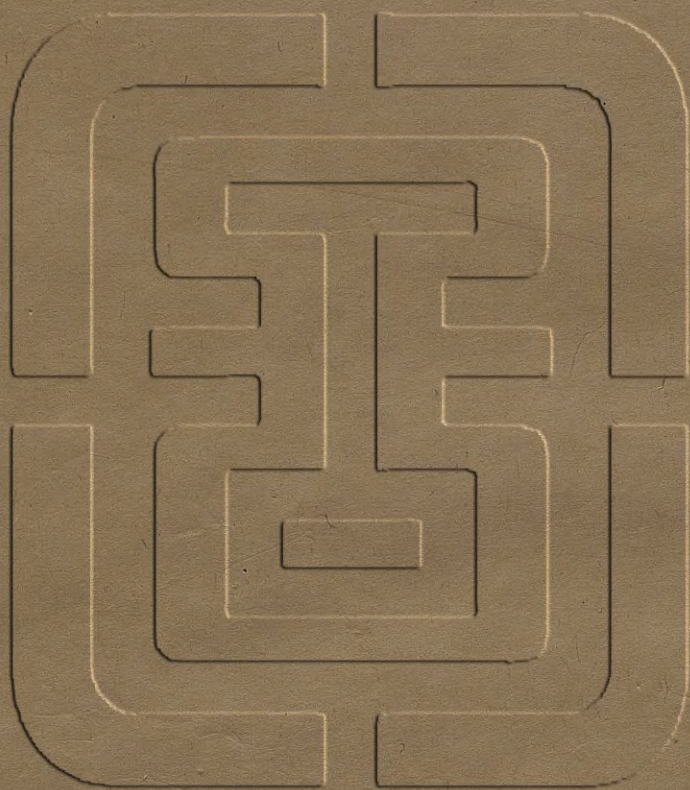


17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45

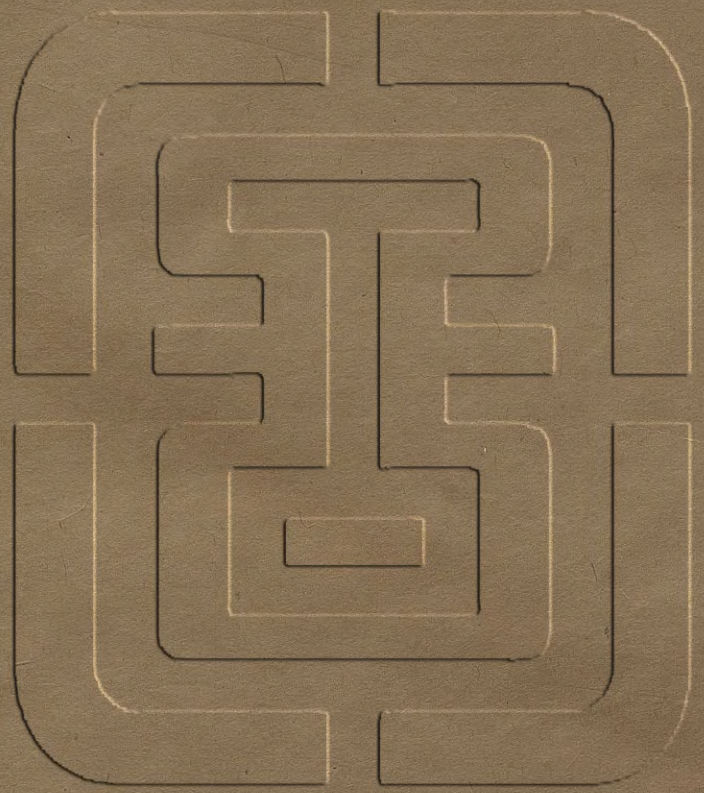
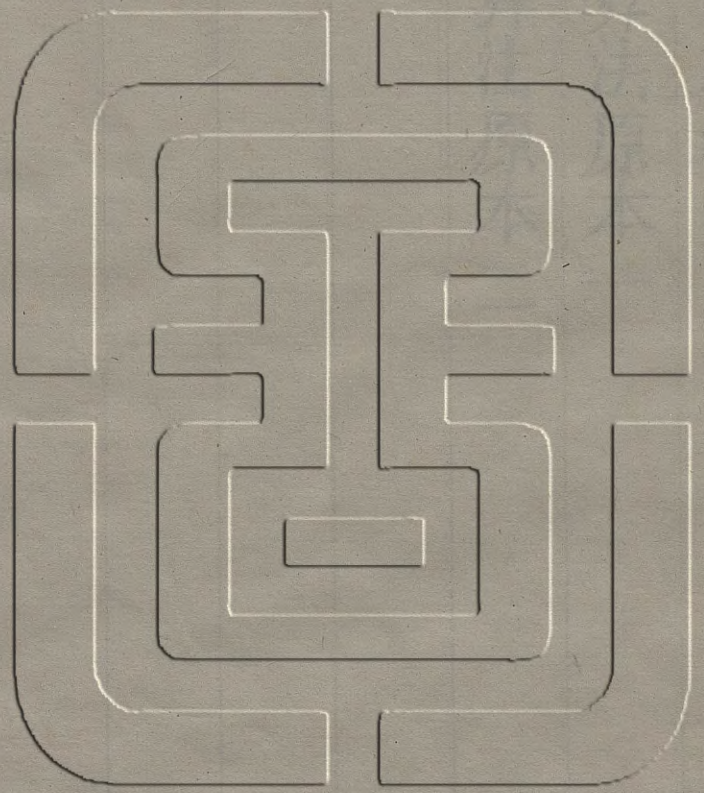
科100  
82

73100  
8472

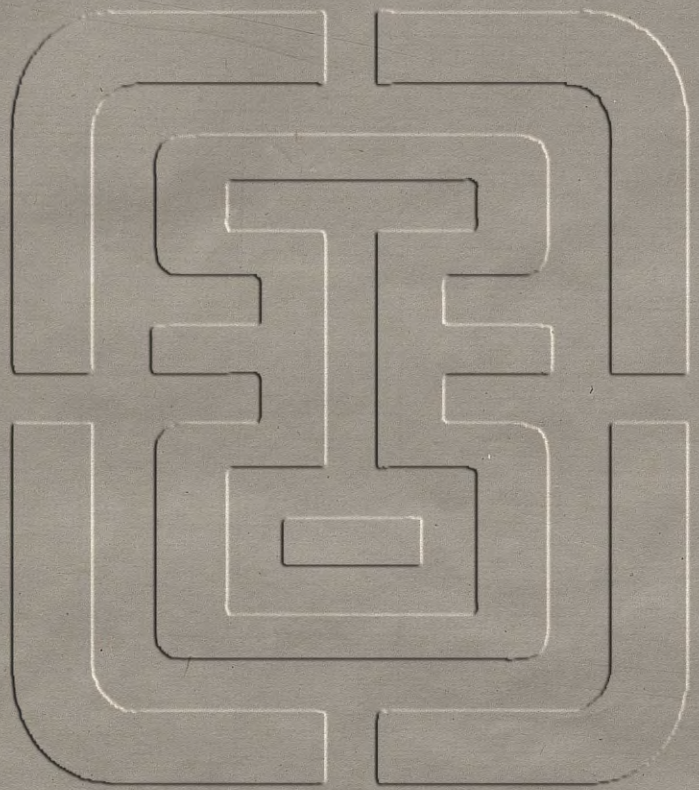
= 4











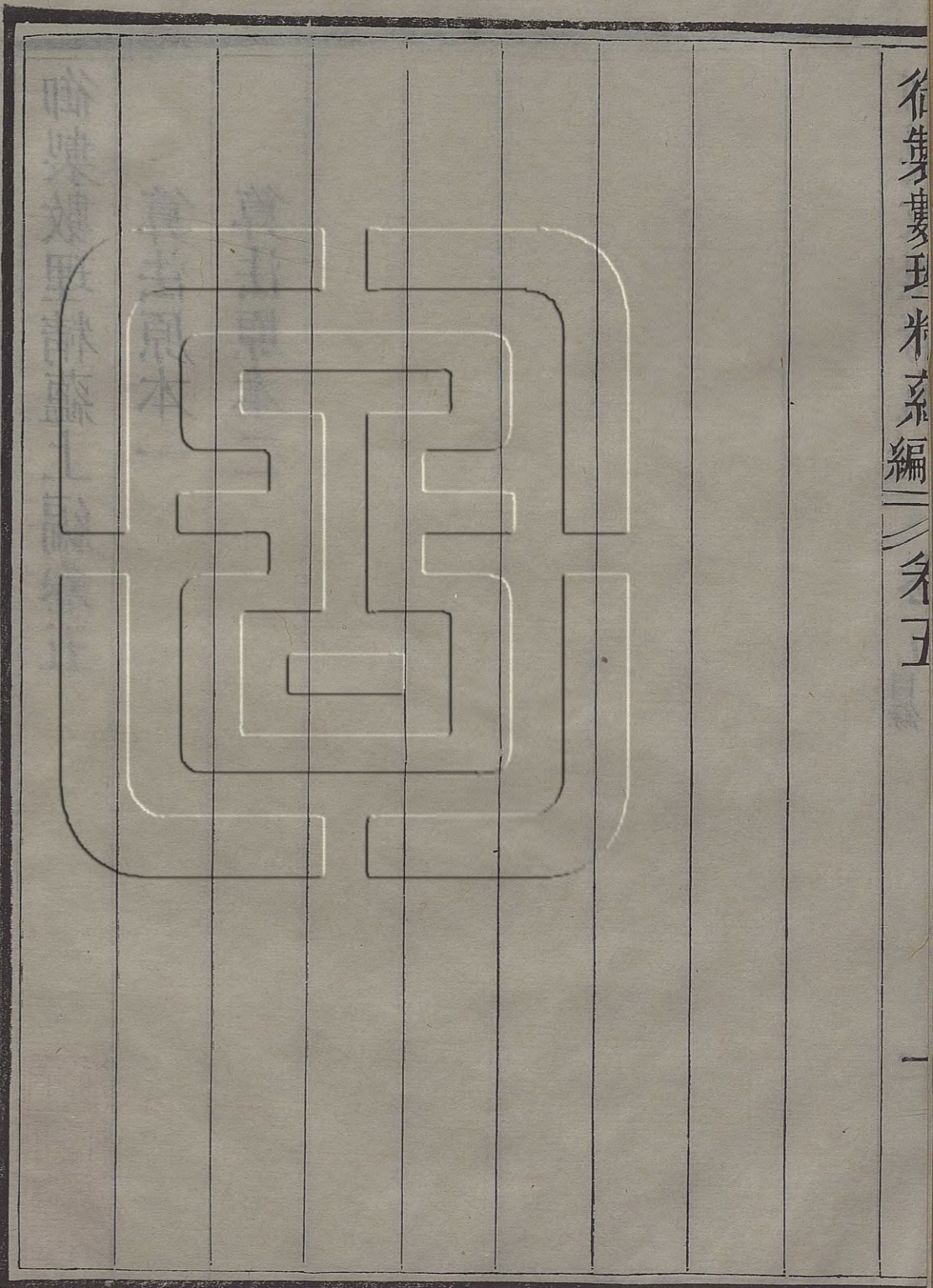
御製數理精蘊上編卷五

算法原本一

算法原本二







算法原本一

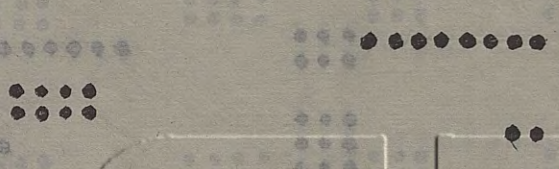
第一

一者數之原也。衆一相合而數繁焉。不能無大小多寡之不齊。而欲知其所以分合之故。必有一定之法。始可以得其準。若夫累積小數與大數等者。此小數即度盡大數之準也。如大數有八。小數有二。四倍其二。與

八必等。則二即為度盡八之準。苟累積小數不能與大數等者。此小數即非度盡大數之準也。

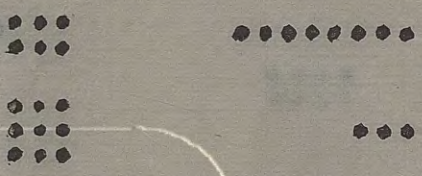
大數

小數





大數  
小數



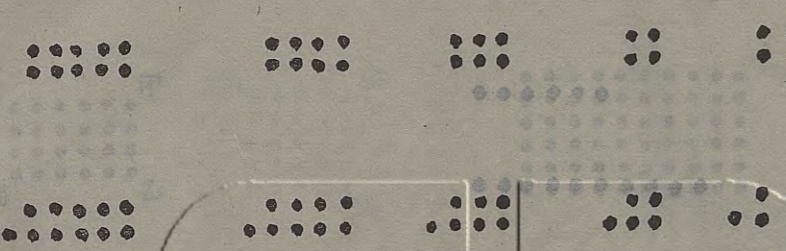
如大數有八。小數有三。二倍其三為六。小於八矣。三倍其三為九。又大於八矣。若此者即為非度。盡大數之準。要之小數為大數之平分者。即能度盡大數。而小數非大數之平分者。即不能度盡大數。是故以小度大。以寡御多。求其恰符而豪無舛者。惟在得其平分之法而已。

第二

數之日雖廣。總不出奇偶二端。何謂偶。兩整平分數是也。何謂奇。不能兩整平

偶數

奇數



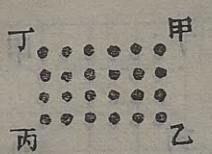
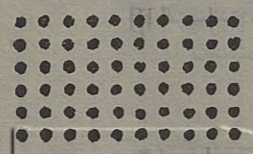
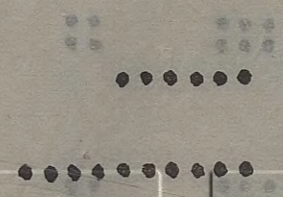
分數是也。如二。四。六。八。十之類。平分之俱為整數。斯謂之偶數矣。若三。五。七。九。十一之類。平分之俱不能為整數。斯謂之奇數矣。又如小偶數分大偶數得偶分。則謂之偶分之偶數。如小偶數四。分大偶數三十二。得八平分。是為偶分。其三十二。即為偶分之偶數。小偶數分大偶數得奇分。則謂之奇分之偶數。如小偶數六。分大偶數三十。得五平分。是為奇分。其三十。即為奇分之偶數。又如小奇數分大奇數得奇分。則謂之奇分



之奇數矣。如小奇數五。分大奇數十五。得三平分。是為奇分。其十五。即為奇分之奇數。

第三

乘者。兩數相因而成也。蓋有兩數。視此十數有幾何。彼一數有幾何。將此一數照彼一數加幾倍。則兩數積而復成一數。故謂之相因而成。然不用加而用乘者何也。蓋加須層累而得。乘則一因即得。此立法之精。而理則實相通也。如有



六與十兩數。以十為主而加六次得六十。以六為主而加十次亦得六十。今以十為主而以六乘之。或以六為主而以十乘之。皆得六十。其數無異。而比加捷矣。

第四

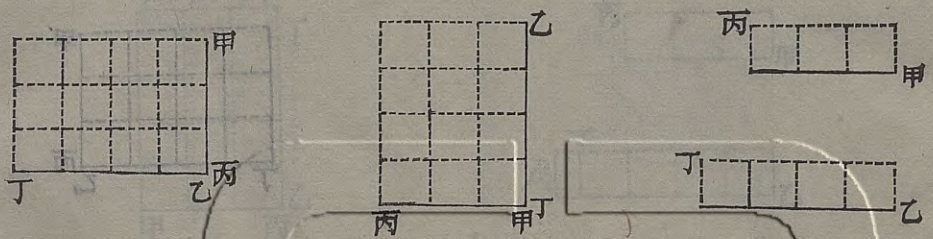
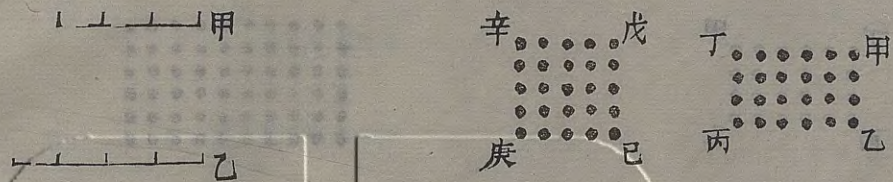
凡兩數相乘。為平方數。如四與六相乘得二十四是也。試將四六兩數作點排之。縱立四點為甲乙。橫列六點為甲丁。



將此六點累四次。即成甲乙丙丁平方數矣。又若相等兩數相乘得數則為正。方數。如五與五乘得二十五是也。苟將五數縱橫各列五點。或依縱數。或依橫數。累五次。即成戊己庚辛正方數矣。

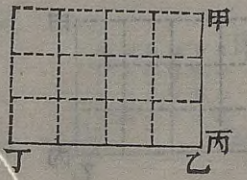
第五

凡數之相乘。可用線以表之。然線雖無廣分。如依一線之長分。廣為小方面。看此線所有方面若干。將彼線所有方面。



加作幾倍。或看彼線所有方面若干。將此線所有方面。加作幾倍。則二線相積而成面矣。設如有甲乙二線。甲線之分為三。乙線之分為四。將此二線相乘。則依甲線三分之一。分作廣分為甲丙。依乙線四分之一。分作廣分為乙丁。其甲丙有三小方形。乙丁有四小方形。若依甲丙所有之數。將乙丁加為三倍。或依乙丁所有之數。將甲丙加為四倍。俱成

