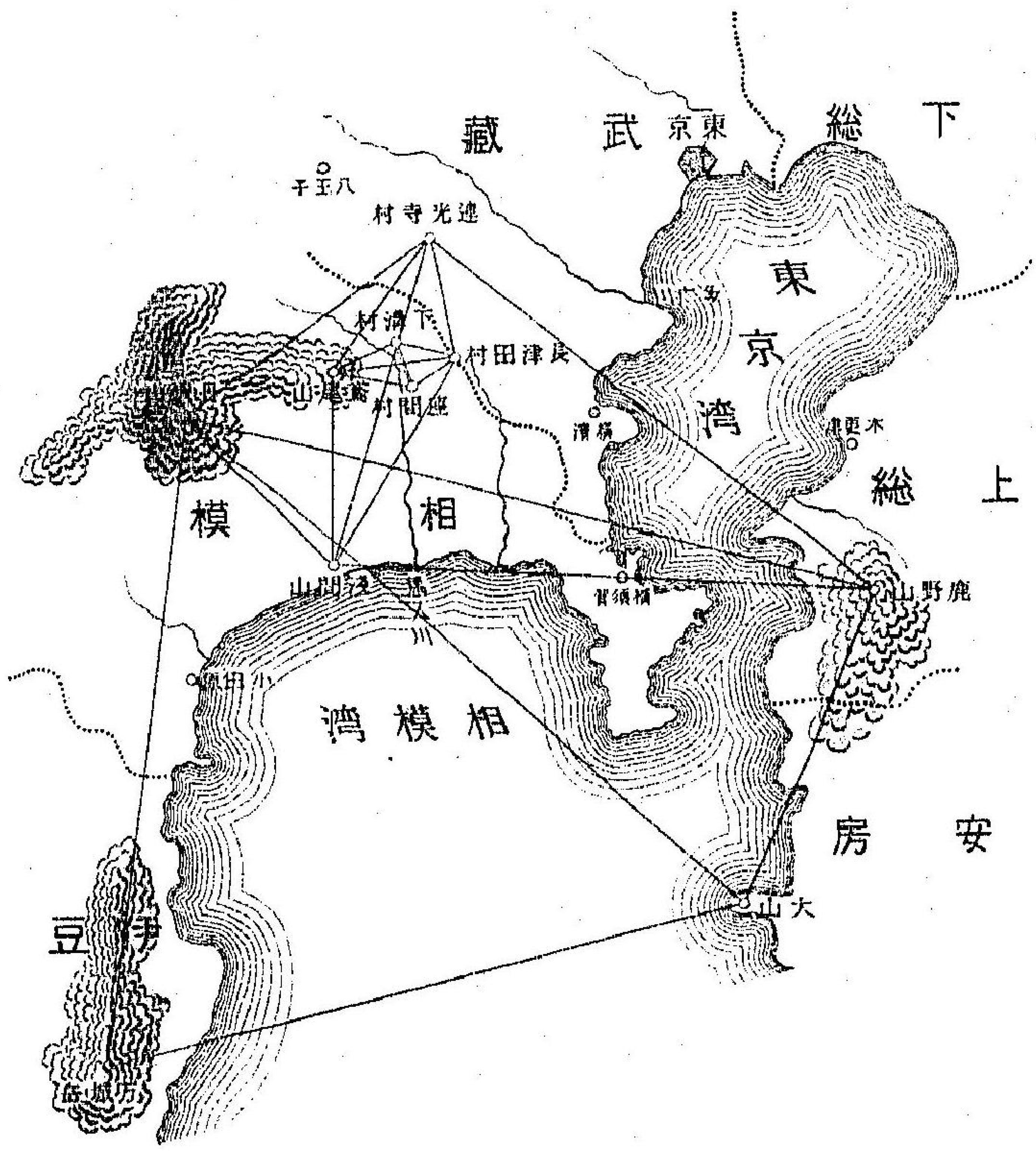
K. NAGASAWA'S

Trigonometry.

相模野基線附近一等三角網圖



[illegible]

三角法教科書

一

長澤龜之助

編纂

發行所

寶文館

實業教育

三角法教科書

長澤龜之助

編纂

發行所

寶文館

東京　大阪

序

本書ハ主トシテ府縣立公私農學校商船學校工業學校等ノ中學程度ノ實業學校ノ教科書ニ充テンガ爲ニ編纂セルモノニシテ之ガ爲ニハ各府縣公私實業學校ノ課程配當時間表現在使用ノ教科書表等ハ廣ク之ヲ參照シタルノミナラズ當該學校教員諸子ノ説ヲ要メテ又之ヲ考究セリ、

中學程度ノ實業學校ハ中學ニ比シ修業年限ノ短キコトト,又是等ノ學校ハ專門的學科ヲ課スルトノ二ツノ理由ヨリ數學ノ授業時間ハ中學校ニ比スレバ略ホ其ノ半數前後ニ過ギズ,故ニ是等ノ學校ニハ特種ノ教科書ヲ要スルコト勿論ナリ、

從來實業學校教科書ノ發行セルモノナキニアラズ,然レドモ第一授業時間ニ比スレバ實質過多ナルコト,第二偶實質ニシテ丁度時間ニ當テハマルモノハ程度アマリニ低キコト,第三趣味實用ニ乏シキコト,コレ主ナル缺點ナリ. 依リテ余ハ是等ノ點ニハ大ニ注意ヲ加ヘ從來ノ教科書ニ比スレバ幾層ノ改良ヲナシタル考ナリ,要ハ適良ノ實業學校教科書タ

ラシメンコトヲ期スルニアリ．委シクハ別冊編纂趣意書ヲ一讀セラレンコトヲ望ム、

國定敎科書共同販賣所發行ノ拙著新對數表ハ獨逸あなぐすとノ表ニ依リ嚴密ノ校正ヲ加ヘ一點ノ誤字ナカラシメ且袖珍本トシテ提携ニ便ナルヲ以テ中等學校ニ歡迎セラレタリ故ニ本書ニ附隨シテ新對數表ヲ採用セラレンコトヲ希望ス、

終ニ臨ミ實業學校敎員諸子ノ本書ニ對スル批評忠告ハ著者ノ深ク希望スル所ナリ、

明治四十一年十月　　編者識

目次

實業教育

三角法教科書

緒論

測角法

1. 測角法 幾何學ニ於テ2直角,或ハ直角ノ$\frac{2}{3}$ナドト云ヘルハ直角ヲ單位トシタルナリ.其ノ他如何ナル角ヲモ測角ノ單位トシテ取リ得レドモ實地ニ用ヒラルルハ**六十分法**ナリ.

2. 六十分法 此ノ測角法ニ於ケル單位ハ度分秒ナリ. 度トハ直角ノ九十等分ノ一,分トハ一度ノ六十等分ノ一,秒トハ一分ノ六十等分ノ一ヲ云フ. 度分秒ニハソレゾレ記號°,′,″ヲ用フ. 例ヘバ32度46分25秒ハ$32^\circ 46' 25''$ト記スルガ如シ.

例1. $63^\circ 14' 51''$ヲ度ニテ表ハセ.

茲ニ $51''=\frac{51'}{60}=\frac{17'}{20}=0'.85,$

而シテ　$14'51''=14'.85=\dfrac{14^\circ.85}{60}=0^\circ.2475,$

$\therefore\ 63^\circ 14' 51''=\underline{63^\circ.2475}.$

例 2. 一直角ノ3.467ヲ度分秒ニテ表ハセ.

茲ニ　$3^{\text{直角}}.467=90^\circ\times 3.467=312^\circ.03,$

而シテ　$0^\circ.03=60'\times 0.03=1'.8,$

及ビ　$0'.8=60''\times 0.8=48'',$

$\therefore\ 3^{\text{直角}}.467=\underline{312^\circ 1' 48''}.$

例題 I.

1. 直角ヲ單位トシテ次ノ各角ヲ表ハセ.

(I) 60°.　(II) $75^\circ 15'$.　(III) $63^\circ 17' 25''$.

2. 二直角ノ三十二分ノ一ヲ六十分法ニテ示セ.

3. 次ノ各角ニ於テ角ノ廻轉線ノ位置ヲ示セ.

(I) $\dfrac{4}{3}$直角.　(II) $3\dfrac{1}{2}$直角.　(III) $13\dfrac{1}{3}$直角.

4. 一直角ノ.0875ヲ度分秒ニテ表ハセ.

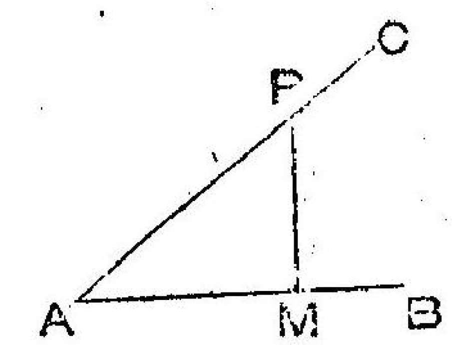
5. 時ノ$11\dfrac{1}{9}$分間ニ時計ノ時針,分針ノ經過シタル角ヲ度分秒ニテ表ハセ.

6. 三角形ノ一角ガ$80^\circ 12' 45''$ニシテ第二ノ角ハ第三ノ角ノ2倍ナルトキ未知ノ角ヲ問フ.

第一編

銳角の三角函數

3. 正弦餘弦正切　銳角BACノ一邊AC上ノ任意ノ點Pヨリ他ノ邊ABへ垂線PMヲ下ストキハ



比$\dfrac{PM}{AP}$,即チ$\dfrac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ヲ角Aノ**正弦**ト稱シ,$\sin A$ト記ス.

比$\dfrac{AM}{AP}$,即チ$\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ヲ角Aノ**餘弦**ト稱シ,$\cos A$ト記ス.

比$\dfrac{PM}{AM}$,即チ$\dfrac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ヲ角Aノ**正切**ト稱シ,$\tan A$ト記ス.

4. 一の角の正弦の平方と餘弦の平方との和は1に等し.

前款ノ圖ニ於テ直角三角形APMヨリ

$$\overline{PM}^2+\overline{AM}^2=\overline{AP}^2$$

此ノ各項ヲ$\overline{AP}^2$ニテ除スレバ

$$\left(\frac{PM}{AP}\right)^2+\left(\frac{AM}{AP}\right)^2=1,$$

卽チ $(\sin A)^2+(\cos A)^2=1.$

之ヲ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

ト記スルヲ常トス.

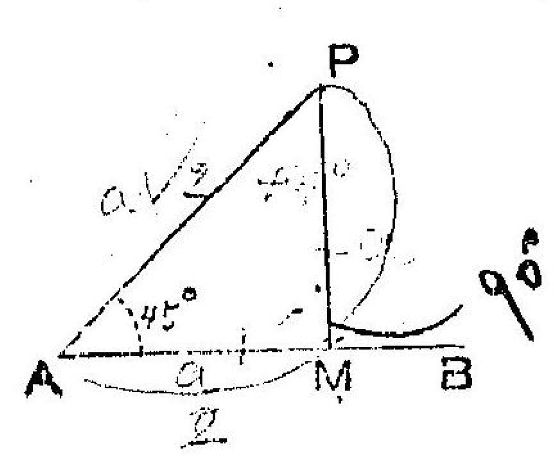
注意 $(\sin A)^m$, $(\cos A)^n$ ノ如キハソレゾレ之ヲ $\sin^m A$, $\cos^n A$ ト記スルヲ常トス.

5. 一の角の正切は其の角の正弦を餘弦にて除したるものに等し.

定義ニ依リ $\tan A=\frac{PM}{AM}=\frac{PM}{AP}\Big/\frac{AM}{AP}$,

卽チ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$

6. $\sin 45°$, $\cos 45°$ 及び $\tan 45°$.



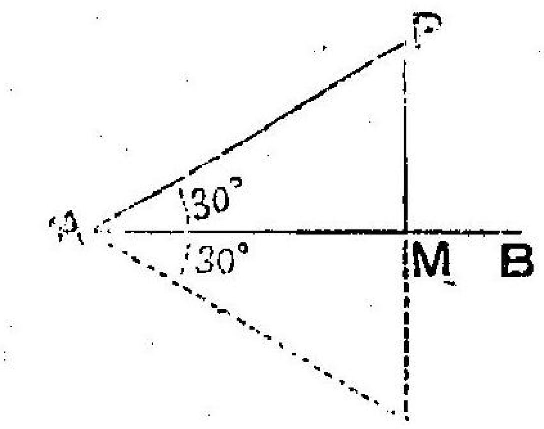
角 PAB=45° トシ, AM=a トスルトキハ幾何學ノ定理ニ依リ容易ニ PM=a, AP=$a\sqrt{2}$ ヲ知リ得可シ.

故ニ $\sin 45°=\frac{PM}{AP}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

及ビ $\cos 45°=\frac{AM}{AP}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

從ヒテ $\tan 45°=1.$

7. $\sin 30°$, $\cos 30°$ 及び $\tan 30°$.



角 PAB=30°, PM=a トスレバ幾何學ノ定理ニ依リテ容易ニ AP=$2a$, AM=$a\sqrt{3}$ ナルコトヲ知リ得可シ.

故ニ次ノ結果アリ.

$$\sin 30°=\frac{PM}{AP}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},$$

及ビ $\cos 30°=\frac{AM}{AP}=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

從ヒテ $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

8. $\sin 0°$, $\cos 0°$ 及び $\tan 0°$.

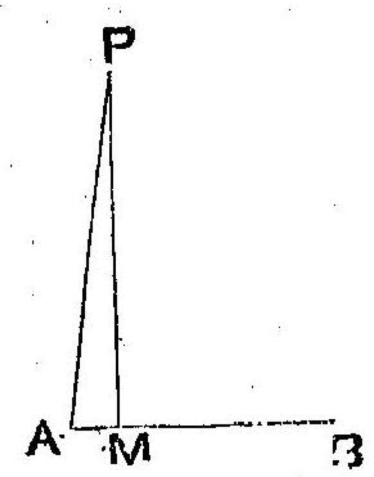
廻轉線 AP ガ極メテ少シバカリ廻轉シタルトキハ角 PAB ハ甚ダ小ナリ, 然ルトキハ PM ハ甚ダ小ニシテ, P ガ M ニ愈近迫スルニ從ヒ PM ハ愈小ニシテ AP, AM ハ愈近迫ス. 依リテ角 PAB ガ零ナルトキハ AP, AM ハ相合スルヲ以テ相等シク, PM ハ零ナリ. 依リテ

$$\sin 0°=\frac{PM}{AP}=\frac{0}{AP}=0.$$

$$\cos 0°=\frac{AM}{AP}=\frac{AP}{AP}=1.$$

$$tan0^\circ=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AM}}=\frac{0}{\mathrm{AP}}=0.$$

9. $sin90^\circ$, $cos90^\circ$ 及ビ $tan90^\circ$.



角 PAB ガ直角トナルトキハ點 M ハ點 A ト合シ, AM ハ零ニシテ PM ハ AP ニ等シ.

依リテ次ノ結果アリ.

$$sin90^\circ=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP}}=1,$$

$$cos90^\circ=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AP}}=\frac{0}{\mathrm{AP}}=0,$$

$$tan90^\circ=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{AP}}{0}=\infty.$$

例題 II.

1. 直角三角形ノ斜邊ガ 25 ニシテ他ノ一邊ガ 7 ナルトキ各銳角ノ正弦餘弦及ビ正切ヲ問フ.

2. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ 20, 21, 29 ナルトキ各銳角ノ正弦餘弦及ビ正切ハ如何.

3. $sin\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\,60^\circ=\frac{1}{2}$, 從ヒテ $tan\,60^\circ=\sqrt{3}$ ナルコトヲ圖解ニ依リテ證セヨ.

4. 次ノ各式ヲ證セヨ.

$$sin^2 30^\circ+sin^2 45^\circ+sin^2 60^\circ=\frac{3}{2}. \qquad tan^2 30^\circ+tan^2 45^\circ+tan^2 60^\circ=4\frac{1}{3}.$$

$$cos^2 0^\circ+cos^2 45^\circ+cos^2 90^\circ=\frac{3}{2}. \qquad sin30^\circ\,cos60^\circ+cos30^\circ sin60^\circ=1.$$

5. $\mathrm{A}=30^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ.

$$cos2\mathrm{A}=cos^2\mathrm{A}-sin^2\mathrm{A}=2cos^2\mathrm{A}-1=1-2sin^2\mathrm{A}.$$

6. 次ノ恒等式ヲ證セヨ.

(I) $(cos\mathrm{A}+sin\mathrm{A})^2+(cos\mathrm{A}-sin\mathrm{A})^2=2.$

(II) $cos^4\mathrm{A}-sin^4\mathrm{A}=cos^2\mathrm{A}-sin^2\mathrm{A},$

$$=2cos^2\mathrm{A}-1=1-2sin^2\mathrm{A}.$$

(III) $sin^3\mathrm{A}+cos^3\mathrm{A}=(sin\mathrm{A}+cos\mathrm{A})(1-sin\mathrm{A}cos\mathrm{A}).$

7. $sin\theta$ ヲ與ヘテ $cos\theta$ 及ビ $tan\theta$ ヲ求ムル式如何.

又 $sin\theta=\frac{11}{61}$ ナルトキ $cos\theta$ 及ビ $tan\theta$ ノ値ヲ問フ.

8. $cos\theta$ ヲ與ヘテ $sin\theta$ 及ビ $tan\theta$ ヲ求ムル式如何.

又 $cos\theta=\frac{9}{41}$ ナルトキ $sin\theta$ 及ビ $tan\theta$ ノ値ヲ問フ.

9. $tan\theta$ ヲ與ヘテ $sin\theta$ 及ビ $cos\theta$ ヲ求ムル式如何.

又 $tan\theta=\frac{3}{4}$ ナルトキ $sin\theta$ 及ビ $cos\theta$ ヲ求メヨ.

10. $8\,sin\theta=4+cos\theta$ ヨリ $sin\theta$ ヲ求メヨ.

10. 餘割正割餘切 3款ノ圖ニ於テ

比 $\frac{AP}{PM}$, 即チ $\frac{斜邊}{垂線}$ ヲ角Aノ**餘割**ト稱シ, $cosec A$ ト記ス.

比 $\frac{AP}{AM}$, 即チ $\frac{斜邊}{底邊}$ ヲ角Aノ**正割**ト稱シ, $sec A$ ト記ス.

比 $\frac{AM}{PM}$, 即チ $\frac{底邊}{垂線}$ ヲ角Aノ**餘切**ト稱シ, $cot A$ ト記ス.

依リテ 餘割正割餘切はそれぞれ正弦餘弦正切の逆數なり.

故ニ $cosec A=\frac{1}{sin A}$, $sec A=\frac{1}{cos A}$, $cot A=\frac{1}{tan A}$ ナルヲ以テ次ノ關係アリ.

$$sin A\, cosec A=1,\ cos A\, sec A=1,\ tan A\, cot A=1.$$

又5款ニ依リ $$tan A=\frac{sin A}{cos A}$$

ナルヲ以テ $$cot A=\frac{cos A}{sin A}.$$

例題 III.

1. $sin\theta$ ヲ與ヘテ $cosec\theta$, $sec\theta$ 及ビ $cot\theta$ ヲ求ムル式如何. 又 $sin\theta=\frac{12}{13}$ ナルトキ θ ノ餘弦正切餘割正割餘切ヲ求メヨ.

