3

溫德華士

平面幾何學題解

吳秉之譯

805

平

店印行

自修適用

溫氏平面幾何學題解

著者　WENTWORTH

譯者　吳秉之

北平

中原書店發行

1935

目錄

目錄

目錄

目錄

目錄

目錄

目錄

目錄

目 錄

目錄

目 錄

目錄

目錄

温 德 華 氏
平面幾何學題解

例題1. 有一角爲49^{0}求其餘角及補角.

$90^{0}-49^{0}=41^{0}$

$180-49^{0}=131^{0}$

例題2. 有二角,一爲其餘角之二倍,一爲其餘角之四分之一,求其角之度數.

(1) 設 $x=$所求角度數.

則 $x+\dfrac{x}{2}=90^{0}$

$2x+x=180^{0}$

$3x=180^{0}$

$\therefore\quad x=60^{0}$

(2) 設 $x=$所求角度數.

$x+4x=90^{0}$

$5x=90^{0}$

$\therefore\quad x=18^{0}$

例題3. 有二角，一爲其補角之二倍，一爲其補角之三分之一，求其角之度數.

（1） 設 x =所求角之度數.

$$x+\frac{x}{2}=180^{0}$$

$$2x+x=360^{0}$$

$$3x=360^{0}$$

$$\therefore \quad x=120^{0}$$

（2） 設 x =所求角度數.

$$x+3x=180^{0}$$

$$4x=180^{0}$$

$$\therefore \quad x=45^{0}$$

例題4. 求以下各時鐘上時分兩針所成之角度數，一點鐘，三點鐘，五點鐘，六點鐘.

$30^{0}, 90^{0}, 150^{0}, 180^{0}$ （答）

例題5. 有一角爲$37^{0}, 53'49''$，求其餘角及補角.

$$90^{0}-37^{0}53'49''=52^{0}6'11''$$

$$180^{0}-37^{0}53'49''=142^{0}6'11''$$

例題6. 設一角之餘角爲其補角之三分之一，問此角爲若干度.

設 x =所求角度數.

$$3(90^\circ - x) = 180^\circ - x$$

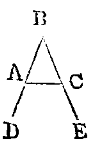
$$270^\circ - 3x = 180^\circ - x$$

$$2x = 90^\circ$$

$$\therefore \quad x = 45^\circ$$

例題7. 設引長等腰三角形之兩等邊其與底邊所成之角必等.

設 引長等腰三角形ABC兩腰至D及E



求證 ∠CAD=∠ACE

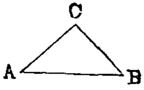
證 ∠BAC=∠BCA §145

∠CAD為∠BAC補角.

而∠ACE為∠BCA之補角. § 86.

∴ ∠CAD=∠AOE Q.E.D.

例題8. 等腰直角三角形之各銳角為幾度.



在△ABC內設C為直角而AC=BC

試求∠A及∠B之度數

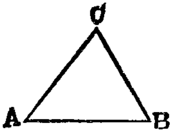
今 ∠A+∠B=90° §135.

∠A=∠B §145.

∴∠A=∠B=45°

例題9. 設等腰三角形之一角,等於一直角之三分之二(60°

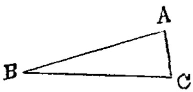
）則他二角各為幾度．



此三角形為等角三角形則各角等於

60^0 §146

例題10．設三角形之一角為34^0 他二角中之一角為他角之二倍則此二角各為幾度．



設 x＝小角之度數

則$2x$＝大角之度數

$\therefore \quad x+2x=180^0-34^0$

$3x=146^0$

$x=48\frac{2^0}{3}$

$2x=97\frac{1^0}{3}$

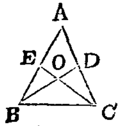
故小角為$48\frac{2^0}{3}$ 大角為$97\frac{1^0}{3}$

例題11．設等腰三角形之頂角為 30^0則其一邊與其底之引長線所成之外角為幾度．

底上之各角$=\frac{1}{2}(180^0-30^0)=75^0$

各 外 角$=75^0+30^0=105^0$ §137．

例題12．設等腰三角形之頂角為36^0．則其兩底角之平分線，所成之角為幾度．

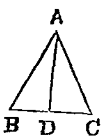


$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$

$\angle OBC = OCB = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ$

$\angle BOC = 180^\circ - 2 \times 36^\circ = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

例題13．由等腰三角形之頂至其底之中線，必垂直於其底且平分其頂角．



在△ABC內設AB等于AC．而D爲BC之中點

求證　AD⊥BC．

而　∠DAB＝∠DAC．

證在　△BAD及CAD內．

AB＝AC．及BD＝CD．　　　　題設．

而AD公用

∴　△BAD＝△CAD．　§150．

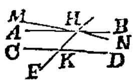
∴　∠BAD＝∠CAD．　§ 128

　　∠BDA＝∠CDA　　§ 78

∴　AD⊥BC．　　§63．Q．E．D．

例題14．設兩直線，爲一截線所截，其外錯角等，則此兩線必平行．

設EF截二直線AB，CD於H及k兩點，



而∠AHE等於∠DkF．

求證A B ∥CD

證作MN通過H ∥CD.

則 ∠MHE＝∠DkF §113.

但 ∠AHE＝∠DkF 題設.

∴ ∠MHE＝∠AHE 公理1.

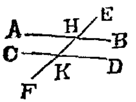
∴ MN與AB重合 §60.

但 MN ∥ CD 構圖

∴ A B ∥ CD(因與MN重合)Q.E.D.

例題15. 設兩平行線爲一截線所截，其兩外角在截線之一側者必相補

設AB及CD二平行線，爲EF截線，截於H及k兩點.



求證∠EHB與DkF相補.

證∠CkF與DkF相補. §86.

但 ∠CkF＝∠EHB §113

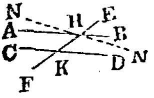
∴ ∠EHB與DkE相補. Q.E.D.

例題16. 設兩直線爲一截線所截，其兩外角在截線之一側者相補，則此兩線必平行.

設 EF截AB.CD二直線於H及k兩點.

且令角EHB與DkF相補.

求證 AB // CD



證：設作MN通過H而與CD平行.

則 ∠s EHN與DkF相補

例題15.

但 ∠s EHB與DkF相補 題設.

∴ ∠EHN=∠EHB. §85.

∴ MN與AB重合. §60.

但 MN // CD 構圖.

∴ AB // CD(因與MN重合） Q.E.D.

例題17. n邊之多邊形內.可作幾對角線.

因多邊形之對角線,爲聯二不相隣之角頂點之線,(§192)從每角頂可作 (n—3) 對角線,故從n個角頂可作n (n—3) 對角線,但如此計之則每對角線必有重複一條,故在n邊多邊形內可作 $\frac{1}{2}$ n(n—3)對角線.

例題18. 設多邊形之諸內角之和，二倍於其諸外角之和則此多邊形有幾邊，又十倍其諸外角之和，則有幾邊.

（1） 設 n=多邊形之邊數.

則 (n—2)2=諸內角和之rt ∠s數.

但 4＝諸外角和之rt∠數.

$\therefore (n-2)2=8$

$2n-4=8$

$2n=12$

$n=6$

（2） 設n爲多邊形之邊數.

則 $(n-2)2=40$

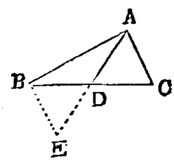
$2n-4=40$

$\therefore \quad n=22.$

例題19. 三角形之中線,小於其兩鄰邊之和之半.

設:AD爲△ABC之中線.

求證:$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$



今$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$

必因 $2AD<AB+AC$

引長AD至E使DE與AD

等長,聯BE.

則 $AE=2AD$

故 $2AD<AB+AC$必因 $AE<AB+AC$

但 $AE<AB+BE$ §138.

故 $AE<AB+AC$ 必因 $AC=BE$

又 $AC=BE$ 必因 $\triangle ACD=\triangle EBD$ § 128.

而因 $CD=DB$.

$AD=DE$

$\angle ADC=\angle BDE$ § 93.

故 $\triangle ACD=\triangle EBD$

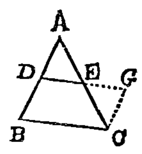
$\therefore\ AE<AB+AC$

$\therefore\ AD<\frac{1}{2}(AD+AC)$

例題20. 平分三角形之兩邊之直線,必與其第三邊平行.

設 $AD=DB,AE=EC$

求證 $DE\parallel BC$.



作 $CG\parallel BA$,引長DE

遇CG於G

$DE\parallel BC$,必因BCGD爲▭ § 166.

BCGD爲▭.必因 $CG=BD$ § 183.

$CG=BD$.必因CG及BD各等於AD

公理1.

今 $BD=AD$.

又 $CG=AD$.必因 $\triangle CGE=\triangle ADE$. § 128.

而因 $EC=AE$

$\angle GEC = \angle AED$　　§ 93.

$\angle ECG = \angle DAE$　　§ 11°

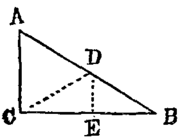
故　$\triangle CGE = \triangle ADE$　　§ 139.

$\therefore$　$DE \parallel BC$

例題21. 直角三角形之弦之中點,與三頂之距離相等.

設D爲rt△ABC弦AB之中點

求証:$DA = DB = DC$



作$DE \perp CB$.

$DE \parallel AC$　　§ 104.

$\therefore$　DE平分CB.　　§ 188.

則rt△DEC=rt△DEB.　§ 144.

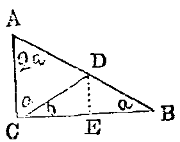
$\therefore$　$DC = DB$.　　§ 128.

但　$DB = DA$.　　題設.

$\therefore$　$DA = DB = DC$.　　公理1.

Q.E.D.

例題22. 設直角三角形之一銳角爲他銳角之二倍則其弦必爲最短邊之二倍.



設C爲rt∠△ACB而∠A等於2∠B

求證 $AB = 2AC$

證

中線CD＝BD＝AD　例題21

則　$\angle b=\angle a$而$\angle c=\angle 2a$　§145.

今　$\angle a+\angle 2a=90^{0}$　§135.

∴　$\angle a=30^{0}$；$2\angle a=60^{0}$；$\angle c=60^{0}$

∴　ACD爲等邊三角形　§148.

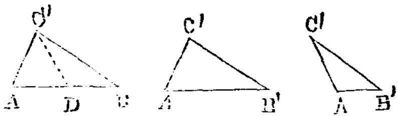
而　AD爲AB之半＝AC

∴　AB＝2AC　Q.E.D.

例題23．設兩三角形，有兩邊及對此兩邊中一邊之角彼此各相等，則對其他邊之角彼此相等或相補，若相等，則此兩形必等．

設　AC＝A'C'　BC＝B'C'而$\angle$B＝$\angle$B

求證　$\angle$A與C'A'B'相等或相補．



證　置△A'B'C'於△ABC之上，則B'C'與BC重合．

而　$\angle$A'及$\angle$A必在BC之一旁．

因　$\angle$B'＝$\angle$B，B'A'落於BA．A落於A．或BA上

之一點D.

設A'落於A則△A'B'C'與△ABC重合且相等

設A'落於D.則△A'B'C'與,△DBC重合且相等.

因 CD=C'A'=CA ∠A=∠CDA. §145.

但 ∠CDA與CDB相補 § 86.

∴ ∠A與 CDA亦相補 § 85.

討論 兩三角形相等: Q.E.D.

(1) 若與角B及B'爲兩正角或鈍角

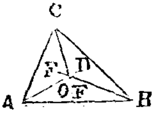
(2) 若所求之角A及 A' 均爲兩銳角或正角或爲兩鈍角.

(3) 若AC及A'C'不小於於BC及B'C'.

例題24. 三角形之三角之平分線必相遇於一點，此點與三邊之距離相等.

設 AD爲∠CAB之平分線.與BE爲∠CBA之平分線相交於O.

求證 O點必在平分線CF內.



設O在AD邊上必與 AC及AB有等距離.

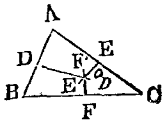
§162.

又O在BE上必與BC及AB有等距離 §162.

故O與AC及BC有等距離.

∴ O在CF內 §162.

例題25. 三角形之三邊之垂直平分線,必相遇於一點,此點與三頂之距離相等.



設 AC及AB之平分垂線EE'及DD'相遇於O點

求證 O在FF'垂直平分線內.

證今 O在EE' 內與A及C 有等距離 §161.

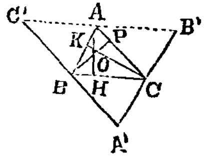
故 O與B及C有等距離.

∴ O在FF'垂直平分線內' §160.

例題26. 由三角形之三頂,至其對邊之垂線必相遇於一點.

設 $\perp$s 爲AH,BP,及Ck.

求證 AH,BP,Ck相交於一點.



證 通過A,B,C設作B'C,A'C',A'B' // CB'CA,BA,

則 AH ⊥ B'C' §107.

今 ABCB'及ACBC'爲▱ §166.

而 A'B=BC及AC'=BC,

即 A爲B'C'之中點依同理B爲A'C'之中點,C

爲A'B'之中點.

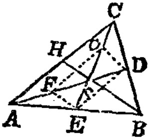
∴　AH,BP及Ck,爲△A'B'C'各邊之垂直平分線.

故　AH,BP及Ck相交於一點.

例題25.Q.E.D.

例題27. 三角形之三中線,相遇於一點,此點與各頂之距離爲由各頂至其對邊之中點之距離之三分之二.

設　兩中線.AD及CE 相遇於O,　取OA之中點F及OC之中點G.



聯GF,FE,ED及DG,在△AOC內,GF與AC平行,且等於$\frac{1}{2}$AC(定理).

DE與AC平行,且等於$\frac{1}{2}$AC(定理)

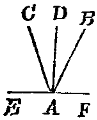
故　DGFE爲□.(何故)

AF=FO=OD.CG=GO=OE(何故.

故　一中線截他中線之點與各頂之距離,爲由各頂至其對邊之中點之距離之三分之二,即中線BH亦必截AD於O,AO爲AD三分之二.

例題28. 設一角爲一線所平分,復作一線,過其頂,垂直於

此平分線，則線與角之兩邊成兩等角．



設 BAC爲已知角，而AD爲分角線．

通過A作EF⊥AD．

求證 ∠CAE＝∠BAF

證 ∠CAE＝90°－∠DAC．

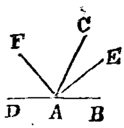
∠BAF＝90°－∠DAB．

但 DAC＝∠DAB．

∴ ∠CAE＝∠BAF．

公理3．Q,E,D,

例題29．兩補隣角之平分線必彼此相垂直．



設 ∠BAC＋∠CAD＝180°

而 AE平分∠BAC．AF平分∠CAD．

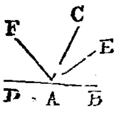
求證 AF⊥AE

證 2∠EAC＋2∠CAF＝180°

∴ ∠EAC＋∠CAF＝90°

∴ ∠EAF ＝90°

∴ AF⊥AE Q,E,D,



例題30．設兩隣角之平分線，彼此相垂直則此兩角必相補．

設 ∠s BAC及CAD爲兩鄰角．

AE平分∠BAC.

AF平分∠CAD.今∠EAF$=90^\circ$

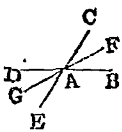
求證 ∠BAC+∠CAD$=180^\circ$

證 ∠EAC+∠CAF$=90^\circ$

∴ 2∠EAC+2∠CAF$=180^\circ$ 題設.

或 ∠BAC+∠CAD$=180^\circ$ Q,E,D,

例題31 兩對頂角中一角之平分線,必平分其他角.



設 ∡BAC及DAE爲對頂角AF平分∠BAC.引長FA至G

求證 ∠DAG=∠EAG

證 ∠DAG=∠BAF §93.

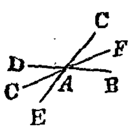
而 ∠EAG=∠CAF

但 ∠BAF=∠CAF 題設.

∴ ∠DAG=∠EAG 公理1

Q,E,D,

例題32. 兩對頂角之平分線必成一直線



設 ∡BAC及DAE爲對頂角而AF平分∠BAC.AG平分∠DAE.

求證 AF及AG在一直線上.

證 ∠BAC=∠DAE §93.

∴ ∠CAF ＝∠DAG 公理1

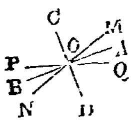
∴ ∠CAF＋∠DAG＝∠BAC

今 ∠BAC＋∠CAD ＝2rt∠s §86.

∴ ∠CAF＋∠CAD＋∠DAG＝2rt∠s

∴ AF及AG在一直線上. Q.E.D.

例題33. 兩相交線所成之各兩對頂角之平分線，必彼此相垂直.



MN及PQ相交於O.成四角.而AB及CD爲四角之分角線.

求証:AB⊥CD.

證 ∠DOQ＝∠MOC. 公理7.

而 ∠AOQ＝∠AOM. 公理7.

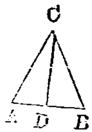
∴ ∠AOD＝∠AOC. 公理7.

但 ∠AOD＋∠AOC＝180°. §86.

∴ AOD＝90°

∴ AB⊥CD. Q.E.D.

例題34. 等腰三角形之頂角之平分線必垂直平分其底，在



△ABC內.AC等於BC.而CD平分∠C

求証 AD＝BD而CD⊥AB.

證 △ADC及BDC相等 §143.

因　AC=BC　題設.

而　∠ACD=∠BCD.　題設.

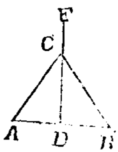
而　CD公用.

∴　AD=BD而∠ADC=∠BDC.　§128.

∴　△ADC及BDC均爲rt△　§63.

∴　CD⊥AB.　Q.E.D.

例題35. 等腰三角形之底之垂直平分線,必過其頂,且平分其頂角.



在　△ABC內AC等於BC

作　DE⊥AB且過A之中點D

求證　DE通過C.而平分∠ACB.

證　ED必通過C因AC=BC　§160.

因　△ACD及BCD相等　§141.

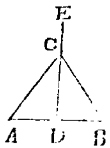
AC=BC　題設.

∠CAD=∠CBD　§145.

而　CD公用.

∴　∠ACD=∠BCD.　Q.E.D.

例題36. 設三角形之底之垂直平分線過其頂則此形爲等腰三角形.



設 DE爲△ABC之底邊上⊥平分線且通過三角形之頂點

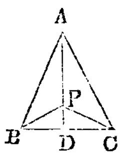
求證 ABC爲等腰三角形

證 因C在⊥平分線DE上AC＝BC §160.

∴ △ABC爲等腰 §120.

Q.E.D.

例題37. 等腰三角形之頂角平分線過其頂則此形爲等腰三角形



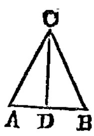
設 AD爲等腰三角形頂角BAC之分角線P爲 AD中之任意一點.

求證 PB＝PC

證 等腰三角形頂角之分角線，必垂直平分底邊 例題34.

故 於⊥平分線內任意一點P，必與底邊兩端有等距離.

例題38. 設三角形之一角之平分線垂直於其對邊則此形爲等腰三角形.



設 CD爲△ABC且⊥∠C之分角線AB

求證 ABC爲等腰三角形

證 在rt△ADB及ADC內CD公用.

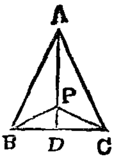
而 $\angle ACD = \angle BCD$ 題設.

$\therefore$ $\triangle BDC = \triangle ADC$ §142.

$AC = BC$

$\therefore$ $\triangle ABC$為等腰三角形

例題39. 設兩等腰三角形在同底上則過其兩頂之直線必垂直平分其底(§161).



設 ABC 及 PBC 為立於同一底邊上之兩等腰三角形

引長AP遇BC於D

求證 D為BC之中點

證 因A與B及C有等距離

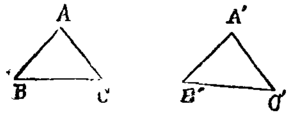
APD⊥BC之中點 §161.

$\therefore$ D為BC之中點

例題40. 設兩等腰三角形有一相當邊及一相當角彼此各相等則此兩形必等

設 ABC及A'B'C' 為二等腰三角形其一相當邊及一相當角彼此各相等

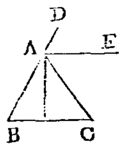
求證 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



證　因其一相當角彼此相等而每三角形中有兩角相等則此△之第三角與他△之第三角必相等

∴　$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$　　Q.E.D.

例題41．引長等腰三角形之一腰過其頂與其他腰所成之外角之平分線必與其底平行



設　在△ABC內 AB 等於AC引長 BA至D 作AE平分$\angle CAD$

求證　$AE \parallel BC$

證　$\angle CAD=\angle ABC+\angle ACB$　§137.

但　$\angle CAD=2\angle DAE$　題設.

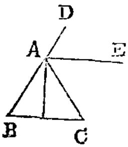
而　$\angle ABC=\angle ACB$　§145.

∴　$2\angle DAE=2\angle ABC$

∴　$\angle DAE=\angle ABC$　公理7.

∴　$AE \parallel BC$　§114.

例題42．設三角形之一外角之平分線與其一邊平行則此形為等腰三角形



設　在△ABC內AE 平分$\angle CAD$ 引長BA至任一點D而作$AE \parallel BC$

求證　ABC 為等腰三角形

證　$\angle DAE=\angle ABC$　§112.

而　$\angle CAE=\angle ACB$　§110.

今　$\angle DAE=\angle ACE$　題設.

$\therefore$　$\angle ABC=\angle ACB$　公理1.

$\therefore$　$AB=AC$　§147.

$\therefore$　$\triangle ABC$為等腰

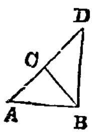
例題43. 設引長等腰三角形之一腰過其頂為原長之二倍則聯此引長線端及其底之近端之線必垂之於其底.

設　在$\triangle ABC$內$AC=BC$引長AC至D使CD等於AC並DB

求證　$BD\perp AB$.

證　在$\triangle BCD$內

$CD=CB$(各邊$=AC$)



$\therefore$　$\angle CBD=\angle CDB$　§145.

且$\angle CBA=\angle CAB$

$\therefore$　相加$\angle ABD=\angle CDB+CAB$　公理2.

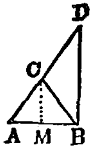
但　$\triangle$之和$=180^0$　§129.

$\therefore$　$\angle ABD=90^0$

$\therefore$　$BD\perp AB$　Q,E,D,

例題44. 由直角三角形之直角頂至其弦之中點作直線必分

此形爲兩等腰三角形



設 ABC爲rt△而∠B爲直角從B至弦AC之中點D作BD

求證 △ADB及BDC各爲等腰

證 從C作CM⊥AB

則 CM // DB §104.

CM平分AB §188.

在 rt△ MC及BMC內AM=BMCD共用

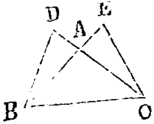
∴ rt△AMD=rt△BMD §144.

∴ AC=BC §128.

∴ AC=BC=CD

∴ △A B C及BCD各爲等腰 Q,E,D,

例題45. 設引長等腰三角形之兩等邊過其頂其兩引長線分相等則此兩線分端與其底之兩端之距離必等



在 △ABC內BA等CA

設 引長BA及CA至E及D

AE=AD

求證 DB=EC

證 因△BAD及CAE相等 §143.

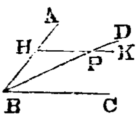
因　DA＝CA　題設.

AD＝AE　題設.

而　∠BAD＝∠CAE　§93.

∴　DB＝EC　Q,E,D,

例題46．設過一直之平分線內一點作一線與其一邊平行則可成之三角形必等腰



設　BD平分∠ABC通過BD之任一點P作Hk平行BC

求證　△BHP爲等腰

證　∠PBC＝∠PBA　題設.

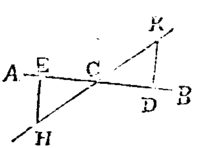
∠PBC＝∠HPB　§110.

∴　∠PBA＝∠HPB　公理1.

∴　BH＝PH　§147.

∴　△BHP爲等腰　Q,E,D,

例題47．設過AB內一點C作一截線復由此線內與C等距離之兩作兩垂線至AB或AB之引長線則此兩垂必等



設　Hk爲過AB

求證　HE＝kD 線內一點C之直線

設CH等於Ck而設 HE及kD⊥AB

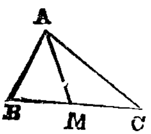
證 rt△ECH及DCk相等 §141.

因 CH＝Ck 題設.

而 ∠ECH＝∠DCk § 93.

∴ HE＝kD §128.

例題48. 設由三角形之頂至其底之中線等於其底之半則其頂角必爲直角.



設 AM爲BCA之中線

而 設AM等於$\frac{1}{2}$BC

求證 ∠BAC爲rt∠

證在△BAM內AM＝BM

題設

∴ ∠MBA＝∠MAB §145.

在 △MAC內AM＝CM 題設.

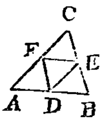
∴ ∠MCA＝∠MAC §145.

∴ ∠MBA＋∠MCA＝∠MAB＋∠MAC

公理2.

或 ∠BAC爲rt∠ Q,E,D,

例題49. 聯三角形之三邊之中點之線必分此形爲四等三角形



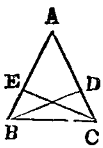
在 △ABC內設D,E,F,爲各邊AB,BC,CA,之中點.

求證 △ADF,FED,FEC,皆相等

證 △ADF及FED相等 §150.

因 DF公用AF=DE及 AD=FE 依同理△DBE=△FFD=△FFC Q,E,D,

例題50. 等腰三角形之兩腰上之頂垂線必等



在 △ABC內設AB=AC

而 BD⊥AC,CE⊥AB

求證 BD=CE

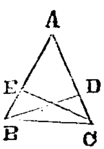
證rt△BCE及BCD相等 §141.

BC公用

∠CBE=∠BCD §145.

∴ BD=CE Q,E,D,

例題51. 設三角形兩邊上之頂垂線相等則此形爲等腰三角形



在 △ABC內設BD⊥AC,CE⊥AB而 BD等于CE

求證 △ABC爲等腰

證 rt△BCD及CBE相等 §d42.

BE公用

BD＝CE　　題設.

∴　∠ACB＝∠ABC　　§128.

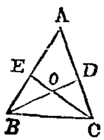
∴　AB＝AC　　§147.

∴　△ABC爲等腰　　Q,E,D,

例題52．等腰三角形之兩腰上之中線必等

在　△內設AB等於AC而BD及CE 爲等上之中線

求證　BD＝CE



證　rt△BCD及BCE相等　　§143.

BC公用

CD＝BE　　公理7.

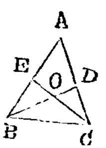
而　∠ACB＝∠ABC　　§145.

∴　BD＝CE　　Q,E,D,

例題53．設三角形之兩邊上之中線相等則此形爲等腰三角形

在　△ABC內設BD,CE爲二中線相交於O.且BD等於CE

求證　△ABC爲等腰



證　△BOE及COD相等　　§143.

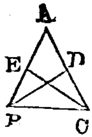
BO＝CO及OE＝OD

而　∠BOE＝∠COD　　§128.

∴　BE＝CD　　§ 93.

∴　AB＝AC　　Q,E,D,

例題54. 等腰三角形之兩底角之平分線必等



在　△ABC內設AB＝A∠並設BD平分∠ABC

而CE平分∠ACB

求證　BD＝CE

證　△CDB及BEC相等　　§ 139.

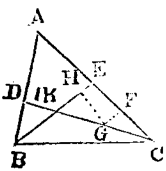
BC公用

∠BCD＝∠CBE　　§ 145.

∠CBD＝∠BCE　　公理7.

∴　BD＝CE　　Q,E,D,

例題55. 設三角形不等腰則其兩底角之平分線必不等



在　△ABC內,設∠ABC大于∠ACB，BE平分∠ABC而CD平分∠ACB.

求証　CD＞BE

證今　kC＞kB

∴　CD＞BE若kD＞或＝kE

但　若kD＜AE，截kH等于kD，而kG等于kB;作HG,並作GF // BE.

$\angle kDB = \triangle kHG$ §143.

因 $kD = kH$，及 $kB = kG$ 作圖.

而 $\angle DkB = \angle HkG$ § 93.

$\therefore$ $\angle kHG = kDB$ §118.

今 $\angle kEC = \angle A + \frac{1}{2}\angle ABC$.

而 $\angle kDB = \angle A + \frac{1}{2}\angle ACB$. §137.

但 $\angle ABC$ 大于 $\angle ACB$. 題設.

$\therefore$ $\angle kEC$ 大于 $\angle kDB$. 公理4.

$\therefore$ $\angle kEC$ 大于 $\angle kHG$.

今 若從H作線 $HM \parallel EC$ §112.

$\angle kHM = \angle kEC$

$\therefore$ $\angle kHM$ 大于 $\angle kHG$.

故 HM線割GF線于一點M.

今 $MF = HE$ (§180)而 $GF > MF$ 公理8.

$\therefore$ $GF > HE$

又 $\angle GFC = \angle kEC$ §112.

而 $\angle kEC = \angle A + \frac{1}{2}\angle ABC$. §137.

$\therefore$ $\angle GFC$ 大于 $\angle FCG$ $(\frac{1}{2}\angle ACB)$

$\therefore$ $CG > GF$，而 $> HE$

$\therefore$ kC－kG＞kE－kH，

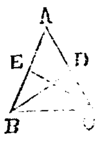
或 kC＋kD＞kB＋kE

或 CD＞BE Q,E,D,

例題56．若一三角形兩角之平分線相等則此形爲等腰三角形

在 △ABC內設BD平分∠ABC而CE平分∠ACB，並設BD＝CE，

求證 AB＝AC



證 ABC大于或小于或等于∠ACB

1．若∠ABC大于∠ACB，則△ABC不等腰而BD不等于CE 例題55.

2．若∠ABC小于∠ACB，則△ABC不等腰而BD亦不等于CE 例題55.

但 二者之結果皆與題設BD等于CE不合

故 因∠ABC大于或小于∠ACB，

∠ABC＝ACB §147.

$\therefore$ AB＝AC

Q,E,D,

例題57．由等腰三角之底之中點至其兩腰之垂線必等

在 △AEC內設AB等於 ACD爲 BC 之中點

而DE⊥AB.DF⊥AC

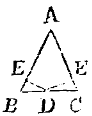
求證 rt△BDE及CDF相等 §142.

因 BD=CD 題設.

而 ∠EBD=∠FCD §145.

DE=DF Q,E,D,

例題58. 試述前例題之逆定理且證之



設 AEC 爲任一△D爲BC之中點而DE⊥A

B,DE⊥AC且DE=DF

求證 △ABC等腰

∵ rt△BDE及CDF相等 §151.

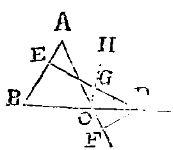
因 BD=DC及DE=DF 題設.

∴ ∠ABC=∠ACB §128.

∴ AB=AC §147.

∴ △ABC爲等腰

例題59. 由等腰三角形之底之引長線內一點至其兩腰之距離之差爲一定



設 ABC爲等腰△從BC之延長線上一

點D作DE⊥AB,DF⊥AC之延線

且命DE大于DF

求證　DE－DF為一定

證　作CH∥BA

今　∠ABC＝∠ACB　§145.

∠ABC＝∠HCD　§112.

而　∠DCF＝∠ACB　§ 93.

∴　∠DCG＝∠DCF　公理1.

rt△DGC及DFE相等　§141.

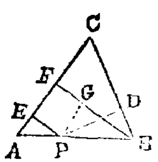
DC公用而∠DCG＝∠DCF　§128.

∴　DG＝DF

∴　DE－DF＝DF－DG＝GE(BA及CH間之小距離)

∴　DE－DF為一定　Q,E,D,

例題60. 由等腰三角形底內一點至其兩腰之垂線之和為一定且等於其一腰上之頂垂線.



設　ABC為等腰△AB為底邊P為AB上之任一點PD⊥BC,PE⊥AC並作BF⊥腰AC

求證　PD＋PE＝BF

證　作PG∥AC　§104.

∴　∠BAC＝∠BPG　§112.

且 $\angle ABC = \angle BAC$ § 145.

因知 $\angle ABC = \angle PBG$ 公理1.

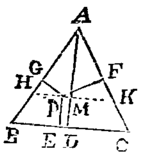
因 PB公用而 $\angle ABC = \angle BPG$

$\therefore$ $PD = BG$ § 128.

今 $PE = GF$ § 180.

$\therefore$ $PD + PE = BG + GF = BF$ Q,E,D,

例題61. 由等邊三角形內一點至其三邊之垂線之和爲一定且等於其頂垂線.



設 ABC爲等邊△BC爲底邊AD爲垂線P爲三角形中之任一點PG,PE,PG所作⊥S

求證 $PE + PF + PG = AD$

證 通過P作Hk∥BC

而 遇AD於M今等邊三角形之三垂線相等

$\angle AHk = \angle ABC = 60^\circ$ § 112.

$\angle AkH = \angle ACB = 60^\circ$

$\therefore$ △AHk爲等角 § 131.

故 AHk亦等邊

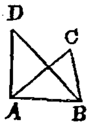
$\therefore$ $PF + PG = AM$ 例題60.

但 $\therefore$ $PE + AM = MD + AM = AD$ 公理2.

即 $PE+PF+PG=AD$ Q,E,D,

例題62. ABC及ABD爲兩三角形在同底AB上且在底之同側但不同頂設AC等於AD試證即B<不能等於BD(與154)

求證 BC與BD不等



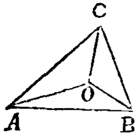
證 因AC及AD不能重合則此二線中之一線與AB所成之角大于他線與AB所成之角若∠DAB大於∠CAB則BD大於BC §154.

若 ∠CAB大於∠DAB

則 BC大於BD §154.

即 BC及BD不能相等 Q,E,D,

例題63. 由三角形內一點至其三頂之線之和必小于其周界而大於其周界之半



設 O爲△ABC內一點

求證 $OA+OB+OC<AB+AC+BC$ 及 $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$

證 $OA+OB<AC+BC$(§100)但$>AB$(§49)

$OB+OC<AB+AC$ 但$>BC$

$$\frac{OC+OA<AB+BC \qquad 但>AC}{}$$

故 $2(OA+OB+OC)<2(AB+AC+BC)$ 但$>$

$AB+BC+AC$ 公理4

或 $OA+OB+OC<AB+AC+BC$ 然$>$

$\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$ Q,E,D,

例題64. 設由等腰三角形之底內一點作兩線與其兩腰平行則成一平行四邊形其周界爲一定卽等其兩腰之和.

在 $\triangle ABC$內設 AB等于AC,D爲BC上任一點而 $DE \parallel CA$,$DF \parallel BA$.

求證 $AEDF$爲$\square$而其周界等於$AB+AC$.

證 按定義$AEDF$爲$\square$. §166.

今 $\angle EDB=\angle C$ §112.

而 $\angle B=\angle C$ §145.

$\therefore$ $\angle EDB=\angle B$ 公理1.

$\therefore$ $ED=EB$ §147.

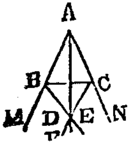
依同理 $FE=FD$

$\therefore$ $AE+ED+DF+AF=AB+AC$

Q,E,D,

例題65. 三角形 ABC 之頂角A之平分線及引長其兩邊AB

及AC與其底所成之兩外角之平分線必相遇於一點此點與底及兩邊引長線之距離相等（§162）



設　ABC爲一△引長AB至任一點M點引長AC至經一點N△MBC及NCB之平分線及E及CF交于D而D與AM,AN及BC有等距離

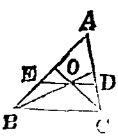
證　BE上之任一點與BM及BC有等距離§162.

而　CF上之任一點與CN及BC有等距離§162.

∴　D點爲BE及CF之公點且于BM,CB及CN有等距離

∴　∠A之平分線亦必通過D點

例題66. 設作兩線平分三角形之兩底角復過此兩線之交點作一線與其底平行則其兩邊間此平行線之長等于此平行線及底邊間兩邊之線分之和



設　作DE通過△ABC兩角△ABC及ACB之平分線OB,OC之交點O且∥底邊BC

求證　ED=EB+DC

證　∠EBD=∠OBC　　題設.

∠EOB=∠OBC　　§110.

∴　∠EBO=∠EOB　　公理1.

$\therefore \quad EO=EB$ §147.

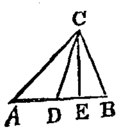
依同理 $\quad OD=DC$

$\therefore \quad EO+OD=EB+DC$ 公理2.

即 $\quad ED=EB+DC$ Q,E,D,

例題67. 三角形之頂角之平分線與由其頂至底之垂線所成之角等于其兩底角之差之半.

在 $\triangle ABC$內,設CD平分$\angle C$,而$CE\perp AB$,並設$\angle B$大于$\angle A$



求證 $\angle DCE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle A)$

證 $\angle DCE=\angle ACE-\angle ACD$.

今 $\angle ACE=90^\circ-\angle A$ §135.

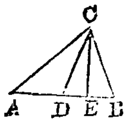
而 $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB$. 設題.

$\therefore \quad \angle DCE=90^\circ-\angle A-\frac{1}{2}\angle ACB$.

且 $\angle ACB=180^\circ-\angle A-\angle B$ §131.

$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle ACB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B$. 公理7.

$\therefore \quad \angle DCE=90^\circ-\angle A-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B)$



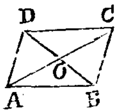
$=90^\circ-\angle A-90^\circ+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$

$=\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A$　　Q,E,D,

例題68. 設四邊形之兩對角線彼此平分則此形爲平行四邊形

設　四邊形ABCD之對角線AC及BD相交于O而AO等于CO,BO等于DO.

求証　ABCD爲平形四邊形



證　△ABO及DCO相等　§143.

因　AO=CO　題設.

BO=DO　題設.

而　∠AOB=∠COD　§93.

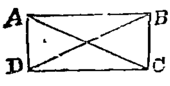
因　AB=BC及∠BAO=∠DCO　§128.

∴　AB//DC　§111.

∴　ABCD爲平行四邊形　§183.

例題69. 矩形之兩對角線必等.　Q,E,D,

設　ABCD爲矩形



求証　AC=BD

證　rt△ABD及DCA相等.　§144.

因　AD共用

AB=DC　§178.

∴ AC＝BC §128.

Q,E,D,

例題70. 設一平形四邊形兩對角線相等則此形爲矩形.

設 ABCD爲平行四邊形.AC及BD相等.

求證 ABCD爲矩形

證 △ABD及DCA相等 §150.

因 AD公用 題設.

AC＝BD 題設.

而 AB＝DC §178.

∴ ∠BAD＝∠ADC §128.

今 ∠BAD＋∠ADC＝180° §115.

∴ ∠BAD＝∠ADC＝90°

依同理 ∠ABC＝∠DCB＝90°

故 ABCD爲矩形 Q,E,D,

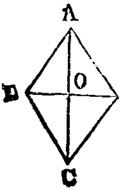
例題71. 菱形之兩對角線必彼此相垂直且平分其各角

設 ABCD爲菱形AC及BD爲二對角線.且∠BAO＝∠DAO等等相交於O

求證 AC⊥BD

證 △OAB及OAD相等 §150.

因 OA公用 AB＝AD



而　　OB＝OD　　§168.

∴　$\angle$BAO＝$\angle$DAO　　§128.

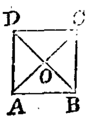
∴　$\angle$AOB＝$\angle$AOD

∴　AOB＝90°　　§63.

∴　AC$\perp$BD

同理證得　$\angle$ABO＝$\angle$CBO等等　　Q,E,D,

例題72. 正方形之兩對角線必彼此相垂直，且必平分其各角.



設　ABCD爲正方形AC,BD相交於O

求證　AC$\perp$BD且$\angle$BAO＝$\angle$DAO等等

證　$\triangle$OAB及OAD相等　　§150.

因　　OA　公用

AB＝AD　　§168.

OB＝OD　　§184.

∴　$\angle$ABO＝$\angle$DAO　　§128.

而　　$\angle$AOB＝AOD

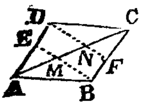
∴　AOB＝90°

∴　AC$\perp$BD

依同理證得　$\angle$ABO＝CBO,等等　　Q,E,D,

例題73. 由平行四邊形之兩對頂至其兩對邊之中點之線必

分其對角線爲三等分，



在 ▱ABCD 內設E及F爲兩對邊 AD,BC 之中點。

設 BE截AC於m，而DF截AC於N

求證 AM=MN=NC.

證 於EDFB形中

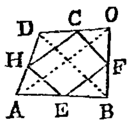
	ED // BF	§166.
又因	AD=BC	§178.
	ED=BF	公理7.
因知 ∴	DF // EB	183.
在 △ADN中	AM=MN	§188.
在 △CMB中	NC=MN	§188.
∴	AM=MN=CN	公理1.

Q,E,D,

例題74. 順次聯四邊形各邊中點之線必圍成一平行四邊形。

設 ABCD爲一四邊形依次取各邊之中點 E,F,G,H,

求證 EFGH爲▱



證　作AC,BD二對角線

EF及HG // AC　§189.

而　EF＝HG＝$\frac{1}{2}$AC　§189.

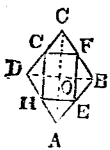
∴　EF // HG　§106.

故　EFGH形爲▱　Q,E,D,

例題75. 順次聯菱形之各邊之中點之線必圍成一矩形（證法與例題74相似）

設ABCD爲菱形依次取各邊中點E,F,G,H,

求證　EFGH爲矩



證　作AC,BD,二對角線相交于O,

EF // AC且等于$\frac{1}{2}$AC.　§189.

而　HG // AC亦等于$\frac{1}{2}$AC

∴　EF // HG　§106.

而　EF＝HG　§理1.

∴　EFGH形爲▱　§183.

在O所成之∠均爲rt∠　例題71.

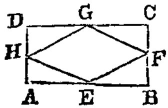
故　▱EFGH內之四角亦皆爲rt∠　§176.

且　BD不能等于AC

∴　EF不能等于FG　§167.

∴ EFGH形爲矩形 Q,E,D,

例題76. 順次聯矩形各邊之中點之線必圍成一菱形



設 ABCD爲矩形(非長方形)而E,F,G,H爲依次所取各邊之中點

求證 EFGH爲菱形

證 rt△AEH及BEF相等 §144.

因 AE=BE 題設.

而 AH=BF §178公理7.

∴ EH=EF

依同理證得 EH=HG=GF §128.

∴ EFGH爲正方形或矩形

今 EFGH形不爲正方形

因 若爲正方形則HEF必等于90^0

而 ∠AEH+∠BEF=90^0 §88.

但 ∠AEH=∠BEF §128.

∴ ∠AEH必爲45^0

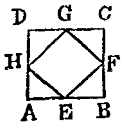
∴ ∠AHE必爲45^0 §135.

且 AE必等于AH §147.

但 終結與題設相反知此矩形非爲正方形

∴ EFGH形爲菱形 Q,E,D,

例題77．順次聯正方形各邊中點之線必圍成一正方形．



設　ABCD 爲正方形爲依次所取各邊之中點

E, F, G, H,

求證　EFGH 仍爲正方形

證　rt△AEH, BEF, CFG, DGH爲等腰因

其腰皆爲正方形各邊之半

而　四△亦相等　§144.

∴　HE＝EF＝FG＝GH

又　各△中之兩底角亦皆相等．　§145.

故　每底∠＝45°　§135.

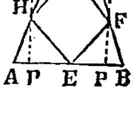
∴　∠FEH＝180°－∠AEH—BEF＝90°

§ 89.

∴　EFGH形爲正方形。

例題78．順次聯等腰梯形之各邊之中點所作之線必圍成之

菱形或正方形



設　ABCD爲等腰梯形而設 EF, FG, GH,

HE, 聯接依次所取各取各邊之中點

求證　EFGH爲一菱形或一正方形

證　引二直線PQ, R S通過兩腰中點F, H

而垂於底邊 AB 且使PQ遇AB於P遇 DC延線於

Q使RS遇AB於R，遇DC延線於S

則　　PQ∥RS　　104.

且　　RP∥SQ

∴　PQSR為□

而　依作圖PQSR為一矩形或正方形。

∴　EFGH為菱形(例題76)或為正方形

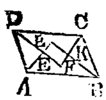
(例題76)

Q,E,D,

例題79．斜矩形之諸角之平分線必圍成一矩形

設　EFKL為斜矩形ABCD各角平分線所構成之。

求證　EFKL為矩形



證因　　DC∥AB　　§166.

∠CDA＋∠BAD＝180°　　§115.

∴　∠EDA＋∠EAD＝90°　　例題7.

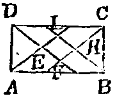
∴　∠DEA為rt∠　　§131.

∴　∠FEL為rt∠　　§93.

依同理各ELK，LKE，KFE，皆為rt∠

∴　EFKL為矩形　　Q,E,D,

例題80．矩形之諸之平分線必圍一正方形



設　四邊形EFKL爲聯接矩形各角平分線所成之四邊形

求證　EFKL爲正方形

證　用例題79同法證得EFKL爲一矩形

rt△EDA及KBC相等　§141.

因　DA=CB　§178.

而　∠EDA=45°=∠KBC　題設.

∴　ED=EA=KC=KB　§128.

依同理△FDC及LAB相等

而　FD=FC=LA=LB

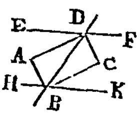
∴　FD−ED=FC−KC=LB−LB−KB

=LA−EA　公理3.

卽　EF=FK=LK=EL　§168.

∴　EFKL爲一正方形　Q,E,D,

例題81. 設兩平行線爲一截線所截其諸內角之平行線必構成一矩形



設　四邊形ABCD爲兩平行線被截線即截成諸內錯角平分線所圍成

求證　ABCD爲矩形

證　△ADC及ABC皆爲rt△　例題29.

今　$\angle EDB+\angle DBH=2rt\angle s$　　§115.

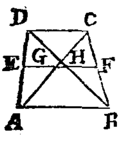
$\therefore$　$\angle ADB+\angle ABD=1rt\angle$　　公理7.

$\therefore$　$\angle DAB$爲一$rt\angle$　　§131.

依同理$\angle DCB$亦爲$rt\angle$

$\therefore$　ABCD爲長方形

例題82．梯形之中線必過其兩對角線之中點。



設　ABCD爲一梯形AB, DC // 邊而 AC, BD爲兩對角線EF爲中線

求證　EF必平分AC及BD

證　G, H爲AC及BD之中點

EF // AB及CD　　A190.

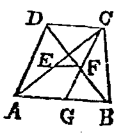
E爲AB之中點　　題設.

$\therefore$　EF線必通過H點　　§188.

因　依同理知EF亦必通過G點

$\therefore$　EF平分兩對角線

例題83．聯梯形之兩對角線之中點之線等於其兩底之差之半。



設　ABCD爲兩梯形AB, DC爲 // 邊AC, BD爲兩對角線而E及F爲兩對角線之中點

求證 $EF=\frac{1}{2}(AB-DC)$

證 引CF線且延長之使與AB相遇於G△BFG及CFD相等 §139.

因 $BF=DF$ 題設.

$\angle BFG=\angle CFD$ § 93.

$\angle GBF=\angle CDF$ §110.

∴ $CF=FG$

$DC=BG$ §128.

∴ $AG=AB-BG=AB-DC$

但 $EF=\frac{1}{2}AG$ §189.

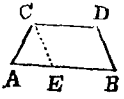
故 $EF=\frac{1}{2}(AB-DC)$

Q,E,D,

例題84. 等腰梯形之各底與其兩腰成等角

設 ABDC為梯形其腰AC等於腰BD

求證 $\angle A=\angle B$及$\angle C=\angle D$



證 作$CE \parallel DB$ $CE=DB$ §180.

∴ $CE=AC$ 公理1.

∴ $\angle A=\angle CEA$ §145.

但 $\angle CEA=\angle B$ §112.

$\therefore$ $\angle A=\angle B$

今 $\angle C$爲$\angle A$之補角

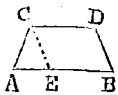
而 $\angle D$爲$\angle B$之補角 §115.

$\therefore$ $\angle B=\angle D$

例題85. 設梯形之兩底角相等則其他兩角亦相等而此形爲等腰

設 ABDC爲梯形已知AB∥CD且$\angle A=\angle B$

求證 $\angle D=\angle C$及AC=BD



證 $\angle D$, $\angle C$相等因爲等角$\angle$s A,B之補角 § 85.

作 CE∥BD

則 $\angle CEA=\angle B$ §112.

但 $\angle B=\angle A$ 題設.

$\therefore$ $\angle CEA=\angle A$ 公理1.

$\therefore$ CE=AC §147.

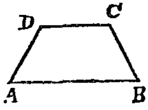
但 CE=DB §180.

$\therefore$ AC=BD 公理1.

Q,E,D,

例題86. 等腰梯形之兩對角相補

設 ABCD爲等腰梯形AB∥DC及AD等于BC



求証 $\angle A+\angle C=180^0=\angle B+\angle D$

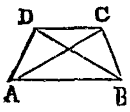
証 $\angle A+\angle D=180^0$ §115.

$\angle C=\angle D$ 例題84.

$\therefore$ $\angle A+\angle C=180^0$

依同理 $\angle B+\angle D=180^0$ Q,E,D,

例題87. 等腰梯形之兩對線必相等



設 ABCD為等腰梯形

AB,DC為∥邊AC,BD為兩對角線

求証 AC=BD

証 於△ADC及BCD相等 §143

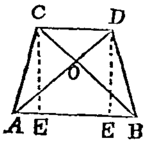
因 DC公用

AD=BC 題設.

而 $\angle ADC=\angle BCD$ 例題84

$\therefore$ AC=BD Q,E,D,

例題88. 設梯形之兩對角綫相等則此形爲等腰梯形



設 ABCD 爲一梯形 ABCD 爲∥邊而設

AC,BD爲二對角線且相等

證求 AC=BD

證 由C及D作DE及CF垂於AB

CF∥DE §104.

∴ $CE = DF$ §180.

rt△ACF及BDE相等 §151.

$CF = DE$及$AC = BD$ 題設.

∴ $\angle DAF = \angle CBA$ §128.

又 ABC及ABD相等 §143.

AB公用

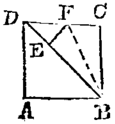
$BC = AD$ 題設.

$\angle CBA = \angle DAB$ §128.

