0.036 $e^{-0.020\varepsilon}$	$e^{-0.020\varepsilon}$

$T=233^\circ$	$z=6$ 秆					$z=7$ 秆				
	$\varepsilon$	$e^{-0.006\varepsilon}$	$e^{-0.006\varepsilon}$	$e^{-0.007\varepsilon}$	$e^{-0.008\varepsilon}$	$\varepsilon$	$e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.004\varepsilon}$	$e^{-0.004\varepsilon}$
243	0.012	+0.013	$e^{-0.006\varepsilon}$	+0.021 $e^{-0.000\varepsilon}$	$e^{-0.000\varepsilon}$	0.009	+0.009	$e^{-0.003\varepsilon}$	+0.024 $e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$
253	0.017	+0.016	$e^{-0.006\varepsilon}$	+0.023 $e^{-0.001\varepsilon}$	$e^{-0.001\varepsilon}$	0.013	+0.012	$e^{-0.003\varepsilon}$	+0.028 $e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$
263	0.024	+0.020	$e^{-0.008\varepsilon}$	+0.027 $e^{-0.001\varepsilon}$	$e^{-0.001\varepsilon}$	0.020	+0.015	$e^{-0.004\varepsilon}$	+0.032 $e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$
273	0.032	+0.024	$e^{-0.009\varepsilon}$	+0.031 $e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$	0.027	+0.019	$e^{-0.006\varepsilon}$	+0.037 $e^{-0.001\varepsilon}$	$e^{-0.001\varepsilon}$
283	0.041	+0.029	$e^{-0.010\varepsilon}$	+0.035 $e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$	0.035	+0.023	$e^{-0.006\varepsilon}$	+0.041 $e^{-0.001\varepsilon}$	$e^{-0.001\varepsilon}$
293	0.053	+0.035	$e^{-0.012\varepsilon}$	+0.039 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$	0.046	+0.029	$e^{-0.007\varepsilon}$	+0.046 $e^{-0.001\varepsilon}$	$e^{-0.001\varepsilon}$
303	0.067	+0.042	$e^{-0.014\varepsilon}$	+0.043 $e^{-0.004\varepsilon}$	$e^{-0.004\varepsilon}$	0.058	+0.034	$e^{-0.008\varepsilon}$	+0.050 $e^{-0.000\varepsilon}$	$e^{-0.000\varepsilon}$

$T=233^\circ$	$z=8$ 秆				
	$\varepsilon$	$e^{-0.01\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.002\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
243	0.007	+0.006	$e^{-0.01\varepsilon}$	+0.027 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
253	0.010	+0.008	$e^{-0.002\varepsilon}$	+0.033 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
263	0.016	+0.011	$e^{-0.002\varepsilon}$	+0.036 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
273	0.022	+0.014	$e^{-0.003\varepsilon}$	+0.042 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
283	0.030	+0.018	$e^{-0.004\varepsilon}$	+0.047 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
293	0.040	+0.022	$e^{-0.004\varepsilon}$	+0.052 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$
303	0.050	+0.027	$e^{-0.006\varepsilon}$	+0.058 $e^{-0.003\varepsilon}$	$e^{-0.003\varepsilon}$

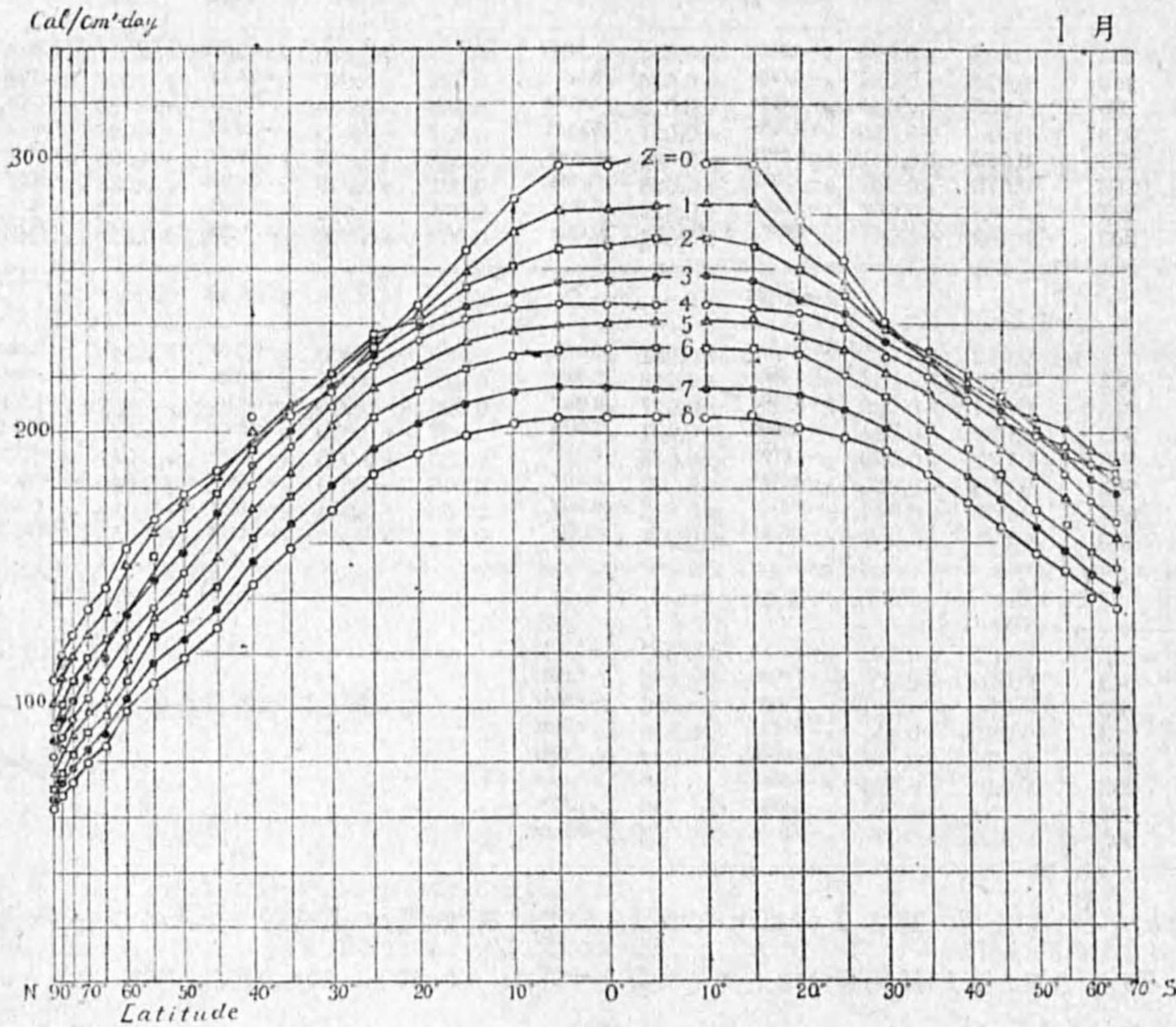
は必ずしもそうでない。高さ 1 秆以下の低層に於ては有效輻射の逆轉層とでも名づくべき層位が存在するのである。此の逆轉層は地上何米に存在するか、50 米か、100 米或は 500 米かといふことは此の儘でははつきり分らない。1 秆以下の層位についてももう少し細かく計算すれば分るべきであるが今はこれについて觸れないこととする。然しともかく該層に於ては上向する有效輻射の量は其の上下の何れの層よりも大きいのである。これは地面と該層間に存在する水蒸氣に因る上向輻射量と、該層より上空に存在する水蒸氣の下向輻射量との割合 (水蒸氣の吸收係數をも考へに入れて) に依るものと考へられる。此のことに就いて論議せる研究は未だ見當らぬ。果して事實であるかどうか? 自由大氣中に於て確實なる輻射測定が存在せざる現今に於ては確證すべき手段がない。

§ 7. 各層位に於ける有效輻射の地理學的分布 (雲無し)

前節第 4 表は雲の全く無い晴天時に於て各層位を通過して上方に向ふ有效輻射を與へる。其の際必要なのは地表附近の氣温と水蒸氣張力  $\varepsilon$  のみであり、此等は觀測から場所毎に又季節毎に知られて居る量である。

そこで今四季の代表として 1 月及び 7 月を選び、各緯度に於ける有效輻射の断面圖を作つてみよう。地表の平均氣温としては岡田「氣象學」52 頁の値を用ひ、又水蒸氣張力は同書 130 頁の緯度別温度と上述の氣温とより計算せるものを使用する。

第 3 圖

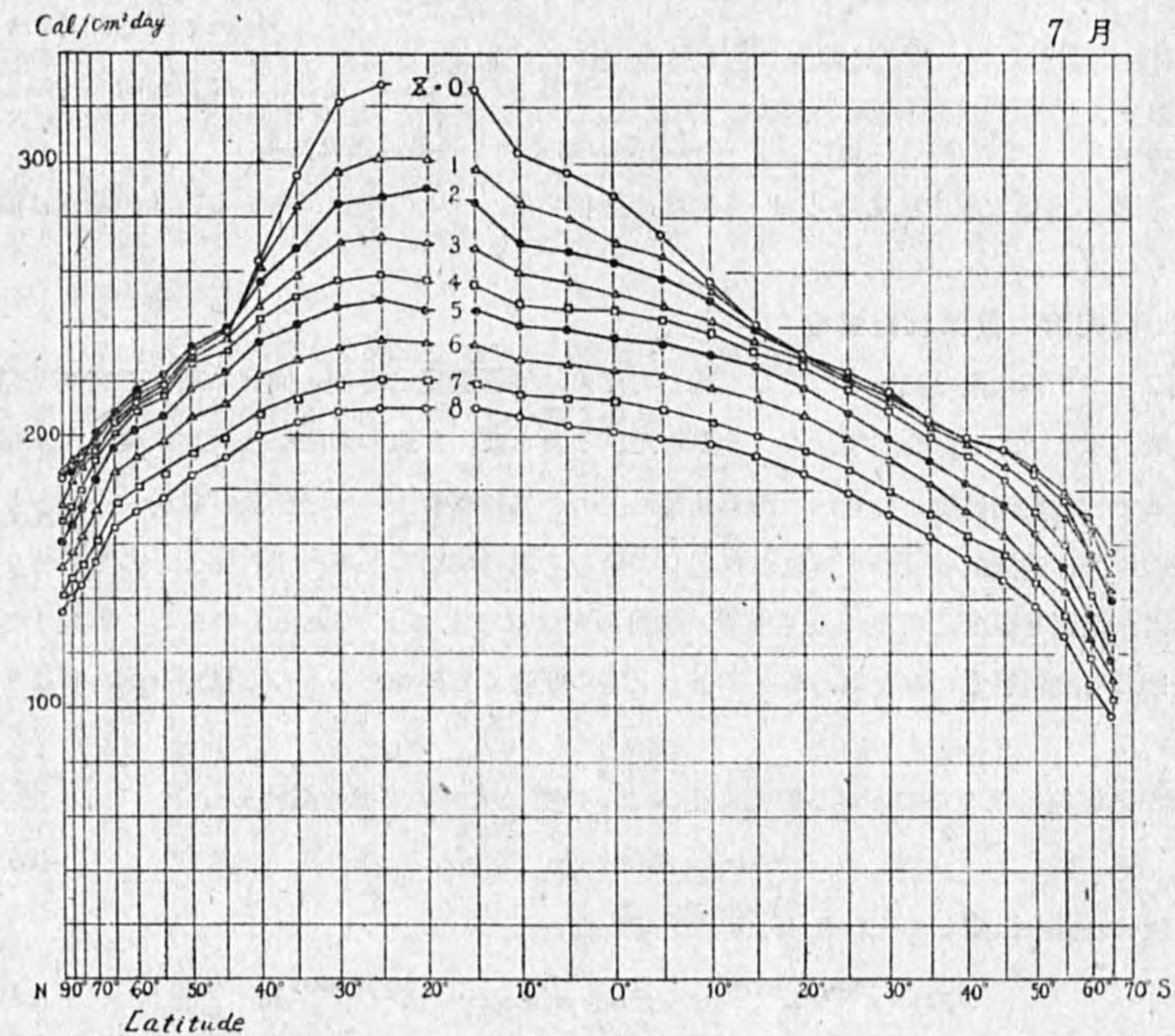


斯くして計算せる結果は第 3 圖 (1 月) 及び第 4 圖 (7 月) に示さるゝ如くである。尤も地表面  $s=0$  の値は既述の如く逆轉層より小さい筈であるが、恐らく逆轉層位は極めて低く、吾々が實際日射観測を行ひつゝある場所は或は此の附近ではあるまいかと考へたので、第 4 表より外挿して  $E$  の最大となる部分を使用した。従つて圖の  $s=0$  の曲線は嚴密には地表面でなく、地表面上若干の高さのものである (以下すべて之を  $s=0$  と假に表しておく)。一言注意しておくことは、各緯度帯の面積は緯度の正弦に比例して小さくなる故、圖の横軸には緯度の正弦をとつてある。斯くすれば各曲線に夾まるゝ面積が其の儘直ちに各緯度帯の輻射量を與へる。

次の二三の事實が同圖に依つて判明する。

(i) 輻射量の一番大きい場所は 1 月には大體南緯  $5^\circ$  乃至  $10^\circ$  附近にあるが、7 月になると北緯  $20^\circ$  乃至  $25^\circ$  附近へ移動する。之は大體太陽に伴つて居る。地面と水蒸氣に因る此の輻射の最大なる地帯を熱赤道に準じて吾々は茲で假に熱輻射赤道と名づけよう。熱輻射の赤道は斯くて全年を通じて平均してみれば概して北半球に偏在して地球を取巻いて居る。それは位置について言つても又移動の有様に就いて言つても氣温の熱赤道に全く酷似するのであつて、大氣中の輻射が氣温と

第 4 圖



水蒸氣によつて決まる當然の結果である。

(ii) 兩極地方の輻射量を比較してみると

a) 正月では北極地方の氣層の有効輻射量は南極地方に較べると遙かに小さい。如何なる高さに於ても約 60% 内外と考へられる。

b) 7 月になると、之と反對に南極地方の輻射の方が北極地方のそれよりも當然小さくはなるけれども、正月の場合に較べると兩者の差はずつと小さくなり、約 85% 内外と考へられる。

夏季は太陽は北半球を過分に照射し、冬期は反對に南半球を過分に照射する故、a), b) に述べたる一般的傾向は常識的に判斷せらるゝ處と全く一致すると言はねばならぬ。

(iii) 地表附近  $s=0$  に於ては  $E$  の最大値は 7 月では約 330 カロリー/輻<sup>2</sup>日、1 月では約 300 カロリー/輻<sup>2</sup>日の程度である。即ち夏季は冬期に較べると約 1 割大きい。

(iv) 兩極地方及び赤道に於ける輻射量の割合は大體右表の如くなる (單位はカロリー/輻<sup>2</sup>日)。大體に於て

	北極地方	赤道地方	南極地方
1月	110	300	180
7月	180	330	150

北極：赤道：南極=1:3:2 (1月)  
=1:2:1 (7月)

と見當すればよい。尤もこれは勿論晴天時の場合に

限つたことで、一般の場合は後に §9 に見らるゝ如く全く異なる関係となる。

(v) 上層の自由大氣中に於ける  $E$  も同様に變化する。一々の場合に對する數量的關係は圖より判斷せられ度い。

§8. 全天雲に覆はれた場合

今迄はすべて雲は全く無いものとして論じて來た。普通雲層は地面と同様に殆んど完全な黒體輻射面と考へてよいことが分つて居る。それを用ひるならば、今迄の論法を全天雲に覆はれた場合に擴張することは左程困難では無い。即ち此處に二つの黒體輻射面——地面及び雲層——があり、此の二層の中間に選擇吸收性の水蒸氣が存在して居ると考へて計算しよすればよいのである。

先づ雲が全天を覆ひ、青空は全く無く、雲層の高さは一定で  $z'$  であるものとし、雲底下の氣層中に於ける有效輻射量のみを求める（雲より上空の輻射も亦興味あるものではあるが、今はそれは論じない）。

$z'$  層が黒體輻射面であるといふ假定に従ひ (8) の第二式に於て境界條件を

$$G_{\lambda}(z') = S_{\lambda}(z') = S_{\lambda}(T') = S_{\lambda}' \quad (28)$$

とし、積分常數を決定してそれを (8) に代入すれば、

$$G_{\lambda}(z) = e^{-\beta_{\lambda} \int_z^{z'} \alpha(\zeta) d\zeta} S_{\lambda}' + \beta_{\lambda} \int_z^{z'} \alpha(\eta) S_{\lambda}(\eta) e^{-\beta_{\lambda} \int_z^{\eta} \alpha(\zeta) d\zeta} d\eta \quad (29)$$

となる。こゝに  $T'$  は雲層の温度である。

(11), (12), (13) を用ひて變形すれば

$$G_{\lambda}(z) = \int_z^{z'} e^{-\beta_{\lambda}(\eta, z)} \frac{d}{d\eta} S_{\lambda}(\eta) d\eta \quad (30)$$

となり、更に前と同様に  $S$  は地面と雲底間で直線的に變り

$$\left. \begin{aligned} S_{\lambda}(\eta) &= S_{\lambda}(0) - \gamma_{\lambda} \eta, \\ \gamma_{\lambda} &= \frac{S_{\lambda}(0) - S_{\lambda}(z')}{z'} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とすれば

$$G_{\lambda}(z) = \frac{S_{\lambda}(z') - S_{\lambda}(0)}{z'} \int_z^{z'} e^{k_{\lambda}'(e^{-n\eta} - e^{-nz})} d\eta \quad (32)$$

一方に於て  $U$  の式は前と全く同一である。従つて有效輻射  $E_{\lambda}$  は (18) の第一式と (32) の差をと

$$E_{\lambda}(z) = S_{\lambda}(z) + \gamma_{\lambda} e^{-k_{\lambda}' e^{-nz}} \int_0^z e^{k_{\lambda}' e^{-n\eta}} d\eta - \frac{S_{\lambda}(z') - S_{\lambda}(0)}{z'} \int_z^{z'} e^{k_{\lambda}'(e^{-n\eta} - e^{-nz})} d\eta. \quad (33)$$

波長域を前と同様に分割し、各波長域に對する吸收係數を用ひて地表の氣温各  $10^{\circ}$  毎に計算せる結果を次表に示す。同表に於て縦列は雲層の高さ  $z'$  (杆)、横列は吾々が輻射量を知らんと欲する氣層の高さ  $z$  (杆) を表す。氣温遞減率はすべて  $6^{\circ}$ /杆、雲層の温度  $T'$  は  $6^{\circ}$ /杆 の遞減率の大氣中に於ける當該層高の温度と同一なるものと假に假定した。尚ほ表中の數値はすべて便宜上 100 倍してあることを一言注意しておく。

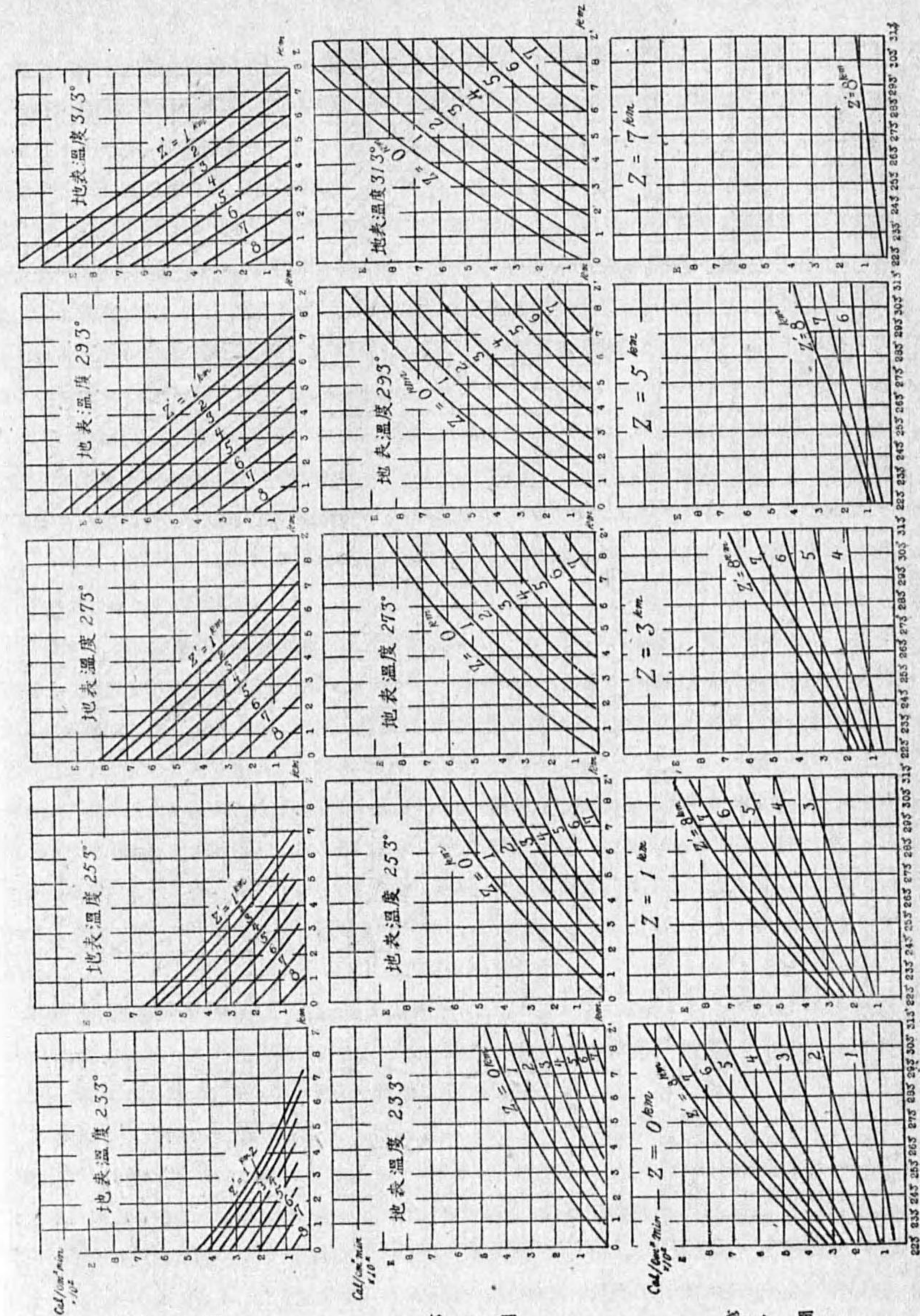
本表から吾々は種々の事實を抽出することが出来る。それを圖に表して示さう。

i) 第5圖と第6圖は本質的には同じものである。

第5表  $E_0 \times 100$  (カロリー/糧<sup>2</sup>分)

氣層の高さ 雲高(杆)	0	1	2	3	4	5	6	7
地面の氣温=223°								
1	0.636							
2	1.276	0.748						
3	1.748	1.192	0.647					
4	2.204	1.620	1.039	0.647				
5	2.627	2.016	1.409	0.983	0.586			
6	3.010	2.372	1.739	1.239	0.871	0.493		
7	3.287	2.702	2.043	1.570	1.132	0.734	0.402	
8	3.684	2.989	2.305	1.809	1.348	0.931	0.583	0.279
地面の氣温=233°								
1	0.753							
2	1.445	0.825						
3	2.086	1.434	0.844					
4	2.678	1.995	1.374	0.818				
5	3.216	2.503	1.852	1.269	0.746			
6	3.688	2.955	2.273	1.663	1.116	0.629		
7	4.131	3.356	2.643	2.006	1.434	0.923	0.497	
8	4.541	3.736	2.993	2.329	1.731	1.197	0.751	0.366
地面の氣温=243°								
1	0.900							
2	1.715	0.975						
3	2.465	1.704	1.019					
4	3.172	2.378	1.650	0.983				
5	3.833	3.008	2.247	1.549	0.913			
6	4.427	3.570	2.776	2.046	1.392	0.781		
7	4.967	4.078	3.251	2.491	1.807	1.169	0.632	
8	5.462	4.540	3.681	2.890	2.177	1.511	0.951	0.455
地面の氣温=253°								
1	1.059							
2	2.000	1.163						
3	2.869	2.023	1.172					
4	3.698	2.843	1.946	1.167				
5	4.447	3.583	2.640	1.831	1.070			
6	5.140	4.267	3.281	2.437	1.644	0.937		
7	5.797	4.939	3.884	3.008	2.184	1.445	0.792	
8	6.376	5.485	4.410	3.501	2.645	1.875	1.194	0.561

気層の高さ (杆)	0	1	2	3	4	5	6	7
地面の気温=263°								
1	1.224							
2	2.322	1.325						
3	3.342	2.327	1.369					
4	4.262	3.230	2.245	1.314				
5	5.123	4.095	3.065	2.103	1.238			
6	5.911	4.889	3.812	2.818	1.921	1.085		
7	6.639	5.621	4.498	3.474	2.545	1.676	0.905	
8	7.308	6.300	5.136	4.072	3.110	2.208	1.406	0.677
地面の気温=273°								
1	1.388							
2	2.627	1.511						
3	3.748	2.643	1.531					
4	4.752	3.656	2.534	1.469				
5	5.749	4.600	3.472	2.376	1.382			
6	6.545	5.466	4.325	3.211	2.187	1.224		
7	7.338	6.239	5.117	3.982	3.129	1.923	1.037	
8	8.060	6.998	5.839	4.684	3.601	2.567	1.642	0.788
地面の気温=283°								
1	1.531							
2	2.859	1.656						
3	4.061	2.905	1.672					
4	5.143	4.028	2.821	1.608				
5	6.131	5.153	3.871	2.626	1.486			
6	7.053	6.009	4.850	3.620	2.438	1.357		
7	7.852	6.840	5.702	4.456	3.265	2.154	1.114	
8	8.612	7.648	6.516	5.270	4.039	2.913	1.840	0.901
地面の気温=293°								
1	1.695							
2	3.129	1.771						
3	4.342	2.965	1.620					
4	5.411	4.191	2.898	1.708				
5	6.451	5.277	4.025	2.862	1.562			
6	7.429	6.330	5.514	3.939	2.641	1.446		
7	8.378	7.255	6.075	4.003	3.657	2.445	1.276	
8	9.179	8.089	6.940	5.836	4.544	3.314	2.116	0.990
地面の気温=303°								
1	1.747							
2	3.244	1.908						
3	4.622	3.358	1.867					
4	5.859	4.633	3.193	1.739				
5	6.994	5.793	4.400	3.001	1.636			
6	8.061	6.878	5.520	4.293	2.806	1.487		
7	9.032	7.864	6.535	5.355	3.848	2.563	1.289	
8	9.688	8.533	7.246	6.079	4.643	3.310	2.031	0.853
地面の気温=313°								
1	1.826							
2	3.465	2.005						
3	4.929	3.545	1.882					
4	6.330	4.958	3.345	1.833				
5	7.607	6.241	4.652	3.198	1.678			
6	8.844	7.480	5.906	4.484	3.011	1.585		
7	9.936	8.575	7.009	5.611	4.170	2.769	1.356	
8	10.967	9.608	8.050	6.669	5.253	3.872	2.463	1.196

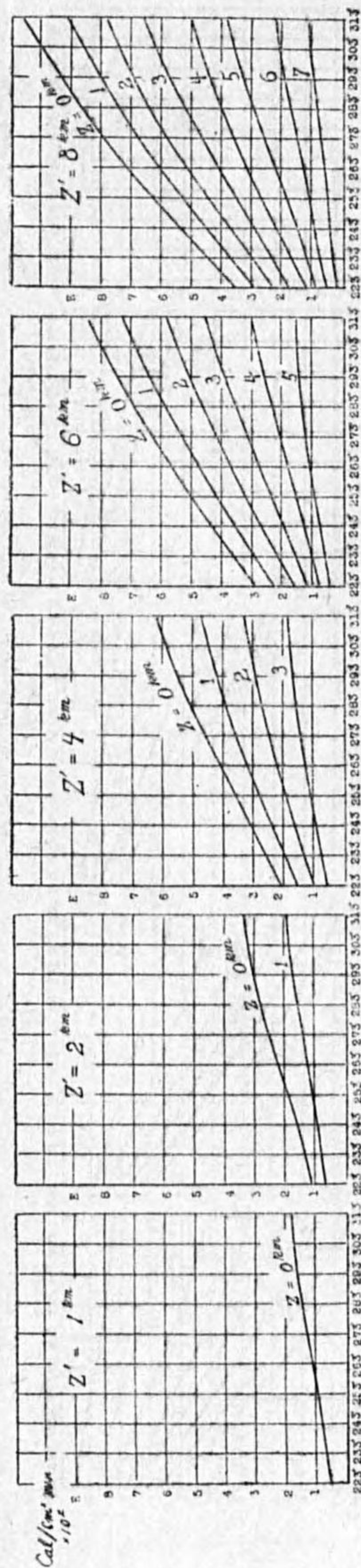


第 5 圖

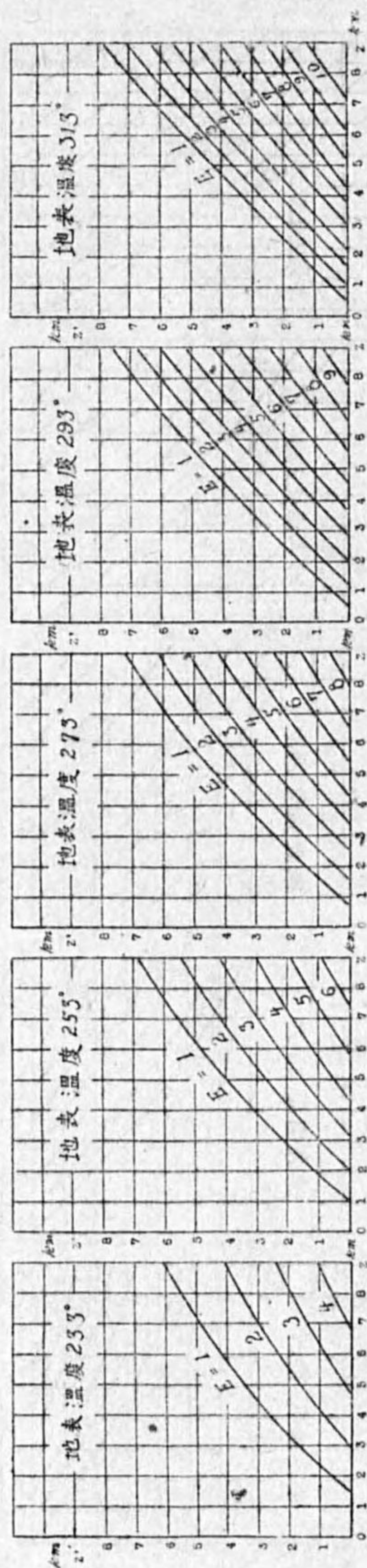
第 6 圖

第 7 圖

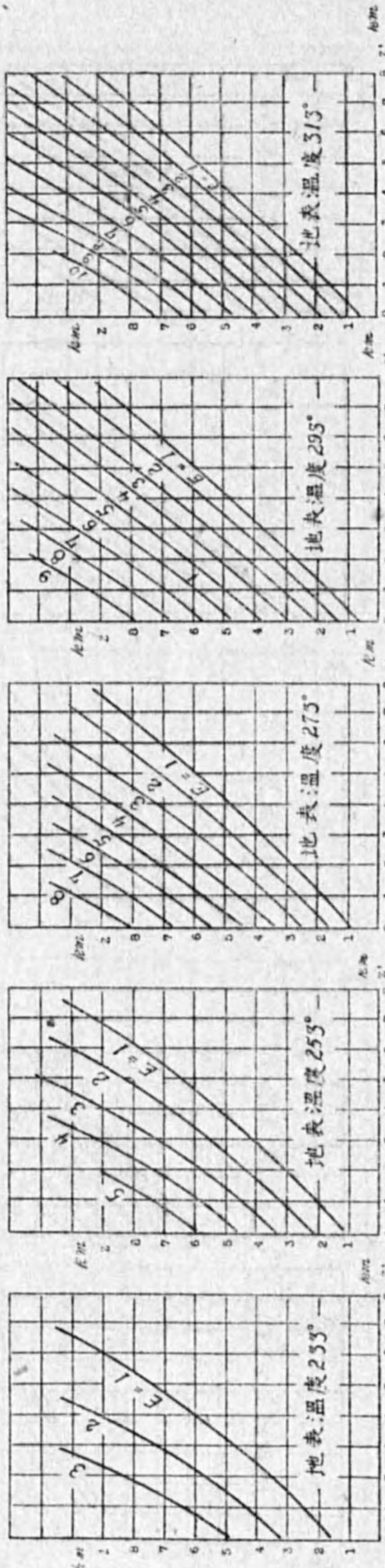




第 8 圖



第 9 圖



第 10 圖

第 5 圖では横軸に気層の高さ  $z$ , 縦軸に有効放射  $E$  ( $\times 100$ ) (単位はカロリー/極分) をとつて, 各地表気温毎に雲層の高さ  $z'$  の影響を示したものである。圖を横に一瞥すれば大體に於て地表気温が低ければ低い程放射量が小さく, それが気温が高くなる程大きくなることが分る。これは當然豫期せられた處であつて, 例へば雲高 ( $z'$ ) を 8 杆とすれば地表面  $z=0$  に於ける  $E$  は地表気温  $23^\circ$  では  $4.6 \times 10^{-2}$  カロリー/極分の程度であるが, 地表の気温が高まり  $31^\circ$  となれば  $11.0 \times 10^{-2}$  カロリー/極分となり, 約 2 倍半に達する。従つて當然各曲線間の間隔は気温と共に大きくなる。故に雲高が例へば 1 杆異れば其の影響は地表気温が高ければ高い程著しい。又圖を横に通覽すれば曲線群の傾斜が気温が高くなる程急となり, 地表に於ける気温が高ければ高い程放射が高さと共に減小する割合が著しくなることが分る。

第 6 圖は横軸に雲高  $z'$  をとつてある。何れの場合でも地面に近い程放射は大きく, 又同一層位の放射は雲高と共に増加し, 其の増加の割合は地表の気温が高ければ高い程著しい。従つて又地上距離が例へば 1 杆異なる層位間の放射量の差は地表の気温が高ければ高い程著しいことになる。

ii) 第 7 圖と第 8 圖は又本質的には同じもので, 地表気温を與へて放射量を層位  $z$  或は雲高  $z'$  と関係づけたものである。

先づ第 7 圖に地表気温を横軸に, 放射量を縦軸にとつて  $z=0, 1, 3, 5, 7$  杆の各々の場合につき雲高との關係を示す。本圖より分ることは, 先づ雲高の如何に關らず放射量は地表気温と共に増加すること既述の如くであるが, 又同一の雲高でも層位が高ければ高い程放射量は小さいことである。之は當り前のことである。又何れの場合でも同じであるが, 例へば  $z=0$  の圖を見ると, 放射が気温と共に増大する割合は雲高が高い程著しい。各圖の最下端の線は考へて居る層位より丁度 1 杆上空に雲層が存在する場合に當るが, 各圖を横に通覽して見ると絶対値も傾斜も層位が高い程小さくなる。對をなす他の  $z'$  についても同様である。これは雲高が高くなればなる程, 雲層下の例へば 1 杆, 2 杆... 等に於ける放射量は小さく, 又地表の気温に左右されないようになることを示す。

第 8 圖は同様に地表気温を横軸にとり雲高  $z'=1, 2, 4, 6, 8$  杆の場合につき各層位の放射量をプロットしたもので, 第 7 圖を逆に眺めたものに當る。種々の關係は圖より判斷せられたい。

iii) 第 9 圖と第 10 圖は又本質的には同じものである。

第 9 圖では横軸に気層の高さ  $z$ , 縦軸に雲高  $z'$  をとり  $E$  が 0.01, 0.02, ... カロリー/極分 (圖では 100 倍して  $E=1, 2, \dots$  カロリー/極分としてある) となる點を地表気温毎にプロットしてある。第 10 圖は縦横軸を單に取換へた丈けに過ぎない。此等の圖に依つて分ることは, 何れの場合でも地表気温の低い間は各曲線間の間隔は可成り廣いが, 地表の気温が高くなるに従つて漸次狭まつて行くことである。之を換言すれば一定量の放射量丈け相異なる二つの雲層の間の距離は気温

と共に減少するのである。即ち気温が高ければ雲の僅かの高低も輻射量に大きく影響するようになる。然し乍ら第9圖を各圖毎に見れば  $E = \text{const}$  の曲線群が殆んど平行なことから推察せらるゝ如く、或る地表気温については此の雲層間の距離は考へて居る氣層の高さには殆んど無關係である。

第10圖よりも同様なことが言はれる。即ち一定量の輻射量だけ異なる氣層間の距離は気温が高くなると小さくなる。換言すれば気温が高いと地上僅かの距離の差でも輻射量は著しく變化する。此の變化の割合は或る一定の地表気温について言ふならば、雲の高さには殆んど無關係である。

此の外にも圖から色々な結論を導くことが出来る。今は夫等は一切省略して置く。曇天の日は気温降下し難く、非常に蒸し暑く感ずるなどの經驗的事實も、斯くて輻射放冷に因るものとして一端の説明が質的にも又量的にも爲し得られるであらう。

たゞ茲に留意すべきことは、吾々は計算に際して雲層を黒體輻射面と見做し、且つ雲層は水蒸氣(氷晶の如きを含まず)より成ることとしたことであり、此の假定は上層雲に對しては充分に當てはまらぬかも知れない。

§9. 一般の場合に於ける有效輻射量

吾々は既に雲の全く無い場合に於ける有效輻射  $E_1$  と、空が全部隙間無く雲に覆はれた場合の有効輻射  $E_2$  を知つた。一般に雲量が  $c(0-1)$  なる場合の輻射量  $E$  は、雲の天空上に於ける出現場所を勝手氣儘なものとすれば

$$E = (1-c)E_1 + cE_2 \tag{34}$$

で與へられる。

今各緯度毎の月別平均雲量として C. R. Brooks の値を採用し、緯度別平均気温を既述の如く (§7) 岡田先生の著書より求めて、1月及び7月に就いて雲高  $z'=2$  杆及び  $z'=5$  杆の各々の場合につき緯度別有效輻射量及び其の全地表面の平均値  $\Sigma$  を計算すれば次表の如くなる。尤も北緯  $70^\circ$  以北、南緯  $65^\circ$  以南は気温及び水蒸氣張力の觀測が無いので此の地域に對する輻射を假に零と考へて計算してある。兩極地帯では緯度帯の面積が小さくなるから此の地域に對する積算分量は割合に小さいこととなり、従つて此處に求めた  $\Sigma$  は最低値を與へては居るが、然し數値としては大體これより1割か2割位大きくなるに過ぎないものと考へられる。

雲高  $z'$  の平均高が何程であるかは分らない。緯度別平均雲高に至つては更に不明である。假に今  $z'=5$  杆と考へ、且つ計算に入れなかつた兩極地方の輻射を約2割と見做せば、地球表面上の水平面を通過して上方に向つて流れる有效輻射量の地球全表面の平均値は  $0.214 \times 1.2 = 0.257$  カロリー/糎<sup>2</sup>分となる。Aldrich の與へたる日射の反射能 0.43 を用ひ Simpson<sup>(1)</sup> が計算せる結果に依れば、日射として與へらるゝエネルギーの地球全表面の平均値は 0.278 カロリー/糎<sup>2</sup>分であり、吾々の計算は可成りの精度にあると信ぜられる。

第11圖は雲高を5杆とした場合の有効輻射の緯度別分布である。輻射の赤道は雲の無い場合と同様に7月には北緯  $30^\circ$  北回歸線の附近にあり、冬期には南下するが1月頃赤道附近に到つて止まる。即ち輻射赤道は矢張り全體として見れば北半球に多少偏在して居るのである。

地球全表面何處に於ても輻射量は快晴の場合に比較すれば、少なくなる。之は勿論空の一部分に常に雲があるためである。大體に於て快晴時の約2/3になると考へればよいが、細かく緯度別に見るとそうばかりとは言へない。快晴時の場合に較べて最も顯著なる相違は年中兩極地方の差が極めて小さいことである。之は充分留意されて然るべき事實と考へる。

第6表  
緯度別有效輻射量 (カロリー/糎<sup>2</sup>日)

緯度	雲高 $z'=2$ 杆			雲高 $z'=5$ 杆		
	1月	7月	平均	1月	7月	平均
N70°	75	90	83	93	122	107
65	77	98	87	97	129	113
60	81	102	91	102	133	118
55	89	108	98	112	139	125
50	92	121	107	117	150	134
45	98	134	116	124	161	142
40	112	162	137	137	186	161
35	123	196	160	147	217	182
30	138	204	171	159	226	192
25	155	197	176	175	222	199
20	170	178	174	190	206	198
15	179	157	168	199	190	194
10	178	145	162	201	178	190
5	175	150	162	200	180	190
赤道 0	176	163	170	204	191	197
5	164	164	164	192	189	190
10	158	163	161	187	187	187
15	162	162	162	190	183	187
20	160	150	155	187	172	180
25	159	137	148	184	161	172
30	143	127	135	168	152	160
35	131	114	122	157	141	149
40	114	100	107	142	129	136
45	101	88	94	131	120	126
50	88	81	84	121	113	117
55	77	76	77	112	109	110
60	67	73	70	104	103	103
S65	59	75	67	97	100	99

$\Sigma = 0.180$  カロリー/糎<sup>2</sup>分

$\Sigma = 0.214$  カロリー/糎<sup>2</sup>分

§10. 結論

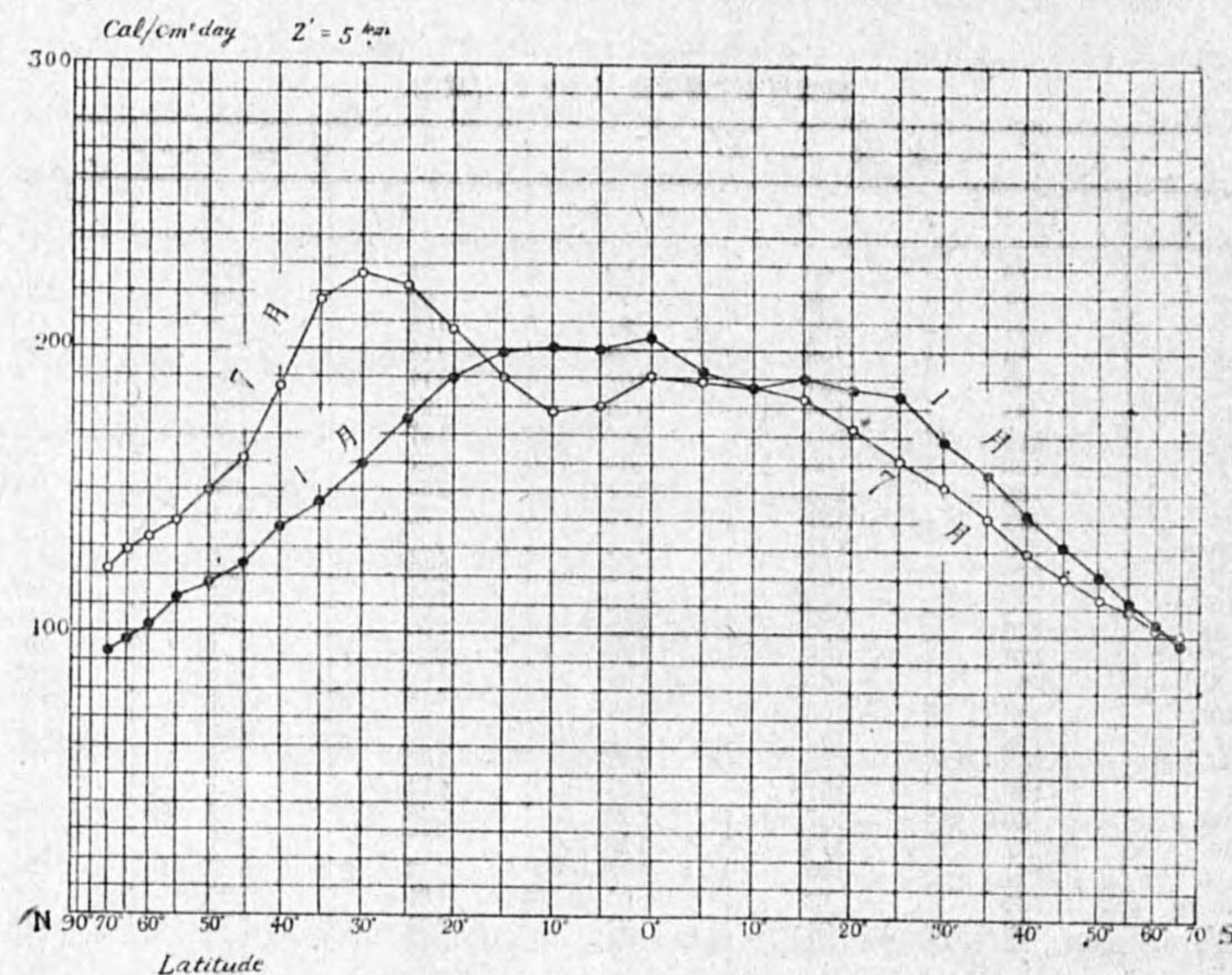
本論文に於て吾々は Fowle の吸収係數を使用し、H. Philipps の方法に倣ひ自由大氣中任意の氣層に於ける有效輻射量を計算した。計算の結果は A. Ångström の實測とも可成りよく一致し (§5 参照)、又日射量とも相當によく釣合ふ (§10 参照) ことが證明せられた。

最初に吾々は Schwarzschild の輻射微分方程式を雲の全くない場合について解き (§2-§4)、有效輻射が地表気温と共に増大し、又高空に進むに従ひ減少する等、其の他種々の常識的概念を數理化し、又數值的にも具現することが出来た (第4表及び第3,4圖参照)。

次に此の理論を更に全天雲に覆はれたる場合に擴張し (§ 8), 同様に數多くの經驗的事實を數理化し, 又種々の關係を導いた (第 5 表及び第 5 圖—第 10 圖). 得られた結果は數多くして, 茲に詳細に再録し難きも大體次の如きものである.

- (1) 雲高の如何に關せず大氣中の各層位の有效輻射量は地面附近で最も大きく, 高空に進むに従ひ漸次小さくなる. 輻射が高さと共に減少する割合は地表の氣温が高ければ高いほど著しい.
- (2) 同一の雲高の場合について考へると, 各層位の有效輻射量は地表氣温と共に増大する.

第 11 圖



(3) 高さが同じ層位の輻射を比較するならば, それは雲層が高いほど大きく, 其の増加の割合は地表の氣温が高ければ高いほど著しい. 従つて鉛直方向に一定の距離だけ相距れる二層位間の輻射量の差は地表の氣温が高ければ高いほど著しいことになる. 一定量の輻射量だけ相異なる二雲層間の距離は吾々が今考へて居る氣層の高さには殆んど無關係である.

(4) 輻射量が一定量だけ相異なる二つの氣層間の距離は氣温と共に減小する. 即ち氣温が高いと地上僅かばかりの距離の差でも輻射量は著しく相違し, 此の相違の割合は或る一定の地表氣温については雲高に殆んど無關係である.

(1) 前掲 Mem. Roy. Met. Soc., 3, Nr. 21.

尙ほ此の他に第 5-10 圖から種々の事實が判明するが, 其等はすべて圖より判讀せられ度い. 次に吾々は一般に雲量が任意の場合について計算して見た. 其の結果は概して日射量と釣合ふことが證明せられ, 吾々の計算は略々妥當なものと考えられる. 各緯度帯の平均氣温, 平均湿度から, 地表に於ける有效輻射を畫いたのが第 11 圖であつて, 輻射赤道は冬期南緯 5° 附近にあり, 夏期には北緯 25° 附近まで北上するのであつて, 大體氣温の熱赤道に伴ふ變化をなすことを知る.

## 第二種假温度と垂直安定度

正野重方

假温度とは水蒸氣を含んだ空氣を乾燥空氣と見做して状態方程式を書表はした時に持つ温度であることは普通に知られて居る. 然し茲に紹介する第二種假温度と云ふ語は餘り知られてない様であるから, 説明すると共にその物理的の意味に於て若干考察を行つて見る.