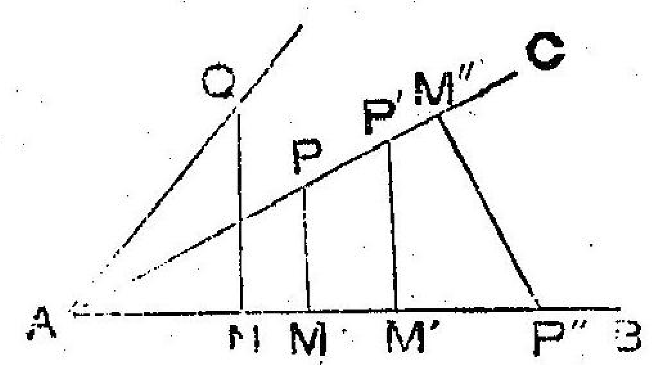
2. $cos\theta$ ヲ與ヘテ $cosec\theta$, $sec\theta$ 及ビ $cot\theta$ ヲ求ムル式如何. 又 $cos\theta=\frac{4}{5}$ ナルトキ θ ノ正弦正切餘割正割餘切ヲ求メヨ.

3. $tan\theta$ ヲ與ヘテ $cosec\theta$, $sec\theta$ 及ビ $cot\theta$ ヲ求ムル式如何. 又 $tan\theta=\frac{8}{15}$ ナルトキ θ ノ正弦餘弦餘割正割餘切ヲ求メヨ.

---

11. 三角函數 角ノ正弦餘弦正切餘割正割餘切ノ六ツヲ其ノ角ノ**三角函數**ト稱ス.

三角函數ハ唯ソノ角ノ大サノミニ關係シ邊ノ長短ニ關係ナシ. 例ヘバ角BACヲAトシ, 其ノ一邊AC上ニ任意ノ點P, P′ヲ取リ, 他ノ邊ABヘ垂線PM, P′M′ヲ下シ, 又AB上ノ任意ノ點P″ヨリACヘ垂線P″M″ヲ下ストキハ



$$sin A=\frac{PM}{AP}=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{P''M''}{AP''}$$

ニシテ角ノ邊ノ長サニ關係ナケレドモ, 若シ角Aガ變ジテQANトナルトキQNハABニ垂線ナリトセバ

$$sin A=\frac{QN}{AQ}$$

トナリ, 前ノ値ニ同ジカラズ.

此ノ理ハ他ノ三角函數ニ就キテモ亦同ジ.

12. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, 及び $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$.

4款ニ依リ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,

各項ヲ $\cos^2\theta$ ニテ除スレバ

$$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

即チ $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$,

同樣ニ $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$.

注意 是等ノ式ハ4款ノ如ク圖ニ依リテモ亦證明シ得可シ.

13. 三角函數の基本の關係式

コレマデ得タル三角函數ノ基本ノ關係式ヲ集ムレバ次ノ如シ.

$$\sin A\operatorname{cosec}A=1,\ \cos A\sec A=1,\ \tan A\cot A=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\ \cot A=\frac{\cos A}{\sin A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A,\ 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

例題 IV.

次ノ各式ヲ證セヨ[1 乃至 10].

1. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec}A.$

2. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A.$

3. $\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec}A.$

4. $(\cot A-1)^2+(\cot A+1)^2=2\operatorname{cosec}^2A.$

5. $\dfrac{\operatorname{cosec}A}{\operatorname{cosec}A-1}+\dfrac{\operatorname{cosec}A}{\operatorname{cosec}A+1}=2\sec^2A.$

6. $\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}=\dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}.$

7. $\dfrac{1}{\sec A-\tan A}=\sec A+\tan A.$

8. $\dfrac{1}{1+\tan^2A}+\dfrac{1}{1+\cot^2A}=1.$

9. $(\sin A+\cos A)(\cot A+\tan A)=\sec A+\operatorname{cosec}A.$

10. $\dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}+\dfrac{\cot A+1}{\cot A-1}=\dfrac{2}{\cos^2A-\sin^2A}.$

11. $\operatorname{cosec}\theta$ ヲ與ヘテ θ ノ他ノ總テノ三角函數ヲ求メヨ. 又 $\operatorname{cosec}A=3$ ナルトキ A ノ他ノ總テノ三角函數ヲ問フ.

12. $\sec\theta$ ヲ與ヘテ θ ノ他ノ總テノ三角函數ヲ求メヨ. 又 $\sec B=\dfrac{3}{2}$ ナルトキ B ノ他ノ總テノ三角函數ヲ問フ.

13. $\cot\theta$ ヲ與ヘテ θ ノ他ノ總テノ三角函數ヲ求メ

ヨ. 又 $cot\mathrm{C}=\frac{40}{9}$ ナルトキ C ノ他ノ總テノ三角函數ヲ問ス.

---

14. 餘角 幾何學ニ於テ直角ヨリ任意ノ鋭角ヲ減ジタル殘リヲ其ノ餘角ト云ヘリ. 例ヘバ A ノ餘角ハ 90°−A ナルガ如シ.

三角函數ノ中, 正弦正切正割ヲ 3 款及ビ 10 款ノ如ク定義シタル後ニ他ノ三角函數ハ次ノ如ク定義スルコトヲ得可シ.

或角の餘弦は其の餘角の正弦なり.
或角の餘切は其の餘角の正切なり.
或角の餘割は其の餘角の正割なり.

如何トナレバ 3 款ノ圖ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} cos\mathrm{A}&=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AP}}=sin\,\mathrm{APM}=sin(90°-\mathrm{A})\\ cot\mathrm{A}&=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{PM}}=tan\,\mathrm{APM}=tan(90°-\mathrm{A})\\ cosec\mathrm{A}&=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PM}}=sec\,\mathrm{APM}=sec(90°-\mathrm{A}) \end{aligned}\right\}\cdots\ \cdots\ (5)$$

ナレバナリ. 而シテ是等ノ結果ハ又次ノ如ク述ブルコトヲ得可シ.

或角の正弦は其の餘角の餘弦に等し.

或角の正切は其の餘角の餘切に等し.
或角の正割は其の餘角の餘割に等し.

15. 特別角の三角函數 前既ニ 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ノ正弦餘弦正切ヲ求メタリ, 依リテ是等ノ函數ノ逆數ヲ取リテ是等ノ角ノ餘割正割餘切ヲ求メ得可シ. 次ニ是等ヲ表ニテ示ス.

	sin.	*cos.*	*tan.*	*cosec.*	*sec.*	*cot.*
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	1	∞	0

表中肉太キ線ニテ圍ム函數ヲ記憶スレバ他ハ逆數及ビ餘角ノ關係ヨリ直チニ知リ得ラル可シ.

例題 V.

次ノ各方程式ヨリ θ ノ値ヲ求メヨ [1 乃至 6].

1. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$.　　2. $\cot\theta = \tan 3\theta$.

3. $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$.　　4. $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$.

5. $2\sin^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$.

6. $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$.

次ノ各式ヲ證セヨ[7乃至10].

7. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

8. (I) $\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$.

(II) $\frac{1-\sin 30^\circ}{1+\tan 45^\circ} = 1 - \cos^2 30^\circ$.

9. $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A) \tan(90^\circ - A) = \sin A$.

10. $\frac{\cot(90^\circ - A)}{\operatorname{cosec}^2 A} \cdot \frac{\sec A \cot^3 A}{\sin^2(90^\circ - A)} = \sqrt{\tan^2 A + 1}$.

第二編

直角三角形の解法幷に應用

16. 三角形の解法 三角形ハ凡テ三ツノ邊ト三ツノ角トノ六ツノ部分ヨリ成リ此ノ中,任意ノ三ツ[三ツノ角ヲ知レル場合ヲ除ク]ヲ知ルトキハ他ノ三ツヲ決定スルコトヲ得可シ,而シテ此ノ法ヲ**三角形ノ解法**ト稱ス.

本編ニ於テハ直角三角形ノ解法ノミヲ論ズ.

三角形ノ二ツノ角ヲ知ルトキハ他ノ一ツノ角ハ「三角形ノ三ツノ角ハ合セテ二直角ニ等シ」ト云フ事實ヨリ知リ得可シ. 直角三角形ニ於テハ其ノ一ツノ鋭角ヲ知ルトキハ他ノ鋭角ヲ求メ得ルナリ.

又幾何學ニ依リ直角三角形ハ其ノ任意ノ二邊ヲ知レルトキニ他ノ一邊ヲ求メ得可シ.

依リテ直角三角形ノ解法ニ四ツノ場合アリ,次ノ如シ.

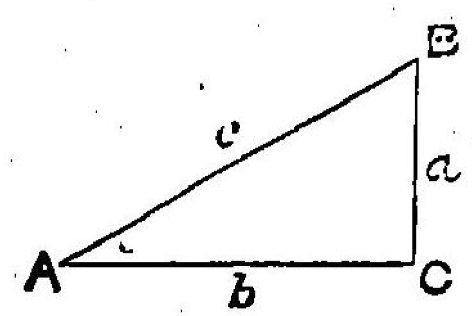
(I) 斜邊ト一ツノ鋭角トヲ知レルトキ.

(II) 一ツノ邊ト一ツノ鋭角トヲ知レルトキ.

(III)　斜邊ト一ツノ邊トヲ知レルトキ.

(IV)　二ツノ邊ヲ知レルトキ.

17.　ABCハCヲ直角トスル三角形ナリトシ,角A, B, Cニ對スル邊ヲソレゾレ a, b, c トス.



(I)　斜邊(c)及ビ一鋭角(A)ヲ知レルトキ.

此ノ場合ニハ　$B=90°-A,$

及ビ　$a=c\sin A,\qquad b=c\cos A.$

例　$c=12,\ A=30°.$

茲ニ　$B=90°-30°=60°.$

又　$\sin 30°=\frac{1}{2},\qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ナルヲ以テ　$a=12\times\frac{1}{2}=6,$

$$b=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

(II)　一鋭角(A)及ビ一邊(a)ヲ知レルトキ.

此ノ場合ニハ　$B=90°-A,$

及ビ　$b=a\cot A.\qquad c=a\,\mathrm{cosec}A.$

例　$A=34°50',\ a=20.$

茲ニ　$B=90°-34°50'=55°10'.$

三角函數表ヨリ　$b=20\times1.4370=28.74,$

$$c=20\times1.7507=35.01.$$

(III)　斜邊(c)及ビ一邊(a)ヲ知レルトキ.

此ノ場合ニハ　$b=\sqrt{c^2-a^2},$

及ビ　$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B.$

例　$c=97,\ a=65.$

茲ニ　$b=\sqrt{97^2-65^2}=\sqrt{(97+65)(97-65)}$

$$=\sqrt{162\times32}=\sqrt{81\times64}=9\times8=72.$$

及ビ　$\sin A=\frac{65}{97}=.67010,$

故ニ三角函數表ヨリ　$A=42°$[約],

從ヒテ　$B=48°$[約].

(IV)　二邊(a, b)ヲ知レルトキ.

此ノ場合ニハ　$\tan A=\frac{a}{b}$

ヨリAヲ求メ,然ル後

$$B=90°-A,\qquad c=a\,\mathrm{cosec}A.$$

例　$a=1, b=\sqrt{3}.$

茲ニ　$\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \therefore A=30°,$

從ヒテ　$B=90°-30°=60°,\quad c=1\times2=2.$

例題 VI.

次ノ各ノ場合ニ於テ直角三角形ABCヲ

解ケ[但 $C=90^\circ$ トス].

1. $c=8,\ A=60^\circ$.
2. $c=15,\ B=51^\circ 20'$.
3. $A=37^\circ 40',\ b=6.4$.
4. $B=63^\circ 10',\ b=24$.
5. $c=65,\ a=33$.
6. $a=95,\ b=168$.

18. 高さ及び距離の測量應用の簡單なる場合

18. 高さ及び距離の測量應用の簡單なる場合　高サ及ビ距離ノ測量ノ簡單ナル場合ニ直角三角形ノ解法ヲ應用スルヲ得可シ．此ノ目的ニ對シテ入用ノ主モナル器械ハ測鎖，**せをどらいと**[經緯儀]，**せきすたんと**[六分儀]，及ビ**とらんしっと**，等ナリ．測鎖ハ距離ヲ測ルニ用ヒ，せをどらいと，せきすたんと，及ビとらんしっとハ角ヲ測ルニ用フ．

先ヅ次ニ二三ノ定義ヲ示サン．

鉛垂線　垂錘ヲ吊シタル糸ヲ自由ニ釣下セル向キ

垂直線　鉛垂線ノ向キノ直線．

垂直面　垂直線ヲ含ム平面．

水平面　垂直線ニ直角ナル平面．

水平線　水平面上ノ線．

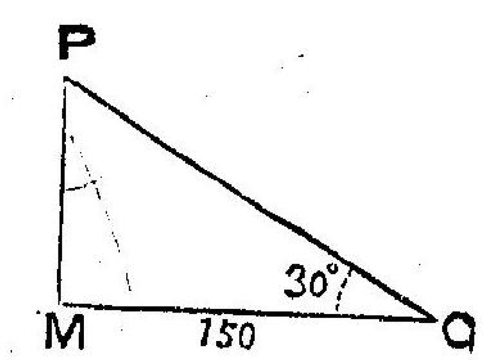
水平角　角ノ二邊ガ水平面上ニアルモノ．

垂直角　角ノ二邊ガ垂直面上ニアルモノ．

垂直角ノ一邊ガ水平ナルモノニ於テ他ノ一邊ガ上

ニ向フトキハ之ヲ**仰角**，下ニ向フトキハ之ヲ**俯角**ト云フ，仰角ハ又時トシテハ**高度**ト稱ス．

例 1.　水平面上直立セル旗竿ノ仰角ヲ測リシニ 30°，又測點ヨリ竿基マデノ距離 150 尺ナルトキ竿ノ高サ如何．



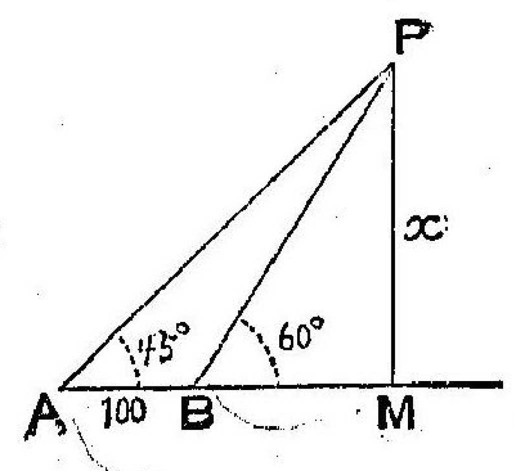
旗竿ヲ MP トシ，$OM=150$，及ビ $\widehat{MOP}=30^\circ$ トス．然ルトキハ $\widehat{PMO}$ ハ直角ナルユヱ $\dfrac{MP}{OM}=\tan MOP$ $=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore\ MP=\dfrac{OM}{\sqrt{3}}=\dfrac{150^{尺}}{\sqrt{3}}$

$$=50^{尺}\sqrt{3}=50^{尺}\times 1.7320\ldots\ldots=86^{尺}.6\ [約].$$

注意　本例ニ於テハ O ニ於ケル觀測者ノ眼ハ竿基ト同ジ水平面上ニアリト假定シタリ，然レドモ實際ニハ點 O ニ据ヱタル測器ノ中心ヲ含ム水平面ヨリノ高サナルガ故ニ此ノ結果ニ測器ノ中心ノ高サヲ加フルヲ要ス．

例 2.　水平面上ニ立ツ塔ノ高サヲ觀測セシニ仰角 45° ナリキ，然ルニ塔ニ向ヒテ歩ムコト 100 尺ニシテ仰角 60° トナレリ，依リテ塔ノ高サ及ビ始ノ測點ヨリ塔基ニ至ル距離ヲ問フ．

塔ノ頂ヲ P，二ツノ測點ヲ A, B トス．故ニ



AB=100尺, P ヨリ AB ノ延線ヘ垂線PM ヲ引キ, PM=x トス. 然ルトキハ $M\hat{A}P=45°$, $M\hat{B}P=60°$ ナルヲ以テ $\frac{AM}{x}=\cot 45°=1$,

及ビ $\frac{BM}{x}=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

依リテ AM=x, 及ビ BM=$\frac{x}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore\ 100=AM-BM=x-\frac{x}{\sqrt{3}}=x\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}},$$

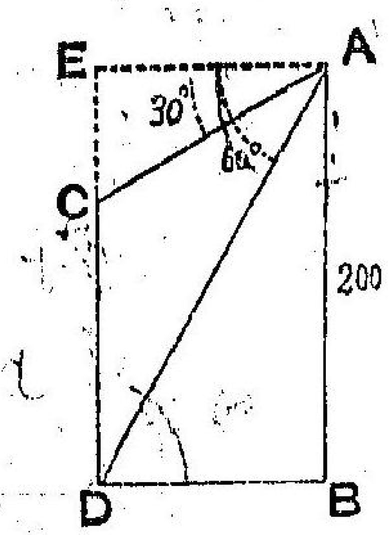
$$\therefore\ x=\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=50(3+\sqrt{3})$$

$$=50(3+1.7320\ldots\ldots)$$

$$=236^{尺}.6\ldots\ldots$$

而シテ AM=PM=x=236尺.6……

例 3. 高サ200尺ナル斷崖ノ頂上ヨリ或塔ノ頂ト基トヲ觀望スルニ俯角ソレゾレ30°及ビ60°ナリ, 然ラバ塔ノ高サ如何.



觀測點ヲA, 斷崖ノ高サヲBA, 塔ヲCDトス. 水平ニAEヲ引クトキハ $E\hat{A}C=30°$, 及ビ $E\hat{A}D=60°$. サテ塔ノ高サ CD=x トシ, DC ヲ引キ延バシ AE ニ E ニ於テ交ラシムレバ

CE=AB$-x$=200$-x$. サテ $A\hat{D}B=D\hat{A}E=60°$ ナル

ユヱ $DB=AB\cot ADB=200\cot 60°=\frac{200}{\sqrt{3}}$.

又 $\frac{200-x}{DB}=\frac{CE}{EA}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore\ 200-x=\frac{DB}{\sqrt{3}}=\frac{200}{3},$$

故ニ $x=200-\frac{200}{3}=133^{尺}\frac{1}{3}$.

例題 VII.

1. 長サ500間ノ絲[直線ト假定ス]ヲ以テ飛揚セル紙鳶アリ, 其ノ絲ノ地面トナス角ノ正弦ハ$\frac{5}{12}$ナリト云フ, 紙鳶ノ高サ如何.

2. 某寺院ノ塔ノ基ヨリ770尺ノ距離ニ於テ其ノ塔ノ頂ヲ觀望セシニ仰角31°ナリ. 然ラバ塔ノ高サ如何. 但 $\tan 31°=.6$ トス.

3. 高サ200尺ナル斷崖ノ頂上ヨリ一ノ船ヲ望見セシニ俯角30°ナリキ, 然ラバ崖脚ヨリ船マデノ距離如何.

4. 河岸ニ立ツ人アリ對岸ノ樹木ヲ觀測セシニ仰角60°ナリ, 今岸ヨリ40尺遠ザカリテ又其ノ樹木

ヲ觀測セシニ仰角30°ナリキ,樹木ノ高サ及ビ河幅如何.

5. 或地點ニ於テ一ノ塔ヲ測リシニ其ノ仰角ノ餘切ハ$\frac{3}{5}$ナリキ,然ルニ塔ニ直向シテ32尺歩ミテ測リシ仰角ノ餘切ハ$\frac{2}{5}$ナリ.然ラバ塔ノ高サ如何.

