

を得此三式より直に

$$V_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27mbR} \dots\dots\dots (14)$$

の如き結果に到着す。

ヴン、デル、グーメス 式中の a は厳密に云へば絶対温度 T に反比例し決して常數と稱すべからず依て クラオヂウス (1880) は他の気体方程式を作り之に代へたるも此又水蒸氣に應用すれば不精確なることを發見せり、斯の如く グーメス 式以來數多の學者によりて種々の方程式は提出せられたるも或は氣體の時は精確にして液化後に不精確となり或は之に反するありて萬望を満足せしむるものを發見する能はず。

尙上記の結果に於て

$$\frac{V}{V_c} = \varphi, \quad \frac{p}{p_c} = \pi, \quad \frac{T}{T_c} = \theta$$

と置くときは (π は圓周率にあらず壓力と臨界壓力との比なり)

$$V = 3b\varphi, \quad p = \frac{a}{27b^2} \pi, \quad T = \frac{8a}{27mbR} \theta$$

となり此等を原式 (9) に代入し

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi}\right)(3\varphi - 1) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

を得之を氣體の省約方程式 reduced equation と稱す、此方程式は或氣體に特有なる諸性質を含むことなく一般諸氣體に通用するものなり。

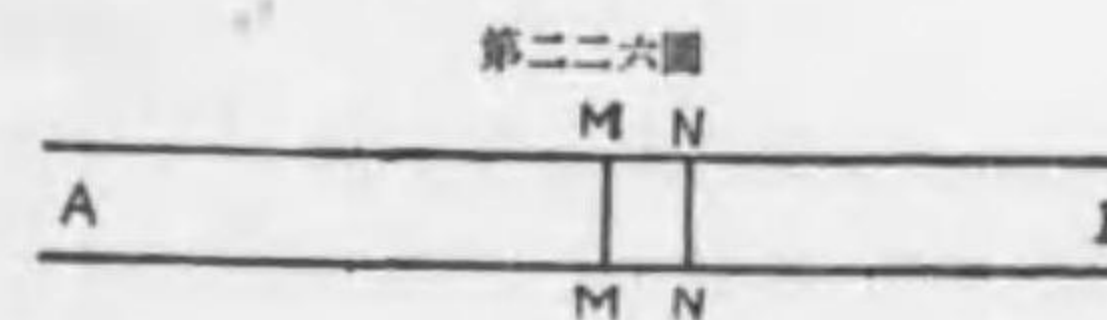
第三章 熱の傳導

CONDUCTION OF HEAT

130 熱の傳播 propagation of heat 熱が一處より他處に傳播するに三方法あり、熱したる物体移動し其物体の媒介により熱を甲處より乙處に運搬するを對流 convection と稱す (§ 119)。發熱体より エーテル の波動により所謂熱線 heat rays となりて四方に傳播するを輻射 radiation と云ふ。本章に於て説かんとする熱の傳導とは物体分子の振動が順次に隣接せる分子に傳はるものにして其速度は三者の裡最小なりとす。熱傳導の真相は不明に屬すれども エーバー 説 (H.F. Weber 1880) に據れば透明液に於ては原子の運動に依り、金屬殊に水銀に於ては内部輻射に依るものならんと云ふ。プーシユル (Puschl 1894) 説に據れば熱傳導は二種作用の重さなりたるものなり、即ち原子振動及び エーテル 質点振動の傳達に歸因するならんと。之を要するに三種の傳播法を概括すれば畢竟熱は常に平均を求めんとする性質を有し此傾向を満足せんがために傳播するものなりと云ふことを得べし。ゲーデブルグ (Wiedeburg 1900) は熱電導と熱電氣との間に密接なる關係あるを説けり、又熱傳導率と電氣傳導率との比は絶対温度に正比例するを見れば熱と電氣との間に不離の關係あるや疑ふべからず。

131 熱の傳導 conduction of heat 熱の傳導は十九世紀の初に フーリエ (Fourier 1812) の研究により著しく進歩し之がために一時は熱傳導學と熱學全部とを同一視する傾向ありし程なり。熱を液体の如く見做し温度を高さの如く見做して傳導の法則を次の如く云ふことを得べし。曰く、單位時間に單位面積を貫流する熱量は温度の勾配 thermal gradient に正比例すと。

AB (第二二六圖) を熱に對して同質、等方質なる棒と假定す、熱は AB に平行に左より右に傳導するものとし任意の截面



面 MM の温度を θ_1 、其より l の距離にある截面 NN の温度を θ_2 とす、又

MM=NN なる断面積を q と名づれば単位時間に MM を貫きて右方に流るゝ熱量 Q は

$$Q = k \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{l} \cdot q \dots\dots\dots (1)$$

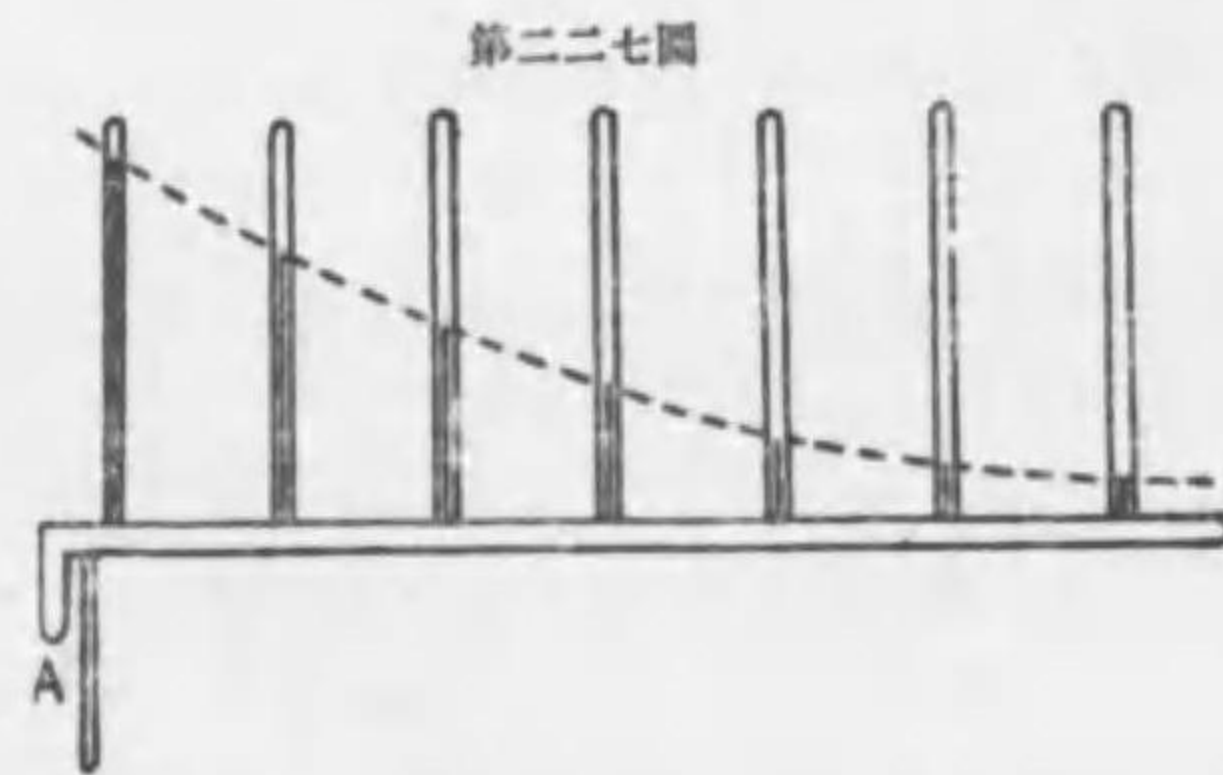
なり、之を フーリエ の法則となす、 k は比例常數にして傳導率 conductivity と稱せらる。

今 A を起点とし $AM=x$, $MN=\delta x$ と置き、又 Q は 熱流を示す ヲクトルにして右方に向ひ、温度の差 $\theta_1 - \theta_2$ は右方に減少するを以て $\theta_1 - \theta_2 = -\delta\theta$ と書けば (1) は

$$Q = -kq \frac{\delta\theta}{\delta x} \dots\dots\dots (2)$$

と書替ることを得べし。

132 デブレの實驗 デブレ (Despretz) は金屬棒の各處に寒暖計を樹て (第二二七圖) 棒の一端を熱し棒の各点に於ける温度を計れり。時間の経過するに



従ひ熱は次第に右方に傳はり、棒の各点に於ては左より來る熱の一部は右に傳はるも一部は直に外部空氣に輻射して漏熱すべし、故に A 点は不斷熱せられつゝあるも棒の各点に於ては左より來る熱は右に傳はり、又

外部に漏れ、熱の出入平均して遂に温度變化せざるとき來るべし、此時の有様を定滯の状態 steady state と名づく、下に此有様を數學にて説明せん。

第二二六圖の MM と NN とに於ける温度を夫々 θ 及 $\theta + \delta\theta$ とすれば MM を右方に貫流する熱量は Q なるゆへ NN を貫く熱量は $Q + \frac{dQ}{dx} \delta x$ なり。即ち MM NN なる空間は Q の熱量を得て $Q + \frac{dQ}{dx} \delta x$ の熱量を失ひ、差引 $-\frac{dQ}{dx} \delta x$ の熱量を得ることゝなるも、又一方に於ては外部に漏らす熱量あり、定滯期に於ては得るところの熱は漏らすところの熱量に等しきなり。今棒を圓筒形と假定し

断面 q 周囲 p 外部氣温を 0° 、又 h を漏熱率 emissivity と定むれば周囲 p 、幅 δx なる環帶の面を貫流する熱量は $hp\theta\delta x$ に等しく

$$-\frac{dQ}{dx} \delta x = hp\theta\delta x \dots\dots\dots (3)$$

を得べし、依て之に (2) を代入すれば

$$kq \frac{d^2\theta}{dx^2} = hp\theta \dots\dots\dots (4)$$

となる。上式を解くには先づ

$$a^2 = \frac{hp}{kq} \dots\dots\dots (5)$$

と置き

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = a^2\theta \dots\dots\dots (6)$$

の形となすべし、此種の微分方程式は通常 $\theta = e^{mx}$ (e は ネピア 對數の基數) と置き解くことを得、之より $d^2\theta/dx^2 = m^2 e^{mx}$ を得て之を (6) に比較すれば $m = \pm a$ なり、故に (6) の解は一般的に

$$\theta = Ae^{ax} + Be^{-ax}$$

となる理なれども物理的には $A=0$ とせざれば x 増すに従て θ も増すの不合理となるべし、故に $\theta = Be^{-ax}$ は求むる解式なり、今起点の温度を θ_0 と命ずれば $x=0$ の時 $\theta=\theta_0$ なるに因り (5) を代入すれば

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{-x\sqrt{\frac{hp}{kq}}} \dots\dots\dots (7)$$

を得べし、此結果は棒を無限に長きものと假定して得たるものなり。第二二七圖の點線の如く温度を曲線にて表はすときは上式より指數曲線 exponential curve となる。

133 地殼の傳導 地球内部は深く降るに従て高温となり地球半徑の 40 分の 一に於て既に 4000° 以上に達し往時地球發生當時の餘熱を保存す、地下 30 軒位までは一米に 0.036° の割合にて増加し其後は増加率少く減退せるならんと察

せらる。又太陽は地表を暖め其熱は次第に地殻の下層に傳達す、而して日熱が地表に加はるは常恒ならずして短きは一日を週期とし長きは一年を週期として變化す、尙詳細に云へば四期の變化あり又太陽活動の十一年週期あり、加之、地殻を構成する岩石の傳導率も一定ならざるのみならず表面には海洋の不規則なる分布あり又雲霧等のために日射力 insolation 一定ならざる等の事あるを以て素より精確なる結果を期し難きも、下に日熱の次第に地心の方に傳播する有様を記せんとす。

デュレの實驗の如く地面に起点を有し地心に向へる棒を想像し、 x を以て深さを示し、 θ を溫度、 t を時間となすときは此場合には漏熱は零なれども(多數の棒が殆ど平行に置かれたるものと見做し得べきがゆへに)、棒の各部は受取たる熱量のために其溫度を増加すべし。第二二六圖に於て A を地面とし AB は地心に向へるものと假定すれば MM NN なる部分の容積は $q\delta x$ にして之に比重を乗ずれば質量を得、更に比熱 c を乗ずれば $c\sigma q\delta x$ は熱容量 (§ 117) なり之に單位時間の溫度増加 $\partial\theta/\partial t$ を乗ずれば (3) (4) 兩式より

$$kq\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\delta x = c\sigma q\frac{\partial\theta}{\partial t}\delta x$$

を得、今 $a^2 = c\sigma/k$ と置けば

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial\theta}{\partial t} \dots\dots\dots (8)$$

なり、此種の方程式を解くには $\theta = e^{mx+nt}$ と置きて此に代入するを常法とすれども、迅速に結果に到着せんがため他の簡易なる解法を示さんとす。太陽が地表を T の週期に於て週期的に暖むるため地面の溫度は

$$\theta = \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{T} \dots\dots\dots (9)$$

なりと假定せよ、然るときは地下 x の点に於ては位相も後れ振幅も減すべき答なるにより x 点に於ける溫度は

$$\theta = \theta_0 e^{-mx} \sin \frac{2\pi}{T}(t-nx) \dots\dots\dots (10)$$

にて示すことを得べし、但し $m > 0$ 及 $n > 0$ と定む、之を (8) に代入すれば

$$m^2 \sin \frac{2\pi}{T}(t-nx) + \frac{4mn\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T}(t-nx) - \frac{4n^2\pi^2}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T}(t-nx) = \frac{2\pi a^2}{T} \cos \frac{2\pi}{T}(t-nx)$$

此式は正弦又は餘弦が或は 0 或は 1 なる時も成立せざるべからざるを以て正弦及び餘弦の係数の和は夫々零なり、依て

$$2mn = a^2, \quad m = \frac{2n\pi}{T}$$

なり、之より

$$m = a\sqrt{\frac{\pi}{T}}, \quad n = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi}}$$

を得、(10) に代入して

$$\theta = \theta_0 e^{-ax\sqrt{\frac{\pi}{T}}} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{ax}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right) \dots\dots\dots (11)$$

となる。該式に依れば地下 x の点に於て位相の後れは $\frac{ax}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi}}$ 時なり、故に傳導速度は

$$x + \frac{ax}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi}} \quad \text{即} \quad \frac{2}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \quad \text{即} \quad 2\sqrt{\frac{k\pi}{c\sigma T}}$$

此結果によれば傳導速度は傳導率の平方根に正比例し比重と比熱の積の平方根に反比例す、又週期の平方根にも反比例すべし。故に溫度の年變は日變に較ぶれば遅く地下に傳はり其比は $1 + \sqrt{365}$ 即 $1/19$ なり。又經驗に徴するに或地盤の日變の傳熱速度は一米なりと云ふ、依て $T=1$ と置き速度の式より

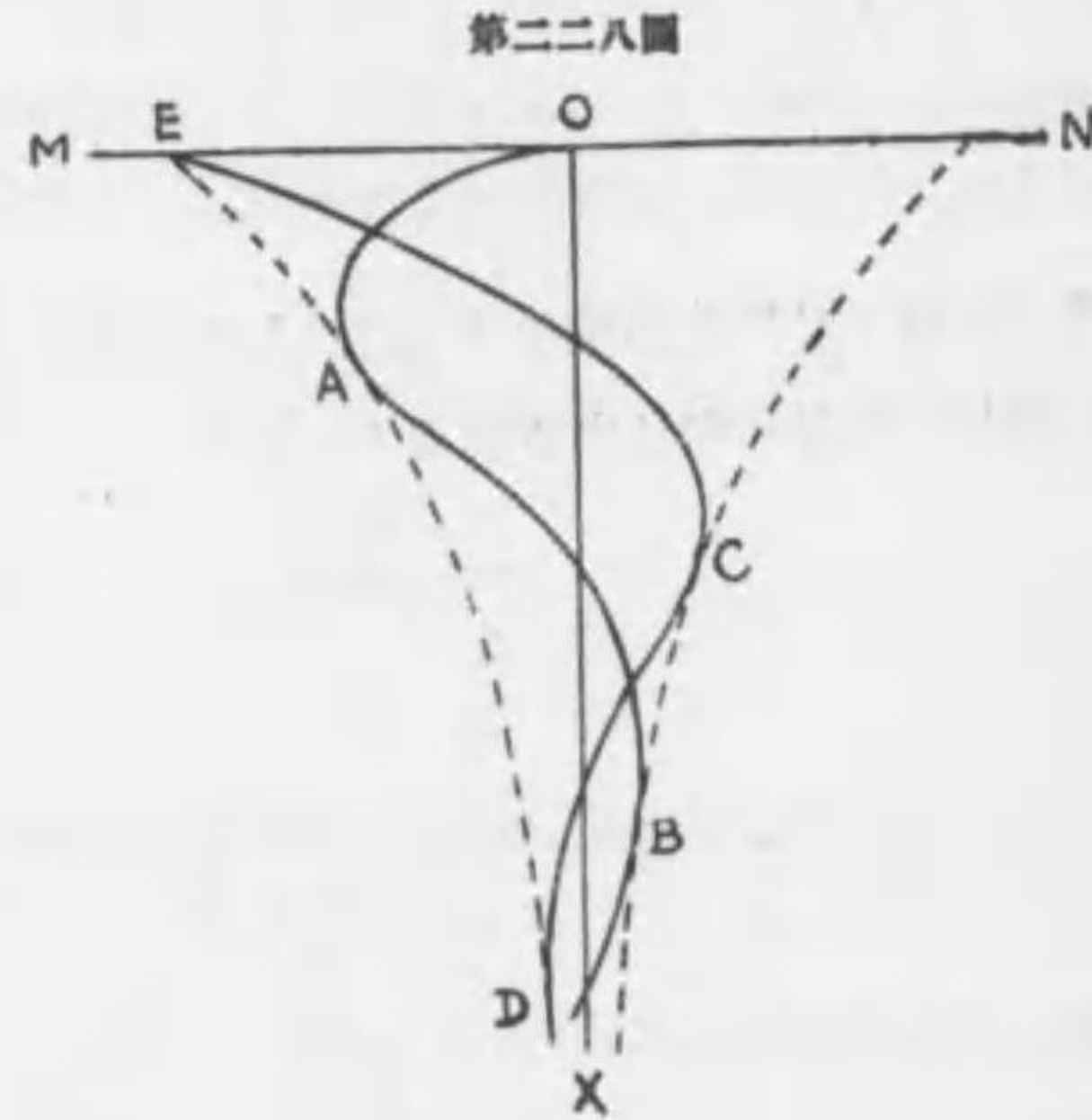
$$1 = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{\pi}{1}} \quad \text{即} \quad a = 2\sqrt{\pi}$$

之を (11) に代入し

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{2\pi x}{\sqrt{T}}} \sin \frac{2\pi}{T}(t - 2\sqrt{\pi} \cdot T \cdot x) \dots\dots\dots (12)$$

なる畧近式を得べし。年變の傳導速度は $1/\sqrt{365}$ 米なるゆへ一年間に傳達する深さは $365/\sqrt{365}$ 即 19 米なり。上式を圖形に表すには第二二八圖に於て

MNを地面とし同時にONの方向に温度を計りOXを深さとす、四月一日は地面の温度0°とすれば曲線OABは四月一日に於ける地下温度を示すものなり、A,B点は夫々當年一月頃及前年七月頃の温度の傳達せしものなりとす。同様にECDは一月一日の地下温度を示す、温度線は皆指數曲線の間に挿まる。



134 傳導率 傳導率は一般に固体最大にして液体之に次ぎ氣體は最小なり、從て有孔性の固体は孔内に氣體を含蓄し傳導率小なり。瓦 カロリ 及 c.g.s を單位とすれば固体の k は下表の如し

| | | | |
|----|--------|-----|---------|
| 銀 | 1.0960 | 鉛 | 0.084 |
| 銅 | 0.7198 | ガラス | 0.002 |
| 亞鉛 | 0.2653 | 紙 | 0.00031 |
| 真鍮 | 0.204 | 綿 | 0.00028 |
| 鐵 | 0.152 | コルク | 0.00013 |

結晶体は軸と軸に垂直の方向とに於て異なりたる率を有す、例へば水晶は
軸の方向 0.02627 | 垂直の方向 0.01597

又 k は一般に温度の函数なり、氷は

| | |
|-------|------------|
| -153° | $k=0.0062$ |
| -93° | 0.0058 |
| -33° | 0.0052 |

の如く變ず。電流の善き傳導体は亦克く熱を傳達す、前記の如くローレンツの法則に依れば、熱傳導率を電流傳導率にて除したる商は其物体の絕對温度に正比

例す。

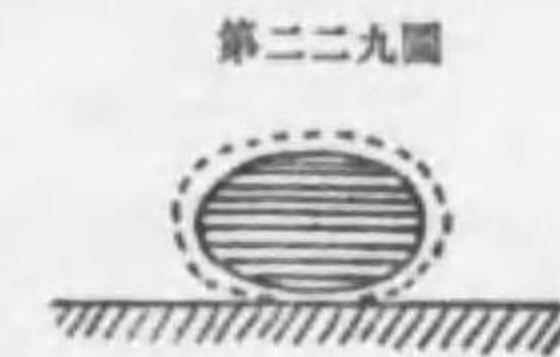
液体は之を熱すれば對流を生じ易きゆへ其傳導率を測定するは困難なり故に液体を上部より熱して下向する熱を測るべし。エーバー (Weber) によれば液体の傳導率は其單位容積の比熱に正比例す、即ち k は比熱と密度との積に正比例す、然れども此法則は精確ならず。下に二三液体の k を示す。

| | |
|----|---------|
| 水銀 | 0.016 |
| 水 | 0.0015 |
| 酒精 | 0.00049 |

氣體の場合は測定法最困難なり。氣體は傳導率僅少なるがため鳥類の羽毛、哺乳類の毛皮は組織の内外に不動の空氣を含みて克く防寒の功を奏す、又植物の種子が雪の衣に包まれつゝ暖かく冬過しするも同理に因れり。氣體 k の二三の例を掲ぐ

| | |
|------|---------|
| 水素 | 0.00038 |
| 空氣 | 0.00005 |
| 炭酸ガス | 0.00003 |

上表の如く空氣の傳導率を銀に比すれば僅に二萬分の一に過ぎず、斯く固、液、氣の三体が次第に傳導率小となるは分子間相互の距離次第に遠くして熱エネルギーを分子より分子に移し難きに因る。揮發し易き液例へばエーテルの一滴を高温に熱したる金屬の皿上に落下するときは所謂球状態 spheroidal state (第二二九圖) を呈して容易に蒸發し去らざ



るはエーテルを包被するエーテル蒸氣が熱の傳導を妨ぐるによるものなり。熱量及び温度のデメンションは未明に屬するを以て之を夫々 H 及び θ にて示すときは (1) 式の Q は單位時間の熱量なるゆへ $[Q]=[HT^{-1}]$ となり、從て

$$[k]=[H\theta^{-1}L^{-1}T^{-1}] \dots\dots\dots (13)$$

を得べし。

第 四 章 熱 の 輻 射 RADIATION OF HEAT

135 輻射熱の測定器 前章既に説きたる如く輻射熱は光線の如く發熱体より波動をなして四方に傳播す。之を測定するには種々の器械を使用して吾人の皮膚の感覺を補はざるべからず。皮膚の感覺は熱に對しては甚遲鈍にして到底肉眼の光に對する如き鋭敏さに比較し得べきものにあらず。寒暖計は溫度及溫度の差を計り従つて輻射熱の測定に使用し得べきも一層之よりも迅速且詳細に溫差を測定する器械あり。

光線も熱線も全く同一振動なることを初めて證明せしメロニー (Melloni 1831) は微小なる輻射熱の測定に熱電柱 thermopile なる装置を使用せり、之は二種の異りたる金屬の接合点を熱し又は冷すときは電流を生ずると云ふ原理を用ひて製したるものなり。此よりも一層有力なるはラングレー (Langley 1881) 創案のボロメーター bolometer にして之は電流の導線は溫度高きときは抵抗多しと云ふ原理に基く。ボーイズ (Boys 1888) の微量輻射計 radiomicrometer は熱電柱に似たるものにして唯異なる点は二種の金屬を銅線の媒介によりて接合せるにあり、此装置は一度の百萬分の一を感得すと稱せらるれども缺點とも云ふべきは据附けにして運搬不可能なると輻射線は常に水平なるを要する事なり。尚ペルチエの十字 Peltier's cross を用ひて測熱することを得べし、此説明はペルチエ効果の節に譲る。クルークスの熱車 (Crookes' radiometer 1874) は圖の如く真空なる球管内に回轉し得る車にして四輻の端には一方銀箔を張り他方煤煙を塗りたる雲母板を附着す、光熱の線に觸るときは車は回轉し煤面は退き銀面は進み、此理由を説明するは困難にして諸説歸着するところを知らざれども其内最も首肯せらるゝ説によれば熱線を受くるときは吸収力大なる煤面は熱せられ反射能大なる銀面は熱せ

第二三〇圖



られず、故に真空内に残留せる氣體分子は煤面側に於ては其の運動量大なるが故に雲母板を壓す力も亦大ならざるを得ず、従つて銀面は進み煤面は退くべき方向に回轉すべし、斯の如く光線の壓力又は熱線の壓力と稱するものとは全く無關係なる現象とす。

136 熱線と光線 上記の諸器械を用ひ實驗したる結果を綜合すれば熱線と光線との差は單に主觀的に止まり客觀的には兩者は全く同一なるエーテル振動にして其受器の異なるに從て或は光の感覺或は熱の感覺を起し若くは光或は熱の作用を呈するものとす。故に同質なる構造を有する媒質 (medium) 内に在りては熱線は直線進行をなし、滑澤なる表面より反射し、第一の媒質より第二の媒質に入るときは屈折すること全く光線と異なることなく従て平行熱線は凹面鏡により反射して其焦点に集まり又レンズを通過すれば焦点に集合す、管々光として感ずる振動は其波の長さ稍々短く熱として感ずるものはやゝ長く、又同時に光としても熱としても感ずる振動なきにあらず、故に強ひて光熱の差違を求むれば其波長の大小によると云ふの外なし。

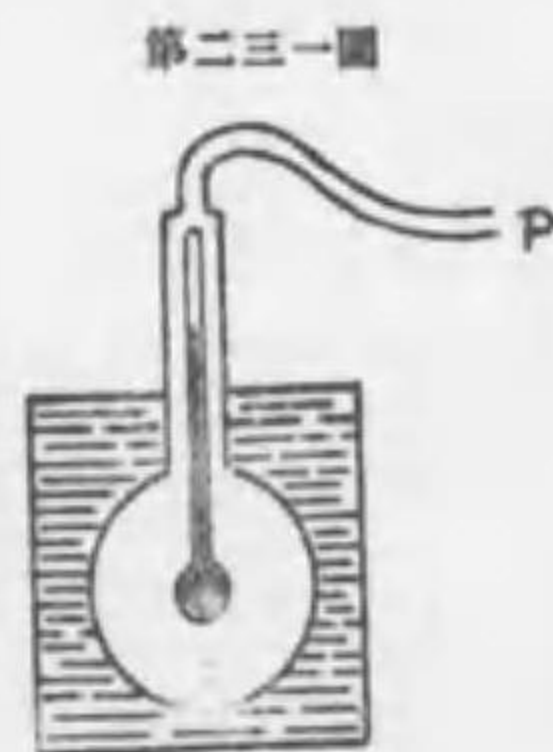
是がために物体が光熱二者に對する性質は大体に於ては一致すれども間々豫期に反したる差違を呈することあり。其一致する点を云へば物体の表面に入射したる熱線と反射する熱線との比の場合なり、煙煤 soot は黒くして光を反射せざる如く熱線に對しても其反射能 reflecting power は零なり。岩鹽は 1/12 を反射し、銀は 1 を反射し吸収は零なり。豫期に反する差違は物体が熱を通過せしむる性質なり、光線の場合には透明不透明の語を以て之を區別する如く熱線に對しては透熱 diathermant 不透熱 athermant の別ありて、氷の如きは透明体なれ共殆ど熱の通過を許さず是れ波長長き振動即ち熱線は氷に入りて其狀態變化を起すことに使用せらるゝを以てなり、沃度を硫化炭素 (CS₂) に溶解したるものは不透明なれ共熱線は克く之を通過して所謂透熱体の部類に屬するなり。

137 プレボストの熱交換説 Prevost's theory of heat-exchange 1804

凡そ物体は如何に低温なるときも熱線を輻射しつゝあることは實驗の教示するところなり、茲に高温なる物体 A と低温なる物体 B あり、之を熱の通過を許

さざる壁にて圍繞し其内部を真空にすれば外見上然は A より B に輻射して A の温度は下降し B の温度は上昇し遂に兩物同温となるに及んで輻射作用已むものならんと想像せらるれども今突然 A, B の各々よりも低温なる物体 C を室内に突き入るゝことを得たりと假定すれば此がために今まで休息せし輻射作用再發して A と B より C に向て輻射するならんと考へざるを得ず、然れ共此思想は全く不合理なり、何となれば外物 C が A, B の附近に存在するとせざるとによりて A 又は B より輻射を開始若くは停止せしむると云ふ事は到底思議すべからざる事項なるを以てなり。ブレア・スト は如上の思索法に依り物体は如何なる温度に於ても温度相當に多少の輻射を爲しつゝあるものなりとの結論に到着せり、而して此は上記の如く實驗に徴して亦た疑ふべからざる事實なりとす。

139 デウロン、プチーの實驗とステファンの法則 デウロン及びプチー (Dulong et Petit 1818) 兩人は第二三圖の如く堅牢なる銅製空球の裏面を煙煤



にて塗り排氣器によりて P より内部の空氣を除き球心には高温(約300°)に熱したる寒暖計の球を置き全部を熱量計にて圍繞し寒暖計の球より輻射する熱量を時間的に測定せり。此實驗の明細なる記録は多數の物理學者によりて研究せられ、依て以て輻射の法則を定めんと欲し諸種の輻射公式を提出せり、其内最も克く實驗的結果を満足せしむるものはステファン (Stefan 1879) 提出の公式にして、 T_1 を熱源(寒暖計の球)の絶対温度とし T_2 を銅球の温度、 S を寒暖計の球の面積とすれば、ステファンの法則は次の公式にて示さる

$$Q = S\sigma(T_1^4 - T_2^4) \dots\dots\dots (1)$$

Q は毎秒の輻射熱量、 σ は輻射体の表面の性質に關する常數にして、表面が眞黒体 perfectly black body と稱し入射熱線を悉く吸收する能力あるもの、即ち反射能零なるもの (之に近き物体は煤なり) なる場合には σ の値は

$$\sigma = 1.36 \times 10^{-12} \text{ 瓦カロリ/(秒、厘}^2) \dots\dots\dots (2)$$

なり、此法則は屢々四乗律 fourth-power law と稱せられ、ボルツマン (Boltzmann 1884) により熱力學より出發し眞黒体より輻射すと云ふ假定の下に理論的に證明せられたり。

140 ニュートンの冷却則 Newton's law of cooling, 1744 熱源の温度 T_1 と外界の温度 T_2 との差が僅少なる場合には一秒時に熱源の温度の下降即ち冷却速度 v は温度の差 $T_1 - T_2 = \tau$ に正比例する法則なり、之は ニュートン によりて提出せられたるものなり、之を ステファン 則より導出するには $T_1^4 - T_2^4 = (T_1 - T_2)(T_1^3 + T_1^2T_2 + T_1T_2^2 + T_2^3)$ の關係を畧的に $T_1^4 - T_2^4 = 4\tau T_1^3$ と書き之を (1) に代入すれば

$$Q = 4\sigma S T_1^3 \tau$$

を得べし、今發熱体の質量を m 比熱を c とすれば冷却速度 v は $v = Q/(mc)$ なるゆへ

$$v = \frac{4\sigma S T_1^3}{mc} \cdot \tau \dots\dots\dots (3)$$

なり、 $4\sigma T_1^3 = h$ と置き、冷却中は T_1 は甚しく變化せざる程 m が大なる場合を考ふれば h は常數と見るも不可なし、依て $v = -dr/dt$ より

$$-\frac{dr}{\tau} = \frac{hS}{mc} \cdot dt$$

を得之を積分し $t=0$ に於ては $\tau = \tau_0$ と定むれば

$$\log \tau = -\frac{hS}{mc} t + \log \tau_0$$

即ち

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{hS}{mc} t} \dots\dots\dots (4)$$

なり、故に温度は時間の指數函數に従て減ず、又 (3) によれば冷却速度は自体の温度及び外界との接觸面積とに正比例し、質量及び比熱に反比例するを見るべし。

141 太陽常數及び太陽の温度 地球大氣の上層に於て眞黒体を塗りたる一平

方板の板を一分時間日光線に垂直に置くときは其板が吸収する熱量は 1.932 カロリなり、之を太陽常數 solar constant と名づく。日熱が地面に達するまでに大氣は其 1/3 を吸収し又反射し残り 2/3 は地上に到着す、然れ共此比は雲霧の厚薄、塵埃の多少等によりて變ずるゆへ、1/3 吸収は寧ろ其最少額を示すものと見て不可なし。之を測定するにはプイエの日光寒暖計 (Pouillet's pyrheliometer)、ギオール (Violle's actinometer)、又は オンダストリウム (Ångström) 或は クロワ (Crova) の器械を使用す、何れも熱量計の變形にして其表面には煙煤を塗りたるものなり。

太陽常數を知り又 (2) 式中の σ を與へて太陽と眞黒体と見做しつゝ其溫度を概算するは容易なり、即ち空間の溫度を絶對溫度 0° と考へ、太陽の溫度を T 、其半徑を R とすれば一分間輻射の熱量は (1) により

$$60Q = 60\sigma \cdot 4\pi R^2 T^4$$

なり、又太陽地球間の距離を r とし太陽常數を 2 カロリと置けば $60Q = 2.4\pi r^2$ なり、故に

$$T^4 = \frac{2}{60\sigma} \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{30} \cdot \frac{10^{12}}{1.36} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

又 $2R/r = 32' = 0.0093$ ラヂアン ならば之を代入し遂に

$$T = 5840^\circ$$

を得、之は絶對溫度なれば攝氏の約 5500° なるべし。

141 熱色と輻射との關係 發熱体のエネルギーは輻射線となりて四方に傳播せられ其輻射量と溫度の關係は ステファン 則又は ニュートン 則に支配せらるることを學びたり、而して光の色は波の長短によりて異なる如く熱線の波にも熱色 thermochromy あり波の長短によりて區別を生ずるものなり、爰に溫度 T なる發熱体ありて毎秒 Q カロリの熱を輻射すと云ふわけにては未だ熱輻射の詳細を盡くすものとすべからず、即ち輻射量を種々の波長に就きて調査し輻射と波長の函數として表はし得るに到ること必要なり、而して單に輻射量と云ふは種々大小の波に對する輻射熱の總和を指すに過ぎず。

溫度低き熱源より出づる熱線の波は長し、溫度増すに従ひ波の短きもの添加せ

らる、是に就き最初觀察を遂げたるは ドレーパー (Draper 1847) なり。氏は白堊、螢石、炭、其他二三の金屬を用ひて實驗したるに凡そ物体は 525° に熱せられて漸く紅色の光を放ち始むるものなることを發見せり、然るに其後他の學者の實驗によれば物体が一種の微光を放射し始むる溫度は一般に 525° よりも低く又物体の性質によりて其溫度も一定せざることを確定せり (1894 年 グレイの實驗によれば約 370° なりと云ふ) 尙其外に低温發光 luminescence と稱する現象を呈する物体あり、例へば螢、磷、ガイスター 管の如し、此等を除外例と見做し全然論外に置くとするも元來 ドレーパー が使用したる材料は低温發光の現象を呈し易き種類に屬するを以て尙更氏の結論を採用するの不可なるを悟るなり。之を要するに次第に加熱せられたる物体が始て紅色を放つ時の溫度は寧ろ其物体より輻射する エネルギー と肉眼の網膜組織との關係より生ずるものにして、ルンマー (Lummer) の研究によれば其時の溫度は 495° なるべし、尙 1000° に達すれば黄色に輝き、 1200° 乃至 1600° にて所謂白熾態 white-glow に達するものなりと云ふ。

142 キルヒホーフの法則 物体が或溫度 T に於て或波長 λ の熱線を輻射する能力 (emission) と同物体が同一熱線を吸収する能力 (absorption) との間には キルヒホーフ (Kirchhoff 1861) が發見したる法則あり其法則によれば輻射は吸収に正比例するものなり。此法則を了解せんがために一層詳細なる定義を下すべし、輻射能 e は或溫度 T に於て或波長 λ の振動 エネルギーを毎秒單位面積より輻射する量なり、吸収能 a は同 T 、同 λ の エネルギー に就きて入射 エネルギーにて吸収 エネルギー 量を除じたる比なり、今眞黒体の輻射能を E とし吸収能を A とすれば $A=1$ なり、又諸種の物体に就き其輻射能及び吸収能を夫々 e_1, e_2, e_3, \dots 及び a_1, a_2, a_3, \dots を以て示せば、キルヒホーフ 則により

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = \frac{e_3}{a_3} = \dots = E \dots\dots\dots (5)$$

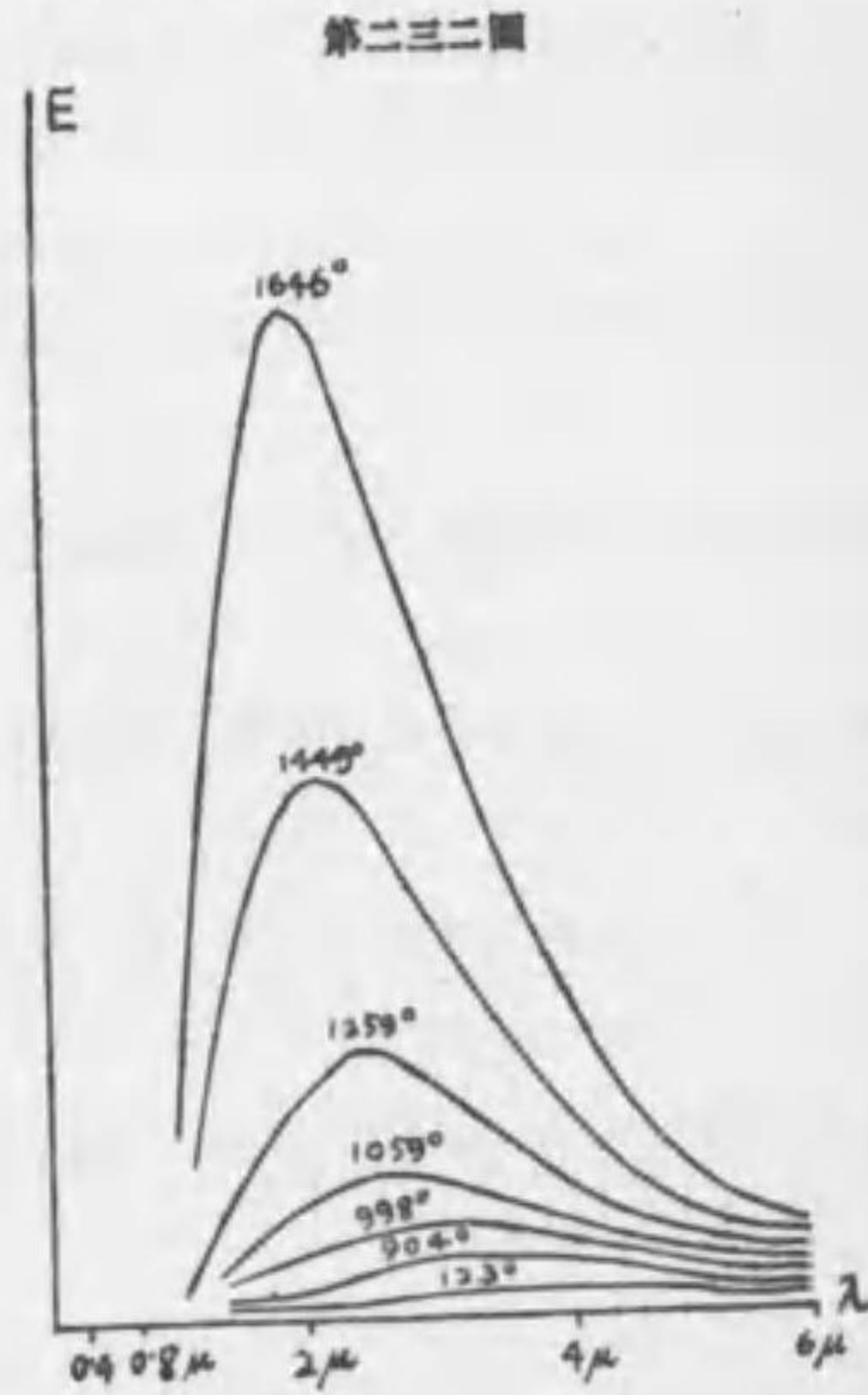
なり、從て便宜上

$$e = aE \dots\dots\dots (6)$$

と書くべし、故に眞黒体に於て任意の A 及び λ に對する E を知れば (6) に

より他の任意物体の ϵ, α の関係を知ることを得るなり。

ルムマー (Lummer 1895) 及び プリングスハイム (Pringsheim 1898) は T, λ の函数なる真黒体の E を實測せんと欲し金属製空球の裏面を黒く塗り球外を常恒温度に保ち黒色表面が球内に向て輻射する熱量を測定せしに第二三二圖に示す如き結果を得たり、横軸は λ にして数字は μ を単位とす縦軸は真黒体の輻射能 E にして便宜單位を使用して圖上に表はせり、 1646° の曲線を見るに E の區域最廣く最大輻射は 2μ 附近に在り、温度降るに従ひ輻射量及び其區域縮少し、同時に最大輻射の λ は其長さを増加す



第二三二圖

143 びーンの變位則 Wien's displacement law, 1893 最大輻射に對する波長 λ_{max} と絶對温度 T との關係は上述の如く T 増せば λ_{max} 減ずることは豫測し得べきも二者の關係を精確なる研究に附したるは びーン にして所謂 びーン 則は次の公式によりて示すことを得

$$\lambda_{max} T = c \dots\dots\dots (7)$$

即ち最大輻射をなす振動の波長は絶對温度に反比例するものなり、此法則は其後ルムマー、プリングスハイム の實驗によりて確定せり。尙常數 c は二氏の測定により $c=2940\mu$ なり。

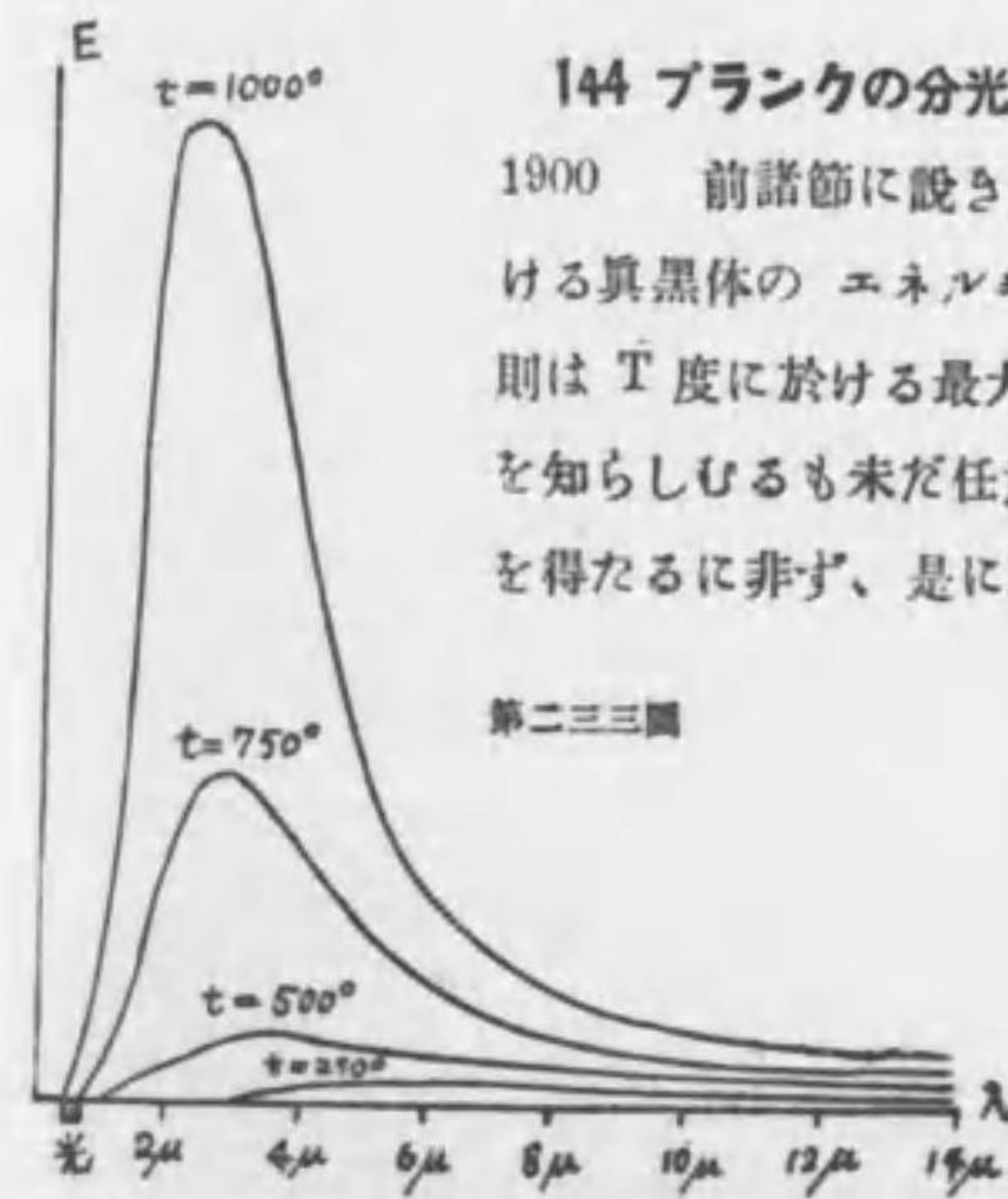
之に引續き びーン は エネルギー の最大輻射量 E_{max} を前記法則と同様に熱力學の基礎より發足して次の公式によりて示せり

$$E_{max} = k \cdot T^5 \dots\dots\dots (8)$$

茲に k は或常數なり。故に物体の絶對温度が 1000° より 2000° に上るとせば

ステファアン 則 (1) により全輻射量は 2^4 即 16 倍になりたるも最大輻射量は (8) により 2^5 即 32 倍となる、而して最大輻射に該當する波長は (7) により $2940/1000$ 即 2.94μ より 1.47μ に進みしことを知るべし、然るに紅色は $\lambda=0.8\mu$ なるを以て紅色を最大輻射するには $2000 \times 1.47/0.8$ 即ち少くとも 3700° まで熱せざるべからず、然れども此は最大輻射の温度にして ドレーパー 則には直接の關係なき事と知るべし。

びーン 法則を應用したるものには ルシャトリエ (Le Chatelier 1892) の分光寒暖計 optical pyrometer あり即ち熱源より發する光を分光器によりて分解し最高光度の色を測知すれば びーン 式 (7) によりて熱源の温度を算出し得べし。然れども上述の研究は悉く真黒体の輻射 エネルギー に關するを以て之を他の發熱体に應用するに當ては多少の差違を生ずるを免れず、例へば真黒体に於ては $c=2940\mu$ を得たれども白色なる白金の場合には $c=2630\mu$ なり。故に一般の物体に取りては c の値は上記の中間に在りて見て不可なるべし。今上述の理を太陽の温度測定に應用せんに、日光に於ては最大輻射は黄色に在り而して黄色に於ては $\lambda=0.5\mu$ なれば、びーン 則に代入すれば太陽の温度 5880° を得べし、之を §140 に得たる値と比較するに大差なきを見るなり。



第二三三圖

144 プランクの分光方程式 Planck's spectral equation, 1900 前諸節に説きたる如く ステファアン 則は T 度に於ける真黒体の エネルギー 輻射の總量を知らしめ、びーン 則は T 度に於ける最大輻射の波長 λ_{max} と其輻射量 E_{max} を知らしむるも未だ任意の λ に對する輻射量を與ふる式を得たるに非ず、是に就きては諸學者は種々の關係式を提出して T と λ の函数として E を表はす方程式即ち分光方程式を作らんと試みしが其裡最も優れたるは下に掲ぐる プランク の式なるべし、 C 及ぶ ϵ は常數にして $c=14300$ とす。

$$E_{\lambda,T} = \frac{C}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1)} \dots\dots\dots (9)$$

炭、煙煤、酸化銅、酸化鐵、白金粉末等を 黒体に近似なるものと見做して實驗したる結果により (9) 式が餘程事實に近きことを確め得たり。第二三三圖はプランク式に $t=1000, 750, 500, 250^\circ$ を代入して圓形に表はしたるものなり、之を第二三三圖の實驗圖に比較して曲線の大勢一致するを認め得べし、圖中 0 より 1μ 邊までの間にあるは光の スペクトラ なり。

プランク 式より

$$E = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} E_{\lambda,T} d\lambda$$

を求めなば ステファン 則に到着し得べく、又 (9) 式の極大値を求むれば其結果より ギーン 則を導き得べきなり。

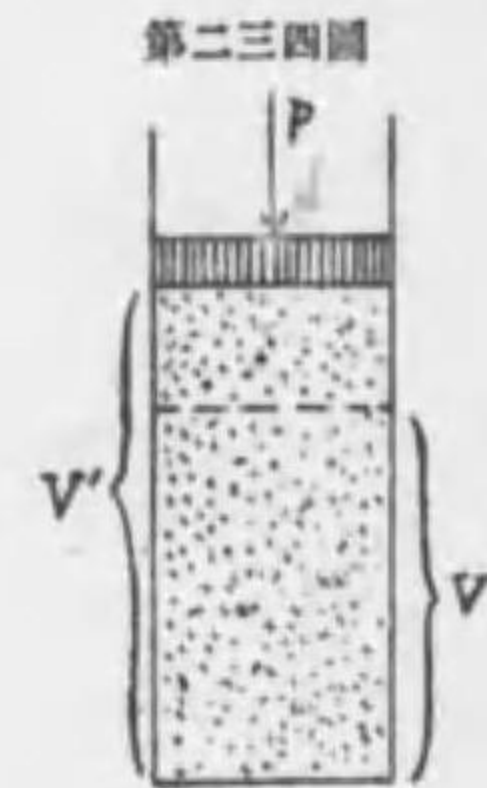
第 五 章 熱力學之第一原理 THERMODYNAMICS FIRST LAW

145 熱の仕事當量 mechanical equivalent of heat 熱は運動なりとの概念は遠く プラトン に遡ることを得べし、降りては ロージャ、ベーコン (Roger Bacon 1214-1294)、ケプラー (Kepler 1609) も同様に運動説を抱きたるも ガリレオ (1565 年出版自然物篇) は熱を以て一種の液体なりとせり、ニュートン (1704 年出版光學篇第三章質疑第十八) は エーテル の振動にして天體より來りて物体内に浸入するものとなせり、ガリレオ、ニュートン にして夫々此の説あるは頗奇なりと謂ふべし。漸く ダニエル、ベルヌーキ (Daniel Bernoulli 1730) 及び其父 ジャン、ベルヌーキ (Jean B. 1746) に到りて熱は分子の振動なることを認めたりと云へども一般に液体説流行し熱素 フロジストン phlogiston によりて熱現象を説明せり (Stahl 1703)。

熱に関する思想の發展は上述の如くなれども實際上に於ては摩擦に因り火を製せしは恐らくは今より八千年以前に始まりし事なるべし、今日も南洋蕃人は火を製するに鐵片と燧石とを撃ち又吾邦元旦の神燈には檜材の摩擦によりて生じたる火を用ふところあり。ラムフォード (Rumford 1798) は大砲の砲身を鉛直に樹て馬力を使用して穿孔棒を其中に回轉せしめしに最初 17° なりし砲身は三十分の後 54° となれり、後又全部を水中に容れて同一實驗を反覆せしに二時間半にて水は沸騰を始めたりとぞ、ラムフォード は此實驗によりて熱は物質にあらずして全く運動に外ならざることを公衆に教示せしなり。翌年 デーヴィ (Davy 1799) は二個の氷塊を取り互に摩擦して其融解するを示し以て熱と運動との關係を明かにしたるも未だ量的測定によりて熱と運動との間に相當量あるを教示するには至らず。

運動せる物体の エネルギー と其 エネルギー を悉く熱の形に變化したるとき の熱量との比即ち熱の仕事當量を初て測定せしは マイヤー (Robert Mayer 1842)

なり、マイヤーは外科醫として蘭船に乘じ瓜哇島 (Java) に赴き熱帯人の血液の深紅なるを見て一驚を喫し創めて熱と仕事との關係に想到せしなりと云ふ。今第二三四圖の圓筒は斷面積單位にして其中には m 瓦の空氣を容れ、滑り易き蓋には壓力 p を作用せしめ、倍て外部より熱を加へ空氣の溫度は T より T' に上り同時に容積は V より V' に膨脹したりとせば(圓筒の斷面は單位面積を有するゆへ V 及び V' は夫々高さに等し) 注加したる熱量は



$$m c_p (T' - T)$$

なり、 c_p は定壓比熱なり。若も蓋を固著し氣體の膨脹を禁じつゝ加熱して溫度を T より T' に上げしならんには熱量は

$$m c_v (T' - T)$$

なり、 c_v は定積比熱とす、依て前後二つの場合に於ける熱量の差は

$$m (c_p - c_v) (T' - T)$$

に等しく、マイヤー思ふやう此差を生ずるは畢竟空氣が膨脹して仕事をなすと膨脹せずして仕事零なるとの差に歸因するならんと、而して氣體がなしたる仕事は $p(V' - V)$ なるゆへ、1 カロリに對する仕事の値即ち當量 J は

$$J = \frac{p(V' - V)}{m(c_p - c_v)(T' - T)} \dots \dots \dots (1)$$

となるべきなり。然るに氣體方程式 (§ 116, 13式) により p 不變なる時は

$$pV = mRT, \quad pV' = mRT'$$

なるゆへ、差引き

$$p(V' - V) = mR(T' - T)$$

を得、之を (1) に代入して當量

$$J = \frac{R}{c_p - c_v} \dots \dots \dots (2)$$

を得べし、空氣の場合には

$$R = \frac{p \cdot V_0}{273} = 2932 \text{瓦}, \quad c_p = 0.2375, \quad c_v = 0.1690$$

なるゆへ

$$J = \frac{2932}{0.0685} = 42700 \text{瓦米} = 41990000 \text{エルグ} = 427 \text{瓦米}$$

を得、即ち 1 瓦カロリ (小カロリ) の熱量は 427 瓦米 (gram-metre) の仕事に相當す、從て 1 疋カロリ (大カロリ) の熱量は 427 疋米に相當することを知る。

マイヤーが代入せし數値は當時の不精確なる結果より得たるものなりしかば上記の如き精確なる値を與へざりしが、マイヤーとは全然獨立的に熱心に同一題目を研究しつゝありしジュール (Joule 1843) は水車の如き裝置を水中にて回轉して水を暖め其熱量と回轉に要せし仕事とを比較することによりて仕事當量を算出せり、其後ヒルン (Hirn 1815—1890) は衝突によりて生ずる熱量を測りて當量を算出せり。之を要するに仕事と熱との間に一定の當量あることを知らば熱は物体分子の運動のエネルギーなるを認識する事容易なり。

J は (1) が示す如く仕事を熱量にて除じたるものなり、故に其デメンションは

$$[J] = [L^2 MT^{-2} H^{-1}] \dots \dots \dots (3)$$

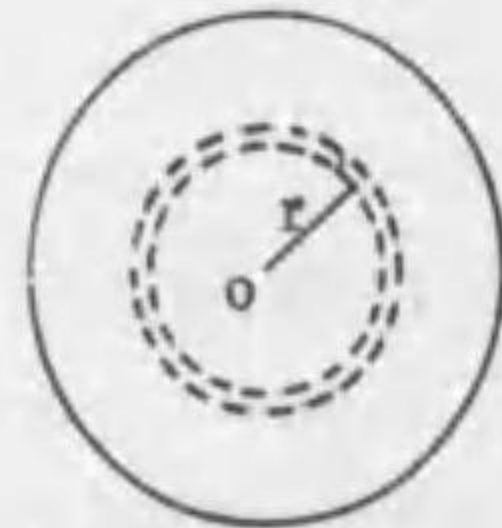
と記するの外なしとす。又太陽常數を毎秒の仕事に換算すれば $\frac{1.932 \times 4.199 \times 10^7}{60} = 1.30.10^6$ エルグに等し。

146 ヘルムホルツの日熱維持説 theory of maintenance of solar heat 昔者化學研究はラファジエ (Lavoisier 1743—1794) を驅て物質の不滅を唱へしめし如くマイヤーと殆ど同時にヘルムホルツ (Helmholtz 1847) をしてエネルギーの變轉窮りなきは嘗て其形状の上の事にして其量に於ては古往今來、不増不減のものなることを認識せしめたり、ヘルムホルツは單に熱と仕事との關係に於てのみならず、汎く物理界化學界を通じてエネルギーの保存せらるゝ事を證明せり。

ヘルムホルツは亦其理法を太陽熱發生の説明に應用せり (1854)、抑々日熱は古來其強烈の度に於て種々變化を遂げたるに相違なきも只今の處にては年々歳々

著しき變遷あるを見ずして太陽常数は前記の如く凡そ 2 カロリ内外のものなり、然かも此勢にて日々夜々に輻射作用を繼續し曾て倦怠の色なきは如何、ラヂウム發見以來は太陽を構成する物質は續々解離してラヂウムを發生し以て日熱製造を持續するならんとの説起りたれども、ヘルムホルツが提出したる仕事説は依然として其價値を失ふことなし、其説に依れば太陽は時々刻々日熱輻射のため其体縮し縮むの仕事は願て日熱の發生となり以て其不斷失ふところのものを補ふなりと。今第二三五圖を太陽とし其半徑を R とす、半徑 r を以て球を畫き其質量を m とし、中心の距離 r 及び r+dr

第二三五圖



の間に夾まりたる球殻の質量を dm とすれば dm は r 以外の球殻に引かるゝこと無く單に m に引かるのみなり (第八五圖) 其引力は中心 O に向ひ其値は ニウトン 則に従ひ

$$-k \frac{m dm}{r^2}$$

なり、從て太陽收縮のために dr の距離を沈降すれば其仕事は

$$-k \frac{m dm}{r^2} dr$$

なり、今 C を 1 よりも大なる或數とすれば薄き球殻が Cr の距離より r の距離まで沈降する仕事 dW は

$$dW = -km dm \int_{Cr}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{km dm}{r} \cdot \frac{C-1}{C}$$

然るに (σ=比重) m = 4/3 π r^3 σ 又 dm = 4π r^2 σ dr なるゆへ之を代入すれば

$$dW = \frac{16}{3} k \pi^2 \sigma^2 \cdot \frac{C-1}{C} \cdot r^4 dr$$

を得、之は單に dm が作したる仕事に過ぎず、今全質量の仕事を求むるときは

$$W = k \frac{16}{3} \pi^2 \sigma^2 \cdot \frac{C-1}{C} \int_0^R r^4 dr = \frac{16}{15} k \pi^2 \sigma^2 \cdot \frac{C-1}{C} \cdot R^5$$

を得、尙ほ全質量を M とすれば M = 4/3 π R^3 σ なるを以て上式は

$$W = \frac{3}{5} \cdot \frac{k(C-1)}{C} \cdot \frac{M^2}{R} \dots\dots\dots (4)$$

となる、此結果は太陽は其收縮の途次に於て常に同質 (homogeneous) なりしものと假定して誘導したるなり、太陽は果して斯く常に同質なりしや否やは不明に屬すれども此結果は事實に近似のものなるに相違無かるべし。ラプラス (Laplace) の星雲説によれば太陽も其初は廣袤無邊なる大星雲なりしに漸次放熱收縮して今日の狀況に成れりと云ふ、果して然らば (4) に於て C=∞ と置くも不可無かるべく、從て最初の星雲時代より今日までの全仕事は

$$W = \frac{3}{5} k \frac{M^2}{R} \dots\dots\dots (5)$$

となるべし。ヘルムホルツは此種の計算に依り太陽が今日までに製出したる熱量を計算せしのみならず、尙將來に於ては今後五百萬年後には太陽の半徑は今日の 1/2 に收縮し今後四千萬年間は太陽は吾人に日熱を供給して倦まざるべきことを計算によりて教示せり。

147 燃焼熱 heat of combustion

熱とエネルギーの相關に就き化學的一例を擧げんに、

9 疋の水を水素と酸素とに分解するには 34462 大 カロリ に相當する仕事を要す、之を仕事に改算すれば 34462 × 427 = 15.10⁸ 疋米なり、故に 1 疋の水素と 8 疋の酸素との間には 15.10⁸ 疋米の位置のエネルギー存在する理なり、是れ恰も引絞りたる弓が位置のエネルギーを有すると同一にして水素酸素は互に牽引し機會を待て化合せんとす、故に一度時を得れば雙方より水酸兩分子は加速運動をなしつゝ接近し一互衝突すれば忽ち反射して後進の分子と衝突す斯く分子間に夾まれつゝ頻りに衝突するは振動に似たるものにして願て温度の昂上となる、茲に生じたる水蒸氣の各 1 疋が有する熱量は 34462 + 9 = 3829 大 カロリ なるを以て之を水蒸氣の比熱 0.475 にて除ずれば温度は 3829 ÷ 0.475 = 8000° となるべき理なれども水蒸氣は約 3000° に於て既に解離の状態に在るなるべし。

生物界の努力は全部悉く太陽熱の力を藉りて物質の配合を變化し以て其位置エネルギーを増加するに使用せらるると云ふも不可なし、無機世界に其儘に放置すれば常に位置エネルギーの小なる方に移動する性質を有するに引換へ有機

界の仕事は必ず其反対に出で不断 エネルギー 含蓄の多類なる組織を製出す、而して是皆な直接間接に日熱の恩澤を蒙らざるものなし、例へば河水の海に朝し、水蒸氣の蒸騰し、雨雪の降下する皆 エネルギー の小なる方向を慕ふて移動するに非ずや、之に反し葉緑が日熱に依り炭酸瓦斯を分解し(此分解作用に既に位置エネルギーを増加す)更に澱粉乃至葡萄糖を製し又葡萄糖の一部は根より吸上げたる窒素と化合して一層 エネルギー 多き プロテイド(類似蛋白質)を製出するを見れば植物界の大傾向は日熱を變じて世界の位置の エネルギー を増すに在りと云ふことを得べし、獨り動物は植物努力の結果を利用して或は之を自体運動のために或は体温維持のために用ひ世界の位置の エネルギー を消費するが如く視へざるにあらざれども動物の体内諸器を見れば必ずしも此に偏せずして間々植物の建設的努力に劣らざるものあるを發見すべし(例へば成長作用の如し)。

148 気体のエネルギー m 瓦の気体を取り之に熱量 Q を注入すれば其一部は氣體分子の進行速度を増し従て運動 エネルギー 大となり温度上昇す、之を内部 エネルギー internal energy の増加と稱す、又残部は氣體の膨脹に使用せられ氣體は外壓に反抗して仕事を奏す、之を外部 エネルギー external energy の増加と稱す、今注入したる少許の熱を dQ とせば之に相當する エネルギー JdQ は内部 エネルギー U の増加と、外部 エネルギー W の増加とを促すゆへ

$$JdQ = dU + dW \dots\dots\dots (6)$$

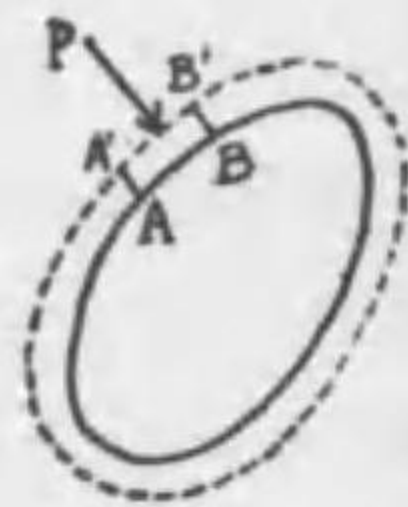
なり、 dW を算出するには第二三六圖を容積 V の氣體とし AB を其單位面積とすれば膨脹のために AB は $A'B'$ の位置に來り壓力 p に抗して距離 $AA' = BB' = \nu$ を進み單位面積は $p\nu$ の仕事を作す、故に全面積 S の仕事は $p\nu S$ なり、然るに νS は容積の増加に等しきを以て全仕事は

$$dW = p dV$$

となり(6)は

$$JdQ = dU + p dV \dots\dots\dots (7)$$

第二三六圖



次に内部 エネルギー 増加は温度 T の昇りしによると云へ共亦容積 V の増加に因るやも測るべからず、故に先づ U を T 及び V の函数と見て

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV \dots\dots\dots (8)$$

と書き、併て完全氣體に於ては容積増すに従て分子間の距離は増すとも分子引力皆無と見るがゆへに仕事に影響することは絶て有るまじと考ふるゆへ $\partial U / \partial V = 0$ なり (Gaylussac 1807)。又 $\partial U / \partial T$ の方は温度 1° 増す毎に エネルギー の増加する比を示すものなれば $\partial U / \partial T = mc_v J$ なり、故に(7)より

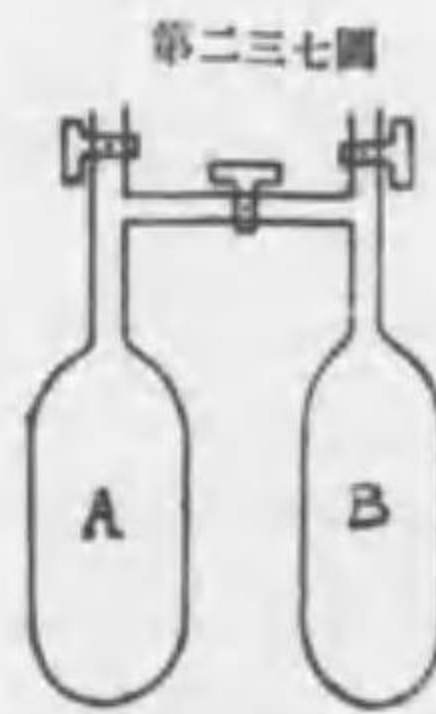
$$JdQ = mc_v JdT + p dV \dots\dots\dots (9)$$

を得、之を積分すれば氣體が現在所有する總 エネルギー は

$$JQ = mc_v JT + \int p dV \dots\dots\dots (10)$$

なり。

149 ジュールの實驗 (Joule 1845) 此は $\partial U / \partial V = 0$ の事實を確むるためになしたる實驗なり。二個の眞鍮製容器を管にて連絡し(第二三七圖)各々廻旋を



第二三七圖

設け A 内に 22 氣壓の壓縮空氣を充たし B を真空となし中央の廻旋を轉旋して一度に A の空氣を B に導くときは空氣は眞空内に於て膨脹する理なれば外部仕事を奏することなく $p dV = 0$ なること明なり、全裝置は熱量計内に容れあるを以て少許の温度の變化をも測ることを得べし、ジュールが最初行ひし實驗によれば温度は少しも變化せず、又外部より

熱の注入無きを以て(7)(8)兩式に於て $dQ = 0, dT = 0$ 従て $\partial U / \partial V = 0$ ならざるべからず、ジュールが得たる結果は既に 38 年前 ゲイルーサックが得たりしところのもの同一なり。然るに其後 ゲルギンの勸告により兩人協力して再度一層精密なる實驗を遂げしに次の結果を得たり

| | |
|------|----------|
| 炭酸ガス | $dT < 0$ |
| 窒素 | < 0 |

| | |
|----|-----|
| 酸素 | < 0 |
| 空気 | < 0 |
| 水素 | > 0 |

故に水素を除けば他は膨脹のために冷却することを知らるに到れり。是れ分子引力に抗しつゝ分子が相互の距離を増すことによりて仕事をなすために必要な体熱を供給して冷却したるものにして Linde の液体空気製造器 (§ 128) は實に上述の ジュル、ケルボン 効果を利用したるものなり。

氣體の分子引力は距離の六乗に反比例し § 129 に於て之を a/V^2 にて表はせり、今定壓にて氣體を絶對零度より T 度まで熱するものと假定すれば容積は b より V となり分子力に反抗しつゝ作したる仕事は

$$\int_b^V \frac{a}{V^2} dV = a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{V} \right)$$

之を (10) に代入すれば氣體の全 エネルギー は

$$\text{全 エネルギー} = mc_v J T + \int p dV + a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{V} \right) \dots\dots\dots (11)$$

となるべし。

後節氣體の膨脹收縮を取扱ふに當り簡約を旨とするために内部 エネルギー は毫も容積の變化に關係せざるものと假定すべし。

150 状態の変化によりて作す仕事 物体が一氣壓の下に融解又の氣化の如き變化を遂ぐるときは此に必要な潜熱は其物体の外部仕事及び内部 エネルギーの増加に使用せらるゝなり。氣壓を p 、潜熱を L 、變化前後の内部 エネルギー及び比積を夫々 U_1, U_2 及び ω_1, ω_2 とすれば $\int dQ = L, \int p dV = p(\omega_2 - \omega_1)$ なるゆへ (7) を $m=1$ なる物体に適用して

$$JL = U_2 - U_1 + p(\omega_2 - \omega_1) \dots\dots\dots (12)$$

を得べし。

氷が融解する際には比積は $\omega_1 = 1.0907$ より $\omega_2 = 1.0000$ に變ず、又一氣壓は $p = 1014 \cdot 10^3$ ダイン、當量は $J = 4199 \cdot 10^4$ 故に

$$80 = \frac{U_2 - U_1}{J} = \frac{1014 \cdot 10^3 \cdot 0.0907}{4199 \cdot 10^4}$$

即ち 1 瓦の氷を 1 瓦の水に變ずるに必要な熱量は液化潜熱 80 よりも少し多くして

$$\frac{U_2 - U_1}{J} = 80.0022 \text{ カロリ}$$

なり、超過量 0.0022 カロリ は液化のために自ら供給せらるゝなり。

1 瓦の水が 100° に於て水蒸氣に化する際には $\omega_2 - \omega_1 = 1649$ 、又氣化潜熱は 540 なり、故に (12) より

$$\frac{U_2 - U_1}{J} = 540 - 496.3 = 43.7 \text{ カロリ}$$

故に内部 エネルギー の増加にのみ用ひし熱量は比較的少量にして大部分 (496.3 カロリ) は膨脹の仕事のために必要なりしなり。

151 氣體膨脹によりて作す仕事 § 110 に説きたる如く クラオヂウス 説によれば氣體壓力 p は氣體分子が容器の壁に衝突する際壁に與ふる運動量の總和に歸することを得べく (48) により

$$p = \frac{1}{3} \sigma v^2$$

の關係を得たり、茲に σ は密度にして v は分子速度なり。1 瓦の氣體の容積は $\omega = \frac{1}{\sigma}$ に等しく、其の運動の エネルギー は内部 エネルギー と同一なるを以て $U = \frac{1}{2} v^2$ 。故に上式は

$$p\omega = \frac{2}{3} U$$

となる、今此式を氣體の定壓膨脹に應用せんとするに當り膨脹前後の値を夫々 ω_1, ω_2 及び U_1, U_2 を以て示し又 $p = \text{常數}$ とすれば

$$p(\omega_2 - \omega_1) = \frac{2}{3}(U_2 - U_1)$$

となる、今 c_v を定積比熱とし 1, 2 の符號を溫度 1° 増加する前後の値に関するものとすれば

$$Jc_v = U_2 - U_1$$

なり又 c_p を定壓比熱とすれば

$$Jc_p = U_2 - U_1 + p(\omega_2 - \omega_1)$$

なり、依て

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{U_2 - U_1 + p(\omega_2 - \omega_1)}{U_2 - U_1} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1} = 1.67$$

を得る理なり、然るに實驗的結果を見るに c_p/c_v の値は下表の如し

| | |
|--|-------|
| 水銀 (Hg) | 1.666 |
| アルゴン (A) | 1.63 |
| 酸素 (O ₂) | 1.41 |
| 水素 (H ₂) | 1.41 |
| 窒素 (N ₂) | 1.41 |
| 炭酸ガス (CO ₂) | 1.311 |
| エーテル (C ₂ H ₆ O) | 1.03 |

此表を見るに分子構造複雑なるほど c_p/c_v の値は 1.67 より遠くなる傾向を有す、其差は エーテル に於て最甚し、之れ内部 エネルギー U は單に分子の運動の エネルギー に限られずして分子を構成する原子の振動 エネルギー をも含むに依るが故ならん乎、依て x を分子運動、 y を原子運動より由來する エネルギー と假定し $U_2 - U_1 = x + y$ と置けば前式を エーテル 蒸氣に應用し

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{x + y + \frac{2}{3}x}{x + y} = 1.03$$

を得、之より $y/x = 21$ を得るが故内部 エネルギー の大部は原子振動に由來すること明なり。

152 断熱變化 adiabatic change (v. Öttingen 1876) 完全氣體は $pV = mRT$ なる單純なる方程式に従て變化するものなれば pVT 三者の裡任意の二つを與ふれば其氣體の狀態は悉知せられたることとなるなり故に、第二三八圖の如き $p-V$ 圖形に於て A 点の坐標を與ふれば氣體の pVT は悉く既知數となり従て氣體の狀態は全知せられたることとなる。今 A, B を極近き二点とし A より B に移

欠

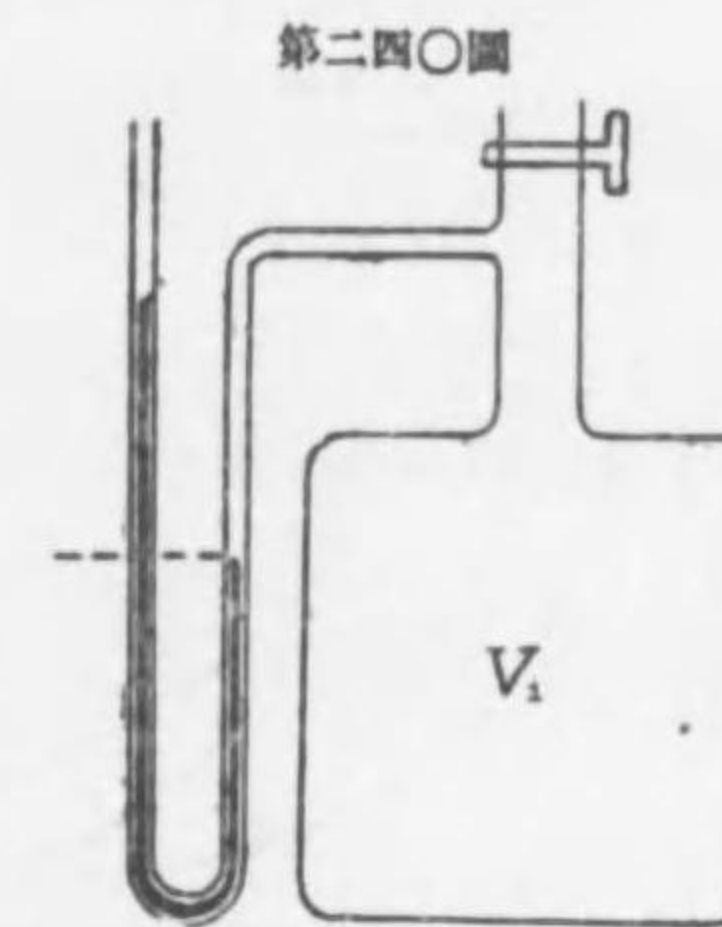
なれば $dp=0.1/1050$ なり依て上式より

$$dT = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{T}{p} dp = \frac{0.41}{1.41} \cdot \frac{273}{0.76} \cdot \frac{0.1}{1050} = 0.00994^\circ$$

即ち温度の下降は 100 米に 0.994° 約 1° の割合にして氣象學上の事實に吻合す。

154 兩比熱の比 第二四〇圖の如く壓力計を有する容器に氣體を充たし初の

壓力を p とす、今突然廻栓を旋して氣體の一部を流出せしめ速に廻栓を閉るときは壓力は一亘 p_1 に降り内部氣體は斷熱的膨脹のために冷却すれども暫時の後室内の温度と同一となり壓力は p_2 に上るなり。偕て容器の容積を V_1 とするときは氣體が流出せし後に容器内の全空間を占有する氣體は流出前には V_1 よりも少し小なる容積を有したるなり其容積を V と定むれば、最初は斷熱變化なるを以て



$$pV^k = p_1 V_1^k$$

なり、容器内外の温度平均したる時を考ふれば等温變化と見做すことを得べきが故に

$$pV = p_2 V_1$$

を得、依て $p/p_1 = (p/p_1)^k$ なり之を對數に直ほせば

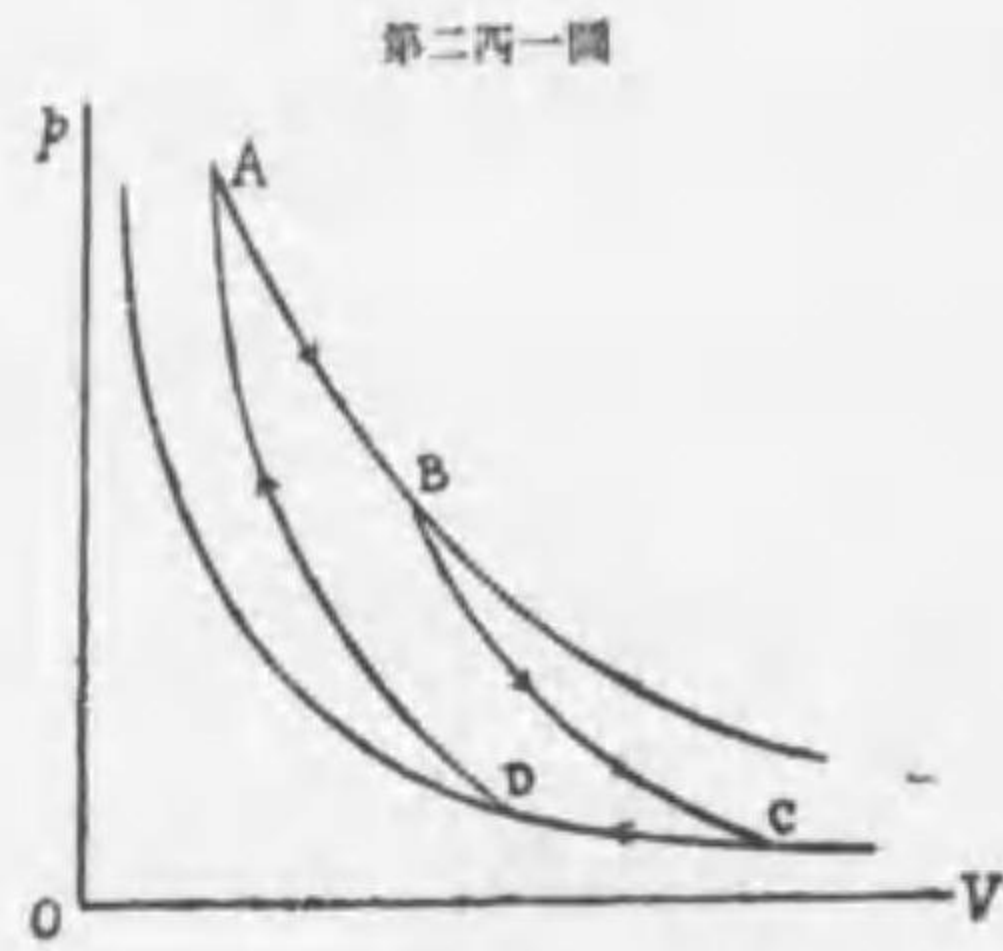
$$k = \frac{\log p - \log p_1}{\log p - \log p_2}$$

より p, p_1, p_2 の三回觀察によりて k を算出し得べし、空氣は $k=1.408$ なり。

欠

第六章 熱學之第二原理 THERMODYNAMICS— SECOND LAW

155 カルノーの輪業 Carnot's cycle (Sadi Carnot, 火力の研究 1824)