定義 第二種假温度  $T_{vv}$  は次式で與へられる<sup>(1)</sup>.

$$T_{vv} = T \frac{g}{g - 2\omega \cos \varphi u}$$

茲に  $T$  は絶対温度,  $g$  は重力加速度,  $\omega$  は地球自轉の角速度,  $\varphi$  は緯度,  $u$  は風の東西成分で西風を正とする.  $T_{vv}$  と  $T$  との差は Linke の Meteorologische Taschenbuch, IV, 230 頁に與へられて居る. 参考の爲にその表を掲げて置かう.

表の値は西風 100 米/秒の場合に就て與へたものである. 西風 100 米/秒と云ふ大きい値でやつ

$\varphi^\circ$	$T$	193° -80°	213° -60°	233° -50°	253° -20°	273° 0°	293° 20°	313°K 40°C
0		0.29	0.32	0.35	0.38	0.41	0.44	0.47
10		0.28	0.31	0.34	0.37	0.40	0.43	0.46
20		0.27	0.30	0.33	0.35	0.38	0.41	0.44
30		0.25	0.28	0.30	0.33	0.35	0.38	0.40
40		0.22	0.24	0.27	0.29	0.31	0.33	0.36
50		0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30
60		0.14	0.16	0.17	0.19	0.20	0.22	0.23
70		0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16
80		0.05	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08	0.08
90		0	0	0	0	0	0	0

(1) Linke の本には正確な定義が與へられてなく, 唯數値のみが與へられ, 欄外にコリオリス力の垂直成分を考慮すると書いてあるので (1) の形式と考へた譯である. 勿論此の定義に依つて數値を計算した所が完全に表の値を得た. 此の定義の出所は今の所見當らない. 御教示願ひ度い. 以下の議論は此の様な定義が正しいとしての事柄であるから, 萬一 Linke の定義とは異つて居るとすれば, 此の定義に依る量を第三種假温度とすれば良い.

と  $T_{vv}$  と  $T$  との差が 0.5 度程度であるから従来問題にならなかつたのは當然である。

然し此の事からのみでは此の量の重要性を無視する譯には行かない。確かに密度を考へる場合温度が十分の一度位變化しても大した變化もない様であるが、その高度分布が問題になる様な場合には無視出来ない事がある。

直交座標で理想流體の運動方程式を表はすと之の垂直成分は次の形になる：

$$\frac{dw}{dt} = -g + 2\omega \cos \varphi u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

或は

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\rho(g - 2\omega \cos \varphi u) - \frac{\partial p}{\partial z}$$

今  $\rho = \frac{p}{pT}$  を使へば

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{p}{RT}(g - 2\omega \cos \varphi u) - \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{pg}{RT_{vv}} - \frac{\partial p}{\partial z}$$

但し

$$T_{vv} = T \left( \frac{g}{g - 2\omega \cos \varphi u} \right)$$

右の如き變換に依り第二種假温度の定義の由來が判るであらう。

初めに述べた様に風速が 100 米/秒にてやつと 0.5 度位暖かくなつた事に相當するので大した重要性がない様であるが實際はそう簡單には考へられない事を次の様な例に就て示そう。下層  $h$  の所では 15 米/秒の西風が吹いて居り、 $h+50$  米の高さでは 15 米/秒の東風が吹いて居たものとすれば 50 米に就て  $\partial u/\partial z$  が 30 米/秒の傾度を持つ事になる。即ち氣温傾度に直せば  $\varphi$  が  $10^\circ$ ,  $T$  が  $20^\circ$  の場合 0.26 度/100 米の氣温遞減率に相當する。扱て大氣は普通は略 0.5 度/100 米内外の遞減率を持つて居る。此の様な氣温分布は乾燥斷熱變化に對しては勿論安定な成層である。然るに大氣の變化は乾燥斷熱變化をする場合よりはむしろ凝似多方變化をする場合が多い。その様な場合には多方遞減率即ち  $\Gamma_k = -\frac{k-1}{k} \frac{g}{R}$  を持つ大氣は中立である。従つて  $k = \frac{7}{6}$  の場合には 0.5 度/100 米の遞減率は決して非常に安定な成層ではなくて中立に近い状態にある。即ち  $\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma_k$  は乾燥斷熱變化の場合の様に 0.5 度/100 米ではなくて遙かに小さい値になつて來る。

此の様な場合には前に得た 0.26 度/100 米の氣温遞減率は重要になつて來る。即ち此の様な場合従來の考へては安定であると考へられる場合でも決して安定ではなくなつて來るのである。此の事柄に就ては既に別の論文に於て述べた所である<sup>(1)</sup>。此の場合の安定度の議論には安定度の規準に従つて論ずるのが最も判り易いのである。

此の事柄に就て前掲論文に於て

(1) 測候時報, 昭和 17 年 10 月, 第 12 卷, 487 頁, 垂直安定度。

$$\frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma_k \right) + \frac{2\omega \cos \varphi}{g - 2\omega \cos \varphi u} \frac{\partial u}{\partial z} \geq 0$$

なる規準式を求めて論じた所である。

$$\theta_{kvv} = T_{vv} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} = T \left( \frac{g}{g - 2\omega \cos \varphi u} \right) \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

より與へられる第二種多方假温度を定義すると右の安定度の規準式は

$$\frac{\partial \theta_{kvv}}{\partial z} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{安 定} \\ \text{不 安 定} \end{array}$$

になり、之は普通は従来求められた規準式と同形である。

證明  $\theta_{kvv}$  の定義式の對數微分を採ると

$$\frac{1}{\theta_{kvv}} \frac{\partial \theta_{kvv}}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{2\omega \cos \varphi}{g - 2\omega \cos \varphi u} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

之に靜力學方程式と状態方程式を代入すれば

$$\text{右邊} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{k-1}{k} \frac{g}{RT} + \frac{2\omega \cos \varphi}{g - 2\omega \cos \varphi u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma_k \right) + \frac{2\omega \cos \varphi}{g - 2\omega \cos \varphi u} \frac{\partial u}{\partial z}$$

即ち證明終り。

此の様な議論に於て最も重要になることは  $k$  の値である。即ち大氣の遞減率は略 0.5 度/100 米の近くにあるが、之が中立状態に幾何位近いかと云ふ事は全く  $k$  の大きさに依り決まる所である。 $k$  の大きさは變位する氣塊と周圍の空氣との間に單位時間に行はれる熱交換量  $K$  に關係するがそれのみではなくその空氣塊の上昇速度の値に依つても變る事は別の論文<sup>(1)</sup>に於て示した所である。

$K$  の値が未だ充分判つて居ないので  $T_{vv}$  の値の重要性も未だ決定的に確言出来ないが前掲論文の結果に依れば  $k = f(K/V)$  (但し  $V$  は上昇速度とする) の形で  $k$  と  $K$  とが關係が與へられて居るのであるから、 $K$  が可成りに小さくても  $V$  を小さく採れば  $K/V$  は大きな値となり、 $k$  も所要の値に近くなり、大氣が中立の状態に近いと云ふ事が有りそうな様に考へてゐる。

兎に角大氣の安定度を従来行はれて居た様に靜的取扱のみでは不満足であつて、運動を考慮して行はなければならない事だけは確かであると思ふ。

決定的議論は別に行ふとして茲では  $T_{vv}$  の紹介と  $\theta_{kvv}$  の定義と垂直安定度規準式の變型に止めて置く。

(17. 6. 10.)

(1) 氣象集誌, 第 20 卷, 第 7 號

## 水の化学分析法検討(第十一報)

## 硝酸鹽

松居秀夫

従来提唱されてゐる水中硝酸鹽の各種定量法は、何れも試薬の製法や分析操作が煩雑で、短時間に数多くの試水を処理し得ないと云ふ缺點がある。殊に、これらの分析法の大部分は濃硫酸を多量に用ひるのであるが、筆者の経験によれば硝酸鹽を全く含有しない濃硫酸を選択するとすると相當の困難を感じる。筆者はこの點から考へて、操作が簡單で而も濃硫酸を用ひない三宅博士の方法<sup>(1)</sup>を最も推奨すべきものとして試用して來た。

同法の大要を述べれば、先づ硝酸鹽を亞鉛末によつて亞硝酸鹽に還元し、之に Griess-Romijn の粉末試薬を作用せしめてピンク色を呈せしめ、之によつて比色定量をなすものである。

本法によれば、0.1 mg/L 迄の硝酸鹽 (N として) を測定し得るが、實際の降水、陸水及び海水中に含まれる硝酸鹽量は通例 N として 1 mg/L 以下であるから、その含有量の變動に就いての正しい知識を得るためには少くとも 0.01 mg/L 迄の精度を以て定量しなければならぬ。

筆者は實驗の結果、三宅博士の試薬中の酒石酸は、同試薬による發色を著しく困難ならしめ、且つ該試薬の耐久性を低下せしめてゐることを認めた。

こゝに報告する方法は同試薬中酒石酸を除いて、上述の要求を満足せしめんがために改良したものである。

## 試薬の調製法

$\alpha$ -ナフチラミンとスルファニル酸を夫々 1g 及び 10g とり、亞鉛末 1~1.5g を混じて丁寧に乳鉢で磨り合せる。出來上つたものは褐色廣口瓶に密栓して貯へる。

## 測定

先づ試水中の亞硝酸鹽を硝酸鹽に迄完全に酸化して置くために、試水の一定體積 (30 cc) を三角フラスコにとり、臭素水 0.5 cc を加へ電熱により煮沸して臭素を完全に驅出する。放置冷却後、蒸溜水で元の體積 (30 cc) に稀釋し、上の試薬を耳搔きで 1 匙 (約 20 mg) 加へる。30 min 乃至 1 h 放置すると、液の色は徐々にピンク色となるから、その間時々振盪して充分發色した時に、硝酸鹽標準液から發した色と比色するのである。こゝに、試水と標準液に同時に試薬を加へること、兩者の液温及び組成を成るべく等しくすることは云ふ迄もない。尚、比色は色の濃い場合は Duboseq

(1) 三宅泰雄：水の化学分析法検討(第九報)。氣象集誌, II, 16 (1938), 1 頁。

比色計により、淡い場合にはアムモニア比色管を用ひるのがよい。

かくして得た硝酸鹽の定量値から、別に測定した亞硝酸鹽の量を差し引いて、試水中の硝酸鹽含量を算出するのである。

## 本法による測定値の精度

筆者は本方法の精度を決定するため、1L が N の 100 mg を含有する硝酸鹽溶液を正確に稀釋して得た種々の濃度の溶液を夫々 3 箇宛とり、上述の測定法に従つて處理し試液中の硝酸鹽量を逆算して見た。その結果を次表に示す。何れも 1 mg N/L を標準として、夫々の分析値を記してある。勿論實際には最も近い濃度の二溶液間でその色を比べたのである。

N mg/L 理論値	N mg/L 實測値	N mg/L 理論値	N mg/L 實測値	N mg/L 理論値	N mg/L 實測値	N mg/L 理論値	N mg/L 實測値
10.00	10.35	0.40	0.390	0.05	0.053	0.01	0.01
	10.40		0.390		0.053		0.01
	10.25		0.405		0.051		0.01
1.00	1.00	0.30	0.292	0.04	0.045	0.005	0.005
	1.00		0.313		0.043		0.005
	1.00		0.286		0.043		0.005
0.75	0.745	0.20	0.195	0.03	0.033		
	0.745		0.195		0.028		
	0.755		0.185		0.028		
0.50	0.513	0.10	0.105	0.02	0.02		
	0.490		0.105		0.02		
	0.485		0.100		0.02		

各組の三通りの結果がよく一致し且つその値が理論値と全く一致するか、僅かの差を示すに止まることは、最初に條件とした 0.01 mg N/L 迄の精度を以て硝酸鹽を定量しようと云ふ目的が完全に達し得られることを示すものである。

尚、ブランク試験も行つたが、殆ど補正の必要を認めなかつた。

## 試薬の耐久性

本試薬は密封して置けば充分長期の保存に耐え得る様に思はれる。

## m-フェニレンチアミン試薬

本試薬は筆者が前述の  $\alpha$ -ナフチラミン試薬と併行して硝酸鹽の定量に試用したものである。その處法は次の如くである。

m-フェニレンチアミン・ハイドロクロライド	1g
スルファニル酸	10g
亞鉛末	1~1.5g

本試薬は硝酸鹽と反應して特有な黄色 (Bismarek brown の生成による) を發する。比色操作は  $\alpha$ -ナフチラミン試薬の場合と同様にする。筆者の實驗によれば、本試薬による測定値の精度は  $\alpha$ -ナ

フチラミン試薬を用いた場合と殆ど同一であるが、呈色が長時間持続する點が特徴である。

従つて、實際の分析に當つては上記兩試薬の中何れを用ひても充分の結果を得られる筈である。

### 他物質による影響

試水中に共存する他物質が本法による硝酸鹽の定量に與へる影響に就いて調べたが、その結果は曩に三宅博士が同氏の試薬を用ひて觀察せられた所と全く規を一にするものであつた。次にその概要を述べる。

#### 1. 食鹽の影響

食鹽の濃度が増すと、硝酸鹽の還元は著しく阻害される。従つて海水の如く食鹽を多量に含む場合には、標準液は人工海水を作成したものの中に一定量の硝酸鹽を溶かして調製しなければならない。之に反して陸水の場合には NaCl に関する限り殆ど顧慮する必要はない。

#### 2. 鐵の影響

鐵は  $0.3 \text{ mg Fe}^{III}/\text{L}$  以上になると、その妨害が無視出来なくなる。従つて多量の鐵を含む水は、次の方法により先づ之を除去しなければならない。即ち中性又は微アルカリ性試水に臭素水を加へ、煮沸して臭素を驅出すれば、鐵は  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  として分離するから之を硝子フィルターによつて濾別する。この操作は亞硝酸鹽除去の目的にもその儘流用し得るので便利である。

#### 3. 酸及びアルカリの影響

強酸及び強アルカリによつて發色が阻害されるから、試薬を添加するに當つては豫め酸、アルカリを出来るだけ正確に中和して置く必要がある。筆者の實驗によれば、溶液の pH を 5~8 の間に調節して置けば、この影響は考慮しなくてもよい。

#### 4. アムモニアの影響

アムモニア若しくはアムモニウム鹽の形態で存在する窒素は臭素水によつて亞硝酸鹽或は硝酸鹽を生成しないから、此の物質の共存は何等問題とならない。

最後に、三宅博士の御指導に對し感謝の意を表す。

## 雨水の化學(第二報)

松 居 秀 夫

1. 緒言 最近我國で雨水の化學的研究が盛に行はれてゐるが、従來は pH, 鹽化物, 硫酸, アムモニア, 亞硝酸等の如き定量の容易な成分に就いてなされてゐたに過ぎない。これらの夾雜物混入の氣象學的意義, 原因等に關しては、既に三宅泰雄博士によつて明らかにせられた<sup>(1)</sup>。

H. Köhler 等は海鹽が雲, 霧の凝結核となることを主張してゐるが、この説は或程度迄正しいと思はれる。然し乍ら、雨水中に含まれる鹽類を直接に完全に分析して、海鹽凝結核説を實證した譯ではない。従つて、雨水の化學を論ずるには、多量の雨水をとり、その分析によつて先づ實驗的にこの説の當否を確かめる必要がある。筆者は東京(中央氣象臺)及び前橋(前橋測候所)で採取した雨水(東京では約 32 L, 前橋では約 20 L)を蒸發してその殘滓の總分析を行つた。その結果に就いて若干の考察をなして見たいと思ふ。

東京の雨は殆ど常に多少の煤塵を夾雜物として含むから、一方に降下煤塵の總分析をも併せて行ふこととした。即ち直徑 30 cm の硝子製漏斗を屋上(地表からの高さ約 12 m)に出して置き、漏斗の脚管の下に容量 20 L の蒸溜水瓶を受けて置く。漏斗に落下した煤塵は、雨の降る度に雨水と共に下の蒸溜水瓶に集る。瓶の内容物は之を溶解性のものと不溶解性のものに分ち、不溶性の部分は濾紙と共に焼灼し、焼灼試料に就いて分析を行つた。但し、 $\text{FeO}$  の定量は焼灼しない別の試料をとり、その中に含まれるタール質をエーテルで抽出除去した後、常法により稀硫酸と弗化水素酸とで分解し、これを過マンガン酸カリの標準溶液を用ひて滴定した。溶解性のもは蒸發殘滓に就いて分析を行つた。

前橋の雨は芝生の上に蒸溜水瓶の口に大型の硝子製漏斗を取付けたものを置いて採水したのであるが、煤塵を伴ふことは殆どなかつた。そこで降水期間中の雨水を 1 L 試薬瓶に入れて東京に持ち帰り、3 箇月後蒸發殘滓に就いて分析を施行した。

2. 東京に於ける降下煤塵 前述の煤塵計によつて、昭和 16 年 7, 8 及び 9 月の 3 箇月間に得られた降下煤塵は雨水の中に懸濁してゐる部分と、瓶底に沈積してゐる部分とに劃然と分れる。粒子の大きさは一定しないが、粗大分散より膠質分散に到る階段的に異なる分散度を有するものと思はれる。沈積してゐる部分を顯微鏡で調べて見ると、無定形の炭素質と結晶質の岩石片が認められる。炭素質は極めて嵩が大きく、却つてその大きさを測定することは困難であるが、結晶質の部分の大きさは  $200\mu\sim 1.5\mu$  (但し  $200\mu\sim 100\mu$  は極めて少い) で、其の間に或る種の群分布がある様に思

(1) 三宅泰雄: 氣象集誌, II, 17 (1939), 20 頁。

はれる。更に偏光フィルターを通して覗くと、大きい部分には礦物の結晶が見えるが、小さい部分は硝子状を呈してゐる。

次に、降下煤塵を雨水から濾別、110°C で乾燥した後、濾紙と共に焼灼した。焼灼すると、塵は赤く變ずるのは 2 價の鐵が Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> に變ずるためと考へられる。此の際灼熱減量は普通 30% 内外ある。

第 1 表

第 1 表に其の總分析結果を掲げる。こゝに

I は降下塵埃。

II は中央氣象臺構内の乾燥した地表面の土壤を 100 メッシュの篩で篩ひ出したもので、主として 1~3μ の大きさである。

III は本邦産石炭の灰分の分析結果<sup>(1)</sup> (平均値) である。

此の分析表に於いて注目すべき點は、降下塵埃中に FeO が極めて多いこと、Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>% と

FeO% の關係である。土壤の場合は Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>% > FeO% であるが、降下塵埃では著しく Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>% < FeO% となつてゐる。これは筆者の實驗によれば、微細な降下塵埃がタール質と接觸共存する際に、Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 及び Fe(OH)<sub>3</sub> の一部が二價の鐵に還元されたためと考へられる。一方 FeO 定量に際してタール質其の他有機物が殘存すれば過マンガン酸カリを還元するので FeO が多く出る。筆者はこの根據からして、FeO は實際より少しく過大な値を得てゐると考へるので、この事實に就いては更に後日論じて見たいと思ふ。

H. Mrose によれば、霧水中には比較的少量の鐵が含まれてゐると云ふ。之は結局、石炭は通常硫化鐵を含有し、石炭の燃焼によつて生成される水酸化鐵はその表面が著しく吸収性に富むが故に、當然凝結核となり得るものと考へた。この考へによれば、石炭を燃焼することの多い都市では、雨水と共に鐵が落下することになる。

この考へは降下塵埃中に銅の痕跡が認められ (前掲の分析表参照)、この銅の主な源泉は石炭灰によるものと推察される<sup>(2)</sup> ことと關聯して興味深いものである。

かゝる考察は單に想像の域を出でないが、兎に角降下塵埃中に特に鐵が多量に含まれることの可能性を指摘し得た様に思ふ。

又塵埃中のアルカリ含量が土壤のそれに比して大きいのも、石炭灰の混入によつて説明されるか

(1) "最新化學工業大系" 4, 143 頁。

(2) 筆者は石炭灰中に微量の銅を検出した。

も知れない。

以上の結果からすれば、降下塵埃は風によつて空中に捲き上げられた土壤粒子の外に、少くとも燃料から生ずる石炭灰を含むものと言ひ得る。

3. 東京の雨水 昭和 16 年 7, 8, 9 三箇月間に煤塵計中に得られた雨水から降下煤塵を濾別し、その濾液の蒸發殘滓に就いて化學的組成を調べた。この蒸發殘滓は、雨水中に於ける組成を成るべく變化せしめないために、100°C 以上に加熱することなく、鹽化カルシウム-デシケーター中で充分乾燥せしめた後分析に供した。但し、分析結果は焼灼試料に對する百分率で表はすこととした(第 2 表)。

この分析表から、試料中に珪酸鹽の存在することが分る。雨水そのものには勿論珪酸鹽の溶存してゐる筈がないから、

第 2 表

第 3 表

こゝに見出された珪酸鹽は降下塵埃若しくは煤塵計の硝子瓶から溶出したものであらうと推察される。

今、假に珪酸鹽の全部を降下塵埃の溶出に

第 2 表		第 3 表		
		分析値	降下塵埃の組成	殘(雨水の組成)
SiO <sub>2</sub>	8.41	8.41	8.41	—
CuO	trace	trace	trace	—
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.90	0.90	2.56	—
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2.64	2.64	2.45	—
TiO <sub>2</sub>	0.29	0.29	0.21	—
MnO	0.06	0.06	0.02	—
Ca	13.91	13.91	0.59	13.32
Mg	2.51	2.51	0.43	2.08
Na	15.95	15.95	0.28	15.67
K	2.78	2.78	0.20	2.58
Cl	17.01	17.01	—	17.01
SO <sub>4</sub> <sup>(1)</sup>	57.50	57.50	—	57.50
合計	121.96			

よるものと考へて、前節の塵埃の組成を考慮に入れて、SiO<sub>2</sub> を消去して見た所、鐵、アルミニウム、チタン等も殆ど消去することが出来た (第 3 表参照)。

この簡単な考へによつて、試料中の珪酸鹽は悉く降下塵埃に歸因することが確認された譯である。従つて、試料の分析値から降下塵埃に相當する成分を差引いた殘りを雨水の成分と考へて、之に就いて少しく論じて見たいと思ふ。尤も、煤塵計の採水瓶は蒸溜水瓶として永く使用してゐたものを用ひたから、その溶出は比較的少ないであらうと考へられる。

上述の如くして見出した雨水の組成を百分率で表はし、更に mol 數に換算して見る。

H. Köhler によれば、「雲や霧の凝結核をなすものは海鹽であり、海鹽は組成を變へることなく、そのまゝ雲粒、霧粒の中に入り込む」と云はれる。然し乍ら、前報に於て三宅博士は、海鹽が組成を變へることなく凝結核を形成すると云ふ Köhler 説に反する二三の事實を指摘せられた。

果して筆者の場合にも Köhler 説を反駁すべき事實を見出すことが出来るであらうか。

果して筆者の場合にも Köhler 説を反駁すべき事實を見出すことが出来るであらうか。

(1) 燃料から来る SO<sub>2</sub> は試水の蒸發乾溜の際一部分失はれる様に思はれる。

第 4 表

	%	mol
Ca	12.32	0.615
Mg	1.92	0.158
Na	14.49	0.630
K	2.39	0.061
Cl	15.73	0.444
SO <sub>4</sub>	53.15	1.107
		1.551

筆者は Lipp と同様の方法により、上表から雨水中の Cl/Na, Cl/K, Cl/Ca 及び Cl/S を計算した。若し Köhler 説が正しければ、これらの比は當然海水に於ける値を示すべきである。然るに、その結果は、第 5 表に見る如く、海水の場合と値を著しく異にしてゐる。

即ち、Lipp の言ふ如く、凝結核が海鹽より來ることは認容するが、その組成は海鹽そのままではなく著しく變化してゐると考へなければならぬ。

尙、こゝに注目すべき事實は、これらの比の變動が一樣でなく、Cl/Ca, Cl/S の變動が最も大きく、Cl/Na の變動が最も小さいことである。

かゝる變動を説明する一つの可能性として、三宅博士の指摘せられた如く、海水が空中に飛散し、空中で浮遊する間に水が蒸發すると共に溶解度の低い順に鹽を析出し、こゝに析出した鹽が各々別々に凝結核になる場合を考へて見よう。

海水を靜かに蒸發すると、水が減するに従つて溶解度の小さいものから固態の鹽を析出する。蒸發が進むに従つて析出する鹽について Cl/S, Cl/Mg, Cl/Ca, Cl/Na, Cl/K を計算して見ると次表の如くなる。

第 6 表

海水 cc	Cl	S	Mg	Ca	Na	K	Cl/S	Cl/Mg	Cl/Ca	Cl/Na	Cl/K
1000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
190	—	—	—	0.1773	—	—	—	—	—	—	—
112	—	—	—	0.2109	—	—	(21.5)	(14.8)	(46.4)	(1.81)	(50.16)
95	1.990	0.031	0.003	0.0118	1.2830	—	63.6	683.4	168.6	1.55	—
39	10.732	0.159	0.030	0.0540	6.9026	—	67.5	361.3	198.7	1.55	—
16.2	3.883	0.440	0.158	—	2.4764	—	8.81	24.6	—	1.57	—
殘液中	3.931	1.403	1.257	—	1.0183	2.7998	2.79	3.1	—	3.86	1.40

以上は海水を靜かに蒸發した場合で、實際に海水が空氣中で蒸發する動的な過程とは必ずしも一致しないであらうが、兎に角 Cl/S, Cl/Ca が著しく小さくなつてゐるのは、溶解度の最も小さい  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  が先づ析出し、之が凝結核となつて雨の中に入り込み、自然に落下するためと推定せられる。 $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  の析出に續いて NaCl の析出が起り、NaCl も凝結核を形成するであらうが、NaCl は元來海鹽の主成分であるから、Cl/Na の變動の極めて小さいことは容易に首肯される。更に、 $\text{MgSO}_4$ ,  $\text{MgCl}_2$ , KCl の析出が行はれ、各々別々に凝結核をなすから、Cl/Mg, Cl/K の變動は當然生ずべきである。

以上の如く考へると、東京の雨水中の Cl/S, Cl/Ca, Cl/Na, Cl/Mg, Cl/K の變動を矛盾なく説明

(1) Lipp によれば、霧水では Cl/Mg=0.188~10.73。  
 (2) 昭和 16 年 1 月より同年 6 月に至る間、中央氣象臺で分析した東京の雨水中の Cl/Ca の平均値は 1.44。

することが出来る。従つて、Köhler の説の一部を改めなければならない様に思はれる。

前橋の雨水に就いても、果してかゝる事實が見られるであらうか。これを次節に於いて論ずることとする。

4. 前橋の雨水 東京の雨水の蒸發殘滓の化學分析と共に、前橋の雨水の蒸發殘滓の化學分析を施行した結果に就いて述べる。雨水試料は昭和 16 年 7 月 15 日より同年 8 月 1 日迄の降水を前橋測候所に於て採取したものである。硬質の試薬瓶に入れて東京に持ち歸つた試料は全く浮遊物を認めなかつたから、之をその儘蒸發乾涸し、東京の雨水の場合と同様に、鹽化カルシウム—デシケーター中で充分乾燥せしめて分析に供した。

第 7 表

SiO <sub>2</sub>	32.34	Na	19.94
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.10	K	3.66
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2.14	Cl	28.50
MnO	trace	SO <sub>4</sub>	15.07
Ca	3.63	合計	106.99
Mg	1.61		

第 7 表にその總分析結果を掲げる。但し、分析結果は、東京の雨水と同様、燒灼試料に對する百分率で表した。

上の分析表に見る如く、此の場合にも矢張り珪酸鹽の存在が認められる。然し乍ら、今回は東京の場合に於ける如く降下煤塵を含まないから、この珪酸鹽は恐らく試水の保存に用ひた試薬瓶（以前に使用した事のない新しいもの）から溶出したものと考へられる<sup>(1)</sup>。

そこで、東京の雨水の場合と同様に、硬質硝子 (Jena 硝子) の組成 (第 8 表) に對應する成分を上分析値から差引いて見る。

第 8 表 Jena 硝子の組成 (平均)

	%
SiO <sub>2</sub>	64.7
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.26
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4.2
ZnO	10.9
MnO	0.01
CaO	0.60
MgO	0.23
Na <sub>2</sub> O	7.7
K <sub>2</sub> O	0.34
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10.8

第 9 表

	分析値 <sup>(2)</sup>	Jena 硝子の組成	殘
SiO <sub>2</sub>	32.34	32.34	—
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2.14	2.1	—
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.10	0.13	—
MnO	trace	0.01	—
CaO	5.08	0.30	4.78
MgO	2.67	0.12	2.55
Na <sub>2</sub> O	26.88	3.85	23.03
K <sub>2</sub> O	4.41	0.17	4.24
Cl	28.50	—	28.50
SO <sub>4</sub>	15.07	—	15.07

こゝに得た殘りを雨水の成分と看做し、この結果を用ひて前節と同様の方法により、Köhler の凝結心核説に對して若干の批判をなして見たい。即ち、雨水中の Cl/Na, Cl/K, Cl/Mg, Cl/Ca 及び Cl/S を計算して見る。

その結果は第 10 表に示す通りで、これらの比の値の變動は此の場合にも、前節と全く同様の方

(1) 採水用の蒸溜水瓶及び試水の蒸發濃縮用のフラスコは何れも以前に使用してゐたものを用ひたが、此の際に於ける溶出は全く無視し得る程度であることは東京の雨水の場合に既に認められてゐる。  
 (2) Zn は檢出されなかつた。



法で合理的に説明することが出来る。即ち、之は Köhler 説に反し、海鹽がその儘の形で雨の中に溶け込むのでないことを示してゐる。

更に、第 10 表によつて、前橋の雨水と東京の雨水中の Cl/Ca 及び Cl/S を比較して見ると、前橋の方が東京より遙かに大きくなつてゐる。之に

第 10 表

	雨水(前橋)	雨水(東京)	海水
Cl/Na	1.669	1.086	1.808
Cl/K	8.097	6.598	50.155
Cl/Mg	18.506	8.178	14.791
Cl/Ca	8.358	1.277	46.361
Cl/S	5.677	0.887	21.467

よつて、前橋の雨水は東京の雨水よりも  $\text{CaSO}_4$  の含有率が少いと云ひ得る。海水の蒸發過程の初期に析出する  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  が凝結核となつて雨滴を形成し、自然に地上に落下するため、内陸に進むに従つて、雨水中の  $\text{CaSO}_4$  含有率は少くなるものと推定される。又、海鹽中の NaCl 量は  $\text{CaSO}_4$  量に比して遙かに多いため、雨水中の Cl/Na は内陸に向つても著しい變動を示さないのは當然である。これらの事實も、Köhler の凝結核理論はそのまゝ直には信じ難いことを有力に裏書きするものである。

以上を總括すれば、雨水中の凝結核が海鹽にその源泉を有してゐることは疑ひないが、海水は風や波で空中に飛散すると、 $\text{CaSO}_4$  の如き溶解度の小さい鹽は、速やかに固態粒子となつて分離し、 $\text{MgCl}_2$  の如き溶解度の著しく大きいものが後から分離、こゝに析出した鹽が各々別に凝結核になるとするにある。

上の如く Köhler の説の一部分を改めて、更に各地の雨、雪、霧中の凝結核の問題も取扱つて見たいと考へてゐる。

終りに臨み、御指導を賜りし三宅泰雄博士に感謝の意を表する。

## 統計渦動擴散論

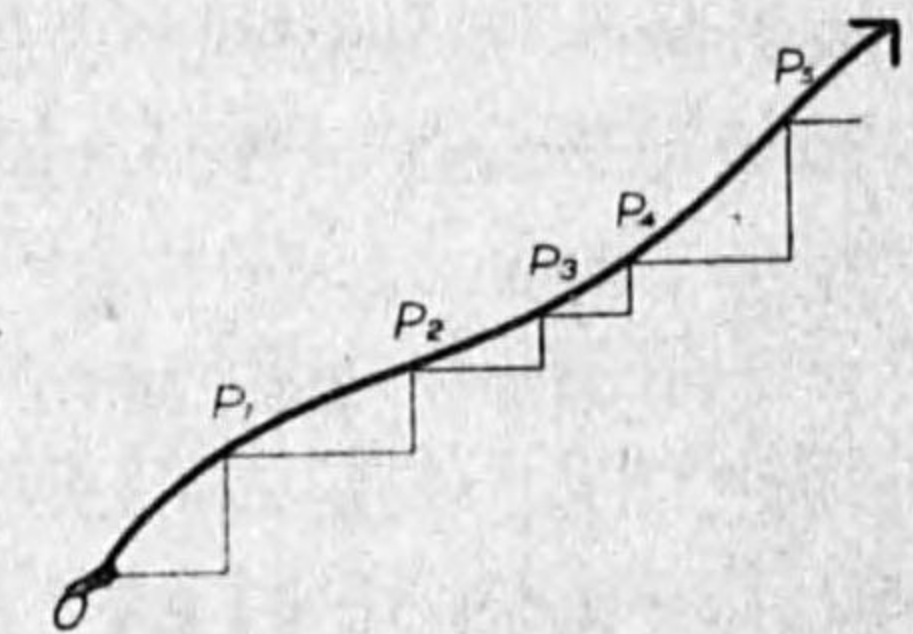
高橋喜彦

## §1. 渦塊の概念

渦動流體を瞬間的に見ると、流體が幾つもの塊に分れて夫々が殆んど獨立な運動を示すが、これを時間的に見ると、現に存在する塊は常に崩れて行くと同時に、一方に於いてこれとは殆んど無關係な別の新しい塊が生れて来る。かくの如き流體の塊を渦塊と呼ぶことにする。

そこでこの現象を模型化すると、すべての渦塊は或る時間だけ崩れることなく相互に獨立な運動をなした後、瞬間的に塊といふ性質をすっかり失ふと同時に、この瞬間別の新しい渦塊が組織され、これが又前と同じことを繰返すものと考へることが出来る。かくの如く模型化された渦塊が崩れずにゐる時間はすべての渦塊に就いて同じであるとして、これを渦塊の平均壽命と呼び、 $t$  で表はすことにする。

第 1 圖



この考へ方は、二つの現象から成る一つの合成現象をその二つが夫々獨立して交互に起つて行くものと考へるのに外ならない。例へば質點が第 1 圖に曲線で示す如き運動をなしたとすれば、これを  $x$  及び  $y$  の二方向の運動から成る一つの合成運動であると見て、この二方向の運動が夫々獨立して  $\Delta t$  といふ時間づつ交互に行はれる。即ち同圖に幾つにも折れ曲つた直線で示す如き運動をしたものと見ることも出来る。但し  $P_1, P_2, \dots$  は  $\Delta t$  毎の質點の位置を示す。

併しこゝで注意すべきことがある。それは質點の運動を二方向の各獨立な運動が  $\Delta t$  づつ交互に行はれるものとして取扱つた場合に求められる質點の位置は、 $n\Delta t$  ( $n$ =整数) といふ時刻に對してのみ實際の位置  $P_1, P_2, \dots$  と一致するが、これ以外の時刻に對しては一般に一致しないといふことである。即ち一つの現象を二つのものが獨立に交互に起るものとして取扱つた場合に得られた結

果は、或る特定な時間毎に於いてのみ実際の現象を正しく示すものであることに注意しなくてはならない。

故に渦動現象をば渦塊が崩れずに運動するといふ現象と渦塊が崩れて別の新しいものが出来るといふ現象が各独立して交互に行はれるものとして取扱ふ場合に得られる結果は、任意の時刻に對して正しいものではなく、渦塊の平均寿命の整数倍に當る  $nt$  ( $n$ =整数) といふ時刻に對してのみ正しいものであることに先づ注意する必要がある。

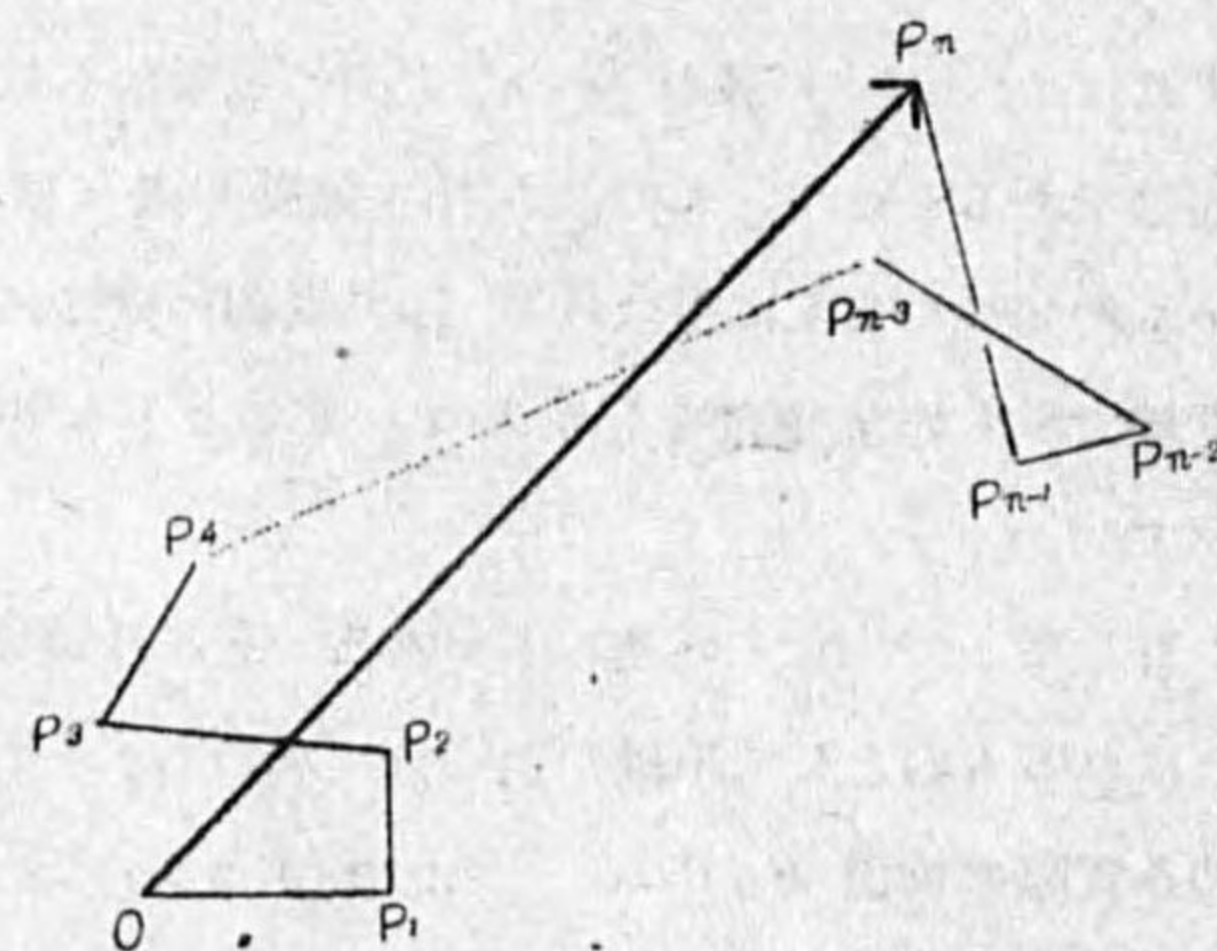
## §2. 渦粒子の概念

渦塊に比べて十分に小さく、いつまでも崩れずにゐる流体の塊を考へる。かくの如き塊が實在し得るかどうかわからないし、充分小さな塊でもいつかは崩れるかも知れない。併し崩れたらその一塊をば改めて崩れない塊だと考へれば、結局いつまでも崩れずにゐる塊といふものを考へることが出来る。又かくの如く小さな塊を引續き流体の塊と呼ぶことは出来ないかも知れないが、この塊を幾つか寄せ集めると元の流体になるものであるから、廣い意味で流体の塊と考へることが出来る。かくの如く十分に小さく、いつまでも崩れずにゐる流体の塊を渦粒子と呼ぶことにする。尚渦粒子はすべて同じ質量を有するものとする。

渦粒子は常に渦塊の一部分となつて運動する。模型化された渦塊を考へれば、同一渦塊に屬する渦粒子の一群は渦塊の平均寿命  $t$  の間だけは相互に關係のある運動をなすが、この時間が経過し終つた瞬間全くその關係は斷たれてしまふ。これは前節で述べた渦塊が塊といふ性質をすつかり失ふといふことに外ならない。併しこれと同時に前にあつたものとは全く關係なく新しい渦塊が生れるから、渦粒子は改めて各渦塊に屬する幾つかの群に分れて次の運動に入る。

或る任意の一つの渦粒子に就いて考へてみると、これは渦塊の平均寿命  $t$  毎に順次新しい渦塊の一部分となつて運動して行くのであるから、この  $t$  といふ時間毎の渦粒子の運動は前後に全く關係のないことは明かである。

第2圖は渦粒子の運動を例示したもので、 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  は  $t=0$  に  $O$  を出發した渦粒子の  $t$  時間毎の位置を示す。この  $t$  といふ時間になす運動を渦粒子の**基本運動**と呼び、その間の平均速度を**基本速度**と呼ぶことにする。例へば第2圖に於いて  $\vec{OP}_1, \vec{P_1P_2}, \dots$  は基本運動を示し、 $\vec{OP}_1/t, \vec{P_1P_2}/t, \dots$  は基本速度となる。或る任意の一つの渦粒子がなす基本運動は、既に述べた通りその前後のものとは全



第 2 圖

く關係がないものであるから、各基本速度も亦前後と關係のない全く偶然的な値を取るものであることはいふまでもない。

一つ渦粒子が或る時間に幾つかの基本運動より成る一つの運動をなした時、この運動をその時間に對する**綜合運動**と呼び、その間の平均速度を**綜合速度**と呼ぶことにする。例へば第2圖に於いて  $\vec{OP}_n$  は一つの綜合運動を示し、 $\vec{OP}_n/nt$  はその綜合速度となる。

## §3. 渦動擴散現象に於ける時刻及び場所の概念<sup>(1)</sup>

渦塊の運動が剛體の並進運動の如きものであれば、同一渦塊に屬する渦粒子は全部同一基本運動をするが、併し渦塊は一般に廻轉もすれば變形もし、又渦塊の中でも更に小さい規模の渦動現象が行はれてゐるから、同一渦塊に屬する渦粒子であつてもその基本運動は相互に關係はあるが同一ではない。先に渦動現象を模型化した時、或る時間だけ渦塊は全く崩れずに運動するものと考へたが、剛體の如きものであるとは考へてない。

渦塊が剛體と見做されるならば、その速度は簡単に表はすことが出来るが、さうでないで次の様に定義する。或る一つの渦塊に屬する各渦粒子の基本速度のベクトルを  $v_1, v_2, \dots, v_\sigma$  とすれば、この渦塊の速度  $v$  は

$$v = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} v_i$$

で定義する。但し渦塊は  $\sigma$  個の渦粒より成るものとする。渦塊の運動が相互に獨立であるといふことは、それらの  $v$  が相互に全く關係のないものであるとする。

渦粒子も亦一般に質點或ひは剛體とは見做されないから、その各部分の速度のベクトル平均を以つて渦粒子の速度と定義する。従つて渦塊の速度とは結局その各微小部分の速度のベクトル平均を以つて定義されるものであり、これは物理學的にも妥當なものであらう。若し渦塊が剛體であれば、上記の定義による速度はその重心の速度となることは直ぐに分る。

今相互に關係なく全く獨立の運動をする多數の物體があつた時、その運動を統計的に取扱ふにはその中から例へば  $N_0$  個だけ任意に取り出して考へれば充分であるとする。即ち  $N_0$  個だけ任意に物體を選んでその運動を調べれば、實用上すべて可能な運動が現はれ、その速度分布を求めてみると、 $N_0$  個をどの様を選び變へても實用上常に一定の分布を示す。且つ座標系を適當に取れば、 $N_0$  個の平均速度は實用上常に 0 となることは經驗的事實である。

同一渦塊に屬する渦粒子の運動は相互に關係があつて獨立ではないから、渦粒子の運動を統計的に取扱はうとするには、渦塊がすべて  $\sigma$  個の渦粒子より成るものとすれば、常に  $\sigma N_0$  個の渦粒子

(1) 本節で述べる考へ方は別に新しいことではないが、實際に渦動擴散現象を取扱ふ必要上この考へ方を具體的に纏め上げることに努めた。

に就いて考へなければならぬ。併し若し各渦塊より常に  $\sigma'$  個 ( $\sigma' < \sigma$ ) だけ選出す方法があれば、 $\sigma' N_0$  個だけでも充分である。座標系を適當に選べば、これ等の基本速度の平均は実用上 0 になることはいふまでもない。

$\sigma N_0$  または  $\sigma' N_0$  個の渦粒子を選んで考へるといふことは、相互に獨立な運動をする  $N_0$  個のものより成る組を  $\sigma$  または  $\sigma'$  組だけ同時に考へることになり、それ等の運動を統計的に取扱ふには、その中の一組だけを代表として考へればよい。この様に考へれば、結局  $\sigma N_0$  または  $\sigma' N_0$  個の渦粒子はすべて相互に獨立な運動をするものとして統計的に取扱つても差支へないと思ふ。

渦粒子の基本速度とは渦塊の平均寿命  $t$  に對する平均速度ではあるが、多數の渦粒子を統計的に取扱ふ場合、これを以つて瞬間的速度と看做して差支へないと思ふ。故に  $\sigma N_0$  個の渦粒子、即ち  $N_0$  個の渦塊を含む體積内の流體の平均速度は如何なる時刻に於いても実用上常に 0 であることがいへる。但しこゝで瞬間といふのは、今對照としてある現象に於いて或る測定装置を以つてこの現象を測定し得る最小の時間の意味であり、時刻とはこの様な瞬間的な時刻を指すものとする。

次に  $N_0$  個の渦塊を同時に通し得る様な充分大きな面を流體中に考へれば、この面に於ける流體の或る瞬間的な時刻の平均速度は、 $N_0$  個の渦塊に屬する渦粒子の中でその時刻に丁度この面を通るものの平均速度に外ならない。且つ各渦塊がすべて  $\sigma$  個の渦粒子より成るものとすれば、この平均に加はる渦粒子は  $N_0$  個の各渦塊に就いてすべて同じ、例へば  $\sigma'$  個 ( $\sigma' < \sigma$ ) であると考へることが出来るから、この平均速度は実用上 0 となる。即ち  $N_0$  個の渦塊を同時に通し得る様な充分大きな面に於ける流體の平均速度は如何なる時刻に於いても実用上常に 0 である。但し面を通して流體の一般流がある場合には、この速度を差引いたものが 0 であることはいふまでもない。

今度は流體中に充分小さな面を考へ、この面が同時に二つ以上の渦塊に跨る確率は実用上 0 と看做し得るならば、この面は同時にたゞ一つの渦塊だけが通り、且つ各渦塊の渦粒子はその一部分例へば  $\sigma'$  個づつ ( $\sigma' < \sigma$ ) が通るだけである。故に  $N_0$  個の渦塊が通る時間例へば  $T$  に對するこの面に於ける流體の平均速度は、 $N_0$  個の渦塊より各  $\sigma'$  個づつ取り出した渦粒子  $\sigma' N_0$  個の平均速度に外ならないから、これは実用上 0 となる。但しこの面を通して流體の一般流がある場合には、この速度だけ差引いたものが 0 になることはいふまでもない。尙  $T$  といふ時間は、面が充分小さい限りはその面積に關係しない。面積が變れば  $\sigma'$  が變るだけで、 $N_0$  個の渦塊が通る時間は變らない。

次に面積が渦塊の大きさに比べて充分大きくもなく、また充分小さくもない場合を考へてみると、この面が同時に跨り得る渦塊の数は必ずしも一定ではなく、色々な数の場合が同じ様な確率で現れる。即ちこの面を同時に通る渦塊の数は一定ではなく、色々な数の場合があり得る。且つこの面を通る各渦塊の渦粒子の数はすべてのものに就いて同じではない。故にたとへ  $N_0$  個の渦塊が通る

時間だけこの面に於ける流體の平均速度を求めても、これは各渦塊の速度に夫々異つた重價を附した平均値となるから、一般に必ずしも 0 にはならない。勿論或る適當な時間だけ測定して平均すれば、その平均速度を 0 にすることは出来るが、この時間は常に一定なものではなく、測定する度毎に異り、且つ偶然的な値を取ることは明らかである。