∴ $AC = BD$ Q,E,D,

故 ABCD爲兩等邊兩平行四邊行

例題89. 設于正方形ABCD之對角線BD內截取BE于等BC並作EF垂直于BD,遇B∠于F則DE必等于EF且等于FC.



求證 $DE = EF = FC$

證 在△BCD內$\angle D = \angle B$ §145.

但 $\angle D = \angle B = 90^0$ ∴ $\angle D = 45^0$

又 在△DEF內 $\angle E + \angle D = 90^0 + 45^0 = 135^0$

∴ $\angle F = 180^0 - 135^0 = 45^0$

∴ △DEF爲等腰而$DE = EF$ §147.

作FB rt △BEF及BCF相等 §151.

因 BF公用

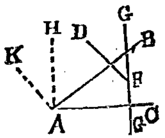
而 BF=BC 題設.

∴ EF=EC §128.

∴ DE=EF=FC 公理1.

B,E,D,

例題90. 設兩角之邊彼此各相垂直則此兩角相等或相補



設 AB⊥FD而AC⊥GI

求證 ∠BAC等於成∠DFG或與∠DFI爲補角

證 作AK⊥AB作AH⊥AC

則 AK∥FD而AH∥IG §104.

∴ ∠DFG=∠KAH §176.

按作圖 ∠BAK爲直角

∴ ∠BAH爲∠KAH之餘角

按作圖∠CAH爲直角

∴ ∠BAH爲∠BAC之餘角

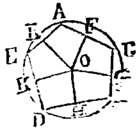
∴ ∠BAC=∠KAH §84.

∴ ∠DFG=∠BAC 公理1.

∴ ∠DFI與DFG互爲補角且與∠BAC亦

相補 Q,E,D,

例題91. 圓之內切多邊形之諸邊之垂直平分線必相遇于一點



設 ABCDE爲內切多邊形

求證 AB,BC,CD,DE,EA,諸邊上之⊥平分線會于一點

證 內切多邊形各邊上之平分垂線必通過圓心 §248.

∴ 諸弦上之⊥平分垂線必交于圓心Q,E,D,

例題92. 試述兩圓相關之位置此兩圓之聯心線如下

(1) 大于兩半徑之和

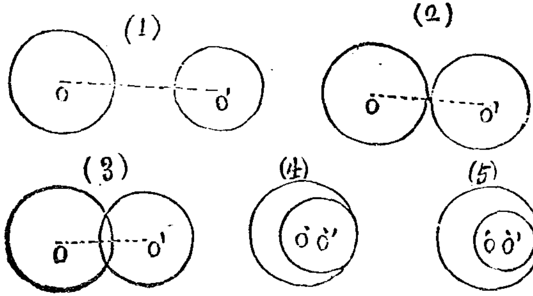
(2) 等於兩半徑之和

(3) 小於兩半徑之和而大於兩半徑之差

(4) 等於兩半徑之差

(5) 小於兩半徑之差

各節以圖表明於下



(一) 二⊙不在一處

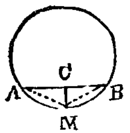
(二) 二⊙相外切

(三) 二⊙相交

(四) 二⊙相內切

(五) 二⊙一容於他圓內

例題93. 由弦之中點至其對弧之中點之直線必垂直於此弦



設 C爲 AB弧之中點而設m爲 AB弧之中點

求證 Cm⊥AB弦

証 作 Am及Bm

弦 Am＝弦Bm §241.

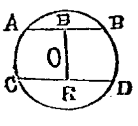
∴ m與A及B有等距離

但 C與A及B亦有等距離 題設.

∴ Cm爲AB弦之⊥平分線

Q,E,D,

例題94. 過兩平行弦之中點之直線必過圓心



設 弦AB,CD相平行H爲AB之中點K爲CD之中點

求証 HK通過圓心

証 OH及OK

OH⊥AB及OK⊥CD §247.

∴ OH及OK重合且成一直線 §47.

∴ HK與此線重合

∴ KK通過圓心

例題95. 試述兩圓相關之位置此兩圓如下

(1) 可作兩外公切線一內公切線

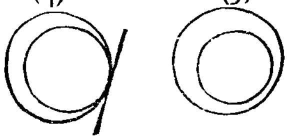
(2) 可作兩外公切線一內公切線

(3) 可作兩外公切線無內公切線

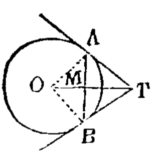
(4) 可作一外公切線無內公切線

(5) 無公切線

(4) (5)



例題96. 由圓心至兩切線之交點之直線必垂直平分聯此兩切點之弦



設 TA及TB爲至圓兩切線圓心爲O

求証 OT邊爲AB弦之⊥平分線

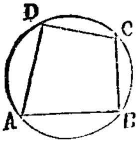
證 ⊥A＝⊥B §261.

OA＝OB §217.

∴ OT 爲AB之⊥平分線 §161.

Q,E,D,

例題97. 圓之內切四邊形之各兩對角相補



設 ABCD為圓內接四邊形

求證 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$

證 $\angle A$之測度等于

$\frac{1}{2}$DAB弧 § 289.

而 $\angle C$之測度等于

$\frac{1}{2}$DAB § 289.

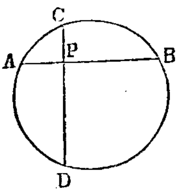
$\therefore$ $\angle A+\angle C$和可以$\frac{1}{2}$ DCB弧 +DAB

弧）測之即$\frac{1}{2}$圓周.

$\therefore$ $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$

依同理 $\angle B+\angle D=180^\circ$ Q,E,D,

例題98. 設過周內一點作兩弦相垂直則其所截之各兩對弧之和等於半周



設 AB,CD為二垂直弦交于P

求證 AC弧+BD弧二半周

證 $\frac{1}{2}$(AB弧+BD弧)可測 $\angle$A

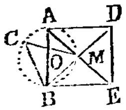
BC § 294.

但 $\angle APC=90^\circ$ 題設.

$\therefore$ $\frac{1}{2}$(AC弧+BD弧) $=90^\circ$

∴ AC弧＋BD弧＝180°＝半圓周Q,E,D,

例題99. 設于直角三角形之弦上作正方形則聯此正方形之中點之直角頂之線必平分此直角



設 ABC爲一rt△ 而∠C 爲rt∠又設M爲弦上正方形ABED之中點換言之卽兩對角線之交點

求證 ∠ACM＝∠BCM

證 以AB爲直徑作圓

而 ∠ACB＝90° 題設.

∠AMB＝90° 例題72.

∴ 圓周必通過 C及M §290.

今 AM＝BM 例題69 §184.

∴ AM弧＝BM弧 §243.

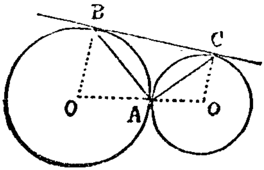
∴ ∠ACM＝∠BCM §289.

∴ ∠ACM＝∠BCM＝45° Q,E,D,

例題100. 兩圓相外切于A,又有一外公切線切兩圓于 B及C試證BAC爲直角

設 BC爲兩圓之公切線其圓心爲 O及O' 且兩圓相切于A

求證 ∠BAC爲rt∠



證　作OB，O'C，OO'

今　OB及OC'均爲⊥BC　§254.

則　OB∥O'C　§104.

∴　∠O+∠O'=2正角　§115.

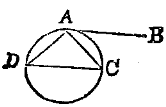
∠O可以AB弧度之

而　∠O'可以AC弧度之　§288.

但　∠BAC可以$\frac{1}{2}$(AB弧+AC弧)度之

∴　∠BAC爲rt∠　Q,E,D,

例題101.切線及弦所成之角等于其對圜分之內切角



設　∠BAC爲切線AB，及其弦AC所成之〇而∠ABC爲其相對分圜之內切角

求證　∠BAC=∠ABC

證　∠BAC可以　§295.

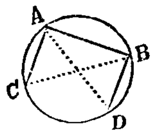
$\frac{1}{2}$AC弧度之

而　∠ADC可以$\frac{1}{2}$AC弧度之　§289.

∴　∠BAC=∠ADC　公理1.

Q,E,D,

例題102.于弦之兩端所作之二垂直線必等



設 弦AC及BD⊥于AB弦之兩端A及B

求證 AC=BD

證 作AD及CB

因 rt△CAB及DBA相等 §142.

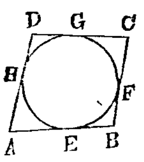
而 AB=AB

∠C=∠D §293.

∴ AC=BD §128.

Q,E,D,

例題103.圓之外切四邊形之兩對邊之和等于他兩邊之和



設 ABCD爲圓外切四邊形而 E,F,G,H,爲切點

求證 AB+DC=AD+BC

證 AE=AH §261.

BE=BF

CG=CF

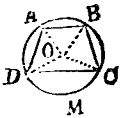
DG=DH

∴ AE+BE+CG+DG=AH+DH+DF

公理2.

即　　AB+DC=AD+BC　　Q,E,D,

例題104．設四邊形兩對角之和等于兩直角則可作一外切圓



在四邊形ABCD內設∠DAB+∠BCD等于2rt∠s設DAB圓周通過D,A及B

求證　DAB圓周通過C

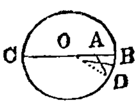
證　∠DAB可以$\frac{1}{2}$DMB弧度之　§289.

因　∠DAB+∠BCD=二2rt∠s　　題設.

∠BCD必等于一角其角可以$\frac{1}{2}$全圓周減DMB弧度之卽以$\frac{1}{2}$DAB弧度之

因　∠BCD可以$\frac{1}{2}$DAB弧度之故C必在圓周上　　Q,E,D,

例題105．由圓內點至一圓周之至短線爲過此點之直徑之短線分



設　CB爲通過圓CBD內一點A之直徑而AD爲由A至圓周之任一線

求證　AB<AD.

証　　作　OD

今　OD<OA+AD　　§138.

但　OD=OB　　§217.

∴　$OB<OA+AD$

或　$OA+AB<OA+AD$

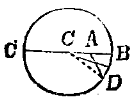
∴　$AB<AD$　　公理5.

Q,E,D,

例題106.由圓內一點至圓周之至長線，爲過此點之直徑之長線分

設　CB爲圓CBD內一點A所作之直徑

而　AD爲由A至圓周之他一線



求証　$AC>AD$

証　作OD

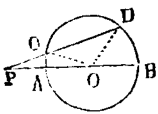
今　$AO+OD>AD$　　§138.

$OD=OC$　　§217.

∴　$AO+OC>AD$

卽　$AC>AD$　　Q,E,D,

例題107.由圓外一點至圓周之至短線引長之必過圓心



設　O爲已知圓心，P爲圓外之已知點P

AB爲O割線PCD爲一割線

求証　$PA<PC$

証　作OC,OD

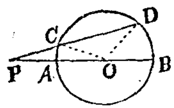
今　$PA+AO<PC+CO$　　§138.

而　　AO=CO　　§217.

∴　　PA<PC　　公理5.

Q,E,D,

點題108.由外一點至圓周之凹側之至短線必過圓心



設　　O爲已知圓圓心,P爲圓外之一已知點PAB爲通過O之割線PCD爲他一割線

求証　PB>PD

証　　作OC,及OD

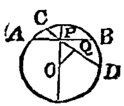
今　　PO+OD>PD　　§138.

而　　OD=OB　　§217.

∴　　PO+OB>PD　　§217.

即　　PB>PD　　Q,E,D,

例題109.過內一點之至短弦垂直過此點之直徑



設　　P爲已知點O爲圓心AB弦通過P點⊥OP而CD爲通過P之他一弦

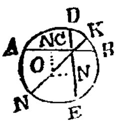
求証　AB<CD

証　作OQ⊥CD而遇CD於Q

OP>OQ　　§ 97.

∴　　AB>CD　　§251.

例題110.設兩相交弦與過其交點之直徑作等角則此兩弦必等



設　兩相交弦AB,DE與過兩弦交點直徑HK成等角ACH及ECH

求証　AB=DE

證　從圓心O作OM⊥AB及ON⊥DE

rt ∆OMC及ONC相等　§141.

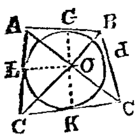
因　∠mCO=∠NCO　題設.

即　Om=On　§128.

∴　AB=DE　§249.

Q,E,D,

例題111.圓之外切四邊形之各兩對邊所對之圓心角必相補



設　ABCD爲外切四邊形從圓心作OA,OB,OC,OD

求證　∠AOD+∠BOC=2rt∆

證　作半徑OG,OH,OK,OL至各邊切點

∆OGB及OHB相等　§150.

因　OB=OB

OG=OH　§127.

而　$BG=BH$　§261.

$\therefore$　$\angle BOG=\angle BOH$　§128.

又　$\angle HOC=\angle COK$

$\angle KOD=\angle DOL$

而　$\angle LOA=\angle AOG$

$\therefore$　$\angle BOH+\angle HOC+\angle DOL+\angle LOA$

$=\angle GOB+\angle COK+\angle KOD+\angle AOG$

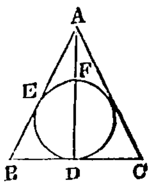
公理2.

$\therefore$　$\angle BOC+\angle DOA=\angle AOB+\angle COD$

$\therefore$　$\angle AOD+\angle BOC=2rt\angle s$

$\angle AOB+\angle LOD=2rt\angle s$

例題112.等邊三角形之內切圓之半徑等于此三角形之高之三分之一



設　DFF圓切于ABC等邊之角形內

求證　此圓之半經等于$\frac{1}{3}$△之高

證　因DEF圓切于△內則圓心O與△之各邊有等距離　§217.

故　圓心為△之$\angle s$之三平分線之交點　§162.

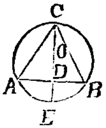
今　等邊三角形各角之平分線為其對邊之垂線且平分之

故 爲此△之高及中線 例題34.

∴ $OD=\frac{1}{2}AD$ 例題27.

Q,E,D,

例題113.等邊三角形外切圓之半徑等于此三角形之高之三分之二(例題27)



設 等邊ABC內均于θABC,AB

求證 此θ之半徑等于此△之$\frac{2}{3}$高線

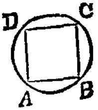
證 因此θ外接此△則圓心O至三角頂點有等邊距離 §217.

故 圓形爲△各邊之平分垂線之交點 §160.

今 △各邊之⊥平分線通過對角頂點例題 35.

∴ OC=2CD 例題27.

例題114.圓之內切平行四邊形必爲矩形



設 ABCD爲圓內接平行四邊形

求證 此四邊形爲矩形

證 AB=DC及BC=AD §178.

∴ AB弧=DC弧及BC弧=AD弧 §243.

∴ AB弧+AD弧=BC弧+DC弧 公理2.

∴ DAB弧=BCD弧=ABC弧=ADC弧

$\therefore\ \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$

因知 ABCD爲一矩形 §167.

Q,E,D,

例題115.圓之內切梯形必等腰

設 ABCD爲圓內切梯形AB∥DC

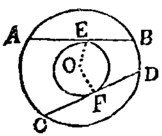
求證 梯形ABCD爲等腰

證 AD弧＝BC弧 §257.

∴ AD＝BC §247.

∴ 梯形ABCD爲等腰 Q,E,D,

例題116.圓之諸弦，與一內同心圓相切者必等且皆爲切點所平分



設 O點爲兩圓之公圓心又AB，CD爲外圓之二弦且切內圓於E，F二點

求證 AB＝CD及AE＝BE，CF＝DF.

證 作OE，CF

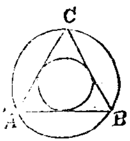
OE⊥AB OF⊥CD §254.

∴ AB＝CD §249.

∴ AE＝BE及CF＝DF §245.

例題117.設三角形之內切圓及外切圓爲同心，則此三角形

必等邊



設 △ABC外接及內切圓爲同心

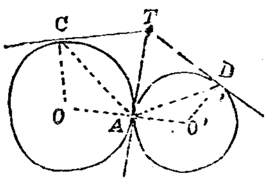
求證 △ABC爲等邊

證 AB=AC=BC 例題116.

∴ △ABC爲等邊 §120.

Q,E,D,

例題118.設兩圓相切，則由內公切線之切一點至此兩圓之切線必等.



設 兩圓相切於A而AT爲其內公切線從AT線上任一點T作TC及TD切線

求證 TC=TD

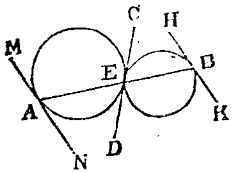
證 TD=TA §261.

TC=TA §261.

∴ TC=TD 公理1.

Q,E,D,

例題119.設兩圓相切過點作一線以兩圓周爲界則在其兩端之切線必平行.



設　AB 爲通過兩圓切點E所作之一直線設mn 及Hk爲在 AB 線兩端所作之兩切線

求證　mn // HK

證　作CD爲兩圓之內公切線

$\angle HBE = \angle CEB$ §295.

(各角可以$\frac{1}{2}$ EB弧度之)

$\angle NAE = \angle AED$ §295.

(各角可以$\frac{1}{2}$AE弧度之)

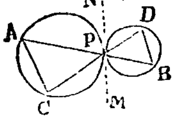
但　$\angle CEB = \angle AED$ §93.

$\therefore$ $\angle HBE = \angle NAE$ 公理1.

mn平行HK §111.

Q,E,D,

例題120.設兩圓相切過切點作兩線以兩圓周爲界則兩線端之弦必平行



設　兩圓相切於P。AB,CD爲通過P至兩圓周之二直線

求證　AC // DB

證　過P作內公切線mn

則　$\angle A=\angle MPC$

$\angle B=\angle nPD$　例題101.

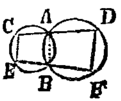
但　$\angle mPC=\angle nPD$　§903.

$\therefore$　$\angle A=\angle B$　公理1.

$\therefore$　$AC \parallel DB$　§111.

Q,E,D,

例題121.設兩圓相交過兩交點作兩線以兩圓爲周爲界則聯此兩線端之弦必平行



設　兩圓相交於A,B而 CAD及EBF 爲通過兩交點 AB 且與兩圓周相遇之二直線

求證　$CE \parallel DF$

證　作AB

ACEB,ADFB爲內切四邊形

$\therefore$　$\angle E=180^\circ-\angle BAC$　例題79.

而　$\angle F=180^\circ-\angle BAD$

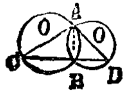
但　$\angle BAC=180^\circ-\angle BAD$　§86.

$\therefore$　$\angle BAC=\angle F$及$\angle E=180^\circ-\angle F$

則 $\therefore$　$\angle E+\angle F=180^\circ$而$CE \parallel DF$　§116.

Q,E,D,

例題122.設兩圓相交由一交點作兩圓之直徑則聯此兩直徑端線之線必過他一交點



設　O,O'為兩⊙圓心A,B為兩交點AC,AD為自交點所作兩圓之直徑

求證　直線CD通過B點

證　作AB,BC,BD,

△ABC,ABD皆為rt△　§290.

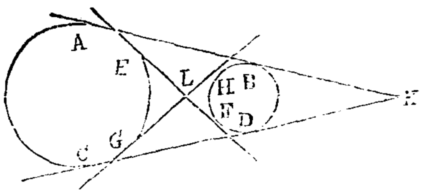
∴　CBD為一直線　§ 90.

故　CD直線通過B點　§ 47.

Q,E,D,

例題128.設于兩圓作兩外公切線或兩內公切線其兩切點間之線必等

設　AB及CD 為兩圓之外公切線而 EF 及



GH為兩圓之二內公切線

求證　AB=CD及EF=GH

證　引長AB及CD二線使相遇於K點

則　KA＝KC而KB＝KD　§260

∴　KA－KB＝KC－KD　公理3.

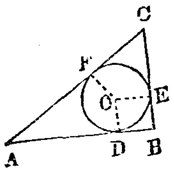
卽　AB＝CD

又　LH＝LF而LG＝LE　§261.

∴　LH＋LG＝LF＋LE　公理2.

即　HG＝EF　Q,E,D,

例題124.直角三角形之內切圓之直徑等于此三角形之兩腰之和與弦之差



設　ABC爲rt△∠B爲rt ∠O爲內切⊙圓心而D,E,F爲諸切點

求證　內切⊙之直徑＝AB＋BC－AC

證　作半徑OD及OE

OD⊥AB而OE⊥BC　§254.

∴　OD∥CB而OE∥AB　§104.

∴　OD＝BE而OE＝BD　§180.

∴　OD＋OE＝BE＋BD　公理2.

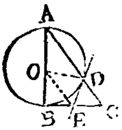
＝(BC－FC)＋(AB－AD)

＝BC－FC＋AB－AF　§261.

＝AB＋BC－(AF－FC)

故　$\bar{\theta}$之直徑$=AB+BC-AC$　　Q,E,D,

例題125.設直角三角形之一腰爲圓之直徑則于圓周截弦之點作切線必平分其他腰



設　圓直徑AB爲rt△ABC之腰AB而設弦AC截圓周于D.設DE爲在D點之切線截BC于E

求證　$EB=EC$

證　作OE及OD.

$\angle BOE=\angle DOE$　　§261.

$\angle BOD=\angle OAB+\angle ODA$　　§137.

而　$\angle OAD=\angle ODA$　　§145.

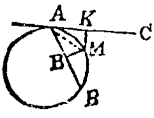
$\therefore$　$\angle BOE=\angle OAD$　　公理7.

$\therefore$　$OF \parallel AC$　　§144.

故　$OA=OB$而$BE=EC$　　§188.

Q,E,D,

例題126.由圓周內任一點作一弦及一切線復由此弦所對之弧之中點至此弦及切線作兩垂線則此兩垂線必等



設　自圓周之同一點A作弦AB及切線AC而設M爲弧AB之中點

求證　$\perp MK=\perp MH$

$\angle$BAM可以$\frac{1}{2}$BM弧度之 §289.

$\angle$CAM可以$\frac{1}{2}$AM弧度之 §295.

但 BM弧＝AM弧 題設.

$\therefore$ $\angle$BAM＝$\angle$CAM 公理.

rt $\triangle$AHM及AKM相等 §141.

因 AM公用

因 $\angle$MAH＝$\angle$KAM，而AM公用

$\therefore$ MH＝MK §128.

Q,E.D,

例題127.圓之外切梯形之中線等于其周界之四分之一

設 HK爲圓外切梯形 ABCD 之中線

求證 $HK=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+DA)$

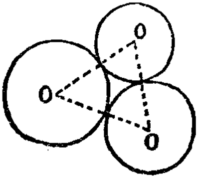
證 $AB+CD=BC+DA$ 例題103.

但 $HK=\frac{1}{2}(AB+CD)$ §190.

$\therefore$ $HK=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+DA)$

Q,E,D,

例題128.設兩定圓相外切又有一不定圓相外切則此不定圓之圓心與兩定圓之圓心之距離之差爲一定



設　r及r'爲外相切二定圓之半徑而r"爲外切二定圓之不定圓之半徑並設r大于r'

求證　從不定圓心至兩定圓心二距離之差爲一定

證　作二圓聯心線三聯心線必通過切點§265.

∴　r+r"—(r'+r")爲所求之差

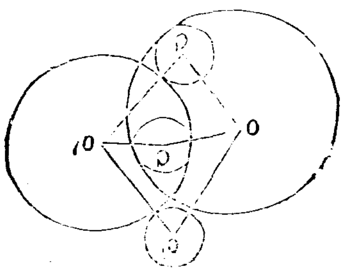
今　r+r"—(r'+r")=r+r"—r'—r"=r—r"爲一定　Q,E,D,

例題129.設兩定圓相交又作圓與此兩圓相切(i)一內切一外切(ii)皆內切或皆外切則其圓心與兩定圓之圓心之距離之和或差爲一定

設　O與O'及r與r'爲二定之圓心及半徑設C及S爲與兩定圓相切之不定圓圓心及半徑

C'及S'爲與一定圓相內切與他一定半相外切之不定圓圓心及半徑

設　C"及S"爲與兩不定圓相外切之圓心及半徑作聯心線OC,OC,O'C",O'C,O'C',O'C"命r大于r



求證 $OC+O'C, OC''-O'C', OC''-($

定

證 諸聯心線必通過切點

$\therefore \quad OC+O'C=(r-s)+(r'+s)$

$r'+s=r+r'$ 爲一定

$O'C-O'C'=(r-s')-(r'-$

$S'-r'+s=r-r'$ 爲一定

而 $OC''-O'C''=(r+s'')-(r'+$

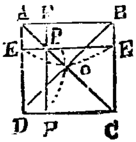
$s''-r'-s''=r-r'$ 爲一定

例題130.設過正方形之對角線內任一點作兩直線

之邊平行則此二線過正方形之各邊之點

角線之交點爲圓心之一圓周上

設 P爲正方形ABCD對角線AC上任



而 設作EE及FF通過P點而 //

求證 $OE=OE'=OF=OF'$

設 $PE \perp BC$ 而 $PF \perp DC$

因 P點在 $\angle DCB$ 之平分線內

$PE=PF$

今 $\angle CPE=\angle CAB$

而 $\angle CPF=\angle CAD$

$\therefore$ $\angle CPE=\angle CPF$ 公理1.

$PE=PF$ $PO=PO$

$\therefore$ $\triangle OPE=\triangle OPF$ §143.

$\therefore$ $OE=OF$ §128.

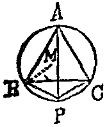
依同理 $OE'=OF'$

因 O在AB及EE'之⊥平分線內 §160.

$OE=OE'$ §.95.

$\therefore$ $OE=OE'=OF=OF'$ Q,E,D,

題131.設ABC爲圓之內切等邊三角形P爲弧BC內任一點則PA=PB+PC.



證 在PA線取PM等于PB又作BM

但 ABC爲等邊三角形則各邊可乘之弧必爲120°

$\angle BPM=60^{\circ}$ §289.

$\therefore$ $\triangle BPM$等邊

而 在△ABM及BCP中

$AB=BC$及$BM=BP$

又 $\angle ABM=\angle ABP-\angle MBP=\angle ABP-60^{\circ}$

$\angle PBC=\angle ABP-\angle ABC=\angle ABP-60^{\circ}$

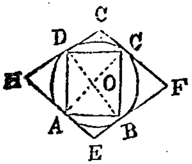
$\therefore$ $\angle ABM=PBC$

∴　$\triangle ABM=\triangle BCP$　　§150.

而　$AM=PC$

∴　$PA=PM+MA=PB+PC$

例題132. 過圓之內切矩形之各頂所作之切線必成一菱形



設　O為圓心 ABCD 為內接矩形而設過A,B,C,D,所作切線交于E,F,G,及H

求證　EFGH為一菱形

證　在圖中四△皆為等腰三角形　　§261.

因　$AD=BC$　　§178.

則　AD弧=BC弧　　§241.

而　$\angle A=\angle D=\angle B=\angle C$　　§295.

$\triangle AHD=\triangle BFC$　　§139.

∴　$AH=HD=BF=FC$

依同理證得$AE=DG=ED=CG$

即　$AH+AE=HD+DG=BF+BE=FC+CG$

即　$EH=HG=EF=FG$

故　EFGH為等邊四邊形.

惟　$BC>CD$　　作圖.

BC弧>CD弧　　§241.

$\therefore\quad \angle CBF+\angle BCF>\angle CDG+\angle DCG$

§294.

但　$\angle CBF+\angle BCF+\angle CFB$

$=\angle CDG+\angle DCG+\angle CGD$ §129.

$\therefore\quad \angle CFB<\angle CGD$

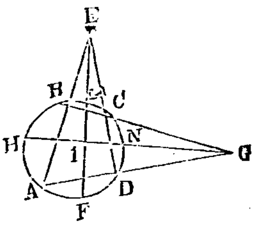
故　$\angle CGD$為鈍角

但　$\angle CGD=\angle AEB$

則　$\angle AEB$亦為鈍角

$\therefore$　EFGH為菱形

列題133.設引長圓之內切四邊之各兩對邊其所成之兩角之平分線必相交而成直角



設　ABCD為內接四邊形,

而設AB及DC相遇於E

而AD及BC相遇於G

△E及G之平分線EF,

相遇于1

求證　$EF\perp GH$

證　設$\angle E$之平分線割⊙於m,F.

而　$\angle G$之平分線割⊙於N,H.

則因　$\angle AEF=\angle DEF$　　題設.

$\frac{1}{2}$(AF弧—Bm弧)＝$\frac{1}{2}$(DF弧—Cm弧) §296.

∴ AF弧—Bm弧＝DF弧—Cm弧公理6.

依同理 AH弧—DN弧＝BH弧—CN弧

∴ FH弧—Bm弧—Dn弧＝BH弧＋DF弧＋mn弧 公理2.

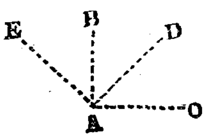
則 FH弧＋mn弧＝HM弧＋Fn弧

∴ ∠s FIH及HIM之量度相同 §294.

∴ ∠FIH＝∠HIm＝90° §63.

∴ EF⊥GH Q,E,D,

例題134.求作45°及135°之角



(1) 先作rt∠BAC §301.

作 AD線平分∠BAC §304.

則 ∠DAC爲所求之角

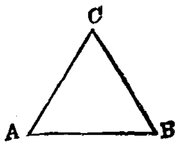
證 ∠BAD＝DAC＝45°

(2) 作AE⊥AD §301.

則 ∠CAE爲所求之角

證 ∠CAE＝90°＋45°＝135° Q,E,F,

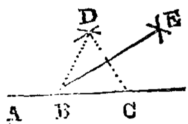
例題135.有已知之一邊求作一等邊三角形



設　AB為已知邊以A及B為圓心AB為半徑作二弧相交于C，作AC，BC

則　△ABC為所求之三角形

例題136.求作60°及150°之角



作　ABC直線于其上取B，C二點為圓心而以BC為半徑作二弧相交于D復以C，D為圓心以相同半徑，作二弧相交于E自B至E作BE

$\angle DBC=60^\circ$，而$\angle ABE=150^\circ$

證　作BD，CD，

△　BCD為等邊三角形　　作法.

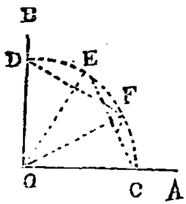
$\therefore \quad \angle BDC=60^\circ$　　§146.

$\therefore \quad \angle ABD=180^\circ-60^\circ=120$　　§ 86.

$\therefore \quad \angle DBE=\frac{1}{2}\angle DBC=30^\circ$　　§304.

$\therefore \quad \angle ABE=120^\circ+30^\circ=150^\circ$　Q，E，F，

例題137求將一直角三分之



設 ∠AOB爲直角以O爲圓心以任何半徑作弧截OA于C截OB于D然後以C·D爲心以相同半徑作二弧截DC弧于E,及F,

則 $\angle COF=\angle FOE=\angle FOD=30^\circ$

作圓.

∴ $\angle COE=60^\circ$ §146.

依同理 $\angle COF=30^\circ$

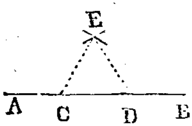
∴ $\angle EOD=90^\circ-\angle COE=30^\circ$ Q,E,F,

例題138有已知之周界求作一等邊三角形

設 已知周界求一等邊三角形

AB爲已知之周界

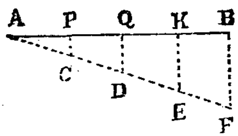
平分AB于C,D兩點 §307.



以 C,D爲圓心AC爲半徑作二弧相交於E

作 CE及DE則ECD爲所求之等邊三角形 Q,E,F,

例題139.求依不同之兩法分一直線爲四等分



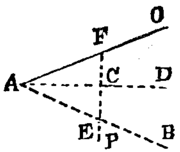
設 AB爲已知線

第一法作AF.而用 (§307)

第二法平分此線於 Q §302.

且. 平分AQ於P，BQ於R

例題140. 求過一已知點作一線與已知角之兩邊成兩等角



設 P為已知點∠BAC為已知角

作 AD平分∠BAC， §304.

又 過P作EF⊥AD，且交AB於E. 交AD於G， §300.

EF為所求直線

證 △AEG=△AFG §142.

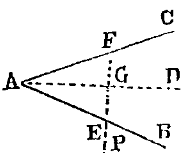
因 AC公用

而 ∠EAG=∠FAG 作圖.

∴ ∠AEG=∠AFG §128.

Q，E，F，

例題141. 求過一已知點，作一線與已知角之兩邊，成一等腰三角形

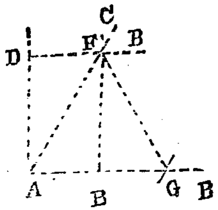


設 P為已知點∠BAC為已知角過P作EF⊥AD. 且交AB於E交AC於F，EF即為所求之線。

設 ∠AEF=∠AFE 例題140.

∴ AF=AE §147.

例題142. 有已知之高求作一等邊三角形



作 ∠BAC等於60^0 §136.

在 A作 DA 垂線而等於已知高線

作 DE // AB且遇AC於F

以 F爲心FA爲半徑，作弧截AB於於G

作 FG△AFG即爲所求之△

証 此高等于已知高 作圖.

△AFG爲腰 作圖.

而 有一∠A等于60^0 作圖.

∴ AFG爲等角三角形

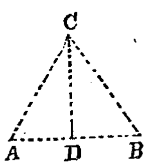
∴ △AFG爲等邊三角形 Q,E,F,

例題143其高及低

取AB等于已知底邊在底邊中點D作一垂線 DC等於已知高作CA及CB

△ABC即爲所求之△

證 AB等于已知之底邊 作圖.

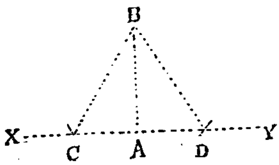


CD等于已知高 作圖.

而 CA=CB §160.

Q,E,F,

例題44. 其高及一腰



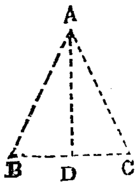
在　XY 直線上之任一點A，作 AB 垂線令與已知高

以　B 爲圓心已知之一足爲半徑作弧令遇 XY 於C及D作BC及BD

△BCD即爲所求之△　　Q,E,F,

例題145.其頂角及高

作　∠BAC等于已知角作AB平分∠BAC §304.



取　AD 等於已知高而在D 作⊥遇∠之兩邊于D及C

△ABC爲所求△

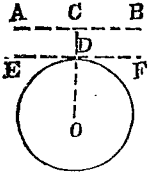
證　按作圖△ABC合已知條件

且　△ACD＝△BCD　　§142.

∴　AC＝BC　　§128.

Q,E,F,

例題146.求作一已知圓之切線與已知直線平行



設　O爲已知圓之圓心 AB 爲已知直線

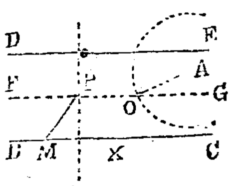
作　OC⊥AB而遇 θ 於D過 D 作EF⊥OC

則　EF爲所求之切線　　§253.

∴　　EF // AB　　§104.

Q,E,F,

例題147.求作一圓過一已知點於兩平行線上截已知長之兩弦



分析　假定此題爲已解

設　A爲已知點BC及DE爲已知平行線，MN爲已知長，而爲已知圓之圓心

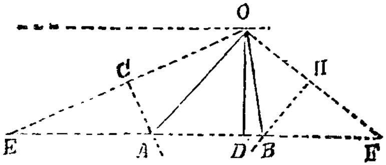
因　此圓從平行線上截取等弦且其圓心與弦兩端有等距離故O點之軌迹爲FG // BC而與BC及DE有等距離

作　MN之上平分線截FG於P，則PM爲所求之半徑以A爲圓心PM爲半徑作弧截FG於O則O爲所求圓之圓心　　Q,E,F,

討論設A與FG之距大於PM，則此題爲不可解

例題148.已知三角形之周界一角及此角頂之高求作此形

分析　假定此題爲已解設ABC



爲所求之三角形 A

CB 爲已知角

CD 爲已知高

引長 AB 於兩端

截取AE＝AC，BF＝BC，則EF 等於已知周

界聯CE及CF作兩等腰之角形CAE及CBF

在　$\triangle ECF$內，$\angle E+\angle F+\angle ECF=180^\circ$

§129.

但因　$\angle ECF=\angle ECA+FCB+\angle ACB$ 公理9.

因　$\angle E=\angle ECA$，$\angle F=\angle FCB$　§145.

$\therefore\ \angle ECF=\angle E+\angle F+\angle ACB$

$\therefore\ 2\angle E+2\angle F+\angle ACB=180^\circ$

$\therefore\ \angle E+\angle F+\frac{1}{2}\angle ACB=90$。

即　$\angle E+\angle F=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB$.

代入得　$\angle ECF=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore\ \angle ECF$爲已知

作圖　欲求點C 必於 EF上作一圓分含 $\angle ECF$

(§138)又作EF之平行線其距離爲已知高

CD.

求 兩點A及B必作CE及 CF 之⊥平分線此兩點

為所求之角形之兩角頂 Q,E,F,

例題149.求與一已知圓周等距離之點之軌迹

設 r為已知圓之半徑O為圓心 d為圓知之距離則

所求之軌合於以O圓周為圓心以 r+d及r—d

為半徑所作之二周

討論 若d=r則第二圓周之圓心為O 若d>r則二

圓周不能存在

求 一圓心之軌跡設此圓如下

例題150.有已知之半徑r及過一已知點P Q,E,F,

所求之軌為以P為心以r為半徑所作之周周

Q,E,F,

例題151.有已知之半徑r及與一已知直線AB相切

所求之軌為AB兩傍之平行 AB之二線其每線之距

離AB為已知半徑r §248.

Q,E,F,

例題152.過二已知點P及Q §255.

所求之軌為連已知點之線之⊥平分線

Q,E,F,

例題153.于已知點P與一已知直線AB相切　§255.

所求之軌爲與AB線上P點之⊥.

Q.E.F.

例題154與兩已知平行線相切

所求之軌爲二與平行線中間之平行直線

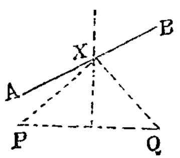
Q.E.F.

例題155.與兩已知相交線相切

所求之軌合于與線所作之諸角之平行線內 §162.

Q.E.F.

例題156.求在一已知線內與兩已知點等距離之點X



設　AB爲已知線P,Q爲已知點作PQ

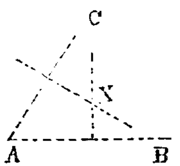
線且於PQ作⊥平分交AB於 x

則 x 即爲所求之一點

證　$Px = Qx$　§160.

Q.E.F.

例題158.求與兩已知點等距離且與第三已知點之距離一定之點 x



設　A,B,C爲三已知點

作　AB,AC,並作⊥平分線交於 x

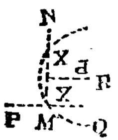
則　x 爲所求之點

証　x 爲距三定點等遠之一點

Q,E,F,

討論 若三點A,B,C一直線上,則此題不能作

例題158.求與兩已知點等距離,且與第三已知點之距離一定之點 x



設P,Q爲二已知點,d 爲已知距離R爲第三點

作 PQ且作其⊥平分線mn

以 R爲圓心,d爲半徑作弧截mn於 x

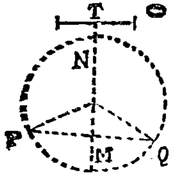
x 即爲所求之點

證 x 與P,Q有等距離 §160.

且 x 距R爲d遠 作圖.

討論 命d'爲r與mn之距離則幾爲解2.1 或O按d >=或<d'在本式中有二解 x 及 x' 是也

例題159.有已知之半徑求作一圓過兩已知點.



設 P,Q 爲已知點T爲已知半徑作 PQ 並作其⊥平分線mn

以 P,爲圓心r爲半徑,作圓割mn於O

以 O 爲心 r 爲半徑作圓此⊙爲所求之⊙矣

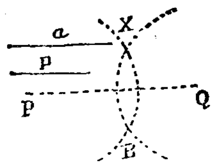
證 此圓以r爲半徑(作圖)且通過P及Q

討論　以P爲心r爲半徑所作之弧截

MN于一點在PQ之下故此二⊙可作合已知條件設

$r \angle \frac{1}{2}$PQ則此題不能作　　　　Q,E,F,

例題160.求與兩已知點之距離一定之點X



設　P,Q爲已知點而設 AB 爲定距離以P爲圓心a爲半徑作一弧以Q爲圓心 b 爲半徑作弧含交第一弧于X

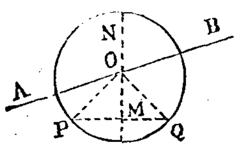
X　爲所求之點

證　按作圖X距P之距離爲a而距X之距離爲b

討論　若PQ＝a＋b故有一解 PQ 線之一點或PQ ＞a＋b 或＜a＋b 則此題不能作因所作之弧不能相交故也(參看例題92) Q,E,F,

例題161求作一圓其圓心在已知線內且過兩已知點

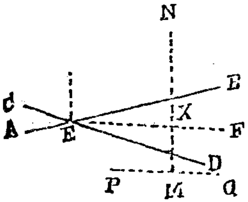
設　AB爲一已知線P及Q爲已知點



作　PQ並其⊥平分線MN會 MN 交AB于O以O爲圓心 OP 爲半徑作一⊙此⊙即爲所求之⊙此⊙通過P及Q　§160.

例題162.求與兩已知點等距離且與兩已知相交線等距離之

點



設　P,兩爲已知點而設AB，CD,爲相交于E之二已知線

作　PQ並作其⊥平分線MN

作　EF平分∠DEB而交MN于X

X　爲可求之點

證　因X與P及Q有等距離　§160.

且　與AB及CD有等距離　§162.

Q,E,F,

討論　若平分∠BEC則此平分線又得一解y

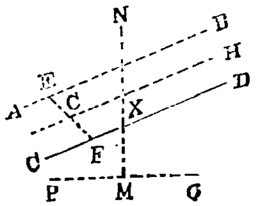
故　有評若EF與PQ重合或//PQ則他一平分線Ey//MN,(§§104,107)則僅有一解即m是也若EF與mn重合則mn上各點皆爲一解

例題163.求與兩已知點等距離且與兩已知平行線等距離點

x

設　PQ爲二已知點，AB,CD爲二已知平行線

作PQ並作其⊥平分線



作　$EF \perp AB$ 平分 EF 於 G 作 GH $\parallel$ AB，而交 mn 於 x

x　則爲所求之點

證　mn 線中之各點與 P 及 Q 皆有等距離，　§160.

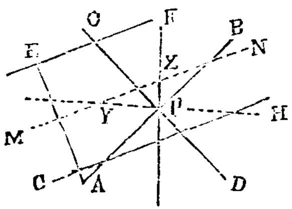
而　GH 線內之各點與 AB 及 CD 有等距離　§181.

$\therefore$　x 爲 mn 及 GH 之公點故與 P 及 Q 有等距離

而　與 AB 及 CD 亦有等距離　Q,E,F,

討論　簡言之此題僅有一解若 $AB \perp PQ$ 則無解若 GH 與 mn 合一則 mn 各點皆爲一解

例題164. 求與兩已知相交線等距且與兩已知平行線等距離之一點 x



設　AB, CD 爲二相交線 P 爲交點 EF, GH 爲二平行線

作　mn 平行 EF 及 GH 且與其二平線有等距離

更　作由 P 所作各角平分線

設　此諸平分線 mn 于 X

則　X及y為所求之點

證　X及y距EF及GH等遠因均在mn內而距AB及CD亦等遠因在各角之平分線內　§162.

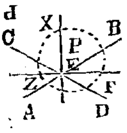
Q,E,F,

討論　若mn通過P則僅有一解即P是也

若mn平行其平線之一線則僅有一解若 mn 與平分線中之一線重合則 mn 上之各點皆為一解

例題165.求與兩已知相交線等距離且與一已知點之距離一定一點 x

設　AB,CD為二已知線交于 E,d 為已知距垂P為已知矣



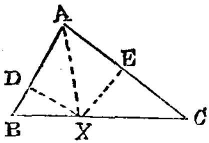
作　AB,CD所成角之平分線 XY，⊥Z以P為圓心d為半徑作弧截XY，TZ於X,Y,T,Z而點X,Y,T,Z之任一點皆合題意

證　各點之距二已知線皆有等距離　§162.

且　距P亦皆為d距離　Q,E,F,

討論　若(如圖) d 大于自 P 至平分線之距離則有四解若d小于自 P 至每平分線之距離則無解

例題166.求在已知三角形之一邊內與他兩邊等距離之點X



設 ABC爲己知三角形作∠A之平分線遇BC于X

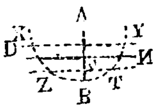
則 X爲所求之點

證 作XD⊥AB及XE⊥AC

∴ XD=XE §162.

Q,E,F,

例題167.一徑直鐵路距某鎮二里有一地距此鎮四里距鐵路一里試作圖以示其地之所在



設 A 爲城以 A 爲心任何長爲半徑劃圓

作 AB半徑令其長爲4哩

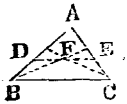
作 AB之⊥平分線 DE 平分與C

則 DE爲鐵路

于 DE兩傍作平行線令其與DE相距爲 $\frac{1}{2}$ AB (則1哩)

設 此二平行線截圓周于 X,Y,T,Z, 則四點中任一點皆合條件故有四解

例題168.求在三角形ABC內作一線與底BC平行截兩邊于D及E,DE等于DB+EC(§162)



平分么D及C而設此平分線交于F過F作DE∥BC遇AB於D遇AC於E

求證 DE＝DB＋EC

證 ∠DEB＝∠FBC §110.

而 ∠DBF＝∠FBC 作圖.

即 ∠DBF＝∠DFB 公理1.

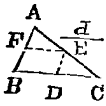
∴ DF＝DB §147.

依同理 FE＝EC

∴ DF＋FE＝DB＋EC 公理2.

即 DE＝DB＋EC Q,E,F,

例題169.求過三角形之兩邊作一線與第三邊平行其在兩邊間之線分等於已知長.



設 ABC為已知三角形 d為已知長在 BC上截取BD等於d

作 DE∥BA 而遇AC於E.

作 EF∥CB而遇AB 於FEF 即為所求之線

證 EF∥DB 作圖.

BDEF為▱

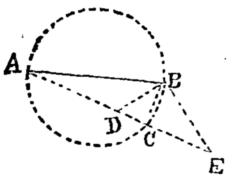
$\therefore$ EF=BD

今 BD=d

$\therefore$ EF=d

Q,E,F,

例題170.直角三角形之已知弦爲底試證其頂之軌跡爲以其弦爲直徑之圓周



設 AB爲已知弦以SAB爲直徑畫⊙

證 1.連圓周上之任一點C至A及B

則 ∠ACB=90° §290.

2. 連AC線上任一點D至B

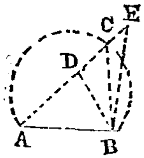
則 ∠ADB>∠ACB或90° §137.

引 長AC至任一點E作EB

則 ∠AEB<∠ACB或90° §137.

故 正三角形頂點之軌爲以AB爲直徑所作之圓周

例題171.已知三角形之底及頂角試證其頂之軌跡爲與其底成一弓形之弧其頂角爲此弓形之內切角



設 AB爲已知底邊,於 AB 上作分圓能容此已知角者之弧

證 1.在分圓之弧上任一點∠至A及B各以線連之

則 ∠ACB=已知角

2. 在AC之任一點D至B以線連之

則 ∠ADB>∠ACB §137.

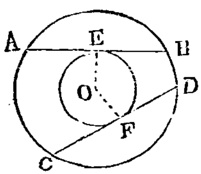
引 長AC至E連EB

則 ∠AEB<∠ACB §137.

故 三角形角頂諸點之軌以 AB 爲底所作分圓之能容已知角者之弧 §318.

Q,E,F,

例題172.在已知圓內二已知長之弦求此弦之中點之軌跡



設 O爲已知圓之圓心 AB,CD 爲二已知之弦

證 作OE⊥AB及

OF⊥CD

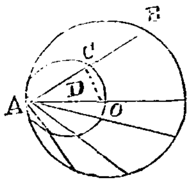
則 AE=BE,CF=DF §245.

且 OE=OF §249.

依同理 諸已知長弦之中點與O有等距離

故　所求之軌爲以自圓心至任一弦爲半徑所作同心圓之圓周　　Q,E,F,

例題173.由已知圓周內一點作弦求此弦之中點之軌跡



設　O爲已知圓之圓心A 爲已知圓周上之任一點 AB 爲通過A所作之一弦而C爲其中點

證　作OC

則　$\angle ACO=90^{0}$　　§247.

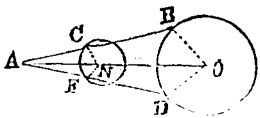
∴　C在AO爲直徑所作之圓周上

依同理　自A所作各弦之中點內俱在圓周上

故　此圓周即爲所求之軌　　Q,E,F,

例題174.由已知圓周外一點至此圓周作直線求此線之中點之軌跡

設　O爲已知θ之圓心AB爲任一直線



而　C爲其中點

證　作ΘA,OB平分AO于M 並作CM

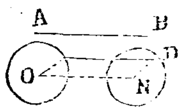
CM // OB且等于 $\frac{1}{2}$OB　　§189.

依同理　他一直線上之中點E至m 之距離可證其

等於$\frac{1}{2}$OB

故 所求軌爲以AO之中點爲圓心$\frac{1}{2}$OB爲半徑所作之圓周

例題175.一直線移動常與一已知線平行其一端觸一已知圓周求其他端之軌跡



設 O爲已知⊙之圓心AB爲已知直線CD 爲一移動線此直線之一端切圓周於C // AB

證 作Om // AB且等於CD

作 OC,mD

則 OCDm爲▱ §183.

∴ mD=OC §178.

