Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2019/2020

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 20

Die Picardgruppe

Definition 20.1. Zu einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man die Menge der Isomorphieklassen von invertierbaren Garben auf X mit der Tensorierung als Verknüpfung, der dualen Garbe als inverses Element und der Strukturgarbe als neutralem Element die *Picardgruppe* von X. Sie wird mit $\operatorname{Pic}(X)$ bezeichnet.

Die folgende Überlegung zu den Verklebungsdaten einer invertierbaren Garbe knüpft einerseits an Aufgabe 2.19 an und weist andererseits auf die ?ech-Kohomologie voraus.

Bemerkung 20.2. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Trivialisierungen

$$\varphi_i \colon \mathcal{L}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

gibt. Für zwei offene Mengen U_i, U_j ergeben sich auf $U_i \cap U_j$ die Übergangsabbildungen

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j} \colon \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}.$$

Diese Isomorphien sind (vergleiche Aufgabe 13.8) durch (Multiplikation mit) Einheiten $r_{ij} \in \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big)$ gegeben. Da die Daten von der einen invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ herrühren, gilt dabei die Kozykelbedingung $r_{kj} \cdot r_{ji} = r_{ki}$, was man auch als $r_{kj} \cdot r_{ki}^{-1} \cdot r_{ji} = 1$ schreiben kann. Ein solcher Datensatz legt durch eine Verklebung wiederum eine invertierbare Garbe fest. Wenn die invertierbare Garbe trivial ist, so gibt es einen globalen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\psi \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Dann liegen auf den U_i die Isomorphismen

$$\mathcal{O}_X|_{U_i} \xrightarrow{\psi|_{U_i}} \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

vor, die insgesamt durch Einheiten $s_i \in \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big)$ festgelegt sind. Für diese gilt die Beziehung

$$s_i \cdot s_j^{-1} = (\varphi_i \circ \psi) \circ (\varphi_j \circ \psi)^{-1} = r_{ij}$$

für alle i, j. Wenn umgekehrt solche realisierende Einheiten s_i gegeben sind, so werden durch

$$\psi|_{U_i} := \varphi_i^{-1} \circ s_i$$

Modulisomorphismen auf U_i festgelegt, die verträglich sind und daher einen globalen Isomorphismus zwischen $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{L}$ festlegen. Eine invertierbare

Garbe kann man also mit dem Datensatz (U_i, r_{ij}) (mit den obigen Bedingungen, man spricht von einem *Kozykel*) identifizieren, wobei ein solcher Datenstz als trivial anzusehen ist, wenn es Einheiten s_i mit

$$r_{ij} = s_i \cdot s_j^{-1}$$

gibt.

BEMERKUNG 20.3. Die Identifizierung aus Bemerkung 20.2 zwischen invertierbaren Garben und Kozykeln in der Einheitengarbe ist insofern nicht kanonisch, da man hier ein Vorzeichenproblem hat. Dies hängt damit zusammen, ob man die lokalen Trivialisierungen der invertierbaren Garben mit der Strukturgarbe als $\varphi_i \colon \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_X|_{U_i}$ ansetzt oder in umgekehrter Richtung und wie man die Indexmenge ordnet.

BEMERKUNG 20.4. Die Tensorierung von invertierbaren Garben $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ lässt sich auf der Ebene der zugehörigen Datensätze aus Bemerkung 20.2 durchführen. Dazu geht man zu einer gemeinsamen Verfeinerungsüberdeckung über und kann annehmen, dass beide Garben Trivialisierungen bezüglich einer Überdeckung U_i, $i \in I$, besitzen. Dann beschreibt der Datensatz $r_{ij} \cdot r'_{ij}$ das Tensorprodukt.

Wir beschränken uns im Weiteren auf Schemata.

