MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVIII.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Roret, libraire,	chez Friedländer u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue Hautefeuille, 10 *bis*.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JUILLET 1895.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVIII.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, **Henrietta Str., 14.**

PARIS, chez RORET, libraire, **rue Hautefeuille, 10 bis.**

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn, **Carlstrasse, 11.**

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JUILLET 1895.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XVIII.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 1er JUILLET 1895.

Bureau.

Président,	M. Fr. Deruyts.
Vice-Président,	» J. Beaupain.
Secrétaire général,	» le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. Deruyts.

Membres effectifs.

1842 Selys Longchamps (baron E. de), membre de l'Académie royale de Belgique.

1853 Candèze, E., membre de l'Académie royale de Belgique, à Glain par Liége.

1855 Dewalque, G., professeur à l'université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique.

1860 Gillon, A., professeur à l'université.

1868 Graindorge, L. A. J., professeur à l'université.

1870 Masius, V., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
Vanlair, C., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.
1875 Swaen, A., professeur à l'université.
1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
1879 Jorissen, A., chargé de cours à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
1880 Neuberg, J., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.
1881 Fraipont, J., professeur à l'université.
1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
Ronkar, Ém., professeur à l'université.
Ubaghs, P., répétiteur à l'Université.
1885 Gravis, A., professeur à l'université.
1887 Lohest, M., chargé de cours à l'université.
Forir, H., répétiteur à l'Université.
Deruyts, Fr., docteur en sciences, répétiteur à l'université.
De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.
1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur au corps des mines.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1852 Ettingshausen (baron Constantin von), membre de l'Académie des sciences de Vienne, à Graz.
1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.
1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.
1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.
1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
Terssen, général, à Anvers.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1866 Ledent, professeur au collège communal de Verviers.
1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York (États-Unis).
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.
1870 Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.
1871 Imschenetski, membre de l'Académie, à Saint-Petersbourg.
Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Durége, professeur à l'université de Prague (Bohême).
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.
Le Boulengé, P., général.
1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gènes (Italie).
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).

1873 **Bates**, H., membre de la Société royale de Londres.
Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.
Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.
1874 **Winkler**, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).
1875 **Mansion**, P., professeur à l'université de Gand.
Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).
Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.
1876 **Balfour**, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.
1877 **Tissandier**, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.
1879 **Sylvester**, J. J., professeur à l'université d'Oxford.
Czuber, professeur, à Prague.
1880 **Cremona**, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.
Studnička, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.
Van der Mensbrugge, Gustave, professeur à l'université de Gand.
De Tilly, J., général, membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.
1881 **Sébert**, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.
Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.
Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.
Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
Quincke, professeur de physique, à Heidelberg.
Guiscardi, professeur à l'université de Naples.
Laisant, C. A., député, à Paris.
Beltrami, professeur à l'université de Pavie.
1882 **Mascart**, membre de l'Institut, à Paris.
Bouniakowski, membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
1883 **Breithof**, N., professeur à l'université de Louvain.

1883 MITTAG-LEFFLER, G., professeur à l'université de Stockholm.
GOMÈS TEIXEIRA, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.
1884 BIERENS DE HAAN, D., professeur à l'université de Leide.
1885 SCHUR, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.
PICQUET, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.
DE LONGCHAMPS (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
VANĚČEK, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).
CESÀRO, E., professeur à l'université, à Naples.
1887 WALRAS, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
MENABREA, marquis de Val-Dora, ambassadeur de S. M. le roi d'Italie, à Paris.
GUCCIA, docteur en sciences, à Palerme.
WULLNER, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
PAALZOW, directeur de l'École technique de Berlin.
1888 OCAGNE (Maurice D'), ingénieur des ponts et chaussées, à Paris.

II. — Sciences naturelles.

1848 KLIPSTEIN (VON), professeur à l'université de Giessen.
1853 WESTWOOD, professeur de zoologie à l'université d'Oxford (Angleterre).
WATERHOUSE, conservateur au Musée Britannique, à Londres.
1854 KÖLLIKER (VON), professeur à l'université de Wurzbourg (Bavière).
DROUET, H., naturaliste, à Charleville (France).
STAMMER, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).
ERLENMEYER, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).

1854 Lucas, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.
1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
1859 Marseul (abbé de), entomologiste, à Paris.
Beyrich, professeur à l'université de Berlin.
1860 Brücke, professeur à l'université de Vienne.
1862 Caspary, professeur de botanique à l'université de Königsberg (Prusse).
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Durieu de Maisonneuve, directeur du Jardin Botanique, à Bordeaux (France).
Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.
1865 Zeis, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle, à Dresde.
Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg (France).
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, de Bruxelles.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.
1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille (France).
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.
1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.
1870 Trautschold, professeur, à Carlsruhe
Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.
1871 Van Hooren, docteur en sciences, à Tongres.
Müller (baron von), botaniste du gouvernement, à Melbourne (Australie).

1871 THOMSON, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.

CAPELLINI (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 CLOS, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

HALL, James, paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).

WHITNEY, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

GLAZIOU, botaniste, directeur des Jardins impériaux à Rio de Janeiro.

LADISLAÕ NETTO, botaniste, directeur du Musée de Rio de Janeiro.

DE CARVALHO (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

MORENO, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

ARESCHOUG, professeur adjoint à l'université de Lund (Suède.)

1874 GEGENBAUER, professeur à l'université de Heidelberg.

HÄCKEL, professeur à l'université de Iéna.

WALDEYER, professeur à l'université de Berlin.

1875 EIMER, professeur à l'université de Tubingue.

DE LA VALETTE SAINT-GEORGE, professeur à l'université de Bonn.

RAY-LANKESTER, professeur à l'université de Londres.

PACKARD, professeur à l'université de Salem (États-Unis).

FLEMMING, W., professeur à l'université de Kiel.

PLATEAU, F., professeur à l'université de Gand.

1876 BALFOUR, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 MAC LACHLAN, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 HERTWIG, R., professeur à l'université de Munich.

STRASBURGER, professeur à l'université de Bonn.

BRONGNIART, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.
Bolivar, I., professeur, à Madrid.
Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
Renard, Alphonse, professeur à l'université de Gand.
1881 Key, Axel, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Retzius, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Meneghini, professeur à l'université de Pise.
Taramelli, professeur à l'université de Pavie.
Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
Sandberger, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.
1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.
1892 Pasteur, membre de l'Institut, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Observatoire royal.

Société entomologique de Belgique.

Société malacologique de Belgique.

Société royale belge de géographie.

Société belge de microscopie.

Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeur : P. Mansion, professeur à l'université.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*

Deutsche geologische Gesellschaft.

Entomologischer Verein.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Societé des sciences physiques et naturelles.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Istituto tecnico.*
Societa di scienze naturali e economiche.
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Dr H. G. Zeuthen professeur à l'université.
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMERIQUE.

ÉTATS-UNIS.

American Association for advancement of sciences.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge. — *Museum of comparative zoologigy.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*
Peabody Academy of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

CANADA.

Montréal. — *Geological Survey of Canada.*

Ottawa. — *Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.*

Toronto. — *Canadian Institute*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

Australian Association for advancement of science.

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

HISTORIQUE

ET

RÉSOLUTION ANALYTIQUE COMPLÈTE

DU

PROBLÈME DE MALFATTI

PAR

J. DEROUSSEAU

Professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liège.

HISTORIQUE

ET

RÉSOLUTION ANALYTIQUE COMPLÈTE

DU

PROBLÈME DE MALFATTI

I

Historique du problème de Malfatti.

Étant données trois droites qui se coupent dans un plan, on demande de construire trois cercles, tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux des droites données.

Ce problème, si remarquable par le nombre et par les noms des mathématiciens qui l'ont successivement étudié, semble avoir été résolu, pour la première fois, par Jacques Bernoulli (œuvres complètes, Genève, 1744), dans le cas particulier où les trois droites données déterminent un triangle équilatéral. Dans le cas plus général d'un triangle quelconque, il a été traité, pour la première fois, par Malfatti, géomètre italien, qui lui a donné son nom. Dans un mémoire intitulé : *Memoria sopra un problema stereotomico*, inséré dans les *Memorie di mathematica et di fisica della Societa italiana delle scienze* (tome X, parte 1, Modena, 1803), il a fait connaître des formules conduisant à une construction que l'on a rendue plus symétrique, depuis, sans la simplifier.

En désignant, d'une manière générale, par x, y, z les cercles cherchés; par C_x le point de contact du cercle x avec le côté c; par O et r le centre et le rayon du cercle inscrit, on a, d'après Malfatti,

$$AB_x = AC_x = \tfrac{1}{2}(p - r + AO - BO - CO).$$

En retranchant de la somme des segments positifs celle des segments négatifs, et en prenant la moitié du résultat, on détermine les points de contact du cercle x avec les côtés b et c du triangle donné.

Viennent ensuite les recherches algébriques de Gergonne et Lavernède. Le premier (*Ann. de mathématiques*, tome I, 1810) arrive à une expression compliquée des rayons des cercles cherchés. Il trouve

$$X = \frac{r}{AC_x} \times \frac{bc - (AO - BO)(AO - CO)}{b(c - AO + BO)^2 + 2AO(c - AO + BO)(b - AO + CO) + c(b - AO + CO)^2}$$

et cherche en vain à la ramener à celle de Malfatti :

$$X = \frac{r}{AC_x} \times \tfrac{1}{2}(p - r + AO - BO - CO).$$

On peut y parvenir par des transformations faciles, mais assez longues (Simons, *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1874, p. 92).

Les travaux de Tedenat et de Bidone (*Ann. de math.*, t. II), qui apparaissent ensuite, sont peu importants.

En 1820, Lehmus, docteur en philosophie à Berlin, publia, dans les *Annales de Gergonne* (t. X, p. 89), une démonstration rigoureuse des formules de Malfatti, basée sur la considération de grandeurs trigonométriques, et conduisant à une construction nouvelle des diamètres des cercles cherchés. On peut dire de cette solution qu'elle fut le point de départ de la plupart des recherches analytiques qui suivirent; celle de Steiner, dont nous parlerons bientôt, devait être le pivot des recherches purement géométriques.

« En variant les signes des radicaux d'une manière conve-
» nable, ajoute Lehmus à la fin de son article, et en substituant
» au cercle inscrit proprement dit chacun des trois cercles
» ex-inscrits, on obtiendra toutes les solutions dont le problème
» est susceptible. » On peut affirmer que ces dernières réflexions ne lèvent aucune des difficultés que présentent les autres cas.

Il s'agit, en effet, de modifier les signes d'une manière..... convenable, et de justifier ces modifications. A la suite du mémoire de Lehmus parurent successivement les calculs plus ou moins élégants de Crelle (*Sammlung mathematischer Aufsätze*, B. 1, p. 133, 1821), de Grünert (*Supplemente zü Klügel's Wörterbuch*, B. 1, p. 29), de Scheffler (*Grünert's Archiv*, B. 16).

En 1826 s'ouvre, avec Steiner, une nouvelle période dans l'histoire du problème. Ce géomètre publia dans le *Journal de Crelle* (tome I), une solution complète et purement géométrique de la question. Celle-ci n'était même considérée par l'illustre auteur que comme un cas particulier du problème plus général : « Étant données trois courbes planes sur une surface du second » degré, tracer, sur la même surface, trois autres courbes du » second degré qui se touchent entre elles, et telles que chacune » d'elles soit tangente aux deux autres ». Steiner présentait la solution du problème de Malfatti non généralisé comme une conséquence, malheureusement indémontrée, des principes qu'il établit dans le même article sous le titre : *Einige geometrische Betrachtungen*. Sa démonstration et la généralisation signalée plus haut devinrent bientôt l'objet de l'attention d'une série de géomètres. Leurs recherches, les unes analytiques, les autres purement géométriques, constituent un des chapitres les plus importants du développement historique du problème de Malfatti.

Signalons, dans l'ordre chronologique, la vérification de Zornow (*Journal de Crelle*, B. I, 178), résultant de considérations de mesure et de transformations algébriques; celle d'Adams (*Das Malfattische Problem neu gelöst*, Winterthur, 1846), analogue à la précédente. Les travaux purement algébriques de Cayley (*Cambridge and Dublin math. Journ.*, p. 270, t. XIV), Clebsch (*Bocchardsches Journal*, B. 53, p. 292) et Mertens ont surtout pour objet la généralisation signalée par Steiner.

C'est ainsi que le dernier de ces auteurs prouve que les formules de Malfatti peuvent s'appliquer au triangle sphérique.

Parmi les démonstrations géométriques de la solution de Steiner, signalons l'essai de Plücker (*Journal de Crelle*, t. II, p. 117), où l'auteur prouve, d'une façon très laborieuse et en partie analytique, que les bissectrices des angles du triangle ABC sont des tangentes aux cercles a_1, b_1, c_1 de Steiner; celui de Quidde (*Herforder Programm von* 1849); la solution de Mendthal (*Arch. de Grunert*, 55, p. 24, 1873), basée sur des théorèmes établis par Plücker; celle du docteur Hart (*Quarterly Journal*, t. I, p. 219); enfin celle de Desboves (questions de géométrie), dérivant d'un théorème de M. Manheim. Signalons surtout, d'une façon particulière, le travail de Binder (*Das Malfattische Problem*, Laupp, Tubingen, 1868), où l'auteur, après avoir établi une suite de théorèmes purement géométriques et relativement faciles, expose la solution généralisée de Steiner. La discussion des différents cas présentés par la figure est la seule qui soit complète; et elle ne pècherait que par sa longueur si elle n'était basée sur un théorème imparfaitement démontré, que nous énoncerons plus loin. L'auteur s'occupe même des cas où les cercles de Malfatti ont des contacts intérieurs; enfin il substitue trois circonférences aux trois droites données.

Ce travail est donc remarquable à plus d'un titre, et l'on s'explique difficilement l'omission du nom de Binder par la plupart des auteurs qui ont donné l'historique du problème de Malfatti. Notre discussion des différents cas de figure, basée d'ailleurs sur d'autres considérations et plus simple que la précédente, était déjà terminée lorsque M. Schröter a bien voulu nous envoyer l'ouvrage de Binder.

Nous tenons ici à exprimer toute notre reconnaissance au savant professeur de Breslau, auquel on doit d'ailleurs une solution géométrique remarquable du problème qui nous occupe (*Journal de Crelle*, t. 77, p. 1874).

Basée sur la méthode de transformation par figures inverses, la solution de M. Schröter est la seule, pensons-nous, qui dérive exclusivement des considérations dont Steiner fait précéder sa solution. Elle a été récemment reprise et simplifiée par M. Neuman (*Bericht des Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1889).

Mentionnons encore la remarquable solution d'Affolter (*Ann. de Clebsch*, t. VI, p. 597, et *Arch. de Grunert*, t. 57, 1874), le premier qui ait donné une démonstration purement géométrique du problème étendu à l'espace.

En ce qui concerne le problème considéré dans le plan, faisons remarquer que tous les auteurs signalés jusqu'ici, à l'exception de Binder, se bornent au cas de trois circonférences intérieures au triangle formé par les trois droites données. Il n'est pourtant pas le seul que Steiner ait envisagé. Celui-ci ajoute, en effet, qu'il existe d'autres solutions analogues à la première, ainsi qu'on pourra en juger par la traduction littérale que voici : « Il semble qu'à l'aide de ces douze cercles, et de la manière » indiquée ci-dessus, il y ait au moins huit solutions différentes ; » et comme la même chose aura lieu pour les points M_1, M_2, M_3, » le problème a donc au moins trente-deux solutions. » L'expression : il semble (*es scheint*) paraît indiquer que l'auteur n'a fait qu'entrevoir les solutions restantes; il pourrait y en avoir plus de trente-deux; il paraît moins probable que ce nombre doive être réduit. En fait, le nombre total de solutions est de trente-deux; mais la construction de Steiner ne conduit à ce nombre que par suite d'une association de cercles, qu'il n'a pas signalée et que Binder s'est efforcé de définir par l'énoncé suivant : « Si » l'on mène les bissectrices AO, BO, CO d'un triangle ABC, et » si l'on construit des cercles y et z tangents respectivement aux » trois côtés des triangles AOC, AOB, de telle manière qu'ils » soient vus du point A sous des angles égaux, la tangente » symétrique de AO, et commune à ces deux cercles, passe par » le point de contact du côté BC avec le cercle tangent de telle » manière aux côtés du triangle BOC, qu'il se trouve dans des » angles B et C égaux aux angles B et C des cercles y et z. » Ce théorème, dont l'énoncé pourrait se simplifier, est insuffisamment démontré par Binder.

On reproche généralement à la solution de Steiner d'être longue et graphiquement peu exacte. On ne paraît pas avoir remarqué jusqu'ici qu'il est possible de remédier à ce dernier inconvénient par la légère transformation qui suit.

Mais commençons par faire connaître la solution, telle qu'elle a été proposée par son auteur.

On divise les angles du triangle ABC en deux parties égales par les bissectrices AM, BM, CM; dans le triangle AMB, on inscrit la circonférence c_1, qui touche AB en C_1; et, dans le triangle BMC, on inscrit la circonférence a_1, qui touche BC en A_1; du point C_1 on mène à la circonférence a_1 la tangente C_1A_2: celle-ci sera l'axe radical de deux des circonférences cherchées.

A cette construction nous substituerons la suivante :

Soit C′ le point d'intersection de a_1b_1 avec la bissectrice CM; joignez $C'C_1$ qui sera l'axe radical de deux des circonférences cherchées. La démonstration est des plus simples : les droites CM, C_1A_2, étant des tangentes intérieures communes aux cercles a_1 et b_1, se couperont sur la ligne des centres en C′.

A la construction d'une tangente à un cercle, menée d'un point extérieur, nous substituons le tracé d'une droite passant par deux points connus.

En 1853, Schellbach avait fait connaître une solution remarquable, conduisant à une construction ingénieuse, quoique moins simple que celle de Malfatti. Comme ce dernier, d'ailleurs, il se bornait à montrer que les valeurs attribuées aux segments tels que AC_x satisfaisaient aux équations obtenues, sans résoudre directement celles-ci.

La solution de Schellbach, complétée, se retrouve dans divers ouvrages, parmi lesquels nous signalerons l'excellent traité de trigonométrie de Casey. Sous cette dernière forme, elle est simple et élégante, mais ne vise qu'un seul cas de figure.

En 1845, M. Catalan publia dans les *Nouvelles Annales* (t. V, p. 61) une solution du problème de Malfatti, d'après Lehmus. Cette solution, étendue et simplifiée, fut ensuite reproduite par le savant professeur dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (octobre 1874); on la retrouve encore dans ses *Mélanges mathématiques*. Elle est, sans contredit, celle des solutions analytiques qui donne les résultats les plus complets, sous une forme très claire. Elle sera notre point de départ dans ce travail où nous traiterons successivement tous les cas non résolus du problème, de manière à obtenir pour chacun d'eux une construction aussi simple et plus symétrique que celle de Malfatti.

En 1872, M. Desboves présentait, dans ses *Applications de trigonométrie,* trois méthodes de résolution du problème. En suivant la première, il signale les quatre cas suivants : « 1° les » trois cercles sont intérieurs au triangle ; 2° les trois cercles » sont toujours intérieurs au triangle, mais leurs points de con- » tact sont sur les prolongements des côtés; 3° les trois cercles » sont dans l'espace formé par le côté AB avec le prolongement » des deux autres; 4° deux des cercles sont inscrits dans les » angles 180°-B, 180°-A, et le troisième est compris dans » l'angle C, entre le sommet de cet angle et les deux autres » cercles. »

Faisons remarquer que l'énoncé du second cas est fautif. Les points de contact peuvent parfaitement ne pas se trouver tous sur les prolongements des côtés, même dans le cas visé par l'auteur. On doit regretter, à propos des nouveaux cas de figure envisagés, pour la première fois, d'une manière explicite par M. Desboves, qu'il n'ait pas cru devoir les traiter complètement et qu'il n'ait pas signalé les constructions se rattachant à chacun d'eux.

La seconde méthode, assez ingénieuse, subordonne la résolution du problème à celle de la question suivante : « Étant donné » un triangle, on propose d'y inscrire une droite DE, telle que » sa longueur soit égale à la somme des perpendiculaires DF, EG, » abaissées de ses extrémités sur le côté BC, et qui satisfasse de » plus à cette condition que son milieu se projette au point de » contact du côté BC avec le cercle inscrit au triangle ABC. »

On peut reprocher à cette méthode de s'appuyer sur une propriété que les solutions antérieures du problème ont seules fait connaître. A ce titre, elle se trouve dans l'impossibilité de traiter les cas, non résolus jusqu'ici, à chacun desquels correspond une propriété analogue, mais non déterminée.

La deuxième méthode n'est que celle de Schellbach complétée.

En 1888, M. Pelletereau, ingénieur en chef des ponts et chaussées, publie une solution nouvelle qui, au double point de vue de la simplicité et de l'exactitude, ne présente aucun avantage sur les résultats déjà acquis (Association française pour l'avancement des sciences). Il détermine les rapports de deux des rayons cherchés au troisième par l'intersection de deux couples de droites, cas particuliers de l'hyperbole; il obtient ainsi trois longueurs proportionnelles aux rayons cherchés.

M. Pelletereau, recherchant ensuite les différents cas de figure, découvre quatre cas principaux : trois d'entre eux avaient déjà été signalés par M. Desboves. Nous savons, par la solution de Binder, et nous verrons d'ailleurs plus loin par une discussion nouvelle, que la liste des cas envisagés par M. Pelletereau est loin d'être complète. Je laisse de côté les cas cinq et six de l'auteur, soumis à l'hypothèse où l'un des points de contact, tel que A_y, est commun à deux cercles. Cette hypothèse, introduisant des cas particuliers, devra être considérée à part. Steiner affirme qu'il y a, dans ce cas, quarante-huit solutions nouvelles.

Enfin, en 1889, dans les *Comptes rendus de l'Association mathématique de Palerme*, on trouve une solution à la fois simple et élégante de deux des cas du problème, due à M. Lebon, professeur au lycée Charlemagne.

Ces deux cas, dont l'un est celui de Malfatti ou des trois circonférences intérieures, sont les plus simples, par suite de la symétrie parfaite des trois cercles relativement aux angles du triangle. A ce titre, les deux solutions sont isolées; à chacune des autres, au contraire, correspondent trois groupes de trois cercles, ou trois solutions analogues. Après avoir traité le premier cas, M. Lebon ajoute : « Rappelons que Malfatti et tous » les géomètres qui ont publié des travaux sur son problème » n'ont considéré qu'un cas de figure ». On a vu, par ce qui précède, que cette assertion est loin d'être fondée. Lehmus avait fait allusion aux autres cas possibles; Steiner, après lui, les signale et en détermine même le nombre; Binder les indique explicitement en les traitant par la méthode de Steiner; M. Desboves signale quatre cas et les résout partiellement; il en est de même de M. Pelletereau.

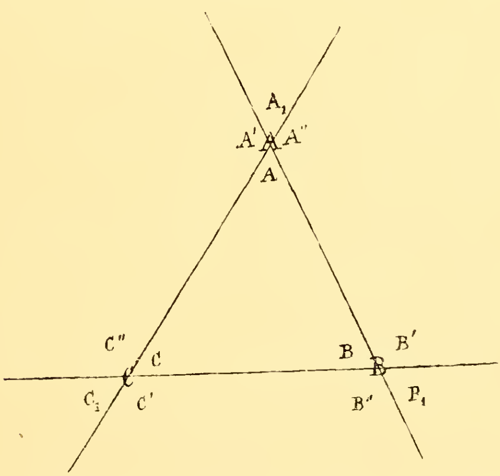
En résumé, jusqu'en 1889, un seul cas avait été traité d'une manière satisfaisante par une méthode analytique; M. Lebon en a ajouté un second.

Nous allons reprendre la discussion du problème, mettre en évidence les trente-deux cas qu'elle comporte, et traiter successivement chacun d'eux de manière à obtenir chaque fois une construction simple et symétrique.

II

Détermination du nombre de solutions.

Dans chaque cas, l'un au moins des cercles cherchés doit se trouver dans l'un des angles A, A_1, B, B_1, C, C_1 (fig.). En effet, supposons qu'il puisse en être autrement : on aurait alors l'une des combinaisons trois à trois formée par les angles $A', A'', B', B'', C', C''$; il y aurait au moins deux de ces régions appartenant à la notation prime ($'$), ou à la notation seconde ($''$), ce qui est impossible, ces régions n'ayant aucun point commun.



Puisqu'il en est ainsi, considérons les cas dans lesquels entrent successivement les régions A et A_1 ; ils auront leurs *symétriques* en B et B_1, en C et C_1. En désignant par A, B, C les cercles cherchés respectivement tangents aux deux côtés des angles A, B, C, et par points de contact *correspondants* deux points de contact appartenant à un même côté du triangle ABC; il y aura lieu de fixer la position relative de ces cercles en indiquant si les points de contact de A sont au-dessus ou au-dessous des points de contact correspondants de B et de C, et si le second point de contact de B est à droite ou à gauche du point correspondant de C. Nous y parviendrons facilement à l'aide des schémas suivants, se rapportant à la figure ci-dessus.

La région A peut se continuer avec les régions B et C des quatre manières symétriques suivantes:

(1)	(2)	(3)	(4)
A	C B	A	B C
C B ,	A ,	B C ,	A ,

Le schéma (1), par exemple, signifie que les points de contact de A sont au dessus des points correspondants de B et de C, le second point de contact de B se trouvant à la droite du point correspondant de C.

Les groupements 2, 3, 4 indiquent, dès lors, suffisamment les positions relatives des trois circonférences cherchées, pour qu'il soit inutile d'entrer dans d'autres détails.

Il n'y a pas lieu de considérer les cas où les cercles B et C auraient, relativement à A, des positions dissymétriques; ils rentrent, en effet, dans les cas immédiatement dérivés des premiers.

La région A peut se combiner avec C′ et B″; on obtient ainsi les deux schémas symétriques

(5)	(6)
A	C′ B″
C′ B″ ,	A ,

et les schémas dissymétriques

(7)	(8)
C′ A	A B″
B″ ,	C′

Le schéma (7), par exemple, indique que l'espace occupé par le cercle A est complètement fermé par la circonférence B''.

Enfin, la région A_1, pouvant se combiner avec C'' et B', donne de même quatre groupements, dont deux sont symétriques et deux dissymétriques, savoir :

$$\begin{array}{ccc} (9) & & (10) \\ \begin{matrix} & A_1 & \\ C'' & & B' \end{matrix}, & & \begin{matrix} C'' & & B' \\ & A_1 & \end{matrix}, \end{array}$$ groupements symétriques;

$$\begin{array}{ccc} (11) & & (12) \\ \begin{matrix} & C'' & \\ A_1 & & B' \end{matrix}, & & \begin{matrix} & B' & \\ C'' & & A_1 \end{matrix}, \end{array}$$ groupements dissymétriques.

Le schéma (11) indique que la circonférence C'' ferme l'espace occupé par le cercle A.

Les cas 1 et 4, absolument symétriques par rapport aux angles A, B, C, comme l'indiquent d'ailleurs les schémas correspondants, seront isolés : ce sont les deux seuls cas traités complètement jusqu'ici; les dix autres, ayant leurs analogues en B et C, donneront lieu à 10×3 ou à trente solutions, soit en tout trente-deux solutions différentes.

On remarquera, *a priori*, la grande analogie des cas 1 et 4, 2 et 3, 5 et 9, 6 et 10, 7 et 12, 8 et 11.

III

THÉORÈME. — ABC *étant un triangle rectangle en* C, M *et* M' *désignant les points de contact respectifs des cercles inscrit et ex-inscrit compris dans l'angle* A, *on aura les relations suivantes :*

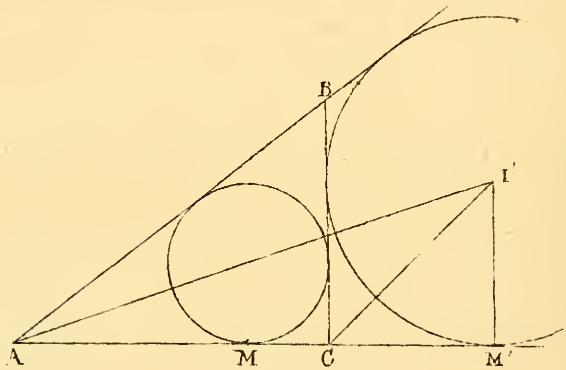
$$p = AM' = \frac{b}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}} . \qquad (1)$$

$$p - a = AM = \frac{b}{1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}} , \qquad (2)$$

$$p - b = CM' = \frac{b}{1 - \cotg \frac{A}{2}}, \quad (3)$$

$$p - c = CM = \frac{b}{1 + \cotg \frac{A}{2}}. \quad (4)$$

Démonstration. — Soit I' le centre du cercle ex-inscrit (fig.).



Pour démontrer la première de ces relations, par exemple, remarquons que l'on a

$$p = AM' = AC + CM' = AC + M'I' = b + AM' \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

d'où, successivement,

$$p = b + p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$p = \frac{b}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2}};$$

ce qui démontre la relation (1). Les suivantes se démontreraient d'une façon analogue.

Ce théorème nous servira, dans les différents cas du problème de Malfatti, à interpréter certains résultats.

IV

Notations.

A, B, C représenteront respectivement ceux des angles (A, A_1, A', A''), (B, B_1, B', B'') (C, C_1, C', C''), que l'on considère;

2α, 2β, 2γ	»	»	les suppléments des angles A, B, C;
t_1, t_2, t_3	»	»	les tangentes des angles $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$;
ct_1, ct_2, ct_3	»	»	les cotangentes des mêmes angles;
X, Y, Z	»	»	les centres des cercles cherchés;
x, y, z	»	»	les rayons des mêmes cercles;
B_x, C_x	»	»	les points de contact du cercle X avec les côtés b, c du triangle ABC; de même C_y et A_y, A_z et B_z représenteront les points de contact des cercles Y et Z;
A′, B′, C′	»	»	les projections du centre du cercle inscrit ou ex-inscrit sur les côtés a, b, c du triangle formé par les droites données;
A″, B″, C″	»	»	les points où les tangentes communes aux cercles cherchés couperont les côtés a, b, c du même triangle;

$\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ seront souvent remplacés par x', y' et z'.

Nous désignerons, comme d'habitude, par p le demi-périmètre du triangle ABC; par r le rayon du cercle inscrit à ce triangle, et par r_a celui des cercles ex-inscrits compris dans l'angle BAC, les centres de ces mêmes cercles étant respectivement O et O′.

Le cercle inscrit au triangle ABC sera appelé cercle tangent ABC; le cercle ex-inscrit à ce triangle et compris dans l'angle BAC sera appelé cercle tangent $\widehat{A}$BC. Grâce à cette dernière notation, nous pourrons énoncer certains résultats sous une forme claire et concise.

Outre notre solution, nous indiquerons dans chaque cas la solution correspondante de Steiner, complétée et simplifiée, comme il a été vu plus haut.

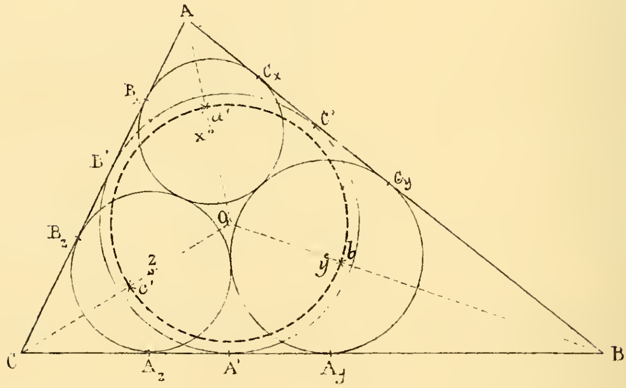
V

Résolution.

Premier cas :

A
C B .

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\ ; \qquad t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=1 \quad .$$



1. On a, évidemment,

$$AC_x + C_xC_y + C_yB = AC' + C'B,$$

ou

$$x \operatorname{tg}\alpha + 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tg}\beta = r(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta). \tag{1}$$

Posant $x = x'^2$, $y = y'^2$, et résolvant par rapport à x', on trouve

$$x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\sqrt{y\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) + r\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)},$$

ou bien

$$x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\sqrt{r\sin\alpha\sin\gamma - y\cos\alpha\cos\gamma}\ .$$

2. Le second membre est une fonction symétrique de α, γ; donc

$$x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = z' \sin \gamma + y' \cos \gamma; \qquad (2)$$

puis, par permutation tournante,

$$y' \sin \beta + z' \cos \beta = x' \sin \alpha + z' \cos \alpha, \qquad (3)$$

$$z' \sin \gamma + x' \cos \gamma = y' \sin \beta + x' \cos \beta. \qquad (4)$$

Les équations (2) et (3) suffisent pour déterminer les rapports entre x', y' et z'. On déduit de (2) et (3) :

$$y' (\cos \alpha - \cos \gamma + \sin \beta) = z' (\cos \alpha - \cos \beta + \sin \gamma),$$

d'où

$$y' \cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = z' \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right),$$

ou bien

$$y' (1 + t_3) = z' (1 + t_2).$$

Donc, finalement,

$$\frac{x}{(1 + t_1)^2} = \frac{y}{(1 + t_2)^2} = \frac{z}{(1 + t_3)^2}. \qquad (5)$$

3. En représentant par l la valeur commune des trois rapports, l'équation (1) devient

$$l \left\{ \frac{t_1 (1 + t_1)}{1 - t_1} + (1 + t_1)(1 + t_2) + \frac{t_2 (1 + t_2)}{1 - t_2} \right\} = r \left(\frac{t_1}{1 - t_1^2} + \frac{t_2}{1 - t_2^2} \right).$$

On déduit de celle-ci

$$l = r \times \frac{t_1 + t_2}{(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_1 + t_2 - t_1 t_2)},$$

qui, par suite de la relation

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 1,$$

donne

$$l = \frac{r}{(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_3)}.$$

Les relations (5) donnent

$$x = r \times \frac{1 + t_1}{(1 + t_2)(1 + t_3)},$$

$$y = r \times \frac{1 + t_2}{(1 + t_3)(1 + t_1)}.$$

$$z = r \times \frac{1 + t_3}{(1 + t_1)(1 + t_2)},$$

$$\sqrt{yz} = \frac{r}{1 + t_1}, \qquad \sqrt{zx} = \frac{r}{1 + t_2}, \qquad \sqrt{xy} = \frac{r}{1 + t_3}.$$

4. Il résulte de ces formules et du théorème rappelé précédemment (III), que l'on a

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,A_yA_z &= \tfrac{1}{2}(AO + OC' - AC'),\\
\tfrac{1}{2}\,B_zB_x &= \tfrac{1}{2}(BO + OA' - BA'),\\
\tfrac{1}{2}\,C_zC_y &= \tfrac{1}{2}(CO + OB' - CB').
\end{aligned}$$

5. *Recherche des points* A'', B'', C''. On a

$$CA'' = CA_z + A_zA'' = z \operatorname{tg} \gamma + \sqrt{yz}.$$

En remplaçant z et $\sqrt{yz}$ par leurs valeurs, on obtient

$$CA'' = r\,\frac{1 + t_2 + t_3 - t_2t_3}{(1 + t_1)(1 + t_2)(1 - t_3)},$$

ou bien

$$CA'' = r\,\frac{t_3 + t_2}{(1 + t_2)(1 - t_3)} = r\left\{\frac{1}{1 - t_3} - \frac{1}{1 + t_2}\right\},$$

$$CA'' = \tfrac{1}{2}(CA' + A'O + OC) - \tfrac{1}{2}(OB + OA' - A'B),$$

ou, finalement,

$$CA'' = \tfrac{1}{2}(CB + OC - OB).$$

Le point A'' est donc le point de contact du cercle tangent BCO avec le côté a.

De même, les cercles tangents CAO, ABO déterminent les points B'' et C''.

6. *Recherche des points de contact.* — La recherche des points de contact revient, évidemment, à déterminer les segments AB_x, BC_y, CA_z.

Or, on a

$$\begin{aligned} CA_z &= CA'' - A''A_z, \\ &= \tfrac{1}{2}(CB + OC - OB - AO - OC' + AC'), \\ &= \tfrac{1}{2}(CO - AO - BO + p - r). \end{aligned}$$

On déduit de là

$$CO - CA_z = \tfrac{1}{2}(AO + BO + CO - p + r).$$

La symétrie du second membre fournit les égalités

$$AO - AB_x = BO - BC_y = CO - CA_z = \tfrac{1}{2}(AO + BO + CO - p + r) = \rho.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} AB_x &= AO - \rho, \\ BC_y &= BO - \rho, \\ CA_z &= CO - \rho \end{aligned}$$

De là résulte la construction si élégante de *Simons* :

« *Du centre* O *du cercle inscrit au triangle et avec le rayon* » $\rho = \frac{1}{2}(AO + BO + CO - p + r)$, *on décrit une circonfé-* » *rence qui coupe respectivement les bissectrices aux points* f, i, h; » *puis des points* A, B *et* C *comme centres, avec les rayons* » Af, Bi, Ch, *on décrit des arcs de cercle qui, par leur rencontre* » *avec les côtés du triangle, donneront les points de contact des* » *circonférences cherchées* »;

ou bien encore :

Les circonférences décrites des sommets du triangle donné comme centres, et qui coupent respectivement à angle droit les circonférences cherchées, passent à la même distance du centre du cercle inscrit.

Note. — Cette solution est, aux notations près, celle de M. Catalan (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1874).

On connait la solution de Steiner, correspondant à ce premier cas.

Deuxième cas :

$$\overset{C \quad B}{A} \,.$$

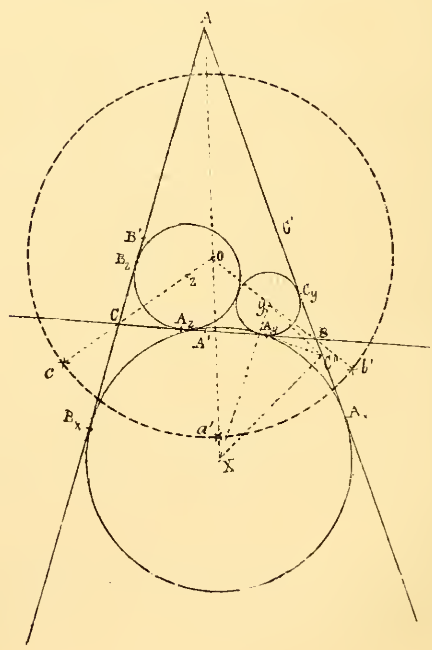
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}; \qquad ct_1 + ct_2 + ct_3 = ct_1 ct_2 ct_3 .$$

1. On a, évidemment,

$$AC_x - C_xC_y + C_yB = AC' + C'B,$$
$$BA_y + A_yA_z + A_zC = BA' + A'C;$$

ou

$$x \operatorname{tg}\alpha - 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tg}\beta = r(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta), \tag{1}$$
$$y \operatorname{tg}\beta + 2\sqrt{yz} + z \operatorname{tg}\gamma = r(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma). \tag{2}$$



On en déduit, par des calculs analogues à ceux qui précèdent,

$$x' \sin\alpha - y' \cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}} \sqrt{r \sin\alpha \sin\gamma + y \cos\alpha \cos\gamma},$$

$$z' \sin\gamma + y' \cos\gamma = \quad \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}} \sqrt{r \sin\alpha \sin\gamma + y \cos\alpha \cos\gamma};$$

on a donc

$$x' \sin\alpha - y' \cos\alpha = \pm (z' \sin\gamma + y' \cos\gamma). \tag{3}$$

2. Pour déterminer le signe qu'il convient de donner au second membre, reportons-nous au triangle XYC″ de la figure. Celui-ci donne

$$\frac{C''X}{C''Y} = \frac{x'}{y'} = \operatorname{cotg} YXC''.$$

Mais on a, évidemment,

$$2YXC'' = YXC_x < B_xXC_x,$$

ou bien

$$2YXC'' < 2\alpha,$$

d'où

$$YXC'' < \alpha.$$

Ces angles étant aigus, on a donc

$$\operatorname{cotg} YXC'' > \operatorname{cotg} \alpha,$$

ou bien

$$\frac{x'}{y'} > \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$x' \sin\alpha - y' \cos\alpha > 0.$$

Le second membre de la relation (3) doit donc prendre le signe $+$, ce qui fournit l'égalité

$$x' \sin\alpha - y' \cos\alpha = z' \sin\gamma + y' \cos\gamma. \tag{4}$$

La comparaison des équations relatives aux côtés a et b donne de même

$$x' \sin\alpha - z' \cos\alpha = y' \sin\beta + z' \cos\beta. \tag{5}$$

3. On déduit des relations (4) et (5), par une série de transformations algébriques analogues à celles qui précèdent,

$$\frac{x'}{1+t_1} = \frac{y'}{ct_2 - 1} = \frac{z'}{ct_3 - 1},$$

4. Posons, comme précédemment,

$$\frac{x}{(1+t_1)^2} = \frac{y}{(ct_2 - 1)^2} = \frac{z}{(ct_3 - 1)^2} = l. \tag{6}$$

En remplaçant, dans l'équation (2), y et z par leurs valeurs, et tenant compte de la relation entre les cotangentes, on obtient

$$l = \frac{r}{(1+t_1)(ct_2 - 1)(ct_3 - 1)}.$$

Les relations (6) donnent

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r(1+t_1)}{(ct_2 - 1)(ct_3 - 1)} \\ y &= \frac{r(ct_2 - 1)}{(1+t_1)(ct_3 - 1)} \\ z &= \frac{r(ct_3 - 1)}{(1+t_1)(ct_2 - 1)} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

On en déduit

$$\sqrt{yz} = \frac{r}{1+t_1},$$

$$\sqrt{zx} = \frac{r}{ct_2 - 1},$$

$$\sqrt{xy} = \frac{r}{ct_3 - 1}.$$

On a donc (III, théorème),

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,A_yA_z &= \tfrac{1}{2}(AO + OC' - AC') \\ \tfrac{1}{2}\,B_zB_x &= \tfrac{1}{2}(BO + BA' - OA') \\ \tfrac{1}{2}\,C_xC_y &= \tfrac{1}{2}(AO + AC' - OC') \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

5. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On a

$$BC'' = \sqrt{xy} - BC_y,$$

d'où résulte, en tenant compte des relations (7) et (8), et toutes réductions faites,

$$BC'' = r\left\{\frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{ct_2+1}\right\}.$$

On déduit de là

$$BC'' = \tfrac{1}{2}(AO + OC' - AC') - \tfrac{1}{2}(BC' + C'O - BO),$$

ou

$$BC'' = \tfrac{1}{2}(AO + BO - AB).$$

On obtient, de même,

$$AB'' = \tfrac{1}{2}(AO + OC + AC),$$
$$CA'' = \tfrac{1}{2}(BC + BO - CO).$$

Les points A″, B″, C″ *sont donc les points de contact des cercles tangents* $\widehat{BCO}$, $\widehat{CAO}$, $\widehat{ABO}$ *avec les côtés* a, b, c *du triangle* ABC.

6. *Recherche des points de contact.* — On a

$$\begin{aligned} CA_z &= CA'' - \sqrt{yz} \\ &= \tfrac{1}{2}(BC + BO - CO - AO - OC' - AC'). \\ &= \tfrac{1}{2}(BO - CO - AO + p - r). \end{aligned}$$

On trouve de même

$$BA_y = \tfrac{1}{2}(CO - AO - BO + p - r),$$
$$AC_x = \tfrac{1}{2}(AO + BO + CO + p - r).$$

Ces relations fournissent les points de contact par un procédé très simple, identique à celui de Malfatti.

Remarquons que l'on a

$$\rho = AC_x - AO = BA_y + BO = CA_z + CO = \tfrac{1}{2}(BO + CO - AO + p - r).$$

On déduit de là

$$AB_x = AC_x = \rho + AO,$$
$$BC_y = BA_y = \rho - BO,$$
$$CA_z = CB_z = \rho - CO.$$

7. Solution. — *Du point* O *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}(BO + CO - AO + p - r)$, *décrivez une circonférence qui coupe les bissectrices* AO, BO, CO *respectivement en* a, b' *et* c' : Aa, Bb' *et* Cc' *représenteront respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Remarque. — La notation a se rapporte au cas où Oa et OA auraient des directions contraires; la notation a' indiquera, au contraire, que ces directions sont les mêmes.

Solution de Steiner. — A_1, B_1, C_1 *représentant les centres respectifs des cercles tangents* $BC\hat{O}$, $C\hat{A}O$, $\hat{A}BO$; a_1, b_1, c_1 *leurs points de contact avec les côtés* a, b, c ; A' *désignant l'intersection de* B_1C_1 *avec* AO, *etc.*; $A'a_1$, $B'b_1$, $C'c_1$ *seront les axes radicaux des cercles cherchés.*

Remarque. — L'énoncé de la solution de Steiner simplifiée restant le même pour tous les cas, à la seule exception des cercles tangents qui varient, il suffira de signaler, chaque fois, ceux-ci.

Troisième cas :

$$\begin{matrix} & A & \\ B & & C \end{matrix}.$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi; \qquad t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 1.$$

1. On a

$$AC_x - C_xC_y + C_yB = AC' + C'B,$$
$$BA_y - A_yA_z + A_zC = BA' + A'C,$$

ou bien

$$x \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tg} \beta = r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta), \tag{1}$$

$$y \operatorname{tg} \beta - 2\sqrt{yz} + z \operatorname{tg} \gamma = r(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma). \tag{2}$$

On en déduit

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = \pm K,$$
$$z' \sin \gamma - y' \cos \gamma = \pm K,$$

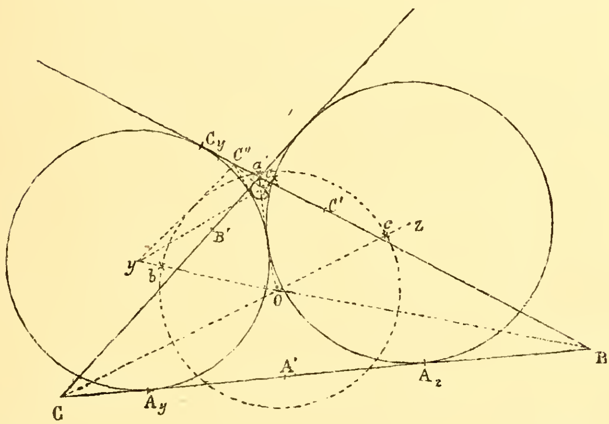
K étant égal à $\frac{1}{\sqrt{\cos 3}} \sqrt{\dots\dots}$, comme précédemment.

2. Pour déterminer les signes à donner aux seconds membres, il faut recourir à la figure. On a, d'après celle-ci,

$$\frac{x'}{y'} = \operatorname{ctg} YXC'',$$
$$2YXC'' = YXC_x > 2\alpha;$$

d'où

$$\frac{x'}{y'} < \operatorname{ctg} \alpha,$$



ou bien

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha < 0.$$

On trouverait de même

$$z' \sin \gamma - y' \cos \gamma > 0.$$

L'expression K doit donc être prise avec le signe — dans la première relation, et avec le signe + dans la seconde. On déduit de là

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = y' \cos \gamma - z' \sin \gamma; \tag{3}$$

et, par analogie,

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = z' \cos \beta - y' \sin \beta . \qquad (4)$$

Ces relations donnent, après réductions,

$$\frac{x'}{1 - t_1} = \frac{y'}{1 + ct_2} = \frac{z'}{1 + ct_3} .$$

3. Posons

$$\frac{x}{(1 - t_1)^2} = \frac{y}{(1 + ct_2)^2} = \frac{z}{(1 + ct_3)^2} = t . \qquad (5)$$

On obtient, comme précédemment,

$$t = \frac{r}{(1 - t_1)(ct_2 + 1)(ct_3 + 1)} ;$$

d'où, par suite des relations (5),

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r(1 - t_1)}{(ct_2 + 1)(ct_3 + 1)} \\ y &= \frac{r(ct_2 + 1)}{(1 - t_1)(ct_3 + 1)} \\ z &= \frac{r(ct_3 + 1)}{(1 - t_1)(ct_2 + 1)} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

D'où encore

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{yz} &= \frac{r}{1 - t_1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{OC}' + \mathrm{C'A}) \\ \sqrt{zx} &= \frac{r}{ct_2 + 1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{OC}' + \mathrm{C'B} - \mathrm{BO}) \\ \sqrt{xy} &= \frac{r}{ct_3 + 1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A'C} + \mathrm{A'O} - \mathrm{CO}) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

4. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On a

$$\mathrm{CA''} = \mathrm{CA}_z - \sqrt{yz} = z \operatorname{tg} \gamma - \sqrt{yz}.$$

On en déduit, en vertu des égalités (6) et (7), et après réductions,

$$\mathrm{CA''} = r\left(\frac{1}{1-t_3} - \frac{1}{1+t_2}\right),$$

ou bien

$$\begin{aligned}\mathrm{CA''} &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO} + \mathrm{OA'} + \mathrm{A'C} - \mathrm{OA'} - \mathrm{OB} + \mathrm{A'B}),\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{OC} + \mathrm{BC} - \mathrm{OB}).\end{aligned}$$

A″ *est donc le point de contact du cercle tangent* BCO *avec le côté* BC.

On trouve, de même,

$$\mathrm{BC''} = r\left(\frac{1}{1-t_1} + \frac{1}{ct_2 - 1}\right) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{BO} + \mathrm{OA} + \mathrm{AB}),$$

$$\mathrm{CB''} = r\left(\frac{1}{1-t_1} + \frac{1}{ct_3 + 1}\right) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO} + \mathrm{OA} + \mathrm{AC}).$$

Les points B″ *et* C″ *sont donc les points de contact respectifs des cercles tangents* $\mathrm{A\hat{B}O}$, $\mathrm{\hat{C}AO}$ *avec les côtés* AB, AC *du triangle* ABC.

5. *Recherche des points de contact.* — On a, d'après ce qui précède,

$$\mathrm{CA}_z = \mathrm{CA''} + \sqrt{yz};$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}_z &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{OC} + \mathrm{BC} - \mathrm{OB} + \mathrm{AO} + \mathrm{OC'} + \mathrm{C'A}),\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO} - \mathrm{OB} + \mathrm{OC} + p + r).\end{aligned}$$

On obtiendrait, de même,

$$\mathrm{BA}_y = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO} - \mathrm{OC} + \mathrm{OB} + p + r),$$

$$\mathrm{AB}_x = \tfrac{1}{2}(p + r - \mathrm{AO} - \mathrm{BO} - \mathrm{CO}).$$

On déduit de ce qui précède

$$\rho = AB_x + AO = BC_y - BO = CA_z - CO = \tfrac{1}{2}(AO - BO - CO + p + r);$$

d'où

$$AB_x = \rho - AO,$$
$$BC_y = \rho + BO,$$
$$CA_z = \rho + CO.$$

6. Solution. — *Du point* O *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}(AO - BO - CO + p + r)$, *décrivez une circonférence qui coupe les bissectrices* AO, BO, CO *aux points respectifs* a' b *et* c. Aa', Bb *et* Cc *représenteront respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — Les cercles tangents à considérer seront, dans ce cas, BCO, $\hat{C}AO$ et $A\hat{B}O$.

Quatrième cas :

B C
A .

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}; \qquad ct_1 + ct_2 + ct_3 = ct_1\, ct_2\, ct_3.$$

1. On a

$$AC_z - C_xC_y + C_yB = AB,$$
$$CA_z - A_zA_y + A_yB = CB;$$

ou bien

$$x \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tg} \beta = r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta), \qquad (1)$$
$$z \operatorname{tg} \gamma - 2\sqrt{zy} + y \operatorname{tg} \beta = r(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta). \qquad (2)$$

En résolvant ces équations par rapport à x' (ou $\sqrt{x}$) et à z', on trouve :

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = \pm K,$$
$$z' \sin \gamma - y' \cos \gamma = \pm K,$$

K ayant une valeur analogue à celle des cas précédents.

2. On voit, d'après la figure, que l'on a

$$2\mathrm{YXC}'' < 2\alpha;$$

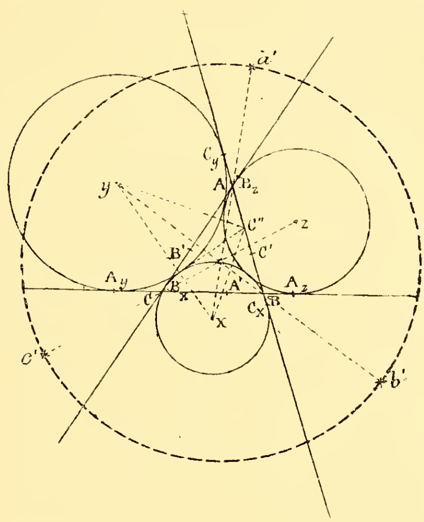
ou bien

$$\mathrm{YXC}'' < \alpha.$$

On déduit de là

$$\operatorname{cotg} \mathrm{YXC}'' = \frac{x'}{y'} > \operatorname{cotg} \alpha,$$

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha > 0.$$



On arriverait de même à l'inégalité :

$$z' \sin \gamma - y' \cos \gamma > 0.$$

D'où l'égalité :

$$-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = -z' \sin \gamma + y' \cos \gamma; \tag{5}$$

et, par analogie,

$$-x' \sin \alpha + z' \cos \alpha = -y' \cos \beta + z' \cos \beta. \tag{4}$$

3. En comparant les équations (3) et (4) avec les équations correspondantes du premier cas, nous voyons que pour passer de ces dernières à celles qui nous occupent, il suffit d'y remplacer α, β, γ respectivement par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Par suite de cette substitution, les résultats du premier cas fourniront immédiatement ceux du quatrième. On aura, en effet, entre les angles $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, la relation

$$ct_1\, ct_2\, ct_3 = ct_1 + ct_2 + ct_3.$$

4. Les tangentes t_1, t_2, t_3 devenant respectivement $-t_1$, $-t_2$, $-t_3$, on aura

$$x = \frac{r(1-t_1)}{(1-t_2)(1-t_3)},$$

$$y = \frac{r(1-t_2)}{(1-t_3)(1-t_1)},$$

$$z = \frac{r(1-t_3)}{(1-t_1)(1-t_2)}.$$

De même,

$$\sqrt{yz} = \frac{r}{1-t_1} = \tfrac{1}{2}(\text{AO} + \text{OB}' + \text{B}'\text{A}),$$

$$\sqrt{zx} = \frac{r}{1-t_2} = \tfrac{1}{2}(\text{BO} + \text{OC}' + \text{C}'\text{B}),$$

$$\sqrt{xy} = \frac{r}{1-t_3} = \tfrac{1}{2}(\text{CO} + \text{OB}' + \text{B}'\text{C}).$$

5. On trouve

$$\begin{aligned}\text{CA}'' &= r\left(\frac{1}{1-t_2} - \frac{1}{1-t_3}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(\text{BO} + \text{OA}' + \text{A}'\text{B} - \text{CO} - \text{OA}' + \text{A}'\text{C}),\\ &= \tfrac{1}{2}(\text{BO} + \text{CB} - \text{CO}).\end{aligned}$$

A″ est donc le point de contact du cercle tangent $\widehat{\text{BCO}}$ *avec le côté a. On démontrerait de même que B″ et C″ sont respectivement les points de contact des cercles* $\widehat{\text{COA}}$, $\widehat{\text{AOB}}$ *avec les côtés b, c.*

6. On a

$$AB_x = AB'' + \sqrt{zx} = \tfrac{1}{2}(AC + CO - AO + BO + r + p - AC),$$

d'où

$$AB_x = \tfrac{1}{2}(BO + CO - AO + p + r),$$

ou, enfin,

$$AB_x + AO = \tfrac{1}{2}(AO + BO + CO + p + r).$$

La symétrie de ce dernier résultat nous amène à poser :

$$AB_x + AO = BC_y + BO = CA_z + CO = \tfrac{1}{2}(AO + BO + CO + p + r) = \rho.$$

On en déduit :

$$AB_x = \rho - AO,$$
$$BC_y = \rho - BO,$$
$$CA_z = \rho - CO.$$

7. Solution. — *Du point* O *comme centre, avec un rayon égale à* $\frac{1}{2}(AO + BO + CO + p + r)$, *décrivez une circonférence qui coupe les bissectrices* AO, BO, CO *en* a', b' *et* c' : *les segments* AB_x, BC_y, CA_z *seront représentés, respectivement, par* Aa', Bb' *et* Cc'.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont, dans ce cas,* $C\hat{B}O$, $C\hat{A}O$, $A\hat{B}O$.

Remarque. — On pourra comparer la solution ci-dessus avec celle que M. Lebon a publiée dans les *Comptes rendus de la Société mathématique de Palerme.* (Voir historique.)