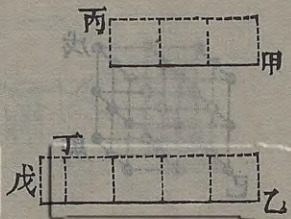




函十二小方形之乙丙甲丁之二直角形矣。蓋面為線之積。以一線為橫。一線為縱。縱橫相因而成。故測面者必於線。知線即可以知面也。

第六

凡二線彼此各分不均而有零分者。其相乘所成方面亦有零分也。設有甲乙二線。甲線為三分。今將甲線依三分之一分作廣分為三小方形。並無餘積。而

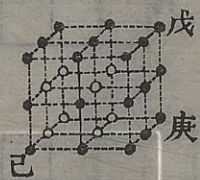
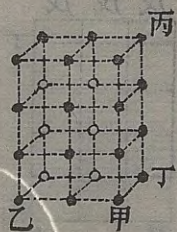


乙線照甲線分。則為四分有零。亦將乙線依甲線一分作廣分。則為四小方形。而餘戊一小形。以所作甲丙為橫。乙丁為縱。則成一丁甲四方形。而此形之內。必有十二小方形。仍有三小戊形。附於十二方形。乃為二線相乘之總積也。又如此類。一線有零分者。其餘分在一邊。若二線俱有零分者。則其餘分亦在二邊矣。



第七

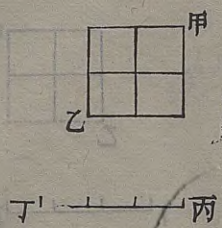
凡三數遞乘。為立方數。如二與三相乘得六。又以四乘之得二十四是也。試將二三四之三數作點排之。縱列二點為甲丁。橫列三點為甲乙。將此三點累二次成丁乙平方數。又直立四點為丙丁。依丙丁數將丁乙平方數累四次。即成丙乙立方數矣。又若相等三數遞乘得數則為正立方數。如三與三乘得九。再



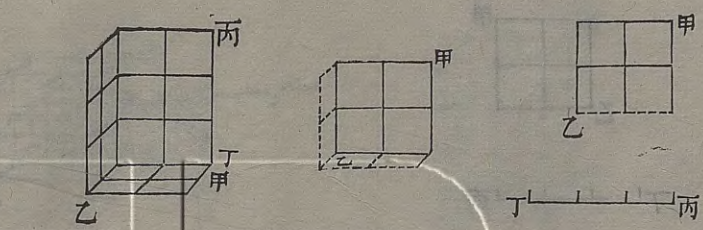
以三乘得二十七是也。試將三數縱橫各排三點。平列三次。成庚己平方數。又直立三點。將庚己平方數累三次。即成戊己正立方數矣。

第八

凡數之遞乘為體。可用面以表之。蓋面雖無厚分。如依一面之積分。廣為小方體。看面所有積分。得線之長分若干。將面所有小方體。加作幾倍。則線面因之



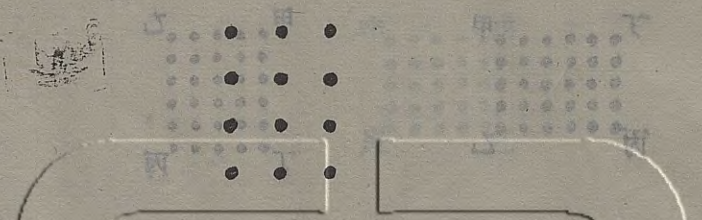




而成體矣。設如有甲乙面之分為四。丙丁線之分為三。將此面線相乘。則依甲乙面四分之一作厚分。為四小方體。乃依丙丁線分數。將甲乙加為三倍。即成函十二小方體之丙乙直角立方體矣。蓋體為面之積。而面為線之積。故線可以測面。并可以測體也。

第九

除者兩數相較而分也。蓋視大數內有



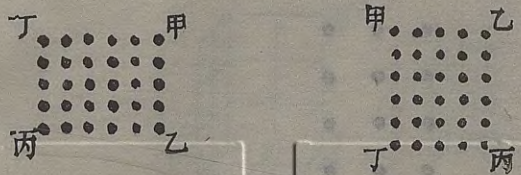
小數之幾倍。將大數照小數減幾次。則大數分而復為一小數。故謂之相較而分。然不用減而用除者何也。蓋減必遞消其分。除則一歸而即得。除之與減。即猶乘之與加。正相對待者也。如有大數十二。小數四。若用十二以四減之。三次而盡。即知十二為四之三倍。若用除法。則三倍其四。與十二較。其數適等。即知十二為四之三倍矣。此除之與減。理相



通而用較捷也。

第十

凡兩數相乘之平方數。以一數除之。必得其又一數也。設如甲乙五。乙丙六。兩數相乘之甲乙丙丁平方數三十。若以甲乙五除之。即得乙丙六。或以乙丙六除之。即得甲乙五。蓋此三十中有五之六倍。六之五倍。如作點排之。五點為橫。則縱排六次。六點為橫。則縱排五次。皆



成方數。故兩數不等平方面。知其一數。

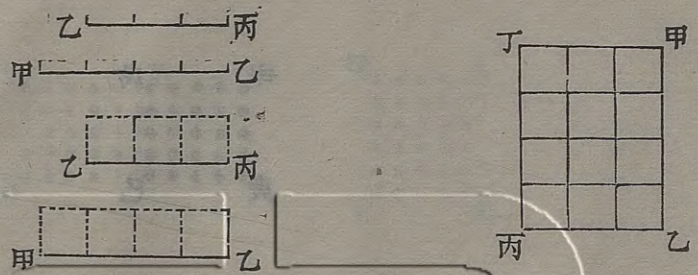
或知兩數相差之較。始能得其兩邊線也。又若正方數。則其縱橫皆同。如戊己庚辛之正方數二十五。其縱橫皆五是已。故凡正方面有積數。即可得其每邊者。蓋因其縱橫兩邊皆等故也。

第十一

凡以線乘線即成面。而以線除面。亦復得線。故數之乘者可用線以表之。而除





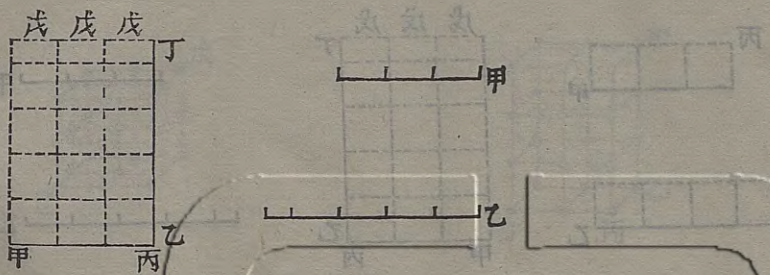


者亦可用線以表之也。設如有甲乙丙丁一方面積一十二。以甲乙線四分除之。得乙丙線之三分。或以乙丙線三分除之。亦得甲乙線之四分。試將甲乙乙丙二線作廣分。則甲乙線成四小方形。乙丙線成三小方形。若依甲乙線所有數。以分甲乙丙丁面。即每分得三小方形。如乙丙線。依乙丙線所有數。以分甲乙丙丁面。即每分得四小方形。如甲乙

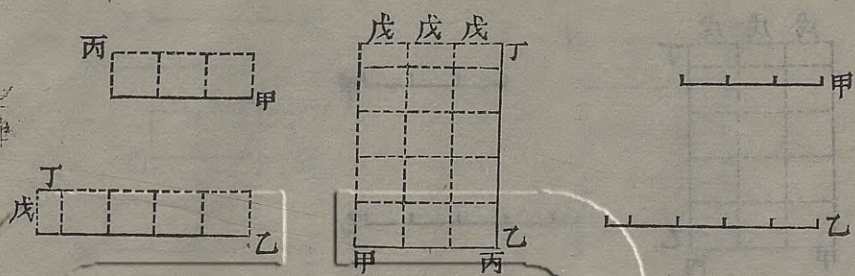
線。蓋除之與乘。猶分合之相對。以線合者。仍以線而分。返本還原之義。有不爽矣。

第十二

凡有零分不均二線相乘之方面。以整分線除之。必得零分線。以零分線除之。必得整分線也。設如甲線三分。乙線四分。有零。相乘成丁甲面。若以甲線三分除之。即得乙線四分。有零。或以乙線四





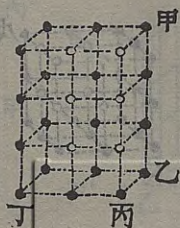
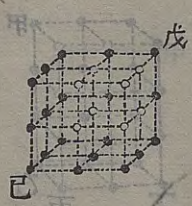


分有零除之。亦得甲線三分。試將甲線作廣分。成三小方形。為甲丙。乙線作廣分。則成四小方形。為乙丁。餘戊一小形。若依甲丙線所有數。以分丁甲面。即每分得四小方形。一戊小形。如乙丁線。或依乙丁線所有數。以分丁甲面。即每分得三小方形。如甲丙線矣。此為二線一整一零相乘之總積。故以整線除之。得零。以零線除之。得整。若二線俱有零分

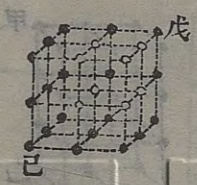
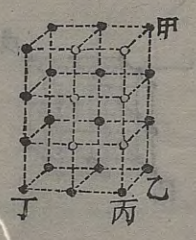
者。彼此除之。必俱得零分也。

第十三

凡三數遞乘之立方數。以兩數遞除之。始得其又一數也。設如甲乙四。乙丙二。丙丁三。遞乘得甲丁立方數二十四。若以甲乙四除之。得乙丁平方數六。再以乙丙二除之。始得丙丁三。蓋乙丁平方中有三之二倍。而甲丁立方中有六之四倍。如作點排之。二點為縱。橫排三次。

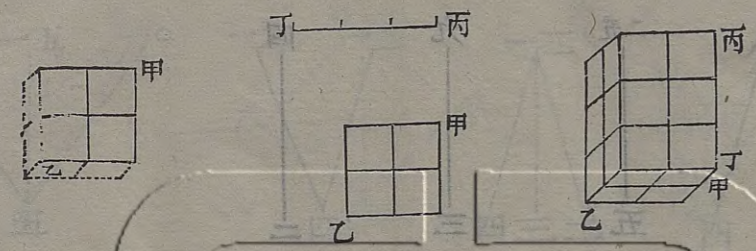






直累四次。即成方體。故三數不等立方體。知其兩數。或知其三數相差之較。始能得各邊也。又若正立方體。其縱橫厚度。皆為一數。即以一數遞除二次。則其原數自得。如戊己正立方數二十七。其縱橫厚皆三。是己。故凡正立方體。有積數。即可得其每邊者。正為其縱橫厚度皆等故也。

第十四



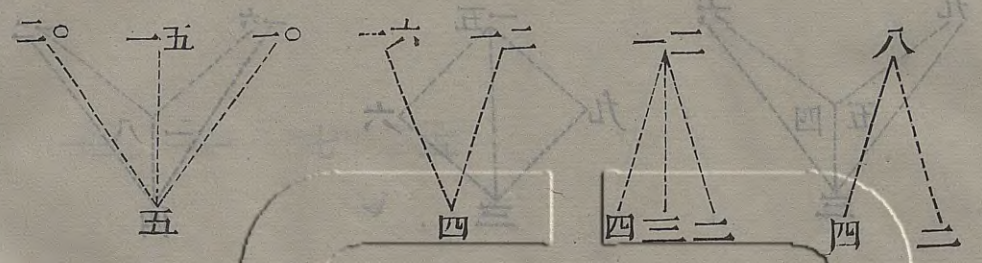
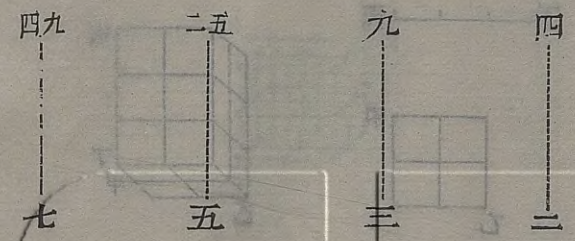
凡以線除體。即得面。而以面除體。亦復得線。故線可以除面。而面亦可以除體也。設如有丙乙體積十二。以丙丁線三分除之。得甲乙面之四分。或以甲乙面四分除之。亦得丙丁線之三分。試將甲乙面作厚分。則成四小方體。若依丙丁線所有數。以分丙乙體。即每分得四小方體。如甲乙面。依甲乙面所有數。以分丙乙體。即每分得三分。如丙丁線。蓋



體本以線面相乘而得。故可以線面相除也。

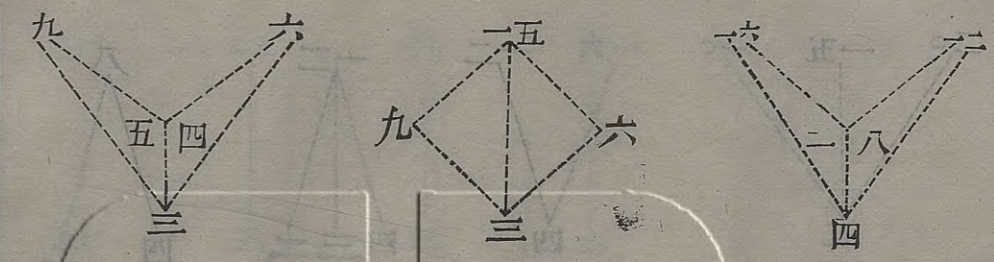
第十五

凡大數用小數可以度盡者。此大數必為此小數之所積也。然所謂小數可以度盡大數者。復有幾種。有大數惟一數可以度盡者。如四九。二十五。四十九之類。惟用二可以度四。三可以度九。五可以度二十。五。七可以度四十九。是也有



大數用兩數三數俱可以度盡者。如八與十二之兩數。用二用四。俱可以度盡。八用二用三用四。俱可以度盡。十二是也。有兩大數。或三大數。用一小數俱可以度盡者。如十二。十六之兩數。或一十五。二十之三數。用四可以度盡。十二。十六之兩數。用五可以度盡。一十五。二十之三數是也。又有一小數可以度盡幾大數。將此幾大數相加為一總數。





此小數亦可以度盡此總數。如四可以度盡十二。十六兩數。若將十二。十六相加為二十八。則此四亦可以度盡此二十八也。又或一小數可以度盡幾大數。將此大數不拘幾分分之。此小數可以度盡一分。亦必可以度盡其餘幾分也。如三可以度盡十五。將十五分為六。九兩數。此三可以度盡六。亦必可以度盡九也。又如六與九兩數。用三俱可以度

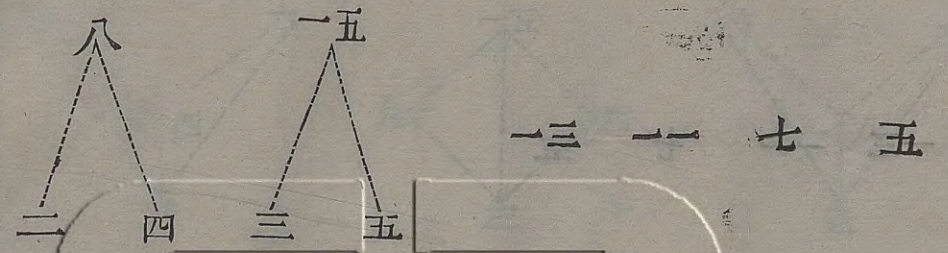
盡。若將六與九相乘得五十四。此小數三仍可以度盡此五十四也。凡此類者。皆為彼此有度盡之數也。

第十六

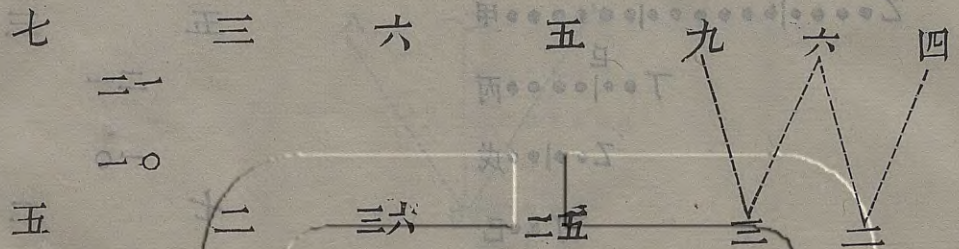
凡大數用小數不可以度盡者。此大數必非此小數之所積也。然用一以度之。無不可以度盡者。蓋一為數之根。諸數皆自一而積之故也。所謂度不盡者。亦復有幾種。有大數無小數可以度盡者。

一三 一七 五





如五七十一十三之類。任用二用三用四。俱不能度盡也。有兩大數。或三大數。用小數彼此不可以度盡者。如十五與八之兩數。用二用四。可以度盡八。而不能度盡十五。用三用五。可以度盡十五。而不能度盡八。又如四六九之三數。用二可以度盡四六。而不能度盡九。用三可以度盡六九。而不能度盡四也。又有彼此不能度盡之數。或將一數自乘。或



將兩數俱自乘。彼此仍俱不可以度盡也。如五與六之兩數。彼此不能度盡。亦無一小數可以度盡此兩數。即將五自乘為二十五。或將六自乘為三十六。則六仍不能度盡二十五。而五仍不能度盡三十六。即二十五亦不能度盡三十六也。又如三七兩數。與二五兩數。俱為彼此不能度盡之數。或將三與七相乘得二十一。將二與五相乘得一十。此一