6. 海面上高サ200尺ノ斷崖上ニ立ツ人,一直線ニ二船ノ碇泊セルヲ見シニ其ノ俯角ハ45°及ビ30°ナリ,依リテ二船間ノ距離ヲ問フ.

7. 甲乙二塔アリ其ノ水平距離ハ60尺ニシテ乙塔ノ高サハ150尺ナリ,今乙塔ノ頂上ヨリ甲塔ノ頂ヲ望見セシニ俯角30°ナルトキ甲塔ノ高サ如何.

8. 直立セル棒ノ影ノ長サガ其ノ棒ノ高サノ$\sqrt{3}$倍ナルトキ太陽ノ高度如何.

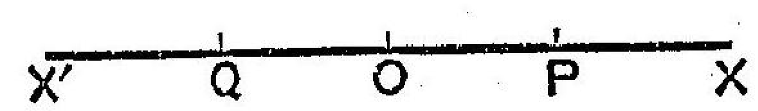
9. 水平面上ニ立テル塔ノ影ノ長サガ太陽ノ高度30°ナルトキハ45°ナルトキヨリ60尺長シ,然ラバ其ノ塔ノ高サハ$30(1+\sqrt{3})$尺ナルコトヲ證セヨ.

10. 海岸ニA, B, Cノ三點アリ, AB=BC=2浬トス.今海岸ニ直角ニBニ接近スル船アリ,某點ニ於テACヲ60°ノ角ニ望ミ,ソレヨリ10分經過シテACヲ120°ノ角ニ見タリト云フ,依リテ船ノ速サヲ問フ.

第三編

任意の角の三角函數

19. 距離に符號の適用 定點Oヲ**原點**トシ, XX′ハ原點Oヲ過ル直線トス.然ルトキハXX′



上ニアリテOヨリ與ヘラレタル距離aニアル點Pノ位置ハPガOノ何レノ側ニアルカヲ知ルニアラザレバ決定スルコト能ハズ.此ノ不確ヲ去ルニハOヨリ一方ニ測リタル距離ヲ正トシ他ノ一方ニ測リタル距離ヲ負トスレバヨシ.依リテ符號ニ就キテノ次ノ規約ヲ設ク.

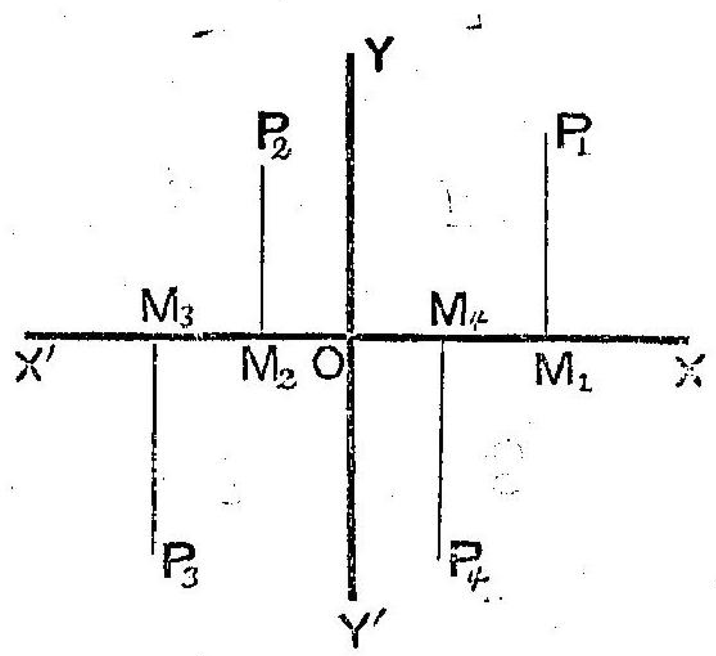
原點より右方へ測りたる距離を正とし,左方へ測りたる距離を負とす.

例へバ上圖ニ於テP, Qハ直線XX′上ニアリテOヨリノ距離ガaナル如キ點ナリトスレバ其ノ位置ハ

$$OP=+a,\quad OQ=-a$$

ニテ表ハサル.

20. 分面 平面ニ於テノ場合ニモ亦前款ト同樣ノ規約ヲ設ク. 平面上ノ任意ノ點 O ヲ原點トシ, O ヲ過リテ互ニ直角ヲナス二ツノ直線 XX′, 及ビ YY′ ヲ横縱ニ引ク.



然ルトキハ此ノ二ツノ直線ハ平面ヲ四ツノ**分面**ニ分チ, XOY ヲ**第一分面**, YOX′ ヲ**第二分面**, X′OY′ ヲ**第三分面**, Y′OX ヲ**第四分面**ト稱シ, 通例次ノ規約ヲ設ク.

XX′ ニ沿ヒタル距離ハ

YY′ より**右方**へ測りたるものを**正**とし, **左方**へ測りたるものを**負**とす.

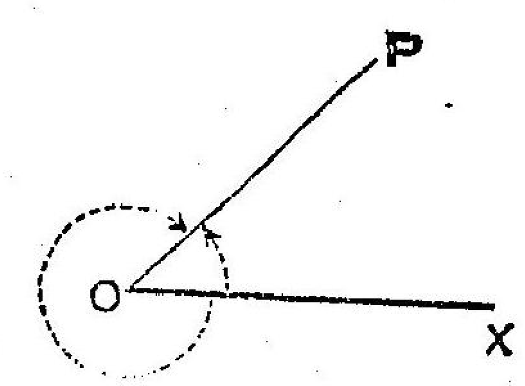
YY′ ニ沿ヒタル距離ハ

XX′ より**上方**へ測りたるものを**正**とし, **下方**へ測りたるものを負とす.

例ヘバ上圖ノ OM_1, OM_4 ハ正ニシテ OM_2, OM_3 ハ負ナリ. 又 M_1P_1, M_2P_2 ハ正ニシテ M_3P_3, M_4P_4 ハ負ナルガ如シ.

21. 任意の角 直線 OP ガ一平面内ニ於テ

OX ノ位置ヨリ起リテ廻轉スルトキハ點 O ノ周リノアラユル位置ヲ取リ, 又モトノ位置ニ來リ, 尙進ンデ幾度ニテモ廻轉シ得ルユエ任意ノ大サノ角ヲ生ズ可シ. 換言スレバ



角の大さには際限あることなし.

而シテ OP ガ OX ノ位置ヨリ廻轉スル向キニ二樣アルユエ次ノ規約ヲ設ク.

OP が OX の位置より**時計の針の廻る**と**反對の方**へ廻轉して生じたる角を**正**とし, 之と反對の方, 即ち**時計の針の廻ると同方**へ廻轉して生じたる角を**負**とす.

OX ヲ角ノ**首線**ト云ヒ, OP ヲ其ノ**動徑**ト云フ.

例題 VIII.

次ノ各角ニ於テ動徑ハ第何分面ノ中ニアルカ.

1. 175°. 2. −65°. 3. 315°.

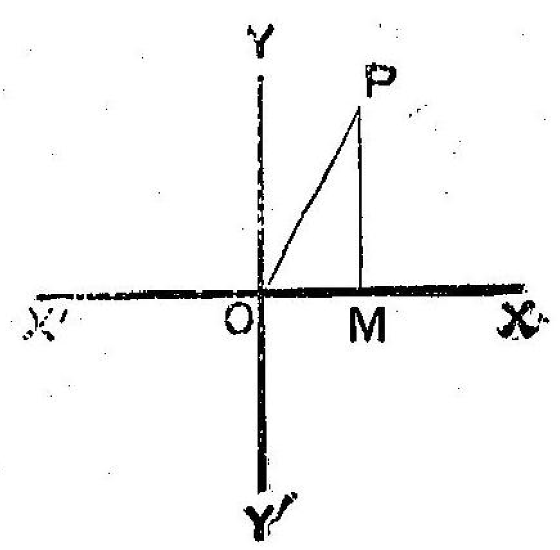
4. 237°. 5. −190°. 6. −320°.

22. 任意の角の三角函數 XX′ 及ビ YY′ ハ原點 O ニ於テ直角ニ交ル二直線トシテ，一ノ動徑ガ OX ヨリ發シテ正或ハ負ノ方向ニ角 A ダケ廻轉シテ OP ナル位置ヲ取ルモノトス．P ヨリ XX′ ニ垂線 PM ヲ引クトキハ 3 款及ビ 10 款ノ定義ヲ擴張シテ次ノ如クス．

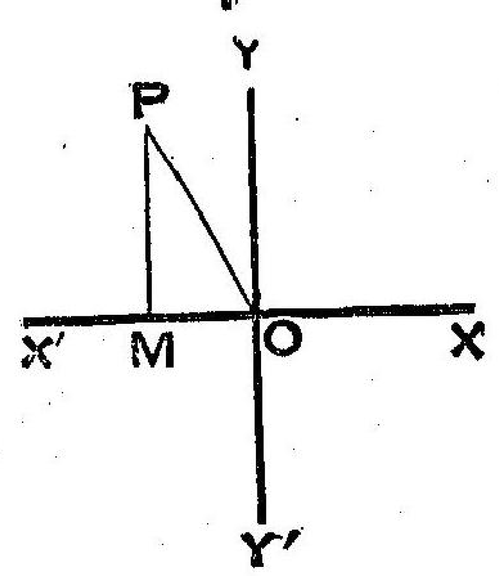
$$\sin A=\frac{MP}{OP},\quad \cos A=\frac{OM}{OP},\quad \tan A=\frac{MP}{OM},$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{OP}{MP},\quad \sec A=\frac{OP}{OM},\quad \cot A=\frac{OM}{MP}.$$

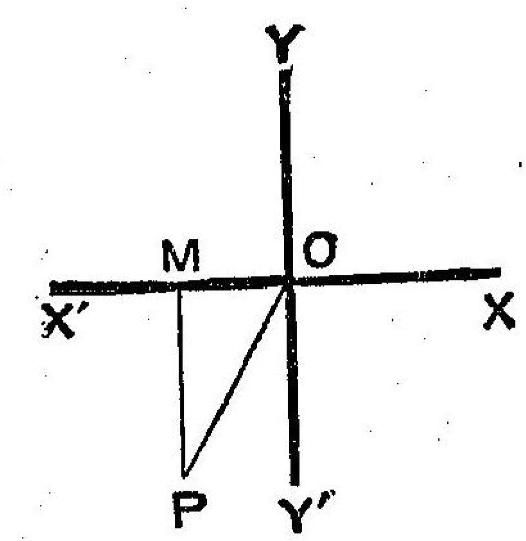
動徑 OP ハ恒ニ正ナリト見レドモ OM, MP ハ 20 款ニ從ヒテ正負種々ノ値ヲ取ルベク，今コレヲ述ブレバ次ノ如シ．



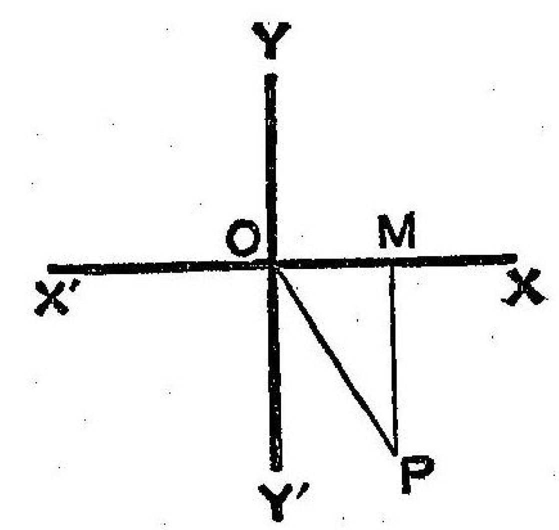
第一分面に於ては *sin*A, *cos*A 及び *tan*A は皆正なり．如何トナレバ OM, MP ハ皆正ナレバナリ．



第二分面に於ては *sin*A は正なれども *cos*A 及び *tan*A は負なり．如何トナレバ OM ハ負，MP ハ正ナレバナリ．

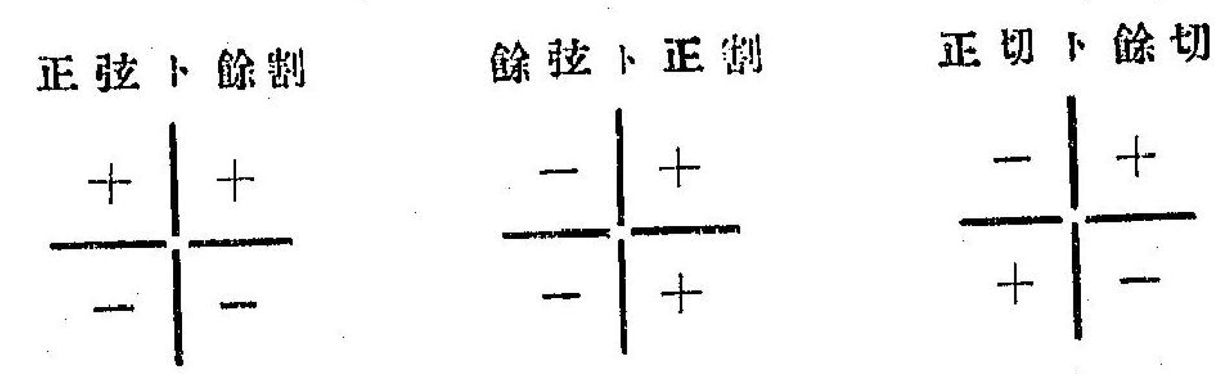


第三分面に於ては *sin*A 及び *cos*A は負なれども *tan*A は正なり．如何トナレバ OM, MP ハ皆負ナレバナリ．



第四分面に於ては *sin*A は負，*cos*A は正，*tan*A は負なり．如何トナレバ OM ハ正，MP ハ負ナレバナリ．

*cosec*A, *sec*A, *cot*A ハソレゾレ *sin*A, *cos*A, *tan*A ノ逆數ナルヲ以テ其ノ符號ハソレゾレ相同ジ．今コレヲ圖ニテ表ハストキハ次ノ如シ．



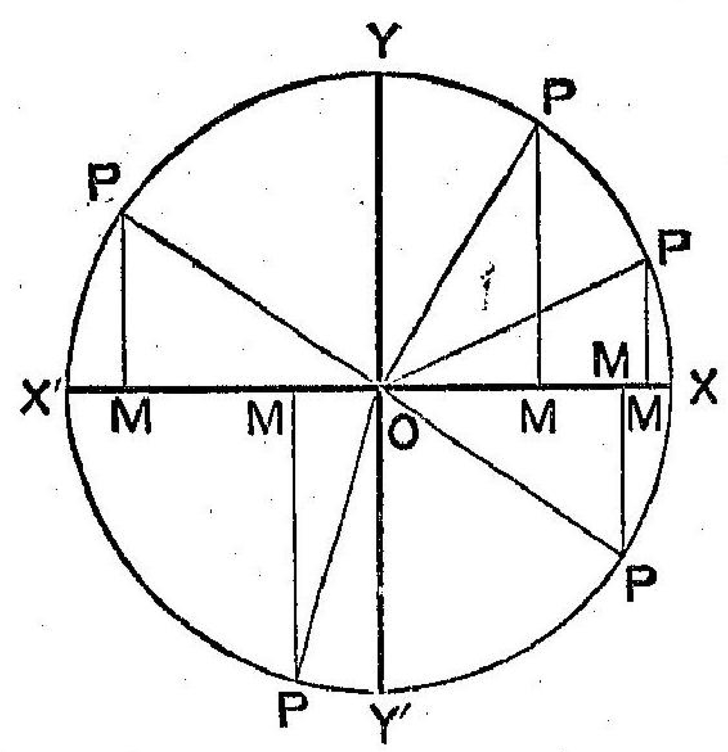
23. OP の任意の位置に對して角 A と同じ絕對値の三角函數をもつ他の三つの位置あり．

如何トナレバ三角函數ノ數値ハ動徑 OP ガ XOX′ トナス鋭角ニノミ關係スレバナリ.

24. $n.360°+A$ の中に含まるる總ての角は皆同じ値の三角函數をもつ.

如何トナレバ若シ OP ガ與ヘラレタル任意ノ位置ヨリ 4 直角, 或ハ 4 直角ノ若干倍ダケ廻轉スルトキハ OX, OP ヲ二邊トスル一組ノ角ヲ得ベク, 是等ノ角ハ皆同ジ二邊ヲモツガ故ニ其ノ三角函數モ亦皆相同ジ, 而シテ是等ノ角ノ最小ナルモノヲ A トスレバ是等ノ角ハ悉ク公式 $n.360°+A$ ノ中ニ含マルレバナリ, 但 n ハ零又ハ任意ノ正負整數トス.

25. 三角函數の値の變化 XX′ 及ビ YY′ ハ原點 O ヲ過リテ互ニ直角ナル二ツノ直線トシ, 動徑 OP ガ OX ノ位置ヨリ起程シ正ノ方向ニ廻轉スルトキハ P ハ一ノ圓周ヲ畫ク可ク, 而シテ三角函數ノ値ノ變化ハ次ノ如シ.



(I) 正弦ニ於テハ $sinA=\frac{MP}{OP}$ ナルユヱ $A=0°$ ナルトキハ $sinA=\frac{0}{OP}=0$. 而シテ $A=0°$ ヨリ $90°$ マデハ $sinA$ ハ正ニシテ次第ニ增シ $A=90°$ ナルトキハ $sinA=1$ トナル. 次ニ $A=90°$ ヨリ $180°$ マデハ $sinA$ ハ正ニシテ次第ニ耗リ $A=180°$ ナルトキハ $sinA=0$ トナル. 而シテ $A=180°$ ヨリ $270°$ マデハ $sinA$ ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ增シ $A=270°$ ナルトキハ $sinA=-1$ トナル. $A=270°$ ヨリ $360°$ マデハ $sinA$ ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ耗リ $A=360°$ ナルトキハ $sinA=0$ トナル. 今コノ變化ヲ圖ニテ示ストキハ次ノ如シ.

	$sin90°=1$		
$sin180°=0$	$sinA$ ハ正ニシテ次第ニ耗ル	$sinA$ ハ正ニシテ次第ニ增ス	$sin0°=0.$
	$sinA$ ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ增ス	$sinA$ ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ耗ル	
	$sin270°=-1$		

(II) 餘弦ニ於テハ $cosA=\frac{OM}{OP}$ ナルヲ以テ前ト同樣ニシテ次表ノ如シ

	$\cos 90^\circ = 0$	
	cosA ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ増ス	cosA ハ正ニシテ次第ニ耗ル
$\cos 180^\circ = -1$		$\cos 0^\circ = 1$
	cosA ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ耗ル	cosA ハ正ニシテ次第ニ増ス
	$\cos 270^\circ = 0$	

(III) 正切ニ於テハ $\tan A = \frac{MP}{OM}$ ナルヲ以テ前ト同樣ニシテ次表ノ如シ.

	$\tan 90^\circ = \infty$	
	tanA ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ耗ル	tanA ハ正ニシテ次第ニ増ス
$\tan 180^\circ = 0$		$\tan 0^\circ = 0$
	tanA ハ正ニシテ次第ニ増ス	tanA ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ次第ニ耗ル
	$\tan 270^\circ = \infty$	

餘割正割餘切ハソレゾレ正弦餘弦正切ノ逆數ナルヲ以テ其ノ値ノ變化ハ前ヨリ直チニ推定シ得ベク,之ヲ一ノ表ニ集ムレバ次ノ如シ.