故 從m至D之距離爲一定而D點之軌爲以m爲心所作與已知圓相等之圓周

Q,E,F,

例題176.一直竿移動其兩端常觸彼此垂直之兩定竿求此竿之中點之軌跡

設 OA,OB爲互相正交之二定竿AB爲一移動竿而m爲其中點

證　作Om

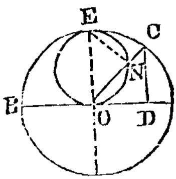
因　$\angle AOB=90^\circ$ m通過O，A，B之⊙圓心

$\therefore$　$Om=\frac{1}{2}AB$

因　曰Om 之長度爲一定而其所求之軌爲以O爲心$\frac{1}{2}$AB爲半徑所作之圓周．

Q，E，F，

例題177．設AOB爲已知圓之直徑OC 爲一半徑，CD爲由C至AB之垂線，於OC上，截取等於CD，若 OC 繞點O旋轉求點m之軌跡



證　作半徑OE ⊥AB並作Em

$\triangle$ OEm及OCD相等　§143．

因　$OE=OC$　§ 27．

$Om=CD$　作圖．

而　$\angle EOm=\angle OCD$　§110．

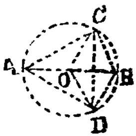
$\therefore$　$\angle OmE=\angle ODC=90^\circ$　§128．

故　m點之軌，爲以OE爲直徑所作之圓周

例題170．

Q，E，F，

例題178．求作一等邊三角形已知其外切圓之半徑



以 已知半徑爲半徑畫⊙

作 AOB直徑

以 B 爲圓心已知半徑爲半徑作弧θ于C

及D

作 AC,AD及CD.

△ ACD即爲所求之△

證 作DC,OD,BC,BD,

按 作圖△OBC爲等邊三角形

∴ ∠BOC＝60° §146.

∠COD＝120°

今 ∠AOC＝∠AOD＝120°

(∵∠s BOC及BOD相補) § 86.

∴ AC弧＝DC弧 §236.

∴ AC＝AD＝DC §241.

例題179其頂角及底(§160及§318)

作 AB等于已知底邊

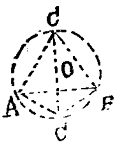
于 AB上作分圓能容已知角 §138.

于 作AB之⊥平分線且令截弧于 C 作AC,

BC

△ ABC即爲所求之三角形 Q,E,F,

例題180.其底及其外切圓之半徑



以　已知半徑爲半徑θ

作　AB弦等于已知之底邊

作　AB之⊥平分線且令遇圓周于C及C'

作　AC,AC',BC,BC'

△　ABC,ABC'皆合條件　§160.

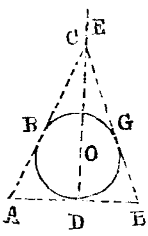
討論　若已知底邊大于已知半徑之二倍則此題不能作　Q,E,F,

例題181其底及內切圓之半徑

作　AB等于已知底邊

作　DE之⊥平分線

作　DE上取DO等于已知半徑



以　O爲圓心DO 爲半徑畫⊙從A及B作二切線至⊙且令其相交于C

§317.

△　AEC則爲所求之三角形矣

證　命AC遇⊙于F,DC過于G

則　AF=AD而BG=BD　§261.

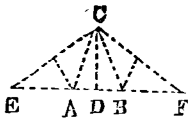
但　AD=BD　作圖.

∴　AF=BG　公理1.

又　FC=GC

相加得　AC=BC　Q,E,F,

例題182.其周界及高



作　F等于已知周界

平分　EF于D于D作⊥DC且令等于已知高

作　EC,FC,並作其⊥設此⊥平分線EF于A及B作AC,及BC

△　ABC即為所求之三角形

證　CE=CF　CA=EA　CB=FB　§160.

∴　CA+AB+BC=EA+AB+BF=EF　公理2.

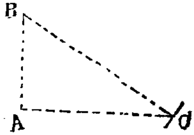
又　∠E=∠F=∠ACE=∠BCF　§145.

∴　△ACE=△BCF　§139.

故　AC=BC　§128.

Q,E,F,

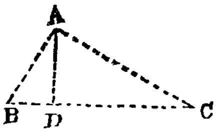
例題183其弦及一腰



作　∠BACrt∠取AB等于已知腰以B為圓心已知之弦為半徑作弧截AC于C

△　ABC即為所求之三角形 Q,E,F,

例題184.其一腰及弦上之高

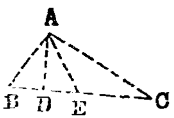


先作　rt△ABD已知 AB等于已知腰而AD等于已知高　例183.

作　AC⊥AB引長AC遇BD之延長線於C.

△ABC即爲所求之三角形　Q,E,F,

例題185.其中線及直角頂之高.



分析　設ABC爲所求之三角形

則　知AD爲已知高而AE爲中線又知

BE=AE=CE　例題21.

作圖　已知AD腰及弦AE作rt△ADE　例題138.

引長　BE至C命EC=EA

作　AC並在A作rt∠而AB遇CD延線於B

△　ABC即爲求之三角形

Q,E,F,

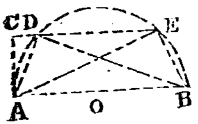
例題186其弦及弦上之高

作　AB等於已知弦於其上作半圓.

在　A作⊥AC令等於已知高通過 C作線∥AB截半圓於D及E.

作 DA,DB,EA,EB

△ ADB,AEB皆爲所求之三角形



證 ∠D及E爲rt∠ §290而

△之高等於AC §181.

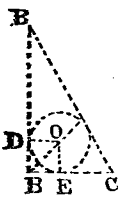
Q,E,F,

討論 因△ADB相等則僅有一解若AC$=\frac{1}{2}$AB

.CE將爲切線

而 △爲等腰若AC$>\frac{1}{2}$AB則此題不能作

例題187.其內切圓之半徑及一腰



分析 設ABC爲所求之△∠A 爲正角.O 爲內切之圓心而OD爲已知半徑，AB 爲已知之腰長,知O 在∠A 之平分線上

§315.

∠ D及E均爲rt∠ §254.

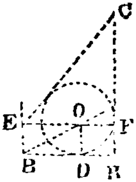
故 ADOE爲正方形

作圖 作rt∠BAC令AB等於已知之腰長作∠A之平分線

在 AB上取AD等于已知半徑而在 D 點作⊥截OA于O以O爲圓心 OD 爲半徑畫⊙從B至⊙作切線遇AC于C

∠ABC即爲所求之△　　　　Q,E,F,

例題188.其內切圓之半徑及一銳角



分析　設此題爲已解ABC爲所求之三角∠A爲rt∠O爲內切$\odot$圓心爲已知部分∠A及半徑OD故O必在∠B之平分線上(§315 並作EO∥BA

且　令其與BA之距離爲OD

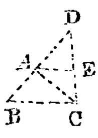
因　知引長EO必通過AC邊上之切點　§256.

作圖　作∠ABC等于已知∠並作∠B之平分線BO在B作⊥BE等于已知半徑通過E作一線∥BA遇OB于O以O爲圓心BE爲半徑畫$\odot$

引長　EO遇$\odot$于F通過F作一切線遇∠B之邊于A及C

△　ABC即爲所求之三角形　　　　Q,E,F,

例題189.其一銳角及兩腰之和



分析　設ABC爲所求之△∠A爲rt∠已知部分爲∠B及長度AB+AC引長BA至D令AD等于AC作DC

因　△ACD爲rt等腰△∠D=45°

故　可作一△BDC因已知BD及∠B,D　(§310)

則　在DC上之中點之垂線將通過A

作圖　由已知部分作一△BDC　§310.

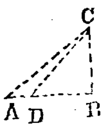
作　DC之⊥平分線遇DB于A作AC

△　ABC即爲所求之△　Q,E,F,

例題190.其一銳角及兩腰之差

分析　設ABC爲所求之△AC爲弦在長腰AB上截

取AD等于已知兩腰差並知∠A及AD



因　BC＝BD，∠BDC＝∠DCB＝45°

§145.

故　按作圖在D所作成之∠BDC。等於

45°C點可定矣.

作圖　作∠BAC等於已知角

在　AB上取AD等於已知腰之差.

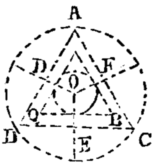
作　∠BDC等於45°並從C作⊥CB

△　ABC即爲所求之△　Q,E,F,

例題191.求作一等邊三角形已知其內切圓之半徑

以　已知半徑爲半徑以O爲圓心作⊙又作一同

心大外⊙於此圓內切等邊⊙△ABC　例題178.



由 O至AB,AC,BC作各OD,OF,OE通過三垂線截內圓周之三點作三切線且令其相交P,Q,R,

則 △PQR即爲所求之△

證 PQ切線⊥OD

故 PQ∥AB §104.

依同理 PR∥AC而QR∥BC

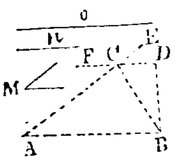
∴ ∠QPR＝∠BAC＝60° §176.

依同理 ∠PQR＝PRQ＝60

∴ △PQR爲等邊三角形 §148.

例題192其底高及一底角 Q,E,F,

作 AB等於已知底邊在A作一∠BAE,等於已知角,而於B作BD垂線等於已知高



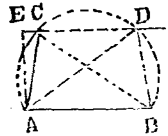
過 D作DF∥AB,而截AE於C並作BC,

則 △ABC即爲所求之△

證 於△ABC中按直接作法有AB邊及∠BAC而按作法及§181有已知高線等於已知高線

例題193其底高及頂角 Q,E,F,

分析 若AB爲已知底邊則頂點之軌跡爲以AB所作一圓分且能容已知角（§293）頂點之他一軌跡爲從 AE一距離等于已知高所作之線



作圖 在A上作一分圓又內容已知頂角（§318）

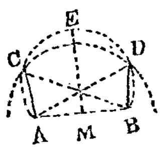
作 ⊥AE等于已知高

此 圓周將截MN于B及B' 二點然後作BA,BC,B'A,B'C

則 △BAC及B'AC皆爲所求之三角形

證 與192題同 Q,E,F,

例題194.其底至此底之中線及頂角



作圖 作一直線 BC＝已知之底邊尋出BC之中點M

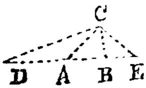
在 BC上作一分圓可內藏與角者（§318）

又 以M爲圓心AM爲半徑作一圓周交分圓弧于A及A'然後作AB,AC及A'B,A'C則△ABC及A'BC皆爲所求之三角形 Q,E,F,

例題195.其周界及諸角

分析 設ABC爲所求之三角形于BA延線上取A

D等于AC于AB延線上取BE等于BC



則　DE等于已知之周界

因　$\triangle$ACD，BCE 爲兩等邊而 $\angle$A及B 爲$\triangle$ABC之外角故$\angle ADC=\frac{1}{2}$ $\angle BAC$而$\angle BEC=\frac{1}{2}\angle ABC$ § 145，131

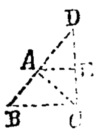
作圖　作DE等于已知之周界

于　D作一角等于$\frac{1}{2}\angle A$于E作一角等于$\frac{1}{2}$ $\angle B$命其邊相遇于C

由　C作AC使$\angle ADC$等于$\frac{1}{2}\angle A$而作CB使$\angle BCE$等于$\frac{1}{2}\angle B$角

則　$\triangle$ABC卽爲所求之三角形　　Q，E，F，

例題196．其一邊一隣角及其他兩邊之和



分析　試ABC爲所求之三角形

BC及$\angle$B及BA＋AC皆爲已知之件

引長BA至D命AD等于AC作DC因知$\triangle$ADC爲兩等邊

因　$\angle$B及BC爲已知而可使 BD＝BA＋AC

在　$\triangle$ABC作後在DC中點作垂線可求A點

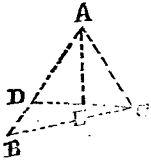
作圖　作$\triangle$BDC

作　DC之上平分線截BD于A並作AC

則　△ABC即爲所求之△　　Q,E,F,

求　作一三角形已知：

例題197.其一邊一隣角及他兩邊之差



分析　設此線爲已解 ABC 爲所求之△ BC,∠B及AB— AC 皆爲已知若于BA上取BD等于AB—AC 得△BDC此三角形爲已知之諸件所構成然後在DC中點作⊥遇BD之延長線于一點A

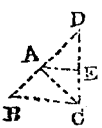
作圖　作△ADC　　§309.

作　DC之上平分線而遇BD之引長線于A作AC

則　△ABC即爲所求之三角形　　Q,E,F,

例題198.其兩邊之和及諸角

分析　設此題爲已解ABC 所求之△其各角及 AB+AC爲已知引長BA至D 令 AD 等于AC ADC爲等腰



∴　$\angle D = \frac{1}{2}\angle BAC$　　§§137,145

因　∠B及BD爲已知

△　BDC可定矣

作圖　作△BDC　§310.

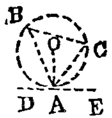
作　DC之⊥平分線遇BD于A並作AC

則　△ABC卽爲所求之三角形　Q,E,F,

例題199.其一邊一隣角及外切圓之半徑

作圖　以已知半徑爲半徑作⊙

于　⊙內作AB弦AC與AB成∠BAC等于已知∠作BC



則　△ABC卽爲所求之△　Q,E,F,

例題200.其諸角及外切圓之半徑

作圖　以已知半徑作⊙過圓周上任一點A作DE切線

過　A作AB,AC二弦,令∠DAB,EAC等於已知角作BC

則　△ABC卽所求之△

證　∠ABD＝∠EAC因各角以$\frac{1}{2}$AC弧度之

依同理　∠ACB＝∠DAB　Q,E,F,

例題201.其諸角及外半切圓之半徑.

分析　設ABC爲所求之△

OD爲內切⊙之半徑，∠A,B,C及OD皆爲已知且知必∠A,B,C之平分線之交點距AB爲OD，設作GH通過O而∥AB

則　$\angle BOH=\angle OBD=\frac{1}{2}\angle ABC$

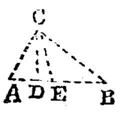
作圖　作∠A及其平分線作GH∥AB而其與AB之已知距離爲OD而設GH遇∠A之平分線於O作OB遇AB於B，令BOH等於已知B之半.

作　BC遇AC於C使∠OBC等於已知∠B之半

則　△ABC即爲所求之

Q,E,F,

例題202.其一角此角之平分線及角頂之高



分析　設ABC爲所求△今∠C高CD平分線CE皆爲已知故rt△CDE爲一定且∠ECA,ECB各爲已知角之半，

作題　作△CDE　例題183.

向　兩邊引長

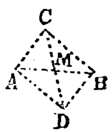
作　CA及CB遇DE之延線於A及B且命∠EC

A及ECB各等於已知∠C之半

則　△ABC卽所求之△　　Q,E,F,

例題203其兩邊及第三邊之中線

分析　設ABC爲所求之△而ACBC及中線CM皆爲已知引長CM命MD等于MC作DA，DB則△AMD及BMC相等（§143）故AD=BC且△ACD爲一定因其邊皆已知且引長AM至B使　MB=AM

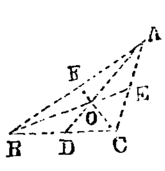


作圖　作△ACD　　§312.

作　中線AM且引長至B命MB等于AM作BC

則　△ABC卽所求之△　　Q,E,F,

題例204.其三中線



分析　設ABC爲所求之△AD，BE.CF,三中線爲已知O爲三中線之交點　　例題27.

因　知距各角頂之長等于自此角頂所作中線三分之二

△　BOC中OB,OC及OD爲已知引長BO至E命OE=$\frac{1}{2}$BO而引長CO至F命OF=

$\frac{1}{2}$CO作BF及CE且引長而遇于A

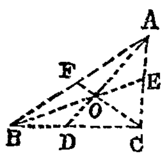
作圖　作△BOC　　　　　　例題203.

引長　BO至E命OE等于$\frac{1}{2}$30而引長CO至F命OF等$\frac{1}{2}$CO作BF及CE且引長之命相交于A

則　△ABC即爲所求之△　　　　Q,E,F,

求　作一正方形已知:

例題205.其對角線



分析　設此題爲已解ABCD爲所求之正方形AC對角線且知其∠B及D爲rt∠故B及D必在以AC爲直徑所作之圓周上

因　B及D與A及C有等距離故B及D可以在AC之⊥平分線內　　　　§160.

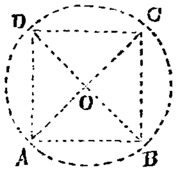
作圖　平分AC于D以O爲心OA爲半徑作⊙交AC之⊥平分線于B及D作AB, BC,CD, DA

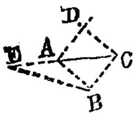
則　ABCD即爲所求之正方形矣　Q,E,F,

例題206.其對角線及一邊之和

分析　設ABCD爲所求之正方形 AC爲對角線引長CA至E等AB作BE

∴ ABC及ABE爲等腰





$\angle ACB = \angle CAC = 45^\circ$ 則$\angle AEB$ 卽可得之

(§137) 而由此可作△EBC 如例題 205D

可求得

作圖 作EC等於已知AB及AC之和作CB令$\angle BCE = 45^\circ$作EB令$\angle BEC$等於$22\frac{1}{2}^\circ$而遇CB於B作BA⊥BC以A及C爲心AB爲半徑作二弧相交於D作DA及DC

則 ABCD即爲所求之正方形

O,E,F,

例題207.已知兩垂線AB及CD相交於O,又有一直線交此兩垂線於E及F,求作一正方形,其一角於 O 與兩垂線所成之一直角密合而其對角之頂在EF內(有二解)

作圖 平分在O點之∠而設其一平分線遇EF於G,而他一平分線遇EF之延線於H.

過 G作Gm∥CD及Gn∥BA.

過　H作HP∥DC及HQ∥BA.

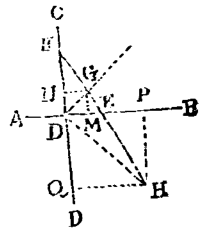
則　OmGn,OPHQ皆爲正方形，且皆合已知條件

証　於OmGH形內

$\angle O=90^\circ$　　題設.

$\angle m=\angle n=90^\circ$

§107.



而　$\angle mGn=mOn$

§176.

∴　$mGn=90^\circ$

且　$Gn=Gm$　§162.

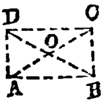
而　$Gn=Om$

今　$Gm=On$　§180.

∴　OmGn形爲正方形

例題208.其一邊及兩對角線所夾之角

分析　設ABCD爲所求之長方形AB爲已知邊∠AOB爲已知角因長方形之對角線相等(例題69)且彼此平分(§184)可知AO＝BO故等腰△AOB可定C點及D點爲AO及BO之延線之兩端.



作圖　作△AOB　　　　例題179.

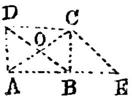
引長　AO至C令OC等於AO

引長　BO至D令OD等於BO.作BC

CD,DA,

則　ABCD即爲所求之長形矣　　例題68.

例題209其周界及對角線



分析　設ABCD爲所求之長方形在rt△ABC內AC及AB+BC爲已知作此三角形

引長　AB至E命BE等于BC于E作一45°角使其邊遇以A爲心AC爲半徑所作之圓周于C自C作一⊥CB

作圖　作rt△ABC

平分　AC于O.

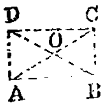
作　BO且引長至D命OD等于BO

作　DC及DA

則　ABCD卽爲所求之長方形矣　　例題68.

Q.E.F.

例題210.其周略及兩對角線所夾之角



分析　設ABCD爲所求之長方形∠AOB爲已知角因△OAB爲等腰∠OAB及∠ACB互爲補角故在rt△ABC內∠及AB+BC(卽周界之半)爲已知

故　ABC之角形可依例題209法作之

作圖　作∠OAB$=\frac{1}{2}(180^{\circ}-\angle AOB)$

作　△ABC　　例題198.

平分　AC于O

作　BO且引長至D命OD＝BO　　例題68.

作　DC,DA則ABCD卽爲所求之長方形

Q,E,F,

例題211其兩隣邊之差及兩對角線所夾之角

分析　設ABCD爲所求之長方形E爲AB及∠AOB

且　知∠B$=\frac{1}{2}(180^{\circ}-\angle AOB)$

在　△ADE　AE＝AD

∴　∠AED＝∠ADE

此△爲rt△

∠AED$=45^{\circ}$

而　∠BED$=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$

故　在△BDE 內一邊及隣角爲已知在此△已作後自D作一垂線與BE之延線相遇

作圖　作△ BDE

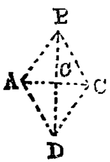
從　D作DA⊥BE而過BE之延線於A

平分　BD於O作AO且引長至C命OC等於AO作CB，CD

則　ABCD卽爲所求之長方形　　例題68.

Q，E，F，

例題212其兩對角線



分析　菱形之兩對角線互相平分（§184）且互相⊥（例題71）

故　可作所求斜方形

作圖　作AC等於一對角線.

在　AC作平分垂線截AC於O且引長至B及D命OB及OD各等於他對角線之半然後作AB，BC，CD，DA，則ABCD即爲所求之斜方形

Q，E，F，

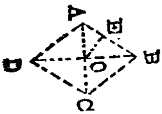
例題213.其一邊及內切圓之半徑

分析　因斜方形之對角線彼此平分　（例題71）其交點O距各邊有等距離（§162）故O爲內

容圓之圓心若作OE⊥AB，OE將等于內容

圓之半徑則rt△ABO弦 AB及其高 OE 爲

已知矣依此理可作所求之菱形



作圖　作△AOB　　　　例題186.

引長　AO至C命OC等于AO

引長　BO至D等于BO作AD，DC，CB，

則　ABCD則爲所求之菱形　　　Q，E，F，

例題214其一角及內切圓之半徑

分析　設ABCD爲所求之菱形$\angle ABC$ 爲已知$\angle O$

爲內切⊙之圓心作諸半徑至E，F，G，H

則　$\angle FOG=180^\circ-\angle GCF$　§§206，254.

而　$\angle ABC=180^\circ-\angle GCF$　　§115.

∴　$\angle FOG=\angle ABC$　　　公理1.

又因　　$\angle EOF=180^\circ-\angle ABC$

GOE爲一直線　　　§90.

依同理　FOH爲一直線

作圖　以O爲心已知半徑爲半徑作⊙

通過O作GOE，FOH 二直徑命所成之

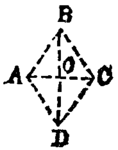
$\angle GOF$等於已知角

過　E，F，G，H四點各作一線命其相交于A，B，

C,D,

則　ABCD即爲所求之菱形　　Q,E,F,

例題215.其一角及一對角線



分析　設ABCD爲所求之菱形∠ABC爲已知角AC爲已知對角線

∠BAD＝180°—∠ABC(§115)且菱形之對角線彼此平分成rt △且平分菱形之△

例題71.

作圖　作AC

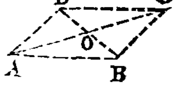
過　A作AB及AD各與AC作成一角等于$\frac{1}{2}$(180°—∠ABC)

作　AC⊥平分線遇AB於B,AD於D.

作　CB及CD則ABCD即爲所求之菱形

Q,E,F,

例題216其一邊及兩對角線



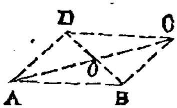
分析　設ABCD爲所求之斜距形AB爲已知邊O爲其對角線之交點因斜距形之對角線彼此平分(§184)

則AOC之三邊爲已知而C及D可由AO及BO之延線一求得之

作圖　作△AOB　§312.

引長　AO至C等於AO引長BO至D命OD等於BO作BC,AD,DC則ABCD卽爲所求之斜距形　Q,E,F,

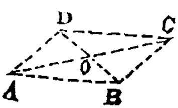
例題217.其兩對角線及兩對角線所夾之角



分析　設ABCD爲所求之斜矩形.∠AOB 爲已知角.O 爲對角線之交點在　△AOB內已知OA,OB 二邊及一夾角

作圖　作△AOB,引長AO至C,命OC等於 AO 引長BO至D命OD等於BO作BC, AD, DC,則ABCD 即所求之斜矩形矣　Q,E,F,

例題218其一邊一角及一對角線



分析　設ABCD 爲所求之斜矩形∠A爲已知角AB爲已知邊AC爲已知對角線

$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD$

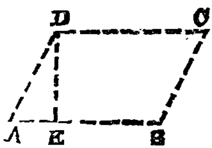
故　△ABC可定

作圖　作△ABC　§311.

過　A作AD∥BC而過C作CD∥BA

ABCD爲所求之斜矩形　　Q,E,F,

例題219.其底高及一角



分析　設ABCD爲斜矩形AB邊，$\angle A$及其高DE爲已知且知$\angle ADE=90^\circ-\angle DAE$則rt△ADE可定矣

作圖　作rt△ADE　　§310.

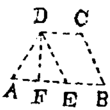
引長　AE至B命AB等于已知底邊

過　B作BC∥AD而自D作DC∥AB則ABCD

則　ABCD爲所求之斜長方形　　Q,E,F,

求　作一等腰梯形已知

例題220.其兩底及一角



分析　設ABCD爲所求之梯形$\angle A$爲已知角作DE∥CB

$DE=BC$　　§180.

但　$BC=AD$

∴　$DE=AD$　　公理1.

∴　$\angle DEA=\angle A$　　§145.

因　$AE=AB-EB$而$EB=DC$可知$AE=AB-DC$

則 △ADE可定

作圖 作△ADE §310.

引長 AE使AB等于長底邊

作 DC∥AB命等于短底邊且作BC

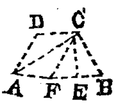
則 ABCD即爲可求之等腰梯形 Q,E,F,

例題221.其兩底及高

作圖 以AB—DC爲底邊DF爲中垂線作ADE兩等邊三角形引長AE至B,命AB等於與長底邊作DC等於與短底邊而平行AB作BC,則ABCD即爲所求之兩等邊梯形.

Q,E,F,

例題222.其兩底及對角線.



分析 設ABCD爲所求之梯形

AC爲已知對角線作高CE且作CF∥DA.

則 AF=DC §180.

而 FB=AB—DC

又因 △BCF等腰(參看例題220分析)

$FE=\frac{1}{2}FB$ §149.

$\therefore$ $AE=DC+\frac{1}{2}(AB-DC)$爲已知

∴ rt△ACE可作矣

作圖 作rt△ACE 例圖183.

引長 AE使AB等于長底邊

引長 DC∥AB而等於短底邊

作 BC及AD

ABCD即爲所求之等腰梯形

Q,E,F,

例題223.其兩底及外切圓之半徑

分析 設ABCD爲所求之梯形

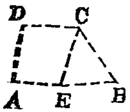
⊙ 爲外切圓之圓心與一直徑⊥AB亦⊥CD(§107)且平分AB及CD作CG∥EF而遇AB於G則

EG= FC=$\frac{1}{2}$DC因得下作圖法.

作圖 以任一點O爲圓心已知半徑爲半徑作⊙在圓內作AB弦等於長底邊作一直徑⊥AB遇AB於E在AB上取EG等於短底邊之半作GC∥EO而遇⊙於C作CD∥BA而遇⊙於D作BCAD

則 ABCD則爲所求之等腰梯形

例題224.求作一梯形已知其四邊



分析　設ABCD爲所求之梯形

作　CE∥DA，△CBE可定因 BC 爲已知 CE＝AD(§180)而

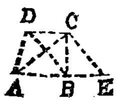
EB＝AB－CD

作圖　作△BCE　§312.

引長　BE至A使AB等于長底邊

作　作AD∥EC而等于EC並作DC，ABCD即 ABCD爲所求之梯形　Q,E,F,

例題225.其兩底及兩對角線



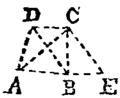
分　析設ABCD爲所求之梯形作 CE ∥對角線DB，且引長AB至E因AC爲已知CE＝BD

而　AE＝AB＋DC故△AEC可定

作圖　作△AEC　§312.

過　B作BD∥且等于EC，作AD，DC，BC 則AB CD即所求之梯形　Q°E,F,

例題226.其兩邊一對角線及兩對角線所夾之角



分析　設AB，DC爲二已知底邊AC爲與對角線

∠ACE 等于二對角線所夾之角若此角爲銳

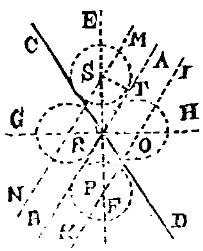
角而AE大于或等于AC，△ACE可定

作圖 作△AEC在AE上取AB等于一底邊

作 CD∥EA而等于他底邊作AC及BD則AB CD卽爲所求之梯形 Q,E,F,

求 作一圓已知其半徑r且如下

例題227.與兩相交線AB及C相切



一圓心軌爲AB及CD所作諸角之平分線 例題155.

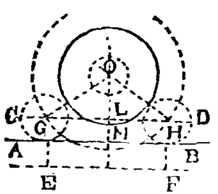
而 他一軌爲平行AB或CD之一直線而其距AB或CD爲已知之半徑r

作圖 作EF,GH,平分AB及CD所作成之諸角作IK及MN∥AB

而 距AB爲r設平行線截平行線于O,P,R,S,

以 O,P,R,S,爲心r爲半徑作四圓此四圓中之皆合條件

例題228.與一已知線AB及一已知圓K相切.



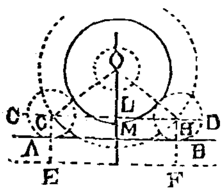
分析 設O爲已知圓之圓心R爲其半徑而所求之圓之一圓心軌爲平行AB之直線且其距AB爲l.

而 他一軌爲以R+r及R—l爲半

徑所作之同心圓周其平行線與圓周相交之點,即所求圓之圓心矣。

討論 以d代自O至AB之距離,若d<R+2r.則題不能作.

例題229.過一已知點P又並與一已知線AB相切.

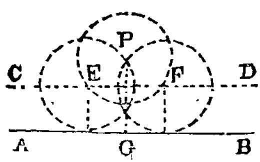


分析 所求圓之圓心必在以P為心r為半徑,所作之圓周上作平行AB之直線,令距AB為r須與P同在AB之一傍則此平行線截圓周之點即為所求之圓之圓心矣。

以 此點為心r為半徑作圓,即所求之圓矣。

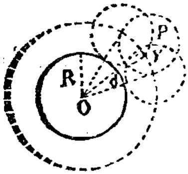
討論 若自P至AB之距離大於2r則此題不能作,

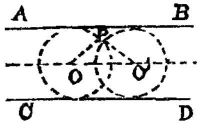
例題230.過一已知點P並與一已知圓K相切



分析 設R為與圓之半徑,O為其圓心,則所求圓心之軌,為以P為心,r為半徑,所作之圓周,則兩圓心之距離必為兩半徑之和或較(例題92)因知第二所求圓心之軌為以O為心R+r或R—r為半徑所作之圓周而二軌之公點即所求圓之圓

心矣。

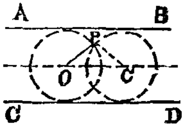




若　以此諸點爲心r爲半徑作諸圓皆題意

討論　若P與O之距離大於R＋2r則此題不能作　Q.E.F.

例題231.與兩平行線相切，且過一已知點P.

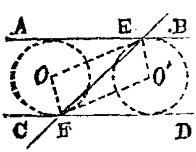


設　AB及CD爲已知平行線，其所求圓心之軌跡爲兩已知平行線間之一平行直線而相距AB及CD相等(例題154)則所求圓之半徑等于AB與CD之距離之半故他一圓心軌爲以P爲心以AB與CD之距離之半爲半徑所作之圓周此圓周截AB及CD中間之平行線之點卽爲所求圓之圓心矣。

Q.E.F.

討論　若P在AD.CD之間則有二解若P在AB或CD線上則有一解若P在AB,CD外則無解

例題232.與三已知線相切此三線中有兩線平行



設　AB，CD爲已知平行線設第三線截AB於E，CD於F

合　條件⑤之圓心爲在E及F所作∠

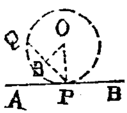
之平分線之交點 例題155.

而 仍必在AB,CD之間 154.

Q,E,F,

討論 今有二解EF各側有一.

例題233.與一已知線相切於P,且過一已知點Q



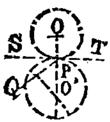
分析 所求圓心之軌爲AB線上P點之垂線 例題155.

而 他一軌,爲PQ之⊥平分線 例題152.

Q,E,F,

討論 若Q在AB線內此題不作

例題224.與一已知圓相切於P且過一已知點Q



分析 所求圓之一圓心軌.爲PQ之⊥平分線 例題152.

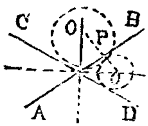
而 他一軌爲自與圓心通過P點所作之直線此二軌之公點卽所求圓之圓心

§§221.265.

Q,E,F,

討論 作ST通過P,至切與圓,若Q在ST內則此題不能作

例題235.與兩已知線相切,且與此兩線中一線相切於P



分析　AB及CD爲二與直線，P爲AB內之一點，則所求圓之圓心，必在AB及CD所作之角之平分線內而AB上P點之垂線與其平分線之交點即爲所求圓之圓心

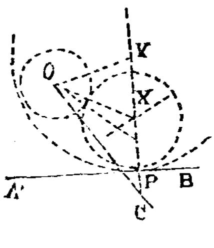
討論　若P爲AB及CD之交點則此題不能作

Q,E,F,

例236.與一已知線相切且與一已知圓相切於P

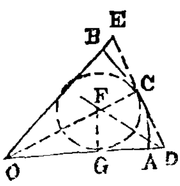
分析　作一線切與圓於P，則所求圓必切此線於P（§221）故此題可依（例題235）求之

例題237.與一已知線AB相切於P，且與一已知圓相切



分析　設O爲與圓之圓心 x 爲所求圓之圓心，則 x 之軌，爲AB上P點之垂線引長此垂線至C，命PC，等於與圓之半徑，則 $Ox=Cx$ 故 x 之他一軌爲OC線之平分垂線此二軌之交必在 x，以 x 爲心，xP爲半徑，作圓，則所求之圓矣.

例題238，求作一已知扇形之內切圓



分析　設AOB爲與割圓OC平分∠AOB，而遇AB弧於C，可知所求圓之圓，心必在O上C，　　§162.

作　一線切AB弧於C，而遇OA之延

線於D,OB之延線於E,

則所求圓必切此切線 §221.

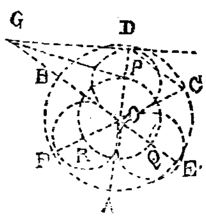
作圖 作OC平分∠AOB §304

通過 C作一切線遇OA之延線于 D,DB 之延線于E §317.

平分 ∠ODE令此平分線遇DC于F 則以F爲心F C爲半徑作一圓即爲所求之圓矣

Q,E,F,

例題239.求在一已知圓內作三等圓彼此相切且與此已知圓相切



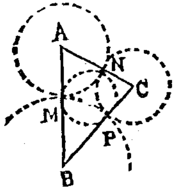
分析 設O爲與圓心 P,Q,R,爲所求圓之圓心而與O爲對線故OP,OQ,OR所作成之∠各爲 120°POA,OB,OC,平分∠至三圓作切線(§261)可知OA,OB,OC 所作成之∠每角亦等于 120°則知所求圓爲120°之割圓之內切圓

作圖 作AD直徑以D爲心 OD＝½AD 爲半徑截圓周于B及C作直徑 BOE,COF.于D點作切線(§317)且引長OB遇之于G平分∠OGD(§304)且平分OD于P以O爲心OP爲半

徑作圓截BE于Q,CFER以P,Q,R,爲心 P O 爲半徑作三圓此三圓卽所求之三圓矣

Q,E,F,

例題240.求以已知三角形之各頂爲圓心作三圓彼此相切



分析 設 ABC 爲所求之三角形而三圓彼此相切于 M,N,P, 因知AM=AN

而 CN=CP (§217)

且知M,N,P爲△ABC之內圓之切點

作圖 於△ABC內作內切圓 §315.

而 切三角形諸邊于M,N,P以A爲心 AM爲半徑作圓又以B爲心BM爲半徑作一圓以C爲心 CN 爲半徑作一圓此三圓卽可求之圓矣

Q,E,F,

例題241.求平分兩線間之角此兩線不必引長至彼此相交

作圖 設AB及CD爲二與線自 CD 上之任一點E作EF∥BA

§306.

于 ∠FEC之邊取EH

及 EG令其等長引長GH遇AB于I

于　GI作平分垂線此垂線卽爲平分AB及CD間之角之線矣

證　∠EGH＝∠FHG §145 而 ∠EHG＝∠BIG　§112.

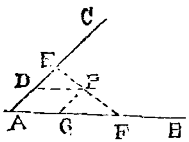
∴　∠EGH＝∠BIG

因知　GI及與二直線所作之三角形爲兩等邊　§147.

故　GI之平分垂線平分AB及CD間成之角

例題35Q,E,F,

例題242.求在∠BAC之兩邊間作一線過一已知點以此角之兩邊爲界而平分于P



分析　設EF爲所求之線作PD∥BA而遇AC于D則AD＝DE可知E點定在AC上其距A爲自P作一線平行BA而交AC于一點自此點于A之距離之二倍之一點

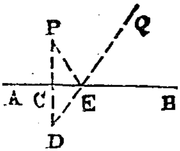
作圖　作PD∥BA于AC取DE等于AD

作　EP且引長之遇AB于F

則　EF即爲所求之線矣　Q,E,F,

例題243.已知兩點P,Q及一線AB,求由P及Q,作兩線于A

B上相遇且與AB成兩對角



分析　設PE,QE爲所求之二直線

作　PC⊥AB且引長QE遇PC延線于D

因　∠QEB=∠DEC　§93

∠DEC=∠PEC

∴　△PCE=△DCE　§124.

∴　PC=CD　§128

由是可定E點之所在點

作圖　作PC⊥AB且引長至D命CD等于PC

作　QD截AB于E作PE則PE及QE卽爲所求之二線矣

徑　因CE=CE而PC=CD

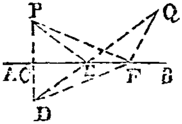
∴　正△PCE=正△DCE 因知∠PEC=∠DEC

但　∠DEC=∠QEB　§93.

∴　∠PEC=∠QEB　公理1.

Q,E,F,

例題244.求由P至Q幷與線AB相遇之至短折線



作圖　求出AB上之一點E使PE及Q與AB成二等角

例題243.

設　F爲AB上之任一點今作PC⊥AB且引長至D令CD等于PC作PF及Q,FPE,QE.

則　$PE+EQ \angle PF+QF$

證　$\triangle PCE=\triangle DCE$

而　$\triangle PCF=\triangle DCF$　§144.

$\therefore$　PE=DE而PF=DF　§128.

$\therefore$　$PE+EQ=DE+EQ=DQ$

而　$PF+FQ=DF+FQ$　公理2.

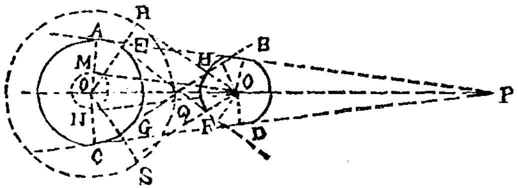
但　$DQ<DF+FQ$　§49.

$\therefore$　$PE+QE \angle PF+QF$

故　自P切AB而至Q之最近路爲自P及作二線相遇于AB線上而與AB作兩等角之二直線矣　Q,E,F.

例題245.求作兩已知圓之公切線

作圖　設r及r'爲二已知圓之半徑而O及O'爲其圓心以O爲心r—r'爲半徑作圓由O'作O'M,O'N二切線且引長OM及ON遇圓周于A及C作O'B及O'D與OA及OC平行作AB及CD則AB及CD即所求之二公切線



證　$MA=O'B$且$MA \parallel O'B$　構圖

$\therefore$　$AB \parallel MD'$　§183.

今　$\angle OMO'=90^\circ$ §254 $\therefore \angle OAB=90^\circ$

§107.

$\therefore$　$\angle O'BA=90^\circ$　§115.

因　知AB切二圓倣此可證得CD亦切二圓

§253.

討論　若O距O'小于$r-r'$則此題不能作

注意　若作內公切線可以$r+r'$為半徑作一助圓

例題246.求91,65及133之第四比例項

設　x為所求之第四率

$91:65=133:x$　§325.

$\therefore$　$x=\dfrac{65\times133}{91}=95$　§327.

例題247.求39及351之比例中項

設　$x=$所求之比例中項

$39:x=x:351$　§326.

$$x^2=39\times351=3^2\times39^2 \qquad \S 327.$$

$$x=3\times39=117$$

例題248．求54及3之第三比例項

設　　x二所求之第三比例項

$$54:3=3:x \qquad \S 326.$$

$$\therefore \quad x=\frac{3\times3}{54}=\frac{1}{6} \qquad \S 327.$$

例題249．在三角形ABC內AB＝12，AC＝14．BC＝13求角A之平分線所作BA之兩線分

設　　M爲∠A平分線交BC之點

$$MC:MB=AC:AB=14:12=7:6 \qquad \S 348.$$

$$\therefore \quad MC=\frac{7}{13}\times13=7$$

$$MB=\frac{6}{13}\times13=6$$

例題250．在三角形ABC內CA＝6，CB＝12，AB＝15，求角C之平分線所作AB之兩線分．

設　　M爲∠C平分線交AB之點

$$MA:MB=CA:CB=6:12=1:2 \qquad \S 348.$$

$$\therefore \quad MA=\frac{1}{3}\times15=5$$

$$MB=\frac{2}{3}\times15=10$$

例題251．設三角形之底爲7呎6吋其高爲5呎6吋其相似三角

形之相當底爲5呎6吋求其相當高

設　x＝相似△之相當高之長度

$$7\frac{1}{2}:5\frac{1}{2}::5\frac{1}{2}=x \qquad \S 361.$$

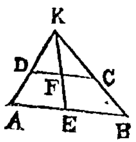
$$15:11=11:2x$$

$$30x=121$$

$$x=4\frac{1}{30}$$

（注意）本書所用之尺寸爲英國度法

例題252. 設引長聯梯形之兩底之中點之線又引長其兩腰則此之線必相遇于一點



設　ABCD爲梯形AB及CD爲兩平行邊

令　E爲AB之中點F爲DC之中點

求證　引長EF及AD,BC必相遇于一點

證　AE＝EB而DF＝FC　　題設.

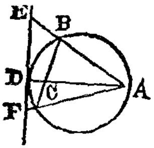
∴　AE:DF＝EB:FC

但　AD,EF及BC三線非平行線　　§165.

故　三線相遇于一點　　§363.

Q,E,F,

例題253. AB及AC由圓周內任一點A所作之兩弦AD爲直徑于點D作切線交AB及AC于E及F試證兩三角形ABC及AEF爲相似



設　AB及CD爲由圓周上A點所作之二弦設D爲直徑設EF爲切于D之切線交AB及AC之引長線于E及F

求證　ABC及AEF兩△兩相似

證　∠E可以$\frac{1}{2}$(ACD弧—BD弧)度之　§296.

因　AD爲直徑　ACD弧＝ABD弧

卽　E之可以$\frac{1}{2}$(ABD弧—BD弧)度之即等于$\frac{1}{2}$AB弧

但　∠BCA可以$\frac{1}{2}$AB弧度之

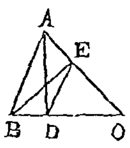
∴　∠BCA＝∠E　公理1

在　△ABC及AEF內

∠A公用　∠BCA＝∠E

故　△ABC與AEF爲相似形　Q,E,F,

例題254.AD及BE爲三角形CAB之兩高試證兩三角形CED及CAB爲相似



設　AD及BE爲△CAB之二高

求證　rt△CED及CAB相似

證　rt△CEB及ADC相似　§356.

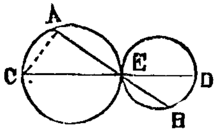
∠C公用

∴ CE:CD=CB:CA §351.

∴ △CED與CAB亦爲相似形 §357.

Q,E,F,

例題255.設兩圓相切過切點作一直線爲此兩圓之弦則此兩弦之比等于其兩直徑之比



設 CE，ED 爲兩圓之直徑兩圓相切E作AB通過E而令兩端遇二周于AB

求證 AE:EB=CE:ED

證 作AC及DB,CE及ED同在于一直線上 §265.

AC∥DB 例題120.

∴ ∠CAE=∠EBD

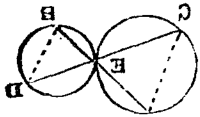
而 ∠ACE=∠EDB §110.

∴ △CAE及DBE爲相似形 §355.

∴ AE:EB=CE:ED §351.

Q,E,F,

例題256.設兩圓相外切過切點作兩線以兩圓周爲界則此兩線之相當線分成比例



設 兩圓相外切于E而AB,CD爲通過切點E之二直線

求證 AE:EB=CE:ED

證 作AC及DB

AC∥DB 例題210.

∴ ∠CAE=∠EBD

而 ∠ACE=∠EDB §110.

∴ △CAE與DBE爲相似形 §355.

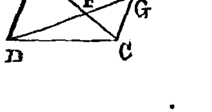
∴ AE:EB=CE:ED §351.

Q,E,F,

例題257.設在平行四邊形ABCD內作線DE遇對角線AC于F遇邊BC于G引長邊AB至E試證$\overline{DF}^2$=FG×FE.

設 ABCD爲▱而作DE于對角線AB于F遇BC邊于G遇AB引長線于E

求證 $\overline{DE}^2$=FG×FE



證 △AEF及DEC相似 §355.

因 ∠AEF=∠FDC §110.

∠FAE=∠FCD §110.

∴ DF:FE=FC:AF §351.

△AFD及GFC相似 §355.

因 ∠AFD＝∠GFC §93.

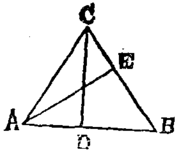
∠DAF＝∠FCG §110.

∴ FG : DF＝FG : AF §351.

∴ DF : FE＝FG : DF 公理1

∴ $\overline{DF}^2$＝FG×FE Q,E,F,

例題258.三角形之兩高與其兩相當底成反比例



在 △ABC內設AE及CD高線各至BC及AB

求 證AE : CD＝AB : BC證rA△AEB及CDB中有∠B共用

∴ △AEB與CDB爲相似形 §356.

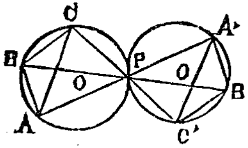
則 AE : CD＝AB : BC §351.

Q,E,D,

例題259.設兩圓相似于P過P作三線過一圓于A,B,C,過他圓于A',B',C',試證兩三角形ABC及A'B'C'相似

在兩 ⊙內O及O'爲圓心設過P作AA',BB',及CC',而作AC,BC

求證 △ABC及A'B'C'相似



證　　AC與A'C'及BC與B'C'

AB與AB'皆兩兩平行

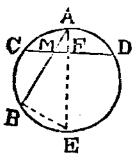
例題120.

因　　知△ABC與A'B'C'爲相似形　　§359.

Q,E,F,

例題260. 設兩弦AB及CD相交與M,A爲弧CD之中點弦AB繞定點A旋轉試證AB×AM爲常量

設　AB及CD爲兩弦交于M而設A爲弦CD之中點



證　　作AE直徑而作BE

AF⊥CD　　§245.

△　　ABE爲rt△　　§290.

在　　rt△AFM及ABE內

有　　∠MAF公用

∴　△AFM與ABE相似　　§356.

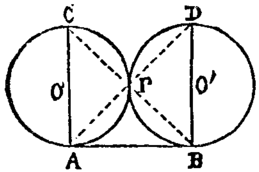
∴　AF：AB＝AM：AE　　§351.

∴　AF×AF＝AM×AB　　§327.

但　　AF×AE爲一定

∴　AB×AM亦爲一定　　Q,E,D,

例題261. 設兩圓相切則其外公切線爲其兩直徑之比例中項



設　兩圓相切于P而O,O為兩圓心A,B為兩圓之公切線

求證　AC : AB=AB : BD

證　作AP,CP,BP,DP,

AC及BD皆⊥AB　§254.

今　∠APB為rt∠　例題100.

APC為rt∠　§290.

則　CPB為一直線　§90.

依同理知DPA亦為一直線

今　rt△ACB及BAD相似　§356.

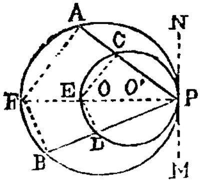
∠C=∠DAB　§§229.295.

∴AC : AB=AB : BD　§351.

例題262.設兩圓相內切則由切點所大圓之諸弦必為小圓周所分成比例.

若　兩⊙其圓心為O及O'相內切于P由P作弦PA及PB截小圓周于C,及D.

求證　PC : PA=PD : PB



證　在P點作切線mn作PF⊥MN

PF過O及O'　§255.

作　EC,ED及FA,FB

△PCE及PAF為rt△　§290.

rt△PCE及PAF有∠EPC共用

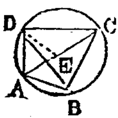
∴ △PCE及PAF相似 §356.

∴ PC : PA＝PE : PF §351.

依同理PD : PB : PE : PF

∴ PC : PA＝PD : PB Q,E,F,

例題263.在圓之內切四邊形內其兩對角線之積等於其各兩對邊之積之和



設 ABCD爲圓內切四邊形而AC及DB爲其二對角線

求證 AC×DB＝DC×AB＋AD×BC

證 作DE使∠CDE等於∠ADB加∠BDE

則 △ADE及BDC相似 §355.

因 ∠ADE＝∠DBC 公理2.

∠DAC＝∠DBC §293.

∴ AD : DB＝AE : BC §351.

∴ AB×BC＝BD×AE §227.

△DEC及DAB相似 §355.

因 ∠CDE＝∠ADB 作圖

而 ∠DCE＝∠ABD §293

∴ DC : DB＝FC : AB §351.

$\therefore\quad DC\times AB=DB\times EC$ §327.

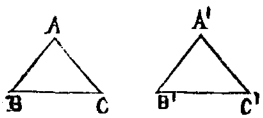
加兩結果方程式

$DC\times AB+AD\times BC=DB(AE+EC)=D$

$B\times AC$ 公理2.

Q,E,D,

例題264.等頂角之兩等腰三角形必相似



在 △ABC及A'B'C'內AB等于 AC,A'B'等于A'C'

而 $\angle A=\angle A'$

求證 △ABC與A'B'C'相似

證 $AB=AC$ 題設

$A'B'=A'C'$ 題設

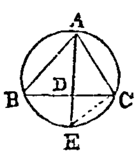
故 △ABC與A'B'C'相似 §357.

Q,E,D,

例題265.設三角形ABC之頂角A之平分線交其底于D交其外切圓之圓周于E試證AB×A C=AD×AE

設 △ABC內接于一圓而設AE爲∠A之平分線交B C于D交圓周于E

求證 $AB\times AC=AD\times AE$



證 △BAD與EAC相似 §355.

因 $\angle BAD=\angle EAC$ 題設

$\angle ABD=\angle AEC$ §293

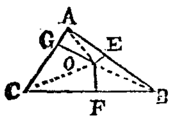
$\therefore \quad AB : AE = AD : AC$ 　　§351.

