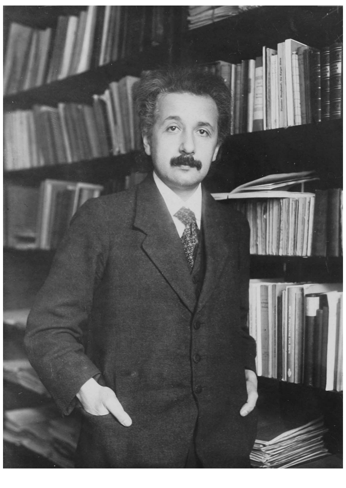
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

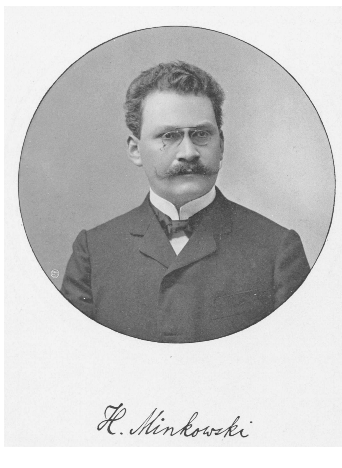
Vorlesung 40

Minkowski-Räume

Auf einer Abendgesellschaft wurde Einstein von der Gastgeberin gebeten, die Relativitätstheorie zu erklären. „Madame“, sagte er, „ich spazierte eines heißen Tages auf dem Lande mit einem blinden Freund und sagte, daß ich gern einen Trunk Milch haben würde“. - „Milch“?, sagte mein Freund, „Trinken verstehe ich, aber was ist Milch“? - „Eine weiße Flüssigkeit“ antwortete ich. - „Flüssigkeit verstehe ich; aber was ist weiß“? - „Die Farbe einer Schwanenfeder“. - „Feder verstehe ich, aber was ist ein Schwan“? - „Ein Vogel mit einem gebogenen Hals“. „Hals verstehe ich, aber was ist gebogen“? - Darauf verlor ich die Geduld, ergriff seinen Arm und und streckte diesen geradeaus: „das ist gerade“, sagte ich, und dann bog ich seinen Arm am Ellenbogen ein: „das ist gebogen“. „Ah“! sagte der Blinde, „jetzt weiß ich, was Sie mit Milch meinen“!



Albert Einstein (1879-1955)



Hermann Minkowski (1864-1909)

Definition 40.1. Ein reeller Vektorraum der Dimension n mit einer Bilinearform $\langle -,-\rangle$ vom Typ $(n-1,1)$ heißt *Minkowski-Raum.*

Die Minkowski-Räume liefern ein einfaches Modell für die *spezielle Relativitätstheorie*,[1] man spricht auch von einem Einstein-Minkowski-Raum und die Bilinearform darauf heißt auch *Minkowski-Form* oder *Lorentz-Form.* Die klassische Raum-Zeit-Welt ist von der Form $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, wobei die dreidimensionale Komponente den Raum und die eindimensionale Komponente die Zeit repräsentiert. Darin ist grundsätzlich jede Bewegung von einem Punkt zu einem anderen möglich, solange der zweite Punkt zeitlich später als der erste Punkt ist. Entsprechend repräsentieren die Punkte in einem vierdimensionalen Minkowski-Raum die relativistischen Weltpunkte (die Ereignisse); eine Trennung in Raum und Zeit ist Beobachter-abhängig. Eine besondere Rolle spielt die Menge der Vektoren

$$\{v \in V \mid \langle v,v\rangle = 0\} \ ,$$

die in diesem Zusammenhang der *Lichtkegel* heißt. Gemeint ist damit die Menge aller Lichtstrahlen, die in einem Weltpunkt eingehen und ausgehen. Dieser Lichtkegel ist gemäß der speziellen Relativitätstheorie Beobachterunabhängig (absolut), und eben dies wird durch die Minkowski-Räume modelliert. Man erlaubt grundsätzlich jede Dimension, die wesentlichen Phänomene sind schon bei $n = 2,3$ sichtbar. Die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene Minkowski-Form heißt *Minkowski-Standard-Form.* Gemäß dem Trägheitssatz von Sylvester kann man jede Minkowski-Form bezüglich einer geeignet skalierten Orthogonalbasis (einer *Minkowski-Basis*) auf diese Gestalt bringen.