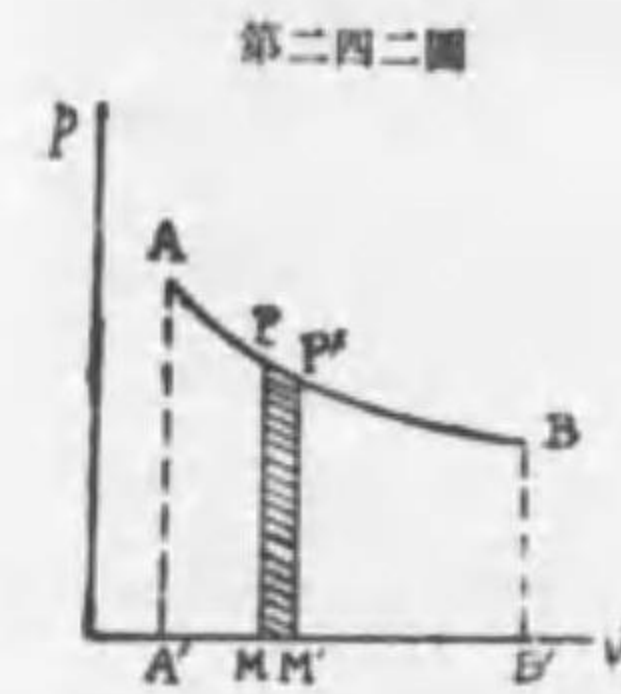
第二四一圖の AB と DC は夫々 T_1, T_2 の等温線にして $pV = mRT_1$ 及 $pV = mRT_2$ の式を有し BC, AD は各断熱線にして各 $pV^k = \text{常數}$ の如き方程式を有す。今廣大なる二個の熱源を假想し高熱源は温度 T_1 低熱源は温度 T_2 を有すとせよ、此等熱源は各廣大なるを以て其に少量の熱を加ふるも又熱を奪ひ去るも其温度に變化を來たすこと無きものと定む。

茲に m 瓦の氣體あり其状態は圖中 A 點に相當し A 點の坐標に相當する p と V を有し T は $pV = mRT$ 式により定めらる。最初其氣體を高熱源と連結して膨脹せしむるときは氣體は AB に沿ふて變化す、B に來りしとき高熱源より分離し防熱材を以て氣體を包被し断熱的に膨脹を繼續すれば氣體は BC に沿ふて變化し温度 T_2 に降りしとき低熱源と連結して收縮せしむれば氣體は CD に沿ふて等温變化を遂ぐべし、氣體を D より A に歸らしむるため適宜の場處 D にて低熱源より分離し再び防熱材にて包被し收縮を繼續せしむれば DA に沿ふて断熱的に變化し遂に A 點に復歸す、之をカルノーの輪業と稱し (Clapoyron 1834) 其輪業を遂ぐる物質を作業物質 working substance と名づく。

AB の沿道に於て氣體は膨脹するを以て熱の供給を要するも熱源と連絡せるゆへ温度は變化なくして Q_1 の熱量を熱源より獲得す、又 CD の沿道に於ては收縮するを以て發熱すれども低熱源と連絡せるゆへ熱の剩餘 Q_2 は之を熱源に

讓與するなり、然らば一輪業を作することによりて氣體は $Q_1 - Q_2$ の熱を得たるも A 點に歸りたる時 pVT 三者は全く舊値に復歸し何等の變更を認めざるがゆへに此熱量に相當する仕事 $J(Q_1 - Q_2)$ は始終其氣體と連絡せる機關に向つて作されしものに相違無きなり。

156 カルノーの輪業効率 efficiency 第二四二圖の pV 圖形に於て AB は



氣體の變化を示す道なり P を其上の一点とし P より V 軸へ垂線 PM を引くときは $PM = p$ なり、PM に平行し微分距離に於て他の垂線 $P'M'$ を引くときは四邊形 PM' の面積は $p dV$ に等し、故に $p dV$ を A より B まで積分すれば AB の下方なる $ABB'A'$ の面積を得べし、今此理をカルノーの輪業 (第二四三圖) に應用するとき

は AB, BC の沿道に於ては $ABCC'A'$ の仕事をなし CD, DA の沿道に於ては $-CDAA'C'$ の仕事を作すを以て、相加ふれば仕事は ABCD の四邊形の面積となる。即ち熱量 $Q_1 - Q_2$ は變じて此仕事となりしなり、故に

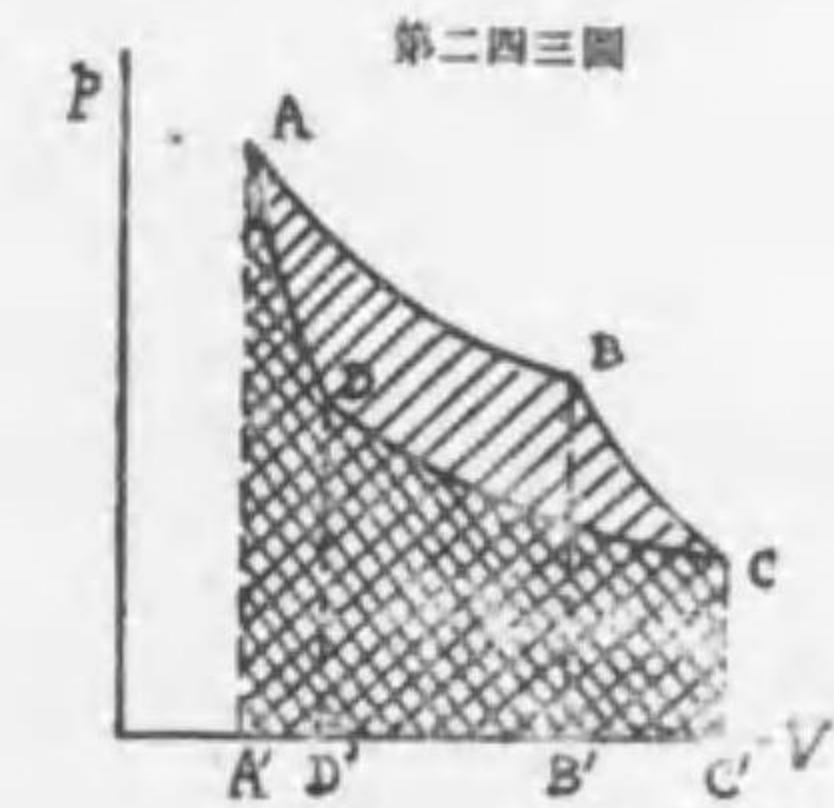
$$J(Q_1 - Q_2) = \text{面積 } ABCD \dots\dots (1)$$

面積 ABCD は氣體が機械によりて作したる仕事を示すを以て ABCD 四邊形を仕事圖形 indicator diagram と稱す、故に氣體が一輪業に於て吸入したる熱量は仕事圖形の面積に等しき仕事を奏するものなりと云ふを得べし。

Q_1 の熱量を與ふるも氣體は決して JQ_1 の仕事を奏する能はずして氣體は是非とも Q_2 の熱量を低熱源に讓與し其殘額に相當する仕事 $J(Q_1 - Q_2)$ を奏するなり、從てカルノー輪業の效率は $J(Q_1 - Q_2)/JQ_1$ となる即ち效率 η は

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\text{奏したる仕事}}{\text{注入したるエネルギー}}$$

なり、一例を掲れば高壓蒸氣機關 (high-pressure steam engine) に於ては高熱源



は釜にして其温度を 197° とし蒸気張力を 15 気壓とす、低熱源は冷却器 refrigerator にして其温度を 40° と假定すれば効率は

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{197 - 40}{197 + 273} = 34\%$$

となるべし。上記の公式の證明は後節 157 を參著すべし。

カルノー輪業を逆行せしめんと欲せば m 瓦の氣體を断熱的に AD に沿ふて膨脹せしめ温度は膨脹のために T_1 より T_2 に降る、次に低熱源と連絡して DC に沿ふて膨脹を繼續し等温變化をなし Q_2 の熱を吸入す、次に断熱的に CB に沿ふて收縮せしむれば温度は T_2 より T_1 に昇る、最後に高熱源と連絡して收縮を繼續し之がために生じたる熱量 Q_1 は熱源に與ふるなり、斯く低源より Q_2 を取り高源に Q_1 を與ふるを以て其不足額 $Q_1 - Q_2$ は外部よりエネルギーの形に於て氣體に注加せざるべからず。故にカルノー輪業は外部より仕事を附與することによりて逆行せしむることを得るものとす、之を可逆性 reversibility を有すと稱す。又吾人は此に依て重要な原理を學びたり、即ち外部より仕事を供給する事なくんば熱量を低温の場處より高温の場處に移すこと能はざるものなり。

自然の成行に一任し置けば熱は容易に高温處より低温處に傳播す、又熱を一瓦氣體に入れ氣體の媒介により機關を動かして仕事を奏せしむることを得れども是れ常に高熱源より熱を取り其一部を低熱源に分讓する場合に限るものとす、若し逆に低熱源より高熱源に若干の熱量を移さんとするには是非とも外部よりエネルギーを注入せざるべからず。而してカルノー輪業を使用し若干の熱を仕事に變ぜんとするには其熱の一部は必ず無効となり効率は常に 1 よりも小なり。

然かもカルノー輪業の効率は他の輪業の効率よりも大にして、之よりも優れたるものは他に存在する能はざるなり。此理を證明するには假に他の効率優れたる輪業ありとし、同一の熱源 T_1 及び T_2 間にて仕事をなさしめ其効率を $(Q'_1 - Q'_2)/Q'_1$ とせよ、然らば假定により

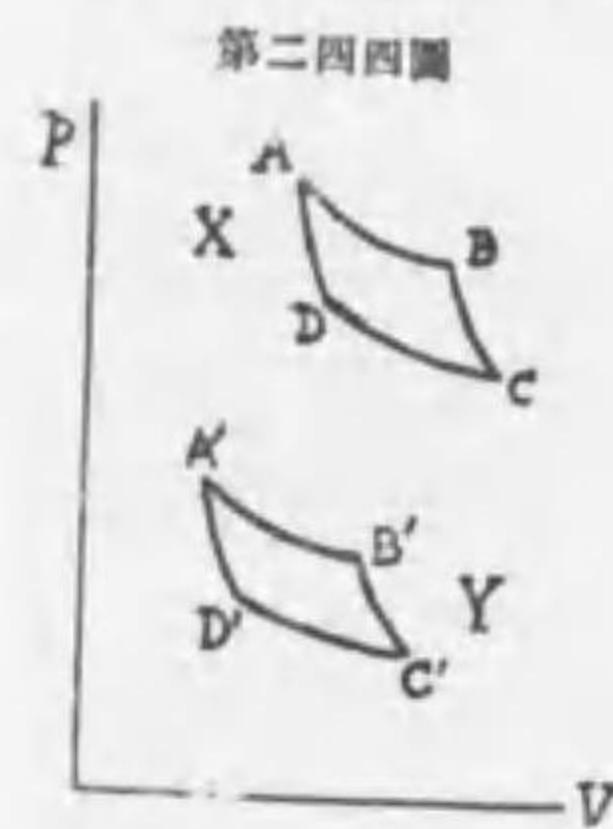
$$\frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} > \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

なり、又沿道の長さ等を加減して

$$Q'_1 - Q'_2 = Q_1 - Q_2$$

の方程式を成立せしめ得るやうに揃へ得たりとせよ、倍カルノー輪業を營ひ器械と其優等輪業の器械とを同時に運轉せしめ、カルノーは逆行に優等者は直行に働かしむる場合を考ふれば合併運動の結果として仕事は零となるにも拘らず $Q'_1 < Q_1$ 従て $Q'_2 < Q_2$ の關係により熱は不断低源より高源に運搬せらるることとなりて不合理の結果を生ずるなり、故にカルノー輪業は最効率を有す、此證明法はカルノー自ら與へたるところのものなり。

又カルノー輪業の効率は作業物質 (working substance) の如何に關係するところ無し、此に就きクラオジウスは次の如く證明せり、作業物質 X 及 Y を



假定し X は高源より Q_1 を取りて低源に Q_2 を與へ W の仕事を奏す、即ち

$$W = J(Q_1 - Q_2)$$

Y は高源より $Q_1 + q$ を取り低源に Q'_2 を與へて同じく W の仕事を奏す、即ち

$$W = J(Q_1 + q - Q'_2)$$

と假定し、同一熱源間に夾まれつつ X は直行に Y

は逆行に運轉するものとせば全体として仕事は零なれども $Q_1 - Q_2 = Q_1 + q - Q'_2$ の關係より

$$Q'_2 = Q_2 + q$$

なるゆへ Y は $Q_2 + q$ を低源より取りて $Q_1 + q$ を高源に與へ、差引全体として q を低源より取りて高源に與ふることとなりて不合理なり。故に $q=0$ ならざるべからず、即ち効率は仕事を作す物質には無關係なりとす。

上來カルノー輪業の可逆性を説きたれども逆行を實現するは其實不可能なる事項に屬す、其理由は仕事物質が機關内に於て働作する際エネルギーの一部は常に摩擦、音響、傳導等によりて消耗せられ、輪業が逆行する際には此等消耗エネルギーは復歸する能はざるを以てなり。

157 エントロピー entropy (Clausius 1865) m 瓦の完全氣體に dQ の熱を

注入するときは § 148(9) 式が示す如く内部 エネルギー 増加 $mc_v JdT$ と外部仕事 $p dV$ とを生ずべし、然るに $pV=mRT$ の関係により $p dV = \frac{mRT dV}{V}$ を得、又 § 145(2) により $R/J=c_p-c_v$ なるを以て

$$\frac{dQ}{T} = mc_v \frac{dT}{T} + m(c_p - c_v) \frac{dV}{V} \dots\dots\dots (3)$$

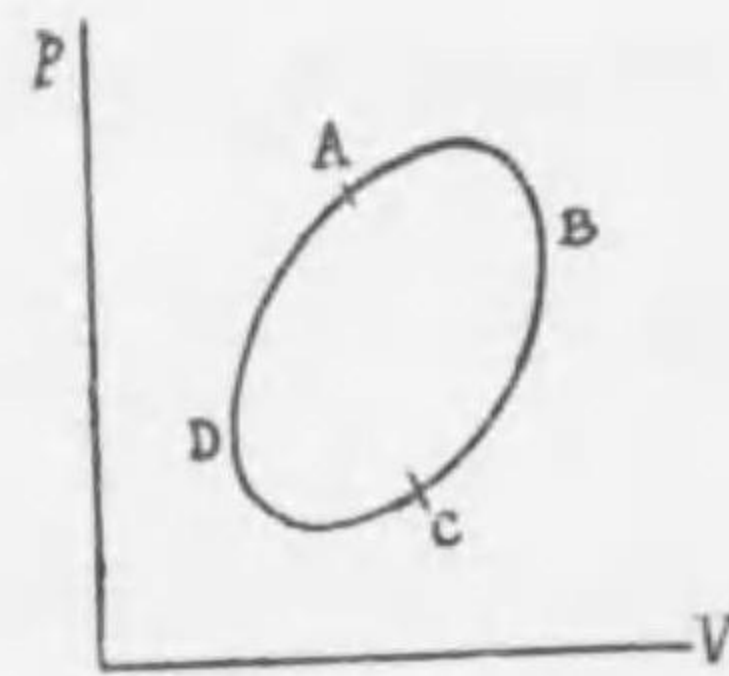
を得。クラオジウスは

$$S = J \int \frac{dQ}{T} \dots\dots\dots (4)$$

なる量を エントロピー と名づけた。然るに (3) の積分は

$$\int \frac{dQ}{T} = mc_v \log T + m(c_p - c_v) \log V \dots\dots\dots (5)$$

第二四五圖



なり、而て氣體が任意の輪道 ABCD (第二四五圖) を書いて元の A に歸るときは T も V も元の値に復する故 (5) 式の積分は零となり、エントロピーに増減なし、即ち

$$0 = \int_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A} \frac{dQ}{T} = \int_{A \rightarrow B} \frac{dQ}{T} + \int_{B \rightarrow C} \frac{dQ}{T} + \int_{C \rightarrow D} \frac{dQ}{T} + \int_{D \rightarrow A} \frac{dQ}{T}$$

故に

$$\int_{A \rightarrow B} \frac{dQ}{T} = - \int_{C \rightarrow D} \frac{dQ}{T} \dots\dots\dots (6)$$

是に依て觀れば A より C に到着するに如何なる道を選ぶとも エントロピーの増加は同一なり、之に反し A より C に到るに要する熱量 Q は其通過したる道の如何に従て大に異なることは既に學びしところなり。

氣體がカルノーの輪道を書くときは エントロピーの變化の様如何、先づ第二四一圖の A 点より出發して AB なる等温線を書く際には $dT=0$ 、故に AB 兩点の容積を V_1, V_2 とすれば (3) (5) により

$$\int_{A \rightarrow B} \frac{dQ}{T} = m(c_p - c_v) \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \dots\dots\dots (7)$$

同様に CD 兩点の容積を V_3, V_4 とすれば CD の等温線に沿て

$$\int_{C \rightarrow D} \frac{dQ}{T} = m(c_p - c_v) \log \left(\frac{V_4}{V_3} \right) \dots\dots\dots (8)$$

次に BC, DA の断熱線に沿て $dQ=0$ なるを以て (5) より夫々

$$0 = c_v \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + (c_p - c_v) \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \dots\dots\dots (9)$$

$$0 = c_v \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right) + (c_p - c_v) \log \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \dots\dots\dots (10)$$

$\log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = -\log \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$ なるゆへ (9) (10) 兩式により $V_2/V_1 = V_4/V_3$ 即ち $V_2/V_3 = V_1/V_4$ なり、故に (7) (8) の和は零となり

$$\int_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A} \frac{dQ}{T} = 0$$

なること既證の如し。

AB, CD の沿道に於ては温度は常住にして夫々 T_1, T_2 なり又 $\int dQ$ は夫々 Q_1 及び $-Q_2$ なり、故に (7) (8) 兩式により

$$Q_1 = m(c_p - c_v) T_1 \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right), \quad -Q_2 = m(c_p - c_v) T_2 \log \left(\frac{V_4}{V_3} \right)$$

依て

$$Q_1 - Q_2 = m(c_p - c_v) (T_1 - T_2) \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

此三式より效率は

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \dots\dots\dots (11)$$

となる、又此式より

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \dots\dots\dots (12)$$

なる關係を得べし。第二四一圖の AB を動くときは $\int dQ/T = Q_1/T_1$ なり、BC に沿ては $\int dQ/T = 0$ なり。CD に沿ては $\int dQ/T = -Q_2/T_2$ 、最後に AD に沿て行けば $\int dQ/T = 0$ なり、而して全變化は零なるを以て $Q_1/T_1 - Q_2/T_2 = 0$ 即ち (12) と一同の結果に到着すべし。又断熱線の方程式を得るには氣體方程式 $pV = mRT$ を $\log T = \log p + \log V - \log(mR)$ の如く書き之を (5) に代入して

$dQ=0$ と置くべし、然るときは $pV^k = \text{常數}$ なる既得の結果に到着す。

絶対温度 T_1 又は T_2 の起点は氣體の膨脹性に基きたる氣體寒暖計の起点にして、此温度に於ては氣體の容積零なりと想像せられたるものなり、今學びしところに基づき T の起点に他の意義を興ふることを得べし、即ち (11) より效率は

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

に等し、故に低熱源の温度 T_2 が零度なるときは效率は 1 となり従て Q_1 の熱量を悉く仕事に變化し得る理なり、而して此温度よりも一層低き温度を有する源の存在を想像する能はざるは明白なり、何となれば其場合には效率は 1 よりも大となり Q_1 に相當する仕事よりも多量なる仕事を收むることとなりて熱力學の第一原理に背くべし。此理により完全氣體の零度は亦實に熱力學の零度にして其よりも低き温度は存在する能はざるものとす。

二つの熱源 T_1, T_2 が接近して置かれたる場合を考ふるに二者の間自ら熱の交通を生じ高熱源より低熱源へ Q の熱量移行すべし、此時に當り低熱源のエントロピーは Q/T_2 の増加をなし、高熱源は Q/T_1 の減少を見るにより全体としてはエントロピーの變化は

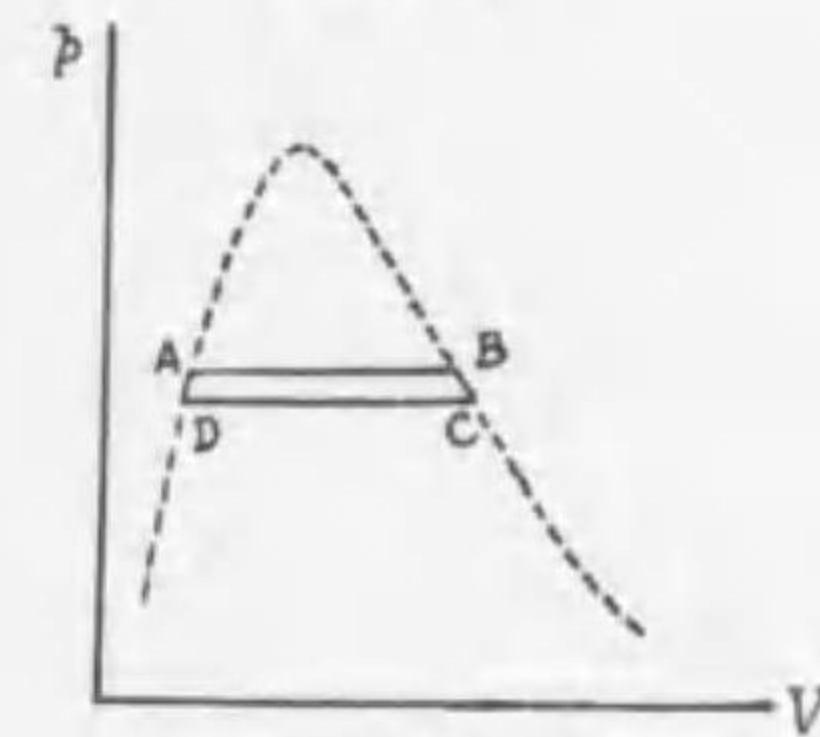
$$J \left(\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} \right)$$

に等し、此量は正數なるを以て全体としてエントロピーは増加したりと云ふことを得べし。自然界を通觀するに熱は不斷高温なる物体より低温なる物体に移行し、絶へて其反對なる場合を目撃することなし、故に自然界のエントロピーは日々夜々に増加の有様に在り。エネルギー保存の理により全自然界のエネルギー量は不増不減なるもエントロピーは次第に其量を増加するなり。理想的のカルノー輪業に於てはエントロピーの増減は無きも事實上に於ては熱の傳導ありてエントロピーは増加す、加之、吾人は絶対零度の低熱源を製出所有する能はざるを以て Q_1 なる熱量の全部を仕事に變ずること能はずして必ず Q_2 に相當する仕事を無効ならしむ、故に熱はエネルギーの一種なるに相違無きも其階級に於て劣等のエネルギーなること明白なり、而して自然界の大傾向は諸種の

エネルギー悉く此劣等エネルギーに變じ去る如く觀へざるに非ず、之をエネルギーの變衰 dissipation of energy と云ふ。

153 クラペイロンの方程式 Clapeyron's equation 此方程式は § 118 に説きたる飽和張力が温度に從て變ずる率と、氣化潜熱と、氣化の際生ずる容積の變化との間に存在する重要な關係を示すものなり。凡そ氣化点に於ける液体は容器の容積を増すに從て飽和蒸氣を發生し、液体は次第に減じ蒸氣は次第に増し遂に全部氣化するまでは飽和の状態を持続し温度 T も張力 p も一定の値に常住す、故に飽和蒸氣と液体の混合物は常に等温變化をなし其曲線は $p-V$ 圖形の V 軸に平行なる直線となる、第二四六圖の AB は

第二四六圖



斯の如き等温曲線を示す此時の温度を T_1 壓力を p_1 とすれば T_1 は p_1 なる張力に對する沸騰点に等し、今 T_1 の温度を有する一瓦の液体を取り A 点に置き熱源 T_1 と連結しつゝ、 AB なる等温線上に移行すれば B に來りて悉く氣化するものと假定せよ、此時熱源より分離し BC に沿ふて膨脹せしむれば温度は T_2 に降る、依て T_2 の低熱源と連結して CD に沿ふて收縮せしめ悉く液化するを待て DA に沿ふて A に歸着すと假定すれば效率は $(T_1 - T_2)/T_1$ なるゆへ此に氣化潜熱 L を乗ずれば § 150(2) により物質が奏したる仕事は

$$\text{仕事} = JL \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

なり、今 BC 及び AD の沿道其短きものと假定すれば $T_1 - T_2 = \delta T$ と書くを得べく、又液体の比積を ω_1 蒸氣の比積を ω_2 とすれば仕事圖形 $ABCD$ の面積は $(\omega_2 - \omega_1) \delta p$ なり、故に

$$(\omega_2 - \omega_1) \delta p = J L \frac{\delta T}{T_1} \dots\dots\dots (13)$$

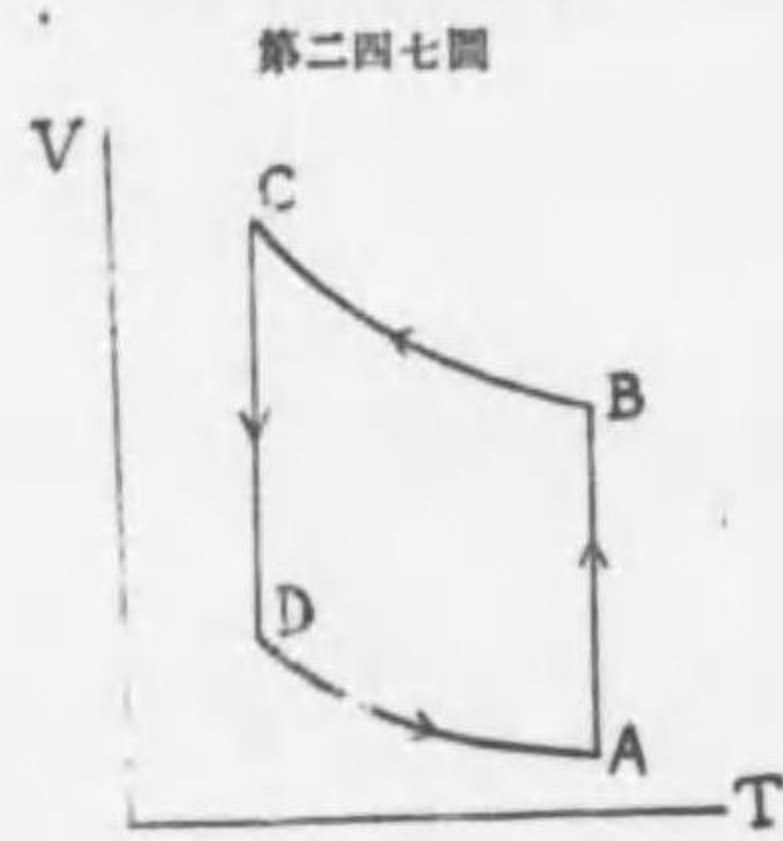
を得べし、此をクラペイロンの方程式と稱す。氣化作用に於ては $\omega_2 - \omega_1$ は正數なるを以て上式により氣壓増すに從て沸騰点は昇る理なり。然れども此方程式

を氷の融解作用に應用すれば $\omega_2 - \omega_1$ は負數となり氣壓増せば融解点(氷点)下るべし (§ 118 を見よ)、氷の場合には $\omega_1 - \omega_2 = 0.0907$, $T = 273$, $\delta p = 1.033$ 斤/櫃², $L = 80$ カロリ, $J = 427$ 瓦米 = 12.7 斤櫃なるにより

$$\delta T = \frac{(\omega_2 - \omega_1) T \delta p}{JL} = -\frac{0.0907 \cdot 273 \cdot 1.033}{42 \cdot 7 \cdot 80} = -0.00748^\circ$$

即ち一氣壓を増す毎に 0.00748° 下るは事實と吻合す。ABCD の變化に於て AB と CD とは極めて接近することを要するのみにして BC と AD は必ずしも斷熱曲線に非ず、管要件としては BC の沿道に於て蒸氣は不斷飽和すべきなり。

159 温度 - 容積圖形 T-V diagram 第二四七圖の如く縦軸上に V を計り



第二四七圖

横軸上に T を計り試みにカルノー輪道を書くときは T_1 の等温線は AB により T_2 の等温線は CD によりて示すことを得べく、斷熱線は (3) により

$$0 = C_v \frac{dT}{T} + (c_p - c_v) \frac{dV}{V}$$

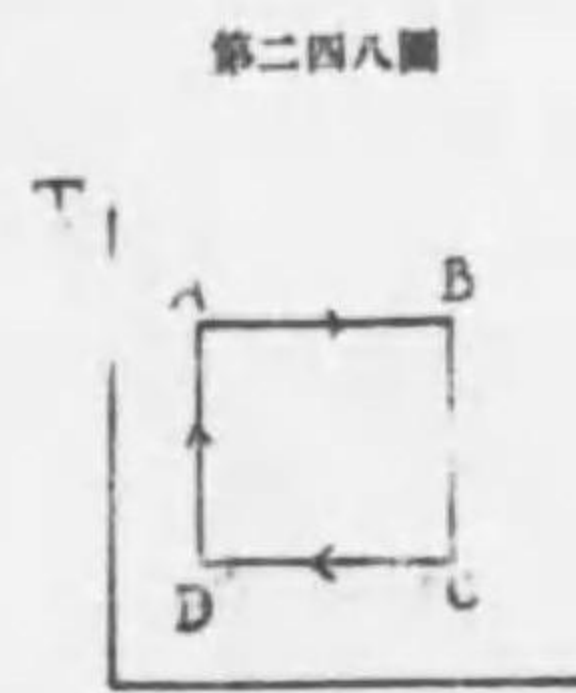
の積分なる

$$TV^{\gamma-1} = \text{常數} \dots\dots\dots (14)$$

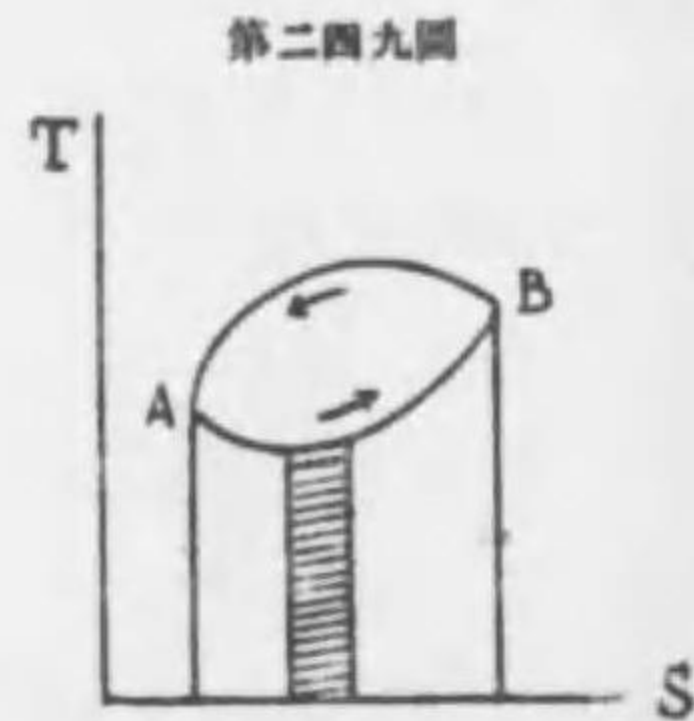
によりて表はされたる BC 及 DA 曲線となるべし、而て (7)(8)(9)(10) の四式及其結論は其儘爰に使用することを得。

160 エントロピー - 温度圖形 S-T diagram 此場合にはカルノー輪道は

等温線 AB に始まり (第二四八圖) 斷熱線 BC 之に次ぐ、斷熱變化に於ては エントロピーは變化無きゆへ BC は T 軸に平行なり、(4) により



第二四八圖

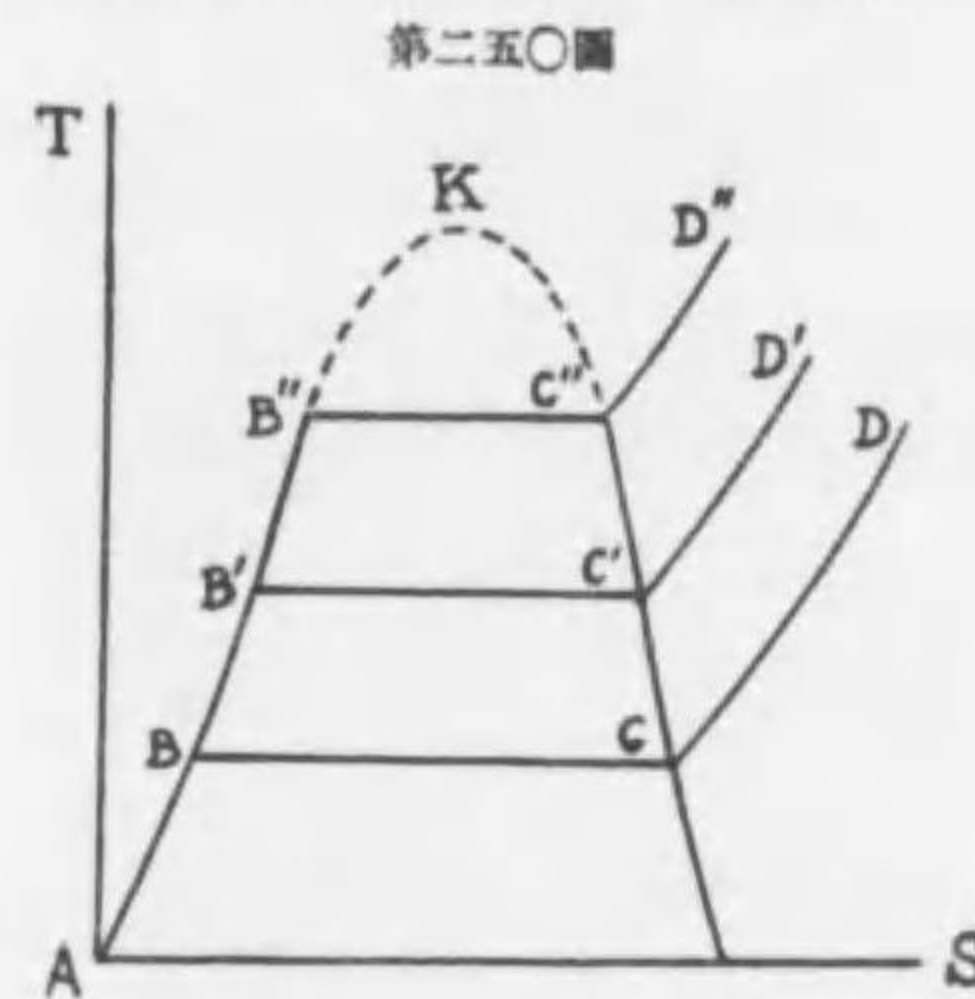


第二四九圖

$dS = JdQ/T$ 即ち

$$\int TdS = J \int dQ \dots\dots\dots (15)$$

然るに TdS は T-S 圖形に於ては曲線の下方面積に等しく(第二四九圖)同時に上式により注入したる熱量に相當する仕事に等し、此理により ABBA の如き輪道に沿ふて積分すれば其輪道を仕遂ぐるに要する仕事は ABBA の面積に等しきことを悟る、故に S-T 圖形は p-V 圖形と同様に仕事圖形として使用することを得べきものなり、加之らず曲線下方の面積を計れば直に注入したる熱量を知り得べきが故に便宜更に多しと稱すべし。



第二五〇圖

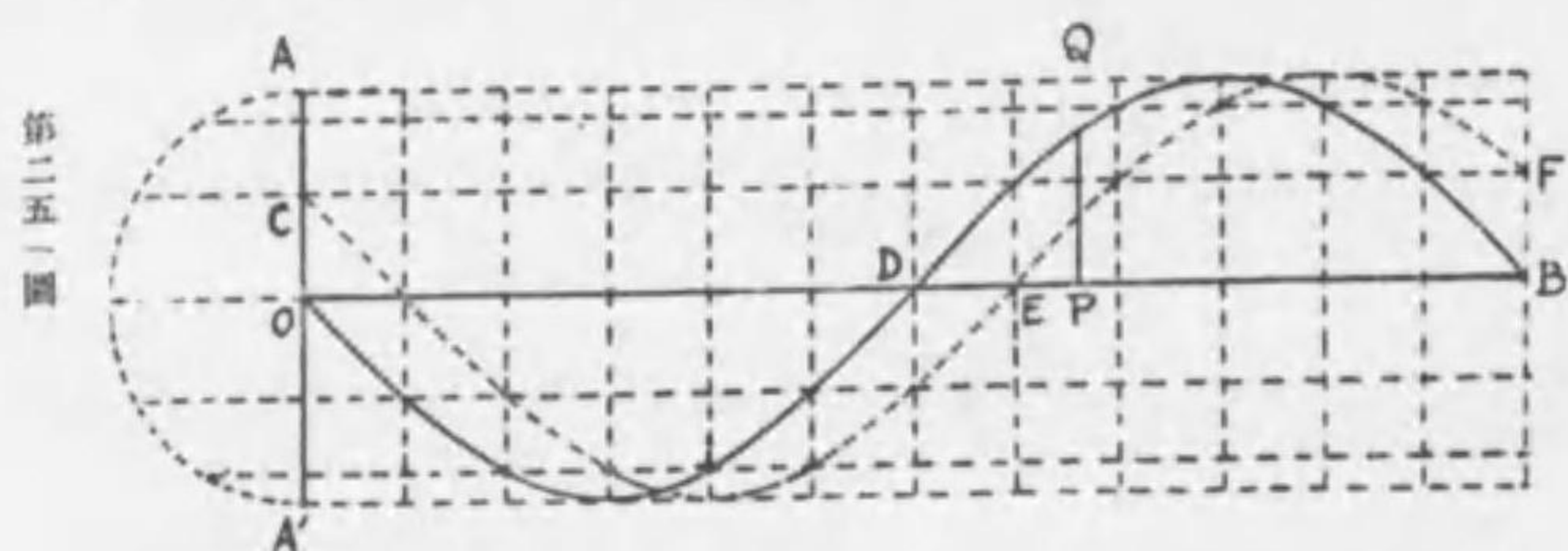
第二五〇圖は水、飽和蒸氣、過熱蒸氣の三態變化を示す等壓線にして、AB は液体、BC は飽和蒸氣、CD は過熱蒸氣の變化を示し、S 軸と曲線間の面積は上述の如く吸入したる熱量に相當するものなり、K は臨界点にして其高さは臨界温度なり。

第三編 波動學

WAVE MOTION

161 弦波動 harmonic waves 時間及び空間に關して週期的なる運動を波動と云ひ其波動を傳ふる場處を媒質 medium と名づく。

一直線に並べる質点より成立する媒質ありて各質点はその直線に垂直に弦運動をなし、各運動の位相は質点の位置に支配せられ、位相は起点よりの距離に正比例して後るものとす、此場合には媒質は弦波動をなして振動し波の形は進行する如く見ゆるなり、第二五一圖 OB を媒質とし、各質点は OA=OA'=a を振幅と



し T を週期として OB に垂直に弦運動をなすとせよ、起点の變位は $y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$ なれども起点より OP=x の距離に在る質点 P の振動は其位置に於て x/V の後れを生じ (V は波動進行速度なり) 變位 PQ は

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right) \dots \dots \dots (1)$$

によりて與へらる。第二五一圖に於ては OB=λ を 12 等分し AA' を直径とする楕圓の周圍も亦 12 等分し各等分点を過り OA, OB に平行線を引き其交点を連結すれば或時刻に於ける波の形 OQB を得。OD を谷 trough DB を山 crest と稱し谷と山の長さを併せて OB を波長 wave-length と名づく、弦波動に於て

山と谷とは其長さ相等しく、一波長は λ を以て之を示す。

T/12 後の時刻に於ては O 点は C に進み其隣点も順次に一切宛進びを以て波の形は点線 CEF の如くなり、恰も ODQB の波形は其儘右方へ押進られたる如し、而て其進行したる距離は OB の 1/12 に等し、従て T/12 の時間に λ/12 の距離を進行する割合となり $V = \lambda/T$ 即ち

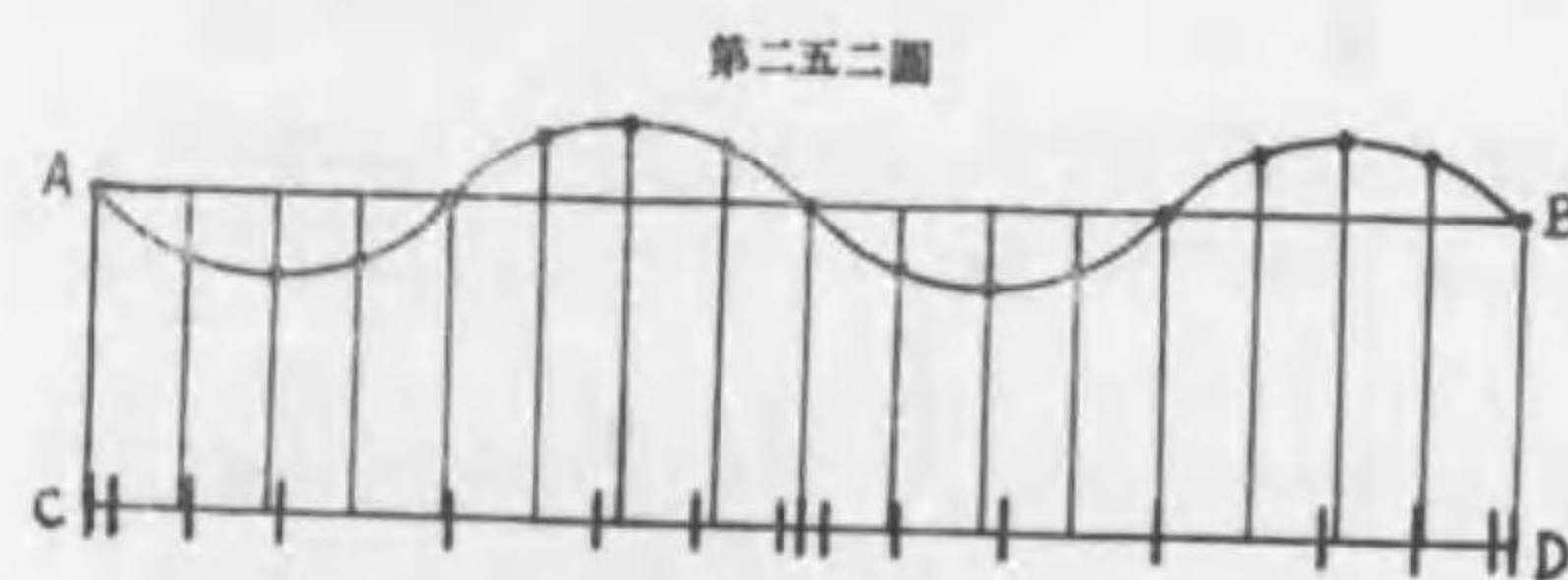
$$\lambda = VT \dots \dots \dots (2)$$

なる公式を得べし、故に (1) は

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (3)$$

と書改むることを得。

上記の如く質点振動の方向が波動進行の方向に垂直なるを横波 transversal waves と名づく、振動の方向が進行の方向と一致するを縦波 longitudinal waves と稱す。横波を縦波に直ほすには第二五二圖の如く AB を等分し分点を過り AB



に垂線を引くときは CD との交りは CD なる媒質が波動をなさざる時の質点の

位置を示すものなり、然るに一旦縦波を生ずれば質点は横波の如く上下に振動せずして左右に振動をなすものなれば AB 上の上下變位を CD 上には右左變位に寫し替ゆれば縦波の稀薄濃密の波 waves of rarefaction and condensation を得べし、而して縦波の進行速度乃至變位の公式は全く横波のと同じにして、萬事上を右、下を左に直ほして考ふるを以て充分なりとす。

162 弦波動のエネルギー 質点の振動速度及び加速度は弦運動にて説きたる如く

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (4)$$

$$\gamma = \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y \dots\dots\dots (5)$$

媒質の単位長の質量 μ に作用する力は $\mu\gamma$ なり、之に微分の變位 dy を乗じ、より y まで積分すれば仕事即ち位置のエネルギーを得、次の如し

$$\mu\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^2 \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (6)$$

又運動のエネルギーは

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^2 \cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (7)$$

依て媒質単位長が有する全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi V}{\lambda}\right)^2 a^2 \dots\dots\dots (8)$$

即ち時間に關して常數にして振幅の平方に正比例し波長の平方に反比例し単位長の質量に正比例す。

163 弦波動の進行速度 縦波に就て考ふるに起点より x の距離に在る質点

P (第二五三圖) の變位は y (PP') にして、
 $x+dx$ の距離にある質点 Q の變位は $y+dy$ (QQ') なり、故に Q の變位は P に較べて $\frac{dy}{dx} dx$ 大なり、從て PQ 延長の率即ち歪は (§ 69)



$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\left(dx + \frac{dy}{dx} dx\right) - dx}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

なり、之に弾性率 E (§ 95(2)) を乗ずれば歪力 $E \frac{dy}{dx}$ を得べし、此力は P' に於て左方に働く力なり、Q' に於て右方に働く歪力は

$$E \left\{ \frac{dy}{dx} + d\left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} \text{ 即ち } E \left\{ \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} dx \right\}$$

なるを以て P'Q' に働く合力は $E \frac{d^2y}{dx^2} dx$ となる、此は媒質の弾性に由來する力なれども他方に於ては運動より生ずる力は加速度 γ に PQ の質量 μdx を乗じたるものによりて與へらる、依て $\mu dx \cdot \gamma = E \frac{d^2y}{dx^2} dx$ 即ち

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{E}{\mu} \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots (9)$$

(3) を各項に代入すれば

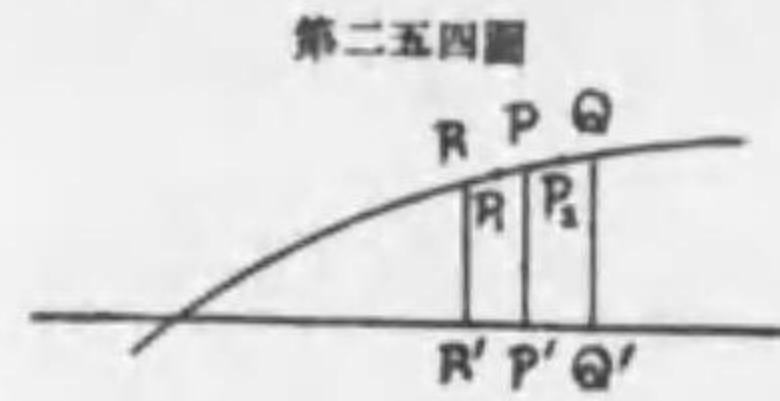
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

なり、故に $(\lambda/T)^2 = E/\mu$ 、即ち (2) により

$$V = \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots\dots\dots (10)$$

速度は媒質の弾性率を其単位長の質量にて除じたる商の平方根に等し。

此は縦波動に就き證明したるものなれども横波に於ても同一の結果に到着すべし。一個の質点が y の變位をなせるときは其質点に作用する中心力は y に正比例す、此性質は實に弦運動の特質なり、然れども横波動に於ては總べての質点は皆多少の變位をなし、中心力は中心より出るにあらざして其附近の質点より出るが故に力は他の質点との相對變位に比例すべし。第二五四圖 RPQ を横振動をな



せる質点とすれば P 点に働く力は其中心 P' より出るにあらざ何となれば P' は今や空虚なればなり、P を動かす力は元來質点間に作用する分子力に因るものなれば P

は其隣点との相對變位即ち $PP' - RR'$ に比例する力にて下方に引かれ、又 PQ 兩点の相對變位 $QQ' - PP'$ に比例する力を以て上に引かれつつ其合力に支配せられて運動するものなり、今 $R'P' = P'Q' = dx$ とすれば $PP' = RR' = dy/dx \cdot dx$ なるを以て此に比例常數 K を乗じたるもの、 $k \frac{dy}{dx} \cdot dx$ は下方に引く力に等し、又 P を上方に引く力は微分法の常則に従ひ $k \frac{dy}{dx} dx + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) dx$ に等しく合力は $\frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) dx$ 即ち $k \frac{d^2y}{dx^2} dx$ となる。今 RP の中点を P_1 とし PQ の中点を P_2 とすれば $P_1P = PP_2 = \frac{1}{2} dx$ にして、質点列単位長の質量を μ とすれば P_1P_2 の質量は μdx となり之に加速度 d^2y/dt^2 を乗ずれば力に等しく $\mu dx \cdot d^2y/dt^2 = k d^2y/dx^2 \cdot dx$ なる關係成立す、即ち

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{\mu} \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots (11)$$

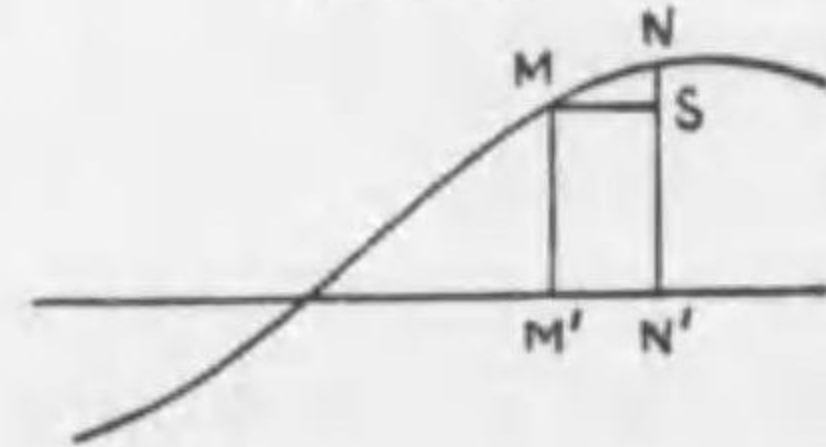
之を(9)(10)と比較すれば進行速度は

$$V = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \dots\dots\dots (12)$$

茲に比例常数 k は變位が單位なる時の中心力の値なり。

164 緊張せる絃に生ずる波動 (Euler 1736) 長き絃の兩端に \mathcal{T} の緊張力を作用せしめ同時に絃に垂直に並運動を起さしむるときは並波動となりて絃に沿ふて進行すべし。其進行速度を計算せんとするに當り第二五五圖の MN を絃の一部とすれば張力 \mathcal{T} は MN の方向に作用す、M'N' を振動せざる時の MN の位置とすれば M'N' に垂直なる \mathcal{T} の分力は $\mathcal{T} \sin \angle NMS$ (但し MS は M'N' に平行) なり、今 M' の坐標を x とし

第二五五圖



M'N' = dx と置けば MM' の方向に M 点に作用する力は $\mathcal{T} \frac{dy}{dx}$ 。又 N 点に N'N' の方向に作用する力は $\mathcal{T} \frac{dy}{dx} + d/dx$ 、($\mathcal{T} \frac{dy}{dx}$) dx となる、故に MN に作用する合力は

$$\frac{d}{dx} \left(\mathcal{T} \frac{dy}{dx} \right) dx \text{ 即ち } \mathcal{T} \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

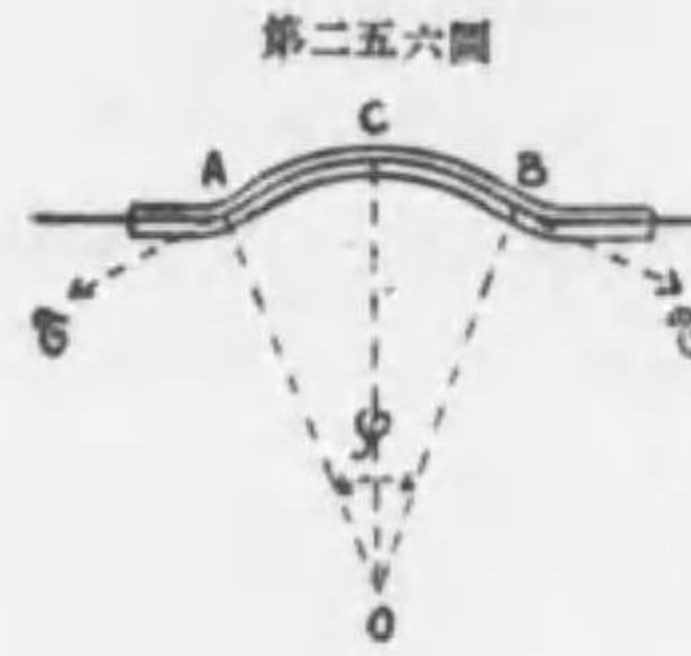
にして其方向は M'N' に垂直なり。又 MN の質量は前例の如く μdx に等しく従て力は $\mu dx \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$ なり、故に

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \mathcal{T} \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots (13)$$

を得、是に依り進行速度は下の如し

$$V = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\mu}} \dots\dots\dots (14)$$

絃の全体に $-V$ の速度を與へて波の進行の反對の方向に絃を運動せしむと假定すれば絃は左方に動くに拘らず波は全く停止する如く視ゆべし。第二五六圖の AB は定波の山を表はし圓弧をなすものと假定し、A 及 B に垂線 AO, BO を引くときは O に於て交はるものとすれば AO, BO は圓の半徑に等しく之を R と名づく、試みに AB の形狀を爲せる ガラス 管を造り、ガラス 管を固定ならし



第二五六圖

むるも波は定滞せる故絃は管の裏面に觸ること無かるべし、其理由は AB の兩端に作用する \mathcal{T} の合力は CO の方向に働き其大きさは $2\mathcal{T} \sin \frac{\phi}{2}$ 即ち大畧 $\mathcal{T}\phi$ に等しく、又 AB なる絃は V の速度を以て疾行するを以て暫く圓運動をなし遠心力 $\mu AB \cdot V^2/R$ を生じ OC の方行に働き、此互に反對なる兩力釣合

に在るを以て絃は ガラス 管の裏面に觸ることなし、即ち

$$\mathcal{T}\phi = \frac{\mu \cdot AB \cdot V^2}{R}$$

然るに $AB/R = \phi$ なるを以て直に $V = \sqrt{\mathcal{T}/\mu}$ の結果に到着すべし。

165 絃に生ずる波の エネルギー

絃の單位長を考ふれば其運動の エネルギー

は $\frac{1}{2} \mu (dy/dt)^2$ なり、又力は $-\mathcal{T} \cdot d^2y/dx^2$ に等しく仕事は之に微分變位 dy を乘じ O より y まで積分したるものなり、故に全 エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \int \mathcal{T} \frac{d^2y}{dx^2} dy$$

之に § 163 に於て得たる値を代入すれば

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{T} y^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{T} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

なり、然るに(4)により $V^2 = k^2/T^2 = \mathcal{T}/\mu$ なるを以て絃の單位長の全 エネルギー は

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{T} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 \dots\dots\dots (15)$$

にして時間に関して常數なり、此結果は直ちに(8)より導くことを得べし。

166 液体波動 surface waves

液体は其弾力によりて内部に縦波を生じ又之を傳達し得べしと云へ共、爰に研究せん欲するは液体の放面に生ずるものにして原因は主として重力なり、故に亦之を重力波 gravity waves と稱す。液体

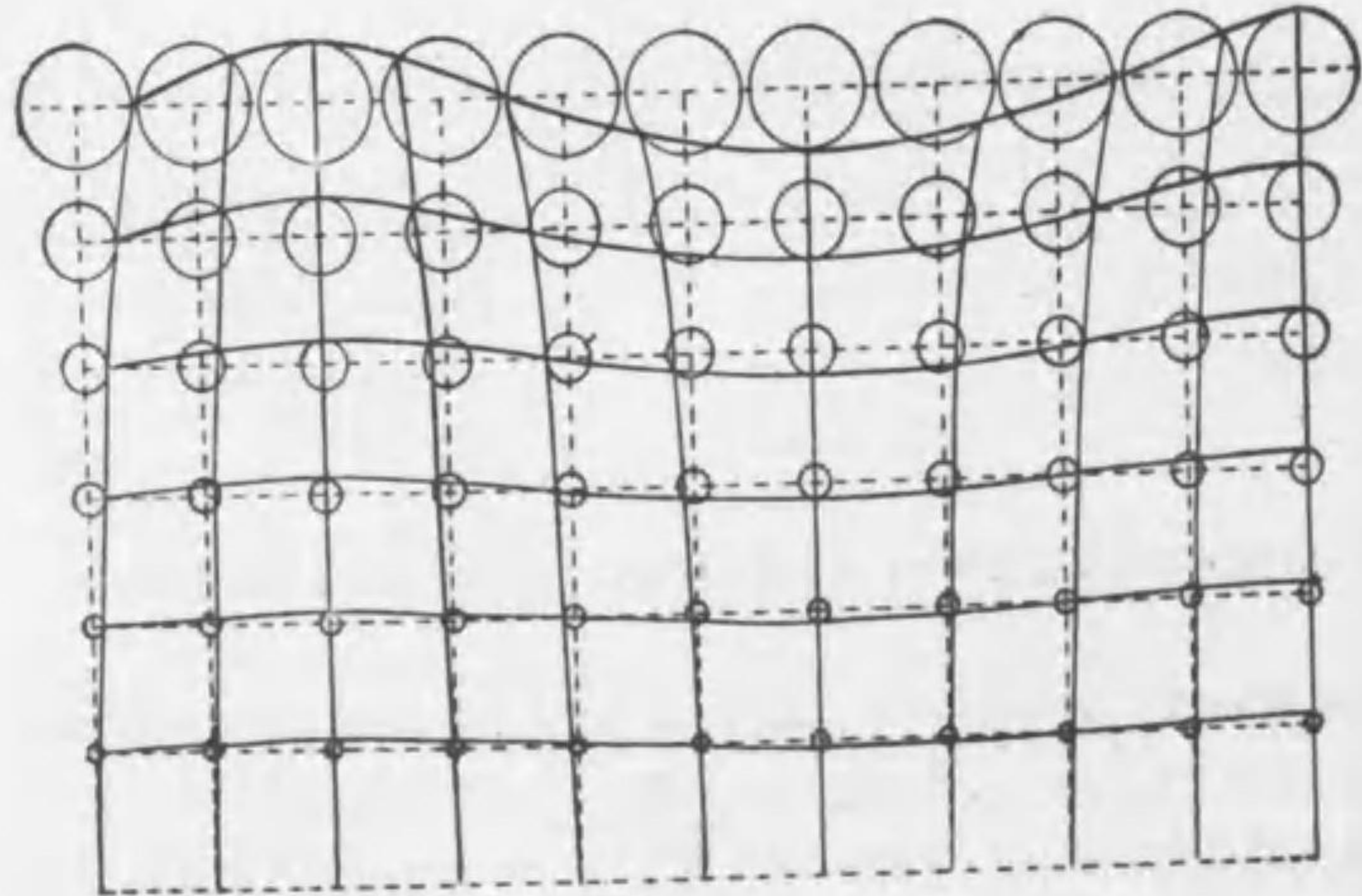
の放面には向ほ表面張力に依て漣 ripples を生ずれ其之は後節に譲る。

初め重力波を研究せしはブラハ大學數學教授ゲルストナー (Gerstner 1802) なり其説によれば水面に生ずる波動は水の分子の等速圓運動に因るものにして其回轉の方向は上部に於ては波動進行の方向と一致す。今 OA (第二五七圖) を静な



る水面とし、等距離に O, B, C……の如き質点を想像し各質点は矢の方向に等速圓運動をなすものと假定す、而て各圓を任意に等分し (此圖は八等分) 各質点の位置は圓周上一切り宛後るものと假定するが故に質点現在の位置を曲線にて連ぬるときは一種の波形を得べし、此波形は谷は長く山は短くして數學者の餘擺線 trochoid と名づくる曲線なり、故に此種の波動を餘擺波動 trochoidal waves 或はゲルストナー波動 Gerstner's waves とも稱す。一週期の 1/8 後には回轉運動は各矢の方向に一切り進むを以て上圖に点線にて示せる波形となる、即ち餘擺線は其儘右方に押遣らるるなり、斯く波形は不斷右方に進行すれども水の質点は常に

第二五八圖

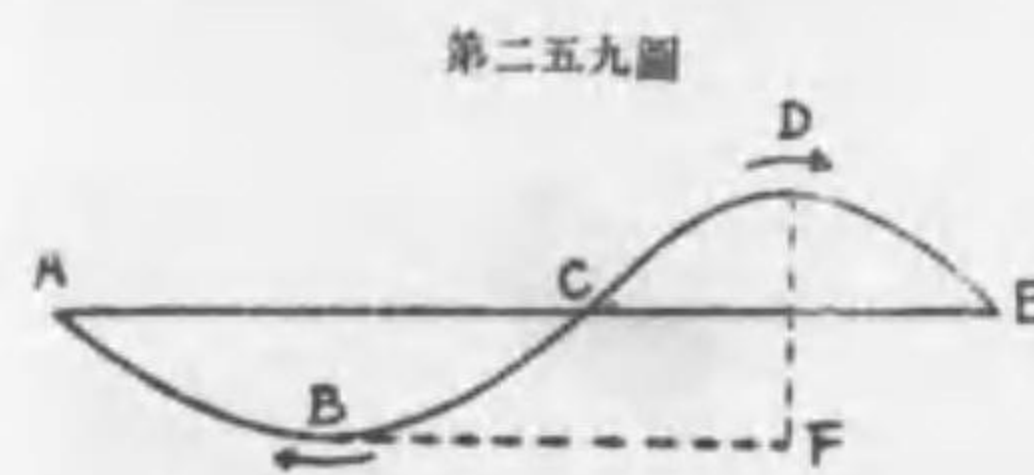


同一の場處に在りて圓運動を營ひなり。

振幅 a は各圓の半徑に等しく放面に於ては同一なれ共水の内部に降れば放面よりの深さの指數函數的比に於て減少す、深さを y とすれば振幅は $ae^{-2y/\lambda}$ となり (其理由は後節 170 參著) 従て半波長に等しき深處に於ては振幅 1/23 に減ず、一波長に等しき深さなれば 1/535 なり、斯く減少の度速かなるを以て波動は殆ど表面的現象たるに留まり、表面は大波瀾のために動搖するも少しく降れば内部は比較的靜謐なり。今第二五八圖の如く試みに内部波動を畫くときは波動なき時に鉛直なりし水分子の列は今左右に動搖し恰も稻の莖の秋風に吹かれて動搖し其表面に稻田の波を打たすに類似すべし。

水深きときは放面の質点は圓形を畫くものなれども水浅きときは質点の軌道は水平に細長き橢圓となり底に近き程細長くなり全く底に接近せる分子は單に水平運動をなすに止まるなり。又深海に生ずる表面の波は風に吹かれて圓運動をなすこと能はざるのみならず風強きときは水分子は放面より離れて白浪を生ず。

167 重力波の進行速度 第二五九圖の重力波が右方に進行しつつあるものと



假定せば B の水分子は左方に運動し D の水分子は右方に運動す、振幅を a とし週期を T とすれば B 及び D に於ける回轉速度は夫々 $-2\pi a/T$ 及び $2\pi a/T$ なり。今 § 164

にて試みし如く水全体を V の速度にて左方に移動せしむるものと假定すれば波動は静止し水分子は B に於ては $2\pi a/T + V$ 、D に於ては $-2\pi a/T + V$ の速度にて左方に進行する如く視ゆるならん、即ち E より來りし水分子は小速度を以て EDC の山を超へ次で大速度を以て CBA の谷を渡るなり、故に D 及び B に於ては水分子の運動のエネルギーに差を生ず、而て其理由は D は B よりも高くして位置のエネルギー大なるが故なり、依て運動エネルギーの差は位置のエネルギーの差に等しと書けば次式を得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi a}{T} + V \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2\pi a}{T} + V \right)^2 = 2ga \quad \text{即ち} \quad \frac{2\pi V}{T} = g$$

然るに $\lambda = VT$ なるを以て T を消去すれば

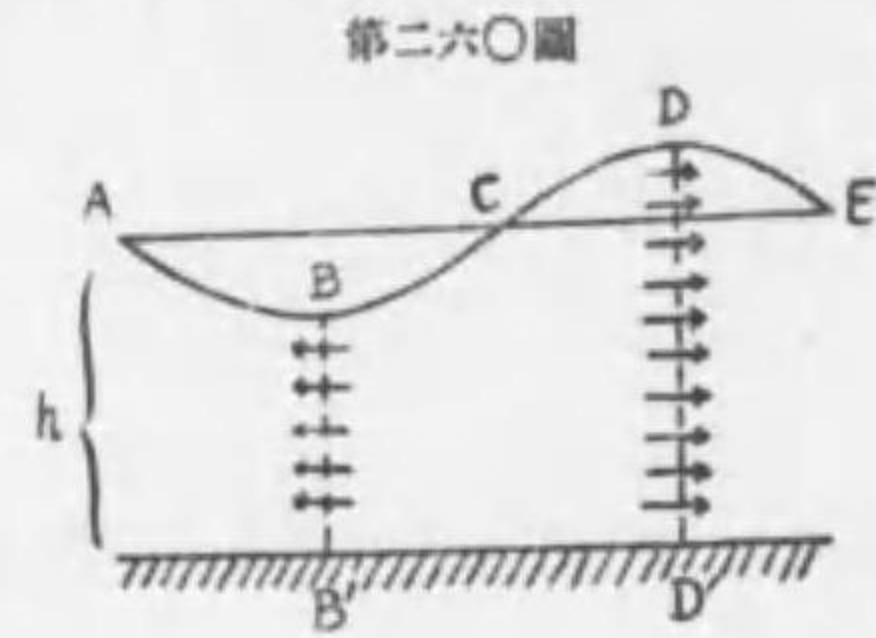
$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \dots\dots\dots (16)$$

を得、此式に基づき下表に米単位の表を掲ぐ。

| λ | V |
|-----------|------|
| 1 | 1.25 |
| 10 | 3.95 |
| 100 | 12.5 |
| 1000 | 39.5 |

168 浅水に生ずる重力波の進行速度 Lagrange 1788.

浅水に於ては水の分子は単に水平に弦運動をなすのみにして其振動速度は放面も底面も同一なり、此速度を u と名づければ第二六〇圖の B 点を過る鉛直線上の水分子は皆 $-u$ の速度を有し D の直下に於ては皆 $+u$ の速度を有す、依て復前例に習ひ水の全体に $-V$ の速度を興へて波動を停止せしむるときは BB' を過る水分子の速度は



左方に $V+u$ なり、 DD' を過る速度は $V-u$ なる、今底の深さを h 、振幅を a と定むれば $BB' = h-a$, $DD' = h+a$ なるを以て水の不縮性に従ひ

$$(h-a)(V+u) = (h+a)(V-u)$$

即ち $Va = uh$ なり、又運動のエネルギーの差と位置のエネルギーの差に等しく置けば

$$\frac{1}{2}(V+u)^2 - \frac{1}{2}(V-u)^2 = 2ag$$

となり $uV = ag$ を得べし、依て u を消去すれば

$$V^2 = gh \dots\dots\dots (17)$$

となり速度は波の長短に無関係にして単に深さ h に関するのみなり。此種の波は最初蘇國の農夫 Houston 1834 が エデンバラ、グラスゴ間の疏水に於て発見したるものにして Russel, Stokes 等によりて研究せられ long waves の名此時よ

り創まれり、其発見の動機は馬が疏水の舟を曳くに \sqrt{gh} の速度を以て進むときは舟は浪と共に進むを以て新しく無数の浪を生ずる必要なく従て馬の勞力最小となるに依れり、然れども (17) の公式は既に其以前に ラグランジ によりて研究せられたりと視ゆ。

169 表面張力の影響 表面張力は液体の放面に作用し恰も緊張せる絃の場合の如く (第二五五圖を看よ) 放面的一部分なる MN は $M'N'$ の方に $\sigma \cdot d^2y/dx^2 \cdot dx$ の力を以て壓さるる事となる、然るに σ を液体の比重とすれば $MNN'M'$ の液柱が重力のために下方に壓す力は $-agydxdx$ なるを以て ($M'N' = dx$ とす) 重力と表面張力との合併作用のために

$$\left(-agyd + \sigma \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx$$

の力を以て下方に壓すこととなるべし。換言すれば g なる加速度が作用する代りに

$$g - \frac{\sigma}{ay} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

なる加速度が作用すると同一の結果を呈す。偕て放面の形状は大畧

$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ によりて示し得るものとせば

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

なるゆへ、加速度は

$$g + \frac{\sigma}{a} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

之を (16) の g の代りに書くときは

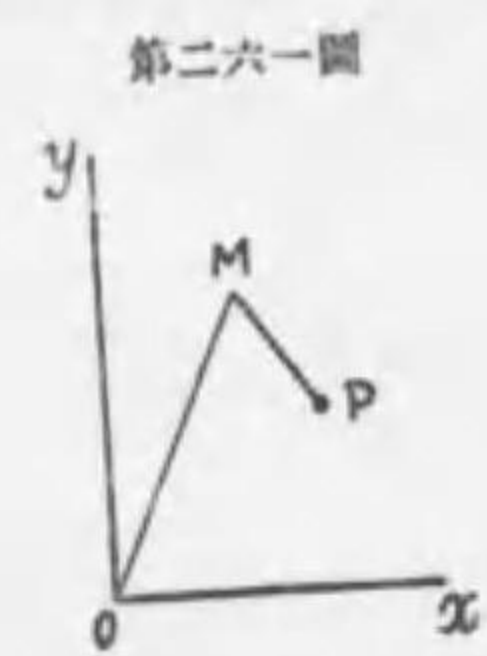
$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{a\lambda} \dots\dots\dots (18)$$

となる、故に λ 小なるときは重力の影響次第に少く波動は主として表面張力の影響を受けて進行すべし、之に反し λ 大なるときは張力の影響は殆ど無く重力のみによりて進む。今 $d(V^2)/d\lambda = 0$ と置きて V の極小値に對する λ_{min} を求むるに

$$0 = \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\zeta}{\lambda^3} \quad \text{よ} \quad \lambda_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{\zeta}{g}}$$

を得。水は $\zeta = 73.5$ 水銀は $\zeta = 539$ なり故に水の場合には $\lambda_{min} = 1.75$ 釐、 $V_{min} = 23.2$ 釐/秒。水銀の場合には $\lambda_{min} = 1.263$ 釐、 $V_{min} = 19.85$ 釐/秒。此極小値を界となし λ_{min} よりも大なる λ を有する波を重力波、小なるを漣と稱する習慣あり。

170 液体波動の數學的取扱法 x 軸を水平に y 軸を鉛直に引き、 xy 面に平行に且つ互に單位の間隔を有する二平面間に夾まれる液体の運動を研究せんとす。任意の液体分子 P の坐標を $x+\xi, y+\eta$ にて示すときは x, y は單に目安(めやす arguments)にして ξ, η は變位なりとす、目安とは一分子を他の分子より區別するために用ふる坐標なり。第二六一圖の M 点の坐標を x, y とし之を



第二六一圖 P 分子の目安とす故に M は P の平均的位置と見るも不可なく常に固定し P は M より更に ξ, η の變位をなす、即ち x, y 變化すれば他の分子に移り、 ξ, η 變すれば M なる定点に對して P の位置變ずるなり。

液体の不縮性を表はすには第二六二圖の如く $AB=dx, AD=dy$ なる隣邊を有する矩形を設け、 AD を貫きて流入する液量を ξdy とし BC を貫きて流出する液量を

$(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx) dy$ とす、依て矩形内に残る量は

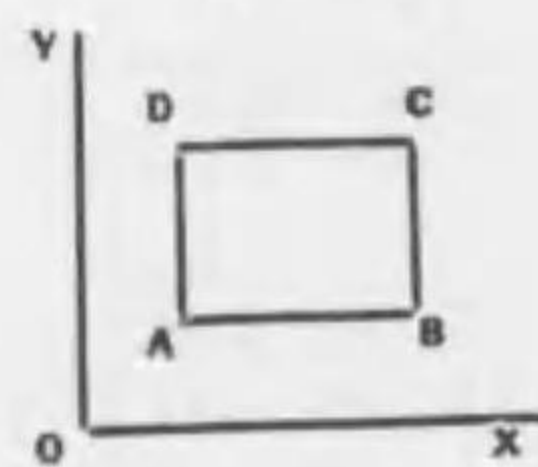
$$\xi dy - (\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx) dy \quad \text{即ち} \quad -\frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy$$

なり、同様に AB を貫きて流入する液量 $= \eta dx, CD$ を貫きて流出する液量 $= (\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy) dx$ 。故に矩形内に残るものは $-\frac{\partial \eta}{\partial y} dx dy$ なり、然れ共不縮性のために矩形内に残るものは皆無なるべし、依て

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (19)$$

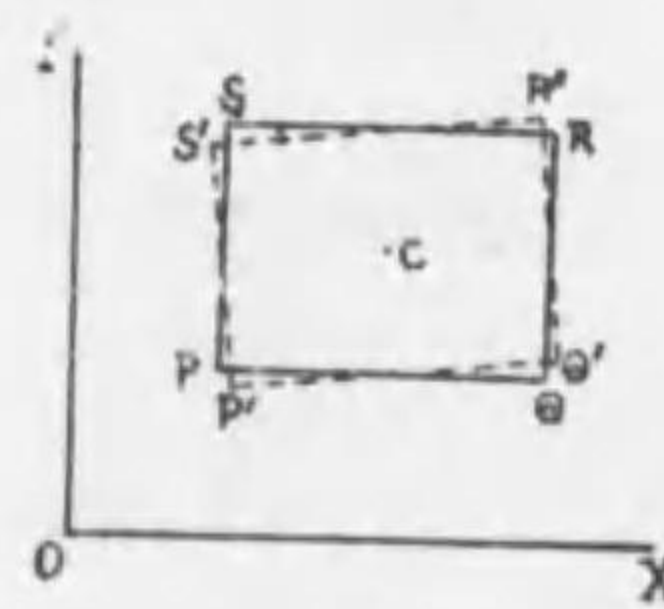
液体波動を研究するには不縮性の外に尙各分子は自轉すること無きものと假定

第二六二圖



す、各分子自轉するときは相隣れる二個の分子の表面は互に反對の方向に運動することとなるべし、斯る運動を生ずるには最初特別の外力を液体に働かしむることを要するのみならず液内摩擦を惹きし運動は暫くにして中止すべし。分子の不轉性 irrotationality を數學的に表はすには次ぎの如くす、第二六三圖の PQRS

第二六三圖



を隣邊 dx, dy なる微分矩形となりとせよ、此矩角は ϵ 角の自轉をなしたるため $P'Q'R'S'$ の位置に來りしものとせよ、之を數學的に表はすには P 点の變位を ξ, η とすれば PQ の變位に PQ の長さを乘じたるものは ξdx なり、 QR の變位は $\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ にして之に QR を乘ずれば $(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx) dy$ なり、斯の如く他の二邊 RS と SP とに就きても夫々 $-(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy) dx$ と $-\eta dy$ を生ず、故に四邊の變位と長さとの積は

$$\xi dx + (\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx) dy - (\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy) dx - \eta dy \quad \text{即ち} \quad (\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}) dx dy$$

なり、次に矩形の中心 C に軸を設けて ζ 角の自轉をなさしむれば PQ の變位は $\frac{1}{2} \zeta dy$ にして PQ との積は $\frac{1}{2} \zeta dx dy$ なり、故に四邊の變位と四邊の長さとの積は $2\zeta dx dy$ となる、依て

$$\zeta = \frac{1}{2} (\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y})$$

を得、故に不轉性の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (20)$$

なり。此等兩式を満足せしむるには變位 ポテンシャル displacement-potential と稱する函數 ϕ の存在することを假定し、次の二式を以て其定義となす、即ち

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \xi, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \eta \quad \dots \dots \dots (21)$$

然るときは (20) の條件は自ら満足し、(19) の條件は次の方程式となる

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (22)$$

又 u, v を x, y 二軸に分解したる分速度とすれば

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{\xi} = -\frac{\partial \phi}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \dot{\eta} = -\frac{\partial \phi}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} \dots\dots\dots (23)$$

(22) の解法は一般に $x+iy$ (但し $i=\sqrt{-1}$) の如き複虚数の任意函数なり、茲には波動の方程式を求むること故 (22) の解は

$$\phi = q \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots\dots\dots (24)$$

の如く時間と位置とに關して週期的なる函数ならざるべからず、但し q は y のみの函数なりとす、之を (22) に代入すれば

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 q \dots\dots\dots (25)$$

を得、此關係は明かに

$$q = Ce^{\frac{2\pi y}{\lambda}}$$

と置きて満足すべし。但し C は常數とす。之を (24) に代入すれば

$$\phi = Ce^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

なり。(21) により變位の公式は $\xi = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} Ce^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ なるを以て放面の波の振幅を a と定むれば $a = \frac{2\pi}{\lambda} C$ 即ち $C = \frac{a\lambda}{2\pi}$ となり

$$\phi = \frac{a\lambda}{2\pi} e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots\dots\dots (26)$$

を得、之を所求の解となす、又變位は

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = ae^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ \eta &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -ae^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

によりて與へらる。分子の運動は從針 (clock-wise) 圓運動をなし §166 に説きたる *グルストナー* 波動と同一なり、而して水の放面に於ける波形は上式に $y=0$ と置かば得らる、又 y を負數とすれば深處に於ける波形を得べし。

液体分子に作用する力は微分矩形の對邊に作用する壓力の差より生ず、此理を明かにするため第二六二圖の ABCD の二對の對邊に作用する壓力を研究せん。先づ AD に働く力は pdy 、BC に働く力は $-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy$ なり、故に合力 $= -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy$ 、同様に y 軸に平行なる合力 $= -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy$ の外に矩形の重量 $-ag dx dy$ あることを忘るべからず、從て單位容積に働く力は夫々 $-\frac{\partial p}{\partial x}$ 及び $-\frac{\partial p}{\partial y} - ag$ を以て表はすことを得べし。又單位容積が有する位置のエネルギーを知らんと欲せば此力に反抗して ξ, η 点まで動かす仕事を計算するを要す、即ち仕事 W は

$$W = \int_0^{\xi} \frac{\partial p}{\partial x} d\xi + \int_0^{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + ag \right) \dots\dots\dots (28)$$

運動のエネルギー U は $\frac{1}{2} \sigma (u^2 + v^2)$ に等しく (27) によ

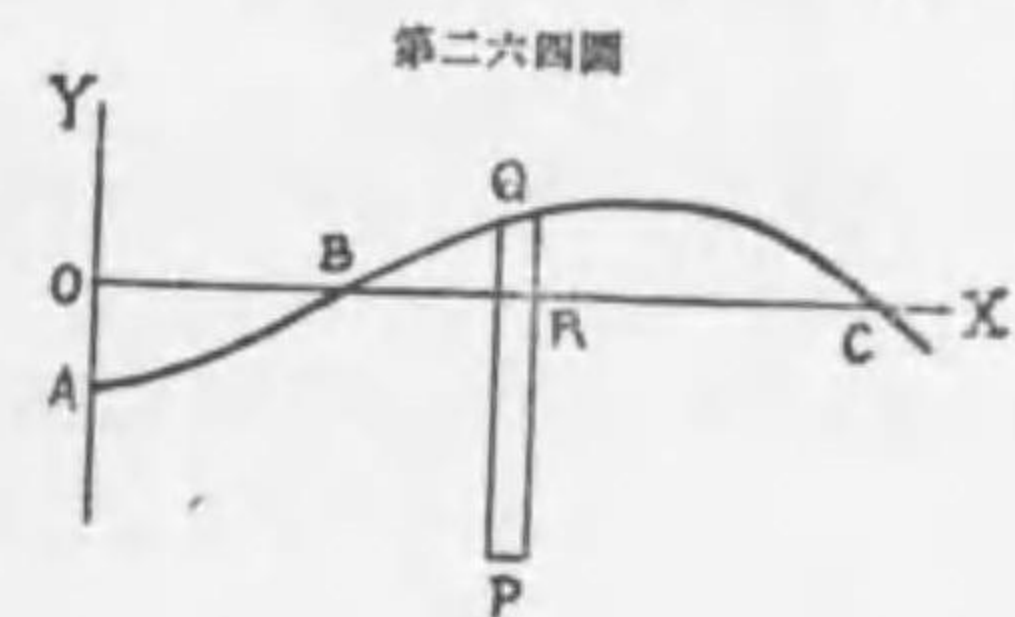
$$U = \frac{1}{2} \sigma (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left(ae^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \right)^2 \dots\dots\dots (29)$$