	0°	90°	180°	270°	360°		0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	−1	0	cosec	∞	1	∞	−1	∞
cos	1	0	−1	0	1	sec	1	∞	−1	∞	1
tan	0	∞	0	∞	0	cot	∞	0	∞	0	∞

注意 1. 13款ノ公式(1)乃至(4)ハ鋭角ノミニ限ラズ任意ノ角ノ三角函數ニ對シテモ亦眞ナリ,而シテ角 A ノ種々ノ値ニ就キテ之ヲ吟味スルコトハ今コレヲ省ク.

注意 2. 既ニ角ニ正負ノ考ヲ入レタル以上ハ幾何學ニ於ケル餘角補角ノ意義ヲ擴張シテ「任意ノ大サノ角ガ合セテ直角ナルトキハ之ヲ互ニ**餘角**ナリト云ヒ,合セテ二直角ナルトキハ之ヲ互ニ**補角**ナリ」ト云フ. 例ヘバ 135° ト −45° トハ合セテ 90° ナルユヱ互ニ餘角ニシテ, 又 −150° ト 330° トハ合セテ 180° ナルユヱ互ニ補角ナルガ如シ.

例 題 IX.

1. 或角ノ正弦ガ $\frac{2}{3}$ ナルトキ其ノ角ヲ畫ケ.

2. 正弦ガ $\frac{3}{5}$ ナル角ト餘弦ガ $-\frac{5}{13}$ ナル角トヲ作レ.

3. 次ノ各三角函數ノ値ヲ問フ.

(I) $\sin 420^\circ$. (II) $\cos 405^\circ$. (III) $\tan 390^\circ$.
(IV) $\mathrm{cosec}(-30^\circ)$. (V) $\sec(-315^\circ)$. (VI) $\cot(-330^\circ)$.

4. 次ノ各角ノ三角函數ノ符號ヲ問フ.

(I) $-330°$. (II) $258°$. (III) $-132°$.

(IV) $350°$. (V) $-280°$. (VI) $400°$.

5. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

ナルトキハ $\cos\theta+\sin\theta=\pm\sqrt{2}\cos\theta$

ナルコトヲ證セヨ.

6. xガ實數ナルトキ $\sin\theta=x+\dfrac{1}{x}$ ハ成立スルヤ否ヤ.

7. $\sec^2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ハ唯 $x=y$ ナルトキノミ成立スルコトヲ證セヨ.

次ノ各式ノ値ヲ問フ.

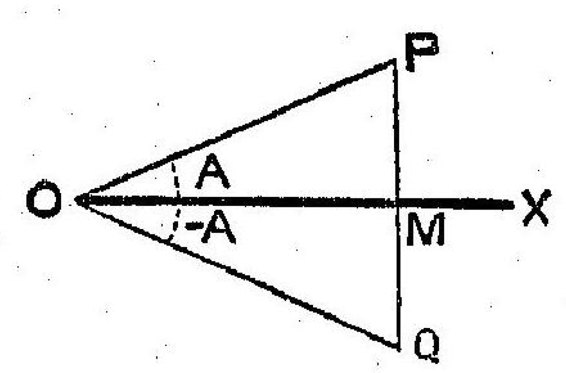
8. $2\cos 0°\sin^2 270°+2\cos 180°\tan 45°$.

9. $\tan 180°\cos 270°+\sec 360°-\mathrm{cosec}\,270°$.

10. $(a^2+b^2)\cos 360°+2ab\sin 270°$.

---

26. 或角の三角函數と同じ絶對値をもつ負角の三角函數との關係.



角XOPヲAトシ角XOQノ大サヲXOPノ大サニ等シク取レバ角XOQハ$-A$ナリ. OQヲOPニ等シク取リPQヲ結

ビ付クレバOXハMニ於テPQヲ直角ニ二等分ス. 二ツノ三角形POM, QOMノ三邊ハソレゾレ相等シケレドモMPトMQトハ符號相反ス. 依リテ

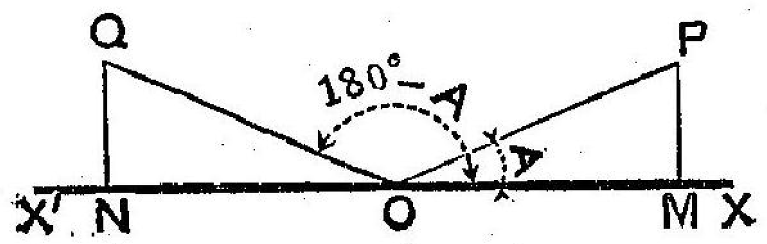
$$\left.\begin{aligned} &\sin(-A)=\frac{MQ}{OQ}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A\\ 及ビ\quad &\cos(-A)=\frac{OM}{OQ}=\frac{OM}{OP}=\cos A\\ 従ヒテ\quad &\tan(-A)=-\tan A \end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots(6)$$

27. 與へられたる角Aと同じ餘弦をもつ總ての角を求むること.

OX, OPヲ二邊トセル總テノ角ハAト同ジ餘弦ヲモチ, 又OX, OQヲ二邊トセル總テノ角ハ$-A$, 依リテ前款ヨリAト同ジ餘弦ヲモツ, 而シテ是等ノ二組ノ角ハ公式 $n\cdot 360°\pm A$ ……………(7) ノ中ニ含マル, 但コノnハ零,若シクハ正負整數トス. 且Aト同ジ餘弦ヲモツ角ハ此ノ外ニナシ, 如何トナレバAト$-A$トノアル分面內ニテハ他ニ之ト同ジ餘弦ヲモツ角ナク, 又是等ノ分面ニ對スル分面內ノ角ノ餘弦ハ符號相反スレバナリ.

28. 或角の三角函數と其の補角の三角函數との關係.

角 XOP ヲ A トシ, 角 QOX′ ヲ角 XOP ニ等シトスレバ角 XOQ ハ 180°−A ナル可シ. OQ ヲ OP ニ等シク取リ XOX′ ニ垂線 PM, QN ヲ引クトキハ二ツノ三角形 OPM, OQN ノ三ツノ邊ハソレゾレ相等シケレドモ OM ト ON トハ符號相反ス. 依リテ



$$\left.\begin{aligned} &\sin(180°-A)=\frac{NQ}{OQ}=\frac{MP}{OP}=\sin A \\ \text{及ビ}\quad &\cos(180°-A)=\frac{ON}{OQ}=\frac{-OM}{OP}=-\cos A \\ \text{從ヒテ}\quad &\tan(180°-A)=-\tan A \end{aligned}\right\} \quad \cdots\ \cdots\ (8)$$

29. 與へられたる角 A と同じ正弦をもつ總ての角を求むること.

OX, OP ヲ二邊トセル總テノ角ハ A ト同ジ正弦ヲモチ, 又 OX, OQ ヲ二邊トセル總テノ角ハ 180°−A, 依リテ前款ヨリ A ト同ジ正弦ヲモツ,而シテ A ト同ジ正弦ヲモツ角ハ此ノ外ニナシ. 今是等ノ二組ノ角ハソレゾレ　$n.360°+A,\ n.360°+180°-A,$

即チ　$2n.180°+A,\ (2n+1).180°-A$

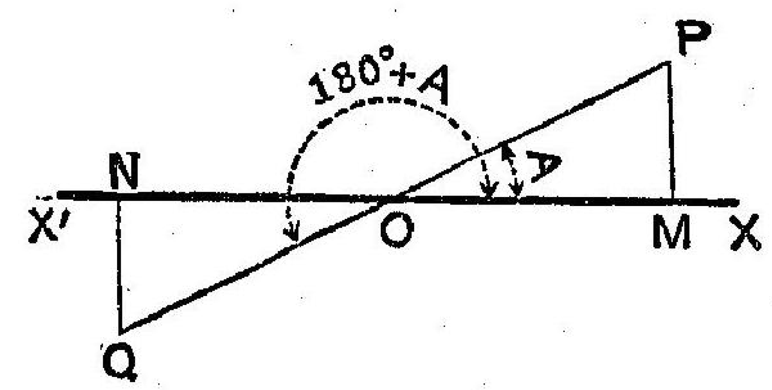
ナリ,但コノ n ハ零,若シクハ正負整數トス,而シテ此

ノ二ツハ公式　$n.180°+(-1)^n A$ … … … … (9)

ノ中ニ含マル,但コノ n ハ零,若シクハ正負整數トス.

30. 差が 180° なる二つの角の三角函數の關係.

角 A ノ動徑 OP ヲバ O ヲ越エテ引キ延バシ Q ニ至リ OQ=OP ナラシムレバ角 XOQ ハ 180°+A ナリ. P 及ビ Q ヨリ XX′ ニ垂線 PM, QN ヲ引ケ. 二ツノ三角形 POM, QON ノ斜邊ハ相等シク他ノ二邊ハソレゾレ等長ナレドモ符號相反ス.



$$\left.\begin{aligned} \text{依リテ}\quad &\sin(180°+A)=\frac{NQ}{OQ}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A \\ \text{及ビ}\quad &\cos(180°+A)=\frac{ON}{OQ}=\frac{-OM}{OP}=-\cos A \\ \text{從ヒテ}\quad &\tan(180°+A)=\tan A \end{aligned}\right\} \cdots\ (10)$$

31. 與へられたる角 A と同じ正切をもつ總ての角を求むること.

OX, OP ヲ二邊トセル總テノ角ハ A ト同ジ正切ヲモチ,又 OX, OQ ヲ二邊トセル總テノ角ハ 180°+A, 依リテ前款ヨリ A ト同ジ正切ヲモツ,而シテ A ト同

ジ正切ヲモツ角ハ此ノ外ニナシ. 今是等ノ二組ノ

角ハ　　$n.360°+A$,　$n.360°+180°+A$,

即チ　　$2n.180°+A$,　$(2n+1).180°+A$

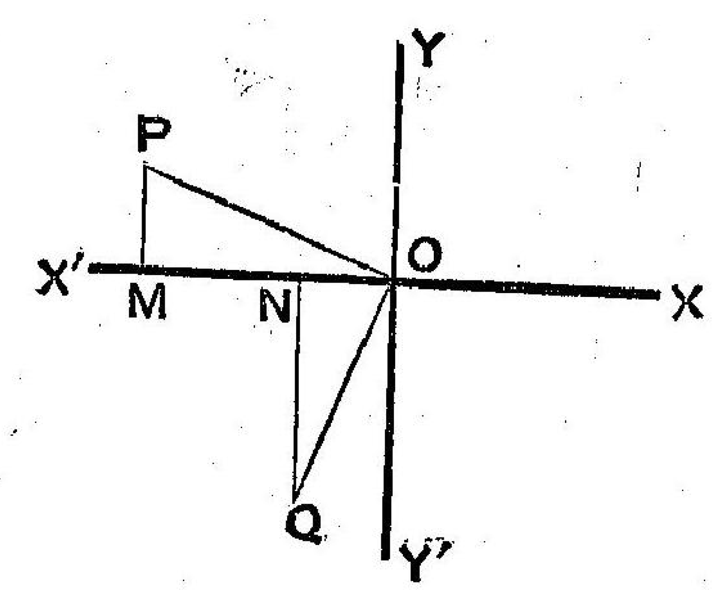
ノ中ニ含マル,而シテ此ノ二ツハ悉ク公式

$$n.180°+A \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

ノ中ニ含マル,但コノnハ零,若シクハ正負整數トス.

32. 和或は差が 90° なる二つの角の三角函數の關係.

OP ニ垂線 OQ ヲ引キ OQ=OP ナラシメ,垂線 PM, QN ヲ引ク. 二ツノ三角形 POM, QON ニ於テ OP=OQ, MP=−ON, OM=NQ ナリ. 依リテ



$$\sin XOQ=\frac{NQ}{OQ}=\frac{OM}{OP}=\cos XOP,$$

$$\cos XOQ=\frac{ON}{OQ}=\frac{-MP}{OP}=-\sin XOP,$$

先ヅ $X\hat{O}P=A$ トスレバ $X\hat{O}Q=90°+A$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{故ニ} & \sin(90°+A)&=\cos A \\ && \cos(90°+A)&=-\sin A \\ &\text{從ヒテ} & Tan(90°+A)&=-\cot A \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

次ニ $X\hat{O}Q=A$ トスレバ $X\hat{O}P=A-90°$,

依リテ　　$\sin A=\cos(A-90°)$,

及ビ　　$\cos A=-\sin(A-90°)$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{即チ[26款]} & \sin A&=\cos(90°-A) \\ &\text{及ビ} & \cos A&=\sin(90°-A) \\ &\text{從ヒテ} & \tan A&=\cot(90°-A) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

注意 (13)ナル結果ハ曾テ鋭角ニ就キテ 14 款ニ之ヲ示セリ.

33. 26 乃至 32 款ノ結果ヲ表ニ集ムレバ次ノ如シ.

	$-A$	$180°-A$	$180°+A$	$90°+A$	$90°-A$
sin.	$-\sin A$	$\sin A$	$-\sin A$	$\cos A$	$\cos A$
cos.	$\cos A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$-\sin A$	$\sin A$

例題 X.

1. $\tan 330°$, $\mathrm{cosec}\,120°$, $\cos 135°$, $\cot 315°$ ヲ求メヨ.

2. $\sin(270°-A)=-\cos A$, $\cos(270°-A)=-\sin A$ ヲ證セヨ.

3. $\sin(270°+A)=-\cos A$, $\cos(270°+A)=\sin A$ ヲ證セヨ.

4. $\sin(360°-A)=-\sin A,\ \cos(360°-A)=\cos A$ ヲ證セヨ.

5. $\tan A+\tan(180°-A)+\cot(90°+A)=\tan(360°-A)$ ヲ證セヨ.

6. $\dfrac{\operatorname{cosec}(180°-A)}{\sec(180°+A)}\cdot\dfrac{\cos(-A)}{\cos(90°+A)}$ ヲ簡單ニセヨ.

7. 次ノ方程式ヲ解ケ.

(I) $\sin\theta=\frac{1}{2}$. (II) $\cos\theta=\frac{1}{2}$. (III) $\tan\theta=\sqrt{3}$.

(IV) $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$. (V) $\tan2\theta=\tan\theta$. (VI) $\sin2\theta=\cos3\theta$.

8. $2\sin^2\theta=1+\cos\theta$ ヲ解ケ.

9. $2\cos^2\theta-7\cos\theta+3=0$ ナルトキハ $\cos\theta$ ノ値ハ唯一ツアルコトヲ證セヨ.

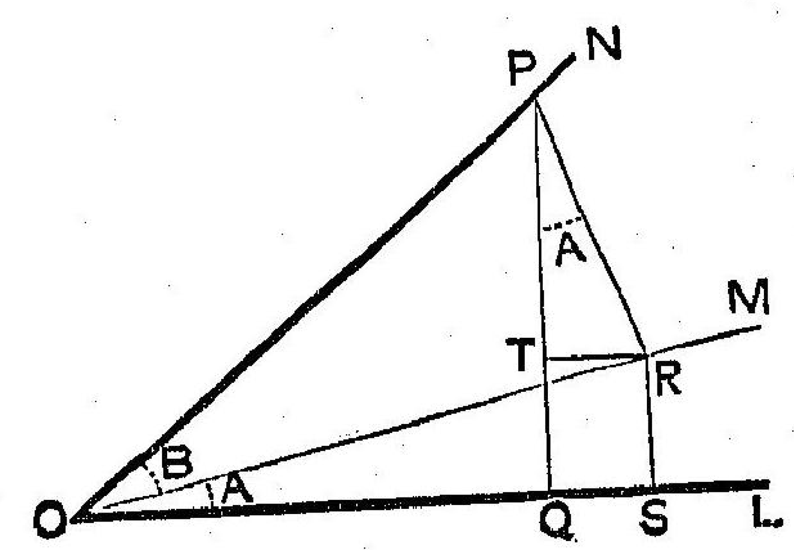
10. $8\cos^2\theta-8\cos\theta+1=0$ ヨリ $\cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

第四編

複角の三角函數

34. 二角の和の正弦,及び餘弦.

$\widehat{LOM}=A,\ \widehat{MON}=B$ トスルトキハ $\widehat{LON}=A+B$, 角 $A+B$ ノ邊 ON 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ, OL ニ垂線 PQ ヲ, OM ニ垂線 PR ヲ引キ; 又 PQ ニ垂線 RT ヲ, OL ニ垂線 RS ヲ引ク.



而シテ $\widehat{TPR}=\widehat{ROS}=A$,

定義ニ依リテ $\sin(A+B)=\dfrac{PQ}{OP}=\dfrac{RS+PT}{OP}=\dfrac{RS}{OP}+\dfrac{PT}{OP}$

$$=\frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP},$$

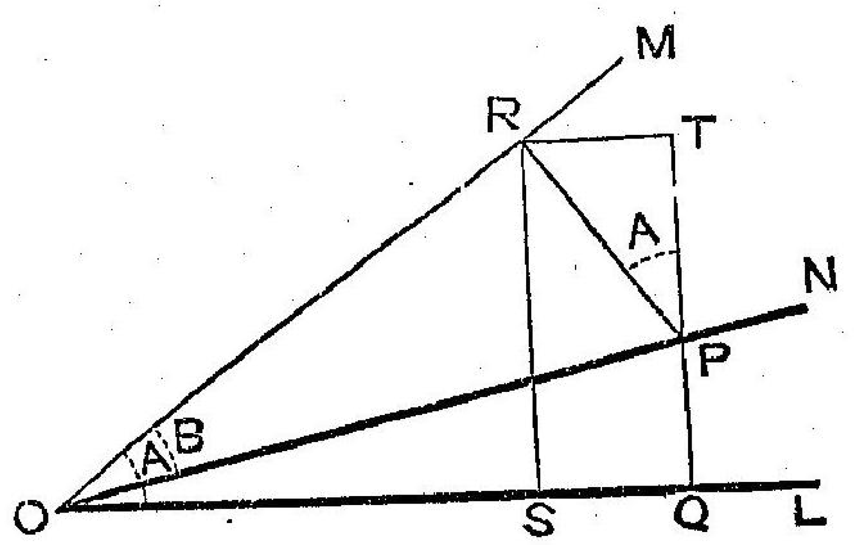
即チ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ... ... (14)

又 $\cos(A+B)=\dfrac{OQ}{OP}=\dfrac{OS-QS}{OP}=\dfrac{OS}{OP}-\dfrac{QS}{OP}$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP},$$

即チ　$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ... ... (15)

35. 二角の差の正弦及び餘弦.



前款ノ圖ニ於テ ON ヲ OL ト OM トノ間ニ引クトキハ圖ハ左ノ如クナリ $L\hat{O}N=A-B$,

而シテ

$$\sin(A-B)=\frac{PQ}{OP}=\frac{RS-PT}{OP}=\frac{RS}{OP}-\frac{PT}{OP}$$

$$=\frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP},$$

即チ　$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ ... ... (16)

又　$$\cos(A-B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS+RT}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{RT}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{RT}{RP}\cdot\frac{RP}{OP},$$

即チ　$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ ... ... (17)

注意　公式(14)乃至(17)ハA及ビBノ如何ナル大サニテモ眞ナルモノトス. 其ノ證ハ之ヲ省ク.

例 1.　$\sin 75°$ 及ビ $\cos 15°$ ヲ求ム.

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\cos 15°.$$

例 2.　$\sin A=\frac{4}{5}$ 及ビ $\sin B=\frac{5}{13}$ ナルトキ

$\sin(A-B)$ ヲ求メヨ.

茲ニ　$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B,$

然ルニ　$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5},$

及ビ　$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}.$

$$\therefore\ \sin(A-B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}.$$

注意　嚴密ニ云ヘバ $\cos A=\pm\frac{3}{5}$, 及ビ $\cos B=\pm\frac{12}{13}$, 故ニ $\sin(A-B)$ ハ四ツノ値ヲ有ス. 然レドモ簡略ニ茲ニハ平方根ノ正値ノミヲ採レリ.