$\therefore \quad AB \times AC = AE \times AD$ 　　§327.

Q,E,D,

例題266.設由三角形ABC 內一點O至三邊 AB,BC,CA,作三垂線OE,OF,OG,試

證 $\overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{GA}^2$



設　OE,OF,OG為自三角形 ABC 內O點至三邊AB,BC,CA 所作之三垂線

求證 $\overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{GA}^2$

作　OA,CB,OC

則 $\overline{OA} = \overline{AE}^2 \quad \overline{OE}^2$; $\overline{OA}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{GA}^2$ 　　§371.

$\therefore \quad \overline{AE}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{GA}^2$

公理1.

依同理 $\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{OE}^2$

及 $\overline{OG}^2 + \overline{OG}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{OF}^2$

三式相加

$\overline{AE}^2+\overline{OE}^2+\overline{BF}^2+\overline{OF}^2+\overline{CG}^2$

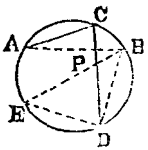
$+\overline{OG}^2=\overline{OG}^2+\overline{GA}^2+\overline{EB}^2\ \overline{DE}^2$

$+\overline{FC}^2+\overline{OF}^2$　　　　公理2.

$\therefore\ \overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CG}^2=\overline{EB}^2+$

$\overline{FC}^2+\overline{GA}^2$　　　　Q,E,D,

例題267.設兩弦垂直相交則其四線分之平方和等此圓之直徑之平方



設　互⊥線AB,CD交于P作BE直徑

求證　$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

$=\overline{BF}^2$

證　作AC, ED, BD, 則AC弧+BD弧=BDE弧

例題98.

兩　邊各減去BD弧

則　AC弧=ED弧　　　　公理3.

$\therefore$　AC弦=ED弦　　　　§241.

今　$\overline{ED}^2+\overline{BD}^2=\overline{BE}^2$　　　　§371.

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BE}^2$

但　$\overline{AC}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$

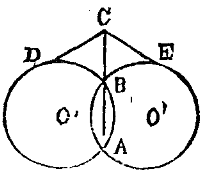
而　$\overline{BD}^2=\overline{PB}+\overline{PD}^2$　　　　§371.

即 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

代入 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{BE}^2$ 公理1

Q,E,D,

例題268,設兩圓相交則由其公弦之引長線內一點所作之兩切線必等 (§381.)



設 CO'為兩相交⑤AB為其公弦而CD,CE,為從AB引長線中任一點C,至OO'所作之二切線

求證 CD=CE

證 $\overline{CD}^2=CA\times CB$ §381.

$\overline{CE}^2=CA\times CB$ §381.

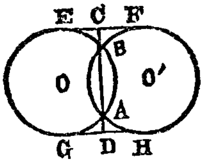
$\therefore\ \overline{CD}^2=\overline{CE}^2$ 公理1

$\therefore$ CD=CE Q,E,D,

例題269.設兩圓相交則其公弦之引長線必平分其兩公切線 (§381)

設 O,O'為相交之⑤DC為公弦之引長線而EF及GH為二公切線

求證 DC平分EF及GH



證 $\overline{EC}^2 = CB \times CA$

而 $\overline{FC}^2 = CB \times CA$ §381.

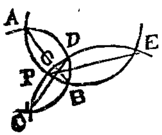
∴ $\overline{EC}^2 = \overline{FC}^2$ 公理1.

∴ $EC = FC$

依同理 $DG = DH$

Q,E,D,

例題270.設兩圓相交則其三公弦必過同點



設 ⓢABC、ABE,CDE互相交而A B,CD相交於O作EO

設 引長EO遇A B E於P,CDE於Q

求證 P,Q二點重合

證 於⊙ABC $OA \times OB = OC \times OD$ §378.

在 ⊙ABE內 $OA \times OB = OE \times OP$ §378.

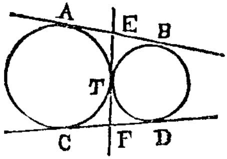
在 ⊙CDE內 $OC \times OD = OE \times OQ$ §378.

∴ $OE \times OP = OE \times OQ$ 公理1.

知 $OP = OQ$

Q.E,D,

例題271.設兩圓相切則其內公切線，必平分其兩外公切線



設 EF 爲相切二圓之內公切線AB，CF 二外公切線與內公切線相交於E及F

求證 $EA = EB$及$FC = FO$

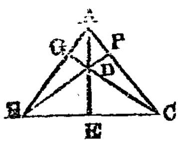
證　　$EA=ET$

而　　$EB=ET$　　§261.

$\therefore$　$EA=EB$　　公理1.

依同理　$FC=FD$　　Q,E,D,

例題272. 設由三角形 AEC 之各頂至其對邊作三垂線相交於D.



設　　AE,BF,CG 爲△ABC 諸頂所作之⊥

而　　D爲其交點

求證　$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$

證　　令 $\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$

而　　$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2$　　公理3.

又　　$\overline{BD}^2=\overline{DE}^2+\overline{BE}^2$

而　　$\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2$　　§371.

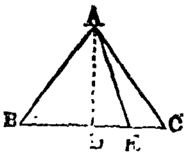
$\therefore$　$\overline{BD}^2-\overline{CD}^2=$

$\overline{BE}^2-\overline{CE}^2$

故　　$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$　公理1.

Q,E,D,

例題273. 等腰三角形之一腰之平方，等於由頂至底之任一線之平方加其底上兩線分之積.



在　$\triangle ABC$內AB等於AC，自A至BC作AE

求證　$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+BE\times EC$

證　作AD高線

因　AE爲自A至BC所作之任一線

則　$\angle$s AEB及AEC互爲補

設　$\angle$ AEC爲鈍角

則　$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2+2EC\times DE$　§376.

即　$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+EC(EC+2DE)$

但　$BD=DC$

則　$BD=EC+DE$　§149.

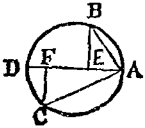
$\therefore$　$BD+DE=EC+2DE$　公理2.

即　$BE=EC+2DE$

$\therefore$　$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+BE\times EC$

Q,E,D,

例題274.設由圓周上一點作兩弦復由此點作一直徑則此兩弦之平方之比等於其在直徑上兩射影之比



設　AB，AC爲自ABC圓周上一點A所作之二弦AD爲圓之直徑而於直徑截取，AE及AF爲自A出直徑上AB

,AC而弦之射影

求證 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AE : AF$

證 $\overline{AB}^2 = AD \times AE$

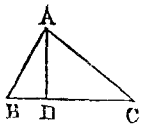
而 $\overline{AC}^2 = AD \times AF$ §270.

$\therefore \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AD \times AE : AD \times AF$

$\therefore \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AE : AF$

Q,E,D,

例題275.三角形之兩邊之平分之差等於由所夾之頂至第三邊之垂線所作第三邊上兩線分之平方差



設 AD設自△ABC頂角至對邊所作之垂線設AC大於AB

求證 $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2$

證 $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ §371.

$\therefore \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2$

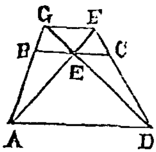
公理3

Q,E,D,

例題276.設ABCD爲梯形DC爲兩平行邊E爲DC之中點AE及DE之引長線遇DC及AB之引長線于F及G試證FG與DA平行

設　E為梯形ABCD一平行邊之中點設AE及D E引長之與DC及AB相遇于F及G

求證　FG∥AD



證　因$\angle GAD=\angle GBE$ $\angle GDA=\angle GEB$ §112.

故　△AGD與BGE為相似形 §335.

∴　DG : EG＝AD : BE §351.

因　$\angle FAD=\angle FEC$

$\angle FDA=\angle FCE$ §112.

△　AFD與EFD相似形 §355.

∴　AF : EF＝AD : CE §351.

BE＝CE 題設

∴　AD : BE＝AD : CE

∴　DG : EG＝AF : EF 公理1

∴　DG—EG : EG＝AF—EF : EF §333.

又　$\angle ABD=\angle FEG$ §95.

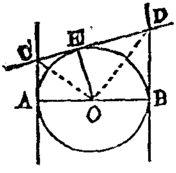
∴　$\angle EGF=\angle EDA$ §351.

而　△AED與FEG為相似形 §357.

∴　FG∥DA §111.

Q,E,D,

例題277.設于圓之直徑之兩端作兩切線又于其間作第三切線爲切點所分成兩線分則此兩線分之積等于此圓之半徑之平方



設 AB爲圓之直徑兩AC,BD 爲直徑兩端之二切線 CD 爲第三切線與圓周相切于E 而OE爲圓之半徑

求證 $EC \times ED = \overline{OF}^2$

證 AC及BD均爲AB之垂線 §254.

∴ $AC \parallel BD$ §104.

∴ $\angle ACE + \angle BDE = 2$正角

作 OC及OD

則 $\angle AOC = \angle EDO$ §261.

而 $\angle BDO = \angle EDO$ §261.

∴ $\angle ECO + \angle EDO =$正角 公理1

∴ COD爲正角 §131.

今 $OF \perp CD$ §254.

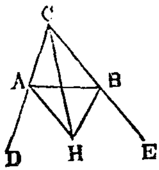
∴ $CE : OE = OE : EO$ §367.

∴ $CE \times ED = \overline{OE}^2$ §327.

Q.E,D,

例題278.設平分三角形之兩外角則由此兩平分線之交點至

其對角之線必平分此角



設　AH平分△ABC外角∠BAD而BH平分其外角∠ABE

求證　HC平分∠ACB

證　因H在∠BAD之平分線內故H距CA及AB有等距離　§162.

因　H在∠ABE之平分線內

故　H與AB及CB有等距離　§162.

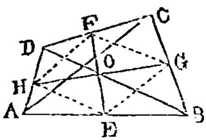
∴　H與CA,AB及CB有等距離

今　與CA及CB有等距離之軌跡為∠ACB之平分線　§161.

∴　HC有兩點H及C與平分線重合　§47.

則　HC平分其∠ACB　Q.E.D.

例題279.四邊形兩對角線平方和等于聯各兩對邊之中點之線之平方和之二倍



設　ABCD為四邊形而AC,BD為其二對角線

設　EF及GH為聯接對邊中點之線

相交于O

求證 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\left(\overline{EF}^2+\overline{GH}^2\right)$

證 作EG,GF,FH,HE,

今 AC=2EG §189.

$\therefore\ \overline{AC}^2=4\,\overline{EG}^2$

依同理 $\overline{BD}^2=4\,\overline{GF}^2$

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4\left(\overline{EG}^2+\overline{GF}^2\right)$

公理2

但 EGFH爲▱ 例題74.

$\therefore$ OG=OH而OE=OF §184

今 $\overline{EG}^2+\overline{GF}^2=2\,\overline{OE}^2+2\,\overline{OG}^2$

§377.

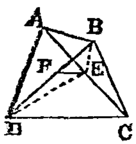
$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4\left(2\,\overline{OE}^2+2\,\overline{OE}^2\right)$

$=2\left(4\,\overline{OE}^2+4\,\overline{OG}^2\right)$

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\left(\overline{EF}^2+\overline{GH}\right)^2$

Q,E,D,

例題280.四邊形之四邊平方和等于兩對角線之平方和加聯此兩線中點之線之平方今四倍



設 AECD 爲四邊形 AC,BD 爲二對角線

而 EF爲聯合二對角線中點之直線

求證 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\ \overline{CD}^2+\overline{DA}^2$

$$=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\,\overline{EF}^2$$

證　作BE,DE

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\left(\frac{AC}{2}\right)^2+2\,\overline{BE}^2$$

§377.

而　$$\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\left(\frac{AC}{2}\right)^2+2\,\overline{DE}^2$$

§377.

兩等式相加

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\left(\frac{AC}{2}\right)^2+2\left(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2\right)$$

公理2.

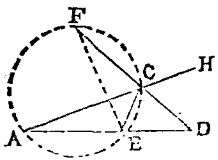
但　$$\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=2\left(\frac{BD}{2}\right)^2+2\,\overline{EF}^2$$

§377.

$$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}=4\left(\frac{AC}{2}\right)^2+4\left(\frac{BD}{2}\right)^2+4\,\overline{EF}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\,\overline{EF}^2$$

Q,E,D,

例題281.三角形外角平分線之平方，等於其一邊之引長線上爲此線所限之兩外線分之積減他兩線之積



設 ABC爲一△CD爲外角$\angle BCH$之平分線遇 AB 之引長線於D.

求證 $\overline{CD}^2=AD\times BD=AC\times BC$

證 作△ABC之外接⊙且引長 DC，令與圓周相遇於F作BF

在 △ACD及FCB內

$\angle BAC=\angle BEC$ §293.

$\angle FCA=\angle HCD$ §93.

但 $\angle HCD=\angle BCD$ 題設

$\therefore\ \angle FCA=\angle BCD$ 公理1

兩邊各加$\angle ACB$

則 $\angle FCB=\angle ACD$ 公理2

故 △ACD與FCD爲相似 §355.

$\therefore\ CD:BC=AC:FC$ §351.

$\therefore\ FC\times CD=AC\times BC$ §327.

今 $AD\times BD=FD\times CD$ §382.

$=(FC+CD)CD$

$=FC\times CD+\overline{CD}^2$

但　$FC \times CD = AC \times BC$

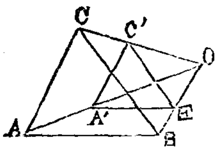
$\therefore\ AD \times BD = AC \times BC + \overline{CD}^2$

遷項　$\overline{CD}^2 = AD \times BD - AC \times BC$

Q,E,D,

例題282.設聯一點△於三角形ABC之各頂過OA內任一點A'作一線與AB平行遇OB於B'又過作一線與BC平行遇OC於C'聯C'及A'則△A'B'C'必與△ABC相似

設　什OA,OB及OC從OA任一點A'作A'B'∥AB作B'C'∥BC連C'及A'



求證　△ABC及A'B'C相似

證　在△ABC及A'B'C內∠ABC
$= \angle ABC$　§176.

在　△AOB及AOB內

$\angle OB'A' = OBA$　§112.

而　$\angle OA'B' = \angle OAB$　§112.

∴　△AOB及A'OB'相似　§355.

∴　$OB' : OB = A'B' : AB$　§351.

依同理　△OB'C'及OBC每相似

∴　$OB' : OB = B'C' : BC$　§351.

∴ A'B' : AB=BC : BC 公理1.

∴ △ABC及A'B'C'相似 §357.

Q,E,D,

例題283.設兩圓之聯心線順次遇其圓周於四點A,B,C,D遇外公切線於P

設 兩⊙之圓心為O,O' 其連心線交圓周于A,B,C,D而遇外公切線于P

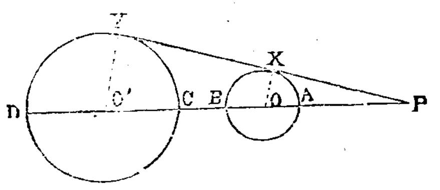
求證 PA×PD=PB×PC

證 作半徑O× 及o'y'

△P x O及Pyo'皆為rt△ §254.

rt△P x O及Pyo'相似 §256.

因 ypo'公用



∴ PO : O x =PO' : O'y

依合理及分理PO+O x =PB而PO—O x =PA

又 PO'+O'y=PD而PO'—O'y=PC

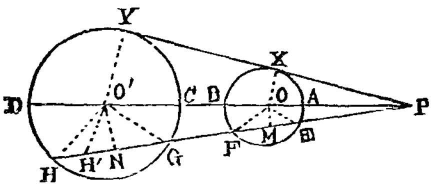
∴ PB : PA=PD : PC

$\therefore$ $PA \times PD = PB \times PC$ §327.

Q.E.D.

例題284. 設兩圓之聯心線遇外公切線於P由P，作一割線順次截兩圓於四點E,F,G,H,

在 ⓢ內其圓心為O及O′ 設連心線遇公切線P xy于P而割圓周于A,B,C,D，作PH割圓周于E,F,G,H



求證 $PE \times PH = PF \times PG$

證 作半徑OX, OE,OF,O′G,O′Y,及O′H並作OM及O′N⊥PH

rt △POM及PO′N相似 §356.

因 ∠D′PN共用

$\therefore$ $PO : PO' = OM : O'N$ §351.

但 $PO : PO' = OX : O'Y = OF : O'H$

例題383.

$\therefore$ $OM : O'N = OF : O'H$ 公理1

作 $O'H' \parallel OF$

因 $\angle OFM = \angle O'HN$ §176.

rt ⊿OMF及O'NH'相似 §356.

因 $\angle OFM = \angle O'H'N$ §176.

$\therefore$ $OM : O'N = OF : O'H'$ §351.

$\therefore$ $O'H = O'H'$且與之重合

$\therefore$ $O'H' \parallel OF$

$\therefore$ $PO : PO' = PF : PH$

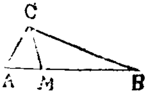
依同理證得$PO : PO' = PE : PG$

$\therefore$ $PE : PG = PF : PH$ 公理1

$\therefore$ $PE \times PH = PF \times PG$ §327.

Q,E,D,

例題285.設由三角形之頂作一線分其對邊成兩線分與其兩鄰邊為比例則此線必平分其頂角



設 CM為從△ABC頂點至底邊AB所作之直線且令$AM : MB = AC : CB$

求證 CM平分$\angle ACB$

證 $\angle ACB$之平分線必通過M §348.

故 CM有兩點與$\angle ACB$之平分線公用且與此平分線重合

$\therefore$ CM平分$\angle ACB$ Q,E,D,

例題286.求分長12寸之線爲三份與三數3;5,7爲比例

$$3+5+7=15$$

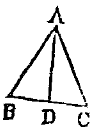
$$\frac{3}{15}\times 12=\frac{1}{5}\times 12=2\frac{2}{5}\text{吋}$$

$$\frac{5}{15}\times 12=\frac{1}{3}\times 12=4\text{吋}$$

$$\frac{7}{15}\times 12=\frac{84}{15}=5\frac{9}{15}=5\frac{3}{5}\text{吋}$$

故　知所分之三線爲$2\frac{2}{5}\cdots 4\cdots 4\frac{3}{5}$吋

例題287.等邊三角形之高之平方，等于其一邊之平方之四分之三



此三角形一邊之平方之四分之三

設　AD爲等邊△ABC之高

求證　$\overline{AD}^2=\frac{3}{4}\overline{AC}^2$

證　$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{DC}^2$　§372.

但　$DC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$　§149.

$\therefore\ \overline{DC}^2=\frac{1}{4}\overline{AC}^2$

$\therefore\ \overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\frac{1}{4}\overline{AC}^2$

$\therefore\ \overline{AD}^2=\frac{3}{4}\overline{AC}^2$

Q,E,D,

例題288.設(1) $x=\frac{ab}{c}$ (2) $x=\frac{a^2}{c}$ 求作 x

特殊情形 (1) $x=\frac{ab}{c}$

$Cx=ab$

$\therefore\quad C:a=b:x$

故　　求x成c,a及b之比例第四項　　§386

(2) $x=\frac{a^2}{c}$

$C\ x=a^2$　　§329.

$\therefore\quad C:a=a:x$　　§29.

故　　求x成C及a之比例第三項

特殊情形(1) a=2 b=3 c=4

$4:2=3:x$

$\therefore\quad x=1\frac{1}{2}$

(2) a=3 b=7 C=11

$11:3=7:x$

$\therefore\quad x=1\frac{10}{11}$

(3) a=2 C=3

$3:2=2:x$

$\therefore\quad x=\frac{4}{3}$

(4) a=3 c=5

$5:3=3:x$

$\therefore\quad x=1\frac{4}{5}$

(5)　$a=2c$

$c:2c=2c:x$

$\therefore\quad x=4c$　　Q,E,F,

例題289.設$x=\sqrt{ab}$求作x

特殊情形 (1) $a=2,b=3$ (2) $a=1$ $b=5$, $a=$ 3

$b=7$

求　x爲a及b之比例中項　§388.

特殊情形(1)　$a=2$　$b=3$

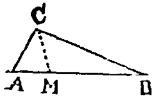
用適宜單位求x即爲2與3之比例中項　§388.

$$x=\sqrt{6}$$

(2)　如(1)　$x=\sqrt{5}$

(3)　如(1)　$x=\sqrt{21}$

例題290.求分已知三角形之一邊成兩線分與其兩鄰邊爲比例



設　ABC爲已知△

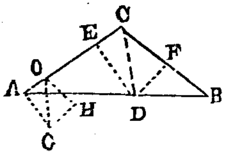
求　分AB爲二分與AC及BC成比例

作圖　作Cm平分∠ACB則m即爲所求之分點

證　$Am:mB=AC:BC$　§348.

Q,E,F,

例題291.在已知三角形之一邊內求與他兩邊之距之比若m:n之一點



設 ABC爲已知△

求 AB上之一點且自此點至AC及BC之距離比若m:n

作圖 作AG等於m ⊥AC,作GH等于n⊥BC.

而 HO∥BC作OG自C作CD∥OG 作 DE⊥AC及FD⊥BC

D爲所求之點

證 rt△GHO及DFC相似 §356.

因 ∠GOH=∠DCF §176.

∴ GH:DF=OG:CD §351.

依同理 △AGO及EDG亦相似

∴ AG:DE=OG:CD §351.

∴ AG:DE=GH:DF 公理1.

AG:GH=DE:DF §330.

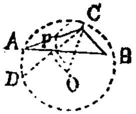
但 AG=m及GH=n 作圖.

∴ DE:DF=m:n

例題292.求由已知鈍角三角形之鈍角頂,至其對邊作一線

為此邊上兩線之比例中項

設　ABC為已知△而∠C為鈍角



求　自C作一線至 AB 邊須為此邊二分線之比例中項

求圖　作ABC之外切⊙並作OC半徑以OC為直徑，畫半圓交AB於P作CP

且　引長之令與圓周相遇於D作OP

CP為所求之線

證　∠OPC為正角　§290.

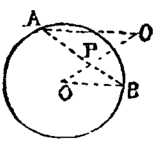
∴　CP＝PD　§245.

但　AP：CP＝PD：PB　§378.

∴　AP：CP＝CP：PB

Q,E,F,

例題293.求過圓內一已知點P，作一弦AB使AP：BP等於m：n作OPC使OP：PC＝n：m作CA 等於n,m 與此圓半徑之第四比例項



設　P為已知點過P作AB使 AP：BP與m：n等

作圖　作OP且引長至C 使　OP：PC＝n：m

求 x 爲n,m及此圓半徑之第四比例項

以 C爲心 x 爲半徑,作弧割圓周於A

作 CA又作BO // CA

且 作AP及BP

APB爲一直線亦即所求之弦

證 OP : PC = n : m = OB : CA 作圖

∴ OP : OB = PC : CA §330.

∠BOP = ∠PCA §110.

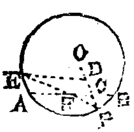
∴ △BOP及ACP爲相似 §357.

∴ ∠BPO = ∠CPA §351.

因 OPC爲一直線即APB亦爲一直線

而 AP : BP = PC : OP = m : n Q,E,F,

例題294.求過弦AB之對弧內一已知點P作一弦爲AB所平分



設 P爲AB弧內之一點過P作一弦且爲AB弦所平分

作圖 作OP半徑,且交AB於C取CD = CP

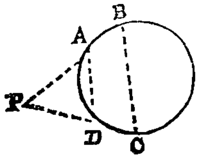
作 DE // BA作EP

EP即爲所求之弦

證 CP = CD 作圖

∴　PF＝FE　　　　　　Q,E,F,

例題295.求過圓外一已知點P,作一割線PAB，使PA：AB等於m：n



P 爲一已知⊙外一點自P至與圓作PAB割線,且使

PA：AP＝m：n

作圖　作PC切線分PC於D使PD：DC＝m：n　　　　§385.

求　x 爲PD,PC之比例中項

以　P爲心以 x 爲半徑作弧，截圓周於A作PAB,PAB即爲所求之割線.

証　作AD及BC

PD：PA＝PA：PC　　　　作圖

但　PA：PC＝PC：PB　　　　§381

∴　PD：PA＝PC：PB　　　　公理1.

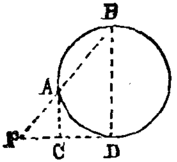
∴　AD∥BC　　　　§345.

∴　PA：AB＝PD：PC＝m：n Q,E,F,

討論　若自P至圓周最近點之距離大於圓之直徑之器則此題不可作

例題296.求過圓外一已知點P,作一割線PAB.

設　P為⊙外一點作一割線PAB便$\overline{AB}^2$ =PA ×PB



作圖　作PD切線分PD，使PC：CD=CD:PD　§390.

以　P爲圓心CD爲半徑作弧截圓周於A.

作　PAB，AC及BD

PAB即爲所求之割線

証　PC：PA=PA：PD　作圖

但　PA：PD=PD：PB　§381.

∴　PC：PA=PD：PB　公理1.

∴　AC∥BD　§345.

∴　PC:PA=CD:AB=PA:AB　§342.

但　PC：PA=PA=PD

∴　AB=PD

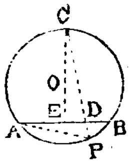
因知　PA：AB=AB：PB

∴　$\overline{AB}^2$ =PA×PB　Q,E,F,

討論　若PD大於圓之直徑則此題又一可作

例題297.在已知弦AB之對弧內求與其兩端A及B之距離之比等於m：n之一點P

設　AB爲⊙ABC之弦



求弧　AB上一點使PA:PB=m:n

作　通過圓心O作EC⊥AB，於AB

取　D使AD：DB=m：n作CDP，PA

及PB

P卽爲所求之點

証　AC弧＝BC弧　§245.

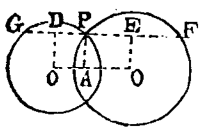
∠APC＝∠BPC　§293.

∴　AP：PB＝AB：DB＝m：n

Q,E,F,

例題298.若兩圓相交求過一交點作一割線使所成兩弦之比等於m:n之一點P

設　兩⊙相交於P,O,O'爲兩圓心



求　通過P作一割線，使與所成兩弦之比若與比率m:n

作　自一圓心O至作一圓心作OO'且平分OO'，使OA:AO=m:n

§385.

作　AP且作　GPF⊥AP，

GPE　即所求之割線

證　作OD及O'E⊥GPE

OA：AO'＝DP：PE＝m：n　§344.

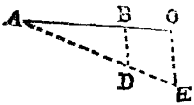
$DP=\frac{1}{2}GP$

$DE=\frac{1}{2}PF$　§245.

∴ GP：PF＝m：n

Q,E,F,

例題299已知分成外內比之線之大小線分求作此線



設　AB 爲一直線之大線分且分成第一比例項及中項

求　作此線

作　作AE及AB成適宜之角分 AE使AE：AD＝AD：DE　§290.

求　BC爲ADAB及E之第四率

AC爲所求之線

證　AC：AB＝AE：AD　§343.

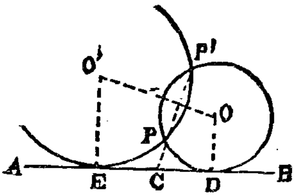
但　AE：AD＝AD：DE　作圖

AD：DE＝AB：BC　作圖

∴ AC：AB＝AB：BC　公理1.

Q,E,F,

例題300.求作一圓過兩已知點且與一已知直線相切



設 P及P'，爲二與點 AB爲已知直線作一⊙須通過P,P'而切AB

作 圖O作P'P遇AB于C而求P'C及PC之比例中項 §388.

截 取CD等于該比例中項

作 OD⊥AB，作O'O分P'P且與之直角

在 O'O及OD之交點O以OP爲半徑畫圓周此圓通過P,P'而切AB于D

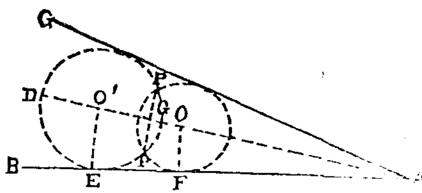
證 因O與 P,P' 有等距離故所作之圓必通過P'

又 P'C : CD＝CD : PC 作圖

∴ CD切圓于D §381.

討論 取CE等于CD則可求第二解 Q,E,F,

例題301.求作一圓過兩已知點且與一已知直線相切



設 AB,AG爲二直線交于A而P爲已知點求作

一圖通過P而切AB及AG

作圖 作AD平分∠BAG

作 PC⊥AD且引長之至P′令CP′等于PC作圖通過P及P′而切AB 例題300.

此 ⊙即爲所求之⊙

證 因AD爲PP′之⊥平分線則圓心必在AD內 §160.

因 AD平分∠BAG則此⊙必切AG §162.

Q,E,F,

討論 如例題300則可有二解

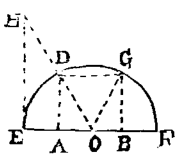
設 AB平行AG則當別論

例題302.求作一半圓之內切正方形

設 EDCF爲半圓

求 作內接正方形

作圖 在E作EH切線等于半徑EO之二倍作HO截圓周于D



作 DA⊥EF,DC∥EF及CB⊥EF

則 ABCD卽爲所求之正方形

證 依作圖ABCD爲矩形

作 OC

rt 㓹OAD及OBC相等 §151.

OD=OC(§217)及AD=BC §180.

∴ OA=OB §128.

在△AEH內 AD∥EH §104.

∴ OA:AD=OE:EH

$OE=\frac{1}{2}EH$ 作圖

∴ $OA=\frac{1}{2}AD$

∴ OA+OB=AD

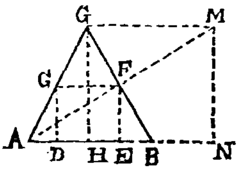
∴ ABCD爲正方形

Q,E,F,

例題303.求作一已知三角形之內切正方形

設 ABC爲已知△

求作 △ABC之內接正方形



作圖 作CH高線以CH爲邊且引長HB作HNMC正方形

作 Am截BC於F

作 DEFG正方形

DEFG爲所求正方形

證 rt㓹AEF及ANm相似 §356.

EF:nm=FA:Am §351.

rt△AGF及ACm相似 §354.

∴ GF : nm＝GF : Cm 公理1.

nm＝cm 作圖

∴ EF＝GF

∴ DEFG為所求正方形

Q,E,F,

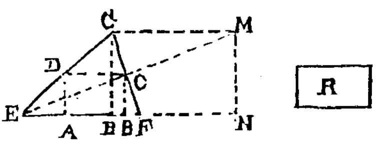
例題304.求作一已知三角形之內切矩形與一已知矩形相以

設· EFG為已知△而R為已知矩形

求 △EFG內接矩形令與R相似

作圖 作高線GH

以 GH為一邊且引長HF作一與n 相似之長方形作Em截FG於C



作 ABCD矩形

則 ABCD即為所求之矩形

證 rt△EBC及Enm相似 §356.

BC : nm＝FC : Em §351.

rt △EDC及EGm相似 §354.

∴ DC : Gm＝EC : Em §351.

∴ BC : nm＝DC : Gm 公理1

∴ ABCD與HGnm相似且與r亦相似

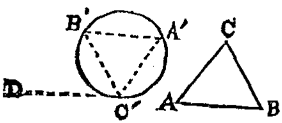
Q,E,F,

例題305.求作一圓之內切三角形與一已知三角形相似

設 A'B'C為已知⊙而ABC為已知△

求 在⊙內作內接三角形令與△ABC相似.

作圖 於圓周上之任一點作一切線C'D 自C作一弦,令∠B'C'D等於∠A



由 B' 作∠A'B'C 令等於∠B

作 A'C'

△A'B'C'即爲所求之△

證 ∠A'=∠B'C'D(各等於$\frac{1}{2}$同弧)

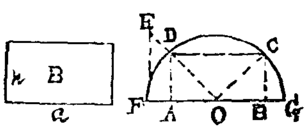
∴ ∠A'=∠A 公理1

∠B'=∠B 作圖

∴ ⊿ABC及A'B'C'相似 §355.

Q,E,F,

例題306.求作一已知半圓之內切矩形與一已知矩形相似



設 n 爲已知矩形 FDↄG 爲已知半圓

求 在FDCG半圓內作一

矩形與n相似

作圖 求x為$\frac{1}{2}$a, b及半徑OF之第四比例項在F作FE等於x

作 OE截圓周於D

作 矩形ABCD

則 ABCD為所求之矩形

證 作OC

OD=OC §217.

AD=BC 作圖

∴ $\triangle OAD=\triangle OBC$ §151.

∴ OA=OB §128.

rt △OAD及OFE相似 §356.

∴ OA : AD=OF : FE §351.

但 $\frac{1}{2}$a : b=OF : FE 作圖

∴ OA : AD=$\frac{1}{2}$a : b

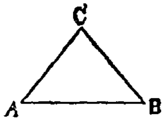
但 OA=$\frac{1}{2}$AB ∴$\frac{1}{2}$AB : AD = $\frac{1}{2}$a : b

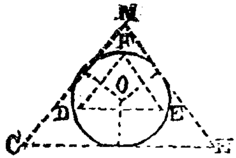
∴ ABCD與R相似 Q,E,F,

例題307.求作一圓之外切三角形與一已知三角形相似

設 ABC 為已知△而 O 為已知⊙之圓心求作此

圖之外切△令與△ABC相似





作圖 作一圓之內切三角形△DEF且與△ABC

相似 例題305.

自 作半徑垂于△DEF之各邊

在 諸半徑之端作GH,HM及MG三切線則GH

M即為所求之△

證 GH,HM,MG,DE,EF,及FD,

§§254.104.

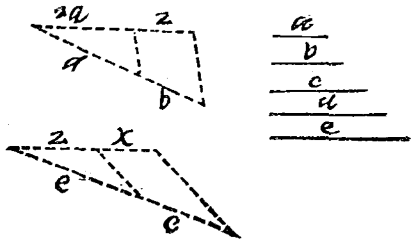
∴ △GHM與DEF相似 §359.

∴ △GHM與ABC相似 O,E,F,

例題308.試作圖示 $x=\frac{2abc}{de}$ 則 $\frac{2ab}{d}\times\frac{c}{e}$

設 a,b,c,d,e為已知之線

求作 $x=\frac{2abc}{de}$



作圖　求Z爲d2a及b之第四比例項

求　x爲e.Z及C之第四比例項

則　x即爲所求之線

證　$d : 2a = b : Z$　　作圖

$$\therefore \quad Z = \frac{2ab}{d}$$

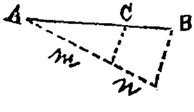
$e : Z = C : x$　　作圖

因　$Z = \frac{2ab}{d}$　　則 $x = \frac{2abc}{de}$

Q,E,F,

例題309.已知兩直線之和及其比求作此兩線

設　AB爲已知之二直線之和其比率爲$m : n$



求　作此線

作圖　分AB爲兩分,令其兩線分相比若

$m : n$　　§385.

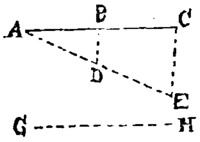
則　AC及CB即爲所求之線

證　由作圖知

$AC+CB=AB \quad AC:CB=m:n$

Q,E,F,

例題310.已知兩直線之差及其比求作此兩線



設　a爲已知二直線之較而

m：n已知與比率

求　作此線

作圖　作AD等於m－nAB等於n而DE等於a

求　BC於AD,AB及DE之第四比例項

§386.

作　GH等於BC＋a

則　GH及BC即爲所求之線

證　由作圖知

$AD:AB=DE:BC$

$AD=m-n$

$AB=n$

而　$DE=GH-BC$

$$\frac{m-n}{n}=\frac{GH-BC}{BC}$$

或　$$\frac{m}{n}-1=\frac{GH}{BC}-1$$

$$\therefore \frac{m}{n}=\frac{GH}{BC}$$

$\therefore$ GH : BC=m : n

Q,E,F,

例題311.已知兩圓之圓心爲 O 及 O' 並有一點A在同平面內.

設 O及O'爲已知⊙之圓心而A爲已知點

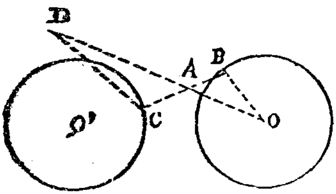
求 通過A點作一直線遇二圓周於B及C使

AB : AC=m : n

作圖 作OA且引長之至D,使

OA : AD=m : n §386.

求 x 爲m,n及O圓之半徑之第四比例項



以 D 爲圓心 x 爲半徑作圓周,割O' 圓於C,

且 作DC

作 OB∥CD 並作 AB及AC則BAC爲一直線

且 AB : AC=m : n

證 在△ABO及ACD內

∠D=∠C §110.

及　OA：AD＝m：n＝OB：DC　作圖

∴　△ABO及ACD相似　§357.

∴　∠OAB＝DAC　§351.

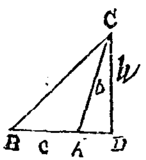
因　OAD爲一直線BAC亦爲一直線

又　AB：AC＝OA：AD＝m：n　§351.

Q.E.F.

例題312.試依三角形之三邊計算其高.

∠A或∠B必有一爲銳角設∠B爲銳角



在　△CDB內 $h^2=a^2-\overline{BD}^2$

§372.

在　△ABC內

$b=a^2+C^2-2C\times BD$　§375.

而　$BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

故　$h^2=a^2-\frac{(a^2+c^2-b^2)}{4c^2}\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)}{4c^2}$

$=\frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4c^2}$

$=\frac{\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}}{4c2}$

$=\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4c^2}$

設　$a+b+c=2s$

則 $a+c-b=2(s-b)$

$b+a-c=2(s-c)$

而 $b-a+c=2(s-a)$

故 $h^2=\dfrac{2s\times(s-a)\times2(s-b)\times2(s-c)}{4c^2}$

$=\dfrac{4s\times(s-a)\times(s-b)\ (s-c)}{c^2}$

將兩邊各自開方

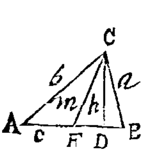
$h = \dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

若 h'爲a邊之中垂線而h"爲b邊之中垂線

則 $h'=\dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

而 $h''=\dfrac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例題313.試依三角形之三邊計算其中線



$a^2+b^2=2m^2+2\left(\dfrac{c}{2}\right)^2$ §377.

而 $4m^2=2(a^2+b^2)-c^2$

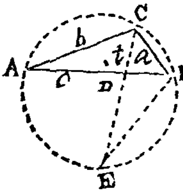
∴ $m=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

若 m'爲a之中分線兩m"爲b之中分線

則 $m=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

而 $m''=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

例題314.試依三角形之三邊計算其分角線



$t^2 = ab - AD \times BD$ §383.

$\frac{AD}{b} = \frac{BD}{a} = \frac{AD+BD}{a+b} = \frac{c}{a+b}$

§348.

$AD = \frac{bc}{a+b}$

而 $BD = \frac{ac}{a+b}$

而 $t^2 2ab = \frac{abc^2}{(a+b)^2}$

$= ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = \frac{ab\{(a+b)^2 - c^2 3}{(a+b^{\ 2}}$

$= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2} = \frac{ab \times 2s \times 2(s-c)}{(a+b)^2}$

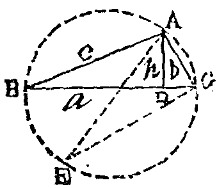
$\therefore\ t' = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$

若 t'為a之平分線而t'為b之平分線

則 $t' = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$

而 $t'' = \frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}$

例題315.試依三角形之三邊計算其外切圓之半徑



依§384 $AC \times AB = AE \times AD$

則 $bc = 2R \times AD$

但 $AD \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例題312.

$$\therefore\quad R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

例題316.設三角形之三邊爲3,4,5,則5之對角爲直角歟鐵角歟抑鈍角歟

因　　$3^2+4^2=5^2$　　§371.

故　　知對5之角爲直角

例題317.設三角形之三邊爲7,9,12,則12之對角爲直角歟銳角歟抑鈍角歟

因　　$12^2>7^2+9^2$　　§376.

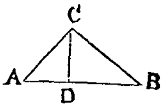
故　　知對12之角爲鈍角

例題318.設三角形之三邊爲7,9,11,則11之對角爲直角歟銳角歟抑銳角歟

因　　$11^2<7^2+9^2$

故　　知對11之角爲銳角　　§375.

例題319.一直角三角形之兩腰爲8吋及12吋求其在弦上之射影及由至角頂至弦之距離



在　　△ABC內AC=8而BC=12求AD,DB及DC

$$AB=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=14.422$$

§371.

$$AB : AC = AC : AD \qquad \S 367$$

$$14.422 : 8 = 8 : AD$$

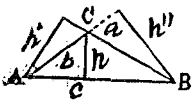
$$AD = 4.433$$

$$DB = AB - AD = 9.984$$

$$DC = \sqrt{AD \times DB} = \sqrt{4.438 \times 9.984}$$

$$= 6.656 \qquad \S 367.$$

例題320.設三角形之三邊爲6吋9吋及12吋(1)求其高(2)求其中線(3)求其分角線(4)求其外切圓之半徑



在 $\triangle ABC$內 $a=9$ $b=6$ $c=12$

(1) 設h,h'h"各爲a,b,c之高線求h,h',及h"之長度

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{s\ s-a)(s-b)(s-c)}$$

例題313.

$$= \frac{2}{12}\sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-9\right)\left(\frac{27}{2}-6\right)\left(\frac{27}{2}-12\right)}$$

$$= 4.357$$

$$h' = \frac{z}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-9\right)\left(\frac{27}{2}-6\right)\left(\frac{27}{2}-12\right)}$$

$$= 5.800$$

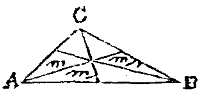
$$g'' = \frac{2}{h}\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}$$

$$=\frac{2}{6}\sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-9\right)\left(\frac{27}{2}-6\right)\left(\frac{27}{2}-12\right)}$$

$=8.714$

(2) 定m,m',m"為a,b,c之中分線

求 m,m'及m"之長度



$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\times(9^2+6^2)-12^2}$$

$=4.743$

$$m'=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+C^2)-a^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{2(6^2+12^2)-9^2}$$

$=8.351$

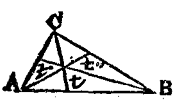
$$m''=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(9^2+12^2)-6^2}=10.173$$

(3) 定t,t't"為∠A,B,C之平分線求tt'及t"之長度

$$t=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$ 例題314.

$$=\frac{2}{9+6}\sqrt{9\times6\times\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-12\right)}=4.409$$



$$t'=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$$

$$=\frac{2}{6+12}\sqrt{6\times12\times\left(\frac{27}{2}-9\right)}$$

$=7.959$

$$t''=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}$$

$$=\frac{2}{9+12}\sqrt{9\times12\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-6\right)}=9.950$$

(4)　定n爲圓之諸半徑

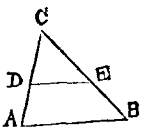
$$n=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{9\times6\times12}{4\sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-9\right)\left(\frac{27}{2}-6\right)\left(\frac{27}{2}-12\right)}}=6.196$$

例題321.設作一線與三角形ABC之一邊AB平行截AC於D截BC於E.

AB＝20寸求DE

AD：DB＝2：3



按　合理AD＋DC：DC＝2＋3：3　§332.

或　AC：DC＝5：3

AC：DC＝AB：DE　§351.

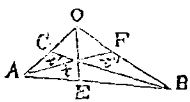
AB：DE＝5：3

或20：DE＝5：3

∴　DE＝12寸

例題322.設三角形之三邊爲9,12,15求其三分角線所作三

邊上諸線分



在　△ABC內定t,t'、t''為∠C,A,B名之平分線

今　AB=15 BC=12，AB=9

求　AE,EB,BF,FC,CG及GA

$AE : EB = AC : BC = 9 : 12$　　§348.

$\therefore AE = \frac{9}{21} \times 15 = 6\frac{3}{7}$

$EB = \frac{12}{21} \times 15 = 8\frac{4}{7}$

依同理$BF = \frac{15}{24} \times 12 = 7\frac{1}{2}$

$FC = \frac{9}{24} \times 12 = 4\frac{1}{2}$

$CG = \frac{12}{27} \times 9 = 4$

$GA = \frac{15}{27} \times 9 = 5$

例題323.一樹影長90呎同时有高6呎之竿其影長4呎求樹高幾何

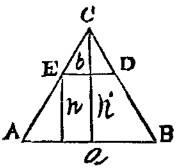
設　x =樹之高

則　$4 : 90 = 6 : x$

$\therefore$　$x = 135$ 呎

例題324.設梯形之下底為a上底為b其高為h今引長其兩腰

至相遇求所成兩三角形之高



設　ABC 爲引長梯形二邊所成之△

h,h'爲ABDE梯形及△ABC之高線而a及b爲梯形之二底

求　以h,a,b表示△ABC及BDC之高線△EDC之高線爲h'—h

因　AB // ED

$h'-h : h' = b : a$　§361.

∴　$ah'-ah=bh'$　§327.

∴　$h'=\frac{ah}{a+b}$

∴　$h : h=\frac{ah}{a-b}-h=\frac{bh}{a-b}$

例題325. 設三角形之三邊爲6,7,8其相似三角形與8相當之一邊爲40求其他兩邊

設　x =與6相當之邊

y =與7相當之邊

$6 : 8 = x : 40$　∴　$x = 30$

$7 : 8 = y : 40$　而　$y = 35$

例題326. 設兩相似多邊形之周略爲200呎及300呎第一形之一邊爲24呎求第二形之相當邊.

設　11＝第二形之一邊相當于第一形之24呎之邊

$200:300=24:x$　　$\frac{1}{2}$ 364.

$\therefore\ x=36$呎

例題327.一窗高24呎今置一梯其下底距牆邊10呎問梯長幾何始能及窗

設　x＝梯之長

$\therefore\ x=\sqrt{24^2+10^2}$

§371.

$=\sqrt{576+100}=26$

例題328.設等邊三角形之邊爲a求其高，設x＝高線之長度

$\therefore\ x=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$　　§372.

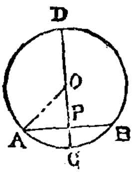
$=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

例題329.設等邊三角形之高爲h求其邊設a爲二等邊三角形之邊

$a^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=h^2$　　§372.

$a^2=\frac{4h^2}{3}$　　$\therefore a=\frac{2h}{3}\sqrt{3}$

例題330.設一圓之半徑爲十吋過距圓心6吋之一點作最長弦及最短弦求此二弦之長



設　P爲一已知點 CD 爲圓之直徑而通過

P,AB弦過P而⊥AB作AO

CD爲長弦且等於20吋　§252.

而AB爲短弦　例題109.

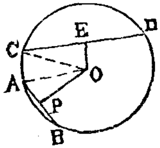
$$AP=\sqrt{AO^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

§372.

$$AP=\frac{1}{2}AB$$ §245.

∴　AB＝2×8＝16吋

例題331. 設長10呎之弦與圓心之距離爲12呎求長24呎之弦與圓心之距離



設　AB爲10呎,CD 爲24呎,OP 爲12呎

且OP⊥AB

求　⊥CD,OE之長度

作　OA及OC

$$OA=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$$

＝OC　§371

$$OE=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{\overline{13}^2-12^2}=5$$

∴　OE＝5呎　§372

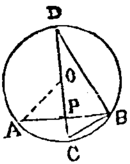
例題332. 設一圓之半徑爲5吋過距圓心3吋之點作一直徑及

垂直於此直徑之弦

求　此弦之長及自弦之一端至直徑之一端之遠

設　作AB弦⊥直徑CD，且與圓心相距爲3吋

求　AB，BD，及BC之長度



作　OA

$AP=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}=4$ §372.

∴ $AB=2\times AP=8$吋

$BD=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{PD}^2}=\sqrt{4^2+8^2}=8.944$

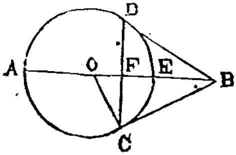
§371.

$BC=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{PC}^2}=\sqrt{=4^2+2^2}=4.472$

§371.

∴ $BD=8.944$寸而$BC=4.472$吋

例題333.設一圓之半徑爲6吋由距圓心10吋之一點作兩切線，求此兩切線之長及聯兩切點之弦之長.



設　AB爲通過圓心之割線BD爲切線，DC爲連D及C之弦，

求　BC，BD，DC之長度

今　$AB=16$ $BE=4$ $OB=10$

$\overline{BC}^2=AB\times EB=16\times4=64$ §381.

∴ $BC=8$寸$=BD$ §261.

$OF : FB = \overline{OC}^2 : \overline{BC}^2 = 36 : 64$

§368.

$\therefore FB = \frac{64}{100} \times 10$吋$= 6.4$吋

$CF = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{FB}^2} = \sqrt{8^2 - 6.4^2} =$

4.8吋 §372、

$\therefore\ DC = 2 \times CF = 9.6$吋 §245.

例題334. 設三角形之三邊為407呎,368呎及351呎,求其三分角線及其三頂垂線

設 在△ABC內 $a=407$ $b=368$ $c=35$

(1) 設t,t',t"為∠C,A,B之平分線求t,t't"之長度

$t = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$ 例題314.

$= \frac{2}{407+368}\sqrt{407 \times 368 \times 563 \times 212}$

$= 345.5$

$t' = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$

$= \frac{2}{368+351}\sqrt{368 \times 351 \times 563 \times 156}$

$= 396.3$

$t'' = \frac{2}{4+c}\sqrt{acs(s-b)}$

$= \frac{2}{407+351}\sqrt{407 \times 351 \times 563 \times 195}$

$=330.4$

故　三平分線爲345.5呎296.3呎330.4呎

（2）設h, h', h''爲c, a, b各邊之高線求h及$h' h''$之長度

$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{例題312.}$$

$$=\frac{2}{351}\sqrt{563\times156\times195\times212}$$

$$=343.3$$

$$h'=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{2}{407}\sqrt{563\times156\times195\times212}$$

$$=296.1$$

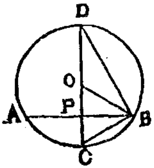
$$h''=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{2}{368}\sqrt{563\times156\times195\times212}$$

$$=327.5$$

故　三高線爲343.3呎296.1呎327.5呎

例題335' 設長8吋之弦與圓心之距離爲3呎求此圓之半徑及由此弦之一端至平分此弦之直徑之兩端所作之二弦.



設　AB爲8吋長之弦距圓心爲3吋而CD爲圓之直徑且平分AB

求　OB,BD,BC之長

$OB=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{PB}^2}$　§371.