Cinquième cas :

$$\begin{matrix} & A & \\ C' & & B'' \end{matrix}.$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}; \qquad t_1(1 - t_2 t_3) = t_2 + t_3.$$

1. On a

$$AC_x + C_xC_y - C_yB = AC' - C'B,$$

$$CA_z + A_zA_y + A_yB = CA' + A'B;$$

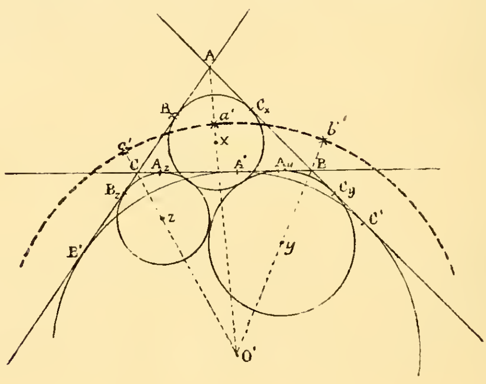
d'où

$$x \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{xy} - y \operatorname{tg} \beta = r_a (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta), \tag{1}$$

$$z \operatorname{tg} \gamma + 2\sqrt{zy} + y \operatorname{tg} \beta = r_a (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma). \tag{2}$$

On déduit de là

$$x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = z' \sin \gamma + y' \cos \gamma, \tag{3}$$



et, par analogie,

$$x' \sin \alpha + z' \cos \alpha = y' \sin \beta + z' \cos \beta. \tag{4}$$

2. Ces équations donnent finalement

$$\frac{x'}{ct_1 + 1} = \frac{y'}{ct_2 - 1} = \frac{z'}{ct_3 - 1}.$$

Posons

$$\frac{x}{(ct_1 + 1)^2} = \frac{y}{(ct_2 - 1)^2} = \frac{z}{(ct_3 - 1)^2} = l;$$

Ces égalités, combinées avec l'équation (4), donnent, après réductions,

$$l = \frac{r_a}{(ct_1 + 1)(ct_2 - 1)(ct_3 - 1)}.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{r_a(ct_1+1)}{(ct_2-1)(ct_3-1)} \\ y &= \frac{r_a(ct_2-1)}{(ct_1+1)(ct_3-1)} \\ z &= \frac{r_a(ct_3-1)}{(ct_1+1)(ct_2-1)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

On obtient, de même,

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{yz} &= \frac{r_a}{ct_1+1} = \tfrac{1}{2}(r_a + \mathrm{AO}' - \mathrm{AC}'), \\ \sqrt{zx} &= \frac{r_a}{ct_2-1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{BA}' + \mathrm{BO}' - r_a), \\ \sqrt{xy} &= \frac{r_a}{ct_3-1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CA}' + \mathrm{CO}' - r_a). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

3. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On a

$$\mathrm{BA}'' = \mathrm{BA}_y + \sqrt{yz} = y \operatorname{tg} \beta + \sqrt{yz},$$

ou, en tenant compte des équations (5) et (6),

$$\mathrm{BA}'' = r_a\left(\frac{1}{ct_2+1} - \frac{1}{ct_3-1}\right);$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{BA}'' &= \tfrac{1}{2}(r_a - \mathrm{BO}' + \mathrm{BA}' + \mathrm{CO}' + \mathrm{CA}' - r_a) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{BC} + \mathrm{CO}' - \mathrm{BO}') \end{aligned} \tag{7}$$

On obtiendrait de même

$$\mathrm{AC}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' + \mathrm{AB} - \mathrm{BO}'), \tag{8}$$

$$\mathrm{AB}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' + \mathrm{AB} - \mathrm{CO}'). \tag{9}$$

Les relations (7), (8), (9), montrent que A″, B″ et C″ sont les points de contact des côtés a, b, c avec les cercles tangents BCÔ′, CAO′, ABO′.

4. *Recherche des points de contact.* — On déduit de ce qui précède

$$AC_x = AC'' - \sqrt{xy},$$
$$= \tfrac{1}{2}(AO' + AB - BO' - CO' - CA' + r_a);$$

d'où

$$AO' - AC_x = \tfrac{1}{2}(AO' + BO' + CO' - p + a - r_a).$$

On obtiendrait la même valeur pour les expressions $CA_z + CO'$, $BA_y + BO'$. Représentons donc cette valeur par ρ'; on aura

$$AB_x = AO' - \rho',$$
$$BC_y = \rho' - BO',$$
$$CA_z = \rho' - CO'.$$

5. Solution. — *Du point* O' *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}(AO' + BO' + CO' - (p - a) - r_a)$, *décrivez une circonférence qui coupe les bissectrices des angles* A, B'', C' *en trois points* a', b', c' : Aa' Bb' *et* Cc' *représenteront respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont* $\widehat{BCO'}$, CAO', ABO'.

Sixième cas :

$$\begin{matrix} C' & B'' \\ & A \end{matrix} \quad ;$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}; \qquad t_1 = t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3.$$

1. On a

$$AC_x - C_xC_y - C_yB = AC' - BC',$$
$$CA_z + A_zA_y + A_yB = CA' + A'B;$$

on en déduit

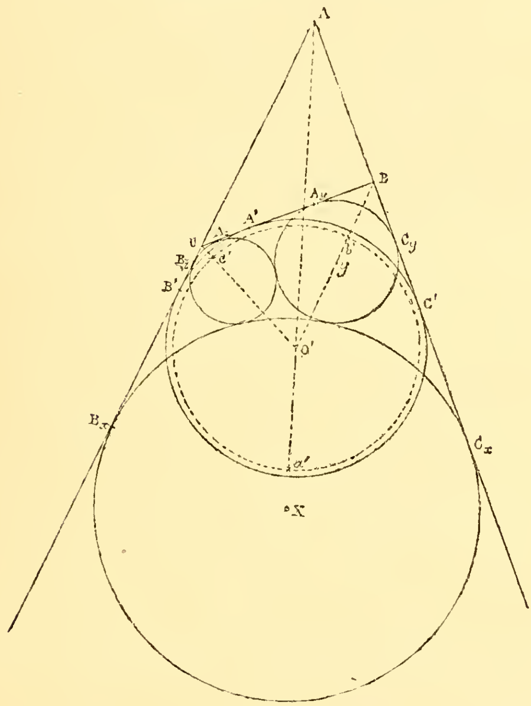
$$x \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{xy} - y \operatorname{tg} \beta = r_a (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta), \tag{1}$$
$$z \operatorname{tg} \gamma + 2\sqrt{zy} + y \operatorname{tg} \beta = r_a (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta). \tag{2}$$

En considérant que l'angle YXC_z est plus petit que 2α, on trouve

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = z' \sin \gamma + y' \cos \gamma; \tag{3}$$

et, par analogie,

$$x' \sin \alpha - z' \cos \alpha = y' \sin \beta + z' \cos \beta. \tag{4}$$



2. On déduit de là, comme précédemment,

$$\frac{x'}{ct_1 + 1} = \frac{y'}{1 + t_2} = \frac{z'}{1 + t_3}.$$

Posons

$$\frac{x}{(ct_1 + 1)^2} = \frac{y}{(1 + t_2)^2} = \frac{z}{(1 + t_3)^2} = t.$$

L'équation (2) nous donne

$$t = \frac{r_a}{(ct_1 + 1)(1 + t_2)(1 + t_3)};$$

d'où l'on déduit

$$x = r_a \times \frac{ct_1 + 1}{(1 + t_2)(1 + t_3)},$$

$$y = r_a \times \frac{1 + t_2}{(ct_1 + 1)(1 + t_3)},$$

$$z = r_a \times \frac{1 + t_3}{(ct_1 + 1)(1 + t_2)}.$$

On obtient, dès lors,

$$\sqrt{yz} = \frac{r_a}{ct_1 + 1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AC}' + r_a - \mathrm{AO}'),$$

$$\sqrt{zx} = \frac{r_a}{1 + t_2} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{BO}' + r_a - \mathrm{BC}'),$$

$$\sqrt{xy} = \frac{r_a}{1 + t_3} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO}' + r_a - \mathrm{CA}').$$

3. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On a

$$\mathrm{CA}'' = \mathrm{CA}_z + \mathrm{A}_z\mathrm{A}'';$$

ou bien

$$\mathrm{CA}'' = r_a\left(\frac{1}{1 - t_3} - \frac{1}{1 - t_2}\right).$$

On en déduit, successivement,

$$\mathrm{CA}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO}' + r_a + \mathrm{CA}' - \mathrm{O'B} - r_a + \mathrm{BC}'),$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO}' - \mathrm{BO}' + a).$$

On trouverait, de même,

$$\mathrm{AB}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AC} + \mathrm{CO}' + \mathrm{O'A}),$$
$$\mathrm{AC}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{BO}' + \mathrm{O'A}).$$

Les points A″, B″, C″ *sont donc les points de contact respectifs des côtés a, b, c, avec les cercles tangents* BCO′, $\widehat{A}$BO′, $\widehat{A}$CO′.

4. *Recherche des points de contact.* — On déduit facilement de là, et comme précédemment, la série d'égalités

$$AB_x - AO' = BO' - BC_y = CO' - CA_z = \rho',$$
$$\rho' = \tfrac{1}{2}(BO' + CO' - AO' + p - a + r_a).$$

D'où

$$AB_x = \rho' + AO',$$
$$BC_y = BO' - \rho',$$
$$CA_z = CO' - \rho'.$$

5. Solution. — *Du point* O′, *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}$ $(BO'+CO'-AO'+p-a+r_a)$, *décrivez une circonférence qui coupe les bissectrices en a, b′ et c′ :* A*a*, B*b′ et* C*c′ représenteront respectivement les longueurs* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont :* BCO′, $\widehat{A}$BO′, $\widehat{A}$CO′.

Septième cas : (*)

C′ A
B″ ;

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}; \qquad t_1 = t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3.$$

1. On a :

$$AC_x + C_xC_y - C_yB = AC' - C'B,$$
$$CA_z - A_zA_y + A_yB = CA' + A'B;$$

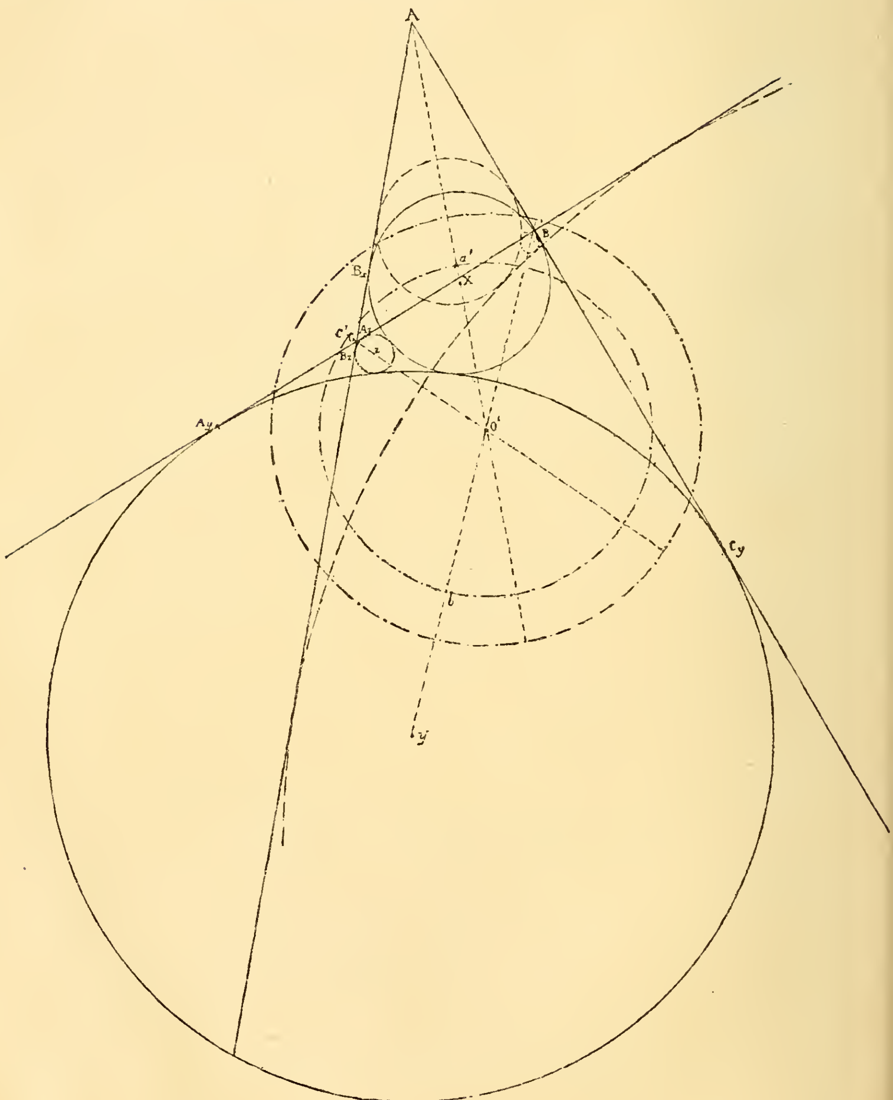
ou bien

$$x \operatorname{tg}\alpha + 2\sqrt{xy} \quad y \operatorname{tg}\beta = r_a(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta), \qquad (1)$$
$$z \operatorname{tg}\gamma - 2\sqrt{yz} + y \operatorname{tg}\beta = r_a(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta). \qquad (2)$$

(*) Ce cas se rapporte à la solution en traits continus de la figure.

On en déduit :

$$x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = \pm (y' \cos \gamma - z' \sin \gamma),$$
$$x' \sin \alpha + z' \cos \alpha = \pm (z' \cos \beta - y' \sin \beta).$$



L'examen de la figure nous apprend qu'il faut prendre le signe + dans la première de ces deux relations, et le signe — dans la seconde.

On a donc

$$x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = y' \cos \gamma - z' \sin \gamma, \tag{3}$$

$$x' \sin \alpha + z' \cos \alpha = y' \sin \beta - z' \cos \beta. \tag{4}$$

2. On déduit des relations (3) et (4)

$$\frac{x'}{1+t_1} = \frac{y'}{ct_2+1} = \frac{z'}{1-t_3}.$$

Posons

$$\frac{x}{(1+t_1)^2} = \frac{y}{(ct_2+1)^2} = \frac{z}{(1-t_3)^2} = t;$$

nous obtiendrons, au moyen de l'équation (2),

$$t = \frac{r_a}{(1+t_1)(1+ct_2)(1-t_3)}.$$

On déduit, de là,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r_a(1+t_1)}{(1+ct_2)(1-t_3)} \\ y &= \frac{r_a(1+ct_2)}{(1-t_3)(1+t_1)} \\ z &= \frac{r_a(1-t_3)}{(1+t_1)(1+ct_2)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

On a, de même,

$$\sqrt{yz} = \frac{r_a}{1+t_1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' + r_a - \mathrm{AC}'),$$

$$\sqrt{zx} = \frac{r_a}{1+ct_2} = \tfrac{1}{2}(r_a + \mathrm{BC}' - \mathrm{BO}'),$$

$$\sqrt{xy} = \frac{r_a}{1-t_3} = \tfrac{1}{2}(r_a + \mathrm{CO}' + \mathrm{CA}').$$

3. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On déduit, par des calculs analogues à ceux des autres cas,

$$BA'' = \tfrac{1}{2}(BO' + CO' + a),$$
$$AC'' = \tfrac{1}{2}(AO' + BO' + c),$$
$$CB'' = \tfrac{1}{2}(CO' - AO' + b).$$

Les points A″, B″, C″ *sont donc les points de contact des côtés* a, b, c, *avec les cercles tangents* $C\hat{B}O'$, $CO'A$, $\hat{A}BO'$.

4. *Recherche des points de contact.* — On obtient facilement

$$AO' - AB_x = BC_y - BO' = CA_z + CO' = \rho',$$
$$\rho' = \tfrac{1}{2}\Big(AO' - BO' + CO' + r_a - (p - a)\Big).$$

D'où l'on déduit

$$AB_x = AO' - \rho',$$
$$BC_y = \rho' + BO',$$
$$CA_z = \rho' - CO'.$$

5. Solution. — *Du point* O′, *comme centre, avec un rayon égal à* $\tfrac{1}{2}\Big(AO' - BO' + CO' + r_a - (p - a)\Big)$, *on décrit une circonférence qui coupe les bissectrices* AO′, BO′, CO′ *en* a', b *et* c' : Aa'. Bb, Cc' *représenteront respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont* $C\hat{B}O'$, CAO', $\hat{A}BO'$.

Huitième cas : (*)

$$\begin{matrix} A & B'' \\ & C' \end{matrix} \;;$$

(*) Ce cas se rapporte à la solution en traits pointillés de la figure précédente.

1. On passera du septième cas au huitième, en permutant les lettres B et C dans les résultats obtenus. On obtient ainsi

$$\rho' = \tfrac{1}{2}\big(AO' - CO' + BO' + r_a - (p - a)\big),$$
$$AB_x = AO' - \rho',$$
$$BC_y = \rho' - BO',$$
$$CA_z = \rho' + CO'.$$

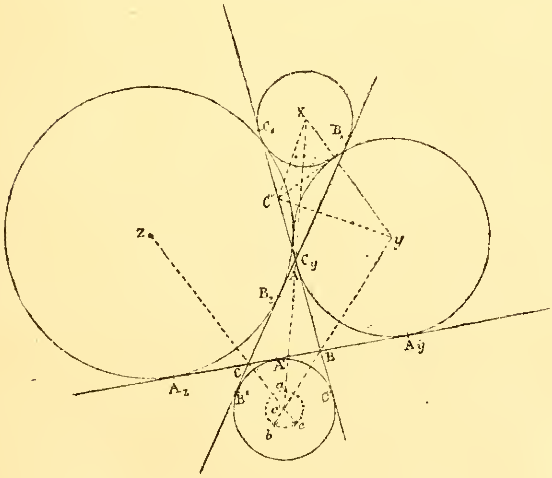
2. Solution. — *Du point* O', *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}\big(AO' - CO' + BO' + r_a - (p - a)\big)$, *on décrit une circonférence qui coupe les bissectrices en* a', b' *et* c. Aa', Bb' *et* Cc *représentent respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont* $\widehat{C}BO'$, $BO'A$, $\widehat{A}CO'$.

Neuvième cas :

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ C'' & & B'; \end{array}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}; \qquad t_1 = t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3.$$



1. On a

$$AC_x - C_x C_y - C_y B = - AC' + C'B,$$
$$CA_z - A_z A_y + A_y B = - BA' - A'C;$$

ou bien

$$x \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{xy} - y \operatorname{tg} \beta = r_a (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha), \quad (1)$$
$$z \operatorname{tg} \gamma - 2\sqrt{zy} + y \operatorname{tg} \beta = - r_a (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \quad (2)$$

L'équation (1) donne

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = \pm K;$$

On déduit, de même, de (2)

$$z' \sin \gamma - y' \cos \gamma = \pm K.$$

L'examen de la figure nous conduit aux inégalités

$$\frac{x'}{y'} > \operatorname{cotg} \alpha,$$
$$\frac{z'}{y'} < \operatorname{cotg} \gamma.$$

D'où l'on déduit

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = y' \cos \gamma - z' \sin \gamma; \quad (3)$$

et, par analogie,

$$x' \sin \alpha - z' \cos \alpha = z' \cos \beta - y' \sin \beta. \quad (4)$$

2. On déduit des relations (3) et (4)

$$\frac{x'}{ct_1 - 1} = \frac{y'}{1 - t_2} = \frac{z'}{1 - t_3}.$$

Posant, comme précédemment,

$$\frac{x}{(ct_1 - 1)^2} = \frac{y}{(1 - t_2)^2} = \frac{z}{(1 - t_3)^2} = t,$$

et remplaçant, dans l'égalité (1), x, y, z, par leurs valeurs, il vient

$$t = \frac{r_a}{(ct_1 - 1)(1 - t_2)(1 - t_3)}.$$

On obtient, en outre,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r_a(ct_1 - 1)}{(1 - t_2)(1 - t_3)} \\ y &= \frac{r_a(1 - t_2)}{(ct_1 - 1)(1 - t_3)} \\ z &= \frac{r_a(1 - t_3)}{(ct_1 - 1)(1 - t_2)} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On obtient encore

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{yz} &= \frac{r_a}{ct_1 - 1} = \tfrac{1}{2}(AO' + AC' - r_a) \\ \sqrt{zx} &= \frac{r_a}{1 - t_2} = \tfrac{1}{2}(BO' + BC' + r_a) \\ \sqrt{xy} &= \frac{r_a}{1 - t_3} = \tfrac{1}{2}(CO' + CA' + r_a) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

3. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On déduit de calculs analogues à ceux des autres cas

$$CA'' = \tfrac{1}{2}(BO' - CO' + a),$$
$$BC'' = \tfrac{1}{2}(AO' + BO' + c),$$
$$CB'' = \tfrac{1}{2}(AO' + CO' + b).$$

Les points A″, B″, C″ *sont donc les points de contact des côtés* a, b, c, *avec les cercles tangents* $\widehat{BCO'}$, $\widehat{ACO'}$ $\widehat{ABO'}$.

4. *Recherche des points de contact.* — On trouve, facilement,

$$AO' - AB_x = BC_y - BO' = CA_z - CO' = \rho'$$
$$\rho' = \tfrac{1}{2}(AO' - BO' - CO' + (p - a) - r_a).$$

On en déduit

$$AB_x = AO' - \rho',$$
$$BC_y = BO' + \rho',$$
$$CA_z = CO' + \rho'.$$

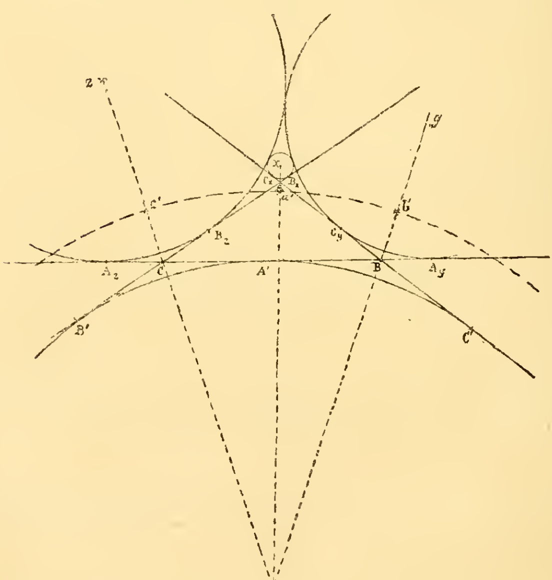
5. Solution. — *Du point* O', *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}(AO' - BO' - CO' + p - a - r_a)$, *on décrit une circonférence qui coupe les bissectrices en* a', b *et* c : Aa', Bb *et* Cc *représenteront respectivement les segments* AB_x, BC_y *et* CA_z.

Solution de Steiner.— *Les cercles tangents à considérer sont, dans ce cas,* $B\hat{C}O'$, $\hat{C}AO'$, $A\hat{B}O'$.

Dixième cas :

$$\begin{matrix} C'' & & B' \\ & A_1 & \end{matrix} ;$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}; \qquad ct_2 ct_3 = 1 + ct_1 ct_2 + ct_2 ct_3.$$



1. On a

$$AC_x - C_xC_y - C_yB = - AC' + C'B,$$
$$BA_y - A_yA_z + A_zC = - BA' - A'C;$$

ou bien

$$x \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{xy} - y \operatorname{tg} \beta = r_a (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha), \qquad (1)$$
$$y \operatorname{tg} \beta - 2\sqrt{yz} + z \operatorname{tg} \gamma = - r_a (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma). \qquad (2)$$

On déduit de ces équations

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = \pm (z' \sin \gamma - y' \cos \gamma).$$

On démontre facilement que le premier membre est négatif, ainsi que la quantité entre parenthèses du second. Il faut donc admettre le signe + et l'on obtient

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = z' \sin \gamma - y' \cos \gamma; \qquad (3)$$

et, par analogie,

$$x' \sin \alpha - z' \cos \alpha = y' \sin \beta - z' \cos \beta. \qquad (4)$$

2. Les équations (3) et (4) donnent, finalement,

$$\frac{x'}{ct_1 - 1} = \frac{y'}{ct_2 + 1} = \frac{z'}{ct_3 + 1}.$$

Posant

$$\frac{x}{(ct_1 - 1)^2} = \frac{y}{(ct_2 + 1)^2} = \frac{z}{(ct_3 + 1)^2} = l,$$

on déduit, finalement,

$$l = \frac{r_a}{(ct_1 - 1)(ct_2 + 1)(ct_3 + 1)},$$
$$x = \frac{r_a (ct_1 - 1)}{(ct_2 + 1)(ct_3 + 1)},$$
$$y = \frac{r_a (ct_2 + 1)}{(ct_3 + 1)(ct_1 - 1)},$$
$$z = \frac{r_a (ct_3 + 1)}{(ct_1 - 1)(ct_2 + 1)}.$$

Ces égalités donnent encore

$$\sqrt{yz} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' + \mathrm{AC}' - r_a),$$
$$\sqrt{zx} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{BA}' + r_a - \mathrm{BO}'),$$
$$\sqrt{xy} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CA}' + r_a - \mathrm{CO}').$$

3. *Recherche des points* A″, B″, C″. — Cette recherche nous conduit aux égalités

$$\mathrm{CA}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO}' - \mathrm{BO}' + a),$$
$$\mathrm{BC}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' - \mathrm{O'B} + c),$$
$$\mathrm{CB}'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' - \mathrm{O'C} + b).$$

Les points A″, B″ *et* C″ *sont donc les points de contact respectifs des côtés a, b, c, avec les cercles tangents* BCO′, $\mathrm{CA\hat{O}'}$, $\mathrm{AB\hat{O}'}$.

4. *Recherche des points de contact.*— On trouve, tous calculs faits,

$$\mathrm{AO}' - \mathrm{AB}_x = \mathrm{BO}' + \mathrm{BC}_y = \mathrm{CO}' + \mathrm{CA}_z = \rho',$$
$$\rho' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' + \mathrm{BO}' + \mathrm{CO}' - r_a + p - a).$$

On déduit de là

$$\mathrm{AB}_x = \mathrm{AO}' - \rho',$$
$$\mathrm{BC}_y = \rho' - \mathrm{BO}',$$
$$\mathrm{CA}_z = \rho' - \mathrm{CO}'.$$

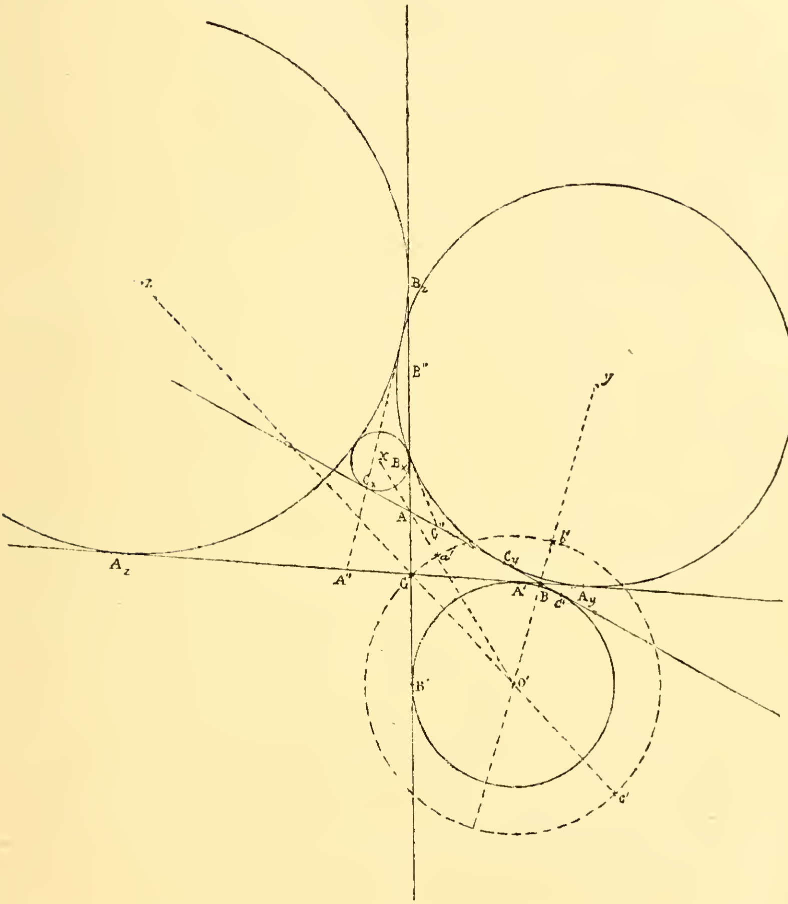
5. Solution. — *Du point* O′, *comme centre, avec un rayon égal à* $\tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}' + \mathrm{BO}' + \mathrm{CO}' - r_a + p - a)$, *on décrit une circonférence qui coupe les bissectrices* AO′, BO′, CO′, *aux points* a', b', c' : Aa', Bb' *et* Cc' *représentent respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont, dans ce cas,* BCO′, $\mathrm{CA\hat{O}'}$, $\mathrm{AB\hat{O}'}$.

Onzième cas :

$$\begin{array}{ccc} & C'' & \\ A_1 & & B' ; \end{array}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}; \qquad t_1 = t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3.$$



1. En considérant successivement les côtés c, b, a, on trouve

$$AC_x - C_xC_y - C_yB = - AC' + C'B,$$

$$AB_x + B_xB_z + B_zC = - AB' + B'C,$$

$$BA_y - A_yA_z + A_zC = - BA' - A'C;$$

ou bien

$$x \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{xy} - y \operatorname{tg} \beta = - r_a (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \qquad (1)$$

$$x \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{xz} - z \operatorname{tg} \gamma = - r_a (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma) \qquad (2)$$

$$y \operatorname{tg} \beta - 2\sqrt{yz} + z \operatorname{tg} \gamma = - r_a (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \qquad (3)$$

On déduit de (1) et (2), puis de (2) et (3)

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = \pm (y' \cos \gamma - z' \sin \gamma),$$

$$x' \sin \alpha - z' \cos \alpha = \pm (z' \cos \beta - y' \sin \beta).$$

En procédant comme précédemment, on voit que les seconds membres de ces deux relations doivent prendre le signe $+$. D'où les équations fondamentales

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = y' \cos \gamma - z' \sin \gamma \qquad (4)$$

$$x' \sin \alpha - z' \cos \alpha = z' \cos \beta - y' \sin \beta \qquad (5)$$

2. On en déduit

$$\frac{x'}{1 - t_1} = \frac{y'}{1 + t_2} = \frac{z'}{ct_3 - 1},$$

Posant, comme précédemment,

$$\frac{x}{(1 - t_1)^2} = \frac{y}{(1 + t_2)^2} = \frac{z}{(ct_3 - 1)^2} = l;$$

on obtient, finalement,

$$l = \frac{r_a}{(1 - t_1)(1 + t_2)(ct_3 - 1)}.$$

Puis, successivement,

$$x = \frac{r_a (1 - t_1)}{(1 + t_2)(ct_3 - 1)},$$

$$y = \frac{r_a (1 + t_2)}{(1 - t_1)(ct_3 - 1)},$$

$$z = \frac{r_a (ct_3 - 1)}{(1 - t_1)(1 + t_2)};$$

$$\sqrt{xy} = \tfrac{1}{2}(O'C' + CA' - A'O'),$$
$$\sqrt{yz} = \tfrac{1}{2}(O'A + AC' + O'C'),$$
$$\sqrt{zx} = \tfrac{1}{2}(O'B + O'A' - BA').$$

3. *Recherche des points* A″, B″, C″. — On obtient.

$$BA'' = \tfrac{1}{2}(AO' + BO' + CO'),$$
$$CB'' = \tfrac{1}{2}(AO' + AC + CO'),$$
$$BC'' = \tfrac{1}{2}(O'A + AB - O'B).$$

Les points A″, B″, C″ *sont donc respectivement les points de contact des cercles tangents* $\widehat{B}CO'$, $\widehat{C}AO'$, $AB\widehat{O}'$, *avec les côtés* a, b, c, *du triangle* ABC.

4. *Recherche des points de contact.* — On obtient

$$AO' - AB_x = BO' + BC_y = CA_z - CO' = \rho',$$
$$\rho' = \tfrac{1}{2}(AO' + BO' - CO' + r_a + p - a).$$

On en déduit

$$AB_x = AO' - \rho',$$
$$BC_y = \rho' - BO',$$
$$CA_z = \rho' + CO'.$$

5. Solution. — *Du point* O′, *comme centre, avec un rayon égal à* $\tfrac{1}{2}(AO' + BO' - CO' + p - a + r_a)$, *on décrit une circonférence qui coupe les bissectrices aux points* a', b' *et* c : *les distances* Aa', Bb' *et* Cc *représentent respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_z.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont* $\widehat{B}CO'$, $\widehat{C}AO'$, $AB\widehat{O}'$.

Douzième cas :

$$\begin{array}{ccc} & B' & \\ C'' & & A_1 . \end{array}$$

1. Ce douxième et dernier cas résulte du précédent, par une déduction analogue à celle qui nous a permis de passer du cas dissymétrique 7 au cas 8. La circonférence y occupe, relativement à x et z, la situation de z, par rapport à y et x, du cas précédent.

Les pieds A″, B″, C″ des axes radicaux des cercles cherchés seront donc les point de contact des cercles tangents $B\hat{C}O'$, $CA\hat{O}'$, BAO′, avec les côtés a, b, c du triangle ABC, et notre solution s'obtiendra par la construction suivante :

Du point O′, *comme centre, avec un rayon égal à* $\frac{1}{2}$ $(AO' - BO' + CO' + r_a + p - a)$, *on décrit une circonférence qui coupe les bissectrices* AO′, BO′, CO′ *aux points* a', b, c' *: les distances* Aa', Bb, Cc' *représentent respectivement les segments* AB_x, BC_y, CA_x.

Solution de Steiner. — *Les cercles tangents à considérer sont* $A\hat{B}O'$, $B\hat{C}O'$, $CA\hat{O}'$.

Remarque. — Il est intéressant d'observer que, dans les différents cas, les deux équations fondamentales peuvent recevoir une interprétation géométrique commune des plus simples. Elles expriment, en effet, que l'on a

Projection	de YC″	sur AO	=	projection	de YA″	sur	CO,
»	de ZA″	» BO	=	»	de ZB″	»	AO ;

et, comme conséquence de ces deux égalités,

Projection de XB″ sur CO = projection de XC″ sur BO.

Il serait très intéressant de trouver une démonstration directe de cette propriété.

Résumé des solutions trouvées.

SCHÉMAS.	CERCLES AUXILIAIRES de Steiner.	NOS SOLUTIONS. Valeurs de 2ρ.	SOLUTIONS ASSOCIÉES.
A C B	BCO, CAO, ABO	$AO + BO + CO + r - p \ldots$	$2\rho = AO + BO + CO \pm p.$
B C A	$BC\hat{O}$ $CA\hat{O}$, $AB\hat{O}$	$AO + BO + CO + r + p \ldots$	
C B A	$BC\hat{O}$, $C\hat{A}O$, [illegible]BO	$-AO + BO + CO - r + p \ldots$	$2\rho' = \pm(-AO + BO + CO - r \pm p).$
A B C	BCO, $\hat{C}AO$. $A\hat{B}O$	$AO - BO - CO + r + p \ldots$	
A C′B″	$BC\hat{O}'$, C[illegible]$'$, ABO'	$AO' + BO' + CO' - r_a - (p - a)$	$2\rho' = AO' + BO' + CO' - r_a \mp (p - a).$
A_1 C″B′	BCO', C[illegible]$\hat{O}'$, $AB\hat{O}'$	$AO' + BO' + CO' - r_a + (p - a)$	
C′B″ A	BCO' $C\hat{A}O'$, $\hat{A}BO'$	$-AO' + BO' + CO' + r_a + (p - a)$	$2\rho = -AO' + BO' + CO' + r_a \pm (p - a).$
C″B′ A_1	BCO' $C\hat{A}O'$, $A\hat{B}O'$	$-AO' + BO' + CO' + r_a - (p - a)$	
C′A B″	$\hat{B}CO'$, CAO, $\hat{A}BO'$	$AO' - BO' + CO' + r_a - (p - a)$	$2\rho' = AO' - BO' + CO' + r_a \mp (p - a).$
B′ C″A_1	$B\hat{C}O'$, $CA\hat{O}$, $A\hat{B}O'$	$AO' - BO' + CO' + r_a + (p - a)$	
A B″ C′	$B\hat{C}O'$, $C\hat{A}O$, ABO'	$AO' + BO' - CO' + r_a - (p - a)$	$2\rho' = AO' + BO' - CO' + r_a \mp (p - a).$
C″ A_1B′	$\hat{B}CO'$, $\hat{C}AO'$, $AB\hat{O}'$	$AO' + BO' - CO' + r_a + (p - a)$	

On peut encore, en désignant par $2d$ et par $2d'$ les sommes respectives $AO + BO + CO$, $AO' + BO' + CO'$, représenter les diamètres des circonférences qui fournissent les solutions par le tableau suivant :

1° $2\,d \qquad\quad + r \pm p$, solutions isolées;

2° $2\,(d - AO) - r \pm p$,

3° $2\,d' \qquad\quad - r_a \pm (p - a)$;

4° $2\,(d' - AO) + r_a \pm (p - a)$;

5° $2\,(d' - BO) + r_a \pm (p - a)$;

6° $2\,(d' - CO) + r_a \pm (p - a)$.

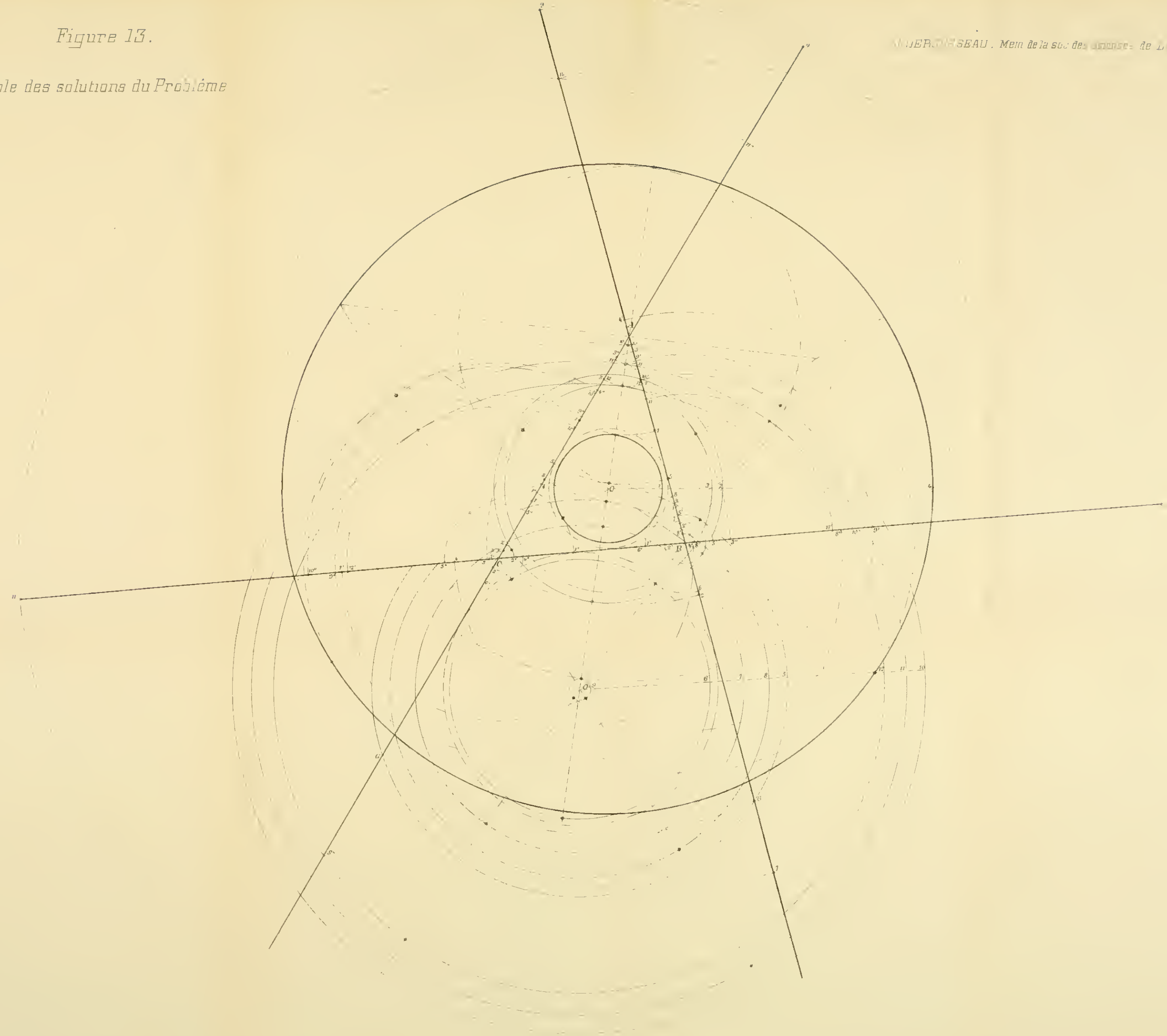
Cette forme de solution est des plus commodes, et elle permettrait de dresser, avec la plus grande facilité, le tableau général des trente-deux solutions du problème.

La figure XII représente l'ensemble des solutions qui entrent dans le tableau ci-dessus. Les circonférences 1 et 4, tracées en traits forts, fournissent les solutions connues et isolées des cas 1 et 4; les circonférences 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 conduisent aux solutions nouvelles; elles ont leurs analogues en B et en C.

Dans cette figure les points de contact respectifs des côtés a, b, c avec les ciconférences cherchées appartenant à la solution 7, par exemple, seront désignés par 7, 7′ et 7″.

Figure 13.

Ensemble des solutions du Problème



NOTE

SUR LA

DILATATION PAR LA CHALEUR

A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX SOLIDES;

PAR

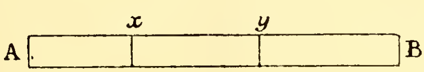
P. DE HEEN,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

DILATATION PAR LA CHALEUR

A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX SOLIDES.

Considérons une barre homogène, métallique par exemple, et continue AB, et demandons-nous si l'accroissement de longueur subi par cette barre pour un accroissement de température



déterminé ne sera pas modifié si au lieu de considérer une pièce unique l'on considère une série de tronçons, Ax, xy, yB simplement juxtaposés.

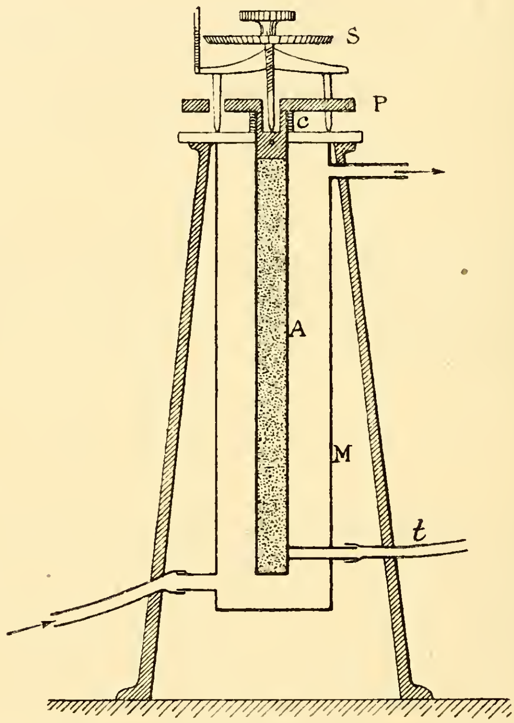
Il est évident, *a priori*, que cette différence doit être très faible, car alors même que l'on admettrait une dilatabilité notablement différente dans le voisinage immédiat des surfaces x et y, celle-ci ne peut avoir qu'une influence minime.

Pour mettre cette dilatation de surface en évidence, il est donc nécessaire de disposer les choses de manière à rendre l'influence des couches superficielles prépondérante.

Voici comment nous avons procédé : l'appareil se compose d'un tube en cuivre rouge A, lequel est rempli de limaille de même métal, obtenue en limant le prolongement de ce même tube. Afin d'obtenir un état d'équilibre stable, celle-ci a été soumise pendant plusieurs jours à la pression d'un poids (environ 50 kil. par centimètre carré) disposé sur le plateau P.

Cette condition étant réalisée, un sphéromètre donnant le $^1/_{1000}$ de milimètre est disposé en S, de manière à fixer la position de la surface *o*.

Cela étant, si l'on vient à porter le tube A à la température de



100° en faisant passer un courant de vapeur d'eau dans le manchon inférieur M, il est évident que si la limaille et le tube se dilatent de la même quantité, la position de la surface *o* ne sera pas modifiée; si, au contraire, la limaille se dilate davantage, nous constaterons, à l'aide du sphéromètre, un relèvement de cette surface.

C'est là ce que l'expérience démontre effectivement. Une élévation de température de 85° déterminait un relèvement de la surface o de 0,030 millimètres.

Il résulte donc de ceci, qu'il se produit une dilatation plus forte à la surface de séparation de deux solides qu'en pleine matière.

Si nous admettons que le diamètre des grains de limaille atteint en moyenne $\frac{1}{4}$ de millimètre, les choses se passent dans notre appareil comme si nous avions entassé une série de feuilles de cuivre présentant cette même épaisseur, et comme la longueur du tube est de 0,60 millimètres, nous pourrons superposer 2,400 feuilles. La dilatation qui se produit à la surface de séparation de deux feuilles consécutives sera donc égale à $\frac{0,030}{2,400} = 0,0000120$, et si nous considérons la variation de distance correspondant à un accroissement de température de 1° nous aurons $\frac{0,000012}{85} =$ 0,000000141 milimètres, tel est l'ordre de grandeur de la *dilatation au contact.*

Il ne nous reste plus maintenant qu'à examiner la cause de cette *dilatation au contact.* La première explication qui se présente à l'esprit consiste à admettre que la surface des solides condensant toujours une certaine quantité d'air, la dilatation au contact serait due à la dilatation de cette couche d'air extrêmement mince.

Afin de vérifier cette manière de voir dans la mesure du possible, nous avons mis le tube t en communication avec une machine à mercure faisant un vide à peu près parfait, un joint en caoutchouc c permettant de maintenir ce vide pendant plusieurs jours. En opérant de la sorte, nous avons constaté que la grandeur observée était réduite aux $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle était.

On voit par cette expérience que l'air condensé à la surface du métal joue un certain rôle dans le fait de la dilatation au contact. Mais il serait difficile de savoir si, malgré le vide, la surface du métal ne conserve pas une quantité suffisante d'air condensé pour déterminer les $\frac{2}{3}$ de la dilatation restante.

Sans vouloir me prononcer d'une manière définitive, il me paraît plus probable d'admettre qu'il se produit ici un écartement des surfaces analogue à celui qu'on peut observer directement lorsqu'on provoque l'état sphéroïdal. Dans ces conditions, la goutte liquide n'est nullement soutenue par sa vapeur, car on peut opérer soit dans le vide soit à l'aide de liquides non volatils. Mais il faut admettre que cette dilatation est due à l'expansion de la couche superficielle, qui est le siège des phénomènes de tension et dont la constitution absolument différente de la constitution en pleine matière peut être assimilée à un gaz à force expansive négative (du moins en ce qui concerne les liquides).

Quoi qu'il en soit, ce phénomène de la dilatation au contact m'a paru assez intéressant pour être signalé.

NOTE

SUR LA

SITUATION DES RACINES DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$$

OÙ J DÉSIGNE UNE FONCTION DE BESSEL

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

PAR

M. P. RUDSKI,

D'ODESSA.

NOTE

SUR LA

SITUATION DES RACINES DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$$

OÙ J DÉSIGNE UNE FONCTION DE BESSEL

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

Nous allons considérer les racines des équations transcendantes

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0, \tag{I}$$

où J désigne une fonction de Bessel

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ..$$

Ces fonctions s'écrivent sous la forme (*)

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \varphi_{n+\frac{1}{2}}, \tag{II}$$

où

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2^2.\left(n + \frac{3}{2}\right)} + \frac{x^4}{2^4\ 1\ .\ 2\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{5}{2}\right)} \ldots \tag{III}$$

(*) Cf. Todhunter, *An Elementary Treatise on Laplace, Lamé and Bessel's Functions*, London, 1875, p. 307.

Cette dernière fonction ne devient pas imaginaire pour les valeurs négatives de x. Elle est d'ailleurs *paire*. Il est évident qu'à l'exception des racines nulles les racines de l'équation I et celles de l'équation

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = 0 \tag{IV}$$

sont identiques.

Nous allons prouver que *les racines positives de cette dernière équation sont situées une à une dans les quadrants*

$$(n + 2i),$$

où

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

c'est-à-dire que la première racine est située entre

$$(n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (n + 2)\frac{\pi}{2},$$

la seconde, entre

$$(n + 3)\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (n + 4)\frac{\pi}{2};$$

et ainsi de suite.

Quant aux racines de

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = 0,$$

on sait qu'elles sont les multiples de π.

Pour le prouver, nous allons considérer en général les fonctions φ_m, puis nous passerons à celles pour lesquelles

$$m = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Il faut remarquer que Todhunter (*), en étendant une remarque de Poisson sur les grandes racines de l'équation

$$J_0(x) = 0,$$

(*) *Loc. cit.*, p. 512.

ou, ce qui est égal,

$$\varphi_0 = 0,$$

a prouvé que les *grandes* racines des équations

$$J_m(x) = 0, \quad \varphi_m = 0,$$

où $m > -\frac{1}{2}$, sont à peu près égales aux racines de l'équation

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right) = 0.$$

Quand

$$m = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

il s'ensuit que les grandes racines des équations que nous considérons ici spécialement sont à peu près les mêmes que celles de l'équation

$$\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = 0.$$

Soit maintenant

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \theta.$$

Dès lors, on peut écrire

$$\varphi_m = 1 - \frac{\theta}{m+1} + \frac{\theta^2}{1.2(m+1)(m+2)} - \cdots \tag{V}$$

Nous écrivons les équations de Fourrier (*)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_m + (m+1)\varphi_m^{\mathrm{I}} + \theta\varphi_m^{\mathrm{II}} = 0, \\ \varphi_m^{\mathrm{I}} + (m+2)\varphi_m^{\mathrm{II}} + \theta\varphi_m^{\mathrm{III}} = 0, \\ \varphi_m^{\mathrm{II}} + (m+3)\varphi_m^{\mathrm{III}} + \theta\varphi_m^{\mathrm{IV}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{VI}$$

Les indices désignent l'ordre de la dérivation par rapport à θ.

(*) Cf. Todhunter, *loc. cit.*, p. 307.

Comme la fonction est *paire* par rapport à x, nous allons considérer seulement les valeurs positives de θ. Les valeurs négatives de θ correspondent aux valeurs imaginaires de x.

On déduit aussitôt (*) des équations VI que les racines de l'équation

$$\varphi_m = 0 \tag{VII}$$

sont en nombre infini, réelles et positives.

On voit aussi que ces racines doivent être simples. En effet, il suit des équations VI qu'aussitôt que

$$\varphi_m \quad \text{et} \quad \varphi'_m$$

s'annulent à la fois, toutes les autres dérivées par rapport à θ sont nécessairement nulles pour la même valeur de θ. Donc une racine est simple ou d'un ordre de multiplicité infini. Comme cette dernière supposition est évidemment impossible, il ne reste que la première.

Donc les racines de l'équation VII sont simples. En considérant les mêmes équations, on voit aussitôt qu'à une constante près, la fonction

$$\varphi_{m+1}$$

n'est autre chose que la première dérivée de φ_m par rapport à θ. En effet,

$$\varphi_{m+1} = -(m+1)\frac{d\varphi_m}{d\theta}. \tag{VIII}$$

Maintenant il est facile de prouver que la fonction φ_{m+1} ne devient nulle pour la première fois après le point $\theta = 0$ qu'après que la fonction φ_m est devenue nulle pour la première fois. En effet, on voit par l'équation V qu'au point

$$\theta = 0, \quad \text{ou} \quad x = 0,$$

toutes les fonctions φ sont égales à l'unité.

(*) Todhunter, *loc. cit*, p. 307.

Étant continues, elles sont positives pour les valeurs de θ proches du point $\theta = 0$. Si l'on admet que φ_{m+1} devient nul pour la première fois, avant que φ_m devienne nul pour la première fois, on voit par la première des équations VI qu'au point où φ_{m+1} devient nul, φ_m et φ''_m ou, ce qui est la même chose, φ_m et φ_{m+2} doivent être de signes contraires. Mais au début elles étaient toutes les deux positives; φ_m n'a pas encore changé de signe, c'est donc φ_{m+2} qui a dû changer de signe. Donc φ_{m+2} change de signe avant φ_{m+1}. Mais à l'aide de la seconde équation VI, on reconnaît aussitôt qu'alors il faut aussi que φ_{m+3} ait changé de signe avant φ_{m+2}. En continuant ainsi, nous arrivons jusqu'aux fonctions d'un ordre infiniment grand. Mais l'équation de définition V nous montre que ces fonctions sont égales à l'unité, tant que θ ne devient pas infiniment grand. Ainsi nous voyons que la supposition faite plus haut, que la fonction φ_{m+1} s'annule pour la première fois avant φ_m, exige que φ_{m+2} s'annule avant φ_{m+1}, et ainsi de suite. D'un autre côté nous voyons que cette supposition est impossible, parce que les fonctions de l'ordre infiniment grand ne s'annulent pas du tout pour des valeurs finies de θ et, comme les racines de ces équations sont distinctes, il faut qu'en général φ_{m+1} ne devienne nul pour la première fois qu'après que φ_m sera devenu nul pour la première fois.

Quant aux autres racines de l'équation

$$\varphi_{m+1} = 0,$$

on reconnaît aussitôt, à l'aide de l'équation VIII et des équations VI, que chacune d'elles est située entre deux racines consécutives de l'équation

$$\varphi_m = 0.$$

En effet, chaque dérivée a au moins une racine entre deux racines consécutives de la fonction dont elle est la dérivée. Mais si l'équation

$$\varphi_{m+1} = 0$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d\varphi_m}{d\theta} = 0,$$

avait plus d'une racine, par exemple k racines entre deux racines de l'équation

$$\varphi_m = 0,$$

la fonction φ_{m+2}, s'annulant avec

$$\frac{d\varphi_{m+1}}{d\theta}$$

devrait avoir au moins $k - 1$, racines dans le même intervalle.

Mais, par les équations VI, en chaque point où la fonction φ_{m+1} devient nulle, φ_m et φ_{m+2} sont de signes contraires; si φ_{m+2} change de signe $k - 1$ fois, φ_m changera de signe $k - 1$ fois dans cet intervalle, puisque ces fonctions n'ont pas de racines multiples.

Mais φ_m ne change pas de signe dans cet intervalle; il faut donc que k soit égal à l'unité. C'est-à-dire que φ_{m+1} change de signe une fois, mais une seule, entre deux racines consécutives de l'équation

$$\varphi_m = 0.$$

De cette dernière propriété on pourrait aussi déduire celle dont nous avons parlé plus haut, c'est-à-dire que φ_{m+1} devient nul pour la première fois seulement après que φ_m sera devenu nul pour la première fois.

Passons maintenant au cas où

$$m = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ici la fonction $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ peut s'écrire (*) sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{c}{x^{2n+1}} \left[X_n \sin x - X'_n \cos x \right] \\ c &= \frac{[1.3\ 5\ldots(2n+1)]^2}{2n+1} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX)}$$

(*) Cf. Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur.* Paris, 1835, p. 281.

X_n et X'_n sont des polynômes dont le premier est pair, le second impair,

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 1 - \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_4}{4!}x^4 - \cdots \\ X'_n &= x - \frac{A_3}{3!}x^3 + \frac{A_5}{5!}x^5 - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{X}$$

Les coefficients A sont liés entre eux par la formule récurrente

$$A_{i+1} = A_i \frac{2(n-i)}{2n-i}, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = 1. \tag{XI}$$

Quand n est pair, le polynôme X_n a pour dernier terme

$$\left(\sqrt{-1}\right)^n \frac{A_n}{n!} x^n,$$

et le polynôme X'_n a pour dernier terme

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{n-2} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Quand n est impair, le polynôme X_n a pour dernier terme

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1},$$

et le polynôme X'_n a pour dernier terme

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} \frac{A_n}{n!} x^n.$$

Dans le premier cas, le polynôme X_n a un terme de plus que X'_n; dans le second, le nombre de termes est le même dans les deux polynômes.

D'après IX, il est évident que les racines de l'équation

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = 0$$

sont identiques avec les racines de l'équation

$$\frac{X_n}{X'_n} - \operatorname{cotg} x = 0. \qquad \text{(XII)}$$

Quand $n = 2i$, c'est-à-dire quand n est pair, le polynôme X_n, égalé à zéro, aura i racines,

$$x^2 = a_1^2, \quad x^2 = a_2^2 \ldots, \quad x^2 = a_i^2$$

L'autre polynôme X'_n aura une racine nulle $x = 0$ et $(i - 1)$ racines

$$x^2 = b_1^2, \quad x^2 = b_2^2 \ldots, \quad x^2 = b_{i-1}^2.$$

Quand n est impair, c'est-à-dire quand $n = 2i + 1$, les deux polynômes ont i racines

$$x^2 = a_1^2, \quad x^2 = a_2^2 .. \ x^2 = a_i^2, \quad x^2 = b_1^2, \ .. \ x^2 = b_i^2 \ (^*)$$

et le second polynôme X'_n a encore une racine nulle, $x = 0$.

Par suite, on pourra écrire

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \prod_{\mu=1}^{\mu=i} \left(1 - \frac{x^2}{a_\mu^2}\right) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} n = 2i \\ n = 2i + 1 \end{cases} \\ X'_n &= x \prod_{\mu=1}^{\mu=i-1} \left(1 - \frac{x^2}{b_\mu^2}\right) \quad \text{pour} \quad n = 2i \\ X'_n &= x \prod_{\mu=1}^{\mu=i} \left(1 - \frac{x^2}{b_\mu^2}\right) \quad \text{pour} \quad n = 2i + 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}$$

Nous considérons seulement les valeurs positives de x ; le facteur x n'a donc pas d'influence sur le signe des produits Π.

