Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 8

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 8.1. Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 5 und der andere ein Fassungsvermögen von 7 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.2.*

Finde eine Darstellung der 1 für das Zahlenpaar 11 und 13.

Aufgabe 8.3. Finde eine Darstellung der 1 für die folgenden Zahlenpaare: 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

Aufgabe 8.4. Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über 77-, 91- und 143-Liter Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, insgesamt genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Wie kann sie den Auftrag erfüllen?

Aufgabe 8.5. Es seien a und b teilerfremde natürliche Zahlen. Es stehen beliebig viele Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, deren Fassungsvermögen a bzw. b ist. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 8.6.*

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von a und der andere ein Fassungsvermögen von b Litern, wobei a und b teilerfremd seien. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 8.7.*

Beweise das Lemma von Bezout für teilerfremde natürliche Zahlen a und b durch Induktion über das Maximum von a und b.

Aufgabe 8.8.*

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

Aufgabe 8.9. Es seien n, d positive Zahlen und es sei

$$n = qd + r$$

mit $q \in \mathbb{N}$ und r zwischen 0 und $d - 1$. Wie erhält man daraus die Division mit Rest von $-n$ durch d?

Aufgabe 8.10.*

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen k, s mit

$$n = kd + s$$

und mit

$$-\frac{d}{2} < s \leq \frac{d}{2}$$

gibt.

Aufgabe 8.11. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 8.12. Sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a + b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r + s$ bei Division durch d ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Aufgabe 8.13. Zeige, dass für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die folgenden Beziehungen äquivalent sind.

(1) a teilt b (also $a|b$).
(2) $b \in \mathbb{Z}a$.

(3) $\mathbb{Z}b \subseteq \mathbb{Z}a$.

Aufgabe 8.14. In welcher Beziehung steht Aufgabe 8.13 zu Lemma 7.16?

Aufgabe 8.15.*

Es seien $a_1, \ldots, a_k$ ganze Zahlen und

$$H = (a_1, \ldots, a_k) = \{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_k a_k \mid n_j \in \mathbb{Z}\}$$

die davon erzeugte Untergruppe. Zeige, dass eine ganze Zahl t genau dann ein gemeinsamer Teiler der $a_1, \ldots, a_k$ ist, wenn $H \subseteq \mathbb{Z}t$ ist, und dass t genau dann ein größter gemeinsamer Teiler ist, wenn $H = \mathbb{Z}t$ ist.

Aufgabe 8.16. Es seien (beliebige viele) gemalte Pfeile der Länge 7 und der Länge 12 gegeben. Wie muss man die Pfeile hintereinanderlegen (wobei immer ein Pfeilende an der Pfeilspitze des Vorgängerpfeils anliegt), damit insgesamt ein Gesamtpfeil der Länge -1 entsteht?

Aufgabe 8.17.*

Auf einer Baustelle gibt es eine große Waage mit zwei Schalen und (beliebig viele) Gewichte der Schwere 12 bzw. 50 Kilogramm.

(1) Erläutere, wie man damit sechs Kilogramm Sand abwiegen kann.
(2) Bestimme, welche Massen man damit abwiegen kann.

Aufgabe 8.18. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 8.19. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 5439 und 3871.

Aufgabe 8.20. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 2956 und 2444.

Aufgabe 8.21.*

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1085 und 806 und schreibe die beiden Zahlen als Vielfache des größten gemeinsamen Teilers.

Aufgabe 8.22.*

Wir betrachten eine (einfachere, aber langsamere) Variante des euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zu zwei gegebenen natürlichen Zahlen a, b.

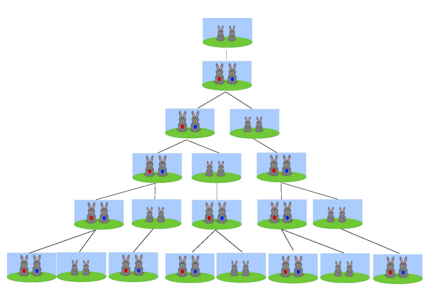
Der Algorithmus geht folgendermaßen. Wenn $a \neq b$ ist, so ersetzte das Paar (a, b) durch das Paar, das aus der kleineren Zahl und der Differenz zwischen der kleineren und der größeren Zahl besteht. Wiederhole dies rekursiv. Wenn $a = b$ ist, so ist man fertig und es wird das Ergebnis a ausgegeben.

(1) Führe diesen Algorithmus für das Paar $(7, 3)$ durch.
(2) Zeige, dass dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten aufhört.
(3) Zeige, dass dieser Algorithmus korrekt ist, also wirklich den größten gemeinsmen Teiler ausgibt.
(4) Man gebe für jedes n ein Beispiel, wo der euklidische Algorithmus nach einem Schritt fertig ist, wo aber die Variante n Schritte benötigt.

Aufgabe 8.23. Es sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl. Zeige, dass es eine natürliche Zahl der Form (im Dezimalsystem)

$$111 \ldots 111$$

gibt, die ein Vielfaches von p ist.