但、渦動擴散とは流體夫れ自身の流れは認められないが、これを媒質として不均一に分布してゐる或る物理量の流れが起るといふ現象である。但し流體の一般流はないものとする。

併し渦動流體を或る程度に微視すれば、到る所で流體の動きが認められるのであるから、渦動擴散現象を取扱ふ場合には、場所或ひは時間に關して或る程度まで巨視するものであることは明らかである。

今

1. 點  $(x, y, z)$  とはこの座標によつて代表される  $\sigma N_0$  個の渦粒子、即ち  $N_0$  個の渦塊を含む或る體積  $V_0$  を表はし、時刻  $t$  とは瞬間的な時刻を指すものとする。
2. 點  $(x, y, z)$  とはこの座標によつて代表される  $N_0$  個の渦塊を同時に通し得る様な充分大きな面積  $S_0$  を表はし、時刻  $t$  とは瞬間的な時刻を指すものとする。
3. 點  $(x, y, z)$  とはこの座標によつて代表される渦塊に比べて充分小さな面積を表はし、時刻  $t$  とはこの面積を  $N_0$  個の渦塊が通る或る有限時間  $T$  を指すものとする。

以上三つの巨視的な見方の中のどれか一つを用ひるものとすれば、先に述べた所により、渦動流體の速度はすべての點及び時刻に於いて常に 0 となり、流體の流れは認められないことになる。即ち渦動擴散を取扱ふ場合には場所及び時間に關して上記の如き巨視的な見方をしなくてはならない。

故に渦動擴散現象に於いて、或る時刻  $t$  に於ける點  $(x, y, z)$  の物理量の密度  $\chi(x, y, z, t)$  とは

1. 時刻  $t$  に  $(x, y, z)$  で代表される有限體積  $V_0$  内で瞬間的に測定した平均密度。
2. 時刻  $t$  に  $(x, y, z)$  で代表される有限面積  $S_0$  に於いて瞬間的に測定した平均密度。
3.  $(x, y, z)$  で代表される充分小さな面に於いて、時刻  $t$  で代表される有限時間  $T$  をかけて測定した平均密度。

以上三つの平均値の中のどれか一つを意味するものと考へなくてはならない。

尙點  $(x, y, z)$  とは渦塊に比べて充分大きくもなく、また充分小さくもない或る面積を意味するものとすれば、先に述べた所により、渦動流體のすべての點及び時刻に於ける速度が 0 となるためには、時刻  $t$  で表はされる有限時間は常に一定ではなく、測定する度毎に變へ、且つ偶然的な値を取らなければならないものである。即ちこの場合には  $(x, y, z)$  は常に一定面積を表はすが、時刻  $t$  は一定なる有限時間を表はさないから、現象を正しく規定することに於てならない。故に物理學上で

はかくの如き取扱ひは避けなくてはならない。従つて渦動擴散を取扱ふ場合に、渦塊に比べて充分大きくもなく、また充分小さくもない面に於いて物理量の密度を測定することは正しくないことが分る。

#### §4. 渦粒子の基本速度分布

今後渦粒子の運動に就いてはその  $x$  成分のみを考へることにする。

既に述べて来た通り、統計的に充分多數の渦粒子を同時に見た場合のみでなく、一つの渦粒子に就いても亦各平均壽命  $t$  毎の基本速度は相互に關係なく全く偶然的な値を取るものであるから、その分布は Maxwell の法則に従ふものと假定する。即ち任意に選んだ渦粒子の基本速度が  $u-u+du$  である確率  $f(u)du$  は

$$f(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{u^2}{2u^2}} du \quad (1)$$

であるものとする。但し  $u^2$  は基本速度の自乗平均である。

渦動流體を模型化して新しく考へた渦粒子といふものの運動は、氣體の分子運動論に於ける分子運動と全く類似してゐることから、渦粒子の速度分布を直ちに上記の如く假定してしまつたが、これは差支へないものと思ふ。

#### §5. 渦粒子の運動に関する諸法則

(1) 今一つの渦粒子が  $n$  個の基本運動より成る一つの綜合運動をした場合の綜合速度  $u$  は、その時の各基本速度を  $u_1, u_2, \dots, u_n$  とすれば、

$$u = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

であるから、その自乗平均  $\bar{u}^2$  は

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{n^2} \int \int \dots \int (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2 f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \quad (2)$$

で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_i) d\xi_i &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i^2 f(\xi_i) d\xi_i &= \bar{u}^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i \xi_j f(\xi_i) d\xi_i &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

の關係があることに注意しながら、 $\xi_1, \xi_2, \dots$  に就いて順次積分して行けば、結局 (2) 式は

$$\bar{u}^2 = \frac{\bar{u}^2}{n}$$

となる。但しこの綜合運動の時間を  $t$  とすれば、勿論

$$t = nt$$

であり、且つ渦動の性質が變らない限り  $\bar{u}^2$  及び  $t$  は一定であるから、上記の關係は

$$\bar{u}^2 t = \bar{u}^2 t = \text{一定} \quad (4)$$

となる。

この結果より、任意の時間  $t, t', t'', \dots$  に對する綜合速度の自乗平均を夫々  $\bar{u}^2, \bar{u}'^2, \bar{u}''^2, \dots$  とすれば、

$$\bar{u}^2 t = \bar{u}'^2 t' = \bar{u}''^2 t'' = \dots = \bar{u}^2 t = \text{一定} \quad (4')$$

であることも明らかである。

#### (2) 綜合速度の分布則

先づ  $t=2t$  に對する綜合速度が  $u-u+du$  である確率を  $f_{2t}(u)du$  とすれば、

$$\begin{aligned} f_{2t}(u)du &= \int_{\xi_1=-\infty}^{\infty} \int_{\xi_2=2u-\xi_1}^{2u-\xi_1+2du} f(\xi_1) f(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= 2du \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1) f(2u-\xi_1) d\xi_1 = \frac{2du}{(\sqrt{2\pi u^2})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi_1^2 + (2u-\xi_1)^2}{2u^2}} d\xi_1 \\ &= \frac{2du}{2\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2(\xi_1-u)^2 + 2u^2}{2u^2}} d\xi_1, \end{aligned}$$

$\sqrt{2}(\xi_1-u) = \eta$  と置いて、

$$= \frac{\sqrt{2} du}{2\pi u^2} e^{-\frac{2u^2}{2u^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2u^2}} d\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{2u^2}{2u^2}} du.$$

次に  $t=3t$  に對する綜合速度が  $u-u+du$  である確率を  $f_{3t}(u)du$  とすれば、

$$\begin{aligned} f_{3t}(u)du &= \int_{\xi_1=-\infty}^{\infty} \int_{\xi_2=3u-\xi_1}^{3u-\xi_1+3du} f_{2t}(\xi_1) f(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 3du \int_{-\infty}^{\infty} f_{2t}(\xi_1) f(3u-2\xi_1) d\xi_1 \\ &= \frac{3\sqrt{2} du}{2\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\xi_1^2 + (3u-2\xi_1)^2}{2u^2}} d\xi_1 = \frac{2\sqrt{2} du}{2\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{6(\xi_1-u)^2 + 3u^2}{2u^2}} d\xi_1, \end{aligned}$$

$\sqrt{6}(\xi_1-u) = \eta$  と置いて、

$$= \frac{\sqrt{3} du}{2\pi u^2} e^{-\frac{3u^2}{2u^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2u^2}} d\eta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{3u^2}{2u^2}} du.$$

更に  $t=4t$  に對する綜合速度が  $u-u+du$  である確率を  $f_{4t}(u)du$  とすれば、

$$\begin{aligned} f_{4t}(u)du &= \int_{\xi_1=-\infty}^{\infty} \int_{\xi_2=4u-\xi_1}^{4u-\xi_1+4du} f_{3t}(\xi_1) f(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 4du \int_{-\infty}^{\infty} f_{3t}(\xi_1) f(4u-3\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \frac{4\sqrt{3} du}{2\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3\xi_1^2 + (4u-3\xi_1)^2}{2u^2}} d\xi_1 = \frac{4du}{2\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{12(\xi_1-u)^2 + 4u^2}{2u^2}} d\xi_1, \end{aligned}$$

$\sqrt{12}(\xi_1 - u) = \eta$  と置いて,

$$= \frac{\sqrt{4}}{2\pi u^3} e^{-\frac{4u^2}{2u^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2u^2}} d\eta = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{4u^2}{2u^2}} du.$$

故にこの計算を何回か行ふことにより, 任意の時間  $t = nt$  に對する総合速度が  $u - u + du$  である確率  $f_n(u)du$  が分り,

$$f_t(u)du = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{nu^2}{2u^2}} du = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi u^2 t}} e^{-\frac{u^2}{2u^2 t}} du$$

となる. 或ひは  $\bar{u}^2 t = \text{一定}$  の法則により,

$$f_t(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{u^2}{2u^2}} du \quad (5)$$

となる. 即ち基本速度の分布則と全く同じ形である. 但し  $\bar{u}^2$  は時間  $t$  に對する渦粒子の総合速度の自乗平均である.

(3) 今

$$u\sqrt{t} = u\sqrt{t} \quad (6)$$

と置けば,

$$f_t(u)du = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi u^2 t}} e^{-\frac{u^2}{2u^2 t}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{u^2}{2u^2}} du = f(u)du$$

となる. 即ち  $t=0$  に或る一點より飛び出す渦粒子の中で,  $u - u + du$  なる基本速度で飛び出す個数と, それより任意の時間  $t$  が経つた時に  $u\sqrt{t}/t - d(u\sqrt{t}/t)$  なる総合速度を示す個数とは相等しいことになる. 故に, 個々の渦粒子は決して規則正しい運動はしないけれども, それを統計的に取扱ふ場合には,  $t=0$  に或る一點から  $u$  なる基本速度で飛び出した渦粒子は (6) 式で與へられる様な規則的な運動をするものと考へることが出来る. 或は任意の時間  $t$  に進む距離を  $x$  とすれば,

$$x = ut = u\sqrt{t}t \quad (7)$$

でその運動が表はされる.

一般に渦粒子の運動を三次元的に考へれば,  $t=0$  に或る一點より基本速度  $(u, v, w)$  を以つて飛び出した渦粒子が任意の時間  $t$  に進む距離  $(x, y, z)$  は

$$x = u\sqrt{t}t, \quad y = v\sqrt{t}t, \quad z = w\sqrt{t}t \quad (8)$$

となり, これは直進運動を表はすものである. 即ち統計的な取扱ひに於いて, 或る二つの状態間の途中を考へないならば, 渦粒子は (8) 式で示される如き直進運動をするものと考へることが出来る.

### §6. 渦粒子の物理量輸送に関する法則

これまで渦動擴散を解析的に取扱ふ唯一の方法として用ひられて來た微分方程式, 例へば一次元的な均一流體であれば,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

は問題とする擴散物理量が次の諸條件を満足するものとして導かれたものであることは言ふまでもない. 但し  $X$  は物理量の密度, 即ち單位質量の流體に含まれる量を表はすものとする.

- (1) 湧出及び吸失がないものとするれば, 空間の或る任意の部分に含まれる物理量は, この部分の流體それ自身が周囲のものと交換されない限り, いつまでも一定不變である. 即ち流體の運動によつてのみ物理量の移動が起る.
- (2) 流體の或る任意の部分, 周囲のものと混合しないやうにして, 一つの場所から他の任意の場所に移しても, その中に含まれる物理量には變りがない.
- (3)  $X_1$  及び  $X_2$  なる物理量の密度を有する流體を夫々  $m_1$  及び  $m_2$  なる質量だけ混合したとすれば, この混合流體が含む物理量の總量は  $m_1 X_1 + m_2 X_2$  となる, 即ち流體を混合することにより, 新たに物理量が増減することがない.

この各條件を渦粒子と結び付けて考へると, 渦粒子の物理量輸送に関する法則が導かれる.

先づ本論では渦動流體を渦粒子といふいつまでも崩れない, 即ち周囲のものと混合しないやうな流體の塊から成るものと考へるのであるから, 上記の條件 (1) 及び (2) に相當するものとして, 擴散物理量は渦粒子によつて輸送され, 且つ各渦粒子に含まれるその量はいつまでも一定不變であると考へることが出来る.

次に或る時刻及び場所の擴散物理量の密度  $X$  とは, 既に §3 で述べた通り, この時刻及び場所に屬する統計的に多數の渦粒子, 例へば  $N$  個のものに就いて測定したその平均値を意味するのであるから, この平均値に寄與する渦粒子の中で  $X_1, X_2, \dots, X_n$  なる各物理量の密度を有するものが夫々  $n_1, n_2, \dots, n_n$  個づつあるものとするれば, 上記の條件 (3) により,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i p_i, \quad \text{但し } p_i = \frac{n_i}{N} \quad (9)$$

でなくてはならない. 但し渦粒子の質量は一定とする.  $p_i$  はこの時刻及び場所に屬する渦粒子が  $X_i$  を有する確率であり, こゝで  $X_i p_i$  をば  $X_i$  を有する渦粒子の  $X$  に對する寄與率と呼ぶことにする.

尚  $X_i$  が連続的な値を取り得る場合には, 上記の  $\sum$  は積分の形となる. 即ち或る時刻及び場所に屬する渦粒子が  $\xi - \xi + d\xi$  なる物理量の密度を有する確率を  $p(\xi)d\xi$  とすれば, 寄與率  $\xi p(\xi)d\xi$  を可能なるすべての値に就いて積分したものがその時刻及び場所の物理量の密度を表はす. この値を  $X$  とすれば,

$$X = \int_{(\xi \text{ の可能なる値})} \xi p(\xi) d\xi \quad (10)$$

である。この様な  $X$  が渦動拡散現象に於ける或る時刻及び場所としての物理量の密度といふことになる。

以上は従来渦動拡散の問題で取扱はれる物理量が満足すべき条件をたゞ渦粒子に結び付けて考へたまでのことであるが、渦粒子といふものを考へて渦動拡散の問題を取扱ふには、これだけでは未だ充分ではないので、更に次の如き一つの新しい考へを入れることにする。

渦粒子が最初  $t=0$  に或る場所から飛び出す時はすべてその場所としての物理量の密度を有するものとする。これが渦粒子の物理量輸送に関する一つの新しい考へである。但し最初といふのは、渦動拡散による物理量の密度分布の變化を調べる場合の最初の状態、即ち微分方程式に就いていへば初期条件の時刻を指すもので、通常これを時間の原点  $t=0$  に取るわけである。

扱實際に渦動拡散の現象を取扱ふ場合には如何なる状態を最初の状態とするか、即ち如何なる時刻を時間の原点に取るかといふことは取扱者が任意に定めるものである。例へば  $t_1$  といふ時刻の状態から出発してそれから後の状態を調べようとすれば、 $t_1$  が時間の原点となり、 $t_2$  といふ時刻から出発しようとするれば、 $t_2$  が時間の原点となる。但し例へば無渦動流體が或る時刻  $t_1$  に突然渦動流體に變つたとすれば、この  $t_1$  に於ける状態が嚴密な意味での最初の状態となるけれども、取扱者は必ずしもこの状態から出発するとは限らない。

かくの如く、所謂最初の状態と看做すものも實は過去より引續いてゐる途中の一状態であるから、この時或る一つの場所に屬する渦粒子は過去に於いて色々な場所からやつて來たものの集りである。そして各渦粒子が夫々含む物理量はいつまでも一定不變であるといふ前の考へ方によれば、この時一つの場所に屬する渦粒子は夫々異なる物理量の密度を有することになる。従つて所謂最初の状態、即ち時間原点  $t=0$  に或る場所から飛び出す渦粒子はすべて一様にその場所としての物理量の密度を有するものと考へることは出來ない様に思はれるが、併し統計的な取扱ひをする場合には、個々の渦粒子が有する物理量の密度ではなく、一つの場所に屬する多數のものの平均値だけが問題であり、且つ如何なる基本速度のものが如何なる密度を有するかといふことは問題でないのであるから、先づ所謂最初の状態では一つの場所に屬する渦粒子はすべて一様にその場所としての密度を有するものと考へ、次にそれから或る時間經過した後の状態では一つの場所に屬する渦粒子の異なる密度の平均値がその場所としての密度であると考へても別に差支へないわけである。

以上渦粒子の物理量輸送に関して述べて來た結果を纏めて書けば、所謂最初の状態、即ち時間の原点  $t=0$  に或る一つの場所から飛び出す渦粒子はすべて一様にその場所としての物理量密度を有し、各渦粒子が有するこの密度はいつまでも一定不變である。そして或る時間經過した後の状態に於いては、或る一つの場所に屬する渦粒子は夫々異なる物理量密度を有することになるが、それらの平均値が即ちその場所としての密度を表はすものと考へることになる。

## §7. 理論の目的

私が降雨機巧の研究をやつてゐる内に先づぶつかつた一つの大きな障害は渦動拡散に関する問題であつた。但し私のいふ渦動拡散とは混合現象、交換現象の如きものまでも含めた廣い意味のものである。先づ順序として私は渦動拡散の微分方程式から解くことを試みたが、御承知の通りこの微分方程式は固體熱傳導の式と全く同じ形であり、問題が少しでも複雑になると解けなくなる。

やつと考へつたのが圖式解法<sup>(1)</sup>であつた。降雨機巧の研究に用ひるだけならば、この解法を更に深く研究する必要もないが、解法そのものにはまだ色々發展させたい點がある。このためには何か新しい理論により、この解法を側面より検討する必要がある。

次に現在の氣象學では、大氣の渦動現象に對する觀念があまりまだはつきりしてゐない様に思はれる。そこで私としても渦動現象に関する思想を一應纏め上げて、降雨機巧の研究中渦動現象を取扱ふ上の根據となるべき理論を作つて置く必要を痛切に感じたのである。

以上二つが今回の統計渦動論を公にした主なる動機である。故にこの理論は、理論のための理論ではなく、全く必要に迫られて作り上げたものである。又この理論は如何にして渦動が起るかといふことには一切觸れてゐない。たゞ渦動現象があつたとすれば、これを如何に取扱つて行くかといふことを指示するものに過ぎない。

現在渦動拡散の計算法として最も正しいとされてゐるものは微分方程式による解法であると思ふ。例へば私の圖式解法の結果が正しいかどうかを判定するには、矢張り微分方程式の解と比較して見るより外に方法がなく、今回の理論を作る上に於いても常に微分方程式の解を根據とした。故に今回の理論は微分方程式の解に或る物理學的な解釋を下すものだと考へることも出来る。そこでこの點を證明する意味で、微分方程式の既知の解を今回の理論から導いてみよう。但しすべて一次元の問題とする。

## §8. 無限流體に於ける渦動拡散

今流體は無限に擴つてゐるものとし、擴散物理量の最初の状態、即ち  $t=0$  に於ける密度分布を  $F(x)$  とする。

$t=0$  に  $\xi-\xi+d\xi$  なる場所より飛び出す渦粒子が任意の時刻  $t$  に場所  $x$  に達する確率は、(5) 式に  $x-\xi=ut$  と置いて、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi u^2 t^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2u^2 t^2}} d\xi$$

となり、この渦粒子は  $F(\xi)$  なる物理量の密度を有するのであるから、

(1) 高橋喜彦：渦動拡散及び熱傳導の圖式解法、氣象集誌 19, 321~327, 昭和 16 年。

$$F(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2 t^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2u^2 t^2}} d\xi$$

が即ち時刻  $t$  及び場所  $x$  としての密度に對するこの渦粒子の寄與率となる。

故に任意の時刻  $t$  に於ける擴散物理量の密度分布を  $\chi(x, t)$  とすれば、

$$\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2 t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2u^2 t^2}} d\xi \quad (11)$$

となる。

この式の中で  $\bar{u^2 t}$  は  $t$  の値如何に拘らず常に一定値を取るものであるから、

$$\kappa = \frac{1}{2} \bar{u^2 t} \quad (12)$$

なる常數  $\kappa$  を用ふれば、上式は

$$\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (13)$$

となり、これは渦動擴散の微分方程式の解に外ならない。但し常數  $\kappa$  は渦動擴散率と呼ばれてゐるものである<sup>(1)</sup>。又は

$$\kappa = \frac{1}{2} \bar{u^2 t} \quad (14)$$

と書くことも出来る。これによつて今回の理論より見たる渦動擴散率の物理學的意味が明かになつた<sup>(2)</sup>。尙  $\kappa$  に就いてはいづれ他の機會に更に詳しく論ずる豫定である。

### § 9. 半無限及び有限なる均一渦動流體に就いて

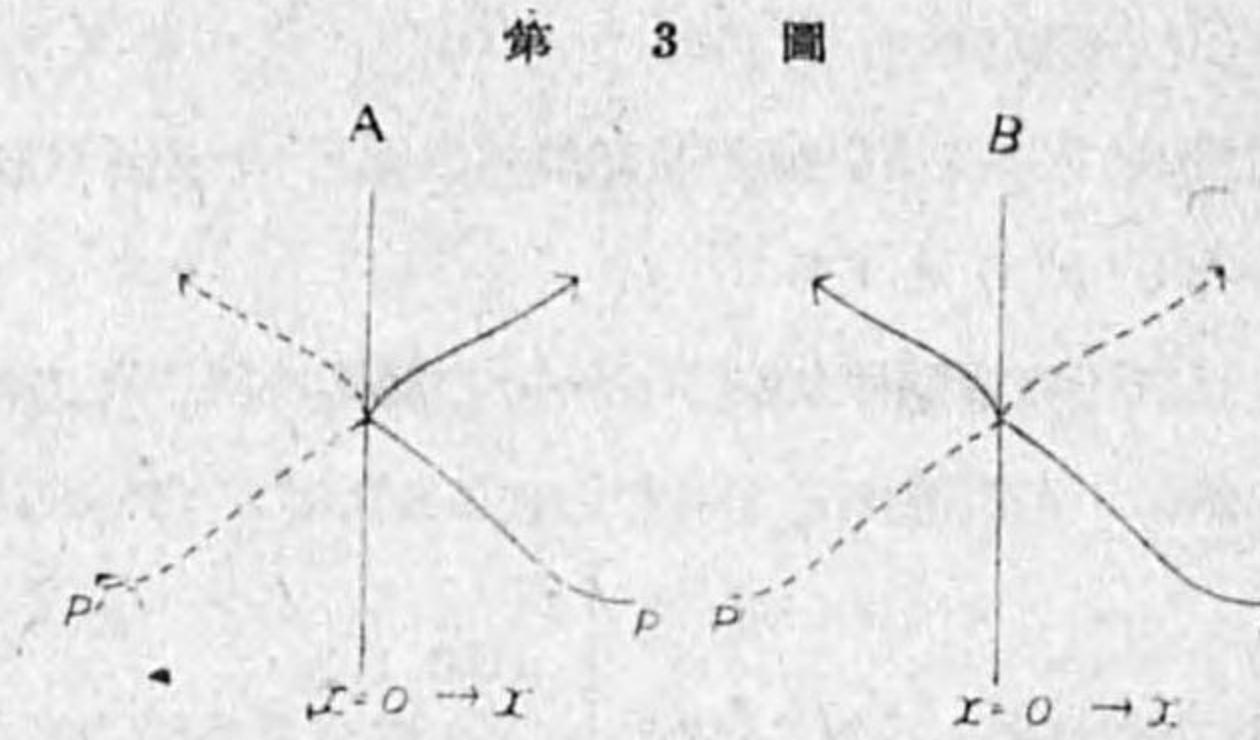
こゝで取扱ふ渦動流體は到る所で  $\kappa$  が一定、即ち均一渦動流體であるが、そのためには渦粒子と境界面との衝突は完全弾性體として行はなければならない。即ち渦粒子が面に衝突する直前及び直後の速度の大きさには變りがなく、たゞその運動の方向が變るだけであるとすれば、衝突による渦粒子の運動エネルギーの増減がないから、 $\bar{u^2}$  は流體中に到る所、たとへ境界面の極く附近でもすべて一樣になり、従つて  $\kappa$  も到る所で一樣になつて、均一渦動流體として取扱ふことが出来る。

渦粒子の物理量輸送に關する確率が簡単に計算出来る場合は、半無限或ひは有限なる流體としたまゝで解を求めることが出来るが、確率の計算が複雑な場合には、固體熱傳導論の常套手段に倣ひ、適當な無限流體に置き換えて計算する方が便利であり、こゝでも止むを得ない場合はこの方法によることにした。

(1) 川下研介：熱傳導論（應用數學叢書），52 頁の (11.5) 式。

(2) この關係は例へば H. Lettau: Die Atmosphärische Turbulenz 等にも出てゐるが、その物理學的な意味は私のものと幾分違つてゐる。

第 3 圖 (A) に於いて境界面  $x=0$  で限られた流體が  $x>0$  に半無限に擴つてゐるものとす。今境界面を取り去らずに置いて、 $x<0$  にも同じ渦動流體を擴らせたとすれば、 $x>0$  及び  $x<0$  の兩部分に於ける渦粒子の運動には  $x=0$  に關して對稱的なものが必ず存在することは明らかである。例へば第 3 圖 (A) の境界面の附近に於いて  $x>0$  の或る渦粒子が  $P$  點より出發して實線の如き運動をしたとすれば、これと同時に  $x<0$  では  $P'$  點より出發して破線の如き運動をする渦粒子が必ずある。故に個々の渦粒子を區別して考へない統計的な取扱ひに於いては、同圖 (B) の如く境界面を取り去つてしまつたとして、 $P$  及び  $P'$  點より出發した渦粒子が夫々實線及び破線の如き運動をしたものと考へることが出来る。又二つの面に限られた有限流體に就いても同様である。



以上の理由により半無限或ひは有限なる流體中の渦動擴散はこれを無限流體に置き換えて解いても差支へないのである。

### § 10. 表面で物理量の出入がない場合

#### (1) 半無限流體

表面を  $x=0$  に取り、流體は  $x>0$  に半無限に擴つてゐるものとし、最初  $t=0$  に於ける物理量の密度分布を  $F(x)$  とする。

$x=\xi$  を出發した渦粒子が直進して  $x=x$  に達する道は二つある。その一つは直接達するもので、その距離は  $x-\xi$  であり、他の一つは表面で反射してから達するもので、その距離は  $x+\xi$  である。而して渦粒子の有する物理量は表面に衝突しても何ら變りがないから、任意の時刻  $t$  に於ける物理量の密度分布  $\chi(x, t)$  は

$$\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \kappa t}} \int_0^{\infty} F(\xi) \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \quad (15)$$

で與へられる。これは勿論

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0, \quad (\chi)_{t=0} = F(x) \quad (x > 0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

の解である<sup>(1)</sup>。

(1) 川下 (前出): 87 頁の (19.4) 式。

## (2) 有限流體

厚さ  $l$  なる有限流體の二つの表面を  $x=0$  及び  $x=l$  に取り、最初  $t=0$  に於ける物理量の密度分布を  $F(x)$  とする。

渦粒子の運動は勿論  $0 < x < l$  の範囲に限られてゐるが、 $x=\xi$  より出發して  $x=x$  に達するまでに渦粒子が直進すると考へられる距離は、途中表面で一回或ひは何回か反射される場合も入れて、

$$\left. \begin{array}{l} 2nl+\xi-x \\ 2nl+\xi+x \end{array} \right\} n=0, 1, 2, \dots \quad \left. \begin{array}{l} 2nl-\xi+x \\ 2nl-\xi-x \end{array} \right\} x=1, 2, 3, \dots$$

だけある。故に、

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{(2nl+\xi-x)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(2nl+\xi+x)^2}{4\kappa t}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{(2nl-\xi+x)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(2nl-\xi-x)^2}{4\kappa t}} \right) \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{(\xi-x+2nl)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(\xi+x+2nl)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

となる。

$F(x)$  は勿論  $0 < x < l$  で定義されたものであるが、これに對して

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= F(x) \quad (0 < x < l), \\ \Phi(x \pm 2nl) &= \Phi(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ \Phi(-x) &= \Phi(x) \end{aligned}$$

なる函数  $\Phi(x)$  があつたとすれば、(17) 式は

$$\chi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{\infty} \Phi(\eta) \left( e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(\eta+x)^2}{4\kappa t}} \right) d\eta$$

と書き變へることが出来る。而して  $\Phi(x)$  として

$$\frac{2}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \cos \frac{s\pi x}{l} \int_0^l F(\lambda) \cos \frac{s\pi \lambda}{l} d\lambda \quad \left( \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 1 \right)$$

を取ることが出来るから、これを上式に代入すれば、結局

$$\chi(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s e^{-\frac{\kappa s^2 \pi^2 t}{l^2}} \cos \frac{s\pi x}{l} \int_0^l F(\lambda) \cos \frac{s\pi \lambda}{l} d\lambda \quad (18)$$

となる。これはこの問題、即ち

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad (\chi)_{t=0} = F(x) \quad (0 < x < l) \end{array} \right\} \quad (19)$$

の解であることは既によく知られてゐる<sup>(1)</sup>。

(1) 小平吉男：物理數學第2巻、291頁の(6)式。

形は變つてゐるが、(17) 式も亦同じ解であることはいふまでもない。

### § 11. 表面に於ける物理量の密度が一定に保たれるか、或ひは時間の函数として與へられてゐる場合の取扱ひ方

半無限又は有限流體の表面に於ける物理量の密度が一定に保たれるか、或ひは時間の函数として與へられてゐる場合には、表面と渦粒子との間に物理量の出入が行はれなくてはならない。

そこでこれに關し次の如き法則を新たに假定する。

(1) 表面に衝突した渦粒子は面より離れる瞬間に物理量を受ける。これは、或る有限時間だけ表面に接觸する渦粒子がないといへないから、この渦粒子が受ける物理量を計算する困難を避けるための假定である。

(2) 渦粒子が衝突前に有してゐた物理量はそのまま保有される。即ち渦粒子の物理量は衝突毎に受けるものが積算されて行く。但し表面より受ける物理量は正のみでなく負の場合もあるわけである。

(3) 渦粒子が表面より受ける物理量は、その渦粒子がその時に有してゐる量には關係なく、表面の條件によつてのみ定まるものである。従つて同時に面を離れる渦粒子はすべて同量の物理量を受けるわけである。

例へば最初  $q_0$  なる物理量を有する渦粒子が表面に  $n$  回衝突して、その都度  $q_1, q_2, \dots, q_n$  なる物理量を受けたとすれば、この渦粒子の有する總量は  $q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_n$  となり、且つ  $q_0, q_1, \dots$  の間には相互に何らの關係もない。

尙實際の計算に當つては、渦粒子の受ける物理量をいひ表はすのに、量そのものではなく、これを渦粒子の物理量密度に換算したもの、詳しくいへばその量によつて増減すべき渦粒子の物理量密度を用ひることとする。例へば渦粒子の質量を  $m$  (これはすべての渦粒子に就いて一定であると既に假定してある。) とすれば、渦粒子が受ける物理量の實際の量  $q$  の代りに、 $q/m$  なる量でいひ表はすことにし、簡單のためこれを  $\Phi$  なる記號で表はす。今後渦粒子が  $\Phi$  なる物理量を受けたといへば、渦粒子の物理量密度が  $\Phi$  だけ増すだけの量を受けたといふ意味であるものとする。

### § 12. 表面の物理量密度が時間の函数で與へられてゐる場合

#### (1) 半無限流體

表面を  $x=0$  に取り、流體は  $x>0$  の部分に擴つてゐるものとする。表面の物理量密度は時間の函数  $\varphi(t)$  で與へられ、最初  $t=0$  に於ける密度分布は  $F(x)$  であるとする。

前節で假定した法則により、渦粒子が最初に有してゐた物理量は表面に於ける物理量の出入とは全く無關係にどこまでも保有されるものであるから、先づこの最初に分布してゐた物理量が任意の時刻  $t$  にどの様に分布されてしまふか、それを  $\chi_1(x, t)$  とすれば、丁度表面  $x=0$  で物理量の出



入がない場合と同じ取扱ひで、

$$\chi_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \quad (20)$$

となる。

次に表面から時々刻々渦粒子に與へられて行く物理量だけの輸送に就いて考へてみる。但しこの與へられる量は時間の函数  $\Phi(t)$  である、即ち時刻  $t$  に表面に衝突した渦粒子は  $\Phi(t)$  だけの物理量密度の増加を受けるものとする。

或る時刻  $t$  及び場所  $x$  に屬する渦粒子の中で、それより前の或る時刻  $t'-t'+dt'$  ( $t' < t$ ) に表面に衝突したことの渦粒子の確率は、(5) 式で

$$u = \frac{x}{t-t'}, \quad du = \frac{x dt'}{(t-t')^2}$$

と置いて、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{x^2}{2u^2(t-t')^2}} \frac{x dt'}{(t-t')^2}$$

となる。こゝで  $\overline{u^2}$  は渦粒子の時間  $t-t'$  に於ける綜合速度の自乗平均であるから、先に (12) 式で與へた常數  $\kappa$  を用ふれば、上記の確率は

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{x dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (21)$$

と書くことも出来る。この確率を以つて  $\Phi(t')$  なる物理量が時刻  $t$  及び場所  $x$  の物理量密度に寄與される。

故に或る時刻  $t$  に於ける物理量の密度分布の中で、表面から渦粒子に與へられたものだけの分布を  $\chi_2(x, t)$  とすれば、

$$\chi_2(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \Phi(t') e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (22)$$

となる。或ひは

$$\frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} = \eta$$

と置けば、

$$\chi_2(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Phi \left( t - \frac{x^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta \quad (23)$$

となる。

但しこの積分には同一渦粒子が何回かに互つて表面から受けた量も重複して計算されてゐる。それは渦粒子は必ずしもたゞ一回だけ表面に衝突するだけとは限らないから、例へば或る一つの渦粒子が  $t_1, t_2, \dots$  といふ時刻に反復して表面に衝突したとすれば、その都度  $\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots$  なる物理量を受け、これ等のものがすべて (22) の積分に重複して含まれてゐる。併し前節に假定した

法則により、これ等はすべてその渦粒子の物理量に積算されるのであるから、重複して積分されても差支へない。

そこで求むる物理量の密度分布を  $\chi(x, t)$  とすれば、

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Phi \left( t - \frac{x^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta \quad (24) \end{aligned}$$

となるが、 $\Phi(t)$  はまだ分つてない。併し表面の條件により、

$$\begin{aligned} (\chi)_{x=0} &= \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Phi(t) e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi + \Phi(t) \quad (25) \end{aligned}$$

でなくてはならないので、

$$\Phi(t) = \varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (25')$$

となる。

故に求むる解は

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi \left( t - \frac{x^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta \\ &\quad - \frac{2}{\pi\sqrt{\kappa}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\sqrt{t - \frac{x^2}{4\kappa\eta^2}}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa \left( t - \frac{x^2}{4\kappa\eta^2} \right)}} d\xi \quad (26) \end{aligned}$$

となる。右邊最後の項は

$$-\frac{x}{2\pi\kappa} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t'}} d\xi \quad (27)$$

と書いてもよい。

所が次の §13 で述べるけれども、實は

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t'}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (28)$$

といふ關係が成り立つので、これを用ひて (24) 式を書き換えれば、

$$\chi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi \left( t - \frac{x^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta \quad (29)$$

となり、これはこの問題を微分方程式より解いた結果、即ち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ (\chi)_{x=0} &= \varphi(t), \quad (\chi)_{t=0} = F(x) \quad (x > 0) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

の解に外ならない<sup>(1)</sup>.

(2) 有限流體

二つの表面  $x=0$  及び  $x=l$  で限られた有限流體を考へ、二つの表面に於ける物理量密度は夫々時間の函数  $\varphi_1(t)$  及び  $\varphi_2(t)$  であり、最初  $t=0$  に於ける流體中の密度分布を  $F(x)$  とする.

先づ最初から分布してゐる物理量のみを考へ、これが任意の時刻に如何に分布するか、それを  $X_1(x, t)$  とすれば、二つの表面で物理量の出入がないものとして取扱へばよく、(17) 式と同様

$$X_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{(\xi-x+2nl)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(\xi+x+2nl)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \quad (31)$$

となる.

次に表面  $x=0$  より渦粒子が受ける物理量を時間の函数  $\Phi_1(t)$  であるとする. 今或る一つの渦粒子が時刻  $t'$  にこの表面に衝突して  $\Phi_1(t')$  を受けたならば、その後この渦粒子が表面  $x=0$  及び  $x=l$  に何回か衝突しつゝ  $0 < x < l$  の範囲で運動しても、前節で假定した法則によりこの  $\Phi_1(t')$  はそのまま保有されることになる.

故に表面  $x=0$  より受ける物理量のみを考へるならば、任意の時刻  $t$  に於けるこの密度分布  $X_2(x, t)$  は

$$X_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} (2nl+x) \int_0^t \Phi_1(t') e^{-\frac{(2nl+x)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=1}^{\infty} (2nl-x) \int_0^t \Phi_1(t') e^{-\frac{(2nl-x)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (32)$$

で與へられる. これは  $x=0$  より任意の場所  $x$  へ渦粒子が達するまでに直進したと看做し得べき距離には

$$\begin{aligned} 2nl+x & \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ 2nl-x & \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

があることから直ぐに導かれるものである.

同様に表面  $x=l$  より渦粒子が受ける物理量を時間の函数  $\Phi_2(t)$  であるとするれば、これだけの密度分布  $X_3(x, t)$  は

$$X_3(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)l+x \int_0^t \Phi_2(t') e^{-\frac{(2n+1)l+x)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)l-x \int_0^t \Phi_2(t') e^{-\frac{(2n+1)l-x)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (33)$$

で與へられる. 但し  $x=l$  より任意の場所  $x$  へ渦粒子が達するまでに直進したと看做し得べき距離には

(1) 川下 (前出): 95 頁の (20.2) 式.

$$\left. \begin{aligned} 2n+1l+x \\ 2n+1l-x \end{aligned} \right\} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

があることを考へれば直ぐに導かれる.

故に求むる密度分布  $X(x, t)$  は

$$X(x, t) = X_1(x, t) + X_2(x, t) + X_3(x, t) \quad (34)$$

となる. 但し  $\Phi_1(t)$  及び  $\Phi_2(t)$  は表面の條件より決定しなくてはならない.

そこで (34) 式で  $x=0$  と置けば、左邊は  $\varphi_1(t)$  であり、右邊は多少整理することが出来て、

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+2nl)^2}{4\kappa t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=1}^{\infty} 2nl \int_0^t \Phi_1(t') e^{-\frac{4n^2 l^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)l \int_0^t \Phi_2(t') e^{-\frac{(2n+1)^2 l^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (35)$$

となる. 同様に  $x=l$  と置けば、

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+2n+1)l)^2}{4\kappa t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)l \int_0^t \Phi_1(t') e^{-\frac{(2n+1)^2 l^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=1}^{\infty} 2nl \int_0^t \Phi_2(t') e^{-\frac{4n^2 l^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (36)$$

となり、結局  $\Phi_1(t)$  及び  $\Phi_2(t)$  は聯立積分方程式 (35) 及び (36) より求めることになるが、これは一般に解くことが困難かと思はれる.

實は半無限流體の場合も  $\Phi(t)$  は積分方程式より決定したのであるが、(25) 式から分る様にこの場合は容易に求めることが出来たわけである.

この問題の解は既に微分方程式から分つてゐる. 即ち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\ (X)_{x=0} = \varphi_1(t), \quad (X)_{x=l} = \varphi_2(t), \quad (X)_{t=0} = F(x), \quad (0 < x < l) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

を解くのに、

$$X = X_1 + X_2$$

と置き、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} \\ (X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=l} = F(x), \quad (0 < x < l) \end{aligned} \right\}$$

及び

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} \\ (X)_{x=0} = \varphi_1(t), \quad (X)_{x=l} = \varphi_2(t), \quad (X)_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\}$$

の解を夫々求むれば、結局 (37) 式の解として

$$\chi(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[ \int_0^l F(\lambda) \sin \frac{n\pi \lambda}{l} d\lambda + \frac{\kappa n \pi}{l} \int_0^t e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2 \lambda}{l^2}} (\varphi_1(\lambda) - (-1)^n \varphi_2(\lambda)) d\lambda \right] \quad (38)$$

が得られる<sup>(1)</sup>。

今回の理論でも、若し有限流體を適當な無限流體に置き換えれば、矢張り解を容易に求めることが出来る。

それには先づ第 4 圖に於いて流體は表面  $x=0$  及び  $x=l$  の外部まで無限に擴つてゐるものとする。そ

して最初  $t=0$  に於ける物理量の密度分布として、實在のもの  $F(x)$  ( $0 < x < l$ ) に對應して無限の範圍に於いて圖中の曲線で示す如きものを考へる。且つ實在の面  $S_0$  及び  $S_1$  の外に、 $l$  なる間隔を以つて  $S_2, S_3, S_4, \dots, S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, \dots$  なる無数の面を考へ、これ等の面を渦粒子は自由に通過することが出来るが、通過の瞬間に

$$\begin{aligned} S_2, S_4, S_6, \dots \text{ では } & -\varphi_1(t), \\ S_0, S_{-2}, S_{-4}, \dots \text{ では } & \varphi_1(t), \\ S_1, S_3, S_5, \dots \text{ では } & \varphi_2(t), \\ S_{-1}, S_{-3}, S_{-5}, \dots \text{ では } & -\varphi_2(t) \end{aligned}$$

なる物理量を通過時刻に應じて受けるものとする。以上の如く考へれば、 $x=0-l$  の實在部分に於ける條件はそのまま満たされることは直ぐに分る。

そこで先づ最初から分布してゐる物理量は任意の時刻  $t$  に如何なる分布をするか、それを  $\chi_1(x, t)$  とすれば、無限流體の場合の式 (11) に倣つて、

$$\chi_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{(2n+1-x+\xi)^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(2n+1-x-\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \quad (39)$$

となる。

次に各面  $S_i$  ( $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) より渦粒子に與へられる物理量のみを考へ、任意の時刻  $t$  に於けるその密度分布を  $\chi_2(x, t)$  とすれば、

(1) 川下 (前出): 134 頁。

$$\chi_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \left[ \varphi_1(t') \left( (2n+1-x) e^{-\frac{(2n+1-x)^2}{4\kappa(t-t')}} - (2n+1-x) e^{-\frac{(2n+1-x)^2}{4\kappa(t-t')}} \right) + \varphi_2(t') \left( (2n+1+l-x) e^{-\frac{(2n+1+l-x)^2}{4\kappa(t-t')}} - (2n+1+l-x) e^{-\frac{(2n+1+l-x)^2}{4\kappa(t-t')}} \right) \right] \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (40)$$

となる<sup>(1)</sup>。

故に求むる解は以上二つを加へたもの、即ち

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t) \quad (41)$$

である。或ひは (40) 式は (22) 式の形であるから、これを (23) 式の形に直すことも出来るから、

$$\begin{aligned} \chi(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^l F(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{(2n+1-x+\xi)^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(2n+1-x-\xi)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{\frac{2n+1-x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} \varphi_1 \left( t - \frac{(2n+1-x)^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\frac{2n+1-x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} \varphi_1 \left( t - \frac{(2n+1-x)^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta \right. \\ & \left. + \int_{\frac{2n+1+l-x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} \varphi_2 \left( t - \frac{(2n+1+l-x)^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\frac{2n+1+l-x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} \varphi_2 \left( t - \frac{(2n+1+l-x)^2}{4\kappa\eta^2} \right) e^{-\eta^2} d\eta \right] \quad (42) \end{aligned}$$

(41) 或ひは (42) 式はその形が (38) 式と異なるけれども、(37) の微分方程式及び各條件を満足することは容易に分る。

(3) 表面の物理量密度が 0 又は一定に保たれてゐる場合

この場合は先に時間の函数と考へた  $\varphi(t)$  或ひは  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  を 0 又は一定値であるとすればよいわけで、こゝで改めて述べることは止めて置く。

### § 13. (28) 式の證明

前節に現れた積分式 (28) の成り立つことを證明しよう。

無限流體に於いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty) \\ (\chi)_{t=0} &= F(x) & (x < 0) \\ &= 0 & (x > 0) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

の解は

$$\chi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{x(x+\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (44)$$

であり、 $x=0$  に於いては

$$(\chi)_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (45)$$

(1) この形の解は H. S. Carslaw: Introduction to the Mathematical Theory of Heat Conduction in Solids, 160 頁にある。

である。

故に若し  $x > 0$  の部分だけを考へるならば、この問題は表面の物理量密度が時間の函数として與へられ、且つ最初の密度は 0 であるといふ問題に考へ直すことが出来る。即ち (43) の代りに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (0 < x < \infty) \\ (X)_{x=0} &= \varphi(t), \quad (X)_{t=0} = 0, \\ \text{但し } \varphi(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

と考へても同じことである。

この解は

$$\begin{aligned} X(x, t) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \varphi(t') e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \\ &= \frac{x}{4\pi\kappa} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t'(t-t')^{3/2}}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t'}} d\xi \end{aligned} \quad (47)$$

となる。

而して解の唯一性により (44) と (47) 式とは同じものでなくてはならないことから、先の (28) 式が得られる。即ち

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t'(t-t')^{3/2}}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t'}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (48)$$

なる関係が成り立たねばならない。

これは  $0 < x < \infty$  の範囲で  $F(x)$  が常数である場合は容易に證明し得るが、一般には證明が困難だと思はれる。故に  $\kappa, t$ , 及び  $x$  に任意の數値を考へ、 $F(\xi)$  を任意な形に置いて數値計算によつて證明することになるが、(48) 式のまゝでは計算が非常に面倒である。幸ひ名古屋帝國大學工學部の坂路壽郎助教授により、上式が成り立つための充分な條件として形の簡単な式が得られた。

[以下坂路助教授の所論]

(48) 式が成り立つための充分な條件として

$$\frac{x\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t e^{-\left(\frac{x^2}{4\kappa(t-t')} + \frac{\xi^2}{4\kappa t'}\right)} \frac{dt'}{\sqrt{t'(t-t')^{3/2}}} = e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \quad (x, \xi, t > 0) \quad (49)$$

が  $\xi$  の値如何に拘らず成り立てばよい。

上式に於いて

$$t' = t\lambda, \quad \frac{\xi}{2\sqrt{\kappa t}} = \alpha, \quad \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} = \beta$$

と置けば、

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1-\lambda}\right)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)^{3/2}}} = e^{-(\alpha+\beta)^2} \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (50)$$

となる。或ひは  $\alpha$  で微分した形にして、

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1-\lambda}\right)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha+\beta}^\infty e^{-z^2} dz$$

と書いてもよい。これを積分して、

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1-\lambda}\right)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} = \int_{\alpha+\beta}^\infty e^{-z^2} dz \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (51)$$

となる。但しこれには  $\beta$  のみを含む項が附くけれども、 $\alpha \rightarrow \infty$  とすれば、これは 0 であることが分る。

更に

$$\lambda = \sin^2 \theta, \quad 1-\lambda = \cos^2 \theta$$

と置けば、

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\beta^2}{\cos^2 \theta}\right)} d\theta = \int_{\alpha+\beta}^\infty e^{-z^2} dz \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (52)$$

となり、一層形のよい式が得られる。[以上]

次に東京帝國大學理學部小谷正雄助教授の證明を述べる。

[以下小谷助教授の所論]

(51) 式より出發する。

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \int_0^1 e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1-\lambda}\right)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}, \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\partial I}{\partial \beta} \right) &= \int_0^1 e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1-\lambda}\right)} \frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} \left( \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{1-\lambda} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

こゝで

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1-\lambda} = (\alpha+\beta)^2 + \zeta^2$$

と置けば、

$$\zeta = \frac{(\alpha+\beta)\lambda - \alpha}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$$

$$d\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} \left( \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{1-\lambda} \right) d\lambda$$

となる。従つて

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\partial I}{\partial \beta} \right) = 2 \int_{-\infty}^\infty e^{-(\alpha+\beta)^2 + \zeta^2} d\zeta = 2\sqrt{\pi} e^{-(\alpha+\beta)^2}$$

となり、更に

$$\alpha + \beta = \eta, \quad \alpha - \beta = \mu$$

と置けば

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\partial I}{\partial \beta} \right) = -2\sqrt{\pi} e^{-\eta^2}$$