Remarquons qu'aussitôt que x^2 devient plus grand que la plus grande de toutes les racines a^2 et b^2, tous les facteurs dans

(*) Voyez le *post-scriptum* à la fin de la note 1.

les produits XIII deviennent négatifs. A l'aide de cette remarque, on déduit aussitôt que le quotient

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

restera continuellement positif quand le nombre des facteurs (le facteur x étant exclu) est le même dans le numérateur que dans le dénominateur, c'est-à-dire quand n est impair. Au contraire, le quotient mentionné plus haut restera continuellement négatif quand n est pair, puisque (le facteur x étant exclu) le nombre des facteurs du numérateur dépasse celui du dénominateur d'une unité. Mais la fonction

$$\cot g\, x$$

est positive dans les quadrants impairs, négative dans les quadrants pairs. Donc, *après que* x^2 *aura dépassé la plus grande des racines de nos polynômes, l'équation transcendante XII aura ses racines seulement dans les quadrants impairs si* n *est impair, dans les quadrants pairs si* n *est pair.*

Il est facile de voir qu'il y aura toujours une racine dans le quadrant propre, puisque maintenant la fonction

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

reste toujours finie et que la fonction

$$\cot g\, x$$

passe de l'infini à zéro dans l'espace d'un quadrant. D'un autre côté, l'on voit qu'il n'y aura qu'une racine dans le quadrant propre. En effet, des considérations précédentes il suit, qu'entre deux racines de $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ il n'y a qu'une racine de $\varphi_{n+\frac{3}{2}}$; supposons que n soit pair, et que la fonction $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ ait ses deux racines dans un quadrant; elle les aura dans un quadrant pair, mais alors $\varphi_{n+\frac{3}{2}}$ aura une racine dans un quadrant pair, alors que cette fonction ne peut avoir ses racines que dans les quadrants impairs.

La courbe

$$\frac{X_n}{X'_n},$$

après avoir dépassé la plus grande des racines des polynômes X_n et X'_n, s'approche asymptotiquement de l'axe des x quand n est impair; elle s'en éloigne continuellement quand n est pair. Cela se déduit immédiatement de la considération des produits XIII. Ce fait nous explique le théorème de Poisson et Todhunter sur les grandes racines de ces équations. En effet, les points d'intersection entre la courbe

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

et la courbe $\cot x$ s'approchent avec x croissant des multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ dans le premier cas; des multiples pairs de $\frac{\pi}{2}$ dans le second.

De cette manière, l'assertion que nous avons émise au commencement de cette note est prouvée pour toutes les racines des équations $\varphi_{n+\frac{1}{2}} = 0$, ou, ce qui est la même chose, pour $J_{n+\frac{1}{2}} = 0$, à l'exception de la première racine venant après le point $x = 0$. Nous allons démontrer l'exactitude de notre assertion pour la première racine dans le cas où n est pair, en faisant remarquer que la démonstration pour le cas où n est impair lui ressemble en tout point. Notre proposition étant juste pour $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$, il s'ensuit nécessairement qu'elle le sera aussi pour $\varphi_{n+\frac{3}{2}}$. Après cela, nous n'avons qu'à démontrer directement qu'elle est exacte pour

$$\varphi_{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \varphi_{\frac{5}{2}}.$$

Rappelons que pour $n = 2i$, X_n est un produit de i facteurs de la forme

$$\left(1 - \frac{x^2}{a_\mu^2}\right);$$

X'_n est un produit de $i - 1$ facteurs semblables et du facteur x.

D'un autre côté, X_{n-1} et X'_{n-1} sont des produits de $i - 1$ facteurs de la forme citée.

Supposons que les fonctions $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$ obéissent à la règle, c'est-à-dire que $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ s'annule pour la première fois dans le quadrant $(n + 2)^{me}$, $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$ dans le quadrant $(n + 1)^{er}$. Nous verrons plus loin que près du point $x = 0$,

$$\frac{X_n}{X'_n} - \cot g\, x > 0.$$

Il faut donc que dans l'espace où il n'y a pas de racine de l'équation XIII, la courbe

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

soit continuellement en avant de la courbe $\cot g\, x$.

Cotg x devient infini pour les valeurs de x multiples de π ; il faut donc que

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

devienne infini pour des valeurs de x un peu plus grandes que les multiples de π. De 0 à $n\frac{\pi}{2}$, puisque $n = 2i$, la cotangente devient i fois infinie (le point $x = 0$ est excepté), tandis que les fonctions

$$\frac{X_n}{X'_n} \quad \text{et} \quad \frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}}$$

ne peuvent devenir infinies que $i - 1$ fois (*).

Il faut donc qu'après son $i^{ème}$ point de passage par l'infini la courbe des cotangentes rencontre les courbes

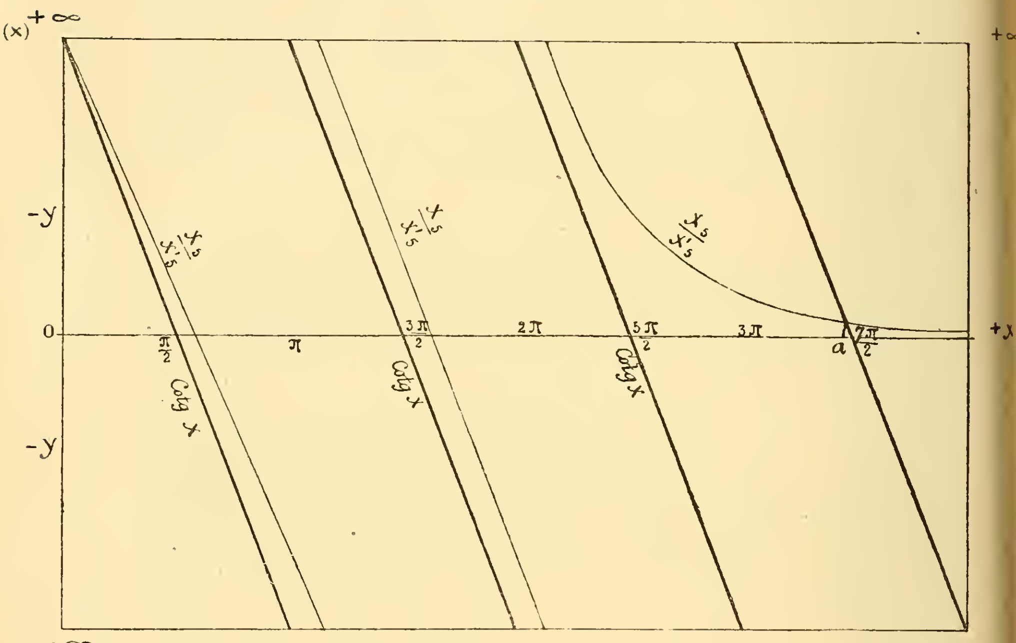
$$\frac{X'_n}{X'_n} \quad \text{et} \quad \frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}},$$

(*) L'abscisse oa du point d'intersection des deux courbes représente la première racine de l'équation

$$\varphi_{5+\frac{1}{2}} = 0.$$

la première dans un quadrant pair, la seconde dans un quadrant impair, puisque ces deux courbes ne peuvent plus devenir infinies ni éviter la rencontre avec la cotangente.

Nous admettons que ces raisonnements sont justes par rapport à $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$, et nous prouverons que cette supposition conduit inévitablement aux mêmes résultats pour la fonction $\varphi_{n+\frac{3}{2}}$.



Pour éclaircir ces raisonnements, nous donnons ci-dessus un diagramme schématique pour le cas de $\varphi_{5+\frac{1}{2}}$.

Les droites épaisses représentent la courbe des cotangentes; les lignes plus minces représentent la courbe correspondante

$$\frac{X_5}{X'_5};$$

Nous supposons donc que la fonction

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

a déjà passé tous les points où elle change de signe, soit en passant par zéro, soit par l'infini, et qu'après le dernier point, où cette fonction change de signe, la fonction

$$\frac{X_n}{X'_n} - \operatorname{cotg} x$$

est devenue nulle pour la première fois, et cela dans le (n + 2)ème *quadrant; puis nous supposons que la fonction*

$$\frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}}$$

a aussi passé par tous les points où elle change de signe, et qu'après le dernier point où elle a changé de signe, la fonction

$$\frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}} - \operatorname{cotg} x$$

est devenue nulle pour la première fois, et cela dans le (n + 1)ème *quadrant. Nous devons maintenant prouver que la fonction*

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} - \operatorname{cotg} x$$

devient nulle pour la première fois dans le (n + 3)ème *quadrant, après que la fonction*

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

a passé par le dernier point où elle change de signe.

D'après ce qui a été dit plus haut (*), il est évident qu'après avoir passé par tous les points où ils deviennent nuls, les polynômes (**) X'_n, X_{n-1} et X'_{n-1} ont tous les trois le signe

$$(-1)^{i-1},$$

(*) Cf. les équations XIII et ce qui suit.

(**) Nous rappelons que $n = 2i$.

tandis que X_n a le signe

$$(-1)^i.$$

On aura donc maintenant

$$\begin{aligned}
X_n &= (-1)^i \xi_n,\\
X'_n &= (-1)^{i-1} \xi'_n,\\
X_{n-1} &= (-1)^{i-1} \xi_{n-1},\\
X'_{n-1} &= (-1)^{i-1} \xi'_{n-1},
\end{aligned}$$

équations dans lesquelles ξ_n, ξ'_n, ξ_{n-1}, ξ'_{n-1} sont des quantités essentiellement positives.

Mais les polynômes X sont liés entre eux par les relations suivantes, qu'il est aisé de vérifier,

$$\left.\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n - \frac{x^2 X_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)},\\
X'_{n+1} &= X'_n - \frac{x^2 X'_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

Par suite, on a maintenant

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} = -\frac{(2n-1)(2n+1)\xi_n + x^2 \xi_{n-1}}{x\left[(2n-1)(2n+1)\xi'_n - x^2 . \xi'_{n-1}\right]}. \qquad \text{(XV)}$$

Dès lors, on voit que la fonction

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

ne peut changer de signe qu'une seule fois, et cela en passant par l'infini (*). La fonction $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ ou, ce qui revient au même,

$$\frac{X_n}{X'_n} - \operatorname{cotg} x,$$

(*) Voyez le *post-scriptum* à la fin de la note 2.

devient nulle pour la première fois dans le $(n+2)^{\text{ème}}$ quadrant, pour la seconde fois dans le $(n+4)^{\text{ème}}$ quadrant. Soient les points où elle devient nulle $x=\alpha$, $x=\beta$.

Nous savons déjà que la fonction $\varphi_{n+\frac{3}{2}}$ ou, ce qui revient au même,

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} - \operatorname{cotg} x,$$

deviendra inévitablement une, mais une seule fois, nulle entre $x=\alpha$ et $x=\beta$, mais cet intervalle se compose d'un morceau du $(n+2)^{\text{ème}}$ quadrant, du $(n+3)^{\text{ème}}$ tout entier et d'un morceau du $(x+4)^{\text{ème}}$.

Nous allons d'abord prouver qu'elle ne peut devenir nulle dans le morceau du $(n+2)^{\text{ème}}$ quadrant.

Rappelons ce qui a été dit plus haut, que la courbe

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

est en avant de la courbe des cotangentes dans l'espace où il n'y a pas d'intersection entre ces deux courbes. La démonstration en est facile, puisque, tout près de $x=0$,

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} - \operatorname{cotg} x = \varphi_{n+\frac{3}{2}} \cdot \frac{X^{2n+2}}{c \,.\, X'_{n+1} \,.\, \sin x}.$$

La constante c est essentiellement positive (*). Près de $x=0$, $\sin x$ et X'_{n+1} (**) sont aussi positifs; nous savons enfin, par les considérations générales émises dans la première partie de cette démonstration, que toutes les fonctions φ sont positives près du point $x=0$. Donc, près de ce point,

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} - \operatorname{cotg} x > 0.$$

(*) Cf. la formule après la formule IX.

(**) Cf. les formules X.

Nous avons déjà remarqué que, pour éviter l'intersection,

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

est toujours en avant de cotg x.

Considérons le point $x = a$, où $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ s'annule pour la première fois. En ce point, la courbe

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

est encore en avant de la courbe des cotangentes. Comme cette dernière courbe est au-dessous de l'axe des x dans le quadrant considéré, il faut que la courbe

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

passe au-dessus de la courbe des cotangentes. Supposons qu'il y a un point d'intersection entre les deux courbes, entre $x = a$ et $x = (n + 2)\frac{\pi}{2}$. La fonction

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

ne peut devenir infinie qu'une seule fois (*); la cotangente devient infinie juste pour $x = (n + 2)\frac{\pi}{2}$. Il peut donc arriver que la fonction

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

devienne infinie après, en même temps ou avant la cotangente. Dans le premier cas, elle ne pourrait le devenir qu'en rencontrant la cotangente encore une fois dans le $(n + 2)^{\text{ème}}$ quadrant, mais cela donnerait une seconde racine dans l'intervalle consi-

(*) Cf. formule XV.

déré, ce qui ne doit pas arriver. La seconde éventualité n'est pas admissible, puisqu'un multiple de $\frac{\pi}{2}$ ne peut pas être racine de l'équation $X'_{n+1} = 0$ dont tous les coefficients sont des nombres entiers ou fractionnaires, et qui est composée d'un nombre fini de termes.

Enfin dans le dernier cas, c'est-à-dire celui où la fonction deviendrait infinie avant la cotangente, elle passerait de l'infini négatif à l'infini positif encore dans le $(n + 2)^{\text{ème}}$ quadrant. Dans l'espace du $(n + 3)^{\text{ème}}$ quadrant, elle aurait continuellement des valeurs positives finies (*). Mais la cotangente étant positive dans ce quadrant, et en prenant toutes les valeurs de l'infini positif jusqu'à zéro, il y aurait nécessairement un point d'intersection, c'est-à-dire une seconde racine.

Nous voilà donc conduits à la conclusion, qu'il ne peut être de racine entre $x = \alpha$ et $\alpha = (n + 2)\frac{\pi}{2}$, puisque cela exigerait la présence d'une seconde racine dans l'intervalle, entre $x = \alpha$ et $x = \beta$, dans lequel il ne doit pas être plus d'une racine.

Considérons encore le morceau du $(n + 4)^{\text{ème}}$ quadrant, c'est-à-dire le morceau entre $\alpha = (n + 3)\frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \beta$.

Il faut se rappeler qu'on a, d'après II,

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire que la fonction φ s'annule en même temps que la fonction J et qu'elles sont toutes les deux de même signe pour les valeurs positives de x. Mais on a une relation connue entre les fonctions de Bessel (**)

$$J_{m+1} = \frac{2m}{x} J_m - J_{m-1} \qquad \text{(XVI)}$$

(*) Nous rappelons qu'elle ne peut plus changer de signe et qu'elle doit être positive. Cela se voit en considérant la formule XV et ce qui a été dit à propos de la vérification du théorème de Poisson et de Todhunter.

(**) On sait que cette relation se rapporte à toutes les fonctions de Bessel, pourvu que m soit positif.

qui montre que J_{m+1} ne peut s'annuler que lorsque J_m et J_{m-1} sont de même signe. Posons $m = n + \frac{1}{2}$, et remarquons que, d'après notre supposition, la fonction $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$, ou $J_{n-\frac{1}{2}}$ est passée du positif au négatif dans le $(n+1)^{\text{ème}}$ quadrant, du négatif au positif dans le $(n+3)^{\text{ème}}$; donc cette fonction est positive dans le $(n+4)^{\text{ème}}$ quadrant. Elle ne deviendra négative que dans le $(n+5)^{\text{ème}}$. Quant à la fonction $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ ou $J_{n+\frac{1}{2}}$, elle est passée du positif au négatif dans le $(n+2)^{\text{ème}}$ quadrant, puisqu'elle s'est annulée pour la première fois dans ce quadrant, et toutes ces fonctions sont, au début, positives. Maintenant elle est négative ; elle ne redeviendra positive qu'au point $x = \beta$ dans le $(n+4)^{\text{ème}}$ quadrant. Donc, de $x = (n+3)\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\alpha = \beta$, les fonctions $J_{n+\frac{1}{2}}$ et $J_{n-\frac{1}{2}}$ ou $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$ sont de signes contraires, Par suite, $J_{n+\frac{3}{2}}$ ou $\varphi_{n+\frac{3}{2}}$ ne peut s'annuler dans cet intervalle.

Il ne reste donc à cette fonction que l'intervalle entre $x = (n+2)\frac{\pi}{2}$ et $x = (n+3)\frac{\pi}{2}$. C'est dans cet intervalle qu'elle s'annule avant la seconde racine de $\varphi_{n-\frac{1}{2}} = 0$. Notre proposition est donc démontrée. La fonction $\varphi_{n+\frac{2}{3}}$ s'annule pour la première fois dans le $(n+3)^{\text{ème}}$ quadrant, quand la fonction $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ s'annule pour la première fois dans le $(n+2)^{\text{ème}}$ et $\varphi_{n-\frac{1}{2}}$ dans le $(n+1)^{\text{ème}}$ quadrant.

Il ne nous reste qu'à montrer que $\varphi_{\frac{3}{2}}$ s'annule dans les 3^{me}, 5^{me}, 7^{me} . . . . . . quadrants, que $\varphi_{\frac{5}{2}}$ s'annule dans les 4^{me}, 6^{me}, 8^{me} . . . . . . quadrants.

Selon les formules IX et X,

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin x}{x},$$

$$\varphi_{\frac{3}{2}} = \frac{1.3\ 1}{x^3}\left[\sin x - x.\cos x\right],$$

$$\varphi_{\frac{5}{2}} = \frac{1.3.1.3.5}{x^3}\left[\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)\sin x - x.\cos x\right],$$

. . . .

Il est évident que les racines de l'équation

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = 0,$$

sont π, 2π, 3π . . . . . .

Les racines de l'équation

$$\varphi_{\frac{3}{2}} = 0$$

sont les mêmes que celles de l'équation

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = 0.$$

Dans le premier et le second quadrant,

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{1.2 \,..\, 2n} - \cdots$$

Ici B_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli. Après ceci, il est évident que

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} > 0$$

de 0 à π. Donc il n'y aura pas de racine dans les deux premiers quadrants.

Remarquons maintenant que les racines de l'équation citée tout à l'heure, c'est à-dire

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = 0,$$

sont les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole équilatère

$$yx = 1$$

avec la courbe des cotangentes. Il est évident que ces points d'intersection seront situés au-dessous de l'axe des x, c'est-à dire qu'ils seront dans l'espace des quadrants impairs. Nous avons vu déjà que la première racine ne peut se trouver dans le premier ni dans le second quadrant. Selon les considérations générales contenues dans la première partie de cette démonstration, entre les deux premières racines de $\varphi_{\frac{1}{2}}$ il y aura nécessairement une racine de $\varphi_{\frac{3}{2}}$. Cette racine sera donc située entre π et 2π. Elle ne peut se trouver dans le quatrième quadrant, qui est pair ; elle sera donc dans le troisième. Nous avons déjà remarqué que toutes les racines se trouveront dans les quadrants impairs, puisque l'hyperbole reste continuellement au-dessous de l'axe des x et s'approche de celui-ci d'une manière asymptotique.

L'équation

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = 0$$

a été discutée par Fourrier (*) et Riemann (**) sous des formes un peu différentes, puisqu'elle comportait une constante. D'ailleurs, Fourrier l'a considérée sous la forme

$$\operatorname{tang} x = kx.$$

Passons à l'équation

$$\varphi_{\frac{5}{2}} = 0.$$

Ses racines sont identiques avec celles de l'équation

$$\frac{3 - x^2}{3x} - \operatorname{cotg} x = 0.$$

$$\frac{X_n}{X'_n} = \frac{3 - x^2}{3x};$$

donc cette fonction passe par l'infini au point $x = 0$, puis par zéro au point $x = \sqrt{3}$.

De 0 à π, nous avons

$$\frac{3 - x^2}{3x} - \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{1.2 .. 2n} \cdots \right\}.$$

(*) Fourrier, *Théorie analytique de la chaleur*. Chapitre sur la Sphère.

(**) Riemann, *Partielle Differentialgleichungen*. Édition de 1883, pp. 160 et 161, fig. XIX, cas de $q = 1$.

Il est évident que cette différence est continuellement positive dans tout l'intervalle de 0 à π. Dans le troisième quadrant, la cotangente est positive et la courbe $\frac{3-x^2}{3x}$ négative. Elle passe du positif au négatif au point $x = \sqrt{3}$. Donc il ne peut exister d'intersection dans ce quadrant, mais il y aura un point d'intersection dans le quatrième quadrant, puisque $\frac{3-x^2}{3x}$ reste continuellement négatif et la cotangente est aussi négative dans ce quadrant. Par un raisonnement semblable, on voit aussitôt qu'il y aura intersection, c'est-à-dire racine de l'équation $\varphi_{\frac{3}{2}} = 0$ dans le sixième, huitième quadrants et dans les autres quadrants pairs.

Nous remarquons que la courbe

$$y = \frac{3 - x^2}{3x}$$

est une hyperbole ayant les asymptotes $x = 0$ et $y + 3x = 0$. On pourrait vérifier directement notre proposition pour les fonctions suivantes. Mais ce qui a été nécessaire pour la démontrer est déjà fait. En rassemblant tous ce qui a été dit, nous concluons que *les racines de l'équation transcendante*

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ..\ ,$$

sont situées dans les quadrants $(n + 2)^{\text{ème}}$, $(n + 4)^{\text{ème}}$, $(n + 6)^{\text{ème}}$, *en général dans les quadrants* $(n + 2i)^{\text{ème}}$ *où* $n = 1, 2, 3$ ...

Mentionnons maintenant quelques conséquences analytiques qui découlent de cette proposition ;

En considérant les fonctions $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ comme des fonctions de θ, c'est-à-dire de $\frac{x^2}{2^2}$, on voit qu'elles se comportent comme des polynômes. En effet, elles sont des dérivées consécutives de la fonction $\varphi_{\frac{1}{2}}$. Quand l'ordre de la dérivée croît d'une unité, le nombre des racines diminue d'une unité.

Considérons encore les fonctions $J_{n+\frac{1}{2}}$; prenons, par exemple, toutes celles dans lesquelles n est pair. Quand n croît de deux unités, le nombre de racines nulles croît aussi de deux unités, mais le nombre de racines qui ne sont pas nulles diminue de deux unités. En effet, $J_{n+\frac{1}{2}+2}$ ne s'annule plus dans le $(n + 2)^{\text{ème}}$

quadrant à droite du point $x = 0$, ni au point correspondant à gauche de $x = 0$. On peut donc dire que le nombre total des racines nulles et autres est le même pour toutes les fonctions $J_{n+\frac{1}{2}}$, dans lesquelles n est pair, quoique ce nombre soit infiniment grand. La même remarque concerne celles entre les fonctions $J_{n+\frac{1}{2}}$, dans lesquelles n est impair.

La remarque (*) que $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ ne diffère que par une constante de la dérivée $n^{ième}$ de $\varphi_{\frac{1}{2}}$ conduit à la formule suivante :

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{d^n}{d\theta^n}\left(\frac{\sin 2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\right),$$

puisque

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin x}{2} \quad \text{et} \quad x = 2\sqrt{\theta}.$$

On voit que les fonctions

$$X^n = 1 - A_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$X'_n = x - A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

représentent le cosinus et le sinus dans les premiers quadrants. Ces polynômes cessent de ressembler aux fonctions trigonométriques après avoir dépassé toutes leurs racines. Ces racines sont plus grandes que celles des fonctions trigonométriques. Plus l'ordre du polynôme est élevé, plus il s'approche de la fonction trigonométrique; enfin, pour $n = \infty$, tous les coefficients A deviennent égaux à l'unité et le polynôme X_∞ n'est autre chose que le cosinus, X'_∞ que le sinus. Leur quotient, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{X_n}{X'_n},$$

ressemble à la cotangente. Si l'on exécute la division du numérateur par le dénominateur, on obtient un développement de la

(*) Cf. formule VIII.

fonction citée tout à l'heure, coïncidant jusqu'au $n^{ième}$ terme avec la formule connue :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \cdots - \frac{2^{3n} B_n x^{2n-1}}{1.2\,..\,2n} - \cdots$$

En exécutant ce développement, on rencontre la relation suivante entre les nombres de Bernouilli et les coefficients A

$$\frac{A_{2i}}{2i!} - \frac{A_{2i+1}}{(2i+1)!} - \frac{A_{2i-1}}{(2i+1)!} \cdot \frac{2^2 . B_1}{2!} + \frac{A_{2i-3}}{(2i-3)!} \cdot \frac{2^4 . B_2}{4!} - \cdots$$

$$+ (-1)^{\mu} \frac{A_{2i-2\mu+1}}{(2i-2\mu+1)!} \frac{2^{2\mu} B_{\mu}}{2\mu!} + \cdots + (-1)^{i} \frac{A_1}{2!} \frac{2^{2i} B_i}{2i!} = 0.$$

Nous rappelons que

$$A_0 = 1, \ A_1 = 1, \ A_{i+1} = 2A_i \frac{(n-i)}{2n-i} \cdot$$

Cette relation entre les nombres de Bernoulli et les coefficients A est juste tant que

$$i < n.$$

Quand $n = \infty$, cette relation devient la relation connue

$$\frac{1}{2i!} - \frac{1}{(2i+1)!} - \frac{1}{(2i-1)!} \frac{2^2 B_1}{2!} + \cdots \frac{(-1)^{\mu} 1}{(2i-2\mu+1)!} \frac{2^{2\mu} B_{\mu}}{2\mu!} + \cdots$$

$$+ (-1)^2 \frac{1}{1!} \frac{2^{2i} B_2}{2i!} = 0,$$

puisque tous les coefficients A, pour $n = \infty$, deviennent égaux à l'unité.

10 mai 1891.

P.-S. M. J. Deruyts ayant revu ma note a eu l'obligeance de me communiquer (par l'entremise de M. le Paige) quelques observations. Entre autres, il a corrigé une erreur dans le calcul de la constante c (après la formule IX), et il m'a fait observer qu'il serait utile de démontrer que les racines des polynômes X_n et X'_n sont toutes réelles, et d'éclaircir l'assertion émise aussitôt après la formule XV, que la fonction

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

ne peut changer de signe qu'une fois, et cela en passant par l'infini.

Je me permets de lui exprimer ma reconnaissance pour ces observations, et, suivant son conseil, je donne ci-après quelques éclaircissements sur les lacunes qu'il a bien voulu me signaler.

Pour prouver que les racines des polynômes X_n, X'_n sont toutes réelles, on peut suivre un chemin semblable à celui à l'aide duquel on est parvenu à la démonstration de la proposition qui constitue le thème de cette note.

Premièrement, on peut traiter directement les polynômes de l'ordre inférieur et passer à ceux de l'ordre supérieur, de proche en proche. Prenons, par exemple, les polynômes X_n, on trouve aussitôt pour les deux ou trois polynômes de l'ordre inférieur que les racines de chaque polynôme d'un ordre plus élevé sont moindres que celles du précédent; d'ailleurs, on trouve qu'elles sont réelles.

Observons maintenant que, les polynômes étant pairs, on peut se borner à la considération des racines positives seulement, et nous écrivons les relations [formules XIV].

$$X_{n+1} = X_n - \frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)} X_{n+1},$$

$$X_n = X_{n-1} - \frac{x^2}{(2n-2)\,2n} X_{n-2},$$

. . . .

. . . .

De ces relations on tire aussitôt les deux conclusions : 1° que les racines de l'équation

$$X_n = 0$$

sont distinctes de celles de

$$X_{n-1} = 0;$$

2° Que pour X_n et X_{n+1} deviennent nuls, il faut que X_n et X_{n+1} soient de même signe.

Admettons maintenant que les racines de

$$X_n = 0$$

et

$$X_{n-1} = 0$$

sont toutes réelles, et que les points où X_n coupe l'axe des X sont toujours plus proches de $x = 0$ que les points correspondants où X_{n-1} coupe cet axe, c'est-à-dire que les

$$X_n = 0$$

viennent avant

$$X_{n-1} = 0$$

Comme entre $X_n = 0$ et le point le plus proche où $X_{n-1} = 0$, d'après ce qui a été dit plus haut, les deux fonctions X_n et X_{n-1} sont de signe contraire; il est évident que la fonction X_{n-1} ne pourra devenir nulle. Donc elle ne peut devenir nulle que dans les intervalles : $X = 0$ à la première racine de X_n, première racine de X_{n-1}, à la seconde racine de X_n, et ainsi de suite.

Mais elle le devient nécessairement une fois dans chacun de ces intervalles. Dans le premier, parce que pour $x = 0$ X_{n-1} est positif, et aussitôt après le point

$$X_n = 0$$

elle est déjà négative. Dans les autres intervalles elle devient nulle une fois parce qu'avec les suppositions énoncées plus haut la différence

$$X_n - \frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)} X_{n-1},$$

qui lui est égale, est tantôt positive, tantôt négative dans les intervalles où il n'y a pas de racine de X_{n-1}. Ainsi, devant chaque point où X_n coupe l'axe des X il y a un point où X_{n-1} coupe cet axe. Remarquons maintenant que le polynôme X_{n+1} peut être de même degré que X_n ou d'un degré supérieur de deux unités. Dans ce dernier cas, il nous manque encore pour X_{n+1} une racine réelle.

Mais quand X_{n+1} est d'un degré plus élevé que X_n, X_{n-1} est de même degré que X_n, Considérons maintenant l'intervalle après la dernière racine de X_n. Bientôt après la courbe X_{n-1} coupe l'axe des X pour la dernière fois et passe du même côté de cet axe où se trouve maintenant la courbe X_n. Mais X_{n-1} a un multiplicateur x^2 et, par suite, la fonction

$$\frac{x^2 X_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

est d'un degré plus élevé de deux unités que X_n; donc sa valeur absolue croît plus vite que celle de X_n, et comme elles restent continuellement du même côté de l'axe des X, il y aura nécessairement intersection entre les deux courbes

$$\frac{x^2 X_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

et X_n, mais l'abscisse de cette intersection représente la dernière racine réelle cherchée de X_{n+1}.

La dernière racine de X_{n+1} donne lieu à quelques remarques à part dans le cas où X_{n+1} et X_n sont de même degré. Le lecteur saura les compléter facilement en poursuivant un raisonnement analogue. La démonstration de la réalité des racines des polynômes X'_n sera tout à fait semblable.

Enfin nous allons justifier l'assertion émise après la formule XV. Nous rappelons que nous avons choisi le cas où n était pair. Le polynôme X_n est alors de degré plus élevé que X_{n-1}, tandis que X'_n et X'_{n-1} sont de même degré. On a supposé que les racines de toutes ces fonctions sont déjà dépassées, et on a trouvé que maintenant on a

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} = -\frac{(2n-1)(2n+1)\xi_n + x^2\xi_{n-1}}{x\left[(2n-1)(2n+1)\,\xi'_n - x^2\xi'_{n-1}\right]},$$

les ξ étant des grandeurs essentiellement positives. Il est évident que le numérateur ne peut plus devenir nul, puisque ni ξ ni ξ_{n-1} ne peuvent devenir ni ensemble ni séparément nuls. Mais le dénominateur peut et doit devenir nul une fois encore. Une racine de X'_{n+1} est encore à notre disposition. X'_n, représenté ici par ξ'_n, est devenu nul avant X'_{n-1}, (ξ'_{n-1}); après que ce dernier polynôme est devenu nul pour la dernière fois, ils sont de même signe, et, dans ce cas, de même ordre. Mais X'_{n-1} est multipliée par x^2, donc $x^2\,X'_{n-1}$ croît plus vite et il doit y avoir intersection des deux courbes, c'est-à-dire racine réelle de X'_{n+1}. Ainsi la fonction

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

change de signe pour la dernière fois en passant par l'infini quand n est pair; elle le changerait en passant par zéro, quand n serait impair.

Odessa, le 7 avril 1892.

ÉLATÉRIDES NOUVEAUX

PAR

Le Dr E. CANDÈZE.

CINQUIÈME FASCICULE.

AVANT-PROPOS.

Les Élatérides qui sont nommés et sommairement décrits dans les pages qui suivent, proviennent, pour la plus grande partie, des régions tropicales de l'ancien et du nouveau continent.

Depuis plusieurs années, certains genres importants de la famille, répandus dans les pays paléarctiques aussi bien que dans les régions septentrionales de l'Amérique, ont été l'objet de travaux monographiques spéciaux.

Je citerai notamment les genres *Cardiophorus, Cryptohypnus, Melanotus, Agriotes* et autres.

Je me suis donc abstenu de nommer et de décrire, comme nouvelles, des espèces appartenant à ces régions, à très peu d'exceptions près, laissant aux entomologistes qui s'en occupent spécialement le soin de nous les faire connaître, afin de ne pas m'exposer à commettre des doubles emplois et ajouter des complications à la synonymie, qui n'en présente déjà que trop.

Des nouveautés nous arrivent sans cesse du continent africain, de Madagascar, des pays malais et de l'Amérique du Sud.

Ce sont ces contrées principalement qui m'ont fourni les matériaux du fascicule que je présente aujourd'hui au public entomologique.

Novembre 1892.

ÉLATÉRIDES NOUVEAUX.

AGRYPNITES.

AGRYPNUS.

A. ANTENNATUS. — *Niger, haud nitidus, parce et brevissime pilosulus; antennis validis, capite prothoraceque longioribus, brunneo-nigris, articulis 2 et 3 parvis æqualibus, sequentibus triangularibus, latis; prothorace latitudini longitudine æquali, medio convexo, fortiter et dense, versus angulos anteriores grosse et fere confluenter punctato; elytris basi lateribusque tantum punctato-striatis; pedibus brunneo nigris.*

Long. 17 mill., lat. 5 mill.

Cap.

Il ressemble à s'y méprendre à l'un de ces *Pristilophus* qui représentent les *Corymbites* dans l'Afrique australe, ce qu'il doit à sa forme aplatie et à la longueur des antennes, qui ne sont pas habituelles chez les *Agrypnus*.

A ce propos, je ferai remarquer que les *Pristilophus* ont, comme les *Agrypnus*, les carènes des angles postérieurs du prothorax prolongées le long du bord latéral jusque vers les angles antérieurs, ce qui ajoute à la ressemblance des deux genres, si éloignés cependant dans la série.

Les sutures prosternales ouvertes sont, au demeurant, le seul caractère qui établisse le classement de l'espèce actuelle dans la tribu des Agrypnites.

ADELOCERA.

A. aterrima. Cand. — *Élat. nouv.*, IV, 4.

Cette espèce peut acquérir une taille bien supérieure à celle qui a été indiquée lors de la description que j'en ai faite. Un exemplaire d'Antananarivo, reçu récemment, ne mesure pas moins de 25 millim., alors que l'exemplaire typique n'en a que 18.

A. tessellata. — De même que la *vicina* [1], celle-ci peut être considérée comme une forme voisine de la *modesta*, espèce que l'on trouve dans tous les pays intertropicaux. J'en possède trois exemplaires : deux de Bornéo, un de Luçon, où le contraste entre les écailles de couleur différente, brunes et dorées, est beaucoup plus prononcé que chez la *modesta*, où ces mêmes écailles sont brunes et grisâtres, ou gris jaunâtre.

Sa taille est également plus petite.

C'est une variété ou, si l'on veut, une sous-espèce méritant un nom particulier.

A. javana. — *Brunnea, pilis squamiformibus aureis marmorata; prothorace latitudine longiore, medio longitrorsum leviter sulcato, utrinque transversim impresso, inæqualiter punctato, angulis posticis brevibus, carinatis; elytris seriatim punctatis, interstitiis punctulatis.*

Long. 15-17 mill., lat. 4-5 mill.

Java ; monts Tjikoraï, Préangers.

Ce qui distingue particulièrement cette espèce, c'est la nature de la ponctuation du prothorax. Celle-ci est très inégale ; composée en majeure partie de très gros points, on remarque sur le disque quatre espaces où cette même ponctuation est beaucoup plus ténue.

Sa place est à la suite de la *collisa*.

[1] *Élat. de Birmanie*, fasc. II, 1891.

LACON.

L. PALLIATUS. — *Fuscus, pilis squamiformibus brunneis albicantibusque confertissime vestitus; prothorace quadrituberculato, lateribus bisinuato et leviter crenulato; elytris prothorace latioribus, basi granulatis, interstitio tertio basi elevato; subtus fulvescens, sulcis prothoracis femoralibus anticis magnis, tarsalibus nullis.*

Long. 11 mill., lat. 4 $^1/_4$ mill.

Madagascar; Andrangoloaca.

Jolie espèce du groupe du *turbidus.*

La vestiture coloriée est brune dans la moitié antérieure du corps, d'un blanc cendré dans l'autre. Le prothorax porte quatre tubercules; il est bisinueux et un peu denticulé sur les bords latéraux; les élytres sont plus larges que le prothorax, bombées, granuleuses en avant, avec le troisième intervalle élevé à la base. En dessous, où il est brun clair, les flancs présentent à la base un large et profond sillon transversal destiné à loger les cuisses des pattes antérieures; il n'y a pas de sillons tarsaux.

Les espèces du genre *Lacon* paraissent fort nombreuses et variées en couleur à Madagascar. Il n'est pas d'envoi d'Élatérides de cette île qui ne renferme quelques nouvelles espèces de ces Agrypnites, qui semblent y être dans leur pays d'élection.

L. ARGENTATUS. — *Fuscus, pilis squamiformibus brevissimis, confertissimis, brunneis, vestitus, maculis argenteis ornatus; prothorace inæquali, bituberculato, lateribus crenatis et profunde bisinuatis; elytris punctatis, basi bituberculatis; subtus albicanti-vestitus.*

Long. 11 mill., lat. 4 mill.

Madagascar; Antananarivo.

Forme en petit du *turbidus.* La vestiture lui donne, au-dessus, une couleur brun-rouge, les côtés du prothorax tournant au doré, et les élytres ornées de taches argentées brillantes, dont une marginale, plus grande et triangulaire.

Les côtés du corselet crénelés, l'absence de sillons tarsaux et son système de coloration le distinguent suffisamment.

Le dessous est blanchâtre.

L. HAMATUS. — *Depressus, brunneus, haud nitidus, ferrugineo marmoratus, squamulis minutissimis fulvis irroratus; prothorace longitudini latitudine æquali, parum convexo, lateribus crenato, angulis posticis acutis, extrorsum flexis, fere hamatis; elytris striis fortiter punctatis; sulcis tarsorum nullis*

Long. 9 mill., lat. 3 mill.

Madagascar.

Fort voisin du *maculosus* dont il a l'apparence. En comparant les deux diagnoses on peut constater toutefois qu'il existe une grande différence dans la description des angles postérieurs du prothorax. Chez le *maculosus* ces derniers sont courts, peu divergents, obtus au bout. Ici, au contraire, ils sont longs, très recourbés en dehors et finissent en une pointe aiguë.

L. ALBOSCUTATUS. — *Brunneus, obcure ferrugineo-submarmoratus, pilis squamiformibus griseis minus dense vestitus; prothorace latitudine longiore, lateribus crenulato et anguloso; scutello albo-piloso; elytris punctis seriatis externe majoribus; subtus sulcis tarsalibus nullis.*

Long. 4 mill., lat. 1 $^1/_4$ mill.

Madagascar.

Très petite espèce à placer à la suite du *mysticus*. La couleur de l'écusson, les côtés du corselet crénelés et anguleux vers leur tiers antérieur, enfin la longueur de ce dernier relativement à la largeur, la feront facilement reconnaître.

L. CITHAREUS. — *Fusco-brunneus, rufo-maculatus, fulvo-pilosulus; prothorace latitudine paulo longiore, apice subito angustato, angulis anticis prominulis, disco bituberculato, postice angustiore; elytris medio paulo dilatatis, striato-punctatis; subtus sulcis tarsalibus destitutus.*

Long. 9-11 mill., lat. 3-4 mill.

Java oriental; monts Tengger.

Il se fait remarquer par un rétrécissement sensible de la base du prothorax et des élytres, par la longueur relative du premier dont le sommet est brusquement rétréci, avec les angles antérieurs saillants et deux tubercules transversaux, courts, lisses au milieu du disque.

Sa place est à la suite du *furunculosus.*

L. SCUTELLARIS. — *Fuscus, confertissime squamulosus, squamulis fulvis, brunneis, albicantibusque marmoratim intermixtis; prothorace latitudine haud longiore, dorso æquali, angulis posticis obtusis, oblique carinatis; scutello albo squamuloso; elytris seriatim punctatis; sulcis tarsalibus nullis.*

Long. 15-18 mill., lat. 5-6 mill.

Japon méridional; archipel Liu-kiu : Oshima.

Il se rapproche du *binodulus* et, pour les couleurs, du *murinus.* Celles-ci sont composées de brun, de fauve et de blanc formant marbrures, sans que l'une prédomine sur les autres, sauf l'écusson qui est blanc. Le prothorax n'a, sur le disque, ni carène ni protubérance; enfin le dessous est sans sillons tarsaux.

L. PINGUIS. — *Crassus, fuscus, opacus, brunneo-squamulosus; prothorace longitudine latiore, tumido, creberrime fortiter punctato, angulis posticis paulo divaricatis, non truncatis; elytris convexis, striis punctatis, interstitiis basi granulatis, medio paulo dilatatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 9 mill., lat. 3 1/2 mill.

Australie; Cooktown.

Très voisin des *crassus* et *asperulatus;* plus large, les élytres plus dilatées vers le milieu, les angles postérieurs du prothorax arrondis au sommet, mais non tronqués comme chez les deux premiers.

MERISTHUS.

M. squameus. — *Fuscus, argenteo-squamulosus, medio prothoracis et elytrorum squamulis rarioribus; prothorace tumido, lateribus crenulato; elytris sulcatis, apice crenatis.*

Long. 6 mill., lat. 2 mill.

Boma ; Bas-Congo.

Peu différent du *lepidotus*, de même taille mais d'aspect tout autre, ce qui est dû à la manière dont sont réparties les squamules argentées. Celle-ci forment des marbrures très tranchées chez le *lepidotus*. Ici, la couleur qu'elles donnent à l'insecte est presque uniforme, d'un gris à peine varié par quelques taches plus foncées.

Trouvé par M. M. Tschoffen.

M. biguttatus. — *Brunneus, squamis pallidis parce irroratus; antennis pallidis; prothorace quadrato, convexo, subcanaliculato; elytris apice guttulis duabus flavis.*

Long. 3 mill., lat. $^4/_5$ mill.

Pérak.

Aspect général et couleur du *scobinula;* les élytres sans tache, plus obscures au milieu, mais ornées vers l'extrémité de deux gouttes flaves.

M. nigritulus. — *Niger, opacus, squamulis pallidis regulariter sparsis; prothorace latitudini longitudine æquali, margine rufescente; elytris brevibus, squamulis seriatim dispositis; pedibus cum antennis rufis.*

Long. 3 mill., lat. 1 mill.

Sumatra ; Palembank.

Plus grand que le *scobinula,* et relativement plus large, d'un noir grisâtre mat uniforme, avec les bords du prothorax passant au rougeâtre. Les squamules éparses dont il est revêtu et qui forment des lignes sur les élytres, lui communiquent un aspect poussiéreux.

AGRÆUS.

A. Schönfeldti. — *Ovalis, convexus, brunneus, opacus, squamulis fulvis pilisque erectis nigris in elytris; prothorace inæquali, fortiter punctato; elytris prothorace latioribus, medio valde dilatatis, versus apicem albo-maculatis.*

Long. 4 mill., lat. fere 2 mill.

♂ *Prothorace medio tuberculato, margine laterali antice elevato tridentato.*

♀ *Prothorace simplici.*

Bornéo.

Cette espèce se distingue de toutes celles que l'on connaît par la singulière construction du prothorax chez le mâle. Cette pièce porte au milieu un tubercule et, de chaque côté, en avant, une triple élévation dont la médiane est formée par la continuation du bord latéral dévié obliquement en dedans et accompagné, en dehors, d'une courte carinule, et en dedans d'une saillie qui s'en détache transversalement.

Les élytres portent les protubérances ordinaires.

Chez la femelle, le prothorax est dépourvu de tubercule et de saillie.

A placer à la suite du *feroculus.*

A. catulus. — *Brunneus, pilis squamiformibus fulvis obductus; prothorace transverso, lateribus deplanato, parum visibiliter punctato; elytris apice attenuatis, dorso tuberculatis, albo-maculatis.*

Long. 5-6 mill., lat. 2-2 $^1/_2$ mill.

♂ *Prothorace longitrorsum carina media, antice gradatim elevata.*

♀ *Prothorace medio transversim tumido.*

Java oriental; monts Tengger.

Le prothorax du mâle ne porte pas de saillie latérale, mais une seule médiane et longitudinale qui s'élève d'arrière en avant jusqu'à former une forte dent au niveau du bord antérieur.

Celui de la femelle est plus large et simplement élevé au milieu, l'élévation y affectant une forme transversale.

Chez le premier les élytres portent en avant deux saillies brièvement pénicillées, et en arrière deux petites taches blanches. Chez la seconde, les saillies des élytres sont moins prononcées et entre les deux taches blanches postérieures, on remarque quelques groupes de petites écailles de même couleur disséminés çà et là. Sa taille est plus grande que celle du mâle.

Sa place est à la suite du *Mannerheimi.*

J'ai sous les yeux six individus de cette espèce, et c'est la première fois que j'en vois autant à la fois. Le genre, en effet, qui paraît riche en espèces, est toujours très rare en tant qu'individus, et ce n'est que sur des exemplaires uniques, ou à peu près, que les huit espèces (1) dont il se compose actuellement ont été établies.

Celle-ci a été trouvée par M. Fruhstorfer sur les feuilles du caféier.

TILOTARSUS.

T. spissicollis. — *Fuscus, opacus, pube brevi, fulva, inæquali dense vestitus; prothorace spisso, latitudine longiore, lateribus densius, medio disperse punctato, angulis posticis brevibus, fere*

(1) J'en ai vu, récemment, encore deux nouvelles, qui seront décrites dans les prochaines *Notes of Leyden Museum,* sous les noms de *Lucasseni* et *maculosus.*

rectis; elytris thorace haud duplo longioribus, lateribus striato-punctatis, versus suturam striis deficientibus.

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Antananarivo.

Remarquable par la grandeur relative du prothorax; espèce bien caractérisée et que l'on ne pourra confondre avec aucune de celles connues jusqu'à présent.

T. HEXAGONUS. — *Brunneo-castaneus, opacus, brevissime et dense fulvo-pilosus; prothorace parum convexo, utrinque parum dense punctato, medio paulo dilatato, margine laterali angulato, basi biimpresso; elytris striato-punctatis, versus suturam striis deficientibus; subtus niger.*

Long. 12 mill., lat. 3 $^3/_4$ mill.

Antananarivo.

Les bords latéraux du prothorax sont coudés au milieu, ce qui donne à cette pièce une forme hexagonale. La coloration noirâtre du dessous du corps est un caractère exceptionnel et tout à fait distinctif.

A la suite du *spinifer*.

T. RUSTICUS. — *Latiusculus, fusco-niger, squamulis minutis fulvis parce irroratus; fronte concava; prothorace latitudini longitudine æquali, basi apiceque angustato, dorso convexo, fortiter punctato, medio longitrorsum sulcato; elytris prothorace medio fere angustioribus, punctato-striatis, basi granulatis.*

Long. 15 mill., lat. 5 mill.

Madagascar; Nossi-Be.

Plus large que ne le sont en général les *Tilotarsus*, ce qui lui donne l'apparence de quelque *Lacon* des Indes orientales. Son prothorax est assez fortement élargi au milieu, où il est, en ce point, plus large que les élytres. Par leur rareté et leur brièveté, les squamules ne masquent pas la couleur noirâtre des téguments.

J'en dois la connaissance à M. le D^r Branesik, de Trencsin.

OCTOCRYPTITES.

OCTOCRYPTUS.

O. radula. — *Deplanatus, squalide niger, opacus, brevissime et parce pilosulus; fronte plana, hexagonali; prothorace trapezoïdali, verrucoso, utrinque longitrorsum impresso, angulis anticis porrectis, posticis fere rectis; elytris thoracis latitudine, verrucis minutis apice tantum umbilicatis seriatis.*

Long. 6 mill., lat. 2 $^{1}/_{4}$ mill.

Sumatra; Padang.

Un peu plus grand et surtout plus large que le *Cardoni*, plus plat, le prothorax moins élevé au milieu et nullement sillonné en arrière, au-devant de l'écusson, comme chez l'espèce bengalaise.

Je possédais depuis longtemps ce petit insecte, perdu au milieu de nombreux Coléoptères d'autres familles, sans l'avoir jamais examiné, le prenant pour quelque Opatride ou Crypticide. En effet, l'enduit terreux dont était recouvert le corps de l'insecte lui donnait l'apparence d'un petit Hétéromère terricole.

C'est la découverte et l'étude détaillée de l'espèce du Bengale qui m'a fait regarder plus attentivement celui-ci, et ma surprise a été grande d'y reconnaître, non seulement un Élatéride, mais un Élatéride du genre que je venais d'établir antérieurement.

ALAÏTES.

ALAUS.

A. lacteus Fabr. — *System. Eleuth.*, II, p. 230.

J'ai signalé récemment cette particularité que tous les individus du *lacteus* originaires de l'île d'Engano sont invariablement d'un blanc pur, ornés des quelques taches noires habituelles, sans teintes intermédiaires.

De même les spécimens provenant de l'île Nias, située comme la première à l'ouest de Sumatra, mais beaucoup plus au nord, sont constamment d'un brun jaunâtre, et les deux taches noires du disque du prothorax sont beaucoup plus grandes que dans le type.

J'ai donné à cette variété le nom de *Alaus lacteus* var. *niasensis.*

A. STRIX. — *Niger, dense squamulis brunneis, albis nigrisque variegatus; prothorace latitudine longiore, fere parallelo, medio longitrorsum paulo elevato; elytris punctato-substriatis, apice emarginatis, angulis acutis; subtus submarmoratus.*

Long. 25 mill., lat. 8 mill.

Java oriental; monts Tengger.

A peine différent du *cenchris* dont il a la taille et les principaux caractères. On le distingue toutefois de l'espèce continentale ci-dessus par son corselet moins arrondi latéralement, plus élevé longitudinalement, presque caréné au milieu, par l'échancrure postérieure des élytres plus forte et limitée par des angles plus aigus, enfin et surtout par sa vestiture plus élégante composée des trois couleurs brune, blanche et noire, alors que le brun fait défaut dans le *cenchris,* ou n'y est représenté que par de rares macules à peine visibles.

Un deuxième spécimen possédant les mêmes caractères principaux, mais plus petit et ne présentant que deux teintes, le blanc, qui domine, et des mouchetures grisâtres, provient de régions plus méridionales de l'orient de Java.

HEMIRHIPUS.

H. FERRUGINEUS. — *Rufo-ferrugineus, pube concolore vestitus; antennis nigris; fronte punctata, vertice carina brevi; prothorace latitudine paulo longiore, parallelo, medio carinulato, disco* *discrete, lateribus rugose punctato, utrinque plaga oblonga nigra; elytris striatis, interstitiis tertio et quinto paulo latioribus; subtus niger.*

Long. 40 mill., lat. 10 mill.

Guatemala.

Intermédiaire entre les *Fairmairei* et *bimaculatus*. Il a, comme le premier, les intervalles des stries sensiblement inégaux; son prothorax est moins allongé, plus parallèle et sa coloration est très différente. Cette même coloration le rapproche du *bimaculatus*, mais il est beaucoup plus grand; en outre, ce dernier a les intervalles des stries égaux.

CHALCOLÉPIDIITES.

CHALCOLEPIDIUS.

C. MONACHUS. — *Latiusculus, niger, squamulis minutissimis olivaceo-fuscis minus dense obductus; prothorace longitrorsum rugato; elytris striatis, striis discrete punctatis, interstitiis convexis.*

Long. 28 mill., lat. 10 mill.

Mexique septentrional; Chihuahua.

Caractères principaux et forme du *Lacordairei*, mais notablement plus petit, noir, revêtu de squamules très ténues d'un brun olivâtre modifiant très peu la couleur du fond.

Les stries des élytres sont plus visiblement ponctuées que dans le *Lacordairei*, nonobstant sa taille moindre.

TÉTRALOBITES.

TETRALOBUS.

T. curticollis. — *Nigro-piceus, griseo sat dense pubescens; fronte rotundata; prothorace brevi, creberrime punctato; elytris parallelis, vage sulcatis, thorace quadruplo longioribus; laminis coxalibus versus medium subangulatis.*

Long. 43 mill., lat. 14 mill.

Transvaal.

Cette espèce se distingue de tous les *Tetralobus* connus par la grande brièveté de son corselet, qui est tout à fait transversal et ne mesure que le quart de la longueur des élytres.

Sa place est à côté des *rotundifrons* et *Rondani.*

T. Dabbenei. — (♂) *Fusco-brunneus, villositate grisea, sericea, dense confertus; antennis articulis a quarto longe laminatis; prothorace brevi, dorso haud foveolato; elytris quadruplo longioribus, parallelis, sulcatis, interstitiis imparibus paulo convexioribus; subtus pectore fortiter et longe villoso.*

Long. 40 mill., lat. 13 mill.

(♀) *Major, parum pubescens; antennis brevibus, articulis triangularibus; prothorace brevi, dorso irregulari; elytris brunneis, longis; pectore parum pubescente.*

Long. 56 mill., lat. 17 mill.

Afrique équatoriale : Fatico, non loin de l'Albert Nyanza.

Espèce remarquable, à rapprocher du *T. gigas.* Comme chez ce dernier, les mâles et les femelles diffèrent fortement entre eux. Le mâle est très velu, ce qui lui donne une couleur grise, soyeuse. La femelle est plus grande, plus brune et modérément pubescente.

Les deux sexes font partie du Musée de Gênes.

Dédié à M. Eraldo Dabbene qui en a fait la découverte.

T. PUMILUS. — (♂) *Fusco-brunneus, brevissime pilosulus; antennis longe lamellatis, pallide brunneis; prothorace quadrato, rugose punctato, medio sulcato, utrinque profunde unifoveolato et juxta marginem longitrorsum impresso; elytris prothorace paulo latioribus, parallelis, fortiter et regulariter striatis; interstitiis convexis, subcostiformibus.*

Long, 22 mill., lat. 6 1/2 mill.

Queensland ; Cleveland distr.

Je possède depuis longtemps cette espèce que je considérais comme une variété de petite taille du *corrosus*. Un examen attentif m'engage toutefois à l'en séparer. Elle en diffère par sa taille beaucoup plus petite et les impressions du corselet qui sont doubles et non quadruples. Ces impressions sont ici situées de chaque côté du sillon médian, vers la moitié de la longueur du corselet et tout autrement, par conséquent, que si leur nombre, limité à deux, résultait de l'atrophie de deux des impressions du *corrosus*, auquel cas elles se verraient ou plus en avant ou plus en arrière, et non au milieu. Ses élytres sont plus nettement striées.

Nota. — J'ai reçu récemment un spécimen ♀ du *corrosus* dont le mâle seul était décrit. Comme il fallait s'y attendre, elle ne s'en distingue que par sa taille plus grande (45 mill.), ses antennes simples et ses téguments moins pubescents, ce qui la rend plus brillante.

DICRÉPIDIITES.

PSEPHUS.

P. VIRIDIPENNIS. — *Fusco-niger, subopacus, flavo-pilosulus; antennis rufo-brunneis, articulo tertio triangulari, sequenti paulo minore; prothorace latitudine paulo longiore, a basi angustato, crebre fortiter punctato; elytris planis, striatis, rugosis, viridibus; subtus pedibusque brunneis.*

Long. 8 mill., lat. 1 3/4 mill.

Gabon.

Les élytres sont vertes et légèrement métalliques, mais seulement par reflet. Ce caractère seul permet de reconnaitre facilement l'espèce, ses congénères étant pour la plupart d'un brun plus ou moins clair ou foncé, uniforme.

P. INCULTUS. — *Crassus, fuscus, sordide pilosus; fronte valde marginata; antennis articulo tertio majore, triangulari; prothorace antice incrassato, subquadrato, fortiter punctis umbilicatis notato, angulis posticis brevibus, carinatis; elytris granulis, antice præsertim, obductis.*

Long. 15 mill., lat. 4 mill.

Gabon.

Cette espèce se fait remarquer, entre toutes, par sa pubescence jaunâtre disposée dans tous les sens sur le prothorax, et plus encore par ses élytres granuleuses, surtout vers la base, où elles sont chargées d'une multitude d'aspérités, qui en font comme une râpe.

A la suite du *P. Mechowi.* Il a, comme ce dernier, le troisième article des antennes aussi grand et de même forme que les suivants.

P. CONFLUENS. — *Latus, castaneo-fuscus, opacus, breviter sat dense pubescens; fronte margine brevi, deflexa; prothorace latitudine haud longiore, conico, confertissime, lateribus confluenter punctis umbilicatis notato, medio postice sulcato, angulis posticis retrorsum productis, carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, basi granulatis; subtus concolor, antennis pedibusque pallidioribus.*

Long. 14 mill., lat. 4 $^1/_4$ mill.

Gabon.

De forme elliptique, entièrement d'un brun châtain mat, le prothorax rendu complètement opaque par les points ombiliqués qui en se joignant en recouvrent entièrement la surface.

A côté du *P. valens.*

P. unicolor. — *Brunneus, parum nitidus, breviter pilosulus; fronte excavata, margine antica valida; antennis articulo tertio quarto multo breviore; prothorace latitudine haud longiore, apice a basi angustato, grosse et crebre punctis umbilicatis notato, haud sulcato, angulis posticis fortiter carinatis; elytris striis, basi tantum impressis, punctatis, interstitiis æqualibus.*

Long. 14 mill., lat. 3 $^3/_4$ mill.

Errer-es-Saghir, pays des Somalis.

