數学理

一函四冊

函

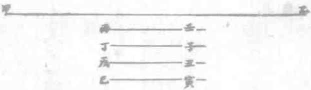
數學理卷五

英國棣麼甘譔

英國　傅蘭雅　口譯
新陽　趙元益　筆述

分數之理

第一百四款　假如有布四十九尺欲分爲五等分所用之法即求四十九之五分之一也如將四九以五約之約得數九餘數四依七十二款之理四九爲五箇九與四箇一所成令甲乙線代布四十九尺另作丙丁戊己庚五線各線代布九尺再作線辛代布四尺則因四九爲五箇九與四則丙丁戊己庚與辛六線之和必等於甲乙線



將代布四尺之辛線平分爲五等分壬子丑寅卯將此各分移至丙丁戊己庚各線之旁如圖則丙丁戊己庚壬子丑寅卯十線其等於甲乙線即四十九尺但丁與子之和等於丙與壬之和戊與丑己與寅庚與卯亦然所以將丙與壬之和五倍之必等於四十九尺即丙與壬之和必爲四十九尺之五分之一

第一百五款　如前圖之丙爲九尺但壬非同類之數此

理前數卷未論及之非若干尺之整數也得此數之法將四尺平分爲五分取其一分而成之故壬爲四尺之五分之一謂尺之分數其式爲$\frac{五}{四}$如欲將九尺補足四十九尺之五分之一則所補之數爲$\frac{五}{四}$

又依同理能將麥四十九斗或地四十九畝分爲五等分其麥之五分之一爲九斗又四斗之五分之一其地之五分之一爲九畝又四畝之五分之一

要之四十九之五分之一爲九與$\frac{五}{四}$即九$\frac{五}{四}$尋常不書加號即書九$\frac{五}{四}$或用別種記號書之爲

$$\frac{五}{四九}=九\frac{五}{四}$$

習練之題

求$\frac{\text{一七}}{\text{一二三七}}$之十七分之一若干 答曰 七二$\frac{\text{一七}}{\text{一三}}$.

求$\frac{\text{一九七四}}{\text{一〇〇三二}}$. $\frac{\text{二三七一〇}}{\text{六六三八一九}}$. $\frac{\text{二四二四}}{\text{二二七七三三九九}}$. 答曰 五$\frac{\text{一九七四}}{\text{一六二}}$. 二七$\frac{\text{二三七一〇}}{\text{二三六四九}}$. 九三九四$\frac{\text{二四二四}}{\text{二三四三}}$.

第一百六款 分數之意爲任數之若干分.卽將任數平分若干分.而取其分之一箇或多箇謂之分數.卽如$\frac{\text{五}}{\text{四九}}$.$\frac{\text{五}}{\text{四}}$.$\frac{\text{七}}{\text{二〇}}$.俱爲分數.分數者.能包整數於內也.如十七爲整數.亦爲$\frac{\text{一}}{\text{一七}}$.亦爲$\frac{\text{二}}{\text{三四}}$.亦爲$\frac{\text{三}}{\text{五一}}$等.凡數爲若干一箇所成.如五箇七箇一百箇等.謂之整數者.欲與分數有別也.

凡分數橫線上之數謂之分母.橫線下之數謂之分子.

此分母分子俱謂之分數之項凡分數分子小於分母則分數必小於一如$\frac{\text{十七}}{\text{六}}$爲小於一因將六箇分爲六等分則每分爲一箇如分之爲十七等分每分自然必小於一又依同理分母等於分子則分數必等於一分子大於分母則分數必大於一

第一百七款 $\frac{\text{三}}{\text{二}}$之意爲二之三分之一亦爲一之三分之一之倍數欲證此理其法如左

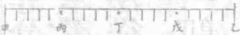
命甲乙線代布二尺丙爲線之中丙之左右各有布一尺再將甲丙分爲三等分得丁戊兩點又將丙乙分爲三等分得己庚兩點因甲戊戊己己乙俱相等則甲戊

為二尺之三分之一，即 $\frac{\text{二}}{\text{三}}$。但甲戊為甲丁之倍，而甲丁為一尺之三分之一，即 $\frac{\text{一}}{\text{三}}$。所以 $\frac{\text{二}}{\text{三}}$ 為 $\frac{\text{一}}{\text{三}}$ 之倍。即如欲取布長 $\frac{\text{二}}{\text{三}}$ 尺，有兩法能得之。一法，將其二尺布，分為三等分而取其一分，即得 $\frac{\text{二}}{\text{三}}$ 尺。又法，將布之一尺，分為三等分而取其二分，亦得 $\frac{\text{二}}{\text{三}}$ 尺。此兩法俱可用之。又依同理，欲求 $\frac{\text{五}}{\text{八}}$，則可將五分為八等分而取其一分，或可將一分為八等分而取其五分。以下各款可任用此兩法，以簡便為主，亦可將以上之理，變其說而不變其意，如左。

凡數欲求其三分之一，可將其數之若干一，各分為三

等分而從每箇一之內取其一分則所取諸分之和爲本數之$\frac{二}{三}$即如二爲兩箇一所成取其三分之一之法從其每箇一內取其三分之一則其得兩箇三分之一即三分之二也其式爲$二\times\frac{一}{三}=\frac{二}{三}$　若分子大於分母則上意不合於理即如$\frac{十五}{七}$之意將一箇分爲七分而取其十五分而七箇分中安能取出十五分故算者心中必以爲借得幾箇一箇每一箇亦分爲七分依此法所得分數足取其十五箇即如欲得$\frac{十五}{七}$必將三箇一箇各分爲七分而從其各分內取出十五箇分也

第一百八款　凡分數將其分母分子各以同數乘之則所得之分數其大與本分數同即如 $\frac{\text{四}}{\text{三}}$、其分母分子各以五乘之即為 $\frac{\text{二〇}}{\text{一五}}$、同於 $\frac{\text{四}}{\text{三}}$、即十五尺布之二十分之一同於三尺布之四分之一、又以前法論之將布一尺分為二十分而取其十五分、即同於將布一尺分為四分而取其三分、如欲證之如圖令甲乙線代布一尺平分之得甲丙丙丁丁戊戊乙四分、再將各分平分之得五等分、則甲戊為 $\frac{\text{四}}{\text{三}}$、但第二次分其線共得二十等分、而甲戊為二十等分之十五分、故為 $\frac{\text{二〇}}{\text{一五}}$、所以 $\frac{\text{二〇}}{\text{一五}}$ 與 $\frac{\text{四}}{\text{三}}$ 相同



又因將$\frac{\text{二〇}}{\text{一五}}$之分母分子、各以五約之、卽得$\frac{\text{四}}{\text{三}}$、可見凡分數之分母分子、以同數約之、則分數之大小不變、此理在數學中最爲要緊、其理卽尋常所言分爲二十一分而取其十四分、同於分爲三分而取其二分、

第一百九款　此兩分數$\frac{\text{四}}{\text{三}}$與$\frac{\text{二〇}}{\text{一五}}$既相等、可以任意代換、然第一式比第二式更便、不第因三尺之四分之一、比十五尺之二十分之一、心中易明、又因第一式之數目小、行乘約法更便、所以凡設一分數而欲用之於各事、應先揣其分母分子、有否公度數、如九十八款之法、揣出任兩數之最大公度數、又指出其兩數以最大

公度數約之則約得之數除一之外無他公度數故必將分數之兩項求其最大公度數而約之則約得之分數爲本分數而變成最小之項其大小若干心中易於明之。

習練之題

分數變爲最小之項其式如

$$\frac{\text{二九二一}}{\text{二七九四}}=\frac{\text{二三}\times\text{一二七}}{\text{二二}\times\text{一二七}}=\frac{\text{二三}}{\text{二二}}.$$

$$\frac{\text{四九二〇}}{\text{二七八八}}=\frac{\text{三〇}\times\text{一六四}}{\text{一七}\times\text{一六四}}=\frac{\text{三〇}}{\text{一七}}.$$

$$\frac{\text{一三七八六}}{\text{九三二〇八}}=\frac{\text{一一三}\times\text{一二二}}{\text{七六四}\times\text{一二二}}=\frac{\text{一一三}}{\text{七六四}}.$$

$$\frac{\text{四〇三五九六〇〇}}{\text{八八八八〇〇}}=\frac{\text{九九九}\times\text{四〇四〇〇}}{\text{二二}\times\text{四〇四〇〇}}=\frac{\text{九九九}}{\text{二二}}.$$

$$\frac{\text{三五九七八四}}{\text{九五四六九}}=\frac{\text{四五六}\times\text{七八九}}{\text{一二一}\times\text{七八九}}=\frac{\text{四五六}}{\text{一二一}}.$$

第一百十款

如分數之兩項已分爲各乘數。凡數之乘數能度盡之而無餘數。即如四、六、八、俱爲二十四之乘數。將二十四化爲乘數得 四×六　三×八　三×二×二×二 俱可。則分子之任一箇乘數可用以約之。然其分母亦必將其內之一箇同乘數約之。惟因分數母子俱以同數約之。依八十八款與一百八款之理。其分數之大小不變。凡有他數約之之數。以／號別之。如式

$$\frac{二\times三\times四}{一二\times一一\times一〇}=\frac{二\times三\times\cancel{四}}{\cancel{三}\times一一\times\cancel{一〇}}=\frac{\cancel{二}\times\cancel{三}\times\cancel{二}}{\cancel{二}\times一一\times五}=五五.$$

$$\frac{二四\times四五\times五二}{一八\times一五\times一三}=\frac{四\times三\times四}{\cancel{三}\times\cancel{一}\times\cancel{一}}=\frac{\cancel{三}\times四\times四}{\cancel{三}\times\cancel{一}\times\cancel{一}}=\frac{一六}{一}.$$

$$\frac{九\times七〇}{二七\times二八}=\frac{\cancel{一}\times一〇}{三\times四}=\frac{\cancel{二}\times五}{三\times\cancel{二}}=\frac{五}{六}.$$

第一百十一款　依一百八款之理能將任分數之母子。各以同數乘之而其分數不變又依同理能將兩箇分數化爲兩箇相等分數而兩箇分母相等即如 $\frac{二}{三}$ 與 $\frac{四}{七}$ 兩分數將其 $\frac{二}{三}$ 之兩項俱以七乘之又將 $\frac{四}{七}$ 之兩項俱以三乘之則得 $\frac{二}{三}$ 爲 $\frac{二\times七}{三\times七}$。即 $\frac{一四}{二一}$。又 $\frac{四}{七}$ 爲 $\frac{四\times三}{七\times三}$。即 $\frac{一二}{二一}$。所以得兩分數 $\frac{一四}{二一}$ 與 $\frac{一二}{二一}$。等於 $\frac{二}{三}$ 與 $\frac{四}{七}$ 而其公分母爲 二一。故 $\frac{二}{三}$ 與 $\frac{四}{七}$。已化之而得公分母。