例題 XI.

1.　$\cos 75°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\sin 15°$ ヲ證セヨ.

2.　$\cos A=\frac{4}{5}$ 及ビ $\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin(A+B)$, 及ビ $\cos(A-B)$ ヲ求メヨ.

次ノ各式ヲ證セヨ.

3.　$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B.$

4.　$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

$=\cos^2 B-\sin^2 A.$

5.　$\sin(A\pm 45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A\pm\cos A).$

6. $\cos(A\pm45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A\mp\sin A)$.

7. $\sin105^\circ+\cos105^\circ=\cos45^\circ$.

8. $\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\tan A+\tan B$.

9. $\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=\cot B-\cot A$.

10. $\frac{\cos(A+B)}{\cos A\sin B}=\cot B-\tan A$.

11. $\frac{\cos(A-B)}{\cos A\sin B}=\cot B+\tan A$.

12. $\cos(45^\circ-A)-\sin(45^\circ+A)=0$.

13. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0$

---

36. 和差の公式(一). 34, 35 款ノ四ツノ公式ヨリ加法減法ヲ行ヒテ次ノ公式ヲ得,即チ

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A\sin B\\ \cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A\cos B\\ \cos(A-B)-\cos(A+B)&=2\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\ (18)$$

例 1. $2\sin3\theta\cos\theta=\sin4\theta+\sin2\theta$.

例 2. $2\sin5\theta\sin3\theta=\cos2\theta-\cos8\theta$.

例 3. $2\cos54^\circ\cos66^\circ=\cos120^\circ+\cos12^\circ$

$$=\cos12^\circ-\frac{1}{2}.$$

37. 和差の公式(二). $A+B=S,\ A-B=T$ トスレバ $A=\frac{S+T}{2}$ 及ビ $B=\frac{S-T}{2}$ ナルヲ以テ前款ノ四ツノ公式ハ次ノ如ク變ズ.

$$\left.\begin{aligned}\sin S+\sin T&=2\sin\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}\\ \sin S-\sin T&=2\cos\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}\\ \cos S+\cos T&=2\cos\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}\\ \cos T-\cos S&=2\sin\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\ (19)$$

例 1. $\sin5\theta-\sin\theta=2\cos3\theta\sin2\theta$.

例 2. $\cos10^\circ-\cos50^\circ=2\sin30^\circ\sin20^\circ$

$$=2\times\frac{1}{2}\sin20^\circ=\sin20^\circ.$$

例　題　XII.

1. 次ノ各式ヲ和若シクハ差ノ形ニ直セ.

(I) $2\sin3\theta\cos2\theta$.　　(II) $2\cos3\theta\sin\theta$.

(III) $2\cos5\theta\cos2\theta$.　　(IV) $2\sin5\theta\sin7\theta$.

2. 次ノ各式ヲ積ノ形ニ直セ.

(I) $\sin6\theta+\sin4\theta$.　　(II) $\cos3\theta-\cos7\theta$.

(III) $\cos 2A+\cos 9A$. (IV) $\sin 7\alpha-\sin 5\alpha$.

次ノ各式ヲ證セヨ.

3. $\sin(60°+A)-\sin(60°-A)=\sin A$.

4. $\cos(30°-A)+\cos(30°+A)=\sqrt{3}\cos A$.

5. $\dfrac{\sin 7\theta-\sin 5\theta}{\cos 7\theta+\cos 5\theta}=\tan\theta$.

6. $\dfrac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A}=\tan 2A$.

7. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{A+B}{2}$.

8. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\dfrac{A+B}{2}$.

9. $\dfrac{\sin 75°-\sin 15°}{\cos 75°+\cos 15°}$ ノ値ヲ求メヨ.

10. $\dfrac{(\cos\theta-\cos 3\theta)(\sin 8\theta+\sin 2\theta)}{(\sin 5\theta-\sin\theta)(\cos 4\theta-\cos 6\theta)}$ ヲ簡單ニセヨ.

---

38. 二角の和,及び差の正切,及び餘切.

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B},$$

此ノ式ノ右邊ノ分子ト分母トヲ $\cos A\cos B$ ニテ除スレバ

$$\left.\begin{aligned}\tan(A+B)&=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\ \text{同様ニ}\quad \cot(A+B)&=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\ (20)$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}\tan(A-B)&=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\\ \cot(A-B)&=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\ \cdots\ (21)$$

例 $\tan 75°=\tan(45°+30°)=\dfrac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}$.

然ルニ $\tan 45°=1,\quad \tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ナルヲ以テ $\tan 75°=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=2+\sqrt{3}=\cot 15°.$$

例 題 XIII.

1. $\cot 75°=2-\sqrt{3}=\tan 15°$ ヲ證セヨ.

2. $\tan A=3,\ \tan B=2$ ナルトキ $\tan(A+B)$ 及ビ $\tan(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ.

3. $\sin A=\dfrac{4}{5},\ \sin B=\dfrac{8}{17}$ ナルトキ $\tan(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

4. $\tan(A+45°)=\dfrac{\tan A+1}{1-\tan A}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$ ヲ證セヨ.

5. $\tan(A-45°)=\dfrac{\tan A-1}{1+\tan A}=\dfrac{\tan A-1}{\tan A+1}$ ヲ證セヨ.

6. $\tan\alpha=\dfrac{5}{6}$ 及ビ $\tan\beta=\dfrac{1}{11}$ ナルトキハ

$\alpha+\beta$ ノ一ツノ値ハ $45°$ ナルコトヲ證セヨ.

7. $\tan A=\dfrac{n}{n+1}$, $\tan B=\dfrac{1}{2n+1}$ ナルトキ

$\tan(A+B)$ ヲ求メヨ.

8. $\tan(45°+\theta)\tan(135°+\theta)=-1$ ヲ證セヨ.

9. $\cot(45°+\theta)\cot(45°-\theta)=1$ ヲ證セヨ.

10. $\tan A\tan 2A\tan 3A=\tan 3A-\tan 2A-\tan A$ ヲ證セヨ.

---

39. 2Aの三角函數.

34款ノ公式(14), (15) ニ於テ B=A トスレバ

$$\boldsymbol{\sin 2A=2\sin A\cos A} \quad \dots\dots\dots\dots (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A\\ \text{或ハ}\quad &=2\cos^2 A-1\\ \text{或ハ}\quad &=1-2\sin^2 A\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots (23)$$

38款ノ公式(20) ニ於テ B=A トスレバ

$$\left.\begin{aligned} \tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\\ \cot 2A&=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots (24)$$

40. 3Aの三角函數.

$$\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A,$$

及ビ $\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A,$

之ニ前款ノ (22), (23) ヨリ $\sin 2A$, $\cos 2A$ ノ値ヲ代入シ且變化シテ次ノ公式ヲ得, 即チ

$$\left.\begin{aligned} \sin 3A&=3\sin A-4\sin^3 A\\ \cos 3A&=4\cos^3 A-3\cos A\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots (25)$$

例 $\sin 18°(=\cos 72°)$ 及ビ $\cos 18°(=\sin 72°)$ ヲ求ム.

$A=18°$ トスルトキハ $5A=90°$,

$$\therefore\ \sin 2A=\sin(90°-3A)=\cos 3A,$$

即チ $$2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A,$$

此ノ各項ヲ $\cos A$ ニテ除スレバ

$$2\sin A=4\cos^2 A-3=4(1-\sin^2 A)-3,$$

コレ $\sin A$ ノ二次方程式ナリ, 依リテ之ヲ解キテ

$$\sin A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4},$$

A ハ鋭角ナルヲ以テ ± ノ上ノ符號ヲ取リ

$$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos 72°.$$

依リテ $\cos 18°=\sqrt{(1-\sin^2 18°)}=\dfrac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}=\sin 72°.$

例題 XIV.

1. (I) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, (II) $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, (III) $\tan\alpha=\dfrac{16}{63}$

ナルトキ $\sin 2a$ ノ値ヲ求メヨ.

2. (I) $\cos a=\frac{15}{17}$, (II) $\sin a=\frac{4}{5}$, (III) $\tan a=-\frac{5}{12}$

ナルトキ $\cos 2a$ ノ値ヲ求メヨ.

3. $\tan\theta=\frac{b}{a}$ ナルトキ $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

4. $\tan\theta=\frac{1}{3}$ ナルトキ $\tan 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

次ノ各式ヲ證セヨ.

5. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A.$　　6. $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A.$

7. $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A.$　　8. $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right).$

9. $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$

10. 方程式 $x^2-2x\cot 2\beta-1=0$ ノ根ヲ最簡ナル形ニテ求メヨ.

---

41. $\cos A$ を與へたるときは $\cos\frac{A}{2}$ 及び $\sin\frac{A}{2}$ には二つの値あり.

39 款公式 (23) ヨリ $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$,

$$\therefore\ \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots(26)$$

若シ A ヲ知リタルトキハ $\frac{A}{2}$ ガ第何分面ニアルカヲ知リ得可ク, 從ヒテ根號ノ前ノ符號ヲ決定スルヲ得可シ. 然レドモ $\cos A$ ヲ知ルノミニテ A ヲ知ラザルトキハ $\cos\frac{A}{2}$ ニハ二ツノ値アリ.

同様ニ　$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

ヨリ
$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots(27)$$

例　$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ知リテ $\sin 22^\circ\frac{1}{2}$ 及ビ $\cos 22^\circ\frac{1}{2}$ ヲ求メヨ.

公式 (27) ヨリ　$\sin 22^\circ\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

但 $\sin 22^\circ\frac{1}{2}$ ハ必ズ正ナルベキヲ以テ公式ノ複符號ハ＋ヲ取レリ.

同様ニ　$\cos 22^\circ\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

例題 XV.

次ノ各式ヲ證セヨ.

1. $\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin 54^\circ.$

2. $\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$

3. $\tan\frac{A}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$.

4. $m\cos A+n\sin A=m$ ナルトキハ

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

5. A ガ $-270°$ ト $-360°$ トノ間ニアルトキハ

$$\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

第五編

三角形の性質

42. 三角形の角の性質 三角形ニ於テ A, B, C ハ幾何學的ニハ三ツノ角頂ヲ表ハシ, 代數學的ニハソレゾレ是等ノ角頂ニ於ケル角度ヲ表ハス. 又 a, b, c ハソレゾレ角 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲ表ハスモノトス.

幾何學ニ依リ　　A+B+C=180°,　　依リテ三角形ノ一ツノ角ハ 0° ト 180° トノ間ニアリ. 故ニ

(I) 一角ノ正弦ハ正ニシテ 1 ヨリ大ナラズ.

(II) 一角ノ餘弦ハ正, 或ハ負ニシテ絶對値ニテ 1 ヨリ小ナリ.

(III) 一角ノ正切ハ零ヲ除キ, 正或ハ負ノ任意ノ値ヲモツコトヲ得.

(IV) 一角ノ正弦ガ與ヘラレタルトキハ之ニ適スル角ハ二ツアリテ互ニ補角ヲナス.

(V) 一角ノ餘弦, 或ハ正切ガ與ヘラレタルトキハ之ニ適スル角ハ唯一ツアリ.

(VI)　一角ノ半分ハ 90° ヨリ小サシ, 依リテ其ノ三角函數ハ皆正ナリ.

(VII)　一角ノ半分ノ任意ノ三角函數ガ與ヘラレタルトキハ其ノ角ハ決定セラル.

例　$\cos\frac{B-C}{2}=\sin\frac{A+2B}{2}$ ヲ證セヨ.

32 款公式 (12) ニ依リ

$$\cos\frac{B-C}{2}=\sin\left(90^\circ+\frac{B-C}{2}\right),$$

卽チ

$$\cos\frac{B-C}{2}=\sin\left(\frac{A+B+C}{2}+\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{A+2B}{2}.$$

例　題　XVI.

1.　次ノ四ツノ方程式ヨリ何レモ A ヲ求メヨ.

(I)　$2\cos A=1.$　　(II)　$\tan A=-1.$

(III)　$\sqrt{2}\sin A=1.$　　(IV)　$\tan A=-\sqrt{3}.$

次ノ各式ヲ證セヨ.

2.　$\sin(B+C)=\sin A.$　　3.　$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}.$

4.　$\sin(A+B+C)=0.$　　5.　$\tan(A+B)=-\tan C.$

6.　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

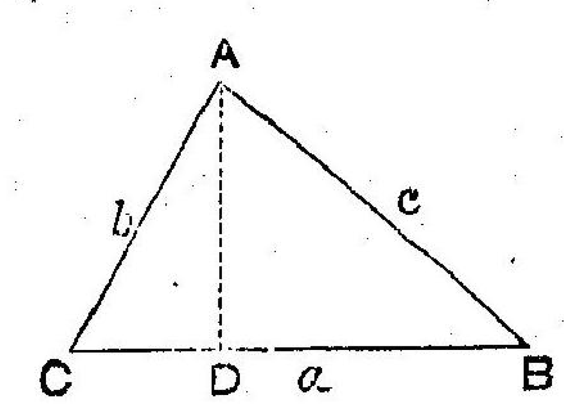
7.　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

8.　$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

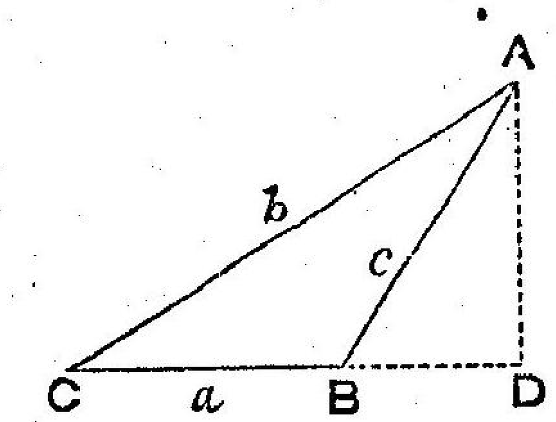
43.　任意の三角形に於て各邊は其の對角の正弦と比例す.

任意ノ一角頂 A ヨリ對邊 CB, 或ハ其ノ延線ヘ垂線 AD ヲ引ケ. 茲ニ二ツノ場合アリ, 卽チ 1 圖ハ B モ C モ鋭角ナル場合, 2 圖ハ B ガ鈍角ナル場合ナリ.

[1 圖]



[2 圖]



1 圖ニ於テハ　$\frac{AD}{AC}=\sin C$, 卽チ $AD=b\sin C$,

又　$\frac{AD}{AB}=\sin B$, 卽チ $AD=c\sin B$,

$$\therefore\quad b\sin C=c\sin B.$$

2 圖ニ於テハ　$AD=b\sin C$,

及ビ　$AD=c\sin ABD=c\sin(180^\circ-B)$

$$=c\sin B,$$

$$\therefore\quad b\sin C=c\sin B.$$

依リテ何レノ場合ニ於テモ

$$b\sin C = c\sin B,$$

即チ
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

同様ニ
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

注意 公式(28)ヲ**正弦比例の式**ト云フ.

44. $a=b\cos C+c\cos B$ を證すること.

前款ノ1圖ニ於テハ

$$\frac{CD}{CA}=\cos C,\ 即チ\ CD=b\cos C,$$

$$\frac{DB}{AB}=\cos B,\ 即チ\ DB=c\cos B.$$

$$\therefore\ a=CD+DB=b\cos C+c\cos B.$$

2圖ニ於テハ

$$a=CD-DB=b\cos C-c\cos(180^\circ-B)$$
$$=b\cos C+c\cos B.$$

依リテ何レノ場合ニ於テモ

$$\left.\begin{array}{ll} & a=b\cos C+c\cos B \\ 同様ニ & b=c\cos A+a\cos C \\ 及ビ & c=a\cos B+b\cos A \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

45. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を證すること.

前款ノ三ツノ公式ニソレゾレ $-a, b, c$ ヲ乗ジテ相加フレバ
$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,$$

$$\left.\begin{array}{ll} 即チ & a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ 同様ニ & b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ 及ビ & c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

是ニ依リテ
$$\left.\begin{array}{l} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

例題 XVII.

1. 三角形ABCノ外接圓ノ半徑ヲRトスルトキハ
$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$
ナルコトヲ證セヨ.

2. 正弦比例ノ式ニ依リテ三角形ノ一角ノ二等分線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ分ツコトヲ證セヨ.

3. 公式(29), (30)ニ於テ一角ガ直角トナルトキハ如何.

4. 公式(30)ヨリ公式(29)ヲ誘求セヨ.

5. 次ノ各式ヲ證セヨ.

(I) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$

(II) $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C.$

---

46. 三角形の各角の半分の正弦餘弦正切を求むること.

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1 \qquad [39款]$$

及ビ $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad [45款]$$

ナルヲ以テ $$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc},$$

及ビ $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc},$$

サテ $a+b+c=2s$ トスレバ $-a+b+c=2(s-a)$,

$a-b+c=2(s-b)$, $\quad a+b-c=2(s-c)$

ナルヲ以テ $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

及ビ $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \cdots\cdots\cdots(32)$$

從ヒテ $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

而シテ $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ ニモ亦之ト同様ノ式アリ.

47. $\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}$ を證すること.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=d$$

トス, 然ルトキハ $a=d\sin A$, $b=d\sin B$, $c=d\sin C$

ナルヲ以テ $$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}.$$

37款公式(19)ト39款公式(22)トニ依リ

$$\frac{b+c}{a}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

然ルニ $$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},$$

依リテ $$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

尚又コレト同様ナル二ツノ公式アリ.

注意 同様ニ $\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B-C}{2}$, 等.

例題 XVIII.

1. 三角形ノ面積 S ヲ求ムル次ノ公式ヲ證明セヨ.

$$S=\frac{1}{2}ab\,\sin C=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)},$$

及ビ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

次ノ各題ヲ證明セヨ.

2. $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$, 等.

3. $\sin\phi=\frac{2\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}}{a+b}$ ナルトキハ

$$c=(a+b)\cos\phi.$$

4. $c^2=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$.

5. 任意ノ三角形ノ各角ノ比ガ $1:2:3$ ナルトキハ對應セル邊ノ比ハ $1:\sqrt{3}:2$ ナリ.

6. 三角形ABCノ内切圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

第六編

三角形の解法及び應用

48. 任意ノ三角形ノ解法ニ四ツノ場合アリ.

(I) 二角ト一邊トヲ知レルトキ.

(II) 三邊ヲ知レルトキ.

(III) 二邊ト其ノ夾角トヲ知レルトキ.

(IV) 二邊ト其ノ一ニ對スル角トヲ知レルトキ.

49. 二角(A, B)と一邊(a)とを知れるとき.

此ノ場合ニハ　$C=180°-A-B$

ヨリCヲ求メ得可ク,而シテ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\ \text{及ビ}\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}\qquad [43\text{款}]$$

ヨリ b 及ビ c ヲ求メ得可シ.

此ノ式ノ對數ヲ取レバ

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A,$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A.$$

例　$a=24.31,\ A=45°\,18',\ B=22°\,11'$.

$a=24.31$	$\log a=1.38578$	$=1.38578$
$\mathrm{A}=45°18'$	$\mathrm{colog}\,\sin\mathrm{A}=0.14825$	$=0.14825$
$\mathrm{B}=\underline{22°11'}$	$\log\sin\mathrm{B}=\underline{9.57700-10}$	$\log\sin\mathrm{C}=\underline{9.93556-10}$
$\mathrm{A}+\mathrm{B}=67°29'$	$\log b=1.11103$	$\log c=1.49059$
$\mathrm{C}=112°31'$	$b=12.913$	$c=31.593$

50. 三邊(a, b, c)を知れるとき.