LEMMA 20.5. *Für einen lokalen Ring R ist die Picardgruppe von* $\operatorname{Spec}(R)$ *trivial.*

Beweis. Das ist trivial. □

LEMMA 20.6. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema. Dann ist jede invertierbare Garbe auf X isomorph zu einem $\mathcal{O}_X$-Untermodul der konstanten Funktionenkörpergarbe.*

Beweis. Es sei K der Funktionenkörper von X und $\mathcal{K}$ die zugehörige Garbe. Für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ ist der Halm im generischen Punkt η ein eindimensionaler K-Vektorraum. Wir fixieren einen K-Isomorphismus $\mathcal{L}_\eta = \mathcal{K}_\eta = K$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ gibt es eine natürliche Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}_\eta \longrightarrow K\,.$$

Diese sind injektiv (vergleiche den Beweis zu Lemma 11.16) und definieren einen Untermodul von $\mathcal{K}$. □

BEMERKUNG 20.7. Ein invertierbarer Untermodul $\mathcal{L}$ der konstanten Funktionenkörpergarbe ist gegeben durch eine offene Überdeckung U_i, $i \in I$, von X zusammen mit von 0 verschiedenen Elementen $q_i \in Q$, die die Bedingung $\frac{q_i}{q_j} \in (\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X))^\times$ erfüllen. Wenn man eine trivialisierende Überdeckung U_i heranzieht, so ist

$$\mathcal{L}|_{U_i} \cong q_i \mathcal{O}_{U_i},$$

und aus den Übergangsabbildungen auf den Durchschnitten folgt, dass der Quotient q_i/q_j eine Einheit sein muss. Wenn umgekehrt ein solcher Datensatz (U_i, q_i) gegeben ist, so ist

$$q_i \mathcal{O}_{U_i} \subseteq \mathcal{Q}_{U_i}$$

eine triviale Untergarbe, die auf X eine invertierbare Untergarbe festlegt. Ein weiterer Gesichtspunkt ergibt sich aus der exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{Q}^\times \longrightarrow \mathcal{Q}^\times/\mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0\,.$$

Aufgrund von Lemma 5.9 sind die beschriebenen Datensätze die globalen Schnitte aus der Quotientengarbe $\mathcal{Q}^\times/\mathcal{O}_X^\times$.

Lemma 20.8. *Sei R ein Integritätsbereich. Dann ist jede invertierbare Garbe auf $X = \operatorname{Spek}(R)$ isomorph zu eine Idealgarbe.*

Beweis. Nach Lemma 20.6 können wir direkt davon ausgehen, dass ein invertierbarer Untermodul $L \subseteq K$ des Quotientenkörpers $K = Q(R)$ vorliegt. Die Invertierbarkeit bedeutet nach Satz 16.2, dass es eine Familie

$$f_1, \ldots, f_k \in R$$

derart gibt, dass $L_{f_i} \cong R_{f_i} \cdot q_i$ mit $q_i \in K \setminus \{0\}$ gibt. Es sei b ein Hauptnenner der q_i. Dann wird unter der Multiplikationsabbildung

$$K \longrightarrow K,\, q \longmapsto qb,$$

die ein R-Modulisomorphismus von K ist, der Untermodul L auf einen dazu isomorphen Untermodul L' abgebildet. Dieser ist in der gegebenen Überdeckung ein Untermodul der Strukturgarbe, also ein Ideal. □

Es gibt im Allgemeinen viele Möglichkeiten, eine invertierbare Garbe als eine Untergarbe der Funktionenkörper zu realisieren, allein schon deshalb, weil man aus einer Realisierung durch Multiplikation mit einem $f \in K$ eine neue Realisierung erhält.

Beispiel 20.9. Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ über einem Körper K lässt sich eine getwistete Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)$ folgendermaßen in die Funktionenkörpergarbe $\mathcal{Q}$ einbetten. Es sei

$$G \in K(X_0, \ldots, X_n)_{-\ell}$$

ein homogenes Element vom Grad $-\ell$. Auf jeder offenen Menge $U \subseteq \mathbb{P}^d_K$ ist dann die natürliche Abbildung

$$\Gamma\Big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)\Big) \longrightarrow Q(\mathbb{P}^d_K),\, s \longmapsto sG,$$

eine Realisierung als Untermodul.

Lemma 20.10. *Es sei X ein integres Schema und seien $\mathcal{L}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}$ invertierbare Untergarben der konstanten Garbe $\mathcal{Q}$ zum Funktionenkörper $Q(X)$. Dann ist*

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \cong \mathcal{L} \cdot \mathcal{M},$$

wobei $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}$ diejenige Untergarbe von $\mathcal{Q}$ bezeichnet, die halmweise in jedem Punkt $P \in X$ aus allen Produkten fg mit $f \in \mathcal{L}_P$ und $g \in \mathcal{M}_P$ erzeugt wird.