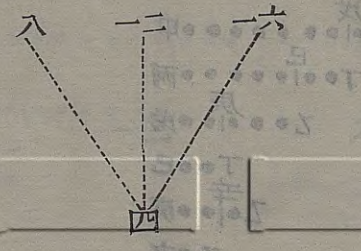
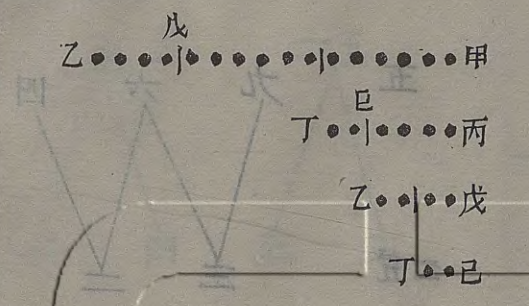


三  
二  
一  
七

十與二十一之兩數。仍為彼此不能度盡之數也。凡此類者。皆為彼此無度盡之數也。

第十七

凡兩數互轉相減。未至於一而即可以減盡者。此減盡之最小數。即可以度盡此兩數也。設如有甲乙十六。丙丁六之兩數。將丙丁六與甲乙十六減二次。餘戊乙四。將此戊乙四轉與丙丁六相減。



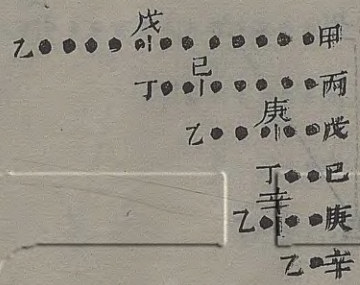
餘已丁二。又將此已丁二轉與戊乙四相減二次。即無餘。則此已丁二。即可以度盡甲乙十六及丙丁六矣。蓋八倍其二與十六等。三倍其二與六等也。又如十六與十二與八。此三數亦為彼此有度盡之數。何也。蓋十六與十二相減。餘四。以四轉與十二相減。三次而盡。則四可以度盡十六與十二矣。又二倍其四。即與八等。則四又可以度盡八。然則十



六十二與八之三數為彼此有度盡之數可知矣。

第十八

凡兩數互轉相減。至於一始可以減盡者。一之外別無他小數可以度盡此兩數也。設如有甲乙十二。丙丁七之兩數。將丙丁七與甲乙十二相減。餘戊乙五。將此戊乙五轉與丙丁七相減。餘己丁二。將此己丁二。又轉與戊乙五相減。餘



庚乙三。又將庚乙三轉與己丁二相減。

餘辛乙一。既至於一。始可以度盡甲乙

丙丁兩數。而一之外如二三四。雖可以

度盡十二。而不能度盡七也。又如九與

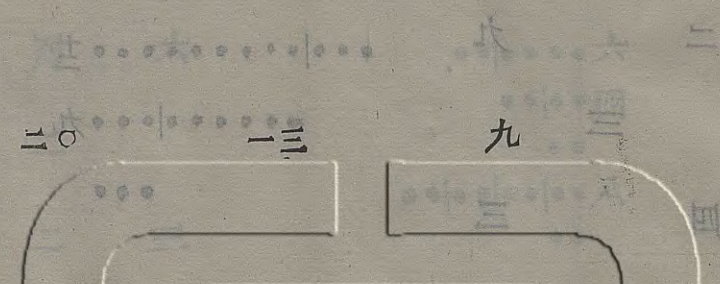
十三及二十之三數。亦為彼此無度盡

之數。何也。蓋將九與十三互轉相減。必

至於一。即用十三與二十轉減。或用九

與二十轉減。亦皆至於一。則除此一之

外。皆無可以彼此度盡此三數之小數

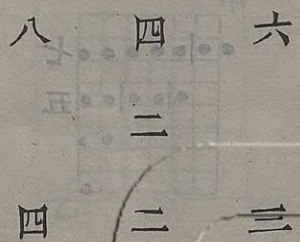
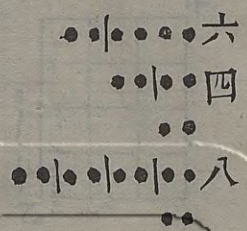
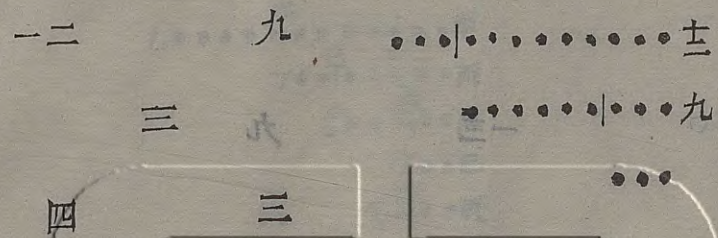




矣。昔無可以此也。對虛此三。幾之小數。

第十九

凡有大數。約為相當比例之最小數。以從簡易。則為約分法也。然數有可約不可約之分。可約者。度盡之數。不可約者。度不盡之數也。設如有九與十二之兩數。欲約為相當比例之最小數。乃用求小數度盡大數法。以九與十二互轉相減。得減盡之數為三。則三為度盡九與



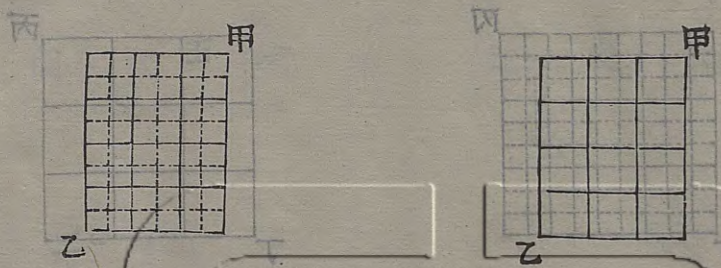
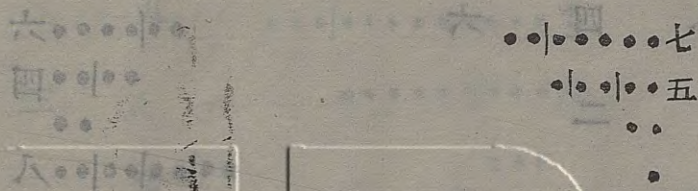
十二之數矣。以三除九得三。以三除十二得四。此三四兩數。即為九與十二相當比例之最小數也。又如六四八之三數。欲約為相當比例之最小數。乃以六與四互轉相減。得減盡之數為二。又以二與八相減。四次而盡。則二為度盡六四八之小數矣。以二除六得三。以二除四得二。以二除八得四。此三二四三數。即六四八相當比例之最小數也。此



皆數之可約者也。若夫數之不可約者。互轉相減。必至於一。而不可以度盡也。如有五、七兩數。以五減七。餘二。復以二減五。二次餘一。既餘一。則自一之外。必無可以度盡之數。而不可約矣。

第二十

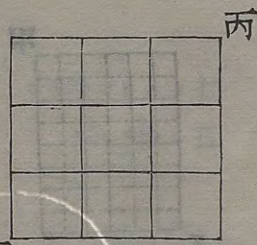
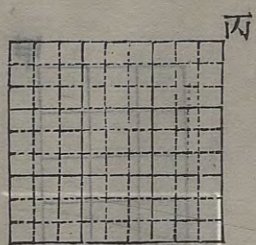
凡有大分。以分母乘之。通為小分。則為通分法也。然不曰乘而曰通者。何也。蓋乘則積少成多。其得數溢於原數之外。



通則變大為小。其得數仍函於原數之中也。如有大分十二。其分母為四。欲得其小分。則以分母四。乘大分十二。得小分四十八。是已。試作甲乙方形以明之。其中所函方形十二。即大分也。若將中函之方形。每分俱分為四小方。則十二方形。共分為四十八小方形矣。其數雖比原大數加四倍。然其每分之分。只得原數之四分之一。故仍函於甲乙方形



之內而未嘗溢出原數之外也。又如有大分九。其分母為九。欲得其小分。則以分母九乘大分九。得小分八十一是已。試作丙丁方形以明之。其中所函方形九。即大分也。若將其中函之方形。每分俱分為九小方。則九方形共分為八十一小方形矣。其數雖比原大數加九倍。而仍函於丙丁方形之內者。以其每分之分。只得原數之九分之一也。由此推



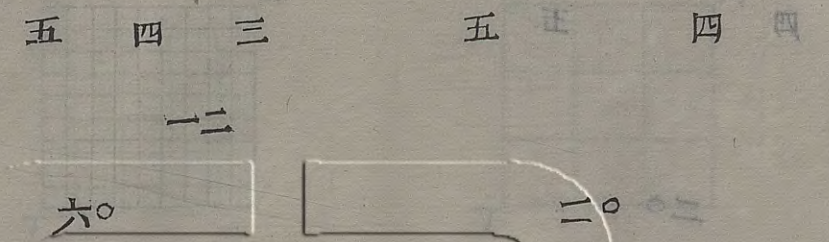
之。其每分之母。或為八。或為十二。或為數十。亦皆做此通之。其所通之數。雖至千萬。而要皆未有溢於所通原分之外者矣。  
第二十一  
凡有幾小數。欲求俱可以度盡之大數。則以此幾小數連乘之。得數始為此幾小數度盡之一大數也。設如有四。五兩小數。欲求用四用五俱可以度盡之一

四 四 五 正 三 四 正

二〇

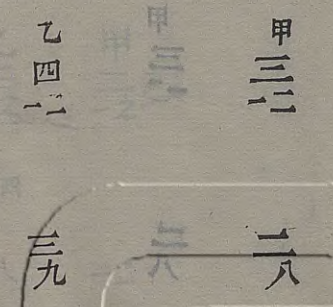


數則以四與五相乘得二十。即為四五  
 兩數俱可度盡之一大數矣。又如有三  
 四五之三小數。欲求用三用四用五俱  
 可以度盡之一數。則以三與四相乘得  
 十二。又以五乘十二得六十。即為三四  
 五俱可度盡之一大數矣。蓋小數為大  
 數之根。始能度盡大數。如四五可以度  
 盡二十者。二十乃四之五倍。亦即五之  
 四倍也。三四五可以度盡六十者。六十



乃十二之五倍。而十二乃三之四倍也。  
 第二十二

凡有兩數。彼此互乘所得之數。與原數  
 比例必同也。蓋數有多寡。而分又有大  
 小。則紛紜難御。故必依此數之分。將彼  
 數加為幾倍。又依彼數之分。將此數加  
 為幾倍。則兩分數既同。而比例亦同矣。  
 如甲乙二數。甲為三分之二。乙為四分  
 之三。欲辨其孰大。則依甲數。將乙數加





甲三二  
二八

甲三三  
六

乙四二  
三九

三倍為十二分之九。依乙數將甲數加四倍。為十二分之八。如是則所加之兩大分。同為十二。而所生之兩小分相比。即同於原甲數與乙數之相比矣。何也。甲數本三分之二。而為十二分之八者。乃加四倍之比例。十二為三之四倍。八為二之四倍。而十二分之八之比例。仍同於三分之二之比例也。乙數本四分之三。而為十二分之九者。乃加三倍之比例。十二為四之三倍。九為三之三倍。

為三之三倍。而十二分之九之比例。仍同於四分之三之比例也。此即互乘同母之法。如甲為三分之

二者。三即母數。二即子數也。乙為四分之三者。四即母數。三即子數也。因兩母數不同。故用互乘以同之。

第二十三

凡子母分有幾數。而子數同為一者。先

以各母求俱能度盡之一數。次以各母

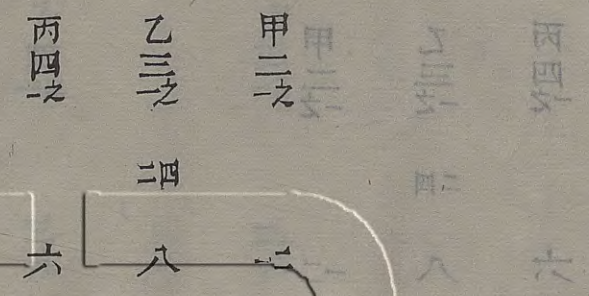
除之。則為各子數也。如甲乙丙三數。甲

為二分之一。乙為三分之一。丙為四分

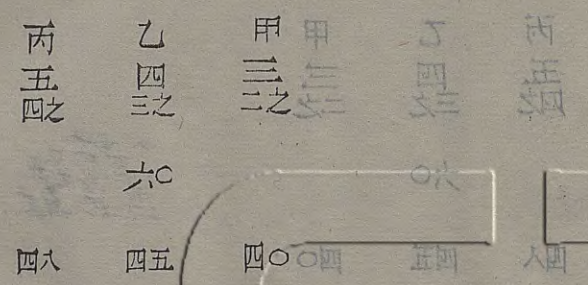
甲二二  
二  
乙三二  
二四  
丙四二  
六



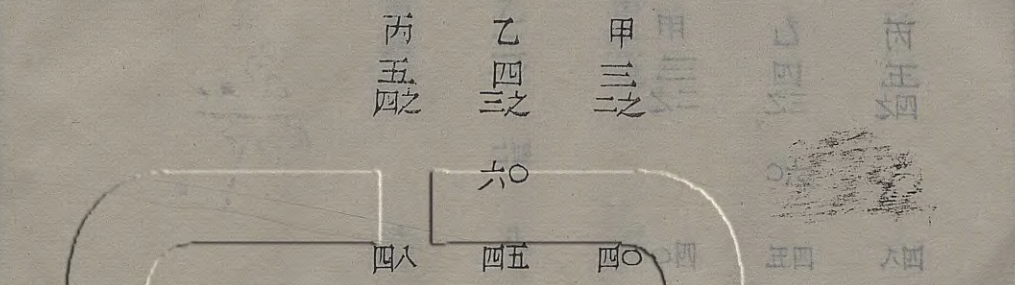
之一。則先以三母數連乘得二十四。爲  
 甲乙丙之共母數。又以二除共母數。得  
 十二。爲甲之子數。以三除共母數。得八。  
 爲乙之子數。以四除共母數。得六。爲丙  
 之子數。蓋甲本二分之一。子母各加十  
 二倍。卽爲二十四分之十二。而二十四  
 與十二之比例。仍同於二與一之比例  
 也。乙本三分之一。子母各加八倍。卽爲  
 二十四分之八。而二十四與八之比例。



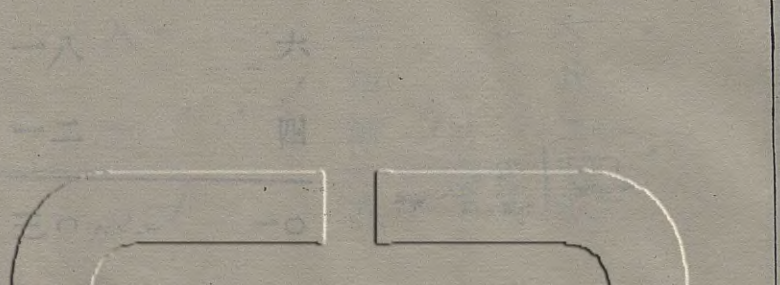
仍同於三與一之比例也。丙本四分之  
 一。子母各加六倍。卽爲二十四分之六。  
 而二十四與六之比例。仍同於四與一  
 之比例也。  
 第二十四  
 凡子母分有幾數。而子母數俱不等者。  
 亦先以各母求俱能度盡之一數。次以  
 各母除之。得數。復以各子數乘之。卽爲  
 各子數也。如有甲乙丙三數。甲爲三分