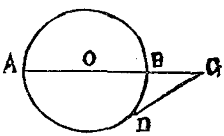
$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$BD=\sqrt{\overline{DP}^2+\overline{PB}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=8.944$

$BC=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=4.472$

故　OB＝5吋BD＝8.944吋BC＝4.472吋

例題336.設由長20吋之切線之端作一割線過圓心此割線之圓外線分爲8吋求此圓之半徑



設　CD＝20吋　CB＝8吋

求　OB之長度

$AC:CD=CD:CB$

§381.

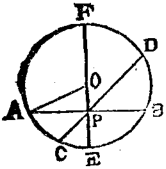
$AC:20=20:8$

$\therefore\ AC=50$

$AB=AC-CB=42$

$OB=\frac{1}{2}AB=21$吋

例題337.設一圓之半徑爲13吋過距圓心5吋之一點作一弦求此弦之兩線分之積及能過此點之最短弦



設　FE為直徑AB為弦

而　⊥FE,CPD為他一弦

今　OP=5吋OA=B吋

求　CP×PD之值及AB之長度

EP=8而PF=18

∴　CP×PD=8×18=144　　§378.

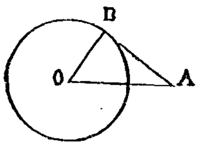
AB為短弦而通過P　　例題109.

AP×PB=144　但AP=PB

∴　$\overline{AP}^2=144$　∴　AP=12

∴　AB=24吋

例題338.設一圓之半徑為 9吋由長12吋之切線之端至圓心作一線求此線之長



AB=12吋

OB=9吋

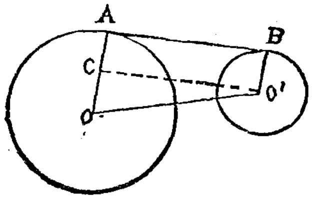
求　AO之長

$AO=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{OB}^2}$

§371.

$=\sqrt{12^2+9^2}=15$　∴　AO=15吋

例題339.設兩圓之半徑為8吋及3吋其兩心之距離為15吋求其公切線之長



情節　Ⅰ設AB為外公切線求AB之長

作　O'C∥BA

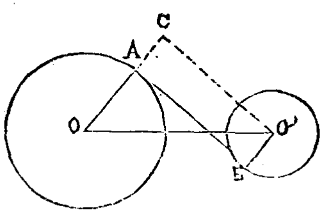
OO"=15

$\therefore$　$O'C=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{CC}^2}=\sqrt{\overline{15}^2-5^2}$

$=14.142$　§372.

$\therefore$　AB=O'<=14.142吋

情節　Ⅱ設AB為內公切線求AB之長



作　OC令等于OA+O'B作O'COO'=15

$O'C=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{OC}^2}$

§372.

$=\sqrt{\overline{15}^2-12}=10.198$呎

AB=O'C=10.198呎

例題340.設長10吋之線分成外內比求其兩線分之長

設　x=大線分

則　$10-x$=小線分

$\therefore$　$10:x=x:10-x$

遷項　$x^2=100-10x$ 則 $x^2+10x=100$

配方　$x^2+10x+25=125$

開方　$x+5=\pm\sqrt{125}$

$\therefore\quad x=6.18$吋

$\therefore\quad 10-x=3.82$吋

故　所求之比爲6.18吋及3.82吋

例題341.設三角形之三邊爲4,5,5,則其最大角爲銳角歟直角歟,抑鈍角歟.

設　△爲等腰然其最大之角爲等邊所對之角

故　知其最大角爲銳角

例題342.有二線一長28呎，一長42呎求此二線之第三比例項.

設　$x=$第三率三之呎數

$28:42=42:x\quad 2:3=42:x$

$\therefore\quad 2x=126\qquad\therefore\quad x=63$呎

例題343.設三角形之三邊a.b.c求其三頂垂線

$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例題312.

$$=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

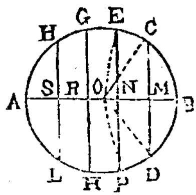
$$=\frac{2(s-b)}{b}\sqrt{s(s-a)}$$

$$h''=h=\frac{2\ (s-b)}{b}\sqrt{s(s-a)}$$

$$h'=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{2\ (s-b)}{a}\sqrt{s(s-a)}$$

例題344.設一圓之直徑,爲30呎,分此直徑爲五等分,過諸分點作垂直於此直徑之弦求此諸弦之長.



設　直徑AB被分五等分於S,R,n,m,各分點

EF,CD,RL,GH,四弦通過各分點而⊥AB求各弦之長

今　$OS=Om=9$

$OR=ON=3$

作　半徑OC,OD,OE,OF

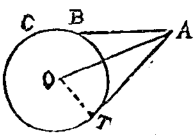
$mD=\sqrt{15^2-9^2}=\sqrt{144}=12$ §372.

$nF=\sqrt{15^2-3^2}=\sqrt{216}=14.6$

但　$CD=KL=2uD=2\times12=24$呎

而　$EF=GH=2WF=2\times14.7=29.4$尺

例題345.設一圓之半徑爲2吋由距圓心4吋之一點作一割線此割線之內線分爲一吋求此割線之長



設 O爲圓心A爲距圓心四吋之一點自A作ABC割線而BC之長爲一吋求AC之長

自 A作切線AT並線OT

則 $OT \perp AT$ §254.

$\therefore \quad AT=\sqrt{AO^2-OT^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$

§372.

但 $AB : AT=AT : AC$

§381.

而 $AC=AB+1$

$\therefore \quad AB : \sqrt{12}=\sqrt{12} : AB+1$

$\overline{AB}^2+AB=12$

$4\overline{AB}^2+4AB+1=49$

$\therefore \quad 2AB+1=7$ 即$2AB=6$

$\therefore \quad AB=3$吋

$\therefore \quad AC=AB+1=4$吋

例題346. 設三角形之三邊爲1551碼，2068碼2585碼求其最長邊之中線

在ABC△內 $a=1551$ $h=2068$ 而$C=2585$

因 $1551^2+2068^2=2585^2$ 故△ABC爲rtA因

知其所求之中線卽為其最長弦之半

例題21.

卽　$\frac{1}{2}\times 2585=1292\frac{1}{2}$碼

例題347.設形之對角線為d其周界為P,求其邊

設　x為矩形之長而$\frac{P}{2}-x$為矩形之寬

$\therefore\quad d2=x^2+\left(\frac{P}{2}-x\right)^2$　　§372.

卽　$d^2=x^2+\frac{P^2}{4}-Px+x^2\quad 2x^2-Px=$

$d^2-\frac{P^2}{4}$　　§372.

$16x^2-8Px+P^2=8d^2-P^2$

$4x-P=\pm\sqrt{8d^2-P^2}$

$4x=h\pm\sqrt{8d^2-h^2}$

$x=\frac{1}{4}\left(h\pm\sqrt{8d^2-h^2}\right.$

$\frac{h}{2}-x=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{8d^2-h^2}$

例題348.設一圓之半徑為r一弦與圓心之距離為$\frac{1}{2}$r求此弦之長

設　r=弦長之半

則　$x^2=r^2-\left(\frac{1}{2}r\right)^2=\frac{3}{4}r^2$　　§372.

$\therefore \quad x=\frac{r}{2}\sqrt{3}$

$\therefore \quad 2x=r\sqrt{3}$

例題349.一長方田長72碼廣49碼又有一草地長18吋廣14吋求此二者之面積之比

$18吋=\frac{1}{2}碼,14吋=\frac{7}{18}碼$

故　草地面積：草塊面積$=72\times 49:\frac{1}{2}\times\frac{7}{18}$

§391.

$=18144:1$

例題350.一長方庭長 $18\frac{1}{2}$ 碼廣$15\frac{1}{2}$ 碼又有一石塊長31吋廣18吋求此二者之面積之比

$31吋=\frac{31}{36}碼\quad 18吋=\frac{1}{2}碼$

$\therefore$ 方庭面積：石塊面積$=18\frac{1}{2}\times 15\frac{1}{2}$

$:\frac{31}{36}1\times\frac{1}{2}\quad =666:1$　§397.

例題351.一正方形及一矩形之周略皆爲 100 碼而矩形之長爲其廣之四倍求此兩形之面積之比

設　x =矩形之寬

則　$4x$ =矩形長

而　$10x$ =矩形之周略

但　100＝矩形之周畧

$\therefore$　$10x=100$

$\therefore$　$x=10$

$4x=40$

正方形之邊＝100之$\frac{1}{4}$＝25

故　矩形面積：正方形面積＝40×10：25×25

＝16：25　　§391.

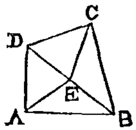
例題352.一地圖上線覘一吋當五英里則此圖上一正方形其週畧爲一吋長含幾英畝

地圖上正方形之一邊爲$\frac{1}{4}$吋代表$\frac{5}{4}$哩

面積＝$\left(\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\right)$平方哩＝$\frac{25}{16}$平方哩

$\frac{25}{16}$平分哩＝$\frac{25}{16}\times 640$英畝＝100英畝

例題353.由四邊形之任一對角線之中點作兩線至兩對頂必分此四邊形爲兩等積分



在四邊形ABCD內

設　E爲對角線BD之中點而作AE及CE

求　證四邊形ABCD≎四邊形ABCE

證　△ABE≎△AED

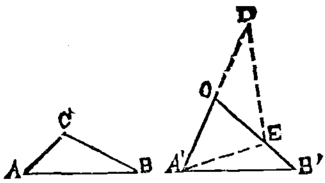
而　△BEC≎△CED　　§404.

∴ $\triangle ABE+\triangle BEC \doteqdot \triangle AED+\triangle CED$

公理2

即四邊形ABCD⇔四邊形ABCE Q,E,D,

例題354.設兩三角形有一角彼此相補則此兩形之面積之比等于夾此角之兩邊之積之比



設 ∆ABC及A'B'C'有∠ACB及A'C'B彼此相補

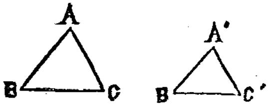
求證 $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = CA\times CB : C'A'\times C'B'$

證 置△ABC于C'DE之地位上因之△ABC與A'C'B'相鄰作A'B,A'C'D §90.

今 $\dfrac{\triangle CDE}{\triangle A'C'E}=\dfrac{C'D}{C'A'}=\dfrac{C'D\times C'E}{C'A'\times C'B'}$

代入 $\triangle ABC:\triangle A'B'C'=CA\times CB:C'A'\times C'B'$

例題355.依§410證此命題



設 ACB及A'C'B'爲相似∆

求證 $\dfrac{\triangle ACB}{\triangle A'C'B'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$

證　今 $\angle A=\angle A'$　§351.

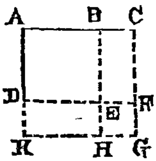
$$\therefore\frac{\triangle ACB}{\triangle A'C'B'}=\frac{AB'\times AC}{A'B\times A'C}=\frac{AB}{A'B}\times\frac{AC}{A'C'}$$

§410.

但　$\frac{AC}{A'C}=\frac{AB}{A'B'}$

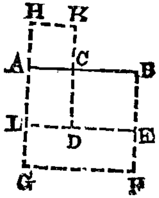
$$\therefore\frac{\triangle ACB}{\triangle A'C'B'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AB}{A'B'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2}$$

例題356. 兩直線和上正方形與此兩線上正方形之和加此兩線所作矩形之二倍等積.



設　AB及BC爲直線其和爲AC於AC上作正方形ACGK於AB上作正方形ABED引長BE及DE至遇KG及CG則得正方形EFGH其邊等於BC故正方形ACGK爲正方形ABED及EFGH及長廣等於AB及BC之兩矩形DEHK及BCFE之和

例題357. 兩直線差上正方形與此線上正方形減此兩線所作矩形之二倍爲等積

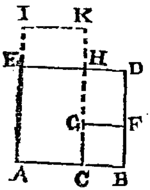


設　AB及AC爲兩直線其差爲BC上作正方形ABFG於AC上作正方形ACKH於BC上作正方形BEDC，引長ED遇AG於L

則兩矩形LEFG及HKDL之長廣

爲AB及AC而正方形BCDE明明爲全圖形及此兩矩形之差，即BC上正方形與AB及AC上兩正方形之和減AB及AC所作矩形之二倍爲積

例題358. 兩直線正方形之差，與此兩線之和及差所作之矩形爲等積

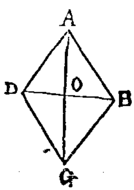


設　ABDE及BCGF爲兩直線AB及BC上正方形其差爲兩差形ACHE及GFDH所成之多邊形ACGFDE引長AE至ICH至K使EI及HK各等於BC作IK則兩矩形GFDH及EHKI相等而兩正方形ABDE及BCGF之差與長廣等於AB+BC(即AI)及AB—BC(即EH)之矩形爲等積

例題359. 菱形之面積等於其兩對角線相乘之積之半

設　ABCD爲菱形而對角線AC BD且相交於O

求證　ABCD面積$=\frac{1}{2}(AC\times BD)$



證　$BD\perp AC$　例題71.

今　$\triangle ABC$面積$=\frac{1}{2}BO\times AC$

§403.

而　$\triangle ADC$面積$=\frac{1}{2}DO\times AC$

即　$\triangle ABC+\triangle ADC=\frac{1}{2}BO\times AC+\frac{1}{2}DO\times AC$　公理2

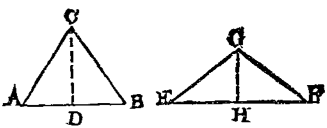
$=\frac{1}{2}AC(BO+DO$

$=\frac{1}{2}AC\times BD$

即　菱形ABCD面積$=\frac{1}{2}AC\times BD$

Q,E,D,

例題360.設兩等腰三角形之腰彼此相等而此形之高等於彼形之底之半則此兩形爲等積



設　於等腰△ABC及EFG中設腰AC及BC等于EG及FG而設GH爲△EFG之中垂線等於$\frac{1}{2}AB$

求證　$\triangle ABC \doteqdot \triangle EFG$

證　作$CD\perp AB$

$AD=\frac{1}{2}AB$　§149.

rt　ADC與GHE相等　§151.

因　△AC=EG及GH=AD　題設

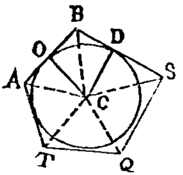
依同理$\triangle BDC=\triangle GHF$

$\therefore\ \triangle ADC+\triangle BDC \doteqdot \triangle GHF+\triangle GHF$

公理2

則 $\triangle ABC \doteqdot \triangle EFG$ Q,E,D,

例題361.外切多邊形之面積，等於其周界及內切圓之半徑相乘之積之半



設 P表示圓外切多邊形ABSQT之周界而OC爲內切圓之半徑

求證 $ABSQI=\frac{1}{2}(P\times OC)$

證 作CA,CB,SC,CQ,及CT△ACB面積$=\frac{1}{2}(AB\times OC)$

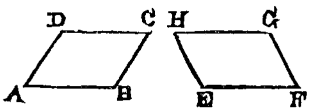
§403.

依同理各△之面積等於其底邊乘OC之積之半

故 多邊之面積,等於各三角形面積之和，

即 $\frac{1}{2}(P\times OC)$

例題362.設兩平行四邊形有兩隣邊彼此各相等其夾角相補則必兩形必等.



設 ABCD 及 EFGH 爲▱,AB,AD各等於EFEH,而∠A，∠E成補角

求證 ▱ABCD=▱EFGH

證 $\angle F+\angle E=2rt\angle s$ §115.

但 $\angle A+\angle E=2rt\angle s$ 題設

$\therefore \angle F=\angle A$ §85.

且 $FG=EH$ §178.

$EH=AD$ 題設

$\therefore FG=AD$ 公理1

$\therefore \square ABCD=\square EFGH$ Q,E,D,

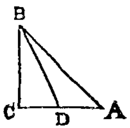
例題363.設ABC爲直角三角形C爲其直角頂作BD截AC於D

設 在rt△ABC內 設作BD截AC於D

求證 $\overline{BD}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2$

證 $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2$ §371.

而 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$ §372.



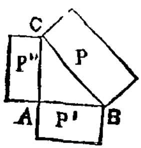
$\therefore \overline{BD}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2$

公理2

Q,E,D,

例題以直形三直形之三邊爲相當邊作三相似多邊試證其弦

上多邊形與其兩腰上多邊之和爲等積



設 ABC爲rt△ ∠A爲rt∠,而設 P,P',P"爲在 BC,AB,AC 相當邊上所作之三多邊形

求證 P≎P'+P"

設　$\dfrac{P'}{P}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$　§412.

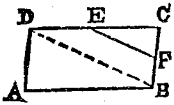
而　$\dfrac{P''}{P}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$　§412.

$\dfrac{P'+P''}{P}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$　公理2.

但　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$　§371.

$P \Bumpeq P'+P''$　Q,E,D,

例題365.設聯平行四邊行之兩隣邊之中點則成一三角形與此四邊形之八分之一爲等積



設　ABCD爲$\square$EF爲連兩隣邊CD,BC中點之直線

求證　$\triangle EFC \Bumpeq \dfrac{1}{8}\square ABCD$

證　作BD對角線

$=EC\times FC : DC\times BC$　§410.

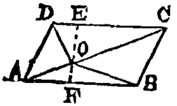
但　$EC=\dfrac{1}{2}DC$ 而 $BF=\dfrac{1}{2}BC$　題設

$\therefore\ \triangle EFC \Bumpeq \dfrac{1}{4}\triangle DBC$

但　$\triangle DBC \Bumpeq \dfrac{1}{2}\square ABCD$　§179.

$\therefore$　$\triangle EFC \Bumpeq \dfrac{1}{8}\square ABCD$　Q,E,D,

例題366．設聯平行四邊形內任一點于其各頂則凡有平行底之兩三角形之和與此四邊形之半爲等積



設　O爲▱ABCD內任一點設作OA,OB,OC及OD

求證　$\triangle AOB+\triangle DOC \Leftrightarrow \frac{1}{2}$▱ABCD

證　過O作$EF \perp AB$

$\triangle$　AOB 面積$=\frac{1}{2}(AB \times OF)$

而　$\triangle DOC$面積$=\frac{1}{2}(DC \times OF$　　§403.

加　此等以AB代其相等之DC　　§178.

則　$\triangle AOB$面積$+\triangle DOC$面積$=\frac{1}{2}$　$AB \times EF)$

但　▱ABCD面積$=AB \times EF$　　§400.

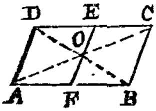
$\therefore$　$\triangle AOB+\triangle DOC \Leftrightarrow \frac{1}{2}$▱ABCD

依同理　$\triangle AOD+\triangle BOC \Leftrightarrow \frac{1}{2}$▱ABCD

例題367．凡過平行四邊形之兩對角線之交點所作之線必分此形兩等積分

設　ABCD爲已知▱O 爲對角綫之交點作任一EF通過O.

求證 EF平分▱ABCD爲二等分.



證 △AOF及COE相等 §139.

因 AO=CO §184.

∠OAF=∠OCE §110.

而 ∠AOF=∠COE § 93.

依同理 △FOB=△EOD

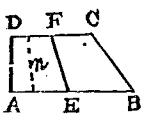
而 △AOD=△COB

∴ AFED四邊形≎FBCE四邊形

(因以相等△組成且位置相似)

Q,E,D,

例題368.聯梯形之兩底之中點之線,必分此形爲兩等積分.



設 ABCD爲梯形,而EF爲連其兩底邊AB,CD中點之直線

求證 AEFD≎EBCF

證 作h爲ABCD梯形高

AEFD 面積 $=\frac{1}{2}h(AE+DF)$

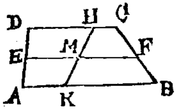
EBCF 面積 $=\frac{1}{2}h(EB+FC)$ §407.

但 AE+DF=BE+FC 題設

∴ 梯形AEFD≎梯形EBCF

Q,E,D,

例題369. 凡過梯形之中線之中點截其兩底所作之線必分此形爲兩等積分.



設　EF爲ABCD梯形之中分線而m爲其中點設作HK通過m而交DC AB於H及K

求證　AKHD梯形≎KBGH梯形.

證　命h爲ABCD梯形之高.

mH＝mK　§187.

AKHD梯形面積＝Em×h　§408.

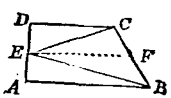
而　KBCH梯形面積＝mF×h

但　Em＝mF　題設

∴　AKHD梯形≎KBCH梯形　公理1.

Q,E,D,

例題370. 設由梯形之各腰之中點,至兩對頂作兩直線,則所成之三角形與此四邊形之半爲等積.



設　ABCD爲梯形已知AB平行DC, EC及EB爲自AD之中點E至兩對角頂所作之直線

求證　△ECB ≎ $\frac{1}{2}$ABCD梯形

證　命2h爲梯形之高

今 $\triangle EFB$面積$=\frac{1}{2}h\times EF$ §403.

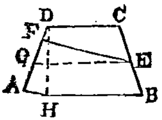
而 $\triangle EFC$面積$=\frac{1}{2}h\times EF$

$\therefore$ $\triangle ECB$面積$=h\times EF$

但 ABCD梯形面積$=2h\times EF$ §408.

$\therefore$ $\triangle ECB=\frac{1}{2}$ ABCD梯形 Q,E,D,

例題371.梯形之面積等于其一腰及由此腰至他腰之中點之距離相乘之積



在 梯形ABCD中設EF爲自BC之中點至對邊所作之垂線

求證 ABCD梯形面積$=AD\times EF$

證 作EG中線及DH高

rt$\triangle$ADH及GEF相似

因 $\angle EGF=\angle A$ §112.

$\therefore$ $AD:EG=DH:EF$ §351.

$\therefore$ $AD\times EF=EG\times DH$ §328.

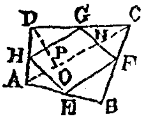
但 ABCD梯形面積$=EG\times DH$ §408.

$\therefore$ ABCD梯形面積$=AD\times EF$ 公理1.

Q,E,D,

例題372.以任何四邊形之四邊之中點爲角頂所作之四邊形

與原形之半爲等積



在　四邊形ABCD內設EF, FG, GH, HE,爲聯接AB, BC,CD, DA諸邊中點之直線

求證　EFGH $\doteqdot \frac{1}{2}$ABCD四邊形

證　作AC對角線作DO⊥ACHG及EF // AC且等于$\frac{1}{2}$AC　§189.

依同理　GF // HE

∴　HN爲▱　§166.

▱HN面積＝HG×PO　§400.

△ADC 面積＝$\frac{1}{2}$(AC×DO)　§403.

但　HG ＝$\frac{1}{2}$AC而PO ＝$\frac{1}{2}$DO

∴　▱HN$\doteqdot\frac{1}{2}$△ADC

依同理▱EN$\doteqdot\frac{1}{2}$△ABC

∴　▱HN ＋ ▱EN＝$\frac{1}{2}$(△ADC ＋ △ABC　公理2

EFGH$\doteqdot\frac{1}{2}$ABCD四邊形　Q,E,D,

例題373. 設矩形之周界爲72呎其長等于其廣之二倍求此形之面積

設 $x=$寬

則 $2x=$長

而 $6x=$周界

但 $72=$周界

$\therefore\ 6x=72$

$x=12$

$2x=24$

故 面積$=12\times24=288$方呎

例題374.一走道寬八呎圍繞一長方庭此庭長120呎寬36呎今此走道欲以長9吋寬4吋之磚鋪之問需磚幾何

路之長邊之面積$=\{(120+8+8)\times8\}$方呎$=$

$=1088$方呎

路之闊邊之面積$=(36\times8)$方呎$=288$方呎

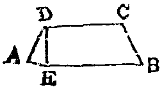
路之面積$=2\times(1088+288)$方呎$=2752$方呎

但 9吋$=\frac{3}{4}$呎 4吋$=\frac{1}{4}$呎

磚 之面積$=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)$方呎$=\frac{1}{4}$方呎

故所要之磚須$2752\div\frac{1}{4}=11008$塊

例題375.設梯形之兩底爲16呎及10呎其各腰爲5呎求此形之面積



設　ABCD爲梯形

而　DE爲其高

$AB=16\quad CD=10$

$AD=5=BC$

$\therefore\quad AD=BC$

$AE=\frac{1}{2}(AB-CD)=\frac{1}{2}(16-10)$

$=3$

$\therefore\quad DE=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

§372.

□ABCD面積$=DE\times\frac{1}{2}(AB+CD)$

§407.

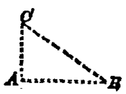
$=4\times\frac{1}{2}(16+10)$

$=52$方呎

例題376.有兩正方形其邊爲3吋及4吋

求　作一正方形與此兩正方形之差爲等積

作　rt∠A取AB等于4AC等於3作BC

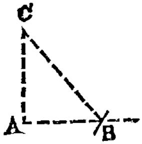


則BC即爲所求之一邊

$BC=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$　§371.

例題377.有兩正方形其邊 $2\frac{1}{2}$ 时及2时

求　　作一正方形與此兩正方形之差爲等積



作　　rt∠A取AC=2以C爲圓心$2\frac{1}{2}$爲半徑作弧截AB于B作BC

AB爲所求之邊　　§418.

∴　$AB=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}$　　§372.

$=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(2)^3}=1\frac{1}{2}$

例題378.有兩正方形其邊爲24呎及40呎復有一正方形與其和爲等積求此正方形之邊

設　　x=所求正方形之邊

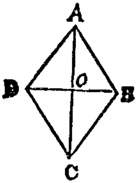
$x=\sqrt{\overline{24}^2+32^2}=40$呎　　§417.

例題379.有兩正方形其邊爲24呎及40呎復有一正方形與其差爲等積求此正方形之邊

設　　x=所求正方形之邊

$x=\sqrt{40^2-24^2}=32$呎　　§418.

例題380.一菱形含100平方" 其一對角線之長爲10" 求他對角線之長



設　ABCD菱形含100平方呎而設BD對角線爲10呎

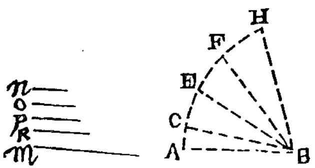
ABCD斜方形面積$=\frac{1}{2}(AC\times BD)$

例題359.

代入,即100方尺$=\frac{1}{2}(AC\times 10)$

$\therefore$　AC=20呎

例題381.求作一正方形與若干已知正方形之和爲等積



設　m,n,o,p,r,爲諸正方之邊求作一正方形與$m^2+n^2+o^2+P^2+r^2$等值.

作圖　作AB等於m.

作　AC等於N.而⊥AB於A,作BC.

作　CE等於O.而⊥BC於C,作BC

作　EF等於P.而⊥BE於E作BF,

作　FH等於r.而⊥BF於F作BH

於　BH上作一正方形,即爲所求之正方形矣

證　$\overline{BH}^2 \Leftrightarrow \overline{FH}^2+\overline{BF}^2$

$\Leftrightarrow \overline{FH}^2+\overline{EF}^2+\overline{EB}^2$

$\Leftrightarrow \overline{FH}^2+\overline{EF}^2+\overline{CE}^2+\overline{CB}^2$

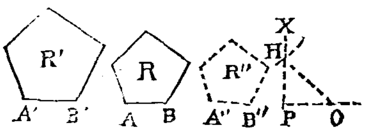
$$\div\overline{FH}^2+\overline{EF}^2+\overline{CE}^2+\overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2$$

則 $\overline{BH}^2=m^2+n^2+o^2+O^2+P^2+rt$

Q,E,F,

例題382求作一多邊形，與兩已知相似多邊形相似且與其差爲等積。



設 R及R'爲兩相似多邊形而AB及A'B'爲二相當邊

求 作一相似多邊形與R'—R等值

作圖 作正∠xPO取PO=AB.

以 O爲心A'B'爲半徑作弧截Px於H,作OH

作 A"B"=PH而令A"B"相當於AB作R"與R相似,

則 R"即爲所求之多邊形

證 $\overline{PH}^2=\overline{OH}^2-\overline{OP}^2$ §416.

$\therefore\ \overline{A'B'}^2=\overline{A'B'}^2-\overline{AB}^2$

今 $\frac{R'}{R''}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{A''B''}^2}$ §412.

而 $\frac{R}{R''}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$

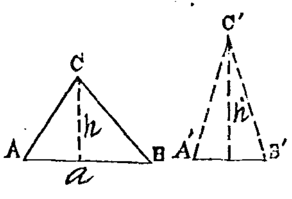
$\therefore\ \frac{R'-R}{R'}=\frac{\overline{A'B'}^2-\overline{AB}^2}{\overline{A''B''}^2}=\frac{\overline{A''B''}^2}{\overline{A''B''}^2}=1$

公理1

$\therefore\ R''\doteqdot R'-R$

例題383.求作一三角形與一已知三角形爲等積而其一邊等於一已知長

設 ABC爲已知△a爲其底邊l爲與長求作以l爲底邊l之三角形令與與△ABC等値



作圖 O作h爲△ABC之高

求 h'爲l a及h'之第四比例項 §386.

于 l底邊上作以h'爲高之△A'B'C'

則 △A'B'C'即爲所求之三角形

證 $l:a=h:h'$ 作圖

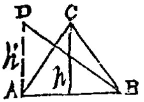
$\therefore\ l:h'=a\times h$ §327.

但 $l\times h'$爲△A'B'C'面積之二倍

而 $a\times h$爲ABC面積之二倍 §403.

∴　△A'B'C'≎△ABC　　　Q,E,F,

例題384.求變一三角形爲一等積直角三角形



設　△ABC爲已知角

求　變△ABC爲等值之rt△

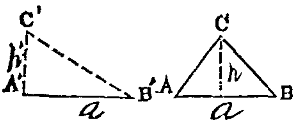
作圖　作h爲△ABC之高于A作AD垂線且等于h作DB

則　△ABD即爲所求之三角形

證　△ABD≎△ABC　　　§404.

Q,E,F,

例題385.求變一已知三角形爲一等積眞角三角形其一腰等于已知長



設　ABC爲已知△而a爲其底邊a'爲已知長

求　變△ADC爲rt△且其一足等于a'

作圖　作h爲△ABC之高求a',a及h之第四比例項h'

但　取A'B'等于a

於　A'作A'C'垂線而等于h'作B'C'

則　△ABC爲所求,

證　$a' : a = h : h'$　作圖

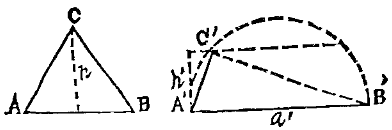
$\therefore\ a' \times h' = a \times h$　§327.

但　$a' \times h$為△A'B'C面積之二倍，

而　$a \times h$為△ABC面積之二倍.

$\therefore$ △A'B'C'≑△ABC　Q,E,F,

例題386,求變一三角形，為一等積直角三角形其弦等於已知長



設　ABC為已知△

a 為底邊，a'

為已知長

求　變△ABC為等值之rt△且其弦線等於a'

作圖　作h為為△ABC之高

求　h'於a'a,及h之第四比例項

以　a'為弦作rt△A'B'C'且令其高為h'

則　A'B'C'即為所求之三角形矣.

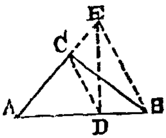
證　此題證法與385同

例題387求變一三角形ABC 為一等積三角形其一邊等於已知長l其一角等於角BAC.

設　ABC為已知△而l為已知長

求　變三角形ABC為等值△令其一邊等於l而

一角等于∠BAC.



作圖　在 AB 上截取AD令與 l 等長作 CD.

作　BE∥DC而遇 AC 之延線於 E 作 DE

則　ADE即爲所求之三角形矣

證　在△ABC及ADE內，有△ADC公用

而　△DBC≎△DCE　§404.

∴　△ABC≎△ADE　公理2

Q,E,F,

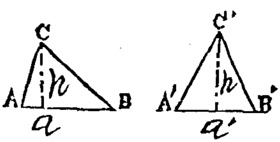
例題388.求變一已知三角形，爲一等積等腰三角形其底等於已知長

設　ABC爲已知三角形，a 爲底邊而 a' 爲已知長.

求　證△ABC爲等值之等腰三角形

且　令其底邊等於a'長

作圖　O作h爲△ABC之高



求　h'爲a', a 及h之第四比例項　§386.

作　A' B' =a' 于其中點作一垂線令等于 h'作A'

C'及D'D'C'

則　△A'B'C'即爲所求之等腰三角形

證　A'C'=B'C'

∴　△A'B'C'爲等腰

以下證法與問題385同　Q,E,F,

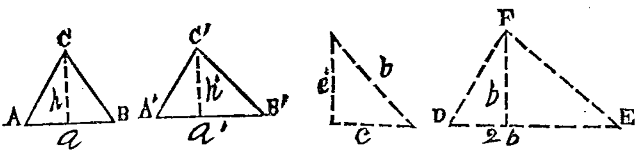
例題389.兩已知三角形之和

設　ABC及A'B'C'爲二已知△而a及a'爲其底邊

求　作一三角形等于△ABC及△A'B'C'之和

作圖　O作h,h'爲△ABC及A'B'C'之高

求　C爲a及$\frac{1}{2}$h之比例中項求C'爲a'及$\frac{1}{2}$h'之此例中項　§388.



求　b使　$b^2=c^2+c'^2$　§417.

作　△DEF且令底邊等于2b而高等于b

△DEF即爲所求之三角形

證　△ABC面積$=\frac{1}{2}(2b\times b)$　§403.

$=b^2=c^2+c'^2$

$=\frac{1}{2}(a\times h)+\frac{1}{2}(a'\times h')$

但 $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}(a\times h)$

$\triangle A'B'C$面積$=\frac{1}{2}(a'\times h')$ §403.

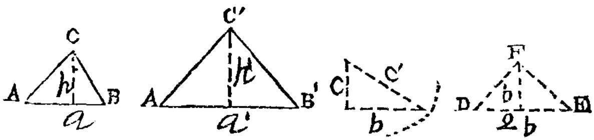
∴ $\triangle DEF \doteq \triangle ABC+\triangle A'B'C'$

Q,E,F,

例題390.兩已知三角形之差

設 ABC及A'B'C' 爲二已知△而a及a' 爲其底邊

求 作一三角形等于△ABC及△A'B'C'之差



作圖 O作h及h'各爲△ABC及A'B'C'之中高

求 a及$\frac{1}{2}$h之中比例中項ca'及$\frac{1}{2}$h'之比例中項C §388.

求 b使 $b^2=C^2-C^2$ §418.

作 △DEF令底邊等于2b高等于b

則 △DEF刞爲所求之三角形

證 $\triangle DEF$面積$=\frac{1}{2}(2b\times b)$ §403.

$=b^2=c^2-c^2$

$=\frac{1}{2}(a'\times h')-\frac{1}{2}(a\times b)$

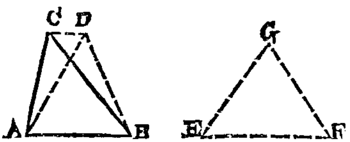
但 $\triangle A'B'C'$面積$=\frac{1}{2}(a'\times h')$ §403.

而 $\triangle ABC$面積$=\frac{1}{2}(a\times h)$ §403.

故 $\triangle DEF \doteqdot \frac{1}{2}A'B'C'-\triangle ABC$

Q,E,F,

例題391.求變一已知三角形爲一等積等邊三角形



圖作 AD令$\angle BAD$等于$\frac{2}{3}$rt$\angle$ 例題137.

作 $CD \parallel AB$.

求 得AD及AB之比例中項EF §388.

于 EF上作EFG等邊三角形 §312.

則 $\triangle EFG$即爲所求之三角形

證 於$\triangle ABD$及EFG中

$\angle BAD=\angle E$ §136.

$\therefore$ $\triangle ABD:\triangle EFG=AD\times AB:EG\times EF$

§410.

但 $EG \times EF = \overline{EF}^2 = AD \times AB$ 題設

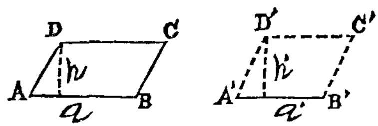
$\therefore$ $\triangle ABD \Leftrightarrow \triangle EFG$ 公理1

而 $\triangle ABD \Leftrightarrow \triangle ABC$ §404.

$\therefore$ $\triangle EFG \Leftrightarrow \triangle ABC$ 公理1.

Q,E,F,

例題392.平行四邊行其一邊等於已知長.



設 ABCD爲已知▱a爲其一邊而a'爲已知長

求變 ▱ABCD 爲等値之一▱且令其一邊等於a'

作圖 作h爲▱ABCD之高

求 h'爲a',a及h之第四比例項 §386.

在 a'底邊上作▱A'B'C'D'且令高爲h',

▱ A'B'C'D'即爲所求之▱

證 $a' : a = h : h'$ 作圖

即 $a' \times h' = a \times h$ §327.

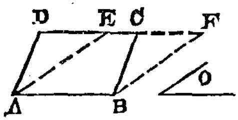
但 ▱A'B'C'D'面積$= a' \times h'$

而 ▱ABCD面積$= a \times h$ §400.

∴▱A'B'C'D'≑▱ABCD　　公理1.

Q,E,F,

例題393.平行四邊形其一角等於已知角.



已知　設ABCD爲已知平行四邊形,O爲已知角

求變　▱ABCD爲等值之▱且其一角等於 O

作圖　作∠BAE等於 O

作　BF∥AE遇DC延線於F

則　▱ABFE即爲所求之▱

證　▱ABFE≑ABCD　　§401.

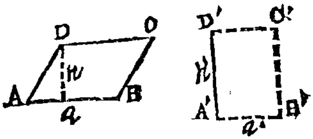
Q,E,F,

例題394.矩形已知其高.

設　ABCD爲已知▱而a爲其底邊 h' 爲已知之高

求　變▱ABCD爲等值之矩形且令其高爲h'

作圖　O作h爲△ABCD之高



求　a'爲h',h及a之第四比例項　　§386.

以　a爲底邊 h,爲高作▱A'B'C'D'

則 $\square A'B'C'D'$爲所求之矩形

證 $k':h=a:a'$ 作圖

$a'\times h'=a\times h$ §327.

$a'\times h'=\square A'B'C'D'$面積 §398.

$a\times h=\square ABCD$面積 §400.

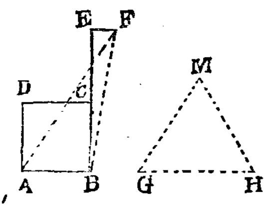
$\therefore$ $\square A'BC'D'$ ⇔ $\square ABCD$ 公理1

Q,E,F,

例題395.等腰三角形

設 ABCD爲已知正方形

求 變ABCD正方形爲等值之等邊



作圖 O引長BC至E使CE等于BC

作 EF // AB

作 AF,令∠BAF等于$\frac{2}{3}$ rt∠ 例題137.

作 BF

作 等邊△GHM與△ABF等值 例題391.

則 △GHM卽爲所求之△

證 △ABF面積$=\frac{1}{2}(AB\times BE)$ §403.

$=\frac{1}{2}(AB\times 2BC)=\overline{AB}^2$

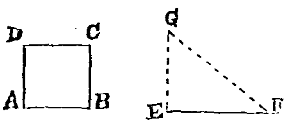
作圖

∴ △ABF≎正方形ABCD

∴ △GHm≎正方形ABCD

Q,E,F.

例題396直角三角形其一腰等於已知長.



設　ABCD爲已知正方形

EF爲已知長.

求變　正方形ABCD爲等值之rt △且令其一腰等於EF

作圖　求EF,2AB及AB之第四比例項EG

§386.

作　rt△EFG且令其二腰等於EF,EG

則　△EFG爲所求之△

證　$EF : 2AB = AB : EG$　作圖

∴ $EF : EG = 2\overline{AB}^2$　§327.

$\frac{1}{2}(EF \times EG) = \overline{AB}^2$　問題7.

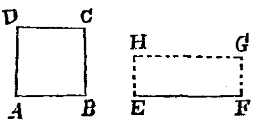
但　$\overline{AB}^2$ 正方形ABCD面積　§398.

而　$\frac{1}{2}(EF \times EG) =$ △EFG面積　§403.

∴ △EFG≑正方形ABCD　　Q,E,F,

例題397.矩形其一邊等於已知長.

設　ABCD爲已知正方形而EF爲已知長



求變　正方形ABCD爲等值之矩形且令一邊等於EF

作圖　求EH於EF及AB之第三比例項,以EF及EH爲邊作EFGH矩形.

則　▭EFGH即所求之▭

證　EF : AB = AB : EH　　作圖

$EH \times EH = \overline{AB}^2$　　§327.

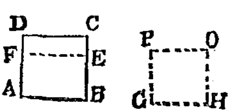
但　EF× EH = ▭EFGH面積　　§398.

$\overline{AB}^2$ = 正方形ABCD面積　　§396.

∴ ▭EFGH≑正方形ABCD　　Q,E,F,

例題398.一已知正方形之八分之五.

設　ABCD爲已知正方形



求　作一正方形ABCD之八分之五

作圖　將BG分爲五等分

§307.

BE爲五分作EF // BA

求 GH爲AB及BE之比例中頂 §388.

在 GH上作GHOP正方形

GHOP正方形即爲所求正方形

證 AB—GH＝GH：BE 作圖

∴ $AB\times BE=\overline{GH}^2$ §327.

∴ ▱ABEF≑正方形GHOP §398.

但 ▱ABEF≑$\frac{5}{8}$ABCD正方形 §396.

∴ 正方形GHOP≑$\frac{5}{8}$ABCD正方形

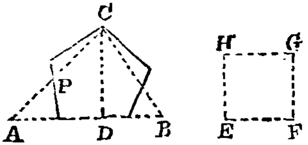
Q,E,F,

例題399.一已知五邊形之五分之三

設 P代已知五邊形

求 作一正方形等于P之五分之三

作圖 作△ABC與P等值 §420.



作 CD爲△ABC之高

分 AB爲五等 §307.

求 EF爲$\frac{3}{5}$AB及$\frac{1}{2}$CD之比例中

頂 §388.

在 EF上作EFGH正方形

設 $\frac{3}{5}AB:EF=EF:\frac{1}{2}CD$ 作圖

$\therefore\ \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}AB\times CD\right)=\overline{EF}^2$

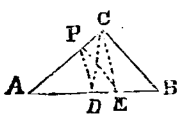
§327.

但 $\frac{1}{2}AB\times CD=\triangle ABC$面積 §403.

而 $\overline{EF}^2$ =正方形EFGH面積 §398.

∴ 正方形EFGH⇔$\frac{3}{5}$P Q,E,F,

例題400.求作一線過已知三角形之一邊內一已知點P分此三角形為兩等積分



設 ABC為已知△P為已知點

求 作一線過P而分△ABC為二等分

作圖 O作CD至AB之中點作PD

作 CE∥PD作PE

而 PE即為為所求之線

證 △ADC⇔△BDC §404.

∴ △ADC⇔$\frac{1}{2}$△ ABC §405.

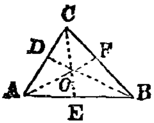
在 △AEP及ADC內有△AOP公用

而　$\triangle DEP \Leftrightarrow DPC$　§404.

$\therefore\ \triangle AEP \Leftrightarrow \triangle ADC \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$

Q,E,F,

例題401.求三角形內一點設聯此點各頂必分此三角形爲三等積分



設　ABC爲已知△

求　△ABC內一點自此點以三線連其三角頂則分△ABC爲三等分

作圖　作AF,BD,CE三中線而相交于O

例題27.

則　O即爲所求之一點

證　$\triangle ABC \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$　§405.

及　$\triangle ABD \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$

$\therefore\ \triangle ABD \Leftrightarrow \triangle AEC$　公理1.

而　每三角形中AEOD四邊形公用

則　$\triangle EBO \Leftrightarrow \triangle DOC$　問題

$\triangle AEO \Leftrightarrow \triangle EBO$及$\triangle AOD \Leftrightarrow \triangle POC$

§404.

$\therefore\ \triangle AEO \Leftrightarrow \triangle AOD$　公理1.

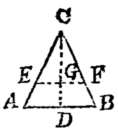
$\because\quad \triangle AEO+\triangle EBO \Leftrightarrow \triangle AOD+\triangle DOC$

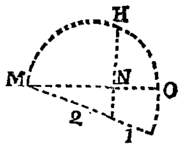
公理2.

或 $\triangle ABO \Leftrightarrow \triangle AOC$

依同理 $\triangle ABO \Leftrightarrow \triangle BOC$ Q,E,F,

例題402.求作一線與已知三角形之一邊平行分此三角形爲兩等積分





設 ABC爲已知△

求 以∥AB分△ABC爲二等分之一直線

作圖 O作CD爲△ABC之高作MN使等于CD

求 NH如 $\overline{MN}^2:\overline{NH}^2=2:1$ §421.

作 CG=NH作EF過D而∥AB

EF則所求之線

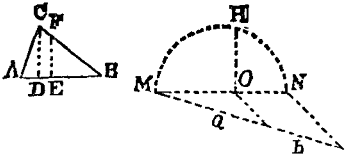
證 ∵ EF∥AB則△ABC及△EFC爲等值之相似形 §354.

$\therefore\quad \triangle ABC:\triangle EFC=\overline{CD}^2:\overline{CG}^2$

§412

$=\overline{mn}^2:\overline{nH}^2=2:1$ 作圖

例題402.求作一線垂直於已知三角形之一邊分此三角形爲兩等積分.



設　ABC爲已知△

求　作一直線平分△ABC爲兩等分而垂於AB

作圖　引a等于2DB,b等于AB,mo等于BC.

求　OH因之 $\overline{mo}^2:\overline{OH}^2=a:b$

§427.

截取　BF=OH作FE⊥AB

FE爲所求之一線

證　FE∥CD.(§104)故△DBC及EBF爲相似形　§354.

$$\therefore\ \frac{\triangle DBC}{\triangle EBF}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BF}^2} \qquad \text{§411.}$$

$$=\frac{\overline{mo}^2}{\overline{OH}^2}=\frac{a}{b}=\frac{2DB}{AB} \qquad \text{作圖}$$

則　$\frac{\triangle DBC}{\triangle EBF}=\frac{2DB}{AB}$

但　$\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC}=\frac{AB}{DB}$　§405.

將二式之兩邊各自相乘

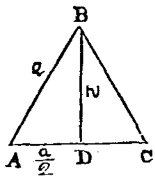
則　$\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC}=\frac{AB}{DB}$

Q,E,F,

例題404.試依等邊三角形之一邊求其面積

設a表其邊h表其高,s表其面積.

$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}=\frac{a^2}{4}\times 3$



§372.

$h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

但　$S=\frac{a\times h}{2}$　§403.

$\therefore\ S=\frac{a}{2}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

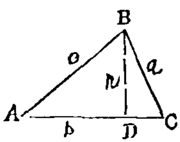
例題405.試依三角形之三邊求其面積

依例題　312　$h=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

故　$S=\frac{b}{2}\times\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

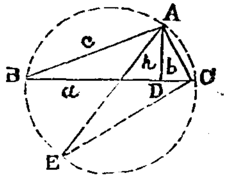
§403.

$=\sqrt{s(s-a))(s-b)(s-c)}$



例題406.試三角形之外切圓之半徑求其面積.

設　R表外切圓之半徑 h 表三角形之高則依　§384.



$$b\times C=2R\times h$$

以 a乘之得

$$a\times b\times C=2R\times a\times h$$

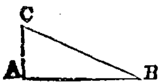
但 $a\times h=2s$ §403.

$$\therefore\quad a\times b\times C=4R\times s$$

$$\therefore\quad S=\frac{abc}{4R}$$

由此可見外切圓之半徑等於$\frac{abc}{4s}$

例題407.設直角三角形之弦為17呎其一腰為 8呎求此形之面積.



在 rt△ABC內

AC=8呎 BC=17呎

$$AB=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{\overline{17}^2-8^2}$$

=15呎

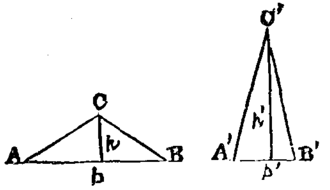
$\therefore$ △ABC面積$=\frac{1}{2}(AB\times AC)$

§372.

$=\frac{1}{2}(15\times 8)$方呎260方呎

例題408.有兩等積三角形此形之底為彼形之底之三倍求此形之高之比

設 △ABC及A'B'C'為等值b及b'為其底邊



h及h'爲其中垂線設b等于3b'

$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = b \times h : b' \times h'$ §405.

但 $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$ 題設

$b \times h = b' \times h'$ §405.

$b' : b = h : h'$ §329.

但 $b' : b = 1 : 3$ 題設

$\because \quad h : h' = 1 : 3$ 公理1

例題409.設梯形之兩底爲8呎及10呎其高爲6呎其等三角形亦等高求此三角形之底

設 x =長方形之底邊長

梯形之面積 $= 6 \times \frac{1}{2}(8+10)$ §407.

長方形之面積 $= 6x$ §398.

$\therefore \quad 6x = 6 \times \frac{1}{2}(8+10)$

$6x = 54$

$\therefore \quad x = 9$

例題410. 設菱形之兩對線之和爲12呎其比爲3：5求此形之面積.

設　$5x=$一對角線之長

則　$3x=$他一對角線之長

$$5x+3x=12$$

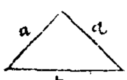
$$\therefore \quad x=1\frac{1}{2}\text{呎}$$

故　$5x=7\frac{1}{2}$呎　$3x=4\frac{1}{2}$呎

故　斜方形面積$=\frac{1}{2}\left(7\frac{1}{2}\times4\frac{1}{2}\right)=16\frac{7}{8}$方呎

例題411. 設等腰直角三角形之弦爲20呎求其面積

在等腰rt△中b爲弦等于20呎



$$2a^2=b^2 \qquad \S 371.$$

$$a=b\sqrt{\frac{1}{2}}=20\sqrt{\frac{1}{2}}$$

△　面積$=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}\left(20\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=100$方呎

§403.

例題412. 設直角三角形之弦爲13呎其一腰爲5呎求其面積.

設　$x=$他一腰之長

$\therefore \quad x=\sqrt{13^2-5^2}=12$ §372.

面積$=\frac{1}{2}(5\times 12)$方尺230方呎

例題413.設直角三角形之底$=b$其腰$=c$求其面積

設 h 爲高線

則 $h=\sqrt{c^2-\left(\frac{1}{2}b\right)^2}$ §372.