如有三箇分數如 $\frac{一}{一〇}$。$\frac{五}{六}$。$\frac{七}{九}$。求化之而得公分母法將第一箇分數之兩項以六與九相乘之積數乘之第二箇分數之兩項以一〇與九相乘之積數乘之第三箇

分數之兩項以$\frac{\text{一〇}}{}$與六相乘之積數乘之則依一百八款之理得$\frac{\text{一〇}}{\text{一一}}$爲$\frac{\text{一〇}\times\text{六}\times\text{九}}{\text{一一}\times\text{六}\times\text{九}}$即$\frac{\text{五四〇}}{\text{五九四}}$、$\frac{\text{六}}{\text{五}}$爲$\frac{\text{六}\times\text{一〇}\times\text{九}}{\text{五}\times\text{一〇}\times\text{九}}$即$\frac{\text{五四〇}}{\text{四五〇}}$、$\frac{\text{九}}{\text{七}}$爲$\frac{\text{九}\times\text{一〇}\times\text{六}}{\text{七}\times\text{一〇}\times\text{六}}$即$\frac{\text{五四〇}}{\text{四二〇}}$、觀所得三箇分數其各分子與其公分母皆能以六度之又依一百八款之理以任數約之所約得之分數必與本分數相等所以將$\frac{\text{五四〇}}{\text{五九四}}$$\frac{\text{五四〇}}{\text{四五〇}}$$\frac{\text{五四〇}}{\text{四二〇}}$之分母分子各以六約之則約得之分數爲$\frac{\text{九〇}}{\text{九九}}$、$\frac{\text{九〇}}{\text{七五}}$、$\frac{\text{九〇}}{\text{七〇}}$、此三箇分數亦有公分母而等於原所設之$\frac{\text{一〇}}{\text{一一}}$、$\frac{\text{六}}{\text{五}}$、$\frac{\text{九}}{\text{七}}$、故約得之三箇分數$\frac{\text{九〇}}{\text{九九}}$、$\frac{\text{九〇}}{\text{七五}}$、$\frac{\text{九〇}}{\text{七〇}}$、爲所求有公分母之三箇分數其式更簡可見其五四〇爲一〇與六與九之公倍數

即[illegible]但九〇為一〇與六與九之最小公倍數見前一百三款故可知前法非最簡之法也欲將$\frac{一〇}{一}$ $\frac{六}{五}$ $\frac{九}{七}$三箇分數化為有公分母之三箇相等分數則先依一百三款之法求得一〇與六與九之最小公倍數九〇又可見九〇容一〇為九次容六為一五次容九為一〇次故可將第一箇分數之兩項以九乘之第二箇分數之兩項以一五乘之第三箇分數之兩項以一〇乘之則所得三箇分數$\frac{九〇}{九}$ $\frac{九〇}{七五}$ $\frac{九〇}{七〇}$與前法所得者同

若其數目內有一箇為整數則依一百六款之法化為有分母之數與他數之公分母同

習練之題

所設之分數

$\frac{六}{一}$ $\frac{五}{一}$ $\frac{三}{二}$。

$\frac{四}{三}$ $\frac{二一}{一二}$ $\frac{一四}{三}$ $\frac{七}{二}$ $\frac{三}{一}$。

$\frac{一○○○}{六}$ $\frac{一○○}{五}$ $\frac{一○}{四}$ 三。

$\frac{六七七}{二八一}$ $\frac{三七九}{三三}$。

化成公分母

$\frac{三○}{五}$ $\frac{三○}{六}$ $\frac{三○}{二○}$。

$\frac{八四}{六三}$ $\frac{八四}{四八}$ $\frac{八四}{一八}$ $\frac{八四}{二四}$ $\frac{八四}{二八}$。

$\frac{一○○○}{六}$ $\frac{一○○○}{五○}$ $\frac{一○○○}{四○○}$ $\frac{一○○○}{三○○○}$。

$\frac{二五六五八三}{一○六四九九}$ $\frac{二五六五八三}{二二三四一}$。

第一百十二款　若將兩箇分數化成公分母，則兩分數易於相比，而知其孰大孰小。即如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{7}{15}$，兩箇分數欲求其孰大孰小，則先化之而得公分母，即 $\frac{15}{30}$ 與 $\frac{14}{30}$。觀此兩箇分數，即知第一箇分數為大，因依一百七款之理，第一箇分為 30 等分，而取其 15 分；第二箇取其 14 分，則其大小之故自明矣。

由此可見，凡兩箇分數有公分母，其分子大者為分數之大者，其分子小者為分數之小者。又可見凡兩箇分數有公分子，則其分母小者為分數之大者，其分母大者為分數之小者。即如 $\frac{8}{7}$ 大於 $\frac{8}{9}$，因第一箇分數為

八之七分第二箇分數爲八之九分又可令任分子屬於任小之分數其法增大其分母即如令一〇爲分子則$\frac{一〇〇}{一〇}$爲$\frac{一〇}{一}$又$\frac{一〇〇〇}{一〇}$爲$\frac{一〇〇}{一}$又$\frac{一〇〇〇〇〇〇}{一〇}$爲$\frac{一〇〇〇〇〇}{一}$見前一百八款

又可令此分數與彼分數或加或減之即如此分數爲三十分之十五分即將一箇分爲三十等分而取其十五分彼分數爲三十分之十四即將一箇分爲三十等分而取其十四分故兩分數之和必爲一五丄一四即二十九分亦即$\frac{二}{一}丄\frac{一五}{七}$爲$\frac{三〇}{二九}$又兩分數之較必爲一五丅一四即所取者爲一分即$\frac{二}{一}丅\frac{一五}{七}$爲$\frac{三〇}{一}$

第一百十三款　從上兩款而得三法如下　一．凡分數或相比或相加或相減必先化成公分母之分數則分子大者爲分數之大者　二．各分子之和爲各分數之和之分子而各分數之公分母爲各分數之和之分母　三．各分子之較爲各分數之較之分子而各分數之公分母爲各分數之較之分母

習練之題

$\frac{\text{二}}{\text{一}} \perp \frac{\text{三}}{\text{一}} \perp \frac{\text{四}}{\text{一}} \top \frac{\text{五}}{\text{一}} = \frac{\text{六〇}}{\text{五三}}$.

$\frac{\text{三}}{\text{四四}} \top \frac{\text{四二七}}{\text{一五三}} = \frac{\text{一二八一}}{\text{一八三二九}}$.

$\text{一} \perp \frac{\text{一〇}}{\text{八}} \perp \frac{\text{一〇〇}}{\text{三}} \perp \frac{\text{一〇〇〇}}{\text{四}} = \frac{\text{一〇〇〇}}{\text{一八三四}}$.

$\text{二} \top \frac{\text{七}}{\text{一}} \perp \frac{\text{一三}}{\text{一二}} = \frac{\text{九一}}{\text{二五三}}$.

$\frac{\text{二}}{\text{一}} \perp \frac{\text{一六}}{\text{八}} \perp \frac{\text{一八八}}{\text{九四}} = \frac{\text{二}}{\text{三}}$.

$\frac{\text{五二一}}{\text{一六三}} \top \frac{\text{八八一}}{\text{九七}} = \frac{\text{四五九〇〇一}}{\text{九三〇六六}}$.

第一百十四款　假如有一整數與一分數相加如六與$\frac{\text{九}}{\text{四}}$則依一百六款之理六為$\frac{\text{九}}{\text{五四}}$又$\frac{\text{九}}{\text{五四}}\perp\frac{\text{九}}{\text{四}}$為$\frac{\text{九}}{\text{五八}}$即$\text{六}\perp\frac{\text{九}}{\text{四}}$亦即$\text{六}\frac{\text{九}}{\text{四}}$為$\frac{\text{九}}{\text{五八}}$其公法曰將整數與分數之分母相乘得積數與分數之分子相加則所得之和數為所求之分子而分數之分母為所求之分母即如$\text{三}\frac{\text{四}}{\text{一}}=\frac{\text{四}}{\text{一三}}$、$\text{二二}\frac{\text{九}}{\text{五}}=\frac{\text{九}}{\text{二〇三}}$、$\text{七四}\frac{\text{五五}}{\text{二}}=\frac{\text{五五}}{\text{四〇七二}}$、　此法與一百五款之法相反、

第一百十五款　從上法可知$\text{一七二三}\frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{九〇七}}$、為$\frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{一七二三〇九〇七}}$、$\text{六六七}\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{二二五}}$、為$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{六六七二二五}}$、所以凡有整數欲與左邊有一而右邊有若干〇字為

分母之分數相加而其〇字之箇數不少於分子之位數則法曰先書其整數再書分數之分子若分母之〇字其數多於分子之位數則依所多者書於其中間而得若干〇字爲和數之分子而分數之分母爲和數之分母若分母內之〇字其數等於分子之位數則整數與分數之分子之中間不可書〇字

習練之題

一$\frac{一〇〇〇〇〇}{二三七〇七}$

二四五七$\frac{一〇}{六}$

二〇七$\frac{一〇〇〇〇〇〇〇}{二九九}$

二三三$\frac{一〇〇〇〇}{三二一〇}$

第一百十六款　假如有分數$\frac{二}{三}$求以四乘之則依四

十八款之理將$\frac{三}{三}$倍至四次卽同於$\frac{三三三三}{三三三三}$則依一百十二款之理得$\frac{三}{八}$。故得公法曰凡分數與整數相乘將分子以整數乘之而不可變其分母。

第一百十七款　若分數之分母能以整數度之則得公法曰將其分數之分母以整數約之而不可變其分子。卽如$\frac{三六}{七}$。以六乘之則依上款之理得$\frac{二一六}{四二}$。因其分母分子皆能以六約之則依一百八款之理同於$\frac{六}{七}$。則易明$\frac{六}{七}$。從所設之分數$\frac{三六}{七}$而得之。

第一百十八款　或言乘法之理將一箇數倍之若干次

其若干次為乘數內所有一箇之若干數即如$\frac{一}{二}$以七乘之同於將$\frac{一}{二}$倍之至七箇內所有一箇之次數即欲成七箇必倍一箇至若干次則倍十二箇至其若干次可云將一箇變為七箇之工夫同於將$\frac{一}{二}$變為七箇$\frac{一}{二}$之工夫即如七為一丄一丄一丄一丄一丄一丄一七箇$\frac{一}{二}$為$\frac{一}{二}$丄$\frac{一}{二}$丄$\frac{一}{二}$丄$\frac{一}{二}$丄$\frac{一}{二}$丄$\frac{一}{二}$丄$\frac{一}{二}$