液体の壓力 p は液体の重量に歸因するものなり、然るに波動に於ては分子は悉く運動せる故 §81 (13) 式の運動の壓力を使用すべき筈なれども波動の場合に於ては速度の平方は第二次の微分となりて運動の壓力と釣合の壓力との差を認むべき必要無し。第二六四圖の OX を平靜なる水の放面とし ABQC を波の放面とし液内の一点 P の坐標を x, y とすれば P 点に於ける壓力は PQ の高さを有し單位面積の底を有する液柱の重量に等し、即ち $PR = -y, RQ = \eta$ と置けば

$$p = \sigma(\eta - y)g \dots\dots\dots (31)$$

此を (28) に代入し (20) を使用して計算するときは

$$\begin{aligned} W &= \sigma p \left(\int_0^{\xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} d\xi + \int_0^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} d\eta \right) = \sigma g \left\{ \frac{2\pi a}{\lambda} \int_0^{\xi} e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi a}{\lambda} \int_0^{\eta} e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) d\eta \right\} = \sigma g \frac{2\pi}{\lambda} \left(\int_0^{\xi} \xi d\xi + \int_0^{\eta} \eta d\eta \right) \end{aligned}$$



第二六四圖

$$= \frac{1}{2} \sigma g \cdot \frac{2\pi}{\lambda} (\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} \sigma g \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \left(a e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \right)^2 \dots\dots\dots (31)$$

依て全 エネルギー E は

$$E = W + U = \frac{1}{2} \sigma \left\{ g \frac{2\pi}{\lambda} + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right\} \left(a e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \right)^2 \dots\dots\dots (32)$$

単位容積に働く分力は夫々 $-\frac{\partial p}{\partial x}$ 及び $-\frac{\partial p}{\partial y} - \sigma g$ なるを以て ニュートンの力學の第二原理に因り (Euler 1755)

$$\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \sigma g \dots\dots\dots (33)$$

之に $\xi = -\partial\varphi/\partial x$ 及び $\eta = -\partial\varphi/\partial y$ の關係を代入し各式に夫々 dx 及び dy を乘じて加ふときは

$$\sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} dx + \sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial y} dy = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \sigma g dy$$

を得、此方程式の積分は明かに

$$\sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = p + \sigma g y \dots\dots\dots (34)$$

なり、又此式と (30) より

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = g \eta \dots\dots\dots (35)$$

なる關係を得べし、此兩式は液体波動論に於て極めて重要視せらるるところの者なり。今 (26) (27) より φ と η の値を代入すれば上式より $\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = g \frac{2\pi}{\lambda}$ 即ち (3) により

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

を得、之は (16) に得たるところと同一の結果なり。又 (29) (31) に依り $U = W$ 従て

$$E = \sigma g \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \left(a e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} \right)^2 \dots\dots\dots (36)$$

即ち全 エネルギー は時間に關し常住にして振幅の平方に正比例す。上式の如く

単位容積の全 エネルギー を エネルギー 密度 energy-density と稱す、而て エネルギー 密度は上式示すが如く波長増すに従て減少す、今此値を $y = -\infty$ より $y = 0$ まで積分するときは海底より海面までの エネルギー の總和を得べし、即ち下の如し

$$\int_{-\infty}^0 E dy = a \sigma g \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{4\pi y}{\lambda}} dy = \frac{1}{2} \sigma g a^2 \dots\dots\dots (37)$$

(27) は深海に生ずる波の變位を示すものなるが、淺海の場合も此と同じく (25) より出發し其解に $q = C e^{\frac{2\pi y}{\lambda}}$ 及び $q = C e^{-\frac{2\pi y}{\lambda}}$ の兩者を含ましめ、先づ

$$q = m e^{\frac{2\pi y}{\lambda}} + n e^{-\frac{2\pi y}{\lambda}}$$

と置き q を (24) に代入し、偕て鉛直なる變位 $\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ は $y = -h$ なる海底に於ては消滅せざるべからず、故に

$$0 = m e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} - n e^{\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

を得べし、依て $m e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} = n e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} = \beta$ と置けば

$$q = \beta \left\{ e^{\frac{2\pi}{\lambda}(y+h)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(y+h)} \right\} = 2\beta \cosh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h)$$

となる、茲に $\cosh = \text{hyperbolic cos.}$ とす。故に φ を

$$\varphi = \frac{a\lambda}{2\pi} \cosh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots\dots\dots (38)$$

と定むるときは變位は

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \cosh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ \eta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -a \sinh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

故に水分子は從針の方向に橢圓弦運動 elliptic-harmonic motion を營み其半長軸半短軸は夫々

$$a \cosh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h), \quad a \sinh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h)$$

に等しく、底に於ては $y=-h$ なるを以て夫々 a 及び 0 となる。又進行速度 V を計算するには (35) 式により

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{a\lambda}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cosh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$g\eta = -ag \sinh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

を得之より

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = g \tanh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h)$$

即ち

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \dots\dots\dots (40)$$

を得べし。故に水面の波の進行速度は $y=0$ と置きて $V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$ なり、然れ共海底に於ては $y=-h$ と置きて $V=0$ の結果に到着せざるを得ず。 $h=\infty$ と置けば $\tanh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) = 1$ となり深海の進行速度式 $V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}$ を得、又 h 極めて小なるときは $\tanh \frac{2\pi}{\lambda}(y+h) \approx \frac{2\pi}{\lambda}(y+h)$ となり、近似的に水面即ち $y=0$ に於て $V^2 = gh$ を得るなり。

最後に變位ポテンシャル φ の性質を考ふるに $\varphi = \text{常數}$ と書き之を變化すれば $\partial\varphi/\partial x \cdot dx + \partial\varphi/\partial y \cdot dy = 0$ を得、故に (21) により

$$\xi dx + \eta dy = 0 \dots\dots\dots (41)$$

故に變位は常に $\varphi = \text{常數}$ なる曲線に垂直なることを知る、即ち變位曲線は等ポテンシャル線と互に正交系 orthogonal system を形成す。

次に時間を獨立變數と見做し液体放面に沿ふて φ を變化せしむれば $\partial\varphi/\partial t + \partial\varphi/\partial x \cdot dx/dt = 0$ の條件を満足し得る速度 dx/dt の値は (26) 若くは (38) より φ の値を代入して算出すれば $dx/dt = V$ なるを知る、故に波動速度を以て進行する觀察者の座下には φ は絶へて變化せざるものとす、依て上式を

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

の如く書き、更に放面に沿ふて變化せしむれば

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

となる然るに (42) に依り $\partial^2 \varphi / \partial t \partial x = -V \partial^2 \varphi / \partial x^2$ なるを以て上式は

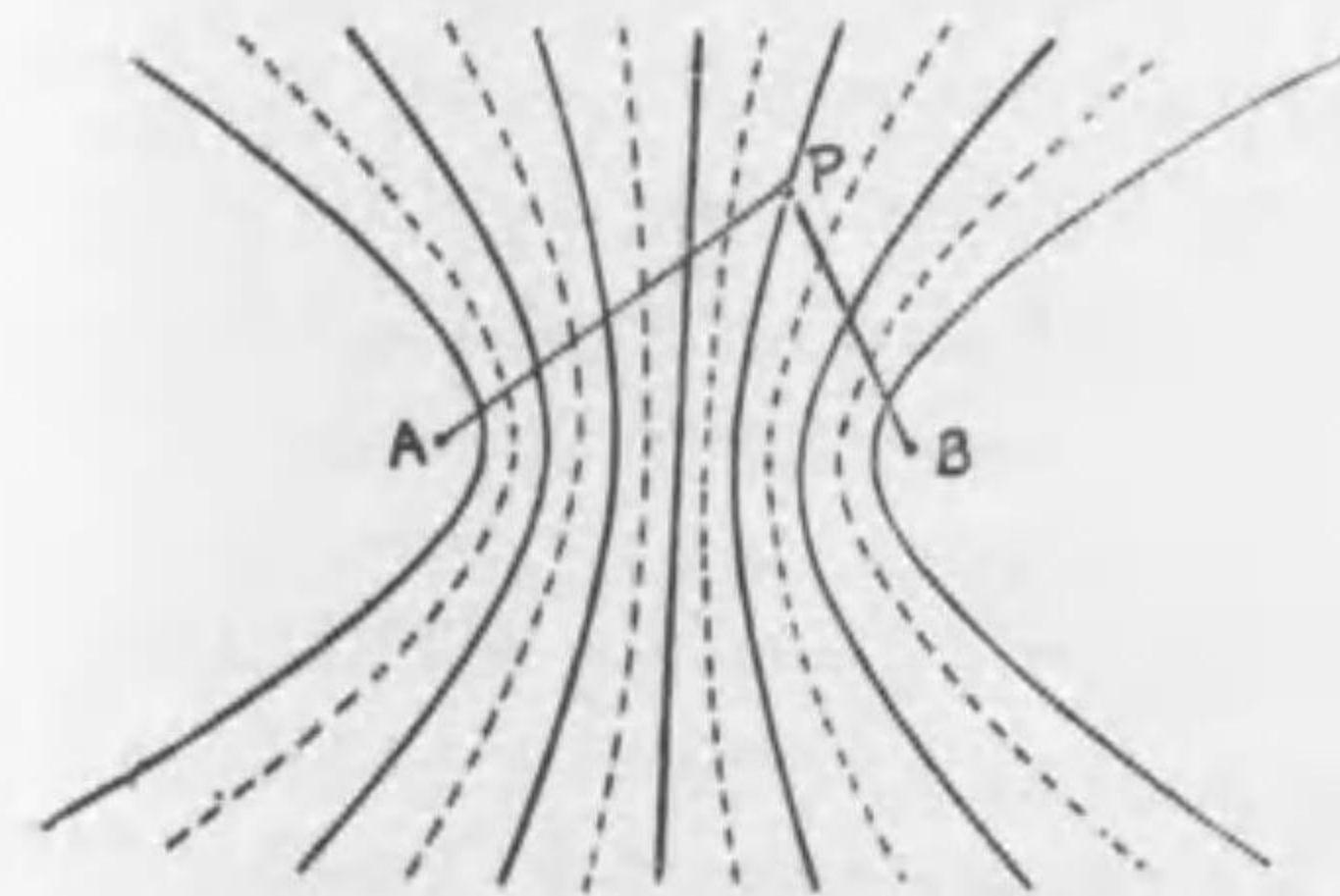
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \dots\dots\dots (43)$$

に等し、前節來學習したる (9)(11)(13) 諸式は皆 (43) の變形と見るも不可なし。

吾人が自然界に於て目撃する液体波動は決して本節に論じたるが如き單純なるものにあらず、波長一定なる波の列の如きは數學的には表出し易すけれ共實驗上之を發生せしむること能はず。吾人が實驗に於て發生し得る波動は群波 group-waves と稱せらるるものにして波長順次に異なる波の一系列なり、今一塊の石を靜なる水の表面に投ずれば群波は直に圓狀をなして擴布し波長最大なるもの先驅し波長最小なるもの波群に殿す、尙仔細に觀察すれば後殿の波は其長さを次第に増し波群を横過して遂に先驅者となりて消滅す、之に反し殿部には新しく波の發生ありて其不足を補ひ以て波群の幅をして殆ど一定に保たしむるなり。斯の如きは重力波の群波の特性なれども漣の群波は恰も之に反對にして最短のもの先驅し最長のもの殿す、而して各個の波は群頭より群を横過して群後に到りて消滅するなり。故に兩種の群波に共通なる点は各個の波は何れも時間的に其長さを増し、從てエネルギー密度を減ずるに在りと云ふことを得べし。

171 波動の干渉 interference of waves 同一媒質中の波動源 wave-sources

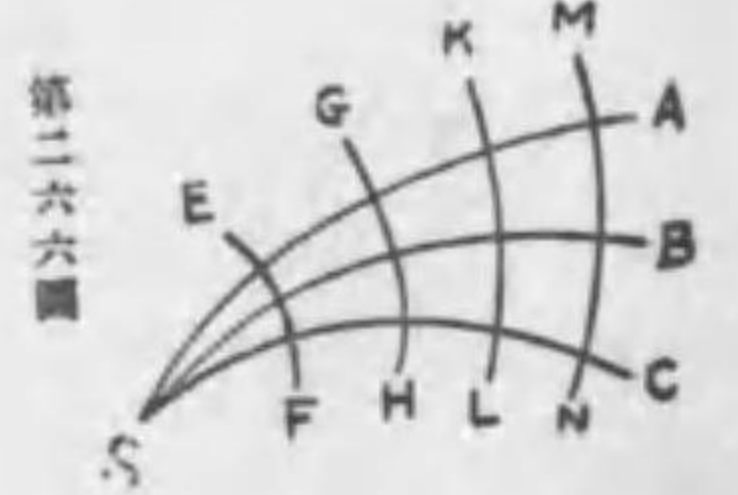
第二六五圖



A 及び B (第二六五圖) より出づる波動が一定点 P に會合するときは各波動の合成變位をなし振動せざるべからず、從て其速度も加速度も各波動が P 点に於て有する速度及び加速度の合成となる、斯く同一点に二個若くは

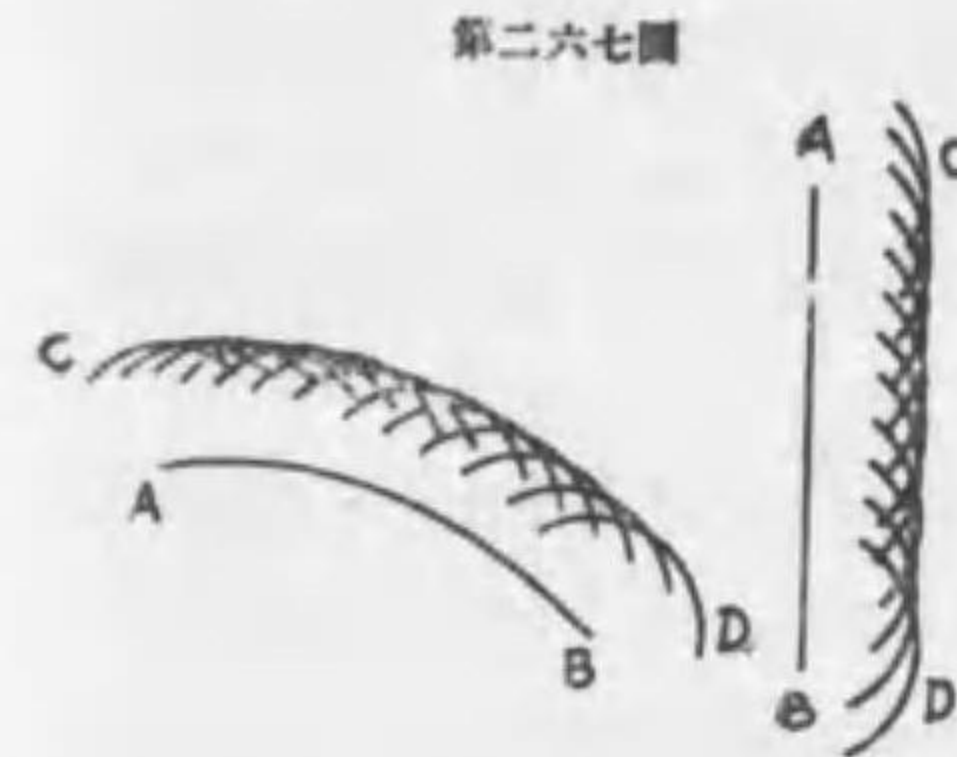
二個以上の波動が會合して合成振動を營ひ現象を干涉と名づく。A, B 二点より來る波は位相も振幅も週期も同一なる場合には $AP - PB = m\lambda$ (但し $m = 0, 1, 2, 3, \dots$) の時は P に於て兩波動の位相等しく P の變位、速度、加速度は各振動の二倍となりて P は盛に振動すれども、 $AP - PB = \frac{2m+1}{2}\lambda$ なる時は P に於て兩振動の位相全く反對なるを以て相互に打消し振動は零となるべし。而して $AP - PB = \text{常數}$ の性質を有する点の軌跡は雙曲線なるを以て振動盛大なる点の軌跡は雙曲線の群をなし、振動零なる点の軌跡は其間に夾まりたる (圖中点線を以て示す) 雙曲線群となるなり。

172 波面及び射線 wave-fronts and rays 波動の形状に數種あり、液体の表面に生ずる波は圓形に擴がるを以て圓形波動 circular waves と稱して可ならん、空氣中の一点を波動源となして出發する音波は球形に擴がるを以て球面波動 spherical waves と稱せらる、太陽より四方に輻射する波動も同一の名稱を附して可なり、然れども日光が地上に到着し其一小部分を考慮に入るときは寧ろ平面波動 plane waves として之を取扱ふを便宜となす、總じて此等の名稱は同一位相を有する表面の形状によりて定まれるものなり、例へば平面波動に於ては一つの平面上の質点は悉く同一位相を有し、其平面は自身に平行しつつ並進運動をなし、平面上の任意点は射線 rays と稱する軌跡を畫くなり、而して射線は常に此同一位相を有する面即ち波面 wave-front に垂直なりとす。球面波動に於ては波面は球面の一部を形成し射線は球の半径と一致す、而して波面と射線とは如何なる形の波動に於ても隨所互に垂直なり、例へば媒質が等方質ならざる場合には 第二六六圖の如く、S 点より出づる波動の射線は SA, SR, SC の如く彎曲すれども波面 EF, GH, KL, MN 等は常に射線と正交す。



第二六六圖

173 ホイヘンスの原理 Huyghens 1678 ホイヘンスの説によれば波面の各点は常に波動源となりて無数の球面波動を發し、位相の一致せる部分のみ殘存し其餘は干涉のために消失す。例へば第二六七圖 AB なる波面上の各点は波動源



第二六七圖

となり相當速度を以て球面波動を發射すれども網の目の如く位相の差雜多なる場處に於ては合成振動は零となり、唯々位相の全然一致せる場處即ち CD 面の振動のみ殘留して新しき波面を形成す、而して上記の現象は波動進行の途中に於て時々刻々不斷に行はるるものとす。

同質、等方質なる媒質に於ては波動進行の速度一定せるゆへ各点を波動源となせる小球面波動の半径は皆同一なり。從て球面波動は永久に球面に擴がり、平面波動は永久に平面波動をなす。

ホイヘンス説は理論上多少の難處を有すれども克く諸振動の性質を説明し物理學上極めて重要なる臆説なり。

174 波動の反射及び屈折 reflection and refraction of waves 波動は二種の媒質の境界面 boundary surface に到着すれば一部は反射して元の媒質に返り一部は屈折して第二の媒質に入るなり。此理を簡易に説明するには § 99 の彈球の衝突の現象を想起し、便宜上 $e=1$ と定め、第一四六圖に於て m_2 は止まり m_1 は動くものとせば $u_2=0$ なり、故に同節 (17)(18) により

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \dots\dots\dots (44)(45)$$

を得。今同一の媒質内を進行しつつある波動を考ふれば媒質の質点は皆同一質量を有し $m_1 = m_2$ なるを以て $v_1 = 0, v_2 = u_1$ となり各質点の運動量は悉く其隣質点に譲與せられて反射の現象を生ずる理由なし、然れども $m_1 > m_2$ の場合に於ては衝突後の速度 v_1 は決して零となる能はず、從て m_1 が m_2 に與へんとしたる運動量の一部は m_1 に返り順次に其隣質点に逆傳せらるべし又此と同時に v_2 も零にあらざるを以て運動量は m_2 の質点系に傳へらるるなり、之を概括すれば m_1 と m_2 の質点系より成立する二つの媒質の境界面に於て反射屈折の現象發生すべし。

$m_1 > m_2$ なる時、即ち第一媒質は第二媒質よりも密度大なる場合には位相上何

等の不常を認めざれども $m_1 < m_2$ なるときは (44) により v_1 は負数となり u_1 と v_1 の符號反對となるべし、去れど v_2 の符號は u_1 の符號と異なることなし。之に依て考ふれば第一媒質が第二媒質よりも密度小なる場合に限り其境界面に於て屈折して第二媒質に入る波動の位相は第一媒質より入射 (incident) したる波の位相と同一なれども、再び元の第一媒質へ反射する波の位相は入射する波の位相に較べて反對となるべし。即ち § 162 (4) により入射、反射線の振動速度の式を書くときは

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ v_1 &= -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

従て y と y' を夫々入射、反射波動の變位とすれば

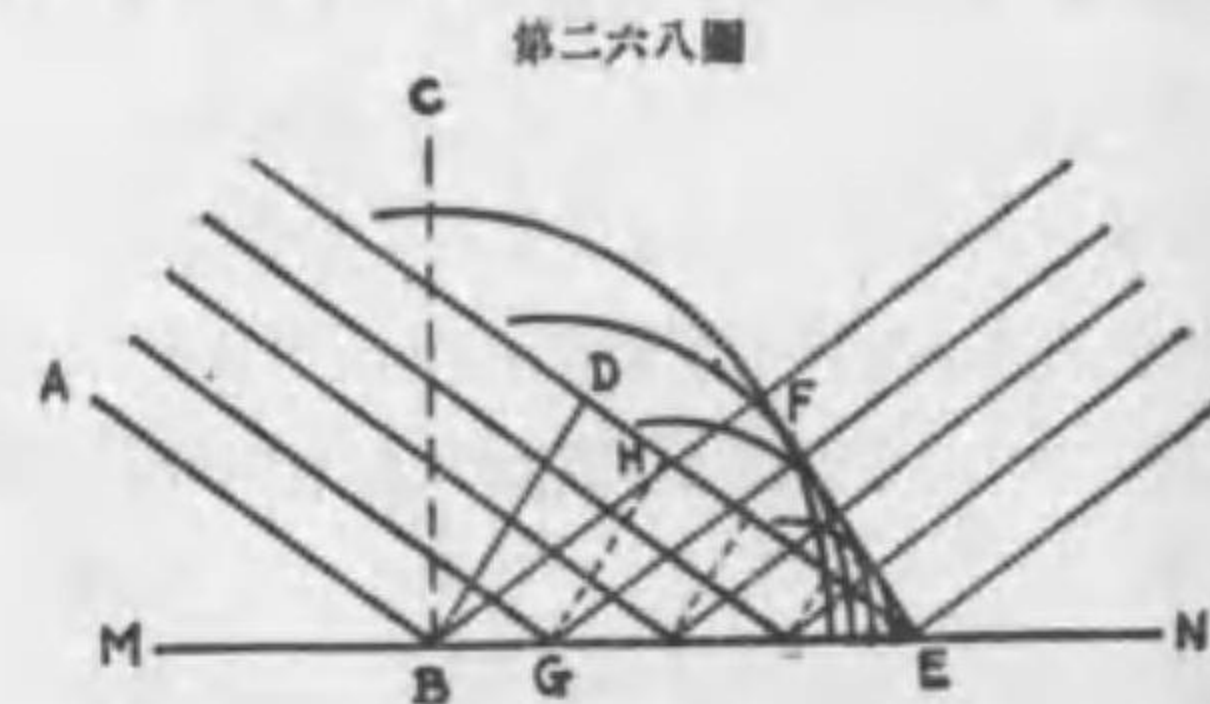
$$\left. \begin{aligned} y &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ y' &= -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

を得、又 m_1 が m_2 に比して極めて大なるか或は極めて小なるときは入射、反射兩振動の振幅は殆ど相等し。

三角術により $-\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \pm \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right)$ なるを以て位相の反對なることは距離 x に $\frac{1}{2}\lambda$ の増減あることと同一結果に歸着す、故に位相反對なることを屢々半波長の増減によりて表示することあり。

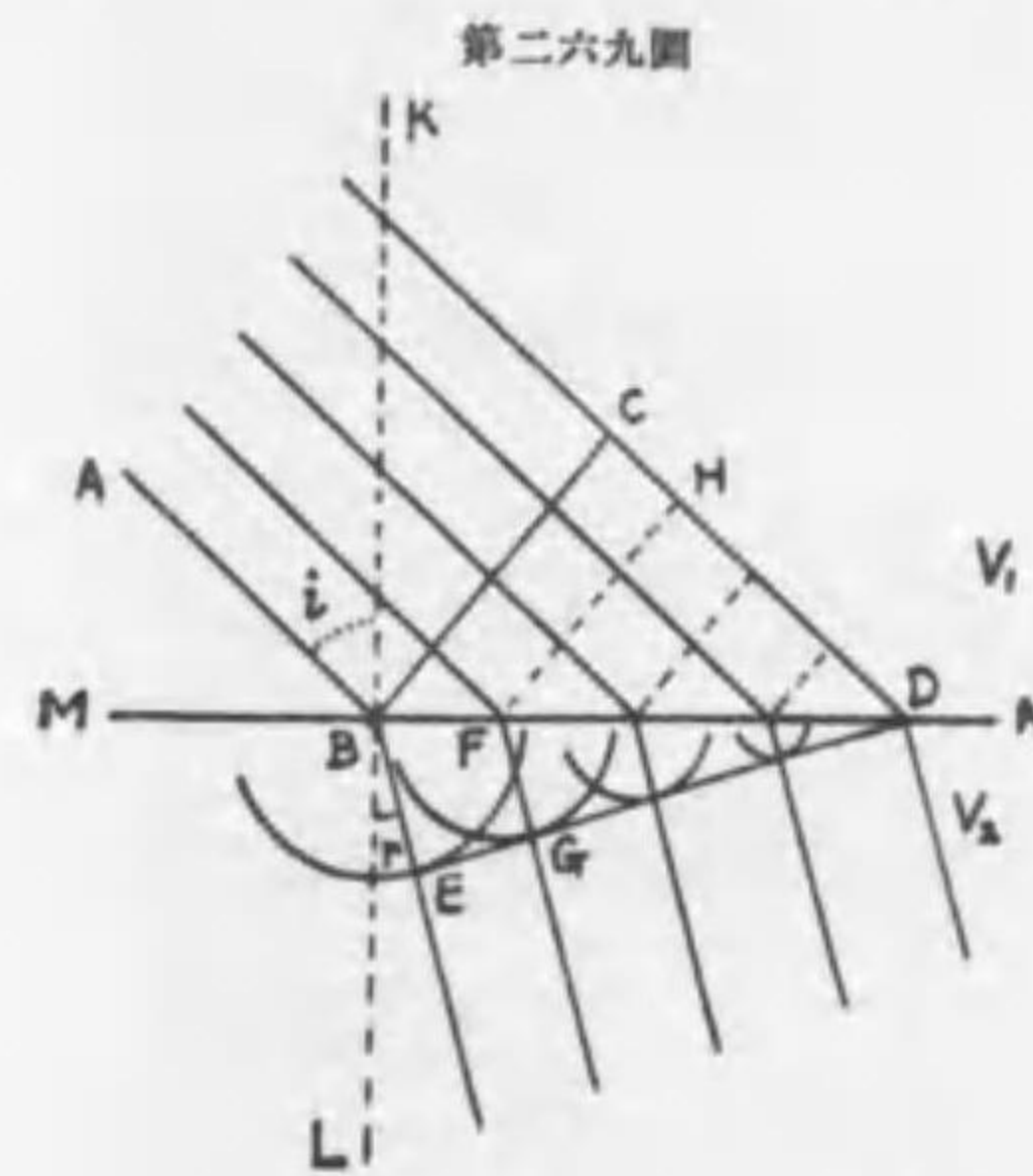
今二つの媒質の境界面 MN (第二六八圖) を平面と假定し第一媒質に於て入射線 AB は法線 BC (normal MN 面に垂直なる線) と入射角 (incident angle) i をなしつつ BD なる波面を

有する平面波動が入射したりと假定せよ、然るときは BD 面上の各点は波動源となりて球面波動を出すが故に D の振動が E に到着すると同



時間に於て B の振動は DE に等しき BF を半径とする球面波動を生ずべし、斯の如く D の振動が E に到着すると同時に於て G の振動は EH に等しき半径の球面上に擴布すべし、順次に斯の如くなるを以てホイヘンスの理に依り FE は新しき波面となり BF の方向に進行すべし。而して作圖により $\angle DBE = \angle FEB = i$ なるを以て $\angle ABC = \angle CBF$ 即ち入射角=反射角なり、又爰に示したる平面圖は其實立体的現象の截面なるを以て、之を立体的に考ふれば入射線と反射線とを含む平面は境界面に垂直にして所謂法面 normal plane をなすと云ふことを得べし、此法則と裏の入射角=反射角の法則とを併せて波動反射の二法則となす。

平面波動が MN なる (第二六九圖) 平面に於て屈折する場合には前法と同様に波面 BC の各点は波動源となるゆへ C の振動が D に到着する時刻に於ける状況を知るには V_1 と V_2 を夫々第一第二媒質に於ける進行速度とすれば、 $CD \times \frac{V_2}{V_1}$ に等しき長さ BE を半径として球面波動を書き、次に $HD \times \frac{V_2}{V_1}$ に等しき FG を半径とする球面を書き、順次斯の如くするときは位相は ED 面に沿ふて一致し従て ED は第二媒質に於ける波面となりて其の法線 BE の方向に進行すべし。今入射角 $\angle ABK = i$ とし屈折角 $\angle LBE = r$ とすれば作法により $\angle BDE = r$ なるを以て



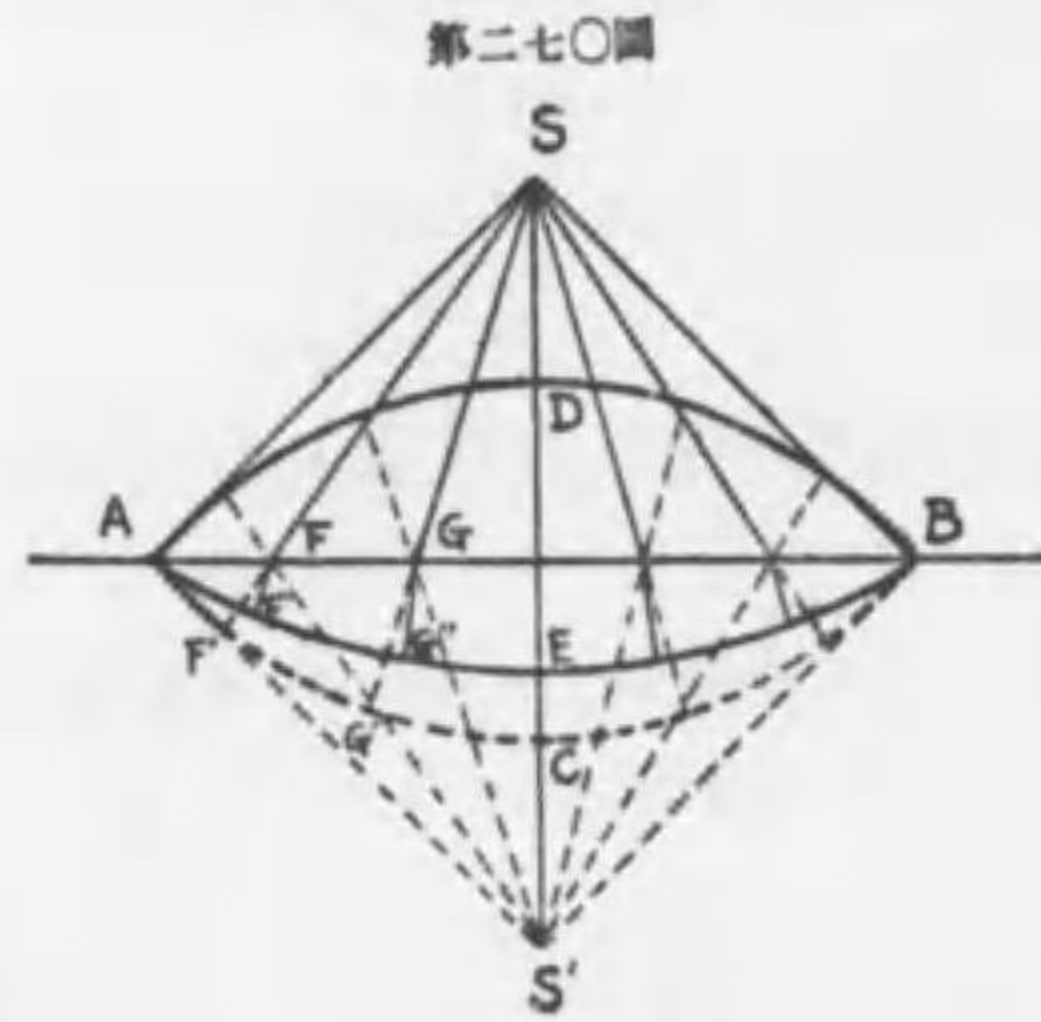
を得べし、即ち次ぎの二法則を得

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD/BD}{BE/BD} = \frac{\sin i}{\sin r} \dots\dots\dots (48)$$

を得べし、即ち次ぎの二法則を得

第一期、入射線と屈折線とを含む平面は境界面に垂直なり。

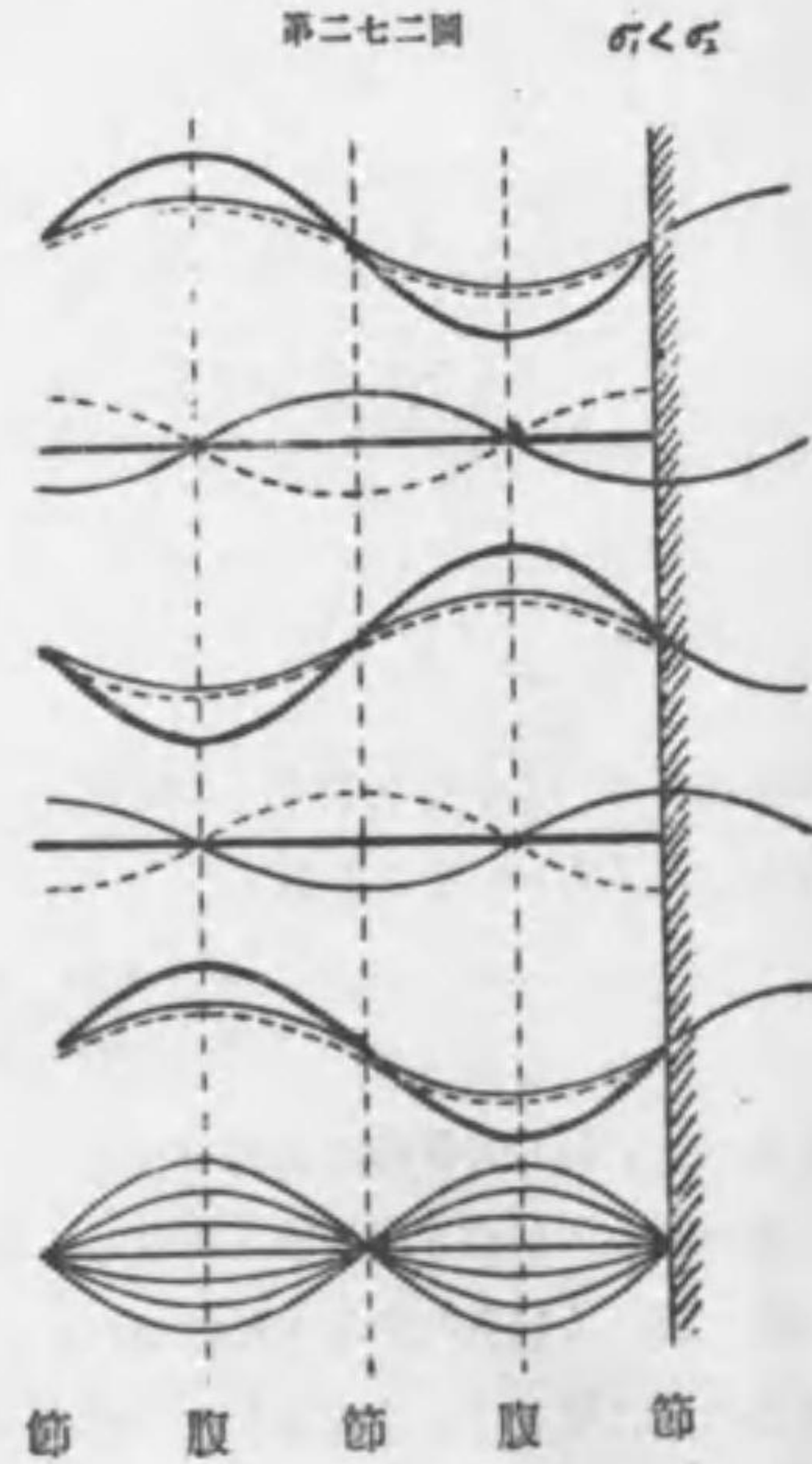
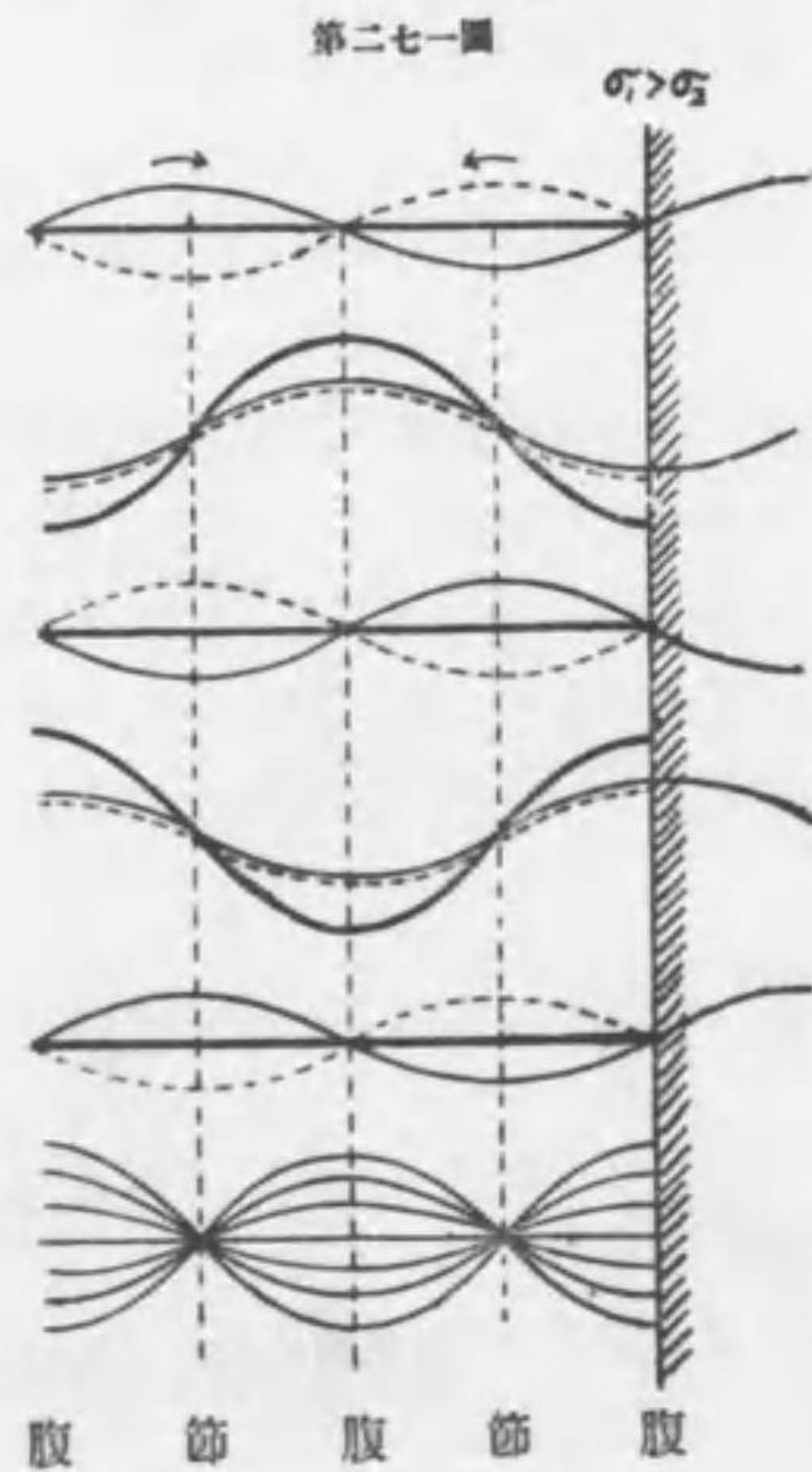
第二期、入射角の正弦と屈折角の正弦との比は一定にして兩媒質に於ける進行速度の比に等しく、之を屈折率 index of refraction と云ふ。



球面波動 ACB (第二七〇圖) が平面なる境界面に入射するときは波動は ADB の如く恰も S の影なる S' を波動源となすが如く反射し其波面 ADB は ACB に等しき球面の一部をなす。屈折波動 AEB は其射線の長さ V_2/V_1 の比に於て變化して $FF''=FF'$, V_2/V_1 , $GG''=GG'$, V_2/V_1 の如くなり、此等の長さを半径とする球面の

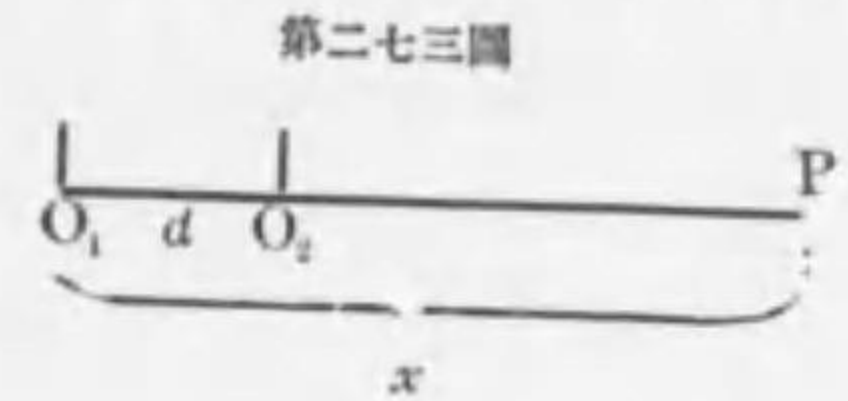
包絡面 envelope を形成す。

175 入射、反射波動の干渉 (Fresnel 1830) 質点列は一直線上に並び波動



は横振動をなしつつ右方に進行し第一第二媒質の境界に來りて反射し、其反射波動は不斷入射しつつある新しき波動と干渉し爰に定滯波動 stationary waves なるものを發生す、上の兩圖に於て入射線は連線により、反射線は点線により、合成波動は厚線によりて示す、境界面の右に書き足したる波は入射線の續きにして $v_1 > v_2$ の場合には其儘点線となりて反射すれども、 $v_1 < v_2$ の場合には反射波動の位相反對となり、山は谷となり谷は山となりて反射す。故に合成振動は兩圖の最下部に示すが如く腹 loop 及び節 node を有する定滯波動となり、質点列は紡錘狀をなして上下に振動し、節に位する質点は全く運動することなく腹に位するものは最盛に運動す。

先づ同一媒質内に在る二つの波動源 O_1 と O_2 より發する (第二七三圖) 弦運動が一点 P に落合ひて干渉するときの P の



合成運動を考へんとす、兩振動は週期は同一なれども振幅は夫々 a_1 と a_2 なりとし O_1O_2 を d と定め OP を x とすれば P 点の合成變位 y は (但し位相は等し)

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right) \\ = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \left(a_1 + a_2 \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \right) + \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) a_2 \sin \frac{2\pi d}{\lambda} \dots \dots (49)$$

なり、然るに A 及び D なる二つの未知數は二つの方程式によりて決定され得るものなるを以て

$$a_1 + a_2 \cos \frac{2\pi d}{\lambda} = A \cos \frac{2\pi D}{\lambda}, \quad a_2 \sin \frac{2\pi d}{\lambda} = A \sin \frac{2\pi D}{\lambda} \dots \dots (50)$$

と置き之を前式に代入すれば

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-D}{\lambda} \right) \dots \dots (51)$$

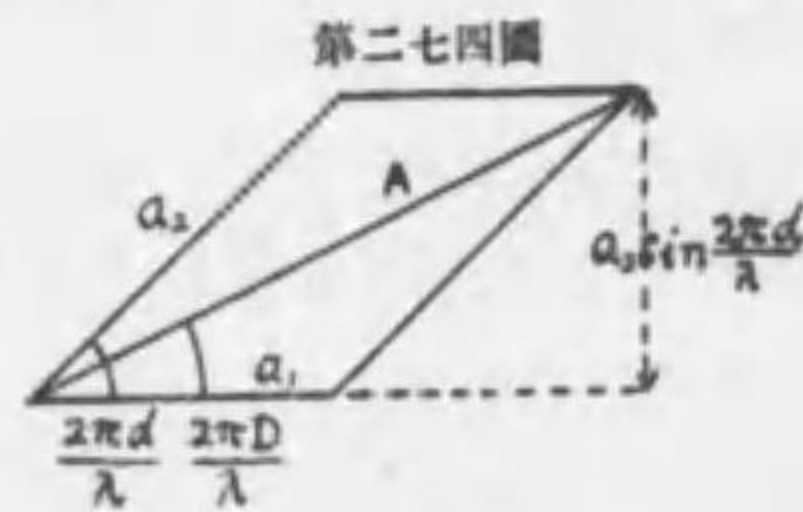
を得べし、故に合成振動は矢張一個の弦波動にして其振幅 A は (50) の兩式の自乗の和により

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \dots \dots (52)$$

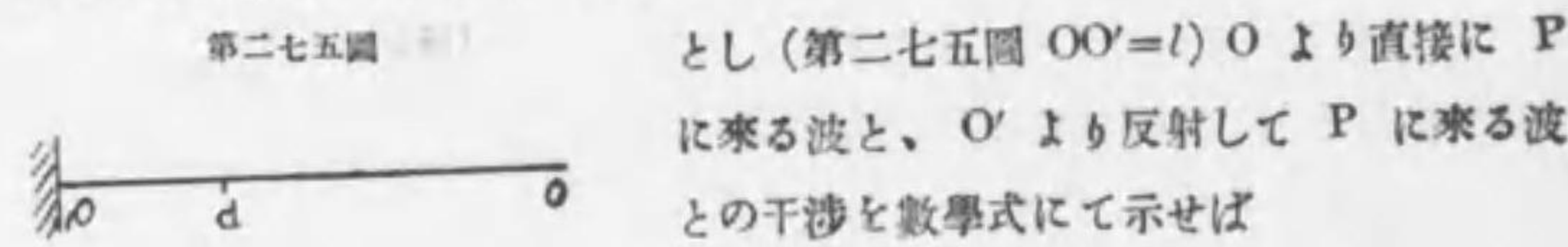
となり、位相の差は同式の商により

$$\tan \frac{2\pi D}{\lambda} = \frac{a_2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda}}{a_1 + a_2 \cos \frac{2\pi d}{\lambda}} \dots \dots \dots (53)$$

を得べし、即ち合成運動の振幅は a_1 と a_2 とを隣邊となし $2\pi a/\lambda$ を夾角とせる平行四邊形の對角線 (第二七四圖を見よ) に等しく、變位角 $2\pi l/\lambda$ は a_1 と λ との夾角に等し。



次に入射反射兩波の干渉を研究せんとす、先づ第一媒質を表はす直線の長さを l



$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right)$$

となる、但し $a_1 > a_2$, $OP=x$, $OO'+O'P=2l-x$ とし振幅は反射によりて變ぜざるものと假定す。上式は三角法の公式 $\sin \mu + \sin \nu = 2 \sin \frac{\mu+\nu}{2} \cos \frac{\mu-\nu}{2}$ により直に

$$y = 2a \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right)$$

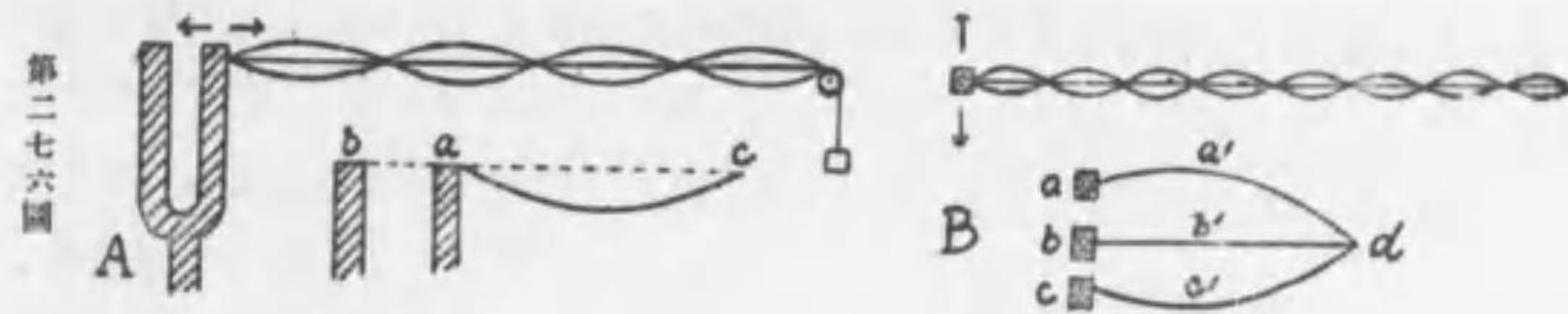
となる、故に豫め $\frac{l-x}{\lambda}$ (茲に $m=1, 2, 3 \dots$) と定め置かば

$$y = \pm 2a \cos \frac{m\pi x}{l} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (54)$$

となりて波動は進行することなく $2a \cos \frac{\pi x}{l}$ の振幅を以て定滯運動を営むべし (第二七一圖)。是に反し $a_1 < a_2$ の場合には

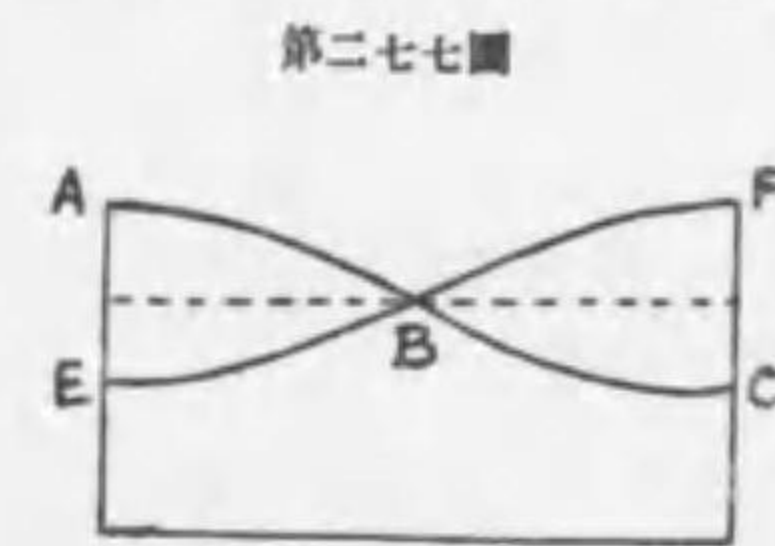
$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right) = \pm 2a \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{T} \dots \dots (55)$$

となり、(第二七二圖)の如き定滯波動を生ずべし。 $a_1 < a_2$ なる場合の干渉の實驗はメルデの音叉 (Melde 1860) によりて之を行ふことを得。即ち 第二七



六圖の如く絃の一端を音叉の一枝に繋ぎ他端を滑車に掛け或重量を以て之を緊張せしめ絃の長さ l を加減して $2l=m\lambda$ ならしむれば突然定滯振動の發生するを目撃し得べし。又 $\lambda=VT$ 及び § 164 の $V=\sqrt{g/\mu}$ より $\lambda=T\sqrt{g/\mu}$ を得、故に張力 T 大なれば絃に生ずる波は長し。次ぎに 第二七六圖Bの如く音叉の枝を含む平面を絃に垂直ならしむるときは、爰に生ずる波長は $1/2$ となるべし、其理由は A 圖に於ては音叉の枝が a に在るときは ac の谷を作り半週期の後 b に來らば bc の如く直線となる、之に反し B 圖の場合に於ては半週期間に枝は a より c に來り共同時間に山 $aa'd$ と谷 $cc'd$ とを作り得るが故なりとす。

176 角箱内の液体の振動 此場合には液体の波は箱の壁にて反射したる波と干渉して定滯波動を生ずるものなれども、其振動は豫期するところと反對にして $a_1 > a_2$ の場合に該當するを見るべし、其理由は液体分子と器壁との間に作用する分子力は微小にして液体の振動を左右する力無く液体は自由に運動し得るが故なり、故に液体の波は器壁に於て反射するとき其位相を反對にする理由全く存在せずして恰も 第二七一圖 と同一種の振動を行ふことを得べし。第二七一圖は $l=\lambda$ として書きたるものなれ共、若し箱の長さ $l=\lambda/2$ なるときは其振動の様は第二七七圖に示す如く中央に節線 nodal line を有しつゝ、或は ABC の如く或は EBF の如くなりて其間の時間は $T/2$ なるべし、從て變位 y は (54) によりて與へられ週期は公式 $T=\lambda/V$ によりて決定すべし、 T を計算するには箱の長さを l とすれば $l=\lambda/2$ となり水の深さを h とすれば (17) により $V^2=gh$ となり



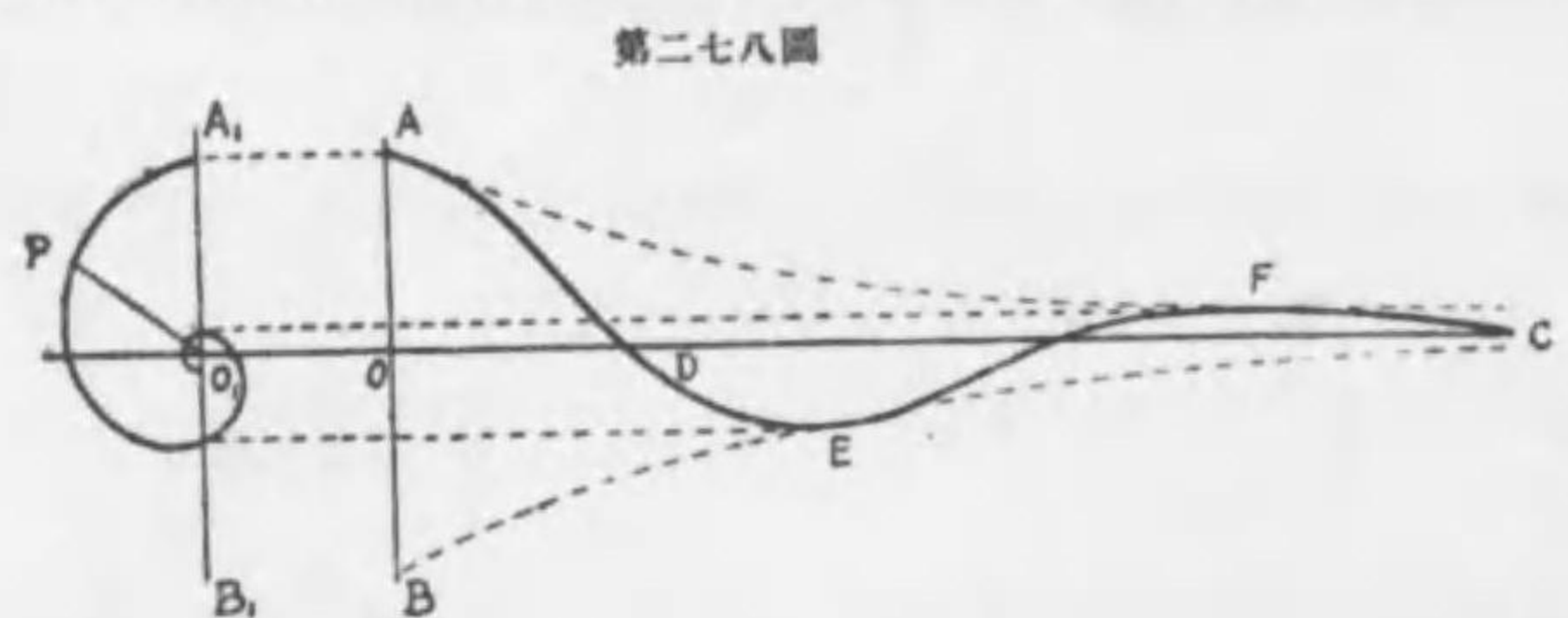
$$T = \frac{2l}{\sqrt{gh}} \dots \dots \dots (56)$$

を得べし。湖水又は内海の水は多少角筒内の水の如きものなれば上記の如き定常振動をなす、之を静振 seiches (Fatio de Duillier 1730, Forel) と稱す、瑞西國レーマン湖の静振は週期縦振七十三分横振十分、振幅は最大なるもの一米半に達せしことあり、錦江灣にて測りしものは週期七分を最大とす。総じて静振の主なる原因は氣壓の變化及び風なり。

177 減衰振動 damped oscillation 此は弦運動振幅の時間と共に減衰するを云ふ、其數學的取扱は之を後節電氣交流篇に譲り今は其大体の模様を説かんとす。振幅の減衰は摩擦其他電流の自己感應等の如き外力に因るものにして、外力は速度に正比例するものと假定すれば振幅は時間の指數函數として減すべく從て其變位の式は

$$y = ae^{-kt} \sin \frac{2\pi t}{T} \dots\dots\dots (57)$$

の形となる。故に弦運動とは圓運動を其直徑の上に直射影したるものなりとの定義に歸るときは、減衰振動は $r = e^{-kt}$ なる對數螺線 logarithmic spiral (Descartes) によりて表はさる (第二七八圖) 螺旋運動を任意の直線 AB に正射影したるものなりと云ふを得べし、今一点 P は A₁ を出發し螺旋上を運動すれ、 $r = O_1P$



は任意の t に於ける振幅を示すものなれば同時に右方 OC 線上に t を計り曲線にて變位を示すときは ADEFC を得べし。又振幅は半週期毎に $e^{\frac{kT}{2}}$ の比に於て衰ふ、其對數即ち $\frac{kT}{2}$ を對數減衰率 logarithmic decrement と名づく。

178 互に垂直なる弦運動の合成 互に垂直なる xy 二軸の方向に夫々振幅 a, b 又週期 T_1, T_2 を有する弦運動あるときは其合成を求むるには $T_1 : T_2 = m : n$

と假定し $nT_1 = T, mT_2 = T$ と置き變位の式

$$x = a \sin \frac{2m\pi t}{T}, \quad y = b \sin \frac{2n\pi t}{T}$$

を得べし。更に $2\pi t/T = \theta, i = \sqrt{-1}$ とすれば

$$\frac{x}{a} = \sin m\theta, \quad \frac{y}{b} = \sin n\theta; \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \cos m\theta, \quad \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \cos n\theta$$

從て

$$e^{im\theta} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + i \frac{x}{a}, \quad e^{in\theta} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} + i \frac{y}{b}$$

故に

$$\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + i \frac{x}{a}\right)^n = \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} + i \frac{y}{b}\right)^m \dots\dots\dots (58)$$

なる公式を得べし、此を二三の場合に應用せんとす

第一、 $m = n$. 此場合には明かに

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a}$$

なる二直線を得べし。

第二、 $m = 2n$. 虚數の項を比較すれば

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{2y}{b} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

之は 8 字形の曲線なり、第二七九圖を見よ、

第三、 $2m = 3n$.

$$\frac{2x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = -\frac{y}{b} + \frac{2y^3}{b^3}$$

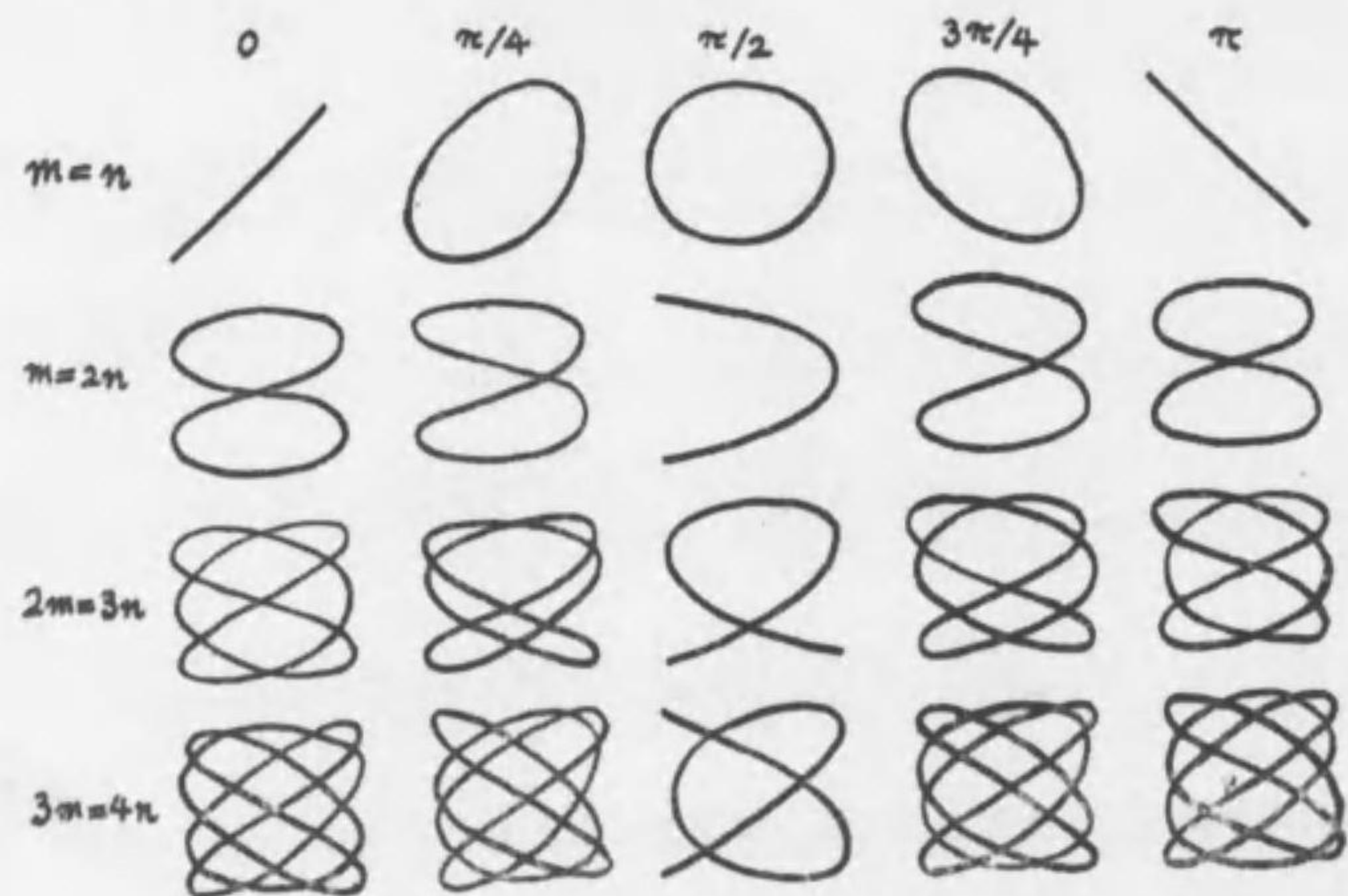
第四、 $3m = 4n$.

$$-\frac{x}{a} + \frac{2x^3}{a^3} = \frac{4y}{b} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \left(1 - \frac{2y^2}{b^2}\right)$$

此等の曲線は悉く起点を通過す、第二七九圖の初行に並ぶもの是なり、二三四五

行は位相の差に依て生ずる變化を示すものなり (Lissajous experiment, 1857)

第二七九圖



第四編 音響學

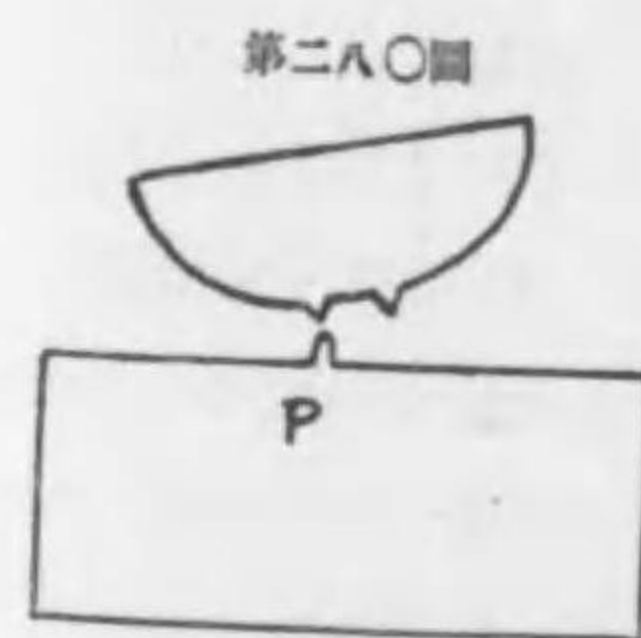
第一章

音の發生及び傳播

GENERATION AND PROPAGATION OF SOUND

179 樂音 音響學 Acoustics 研究の對象物たる音響は彈力体の振動之を生じ耳之を聴くところの感覺なり、既に感覺なるを以て主觀的たるには相違なけれども他の學科の如く エーテル なる媒質の存在を假定する必要無く又彈力体の振動は直接間接に之を觀察し得るを以て種々の臆説を設くるを要せず單に彈力体の力學として取扱ふことを得るが故に自然界の萬象を悉く力學に依て説明せんとする物理學の理想を或程度まで實現せしむるものなりと云ふも不可なし、殊に人間固有の音聲、思想交通の方便たる言語と直接の關係を有し又時間的に開展する藝術に研究の材料を授くるものなり。

噪音 noise と樂音 musical tone との區別を説くは甚だ困難なり、短き噪音も連続的に規則正しく發するときは樂音として聽へざるにあらず、例へば膜を上下に振動して發音する蹄聲の如き一つ宛聽けば噪音と評するの外なし、其他蠶斯、金鏡兒、馬追虫が發する摩擦音も噪音の規則的に連續したるものなり、之を證明



第二八〇圖

するにはトレエリヤンの搖桿 (Trevelyan rocker, 1829) を熱して鉛製の枕上に安置すれば(第二八〇圖)搖桿の二小突起の一つが鉛に觸るる点 P に於て熱膨脹のため鉛に瘤を生じ搖桿に回轉能率を與へ、搖桿は廻りて他の突起を以て鉛に觸るに及びて他の瘤を發生せしめ搖

桿に先の反對の能率を與ふ、而て一旦生じたる瘤は冷ゆれば直に消失するを以て
搖桿は左右に振動し噪音は連続し發音せしむるなり。

上記の如き發音法は寧ろ稀にして樂器に於ては一般に共鳴箱内の空氣に定滯波
動を起して生音せしむ、音叉又は絃樂器に於ても其狭き表面を以て空氣を撃つこ
とは直接に音の發生に預ることなし、埃及なる スフキックス が日出の頃發音す
るは日熱を受けたる空氣が体内に於て振動的氣流を生ずるに因ると云ふ。嘗て昆
虫類は体軀小なるを以て共鳴箱を携ふる能はず單に摩擦により搖桿式の高音を發
するは寧ろ奇と云ふべし。

本篇に於て研究せんとするは主として樂音に限るべし、樂音は噪音に較ぶれば
振動の様極て單純にして樂音を發し若くは之を傳播する媒質の分子振動は悉く
弦運動と見做して可なり。

180 音の三性質 three qualities 強さ intensities 調子 pitch 音色 timbre
を音の三性質と稱す。

強さは音振動の運動の エネルギー に相當するものなり、今振動体の質量を
m とし振幅を a 週期を T とすれば變位は $y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$ なるを以て

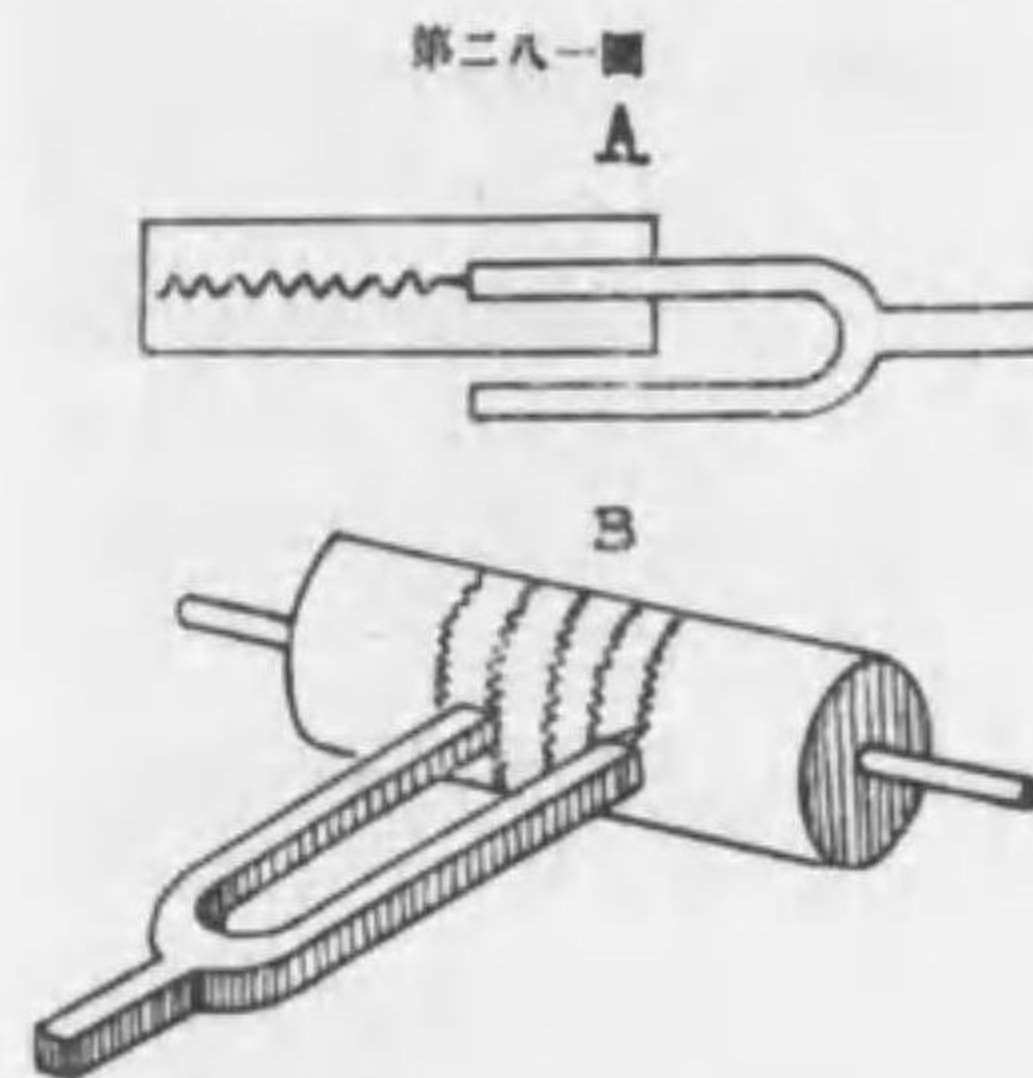
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \cos^2 \frac{2\pi t}{T}$$

を得、然るに $\cos^2 \frac{2\pi t}{T}$ の平均値は $\frac{1}{2}$ なるを以て上式を

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}m\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \dots\dots\dots (1)$$

と書くときは、音の強さは振動体の質量及び振幅の平方に正比例し週期の平方に
反比例す、週期の倒數は振動數に等しきを以て振動數の平方に正比例すべし。

音の調子又は高低は其振動數に由る、調子高きものは振動數多し、此は恰も自
明の如く思はるれどもメルサンス (Mersenne 1633) に依て初て確定せられたる
ところなり。振動數を計るには ユーバー の振動自記器 (Weber's vibrograph
1830) に於ては音叉の枝端に針を附したるものを煙煤と著けたる ガラス 板に
等速に並動せしむるに在り (第二八一圖A)。デュアメル自記器 (Duhamel 1859)
に於ては煙煤を塗りたる紙を圓筒に捲附け (第二八一圖 B) 其上に音叉の振動を



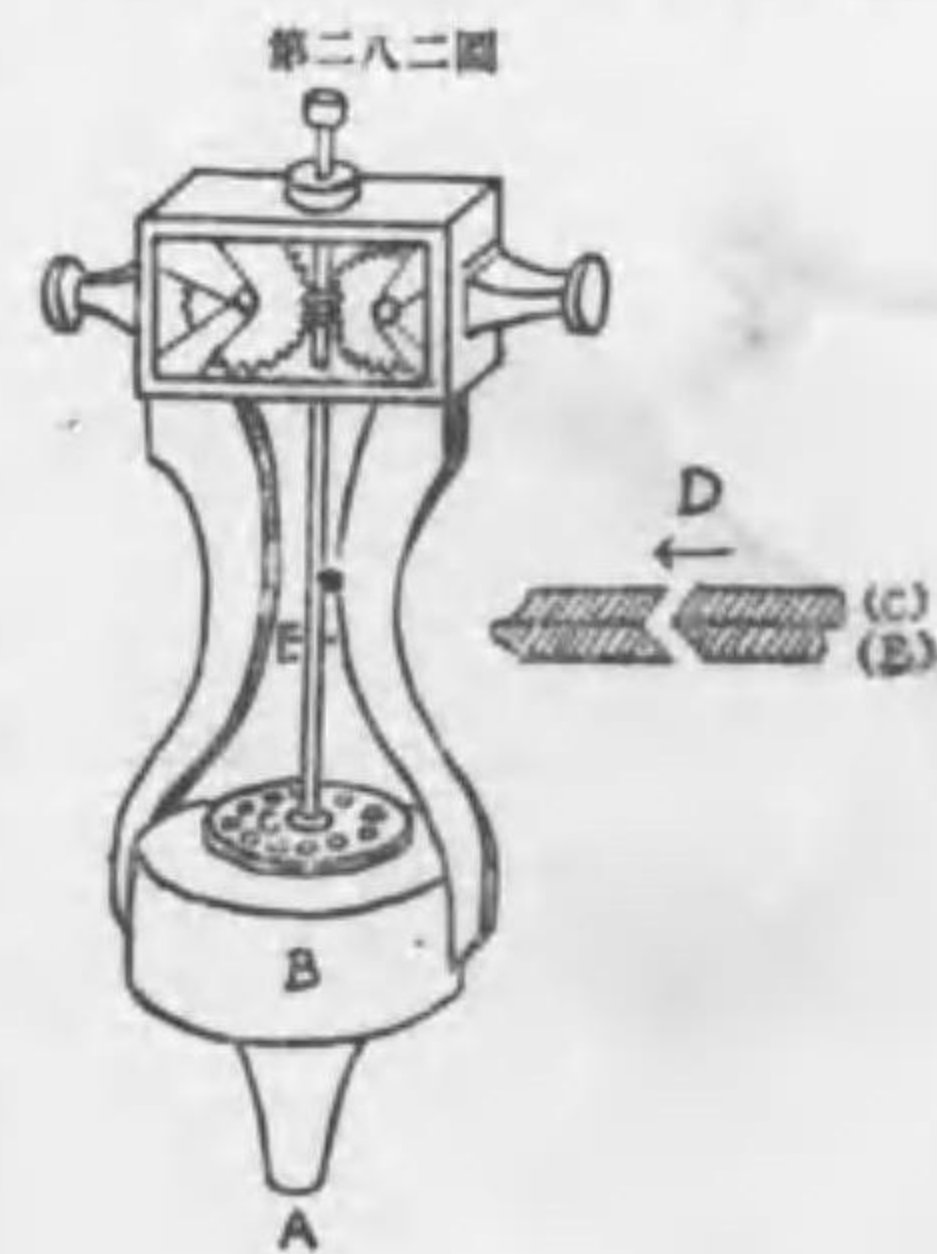
第二八一圖
A

B

自記せしめ圓筒は自轉しながら軸の
方向に移動するを以て振動の圖形は
圓筒上に螺旋 (helix) 的に畫かるる
ものなり。之を要するに此等二種類
の自記器は使用したる音叉の振動數
を測定するのみにして一般に任意の
振動を計るものにあらざるを以て寧
ろ他の用途に宛てらるるものなり、
例へば昆虫類の翅の振動數を測るに
は音叉の振動と同時に其傍に翅の脈

動の痕を印せしむるときは音叉の振動數は既知なるを以て從て翅の脈動數を算出
すること容易なり (蜜蜂は 348 蚊は 522 の振動をなす)。此点に於ては不完全
ながら サヴール (Savart 1837) の齒車は前二者に優さり任意の振動を測定する
ことを得べし、之は固体の小片を回轉する車の齒に觸れて發音せしむ、振動數は
齒車の一秒毎の回轉數と齒數との積に等し、而して回轉數を測るには回轉軸に他
の小さき齒車を聯動せしめ其回轉數を觀測するにあり、嘗て遺憾とするところは
齒車が生ずる音は殆ど噪音にして他の樂音と比較することの困難なる点にあり。

上記の諸器に優さるものは セーベック のサイラン (Seebeck's siren) と稱する
器械なり、之は圓板上に或圓周に沿ふて
等距離に小孔を穿ちたるものを速に回轉
せしめ同時に管によりて小孔に空氣を吹
突けるなり、管を出づる風は小孔が管口
の前に來る毎に短き噪音を發し、噪音頻
繁に連續すれば樂音となりて聴こゆ、而
して振動數の測定法は サヴールの齒車
と同一法に依るなり。此に類似し更に複
雜なる構造を有するは カニヤール、ラッ
ール (Cagniard-Latour 1825) のサイラ
ンなり、此は物理學者の常に使用する



第二八二圖

A

ところのものにして(第二八二圖) 桶により空気を A の孔より B の箱の中に詰込み B の蓋に設けある十二個の孔より外界に洩らすなり、然るに B の蓋の上には回轉自在なる圓板 C ありて之にも同じく十二個の孔を設けありて B と C との孔が全部同時に一致するときのみ空気が流出することを得べき装置なり、B は固定し C は回轉する故十二孔は全く一致するときと一致せざるときとあり、一致せざるときは空気が流出する能はず、一致するときは噪音を發す其噪音の規則的なる連続によりて樂音を生ずるなり、而して C なる圓板を回轉せしむる方法は附圖 D に示せる如く B の孔より出づる空気が斜に C の孔の側面に衝突し C を矢の方向に運動せしむるに在り。振動数は E なる回轉軸と聯動する齒車に依りて測定することを得べし。ドフエ(Dove)のサイランに於ては C 板上に四列の孔ありて其數は 8, 10, 12, 16 即ち音樂者の *do, mi, sol, do* に相當する音を別々に或は同時に發せしむる装置を有す。此外に ヘルムホルツ の二重サイラン double siren あり此は ドフエ式サイランを二重にしたるが如きものにして孔數は下板に 8-10-12-18 上板に 9-12-15-16 を有し後節説明せんとする諸種の現象を實驗し得べし。

音樂に使用する音の調子は 40 乃至 4000 なり、耳の音の感覺は 16 乃至 36000 と稱すれども耳の練習と年齢とにより高音の境界には著しき差あり、汽船のサイランの高音は 60000 乃至 72000 に達し聴へざる人多し、一般に餘り高調なる音は不快の感を生ず、樂隊が用ふる ピッコロ piccolo と稱する小笛は 4625 を最高とすれども此笛の音樂を好まざる人甚だ多し、又人の歌聲は 64 乃至 1500 の間を動くものなり然れ共單獨の人にて此音域を有するは稀有なり、モーツァートの記録によれば アジュガリ と云へる聲樂婦人は 192-2048 の音域を有したりと。

同一の強さと同一の調子を有する音にも樂器の性質により或は人々によりて音色 timbre を異にす、此れ樂音の振動は單純なる弦運動にあらずして其實強さと調子に於て異なる數多の弦運動の合成振動にして、基音と稱する振動は同一調子に在りては同一なれども之に伴ふ倍音の種類と數とは必ずしも等しからずして爰に音色の差を生ずるなり、凡そ樂音には倍音の此に伴はざるものなく倍音少しか或ひは倍音は早く消へて基音のみ聴こゆる樂器例へば音叉の如きは寧ろ空虚な

