Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Zeige, dass für $\Gamma = \mathbb{N}^{\vDash}$ die beiden Repräsentierungskonzepte zusammenfallen.

Aufgabe 22.2.*

Es sei
$$T = \mathbb{N}2 \subseteq \mathbb{N}$$
die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Es sei Γ die Ausdrucksmenge, die besagt, dass $+$ eine assoziative, kommutative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element ist. Es sei
$$\psi = \exists y(x = y + y).$$
Zeige, dass T durch ψ in Γ schwach repräsentiert wird, aber nicht stark.

Aufgabe 22.3. Es sei
$$T = \mathbb{N}2 \subseteq \mathbb{N}$$
die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Es sei Γ die Ausdrucksmenge, die besagt, dass $+$ eine assoziative, kommutative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element ist. Es sei
$$\varphi = \exists y(x = y + y) \rightarrow \forall z \neg(x + 1 = z + z)$$
und
$$\Delta = \Gamma \cup \{\varphi\}.$$
Es sei
$$\psi = \exists y(x = y + y).$$
Zeige, dass T durch ψ in Δ repräsentiert wird.

Aufgabe 22.4. Zeige, dass eine widersprüchliche Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ Repräsentierungen erlaubt.

Aufgabe 22.5. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$ eine Ausdrucksmenge, die Repräsentierungen erlaube. Zeige, dass jede größere Ausdrucksmenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ ebenfalls Repräsentierungen erlaubt.

Aufgabe 22.6. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in $\mathbb{N}^2$) durch den Ausdruck $x = y$ in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentierbar ist.

Aufgabe 22.7. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in $\mathbb{N}^2$) durch den Ausdruck $x = y$ in Γ nicht repräsentiert wird.

Aufgabe 22.8. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass Γ keine Repräsentierungen erlaubt.

Insbesondere erlauben die erststufigen Peano-Axiome ohne das Induktionsschema keine Repräsentierungen.
Aufgabe 22.9. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei

$$\alpha := \exists y(y + \cdots + y = x),$$

wobei k-mal der Summand y vorkommt. Zeige, dass $\mathbb{N}k \subseteq \mathbb{N}$, also die Menge der Vielfachen von k, in der erststufigen Peano-Arithmetik durch α repräsentiert wird.

Aufgabe 22.10. Zeige, dass die Menge der Quadratzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

Aufgabe 22.11. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$ eine widerspruchsfreie und R-entscheidbare Ausdrucksmenge.

a) Zeige, dass jede in Γ repräsentierbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^r$ R-entscheidbar ist.

b) Zeige, dass jede in Γ repräsentierbare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}^s$ R-berechenbar ist.

Aufgabe 22.12.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ eine arithmetische Ausdrucksmenge ohne freie Variablen und $R \subseteq \mathbb{N}$ eine Relation. Es seien $\alpha, \beta \in L^{\text{Ar}}$ Ausdrücke in einer freien Variablen x. Zeige, dass aus

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

folgt, dass α in Γ die Relation R genau dann repräsentiert, wenn β in Γ die Relation R repräsentiert.

Aufgabe 22.13.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ eine arithmetische Ausdrucksmenge und $R \subseteq \mathbb{N}$ eine Relation. Es seien $\alpha, \beta \in L^{\text{Ar}}$ Ausdrücke in einer freien Variablen x. Zeige, dass aus

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

nicht folgt, dass α in Γ die Relation R genau dann repräsentiert, wenn β in Γ die Relation R repräsentiert.

Aufgabe 22.14. Es sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine Aufzählung einer abzählbar-unendlichen Symbolmengen. Berechne die zu Wörtern über diesem Alphabet zugehörige Zahl im Sinne der Primzahlkodierung und umgekehrt.

(1) $s_1 s_2 s_1 s_3 s_3 s_2$,

(2) $s_{13}s_{12}s_1s_4s_4s_4$,
(3) $s_2s_2s_2s_2s_2s_2$,
(4) $2^1 3^3 5^{17} 7^1$,
(5) $2^1 3^1 5^1 7^1 11^1$,
(6) $2^3 3^3 5^3 7^3 11^3$,
(7) 1728.

Aufgabe 22.15. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fixierte natürliche Zahl und

$$\alpha(x) := x = n,$$

wobei n durch die n-fache Summe der 1 mit sich selbst realisiert werde. Zeige direkt, dass es Sätze $p, q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$\vdash \alpha(GN(p)) \leftrightarrow p$$

und mit

$$\vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.16. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Primzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

Aufgabe 22.17. (4 Punkte)

Es sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine Aufzählung einer abzählbar-unendlichen Symbolmengen. Berechne die zu Wörtern über diesem Alphabet zugehörige Zahl im Sinne der Primzahlkodierung und umgekehrt.

(1) $s_3s_2s_1s_1s_2s_3$,
(2) $s_{20}s_{17}s_1s_4s_{19}$,
(3) $2^1 3^2 5^3 7^4 11^5$,
(4) $10!$.

Aufgabe 22.18. (4 Punkte)

Zeige, dass in der erststufigen Peano-Arithmetik die Addition von natürlichen Zahlen repräsentierbar ist.

Aufgabe 22.19. (6 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Polynomfunktion mit $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f durch den Ausdruck $y = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert wird.

Abbildungsverzeichnis