Definition 40.2. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -,-\rangle$. Ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v,v\rangle \,=\, 0$$

heißt *lichtartig*, ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v,v\rangle \,<\, 0$$

[1] Die allgemeine Relativitätstheorie wird mathematisch durch pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten beschrieben, bei denen die hier besprochenen Minkowski-Räume die lokale Situation widergeben. Wichtige Stichworte sind Gravitation, Äquivalenzprinzip, Feldgleichung, gekrümmter Raum.

heißt *zeitartig* und ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle > 0$$

heißt *raumartig.*

Achtung, diesen Eigenschaften definieren keine Untervektorräume, die Summe von zwei raumartigen Vektoren muss im Allgemeinen nicht wieder raumartig sein.

Nicht alle Vektoren bzw. (linearen) Bewegungsvorgänge in dieser Raum-Zeit-Licht-Welt sind für einen (materiellen) Beobachter realisierbar, im Gegenteil gehört die folgende Einschränkung wesentlich zu diesem Weltmodell.

Definition 40.3. Es sei V ein Minkowski-Raum mit einer Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Die Vektoren $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle = -1$$

heißen *Beobachtervektoren* oder *Vierergeschwindigkeit eines Beobachters.*

Der Begriff Beobachter suggeriert eine physikalische Interpretation; man kann sich darunter eine Person vorstellen, wichtig ist aber, dass dies keinen subjektiven Gehalt hat. Der Beobachter hat eine Uhr, einen Meterstab und einen Winkelmesser im Gepäck und jeder Beobachter, der die gleiche Bewegung durchführt, kommt zu den gleichen Messungen. Statt mit der Bedingung $= -1$ wird ein Beobachtervektor häufig auch durch die Bedingung $= -c$ angesetzt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese ist aber nur eine Umskalierung.

Die zuletzt genannten Beobachtervektor sind insbesondere zeitartig, da jeder Beobachter älter wird, die Zeit bewegt sich also auch für einen „räumlich ruhenden" Beobachter. Die Gerade $\mathbb{R}v$ ist ein Untervektorraum der Dimension 1, auf dem die eingeschränkte Form negativ definit ist. Es sei $U \subseteq V$ der dazu senkrechte Untervektorraum. Dies ist ein dreidimensionaler Raum, auf dem die eingeschränkte Form positiv definit ist. Dieser Raum ist der Raum V_v für diesen Beobachter (oder V_B, wenn B den Beobachter bezeichnet) und $\mathbb{R}v$ ist seine Zeitachse. Für einen Beobachter besteht also eine Zerlegung des Gesamtraumes der Form $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, nur diese Zerlegung hängt eben vom Beobachter ab. Man spricht auch von dem *Bezugssystem* des Beobachters. Die positiv definite Einschränkung der Minkowski-Form auf seine Raumkomponente ist ein Skalarprodukt, mit dem der Beobachter Längen und Winkel misst und auch in seinem Raum eine Orthonormalbasis fixieren kann. Für einen Beobachter mit der erlaubten Vierergeschwindigkeit v gibt es also insbesondere eine Orthogonalbasis e_1, e_2, e_3, v mit

$$\langle e_j, e_j \rangle = 1$$

und

$$\langle v, v \rangle = -1.$$

Bezüglich einer solchen Minkowski-Basis wird die Minkowski-Form einfach durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Gramsche Matrix beschrieben. Ein Großteil der relativistischen Phänome zeigt sich in diesem Modell beim Basiswechsel von zwei solchen Basen (bei einem *Wechsel des Bezugssystems*), wobei der wesentliche Punkt der Wechsel der Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente ist.

Wenn v ein Beobachtervektor ist, so ist nach Definition auch $-v$ ein Beobachtervektor. Dieser Beobachter bewegt sich in die entgegengesetzte Zeitrichtung. Insgesamt zerfällt die Menge aller Beobachtervektoren in zwei Schalen, wobei wir eine als die Zukunftsschale auszeichnen. Ebenso zerfällt der Lichtkegel in zwei Kegel, den Zukunfts- und den Vergangenheitskegel. Zwei Beobachter heißen *gleichgerichtet*, wenn sie der gleichen Schale angehören, also beide in die Zukunft (oder in die Vergangenheit) weisen.

Lemma 40.4. *Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ ist*
$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^{\perp}$$
eine direkte Summenzerlegung, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $V_v = (\mathbb{R}v)^{\perp}$ positiv definit ist. Dabei besteht V_v aus raumartigen Vektoren.

(2) *Für zwei gleichgerichtete Beobachtervektoren $v, w \in V$ ist*
$$\langle v, w \rangle < 0$$

(3) *Für zeitartige Vektoren $v, w \in V$ ist*
$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 40.3, Aufgabe 40.7 und Aufgabe 40.8. □

Die Bedingung, dass die Beobachtergeschwindigkeiten $\langle v, v \rangle = -1$ erfüllen müssen, ist eine große Einschränkung an mögliche Bewegungsvorgänge. Wenn eine Minkowski-Basis fixiert ist, so ist $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor genau dann, wenn

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2 = -1$$

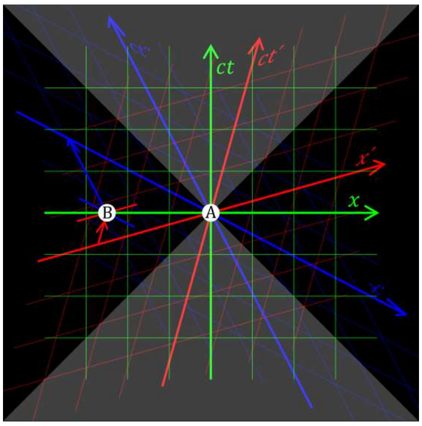
(und $t \geq 0$, das ergibt sich aus der Zukunftsrichtung) ist. Wenn sich beispielsweise etwas vom Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$ zum Punkt $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix}$ gleichmäßig bewegen soll, so wäre im klassischen Ansatz einfach der Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$$

zu wählen. Dieser ist aber im Allgemeinen kein Beobachtervektor. Wenn $y_1^2+y_2^2+y_3^2-t^2$ negativ ist, was inhaltlich bedeutet, dass ein zeitartiger Vektor vorliegt, so kann man den Vektor immerhin zu einem Beobachtervektor

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{-\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$$

umskalieren.



Zwei Ereignisse A und B in einem zweidimensionalen Minkowskiraum, die für den Beobachter, dessen Raumachse mit x und dessen Zeitachse mit ct bezeichnet ist, gleichzeitig sind, aber nicht für den zweiten Beobachter mit den Achsen x' und ct'.

Zu einer Vierergeschwindigkeit v eines Beobachters B mit der Zerlegung

$$V = V_v \oplus \mathbb{R}v$$

nennt man die Punkte der Form $sv + V_v$ mit einem fixierten $s \in \mathbb{R}$ den Raum zum Zeitpunkt s. Die Punkte daraus heißen gleichzeitig für den Beobachter B. Für einen anderen Beobachter C mit der Vierergeschwindigkeit w sind diese Punkte nicht gleichzeitig. Sein Gleichzeitigkeitskonzept beruht auf seine, von w abhängige Zerlegung der Welt V in seine Raum- und Zeitkomponente. Wenn beispielsweise die zweite Vierergeschwindigkeit bezüglich einer Minkowski-Basis des ersten Beobachters durch $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ gegeben ist, so ist

$$\frac{15}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis der Raumkomponente des zweiten Beobachters. Die für den ersten Beobachter gleichzeitigen Ereignisse $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind für den zweiten Beobachter nicht gleichzeitig, da der erste Vektor die gleiche Beschreibung besitzt und der zweite Vektor gleich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{75}{16}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ist. Seine Zeitkomponente bezüglich des zweiten Beobachtervektors ist also $-\frac{3}{4}$.