Entièrement brun, antennes, pattes et dessous du corps du même ton que le dessus. Il ressemble beaucoup au *geminatus*, d'Abyssinie, mais il est plus étroit, son prothorax n'est pas sillonné en arrière et les intervalles des stries des élytres sont tous égaux en largeur. Il est plus petit que le *P. Somalius*, espèce du même pays décrite par M. Fairmaire.

Communiqué par M. Gestro.

P. javanus. — *Rufus, fulvo-pubescens; fronte convexa, punctata; antennis nigris, basi rufis; prothorace longitudine paulo latiore, disco discrete punctato, angulis posticis brevibus, subcarinatis; elytris nigris, striato-punctatis.*

Long. 6 mill., lat. 1 $^1/_2$ mill.

Java.

Cette espèce ressemble, comme couleur, à un *Ctenoplus*, genre répandu en Malaisie; mais ses caractères génériques sont tout différents et ne laissent aucun doute sur la place qu'il doit occuper, c'est-à-dire dans le genre actuel.

DICRONYCHUS.

D. psephoides Cand., *Élat. nouv.*, III, 37.

Indiqué primitivement comme de la Cafrerie; son aire d'habitation paraît plus étendue. C'est, en effet, l'espèce qui se rencontre le plus fréquemment dans la région du bas Congo.

D. PLUMOSUS. — *Griseo-testaceus, dense pilosulus, subopacus; fronte quadrata, grosse punctata, medio impressa; antennis brevibus, testaceis, articulis a tertio longe bipectinatis; prothorace conico, punctis parum impressis sed umbilicatis dense notato, angulis posticis paulo divaricatis, obtuse carinatis; elytris a basi attenuatis, postice acuminatis, punctato-striatis, interstitiis imparibus latiusculis.*

Long. 14 mill., lat. 3 1/2 mill.

Dull; pays des Somalis.

Plusieurs exemplaires m'ont été communiqués par M. Gestro. La pectination double des antennes est très remarquable; les rameaux qui les constituent partent de la base de chaque article.

Les ongles terminaux des tarses sont bifides et légèrement dentés vers le milieu.

ELIUS.

E. STUPPEUS. — *Angustior, subcylindricus, brunneus, nitidus, helvolo-pilosulus; fronte punctis inæqualibus, majoribus umbilicatis, carina verticis minima, fere obsoleta; prothorace latitudini longitudine æquali, tumido, crebre inæqualiter punctato, punctis majoribus laterum umbilicatis, basi tantum leviter sulcato, angulis posticis retrorsum productis, fortiter carinatis; elytris thoracis latitudine, ultra medium usque parallelis, punctato-substriatis, interstitiis planis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 16 mill., lat. 4 mill.

Siam.

Plus étroit, plus cylindrique et conséquemment plus parallèle que la généralité des espèces du même genre. Les stries des élytres ne sont bien marquées qu'à la base; au delà, elles vont en s'effaçant de plus en plus jusqu'au sommet, où les lignes de points seules persistent. Il est entièrement d'un brun rougeâtre assez brillant, aussi bien en dessous qu'en dessus.

J'en dois la connaissance à M. Nonfried.

DAYAKUS (nov. gen).

Frons parva, parum porrecta.
Antennæ longæ, crassæ, articulo tertio quarto æquali.
Prosterni suturæ laterales breves, non antice canaliculatæ.
Mesosterni fossula parva, marginibus fere perpendicularibus.
Coxarum posticarum laminæ dente valida armatæ.
Tarsorum articulo primo longo, secundo et tertio anguste laminiferis, unguiculis parvis.

Genre établi sur la seule espèce suivante que ses affinités rapprochent des *Ischiodontus.* La fossette mésosternale est autrement construite et les sutures prosternales simples, fermées et courtes, le distinguent parmi les Dicrépidiites indiens.

D. ANGULARIS. — *Castaneus, nitidus, sat dense pubescens; prothorace lato, discrete punctulato, postice concavo et impresso, angulis posticis validis, fortiter et longe carinatis; elytris a basi sensim angustatis, substriatis, interstitiis planis, punctatis.*

Long. 13 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Bornéo.

Facies de *Pachyderes,* dû à la grandeur des angles postérieurs du prothorax qui, en outre, sont relevés au point de rendre la portion postérieure de ce dernier concave. Les angles sont surmontés d'une longue carène, qui se prolonge en une sorte de bourrelet jusqu'à peu de distance des angles antérieurs.

Je dois la connaissance de ce genre intéressant à M. Nonfried.

ISCHIODONTUS.

I. POSTICUS. — *Niger, nitidus, fulvo-pilosus; fronte concava, fortiter punctata; antennis rufo-brunneis; prothorace latitudini longitudine æquali, trapezoïdeo, sparsim punctato, angulis posticis haud divaricatis, carinatis; elytris punctato-striatis, striis* *basi sulcatis, rufo-brunneis, apice gradatim nigricantibus; subtus brunneus, pedibus rufis.*

Long. 12 mill., lat. 3 mill.

Honduras.

Facilement reconnaissable à ses élytres d'un rouge sombre à la base, teinte passant insensiblement au noir à partir du tiers postérieur.

A la suite de l'*anceps*.

I. SERRULA. — *Obscure rufus, nitidus, longe pilosus; fronte porrecta, medio impressa; antennis serratis, articulo primo obscuro; prothorace latitudini longitudine æquali, conico, parce punctato, angulis posticis fortiter carinatis; elytris a basi attenuatis, striato-punctatis, apice nigricantibus; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 11 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Bolivie.

Il a des rapports de forme avec les *magnicornis* et *unicolor* Bl. des mêmes régions, mais il en diffère par des caractères tranchés.

ATRACTODES.

A. ILLINITUS. — *Niger, nitidissimus, setis flavis raris, lateribus præcipue perceptis, sparsutus; antennis ferrugineis; prothorace conico, convexo, discrete punctato, angulis posticis breviter carinatis; elytris striis destitutis, vix punctatis; pedibus ferrugineis.*

Long. 25 mill., lat. 7 mill.

Mérida.

Cette belle espèce se place à côté de l'*arcuatus*, dont elle a la taille. Elle est très brillante et pour ainsi dire glabre, les quelques cils raides qui se voient sur les côtés et qui sont fort caducs ne suffisant pas pour la dire pubescente. Le dessous est plus velu. Ses élytres ne sont ni striées ni très visiblement ponctuées; tout au plus voit-on quelques apparences de sillons, plus marqués seulement à la base.

EUDACTILITES.

SIMODACTYLUS.

S Tasmani. — *Flavo-testaceus, nitidus, sat dense griseo-pilosulus; prothorace latitudine vix longiore, a basi angustato, regulariter punctato, vitta media nigra, margine laterali infuscato; elytris punctato-striatis, apice vix emarginatis; epipleuris abdomineque nigris.*

Long. 13 mill., lat. 4 mill.

Archipel Viti.

J'en ai examiné plusieurs exemplaires, qui varient tous suivant le plus ou le moins d'intensité des bandes noires du prothorax dans son milieu et sur les bords latéraux.

MELANTHOIDES.

M. Gestroi Cand., *Élat. nouv.*, II, 14.

Le type est originaire de Zanzibar. J'en possède un spécimen, incontestablement identique, provenant du Gabon. Enfin, j'en ai vu récemment un exemplaire appartenant au Musée civique de Gênes, dont la patrie est le Lado, au nord de l'Albert Nyanza. Cette espèce se trouve donc probablement dans toute l'Afrique intertropicale.

Sa taille seule varie (6 à 10 mill.).

MONOCRÉPIDIITES.

DORYGONUS.

D. pumilus. — *Niger, nitidus, breviter griseo-pilosulus; antennis brunneis, pilosulis; prothorace latitudine haud longiore, a basi paulo angustato, punctato, punctis medio discis discretioribus;*

elytris striis punctatis, basi magis impressis et latioribus; pedibus rufo-brunneis.

Long. 5 mill., lat. 1 1/4 mill.

Antananarivo.

La plus petite des espèces connues.

D. brunneus. — *Brunneus, nitidus, cinereo-pilosulus; fronte leviter sulcata; prothorace trapezoïdeo, convexo, punctato, basi tenuiter sulcato; elytris fortiter punctato-striatis, interstitiis convexis, rugosulis; pedibus pallidioribus.*

Long. 8 1/2 mill., lat. fere 3 mill.

Madagascar; Andrangoloaka.

Diffère du *D. amaurus*, le seul de couleur brune connu, par son aspect plus luisant et surtout par sa pubescence blanchâtre.

PHEDOMENUS.

P. Sikorae. — *Brunneus, opacus, fulvo-pubescens; prothorace longo, lateribus subsinuato, crebre punctato, angulis posticis longiusculis, divaricatis, fortiter et acute carinatis; elytris prothorace latioribus, punctato-striatis, flavo et nigro variegatis, apice emarginatis.*

Long. 10 mill., lat. 2 1/2 mill.

Antananarivo.

Voisin du *venustus*, mais plus grand et distinct par les petites taches noires et flaves des élytres, plus irrégulièrement disséminées et affectant la forme longitudinale, due à ce qu'elles se trouvent sur des intervalles de stries qu'elles ne dépassent pas en largeur.

Une demi-douzaine d'exemplaires m'ont été envoyés par M. Sikora, à qui je dédie cette espèce intéressante.

MONOCREPIDIUS.

M. propinquus. — *Brunneus, opacus, griseo-pubescens; antennis longiusculis, articulis 2 et 3 minutis æqualibus; prothorace latitudine longiore, crebre et fortiter punctato, flavo-testaceo, vittis tribus brunneis, media latiore, angulis posticis paulo divaricatis, tenuiter carinatis; elytris fortiter punctato-striatis, interstitiis convexis, rugosis, testaceis, vitta suturali lata, lacerata, brunnea; pedibus flavis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

Bolivie.

Voisin des *repandus* et *confusus*. Il est plus granuleux Le prothorax est largement bordé de testacé et dans cette bordure se voit une étroite ligne brune.

M. insulsus. — *Fusco-castaneus, opacus, fulvo-pilosulus; antennis rufescentibus, articulis 2 et 3 minutis, æqualibus; prothorace latitudini longitudine æquali, apice angustato, creberrime punctato, angulis posticis testaceis; elytris fortiter punctato-striatis; pedibus testaceis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

République Argentine.

Par ses antennes, dont les articles deux et trois sont très petits et égaux, cette espèce, malgré sa couleur uniforme, doit prendre rang dans le deuxième groupe, à la suite du *nubeculosus*.

M. modestissimus. — *Depressus, fusco-castaneus, pubescens; fronte medio sulcata; prothorace latitudine longiore, crebre fortiterque punctato, versus basin transversim plicato, angulis posticis testaceis; elytris brevibus, thorace angustioribus, punctato-striatis, interstitiis granulatis; pedibus testaceis.*

Long. 6 mill., lat. 1 $^{2}/_{5}$ mill.

Bolivie.

Les antennes ont les articles deux et trois petits et égaux, mais, réunis, plus longs que le quatrième. Sa place est à la suite du *posticus*.

Il a une certaine tournure d'*Heteroderes* et il ne serait pas déplacé dans ce genre, près des *caninus* et *vagus*, si son prothorax ne présentait la ponctuation uniforme et simple des *Monocrepidius*.

ÆOLUS.

Æ. MADAGASCARIENSIS. — *Crassus, niger, subopacus, parce breviterque pilosulus; antennis brunneis; prothorace crasso, latitudine longiore, æqualiter convexo, confertissime punctato, angulis posticis rufescentibus; elytris prothorace vix duplo longioribus, profunde striatis, striis externis punctatis, vage maculis sex rufescentibus; pedibus rufo-testaceis.*

Long. 9 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Antananarivo.

Le genre *Æolus*, qui foisonne dans l'Amérique intertropicale, possède néanmoins quelques représentants en Australie, autrement colorés, dont j'ai fait le sous-genre *Pseudæolus*.

Celui-ci, propre à Madagascar, ne constitue pas, par conséquent, une exception géographique. Sa station n'en est pas moins remarquable. Il a quelque ressemblance avec l'*Æolus australis*, et doit faire partie du même sous-genre.

Æ. DUBIUS. — *Niger, subopacus, dense fulvo-pubescens; fronte convexa; antennis rufis; prothorace latitudine longiore, creberrime dupliciter punctato, fortiter convexo, angulis posticis flavis; elytris profunde punctato-striatis, interstitiis subconvexis, basi nigricantibus maculaque subapicali, parum notata, obscura; abdomine rufo, pedibus flavis.*

Long. 9 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Bolivie.

Il fait partie de la première section.

Æ. DIMINUTIVUS. — *Flavo-testaceus, nitidus, pubescens; prothorace macula dorsali magna, ovali; elytris fortiter punctato-striatis, interstitiis convexis, granulatis, maculis duabus communis nigris, anteriore subquadrata, postscutellari, altera ante apicem transversa, irregulari; pedibus flavis.*

Long. 3 $^1/_2$ mill., lat. 1 mill.

Bolivie.

Première section. Il ressemble beaucoup au *Garzoni* Steinh. de la Nouvelle-Grenade, quant à la disposition des taches noires, mais sa pubescence est bien moins forte.

Æ. LAUREATUS. — *Luteus, sat dense flavo-pubescens; fronte nigra; prothorace latitudine longiore, fortiter punctato, disco macula nigra; elytris fortiter punctato-striatis, nigro-variegatis; subtus niger, pedibus flavis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_2$ mill.

Brésil.

De la première section. Les taches noires des élytres consistent en une sorte de grand × à branches épaisses et irrégulières sur la première moitié, une fascie arquée postérieure et un point apical. Sa place est dans le voisinage du *scriptus*.

Æ. INQUIETUS. — *Testaceo luteus, nitidus, flavo-pubescens: fronte nigro-maculata; prothorace punctato, vitta media alterisque abbreviatis lateralibus nigris; elytris punctato-striatis, nigro-maculatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_2$ mill.

Brésil; Amazones.

Première section. Les taches noires des élytres sont disposées de la manière suivante : trois longitudinales sur la première moitié, la médiane plus étroite, commune, sur la base de la suture ; une tache étoilée commune sur la seconde moitié.

Il se place à la suite du *lepidus*.

Æ. gavisus. — *Rufus, flavo parum dense pubescens; fronte fortiter punctata; prothorace latitudine haud longiore, subtiliter punctato; scutello nigro; elytris nigris, flavo sex-maculatis, parum profunde striatis; subtus obscurior.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_3$ mill.

Vénézuela; Caracas.

Son système de coloration lui donne, à première vue, l'apparence d'une espèce de la deuxième section, mais la structure des angles postérieurs du prothorax la range dans le premier groupe. Elle doit prendre rang à la suite des *delectabilis* et *pusillus.*

Æ. minutissimus. — *Pallide brunneus, flavo-pubescens; antennis obscuris; prothorace latitudine paulo longiore, parallelo, subtiliter punctato, medio margineque laterali infuscato, angulis posticis divaricatis, acutis; elytris punctato-striatis, testaceis, brunneo-bifasciatis et apice maculatis; subtus pallidus.*

Long 2 $^1/_2$ mill., lat. $^2/_3$ mill.

Brésil; Rio de-Janeiro.

Première section. C'est la plus petite espèce connue du genre. Elle a quelque rapport de couleur avec l'*amabilis* du Texas, à la suite de laquelle on la placera.

Æ. amasius. — *Niger, vix pubescens; fronte convexa, punctata; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato, regulariter punctato, rufo, maculis duabus parvis medio disci notato; elytris brevibus, fortiter punctato-striatis, maculis sex luteis ornatis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_3$ mill.

Brésil; Rio-de-Janeiro.

Il n'est pas de collection de Coléoptères faite au Brésil qui ne renferme, parmi les Élatérides, plusieurs espèces d'*Æolus*, et dans le nombre il s'en trouve habituellement quelques-unes d'inédites. Nous ne connaissons indubitablement qu'une minime partie des *Æolus* qui existent dans cette immense contrée. Celle-ci, qui appartient à la deuxième section, se fait remarquer par la longueur relative du prothorax, rouge, marqué de deux petites taches noires, la profondeur des stries des élytres qui sont ornées de six taches jaunes placées à égale distance et toutes de même grandeur, à peu de chose près

Elle vient à la suite du *sexguttatus.*

Æ. MINIMUS. — *Brunneus, flavo-pubescens; antennis testaceis; fronte lata, fortiter punctata; prothorace subquadrato, disperse punctato, medio sulcato, angulis posticis validis, divaricatis; elytris punctato-striatis, extus granulatis, macula basali, altera transversa ultra medium plagaque apicali, testaceis; pedibus flavis.*

Long. 3 mill., lat. $^{4}/_{5}$ mill.

Brésil; Rio-de-Janeiro.

Cette petite espèce, qui doit se ranger dans la deuxième section, non loin de l'*Orpheus*, est caractérisée par la granulation des élytres, forte surtout latéralement. En outre, la disposition des taches la fera aisément reconnaitre.

Æ. FLEUTIAUXI. — *Rufus, pube densa, fulva, sericea, supra subtusque vestitus; fronte nigra, fortiter punctata; antennis rufis; prothorace latitudine longiore, a basi sensim angustato, lateribus rectis, angulis posticis retrorsum productis, carina valida, medio marginibusque nigro-vittato; elytris depressiusculis, punctato-striatis.*

Long. 19 mill., lat. 5 mill.

Brésil; San-Paulo.

L'une des plus grandes espèces du genre. Elle ne le cède, sous le rapport de la taille, qu'à l'*Æ. coryphœus.* Il est d'un rouge jaunâtre, avec une bande longitudinale médiane et les bords latéraux, sur le prothorax, noirs. La pubescence serrée qui le recouvre a un aspect soyeux aussi bien en dessous qu'en dessus.

Ce bel *Æolus* m'a été communiqué par M. Fleutiaux, à qui je le dédie. Sa place est dans la deuxième section, à côté du *Leprieuri*, parmi les grandes espèces du genre.

HETERODERES.

H. SENEGALENSIS. — *Fusco-brunneus, subopacus, brunneo-pubescens; prothorace latitudine longiore, apice angustato, dupliciter punctato, punctis minimis parum visibilibus, angulis posticis valide unicarinatis; elytris striatis, striis versus humeros punctatis; subtus rufescens, tarsis articulo quarto haud lamellato nec dilatato.*

Long. 8 mill., lat. 2 mill.

Sénégal; Portadal.

Voisin de l'*inops* et de la même section, mais notablement plus allongé, surtout du côté du prothorax. De la double ponctuation de ce dernier les petits points ne sont visibles qu'au moyen d'une forte loupe; les autres sont eux-mêmes de petite dimension.

H. TSCHOFFENI. — *Depressus, fuscus, breviter flavo-pubescens; fronte convexa; prothorace latitudine paulo longiore, a basi usque ad apicem gradatim attenuato, basi medio tuberculato, angulis posticis retrorsum productis, unicarinatis, apice acutissimis; elytris thorace duplo longioribus et fere angustioribus, a basi attenuatis, punctato-striatis, interstitiis planis, imparibus paulo latioribus et visibiliter densius pilosis; tarsis simplicibus.*

Long. 7 mill., lat. 2 mill.

Congo; Banana.

Très voisin du *Waltli*, de même taille et présentant comme lui un tubercule spiniforme au milieu de la base du prothorax, outre la simplicité du quatrième article des tarses qui le range dans la même section, mais différent par sa couleur plus foncée, son dos plus déprimé, le prothorax un peu plus long que large et surtout l'inégalité de largeur des intervalles des stries des élytres, les plus larges, c'est à dire les impairs étant, en outre, plus densément pubescents, ce qui donne aux élytres une apparence rayée; c'est le seul *Heteroderes* qui présente ce caractère.

Il a été trouvé, en mai, par M. Tschoffen, sur des troncs de palmiers, en compagnie d'autres petits Élatérides, tels que *Heteroderes seniculus, Drasterius umbrosus, Cardiophorus assessor* et *scutellaris.*

H. INTERMEDIUS. — *Fusco-niger, nitidus, griseo-pubescens; fronte æqualiter convexa; antennis rufis; prothorace longitudine latiore, regulariter punctato, inter punctos subtilius punctulato, rufo, disco antice plaga nigro-brunnea, angulis posticis acutis, extus carinatis; elytris fortiter punctato-striatis, apice plagis pallidis; pedibus flavis.*

Long. 4-4 $^1/_2$ mill., lat. 1-1 $^1/_4$ mill.

Bornéo; Sintang, Sarawak.

Il ressemble extrêmement à l'un de ces nombreux *Drasterius* de l'Inde, par exemple au *collaris,* mais l'examen du corselet, fait à la loupe, révèle une ponctuation tout à fait différente, c'est à dire qu'ici cette dernière est constituée par des points régulièrement disséminés, entre lesquels on aperçoit une seconde ponctuation plus fine, ainsi que cela se voit chez tous les *Heteroderes.*

J'en ai examiné plusieurs exemplaires provenant du nord-ouest de Bornéo : les uns de Sintang, les autres de Sarawak.

H. VAGUS. — *Fuscus, pube tenuissima obductus; fronte lata, medio impressa; antennis brunneis; prothorace longitudine latiore, angulis pallidiore; elytris brevibus, depressis, fortiter punctato-striatis, vage brunneo-variegatis; pedibus flavis.*

Long. 6 mill., lat. 2 mill.

Buenos-Ayres.

Il se place à la suite du *rufangulus;* plus petit et plus atténué aux extrémités; en outre, bien reconnaissable à ses élytres brunes, vaguement maculées de rougeâtre, les deux teintes disposées en lignes longitudinales alternantes.

ÉLATÉRITES.

DRASTERIUS.

D. STIGMATICUS. — *Rufo-testaceus, subnitidus, cinereo-pubescens; fronte convexa, obscuriore; prothorace longitudine paulo latiore, parallelo, dense punctato; elytris thoracis latitudine, planiusculis, punctato-striatis, macula apicali, quinquelobata, nigra, notatis.*

Long. 5 mill., lat. 1 1/2 mill.

Yémen.

Dimension de notre *D. bimaculatus.* Entièrement d'un testacé rougeâtre, couvert d'une pubescence claire, marqué au sommet des élytres d'une tache commune noire, étoilée, à cinq lobes. Un peu de noir se voit aussi dans la région circascutellaire.

Musée de Gênes.

ELATER.

E. GAGATINUS. — *Latus, depressus, niger, nitidus, fusco-pilosulus; antennis brunneis; prothorace punctato, angulis posticis valde carinatis; elytris profunde et regulariter striatis, interstitiis convexis, subcostatis; subtus nitidior sericeo-pubescens, pedibus brunneis.*

Long. 15 mill., lat. 4 mill.

Amur.

Aspect des *E. sobrinus, æthiops* et *hypogastricus;* plus grand que tous les trois, plus large et plus aplati, surtout que le premier. Il est moins ponctué que le second, et ses élytres ont leurs stries aussi profondes, mais moins distinctement ponctuées. Le prothorax n'à pas le reflet opalescent du troisième.

E. INSULARIS. — *Nigerrimus, parum nitidus, obscuro-pubescens; antennis brunneis; prothorace trapezoïdeo, convexo, punctato, medio longitrorsum parum profunde, sed a basi usque ad apicem sulcato, angulis posticis breviter subbicarinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis convexis, rugoso-punctatis, apice integris; pedibus obscuris.*

Long. 8-9 mill., lat. 2 $^1/_4$ mill.

Madagascar; Andrangoloaka.

Aspect de notre *E. nigerrimus* ou de quelqu'une des nombreuses espèces analogues de Sibérie et de l'Amérique boréale. C'est sans doute une forme africaine de ces petits *Elater* noirs, si répandus dans tout le nord de l'hémisphère septentrional.

E. HOLOSERICEUS. — *Brunneus, opacus, flavo-pubescens, capitis thoracisque pubescentia holosericea; antennis concoloribus, longis; prothorace latitudine haud longiore, trapezoideo, medio late sulcato, angulis posticis parum distincte bicarinatis; elytris thoracis baseos latitudine, punctato-striatis, interstitiis convexis, punctatis, apice integris; pedibus concoloribus.*

Long. 12 mill., lat. 3 $^2/_3$ mill.

Madagascar; Andrangoalaka.

La pubescence moirée de la tête et du prothorax fait paraître la surface de ces parties plus inégale qu'elle ne l'est en réalité; elle donne notamment au sillon médian du prothorax une importance exagérée.

J'en ai reçu, de même que de l'espèce qui précède, plusieurs exemplaires de M. Sikora, naturaliste à Antananarivo.

E. RUFIVELLUS. — *Parallelus, fuscus, subcylindricus, nitidus, rufo-pilosus; antennis crassiusculis; prothorace latitudine lon-*

giore, tumido, punctato, punctis laterum umbilicatis, angulis posticis bicarinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis flavis, apice integris.

Long. 14 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Bornéo; Sintang.

Caractérisé principalement par sa pubescence rouge. Il a quelque ressemblance avec certains *Megapenthes* de Malaisie, mais ses hanches postérieures fortement dilatées et anguleuses, ses sutures prosternales dédoublées, enfin ses antennes épaisses et fortement dentées le rangent dans les *Elater*, où il se trouve mieux placé que parmi les *Megapenthes*.

Le dessous du corps est tout à fait d'un *Ludius*, mais le front, nettement caréné en avant, ne permet pas de le comprendre dans ce genre.

MEGAPENTHES.

M. CONTAMINATUS. — *Piceo-niger, elongatus, brevissime griseopubescens; antennis obscuris, articulis tribus primis ferrugineis; fronte apice flavo-maculata; prothorace latitudine longiore, a basi angustato, regulariter punctato, flavo-marginato, angulis posticis longe unicarinatis; elytris prothorace latioribus, punctato-striatis, interstitiis granulatis, apice anguste emarginatis, basi flavo maculatis; subtus brunescens, thoracis lateribus pedibusque pallidis.*

Long. 8-9 mill., lat. 2 mill.

Java; monts Tengger.

Il se place à la suite du *basalis*. Je l'ai reçu de M. Fruhstorfer.

M. PUNCTULATUS. — *Elongatus, angustus, brunneus, dense cinereo-pilosulus; antennis brunneis, haud hirsutis; prothorace latitudine longiore, medio parce, lateribus postice punctulato, angulis posticis parum divaricatis, tenue bicarinatis; elytris a* *basi arcuatim attenuatis, punctato-striatis, interstitiis punctatis, versus basin tantum granulatis, apice anguste emarginatis; subtus concolor, pedibus paulo pallidioribus.*

Long. 11 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Java oriental; monts Tengger.

A la suite des précédents.

M. SENICULUS. — *Fusco-niger, opacus, griseo-pubescens; antennis subserratis, breviter griseo-hirsutis; prothorace vix latitudine longiore, a basi angustato, crebre fortiter punctato, angulis posticis divaricatis, parum carinatis; elytris brunneis, punctato-striatis, interstitiis granulatis, apice integris; subtus nigricans, abdomine pedibusque brunneis.*

Long. 10 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Java oriental; monts Tengger.

Voisin du *basalis* de Sumatra, le prothorax un peu moins allongé, relativement plus large, les élytres de couleur uniforme. Plus robuste que le *cinereus* duquel il a aussi l'aspect. Plusieurs spécimens obtenus de M. Fruhstorfer.

M. MACILENTUS. — *Subcylindricus, angustus, brunneus, nitidus, breviter pubescens; antennis obscurioribus; prothorace latitudine longiore, minus dense punctato, basi nigrescente, angulis posticis retrorsum productis, acute unicarinatis; elytris haud latioribus, apice anguste emarginatis, punctato-substriatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 11 mill., lat. 2 mill.

Java oriental; monts Tengger.

Caractérisé principalement par son étroitesse générale, l'uniformité de sa couleur brune, sauf la base du prothorax où celle-ci vire au noir. Sa place est dans le voisinage du *marginatus*.

M. NEFASTUS. — *Niger, opacus, pubescens; prothorace creberrime fortiter punctato, latitudine paulo longiore, canaliculato, angulis posticis unicarinatis; elytris prothorace paulo latioribus, ultra medium subdilatatis, nitidioribus, basi luteo-plagiatis, punctato-striatis, interstitiis fere planis, punctatis, apice integris.*

Long. 12 mill., lat. 3 mill.

Java; monts Tjikoraï, Préangers.

Voisin du *mutulus* dont il diffère surtout par une tache rouge qui orne le bord basilaire des élytres et se prolonge, d'une manière moins marquée, sur le cinquième intervalle. L'abdomen vire au ferrugineux, les pattes sont rougeâtres.

M. MADIDUS. — *Piceus, nitidus, minus dense griseo-pubescens; fronte æqualiter convexa, discrete punctulata; antennis brunneis; prothorace longitudine paulo latiore, convexo, haud sulcato, parce punctulato, angulis posticis parum distincte bicarinatis; elytris thoracis latitudine, striatis, striis externis punctatis, internis obsoletis; subtus pedibusque brunnescentibus.*

Long. 7-8 mill., lat. 2 mill.

Fidji.

Facies d'un petit *Elater* plutôt que d'un *Megapenthes*. Les sutures latérales du pronotum fines et fermées dans toute leur longueur, l'amènent toutefois dans ce dernier genre.

A placer à la suite du *lateristrigatus* de la Nouvelle-Zélande.

MELANOXANTHUS.

M. BISTELLATUS. — *Niger, subopacus, brevissime pubescens; prothorace longitudine vix latiore, apice rotundatim angustato, tumido, lateribus punctis umbilicatis notato, medio simplicibus, angulis posticis carinatis, nigris; elytris a basi attenuatis, striis* *punctatis basi impressis, apice subtilioribus, interstitiis antice costatis et granulatis, dorso macula brevi flava; pedibus nigris.*

Long. 4 mill., lat. 1 $^1/_4$ mill.

Gabon.

A côté du *bilunatus*; mais les élytres bien plus granuleuses, les angles postérieurs du prothorax non testacés, la tache flave des élytres non allongée le distinguent facilement de cette espèce. Comme facies, il tient encore plus du *cuneiformis* d'Australie.

M. IMITATOR. — *Niger, nitidus, tenuiter pubescens; antennis rufo-brunneis; fronte convexa; prothorace latitudine haud longiore, apice angustato, punctato, punctis anticis majoribus, versus basin obliteratis, angulis posticis carinis destitutis, flavis; elytris punctato-striatis, apice integris, vitta dorsali testacea, subtus obscurus, pedibus flavis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_4$ mill.

Madagascar; Antananarivo.

Il a de grands rapports avec le *nigriventris*, dont je l'ai cru d'abord une variété noire à élytres rayés de jaune, mais il s'en distingue par des caractères autres que ce dernier, notamment par l'absence de carènes aux angles postérieurs du prothorax.

J'en possède une dizaine d'individus.

M. HEMIONUS. — *Elongatus, niger, breviter pubescens; fronte convexa, flava, nigro-maculata; prothorace punctato, vittis duabus latis, flavis; elytris punctato-striatis, apice parum mucronatis, vitta dorsali extrorsum medio flexa punctoque subapicali luteis; subtus, cum epipleuris, flavus.*

Long. 10 mill., lat. 2 mill.

Mindanao.

Ressemble au *Zebra;* mêmes taches et système de coloration, mais s'en distinguant facilement par ses élytres moins mucronées et non échancrées au bout, et ayant les épipleures de la même couleur que tout le dessous du corps, c'est-à-dire jaunes, tandis que ces mêmes épipleures sont noires chez le *Zebra.* Il y a quelques autres différences moins importantes : le corselet est moins densément ponctué ; les bandes jaunes ont plus de largeur.

L'indication des Philippines comme patrie, donnée dans la *Monographie des Élatérides* à propos du *M. Zebra,* se rapporte à celui-ci. Le premier est propre à Java.

M. BICOLOR. — *Rufus, opacus, tenuiter et breviter pubescens; antennis nigris, latiusculis; prothorace latitudine vix longiore, a basi angustato, punctato, angulis posticis unicarinatis, translucidis; elytris brevibus, nigris, punctato-striatis, interstitiis flavis; subtus cum supra bicolor, pedibus obscuris.*

Long. 5 mill., lat. 1 ½ mill.

Pérak.

Petit *Melanoxanthus* facilement reconnaissable à son système de coloration mi-partie rouge et noire, qui ne se rencontre que dans un nombre restreint d'espèces bien reconnaissables d'autre part, si ce n'est chez le *M. nigricornis* auquel il ressemble beaucoup. On l'en distinguera par les angles postérieurs du prothorax, translucides et flavescents, tandis qu'ils sont opaques et noirâtres chez le *M. nigricornis.*

M. GRANUM Cand., *Notes of Leyd. Mus.* 1887, 191.

Sumatra oriental.

Existe également à Bornéo. Une variété a les élytres jaunâtres à la base, cette teinte passant peu à peu au noir d'avant en arrière. Les angles postérieurs du prothorax sont de même couleur.

M. ABDOMINALIS. — *Angustus, parallelus, niger, parce breviterque pubescens; prothorace rufo, latitudine longiore, dorso* *leviter, basi fortius punctato, medio subtiliter sulcato; elytris depressis, punctato-striatis, interstitiis granulatis; abdominis articulis tribus primis rufis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_5$ mill.

Australie, Queensland.

Petite espèce bien caractérisée par sa forme et ses couleurs, surtout la teinte bicolore de l'abdomen.

A côté du *dimidiatus*.

YPSILOSTETHUS.

Y. SEMIOTULUS Cand., *Monogr.*, XIV, 521.

Var. *b. Totus niger.*

Cette variété, qui est du Vénézuela, se fait remarquer par sa couleur entièrement noire.

PHYSORHINITES.

PHYSORHINUS.

P. BOLIVIENSIS. — *Elliptico-elongatus, rufo-brunneus, pubescens; fronte lutea; elytris ad apicem guttulis oblongo-luteis et alteris rotundatis versus basin; abdomine pedibusque, dilutioribus.*

Long. 12 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Bolivie.

Même aspect général et même forme que le *distigma*, mais les élytres marqués de quatre taches jaunes : deux près de la base, petites, arrondies; deux autres subapicales, oblongues.

ANCHASTUS.

A. RUFIPENNIS. — *Nigro-brunneus, subnitidus, dense griseo-pubescens; fronte brunnea, convexa, confertim punctata; anten-*

nis longiusculis rufo-brunneis; prothorace longitudine latiore, apice fortiter angustato, punctato, angulis posticis bicarinatis, carina externa margine approximata, basi rufescente; scutello elytrisque brunneo-rufis, his punctato-striatis, interstitiis planis.

Long. fere 6 mill., lat. 1 $^5/_4$ mill.

Java.

Un exemplaire capturé par M. Fruhstorfer dans le cratère du Tankouban, près de Bandang. Il est de forme régulièrement ovale allongé ; les angles postérieurs du prothorax portent deux carènes dont l'externe se distingue à peine du bord même, tant elle en est rapprochée.

A. ORNATUS. — *Niger, cinereo-pilosulus; antennis obscuris, basi rufis; prothorace rufo, longitudine latiore, minus dense punctato, angulis posticis externe longe carinatis; elytris striis angustis parum distincte punctatis, interstitiis planis, antice apiceque pube obscuriore; pedibus testaceis.*

Long. 4 mill., lat. 1 $^1/_4$ mill.

Vénézuela.

Petite espèce du groupe des *hilaris* et *Phedrus* et de même taille. La pubescence des élytres est obscure dans les tiers antérieur et postérieur et cendrée seulement au milieu, ce qui leur donne une couleur variée.

A. SEMINALIS. — *Rufo-ferrugineus, parce fulvo-pubescens; prothorace transverso, subtiliter minus dense punctato, angulis posticis externe longe carinatis; elytris punctato-striatis.*

Long. 3 mill., lat. 1 mill.

Brésil ; Rio.

Du même groupe que le précédent. De forme elliptique allongée et entièrement d'un rouge ferrugineux, revêtu d'une pubescence courte peu dense et fauve, visible seulement à la loupe.

A. PYGMÆUS. — *Ovalis, niger, nitidus, glaber; prothorace transverso, medio dorsi vix visibiliter punctulato, angulis posticis longe carinatis; elytris subtilissime striato-punctulatis, postice brunnescentibus; antennis pedibusque rufis.*

Long. 2 $^2/_5$ mill., lat. $^3/_4$ mill.

Brésil méridional.

Espèce voisine des précédentes, bien caractérisée par sa couleur, l'absence de pubescence, sa ponctuation à peine marquée.

A. POSTICUS. — *Oblongo-ovalis, niger, parum dense pubescens; fronte lata, convexa; antennis moniliformibus, rufis; prothorace transverso, punctato, marginibus et præsertim angulis posticis rufescentibus; elytris brevibus, subtilissime punctato-striatis, rufis, apice nigris.*

Long. 2 $^1/_2$ mill., lat. $^3/_4$ mill.

Paraguay; Asuncion.

L'un des plus petits du genre; de forme ovale, peu atténué aux extrémités.

Sa place est dans le groupe des *hilaris*, *Phedrus*, etc., comme ceux qui précèdent.

A. BENIGNUS. — *Brunneus, subnitidus, flavo-pubescens; fronte convexa, punctata; antennis rufis, articulo tertio secundo paulo longiore; prothorace latitudine breviore, a basi angustato, tenuiter punctato, angulis posticis unicarinatis; elytris rufescentibus, punctato-striatis, a basi attenuatis; pedibus flavis.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^1/_4$ mill.

Bolivie.

Tournure de *Physorhinus*, mais les hanches postérieures des *Anchastus*. Il a aussi le second article des antennes manifestement plus long que le second.

A côté de l'*alopex*.

A. austerus. — *Totus brunneus, parum nitidus, fulvo-pubescens; fronte convexa, rugose fortiter punctata, medio sulcata; prothorace latitudine haud longiore, trapezoideo, confertim punctis umbilicatis notato, angulis posticis haud divaricatis, acute carinatis; elytris brevibus punctato-striatis, interstitiis planis. rugose punctatis.*

Long. 6 mill., lat. 2 mill.

Brésil (Rio); Tijuca.

Cette espèce se place à la suite de l'*A. alopex.*

POMACHILIITES.

POMACHILIUS.

P. vagus. — *Niger, nitidus, flavo-pubescens; fronte fortiter punctata; antennis ferrugineis; prothorace latitudine haud longiore, quadrato, parce subtiliter punctulato, margine antice ferrugineo; elytris thorace latioribus, punctato-striatis, apice anguste emarginatis, plaga antica vaga alteraque postica flavis; pedibus pallidis.*

Long. 6-7 mill., lat. 1 $^1/_2$-1 $^2/_3$ mill.

Vénézuela.

Var. *a. Plagis elytrorum in vitta unica laterali confusis.*

Ressemble au *P. suturalis.* L'uniformité de couleur du prothorax et l'étroitesse de l'échancrure terminale des élytres distinguent la variété, qui pourrait être confondue avec ses petits exemplaires. 2^{me} section.

P. minor. — *Niger, subnitidus, pubescens; antennis rufis; prothorace latitudine vix brevior, minus dense punctato, margine antico rufescente; elytris convexis, ultra medium paulo dilatatis, punctato-striatis, rufis, apice nigris haud emarginatis; subtus thorace excepto, rufus.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_2$ mill.

Bolivie.

Il ressemble beaucoup au *terminatus*, mais il est plus petit et ses élytres ne sont pas visiblement échancrés au bout, ce qui l'amène dans la 3^{me} section.

CRYPTOHYPNITES.

MONADICUS.

M. NANUS. — *Minimus, niger nitidus, griseo parce pubescens; prothorace longitudine latiore, basi apiceque angustato, regulariter convexo, vix visibiliter punctulato; elytris brevibus, non striatis.*

Long. 1 $^1/_4$ mill., lat. $^2/_3$ mill.

Brésil; Rio-de-Janeiro.

Sa taille exiguë, comparable seulement à celle des plus petits Élatérides connus, suffit pour faire reconnaître cette espèce. Sa place est à côté du *bilæsus*.

ARRAPHES.

A. BIGUTTATUS. — *Piceo-niger, nitidus, griseo-pubescens; fronte antice marginata; antennis rufis; prothorace latitudine longiore, sulcato, punctato, basi rufescente; scutello cum elythrorum margine antica rufis, his punctato fortiter striatis, interstitiis convexis, basi rugosis, apice rufis; pedibus flavis.*

Long. 5 mill., lat. 1 mill.

Pérak.

Celle-ci porte à six le nombre des espèces connues. Toutes ont un facies caractéristique qui les fait facilement reconnaître, indépendamment de l'absence des sutures prosternales qui les distingue entre tous les Élatérides.

CARDIOPHORITES.

CARDIOPHORUS.

C. scutellaris Cand., *Élat. nouv.*, IV, p. 42.

Depuis l'époque où j'ai fait connaître cette espèce congolaise, j'ai pu en examiner de nombreux exemplaires et j'ai constaté que la couleur rougeâtre de l'écusson n'est pas un caractère constant. Lorsqu'il existe, il facilite beaucoup la détermination de l'espèce; l'uniformité de couleur qui, à la vérité, se remarque quelquefois, est exceptionnelle.

C. ferrugatipes. — *Fusco-niger, nitidus, fulvo-pubescens; antennis ferrugineis; prothorace latitudine paulo longiore, basi apiceque angustato, confertim æqualiter punctato, sulcis basalibus fere nullis; elytris prothorace sublatioribus, æqualiter basi profundius punctato-striatis, interstitiis subconvexis, apice non elevatis; pedibus ferrugineis, unguiculis dentatis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

Darjeeling.

A rapprocher du *C. astutus*. Il a, comme lui, le prothorax densément, également ponctué, dépourvu, ou à peu près, de sillons basilaires latéraux, les flancs, en dessous, ne portant pas de trace de ligne longitudinale; mais il en diffère par les proportions qui sont autres : le prothorax, notamment, étant plus allongé.

C. Tenggerensis. — *Nigro-castaneus, nitidus, depressus, griseo-pubescens; antennis rufo-brunneis; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato, punctis minutis subinæqualibus crebre notato; sulcis basalibus brevibus; elytris thorace latioribus longiusculis, depressis, ultra medium parallelis, punctato-striatis,* *interstitiis planis apice non carinatis; pedibus nigro-brunneis, unguiculis dentatis.*

Long. 10 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Var. *a. Supra plus minusve rufescens.*

Java oriental; monts Tengger.

Il diffère du *venaticus* par les intervalles des stries des élytres qui ne sont nullement élevés en carène au sommet.

J'en possède un grand nombre d'exemplaires.

C. PALEATUS. — *Niger, parum nitidus, sat dense pubescens; antennis brunneis; prothorace latitudine vix longiore, a medio apice angustato, subtilissime punctato, sulcis basalibus longiusculis; elytris luteis, punctato-striatis; tarsorum unguiculis dentatis.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Cochinchine.

Taille et tournure du *stolatus* à côté duquel il se place. Moins brillant et le prothorax beaucoup plus étroit en avant. Les élytres sont uniformément d'un jaune de paille; tout le reste du corps est noir. Les pattes ont les articulations et les tarses rouge-brun.

C. BOMBYCINUS. — *Elongatus, castaneus, fulvo-pubescens; prothorace latitudine haud longiore, subtiliter æqualiterque punctato, sulcis basalibus distinctis; elytris prothorace latioribus, elongatis, parallelis, dorso depressis, punctato-striatis, interstitiis convexis.*

Long. 11 mill., lat. 3 mill.

Darjeeling; Kurséong.

Épais, allongé et parallèle, ce qui lui donne un facies de *Limonius*; les poils dorés du prothorax sont dirigés en tous sens et donnent à ce dernier un aspect moiré. Ce caractère lui est commun avec le *C. Doriæ.*

En dessous, les flancs du prothorax sont marqués d'une ligne qui s'étend depuis la base jusqu'au sommet; les crochets des tarses sont fortement dentés.

C. DEVECTUS. — *Brevis, niger, parum nitidus, nigro-pilosulus; prothorace longitudine latiore, convexo, crebre punctulato, basi sulcis notato; elytris latiusculis, fortiter punctato-striatis, interstitiis convexis, punctatis; pedibus nigro-brunneis, unguiculis simplicibus.*

Long. 7 mill., lat. 2 $^1/_4$ mill.

Mexique; Sierra Madre de Chihuahua.

Tournure d'*Aptopus*, mais les ongles sans pectination. Il se rapproche beaucoup d'une autre espèce mexicaine ayant le même facies, mais ornée de rouge et à ongles dentés, le *C. aptopoides* ([1]).

MELANOTITES.

DIPLOCONUS.

D. SEMINIGER. — *Coccineus, nitidus, pubescens; fronte fortiter punctata, prominula; antennis nigris; prothorace latitudine longiore, a basi attenuato, disperse punctulato, angulis posticis unicarinatis; elytris atris nitidis, seriatim punctatis; subtus pedibusque rufis.*

Long. 12 mill., lat. 3 mill.

Siam.

Il ressemble au *D. coracinus*, var. *melanopterus*, avec quelques différences notables : les angles du prothorax sont unicarénés tandis qu'ils sont fortement bicarénés chez le *coracinus*.

([1]) La diagnose de l'*aptopoides* contient une erreur. Il faut lire : *prothorace longitudine latiore,* au lieu de : *latitudine longiore.*

La tête est, ici, toujours rouge, le prothorax moins bombé, et sa ponctuation est plus rare et plus fine. Se distingue du *nigripennis*, qui a les élytres fortement striées, par ces mêmes stries, indiquées seulement ici par des lignes de points. Sa tête rouge le sépare aussi des *nitidicollis* et *erythronothus*, dont le système de coloration est presque identique.

En résumé, la tête rouge et les angles postérieurs du prothorax unicarénés constituent concurremment le caractère distinctif de cette espèce.

D. CANTHARUS. — *Niger, nitidus, parce et breviter fulvo-pubescens; fronte convexa, parum prominula, punctata; antennis brunneis, hirsutis; prothorace latitudine paulo longiore, subrectangulari, punctato, medio sulcato, angulis posticis bicarinatis; elytris tenuiter punctato-striatis, apice emarginatis; pedibus obscure rufis.*

Long. 10-11 mill., lat. 3 mill.

Iles Philippines; Babuyanes; Mindanao.

Moins atténué aux extrémités que la généralité des *Diploconus*, ce qui lui donne l'apparence d'un *Melanotus*. Il se place à côté du *D. erythropus*, de Ternate; son corselet est plus ponctué et moins atténué au sommet.

MELANOTUS.

M. SCRIBANUS. — *Piceus, subnitidus, pube longiuscula, cinerea, vestitus; fronte punctis umbilicatis notata; prothorace latitudine minus longiore, punctato, punctis medium versus minoribus et dispersis; angulis posticis acute carinatis; elytris thoracis latitudine, tenuiter punctato-striatis; subtus pedibusque brunneo-rufescentibus.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^1/_3$ mill.

Iles Philippines; Mindoro.

Il a la tournure de l'*ebeninus*, mais il est plus petit, et surtout plus pubescent.

M. TELUM. — *Elongatus, rufescens, nitidus, pilosus; antennis articulo tertio secundo vix longiore, quarto multo minore; prothorace trapezoideo, parum convexo, fortiter punctato, angulis posticis carina valida, marginis approximata, notatis; elytris longis, a basi usque ad apicem gradatim attenuatis, striato-punctatis, apice subspinosis, ad suturam nigricantibus; subtus pedibusque rufis.*

Long. 17 mill., lat. 4 mill.

Darjeeling.

A placer à la suite du *longicornis*. D'une forme générale différente, surtout du côté du corselet, les antennes beaucoup plus courtes, etc. Coll. Fleutiaux.

ATHOÏTES.

ATHOUS.

A. COTESI. — *Brevis, niger, fusco-pubescens; fronte convexa; antennis validis, articulis 2 et 3 minimis, æqualibus, sequentibus triangularibus, serratis; prothorace trapezoideo, latitudine vix longiore, crebre punctato, angulis posticis retrorsum productis, carinatis; elytris brevibus, nigro-fuscis, punctato-striatis, granulatis; pedibus brunneis, tarsis simplicibus, articulo primo longo, sequentibus cunjunctis æquali.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_3$ mill.

Hindoustan.

Apparence, en raccourci, d'une de nos espèces européennes. Il se fait remarquer par son front bombé, ses antennes fortement dentées en scie à partir du quatrième article, les deuxième et troisième très petits, ses tarses simples, ensemble de caractères qui l'exclut des sections et sous-sections établies antérieurement; il devra donc former une section spéciale à lui seul.

Je ne sais de quelle partie de l'Hindoustan il provient; je suppose que c'est du nord.

4

PYROPHORITES.

PYROPHORUS.

P. MUTATUS. — *Brunneus, subopacus, pubescens; antennis obscuris, articulo tertio secundo vix longiore; prothorace subquadrato, punctato, margine laterali flavo, angulis posticis divaricatis, tenuibus, vesiculis luminosis obliteratis; elytris prothorace paulo latioribus, punctato-striatis, interstitiis convexis, rugosis, marginibus antice flavis.*

Long. 6 $^1/_2$ mill., lat. 2 mill.

Brésil; Rio.

Cette petite espèce, qui doit se placer dans le voisinage du *P. cincticollis*, paraît dépourvue de vésicules lumineuses ou, au moins, celles-ci n'étant pas saillantes, les taches lumineuses, habituellement jaunes, ne paraissent pas dans la coloration testacée des bords du prothorax.

CRÉPIDOMÉNITES.

MELANTHO.

M. TRISULCATUS. — *Niger, pilis brevibus argenteis adspersus; antennis nigris; prothorace latitudine sesqui longiore, crebre punctato, trisulcato, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis imparibus carinatis.*

Long. 15 mill., lat. 4 mill.

Madagascar; Antsianaca.

Beaucoup plus petit que le *Klugii* et proportionnellement plus étroit. Il se distingue bien par les trois sillons du prothorax et les intervalles carénés des élytres.

Il m'a été donné par M. Dumont.

CREPIDOMENUS.

C. ÆNEOLUS. — *Æneus, nitidus, fulvo-pilosulus; fronte punctata, antice acuminata; antennis brunneis; prothorace latitudine paulo longiore, subsulcato, postice sulco profundiore, angulis posticis tenuibus, divaricatis, vix carinatis, rufis; elytris thorace latioribus, punctato-striatis, interstitiis subconvexis; subtus pedibusque æneo-brunnescentibus.*

Long. 8 mill., lat. 2 mill.

Victoria.

Plus petit que l'*æneus*, la pubescence moins blanche, les angles postérieurs du prothorax autrement construits.

OPHIDIUS.

O. MAC LEAY.— *Luteus, fulvo-pubescens, parum nitidus; fronte convexa, punctata, nigra; antennis nigris; prothorace latitudine longiore, apice arcuatim angustato, crebre punctato, medio sulcato, sulco nigro, angulis posticis retrorsum productis, carinatis, carina valida, obliqua; scutello nigro; elytris punctato-striatis, sutura apiceque nigris; subtus niger, prosterni lateribus epipleurisque luteis.*

Long. 13 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Australie.

Il paraît, au premier abord, une variété de petite taille de l'*O. elegans* dont il a la belle couleur jaune-orange; mais les angles postérieurs du prothorax sont construits différemment. Chez l'*elegans*, la carène qui les surmonte est rapprochée du bord latéral dans toute sa longueur, tandis qu'ici cette même carène, beaucoup plus forte, s'écarte rapidement du bord en question au point qu'elle s'en éloigne plus que du bord postérieur. Ce caractère, ainsi que le sillon dorsal, le distinguent nettement.

J'en possède une demi-douzaine d'exemplaires, provenant de l'ancienne collection Castelnau, et qui sont restés longtemps sans nom dans la mienne, à la suite de l'*elegans*.

Je ne sais de quelle partie de l'Australie ils proviennent; je présume toutefois qu'ils sont de la Nouvelle-Galles du Sud.

ANILICOIDES (nov. gen.).

Frons leviter convexa, antice non marginata.

Antennæ articulis 2 et 3 æqualibus, conjunctim quarto longitudine æqualibus, sequentibus triangularibus, dentatis.

Suturæ laterales prothoracis obsoletæ.

Suturæ prosterni antice canaliculatæ.

Coxæ posticæ angustæ, non dentatæ.

Tarsi crassi, simplices.

Ce genre se fait remarquer par l'absence complète de sutures latérales au prothorax, en sorte que la face dorsale est unie aux flancs sans présenter d'arète comme il en existe chez presque tous les Élatérides. Cette structure lui est commune avec les *Cardiophorus*. Les hanches sont étroites, non dentées et les tarses épais, non lamellés.

Sa place est assez difficile à déterminer. Le front est plus convexe que chez les Corymbitites et nullement bombé comme chez les vrais Ludiites. Ses tarses non lamellés, mais sensiblement épaissis, m'ont engagé à le ranger à la fin des Crépidoménites, sans méconnaître toutefois la faiblesse des raisons qui me portent à le comprendre dans cette tribu. Tout ce que je puis dire, c'est qu'il y est moins déplacé que dans n'importe quelle autre.

A. DEPRESSUS. — *Depressus, rufo-testaceus, parum nitidus, pubescens; antennis brevibus; fronte dense punctis umbilicatis obducta; prothorace subquadrato, fortiter punctato, angulis posticis carinatis; elytris thoracis latitudine, fortiter punctato-striatis, apice nigricantibus; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 10 mill., lat. 2 1/4 mill.

Australie; Peak-Downs.

L'espèce sur laquelle le genre est établi a l'apparence d'un *Anilicus*, avec des caractères qui la font facilement reconnaitre. Elle est, entre autres, remarquablement déprimée, et l'absence d'arête latérale au prothorax, qui est remplacée vers la base par la carène habituelle, ne permet pas de la confondre avec une autre.

ALLOTRIITES.

MOROSTOMA.

M. TESTACEIPENNE. — *Nigrum, subopacum, brevissime flavo-pilosulum; antennis palpisque nigris; prothorace quadrato, minus convexo, crebre punctato; elytris thorace latioribus, testaceis, nigro-circumcinctis, nitidioribus, striatis, striis interstitiisque punctatis, his convexis; subtus nitidior, metathorace abdomineque testaceis; pedibus obscuris.*

Long. 15 mill., lat. 4 $^3/_4$ mill.

Madagascar; Andrangoloaka.

Le genre *Morostoma* a été établi sur une espèce des plus remarquables par la longueur tout à fait insolite des quatre palpes ou plutôt de leur dernier article, dont l'extrémité dépasse les antennes. Le même caractère se retrouve chez celle-ci, qui en diffère par son prothorax plus opaque, visiblement bien que très brièvement poilu, par les élytres et le dessous testacés, les pattes obscures et quelques autres particularités secondaires.

Plusieurs exemplaires m'ont été envoyés d'Antananarivo par M. Sikora.

PENIA.

P. FRUHSTORFERI. — *Rufo-ferruginea, nitida, pallide longe pubescens; capite antennisque concoloribus; prothorace pallidiore, longitudine multo latiore, fere plano, subtilissime parce punctulato; elytris prothorace latioribus, basi profunde striatis, disco tantum punctato-substriatis; tarsis bilamellatis.*

Long. 11 mill., lat. 5 mill.

Java oriental; monts Tengger.

D'une teinte générale ferrugineuse rouge, brillante, plus claire en avant qu'en arrière. Sa place est à la suite de la *fulva*.

J'en possède une douzaine de spécimens qui ont été trouvés par M. Fruhstorfer.

P. opatroïdes. — *Fusca, fere opaca, incondite cervino dense pilosa, pilis elytrorum in maculis multis minutis sparsim densatis; prothorace transverso, sparsim punctulato, medio canaliculato; elytris prothorace latioribus, postice dilatatis, striis subtilibus externe punctatis, basi magis impressis, interstitio tertio in dimidia parte antica paulo elevato; tarsis bilamellatis.*

Long. 15 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

Darjeeling.

Se distingue de toutes les autres espèces par son aspect terreux, opaque, dû à ses poils courts et rudes inégalement plantés, surtout sur les élytres où ils forment une multitude de petits groupes maculaires.

DIMITES.

ARACHNODIMA (nov. gen.).

Frons quadrata, plana, antice concava et immarginata; mandibulæ prostantes; palporum articulus tertius ovalis, acuminatus.

Antennæ simplices.

Prosterni suturæ laterales rectæ, apice haud canaliculatæ.

Laminæ coxales posticæ intus dilatatæ, extus obliteratæ.

Pedes longiusculi; tarsi simplices.

Le front, dépourvu de rebord en avant, en même temps que la structure des hanches postérieures, dont la lame extérieure, très dilatée en dedans, est réduite à rien en dehors, rangent ce genre dans les Dimites.

Il est établi sur l'espèce suivante.

A. OPACA. — *Nigra, opaca, fulvo-pilosa; prothorace latitudine sesqui longiore; basi apiceque paulo angustato, parallelo, medio sulcato, confertim punctato, angulis posticis longis humeros amplectantibus, carinatis; elytris brevius pilosis, punctato-striatis, interstitiis convexis punctatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 10 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Australie.

La forme des angles postérieurs du corselet est le caractère dominant de cette espèce. Ces angles sont remarquablement allongés, embrassant un peu, par leur extrémité recourbée, les épaules des élytres qui sont obtuses. C'est un Élatéride d'un noir brunâtre mat, plus longuement poilu sur le prothorax que sur les élytres, le premier de forme oblongue, à côtés parallèles, bombé, sillonné au milieu dans toute sa longueur.

Je n'en ai vu que deux exemplaires, qui font partie de ma collection.

CARDIORHINITES.

CARDIORHINUS.

C. BELLUS. — *Niger, parum nitidus, pubescens; antennis nigris, articulo tertio quarto longitudine æquali sed graciliore; prothorace creberrime punctato, basi sulcis destituto, rufo, vittis duabus dorsalibus, abbreviatis, nigris; elytris fortiter punctato-striatis, vitta abbreviata lutea.*

Long. 9 mill., lat. 2 mill.