る音を發し如何なる音叉も皆な同一の音色を有す。

181 音波の進行速度 氣體は分子力殆ど絶無なるを以て横振動を傳播する能はず、唯々容積的彈性に依て縦振動を傳達し得るのみなり。等方質(isotrope)なる氣體中に於ては球狀波動を生じ射線は半径の方向と一致す。細長なる圓筒に比重 σ なる氣體を充たし其一端の氣體分子列に連續的に弦運動を與ふるものと假定すれば管内に平面波動播し其速度は § 163 に論じたと同理由り

$$V = \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \dots\dots\dots (2)$$

なるべし、若し ニュートンの假定したる如く氣體は音波を傳ふる際等温的に收縮膨脹するものとせば ボイル、マリオット 則により容積 v と壓力 p との積は一定し其變化は $p dv + v dp = 0$ なり故に 歪力 dp と 歪 $-dv/v$ との比は

$$E = \frac{-dp}{dv/v} = p$$

となり、之を前式に代用して下式を得

$$V = \sqrt{\frac{p}{\sigma}} \dots\dots\dots (3)$$

此を ニュートンの公式となす。空氣中に於ては氣壓は $p = 1014000$ ダイナ/厘² 又 O² の空氣の密度は $\sigma = 0.001293$ なり、故に

$$V = \sqrt{\frac{1014000}{0.001293}} = 278 \text{ 米}$$

を得。空氣中の音波速度を測定せんがため 1738 年佛國巴里 アカデミー は委員に命じて實驗せしめたるに委員等は凡そ三十軒を隔てたる二点に大砲を据へ雙方より發砲し砲火の見ゆる時刻と音波到着時刻の差を精測し次ぎの四個條の結論に到着せり

- 第一、速度は氣壓に關せざること
- 第二、溫度増せば速度増加す
- 第三、四方に等速を以て傳播す
- 第四、速度は風力の影響を受く。

ラルー (La Roux) 此結論を綜合して音波の速度を 332 米と定めたり、其後 ア
 ラゴ (Arago 1822) レニョウ (Regnault 1868) の實測により強音の速度は少
 しく大なる事を知れり マツハ (Mach 1877) の測定により強さと速度との關係
 を確め得たり、又 ニウコム (Newcomb 1888) の音の速度 340 米に對し地震波
 動の進行速度 5000 米に達し得ることを確定せり。

ニウトン 公式が事實に符合せざるは空氣中の波動の稀薄濃密の變化を等溫變
 化と見做したるに依るものなり、ラプラスは稀薄濃密の變化は頗迅速に行はれ
 熱は平均を求むる迄なく全然斷熱變化と見做すべきものなることを悟り、
 $pv^k = \text{常數}$ の式より出發し、之を變化して $v^k dp + kp v^{k-1} dv = 0$ より

$$E = \frac{-dp}{dv/v} = kp$$

を得、之を (2) に代入して ラプラスの公式

$$V = \sqrt{\frac{kp}{\sigma}} \dots\dots\dots (4)$$

に到着せり、空氣の $k = c_p/c_v$ は 1.408 なるを以て

$$V = 278.1/\sqrt{1.408} = 333 \text{ 米}$$

即ち實測と同一なる結果を得べし。今 ω を比積とすれば $\omega = 1/\sigma$ なるを以て
 § 116 により

$$V = \sqrt{kp\omega} = \sqrt{kp_0\omega_0(1+\alpha t)} = V_0\sqrt{1+\alpha t} \approx 333\left(1 + \frac{t}{546}\right) \text{ 米} \dots\dots\dots (5)$$

(但し $546 = 2 \times 273 = 2/\alpha$) 故に進行速度は絶対温度の平方根に正比例し壓力には
 無關係なり。然れども空氣中に濕氣あるときは速度は増加すべし、水蒸氣に於て
 は $k = 1.26$ にして σ は空氣の $5/8$ なるため kp/σ の値は空氣の 1.43 倍に登り
 濕氣の影響の尠からざるを知るべし。

水中進行速度。水は一氣壓の歪力に對して歪は 0.000046 (§ 75 を見よ) な
 り、故に $E = 76.981.13.59/0.000046$ を (2) に代入し $V = 1438$ 米を得べし。
 最初水中の進行速度を實驗したる ビュダン (Beudant 1820) は $V = 1500$ 米を得
 たり、後ち ステュルム 及 コルラドン (Sturm et Colladon 1827) は レーマン湖
 に於て實測せしに温度 8° のとき $V = 1435$ を得たり、測定法は兩人は 13847 米

の距離に各々舟を解べ舟底に吊りたる鐘を撃ち同時に舟中にて相圖の火花を出す
 なり、光と音波の到着時刻の差より算出すること容易なり。

固体内進行速度。鐵に於ては $E = 20^{12}$ ダイーン = 樞²、 $\sigma = 7.7$ 依て

$$V = \sqrt{\frac{20^{12}}{7.7}} = 509000 \text{ 樞} = 5090 \text{ 米}$$

ビヨ (Biot) は鑄鐵の長さ 951 米のもの一端を繩にて撃ち同時に空氣中に吊
 りたる板を撃ちしに他端の觀測者は先づ鐵中を進行せし音を聽き次ぎに氣中を進
 行せし音を聽けり其時刻の差は 2.5 秒なりしと云ふ、速度を夫々 V 及び 331 米
 とすれば

$$951\left(\frac{1}{331} - \frac{1}{V}\right) = 2.5 \dots\dots\dots (6)$$

より $V = 3475$ 米となり上記の結果と一致せず。

182 音の反射及び屈折 音波は固体液体の表面に於て反射屈折の現象を呈す
 るのみならず、同じ空氣中に在りても温度又は濕度の差違を有する境界面に於て
 は恰も二種の異りたる媒質の境界面に於けるが如く屈折反射し此がために未だ遠
 距離を進まざるに既に其 エネルギー 大に衰ふることあり、天氣晴朗にして日
 光克く地上を照らす時は此障害最も多し、此れ日熱は岩石の上の空氣を強く暖む
 るも草原又は河上の空氣を暖むること比較的少く從て空氣の比重濕氣の多寡を
 異にし氣界を數多の媒質に區分することとなるが故なり、即ち光學的透明は音響
 學的に不透明となりと稱することを得べし、故に天氣悪くして雨を催ふし若くは
 少雨既に降るとき又は霧深くして少距離を辨じ難き時殊に夜中風無きときは氣界
 は平等となり音波は障害を受けずして遠距離に傳播することを得るなり。

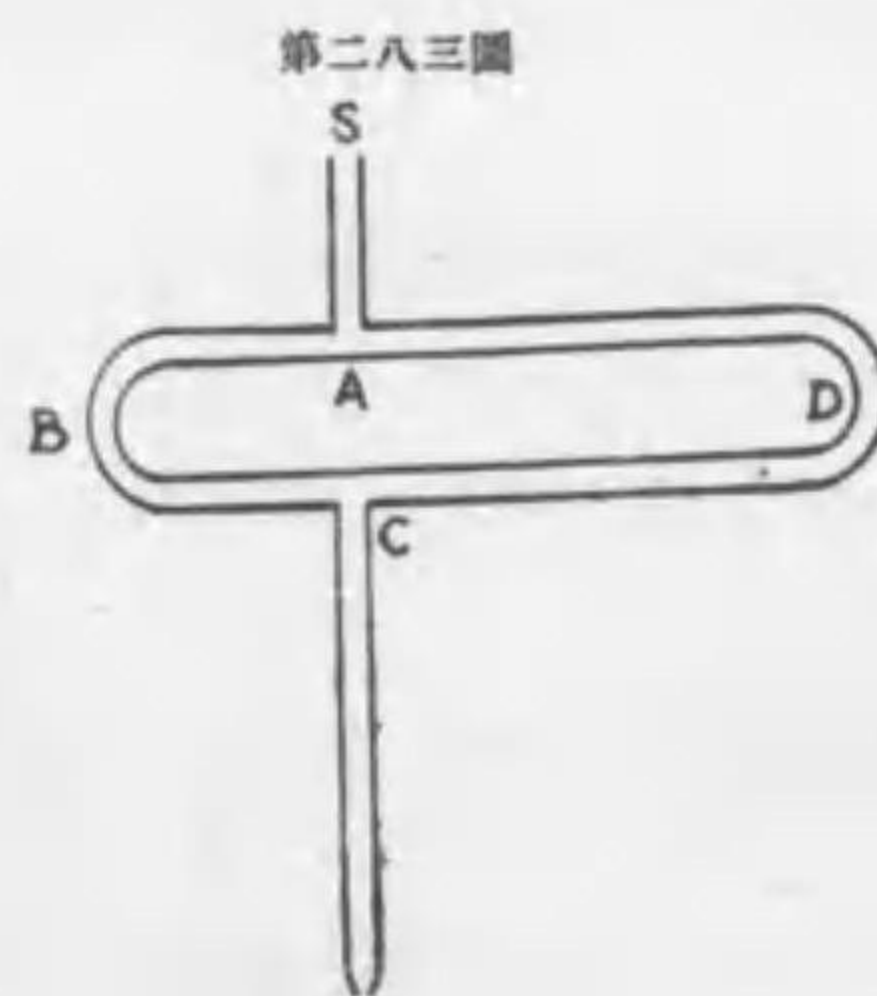
風は音響の波面の方向を曲げて屢々屈折に類似したる結果を生ぜしむることあ
 り、例へば地上には大風吹已みて殆ど靜謐に歸したるも高空には尙風残れる場合
 には波面は地上に向て屈曲し從て遠處の音響鮮かに聽取られ得ることあり。

光線の反射と同じく音波の反射も同一法則に支配せらるるを以て拋物面 (par-
 abolic surface) の軸に平行に入射する平面音波は反射して其焦点に集まる、又楕
 圓体 (ellipsoid) の天井を有する建築に於ては其一つの焦点に於て耳語する聲は

他の焦点に於て鮮明に聴取らるることあり。音は山側、壁、水面、雲の表面等より反射して反響を生ず、例へば雷鳴の餘響の如し、反響の名處の一なる伊國 ミラノ市 シモネッタ 古城に於ては ビストル の一聲は 50 回の反響を生ずと云ふ。反響は公會堂、音樂堂等に於て大に妨害を與ふることあり、之を治するには壁に毛氈を垂れて反射を防ぎ或は壁龕等の形狀を變更し又通風用の道の位置を換ゆるに在り。

之を要するに音波を最も良く反射する表面の大きさは其音波の波長に正比例せざるべからず、即ち雷鳴の如き波長大なるものは山側、雲の表面又は大建築物の壁より反射し、之に反し高波の雜音は竹林より反射せらるる事多し。

183 音波の干渉 同一点に到着する二つの音波が位相に於て反對なるときは

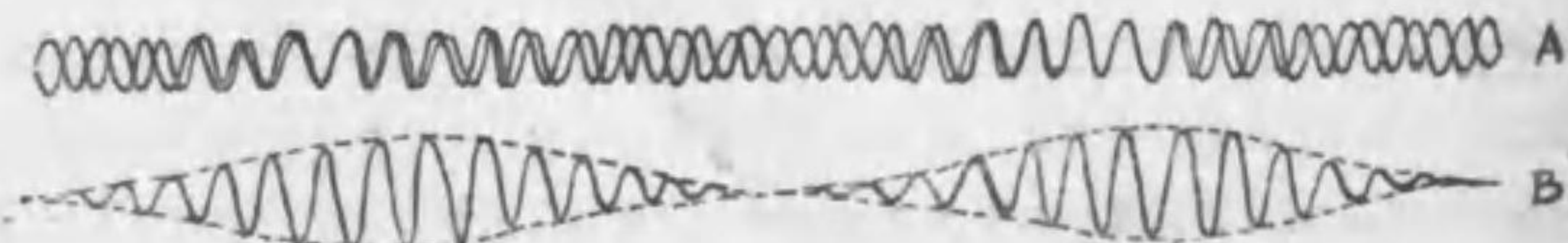


互に打消し、位相に於て一致するときは互に協力する現象即ち音波の干渉は種々の方法によりて實驗することを得べし (後節板の振動を見よ) クインケ (Quinke) の干渉管は 第二八三圖 に示す如く S なる音源より來る波を ABC, ADC 兩途に分け C に於て再會せしむ、 $2(AD-AB) = \frac{2m+1}{2}\lambda$ (但し $m=0,1,2,3\dots$) の場合には合成波動は消失すべし、又ヘルムホルツの二重サイランを使用

し位相の變化によりて二つの音波が干渉することを實驗し得べし。

同一媒質内を二つの音波が同一方向に進行するときは振動數に少しの差あれば兩波干渉のため唸り beats (Scheibler 1814) と稱する現象を生ず、或瞬間に於て二つの波動は 第二八四圖 A の如き相對位置に在りとせば山谷重なる点に於て

第二八四圖



は互に打消し山谷或は谷谷重なる点に於ては強めらるるを以て B の如き合成振動を營むべし、尤も兩圖は縦波なる音振動を便宜上横波に直ほして表出せしものなり。凡そ進行する波は其形狀を變ずることなく、其儘波形は移動するものなれば合成波動も其儘移動すべきなり、今右方に進行しせむれば B 点に固定せる耳は爰に畫ける波形に相當する振動を逐次に入取るることとなるを以て音は週期的に或は強く或は弱はく從て耳は唸り音を感じるなり、而して上圖によりて明かなる如く唸りの數は合成波形の半波長毎に一回の割合なりとす。

唸りを實驗するには振動數の少し異なる二つの音叉を同時に鳴らすにあり、鐘も時々唸りを發するは鐘の厚さ平等ならずして厚き處は薄きところよりも振動數大なるを以てなり、又下手なる聲樂家が同音にて歌ひつつあるときは必ず噪音を發するなり、唸りは亦 ヘルムホルツの二重サイランを用ひて容易に聴取ることを得べし。

媒質内の一定点に於ては二つの音源より來る波動の干渉は $x = \sin \theta_1 t + \sin \theta_2 t$ によりて示すことを得、但し $\theta_1 = 2\pi/T_1$ 及び $\theta_2 = 2\pi/T_2$ なり、然るに

$$y = \sin \theta_1 t + \sin \theta_2 t = 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} t \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} t$$

なるゆへ θ_1 と θ_2 が殆ど等しくして $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ と置くことを得る場合には

$$y = 2 \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} t \sin \theta t$$

となり其振幅は $2 \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} t$ なり、然るに音の強さは振幅の平方に正比例するゆへ強さは $\cos^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} t$ 即 $1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)t$ に比例す、此値が引續づき零となる時刻を t_1 及び t_2 とせば $(\theta_1 - \theta_2)t_1 = \pi$, $(\theta_1 - \theta_2)t_2 = 3\pi$ なり、而して $t_2 - t_1 = T$ は唸りの週期なり、故に上二式より

$$\frac{1}{T} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \dots\dots\dots (7)$$

即ち唸りの數は各音の振動數の差に等し。此理を使用しうなり數を算ふることに依りて二つの音叉の振動數を比較することを得べし、又振動數の差 132 を超ゆるときは吾人の耳は之をうなりとして感ずる能はず。

若し二音の振動數の差大るときは二音干渉の結果は和音 summation tone 及

び差音 difference tone を生ず (Sorge 1740, Tartini 1754)、和音差音の振動数は夫々原振動数の和及び差に等し。和音差音發生の理由に就きては諸説紛出して未だ歸着するところを知らず、一説に依れば耳の感覺器の振動變位に不完全なる点あるがためなりと云ふ。和音差音を總稱して合音 combination tone と云ふ。

184 ドップラー効果 Doppler effect, 1842 n なる振動数を有する音源が u の速度を以て不動なる耳に接近するときは音源より出づる音波は V の速度を以て進行しつつある故波長は短くなりて調子は上るなり、音波は他の波動の如く一週期 T に一波長 λ を進行す、然るに其と同時に音源は Tu の距離を進むを以て波の長さは $\lambda - Tu$ 即ち $T(V-u)$ なり、此長さを以て (§ 161 (2) により) 進行速度 V を除ずれば $V/T(V-u)$ は接近する音源の振動数 n' に等し、故に $n=1/T$ を記憶しつつ

$$n' = n \frac{V}{V-u} \dots\dots\dots (8)$$

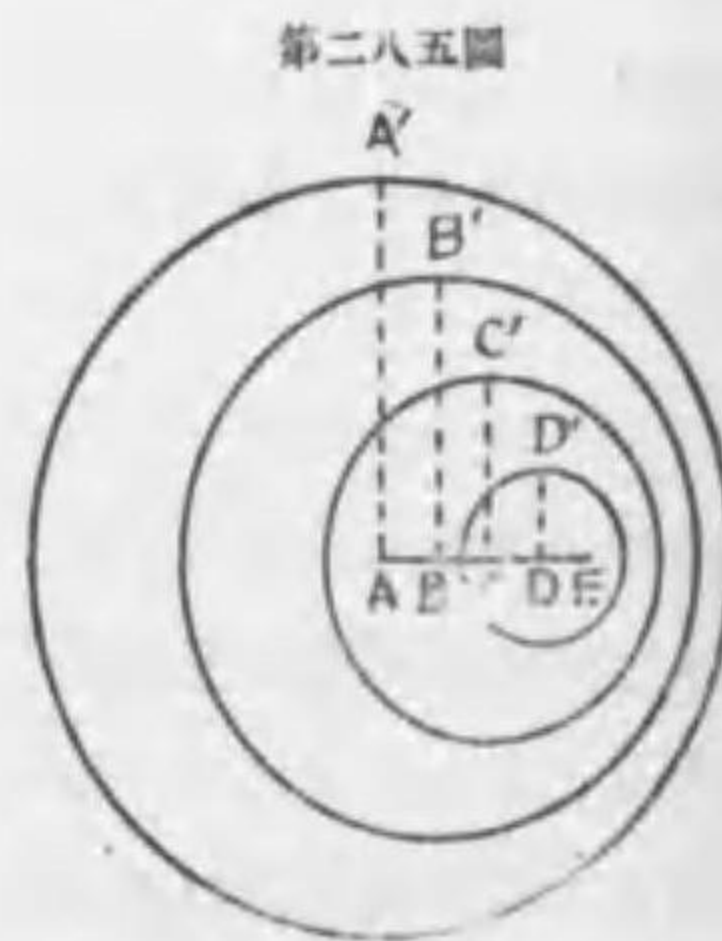
なり。次に耳が u の速度を以て不動なる音源に接近する場合には音波は $V+u$ の速度を以て耳に入るを以て振動数は $(V+u)/V$ の比に於て増加し

$$n' = n \frac{V+u}{V} \dots\dots\dots (9)$$

の公式を得べし。汽車が汽笛を鳴らしつつ接近するときは調子は高く聴ゆべし。音源と耳とが相對的に遠ざかる場合は (8) (9) 兩式の u を負數とすべし。

ドップラー効果は ゼーマン 現象或は視線に於ける天体運動測定に應用せらる。

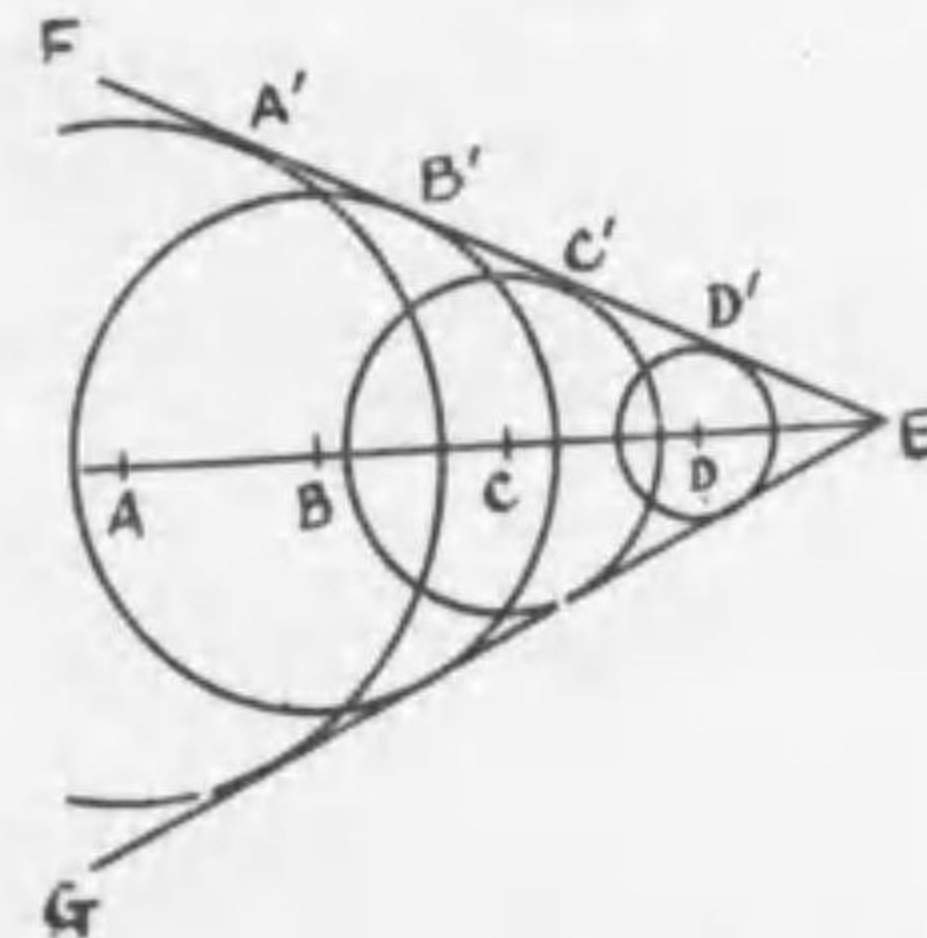
音源の運動より生ずる結果を空間的に考ふるときは通常 第二八五圖の如き波形を得べし、音源は一秒毎に A, B, C, D, E 各点に到着し其速度を $u=AB=BC=CD=DE$ とす、又音源が E に到着したる瞬間に於て A より出でし波は既に $AA'=4V$ を半徑とする球面上に擴がり、順次に $BB'=3V, CC'=2V, DD'=V$ の球面に擴がれるを以て、先方には波長は $(V-u)/V$



第二八五圖

の比に於て短かく後方には $(V+u)/V$ の比に於て長くなれり、此圖は同一時刻に於ける空氣の狀況を示すものなれば AA' を半徑とする球の内部に於ける諸点は悉く振動しつつありて四秒間に發射せしエネルギーは球内に分配せらるるなり。

音源の速度が音波進行速度よりも大なる場合には波形は著しく其模様を異にすべし、彈丸が V よりも大なる速度 u を以て飛行するときは空氣との摩擦により噪音を生じ其噪音の波動は 第二八六圖に示す如く EF, EG を母線とする圓錐面を波面となし其面に垂直に進行すべし、 $u=AB=BC=CD=DE$ とすれば $AA'=4V, BB'=3V, CC'=2V, DD'=V$ となり、エネルギーの全部は圓錐面上に集中せられ、圓錐



第二八六圖

面の外部は無論靜謐にして内部も比較的靜謐なるべし、故に圓錐面の附近に於ても彈丸通過後にあらざれば爆聲を聞く能はざるなり。第二八七圖は飛行する彈丸附近に於ける空氣密度の變化を撮影したるものの寫圖にして圓錐體波動の存在を實證するものなり。



第二八七圖

面の外部は無論靜謐にして内部も比較的靜謐なるべし、故に圓錐面の附近に於ても彈丸通過後にあらざれば爆聲を聞く能はざるなり。第二八七圖は飛行する彈丸附近に於ける空氣密度の變化を撮影したるものの寫圖にして圓錐體波動の存在を實證するものなり。

180 音波のエネルギー 最初出發時の音のエネルギーを E とするとき は暫時後半徑 r の球面上に擴がるを以て其球面の單位面積上のエネルギーは $E/4\pi r^2$ となり従てエネルギー密度 energy density は距離の自乗に反比例して衰ふる理なれども其途中に於ける媒質構造の同質性を缺けるより生ずる消耗により此法則が示すよりも一層多く衰ふるものなり。一般に音のエネルギー密度は (i) 其發生時のエネルギー E に正比例す、(ii) 媒質の密度に正比例す、此れ § 180 (1) により明かなり、例へば高山の頂に於ては空氣稀薄なるゆへピストルの響も山麓にて聞くよりも遙に微力なり、従て真空内に於ては音の強さは零なり、

(iii) 音源より出づる射線の方向制限せらるるときは エネルギー 密度大なり、故に喇叭の形を具ふる管にて發音するか或は聴取るときは エネルギー 密度大なり、(iv) 最後に耳の聴覺の鋭敏度に關することは明かなり。音の強さを計るを目的として今まで種々の音量計 *tonometer* を製造したるも何れも不成功に果れり。

186 フエヒナー則 (Fechner's psycho-physical law, 1859) 音は元來振動なるを以て振動を 刺激 *stimulus* と見做し音を感覺 *sensation* と見做して考ふるときは フエヒナー が發見したる刺激と感覺との關係を表はす法則は次ぎの如し、『感覺は刺激の對數に正比例す』今 C を比例常數とし S =感覺、 R =刺激 とすれば フエヒナー 式は

$$S = C \log R \dots\dots\dots (10)$$

なり、此式は亦 $e^{S/C} = R$ と書くも不可なし、但し e は自然對數の基數とす。刺激は順次に $R=10, 20, 30 \dots\dots$ とすれば感覺は (10) により $S=1, 1.301, 1.477 \dots\dots$ の如く増し決して刺激に正比例して増すものにあらず、之に反し刺激を $R=10, 20, 40 \dots\dots$ の如く倍數に増すときは感覺は $S=1, 1.301, 1.602 \dots\dots$ の如く刺激に正比例して増加するなり。(10) より

$$\frac{dS}{dR} = \frac{C}{R} \dots\dots\dots (11)$$

を得、故に刺激の單位増加に對する感覺の増加は刺激に反比例し、刺激大なる程其増加を大にせざれば感覺は等量に増さざるなり。例へば一滴の水に他の一滴の水を加ふるときは量の二倍となるも、大海に一滴を加ふるは所謂、渺たる滄海の一粟と稱せらるる程に無効なるものなり。又刺激 R' に對する感覺を S' と名づくるときは $S' = C \log R'$ なるを以て (10) 式を減ずれば

$$S' - S = C \log \frac{R'}{R} \dots\dots\dots (12)$$

得、故に二つの刺激の比の對數は感覺の差に比例す、即ち刺激が等比級數をなして増せば感覺は等差級數を以て増加すと云ふを得べし。

フエヒナー則は第二章に論ぜんとする音程、及び光學に於て説かんとする星の光度と其等級とに關係あり、吾人未だ フエヒナー 則を識らざる時既に音程及び光の等級測定に此原理を使用し來りしなり。

第二章 音階 MUSICAL SCALE

187 音程 *intervals* 二音の振動數の比を音程と稱す、二音を同時に聽て快感を催すときは二音の音程は和音 *consonant* なりと稱す、然らざるを不和音 *dissonant* と云ふ、和音不和音を判定するには多少美學 *Aesthetics* に立入らざるべからず、而して美學の法則は生理的心理的要求と不離の關係を有するを以て和音の嚴重なる定義を定むるは難事に屬すと云へども次ぎに示す六個の音程は和音として誰人にも認定さるるところなり

1:1 = 同音又は一度 *unison or prime*

2:1 = オクターヴ又は八度 *octave*

3:2 = 五度 *fifth or dominant*

4:3 = 四度 *fourth*

5:4 = 三度 *third*

5:3 = 六度 *sixth*

此表によれば $3/2 \times 4/3 = 2$ 即ち フエヒナー 則の下に導きたる (12) により五度+四度=オクターヴと書くも可なり、同様に六度=四度+三度なるを知るべし。又 五度-四度= $3/2 - 4/3 = 9/8$ を二度 *second* と稱し、五度+三度= $15/8$ を七度 *seventh*、オクターヴ-六度= $6/5$ を短三度 *minor third*、四度-三度= $4/3 - 5/4 = 16/15$ を長半度 *limma*、三度-短三度= $5/4 - 6/5 = 25/24$ を短半度又は半音 *diesis or semi-tone* と稱す。

188 全音階 *diatonic scale* 泰西音樂に慣用する全長音階 *diatonic major scale* なるものは上記の諸音程を組合せて製造したるものなり、其『長』の名を附したるは短三度なる音程 ($\frac{6}{5}$) を用ひずして長三度 ($\frac{5}{4}$) を用ふるより起る、又『全』の名を附したるは支那、日本、印度、近南洋、埃及、古代希臘等に行はれし音階は一オクターヴ(1-2間)に五音程を含み所謂、五音程音階 *pentatonic scale*

と稱せらるる不完全なる者なるに引換へ、一オクターヴに七音を含み完全無缺なりとの自尊心より出でしものなり。昔者泰西音樂も悉く五音の短音階を用ひしが漸く文藝復興時代を経て次第に長音階に移り同時に五音程より七音程に進歩せり、歐洲諸國は各其發展の赴を異にするを以て之を概説するは難しと云へども今日流行の全長音階を得たるは年尙淺しと評して不可なし、而して短音階 harmonic minor scale は全廢に到らずして今尙寺院音樂 church music として残留せり。之を要するに長三度は之を聽けば人をして勇壯活潑ならしめ進歩と奮闘を連想せしむるも、短三度は其反對に悲憤又は沈痛ならしめ人心を懐舊的態度に導く力ありと云ふ、何故に斯も心理的效果を異にせるかの問題に到りては美學も心理學も共に説明し能はざる事項に屬するならん。全音階(今人は長の字を畧して稱す)は主音 (tonic) C より始まり次表の如く連続す

| | | | | | | | | |
|--------|---------------|----------------|-----------------|---------------|----------------|---------------|-----------------|--------|
| 符號 | C | D | E | F | G | A | H | c |
| 唱名 | do | re | mi | fa | sol | la | si | do |
| 音程 | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{15}{8}$ | 2 |
| 術名 | Prime | Second | Third | Fourth | Fifth | Sixth | Seventh | Octave |
| (隣音音程) | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | |

隣音の音程は二種なり、下に其比を示す

- $\frac{9}{8}$ = 長全音 major whole tone = 1.125
- $\frac{10}{9}$ = 短全音 minor whole tone = 1.111
- $\frac{16}{15}$ = 長半度 limma = 1.067

其他音樂に於て認めらるる音程は

- $\frac{25}{24}$ = 短半度 diesis (半音) = 1.042
- $\frac{81}{80}$ = 長全音一短全音 = comma = 1.013

此裡 コムマ と稱する音程は耳が聴取り得べき最小音程なり、 $\frac{25}{24}$ 及び 其倒數 $\frac{24}{25}$ を夫々 # 及び ♭ の畧號にて表はし之を嬰 sharp 及び變 flat と名づけ、夫々半音高く或は低くすることを示す C,D,E,F ... の如き符號と連用するときは嬰を is 變を es とす、例へば ♯G = Gis, ♭A = Aes の如し 此符號を使用して

全短音階を書くときは

- 上向全短音階 C, D, Es, F, G, A, H, C
- 下向全短音階 C, D, E, F, G, Aes, B, C

となる、但し B=Hes なりとす。

音程は單に振動數の比を示すに過ぎざれば音程又は音階を音樂に應用せんとするに當りては各音の振動數を定めざるべからず、而して任意の音の振動數一旦定まれば全部の振動數決定せらるることとなるなり。之を定むるには男聲の範圍を小オクターヴ minor octave と稱し之を小字 c, d, e, f, g, a, h を以て示す、其よりも低きものを C-H の大字にて示し之を大オクターヴ major octave と名づく、其よりも低音なるを C'-H'、次ぎは C''-H'' の如くす、高き方を云へば小オクターヴ c-h の次ぎは女聲の區域にして e'-h' にて示す、其次ぎを e''-h'', e'''-h''', ... 等にて示すなり。斯く畧定したるのみにては調子變動し易くして樂器製造等に不便を來たすを以て明治十八年(1885) 巴里に於て開かれたる萬國音樂者大會に於て a'=435 と確定せり、音譜にて示すときは次ぎの如し



萬國共通の振動數は下表の如し

| | 最低オクターヴ C''-H'' | 低オクターヴ C'-H' | 大オクターヴ C-H | 小オクターヴ c-h | 一次オクターヴ c'-h' | 二次オクターヴ c''-h'' | 三次オクターヴ c'''-h''' |
|---|--------------------|-----------------|---------------|---------------|------------------|--------------------|----------------------|
| c | 16.31 | 32.62 | 65.25 | 130.5 | 261 | 522 | 1044 |
| d | 18.35 | 36.7 | 73.4 | 146.8 | 293.6 | 587 | 1174 |
| e | 20.4 | 40.78 | 81.56 | 163 | 326 | 652.5 | 1305 |
| f | 21.7 | 43.5 | 87 | 174 | 348 | 696 | 1392 |
| g | 24.4 | 48.9 | 97.9 | 195.7 | 391.5 | 783 | 1566 |
| a | 27.2 | 54.4 | 108.7 | 217.5 | 435 | 870 | 1740 |
| h | 30.6 | 61.2 | 122.5 | 245 | 489 | 979 | 1957 |

一般に古代音樂亦東洋音樂は所謂、單音音樂にして旋律 melody の美を愛すれ

ども近代音楽は旋律の外に復音の調和 harmony を重要視す、即ち旋律は時間的に前後する音の和音 consonance にして調和は同時に生ずる諸音の和音なりと云ふを得べし、而して西人が調和を好む結果として歌聲も必ず之に伴奏 accompaniment を附せしめ、或は高音低音合唱し、器樂 instrumental music に於ては單狐の樂器を用わず絃樂器の四部合奏 string quartet あり、吹奏樂器 wind instrument の殆ど全部を網羅する軍樂あり、甚しきに到りては大管絃樂 symphony-orchestra と名づくるものの如きは諸種の樂器の殆ど全部を一所に集めて同時に演奏し、百音雜生、喧噪之れを極む、之を評して美となすは吾人東洋人の到底了解する能はざるところなり。

和絃 chords と稱する和音は數音を同時に鳴らすものなり、和絃を大別すれば長和絃 major chords 短和絃 minor chords の二種となる、長和絃の一例は C, E, G の如く長三度を基礎となし振動數の比は 4:5:6 なり、短三度を基礎となせる短和絃は E, G, H の如く 10:12:15 の比を有す。

126 加減音階 temperament 全音階の各隣音間の音程を吟味すれば二種の全音と長半音とより成立し C より e までの間に全全半全全半の如く配列せらる、故に一の樂器に於て C を主音 tonic とせずして他の音例へば D を主音とするときは DE 間は $\frac{9}{8}$ にあらざるを以て EF の間に一の音を新しく設けざるべからず、斯の如く順次に新音を添加し漸く d に到りて一オクターヴを果はるべし、其他の任意の音を主音となし得んがためには數多の新音を一オクターヴ内に設けることとなりて樂器製造に大困難を生ずるのみならず演奏する音樂者も迷惑の極度に達すべし、是れ畢竟音樂者が自由に調 key を變更して演奏せんと欲する請求の存在より來る患にして此請求を充たさんがために長き音程を消り短き音程を伸ばして、自然の理に背きたる加減音階を編出するに到りしなり。

加減音階に數種あり其程最も自然に接近せるは ボザンケ の五十三輪音 (Benquet's cycle of fifty-three) と稱せられ其實 マケーター (Mercator 1675) の創意に係るものなり、之は一オクターヴを五十三に等分して作りたるものにして此法によれば長全音、短全音、長半音の區別も判然とし音の誤差は常に百分の

一よりも小なり、田中正平氏 (1890) は之に應ぜる樂器を製出せりと云ふ。之に反し最も不自然にして然かも一般に流行せる加減音階は等音程音階 equal temperament と名づけらるるものにして之は一オクターヴを十二等分し長全音と短全音を同一視し半音を全音の二分の一となす (二分の一とは振動數にて云へば平方根に相當す)、従て半音 $=\sqrt[12]{2}$ 、全音 $=\sqrt[6]{2}$ と見做して音程を編成す、自然音程との比較は次表に示す如く三度に於て誤差最大なり。

$$\begin{array}{l} \text{半音} \left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{15} = 1.06666 \\ \frac{25}{24} = 1.04166 \\ \sqrt[12]{2} = 1.05945 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{三度} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{4} = 1.25000 \\ \sqrt[3]{2} = 1.25992 \end{array} \right. \\ \\ \text{四度} \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} = 1.33333 \\ \sqrt[4]{2} = 1.33484 \end{array} \right. \\ \\ \text{全音} \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{8} = 1.12500 \\ \frac{10}{9} = 1.11111 \\ \sqrt[2]{2} = 1.12246 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{五度} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} = 1.50000 \\ \sqrt[5]{2} = 1.49831 \end{array} \right. \end{array}$$

下表に十二音階の振動數を示す

| | C''-H'' | C'-H' | C-H | e-h | e'-h' | e''-h'' | e'''-h''' |
|-------------------------|---------|-------|-------|--------|--------|---------|-----------|
| c = 1 | 16:16 | 32:33 | 64:66 | 129:32 | 258:65 | 517:3 | 1034:4 |
| d = $2^{\frac{2}{12}}$ | 18:15 | 36:29 | 72:58 | 145:16 | 290:32 | 580:65 | 1161:2 |
| e = $2^{\frac{4}{12}}$ | 20:37 | 40:73 | 81:47 | 162:94 | 325:88 | 651:76 | 1303:5 |
| f = $2^{\frac{5}{12}}$ | 21:58 | 43:16 | 86:32 | 172:63 | 345:26 | 690:52 | 1381 |
| g = $2^{\frac{7}{12}}$ | 24:22 | 48:44 | 96:88 | 193:77 | 387:54 | 775:1 | 1550 |
| a = $2^{\frac{9}{12}}$ | 27:2 | 45:4 | 108:7 | 217:5 | 435 | 870 | 1740 |
| h = $2^{\frac{11}{12}}$ | 30:5 | 61 | 122:1 | 244:2 | 488:27 | 976:4 | 1953 |

上述の十二音階は現今専ら行はるるところの音階にして加減音階中最も不自然不合理なるものなれども亦同時に最便利なるを以て器樂聲樂悉く之に據て演奏す。総べての有鍵樂器 keyed instruments は此音樂に基づきて製出されたるも

のなれば各音の間に真の和音無きは云ふまでもなく却て不快なる唸聲を發す、而して聲樂も樂器を使用して練習せらるるを以て今日の聲樂家の歌聲は大概美學の基礎法則に違反するものと評して可なり、然れども絃樂器の大家又は聲樂の妙手 virtuoso 中には克く自然音階に於て演奏し従て音樂の學理に叶ひ美學の要求を充たし藝術の眞價を發揮し得るものあり、例へば キオリーノの大家 ヨアヒム (Joachim 1831-1907) の如きは ヘルムホルツの記録によれば常に自然音階に於て演奏したりと云ふ、(吾邦箏の琴、三味線は五音階にて奏するものなれども調音法 intonation は全く自然音程に従ふ)。

第三章 發音体の振動 VIBRATION OF SOUNDING BODIES

190 絃の振動 σ の力を以て兩端を緊張せる絃は

$$V = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

の速度を以て波動を傳播せしむることは §164 に於て既に學びしところなり、絃の長さを l とすれば波が l を往復する時間は一週期 T にして振動數 n は $n=1/T$ によりて與へらる、故に

$$n = \frac{V}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \dots\dots\dots (1)$$

之をメルサンヌ、テラーの法則 (Mersenne 1630, Taylor 1713) とす、分れて次ぎの三法則となる、

- 第一、振動數は絃の長さに反比例す
- 第二、振動數は張力の平方根に正比例す
- 第三、振動數は單位長の質量の平方根に反比例す、

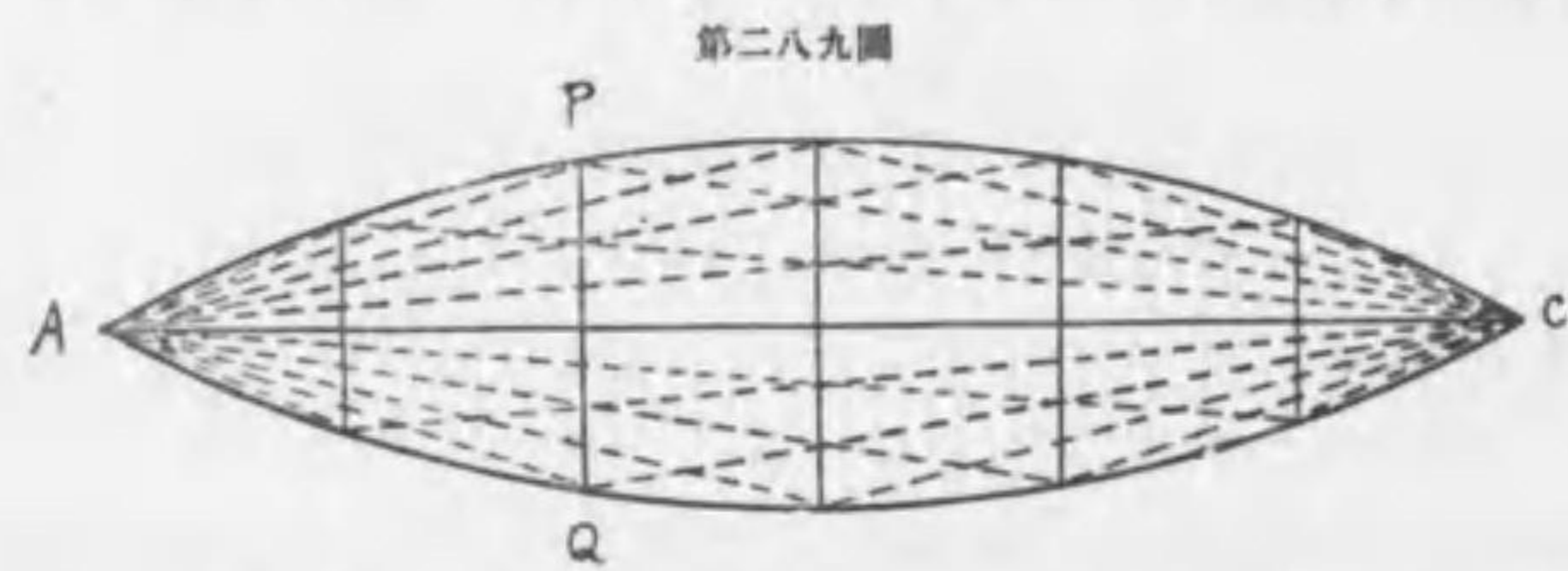
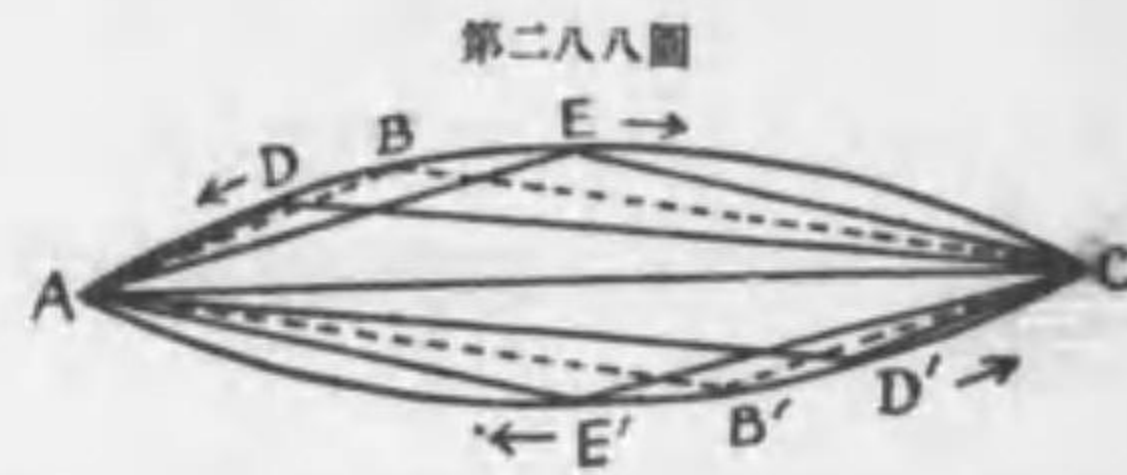
又絃を細長なる圓柱と見做し其半徑を r とすれば断面 πr^2 なるゆへ之に比重 σ を乘じ $\mu = \pi \sigma r^2$ を得、之を (1) に代用し下式を得

$$n = \frac{1}{2lr} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi \sigma}} \dots\dots\dots (2)$$

絃樂器 string instruments は吾邦に其種類甚多し一絃琴、八雲琴、三味線、胡弓、月琴、琵琶、箏の琴の如し、外國には キオラ 系の四種の外に立琴、ピアノ、ギター、バラライカ、バンジョウ、マンドラ 系の如し、多くは印度の ラベブを祖形となす。之を奏するには或は指端或は撥 plectrum 或は弓 bow を用ふ、調音は絃柱 bridge によりて長さを加減するものあり、或は張力を變化するものあり、皆メルサンヌ、テラー 則に従ふなり。

ヘルムホルツ (Tonempfindungen 1862) はキオリノを用ひて絃の振動を研究せり、弓を以て絃を摩すれば絃は最初 第二八八圖 ABC 三角形をなし弓より離るるや直に ADC, AEC なる

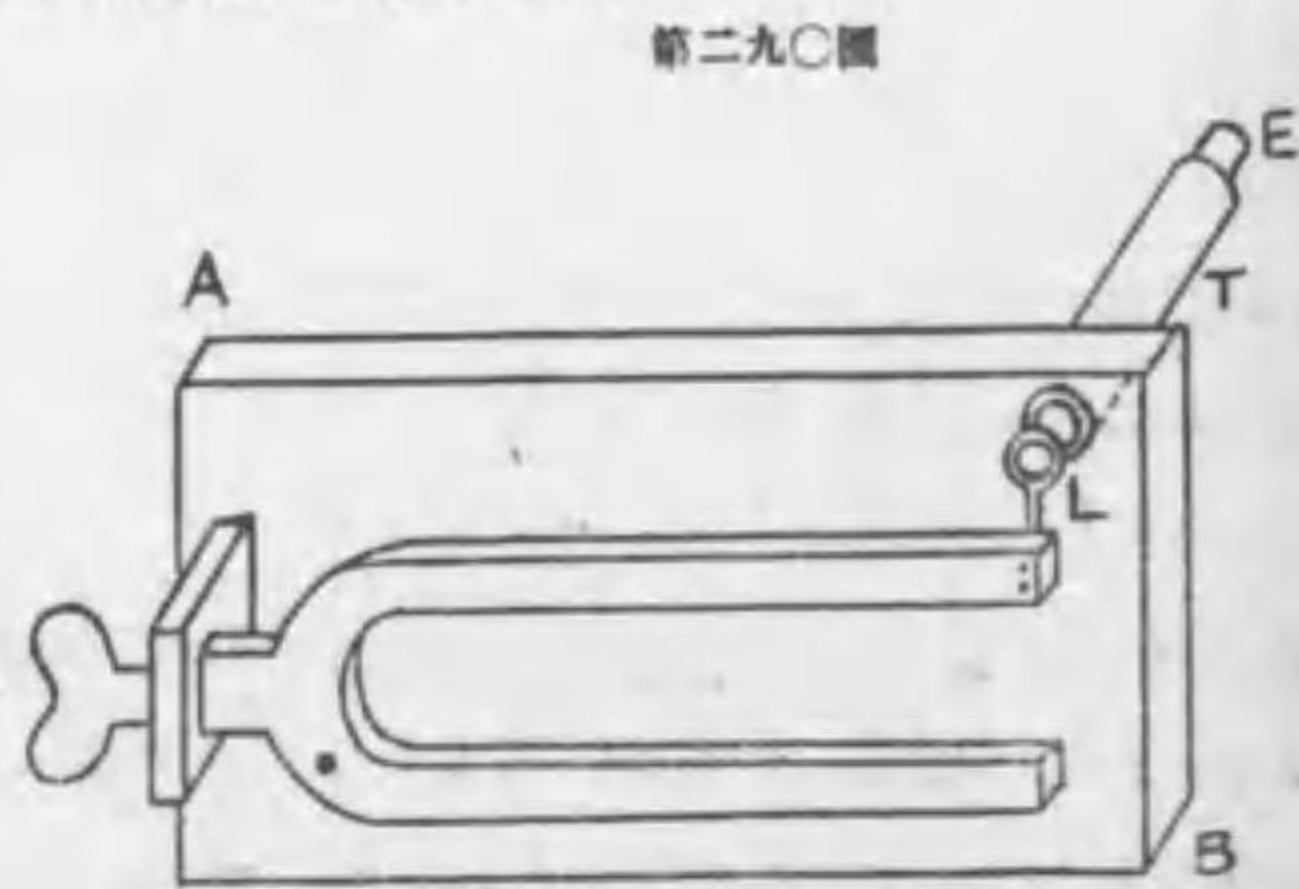
二つに分れて各々反射に進行し、夫々 A 及び C に於て反射して波は下向し半週期後に AB'C に於て合併すべし、其後 AB'C は ADC, AE'C に分れて各々反対の方向に等速運動を繼續して遂に ABC の最初の位置に歸る、之を一週期となす。而して此等三角形の頂点が書く軌道 ABC 及び CB'A は各々拋物線の一部を形成す。ヘルムホルツは振動顯微鏡 vibration microscope を創意し絃の振動を検査し絃の各点は絃に垂直に等速運動をなし決して弦運動を營むものにあらざることを確定せり、故に任意点 P (第二八九圖) の



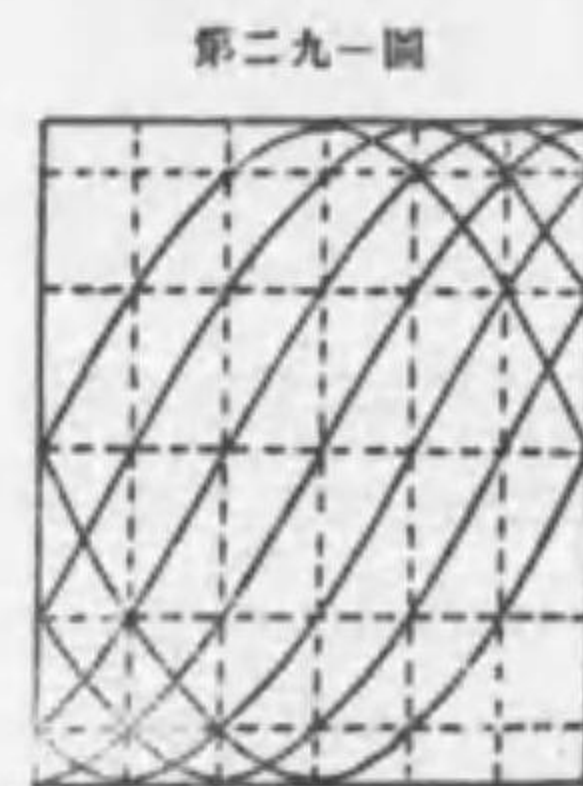
運動は絃に垂直なる直線 PQ 上に等速なるを以て

PQ を任意に等分し各等分点を過り A 及び C より直線を引き他の AC に垂直なる直線との交点を求むるときは之を連結する曲線は APC, AQC の拋物線となり $\tan PAC$ は時間的に等速に變化するものなり。

ヘルムホルツの振動顯微鏡は 第二九〇圖の如く水平に AB 板上に固着したる音叉ありて其枝の端に L なるレンズを携へ絃の振動は L を經て T なる小望遠鏡を通じて E に在る眼に映ずるなり。絃

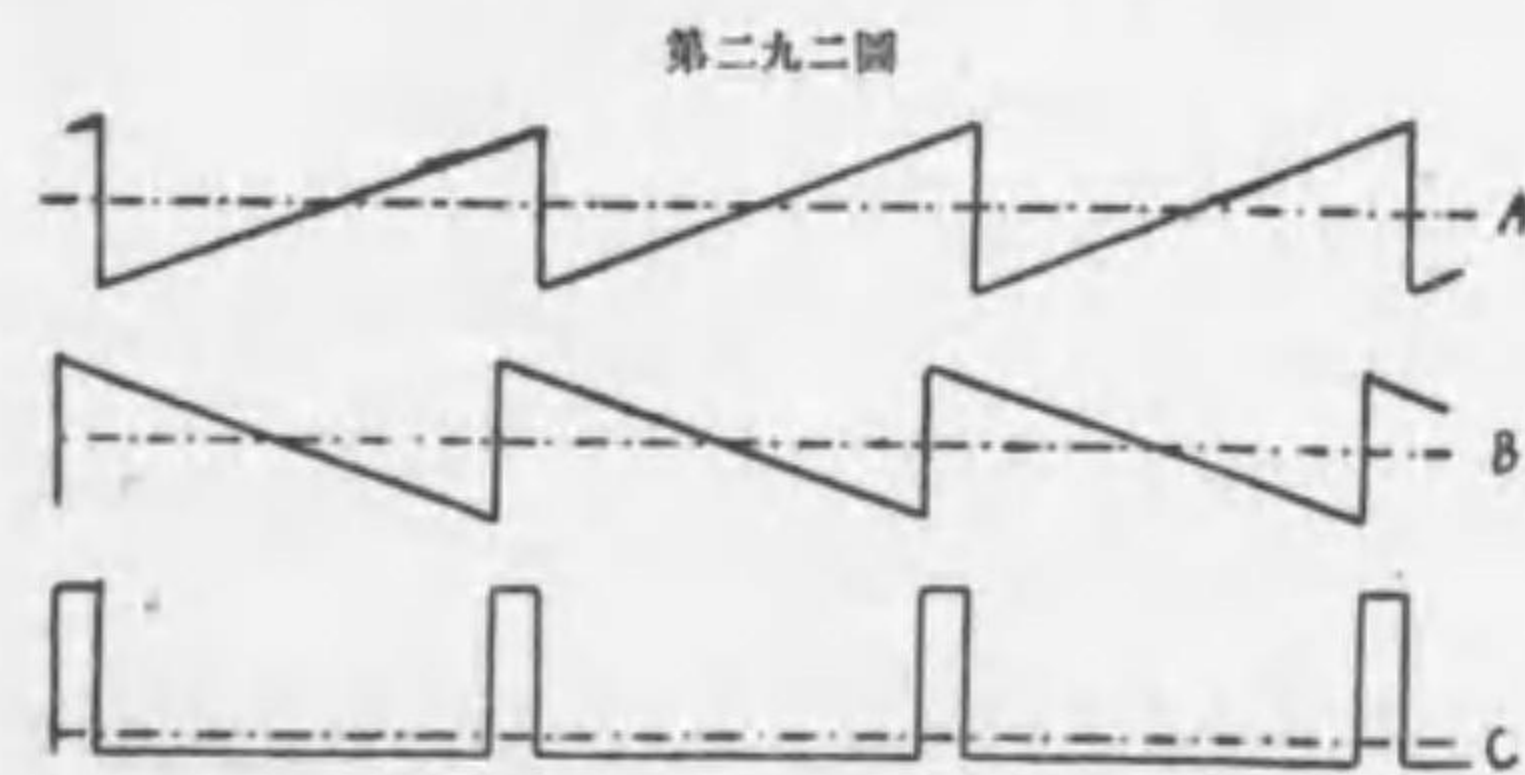


を上下に張り絃上に白点を附着し置くときは E より眺むれば音叉振動のために白点は恰も上下に弦運動をなす如く視ゆべし。今絃の振動數と音叉の振動數とを同一ならしめ絃も音叉も同時に振動せしむるときは 第二七九圖の第一列の如く互に垂直なる同週期の弦運動合成として直線若くは楕圓運動を生ずる事なく、音叉の弦運動と絃の等速運動の合成として 第二九一圖に示す如き曲線を得べし、



即ち最初は積分記號の如き形も次第に加はる位相の差のために其幅を廣くし位相角 $\pi/2$ の時曲線は開放したる口の如き形を呈し其より次第に反側の逆の順序を通過し位相角 π の時反側に傾きたる積分記號の如くなるなり、此等の曲線及び變化は振動顯微鏡に依りて容易に觀察するを得べし。

樂器に於ては絃は常に共鳴板上に緊張せらるるが故に絃の位置が 第二八八圖の ADC の如くなるときは絃に沿ふて働く張力が共鳴板 AC に與ふる壓力は $\sin DAC$ なる分力に等し、然るに角小なるを以て壓力を $\tan DAC$ と置くも不可なく從て壓力は時間に正比例して等量に増減し D 点が A に接近するときは A に於ける壓力は時間に從て等量に増し D が A より遠ざかるときは壓力は等量に減ず、而して A 点に到着したる三角形の波は突然 A 点に於て反射するを以て壓力も突然其符號を變更すべし、故に三角形 D の運動によりて A 点に與ふる壓力の變化は 第二九二圖 A



によりて示すことを得、キオリノの如く絃長の十分の一の處を摩絃して發音せしむる場合を考ふるに波の最初の形は第二八

八圖 ABC の如く AB:BC は約 1:9 なり從て ABC が分れて ADC と AEC になりたる時 ADC が A なる絃柱に與ふる壓力は A 圖によりて示され、AEC

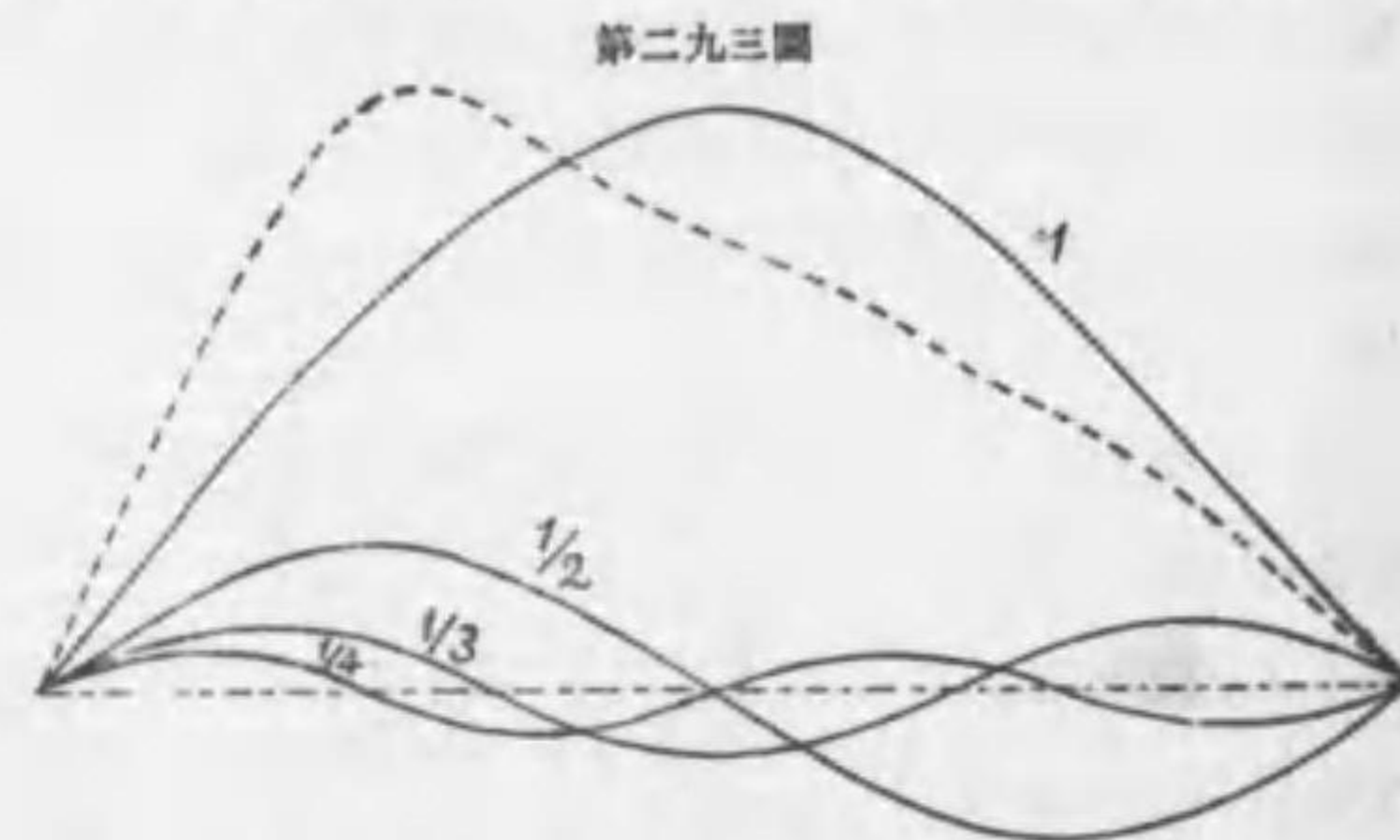
が絃柱に與ふる壓力は B 圖によりて表はさる、而して合力は C 圖に示す如く週期的に突然其符號を變ずる定壓となるを見るなり、上説明に於て總て引張力を正壓と見做したり、第二九二圖は凡そ三週期間の壓力變化を示す圖なり、締部 (nut or saddle) に作用する壓力變化の曲線は C の倒圖によりて表出せらる。

191 倍音 over-tones 樂器が発音するときは其音の調子は基音 fundamental tone と名づけられたる最低音の振動數によりて定まるものにして其實數多の倍音なるもの共生して基音に伴ひ以て樂音に樂器固有の音色 timber を與ふるものなり、然れども倍音の強さは一般に薄弱にして著明ならざるがため注意して之を聴くにあらざれば其存在を認識し難し、而して一度練習を経れば基音の外に三四の倍音を算へ得るのみならずピアノの細き針金の場合には 18 個の倍音を算へ得ることありと云ふ、又絃の一端に近き点を撃ち若くは摩擦して發音せしむれば倍音のみ力強くして基音は殆ど聞へざるなり。

倍音を生ずる原因は振動体が全体として振動するために部分的振動 partial vibrations をなすが故なり。絃の場合には全長の振動は基音を發し、 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ に分れて振動するものは第一次、第二次、第三次……の倍音を生ず、從てメルサンヌの法則により基音の 2 倍 3 倍 4 倍……の振動數を有すべきなり。第二九三圖は基音及び

第一、二、三倍音に相當する振動を示す、点線は即ち其合成にして其形の既に第二八八圖の ABC 三角形に近似せるを見るべし、即ち絃に沿ふて三角形の頂点が移動するは畢竟無數の部分的莖運動に分解し得べきものなることを教示するなり。

絃の部分振動は定波波動なるを以て第二七二圖 (§ 175) に對する (55) 式によりて表はすことを得べし、故に基音の振動を



$$y_0 = \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{T} \dots\dots\dots (3)$$

を以て示すときは第一倍音は $l/2$ が全体として振動し週期は $T/2$ なるを以て

$$y_1 = \frac{1}{2^2} \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2 \cdot 2\pi t}{T} \dots\dots\dots (4)$$

第二倍音は

$$y_2 = \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3 \cdot 2\pi t}{T} \dots\dots\dots (5)$$

順次に斯の如くなるを以て合成變位は

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots\dots\dots = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{2\pi m t}{T} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

なるフーリエ級數 Fourier series によりて表はされ、其和を求むるときは一個の三角形の式を得べし、故に第二九三圖に点線を以て示したる合成波は (3) が與ふる項を残らず加算することによりて遂には三角形となるなり。又茲に生ずる音は基音を c とすれば $c, c', g', e'', e'', g'', b'', e''' \dots$ に相當す、但し $b = \text{hoso}$ 。

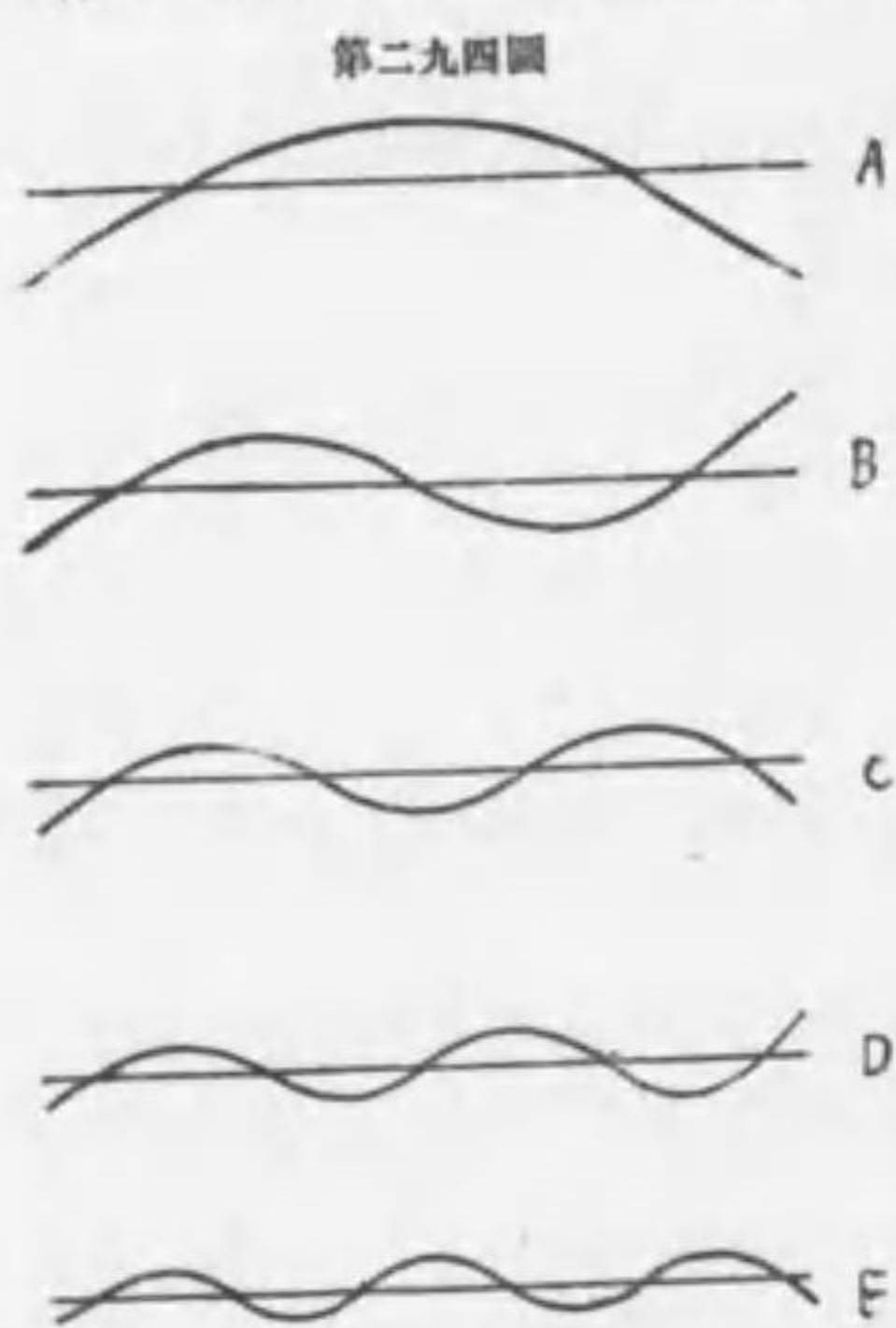
第二九三圖によりて明なる如く第一倍音の振動は中央に一個の節 node を有し第二倍音は二個、第三倍音は三個を有す、故に絃を振動せしむるために絃の中央を撃ち又摩擦したる場合に於ては中央の節は欠ぐることとなるを以て中央に節を有すべき總べての振動は全然缺如する理なり、換言すれば基音の 2, 2×2, 2×3 … 倍の振動數を有する部分振動は欠ぐるなり、之を概説すれば絃を n 等分する点を撃ち若くは摩擦して發音せしむるときは基音の振動數の 整數× n 倍の振動は悉く欠乏すべし、此をヤングの法則 (Young 1800) と稱す。

此法則に従ひピアノに於ては基音の不和音なる第六倍音 (七倍の振動數を有す) を避けんがために絃の全長の $1/7$ の点を木鍵にて撃ちて發音せしむることに定まれり。

192 棒の振動 (Euler 1779, Chlani 1796) 棒の振動は極めて複雑なり、今 x を棒の方向に計り y を横振動の變位とすれば最簡なる運動方程式も

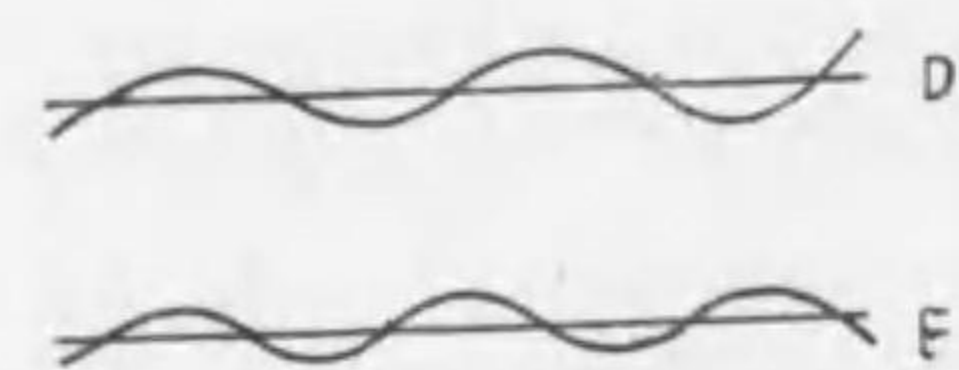
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 \cdot \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (7)$$

の形を有し従て其解は簡単ならず、茲に E =弾性率、 σ =比重、 k =慣性半径なり。



棒の断面積一定なる場合には其自由振動は第二九四圖に示す如く少くとも二個の節を有す棒の全長を l とすれば左端より計りたる節の位置は

- A 圖: 0.224, 0.776
- B 圖: 0.132, 0.500, 0.868
- C 圖: 0.094, 0.358, 0.642, 0.906
- D 圖: 0.073, 0.279, 0.500, 0.721, 0.927
- E 圖: 0.060, 0.228, 0.409, 0.591, 0.772, 0.940



なり。棒の一端を固定して横振動をなさしむれば第二九五圖の如く A は基音に相当し B 以下は倍音に相当す、節の距離は

- A: 0
- B: 0, 0.774
- C: 0, 0.500, 0.868
- D: 0, 0.356, 0.644, 0.606

振動数の公式は D を或常数とすれば第二九四圖の如き自由振動の場合に限る

$$n = \frac{D}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \dots \dots \dots (8)$$

なり茲に l は棒の全長にして常数 D は棒の断面が圓形なるときは其直径に正比例す、断面が矩形にして振動の方向に於ける厚さを d とすれば D は d に正比例し決して之に垂直なる方向の厚さ(即ち幅)に關係することなし。倍音の振動数は甚だ不規則にして和音ならず、然れども第二倍音以上は畧近的に又第五倍音以上は殆ど嚴密に奇数の平方に正比例すと見て可なり、即ち下表の如し

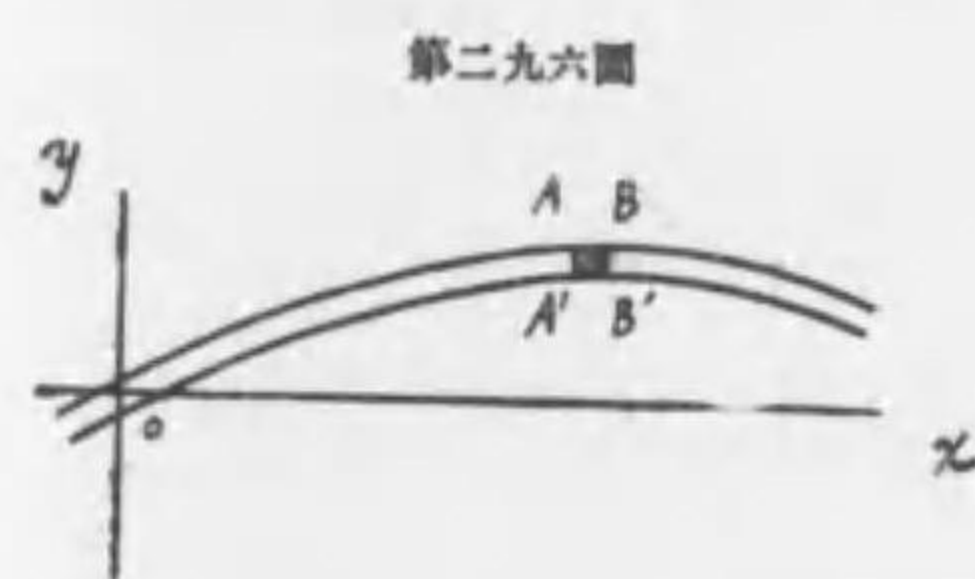
| 基数 | 第一倍音 | 第二倍音 | 第三倍音 | 第四倍音 |
|----|------|------|------|-------|
| 1 | 2.76 | 5.39 | 8.92 | 13.32 |

第二九五圖の如く一端固定せる場合に於ては振動数の比は次表の如し

| 基数 | 第一倍音 | 第二倍音 | 第三倍音 | 第四倍音 |
|----|------|-------|-------|-------|
| 1 | 6.26 | 17.54 | 34.38 | 56.84 |

棒に近似したる樂器は木琴 xylophone の如きあり又後節に説かんとする音叉 tuning fork も棒の曲りたるものなり、其他風琴 harmonium オボエ oboe クラリネット clarinet の舌(簧 reed) も一種の棒なり。

(7) 微分方程式を導くには先づ xy の二軸を引き(第二九六圖) x 軸に沿ふて



棒を置き之を振動せしむれば各分子は上下に η の變位をなし最初 x 軸と一致せし棒の断面片重心の軌跡(之を心軸と名づく)は今振動曲線を呈す、初め起点より x の距離にありし断面 AA' の現在の距離 OA を s と置き

AA' の變位を η とし其隣の断面 BB' の變位をと $\eta + d\eta$ すれば棒の心軸線の切線が x 軸となす角の正切(tangent) $d\eta/ds$ は畧近的に其角自身に等し、之を §96 に於て説きたるところに比較すれば $d\eta/ds$ は ϕ に等しく、従て断面 AA' に作用する能率は同節論じたるところにより

$$\frac{Ebt^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2}$$

によりて表はさるべし、今此能率を J を以て示すときは断面 BB' に作用する能率は微分法の常則に依り $J + \frac{\partial J}{\partial s} ds$ なり故に $AA'BB'$ に作用する合力は其差 $-\frac{\partial J}{\partial s} ds$ となる。今又棒の心軸線に沿ふて働く張力を τ とすれば τ を y 軸の方向に分解したる分力は $\tau \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} \cdot ds$ なるを以て

$$-\frac{Ebt^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = \tau \frac{\partial \eta}{\partial s}$$

を得、然るに $AA'BB'$ の容積は $l b ds$ にして質量は $l b \sigma ds$ なるを以て之に加速度 $\partial^2 \eta / \partial t^2$ を乗すれば力を得べし、而して $AA'BB'$ の AA' には $\tau \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s}$ の力作用し BB' には $\tau \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} (\tau \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s}) ds$ が働くを以て其合力は $\frac{\partial}{\partial s} (\tau \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s}) ds$ に等しく従て

$$16\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2}$$

を得、此二式より σ を消去し $\eta=y, s=x$ と置くときは (7) 同一なる方程式を得、即ち

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{f^2}{12} \cdot \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

爰に説きたるは矩形断面を有する棒の場合なれば $k^2 = \frac{f^2}{12}$ なり。

193 音 叉 (John Shore 1711) 音叉の力学的研究は甚困難なり、音叉には支柱附属し居れども一個の棒を曲げたるものと見て不可なく、曲げたるために節は第二九七圖に示す如く次第に接近したるものなり、音叉の實驗的研究の記録も極めて少数にして殆どメルカヂエー

第二九七圖



(Mercadier 1873) の研究の外に稱揚すべきものなし、音叉の振動数は振動の方向に於ける厚さには関係あれども共に垂直なる幅の大小には無関係なり、振動数は畧近的に厚さ d に正比例す、又節を起点として計りたる長さを l とすれば l に或常数 λ を加へたるものの平方に反比例す、 δ を或常数とすれば精確なる經驗式 (empirical formula) は

$$n = k \frac{d + \delta}{(l + \lambda)^2} \dots\dots\dots (9)$$

にして茲に $k=818000, \lambda=3.8, \delta=0.5$ (單位は耗を用ふ)

振動数は温度に随ふて少許の変更あり、是れ温度上れば音叉は膨脹し同時に弾性率減ずるによるものにして温度上ると共に一般に振動数は其に正比例して減少す其經驗式は

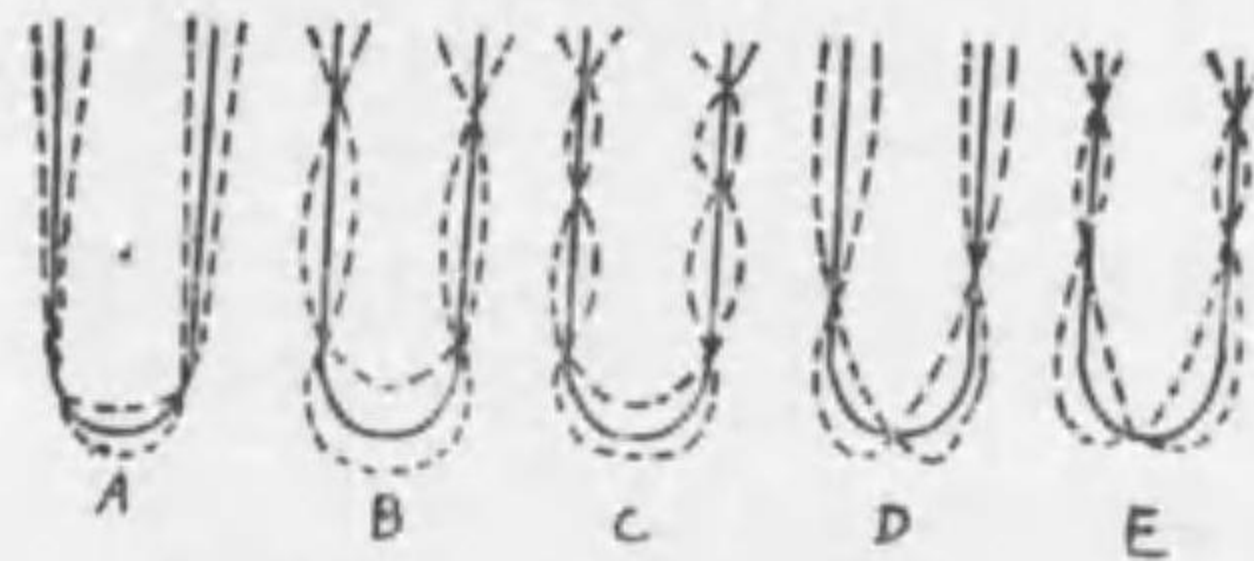
$$n = n_0 \left(1 - \frac{\theta}{10000}\right) \dots\dots\dots (10)$$

茲に n_0 は温度零度の振動数にして θ は温度なり。又音叉を調音して振動数を増さんと欲せば枝端を繼にて削り、調子を下げるには中部を滑るべし。

音叉は部分振動をなせども其エネルギー弱くして發音後間も無く部分振動は

減退して基音のみ永く残るなり。部分振動は二種に分れ第二九八圖 A, B, C の

第二九八圖



如く左右對稱なるものと D, E の如く對稱を缺ぐものとあり、何れの場合にも其底部に附着せる支柱に振動は傳はり支柱の振動は共鳴箱に傳はり遂に箱中の空

氣に定滯波を起さしむ、此と同時に支柱も一種の横振動をなし得るものなり。クラドニの實驗によれば軽く音叉を撃ちて生じたる音の振動数の比は 1, 6.2, 18.3, 35, 58 にして悉く不和音なり。

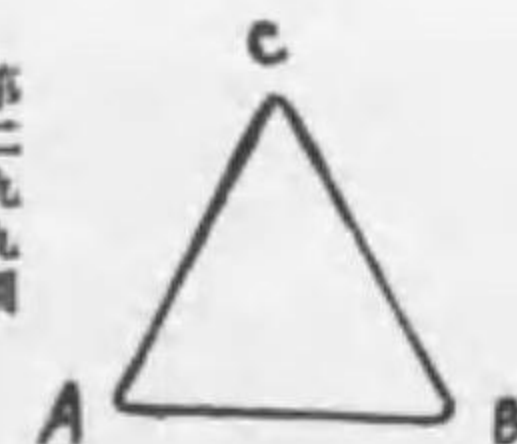
電流によりて電磁力を生じて音叉を發音せしむれば調子は常に低下し振動数の減少は電流の強さの平方に正比例す。