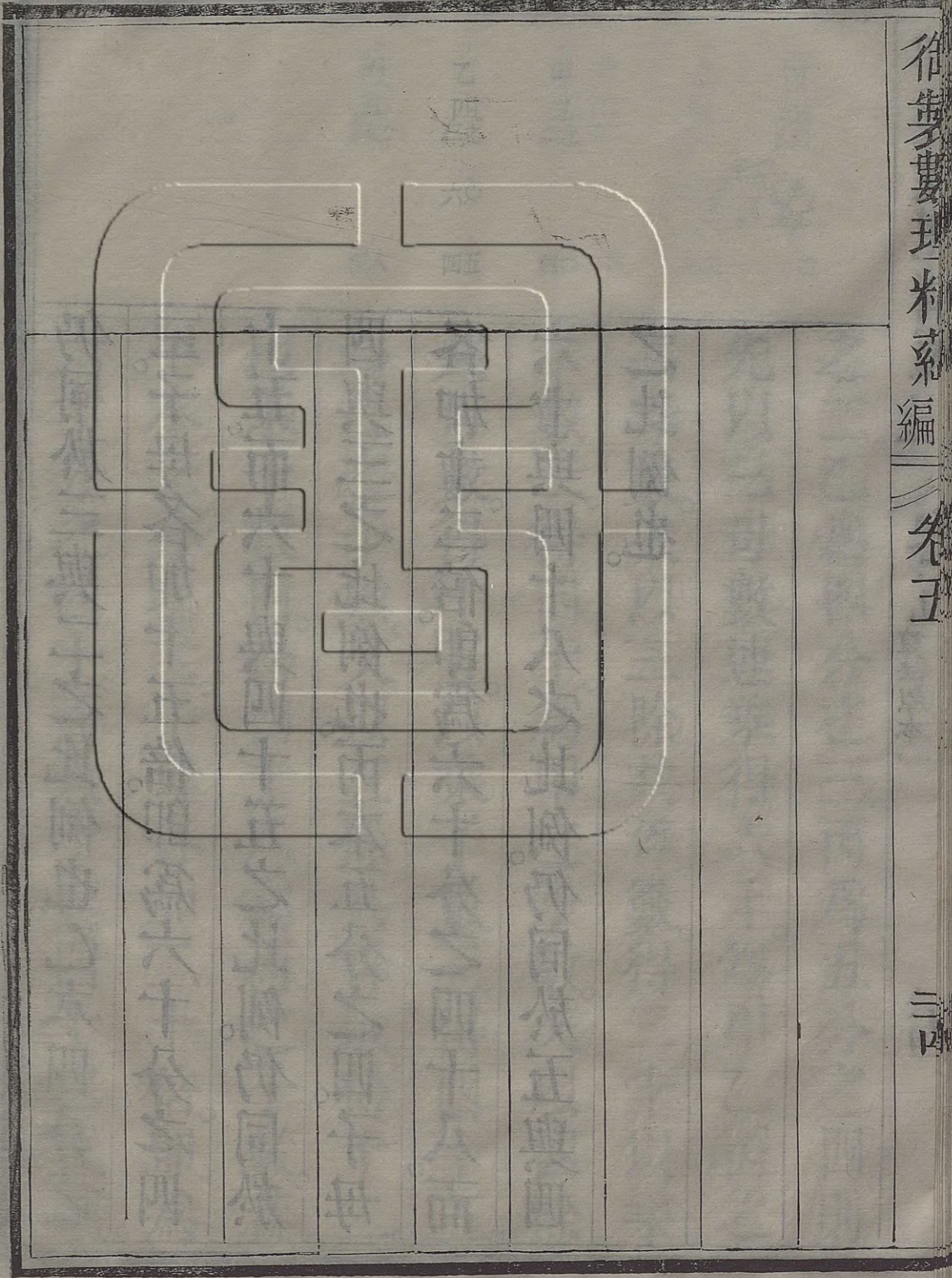


之二。乙為四分之三。丙為五分之四。則先以三母數連乘得六十。為甲。乙。丙之共母數。次以三除共母數。得二十。以乘子數二。得四十。為甲之子數。又以四除共母數。得十五。以乘子數三。得四十五。為乙之子數。又以五除共母數。得十二。以乘子數四。得四十八。為丙之子數。蓋甲本三分之二。子母各加二十倍。即為六十分之四十。而六十與四十之比例。



仍同於三與二之比例也。乙本四分之三。子母各加十五倍。即為六十分之四十五。而六十與四十五之比例。仍同於四與三之比例也。丙本五分之四。子母各加十二倍。即為六十分之四十八。而六十與四十八之比例。仍同於五與四之比例也。

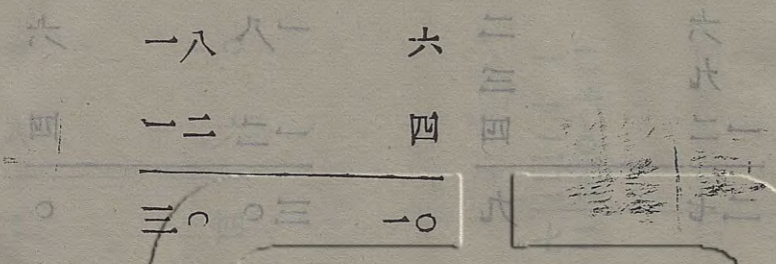




算法原本二

第一

凡有幾小數與幾大數相比其比例若同則小數相加所得之總數與大數相加所得之總數相比仍同於原數之比例也。設如有一小數六一小數四一大數十八一大數十二其小數六為大數十八之三分之一而小數四亦為大數十二之三分之一將兩小數六四相加





六 九 一 二	二 三 四 九	一 八 一 二 三	六 四 〇
二 七	九	三	〇

得一十。將兩大數十八十二相加得三十。此一十與三十之比。即如六與十八。四與十二之比。皆為三分之一之比例也。又如三小數二三四與三大數六九十二相比。皆為三分之一。將二三四相加得九。將六九十二相加得二十七。其比例亦為三分之一也。又或四小數四大數相加。其總數之比例亦皆同。如三與十二。四與十六。五與二十。六與二十

三 四 五 六 八	二 六 〇 四 七	一 〇 三 六 四	三 〇 一 八 一 二
一	二 七	四	二

四俱為四分之一。將三四五六四小數相加得十八。將十二十六二十二十四四大數相加得七十二。其比例仍為四分之一矣。

第二

凡有幾小數與幾大數之比例若同。則小數相減所得之餘數與大數相減所得之餘數相比。仍同於原數之比例也。設如有一小數十。一小數六。一大數三



一〇六四

三〇一八

八四四三十一

四二二九三  
二二一

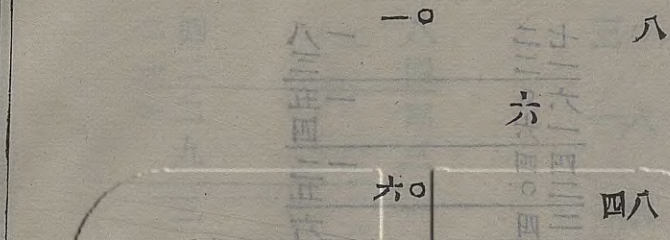
十一大數十八其小數十為大數三十  
 之三分之一而小數六亦為大數十八  
 之三分之一將兩小數十與六相減餘  
 四將兩大數三十與十八相減餘十二  
 此四與十二之比即如十與三十六與  
 十八之比皆為三分之一之比例也又  
 如三小數八四三與三大數二十四十  
 二九相比皆為三分之一將四三與八  
 遞相減餘一將十二九與二十四遞相

八三五四二五六  
 一  
 二二〇六四〇四  
 七二六一四三二

減餘三其比例亦為三分之一也又或  
 四小數四大數相減其餘數之比例亦  
 皆同如十八與七十二為四分之一而  
 三與十二四與十六五與二十俱為四  
 分之一將小數三四五與十八遞相減  
 餘六將大數十二十六二十與七十二  
 遞相減餘二十四其比例仍為四分之  
 一矣

第三





凡有一數乘兩數。其所得兩數相比。仍同於原兩數之相比也。設如一數六。與八與一十兩數相乘。以六乘八得四十八。以六乘一十得六十。此四十八與六十相比。即同於原數八與一十之相比矣。夫八與四十八。一十與六十。皆為六分之一。故一與六之比。同於八與四十八之比。而一與六之比。亦同於十與六十之比也。然則八與四十八之比例。必

同於十與六十之比例。而四十八與六十之比例。亦必同於八與一十之比例。可知矣。

第四

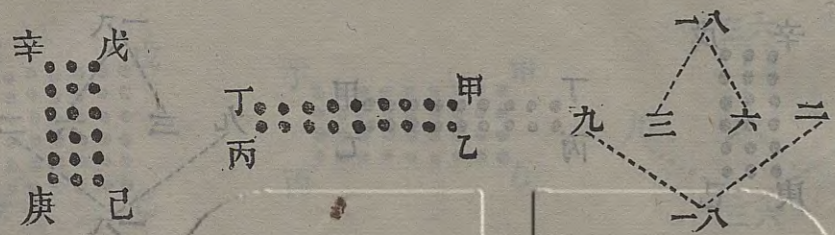
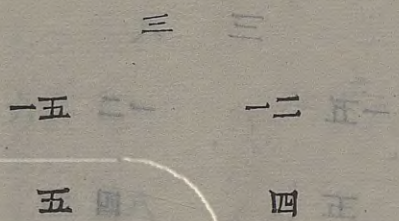
凡有一數除兩數。其所得兩數相比。仍同於原兩數之相比也。設如一數三。除十二與十五之兩數。以三除十二得四。以三除十五得五。則此四與五相比。即同於原數十二與十五之相比矣。夫十



二與四十五與五皆為三分之一。故一與三之比。同於四與十二之比。而一與三之比。亦同於五與十五之比也。然則四與十二之比例。必同於五與十五之比例。而四與五之比例。亦必同於十二與十五之比例。可知矣。

第五

凡相當比例四數。其第一數與第四數相乘。第二數與第三數相乘。所得之數



等者何也。蓋兩方面。以其縱橫界互相為比之比例若等。則兩方積必等。見幾何原

本七卷今以第一數與第四數相乘。即

如以第一數為縱。第四數為橫。成一方

數。而第二數與第三數相乘。即如以第

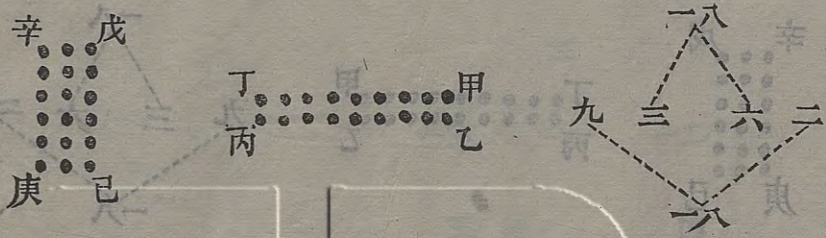
二數為縱。第三數為橫。成一方數。其積

必相等也。設如有二與六。三與九。相當

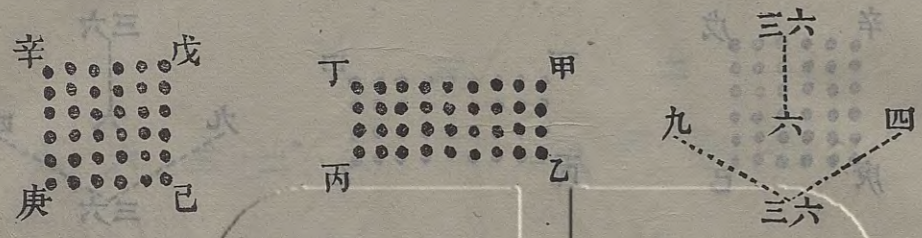
比例四數。將第一數二為縱。第四數九

為橫。相乘得十八。為甲丙一方數。將第





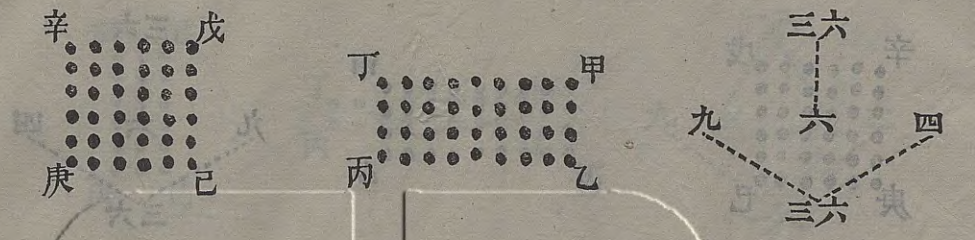
二數六為縱。第三數三為橫。相乘亦得十八。為戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界。比戊庚方之戊辛橫界。大三分之二。而戊庚方之戊己縱界。比甲丙方之甲乙縱界。亦大三分之二。其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等。則相當比例四數。其第一數與第四數相乘。第二數與第三數相乘。所得之數相等。無疑矣。



第六

凡相連比例三數。其首數與末數相乘。與中一數自乘所得之數等者何也。蓋兩方面相等者。其縱橫界之互相比例必等。見幾何原本七卷第三節今將首數與末數相乘。即如以首數為縱。末數為橫。成一方數。而中數自乘。即是以中數為縱。復以中數為橫。成一方數。其積必相等也。設如有四。六。九。相連比例三數。將首數四



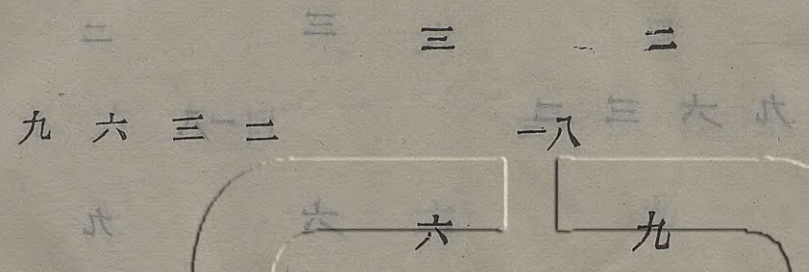


為縱。末數九為橫。相乘得三十六。為甲丙一方數。將中數六為縱。仍復為橫。相乘即是自乘。亦得三十六。為戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界。比戊庚方之戊辛橫界。大三分之一。而戊庚方之戊己縱界。比甲丙方之甲乙縱界。亦大三分之一。其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等。則相連比例三數。其首末兩數相乘。與中數自乘所得之數相等。

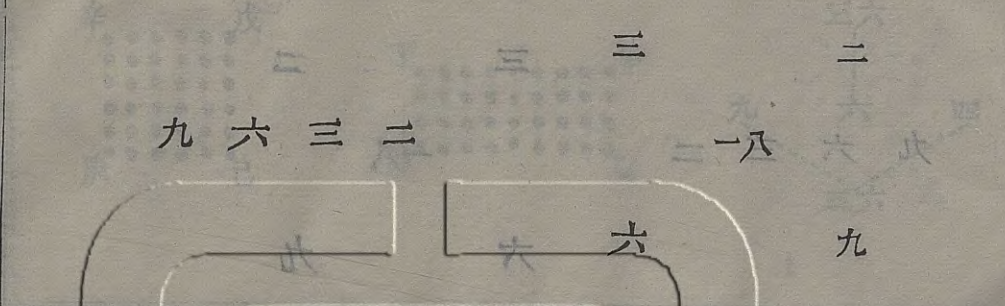
無疑矣。

第七

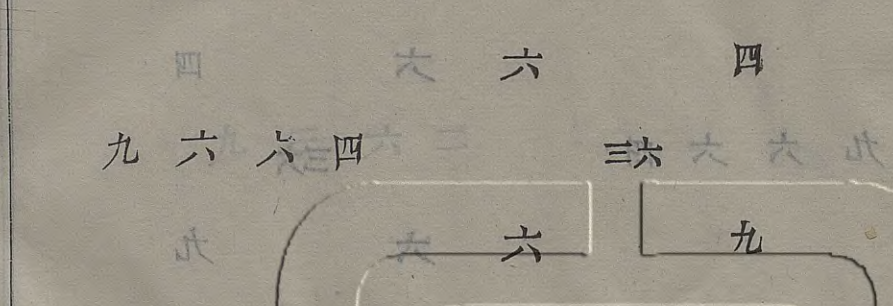
凡有兩數除一數。其所得兩數之比例。即同於原兩數之轉相比例也。設如有一數十八。以二三兩數除之。二除十八得九。三除十八得六。以此九與六兩數相比。即同於原兩數三與二之相比也。蓋二與三。六與九。為相當比例之四數。以第一數二與第四數九相乘。第二數





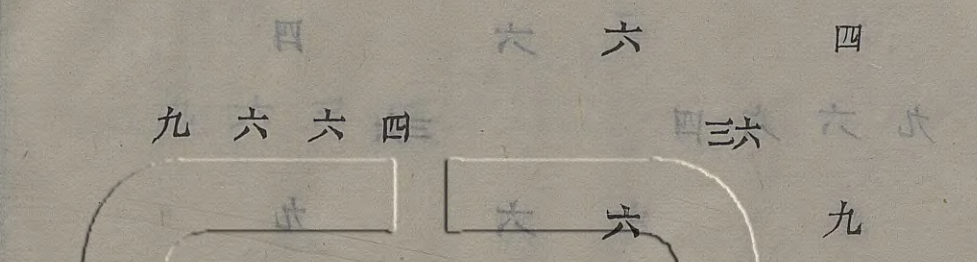


三與第三數六相乘。皆得十八。故二除十八得九。即如以第一數除第二數與第三數相乘之數而得第四數也。以三除十八得六。即如以第二數除第一數與第四數相乘之數而得第三數也。夫相當比例數。其第二數與第四數之比。原同於第一數與第三數之比。故第一數二除十八所得之九。與第二數三除十八所得之六相比。即同於第二數三



與第一數二之相比也。與中數六與三第八。凡有兩數除一數。其所得之兩數內有一數與原兩數內一數相等者。則所得之兩數與原兩數互轉相比。即成相連比例之數也。設如有一數三十六。以四六兩數除之。四除三十六得九。六除三十六仍得六。與原數六相等。則此九與六兩數之比。即同於原數六與四之比。





也。蓋四與六。六與九。為相連比例之四數。以四為首數。九為末數。相乘。以六為中數。自乘。皆得三十六。今以四除三十。六得九。即如以首數除中數。自乘之數。而得末數也。以六除三十六。復得六。即如以中數除首末兩數。相乘之數。而仍得中數也。夫相連比例數。其末數與中數之比。原同於中數與首數之比。則首數四除三十六。所得九。與中數六除三

九 三 六 二

十六所得六相比。即同於中數六與首數四之相比也。

第九

凡相當比例四數。其第一數度盡第二數。則第三數亦必度盡第四數也。如有二。六。三。九。相當比例四數。其第一數二。可以度盡第二數六。則第三數三。亦可以度盡第四數九矣。夫相當比例四數。第一與第二之比。必同於第三與第四