Beweis. Für den Quotientenkörper Q eines Integritätsbereiches R gilt $Q \otimes_R Q = Q$ über die natürliche Multiplikation. Daher gilt in einem integren Schema die Isomorphie

$$\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}.$$

Daher gibt es einen natürlichen Homomorphismus

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

durch Multiplikation. Das es sich um invertierbare Garben handelt, liegt lokal und damit auch global ein Isomorphismus auf die Bildgarbe vor. □

Die Picardgruppe im faktoriellen Fall

Lemma 20.11. *Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. *Zu $f \in R$, $f \neq 0$, ist $(f)R_{(p)} = (p^s)$ genau dann, wenn p mit dem Exponenten s in der Primfaktorzerlegung von f vorkommmt.*
2. *Zwei Hauptideale (f) und (g) stimmen genau dann überein, wenn für jedes Primelement p in der Lokalisierung $R_{(p)}$ die Ideale $(f)R_{(p)}$ und $(g)R_{(p)}$ übereinstimmen*

Beweis. Siehe Aufgabe 20.4. □

Satz 20.12. *Die Picardgruppe eines faktoriellen Integritätsbereiches ist trivial.*

Beweis. Es sei $I \subseteq R$ ein Ideal, das invertierbar sei, und sei

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

eine offene Überdeckung derart, dass IR_{f_i} ein Hauptideal ist. Es ist insbesondere zu jedem Primelement p das Ideal $I_{(p)} \subseteq R_{(p)}$ ein Hauptideal und damit von der Form p^{s_p}, da $R_{(p)}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Dabei sind die s_p nur für endlich viele Primelemente von 0 verschieden. Zu einem Element $g \in I$, $g \neq 0$. gibt es nämlich nur endlich viele Primteiler und für die anderen Primelemente q ist g eine Einheit in $R_{(q)}$. Wir behaupten, dass I mit dem von $h = \prod_p p^{s_p}$ erzeugten Hauptideal übereinstimmt. Da man die Gleichheit von Idealen lokal zu einer Überdeckung testen kann, können wir in R_{f_i} argumentieren. Die Aussage folgt dann aus Lemma 20.11. □

Lemma 20.13. *Es sei R ein noetherscher faktorieller Integritätsbereich und $U \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ eine offene Teilmenge. Dann ist die Picardgruppe von U trivial.*

Beweis. Es sei
$$U = D(f_1, \ldots, f_n),$$
wir führen Induktion über n, wobei der Induktionsanfang nach Satz 20.12 klar ist. Wir können also davon ausgehen, dass $\mathcal{L}$ auf $D(f_1, \ldots, f_{n-1})$ trivial ist. Wir ziehen Bemerkung 20.2 heran, somit ist die invertierbare Garbe durch eine Einheit über $D(f_1, \ldots, f_{n-1}) \cap D(f_n)$ festgelegt. Nach Satz 9.8 ist die Strukturgarbe und damit auch die Garbe der Einheiten im faktoriellen Fall besonders einfach, ein Element $h \in R$ ist genau dann eine Einheit auf U, wenn $U \subseteq D(h)$ gilt. Daher sind Einheiten auf offenen Mengen generell von der Form $h = up_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ mit Primelementen $p_j \in R$, u einer Einheit aus R und $r_j \in \mathbb{Z}$. Dabei ist h eine Einheit auf
$$D(f_1, \ldots, f_{n-1}) \cap D(f_n) = D(f_1 f_n, \ldots, f_{n-1} f_n)$$
genau dann, wenn die beteiligten p_j (also die mit einem Exponenten $r_j \neq 0$) die $f_i f_n$ teilen. Dies bedeutet, dass p_j das Element f_n oder aber alle Elemente $f_1, \ldots, f_{n-1}$ teilt. In jedem Fall kann man h als ein Produkt von Einheiten über $D(f_1, \ldots, f_{n-1})$ und Einheiten über $D(f_n)$ schreiben. Mit diesen Einheiten kann man die Garbe trivialisieren. □

Korollar 20.14. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches integres Schema und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Für jeden Punkt $P \in X \setminus U$ sei der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ faktoriell. Dann lässt sich jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf U zu einer invertierbaren Garbe auf X fortsetzen.*