上所論者整數也如將兩箇分數依同理行乘法則所得者仍謂之積數而其法仍謂之乘法然究有分別因乘整數將一箇倍之若干次而乘分數先將一箇分得

若干等分而將一箇分倍之若干次如能明此理分數之乘法甚易即如$\frac{\text{三}}{\text{四}}$以$\frac{\text{七}}{\text{八}}$乘之但將其一箇變成$\frac{\text{七}}{\text{八}}$之工夫必將$\frac{\text{三}}{\text{四}}$依同理用之但成此$\frac{\text{七}}{\text{八}}$之法是將一箇分為八分而取其七分所以$\frac{\text{三}}{\text{四}}\times\frac{\text{七}}{\text{八}}$必將$\frac{\text{三}}{\text{四}}$分為八分而取其七分依一百八款之理$\frac{\text{三}}{\text{四}}$同於$\frac{\text{二四}}{\text{三二}}$因成此$\frac{\text{二四}}{\text{三二}}$之法為將一箇分為三二分而取其二四分即同於取其三分至八次故將$\frac{\text{二四}}{\text{三二}}$分為八等分各分為$\frac{\text{三}}{\text{三二}}$又取此各分內之七箇所得者依一百十六款之理為$\frac{\text{二一}}{\text{三二}}$所以$\frac{\text{三}}{\text{四}}$以$\frac{\text{七}}{\text{八}}$乘之所得之積數為$\frac{\text{二一}}{\text{三二}}$

凡兩箇分數相乘其理皆同但$\frac{\text{二一}}{\text{三二}}$從$\frac{\text{三}}{\text{四}}$與$\frac{\text{七}}{\text{八}}$得

之之法是將其三箇分子相乘得積數爲分子三箇分母相乘得積數爲分母凡分數之乘法不外此也

第一百十九款 若將上款所得之 $\frac{\text{三二}}{\text{二一}}$ 以第三箇分數乘之卽如以 $\frac{\text{九}}{\text{五}}$ 則依同法而得 $\frac{\text{二八八}}{\text{一○五}}$ 其餘類推故得分數相乘之公法曰將所有分子相乘得積數爲分子將所有分母相乘得積數爲分母

第一百二十款 假如有 $\frac{\text{一六}}{\text{一五}}$ 以 $\frac{\text{一○}}{\text{八}}$ 乘之其積數可書之爲 $\frac{\text{一六}\times\text{一○}}{\text{一五}\times\text{八}}$ 卽 $\frac{\text{一六○}}{\text{一二○}}$ 將此積數依一百九款之理約得最小項之式卽得 $\frac{\text{四}}{\text{三}}$ 又有一法能徑得 $\frac{\text{四}}{\text{三}}$ 因 一五 與 一○

皆能以五度之又八與一六皆能以八度之則其積數可書之為$\frac{\text{二}\times\text{八}\times\text{二}\times\text{五}}{\text{三}\times\text{五}\times\text{八}}$再將其分子分母依一百八款與八十七款之理以$\text{五}\times\text{八}$約之則徑得$\frac{\text{四}}{\text{三}}$所以凡將多分數相乘之先必觀其分子與分母各乘數內有否公度數如得公度數則分母分子各以此數約之令約得之數化其本數

凡整數能變為有分母之分數則依一百六款之理十六為$\frac{\text{一}}{\text{一六}}$故所欲乘之數有一箇或多箇為整數其餘為分數則各整數能依同法變之為分數

習練之題

$\frac{\text{七四七〇}}{\text{一三六}}\times\frac{\text{九一九}}{\text{二六八}}=\frac{\text{六八六四九三〇}}{\text{三六四四八}}=\frac{\text{三四三二四六五}}{\text{一八二二四}}$.

$\frac{\text{三}}{\text{一}}\times\frac{\text{三}}{\text{二}}\times\frac{\text{四}}{\text{三}}\times\frac{\text{五}}{\text{四}}=\frac{\text{五}}{\text{一}}$. $\frac{\text{一七}}{\text{二}}\times\frac{\text{四五}}{\text{一七}}=\frac{\text{四五}}{\text{二}}$.

$\frac{\text{五九}}{\text{三}}\times\frac{\text{七}}{\text{一三}}\times\frac{\text{一九}}{\text{二四}}=\frac{\text{七八四七}}{\text{六二六六}}$. $\frac{\text{四六一}}{\text{一三}}\times\frac{\text{一一}}{\text{六〇一}}=\frac{\text{五〇七一}}{\text{七八一三}}$.

分數	平方	立方
一五八	二四九六四	三九四四三一二
$\frac{\text{七〇一}}{\text{一四一}}$	$\frac{\text{四九一四〇一}}{\text{一九八八一}}$	$\frac{\text{三四四四七二一〇一}}{\text{二八〇三二二一}}$
$\frac{\text{一四〇}}{\text{一一三}}$	$\frac{\text{一九六〇〇}}{\text{一二七六九}}$	$\frac{\text{二七四四〇〇〇}}{\text{一四四二八九七}}$
三五五	一二六〇二五	四四七三八八七五

假如甲有田一百畝賣去三分之二後得五十畝又將所有之田$\frac{\text{五}}{\text{七}}$賣與乙求乙得田若干。答曰五十九畝又二十一分之十一。

第一百二十一款　凡將一整數以他整數約之卽如$\frac{\text{一〇八}}{\text{一}}$以九約之必先自揣設將若干九相加能否成一〇八果能成之則知取若干九箇卽得矣

假如有任兩箇分數如$\frac{\text{三}}{\text{二}}$與$\frac{\text{五}}{\text{四}}$依同理自揣設將$\frac{\text{五}}{\text{四}}$分得若干等分而將其若干分相加能否成$\frac{\text{三}}{\text{二}}$如能成之則必將$\frac{\text{五}}{\text{四}}$分爲若干分再以其若干分相加至能成$\frac{\text{三}}{\text{二}}$此兩種自揣之意其理相同而第二事爲分數之約法卽$\frac{\text{三}}{\text{二}}$以$\frac{\text{五}}{\text{四}}$約之之題而約得之數之分母爲將$\frac{\text{五}}{\text{四}}$分得若干分而其分子爲所取之分之數解此題之法如下　依一百十一款之理將其兩

箇分數化爲有公分母之分數、則依一百八款之理、所得之兩箇分數爲$\frac{10}{15}$與$\frac{12}{15}$、必等於本兩箇分數、再將$\frac{12}{15}$分爲若干分、取其各分至能成$\frac{10}{15}$、但因成$\frac{12}{15}$之法、是將一箇分爲十五分、而取其各分內之十二箇、則依同理、如將$\frac{12}{15}$分爲十二等分、則各分爲$\frac{1}{15}$、若取其各分內之十箇分、卽成$\frac{10}{15}$、而依一百八款之理、$\frac{10}{15}$卽$\frac{2}{3}$、則必將$\frac{12}{15}$卽$\frac{4}{5}$分爲十二等分、而取其各分內之十箇、卽約得之數爲$\frac{10}{12}$、若令$\frac{2}{3}$爲實、$\frac{4}{5}$爲法、卽得下公法、凡分數約法之理、不外此矣、

法曰、將實之分子、與法之分母相乘、得約得數之分子、

將實之分母與法之分子相乘得約得數之分母可見
分數之約法與分數之乘法相反即如將$\frac{\text{五}}{\text{四}}$以$\frac{\text{一二}}{\text{一〇}}$
乘之必自揣將$\frac{\text{五}}{\text{四}}$之十二分之一取之十次則等於
取一箇之若干分答曰$\frac{\text{六〇}}{\text{四〇}}$即$\frac{\text{三}}{\text{二}}$也又如將$\frac{\text{三}}{\text{三}}$以
$\frac{\text{五}}{\text{四}}$約之則必自揣$\frac{\text{三}}{\text{二}}$為$\frac{\text{五}}{\text{四}}$之若干分答曰$\frac{\text{一二}}{\text{一〇}}$。

第一百二十二款　分數之約法內能偶遇簡便之事即
如$\frac{\text{三三}}{\text{一六}}$以$\frac{\text{一五}}{\text{二八}}$約之則可見其一六為$\text{四}\times\text{四}$又二八為$\text{四}\times\text{七}$又三三
為$\text{三}\times\text{一一}$又一五為$\text{三}\times\text{五}$所以其兩箇分數變為$\frac{\text{三}\times\text{一一}}{\text{四}\times\text{四}}$與$\frac{\text{三}\times\text{五}}{\text{四}\times\text{七}}$而
依所設之法其約得數為$\frac{\text{三}\times\text{一一}\times\text{四}\times\text{七}}{\text{四}\times\text{四}\times\text{三}\times\text{五}}$而因分母分子俱有$\text{四}\times\text{三}$

則可去之依一百八款之理所求之約得數爲$\frac{一\times七}{四\times五}$卽$\frac{七七}{二〇}$故上款之法能變之如下凡得其兩箇分子或其兩箇分母有公度數則先以此公度數約之將約得之數代其本數

第一百二十三款　凡分數以整數約之卽如$\frac{三}{二}$以一五約之先將其一五變爲分數卽$\frac{二}{一五}$再以上法行約法得$\frac{四五}{二}$爲約得數故得公法曰凡分數欲以整數約之將分母與整數相乘而不變其分子

習練之題

實$\frac{三二}{四一}$　$\frac{一五一}{四六七}$　$\frac{五〇七一}{七八一三}$

法	約得數
$\frac{一一}{六三}$。	$\frac{一八九}{四一}$。
$\frac{一○一}{九○七}$	$\frac{一三六九五七}{四七一六七}$。
$\frac{一一}{六○一}$。	$\frac{四六一}{一三}$。

求 $\frac{五}{一}$ 丅 $\frac{一七}{三}$

$\frac{五}{一}$ ㄨ $\frac{五}{一}$ ㄨ $\frac{五}{一}$ 丅 $\frac{一七}{三}$ ㄨ $\frac{一七}{三}$ ㄨ $\frac{一七}{三}$。

答曰 $\frac{七二二五}{五五九}$。

求 $\frac{一二}{八}$ 丅 $\frac{一一}{三}$

$\frac{一二}{八}$ ㄨ $\frac{一二}{八}$ 丅 $\frac{一一}{三}$ ㄨ $\frac{一一}{三}$。

答曰一。

假如有麥田一所，甲收割之須十二日可畢，乙六日可畢，丙四日可畢，若三人合而收割之，須幾日可畢。此題之解法如下。從本題每一人獨自收割一田之麥，而得其一人在一日內收割一田之麥之若干分，而從此得其各人一日合而收割之分數，則可得各人合而收割之日數。下題之解法，其理亦同。　答曰二日。

假如有一大水箱上有四箇門若從第一門進水十二小時水能滿之第二門進水十一小時水已滿第三門進水祇須十小時第四門進水祇須九小時若令四門同時進水須幾小時水能滿之　答曰兩小時又七百六十三分小時之四百五十四

第一百二十四款　本卷之要理能以代數法顯之令甲乙丙丁等代任整數則一百七款之理為 $\frac{乙}{甲}=\frac{乙}{一}\times甲$ 一百八款之理為 $\frac{乙}{甲}=\frac{寅乙}{寅甲}$ 一百十一款之理為 $\frac{乙}{甲}$ 與 $\frac{丁}{丙}$ 同於

$\frac{乙丁}{甲丁}$與$\frac{乙丁}{乙丙}$。一百十二款之理為$\frac{丙}{甲}丄\frac{丙}{乙}=\frac{丙}{甲丄乙}$。與$\frac{丙}{甲}丅\frac{丙}{乙}=\frac{丙}{甲丅乙}$。一百十三款之理為$\frac{乙}{甲}丄\frac{丁}{丙}=\frac{乙丁}{甲丁丄乙丙}$。與$\frac{乙}{甲}丅\frac{丁}{丙}=\frac{乙丁}{甲丁丅乙丙}$。一百十八款之理。$\frac{乙}{甲}\times\frac{丁}{丙}=\frac{乙丁}{甲丙}$。一百二十一款之理。$\frac{乙}{甲}$以$\frac{丁}{丙}$約之即$\frac{\frac{丁}{丙}}{\frac{乙}{甲}}=\frac{乙丙}{甲丁}$、

第一百二十五款　以上各事無論甲乙丙丁等字代整數或分數其理必同。即如$\frac{\frac{丁}{丙}}{\frac{乙}{甲}}$、其分母為分數其分子亦為分數。將分母與分子俱以分數$\frac{己}{戊}$乘之即得

$\frac{\frac{丁巳}{丙戊}}{\frac{乙巳}{甲戊}}$依一百二十一款之理爲$\frac{乙巳丙戊}{甲戊丁巳}$再將分母分子以$戊巳$約之則依一百八款之理爲$\frac{乙丙}{甲丁}$但其原分數爲$\frac{乙丙}{甲丁}$所以$\frac{\frac{丁}{丙}\times\frac{巳}{戊}}{\frac{乙}{甲}\times\frac{巳}{戊}}=\frac{\frac{丁}{丙}}{\frac{乙}{甲}}$此同於上款之第二式又依同理可將上款各式內之甲乙丙丁等字以分數代整數其理亦同依此書之各事內以分數代整數其理亦同如任擇一式如前五十四款之$甲卯丄甲寅＝甲(卯丄寅)$令其寅卯甲各以$\frac{午}{巳}$

$\frac{申}{未}$ $\frac{丙}{乙}$ 代之則 $寅丄卯$ 爲 $\frac{午}{巳}丄\frac{申}{未}$ 卽 $\frac{午申}{巳申丄午未}$ 又 $(寅丄卯)甲$ 爲 $\frac{午申}{巳申丄午未}\times\frac{丙}{乙}$ 卽 $\frac{午申丙}{(巳申丄午未)乙}$ 卽 $\frac{午申丙}{巳申乙丄午未乙}$ 但依一百十二款之理等於 $\frac{午申丙}{巳申乙}丄\frac{午申丙}{午未乙}$ 卽 $\frac{午丙}{巳乙}丄\frac{申丙}{未乙}$ 此因 $\frac{午申丙}{巳申乙}=\frac{午丙}{巳乙}$ 又 $\frac{午申丙}{午未乙}=\frac{申丙}{未乙}$ 之故見前一百八款但 $\frac{午丙}{巳乙}=\frac{午}{巳}\times\frac{丙}{乙}$ 而 $\frac{申丙}{未乙}=\frac{申}{未}\times\frac{丙}{乙}$ 所以 $(寅丄卯)甲$ 卽 $\left(\frac{午}{巳}丄\frac{申}{未}\right)\frac{丙}{乙}=\left(\frac{午}{巳}\times\frac{丙}{乙}\right)丄\left(\frac{申}{未}\times\frac{丙}{乙}\right)$ 又依同理可將任一箇有甲乙丙丁等分數之式以整數代之

茲設三題令學者習之

$$\frac{\left(\frac{乙}{甲}\times\frac{巳}{戊}\right)\perp\left(\frac{丁}{丙}\times\frac{辛}{庚}\right)}{\left(\frac{乙}{甲}\times\frac{丁}{丙}\right)\perp\left(\frac{巳}{戊}\times\frac{辛}{庚}\right)}=\frac{甲戊丁辛\perp乙丙巳庚}{甲丙巳辛\perp乙丁戊庚}.$$

$$\frac{甲\perp\frac{乙}{一}}{一}=\frac{甲乙\perp一}{乙}.$$

$$\frac{甲\perp\frac{一}{乙\perp\frac{丙}{一}}}{一}=\frac{甲\perp\frac{乙丙\perp一}{丙}}{一}$$

$$=\frac{甲乙丙\perp甲\perp丙}{乙丙\perp一}.$$

若末題不用代法如

$$\frac{六\perp\frac{七\perp\frac{八}{一}}{一}}{一}=\frac{六\perp\frac{五七}{八}}{一}$$

$$=\frac{三五〇}{五七}.$$

凡用整數而設立公式則用甲乙丙丁等字代之其理亦同.

桐鄉沈善蒸校算

數學理卷六

英國棣麼甘譔　英國　傅蘭雅　口譯
新陽　趙元益　筆述

小分數之理

第一百二十六款　前一百十二款與一百二十一款曾言凡分數欲比較之必先化爲有公分母之分數又言有公分母之分數易行各法分母不同之分數則行各法甚難故數學內多用分數之事必化爲同分母之分數或得易變爲同分母之分數但各數內易變爲同分母者爲一〇、一〇〇、一〇〇〇等即左邊有一而右邊有幾〇字此各

數謂之十數此種分數之分母謂之任十數其分數謂之十分數又名曰小分數

第一百二十七款 凡整數欲變爲十分數或一箇十分數變爲他十分數其事最易依前一百六十款之理九四爲$\frac{一〇}{九四〇}$即$\frac{一〇〇}{九四〇〇}$即$\frac{一〇〇〇}{九四〇〇〇}$又$\frac{一〇}{三}$爲$\frac{一〇〇}{三〇}$即$\frac{一〇〇〇}{三〇〇}$即$\frac{一〇〇〇〇}{三〇〇〇}$見前一百八款凡數之右邊加一〇字即同於以十乘之見前五十七款所以依一百八款之理可將任一分數之分子右邊加〇字若干而其分母必同加若干〇字

第一百二十八款 或問曰將任一分數變爲十分數而

不改其所値之數可乎答曰如有分數$\frac{一六}{一七}$必將其分子分母各以一○．一○○．一○○○等相乘即得任多分數各分數等於$\frac{一六}{一七}$．見前一百八款即得$\frac{一六○}{一七○}$．$\frac{一六○○}{一七○○}$．$\frac{一六○○○}{一七○○○}$．$\frac{一六○○○○}{一七○○○○}$．等此各分數之分母俱能以一六約之而無餘所約得之各數爲一○．一○○．一○○○．一○○○○等故各分子內如有一箇分子能以一六度之則其分數之分子分母俱能以一六約之則依前一百八款之理以一六約其分子分母之後其分數之所値尚未改分數之分母變爲一○．一○○．一○○○等而各分數內之一箇分數必

等於$\frac{一六}{一七}$．故必查其七〇七〇〇七〇〇〇七〇〇〇〇等各數內能以一六度之之第一數．

如將此各數皆以一六約之其工夫如左．

```
一六)七〇(四
     六四
     ──
       六．

一六)七〇〇(四三
     六四
     ───
       六〇
       四八
       ──
       一二．

一六)七〇〇〇(四三七
     六四
     ────
       六〇
       四八
       ───
       一二〇
       一一二
       ───
          八．

一六)七〇〇〇〇(四三七五
     六四
     ─────
       六〇
       四八
       ───
       一二〇
       一一二
       ────
          八〇
          八〇
          ──
           〇．
```

可見各分子內能以一六度之之第一數爲七〇〇〇〇．但此各約法之工夫不必全寫．因第四式包前三式在內．故推算時以爲右邊所加之〇字無窮．徑加〇字而約之至得

餘數爲○而止算所加之○字若干即如前第四式內因其$\frac{\text{七〇〇〇〇}}{\text{一六〤四三七五}}$爲所以$\frac{\text{一六〇〇〇〇}}{\text{七〇〇〇〇}}$即$\frac{\text{一六〤一〇〇〇〇}}{\text{一六〤四三七五}}$即$\frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{四三七五}}$爲所求之十分數也.

凡分數欲變爲十分數其法任在分子之右邊加○字而以分母約之至無餘數而止所約得之數爲所求分數之分子其分母左邊之數爲一而一之右邊所加○字之數等於約時所加○字之數.

習練之題

求將$\frac{\text{二}}{\text{一}}$.$\frac{\text{四}}{\text{一}}$.$\frac{\text{二五}}{\text{三}}$.$\frac{\text{五〇}}{\text{二}}$.各分數變爲十分數. 答曰

$\frac{\text{一○}}{\text{五}}$．$\frac{\text{一○○}}{\text{二五}}$．$\frac{\text{一○○}}{\text{八}}$．$\frac{\text{一○○}}{\text{二}}$．

求將 $\frac{\text{一二五○}}{\text{三九二七}}$．$\frac{\text{六二五}}{\text{四五三}}$．兩分數變爲十分數．答曰．$\frac{\text{一○○○○}}{\text{三一四一六}}$．$\frac{\text{一○○○○}}{\text{七二四八}}$．

第一百二十九款　有時遇分數將其分子任加○字而以分母約之至無窮不能得無餘數．即如將 $\frac{\text{七}}{\text{一}}$ 變爲十分數．即

七)一○○○○○○○○○○○○○○○○○○
　一四二八五七一四二八五七一四二八五七．

此約得之數爲一四二八五七．連約之至無窮．祇能得

此六箇數而其次第永不變若將約得任多數之任多位一四二八五七一四二八五七等令為分子而其分母為一在右邊加若干〇字其〇字之數等於得任多位數所用之〇字則所得之分數雖不等於$\frac{一}{七}$但所差者為極微之數若分子分母之位數愈多則所差者愈微即如

