Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 17

Aufgabe 17.1. Es sei X ein topologischer Raum, der nur aus endlich vielen Elementen bestehe. Zeige, dass X kompakt ist.

Aufgabe 17.2. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 17.3.*

Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Zeige, dass Y ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 17.4. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 17.5. Zeige auf möglichst viele Arten, dass der Raum

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 17.6. Es seien X und Y kompakte topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum $X \times Y$ kompakt ist.

Aufgabe 17.7. Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß aus dem Satz von Heine-Borel.

Aufgabe 17.8. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und versehen sie mit der diskreten Metrik. Zeige, dass $\mathbb{N}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 17.9. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild von f homöomorph zu einem offenen, einem halboffenen, einem abgeschlossenen Intervall oder zu S^1 ist.

Aufgabe 17.10. Es sei
$$f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild von f homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall ist.

Aufgabe 17.11. Es sei $V \neq 0$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass V nicht kompakt ist.

Aufgabe 17.12. Zeige, dass ein total beschränkter metrischer Raum beschränkt ist.

Aufgabe 17.13. Zeige, dass eine Teilmenge $T \subseteq M$ eines total beschränkten metrischen Raumes M wieder total beschränkt ist.

Aufgabe 17.14. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes gleichseitiges Dreieck (gemeint ist die Fläche mit Rand) mit Seitenlänge 2. Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen mit Radius 1, mit denen man T überdecken kann.

Aufgabe 17.15. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein offenes gleichseitiges Dreieck (gemeint ist die Fläche ohne den Rand) mit Seitenlänge 2. Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen mit Radius 1, mit denen man T überdecken kann.

Aufgabe 17.16. Wir betrachten den abgeschlossenen Ball
$$X = U((0,0),1) \subseteq \mathbb{R}^2.$$
Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen $U(P_i, 1)$, mit der man X überdecken kann.

Aufgabe 17.17. Man gebe ein Beispiel für einen vollständigen beschränkten metrischen Raum M, der nicht total beschränkt ist.

Aufgabe 17.18.*

Es sei $T \subseteq M$ eine total beschränkte Teilmenge in einem metrischen Raum M. Zeige, dass auch der Abschluss $\overline{T}$ total beschränkt ist.

Aufgabe 17.19. Zeige, dass für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Konzepte beschränkt und total beschränkt zusammenfallen.

Aufgabe 17.20. Es sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Zeige, dass X eine abzählbare Basis besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 17.22. (4 Punkte)

Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 17.23. (4 Punkte)

Untersuche die folgenden Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$ auf Vollständigkeit, Beschränktheit und totale Beschränktheit.

(1) $T = \mathbb{Z}$,
(2) $T =]0,1[$,
(3) $T = \mathbb{Q}$,
(4) $T =]0,1[\cap \mathbb{Q}$.

Aufgabe 17.24. (4 Punkte)

Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y. Es sei X kompakt. Zeige, dass φ gleichmäßig stetig ist.

Die Aufgabe zum Aufgeben

Aufgabe 17.25. (10 Punkte)

Wir betrachten den offenen Ball

$$X = U((0,0),2) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen $U(P_i, 1)$, mit der man X überdecken kann.

Abbildungsverzeichnis