$=\sqrt{\frac{4c^2-b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2c+b)(2c-b)}$

面積$=\frac{1}{2}(h\times b)=\frac{1}{4}b\sqrt{(2c+b)(2c-b)}$

§403.

例題414.設等邊之三角形之一邊爲 8 呎求其面積

面積$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}=2.$

7.7.12

答27.7.12方呎 例題404.

例題415.設等邊三角形之高$=h$求其面積

$a=\frac{2h}{3}\sqrt{3}$ 例題329.

面積$=\frac{1}{2}(h\times a)=\frac{1}{2}\left(h\times\frac{2h}{3}\sqrt{3}\right)$

$=\frac{h^2}{3}\sqrt{3}$ §403.

例題416.有屋一間長40呎寬30呎其簷高25呎脊高35呎求屋

外全面積有若干平方呎

四邊之面積 $=2\times(40+30)\times25=3500$ §398.

諸人字形屋頂面積 $=2\times\frac{1}{2}(10\times30)=3000$

§403.

椽長 $=\sqrt{10^2+15^2}=18.027$ §371.

屋頂之面積 $=2\times18.027\times40$

$=1442.61$

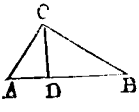
全面積 $=(3800+300+1442.61)$

$=5242.61$

答5 242.61 □

例題417. 設直角三角形之三邊之比若 3 : 4 : 5 其弦上之高爲12 ″求其面積

在 rt△ABC中設DC爲高線長12呎而設



AC : BC : AB = 3 : 4 : 5

則 AB等于 $5x$

$AC=3x$, $BC=4x$

$\therefore\ 5x : 3x = 3x : AD$ §367.

$\therefore\ AD=\frac{9}{5}x$ §327.

$\therefore\ BD=5x-\frac{9}{5}x=\frac{16}{5}x$

$\frac{9}{5}x : 12 = 12 : \frac{16}{5}x$ §367.

$$\therefore\quad \frac{144}{25}x^2=144 \qquad \S 327.$$

$$x^2=25$$

$$x=5$$

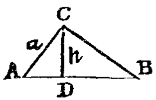
$$\therefore\quad AB=25$$

面積$=\frac{1}{2}(12\times 25)=150$方呎　§403.

例題418.設直角三角形之一腰$=a$其弦上之高$=h$求其面積

$$AD=\sqrt{a^2-h^2} \qquad \S 372.$$

$$AB:a=a:AD=a:\sqrt{a^2-b^2} \qquad \S 367.$$



$$\therefore\quad AB=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-h^2}} \qquad \S 327.$$

ABC面積$=\frac{1}{2}(h+AB)$

$$=\frac{1}{2}\left(h\times\frac{a^2}{\sqrt{a^2-h^2}}\right)$$

$$=\frac{a^2b}{2(a^2-b^2)}\sqrt{a^2-h^2}$$

例題419.設三角形之三邊爲104呎111呎及175呎求其面積

面積$=\sqrt{s\ s-a)(s-b)(s-c)}$　例題405.

$$=\sqrt{195(195-104)(195-111)(195-175)}$$

$=5460$方呎

例題420.設梯形之面積爲700平方呎其兩底爲30呎及40呎求其高設h爲其高線

梯形面積$=\frac{1}{2}(40+30)h=35h$　　§407.

∴　$35h=700$

∴　$h=20$呎

例題421.設ABCD為無法四邊形AB=87呎BC=119呎CD=41呎DA=169呎AC=200呎求其面積

△ABC面積$=\sqrt{203(203-87)(203-119)(203-200)}$

$=2436$方呎　　例題405.

△ADC面積$=\sqrt{205(205-200)(205-41)(205-169)}$

$=2460$方呎

∴　ABCD面積$=(2436+2460)$方呎

$=4896$方呎

例題422.設一圓半徑為25呎其外切四邊形之周界為400呎求此四邊形之面積又外切六邊形之周界為400呎求此六邊形之面積(例題361)

四邊形之面積$=\frac{1}{2}(400\times25)$方呎

$=5000$方呎　　例題361.

而　六邊形之面積與四邊形同　　例題361.

例題423.設三角形之底為15呎其高為8呎其等積菱形之高

爲6呎求此菱形之周界

$$\triangle\text{面積}=\frac{1}{2}(8\times 15)\text{方呎} \qquad \S 403.$$

$$=60\text{方呎}$$

$$\text{菱形之一邊}=(60\div 6)\text{尺}=10\text{呎}$$

$$\text{周界}=4\times 10\text{尺}=40\text{呎}$$

例題424. 設于長24呎廣10呎之矩形之對角線上作一三角形與此形爲等積求此三角形之高

$$\text{長方形面積}=(24\times 10)\text{方呎}=240\text{方呎}$$

$$\S 398.$$

而　長方形之對角線$=\sqrt{24^2+10^2\text{呎}}$

$$=26\text{呎} \qquad \S 370.$$

設　h爲所作三角形之中垂線

則　$\triangle\text{面積}=\frac{1}{2}(h\times 26)$

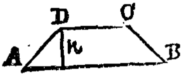
$$\therefore\ 240=\frac{1}{2}(h\times 26)=13h$$

$$h=18\frac{6}{13}\text{呎}$$

例題425. 設梯形之兩底爲56呎及44呎其各腰爲10呎求與此形爲等積之正方形之一邊

在　ABCD梯形內AB=56,DC=44,而

$AD=BC\doteq 10$



設　h爲梯形 ABCD 之高線而 x 爲所求正方形之一邊

因　ABCD梯形爲等腰

$$\therefore\quad h=\sqrt{\overline{AD}^2-\left(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}DC\right)}$$

§372.

$$=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

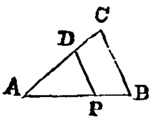
因　知ABCD梯形爲等腰$=\frac{1}{2}(56+44)8$

$=400$方呎　　§407

$$\therefore\quad x^2=400$$

$$\therefore\quad x=20\cdots$$

例題426. 設過三角形ABC之邊AB內已知點P. 作一線與BC平行分此三角形爲兩等積分，試依AB. 求AP之值.



在　△ABC 內作PD∥BC，分△ABC爲二等分，

$\triangle APD:\triangle ABC=\overline{AP}^2:\overline{AB}^2$

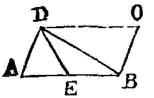
$=1:2$　　§411.

$$\therefore\quad \overline{AP}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

因知　$AP=AB\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}AB\sqrt{2}$$

例題427.設由平行四邊之一頂,至其一對邊,之中點作一線則所截之三角形當原形之幾分,



在 □ABCD內,作DE至AB之中點.

$\triangle ABE \doteqdot \frac{1}{2}\triangle ADB$ §405.

但 $\triangle ADB \doteqdot \frac{1}{2}$ □ABCD

§176.

$\therefore$ $\triangle ADE \doteqdot \frac{1}{4}$ □ABCD

例題428.設兩相似多邊形之相當邊爲15呎及25呎第一形之面積爲450平方呎求第二形之面積

設 S爲第一多邊形之面積而S'爲第二多邊形之面積.

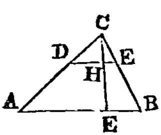
$S:S'=15^2:25^2$ §412.

$450:S'=15^2:25^2$

$S'=1250$ 答1250.呎

例題429.設三角形之底爲32呎其高爲20呎於距底15呎之處,作一線,與其底平行求所截之三角形之面積.

在 △ABC內AB=32



CF=20

作 DE∥AB截取

HF=15

$$\triangle ABC\text{面積}=\frac{1}{2}(32\times 20)$$

$$=320 \qquad \S 403.$$

$$CH=20-15=5\text{呎}.$$

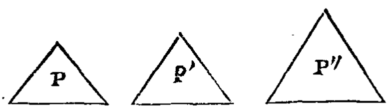
$$\therefore\quad \triangle DEC:\triangle ACD=\overline{CH}^2:\overline{CF}^2$$

$$=5^2:20^2=1:16$$

$$\triangle DEC\text{面積}=\frac{1}{16}\times 320=20$$

答20方呎

例題430.設兩等邊三角形之邊爲3呎及4呎求與此兩形之和爲等積之等邊三角形之邊



設　P"爲所求之等邊△而設x爲P"之邊.

則 $\dfrac{P}{P''}=\dfrac{3^2}{x^2}$

而 $\dfrac{P'}{P''}=\dfrac{4^2}{x^2}$　　§411.

$\therefore\ \dfrac{P+P'}{P''}=\dfrac{3^2+4^2}{x^2}$　　公理2.

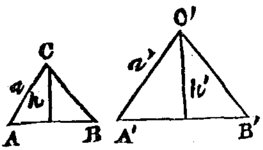
但　$P+P' \Leftrightarrow P''$

$\therefore\ 3^2+4^2=x^2$

故　$x=5$　　答5呎

例題431.設一等邊三角形之邊，等於他等邊三角形之高求

此兩形之面積之比



在 等邊△ABC及A'B'C'內設a爲△ABC之一邊而等於△A'B'C'之高線h'

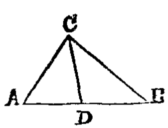
$\triangle ABC:\triangle A'B'C=h^2:h'^2$ §413.

但 $h^2=\dfrac{3a^2}{4}$ 例題404.

$h'^2=a^2$

代入 $\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\dfrac{3a^2}{4}:a^2=3:4$

例題432.設三角形之三邊爲10呎17呎，及21呎此第一第二邊間之分角線分此形爲兩分之面積



在 △ABC內BC=17呎，AB=21呎 AC=10呎

設 CD平分∠C

$\triangle ABC$面積$=\sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$

$=84$方呎 問題405.

$\triangle ADC:\triangle BDC=10\times CD:17\times CD=10:17$ §410.

$\therefore$ $\triangle ADC$面積$=\dfrac{10}{27}\times\triangle ABC$

$$=\frac{10}{27}\times 84\text{方呎}$$

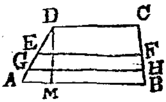
$$=31\frac{1}{9}\text{方呎}$$

而　　$\triangle BDC$面積$=\frac{17}{27}\times\triangle ABC$

$$=\frac{17}{27}\times 84\text{方呎}$$

$$=52\frac{5}{9}\text{方呎}$$

例題433.設三角形之三邊爲10呎17呎及21呎此第一·第二邊間之分角線分此形爲兩分求此兩分之面積



設　　EF爲中分線GH∥AB而與AB相距一呎

ABCD梯形面積$=EF\times DM$

§408.

$\therefore$　$32=EF\times 4$

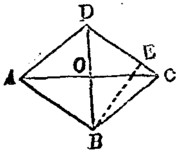
$\therefore$　$EF=8$

但　　EF分平DM　　§187.

故　　于ABFE梯形內

CH中分線$=\frac{1}{2}(10+8)=9$呎　§190.

例題434.設菱形兩對角線爲90碼及120碼求其面積其一邊之長及其兩平行線間之垂直距離.



在 ABCD菱形內

BD=90碼AC=120碼

菱形ABCD面積

$=\frac{1}{2}(120\times 90)$方碼

=5400方碼

AC,BD彼此平分且直交 §184. 例題71.

AO=60碼而BO=45碼

$\therefore$ AB$=\sqrt{60^2+45^2}$=75碼 §371.

但 斜方形ABCD面積=AB×BE §400.

代入 5400=75×BE

$\therefore$ BE=(5400÷75)碼=72碼

例題435.有三角形地其三角爲26呎35呎及51呎欲舖以地毯需若干平方呎

△面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例題405.

$=\sqrt{56\times 30\times 21\times 5}$方呎

=420方呎

例題436.設三角形之高爲h其底爲a今其高增m則底必減若干其面積仍不變

$a-x$=減少後之底邊

$\therefore \quad \frac{1}{2}(h\times a)=$第一三角形之面積.

§403.

而 $\quad \frac{1}{2}(h+m)(a-x)=$第二三角形之面積.

$\therefore \quad \frac{1}{2}(h\times a)=\frac{1}{2}(h+m)(a-x)$

$ha=ha-hx+am-mx$

$hx+mx=am$

$\therefore \quad x=\frac{am}{h+m}$

例題437.設由直角三角形之直角頂至弦,作垂線,分此弦爲兩已知線分P及q求此形之面積

$P:h=h:q$ §367.

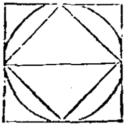
$\therefore \quad h^2=pq$ §327.

因知 $\quad h=\sqrt{pq}$

$\therefore \quad \triangle$面積$=\frac{1}{2}(p+q)h=\frac{1}{2}(p+q)\sqrt{pq}$ §403.

Q,E,D,

例題438.圓之外切正方形之面積等於其內切正多邊形之面積.



設 S爲外切正方形之邊而S'爲內接正方形之邊.d爲其對角線

求證 $S^2=2S'^2$

證 $\frac{d}{S}=\sqrt{2}$ §373.

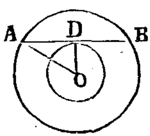
但 d＝圓之直徑＝S

$\therefore \frac{S}{S'}=\sqrt{2}$ 因知 $\frac{S^2}{S'^2}=2$

$\therefore S^2=25'^2$

Q,E,D,

例題439. 圓環形之面積等於以外圓之弦即內圓之切線爲直徑之圓之面積



設 AB爲外圓之弦而切圓於D 設內外二⑤徑爲Rr及

求證 圓環之面積＝$\frac{1}{4}\pi\times\overline{AB}^2$

證 外圓面積＝πR^2 §463.

內圓之面積＝πr^2 §463.

$\therefore$ 圓環形面積＝$\pi(R^2-r^2)$

但 $\overline{OA}^2-\overline{OD}^2=\overline{AD}^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2$

§372.

則 $R^2-r^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2$

$\pi(R^2-r^2)=\frac{1}{4}\pi\overline{AB}^2$

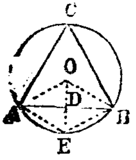
$\therefore$ 圓環形面積＝$\frac{1}{4}\pi\times\overline{AB}^2$

Q,E,D,

例題440. 在內切等邊三角形內 $a=R\sqrt{3}$

$r=\frac{1}{2}R, A=60^\circ, C=120^\circ$

$x=\frac{1}{2}R, A=60^\circ, C=120^\circ$



設　ABC爲內切等邊三角形O爲心OD $\perp$AB

則　AO=R　OD=r

AB=a∠CAB=A∠ACB=C

求證　$a=R\sqrt{3}$

證　引長OD遇AB弧于EB作AE,BO及BE

E爲AB弧中心　§245.

AO=AE=BO=BE　§469.

AB及OE各平分于D　§161.

$\therefore\ \overline{AD}^2=\overline{AO}^2-\overline{OD}^2$　§372.

即　$\left(\frac{1}{2}a\right)^2=R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2$

$\frac{1}{4}a^2=\frac{3}{4}R^2\qquad\therefore a=R\sqrt{3}$

2. 求證　$r=\frac{1}{2}R$

證　$\because$ AB平分OE

$\therefore\ OD=\frac{1}{2}OE$

即　$r=\frac{1}{2}R$

3. 求證　$A=60^\circ$

證　△ABC爲等邊三角形　　§146.

$\therefore\ A=60^\circ$

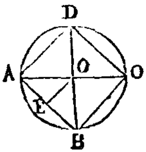
4. 求證　$C=120^\circ$

證　$C=\frac{1}{3}\times 360=120$　　§436.

Q,E,D,

例題441.在內切正方形內$a=R\sqrt{2}$

$r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$, $A=90^\circ$, $C=90^\circ$



設　ABCD爲內切正方形O爲中心OE邊心距

則　AO=R,AB=a,OE=r

1.求證　$a=R\sqrt{2}$

證　$AO=\frac{1}{2}AB\sqrt{2}$　　§373.

$\therefore\ AB=\frac{1}{2}AO\sqrt{2}$

即　$a=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$

2. 求證　$r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$

證　$OE=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$

即　$r=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$

3. 求證　$A=90^\circ$

證　$A=90^\circ$　§290.

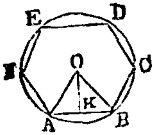
4. 求證　$C=90^\circ$

證　$C=\frac{1}{4}\times 360^\circ=90^\circ$　§436.

Q,E,D,

例題442.在內切有三去六邊形內

$a=R.\quad r=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\quad A=120^\circ,C=60^\circ,$



設　ABCDEF爲內切正六邊形O爲圓心,OK爲邊心矩.

則　$AO=R\ \ AB=a\ \ OK=r$

1. $a=R$　§469.

2. $\overline{OK}^2=\overline{OA}^2-\overline{AK}^2$　§372.

即　$r^2=R-\left(\frac{1}{2}R\right)^2=\frac{3}{4}R$

$\therefore\ r=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$

3. $\angle A$爲圓周之$\frac{4}{6}$之$\frac{1}{2}$即圓周之$\frac{1}{3}$

$\therefore\ \angle A=\angle FAB=120^\circ$　§289.

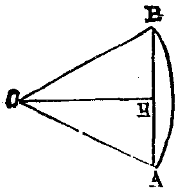
4. $C=\frac{1}{6}\times 360^\circ=60$　§436.

Q,E,D,

例題443.在內切有法十邊形內.

$$a=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2},r=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},A=$$

$144^{0},C=36^{0}$,



設 AB 爲內切正十邊形之一邊,

O爲圓心OK爲邊心距

則 $OA=R,OK=r,AB=a$

1. $OA:AB$

$=AB:OA-AB$ §472.

即 $R:a=a:R-a$

$\therefore\ a^2=R-aR$ §327.

$Aa^2+4aR+R^2=5R^2$

$2a+R=R\sqrt{5}$

$a=\frac{1}{2}R(5-1)$

2. $\overline{OR}^2=\overline{OA}^2-\overline{AK}^2$ §372.

則 $r^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2=R-\left(\frac{R(\sqrt{5}-)}{4}\right)^2$

$r^2=R^2-\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{16}$

$r^2=\frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16}$

$\therefore\ r=\frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

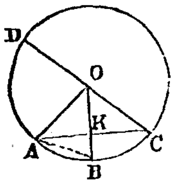
3. A爲圓周之$\frac{8}{10}$之$\frac{1}{2}$ §289.

$\therefore \quad A=2\angle OAB=144^0$

4. $C=\frac{1}{10}\times 360^0=36^0$ §436.

Q,E,D,

例題444.圓之內切有法八邊形之面積.等於以內切及外切正方形之邊爲長廣之矩形之面積



設 S爲內切正八邊形之面積而AB爲其一邊.AC爲此圓內切正方形之一邊 CD 爲此圓之直徑亦卽爲外切正方形之一邊也

求證 $S=CD\times AC$

證 今$BO=\frac{1}{2}CD$而$AK=\frac{1}{2}AC$

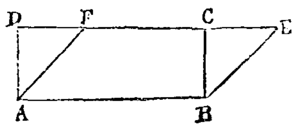
$\triangle ABO$面積$=\frac{1}{2}BO\times AK=\frac{1}{8}CD\times AC$ §403.

但 $\triangle ABC$ 爲八邊形之$\frac{1}{8}$

$\therefore \quad S=8\times\frac{1}{8}CD\times AC=CD\times AC$

Q,E,D,

例題445.等底之諸等積平行四邊形中.矩形有極小周界



設 ABCD 爲長方形 CDFE 爲平行四邊與長方同底 CD 且同高

求證 $2CD+2BC<2CD+$

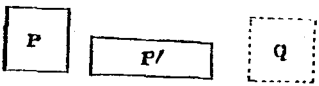
2CE

證　BC<BE　　§97.

∴　2BC<2CE　　公理6

∴　2CD+2BC<2CD+2CE

例題446.諸等積矩形中.正方形有極小周界



設　P爲正方形，P'爲與P等值之長方形.

求證　P之周界小於P'之周界

證　作一正方形Q令其周界與P'相等.

則　Q>P'　　§489.

但　P≎P　　題設

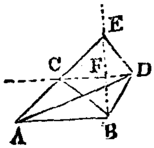
∴　Q>P

因　Q大於P而皆爲正方形,Q之週界必大於P之周界

但　Q之周界等於P'之週界故P'之周界大於之周界矣.

Q,E,D,

例題447.同底同高之諸三角形中等腰三角形有極小周界



設 ABC為兩等腰△，而ABD為他一△有AB為底.而其頂點D在一∥AB之CD內

求證. $AB+AC+CB<AB+AD+DB$.

證 作BE⊥AB且交AC之延線於E而交CD於F自E至D作DE

$BE \perp CD$ §107.

$\angle ECF=\angle CAB$ §112.

$\angle CAB=\angle CBA$ §145.

$\angle CBA=\angle BCF$ §110.

$\therefore \angle ECF=\angle BCF$ 公理1

$\therefore rt\triangle ECF=rt\triangle BCF$ §142.

$\therefore FE=FB$ §128.

$\therefore CE=CB$ 而 $DE=DB$ §160.

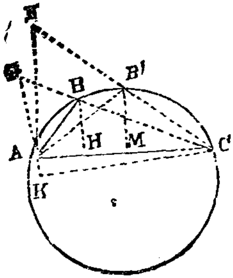
但 $AE<AD+DE$ §138.

即 $AC+CB<AD+DE$

$\therefore AB+AC+CB<AB+AD+DB$

公理4

例題448.圓之諸內切三角形中等邊三角形為極大且有極大周界.



設　ABC 爲一三角形內切爲已知

求証　△ABC之面積及周界以等邊者爲最大

1.　證若△ABC不爲等邊則最少亦必有兩邊不能相等今設 BC大於BA作BH⊥AC

作　AC上平分垂線m B' 遇圓週於B'作AB'及CB'

因　mB'可通過圓心則於B'點作一切線必垂於B'm.且平分AC

B'　在切線內而B則在此切線與AC之間

§220.

∴　△AB'C>△ABC　§405.

∴　B'M>BH

但　AB'=CB'　§160.

故　知同以 AB 爲底之諸內切三角形以等腰者爲大

若　AB與AC不等則在 BC 爲底之三角形亦以等腰者爲大

故 $\triangle ABC$以等邊者爲最大

2. 求證 $\triangle ABC$有最大之周界當其爲等邊

證 引長CB'至F命B'F等于B'A又引長CB至G命BG等于BA作AF及AG並作 $CK \perp GA$ 之延線

今 $FA \perp AC$ 例題43.

$\angle F=\angle B'AF$而$\angle G=\angle BAG$ §145.

∴ $\angle AB'C=2F$而$\angle ABC=2\angle G$ §137.

今 $\angle AB'C=\angle ABC$ §393.

∴ $\angle F=\angle G$ 公理7.

∴ 正$\triangle$FAC及GKL相似

因知 $CF:CG=CA:CK$ §351.

即 $CB'+B'A:CB+BA=CA:CK$

但 $CA>CK$

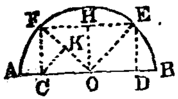
故 $\triangle AB'C$之周界大于$\triangle ABC$之周界

則 知同以AB爲底之諸三角形以等腰者爲大

若 AB與AC不等則以B'C爲底之諸三角形亦必以等腰者爲最大

故 $\triangle ABC$以等邊者之周界爲最大

例題449. 求作半圓之內切極大矩形



設　CDEF爲所求之最大長方形

作　OE及OF＝半徑

作　OH⊥EF及CK⊥OF

則正　△OCF＝△FHO＝正EHO＝正△ODE　§151.

蓋以　OF＝OF＝OE＝OE

而　CF＝HO＝HO＝DE　§§104.180.

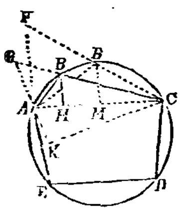
故　正△OCF＝$\frac{1}{4}$CDEF長方形

rt　△OCF爲最大則CDEF長方形可以爲最大因rt△OCF之弦線OF爲一定CK爲最大則rt△OCF可以爲最大但KO＝KF.∠FOC＝45°知CK可以爲最大

作圖　O作OE及OF爲兩半徑且與AB成45°角作ED及FC⊥AB並作EF

則　CDEF即爲所求之最大長方形矣

例題450.有已知邊數之諸多邊形中能內切于已知圓者爲有法各邊形有極大面積及極大周界



設　ABCDE爲n邊多邊形而內切于已知圓AED

(1.)求證　ABCDE以正者爲最大

證　若ABCDE爲非正多邊形則二隣邊不能相等

設 BC大于AB

作 AC且作BH⊥AC

于AC作MB⊥平分線且遇圓周于B' 並作A B'及CB'

因 MB'通過圓心 §248.

作 一切線通過B'而∥AC §104.

B' 在切線內而B在切線之中間及AC §220.

∴ B'M>BH

∴ △AB'C>△ABC §405.

多邊形AB'CDE>多邊形ABCDE

但 AB=B'C §160.

故 各△作成與△ ABC 相似則以毎等邊者爲最大

因 知ABCDE 多邊形以等邊者爲最大即以有法者爲最大

(2) 求證 多邊形之周界以有法者爲最大

證 引長CB'至F作B'F令等于AB'

且 引長CB至G作BG令等于BA

作 AF及AG

作 CK⊥GA之延線

今　　$FA \perp AC$　　例題43.

$\angle F = \angle B'AF$及$\angle G = \angle BAG$ §145.

$\therefore$　$\angle AB'C = 2\angle F$與$\angle ABC = 2\angle G$

§137.

$\angle AB'C = \angle ABC$　　§293.

$\therefore$　$\angle F = \angle G$　　公理7

故　rt$\triangle$FAC及GKC相似　　§356.

$\therefore$　$CF : CG = CA : CK$　　§351.

即　$CB' + B'A : CB + BA = CA : CK$

但　$CA > CK$　　§ 97.

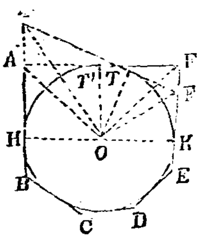
$\therefore$　$CB' + B'A > CB + BA$

故　AB'CDE多邊形之周界大于ABCDE多邊形之周界即周界之最大者爲等邊多邊形

但　等邊形爲圓內切正多邊形　　§430.

故　圓內切多邊形其周界以正者爲最大也

例題451.有已知邊數之諸多邊形中能外切于一已知圓者爲有法多邊形有極小面積及積周界



設　ABCDEF爲外切n邊多邊形.

O爲圓心

1.　求證ABCDEF以正者爲最小

證　若ABCDEF爲非正多邊形

則　在切點中間之弧，最少有二

弧不等.

設　HT弧大於TK弧，過HK弧之中點T'作A'F'切線，交AB於A'及EF之延線於F'.

作　OH OA', OA, OT', OT, OF', OF' OK,

因　OH=OT'　§217.

而　OA'=OA'

$\therefore$ rt△OHA'=rt△OT'A'　§44.

$\therefore$ $\angle A'OT'=\frac{1}{2}\angle HOT$　§128.

同理　$\angle T'OF=\frac{1}{2}\angle T'OK$

但　$\angle HOT'=\angle T'OK$

$\therefore$ $A'OT'=\angle TOF$

$\therefore$ $\angle A'OF'=\frac{1}{2}\angle HOK$

$\therefore$ $\angle T'A'O=\angle T'FO$　§84.

因知　OA'=OF'

故　△A'OF'為等腰

依同理則△AOF非等腰因∠HOT大於∠TOK.

但　$\angle AOF=\frac{1}{2}HOK=\angle A'OF'$

$\therefore$ △A'OF'及AOF中其高線相等且頂角

亦相等因 AE>A'F'

∴ △AOF>△A'OF'

今 A'HOKF'⇔2△AOF'而 AHOKF⇔2∠AOF

∴ A'HOKF'<AHOKF 公理6

∴ A'BCDEF<ABCDEF 公理4

故 知圓外多邊形以正者爲最小

2. 求證ABCDEF之周界以有法者爲最小

證 A'F'小於AF(証如上法)

故 知外切多邊形之周界以其有法者爲最小

例題452.設圓之外切等邊多邊形之邊數爲奇數則此多邊形必有法

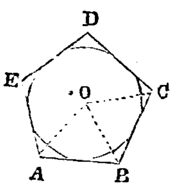
設 ABCDE爲外切等邊多邊形,而其邊數爲奇數

求證 ABCDE爲正多邊形

證 聯圓心O與A,BC.

因, AB=BC 而OB=OB

∠OBA=∠OBC §261.



∴ △OBA=△OBC

§143.

∴ ∠OAB=∠OCB

§128.

且知 ∠BAE＝∠BCD

公理6

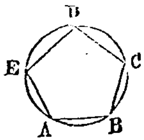
依同理，∠A＝∠C＝∠E＝∠B＝∠D

故 ABCDE 等邊且等角即知其爲有法多邊形

§429.

Q,E,D,

例題453.設圓之內切等多邊形之邊數爲奇數則此多邊形必有法



設 ABCDE 爲內切等角奇數邊之多邊形

求證 ABCDE爲有法多邊形

證 因各等內接角截圓周上成等弧依此理可證得其各邊所對之弧亦等

即 CD弧＝EA弧＝BC弧＝DE弧＝AB弧

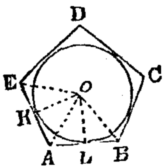
∴ CD＝EA＝BC＝DE＝AB §241.

故 ABCDE等邊且等角故爲有法多邊形

§429.

Q,E,D,

例題454.圓之外切等角多邊形必有法



設　ABCD爲圓外切等角多邊形而O爲圓心

求證　ABCDE爲有法多邊形

證　作OA,OB,OE,並作OK,OL,垂AE及AB之切點

因　$\angle OKA=\angle OLA=90°$　§254.

$OA=OA$而$OK=OL$　§217.

$\therefore\ \triangle OAK=\triangle OAL$　§151.

即　$AK=AL$　§128.

但　$\angle OAL=\angle OBL$　公理1

$\therefore\ \triangle OLA=\triangle OLB$　§142.

因知　$LA=LB$　§128.

$\therefore\ AB=2AL$

依同理$AE=2AK$

但　$AL=AK$

$\therefore\ AB=AE$　公理6

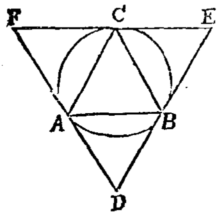
依同理$AB=BC=CD=DE=EA$

則　ABCDE等邊且等角故爲有法多邊形

§429.

例題455. 圓之外切等邊三角形之一邊，等於其相似內切三

角形之一邊之二倍.



設　DEF為圓外切等邊三角形而 ABC 為同圓內切等邊三角形

求證　EF=2CB

證　今EB=EC　§261.

∴　∠ECB=∠EBC　§145.

但　∠E=60°　題設

∴　∠EBC=∠ECB=60°=∠E

∴　EC=CB

依同理FC=AC=CB

∴　EF=2CB

例456.圓之內切有法六邊形之邊心距等於其內切等邊三角形之一邊一半

六邊形之邊心距$=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$

例題442.

而　三角形三邊$=R\sqrt{3}$　例題440.

Q,E,D,

例題457.圓之內切有法六邊形之面積,等於外切有法六邊形之面積之四分之三.

因　　圓外切六邊形之邊心距$=R$

而　　圓內切六邊形之邊心距$=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$

例題442.

$$\therefore\ \frac{\text{內切六邊形面積}}{\text{外切六邊形面積}}=\frac{\left(\frac{1}{2}R\sqrt{3}\right)^2}{R^2}$$

$$=\frac{3R^2}{4R^2}=\frac{3}{4}$$

例題458. 圓之內切有法六邊形之面積．爲其內切外切等邊三角形之面積之比例中項．

以　　a爲邊之內切等邊三角形之面積等於

$$\frac{a}{2}\times\frac{3}{2}R=\frac{R\sqrt{3}}{2}\times\frac{3R}{2}=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

例題440.

而　　外切等邊三角形之面積等於

$$4\times\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}=3R^2\sqrt{3}$$ 例題455.

比例中項$=\sqrt{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}\times3R^2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$

但　　內切有法六邊形之面積等於

$$=\frac{6R}{2}\times\frac{1}{2}R\sqrt{3}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$$

例題442.

Q,E,D,

例題459.圓之內切等邊三角形之一邊之平方等於其內切有法六邊形之一邊之平方之三倍.

內切等邊三角形之邊$=R\sqrt{3}$　　例題440.

則　　其平方必　　$=3R^2$

內接有法六邊形之邊$=R$　　例題442.

則其平方必　　$=R^2$　　Q,E,D.

例題460.圓之內切等邊三角形之面積等于其內切有法六邊形之面積之半

內接等邊三角形之面積$=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$

例題458.

而　　內接有法元邊形之面積$=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$

例題458.

今　　$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$之半

Q,E,D,

例題461.圓之內切等邊三角形之一邊之平方等于其內切正方形之一邊及內切有法六邊形之一邊之平方和

內接等邊三角形之邊$=R\sqrt{3}$　　例題440.

而內接正方形之邊$=R\sqrt{2}$　　例題441.

內　　接有法六邊形之邊爲R^2　　例題442.

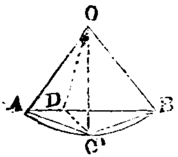
今　　$(R\sqrt{3})^2=3R^2$

而　　$(R\sqrt{2})^2+R^2=2R^2+R^2=3R^2$

Q,E,D,

例題462.圓之內切有法五邊形之一邊之平方等于此圓之半徑及內切有法十邊形之一邊之平方和

設　AB爲內切有法五邊形之一邊 AC 爲內切有法十邊形之一邊



求證　$\overline{AB}^2=\overline{OB}^2+\overline{AC}^2$

證　作OD平分∠AOC而交AB于D並作DC及BC.

因　$OA=OC$　§217.

$OD=OD$

而　$\angle AOD=\angle COD$　構圖

$\therefore\ \triangle OAD=\triangle OCD$　§143.

$\therefore\ AD=DC$　§128.

因知　$\triangle ADC$與BCA相似　例題26.

$\therefore\ AC:AB=AD:AC$

$\overline{AC}^2=AB\times AD$

§327.

然　$\angle AOB=\dfrac{1}{5}\times 360^\circ=72^\circ$

而　$\angle AOC=\dfrac{1}{2}\times 72^\circ=36^\circ$

$\therefore\ \angle COD=\dfrac{1}{2}\times 36^\circ=18^\circ$

$\therefore \quad \angle DOB = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$

但 $\quad \angle OBA = \frac{1}{2}(18^\circ - AOB)$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$

故 $\triangle DOB$爲等腰三角形且與 $\triangle OAB$ 爲相似形

而 $\angle OBD$爲公用

$\therefore \quad AB : OB = OB : BD$ §351.

即 $\overline{OB}^2 \; AB \times BD$ §327.

$\therefore \quad \overline{OB}^2 + \overline{AC}^2 = AB(AD + AD)$

$= AB \times AB = \overline{AB}^2$

公理2.

Q,E,D,

例題463.在有法五邊形內

$$a = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

證 有法五邊形之一邊$= \frac{R^2(\sqrt{5} - 1)}{2}$

例題443.

$\therefore \quad a^2 = R^2 + \left(\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}\right)^2$

$= R^2 + \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}$

$= \frac{4R^2 + R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}$

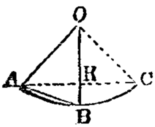
$$=\frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4}$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Q,E,D,

例題464.在有法八邊形內

$$a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$



設　AB爲圓內切有法八邊形之一邊

求證　$a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

證　作AC爲內切正方形之一邊

$OK=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ 例題440.

$BK=OB-OK$

$$=R-\frac{1}{2}R\sqrt{2}$$

$$=\frac{1}{2}R(2-\sqrt{2})$$

今 $\overline{AB}^2=\overline{AK}^2+\overline{BK}^2$ §371.

$$\therefore\quad a^2=\left(\frac{1}{2}R\sqrt{2}\right)+\left\{\frac{1}{2}K\ (2-\sqrt{2})\right\}^2$$ 例題441.

$$=\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{4}R^2(6-4\sqrt{2})$$

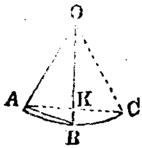
$$=R^2(2-\sqrt{2})$$

$$\therefore\quad a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$ Q,E,D,

例題465.在有法十二邊形內

$$a=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

設　　AB爲有法十二邊形之一邊即a



求證　$a=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

證　　作AC爲內切有法之六邊形之一邊

$$OK=\frac{1}{2}K\sqrt{3}$$ 例題442.

$$BK=OB-OK=R-\frac{1}{2}R\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{2}R(2-\sqrt{3})$$

$$\overline{AB}^2=\overline{AK}^2+\overline{BK}^2$$ §371.

$$\therefore\ a^2=\left(\frac{1}{2}R\right)^2+\left\{\frac{1}{2}R(2-\sqrt{3})\right\}^2$$

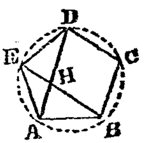
例題442.

$$=\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{4}R^2(7-4\sqrt{3})$$

$$=R^2(2-\sqrt{3})$$

$$\therefore\ a=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$ Q,E,D,

例題466.設有法五邊形兩對角線相交則其各線之長線分等于此五邊形之一邊



設　　ABCDE爲有法五邊形AD及BE爲二對角線相交于H

求證　在五邊形作一外接圓　　§431.

則　　AB弧＝BC弧＝CD弧＝DE 弧 ＝E

A弧$=72^\circ$ §243.

$\therefore$ $\angle AHB=72^\circ$以$\frac{1}{2}$(AB弧+DE弧)

之 §294.

而 $\angle DAB=72^\circ$以$\frac{1}{2}$(BC弧+CD弧)度之

§289.

$\therefore$ $\angle AHB=\angle DAB$ 公理

$\therefore$ $AB=BH$ §147.

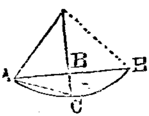
依同理 $ED=HO$

但 $AB=ED$

$\therefore$ $BH=HD=AB$ 公理1

Q,E,D,

例題467.圓之內切有法五邊形之邊心距等于此圓之半徑及內切有法十邊形之一邊之和之半.



設 AB爲內切有法五邊形之一邊OH爲其邊心距OA爲半徑而AC爲內切有法十邊形之一邊

求證 $OH=\frac{1}{2}(OA+AC)$

證 $AB=\frac{1}{2}R_1\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 例題463.

$\therefore$ $AH=\frac{1}{4}R_1\sqrt{10-3\sqrt{5}}$ 例題443.

$$AC=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$$

$$OA=R$$

今　$\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2$　§372.

$$\therefore\quad \overline{OH}^2=R^2-\left(\frac{1}{4}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$=R^2-\frac{1}{16}R^2(10-2\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{16}R^2(6+2\sqrt{5})$$

$$\therefore\quad OH=\frac{1}{4}R\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{4}R\sqrt{1+2\sqrt{5}+5}$$

$$=\frac{1}{4}R(1+\sqrt{5})$$

但　$\frac{1}{2}(OA+AC)=\frac{1}{2}\left\{R+\frac{1}{2}R\right.$
$\left.(\sqrt{5}-1)\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}R(1+\sqrt{5})$$

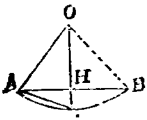
$$OH=\frac{1}{2}(OA+AC)$$

公理1

Q,E,D,

例題468.圓之內切有法五邊形之一邊等于以此圓之半徑及

切有十邊形之一邊爲兩腰之直角三角形之弦



設 AB 爲內切有法五邊形之一邊而 AC爲有法十邊形之一邊

求證 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2$

證 $AB=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 例題463.

$AO=R$

$AC=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$ 例題443.

$\therefore\ \overline{OA}^2+\overline{AC}^2=R^2+\left\{\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)\right\}^2$

$=R^2+\frac{1}{4}R^2(6-2\sqrt{5})$

$=R^2+\frac{1}{2}R(3-\sqrt{5})$

$=\frac{1}{2}(R5\sqrt{5})$

但 $\overline{AB}^2=\left(\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2$

$=\frac{1}{4}R^2(10-2\sqrt{5})$

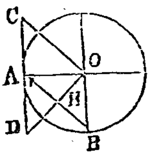
$=\frac{1}{2}R(5-r5)$

$\therefore\ \overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2$ 公理1

Q,E,D,

例題469.圓之內切有法多邊形之頂心距爲其邊心距及相似

外切多邊形之頂心距之比例中項



設　OA 爲內切有法多邊形之半徑而 OK爲其邊心距OD爲以CD 爲邊之相似外切有法多邊形之半徑

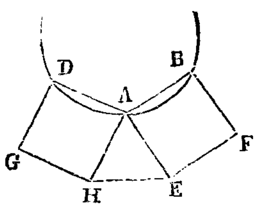
求證　OD : OA = OA : OK

證　因CD爲圓之切線而切圓周于A，∠OAD爲rt∠　§254.

但　AK⊥OD　題設

∴　OD : OA = OA : OK　Q,E,D,

例題470.設于有法六邊形之六邊上向外作六正方形則此正方形之諸外頂爲有法十二邊形之諸頂



設　DA及AB 爲內切有法六邊形之邊而ADGH及 ABFE爲以DA及AB爲底所作之正方形

求證　G,H,E,F,等爲有法十二邊形之角頂

證　作HE

∠DAB=120°　例題442.

∠HAE=360°—(∠DAB+∠DAH+∠

BAE)

$=360^{0}-(120^{0}+90^{0}+90^{0})$

$=60^{0}$

AH=AE(因爲等正方形之邊)

∴ $\angle AHE=\angle AEH$ §145.

但 $\angle AHE=\angle AEH=60^{0}$

因知 AE=EH §147.

∴ GH=HE =EF=…………

即 十二邊形爲等邊

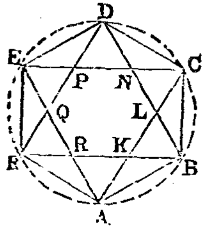
今 $\angle$GHE= HEF=………因各爲正角之和

且每角爲60^{0}

即 十二邊形爲等角

故 G,H, E,F ………爲有法十二邊形之角頂

例題471.設以直線聯有法六邊形之諸角頂可另成一有法六邊形試證之且求此兩形之比



設 ABCDEF 爲有法六邊形

而 BDCE 等爲連相間二角頂之直線,且各自相交於 N,P,Q,R,K,L

求證 NPQRKL爲有法六邊形

證　　於ABCDEF有法六邊形上作一外切圓

§ 431.

則　　AB弧＝BC弧＝CD弧＝DE弧＝EF弧＝F

A弧＝60° § 243.

$\angle AEC = 60^\circ$可以$\frac{1}{2}$(AB弧＋BC弧)度之

§ 289.

$\angle EPQ = 60^\circ$可以$\frac{1}{2}$(EF弧＋DC弧)度之

§ 294.

$\angle EQP = 60^\circ$可以$\frac{1}{2}$(ED弧＋FA弧)度之

§ 294.

故　　△EPQ爲等邊三角形 § 148.

依同理知△FQR，ARK等皆爲等邊三角形

$\angle QEF = \angle QFE$

因　　各角之測度爲$\frac{1}{2}$(FA弧＋DE弧)

§ 289.

∴　　QE＝QF § 147.

但　　QE　＝QP　而QF　＝QR

∴　　QP＝QR 公理1.

依同理得　QR＝RK＝KL…………

故　　NPQRKL爲等邊

今　　$\angle NPQ = \angle PQR = \angle QRK \cdots\cdots$　§ 85.

故　　NPQRKL等角

因知　NPQRKL爲有法六邊形　§ 429.

今　　$DP = PQ = QF$

$$\therefore \quad PQ = \frac{1}{3} DF = \frac{1}{3} R \sqrt{3}$$

例題440.

但　　$DE = R$　§ 409.

$$\therefore \quad \frac{ABCDEF}{NPQRKL} = \frac{R}{\left(\frac{1}{3} R \sqrt{3}\right)^2} = 3$$

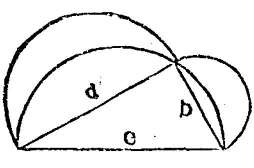
§ 446.

即　外面之六邊形之面積三倍于內中之六邊形之面積　Q,E,D,

例題472.設以直角三角形之兩腰爲直徑向外作兩半圓由此全形內減去弦上半圓其餘形與原三角形爲等積

設　a及b爲rt△之二腰而C爲其弦

求證　于以a及b爲直徑向外作兩半圓與三角形之面積相作成AECFB 形自此形內減去以弦爲直徑所作之半圓其所餘者等于與三角形



證　以a及 b 爲半徑所作之兩半圓之面積之和

$$= \frac{1}{8} na^2 + \frac{1}{8} nb^2$$

§463.

$$=\frac{1}{8}n(a^2+b^2)$$

$$=\frac{1}{8}nc^2 \qquad §371.$$

但　C 上所作之半圓之面積$=\frac{1}{8}nc^2$

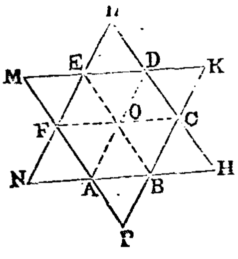
今　a及b上所作之半圓之面積和等于弦線所作之半圓之面積矣.

但　AECFB形爲a及b上所作之半圓面積和中加入之角形之面積　　Q,E,D,

例題473.引長有法六邊形之六邊所成之星形與原六邊形之兩倍爲等積.

設　ABCDEF 爲有法六邊形將各邊之兩端引長之令相遇于H,K,L,M,N,P.諸點

求證　HKLMNP,星形多邊形與 ABCDEF有法六邊形之二倍等值



證　自六邊形之中心點O至各角頂作OA,OB,OC,OD,OE,OF,

$$\angle AOB=\frac{1}{6}\times 360^0=60^0$$

§436.

$\angle FAB = \angle ABC = 120^0$ §438.

$\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA$

$= 60^0$ §437.

故 AOB為等邊三角形 §148.

但 $\angle BAP = \angle ABP = 60^0$ §85.

$\therefore$ $\angle APB = 60^0$ §131.

故 PAB為等邊三角形 §148.

且 $\triangle PAB = \triangle AOB$ §139.

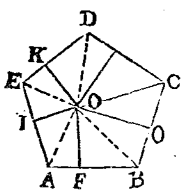
依同理得$\triangle HBC = \triangle BOC$等

然 $\triangle$s PAB,AOB,HBC,BOC等相和即為HKLMNP星形而$\triangle$s AOB,BOC等相和為ABCDEF六邊形

$\therefore$ HKLMNP 星形$\doteqdot 2 \times$ABCDEF 六邊形

Q,E,D,

例題474. 由有法多邊形內任一點至其諸邊之垂線之和等于此多邊形之邊心距以其邊數乘之之積



設 ABCDE為n邊有法多邊形而OF,OG,OH,OK,OL等為自此形內之任一點至各邊所作之垂線今定r為邊心距P為周界

求證 $OF+OG+\cdots\cdots\cdots=nr$

證 自O至各角頂以線連之

則 $\triangle AOB$面積$=\frac{1}{2}AB\times OF$ §403.

$\triangle BOC$面積$=\frac{1}{2}BC\times OG$

$\triangle COD$面積$=\frac{1}{2}CD\times OH\cdots\cdots\cdots$

但 $AB=BC=CD\cdots\cdots\cdots$ 題設

今 多邊形之面積爲$\triangle$AOB,BOC,COD等三角形面積之和

$\therefore$ 多邊形面積$=\frac{1}{2}AB(OF+OG+OH+OK+OL)$

然 多邊形面積$=\frac{1}{2}P\times r=n\times\frac{1}{2}AB\times r$

§459.

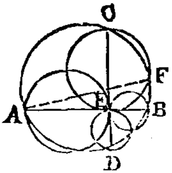
$\therefore$ $\frac{1}{2}AB\times(OF+OG+OH,OK,OL,)$

$=n\times\frac{1}{2}AB\times r$ 公理1

$\therefore$ $OF+OG+OH+OK+OL=nr$

Q,E,D,

例題475. 設圓之兩弦彼此垂直則以其四線分爲直徑所作之四圓之和與原圓爲等積



設 AB,CD二弦正交于E以AE,EBC EED爲直徑作四圓

求證 ⊙AE＋⊙EB＋⊙CE＋⊙ED≑已知⊙

證 在已知⊙作AF直徑

任一⊙面積$=\pi R^2=\frac{1}{4}\pi D^2$ §463.

故諸⊙面積之和

$=\frac{1}{4}\pi\overline{AF}^2+\frac{1}{4}\pi\overline{EB}^2+\frac{1}{4}\pi\overline{CE}^2+\frac{1}{4}\pi\overline{ED}^2$

$=\frac{1}{4}\pi\left(\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+\overline{CE}^2+\overline{ED}^2\right)$

但 $\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+\overline{CE}^2+\overline{ED}^2=\overline{AF}^2$

問題267.

$\therefore\ \frac{1}{4}\pi\left(\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+\overline{CE}^2+\overline{ED}^2\right)=\frac{1}{4}\pi AF^2$

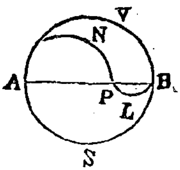
然 ⊙AF面積$=\frac{1}{4}\pi\overline{AF}^2$ §463.

故 ⊙AE＋⊙EB＋⊙CE＋⊙ED≑⊙AF

公理1

例題476.設分一圓之直徑爲兩線分,以此兩線分爲直徑,於其兩側各作兩半圓周,分原圓爲兩分,則此兩分之

比,等於此直徑上兩線分之比.



設　AB爲已知⊙之直徑,而P爲AB上之任一點,與圓心相距爲x.則AP爲$R+x$.

而　PB爲$R-x$,以AP,PB爲直徑,於AB之二傍作二半圓.

求證　$\dfrac{\text{ANPLBS面積}}{\text{AVBLPN面積}}=\dfrac{R+x}{R+x}$

證　任何圓之面積$=\pi R^2=\dfrac{1}{4}\pi D^2$

§463.