此ノ場合ニハ $\quad tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$

$$tan\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},\quad tan\frac{\mathrm{C}}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

或ハ $\quad cos\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}},$

$$cos\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\quad cos\frac{\mathrm{C}}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

ヨリ各角ヲ求メ得可シ.

今對數式ニ直シタル一例ヲ示セバ次ノ如シ.

$$\log tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}.$$

例 1. $a=3.41,\ b=2.60,\ c=1.58.$

$a=3.41$	$\mathrm{colog}\,s=9.42079-10$	$\mathrm{colog}\,s=9.42079-10$
$b=2.60$	$\mathrm{colog}(s-a)=0.41454$	$\log(s-a)=9.58546-10$
$c=1.58$	$\log(s-b)=0.07737$	$\mathrm{colog}(s-b)=9.92263-10$
$2s=7.59$	$\log(s-c)=\underline{0.34537}$	$\log(s-c)=\underline{0.34537}$
$s=3.795$	$2)\underline{0.25807}$	$2)\underline{19.27425-20}$
$s-a=0.385$	$\log tan\frac{1}{2}\mathrm{A}=0.12903$	$\log tan\frac{1}{2}\mathrm{B}=9.63713-10$
$s-b=1.195$	$\frac{1}{2}\mathrm{A}=53°23'20''$	$\frac{1}{2}\mathrm{B}=23°26'37''$
$s-c=2.215$	$\mathrm{A}=106°46'40''$	$\mathrm{B}=46°53'14''$

例 2. 例題 XVIII. 6 ノ公式ヲ用ヒテ前例ヲ解ケ.

$a=3.41$	$\log(s-a)=9.58546-10$	$\log tan\frac{1}{2}\mathrm{A}=0.12903$
$b=2.60$	$\log(s-b)=0.07737$	$\log tan\frac{1}{2}\mathrm{B}=9.63713-10$
$c=\underline{1.58}$	$\log(s-c)=0.34537$	$\log tan\frac{1}{2}\mathrm{C}=\underline{9.36912-10}$
$2s=\underline{7.59}$	$\mathrm{colog}\,s=\underline{9.42079-10}$	$\frac{1}{2}\mathrm{A}=53°23'20''$
$s=3.795$	$\log r^2=19.42899-20$	$\frac{1}{2}\mathrm{B}=23°26'37''$
$s-a=0.385$	$\log r=9.71450-10$	$\frac{1}{2}\mathrm{C}=\underline{13°10'3''}$
$s-b=1.195$		$\mathrm{A}=106°46'40''$
$s-c=\underline{2.215}$		$\mathrm{B}=46°53'14''$
$2s=7.590$驗		$\mathrm{C}=\underline{26°20'6''}$
		驗$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=180°0'0''$

注意 若シ計算ヲ誤マラズシテ對數ノ近似計算ナルガ爲ニ求メ得タル三ツノ角ノ和ガ 180° ヨリ少シク差フトキハ其ノ差ハ適當ニ各角ニ分配スベシ.

51. 二邊(a, b)と其の夾角(C)とを知れるとき.

此ノ場合ニハ $\quad tan\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}cot\dfrac{\mathrm{C}}{2}$

及ビ $\quad \mathrm{A}+\mathrm{B}=180°-\mathrm{C}$

ヨリ A 及ビ B ヲ求メ得可シ.

第一ノ式ノ對數ヲ取レバ

$$\log tan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}=\log(a-b)-\log(a+b)+\log cot\frac{\mathrm{C}}{2}.$$

既ニ A−B ヲ求メ得タルトキハ第二ノ式ト併セテ A 及ビ B ヲ求メ得ベク, 而シテ邊 c ハ正弦比例ノ式

$$c : a = sin\mathrm{C} : sin\mathrm{A}$$

ヨリ求メ得ベシ．但既ニ $\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$ ヲ求メ得タルトキA及ビBヲ求メズシテ直チニ邊 c ヲ求ムル場合ニハ

$$\frac{a+b}{c} sin\frac{\mathrm{C}}{2} = cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$$

ヲ用フルヲ可ナリトス．

別法 例題 XVIII. 3 ノ公式ヲ用フ可シ．即チ其ノ式ヲ對數計算ノ式ニ直セバ

$$\log sin\phi = \log 2 + \tfrac{1}{2}\log a + \tfrac{1}{2}\log b + \log cos\frac{\mathrm{C}}{2} - \log(a+b)$$

ヨリ ϕ ヲ求メ $\log c = \log(a+b) + \log cos\phi$ ヨリ c ヲ求メ得可シ．

例 $a=748,\ b=375,\ \mathrm{C}=63^\circ\,35'\,30''$.

$a+b=1123$		
$a-b=373$	$\log(a-b)=2.57171$	$\log b=2.57403$
$\mathrm{A}+\mathrm{B}=116^\circ\,24'\,30''$	$\mathrm{colog}(a+b)=6.94961$	$\log sin\mathrm{C}=9.95214-10$
$\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=58^\circ\,12'\,15''$	$\log tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=0.20766$	$\mathrm{colog}\ sin\mathrm{B}=0.30073$
$\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=28^\circ\,10'\,52''$	$\log tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=9.72898-10$	$\log c=2.82690$
$\mathrm{A}=86^\circ\,23'\,7''$	$\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=28^\circ\,10'\,52''$	$c=671.27$
$\mathrm{B}=30^\circ\,1'\,23''$		

注意 上ノ計算ニ於テ邊 c ヲ求ムルニ角Bヲ用ヒタルハ角Aガ 90° ニ近キユヱ其ノ正弦ヲ用フルヲ避ケンガ爲ナリ．

52. 二邊 (a, c) と其の一に對する角 (A) とを知れるとき．

方程式 $sin\mathrm{C} = \frac{c}{a} sin\mathrm{A}$ ヨリ $sin\mathrm{C}$ ヲ求メ得可シ．

斯ク $sin\mathrm{C}$ ヲ求メタルトキ $\frac{c}{a} sin\mathrm{A} < 1$ ナレバ概シテ之ヨリCノ二ツノ値ヲ得可ク，其ノ二ツノ値ハ何レモ 180° ヨリ小ニシテ一ハ鋭角，一ハ鈍角ナル可シ．

而シテ玆ニ考フベキ三ツノ場合アリ．

(I) $c\,sin\mathrm{A} > a$ ナルトキハ $sin\mathrm{C} > 1$，コレ不能ナリ．故ニ此ノ場合ニハ與ヘラレタル部分ヲモツ三角形ナシ．

(II) $c\,sin\mathrm{A} = a$ ナルトキハ $sin\mathrm{C} = 1$ ニシテ之ニ適スルCノ値ハ唯 90° 一ツノミ．依リテ玆ニハ與ヘラレタル部分ヲモツ一ツノ三角形アリ，而シテコレ直角三角形ナリ．

(III) $c\,sin\mathrm{A} < a$ ナルトキハ $sin\mathrm{C} < 1$．玆ニハCノ二ツノ値アリ，一ハ鋭角ニシテ一ハ鈍角ナリ．

(α) 若シ $c < a$ ナルトキハ $\mathrm{C} < \mathrm{A}$，依リテCハ鋭角ナル可シ．故ニ玆ニ與ヘラレタル部分ヲモツ唯一ツノ三角形アリ．

(β) 若シ $c > a$ ナルトキハCハ必ズシモ鋭角ナルヲ要セズ，Cノ二ツノ値トモニ可ナリ．依

リテ此ノ場合ニハ與ヘラレタル部分ヲモツ二ツノ三角形アリ.

上ノ結果ヲ概括シテ述ブレバ次ノ如シ.

$c\sin A>a$　ナルトキハ三角形ナシ.

$c\sin A=a$　ナルトキハ一ツノ三角形アリ.

$c\sin A<a\begin{cases}c<a & \text{ナルトキハ一ツノ三角形アリ.}\\ c>a & \text{ナルトキハ二ツノ三角形アリ.}\end{cases}$

若シ $c=a$ ナルトキハ $C=A$, 或ハ $180°-A$. 然レドモ $C=180°-A$ ナルトキハ三角形ノ二邊ハ相合スルヲ以テ C ノ適當ナル値ハ唯 $C=A$ ノミ.*

注意 此ノ場合ニ於テ二ツノ三角形ヲ得ルモノハ通例コレヲ**兩意の場合**ト稱ス.

例 1. $a=13.2$, $b=15.7$, $A=57°\,13'\,15''.3$.

$a=13.2$	$\operatorname{colog}a=8.87943-10$	$c=b\cos A$
$b=15.7$	$\log b=1.19590$	$\log b=1.19590$
$A=57°\,13'\,15''.3$	$\log\sin A=9.92467-10$	$\log\cos A=9.73352-10$
茲ニ $\log\sin B=0$.	$\log\sin B=0.00000$	$\log c=0.92942$
∴ 一ノ直角三角形ナリ.	$B=90°$	$c=8.5$
	$\therefore C=32°\,46'\,44''.7$	

* 此ノ場合ヲ幾何學的ニ説明スルコトノ大要ヲ下ニ述ベン. 三角形 ABC ノ角頂 B ヨリ邊リニ垂線 BD ヲ下ストキハ $BD=c\sin A$, B ヲ中心トシ a ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケ. (I) $a<c\sin A$ ナルトキハ此ノ圓ハ邊 AC ヲ截ラズ依リテ三角形ナシ. 次ニ (II) $a=c\sin A$ ナルトキハ此ノ圓ハ AC ニ D ニ於テ切ス, 故ニ直角三角形 ADB ヲ得. (III) $a>c\sin A$ ナルトキハ此ノ圓ハ AC ヲ二點 C_1 及ビ C_2 ニ於テ截ル. (α) $c<a$ ナルトキハ C_1 及ビ C_2 ハ A ノ異傍ニアルガ故ニ唯一ツノ三角形 ABC_1 アリ. (β) $c>a$ ナレバ C_1 及ビ C_2 ハ A ノ同傍ニアリ, 依リテ二ツノ三角形 ABC_1 及ビ ABC_2 ヲ得. 學生宜シク自ラ圖ヲ畫キテ考フベシ.

例 2. $a=767$, $b=242$, $A=36°\,53'\,2''$.

$a=767$	$\operatorname{colog}a=7.11520$	$\log a=2.88480$
$b=242$	$\log b=2.38382$	$\log\sin C=9.86970-10$
$A=36°\,53'\,2''$	$\log\sin A=9.77830-10$	$\operatorname{colog}\sin A=0.22170$
茲ニ $a>b$,	$\log\sin B=9.27732-10$	$\log c=2.97620$
$\log\sin B<0$.	$B=10°\,54'\,58''$	$c=946.675$
∴ 一解答アリ.	$\therefore C=132°\,12'\,0''$	

例 3. $a=177.01$, $b=216.45$, $A=35°\,36'\,20''$.

$a=177.01$	$\operatorname{colog}a=7.75200$	$\log a=2.24800$	2.24800
$b=216.45$	$\log b=2.33536$	$\operatorname{colog}\sin A=0.23493$	0.23493
$A=35°\,36'\,20''$	$\log\sin A=9.76507-10$	$\log\sin C=9.99462-10$	$9.23035-10$
茲ニ $a<b$	$\log\sin B=9.85243-10$	$\log c=2.47755$	1.71328
$\log\sin B<0$.	$B=45°\,23'\,28''$	$c=300.29$ 或ハ 51.675	
∴ 二解答アリ.	$134°\,36'\,32''$		
	$\therefore C=99°\,0'\,12''$		
	或ハ $9°\,47'\,8''$		

例　題　XIX.

1. $a=500$, $A=10°\,12'$, $B=46°\,36'$ ナルトキ C, b 及ビ c

ヲ求メヨ.

2. $b=999$, $A=37°58'$, $C=65°2'$ ナルトキ B, a 及ビ c ヲ求メヨ.

3. $a=51$, $b=65$, $c=20$ ナルトキ A, B 及ビ C ヲ求メヨ.

4. $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{7}$ ナルトキ A, B 及ビ C ヲ求メヨ.

5. $b=872.5$, $c=632.7$, $A=80°$ ナルトキ B, C 及ビ a ヲ求メヨ.

6. 51款ノ例ノ邊 c ヲ51款ノ別法ニテ計算セヨ.

7. $a=16$, $b=20$, $A=106°$ ナルトキ三角形ヲ解ケ.

8. $a=36$, $b=80$, $A=30°$ ナルトキ三角形ヲ解ケ.

9. $a=72630$, $b=117480$, $A=80°0'50''$ ナルトキ B, C 及ビ c ヲ求メヨ.

10. $a=55.55$, $b=66.66$, $B=77°44'40''$ ナルトキ A, C 及ビ c ヲ求メヨ.

11. $a=309$, $b=360$, $A=21°14'25''$ ナルトキ B, C 及ビ c ヲ求メヨ.

12. $a=40$, $b=13$, $c=37$ ナルトキ三角形ノ面積ヲ求

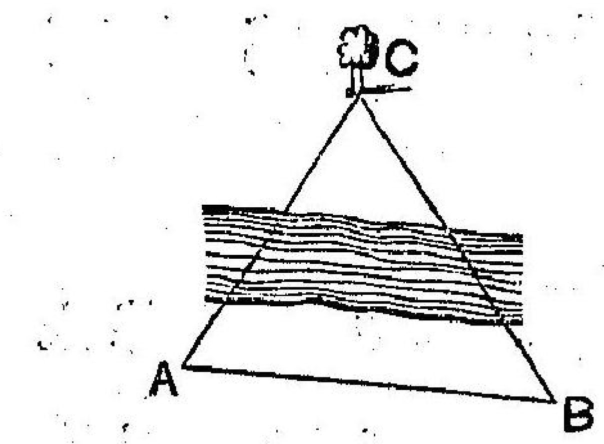
メヨ.

53. 距離及び高さの測量應用.

直角三角形ニ屬スル距離及ビ高サノ測量應用ノ例ハ第二編ニ既ニ之ヲ示セリ, 之ヨリ一般ノ三角形ニ屬スルモノヲ示サントス.

(I) 近づく可からざる物の距離を測ること.

方法 水平ノ基線 AB ヲ測リ此ノ線ト其ノ兩端ヨリ物 C ニ至ル線トノ角 CAB, CBA ヲ測ルトキハ 49 款ノ如クシテ AC 及ビ BC ヲ求メ得ベシ.

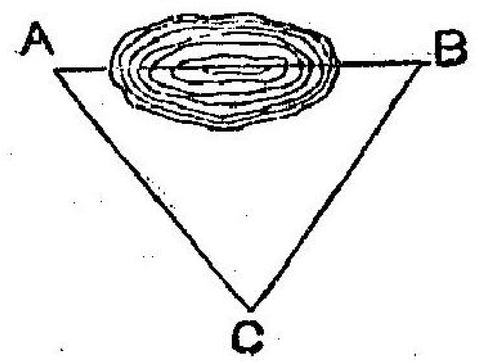


例 河岸ニ立ツ人アリ對岸ノ樹木ニ至ル距離ヲ測ラントシ, 河岸ニ 300 間ノ基線 AB ヲ測リ其ノ兩端 A, B ヨリ $\widehat{CAB}=72°40'$, $\widehat{CBA}=45°36'$ ヲ測定セリ. 然ラバ距離 AC, BC ハ如何.

答 243間.37, 325間.15.

(II) 互に近づくべからざる二點の距離を測ること.

方法　便宜ニ一點Cヲ撰ミ,ソレヨリ互ニ近ヅク可カラザル二點A, Bニ至ル距離AC, BCヲ測リ,又角ACBヲ測定スベシ. 然ルトキハ51款ヨリ容易ニABヲ求メ得ベシ.

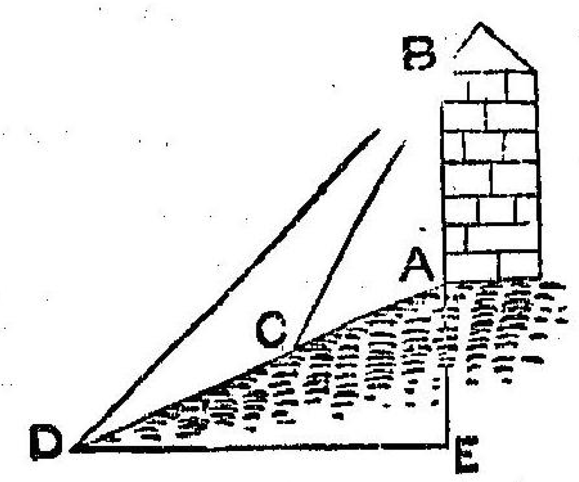


例　池ヲ隔テテ二本ノ樹木A, Bアリ. 先ヅ便宜ニ點Cヲ撰ミ$AC=300^{\text{m}}$, $BC=250^{\text{m}}$ヲ測リ,又$A\hat{C}B=43°16'$ヲ測定セリ,然ラバ樹木ノ間ノ距離ABハ如何.

答　$208^{\text{m}}.02$.

(III) 斜面上に直立する物の高さを求むること.

方法　測ラントスル物ABノ基Aヨリ一直線上ニ便宜ノ距離DCヲ測リ,且角BDC, BCA, 及ビADEヲ測ルトキハ三角形BCD, BDE, 及ビADEヨリ容易ニBAヲ求メ得ベシ.



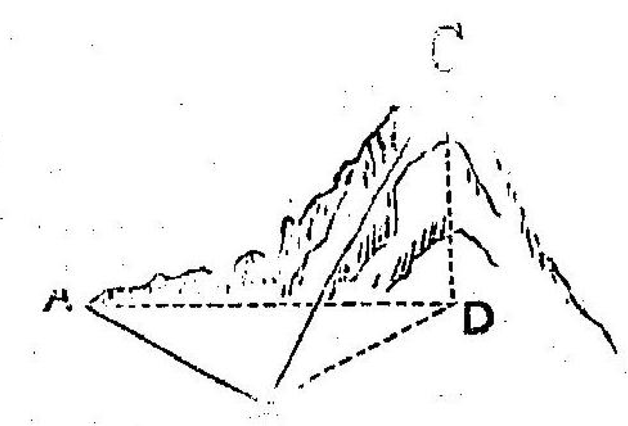
例　丘陵ノ上ニ立ツ塔ABアリ, 丘陵ノ斜面上塔基Aト一直線上ニ$DC=400^{\text{尺}}$ナル距離ヲ測リ,又$B\hat{D}E=68°42'$, $A\hat{D}E=42°18'$, 及ビ$B\hat{C}A=38°30'$ヲ測定セリ.

然ラバBAノ高サ如何.　**答**　$714^{\text{尺}}.1$.

(IV) 水平面上近づく可からざる物の高さを測ること.

先ヅ直接ニ測ラントスル物ニ向ヒテ基線ヲ測定シ得ル場合ハ18款例2ニ既ニ之ヲ示セリ. 依リテ次ニ直接ニ測ラントスル物ニ向ヒテ基線ヲ測定スル能ハザル場合ヲ示サン.

方法　任意ノ基線ABヲ測リ,又水平角BAD, ABD, 及ビ垂直角DBCヲ測ルトキハ三角形ABD, CBDヨリ容易ニ高サCDヲ求メ得ベシ.



例　$AB=250^{\text{尺}}$, $B\hat{A}D=72°20'$, $A\hat{B}D=63°40'$, $D\hat{B}C=40°15'$ナルトキCDヲ求メヨ.