二 六 三 九

二 四 八

之比。今第一為二。第二為六。乃加三倍  
之比例。則第四與第三。亦必為加三倍  
之比例。故三倍其二。可以度盡六者。三  
倍其三。即可以度盡九也。

第十

凡相連比例三數。其第一數度盡第二  
數。亦必度盡第三數也。如有二。四。八。相  
連比例三數。其第一數二。可以度盡第  
二數四。亦必可以度盡第三數八矣。夫

二 四 八

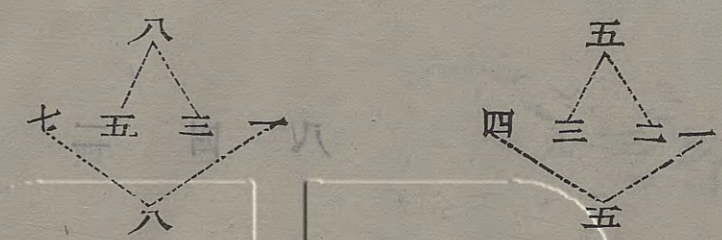
二 四 八

相連比例三數。第一與第二之比。同於  
第二與第三之比。今第一數為二。第二  
數為四。乃加倍之比例。則第二與第三。  
亦必為加倍之比例。而第一與第三。則  
為再加一倍之比例。故一倍其二。可以  
度盡四者。再倍其二。即可以度盡八也。

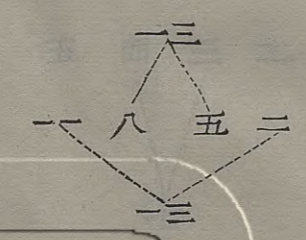
第十一

凡依次遞加取四數。其第一第四兩數  
相加。與第二第三兩數相加之數等也。





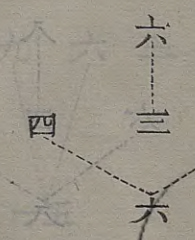
如一。二。三。四遞加之四數。將第一數一與第四數四相加得五。以第二數二與第三數三相加亦得五。又如一。三。五。七遞加之四數。一。三。五。七為隔一數以遞加者也。將第一數一與第四數七相加得八。以第二數二與第三數五相加亦得八也。又如二。五。八。十一遞加之四數。二。五。八。十一為隔二數以遞加者也。將第一數二與第四數十一相加得十三。以第二數五與第三數八相加亦



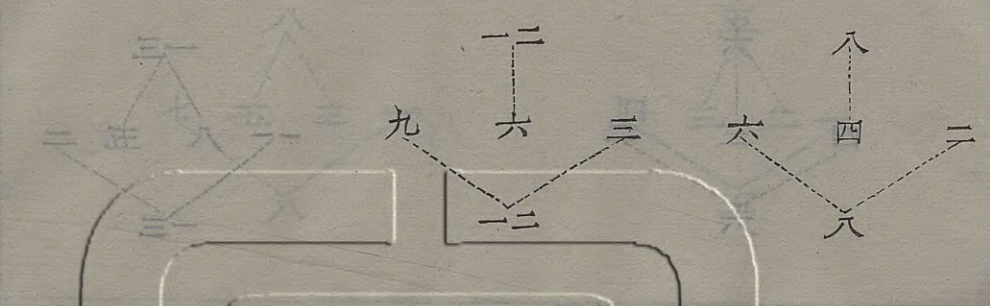
得十三。由此推之。或隔三數。或隔四數。或隔五六數。以至極多數。但依次遞加取四數。無有不如此也。

第十二

凡依次遞加取三數。其首末兩數相加。與中數加倍之數等也。如二。三。四遞加之三數。將首末二四相加得六。以中數三倍之。亦得六。又如二。四。六遞加之三數。二。四。六隔一數以遞加者也。將首末二六相加得



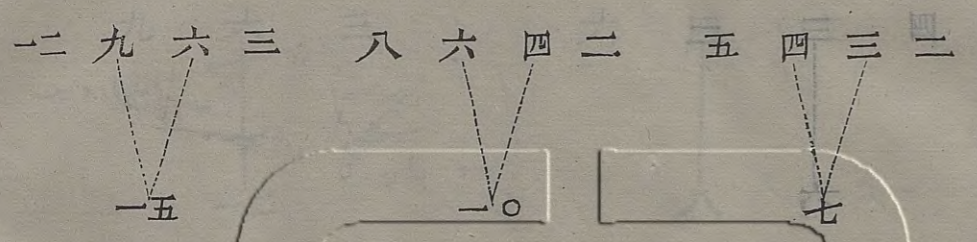




八。以中數四倍之。亦得八也。又如三。六。九遞加之三數。三。六。九隔二數以遞加者也。將首末三九相加得十二。以中數六倍之。亦得十二。由此推之。或隔三數。或隔四數。或隔五六數。以至極多數。但依次遞加取三數。無有不合者也。

第十三

凡依次遞加三數。以第二第三兩數相加。減去第一數。即得挨次之第四數也。



如二。三。四之三數。以第二數三第三數

四相加得七。內減去第一數二。得五。即

是第四數。又如二。四。六隔一數遞加之

三數。以第二數四第三數六相加。得一

十。內減去第一數二。得八。即是第四數。

亦為隔一數。又如二。六。九隔二數遞加

之三數。以第二數六第三數九相加。得

十五。內減去第一數三。得十二。即是第

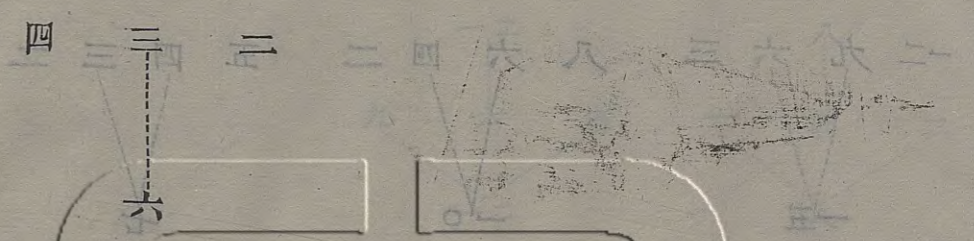
四數。亦為隔二數矣。蓋此即四率相當



比例之理。四率中兩率相乘。與首末兩率相乘之數等。故中兩率相乘。以首率除之。即得末率。而此則中兩數相加。與首末兩數相加之數等。故以首一數減之。即得末一數。其義一也。

第十四

凡依次遞加兩數。以第二數倍之。減去第一數。即得挨次之第三數也。如二。三兩數。將第二數三。倍之得六。內減去第



一數二。餘四。即是第三數。又如二。四。隔一數之兩數。將第二數四。倍之得八。內

減去第一數二。餘六。即是第三數。四與

六亦為隔一數也。又如三。六。隔二數之

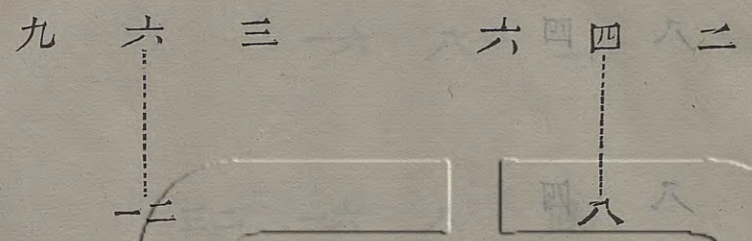
兩數。將第二數六。倍之得十二。內減去

第一數三。餘九。即是第三數。九與六亦

為隔二數也。蓋此即三率相連比例之

理。三率以中率自乘。與首末兩率相乘

之數等。故中率自乘。以首率除之。即得

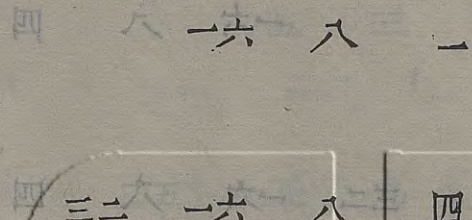
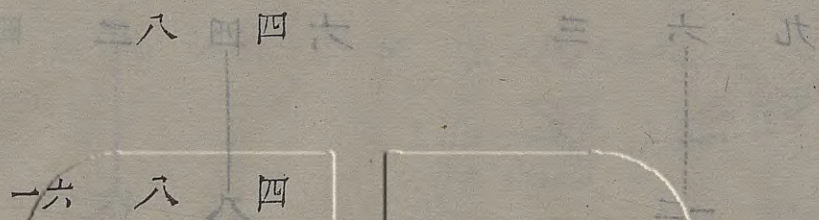




末率。而此則中數倍之。與首末兩數相加之數等。故以首數減之。即得末數。於此見加減乘除之相對待。而加減可以代乘除之理。亦可從此推矣。

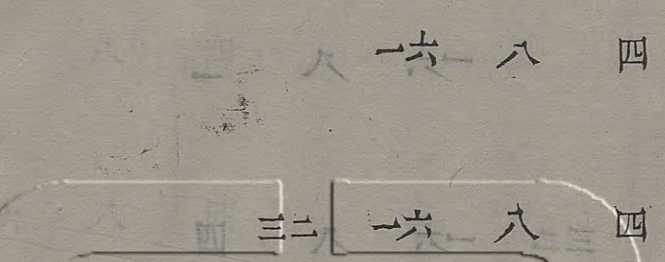
第十五

凡有彼此可以度盡兩數。欲求相連比例之數。則以一數自乘。以一數除之。即得相連比例之第三數也。如有四、八兩數。欲求第三數。如四與八之相連比例。



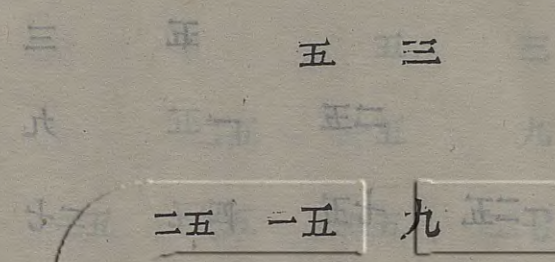
乃以八自乘得六十四。以四除之。得十六。此十六即為四與八相連比例之第三數。蓋八者四之二倍。而十六又為八之二倍。則八與十六之比例。必同於四與八之比例矣。如有三數。求第四數。仍如四與八之比例。則以第三數十六自乘。得二百五十六。以第二數八除之。得三十二。即為四、八、十六相連比例之第四數。蓋十六者四之四倍。而三十二者





八之四倍。則十六與三十二之比例。必同於四與八。八與十六之比例矣。如欲求連比例之第五數。或第六數。即以相近兩數依前法算之。由此遞生。可至於無窮焉。然此皆四與八之比例。或四與十六。或三與六。五與十之類。凡有彼此度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆如此求之。無不可得矣。

第十六



凡有彼此不可以度盡之兩數。欲依此兩數比例。求相連比例之數。則以一數自乘為第一率。而以又一數自乘為第二率。以兩數互乘為第二率。即為相連比例之三數也。如有三五兩數。欲求相連比例三數。皆如三與五之比例。乃以三自乘得九。以五自乘得二十五。以三與五相乘得十五。此九與十五。十五與二十五之三數。即如三與五之相連比



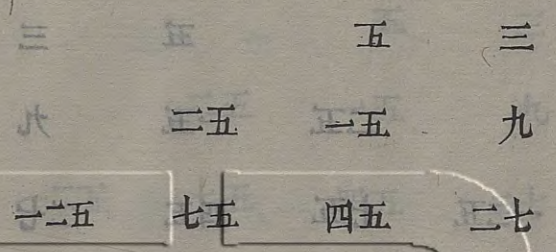
三	五	三	
二五	一五	九	
一二五	七五	四五	二七

例三數。蓋九為三之三。倍。而十五為五之三倍。則九與十五為三與五之比例。矣。而十五為三之五倍。二十五為五之五倍。則十五與二十五。亦為三與五之比例矣。又或已有三數。欲求第四數。皆如三與五之連比例。則以三乘九得二十七。以三乘十五得四十五。以三乘二十五得七十五。復以五乘九得四十五。五乘十五得七十五。五乘二十五得一

三	五	三	
二五	一五	九	
一二五	七五	四五	二七

百二十五。此所得六數內。四十五。七十五。各得二。今止用其一。故二十七。四十五。七十五。一百二十五之四數。即如三與五之相連比例數也。蓋二十七者三之九倍。而四十五者五之九倍。則二十七與四十五之比例。同於三與五之比例矣。又四十五者三之十五倍。而七十五者五之十五倍。則四十五與七十五之比例。同於三與五之比例矣。又七十



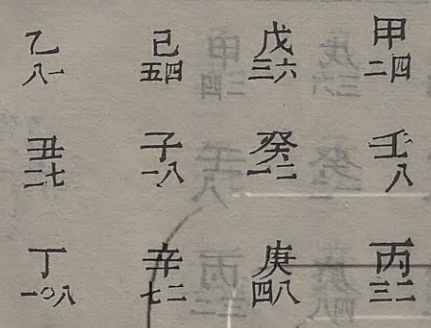


五者三之二十五倍。而一百二十五者五之二十五倍。則七十五與一百二十五之比例。亦同於三與五之比例矣。如欲求連比例之第五數或第六數。以原一數遞乘先得之幾數。復以又一數遞乘先得之幾數。去其相同者。所餘即成相連比例之數。由此求之。亦可至於無窮也。然此皆三與五之比例。或三與七。四與九。五與八之類。凡彼此不可以度

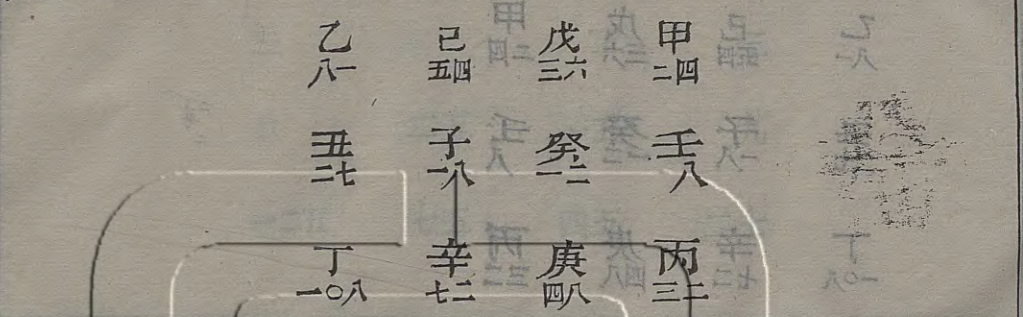
盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆倣此求之。而即得矣。

第十七

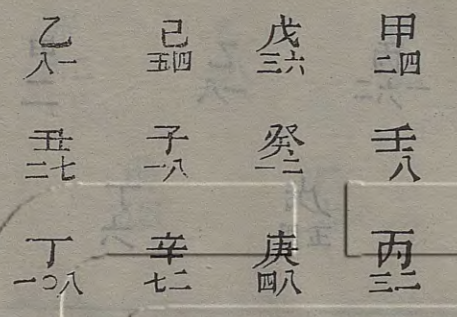
凡相當比例四數。其前兩數之間。有相連比例二數。其後兩數之間。亦必有相連比例二數也。設如有甲二十四。乙八。十一。丙三十二。丁一百零八。相當比例之四數。甲數二十四與乙數八十一之間。有戊三十六。己五十四之相連比例







兩數則丙數三十二與丁數一百零八之間亦必有庚四十八辛七十二之相連比例兩數也。試將甲戊己乙四數求其相當比例之至小數則得壬八癸十二子十八丑二十七之四數。其甲與乙之比即同於壬與丑之比而丙與丁之比原同於甲與乙之比則丙與丁之比亦必同於壬與丑之比矣。其比例既同則壬可以度盡丙丑亦可以度盡丁而

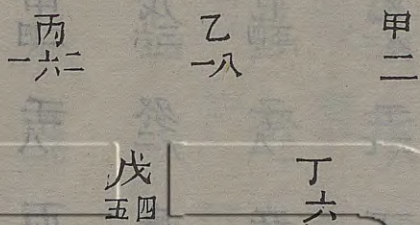


癸與子亦必可以度盡庚與辛。壬癸子丑各四倍之。即與丙庚辛丁等。是四次可以度盡也。是丙庚辛丁四數之比皆與壬癸子丑四數之比相同也。夫壬癸子丑原為甲戊己乙連比例相當之小數。今丙庚辛丁之比既與之相同則丙庚辛丁亦為相連比例之四數矣。既俱為相連比例數則戊己為甲乙兩數間之連比例數。庚辛為丙丁兩數間之連比例數無疑矣。

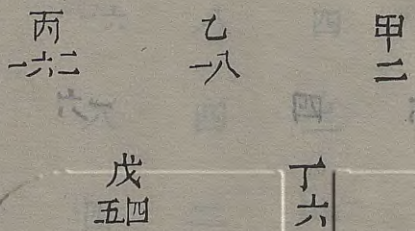


第十八

凡相連比例三數。其第一數與第二數之間。有相連比例一數。則第二數與第三數之間。亦必有相連比例一數也。設如有甲二。乙十八。丙一百六十二。相連比例之三數。其甲數二與乙數十八之間。有相連比例之丁數六。則乙數十八與丙數一百六十二之間。亦必有相連比例之戊數五十四也。蓋甲與乙之比。



同於乙與丙之比。今丁六為甲二之三倍。戊五十四亦為乙十八之三倍。則甲與丁之比。同於乙與戊之比。而丁六為乙十八之三分之一。戊五十四亦為丙一百六十二之三分之一。則丁與乙之比。亦同於戊與丙之比。因其比例皆同。故甲。丁。乙。戊。丙。為相連比例之五數。而丁。戊。兩數。為甲與乙。乙與丙。三數間之相連比例數可知矣。