而　半圓之面積$=\dfrac{1}{8}\pi D^2$

$$\frac{\text{ANPLBS面積}}{\text{AVBLPN面積}}$$

$$=\frac{\text{半圓ANP}+\text{半圓ASB}-\text{半圓PLB}}{\text{半圓AVB}+\text{半圓PLB}-\text{半圓ANB}}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\pi(R+x)^2+\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{8}\pi(R-x)^2}{\frac{1}{2}\pi R^2+\frac{1}{8}(R-x)^2+\frac{1}{8}\pi(R-x)^2}$$

$$=\frac{(R+x)^2+4R^2-(R-x)^2}{4R^2+(R^2-x)^2-(R+x)^2}$$

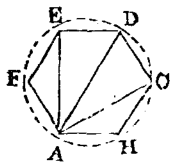
$$=\frac{4R^2+4Rx}{4R^2-4Rx}$$

$$=\frac{R+x}{R-x}$$

例題477.聯有法多邊之任一頂於不相鄰之諸頂，所作之諸對角線，分其角爲比邊數少二之若干等分

設　ABCDEF爲n邊之有法多邊形，自A至不相連之諸角頂作AE，AD，AC諸對角線

求證　此諸對角線分∠EAB爲n—2等分



證　自n邊有法多邊形中之任何一角頂．至不相連之角頂可作n—3對角線。而分此角爲n—2分

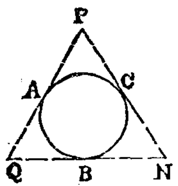
令　於多邊形作一外切圓。

則　AB，BC，CD，DE，EF，FA諸弧皆等．

∴　n—2角中之任一角之度數。等於任一弧之二分之一

∴　n－2各角皆相等

例題478.求作一已知圓之外切等邊三角形



設　ABC爲圓

求　作一外切等邊三角形

作圖　以A.B,C三點爲角頂，

作　一內切等邊三角形　§470．

通過A，B，C作三切線．　(§317.)

而　令其相交於Q，N，P，

則　QNP即爲求作之三角形矣

證　AB弧＝BC弧＝AC弧＝120°

$\angle$P以$\frac{1}{2}$(AB△＋BC弧－AC弧)＝$\frac{1}{2}$AC弧度之　§296.

∴　$\angle P=60^{\circ}$

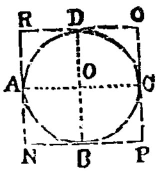
依同理$\angle N=60^{\circ}=\angle Q$

∴　QNP爲等邊三角形　§148.

例題479.求作一已知圓之外切正方形

設、　ABC爲已知⊙

求　作此圓之外切正方形



作圖　分圓周爲四等弧於A,B,C,D.　§467.

通過A,B,C,D作四切線，令相交於N,P,Q.R.

則　nbQR即爲所求之正方形

證　P可以$\frac{1}{2}$(CDB弧－BC弧)度之　§296.

即　$\frac{1}{2}$乘$\frac{1}{2}$圓周亦卽$\frac{1}{4}$圓周

∴　$\angle P=90^{\circ}$

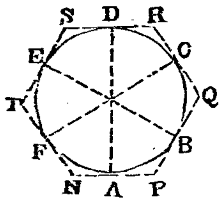
依同理$\angle Q=\angle R=\angle N=90^{\circ}$

則 NPQR等邊且等角故知NPQR爲正方形

Q,E,F,

例題480 求作一已知圓之外切有法六邊形

設 ABC爲已知圓求作圓外切有法六邊形



作圖 分圓周爲六等弧於A,B,C,D,EF各點 §469.

通過諸點作諸切線令相交於N,P,Q,R,S,T。

則 NPQRST則爲所求之有法六邊形矣.

證 P可以$\frac{1}{2}$(AEB弧—AB弧)度之 §296.

卽圓周之$\frac{4}{6}$之$\frac{1}{2}$即圓周之$\frac{1}{2}$

依同理 ∠Q,R,S,T,N 諸角之任一角之度數爲圓周之$\frac{1}{3}$

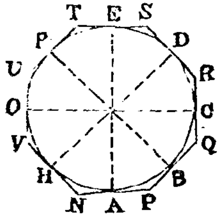
故 NPQRST爲等角六邊形因知爲有法六邊形 例題454.

Q,E,F,

例題481.求作一已知圓之外切有法八邊形

設 ABC爲已知圓

求 作外切圓有法八邊形



作圖　分圓周爲八等分於A,B,C,D,E,F,G,H.　　§468.

通過諸點作諸線令相交於N,P,Q,R,S,T,U,V.

則　NPQRSTUV即爲所求之八邊形

證　∠P可以$\frac{1}{2}$(AEB弧—AB弧)度之 §296.

即　爲圓周之$\frac{6}{8}$之$\frac{1}{2}$即爲圓周之$\frac{3}{8}$

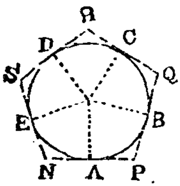
依同理∠SQ.S,T,U,V,N,各爲圓周之$\frac{3}{8}$

故　NPQRSTUV爲有法八邊形　例題454.

例題482.求作一已知圓之外切有法五邊形.

設　ABC爲與圓

求　作外切有法五邊形



作圖　分圓周爲五等弧於A.B,C,D,E.　　§473.

通過各點作五切線且令交於N,P,Q,R,S.

則　NPQRS即爲所求之有法五邊形矣.

證　∠P可以$\frac{1}{2}$(AOB弧—AB弧)度之

§279.

則爲圓周之$\frac{3}{5}$之$\frac{1}{2}$亦即圓周之$\frac{3}{10}$

依同理知$\triangle$Q,R,S,N各爲圓周之$\frac{3}{10}$

故　　NPQRS爲有法五邊形　　　例題454.

例題483.求過一已知點作一直線，分一已知圓周爲兩分，

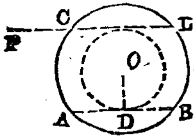
此兩分之比若3：7.

設　　ABD,爲已知⊙P爲已知點

求　　作一線通過P，而分圓周爲二分令其相比

若3：7.

作圖　平分與圓周爲十等分　　　§472.



命　　AB弧爲三等分.

作　　AB,自圓心O至AB作OD垂線。

且　　以O爲心,OD爲半徑作圓自P

點至內圓作PCD切線.

則　　PCD'卽爲所求之線分.

證　　CD 弦=AB弦　　　§249.

$\therefore$　　CD'弧=AB弧　　　§240.

但　　AB 弧=$\frac{3}{10}$圓周　　　作圖

$\therefore$　　CD 弧=$\frac{3}{10}$圓周　　　公理1.

$\therefore$　　CD'弧：CAD'弧=3：7

Q,E,F,

例題484.求作一圓周,等於兩已知圓周之和

設　C及C'爲R及R'爲半徑所作之二圓周

求　作一圓周等於C+C'

分析　$C=2\pi R$而$C'=2\pi R'$　§458.

$\therefore\ C+C'=2\pi(R+R')$

Q,E,F,

作圖　以R+R'爲半徑,作圓周即所求之圓周矣.

證　以R+R'爲半徑所作之圓周,等於

$2\pi(R+R')$.　§458.

即　$2\pi(R+R')=2\pi R+2\pi R=C+C'$

Q,E,F,

例題485.求作一圓周等於兩已知圓周之差

設　C及C'爲以R及R'爲半徑所作之二圓周

求　作一圓周等於C—C'

分析　$C=2\pi R$而$C'=2\pi R$　§458.

$\therefore\ C-C'=2\pi(R-R')$

Q,E,F,

作圖　以R—R'爲半徑作圓周即爲所求之圓周矣.

證　以R—R'為半徑所作之圓周等於

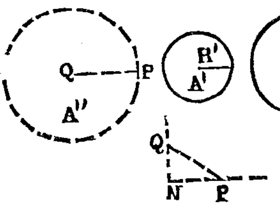
$2\pi(R-R')$ §458.

即　$2\pi(R-R')=2\pi R'=C-C'$

Q,E,F,

例題486.求作一圓與兩已知圓之和為等積.

設　A及A'為以R及R'為半徑所作之二圓



求　作一圓與A+A'等值.

作圖　作Qnprt∠令NP=R而NQ=R' 作QP以Q
P為半徑作A"圓

則　A"圓即為所求之圓矣.

證　$A=\pi R^2$而$A=\pi R'^2$ §463.

$$\overline{QP}^2=\overline{nP}^2+\overline{nQ}^2$$

$$\therefore A''=\pi\overline{QP}^2=\pi(\overline{nP}^2+\overline{nQ}^2)$$

$$=\pi(R^2+R'^2)$$

今　$\pi(R^2+R'^2)=\pi R^2+\pi R'^2$

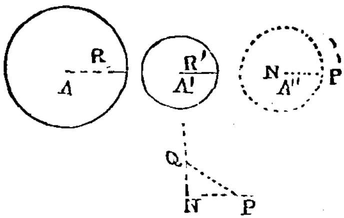
$\therefore\ A'' \doteqdot A + A'$

Q,E,D,

例題487.求作一圓與兩已知圓之差爲等積

設　A及A',爲以R及R'爲半徑所作之二已知圓

求　作一圓與A－A'等值.



作圖　作QNP rt∠令np＝R'以Q爲心R爲半徑,作弧,交NP於P

以　NP爲半徑,作A"圓

則　A"圓卽爲所求之圓矣.

證　$A = \pi R^2 \quad A' = \pi R'^2$ 而 $A'' = \pi\,\overline{np}^2$

§463.

但　$\overline{NP}^2 = \overline{QP}^2 - \overline{nQ}^2$　§372.

$\therefore\ A'' = \pi\,\overline{NP}^2 = \pi\,(\overline{QP}^2 - \overline{NQ})$

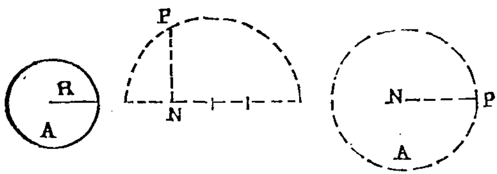
$= \pi(R^2 + R'^2)$

$= \pi R^2 - \pi R'^2$

$\therefore\ A'' \Leftrightarrow A - A'$

例題488.求作一圓與已知圓之三倍為等積

設　A為已知圓,R為其半徑求作A'圓等於 3A



作圖　作NP令等於$R\sqrt{3}$　　例題289.

以　nP為半徑,作A'圓,即為所求之圓矣.

證　$A = \pi R^2$　　§463.

而　$A' = \pi \overline{NP}^2 = \pi (R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2$

$\therefore\ A' \Leftrightarrow 3A$

例題489.求作一圓與一已知圓之四分之三為等積

設　A為已知圓R為半徑

求　作A'圓與$\frac{3}{4}$A為等值

作圖　作NP令等於$R\sqrt{3}$　　例題289.

以　$\frac{1}{2}$之nP為半徑作A'圓即為所求之圓矣

證　$A = \pi R$　　§289.

而　$A' = \pi\left(\frac{1}{2}NP\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{2}R_1\sqrt{3}\right)^2$

$= \frac{3}{4}\pi R$

$\therefore\ A' = \frac{3}{4}A$

例題490.求作一圓與一已知圓之比若m：n

設　A為已知圓R為半徑。求作A'圓令與A圓相比若m：n

作圖　作NP令等於$R_1\sqrt{\frac{m}{n}}$　　例題289.

以　NP為半徑作圓即所求之圓矣.

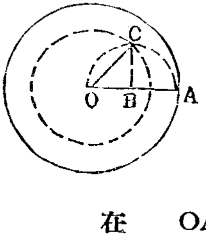
證　$A = \pi R^2$　　§463.

而　$A' = \pi\overline{NP}^2 = \pi\left(R_1\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2 = \pi R^2 \times \frac{m}{n}$

$\therefore\ A' : A = \pi R' \times \frac{m}{n} : \pi R^2$

$= \frac{m}{n} : 1 = m : n$　　Q,E,F,

例題491.有一已知圓求以一同心圓周分之為兩等積分.



設　O為已知圓之圓心而OA為已知圓之半徑，求作一同心圓於已知圓內且分已知圓為二等分

作圖　以OA為直徑作一半圓

在　OA之中點B作BC垂線遇半圓於C作OC。以O為心OC為半徑作圓周即所求之圓周

矣

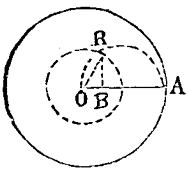
證　$\overline{OC}^2=\overline{OB}^2+\overline{BC}^2$　　§371.

$=\overline{2OB}^2=\dfrac{\overline{4OA}^2}{2}=\dfrac{\overline{OA}^2}{2}$

$\therefore\ n\overline{OC}^2=\dfrac{n\overline{OA}^2}{2}$

但　$n\overline{OC}^2$ 爲內圓之面積而$\dfrac{n\overline{OA}^2}{2}$ 爲外圓面積之二分之一　　Q,E,F,

例題492.有已知圓求以諸同心圓周分之爲五等積分



設　O 爲已知圓之圓心而 OA 爲其半徑

求　作四同心圓周分已知圓爲五等分

作圖　O分OA爲五等分　　§307.

以　OA爲直徑作半圓周

B　爲自 D平分 OA 線之第一點作⊥遇半圓周于R 以R爲心OR爲半徑作圓周此圓周爲已知圓五分之一

K　爲自O 平分 OA 線之第二點作第二垂線遇半圓周于S

以　O 爲心 OS 爲半徑作圓周爲已知圓五分之

二

依同理作第三圓周及第四圓周

證 $\overline{OR}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BR}^2$ §371.

$= \overline{OB}^2 + OB \times BA$ §370.

$= OB(OB + BA)$

$= \frac{1}{5} AB \times OA = \frac{1}{5} \overline{OA}$

$\therefore\ n\overline{OR}^2\ \frac{1}{5} n\ \overline{OA}^2$

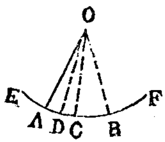
但 $n\overline{OR}^2$ 爲以 OR 爲半徑所作之圓之面積而

$n\overline{OA}^2$ 爲與圓之面積 §463.

依同理得 $n\overline{OR}^2 = \frac{2}{5} n\ \overline{OA}^2$ …… Q,E,F,

例題493. 求作18^0,36^0,9^0之角

設 EF爲以O爲心



OA爲半徑所作之弧

(1) 求作36^0角

命AB弧爲圓周之十分之一作OB

則 $\angle AOB = \frac{1}{10} \times 360^0 = 36^0$ §288.

(2) 求 作18^0角

作 OD平分$\angle AOC$

則 $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\times 36^0 = 18^0$

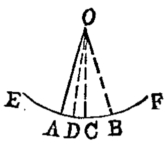
(3) 求 作9^0角

作 OD平分$\angle AOC$

$\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\times 18^0 =$

9^0 Q,E,D,

例題494.求作12^0,24^0,b^0之角



設 EF爲以O爲心OA爲半徑所作之弧

(1) 求作24^0角

命 AB 弧爲圓周$\frac{1}{15^0}$作OB

§475.

$\angle AOB = \frac{1}{15}\times 360^0 = 24^0$ §288.

(2) 求 作12^0角

作 OC平分$\angle AOB$

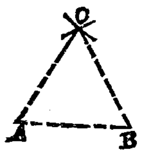
則 $\angle ACC = \frac{1}{2} < AOB = \frac{1}{2}\times 24^0 = 12^0$

(3) 求 作6^0角

作 OD平分$\angle AOC$

則 $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\times 12^0 = 6^0$

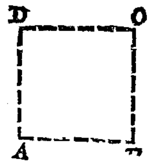
例題495一等邊三角形



作圖　O作AB直線與已知邊等長

以　A及B爲心AB爲半徑作二弧命相交于C作CA及CB則△ABC 即爲所求之等三角形矣　Q,E,D,

例題496.一正方形



作圖　O作AB直線與已知邊等長

在　A,B二足上作AD及BC二垂線令各與AB等長作CD

則　ABCD即爲所求之正方形矣

證　AD=BC=AB　作圖

AD // BC　§104.

∴ ABCD當爲平行四邊形　§183.

而　AB等于DC且平行

∴ ABCD爲等邊形.

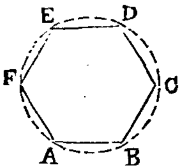
然　∠A=∠B=90°

而　∠C及D爲∠A及B之補角　§115.

∴ ∠C=D=90°

∴ ABCD爲正方形.

例題497.一有法六邊形



作圖　以已知邊為半徑作ABC圓周

自　圓周之任一點起，作與已知邊長之六弦線

則　ABCDEF 即為所求之有法六邊形矣

例題498.一有法八邊形

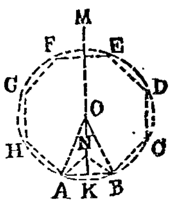
作圖　作AB直線與已知邊等長

在　AB上作km⊥平分線

在　km上截取kn令等於AK作AN及BN

在　Nm上截取NO令等於AN，作AO及BO以O為心.AO為半徑作一圓

在　圓內作與AB等長之八弦線



則　ABCDEFGH 即所求之有法八邊形矣.

證　$\angle NOA=\angle NAO$　§145.

$\angle ANK=\angle NAK=45^0$ §145.

但　$\angle ANK=\angle NOA+\angle NAO$

§137.

$$\therefore\ \angle NOA=\frac{1}{2}ANK=22\frac{1^0}{2}$$

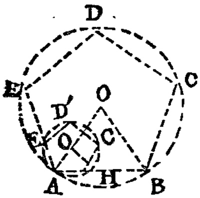
而　$AOB=2NOA=45^0$

但　　$\angle AOB$ 爲有法八邊形之圓心角即等於

$\frac{1}{8}$之360°亦即45°，

∴　　ABCDEFGH爲有法八邊形

例題499．一有法五邊形



作圖　以任一點O爲心任何適當之長爲半徑作圓於圓內作 A'B'C'D'E'內切有法五邊形

§473.

在　　AB'或AB'之延線上取 AB'命等於與長．

自　　B作BO∥B'O'半徑

且　　遇AO'或AO'之延長線於O.

以　　O爲心，OB爲半徑．作圓，於圓內作與AB等長之五弦線。

則　　ABCDE即所求之有法五邊形矣。

證　　$\angle BOA=\angle B'O'A$　　§112.

∴　$\angle BOA$爲有於法五邊形之圓心角．

∴　ABCDE爲有法五邊形．

例題501．及502其構圖及證明之法。略與例題500同，學者自習之可也。

例題503．一圓之半徑爲12寸，求其面積。

12吋＝1呎．

$\therefore$ ⊙面積$=\pi R^2=(3.1416\times 1^2)$方呎

$=3.1416$方呎 §463.

例題504．一圓之直徑爲8尺。求其圓周及面積

圓周$=2\pi R=3.1416\times 8=25.1328$呎 §453.

而 ⊙面積$=\pi R^2=(3.1416\times 4^2)$方呎

$=3.1416\times 16$方呎

$=50.2656$方呎 §463.

例題505．設一圓之半徑爲R，其內切有法五邊形之一邊爲a，求其邊心距．

$$a=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \text{例題463.}$$

$$\text{而} \quad r^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \qquad §372.$$

$$=R^2-\left(\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$=R^2-\frac{1}{16}R^2(10-2\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{16}R^2(6+2\sqrt{5})$$

$$\therefore r=\frac{1}{4}R\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

例題506．設一圓之半徑爲R，其內切有法多邊形之邊爲a，

試證其邊心距爲$\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$

$$r^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2=R^2-\frac{1}{4}a^2 \qquad \S 372.$$

即　$4r^2=4R^2-a^2$

$2r\sqrt{4R^2-a^2}$

$$\therefore \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$$

例題507. 設一圓之半徑爲16吋，求其內切有法十邊形之面積。

$$S=\frac{1}{2}rP \qquad \S 459.$$

$$r=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{1}{4}\times 16\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$=4\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

例題443.

$$a=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{16(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$=8(\sqrt{5}-1)$$

例題443.

$$\therefore \quad P=10a=10\times 8(\sqrt{5}-1)=80(\sqrt{5}-1)$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times 80(\sqrt{5}-1)$$

$$=160(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$=160(2.236-1)\sqrt{10+2\times2.23606}$$

$$=160\times1.236\times3.804$$

$$=752.28$$

答752.28方呎　　　　Q,E,D,

例題508.設一圓之半徑爲20吋求其內切有法十二邊形一邊

$$a=R\sqrt{2-\sqrt{3}}\qquad\text{例題465.}$$

$$=20\sqrt{2-17.3205}$$

$$=20\times517=10.34\text{吋}$$

例題509.設一圓之半徑爲25吋求其內切有法五邊形之周界

$$a=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\qquad\text{例題463.}$$

$$P=5a=5\times\frac{1}{2}\times25\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$=6.25\sqrt{10-2\times2.23606}$$

$$=6.25\times2.351=146.94\text{吋}\qquad\text{Q,E,D,}$$

例題510.一公園成有法十邊形每邊長100碼求此園之面積

$$S=\frac{1}{2}rP=\frac{1}{2}r\times10a=5ar\qquad\S459.$$

$$\text{今}\quad a=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)\qquad\text{例題443.}$$

$$\therefore R=\frac{2a}{\sqrt{5}-1}=\frac{2a(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2(\sqrt{5}+1)^2-a^2}$$

例題506.

$$=\frac{1}{2}a\sqrt{5+^2\sqrt{5}}$$

$$\therefore\quad S=5a\times\frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5}{2}a2\sqrt{5-2\times 2.23606}$$

$$=\frac{5}{2}\times 100^2\times 3.077=76925$$

答 76925方碼 Q,E,D,

例題511.一塊地成有法六邊形其面積共 16.627.84平方碼今欲築牆圍之牆價每碼\$2問共價幾何

$$S=\frac{1}{2}rp=\frac{1}{2}r\times 6a=3ar\ \S\quad \S 459.$$

$$\therefore\quad 16627.84=3ar$$

今 $a=R$,及$r=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$ 例題442.

$$\therefore\quad r=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad 3a\times\frac{1}{2}a\sqrt{3}=\frac{1}{2}6627.84$$

$$\therefore\quad a^2=\frac{16627.84}{\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{16627.84}{\frac{3}{2}\times 1.732}=6400$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{6400}=80$$

$$P=6a=6\times 80=480$$

$$480\times 2元=960元 \qquad Q,E,D,$$

例題512.設圓之內切有法n邊形之一邊爲16呎求內切有法2n邊形之一邊

內切2n邊多邊形之一邊

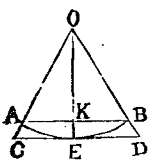
$$=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}$$

$$=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-16^2})}$$

$$=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-256})}$$

$$=\sqrt{2R(R-\sqrt{R^2-64}} \qquad Q,E,D,$$

例題513.設一圓之半徑爲R其內切有法多邊形之一邊爲 a 試證其相似外切多邊形之一邊爲$\dfrac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$



設 AB 爲內切有法多邊形之一邊即aR爲圓之半徑而CD爲相似外切多邊形之一邊

求證 $CD=\dfrac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$

證 $OK=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AK}^2}$ §372.

$$=\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$$

但 $OK=OE=AB:CD$ §445.

$$\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}:R$$

$$=a:CD$$

$$\therefore\quad CD=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}\qquad §327.$$

例題514.設兩同心圓周之長爲650呎及425呎則此兩圓周之圓環形之寬幾何

設　R爲外圓之半徑,而R'爲內圓之半徑.

因　$C=2\pi R$　§458.

$$R=\frac{650}{2\pi}\text{而}R'=\frac{425}{2\pi}$$

$$\therefore\quad R-R'=\frac{650}{2\pi}-\frac{425}{2\pi}=\frac{225}{2\pi}=\frac{112,5}{\pi}$$

$$=1125\div3.1416$$

$$=35.809875\text{呎}$$

例題515.設一圓之半徑爲9呎4吋求長5呎10吋之弧所對之圓心角.

5呎10吋＝70吋；9呎4吋＝112吋

$C=2\pi R=2\times3.1416\times112$　§458.

$=703.7184$吋

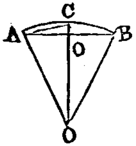
703.7184 : 70＝360° : 所求角　§287.

$$\therefore\quad \text{所求角}=\frac{70\times360^\circ}{7037184}=35.8^\circ\qquad §327.$$

例題316.設一弓形之弦爲10呎其圓之半徑爲16呎求此扇形

之面積

$$AB=10$$



而 $AO=16=BO$

ACB分圓面積

＝OACB扇形面積減△ABO面積作

—O'A'C'B'內切扇形令與OACB相似

$\therefore\quad A'B':AB=O'B':OB$

$A'B':10=1:16$

$\therefore\quad A'B'=\dfrac{10}{16}=0.625$

求 得扇形所對之弧之近似數 §480.

$C_1=0.625$ 0.625.

$C2=\sqrt{2-\sqrt{.625}}=0.3164877$ 0.6329754

$C4=\sqrt{2-\sqrt{4-0.31648772}}=0.1587446$

0.6349784

$C8=\sqrt{4-\sqrt{2-0.1587446^2}}=0.0794350$

0.6354800

$C16=\sqrt{2-\sqrt{4-0.0794350^2}}=0.039734$

3 0.6357488

$C32=\sqrt{2-\sqrt{4-0.0397343^2}}=0.019868$

$$\begin{array}{r} 3\ 0.6357856 \\ C64=\sqrt{2-\sqrt{4-\sqrt{198683^2}}}=0.0099343 \\ 0.6357952 \end{array}$$

故　A'B'弧之近似數爲0.6358

∴　O'A'C'B'面積 $=\frac{1}{2}\times 0.6358=0.3179$　§462.

∴　OACB面積 $=16^2\times 0.3179=81.3824$　§465.

而　△ABO面積 $=\sqrt{S(S-a)(3-b)\ 3-c)}$　例題405.

$=\sqrt{21\times 11\times 5\times 5}=75.99$

∴　分圓面積 $=(81.38-75.99)$ 方呎

$=5.39$ 方呎

例題517.設一扇形之圓心角爲20°其圓之半徑爲20吋求此扇形之面積

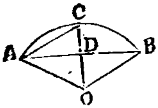
割圓面積 $=\frac{20}{360}\times$ ⊙面積　§462.

$=\frac{20}{360}\times 3.1416\times 20$

$=69.81$ 吋

例題518.設一弧之半之弦爲12呎其圓之半徑爲18呎求此全

弧所對之弓形之高



$$\overline{AC}^2 = 2OC \times CD \qquad §370.$$

$$12^2 = 2 \times 18 \times CD$$

$$36CD = 4$$

$\therefore \quad CD = 4$

答 4 呎

例題519. 設一圓之直徑爲35呎求與此圓爲等積之正方形之一邊

$$\odot 面積 = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 \qquad §463.$$

$$= \frac{1}{4} \times 3.1416 \times 35^2$$

$$= 962.115$$

正方形之邊 $= \sqrt{962.115} = 31.02$呎

例題520. 設一圓之直徑爲15呎求其二倍大及三倍大之圓之直徑

定S'及D'爲所求之圓之面積及直徑

則 $S : S' = \left(\frac{1}{2}D\right)^2 : \left(\frac{1}{2}D'\right)^2 = D^2 : D'^2$

§864.

(1) $S : 2S = 15^2 : D'^2$

$1 : 2 = 225 : D'^2$

$D'^2=2\times225=450$

$\therefore\ D'=\sqrt{450}=21.21$

(2) $S:3S=15^2:D'^2$

$1:3=225:D'^2$

$D'^2=3\times225=675$

$\therefore\ D'=\sqrt{675}=25.98$

答一爲21.21呎一爲25.98呎

例題521.設一圓之直徑爲11吋以諸同心圓周分之爲五等分求此諸圓之半徑

定S'及R'爲所求之圓之面積及半徑

(1 $S:S'=R^2:R'^2$ §464.

$S:\frac{1}{5}S=\left(\frac{11}{2}\right)^2:R'^2$

$5:1=\frac{121}{4}:R'^2$

$R'=\sqrt{6.05}=2.46$

答2.46吋

(2) $S:S'=R^2:R'^2$

$S:\frac{2}{5}S=\left(\frac{11}{2}\right)^2:R'^2$

$5:2=\frac{121}{2}:R'^2$

$R'=\sqrt{12.1}=3.48$

答3.48吋

(3) $S:S'=R^2:R'^2$

$S:\frac{3}{5}S=\left(\frac{11}{2}\right)^2:R'^2$

$5:3=\frac{121}{4}:R'^2$

$R'^2=\frac{363}{2}=18.15$

$\therefore\ R=\sqrt{18.15}=4.26$

答4.26吋

$S:S'=R^2:R'^2$

$S:\frac{4}{5}S=R'^2:R'^2$

$5:4=\frac{121}{4}:R'^2$

$R'^2=\frac{121}{5}=24.2$

答4.29吋

例題522.設一有法六邊及一有法八邊形之周界皆爲 840 呎則此八邊形大於此六邊形者爲幾平分呎

六邊形之一邊$=\frac{1}{6}\times 840=140$呎六邊形之面積等於以140爲底之等邊三角形之面積之六倍

$\triangle$面積$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{140^2\times\sqrt{3}}{4}=4900\times 1.73$

$=8487.045$ 例題404.

$\therefore$ 六邊形面積$=6\times 8487.045$

$=50922.270$方呎

而 八邊形之一邊$=\frac{1}{8}\times 840=105$呎

$a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 例題464.

$$\therefore\quad R=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$ 例題506.

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{2-\sqrt{2}}-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2(2+\sqrt{2})}{4-2}-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2(2+\sqrt{2})-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+2a^2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}a\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$S=\frac{1}{2}rP=\frac{1}{2}r\times 8a=4ar$ §459.

$$\therefore\ S=4\times105\times\frac{1}{2}=105\times\sqrt{3\times2\sqrt{2}}$$

$$=2\times105^2\times\sqrt{3\times2\times1.41421}$$

$$=2\times105^2\times2414$$

$=53228.700$方呎

53228.700方呎-50922.270方呎

$=2306.430$方呎

例題523.設一車輪之直徑爲28吋車行十里此輪當轉幾週.

28吋$=2\frac{1}{3}$呎10哩$=10\times5280$呎

$=52800$呎

$C=\pi D=3.1416\times\times2\frac{1}{3}$呎$=73304$呎

§458.

共轉次數$=52800\div7.3304=7202+$

例題524.設車行半里其輪轉264週求此輪之直徑

$\frac{1}{2}$哩$=\frac{1}{2}\times5280$呎$=2640$呎

$\therefore$ 車輪之周$=2640$呎$\div264=10$呎

車輪之直徑$=10$呎 $:3.1416=3.1831$呎

例題525.設三有法八邊形之一邊爲6呎.7呎及8呎.求與此三形之和爲等積之有法八邊形之一邊.

設 x爲所求之有法八邊形之邊兩邊數相同之

多邊相比若每個相當邊之平方相比

$x^2=6^2+7^2+8^2$ 　　例題381.

$x=\sqrt{6^2+7^2+8^2}=\sqrt{36+49+64}$

$=\sqrt{149}=12.206$呎

例題526.一圓池之直徑爲100碼其外繞以闊10 呎之路求此路之面積

圓池之半徑$=\frac{1}{2}\times 100$碼$=50$碼$=150$呎.

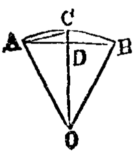
圓池之面積$=\pi R^2=\pi\times 22500$ §463.

路及池之面積$=\pi R^2=\pi\times 160^2=\pi\times 25600$.

$\therefore$ 路之面積$=\pi\times 25600-\pi\times 22500=\pi\times 3100$

$=3.1416\times 3100=9738.96$方呎

例題527.一橋成圓弧形其弦爲120呎,弧之最高點,距橋脚平地高15呎求此弧之半徑.



設　AB弦爲120呎而CD爲15呎

$\overline{AC}^2=2OC+CD$ 　　§370.

但　$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$ 　　§371.

$=60^2+15^2$

$$=3825$$

$$OC=R$$

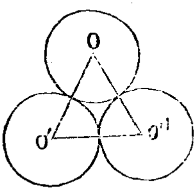
$$\therefore \quad 3825=2R\times 15$$

$$2R=255$$

$$R=127.5\text{呎}$$

例題528.作三等圓彼此相切，設其公共半徑爲R 求此三圓間所合之面積

設 OO'O" 爲等邊三角形其每邊之長爲2R而其面積爲



$R^2\sqrt{3}$ 例題404.

凡 割圓之每一面積爲圓之$\frac{1}{6}$

即$\frac{1}{6}\pi R$ §462.

但 三圓中間之面積等於等邊三角形之面積內減三割圓之面積

$\because$ 三圓間之面積$=R^2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi R^2$

$$=\frac{1}{2}R^3(2\sqrt{3}-\pi)$$

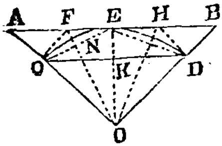
例題529.設圓之內切及外切有法n 邊形之周界爲K及P求其內切及外切有法2n邊形之周界K'及P'

設 AB爲外切多邊形之一邊，CD爲相似內切

多邊形之一邊而與AB平行P,P爲周界

求　作內切及外切有法多邊形，其邊爲與外切及內切有法多邊形之二倍而其周界爲 P,P

作圖　作OE⊥AB並作AO,BO,CE,DE.



作　CF⊥AO

兩　PH⊥BO

則　FH 爲所求之外切有法多邊形之一邊而CE及DE爲所求之內接有法多邊形之一邊

C及D在AO及BO內　§441.

∴　CE弧=DE弧　§245.

因知　CE=DE　§241.

∴　CE及OE爲所求之內接多邊形之邊　§442.

CF及EH爲圓之二切線　§253.

∴　FH所求之外切多邊形之邊

計算

$$\frac{P}{P}=\frac{OA}{OE}$$ §447.

∵　FO=FO及OC=OE　§217.

∴　正△OFC=正AOFE　§151.

∴　FO平分∠COE　§128.

∴　$\frac{OA}{OF}=\frac{AF}{EF}$　§248.

∴　$\frac{P}{P}=\frac{AF}{EF}$　公理1

∴　$\frac{P+p}{p}=\frac{AF+EF}{EF}$　§332.

∴　$\frac{P+p}{p}=\frac{AE}{2EF}=\frac{AE}{FH}$

但　AE在P內如FA在P'內

∴　$\frac{AE}{FH}=\frac{P}{P'}$　§340.

∴　$\frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'}$　公理1

$P'=\frac{2pP}{P+p}$

且　rt△CKE及ENF相似　§356.

因　∠ECK=∠FEN　§110.

∴　$\frac{CK}{CE}=\frac{EN}{EF}$　§351.

但　$\frac{CK}{CE}=\frac{p'}{p'}$　§340.

而　$\frac{EN}{EF}=\frac{p'}{P'}$　§340.

∴　$\frac{p}{p'}=\frac{p'}{P}$　公理1

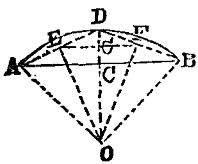
$P'=\sqrt{P\times P'}$　§327.

∴　$p'=\sqrt{\frac{2P^2P}{P+p}}$

例題530. 設圓之內切有法n邊之頂心距為R，其邊心距為r求一等周有法2n邊形之頂心距R'及邊心距r'.

設　AB為已知有法多邊形之一邊而其半徑為邊心距為r.

求　作一等周有法多邊形而其邊數. 為與有法多邊形之二倍且令其半徑為R' 邊邊心距為r,



作圖　O作OD⊥AB幷且AD,BD,OA,OB,

作　OE⊥AD及OF⊥BD作EF

則　EF為所求之多邊形之邊

證　E及F為AD及BD之中點 §245.

$$EF=\frac{1}{2}AB \qquad §189.$$

$\therefore$ $OE=R'$及$OG=r'$

計算令$DG=GC$ §188.

$$\therefore\ OG=\frac{OD+OC}{2}=\text{則}r'=\frac{R+r}{2}$$

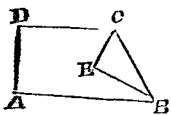
惟 $\overline{OE}^2=OD\times OG$ §367.

$$\therefore\ OE=\sqrt{OD\times OG}$$

$$=\sqrt{OD\times\frac{OD\times OC}{2}}$$

$$\therefore\quad R'=\sqrt{\frac{R(R+r)}{2}}$$

例題531.設四邊形之兩鄰角皆爲直角則其他兩角之平分線必彼此垂線



設　于ABCD四邊形內$\angle$A及D各爲直角而BE平分$\angle$ABC.CE平分$\angle$BCD.

求證　BE$\perp$CE

證　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$

$=4$rt$\angle$s　§208.

但　$\angle A+\angle D=2$rt$\angle$s　題設

$\therefore\quad \angle B+\angle C=2rt\angle$s　公理3

$\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=rt\angle$s　公理7

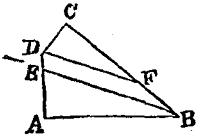
$\therefore\quad \angle EBC+\angle ECB=rt\angle$s

$\therefore\quad \angle BEC$爲rt$\angle$　§131.

$\therefore\quad BE\perp CE$　Q,E,D,

例題532.設四邊形之兩對角皆爲直角則其他兩對之平行線必彼此平行

設　于ABCD四邊形中$\angle$A及C各爲rt$\angle$而BE平分$\angle$ABC,OF平分$\angle$CDA



求證 BE∥DF

證 $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle CDA=4rt\angle s$ §205.

但 $\angle A+\angle s=2rt\angle s$ 題設

$\therefore\ \angle ABC+\angle CDA=2rt\angle s$ 公理3

即 $\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle CDA=2rt\angle s$ 公理7

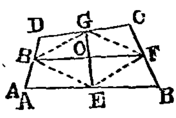
$\therefore\ \angle ABA+\angle ADF=rt\angle$

$\angle EBA+\angle AEB=rt\angle$ §135.

$\therefore\ \angle AEB=\angle ADF$ §84.

$\therefore$ BE∥DF

例題533.聯四邊行之各兩對邊之中點之線必彼此平分



設 ABCDE為四邊形EG及FH.爲連兩對邊中點之直線

求證 EG及FH彼此平分

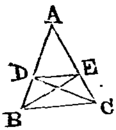
證 作EF,FG.CH.HE.

則 EFGH爲平行四邊形而EG及FH爲其二對角線 例題140.

$\therefore$ EG及FH彼此平分 §184.

Q,E,D,

例題534.設由等腰三角形之底之兩端至其對邊作兩垂線則連此兩垂線足之線必與其底平行



設 ABC爲等腰△CD及BE 爲⊥于等邊 AB及AC之線

求證 DE∥BC

證 rt△CBD及BCE相等 §141.

因 BC=BC

而 ∠CBD=∠BCE §145.

∴ BD=CE §128.

∴ AB—BD=AC—CE卽AD=AE

公理3

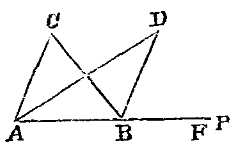
即 △ADE爲等腰

但 △ADE及ABC中有∠A公用

∴ ∠ADE=∠ABC

因知 DE∥BC Q,E,D,

例題535,設AD平分三角形ABC之角A,BD平分其外角CBF則角ADB等于角ACB之半



設 ABC爲三角形AD平分∠A.而BD平分∠CBF外角

求證 $\angle D=\frac{1}{2}\angle C$

證 ∠CBF=∠CAB+∠C

§137.

$\therefore \quad \angle DBF = \angle DAB + \frac{1}{2}C$ 公理7

但 $\angle OBF = \angle DAB + \angle D$ §137.

$\therefore \quad \angle DAB + \frac{1}{2}\angle C = \angle DAB + \angle D$

公理1

$\therefore \quad \angle C = \frac{1}{2}\angle D$ Q,E,D,

例題536，設一弓形之弦爲10呎其圓之半徑爲16呎求此弓形之面積

A,B,C,D,E爲與星形之諸角頂

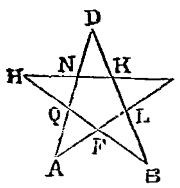
求證$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 2$正角

證 $\angle DNK + \angle CKL + \angle BZP + \angle APQ + \angle EQN$

$= 4rt \angle s$ §207.

又 $\angle DKN + \angle CLK + \angle BPL + \angle AQP + \angle ENQ = 4rt \angle s$

§207.



$\therefore$ $\triangle s$DNK及CKL等底角之和 = 8rt $\angle s$ 公理2

但 于$\triangle s$DNK及CKL等之諸內角之和 = 10rt $\angle s$

§129.

$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=2rt\triangle$

Q,E,D,

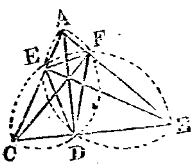
例題537.三角形ABC之三頂垂線AD,BE,及 CF 必平分 DEF之三角

設　ABC爲三角形而ED,EF, FD 爲其諸足之高線

求證　$\angle EDA=\angle EDA$. $\angle FEB=\angle DEB$. $\angle EFC=\angle DFC$

證　以AB, BC, AC 爲直徑作諸⑤此⑤過D及E,E及F,D及F

$\because$　$\triangle$ADB及AEB,CEB及CFB.AFC及ADC爲直角



$=\angle EDF=EBA\left(\frac{1}{2}EA弧度之\right)$

$=\angle ECF\left(以\frac{1}{2}EF弧度之\right)$

$=\angle FDA\left(以\frac{1}{2}AF弧度之\right)$

又　$\angle FEB=\angle FCB\left(以\frac{1}{2}FB弧度之\right)$

$=\angle DAF\left(以\frac{1}{2}DF弧度之\right)$

$=\angle DEB\left(以\frac{1}{2}DB弧度之\right)$

又　$\angle EFC=\angle EBC\left(以\frac{1}{2}EC弧度之\right)$

$=\angle EAD\left(以\frac{1}{2}ED弧度之\right)$

$=\angle DFC\left(以\frac{1}{2}CD弧度之\right)$

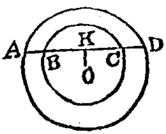
例題538.設一直線爲兩同心圓周所截則此兩圓周間之諸線分均等

設　AD截外圓周于A及D而截內圓周于B及C

求證　$AB=DC$

證　自圓心O作$OK\perp AD$

則　$KA=KD$

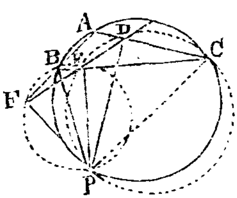


而　$KB=KC$　§245.

$\therefore$　$KA-KB=KD-KC$　公理3

$\therefore$　$AB=DC$　Q,E,D,

例題539.設一圓爲一三角形之外切圓由其圓周上任一點至此三角形之三邊作三垂線其垂線足必在一直線內



設　P爲△ABC之外切圓周上之任一點命PD,PE,PF各爲AC,BC,AB之垂線

求證　FED爲一直線

證　作PB,PC,以PBPC爲直徑各

作一圓周.

$\angle$s PEC及PDC爲直角則以PC爲徑所作之圓周通過E及D　　例題170.

∴ $\angle$s PEB及PFB爲直角則以PB爲徑所作之圓周通過E及F　　例題170.

今 $\angle BPE+\angle EPD+\angle DPC+\angle A=2rt\angle s$　　例題97.

而 $\angle FPB+\angle BPE+\angle PBF+\angle PBE=2rt\angle s$　　例題97.

∴ $\angle BPE\angle EPD+\angle DPC+\angle A+\angle FPB+\angle BPE+\angle PBF+\angle PRE=4rt\angle s$　　公理2.

$\angle BPE+\angle EPD+\angle A+\angle ABE+\angle EBP=3rt\angle s$　　§206.

∴ $\angle DPC+\angle BPF+\angle BPE+\angle PBF-\angle ABC=1rt\angle s$　　公理3

但 $\angle ABC=\angle BFE+\angle BEF$　　§137.

$\angle BFE=\angle BPE$及$\angle BEF=\angle BPF$　　§293.

∴ $\angle ABC=\angle BPE+\angle BPF$

而　　$\angle DPC=\angle PBF=$正角

但　　$\angle DPC=DEC$而$\angle PBF=\angle PEF$ §293.

$\therefore$　$\angle DEC+\angle PEF=$正角

$\therefore$　$\angle DEC+\angle PEC+\angle PEF=2$正角

公理2

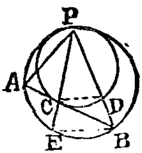
故　　FED為一直線　　§90.

例題540. 設兩圓相內切於P. 而大圓之弦AB, 切小圓於C試證PC平分角APB

設　ⓢPCD及PAB內相切於P而AB為PAB大圓之弦而切PCD小圓於C

求證　$\angle APC=\angle BPC$

證　　引長PC遇大圓之圓周於E作CD及EB



則　　CD // EB　　例題262. §345.

令　　$\angle APC=\angle ABE$　　§293.

而　　$\angle ABE=\angle BCD$　　§110.

$\angle BCD=\angle BPC$

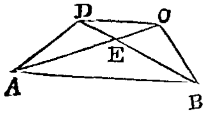
因　　$\frac{1}{2}$CD弧與$\angle BCD$同度

而　　$\frac{1}{2}$CD弧與$\angle BPC$亦同度

$\therefore$　$\angle APC=\angle BPC$　　公理1.

Q,E,D,

例題541.梯形之兩對角線彼此互分,各成兩線分,與他兩線分相比例



設 ABCD爲梯形而AC及BD爲其二對角線相交於E

求證 EA : EB=EC : ED

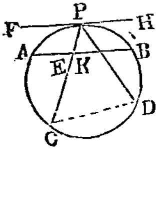
證 △AEB及CED相似

因 ∠AEB=∠CED § 93.

而 ∠EBA=∠EDC § 110.

∴ EA : EB=EC : ED

例題542.設由一圓周上一點P作兩弦,復於P作一切線則此兩弦及由P至與此切線平行之一弦間之兩線分,成逆比例



設 AB弦平行P點之切線而PC及PD二弦,截AB於E及K

求證 PE : PK=PD : PC

證 作CD,∠FPE=∠D 題101.

但 ∠FPE=∠PEK § 110.

∴ ∠PEK=∠D 公理1.

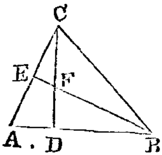
依同理 ∠PKE=∠C

∴　△PEK與PDC相似　§355.

∴　PE : PK=PD : PC　§351.

例題543. 由三角形之兩頂至其對邊之垂線彼此互分各成兩線分與他兩線分成逆比例

設　ABC爲△,而



CD及BE各爲AB及AC之垂線相交于F

求證　FB : FC=FD : FE

證　rt△BDF及CEF相似　§356.

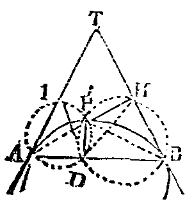
∴　FB : FC=FD=FE　§351.

Q,E,D,

例題544. 設于圓之一弦之兩端作兩切線則由圓周上任一點至此弦之垂線爲至此兩垂線爲至此兩切線之垂線之比例中項

設　AB爲一弦AT及BT爲AB兩端之二切線自圓周之任一點P作PD垂于AB及PL垂于AT,PK垂于BT

求證　PL : PD=PD : PK



證　以PB,PA爲直徑各作一圓周此兩圓周必通過K,D及L諸點

因　△PKB及PDBALP及ADP各爲rt△　例題170.

作　LD及KD

今 $\angle PKB = \angle PBD$ §393.

而 $\frac{1}{2}$AP弧與$\angle PBD$同度 §289.

且 $\frac{1}{2}$AP弧與$\angle LAP$亦同度 §295.

$\therefore$ $\angle PBD = \angle LAP$ 公理1.

$\angle LAP = \angle PDL$ §293.

$\therefore$ $\angle PKB = \angle PDL$ 公理1.

$\because$ $\frac{1}{2}$PB弧與$\angle PAD$同度 §289.

而 $\frac{1}{2}$PB弧與$\angle KBP$亦同度 §295.

$\therefore$ $\angle PAD = \angle KBP$ 公理1.

$\angle KBP = \angle PDK$ §293.

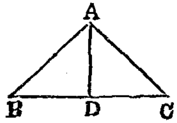
$\therefore$ $\angle PDK = \angle PLP$ 公理1.

$\therefore$ $\triangle$LPD及DPK相似 §355.

$\therefore$ $PL : PD = PD : PK$ §351.

Q,E,D,

例題545.等腰直角三角形之各腰爲弦及由直角頂至弦之垂線之比例中項



設 BAC爲等腰$\triangle$A爲rt $\angle$而AD爲BC之垂線

求證 $BC : AB = AB = AD$

證 $BC : AB = AB = BD$

§367.

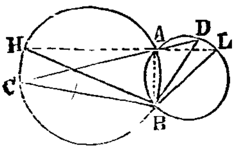
但 $\angle B=\angle DAB=45^\circ$

$\therefore$ BD＝AD §147.

Q,E,D,

$\therefore$ BC：AB＝AB：AD §351.

例題546.設兩圓相交于A及B.過A作割線CAD，為圓周所限于C及D，則兩直線BC，BD之比等于此兩圓之直徑之比



作 CAD，割兩圓周于C,D二點並作BC與BD又BK，及BL直徑

求證 BC：BD＝BK：BL

證 作AK及AL在同一直線上

因 ∠KAB及LAB為rt∠ §290.

$\therefore$ AK，AL同在一直線上 §90.

在 △CBD及KBL內.

$\angle C=\angle K$而$\angle D=\angle L$ §293.

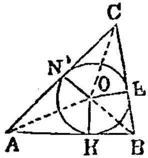
$\therefore$ △CBD及KLB相似 §355.

$\therefore$ BC：BD＝BK：BL Q,E,D,

例題547.三角形之面積等于其周界及其內切圓之半徑相乘之積之半

設　ABC為△NLK為內切圓而OK為其半徑

求證　△面積$=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)OK$



證　△OK,OL,ON皆等　§162.

△AOB面積$=AB\times\frac{1}{2}OK$

△BOC面積$=BC\times\frac{1}{2}OL$

△AOC面積$=BC\times\frac{1}{2}OL$

△AOC面積$=AC=AC\times\frac{1}{2}ON$

∴　(△AOB+△BOC+△AOC)面積$=\frac{1}{2}$

$(AB+BC+AC)\times OL$　公理2

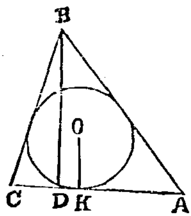
△ABC面積$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\times OK$

Q,E.D,

例題548.三角形之周界與其一邊之比等于由其對頂至此邊之垂線與其內切圓之半徑之比

設　ABC為△為其周界為PBD⊥CA而OK為內切圓之半徑

求證　P : AC=BD : OK



證　△面積$=\frac{1}{2}AC\times BD$ §403.

△面積$=\frac{1}{2}P\times OK$

例題541.

∴　$\frac{1}{2}P\times OK=\frac{1}{2}AC\times BD$

公理1

$\therefore\quad P\times OK=AC\times BD$　　公理6

$\therefore\quad P:AC=BD:OK$　　§329.