音叉を共鳴箱に附着して振動せしむるに當り共鳴箱の振動数 n' が音叉の振動数 n に等しきときは振動を繼續する時間が共鳴箱無きときに較べて短縮するのみにして他の影響を生ぜざれども、 $n' > n$ のときは音叉振動数の變化 \dot{n} は $\dot{n} > 0$ にして $n' < n$ のときは $\dot{n} < 0$ なり。今 $n=256$ なる音叉を取り種々 n' を異にせる共鳴箱上に附着したるに音叉は單獨に 90 秒間振動を繼續する力あれども振動時間 T は共鳴のために著しく減少して共鳴完全なる時は $T=0$ 秒となれり、其他の場合には下表に示すが如し

| n' | T | \dot{n} |
|------|------|-----------|
| 218 | 80 | + 0.0055 |
| 243 | 30 | + 0.0165 |
| 256 | 8-10 | 0 |
| 273 | 22 | - 0.0290 |
| 307 | 70 | - 0.0085 |

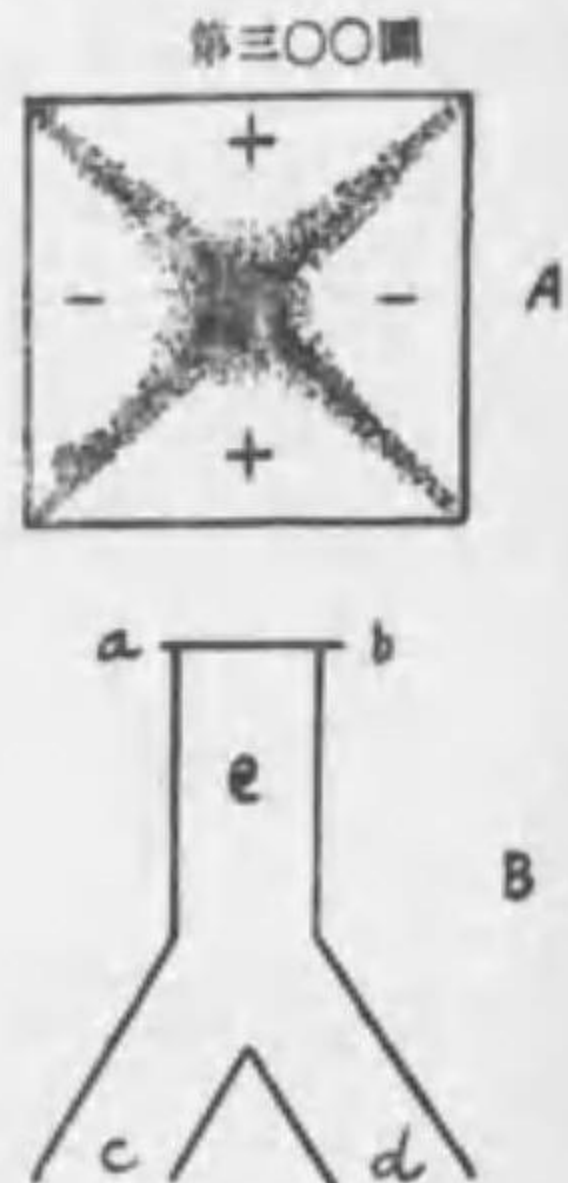
音樂隊が用ふる音角は之を撃てば不和音連發して噪音を生ずれども其一角 A (第二九九圖) を固定し一邊を三角形面に垂直に弓を以て摩するときは BC 邊に一個の音を生じ AB, AC には四個乃至六個の音を生

第二九九圖

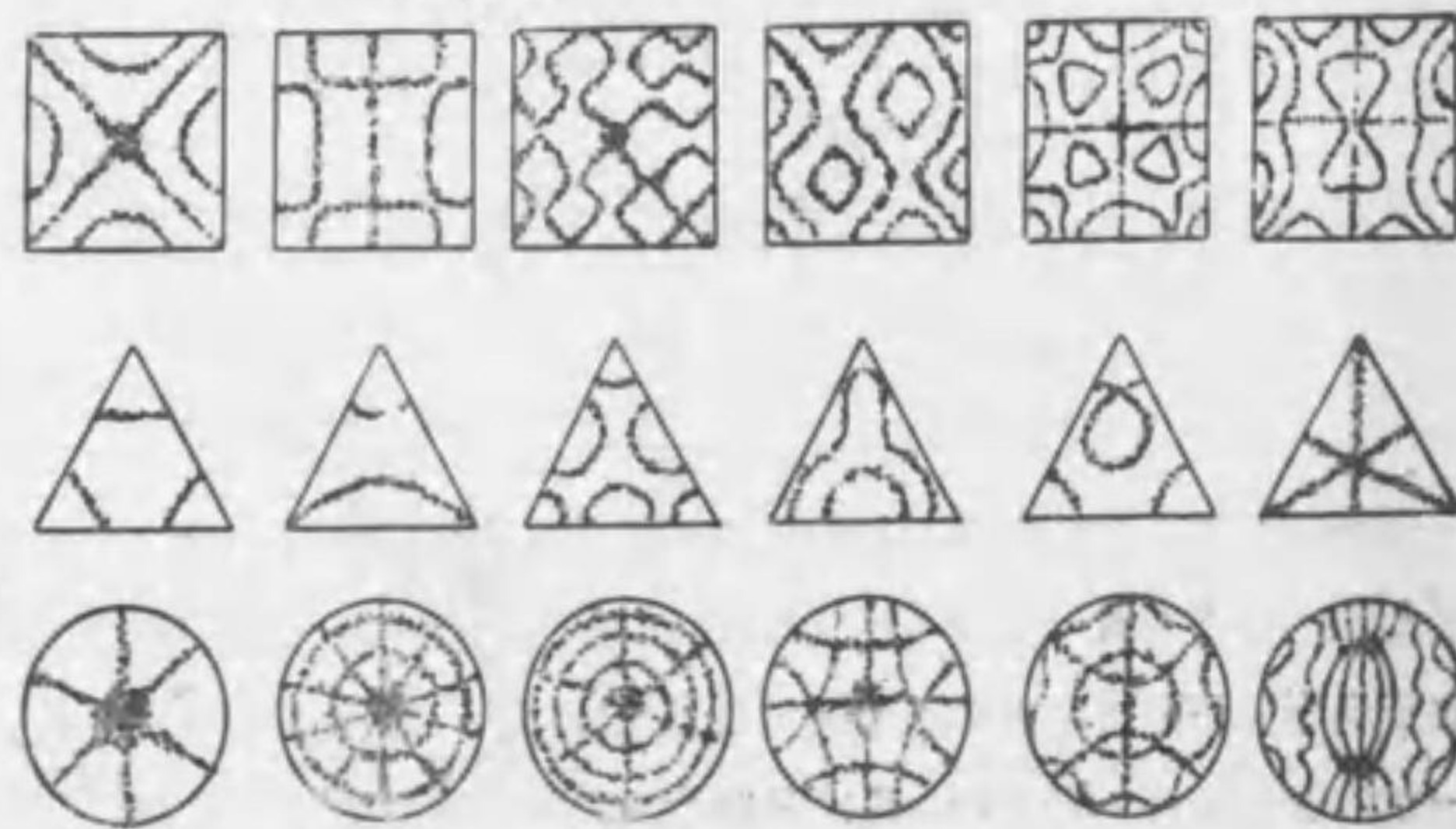


ずべし。報時柱時計の發音器は螺旋 (spiral) をなし其調子は針金の長さ太さによりて異なり。其振動の様は殆ど一端固定したる直線の針金の振動と同一なり。

194 板の振動 板の振動を力學的に研究するは棒の振動よりも一層困難なり又正方形、圓形、乃至三角形の中心を固定して生ずる振動の様は昔時クラドニ (Chladni 1789) 研究以來殆ど何等の進歩ありしを聞かず。正方形板の最簡單なる振動は其中点を固持し樹脂を弓に塗着けて其一邊の中心を摩するに在り、**覆め**砂を板上に散布し置くときは砂は振動せざる場處に集まるものと思せらるるなり、通常之を節線 nodal lines と稱す、其形は 第三〇〇圖 A に示す如く各節線によりて區分せられたる隣區は互に反對に變位して振動す、故に若し B 圖干涉管の頂に雲母片を載せ砂を散布し兩枝端 c, d を夫々振動板の隣區の上に支ふるときは干涉の結果 e 部の空氣は振動することなくして ab 上の砂は靜なれども振動板の中心を隔つる兩區の上に夫々 c, d を支へ持つときは兩振動の位相一致するを以て e の空氣は振動し ab 上の砂は動揺するを見るべし。1809 年クラドニはナポレオン帝の面前に於て板の振動の實驗を演



第三〇一圖



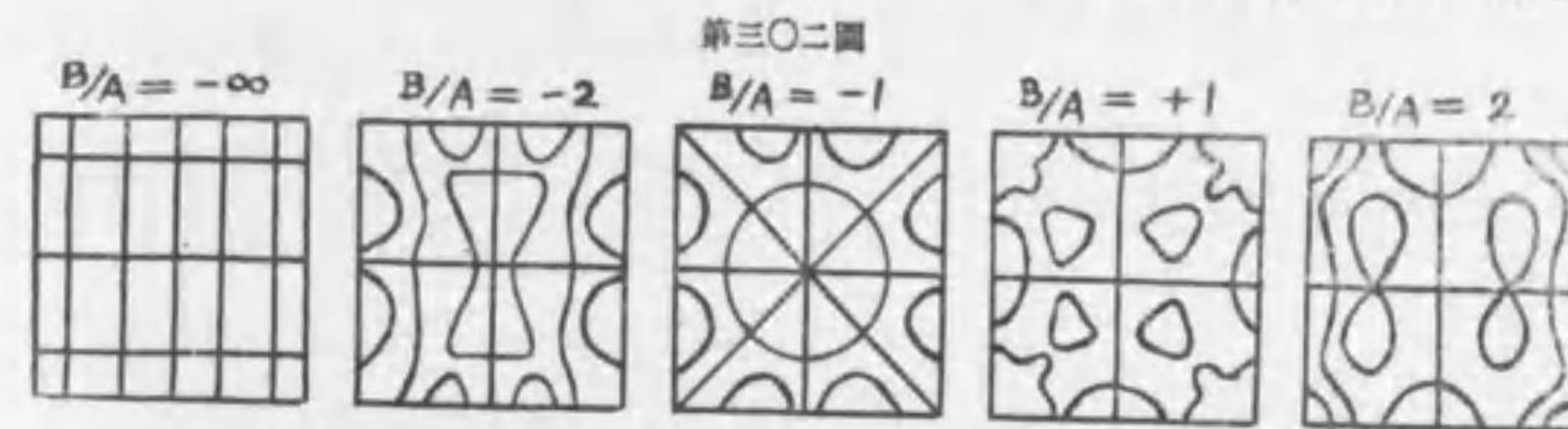
ぜしに帝は直に其數學的研究論文に對して賞金を與へんとを勅令せり、賞金は遂

に婦人數學者ソフキ、ゼルマン (Sophie Germain 1776-1831) の手に落ちたりき。

正方形、圓形、正三角形の中心を固定し指端を軽く板の表面若くは一邊に觸れつつ弓を運用して振動せしむるときは 第三〇一圖 に示すが如き種々の節線の様を得べし、之をクラドニの圖形 (Chladni's figures) と稱す。田中正平氏は (1887) 正方形の場合に生ずるクラドニ圖形を數學的公式によりて表はさんと欲し板に垂直なる變位を

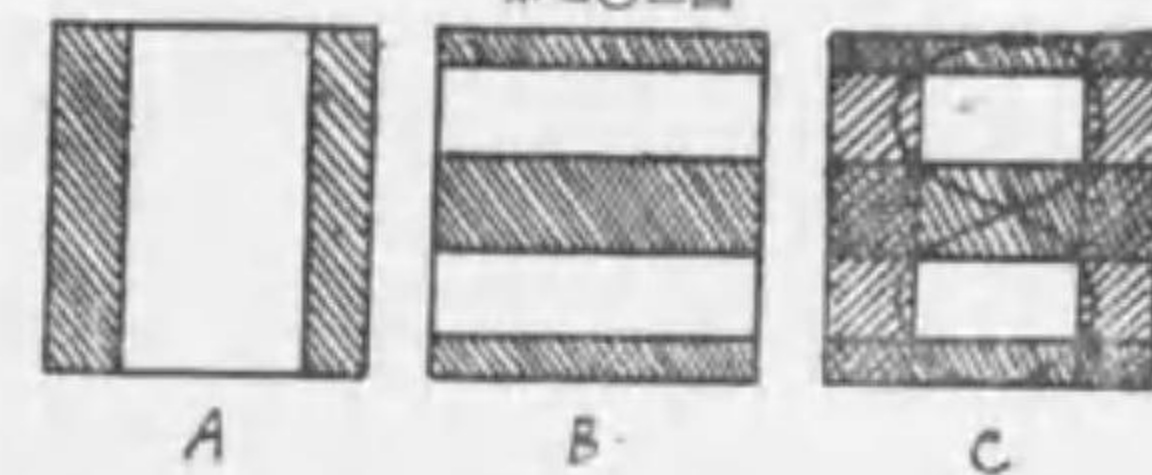
$$\eta = A \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{l} + B \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi y}{l} \dots\dots\dots (11)$$

と假定せり (l は正方形各邊の長さ、xy は正方形の一角を起点とす) m=3, n=7 と置くときは B:A が夫々 -∞, -2, -1, +1, +2 なる場合に次ぎの圖形を得べし (第三〇二圖)、此圖形は實驗によりて得たる節線の形と全く一致す。



第三〇三圖

又ホイートストン (Wheatstone 1833) の簡易説明法に依れば板は 第三〇三圖 A, B の如く横方縦方に振動し得るものにして其合成振動として C の如き節線



を生ず、即ち C の曲線は兩種振動の節線の交点を連絡して得たるものなり。

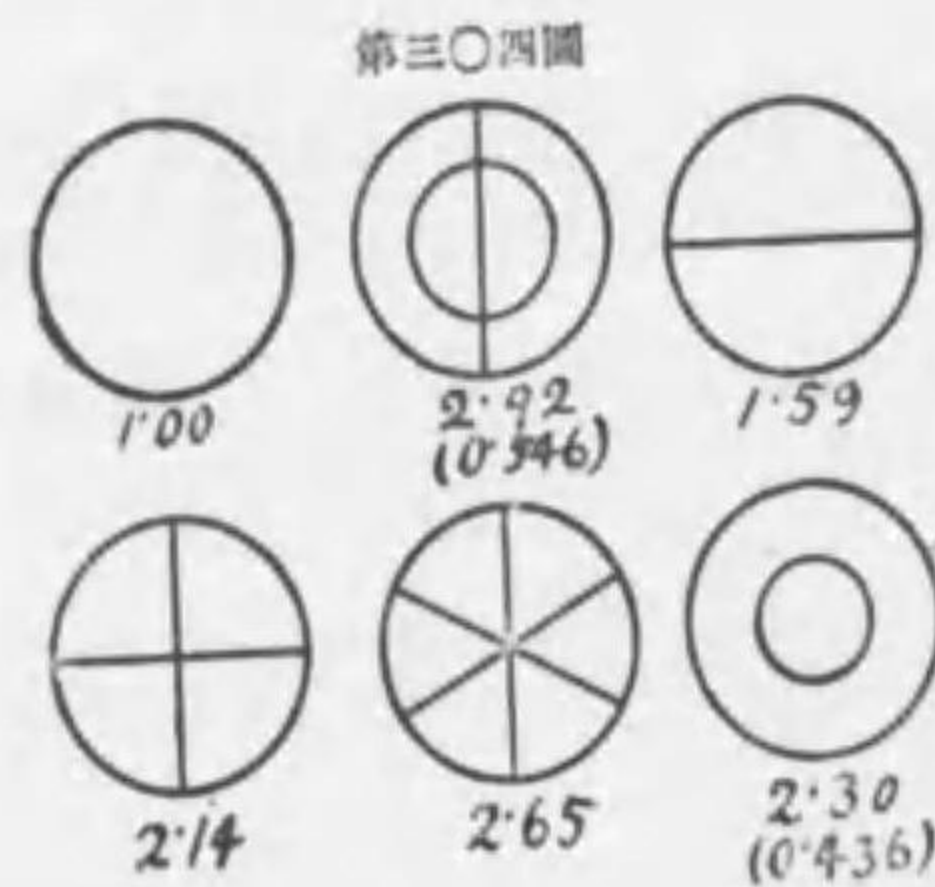
195 膜及び鐘の振動 membranes and bells 絃の振動と棒の振動との比較は膜の振動と板の振動との比較に類似せり。既に學びたる如く絃の振動は彈性率に關係なく單に張力のみ支配を受く、膜に於ても大鼓の如く膜の周邊に作用する張力 σ によりて其振動は決定せらるるものなり。今膜の中心に起点を設け膜面に xy 二軸を引くときは變位 η は xy 面に垂直なり、膜の單位面積の質量を μ とすれば § 164 (13) の絃の振動方程式に倣ひ (Euler 1766)

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (12)$$

を得べし、 η は膜の周邊に於て消失するものとす、又 $\sqrt{\sigma/\mu}$ は音波の進行速度に等し。周邊圓形なるときは (12) を極軸に變換して

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \right) \dots\dots\dots (13)$$

と書き ベツセル 函数 (Bessel function) を用ひて解を求むれば節線は 第三〇四圖



第三〇四圖の如し圖下の數字は振動數の比を示し括弧内の數は内圓の半徑なり。振動數 n は膜の直徑 d に反比例し進行速度に正比例す、即ち

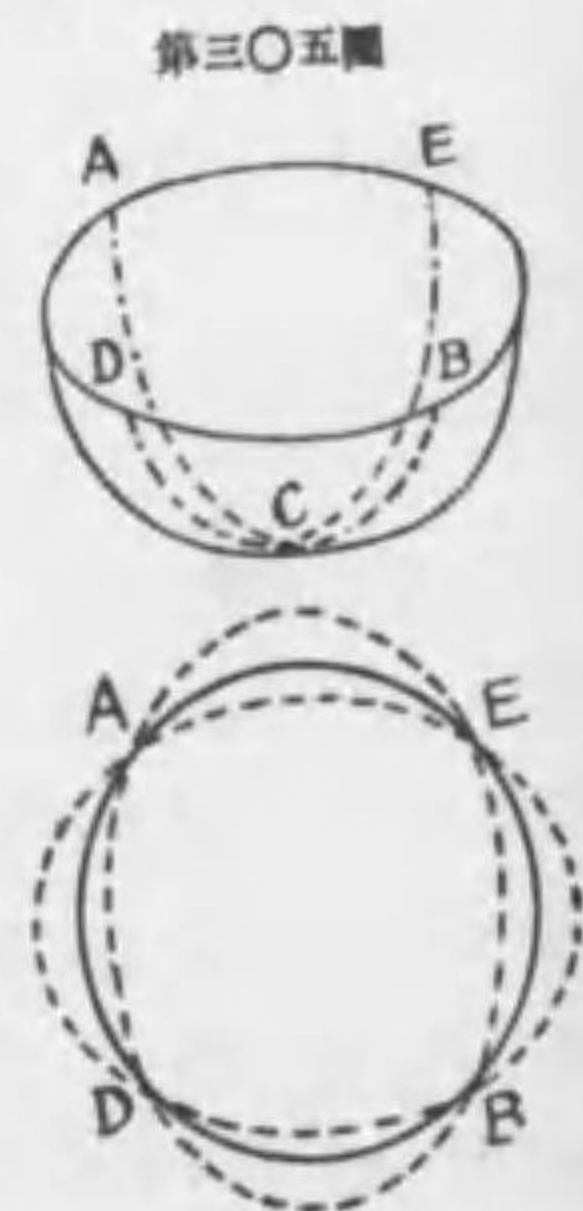
$$n = \frac{0.764}{d} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \dots\dots\dots (14)$$

振動膜の例は電話の圓板、耳の鼓膜、内耳の聽床 basilar membrane. 著音器の聲函あり、樂器には管絃樂に用

ふる五度に調音したる大小大鼓あり其他鐘鼓 kettle-drum 遍鼓 tambourin の如し。

鐘の振動は最簡なるものに在りても四條の節線 (第三〇五圖) AC, BC, DC, EC を有し ACB と DCE とは C 點に於て正交す、

鐘縁 AEBD の振動は下に示す如く AEBD の四點を通過する橢圓なり、之は鐘内に水を容れて振動せしむるときに水面の動揺するところと動揺せざる處とを見れば節線の存在を明に認め得るなり。然れども一旦發音せしめて後放置すれば二對の節線は互に反對なる回轉運動をなす、之を實驗するには木髓の如き輕きものを糸にて吊り鐘縁に觸れしむれば木髓の運動不定なるを見て知るべし。節線の數多きときは倍音を伴ふ、節線中には



C を中心とせる圓あり。

吾邦鐘の大なるは京都大佛の鐘 (1516年) は重さ 64000 斤あり、知恩院の鐘は (1633) 重さ 75000 斤にして基音は o' に近しと云ふ。

196 棒の縦振動及び捻振動 (Chladni 1796, Poisson 1816) 棒又は絃の縦振動は單に彈性に關係し張力には關係せず、縦波の進行速度は § 163 (9) に示したる如く $V = \sqrt{E/\mu}$ に等しく變位を ξ とすれば (9) により

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \dots\dots\dots (15)$$

なり此式は明かに

$$\xi = (a \sin px + b \cos px) \sin qt \dots\dots\dots (16)$$

なる定滯振動によりても満足せらるべし、但其要件は $(p/q)^2 = E/\mu$ なり、故に長さ l なる棒の兩端解放せる場合には $a=0, pl=m\pi$ なるを以て

$$\xi = b \cos \frac{m\pi x}{l} \cdot \sin qt \dots\dots\dots (17)$$

又兩端固定せる場合には $b=0, pl=m\pi$ なるを以て

$$\xi = a \sin \frac{m\pi x}{l} \sin qt \dots\dots\dots (18)$$

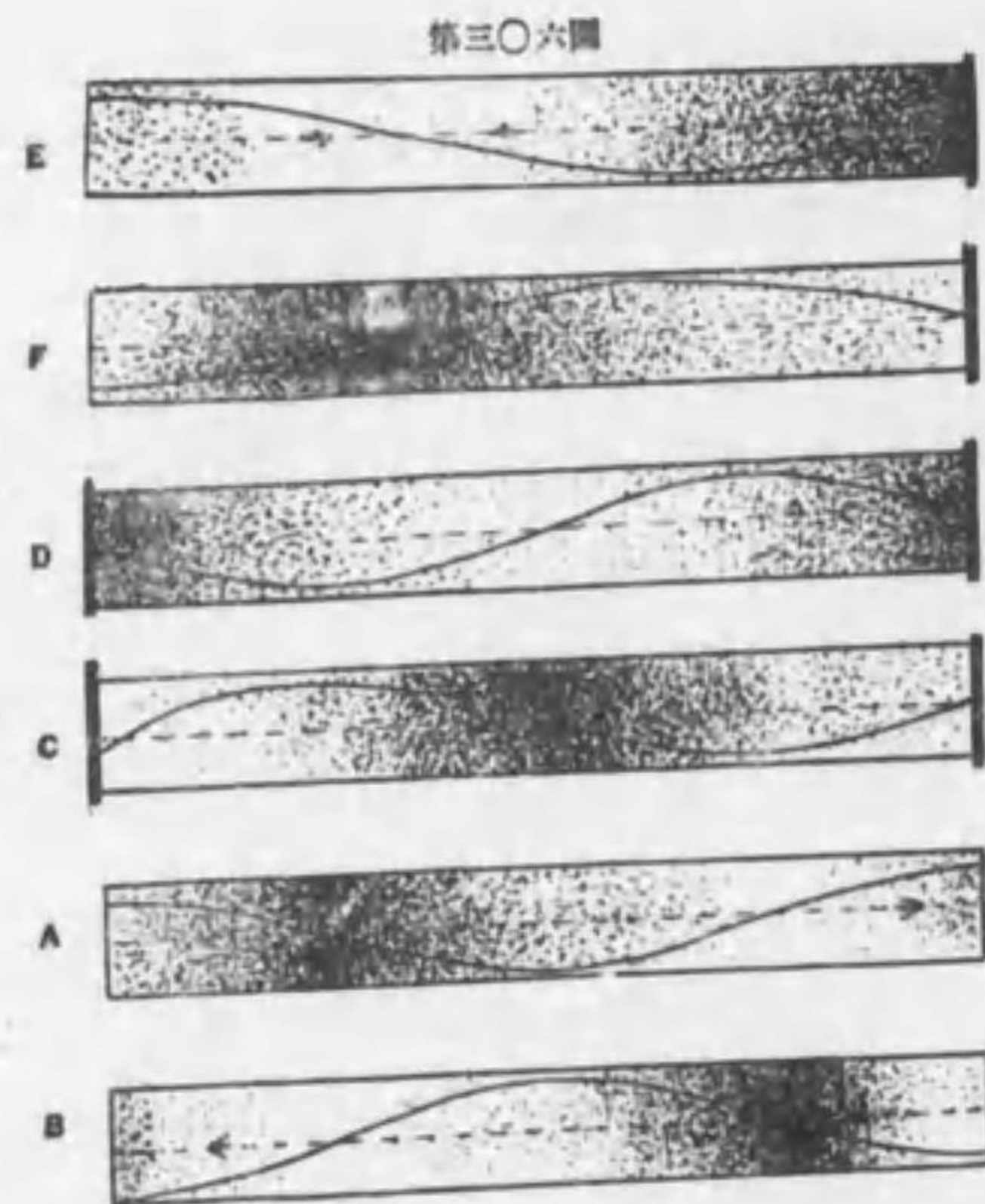
最後に $x=0$ は固定し $x=l$ は解放せる場合には $b=0, pl = \frac{2m+1}{2} \pi$ となりて

$$\xi = a \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l} \cdot \sin qt \dots\dots\dots (19)$$

を得べし、週期 T は l の長さを往復する時間にして $2l/V$ に等しく

$$T = 2l \sqrt{\frac{\mu}{E}} \quad \text{故に} \quad n = \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots\dots\dots (20)$$

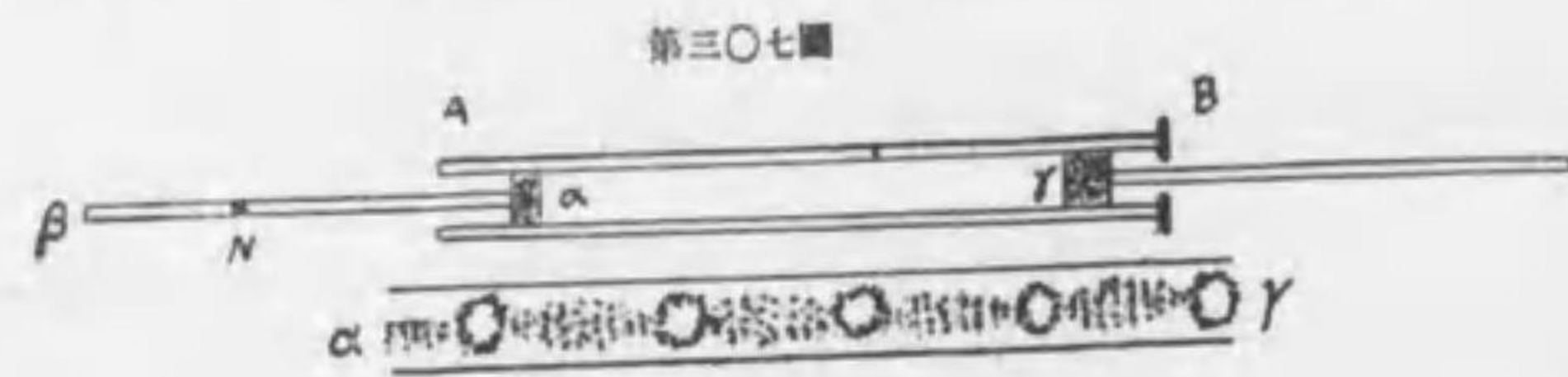
なり、故に振動數は長さに反比例し進行速度に正比例し斷面積に拘ることなし。第三〇六圖 A, B は兩端解放せる棒の縦振動變位を示し各半週期の差を有す、C, D は兩端固定せる棒の振動なり。E, F は左端固定し右端解放せる場合を示す、中に書ける曲線は縦振動を横振動に翻譯せるものなり。



第三〇六圖

縦振動の音は一般に高調なり、一例を挙げれば鋼鐵又はガラス棒に於ては長さ 500, 100, 20, 10 厘のものは夫々 550, 2750, 13750, 27500 の振動数を有し最後の者は既に聴覺の最高限に近し。

縦振動の實驗は樹脂を指頭に著け絃を縦に摩擦し若くは銅或はガラス棒の一端を縦に鈍撃するに在り。クントの實驗法 (Kundt 1874) は第三〇七圖 AB



第三〇七圖

なるガラス管内に預め石松子を散布し βa なるガラス棒の一端を挿入し棒の長さ $l/4$ の N 点を固定し $N\beta$ を濡布にて摩擦して發音せしむ、B の端にも適宜なる處に γ なる木栓を挿入し γ を振動の一節たらしめ a を腹とならしむるを以て振動の有様は第三〇六圖 E, F の如くなり石松子の粉末は下圖の如く整列して諸節の位置を示すべし、此實驗に於ては最初 $a\beta$ なる棒の振動によりて振動數 n の音發生して AB 管内の空氣に傳播し γ に於て反射して茲に空氣の定滯波動を生ずるなり、故に空氣中に於ける進行速度を V とし空氣中に於ける波長を λ とすれば $n\lambda = V$ なるを以て λ を知りて n を算出すること容易なり、然るに $a\gamma$ に生じたる石松子の群は互に $\lambda/2$ の距離を有つゆへ之を d とし

$$V = 2nd \dots\dots\dots (21)$$

を得。一旦 n を知らば AB 管に他の氣體を充たし上式を使用して其氣體に於ける進行速度を實驗により算出し得べし。

捻振動の場合には θ を捻角とし § 98 (13) の剛性率 n を茲にては R を以て示すときは本節 (15) の如く捻波の方程式は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{R}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots\dots\dots (22)$$

なり、固定端及び解放端に於ては夫々 $\theta = 0$ 及び $\partial \theta / \partial x = 0$ なり又振動數は一般に (20) の如く (同時に § 98. 13 式を利用して)

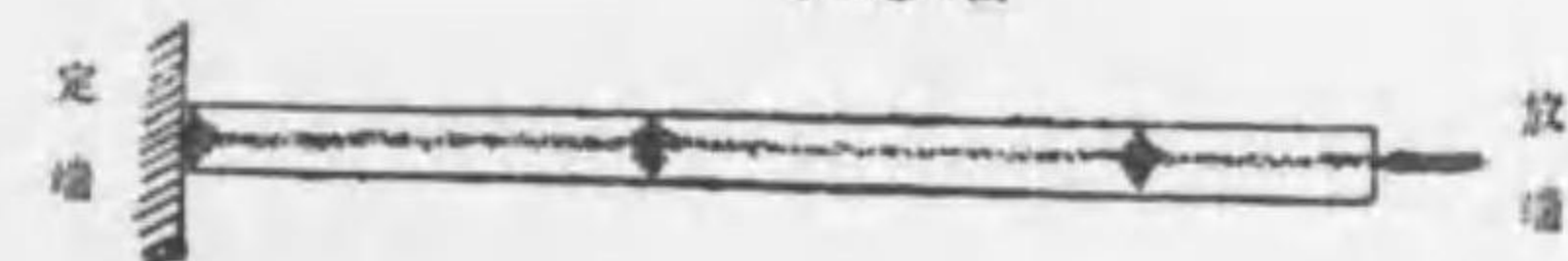
$$n = \frac{m}{2l} \sqrt{\frac{R}{\mu}} = \frac{m}{2l} \sqrt{\frac{E}{2\mu(1+\sigma)}} \dots\dots\dots (23)$$

茲に $m = 1, 2, 3 \dots\dots$ にして σ はポアソン比なり。之を縦波の (20) と比較すれば

$$\text{捻振動數/縦振動數} = 1/\sqrt{2(1+\sigma)} \dots\dots\dots (24)$$

なり然るに σ は 0.2 乃至 0.5 のものなれば之を 0.3 と見て振動數の比は約 5/8 なり、從て捻波も一般に高調なることを知り得べし、吾人は縦振動の實驗を行ふに當り屢々誤て捻波を混ぜしむることあり、捻振動の實驗には断面矩形なる鋼鐵の棒を取り其一端を固定し他端の断面の midpoint を尖がりたる釘にて押しながら矩形の長邊を棒に垂直に弓にて摩するなり。豫め表面に砂を散布し置くときは砂は節に集りて第三〇

八圖の如くなるべし。



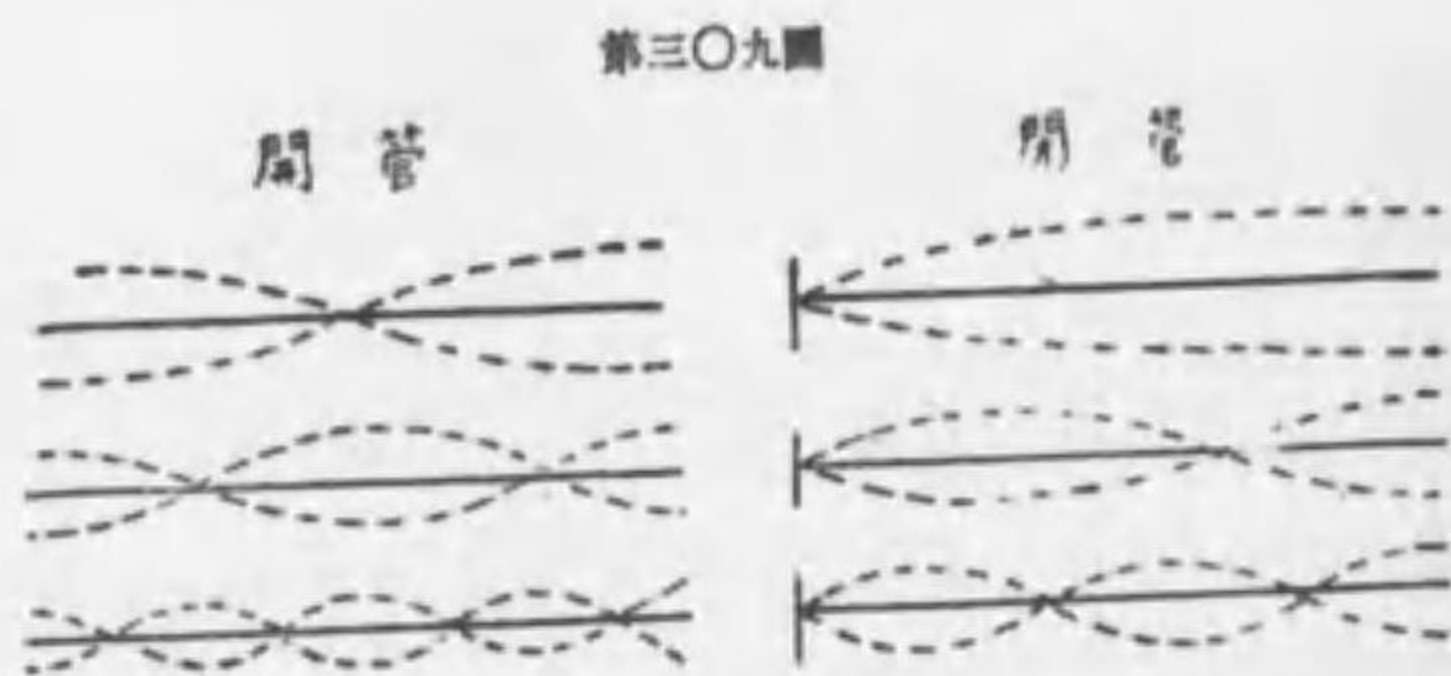
第三〇八圖

197 空氣柱の振動 vibration of air-column 長管内の空氣を空氣柱と稱す、之に定滯波動を起して發音せしむるには一端に舌 reed を設るか或は其代用物を振動せしむ、其振動は管内の氣柱に傳播し他の端に於て反射し入射反射兩波動干涉して内部に定滯波動を生ずるなり。他端の開きたる管を開管 open pipe、閉ちたるを閉管 closed pipe と名づく、閉管に於ては音波の反射する理由は了解し易けれども開管の端に於て反射するは了解し難し、反射する理由は管内の空氣

は管外の空氣に比すれば運動し難く従て管内は濃密なる媒質と同様に取扱ふべきものなり、故に管の放端は濃密稀薄兩媒質の境界面を形成し管内の波動は爰に來りて其波長を失ふこと無くして反射するものとす (§174 を再讀すべし)。

上理により舌の設けある管端の空氣は盛に振動するを以て茲は常に腹 loop となり他端は開管の時は腹となり閉管のときは節となる、故に棒の横振動に喩ふるときは 第三〇九圖

の如くなるべし、又 第三〇六圖に於て云へば A, B は開管には閉管に相當す、上圖に於ては開管の長さ l は波長の $1/2$, $2/2$, $3/2$ に等しく従て振動數 n は



$$l = \frac{m}{2} \lambda, \quad n = \frac{V}{\lambda} = \frac{mV}{2l} \quad (m=1, 2, 3 \dots) \dots\dots (25)$$

なり、然るに閉管の長さ l は λ の $1/4$, $3/4$, $5/4$ に等しく従て振動數は

$$l = \frac{2m+1}{4} \lambda, \quad n = \frac{V}{\lambda} = \frac{(2m+1)V}{4l} \quad (m=0, 1, 2 \dots) \dots\dots (26)$$

故に開管に於ては振動數の比は 1, 2, 3, 4 の如くなれども閉管に於ては 1, 3, 5, 7 の如く偶數を欠如す、而して倍音は自然基音に伴ふて鳴るを以て開管と閉管とは其音色を異にし閉管は鼻聲を帶ぶ、此を以て管列 オルガン pipe organ に於ては開管のみを使用す、(風邪の時鼻聲を帶ぶるも此と同理にして口腔は一端閉ちたる管と同様になるが故なり)。

氣柱の振動方程式は棒の縦振動のと同じにして開管には (17) 閉管には (19) を用ひて可なり。調子の一例を舉れば (25)(26) により次表を得

| | 基音 | 第一倍音 | 第二 | 第三 | 第四 |
|--------------|-----|------|----|----|----|
| 長さ 1030 ㎝の開管 | C'' | C' | G' | C | E |
| 長さ 515 ㎝の閉管 | C'' | G' | E | B | d |

實驗に徴すれば開管の調子は (25) が與ふるよりも常に少しく小なり、閉管の

公式は實驗の結果と一致す、此事實は昔時より樂器製造家の既に了せしところにして開管の場合には必ず補正 mouth correction を加へて計算せり、 s を補正量とすれば (25) は

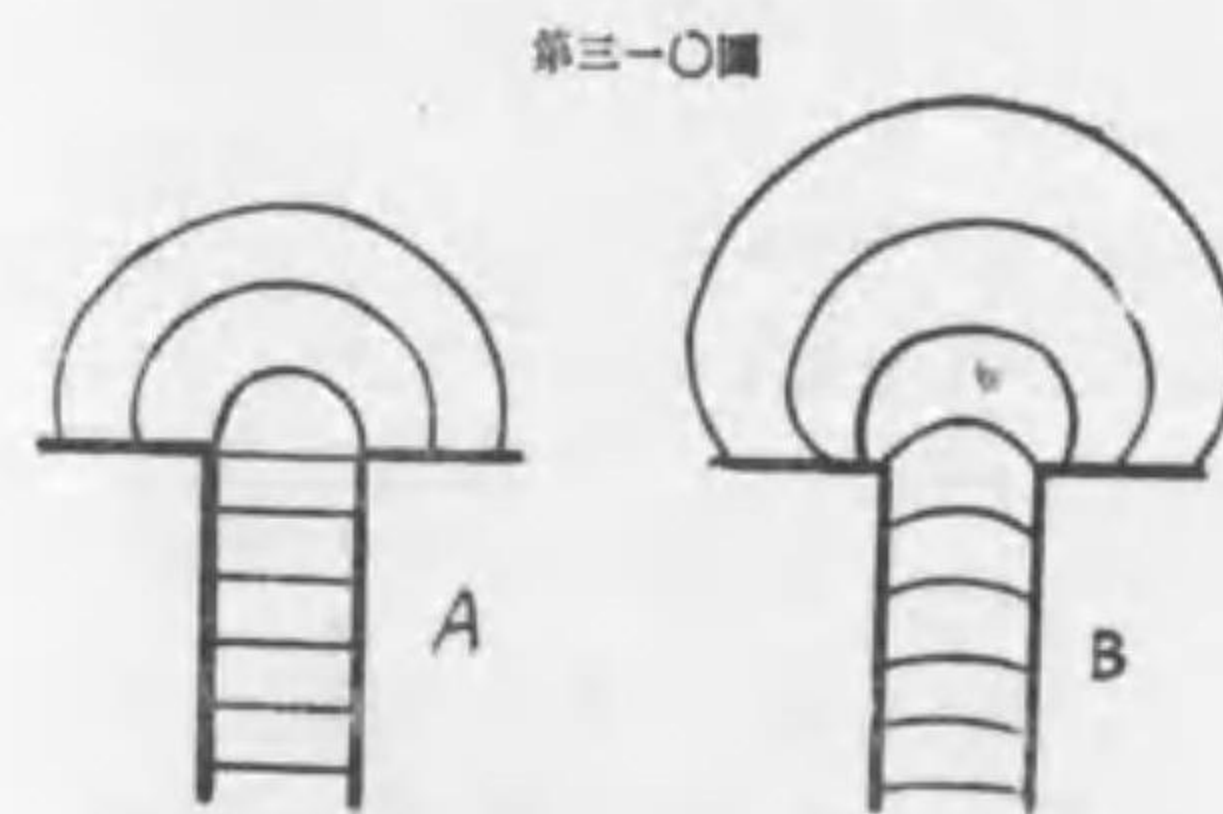
$$n = \frac{mV}{2(l+s)} \dots\dots (27)$$

となる、 s は管端が喇叭の口の如く次第に開き居るときは殆ど零なり。管は大部分圓筒形にして斷面 a の半徑を有し開口近傍に於て喇叭の如く廣くなり半徑 b の圓にて終はるものと假定すれば補正は實驗により

$$s = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b} - \frac{\pi}{4} \cdot b \dots\dots (28)$$

なる經驗式によりて表はさる、故に全部圓筒形にして $a=b$ なるときは $s = \frac{\pi a}{4} = 0.796 a$ の補正を要す、補正を零になさんとするには $0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b} - \frac{\pi}{4} \cdot b$ より $b = a/2$ なるを要すべし。管の斷面平等にして一邊 a なる正方形なる場合には $s = 0.45 a$ なりと云ふ。

斯く補正を要する理由は濃密、稀薄兩媒質の境界面は精確に管端に存在せずして其よりも少し外方に位むするに依る、管内に於ては空氣の波は平面波動なれども管外に於て速に球面波動に變ず、其平面波が球面波に變化する場處が兩媒質の

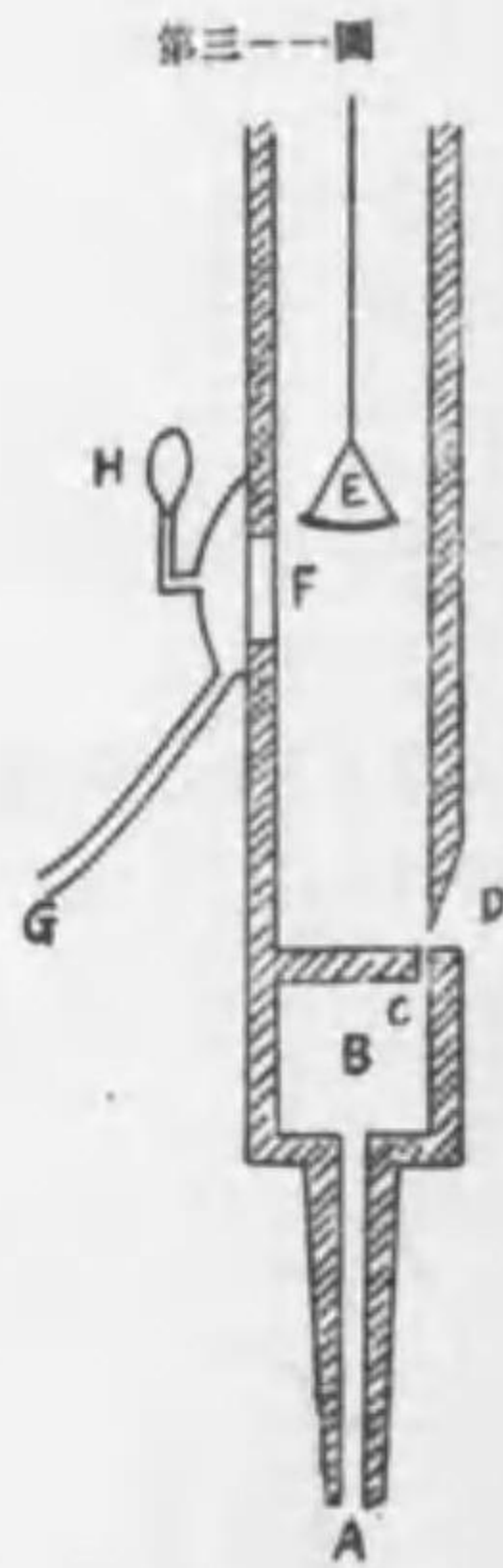


境界面として認めらるるなり。之に加ふるに管内に於ては定滯波動にして管外に於ては進行波動に變ず其變化をなす場處も同一境界面なりと思惟せざるを得ず、而して此種の變化は漸を追ふて連續的に行はるるを以

て波面の變化は從來考へられし如く、第三〇九圖 A に示す如くならずして B に示すが如きものならん、此理に依り管端を以て直に境界面と定むる能はざること明かなり。

198 唇 管 labial pipe (Danoulli 1762) 氣柱振動によりて發音する樂器はオルガン管、笛、吹奏樂器等種々あれども茲には主として唇管を説明せんとす、唇管は木製のもの多く断面は方形なり金屬製ものは断面圓形をなす、唇管のみを集合したる樂器を管列風琴 pipe organ と稱し通常電力を以て風を送りて發音せしむ、主として木製の開管を用ひ金屬管は他の目的のために附屬するのみ、又管の長さものは十米を越ゆるを以て全部大形なり。harmonium 及び American organ と稱するものは學校、家庭用風琴にして主として金屬製の義舌 reeds の音を用ふるものなれ共音栓 stops を曳出せば唇管が發する笛音を聴くことを得べし。

唇管(第三一圖)を發音せしむるには A より吹込まれたる空氣は B 内に壓搾せられ急流となりて C なる細孔より出づる時 D の三角尖に衝突して之を左右に振動せしめ一種の噪音を生じ、噪音中の或音は管の全長と共鳴して管内の空氣に定常波動を起こさしむるものなれば爰にも適者生存の理行はるるものと知るべし、故に A より送る氣流の力弱きに失するか強きに過ぐるときは管をして發音せしむる能はざる場合あり又發音せしめ得るも基音を缺くことあり。開管が基音を發する場合には節は D より計りたる全長 l に補正 s を加へたるものの $1/2$ の点に生ず、節に於ては空氣は動搖せず故に E に示すが如き装置を作り其に砂を載せて節の生ずる處に降すときは砂は動搖すること無く管の兩端に近き程振動劇しきを見るべし。之に反し管側に F の孔を穿ちて雲母片を取り外部に金屬の小室を設け小室には G 管より石炭瓦斯を送り H にて點火し傍に廻轉す



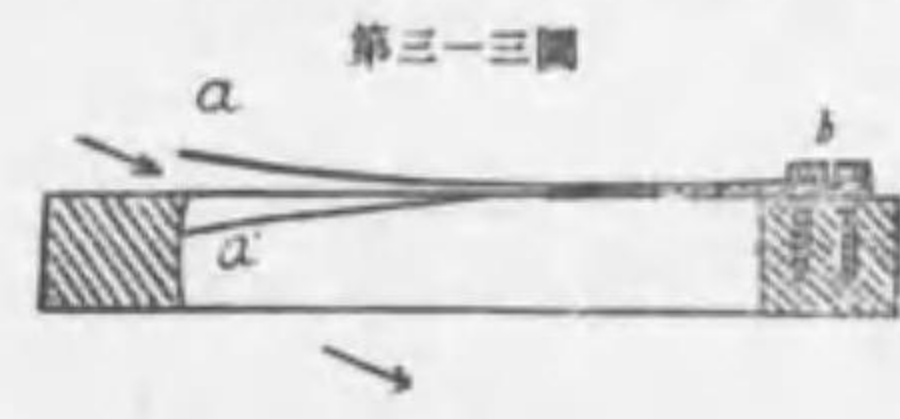
第三一二圖



る鏡を置きて火焰の形を觀察するときは火焰躍振するときは其廻轉鏡上に生ずる映像は第三一二圖に示す如くなるべし。若し火焰躍振せざるときは焰像は分離せずして續連す。

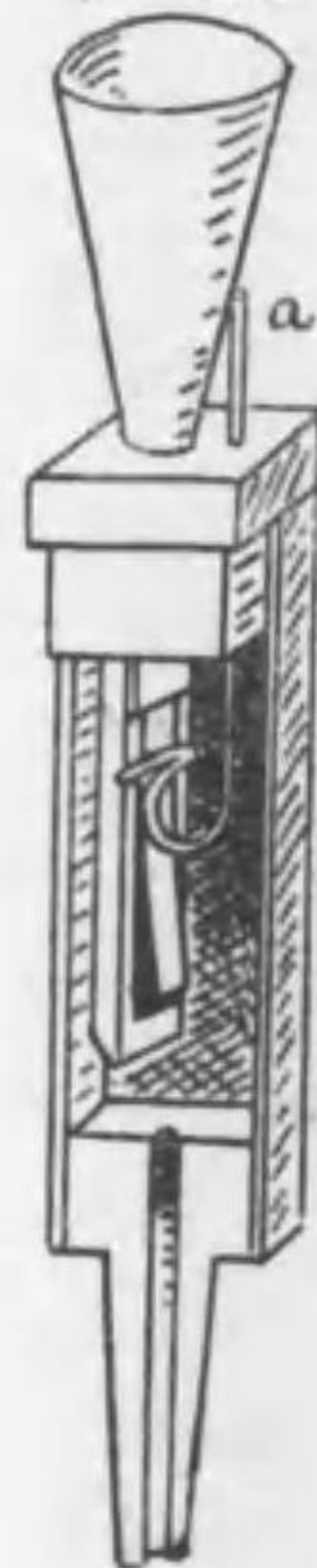
而して F 孔は空氣振動の最小なる處即ち節に設けられたる時火焰は最も活潑に振動し腹に設けられたる時は殆ど振動皆無なり、其理由は節に於ては空氣の振動は零なれども空氣濃度の變化最大にして從て壓力の變化最も頻繁なり。吾邦の樂器中横笛、尺八の如きは唇管の好例なり。

199 舌 管 reed pipes (W. Weber 1827) 空氣が管内に流入するに當り入口に舌(簧とも云ふ)を設け其振動により週期的に或は入口を塞ぎて氣流を止め或は開きて氣流を許すときは管内の空氣は舌の振動に支配せられ同時に空氣は共鳴によりて舌の振動を支配して發音す、故に管の長さは直ちに音の調子を決定する力無きものなり。舌の最簡式は第三一三圖に示す如く管は附屬せず真鍮製の義舌 ab は矩形の孔を塞ぎ其一端 b は固定し a は解放して舌の彈性によりて



上下振動をなし放端は交々 a, a' の位置に來り氣流の間歇的に孔を通過す。人間の發聲器なる聲帶 vocal cord は二片の膜より成立する一種の舌にして氣流が兩膜間の聲隙 slit を通過することによりて之を振動せしむ。舌の振動數は其彈性(聲帶の場合には張力)と共に増し厚さ及び長さに反比例す。管列風琴に附屬せる舌管は(第三一四圖)調節子 a によりて舌の振動す部分の長さを加減して種々異なる調子の音を發生せしむることを得れども調子は上部に著けたる圓錐狀の共鳴器の大小によりて變化し舌の振動は共鳴器のために多少の強制を受く、例へば厚さ 0.5 耗の舌は單獨に g' 音を發す、之にリ種々の管を著けたるに調子は變ぜず、順次に 17.8, 21, 25.2, 29, 32.2, 39.5, 44 種の管を著けたれば調子は夫々 fin' , f' , d' , e' , ais , g の如く降りたるに最後の管を著くるに及びて突然一オクターブも昇りて g' に變ぜり、是に依りて見れば管は或程度までは舌の振動を強制し得るも適度を越ゆれば舌は突然其固有振動 g' に歸るなり。舌を使用する樂器は風琴の外にクラリ

第三一四圖



の發聲器なる聲帶 vocal cord は二片の膜より成立する一種の舌にして氣流が兩膜間の聲隙 slit を通過することによりて之を振動せしむ。舌の振動數は其彈性(聲帶の場合には張力)と共に増し厚さ及び長さに反比例す。管列風琴に附屬せる舌管は(第三一四圖)調節子 a によりて舌の振動す部分の長さを加減して種々異なる調子の音を發生せしむることを得れども調子は上部に著けたる圓錐狀の共鳴器の大小によりて變化し舌の振動は共鳴器のために多少の強制を受く、例へば厚さ 0.5 耗の舌は單獨に g' 音を發す、之にリ種々の管を著けたるに調子は變ぜず、順次に 17.8, 21, 25.2, 29, 32.2, 39.5, 44 種の管を著けたれば調子は夫々 fin' , f' , d' , e' , ais , g の如く降りたるに最後の管を著くるに及びて突然一オクターブも昇りて g' に變ぜり、是に依りて見れば管は或程度までは舌の振動を強制し得るも適度を越ゆれば舌は突然其固有振動 g' に歸るなり。舌を使用する樂器は風琴の外にクラリ

ネット、オポー、ファゴット、喇叭等あり喇叭は唇を以て舌となす。

200 強制振動及び共鳴 forced vibration and resonance (Weber1825)

強制振動とは前節に於て學びたる舌の振動が其に連絡せる共鳴管の大小により種々其調子を異にするが如きを云ふなり、音叉を調子外れの共鳴箱の上に建つる場合にも音叉は箱により強制せらるることは § 193 に於て學びたれども強制の影響は音叉の如き強きものに對しては極めて小なりき。

今爰に振動体ありて其固有振動の週期を T とすれば其運動をなす際振動体が受くる中心加速度 r は

$$r + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y = 0$$

によりて與へらるべし、茲に y を變位とす、然るに T' の週期を有する他の振動体が前記の振動体を強制するものとせば方程式は

$$r + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y = C \sin \frac{2\pi t}{T'} \dots\dots\dots (29)$$

の如くなり其振動は T を週期とせずして T' を週期となし従て變位は

$$y = A \sin \frac{2\pi t}{T'} \dots\dots\dots (30)$$

によりて與へられ又其中心加速度 r は

$$r = -\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 y \dots\dots\dots (31)$$

によりて與へらるべし、依て (30) (31) を (29) に代入すれば

$$-\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 y + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y = \frac{C y}{A} \text{ 即ち } A = \frac{C}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2} \dots\dots\dots (32)$$

なり、茲に週期 T, T' の代りに振動數 n, n' を代用すれば上式は

$$A = \frac{C}{4\pi^2 (n^2 - n'^2)}$$

となる、故に強制するものと強制せらるるものの振動數接近するに従ひ強制せらるる振動 (30) の振幅 A は大となるなり、而して強制者の調子 n' が小なると

きは A > 0 なれども n' が n よりも高調なるときは A < 0 となり強制される者の振動の位相は反對となるを見る。n = n' となるときは A = ∞ となりて振幅は大に増加す此を共鳴の現象と稱す、閉管は其長さの四倍の λ を有する音を發し得る故 (§ 197) 音叉の共鳴箱の長さは常に λ = l/4 の關係を有す、サヴール (Savart 1837) は伸縮自在なる共鳴箱の口を發音する鐘に對立せしめて其共鳴を實驗せり。總べて樂音は吹奏樂器の如く空氣の振動によりて發音するものの外は共鳴箱を附屬するを常則とすれども、ピアノ、風琴の如きは樂器を構成する板の共鳴を待みて特に共鳴箱を備ふることなし、人聲に於ては肺臟、口腔、鼻腔中の空氣は共鳴して人聲固有の音色を生ず。

第四章 音の感覺 SENSATIONS OF TONE

201 聽覺 audition 人の聽器中最も重要なるは蝸牛殼 cochlea (第三一五圖) なり、音波が爰に達するには先づ聽道を経て鼓膜 membrana tympani に到る、鼓膜は水平に四十度以上傾きたる膜にして 0.07 耗内外の振動をなし得るものなり其振動は三個の小骨の媒介によりて振幅は減ずるも力に於て増しつゝ蝸牛殼に連絡せる前庭 vestibula に設けある卵窓 fenestra ovalis (圖中X) を通じて内部に傳へらる、内部は液体 endolymph を以て充たさるるを以て波動は液を傳はり直に蝸牛殼に入るなり、偕て蝸牛殼は其名の如く二捲半の濠貝の形を有し上階下階に分たれ上階は前庭階 scala vestibuli と稱せられ其入口は即ち卵窓なり、故に卵窓より入りたる音波は次第に前庭階の奥に進み遂に其頂に達すれば helicotrema と稱する小孔ありて之を過れば下階 scala tympani 鼓室階に出て圓窓 fenestra rotunda (圖中Y) の薄膜を経て音波は外界に遁れ エウスタキ 氏管を傳はりて鼻腔に散ず、別に半規管 semicircular canals と名づくる装置あれども此は頭部の釣合の位置を感ずる器官にして聽覺には關係なきものとす。然らば音波が卵窓より入りて液界に傳播し圓窓より出づるまでに如何にして聽神經は音感覺を起すやの問題に就きては永く正鵠なる説明を得ざりしも近來の研究により聽覺は上

第三一五圖



階下階の境界を成せる聽床 membrana basilaris の根部に瀰漫せる神經末梢の掌るところなりとの説に落著せり、而して聽床は兩端より緊張したる絃の列より成立し其長さは蝸牛殼の入口に於て最短にして奥に進むに従ひ却て長く、此等の絃は聽取りたる音に共鳴して振動すること恰もピアノに向て歌ふときはピアノ絃の適當なる長さのもの共鳴振動をなすが如きものならんと云ふ (Hensen 1863)、ヘルムホルツ説 (1869) に依れば聽床に座する コルチ弓 (Corti 1851、圖を見よ) の共鳴によりて聽覺を生ずるならんとの事なりしも其後音樂の嗜好者なる鳥類及び蛙類に コルチ 弓の欹如せるに氣附きしがため此説今は行はれず、管 コルチ 弓はピアノの壓音機 damper の如く振動の長續きするを抑制せんがために具ふるものにして餘音殘留時間の最も長き低音 (振動數 28) も 1/144 秒にして消滅す。

鼓膜は水平面に対して傾斜せるのみならず前後の方向にも傾き鼓膜面を延長すれば顔前にて交はり約 130° の角をなす、故に兩耳により顔の正面より來る音を克く聽取り得る理なれども、兩耳を連ぬる直線に其中央に於て垂直なる平面を畫くと考ふれば、音源此平面内に在るときは聽覺を起さしむること殆ど困難なりと云ふ。又 レーレー (Rayleigh 1907) 説によれば C' 即ち 522 以上の高音は兩耳に感ずる強さの差によりて音源の方向を感得す又 C'' 以下の低音なるときは兩耳に到着する時間より生ずる位相の差によりて方向を感ずるものなりと。

總べての音は各々基音及び數多の倍音の合成なるを以て耳が之を聽くときに一旦蝸牛殼内に於て聽床を形成する長短の絃の共鳴によりて基音及び倍音を各自別々に感ずるものに相違なきも精神は直に之を綜合し丸めて音色ある一音となして感得するものならん故に吾人の耳は既に一個の音分析器 tone analyser なりと云ふも不可なし、而して練習を重ねれば一音の裡に基音と三四の倍音とを別々に聽取り得るは畢竟上述の理に因ること明なり。

202 音色 timbre (Helmholtz 1863) 音色は基音に伴ふ倍音の強さと種類と數とに關することは前屢々之を説けり、然るに耳は音の分析器なるを以て此等部分音の強さと種類と數とに於て同一なる二つの音は兩音に多少の位相の差あるとも矢張同一の音色を有すべき筈のものなり、此理は ヘルムホルツ の二重サ

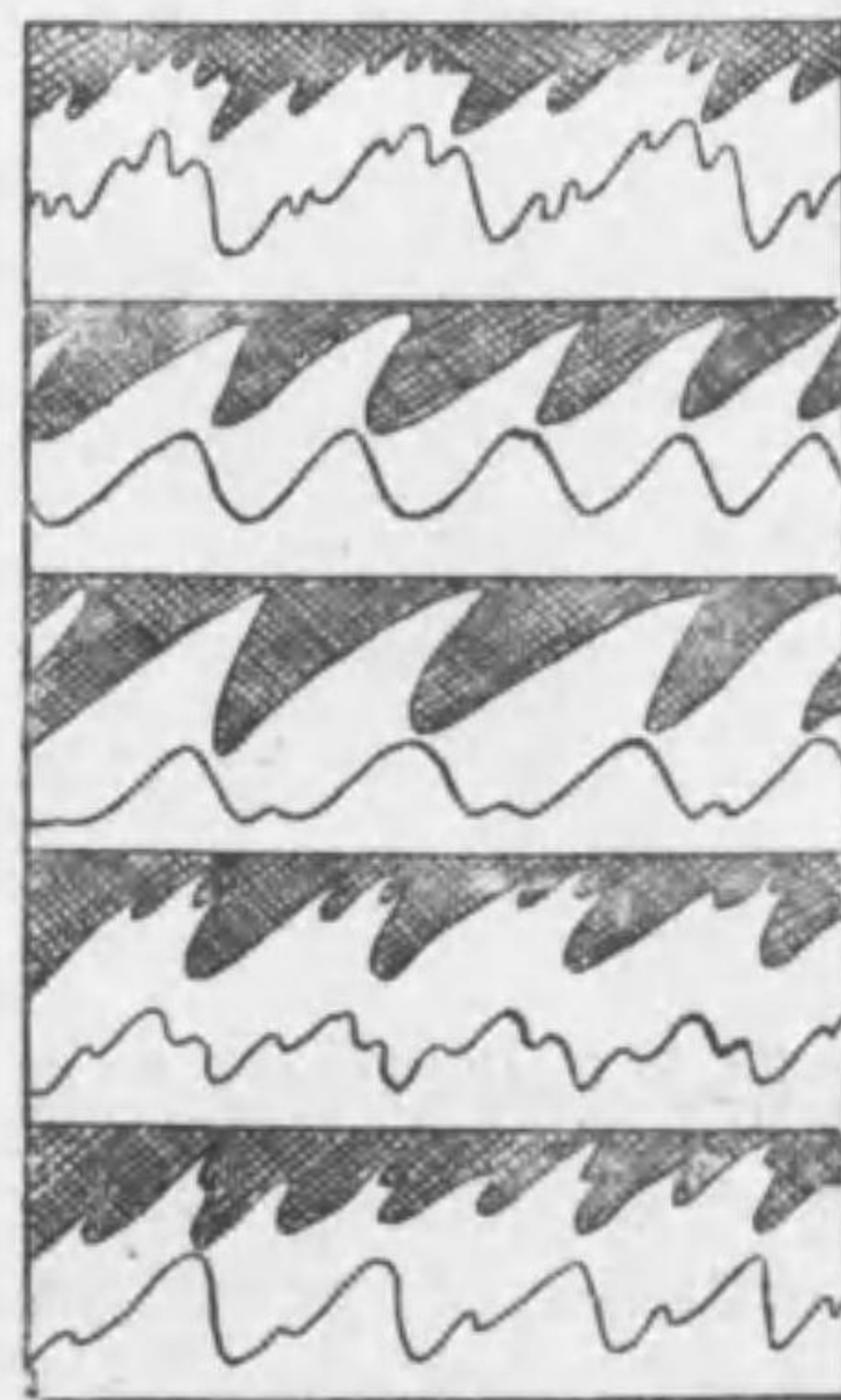
イラン により二つの単音間の位相の差を種々に變化するも其合成音は同一音色を有する實驗に依て證し得べし。ヘルムホルツは種々の樂器が発する音を其基音と倍音とに分析せんと欲し音分析器なる器械を製出せり、其原理とするところは第三一六圖 火焰の躍振に類似し大小數多の共鳴器を具へ倍音に共鳴する共鳴器と連絡せる焰は躍振するを以て廻轉する鏡上の映像を吟味すれば如何なる倍音より成立するかを確定するを得るなり、而して各共鳴器は第三一六圖に示す如く或程度まで伸縮自在にして其區域内の諸音に共鳴せしめ得べし。然れ共此器械は使用困難なるを以て通常ケーニヒ(König)の躍振尖を用ふ、即ち第三一七圖 A より音を吹入るときは音は B より

第三一六圖



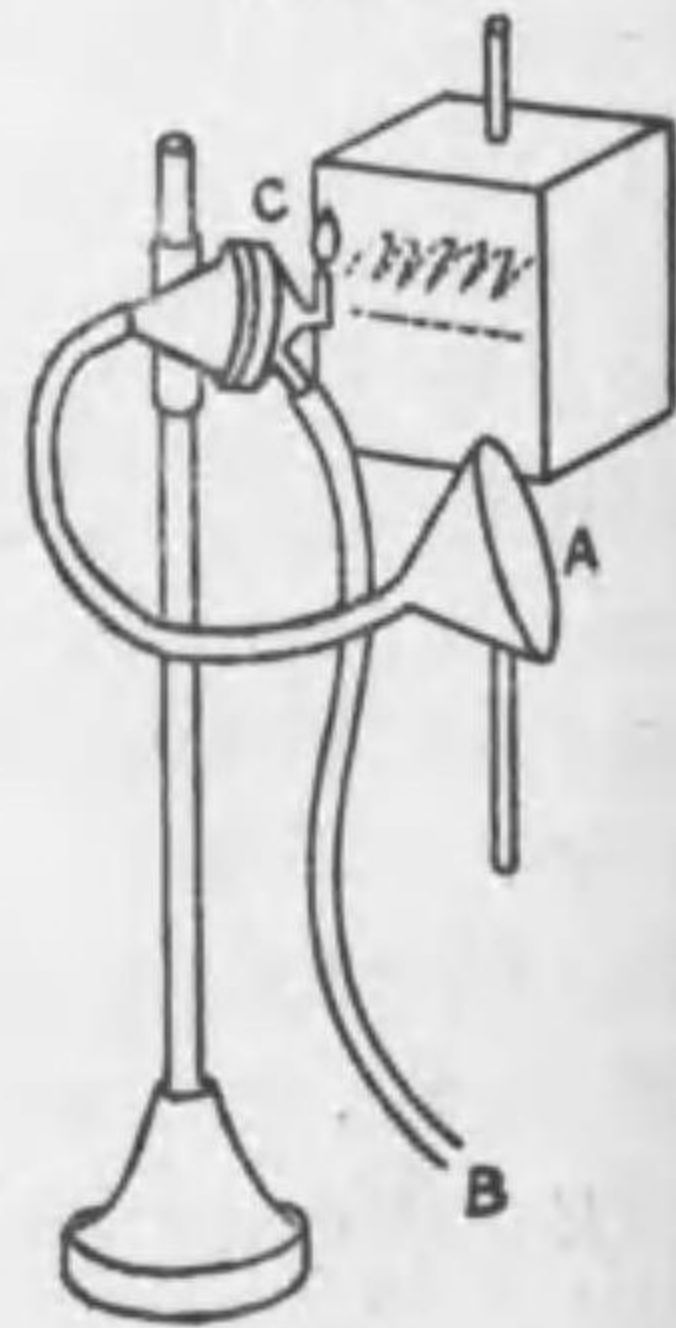
り來る石炭瓦斯とC 函内の雲母片の障壁を隔てて會合するを以て雲母片を振動せしめ同時に C に

第三一八圖



點火せる焰を躍振せしむべし。樂器の振動より來る弱き音波を分析するには適せざれども人聲の振動を分解するには此器械は最も適當なり、例へばア、イ、ウ、エ、オの母音を A より吹込めば第三一八圖の如き映像を得、各映像の下に附したる曲線は蓄音器レコードの印象より得たる同音

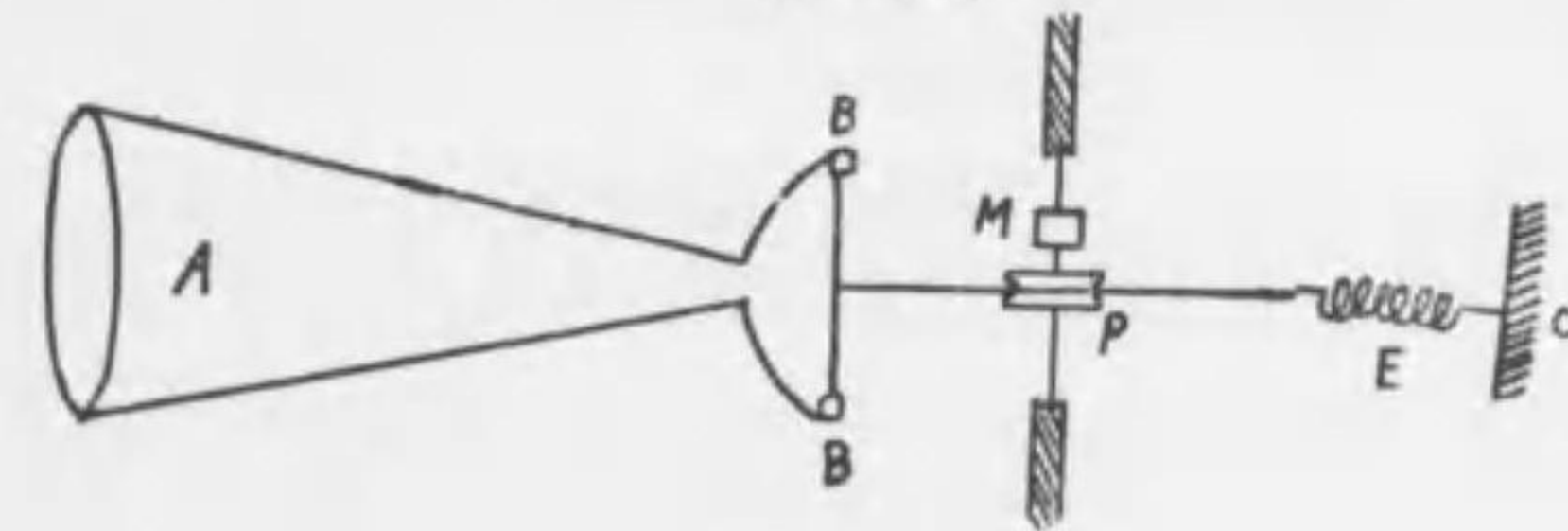
第三一七圖



の振動なり、但し本圖に於ては母音の調子は、*o'* 即ち 256 なり。

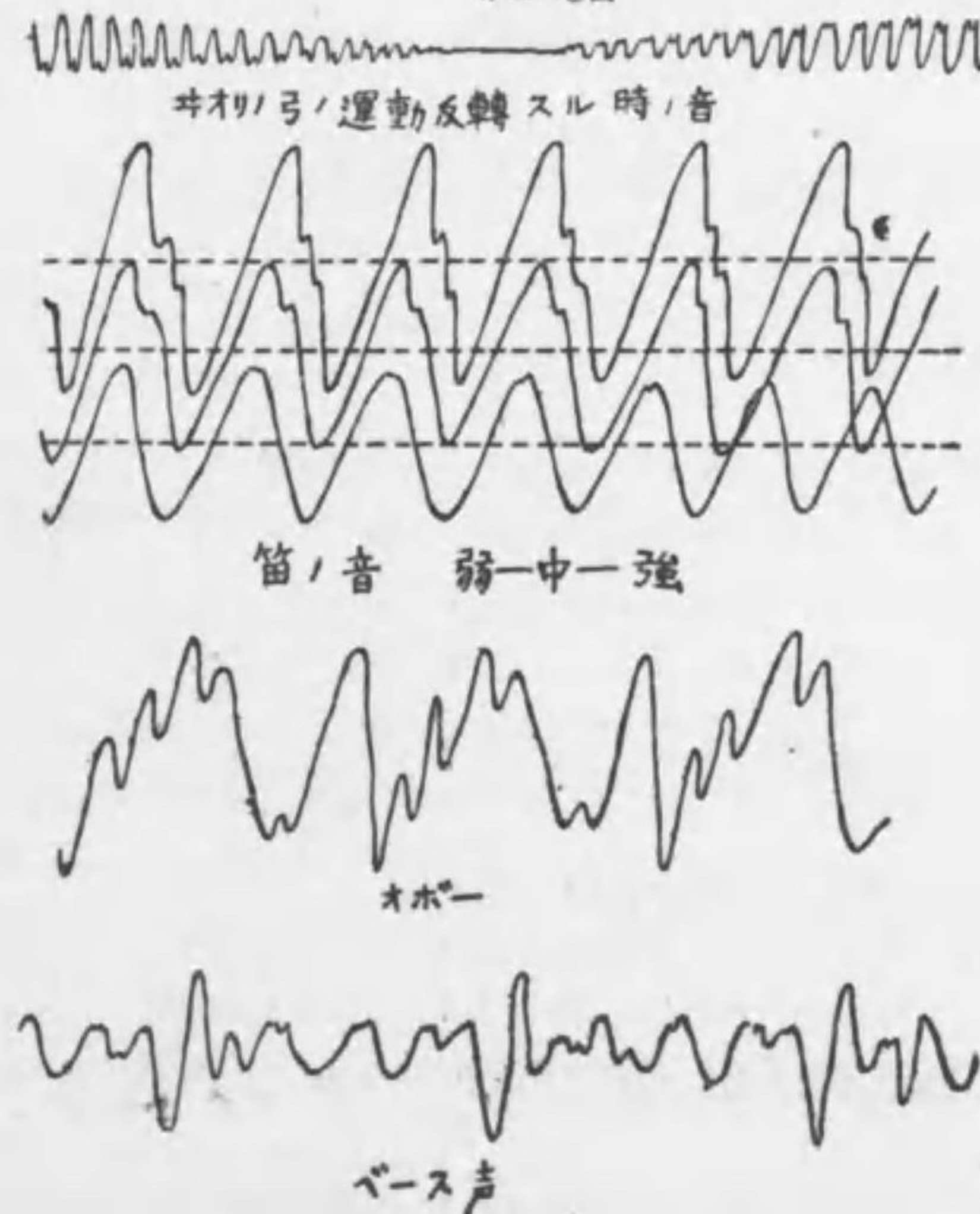
樂器より發する音の振動を見るには前述のケーニヒ装置も亦ヘルムホルツ分析器も之に適せず、ミラー(Miller 1912)が此目的のために作りたる装置は第三一九圖に示すが如く、先づ喇叭 A にて受取りたる樂器の音は其底 BB に

第三一九圖



第三二〇圖

附着せる厚さ $\frac{1}{120}$ 耗なるガラス板を振動せしむ、此ガラス板の midpoint には真綿繊維の數條若くは直径 $\frac{1}{100}$ 耗の白金線一端を膠着せしめ P なる滑車を一捲きして E なる彈機に果はる、彈機の端は C に固定す、滑車 P の軸には小鏡 M を固着し BB 板の振動に連れて滑車及び鏡は左右に微動するなり、而してラムプより來り M に於て反射



する光線は他の廻轉鏡上(第三一七圖に示すが如き)に到り反射するを以て振動の映像(第三二〇圖の如き)を見ることを得べし、但し廻轉鏡の回轉軸は水平の位置を有す。ミラーは此装置を phonodeik と命名せり。

上述の如き方法によりて得たる振動曲線は常に其分振動(弦運動)に分解することをを得るが故に音色に對する基音倍音を判別すること容易なり。種々の分析法によりて得たる結果を下に畧述すべし。

音叉が發する倍音は残らず基音の不和音なるも倍音は速に衰へ基音は永く残り従て音叉の音は殆ど純粹なる弦運動と見做すことを得べし(殊に共鳴箱と連絡せる音叉に於て然り)、斯く單純なるを以て音色は全く風味を缺くなり。音叉に似たる他の單純音は水素焰を兩端開き中部膨れたる圓筒形共鳴器中に於て鳴らす時に生ず其音極めて空虛にして音叉に似たり。今試みに基音の外に其 2, 3, 4, 5, 6 倍の倍音を水素焰にて作り基音を最強くし倍音の順次に弱くして同時に鳴らすときは諸音合成して一個の圓滿にして豊富なる美音を得べし、此種の實驗を音色の綜合法 synthesis と名づく、然るに上實驗に於て尙 7, 11, 13 倍の倍音をも加ふるときは倍音の一部は基音に對し不和音なるを以て音色は鋭く且粗野となるり。

絃の音色は奏法の異なるに從て大いに異なり、箏の琴又はピアノの如く之を撃ち或は撥でて發音せしむる場合には調和の倍音(第一、二、三、四、五倍音 harmonic overtones) 聴こゆ、而して撃ちたる場處適當を得ざるときはヤング則により所要の倍音を缺くことあり、故にピアノに於ては全長 1/7 の点を撃ちて第六倍音を消失せしむるを常則とす。金屬の槌を以て撃つときは基音は殆ど欠け音色は空虛にして平凡と評するを適當とす、之に反し柔軟なる槌を用ふるときは倍音中低きもの強く オクターヴ、五度、三度等は容易に聴取ることを得べし此はピアノの音色なり、高音のピアノ絃には倍音殆ど混ぜず(感覺區域外に在るを以て聴へざるならん)之に反し細く長き絃には 18 個の倍音を伴ふと云ふ。キオリノの如く摩擦する場合には倍音の數一般に多くして第六又は第十までは聴取ることを得其強さは 4, 9, 16 …… に反比例することは既に學びたるころなり。

笛は断面狭からずして閉管なるときは倍音極めて弱く僅に第一倍音を存ずるの

みなり之がために其音色は所謂笛音となり充實にして然かも柔和に且つ朗かなる音を生ず、断面狭きときは第六倍音まで聴こゆ。

閉管は奇數の倍音のみを有して断面廣きものに在りては音色は單純と評するの外なし、然れども断面狭きときは第十二度(duodecimo, オクターヴの五度、即ち三倍)の倍音強く此種の閉管をオルガン管に於てはクイント(quint)と名づく、之を要するに閉管は諸 オクターヴ音(2の整數倍)を欠ぐを以て鼻聲を帶ぶ。

舌管は音孔無きものにおいて主として舌の開閉によりて發音せしむるものなれば喉音を伴ひ隨て倍音多くして二十個に達することあり、故に音色は鋭くして喧すし、舌管中最も好音を發するは(聲帯より出づる)人聲なり。音孔を有する舌管に於ては基音極めて明瞭に聴こゆ然れども偶數倍の倍音全く缺如しクラリネットの如く空虛なる鼻聲を發す。