四 八 一六 四 六 九

第十九 凡相連比例三數其首數與末數有用一數可以度盡者有用一數不可以度盡者如四八十六相連比例之三數其首數四與末數十六為彼此有一數可以度盡之數也如四六九相連比例之三數其首數四與末數九為彼此無一數可以度盡之數也然此兩種相連比例雖有度盡度不盡之分因其首數與

四 二 一 八 四 二 六 八 四 二

中數之比同於中數與末數之比故總謂之相連比例之數焉蓋末數可用首數平分即為有度盡之連比例數末數不可用首數平分即為無度盡之連比例數也且首末兩數彼此有一數可以度盡者此三數非相當比例之至小數若首末兩數彼此無一數可以度盡者此三數即為相當比例之至小數也如四八十六之三數其首末兩數為彼此



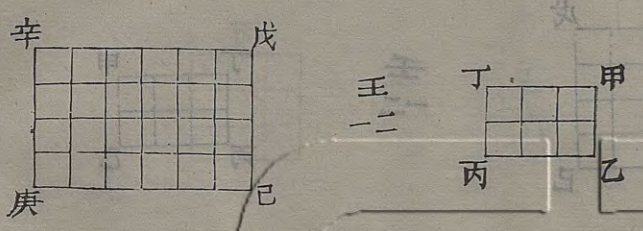
四	八	一六	八	四
二	四	八	四	二
一	二	四	二	一
九	六	四	四	一

有一數可以度盡之數。而中數亦必為  
 此一數可以度盡之數。試用二以度之。  
 則得二。四。八之連比例三數。或用四以  
 度之。則得一。二。四之連比例三數。皆與  
 四。八。十六之比例相同。而比四。八。十六  
 之數為小。故四。八。十六。非相當比例之  
 至小數也。如四。六。九之三數。其首末兩  
 數為彼此無一數可以度盡之數。故中  
 數亦為無一數可以度盡之數。既無一

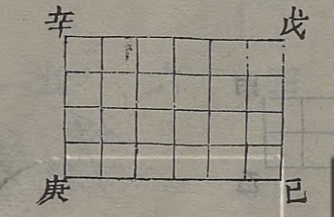
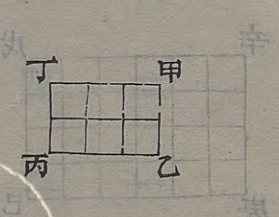
數可以彼此度盡。則為相當比例數內  
 之至小數也明矣。

第二十

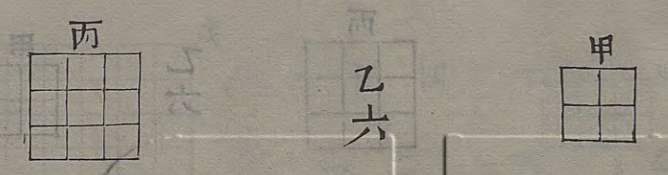
凡同式兩平方數。其間必有相連比例  
 一數也。如有甲乙丙丁六。戊己庚辛二  
 十四。同式兩平方數。此兩數之間。必有  
 壬十二為相連比例之一數焉。蓋甲乙  
 丙丁。戊己庚辛。既為同式平方數。則其  
 每邊皆可為比例。如甲乙二與甲丁三





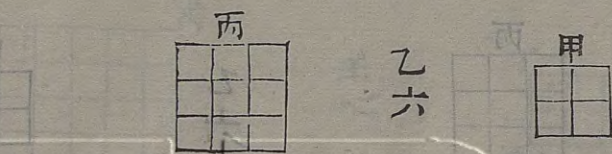


之比同於戊巳四與戊辛六之比。而甲乙二與戊巳四之比亦同於甲丁三與戊辛六之比也。今以甲丁三與甲乙二相因得六。甲丁三與戊巳四相因得十二。則六與十二之比同於甲乙二與戊巳四之比矣。又戊巳四與甲丁三相因得十二。戊辛六與戊巳四相因得二十四。則十二與二十四之比同於甲丁三與戊辛六之比矣。夫甲丁三與戊辛六



之比原同於甲乙二與戊巳四之比。則六與十二之比亦必同於十二與二十四之比矣。又若兩正方數之間亦必有相連比例之一數也。如有甲四丙九兩正方數。此四與九兩數之間必有乙六為相連比例之一數焉。蓋兩正方數其式既同。故必有相連比例一數。且兩正方數之比例同於其兩邊所作連比例。隔一位之比例。見幾何原本第七卷第五節。今甲方邊

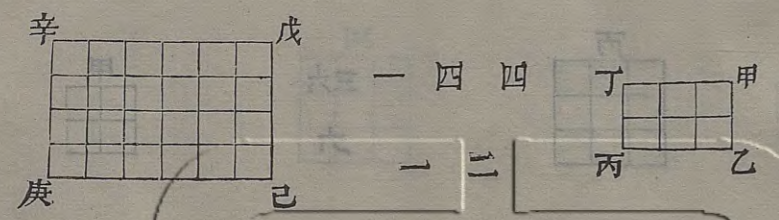




為二。丙方邊為三。求其與二。三相當連  
 比例之第三數。則以二自乘得四。以三  
 自乘得九。以二乘三得六。此四與六。六  
 與九之三數。即為與二。三相當之連比  
 例數。而其首數四與末數九。既與甲丙  
 兩方數等。則中數六亦必為甲丙兩方  
 數間之連比例數矣。

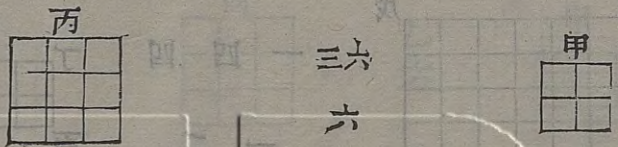
第二十一

凡同式兩平方數相乘。得數為正方形數

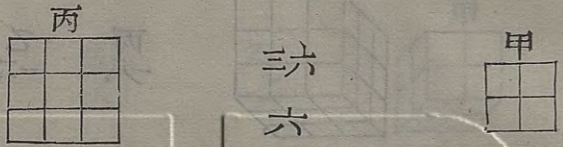


也。如有甲乙丙丁六。戊己庚辛二十四。  
 為同式兩平方數。相乘得一百四十四。  
 即為正方形數矣。蓋同式兩平方數之間。  
 原有相連比例一數。今此六與二十四  
 之間。必有十二之一數。且連比例三率。  
 以首末兩率相乘。與中率自乘之數等。  
 則此六與二十四兩平方數相乘所得  
 之一百四十四。即為中率十二自乘之  
 數矣。又若兩正方形數相乘。得數亦仍為





正。方。數。其。方。根。即。原。兩。方。根。相。乘。之。數。  
 也。如。有。甲。四。丙。九。兩。正。方。數。此。兩。數。相。  
 乘。得。三。十。六。仍。為。正。方。數。其。方。根。為。六。  
 亦。即。甲。方。根。二。與。丙。方。根。三。相。乘。之。數。  
 也。蓋。此。兩。方。數。俱。為。正。方。即。為。同。式。兩。  
 平。方。數。矣。因。其。式。同。故。相。乘。亦。仍。得。正。  
 方。數。也。凡。數。有。先。各。自。乘。而。後。相。乘。者。  
 有。先。相。乘。而。後。自。乘。者。其。理。無。異。故。其。  
 得。數。皆。等。今。以。二。自。乘。得。四。以。三。自。乘。

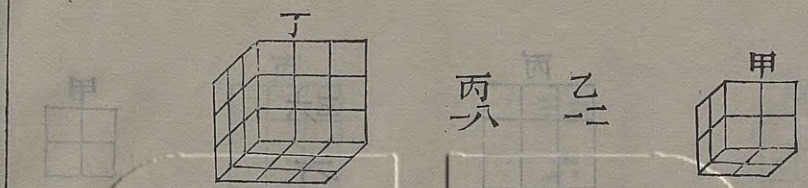


得。九。復。以。四。九。相。乘。得。三。十。六。此。先。各。  
 自。乘。而。後。相。乘。也。以。二。與。三。相。乘。得。六。  
 復。以。六。自。乘。得。三。十。六。此。先。相。乘。而。後。  
 自。乘。也。且。四。與。九。積。也。積。與。積。乘。仍。得。  
 積。二。與。三。根。也。根。與。根。乘。仍。得。根。此。亦。  
 理。之。必。然。者。也。

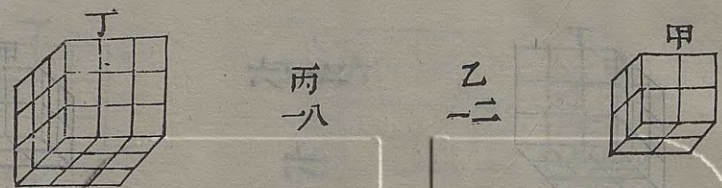
第二十二

凡。兩。正。立。方。數。之。間。必。有。相。連。比。例。之。  
 兩。數。也。如。有。甲。八。丁。二。十。七。兩。正。立。方。





數。此八與二十七之間。必有乙十二。丙十八。為相連比例之兩數焉。蓋兩正立方之比例。同於其兩邊所作連比例。隔二位之比例。見幾何原本十卷第四節。今甲方邊為三。丁方邊為三。求其與二。三相當連比例之第三第四數。則以二自乘得四。以三自乘得九。以二與三相乘得六。此四。六。九為連比例三數。又以二遞乘此四。六。九三數。得八。十二。十八之三連比例。

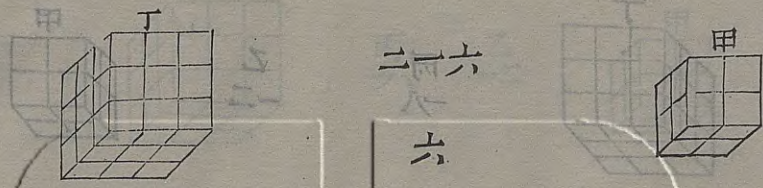


數復以三遞乘四。六。九三數。得十二。十八。二十七之三連比例數。除相同者不計。其二十七。即連比例之第四數。則八與十二。十二與十八。十八與二十七。皆為與二。三相當之連比例數。而其首數八與末數二十七。既與甲。丁。兩立方數等。則其中數之十二。十八。為甲。丁。兩立方數間連比例之兩數可知矣。

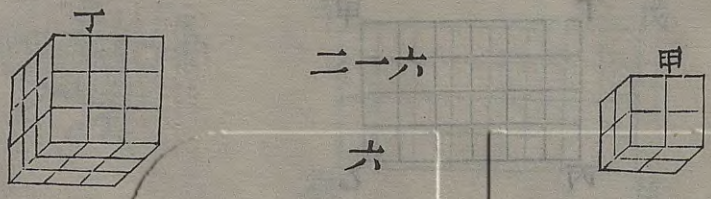
第二十三



凡兩正立方數相乘得數仍為正立方數。而其方根即原兩立方根相乘之數也。如有甲八丁二十七兩正立方數。此兩數相乘得二百一十六。仍為正立方數。而其方根為六。亦即甲立方根二與丁立方根三相乘之數也。蓋此兩立方數俱為正立方。即為同式兩立方數矣。因其式同。故相乘亦仍得正立方也。凡數有先自乘再乘。而後以所得之數相乘者。



有先以兩數相乘。而後以所得之數自乘再乘者。其得數皆等。故二自乘再乘得八。三自乘再乘得二十七。復以八與二十七相乘得二百一十六。此先各自乘再乘。而後以所得之數相乘也。以二與三相乘得六。復以六自乘再乘亦得二百一十六。此先以兩數相乘。而後以所得之數自乘再乘也。且八與二十七積也。以積乘積。仍得積。二與三根也。以

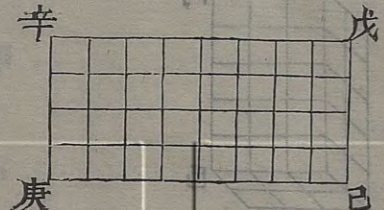
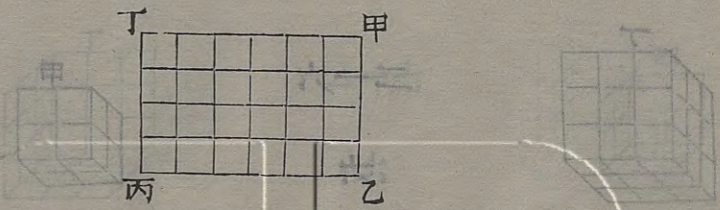




根乘根仍得根。此又理之自然者也。

第二十四 自乘再乘。且八與二十四

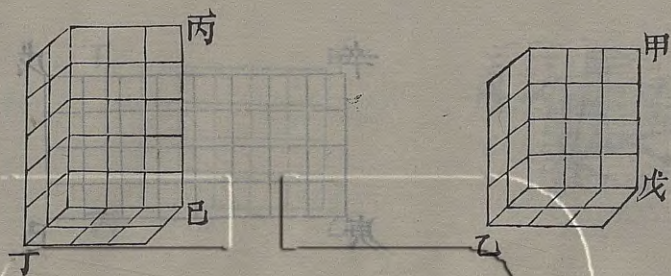
凡兩平方數。若一邊相等。則此兩平方之比例。同於其不等邊之比例也。如有甲丙。戊庚。兩平方數。其甲丙平方之甲乙邊為四。而戊庚平方之戊己邊亦為四。甲丙平方之乙丙邊為六。而戊庚平方之己庚邊為八。則此兩平方數二十四與三十二之比。即同於其不等邊六與八之比也。蓋甲乙平方數二十四者。四之六倍。而戊庚平方數三十二者。四之八倍也。然則二十四與三十二之比。即同於六與八之比矣。二十四與三十二之比。既同於六與八之比。則兩平方數之比例。同於其不等邊之比例可知矣。



第二十五 凡兩立方數。其底積相等。則此兩立方

凡兩立方數。其底積相等。則此兩立方





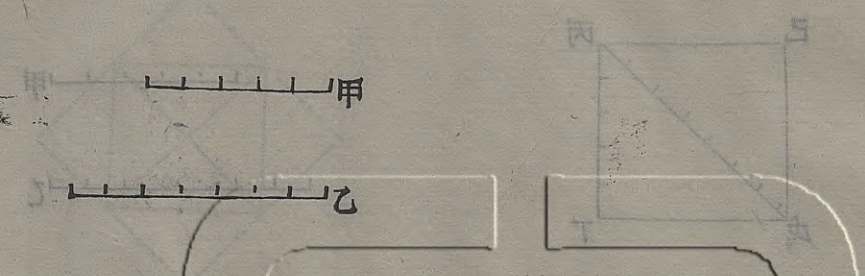
之比例。同於其高之比例也。如有甲乙丙丁兩立方數。其甲乙立方之戊乙底為六。而丙丁立方之已丁底亦為六。甲乙立方之甲戊高為四。而丙丁立方之丙已高為五。則此兩立方數二十四與三十之比。即同於其兩立方之高四與五之比也。蓋甲乙立方數二十四者。六之四倍。而丙丁立方數三十者。六之五倍也。然則二十四與三十之比。即同於

四與五之比矣。二十四與三十之比。既同於四與五之比。則兩立方數之比例。同於其高之比例可知矣。

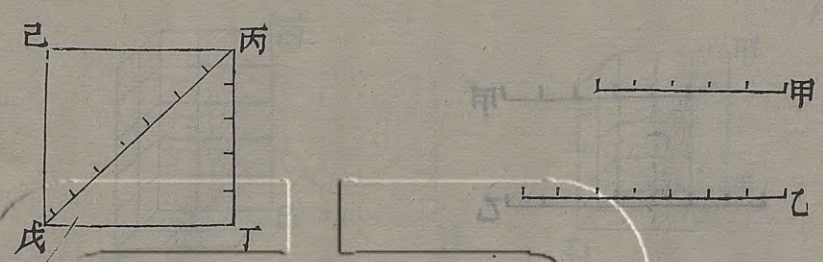
第二十六

凡兩線兩面兩體。用一度如尺寸之屬。可以

度盡者。此類之線。面。體。皆為有整分。可以度盡者也。設如有甲乙兩線。甲線分為五分。乙線如甲線度分之。得七分無餘。則此二線即為一度彼此可以度盡





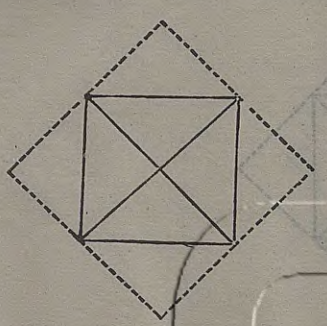


者矣。若將此二線各為正方面。各為正  
 方體。則其兩面。兩體。亦皆為整分彼此  
 可以度盡者也。至如兩線兩面。兩體。不  
 可以一度度盡者。此類之線。面。體。皆為  
 無整分可以度盡者也。如丙丁戊己方  
 面。其丙丁邊線為五分。而丙戊對角線  
 則為七分有餘。乃為彼此無度盡之數  
 矣。蓋以丙丁邊之五分為度。則丙戊線  
 得七分有餘。或將丙戊線為七分整。而

以其分為度。則丙丁線得五分不足。凡  
 此類之線。面。體。皆為無整分彼此可以  
 度盡之數也。

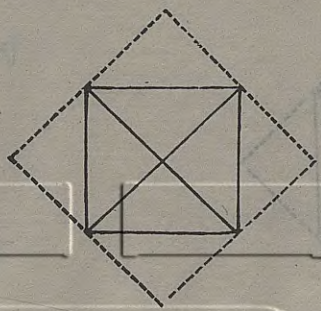
第二十七

凡正方一邊線。與對角線。無一度可以  
 彼此度盡者。蓋以本方積與對角線所  
 成方積比之。必有一數非正方數也。夫  
 對角線自乘所作之方數。為本方積之  
 二倍。如本方積一。則對角線所作之方