Wir vergleichen nun Geschwindigkeiten von Beobachtern untereinander.

Definition 40.5. Es sei V ein Minkowski-Raum und seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten v und w. Dann nennt man den Vektor

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

den *Geschwindigkeitsvektor* von C relativ zu B. Man nennt

$$\rho_{BC} = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

die *Relativgeschwindigkeit* der beiden Beobachter.

Beachte, dass die Relativgeschwindigkeit eine reelle Zahl ist, der relative Geschwindigkeitsvektor hingegen ein Vektor. Die Relativgeschwindigkeit ist symmetrisch in v und w, hingegen ist

$$v_{CB} = -w - \frac{1}{\langle v, w\rangle} v$$

im Allgemeinen von v_{BC} verschieden. Da die Lichtgeschwindigkeit zu 1 normiert ist, sollte man sich diese Relativgeschwindigkeiten klein vorstellen. Bei $v = w$ ist die Relativgeschwindigkeit gleich 0.

LEMMA 40.6. *Es sei V ein Minkowski-Raum und seien B und C gleichgerichtete Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten v und w. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor v_{BC} steht senkrecht auf v.*
(2) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor v_{BC} ist raumartig und es gilt*

$$|| v_{BC} || = || v_{CB} || = \rho_{BC} = \rho.$$

(3) *Es ist*

$$\langle v, w\rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

(4) *Es ist*

$$w = \frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

die Zerlegung von w in die Raum- und die Zeitkomponente von B.
(5) *Der Zeitkoeffizient von w bezüglich B ist $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$.*

Beweis. (1) Es ist

$$\langle v, v_{BC}\rangle = \left\langle v, -v - \frac{1}{\langle v, w\rangle} w \right\rangle = \langle v, -v\rangle + \left\langle v, -\frac{1}{\langle v, w\rangle} w \right\rangle = 1 - 1 = 0,$$

so dass diese Vektoren orthogonal zueinander sind. Somit gehört v_{BC} zur Raumkomponente zu B.

(2) Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_{BC}, v_{BC}\rangle &= \left\langle -v - \frac{1}{\langle v, w\rangle} w, -v - \frac{1}{\langle v, w\rangle} w \right\rangle \\ &= \left\langle v + \frac{1}{\langle v, w\rangle} w, v + \frac{1}{\langle v, w\rangle} w \right\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, w\rangle} + \frac{1}{\langle v, w\rangle^2} \langle w, w\rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\langle v, w\rangle^2}. \end{aligned}$$

Nach Teil (1) (oder nach Lemma 40.4 (3)) ist dieser Ausdruck nichtnegativ. Die Quadratwurzel davon ist die Relativgeschwindigkeit ρ.

(3) Dies folgt direkt aus der Definition

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

durch eine einfache Umstellung, wenn man berücksichtigt, dass

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

(4) Aus

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

und (3) ergibt sich

$$w = -\langle v, w \rangle v - \langle v, w \rangle v_{BC} = \frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Nach Teil (1) gehört v_{BC} zur Raumkomponente zu B.

(5) Aus (4) ist direkt ablesbar, dass der Zeitkoeffizient von w bezüglich B gleich $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$ ist.

□

Das in der fünften Aussage des vorstehenden Lemmas formulierte Prinzip heißt *Zeitdilatation*. Ein Beobachter beobachtet für einen weiteren Beobachter eine längere Zeit als dieser in seinem Bezugsystem.

Der Vektorraum der Bilinearformen

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien Ψ_1 und Ψ_2 Bilinearformen auf V. Dann erklärt man die Summe dieser beiden Bilinearformen punktweise als diejenige Bilinearform, die an der Stelle (u, v) den Summenwert erhält, also

$$(\Psi_1 + \Psi_2)(u, v) := \Psi_1(u, v) + \Psi_2(u, v).$$

Entsprechend definiert man für einen Skalar $c \in K$ die Form $c\Psi$ durch

$$(c\Psi)(u, v) = c\Psi(u, v).$$

Die entstehenden Funktionen sind wieder bilinear. Damit erhält man eine Vektorraumstruktur auf der Menge aller Bilinearformen auf V.