Beweis. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf U und es sei $P \in X \setminus U$ ein Punkt. Es sei $W = \operatorname{Spek}(R)$ eine offene affine Umgebung von P, wobei P dem Primideal $\mathfrak{p}$ entspreche. Nach Voraussetzung ist $R_\mathfrak{p}$ faktoriell. Wir betrachten die (injektiven) Schemamorphismen
$$\operatorname{Spek}(R_\mathfrak{p}) \longrightarrow W \longrightarrow X .$$
Die offene Menge U hat mit W und mit $\operatorname{Spek}(R_\mathfrak{p})$ einen nichtleeren Durchschnitt, sagen wir $V \subseteq \operatorname{Spek}(R_\mathfrak{p})$, da der generische Punkt von X dem Nullideal von $R_\mathfrak{p}$ entspricht. Die zurückgezogene Garbe auf V ist wegen Lemma 20.13 trivial und rührt von einem $R_\mathfrak{p}$-Modul und auch von einem R-Modul L her. Aufgrund der Trivialisierbarkeit gibt es einen $R_\mathfrak{p}$-Modulisomorphismus
$$R_\mathfrak{p} \longrightarrow L_\mathfrak{p}.$$
Dieses Isomorphismus kann man auf eine offene Umgebung $P \in D(f) = W' \subseteq W$ ausdehnen. Somit ist eine Ausdehnung von $\mathcal{L}$ auf $U \cap W'$ gefunden. Daher können wir die offene Menge durch zunehmend größere offene Menge, auf der eine Ausdehnung existiert, ersetzen. Dieser Prozess endet wegen noethersch beim Gesamtraum. □

Unter der vorstehenden Voraussetzung ist also der natürliche Einschränkungshomomorphismus

$$\mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(U)$$

surjektiv.

Beispiel 20.15. Wir betrachten den kommutativen Ring

$$R = K[X,Y,Z]/(XY - Z^n)$$

über einem Körper K mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X,Y,Z)$ und die offene Menge

$$U = D(X,Y) = D(X) \cup D(Y) = \mathrm{Spek}\,(R) \setminus \{\mathfrak{m}\} \subseteq \mathrm{Spek}\,(R).$$

Es ist

$$R_X \cong K[X,X^{-1},Z]$$

(vermöge $Y = \frac{Z^n}{X}$) ein faktorieller Integritätsbereich und somit sind sämtliche invertierbaren Garben auf $D(X)$ (und entprechend auf $D(Y)$) nach Satz 20.12 trivial. Ferner ist

$$R_{XY} = R_Z \cong K[X,X^{-1},Z,Z^{-1}].$$

Eine invertierbare Garbe auf U ist somit durch einen Isomorphismus

$$K[X,X^{-1},Z,Z^{-1}] \cong \mathcal{O}_U|_{D(XY)} \longrightarrow K[X,X^{-1},Z,Z^{-1}] \cong \mathcal{O}_U|_{D(XY)},$$

gegeben, der wiederum einer Einheit aus $K[X,X^{-1},Z,Z^{-1}]$ entspricht. Sei cX^iZ^j eine solche Einheit. Die Einheiten, die von R_X oder R_Y herrühren und multiplikative Kombinationen daraus führen Bemerkung 20.2 zu einer trivialen invertierbaren Garbe. Die Restklassengruppe besteht aus Z^j mit $j = 0,1,\ldots,n-1$ und daher ist die Picardgruppe von U gleich $\mathbb{Z}/(n)$.

Beispiel 20.16. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ über einem Körper K mit der Standardüberdeckung

$$\mathbb{P}^1_K = D_+(X) \cup D_+(Y)$$

mit den beiden affinen Geraden

$$D_+(X) = \mathrm{Spek}\left(K[\frac{Y}{X}]\right) \cong \mathbb{A}^1_K$$

und $D_+(Y) = \mathrm{Spek}\left(K[\frac{X}{Y}]\right) \cong \mathbb{A}^1_K$. Wegen Satz 20.12 und Bemerkung 20.2 können wir die Picardgruppe der projektiven Geraden berechnen, indem wir die Einheiten in

$$\Gamma\Big(D_+(XY), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\Big) = K[\frac{X}{Y}, \frac{Y}{X}]$$

modulo den Einheiten auf den beiden affinen Stücken betrachten. Dies ergibt die Gruppe $\left(\frac{X}{Y}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, somit ist die Picardgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Die vorstehende Aussage gilt allgemein für den projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ zu $d \geq 1$, siehe Satz 22.12

Abbildungsverzeichnis