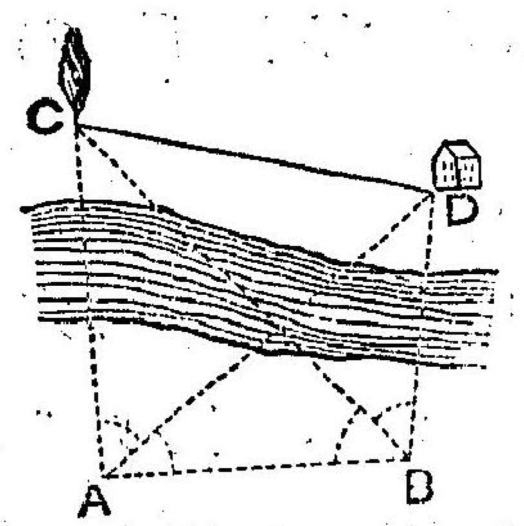
答　$290^{\text{尺}}.3$.

(V) 近づく可からざる二點の距離を測ること.

先ヅ其ノ二點ヲ望見シ得ベキ二點ヲ定メ得ル場合ヲ示サン.

方法　此ノ測定法ハ次ノ圖ニ依リテ學生自ラ之ヲ考ヘヨ.

例 河ノ對岸ニアル樹木Cト家屋Dトノ距離ヲ測ラント欲シ, $AB=400^{米}$, $\widehat{CAD}=56°30'$, $\widehat{BAD}=42°24'$, $\widehat{ABC}=44°36'$, 及ビ $\widehat{DBC}=68°50'$ ヲ測定セリ. 然ラバ距離CDハ如何.

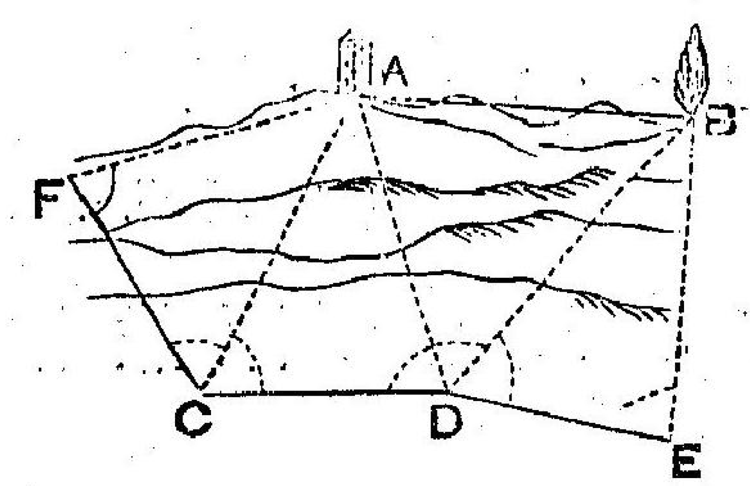


答 $747^{米}.91$.

次ニ其ノ二點ヲ一ツヅツハ望見シ得レドモ二ツ倶ニ望見シ得ル如キ點ヲ定ムル能ハザル場合ヲ示サン.

方法 此ノ方法ハ圖ト次ノ例トニ依リテ明カナルベシ.

例 家屋Aト樹木Bトノ距離ヲ測ラントスルニ互ニ近ヅクコトヲ得ザルモノトス. 然ルトキハCヨリハAヲ見得ベク, DヨリハBヲ見得ベキ如キ基線 $CD=600^{尺}$ ヲ測リ, 次ニCヨリDCト同一直線ヲナサザル $CF=600^{尺}$ ヲ測リ, 又CDト同一直線ヲナサザル $DE=600^{尺}$ ヲ測リ, 且 $\widehat{CFA}=80°16'$, $\widehat{ACF}=52°24'$, $\widehat{ACD}=56°36'$, $\widehat{BED}=86°25'$, $\widehat{BDE}=60°24'$, $\widehat{BDC}=150°30'$ ヲ測定シタルトキ距離AB

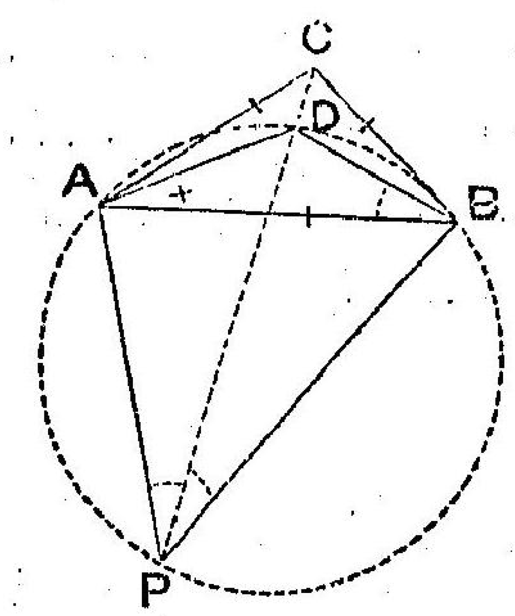


ハ如何. 答 $1117^{尺}.4$.

(VI) 既知の一點より相互の距離が既知なる三點に至る距離を測ること.

方法 圖及ビ例ヨリ一考シテ明カナルベシ.

例 港ニ於ケル三ツノ船A, B, Cノ位置ヲ定メントスルニ, $AB=800^{米}$, $AC=600^{米}$, $BC=400^{米}$ ニシテ海岸ノ一點Pヨリ $\widehat{APC}=33°45'$, $\widehat{BPC}=22°30'$ ヲ測定シタルトキ距離PA, PC及ビPBヲ求メヨ.

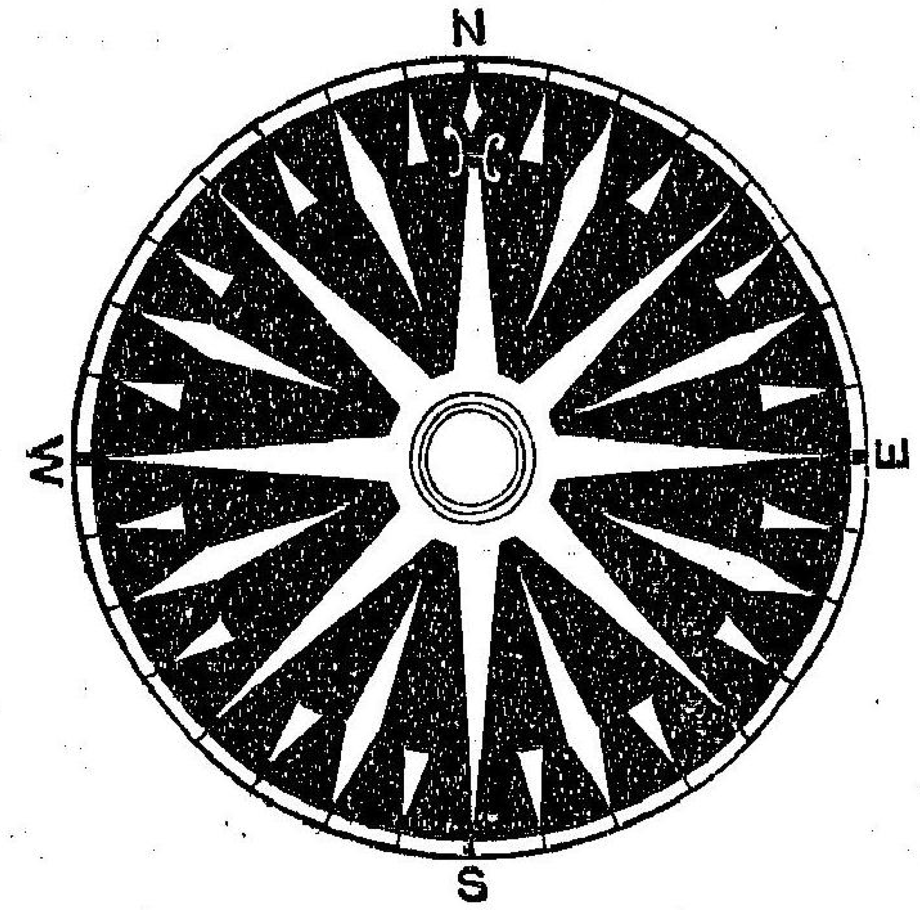


答 $PA=710^{米}.19$, $PC=1042^{米}.5$, $PB=934^{米}.3$.

54. 航海用羅針盤の方位.

三角法ノ問題ニ於テ直線ノ方向ヲ航海用羅針盤ノ方位ニテ表ハスコトアリ, 次ニ之ヲ示サン.

全圓周ヲ三十二ニ等分シ北ヨリ東ノ方ヘ, 即チ時計ノ針ノ廻ルト同方ニ廻轉スルモノトスレバ順次ニ裏面ニ示ス如キ方位ノ命名アリ但周圍ニハ度ヲモ併セ刻ス[圖ニハ東西南北ノ四方位ノミヲ示ス].



北	北微東
北北東	北東微北
北東	北東微東
東北東	東微北
東	東微南
東南東	南東微東
南東	南東微南
南南東	南微東
南	南微西
南南西	南西微南
南西	南西微西
西南西	西微南

西	西微北	西北西	北西微西	北西
北西微北	北北西	北微西		

55. 三角測量　三角測量ニ於テハ(1)基線ヲ測ルタメノ器械ト,(2)角ヲ測ルタメノ器械トヲ要ス.

基線ヲ測ルニハ測量ス可キ區域ガ極メテ狹小ナルトキハ**がんたー氏ノちぇーん**ト稱スル測鎖ヲ用フレバ可ナリ,併シ全國測量ノ如キハ基線ノ測定ハ極メテ精密ナルヲ要スルガ故ニ鋼製ノ直鋅ヲ以テ數回之ヲ測リ一々溫度ヲ檢シテ其ノ鋅ノ伸縮ヲ計算スルヲ要ス.

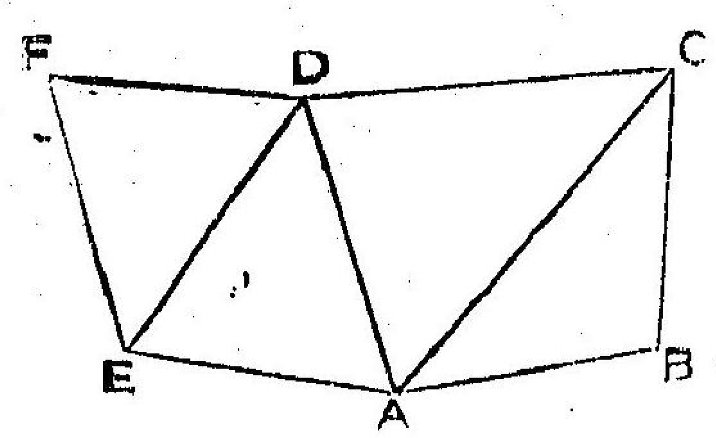
我國ニ於テ目下陸地測量部ニテ引キタル基線ノ

長程概算ハ次ノ如シ.　但米突ヲ單位トス.

相模國高座郡相模野	相模野基線	5209.970.
遠江國濱名郡三方原	三方原基線	10839.770.
近江國高島郡饗庭野	饗庭野基線	3065.724.
阿波國阿波郡西林村	西林村基線	2832.212.
伯耆國久米郡天神野	天神野基線	3301.805.
筑後國三井郡久留米市	久留米基線	3161.007.
大隅國肝屬郡笠野原	笠野原基線	5875.509.
羽前國最上郡鹽野原	鹽野原基線	5129.587.

56. 三角網　地面ヲ測量スルニハ通常數多ノ三角形ヲ連接スルモノトシ之ヲ**三角網**ト云フ.

F ハ基線 AB ニ關シテ其ノ位置ヲ求メントスル點トシ, AB ト F トヲ結ビ付クルニ若干ノ三角形 ABC, ACD, ADE, DEF ヲ以テス,而シテ是等ノ

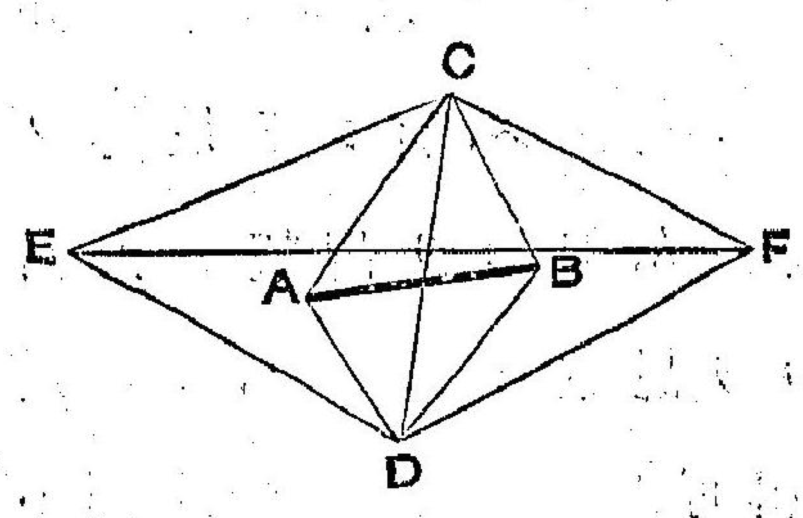


三角形タル C ニ於ケル目標ハ A, B ヨリ覘望シ得可ク, D ニ於ケル目標ハ A, C ヨリ覘望シ得可ク, E ニ於ケル目標ハ A, D ヨリ覘望シ得可ク, F ニ於ケル目標ハ D, E ヨリ覘望シ得可カラシム.　三角形 ABC ニ於テ基線 AB ハ之ヲ測リテ知リ;又 A, B ニ於ケル角ヲ

測リテ AC ヲ算出スルヲ得. 次ニ三角形 ACD ニ於テ邊 AC ハ既ニ之ヲ知レルヲ以テ A 及ビ C ニ於ケル角ヲ測リ AD ヲ算出スルヲ得. 逐テ斯ノ如ク DE 及ビ EF, 或ハ DF ヲ算出スルヲ得ベシ. DF 或ハ之ト適當ニ結ビ付ケタル線ヲ測定シ前ノ如ク算出シタル線ト斯ク測定シタル線トヲ比較シ測量ノ精粗ヲ檢ス可シ, 一ノ基線ニ依リ三角網ヲ通ジテ計算シタル線ハ次第ニ誤差ヲ大キクスルヲ以テ全國測量ノ如キハ數個處ニ基線ヲ設クルノ必要アリ.

57. 三角測量の等級 三角測量ニ於テハ通例**一等** [Primary], **二等** [Secondary], **三等** [Tertiary] ニ分ツ.

我國ノ一等三角ハ其ノ邊ノ中等距離ハ凡ソ 60 粁ニシテ二等三角ノ一邊ノ中等距離ハ凡ソ 12 粁, 三等三角ノ一邊ノ中等距離ハ凡ソ 4 粁トス.



基線 AB ノ長サヲ測定シ他ニ二點 C, D ヲ選取シ [C, D ヲ選取スルニハ二ツノ角 ACB, ADB ヲシテ凡ソ 34° 以上 60° 以下ナラシム可シ] CD ノ長サヲ算出シ, 又他ニ二點 E, F ヲ

選取シテ EF ノ長サヲ算出ス, 而シテ斯ク基線 AB ヲ CD ニ增大シ, CD ヲ EF ニ增大シ, 此ノ EF ヲ一等三角ノ基線ニ取ルモノトス.

58. 實測圖 本書ノ卷首ニ揭ゲタル圖ハ陸地測量部ニテ實測シタル一等三角網圖ノ一片ナリ.

各測點ニハ花崗石ニ其ノ何等測點タルコトヲ刻シタルモノヲ埋メ永遠ニ保存シ本邦ニ於ケル各種ノ測量ハ皆之ニ憑據セシム.

前款ノ圖ニ於テ A ヲ下溝村ニアル相模野基線ノ北端トシ, B ヲ座間村端ニアル相模野基線ノ南端トスレバ此ノ基線ヲ長津田村及ビ鳶尾山ニ增大シタルモノハ CD ニシテ再ビ之ヲ EF ニ增大シ, F ハ淺間山ニ取リ, E ハ連光寺村ノ一等點トナリシナリ.

例題 XX.

1. 四角ナル塔ノ中央ニ立テル旗竿アリ, 塔基ト水平ナル地面上ニ立ツ人, 塔ノ一面ノ中央ニ向ヒ, ソレヨリ 100 尺距ル所ニテ丁度竿頂ヲ望見シ得ベク, 尚 100 尺退クトキハ塔頂ト竿頂トノ仰角ノ正切ハソレゾレ $\frac{1}{2}$ 及ビ $\frac{5}{9}$ ナリト云フ塔ノ高サト幅, 幷ニ旗

竿ノ高サヲ問フ.

2. 正北ニ航行スル一ノ汽船アリ,或トキ互ニ 6 浬ヲ距ル二ツノ燈臺ヲ正西ニ見タリ,然ルニ一時間航行セシトキ再ビ是等ノ燈臺ヲ見シニ一ハ南西,一ハ南々西ノ方位ニ當レリト云フ然ラバ此ノ汽船ノ速サ如何.

3. 丘ノ頂上ニ立ツ高サ 50 尺ノ塔ヲ地上ノ一點ヨリ望見セシニ塔頂ト塔基トノ仰角ハソレゾレ 75° 及ビ 45° ナルトキハ丘ノ高サ如何.

4. 上部ハ白,下部ハ赤色ニ塗レル直立セル棒アリ其ノ棒基ト同水平面上,ソレヨリ 40 尺ノ所ヨリ之ヲ望見スルニ白部ヲ張ル角ノ正切ハ$\frac{1}{2}$ナリト云フ,今赤部ハ全長ノ三分ノ一ニシテ全長ハ 100 尺ヨリ長キトキ棒ノ長サ如何.

5. 海面ト同高ノ平地ヨリ直上ニ上昇セシ輕氣球ニ乘リシ人アリ,或トキ碇泊セル船ヲ俯角 30° ニ見タリ,然ルニ此ノ輕氣球600尺下降セシトキ又此ノ船ヲ見タルニ俯角15°トナレリ,依リテ上昇セシ地ヨリ船マデノ距離如何.

6. 傾斜 15° ナル斜面上ニ立ツ塔アリ,今塔基ヨリ 80 尺上リシ所ニテ塔ハ 30° ノ角ヲ含ムコトヲ測

定セリ然ラバ塔ノ高サハ $40(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 尺ナルコトヲ證セヨ.

7. 長サ l ナル棒ガ其ノ一端ヲ地ニ固定シツツ太陽ヲ過ル垂直面中ニ廻轉スルトキ其ノ地上ニ投ズル影ノ最長ナルモノヲ求メヨ. 又最長ノ影ノ長サガ棒ノ長サノ$3\frac{1}{2}$倍ナルトキ太陽ノ高度如何.

8. 湖水面上高サ h 尺ナル一點ヨリ雲ノ仰角ハ α ニシテ其ノ雲ガ湖水面ニ映ズル影ノ反射シテ來ル俯角ガ β ナルトキハ雲ノ高サハ $h\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ ナルコトヲ證セヨ.

9. 東西ニ走レル海岸ニ於テ 1000 間離レタル二地ヲ P, Q トシ,海上ニ一ノ岩 R ヲ, P ニ於テハ南ヨリ 42° 西ニ, Q ニ於テハ南ヨリ 35° 東ニ見ルトキ海岸ヨリ岩ニ至ル距離ハ $1000\times\frac{\sin 48^\circ \sin 55^\circ}{\sin 77^\circ}$ ナルコトヲ證セヨ. 又此ノ結果ヲ間マデ最モ近ク求メヨ.