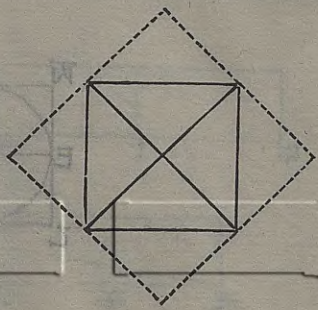
為一。本方積四。則對角線所作之方為八。此一與二。四與八之間。無相連比例之整數。故一為正方數。則二非正方數。四為正方數。而八亦非正方數。二與八既非正方數。則邊必有零餘而不能盡矣。或對角線所作方積為四。則本方積為二。對角線所作方積為十六。則本方積為八。此四與二。十六與八之間。亦無相連比例之整數。故四為正方數。而二



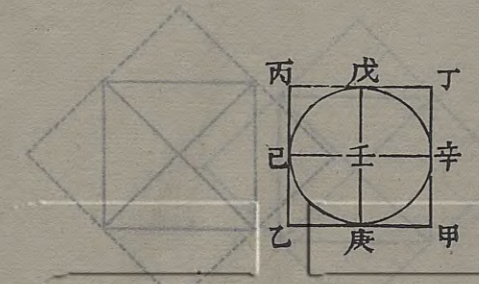
非正方數。十六為正方數。而八又非正方數。然則對角線所作方積。固為正方數。而本方積復不能成正方數。其邊必有零餘而不能盡矣。故凡正方邊線與對角線。斷無一度可以彼此度盡之理也。

第二十八

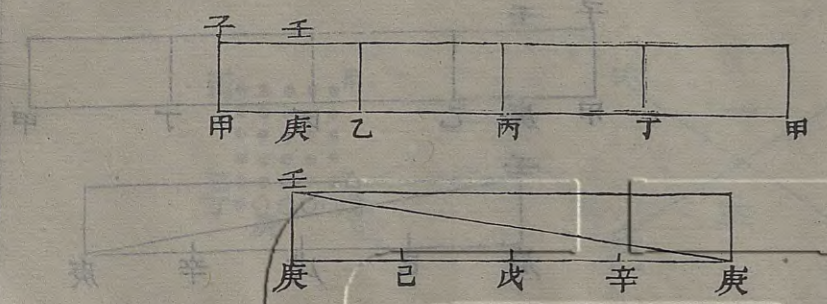
凡正方面與平圓面同徑者。其積之比例。同於其周圍邊線之比例也。如甲乙





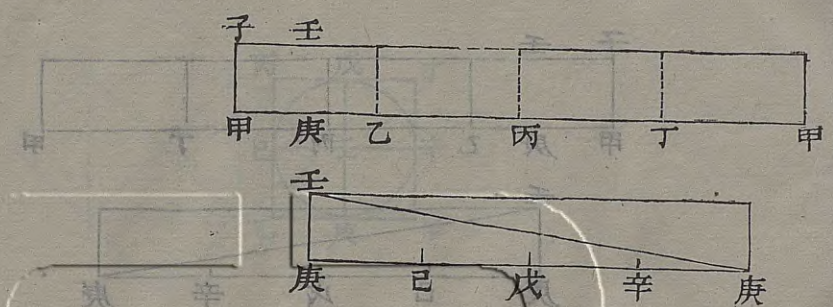


丙丁正方面。戊己庚辛平圓面。其戊壬庚之徑相等。則此方積與圓積之比例。同於方周於圓周之比例也。何以見之。以正方面之壬庚半徑為高。甲乙乙丙丙丁丁甲之全周為底。作一子甲直角長形方。則此長方形之積。比正方形之積。必大一倍。又以壬庚半徑為高。庚己己戊戊辛辛庚全周為底。作一壬庚直角長方形。則此長方形之積。比平圓形



之積亦必大一倍。凡直角三角形之小邊與圓形之半徑等。而三角形之大邊與圓形之全周等者。三角形之積與圓形之積等也。今此長方形與三角形同底同高。其積比三角形必大一倍。然則壬庚長方形。比圓形大一倍可知也。夫壬庚子甲兩長方形。既同以壬庚為高。則一邊數等。一邊相等。則其積之比例。必同於其不等邊之比例。而全與全之

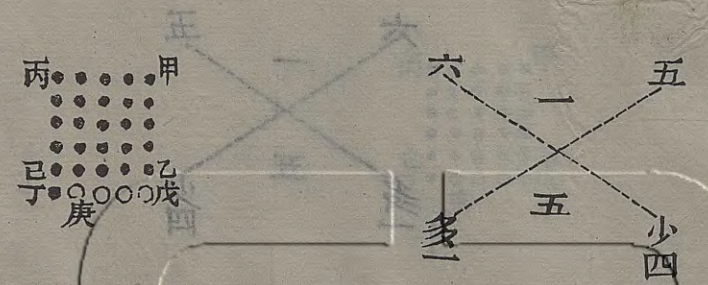




比例原同於半與半之比例。故兩長方形之比例。必同於庚庚與甲甲之比例。而方與圓之比例。亦必同於庚庚與甲甲之比例矣。甲甲即方周。而庚庚即圓周。然則方周與圓周之比例。豈非方積與圓積之比例乎。

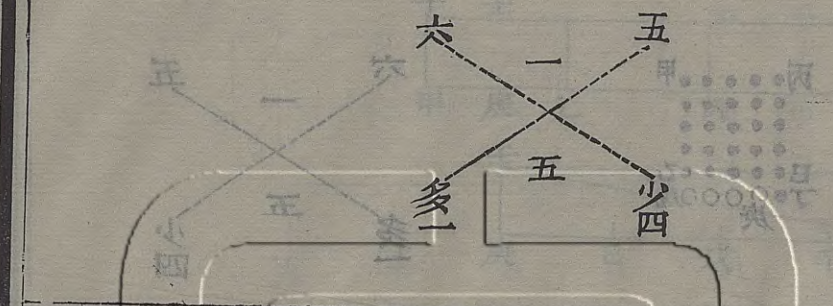
第二十九

凡有不知之一大數。用兩小數度之。不盡而一有餘。一不足者。其一多一少之



數相併。以兩小數之較度之。即得其度幾次之分。與大數之幾何也。如有一大數。用小數五度之多一數。用小數六度之。又少四數。則以多一與少四相加。得五。以六與五兩小數相減。餘一。為較數。除之。仍得五。即知兩小數各度五次也。試排點以明之。其甲乙五即小數五。丙丁六即小數六。以甲乙五累五次。則為甲乙己丙正。方二十五。多一為丁。以丙





丁六累五次。則為甲戊丁丙長方三十。少四為戊庚。於甲戊丁丙長方三十內。減去少數戊庚四為二十六。於甲乙己丙正方形二十五。加入多數丁一亦為二十六。是知大數有二十六。用此五六兩小數各度五次之分也。以丁一與戊庚四相加為丁戊五。以小數甲乙五與丙丁六相減餘一。以一除丁戊五仍得五。與甲丙相等。故甲丙為庚大數二十六。



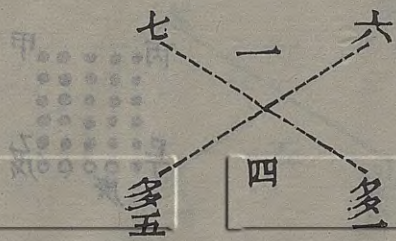
之五次數也。若以比例言之。其小數五與六相減所餘一者。乃度一次之較。而一多一少相併之戊丁五者。又為度五次之較。故以所餘一與度一次之比。即同於戊丁五與度五次之比。其比例既同。故其數亦相等也。

第三十

凡有不知之一大數。用兩小數度之不盡。而俱有餘。或俱不足者。其兩有餘或



兩不足之數俱相減。以兩小數之較度之。即得其度幾次之分。與大數之幾何也。如有一大數。用小數六度之多五數。用小數七度之仍多一數。則以兩多數相減。餘四。以六與七兩小數相減。餘一。為較數除之。仍得四。即知兩小數各度四次也。試排點以明之。其甲乙六即小數六。丙丁七即小數七。以甲乙六累四次。則為甲乙庚丙方二十四。多五為戊

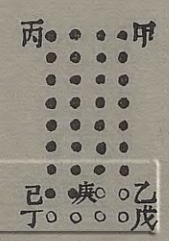
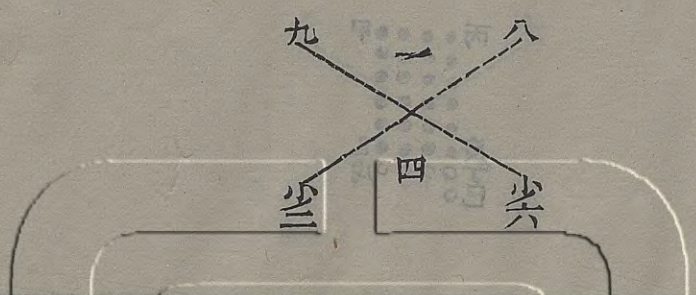


丁己。以丙丁七累四次。則為甲戊丁丙方二十八。多一為己。於甲乙庚丙方二十四。加入多數戊丁己五。得二十九。於甲戊丁丙方二十八。加入多數己一。亦得二十九。是知大數有二十九。用此六七兩小數各度四次之分也。以一與戊丁己五相減。餘戊丁四。以小數甲乙六與丙丁七相減。餘一。以一除戊丁四。仍得四。與甲丙相等。故甲丙為度大數



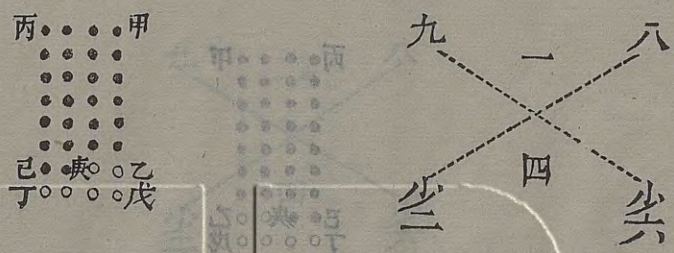


二十九之四次數也。若以比例言之。其兩小數相減所餘之一。乃度一次之較。兩多數相減所餘之戊丁四。乃度四次之較。故以一與度一次之比。即同於戊丁四與度四次之比也。又有不知之一大數。用小數八度之少二數。用小數九度之少六數。則以兩少數相減。餘四。以八與九兩小數相減。餘一。為較數除之。仍得四。即知兩小數各度四次也。今



作點排之。其甲乙八即小數八。丙丁九即小數九。以甲乙八累四次。則為甲乙巳丙方三十二。丙少二數為乙庚。以丙丁九累四次為甲戊丁丙方三十六。丙少六數為乙庚丁戊。於甲乙巳丙方三十二內。減去少數乙庚二為三十。於甲戊丁丙方三十六內。減去少數乙庚丁戊六亦為三十。是知大數有三十。用此八。九兩小數各度四次之分也。以乙庚





二與乙庚丁戊六相減餘戊丁四以小  
 數甲乙八與丙丁九相減餘一以一除  
 戊丁四仍得四與甲丙為相等故甲丙  
 為度大數三十之四次數也其比例亦  
 以兩小數相減所餘之較比度一次之  
 分即同於兩少數相減所餘之較比度  
 幾次之分也復有不知之一大數用兩  
 小數度之一小數度之而盡一小數度  
 之而不盡或有餘即以不盡之數或有餘  
或不足餘之

數或不  
 足之數用兩小數之較度之即得其度

幾次之分與大數之幾何其理皆相同  
 也

第三十一

凡數自少至多遞加之而各有定率者  
 謂之平加比例數也夫平加之數有每  
 次遞加一者為挨次遞加之數如一二  
 三四之類是也有每次遞加二者為超  
 位平加之數如一三五七之類是也  
或遞

四 三 二 一

七 五 三 一



一〇六三一 八四二一

一六九四一 二七九三一

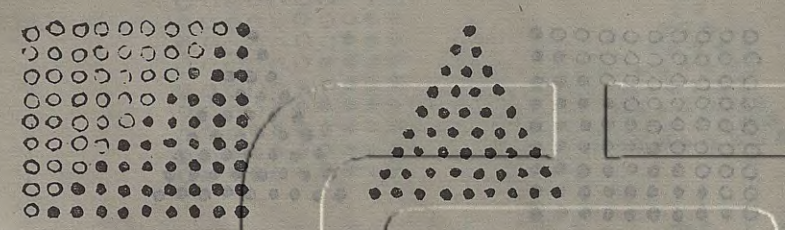
加三。或遞加四。或遞加五六。皆是一理。有每次增一加者。為按位相加之數。如一。三。六。十之類。其第二次加二。第三次加三。第四次加四。是也。有每次增二加者。為按位自乘之數。如一。四。九。十六之類。其第二次加三。第三次加五。第四次加七是也。復有一種倍加者。為挨次倍加之數。如一。二。四。八之類。每次皆加二倍。又如一。三。九。二十七之類。每次皆加三倍是也。遞加之

數雖多。按其條理求之。大抵不出此數端。今各列數分析於後。

第三十二

凡挨次遞加之數。將首數與末數相加。以位數乘之。所得之數折半即為總數也。如一。二。三。四。五。六。七。八。九之九數。其每次所加之數為一。將首數一與末數九相加得十。以位數九乘之得九十。折半得四十五。即是此九數之總數也。何

九八七六五四三二一



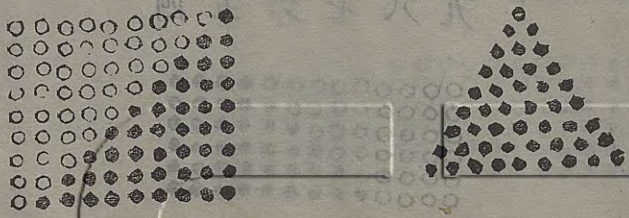


九 八 七 六 五 四 三 二 一 八 六



也。夫挨次遞加之數。為等邊三角平面形。而兩數相乘。即成四方形。今以位數九為高。末數九為底。相乘所得之正方形。其數八十一。較之總數則多。較之總數加倍之數又少。此所少即一行之數。爰知位數與底數相乘所得之數。比總數加倍之數少一行之數矣。既知挨次遞加之數為三角形。而位數與底數相乘之數為正方形。又知位數與底數相

九 八 七 六 五 四 三 二 一



乘之數。幾等於總積加一倍之數。則合兩三角形之數。適當總積加一倍之方數矣。兩三角形所合。其底數必比高數大一數。故末數九為底數者。加首數一。與高相乘。始成兩三角形所合之一方形焉。試將此九數作點排之。自上而下。上一下九。作為直角三角形。復將此九數另作一直角三角形。合於原三角形之側。則成一長方形。其高即位數。其底

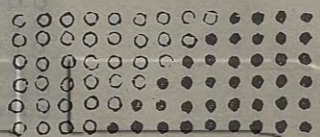


九八七六五四



卽末數與首數相加之數。其積卽爲總數。加一倍之數也。然則首數末數相加與位數相乘爲總數之倍數可知矣。又如四五六七八九之六數。欲知其總數。亦以首數四與末數九相加得十三爲底。以位數六乘之得七十八爲長方形。折半得三十九爲總數。其理與前同。若但知首數爲四。末數爲九。不知位數。則視首數四以上至一虛幾位。今虛三位。

九八七六五四



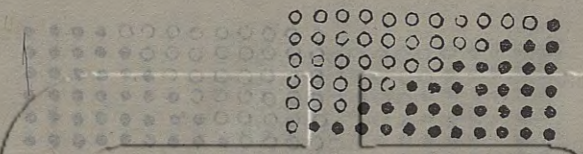
故以三與末數九相減。餘六卽位數也。何也。凡自一遞加之數。其末數卽位數。今首數爲四。計自一是少三位矣。故用三卽爲所少之位數。於末數內減去所少之位。卽爲今之所有之位數也。

第三十三

凡超位平加之數。亦將首數與末數相加。以位數乘之。得數折半爲總數也。如一三五七九十一之六數。每次皆將首

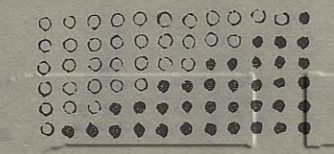


一 九 七 五 三 一



數一與末數十一相加得十二。以位數六乘之得七十二。折半得三十六。為此六位之總數也。蓋此超位平加之數。與挨次平加之理無異。其以首末兩數相加。與位數相乘者。總欲得此總數之倍數。以便折半取之也。試將此六位之數作六層排之。上一下十一。以首末數相加得十二。而以位數乘之。則六層皆為十二矣。上層本首數一加末數十一而

一 九 七 五 三 一



成十二。下層本末數十一加首數一而成十一。是首數末數俱加倍矣。二層本第二數三加第五數九而成十二。五層本第五數九加第二數三而成十二。是第二數第五數俱加倍矣。三層本第三數五加第四數七而成十二。四層本第四數七加第三數五而成十二。是第三數第四數亦俱加倍矣。其每位之數皆倍。則相乘所得之數。豈非此總數之倍