となり、これを  $\eta$  に就いて積分すれば、

$$I = 2\sqrt{\pi} \int_\eta^\infty e^{-z^2} dz = 2\sqrt{\pi} \int_{\alpha+\beta}^\infty e^{-z^2} dz$$

但しこれには  $\mu$  のみを含む項が附くが、 $\eta \rightarrow \infty$  の時  $I=0$  であることから、この項は 0 であることが分る。即ち (51) 式の証明が出来た。[以上]

又中央氣象臺本間正作氏の証明は次の通りである。

[以下本間氏の所論]

(52) 式より出發する。

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{\zeta^2 + 1}, \quad \text{従つて} \quad \cos^2 \theta = \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1}$$

と置けば、

$$2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{-2\zeta d\zeta}{(\zeta^2 + 1)^2}$$

又  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とすれば、

$$\sin \theta \cos \theta = + \sqrt{\frac{1}{\zeta^2 + 1} \cdot \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1}} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1},$$

即ち、

$$d\theta = -\frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1}$$

となる。故に

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\beta^2}{\cos^2 \theta}\right)} d\theta = \int_0^{\infty} e^{-\left\{\alpha^2(\zeta^2 + 1) + \beta^2 \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2}\right\}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} \\ = e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 \zeta^2 + \beta^2}{\zeta^2}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1}.$$

扱、

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha^2 \zeta^2 + \frac{\beta^2}{\zeta^2}\right)} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-2\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

は既によく知られてゐる關係である。この兩邊に  $e^{-\alpha^2}$  を乗じて、 $\alpha^2$  に就いて積分すれば、

$$\int_0^{\infty} d\zeta \int_{\alpha^2}^{\infty} e^{-\left\{\alpha^2(\zeta^2 + 1) + \frac{\beta^2}{\zeta^2}\right\}} d\alpha^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{\alpha^2}^{\infty} e^{-2\alpha\beta - \alpha^2} \frac{d\alpha^2}{\alpha},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\left\{\alpha^2(\zeta^2 + 1) + \frac{\beta^2}{\zeta^2}\right\}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \sqrt{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-2\alpha\beta - \alpha^2} d\alpha,$$

$$e^{-\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha^2 \zeta^2 + \frac{\beta^2}{\zeta^2}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \sqrt{\pi} e^{\beta^2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-(\alpha + \beta)^2} d\alpha$$

$$= \sqrt{\pi} e^{\beta^2} \int_{\alpha + \beta}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

即ち

$$I = e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} \int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha^2 \zeta^2 + \frac{\beta^2}{\zeta^2}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \sqrt{\pi} \int_{\alpha + \beta}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

となり、(52) 式が證明された。[以上]

尙數値積分に慣れてゐる私は (52) 式を數値積分で證明する方が早いと思つて、例へば  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=0.7$  と置き、左邊はブラ＝メーターによる圖式積分で求め、右邊は誤差函數の表から求めて比

較して見ると、

$$\text{左邊} = 0.1574 \pm 0.0003 \quad (\text{三回の平均})$$

$$\text{右邊} = 0.15730$$

となり、兩邊がよく一致するので、これで證明されたものと考へてゐたが、その後小谷助教及び本間氏より夫々上記の如き證明を寄せられて來た。

#### § 14. 固体熱傳導への應用と表面より熱輻射のある場合の計算例

渦動擴散に関する今回の理論が固体熱傳導にもそのまま應用出来ることは、兩者の微分方程式が全く同形であることから明かである。たゞこの場合渦粒子の代りに熱量を輸送する或る粒子を考へ、その運動及び熱量輸送に關して渦粒子と全く同じ法則を假定すればよい。但し  $X$  は温度、 $\kappa$  は熱擴散率に取ればよい。

こゝでは渦動擴散で既に述べたことは繰返す必要がないから、たゞ固体表面で熱輻射がある場合に就いて簡単な問題を取扱つて見よう。

半無限固体の表面より温度  $\varphi(t)$  なる媒質へ熱輻射が行はれ、最初固体の温度を 0 とする。

表面を  $x=0$  に取り、固体は  $x>0$  に擴つてゐるものとすれば、微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, & (0 < x < \infty) \\ (\theta)_{t=0} &= 0, & \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = h(\theta)_{x=0} - h\varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

となり、この解は

$$\theta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h\eta} d\eta \int_{\frac{x+\eta}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{(x+\eta)^2}{4\kappa\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (54)$$

である。

そこで (54) 式を次の如く物理學的に解釋することが出来る。

今媒質は固体表面に接して半無限に擴つてゐるものとし、この中でも熱量を輸送する粒子が運動してゐるものと考へる。速度は一般に固体内の粒子と異なつてゐるかも知れないが、 $x$  軸を適當に伸縮させて、數値上は媒質、固体内共に同じ速度分布を有するものとする。

又媒質内の粒子は或る確率を以つて媒質に吸収されてなくなると同時に、代りの新しい粒子が飛び出し、この粒子はその時の媒質の温度をもつものと考へる。今  $d\eta$  なる距離を進む間に一つの粒子が吸収される確率を

$$hd\eta$$

とする。これは亦  $d\eta$  なる範圍で新しい粒子が飛び出す確率ともなる。故に固体表面より  $\eta$  なる距離の所で飛び出した粒子が、表面に無事到達する確率は

$$e^{-h\eta}$$

である。

表面に達した粒子はその熱量を、その時同時に表面に衝突した固体内の粒子に與へてしまふと考へる。或ひは固体外の粒子がそのまま固体内に飛び込んでしまふと考へても同じことである。尚固体内の粒子が最初にもつてゐた熱量が表面でどうなるかは、最初の固体温度を 0 に取つたから、こゝでは考へる必要がない。

故に時刻  $t'-t'+dt'$  に媒質内の固体表面より  $\eta-\eta+d\eta$  の所で新しく飛び出した粒子により、固体内の任意の場所  $x$  に丁度時刻  $t$  に輸送されて来る熱量を温度で表はせば、

$$\varphi(t')e^{-h\eta} h d\eta \frac{x+\eta}{2\sqrt{\pi\kappa}} e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

となる。故に

$$\theta(x,t) = \frac{h}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^\infty e^{-h\eta}(x+\eta) d\eta \int_0^t \varphi(t') e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \quad (55)$$

が求むる解である。又は

$$\frac{x+\eta}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} = \lambda$$

と置いて、 $\eta$  を  $\lambda$  に置換すれば、(54) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{次に} \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} & (0 < x < \infty) \\ (\theta)_{t=0} &= F(x), & \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x=0} = h(\theta)_{x=0}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

即ち半無限固体の表面より温度 0 なる媒質中へ熱輻射が行はれ、且つ最初の固体の温度が  $F(x)$  である場合を考へて見る。

今表面  $x=0$  に於いて最初から固体内にあつた熱量の輻射がないものとすれば、この熱量だけによる表面温度は

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (57)$$

となる。

若し温度の原点を (57) の如く時間と共に變へて、最初から固体内にあつた熱量による表面温度を常に 0 に保つならば、この熱量の表面よりの放散は考へないでよから、時刻  $t$  に於けるこの熱量だけによる固体の温度分布  $\theta_1(x,t)$  は、温度の原点を再び元に直して見れば、

$$\theta_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi \quad (58)$$

である。

一方媒質の温度は、温度の原点を變へるため最早 0 ではなく、

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (59)$$

の如き時間の函数となる。故に媒質から固体内へ輸送される熱量による固体の温度分布  $\theta_2(x,t)$  は、(55) 式に (59) を代入すれば、

$$\theta_2(x,t) = -\frac{h}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^\infty e^{-h\eta}(x+\eta) d\eta \int_0^t e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{\pi\kappa t'(t-t')^{3/2}}} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa t'}} d\xi$$

となるが、(48) の関係により簡単な形に直せて、

$$\theta_2(x,t) = -\frac{h}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty e^{-h\eta} d\eta \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{(x+\eta+\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (60)$$

となる。

故に

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \theta_1(x,t) + \theta_2(x,t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty F(\xi) \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa t}} \right) d\xi - \frac{h}{\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^\infty e^{-h\eta} d\eta \int_0^\infty F(\xi) e^{-\frac{(x+\eta+\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (61) \end{aligned}$$

が求むる解であり、これは既に微分方程式より求められてゐるものと一致する。

昭和 17 年 6 月 20 日 名古屋地方気象臺に於いて

## 気象より見たる北海道の凶作に関する 2, 3 の報告 特に昭和年間を中心として

中原 孫 吉, 五十 嵐 光 彦

### § 1. 序

昭和 16 年の夏季は低冷にして近年稀なる凶冷年と謂はれてゐた。筆者等は氣象的立脚点より北海道の凶作を考究してみたが、資料の都合上昭和年間に重點を置いたが、北海道に米作が普及したのも大正の末期から昭和の初めにかけてであるから<sup>(1)</sup> 新しい資料のみで論ずれば資料不足の憾が多いのも蓋し不得已のものであらう。而して北日本の凶作は主に冷害に基因するものであるが、是れ

(1) 福井英一郎：地理學評論 5 卷 9 號, 755-776, 昭和 4 年。

川口丈夫：北海道統計, 18 號: 84 號

に関する既往の研究も關教授<sup>(2)</sup>以來多數のものが公表されてゐる。

昭和年間の凶作年は昭和 6,7,9,10,15 及 16 年の 6 つと大正 15 年を入れて 7 回起生してゐる。是等の年にはそれぞれの氣象的特徴が認められる。筆者等は各凶作年の地方別の減收率の型と氣象的特徴との関係を見出すことに最大の重點をおいた。又凶作は海からといふ俚諺もあれば海況は是非共必要であらうと思考されるが別に起稿したい所存である。

§2. 凶作年とその反當收量

我々が年の豊凶を論ずるにはその目安として反當收量を用ひてゐる。反當收量は年により又地方別にみて變動がある。筆者等は凶作年の各支廳別の凶作度を表す爲めに支廳別の平均反當收量に據つたが北海道に於ては米作は人爲的條件よりも自然的條件に支配される處が多い。それ故北海道廳の統計によつて明治時代より平均反當收量の變遷状態をみるに左程の開きは認められない。石狩支廳での例をみるに明治 34 年の平均反當收量は 1.515 石なるに反し昭和 14 年は 1.675 石の結果が得られ、明治 35 年及 38 年の凶作にはそれぞれ 0.206, 0.583 石で、昭和 15 年のものは 0.933 石であつた。而して昭和の 15 ケ年間の平均反收は 1.228 石、大正昭和の 29 ケ年に於ては 1.218 石、又明治 34 年以來の 53 ケ年のものは 1.253 石であつて其の傾向直線或は曲線も木下氏<sup>(3)</sup>の本道全體の調査に明かなる如く割合水平に近いものである。同様の例は空知、上川、後志初め他の支廳に於ても認められるものである。

今各支廳の任意の年の反當收量を  $y_t$  とする。

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}$$

の如く  $\bar{y}$  を定めると  $\bar{y}$  は平均反當收量を表すが、又

$$x = \frac{y - \bar{y}}{\bar{y}}$$

に於て  $x$  は  $\bar{y} > y$  の時は負であつて 1 より常に小さく  $y=0$  の時  $x=-1$  となる。即ち凶作の場

第 1 表 凶作年に於ける凶作率 ( $x \times 100$  %) 表

年	支廳名	石狩	空知	上川	後志	渡島	檜山	釧路	日高	十勝	釧路國	網走	留萌	根室	宗谷
昭和	15	24	8	24	20	22	37	17	18	42	64	24	19	100	100
	10	32	18	40	36	30	47	57	72	87	100	98	73	100	100
	9	26	+2	40	42	46	45	26	18	43	82	92	69	100	100
	7	43	64	77	50	10	25	42	18	73	100	98	85	100	100
	6	57	43	56	78	71	74	60	49	78	83	88	54	100	100
大正	15	28	25	49	20	13	23	38	47	69	62	86	37	100	100
	昭和	2	96	96	92	99	97	92	94	95	71	100	99	—	—

(2) 關豊太郎：官報 明治 40 年 4 月 15-16 日。

(3) 木下茂吉：北海道氣象月報, 501 號。

合は之れに該當するわけである。豊作の時は  $x > 0$  である。筆者はこの  $x \times 100$  (%) を以て凶作率を表はすことにする。昭和 16 年を除く 7 回の凶作年の凶作率は次表の如くである。

之れより大正 2 年が最大凶作年であり、昭和 10 年がこれに亞ぎ、昭和 7,6,9 年及び大正 15 年の順次であることが判明する。是等の年に於て根室、宗谷の各支廳に於ては收穫皆無にして、釧路國にあつても 7 年及 10 年は收穫皆無であつた。又大正 2 年度は網走も收穫皆無であつた。

§3. 凶作年の氣象狀況

北海道の米作には 8 月の氣温が一番重要であることは筆者の一人の調査<sup>(4)</sup>並び他の報告<sup>(5)(6)</sup>によつて明らかであるが、7 月の氣温も 8 月のそれに次いで影響を及ぼしてゐる様に思考される。それ故筆者等は凶作年の 7,8 月の平均氣温、日照時數及降水總量を氣象要素の對象に選定し、報告<sup>(7)</sup>によつて調べた結果凶作年の 7,8 月は大體次の型に分類出來得る様である。

第 2 表

型名	名稱	氣象狀態	該當年
I	乾燥冷年	低温, 多照, 寡雨	昭和 9 年
II	濕潤冷年	低温, 寡照, 多雨	昭和 7 年及 10 年
III	組合せ冷年	低温, 寡照, 寡雨	昭和 16 年
IV	雜型年	—	大正 15 年昭和 6 年

第 I 型より第 III 型に至る間は大體に於て低温である點には變りはないが、日照時數及び降水量の多寡によつて差違が認められるわけである。低温, 多照, 多雨の例は僅かに大正 2 年の 8 月に於て経験せられたのみである。I 型を乾燥冷年, II 型を濕潤冷年, III 型を組合せ冷年とし以上の部類に屬しないものを IV に入れ雜型年と呼ぶことにしたい。各型の實例は該當年欄に見られるのである。我々は今回は日射量を問題にしてゐないが、日射量は低温年には高温年に較べて少量なることは當然と考へられる。

§4. 各型に現れたる全道的の凶作状態

昭和 11 年より同 15 年に至る 5 ケ年の全道の平均反當收量を  $\bar{y}$  とし、各凶作年の收量を  $y$  としして第 2 節に掲げた凶作年の  $x$  を算出した。その値は全部負であることは當然である。昭和 16 年の値は第 2 回豫想收量の値である。

(4) 中原：北海道氣象要報, 第 1 卷, 第 4 號。

(5) 川口丈夫：地理學評論, 第 11 卷。

(6) 高信保：中央氣象臺産業氣象報告, 第 1 卷。

(7) 中央氣象臺：本邦累年氣候表。

“ ” : 年報及月報。

第 3 表

年 度	大正 2 年	大正 15 年	昭和 6 年	昭和 7 年	昭和 9 年	昭和 10 年	昭和 16 年
凶作率 (x) %	48.4	37.8	56.2	65.0	28.0	38.7	34.8
同指数	173	135	200	232	100	138	124
凶作氣象型	IV	IV	IV	II	I	II	III

指数は昭和 9 年度のものを 100 とせり。

型別の凶作年の平均値は次表の如くであつて、全道的の傾向を見るに

第 4 表

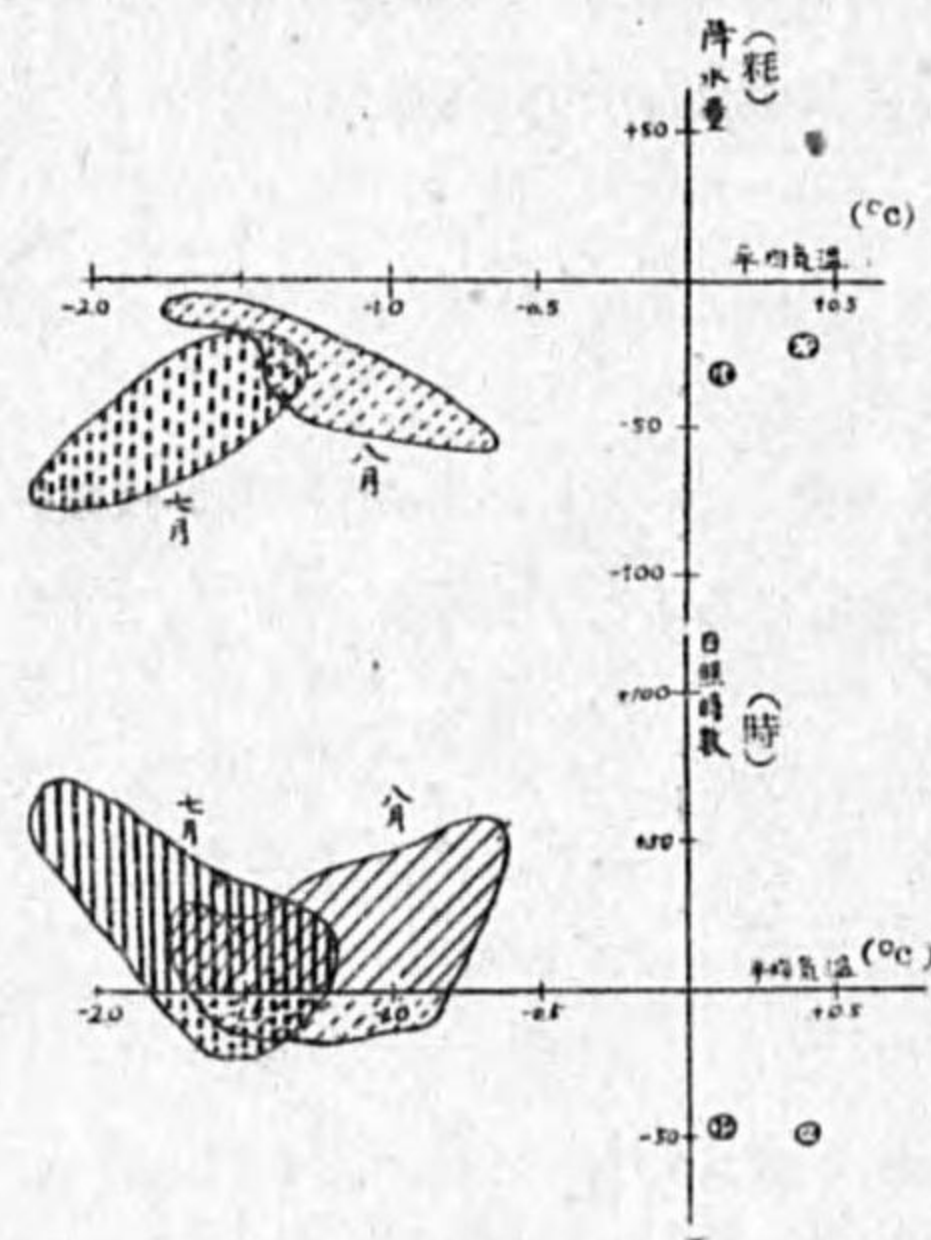
型	I	II	III	IV
x の指数	100	173	124	169
回数	1	2	1	3

II 型が一番被害が大きく I 型が少ない様である。

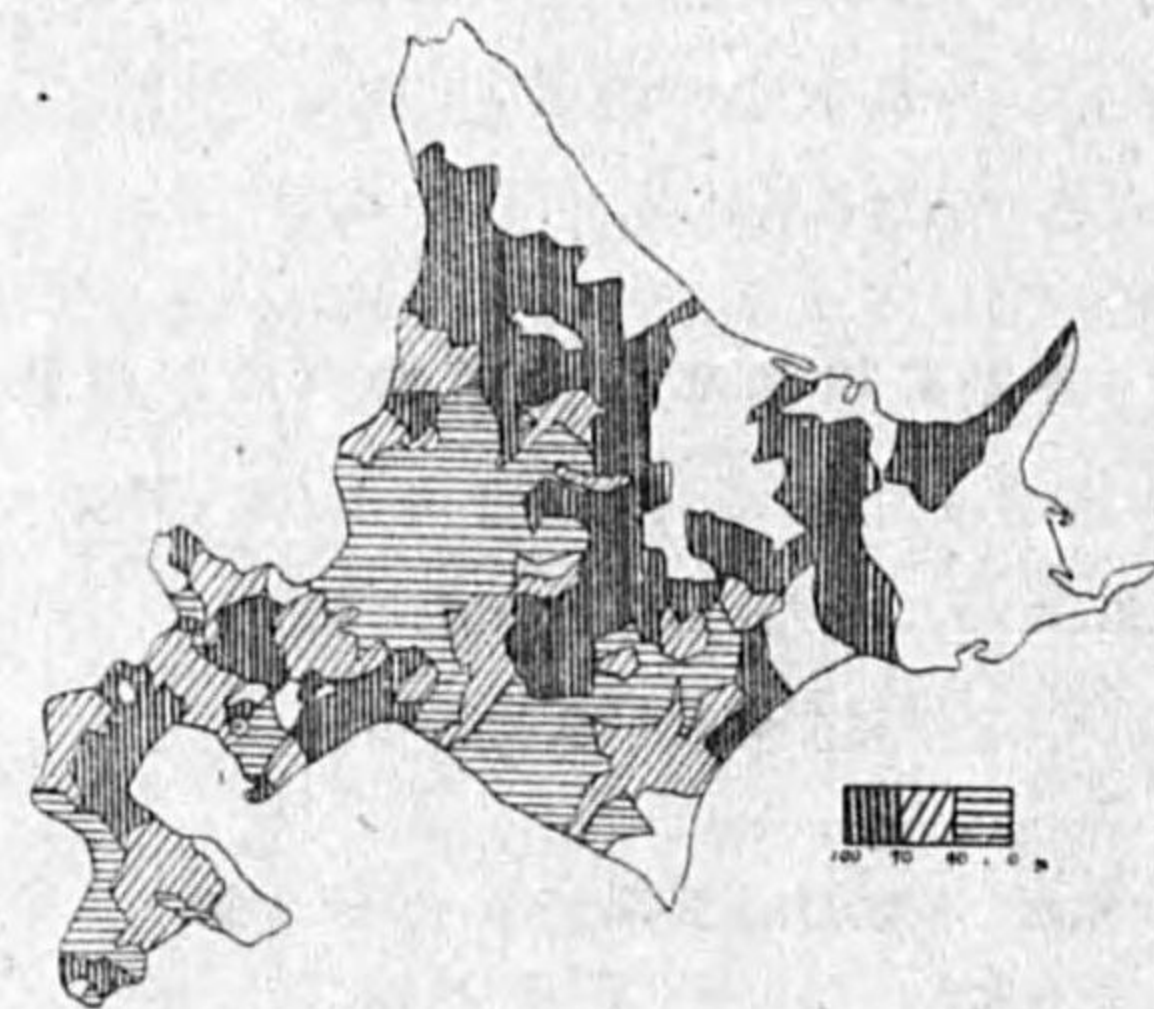
次に同じ年度及年数の  $y$  を全道の各村別に算出しこれを以て平均反常収量と見做し各凶作年の  $x$  を村別に計算し圖示したが各村別のものである爲め非常に細分される。それ故 0~40%, 40~70%, 70~100% の 3 階級に分類し圖示した所傾向を見るのに便利であつたから、各型とその凶作率と對照する場合此の圖を用ふことにしたい。

I の型 此の型に屬するものは低温、多照、寡雨型である。その實例は昭和 9 年の場合の如くであり、第 1 圖は本道全體各地の偏差のみを示したものである。7, 8 月低温で降水量は第 1 圖の上段の如く平年より少く、日照時数は大體下段の如く大體として多照で一部の地方は 20 時間以内

第 1 圖 昭和 9 年夏季の氣象偏差



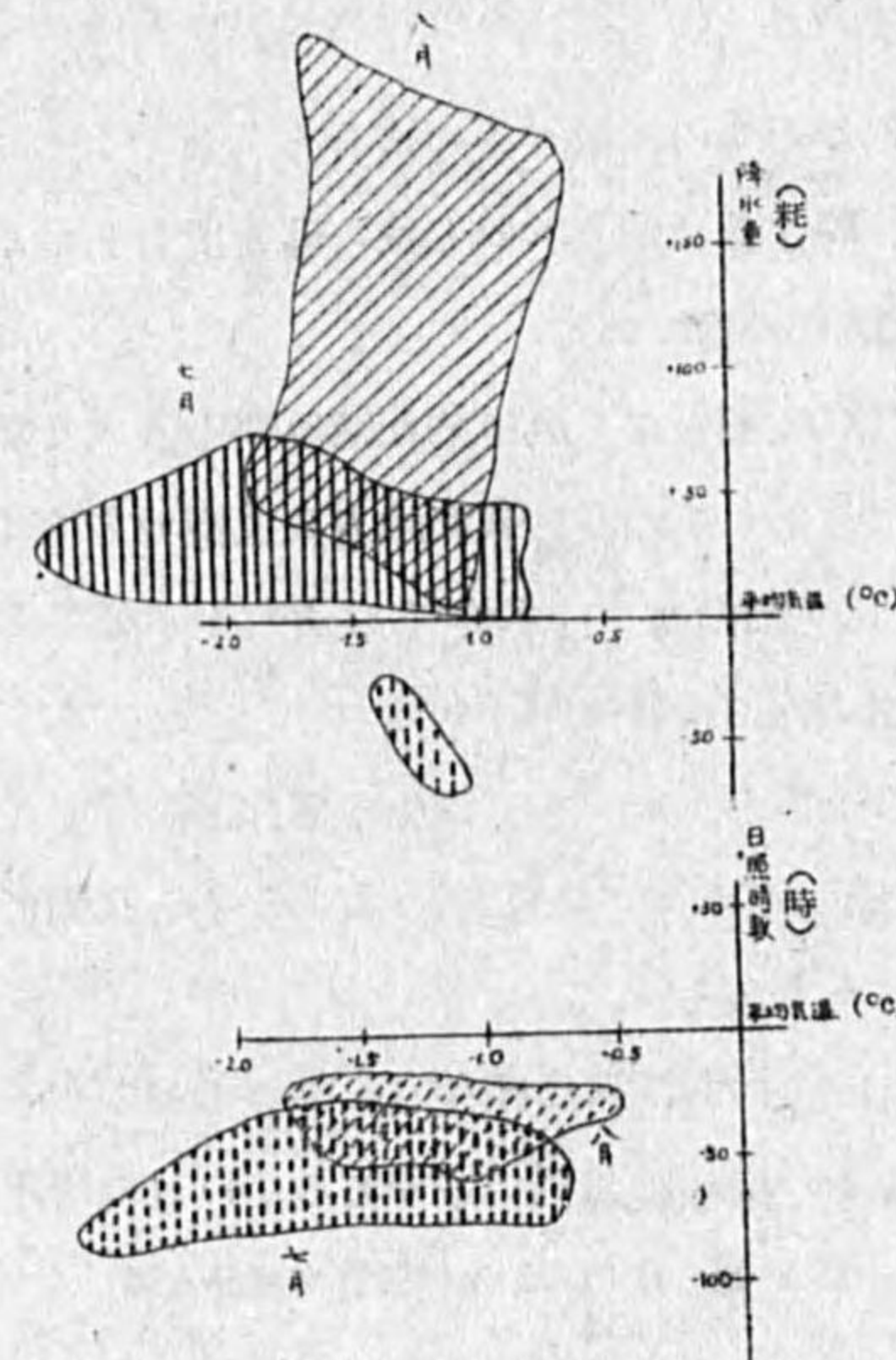
第 2 圖 昭和 9 年の凶作率分布圖



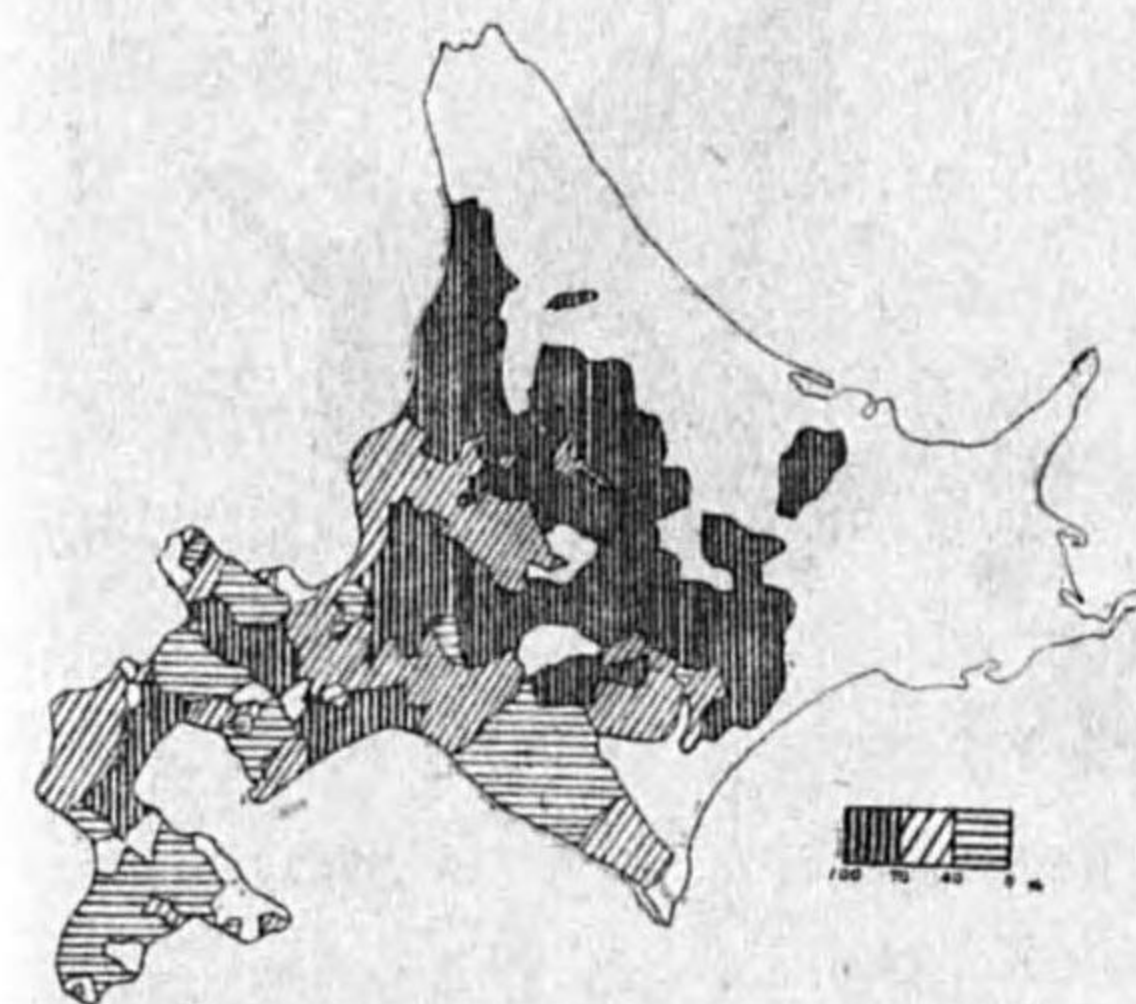
の限度に於て平年より寡照であつたが平均すれば多照であつた。而して各偏差量は平均して 7 月の方が 8 月のそれより稍多量であつた様であるが、氣温に於てその度合は顯著である。

此の年の減收程度は凶作率 (x%) の分布圖 (第 2 圖) によつて明示される。道全體の平均しての  $x$  の値及びその指數を比較しても一番減收度合も尠いことが判り、之れを村別にみるに同じ趨勢が現はれる。第 2 圖をみても 40% 以内の所が割合多い様であり、特に石狩、空知、上川地方等

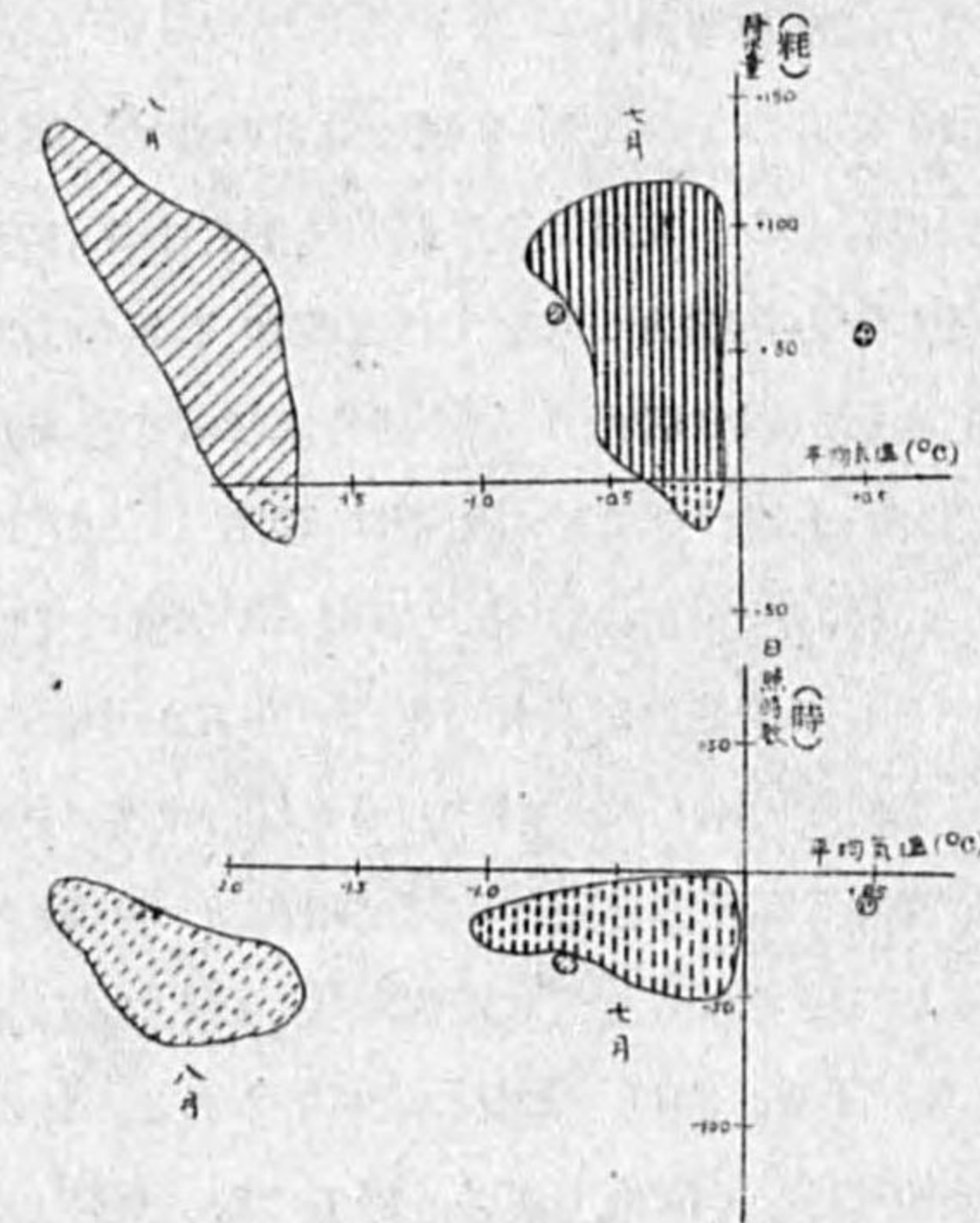
第 3 圖 昭和 7 年の夏季の氣象偏差



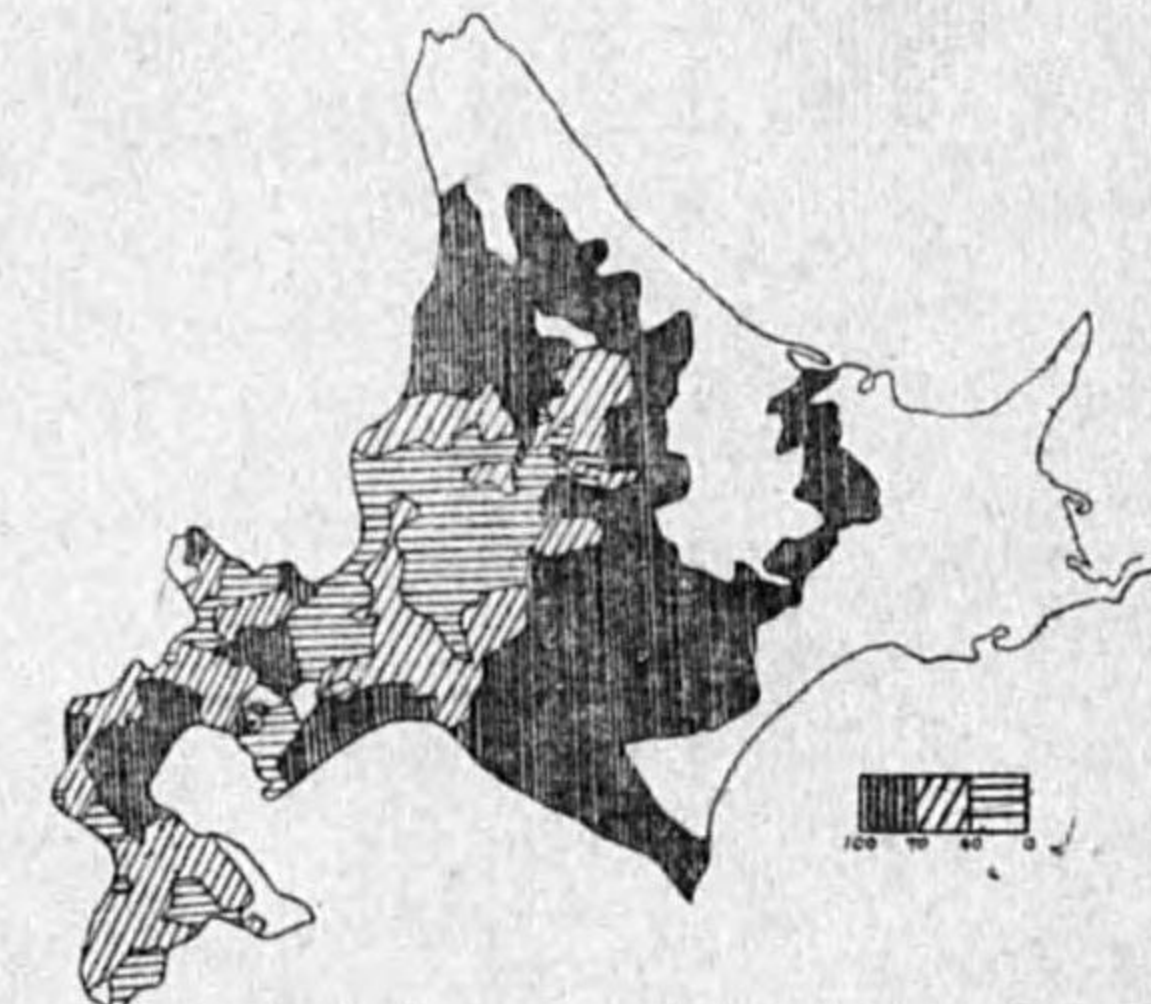
第 5 圖 昭和 7 年の凶作率分布圖



第 4 圖 昭和 10 年の夏季の氣象偏差



第 6 圖 昭和 10 年の凶作率分布圖





の如き本道の米作地帯が少く、後志山地々方、道南地方の北部、本道東半部及び北部地方に70%以上の所が見られる。

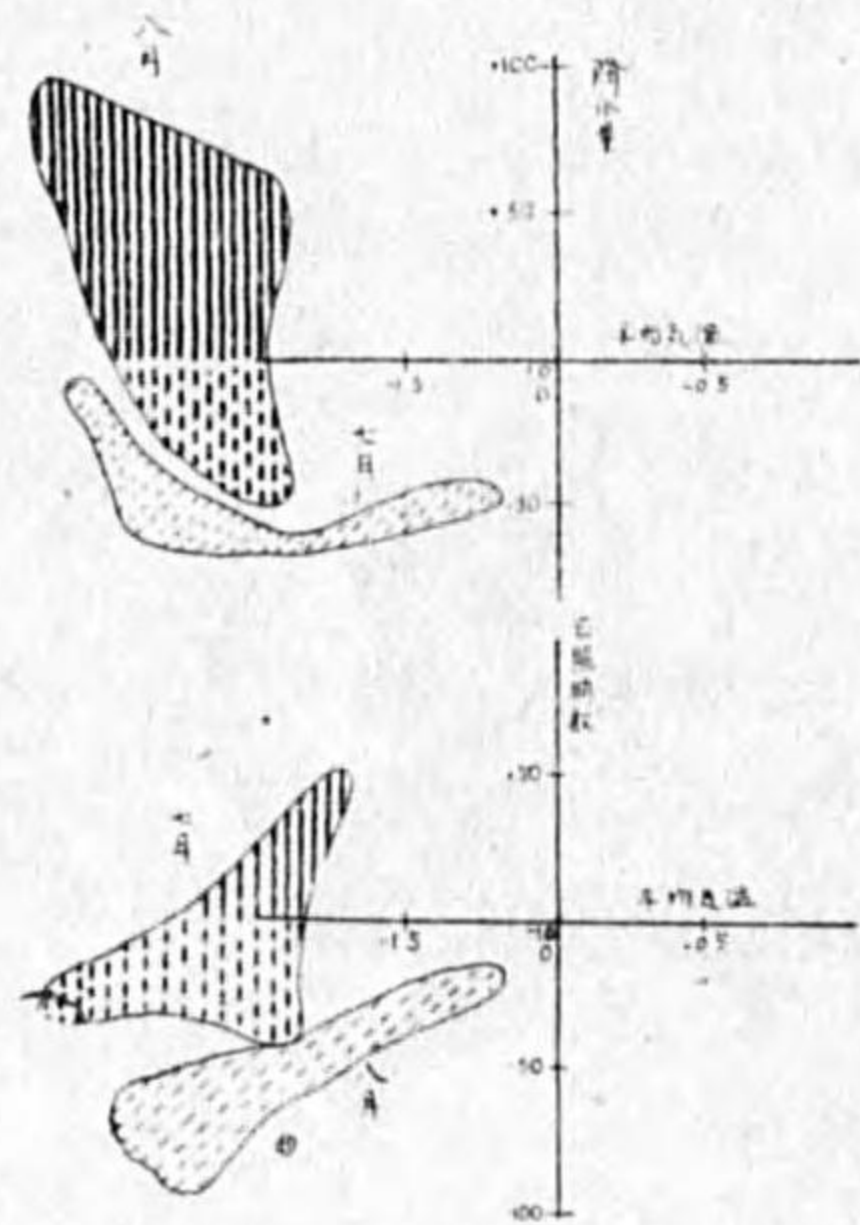
IIの型 之れは低温、寡照、多雨型であつて、實例は昭和7年及び10年の如き場合である。殊に昭和7年の如きは標準型を示してゐる。此の年に於て低温の度合は7月の方が8月に較べて稍大きく、又日照の偏倚度合も7月の方が大きい。降水量は7月一部の地方に局部的に寡雨な所があつたが大體は多雨で殊に8月に甚だしかつた。是等は第3圖に掲げた偏差圖の道全體の傾向によつて明瞭である。

昭和10年度のもは第4圖の偏差の如く、昭和7年のものに較べその度合も7月に少く8月に大きい様である。日照時數の偏差も割合小さい方で、降水量は兩月共同じ位の偏倚度合を示してゐた。併し乍ら全般的に考察すれば昭和7年の方が標準型の様である。

標準的な此の型の昭和7年の凶作率の分布を見れば第5圖の如く全道的な減收率も甚大な様で石狩、空知、上川の如き米作地帯は70%以上の凶作率を示してゐる。日高地方及道南地方では昭和9年と同様な傾向が窺れる。昭和10年度のもは第6圖の如くであつて、7月に於て昭和7年のものよりも多少條件が良好であつたからか中部の米作地帯の凶作率も40%以下に止つてゐる。日高地方は極度に兩月共多雨であつた爲め水害に因るのであらうか70%以上の凶作率を示し、又本道西半部は日高地方を除外すれば昭和9年に割合近似した状態で初霜日も昭和7年と反對に幾分か早來した様であつたから霜害に基く減收も認められたであらう。

IIIの型 低温、寡照、寡雨の型の年である。此の型に近い年の例は昭和16年のものである。7,8月は氣温著しく低冷であり、過去の年に比較してもその度合は甚しい方である。7月の降水量