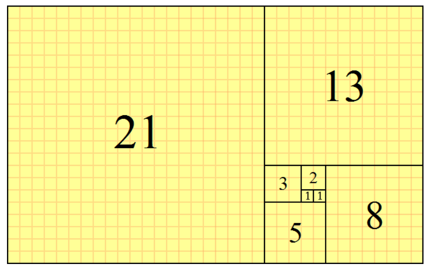


Aufgabe 8.24. Kaninchen werden bekanntlich immer zur Monatsmitte geboren, die Tragzeit beträgt einen Monat und die Geschlechtsreife erreichen sie im Alter von zwei Monaten. Jeder Wurf besteht aus genau einem Paar, und alle leben ewig.

Wir starten im Monat 1 mit einem Paar, das einen Monat alt ist. Sei f_n die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat, also $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Beweise durch Induktion die Rekursionsformel

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Diese Zahlfolge nennt man die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Wie viele der f_n Paare sind im n-ten Monat reproduktionsfähig?



Die Fibonacci-Zahlen sind somit $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

AUFGABE 8.25. Wende auf zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf?

AUFGABE 8.26.*

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

AUFGABE 8.27.*

Es seien $a_1, \ldots, a_k$ ganze Zahlen. Zeige, dass

$$\mathbb{Z}a_1 \cap \mathbb{Z}a_2 \cap \ldots \cap \mathbb{Z}a_k = \mathbb{Z}u$$

ist, wobei u das kleinste gemeinsame Vielfache der $a_1, \ldots, a_k$ ist.

AUFGABE 8.28.*

Zeige, dass für natürliche Zahlen a, b, g folgende Aussagen gelten.

(1) Für teilerfremde a, b ist
$$\operatorname{kgV}(a, b) = ab.$$
(2) Es gibt $c, d \in \mathbb{Z}$ mit
$$a = c \cdot \operatorname{ggT}(a, b) \text{ und } b = d \cdot \operatorname{ggT}(a, b),$$
wobei c, d teilerfremd sind.
(3) Es ist
$$\operatorname{kgV}(ga, gb) = g \cdot \operatorname{kgV}(a, b).$$

(4) Es ist
$$\operatorname{ggT}(a,b) \cdot \operatorname{kgV}(a,b) = ab.$$

Aufgabe 8.29. Es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{P}},\, n \longmapsto (a_p)_{p \in \mathbb{P}},$$
die jeder natürlichen Zahl $n \neq 0$ das Exponententupel $(a_p)_{p\in\mathbb{P}} = (a_p(n))_{p\in\mathbb{P}}$ zuordnet. Man betrachtet also die eindeutige Primfaktorzerlegung
$$n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p},$$
wobei sich das Produkt über alle Primzahlen erstreckt und wobei nur endlich viele Exponenten ungleich 0 sind.

(1) Zeige, dass φ injektiv ist.
(2) Bestimme das Bild von φ.
(3) Es sei $\mathbb{N}_+$ mit der Teilbarkeitsrelation und $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ mit der Produktordnung versehen. Zeige, dass φ eine ordnungsvolltreue Abbildung ist.

Aufgabe 8.30. Zeige, dass es ganze Zahlen a, b derart gibt, dass
$$\frac{1}{100} = a\frac{1}{4} + b\frac{1}{25}$$
gilt. Finde solche Zahlen.

Aufgabe 8.31. Finde ganze Zahlen a, b derart, dass
$$\frac{1}{15} = a\frac{1}{3} + b\frac{1}{5}$$
gilt.

Aufgabe 8.32.*

Es seien a, b positive natürliche Zahlen. Die Summe der Stammbrüche ist dann
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}.$$

(1) Zeige, dass bei a, b teilerfremd diese Darstellung gekürzt ist.
(2) Zeige, dass im Allgemeinen diese Darstellung nicht gekürzt sein muss.

Aufgabe 8.33.*

Zeige, dass jede rationale Zahl $z \neq 0$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = \pm \prod_p p^{\nu_p(z)}$$

besitzt, wobei das (endliche) Produkt sich über Primzahlen erstreckt und die Exponenten $\nu_p(z) \in \mathbb{Z}$ sind.

Aufgabe 8.34. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$. Zeige, dass man 441 innerhalb von M auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in M nicht weiter zerlegbar sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.35. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1983 und 1528.

Aufgabe 8.36. (4 Punkte)

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $4199, 2431$ und 3553, sowie eine Darstellung desselben als eine Linearkombination der gegebenen Zahlen.

Aufgabe 8.37. (2 Punkte)

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ganze Zahlen. Zeige, dass die Menge

$$H := \{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_k a_k \mid n_j \in \mathbb{Z}\}$$

eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 8.38. (4 Punkte)

Es seien a, b teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass jede natürliche Zahl

$$n \geq ab$$

eine Darstellung

$$n = xa + yb$$

mit $x, y \in \mathbb{N}$ besitzt.

Aufgabe 8.39. (3 Punkte)

Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 8.40. (5 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Aufgabe 8.41. (3 Punkte)

Es seien p und q verschiedene Primzahlen. Zeige, dass es ganze Zahlen a, b derart gibt, dass

$$\frac{1}{pq} = a\frac{1}{p} + b\frac{1}{q}$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis