

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 6

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 6.1. Zeige, dass die Menge der „symmetrischen“ 2×2 -Matrizen über einem Körper K , also Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{12} = a_{21}$$

erfüllen, mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K -Vektorraum bildet.

Übungsaufgaben

AUFGABE 6.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K . Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K -Vektorraum ist.

AUFGABE 6.3.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K . Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

AUFGABE 6.4. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 Untervektorräume sind:

- (1) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$,
- (2) $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$,
- (3) $V_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$,
- (4) $V_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

AUFGABE 6.5.*

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es seien $s_1, \dots, s_k \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^k s_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j.$$

Die folgenden vier Aufgaben zeigen, dass keines der Axiome für die Skalarmultiplikation eines Vektorraumes überflüssig ist.

AUFGABE 6.6.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K , eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V, (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(5) \quad 1u = u$$

erfüllt.

AUFGABE 6.7.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K , eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V, (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(6) \quad r(su) = (rs)u$$

erfüllt.

AUFGABE 6.8.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K , eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V, (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(7) \quad r(u + v) = ru + rv$$

erfüllt.

AUFGABE 6.9.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K , eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V, (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(8) (r + s)u = ru + su$$

erfüllt.

AUFGABE 6.10. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

AUFGABE 6.11. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

AUFGABE 6.12.*

Es sei D die Menge aller reellen 2×2 -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2 -Matrizen ist.

AUFGABE 6.13. Wir betrachten im \mathbb{Q}^3 die Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige $U = W$.

AUFGABE 6.14. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I := \text{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K -Vektorraum ist.

AUFGABE 6.15. Es sei K ein Körper, und seien $J \subseteq I$ zwei Indexmengen. Zeige, dass dann $K^J = \text{Abb}(J, K)$ in natürlicher Weise ein Untervektorraum von K^I ist.

AUFGABE 6.16. Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \text{Abb}(I, K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \{f \in K^I \mid f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

ein Untervektorraum von K^I ist. Zu jedem $i \in I$ sei $e_i \in K^I$ durch

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben. Man zeige, dass sich jedes Element $f \in E$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_i , $i \in I$, darstellen lässt.

Die folgenden vier Aufgaben verwenden Begriffe aus der Analysis.

AUFGABE 6.17. Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$C = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Cauchyfolge in } K\}.$$

Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$F = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Folge in } K\}$$

ist.

AUFGABE 6.18. Zeige, dass die Teilmenge

$$S = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

AUFGABE 6.19. Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

AUFGABE 6.20. Zeige, dass die Teilmenge

$$M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ monoton}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

kein Untervektorraum ist.

AUFGABE 6.21.*

Wir betrachten die Menge

$$M = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

die mit der stellenweisen Addition $+$ von Funktionen eine kommutative Gruppe ist. Auf dieser Menge bildet die Hintereinanderschaltung von Abbildungen \circ eine assoziative Verknüpfung mit der Identität als neutralem Element.

(1) Zeige, dass das Distributivgesetz in der Form

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

gilt.

(2) Zeige, dass das Distributivgesetz in der Form

$$h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$$

nicht gilt.

AUFGABE 6.22. Drücke in \mathbb{Q}^2 den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

AUFGABE 6.23. Drücke in \mathbb{C}^2 den Vektor

$$(1, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3 + 5i, -3 + 2i) \text{ und } (1 - 6i, 4 - i)$$

aus.

AUFGABE 6.24.*

Drücke in \mathbb{R}^3 den Vektor

$$(1, 0, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$

aus.

AUFGABE 6.25. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei v_i , $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i , $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i , $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

AUFGABE 6.26. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

- (1) Sei U_j , $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V . Dann ist auch der Durchschnitt

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

- (2) Zu einer Familie v_i , $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum.
 (3) Die Familie v_i , $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V , wenn

$$\langle v_i, i \in I \rangle = V$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6.27. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $s \in K$ und $v \in V$).

- (1) Es ist $0v = 0$.
- (2) Es ist $s0 = 0$.
- (3) Es ist $(-1)v = -v$.
- (4) Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.

AUFGABE 6.28. (4 Punkte)

Wir betrachten im \mathbb{Q}^4 die Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige $U = W$.

AUFGABE 6.29. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

AUFGABE 6.30. (3 Punkte)

Drücke in \mathbb{Q}^3 den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

AUFGABE 6.31. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und M eine Menge mit einer Verknüpfung

$$+: M \times M \longrightarrow M$$

und einer Abbildung

$$\cdot: K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(sx) = s\varphi(x)$$

für alle $x, y \in V$ und $s \in K$. Zeige, dass M ein K -Vektorraum ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9