第7圖 昭和16年の夏季氣象偏差

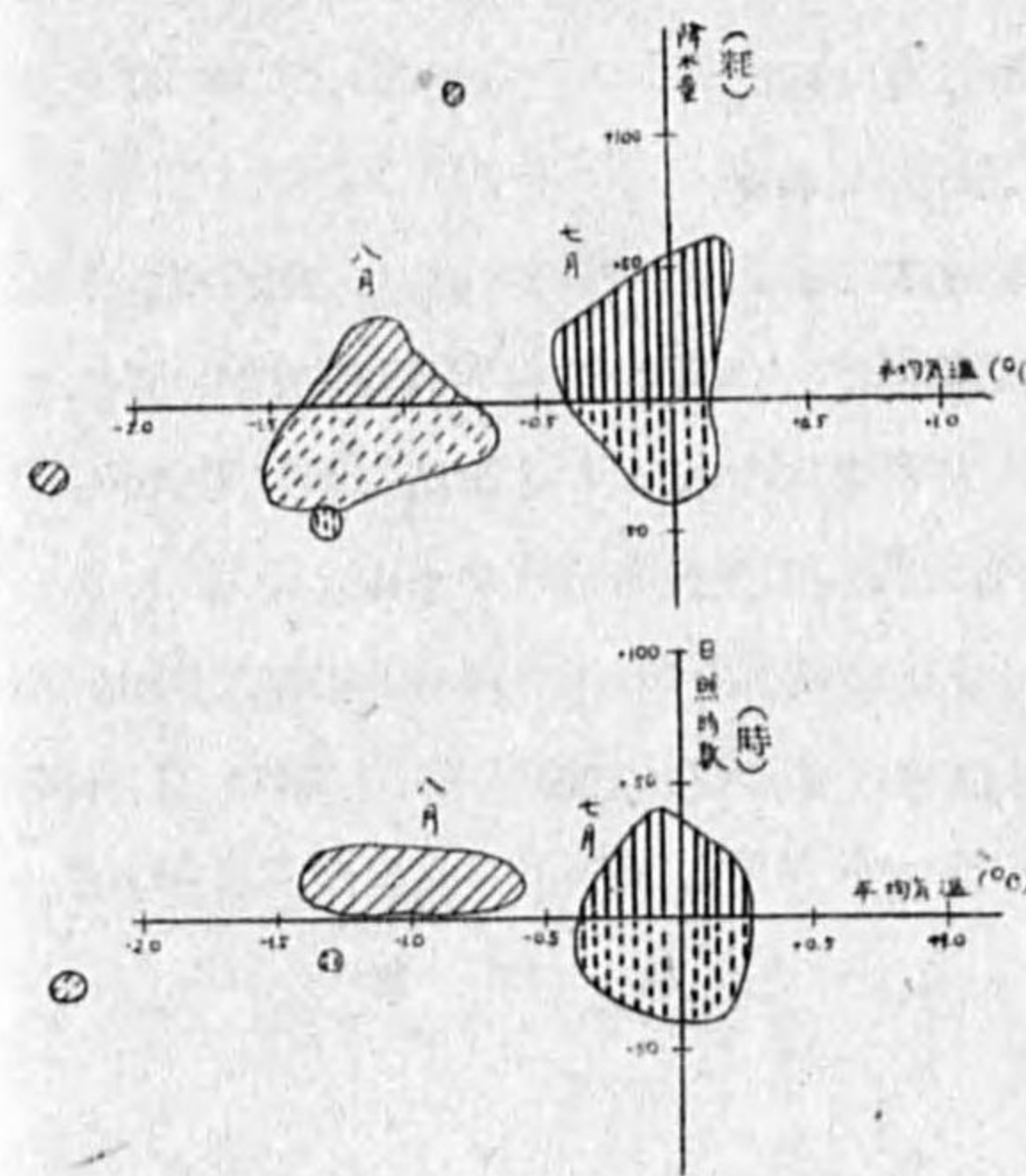


第8圖 昭和16年の凶作率の分布圖

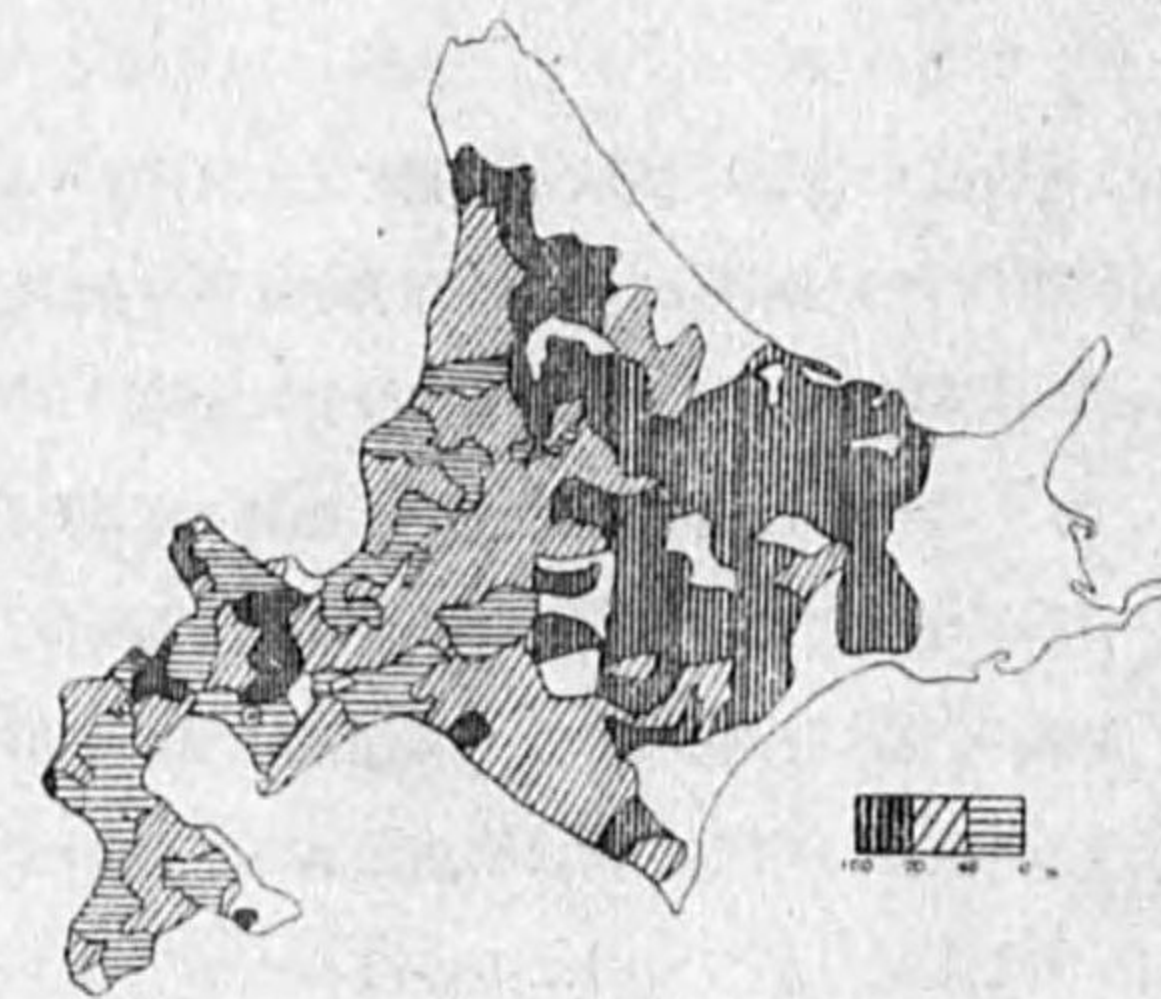


は平年より多雨な所と寡雨な所とあり平年値より50耗以内の範圍で、又日照時數も50時間以内の範圍で振動してゐる。8月に至り寡雨、寡照を示す様に至つた。(第7圖参照)。8月と類似の型は昭和6年の7月のものに見られるが同年のものは8月以降が平年より高温、多照、多雨であつた爲めにIIIの型と異つた凶作率を表はしたのである。昭和16年の凶作率は第8圖に示す如くである。尙之れは第2回豫想收量より算出したものである。道南地方を除く本道の西半部は昭和10年度のものと同様に類似してゐるが、同年度のものより減收度が甚しい。道南地方は昭和6年度よりは少いが他の何れの年よりも甚しい。此の原因は初霜日の早來と9月の本道南部を西より東へ通

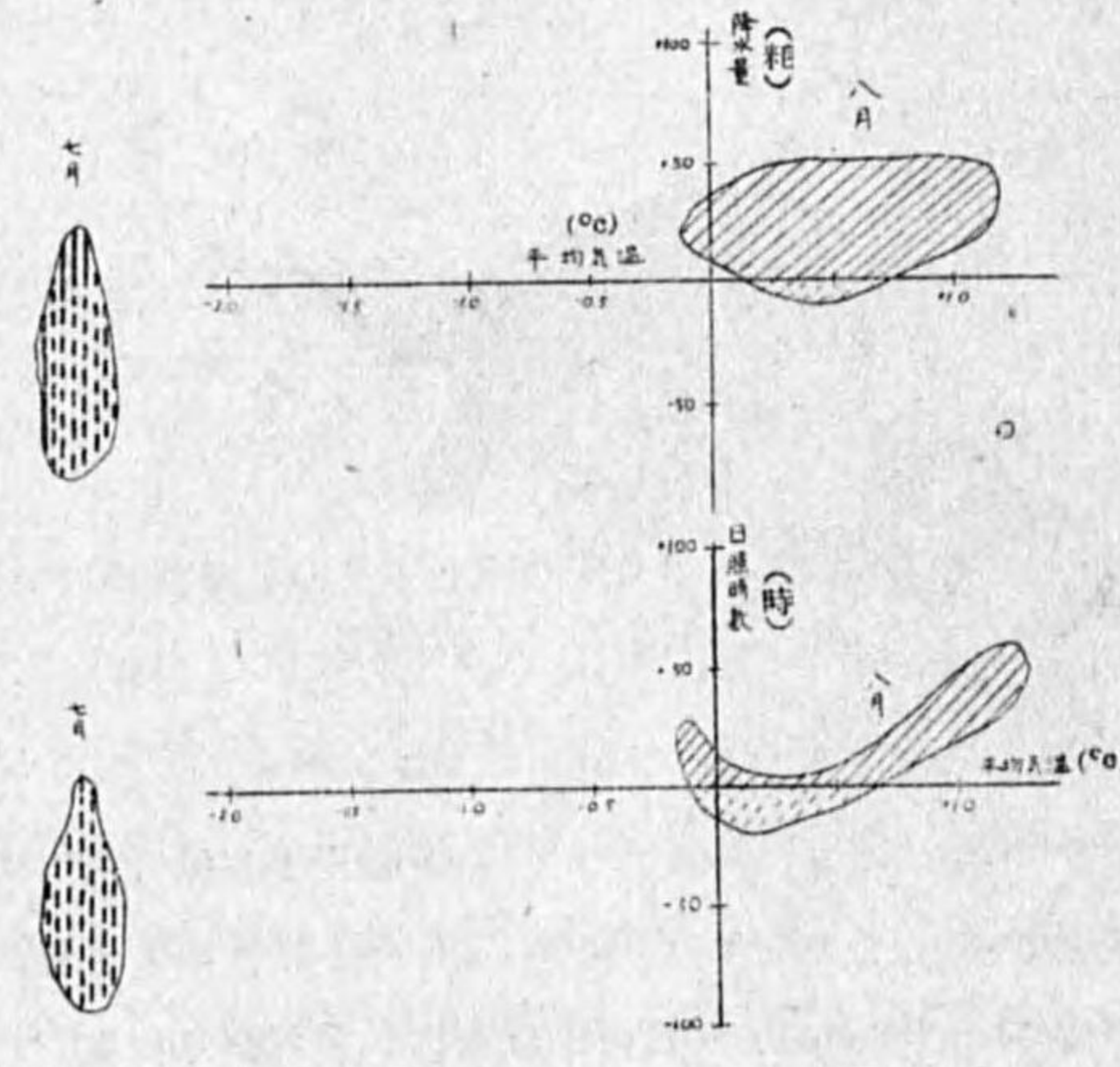
第9圖 大正15年の夏季氣象偏差



第10圖 大正15年の凶作率の分布圖



第11圖 昭和6年の夏季氣象偏差



過した颱風に依る水害に基因するのではないかと思考される。

IVの型 此の型には以上の何れにも屬せしめ得ぬものを總括し入れたもので、7,8月の何れか1月低温のみであるかそれに寡照か寡雨又は多雨かが組合されてゐる場合である。

大正15年の實例では7月は割合平年値に近似の状態であつたが、8月になり低温を示し、平年より稍、少し多い日照と平年

並の降水量であつた。此の場合の凶作率は 40~70% の所多く 40% 以下の所は少い。第 9 及 10 圖は同年の氣象偏差及び凶作率の分布圖を掲げたものである。

昭和 6 年の夏季も第 11 圖に示す如く 7 月迄低温、日照、降水量も平年より少い方であつたが、8 月より平年並以上の気温が続き日照も稍多く、降水量も稍多かつた。凶作率は第 12 圖の通りで道南地方を除けば大正 15 年のものと大體類似してゐる。道南地方は大正 15 年度よりも甚しい減収を示してゐる様である。

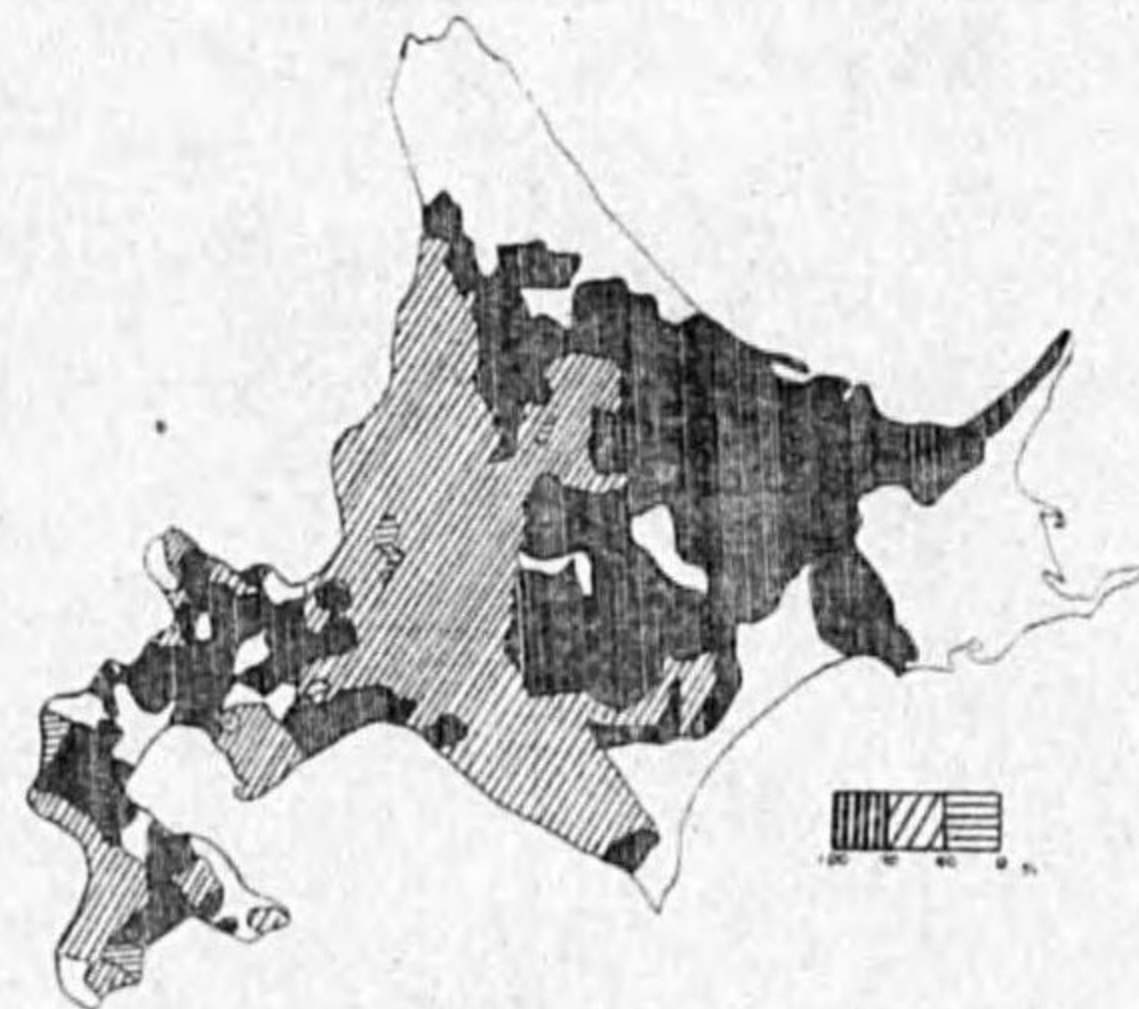
### §5. 凶作率の考察

不作年の凶作率の分布状態はその氣象の型によつて大體定まつてゐる様に考察される。凶作率の一番軽少なものは I の型である低温、多照、寡雨型で、此の場合降雨による被害の爲めの減収は少ない。併し乍ら冷害年に見られる低温に由來する作物の生育遅延に加ふるに初霜日の早來の爲めに凍害を受け、この爲めの減収の可能性は充分考へられるわけである。

然るに II の型の場合は多雨なる條件のため水害を蒙る處は認められるのである。此の場合平年より極度に過剰雨量あつた時冷害と水害の影響により被害も著しく増大するから凶作率も一番大きい様である。特に本道南方を通過する颱風の影響により時折豪雨を齎すことが屢々見られるから、雨の多い程度も重要である。此の場合凍害を蒙れば 3 重に被害を受けるわけである。

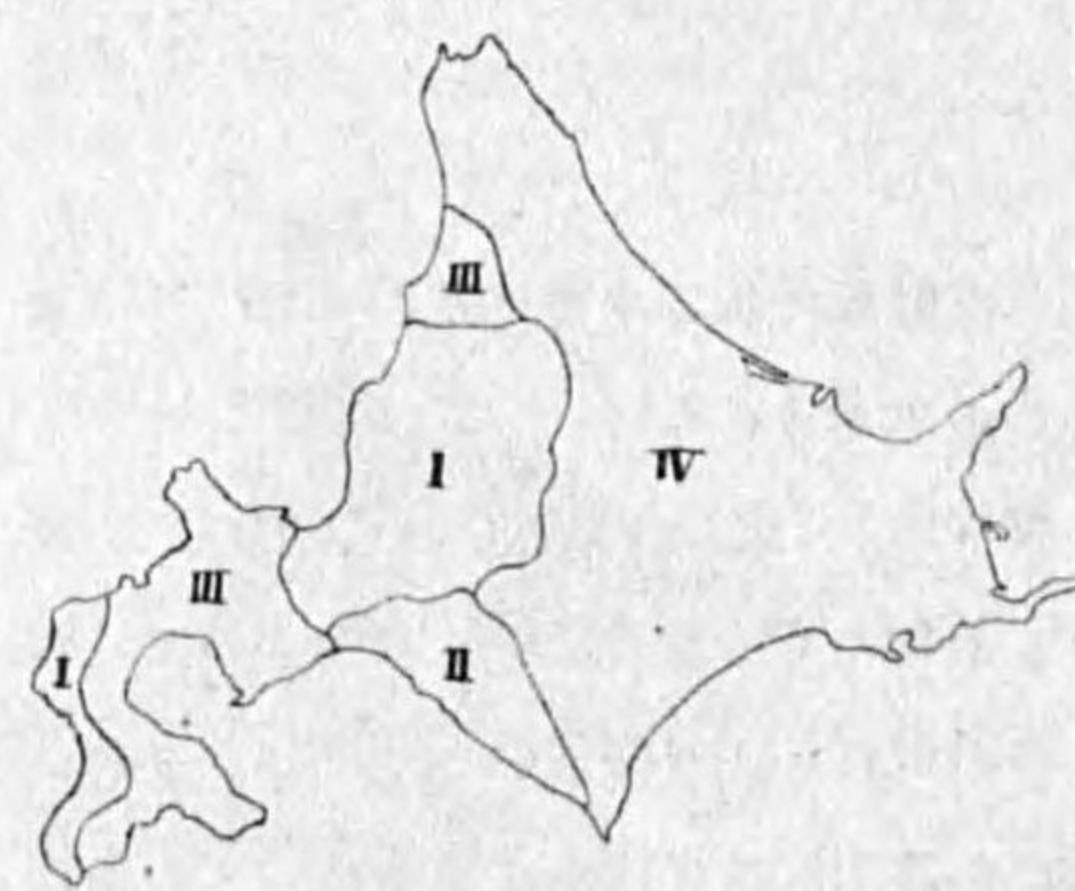
III の型の場合は I 型と類似してゐる様であるが、日照時數僅少な爲めに作物の生理的方面より考察し I の型より劣ることは明白である。此の場合も凍害が著しければ被害も大で昭和 16 年の如く一部の凍害甚しかつた所はその被害も割合大であつた。

第 12 圖 昭和 6 年の凶作率の分布圖



IV の型の場合は種々あつて 7 月が平年並位であつて 8 月が低温な實例の大正 15 年と 7 月迄低温で 8 月より平年以上の昭和 6 年と比較して後者の方が凶作率も大きかつたことより作物の生理條件には前者の方が良好ではないかと考察される。

第 13 圖



型別の凶作率分布圖より北海道の米作は氣象的から見て (1) 安定地帯、(2) 準安定地帯、(3) 不安定地帯及び (4) 凶作年にはいつも收穫出来ない不作地帯に分類出来る様である。これを I II III IV として圖示すれば第 13 圖の様である。

I の安定地帯は凶作年にはその凶作率も非常に輕微な方であるが、多雨年には水害を蒙る處れはある様で、本道の主要米産地の石狩、空知及び上川の大部分が屬してゐる。II の準安定地帯は颱風が南部を通過するとき水害によつて非常な被害をうけるがそれ以外には安定な地方である。III の地方は凶作年には收穫が前二者よりも非常に劣るがその氣象型によつて差異がある。IV の地方は凶作年には殆んど云つてよい位不作の地方である。然し乍ら是等の地帯も品種改良や季節豫報の研究によつて漸次減少しはしないかと思はれ又減少せんことを希ふものである。

### §6. 結語

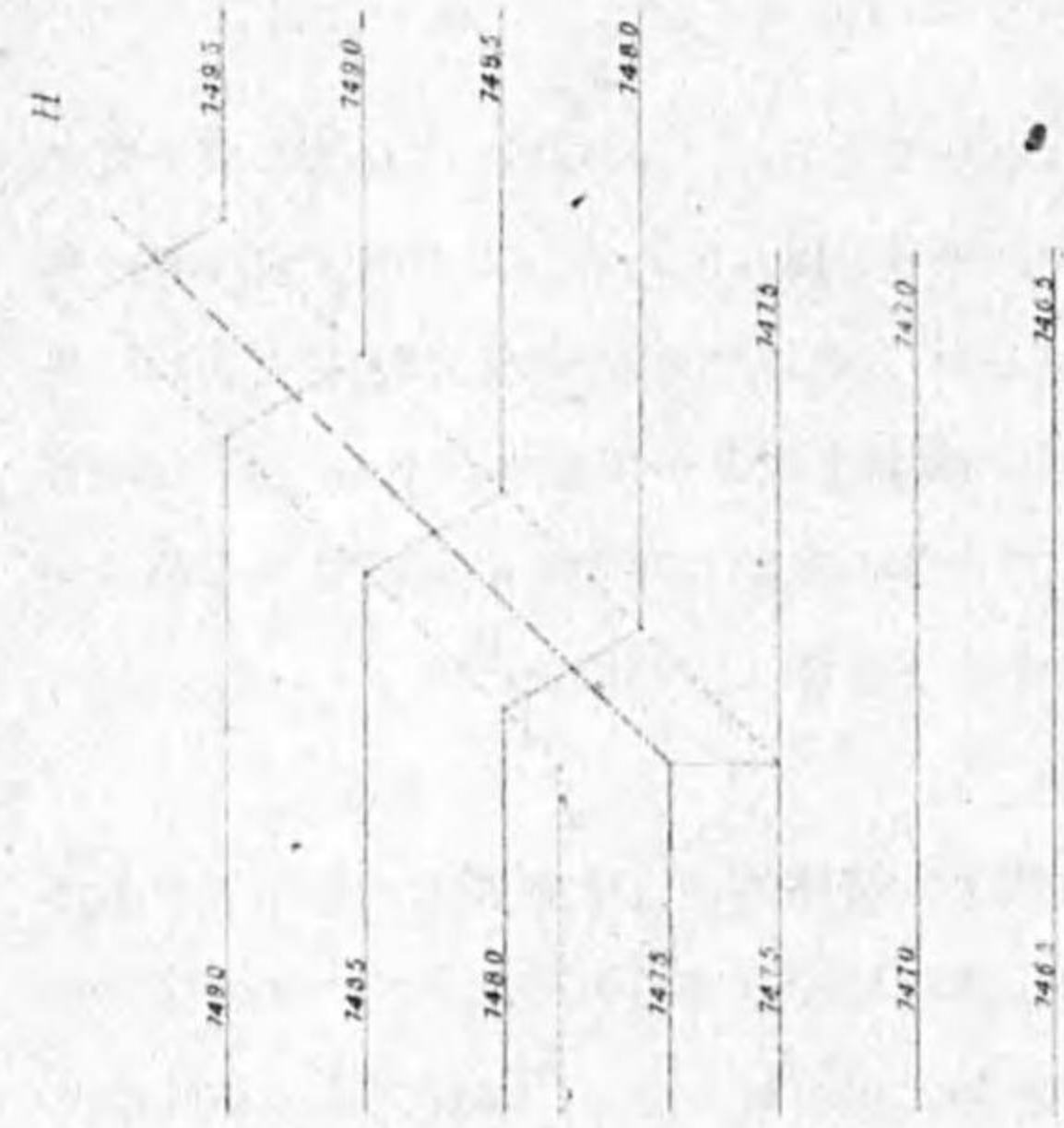
北海道は米作北限地帯にある爲め人爲的要素よりも低温とか凍害等の自然的要素に作用されること多く夏季殊に 8 月の気温に甚しく支配される。筆者等は不作年の夏季の氣象型とその年の凶作率とを村別凶作分布圖によつて調査したが寡照多雨な濕潤冷年に於て被害多く、多照寡雨な乾燥冷年ではその被害も輕微であつてその他の年の凶作率はその中間にある様である。

我々は夏季の氣象の型如何によつてその年の凶作率の大體の分布が豫察出来はしないかと思考され、本調査が心ある人々にかゝる方面の研究を促進し得ば筆者等にとつて幸甚の至りである。擱筆するに當り米に関する資料の提供を仰いだ北海道廳統計課の方々へ深謝し、本調査に便宜を賜つた八剱札幌管區氣象臺長へ謝意を表する次第である。

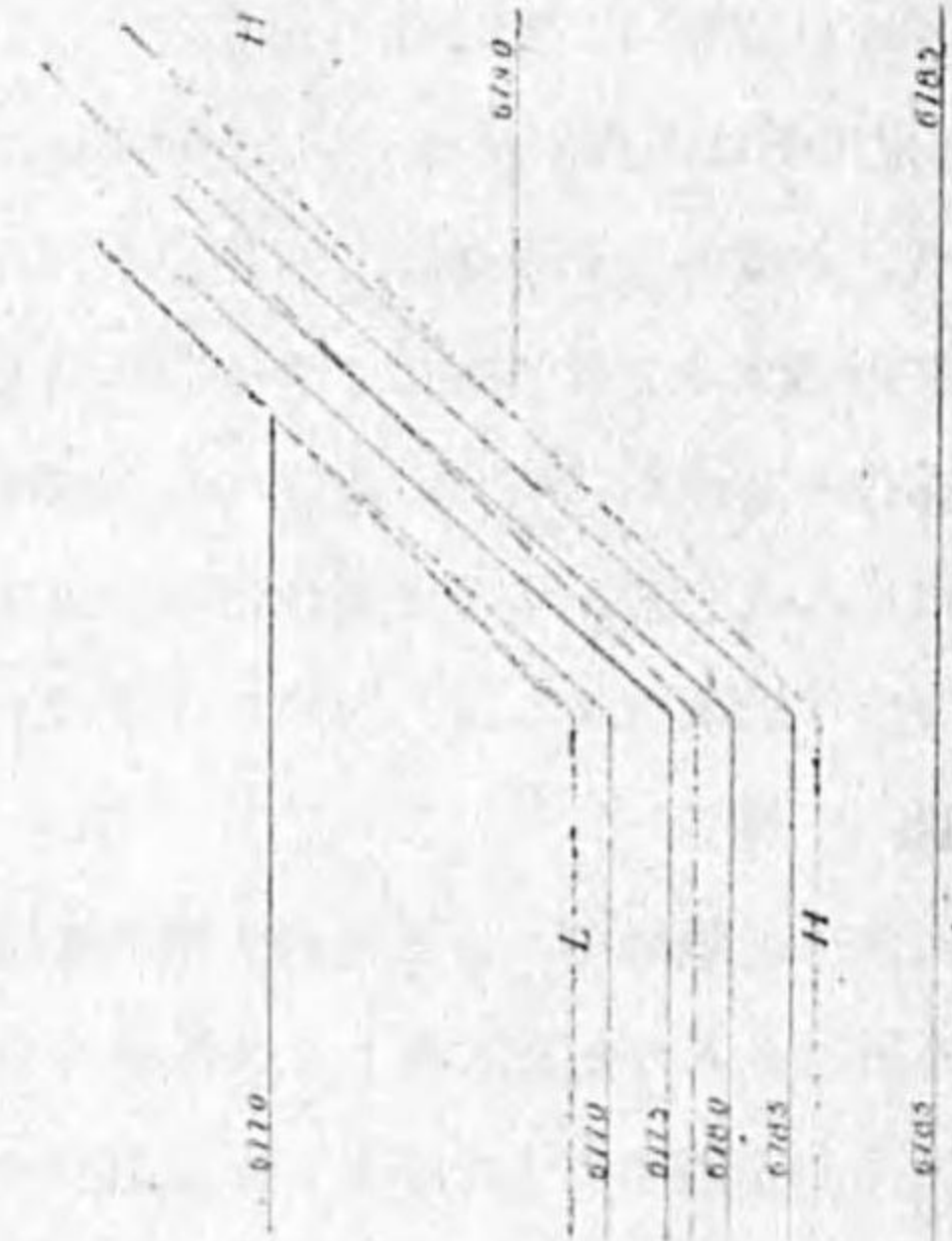
## 北東風に依る關東地方南部の局部的降雨に就いて

島山久尙

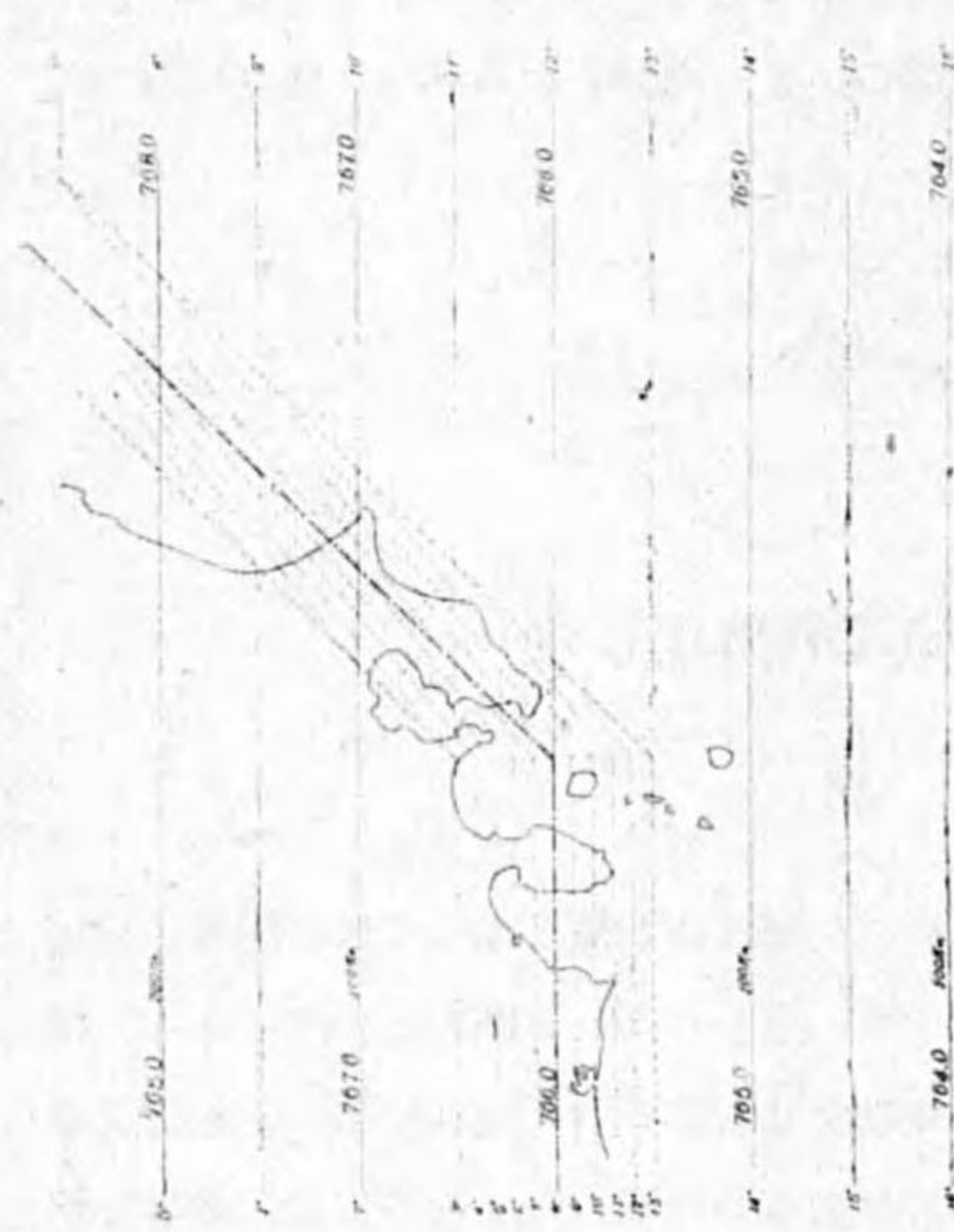
海面上の氣壓配置が北高南低となり、地上の風は北東風、上層は南西風となつて起る關東地方南部の曇天又は降雨は、此の地方の豫報を擔當する者にとつて一番むづかしい問題の一つである。關東地方の局部的不連続線に就いては西村博士(中央氣象臺歐文彙報第 6 卷)大和技師(氣象集誌第 13 卷)上松氏(航空氣象報告第 4 卷)等の研究があり、天氣豫報の立場からは大谷技師(測候時報第 9 卷)の調べたものがあり、又高橋技師及び筆者が氣象集誌(第 18 卷第 5 號)や天氣と氣候(第 7 卷第 12 號)に書いた事がある。これ等によつて關東地方南部の曇天又は降雨の現象そのも



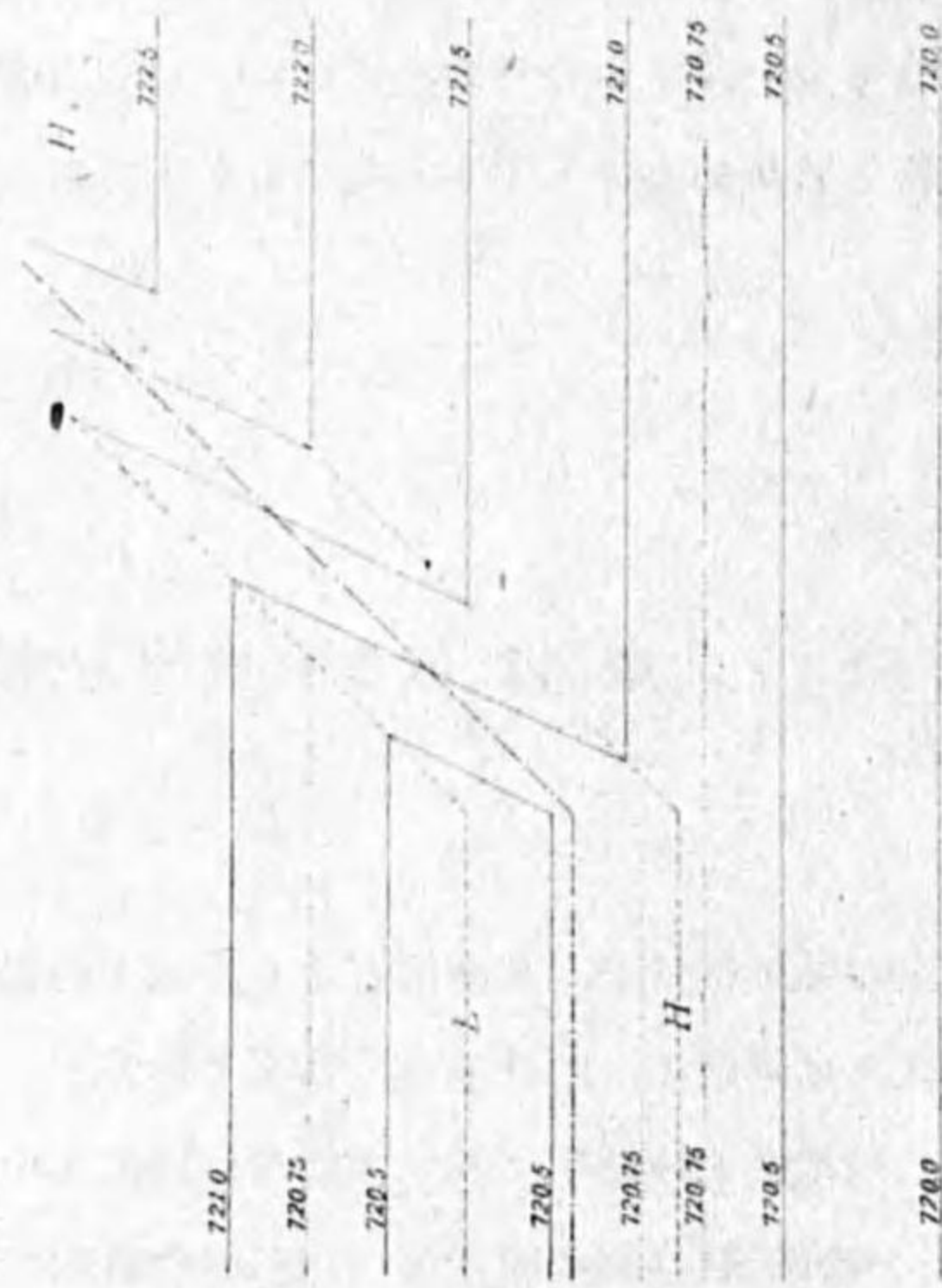
第 2 圖 200 米推算等壓線



第 4 圖 1000 米推算等壓線



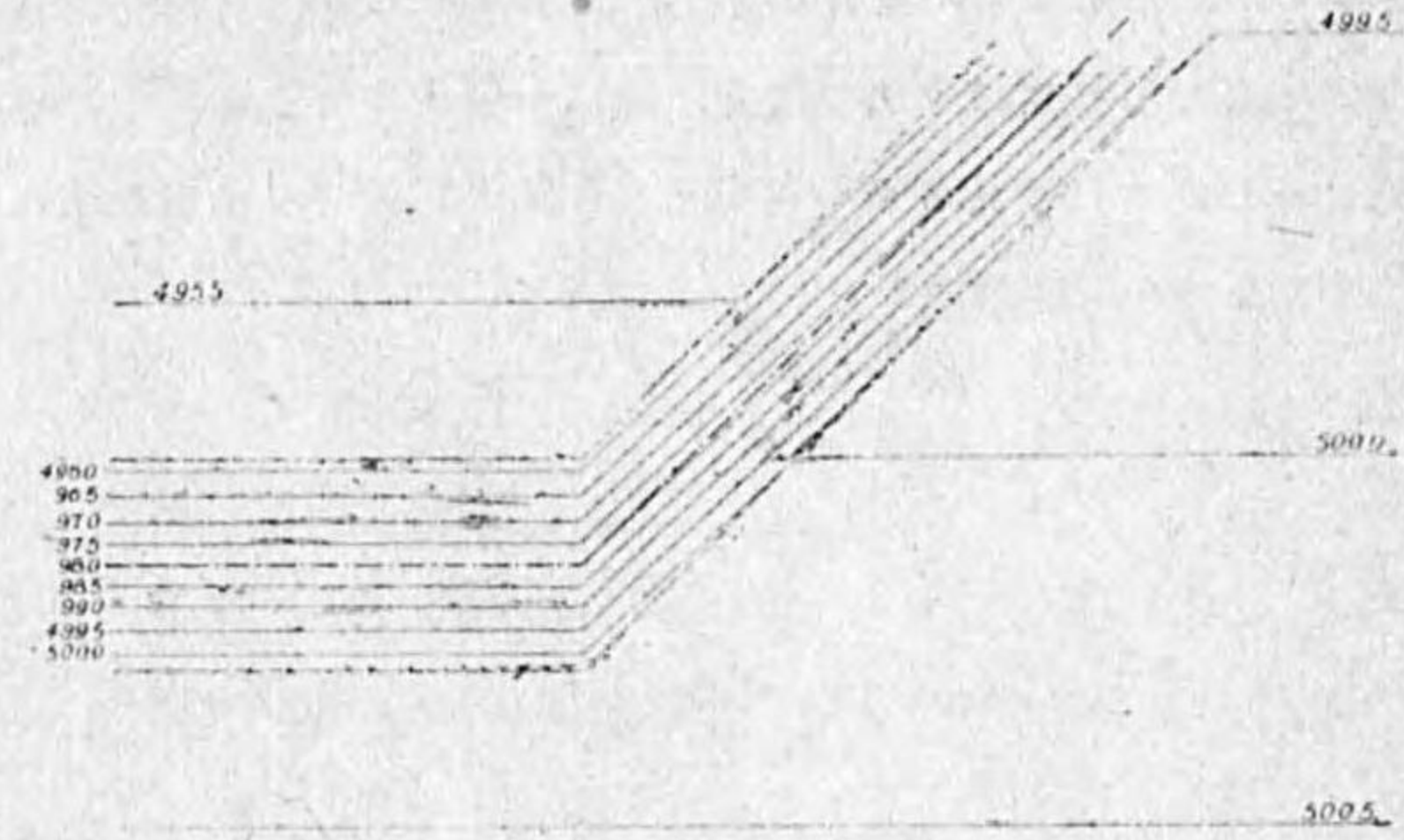
第 1 圖 海面の等壓線及等温線



第 3 圖 500 米推算等壓線

のに対する解釋は略々出來て來たのであるが、本稿では模型的に考へ地形の影響はつきりさせた。

海岸線は第 1 圖の鎖線で示す様に西から東に來り、更に 45 度の角度で北東に折れて眞直ぐに伸びて居る折線に置き換える。この折れ目は圖で見る様に大體伊豆大島の附近にあるものとする。海面の等壓線は西から東に來り、氣壓傾度は 100 杆につき 1 耗、東西の



第 5 圖 2000 米推算等壓線

海岸線は 766 耗の等壓線と一致して居るとする。氣温の配布は矢張り等温線が東西に向き、氣温傾度は 100 杆につき 2 度であるが、海岸線を中央にして兩側 50 杆の範囲内では 100 杆につき 10 度とする。これ等は共に實例に當つて求めた數値であるが、氣壓傾度は稍小さ過ぎるかも知れぬ。海岸線の 45 度に折れ曲つた部分は圖の様な氣温配布を與へた。即ち暖流が房總半島の沖に流れ上つて居る形に似せてある。この部分での海岸附近の氣温傾度は約 70 杆につき 9 度である。

斯様な模型に就いて上層氣壓推算圖表（日本氣象學會發行）を用ひて 200, 500, 1000, 2000 米の推算氣壓を出し、等壓線を描いて見る。これが第 2 乃至 5 圖である。

200 米（第 2 圖）では北東に高く南に低いが、等壓線の折れ曲りが出來て居るから海岸線の内側では收斂が起つて居る事がわかる。500 米（第 3 圖）では南の海岸線に近く低壓部が出來、45 度の海岸線の所では圖の様な形に等壓線が閉ちて居るから、收斂は曲り目に近い部分で特に著しい事がわかる。實際の天氣でも伊豆半島を境として西は天氣よく、東は曇天で細雨を伴ふ事がよくあるが、其原因の一つとしてこれを考へる事が出来る。1000 米（第 4 圖）に於ける狀況は 500 米と大差はない。唯全體として温度の影響が顯著になつて來て居る。2000 米（第 5 圖）では低壓部は消えて、氣壓は南高北低となり、海岸線附近では温度風が顯著に出て居る。即ちこの高さでは收斂は全くなくなつて居ると見てよい。實際の場合にもこの天氣の際の雲頂は低く、富士山から雲海を見て居る事も多いのである。

此の小文の主旨は關東地方南部の曇天及び降雨はその南東の海上が暖かい事によつて増勢されて居る事を強調するにあるのと、又斯様な模型的な取扱ひをする事によつて現象を簡單化し、氣壓傾度及び海陸の温度差を色々に與へた場合の收斂の量を見當づけ、以つて降雨の起るか起らぬかの判斷の數量的基礎を置き度い所にある。蓋し關東地方南部の曇天及び降雨は夜から朝にかけて起る事

が多いが、これは稍不安定な状態で、日中になつて内陸の方が晴天で温度が昇れば海陸の温度差が小さくなつて収斂は少なくなり、雲は一層少なくなつて全部晴れてしまふ。これに反し曇の地域が広いが、或は北東風が強くとどろん寒気が供給される様な時には日中になつても内陸の温度は一向に昇らないから晴れない。(終)

### 東亞の上層氣温及び濕度

荒川 秀俊

東亞の上層氣温並びに濕度についてはまだ観測材料がないので、確實なことはわからない。わからない乍らも、若干観測があるから、それを纏めてここに報告する。

中華民國が南京及び北京に於て飛行機(132回)及び風(74回)を使用して第二極年を中心とした5箇年に亘り高層観測を行つた報告<sup>(1)</sup>が刊行されて居る。この報告に基いて調査したものには荒川<sup>(2)</sup>、淵=中島<sup>(3)</sup>、徐長望<sup>(4)</sup>等の論文がある。

淵、中島兩氏は1.5 軒以上まで探測された成績だけを引抜いて南京及び北京に於ける上層氣温の分布を調べ、次の結果を得た。

高度(軒)	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	全年
南京 (32°03'N, 118°47'E, 地上 7 m)													
0	5.5	6.5	14.9	15.4	27.4	29.8	29.7	25.4	17.4	14.2	10.3	18.9	
0.5	2.4	4.6	10.6	10.1	24.2	26.1	28.7	27.4	22.4	11.6	8.4	4.9	15.1
1	-0.8	0.7	7.8	6.4	19.7	22.2	25.9	25.3	19.3	6.5	4.7	0.8	11.5
1.5	-3.1	-2.2	3.4	2.9	14.9	18.6	21.4	21.6	15.7	5.1	0.4	-1.7	8.1
2	-4.3	-3.7	0.1	0.2	13.0	14.4	17.9	18.1	15.2	6.1	0.5	-2.9	6.2
2.5	-5.9	-5.1	-0.4	-2.0	9.8	9.1	14.2	14.4	13.0	5.4	-1.6	-4.8	3.8
3	-7.8	-6.2	-4.2	-3.9	6.6	6.2	10.4	10.3	11.6	2.4	-3.9	-6.9	1.2
3.5	-9.3	-8.5	-8.1	-5.9	4.6	4.0	7.3	7.4	8.9	-1.0	-5.9	-9.6	-1.3
4	-11.8	-11.6	-11.5	-8.4	1.7	0.9	4.0	5.1	3.9	-3.4	-7.5	-11.8	-4.2
4.5	-14.9	-13.8	-14.0	-	-3.0	2.4	0.8	10.7(?)	-	-6.9	-10.7	-15.0	-6.4
5	-	-17.9	-	-	-6.5	0.9	-6.8	6.3	-	-	-9.5	-	-5.6

(1) Bulletin of the Upper-air Current Observations, Vol. VI of the Institute of Meteorology, Nanking, China.

(2) 荒川秀俊：日本附近の各氣塊の特性，氣象集誌，第2輯，第13卷，第9號(昭和10年)。

(3) 淵秀隆，中島正一：南京及び北京に於ける高層氣象観測に就いて，測候時報，第9卷，第18號(昭和13年)。

(4) Chang-wang Tu: Results of Aerological Investigations in China, Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. Bd. 25, Heft 4, 1939.

北京 (40°00'N, 116°22'E, 地上 70.5 m)

0	-5.7	-0.3	1.7	16.6	22.3	28.4	27.0	26.2	22.6	15.3	5.5	2.2	13.4
0.5	-9.8	-5.1	-2.7	12.3	18.4	23.4	23.1	21.4	18.0	10.6	2.5	-1.1	9.2
1	-13.7	-9.4	-6.8	7.8	13.9	17.7	19.7	15.5	13.6	6.0	-1.5	-4.9	4.8
1.5	-17.3	-13.5	-9.6	3.8	9.4	13.7	17.2	10.9	9.1	1.5	-6.4	-8.0	0.9
2	-23.0	-16.9	-15.4	-0.3	2.5	8.8		7.3	0.9	-0.4	-8.6	-11.6	-5.2
2.5		-18.5	-19.8	-1.8	-1.2	5.0			-2.2	-5.2	-9.5	-14.5	-7.5
3			-22.6		0.5	4.1					-11.1	-17.0	-9.2
3.5											-14.5	-20.0	-17.3
4												-24.2	-24.2

徐は同じ材料を整理したが、探測結果が尠い上に、観測が一樣でないから、月別に統計して論ずるのは不可とし、四季別にして論じた。そのうち氣温の垂直分布の表を抜き書きすると次の如くである。

高度 (ダイナミック 軒)	冬		春		夏		秋	
	°C	氣温遞減率 °C/軒						
南 京								
0	6.4°C	-9.0	19.8	-8.0	28.5	-6.8	19.1	-8.4
0.5	1.9	-5.8	15.8	-5.6	25.1	-5.0	14.9	-5.6
1	-1.0	-5.0	13.0	-6.2	22.6	-6.8	12.1	-7.0
1.5	-3.5	-2.6	9.9	-4.4	19.2	-6.6	8.6	-2.0
2	-4.8	-2.8	7.7	-5.4	15.9	-6.2	7.6	-4.0
2.5	-6.2	-2.0	5.0	-6.2	12.8	-6.0	5.6	-4.6
3	-7.2	-3.6	1.9	-4.4	9.8	-5.6	3.3	-5.4
3.5	-9.2	-5.8	-0.3	-7.6	7.0	-6.4	0.6	-6.4
5	-11.9				3.8		-2.6	
北 京								
0	0.1	-9.0	17.6	-9.6	28.8	-10.8	12.5	-9.4
0.5	-4.4	-8.4	12.8	-8.8	23.4	-8.8	7.8	-8.2
1	-8.6	-7.0	8.4	-10.4	19.0	-10.0	3.7	-9.8
1.5	-12.1	-5.0	3.2	-9.6	14.0	-10.2	-1.2	-7.4
2	-14.6	-2.0	-1.6	-3.4	8.9	-6.2	-4.9	-2.6
2.5	-15.6		-3.3		5.1		-6.2	

香港に於ては1926年から1940年3月迄に行つた646回の飛行機による探測を行つた成績<sup>(1)</sup>がある。この論文によると、香港上層における氣温と氣温遞減率は次の如くである。

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	全年
氣 温 °C													
表面 (33 米)	15.0	16.3	17.7	21.3	25.3	27.6	28.3	27.6	27.5	24.9	21.2	16.5	22.4
0.5 軒	12.1	13.0	14.9	18.6	22.2	24.1	24.7	24.7	23.8	21.5	17.7	13.8	19.3

(1) G. S. P. Heywood and C. W. Jeffries: Upper Temperatures and the Properties of Air Masses over Hong Kong, Royal Observatory, Hong Kong, 1941.