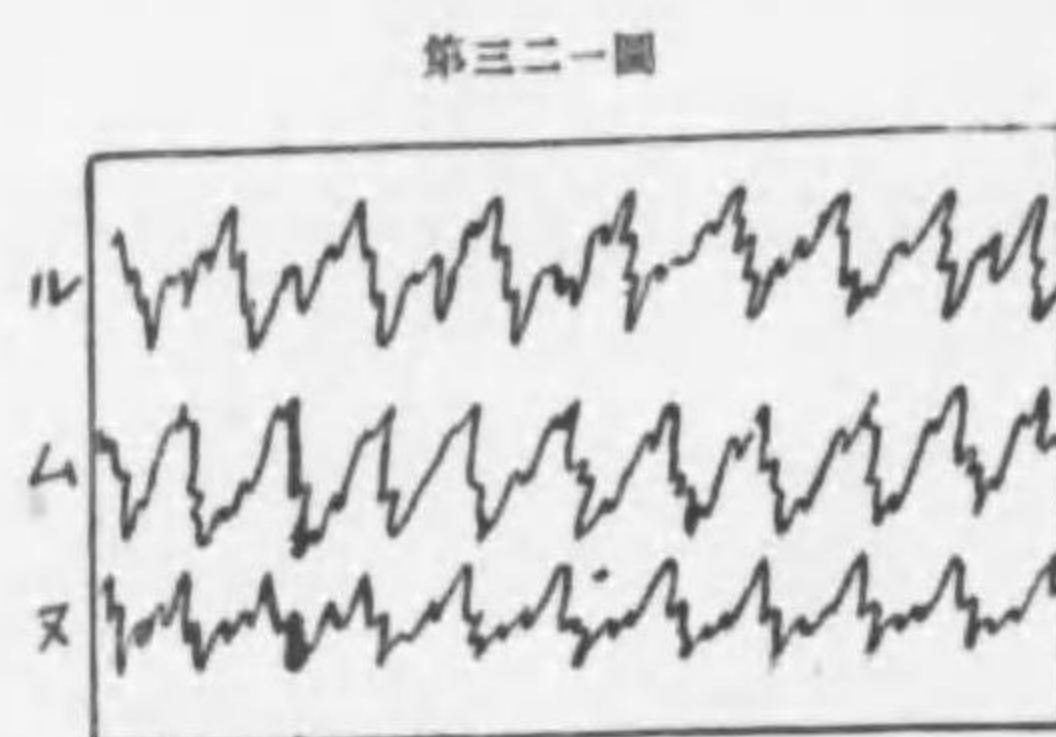
音色研究中興味深きものは人聲の母音(vowels)なり、人聲は舌管の音に近似せるものにして朗かなるベースの歌聲にも 16 の倍音あり、口腔の形状出入多きを以て種々の倍音を共鳴するに適せり、肺臟の呼氣通過する際に通常聲帯の筋肉は弛緩し聲帯は開放せりと云へども發聲のときは聲帯緊張して薄くなり同時に聲帯狭小となるなり、而して調子高き程緊張する力強し。聲帯及び口腔の形状大小等により人々其聲音を異にすれども獨り母音は個人の音色及び調子には無關係なる点を有し、其一点の存在によりて吾人は母音を識別することをを得るなり。ヘルムホルツの研究によりて母音の母音たるを得るは各母音に固有音 characteristic tones なるものありて其音の調子及び個人性を超越して常に同一なることを確定せり、母音の固有音は次表の如し。

| | |
|---|--|
| ア | fi ^g ' 726 |
| イ | g ^{'''} 1566, f' 348, d'' 587 |
| ウ | d' 294 |
| エ | e ^{'''} 1044, a' 435 |
| オ | fi ^g ' 363 |

近來蓄音器レコードの音像を検査し母音に固有音の存在することを彌々明瞭ならしめたり、ヘルムホルツは數多の音叉を並列し各音叉の前面に適當なる共鳴

器を据へ電流を使用して任意の音叉を發音せしめ得る装置を製造し之を母音器 vocal apparatus と名づけ母音を模造せり。

ヘルマン (Hermann 1902) の子音の研究によれば母音の場合の如く子音にも固有音ありて



其多くは三次オクターヴ中の音なりと云ふ、第三二一圖に其振動曲線の二三を示す(ルはノなり)。

第五編

光 學

第一章

光の直線進行

RECTILINEAR PROPAGATION

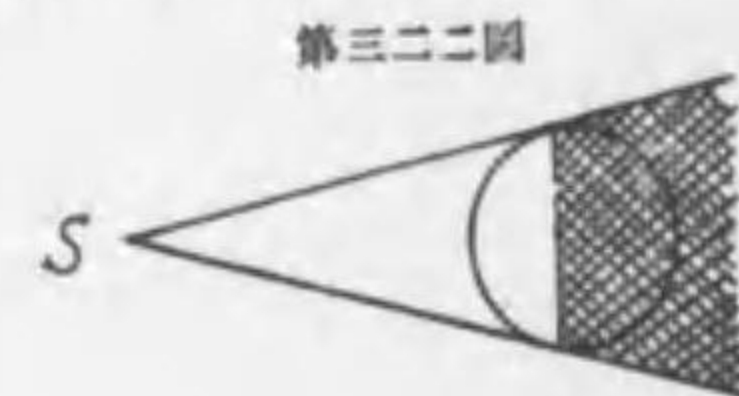
203 光及び光學 光は宇宙間に彌漫する精氣 エーテル ether の波動によりて傳播し眼之を視るところの感覺なり、エーテルは物質存在するところと存在せざるところとを問はず全空間を充填する稀薄なる弾力体にして其分子力は液体氣體に比較して無類に強く從て克く横振動を傳播する力あり、故に其彈性寧ろ固体に似たるものなれ共甚稀薄にして物体の運動に些少の抵抗をも與へざる点に於て異なり。エーテルは元來 アリストートルが思想界へ提出したる假定的媒質にして、將來は兎にも角にも現在の物理學に於ては輻射 エネルギー に関係ある部分は エーテル を賦きては何事をも説明し能はざる程に大切な物なり。エーテルは果して全空間を充たすや如何、物体運動するときに物体内のエーテルも共に動くや等の問題に對しては何人も快答を與ふる力を有せざるべし。

然るに光學 Optics は物理學中最發達せる分科なり、此には重要な理由二個あり、第一は光の感覺器なる眼は五管中最完備せるものにして音響に對する耳は強さ調子音色を感ずる如く光に對する眼は強さ、色を感ずるのみならず光の方向を感じ物体の遠近を判定する力を有す而して其方向及び大小を認識する点に於ては極めて精密にして其程度は他の器關も之に匹敵すべきものを有せざるなり。第二の理由は光線は約直線に進行し又反射するときは反射、入射角相等し、此がために幾何學は直に光學に應用せられ其結果として空間の世界は極めて明瞭に且つ精確となり吾人の理智に多大の満足を與へ宇宙全部をして(少くとも外觀的に)合理的に視へしむるが故なり。總じて光學は光明世界の消息を取扱ふが故に神秘

なる点最少なく又主として空間に関する研究なるを以て時間の觀念を要すること最少なし、之に反し音響の現象は時間的に展開し空間を要すること最少なくして理智の満足を充たすよりも寧ろ情緒の要求に應ずるものなり。

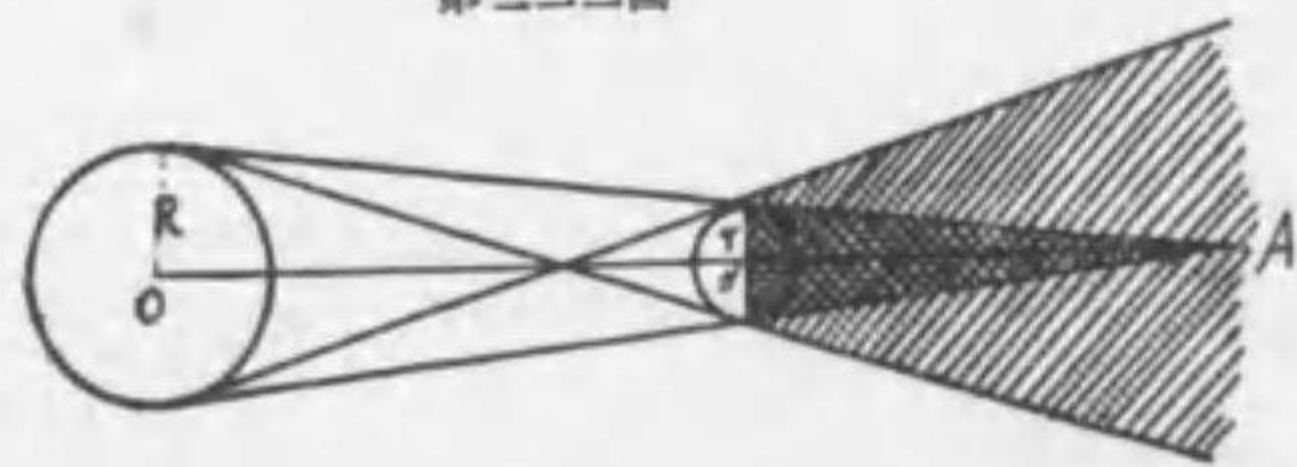
本編に於ては便利上光學を次ぎの三部に分ちて説明せんとす、第一、幾何光學 Geometrical Optics 第二、分光學 Spectroscopy 第三、光の波動學 Wave Theory of Light 是れなり。幾何光學に於ては吾人の經驗より出發し エーテルなる媒質を假定せずして光の直線進行、反射、屈折等の法則によりて古來既知の諸現象を説明す。分光學に於てはプリズムによりて日光を分折する實驗より出發し種々の光源より來る光を分析し諸種の エーテル 波動を研究す、分光學は主として獨逸國に於て發展したる分科なり。波動學に於ては波動としての光の性質及び諸種の媒質(殊に結晶体)に於ける波動を研究す。

204 直線進行 光線を通せしむる媒質を透明体 transparent body と稱し半ば通過せしむるものを半透明体 translucent body と名づく。同質にして等方質なる透明体内に於ける光線が直線進行をなすことは吾人が經驗によりて知るところなり、故に出沒時の太陽及び月が地平線上に楕圓に視ゆるによりて氛圍氣(大氣)は廣き場處を考ふれば等方質に非ることを悟るなり。光源が小形にして殆ど点と見るも不可なき場合には 第三二二圖



第三二二圖

の如く光源 S より出づる光線は球形なる不透明体 opaque body へ S より引きたる切線が生ずる圓錐面を境として其内部は光源の反側に於て暗し之を陰影 umbra と云ふ。日蝕 solar eclipse 月蝕 lunar eclipse の時も光線の直線進行を假定して計算して克く事實に符合する結果を得べし、光源なる太陽を半徑 R の球とし不透明体なる月又は地球の半徑を r とし光源の中心と不透明体の中心とを結ぶ直線の長さを D とすれば 第三二三圖



第三二三圖

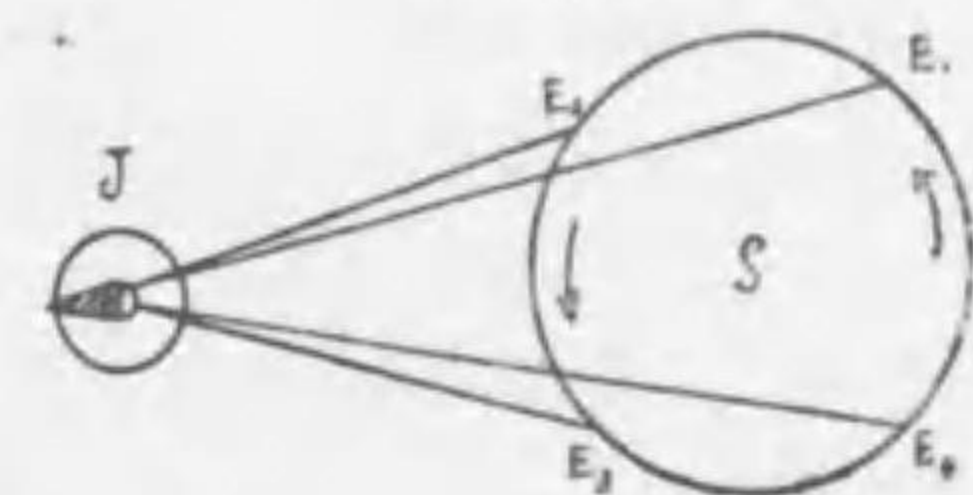
を D とすれば 第三二三圖 の如く切線は内切線外切線の區別を生ずるを以て影

に本影 umbra 半影 penumbra を生じ、本影は $R > r$ なるを以て頂点 A に於て果はるところの圓錐体を形成し半影は圓錐面より遠ざかるに従て次第に光度を増し光と半影との區別を識別し難き点に於て果はる、不透明体の中心 O' と頂点 A との距離を x とすれば $R : r :: D + x : x$ なるにより

$$x = \frac{Dr}{R-r} \dots\dots\dots (1)$$

又 O'A 上に一点 P を設け AP=S とすれば P 点に於ける本影の半徑は約 $(R-r)/D$ に等し。月が地球の本影に入るを皆既月蝕 total lunar eclipse、其半影に入るを部分(partial)月蝕と名づく。次に O' を月と假定し頂点 A が地球の表面に到着すれば本影は地面と交はりて楕圓を生ず地球も月も自轉公轉を營むが故に影は地面を移動して皆既線路 eclipse track を畫くべし、もし頂点が地面に到着せざるときは部分蝕又は金環 annular 蝕を生ず。

205 光の傳播速度 (Olaf Römer 1676) 古人は光は傳播するに時間を要せざるもの如く考へ來りしが典抹人 レーマー が巴里天文台に於て研究中光は傳播するに時間を要するものなる事を發見せり。木星 Jupiter の九個の衛星中イヨ (イヨ Io は ガリレオ發見) と稱するものは一日と四分の三を以て木星を公轉し其都度木星が投ずる本影中に入りて蝕す、此現象は一日と四分の三を週期として繰返すべき筈のものなるに凡そ半年間は週期の其よりも短く他の半年間は其よりも長くして平均上記の値を有するものなることに氣附きて研究を始めしなり。第三二四圖の S を太陽とし



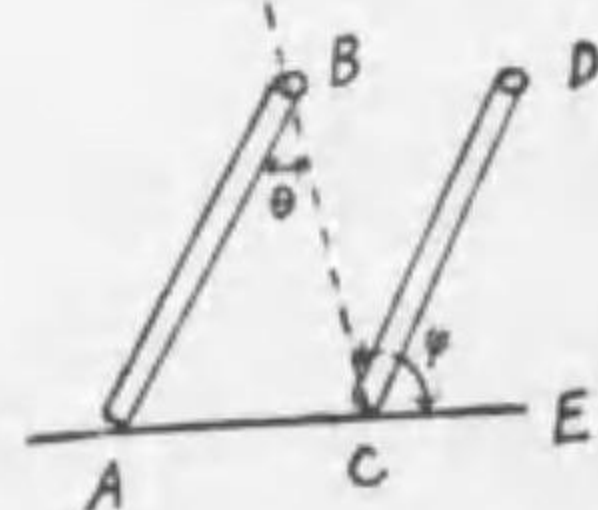
第三二四圖

E₁ E₂ E₃ E₄ を地球の軌道 J を木星及び其衛星の軌道とすれば SJ は SE₁ に比して 5.2 倍なり又木星は凡 12 年 (11.86年) を以て太陽を公轉す、故に J は不動にして地球は E₁ E₂ E₃ E₄ の順序に運動するものと見て大差なし。今光線の傳播速度を V とすれば J を出發して E₁ に来る光線は JE₁/V の時間を要す然るに地球公轉のために E₂ に来らば時間は JE₂/V に短縮す故に衛星蝕の週期は

平均よりも短し、此に反し地球が E_1 より E_2 に進む頃は光の到着時間は $(JE_2 - JE_1)/V$ の増加を見る理なり、従て衛星軌の週期長くなりたる如く視ゆべし、レーマーは巴里天文台に於て台長 カッシニ (Cassini) と共に衛星軌を観測し 1676 年八月に測りたる時間に比すれば十一月には週期は十分短縮せることを知れり、此に依りレーマーは光が地球軌道を貫くには凡そ 22 分を要するならんと断定せり、然れどもカッシニはデカルト説を固持し光の傳播には時間を要せざることを主張したるなり、デカルトは光線屈折の理に鑑み二個の異なる媒質に於ける光の速度は異なることを承知せしも亦一方に於ては若し光が傳播するに時間を要するものならんには其速度及び地球の公轉速度により恒星の視運動を惹起し不合理を生ずることを唱へたるなり (此理は精確にして遂にブラッドレーの発見となれり)。

206 光の行差 aberration of light (Bradley 1727) 此現象を了解し易からしめんがため先づ雨滴の行差より説かんとす (第三二五圖)、AB なる圓筒は並進運動をなして CD の位置に進むと同時に雨滴は落下して B より C に來るものとせば雨滴は圓筒に対しては BA の方向に進むこととなるべし、故に AB と共に動きつつ A より B の方を眺むる人の眼には雨滴は BA の道を書きたるものの如く視ゆるなり、恒星より來る光線も恰も斯の如し、AB を望遠鏡とし A より B の方向に観察しつつある人の眼には恒星より來る光線 BC は地球の運動によりて望遠鏡は AB の位置より CD の位置に進み観察者は A の位置より C の位置に來りたるに拘らず其には氣附かずして光線は恰も BA に沿ふて來りしもの如く思ふべし、此現象を光の行差と云ふ、又地球運動の方向 AE に対して光線の方向は BCE = φ 角を作せるも観察者の視たる處にては BAC の角を作し兩角の間に ABC = θ の誤差を生ず此誤差を行差角 angle of aberration と稱す、今地球の運動速度を v 光の進行速度を V とすれば $v:V=AC:BC$ 従て $v/V = \sin \theta / \sin(\varphi - \theta)$ 即ち

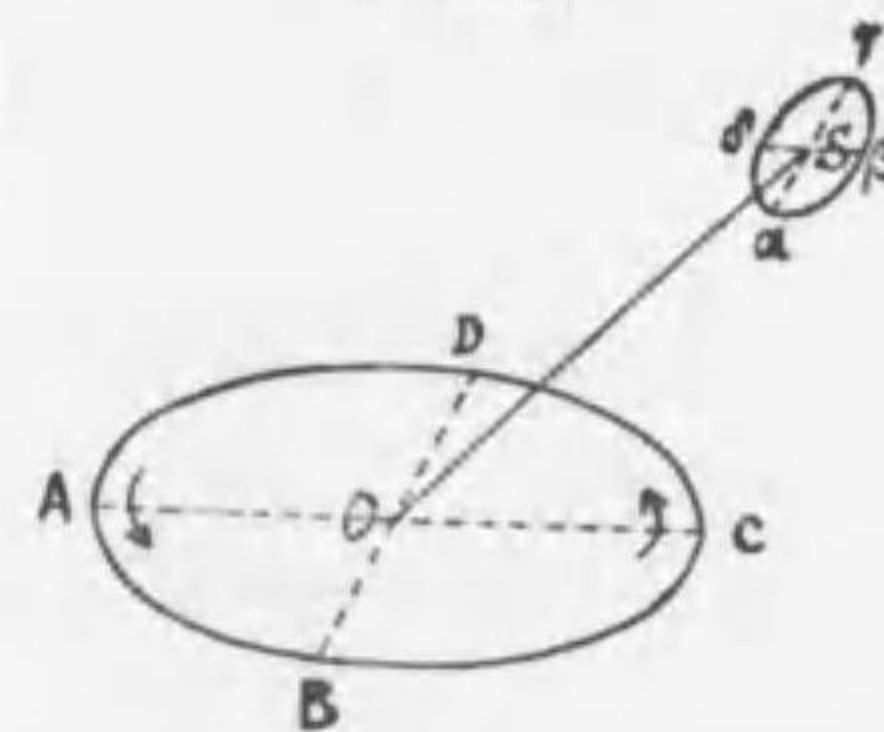
第三二五圖



$$V = \frac{v \sin(\varphi - \theta)}{\sin \theta} \dots\dots\dots (2)$$

ブラッドレーは黄道面 (plane of ecliptic 地球が太陽と公轉運動をなす平面) に對し殆ど垂直の方向に在る龍座の γ 及び δ 星 (γ, δ draconis) を觀察せしに此二星は天球に固定せずして一年間に小橢圓を書きて動くを見たり其橢圓の長軸は約 $40''$ なりしと云ふ、故に星は平均の位置より左右に $20''$ の變位をなしたるものなれば $\theta = 20''$ を得、又星は天頂に在るを以て $\varphi = \frac{\pi}{2}$ なり之を (2) に代入すれば $V = v \cot 20''$ を得べし此に地球の速度 $v = 29.76$ 軒と $\cot 20'' = 10313$ を代入するときは光の速度 $V = 306501$ 軒となる。今第三二六圖の ABCD を地球軌道とすれば恒星 S は地球が A 点を進行中は a に變位して視へ A, C, D を進行中は夫 α, γ, δ に變位して視へ S は一年間に $a\beta\gamma\delta$ なる小橢圓を書く如く視ゆるなり、然るに A, C 兩点に於ては地球運動の方向は OS に垂直なれども B, D に於ては OS に垂直なる地球速度の分速度は $v \sin \text{SOC}$ なるを以て S_a, S_γ に比すれば S_β, S_δ は

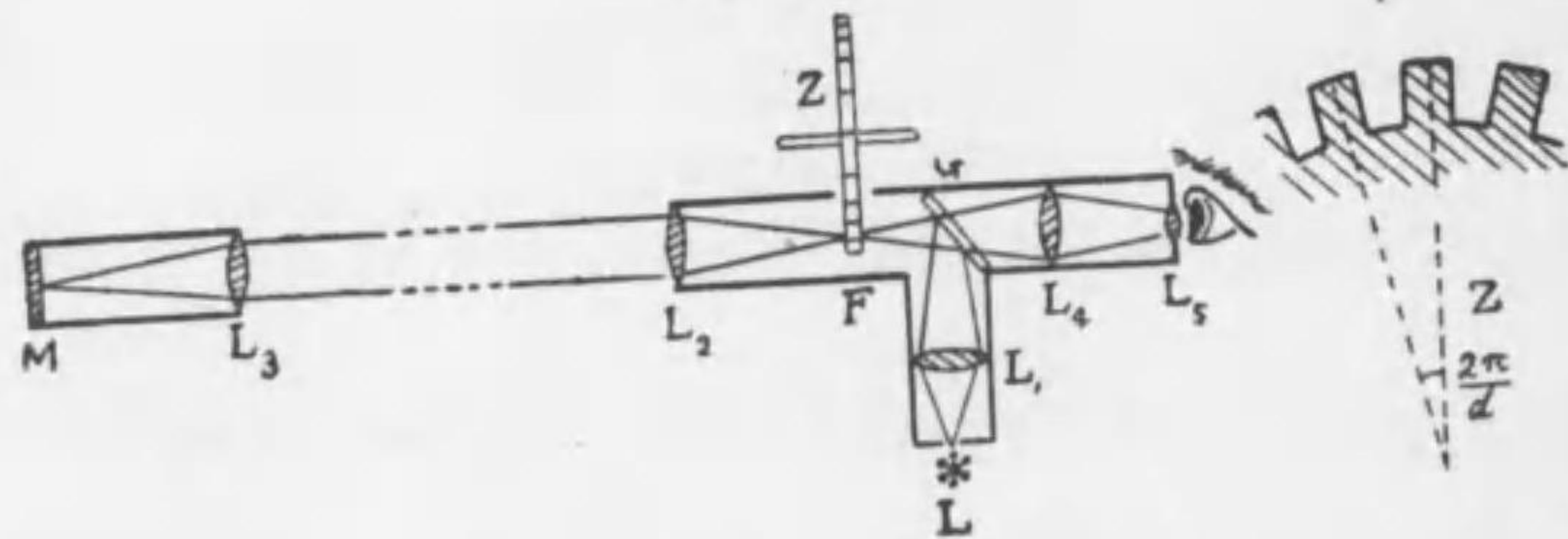
第三二六圖



各々 $1:\sin \text{SOC}$ の割合に小さくなり、行差橢圓 aberration ellipse $a\beta\gamma\delta$ は $a\gamma$ の方向に細長となるを見る、故に黄道面 (ABCD 面) に法線なる方向に在る星の行差橢圓は正圓となり黄道面の方向に近き星の行差橢圓は殆ど直線同様な細長橢圓となるべし、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ なるときの θ 値を行差常数 constant of aberration と稱す近來の觀測に依れば此値は約 $20.5''$ なり、此に因り $V = 298200$ 軒/秒を得べし。

207 フネゾーの實驗 (Fizeau 1849) 光源 L (第三二七圖) より出づる光はレンズ L_1 により G なるガラス板に反射しつつ焦点 F に集まりレンズ L_2 によりて平行光線となりて点線にて示したる遠距離を通過したるのちレンズ L_3 によりて集合し M なる鏡にて反射し元の道を経て F を通過したるのちガラス板 G を通過す、G は筒軸に 45° の角をなして傾き且つ透明なるを以て半ば反射し半ば通過せしむる力を有す、故に通過したる光線は L_1 と L_2 のレンズを経て屈折し肉眼を以て之を見れば光源 L の光を望見し得べし。Z は齒車にし

第三二七圖



て水平なる軸によりて回轉す、齒數を d とすれば齒間の隙數も d なり而して、車の中心と二個の隣齒とを連絡すれば其二線の夾角は $2\pi/d$ なり、今齒車の一秒間の回轉數を n とすれば角速度は $2n\pi$ なるを以て二個の相隣れる齒が焦點 F に來る時間は $2\pi/d \div 2n\pi$ 即ち $1/nd$ なり、而して齒車の隙が F に來りたる時漏れて左方に進行したる光が M に於て反射して F に歸りたる時隣の齒が F に來り居るならば眼は L の光を見ること能はざるべし、其時間は $1/nd$ の二分の一即ち $1/2nd$ なり、故に鏡 M と F との距離を l とすれば L より出でし光線が眼に映ぜざるときは V は $V=2l+1/2nd$ 即ち

$$V=4ld \dots\dots\dots (3)$$

なる關係を満足すべし。フキゾー實驗に於ては $l=8633$ 軒、 $d=720$ 、 $n=12.6$ なりき。フキゾー以來フォーコー (Foucault 1850) コルニウ (Cornu 1872-4) ニウコム (Newcomb 1885) マイケルソン (Michelson 1880) 等の實測により $V=300000$ 軒/秒 を以て最近の値と見て可なり。

第二章 光度學 PHOTOMETRY

203 光度 intensity of light 一点を光源となして四方に平等に光を送る場合を考ふるに光源より單位の距離に於て單位面積を有する表面を設け其表面上の各点に建てたる法線が總べて光源を過るものと假定すれば其表面が一秒間に受くる光量を其光源の光度 intensity (illumination と名づくる記者あり) と名づくることを得べし、換言すれば光源を中心とし單位の長さを半徑として球面を畫きたるとき其球面の各單位面が 秒毎に受くる光量は即ち光度なり。然らば光量とは何ぞやと尋ねるに此は與へられたる色に在りては確に光波の振動 エネルギーに正比例すべきものなれども少しにても光源の色を異にすれば光量は必ずしも波動 エネルギーに正比例すること能はざるなり、其理由は光量を判定するは吾人肉眼の感覺に據るものなれども肉眼は諸色の刺激に對して其感覺を異にし黄色を最も強く感じ紫を最も弱く感ず。故に光度同一なる紅紙と青紙とを並べ置き之を照らす光を次第に薄暗くするときは紅は遠を見るを得ずして單に青のみ残ることを知るべし、此をブルキンエ (Purkinje) の實驗と稱す、然れ共同一色に付て云へば光量は エネルギーに正比例するゆへ本章に於ては色は易らざるものと假定して論ぜんとす。

半徑單位なる球の面積は 4π なるを以て点光源 point-source の光度を J とすれば其光源が四方に發射する光量は $4\pi J$ なり今光源を中心とし半徑 r の球を畫けば其面積は $4\pi r^2$ なり故に其各單位面が受くる光量は $4\pi J/4\pi r^2$ 即ち J/r^2 となる、之を明るさ luminosity (或記者は之を intensity of illumination と名づく) と稱し H を以て示す、故に

$$H = \frac{J}{r^2} \dots\dots\dots (1)$$

なり、又点光源が發射する光量は $4\pi J$ なるを以て半徑 r なる球面上の或面積 S が毎秒受くる光流 luminous flux ϕ は

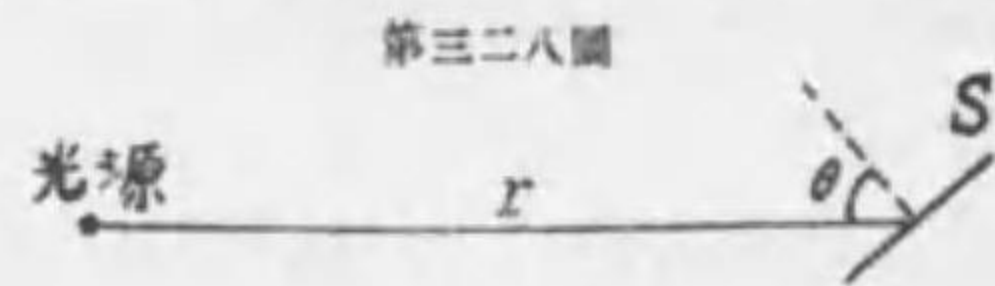
$$\phi = \frac{JS}{r^2} \dots\dots\dots (2)$$

となる。

光度の単位としては鯨油を以て製したる標準燭 standard candle の一時間毎に 7.77 瓦を消費するものを使用し其光度を一燭光と稱するもの最も古く行はる、ヘフナー光 Hefner's lamp と名づくるものは一燭光の 1/1.2 の光度を有す。明るさの単位 ルックス lux は一燭光の点光源より一米平方面に到着する光量なり。光流の単位 ルーメン lumen は点光源より出で単位立体角 ($S/r^2=1$) の方向に一秒毎に流るる光量を云ふなり。一般に光度及び此に連關せる量の単位を與ふる蠟燭又は ラムバ は常に不定にして之を實驗に使用するに當りては百分の一燭光以上の精確を期し難し、加之、光源は各其固有の色を異にし測定の結果信頼し難き場合尠からず。

209 ラムバートの法則 (Lambert 1760) 点光源より r の距離に於て S

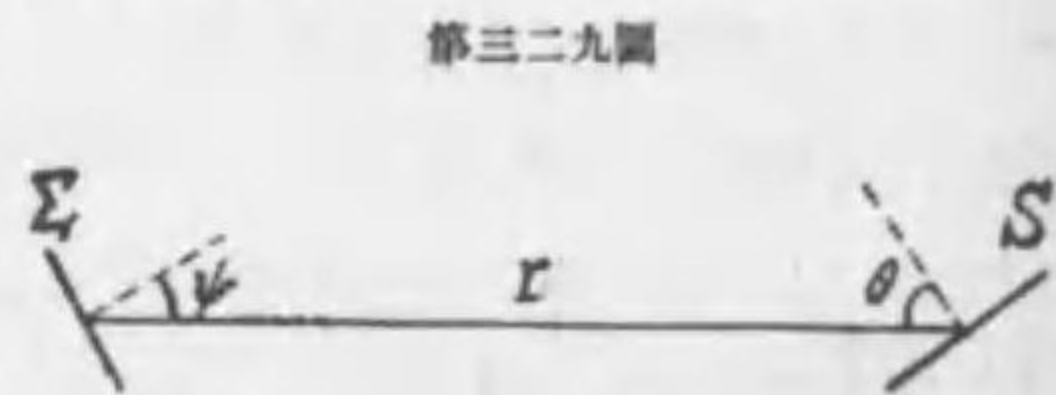
なる小面積を有する表面ありて其表面に立てたる法線は r の方向と θ の角を作るときは第三二八圖の如く S 面に於ける明るさ H は



$$H = \frac{J \cos \theta}{r^2} \dots\dots\dots (3)$$

光源が一つの表面なる場合には之を面光源 surface-source と云ふ今其面積を Σ とし各單位面より法線の方向に毎秒發射する光量を J と名づくるときは ϕ

の方向に出づる光量は $J \cos \psi$ となる、故に Σ 面上の各点より ϕ の同一方向に發射する全光量は $J \Sigma \cos \psi$ となり (第三二九圖) 從

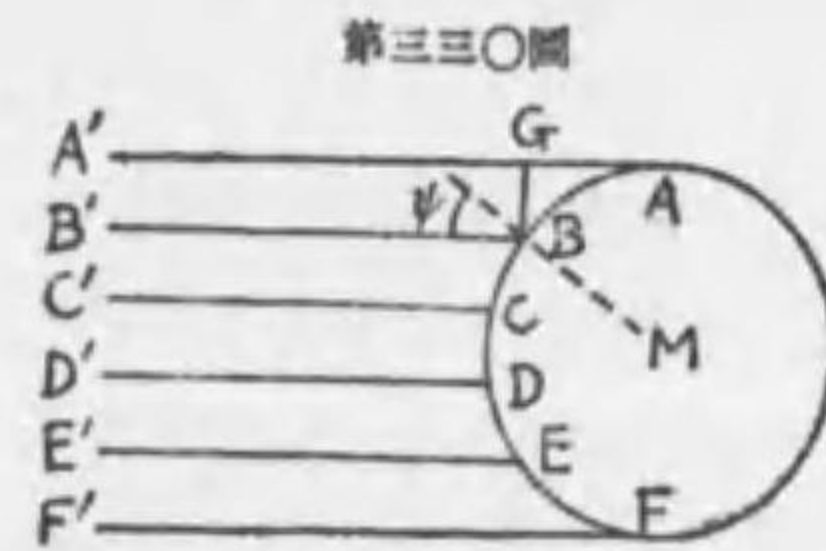


て明るさ H 及び光流 ϕ は夫々次ぎの如し

$$H = \frac{J \Sigma \cos \psi \cos \theta}{r^2}, \quad \phi = \frac{J \Sigma S \cos \psi \cos \theta}{r^2} \dots\dots\dots (4)(5)$$

此を ラムバート の法則と稱す。

光源の表面の光輝 brightness は其表面の各單位立体角より肉眼に入來る光流によりて計るものなり、例へば 第三三〇圖の M を太陽とし肉眼は左方に遠方に在りとすれば單位立体角は等距離なる平行線 AA', BB', \dots の間隔によりて示すこと



を得べく $\Sigma \cos \psi$ 即ち $AB \cos \psi$ は BG に等しくして常數なり、從て太陽面の各点は同一光輝を有することとなり日常實驗するところと符合す、太陽は其周邊に近づく

に從て光輝少しく減ずれども此は寧ろ太陽を圍繞する紅球 chromosphere の吸收に因るものなり。満月の表面も各点殆ど同一の光輝を有し中央部に比して縁部の特に弱光なるを認むる事なきは太陽が月面を照らすに當りて $\Sigma \cos \psi = \text{常數}$ の法則に遵ふを以てなり。

一般に發光面と受光面が任意の曲面なるときは各微分面に向て (4) 又は (5) を積分せざるべからず、例へば光流の場合には

$$\phi = \int d\Sigma \int \frac{J \cos \psi \cos \theta}{r^2} dS \dots\dots\dots (6)$$

の如し。此外か光度學に於ては任意表面の反射能 albedo なるものを研究す、今 dH なる少しの光量が dS なる小さき表面を照らし dS より μdH を四方に反映し得るものとせば μ は即ち反射能なり、今 dS なる表面の光輝を $p dS$ にて示すときは (p は單位面の光輝なり) dS を中心とし單位半徑を以て畫きたる半球の面積は 2π なるを以て dS より半球面に發射する光量は $2\pi p dS$ なる故に $2\pi p dS = \mu dH$ 即ち

$$p = \frac{\mu H}{2\pi} \dots\dots\dots (7)$$

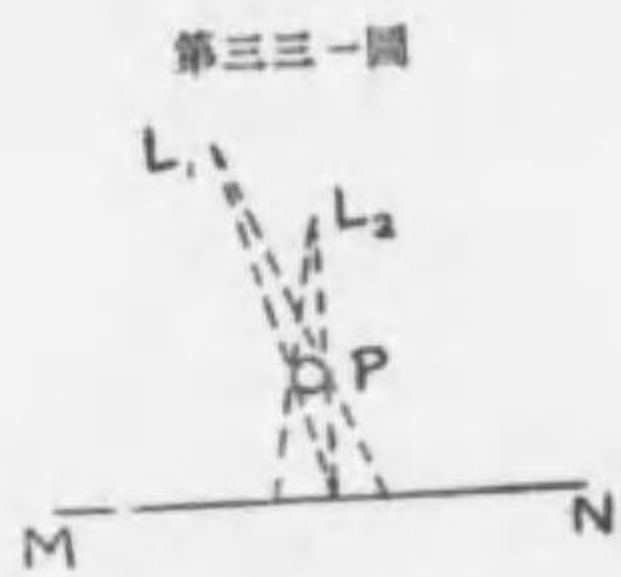
但し單位面積が受くる光量は dH/dS なり、反射能 μ は白紙の場合には $\mu = 0.852$ (Kononowitsch 測定) なり其他次表の如し

| | | | |
|----|-------|----|-------|
| 雲 | 0.65 | 木星 | 0.56 |
| 月面 | 0.073 | 土星 | 0.63 |
| 金星 | 0.69 | 火星 | 0.154 |

恒星の等級 magnitudes of stars は恒星と地球との距離又は星の大小には無関係にして単に肉眼にて視たときの感覚の大小に従ふて定めたるものにして最も明るき星を一等星 first magnitude star 其より約二倍半弱き光力を送る星を二等星……等の如く六等星に降れば殆ど肉眼視力の境に近き弱さを有するものなり、斯く刺戟は 2.5 の等比級数をなすときは感覚は等差級数を以て變化し茲にもフェヒナー (§ 186) の感覚は刺戟の對數に正比例する法則行はるるを見るべし。光力の等比を 2.5 と定めたる理由は實測上一等星の平均光力は六等星の光力の百倍なるを以て等比を r とすれば $r^5=100$ より $r=\sqrt[5]{100}$ を得、之を對數に直せば $\log_{10} r=0.4$ となり $r=2.512$ を得べし。他の天体の光力を等級別に表はすときは

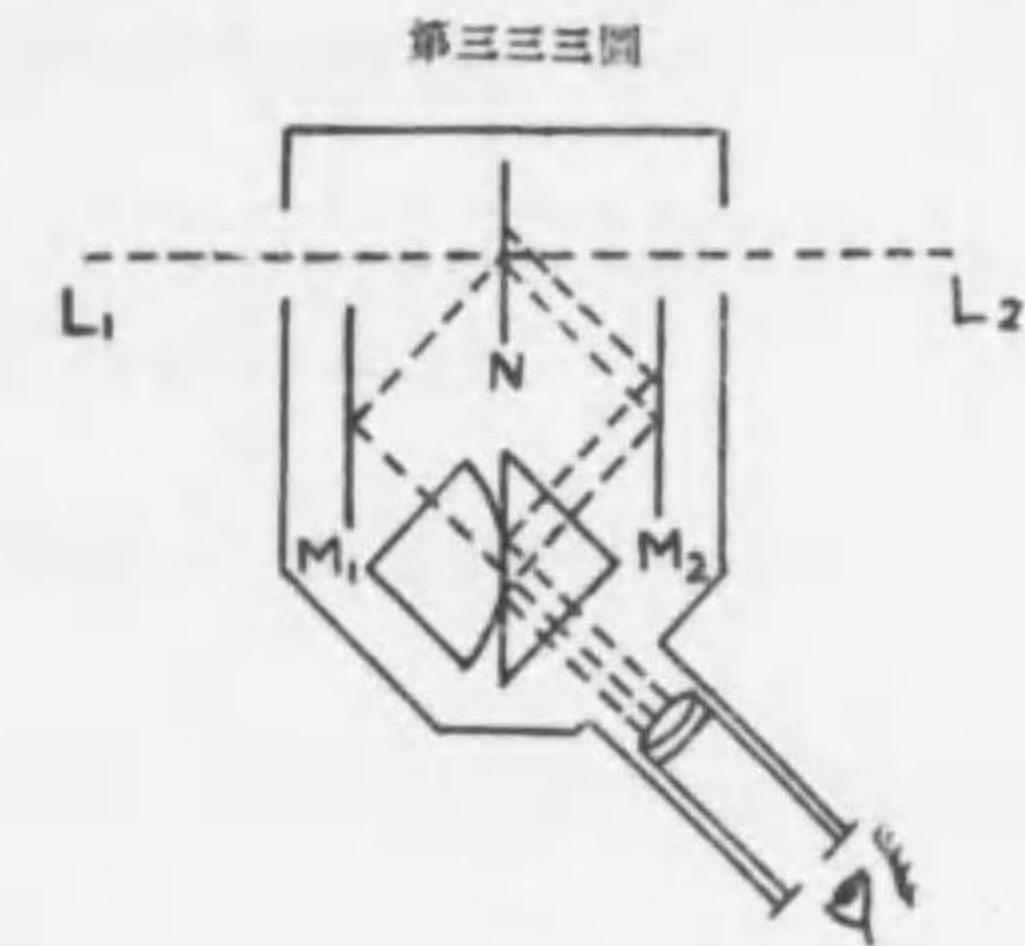
| 天 体 | 等 級 |
|--------|--------|
| 最明時の金星 | - 4.3 |
| 滿 月 | - 12 |
| 太 陽 | - 26.5 |
| 最明時の火星 | - 1.8 |

210 光度計 photometer ラムフォードの光度計 (Rumford 1794) と稱するものは既に ラムパート 時代より使用せるものにして (第三三一圖) 對立



MN に平行なる棒 P の影を二つの比較せんとする光源 L_1, L_2 によりて對立上に投ぜしめ影は接近して並び其濃度等しくなるまで影と光源との距離を變化し (1) 式により $J_1/r_1^2 = J_2/r_2^2$ を得て r_1, r_2 の測定によりて J_1 と J_2 の比を知るなり。リッチー 光度計 (Ritchie 1826) は (第三三二圖) L_1, L_2 より来る光は 45° に傾きたる鏡にて反射せられ MON なる乳白ガラスを照らすを以て上より眺むれば明るさを比較し得べし故に距離 r_1, r_2 を種々變化し明るさ

を同じくし前式により $J_1:J_2$ を知るなり。ルムマー、ブロードン 光度計 (Lummer-Brodhun 1889) (第三三三圖) に於ては N なる不透明板の両面に



白紙を貼り L_1, L_2 の光源によりて之を照らし、照らされたる面は各々 M_1 と M_2 の鏡によりて反射して一は八分球 octant を通過し八分球と三角プリズムとの接觸点を貫きて眼の方向に漏れ、 M_2 より反射するものはプリズムに於て全反射をなし眼に入る、故に眼の視野には N の両面より來りし光は内外に分れて映

ずるを以て光力を比較し得べし。ブーゲー 光度計 (第三三四圖、Bouguer 1760)



は MN なる乳白ガラスの中央に垂直に障壁を設け L_1, L_2 より来る光力を比較するなり。總べての光度計に共通なる原理は r を變化して J を等しくするに在り。

第三章 平面に於ける反射及び屈折 REFLECTION AND REFRACTION AT A PLANE SURFACE

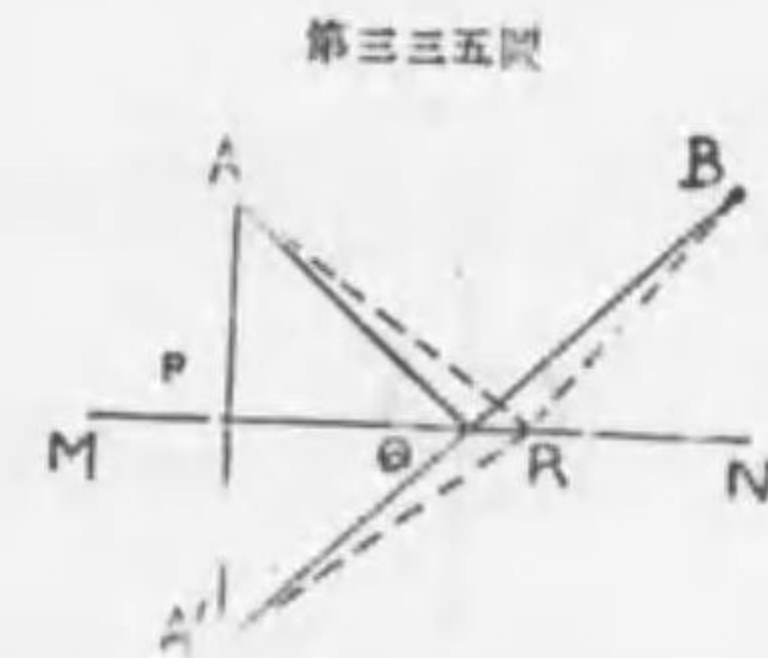
211 反射及び屈折の歴史 希臘人は光線の學を第一、視學 optikos 第二、反射學 katoptrikos 第三、透視學 skenographia 第四、屈折學 dioptrikos の四科に分ちて研究せり、反射學の記者として有名なるは ユウクリッド、アルキメデス、ヘーロン、トレミーの四人なり、屈折學には皆ヘーロンあるのみ、而して希臘人の反射學は亞利比亞人に由來するが如し。球面及び圓筒面に於ける反射はプラトン既に之を教へたり、光線が平面上に於て反射するときは最小距離を書くとの説はヘーロンに胚胎す、屈折の研究はヘッセン、カッセルの領主キルヘルム四世が1560年に測角器 dioptr を使用せしに創ると稱すれ其屈折の事は既に西洋紀元前四世紀の希臘人の知れるところなり、トレミーの屈折學は亞利比亞書の翻譯にして空氣と水の間の屈折率を 1:3/4 とせり。屈折の法則に關してはケプラー(1604)は空氣、對、ガラス間の屈折を實驗し 30° までは兩角(入射角屈折角)の比 3/2 なることを測り知りたれども其以上の角に於ては兩角の比一定ならず、漸くデカルト(1637)に到り始めて明瞭に正弦則 law of sines を表出したるなり、然れ其之に關するデカルトの理論は今日の學術より見れば誤に陥れり、デカルトの理論は入射反射線に於て兩媒質の境界面に平行なる分速度は互に等しきも境界面に垂直なる分速度は媒質の比重の大小に比例するものなりと云ふに在り、此理論に熱心反對したるフェルマー(Fermat 1608-1665)の論文は其死後(1679)世に公にせられたり、フェルマーはヘーロンの如く光は一媒質中の一定点より他の媒質中の一定点に到着するには最小時間を要す(此は近代力學の用語を以て光は最小作業 least action をなすと云ふなり)とする原理より出發して屈折の法則を證明せり。

212 反射及び屈折の法則 二つの隣接せる媒質の境界面が平面なる場合に於

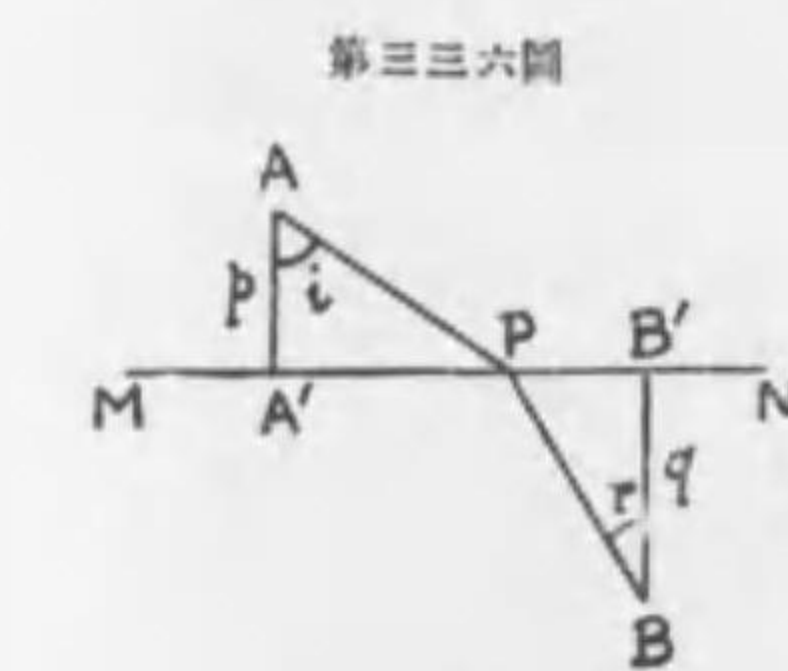
ける反射及び屈折の法則は既に § 174 に於て詳説せり、屈折の場合に於ては第一第二媒質に於ける光線速度を夫々 V_1, V_2 とし入射角を i 屈折角を r とすれば正弦の比は常數にして之を屈折率 index of refraction と稱し n を以て之を示す、即ち

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin i}{\sin r} = n \dots\dots\dots (1)$$

なり。反射の法則はヘーロン之を最短距離の理によりて證明せり、今第三三五圖 MN を兩媒質の境界面即ち鏡とし光源 A より鏡に垂線 AP を下だし之を延長して $A'P=AP$ とし反射光線の到着点 B と A' とを結び MN と交はるところを Q とすれば $AQ+QB$ は入射反射線の通過せし距離なり、何となれば



ば作法により入射角の餘角 $\angle AQP$ は反射角の餘角 $\angle BQN$ に等しきを以てなり、假に $AR+RB$ を光線の通路なりしとせば RA' を結ぶときは $\triangle A'BR$ に於て $A'R+RB > A'B$ 即ち $AR+RB > AQ+QB$ なり、故にヘーロンの如く



く光線の通路は最短なりとの原理より發足するときは通路は $AQ+QB$ ならざるべからず。屈折の法則を證明せんがためにフェルマーは最短時間の原理より出發せり、第三三六圖に於て MN を境界面とし A, B を夫々第一第二媒質内の定点とするときは A' を通過する時間は AP/V_1 にして PB を通過する時間は PB/V_2 なり故に全時間 t は

$$t = \frac{AP}{V_1} + \frac{PB}{V_2} \dots\dots\dots (2)$$

となる、今 A, B より境界面へ垂線 $AA'=p$ 及び $BB'=q$ を下だし $A'B'=c$, $A'P=x$, $B'P=c-x$ とするとき(2)は

$$t = \frac{\sqrt{p^2+x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{q^2+(c-x)^2}}{V_2} \dots\dots\dots (3)$$

となる茲に右側に於て變數は單に x あるのみなり、此に最小時間の條件 $\delta t=0$ を入るときは

$$\frac{x}{V_1 \sqrt{p^2+x^2}} - \frac{c-x}{V_2 \sqrt{q^2+(c-x)^2}} = 0$$

即ち $AP/(V_1 \cdot AP) = PB'/(V_2 \cdot PB)$ を得、故に $\sin i/V_1 = \sin r/V_2$ なり。

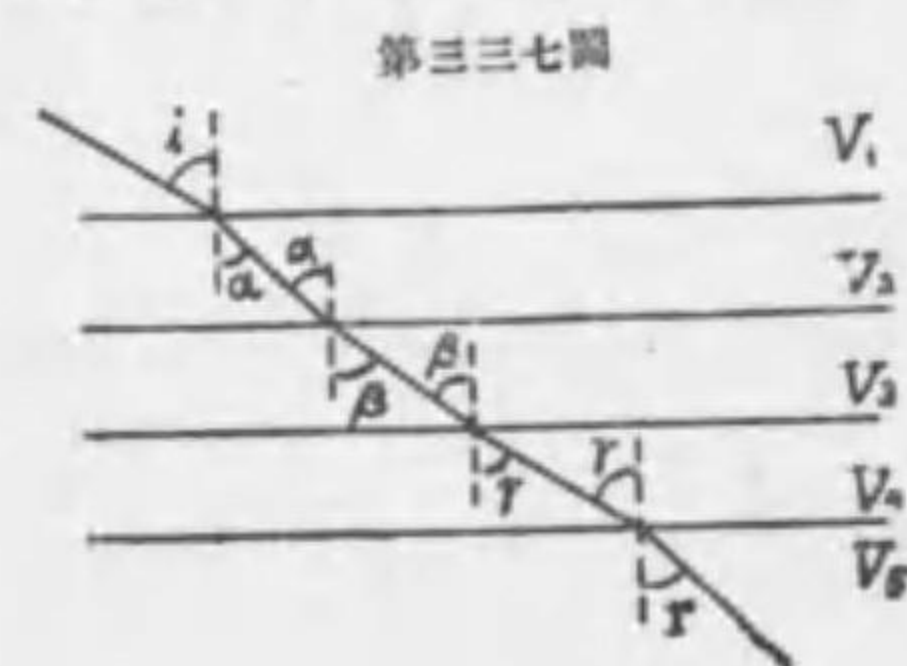
213 絶對及び相對屈折率 absolute and relative index 第一媒質が真空にして第二媒質が或透明体なるときは其屈折率を絶對屈折率と稱す、光の速度を夫々 V_0 及び V_1 を以て示し絶對屈折率を n_{01} を以て示すときは $n_{01} = V_0/V_1$ 同様に第二第三……媒質の絶對屈折率は $n_{02} = V_0/V_2$, $n_{03} = V_0/V_3$ …… を以て示すことを得。

第一媒質は或透明体にして光線速度を V_1 とし第二媒質は他の透明体にして光速を V_2 とすれば相對屈折率は $n_{12} = V_1/V_2$ なり、同様に第二第三の相對屈折率は $n_{23} = V_2/V_3$ となる。

上記の理により

$$n_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0/V_2}{V_0/V_1} = \frac{n_{02}}{n_{01}}, n_{23} = \frac{n_{03}}{n_{02}}, n_{13} = \frac{n_{03}}{n_{01}} \dots\dots\dots (4)$$

の關係を生ず、故に『二つの媒質間の相對屈折率は各媒質の絶對屈折率の比の倒數に等し』、然るに空氣の絶對屈折率は $n=1.00029$ にして殆ど單位に等しき故空氣を以て真空に代用するも不可なく從て絶對屈折率は常に透明体中の速度を以て空氣中の速度を除いたるものなりと云ふを得べし。



第三三七圖

第三三七圖の如く三つ以上の媒質が互に平行なる境界を有しつゝ並ぶときは入射反射角は圖に示す如く一々式を書くときは $V_1/V_2 = \sin i/\sin a$, $V_2/V_3 = \sin a/\sin \beta$, $V_3/V_4 = \sin \beta/\sin \gamma$, $V_4/V_5 = \sin \gamma/\sin r$ なるを以て各式の左側の積 V_1/V_5 は右

側の積 $\sin i/\sin r$ に等しく

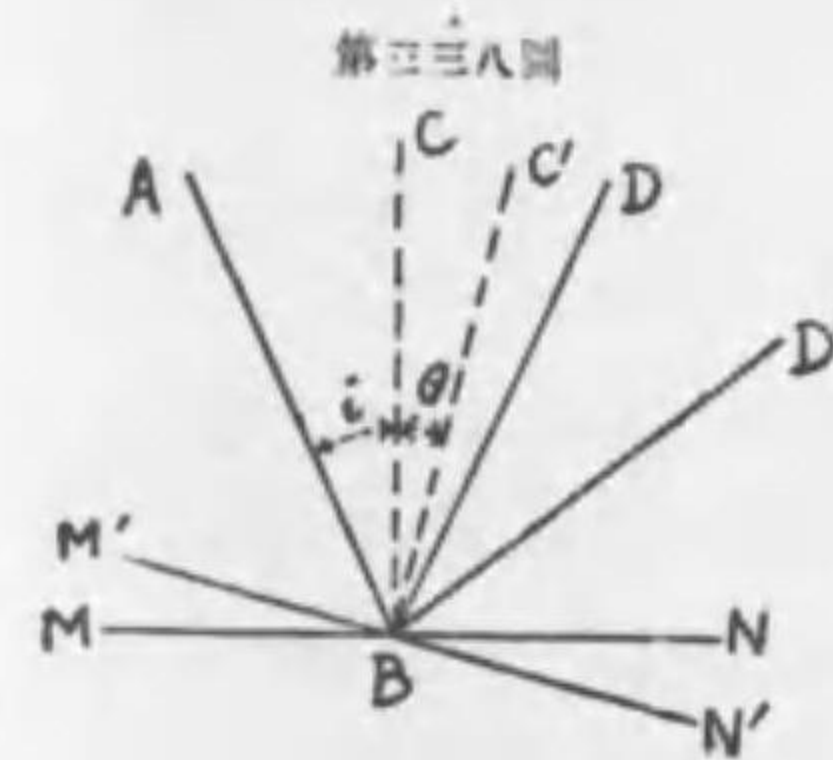
$$\frac{V_1}{V_5} = \frac{\sin i}{\sin r} \dots\dots\dots (5)$$

を得、故に多くの媒質の境界面平行なるときは最初と最後の媒質のみ存じて中間に介在する媒質は存在せざる場合と同一の結果を呈すべし、例へば地球表面を平坦なるものと想像すれば天体より來る光線屈折の法則は頗る簡單となり單に真空と地上に直接する空氣との關係となり天体より來る光線は漸次濃厚なる部分に進み來り次第に屈折を増し彎曲したる道を書くに拘らず單に $\sin i/\sin r = 1.00029$ なる式によりて表出せらるべし、 i は空氣の上層に於ける入射角にして r は地上の法線と光線とが地上に於て作す角なり、然れ共地面は平坦に非るを以て大氣屈折は極めて複雑となる。

214 反射面の回轉

入射線の位置を固定し鏡を θ 角だけ回轉するとき

反射光線は 2θ 回轉すべし、第三三八圖に於て AB を入射線とし鏡を MN の位置より $M'N'$ に回轉すれば法線 BC も θ 角を回轉して BC' の位置に來るべし、故に反射の法則により入射角 i なるときは $\angle ABD = 2i$ なれども入射角 $i+\theta$ なるときは $\angle ABD' = 2(i+\theta)$

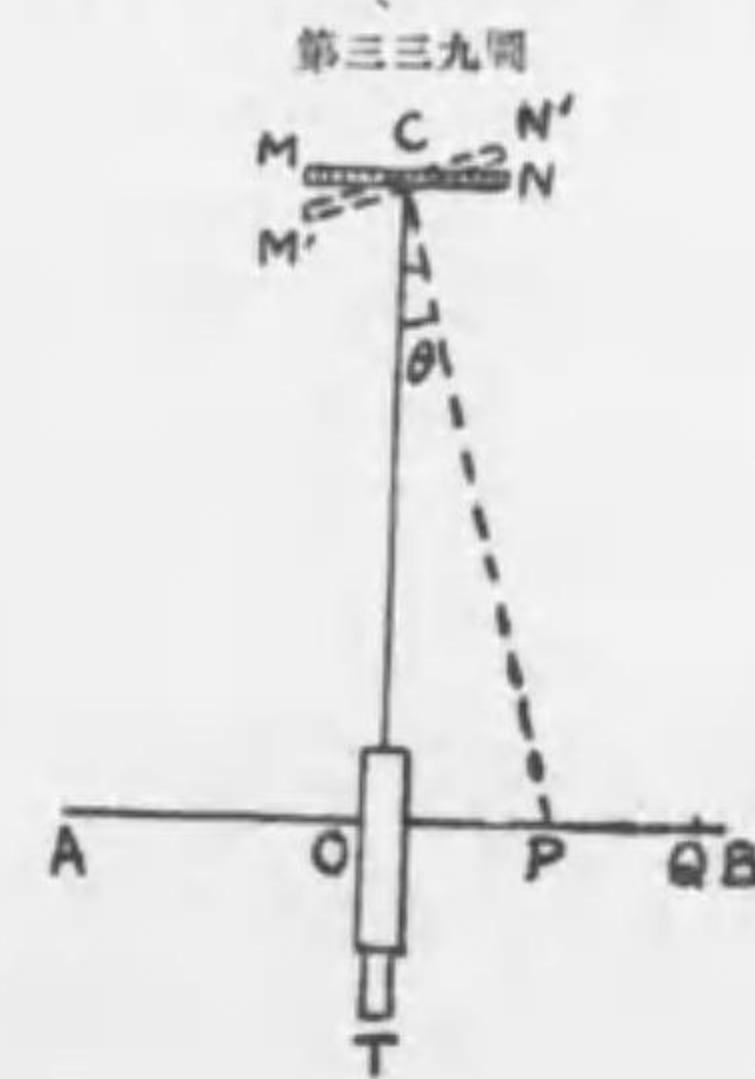


第三三八圖

となるゆへ

兩角の差 $\angle ABD' - \angle ABD = 2\theta$ なり。

此理により鏡の表面に少しの凹凸あるも此鏡に映ずる物像は二倍に重みて視ゆるなり、又第三三九圖の如く測尺 AB の目盛りを MN なる鏡に映じて望遠鏡 T にて望見するに當り MN が AB に平行なるときは望遠鏡によりて測尺の中心 O を見ることを得べし、然れ共鏡が θ の回轉をなして $M'N'$ の位置



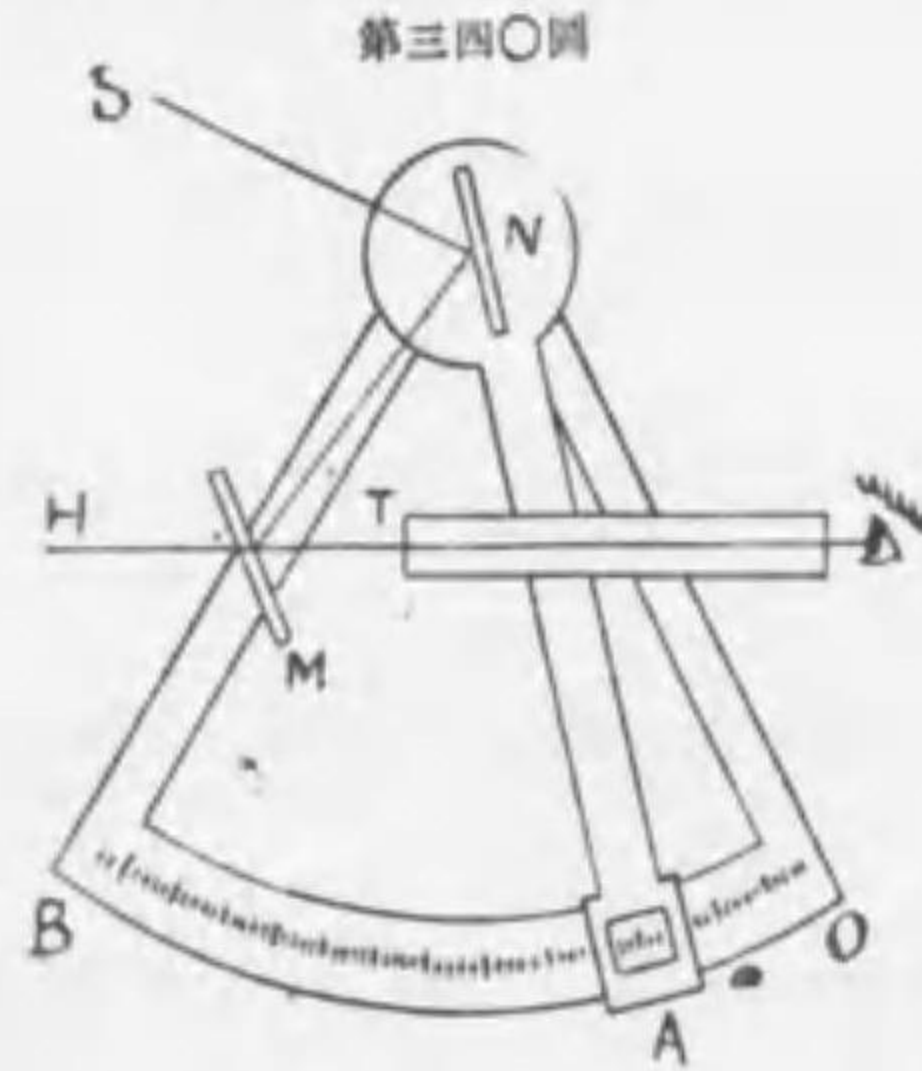
第三三九圖

に来るときは鏡の法線は CP の位置に來り望遠鏡裡に Q 点の目盛りを視得る様になるべし、即ち

$$\tan 2\theta = \frac{OQ}{CC}$$

なり、故に $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} OQ/OC$ より Q の目盛りを読むことによりて θ 角を算出し得べし。

又此理は六分儀 (第三四〇圖) sextant (Hadley 1731) に應用せらる、六分儀



は四直角の約六分の一即ち 60° の中心角を有する分圓の形をなし鏡 M と望遠鏡 T は分圓の兩邊に附著し望遠鏡は M の中点に向ふ、分圓の圓心に相當する点に軸を設け臂 NA は自由に回轉す、鏡 N は臂と共に回轉し A が起点 O と一致するときは M, N の兩鏡は平行なり。天体 S より來る光線は N に於て反射し再び M に於て反射して望遠鏡に入る、M は半

部は銀を塗りて鏡となし半部は透明なるを以て N より反射し來たる光線と同時に H (水平線) より來る光線を T に送ることを得べし、故に六分儀により天体 S の仰角 (SN と HT が作す角) を測ることを得べきなれども前述の理により BO 上の目盛りは二倍の値を表はし六十度を百二十度に等分す。

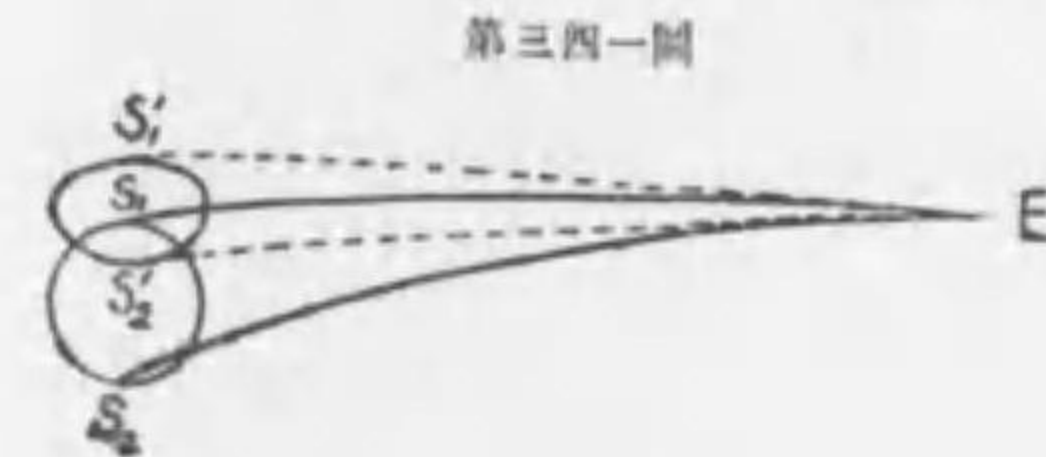
215 全反射 total reflection 第一媒質は光學的に稀薄 optically rare にして第二媒質は光學的に濃密 optically dense なるときは屈折光線が法線と作す角は第一媒質に於て大にして第二媒質に於て小なり、是れ光學的濃度を増すに従ひ光の進行速度小となるを以てなり。故に第二媒質に於ける角 r を次第に増せば第一媒質に於ける角 i も増して遂に直角に達することあり其時 r は直角よりも小さく之を r_0 とす而して此場合にも正弦則 (1) は成立するを以て

$$n = \frac{\sin i}{\sin r_0} \quad \text{即ち} \quad r_0 = \sin^{-1} \frac{1}{n} \dots \dots \dots (6)$$

r_0 を臨界角 critical angle と稱す、水及びガラスの屈折率を夫々 n_1 及び n_2 とすれば臨界角は夫々 $48^\circ 30'$ 及び $41^\circ 45'$ なり。

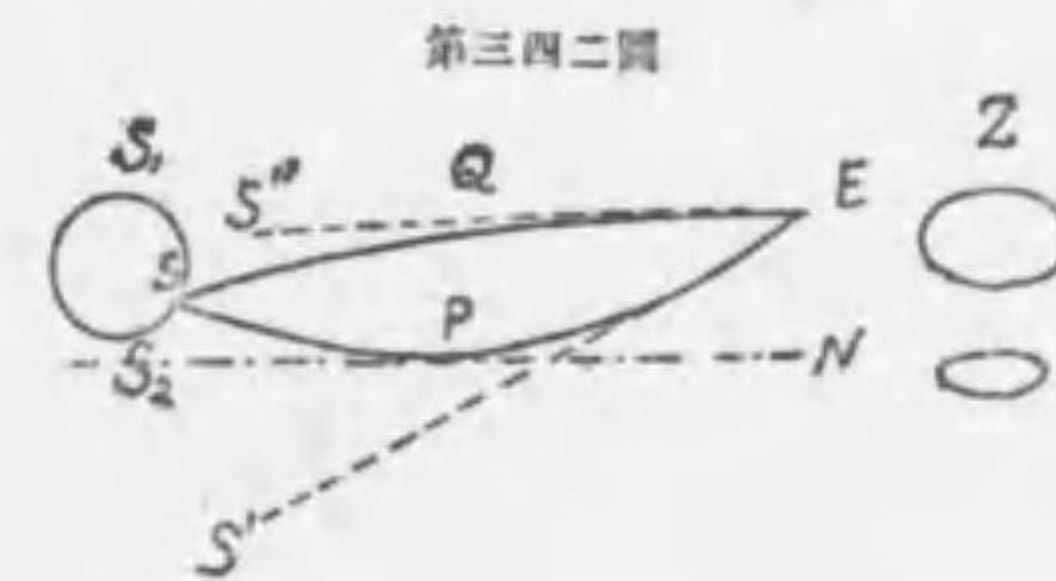
r が臨界角よりも大なるときは第二媒質内の光線は第一媒質に入る能はずして境界面 MN に於て反射す此現象を全反射と稱す、全反射は常に光學的濃密なる媒質内に起る現象なり。此理により魚又は潜水者は海水中より氣界を仰視すれば氣界は半徑 $48^\circ 30'$ の視圈内に綜合せられたる小世界となりて視ゆるなり、而して視圏外には海底及び海水中の物体の全反射により海中世界を望見することを得べし。又ガラスの直角プリズム (第三五二圖) の等邊の一に垂直に入射する光線は端面に於て $r = 45^\circ$ となり臨界角よりも大なるを以て全反射し得べし。

空氣中に突然温度を異にせる場處あるときは密度も突然の變化を早し其境界面に於て全反射の現象を生ずることあり、密度の變化は漸々にして屈折率も連續的に變化するときは遠所の物体の像は



單に垂みて視ゆるのみなり、出沒時の太陽及び月が常に楕圓に視ゆるも此理により、例へば第三四一圖の S_1, S_2 を太陽の上縁下縁とすれば大

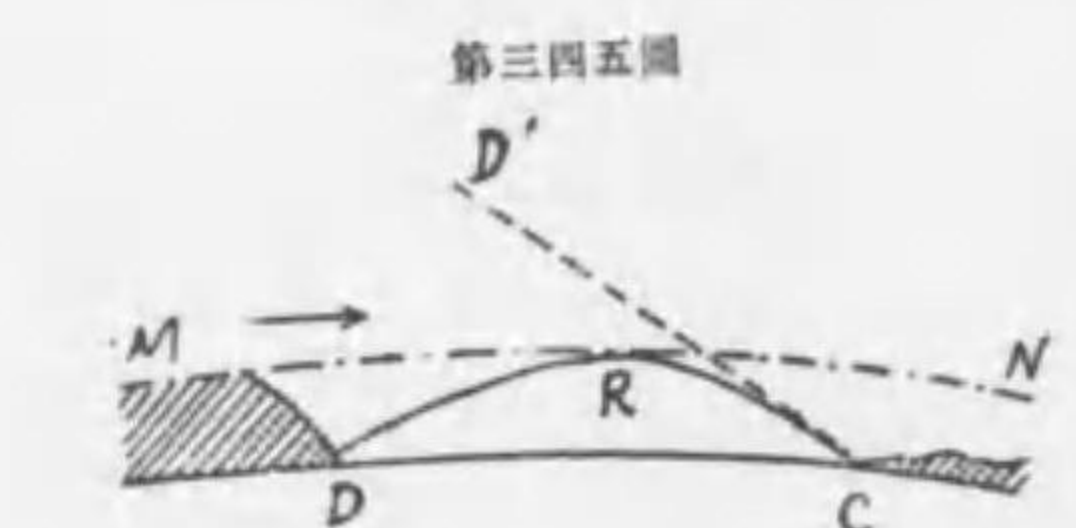
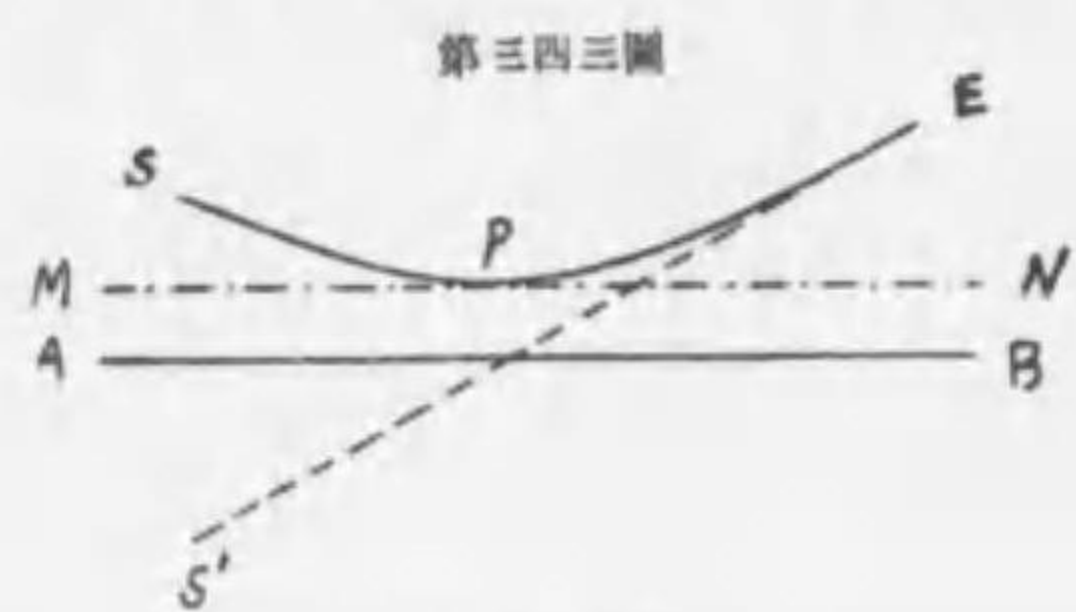
氣は F 層ほど濃密なるを以て眼界に入る光線は S_1E 及び S_2E を較ぶれば S_1E はより多く彎曲し像は E 点に於て兩曲線へ引きたる切線 $S_1'E, S_2'E$ の方向に現はれ此がために太陽の上下の直徑短縮して視ゆるなり、然るに第三四二圖の如く水平層以下は突然稀薄媒質を形成する



場合に於ては (MN 以上は漸々稀薄となること前の如し) S より來る光線 $SP'E$ は途中 P に於て全反射をなし E より之を見れば S' の方向に其像を生ずべし S 以下の諸点より出發する光線も同様に全反射し同様に S' 附近に其像を生ず、此に反し S を出發し SQE の航路を取るものは S' の方向に其像を生ず、従て太陽は像の Z に示す如く二体に分れ所謂二体日輪の奇象を呈すべし、此と同一の理

により三体の日出を見ることあり。

一般に蜃気楼或は氣中樓閣 mirage の現象は氣中の全反射によりて説明することを得べし、海水の温度は朝夕空氣の温度よりも却て高きを以て海面に接する

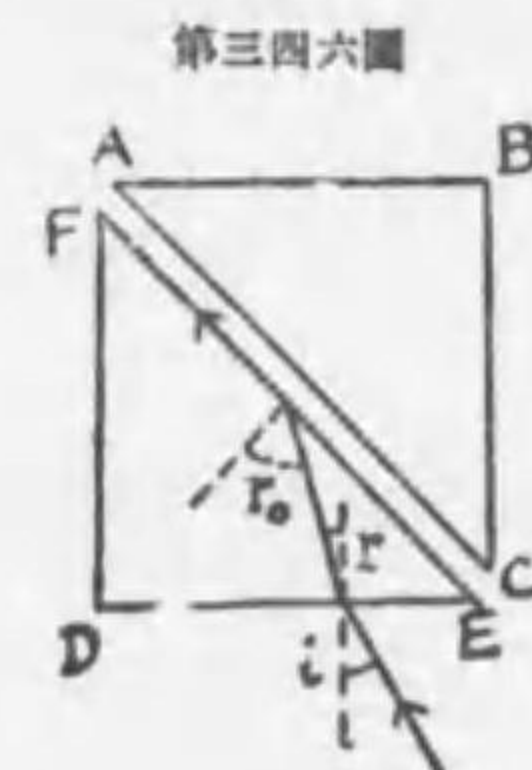


空氣は暖められて比重少なく海面を距るに従て比重を増し従て空氣は不安定なる釣合に在り。故に比較的無風なる海面に於ては朝夕殆ど毎日(錦江灣の如く)氣中に於ける全反射の現象を目撃し得べし、第三四三圖の AB を海面とし MN を密度不連続なる層となすときは S より出づる光線は少しづつ彎曲しながら P に至りて全反射をなし SP と殆ど同形の曲線 PE を書きつゝ眼 E に入るべし故に E に切線 ES' を引けば其方向に S の倒象 S' を眺むることを得るなり

り、眼を成可く海水面に接近せしめて観るときは遠山及び船形は第三四四圖の如く視ゆ、MN 以下映像なり。又暖風水平の方向に山頂を吹くときは(第三四五圖矢の方向) MN 以下は山の影となりて温度低く空氣の温度は MN を境界として突然變化し MN より上方は稀薄となる故に D を出發したる光線は DR の如き道を書き途中 R にて全反射をなす故に C より眺むれば D は D' に視へ天上に倒像を生ず、英國 ドーヴ附近に於ては墨西哥灣流に温められたる風は茲に述ぶる如き氣中密度の不連続層を生じ之がために ドーヴ D は佛國 カレイ C よりは地球面彎曲によりて平日は視へざる理なれども天上に ドーヴ の蜃気楼を倒映し海峡を隔てたる カレイ より望見することを得るものなりと云ふ、總じて此種の倒映を倒映 ミラージュ inverted mirage と稱す、空氣が鉛直なる密度の不連続を生ずるときは側面 ミラージュ lateral mirage を生ず、二見ヶ浦の蜃気楼は恐くは此種に屬するならん、其他空氣の不規則なる密度分配により極めて不規則

なる ミラージュ を生ずることを以て有名なるは伊國 メシナ 海峡なり。ミラージュの現象は暖爐の表面又は日熱によりて暖められたる壁面、石橋等に於て屢々目撃するところなり、又現記者は仙臺宮城野の草原に於て之を見たることあり。

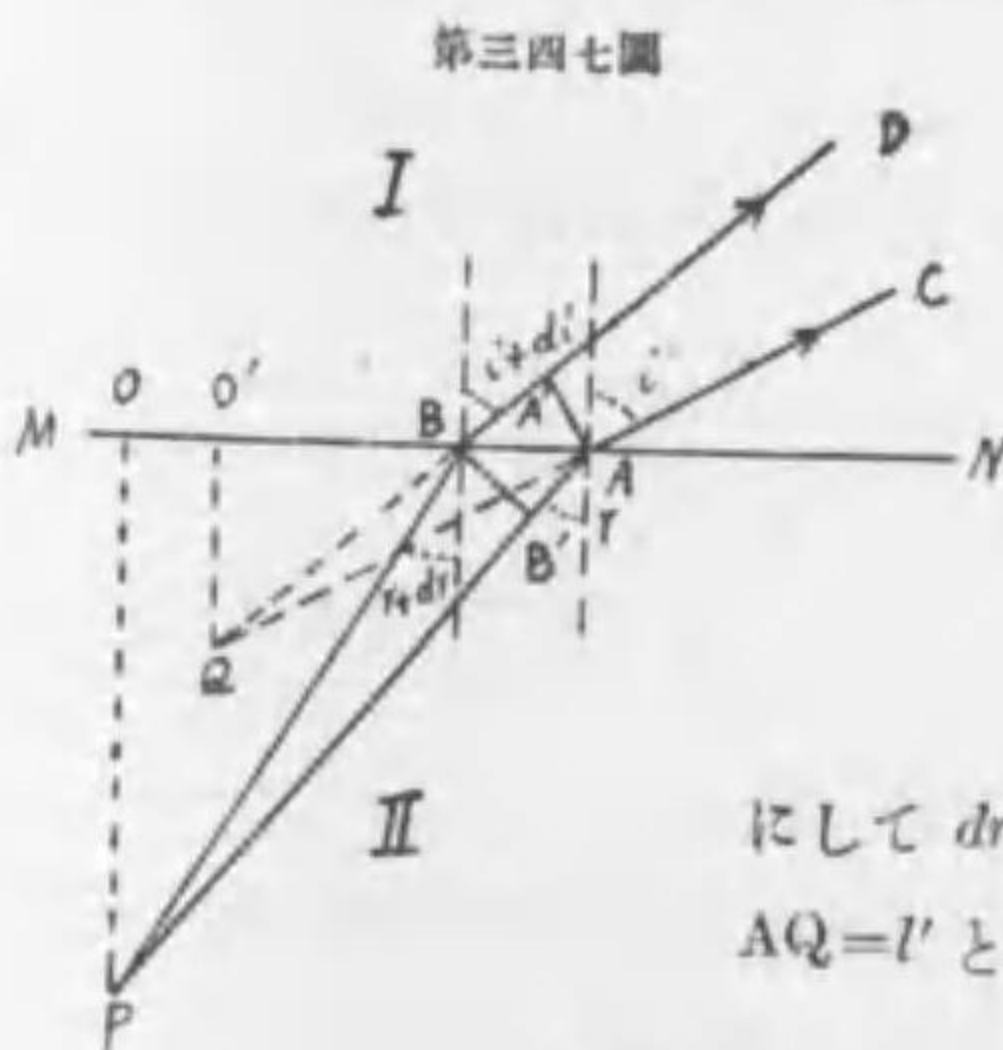
アツベの屈折計 refractometer (Abbe 1871) は全反射の理を應用す、其重要部は第三四六圖の二個の直角プリズムなり、