$\frac{一}{一〇}$之小於$\frac{一}{七}$為$\frac{三}{七〇}$即其差不足成$\frac{一}{一〇}$

$\frac{一四}{一〇〇}$之小於$\frac{一}{七}$為$\frac{二}{七〇〇}$即其差不足成$\frac{一}{一〇〇}$

$\frac{一四二}{一〇〇〇}$之小於$\frac{一}{七}$為$\frac{六}{七〇〇〇}$即其差不足成$\frac{一}{一〇〇〇}$

$\frac{\text{一四二八}}{\text{一〇〇〇〇}}$之小於$\frac{\text{一}}{\text{七}}$爲$\frac{\text{四}}{\text{七〇〇〇〇}}$．即其差不足成$\frac{\text{一}}{\text{一〇〇〇〇}}$．

$\frac{\text{一四二八五}}{\text{一〇〇〇〇〇}}$之小於$\frac{\text{一}}{\text{七}}$爲$\frac{\text{五}}{\text{七〇〇〇〇〇}}$．即其差不足成$\frac{\text{一}}{\text{一〇〇〇〇〇}}$．

$\frac{\text{一四二八五七}}{\text{一〇〇〇〇〇〇}}$之小於$\frac{\text{一}}{\text{七}}$爲$\frac{\text{一}}{\text{七〇〇〇〇〇〇}}$．即其差不足成$\frac{\text{一}}{\text{一〇〇〇〇〇〇}}$．

上之各十分數漸近於$\frac{\text{一}}{\text{七}}$．觀其第六箇十分數知其差漸微故雖不能得一箇十分數竟等於$\frac{\text{一}}{\text{七}}$．而能求一箇十分數最近於$\frac{\text{一}}{\text{七}}$．其差可任意至極微．

此理可顯之如下．假如欲將$\frac{\text{一}}{\text{七}}$化爲十分數而其

差數不可外於一箇之百萬分之一。法將 $\frac{\text{七}}{\text{一}}$ 之分子分母各以百萬乘之再以七約之即得 $\frac{\text{七}}{\text{一}}=\frac{\text{七〇〇〇〇〇〇}}{\text{一〇〇〇〇〇〇}}=\frac{\text{一〇〇〇〇〇〇}}{\text{一四二八五七}\frac{\text{七}}{\text{一}}}$ 如去其分子內之 $\frac{\text{七}}{\text{一}}$。則所去者爲一箇之七百萬分之一。故所求之十分數爲 $\frac{\text{一〇〇〇〇〇〇}}{\text{一四二八五七}}$。而其差不外乎百萬分之一。

習練之題

依同法將 $\frac{\text{九一}}{\text{三}}$。$\frac{\text{一四三}}{\text{一七}}$。$\frac{\text{二四七}}{\text{一}}$。作式與前式同。

答曰。$\frac{\text{九一}}{\text{三}}$ 所約得之循環數爲 三二九六七〇・三二

九六七〇等又$\frac{一四三}{一七}$所約得之循環數爲一一八八八一・一一八八八一等又$\frac{二四七}{一}$所約得之循環數爲四〇四八五八二九九五九五一四一七〇・四〇四八五八二等

第一百三十款　或問曰約得數內得循環數而次第不變究何故也答曰如將一〇〇〇等以二四七約之則每約一次所得之餘數必小於二四七又必爲〇或從一至二四六之各數內之一箇數所以餘數若不能爲〇則連約若干次必得一箇餘數第二次顯出之處假如約二百四十六次而各餘數不同即從一二三等至二四六而不論其次第則約

至第二百四十七次其餘數不能不同於已有之餘數故必有一餘數能重複之處其以下之各數必同於前雖連約至無窮亦必如此

第一百三十一款　或問曰若分數之太半不能變爲十分數則求十分數之法豈非無甚大用乎答曰十分數之加減乘除各法較易於尋常之分數雖尋常分數有不能變爲十分數者然能求得最近之十分數而代其本分數其差極微而不覺即如將一寸分爲一千萬等分而將其一分細觀之目力不能辨也所以凡求物之長數差至寸之千萬分之一則可無妨雖欲測之極詳

無法能知其差如將前一百二十九款之式擴充之即得 $\frac{\text{一四二八五七一}}{\text{一〇〇〇〇〇〇〇}}$ 十分數與 $\frac{\text{一}}{\text{七}}$ 相較所有之差不足為 $\frac{\text{一}}{\text{一〇〇〇〇〇〇〇}}$ 如令此各分數代寸之若干分數則第一數與第二數之別目力不能分故可代用之凡尋常日用之數學如長短輕重等數不能以數記之至無微差故用十分數雖常有微差亦無妨因任用何法必有微差也

習練之題

求將各分數變為十分數而其差不外一萬萬分之一如左

$\frac{七}{四}$　答曰　$\frac{一〇〇〇〇〇〇〇〇〇}{五七一四二八五七}$　$\frac{三五五}{一一三}$　答曰　$\frac{一〇〇〇〇〇〇〇〇}{三一八三〇九八五}$　$\frac{一一三}{三五五}$　答曰　$\frac{一〇〇〇〇〇〇〇〇}{三一四一五九二九二}$

第一百三十二款　凡十分數能以之化爲整數與更簡便之十分數或祇得十分數而其分子祇有一位數目字即如 $\frac{一〇〇〇}{一四七三二六}$ 依一百十五款化其 $\frac{一〇〇〇}{一四七三二六}$ 得 $一四七\frac{一〇〇〇}{三二六}$ 而因 三二六 爲 三〇〇 與 二〇 與 六 之和而成依前一百十二款得 $\frac{一〇〇〇}{三二六}=\frac{一〇〇〇}{三〇〇}丄\frac{一〇〇〇}{二〇}丄\frac{一〇〇〇}{六}$

但依一百八款其$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{三〇〇}}$爲$\frac{\text{一〇}}{\text{三}}$而$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{二〇}}$爲$\frac{\text{一〇〇}}{\text{二}}$所以其$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{一四七三二六}}$爲$\text{一四七} \perp \frac{\text{一〇}}{\text{三}} \perp \frac{\text{一〇〇}}{\text{二}} \perp \frac{\text{一〇〇〇}}{\text{六}}$之和而成再任取一數即如一四七三二六而作若干分數其各分子即爲此數而其各分母爲一 一〇 一〇〇 一〇〇〇 一〇〇〇〇等將各分數變爲整數與更簡便之十分數俱以前法爲之則得表如左

化十分數法之表

$$\frac{一}{一四七三二六}=一四七三二六$$

$$\frac{一〇}{一四七三二六}=一四七三二\perp\frac{一〇}{六}$$

$$\frac{一〇〇}{一四七三二六}=一四七三\perp\frac{一〇}{二}\perp\frac{一〇〇}{六}$$

$$\frac{一〇〇〇}{一四七三二六}=一四七\perp\frac{一〇}{三}\perp\frac{一〇〇}{二}\perp\frac{一〇〇〇}{六}$$

$$\frac{一〇〇〇〇}{一四七三二六}=\cdot\ 一四\perp\frac{一〇}{七}\perp\frac{一〇〇}{三}\perp\frac{一〇〇〇}{二}\perp\frac{一〇〇〇〇}{六}$$

$$\frac{一〇〇〇〇〇}{一四七三二六}=\cdot\cdot\ 一\perp\frac{一〇}{四}\perp\frac{一〇〇}{七}\perp\frac{一〇〇〇}{三}\perp\frac{一〇〇〇〇}{二}\perp\frac{一〇〇〇〇〇}{六}$$

$$\frac{一〇〇〇〇〇〇}{一四七三二六}=\cdot\cdot\cdot\ \frac{一〇}{一}\perp\frac{一〇〇}{四}\perp\frac{一〇〇〇}{七}\perp\frac{一〇〇〇〇}{三}\perp\frac{一〇〇〇〇〇}{二}\perp\frac{一〇〇〇〇〇〇}{六}$$

$$\frac{一〇〇〇〇〇〇〇}{一四七三二六}=\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \frac{一〇〇}{一}\perp\frac{一〇〇〇}{四}\perp\frac{一〇〇〇〇}{七}\perp\frac{一〇〇〇〇〇}{三}\perp\frac{一〇〇〇〇〇〇}{二}\perp\frac{一〇〇〇〇〇〇〇}{六}$$

學者應自寫此表數次以後從下習練之題作同類之表.

習練之題

求將各分數化爲整數與更簡便之十分數.

$\frac{\text{一〇}}{\text{三一四一五九二六}}$. $\frac{\text{一〇〇}}{\text{三一四一五九二六}}$. $\frac{\text{一〇}}{\text{二七〇〇〇三一}}$. $\frac{\text{一〇〇}}{\text{二七〇〇〇三一}}$. $\frac{\text{一〇}}{\text{二〇七三〇〇〇}}$. $\frac{\text{一〇〇}}{\text{二〇七三〇〇〇}}$. $\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{三三三一三〇三}}$. $\frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{三三三一三〇三}}$.

第一百三十三款　如觀此表與同類之表則知容一整數之分數有一公法能作之法曰觀分母之〇數若干.而從分子之右邊起算若干位.而作一點爲記號則如分數爲

$\dfrac{\text{一〇}}{\text{一四七三二六}}$ 卽得 一四七三二·六 $\dfrac{\text{一〇〇}}{\text{一四七三二六}}$ 卽得 一四七三·二六 $\dfrac{\text{一〇〇〇}}{\text{一四七三二六}}$ 卽得 一四七·三二六 餘類推

點左各數爲分數所容之整數點右各數第一箇爲分數以十爲分母之分子第二箇爲分數以百爲分母之分子餘類推若分數內本不容整數則另有法以馭之

第一百三十四款 前表內分數之不含整數者第一箇爲 $\dfrac{\text{一〇〇〇〇〇〇}}{\text{一四七三二六}}$ 其分母之〇數同於分子之位數如以前法作之則在分子左邊作一點而點之左邊無數目字卽如

一四七三二六

依一百三十三款之理能作之查表內之

$\frac{一○○○○○○}{一四七三二六}$

能化爲

$\frac{一○}{一}\ \frac{一○○}{四}\ \frac{一○○○}{七}\ \frac{一○○○○}{三}\ \frac{一○○○○○}{二}\ \frac{一○○○○○○}{六}$

第二箇不含整數之分數爲

$\frac{一○○○○○○○}{一四七三二六}$

能化爲

$\frac{一○○}{一}\ \frac{一○○○}{四}\ \frac{一○○○○}{七}\ \frac{一○○○○○}{三}\ \frac{一○○○○○○}{二}\ \frac{一○○○○○○○}{六}$

但此數內其一箇非爲一○所約而爲一○○所約若於左邊作一點則不合於理因點右第一位之分母爲點右第

二位所應有之分母而第二位有第三位所應有之分母餘類推如欲依前公法作之則必設一法令其一爲點右之第二位而不可爲第一位其法在點與一箇之間作一〇如·六二三七四一〇則合於公法因化之得

一〇	一〇〇	一〇〇〇	一〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇
〇	一	四	七	三	二	六