1 秆	10.5	12.1	13.3	16.6	19.7	21.3	21.9	22.0	20.8	18.7	15.1	11.6	17.0
1.5 秆	9.4	10.8	12.2	14.8	17.6	18.6	19.4	19.1	18.3	16.2	13.8	10.1	15.0
2 秆	7.2	8.9	11.0	13.2	15.4	16.3	17.0	16.6	16.0	14.2	12.5	8.4	13.1
3 秆	4.0	5.0	6.5	9.5	10.7	12.1	12.6	11.9	11.6	10.0	8.8	5.5	9.0
4 秆	1.5	1.2	1.1	4.3	6.1	7.5	7.7	7.4	6.5	5.0	4.4	1.9	4.5

気温遞減率 °C/秆

33米-500米	6.2	7.1	6.0	5.8	6.6	7.5	7.7	6.2	7.9	7.3	7.5	5.8	6.8
0.5秆-1秆	3.2	1.8	3.2	4.0	5.0	5.6	5.6	5.4	6.0	5.6	5.2	4.4	4.6
1秆-1.5秆	2.2	2.6	2.2	3.6	4.2	5.4	5.0	5.8	5.0	5.0	2.6	3.0	3.9
1.5秆-2秆	4.4	3.8	2.4	3.2	4.4	4.6	4.8	5.0	4.6	4.0	2.6	3.4	3.9
2秆-3秆	3.2	3.9	4.5	3.7	4.7	4.2	4.4	4.7	4.4	4.2	3.7	2.9	4.0
3秆-4秆	2.5	3.8	5.4	5.2	4.6	4.6	4.9	4.5	5.1	5.0	4.4	3.6	4.5

Manila に於て米國海軍の行つた飛行機観測結果は、Deppermann<sup>(1)</sup> の報告に載つて居る。今同氏の報告第 1 圖から読みとつた値を表示すると次の如くなる。

高度(秆)	十月	十一月	十二月	一月	二月	三月
0	27.2	26.8	24.4	24.6	23.7	26.1
0.5	24.3	23.6	22.8	22.2	21.9	23.6
1.0	21.3	21.1	20.1	19.0	18.2	20.9
2.0	16.6	15.6	15.9	15.2	15.0	15.8
3.0	12.0	12.8	11.4	13.2	11.0	12.8
4.0	4.8	6.6	6.0	7.0	10.6	-

バタビヤの上層気温については有名な Bemmelen の報告がある。今それを抜書きすると

高度(秆)	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	全年
0	25.6	26.1	26.7	26.2	27.1	26.5	25.8	26.6	26.3	26.6	26.1	27.0	26.4
0.5	23.0	23.5	24.0	22.9	24.6	23.9	23.0	23.5	23.0	23.9	24.8	23.6	23.6
1	19.9	20.5	21.0	20.3	22.0	20.3	19.8	20.1	20.1	20.8	21.7	20.1	20.6
1.5	17.4	18.1	18.1	18.4	18.4	17.9	17.2	17.1	16.8	17.5	18.6	17.4	17.7
2	14.5	15.2	14.7	15.7	16.7	15.5	14.6	13.9	14.3	15.3	15.5	14.3	15.0
2.5	11.8	12.2	12.2	12.5	13.8	12.8	11.9	11.4	11.3	13.2	12.8	11.8	12.3
3	9.0	9.0	9.4	10.0	10.9	10.1	9.4	9.1	8.7	9.7	10.0	8.8	9.5
3.5	6.1	6.7	6.8	7.3	8.5	7.0	6.1	6.4	5.9	7.3	7.7	5.9	6.8
4	3.5	4.2	4.0	4.3	5.8	4.5	2.9	3.3	3.8	4.6	4.9	3.2	4.1
4.5	0.8	2.0	1.0	1.9	3.0	2.0	0.5	0.1	1.7	1.5	1.9	0.3	1.4
5	-2.4	-0.9	-1.6	-0.6	0.1	-0.8	-2.6	-2.2	-2.2	-1.1	-0.7	-2.6	-1.5
5.5	-5.1	-3.9	-4.6	-3.2	-1.3	-4.3	-5.7	-5.0	-5.4	-3.7	-2.7	-5.5	-4.2
6	-7.8	-7.2	-7.2	-6.1	-4.0	-7.0	-9.0	-8.1	-8.4	-6.5	-5.7	-8.4	-7.1
6.5	-10.8	-10.2	-9.9	-8.9	-6.3	-9.8	-12.3	-11.6	-10.3	-9.5	-8.3	-11.6	-10.0
7	-13.7	-13.4	-12.4	-11.4	-8.8	-13.1	-14.9	-14.2	-12.7	-12.5	-11.0	-14.1	-12.7
7.5	-17.4	-16.3	-15.2	-14.4	-11.6	-15.9	-18.2	-17.9	-16.3	-15.5	-13.9	-17.4	-16.1
8	-21.1	-19.3	-18.5	-17.9	-14.6	-20.0	-21.9	-21.1	-19.8	-18.7	-16.9	-20.9	-19.3
8.5	-24.7	-22.6	-22.2	-20.9	-17.9	-23.3	-25.5	-25.1	-23.1	-21.9	-20.0	-24.7	-22.6
9	-28.2	-26.0	-25.5	-24.5	-21.4	-26.5	-29.6	-29.1	-26.6	-25.0	-23.3	-28.6	-26.2
9.5	-31.6	-29.4	-29.0	-28.1	-25.1	-30.2	-33.8	-33.7	-31.2	-28.7	-26.5	-32.7	-30.0
10	-35.3	-33.4	-33.0	-32.1	-29.4	-34.4	-38.1	-38.3	-35.4	-32.5	-30.7	-36.9	-34.1
10.5	-39.2	-37.8	-37.3	-36.0	-33.4	-38.8	-42.1	-42.8	-38.8	-36.3	-36.2	-39.9	-38.2
11	-43.8	-42.0	-41.1	-40.5	-37.7	-43.2	-46.1	-47.1	-43.5	-40.3	-40.1	-43.8	-42.4
11.5	-48.0	-46.4	-45.2	-44.5	-42.1	-48.0	-49.9	-51.1	-48.1	-44.4	-43.3	-48.0	-46.6

(1) Charles E. Deppermann: The Upper Air at Manila, Publications of the Manila Observatory, Vol. 2, No. 5, 1934.

12	-52.2	-51.6	-49.0	-49.6	-46.8	-52.3	-54.0	-55.5	-52.7	-48.2	-47.0	-52.1	-50.9
12.5	-56.5	-56.7	-52.5	-54.3	-52.4	-56.8	-58.0	-59.5	-57.0	-51.9	-51.9	-56.6	-55.3
13	-60.6	-61.3	-56.6	-58.5	-58.1	-60.0	-61.0	-63.9	-60.5	-56.0	-56.2	-63.0	-59.8
13.5	-64.3	-65.2	-60.3	-62.8	-63.4	-64.3	-66.3	-67.5	-64.2	-59.8	-60.1	-67.8	-63.8
14	-67.6	-68.6	-64.7	-67.1	-64.4	-68.6	-70.8	-70.6	-66.3	-63.5	-63.9	-72.2	-67.7
14.5	-70.7	-71.7	-69.0	-70.4	-72.5	-71.8	-74.4	-73.8	-69.7	-67.2	-67.9	-76.7	-71.3
15	-73.6	-75.2	-72.8	-76.1	-76.7	-74.7	-76.7	-76.8	-72.7	-69.9	-64.5	-79.9	-74.1
15.5	-76.5	-78.1	-77.3	-79.4	-80.7	-75.9	-79.2	-79.6	-74.0	-73.1	-68.4	-81.9	-77.0
16	-78.3	-80.6	-79.3	-82.1	-83.5	-79.0	-79.5	-78.9	-76.1	-75.0	-72.5	-85.5	-79.2
16.5	-82.8	-83.3	-83.8	-84.5	-	-82.0	-82.0	-81.6	-78.0	-73.2	-75.1	-88.0	-81.3
17	-85.1	-85.5	-86.3	-84.8	-	-83.3	-83.9	-82.5	-81.2	-76.1	-76.8	-88.7	-83.1
17.5	-	-87.3	-86.5	-84.7	-	-	-85.3	-	-	-	-81.8	-	-85.4
18	-	-	-	-	-	-	-85.3	-	-	-	-83.3	-	-84.3
18.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-84.1	-	-84.1

G. Taylor<sup>(1)</sup> は濠洲南部のメルボルンに於て行つた數十回の探測結果を報告して居るが、これは餘り信用することが出来ない。私は新に Taylor の報告に結果の圖示してある観測番号 5, 7, 8, 12, 14, 20, 22, 23, 25, 26, 30, 31, 33 の都合 13 回の成績を圖から読みとつて、平均し次の如き數字を得た。尤もこの値は 4 秆から 8 秆まで気温遞減率が大きすぎる事から推して餘り信用できない。

高度(秆)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
気温 °C	14.4	7.9	3.9	-1.2	-8.3	-15.7	-24.6	-36.6	-45.8	-52.0	-55.9	-57.4	-58.6	-59.0	-62.0
観測回数	13	13	13	13	13	13	12	11	11	10	10	9	5	4	1

この結果は全年の上層気温を表した圖に Me と符號をつけて示してある。

次に Bemmelen の報告に基いてバタビヤ上空のトロポポーズの高さと温度とを月別にして表示すると次の通りである。

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
高度(米)	17850m	17540	17490	16470	17510	16400	15280	17130	16600	17710	-	16720
気温 °C	-89.1	-87.4	-87.1	-87.2	-87.5	-84.5	-80.8	-82.9	-78.9	-81.5	-	-90.2
高度(米)	雨期						乾期					
気温 °C	17260						16680					
	-88.1						-81.7					

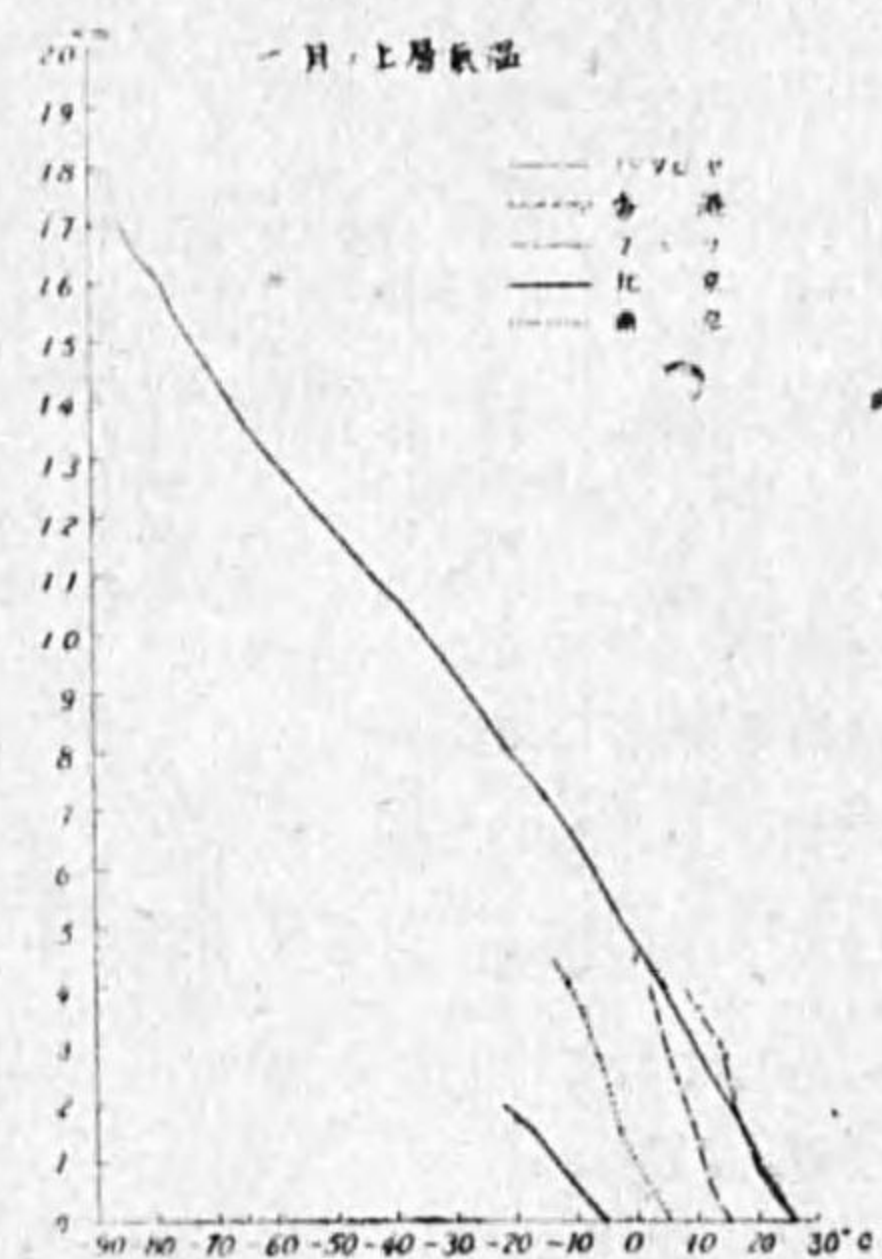
猶、徐によれば南京におけるトロポポーズの高さは平均約 15 km、夏最大がおこつて 18 km に達したことがあり、冬最低 11 km になつたことがある。トロポポーズの平均気温は -65°C、夏記録された最低気温は -76°C、最高気温は -55°C であつたと言ふ。さうして成層圏内では高い所程高温で 22 km では -55°C 位になると言ふ。

メルボルンに於けるトロポポーズの高さは信頼し得る値ではないが、約 10 km であると言ふ。

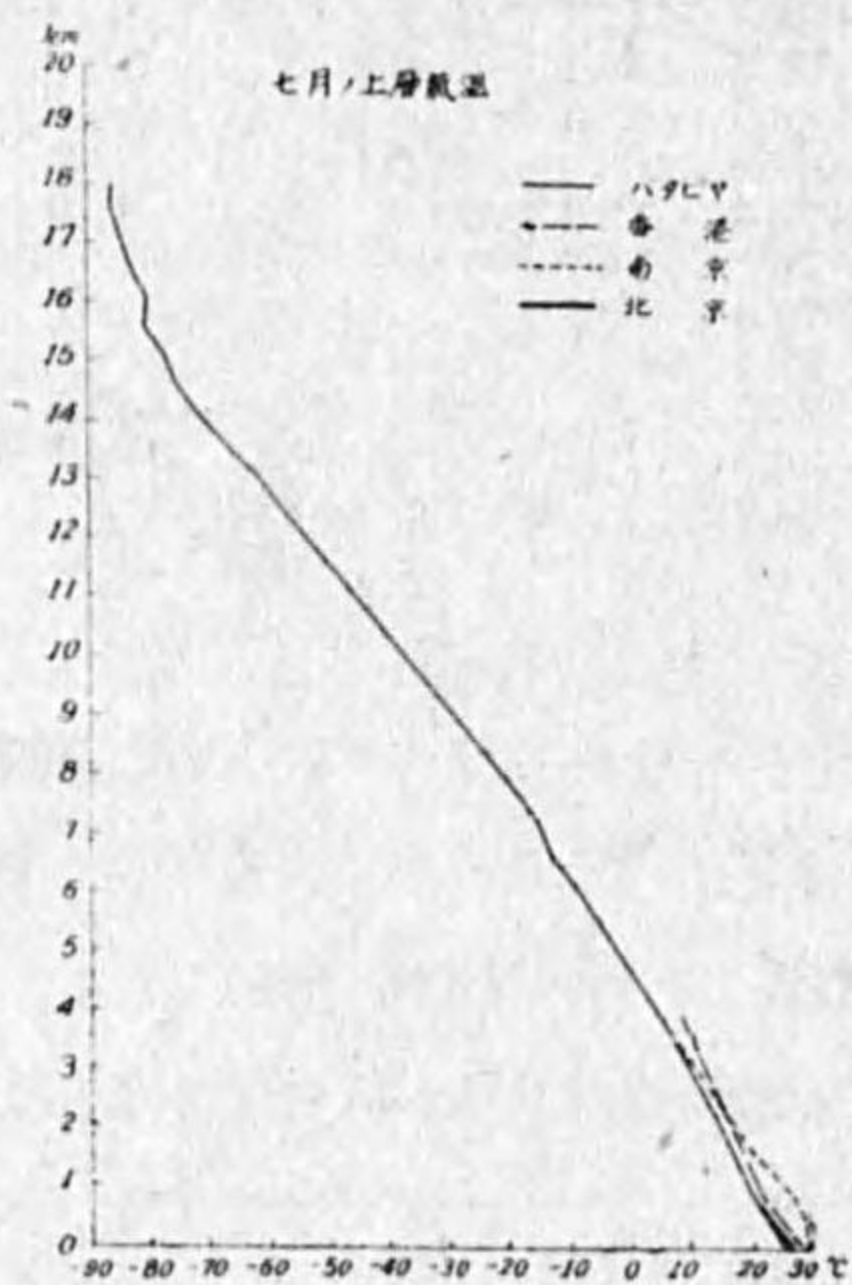
以上の材料により 1 月、7 月及び全年の上層気温の状態曲線を圖示したのが第 1-3 圖である。

(1) Initial Investigations in the Upper Air of Australia, Commonwealth Bureau of Meteorology, Melbourne, Bulletin No. 13, 1916.

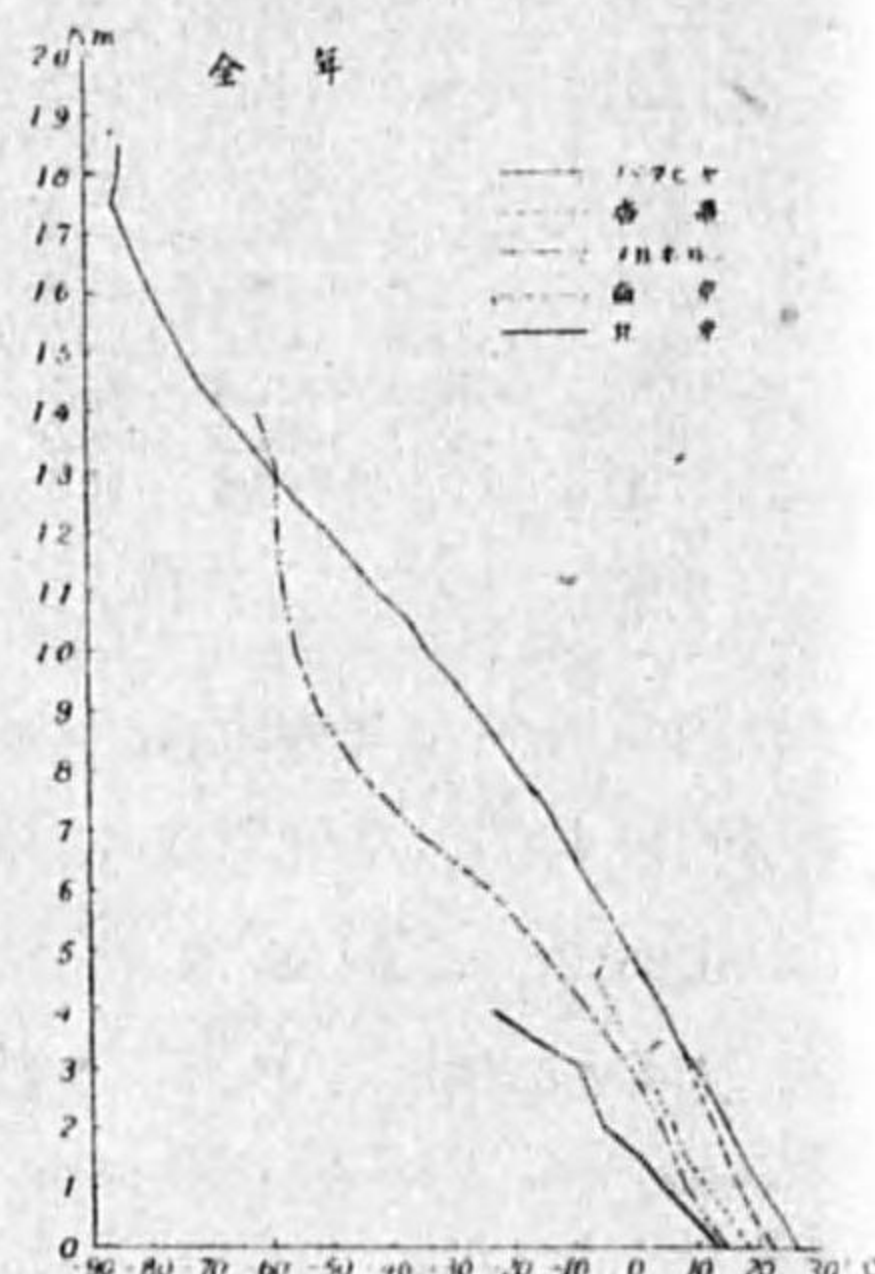
第 1 圖



第 2 圖



第 3 圖



又北京、南京、マニラ、バタビヤ、メルボルンは略南北に連亘するから、之等の各地を通る子午面に沿ふた断面圖を月別及び全年に作つて、第 4、5 圖に示した。第 4 圖から見られる如く、上層では北半球の気温の方が一般に高いことがわかる。特に 6、7、8 月には亞細亞大陸が非常に暖まるので、高緯度地方でも上層まで相當暖かくなる。

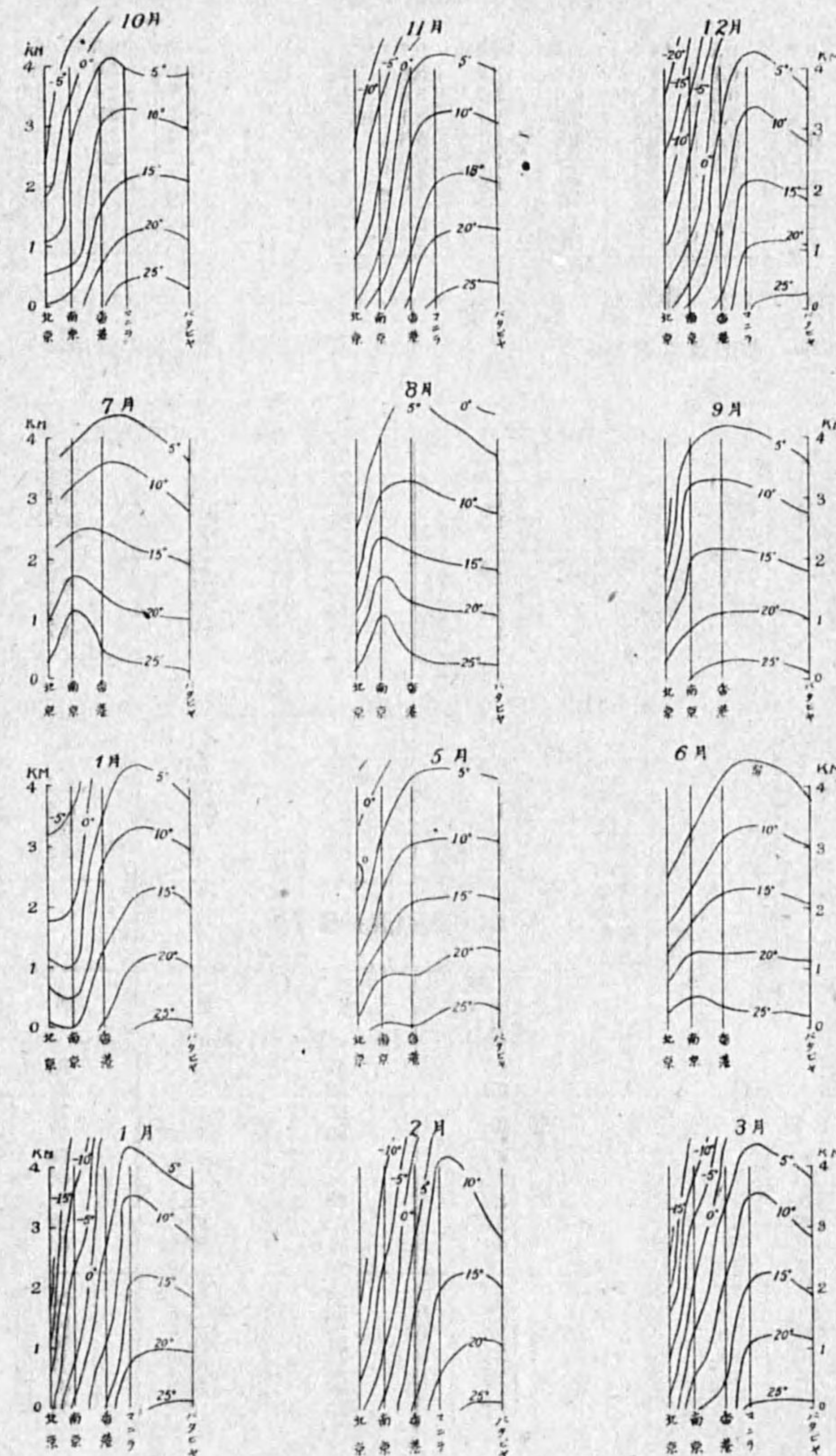
次に湿度を較べるには、比濕(又は混合比)を使つて直接に湿度の絶對量を比較することにした。相對湿度の比較では到底お話にならない。

淵氏の前記報告に基き、平均温度と平均相對湿度とから氣象計算尺により混合比(瓦/珎)を計算すると次表の如くになつた。

南京 (32°03'N, 118°47'E, 地上 7m)

高度(軒)	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	年
0	2.9	3.7	3.1	5.3	11.2	11.7	18.1	18.2	12.1	5.7	5.3	4.3	7.2
0.5	2.4	3.1	2.4	3.9	9.4	10.1	17.4	17.8	12.8	4.5	4.2	3.4	6.2
1	2.0	2.5	2.0	3.3	8.8	8.7	15.0	15.8	9.1	2.9	3.7	2.8	5.0
1.5	1.8	2.0	1.4	2.9	8.1	6.5	12.2	13.3	6.6	2.3	2.5	2.3	4.1
2	1.6	1.7	1.0	2.2	6.0	5.1	10.4	12.4	3.8	2.1	2.0	1.9	3.3
2.5	1.3	1.3	0.4	1.6	4.9	4.6	8.8	10.8	2.7	3.1	1.7	1.7	2.8
3	1.0	1.1	0.4	1.5	3.0	4.0	7.2	8.6	2.3	2.1	1.5	1.4	2.3
3.5	0.8	0.9	0.5	1.1	2.4	2.9	6.1	7.4	2.1	1.2	1.5	1.2	1.9
4	0.6	0.7	0.7	0.9	1.1	2.1	5.2	6.5	1.0	0.8	1.3	1.0	1.5
4.5	1.0	0.7	0.5	—	0.5	0.9	4.1	2.7	—	0	0.8	0.3	1.5
5	—	0.7	—	—	0.6	0.3	3.7	2.9	—	—	1.4	—	1.6

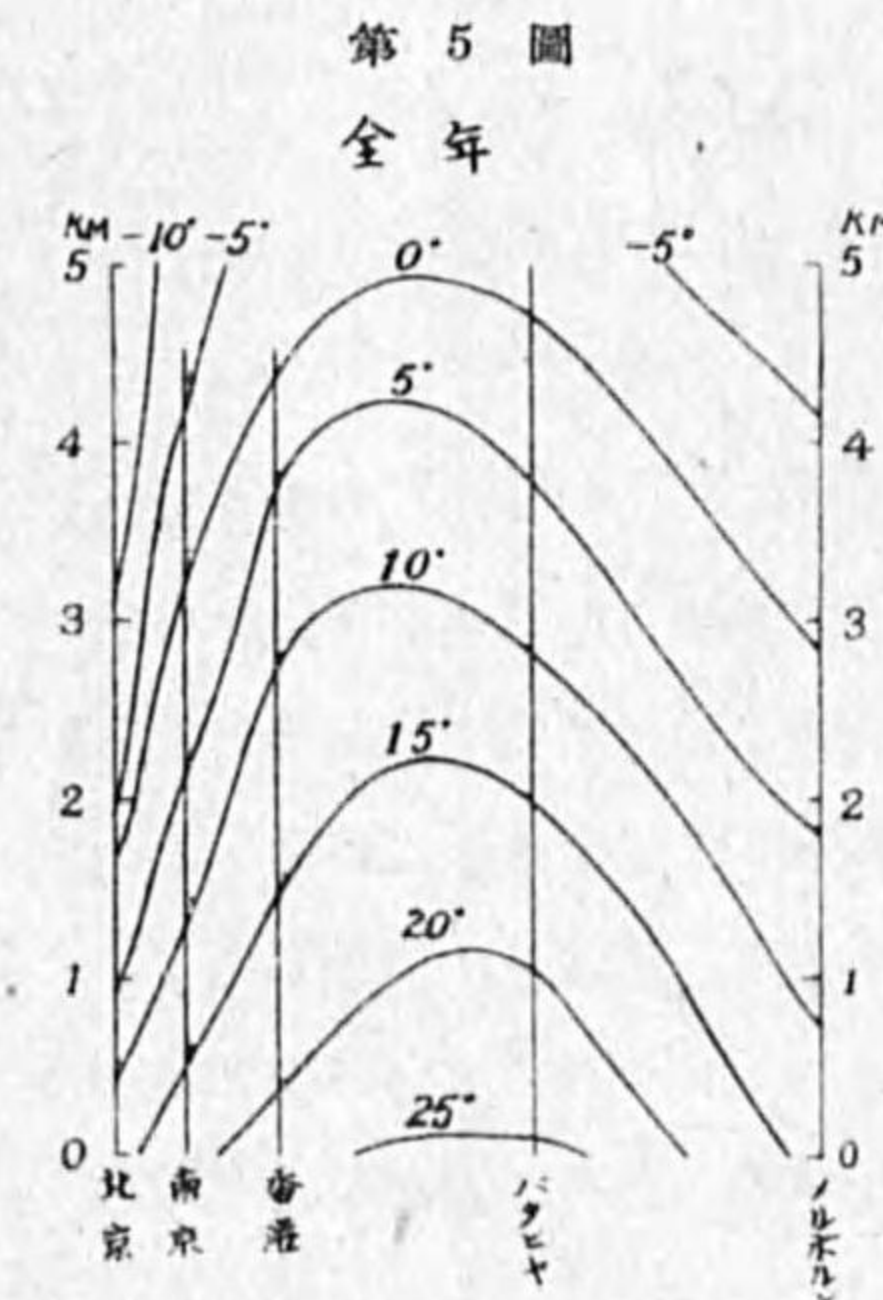
第 4 圖



北京 (40°00'N, 116°22'E, 地上 70.5 m)

0	0.7	0.8	1.4	3.8	4.6	9.7	15.4	—	7.2	4.6	2.2	1.4	3.5
0.5	0.5	0.7	1.7	3.2	3.8	8.8	12.4	—	7.2	4.0	2.0	1.2	3.0
1	0.4	0.6	1.0	2.6	3.2	8.5	11.1	—	5.8	3.4	1.6	1.0	2.6
1.5	0.4	0.5	0.8	2.2	2.7	8.1	14.1(?)	—	5.1	2.9	1.6	0.9	2.3
2	0.3	0.4	0.5	1.8	2.1	6.8	—	—	2.6	3.1	1.1	0.8	1.5
2.5	—	0.3	0.5	1.5	1.8	5.6	—	—	2.3	2.7	1.0	0.7	1.4
3	—	—	0.4	—	1.5	4.0	—	—	—	—	1.0	0.5	1.1
3.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.9	0.5	0.7
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3	0.3

徐長望の報告によると、南京と北京に於ける四季の混合比は次の如くである。



高度 (ダイナミックノキ)	冬	春	夏	秋
南 京				
0	3.6	8.8	17.6	9.1
0.5	2.9	7.5	15.9	7.5
1	2.5	6.2	14.1	6.0
1.5	2.0	5.1	11.7	4.7
2	1.7	4.1	10.0	3.8
2.5	1.5	3.3	8.3	3.2
3	1.3	2.8	6.9	2.7
3.5	1.0	2.3	6.0	2.2
4	0.8	1.5	4.7	1.6

高度 (ダイナミックノキ)	冬	春	夏	秋
北 京				
0	1.1	4.1	12.1	4.0
0.5	0.9	3.4	9.5	3.3
1	0.7	2.8	8.5	2.8
1.5	0.7	2.3	8.4	2.5
2	0.6	1.9	6.0	1.8
2.5	0.5	1.8	5.5	1.8

序でに相対湿度を挙げると

高度 (ダイナミックノキ)	冬	春	夏	秋
南 京				
0	57	58	84	64
0.5	56	57	76	62
1	55	53	73	56
1.5	49	52	71	51
2	44	45	68	44
2.5	41	42	66	43
3	38	41	63	40
3.5	32	37	62	39
4	30	30	56	38
北 京				
0	28	31	50	40
0.5	29	32	53	42
1	31	33	56	44
1.5	33	34	67	50
2	37	36	66	50
2.5	33	37	71	59

Heywood=Jeffries によれば香港に於ける相対湿度の月平均は

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	年
地表 (33m)	73	79	76	80	80	82	83	84	78	74	74	66	77
0.5 秆	83	94	87	88	90	91	91	87	85	82	84	71	86
1 秆	82	90	86	88	89	88	88	84	84	83	87	73	85
1.5 秆	77	86	79	88	86	85	85	84	84	87	83	64	82
2 秆	76	84	74	81	84	83	82	84	80	84	77	58	79
3 秆	51	65	70	72	78	75	72	76	78	78	69	44	69
4 秆	49	60	72	75	71	75	72	70	68	66	64	45	66

平均気温と平均相対湿度とから気象計算尺により混合比を計算して見ると

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	年
地表 (33m)	7.6	8.9	9.3	12.4	15.8	18.3	19.5	18.8	17.4	14.2	11.4	7.5	12.7
0.5 秆	7.4	9.1	9.5	12.2	15.7	17.6	18.2	17.4	16.1	13.6	11.0	7.2	12.4
1 秆	7.1	8.7	9.1	11.4	14.0	15.3	15.8	15.2	14.0	12.2	10.3	6.8	11.3
1.5 秆	6.7	8.0	8.3	10.7	12.6	13.2	14.0	13.5	13.0	11.7	9.5	5.8	10.2
2 秆	6.0	7.5	7.6	9.6	11.4	12.0	12.4	12.3	11.1	10.0	8.7	5.0	9.3
3 秆	3.7	5.0	6.0	7.3	8.8	9.4	9.8	9.3	9.4	8.4	6.8	3.5	7.0
4 秆	3.3	4.1	4.8	6.3	6.7	7.8	7.5	7.3	6.6	5.8	5.4	3.2	5.7

Deppermann の報告所載の第 8 圖から Manila に於ける比湿を読みとると

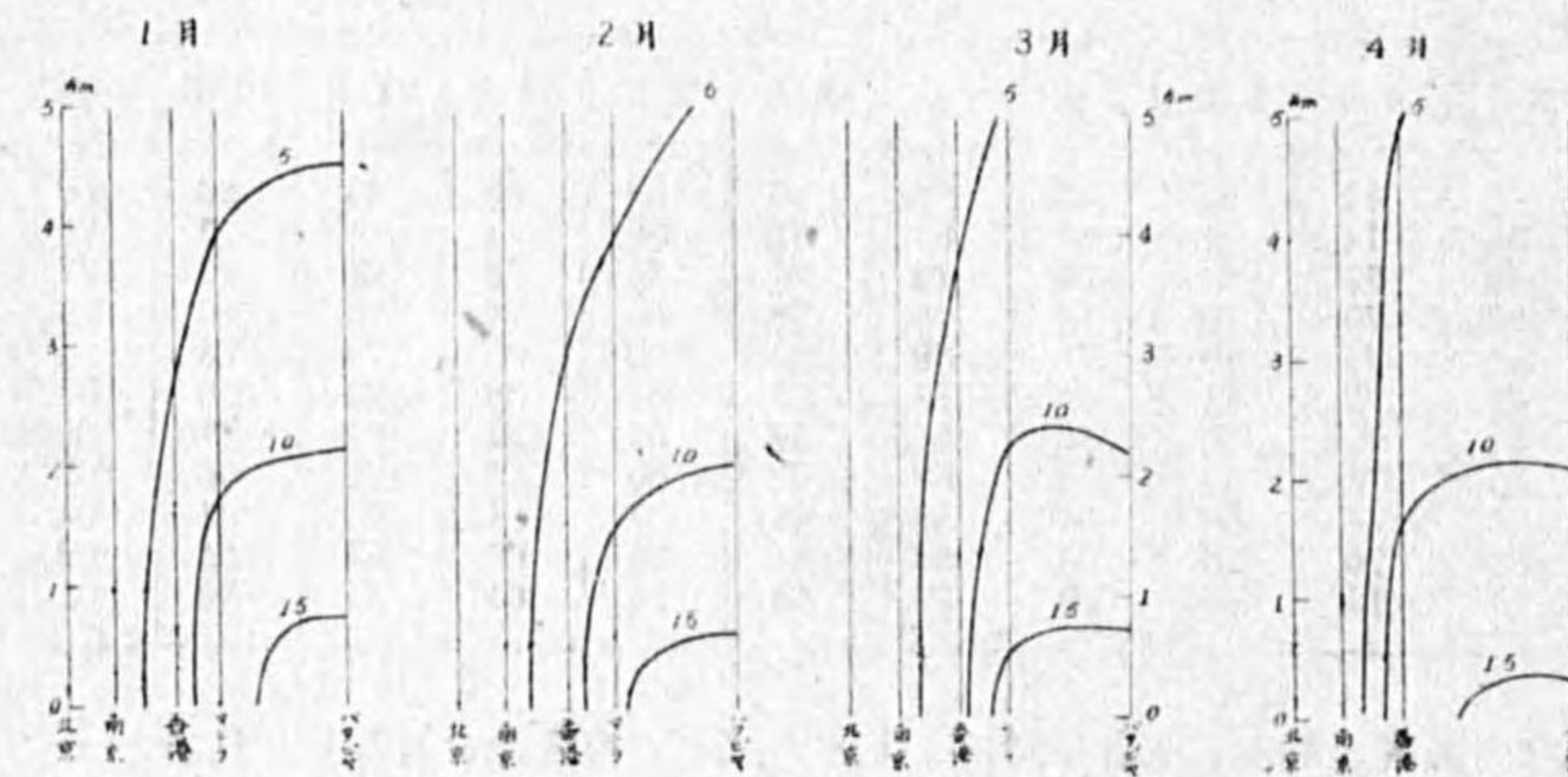
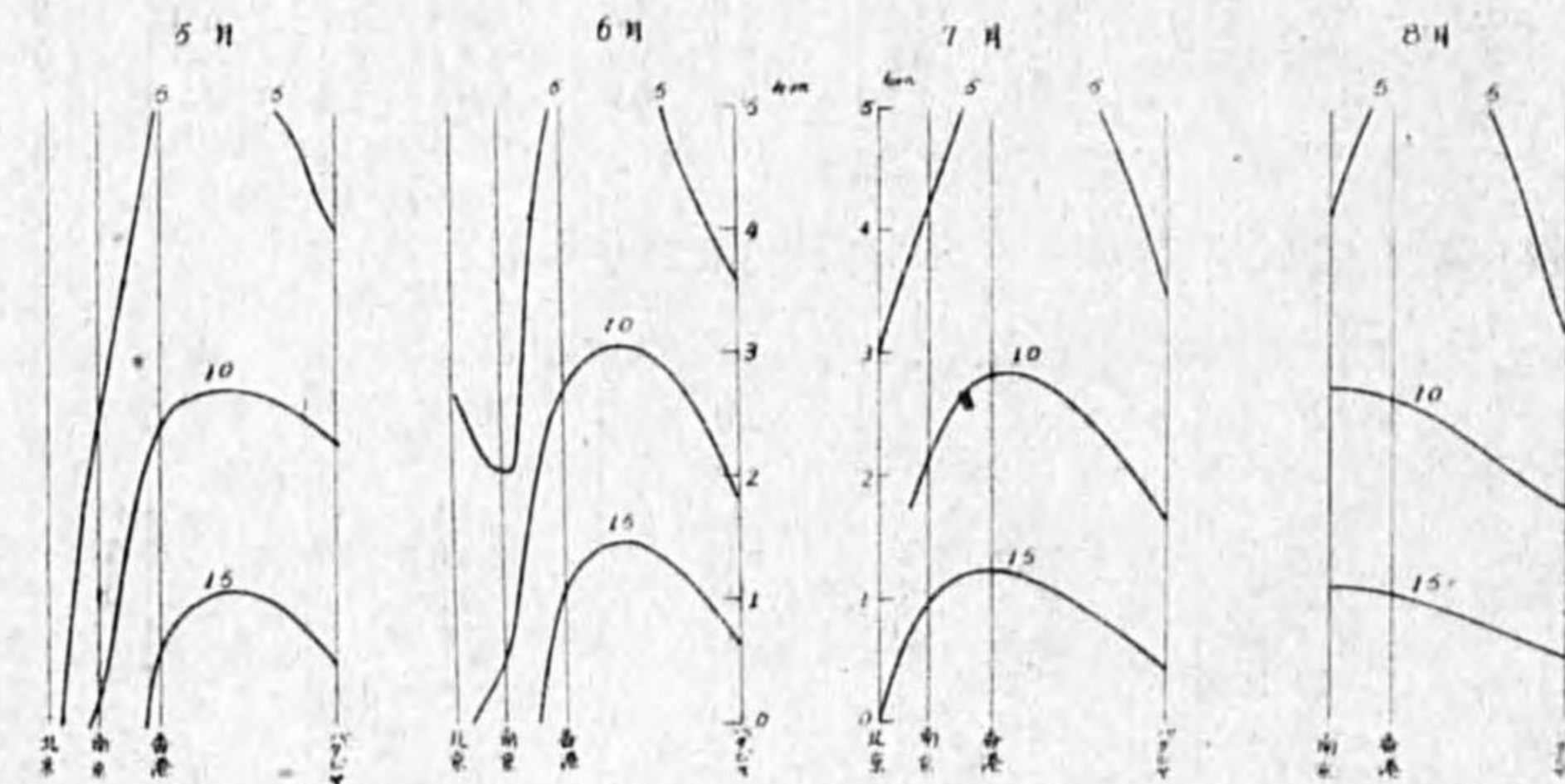
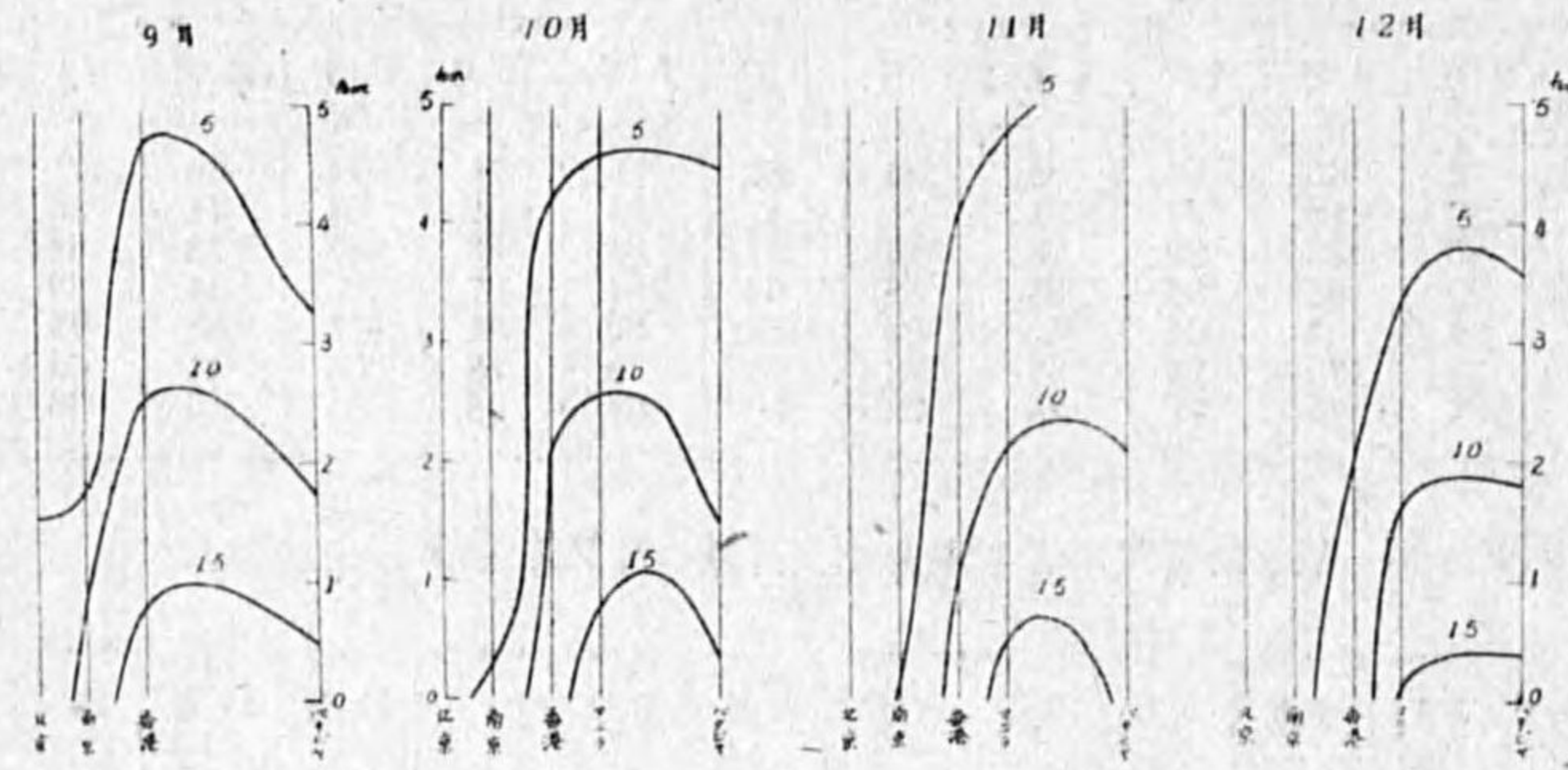
高度 (秆)	10月	11月	12月	1月	2月	3月
0	18.1	17.0	15.3	14.4	14.7	18.6
0.5	16.6	14.9	14.2	13.3	13.3	15.5
1.0	14.5	14.5	13.8	12.7	12.0	14.0
2.0	11.8	10.7	9.5	9.5	8.5	11.4
3.0	8.5	8.7	7.2	6.0	5.6	7.0
4.0	5.4	6.0	3.0	5.0	—	—

Bemmelen の報告から、月別の平均湿度を計算して出すと

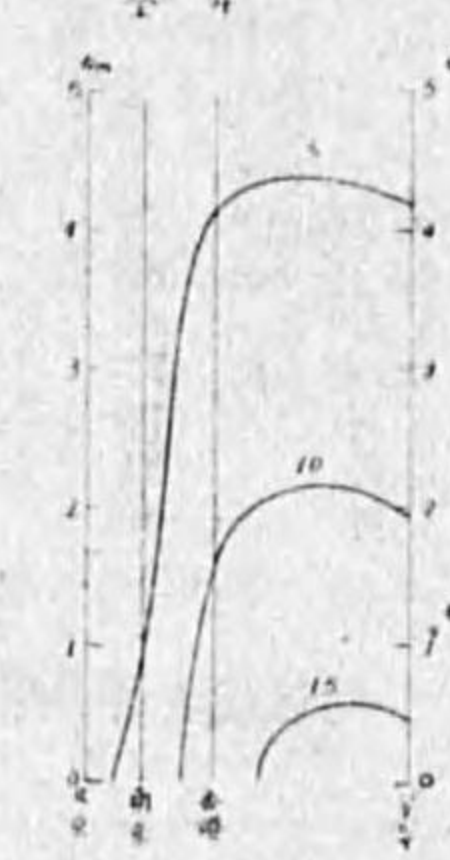
高度 (秆)	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	年
0	92	92	88	91	87	83	87	85	83	88	71	86	86
0.5	89	83	82	74	74	83	80	82	82	74	65	77	79
1	88	78	82	75	63	78	79	74	80	75	66	75	77
1.5	85	77	87	73	79	75	75	78	80	70	71	80	78
2	82	75	82	75	79	71	69	76	70	65	74	73	74
2.5	80	73	77	73	71	64	67	57	68	56	74	66	69
3	73	78	81	70	66	56	61	54	62	51	73	67	66
3.5	72	74	85	74	63	55	58	52	50	56	73	60	63
4	71	76	86	74	56	56	58	48	47	64	76	61	64
4.5	72	76	86	76	56	50	52	54	39	67	83	55	62
5	73	76	84	73	52	46	48	58	34	64	84	60	61