AC, FE は平行にして其中間に屈折率を率らんとする液体を充たし或光源より DE 面に入射する光線をして FE 面上に全反射せしむ、今入射角を i としガラスの屈折率を n とすれば $\sin i = n \sin r$ なり、然るに $r_0 = \frac{\pi}{4} + r$ なるを以て $\sin i = n \sin(r_0 - \frac{\pi}{4})$ を得べし、今液体の屈折率を x とすれば液体とガラスとの相對屈折率は x/n となる故に r_0

を臨界角とすれば(6)により $\sin r_0 = n/x$ を得、前式と合用すれば i を與へて x を算出すること容易なり、アツベの器械に於ては AB 面の上方にレンズを備へたる圓筒附屬し、全器を液中に挿入しながら圓筒の上端より眺むるなり。

216 屈折により生ずる像 第二媒質中の一点 P より出づる光線 PA, PB は(第三四七圖)は屈折して第一媒質の C, D に到るを以て CD の處に眼を置き



て眺むれば其交点 Q より出づるが如く見ゆべし、故に Q を P の像 image と稱し P を物体 object と名づく、A, B に夫々法線を樹て角を r, i 及び $r+dr, i+di$ にて示すときは

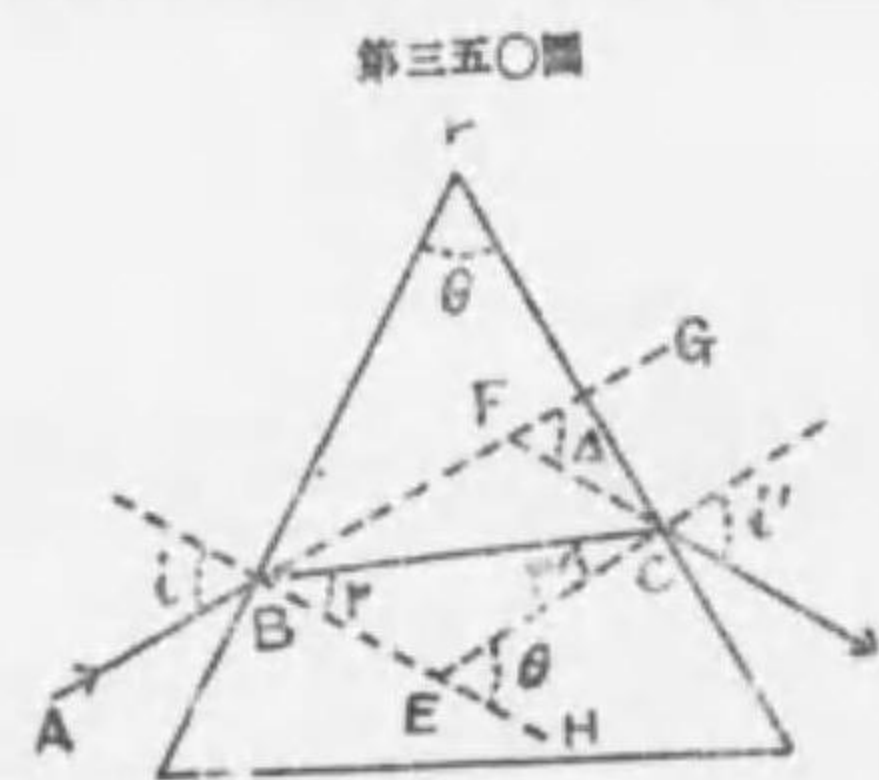
$$\frac{\sin i}{\cos i} = n \frac{\sin r}{\cos r} \dots \dots \dots (7)$$

にして $dr = \angle APR, di = \angle AQB$ なり、今 $AP = l, AQ = l'$ と置けば $BB' = l dr, AA' = l' di$ 故に(7)により

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{l}{l'} \cdot \frac{\cos i}{n \cos r}$$

(13) となる (第三四九圖)。茲に研究したる曲線は數學的には縮閉線なれ共物理学に於ては各々屈折焦面 diacoustic の名稱を有す。

217 プリズム 三角柱体 (畧してプリズム prism と云ふ) を取り之に光線を入射せしむれば二回の屈折をなして空气中に出づ (第三五〇圖)、入射出射



点 B, C に於て法線 BE, EC を設け、プリズムの屈折率を n とすれば
 $\sin i = n \sin r, \sin i' = n \sin r' \dots\dots (14)$
 なり又四邊形 PBEC は對角各々直角なるを以て圓に内接せしむることを得べし故に頂角 θ は外角 HEC に等し即ち

$$\theta = r + r' \dots\dots (15)$$

を得、次に $\angle FBC = i - r, \angle FCB = i' - r'$ なるを以て $\triangle FBC$ の外角 $\angle GFC$ を J と名づくるときは $J = i - r - i' - r'$ 即ち $J = i + i' - \theta$ なり、之に (14) を代入すれば

$$J = \sin^{-1}(n \sin r) + \sin^{-1}(n \sin(\theta - r)) - \theta \dots\dots (16)$$

なり、 J は最初の入射線 AB が出射線 CD と作る角なるを以て之を變差 deflection と名づく、故に變差最小なるときは $\delta J = 0$ 即ち

$$0 = \frac{\cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{\cos(\theta - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta - r)}}$$

此は $r = \theta - r$ と置いて満足す故に $r = \theta/2 = r', i = i' = (J + \theta)/2$ 依て

$$n = \frac{\sin \frac{J + \theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \dots\dots (17)$$

但し (17) 中の J は最小變差角なり、故に最小變差の時は光線の通路は左右對稱となり BC は底面に平行す、(17) を使用してプリズムの屈折率を測定することを得べし。

A より出發せし二條の光線は (第三五一圖) BC, B'C' となり之を延長すれば

P に會す故に恰も P より來りし如く屈折せしなり其後再び屈折して CD, C'D' となり恰も P' より出でし如し故に DD' に眼を置きて眺むれば A の像は P' に生ずるなり、依て $AB = l, PB = l'$ とすれば (8) により

$$l' = l \frac{\cos^2 r}{n \cos^2 i}$$

を得、然るに $BC = t, P'C = l''$ と置き CC' を境界面とする場合には

$$l'' = (l' + t) \frac{\cos^2 i'}{n \cos^2 r'}$$

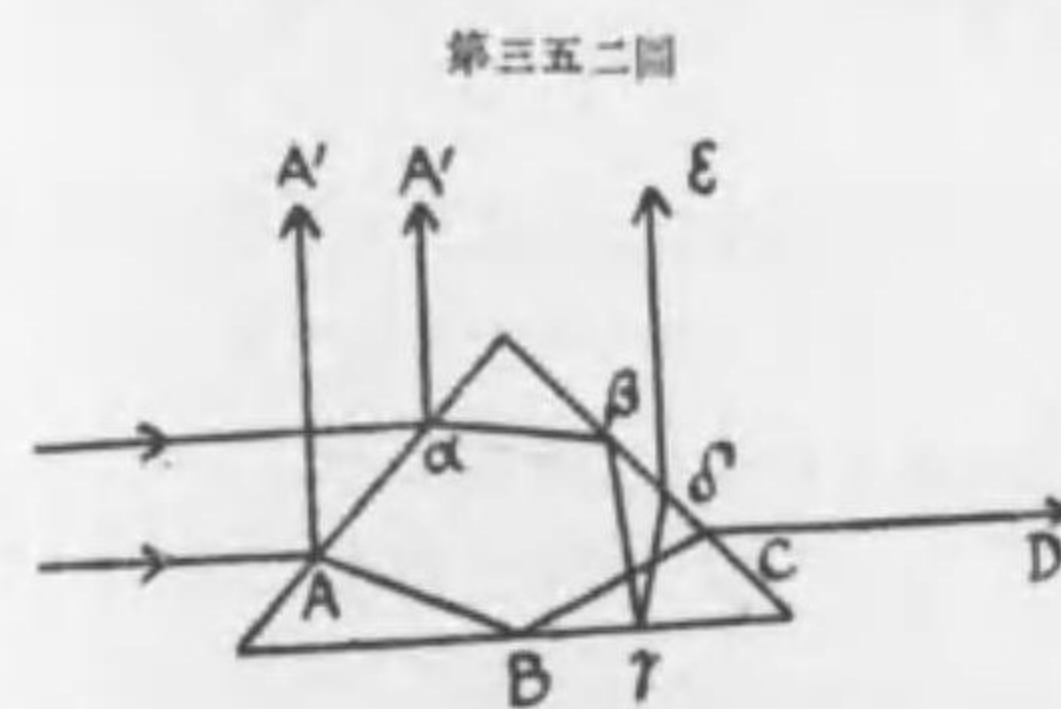
なるを以て兩式より

$$l'' = \left(l \cdot \frac{n \cos^2 r}{\cos^2 i} + t \right) \frac{\cos^2 i'}{n \cos^2 r'} \dots\dots (18)$$

なり最小變差なるときは $i = i', r = r'$ により次ぎの簡式を得

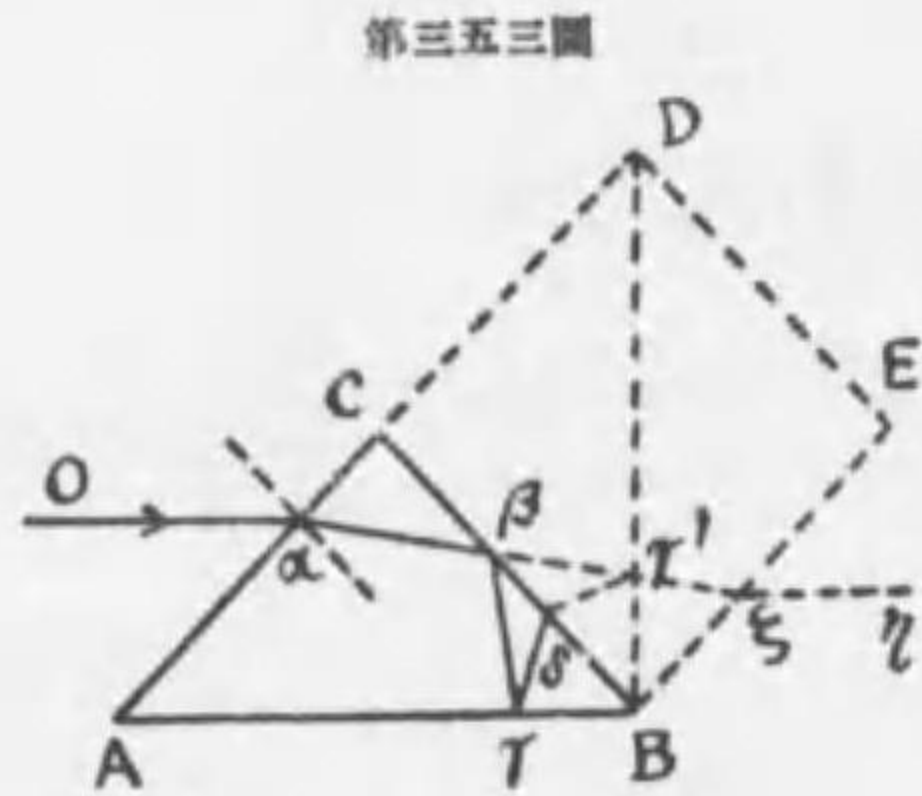
$$l'' = l + \frac{t}{n} \cdot \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r}$$

直角プリズム (第三五二圖) は豎邊に平行に日光を受くるときは三種の反射光線を生ず、第一は A 又は a



より直に反射するものにして光度最も弱し、第二は ABCD となりて B に於て全反射をなすものにして光度最も強し、第三は $\alpha\beta\gamma\delta$ となるものにして β に於て全反射をなせども γ に於て少しく洩

るなり従て光度中間に位す、今プリズムを左右に回轉するときは A' と D' とは變位すれども ϵ は變位せずして入射線と $\delta\epsilon$ とは互に不斷垂直なるを見るべし即ち $\delta\epsilon$ は入射線に對し常定轉向 constant deviation を有す、此理を證明するには第三五三圖の如く BC を境界線として ABC の像 BCD を作るときは $\beta\gamma$ は $\beta'\gamma'$ となり $\alpha\beta$ の延長を形成す、次に BD 面に於て反射

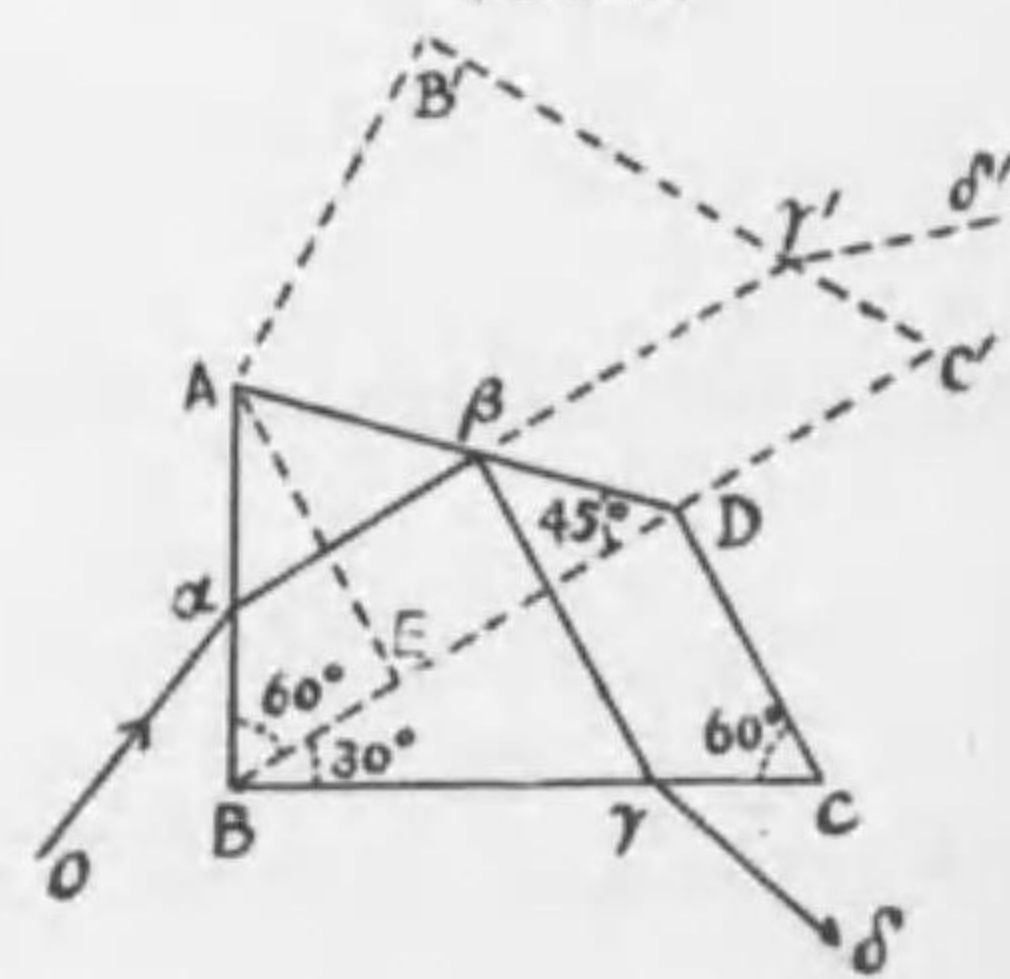


第三五三圖

せしむれば $r\delta$ は $r\epsilon$ となり ϵ に於て屈折して遂に空気中に出づ、然るに AC と BE は平行なるを以て入射線 Oa は常に射出線 $r\epsilon$ に平行ならざるべからず、故に入射線は (第三五二圖) de と常定の角を作さざるべからず。

ヘルガー Hilger の常定轉向プリズムは第三五四圖の形を有し $\triangle ABE$ 及び BCD は各々 $30^\circ, 60^\circ$ 角を持ち $\triangle AED$ は直角プリズムをなしたるものを組合せたるものと見て可なり、入射線 Oa の方向は一定し屈折線 ab は必ず BD に平行となる様にプリズムを置くなり、故に βr は必ず ab に垂直となり又 $\angle A\alpha\beta = \angle B\gamma\beta = 60^\circ$ なり従て Oa は常に $r\delta$ に垂直となる、然れ共 Oa の方向を少しにても易ゆるときは出射入射兩線は互に垂直となる能はざるが故に第三五三圖の場合と同一視すべからざる事は明かなり、然るに之を常定轉向と名づけたる理由は入射線は a 点より七色に分解し各色其方向を異にするを以て吟味せんとする色の方向を常に BD に平行ならしめんがためにプリズムを回轉するなり然るときは最後の射出線 $r\delta$ は矢張 Oa に垂直なるべし、故に常定轉向の名を得たるものなり。今 AD を境界面としてプリズムの像 $ADC'B'$ を作るときは $ab\beta r$ 一直線となり $r\delta'$ は Oa と對稱的となり恰も正三角形プリズムを最小轉向角にて出射したると同一の結果を呈し大にガラスの經濟を生ず。

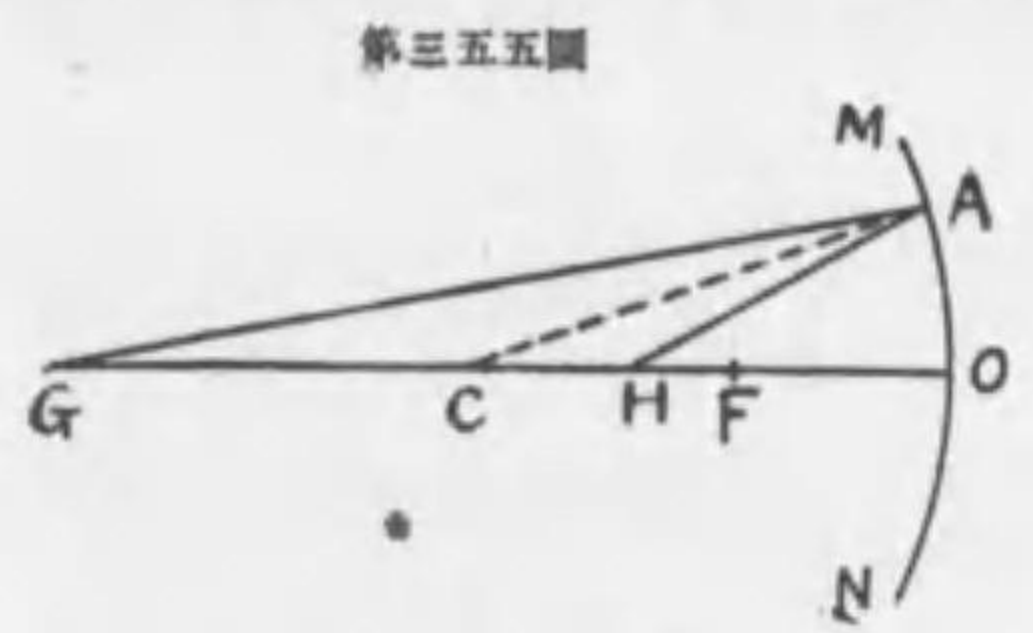
第三五四圖



第四章 球面に於ける反射及屈折

REFLECTION AND REFRACTION AT A SPHERICAL SURFACE

218 凹面鏡に於ける反射 茲に云ふ凹面鏡 concave mirror は球面の一部にして其中点と球心とを結ぶ線を軸 axis と稱す、第三五五圖 MN を凹面鏡の断面とし C を球心とし、CO を軸とす、軸上の一点 G を物体 object 又は光点 luminous point と稱す、G より出づる光線 GA が法線 CA となす角 $\angle GAC$ は入射角なり、此と等角 $\angle CAH$ をなすつ、



AH を引くときは AH は反射線なり、故に H を光点とすれば AG は反射線となる。 $\triangle AGH$ に於て AC は頂角を二等分するゆへ $AG:AH=GC:CH$ なり、故に鏡の大き MN に較べて半徑 OC が極めて長きときは $AG \approx OG$, $AH \approx HO$ とするも不可なく $OG=g$, $OH=h$, $OC=r$ と置けば、前比例式は $g:h::g-r:r-h$ となり $2gh=hr+gr$ を得、各項を ghr 積にて除すれば

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \dots\dots\dots (1)$$

となる、茲に r は常數なるを以て與へたる g に対する h は同一にして A 点の位置に關することなし (假定により MN は CO に對し甚小なり) 即ち G より出でたる多くの光線は反射後悉く H を過るものなり、故に H 点に白紙の小片を懸せば G の像を得、依て H を像点 image、 g を光点距離、 h を像点距離と名づく。 g を増すときは h は減じ g を減ずれば h は増す、故に G, H を共轛点 conjugate points と稱す。 $g=\infty$ なるときは GA は軸に平行となる其時の H の位置を焦点 focus と名づけ F を以て之を示し、OF を f を以て表は

し之を焦点距離 focal distance と呼ぶ、(1) に $g=\infty, h=f$ を代入すれば

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f} \dots\dots\dots (2)$$

故に焦点距離は半径の二分の一なり、又 (2) と (1) より

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \dots\dots\dots (3)$$

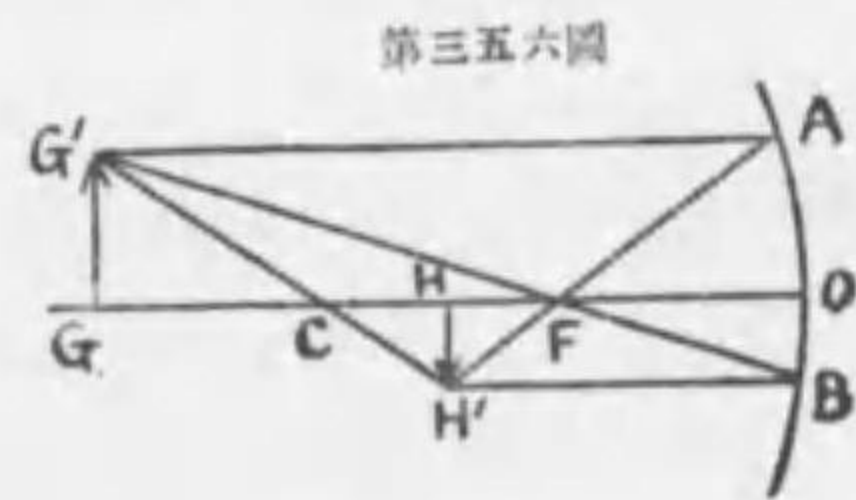
を得此二式を球面鏡の公式と稱す。

上理により軸に平行なる光線は反射後総べて焦点を過るものなり又光点を焦点に設くれば反射後悉く軸に平行となるべし、又球心 C より出づる光線は何れも法線に沿ふて走るを以て同一方向に反射し球心に歸るべし、故に作圖の三則は次ぎの如し

- 第一、軸に平行なる光線は(反射後)焦点を過る
- 第二、焦点を過る光線は軸に平行となる
- 第三、中心を過る光線は中心に歸へる

上三則中二つを使用すれば作圖することを得べし。

GG' (第三五六圖) を光体とすれば G' より軸に平行なる線と焦点を過る線と



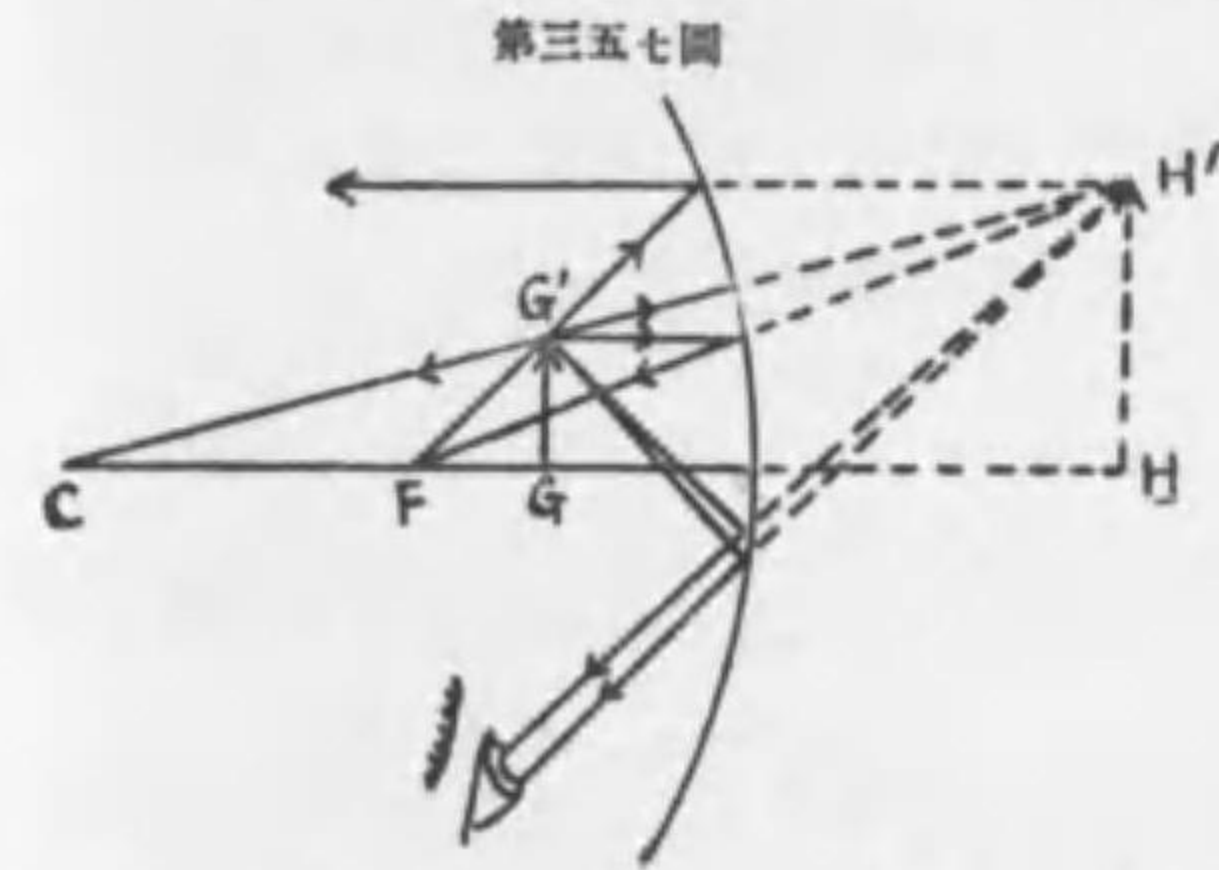
を引きて其反射線の交点を H' とすれば HH' は即ち求むるところの像なり、白紙を H に翳すときは其上に映るを見るを得べし故に之を實像 real image と稱す又倒立に映るを以て倒像 inverted

image と名づく。像の大きさ HH' を光体の大きさ GG' にて除したるものを倍率 magnification と稱し μ にて之を示す、然るに $GG' \cong AO, HH' \cong OB$ なるを以て

$$\mu = \frac{HH'}{GG'} = \frac{OB}{AO} = \frac{HH'}{AO} \text{ 即ち } \mu = \frac{r-h}{g-r} = \frac{f}{g-f} = \frac{h-f}{f} \dots\dots\dots (4)$$

故に $g=2f$ なるとき即ち $g=r$ なるとき $\mu=1$ なり、 $g-f < f$ の時常に $\mu > 1$ なり、即ち像を物体よりも大きく映すには $g < r$ なるを要す換言すれば物体は C と F との間に在るを要するなり。然るに $g < f$ なるときは $\mu < 0$

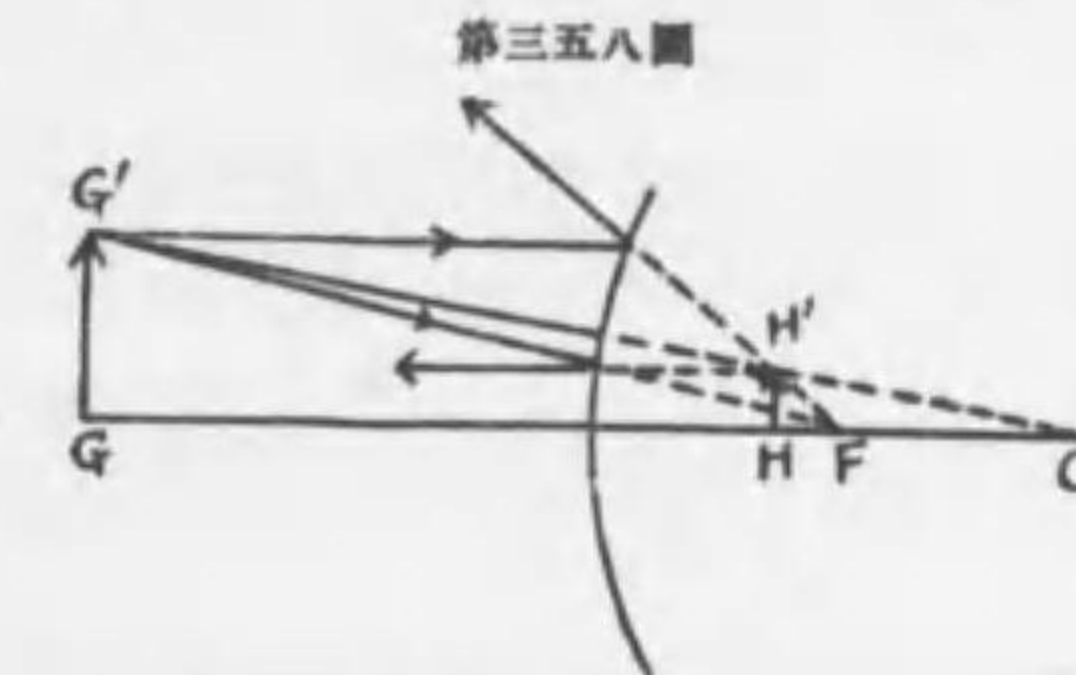
にして倍率負數となり實像を得べからず之を虚像 virtual image と名づく虚像は白紙上に映ぜしむる能はず、 $g < f$ なる場合の作圖は 第三五七圖 の如く G'



より出づる光線は反射後悉く開散して一点に聚ることなし依て逆に之を延長すれば H' にて會合し恰も H' より出でしもの如く反射したるなり、H'H は虚像にして同時に立像 erect image なり、倍率は (4) より $-\mu = f/(f-g)$ を得分母は分子

よりも小なるため $-\mu$ の數値は必ず 1 よりも大なり従て虚像は常に原物よりも廓大せらるるなり、又虚像は白紙

に映すこと能はざれども肉眼にて之を視ることを得べし圖中眼の位置より見れば G' より反射し來れる光線により H' に其像を見るなり。

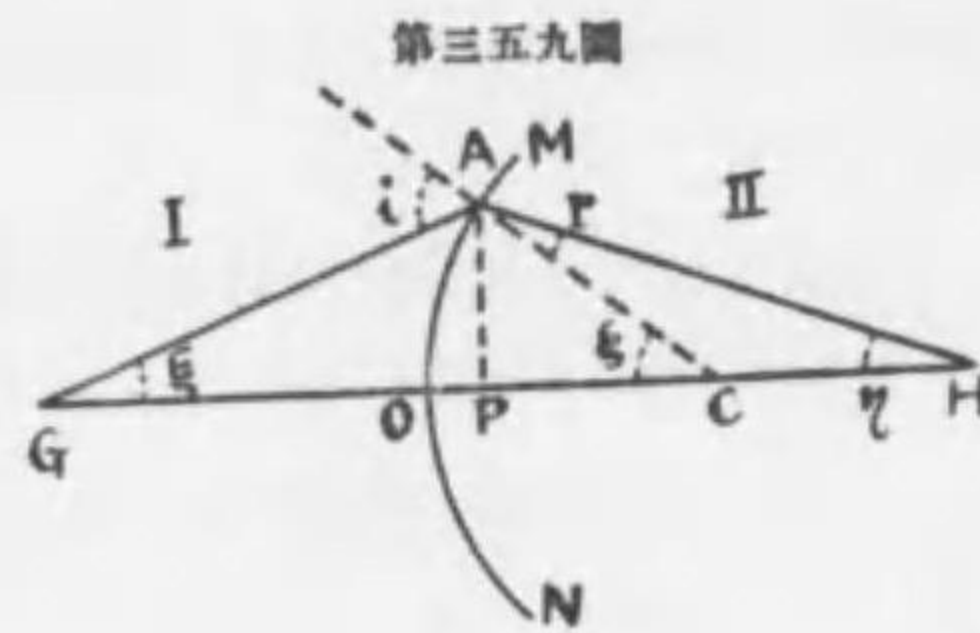


凸面鏡 (第三五八圖) に於ては球心の位置反對にして r の符號従て f の符號も反對となり公式は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{f} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \\ \mu &= \frac{-f}{g+f} = -\frac{h+f}{f} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となる、倍率は必ず負數なるを以て常に虚像を生ず (虚像なるを以て亦立像なり)、又 $-\mu$ の數値は分母大なるが爲必ず 1 よりも小なり、虚像なるを以て肉眼によりて視ることを得べし。

219 球面に於ける屈折 第一第二媒質の境界面は MN なる球面 (第三五九圖) にして MN の中点 O と球心 C とを結ぶ線を軸とし軸上の光点 G より



第三五九圖

出づる光線 GA は屈折して第二媒質に入るものとす、法線 AC を引き入射角を i 屈折角を r 、 n_1, n_2 を夫々第一第二媒質の絶対屈折率とするときは

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

なり、MN に較べて OG, OC, OH は極めて大なるものと假定すれば上式は近似的に $n_1 i = n_2 r$ となる、又 $\angle AGO = \epsilon, \angle AHO = \eta, \angle ACO = \zeta$ と置くときは $r = \zeta - \eta, i = \epsilon + \zeta$ なるを以て前式より

$$(n_2 - n_1)\zeta = n_1 \epsilon + n_2 \eta \dots\dots\dots (6)$$

を得、今 A より垂線 AP を下だし其長さを p とすれば $\tan \epsilon = p/GO, \tan \eta = p/OH, \tan \zeta = p/OC$ なり、角は小なるを以て之を $\epsilon = p/GO, \eta = p/OH, \zeta = p/OC$ と書き $OG = g, OH = h, OC = r$ と置いて (6) に代入すれば

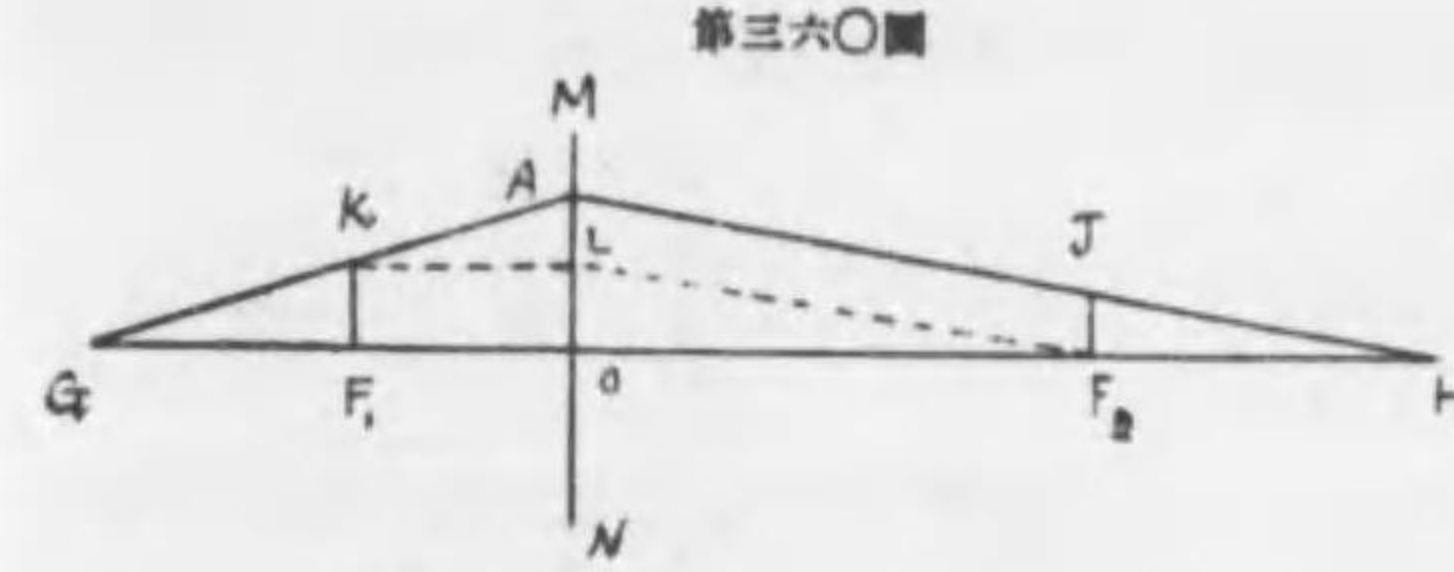
$$\frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h} \dots\dots\dots (7)$$

故に G より出づる光線は屈折後悉く H に集まるものと考ふることを得べし。依て G を光点 H を像点と名づく。 $g = \infty$ とせば GA は軸に平行す此時の h を f_2 と定め H を F_2 (第二焦点) と稱す、 $h = \infty$ とせば HA は軸に平行し g は f_1 となり G は F_1 (第一焦点) となる、此等の約束に依り前節學びたる作圖の三則は其儘茲に使用することを得るなり。

(7) に $g = \infty, h = f_2$ 及び $h = \infty, g = f_1$ と置いて夫々

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}, f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}; \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h} \\ \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h} &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

を得べし。上の最後の公式は頗る面白き性質を有す。第三六〇圖に於ては便宜上球面 MN を平面の如く表はせり、又前定めたる如く $GO = g, F_1 O = f_1,$



第三六〇圖

$F_2 O = f_2, OH = h,$
 $AO = p$ とす然るとき
 は上公式は
 $\frac{F_1 O}{GO} + \frac{F_2 O}{HO} = 1$

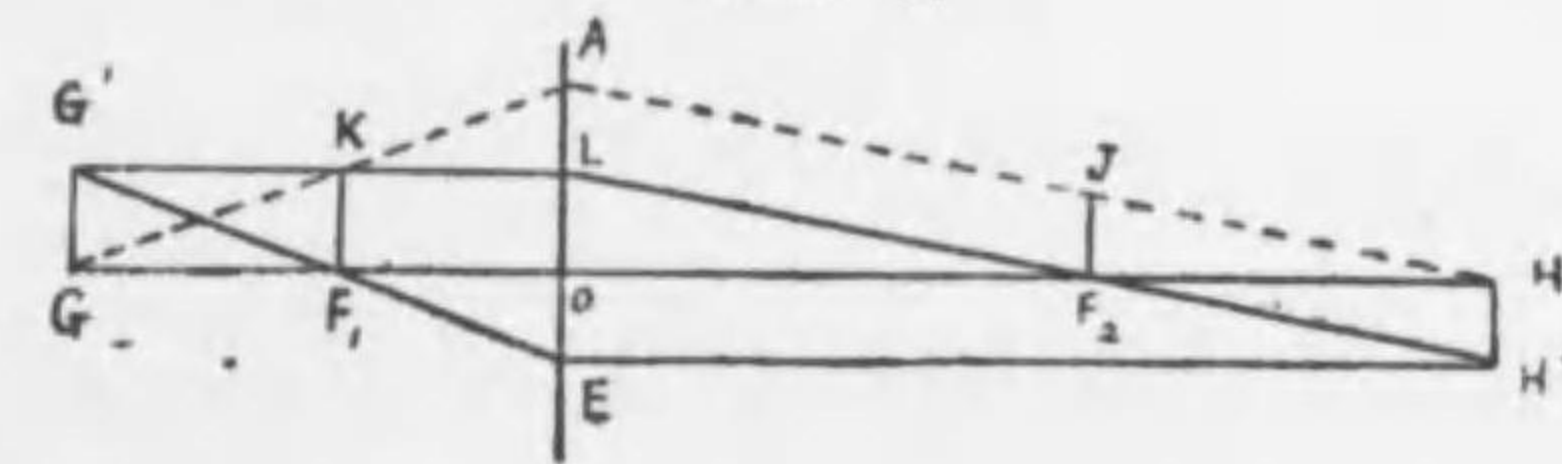
なるゆへ左側右側の項を 2 より減ずれば

$$\frac{GF_1}{GO} + \frac{HE_2}{HO} = 1$$

を得、今 KF_1, JF_2 なる垂線を建つれば三角形の比例により $KF_1/AO + JF_2/AO = 1$ を得、故に $AO = KF_1 + JF_2$ なり、此に依て考ふれば KL を軸に平行に引くときは $AL = JF_2$ なること明かなり、故に G を與へて H を求むるには任意に GA を引き F_1 より KF_1 を垂線に建て K を過り軸に平行なる KL を引き LF_2 を結び AH を LF_2 に平行に引くべし。

像を畫くには第三六一圖の如く三則中二則を使用すれば充分なり。倍率は圖に據り

第三六一圖



$$\mu = \frac{HH'}{GG'} = \frac{OE}{GG'} = \frac{HH'}{LO} \quad \text{即ち} \quad \mu = \frac{h-r}{g+r} = \frac{f_1}{g-f_1} = \frac{h-f_2}{f_2} \dots\dots\dots (9)$$

又作法により $JF_2 = HH'$ なるゆへ $\mu = JF_2/KF_1$ なり。又 (9) より $g/f_1 = 1 + 1/\mu, h/f_2 = 1 + \mu$ なり故に

$$\mu = \frac{h}{g} \cdot \frac{f_1}{f_2} \dots\dots\dots (10)$$

然るに (8) により $f_1/f_2 = n_1/n_2$ なるを以て次式を得

$$\mu = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{h}{g} \dots\dots\dots (11)$$

220 接近せる二球面に於ける屈折

が二球面により隔てらるる場合(第三二六圖)には二球心を結ぶ直線を軸と稱す、軸上の一点 G より出づる光線は屈折して AB となり第三媒質存在せざる場合には軸と H' に於て交はるべき筈のものとす、然らば OH' = h' と置くときは(7)により

$$\frac{n_2 - n_1}{r_1} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h'} \dots\dots\dots (a)$$

なり但し r₁ は AO 面の半径とす、今 H' を光点と見做し BO' 面によりて屈折するものと考えれば H' は BO' 面の左方 h' - t に在るべき筈のものなるを以て其符號を負となして(7)式に代入すれば最後の像点の距離 O'H' = h は

$$\frac{n_2 - n_1}{r_2} = -\frac{n_1}{h' - t} + \frac{n_2}{h} \dots\dots\dots (b)$$

より算出することを得但し r₂ は BO' 面の半径とす、依て(a)(b)を加ふるときは

$$\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h'} - \frac{n_1}{h' - t} + \frac{n_2}{h}$$

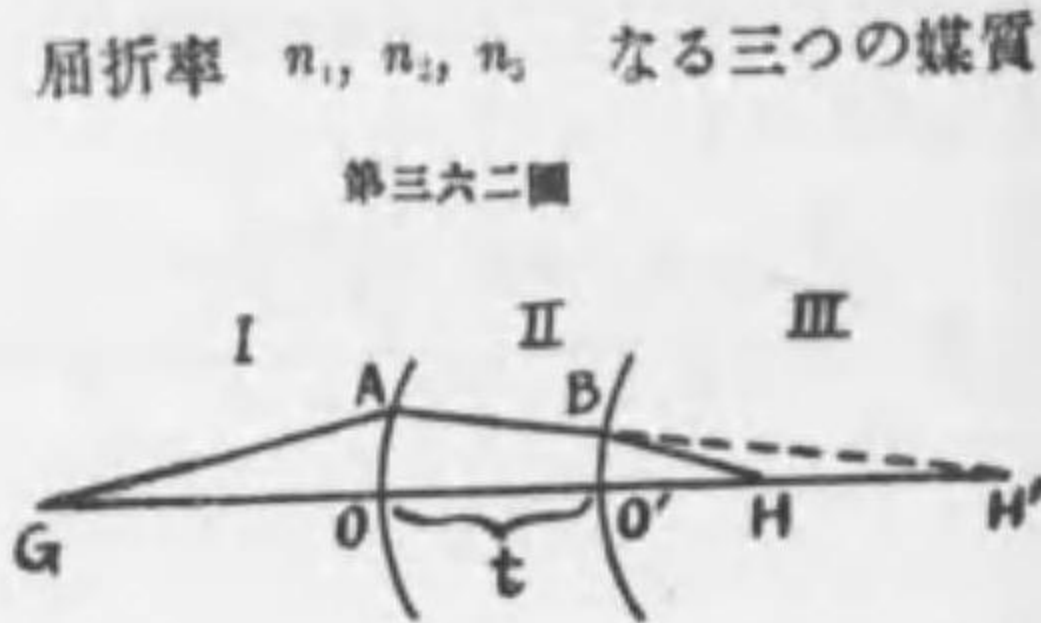
なり、故に t=0 なるときは

$$\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_2}{r_2} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h} \dots\dots\dots (12)$$

之に g=∞, h=f₁ 及び h=∞, g=f₂ を代入すれば

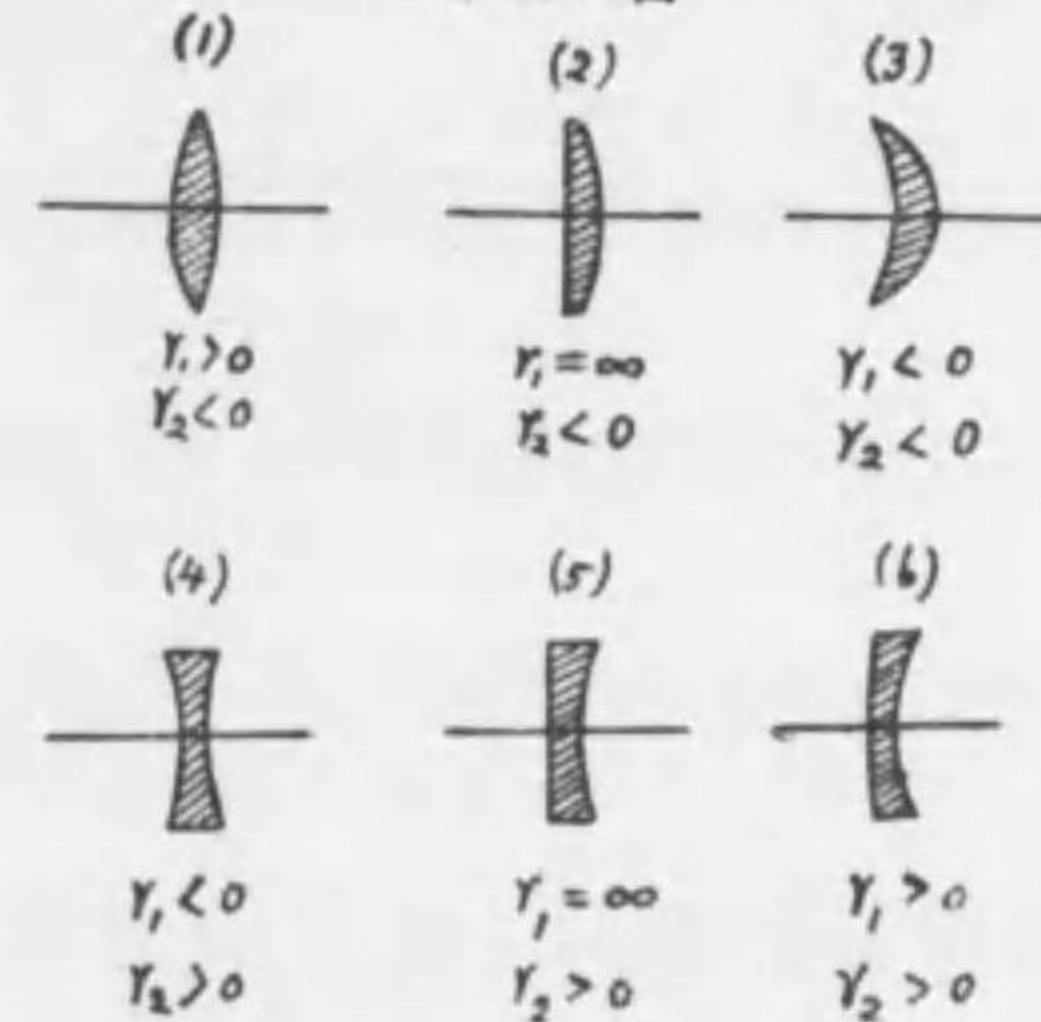
$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h} \\ f_1 = n_1 / \left(\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_2}{r_2} \right), \quad f_2 = n_2 / \left(\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_2}{r_2} \right) \\ \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h} = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

第一第三媒質は空気にして第二にはガラス 其他の透明体なるときは之をレンズ lens と名づく、レンズに六種あり(第三六三圖)第一、兩凸 bi-convex



第三六二圖

第三六三圖

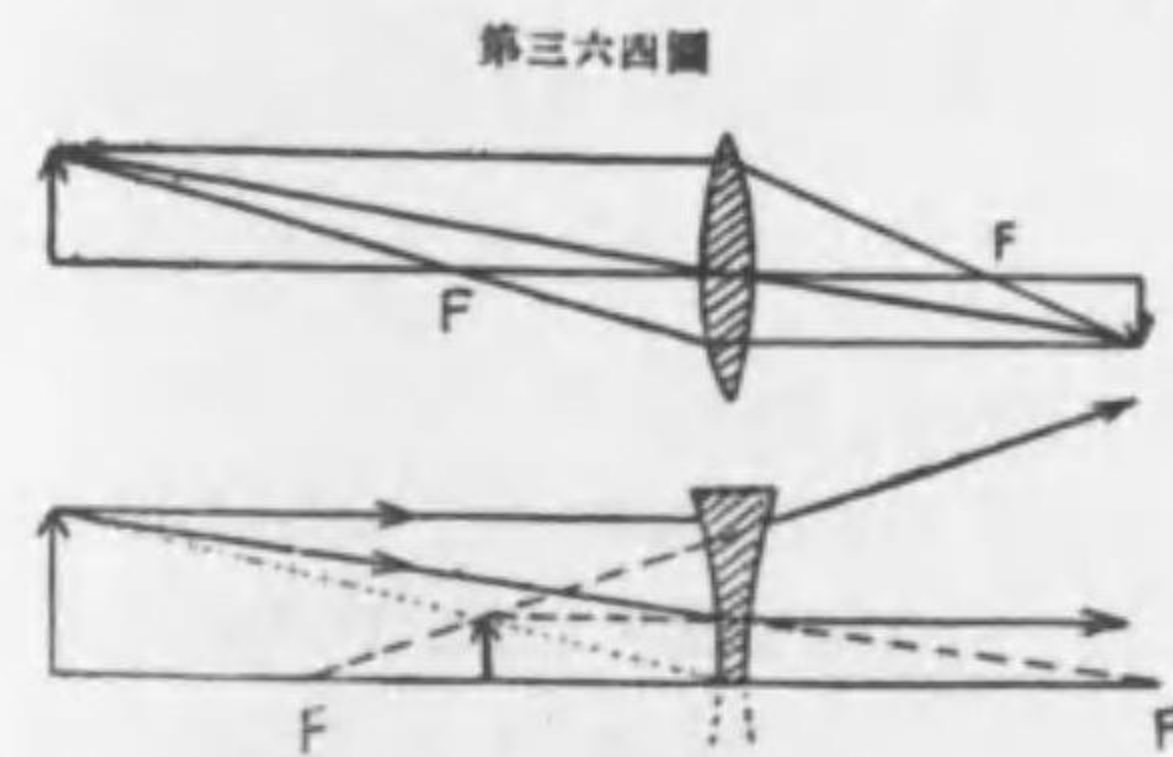


第二、平凸 planoconvex 第三、集光新月 converging meniscus 第四、兩凹 bi-concave 第五、平凹 plano-concave 第六、散光新月 diverging meniscus 是なり、又 1,2,3 を集光レンズ 4,5,6 を散光レンズとも云ふ。(13)をレンズに應用すれば n₁=n₂=1, n₂=n なるを以て f₁=f₂=f なり故に直に

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{h}, \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \dots\dots\dots (14)$$

を得、集光レンズは常に f > 0 にして散光レンズは常に f < 0 なり、例へば集光新月レンズは圖中の位置に於ては r₁ < 0, r₂ < 0 なるを以て 1/f = (n-1)/(-1/r₁ + 1/r₂) を得、然るに曲率半径は r₁ > r₂ なるを以て f > 0 なり。

像の作法は前述と同一なり、第一第四種レンズに就き第三六四圖に之を示す、又倍率は(9)及び圖によ



第三六四圖

す、又倍率は(9)及び圖によ

$$\mu = \frac{f}{g-f} = \frac{h-f}{f} = \frac{h}{g} \dots\dots\dots (15)$$

なり、散光レンズに於ては f < 0 なるを以て μ = -f/(g+f) となり常に虚像を生ず、從て

h = -μg の關係により像は常に物体と同一の側(レンズより見て)に生ず、集光レンズに於ても g < f なるときは μ < 0 にして虚像を生ず此時 μ = -f/(f-g) なるを以て虚像は必ず膨大せらるれども散光レンズに於ては必ず縮小したる虚像を生ず。

四個の媒質が三球面によりて境ひし球心が同一直線上に並ぶ場合も前同様に取り

扱ひ

$$\frac{n_2 - n_1}{r_1} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{h'}, \quad \frac{n_3 - n_2}{r_2} = \frac{n_2}{-h'} + \frac{n_3}{h''}, \quad \frac{n_4 - n_3}{r_3} = \frac{n_3}{-h''} + \frac{n_4}{h}$$

の三式を生じ之を相加へて

$$\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} + \frac{n_4 - n_3}{r_3} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_4}{h} \dots\dots\dots (16)$$

を得、此場合も(13)に倣ひ

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_4}{f_2} = \frac{n_1 + n_4}{g + h}, \quad \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h} = 1 \dots\dots\dots (17)$$

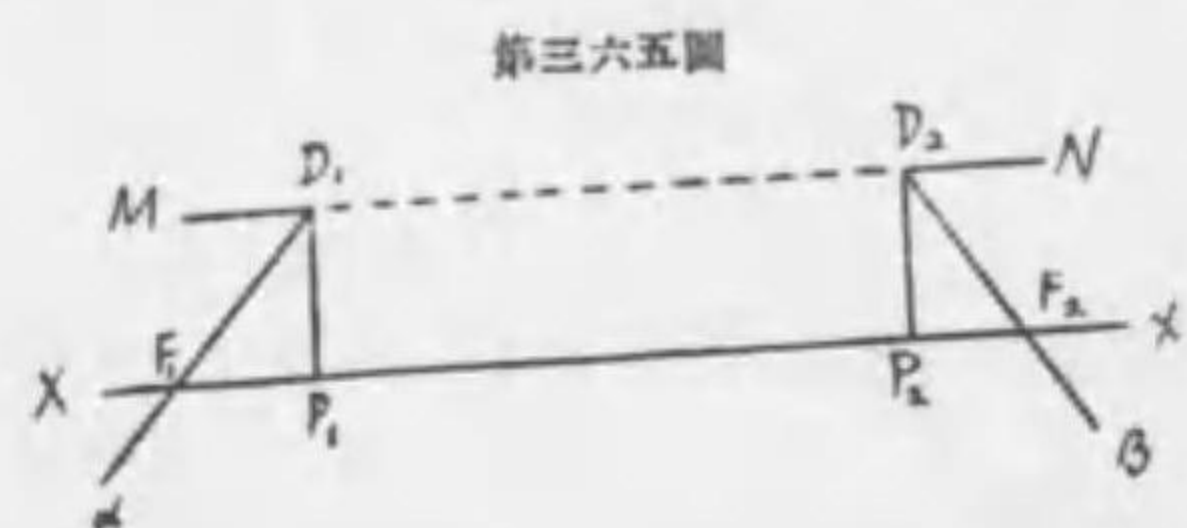
を得べし、一般に球心を同一直線上に有する m 個の球面にて隔てられたる $m+1$ 個の媒質を恰も最初と最後の媒質のみ存在するときの如く取扱ふことを得るものなり。

(16) の一例を擧げんに没色 レンズ achromatic lens と稱するものはクラオンガラスの兩凸 レンズ と フリントガラスの散光新月 レンズ とを組合せたるものにして(第三七六圖) 望遠鏡、顯微鏡等に使用する、此に前理を應用すれば $n_1 = n_4 = 1, n_2 = 1.6$ (クラオン), $n_3 = 1.8$ (フリント) なり、今又或見本に就き $r_1 = 340$ 耗, $r_2 = -169$ 耗, $r_3 = -600$ 耗と置けば

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} + \frac{1 - n_3}{r_3} = \frac{0.6}{340} - \frac{0.8}{169} + \frac{0.8}{600} = 0.001915$$

故に焦点距離は $f = 522$ 耗となる。

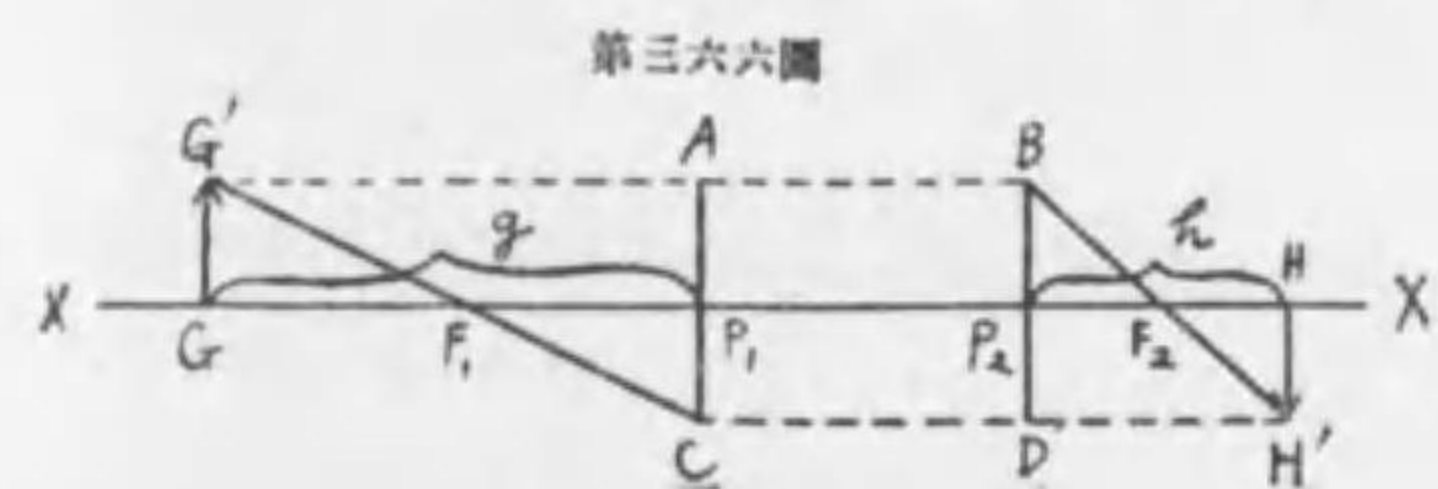
221 接近せざる球面列に於ける屈折 (Gauss, Dioptrische Untersuchungen, 1838-43) 數多の媒質は球面により隔てられ球心は軸と稱する直線上に並ぶ場合を一般的に研究せんとするに當り複雑を避けんが爲に光線は常に軸の附近を通過するものと假定す、而して軸の附近を通過する光線は決して球面の中心又は球心より上下に遠ざかることなきを以て中央光線 central rays の名を附せらる。第三六五圖



第三六五圖

の XX を軸とし多くの球面は D_1P_1, D_2P_2 二平面の間に多くの媒質を隔てつゝ並ぶものとす D_1P_1 の左方には最初の媒質あり D_2P_2 の右方には最後の媒質あり最初の媒質に於て軸に平行なる光線 MD_1 は途中に於て種々其方向を變じたる後ち最後の媒質に來り軸上の一点 F_2 を通過す、同様に最後の媒質に於て軸に平行なる光線 ND_2 は途中種々屈折したるのち遂に最初の媒質に來りて軸上の一点 F_1 を通過す、此は一本の光線に限りて云ふに非ず、總て軸に平行なる光線は夫々 F_2 と F_1 とを過るものとす然るときは F_1 と F_2 を主焦点 principal foci と稱す。最初の媒質に於て焦点を過る任意光線 αF_1 は遂には軸に平行なる D_2N となり、最後の媒質に於て焦点を過る任意光線 βF_2 は遂には軸に平行なる D_1M に變ず、焦点を過る二線 αF_1 と βF_2 が MN と會する点 D_1 及び D_2 を過りて軸に垂直なる二平面 D_1P_1, D_2P_2 を書き之を主面 principal planes と名づけ F_1P_1 及び F_2P_2 を夫々焦点距離と稱して f_1 及び f_2 にて之を示す。 D_1D_2, P_1P_2, F_1F_2 等の諸点は屢々共軛点 conjugate points と稱せらる。

此流儀に従ひ像を作圖するには 第三六六圖 の如く先づ四主点 cardinal points F_1, F_2, P_1, P_2 の位置を定



め主面 AC, BD を引き GG' を物体とし HH' を其像とす、 G' を過る平行線 $G'B$ は

F_2 を通過し $G'F_1$ を結ぶ線は軸に平行なる CH' となる、兩線 H' に交はる、前諸節に倣ひ $GP_1 = g, F_1P_1 = f_1, P_2H = h, P_2F_2 = f_2$ とし又 $GG' = z_1, HH' = z_2$ と定むれば $CP_1 = z_2$ なるを以て $z_1/z_2 = (g - f_1)/f_1$ 同様に $z_1/z_2 = f_1/(h - f_2)$ 故に直に

$$\frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h} = 1 \dots\dots\dots (18)$$

なる(8)(13)(17)と同形なる公式を得、又 μ を倍率とすれば(9)(10)(11)と同様に

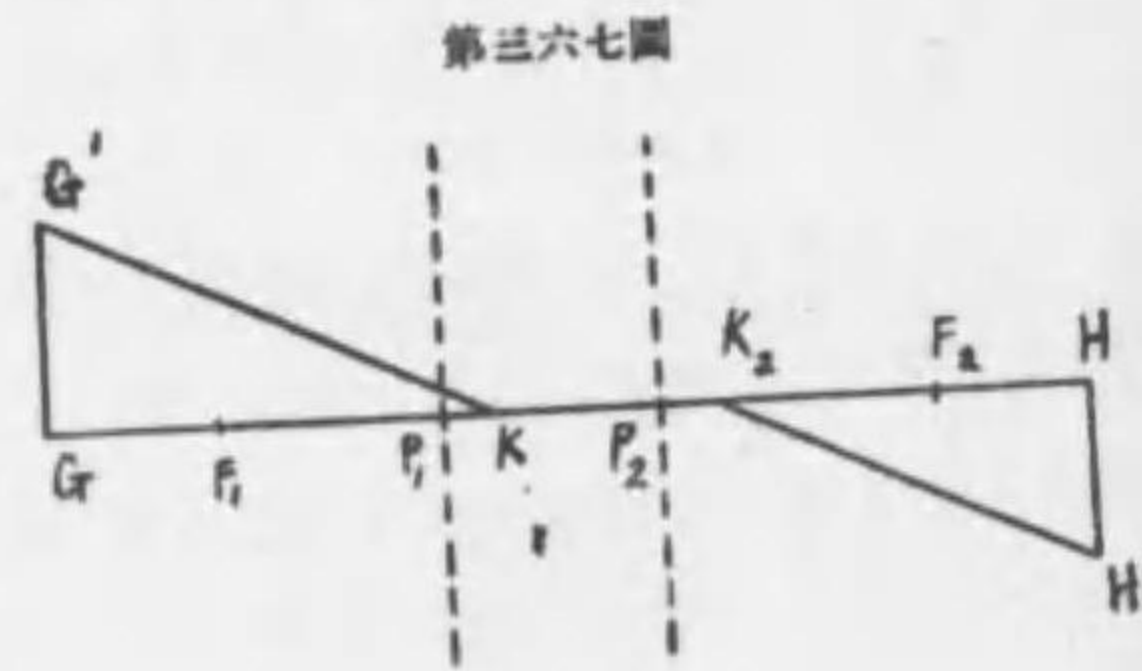
$$\mu = \frac{z_2}{z_1} = \frac{f_1}{g - f_1} = \frac{h - f_2}{f_2} = \frac{h}{g} \cdot \frac{f_1}{f_2} = \frac{h}{g} \cdot \frac{n_1}{n_2} \dots\dots\dots (19)$$

又 $GF_1=i, HF_2=j$ と置けば $i=g-f_1=f_1 z_1/z_2, j=h-f_2=f_2 z_2/z_1$ なるを以て
下の関係式を生ず

$$ij=f_1 f_2 \dots\dots\dots (20)$$

222 節 點 nodal points (Listing 1845) 主面 P_1, P_2 及び焦点 F_1, F_2 を定め然るのち $f_2=F_1 K_1, f_1=F_2 K_2$ の如く K_1, K_2 兩点を主面に近き方にとるときは K_1, K_2 を節点と名づく、

今 K_1 を光点と假定すれば光点距離は $g=-P_1 K_1=-(f_2-f_1)$ なり、故に像点距離は (18) により $h=f_2-f_1$ を得べし即ち第二節点は第一節点の像なることを知る、逆に第一節点は第二節点の像

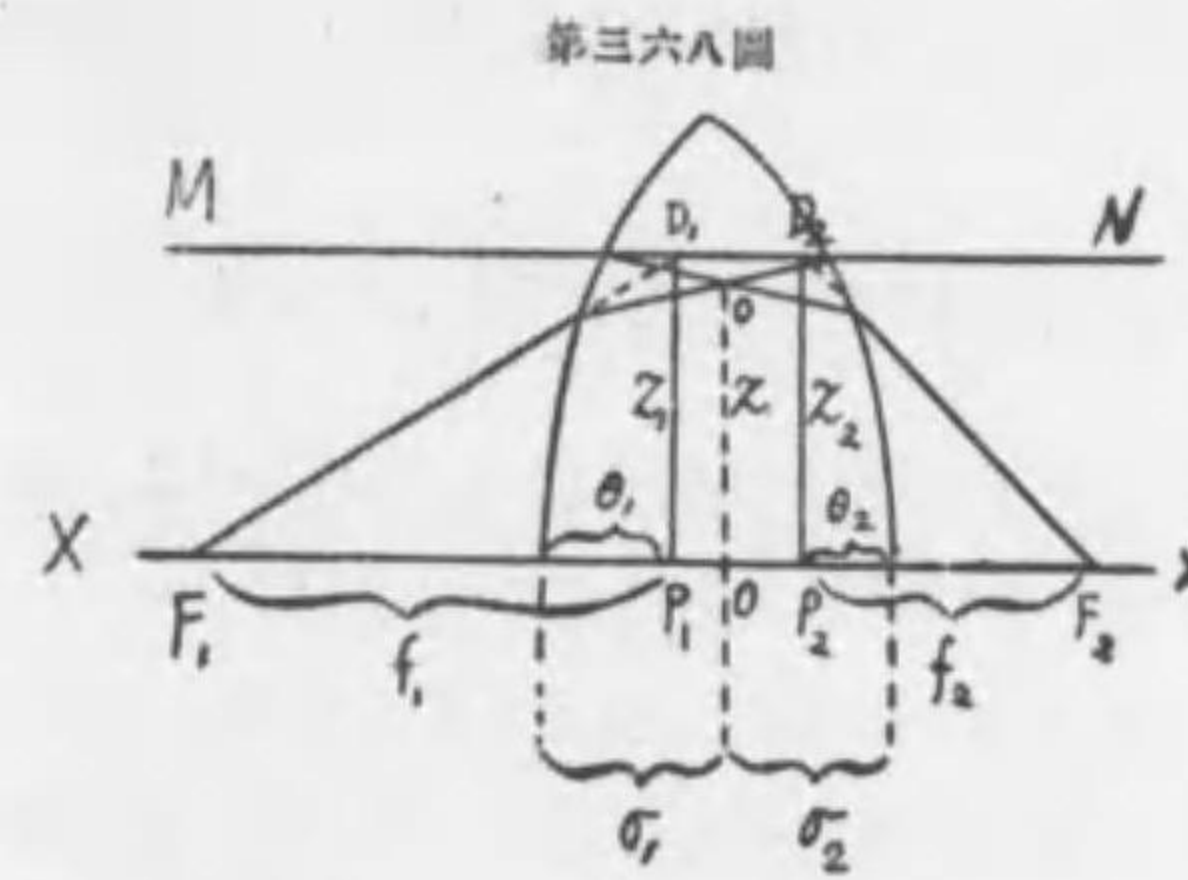


なり、従て K_1 と K_2 は互に共轭点をなす。次に圖により $GK_1=g-f_1+f_2, HK_2=h-f_2+f_1$ 又 (19) により $g-f_1=f_1/\mu, h-f_2=f_2\mu$ なるを以て

$$\frac{HK_2}{GK_1} = \frac{f_2\mu + f_1}{f_1/\mu + f_2} = \mu \dots\dots\dots (21)$$

然るに $HH'/GG'=\mu$ 即ち上式より $HK_2/GK_1=HH'/GG'$ 従て $\triangle GG'K_1 \sim \triangle K_2HH'$ 故に $G'K_1$ は K_2H' に平行なり、此理を應用すれば像の作圖法の第二として使用するを得べし、節点は他の四点の如く重要なを以て併せて $F_1, F_2, P_1, P_2, K_1, K_2$ を六主点と稱す。

223 厚レンズ thick lens § 220 に説きたるは厚さ零なる薄レンズ thin lenses の研究にして其結果は極めて精確と云ふ能はざるを以て茲に厚さを有するものに就きて研究せんとす、但し中央光線を使用するは従前の通りなり、第三六八圖に示す厚レンズの軸 XX に平行に勝手に MN を引き $P_1 D_1, P_2 D_2$ を主面とし F_1, F_2 を焦点とするときは MD_1 と $F_1 D_1$ は D_1 に向ひ第二媒質に入るや屈折して o 点に向ふ故に o は光点 D_1 の像点と見做すことを得べし、同様に D_2 は o を光点とする虚像 (第三媒質内に居らざる故) と見て可なり、従て O



は P_1 の像にして P_2 は O の像なり、今 t をレンズの厚さとすれば圖により $t=\sigma_1+\sigma_2$ なり、又 O は P_1 の像なる故 § 219 によりレンズの面の左側を空気として $n_1=1$ と置き右側をレンズとして $n_2=n$ と置き距離を

レンズの前面より起算するときは $g=-\theta_1, h=\sigma_1, r=r_1$ (r_1 はレンズの前面の半径なり) となりて (7) 式より

$$\frac{n-1}{r_1} = -\frac{1}{\theta_1} + \frac{n}{\sigma_1} \dots\dots\dots (22)$$

同様に P_2 は O は虚像なるを以て $g=\sigma_2, h=-\theta_2, r=-r_2, n_1=n, n_2=1$ を (7) 式に代入して

$$-\frac{1-n}{r_2} = \frac{n}{\sigma_2} - \frac{1}{\theta_2} \dots\dots\dots (23)$$

なり。次に σ_1 と σ_2 を θ_1 と θ_2 にて表はすには (19) の倍率の公式を使用するの外なし、 oO は $D_1 P_1$ の虚像なるを以て

$$\frac{z}{z_1} = \mu_1 = \frac{h}{g} \cdot \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\sigma_1}{\theta_1} \cdot \frac{1}{n}$$

同様に $D_2 P_2$ は oO の虚像なるを以て

$$\frac{z_2}{z} = \mu_2 = -n \cdot \frac{\theta_2}{\sigma_2}$$

を得兩式の積は $1=\mu_1 \mu_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1}$ 即ち $\sigma_1/\sigma_2 = \theta_1/\theta_2$ なり然るに $t=\sigma_1+\sigma_2$ なるを以て

$$\sigma_1 = \frac{t \theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, \quad \sigma_2 = \frac{t \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$$

を得べし之を (22) (23) に代入して

$$\theta_1 = \frac{r_1 t}{n(r_1+r_2)-(n-1)t}, \quad \theta_2 = \frac{r_2 t}{n(r_1+r_2)-(n-1)t} \dots\dots\dots (24)$$

となる、此に因り $a_1/a_2 = \theta_1/\theta_2 = r_1/r_2$ なること明かなり、又二つの主面間の距離は

$$P_1P_2 = t - (\theta_1 + \theta_2) = \frac{t(n-1)(r_1+r_2-t)}{n(r_1+r_2) - t(n-1)} \dots\dots\dots (25)$$

又(24)(25)より與へられたるレンズの主面を決定し従て §222 により節点の位置をも定むることを得るが故に像の作圖は甚だ容易なることとなる。

厚レンズの焦点距離を知るには先づ §220 の初に掲げたる (a) (b) を第三六八圖に應用するに當りレンズの後面は逆向せるを以て(第三六二圖と第三六八圖を比較すれば) r_2 の符號を反對にし $n_1=1, n_2=n$ と置き然る後 h' を消去すれば

$$\frac{n-1}{r_2} = \frac{n}{t-n} \left(\frac{n-1}{r_1} - \frac{1}{g} \right) + \frac{1}{h}$$

を得、然るに此式の g と h とは夫々レンズの前面及び後面より計りたる距離にして主面より計りたるものにあらず、今光点距離を $g=\infty$ と置けば像点距離 h は焦点距離 $f_2 - \theta_2$ となる(第三六二圖の焦点距離 f_2 はレンズ面より計りたるものなれば θ_2 を減ぜざるべからず) 而して茲に研究しつゝある厚レンズの第一第三媒質は空氣なるを以て二個の焦点距離は互に等しく $f_1=f_2=f$ と置き $g=\infty, h=f-\theta_2$ を同時に代入すれば

$$(n-1) \frac{(n-1)t - n(r_1+r_2)}{r_2 \{ (n-1)t - nr_1 \}} = \frac{1}{f - \theta_2}$$

此を變形すれば次ぎの焦距の公式を得

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{t}{r_1 r_2} \right) \dots\dots\dots (26)$$

下に種々のレンズに就き主面の位置を示す、節点は總べて主面上に在り。

(第一) 球形レンズ、 $\theta_1=\theta_2=r$ となり主面は合して一となり球心を通ず f は主面より起算して $f=nr/2(n-1)$ なるゆへ水は $f=2r$ ガラスは $f=1.5r$ なり(第三六九圖1)。

(第二) 半球形レンズ、 $r_1=\infty, r_2=r$ により $\theta_1=r/n, \theta_2=0; f=r/(n-1)$

(第三) 兩凹レンズ、 $r_1 < 0, r_2 < 0$ ガラスの場合には $\theta_1 = \frac{2r_1 t}{3(r_1+r_2)+t}$
 $\theta_2 = \frac{2r_2 t}{3(r_1+r_2)+t}; f = -6r_1 r_2 / \{ 3(r_1+r_2)+t \}$

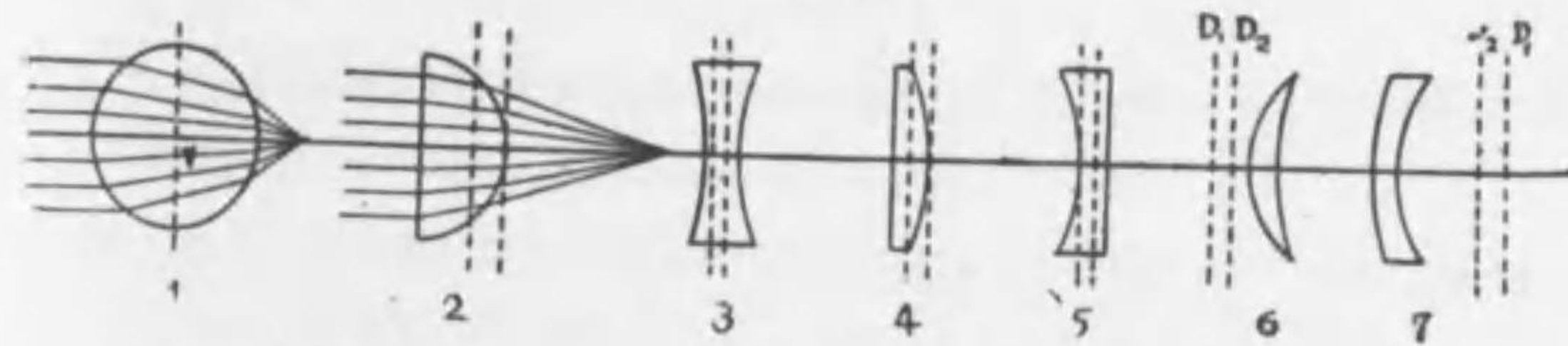
(第四) 平凸レンズ、 $r_1 = \infty, r_2 > 0; \theta_1 = \frac{t}{n}, \theta_2 = 0; f = \frac{r_2}{n-1}$

(第五) 平凹レンズ、 $r_1 < 0, r_2 = \infty; \theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{t}{n}; f = -\frac{r_1}{n-1}$

(第六) 集光新月レンズ、 $r_1 > 0, r_2 < 0$; ガラス $\theta_1 = -\frac{2r_1 t}{3(r_2-r_1)+t}$
 $\theta_2 = \frac{2r_2 t}{3(r_2-r_1)+t}; f = 6r_1 r_2 / \{ 3(r_2-r_1)+t \}$

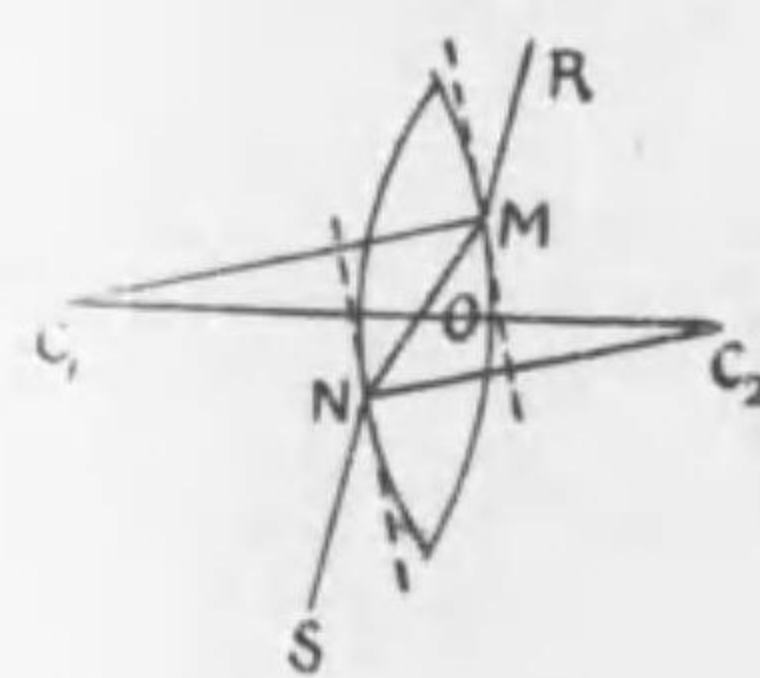
(第七) 散光新月レンズ、 $r_1 < 0, r_2 < 0$; ガラス $\theta_1 = \frac{2r_1 t}{3(r_1-r_2)-t}$
 $\theta_2 = -\frac{2r_2 t}{3(r_1-r_2)-t}; f = -6r_1 r_2 / \{ 3(r_1-r_2)-t \}$