10. 或人一ノ紀念碑ノ頂上ヲ仰角 α ニ望見ス,然ルニ紀念碑ニ正向シ傾斜 β ナル斜面ヲ a 尺ダケ上ルトキハ紀念碑ノ仰角ハ γ トナレリ,然ラバ始ノ觀測地上紀念碑ノ高サハ

$$a \sin\alpha \sin(\gamma-\beta) \operatorname{cosec}(\gamma-\alpha)$$

ナルコトヲ證セヨ．又 $a=100$尺, $\alpha=23°15'$, $\beta=10°10'$, $\gamma=30°30'$ トシテ此ノ結果ヲ求メヨ．

附　錄　A.

I. 對數表の用法

同著者ノ新對數表ヲ用フベシ．該表ニハ1ヨリ10000マデノ數ノ五桁ノ對數ヲ示ス．

I. 或數の對數を求むること．

(1) 數ガ表ノ中ニアルトキハ直チニ其ノ對數ヲ求メ得ベシ．

例 5247 ノ對數ヲ求ム．

表ニ於テ N. ノ行ニ 524 ヲ見出シ之ニ並ビ 7 ノ桁ニ於テ 71991 ヲ見出ス．而シテ指標ハ明カニ 3 ナリ．依リテ

$$\log 5247 = 3.71991.$$

(2) 數ガ表ノ中ニナキトキハ表ノ中ニテ此ノ數ヲ最モ近ク夾ム二ツノ數ノ對數ヲ搜シ，比例ニ依リテ所要ノ數ヲ得可シ．

例 368.765 ノ對數ヲ求ム．

茲ニ N. ノ行ニ於テ 368 ヲ見出シ之ト並ビテ 7 ノ行ニ於テ .56667 ヲ見出ス．

依リテ　$\log 368.7 = 2.56667$

又　$\log 368.8 = 2.56679$

故ニ .1 ニ對應スル差ハ .00012 ナリ.

依リテ　　$.1 : .065 = 12 : x, \quad \therefore \quad x = 7.8^*.$

故ニ

$$\begin{array}{rr} \log 368.7 & = 2.56667 \\ .065 & 8 \\ \hline \log 368.765 & = 2.56675 \end{array}$$

此ノ * ハ**比例部**ト稱シ表中 P.P. ト標記シタル行中差 12 ノ下ニ 6 ニ對シ 7.2 ト 5 ニ對シ 6.0 ト記シアリ,此ノ 6.0 ヲ一桁下ゲテ加フレバ $7.2 + .6 = 7.8$ トシテ得ラルルナリ.

II. 或對數に對應する數を求むること.

(1) 對數ガ表ノ中ニアルトキハ直チニ其ノ數ヲ求メ得可シ.

例 $\log N = 2.82230$ ヨリ N ヲ求ム.

表ノ中ノ L. ノ行ニ於テ 82 ヲ見出シ,2 ノ行ニ於テ 230 ヲ見出シ,之ト並ビテ 664 ヲ得,

$$\therefore \quad N = 664.2.$$

(2) 對數ガ表ノ中ニナキトキハ表ノ中ニテ此ノ對數ヲ最モ近ク夾ム二ツノ對數ヲ搜索シ比例ニ依リテ所題ノ對數ニ對應スル數ヲ得可シ.

例 $\log N = \bar{2}.56277$ ヨリ N ヲ求ム.

$$\begin{array}{rcl} \log .0366 & = & \bar{2}.56348 \\ \log .0365 & = & \bar{2}.56229 \\ \hline \multicolumn{3}{r}{.0001 \text{ニ對スル差 } 119} \end{array} \quad \text{又} \quad \begin{array}{rl} \log N & = \bar{2}.56277 \\ \log 365 & = \bar{2}.56229 \\ \hline & 48 \end{array}$$

依リテ　　$119 : 48 = 1 : x, \quad \therefore \quad x = .4,$

$$\therefore \quad N = .03654.$$

餘對數　或數ノ逆數ノ對數ヲ原ノ數ノ餘對數ト云ヒ,之ヲ colog ナル記號ニテ表示ス. 故ニ或數ノ餘對數ハ原ノ數ノ對數ノ指標ニ正ノ 1 ヲ加ヘテ符號ヲ變ジ之ニ假數ヲ 1 ヨリ減ジタルモノヲ附シタルモノナリ.

例ヘバ $\log 2 = .30103$ ノ餘對數ハ $\mathrm{colog}\, 2 = \bar{1}.69897$ ナルガ如シ.

對數表末位の處分法　(1) 止ムベキ位[第五位]ノ次ノ位[第六位]ガ其ノ位ノ 0.5 倍ヨリ大ナラバ止ム可キ位ニ 1 ヲ加ヘ以下切リ棄ツ. 例ヘバ .243869 ヲ .24387 トスルガ如シ,此ノ場合ニ 4 ヲ 5 トナシタルトキハ $\bar{5}$ ノ如ク上ニ横線ヲ引ク.

(2) 止ム可キ位ノ次ノ位ガ其ノ位ノ 0.5 倍ヨリ小ナラバ單ニ切リ棄ツルナリ. 例ヘバ .460563 ヲ .46056 トスルガ如シ. 此ノ場合ニ切リ棄テタル結果ノ末位ガ 5 トナラバ $\dot{5}$ ノ如ク點ヲ打ツモノトス.

(3) 止ム可キ位ノ次ノ位ガ丁度ソノ位ノ 0.5 倍ナルトキハ止ム可キ位ガ奇數ナラバ 1 ヲ繰リ上ゲ, 偶數ナラバ單ニ切リ棄ツ可シ.

II. 三角函數表の用法

本表ニハ $0°$ ヨリ $90°$ マデノ十分飛ビノ角ノ三角函數ノ五桁ノ表ヲ示ス. 其ノ用法ハ次ノ如シ.

I. 角を知りて其の三角函數を求むること.

(1) 角ガ表ノ中ニアルトキハ直チニ其ノ三角函數ヲ求メ得可シ.

(2) 角ガ表ノ中ニナキトキハ表ノ中ニテ此ノ角ヲ最モ近ク夾ム二ツノ角ノ三角函數ヲ捜シ比例ニ依リテ所要ノ三角函數ヲ得可シ.

例ヘバ $\sin 37° 46'$ ヲ求メンニ

$$\begin{array}{rr} \sin 37° 50' = & 0.61337 \\ \sin 37° 40' = & 0.61107 \\ \hline 10' & 230 \end{array}$$

依リテ　$10 : 6 = 230 : x, \quad \therefore x = 138,$

$$\begin{array}{rr} \therefore \sin 37° 40' = & 0.61107 \\ 6' = & 138 \\ \hline \sin 37° 46' = & 0.61245 \end{array}$$

II. 三角函數を知りて之に對應する角を求むること.

(1) 三角函數ガ表ノ中ニナキトキハ表ノ中ニテ此ノ函數ヲ最モ近ク夾ム二ツノ函數ヲ捜索シ比例ニ依リテ所題ノ函數ニ對應スル角ヲ得可シ.

例ヘバ $\cos A = 0.88620$ ヨリ A ヲ求メンニハ

$$\begin{array}{rr} \cos 27° 30' = & 0.88701 \\ \cos 27° 40' = & 0.88566 \\ \hline 10' & 135 \end{array} \quad \text{又} \quad \begin{array}{rr} \cos 27° 30' = & 0.88701 \\ \cos A \quad = & 0.88620 \\ \hline & 81 \end{array}$$

依リテ　$135 : 81 = 10' : x, \quad \therefore x = 6',$

$$\therefore A = 27° 36'.$$

是ニ依リテ

(A) 角ヲ與ヘテ正弦正切ヲ求ムルニハ表ノ中ニテ之ヲ最モ近ク夾ム二ツノ角ノ中, 小サキ角ノ正弦正切ニ比例部ヲ加フ可ク, 餘弦餘切ニ於テハ比例部ヲ引ケバヨシ.

(B) 三角函數ヲ與ヘテ之ニ對應スル角ヲ求ムルニハ表ノ中ニテ之ヲ最モ近ク夾ム角ノ中, 小サキ角ノ函數ト與ヘラレタル函數トノ差ヲ取リ比例部ヲ求メテ之ヲ小サキ角ニ加フレバヨシ, 此ノ (A), (B) ハ

次ニ示ス三角函數ノ對數表ニモ亦適用セラル可シ.

三角函數表末位の處分法　止ム可キ位ノ次ノ位ガ5或ハ5以上ナルトキハ止ム可キ位ニ1ヲ增シテ以下切リ棄ツ. $\bar{5}$ト記シタルハ其ノ位ノ數字ト之ニ續ヅク數字トガ$4\frac{1}{2}$ヨリ大キク5ヨリ小サキトキナリ. 此ノ處分法ハ次ニ示ス三角函數ノ對數表ニモ亦適用セラル.

III.　三角函數の對數表用法

本書ニハ0°ヨリ90°マデノ一分飛ビノ角ノ三角函數ノ五桁ノ對數ニ10ヲ加ヘタル表ヲ示ス. 其ノ10ヲ加ヘタルハ指標ヲシテ負ナラザラシメンガ爲ノミ. 依リテ此ノ表ヲ用ヒテ計算スルニハ各函數ノ對數ヨリ10ヲ引クモノト心得可シ. 今10ヲ加ヘタル對數ハLヲ頭ニ書キ又10ヲ加ヘザル對數ハlogヲ頭ニ書キテ區別ス.

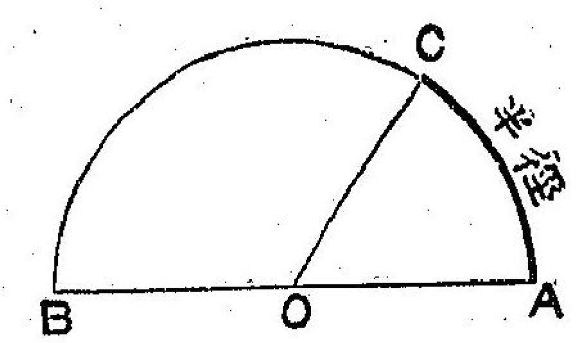
依リテ　$L\sin A=\log\sin A+10,\quad \therefore \log\sin A=L\sin A-10.$

故ニ表ヨリ$\log\sin A$ヲ求ムルニハ直チニ10ヲ引キテ計算ス可シ. 尙委シクハ新對數表ノ末尾ヲ見ヨ.

附　錄　B.

弧度法の大意

1. Oヲ中心トスル圓ニ於テ弧ACノ長サヲ其ノ半徑ニ等シク取リAO, COヲ結ビ付クレバ幾何學ニ依リ「圓ノ中心ニ於ケル角ハ其ノ立ツ處ノ弧ニ比例スル」ヲ以テ



$$\frac{A\hat{O}C}{2\text{直角}}=\frac{\text{半徑}}{\text{半圓周}}=\frac{\text{徑}}{\text{圓周}}=\frac{1}{\pi}.$$

故ニ　$A\hat{O}C=2$直角ノ$\frac{1}{\pi}=180°$ノ一定ノ分數.

依リテ$A\hat{O}C$ヲ取リテ角ヲ測ルトキノ單位トスルコトヲ得可シ.

角AOCヲ**れであん**ト名ヅケれであんヲ單位トスル角ノ測度ヲ**弧度**ト名ヅク.

或角ノ弧度トハ其ノ角ノ中ニ含ムれであんノ數ナリ.

2. れであんヲ單位トスルハ二ツノ理由ニ基ヅク, 即チ

(1) 總テノれであんハ相等シキコト.

(2) れであんヲ單位トシテ角ヲ測ルトキハ理論的三角法ノ多クノ公式ヲ簡單ニスルコト[又解析的數學ノ公式ヲ簡單ニスルコトアリ].

3. 1れてあん$=\frac{1}{\pi}\times 2$直角

$$=\frac{1}{3.14159\ldots\ldots}\times 180^\circ=57^\circ.2957\ldots\ldots$$

4. 或角ノ度數ヲDトシ其ノ弧度ノ數ヲαトスレバ

$$\frac{D}{180}=\frac{\alpha}{\pi}.$$

是ニ依リテ度ニテ表ハシタル角ヲ弧度ニ改メ又弧度ニテ表ハシタル角ヲ度ニ改ムルコトヲ得可シ.

例 90° ノ角ノ弧度ハ $\frac{\pi}{2}$, 180° ノ角ノ弧度ハ π, 360° ノ角ノ弧度ハ 2π ナリ.

例題

1. $\frac{\pi}{3}$ ノ角ノ度數ヲ問フ.

2. $\frac{\pi}{6}$ ノ角ノ度數ヲ問フ.

3. $\frac{\pi}{4}$ ノ角ノ度數ヲ問フ.

4. $10^\circ 15' 27''$ ノ角ノ弧度ヲ問フ.

問題の答

例題 I. 1. (I) $\frac{2}{3}$. (II) $\frac{301}{360}$. (III) $\frac{45569}{64800}$.

2. $5^\circ 37' 30''$. 4. $7^\circ 52' 30''$.

5. $5^\circ 33' 20''$, $66^\circ 40'$. 6. $33^\circ 15' 45''$, $66^\circ 31' 30''$.

例題 II. 1.* $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{7}$.

2. $\frac{20}{29}$, $\frac{21}{29}$, 等. 7. $\cos\theta=\surd(1-\sin^2\theta)$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\surd(1-\sin^2\theta)}$. $\frac{60}{61}$, $\frac{11}{60}$. 8. $\sin\theta=\surd(1-\cos^2\theta)$, $\tan\theta=\frac{\surd(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}$, $\frac{40}{41}$, $\frac{40}{9}$.

9. $\sin\theta=\frac{\tan\theta}{\surd(1+\tan^2\theta)}$, $\cos\theta=\frac{1}{\surd(1+\tan^2\theta)}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. 10. $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{13}$.

例題 III. 1. $\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\surd(1-\sin^2\theta)}$, 等. $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{5}$, 等. 2. $\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\surd(1-\cos^2\theta)}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, 等. $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, 等. 3. $\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{\surd(1+\tan^2\theta)}{\tan\theta}$, $\sec\theta=\surd(1+\tan^2\theta)$, 等. $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$, 等.

---

* 斯ノ如キ答數ハ始ノ二ツ,即チ一鋭角ノ正弦餘弦ヲ知ルトキハ其ノ正切[第三ノ數]ハ第一ヲ第二ニテ除シ之ヲ得ベク,又第四第五ハ餘角ノ餘弦正弦ナルヲ以テソレゾレ第二第一ニ等シク,第六ハ第三ノ逆數ナリ. 故ニ以下斯ノ如キ問題ニ遭遇セバ始ノ二ツノミヲ示シ他ハ之ヲ省キテ單ニ「等」ト記ス. 其ノ他答數ガ問題ヲ一考シテ直チニ得ラルル如キモノモ亦之ヲ省畧セリ.

$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}}{\operatorname{cosec}\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}} = \cos\theta$

$\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}}$

例題 IV. 11. $\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)}}{\operatorname{cosec}\theta}$, 等. $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 等. 12. $\sin\theta = \frac{\sqrt{(\sec^2\theta - 1)}}{\sec\theta}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, 等. $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{2}{3}$, 等.

13. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2\theta)}}$, $\cos\theta = \frac{\cot\theta}{\sqrt{(1+\cot^2\theta)}}$, 等. $\frac{9}{41}$, $\frac{40}{41}$, 等.

例題 V. 1. $18°$. 2. $22° 30'$. 3. $30°$. 4. $60°$. 5. $30°$. 6. $45°$, $60°$.

例題 VI. 1. $4\sqrt{3}$, 4. 2. 9.37, 11.71. 3. 4.94, 8.09. 4. 12.14, 26.90. 5. $30° 30'.6$, 56. 6. $29° 29'.2$, 193.

例題 VII. 1. 208間$\frac{1}{3}$. 2. 462尺. 3. 346尺.41. 4. 34尺.64……, 20尺. 5. 160尺. 6. 146尺.4…… 7. 115尺.359 ….. 8. $30°$. 10. 每時13哩.8564.

例題 IX. 3. (I) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (II) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (III) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (IV) -2. (V) $\sqrt{2}$. (VI) $\sqrt{3}$. 6. 成立セズ. 8. 0. 9. 2. 10. $(a-b)^2$.

例題 X. 1. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1. 6. $\cot^2 A$.

7. (I) $n.180° + (-1)^n.30°$. (II) $2n.180° \pm 60°$. (III) $n.180° + 60°$. (IV) $2n.180° \pm 45°$, $2n.180° \pm 135°$. (V) $n.180°$. (VI) $n.72° \pm 18°$. 8. $(2n+1).180°$, 或ハ $2n.180° \pm 60°$. 10. $\frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{2})$.

例題 XI. 2. 1, $\frac{24}{25}$.

例題 XII. 1. (I) $\sin 5\theta + \sin\theta$. (II) $\sin 4\theta - \sin 2\theta$. (III) $\cos 7\theta + \cos 3\theta$. (IV) $\cos 2\theta - \cos 12\theta$. 2. (I) $2\sin 5\theta \cos\theta$. (II) $2\sin 5\theta \sin 2\theta$. (III) $2\cos\frac{11}{2}A\cos\frac{7}{2}A$. (IV) $2\cos 6\alpha \sin\alpha$.

9. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 10. 1.

例題 XIII. 2. -1, $\frac{1}{7}$. 3. $\frac{84}{13}$. 7. 1.

例題 XIV. 1. (I) $\pm\frac{24}{25}$. (II) $\pm\frac{120}{169}$. (III) $\frac{2016}{4225}$.

2. (I) $\frac{161}{289}$. (II) $-\frac{7}{25}$. (III) $\frac{119}{169}$. 3. a.

4. $\frac{3}{4}$. 10. $\cot\beta$, $-\tan\beta$.

例題 XVI. 1. (I) $60°$. (II) $135°$. (III) $45°$. (IV) $120°$

例題 XIX. 1. $123° 12'$, $b = 2051.48$, $c = 2362.61$.

2. $77°$, $a = 630.77$, $c = 929.48$. 3. $A = 38° 52' 48''$, $B = 126° 52' 12''$, $C = 14° 15'$. 4. $A = 51° 53' 15''$, $B = 59° 31' 49''$, $C = 68° 35'$. 5. $B = 60° 45' 2''$, $C = 39° 14' 58''$, 984.83. 7. 不能. 8. 不能.

9. 不能. 10. $A = 54° 31' 13''$, $C = 47° 44' 7''$, 50.481.

11. $B = 24° 57' 54''$, 或ハ $155° 2' 6''$, $C = 133° 47' 41''$, 或ハ $3° 43' 29''$, 615.67, 或ハ 55.41. 12. 240.

例題 XX. 1. 高サ 100尺, 幅 50尺; 25尺.

2. 毎時 10里.2426...... 3. 18尺.3...... 4. 120尺.

5. 1939尺.2...... 7. $l\,\mathrm{cosec}\gamma$, 但γハ太陽ノ高度ナリ.

$\sin\gamma=\frac{2}{7}$. 9. 625間. 10. 108尺.69.

實業教育 三角法教科書奥附

明治四十二年一月五日印刷
明治四十二年一月十日發行

定價金五拾錢

著作者 東京市小石川區小日向臺町三丁目五十三地 長澤龜之助

發行者 東京市日本橋區本石町三丁目十七番地 大葉久

印刷者 東京市牛込區市ケ谷加賀町一丁目十二番地 青木弘

發行所 東京市日本橋區本石町三丁目 寶文館
大阪市東區備後町四丁目 寶文館