月別の平均気温と平均相対湿度とから気象計算尺によりバタビヤの混合比を計算して見ると

第 7 圖



第 8 圖



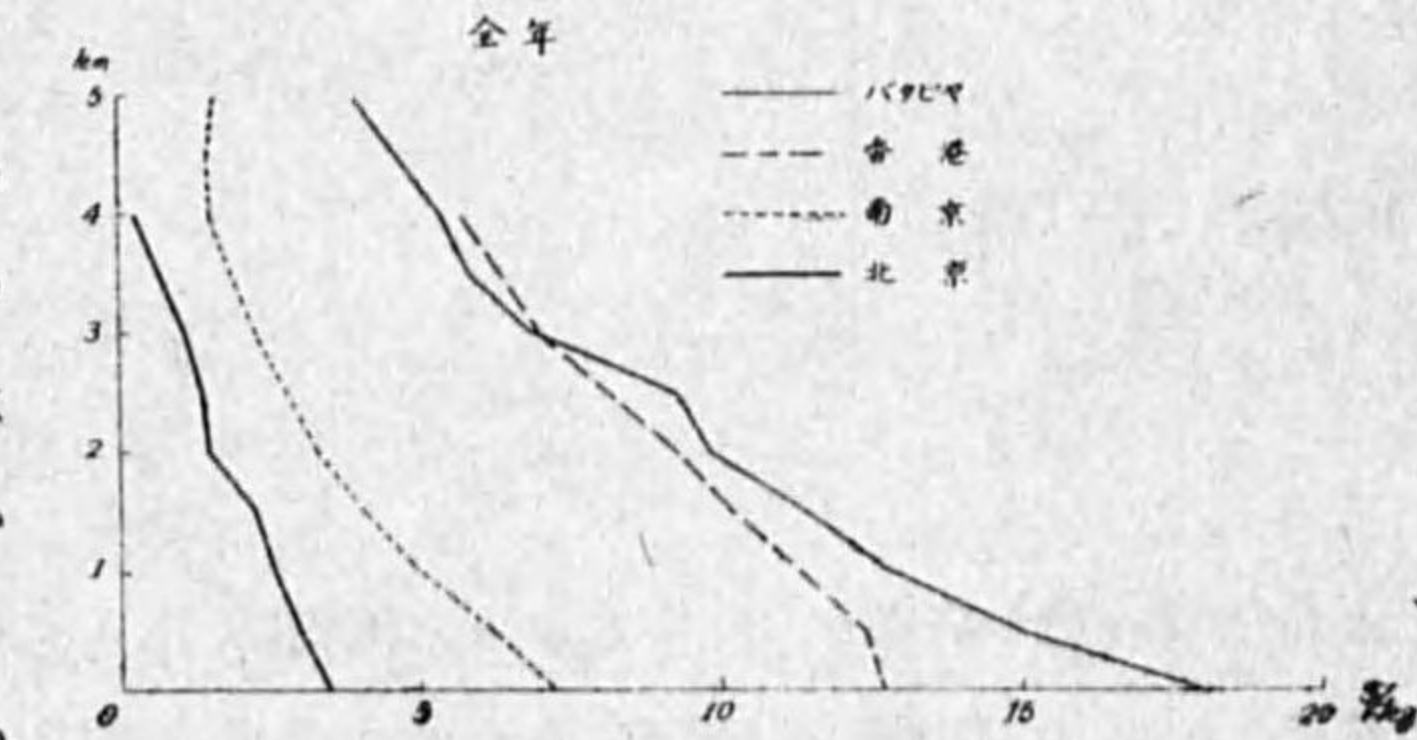
高度(軒)	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	年
0	18.3	19.0	18.7	19.0	19.1	17.5	17.5	18.0	17.4	18.6	14.6	18.6	18.1
0.5	16.2	15.6	15.8	13.3	14.8	15.9	14.6	15.4	14.9	14.2	13.1	14.4	14.9
1	14.0	12.9	13.9	12.3	11.4	12.8	12.4	12.0	12.9	12.6	11.7	12.1	12.8
1.5	12.4	11.6	13.2	11.3	12.2	11.2	10.8	11.1	11.1	10.2	11.0	10.6	11.4
2	10.5	10.1	10.6	10.3	11.6	9.7	8.9	9.3	8.9	8.8	10.1	9.3	9.8
2.5	9.1	8.6	9.1	8.7	9.2	7.7	7.7	6.4	7.6	7.1	9.0	7.5	8.2
3	7.4	7.9	8.5	7.6	7.6	6.1	6.4	5.5	6.1	5.9	7.9	6.7	6.9
3.5	6.4	6.8	7.8	7.2	6.6	5.2	5.1	4.7	4.4	5.5	7.2	5.3	5.8
4	5.6	6.4	7.1	6.3	5.2	4.7	4.4	3.8	3.8	5.5	6.6	4.8	5.3
4.5	5.0	5.8	6.1	5.7	4.6	3.8	3.6	3.5	2.9	4.9	6.3	3.7	4.6
5	4.3	5.1	5.3	5.0	3.7	3.1	2.8	3.5	2.0	4.2	5.7	3.5	3.9

以上の材料により全年の平均比湿の状態

曲線を圖示したのが第6圖である。又略と子午面に沿ふた断面圖を月別及び全年について作ると第7,8圖のやうになる。この圖から判断すると夏期の南の季節風期には南半球側が南半球側の赤道附近よりも遙かに湿度が大きなことが斷言できる。

本報告は文部省科學研究費“南方氣候の比較研究”を得て遂行し得たものである。變らぬ御指導を給はりたる岡田武松先生、手傳つて頂いた林豐伯氏に對し厚い謝意を表する。

第 6 圖



### 統計理論による n 次元渦動擴散の計算例<sup>(1)</sup>

高橋喜彦

#### §1. 半無限流體に於ける三次元渦動擴散の一例

渦粒子の時間  $t$  に對する綜合速度を  $(u, v, w)$  とすれば、その速度分布は

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{u^2 v^2 w^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{u^2} + \frac{v^2}{v^2} + \frac{w^2}{w^2} \right)} du dv dw \quad (1)$$

(1) 高橋喜彦：統計渦動擴散論，氣象集誌，第2輯，20，315~341，1942 (昭和17年)を豫め參照せられたし。



で與へられる。茲に  $\overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}$  は夫々  $u, v, w$  の自乗平均である。

$u, v, w$  は  $t$  時間の平均速度であるから、 $t$  の取り方によつて  $\overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}$  は變つて來るが、 $\overline{u^2}t, \overline{v^2}t, \overline{w^2}t$  は常に一定であり、 $x, y, z$  方向の渦動擴散率を夫々  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  とすれば、

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \overline{u^2}t, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2} \overline{v^2}t, \quad \kappa_3 = \frac{1}{2} \overline{w^2}t \quad (2)$$

といふ關係がある。

均一渦動流體の場合には

$$\left. \begin{aligned} \overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \overline{a^2}, \\ \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa = \frac{1}{2} \overline{a^2}t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

であるから、(1) は

$$\frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}} dudvdw \quad (4)$$

となる。

今半無限流體の表面を  $z=0$  に取り、流體は  $z>0$  に擴つてゐるものとする。表面の物理量密度は場所  $(x, y)$  及び時刻  $t$  の函數  $f(x, y, t)$  で與へられ、最初流體の物理量密度は 0 であるといふ問題を解いて見よう。但し均一渦動流體であるものとする。

この問題を微分方程式で書けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right) \quad (0 < z < \infty) \\ (X)_{z=0} = 0, \quad (X)_{z=0} = f(x, y, t) \quad (t > 0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。

先づ

$$u = \frac{\xi - x}{t - t'}, \quad v = \frac{\eta - y}{t - t'}, \quad w = \frac{z}{t - t'} \quad (6)$$

と置いて、 $(u, v, w)$  を  $(\xi, \eta, t')$  に置換すれば、

$$\begin{aligned} dudvdw &= \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, t')} d\xi d\eta dt' \\ &= \frac{z}{(t-t')^4} d\xi d\eta dt' \end{aligned} \quad (7)$$

により、(4) は

$$\frac{z}{(2\pi a^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}{2a^2(t-t')^2}} \frac{d\xi d\eta dt'}{(t-t')^4}$$

となるが、

$$\kappa = \frac{1}{2} \overline{a^2}(t-t') \quad (8)$$

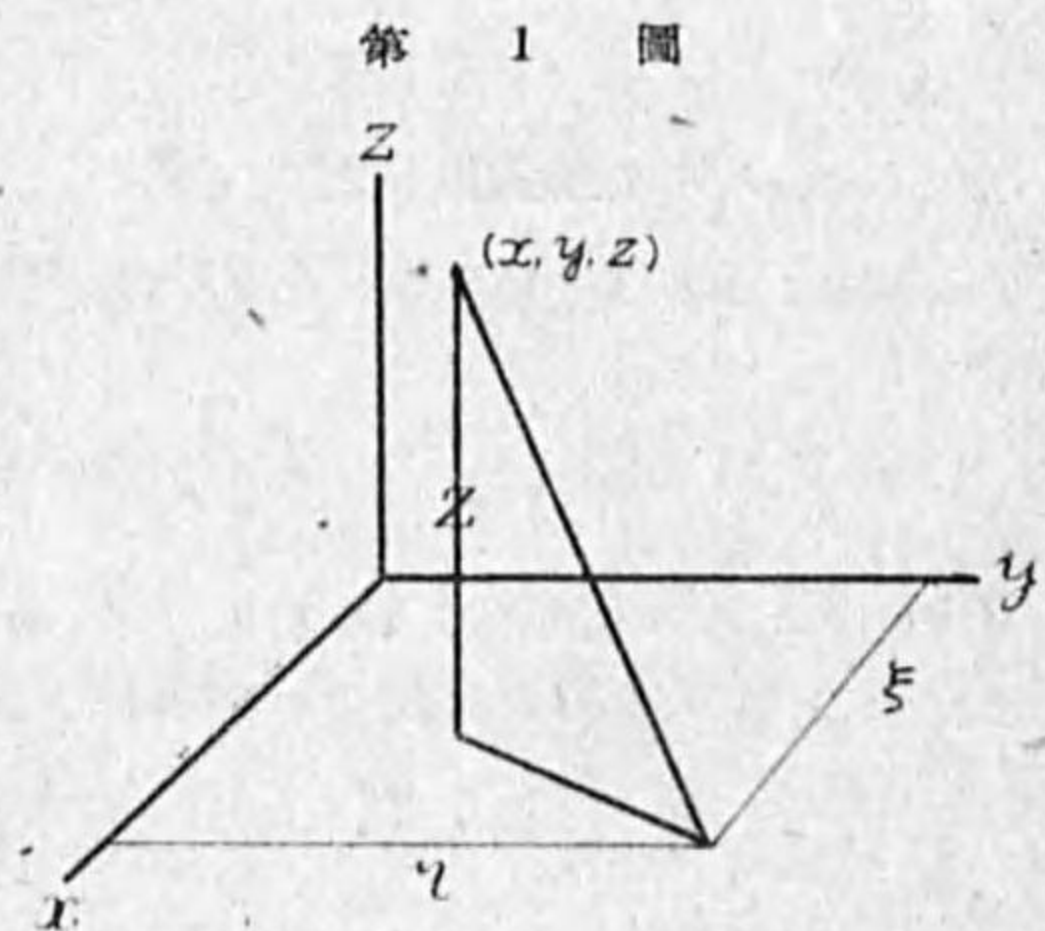
であるから、更に書き換えて、

$$\frac{z}{8(\pi\kappa)^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{d\xi d\eta dt'}{(t-t')^{5/2}} \quad (9)$$

となる。

これは (6) の置換及び第 1 圖を見れば明かな通り、時刻  $t$  に流體中の或る場所  $(x, y, z)$  に屬する渦粒子が、それより前  $t-t'+dt'$  なる時刻に表面  $y=0$  上の或る場所  $(\xi, \eta)$  の面積素片  $d\xi d\eta$  に衝突したことがあるといふ確率を表はす。

半無限流體の一次元渦動擴散で表面の物理量密度が時間の函數  $\varphi(t)$  である場合に、最初流體の物理量密度が 0 であれば、時刻  $t$  に表面に衝突する渦粒子に積算される



物理量密度は  $\varphi(t)$  そのものである。故に三次元の場合には、時刻  $t$  に表面上  $(x, y)$  なる場所に衝突する渦粒子は  $f(x, y, t)$  なる物理量密度が積算されるものと考へてよい。

故に任意の時刻  $t$  及び場所  $(x, y, z)$  の物理量密度を  $X(x, y, z, t)$  とすれば、

$$X(x, y, z, t) = \frac{z}{8(\pi\kappa)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^t f(\xi, \eta, t') e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{5/2}} \quad (10)$$

となる<sup>(1)</sup>。又は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi-x}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} = \mu, \quad \frac{\eta-y}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} = \lambda, \quad \frac{z}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} = \tau, \\ \xi-x = z\frac{\mu}{\tau}, \quad \eta-y = z\frac{\lambda}{\tau}, \quad t-t' = \frac{z^2}{4\kappa\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

即ち

と置いて、 $(\xi, \eta, t')$  を  $(\mu, \lambda, \tau)$  に置換すれば、

$$d\xi d\eta dt' = \frac{\partial(\xi, \eta, t')}{\partial(\mu, \lambda, \tau)} d\mu d\lambda d\tau = 16 \frac{\kappa^{3/2}(t-t')^{5/2}}{z} d\mu d\lambda d\tau \quad (12)$$

であるから、(10) は

$$X(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} f\left(x+z\frac{\mu}{\tau}, y+z\frac{\lambda}{\tau}, t-\frac{z^2}{4\kappa\tau^2}\right) e^{-(\mu^2+\lambda^2+\tau^2)} d\tau \quad (13)$$

となる (10) 或ひは (13) が求むる解である。

(1) H. S. Carslaw: Conduction of Heat (1921). § 87, I の  $f(x, y, z)=0$  と置いた結果と一致する。

§2. n次元渦動拡散の一例

次に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \kappa \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_n^2} \right) \quad (0 < x_n < \infty) \\ (\chi)_{t=0} &= 0, \quad (\chi)_{x_n=0} = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) \quad (t > 0) \\ &= 0 \quad (t < 0) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

といふ n 次元渦動拡散を考へて見る。

n 次元の均一渦動流體に於ける渦粒子の速度分布は

$$\frac{1}{(2\pi a^2)^{n/2}} e^{-\frac{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}{2a^2}} du_1 du_2 \dots du_n \quad (15)$$

で與へられる。但し  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は  $x_i$  方向の速度成分とする。

$$\text{今} \quad u_i = \frac{\xi_i - x_i}{t - t'} \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad u_n = \frac{x_n}{t - t'} \quad (16)$$

と置いて,  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  を  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t')$  に置換すれば,

$$\begin{aligned} du_1 du_2 \dots du_n &= \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t')} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} dt' \\ &= \frac{x_n}{(t-t')^{n+1}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} dt' \end{aligned} \quad (17)$$

であるから, (8) の関係を用ひれば, (15) は

$$\frac{1}{2^n (\pi \kappa)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\xi_i - x_i)^2 + x_n^2}{4\kappa(t-t')}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} \frac{dt'}{(t-t')^{n/2+1}}$$

となり, 求むる解は

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= \frac{x_n}{2^n (\pi \kappa)^{n/2}} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{n/2+1}} \int \dots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t') \\ &\quad e^{-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\xi_i - x_i)^2 + x_n^2}{4\kappa(t-t')}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} \end{aligned} \quad (18)$$

である。

$$\left. \begin{aligned} \text{又は} \quad \frac{\xi_i - x_i}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} &= \mu_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad \frac{x_n}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} = \tau \\ \text{即ち} \quad \xi_i - x_i &= x_n \frac{\mu_i}{\tau} \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad t' = t - \frac{x_n^2}{4\kappa\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と置いて,  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t')$  を  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \tau)$  に置換すれば,

$$\begin{aligned} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} dt' &= \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t')}{\partial(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \tau)} d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_{n-1} d\tau \\ &= 2^{n+1} \frac{\kappa^{n/2} (t-t')^{n/2+1}}{x_n} d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_{n-1} d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

であるから, (18) は

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= \frac{2}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1 + x_n \frac{\mu_1}{\tau}, x_2 + x_n \frac{\mu_2}{\tau}, \dots, \right. \\ &\quad \left. x_{n-1} + x_n \frac{\mu_{n-1}}{\tau}, t - \frac{x_n^2}{4\kappa\tau^2}\right) e^{-(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_{n-1}^2)} d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_{n-1} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。(18), (21) が (14) の微分方程式及び初期条件, 境界条件を満足することは, 三次元の場合と同様直ぐに分る。

§3. 半無限流體の表面の物理量密度が場所のみの函数である場合の二次元渦動拡散

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \kappa \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) \quad (0 < y < \infty) \\ (\chi)_{t=0} &= 0, \quad (\chi)_{y=0} = f(x) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

の解は, (18) 式より直ちに

$$\chi(x, y, t) = \frac{y}{4\pi\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^t e^{-\frac{(\xi-x)^2 + y^2}{4\kappa(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^2} \quad (23)$$

であることが分る。但しこの場合は  $t'$  に就いて積分することが出来る。即ち

$$\frac{(\xi-x)^2 + y^2}{4\kappa(t-t')} = \eta$$

と置いて,  $t'$  を  $\eta$  に置換すれば, (23) は

$$\begin{aligned} \chi(x, y, t) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2} \int_{\frac{(\xi-x)^2 + y^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-\eta} d\eta}{4\kappa\eta} \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2 + y^2} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + y^2}{4\kappa t}} d\xi \end{aligned} \quad (24)$$

となる。

(24) に  $t = \infty$  と置けば,

$$\chi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi \quad (25)$$

となり, これは定常状態の物理量密度分布を表はす式である<sup>(1)</sup>。

(1) 川下研介: 熱傳導論, 157 頁の (43.6) 式と一致する。

## 附 記

以上の結果はすべてそのまま固体熱傳導に用ひられる。但し  $X$  は温度,  $\kappa$  は熱擴散率と考へればよい。

昭和 17 年 6 月 24 日

名古屋地方氣象臺に於いて

## 赤道を越える氣流の運動 (1)

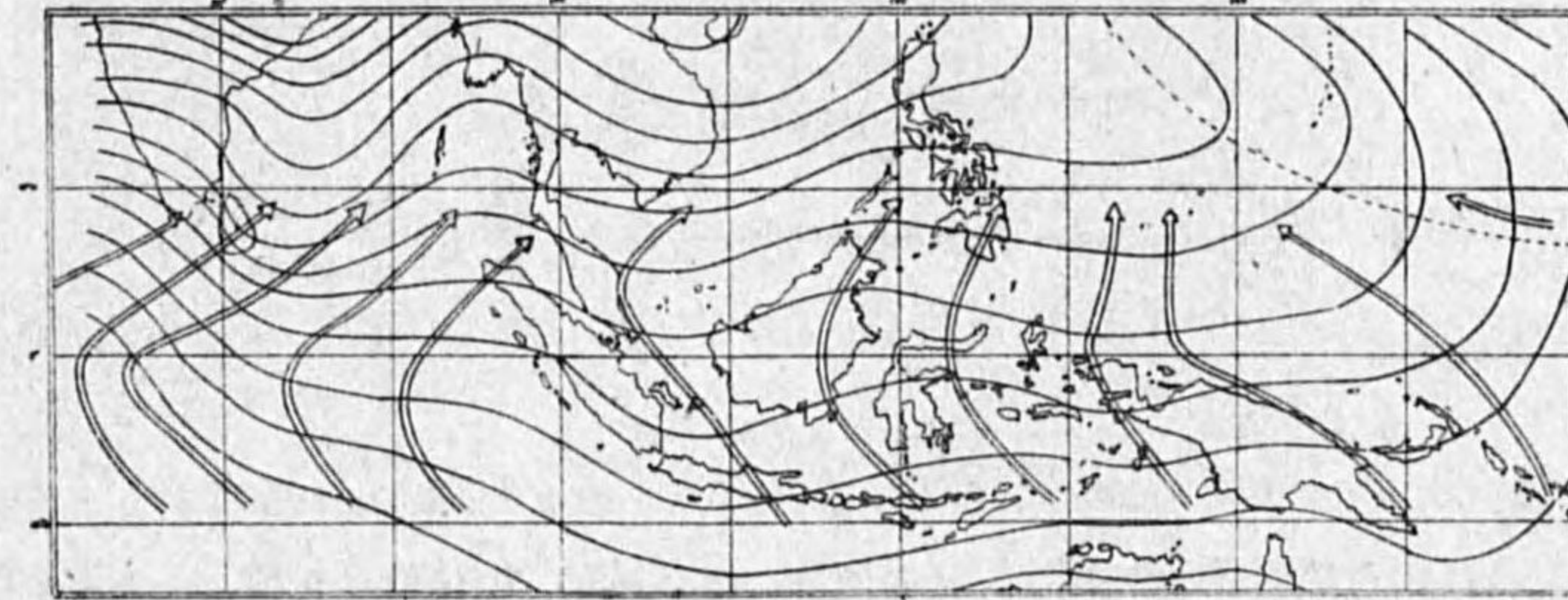
櫻 庭 信 一

赤道を越える際に氣流が如何なる經路をとつて運動するかを知る事は興味深い。即ち赤道を越えて他の半球に侵入する季節風の運動は熱帯性低氣壓の發生と關聯して非常に重要だからである。

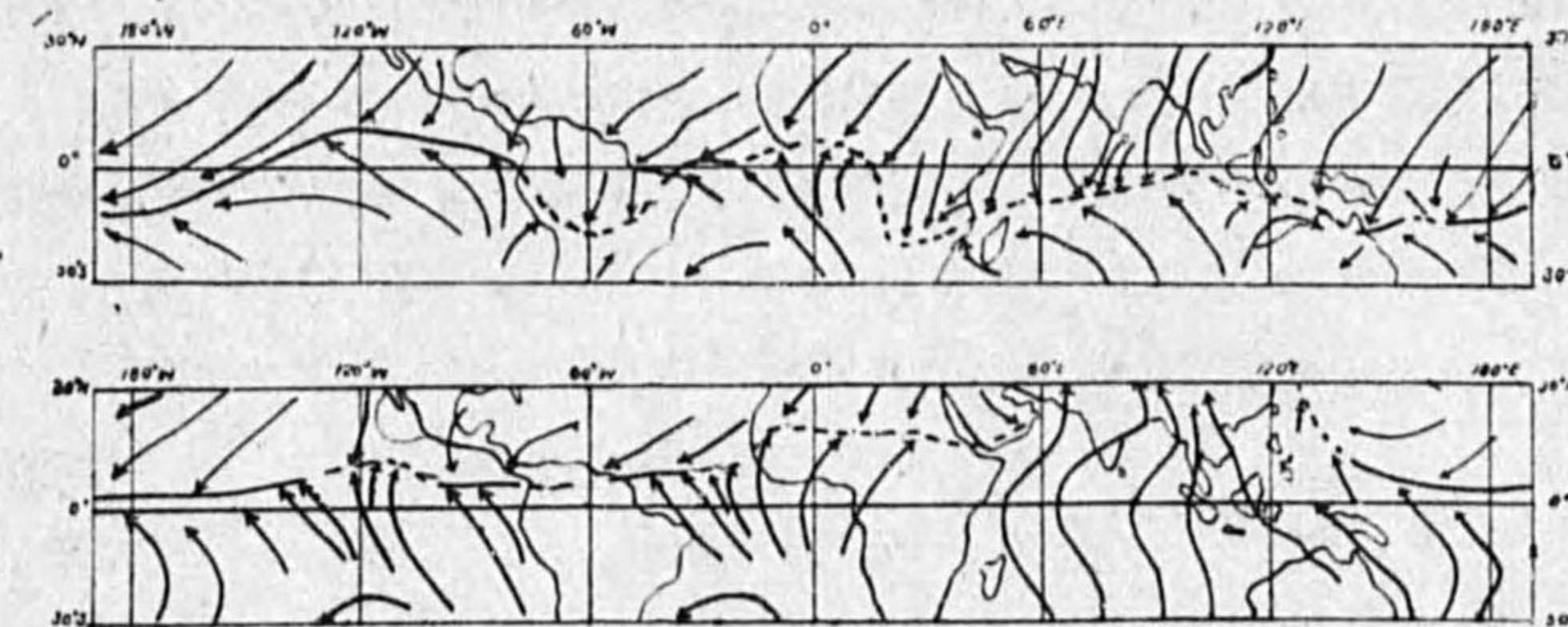
第 1 圖は Deppermann の "Mean Transport of Air in the Indian and South Pacific Oceans" から轉載せる赤道附近の 7 月の流線と等壓線であるが、南半球より赤道を越えて北半球に侵入する季節風が氣壓分布によつて種々の經路を示す (地形的因子もあらう) のが注目される。

北半球に侵入する氣流が如何なる循環を持つてゐるかは熱帯性低氣壓の發生論と關聯して重要である。

第 1 圖 7 月の流線と等壓線 (Deppermann に據る)



第 2 圖 熱帯前線 (實線) と季節風 (上 1 月, 下 7 月)



第 2 圖は 1 月 (上) と 7 月 (下) に於ける季節風の流線と熱帯前線 (inter-tropical front) を示すものであるが、7 月に就いて云ふと低氣壓性循環を持つて北半球に侵入する氣流は殆ど例外なく熱帯性低氣壓の發生域と關係してゐるのを注目すべきである。

斯くの如く重要な問題であるに拘らず、赤道を越える氣流の運動の理論的取り扱いには A. Grimes<sup>(1)</sup> の論說以外殆ど見當らない。之は轉向力の變化する場に於ける氣流の運動を論ずる事が嚴密には困難なのに原因があらう。

A. Grimes は此の困難を避ける爲に赤道の極く近所だけを考へ、 $\sin \varphi \doteq \varphi$  ( $\varphi$  は緯度) の近似が許されるものとし、且つ平面座標の運動として問題を簡單化した。

本文では斯かる省略算を避け、球面座標上の運動として一步嚴密性を進めた。

球面座標  $r, \theta, \lambda$  ( $r$  は動徑,  $\theta$  は餘緯度,  $\lambda$  は經度) に沿ふ速度成分を  $v_r, v_\theta, v_\lambda$  とすれば、摩擦の無い運動の方程式は

(1) A. Grimes: The Movement of Air across the Equator. Memoirs of the Malayan Meteorological Service. No. 2, 1-14 (年號不明).

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} - 2\omega \sin \theta \cdot v_\lambda + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{\cot \theta}{r} v_\lambda^2 - 2\omega \cos \theta \cdot v_\lambda + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta v_\lambda + 2\omega (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned}$$

で、連続の方程式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} = 0$$

である。茲に  $\omega$  は地球廻轉の角速度、 $\rho$  は密度、 $p$  は氣壓、 $\Phi$  は重力ポテンシャルを表はす。定常状態の運動を考へて  $\partial/\partial t=0$  とし、且つ垂直速度  $v_r=0$  で、經度方向の變化はないものとする ( $\partial/\partial \lambda=0$ )。更に  $r=a$  ( $a$  は地球の半径) とし、空氣は非壓縮性と假定する。然らば上の方程式は

$$v_\theta \frac{\partial v_\theta}{a \partial \theta} - \frac{\cot \theta}{a} v_\lambda^2 - 2\omega \cos \theta \cdot v_\lambda + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \theta} = 0, \quad (1)$$

$$v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{a \partial \theta} + \frac{\cot \theta}{a} v_\theta v_\lambda + 2\omega \cos \theta \cdot v_\theta = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot \theta \cdot v_\theta = 0 \quad (3)$$

の如く簡単になる。(3) 式から  $(v_\theta)_{\theta=\theta_0} = v_\theta^0$  の條件で

$$v_\theta = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} v_\theta^0 \quad (4)$$

を得、(2) 式より、 $(v_\lambda)_{\theta=\theta_0} = v_\lambda^0$  の條件によつて

$$v_\lambda = \frac{a\omega}{2 \sin \theta} (\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) + \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} v_\lambda^0 \quad (5)$$

を得る。(5) 式は角運動量保存則を表はすものに外ならない。即ち角運動量  $Q$  は

$$Q = r^2 \sin^2 \theta (\dot{\lambda} + \omega)$$

で與へられるが、本文の記號で

$$Q = a \sin \theta (v_\lambda + a\omega \sin \theta)$$

と書かれる<sup>(1)</sup>。  $Q$  = 一定の條件により、 $(v_\lambda)_{\theta=\theta_0} = v_\lambda^0$  より

$$Q = a \sin \theta_0 (v_\lambda^0 + a\omega \sin \theta_0)$$

となり、以上 2 式より 
$$v_\lambda = \frac{a\omega}{\sin \theta} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta) + \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} v_\lambda^0 \quad (5')$$

(1)  $a \sin \theta \cdot \dot{\lambda} = v_\lambda$ .

を得る。(5') 式と (5) 式が同じものである事は明らかである。但し實用上からは (2) 式に於いて  $v_\theta v_\lambda$  の項を無視した

$$v_\theta \frac{\partial v_r}{a \partial \theta} + 2\omega \cos \theta \cdot v_\theta = 0 \quad (6)$$

の解:

$$v_\lambda = 2a\omega (\sin \theta_0 - \sin \theta) + v_\lambda^0 \quad (7)$$

を用ひて充分足りる。數量的に調べると (5) 式と (7) 式は殆ど同じである。従つて今後の議論には専ら (7) 式のみを用ひる<sup>(1)</sup>。

(4), (7) 式は球面座標上の運動を決める式で、(1) 式は之等の運動に對應する氣壓傾度を與へる。

(4), (7) 式より、運動は赤道 ( $\theta=90^\circ$ ) に對して對稱なる事が解る。特に運動の東進又は西進を決定する (7) 式を見るに、第一項  $2a\omega (\sin \theta_0 - \sin \theta)$  は  $\theta_0$  が  $90^\circ$  より大であると (南半球に原點があるとき)  $\theta_0 \sim 90^\circ$  間は負で、北半球に於いても赤道より  $\theta_0$  の緯度までの緯度距離と等しい所まで負である。従つて南半球で  $v_\lambda^0$  が負であると南半球では赤道まで東風で、赤道を越えて後も赤道に對して對稱な緯度まで東風で、以降急速に西風に轉ずる。南半球で  $v_\lambda^0$  が正であると、 $v_\lambda^0$  の大きさによつて、南半球で一度西風より東風に轉じ、北半球に入つて直ちに西風に轉ずるものと、南半球に於いても西風を繼續して北半球に到るものとの 2 つの場合が起る。

即ち前者は  $|2a\omega (\sin \theta_0 - 1)| > v_\lambda^0$  ( $v_\lambda^0 > 0$  とする) (8)

に相當し、後者は  $|2a\omega (\sin \theta_0 - 1)| < v_\lambda^0$  (9)

の條件に於いて起る。

以上で南半球から赤道を越えて北半球に侵入する氣流の運動の概貌は得られたのであるが、更に經路を詳しく求めるには流線を描いてみるとよい。

流線の式は此の場合 
$$\frac{d\theta}{v_\theta} = \frac{\sin \theta \cdot d\lambda}{v_\lambda} \quad (10)$$

で、(4), (7) 式を代入して積分すると

$$2a\omega (\theta \cdot \sin \theta_0 + \cos \theta) + v_\lambda^0 \cdot \theta - \sin \theta_0 \cdot v_\theta^0 \cdot \lambda = K \quad (11)$$

となり、(4), (5) 式を採用する時は

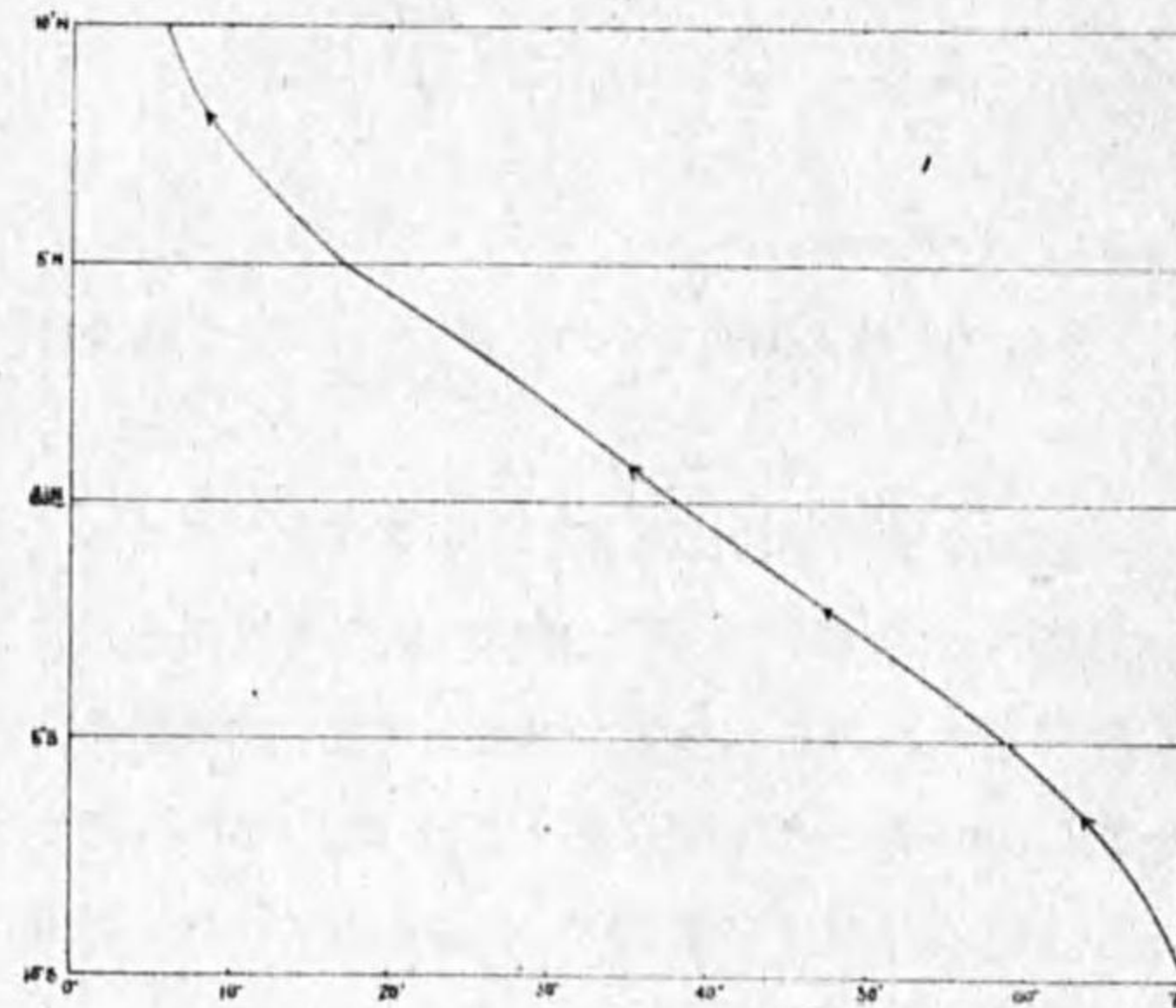
$$a\omega \left( \sin^2 \theta_0 \cdot \log \tan \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right) + \sin \theta_0 \cdot v_\lambda^0 \cdot \log \tan \frac{\theta}{2} - \sin \theta_0 \cdot v_\theta^0 \cdot \lambda = K \quad (12)$$

となる。茲に  $K$  は流線常数を示す。

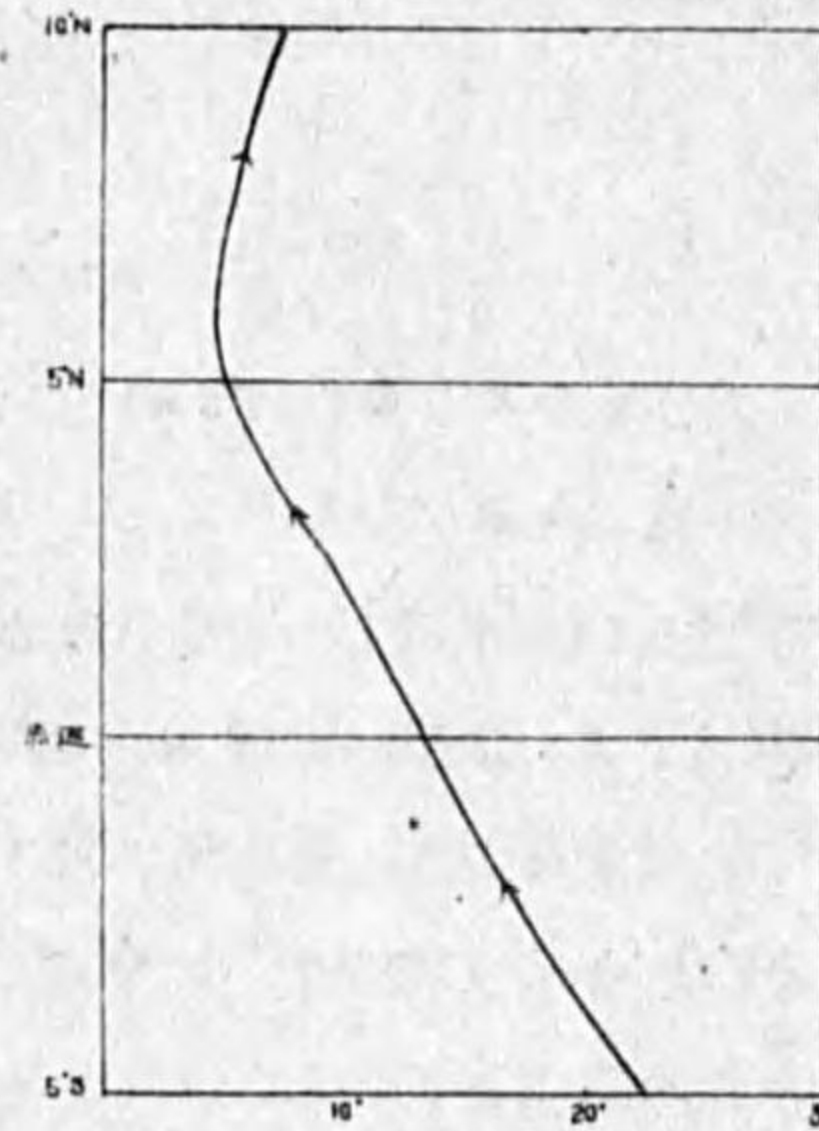
第 3 圖は (12) 式によつて計算せる流線圖で、 $\theta_0 = 100^\circ$  ( $10^\circ S$ )、 $v_\lambda^0 = -4.2 \times 10^2$  cm/sec、 $v_\theta^0 = -$

(1). (7) 式は實用的にははともかく、理論的には嚴密でない。此の意味で後に示す流線の計算には (5) 式を用ひたものもある。

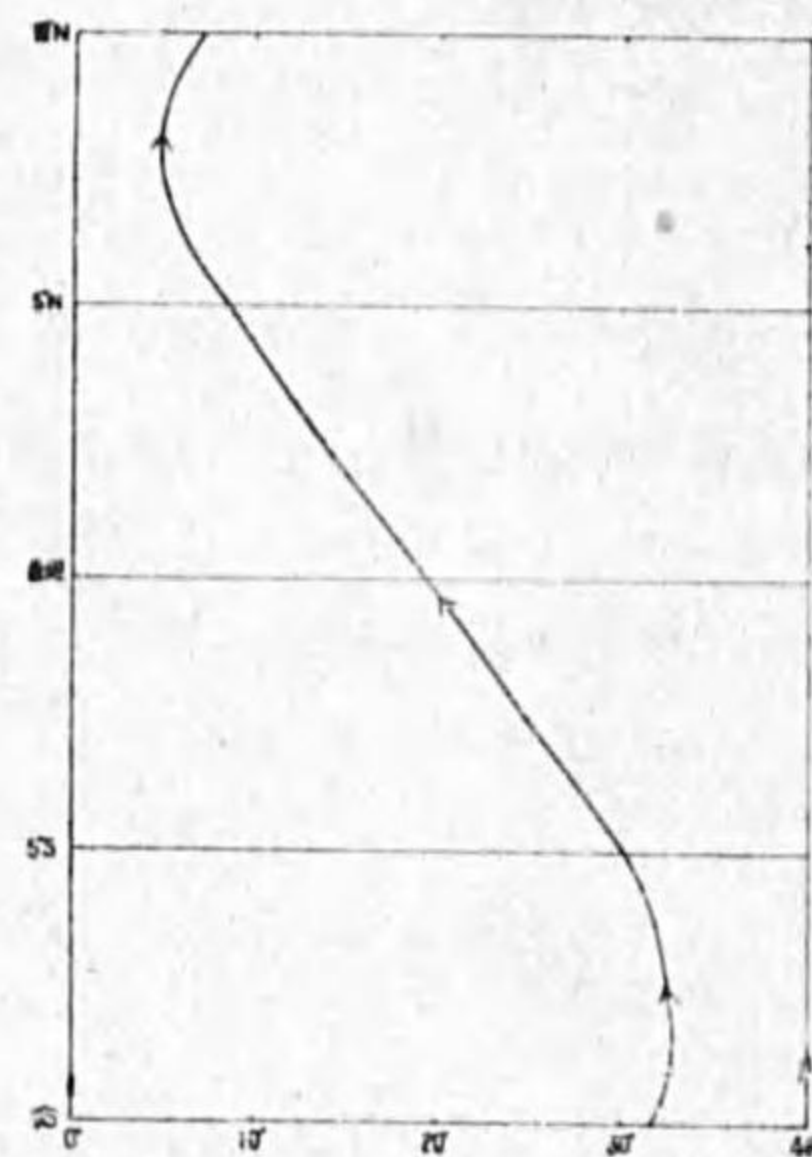
第 3 圖  $\theta_0 = 100^\circ, v_\lambda^0 = -4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}, v_\theta^0 = -4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}.$



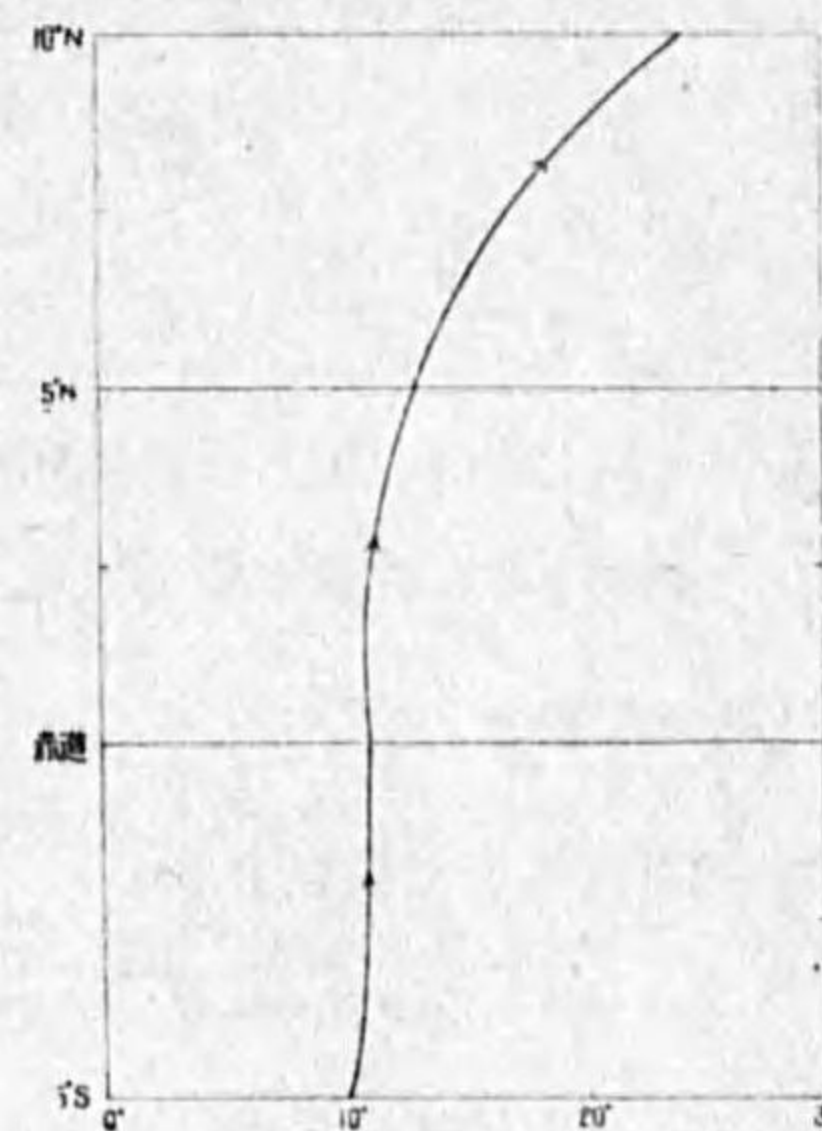
第 4 圖  $\theta_0 = 95^\circ, v_\lambda^0 = -4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}, v_\theta^0 = -4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}.$



第 5 圖  $\theta_0 = 100^\circ, v_\lambda^0 = 4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}, v_\theta^0 = -4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}.$



第 6 圖  $\theta_0 = 95^\circ, v_\lambda^0 = 4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}, v_\theta^0 = -4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}.$



$4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}^{(1)}$  の數値を採用してある。

即ち  $10^\circ\text{S}$  に於いて南東風を表はすもので (圖は若干不正確), 對稱の緯度  $10^\circ\text{N}$  に於いても南東風となつてゐる。

第 4 圖は第 3 圖の場合と同じ條件に於けるものであるが, 唯  $\theta_0 = 95^\circ$  ( $5^\circ\text{S}$ ) としてあるのが違

(1) A. Grimes の採用せる値を借用したものであるが,  $\theta_0 = 100^\circ$  としたのが違つてゐる。(A. Grimes は  $\theta_0 = 95^\circ$  を用ひてゐる)。

つてゐる。爲に南半球で轉向力を受ける度合が少くて北半球に入るから, 移動経度は第 3 圖の夫れに比して著しく小さい。

第 5 圖は以上 2 例と異なつて  $10^\circ\text{S}$  に於いて南西風の場合である。

然も此の場合 (8) 式の條件を満足するから, 南半球で一度東寄りの風に轉じ, 北半球に入つて漸次西寄りに轉じて  $10^\circ\text{N}$  では  $10^\circ\text{S}$  に於けると同じ風向, 風速を持つ。

第 6 圖は第 5 圖の場合と似てゐるが,  $5^\circ\text{S}$  で  $v_\lambda^0 = 4.2 \times 10^2 \text{ cm/sec}$  としてある爲 (8) の條件を満足せずして南半球内では東寄りの成分を持たない。但し  $v_\lambda^0$  の値が小さい爲移動経度は小さい。

**運動を維持する氣壓傾度** 子午線氣壓傾度は (1) 式で與へられる,  $v_\theta, v_\lambda$  の値として (4), (7) 式を採用し, 對應して (1) 式に於いて  $v_\lambda^2$  の項を無視する時は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \theta} = 4a\omega^2 (\sin \theta_0 - \sin \theta) + 2\omega \cos \theta \cdot v_\lambda^0 + \frac{\sin^2 \theta_0 \cdot v_\theta^{02}}{a} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad (13)$$

となる。(13) 式から今迄述べて來た経路の運動は如何なる氣壓傾度に附隨してゐるかを知る事が出来る。

一例として第 3 圖の型の徑路及び第 5 圖の型の徑路に對する氣壓傾度の値を次表に示す。

	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \theta}$						
$\theta$	$95^\circ$	$94^\circ$	$93^\circ$	$90^\circ$	$87^\circ$	$85^\circ$	$84^\circ$
I $\begin{cases} v_\lambda^0 = -2 \times 10^2 \\ v_\theta^0 = -2 \times 10^2 \end{cases}$	+0.03	-1.17	-3.23	-5.15	-3.27	-0.03	+2.27
II $\begin{cases} v_\lambda^0 = +2 \times 10^2 \\ v_\theta^0 = -2 \times 10^2 \end{cases}$	-0.03	-1.21	-3.27	-5.15	-3.23	+0.03	+2.33

即ち I の場合では  $5^\circ\text{N}$  は氣壓傾度の符號の變る所に近く, 茲より氣壓は南に一様に減少して  $5^\circ\text{S}$  より又増加する。

II の場合には北半球では  $5^\circ\text{N}$  を若干南に越えた所で氣壓傾度の符號が變り南半球に入つても尙  $5^\circ\text{S}$  を越えて若干距離減少を繼續するのが注目される。

## 相異なる物質部分より成る固體に対する熱傳導の完全なる圖式解法

高橋喜彦

## §1. 補助温度曲線の取り方

一次元の問題とする。

今  $x=0$  を境界面として  $x<0$  に物質 1,  $x>0$  に物質 2 があり, 時刻  $t$  に於ける兩物質部分の温度を夫々  $u_1(x, t)$  及び  $u_2(x, t)$  とする. 但し兩物質の比熱, 密度, 熱傳導率, 熱擴散率は夫々  $c_1, \rho_1, K_1, \kappa_1$  及び  $c_2, \rho_2, K_2, \kappa_2$  であるものとする ( $\kappa=K/c\rho$ ).