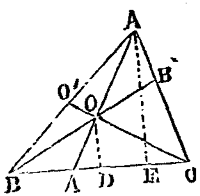
Q,E,D,

例題549.設由三角形ABC之三頂至其對邊作三直線 AA', BB',CC'過此三角形內一公共點O

設　O爲△ABC任一點過O作 AA',BB',CC'.

截三邊BC,AB,AC,于A',C',B'

求證 $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$



證　作OD及AE⊥BC正

△ODA'及AEA'相似

$\therefore\quad \frac{OD}{AE}=\frac{OA'}{AA'}$　　§351.

$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OD}{AE}$　　§405.

$\therefore\quad \frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OA'}{AA'}$　　公理1

依同理 $\frac{\triangle OAC}{\triangle ABC}=\frac{OB'}{BB'}$ 及 $\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{OC'}{CC'}$

$\therefore\quad \frac{\triangle OBC\div\triangle OAC+\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{OA}{AA'}$

$+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}$　　公理2

但　$\dfrac{\triangle OBC+\triangle OAC+\triangle OAB}{\triangle ABC}=\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1$

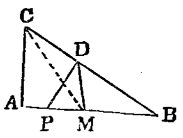
$\therefore$　$\dfrac{OA'}{AA'}+\dfrac{OB'}{BB}+\dfrac{OC'}{CC'}=1$　公理1

Q,E,D,

例題560.由某點至一已知圓作兩切線能找一已知角求此點之軌跡

在　ABC內設M爲AB之中點P爲AB上A,M間之一點作MD∥PC作PD

求證　$\triangle BPD \doteqdot \frac{1}{2}\triangle ABC$



證　作MC

令　$\triangle BM=\frac{1}{2}AB$題設

$\therefore$　$\triangle BMC \doteqdot \frac{1}{2}\triangle ABC$

§405.

于　△BMC及BPD中△BMD公有

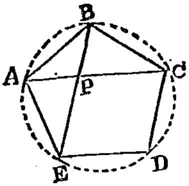
$\triangle MPD \doteqdot \triangle MDC$　§404.

$\therefore$　$\triangle BMC \doteqdot \triangle BPD$　公理2

$\therefore$　$\triangle BPD \doteqdot \frac{1}{2}\triangle ABC$　公理1

Q,E,D,

例題551.有法五邊形之兩對角線不由一公共頂作之者彼此互分成外內比



設　BE及AC爲有法五邊形之二對角線相交于P

求證　AC : PC＝PC : AP

證　于五邊形作一圓外切之

因　∠BAC＝∠BAP

而　∠ACB＝∠ABP　§293.

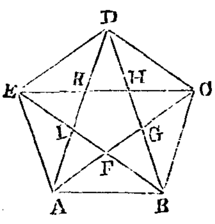
因知　△ABC及APB相似　§355.

∴　AC : AB＝AB : AP　§351.

但　PC＝AB　例題466.

則　AC : PC＝PC : AP　Q.E.D.

例題552.設作有法五邊形之諸對角線必另成一有法五邊形



在　ABCDE有法五邊形中作諸對角線則成FGHKL五邊形

求證　FGHKL爲有法五邊形

證　因AB＝BC＝CD＝DE＝EA　§429.

及　∠ABC＝∠BCD＝∠CDE＝∠DEA＝∠EAB　§129.

∴　△ABC＝△BCD＝△CDE＝△DEA＝△EAB　§143.

∴ $AC=BD=CE=DA=EB$ §128.

但 $AC=BH=CK=DL=EF=FC=GD=HE=KA=LB$ 例題466.

∴ $FG=GH=HK=KL=LF$

又 $FB=GB=GC=HC=HD=KD=KE=LE=LA=FA$ 公理3.

∴ △BFG，CGH，DHK，EKL，AEF皆爲兩等邊三角形且相等 §150.

因知 $\angle BFG=\angle CGH=\angle DHK=\angle EKL=\angle ALF$ §128.

∴ $\angle LFG=\angle FGH=\angle GHK=\angle HKL=\angle KLF$ § 85.

故 FGHKL等邊且等角因知爲有法五邊形

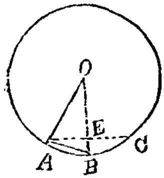
Q,E,D,

例題553. 圓之內切有法十二邊形之面積等于其半徑之平方之三倍

設 AB爲有法十二邊形之一邊P 爲其面積O爲圓心而R爲圓半徑

求證 $P=3R^2$

證　作AC爲內切有法六邊形之邊



$\triangle AOB$面積$= OB \times \frac{1}{2} AE$

$= R \times \frac{1}{4} R = \frac{1}{4} R^2$

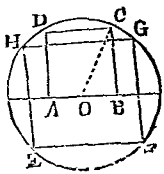
§403.

但　$\triangle AOB$ 爲十二邊形之$\frac{1}{12}$

故　$P = 12 \times \frac{1}{4} R^2 = 3R^2$　　Q,E,D,

例題554.半圓之內切正方形之面積等于其全圓之內切正方形之面積之五分之二

設　ABCD爲半圓內切正方形O 爲圓心



今　ABCD之面積$= \overline{BC}^2$

而　EFGH之面積$= \overline{EF}^2$

§398.

求證　$\overline{BC}^2 : \overline{EF}^2$ $2 = : 5$

證　作OC

$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2$　　§372.

$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 - \left(\frac{1}{2} BC\right)^2$

$$\therefore \quad \overline{BC} = \overline{OC}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = \frac{4}{5}\overline{OC}^2$$

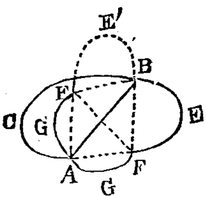
$$\overline{EF}^2 = OC\sqrt{2} \qquad \text{例題441.}$$

$$\overline{EF}^2 = 2\overline{OC}^2$$

$$\therefore \quad \overline{BC}^2 : \overline{EF}^2 = \frac{4}{5}\overline{OC}^2 : 2\overline{OC}^2$$

$$= \frac{4}{5} : 2 = 2 : 5 \qquad \text{Q,E,D,}$$

例題555.圓之面積大于任何等周多邊形之面積



設　ACBFG 爲以已知周界所作之最大圖形

求證　ACBFG爲一圓

證　在圓周上任一點A作AB分周界爲二相等部分

AB分ACBFG爲二相等部分

因　若其一部如AFB較他部分

ACB則必AFB以AB爲軸旋轉至AF'B位置AG'F'E'B形必大于ACB形但須有相同周界也

故　ACB形必不爲最大者此理恰違題意

ACB 爲最大形而 AG'F'E'B 亦爲最大形

者以其與ACB有同一周界及面積也

今 AG'F'E'B關于AB線爲對稱因以AB爲軸而旋轉任一線FF' ⊥AB 其兩端皆在周界上且爲AB平分 §211.

因 F及F'爲在周界上二對稱點則 ∠AFB及AF'B必等

今 ∠AFB及AF'B爲rt∠

因 若二角非爲rt∠則△AFB及AF'B之面積即可增加無須改變AF及FB弦之長度 (§484)

而 (圓分AGF,FEB,AG'F',F'E'B'仍立於此諸弦上)全形可增加其面積無須改變其周界之長度

故 AG'F'E'B必非最大者

故 ∠F及F'爲rt∠

但 F爲在AFB內任一點

故 AEB爲半圓 例170.

故 此形之任意一半皆爲半圓

∴ ACBFG全形爲一圓矣

Q,E,D,

又 作第三多邊形與ABCDEF多邊形同周界

而其邊數倍於第二多邊形.

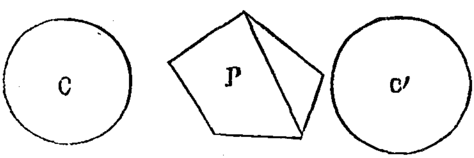
則 第三多邊形之面積. 又將大於第二多邊形矣.

故 等多邊形.其邊數愈多則其面積亦愈大.圓之周爲圈故圓之邊數. 多於無論若干邊之多邊矣.

附告 所謂作倍邊數多邊形者，乃將原形各邊折半所成

例題556.圓之周界，小於任何等積多邊形之周界

設 C'爲圓,P爲與C同面積之任何多邊形



求證 C之周界，小於P之周界.

證 作C'圓與P同周界.

則 P<C'則C<C' 例題555.

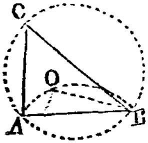
但 此二圓，其周界小者.其面積亦小.

故 C之周界小於C'之周界.

然 C'之周之周界等於P之周界

故　　C之周界亦小於P之周界

例題557.已知三角形之底及頂角，求其內切圓之中心之軌跡.



設　　ABC爲三角形.AB爲已知邊.∠C等於與角.O爲△ABC內容圓之圓心求O之軌.

分析　C角頂,之軌爲於AB弦上所作之分圓之弧.於此分圓中,可內藏一與角者,

而　　內接內,爲∠CAB及CBA之平分線AO，BO之交點,

今　　$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$　　§131.

而　　$\angle O=180-\left(\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B\right)$

$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$

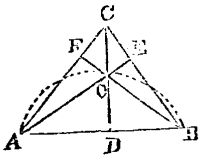
故　　∠O爲一常數且O在AB弦上所作分圓之弧上而於此圓分內可作一內切角等90° 加已知角之半

作圖　在AB弦上作一圓之圓分而於此圓分內可作一內切角等于90°加已知角之半

則　　圓分之弧即爲所求之軌　　Q,E,F,

例558．已知三角形之底及頂角求其三頂垂線之交點之軌

迹.



設 ABC 爲△其底邊爲 AB 頂角 ∠C 與已知頂角等命其中垂線 AE,BF,CD相交于O求O之軌

在 OECF 四邊形中其諸角之和＝4rt∠s §206.

但 ∠OEC＝∠OFC＝rt∠

∴ ∠OFE＝180°－∠FCE

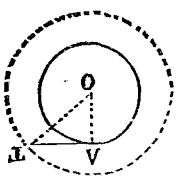
但 ∠FOE＝∠AOB §93.

∴ ∠AOB＝180°－∠FCE 公理1

即 ∠AOB 爲一常數等于三角形已知頂角之補角

故 O點之軌爲AB弦上所作之圓分之弧此圓分內可作一內切角與已知三角形頂角之補角同大 Q,E,F,

例題559.設一已知圓之切線等于已知長求其端之軌迹



設 AT 爲圓周上一切線而切圓周于任一點A

命 AT等于已知長

求 T點之軌

作 OA及OT

則　$OA \perp AT$　§254.

$\overline{OT}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{OA}^2$　§371.

$\therefore \quad OT = \sqrt{\overline{OT}^2 + \overline{OA}^2}$

即　OT之長爲常數$= \sqrt{\overline{OT}^2 + \overline{OA}^2}$

故　T點之軌迹爲以OT爲半徑所作之同心圓周

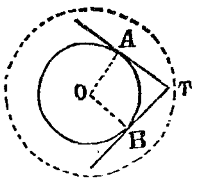
Q,E,F,

例題560.由某點至一已知圓作兩切線能成一已知角求此點之軌迹

設　O圓爲已知之圓a爲已知角

求　P點之軌迹從P作二切線至O圓介成一已知角a

作圖　作任一半徑OR自O作一線OP此線與OR作成　$POR = 90^0 - \frac{a}{2}$



然　後自R作一切線遇OP於P.

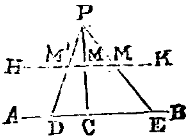
此P點卽所求之軌中之一點

以　O爲圓心OP爲半徑作一圓而所得之圓周卽所求之軌矣 Q,E,F,

例題561.求由一已知點至一已知直線所作之線之中點之軌迹.

設　P爲已知點AB爲定直線

自　P作PC⊥AB復自P至AB作PD及PE二線



求　此線中點之軌迹在PC作⊥平分線則HK爲所求之軌迹

證　HK∥AB

因　HK平分PC故必平分自P至AB之諸線

故　所求之軌爲已知線之平行線而其距已知線之遠爲自已知點至已知線之距離之二分之一

例題562.已知三角形之底及高求其頂之軌迹

三角形頂點之軌迹爲平行已知底邊之直線而其距已知底邊等邊之遠等于已知之中垂線

Q,E,F,

例563.某點與兩已知平行線之距離之和等于已知長求此點之軌迹

設　d爲二已知平行線間之距離而l爲已知長

若　l>d則所求之軌迹爲已知平行線兩傍之平行已知平行之二直線而各與相近之已知平行線之距離爲$\frac{1}{2}(l-d)$

若　l=d則平行線上之每點均合題意

若　l＜d則無軌迹可求　Q,E,F,

例題564.某點與兩已知平行線之距離之差等于已知長求此點之軌迹.

d爲二已知平行線間之距離而l爲已知長

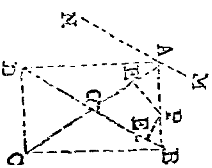
若　l＜d則所求之軌迹爲二已知平行線間之平行二已知平行線之直線而各線之距其相近之已知平行線等于$\frac{1}{2}$(d－l)

若　l＝d.則二已知平行線上之每點皆合題意

若　l＞d則無軌

例題565.某兩與兩已知相交線之距離之和等於已知長求此點之軌跡

設　AC及BD爲已知線.相交於O.而l爲已知長



求　自一點至AC及BD之遠之和恒等於l求此之軌

在　與BD相距爲l之處作mn∥BD令mn截於AC於A.

取　OB,OC及OD,各等於OA.

作　AB,BC,CD,AD,

則　ABCD爲平行四邊行　例題68.

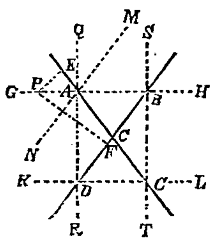
且　知ABCD爲長方形　例題70.

則　ABCD長方形之邊即所求之軌矣

證　於ABCD長方形之任一邊上取任一點.自此點至二與直線作垂線,其和恒等於與長l　例題60.

例題566.某點與兩已知相交線之距離之差等於已知長,求此點之軌跡

設　AC及BD爲二已知線相交於O而l爲已知長

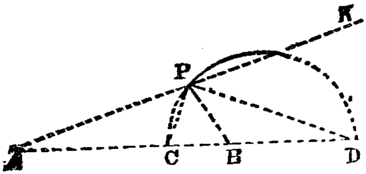


求　一點之軌而自此點至AC及BD之遠之差爲l依例題565法作ABCD長方形,且將各邊向兩邊引長之則此引長線卽爲所求之軌

證　從AG內任一點P作丄PF及PE其差等於l

因　∠F＝l及PE＝PV'因rt△PEA＝rt△PVA　§141.

例題567.某點與兩已知點之距離之比若 m：n 求此點之軌跡.



設　A及B.爲二已知點

m : n 爲已知比.求P點令 PA : PB=m :n

求P點之軌

分析　分AB於C及D.令與m : n成比例

§348. §349.

則　PA : PB=m : n=CA:CA:CB=AD:BD

令　PC平分∠APB.而PD平分∠BPK

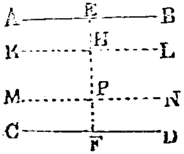
∴　CPD爲rt∠　例題29.

∴　F必在以CD爲直徑所作之圓周上

例題170.

此　圓周即爲所求之軌　Q,E,F,

例題568.某點與兩已知平行線之距離之比若 m : n 求此點之軌跡



設　AB及CD 爲二已知平行線作徑一線EF⊥AB及CD分EF于H令

EH : HF=m : n　§385.

過H作　KL∥AB

復分EF于P令EP : PE=m : n

則　KL及MN＝平行線卽爲所求之軌矣

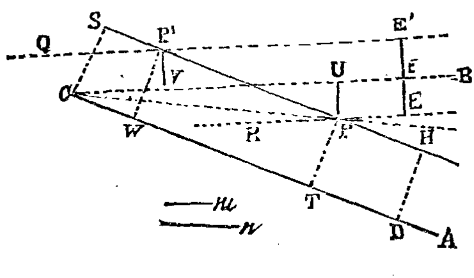
Q,E,F,

例題569.某點與兩已知相交線之距離之比若 m：n 求此點之軌跡

設　CA及CB爲已知之二交線 m：n 爲已知比

求　P點之軌由mP點至AC,BC 之距離之比若 m：n

作法　從CA上任一點 D 作DH等于n并⊥于CA過H作HS∥于AC又從CB上任一點F作EF等于m并⊥于CB後作FE'等于m



並　⊥于CB過E作ER∥于BC交HS于P而過E'作E'Q∥于BC交HS于P'

則　所求軌跡含兩直線CP及CP'

證　由P作二垂線于AC及BC若PT,PU

既 HS // AC PT＝HD＝m

又 ER // BC PU＝EF＝n

故 PT：FE＝m：n

再任取一點 P' 于 CP 直線上作二垂線 P'T',P'U'

∵ P'T' // PT,P'U' // PU

∴ P'T'：PT(CP'＝CP＝)P'U'＝PU

∴ P'T'：P'U'＝PT：PU＝m：n

P'既爲CP上任一點故CP爲所求之軌

自 F作FE'垂線＝FE＝n由E'作EQ // BC

且 交HS于P'

則 CP'亦可爲所求之軌

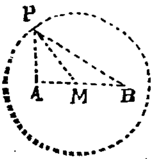
因 于CP' 作二垂線 AC及BC 其距離之比若 m：n

故 CP及CP'皆合題意

例題570.某點與兩已知點之距離之平方和爲常量求此點之軌跡

設 A,B爲二已知點P爲求軌之任一點

求 P之軌且須 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 爲一常數.



作 AB且平分AB于于M

作 PA,PB,PM

命 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=R^2$ 爲常數之量

介 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{PM}^2$ §377.

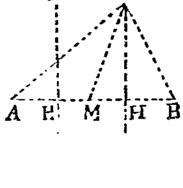
即 $R^2=2\overline{AM}^2+2\overline{PM}^2$

因知 $PM=\sqrt{\frac{1}{2}(R^2-2\overline{AM}^2)}$ 爲常數.

故 所求之軌爲以連接二與點之直線之中心爲心所作之圓周 Q,E,F,

討論 若h^2爲已知,而$h^2<2\overline{AM}^2$；即若$h<AM\sqrt{2}$,PM爲一總數,因知無解若$K^2=2\overline{AM}^2$即若$k=AM\sqrt{2}$,PM=O而此圓之圓周後而M點 Q,E,F,

例題571.某點與兩已知點之距離之平方差爲常量求此點之軌跡



設 A及B爲二與點P爲求軌之任一點

求 P之軌須介$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2$爲常數.

作　AB且平分AB于M作PA，PBPM.且作PH⊥AB

設　$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=R^2$為常數之量

今　$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=2AB\times MH$　§377.

即　$R^2=2AB\times MH$

因知　$MH=\frac{R^2}{2AB}$為一常數.

故　所求之軌為連二與點之直線上之二垂線且每垂線距此線之中點等遠　Q,E,D,

討論　若k^2已知則MH距離為2AB及K之第三比例項軌跡之他部為⊥于AB之一線此線為在M他一邊上隔一距離MH所作者也

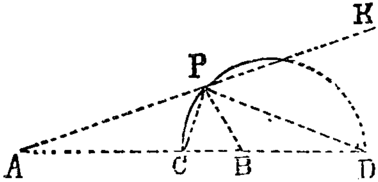
例題572.已知三角形之底及其他兩邊之比若m：n求其頂之軌跡

在　AB已知邊上取P點使PA：PB=m：n

求　P之軌

和分AB於C及D今與m：n成比例　§350.

又和分BA於C'及D'今與m：n成比例



則　以CD及C'D'爲直徑所作之二圓周卽爲所求之軌

例題573.求作一線與已知梯形之兩底平行分此形爲兩等積分

設　ABCD爲梯形

求　作一線與AB平行而分ABCD梯形爲二等於

作圖　作一正三角形,命a足等於AB而b足等於DC求d使$d^2:C^2=1:2$　§427.

在　AB上取AH等於D,並作HG∥AD及FG∥AB.則FG即爲所求之線矣.

證　引長AD及BC相交於E

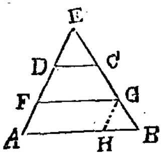
$$FG=AD=d \qquad §180.$$

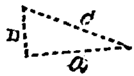
因　DC,FG及AB互相平行故△ABE,FGE及CDE相似

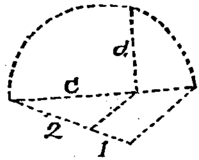
$$\therefore \quad \triangle FGE:\triangle DCE=\overline{FG}^2:\overline{DC}^2 \quad (1)$$

而　$\triangle ABE:\triangle DCE=\overline{AB}^2:\overline{DC}^2 \quad (2)$

從(1)　$\triangle FGE-\triangle DCE:\triangle DCE=\overline{FG}^2-\overline{DC}^2:\overline{DC}^2$　§333.







但 $\overline{FG}^2=\frac{1}{2}C^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2+\overline{DC}^2\right)$ 作圖

因 $\overline{FG}^2=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2+\overline{DC}^2\right)$

$\triangle FGE-\triangle DCE:\triangle DCE=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2-\overline{DC}^2\right):\overline{DC}^2$ (3)

從 (2) $\triangle ABE-\triangle DCE:\triangle DCE=\overline{AB}^2-\overline{DC}^2:\overline{DC}^2$ (4)

從 (3) 及(4)

$\triangle FGH-\triangle DCE:\triangle ABE-\triangle DCE$

$=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2-\overline{DC}^2\right):\overline{AB}^2-\overline{DC}^2$

但 $\triangle FGE-\triangle DCE=$FGCD梯形

而 $\triangle ABE-\triangle DCE=$ABCD梯形

$\therefore$ FGCD : ABCD $=\frac{1}{2}:1$

FGCD梯形$\doteqdot\frac{1}{2}$ABCDE梯形

Q,E,F,

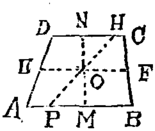
例題574.求作一線過已知梯形之底內一點分此形爲兩等積分

設 ABCD爲已知形P爲已知點

求 作一線通過P而分ABCD梯形爲二等分

1. 設 AP＞AB—CD

作圖 作EF中線且通過O作MN中線O

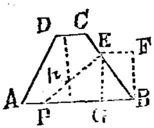


爲 EF之中點通過P及O作PH交DC于H.

則 PH卽所求之線矣

證 APHD梯形及PBCH，其中線EO及OF相等且同MN中線

∴ APHD梯形≎PBCH梯形



設 AP＜AB—DC

作圖 作一中垂線h

求 BF于 $\frac{1}{2}$BP，$\frac{1}{4}$(AB+DC及h之第四率

作 BF⊥AB于B

FE∥BA而EG∥FB並作PE

則 FE即爲所求之線

證 $EG=FB$ §180.

$\therefore \quad \frac{1}{2}BP : \frac{1}{4}(AB+DC)=h : EG$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(BP\times EG)=\frac{1}{4}(AB+DC)\times h$

§327.

$\triangle PBE$面積$=\frac{1}{2}(BP\times EG')$ §403.

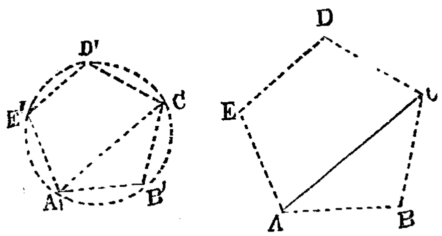
ABCD梯形面積$=\frac{1}{2}(AB+DC)h$

§407.

$\therefore$ $\triangle PBE$梯形面積$=\frac{1}{2}$ABCD梯形

Q,E,F,

例題575.已知有法五邊形之一對角線求作其形



設 AC爲已知對角餘求作有法五邊形

作圖 在任何A'B'C'圓內作有法五邊形 A'B'C'D'E'

作 A'C'對角線 §473.

令　AC相當A'C'于AC上作△ABC命與△A'B'C'相似

又　AC相當A'C'于AC上作ACDE四邊形命與A'C'D'E'相似

則　ABCDE即所求之有法五邊形 Q,E,F,

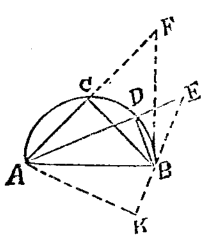
例題576.求分一直線爲兩線分其相乘之積爲極大

設　同邊數之諸多邊形中之最大者爲有法多邊形(§489.)則同周界之諸四邊形之最大者爲有法四邊形即正方形是也而其每邊爲已知線之半

故　平分此已知線之兩分線之積爲最大

Q,E,F,

例題577.求半圓周上一點令此點與直徑之兩端之距離之和極大



設　ACB爲半圓C爲ACB弧之中點D爲他一點

求證　AC+BC>AD+BD

證　引長AC至F命CF等于AC作BF且引長AD至E命DE等于DB作EB且引長之

過　A作AR⊥EB之延線且與之相交于R

因　CA=CB=CF故B在以AF爲直徑可作之圓周上

∴　AB下爲正角　§290.

$\angle ACB=\angle F+\angle CBF=2\angle F$　§137.

§145.

∴　$\angle F=\frac{1}{2}ACB=\frac{1}{2}ADB$　§293.

$\angle ADB=\angle E+\angle DBE=2\angle E$　§137.

§145.

∴　$\angle E=\frac{1}{2}APB=\angle F$　公理1.

∴　正△AFB及AER相似　§356.

因知　$AB:AR=AF:AE$　§351.

但　$AB>AR$ §97　∴$AF>AE$

即　$AC+BC>DA+BD$　Q,E,F,

例題578.設兩已知圓不相等容求作一公割線其兩截弦等于兩已知長a及b

設　O及O'爲兩已知圓之圓心求作一公割線使所成兩弦之長等于a,b,

作圖　于以O爲心之圓內作AB弦令等于與長a

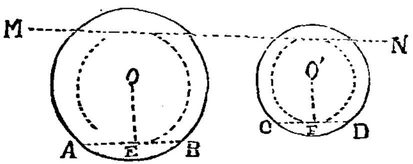
又　以O'爲心之圓內作CD弦令等于已知長b

作

OE⊥AB,及O'F⊥CD.

以　O爲心.OE爲半徑，作一圓周，又以O'爲心.O'F爲半徑作一圓周

今　於以O爲心之與圓內其任何一弦之內圓者.其長必等於a



又　於以O'爲心之與圓中，其任何一弦之切內圓者其長必等於b

於　內圓周作mn公切線

則　mn卽爲所求之公割線

例題579.設兩圓相交，求過其交點作一公割線等於已知長

設　O,O'爲二已知圓之圓心，P爲二圓交點之一求作通過一公割線等於與長m

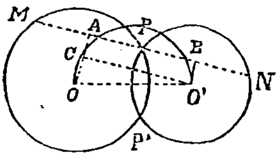
作圖　作圓心線OO'，以OO'爲直徑，作一半圓

以　O'爲心'$\frac{1}{2}$m爲半徑。作弧，截半圓周於

C

作 CO'過P作mu公割線而平行CO'.

則 mu即所求之公割線



證 引長OC遇mn於A作

O'B⊥mn. OA⊥mn.

§107.

∴ mA＝AP

而 PB＝Bm §245.

∴ $AB=\frac{1}{2}mn$

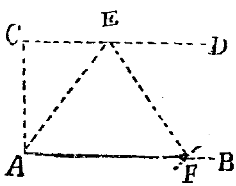
但 $AB=CO'=\frac{1}{2}m$ §180.

∴ mn＝m

例題580.已知三角形之高.及一底角求作其形.

在 直線AB上之任一點A.作AC⊥AB且等於中線

作 CD∥AB



在 A作AE截CD于E令∠EAB等于已知底角以E爲心EA爲半徑作弧截AB于F

則 △AEF卽爲所求之等腰△

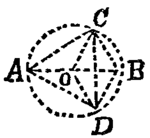
證　因其中線等于已知中線　構圖

EF＝EA　構圖

∴　∠EAF＝∠EFA＝已知∠　§145.

Q,E,F,

例題581.已知等邊三角形之高求作其形



作圖　作一直綫AO等于已知中線之$\frac{2}{3}$

以　O爲心OA爲半徑作圓

作　AOB直徑

以　B爲心OA爲半徑作弧截圓周于C及D作AC,AD,CD.

則　△ACD即爲所求之三角形矣

證　作OC,OD,BC,BD.

△　OBC爲等角三角形　構成

∴　∠BOC＝60°　§146.

∴　∠BOD＝60°

今　∠AOC＝∠AOD＝120°　§85.

∴　AC弧＝AD弧＝DC弧　§236.

∴　AC＝AD＝DC　§241.

Q,E,F,

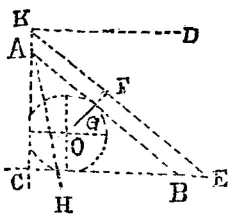
例題582.已知直角三角形之兩銳角之差及其內切圓之半徑

求作其形

作圖　以已知之半徑爲半徑作圓于圓內作正交之二直徑并于其每直徑之一端作KC及EC二切線且相正交于CK切線上之任一點K.

作　KH命所成之∠CKH，等于與二銳角之較

作KD∥CE



平分∠HKD 令此平分線遇CE于E作OF⊥KE而截圓周于G

通過G作一切線遇CK于A，CE于B

則　ABC即爲所求之rt△

證　CK⊥KD　§107.

∴　∠HKD=90°—已知差

∴　$\angle EKD=\frac{1}{2}(90^\circ—$已知差$)$

但　∠EKD=∠KEC　§110.

∠KEC=∠ABC　§112.

∴　∠ABC=∠EKD　公理1

又　∠BAC—∠BAC　§112.

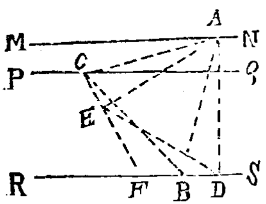
∴　∠BAC—∠ABC=已知差　Q,E,F,

例題583．求作一等邊三角形其三頂有三已知平行線

設　MN，PQ及RS爲任意之三平行線

求作　一等邊三角形其三角頂在MNPQ及RS上

作圖　作AD爲MN，PQ及RS三平行線之垂線



于　AD上作一等邊三角形A DE作CF⊥AE于E點其兩端在PQ，RS上

作　AC

作　∠CAB＝60°并作BC

則　△ABC即爲所求之三角形矣

證　因∠CAB＝60°及∠EAD＝60°　作圖

∠CAE＝∠BAD　公理3

EA＝AD

∴　正△CEA＝正△BAD　§142.

∴　AC＝AB　§128.

因　∠CAB＝60°　構圖

∴　∠ACB＝60°

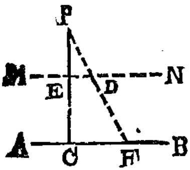
因　知△ABC等角

故　△ABC亦等邊　§146.

Q，E，F，

例題584．求由已知點至一已知直線作一線其與垂線之比若

m：n



設　AB爲已知線PC爲AB上一已知點之垂線

求　自P至AB作一線令其與PC相比若m：n

作圖　在PC上取PE等于m而過E作MN∥AB以P爲心m爲半徑作弧截MN于D作PD且引長之令遇AB于F

則　PF即爲所求之線矣

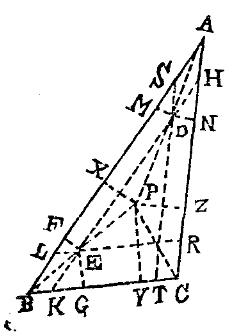
證　PF：PD＝PC：PE　§343.

∴　PF：PC＝PD：PE　§330.

但　PD＝m而PE＝n　作圖

∴　PF：PC＝m：n

例題585.求三角形內一點,令此點與三邊之距離,等於三數m,n,P,



設　ABC爲已知△

求　△ABC內之一點使自此點至AB,BC及AC所作之三垂線之比如m：n：P

作圖　作HK∥AB,令其距AB爲m,

又　作LR∥BC其距BC爲ns t∥AC,而其距AC爲P,

令　HK交LR於E及ST於D，

引　長AD.遇BE之延線於P.

則　P即爲所求之一點

證　自E作EF及EG，爲AB及BC之垂線.

自　D作Dm及Dn爲AB及AC之垂線.

自　P作Px，Py，Py爲AB.BC及AC之垂線.

則　△BPx及BEF相似而△BPg及BEG相似

§356.

$\therefore$ Px : EF=PB : EB=Py : EG §351.

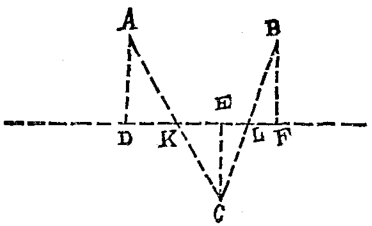
$\therefore$ Px : Py=EF : EG=m : n　§330.

依同理Px : Pq=m : P

$\therefore$ PxPy : Pq=m : n : P

Q,E,P,

例題586.求作一直線與三已知點之距離相等



設　A,B,C爲三與點

求　作一直線與A，B,C有等距離

作圖　作AC及BC，平分AC及BC於K及L.

通過K及L作DF.

則　DF即爲所求之線矣

証　作AD,BF及CE，各垂於DF，於正△ADK及CEK中

AK＝CK

∠AKD＝∠CKE　§93.

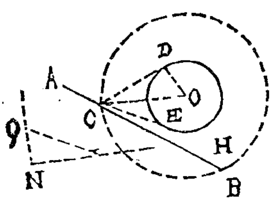
∴　正△ADK＝△CEK　§141.

∴　AD＝CE　§128.

依同理　CE＝BF

∴　AD＝CE＝BF　Q,E,F,

例題587.求作一已知圓之切線，其切點及一已知線間之線分等於已知長.



設　DE爲已知圓，m 爲已知長.AB爲已知線.

求　AB上之一點，自此至圓作切線等於已知長m.

分析　設C爲所求之點，CD爲所求之切線.自O至C及以線連之

則　$\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{CD}^2 \quad \overline{OD}^2 + m^2$

§371.

作圖　作NP⊥NQ取NP等於m，及NQ等於OD

作QP

以　O為心，QP為半徑，作圓，截AB於C．自C作

切線CD

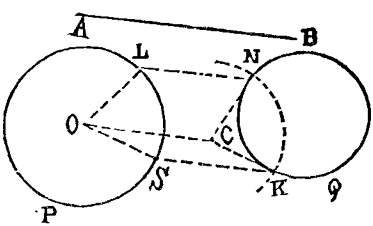
則　CD即為所求之切線矣．

證　$CD=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{\overline{QP}^2-\overline{NQ}^2}$

$=NP=m$

Q，E，F，

例題588．求於兩已知圓周間，作一直線，等於已知長，且與一已知直線平行



設　LP及NQ為二已知圓，AB為已知直線，m為已知長．

求　於兩圓周間作一直線，等於已知長m．而平行AB．

分析　設Ln為所求線，作OD，並作OC等於m．而與Ln平行．作Cn

因　Ln=OC　且Ln∥OC

∴ OCnL為平行四邊形 §183.

∴ Cn=OL 且Cn∥OL

作圖 作OC等於m，而平行AB.以C為心，LP圓之半徑為半徑，作弧截NQ圓周於n，

作 OL∥Cn而截圓周LP於L於Ln

則 Ln即為所求之線矣

證 Cn=OL且平行OL 作圖

∴ Ln=OC且平行OC §183.

但 OC=m而平行AC 作圖

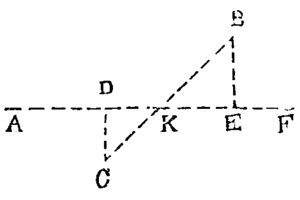
∴ Ln=m而平行AB矣

Q,E,F,

例題589.求過一已知點作一直線，與他兩已知點之距離之比等於已知之比.

設 A為已知點B,C為他二已知點. m：n為已知比率.

求 作一線通過A點，使自B及C所作此線之垂線相比，若m：n



分析 設AF為所求之線而BE及CD⊥AF作BC，截AF於K

因 ∠BKE及∠CKD相等 (§93)

故　rt△BK及CKD相似

§356.

BK：CK＝BE：CD＝m：n　§351.

作圖　作BC

分　BC於K，令與m：n成比例　§385.

通過　A及K作AF

則　AF即爲所求之線矣.

證　rt△BKE及CKD相似　§359.

∴　BE：CD＝BK：CK＝m：n　§351.

Q,E,F,

例題590.求作一正方形，與一已知三角形及一已知平行四邊形之和爲等積

作圖　先作一正方形與已知△等值　§422.

又　作一正方形與已知平行四邊形等值

§421.

然　後作一與二正方形之和等值之正方形

(§417)

此　正方形，卽所求之正方形也.

例題597.求作一矩形其底高之差等于已知長且與一已知三角形及一已知五邊形之和爲等積

作圖　先作一正方形與已知△等值　§422.

次　作一正方形與已知五邊形等值　§423.

又　作一正方形與前二正方形等值　§417.

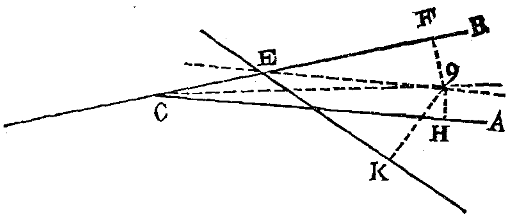
由　是以已知之底邊及中垂線之較作一與正方形等值之長方形　§425.

此　長方形即爲所求者也　Q,E,F,

例題592.求作一五邊形與一已知五邊形相似且與一已知梯形爲等積

此爲§426之特殊情形

例題593.求一點此點與三已知直線之距離若三數m,n,P.



設　CB,CA,CE爲三已知線

求　一點Q使自Q至三直線之遠相比若m:n:P.

作圖　作CQ使其一點之軌距CA及CB之遠相比若m:n　例題569.

作　EQ其一點之軌距CB及ED之遠相比若n:P

命　　CQ及EQ相交于Q

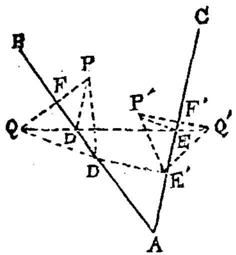
則　　Q即爲所求之一點

證　　作QH⊥CA，QF⊥CB，及QK⊥ED

由　　構圖知QH：QF:QK＝m:n:P 列題569.

Q，E，F，

例題594.已知一角及其兩邊間之二點P及P'求一由P至P'能與此兩邊相切之至短線



設　　BAC爲已知角P及P' 爲二已知點求自P至P' 之最短線且須切

∠BAC之兩邊

作圖　作 PE ⊥ AB 且引長之至Q

命

EQ等于PF作FQ等于P'F'

作　　QQ'截AB于D及AC于E作PD及P'E

則　　PDEP'即所求之最短線矣

證　　自P至P'作他一線PD'E'P'命爲最短線而切AB及AC

作　　C'Q及E'Q

AB爲PQ之⊥平分線而AC爲P'Q之分平線

$\therefore$ PD＝DQ P'E＝EQ PD'＝D'Q

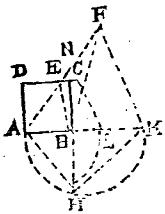
P'F'＝E'Q §160 $\therefore$PDEP'＝QQ'

而 PD'E'P'＝QD'E'Q' 公理2.

但 QQ'<QD'E'Q' § 49.

$\therefore$ PDEP'<PD'E'P'

Q,E,F,



例題595.已知三角形之三角及其面積求作其形

設 BD爲已知正方形而R及S爲二已知角

求 作一三角形面積等于BD且有二內角等于R及S.

作圖 作AF命∠FAB等于∠R且AF截DC于E令EF等于AE作FB.

作 FK命∠AFK等于∠S而截AB之延線于K以AK爲直徑于AK上作一半圓截CB延線于H作AH于AK上取AL等于AH通過L作LN∥KF

則 △ANL即爲所求之三角形矣

證 因∠NAL＝∠R及∠ANL＝∠AFK

(§112)

$=\angle S$ 作圖

作 EB△AEB$\approx\frac{1}{2}$BD正方形 §403.

因 △中同中線而AF底邊等于2AE 作圖

因知 △AFB$\approx$2△AEB

∴ △AFB$\approx$BD正方形

$\overline{AH}^2=\overline{AL}^2=AB\times AK$ §370.

$\triangle AKF:\triangle ALN=\overline{AK}^2:\overline{AL}^2$

§411.

∴ $\overline{AK}^2:AB\times AK=AK:AB=\triangle AFK$

$:\triangle AFB$

則 $\triangle AKF:\triangle ALN=\triangle AFK:\triangle AFB$

§405.

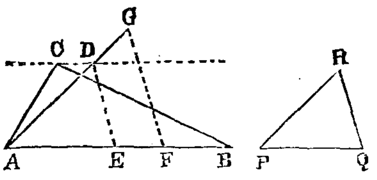
∴ △ALN$\approx$△AFB$\approx$BD正方形

Q,E,F,

例題596.求變一已知三角形爲與他已知三角形相似之三角形

求變 △ABC與與△PQR相似

分析 設AFG爲所求之三角形而AF邊在AB線內.



作 CD // AB而遇AG於D作 DE // GF

則 $\triangle$AED及 AFG相似 §354.

$\therefore \quad \triangle AED : \triangle AFG = \overline{AE}^2 : \overline{AF}^2$ §411.

今 $\triangle AFG \Leftrightarrow \triangle ABC$ 題設

$\therefore \quad \triangle AED : \triangle BBC = \overline{AE}^2 : \overline{AF}^2$

因 $\triangle$AED及ABC之中垂線相等

$\triangle AED : \triangle ABC = AE : AB$ §405.

$\therefore \quad \overline{AE}^2 : \overline{AF}^2 = AE . AB$ 公理1

$\therefore \quad \overline{AF}^2 = AB \times AE$ §327.

卽 AF爲AB及AE之中率

作圖 置$\triangle$PQR於$\triangle$ABC 令AB邊與 PQ 邊同在一直線內.

作 AG // PR 而遇之於 D. 通過 C 作一線平行 AB

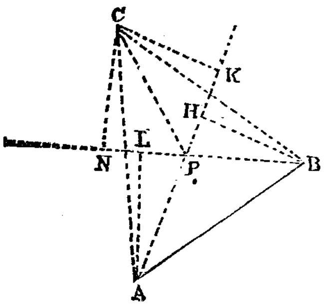
作 DE // RQ遇AB於E.

求　AF於AE及AB之中率

作　FG∥QR遇AG於G

則　AFG即爲所求之三角形矣.　Q,E,F,

例題597.已知ABC三點求作第四點P使APB,APC,BPC三三角形之面積相等



設　A,B,C爲三已知點求第四點P使△APB等△APC等△BPC

分析　設如圖中之P爲所求之第四點.△BPC及APB等值而PB底邊公用

故　其中垂線CN及AL相等　§405.

依同理△APB及APC等值AP底邊公用而其中垂線BH及CK相等.

但　CN=AL

因　知AC必爲BP所平分　§142.

又　CK=BH

因　知BC必爲AP所平分　§142.

作圖　作AB,BC,CA

作　BP及AK通過AC及BC之中點而相交於P

則P即爲所求之一點

證　因BC爲AP所平分　作圖

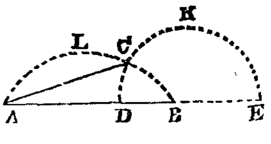
BH＝CK

∴　△APB≎APC　§404.

依同理知△APB≎BPC

∴　△APB≎APC≎BPC

例題598.已知三角形之底及他兩邊之比及其夾角，求作其形.



設　AB爲已知底邊m：n已知比率而∠ACB爲已知角求作一ABC三角形使CA：CB＝m：n而∠AC.B＝已知角

分析　因CA：CB＝m：n若和分AB於D及E令與已知比成比例則C必在以DE爲直徑所作之圓周　例題567.

因　∠ACB＝已知角C必在可以內接已知角之ALB弧上

故　P可決定其爲ALB弧及DK弧之交點

作圖　和分AB於D及E

於　DE作一以DE爲直徑之DKE半圓

於　AB上作一可以内容與角之ALB分圓

命　DKE弧與ALB弧相交於C

作　AC及CB

則　ACB即爲所求之三角形矣

證　∠AOB等於所求之角

而　CA：CB＝m：n

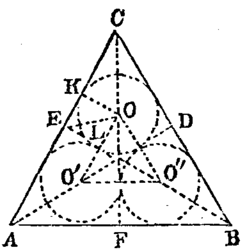
例題599.有一已知圓求以數圓同心圓周分之爲n等積分.

作　法與四百九十三題同

例題600.求於一已知等邊三角形内．作三等圓彼此相切且各與其兩邊相切

設　ABC 爲已等邊 △ 求作三等圓彼此相切且各切三角形之邊,

分析　每圓爲三角形之邊及其中垂線所成之四邊形之内切圓如ECDS圓之圓心必在CF上蓋CF



距　CA及CB等遠也

且　其圓周必須切BC

則　圓心又當在∠CEB之平分線EO上

故　以O爲心以自CF及EO之交點至CA所作之垂線OK

爲半徑作圓必能切CE,SE,SD,CD矣

作圖　作CF,BE,AD三中垂線

作　EO平分∠CEB而交AF於O

自　O作OK⊥CA

則　以O爲心OK爲半徑作圓

則　此圓內切於ECDS而爲所求之圓之一個

依同理　作EAFS及FBDS之內切圓即得所求之三等圓

證　O距CA及AB等遠　§162.

而　O距EC及ES亦等遠　§162.

CS　對稱軸　§212.

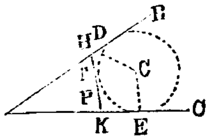
O距ES及DS亦等遠

例題601.已知一角及其兩邊間之一點P，求過P作一直線，與此兩邊成一三角形，其周界等於已知長a.

設　BAC爲已知角而P爲已知點

作圖　於AB上取AD令等於$\frac{1}{2}$a而於AC上取AE等於$\frac{1}{2}$a

於　AB上之D點及AC上之E點作OD及OE垂線.



乃　以O為心OD為半徑作圓通過P作HP切線而交AB於H，AC於K，則AHK即為所求之

證　AB，AC切圓周於D及E　§253.

令　HK切線切圓周於T

則　HD＝HT而KE＝KT　§261.

$\therefore$　AD＋AE＝AH＋H T ＋AK ＋KT＝AH＋AK＋HK

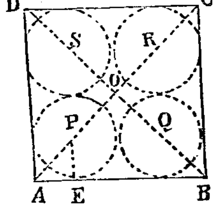
但　AD＋AE＝a　作圖

$\therefore$　AH＋AK＋HK＝a

例題602.求於已知正方形內作四等圓各圓皆與他兩圓相切且與正方形之兩邊相切

分析　設ABCD為與正方形而P,Q,R.S,為所求之四圓之圓心

諸　等圓之圓心必令已知正方形之中心O為對稱



可知　OP,OQ，OR，OS 所作成之四角各為90°而P,Q,R，S必在此正方形之二對角線上

作圖　作 AC 及BD二對角線相交於O

平分　OA，OB，OC，O於 P，Q，R，S

以　P為心自P至AB之距離為半徑作一圓此圓為所求之四圓中之一個倣此以Q，R，S為心作三圓此四圓即為所求者矣．

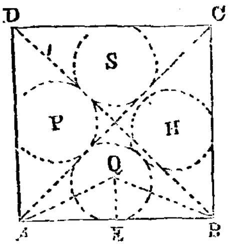
證　正△AEP及ABC相似　§356.

∴　PE:BC＝AP:AC＝1:4　§351.

故　每圓切他二圓及正方形之兩邊

Q，E，F，

例題603．求於已知正方形內作四等圓，各圓皆與他兩圓相切，且與正方形之一邊相切．



設　ABCD為已知正方形求於ABCD內作四等圓且切正方形之兩邊

作圖　作AC及BD二對角線

則　OA＝OB＝OC＝OD

§§432，217.

及　∠AOB＝∠BOC＝∠COD＝∠DOA

§436.

∴　△AOB＝△BOC＝△COD＝△DOA

今　於每一三角形中作一內切圓

則　所得之四圓卽爲所求之四圓矣.

證　自一圓之圓心Q至A及B作QA及QB

則　AQB爲兩等邊三角形　§147.

因　∠QAB爲∠OAB之半而∠QBA爲OBA之半

因知　∠QAB=∠QBA.　§315.

∴　半徑QE平分AB　§149.

因　△AOB及BOC相等而僅因一圓能內切于一已知△若△BOC以OB爲軸摺疊之則△BOC必與△BOA重合而R將與Q重合

∴　R及Q關于OB爲軸而對稱

∴　RQ⊥OB

∴　ⓈQ及R彼此相切

依同理各圓皆彼此相切

Q,E,D,

北平中原書店

出版書目

漢譯范氏大代數學習題詳解 吳秉之編演

定價洋一元六角

原名 FINES KEY TO COLLEGE ALGEBRA

英文葛氏平面三角法題解 吳秉之編演

定價洋一元二角

原名 GRANVILL KEY TO PLANE TRIGONOMBTRY

漢譯温氏高中三角法題解 吳秉之編譯

定價 洋裝宣紙一元八角
平裝報紙一元二角

原名 WENTWORTHS KEY TO PLANE TRIGONOMETRY

漢譯葛氏平面三角法題解 吳秉之編譯

定價洋一元五角

原名 GRANVILL KEY TO PLANE TRIGONOMETRY

英文達夫物理學習題解答 南青學會編演

定價洋一元

原名 SOLUTIONS OF THE PROBLEMS IN DUFF & OTHERS PHYSICS

漢譯溫氏立體幾何學題解 吳秉之編譯

定價八角

原名 WENTWORTHS KEY TO SOLID OEOMETRY

英漢對照短篇英文論說 張則之譯第三版

定價一元二角

原名 SHORT ESSAYS 係英文 SYDDALL 所著經張君譯成中文一面中文一面英文互相對照閱讀甚爲便利最合我國中學生教科書及作文翻譯自修之用手備一册利莫大焉

漢英對照中國名人小說選 張則之譯 定價一元八角

西名 SOME FAMOUS CHINESE STORIES此書原係中國古代名家小說經張君由中文譯成英文最合兩中教科書之用

漢譯新中國 張則之譯 宣紙定價一元六角

原名 NEW CHINA BY GRAYBILL

溫氏平面幾何學題解　全一册

定價大洋八角

原著者　美國 WENTWORTH

譯者　吳秉之

發行所　中原書店

北平東安市場電話東局一三六一

民國貳拾四年三月初版