Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit m gerade und n ungerade. Zeige, dass die Potenzen t^m und t^n in $L^2([-1,1], \lambda^1)$ orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 24.2. Zeige, dass das n-te Legendre-Polynom P_n den Leitkoeffizienten

$$\frac{(2n)\cdots(n+1)}{2^n(n!)}$$

besitzt.

Aufgabe 24.3. Zeige, dass das n-te Legendre-Polynom P_n bei n gerade eine gerade Funktion und bei n ungerade eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 24.4. Zeige, dass die Legendre-Polynome die Rekursionsbedingungen $P_0 = 1$, $P_1 = t$ und

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

für $n \geq 1$ erfüllen.

Aufgabe 24.5. Bestimme die Fourierentwicklung der Legendre-Polynome P_0, P_1, P_2. Überprüfe die Orthogonalitäsrelationen für die Fourierreihen.

Aufgabe 24.6.*

Bestimme ein lineares Polynom $ax+b \neq 0$, das im Lebesgueraum $L^2([-1,1], \lambda^1)$ senkrecht auf der Exponentialfunktion e^x steht.

Aufgabe 24.7.*

Zeige, dass das n-te Tschebyschow-Polynom auf $[-1,1]$ die Identität

$$T_n(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$$

erfüllt.

Aufgabe 24.8. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

(1) $\cos x$.
(2) $\cos 2x$.
(3) $\cos^2 x$.
(4) $2\cos^2 x - 1$.

Aufgabe 24.9. Zeige, dass das n-te Tschebyschow-Polynom P_n bei n gerade eine gerade Funktion und bei n ungerade eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 24.10. Zeige, dass das n-te Tschebyschow-Polynom T_n die *Tschebyschowsche Differentialgleichung*

$$(1-t^2)y'' - ty' + n^2 y = 0$$

löst.

Aufgabe 24.11. Zeige, dass die von $\cos z$ erzeugte $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit dem von den $\cos nz$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugten Untervektorraum übereinstimmt.

Aufgabe 24.12. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit

$$P(f(t)) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f eine konstante Funktion ist oder dass P das Nullpolynom ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.13. (4 Punkte)

Führe für die Potenzen t^0, t^1, t^2, t^3 das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren in $L^2([-1,1], \lambda^1)$ durch.

Aufgabe 24.14. (5 Punkte)

Wir betrachten die Exponentialfunktion e^x in $L^2([-1,1], \lambda^1)$. Es sei $U \subseteq L^2([-1,1], \lambda^1)$ das orthogonale Komplement der Exponentialfunktion und es sei $V \subseteq L^2([-1,1], \lambda^1)$ der Raum aller Polynome vom Grad ≤ 3. Bestimme eine Basis von $U \cap V$.

Aufgabe 24.15. (3 Punkte)

Zeige, dass das n-te Tschebyschow-Polynom auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Identität

$$T_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n+z^{-n}}{2}$$

erfüllt.

Aufgabe 24.16. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein Polynom mit

$$P(\cos t, \sin t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige

$$P = Q \cdot (X^2+Y^2-1)$$

für ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[X,Y]$.

Abbildungsverzeichnis