Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 42

Übungsaufgaben

Aufgabe 42.1. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 42.2. Berechne zum Vektorfeld

$$F\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto F(t,x,y) = \begin{pmatrix} x \sin t - \sin t \\ \frac{y}{t} + t^5 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 42.1 das transformierte Vektorfeld zur durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung φ. Bestimme die Lösungen zu diesem transformierten Vektorfeld.

Aufgabe 42.3. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.4. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.5. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.6. Bestimme alle Lösungen (für $t > 0$) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.7. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 42.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t) f_{22}(t) - f_{21}(t) f_{12}(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f_{11}' f_{22} - f_{12}' f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{11}' f_{12} + f_{12}' f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \\ \frac{f_{21}' f_{22} - f_{22}' f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{12} f_{21}' + f_{22}' f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

AUFGABE 42.9. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$$

eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Zeige, dass die einzige konstante Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ die Nulllösung ist.

AUFGABE 42.10.*

Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem auf $I \times \mathbb{R}^n$ (I ein reelles Intervall) mit einer Funktionenmatrix

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n},$$

wobei das zugrunde liegende Vektorfeld zugleich ein Zentralfeld sei. Zeige, dass die Matrix die Gestalt

$$M(t) = \varphi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Funktion

$$\varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

besitzt.

Aufgabe 42.11. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für alle $t \in I$. Zeige, dass $e^{\lambda t} \cdot u$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ ist.

Aufgabe 42.12. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein (konstanter) Eigenvektor von $M(t)$ zum (variablen, von t differenzierbar abhängigen) Eigenwert $\lambda(t)$. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda(t)t} \cdot u$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 42.13. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$$

eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ein (variabler, von t differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von $M(t)$ zum konstanten Eigenwert λ. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda t} \cdot u(t)$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 42.14. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $\varphi \colon V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass die transformierte Differentialgleichung auf W ebenfalls linear ist.

Aufgabe 42.15. Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2-1 & t^3+t+2 \\ t+3 & t^2+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bis zur fünften Ordnung.

Aufgabe 42.16. Es sei M die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und D die Ableitung, aufgefasst als Operator[1]

$$D\colon M \longrightarrow M,\ f \longmapsto D(f) = f'.$$

Zu einem Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, betrachten wir den Operator

$$P(D)\colon M \longrightarrow M,\ f \longmapsto (P(D))(f) = a_nD^n(f) + \cdots + a_2D^2(f) + a_1D(f) + a_0f.$$

Berechne $(P(D))(f)$ für $P = 2X^3 - 4X^2 + 7X - 3$ und $f = x^4, e^x, e^{2x}, \sin x$. Zeige, dass $P(D)$ eine lineare Abbildung auf M ist.

Aufgabe 42.17. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Differentialoperator $(D-\lambda)^n$ die Funktionen $x^je^{\lambda x}$ mit $0 \leq j < n$ auf die Nullfunktion abbildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.18. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2-3t+4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.19. (8 (2+6) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$ zu einer Lösung (x, y) erfüllen muss.

b) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

[1] Eine Abbildung, die Funktionen in Funktionen überführt, nennt man häufig Operator.

Aufgabe 42.20. (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für $t > 1$) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 42.8.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2} y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 42.21. (5 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*[2]

$$\frac{1}{2^n(n!)} ((t^2-1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

Aufgabe 42.22. (6 Punkte)

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^5 \\ t^6 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bis zur sechsten Ordnung.

[2]Hier bedeutet das hochgestellte (n) die n-te Ableitung.

Abbildungsverzeichnis