數乎。由此推之。每次加三加四或加五加六以至加七加八加九之類。凡係超位平加之數。其理無不相同也。

第三十四

凡每次按位相加之數。將位數加二與末數相乘。取其三分之一。即為總數也。如一。三。六。一十。十五之五數。其每次皆

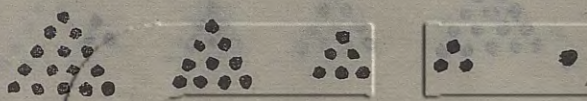
按位加之。

如第二位於第一位一上加二為三。第三位於第二位三

上加三為六。是也。

將位數五加二與末數十五

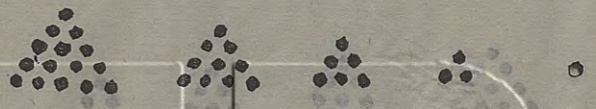
一 三 六 一〇 一五



相乘得一百零五。以三除之。得三十五。即是此五數之總數也。如或止有位數。或止有每一邊數。求總數。則以位數加一與位數相乘。得數。復以位數加二乘之。取其六分之一。即得總數也。若止有一邊數。即以每一邊數加一與每邊數相乘。得數。復以邊數加二乘之。取其六分之一。得數。蓋每次按位相加之數。層疊排之。其式成等邊三角體。其末一數即三角體底面數。而位數即每一邊之數。今



一五 一〇 六 三 一



以位數加二為高。末數為底。相乘即成  
 平行面之三稜體。凡同底同高之平行  
 面體。為尖體之三。則此平行面三稜  
 體內。必有等邊三角體之三。故以三  
 除之。即得也。然必以位數加二為高者  
 何也。以三三角體相湊。乃成上下相等  
 之平行面體。其高必比原有之位數多  
 二層。兩三角面相合。比原位數多一層。  
 今三三角體相合。故必比原位數  
 多二層也。如止以位數為高。即少二層之數。

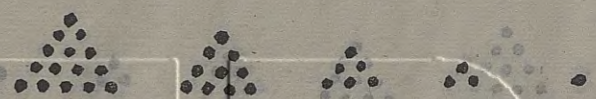
一五 一〇 六 三 一



而不足三三角體之分。故必以位數加  
 二乘之也。其止有位數。或每一邊數。求  
 總數。以位數加一。與位數相乘。復以位  
 數加二乘之。而用六除者何也。蓋位數  
 即底面之每邊數。而底面又為等邊之  
 三角面。今以邊數加一。與邊數相乘。成  
 長方面。為三角體底面之倍數。即如前  
 挨次遞加數之兩三角面相合所成之  
 長方形也。凡等高之體。底數倍者。積數



一五 一〇 六 三 一



亦倍。彼以位數加二。乘三角體之底。所成之平行面三稜體。既為等邊三角體之三倍矣。今以位數加二。乘三角體之倍底。所成之平行面長方體。又必為等邊三角體之六倍矣。以兩三稜體相合。即成長方體。一三稜體。必為三角體之三倍。則兩三稜體。必為三角體之六倍矣。故以六除平行面長方體之數。而得等邊三角體之數也。又或但知首數末數。而不知位數。則以末數倍之。用一為較數。開帶

縱平方。即得位數焉。蓋末數倍之者。即兩三角面所合之長方也。其闊即三角每邊數。其長比闊多一數。故用一為較。開帶縱平方。則得三角每邊之數。既得每邊數。即得位數矣。

第三十五

凡每次按位自乘相加之數。將位數折半。與末數相加。復以位數加一乘之。取其三分之一。即為總數也。如一。四。九。十

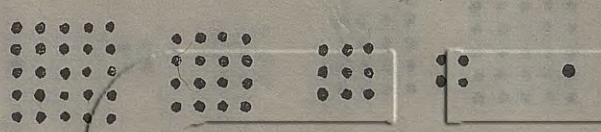


一 四 九 一六 二五



六。二十五之五數。其每位之數。皆按位自乘之數。如第二位之四。即二自乘數。第三位之九。即三自乘數也。將位數五折半為兩個半。與末數二十五相加。得二十七個半。復以位數五加一為六乘之。得一百六十五。以三除之。得五十五。即為此五數之總數也。如止有位數。或止有每一邊數。求總數。則以位數加半個。與位數相乘。得數。復以位數加一乘之。取其三分之一。即得總數。

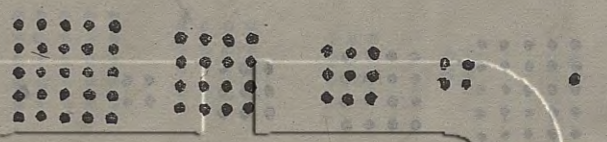
一 四 九 一六 二五



也。若只有每一邊數。即以每一邊數加半個。與每一邊數相乘。得數。復以每一邊數加一乘之。取其三分之一。得數亦同。蓋按位自乘相加之數。層疊排之。其式成方底四角尖體。其末一數。即四角尖體底面數。而位數即每一邊之數。今以位數折半與末數相加。則成長方面為底。再以位數加一為高乘之。即成平行面之長方體。凡同底同高之平行面體。為尖體之三倍。則此平行面長方體內。必有四角尖體之

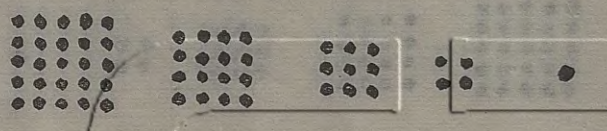


一 四 九 一六 二五



三倍。故以三除之即得也。然必以位數折半與末數相加為底。復以位數加一為高者何也。蓋三四角尖體相湊。乃成上下相等之長方體。其底比正方面必多半行。其高必比原有之位數多一層。三等邊三角體相合。比三角體原位數多二層。今三方底四角尖體相合。比原位數止多一層。蓋因方底比三角底式大一倍。故四角體高。比三角體高所加之數減一半也。如止以末數為底。則底必少半行之數。止以位數為高。則高復少一層。

一 四 九 一六 二五



之數。必不足三四角尖體之分。故以末數加位數之半。而以位數加一乘之。適足三四角尖體之分也。其止有位數。或每一邊求總數。以位數加半個。與位數相乘。復以位數加一乘之。而用三除之者何也。蓋位數即底面之每邊數。而底面又為正方面。今以邊數加半個。與邊數相乘。成長方面。比正方止多半行之分。其理即如求三角體總數。以邊數加

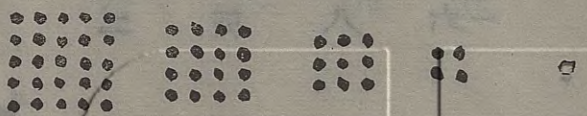


一 四 九 一六 二五



一與邊數相乘。為三角體底之倍數也。  
 以位數加一與底面相乘。成長方體。比  
 方底四角尖體大三倍。即如求三角體  
 總數。以位數加二與倍底相乘。為三角  
 體之六倍也。彼三角體底倍之為長方。  
 此四角體底數加半行即為長方。彼三  
 角體總數六倍為同邊長方體。此四角  
 體總數三倍為同邊長方體。故三角體  
 以邊數加一與邊數相乘者。今四角體

一 四 九 一六 二五



以邊數加半與邊數相乘。而三角體以  
 位數加二為高與倍底相乘者。今四角  
 體以位數加一與本底加半行相乘。總  
 之四角體底式。比三角體底式大一倍。  
 故立法時三角體加數幾何。而此四角  
 體皆用其半也。又或但知首數末數而  
 不知位數。則以末數開平方。即得位數  
 焉。蓋末數本為正方數。故開方即得每  
 邊數。既得每邊數。則得位數矣。



二 四 八 一六

凡每次倍加之數。將末數與加倍之數相乘。減去首數。復以所加之分數除之。即得總數也。如二四八十六四數。為每次以二倍之之數。欲求其總數。則以末數十六用二乘之。因以二倍之。故用二乘。得三十二。減去首數二。為三十。復以其所加分數一除之。仍得三十。即此四數之總數也。蓋以二加倍之數。其末一數。比前幾

三 九 二七 八一

位之總數。止多一首數。故二乘末數。則比末數多一分。仍多一首數。故減去首數二。而以一除之。即得總數也。又如三九二十七八十一四數。為每次以三倍之之數。欲求其總數。則以末數八十一用三乘之。以三倍之。故用三。得二百四十三。減去首數三。為二百四十。復以其所加分數二除之。得一百二十。即為此四數之總數也。蓋以三加倍之數。其末一數為



二五六 六四 一六 四

前幾數之倍數。而仍多一首數。今三乘末數。則比末數多二分。仍多一首數。三乘末數八十一。則為八十一者有三。除本數八十一。仍為多二分也。故必減去首數三。而以二除之。即得總數也。又如四十六。六十四。二百五十六。四數為每次以四倍之之數。欲求總數。則以末數二百五十六用四乘之。以四倍之。故用四。得一千零二十四。減去首數四。為一千零二十。復以其所加分數三除之。得三

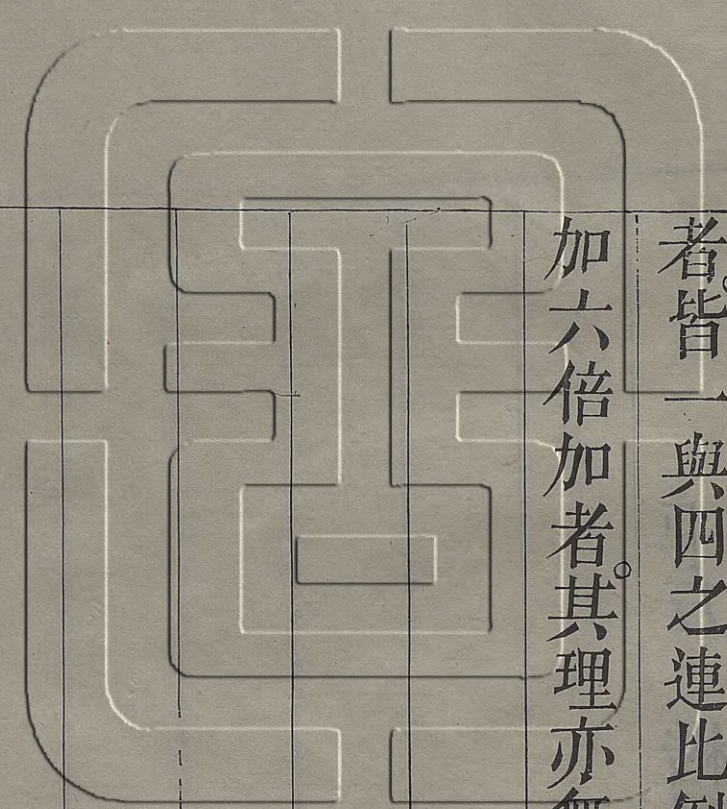
二五六 六四 一六 四

百四十。為此四數之總數也。蓋以四加倍之數。其末一數為前幾數之三倍。而仍多一首數。今四乘末數。則比末數多三分。仍多一首數。四乘末數二百五十六。則為二百五十六。者有四。除本數二百五十六。仍為多三分也。故必減去首數四。而以三除之。即得總數也。凡此倍加之數。不論加倍幾何。皆為相連比例之數。故其比例皆同。如遞加二倍之數。其四與八之比。同於二與四之比。即八與



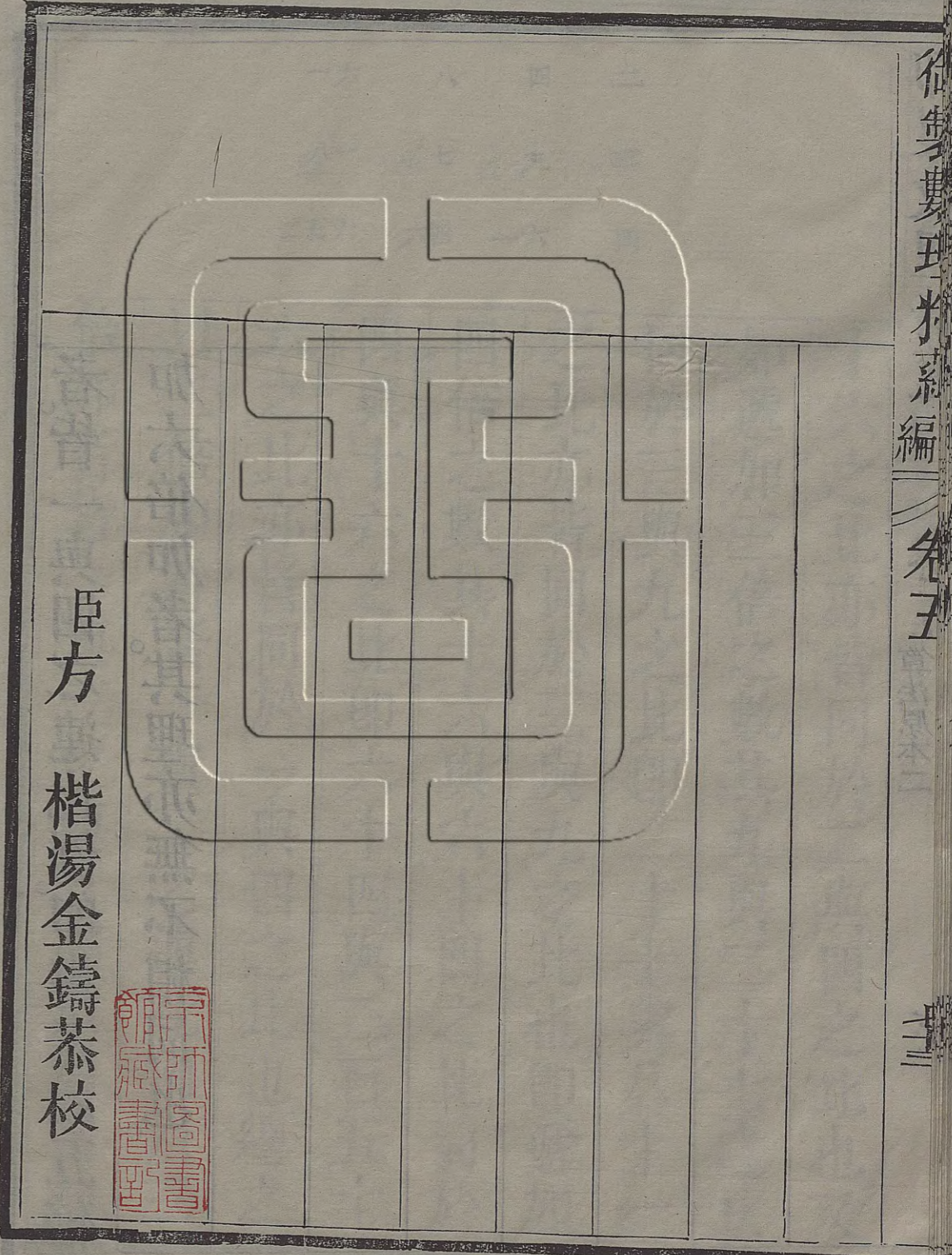
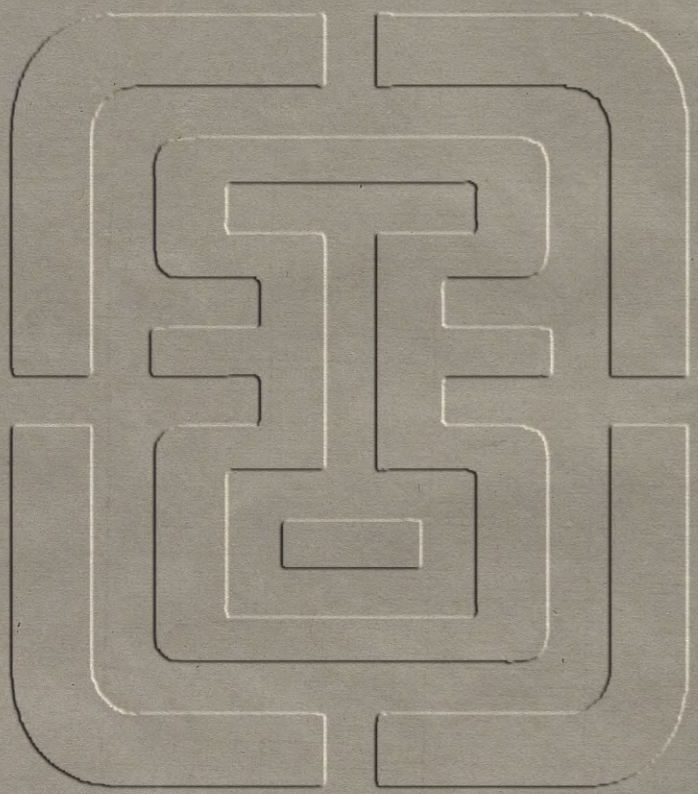
一六	八	四	二
八一	二七	九	三
二五六	六四	一六	四

十六之比亦皆同於二與四之比也。又如遞加三倍之數其九與二十七之比同於三與九之比。即二十七與八十一之比亦皆同於三與九之比也。即遞加四倍之數其十六與六十四之比同於四與十六之比。即六十四與二百五十六之比亦皆同於一與四之比也。總之以二倍加者皆一與二之連比例。以三倍加者皆一與三之連比例。以四倍加者皆一與四之連比例。以五倍加者皆一與五之連比例。即推之以五倍加六倍加者其理亦無不相同也。

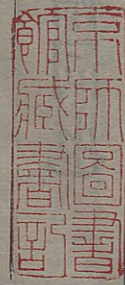


者皆一與四之連比例。即推之以五倍加六倍加者其理亦無不相同也。





臣方楷湯金鑄恭校



御製... 編... 卷五... 三