この場合解析熱傳導論<sup>(1)</sup>に於ける境界條件は

$x=0$  に於いて

$$u_1 = u_2, \quad (1)$$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2)$$

である. (1) は兩物質を接觸させた瞬間を除き, その接觸面に於ける兩物質の温度が等しいことを表はし, (2) は接觸面で熱の湧出, 吸失がなければ, 兩物質に対する流熱量が等しいといふことを意味するものである.

解析熱傳導論では上記の境界條件を満足する微分方程式の解を求めるのであるが, 圖式解法では, 例へば時刻  $t$  より次の時刻  $t+\tau$  に於ける物質 1 の温度を求めるには,  $x>0$  に或る補助温度曲線  $u'_1(x, t)$  を考へ, この部分にも物質 1 が擴つてゐるものとして移動平均する. 又同じく物質 2 の温度を求めるには,  $x<0$  に或る補助温度曲線  $u'_2(x, t)$  を考へ, この部分にも物質 2 が擴つてゐるものとして移動平均する. 但し兩物質に対する移動平均の幅を夫々  $2s_1$  及び  $2s_2$  とすれば,

(1) 圖式解法に對して従來の熱傳導論を解析熱傳導論と呼ぶことにする.

$$s_1 = a\sqrt{\kappa_1\tau}, \quad s_2 = a\sqrt{\kappa_2\tau} \quad (3)$$

に取らなくてはならない.

そこで上記 (1) 及び (2) の條件を満足する様な補助温度曲線  $u'_1$  及び  $u'_2$  を求めてみよう.

先づ圖式解法により時刻  $t+\tau$  に於ける兩物質の境界面  $x=0$  の温度を求めれば,

$$u_1(0, t+\tau) = \frac{1}{2s_1} \left\{ \int_{-s_1}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{s_1} u'_1(\xi, t) d\xi \right\},$$

$$u_2(0, t+\tau) = \frac{1}{2s_2} \left\{ \int_{-s_2}^0 u'_2(\xi, t) d\xi + \int_0^{s_2} u_2(\xi, t) d\xi \right\}$$

となる. 故に條件 (1) により

$$\frac{1}{2s_1} \left\{ \int_{-s_1}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{s_1} u'_1(\xi, t) d\xi \right\} = \frac{1}{2s_2} \left\{ \int_{-s_2}^0 u'_2(\xi, t) d\xi + \int_0^{s_2} u_2(\xi, t) d\xi \right\}$$

といふ關係がなくてはならない. 或ひはこれを書換えて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s_1} \int_0^{s_1} \{u_1(-\xi, t) + u'_1(\xi, t)\} d\xi &= \frac{1}{2s_1} \int_0^{s_1} \left\{ u'_2\left(-\frac{s_2}{s_1}\eta, t\right) + u_2\left(\frac{s_2}{s_1}\eta, t\right) \right\} d\eta \\ &= \frac{1}{2s_1} \int_0^{s_1} \left\{ u'_2\left(-\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\eta, t\right) + u_2\left(\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\eta, t\right) \right\} d\eta \end{aligned}$$

となる. これが  $\tau$ , 従つて  $s_1$  の如何に拘らず常に成り立つためには,

$$u_1(-x, t) + u'_1(x, t) = u'_2\left(-\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}x, t\right) + u_2\left(\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}x, t\right), \quad (4)$$

或ひは

$$u_1\left(-\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}x, t\right) + u'_1\left(\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}x, t\right) = u'_2(-x, t) + u_2(x, t) \quad (4')$$

でなければならない.

次に境界面  $x=0$  に於ける兩物質に對する時刻  $t$  より  $t+\tau$  までの流熱量は, 單位面積に付き夫々

$$\frac{c_1\rho_1}{2s_1} \int_0^{s_1} (s_1-\xi)\{u_1(-\xi, t) - u'_1(\xi, t)\} d\xi,$$

$$\frac{c_2\rho_2}{2s_2} \int_0^{s_2} (s_2-\xi)\{u'_2(-\xi, t) - u_2(\xi, t)\} d\xi$$

であるから<sup>(1)</sup>, 條件 (2) によりこれを等しいと置けば,

$$\begin{aligned} \frac{c_1\rho_1}{2s_1} \int_0^{s_1} (s_1-\xi)\{u_1(-\xi, t) - u'_1(\xi, t)\} d\xi &= \frac{c_2\rho_2}{2s_2} \int_0^{s_2} (s_2-\xi)\{u'_2(-\xi, t) - u_2(\xi, t)\} d\xi \\ &= \frac{c_2\rho_2 s_2}{2s_1^2} \int_0^{s_1} (s_1-\eta) \left\{ u'_2\left(-\frac{s_2}{s_1}\eta, t\right) - u_2\left(\frac{s_2}{s_1}\eta, t\right) \right\} d\eta \end{aligned}$$

(1) 文献 2, §2 渦動擴散量の式 (6) の  $\chi$  を温度とし,  $\rho$  の代りに  $c\rho$  を用ひれば流熱量の式となる.

$$= \frac{c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}}{2s_1 \sqrt{\kappa_1}} \int_0^{s_1} (s_1 - \eta) \left\{ u'_2 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \eta, t \right) - u'_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \eta, t \right) \right\} d\eta$$

となり、これが  $\tau$ 、従つて  $s_1$  の如何に拘らず常に成り立つためには、

$$c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} \{u_1(-x, t) - u'_1(x, t)\} = c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2} \left\{ u'_2 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x, t \right) - u'_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x, t \right) \right\}, \quad (5)$$

或ひは

$$c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} \left\{ u_1 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x, t \right) - u'_1 \left( \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x, t \right) \right\} = c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2} \{u'_2(-x, t) - u_2(x, t)\} \quad (5')$$

といふ関係があればよい。

以上 (4), (5) 及び (4)', (5)' より補助温度曲線  $u'_1(x, t)$  及び  $u'_2(x, t)$  が求められる、即ち

$$\left. \begin{aligned} u'_1(x, t) &= \frac{c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} - c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}}{c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} + c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}} u_1(-x, t) + \frac{2c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}}{c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} + c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}} u_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x, t \right), \\ u'_2(-x, t) &= \frac{c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2} - c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1}}{c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} + c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}} u_2(x, t) + \frac{2c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1}}{c_1 \rho_1 \sqrt{\kappa_1} + c_2 \rho_2 \sqrt{\kappa_2}} u_1 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x, t \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。或ひは  $\kappa = K/c\rho$  であるから、

$$\left. \begin{aligned} u'_1(x, t) &= \frac{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} - \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} u_1(-x, t) + \frac{2\sqrt{c_2 \rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} u_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x, t \right), \\ u'_2(-x, t) &= \frac{\sqrt{c_2 \rho_2 K_2} - \sqrt{c_1 \rho_1 K_1}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} u_2(x, t) + \frac{2\sqrt{c_1 \rho_1 K_1}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}} u_1 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x, t \right) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

となる。

固体が三つ或ひはそれ以上の物質部分より成る場合には、各境界面毎に同様な補助温度曲線による取扱ひをすればよい。但しこの場合移動平均の幅は同時に二つ或ひはそれ以上の境界面を含まない様な長さにとらなければならない。

前解法では一般に条件 (2) が満足されなかつたが<sup>(1)</sup>、これは次の様な原因によるものである。即ち時刻  $t$  の温度より時刻  $t+\tau$  の境界面の温度を求める式をよく検討してみると、この式は境界面に於いて任意の瞬間に對する熱の湧出、吸失の有無は考へないで、たゞ  $\tau$  といふ時間に對してのみこれが差引零になるといふ條件から作られたものである。故に  $\tau$  時間毎の各時刻に於ける温度曲線が一般に条件 (2) を満足しない結果となつた。

今度の解法はこの缺陷を除き、如何なる瞬間に對しても境界面に於いて熱の湧出、吸失はないといふ條件から補助温度曲線を求める式を作つたのである。

尙 (5), (5)' 式は温度勾配を用ひて、直接条件 (2) から出すことも出来る。即ち  $\Delta x$  を正數とすれば、

(1) 文献 3, §5.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t+\tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(0, t+\tau) - u_1(-\Delta x, t+\tau)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_{-s_1}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{s_1} u'_1(\xi, t) d\xi - \int_{-s_1-\Delta x}^0 u_1(\xi, t) d\xi - \int_0^{s_1-\Delta x} u'_1(\xi, t) d\xi \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_{s_1-\Delta x}^{s_1} u'_1(\xi, t) d\xi - \int_{-s_1-\Delta x}^{-s_1} u_1(\xi, t) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2s_1} \{u'_1(s_1, t) - u_1(-s_1, t)\}, \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(x, t+\tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_2(\Delta x, t+\tau) - u_2(0, t+\tau)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{2s_2} \{u_2(s_2, t) - u'_2(-s_2, t)\} \\ &= \frac{\sqrt{\kappa_1}}{2s_1 \sqrt{\kappa_2}} \left\{ u_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} s_1, t \right) - u'_2 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} s_1, t \right) \right\} \end{aligned}$$

となり、これを条件 (2) に代入すれば、

$$\frac{K_1}{\sqrt{\kappa_1}} \{u'_1(s_1, t) - u_1(-s_1, t)\} = \frac{K_2}{\sqrt{\kappa_2}} \left\{ u_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} s_1, t \right) - u'_2 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} s_1, t \right) \right\}$$

となる、これが  $\tau$ 、従つて  $s_1$  の如何に拘らず常に成り立つとすれば、

$$\frac{K_1}{\sqrt{\kappa_1}} \{u'_1(x, t) - u_1(-x, t)\} = \frac{K_2}{\sqrt{\kappa_2}} \left\{ u_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x, t \right) - u'_2 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x, t \right) \right\}$$

である。 $K/\sqrt{\kappa} = c\rho\sqrt{\kappa}$  であるから、この式は (5) 式と同じものである。

## §2. 特別な場合に於ける解法の吟味

本解法の正しいことを特別な場合に就いて吟味してみる。

### (1) 定常温度分布の場合

この場合の温度は一般に

$$u_1(x) = u_0 + \frac{b}{K_1} x,$$

$$u_2(x) = u_0 + \frac{b}{K_2} x$$

で與へられる。但し  $u_0$  は境界面の温度、 $b$  は任意の常數とする。

これを (6)' 式に代入すれば、

$$u'_1(x) = u_0 + \frac{b}{K_1} x,$$

$$u'_2(x) = u_0 + \frac{b}{K_2} x$$

となり、 $u_1$  及び  $u_2$  を夫々そのまま直線的に延長したものが補助温度曲線（この場合は直線）であるから、両物質の温度分布はいつまでも変わらない。即ち定常温度分布である。

(2)  $K_1=0$  の場合

この場合物質 2 の熱伝導は表面  $x=0$  が熱を通さない場合と同じであるから、 $u_2$  の補助温度曲線は

$$u'_2(-x) = u_2(x)$$

に取ればよい。この式は (6)' 式に  $K_1=0$  と置いても得られる。

(3)  $c_1\rho_1=\infty$  の場合

この場合  $s_1=0$  となるから、物質 1 の温度はいつまでも変わらない。例へば  $x=0$  の温度を  $u_0$  とすれば、これはいつまでも一定である。且つ  $c_1\rho_1=\infty$  であるから、物質 1 より物質 2 に對して熱は自由に供給される。故に物質 2 の熱伝導は表面  $x=0$  を一定温度  $u_0$  に保つ場合と同じであるから、 $u_2$  の補助温度曲線は

$$u'_2(-x, t) = 2u_0 - u_2(x, t)$$

に取ればよい。この式は (6)' 式に  $c_1\rho_1=\infty, u_1(0)=u_0$  と置いても得られる。即ち

$$\begin{aligned} u'_2(-x, t) &= 2u_1\left(-\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}x\right)_{\kappa_1=0} - u_2(x, t) \\ &= 2u_1(0) - u_2(x, t) \\ &= 2u_0 - u_2(x, t). \end{aligned}$$

(4)  $c_1\rho_1=c_2\rho_2, K_1=K_2$  の場合

この場合は均一固体と同じであるから、物質 1 に對しては  $u_2$ 、物質 2 に對しては  $u_1$  を夫々そのまま補助温度曲線と考へればよい。即ち

$$\begin{aligned} u'_1(x, t) &= u_2(x, t) \\ u'_2(-x, t) &= u_1(-x, t) \end{aligned}$$

となる。この式は (6)' 式に  $c_1\rho_1=c_2\rho_2, K_1=K_2$  と置いても得られる。

以上いづれの場合も本解法の正しいことが解る。

§ 3. 相異なる物質の熱拡散率を見掛上すべて等しくする方法

實際の計算に於いて各物質部分に對する移動平均の幅が等しくないといふことは非常に不便である。そこで各物質の熱拡散率を見掛上相等しくして、すべて同じ移動平均の幅で計算が出来る様な方法を考へなければならぬ。

今或る光學装置により物體を  $x$  方向にだけ  $\sigma$  倍伸縮させて見たものとする ( $\sigma \geq 1$ )。

第 1 圖は實物及びその伸縮像に於ける相對應する温度分布を示したもので、像の温度勾配は實

物の  $1/\sigma$  倍になつてゐる。而して實物及び像の相對應する面を流れる熱量には變りがないから、像の熱傳導率は實物の  $\sigma$  倍でなければならぬ。

次に同じ圖に於いて  $L$  及び  $L'$  は實物及び像の相對應する任意の層であるが、 $L'$  の厚さは  $L$  の  $\sigma$  倍になつてゐる。而して  $L$  及び  $L'$  に含まれる熱量並びにその平均温度は變らないから、像の比熱×密度は實物の  $1/\sigma$  倍でなければならぬ。

故に實物及び  $\sigma$  倍だけ伸縮させた像の比熱、密度、熱傳導率、熱擴散率を夫々  $c, \rho, K, \kappa$  及び  $c', \rho', K', \kappa'$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} c'\rho' &= \frac{c\rho}{\sigma}, \\ K' &= \sigma K, \\ \kappa' &= \sigma^2 \kappa \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

といふ關係になるから、 $\sigma$  を適當に取ることにより熱擴散率を見掛上任意な値に變へることが出来る。

幾つかの相異なる物質部分より成る固体の場合には、各部分毎に夫々適當な  $\sigma$  を取つて伸縮させれば、各物質の熱擴散率を見掛上すべて等しくなり、従つて各部分とも同じ移動平均の幅で計算することが出来る。例へば次の表は相異なる物質の熱擴散率を見掛上すべて同じ  $\kappa_0$  といふ値に直すための  $\sigma$  の取り方及び伸縮された各物質の見掛上の  $c'\rho', K'$  を示したものである。この場合

$$s = a\sqrt{\kappa_0\tau}$$

に取り、各部分とも同じ幅で移動平均すればよい。尙表から判る様に、各物質の  $c'\rho', K'$  は一般に等しくならない。

各物質の熱擴散率がすべて等しい場合には、補助温度曲線の式 (6) 及び (6)' は

	物質 1	物質 2	物質 3	.....
$c\rho$	$c_1\rho_1$	$c_2\rho_2$	$c_3\rho_3$	.....
$K$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	.....
$\kappa$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	.....
$\sigma$	$\sqrt{\kappa_0/\kappa_1}$	$\sqrt{\kappa_0/\kappa_2}$	$\sqrt{\kappa_0/\kappa_3}$	
$\kappa'$	$\kappa_0$	$\kappa_0$	$\kappa_0$	.....
$c'\rho'$	$c_1\rho_1\sqrt{\kappa_1/\kappa_0}$	$c_2\rho_2\sqrt{\kappa_2/\kappa_0}$	$c_3\rho_3\sqrt{\kappa_3/\kappa_0}$	.....
$K'$	$K_1\sqrt{\kappa_0/\kappa_1}$	$K_2\sqrt{\kappa_0/\kappa_2}$	$K_3\sqrt{\kappa_0/\kappa_3}$	.....



$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{c_1\rho_1 - c_2\rho_2}{c_1\rho_1 + c_2\rho_2} u_1(-x, t) + \frac{2c_2\rho_2}{c_1\rho_1 + c_2\rho_2} u_2(x, t) \\ u_2(-x, t) &= \frac{c_2\rho_2 - c_1\rho_1}{c_1\rho_1 + c_2\rho_2} u_2(x, t) + \frac{2c_1\rho_1}{c_1\rho_1 + c_2\rho_2} u_1(-x, t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

或ひは

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} u_1(-x, t) + \frac{2K_2}{K_1 + K_2} u_2(x, t) \\ u_2(-x, t) &= \frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} u_2(x, t) + \frac{2K_1}{K_1 + K_2} u_1(-x, t) \end{aligned} \right\} \quad (8)'$$

となる。

§4. 補助温度曲線を用ひない計算法

圖式計算を行ふ場合に一々補助温度曲線を書くといふことは非常に煩雜であるが、併し實際にはこれを書かないで計算することが出来る。

今物質 1 ( $x < 0$ ) 及び物質 2 ( $x > 0$ ) の熱擴散率は前節の方法により既に等しくなつてゐるものとすれば、境界面  $x=0$  の附近  $-s < x < 0$  では

$$\begin{aligned} u_1(x, t + \tau) &= \frac{1}{2s} \left\{ \int_{x-s}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{x+s} u_1'(\xi, t) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2s} \left\{ \int_{x-s}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \int_0^{x+s} u_1(-\xi, t) d\xi + \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \int_0^{x+s} u_2(\xi, t) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2s} \left\{ \int_{x-s}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{x+s} u_2(\xi, t) d\xi + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \int_0^{x+s} [u_1(-\xi, t) - u_2(\xi, t)] d\xi \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

同じく  $0 < x < s$  では

$$u_2(x, t + \tau) = \frac{1}{2s} \left\{ \int_{x-s}^0 u_1(\xi, t) d\xi + \int_0^{x+s} u_2(\xi, t) d\xi + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \int_0^{x+s} [u_1(-\xi, t) - u_2(\xi, t)] d\xi \right\} \quad (9)$$

となる。

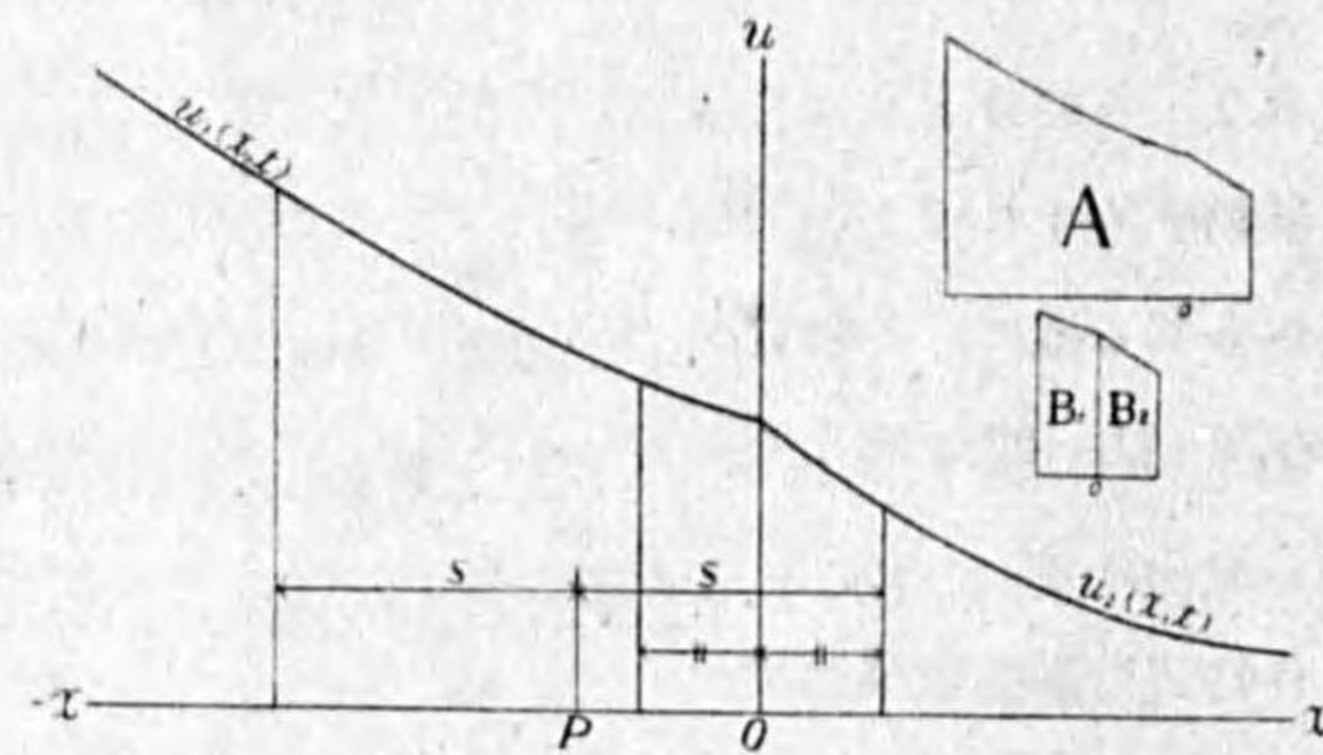
第 2 圖

この計算はプラニメーターにより圖の上で簡單に行ふことが出来る。例へば第 2 圖に於いて P 點の温度を求めるとは、プラニメーターにより面積  $A, B_1$  及び  $B_2$  を計算すれば、

$$\frac{1}{2s} \left\{ A + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} (B_1 - B_2) \right\} \quad (10)$$

が求むる P 點の温度となる。但し  $B_1$  と  $B_2$

とでプラニメーターの方向を逆にして續けて廻す、即ち  $B_1$  と  $B_2$  とを  $\infty$  形に廻せば、 $B_1 - B_2$



の値が直ちに讀取られるから、計算が一層簡單になる。

尙境界面より  $s$  以上離れた點の温度は、境界面に關係なく均一固體と全く同じ様に求めればよい。

§5. 計算例

前論文<sup>(1)</sup> §4 と同じ問題に就いて計算例を示す。

$x=0$  を境界面として  $x < 0$  に物質 1,  $x > 0$  に物質 2 が夫々半無限に擴り、最初  $t=0$  の温度曲線は兩部分を通じ勾配  $-0.5$  なる一本の直線とし、二物質の性質は

	$c\rho$	$K$	$\kappa$
物質 1	1.5	6	4
物質 2	1	1	1

であるとする。

- (1) 先づ兩物質の  $\kappa$  を等しくするため、物質 1 の部分を  $1/2$  だけ縮小して見掛上物質 1' に直せば、

	$c\rho$	$K$	$\kappa$
物質 1'	3	3	1
物質 2	1	1	1

となり、最初の温度曲線は第 3 圖に 0 と記したものとなる。

- (2)  $s$  の取り方は次表の通りとする。

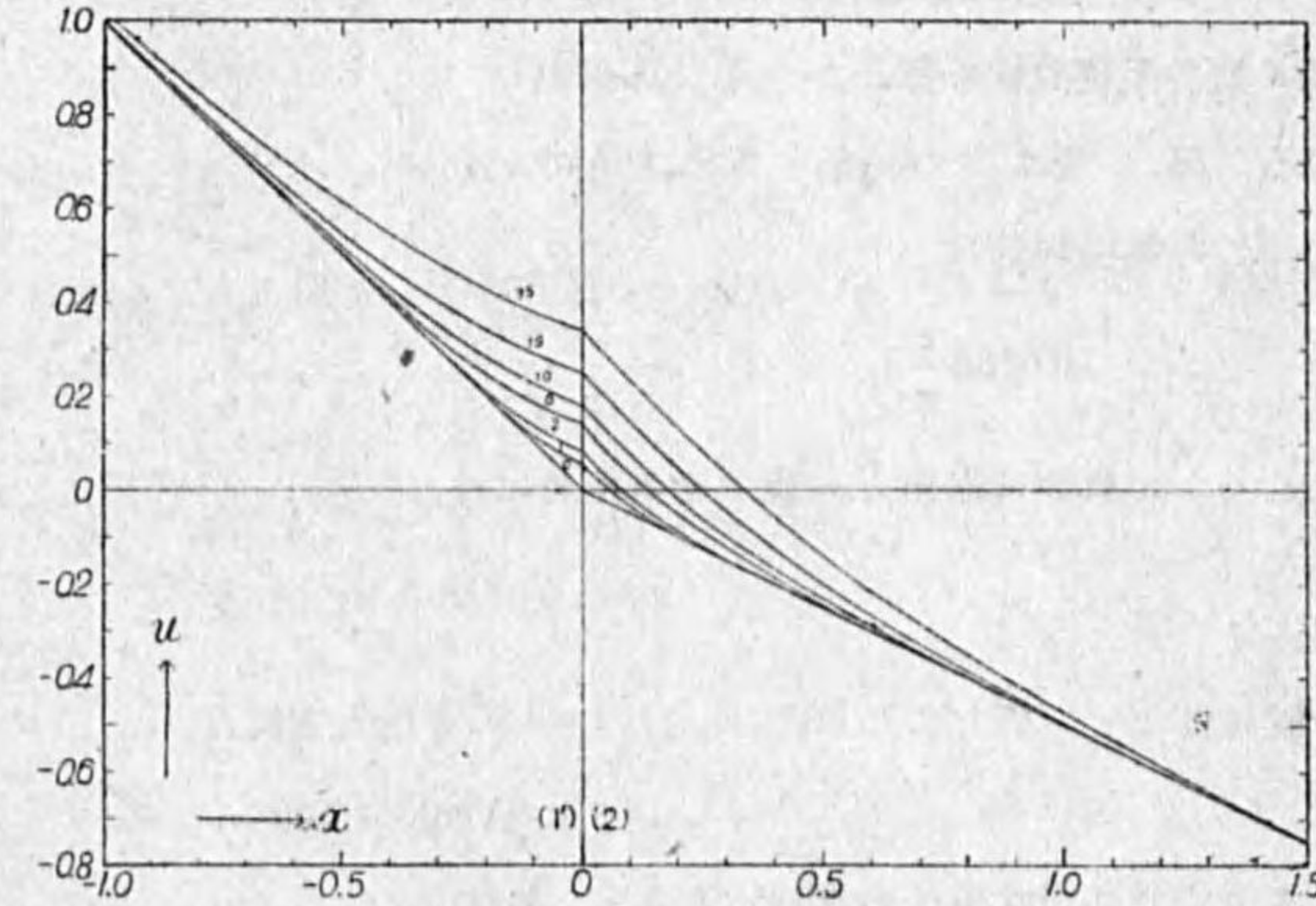
計算回数 ( $s=0.2$ に換算)	0	1	2	6	10	19	25
$s$		0.2		0.4		0.6	0.8

(3) 第 3 圖は計算の結果による各時刻 (計算回数を [ ] 以つて表す) の温度曲線を示したものである。但し  $x < 0$  の曲線は物質 1' に於けるものであるから、これを  $x$  方向に 2 倍だけ引伸ばせば、物質 1 に於ける實際の温度曲線となる。

- (4)  $t=0$  を除けば、いづれも境界條件

(1) 文献 3.

第 3 圖



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{aligned} \right|_{x=0} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{3}$$

を満足してゐることが判る。

(5) 境界面より充分離れた部分の温度勾配は最初のまゝであるから、時刻  $t$  までの境界面附近に於ける蓄積熱量は、 $x$  方向に垂直な単位断面を有する部分に付き

$$0.5(K_1 - K_2)t = 2.5t$$

となる。これは厳密な理論値である。

この蓄積熱量は圖式解法の結果、即ち第3圖の温度曲線の膨みからも計算出来る。第4圖はこの結果を示したもので、この蓄積熱量は

$$0.0165 \frac{t}{\tau}$$

となる。これを理論値と一致させるためには、

$$2.5 = 0.0165 \frac{1}{\tau} = 0.0165 \frac{a^2 \kappa_2}{s^2}$$

と置けばよい。而してこれに  $\kappa_2 = 1, s = 0.2$  を代入すれば、

$$a = \sqrt{6.05} = 2.46$$

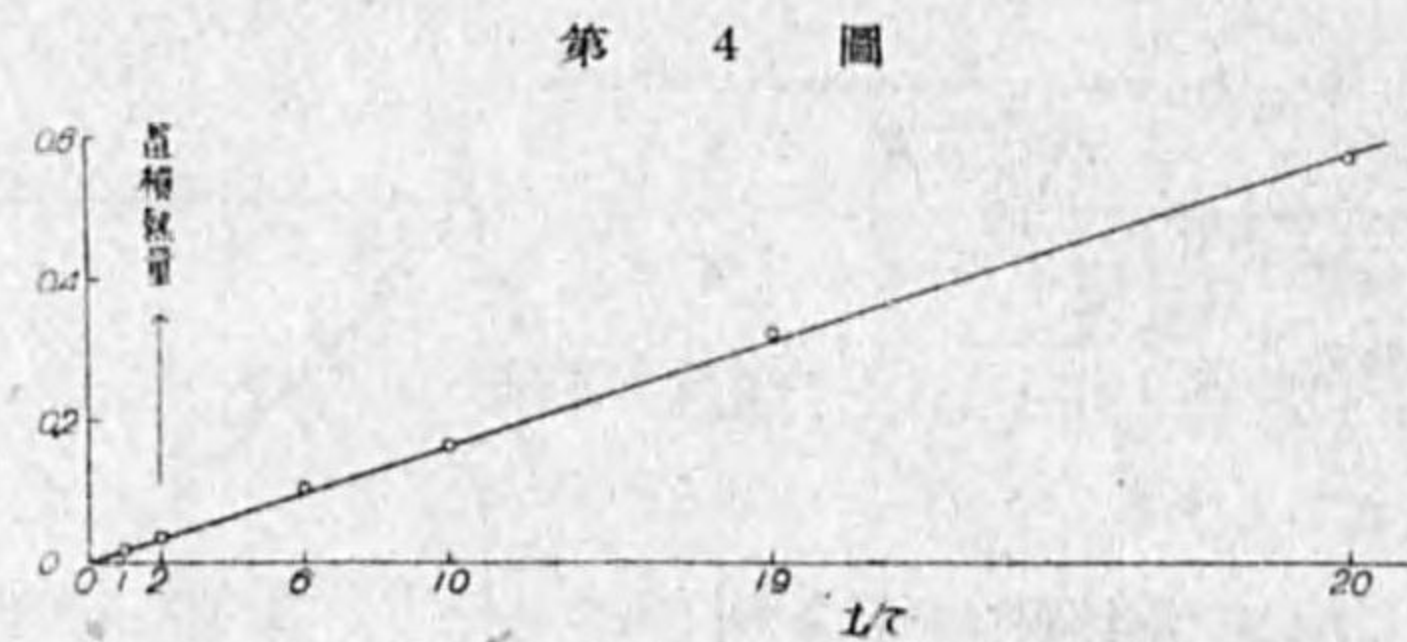
となり、日高孝次博士の数値<sup>(1)</sup>とよく一致する。

§6. 固体が二つの相異なる半無限物質部分より成り、最初の温度が任意に與へられてゐる場合の理論解

$x=0$  を境界面として  $x < 0$  に物質1、 $x > 0$  に物質2がいつでも半無限に擴り、兩物質部分の最初の温度は夫々  $f_1(x)$  及び  $f_2(x)$  であるとする。即ちこれを數學的に書けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (x < 0), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (x > 0), \\ u_1 &= u_2, \\ K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(1) 文献1, 附記.



第 4 圖

$t=0$  に於いて

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= f_1(x) & (x < 0), \\ u_2 &= f_2(x) & (x > 0) \end{aligned} \right\}$$

となる。

この問題を圖式解法に倣つて解くとすれば、(6)'式により物質1に對する初期條件として

$x > 0$  に於いて

$$u_1 = (k_1 - k_2)f_1(-x) + 2k_2 f_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x \right),$$

同じく物質2に對しては

$x < 0$  に於いて

$$u_2 = (k_2 - k_1)f_2(-x) + 2k_1 f_1 \left( \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x \right)$$

なる補助温度分布を新たに付け加へることにより、兩物質部分の温度はいづれも均一なる無限固体として求めることが出来る。但し

$$k_1 = \frac{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{c_2 \rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1 \rho_1 K_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 K_2}}$$

とする。

故にこの解は

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa_1 t}} \int_0^\infty \left[ f_1(-\xi) e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa_1 t}} + \left\{ (k_1 - k_2)f_1(-\xi) + 2k_2 f_2 \left( \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \xi \right) \right\} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa_1 t}} \right] d\xi, \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa_2 t}} \int_0^\infty \left[ \left\{ (k_2 - k_1)f_2(\xi) + 2k_1 f_1 \left( -\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \xi \right) \right\} e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa_2 t}} + f_2(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa_2 t}} \right] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。これが(11)の解であることは容易に確められる。

特に

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \theta, \\ f_2(x) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

であれば、

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= \theta \left( k_1 - \frac{2k_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}} e^{-\eta^2} d\eta \right), \\ u_2(x, t) &= \frac{2k_1 \theta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}} e^{-\eta^2} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる<sup>(1)</sup>。

(1) 川下研介：熱傳導論, 112 頁のものと同じになる。

§ 7. 固体が二つの相異なる半無限物質部分より成る場合の圖式解法の別解法

$x=0$  を境界面として  $x<0$  に物質 1,  $x>0$  に物質 2 がいづれも半無限に擴り, 兩物質部分の最初の温度を夫々  $f_1(x)$  及び  $f_2(x)$  とする.

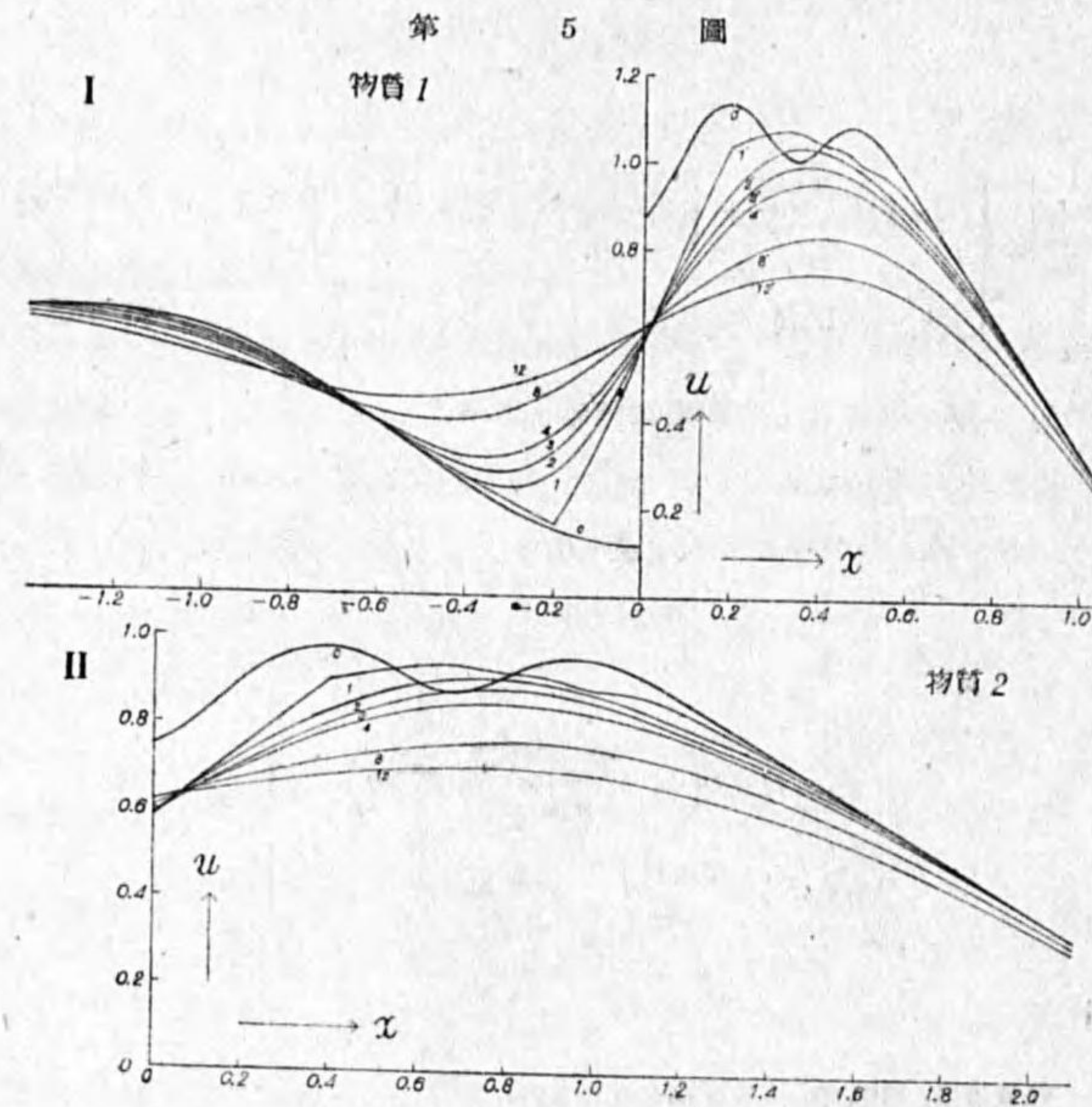
前節の結果によれば, 物質 1 の温度を求める場合, 最初の温度曲線として  $x<0$  の  $f_1(x)$  の外に,  $x>0$  に

$$f'_1(x) = \frac{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} - \sqrt{c_2\rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} f_1(-x) + \frac{2\sqrt{c_2\rho_2 K_2}}{\sqrt{c_1\rho_1 K_1} + \sqrt{c_2\rho_2 K_2}} f_2\left(\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} x\right) \quad (14)$$

を書き加へて置けば, 移動平均をする度に一々補助温度曲線を書かなくても, 最初の  $f_1(x)$  及び  $f'_1(x)$  曲線をそのまま何回でも移動平均して行けばよいことが判る. 但しこの場合は  $x<0$  だけでなく  $x>0$  の部分をも計算しなければならない.

今何回か移動平均して或る時刻  $t$  の温度曲線が得られたものとする. この曲線の  $x<0$  の部分を  $u_1(x, t)$ ,  $x>0$  の部分を  $u'_1(x, t)$  で表せば,  $u_1(x, t)$  は実際に物質 1 の温度であり,  $u'_1(x, t)$  はこの時刻より物質 1 の温度を改めて計算する場合の補助温度曲線に外ならないから, (6)' 式の  $u'_1$  そのものである.

故に物質 2 の温度は別に計算することなく, 今求めた  $u_1$  及び  $u'_1$  から (6)' 式により直接計算



することが出来る. 即ち

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \sqrt{\frac{c_1\rho_1 K_1}{c_2\rho_2 K_2}}\right) u_1\left(-\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x, t\right) + \left(1 + \sqrt{\frac{c_1\rho_1 K_1}{c_2\rho_2 K_2}}\right) u'_1\left(\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} x, t\right) \right\} \quad (15)$$

となる.

次にこの解法による計算例を示す.

今物質 1 ( $x<0$ ) 及び物質 2 ( $x>0$ ) の性質を右表の通りとし, 最初の温度曲線は第 5 圖

	$cp$	$K$	$\kappa$
物質 1	4	1	1/4
物質 2	3	3	1

I ( $x<0$ ) 及び II ( $x>0$ ) に夫々 0 と記した全く任意な形に取つてみた. この圖は計算の都合上二つの物質部分を切り離して書いたものである.

先づ (14) 式は

$$f'_1(x) = -\frac{1}{5} f_1(-x) + \frac{6}{5} f_2(2x)$$

となり, これにより物質 1 に対して補助温度曲線を書き加へれば, I 圖  $x>0$  の曲線 0' となる. これからは  $x<0$  の曲線 0 と  $x>0$  の曲線 0' とを最初の温度曲線とし, 物質 1 が  $x>0$  にも擴つてゐるものとして計算すればよい.

こゝで

$$s_1 = 0.2,$$

即ち

$$\tau = \frac{s_1^2}{a^2 \kappa_1} = 0.0267$$

に取つて計算して見ると, 同圖の各温度曲線が得られる. この結果  $x<0$  の曲線 1, 2, 3, ... が夫々  $t = \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$  に於ける物質 1 の実際の温度となり,  $x>0$  の曲線 1', 2', 3', ... は補助温度曲線  $u'_1$  を表すものである.

この場合 (15) 式は

$$u_2(x) = \frac{1}{6} u_1\left(-\frac{x}{2}, t\right) + \frac{5}{6} u'_1\left(\frac{x}{2}, t\right)$$

となり, 今求めた I 圖の曲線 1, 2, 3, ... 及び 1', 2', 3', ... から物質 2 の温度曲線が求められる. 即ち II 圖の曲線 1, 2, 3, ... がこれである.

§ 8. 固体が二つの相異なる半無限物質部分より成り, 最初の温度曲線が共に直線であり, 且つ境界面では最初から兩物質の温度が等しい場合

この場合境界面の最初の温度を 0 に取れば,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \beta_1 x & (x < 0), \\ f_2(x) &= \beta_2 x & (x > 0) \end{aligned}$$

となる。但し  $\beta_1$  及び  $\beta_2$  は直線の傾斜を表はす常數である。

この解は §6 の (12) 式により、

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa_1 t}} \int_0^\infty \left[ -\beta_1 \xi e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa_1 t}} + \left\{ -(k_1 - k_2)\beta_1 + 2k_2 \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \beta_2 \right\} \xi e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa_1 t}} \right] d\xi \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa_1 t}} \int_0^\infty \left[ -\beta_1 (\xi+x) e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa_1 t}} + \left\{ (k_2 - k_1)\beta_1 + 2k_2 \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \beta_2 \right\} (\xi-x) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa_1 t}} \right] d\xi \\
 &\quad + \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa_1 t}} \int_0^\infty \left[ \beta_1 e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa_1 t}} + \left\{ (k_2 - k_1)\beta_1 + 2k_2 \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \beta_2 \right\} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa_1 t}} \right] d\xi \\
 &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} (k_2 \sqrt{\kappa_2} \beta_2 - k_1 \sqrt{\kappa_1} \beta_1) e^{-\frac{x^2}{4\kappa_1 t}} \\
 &\quad + \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa_1 t}} \int_0^\infty \left[ \beta_1 e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\kappa_1 t}} + \left\{ (k_2 - k_1)\beta_1 + 2k_2 \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \beta_2 \right\} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\kappa_1 t}} \right] d\xi
 \end{aligned}$$

となる。こゝで  $x$  に  $-\sqrt{\kappa_1} x$  を入れ、積分式に  $\xi = \sqrt{\kappa_1} \eta$  なる置換をすれば、

$$\begin{aligned}
 u_1(-\sqrt{\kappa_1} x, t) &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} (k_2 \sqrt{\kappa_2} \beta_2 - k_1 \sqrt{\kappa_1} \beta_1) e^{-\frac{x^2}{4\kappa_1 t}} \\
 &\quad - \frac{x}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ \sqrt{\kappa_1} \beta_1 e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4t}} + \left\{ (k_2 - k_1)\sqrt{\kappa_1} \beta_1 + 2k_2 \sqrt{\kappa_2} \beta_2 \right\} e^{-\frac{(\eta+x)^2}{4t}} \right] d\eta
 \end{aligned}$$

となる。

同様に

$$\begin{aligned}
 u_2(\sqrt{\kappa_2} x, t) &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} (k_2 \sqrt{\kappa_2} \beta_2 - k_1 \sqrt{\kappa_1} \beta_1) e^{-\frac{x^2}{4\kappa_2 t}} \\
 &\quad + \frac{x}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ -\left\{ (k_2 - k_1)\sqrt{\kappa_2} \beta_2 - 2k_1 \sqrt{\kappa_1} \beta_1 \right\} e^{-\frac{(\eta+x)^2}{4t}} + \sqrt{\kappa_2} \beta_2 e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4t}} \right] d\eta
 \end{aligned}$$

となる。

故に

$$\begin{aligned}
 u_1(-\sqrt{\kappa_1} x, t) - u_2(\sqrt{\kappa_2} x, t) &= -\frac{x}{2\sqrt{\pi t}} (\sqrt{\kappa_1} \beta_1 + \sqrt{\kappa_2} \beta_2) \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4t}} + e^{-\frac{(\eta+x)^2}{4t}} \right\} d\eta \\
 &= -x(\sqrt{\kappa_1} \beta_1 + \sqrt{\kappa_2} \beta_2) = f_1(-\sqrt{\kappa_1} x) - f_2(\sqrt{\kappa_2} x),
 \end{aligned}$$

即ち

$$u_1(-\sqrt{\kappa_1} x, t) - f_1(-\sqrt{\kappa_1} x) = u_2(\sqrt{\kappa_2} x, t) - f_2(\sqrt{\kappa_2} x) \tag{16}$$

といふ関係が成り立つ。

故に境界面よりの距離が  $\sqrt{\kappa_1} : \sqrt{\kappa_2}$  といふ比をなす物質 1 及び 2 の相對應する二點の温度は常に同じ變化をする。

若し  $\kappa_1 = \kappa_2$  であれば、(16) 式は

$$u_1(-x, t) - f_1(-x) = u_2(x, t) - f_2(x) \tag{16'}$$

となり、境界面より左右對稱の二點の温度は常に同じ變化をする。

§5 の計算例はこの一つの例であるから、實際の計算では  $x < 0$  或ひは  $x > 0$  どちらか一つだけの温度曲線を求めさへすれば、他の一つは直ぐに書くことが出来る。

- 文献 1. 高橋喜彦：渦動擴散及び熱傳導の圖式解法。氣象集誌，第 2 輯第 19 卷，321~327，昭和 16 年。  
 2. 同 著：渦動擴散量の數値計算法。同誌，第 20 卷，18~28，昭和 17 年。  
 3. 同 著：相異なる物質部分より成る固體の熱傳導圖式解法。同上，188~206。

昭和 17 年 7 月 23 日

名古屋地方氣象臺に於いて

### 二つの固體がすれちがふ場合の二次元熱傳導圖式解法の一例<sup>(1)</sup>

高橋喜彦

二つの固體がすれちがふ場合の熱傳導の一例として、同じ物質、同じ寸法の無限に長い二つの正角柱が柱軸と直角な方向にすれちがふ時の熱傳導を調べてみる。但し最初角柱の温度は夫々 0 及び 1 とし、その表面では接觸した部分以外には熱の出入がないものとする。

以下計算の順序を逐つて説明して行く。

第 1 圖

(1) この問題では柱軸の方向には熱の流れがないから、これに垂直な断面内の二次元熱傳導を取扱ふことになる。

(2) 最初の温度が 0 の角柱を A、同じく 1 の角柱を B と名付け、第 1 圖に示す如く夫々の角柱に固定した座標軸を取る。

(3) 任意の時刻  $t$  に於ける A 及び B の温度を夫々  $u_A(x, y, t)$  及び  $u_B(x, y, t)$  とすれば、

$$u_A(x, y, t) = 1 - u_B(x, y, t) \tag{1}$$

であることは明かである。故にこのどちらかを一つ調べればよいので、こゝでは A の温度を調べることにする。

(4) 移動平均の幅を  $2s$ 、一回の移動平均に相當する時間を  $\tau$  とする。

(1) 文献 1 及び 2 (本論文の末尾にあり) を豫め参照せられたし。