卽同於前

式因其$\frac{○}{○}$為○不必論之.
又依同理分母之○數多於分子之位數二箇則分子左邊第一位與點之間作兩○亦合於公法茲將前設公法詳論如左.
凡欲將十分數化為整數與更簡便之十分數或不含整數欲化之為更簡便之十分數必算其分母之○數得若干而從其分子之右邊算若干位作一點若分子之位數不敷則缺少若干位必添若干○於若干○之左邊作一點若點之左邊尚有數目字則為本分數所含之整數點右之第一位為以十為分母之分數第二

位爲以百爲分母之分數餘類推

第一百三十五款　十分數不必寫其分母與分子之式因觀其分子則知其分母所以分母不必寫祇須觀分子之點耳作點工夫最爲緊要故以下不寫$\frac{\text{七}}{\text{一〇}}$而寫·七又不寫$\frac{\text{七}}{\text{一〇〇}}$而寫·〇七餘類推觀下表則易明記各十分數之法且觀此表則知其與前言有相關要之若干一箇位之右邊各數目字爲若干一箇以十約之或以百約之或以千約之之數而若干一箇位之左邊各數目字爲若干一以十乘之或以百乘之或以千乘之之數等

學者必留意作點之方位不可在兩箇字之中間必稍移向上其故因各種最深之數學其點在兩箇字之中間則為相乘之意即如 一五·一六· 或 甲·乙· 或 $\overline{\text{甲}\perp\text{乙}}\cdot\overline{\text{丙}\perp\text{丁}}$· 各式內之點為相乘之意十分數之點不可與之相混也

第一表

一二三四 代 $\frac{\text{一〇}}{\text{一二三四}}$· 即 一二三$\frac{\text{一〇}}{\text{四}}$· 即 一二三$\perp\frac{\text{一〇}}{\text{四}}$·

一二·三四 代 $\frac{\text{一〇〇}}{\text{一二三四}}$· 即 一二$\frac{\text{一〇〇}}{\text{三四}}$· 即 一二$\perp\frac{\text{一〇}}{\text{三}}\perp\frac{\text{一〇〇}}{\text{四}}$·

一・二三四

代

$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{一二三四}}$

即

$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{二三四}}$

即

$\text{一}\ 丄\ \frac{\text{一〇}}{\text{二}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇}}{\text{三}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇}}{\text{四}}$

・一二三四

代

$\frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{一二三四}}$

即

$\frac{\text{一〇}}{\text{一}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇}}{\text{二}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇}}{\text{三}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{四}}$

・〇一二三四

代

$\frac{\text{一〇〇〇〇〇}}{\text{一二三四}}$

即

$\frac{\text{一〇〇}}{\text{一}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇}}{\text{二}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{三}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇〇〇}}{\text{四}}$

・〇〇一二三四

代

$\frac{\text{一〇〇〇〇〇〇}}{\text{一二三四}}$

即

$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{一}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{二}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇〇〇}}{\text{三}}\ 丄\ \frac{\text{一〇〇〇〇〇〇}}{\text{四}}$

第二表

·〇一〇〇三代$\frac{一〇〇〇〇〇}{一〇〇三}$·即$一〇〇丄\frac{一〇〇〇〇〇}{三}$·

·一〇〇三代$\frac{一〇〇〇〇}{一〇〇三}$·即$一〇丄\frac{一〇〇〇〇}{三}$·

一〇·〇三代$\frac{一〇〇}{一〇〇三}$·即$一〇丄\frac{一〇〇}{三}$·

一〇〇·三代$\frac{一〇}{一〇〇三}$·即$一〇〇丄\frac{一〇}{三}$·

第三表

$\frac{一〇〇〇〇}{三}丄\frac{一〇〇〇}{八}丄\frac{〇〇}{三}丄\frac{一〇}{一}$＝一二八三·

·〇〇〇三丄·〇〇八丄·〇二丄·一＝

·〇〇八三丄·〇二八三＝·〇二八三丄·一＝

·〇二〇三丄·〇八＝·〇〇〇三丄·一二八＝

·〇〇八丄·〇二三〇三＝·〇二八丄·〇〇三＝

第四表

在一二三四·五六七八九寸數內

一爲一〇〇〇寸

二爲二〇〇寸

三爲三〇寸

四爲四寸

五爲$\frac{\text{一〇}}{\text{五}}$寸

六爲$\frac{\text{一〇〇}}{\text{六}}$寸

七爲$\frac{\text{一〇〇〇}}{\text{七}}$寸

八爲$\frac{\text{一〇〇〇〇}}{\text{八}}$寸

九爲$\frac{\text{一〇〇〇〇〇}}{\text{九}}$寸

第一百三十六款　十分數點右所加之○字同於整數右邊所加之○字（見前第十款）其用處不過補滿位數而與他數目字之分別在乎有値與無値耳如.七四七三○○○爲七箇位之十分數而內有四箇爲有値之數又.六四三爲三箇位之十分數而三箇皆爲有値之數

第一百三十七款　凡十分數之右邊加若干○字俱爲虛字而其本十分數不能因此○字而變其大小即如.三與.三○○依一百三十五款之理.三爲$\frac{三}{一○}$.三○○爲$\frac{三○○}{一○○○}$此數從上數變成之法將分母與分子各以一○○乘之依一

百八款之理兩數必相等

第一百三十八款　凡兩箇十分數欲變成公分母則位數少者之右邊必添○字足令兩數之位相齊即如·五四與·四三二九七其第一數爲$\frac{一○○}{五四}$第二數爲$\frac{一○○○○○}{四三二九七}$則依一百八款之理將第一數之分子分母各以一○○乘之則變成$\frac{一○○○○○}{五四○○○}$此分數之分母同於$\frac{一○○○○○}{四三二九七}$之分母但$\frac{一○○○○○}{五四○○○}$爲·五四○○○（見前一百三十五款）凡整數欲作一點必在其數之右邊即如一二九作一點

必爲一二九.尋常整數不必作點然學者不可遺忘一二九與一二九〇〇〇爲相等數因第一數爲一二九.第二數爲$\frac{一〇〇〇}{一二九〇〇〇}$也.

第一百三十九款　第五卷內分數加減乘約之各法無論何分數俱可用故十分數亦可用且記十分數之法較之他分數更簡所以行此四法亦必簡玆將各法一一言之.

假如有四二六三四.四五二八〇六.二〇〇一.五四.欲相加依一百十二款之理必化成

公分母則依上款之理能化之而得

四二六三四〇

四五二八〇六

二〇〇一〇

五四〇〇〇〇

此各分數爲十分數其分子爲

四二六三四〇

四五二八〇六

二〇〇一〇

五四〇〇〇〇

其公分母爲一〇〇〇〇依一百十二款之理其和爲

$$\frac{四二六三四〇丄四五二八〇六丄二〇〇一〇丄五四〇〇〇〇}{一〇〇〇〇}$$

卽

$$\frac{一四三九一五六}{一〇〇〇〇}$$

亦卽一四三˙九一五六行十分數

加法之最簡便者.寫其各十分數.一與一對.十與十對.令各點在一直線內.即

四三六二四
四五二八〇六
二〇〇一
五四
一四三九一五六

將各行以尋常之加法相加.而其點必在各點之直線內.

題

求

一五二七丄六四七三二〇九四丄二〇〇一三丄〇〇〇〇一九七四.

二二七六三丄一〇七丄九丄二六三一七二丄五六七三二〇〇一.

一一一丄七七丄〇〇三九丄〇〇一四二丄八八三八.

答曰

一五九三七三三四一三七四.

五九〇三五六二五二.

九六九九一二.

第一百四十款　求將九一〇七三二四與一三七三二一相減。此兩分數化成公分毋得九一〇七三二四與一三七三二一〇〇見一百三十八款所以其較必為 $\frac{\text{一〇〇〇〇〇}}{\text{一三七三二一〇〇丅九一〇七三二四}}$ 即 $\frac{\text{一〇〇〇〇〇}}{\text{四六二四七七六}}$ 即四六二四七七六。

作此事之最簡法將小數書於大數之下令其點在一直線內即如

$$\begin{array}{r}\text{一三七三二一}\\ \text{九一〇七三二四}\\ \hline \text{四六二四七七六}\end{array}$$

下數與上數相減即得凡遇上

下有缺少位數之處心中以爲各空處有〇字補之

題

求

一二三六二千二七四二二二一〇七十五.

九九七六二〇七三九四二千〇〇一四三九七六七二八.

一二十〇三十〇〇四千〇〇〇五.

答曰

一二〇八八二七八九三.

九九七六二〇五九五四四三二七二.

一二三三五.

第一百四十一款　凡十分數以十乘之其積數與本數不同之處因其點移向右一位依同理以百乘之必將其點移向右二位以千乘之必將其點移向右三位餘

類推所以將一三二〇七九以百乘之其十分數為$\frac{一〇〇〇〇}{一三二〇七九}$以一〇〇乘之依一百十七款之理得$\frac{一〇〇}{一三二〇七九}$即一三二〇七九。又$\frac{一〇〇〇〇}{一三〇九}\times一〇〇〇〇〇$為一三〇九$\times$一〇〇〇〇〇。即依一百十六款之理為$\frac{一〇〇〇}{一三〇九〇〇〇〇〇}$即一三〇九〇〇。從此各題並同類之各題得公法曰凡十分數欲以十百千等乘之必觀其法數之〇字有若干而將其點移向右邊若干位若十分數之位數不足則依一百三十七款之理在右邊加〇字

至能移其點若干位為止。

第一百四十二款 求將一七.〇三六以四.二七乘之此第一箇十分數為$\frac{一七〇三六}{一〇〇〇}$第二箇十分數為$\frac{四二七}{一〇〇}$。依一百十八款之理此兩箇積數之分數其分子為一七〇三六與四二七之積數其分母為一〇〇〇與一〇〇之積數即$\frac{七二七四三七二}{一〇〇〇〇〇}$。即七二.七四三七二作此事之簡法將一七.〇三六與四.二七兩數相乘而算其一七.〇三六與四.二七兩數點右之位共若干則可

從積數右邊計其若干位作一點此法之理因凡一〇、一〇〇、一〇〇〇等相乘則積數之〇字必等於兩箇乘數〇字之和

第一百四十三款　或問曰若積數之位數少於兩箇乘數之位之和則何能行此法乎答曰將兩箇數相乘試之卽如將·一七二以·一〇一乘之卽同於將$\frac{一七二}{一〇〇〇}$以$\frac{一〇一}{一〇〇〇}$乘之所得之積數爲$\frac{一七三七二}{一〇〇〇〇〇〇}$依一百三十五款之理爲·〇一七三七二所以凡得積數之位不足行前款之法缺少若干必補若干〇