Bolivie.

Cette jolie espèce se place à la suite du *bilineatus*. Elle a des rapports de taille et de couleurs avec le *tæniatus* du Brésil; toutefois ces dernières sont autrement réparties sur le corselet.

Je l'ai reçue de M. Staudinger.

LUDIITES.

LUDIUS.

L. ILLOTIPES Cand., *Monogr.*, IV, p. 302.

Var. *a. Totus rufo-ferrugineus.*

J'ai reçu un assez grand nombre de ces *Ludius* qui paraissent habiter la partie orientale de l'île de Java. Parmi eux se trouvaient plusieurs individus entièrement rouge ferrugineux. A ce propos, je ferai remarquer que d'autres espèces du même genre ont une tendance à varier dans le même sens. Notre *L. ferrugineus*, les *L. tartareus* et *attenuatus* des États-Unis, le *L. decorus* du Chili sont dans ce cas.

L. RUFOPILOSUS. — *Nigro-piceus, subnitidus, rufo-pilosulus, pube brevi, appressa; antennis brevibus, brunneis; prothorace longitudine latiore, trapeziformi, convexo, dense et grosse punctato, elytris a basi attenuatis, postice tantum substriatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 25-30 mill., lat. 6-7 mill.

Java; montagnes de l'Est et du Centre.

Aspect général du *Ludius hepaticus*, mais plus grand. On le reconnaîtra facilement à sa pubescence rouge. Les antennes, qui sont courtes, sont plus fortement dentées en scie chez le mâle. Lisses au centre, leurs articles ont leurs dentelures opaques.

J'en ai vu cinq exemplaires : deux des monts Tengger, trois des monts Tjikoraï, dans les Préangers.

L. PARALLELUS. — *Angustus, parallelus, brunneus, parum nitidus, breviter pubescens; prothorace latitudine longiore, dense punctato, angulis posticis retrorsum productis, acute carinatis, margine postica flavo-biguttata; elytris prothoracis latitudine, punctato-substriatis, interstitiis basi granulatis.*

Long. 10-12 mill., lat. 2-2 $^1/_4$ mill.

Java; monts Tengger et Tjikoraï.

Sa forme étroite et parallèle est très caractéristique. Le front bombé comme chez tous les *Ludius*, se termine en pointe en avant, et là il est visiblement séparé de la base du labre par une très étroite plaque nasale, en sorte qu'il devrait, à la rigueur, prendre rang parmi les *Megapenthes*, si l'on n'avait égard qu'à ce seul et unique caractère. Mais la structure de toutes les autres pièces du corps est conforme à celle des *Ludius*. L'espèce est donc intermédiaire entre ces deux genres, si éloignés d'autre part.

Les deux petites taches jaunes qui se voient à la base du prothorax sont surtout marquées chez les mâles. Les femelles en sont à peine pourvues.

Je l'ai reçu de M. Fruhstorfer, qui l'a trouvé dans les monts Tengger et Tjikoraï, ces derniers dans les Préangers.

L. HIRTICORNIS. — *Angustus, ferrugineus, griseo-pilosulus; antennis hirsutis, maris dimidio corpore longioribus; prothorace latitudine vix longiore, convexo, nitido, parum dense punctato; elytris prothorace paulo angustioribus, punctato-substriatis; subtus concoloribus.*

Long. 12-13 mill., lat. 3 mill.

Java oriental; monts Tengger (1250 mètres).

Du groupe des *Guillebaui*, *hirtus* et *hirtellus*, mais notablement plus étroit et plus allongé que ces espèces. J'en possède un grand nombre d'individus des deux sexes, recueillis par M. Fruhstorfer.

L. MACERATUS. — *Fusco-castaneus, haud nitidus, dense griseo-pubescens; antennis feminæ brevibus, moniliformibus, maris serratis, dimidio corporis æqualibus; prothorace latitudine paulo longiore, ♀ tumido, ♂ planiusculo, crebre punctato; scutello longo, ferrugineo; elytris brevibus, subcylindricis, basi granulatis, anguste striatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 9 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Bengale; Konbir-Novatoli.

Très voisin du *hirtellus*, mais à antennes plus courtes, leurs articles moniliformes; les stries des élytres notablement plus fines et non marquées de gros points comme chez l'espèce ci-dessus; les intervalles très plats et très ponctués sont aussi plus opaques.

L. rubicundus. — *Brunneo-ferrugineus, pube longiuscula, fulva, minus dense vestitus; prothorace longitudine parum latiore, trapezoideo, æqualiter punctato, disco antice subbiimpresso, angulis posticis acute dentatis; elytris depressis, ultra medium parallelis, punctato-striatis, basi granulatis.*

Long. 14 mill., lat. 4 mill.

Mexique.

Voisin du *subsericeus*, du même pays, d'une autre couleur, plus déprimé et plus parallèle.

L. gracilipes. — *Fusco-brunneus, parum nitidus, densius griseo-pubescens; fronte angusta, punctata; antennis longis, linearibus, breviter hirsutis; prothorace trapezoiformi, crebre punctato, angulis posticis carinatis; elytris crebre punctatis, striatis; pedibus præsertim tarsis, longis, gracillimis, castaneis.*

Long. 11 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Brésil; Rio-de-Janeiro.

La longueur et la gracilité des antennes et des pattes lui donnent quelque ressemblance avec certains *Ischiodontus*. Il a toutefois les caractères essentiels des *Ludius*, bien qu'atténués.

APHANOBIUS.

A. badius. — *Elongatus, badius, cervino-pubescens; prothorace latitudine longiore, apice parum angustato, punctato, lateribus punctis umbilicatis, utrinque versus basin impresso; angulis posticis breviter carinatis; elytris ultra medium parallelis, tenuiter striato-punctatis, apice emarginatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 20 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Java; Préangers.

De la forme et de la taille du *longithorax*, mais un peu moins cylindrique et d'une autre couleur, celui-ci étant entièrement d'un rouge bai.

COSMESUS.

C. FLAVIPES. — *Castaneus, dense cinereo-pubescens; prothorace latitudine longiore, rectangulari, dense fortiter punctato, sulco medio destituto, angulis posticis brevibus, breviter carinatis; elytris ultra medium dilatatis, profunde punctato-striatis, interstitiis convexis, granulatis, apice emarginatis, bispinosis; pedibus flavis.*

Long. 8 mill., lat. 2 mill.

Corrientes.

Cette espèce doit être placée dans la première section.

C. BIZONATUS. — *Aurantiacus, pube concolore dense vestitus; fronte nigra; prothorace latitudine paulo longiore, antice paulo attenuato, lateribus rectis; scutello medio ferrugineo; elytris vitta basali, altera media apiceque nigris, angulo apicali vix emarginato; subtus concolor.*

Long. 7 mill., lat. 1 $^{2}/_{3}$ mill.

Brésil; Rio.

Appartient à la deuxième section, les élytres étant très peu échancrées au bout.

C. VULNERATUS. — *Niger, parum nitidus, pubescens; fronte crebre punctata; prothorace latitudine vix longiore, antice parum attenuato, dense punctato, rufo, medio late nigro-vittato; elytris thorace latioribus, versus suturam depressis, punctato-striatis, interstitiis granulato-punctatis, apice integris; pedibus obscuris.*

Long. 8 mill., lat. 2 mill.

Brésil; Rio.

Fait également partie de la deuxième section.

C. RETROTACTUS. — *Niger, nitidus, pubescens; fronte punctata, apice brunescente; antennis brunneis; prothorace latitudine paulo longiore, apice subito angustato, convexo, minus dense punctato; elytris thorace haud latioribus, fortiter punctato-striatis, ferrugineis, humeris plagaque subapicali nigris, angulo apicali vix emarginato.*

Long. 11 mill., lat. fere 3 mill.

Brésil; Rio.

Même section.

C. TRICOLOR. — *Niger, subnitidus, pubescens; antennis brunneis; prothorace latitudine haud longiore, a basi leviter angustato, angulis quatuor læte rufis; elytris fortiter striatis, striis punctatis, apice integris, vitta dorsali postice abbreviata, in utroque, flava; subtus niger, pectore rufo-maculato, pedibus brunneis.*

Long. 5 $^{3}/_{4}$ mill., lat. 1 $^{1}/_{2}$ mill.

La Plata.

Même section.

C. MITIGATUS. — *Niger, haud nitidus, pubescens; antennis rufis; prothorace latitudini longitudine æquali; apice paulo angustato, crebre punctato, angulis posticis rufis; elytris fortiter punctato-striatis, interstitiis convexis, granulosis, plaga basali alteraque minore ante apicem, rufo-testaceis; apice vix visibiliter emarginatis; metathorace rufo.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^{1}/_{3}$ mill.

Bolivie.

L'extrémité des élytres est si peu visiblement échancrée qu'on peut considérer ces dernières comme entières au bout.

C. TETRASPILOTUS. — *Minimus, niger, pubescens; antennis rufis apice nigricantibus; prothorace tumido, crebre punctato, angulis* *posticis apice tantum rufis; elytris fortiter punctato-striatis, interstitiis granulosis, convexis, maculis quatuor rufis, apice integris; subtus niger, pedibus flavis.*

Long. 3 mill., lat. 1 mill.

Bolivie.

Au point de vue de la distribution des couleurs, il paraît une réduction du précédent. On le reconnaîtra au-dessous du corps qui est entièrement noir. Il fait partie également de la deuxième section.

AGRIOTES.

A. CIOCOLATINUS. — *Brunneus, rufescens, parum nitidus, pube concolore; prothorace latitudine haud longiore, a basi angustato, punctato, angulis posticis divaricatis, parum distincte carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, subgranulatis, primi pubescentia paulo pallidiore; subtus pedibusque concoloribus, griseo-pubescens.*

Long. 7 mill., lat. 2 mill.

Mexique.

Voisin du *vaccinus*; même forme, mais plus petit, moins luisant. Sa pubescence est brunâtre et non claire comme chez le premier. Il se fait remarquer par sa forme elliptique régulière.

AGONISCHIUS.

A. STERNALIS. — *Niger, nitidus, fulvo-pilosulus; antennis latis, nigris; prothorace longitudine paulo latiore, a basi angustato, disperse et subtilissime punctulato; elytris aurantiacis, postice nigris, subtiliter striato-punctatis; prosterno luteo.*

Long. 7 mill., lat. 1 $^1/_2$ mill.

Java.

Voisin du *sanguinipennis*, ainsi que du *pectoralis*; distinct toutefois par ses élytres moins larges et non striées, marquées seulement de fines séries de points, les intervalles plats et tous égaux.

A. DISTINCTUS. — *Niger, nitidus, pilosus; antennis serratis; prothorace latitudine paulo longiore, ante basin coarctato, tumido, vitta pilosa albida, angulis posticis divaricatis, albido-pilosis; scutello albo, oblongo; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, nigro-pilosis, squamulis albidis dispersis; subtus albido-vestitus, pedibus nigris.*

Long. 7 mill., lat. 1 $^2/_3$ mill.

Bornéo.

Fort voisin du *virgulatus*; un peu plus grand, son écusson d'une tout autre forme : ovale chez le *virgulatus*, il est ici oblong, avec ses côtés presque parallèles.

A. METALLICUS. — *Elongatus, parallelus, æneus, elytris præsertim metallicis et nitidis, fulvo-pubescens; antennis nigris; prothorace latitudine paulo longiore, subrectangulari, crebre et fortiter punctato, medio sulcato; elytris prothorace paulo latioribus, punctato-striatis; abdomine rufescente.*

Long. 13 mill., lat. 3 mill.

Darjeeling; Kurséong.

La couleur de l'abdomen le fera facilement reconnaître. Il a la taille et quelque peu l'aspect de la variété bronzée de l'*obscuripes*, mais il est plus étroit, plus parallèle, plus brillant. Il doit être placé néanmoins à sa suite.

J'en ai vu plusieurs exemplaires mâles et femelles.

A. MONTICOLA. — *Æneo-brunneus, breviter griseo-pubescens; antennis obscuris, longiusculis; prothorace latitudine longiore, parallelo, crebre punctato, medio sulcato, angulis posticis divari-*

catis, bicarinatis, rufescentibus; elytris prothorace latioribus, depressis, fortiter punctato-striatis, interstitiis convexis, rugose punctatis, testaceis, sutura margineque nigricantibus; rubtus rufescens, prosterno metathoraceque nigris, pedibus obscuris, geniculis rufis.

Long. 9 mill., lat. 2 mill.

Darjeeling; Kurséong

D'après une douzaine d'exemplaires. Il a la forme et l'aspect de quelques espèces des îles Malaises telles que *A. conspurcatus, tæniatus, coarctatus* (¹).

Sa place est à la suite du *quadrilineatus* Hope, dont il a le système de coloration.

A. LONGUS. — *Niger, subopacus, cinereo-pilosus; antennis obscuris; prothorace latitudine longiore, crebre fortiterque punctato, medio sulcato, angulis posticis longis, divaricatis, bicarinatis; elytris prothorace latioribus, longis, parallelis, castaneis, punctato-striatis, interstitiis planis, punctatis; subtus pedibusque brunneis.*

Long. 15 mill., lat. 3 mill.

Darjeeling; Kurséong.

Le mâle a les élytres déprimées le long de la suture, les antennes longues, le prothorax moins bombé que chez la femelle. Du même groupe que le précédent.

A. ATKINSONI. — *Obscure rufo-brunneus, opacus, parce breviter pilosulus; antennis nigris, serratis; prothorace latitudine longiore, basi cum apice angustato, convexo, confertissime punctato, medio tenue sulcato, vitta media marginibusque nigris, angulis posticis divaricatis, parum carinatis; scutello nigro; elytris thorace paulo latioribus, postice ampliatis, striatis, striis punctatis, versus*

(¹) Autrefois *Corymbites coarctatus*. Voir ci-après.

suturam depressis, interstitiis primo et marginali pubescentia pallidiore tectis; subtus niger, pedibus obscuris.

Long. 14 mill., lat. 3 1/2 mill.

Sikkim.

Cette espèce a un aspect sombre et opaque, bien que d'une couleur rougeâtre, très caractéristique. Sa forme la rapproche des *A. obscuripes* et *cinerascens.*

J'en ai vu plusieurs exemplaires du *Museo civico* de Gênes.

A. TENUIVITTIS. — *Nitidus, griseo-pubescens; fronte nigra; prothorace latitudine paulo longiore, tumido, rufo, vitta media angusta nigra; elytris fortiter punctato-striatis, viridi-cyaneis; interstitiis granulatis convexis; subtus rufescens, prosterno nigro, pedibus testaceis.*

Long. 10 mill., lat. 2 1/2 mill.

Bengale; Konbir Novatoli, Chota-Nagpore.

Taille et forme du *Cardoni,* dont il n'est peut-être qu'une variété. Ce qui m'engage à lui donner un nom particulier, c'est que je n'ai point vu de variété de coloration intermédiaire entre les deux.

Celui-ci est très reconnaissable. La disposition de ses couleurs le rapproche aussi du *suturalis,* mais il ne peut être confondu avec lui.

A. EXCEPTUS. — *Testaceus, opacus, tenuiter pubescens; fronte perpendiculari, fortiter punctata, nigro-maculata; prothorace longo, antice subcylindrico, parallelo, confertissime punctato, medio nigro-plagiato; elytris prothorace latioribus, punctato-striatis, interstitiis punctatis.*

Long. 10 mill., lat. 2 1/2 mill.

Java oriental; monts Tengger.

Cette espèce mériterait de constituer un genre à part, et c'est par exception que je la place dans le genre *Agonischius*, s'y trouvant mieux que dans tout autre actuellement existant. Elle a le faciès d'un Pomachiliite, avec un front de Ludiite, même exagéré. Elle rappelle par le faciès certains *Deromecus*. Ses hanches postérieures sont à peine rétrécies en dehors, ses pattes sont extrêmement grêles, enfin les bords de la fossette mésosternale sont foliacés et saillants, bien qu'inclinés.

J'ai reçu cette espèce, ainsi que la précédente, de M. Fruhstorfer.

A. COARCTATUS.

Corymbites coarctatus Cand., *Ann. Mus. Genov.*, XII, 137.

Placée autrefois dans le genre *Corymbites*, cette espèce me parait devoir être transportée dans le genre *Agonischius*, où elle rencontre plus d'affinité avec des espèces des iles malaises connues depuis. Le front, peu bombé, rend du reste l'incertitude possible ; c'est une espèce de passage.

J'en ai vu, dans ces derniers temps, beaucoup d'exemplaires, les uns entièrement bronzés, d'autres à élytres jaunâtres, quelquefois avec la suture bronzée, d'autres en totalité d'un jaune rougeâtre peu brillant.

Son caractère principal réside dans le sillon médian du prothorax large, profond et très long.

SERICUS.

S. HENONI. — *Æneo-niger, haud nitidus, breviter pubescens; prothorace latitudine paulo longiore, apice angustato, confertissime punctulato, angulis posticis carina fere destitutis; elytris prothorace latioribus, tenuiter striatis, striis punctatis, interstitiis planis, punctulatis; pedibus rufescentibus.*

Long. 7 mill., lat. 2 mill.

Constantine.

De la forme, de la couleur et de l'aspect général du *subæneus*, mais plus petit et bien distinct par les angles postérieurs du prothorax, qui portent une forte carène chez l'espèce du midi de l'Europe, tandis qu'ici la carène est à peine visible.

Il a été trouvé et m'a été donné autrefois par M. Hénon, à qui je le dédie.

ADRASTITES.

GLYPHONYX.

G. Dugesi. — *Piceus, sat dense et incondite griseo-pubescens; fronte convexa, dense punctata; antennis brunneis, articulo primo longiusculo; prothorace subquadrato, tumido, punctato, angulis posticis subrectis, longissime extrorsum carinatis; elytris thorace vix latioribus, punctato-striatis, interstitiis dense punctatis; pedibus testaceis.*

Long. 6 mill., lat. 1 1/2 mill.

Mexique ; Guanajuato.

Cette espèce, dont je suis redevable à M. Dugès, doit se ranger à la suite du *fusculus* d'Haïti. Elle est remarquable par la longueur et la position des carènes des angles postérieurs du prothorax, qui sont placées de telle sorte qu'elles en forment comme l'arête latérale, celle-ci étant tout à fait en dessous. Par suite de cette disposition, les flancs sont étroits, peu ponctués et conséquemment luisants.

G. bicolor. — *Fusco-niger, nitidus, dense pilosulus; antennis testaceis; prothorace latitudine longitudine æquali, antice præsertim punctulato, æqualiter convexo, postice cum angulis posticis rufescentibus; elytris testaceis, punctato-striatis, punctis striarum brunneis, pedibus testaceis.*

Long. 5 mill., lat. 1 1/2 mill.

Japon.

Ressemble à l'*Adrastus pallens*. Le quatrième article des tarses lamellé l'en distingue toutefois et le fait rentrer dans le genre *Glyphonyx*.

G. INCONSULTUS. — *Fuscus, subnitidus, fulvo-pubescens; prothorace longitudine latiore, convexo, subtilius punctulato; elytris striato-punctatis; antennis pedibusque pallide brunneis.*

Long. 6 mill., lat. 1 $^{3}/_{4}$ mill.

Java oriental ; monts Tengger.

Cette espèce ressemble tout à fait au *G. aberrans*, de Sarawak, comme taille et couleur, mais elle est moins fortement ponctuée et sa pubescence est jaune, et non grise comme chez celle de Bornéo.

G. CARINIFRONS. — *Minimus, niger, nitidus, cinereo-pubescens; fronte fortiter longitrorsum carinata; antennis rufescentibus; prothorace longitudine paulo latiore, basi coarctato, disco antice tumido; elytris thorace basi paulo latioribus, postice attenuatis, tenuiter punctato-striatis; pedibus rufescentibus.*

Long. 2 $^{1}/_{2}$ mill., lat. $^{2}/_{3}$ mill.

Pérak.

Reconnaissable à la forte carène qui parcourt longitudinalement le front.

SILESIS.

S. ATRIPENNIS. — *Obscure sanguineus, nitidus, fulvo-pilosulus; antennis obscure rufis; prothorace latitudine haud longiore, æqualiter convexo, disperse subtiliter punctulato; elytris nigris, substriato punctatis; subtus pedibusque rufis.*

Long. 10 mill., lat. 2 $^{1}/_{2}$ mill.

Bornéo.

Grand pour le genre, entièrement d'un rouge peu brillant, à l'exception des élytres qui sont noires. D'autres *Silesis*, les *S. sanguinicollis* et certaines variétés du *sericeus*, qui ont une coloration analogue, s'en distinguent facilement.

Il m'a été communiqué par M. von Schönfeldt.

S. crocatus. — *Niger, griseo-pubescens; fronte convexa, punctata; antennis brunneis; prothorace subquadrato, convexo, punctato; elytris prothorace latioribus, crocatis, punctato-striatis, punctis infuscatis; subtus niger, pedibus brunneo-croceis.*

Long. 7 mill., lat. 1 $^3/_4$ mill.

Japon ; Yesso.

Il ressemble, comme coloration, à l'*Agriotes sericeus* et au *Glyphonyx bicolor*, tous deux également du Japon, mais ses caractères génériques ne permettront pas de le confondre avec eux.

Musée de Bruxelles. Il provient du voyage de Jean van Volxem.

S. granarius. — *Minutus, niger, nitidus, griseo-pubescens; fronte æqualiter convexa, margine antica perpendiculari, arcuata; antennis obscuris; prothorace trapezoideo, æquali, punctato; elytris a basi attenuatis, punctato-striatis; subtus niger, pedibus apice brunnescentibus.*

Long. 4 mill., lat. 1 $^1/_5$ mill.

Darjeeling; Kurséong.

Sans caractères bien saillants; entièrement noir et de très petite taille, ce qui le fait ressembler à un *Adrastus*, ou mieux encore à un minuscule *Melanotus*.

S. grisescens. — *Piceus, sat nitidus, brunneo-pubescens; antennis brunneis; prothorace longitudine latiore, a basi angustato, tenuiter sat confertim punctato, angulis posticis latiusculis, extus* *breviter carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, plus minusve, apice præsertim, brunneis; subtus sericeus.*

Long. 6 mill., lat. 2 mill.

Darjeeling; Kurséong.

Taille du *semicastaneus,* à côté duquel il se place. Il est généralement plus atténué aux extrémités, son prothorax est non carré, mais trapéziforme. J'en ai vu plusieurs exemplaires.

S. procax. — *Castaneus, nitidus, pallide pilosulus; prothorace quadrato, convexo, vix visibiliter antice tantum punctulato; elytris punctato-striatis; pedibus testaceis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_4$ mill.

Java oriental; monts Tengger.

Il n'a pas de caractères bien tranchés, si ce n'est la couleur blanchâtre et brillante de sa pubescence qui la rend visible même à l'œil nu.

A la suite du *rufus.*

CAMPYLITES.

NOMOPLEUS.

N. insularis. — *Castaneus, incondite griseo-pilosulus; prothorace quadrato, punctato, angulis posticis longiusculis, divaricatis; elytris prothorace latioribus, parallelis, striatis, interstitiis subcostatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 12-14 mill., lat. 3 mill.

Madagascar; Andrangoloaka.

Il n'y a, du même pays, qu'une espèce de ce genre, décrite autrefois sous le nom de *Pleonomus argentatus*, qui est plus grande et dont la pubescence est plus longue, plus fournie, au point qu'elle communique sa couleur à tout l'insecte.

Chez celui-ci la pubescence est tout autre, d'un gris sale, plus courte et ne masquant nullement la couleur châtain des élytres. Les stries de celui-ci sont marquées, non d'une seule série de points, ainsi que d'habitude, mais de points formant vaguement deux séries ou plus, ou même disséminés sans ordre.

J'en ai vu plusieurs exemplaires que je dois à M. Sikora, d'Antananarivo.

RÉCAPITULATION

DES ESPÈCES DÉCRITES DANS CET OPUSCULE.

AGRYPNITES.

Agrypnus antennatus . . . . Cap.
Adelocera tessellata . . . . Malaisie.
— *javana* . . . . Java.
Lacon palliatus . . . . Madagascar.
— *argentatus* . . . . »
— *hamatus* . . . . »
— *alboscutatus* . . . . »
— *cithareus* . . . . Java.
— *scutellaris* . . . . Japon.
— *pinguis* . . . . Australie.
Meristhus squameus . . . . Congo.
— *biguttatus* . . . . Pérak.
— *nigritulus* . . . . Sumatra.
Agræus Schönfeldti . . . . Bornéo.
— *catulus* . . . . Java.
Tilotarsus spissicollis . . . . Madagascar.
— *hexagonus* . . . . »
— *rusticus* . . . . »

OCTOCRYPTITES.

Octocryptus radula . . . . Sumatra.

ALAÏTES.

Alaus strix. . . . . Java.
Hemirhipus ferrugineus . . . . Guatémala.

CHALCOLÉPIDIITES.

Chalcolepidius monachus. . . . . Mexique.

TÉTRALOBITES.

Tetralobus curticollis. . . . . Transvaal.
— *Dabbenei* . . . . Afrique équatoriale.
— *pumilus* . . . . Queensland.

DICRÉPIDIITES.

Psephus viridipennis . . . . Gabon.
— *incultus* . . . . »
— *confluens* . . . . »
— *unicolor* . . . . Somalis.
— *javanus* . . . . Java.
Dicronychus plumosus . . . . Somalis.
Elius stuppeus . . . . Siam.
Dayakus angularis . . . . Bornéo.
Ischiodontus posticus . . . . Honduras.
— *serrula* . . . . Bolivie.
Atractodus illinitus . . . . Yucatan.

EUDACTYLITES.

Simodactylus Tasmani . . . . Ile Viti.

MONOCRÉPIDIITES.

Dorygonus pumilus . . . . Madagascar.
— *brunneus* . . . . »
Phedomenus Sikoræ . . . . »
Monocrepidius propinquus . . . . Bolivie.
— *insulsus* . . . . Rép. Argentine.

Monocrepidius modestissimus	Bolivie.
Æolus madagascariensis	Madagascar.
— *dubius*	Bolivie.
— *diminutivus*	»
— *laureatus*	Brésil.
— *inquietus*	»
— *gavisus*	Vénézuela.
— *minutissimus*	Brésil.
— *amasius*	»
— *minimus*	»
— *Fleutiauxi*	»
Heteroderes senegalensis	Sénégal.
— *Tschoffeni*	Congo.
— *intermedius*	Bornéo.
— *vagus*	Rép. Argentine.

ÉLATÉRITES.

Drasterius stigmaticus	Arabie.
Elater gagatinus	Sibérie.
— *insularis*	Madagascar.
— *holosericeus*	»
— *rufivellus*	Bornéo.
Megapenthes contaminatus	Java.
— *punctulatus*	»
— *seniculus*	»
— *macilentus*	»
— *nefastus*	»
— *madidus*	Ile Viti.
Melanoxanthus bistellatus	Gabon.
— *imitator*	Madagascar.
— *hemionus*	Mindanao.
— *bicolor*	Pérak.
— *abdominalis*	Australie.

PHYSORHINITES.

Physorhinus boliviensis	Bolivie.
Anchastus rufipennis	Java.
— *ornatus*.	Vénézuela.
— *seminalis*	Brésil.
— *pygmæus*	»
— *posticus*	Paraguay.
— *benignus*	Bolivie.
— *austerus*	Brésil.

POMACHILIITES.

Pomachilius vagus	Vénézuela.
— *minor*	Bolivie.

CRYPTOHYPNITES.

Monadicus nanus	Brésil.
Arrahphes biguttatus.	Pérak.

CARDIOPHORITES.

Cardiophorus ferrugatipes	Darjeeling.
— *paleatus*	»
— *bombycinus*	»
— *tenggerensis*	Java.
— *devectus*	Mexique.

MÉLANOTITES.

Diploconus seminiger.	Siam.
— *cantharus*.	Iles Philippines.
Melanotus scribanus	»
— *telum*	Darjeeling.

ATHOITES.

Athous Cotesi	Hindoustan.

PYROPHORITES

Pyrophorus mutatus . . . . Brésil.

CRÉPIDOMÉNITES.

Melantho trisulcatus . . . . Madagascar.
Crepidomenus æneolus . . . . Australie.
Ophidius Mac Leayi . . . . »
Anilicoides depressus. . . . . »

ALLOTRIITES.

Morostoma testaceipenne . . . . Madagascar.
Penia Fruhstorferi . . . . Java.
— *opatroides* . . . . Darjeeling.

DIMITES.

Arachnodima opaca . . . . Australie.

CARDIORHINITES.

Cardiorhinus bellus . . . . Bolivie.

LUDIITES.

Ludius rufopilosus . . . . Java.
— *parallelus* . . . . »
— *hirticornis*. . . . . »
— *maceratus*. . . . . Bengale.
— *rubicundus* . . . . Mexique.
— *gracilipes* . . . . Brésil.
Aphanobius badius . . . . Java.

Cosmesus flavipes	Corrientes.
— *bizonatus*	Brésil.
— *vulneratus*	»
— *retrotactus*	»
— *tricolor*	La Plata.
— *mitigatus*	Bolivie.
— *tetraspilotus*	»
Agriotes ciocolatinus	Mexique.
Agonischius sternalis	Java.
— *distinctus*	Bornéo.
— *parallelus*	Darjeeling.
— *monticola*	»
— *longus*	»
— *Atkinsoni*	Sikkim.
— *tenuivittis*	Bengale.
— *exceptus*	Java.
Sericus Henoni	Constantine.

ADRASTITES.

Glyphonyx Dugesi	Mexique.
— *bicolor*	Japon.
— *inconsultus*	Java.
— *carinifrons*	Pérak.
Silesis atripennis	Bornéo.
— *crocatus*	Japon.
— *granarius*	Darjeeling.
— *grisescens*	»
— *procax*	Java.

CAMPYLITES.

Nomopleus insularis	Madagascar.

LETTRES

À

QUELQUES MATHÉMATICIENS

PAR

Eugène CATALAN.

LETTRES

À

QUELQUES MATHÉMATICIENS

(Suite) (*).

XII

A M. de Freycinet, Sénateur, Ingénieur des Mines (**).

Très honoré Camarade,

Après vous avoir interrogé, je pense, à l'École polytechnique, je vous ai accompagné (en esprit) dans votre double carrière, politique et scientifique. J'ai applaudi à vos efforts pour défendre et régénérer notre chère patrie ; et j'ai lu, dans le temps, votre remarquable *Traité de Mécanique*. Aujourd'hui, je viens vous soumettre quelques observations sur la *Métaphysique du haut Calcul,* ouvrage dont j'ai fait l'acquisition ces jours-ci. Je n'ai pas besoin de vous dire que, sur les principes fondamentaux, je suis absolument d'accord avec vous : mes critiques (si critiques il y a) portent sur quelques détails de démonstration ou de rédaction.

Votre dévoué *très Ancien.*

Liège, 8 juin 1881 (***).

P. S. Pour plus de facilité, je suivrai l'ordre des pages.

(*) Voir *Mémoires de la Société des sciences, de Liège,* 2e série, t. XVII.

(**) Aujourd'hui, Ministre de la Guerre, etc.

(***) Dans sa réponse, fort aimable, M. de F. me disait à peu près ceci : « J'aurai égard à vos remarques, *si jamais je publie* une nouvelle édition de ma brochure. »

1. Page XI, dernière ligne : « *la mesure de l'aire* ».

Est-ce que l'*aire* n'est pas le *nombre* qui mesure la *surface?* En 1845, dans mes *Éléments de Géométrie*, j'ai défini (ce qu'on n'avait pas encore fait) : la *longueur* d'une ligne, l'*aire* d'une surface, le *volume* d'un corps.

2. Page XII : « *Leçons sur le calcul différentiel et intégral.* »

L'*Abbé* ne commettrait pas cette petite faute de français.

3. Page 15, ligne 16 : « $y = (-a)^x$, a *désignant un nombre positif.* »

Est-ce qu'un nombre peut être *négatif?* D'après les premières notions, un nombre est le rapport de deux grandeurs ; donc il est *positif*. Du reste, il ne s'agit point, ici, d'un *théorème*, mais d'une simple *opinion*.

4. Page 21, ligne 16 : « *Il serait beaucoup mieux nommé* INDÉFINIMENT *petit.* »

Cette dénomination, souvent attribuée à Cauchy, était connue dès 1702, comme le prouve le titre suivant : *Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur indéfiniment petite, par M. de Tschirnhausen* (*).

5. Page 22, ligne 12 : « *Qu'est-ce que la longueur d'une ligne courbe?* »

Comme je l'ai déjà rappelé, cette définition, *nécessaire*, a été donnée, pour la première fois, dans mes *Éléments de Géométrie*. Cet ouvrage contient, aussi, la définition, également *nécessaire*, du rapport entre deux grandeurs incommensurables. Mais revenons à la démonstration qu'emploie M. de Freycinet :

« *On envisage la courbe comme la limite des polygones inscrits.* »

Ceci n'est pas clair. Veut-on dire que l'*aspect* du polygone diffère, de moins en moins, de l'*aspect* de la courbe? Alors, nous sommes d'accord. Si la phrase veut signifier autre chose, l'hono-

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, 1879, p. 341.

rable auteur commet un cercle vicieux; car il s'agit, toujours, de répondre à la question énoncée ci-dessus.

« *Pour justifier ce point de vue, il faut... prouver que la*
» *différence entre la longueur inconnue de la courbe et la longueur*
» *des périmètres inscrits...* »

Si, comme l'énoncé l'indique, vous ne savez pas, *a priori,* ce que vous entendez par *longueur d'une courbe,* il vous est *impossible de prouver que cette longueur diffère d'une longueur connue.* Legendre, dans ses *Éléments de Géométrie,* a tenté ce tour de force; mais il a échoué, et il devait échouer.

Jusqu'à preuve contraire, je prétends que la seule méthode efficace est celle dont j'ai déjà parlé...

6. Page 36, ligne 15 : « Il est facile de démontrer que... »

Pas si facile que le croyait Duhamel ! Témoin l'anecdote suivante :

En 1872, M. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain, présentait, à l'Académie de Belgique (dont il était Associé), un Mémoire intitulé : « *Sur l'existence de la dérivée, dans les fonctions continues.* » On lit, dans le préambule de ce remarquable travail :

« ... Non seulement M. Hankel admet parfaitement l'existence
» de *fonctions continues qui n'ont point de dérivée,* mais il for-
» mule un *pricipe général,... qui permettrait d'en construire un*
» *nombre indéfini.* Il donne même divers exemples de semblables
» fonctions. »

M. Gilbert s'était proposé, en s'appuyant sur des principes dus à Ernest Lamarle, « de ne laisser aucun doute sur l'inanité de
» ces conclusions (*). »

Nommé premier Commissaire, je rédigeai, *à grand'peine,* un long Rapport, dont voici un extrait :

« Si, malgré les éclaircissements qu'il m'a donnés par lettres,
» *quelques-uns des arguments* de notre savant Confrère *n'ont pas*
» *amené,* chez moi, *une conviction complète,* la raison en est due,

(*) Les conclusions de Hankel.

» sans doute, à la difficulté du sujet que nous discutions. »

Si je suis bien informé, M. Gilbert a reconnu, *postérieurement*, que *quelques-uns des arguments* dont il s'agit n'étaient pas *topiques*. Et la difficulté reste entière !

7. Page 42, ligne 7 : « mot qu'on peut considérer comme provenant... »

Leibniz n'a-t-il pas voulu désigner, par le mot *différentielle*, une différence très petite?

8. Page 44, ligne dernière : « Un des savants les plus distingués de l'époque, M. B. »

Il est possible que B. (un excellent homme, sans contredit) ait fait de bons élèves ; mais, à coup sûr, il n'était pas Géomètre. Quant à l'honnête Boucharlat, il n'en faudrait pas parler.

9. Page 46, ligne 10 : « *La fonction dérivée est non l'expression* » *du rapport de ces accroissements pris à aucun état de petitesse,* » *mais la limite vers laquelle tend ce rapport.* »

La pensée est juste, mais l'expression ne l'est pas. Qu'est-ce que des *accroissements pris à aucun état?* Peut-être manque-t-il des virgules.

10. Page 66, ligne 16 : « *Ainsi se trouve confirmée*, A POSTERIORI... » Voir la Remarque 6.

11. Page 66, dernière ligne : « *On donne souvent une démon-* » *stration fort incomplète et même vicieuse...* ».

Dans mon *Cours d'Analyse* (page 115), après avoir montré que l'on a, généralement, $f'(x) = a$, j'ajoute :

« Cette équation fondamentale est en défaut dans un seul cas, » celui où la tangente n'existe pas. » De cette manière, tout est sauvé!

12. Page 96, ligne 5 : « *Si l'on connaissait une fonction...* »

Cet énoncé est presque inintelligible. En outre, la longue démonstration, qui le suit, me paraît superflue.

13. Page 138, ligne 5 : « Deux quantités fixes... »

Cet autre énoncé, *très exact,* ne pourrait-il être ainsi abrégé :

« Deux quantités fixes, entre lesquelles on suppose une
» différence infiniment petite, sont égales? »

14. Page 142, *note.* Démonstration *beaucoup* trop longue. Trop de *que* et de *qui* (j'en compte vingt-deux!).

15. Page 164, ligne 3 en remontant : « *Je veux démontrer que cette aire est la limite.* »

Qu'appelez-vous *aire* d'une figure? Si vous ne définissez pas, vous ne prouverez rien. Voir la Remarque 5.

16. Page 165, ligne 14 : « *Il n'y aurait pas plus de difficulté
» à prouver qu'un arc de courbe est la limite des périmètres
» inscrits.* »

Probablement, l'honorable auteur a voulu dire :

« Il n'y aurait pas plus de difficulté à prouver que *la longueur
» d'un arc* de courbe est la limite des *périmètres des lignes
» brisées, convexes, inscrites* à cet arc. »

Précédemment, j'ai fait voir que, si l'on ne définit pas le mot *longueur,* la difficulté est insurmontable. Encore une fois, il ne s'agit pas d'un *théorème,* mais d'une *définition!*

17. Pages 208 et 209 : « *composantes tangentielle et normale* (*) » de la force accélératrice.

M. de Freycinet donne « *une démonstration beaucoup plus simple et plus rapide que celle qu'on obtient par la méthode ordinaire.* »

Connaît-il la mienne? (*Manuel des Candidats à l'École polytechnique,* t. II, p. 139.)

(*) Voir la *Remarque* 2.

XIII

A M. Delbœuf.

MON CHER CONFRÈRE,

Aussitôt qu'a paru votre *Démonstration du théorème de d'Alembert*, j'ai songé à vous communiquer ce que j'en pense.

Mais, pour exécuter ce dessein, il m'a fallu avoir, *sous les yeux*, le n° 126 de la *Revue scientifique*. C'est aujourd'hui, seulement, que j'ai pu me le procurer.

Ceci dit, j'entre en matière.

I.

Vous dites : « Le théorème de D'Alembert s'énonce comme suit :

« *Toute équation algébrique a un nombre de racines égal à* » *celui qui exprime son degré.* »

Je crois que le véritable énoncé est celui-ci :

« *Toute équation algébrique,* $f(x) = 0$, *dont les coefficients* » *ont la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *admet, au moins, une racine de* » *cette même forme* (*). » Mais passons.

Vous dites encore :

« *Autant de racines que le* CHIFFRE *de son degré* »... « *On* » *admet qu'il y a un carré* ÉGAL *à un cercle donné* »... « *Y a-t-il* » *une* DROITE *égale à une circonférence* donnée? *Oui* ».

Comment un Grammairien, doublé d'un Mathématicien, peut-il employer ces expressions malsonnantes? Si encore vous étiez de l'Académie française, comme *** (**)!

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 187. On suppose

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m.$$

(**) Dans un ouvrage tout récent, ***, célèbre et savant Géomètre, fait *personne* du masculin; il écrit « le chiffre $\frac{1}{500\,000}$ »; etc. Avant son élection, il n'aurait pas commis ces grosses fautes. Ce que c'est que l'influence du *milieu!*

II

Après ce *oui,* vous ajoutez : « *Une circonférence* est finie et *peut croître indéfiniment par infiniment petits.* »

Autrement dit :

« *La longueur de la circonférence est une fonction continue de*
» *la longueur du rayon ;* »

ou, en termes plus simples :

« *Il y a des circonférences de toutes les grandeurs.* »

Cette proposition suppose que l'on a défini, préalablement, la *longueur d'une ligne.* Faute d'avoir *donné* et *justifié* cette définition, l'illustre Legendre a traité, d'une façon *absolument mauvaise,* les théories du cercle et de la circonférence (*).

III

Arrivons à votre démonstration.

Vous dites :

« Quel que soit M et quel que soit b, il existe une valeur de a
» qui satisfait à l'équation $a + b = M$.
» Quel que soit N et quel que soit a, il y a une valeur de b
» qui satisfait à l'*équation* $ab = N$.
» Par conséquent, puisque, quel que soit b, il y a une valeur
» satisfaisante de a, et que, quel que soit a, il y a une valeur
» satisfaisante de b, *il s'ensuit* qu'il y a une valeur pour a et
» une valeur pour b qui satisfont aux deux équations données. »

Il ne s'ensuit pas du tout.

Reprenons les équations

$$a + b = M, \qquad (1)$$

$$ab = N. \qquad (2)$$

(*) J'en pourrais citer d'autres ; mais cette discussion serait hors de propos.

Si je comprends votre raisonnement, il se réduit à ceci :

En attribuant, à b, une *valeur convenable*, on tirera, de ces deux équations, deux valeurs de a, *égales entre elles*.

Pour savoir quelle est cette valeur *convenable* (*), éliminons a. Nous trouvons

$$N + b^2 = Mb,$$

ou

$$b^2 - Mb + N = 0. \tag{3}$$

Ainsi, b doit être racine de l'équation

$$x^2 - Mx + N = 0; \tag{4}$$

proposition *évidente*, mais qui *n'apprend rien* sur l'*existence* de cette racine.

IV

Pour l'équation

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

votre calcul revient à *poser* les équations auxiliaires :

$$a + b + c = -P, \qquad ab + bc + ca = Q, \qquad abc = -R.$$

Ayant fait cela, vous dites (ou peu s'en faut) :

« Si j'attribue, à c, une valeur *convenable*, je pourrai satisfaire » à ces trois conditions. » *A priori*, vous n'en savez rien. Afin de trouver cette valeur *convenable* (si elle existe), il faut éliminer a et b ; ce qui donne

$$c^3 + Pc^2 + Qc + R = 0.$$

Ainsi, c doit être racine de la proposée. Encore une fois, cette conclusion ne prouve pas l'existence de c.

(*) Il ne suffit pas, pour la découvrir, de faire varier b, de $-\infty$ à $+\infty$. Car la *droite*, représentée par l'équation (1), peut ne pas rencontrer l'*hyperbole* représentée par l'équation (2).

Exemple :

$$a + b = 2, \qquad ab = 2.$$

Dans le cas général, comme dans les cas particuliers considérés, vous avez oublié, me semble-t-il, cette proposition si connue : « *Les relations entre les coefficients et les racines ne* » *peuvent déterminer ces racines.* »

V

En résumé, ou je me trompe complètement, ou votre *démonstration* repose sur une *pétition de principe.*

VI

J'ai connu à Bruges, autrefois, un homme fort respectable, ancien Membre de la Cour de Cassation. Il avait quelques notions de mathématiques; et, comme il était un peu malicieux, il s'en servait pour taquiner les gens.

Par exemple, il demanda, à son menuisier, de lui exécuter, en sapin, une encognure, dont les deux petits côtés devaient avoir, je suppose, $0^{m},3$ et $0^{m},4$, et l'hypoténuse, $0^{m},6$.

Le pauvre homme usa pas mal de planches, et ne résolut pas le problème.

Vous pouvez jouer le même tour à votre *marchand de moutons :* donnez-lui

$$M = 50^{n}, \qquad N = 800^{m.c.}$$

Votre bien affectionné et dévoué vieux Confrère

E. C.

Liège, 16 janvier 1889.

XIV

A M. Siacci, Sénateur, Membre de l'Académie de Turin, etc.

(Extrait.)

Monsieur,

Je commence, aujourd'hui seulement, la courte analyse, que vous m'avez demandée, des travaux de notre illustre ami (*). J'entre en matière.

Nouvelles Annales de Mathématiques.

1851. *Satisfaire, par des nombres rationnels, aux deux équations*

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, \qquad x^2 - y^2 - 1 = u^2.$$

Cette curieuse Note est, peut-être, le début mathématique de *M. Genocchi, avocat à Turin.*

1852. *Observations sur certains articles.*

1853. *Démonstration d'un théorème d'Euler : Tout nombre entier, qui n'est pas compris dans la formule* (**) 4mn — m — n, *est nécessairement compris dans la formule* x² + y² + y. Déjà, l'auteur paraît être en possession des méthodes et des raisonnements propres à la *théorie des nombres.*

Sur les sommes des puissances semblables des racines d'une équation algébrique.

Note très importante. Pour résoudre la question, Genocchi emploie un beau théorème de Lagrange, *non cité* par Serret. Il donne, plus simplement que Serret, le développement du polynôme V_n (***). Comparaison avec des formules d'Euler, de

(*) *Angelo Genocchi.*

(**) Je crois qu'il aurait dû dire : *qui n'a pas la forme.*

(***) Polynôme dont il a été question récemment (*Calcul des probabilités*, p. 139, par *Joseph Bertrand*). Quel drôle de livre!

Lambert, de Waring. Démonstration de l'égalité suivante, due à Cauchy :

$$1 - \frac{k^2-1}{1.2.3.2^2}\,\frac{2}{1} + \frac{(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5.2^4}\,\frac{3.4}{1.2}$$

$$- \frac{(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)}{1.2\ldots7.2^6}\,\frac{4.5.6}{6.2.3} + \cdots = \frac{1}{k} \quad (k \text{ impair}).$$

L'*Avocat* était, déjà, très érudit, et très excellent algébriste.

Théorème sur les fonctions homogènes (de Sylvester et de Cayley).

1854. *Note sur une formule de M. Gauss.* Démonstration très remarquable, relative au nombre des solutions de $N = x^2 + y^2$. Je pense qu'elle est devenue classique. Genocchi cite diverses séries *elliptiques,* dues à lui-même ou à Cauchy.

Quelques propositions d'Arithmétique (d'après Euclide).

Remarques (critiques) *sur un théorème de M. Brioschi.*

1855. *Sur les ovales de Descartes.* Expression de s, plus simple que celle qui était connue. Genocchi se montre aussi *expert,* en intégrales elliptiques (ou ultra-elliptiques), qu'en théorie des nombres.

Démonstration d'un théorème de Serret, d'une formule de M. Roberts, et d'un théorème de Brioschi. Restitution de priorité en faveur de Gauss. On voit combien notre confrère était érudit.

Critique d'une Note de Housel. Il s'agit de *trouver une courbe égale à sa polaire.*

1858. *Extraction abrégée de la racine cubique.* Contrairement aux opinions de Serret, Bertrand, Amiot, ..., M. Genocchi prouve que, si l'on connaît $n - 1$ chiffres de la racine, on trouve, par une division, les n chiffres suivants.

1859. *Solution d'une question proposée par M. Roberts.* C'est le théorème de Maséres (*).

(*) Legendre paraît y être arrivé de son côté. (*Exercices,* t. III, p. 144.)

Seconde solution de la Question 437. Il s'agit de la formule

$$\frac{4}{\pi}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^1+\left(\frac{1.2.3}{2.4.6}\right)^2+\cdots$$

Genocchi prouve qu'elle est comprise dans une identité due à Gauss ; ce qui n'est pas étonnant.

1861. *Sur les extractions approchées des racines.* Polémique avec Peacock.

1867. *Démonstration d'un théorème de Newton, de deux théorèmes de Silvester, d'un théorème de Fourier,* etc. (Nombre des racines réelles.) On sait combien la règle de Newton est difficile à établir. Je crois me rappeler que, dans ces derniers temps, M. de Jonquières en a donné une démonstration.

Sur une règle de convergence des séries. Cette règle, très générale et très simple, est démontrée au moyen d'un *théorème de Nicole,* remis en lumière par M. Genocchi. On voit, une fois de plus, combien il était érudit. Je ne parle pas de ses autres mérites.

1869. *Sur la théorie des produits infinis* (*). Cette théorie ne me semble pas aussi *élémentaire* que le croyait l'illustre Auteur. Quoi qu'il en soit, les *nouveaux théorèmes* comprennent, comme cas particuliers, des théorèmes d'Abel, de Gauss et de Weierstrass.

Sur le passage des différences aux différentielles. Critique des démonstrations données dans les « Traités les plus recommandables de Calcul différentiel ».

1875. *Réclamation de priorité en faveur de Félix Chiò.* (Voir plus loin.)

Réclamation pour lui-même. (A propos d'une Note de Pepin.)

1883. *Démonstration d'un théorème de Fermat.* Le système des équations

$$2y^2-1=x,\qquad 2z^2-1=x^2$$

n'est vérifié, en nombres entiers, que par

$$x=7,\qquad y=2,\qquad z=5.$$

(*) Ou plutôt, *indéfinis.*

Critique d'un essai de solution, par Pepin. Énoncés de théorèmes nouveaux.

Sur un théorème de Legendre.

Dans une lettre du 15 avril 1869, Genocchi me donne une démonstration, fort simple, de la formule approximative

$$F(c) = \mathcal{L}\left(\frac{4}{b}\right) \ (^*).$$

Bullettino du P. Boncompagni.

1871. En lisant cette Notice, je m'aperçois que je me suis rencontré, avec F. Chiò, dans la solution (exacte) d'un problème dont Th. Olivier avait donné une solution fausse (*Journal de Mathématiques*, t. III, 1838).

La Note de Liouville (*ibidem*, p. 337), ne pouvait pas faire soupçonner qu'il s'agit de cette fausse solution. J'ai négligé de faire insérer la mienne, pour ne pas désobliger Olivier, qui était un excellent homme (*Mélanges mathématiques*, t. I, p. 31). On sait que les *Recherches* de Chiò, *sur la série de Lagrange*, donnèrent lieu à une polémique assez vive, entre Genocchi et Menabrea, aujourd'hui Ambassadeur à Paris.

1873. *Réclamation en faveur de F. Chiò* (en italien). Dirigée, surtout, contre Maximilien Marie.

1877. *Observations sur la publication, par le P. Boncompagni, des lettres de Lagrange* (en italien). Autant que j'en puisse juger, ces observations sont fort importantes pour l'*histoire des Mathémathiques*, au XVIII^e siècle. Il y est question de *Foncenex*.

Annali di Matematica (Tortolini).

Tome I. *Sur une construction du théorème d'Abel* (en italien)

Tome II. *Sur l'équation* $x^{m+1} - x - k = 0$ (en italien).

(*) Suivant Jacobi, elle est due à Euler.

Des séries ordonnées suivant les inverses des factorielles (en italien). Analyse critique (je suppose) du célèbre Mémoire de Binet (*Sur les intégrales eulériennes*).

Tome III. *Sur la multiplication des formes quadratiques* (en italien).

Tome IV. *Sur la réduction des intégrales elliptiques* (en italien). Notre illustre ami, en suivant la trace laissée par Plana, simplifie le commencement du Traité de Legendre.

Sur la rectification et les propriétés des caustiques secondaires (en italien).

Sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. Simplification du Mémoire de Lamé.

Tome VII. *Recherches sur des sommes de cubes* (en italien). L'illustre Auteur considère, d'abord, l'équation

$$x^3 + (x + z)^3 + (x + 2z)^3 = y^3.$$

Il prouve qu'elle est vérifié par $x = 720\,469$, $y = 11\,105\,855$. Ce Mémoire, très intéressant, a donné lieu à celui que j'ai publié dans les *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei* (1867).

Comptes rendus.

1874. *Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles.* (Voir le premier article des *N. A.*, 1851.) A propos de théorèmes énoncés par Pepin. La conclusion, *curieuse*, est celle-ci : « Il est impossible de satisfaire à l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, par des valeurs de x, y, z qui seraient des racines d'une équation du troisième degré, à coefficients rationnels. »

1877. *Sur l'équation de Riccati* (Voir plus loin. Je n'ai pas le volume chez moi, et je n'ai pu l'avoir à l'Université.)

Académie de Belgique. — Bulletin.

1873. *Lettre à M. Quetelet, sur diverses questions mathématiques.*

1° *Réclamation au sujet d'un Rapport de M. De Tilly.*

2° *Remarques sur la Géométrie abstraite.* Le point de départ est le célèbre Mémoire qui porte le nom de de Daviet de Foncenex (voir plus loin). Il s'agit, principalement, de la *pseudo-sphère,* et du postulatum d'Euclide. Notre ami est en dissentiment avec Houël, De Tilly et d'autres Géomètres. Sur cette question de la pseudo-sphère (comme sur beaucoup d'autres questions), je suis absolument incompétent. Celle-ci me paraît *insoluble.*

Académie de Belgique. — Mémoires.

Note sur la théorie des résidus quadratiques (34 pages).

Ce beau Mémoire, modestement intitulé Note, me semble être l'œuvre *capitale* de Genocchi. Il contient, d'abord, la démonstration d'une *relation* (7), *entre trois nombres entiers,* relation véritablement extraordinaire, qui laisse bien loin les célèbres théorèmes de Gauss (démontrés par Le Besgue), et qui renferme des égalités trouvées par Schaar.

Notre illustre ami démontre ensuite une formule (4) d'où il conclut la *loi de réciprocité,* de Legendre, *étendue à deux nombres impairs quelconques, mais premiers entre eux.*

Remarque curieuse (p. 13) : la série

$$2\nu - 1 + \frac{2}{\pi}\left(\sin 2\pi\nu + \frac{1}{2}\sin 4\pi\nu + \frac{1}{3}\,6\pi\nu + \cdots\right)$$

exprime toujours un nombre entier (ν est supposé rationnel).

Autre résultat bien remarquable : Si $n = 8k + 7$,

$$\sum \frac{1}{\sin \frac{2r\pi}{n}} = 0;$$

si $n = 8k + 3$,

$$\sum \frac{1}{\sin \frac{2r\pi}{n}} = \frac{-2(f-g)\sqrt{n}}{3}$$

(r, résidu de n, inférieur à n ; f, g, nombres entiers, *inconnus*).

Je ne puis, faute de temps, continuer cette sèche analyse. Il me semble qu'il faudrait, comme a dit Voltaire, écrire *admirable*, à la fin de chaque page.

Recherches sur un cas d'intégration sous forme finie (Turin, 1869, 66 pages, en italien). Sorte de commentaire et d'extension de plusieurs Mémoires de Liouville, sur l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$.

Autre Mémoire portant le même titre (Turin, 1872).

Formation et intégration d'une équation différentielle (Turin, 1865, 57 pages, en italien).

Recherches sur la fonction $\Gamma(x)$ (Naples, 1883, 10 pages, en italien). L'illustre Géomètre trouve la formule, bien remarquable,

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}.$$

Démonstration d'une formule de Leibniz et Lagrange (Turin, 1869, en italien).

Recherches sur une égalité double (Naples, 1881, 24 pages, en italien).

Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex (Turin, 1877, 42 pages).

Ce travail, *philosophique, historique et mathématique*, est fort intéressant. Il semble prouver que la théorie du levier, telle que l'a exposée Foncenex (ou plutôt Lagrange), exige un postulatum (d'Archimède) correspondant au postulatum d'Euclide; et, chose plus extraordinaire, que la *Géométrie euclidienne*, la *Géométrie hyperbolique* et la *Géométrie elliptique*, découlent de l'équation

$$[f(x)]^2 = 2 + f(2x),$$

traitée par Foncenex (*).

A la page 19, on trouve une *définition* du plan, proposée, en 1870, par M. Helmholtz. Dès 1843, dans la première édition

(*) Poisson, dans son *Traité de Mécanique*, prend l'équation

$$\varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z).$$

de mes *Éléments de Géométrie*, j'avais proposé ces deux-ci :

Un plan est une surface indéfinie, partout identique à elle-même ;

Une droite est l'intersection de deux plans.

Quant au *postulatum* d'Euclide, j'ai fait observer, il y a bien longtemps, qu'il y en a d'autres, sur lesquels on n'insiste pas. Par exemple, celui-ci :

Soient, dans un même plan, une droite AB *et deux points* C, D, *situés de part et d'autre de* AB. *Si l'on trace la droite* CD, *elle coupe* AB.

J'ai rappelé, ci-dessus, que ce curieux Mémoire de notre ami a été l'occasion d'une polémique un peu vive, entre lui et mon savant Confrère De Tilly. Peut-être le procès serait-il difficile à juger.

Permettez-moi, Monsieur, d'en rester là. J'espère que ces quelques notes, écrites au courant de la plume, pourront vous aider à rendre, à votre illustre Maître, la justice qui lui est due.

Votre bien dévoué vieux Collègue et Confrère,

E. C.

Liège, 27 mars 1889.

P. S. Si Genocchi avait eu la santé, il aurait pu, mieux que tout autre, rédiger une nouvelle *Théorie des Nombres* (*).

(*) Jusqu'à présent, *rien* n'est venu modifier cette appréciation (5 septembre 1892).

XV

A M. Le Paige.

(Extraits.)

Le Mémoire de Lucas (*), qui contient des parties intéressantes, ne me semble, cependant, point répondre à la juste réputation de l'Auteur. Voici pourquoi :

1° La démonstration du théorème de Wilson est compliquée; tandis que celle que l'on doit à Lagrange est absolument élémentaire.