Definition 40.7. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Die Menge aller Bilinearformen auf V, versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation, heißt *Vektorraum der Bilinearformen*. Er wird mit Bilin (V) bezeichnet.

Lemma 40.8. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zu einer jeden Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ ist die Abbildung*

$$\operatorname{Bilin}(V) \longrightarrow \operatorname{Mat}_n(K),\ \Psi \longmapsto G_{\mathfrak{v}}(\Psi),$$

die einer Bilinearform Ψ ihre Gramsche Matrix bezüglich der gegebenen Matrix zuordnet, eine Isomorphie von Vektorräumen.

Beweis. Die Injektivität der Abbildung folgt aus Lemma 16.6, die Surjektivität daraus, dass man eine beliebige Matrix im Sinne von Beispiel 38.2 als Bilinearform interpretieren kann. Die Linearität folgt unmittelbar aus der punktweisen Definition der Vektorraumstruktur auf $\operatorname{Bilin}(V)$. □

Sesquilinearformen

Definition 40.9. Es seien V und W Vektorräume über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt *antilinear* (oder *semilinear*), wenn

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

für alle $u, v \in V$ gilt und wenn

$$\varphi(\lambda v) = \overline{\lambda}\varphi(v)$$

gilt.

Wenn man die komplexen Vektorräume als reelle Vektorräume auffasst, so handelt es sich insbesondere um reell-lineare Abbildungen. Dieser Eigenschaft sind wir schon bei komplexen Skalarprodukten begegnet.

Definition 40.10. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C},\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Sesquilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$\mathbb{C}$-antilinear und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow \mathbb{C},\ v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$\mathbb{C}$-linear sind.

Wir fordern also die Linearität in der ersten und die Antilinearität in der zweiten Komponenten. Es gibt auch die andere Konvention.

Viele Begriffe und Aussagen übertragen sich mit leichten Abwandlungen von der reellen auf die komplexe Situation.

Definition 40.11. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einer Sesquilinearform $\langle -,- \rangle$. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -,- \rangle$ bezüglich dieser Basis.

Wenn die Gramsche Matrix zu einer Sesquilinearform $\langle -,- \rangle$ bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben ist, so kann man daraus $\langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i \overline{c_j} \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n \overline{c_j} \langle v_i, w_j \rangle \right) \\ &= (b_1, \ldots, b_n) G \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält also den Wert der Bilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des zweiten Vektors anwendet und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle = v^{\mathrm{tr}} G \overline{w}.$$

Lemma 40.12. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer Sesquilinearform $\langle -,- \rangle$. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -,- \rangle$ bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelte die Beziehungen*

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{\mathrm{tr}} G \overline{A}.$$

Beweis. Es ist

$$\langle w_r, w_s \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_{rj} v_j, \sum_{k=1}^n a_{sk} v_k \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\le j,k\le n} a_{rj}\overline{a_{sk}}\left\langle v_j, v_k\right\rangle \\
&= \sum_{1\le j\le n} a_{rj}\left(\sum_{1\le k\le n}\overline{a_{sk}}\left\langle v_j, v_k\right\rangle\right) \\
&= \left(A^{\text{tr}} \circ \left(G \circ \overline{A}\right)\right)_{rs}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 40.13. Die Menge der Sesquilinearformen auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum. Er wird mit $\operatorname{Sesq}(V)$ bezeichnet.

Hermitesche Formen

Definition 40.14. Eine Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum V heißt *hermitesch*, wenn

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

für alle $u, v \in V$ ist.

Definition 40.15. Eine quadratische komplexe Matrix

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

heißt *hermitesch*, wenn

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

für alle i, j gilt.

Abbildungsverzeichnis