字而○字之左邊依法作點。

附題

˙○○一╳˙○一為˙○○○○一。

五六╳˙○○○一為˙○○五六。

題

求

三˙○○二╳三˙○○二＝三╳三丄二╳三╳˙○○二丄˙○○二╳˙○○二。

一一˙五六○九╳五˙三一九一＝八˙四四╳八˙四四丅三˙一二○九╳三˙一二○九。

八˙二一七╳一˙○○○一＝八╳一丄八╳˙○○○一丄一╳˙二一七丄˙○○○一╳˙二一七。

立方數	平方數	分數
五七○一˙三五˙二三三○八八	六八七˙五˙七二六四	八二˙九二
˙○○○○○五一七七七一七	˙○○○二九九二九	˙○一˙七三
二˙九二四二○七	二˙○四四九	一˙四三
˙○○○○○○七二九	˙○○○○八一	˙○○九

一五˙六二五╳六四＝一○○○。　˙一五六二五╳六四＝一。

一˙五六二五╳六四＝一。　一五六二五╳˙六四＝一○○。

˙○一五六二五╳˙○○六四＝˙○○○一。　一五六二五○○○╳˙○○六四＝一○○○○○。

第一百四十四款　凡十分數以一〇 一〇〇 一〇〇〇等約之其法必先計其法數內之〇字再將本數之點移左若干位若實數內之位數不足行此法必在左邊加若干〇字至足爲止即如一七三四二二九以一〇〇〇約之其十分數爲$\frac{一七三四二二九}{一〇〇〇}$則以一〇〇〇約之依一百二十三款之理得$\frac{一七三四二二九}{一〇〇〇〇〇〇}$即一七三四二二九又依同法將一二一〇六以一〇〇〇〇約之其約得數爲〇〇〇一二一〇六

第一百四十五款　茲將前一百二十八款所言任分數

化爲十分數之法更詳論之二百二十八款內言 $\frac{一六}{七}$ 等於 $\frac{一〇〇〇〇}{四三七五}$ 即 ·四三七五· 依同理將 $\frac{一二八}{三}$ 變爲十分數則依法得

一二八)三〇〇〇〇〇〇〇(二三四三七五
　二五六
　——
　　四四〇
　　三八四
　　——
　　　五六〇
　　　五一二
　　　——
　　　　四八〇
　　　　三八四
　　　　——
　　　　　九六〇
　　　　　八九六
　　　　　——
　　　　　　六四〇
　　　　　　六四〇
　　　　　　——
　　　　　　　〇。

上式內共用七箇〇字可見其三〇

三〇〇 等各數內能以一二八約之之第一數爲三〇〇〇〇〇〇〇· 所以 $\frac{一二八}{三}$ 依

一百八款之理：$\frac{一二八〇〇〇〇〇〇〇}{三〇〇〇〇〇〇〇}$ 等於 $\frac{一〇〇〇〇〇〇〇}{二三四三七五}$ 即 ·〇二三四三七五 見前一百三十五款

從以上各題而得一法能將分數化爲十分數法曰分子加若干〇字而以分母約之若分子之各位用盡之後每一餘數必加一〇字即以爲分子之〇字無窮也依此法連約之至無餘數觀共用之〇字若干再將約得數從右邊起算若干位與所用之〇字數相同則作一點若位數不敷可在左邊加〇字至足然後作點

第一百四十六款 觀一百二十九款之理可知有幾箇

分數不能變爲十分數但無論何分數皆能變爲最近之十分數即如 $\frac{\text{一}}{\text{一〇}}$ $\frac{\text{一四}}{\text{一〇〇}}$ $\frac{\text{一四二}}{\text{一〇〇〇}}$ $\frac{\text{一四二八}}{\text{一〇〇〇〇}}$ $\frac{\text{一四二八五}}{\text{一〇〇〇〇〇}}$ 即 ·一 ·一四 ·一四二 ·一四二八 ·一四二八五 各分數漸近於 $\frac{\text{一}}{\text{七}}$ 求此各分數之法略與前法同祇有兩事不同耳一因連約至無窮不能得無餘數故可約至任多位而止所用〇字若干約得數之點右必有位數若干如約得數之位數不敷必在左邊添〇字至能補其缺再作一點二所得十分數雖不等於本分數而能極相近如欲其更相近則可更約若干位即如

二.一四二八為$\frac{七}{二}$相近數但二.一四二八五七為更相近數又二.一四二八五七一四為最相近數.

第一百四十七款　若分數之分子有〇字則變為十分數所加之〇字與本有之〇字無涉所以其本有之〇字不可算即如$\frac{一二五}{一〇〇}$將其分子加若干〇字而以分母約之則知一〇〇〇能以一二五度之約得數為八而分子所加之〇字祇有一箇所以一〇〇以一二五約之約得之數為八.如其分數為$\frac{一二五}{一}$則因一〇〇〇以一二五約之約得數為八.而分子必加三箇〇字則十分數必為.〇〇八.

第一百四十八款　若分數之分母右邊有若干〇字即

如$\frac{二五〇〇}{三一}$．則其分子加一〇字．等於從分母去一〇字．依一百八款之理．$\frac{二五〇〇}{三一〇}$等於$\frac{二五〇}{三一}$．$\frac{二五〇}{三一·〇}$等於$\frac{二五}{三一}$．故得公法曰．從分母去其〇字．而每去一〇字．必在分子加一〇字．其餘各事如前．惟算所用〇字之時．不但算分子所添之〇字．尚必算分母所去之〇字．

習練之題

求將各分數化為十分數．$\frac{八〇〇}{一}$．$\frac{一二五〇}{三六}$．$\frac{六四}{二九七}$．$\frac{一二八}{一}$．

答曰

．〇〇一二五．

．〇二八八．

四六四〇六二五．

．〇〇七八一二五．

求將各分數化為相近十分數至六位而止．

$\frac{四九}{二七}$．

$\frac{三三}{一五六}$．

$\frac{三七〇〇〇}{二二}$．

$\frac{一三}{一九四}$．

$\frac{九九〇七}{二六三七}$．

$\frac{二九〇八}{一}$．

$\frac{四六六}{一}$．

$\frac{二七七}{三}$．

答曰

．五五一〇二〇．

四．七二七二七三．

．〇〇〇五九四．

一四．九二三〇七六．

．二六六一七五．

．〇〇〇三四三．

．〇〇二一四五．

．〇一〇八三〇．

第一百四十九款　觀一百二十一款之理可知凡二箇分數有公分母第一數以第二數約之其法將第一數

之分子以第二數之分子約之即得即如將一七七六二以六二五約之將此各分數依一百三十八款之法化成公分母即得一七七六二與六二五〇即$\frac{一〇〇〇}{一七七六二}$與$\frac{一〇〇〇}{六二五〇}$故約得之數為$\frac{六二五〇}{一七七六二}$必將此分數依前法化為十分數其工夫如下去其分母之〇字而分子加〇字或各餘數加〇字亦可而依一百四十五款行約法其式為

```
六二五)一七七六二(二八四一九二
       一二五〇
       ────
        五二六二
        五〇〇〇
        ────
         二六二〇
         二五〇〇
         ────
          一二〇〇
           六二五
           ───
           五七五〇
           五六二五
           ────
            一二五〇
            一二五〇
            ────
               〇
```

觀上式而知分子加四箇○字分母去一箇○字故約得數必得點右有五位數目字即變爲二八四一·九二此爲一·七七六二以六二五約之之約得數

第一百五十款　凡一箇十分數以他十分數約之其法將實數與法數各配得同位數觀何數缺若干位以○字補滿之再觀實數應在點之右邊有若干位則將實數加若干○字而去其點其餘各事以尋常約法作之約得之數內必依法作其點如法數有○字則可去其○而代實數所欲加之○字若法數之○字不敷則可先去其○字若干而其餘○字可添在實數內

即如六七一七三以.〇一四約之點右有三位則先書六七一七三與.〇一四〇則各數之點右有四位但因約得數之點右要三位則六七一七三本應添三箇〇字因法數.〇一四〇有一〇字則去此〇字而添兩〇字於六七一七三.去其點而將六七一七三〇〇以〇一四即一四約之約得數爲四七九八〇七.餘數爲二故所求之數爲四七九八〇七.

尋常之法曰實數點右之位所有多於法數點右之位爲約得數點右所應有之位然此法尚未全不能爲公法因實數點右之位少於法數點右之位則不能用此法學者遇此事往往淆亂必觀附卷第五款所言之理方能明之又可自揣應在約得之數內何處作點即如

二六一一九 以 七二四三六 約之則約得數之點之左邊祇能有一位不知公法者一覽即知其理又 二六一一九 以 七二四三六 約之則約得數之第一箇有值之數與其點之間必有一〇字此亦一覽而

知也．

又有一法觀法數點右有若干位則將實數之點移向右若干位如位不敷可加○字再除去法內之點其餘可依尋常約法作之既成則所用實數點右每得一位則約得數點右必配一位卽如一七三一四以六一二約之同於一七三一四以六一二約之而其點必在約得數第一位之左邊如將一七三一四以六六一七五約之同於一七三一四以六六一七五約之因一七三一四〇〇〇內必先用點右之三位

則能得約得之數而約得數之第一字必爲第三位之字故必配兩箇〇字得·〇〇二

附題

$\frac{·〇〇二五}{三一}$＝一二四〇·

$\frac{六四}{·〇〇六二}$＝·〇〇〇九六八七五·

題

求証

$\frac{一五·〇一}{一五·〇〇六╳一五·〇〇六丅·〇〇四╳·〇〇四}$＝一五·〇〇二·

求証

$\frac{二·九一}{·〇一╳·〇一╳·〇一丄二·九╳二·九╳二·九}$＝二·九╳二·九丅二·九╳·〇一丄·〇一╳·〇一·

求

$\frac{三·一四一五九}{一}$·

$\frac{二·七一八二八一八}{一}$·

$\frac{·一八三四九}{二六五}$·

之

十分數之六位。答曰

˙三一八三一〇。

˙三六七八七九。

一九八九˙二〇九二二一。

將下各級數推至十項而得五位十分數。

一 ⊥ $\frac{\text{二}}{\text{一}}$ ⊥ $\frac{\text{二}\times\text{三}}{\text{一}}$ ⊥ $\frac{\text{二}\times\text{三}\times\text{四}}{\text{一}}$ ⊥ $\frac{\text{二}\times\text{三}\times\text{四}\times\text{五}}{\text{一}}$ ⊥ 等……＝一˙七一八二四。

一 ⊥ $\frac{\text{二}}{\text{一}}$ ⊥ $\frac{\text{三}}{\text{一}}$ ⊥ $\frac{\text{四}}{\text{一}}$ ⊥ $\frac{\text{五}}{\text{一}}$ ⊥ 等……＝二˙九二八九五。