2° M. Lucas démontre le théorème de Fermat au moyen du théorème de Wilson. Agir ainsi, c'est, proprement, *mettre la charrue devant les bœufs,* ou procéder du *composé* au *simple.*

3° Quant à la nouvelle démonstration de la *loi de réciprocité,* que l'Auteur croit être *plus simple que toutes celles qui ont été données jusqu'à présent,* si je ne me trompe, elle est moins simple que celle de l'illustre Genocchi, mon ami bien regretté. En effet, d'après celle-ci, la loi de réciprocité est une conséquence immédiate du Lemme de Gauss (**).

Puisque M. Lucas voulait établir que sa démonstration est plus simple que les autres, il aurait dû, semble-t-il, commencer par l'énumération de celles-ci ; savoir : les démonstrations de Gauss; celle de Cauchy; les deux ou trois démonstrations de Jacobi; celle de Liouville (***); les deux démonstrations de Schaar (IV); celle de Le Besgue; les deux ou trois démonstrations d'Eisenstein ; etc., etc.

(*) *Démonstration de la loi de réciprocité, par Édouard Lucas.*

(**) *Académie de Belgique, Savants étrangers,* t. XXV, p. 50. Voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. II, la démonstration du Lemme de Gauss, donnée par M. Mansion.

(***) *Journal de Mathématiques,* 1847, p. 95. Malheureusement, comme il est arrivé souvent, la Note de mon illustre Maître est une simple esquisse : l'auteur se réservait de revenir sur ce sujet. Que de beaux résultats, qu'il avait découverts, ont été perdus ainsi !

(IV) *Académie de Belgique,* t. XXIV et XXV.

4° Sur des points de détail, j'ai des opinions contraires à celles de M. Lucas et à celles de bien des Géomètres.

. . . .

Pour exprimer que A — B est un multiple de p, M. Lucas emploie la notation de Gauss :

$$A - B = 0 \pmod{p};$$

et il dit que A et B sont *congrus*. On sait ce que Legendre pensait de cette notation et de cette dénomination (*).

. . . .

E. C.

Liège, 14 mars 1890 (**).

XVI

A M. Hermite.

MON CHER MONSIEUR HERMITE,

Je suppose que vous êtes à Paris, ou que vous allez y rentrer. Donc, cette lettre vous parviendra, et vous trouvera en bonne santé, je l'espère.

I.

Au commencement de juillet, je vous ai écrit, relativement à un vieux théorème empirique :

« *Si* n *est un nombre entier, autre que zéro, la quantité*

$$6n^2 + 6n - 3$$

» *est la somme de trois carrés, entiers et positifs.* »

(*) *Mémoires de l'Institut*, 1823. « Ces dénominations *incongrues* », écrit Legendre.

(**) Par un motif bien simple, j'ai hésité à publier cette lettre (ou plutôt ce Rapport) : l'*Auteur n'est plus là pour se défendre*. Mais, comme elle contient des renseignements utiles, peut-être, à de jeunes Géomètres, je la livre à l'impression, en biffant quelques passages un peu vifs. Du reste, personne, plus que moi, ne déplore la fin prématurée d'un homme doué d'un remarquable esprit d'investigation, et qui, en *théorie des Nombres*, était une autorité.

Presque immédiatement, j'en ai conclu celui-ci, qui me semble mériter votre attention :

« *Le sextuple de tout nombre impair est la somme de trois*
» *carrés, entiers et positifs.* »

Ne pouvant me rendre au Congrès de Marseille, je me suis dit, avec le héros d'une vieille romance :

Et, si je ne suis pas là,
Mon bouquet, du moins, y sera.

Mon bouquet, c'étaient mes deux théorèmes (avec d'autres); mais les deux premiers, hélas! toujours à l'état empirique. Depuis mon retour ici, j'ai relu mes *Recherches sur quelques produits indéfinis,* et je les ai perfectionnées en certains points.

Par exemple, voici deux théorèmes (démontrés, cette fois), qui me paraissent remarquables. Le premier est dans les *Recherches,* mais sous une forme trop sommaire.

Théorème. n *étant un nombre impair, on décompose* 2n, *par voie d'addition, en*

$$1 + (2n - 1), \qquad 3 + (2n - 3), \ldots \qquad (2n - 1) + 1;$$

et l'on fait la somme, S_{2n}, *des produits*

$$\int 1 \int (2n - 1), \qquad \int 3 \int (2n - 3), \ldots \qquad \int (2n - 1) \int 1.$$

D'autre part, on prend tous les diviseurs impairs de n ; *savoir*
$1, \ldots, \lambda, \ldots, n$;
et l'on fait la somme de leurs cubes :

$$1^3 + \ldots + \lambda^3 + \ldots + n^3 = \Sigma\, \lambda^3.$$

Cela posé, ces deux sommes sont égales (*).

(*) Si n est premier, la seconde somme égale $1 + n^3$: c'est à quoi se réduit la première.

II.

Soit, comme dans les *Recherches*, $F(n, p)$ *le nombres des décompositions de* n, *en parties égales ou inégales,* non supérieures à p. Cette fonction F jouit de propriétés curieuses (voir *R.*, p. 47), parmi lesquelles la plus simple me paraît être celle-ci, que je viens de trouver :

La quantité

$$F(n-1,1)-F(n-3,2)+F(n-6,3)-F(n-10,4)+\ldots,$$

nulle, si n *n'est pas pentagonal, est* ± 1 *dans les autres cas* (*).

Je viens de passer en revue les *Fonctions numériques*, de Liouville ; mais je n'y ai rien trouvé qui ressemble à ces théorèmes.

Espérant qu'ils pourront vous intéresser, je...

Liège, 1er octobre 1891.

XVII

A M. Hermite.

(Extrait.)

Le dernier Mémoire (imprimé) de B., se termine par la formule de M. Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\prod_{1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{a}{m}\right)e^{-\frac{a}{m}}\right]. \tag{1}$$

Je ne la connaissais pas, bien qu'elle se trouve dans votre *Cours de la Sorbonne*. Permettez-moi, pour deux motifs, de ne pas l'admirer :

1° Elle est absolument inapplicable ;

(*) On suppose $F(0, p) = 1$.

2° Elle résulte, tout de suite, de la formule de Gudermann, telle que vous l'écrivez :

$$\mathcal{L}\Gamma(a+1) = \sum_1^\infty \left[a\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right) \right]. \qquad (2)$$

J'observe, d'abord, que

$$a\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

est le terme général d'une *série convergente*.

En second lieu, on a, *en série convergente*,

$$-Ca = \sum_1^\infty \left[a\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{a}{n} \right] (^*). \qquad (3)$$

Ceci posé, la série formée par les différences, terme à terme, des séries (2), (3), est *encore convergente*. Donc

$$-Ca + \mathcal{L}\Gamma(a+1) = \sum_1^\infty \left[\frac{a}{n} - \mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right) \right];$$

ou, ce qui est équivalent, la formule (1). Comment W. ne s'est-il pas aperçu de cette concordance?

Le Mémoire de B. me procure bien d'autres surprises. A la page 61, à propos de la formule (171), il dit :

« La série $\sum_1^\infty \frac{1}{m(m^2 - a^2)}$ est absolument convergente, quel que » soit le module de a. »

Et si a est un nombre *entier?* Voilà donc une série dont un terme est infini, et qui, néanmoins, est convergente!

Il soutient que ce résultat (qui me semble absurde) est d'accord avec *vos principes*. Alors, *où allons-nous?* A-t-on, en Analyse, mis le cœur à droite, comme faisait Sganarelle?

J'aime à croire que B. se trompe.

Liège, 12 novembre 1891.

(*) D'après votre *Cours*, la petite transformation

$$\mathcal{L}n = \mathcal{L}\left(\frac{n}{n-1}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{n-1}{n-2}\right) + \cdots + \mathcal{L}\left(\frac{2}{1}\right) + \mathcal{L}1,$$

que j'ai *trouvée* en 1856 (*Mélanges mathématiques*), l'aurait été, antérieurement, par Gauss. Tant mieux pour moi!

XVIII

A M. Peano (de Turin).

(Extraits.)

Monsieur et savant Collègue,

Je vous remercie de l'envoi des quatre dernières livraisons de votre *Rivista*, que je viens de recevoir...

La remarquable démonstration de Mourey a été simplifiée et complétée par Liouville, mon illustre Maître et ami bien regretté. J'ai reproduit, en partie, le texte de Liouville, dans le *Cours d'Analyse de l'Université de Liège* (2me édit., p. 187). A-t-on fait mieux ? Je l'ignore.

. . . .

Je reviens encore, cher Collègue, à l'article de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1839, p. 501). Après avoir rappelé la démonstration de Mourey, le savant Géomètre dit : « En voici » une autre, assez singulière et, je crois, peu connue. »

Cette démonstration singulière est due à Gauss. C'est votre serviteur qui, en 1838, à la prière de Liouville, avait traduit (librement) l'article de Gauss. En ce temps-là, je n'avais pas oublié le peu de latin qu'on demandait pour l'admission à l'École polytechnique. Heureux temps ! La note qui suit C.Q.F.D. n'est pas du traducteur.

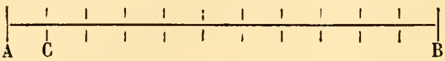
Encore un mot avant de terminer cette lettre, qui doit vous paraître longue. A la page 262, vous citez la phrase suivante, due à M. J. Tannery :

» Une fraction ne peut pas être regardée comme la réunion de
» parties égales de l'unité. Ces mots *parties de l'unité* n'ont
» plus de sens ; une fraction est une (*) ensemble de deux
» nombres entiers ; etc. (**) »

(*) Lisez : un.

(**) D'après une obligeante communication de M. Neuberg, mon savant confrère, la phrase attribuée à M. Pannery n'est pas citée exactement (juillet 1892).

Je ne comprends pas du tout. Les mots : *parties égales de l'unité* ont un sens très clair, même pour les enfants. Si l'on



donne un compas à un enfant, et qu'on lui demande de partager AB en onze parties égales, il parviendra, par tâtonnements, à résoudre le problème, *à peu près*. Dès lors, il comprend que AC s'appelle *un onzième* de AB ; etc. Est-ce que M. T. ne met pas de la métaphysique quintessenciée là où le bon sens suffit ?

Il ne faut abuser de rien, même des *mauvaises* choses.

En vous réitérant, etc.

5 janvier 1892.

XIX

A M. Peano.

MONSIEUR,

Je crois être d'accord avec vous sur ce premier point : bien que les mots *droite, plan, cercle,* etc., aient un sens clair, même pour les enfants, on doit, dans tout ouvrage didactique, les définir [si l'on peut (*)]. Mais voici où commence le désaccord : Vous pensez, comme M. Tannery, que cette définition : *une fraction est l'ensemble de deux nombres entiers,* est plus satisfaisante que celle-ci : *une fraction est l'ensemble de parties égales de l'unité.* Je pense le contraire.

Revenant au premier point, j'ai si bien compris, il y a cinquante ans (pour le moins), la nécessité de définir, que, dans mes *Éléments de Géométrie* (1845), j'ai défini les mots : *longueur, aire, volume, rapport de deux grandeurs incommensurables,* etc. ; et que, dans mon petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre,* dont la 11me édition vient de paraître, j'ai défini (et non *démontré*) les égalités

$$a \times -b = -ab, \qquad (a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd, \text{ etc.}$$

(*) Il y a exception pour *la droite*. Tout le monde en a l'idée, à laquelle les définitions essayées n'ajoutent rien.

J'ai cru devoir, également, changer la définition habituelle de $\sqrt{3}$, définition qui implique un cercle vicieux. Ces idées, combattues d'abord, ont été adoptées depuis, à ce point qu'on s'est avisé, un jour, de les attribuer à MM. Dedekind, Cantor, etc. Vous pouvez, relativement à cette question, consulter le beau discours de M. Mansion, placé en tête de mes *Mélanges mathématiques*.

Si vous pensez, Monsieur, que mes lettres puissent intéresser quelques lecteurs de la *Revista*, je vous en abandonne, bien volontiers, la propriété (*).

Encore un mot. Dans la première page de votre intéressante et instructive missive, vous dites : « le concept du nombre entier *positif* ».

Croyez-vous qu'il y ait des nombres *négatifs?* Pour moi, je ne le pense pas. Un nombre étant le rapport de deux grandeurs (sous-entendu : *de même espèce*) est essentiellement *positif*. On doit dire : quantité *négative*, et non : nombre *négatif*.

De même, à ce qu'il me semble, *les imaginaires ne sont pas des quantités*; car *une imaginaire n'est ni plus grande ni plus petite qu'une autre*.

Je sais bien que mon opinion est combattue, même par d'illustres Géomètres; mais je suis un peu têtu.

Je voudrais, Monsieur, *comprendre* l'italien comme vous *écrivez* le français. Malheureusement, comme le dirait Mansion, je suis un *autodidacte*; c'est-à-dire un volontaire de la Science et de la Littérature : le peu que je sais, je l'ai appris, pour ainsi dire, dans les rues de Paris.

Pardonnez-moi cette longue lettre, fort décousue, et croyez-moi, etc.

5 février 1892.

(*) Ceci répondait à une demande du savant Professeur.

XX

A M. Fouret (Examinateur, etc.).

(Extraits.)

CHER CONFRÈRE ET CAMARADE,

Je vous remercie des diverses Notes que vous m'avez envoyées naguère, et à propos desquelles je vous ai adressé M. Alphonse D., jeune et brillant Mathématicien...

J'ai lu, avec un intérêt tout particulier, votre Note du 20 janvier, relative aux *limites des racines*, Note au sujet de laquelle je désire vous soumettre certaines remarques, $\pm$ critiques.

I. Vous dites : « Quant à la détermination d'une limite inférieure des racines d'une pareille équation $f(x) = 0$, on a coutume de la ramener à la recherche d'une limite supérieure des racines $f(-x) = 0$. Ce procédé indirect est défectueux. »

Votre critique est très juste ; mais elle s'évanouit, me semble-t-il, si l'on considère, séparément, les racines positives et les racines négatives de la proposée, et que l'on cherche, pour chaque espèce de racines, une limite *supérieure* et une limite *inférieure* (voir plus loin).

II. Vous dites : « Soit a un nombre positif ou négatif. » Vous savez, peut-être, que j'ai en horreur les nombres *négatifs*, auxquels je ne crois pas (*Mélanges mathématiques*, t. I, p. 1). A votre place, j'énoncerais ainsi le curieux théorème de votre p. 5 : « Toute quantité qui, substituée à x dans le polynôme $f(x)$, etc. » ; et je dirais :

» Soit a une quantité qui, substituée à x, dans $f(x)$, etc.
» Nous allons montrer que $f(x)$ ne peut s'annuler pour
» aucune valeur $a - h$ de $x (h > 0)$. »

Je sais bien que vous avez le droit de me répondre : « *Tous les goûts sont dans la nature.* »

. . . .

IV. Je reviens à ce qui termine mon paragraphe I. Soit, pour fixer les idées,

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 6x - 30 = 0. \qquad (1)$$

On a :

$$f'(x) = 15x^4 + 28x^3 - 33x^2 + 16x + 6,$$

$$\frac{f''(x)}{1\,.\,2} = 30x^3 + 42x^2 - 33x + 8;$$

après quoi la règle de Newton donne comme limite *supérieure*, $\lambda = 2$.

Si l'on change x en $\frac{1}{z}$, l'équation devient

$$30z^5 - 6z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 7z - 3 = 0. \qquad (2)$$

Le nouveau polynôme reste positif pour $z \geqq 1$. Donc les racines *positives* de la proposée sont *comprises entre* 1 *et* 2.

Dans (1), changeons x en $-x$:

$$-3x^5 + 7x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 6x - 30 = 0,$$

ou

$$3x^5 - 7x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 6x + 30 = 0; \qquad (3)$$

puis :

$$15x^4 - 28x^3 - 33x^2 - 16x + 6,$$

$$30x^3 - 42x^2 - 33x - 8.$$

Ce dernier polynôme reste positif pour $x \geqq 3$. Le polynôme précédent est *négatif* pour $x = 3$; mais $x = 4$ donne un résultat *positif*. De même, le premier membre de l'équation (3) reste positif pour $x \geqq 4$. Conséquemment, dans la proposée (1), -4 est une limite *inférieure* des racines négatives.

Dans l'équation (3), changeons x en $\frac{1}{z}$: cette équation devient

$$30z^5 + 6z^4 - 8z^3 - 11z^2 - 7z + 3 = 0. \qquad (4)$$

Les dérivées successives, *simplifiées*, sont :

$$250z^4 + 24z^3 - 24z^2 - 22z - 7,$$

$$300z^3 + 36z^2 - 24z - 11,$$

$$300z^2 + 24z - 8.$$

Ces quatre polynômes restent positifs pour $z \geqq 1$. Ce *nombre* est donc une limite supérieure des racines de l'équation (4), et une limite *inférieure* des racines *positives* de l'équation (3). Par conséquent, les racines *négatives* de la proposée (1) sont comprises entre -4 et -1.

Vous voyez donc, cher Camarade, qu'il n'est pas inutile de considérer l'équation $f(-x) = 0$.

Le petit théorème suivant est-il connu?

Soit l'équation réciproque

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0.$$

Si 1 *est une limite supérieure des racines, cette équation n'a aucune racine positive.*

En effet, le nombre 1 est une limite *inférieure* des racines *positives*.

. . . .

Votre bien dévoué très Ancien.

14 avril 1892.

P. S. J'ai demandé, à mon jeune ami *Longchamps*, des renseignements sur sa règle et sur celle de *Laguerre*. Ne vous semble-t-il pas qu'elles se réduisent, au fond, à celle de *Bret?*

XXI

A M. G. de Longchamps, Professeur au Lycée Saint-Louis, etc.

Mon cher Longchamps,

Ta demande d'explications, dont je te remercie, me prouve que tu ne m'as pas lu : comme Jean, j'ai prêché dans le désert! Le théorème de Bachet (ou de Fermat), que tu cites, doit être entendu ainsi :

Tout nombre entier est un carré, ou la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés, ou la somme de quatre carrés.

Autrement dit : *Tout nombre entier est la somme de quatre carrés, positifs ou nuls.*

Mais, dans les *Mélanges mathématiques*, et dans d'autres publications (*), j'ai eu soin de considérer, seulement, des carrés *positifs*. Exemple (t. III, p. 211) :

Le triple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés.

Ce *théorème* résulte de l'identité

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$
$$= (a + b - c)^2 + (a + d - b)^2 + (a + c - d)^2 + (b + c + d)^2,$$

dans laquelle on suppose

$$a \geqq b \geqq c \geqq d;$$

et, par conséquent,

$$a + b > c, \qquad a + d > b, \qquad a + c > d.$$

Contrairement à ton opinion exprimée, ce théorème n'est donc pas compris dans celui de Bachet.

De même pour les autres propriétés, rapportées dans la Note de Marseille (**). Exemple :

Le triple de tout carré impair est la somme de trois carrés, ayant la forme $(6\mu \pm 1)^2$.

Je renonce à la démonstration du théorème énoncé : *Le sextuple de tout nombre impair est la somme de trois carrés.*

Jusqu'à nouvel ordre, il reste donc à l'état *empirique*. Tu peux le proposer à tes nombreux abonnés.

Salut affectueux.

Liège, 25 mai 1892.

(*) *Congrès de Marseille*, p. 7, deuxième Note.

(**) Dans cette Note (p. 8), on a imprimé *complet*, au lieu de *compris*.

XXII

A M. de Longchamps.

Je continue ma prédication.

L'identité d'Euler, citée à la page 3 de *ton Algèbre* (1883), devient, pour $a' = 0$, $b' = c' = d' = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ &= (b + c + d)^2 + (a - c + d)^2 + (a + b - d)^2 + (a - b + c)^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Donc, conformément au théorème de Bachet-Fermat :

Le triple de la somme de quatre carrés est une somme de quatre carrés, ou une somme de trois carrés, ou une somme de deux carrés (*).

Par exemple,

$$3(1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2) = 9^2 + 3^2.$$

Mais si, dans l'identité (1), on suppose

$$a \geqq b \geqq c \geqq d,$$

aucun des trinômes

$$a - c + d, \qquad a + b - d, \qquad a - b + c$$

n'est nul. Donc, dans ce cas, le triple dont il s'agit est *la somme de quatre carrés.*

Exemple :

$$3(4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2) = 6^2 + 3^2 + 6^2 + 3^2.$$

Remarque. d peut être nul. Ainsi, en résumé : *Le triple de la somme de quatre carrés, ou de la somme de trois carrés, est toujours la somme de quatre carrés.*

(*) A cause du facteur 3, ce triple ne peut être un carré.

Parmi les théorèmes rappelés dans la Note, as-tu remarqué celui-ci :

Toute puissance, entière et positive, d'une somme de trois carrés, est la somme de trois carrés?

Autrefois, j'ai eu quelque peine à le démontrer.

Liège, 30 mai 1892.

XXIII

A M. Siacci.

Mon savant Confrère,

En 1889, j'ai eu l'honneur de vous adresser une longue lettre, que vous avez bien voulu faire insérer aux *Mémoires de Turin* (*).

Dans cette lettre, relative à Genocchi, notre ami regretté, je signalais, en particulier (p. 476), la formule *bien remarquable*

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}. \qquad \text{(A)}$$

Aujourd'hui, en y regardant de plus près, elle me semble *inadmissible.*

Pour essayer de justifier ma *nouvelle* opinion, je remplace le second membre par

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{\pi}}{x\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi x}{2}}}=\frac{2\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x\sqrt{\pi}}.$$

Prenons la célèbre formule d'Euler :

$$\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi x}{2}\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2}\right)\cdots$$

(*) Voir ci-dessus, page 14.

La relation (A) devient donc

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots=\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2}\right)\cdots;$$

ou

$$\sqrt{\pi}=\frac{1-x}{1-\frac{x}{2}}\,\frac{1-\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{4}}\,\frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{6}}\cdots \tag{B}$$

Or, cette égalité est *impossible*; car, dans le second membre, les facteurs

$$\frac{1-x}{1-\frac{x}{2}},\quad \frac{1-\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{4}},\quad \frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{6}},$$

sont *tous inférieurs à l'unité.*

Je n'ai pas sous les yeux le Mémoire de Genocchi (Naples, 1883). D'ailleurs, j'ai, peut-être, mal copié l'égalité (A) (*). Quoi qu'il en soit, ces courtes remarques n'enlèveront rien à la renommée de votre illustre Maître et ami.

Agréez, je vous prie, l'assurance...

Votre vieux et dévoué Confrère.

Liège, 12 septembre 1892.

(*) C'est ce qui a eu lieu Le dernier facteur, dans le second membre de (A), est $\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)$. (Note ajoutée pendant l'impression.)

XXIV

A M. Hermite.

(Extrait.)

. . . .

Je crains de vous ennuyer; et cependant je crois devoir répondre à un passage de votre dernière lettre, si affectueuse. C'est celui qui est précédé des mots : « *on me fait remarquer* ». Ce même passage contient la démonstration du théorème suivant: « *Toute surface fait partie d'un système triple orthogonal* » ; démonstration et théorème que j'ai donnés en 1863 (*) et, plus explicitement, en 1868 (**). Dans une Note du Bulletin, je disais :

« Récemment, on est allé plus loin dans cette voie *restrictive;* » et un jeune Géomètre, déjà célèbre, suppose qu'*une surface* » *quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogo-* » *nal* (***). Quand il a énoncé cette proposition, M. Darboux » ignorait, probablement, l'existence du Mémoire dans lequel » j'ai établi, implicitement, le théorème contraire, etc. »

Est-ce clair? D. a changé d'opinion (iv). Mais ce changement est dû au théorème de C : D. aurait dû citer C.

Je vais bien vous étonner. Liouville a passé à côté des *surfaces parallèles,* sans les voir. En effet, dans sa célèbre *Note sur deux lettres de Thompson* (1847), notre illustre Maître écrit (p. 282) : « représentez-vous les lignes de courbure de cette surface (voyez

(*) *Académie de Belgique,* Mémoires couronnés, t. XXXII, p. 16.

(**) *Bulletin de l'Académie,* t. XXVI, p. 180.

(***) *Annales de l'École normale,* t. II, p. 59.

(iv) Voir les *Annales de l'École normale,* 1878.

le passage) (*) ». Il renvoie au Mémoire de Serret; mais, de *surfaces parallèles*, pas un mot ! J'ai donc fort bien fait, en 1868, d'ajouter ce mot. Ce n'était pas difficile ; mais il fallait y penser. Assez sur ce sujet.

. . . .

Liège, 24 décembre 1892.

(*) Le voici (il s'agit de la transformation par rayons vecteurs *réciproques*) :

« Une surface appartenant à l'une des deux figures étant donnée, représentez-vous les lignes de courbure de cette surface, et les deux séries de » surfaces développables, orthogonales entre elles et à la surface donnée, qui » sont formées par les normales successives. Dans la seconde figure, les » séries de surfaces correspondantes resteront orthogonales entre elles et à » la transformée de la surface donnée ; par suite, en vertu du beau théorème » de M. Ch. Dupin, elles traceront encore sur cette transformée des lignes de » courbure. Ces lignes de courbure résulteront ainsi des lignes de courbure » de la surface donnée, et seront immédiatement connues si les autres le » sont. Il sera aisé d'appliquer ce théorème aux surfaces du second degré, » comme aussi aux systèmes triples de surfaces orthogonales, que M. Serret » a indiqués dans une Note récente, etc. ». (Note ajoutée pendant l'impression.)

SUR LES COURBES SIMPSONIENNES

FORMULES

POUR LE CALCUL APPROCHÉ DES AIRES PLANES

PAR

G. PETIT BOIS

INGÉNIEUR CIVIL DES MINES

SUR LES COURBES SIMPSONIENNES

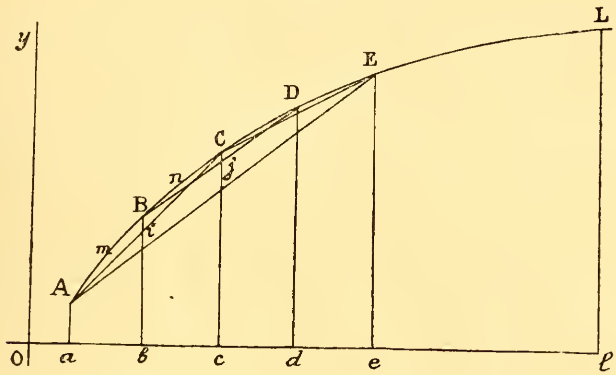
1. J'appelle *courbes simpsoniennes* celles dont la formule de Simpson fait connaître l'aire exactement, lorsqu'on l'applique à une portion quelconque de la courbe.

Théorème I. *La courbe représentée par l'équation* $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ *est simpsonienne si la dérivée quatrième de* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *est nulle.*

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe ABC (fig. 1).

Soient $\mathrm{O}a = x$, $\mathrm{O}b = x + h$, $\mathrm{O}c = x + 2h$.

Fig. 1.



F(x) représentant une fonction primitive de $f(x)$, on a

$$\textit{aire } a\mathrm{ABC}c = \int_x^{x+2h} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x + 2h) - \mathrm{F}(x).$$

On sait que le procédé de Simpson consiste à faire passer par les points A, B, C une parabole du second degré, dont l'axe soit parallèle aux ordonnées. L'aire parabolique $a\mathrm{ABC}c$ a pour mesure

$$\frac{h}{3}\left\{ f(x) + 4f(x + h) + f(x + 2h) \right\}.$$

Si la courbe est simpsonienne, on aura donc

$$\mathrm{F}(x + 2h) - \mathrm{F}(x) = \frac{h}{3}\left\{ f(x) + 4f(x + h) + f(x + 2h \right\}.$$

Développons $F(x+2h)$, $f(x+h)$ et $f(x+2h)$. Remplaçons ensuite $F'(x)$ par $f(x)$, $F''(x)$ par $f'(x)$, etc., il viendra

$$2hf(x)+2h^2f'(x)+\frac{4}{3}h^3f''(x)+\frac{2}{3}h^4f'''(x)+\frac{4}{15}h^5f^{\text{IV}}(x)+\frac{1}{90}h^6f^{\text{V}}(x)+\cdots$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}hf(x)\\[2ex] \frac{4}{3}hf(x)+\frac{4}{3}h^2f'(x)+\frac{2}{3}h^3f''(x)+\frac{2}{9}h^4f'''(x)+\frac{1}{18}h^5f^{\text{IV}}(x)+\frac{1}{90}h^6f^{\text{V}}(x)+\cdots\\[2ex] \frac{1}{3}hf(x)+\frac{2}{3}h^2f'(x)+\frac{2}{3}h^3f''(x)+\frac{4}{9}h^4f'''(x)+\frac{2}{9}h^5f^{\text{IV}}(x)+\frac{4}{45}h^6f^{\text{V}}(x)+\cdots\end{array}\right.$$

On voit que si $f^{\text{IV}}(x)=0$, et, par suite, $f^{\text{V}}(x)=0$, $f^{\text{VI}}(x)=0$, etc., cette égalité sera vérifiée.

Corollaire. *Les paraboles du deuxième et du troisième degré, représentées par l'équation* $y=ax^3+bx^2+cx+d$, *sont simpsoniennes* (*).

2. Définitions. J'appelle *segments successifs*, les segments tels que ABC, BCD (fig. 1) et *flèches successives* les flèches Bi, Cj, qui correspondent à ces segments.

Théorème II. *Si la dérivée quatrième de* $f(x)$ *est nulle, la différence entre deux flèches successives de la courbe représentée par* $y=f(x)$ *est constante.*

Considérons les trois ordonnées $f(x+nh)$, $f\{x+(n+1)h\}$ et $f\{x+(n+2)h\}$. Nous aurons

$$f(x+nh)=f(x)+\frac{n}{1}hf'(x)+\frac{n^2}{1.2}h^2f''(x)+\frac{n^3}{1.2.3}h^3f'''(x),$$

$$f\Big\{x+(n+1)h\Big\}=f(x)+\frac{n+1}{1}hf'(x)+\frac{(n+1)^2}{1.2}h^2f''(x)+\frac{(n+1)^3}{1.2.3}h^3f'''(x),$$

$$f\Big\{x+(n+2)h\Big\}=f(x)+\frac{n+2}{1}hf'(x)+\frac{(n+2)^2}{1.2}h^2f''(x)+\frac{(n+2)^3}{1.2.3}h^3f'''(x).$$

(*) E. Catalan, *Nouvelles Annales*, 1857.

La flèche comptée sur l'ordonnée $f\{x+(n+1)h\}$ a pour valeur

$$(1) \quad f\left\{x+(n+1)h\right\}-\frac{1}{2}f(x+nh)-\frac{1}{2}f\left\{x+(n+2)h\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{n+1}{2}h^3f'''(x).$$

En changeant n en $n+1$ dans cette expression, on obtiendra, pour valeur de la flèche suivante,

$$(2) \qquad -\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{n+2}{2}h^3f'''(x).$$

Soustrayant (2) de (1), il vient

$$\frac{1}{2}h^3f'''(x),$$

quantité constante, puisque $f'''(x)$ est une constante.

Corollaire. *Dans les paraboles représentées par l'équation* $y = ax^2 + bx + c$, *les flèches successives sont égales.*

3. Théorème III. *Si la dérivée quatrième de* $f(x)$ *est nulle, la différence entre les aires de deux segments successifs est constante.*

On a vu plus haut que, dans une courbe simpsonienne, l'aire aABCc (fig. 1) a pour mesure

$$\frac{h}{3}\left\{f(x)+4f(x+h)+f(x+2h)\right\}.$$

Retranchant de cette aire celle du trapèze aACc, il vient

$$\textit{segment}\ \mathrm{ABC}=\frac{4}{3}h\left\{f(x+h)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(x+2h)\right\},$$

ou bien

$$\textit{segment}\ \mathrm{ABC}=\frac{4}{3}hl,$$

en désignant par l la flèche Bi.

La différence des aires de deux segments successifs, dont les flèches sont l et l', sera donc égale à $\frac{4}{3}h(l - l')$, et, d'après le théorème précédent, on aura

$$\frac{4}{3}h(l - l') = \frac{4}{3}h \cdot \frac{1}{2}h^3 f'''(x) = \frac{2}{3}h^4 f'''(x),$$

quantité constante.

Corollaire. *Dans les paraboles représentées par l'équation* $y = ax^2 + bx + c$, *les aires des segments successifs sont égales.*

Remarque. Si l'équation $y = f(x)$ représente une parabole du troisième degré, la différence entre les flèches successives dépendra uniquement du coefficient de x^3 dans l'équation de la courbe. Il en sera de même de la différence des aires des segments successifs.

4. Théorème IV. *Dans les courbes simpsoniennes, on a*

$$2(l + l'') = L,$$

égalité dans laquelle l, l'' *et* L *représentent respectivement les flèches des segments* ABC, CDE *et* ACE (fig. 1).

En effet, si la courbe est simpsonienne, on a

$$\textit{segment } ABC = \frac{4}{3}hl,$$

$$\textit{segment } CDE = \frac{4}{3}hl'',$$

$$\textit{segment } ACE = \frac{8}{3}hL,$$

et comme l'aire du triangle ACE est égale à $2hL$, on aura

$$\frac{4}{3}hl + \frac{4}{3}hl'' + 2hL = \frac{8}{3}hL,$$

ou

$$2(l + l'') = L. \qquad \text{(A)}$$

5. Théorème V. *Dans les courbes simpsoniennes, on a, entre cinq ordonnées successives,* y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, *la relation*

$$4(y_2 + y_4) - (y_1 + y_5) = 6y_3. \tag{B}$$

Il suffit, pour le démontrer, de remplacer, dans la relation (A), l, l'' et L en fonction des ordonnées.

6. Théorème VI. *Dans une parabole d'ordre* n, *il existe, entre* n + 2 *ordonnées équidistantes,* $y_1, y_2, y_3 \ldots$, *la relation*

$$y_{n+2} - \frac{n+1}{1} y_{n+1} + \frac{(n+1)n}{1.2} y_n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} y_{n-1} + \cdots \pm y_1 = 0. \tag{C}$$

En effet, considérons la suite

$$y_1, \ y_2, \ y_3, \ \cdots$$

dont la différence $n^{\text{ième}}$

$$\Delta^n y = y_{n+1} - \frac{n}{1} y_n + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-1} - \cdots \pm y_1,$$

et la différence $(n+1)^{\text{ième}}$

$$\Delta^{n+1} y = y_{n+2} - \frac{n+1}{1} y_{n+1} + \frac{(n+1)n}{1.2} y_n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} y_{n-1} \cdots \pm y_1.$$

L'équation de la parabole étant de la forme $y = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots$, sa différence $n^{\text{ième}}$ est constante, et, par suite, sa différence $(n+1)^{\text{ième}}$ est nulle.

Remarque. Si l'on fait $n = 3$ dans l'égalité (C), on retrouve l'égalité (B).

7. Théorème VII. *L'équation générale des courbes simpsoniennes est* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

L'égalité (B) donne

$$y_5 = 4y_4 - 6y_3 + 4y_2 - y_1.$$

En représentant par $y = f(x)$ l'équation de la courbe à laquelle appartiennent ces ordonnées, et supposant que l'ordonnée y_1 correspond à $x = p$, l'égalité précédente s'écrira

$$f(p + 4h) = 4f(p + 3h) - 6f(p + 2h) + 4f(p + h) - f(p).$$

On aura de même

$$f(p + 5h) = 4f(p + 4h) - 6f(p + 3h) + 4f(p + 2h) - f(p + h).$$

Remplaçant, dans cette dernière relation, $f(p + 4h)$ par sa valeur, il vient

$$f(p + 5h) = 10f(p + 3h) - 20f(p + 2h) + 15f(p + h) - 4f(p)$$

En poursuivant le calcul, on forme cette suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
f(p + 4h) &= 4f(p + 3h) - 6f(p + 2h) + 4f(p + h) - f(p),\\
f(p + 5h) &= 10f(p + 3h) - 20f(p + 2h) + 15f(p + h) - 4f(p),\\
f(p + 6h) &= 20f(p + 3h) - 45f(p + 2h) + 36f(p + h) - 10f(p),\\
f(p + 7h) &= 35f(p + 3h) - 84f(p + 2h) + 70f(p + h) - 20f(p),\\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Considérons les coefficients 4, 10, 20, 35 ... de $f(p + 3h)$. En désignant par A_n le coefficient qui correspond à l'ordonnée $f(p + nh)$, nous trouvons

$$A_n = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n).$$

Nous trouvons de même, pour valeurs respectives des coefficients de $f(p + 2h)$, $f(p + h)$, $f(p)$,

$$B_n = -\frac{1}{2}(n^3 - 4n^2 + 3n),$$

$$C_n = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 6n),$$

$$D_n = -\frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6).$$

L'expression générale de l'ordonnée de la courbe sera donc

$$y = f(p + nh) = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)\, f(p + 3h)$$

$$- \frac{1}{2}(n^3 - 4n^2 + 3n)\, f(p + 2h)$$

$$+ \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 6n)\, f(p + h)$$

$$- \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6)\, f(p),$$

dans laquelle nous pouvons considérer que la variable est n. L'équation est de la forme $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Remarque. En posant $n = x$, $p = 0$, et ordonnant par rapport à x, l'équation précédente devient

$$y = \frac{1}{6}\left\{ f(3h) - 3f(2h) + 3f(h) - f(0) \right\} x^3$$

$$- \frac{1}{2}\left\{ f(3h) - 4f(2h) + 5f(h) - 2f(0) \right\} x^2$$

$$+ \frac{1}{6}\left\{ 2f(3h) - 9f(2h) + 18f(h) - 11f(0) \right\} x + f(0).$$

FORMULES

POUR LE CALCUL APPROCHÉ DES AIRES PLANES

---

1. Soient Aa, Bb, Cc, ... Ll (fig. 1) des ordonnées équidistantes d'un arc de courbe, et al la *base*, que nous supposerons divisée, par les pieds des perpendiculaires, en un nombre pair, $2n$, de parties égales.

Posons

$$\begin{aligned}
Aa &= y_1, \quad Bb = y_2, \dots Ll = y_{2n-1},\\
P &= y_2 + y_4 + \cdots y_{2n},\\
I &= y_3 + y_5 + \cdots y_{2n-1},\\
E &= y_1 + y_{2n+1},\\
\delta &= 2P - (2I + E).
\end{aligned}$$

La signification géométrique de δ se trouve aisément. Menons les cordes AC, CE, ... Nous obtenons ainsi

$$Bi = y_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_3)$$

$$Dj = y_4 - \frac{1}{2}(y_3 + y_5)$$

etc. etc.

En additionnant ces flèches obliques, on trouve $\frac{1}{2}\delta$.

Désignant respectivement par $\mathcal{T}p$ et $\mathcal{S}s$ les résultats que donnent la formule des trapèzes et la formule de Simpson, et par $\mathcal{L}\varepsilon\mathcal{T}p$, $\mathcal{L}\varepsilon\mathcal{S}s$ les limites d'erreurs qui se rapportent à ces formules, on aura

$$(1) \qquad \mathcal{T}p = \frac{h}{2}(2P + 2I + E), \quad \mathcal{L}\varepsilon\mathcal{T}p = \frac{1}{2}h\delta \text{ (*)},$$

$$(2) \qquad \mathcal{S}s = \frac{h}{3}(4P + 2I + E), \quad \mathcal{L}\varepsilon\mathcal{S}s = \frac{1}{3}h\delta \text{ (**)}.$$

Dans ces formules, h représente la distance entre deux ordonnées consécutives.

2. La quantité $\frac{1}{2}h\delta$ étant une limite de l'erreur, exprime une aire plus grande que la somme des segments AmB, BnC, ... Si S désigne l'aire exacte, on peut donc écrire, la courbe tournant sa concavité vers la base,

$$\mathcal{T}p < S < \mathcal{T}p + \frac{1}{2}h\delta.$$

Prenons, pour valeur approchée de l'aire S, la moyenne des deux valeurs entre lesquelles elle est comprise. Il vient, en désignant cette valeur par $\mathcal{M}$,

$$(3) \qquad \mathcal{M} = \frac{h}{2}\left(3P + I + \frac{E}{2}\right).$$

Quant à la limite de l'erreur, elle sera égale à la moitié de la différence des aires qui comprennent S. On aura donc

$$\mathcal{L}\varepsilon\mathcal{M} = \frac{1}{4}h\delta.$$

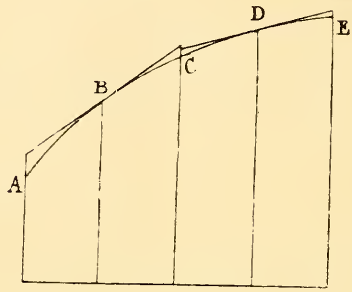
On peut arriver à la formule (3) par le procédé ordinaire, c'est-à-dire en renfermant la courbe entre deux polygones. En effet, si l'on mène des tangentes à la courbe aux points B, D, ...

(*) P. Mansion, *Sur l'évaluation approchée des aires planes* (Mathesis, t. I, supplément, p. 12).
(**) *Ibid.*, pp. 13 et 23.

(fig. 2), on forme un polygone à angles rentrants dont l'aire est égale à

$$2hy_2 + 2hy_4 + \cdots 2hy_{2n} = 2hP.$$

Fig. 2.



D'autre part, le polygone intérieur aABC ... Ll a pour mesure

$$\frac{h}{2}(2P + 2I + E).$$

En prenant la moyenne entre ces deux aires, on retrouve la formule (3).

Il existe, entre les formules (1), (2), (3), la relation

$$2\mathcal{M} = 3\mathcal{S}s - \mathcal{T}p.$$

3. Il n'est pas permis d'opérer sur la formule de Simpson comme nous venons de le faire sur la formule des trapèzes, puisque l'on n'a pas $\mathcal{S}s < S$. Cependant, j'ai reconnu, par de nombreuses applications, que l'on avait $\mathcal{S}s < S$, ou bien, au plus, $\mathcal{S}s = S$, lorsque, la courbe tournant sa concavité vers la base, les ordonnées allaient sans cesse en croissant et les flèches obliques en décroissant. Si l'on veut admettre qu'il en est toujours ainsi, nous pourrons employer le même procédé que ci-dessus. Nous aurons donc

$$\mathcal{S}s \leqq S < \mathcal{S}s + \frac{1}{3}h\delta.$$

Prenant pour valeur approchée de S la moyenne des valeurs $\mathcal{S}s$ et $\mathcal{S}s + \frac{1}{3} h\delta$, et appelant cette moyenne $\mathcal{M}'$, il vient

$$(4) \qquad \mathcal{M}' = \frac{h}{3}\left(5P + I + \frac{E}{2}\right), \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{M}' = \frac{1}{6} h\delta.$$

Il existe entre les formules (1), (2), (4) la relation

$$\mathcal{M}' = 2\, \mathcal{S}s - \mathcal{T}p.$$

4. Dans les formules précédentes, les aires des différents segments ABC, CDE, ... sont évaluées uniformément, c'est-à-dire que les segments moyens et les segments extrêmes sont calculés de la même manière, ce qui présente certains avantages (*). Voici les valeurs de ces aires, ainsi que la limite de l'erreur relative à chacune d'elles :

	Valeur du segment.	Limite de l'erreur.
Formule des trapèzes . . .	hf, ...	hf,
— de Simpson . . .	$\frac{4}{3} hf$, ...	$\frac{2}{3} hf$,
— (3)	$\frac{3}{2} hf$, ...	$\frac{1}{2} hf$,
— (4)	$\frac{5}{3} hf$.	$\frac{1}{3} hf$,

expressions dans lesquelles f représente la flèche du segment considéré. Pour la formule (4), la quantité $\frac{1}{3} hf$ exprime, non une limite d'erreur, mais une erreur maxima.

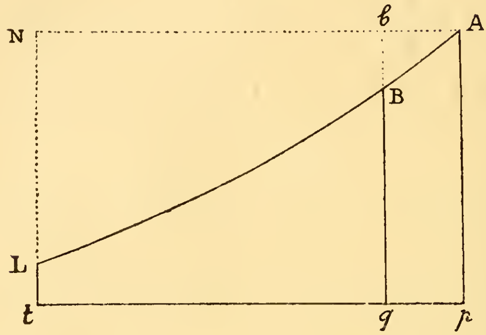
Cette dernière formule a été établie en supposant que la courbe tournait sa concavité vers la base. S'il en était autrement, on calculerait, au moyen des ordonnées Ap, Bq ... Lt (fig. 3) les ordonnées

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= Ap - Bq, \\ &\vdots \\ y_{2n+1} &= Ap - Lt, \end{aligned}$$

(*) G. Petit Bois, *Sur l'évaluation approchée des aires planes* (Mathesis, t. V, p. 30).

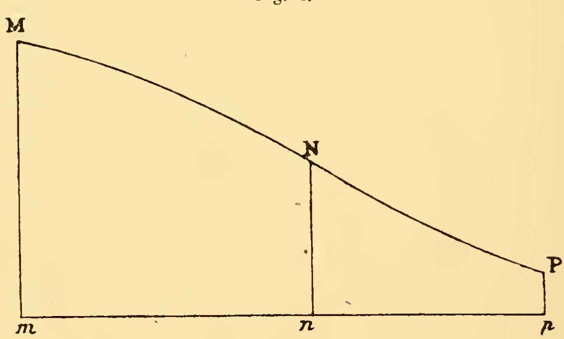
on chercherait ensuite l'aire ALN, comme on l'a vu ci-dessus, puis on la soustrairait du rectangle *t*NA*p*.

Fig. 3.



Si la courbe présentait un point d'inflexion (fig. 4), on traiterait séparément les aires *m*MN*n* et *n*NP*p*.

Fig. 4.



5. Un autre groupe de formules comprend celles de Poncelet, de Dupain et du général Parmentier. La formule de Poncelet, bien que moins exacte que les deux autres, dans la plupart des cas, l'emporte sur celles-ci au point de vue de la limite de l'erreur, qui est moins élevée. Cette limite est

$$\frac{1}{4}(E' - E) \text{ (*)},$$

expression dans laquelle $E' = y_2 + y_{2n}$.

(*) P. Mansion, *loc. cit.*, p. 9.

Si nous considérons, comme ci-dessus, un arc de courbe dont les ordonnées vont sans cesse en croissant, on pourra écrire

$$y_2 = y_1 + \alpha_1,$$

$$y_3 = y_2 + \alpha_2 = y_1 + \alpha_1 + \alpha_2,$$

et, généralement,

$$y_n = y_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{n-1},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ étant des quantités positives qui décroissent constamment.

Or, il suffit de remplacer les ordonnées qui entrent dans les expressions de δ et de $E' - E$ par ces valeurs pour reconnaître que l'on a $E' - E > \delta$.

Par conséquent, la limite d'erreur de la formule de Poncelet est plus élevée que celle de la formule (3).

6. En appliquant l'une ou l'autre des quatre formules, on trouvera deux nombres, par exemple

$$\mathfrak{M} = 6{,}452, \quad \mathfrak{L}\varepsilon\mathfrak{M} = 0{,}032.$$

Si l'on désirait une approximation plus grande, il faudrait calculer de nouvelles ordonnées. Cherchons en quels points de la courbe il conviendrait de les prendre.

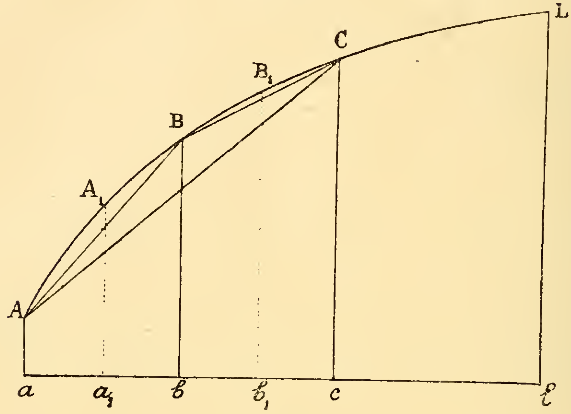
La formule des trapèzes, de même que chacune des formules (2), (3) et (4) peut s'écrire

$$\mathfrak{T}p = h(2I + E) + N,$$

$h(2I + E)$ représentant l'aire du polygone aACE ... Ll (fig. 1), et N représentant, d'une manière plus ou moins exacte, la somme des segments ABC, CDE ... Quand on intercale deux ordonnées nouvelles A_1a_1, B_1b_1 (fig. 5), le terme $h(2I + E)$ se trouve augmenté de l'aire du triangle ABC, tandis que le segment

ABC, sur lequel l'erreur pouvait se produire, est ramené à la somme des deux petits segments AA_1B, BB_1C (*).

Fig. 5.



Il en résulte que si l'arc de courbe considéré présente des flèches,

$$f_1 = y_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_3), \quad f_2 = y_4 - \frac{1}{2}(y_3 + y_5), \text{ etc.,}$$

qui diffèrent peu entre elles, on intercalera de nouvelles ordonnées uniformément entre y_1 et y_{2n+1}, mais si les flèches f_1, f_2 sont notablement plus grandes que les autres, c'est seulement dans la première partie de la courbe que l'on multipliera les ordonnées.

Après examen des flèches, si l'on décide de diviser l'arc considéré en trois parties, dans chacune desquelles h aura une valeur spéciale, on aura à traiter séparément chacune de ces parties.

(*) Il serait d'ailleurs facile de chercher de combien la limite de l'erreur se trouve diminuée en remarquant que, si F, f_1, f_2, f_k représentent respectivement les flèches des segments ABC, AA_1B, BB_1C, A_1BB_1, on a

$$F = f_1 + f_2 + 2f_k$$

et que h devient $\frac{1}{2}h$.

En faisant usage de la formule (3), on aura trois valeurs $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, que l'on ajoutera, de même que l'on ajoutera les limites d'erreurs.

Au lieu des nombres indiqués plus haut, on trouvera, par exemple,

$$\mathfrak{M} = 6{,}450, \quad \mathfrak{L}\varepsilon\mathfrak{M} = 0.001.$$

7. J'ai supposé, jusqu'à présent, que l'équation de la courbe était inconnue et que les ordonnées étaient déduites de recherches ou de mesures directes. Il est inutile de faire remarquer que les procédés qui précèdent peuvent encore rendre de bons services lorsque, l'équation étant connue, l'intégration s'effectue difficilement.

Comme exemple, prenons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

Sturm a montré (*) que sa valeur est comprise entre 0.5000 et 0.5236. Pour obtenir cette valeur avec quelques décimales exactes, je divise l'intervalle 0 à $\frac{1}{2}$ en six parties égales et je calcule les ordonnées correspondant à $x = 0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots \frac{6}{12}$.

On trouve

$$y_1 = 1.000000,$$
$$y_2 = 1.000290,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y_6 = 1.038258,$$
$$y_7 = 1.069045.$$

La courbe tourne sa convexité vers la base. Je prends donc pour ordonnées

$$y_1 = y_7 - y_7 = 0.000000,$$
$$y_2 = y_7 - y_6 = 0.030787,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

(*) *Cours d'analyse*, 9e édition, t. I, p. 381.

On obtient ainsi

$y_1 = 0.000000$,		$P = 0.160682$,
$y_2 = 0.050787$,	$f_1 = 0.005789$,	$I = 0.116718$,
$y_3 = 0.049996$,		$E = 0\,069045$,
$y_4 = 0.061140$,	$f_2 = 0.002781$,	$\delta = 0.018883$.
$y_5 = 0.066722$,		
$y_6 = 0.068755$,	$f_3 = 0.000872$,	
$y_7 = 0.069045$,		

La formule (4) est ici applicable. Il vient

$$\mathfrak{M}' = 0.026518, \quad \mathfrak{L}_\varepsilon \mathfrak{M}' = 0.000262.$$

L'aire que nous calculons est donc comprise entre

$$0.026518 + 0.000262 = 0.026780,$$

et

$$0.026518 - 0.000262 = 0.026256.$$

Soustrayant ces valeurs du rectangle $\frac{1}{2} y_7$, nous voyons que l'aire cherchée est comprise entre

$$0.507742,$$

et

$$0.508266.$$

Nous pouvons donc prendre, avec trois décimales exactes, $S = 0,508$.

Les valeurs des flèches montrent que si l'on voulait une approximation plus grande, il faudrait calculer de nouvelles ordonnées dans la première partie de la courbe.

8. Je noterai ici un résultat intéressant, obtenu par M. Peano, professeur à l'Université de Turin (*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale,* p. 206). L'équation de la courbe étant

$y = f(x)$, et la base ayant été divisée en $2n$ parties égales, on a

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = Ss - \frac{1}{90} nh^5 f^{\text{iv}}(u).$$

Dans cette relation, $f^{\text{iv}}(u)$ est la dérivée quatrième de la fonction et u représente un nombre inconnu, compris entre a et b.

Si les ordonnées de l'arc considéré vont sans cesse en croissant, j'écrirai

$$S_1 = Ss - \frac{1}{90} nh^5 f^{\text{iv}}(a),$$

$$S_2 = Ss - \frac{1}{90} nh^5 f^{\text{iv}}(b).$$

Prenant la moyenne de ces valeurs, j'obtiendrai l'aire exacte avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2}(S_2 - S_1)$.

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE MICROGRAPHIQUE DU POIVRE

ET DE SES FALSIFICATIONS

PAR

L. REMY

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES
ASSISTANT DE MICROGRAPHIE ET DE BACTÉRIOLOGIE AU LABORATOIRE
D'ANALYSES DE L'ÉTAT A LIÉGE

INTRODUCTION

Dans une publication toute récente [1], que j'ai reçue au moment où je rédigeais ce travail, MM. Claes et Thyes ont donné sur la question du poivre une notice historique assez complète pour que je puisse, me semble-t-il, me dispenser d'insérer ici celle que je destinais à ce travail.

Le poivre étant une des denrées alimentaires les plus falsifiées, a été l'objet d'un grand nombre de recherches; on est donc en droit de se demander si je fais œuvre utile en revenant encore sur un sujet assez souvent étudié déjà, pour qu'on puisse le croire épuisé.

J'estime que oui, et les motifs énumérés ci-après ont seuls pu me décider à livrer à la publicité les notes que depuis bientôt quatre ans j'ai accumulées sur le poivre et ses falsifications.

[1] *Contribution à l'examen microscopique du poivre et de ses falsifications,* par P. Claes, directeur du Laboratoire agricole de l'État à Louvain, et E. Thyes, chimiste-micrographe au même Laboratoire. Bruxelles, E. Ramlot, 1893.

1° Les auteurs qui se sont occupés de micrographie, se sont placés à un point de vue trop exclusif pour que leurs livres puissent être des guides sûrs. Les uns, en effet, ont été absolument théoriques, ils ont décrit la structure des coupes pratiquées dans les échantillons purs, et en ont conclu que les caractères qu'elles présentaient pouvaient aisément se retrouver dans un mélange par un simple examen microscopique. Essentiellement pratiques, au contraire, les autres se sont contentés d'effleurer la partie botanique; ils ont donné des aspects et des caractères apparents, sans les interpréter, d'ailleurs, et sont par là même tombés dans l'empirisme.

2° Presque tous les auteurs également ont traité les falsifications *possibles;* ils ont énuméré les caractères distinctifs des produits qu'on peut employer à cet effet. Pour s'assurer de la valeur pratique de leur étude, ils ont inévitablement dû rechercher ces mêmes produits dans des mélanges qu'ils avaient préparés eux-mêmes. Or, il est bien plus facile de déceler une falsification dont on est prévenu, que de reconnaître cette même falsification dans un échantillon envoyé au micrographe pour en faire l'analyse. En effet, outre que dans le second cas l'analyste ne connaît pas l'orientation qu'il doit donner à ses recherches, il engage sa responsabilité, et c'est là un facteur dont il faut tenir un compte sérieux lorsque l'on doit se prononcer sur la pureté d'un échantillon.

Pour éviter cet écueil, je m'attacherai surtout à décrire les falsifications *que j'ai observées* dans les poivres que j'ai déclarés adultérés depuis que je fais les analyses micrographiques au Laboratoire d'analyses de l'État à Liége.

Des considérations qui précèdent, il résulte que les traités de micrographie actuellement existants sont forcément incomplets, aussi ne peuvent-ils guère aider le micrographe dans ses analyses journalières.

Quelles sont donc alors les conditions que devrait remplir un bon ouvrage de micrographie?

Pour faire une œuvre sérieusement utile, l'auteur d'une publication micrographique, doit :

1° Étudier sur des coupes transversales et longitudinales la structure d'un échantillon pur du produit soumis à l'analyse ;

2° Comme les fragments que l'on doit examiner au microscope, lorsque l'on fait une analyse micrographique, ne se montrent que très rarement coupés longitudinalement ou transversalement, mais au contraire apparaissent vus de face, l'auteur doit rechercher les moyens de tirer parti des connaissances acquises par l'étude botanique et les appliquer aux conditions dans lesquelles l'échantillon se présente lors de l'analyse micrographique. C'est cette application de l'étude botanique que l'on peut appeler *analyse micrographique ;*

3° Enfin l'auteur doit déterminer les procédés à employer pour mettre en relief les caractères micrographiques des fragments du produit soumis à l'analyse, que celui-ci soit pur ou mélangé à d'autres substances servant à le falsifier.

J'ai scrupuleusement suivi le plan que je viens de tracer, dans mon travail, et celui-ci se trouve ainsi naturellement divisé en deux parties :

La première sera consacrée à l'étude du poivre pur et celle-ci comprendra trois chapitres :

1° Étude botanique du poivre;

2° Analyse micrographique du poivre;

3° Procédés à employer pour mettre en relief les caractères micrographiques du poivre en poudre.

Les falsifications du poivre feront l'objet de la seconde partie et celle-ci sera divisée en deux chapitres :

1° Falsifications constatées dans les divers échantillons qui ont été soumis à l'analyse au Laboratoire de l'État à Liége.