$\frac{\text{八一}}{\text{八〇}}$ ⊥ $\frac{\text{八二}}{\text{八一}}$ ⊥ $\frac{\text{八三}}{\text{八二}}$ ⊥ $\frac{\text{八四}}{\text{八三}}$ ⊥ $\frac{\text{八五}}{\text{八四}}$ ⊥ 等……＝九˙八八二八六。

第一百五十一款　茲論數法能於推算十分數之工夫內簡約其事假如詳測兩處之相距得一七·八四六二一七里如有人問此兩處相距之略數則答曰十七里然十七雖爲相距之整里數而因其零數大於半里則近於十八里所以如說一更準之略數可云相距十八里而此數之過多者不及十七之過少者若其多於十七里之分數欲說明爲十分之若干分則可云相距十七八里但此數太少其所少者爲·〇四六二一七　此過少之數不及十七九里之爲過

多。其差不及 $\frac{一〇}{一}$ 之半。即不及 $\frac{二〇}{一}$。如欲更詳言之。而

知其多於十七里爲百分里之若干分。則云相距 一七·八五 里。

較之 一七·八四 里更近於準。因 一七·八四 之所少者爲 ·〇〇六二一七 此數大於 ·〇一

之半。所以 一七·八四丄$\frac{一〇}{一}$ 較之 一七·八四 更近於準。故得公法曰。十分數之

位足配其所須之準。則右邊餘數不用者可去之。設所

去之第一箇數大於五。則必將所取數之末位加一。十

分數連去一位之工夫。其式如左。

三·一四一五九
三·一四一六
三·一四二
三·一四
三·一
三·〇

二·七一八二八一八
二·七一八二八二
二·七一八二八
二·七一八三
二·七一八
二·七二
二·七
三·〇

一·九九一九
一·九九二
一·九九
二·〇〇
二·〇

第一百五十二款　乘約兩法內所得之十分數其位數不必多於本數之位數即如九九八與八九六爲某物長之寸數即測準之十分數有兩位即不能差過百分寸之一之半則九九八之更準數可以爲九九七五與九九八五間之任一數又八九六之更準數可以爲八九五五與八九六五間之任一數所以其相距之準

積數必在九˙九七五╳八˙九五五與九˙九八五╳八˙九六五之間即用十分數之三位者必在八九˙三二六與八九˙五一六之間但原所設兩數之積數爲八九˙四二〇八可見積數內所最可恃之數爲八九其整數亦能偶得十分數之第一位爲可恃之數其故因測八九˙六之差雖爲十分數之第三位因與他數相乘之後則增大至九˙九七五倍即略增十倍所以能令十分數之第二位有差茲有一簡法能知任一乘

得積數之十分數最可恃者有若干位令甲爲法數乙爲實數如此兩數各有十分數之一位爲準則積數之差不外乎$\frac{甲\perp乙}{二〇}$此各事雖有微差然亦無妨如此兩數各有十分數之兩位爲準則積數之差不外乎$\frac{甲\perp乙}{二〇〇}$又如十分數之三位爲準則積數之差不外乎$\frac{甲\perp乙}{二〇〇〇}$餘類推上題九九八.與六九八.其十分數之兩位爲準兩數相加其和數以二〇〇約之得.〇九四七.而其積數爲八九四二〇八.故積數之差不外乎.〇九四七.如將八九四二〇八.以

・〇九四七增之或減之則得八九・五一五五或八九・三二六一而積數所必準之界限略
在此兩數之間故不能以十分數第一位爲極準依前
款之理如此第一位爲準不能差至〇・五而此所得之差
爲〇・九凡所乘之數如爲準則積數亦準故此款所論之
各數亦必準至十分數之若干位其法曰將法數與實
數相加其和數以二約之再將其點移向左若干位其
位數同於法數與實數所有爲準之位數則所得之數
爲積數所不能外之差如行約法可用前言之法以實
法與法數代乘法之法數與實數而以法數之平方約

之則約得之數爲第一實數與法數之約得數所不能

外之差即如一七三二四以五三八○九約之此兩數之十分數以三位爲

準其和數以二約之得三五五六六以前法變之爲○三五五六六則必以五三八○九

之平方約之因此數稍煩可用五○之平方即二五○○約之約

得之數少於○○○○二所以一七三二四以五三八○九約之其約得數之十分數

可云有四位無差

第一百五十三款　如有兩箇十分數相乘而積數內之

十分數欲存若干位而其餘各位不必求之則可見法數各位可反其次第寫之卽如四三二一代一二三四但行乘法之工夫內每項必移向右一位不可移向左一位觀後式能明其理

二二二一
一二三四
八八八四
六六六三
四四四二
二二二一
二七四〇七一四

二二二一
四三二一
二二二一
四四四二
六六六三
八八八四
二七四〇七一四

如欲將三四八八四一四以五一三〇七四二乘之其積數祇欲存四位十分數則反其法數各位之次第以前法行之則其工夫如左式

作一縱線分開十分數之四位可見有

三四八八四一四
二四七〇三一五
一七四四二〇七〇
三四八八四一四
一〇四六五二四｜二八
二四四一八｜八九八
一三九五｜三六五六
六九｜七六八二八
一七八九八一五二二｜二三一八八

兩事必知之一縱線左邊之各位二縱線右邊第一縱行應進位之數觀左邊第一縱行有四四八五九各數第一數四從四乂一而得之二之意指出其一為法數第二數四從一乂三而得之第三數八從八乂七而得之五為八乂四而得之九為四乂二而得之將實數並反其次第之法數排列之如三四八八四一四 二四七〇三一五則法

數之各位排列於下其首位與實數同用之而成存十
分數之首四位可見法數五一三〇七四二內之當一之位在實數末
位四之下卽實數之十分數之第四位若縱線右邊無
欲進位之數其法如下　將法數之各位反其次第而
書於實數之下得其法數之當一數正在實數所欲存
十分數之末位之下而法數之上有不記之位添〇字
補之再以尋常之法相乘但法數之每一位數目字必
與其上實數之數先乘而右邊之數不乘各行之第一
位必一與一相對如欲改準此法可補縱線右邊所進

位之各數則心中必記得爲兩分合而乘者一爲乘各行而徑進之數目二爲右邊第一行相加而進之數目配好第一分之數可將法數之各位以其在實數內右邊之數爲起將其若干十進至次一箇數目但其若干○不寫又有一法可并補其兩數則依一百五十一款之理凡得從五至十五各數可進一箇從十五至二十五各數可進二箇等即進其最近若干十數即如得三七可以進四因三七近於四○而遠於三○然用此法不能恆得末位無差若多算十分數之一位而以後在積數內去之則無差故得公法如左

第一百五十四款　凡兩箇十分數相乘而欲存卯位十分數其法分爲三事

一　將法數反其次第去其點而書於實數之下法數當一之數與實數之十分數第卯位相對若法數之上有不記之位可添○字補之

二　以尋常之法乘之但法數每一箇數在其上之右邊一位乘起此第一數之若干一不書但其最近之若干十數進至次一位如此作之至乘畢

三　將各行之數一與一對十與十對書之依常法相加而從右邊算至卯位作一點

即如一三六˙四〇七二以一˙三〇六〇九乘之欲得七位十分數其式如

一三六四〇七二〇〇〇
九〇六〇三一
一三六四〇七二〇〇〇
四〇九二二一六〇〇
八一八四四三二
一二二七六六
一七八˙一六〇〇七九八

左邊各題首二行為實數與法數觀所得之數則知欲存十分數之位數。

四四七一六一八
三七七一九二一四
三七七一九二一四
八一六一七四四
一五〇八七六八六
一五〇八七六八
二六四〇三四
三七七二
二二六三
三八
三〇
一˙六八六六五九一

三三一六六二四八
一四一四二一三六
〇三三一六六二四八
六三一二四一四一
三三一六六二五
一三二六六五〇
三三一六六
三二六六
一六六三
三三
一〇
三
四六九〇四一五

三四六四一〇一六
一七三二〇五〇八
三四六四一〇一六〇
八〇五二三七一
三四六四一〇一六〇
二四二四八七一一二
一〇三九二三〇五
六九二八二〇
一七三二〇五
二七七一
六〇〇一˙五八三七三

學者欲求習練之題用一百四十三款之各題可也。

第一百五十五款　十分數之約法亦有最簡者如將任

兩數 一六八〇四三七九二一 與 三˙一四二 將第一數以第二數約之得若干位十分數假如五位則其式如

三˙一四二)一六八〇四三七九二一(五三四八三〇
一五七一〇
一〇九四三
九四二六
一五一七七
一二五六八
二六〇九九
二五一三六
九六三二
九四二六
二〇六一

(甲)
二六〇九
二五一四
九五
九四
一

可用一縱線依一百五十三款之法撤去某餘數二六內

第一箇二字右邊各數目字則有一箇法能得縱線左邊各數與乘法內之事相同如(甲)式學者已明乘法內論此事之說則約法不煩言而解茲祇論其大略而已

法曰凡十分數以十分數約之而欲存卯位十分數則以尋常之約法約得一位數目而依一百五十款之理定約得之數屬於何位再以尋常約法行之至約得數內所欲求各數目字小於法數內數目字已得則不必行約法餘數不可加一箇數目字或零字必從法數除去一位數目字而以常法用其已去一位之法約得一數但乘其法數之時必依一百五十四款之理進其除

去之數之最近若干十數餘類推至各位用盡則因初時知約得數之第一數目字屬於十分數之何位又知欲求十分數之若干位則從初時知全約得數內應有若干位如法數內之位較之約得數之位更多則不必用可去之其餘依一百五十一款之法配勻之如法數左邊有若干〇字即如法數爲·〇〇三一七八則因此爲$\frac{一〇〇}{·三一七八}$可先以常法以·三一七八約之後將約得數以一〇〇乘之即將其點移右二位所以求六位之十分數則以·三一七八約之必去八位

其故易明。但求約得數末位工夫內，必取其最近者。觀後兩題內之第二箇題。

所求之位數　實數　法數　　約得數

二

四一四三二
六七三一四八九
四一四三二
二五八八二八
二四八五九二
一〇二三七
八二八六
一九五一
一六五七
二九四
二九〇
四
四
〇

一七四二六一

一〇三七 應作 一〇三六 而六變為七者。因實數內所除去之數為九也。見前一百五十一款。

八

三一四一五九二七
二七一八二八一八〇
二五一三二七四一六
二〇五〇〇七六四
一八八四九五五六
一六五一二〇八
一五七〇七九六
八〇四一二
六二八三二
一七五八〇
一五七〇八
一八七二
一五七一
三〇一
二八三
一八
一九

六九五五二五六八

學者欲多得習練之題從一百四十三款與一百五十款得之可也

元和江衡校算