2° Étude de quelques produits qui peuvent être employés pour falsifier le poivre.

Liége, le 30 juin 1894.

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE MICROGRAPHIQUE DU POIVRE

ET DE SES FALSIFICATIONS

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DU POIVRE PUR

CHAPITRE I.

ÉTUDE BOTANIQUE DU POIVRE EN GRAINS.

J'aurais vivement désiré pouvoir entreprendre cette étude d'après la méthode suivie par M. Léon Guignard, le savant professeur de l'École supérieure de pharmacie de Paris, dans ses *Recherches sur le développement de la graine et en particulier du tégument séminal.*

J'aurais alors donné le développement nécessaire à chacun des trois paragraphes que comporte ce chapitre.

Dans le premier, les caractères et la structure de l'ovule auraient été examinés.

Dans le deuxième, j'aurais passé en revue les modifications qui suivent la fécondation, c'est-à-dire le développement du fruit et de la graine.

Dans le troisième enfin, je me serais particulièrement attaché à mettre en relief les caractères et la structure du fruit et de la graine mûrs.

Malgré des démarches réitérées, je n'ai pu me procurer les matériaux nécessaires à cette étude. La floraison des poivriers en serre est fort capricieuse et ne s'est pas produite ces dernières années, dans les jardins botaniques auxquels je me suis adressé. J'ai donc dû me résigner à ne traiter actuellement que le paragraphe III; c'est d'ailleurs le plus important au point de vue de l'analyse micrographique du poivre et de ses falsifications.

§ III.

Le fruit et la graine mûrs.

Le poivre est le fruit du poivrier, *Piper nigrum*, *Piper betel*, famille des Pipéracées. Ce fruit est une baie dont le péricarpe est peu charnu.

Il est mis en vente sous deux aspects différents : le poivre blanc, le poivre noir.

Le poivre noir est le fruit tel que le donne le poivrier, c'est-à-dire qu'il n'a subi aucune préparation. Il a une teinte noirâtre; son enveloppe externe (péricarpe) est fortement chagrinée, et présente des polygones plus ou moins réguliers, qui sont le résultat du retrait que la dessiccation a fait subir aux tissus. Sa forme est sphérique. En examinant attentivement un fruit de poivrier, on distingue aisément deux cicatrices. L'une est la cicatrice d'insertion du fruit sur la tige; l'autre, diamétralement opposée à la première, est la cicatrice du style (fig. 1).

Le poivre blanc est le poivre noir dépourvu de son enveloppe extérieure. Les grains sont moins volumineux que ceux du poivre noir; ils sont d'un blanc grisâtre. Ils s'obtiennent en récoltant le fruit avant sa maturité; l'enveloppe externe se détache alors facilement. Il arrive fréquemment que la séparation se produit non pas entre le spamoderme et le péricarpe, mais dans ce dernier, soit dans le parenchyme interne, soit plus rarement dans le parenchyme externe.

STRUCTURE DU POIVRE NOIR.

Une coupe longitudinale nous montre, planche I, figure 1 :

I. Le péricarpe avec les cicatrices d'insertion et du style.

II. La graine.

Une coupe transversale montre également, planche I, figure 1' :

I. Le péricarpe.

II. La graine.

I. — *Le péricarpe.*

On peut y distinguer trois régions, que nous décrirons séparément pour la facilité de l'exposition (fig. 2).

Il est limité superficiellement par l'épiderme dont la cuticule est épaissie (fig. 3).

Sous cet épiderme se trouvent d'assez nombreuses cellules scléreuses, à parrois fortement épaissies, dont le lumen est presque entièrement oblitéré.

De cette cavité cellulaire très réduite, partent de fins canalicules qui traversent la cellulose d'épaississement, rayonnent vers la périphérie de la cellule et viennent se mettre en communication avec les canaux semblables issus de la cellule voisine (fig. 4). Ces canalicules servent aux échanges osmotiques pendant la vie cellulaire. Il importe de remarquer, au point de vue que nous nous proposons d'atteindre, c'est-à-dire l'étude des caractères distinctifs du poivre, que ces cellules sclérifiées sont rarement serrées les unes contre les autres, mais que plus souvent elles ne se touchent pas; elles sont alors séparées par des éléments qui ont conservé leurs parois parenchymateuses. Les cellules sclérifiées sont beaucoup plus nombreuses au voisinage des deux cicatrices.

Le reste de cette région parenchymateuse externe est constitué par des éléments polygonaux, à parois minces, entre lesquels existent fréquemment de petits méats. Ces cellules parenchymateuses renferment des grains d'amidon et des gouttelettes d'huile.

On remarque en outre, dans le parenchyme externe, des cellules beaucoup plus grandes dont le contenu se colore en noir par l'acide osmique. Ce sont donc des cellules à essence. Les cellules de la première région parenchymateuse ont généralement des contours chiffonnés, aussi ne peut-on guère distinguer nettement ceux-ci qu'après avoir soumis les coupes à l'action de l'eau de javelle ou de la potasse à 5 °/₀, pendant deux ou trois jours. Les éléments cellulaires se distendent alors et leurs parois reprennent leur régularité.

La deuxième région (figures 1', 2 et 3) est caractérisée par la présence des faisceaux [1]. Ceux-ci sont normalement orientés, le bois tourné vers l'intérieur, le liber dirigé vers l'extérieur. Quelques éléments sclérifiés protègent le faisceau du côté de l'extérieur.

La troisième région du péricarpe, ou région parenchymateuse interne, est d'abord formée de quelques couches de cellules dont les dimentions sont variables. Elles sont écrasées dans une direction parallèle à la surface et possèdent un contour onduleux, parfois assez difficile à suivre. Vers la partie profonde de cette région on distingue des cellules beaucoup plus grandes, qui contiennent surtout des gouttelettes d'huile. Ce parenchyme interne montre fréquemment des déchirures. C'est dans celui-ci que se produit habituellement la séparation du péricarpe lorsqu'on enlève ce dernier pour transformer le poivre noir en poivre blanc.

La région interne du péricarpe est limitée du côté de la graine par un épiderme cubique dont les cellules présentent des épaississements en fer à cheval localisés vers l'intérieur du fruit (fig. 3). Les parois épaissies de ces cellules sont sclérifiées et canaliculées.

[1] La coupe représentée figure 3 passe entre deux faisceaux.

II. — *La graine.*

Elle se compose de deux parties : *a*) le spermoderme; *b*) l'amande (fig. 5).

a) *Spermoderme.* — Il entoure la graine et provient des téguments de l'ovule. D'après Van Tieghem, l'ovule serait enveloppé par un tégument unique (¹).

En coupe transversale, après l'action de l'eau de javelle ou de la potasse à 5 °/₀, le spermoderme se montre constitué de deux ou trois couches de cellules à parois minces; ces éléments cellulaires sont applatis dans un sens parallèle à la surface (fig. 5).

b) *Amande.* — Elle est constituée du périsperme, de l'albumen et de l'embryon.

Périsperme (²). — Il est délimité extérieurement par un épiderme formé de cellules cubiques présentant une cuticule peu épaissie. Sous cet épidérme se trouvent deux ou trois couches de petites cellules à parois minces, contenant des grains d'amidon et aussi des grains d'aleurone.

Sous ces petites cellules, on voit alors des éléments beaucoup plus grands. Ceux-ci sont poligonaux, à parois minces, ils renferment de très nombreux petits grains d'amidon (³), c'est la

(¹) L'absence de matériaux m'a empêché d'étudier l'ovule et par conséquent de vérifier le fait.

(²) Dans la plupart des graines, sitôt la fécondation opérée, l'embryon commence à se développer et autour de lui, dans le sac embryonnaire, se forme un tissu dont les cellules se remplissent de réserves alimentaires, c'est l'albumen proprement dit. En même temps, le nucelle s'attrophie et ses éléments écrasés se trouvent parfois sous le spermoderme. Dans certains cas spéciaux, au contraire, comme dans le nuphar et le poivre, en même temps que l'embryon et l'albumen se développent, le nucelle s'hypertrophie et se gorge également de réserves âlimentaires; il constitue alors un albumen nucellaire ou périsperme.

Dans le poivre, les auteurs distinguent souvent un albumen charnu qui est l'albumen proprement dit, et un albumen amylacé qui est le périsperme.

(³) La coupe qui a été dessinée (fig. 3) ayant été traitée par l'eau de javelle, les grains d'amidon et d'aleurone avaient disparu.

couche amylacée. On y remarque, en outre, des cellules dont le contenu protoplasmique présente une coloration jaune verdâtre; traitée par l'acide osmique, cette masse protoplasmatique se teinte en brun noirâtre; ces cellules contiennent donc des gouttelettes d'huile essentielle. Leur forme est variable; tantôt elles ne se distinguent des autres cellules parenchymateuses que par leur contenu; tantôt, au contraire, elles sont beaucoup plus grandes et plus arrondies (fig. 3). Leur répartition dans la graine est assez constante. Elles sont très nombreuses à la périphérie du périsperme où la zone qu'elles occupent se reconnaît nettement. Dans les couches moyennes du périsperme, elles sont beaucoup moins nombreuses.

Dans la région centrale, leur nombre a considérablement augmenté, pour diminuer enfin progressivement jusqu'au voisinage de l'albumen autour duquel elles forment une calotte (fig. 1).

Au centre du périsperme existe fréquemment une cavité de forme irrégulière qui doit être attribuée au retrait que les tissus ont subi par suite de la dessiccation.

Albumen. — Il diffère du périsperme par le fait que les cellules qui le constituent sont beaucoup plus petites et contiennent de très nombreuses gouttelettes d'huile. Les cellules à essence y font complètement défaut.

Embryon. — Il est droit, petit et peu différencié encore.

STRUCTURE DU POIVRE BLANC.

Le poivre blanc étant du poivre noir privé de son péricarpe, soit en tout, soit en partie, présente la même structure botanique que la graine et que la fraction du péricarpe qui lui reste adhérente lors de la transformation du poivre noir en poivre blanc.

CHAPITRE II.

ANALYSE MICROGRAPHIQUE DU POIVRE.

Pour que les connaissances botaniques puissent rendre des services au point du vue de l'analyse micrographique d'un échantillon, il ne suffit pas d'étudier la structure du poivre à l'aide de coupes longitudinales et transversales, il faut encore savoir tirer parti des connaissances ainsi acquises et les appliquer au facies sous lequel le poivre se présente au micrographe lorsqu'il fait l'examen d'un échantillon. L'analyse micrographique est la chose la plus importante, mais aussi la plus difficile : elle exige non seulement des connaissances botaniques sérieuses, mais encore une grande pratique du microscope. Dans le cas présent, elle comprendra l'étude du péricarpe et de la graine.

§ I.

Analyse micrographique du péricarpe.

Dans les analyses courantes, les fragments du péricarpe n'apparaissent qu'exceptionnellement coupés longitudinalement ou transversalement; généralement, au contraire, on les voit parallèlement à la surface externe de la graine. Il faut donc, pour se rapprocher autant que possible des conditions où le micrographe se trouve journellement, diviser le péricarpe dans le sens de son épaisseur en un certain nombre de lamelles parallèles à la surface. On y arrive en laissant macérer pendant quelques jours dans l'eau de javelle ou dans la solution de potasse à 10 °/₀ des grains de poivre. On peut alors, à l'aide de scalpels ou de pinces, répartir le péricarpe en un certain nombre de lamelles. On étudie la structure de celles-ci et on rapporte les éléments dont elles se composent aux mêmes éléments, vus en coupes transversales ou longitudinales.

Ce procédé permet de cliver le péricarpe en un certain nombre de couches, dont deux surtout sont caractéristiques du poivre, ce sont :

1° Les couches de cellules pierreuses (fig. 6), se montrant constituées de cellules sclérifiées, à lumen très étroit, à canalicules rayonnant vers la périphérie; ces cellules sont polyédriques, souvent allongées dans une direction parallèle à la surface. Parfois, au contraire, leurs dimensions paraissent sensiblement égales dans les trois directions, comme le montre la comparaison de la figure 6 avec la figure 3. Ce qui caractérise surtout ces éléments sclérifiés, c'est que sur un même fragment de péricarpe les cellules pierreuses ne sont pas toutes contiguës; elles sont tantôt serrées les unes contre les autres ; tantôt, au contraire, elles se trouvent séparées par des éléments qui ont conservé leurs parois minces. Ce fait a déjà été signalé pour ces éléments lorsqu'ils ont été étudiés en coupes transversales (fig. 3), mais ici il est beaucoup plus marqué.

2° La seconde couche caractéristique que l'on peut isoler est l'épiderme interne du péricarpe (fig. 7). Qu'il soit vu par sa face interne ou par sa face externe, il se montre constitué par des cellules hexagonales.

L'épaississement qui, en coupe transversale, apparaît sous la forme d'un fer à cheval, dont les branches seraient tournées vers l'extérieur, est ici vu de face; on y distingue nettement les canalicules dont il a été question lors de la coupe transversale (fig. 3).

Les cellules qui constituent cet épiderme interne ont des parois et un contenu brunâtres, et cette coloration brunâtre ne disparaît que lorsque les réactifs ont suffisamment agi.

Si pour la macération on substitue l'eau distillée à la solution de potasse à 10 °/₀ ou à l'eau de javelle, on laisse les cellules parfaitement intactes. Si l'on enlève alors des lamelles et qu'on les examine par la face interne ou par la face externe, les cellules de l'épiderme paraissent opaques parce que les parois sont restées brunes et que le contenu n'a pas été dissout (fig. 7) ([1]).

Parmi les couches que l'on peut encore isoler, mais qui ne sont pas caractéristiques du péricarpe du poivre, il faut citer :

3° L'épiderme externe qui se présente sous forme de cellules polygonales (fig. 8). Ces cellules ont aussi des parois et un contenu brunâtres. Si cette coloration brunâtre n'a pas été détruite par l'action de la solution de potasse à 10 °/₀ ou par l'eau de javelle, ces cellules sont également opaques et se présentent sous l'aspect reproduit figure 8′ ([1]).

4° Les cellules à parois épaissies et canaliculées qui protègent le faisceau du côté de l'extérieur. Dans la figure 9, ces éléments sont vus en coupe longitudinale; dans la figure 10, ils se présentent de face et les ponctuations canaliculées apparaissent comme des trous.

5° Les trachées dont la spiricule est déroulée aux deux extrémités libres (fig. 11). Avec ces trachées, on voit ici les éléments parenchymateux de la partie profonde de la région externe du péricarpe.

Quand on connaît le maniement du microscope, on peut se dispenser de pousser aussi loin la dissociation des diverses assises. En se servant de la vis micrométrique, il est en effet possible d'étudier les différentes couches d'un fragment relativement épais.

La figure 12 représente un de ces fragments; on y voit d'abord une couche profonde formée par des cellules de la région parenchymateuse externe du péricarpe (*Par. e.*) Au-dessus de cette couche, se trouvent des cellules pierreuses (*C. p.*); et plus superficiellement encore, on aperçoit l'épiderme externe, dont certaines cellules sont restées opaques (*Ep. e.*).

Vu l'impossibilité de représenter ces trois couches exactement superposées, elles ont été figurées côte à côte, de gauche à droite.

([1]) C'est probablement à de semblables aspects que MM. Claes et Thyes (*loc. cit.*) ont donné le nom de plaquettes.

§ II.

Analyse micrographique de la graine.

a) *Spermoderme.* — Les deux ou trois couches qui entrent dans la constitution du spermoderme, ne sont pas caractéristiques.

Vues de face, elles apparaissent sous la forme de lamelles composées de cellules allongées parallèlement à la surface (fig. 13).

Au voisinage de l'embryon, ces cellules présentent des parois chiffonnées et fortement irrégulières (fig. 14).

Lors de la séparation du péricarpe, le spermoderme reste fréquemment adhérent à ce dernier.

b) *Amande.* — Les éléments qui entrent dans ses différentes couches sont peu caractéristiques. Ce sont des cellules polygonales, bourrées de petits grains d'amidon, dont les dimensions varient d'un échantillon à l'autre et qui ne peuvent guère servir à identifier le poivre.

CHAPITRE III.

PROCÉDÉ A EMPLOYER POUR METTRE EN RELIEF LES CARACTÈRES MICROGRAPHIQUES DU POIVRE EN POUDRE.

Le poivre en poudre existe dans le commerce sous deux formes : le poivre blanc et le poivre noir, qui proviennent respectivement de la réduction en poudre du poivre blanc et du poivre noir.

Un simple examen microscopique ne permet guère de retrouver dans le poivre en poudre les caractères anatomiques décrits ci-dessus. Les fragments qui composent la poudre ne sont généralement pas suffisamment transparents pour qu'on puisse leur distinguer une structure appréciable ; seules, les cellules bourrées de grains d'amidon apparaissent nettement.

Il importe donc de faire subir au poivre en poudre un traitement tel que ses fragments présentent la structure qui les caractérise, et cela indépendamment des produits qu'on peut y ajouter dans le but de le falsifier.

Les meilleurs résultats ont été obtenus en soumettant le poivre en poudre au traitement suivant :

1° Faire bouillir, pendant deux à trois minutes, l'échantillon préalablement broyé dans une solution de Hcl 7,5 °/₀₀, décanter après avoir refroidi par l'addition d'eau froide ;

2° Faire bouillir dans un mélange de Hcl 7,5, HNo^3 7,5, eau distillée 100 ; après deux à trois minutes d'ébullition, refroidir par l'addition d'eau, puis décanter ;

3° Faire bouillir quatre à cinq minutes dans l'eau distillée afin d'enlever toute trace d'acides, décanter après avoir refroidi par l'addition d'eau froide ;

4° Laisser séjourner dans l'eau de javelle pendant un à deux jour et plus si possible.

Dans ces conditions les fragments de poivre apparaissent avec la structure qui leur est particulière; on peut alors distinguer :

1° Les cellules pierreuses à parois fortement épaissies, à lumen presque complètement oblitéré; elles se montrent de face et présentent les caractères mis en relief par l'analyse micrographique (fig. 6), c'est-à-dire : cellules pierreuses séparées par des éléments ayant conservé leurs parois parenchymateuse. De plus, examinés à la lumière polarisée, ces fragments brillent en jaune brunâtre sur les bords.

Les cellules de l'épiderme interne sont également vues de face et présentent la structure qui leur est propre (fig. 7).

Enfin on y distingue encore les autres éléments dont les caractères ont été décrits au Chapitre II, fig. 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14. Je crois donc inutile d'y revenir encore.

SECONDE PARTIE

FALSIFICATION DU POIVRE

CHAPITRE I.

FALSIFICATIONS CONSTATÉES DANS LES DIVERS ÉCHANTILLONS QUI ONT ÉTÉ SOUMIS A L'ANALYSE AU LABORATOIRE D'ANALYSES DE L'ÉTAT A LIÉGE.

En parcourant mon carnet d'analyses, je trouve vingt-quatre échantillons inscrits; parmi ceux-ci, six étaient falsifiés :

De ces six échantillons falsifiés, les trois premiers renfermaient exclusivement des féculents, le quatrième contenait des noyaux d'olives pulvérisés, le cinquième des féculents et de la poudre de noyaux d'olives, le sixième, des féculents et du piment.

Sur six échantillons, cinq contenaient des féculents; les falsifications basées sur l'emploi de ceux-ci sont donc de beaucoup les plus fréquentes, se sont d'ailleurs les plus faciles à pratiquer.

Aussi n'est-il pas rare de rencontrer deux produits de falsifications, comme c'est le cas pour les deux derniers échantillons. L'un de ces produits, « noyaux d'olives pulvérisés, ou piment », est introduit par le négociant en gros; l'autre, « féculents », est incorporé par le détaillant.

Il importe d'ajouter que les débitants sont en quelque sorte encouragés dans cette voie. Certaines personnes prétendent, en effet, qu'il est de meilleur goût de servir du poivre blanc, alors cependant que le poivre noir est beaucoup plus riche en principes essentiels pour lesquels on recherche ce condiment.

Ce caprice est exploité par les débitants qui, avec des baies de poivre noir, font deux poivres blancs, comme suit : au péricarpe réduit en poudre, ils ajoutent des féculents et obtiennent le premier poivre blanc[1]. La graine est broyée à son tour et fournit le second poivre blanc.

Les différentes farines de seigle, de froment[2], d'orge, de maïs, de riz[2], de bouquette[2], de fécule[2], de légumineuses, etc., etc., peuvent être employées dans ce but.

Je ne m'attarderai pas à donner des figures des grains d'amidon, ni à décrire leurs caractères particuliers, non seulement parce que ce travail a déjà souvent été fait, mais surtout parce que la meilleure description ne donnerait qu'une idée fort imparfaite des grains d'amidon, tandis qu'une préparation microscopique mettra en lumière la forme, les dimensions, la nature du hile, etc.

Je recommanderai seulement de ne pas se contenter d'une observation au faible grossissement, mais d'employer également les forts grossissements, qui peuvent seuls permettre de reconnaître la forme des grains d'amidon de faibles dimensions.

Je ne crois pas inutile d'ajouter que la dimension des grains d'amidon est un caractère excessivement variable qui n'a par là même qu'une importance secondaire. C'est surtout le facies sous lequel se présentent les grains d'amidon, qui permet de rapporter ceux-ci à la graine dont ils proviennent.

QUATRIÈME ÉCHANTILLON FALSIFIÉ.

Celui-ci renfermant des noyaux d'olives pulvérisés, je crois utile de faire l'analyse de ceux-ci, tant au point de vue botanique qu'au point de vue micrographique.

(1) Le premier échantillon falsifié contenait le péricarpe réduit en poudre et de la farine de bouquette.

(2) Ont été observées dans les différents échantillons que j'ai déclarés falsifiés.

I. — *Étude botanique des noyaux d'olives.*

L'olive est le fruit de l'olivier, famille des Oléacées. Ce fruit est un drupe, c'est-à-dire un fruit à noyau. Ce noyau ou endocarpe ligneux entoure la graine. C'est cet endocarpe que l'on réduit en poudre et que l'on emploie pour falsifier le poivre.

L'endocarpe présente une structure caractéristique.

Une coupe transversale, c'est-à-dire perpendiculaire au grand axe, montre des cellules de dimensions différentes, assez régulièrement réparties en trois régions.

Les cellules les plus petites (fig. 15) occupent la région externe, elles sont polygonales, à angles parfois émoussés; elles ont des parois fortement épaissies et un lumen très étroit. Les parois se montrent constituées par des couches concentriques disposées à l'intérieur de la membrane cellulaire. Les canalicules qui partent de la courbe centrale et rayonnent vers la périphérie ne sont pas nettement visibles. Ces cellules sont serrées les unes contre les autres; il n'y a donc jamais entre elles d'éléments parenchymateux.

Une coupe longitudinale donne une figure analogue à la figure 15. Ces cellules externes ont donc sensiblement les trois dimensions égales.

De ces cellules externes, on passe insensiblement aux cellules de la région moyenne (fig. 16). Celles-ci sont beaucoup plus grandes, ont des parrois plus fortement épaissies encore. Le lumen, plus complètement oblitéré que dans les cellules externes, se présente sous la forme d'une petite cavité de laquelle partent les canalicules qui rayonnent vers la périphérie.

Une coupe longitudinale donne une figure analogue à la figure 16; les cellules moyennes ont donc aussi les trois dimensions sensiblement égales.

Il n'existe également jamais d'éléments ayant conservé ses parois minces entre les cellules épaissies.

En les suivant vers les couches profondes de l'endocarpe, c'est-à-dire vers la partie qui avoisine la graine, on voit ces cellules s'allonger et passer bientôt aux éléments de la troisième région qui, en coupe transversale (fig. 17), sont allongés dans un sens parallèle à la surface. La cavité cellulaire est également distendue dans ce sens, et de celle-ci partent des canalicules rayonnants, peu marqués.

En coupes longitudinales, ces cellules sont beaucoup plus petites (fig. 18); on voit encore la cavité cellulaire de laquelle partent des canalicules rayonnant vers la périphérie.

II. — *Analyse micrographique des noyaux d'olive.*

Il n'est pas possible, à l'aide d'un traitement chimique quelconque, de répartir les noyaux d'olives en lamelles parallèles à la surface.

L'analyse micrographique portera donc ici sur l'examen de ces noyaux pulvérisés.

En soumettant la poudre de noyaux d'olives au traitement mentionné au sujet du poivre, les fragments deviennent suffisamment transparents pour qu'on puisse y reconnaître nettement les éléments cellulaires dont ils se composent Ceux-ci présentent alors les caractères distinctifs suivants :

Dans un même fragment, tous les éléments sont sclérifiés, ont des parois fortement épaissies et se touchent.

Examinés à la lumière polarisée, ces fragments brillent en blanc, surtout sur les bords.

CINQUIÈME ÉCHANTILLON FALSIFIÉ.

Cet échantillon renfermait des féculents [1] et du piment; il convient donc d'étudier ce dernier au point de vue botanique et d'en donner ensuite les caractères micrographiques.

[1] Farine de froment.

I. — *Étude botanique du piment.*

Le piment est le fruit de l'*Eugenia pimenta* de la famille des *Myrtacées.*

Ce fruit est une baie que l'on emploie parfois pour falsifier le poivre en grains.

Il n'est pas à ma connaissance que ce genre de falsification ait été signalé jusque maintenant. Il est vrai que si le poivre en poudre possède à juste titre une mauvaise réputation, le poivre en grains jouit, au contraire, de la faveur générale, aussi les vingt-quatre échantillons que j'ai analysés, étaient-ils des poivres en poudre. C'est par hasard que j'ai constaté cette falsification : depuis que j'ai acquis la certitude que le poivre en poudre était souvent falsifié, j'avais décidé d'employer, pour les usages domestiques, du poivre en grains que je pulvérisais moi-même. En janvier dernier, examinant un poivre en grains que je venais d'acheter, je ne fus pas peu surpris d'y rencontrer des grains à peu près semblables à ceux du poivre par leurs dimensions, mais qui en différaient par leur aspect. Une coupe pratiquée dans l'un de ces fruits me montra qu'il n'appartenait pas au poivre. En le mâchant, je fus convaincu qu'il était le fruit de l'*Eugenia pimenta.*

Il est probable que cette falsification [1] se pratique couramment mais qu'elle passe inaperçue, pour la simple raison que les poivres en grains ne sont guère soumis à l'analyse. Il est donc utile de donner ici les caractères macroscopiques qui distinguent les baies du piment de celles du poivrier.

1° Leur volume est généralement plus considérable;

2° Leur surface est plus régulière; elle ne présente pas les polygones, que l'on observe sur le poivre et qui sont dus à la dessiccation ;

[1] Des falsifications du poivre en grains à l'aide de grains de poivre fabriqués de toute pièce, ont été constatées autrefois. On a aussi cité les baies de Nerprun (famille des Rhamnées), comme *pouvant* être employées dans ce but.

3° Elles sont biloculaires et dispermes.

En examinant une baie de piment, on y distingue aisément deux cicatrices, l'une est la cicatrice d'insertion du fruit sur son pédoncule; l'autre, diamétralement opposée à celle-ci, est la cicatrice d'insertion du style.

La ligne qui réunit les deux cicatrices, est le grand axe du fruit.

Une coupe transversale, c'est-à-dire perpendiculaire au grand axe, montre les deux loges du fruit, dans chacune desquelles est logée une graine (fig 19). Par suite de la dessiccation des tissus, celle-ci s'est fortement rétractée, aussi dans les fruits secs, n'occupe-t-elle pas la cavité entière de la loge qui lui est destinée.

A. Péricarpe. — Le péricarpe est épais. Il débute par un épiderme à parois minces, dont certaines cellules sont transformées en poils. Ces poils sont surtout nombreux au voisinage de la cicatrice d'insertion du style. Sous cet épiderme se trouve le parenchyme constitué par des cellules à parois minces et brunâtres. Ces cellules sont plus petites que les cellules du péricarpe du poivre; il n'existe pas ici de méats intercellulaires. Le contenu de ces cellules est brunâtre; on y distingue en outre des grains d'amidon. Au voisinage de l'épiderme se voient de grandes lacunes entourées par de petites cellules à contenu brunâtre, régulièrement disposées autour de la cavité; celle-ci peut donc être considérée comme une cavité glandulaire, dans laquelle les cellules à essence déversent leur produit (fig. 20).

Ces cavités glandulaires sont régulièrement réparties au voisinage de l'épiderme externe (fig. 20).

Vers la partie moyenne du parenchyme se trouvent des cellules allongées dans une direction parallèle à la surface. C'est dans cette partie moyenne que se trouvent les faisceaux [1] normalement orientés, le bois vers l'intérieur, le liber vers l'extérieur. Le bois est representé par quelques trachées.

Au voisinage de cette zone moyenne, du côté de l'épiderme

[1] La coupe ne passe pas par un faisceau.

externe, on voit des grandes cellules à parois épaissies. La cavité cellulaire est très grande, et de cette cavité partent des canalicules qui rayonnent vers la périphérie.

En dedans de cette zone moyenne et à son voisinage, existent également des cellules à parois épaissies et canaliculées. D'abord peu nombreuses, celles-ci augmentent en nombre vers la profondeur, où elles forment bientôt des amas de cellules à parois épaissies canaliculées. Ces cellules se distinguent des cellules pierreuses du poivre : 1° par le fait qu'elles sont généralement beaucoup plus grandes; 2° par leur cavité cellulaire beaucoup plus étendue.

Ce parenchyme est limité vers l'intérieur par un épiderme formé par des cellules à parois minces. Ces cellules sont allongées dans une direction perpendiculaire au rayon.

B. Graine. — Le spermoderme ne présente rien de caractéristique; il est formé par deux ou trois couches de cellules à parois minces, allongées dans un sens parallèle à la surface.

L'amande contient, comme éléments particuliers, des lacunes autour desquelles les cellules sont régulièrement disposées; ces lacunes présentent les mêmes caractères que les cavités glandulaires signalées dans le péricarpe (fig. 19). Elles sont régulièrement réparties dans l'amande, au voisinage de l'épiderme; on en distingue deux rangées sur toute la périphérie de l'amande, excepté sur la face de celle-ci qui regarde la cloison séparative des deux loges, où il n'existe qu'un seul rang de cavités glandulaires. Les cellules parenchymateuses de l'amande ne possèdent pas de caractères distinctifs. Ce sont des cellules polygonales, qui contiennent des grains d'amidon, des grains d'aleurone et des gouttelettes d'huile.

Les coupes longitudinales donnent des aspects peu différents de la coupe transversale.

II. — *Analyse micrographique du piment.*

A. Péricarpe. — Après un séjour de vingt-quatre heures dans la solution de potasse à 10 °/₀ ou dans l'eau de javelle, le péricarpe des baies se laisse facilement décomposer en un certain nombre de lamelles minces, dont les plus caractéristiques sont :

L'épiderme externe (fig. 21). Celui-ci est constitué par des cellules polygonales à parois minces. Certaines de ces cellules, surtout au voisinage de la cicatrice du style, sont développées en poils qui, tantôt ont persisté, tantôt, au contraire, sont tombés; ils laissent alors des cicatrices.

Les autres éléments caractéristiques que l'on peut mettre en évidence, sont les grandes cavités glandulaires; celles-ci sont vues de face et apparaissent par transparence sous l'épiderme externe.

Les petites cellules régulièrement disposées autour de ces cavités et qui y déversent leurs produits de sécrétion, ont conservé leur contenu brunâtre; elles forment donc en apparence, à la cavité, une paroi brunâtre fortement épaissie.

Les cellules pierreuses vues de face, diffèrent de celles du poivre parce qu'elles sont beaucoup plus nombreuses et beaucoup plus grandes.

Leurs parois sont moins épaissies et la cavité cellulaire est beaucoup plus grande. Enfin elles sont irrégulièrement distribuées dans toute l'épaisseur du parenchyme, et pas seulement à la limite de celui-ci, comme c'est le cas pour le poivre. Il en résulte que ces cellules pierreuses ne sont pas presque toujours accompagnées de l'épiderme externe, comme c'est le cas pour le poivre.

B. Graine. — Les seuls éléments caractéristiques de la graine sont les cavités glandulaires qui se montrent avec les mêmes caractères que celles du péricarpe, seulement ici, c'est à travers l'épiderme externe de l'amande qu'on les voit par transparence et elles sont entourées des cellules polygonales de l'amande.

Si, au lieu de laisser séjourner les fruits dans l'eau de javelle ou la solution de potasse à 10 °/₀₀, on les met simplement macérer dans l'eau, la séparation en lamelles peut aussi se faire, et alors on obtient, pour le piment, des figures analogues aux figures 8 et 12 que fournit le poivre dans les mêmes conditions, et cela pour les mêmes raisons.

Procédé à employer pour mettre en évidence les caractères distinctifs du piment, dans un échantillon de poivre le renfermant.

L'examen dans l'eau distillée peut déjà permettre de distinguer nettement les cavités glandulaires qui caractérisent le piment. Pour se convaincre mieux encore de la présence de ce dernier, on applique alors à l'échantillon suspect le procédé employé pour le poivre, seulement, après l'action des acides, on emploie la solution de potasse à 10 °/₀; celle-ci donne de meilleurs résultats que l'eau de javelle qui, au contraire, agit mieux pour identifier les éléments distinctifs du poivre.

J'ajouterai qu'à la lumière polarisée les fragments de piment formés par des cellules sclérifiées, brillent en blanc.

SIXIÈME FALSIFICATION OBSERVÉE.

Le sixième échantillon reconnu falsifié renfermait des féculents (fécule) et des noyaux d'olive pulvérisés. Ceux-ci ont déjà été étudiés au sujet de l'échantillon n° 4; je ne m'attarderai donc pas à les décrire encore.

CONCLUSIONS.

De cette étude des falsifications observées dans les différents échantillons soumis à l'analyse, il résulte que la mauvaise réputation du poivre est bien méritée, il y a en effet six falsifications sur vingt-quatre échantillons, soit 25 °/₀.

Parmi les quatre premiers poivres examinés et inscrits dans mon carnet d'analyses, trois ont été déclarés impurs, tandis que dans les vingt derniers, trois seulement étaient adultérés.

Le nombre des falsifications tendrait donc à diminuer; cette diminution s'explique par le fait que presque tous les échantillons ont été prélevés par ordre de l'administration communale de la ville de Liége, en exécution de la loi du 4 août 1890 et de l'arrêté royal du 28 février 1891. Leur falsification a donc eu pour conséquence la condamnation du débitant. C'est la crainte de celle-ci qui, dans la suite, a décidé les détaillants de Liége, qui se savaient surveillés d'ailleurs, à délivrer du poivre pur. Il est toutefois possible qu'il n'en soit pas de même dans certaines localités du pays, où les négociants peuvent à leur aise falsifier les denrées qu'ils débitent.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE QUELQUES PRODUITS QUI PEUVENT ÊTRE EMPLOYÉS POUR FALSIFIER LE POIVRE.

Cette étude ayant attiré l'attention de la plupart des auteurs, je ne m'y arrêterai pas longtemps.

Le poivre étant constitué d'éléments parenchymateux et d'éléments sclérifiés, les falsifications peuvent avoir pour conséquence :

I. D'augmenter le nombre d'éléments sclérifiés ;

II. D'augmenter le nombre des éléments parenchymateux ;

III. D'augmenter à la fois le nombre des éléments sclérifiés et parenchimateux ;

IV. De relever le goût du poivre lorsqu'une des falsifications précédentes a diminué ses propriétés sapides.

De là la subdivision du chapitre II en quatre paragraphes.

§ I.

Falsifications qui ont pour conséquence d'augmenter le nombre des éléments sclérifiés.

Dans ce groupe rentrent les falsifications à l'aide des noyaux d'olives ([1]), de pêches, de prunes, de cerises, d'amandes, etc.

Les éléments sclérifiés qui entrent dans la composition de ces différents noyaux, présentent un caractère commun qui permet de les distinguer des éléments analogues du poivre : ils sont fortement serrés les uns contre les autres; il n'existe donc jamais entre eux de cellule ayant conservé des membranes minces.

La distinction des éléments de ces différents noyaux entre eux

([1]) Voir chapitre I, deuxième partie.

est beaucoup plus difficile; il n'existe guère à cet effet d'autres caractères que la dimension des éléments sclérifiés et certaines réactions microchimiques [1]. Il faut aussi tenir compte du facies sous lequel se présentent les divers éléments sclérifiés.

Le fait de déterminer si l'élément sclérifié appartient à un noyau de pêche, de prune, d'amande, etc., etc., est donc une opération excessivement délicate sinon impossible. Je me hâte d'ajouter qu'elle ne présente guère d'importance du moment que l'on est certain d'avoir constaté l'existence de la falsification du poivre à l'aide d'éléments sclérifiés.

§ II.

Falsifications qui ont pour conséquence d'augmenter le nombre des éléments parenchymateux

Les cellules du parenchyme du poivre contiennent de l'amidon, de l'aleurone, des gouttelettes d'huile ; les falsifications qui portent sur les éléments parenchymateux relèveront donc la teneur du poivre :

1° En féculents ;

2° En aleurone et matières oléagineuses ;

3° En féculents, aleurone et matières oléagineuses à la fois.

1° Les féculents ont été signalés au chapitre précédent.

2° L'aleurone et les matières oléagineuses sont fournies par les graines de sinapis, colza, navette, etc., etc., par le lin et le chanvre. Les réactions microchimiques de l'aleurone [2] et des gouttelettes d'huile [3], ne sont pas suffisantes pour qu'on puisse

(1) Les parois épaisses des cellules des noyaux de datte ne sont pas sclérifiées : elles sont formées de cellulose pure et se colorent en bleu par le chlorure de zinc iodé. Au contraire, les cellules pierreuses du poivre ont les parois épaisses et sclérifiées : elles se colorent en jaune par le chlorure de zinc iodé.

(2) En jaune par l'iode et l'acide picrique.

(3) En brun par l'acide osmique.

décider avec certitude s'il y a falsification à l'aide des graines qui les contiennent, il faut recourir à l'examen de la structure du spermoderme que l'on met en évidence par le traitement précédemment décrit. Pour les Crucifères et le lin, l'action de Hcl, 75 °/₀, puis le séjour dans la solution de potasse à 10 °/₀ ou dans l'eau de javelle [1], après ébullition dans l'eau distillée, est généralement suffisante pour mettre leur structure en évidence.

La structure du chanvre est plus difficile à mettre en relief, il faut appliquer le traitement complet [1].

Il importe de remarquer que pour le chanvre ce n'est pas la graine que l'on emploie, mais bien le fruit, celui-ci est en effet un akène. Il en résulte que la structure caractéristique que l'on obtient après le traitement, est fournie par le péricarpe et non par le spermoderme, comme l'écrivent la plupart des auteurs.

3° Les féculents, aleurone et matières oléagineuses à la fois, sont donnés par la graine de l'*Arachis hypogea* (légumineuse). Ce spermoderme et le péricarpe sont caractéristiques et leur structure est facilement mise en évidence par le traitement antérieurement décrit [2].

Les cellules parenchymateuses de la graine contiennent de l'amidon, de l'aleurone et des gouttelettes d'huile.

§ III.

Falsifications qui ont pour conséquence d'augmenter à la fois le nombre des éléments sclérifiés et parenchymateux.

Ce résultat peut être atteint par deux moyens différents :

1° Par l'addition de féculents et de noyaux d'olive, d'amande, de prune, de pèche, etc., pulvérisés (voir chapitre précédent);

2° Par l'addition de piment, *Eugenia pimenta* (voir chapitre précédent).

[1] La solution de potasse donne de meilleurs résultats que l'eau de javelle.

[2] La solution de potasse 10 °/₀, donne de meilleurs résultats que l'eau de javelle.

§ IV.

Falsifications qui ont pour objet de relever le goût du poivre lorsque l'addition d'un produit étranger en a diminué les propriétés sapides.

Cette falsification, qui accompagne généralement l'addition des féculents, a pour but de masquer cette première fraude en augmentant le montant du poivre ainsi falsifié.

Les produits qui conviennent le mieux à cet effet, sont : *A* les *Capsicum, B* la poudre de pyrèthre.

A. *Les Capsicum.* — Dans le commerce, on désigne sous ce nom de piment :

1° Le vrai piment, *Eugenia pimenta* (famille des Myrtacées);

2° Le piment des jardins, *Capsicum annuum* (famille des Solanées);

3° Le piment de Cayenne ou poivre de Cayenne, *Capsicum frutescens* (famille des Solanées).

Ce sont les *Capsicum* que j'envisage dans le cas présent. Ils se reconnaissent surtout par leur spermoderme dont la structure est mise en relief par le traitement préconisé au chapitre I.

J'ai eu l'occasiou d'observer l'addition des *Capsicum* dans un échantillon qui m'était soumis par un chimiste de la ville pour contrôler l'analyse d'un poivre qu'il déclarait falsifié à l'aide de farine de riz.

En appliquant à cet échantillon le traitement habituel, il me fut facile d'y déceler les spermodermes si caractéristiques des *Capsicum* ([1]).

B. *Poudre de pyrèthre.* — Cette dernière est la racine broyée des *Pyrethrum carneum* et *Pyrethrum roseum* (famille des Composées). Les auteurs citent généralement cette poudre comme étant employée pour falsifier le poivre moulu. Son prix élevé

([1]) Ceux-ci se distinguent alors aisémemt des spermodermes de la nielle avec lesquels ils présentent quelque ressemblance.

comparativement à celui du poivre, semble indiquer cependant que la poudre de pyrèthre ne doit guère être utilisée dans ce but. Quoi qu'il en soit, il y a entre cette poudre et le poivre la différence anatomique qui existe entre la structure d'une racine et celle d'un fruit.

Ce dernier renferme comme éléments ligneux des trachées et exceptionnellement des vaisseaux. La racine, au contraire, possède peu de trachées et beaucoup de vaisseaux, que le traitement permet de distinguer nettement.

CONCLUSIONS.

Cette étude du poivre et de ses falsifications démontre à l'évidence que l'analyse micrographique de ce condiment est un travail assez laborieux. Je crois donc être agréable aux micrographes en résumant dans un tableau les différentes opérations qu'il faut faire subir à un échantillon de poivre pour en déceler les falsifications.

A. L'examen dans l'eau distillée permet :

- 1° de reconnaître les cellules du périsperme du poivre.
- 2° de distinguer les falsifications qui augmentent la quantité des éléments parenchymateux . . . .
  - *a*) féculents.
  - *b*) aleurone . . . .
    - réaction iode;
    - réaction acide picrique.

B. Une partie de l'échantillon est soumise au traitement suivant :

I. Faire bouillir pendant 2 à 3 minutes dans une solution de Hcl 7,5 %. Refroidir par addition d'eau, décanter.

II. Faire bouillir pendant 2 à 3 minutes dans une solution de { Hcl 7,5 % ; HNo^3 7,5 % }. Refroidir par addition d'eau, décanter.

III. Faire bouillir pendant 2 à 3 minutes dans l'eau distillée. Refroidir par addition d'eau, décanter.

Le produit ainsi obtenu est divisé en deux parties ;

- *a*) est abandonné pendant 24 heures dans une solution de potasse à 10 %, qui permet de distinguer . . . . . .
  - 1° Spermodermes de { Colza, Navette, Sinapis, etc. etc. } . . . « Crucifères ».
  - 2° Spermodermes de lin. . . . . « Linacées ».
  - 3° Péricarpes de . .
    - Chanvre . . . . « Canabinées ».
    - *Eugenia pimenta.* « Myrtacées ».
- *b*) est abandonné pendant 24 heures dans une solution d'eau de javelle, qui permet de distinguer . . . .
  - 1° Les éléments sclérifiés du péricarpe du poivre.
  - 2° Les éléments sclérifiés des noyaux d'olive, prune, pêche, etc.
  - 3° Les spermodermes des *Capsicum* (1).
  - 4° Les vaisseaux de la racine de pyrèthre.

(1) Le spermoderme de la nielle, avec lequel celui des *Capsicum* présente certaines ressemblances, se présente mieux après l'action de la potasse à 10 %.

EXPLICATION DES FIGURES.

Abréviations.

Pc.	péricarpe.
G.	graine.
S.	spermoderme.
Pp.	périsperme.
A.	albumen.
E.	embryon.
Cu.	cuticule.
Ep.e.	épiderme externe.
Ep.i.	épiderme interne.
Par.e.	parenchyme externe.
Par.i.	parenchyme interne.
Par.f.	parenchyme fasciculaire.
Z.f.	zone fasciculaire.
F.	faisceaux.
tr.	trachées.
C.p.	cellules pierreuses.
C.e.	cellules à essence.
C.al.	cellules à aleurone.
C.am.	cellules à amidon.
C.S.	cicatrice du style.
C.I.	cicatrice d'insertion.

Figures 1, 1', 5, 19, gross. $^{7}/_{1}$.

Figure 2, gross. $^{59}/_{1}$.

Figures 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, gross. $^{81}/_{1}$.

Figure 4, gross. $^{186}/_{1}$.

N. B. Les préparations ont été dessinées à la chambre claire et les dessins réduits de moitié par la photographie.

POIVRE.

Fig. 1. Coupe longitudinale d'un grain de poivre.

Fig. 1'. Coupe transversale d'un grain de poivre au milieu du fruit.

Fig. 2. Coupe transversale du péricarpe.

Fig. 3. Coupe transversale du péricarpe, du spermoderme et du périsperme.

Fig. 4. Cellules pierreuses, fortement grossies.

FIG. 5. Coupe transversale de la graine du poivre, vers le haut.

FIG. 6. Cellules pierreuses, vues de face, après traitement.

FIG. 7. Épiderme interne, vu de face, après traitement.

FIG. 7'. Épiderme interne, vu de face, avant traitement.

FIG. 8. Épiderme externe, vu de face, après traitement.

FIG. 8'. Épiderme externe, vu de face, avant traitement.

FIG. 9. Coupe longitudinale optique d'une des cellules à parois épaissies, protégeant le faisceau vers l'extérieur.

FIG. 10. Une de ces cellules, vue de face.

FIG. 11. Trachées et parenchyme interne, vus de face.

FIG. 12. Parenchyme externe, cellules pierreuses et épiderme externe, vus en superposition.

FIG. 13. Cellules du spermoderme, vues de face.

FIG. 14. Cellules du spermoderme à parois chiffonnées.

NOYAU D'OLIVE.

FIG. 15. Coupe transversale des cellules externes des noyaux d'olive.

FIG. 16. Coupe transversale des cellules moyennes des noyaux d'olive.

FIG. 17. Coupe transversale des cellules internes des noyaux d'olive.

FIG. 18. Coupe longitudinale des cellules internes des noyaux d'olive.

PIMENT.

FIG. 19. Coupe transversale d'un grain de piment.

FIG. 20. Coupe transversale d'un grain de piment, plus fortement grossi.

FIG. 21. Épiderme externe, poils, cavités glanduleuses, vus de face.

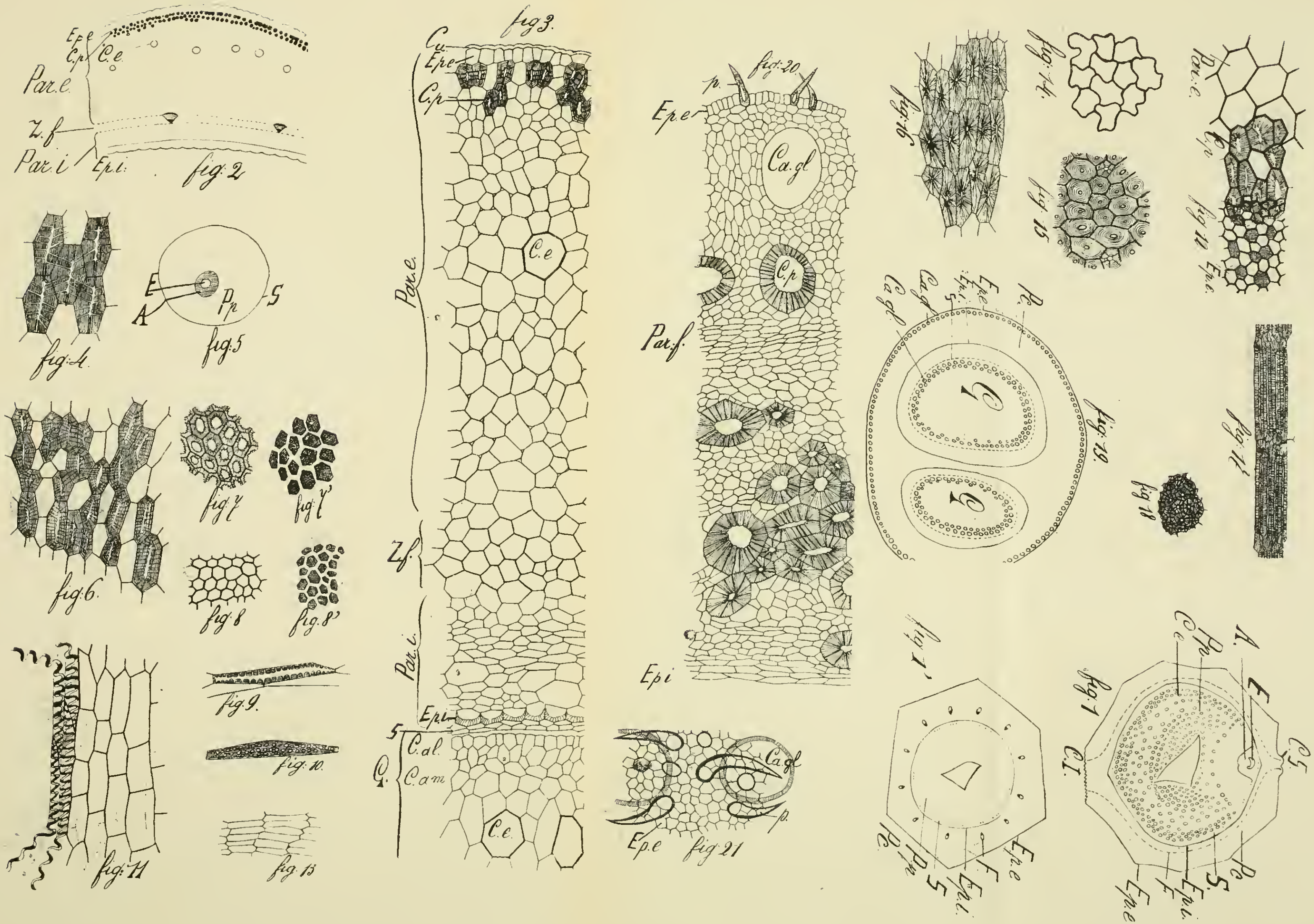


fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7
fig. 7'
fig. 8
fig. 8'
fig. 9
fig. 10
fig. 11
fig. 13
fig. 20
fig. 21
fig. 16
fig. 14
fig. 15
fig. 12
fig. 19
fig. 18
fig. 17
fig. 1
fig. 1'
Par. e.
Par. i.
Z. f.
Ep. i.
Ep. e.
C. e.
C. p.
Cu.
C. al.
C. am.
Par. f.
Ca. gl.
Epi

SUR
LE DOUBLE CONTACT
ET LE
CONTACT QUARTIPONCTUEL DE DEUX CONIQUES
PAR
V. RETALI
PROFESSEUR A MILAN

En cherchant la solution de deux problèmes généraux qui se rapportent à la théorie des coniques conjuguées, j'ai été conduit (*) à deux transformations quadratiques non rationnelles, dont la première a, avec la *transformation anallagmatique* (**), la même relation que la transformation de Hirst avec celle par rayons vecteurs réciproques. Elles peuvent être utiles dans plusieurs recherches géométriques, notamment dans l'étude des courbes et des surfaces générales du troisième ordre, des courbes planes du quatrième ordre douées au moins d'un point double, à l'exclusion des tricuspidales, et des surfaces du quatrième ordre douées d'une conique double. En réservant pour une autre occasion l'achèvement de l'étude de ces deux transformations, je me borne, dans le travail actuel, à montrer comment, en s'appuyant sur leurs premières propriétés, on est conduit à résoudre d'une manière simple et uniforme tous les problèmes qui se rapportent

(*) Voir *Mémoires de l'Académie de Bologne*, t. X_4, et *Comptes rendus* des séances de la même Académie (21 décembre 1890).

(**) J'appelle ainsi la transformation (1, 2) donnée par M. Darboux dans le chapitre XLV de son ouvrage : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires* (Mém. de la Soc. des sciences de Bordeaux, t. IX). Il est digne de remarque que les formules qui définissent analytiquement cette transformation coïncident avec celles données par M. Beltrami, dans sa *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* (Annali di Matematica, serie 2^a, t. II, 1868), pour transformer l'espace ordinaire en un espace non euclidien, où les droites se coupent en deux points.

au double contact et au contact du troisième ordre de deux coniques. On sait que beaucoup de ces problèmes ont été traités d'abord par Poncelet dans son *Traité des propriétés projectives* (pp. 227 à 255), ensuite par Steiner dans le volume XLV du *Journal de Crelle,* et par Chasles dans le *Traité des sections coniques* (pp. 349 à 355); d'autres auteurs seront cités dans le cours de cette étude. Le travail de Steiner sur cette question comprend deux mémoires : le premier (*Ueber einige neue Bestimmungsarten der Curven 2ter Ordn. u. s. w.*) contient, avec d'autres recherches, une étude approfondie des trois systèmes de coniques bitangentes à deux coniques données; dans le second (*Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte*), en se rapportant aux résultats obtenus précédemment, l'auteur donne, sans démonstration, la théorie générale des systèmes de coniques bitangentes à deux coniques données; à la fin de ce travail, il traite six problèmes de contact, pour quatre desquels (les problèmes V, VI, IX et X de Chasles) il indique inexactement le nombre des solutions (*).

Dans le travail actuel, je donne les solutions de deux problèmes (§§ 21, 25 et 26) qui ne se trouvent pas dans les *Sections coniques* ni, je crois, ailleurs, et celles de cinq autres (§§ 32 à 37) pour lesquels Chasles énonce simplement le nombre des solutions. Les vingt premiers paragraphes contiennent une

(*) Steiner attribue à chacun de ces quatre problèmes six solutions au lieu de quatre. Cette inexactitude a été signalée depuis longtemps aussi par M. Zeuthen, dans la note de la page 53 de son mémoire : *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit, etc.*, note qui n'est pas reproduite dans l'édition française publiée l'année suivante dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. V, 1866); elle a été corrigée dans les notes finales des *OEuvres complètes* de Steiner.

étude élémentaire des deux transformations quadratiques non rationnelles indiquées précédemment, étude indépendante de la théorie des coniques conjuguées; dans les paragraphes suivants, ces transformations sont appliquées systématiquement à la résolution des problèmes sur le double contact et le contact quartiponctuel de deux coniques. On trouvera aussi, dans le cours de ce travail, des remarques sur les courbes anallagmatiques, ainsi que les démonstrations synthétiques de plusieurs résultats que j'avais publiés dans *Mathesis* sans démonstration, et dont M. Neuberg a donné des démonstrations analytiques (*).

(*) Voir *Mathesis*, t. II_2, pp. 178 à 180 et 219 à 223. Les renvois à cet article sont indiqués par le signe (*M.*).

SUR

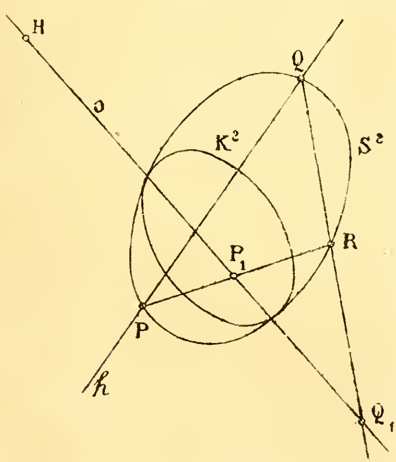
LE DOUBLE CONTACT

ET LE

CONTACT QUARTIPONCTUEL DE DEUX CONIQUES

1. Étant donnés dans un plan π une conique K^2 et un point fixe R, qui n'appartient pas à cette courbe, nous faisons correspondre à un point variable P de π les deux points P_1 et P_2 qui sont harmoniquement séparés par le segment PR et par la conique K^2. Lorsque P décrit une droite h, le lieu des points P_1, P_2 est une conique.

En effet, soient K^2 et S^2 deux coniques qui ont entre elles un double contact sur une droite s; l'intersection de s avec la droite RP, qui unit deux points arbitraires de S^2, est un des deux points doubles de l'involution quadratique définie par le couple PR et par le couple des points où K^2 est coupée par la droite PR.



Il s'ensuit que l'on obtient les points du lieu qui appartiennent à une droite arbitraire s, en projetant du point R sur la droite s les deux points d'intersection de la droite h avec la conique S^2, qui passe par R et a un double contact avec K^2 sur la droite s. Nous indiquerons par H^2 la conique, lieu du couple P_1P_2 qui correspond à la droite h par la transformation (1, 2) indiquée, et nous désignerons dorénavant cette transformation par le symbole $[K^2, R]$.

On reconnait aisément que la conique H^2 passe par les deux points R' et R'' où K^2 est rencontrée par la polaire r de R par rapport à K^2; qu'elle passe par les deux points H' et H'', où K^2 est coupée par h; et que ses tangentes aux points R', R'', H' et H'' sont respectivement les droites HR', HR'', RH', RH'', H étant le pôle de h par rapport à K^2.

2. *Chaque droite menée par* R *ou par* H *rencontre les deux coniques* K^2 *et* H^2 *en quatre points harmoniques, deux conjugués appartenant à la même conique.*

En effet, la conique S^2, passant par le point R et ayant un double contact avec K^2 sur la droite arbitraire s menée par le point H, coupe la polaire de H en deux points qui sont conjugués harmoniques sur S^2 par rapport aux deux points de contact; les deux points d'intersection de H^2 avec s sont donc conjugués par rapport à K^2.

H étant le pôle de r par rapport à H^2, la droite qui unit ce point à un point arbitraire A de r coupera H^2 en deux points qui divisent harmoniquement le segment HA et la conique K^2; on en conclut que *la conique qui correspond à la droite* h *par la transformation* $[K^2, R]$ *est aussi la conique qui correspond à* r *par la transformation* $[K^2, H]$.

3. Aux droites du plan π correspondent les coniques d'un réseau ponctuel que nous indiquerons par (H^2). Les coniques dégénérées qui appartiennent à ce réseau, correspondent aux rayons issus du point R et aux tangentes de K^2. A un rayon mené par R correspond la conique formée par ce même rayon et par la droite fixe r; à une tangente de K^2 correspond la conique constituée par les deux rayons qui projettent du point de contact les deux points fixes R' et R''. Il s'ensuit que le lieu des points doubles des coniques du réseau, c'est-à-dire la *Hessienne* du réseau, est la courbe du troisième ordre qui se décompose en la conique K^2 et la droite r. On vérifie d'ailleurs aisément que cette cubique dégénérée est aussi, comme cela doit être (*), la *Jacobienne* du réseau (H^2). En effet, si M est un point arbitraire de K^2, les polaires de ce point par rapport aux coniques du réseau vont concourir au point M′ où la droite MR coupe une seconde fois K^2 ; car tout rayon mené par R coupe K^2 et H^2 en quatre points harmoniques (§ 2) ; lorsque le point M appartient à la droite r, il est bien évident que ses polaires par rapport aux coniques du réseau se rencontrent au point de la droite r qui est le conjugué de M par rapport à K^2.

4. Les coniques du réseau (H^2) qui passent par un point donné P_1 forment un faisceau dont les points fondamentaux sont R′, R″, P_1 et le point P_2 de la droite P_1R conjugué à P_1 par rapport à K^2. Aux rayons d'un faisceau ayant P pour centre correspondent les coniques d'un faisceau qui a pour points fondamentaux les deux points fixes R′, R″ et les deux points P_1, P_2 qui divisent harmoniquement le segment PR et la conique K^2 ; et ce faisceau de coniques est homographique au faisceau (P), car la ponctuelle polaire du faisceau (P) par rapport à K^2 est aussi la ponctuelle des pôles de r par rapport aux coniques du faisceau.

On reconnaît aussi que la Hessienne du réseau (H^2) est formée par la conique H^2 et la droite r, en observant que les points diagonaux du quadrangle complet formé par les points fondamentaux du faisceau de coniques correspondant au faisceau (P) de rayons, c'est-à-dire les points doubles des coniques dégénérées qui appartiennent au faisceau de coniques, sont donnés par le point d'intersection de r avec la droite PR et par les deux points où K^2 est rencontrée par la polaire du point P.

5. A la droite à l'infini correspond la conique homothétique à K^2, ayant R pour son centre et touchant aux points R′ et R″

(*) Voir Cremona, *Introduzione a una teoria geometrica, etc.*, § 95.

les droites qui les projettent du centre de K^2. La conique transformée de r est *conjuguée* à K^2 par rapport au point R (*).

6. Si l'on prend pour K^2 un cercle ayant son centre en R, on retombe sur la transformation anallagmatique de M. DARBOUX : aux droites du plan correspondent les cercles qui coupent orthogonalement le cercle fixe sur ces droites; aux droites issues du centre R correspondent ces droites mêmes avec celle à l'infini; aux tangentes de K^2 correspondent leurs points de contact considérés comme cercles infiniment petits; à une courbe algébrique de degré n ayant au centre R un point $(n - \nu)^{\text{uple}}$ correspond, en général, une courbe d'ordre $n + \nu$ qui a un point ν^{uple} en chacun des deux points circulaires à l'infini, et qui est anallagmatique par rapport au pôle d'inversion R, etc.

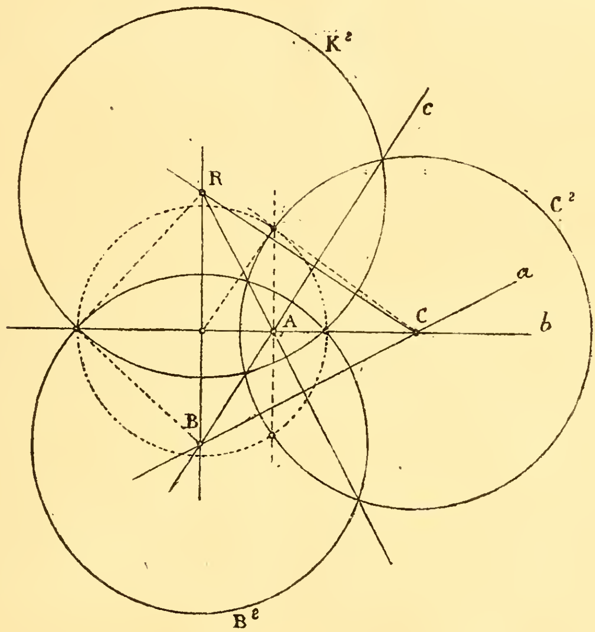
7. En supposant toujours que K^2 soit un cercle ayant R pour centre, au faisceau $P(a, b, \ldots)$ correspond (§ 4) le faisceau de cercles ayant pour points de base, outre les points circulaires à l'infini, le couple P_1P_2 correspondant à P dans la transformation $[K^2, R]$. Soient maintenant b et c deux droites menées par le point arbitraire A et conjugées par rapport au cercle K^2; je dis que *les cercles correspondants* B^2 *et* C^2, qui coupent K^2 à angle droit respectivement sur les droites b et c, *sont aussi orthogonaux entre eux*. En effet, soient B, C les pôles de b, c par rapport à K^2 : les deux cercles K^2, B^2 étant orthogonaux, R sera le pôle de b par rapport à B^2; mais la droite RA est perpendiculaire à BC, car le triangle ABC, qui est conjugué par rapport à K^2, a son orthocentre en R; donc C est le pôle de la droite RA par rapport à B^2; et comme RA est l'axe radical de B^2 et C^2, ces deux cercles se coupent orthogonalement.

Les cercles A^2, B^2, C^2 qui correspondent aux côtés a, b, c, d'un triangle ABC conjugué par rapport à K^2, forment donc

(*) Nous disons que deux coniques bitangentes sont mutuellement *conjuguées* par rapport à leur pôle de contact, lorque chacune d'elles est sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre.

avec K^2 un groupe de quatre cercles tels, que chacun d'eux coupe orthogonalement les trois autres; si le cercle K^2 est réel, au côté *a* du triangle ABC, qui ne le rencontre pas en des points réels, correspond le cercle imaginaire A^2 appartenant au groupe.

8. On peut aussi déterminer aisément la relation qui existe entre les rayons des cerles K^2, A^2, B^2, C^2. En appelant ρ et ρ_1 les



rayons des deux cercles orthogonaux réels K^2 et B^2, et λ la longueur de leur demi-corde commune, nous avons, d'après une propriété, bien connue, des triangles rectangles :

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{1}{\lambda^2};$$

pour les deux cercles orthogonaux A^2 et C^2, dont le premier est imaginaire, a lieu la même relation, c'est-à-dire en appelant

$\rho_a\sqrt{-1}$, ρ_c et $\mu\sqrt{-1}$ leurs rayons respectifs et la longueur de leur demi-corde (idéale) commune, nous avons

$$-\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_c^2}=-\frac{1}{\mu^2};$$

or, comme les deux points communs aux cercles A^2 et C^2 sont ceux que détermine sur la droite RB une des extrémités de la corde réelle commune aux deux cercles K^2 et B^2, ce point étant considéré comme un cercle infiniment petit, il s'ensuit que $\lambda=\mu$; par conséquent

$$\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}+\frac{1}{\rho_c^2}=0,$$

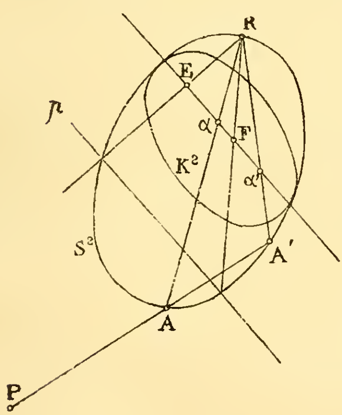
ce qui est la relation cherchée (*).

9. Revenons maintenant au réseau (H^2). Les points à l'infini de la conique H^2, transformée de la droite h, sont les points à l'infini des droites qui projettent à partir du point R les intersections de h avec la conique S^2, menée par R et concentrique et homothétique à K^2 (§ 1); il s'ensuit que H^2 est une hyperbole ou une ellipse selon que la droite h coupe S^2 en deux points réels ou en deux points imaginaires conjugués; aux tangentes de la courbe S^2 corrrespondent les paraboles du réseau. Considérons maintenant l'involution circulaire $R(a, a'; b, b'; \ldots)$ qui marquera

(*) En appliquant la transformation [K^2, R] à une conique conjuguée au triangle ABC et menée par R, ou bien à une conique quelconque conjuguée au même triangle, on obtient dans le premier cas la cubique circulaire, et dans le second, la quartique bicirculaire ayant K^2, A^2, B^2, C^2 pour cercles focaux; les résultats indiqués dans les §§ 7 et 8 se rapportent donc essentiellement à ces courbes : en particulier, la relation entre les rayons des quatre cercles focaux a été démontrée dernièrement par MM. Morley, Scharp et Marks dans les *Mathematical questions, with their solutions from the Educational Times, etc.*, t. LI, mais j'en ai eu connaissance seulement par la courte indication qui en est donnée dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Bd. XXI, p. 730.

sur la conique S^2 une involution $S^2(A, A'; B, B'; ...)$. Soient P le pôle de cette dernière involution et p la polaire du P par rapport à S^2, c'est-à-dire l'axe de l'involution ; la conique correspondante à p coupe la droite à l'infini aux points situés à l'infini sur les rayons doubles de l'involution $R(a, a'; ...)$, savoir aux points circulaires à l'infini ; elle est donc une circonférence et la seule du réseau. Aux rayons du faisceau P correspondent évidemment les hyperboles équilatères du réseau. On peut aussi démontrer aisément que les hyperboles du réseau (H^2) qui ont une excentricité donnée, correspondent aux tangentes d'une conique ayant un double contact imaginaire avec S^2 sur la droite p. En particulier, si K^2 est un cercle, R étant d'ailleurs un point arbitraire de son plan, le point P tombe au centre de K^2 ; les hyperboles équilatères du réseau correspondent aux diamètres de K^2; le cercle unique du réseau correspond à la droite à l'infini, a son centre en R et coupe orthogonalement K^2 sur la droite r.

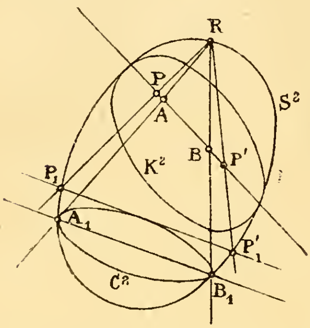
Déterminons maintenant les coniques du réseau (H^2) séparées harmoniquement par deux points donnés E et F, réels ou imaginaires conjugués. Soit S^2 la conique menée par R et ayant un double contact avec K^2 sur la droite EF ; en projetant à partir de R sur la conique S^2 l'involution dont E et F sont les points doubles, nous aurons sur S^2 une deuxième involution $(AA', ...,)$ et les droites AA', ... qui unissent les couples de points conjugués ont évidemment pour correspondantes les coniques cherchées(*);



(*) Les deux points où la droite EF coupe la conique correspondant à la droite AA', étant les intersections de EF avec les rayons RA et RA', sont évidemment conjugués harmoniques par rapport aux deux points E et F.

ces droites vont concourir au pôle P de l'involution (AA', ...) et, par conséquent, les coniques cherchées forment un faiseau dont les points de base sont R', R" et les deux points P_1, P_2 qui correspondent à P dans la transformation [K^2, R].

Étant donnés sur une droite *s* deux points A et B, on peut déterminer aisément les coniques du réseau (H^2) qui marquent sur *s* des couples PP' tels, que le rapport anharmonique du groupe (ABPP') ait une valeur assignée λ. En effet, prenons sur la droite *s* un point arbitraire P et appelons P' le point satisfaisant à l'équation (ABPP') $= \lambda$; soit $A_1B_1P_1P'_1$ la projection du groupe ABPP' faite de R sur la conique S^2, menée par R et ayant un double contact avec K^2 sur *s*. La conique qui a un double contact avec S^2 aux deux points A_1, B_1 et est tangente à la droite $P_1P'_1$, est l'enveloppe des droites qui ont pour correspondantes les coniques cherchées. Réciproquement, si C^2 et K^2 sont deux coniques inscrites à une conique S^2, et si R est un point arbitraire de cette dernière courbe, les coniques qui correspondent aux tangentes de C^2 dans la transformation [K^2, R], marquent sur la corde de contact de K^2 des couples de points homologues dans une homographie dont les points unis sont les projections, faites de R, des points de contact de C^2.



10. De la définition de la transformation [K^2, R] il résulte immédiatement que la courbe transformée d'une courbe donnée quelconque C^n, correspond à elle-même dans l'inversion quadrique (transformation de Hirst) ayant K^2 pour conique des points unis et R pour pôle d'inversion. En particulier, si K^2 est un cercle ayant son centre en R, la courbe qui correspond à C^n est anallagmatique par rapport au centre d'inversion R. Soient maintenant P un point variable de la courbe C^n, *q* la tangente en ce point. Si p' et Q' sont respectivement la polaire et le pôle de P et q par rapport à K^2, la courbe transformée de C^n, dans notre transformation $[K^2, R]$, est aussi l'enveloppe des coniques qui correspondent aux tangentes de C^n; or, comme le point Q', pôle de la tangente r par rapport à la conique transformée de la droite q (§ 1), décrit la courbe C' polaire réciproque de C^n par rapport à K^2, la courbe qui correspond à C^n dans la transformation $[K^2, R]$ est aussi l'enveloppe des coniques du réseau (H^2) par rapport auxquelles les pôles de la droite fixe r tombent sur la courbe C', polaire réciproque de C^n par rapport à K^2. En prenant pour K^2 un cercle ayant R pour centre, on retombe sur la définition ordinaire des anallagmatiques (*), c'est-à-dire que ces courbes sont l'enveloppe d'un cercle variable coupant orthogonalement un cercle K^2, et dont le centre décrit une courbe fixe C' (*déférente* de M. Darboux).

11. Nous allons maintenant dire quelques mots de la transformation corrélative. Étant donnés dans le plan λ une conique k^2 (considérée comme faisceau de la deuxième classe) et une droite fixe r, dont le pôle par rapport à k^2 est R, nous pouvons faire correspondre à un rayon variable p du plan les deux rayons p_1 et p_2 qui sont harmoniquement séparés par l'angle pr et par k^2. Lorsque p tourne autour d'un point H, l'enveloppe des rayons p_1, p_2 est une conique h^2 qui touche les deux rayons r', r'' de k^2, issus du point R, et les deux rayons h', h'' du même faisceau menés par H; si h est la polaire de H par rapport à k^2, les points de contact avec h^2 des rayons r', r'', h', h'' sont respectivement (hr'), (hr''), (rh') et (rh'').

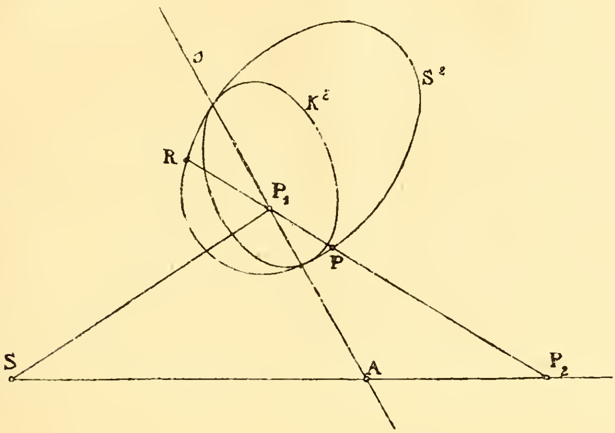
Les tangentes menées par chaque point des droites r et h aux deux coniques k^2 et h^2 forment un faisceau harmonique, deux rayons conjugués appartenant à la même conique. Aux points du plan π correspondent les coniques d'un réseau tangentiel, que nous désignerons par (h^2); les coniques dégénérées de ce réseau

(*) Voir, par exemple, Neuberg, *Sur quelques systèmes de tiges articulées*, p. 46 (Liége, 1886).

correspondent aux points de la droite r et aux points de contact des rayons du faisceau k^2. Les coniques h^2 qui touchent une droite donnée p, forment un faisceau tangentiel : les coniques h^2, transformées des points d'une droite p, forment un faisceau tangentiel dont les rayons de base sont r', r'' et les deux rayons p_1, p_2 qui divisent harmoniquement l'angle (pr) et la conique k^2; ce faisceau tangentiel est homographique à la ponctuelle p.

12. Faisons maintenant correspondre à un point variable P_1 du plan π le point P, conjugué harmonique de R par rapport à P_1 et au point P_2 de la droite P_1R, conjugué à P_1 par rapport à K^2. On établit ainsi dans le plan π une transformation quadratique, que nous indiquerons par la notation $\{K^2, R\}$, et que l'on peut considérer comme étant l'inverse de la transformation $[K^2, R]$; elle est, comme celle-ci, intimement liée à la transformation (K^2, R) de M. Hirst. D'abord, il est évident qu'en opérant successivement sur un système plan ponctuel, les deux transformations $[K^2, R]$ et $\{K^2, R\}$, on obtient le système original compté double; si l'on opère les deux transformations dans l'ordre contraire, le nouveau système plan peut être considéré comme la superposition du système primitif et de celui qui correspond à ce dernier dans l'inversion quadrique (K^2, R). La courbe qui correspond à une courbe donnée en vertu de $\{K^2, R\}$, et celle qui correspond à son inverse dans l'inversion (K^2, R), sont identiques; autrement dit, si C_1 et C_2 sont deux courbes qui se correspondent mutuellement dans l'inversion (K^2, R), et si l'on prend sur un rayon variable issu du point R le conjugué harmonique du pôle R par rapport à chaque couple de points inverses des deux courbes, le lieu de ce conjugué harmonique est la courbe qui correspond à chacune des deux courbes C_1 et C_2 en vertu de la transformation $\{K^2, R\}$.

13. *A une droite arbitraire* s *qui ne passe pas par le point* R, *correspond la conique* S^2 *menée par* R *et ayant un double contact avec* K^2 *sur la droite* s. En effet, soit S^2 une conique menée par R et ayant avec K^2 un double contact sur s; menons par R un rayon arbitraire qui coupera S^2 en un second point P, la droite s au point P_1, et la polaire de P_1 au point P_2; alors, si nous appelons S le pôle de contact et A le pôle de la droite SP_1, le triangle ASP_1



sera conjugué par rapport à S^2; par suite, les deux points R et P sont conjugués harmoniques par rapport à P_1 et P_2, ce qui revient à dire que P est le point correspondant à P_1 dans la transformation $\{K^2, R\}$.

14. Par cette deuxième transformation $\{K^2, R\}$, aux droites du plan correspondent les coniques d'un réseau ponctuel, que nous indiquons par (S^2), et qui comprend les coniques menées par R et ayant un double contact avec la conique fondamentale K^2. Des coniques dégénerées du réseau (S^2) correspondent, d'abord, aux rayons issus des points R' et R'', où K^2 est touchée par les tangentes issues du point R; en effet, à un rayon mené par R' (ou par R'') et qui rencontre K^2 ultérieurement au point S, correspond la conique formée par la droite RR' (ou RR'') et la tangente à K^2 au point S. Ensuite, aux rayons du faisceau R correspondent ces mêmes rayons comptés doubles; à la droite à l'infini du plan π correspond la conique menée par R, concentrique et homothétique à K^2 ; à la droite r correspond la conique formée par les deux tangentes de K^2 issues du point R (*).

15. Aux rayons issus d'un point arbitraire P_1 correspondent, dans le réseau (S^2), les coniques passant par R et ayant un double contact avec K^2 sur ces rayons mêmes; ces coniques ont aussi en commun le point P, correspondant à P_1 dans la transformation $\{K^2, R\}$. En appelant P_2 le point qui forme avec P_1 le couple correspondant à P dans la transformation $[K^2, R]$, il est clair qu'aux droites issues du point P_2 correspondent aussi, dans le réseau (S^2), les ∞^1 coniques menées par les deux points R, P et ayant un double contact avec K^2 sur les rayons de ce deuxième faisceau. On en conclut le théorème connu : *Les cordes de contact des coniques bitangentes à une conique donnée* K^2 *et menées par deux points donnés* R *et* P, *forment deux faisceaux de la première classe, dont les centres divisent harmoniquement le segment* RP *et la conique* K^2.

16. Soient S^2 et S'^2 les coniques qui correspondent respectivement aux droites s et s'; elles se coupent en R, et au point O′ correspondant à l'intersection O de s et s'. Menons par O le rayon h conjugué harmonique du rayon OR par rapport à s et s', et déterminons les intersections des coniques S^2 et S'^2 avec h; en appelant respectivement A_1, B_1 et A_2, B_2 les intersections des rayons s et s' avec la conique H^2 qui correspond à h dans la transformation $[K^2, R]$, les droites A_1A_2 et B_1B_2 se couperont au point R, et par suite les courbes S^2, S'^2 rencontreront h aux deux mêmes points, qui sont les intersections de h avec les droites A_1A_2 et B_1B_2. On en déduit le théorème bien connu : *Quand deux coniques* S^2, S'^2 *ont chacune un double contact avec une conique* K^2, *deux cordes communes à ces courbes* S^2, S'^2 *passent par le point de rencontre des deux cordes de contact, et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites.*

(*) On trouve des exercices analytiques sur les coniques bitangentes à une ellipse dans la thèse de M. H. Seipp : *Ueber Kegelschnitte, welche mit einer gegebenen Ellipse in Doppelberührung sind u. s. w.* (Marburg, 1883).

17. Les deux réseaux (H^2) et (S^2) sont liés par la relation suivante : si S^2 est la conique qui, dans le réseau (S^2), correspond à la droite arbitraire s, le lieu des projections faites à partir de R sur la droite s, des couples de points où S^2 est rencontrée par h, est la conique H^2 transformée de h dans le réseau (H^2). Ou bien : si H^2 est la conique qui correspond à la droite variable h dans le réseau (H^2), le lieu des projections, faites à partir de R sur la droite h, des couples de points où H^2 rencontre la droite fixe s, est la conique S^2 qui correspond à s dans le réseau (S^2).

a) Parmi les coniques du réseau (S^2) il y en a ∞^1 qui touchent une droite donnée h. Soient S^2 une de ces coniques, s sa corde de contact, P son point de contact avec h, et soit P_1 le point commun aux droites s et RP : la conique H^2, qui correspond à h dans le réseau (H^2), est, d'après le premier énoncé du théorème précédent, l'enveloppe des droites s et le lieu des points P_1. Par exemple, le cercle qui coupe orthogonalement sur la droite h un cercle donné ayant R pour son centre, est l'enveloppe des cordes de contact des coniques bitangentes à K^2 et tangentes à h, menées par le point R.

b) De même, dans le réseau (H^2), il y a ∞^1 coniques qui touchent une droite donnée s. Soient H^2 une de ces coniques, h la droite dont elle est la transformée, P_1 son point de contact avec s, et appelons P le point commun aux deux droites RP_1 et h : la conique S^2, qui correspond à s dans le réseau (S^2), est l'enveloppe des droites h et le lieu des points P. Par exemple, les cercles tangents à une droite s et orthogonaux à un cercle donné dont le centre est R, coupent ce cercle sur des droites dont l'enveloppe est la conique menée par R et ayant un double contact sur la droite s avec le cercle donné.

18. En général, la courbe qui correspond à une courbe donnée C^n dans la transformation $[K^2, R]$, est l'enveloppe des cordes de contact des coniques bitangentes à K^2, menées par R et tangentes à C^n; et la courbe qui correspond à C^n dans la transformation inverse $\{K^2, R\}$, est l'enveloppe des droites h dont les coniques correspondantes, dans le réseau (H^2), touchent la courbe C^n.

19. Parmi les coniques du réseau (S^2), il y en a ∞^1 qui ont avec K^2 un contact du troisième ordre, savoir celles qui correspondent aux tangentes de K^2. Soient S^2 une quelconque de ces coniques, S son point de contact, s la tangente en ce point : la conique H^2 est le lieu des projections faites à partir de R sur s, des couples où la conique variable S^2 est coupée par la droite fixe h.

20. Nous pouvons aussi faire correspondre à un point variable S du plan π la conique s^2, tangente à la droite fixe r et ayant un double contact avec k^2, S étant le pôle de contact. Si s^2 est la conique qui correspond, dans le réseau tangentiel (s^2), au point S, la conique h^2 est l'enveloppe des couples de rayons qui projettent du point S les intersections de r avec les tangentes de s^2 issues du point H. Si h^2 est la conique du réseau tangentiel (h^2), qui correspond au point variable H, l'enveloppe des rayons qui projettent à partir de H les intersections de r avec les tangentes de h^2 issues du point S, est la conique s^2 qui correspond à S dans le réseau (s^2) (§ 17).

Par un point H donné arbitrairement, on peut mener ∞^1 coniques s^2. Soient S le pôle de contact d'une quelconque de ces coniques, p sa tangente au point H, et p_1 la droite qui unit S à l'intersection des droites r et p : la conique h^2 est le lieu du point S et l'enveloppe des droites p (§ 17, a).

Le réseau tangentiel (s^2) comprend ∞^1 coniques ayant un contact du troisième ordre avec k^2. Soit s^2 une de ces coniques, et appelons S son point de contact avec k^2, s la tangente en ce point : la conique h^2, qui correspond au point H dans le réseau tangentiel (h^2), est l'enveloppe des rayons qui projettent à partir du point S les intersections de r avec les tangentes que l'on peut mener à la conique variable s^2 par le pôle H de h (§ 19).

21. Appliquons maintenant les considérations qui précèdent à la résolution des problèmes concernant le double contact et le contact quartiponctuel de deux coniques.

Décrire les coniques ayant un double contact avec une conique *donnée* K^2, *qui touchent une droite donnée, passent par un point donné, et dont les cordes de contact passent par un autre point donné* (*).

Soient h la droite, R le premier et P l'autre point donnés : les tangentes menées par P à la conique H^2 qui correspond à h dans la transformation [K^2, R], sont les cordes de contact des *deux* coniques cherchées. En effet, H^2 est l'enveloppe des cordes de contact avec K^2 des coniques qui ont un double contact avec K^2, touchent h et passent par R (§ 17, *a*).

Cas particuliers. — *a*) Si K^2 est un cercle dont R est le centre, H^2 devient le cercle coupant orthogonalement K^2 sur la droite h (§ 6). Il s'ensuit que pour tracer les coniques bitangentes à un cercle donné K^2, qui passent par son centre, touchent une droite h, et dont les cordes de contact vont concourir en un point donné P, il suffit de mener par P les tangentes au cercle coupant orthogonalement K^2 sur la droite h : ces tangentes sont les cordes de contact des deux coniques cherchées (*M.*, § 2).

b) En prenant, au contraire, pour K^2 un cercle ayant H pour centre, H^2 est (§ 5) le cercle orthogonal à K^2 et ayant R pour centre. On a ainsi la solution du problème suivant : mener par un point donné R les paraboles bitangentes à un cercle K^2, et qui ont leurs cordes de contact passant par un point donné P. Les tangentes menées de P au cercle H^2 qui a R pour centre et coupe orthogonalement K^2, sont les cordes de contact des coniques cherchées (*M.*, § 5).

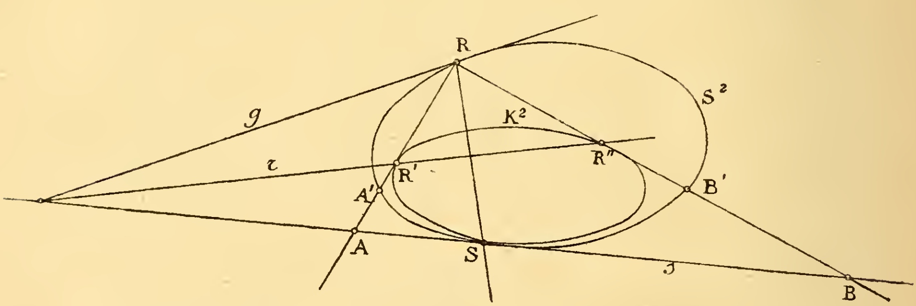
22. *Décrire les coniques bitangentes à* K^2, *qui passent par un point donné* H, *touchent une droite donnée* r, *et dont les pôles de contact tombent sur une droite* p. — Les deux points communs à p et à la conique h^2 qui correspond au point H dans le réseau tangentiel (h^2), sont les pôles de contact des coniques cherchées.

(*) La solution du problème : Mener par deux points une conique qui ait un double contact avec une conique donnée et dont le pôle de contact soit sur une droite donnée, et la solution de son corrélatif, découlent immédiatement du théorème du § 15.

Cas particulier. — Lorsque K^2 a H pour centre et R pour un des foyers réels, h^2 devient le cercle (*) ayant R pour centre et touchant les asymptotes (réelles ou imaginaires conjuguées) de K^2. Nous avons ainsi la solution du problème : décrire les coniques bitangentes à une conique centrale donnée, qui touchent une directrice et dont les pôles de contact tombent sur une droite donnée. La droite donnée coupe le cercle h^2, tangent aux asymptotes de K^2 et ayant son centre au foyer correspondant à la directrice donnée, en deux points qui sont les pôles de contact des coniques cherchées (*M.*, § 1.)

23. *Décrire la conique qui passe par un point donné* R *et a un contact du troisième ordre avec une conique* K^2 *en un point donné* S.

La conique cherchée S^2 est la courbe qui correspond, dans la transformation $\{K^2, R\}$, à la tangente s menée à K^2 en S; c'est-à-dire, si P_1 est un point variable de la droite s, la conique S^2 est le lieu du point P conjugué harmonique de R par rapport



à P_1 et au point P_2, conjugué de P_1 par rapport à K^2. En appelant A et B les points où s est coupée par les tangentes de K^2 issues de R, les points A′ et B′ de S^2 placés sur ces tangentes sont donc respectivement les conjugués harmoniques de R par

(*) En appelant b la longueur du demi-petit axe de K^2, le rayon du cercle h^2 est évidemment $b\sqrt{-1}$; le cercle h^2 est donc réel ou imaginaire selon que K^2 est une hyperbole ou une ellipse.

rapport à AR′ et par rapport à BR″; nous connaissons maintenant quatre points R, A′, B′, S et la tangente en ce dernier point de S^2, et le problème est résolu.

Remarque. — La tangente en R à S^2 est évidemment la droite g qui passe par R et par le point commun à s et à la polaire r de R par rapport à K^2; réciproquement, si S^2 est la conique qui a un contact du troisième ordre avec K^2 en S et qui touche une droite donnée g, le point de contact avec g est l'intersection de cette droite avec la polaire du point (gs) par rapport à K^2. Il s'ensuit que les deux problèmes : décrire la conique ayant un contact du troisième ordre avec K^2 en un point donné S et qui passe par un point donné ou touche une droite donnée, se ramènent immédiatement l'un à l'autre; le deuxième peut d'ailleurs se résoudre par la construction corrélative à celle donnée pour le premier.

Remarque. — On peut trouver une parabole ayant un contact du troisième ordre avec une conique donnée K^2 en un point donné S : son axe est parallèle à la droite qui joint S au centre M de K^2, et les deux tangentes de K^2 parallèles a SM vont couper la corde conjuguée au diamètre SM et menée par le centre du segment SM en deux points de la parabole (*).

24. *Décrire les coniques qui ont un contact du troisième ordre avec une conique donnée et passent par deux points donnés.*

Soient K^2 la conique, R et A les points donnés; si l'on mène par A une droite arbitraire h, la droite RA coupera la conique H^2 qui correspond à h, en deux points A_1, A_2 : les tangentes menées à K^2 par ces deux points sont les cordes de contact des *quatre* coniques cherchées. En effet, les coniques menées par R

(*) Voir Beyel, *Ueber Oskulation und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten*, dans la Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftliche Untersuchungen, t. XIX, pp. 489 à 496. On trouvera des exercices analytiques sur le contact du troisième ordre des coniques dans la thèse de M. Th. Schindler : *Mehrpunktige Berührung eines Kreises mit Kegelschnitten.* (Marburg, 1882.)

et ayant avec K^2 un contact de troisième ordre en un point variable S, coupent une droite fixe h en des couples de points A, B dont les projections, faites à partir de R sur la droite variable s, tangente à K^2 en S, engendrent la courbe H^2; les deux droites s et RA vont donc se couper sur H^2, et les tangentes menées à K^2 par ce point d'intersection sont deux des cordes de contact cherchées.

Remarque. — Les deux points A_1, A_2 divisent harmoniquement le segment RA et la conique K^2; ils forment donc le couple correspondant à A dans la transformation $[K^2, R]$; on retombe ainsi sur la construction donnée par Chasles (*). Si nous prenons pour h une des tangentes de K^2 issues du point A, la conique H^2 est formée (§ 3) par les deux droites qui unissent le point de contact de la tangente aux points d'intersection de K^2 avec la polaire de R par rapport à K^2; les intersections de ces droites avec RA sont A_1 et A_2.

Cas particuliers. — *a*) Si R et A sont les points circulaires à l'infini de π, A_1 et A_2 deviennent les points à l'infini des axes de K^2 : il y a donc quatre cercles qui ont un contact quartiponctuel avec K^2 aux quatre sommets de cette courbe.

b) Soit A'RB un triangle circonscrit à K^2; appelons R' le point de contact du côté A'R et S la seconde intersection de K^2 avec R'B : la conique ayant un contact quartiponctuel avec K^2 et menée par les points A', R touche K^2 en S. On vérifie que la conique ayant un contact du troisième ordre avec K^2 en S et menée par R, passe aussi par A', en observant que le point d'intersection de la tangente en S avec A'R est conjugué harmonique de R' par rapport à R et A' (§ 25).

c) Si K^2 est un cercle dont le centre est R, nous avons le théorème suivant : *Étant donnés deux cercles orthogonaux* K^2 *et* H^2, *si l'on mène par le centre* R *de* K^2 *un rayon arbitraire*

(*) *Loc. cit.*, § 497, III. La construction à laquelle, par des considérations différentes, parvient M. Beyel dans sa note : *Vier Aufgaben über drei- und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten* (Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., t. XXXI, p. 123) est aussi identique à celle donnée par Chasles.

coupant leur axe radical en A *et* H^2 *aux points* A_1A_2, *les tangentes menées à* K^2 *par ces derniers points sont les cordes de contact des coniques qui ont un contact quartiponctuel avec* K^2 *et passent par les points* A *et* R. (*M.*, § 9.)

25. *Décrire les coniques qui ont un contact du troisième ordre avec une conique donnée* K^2, *passent par un point* R *et touchent une droite* h.

Les tangentes communes à K^2 et à la conique H^2, qui correspond à h dans la transformation $[K^2, R]$, sont les cordes de contact des quatre coniques cherchées. En effet, soit S^2 une conique satisfaisant à la question, et appelons θ son point de contact avec h, T son point de contact avec K^2, et t la tangente au point T : les coniques qui ont avec K^2 un contact quartiponctuel et passent par R, coupent h en des couples de points qui sont projetés à partir du point R sur les tangentes correspondantes, suivant des couples de points qui appartiennent à H^2; les deux intersections de S^2 avec h étant réunies en θ, H^2 touche t au point commun à cette droite et à la droite $R\theta$. On obtient donc les points de contact de h avec les quatre coniques cherchées, en projetant à partir de R sur h les points de contact de H^2 avec les tangentes communes à H^2 et K^2.

Autrement. H^2 est l'enveloppe des cordes de contact des coniques bitangentes à K, menées par R et tangentes à h ; K^2 est l'enveloppe des cordes de contact des coniques qui ont avec K^2 un contact quartiponctuel et passent par R. Donc les quatre rayons communs à ces deux enveloppes sont les cordes de contact des coniques cherchées.

Cas particuliers. — *a*) En prenant pour K^2 un cercle dont R est le centre, nous avons le théorème suivant : *Il y a en général quatre coniques qui ont un contact quartiponctuel avec un cercle donné, passent par son centre et touchent une droite donnée; les cordes de contact sont les tangentes communes au cercle donné et au cercle qui le coupe orthogonalement sur la droite donnée.* (*M.*, § 17.)

b) Si nous prenons pour K^2 un cercle ayant H pour centre.

ce qui revient à rejeter la droite h à l'infini, nous trouvons que *les points où un cercle touche les paraboles qui ont avec lui un contact quartiponctuel et passent par un point donné* R, *sont ses points de contact avec les tangentes qu'il a en commun avec le cercle qui lui est orthogonal et a* R *pour centre.* (*M.*, § 19.) On peut ajouter que les rayons qui projettent à partir de R les quatre points où H^2 est touchée par les tangentes communes, sont parallèles aux axes des quatre paraboles.

26. Le problème résolu ci-dessus (§ 25) peut aussi être énoncé et résolu d'une manière corrélative comme il suit : les quatre points communs à K^2 et à la conique h^2 qui correspond à H dans le réseau tangentiel (h^2), sont les points de contact des coniques ayant avec K^2 un contact du troisième ordre, qui touchent r et passent par H.

Cas particuliers. — *a*) Si r est une directrice d'une conique K^2 ayant H pour centre, nous avons le théorème suivant : *Les coniques menées par le centre d'une conique* K^2 *et ayant avec elle un contact quartiponctuel en ses points d'intersection avec le cercle* h^2 *qui a son centre en un foyer* R *de* K^2 *et touche les asymptotes de cette courbe, touchent la directrice correspondante au foyer* R. (*M.*, § 16.)

b) Si nous prenons pour K^2 un cercle dont le centre est R, on retombe sur le théorème *b*) du paragraphe précédent (*).

27. *Décrire les coniques qui ont un contact du troisième ordre avec une conique donnée* K^2, *et touchent deux droites données* r *et* a.

Prenons sur la droite donnée a un point arbitraire H, et soit h^2 la conique qui correspond à H dans le réseau (h^2) : les tangentes a_1 et a_2 menées à h^2 par le point (ra) vont couper K^2 aux quatre points de contact des coniques cherchées.

(*) En effet, h^2 est l'hyperbole polaire réciproque par rapport au cercle K^2, du cercle H^2 orthogonal à K^2 et ayant H pour centre ; les points de contact avec K^2 des tangentes communes à K^2 et H^2 coïncident avec les points communs à K^2 et h^2.

Remarque. — Les droites a_1 et a_2 sont les rayons doubles de l'involution quadratique définie par le couple ra et par le couple des tangentes de K^2 issues du point (ra).

Cas particulier. — En prenant pour r et a deux droites isotropes, nous avons le théorème suivant : *il y a quatre coniques qui ont un contact quartiponctuel avec une conique donnée et dont un foyer est le point donné* $F \equiv (ra)$; *les bissectrices des angles formés par les tangentes de* K^2 *issues du point* F *coupent* K^2 *aux points de contact.* (*M.*, § 4.)

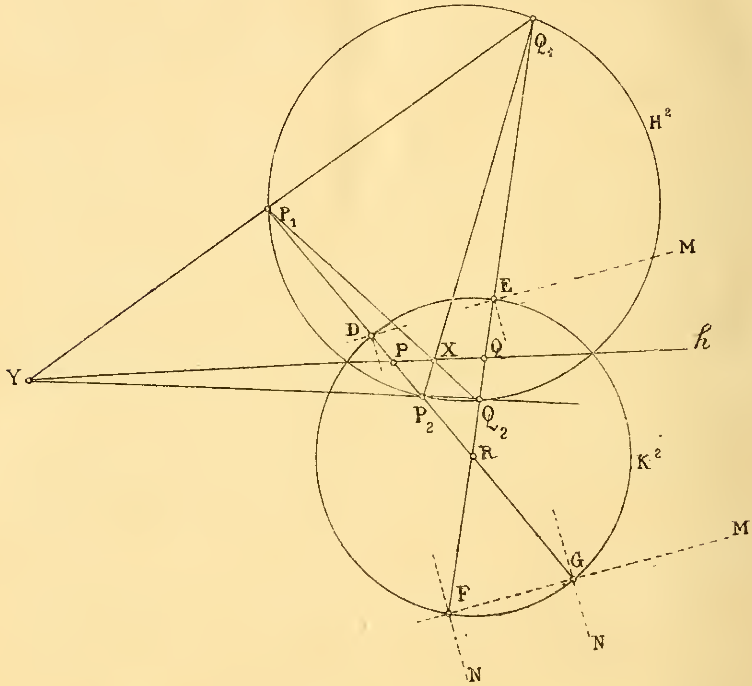
28. — *Décrire les coniques qui passent par trois points donnés, et qui ont un double contact avec une conique donnée* (*).

Soient K^2 la conique donnée, P, Q et R les trois points donnés, H^2 la conique qui, dans le réseau (H^2), correspond à la droite $PQ \equiv h$: les droites PQ et QR coupent H^2 respectivement aux deux couples de points P_1 et P_2, Q_1 et Q_2; les droites P_1Q_1, P_2Q_2, P_1Q_2, P_2Q_1 qui unissent un point du premier couple à un point du second, sont les cordes de contact des *quatre* coniques cherchées. En effet, comme les points P et Q correspondent respectivement à P_1 et Q_1 dans la transformation $\{K^2, R\}$, la conique menée par R et ayant un double contact avec K^2 sur la droite P_1Q_1 passe par les deux points P et Q (voir § 13).

Remarque. — Les deux points P_1 et P_2 divisent harmoniquement K^2 et le segment PR; de même Q_1Q_2 est le couple correspondant à Q dans la transformation $[K^2, R]$. La solution donnée ci-dessus revient donc à une construction indiquée par Chasles

(*) Ce problème peut aussi être énoncé comme il suit : *Étant donnés le contour apparent et les projections de trois points d'une surface du deuxième ordre, déterminer la projection de la ligne d'intersection de la surface avec le plan mené par les trois points.* Pour une solution des problèmes 28 à 31 par la géométrie solide, nous renvoyons à l'ouvrage de M. Chr. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1884-1887, Bd. II, pp. 108 à 110 et 122 à 124), où l'on trouvera aussi une discussion approfondie (pp. 110 à 122) du problème de déterminer les axes d'une conique bitangente à une conique donnée et menée par trois points donnés.

(*loc. cit.*, § 497, V). En appelant X et Y les deux points qui, avec R, forment le triangle diagonal du quadrangle complet $P_1P_2Q_1Q_2$, il est clair qu'ils sont séparés harmoniquement par PQ et par K^2. Soient maintenant E et F, D et G les points où K^2 est coupée respectivement par les droites RQ et RP : on



démontre aisément que les deux cordes de contact passant par X (ou par Y) sont harmoniquement séparées par les deux points formant avec R le triangle diagonal du quadrangle complet DEFG; or, comme les deux cordes de contact indiquées sont aussi séparées harmoniquement par R et h, il résulte de là une autre manière de résoudre le problème proposé (*).

(*) Comparer Steiner-Schröter, *Vorlesungen*, 2e édition, pp. 345 à 346. Voir aussi F. Hofmann, *Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken*, p. 28 (Leipzig, Teubner, 1886); ce livre est presque entièrement consacré à la discussion de ce problème.

Cas particuliers. — *a*) Si K^2 est un cercle et si les points P, Q sont rejetés à l'infini, la conique H^2 devient le cercle ayant R pour centre et orthogonal à K^2; les droites PR et QR coupent H^2 aux sommets d'un rectangle dont les côtés sont les cordes de contact de K^2 avec les coniques bitangentes à K^2 et menées par R, dont P et Q sont les directions des asymptotes. Réciproquement, étant donnés deux cercles orthogonaux, les côtés d'un rectangle arbitrairement inscrit à l'un d'eux, sont les cordes de contact des quatre hyperboles bitangentes à l'autre, menées par son centre et dont les asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle.

b) En prenant pour P et Q les deux points circulaires à l'infini, H^2 a R pour centre, est homothétique à K^2 et touche en R' et R'', intersections de K^2 avec la polaire de R par rapport à K^2, les droites qui unissent ces points au centre H de K^2. Les droites isotropes issues de R coupent H^2 aux quatre points P_1, P_2, Q_1, Q_2 qui, unis par couples comme précédemment, fournissent les cordes de contact de K^2 avec quatre cercles menés par R et bitangents à K^2.

c) Si K^2 est un cercle ayant R pour centre, H^2 devient le cercle coupant K^2 orthogonalement sur la droite PQ. Appelons P_1, P_2 et Q_1, Q_2 les intersections respectives des droites RP et RQ avec H^2 : les droites P_1Q_1, etc., sont les cordes de contact des coniques bitangentes à K^2, passant par R et par les points P et Q. (*M.*, § 5.)

29. *Décrire les coniques tangentes à trois droites données* p, q, r *et ayant un double contact avec une conique donnée* K^2.

Appelons p_1, p_2 et q_1, q_2 les tangentes menées respectivement par les points (pr) et (qr) à la conique h^2 qui correspond au point $H \equiv (pq)$ dans le réseau tangentiel (h^2); les points (p_1q_1), (p_1q_2), (p_2q_1) et (p_2q_2) sont les pôles de contact des coniques cherchées. Les deux rayons p_1, p_2 divisent harmoniquement K^2 et l'angle (rp).

Cas particuliers. — *a*) Il y a quatre paraboles qui touchent deux droites données (ou qui ont pour foyer un point donné) et sont bitangentes à une conique donnée; les pôles de contact sont les sommets d'un parallélograme circonscrit à la conique h^2 qui correspond au point commun aux deux droites données, et ayant ses côtés parallèles à ces droites.

b) Si r est à l'infini et si p, q sont les deux droites isotropes issues du point H, les asymptotes de h^2 sont les tangentes de K^2 issues de H, et h^2 touche les asymptotes de K^2 aux points communs à cette courbe et à la polaire h de H par rapport à elle; les tangentes menées à h^2 par les points (pr) et (qr) se coupent aux foyers de h^2, qui sont donc les pôles de contact des quatre paraboles bitangentes à K^2 et ayant H pour foyer.

c) Si l'on prend pour K^2 un cercle ayant R pour centre, la conique h^2 transformée de H, a ce point pour centre, R pour foyer, et les tangentes de K^2 issues de H pour asymptotes : R et l'autre foyer réel de h^2 sont les pôles de contact des deux paraboles réelles qui ont H pour foyer et sont bitangentes à K^2; les deux autres paraboles (imaginaires de la deuxième espèce) qui résolvent la question, ont leur pôle de contact aux deux foyers imaginaires de h^2. (*M.*, § 7.)

30. *Décrire les coniques qui ont un double contact avec une conique donnée* K^2, *passent par un point donné* R *et touchent deux droites données* h_1, h_2.

Les tangentes communes aux coniques H_1^2 et H_2^2 qui correspondent respectivement à h_1 et h_2 dans le réseau (H^2), sont les cordes de contact des quatre coniques cherchées. En effet, H_1^2 et H_2^2 sont les enveloppes des cordes de contact des coniques bitangentes à K^2, menées par R et touchant respectivement les droites h_1 et h_2 (§ 17, *a*).

Cas particulier. — Si K^2 est un cercle ayant son centre en R, nous avons le théorème suivant : *Soient* H_1^2, H_2^2 *deux cercles qui coupent à angle droit un troisième cercle* K^2, *respectivement sur les deux droites arbitraires* h_1 *et* h_2; *les tangentes communes aux deux premiers cercles sont les cordes de contact des coniques bitangentes à* K^2, *menées pas le centre de cette courbe, et tangentes à* h_1 *et* h_2.

31. *Décrire les coniques bitangentes à une conique donné* K^2, *qui passent par deux points donnés* H_1, H_2 *et touchent une droite donnée* r.

Appelons h_1^2, h_2^2 les coniques qui correspondent respectivement aux points H_1 et H_2 dans le réseau (h^2) : les pôles de contact des quatre coniques cherchées sont les points communs à h_1^2 et h_2^2.

32. *Décrire les coniques bitangentes à une conique donnée* K^2, *qui passent par un point donné* R, *et touchent une droite* h *en un point donné* P.

La droite RP coupe la conique H^2, qui correspond à h dans le réseau (H^2), en deux points P_1, P_2; les tangentes à H^2 en ces points sont les cordes de contact des coniques cherchées. En effet, H^2 est l'enveloppe des cordes de contact des coniques bitangentes à K^2, menées par R et tangentes à h (§ 17, a); le point de contact avec h de chacune de ces coniques est la projection, faite à partir de R sur h, du point où la corde de contact touche H^2; donc, etc.

Remarque. — Les deux points P_1, P_2 où H^2 est coupée par la droite RP forment le couple correspondant à P dans la transformation $[K^2, R]$, c'est-à-dire qu'ils sont séparés harmoniquement par K^2 et par RP; on déduit de là la construction suivante : après avoir déterminé les deux points P_1 et P_2, prenons sur h le point Z conjugué de P par rapport à K^2; les droites ZP_1 et ZP_2 sont les cordes de contact des deux coniques cherchées. En général, si h touche une courbe C^n au point P, la conique H^2, transformée de h, touche la courbe H^{2n}, transformée de C^n dans la même transformation $[K^2, R]$, aux points P_1, P_2, et les tangentes de H^{2n} en ces points sont les droites qui les joignent avec le point de h qui est le conjugué de P par rapport à K^2.

Cas particuliers. — a) Si h est à l'infini, H^2 est homothétique

(*) On trouve des exercices analytiques sur les coniques menées par deux points fixes et bitangentes à une conique donnée dans la thèse de M. E. Geis, *Untersuchung des Systemes der Kegelschnitte, welche durch zwei feste Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren.* (Marburg, 1882.)

à K^2, a R pour son centre et touche en R′ et R″ les droites HR′ et HR″ (§ 28, *b*) : il suit de là que les tangentes menées à H^2 aux extrémités P_1 et P_2 d'un diamètre arbitraire, sont les cordes de contact des deux paraboles bitangentes à K^2, menées par R et dont les axes sont parallèles au diamètre P_1P_2.

b) Si K^2 est un cercle, *h* étant toujours à l'infini, nous avons le théorème suivant : *Étant donnés deux cercles orthogonaux* K^2 *et* H^2, *les tangentes menées à l'un d'eux aux extrémités d'un diamètre quelconque* P_1P_2 *sont les cordes de contact avec l'autre cercle des deux paraboles qui passent par le centre du premier, et dont les diamètres sont parallèles à la droite* P_1P_2. (*M.*, § 10.)

33. *Décrire les coniques bitangentes à* K^2 *qui touchent une droite* r, *et passent par un point* H *donné sur une tangente* p.

Les deux points de contact des tangentes menées par le point (*rp*) à la conique h^2 qui correspond au point H dans le réseau tangentiel (h^2), sont les pôles de contact des coniques cherchées; ces deux tangentes divisent harmoniquement la conique K^2 aussi bien que l'angle (*rp*); donc, etc.

Cas particulier. — Si K^2 a H pour centre et si R est un de ses foyers, h^2 devient le cercle ayant R pour centre et tangent aux asymptotes de K^2; on en conclut que, *si* p *et* p′ *sont deux diamètres de* K^2 *conjugués par rapport au cercle* h^2 *qui a son centre en un foyer* R *de* K^2 *et touche les asymptotes de cette courbe, les deux points communs à* h^2 *et* p′ *sont les pôles de contact des coniques bitangentes à* K^2, *qui touchent* p *au point* H, *et en outre la directrice* r *de* K^2 *correspondant au foyer* R.

34. *Décrire les coniques qui sont tangentes à une conique donnée* K^2 *en un point donné* A *et en un autre point non déterminé, et qui passent par deux points donnés* R *et* P.

La droite RP coupe la conique H^2 qui correspond à la droite $AP \equiv h$, en deux points P_1 et P_2; les droites AP_1, AP_2 sont les cordes de contact des coniques cherchées. En effet, si S^2 est une conique satisfaisant à la question, sa corde de contact coupera H^2 en deux points dont les projections sur *h*, faites à partir du point R, appartiennent à S^2 : un de ces deux points est A, donc l'autre est un des deux points P_1, P_2, qui, par conséquent, appartiennent à H^2.

Remarque. — Les deux points P_1, P_2 sont conjugués par rapport à K^2 et divisent harmoniquement le segment RP; ils forment donc le couple correspondant à P dans la transformation $[K^2, R]$.

Cas particulier. — Si K^2 est un cercle dont R est le rayon, nous avons le théorème suivant : *Étant donnés deux cercles orthogonaux* K^2 *et* H^2, *si par le centre* R *de* K^2 *on mène un rayon arbitraire coupant* H^2 *aux points* P_1, P_2 *et l'axe radical* h *en* P, *les droites non isotropes* P_1A *et* P_2A *qui unissent les points* P_1 *et* P_2 *avec l'un des deux points communs aux deux cercles, sont les cordes de contact des coniques qui passent par* R *et* P *et touchent* K^2 *en* A *et en un autre point.* (*M.*, § 11.)

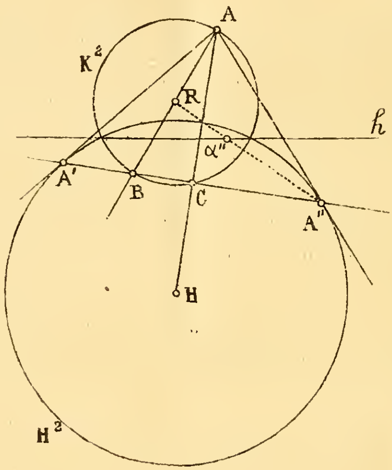
35. *Décrire les coniques tangentes à une conique donnée* k^2 *en un point donné* A *et en un second point indéterminé, et tangentes à deux droites* r *et* p.

Menons la tangente a en A. Les tangentes p_1, p_2 menées du point (rp) à la conique h^2 qui correspond au point (pa), coupent a en deux points qui sont les pôles de contact des coniques cherchées; ces pôles de contact sont donc les points où a est rencontrée par les deux droites qui divisent harmoniquement k^2 et l'angle (rp).

Cas particulier. — En supposant que r, a et p soient respectivement une directrice, une asymptote et un diamètre arbitraire de k^2, le point (pa) sera le centre de k^2, et h^2 devient le cercle qui a pour centre le foyer correspondant à r et touche les asymptotes de k^2; donc : *Si par un point* M *arbitrairement pris sur une directrice* r *d'une conique* k^2, *on mène les tangentes au cercle* h^2, *ayant sont centre au foyer correspondant et touchant les asymptotes, ces tangentes coupent une asymptote* a *aux pôles de contact des coniques qui ont* a *pour asymptote, touchent* K^2 *en un autre point, et sont aussi tangentes à* r *et au diamètre mené par* M. (*M.*, § 12.)

36. *Décrire les coniques qui touchent une conique donnée* K^2 *en un point donné* A *et en un autre point non déterminé, passent par un point* R *et touchent une droite* h.

Les tangentes menées par A à la conique H^2, transformée de la droite h, sont les cordes de contact des coniques cherchées.



En effet, H^2 est l'enveloppe des cordes de contact des coniques bitangentes à K^2, passant par R et tangentes à h.

Remarque. — La droite qui unit les points B et C où K^2 est coupée une seconde fois par les droites AR et AH, est la polaire de A par rapport à H^2 (§ 1); par conséquent, cette droite BC coupe H^2 en deux points A′ et A″ qui sont projetés à partir du point A suivant les cordes de contact cherchées. Les points A′ et A″ sont les projections, faites de R sur la droite BC, des points α' et α'' où la droite h coupe la conique passant par R et bitangente à K^2 aux points B et C; α' et α'' sont les points de contact avec h des coniques cherchées.

Cas particuliers. — *a*) Si K^2 est un cercle dont R est le centre, nous avons le théorème : *Étant donnés deux cercles orthogonaux, les tangentes menées par un point arbitraire* A *du premier au second, sont les cordes de contact des coniques qui touchent le* *premier cercle en* A *et en un autre point, qui passent par son centre et touchent l'axe radical des deux cercles.* (*M.*, § 15.)

b) En prenant pour A un des points de contact de K^2 avec les tangentes communes à deux cercles orthogonaux K^2 et H^2, l'on retombe sur le théorème du § 25, *a*

c) Si *h* est la droite à l'infini du plan de K^2, et si cette conique est un cercle, H^2 devient le cercle ayant R pour centre et orthogonal à K^2. On en conclut que *toute conique menée par le centre d'un cercle et bitangente à un cercle orthogonal sur une tangente du premier, est une parabole.* (*M.*, § 18.)

d) En prenant pour K^2 un cercle dont H est le centre, et pour A un des points de contact de K^2 avec une tangente commune à cette courbe et à un cercle orthogonal H^2, on retombe sur le théorème du § 25, *b*.

37. On peut aussi énoncer et résoudre le problème du paragraphe précédent, d'une manière corrélative, comme il suit : les points d'intersection de la droite *p* avec la conique h^2, qui correspond au point H, sont les pôles de contact de K^2 avec les deux coniques, qui touchent cette courbe sur une droite donnée *p* et sur une autre droite non déterminée, qui passent par H et touchent *r*.

Cas particulier. — Si k^2 a le point H pour centre et si *r* est la directrice correspondante à son foyer R, le cercle h^2, qui a son centre en R et touche les asymptotes de k^2, rencontre une droite arbitraire *p* aux pôles de contact des coniques, qui touchent k^2 sur la droite *p* et en un autre point, passent par H et touchent la directrice *r*. (*M.*, § 15.)