第三六九圖



今までは中央光線のみを取扱ひたるゆへ光線が軸となす角は比較的小なるものと假定することを得たれども萬一其角が大なる場合には 第三七〇圖に示す如く

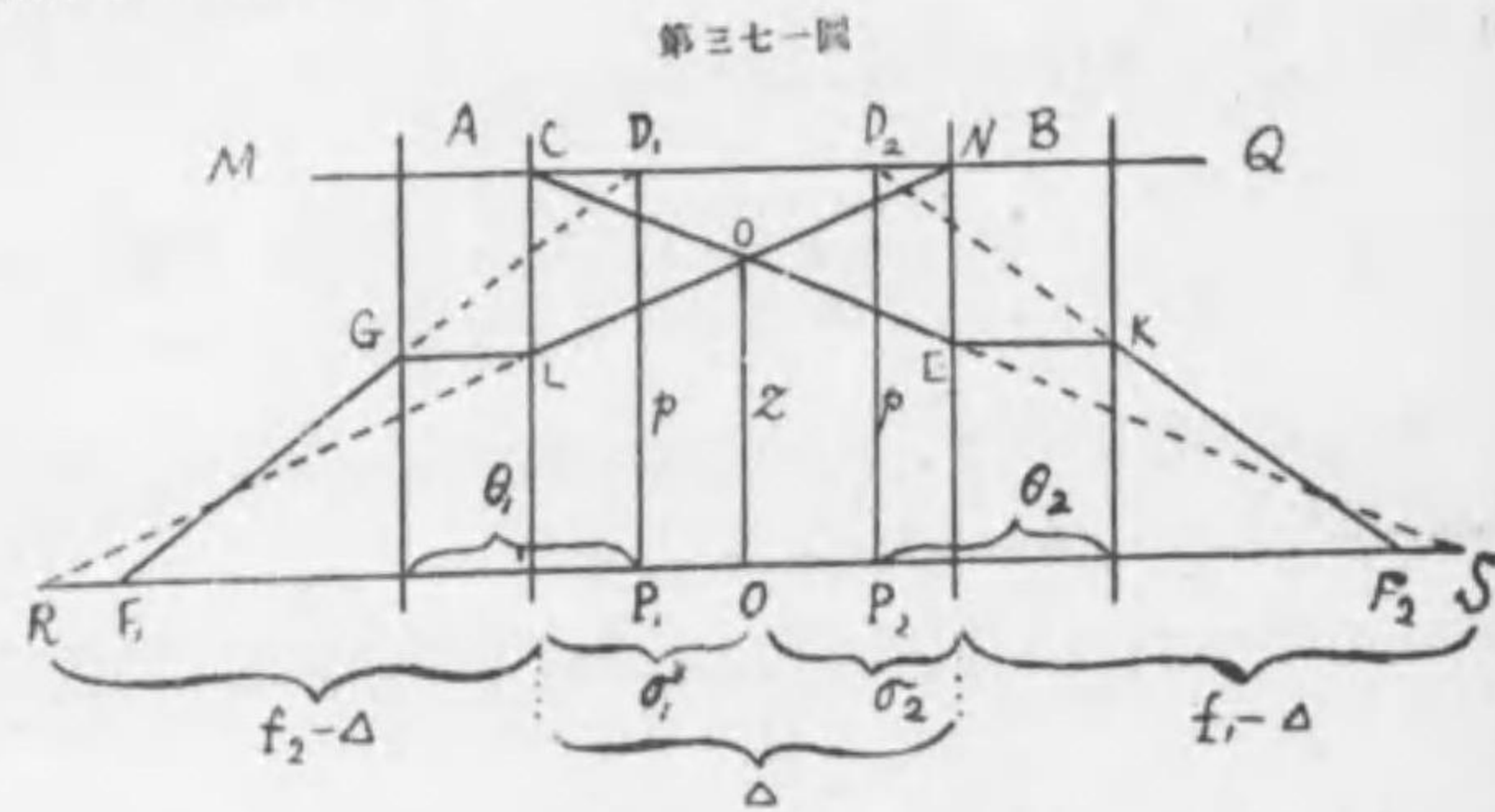
第三七〇圖



レンズ 兩面の球心 C_1, C_2 を過りて C_1M 及び C_2N の半徑を平行に引くときは M 及び N に於てレンズ面に引きたる切線は各々半徑に垂直なるゆへ互に平行し、 RM より MN に屈折し再び屈折して外界に出づる NS は RM に平行なり、 MN と C_1C_2 との交点を通る線は總べて斯の如く空氣中に於ては互に平行なり兩三角形 C_1MO と ONC_2 は相似なる爲 $C_1O : OC_2 = C_1M : C_2N$ にして O の位置は一定なり、 O をレンズの光心 optical centre と名づく、 O を過る光線は空氣中に出で、互に平行し單に少許の並動變位をなすのみなり。

224 間隔を有する二つの厚レンズ A と B は夫々レンズにして (第三七

一圖) 焦点距離は f_1 と f_2 なり軸に平行なる光線 MC は CEKF₂ の道を取りて全部



の焦点 F₂ に集まる、他側に在る全体の焦点 F₁ より出ずる線は F₁GLNQ を通りて軸に平行なる線となる。両レンズの中間及び前後は空気なりとす。レンズ A のために D₁ の像は O に生じ、レンズ B のために O の像は D₂ に生ずる故に D₁ は両レンズのために其像を D₂ に生ずることとなる。全体の焦距を f とすれば $f = F_1P_1 = F_2P_2$ なり、レンズ A の両側の空気の屈折率は各々 1 なるを以て (19) により $\mu = h/g$ なり、依て $\mu = -\sigma_1/\theta_1 = \sigma_2/p$ 又レンズ B の倍率は $p/\sigma_2 = -\theta_2/\sigma_2$ 故に $\theta_1/\theta_2 = \sigma_1/\sigma_2$ を得、両レンズの間隔は $\Delta = \sigma_1 + \sigma_2$ 即ち $\sigma_1 = \Delta\theta_1/(\theta_1 + \theta_2)$, $\sigma_2 = \Delta\theta_2/(\theta_1 + \theta_2)$ を得。D₁ の像は O なるを以て P₁ の像は O となり (18) により $-1/\theta_1 + 1/\sigma_1 = 1/f_1$ 、同理により O の像は P₂ なるゆへ $1/\sigma_2 - 1/\theta_2 = 1/f_2$ なり、 σ_1, σ_2 を θ_1, θ_2 に代入すれば

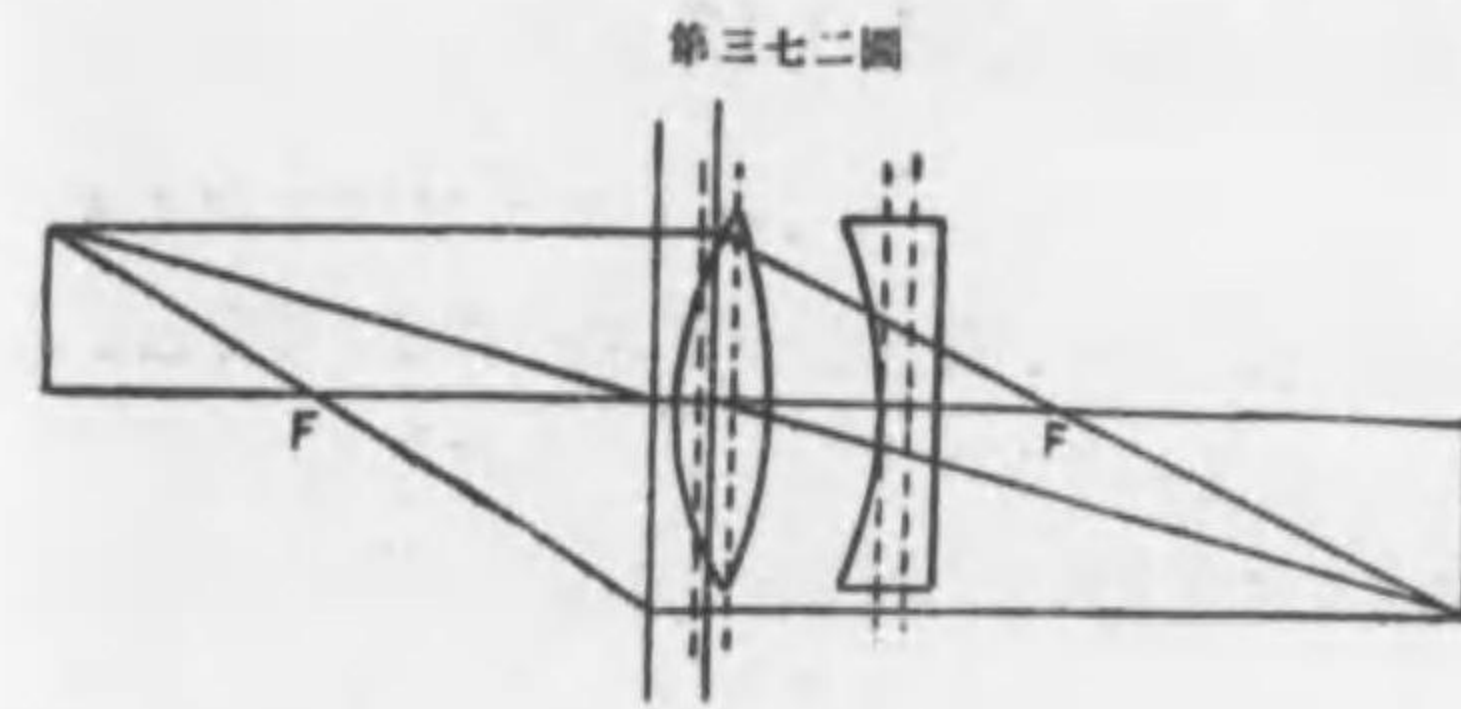
$$\theta_1 = \frac{\Delta f_1}{f_1 + f_2 - \Delta}, \quad \theta_2 = \frac{\Delta f_2}{f_1 + f_2 - \Delta}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{f_1}{f_2} \dots\dots\dots (27)$$

次に F₂ は S に来るべかりし光線の途中にて屈折したるため F₂ に来りしものゆへ F₂ は S の像と見做すことを得て $1/f_2 = -1/(f_1 - \Delta) + 1/(f - \theta_2)$ となる、同理により R は F₁ の像なるゆへ $1/f_1 = 1/(f - \theta_1) - 1/(f_2 - \Delta)$ なり此二式に θ_1 と θ_2 を代入すれば

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\Delta}{f_1 f_2} \dots\dots\dots (28)$$

故に Δ 小なる場合には單に $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$ にて充分なり。

兩レンズを一つのレンズと見れば其主面及焦点の位置は本節に得たる $\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2$ の公式により容易に算出することを得、今クラオン集光レンズとフリント散光レンズの組合せ (没色レンズ) に就き 第三七二圖に全部及び



各部の主面の位置を夫々連線と点線にて示す。斯く一度主面定まるときは空气中に於ては主点と節点と一致するを以て像の作圖三則は次ぎ

の如し

- 第一、軸に平行なる光線は屈折後焦点を通過す
- 第二、焦点を通過する光線は屈折後軸に平行となる
- 第三、節点に向ふ光線は平行しながら他の節点より出發す。

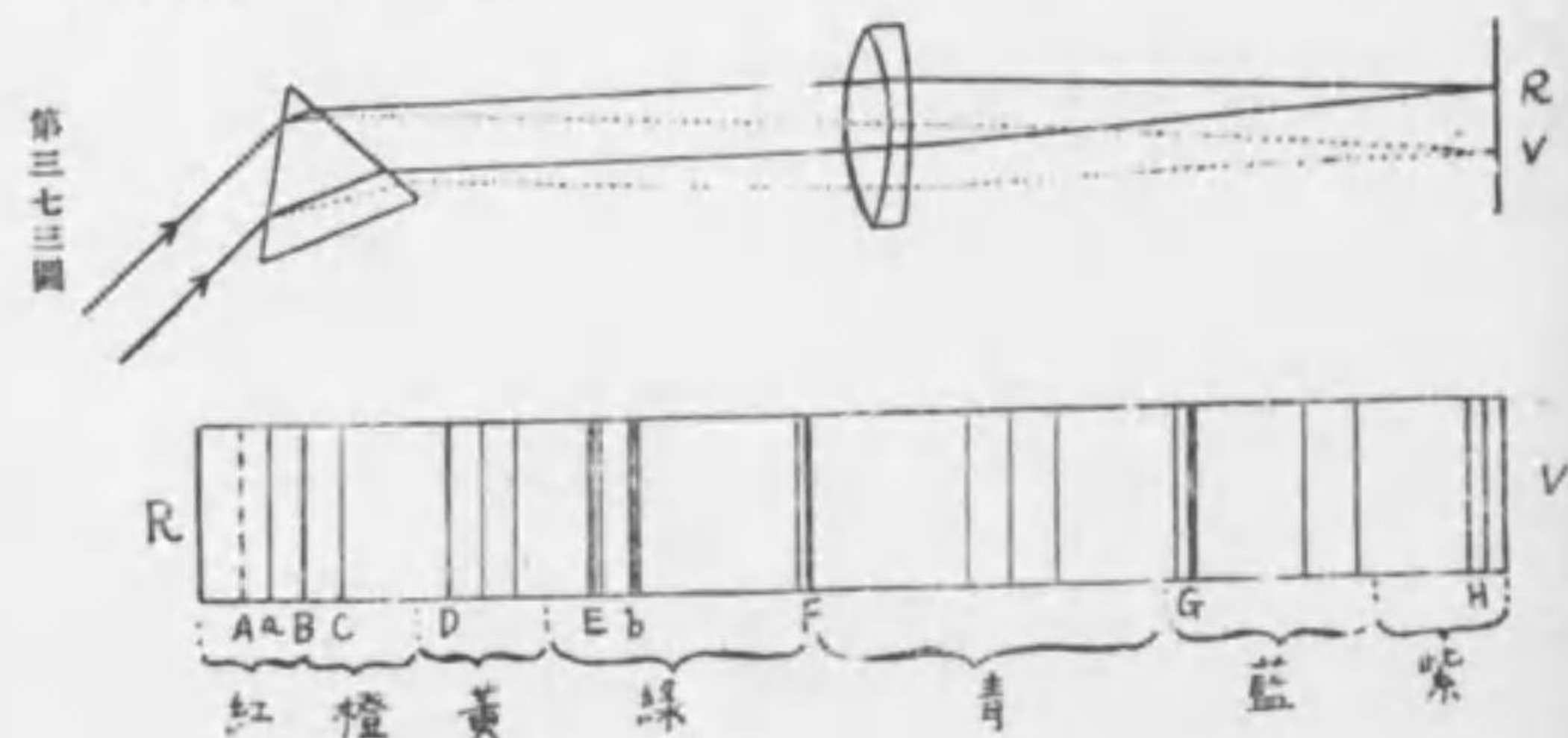
上圖に依て見れば二つのレンズの代表者たる主面の位置はレンズの位置と一致せず故に厚レンズを薄レンズと見做して像の作圖をなすときは多少の誤差を生ずるものと知るべし。

第五章 光の分色 DISPERSION OF LIGHT

225 ニュートンの実験 ニュートンはケムブリッヂ在學中(1666)プリズムを購ひて實驗し三年後に其結果を公にせり、白色はプリズムによりて分色し又レンズはプリズムの綜合の如きものなるを以てレンズも分色する力を有するゆへ光學器械はレンズの代りに球面鏡を使用するの外なしと思へり、後年瑞典人クリンガスチルナ(Klingerstierna 1754)は没色レンズを製しニュートンの杞憂を除けり。

ニュートンは壁に圓孔を穿ち反射鏡によりて日光を孔を通じて水平に室内に導きプリズムを以て之を分色せしに屈折の順序を追へば紅橙黄綠青紫 (red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet) なる七色を認め得たり、之をスペクトラ spectrum と稱す。ワラストン(Wollaston 1802)は圓孔の代りに水平に細長なる矩形の孔を使用せしかばスペクトラは餘程鮮明の度を増せしのみならず色は連続せずして途中に二三個暗き處あるを發見せり。

226 フラオンホーファー実験 後ちフラオンホーファー (Fraunhofer 1814) に到りレンズを用ひて(第三七三圖)細隙より洩るる日光を映せしに平



行なる日光はプリズムに入りて分色し紅は互に平行にプリズムを出でレンズを過りて後其焦点 R に集まり紫は(点線にて示す)互に平行しながらレンズの焦点 V に集まり其中間の諸色各自の焦点に細隙の像を生ずるを以て白紙に映つるスペクトラは至て鮮明なり、ワラストンが發見せし如くスペクトラは不連続にして無数の黒線之を横斷し日光の波動に缺損あるを示せり、フラオンホーファーは黒線中顯著なるもの拾本を撰び之に命名せり所謂フラオンホーファー線是なり(第三七三附圖RV)、F氏の原圖は350本の黒線を精寫せり。

227 各色の屈折率 分色する理由は各色屈折率を異にするを以てなり、屈折率最大なる紫色は亦轉向(deviation)最大なり、而して其屈折率最大なる原因はプリズム内に入りて紫は最も其速度を失ふが故なり即ち波長最短く振動數最多きものは速度を失ふこと亦最大なり。屈折率を計るには其色の最小轉向角 Δ を定め同時にプリズムの頂角 θ を計り §217 (17) 式を使用す、 Δ と θ を測定するには分光計を用ふるを最も便利となす(後節を看よ)或は全反射角 r_0 を計り $\sin r_0 = 1/n$ の公式を用ひて算出することを得べし、液体又は氣體はプリズム形の壺 prism bottle に容れて測るを便利となす、氣體は屈折率小にして分色少きを以て之に使用するプリズム角は大なるを要す而して氣體に就き各色の屈折率を測るは甚だ困難なり。

真空中に於ては各色皆な同一の進行速度を有し速度 V 波長 λ 振動數 N は $V = N\lambda$ の關係を有すれども他の媒質内に入れば各色其速度を失ふ程度同一ならず、故に與へられたる色に就きて云へば N は常數なるを以て λ は V に正比例して減少する理なり、真空中の速度 V と媒質内の速度 V' との比從て真空中の λ と媒質内の λ' との比は其媒質の屈折率に反比例す、即ち $\lambda/\lambda' = V/V'$ なり。下にフラオンホーファー線 C, D, E, H に就き或液体と固体の屈折率を示す

| λ | 硫化炭素 | フリントガラス |
|-----------|----------------|---------|
| C | 656.3 $\mu\mu$ | 1.618 |
| D | 589.3 | 1.628 |
| E | 486.1 | 1.652 |
| H | 396.9 | 1.689 |

故に λ の増加 $d\lambda$ に對する n の増加 dn 即ち $dn/d\lambda$ は常に負數にして媒質に從ひ異なる値を有す、 $dn/d\lambda$ の數値は硫化炭素に大にしてガラスに於て小なるを見るべし、然れ共 フリントガラスにも種々ありて光學的密度の大なるものに在りては硫化炭素に較べて上述の反對なる場合を生ず。

§217 (17) により $n = \sin \frac{\Delta + \theta}{2} / \sin \frac{\theta}{2}$ なり、故に頂角 60° なるときは

$$n = 2 \sin \frac{\Delta + 60^\circ}{2} \dots\dots\dots (1)$$

なり、今或プリズムの B, G 線に對する屈折率を夫々 n_b 及び n_g とし其最小轉向を夫々 Δ_b と Δ_g とすれば

$$\Delta_g - \Delta_b = 2 \left(\sin^{-1} \frac{n_g}{2} - \sin^{-1} \frac{n_b}{2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

なり、 $\Delta_g - \Delta_b$ は其プリズムが生ずるスペクトラの長さに正比例す、或密度大なるフリントガラスに於ては $n_b = 1.79$, $n_g = 1.74$ なり故に $\Delta_g - \Delta_b = 6^\circ 22'$ を得べし、故に此ガラスにて頂角 60° のプリズムを作らば分色の開角は $6^\circ 22'$ の大量に達す。(1) を微分すれば

$$dn = d\Delta \cdot \cos \frac{\Delta + \theta}{2} = d\Delta \cdot \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}} \quad \text{即ち} \quad \frac{d\Delta}{dn} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2/4}} \dots\dots\dots (3)$$

を得、通常此式を (2) の代りに使用する。一般に $d\Delta/d\lambda$ の値を知らんと欲せば $d\Delta/d\lambda = d\Delta/dn \cdot dn/d\lambda$ なるゆへ各ガラスに固有なる $dn/d\lambda$ を前知せざるべからず即ち各種ガラスに就き豫め λ の函數としての n を知り居ることを要するなり、此に就きては後章更に論及することあるべし。 $d\Delta/d\lambda$ を分色度 dispersion と名づく。

プリズム角 θ が極小なる場合を假定すれば §217 (17) の n の公式を $n = (\Delta + \theta)/\theta$ の如く書き $(n-1)\theta = \Delta$ を得べし、依て

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{dn}{n-1} \dots\dots\dots (4)$$

を得、 $d\Delta/\Delta$ を相對分色度 relative dispersion と稱す。スペクトラ全長の相對分色度を上式に依り近似的に

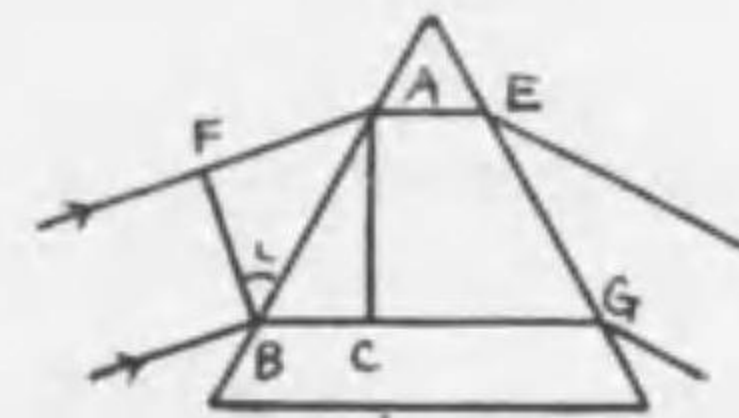
$$\omega = \text{相對分色度} = \frac{n_b - n_g}{n_g - 1} \dots\dots\dots (5)$$

を以て表すことあり茲に添字 G, R, D は フラオンホーファー 線を示す G と R は スペクトラの兩端を代表し (通常 A, H 線附近は見へ難し) D は平均値を代表す、故に赤線 n_g, n_b の代りに n_v, n_r を使用することあり但し V=violet, R=red とす。

プリズムの分解力 resolving power とは スペクトラ中に顯はるる黒線又は輝線を詳細に分解して視せしむる程度を云ふ、例へば小プリズムを用ふるときは D 線は一本に視ゆれども分解力少し大なるものを用ふれば D は二本に分れて視へ、更に増すときは二本の D_1, D_2 間に ニッケル 線と呼ばれたる小線を認むることを得べし、故に分解力は $d\Delta/dn$ によりて表はさるるなり、 n の公式 (§217 (17)) を微分すれば

$$\frac{dn}{d\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\theta + \Delta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} d\Delta$$

第三七四圖



然るに最小轉向なるを以て $2r = \theta$, $\Delta = 2(i - r)$ なり故に $i = (\Delta + \theta)/2$ 、之を前式に代入し第三七四圖と参照すれば

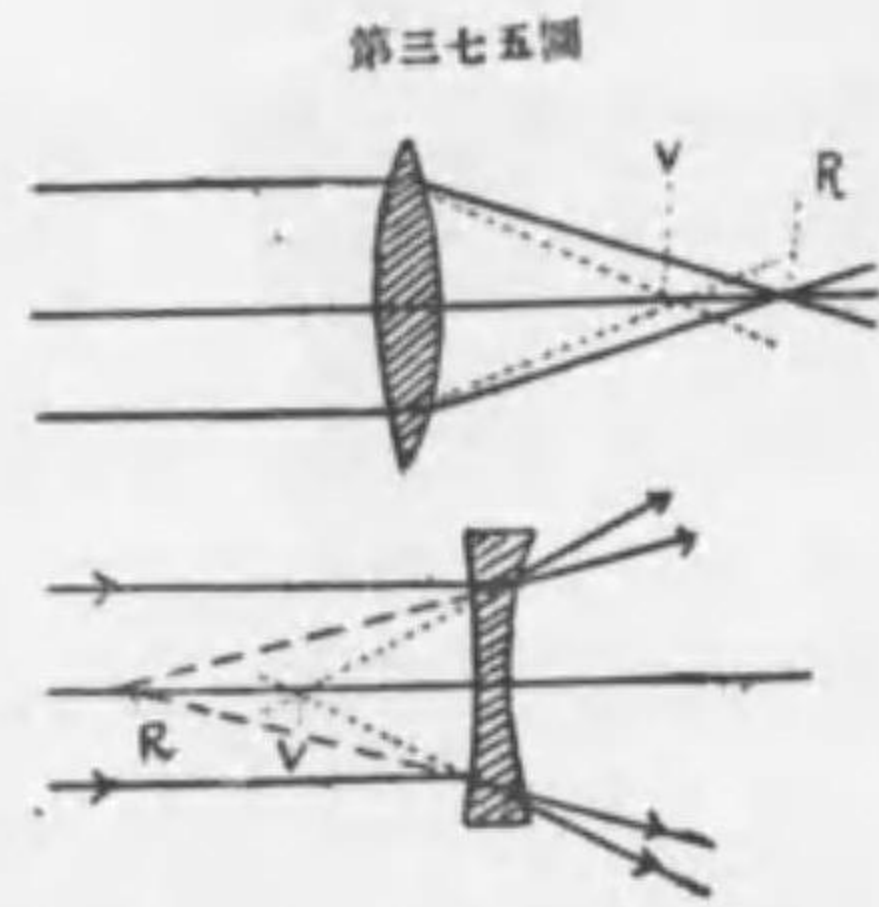
$$\frac{d\Delta}{dn} = 2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos i} = \frac{2BC/AB}{BF/AB} = \frac{2BC}{BF} = \frac{RG - AF}{BF}$$

を得、今 $BG = t_2$, $AE = t_1$, $BF = a$ と置けば

$$\frac{d\Delta}{dn} = \frac{t_2 - t_1}{a} \dots\dots\dots (6)$$

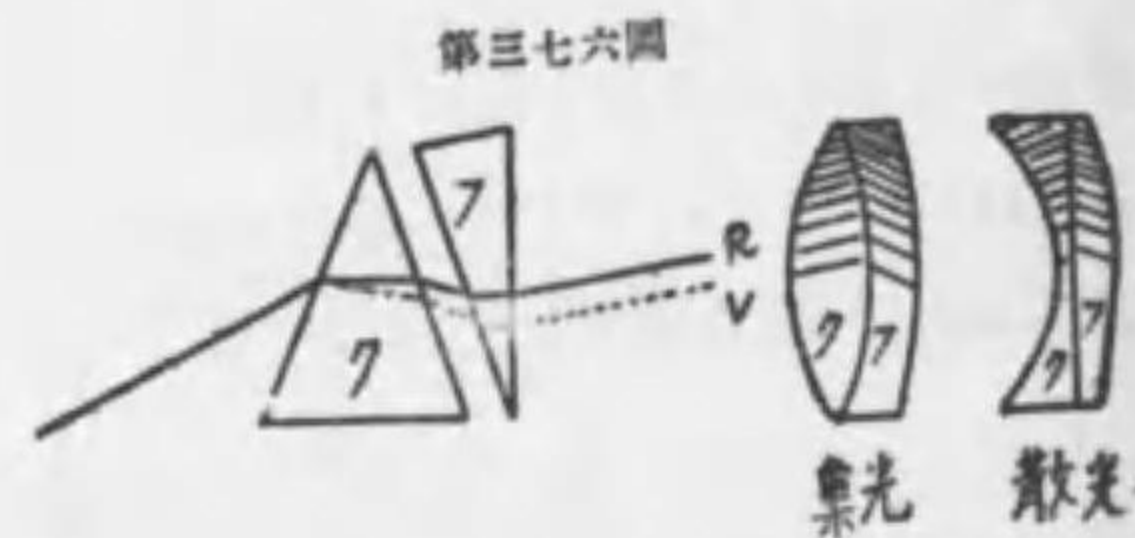
故に分解力はプリズム中の光線の最長最短なる道の差に正比例し入射する光束の断面徑に反比例するものなり (Rayleigh, Optics)。

223 淡色レンズ achromatic lens (Klingerstierna 1754) レンズは頂角の種々異なるプリズムを集合したるが如きものなれば之を通過する光線は多少の分光を呈す、第三七五圖の如く集光レンズは RV 間に並べる七色の焦点を生ず §220 (14) 式により n 大なるものは f 小なり、散光レンズは RV 間に並べる七色の假焦点を生ず、故に集光レンズの場合に於ては焦点附近に白紙



を驛すときは白色の点を得ずして七色の環列を得る理なり従てレンズが生ずる物体の映像は鮮明を缺き多少帯色すべし散光レンズの場合には肉眼を以て主観的に此事実を目撃し得べし、レンズが分色の爲に映像に誤差を生ずることを色の収差 chromatic aberration と名づく。フリントガラスはクラオンガラスに較べて凡そ二倍の相対分色度を有する

を以て一個のクラオンプリズムと其頂角二分の一なるフリントプリズムとを第三七六圖の如く逆に置くときは色の収差を打消し同時に屈折を生ぜしむることを得べし、此理に従ひ第三七六附圖の如くクラオンとフリントレンズを組合せ二種の没色レンズを作ることを得るなり、然れ其 $\delta\Delta/\delta n$ の値を種々の n に就き取調ぶるときはクラオンとフリントガラスに於て同一の比例を保たざるを以て完全なる没色は期し難し、紅と紫との没色を主とする場合には中間の緑色は没色せられずして寫真レンズの場合には尠なからざる妨害となるなり。



f_r をクラオンレンズの紅色の焦点距離とすれば薄レンズの場合には § 220 (14) を用ひ

$$\frac{1}{f} = (n_n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

フリントレンズに向ても同様に

$$\frac{1}{f_n} = (n_n' - 1) \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right)$$

故に兩レンズを重ねたるとき間隔を零と見れば § 223 (26) により紅色の焦距は $1/f_n + 1/f_r$ の逆数なり、同様に紫色の焦距は $1/f_v + 1/f_v'$ の逆数なるを以

て兩色の焦点が同一点に来るべき條件は

$$(n_n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + (n_n' - 1) \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right) = (n_v - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + (n_v' - 1) \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right)$$

即ち

$$(n_v - n_n) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + (n_v' - n_n') \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right) = 0$$

又黄色の場合には

$$\frac{1}{f_n} = (n_n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad \frac{1}{f_n'} = (n_n' - 1) \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right)$$

なるゆへ、レンズの半径を消去すれば

$$\frac{n_v - n_n}{f_n(n_n - 1)} + \frac{n_v' - n_n'}{f_n'(n_n' - 1)} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

然るに (5) により上式の項はクラオンとフリントの相対分色度を各自の平均焦距を以て除じたるものなり、相対分色度を夫々 ω 及び ω' にて示すときは上式は

$$\frac{\omega}{f_n} = -\frac{\omega'}{f_n'} \dots\dots\dots (8)$$

の形となる、然るに分色度は常に正量なるを以て負の符號有るは焦点に正負の別あるを表はすものなり、故に没色の目的を果すには一方を集光にすれば他方を散光レンズになし焦距の數値を相対分色度に正比例せしむべし。例へばフリントの分色度をクラオンの二倍とせばフリント、レンズの焦距をクラオン焦距の二倍にせざるべからず第三七六附圖は此二つの場合を示したるものなり、集光没色レンズは望遠鏡、顯微鏡に用ひ散光没色レンズはガリレオ望遠鏡 opera-glass の接眼子として用ひらる。

(8) と同一の結果に到着すべき簡法は § 220 (14) 即ち $1/f = (n-1)(1/r_1 - 1/r_2)$ の屈折率を變ずれば焦距變ずるを以て直に

$$\delta \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{\delta n}{n-1} \cdot \frac{1}{f} \dots\dots\dots (a)$$

を得るに在り、然るに $\delta n/(n-1)$ は相対分色度 ω なるを以て上式は $\delta(1/f) = \omega/f$ なり、今クラオン、フリント 兩 レンズ を組合したるときは其焦距の逆数は $1/f+1/f'$ なるを以て n 變ずるも焦距變ぜざる條件は $\delta(1/f+1/f')=0$ 即ち

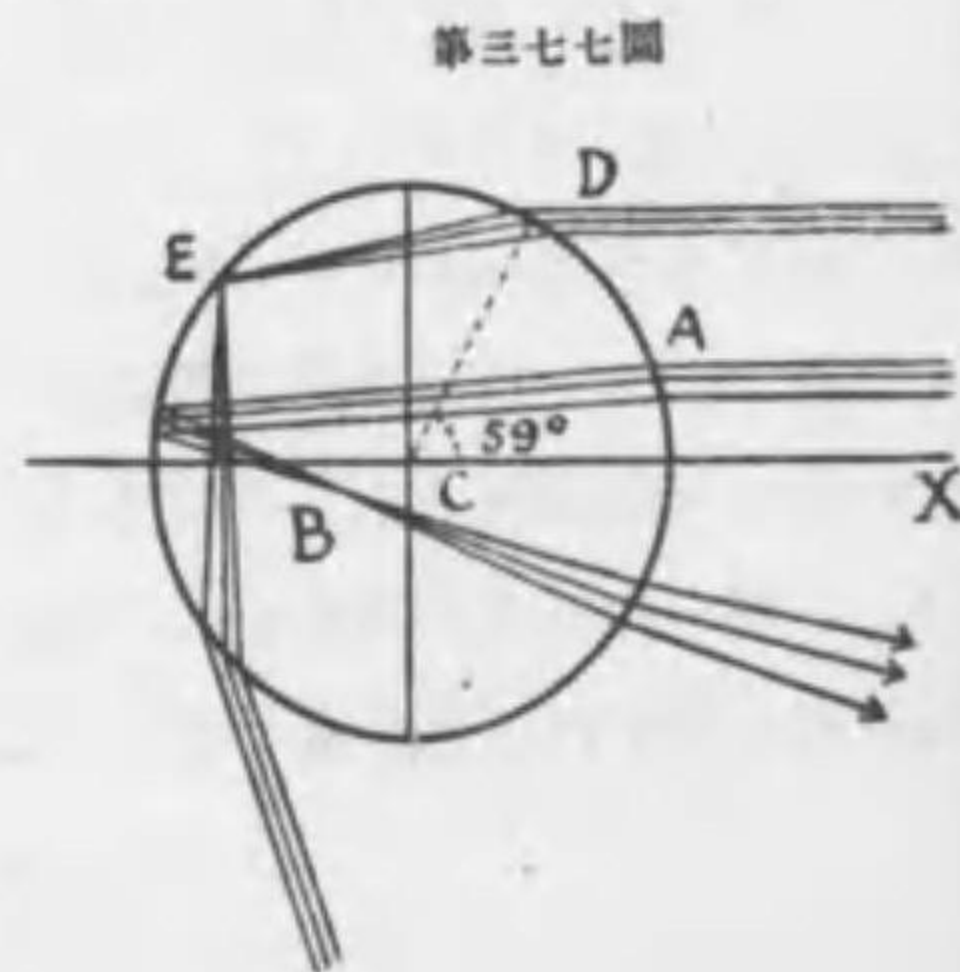
$$0 = \frac{\omega}{f} + \frac{\omega'}{f'} \dots\dots\dots (b)$$

なり、茲に f 及び f' は夫々平均焦距を表はす。

229 虹 rainbows 虹の發生説には種々あれども何れも精確と稱することを得ざるを以て茲には其最簡なるデカルト、ユーリ説 (Descartes 1637, Airy 1838) を掲げんとす、虹には第一第二第三 …… 其他義虹等の數種あり此裡普通に見ゆるは第一虹 primary rainbow 第二 secondary にして稀に義虹 spurious rainbow を見ることあり何れも太陽の反側なる雨滴上に生ずるものなり、之に反し第三第四は太陽附近に顯はれ日光眩きため見易からず第五は太陽の反側即ち第二の直上なり去れど第三以下は光力弱く第五に到りては殆ど見るべからず、義虹は第一の内部第二の外部に連續して見へ色はスペクトラの順序を取らず色、暗、色、暗の列をなす、第一第二は七色の順序に整列し紅色は互に最近の位置に在り、第一虹は日光雨滴に入り二回の屈折と一回の反射を経て生ずるものなることは既に十四世紀の初にテオドリツク (Theodoric 1304-1311) の證明したところなり、其れまではアリストートル 學徒は日光が雨滴面に於て反射して虹を生ずるものと考へ來れり。又從來は日光を以て点

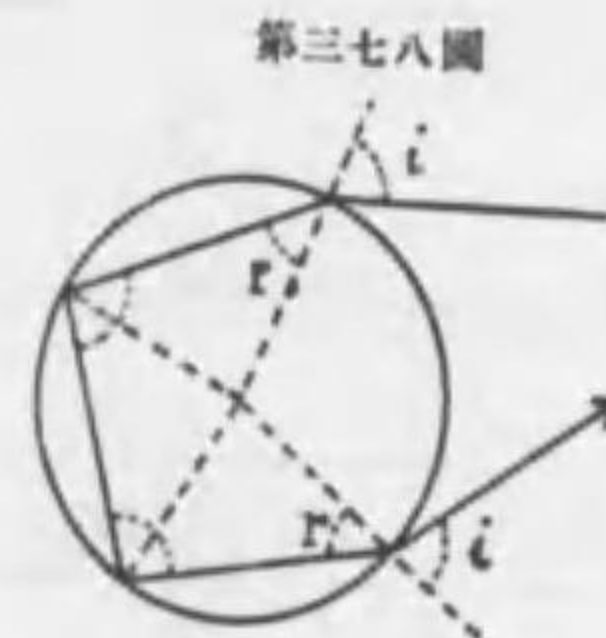
源 point-source より出づるもの如く考へて計算せしも愛知、田中館兩氏は太陽の視徑を入れて計算せり (大學紀要二十一卷 1906)。

第三七七圖を雨滴とし日光は XC の方向に進むものとす A 点附近より入射する日光を考ふるに屈折反射後一旦 B に集りて後は開き雨滴を出射し



て散光す從て肉眼に入るも刺戟を起す力無し、獨り 59° に相當する点 D より入射するものは雨滴 E に於て一旦集合するゆへ往復の路左右對稱となり出射するときには入射時と同じく平行光線となり肉眼に入りて刺戟を與ふるの力を有す、故に中心角 59° なる時は克く虹の現象を發生することを得べし、此條件を求むるには中心角が少量の變化をなすも出射線の方向は變化せずして停滯する (stationary) 場合を吟味することを要す、換言すれば日光の轉向角が極大極小なるときを求むれば可なり。

入射角を i とし屈折角を r とすれば最初日光が雨滴に入りて (第三七八圖) 初回の屈折をなすときは日光の轉向は $i-r$ なり其後一回の反射毎に轉向は $\pi-2r$ なり故に反射の度數を m とすれば $m(\pi-2r)$ の轉向をなし最後に空氣中へ出射するときに $i-r$ の轉向をなすにより總計



$$J = i - r + m(\pi - 2r) + i - r = m\pi + 2i - 2(m+1)r$$

の轉向をなして肉眼に入るなり、今雨滴の屈折率

を n とすれば $\sin i = n \sin r$ 故に $i = \sin^{-1}(n \sin r)$ なり之を代入し

$$J = m\pi + 2 \sin^{-1}(n \sin r) - 2(m+1)r \dots\dots\dots (9)$$

なり Δ は r の函数にして r を變化せしむるとき Δ の値が滯停する條件は $\delta\Delta/\delta r = 0$ なるゆへ

$$\frac{n \cos r}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 r}} = m+1$$

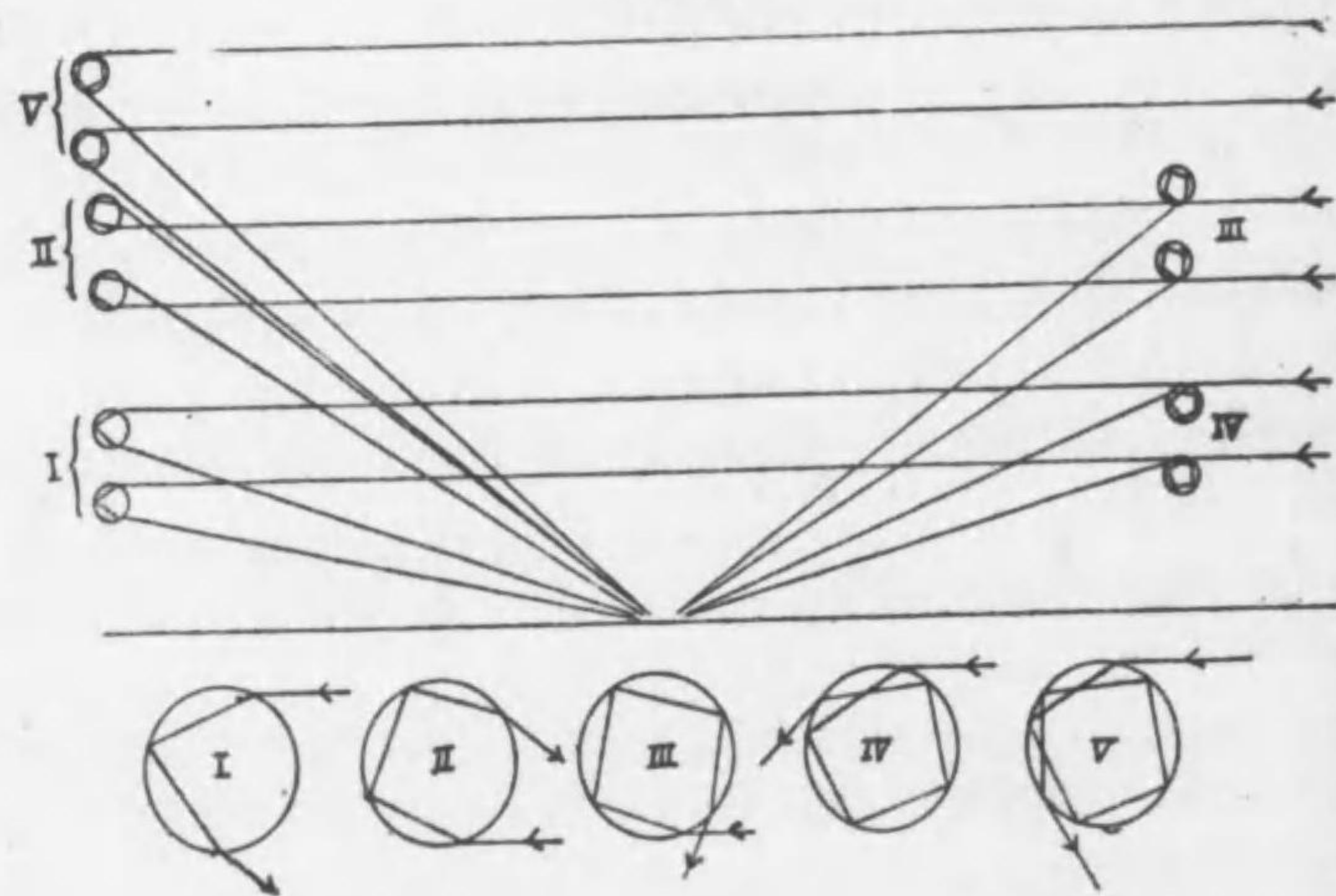
此より直に

$$\sin i = \sqrt{\frac{(m+1)^2 - n^2}{(m+1)^2 - 1}} \dots\dots\dots (10)$$

今 $n_u = 1.33, n_v = 1.34$ と置き上式を計算すれば下表の如し、第三七九圖に其大体の方向を示す。

| n | 紅の \angle | 紫の \angle |
|---|-------------------|-------------------|
| 1 | $\pi - 42^\circ$ | $\pi - 40^\circ$ |
| 2 | $\pi + 51^\circ$ | $\pi + 55^\circ$ |
| 3 | $2\pi - 51^\circ$ | $2\pi - 47^\circ$ |
| 4 | $2\pi + 43^\circ$ | $2\pi + 50^\circ$ |
| 5 | $3\pi - 52^\circ$ | $3\pi - 47^\circ$ |

第三七九圖

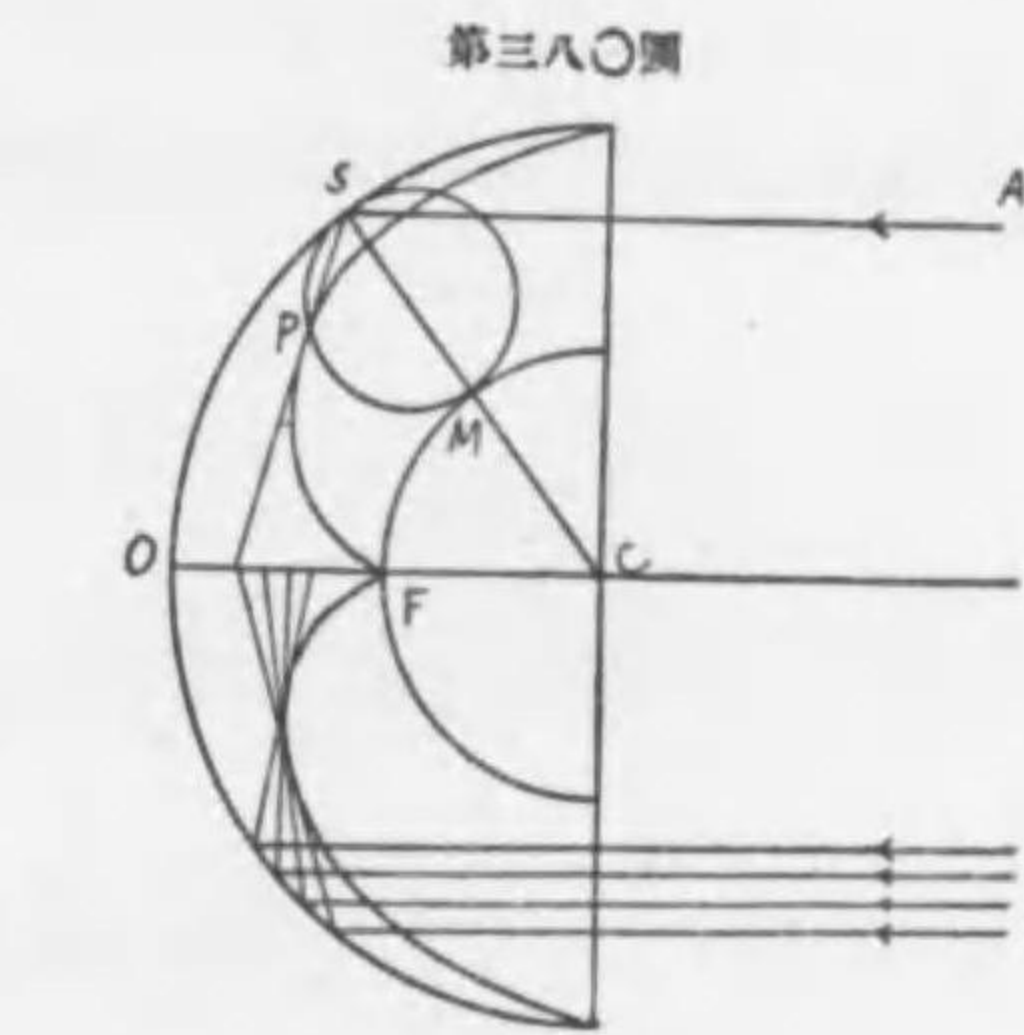


第六章 光學器械論 THEORY OF OPTICAL INSTRUMENTS

230 球面収差 spherical aberration

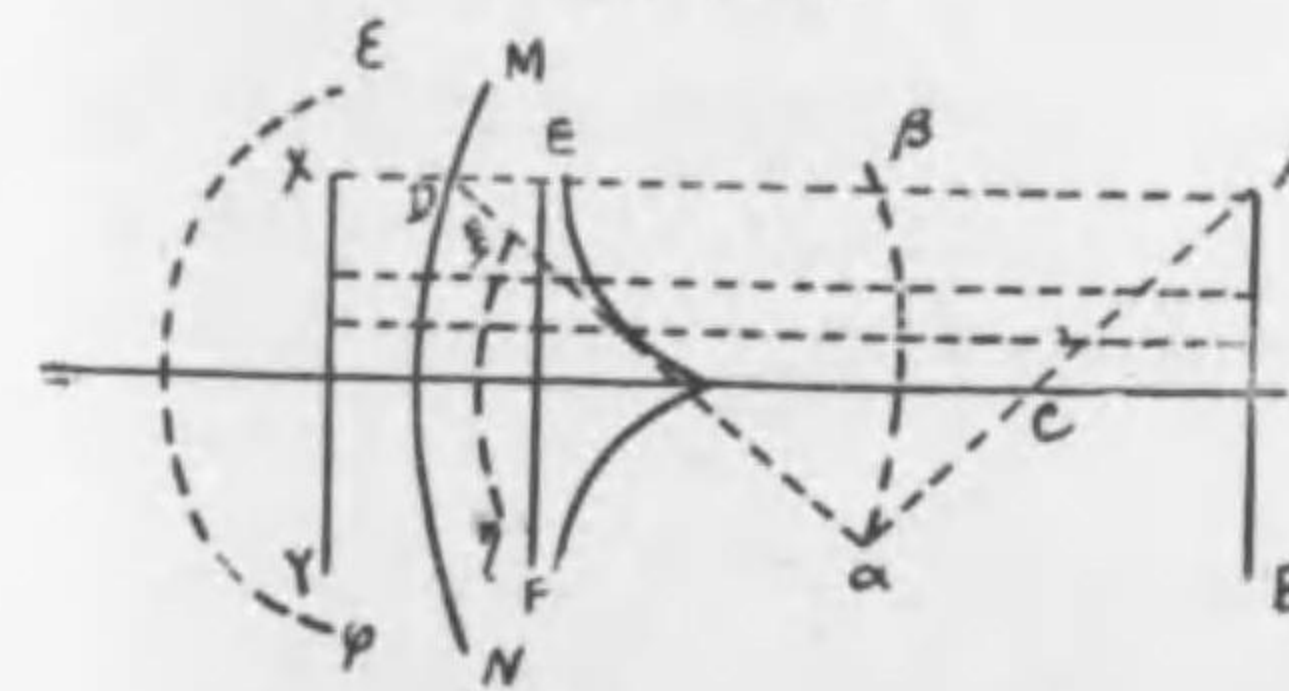
球面鏡の軸に平行に入射する光線は

第三八〇圖の下部に示す如く半徑の中点なる F に集まることなく縁に近きもの程 F より遠ざかりて反射し焦面 caustic と稱する面に切線をなす、故に焦面は反射光線の包絡面なり。AS を軸に平行なる入射線とすれば反射の法則により $\angle MSP = \angle MCF$ なり依て MC を半徑とし C を中心として圓 MF を書き MS を直徑として圓 SPM を書くときは兩圓の半徑は $2:1$ の比をなし $\angle MCF$ は中心角にして $\angle MSP$ は圓周角なるを以て弧 $MF =$ 弧 MP なり、故に大圓を固定し小圓を其周邊に切轉すれば小圓の圓周上的一点 P は焦線 caustic を書くべし焦面は焦線が OC を軸として回轉することに依りて生ず、焦線は幾何學の外擺線 epicycloid なり、焦点は軸に極めて接近せる平行線の反射後集合するところなり。



此が爲に球形の凹凸面鏡より反射して生ずる物体の像は多少の歪みを呈す、例へば(第三八一圖)軸に垂直なる直線 BA の A より AD の方向に出づる線は反射して焦線に切し又球

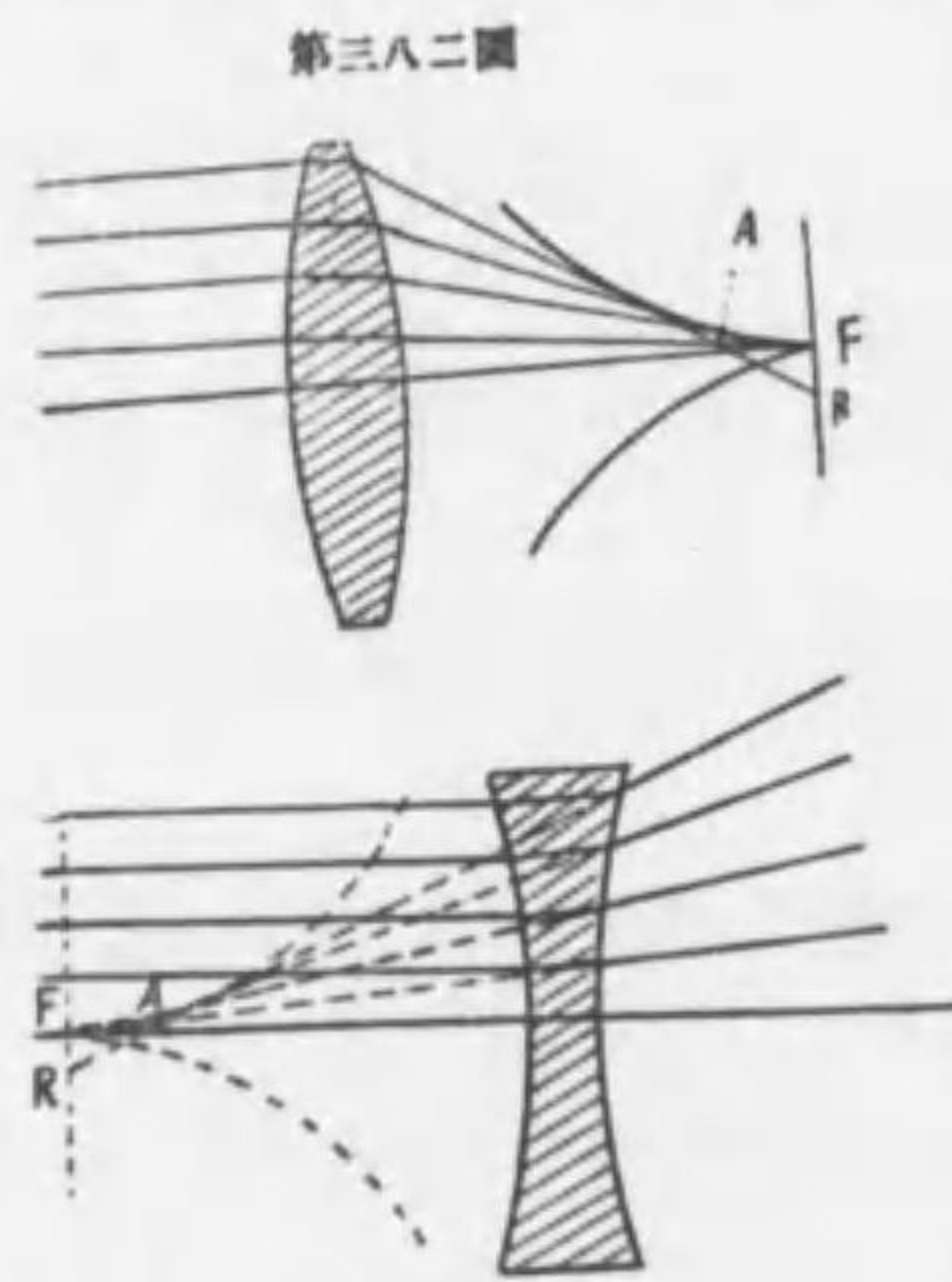
第三八一圖



心 C を過る線は反射して元の道を逆るゆへ其二線の交点 α は A の像なり、斯の如く AB 上の任意の点を過り軸に平行なる線を引き同時に其点と球心を結ぶ線を引き交点を求むれば AB の像 $\alpha\beta$ を得べし、同法に依り EF の像は $\epsilon\phi$ となり XY の像は $\epsilon\eta$ となる、MN は凹面鏡なり。

軸に平行なる総べての光線を一点に集め得る反射面は抛物面ならざるべからず、然れ共軸に平行ならざる時は抛物面も平行光線を焦点に集中せしむること能はず。

軸に平行なる光線がレンズを通過する場合に於ても焦点に集合せずして焦面 diacoustic に切線となる、屈折焦面の断面は畧々第三八二圖に示すが如き形を有す散光レンズの場合には假焦点をなす、

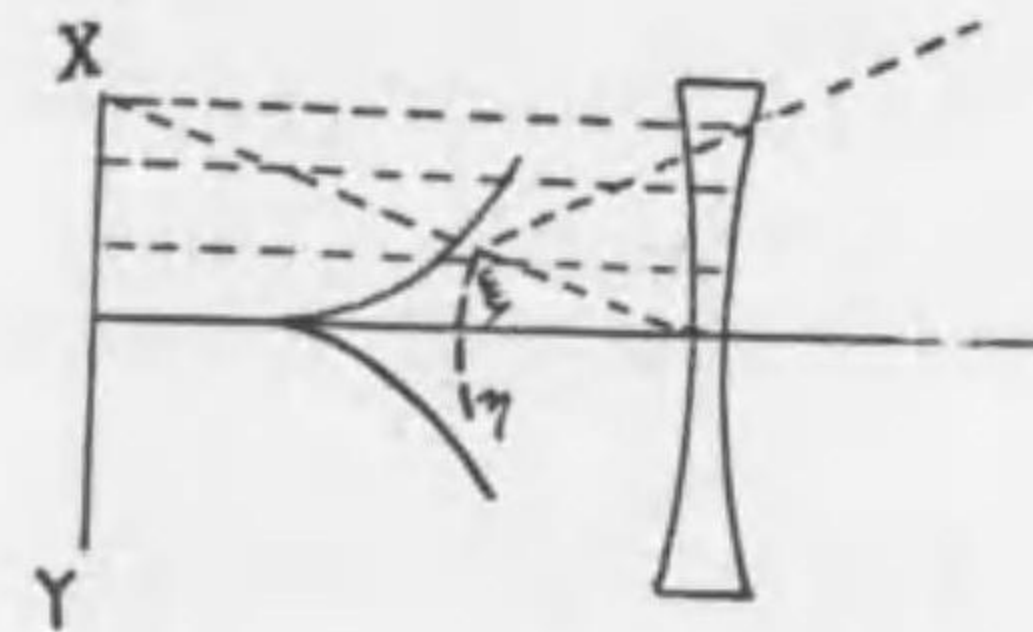
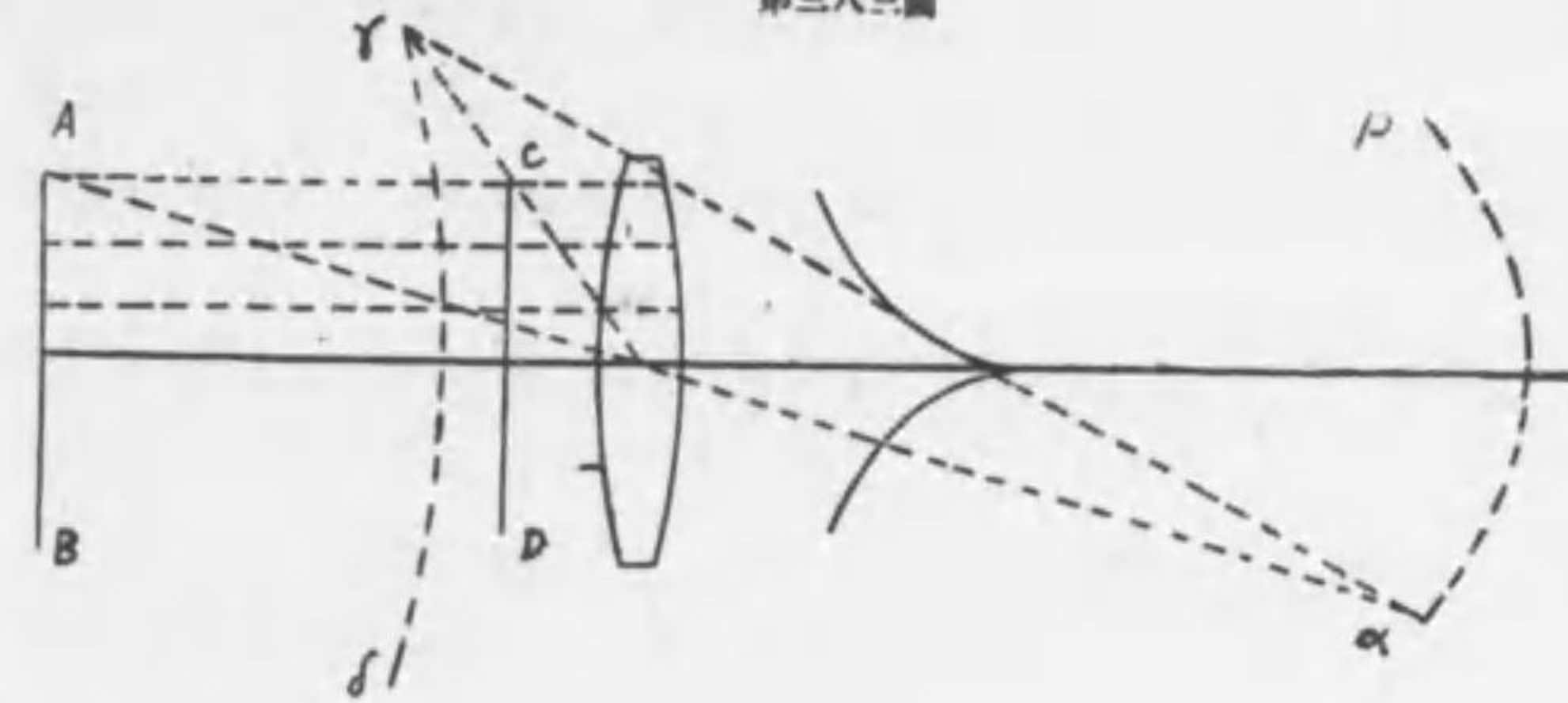


、兩つの場合に於て軸に極めて近き光線のみ焦点に會合す、レンズの縁より來る AR は F より最も遠き点 A に於て軸と交はる、AF を縦の収差 longitudinal aberration と稱す縦の収差は入射線と軸との距離の平方に正比例す、F を過り軸に垂直に白紙 FR を置くときは AR が白紙と交はる点の距離 FR を横の収差 transversal aberration と名づく、横の収差は入射線と軸との距離の立方に正比例す、

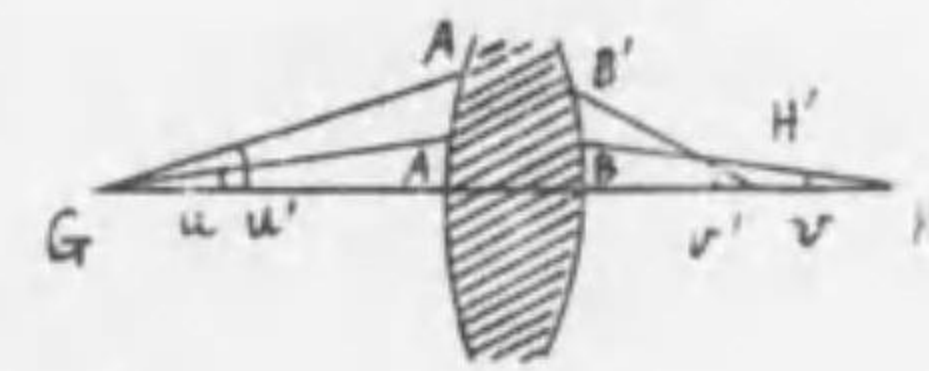
収差多きときは像は不鮮明となるのみならず多少の歪みを呈す故にレンズの前方に孔壁 perforated diaphragm or aperture stop を置いてレンズの縁より來る光線を遮断するなり。像を作圖するには前例に倣ひ物体の一点より軸に平行なる線とレンズの光心を通過する線とを引き其交点を求むべし、第三八三圖に於ては AB の像は $\alpha\beta$ にして CD の像は $\gamma\delta$ なり、散光レンズに於ては XY の像は常に $\epsilon\eta$ の如き形を有す。

軸上の一点 (第三八四圖) G を出發する光線 GA, GA' は屈折して夫々 BH, B'H となるときは G より出づるものは悉く H に集まりて像を生じ

第三八三圖



第三八四圖

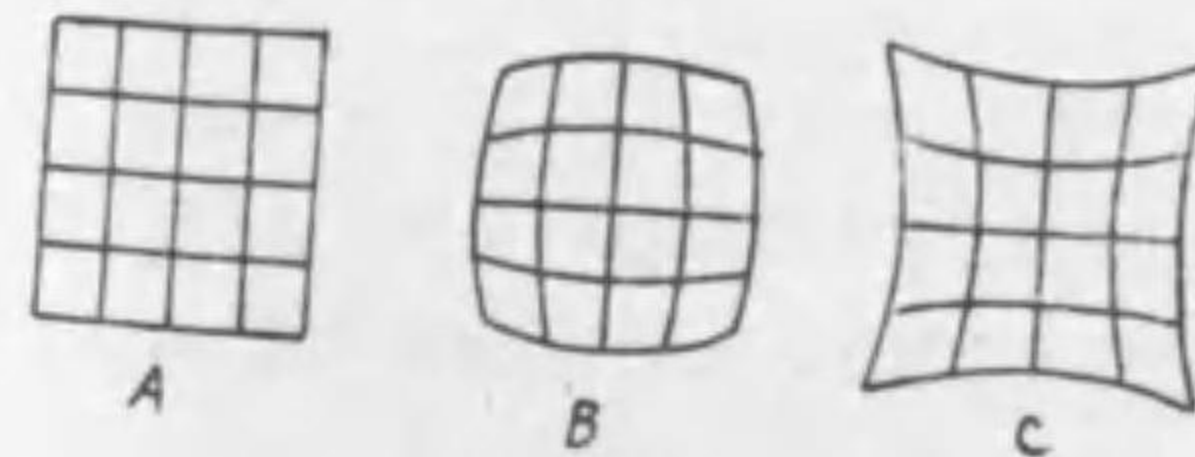


$$\frac{GA \sin u}{GA' \sin u'} = \frac{HB \sin v}{HB' \sin v'} \dots\dots\dots (1)$$

なる條件は満足せらるべし、アッベ (Abbe) は之を正弦の條件と名づけたり而して此條件を満足せしむるレンズ集合体を無収差 aplanatic (Blair † 1828) と稱す。

孔壁を狭くして平行光線を送るときは其方向軸に平行ならざれば屈折後焦点に集まる能はず、二つの互に垂直なる焦線に沿ふて集合するを見る、其焦線の一は入射線と軸を含む平面内に横はり他の焦線は其に垂直なる平面内に横はる、此種の収差を astigmatism と稱す、若し此場合に於て孔壁の直径を大きくするときは

第三八五圖



像は全然対象を歪む或方向に偏して長く恰も彗星の尾を曳きたらん如き像を生ず、之を coma と稱す。

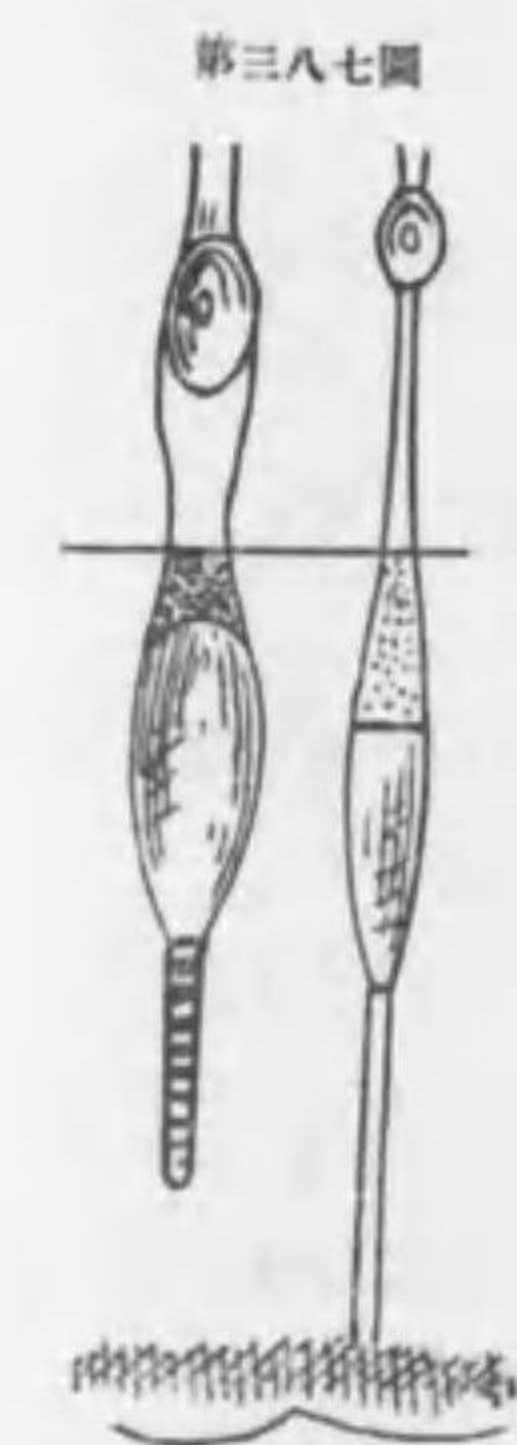
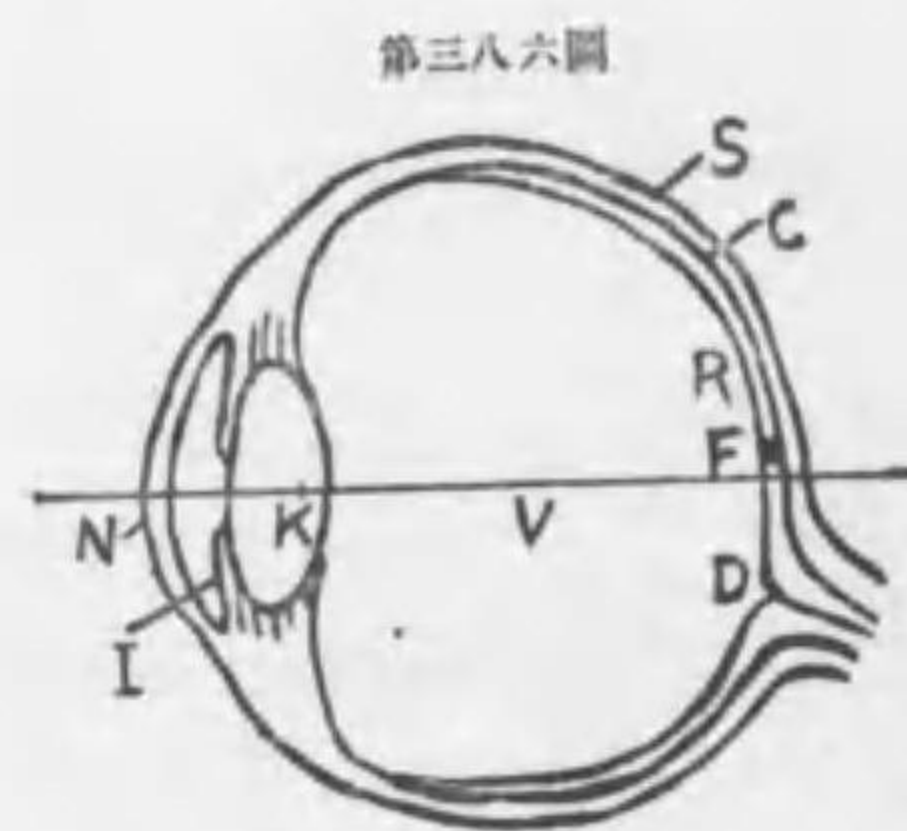
上述の諸缺點を矯正し得た

りと假定するも孔壁廣き レンズ を使用すれば像の中央と周邊とは同一平面に横ならずして 第三八五圖 A の如き物体の像は B 或は C の如く視ゆるを常とす、此弊害を矯正したる レンズ の集合体を orthoscopic と云ふ。

231 人 眼 動物中眼の最も簡單なるは眼点と稱し表皮中に在る含色素視細胞の集合より成り(硬水母の如く)色素は光線によりて化學反應を呈し視神経を刺戟す。眼点の進歩したるものは表皮面より陥入し且つ縊断して其下に没入して胞眼となる、人眼は其更に進歩したるものなり、其外か節足動物には單眼 ocellus 及び複眼 compound eyes の別あれども何れも レンズ 及び網膜を有する点に於て同一なり、唯々單眼は人眼の如く倒像を生じ其數多らず主として暗處に於て物象を識別するに用ふ、之に反し複眼は多きは數千の個眼 ommatidium の集合せるものにして六角形の蜂巢細工(mosaic)をなし横より見れば細長き圓錐体の集合なり、外物を認識するには各個眼の感覺を綜合す、主として明るき場處にて使用せられ淡暗きところには適せず故に蝶類の如き日中昆虫類は單眼を缺くを常とす(幼虫の時は花を見舞ふの必要なく單眼を所有す)。茲に不思議と云ふべきは若しも動物が発光器を携ふる場合には其構造が眼の構造に酷似せる一事なり。

人眼の外面は白色の包被物(第三八六圖 S) 鞏膜 tunica sclerotica を以て保護し其内側に脈絡層(C) tunica choroida あり尙ほ内側には網膜(R) retina あり脈絡層は血脈を有し網膜には視神経の末梢分布す、正面の透明なる部分は少し隆起し角膜(N) cornea と稱せらる、室内には水様液 aqueous humour あり、其次ぎ

は虹彩(I) iris にして孔壁をなし孔を瞳孔 pupil と稱す、其次ぎは焦距の変更可能なる レンズ にして其構造は葱根の如く層々相重なれり、次ぎは最も廣き室にして之を水晶液(V) vitreous humour と稱す、光線は前述の順序を追ふて諸媒質を通過し遂に網膜上の明班(F) fovea centralis に倒像を生ず、明班は少しく



窪み黄色を帯び其構造極密にして圓錐体 cones と稱する感光細胞を以て充滿し複眼と同一の官能を有す即ち日光豊富なる場處の視覺を司どり主として物体の色を鑑識す、之に反して網膜の他の部分には杆状体 rods 甚多く其構造は節足動物の單眼に似て淡暗き處の物象を識別するに適す、梟及び蝙蝠の如き夜行動物は圓錐体を缺如し蜥蜴の如き晝行動物は圓錐体のみ携へ杆状体を缺く、故に人眼は複眼單眼の構造と官能とを兼備するものと稱して可なり。虹彩は輻状筋 radial muscles 及び圓状筋 circular muscles より成り光線の刺戟に應じて開閉自在なり従て窩器械の絞りに似たり、レンズの周邊には毛様筋 ciliary body ありて遠近の物体を明視するため調節 accommodation を行ひ、レンズは此が爲に收縮膨脹して兩側面の曲率を變ず、外物を明視せんとするときは眼軸は物体の方向に旋轉し常に物象を明班上に映ぜしむ、此目的の爲に上下及び左右に眼球を旋轉せしむる筋肉ありて鞏膜に附著す。

網膜は三層より成立し眼底に到來したる光線は先づ神経層を通過して第二層なる感光細胞層に入りて刺戟を與ふ第三層は紫色層 stratum pigmenti にして感光の際には第二第三は相互接近し杆状体の先端は紫液中に浸され(第三八七圖)紫液

は分解して神経に刺戟を授く故に紫液は淡暗き場處に於ける視覺と關係を有し色の識別に參與せず従て紫液は明班内には存在せざるなり(鳥眼と稱し夜間視覺を缺くは紫液缺乏の致すところなり、鳥類中にも鳩類は全然紫液を具備せず)色は専ら圓錐体之を司り、圓錐体は色の刺戟を受くれば自体を收縮す。視神経纖維の眼底より出づるもの凡そ四十萬本ありて各一本は八個の圓錐体と百個の杆状体を擔當す、纖維は一束となり盲點(第三八六圖 D) optic disk or blind spot より後頭葉中樞に走る。

人眼を數多の媒質より成立する一系と見れば主點は角膜より夫々 1.75 耗, 2.09 耗の深處にあり、節點は角膜より 6.95 耗, 7.29 耗の深處にあり、第一焦點は角膜より 13.75 耗、第二焦點は 22.75 耗にして眼が休

息せるときは第二焦點は網膜上に来る、二交點の相互距離は僅に 0.34 耗なれば角膜より 7.12 耗の點と稱することを得ば眼を唯一個のレンズによりて代表せしむることを得べし、之を省畧眼 reduced eye (Listing 1845) と稱す。

232 視 覺 vision 網膜上の外物の映像は倒像なれ共物体を轉倒したる位置に於て認めざる理由は吾人は網膜上の刺激を便りとして外界を觀つたありて決して網膜上の映像を見つたあるに非ざるを以てなり、從て下部に受けたる刺激を下方に投影し (Kepler 1611) 吾人が觀つたある物体は悉く外界に存在するものと思惟するなり。網膜上の映像は單に倒像なるのみならず著しく縮少せられ又多少彎曲せり。視覺を遠近の物体に調節するには § 220 (14) のレンズの公式により物体と省畧眼との距離 g の變化に伴ふて焦點距離 f を變化せしむるなり (h は眼の奥行なるを以て常定なり) 而して f を變化するには毛様筋の作用により眼レンズの形狀を替へ平常は厚さ 3.6 耗なるも充分緊張すれば 4 耗までは張らしむることを得る装置なり (老眼のレンズは角質となり變形不能なり)。平眼が明視し得る最短距離は 12 耗なれ共 25 耗を明視の距離 distance of distinct vision と名づけたる理由は此距離に於て物体を熟視すれば眼の疲勞も又餘患も最も少なるを以てなり。近き物体を明視せんとすれば調節筋緊張し瞳孔狭くなり兩眼の軸は一點に集中して眼窩及び眼筋は眼球に横壓を與へ之が爲に眼形次第に長くなり從て眼底と角膜との距離は省畧眼の焦距よりも長くなり、遠方の物体を明視すること能はざるに到る、之を近眼 myopy と名づく、之に反し稀に産れながらにして眼形の短きものあり、之を遠眼 hyperopy と稱す、又老境に近づけば調節作用を失ひ老眼 presbyopy となる (近眼者又は遠眼者も老眼の患を免る能はず)。今 f を平眼 emmetropy の長さ (節點と眼底との距離にして 15.46 耗あり、同時に休息せる眼の第二焦距に等し)、 h_M を近眼の長さ h_N を遠眼の長さとし、近眼者が使用する眼鏡 spectacle の焦距を x 、遠眼者のを y とすれば眼鏡—省畧眼間の距離を零と假定し § 224 (28) 中 $d=0$ と置き

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f} = \frac{1}{h_M} \dots (2) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{f} = \frac{1}{h_N} \dots (3) \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f} \dots (1)$$

を得、然るに上述の如く $h_M > f > h_N$ なるを以て (2)(3) により $x < 0, y > 0$

を得べし故に近眼には散光レンズ、遠眼には集光レンズを使用せざるべからず、但し (2)(3) 中の f は休息せる眼の焦距なり、又近眼者の明視の距離は 25 耗よりも短く之を p とすれば (4) により

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{h_M} = \frac{1}{f}$$

又眼鏡を懸くれば明視の距離は 25 耗となる即ち

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{h_M} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x}$$

故に兩式より h_M と f を消去して $1/25 - 1/p = 1/x$ 即ち $x = -25p/(25-p)$ を得之によりて近眼鏡の焦距定まるべし、此に反し遠視者の明視の距離は 25 耗よりも長く之を q とすれば前理に倣ひ $y = 25q/(q-25)$ を得るなり。

眼鏡の度数は從來は焦距のインチ數を以て表はせしが近來は一米の焦距を單位となし之を dioptic と稱し D を以て示す、半米なるときは度数は 2D なり、總じて焦距を米にて表はし其倒數を以て度數となす。例へばインチ單位にて八度と稱するものは焦距 8 インチなる故 $8 \times 2.54 = 100$ 米 = $\frac{1}{8}$ 米 即ち 5D なり。

233 眼の缺點 人眼の構造及び視覺に種々の缺點あり、

第一、盲點は神經を欠ぎ從て視覺なし、故に左眼を閉じ右眼にて第三八八圖の

第三八八圖

+



十字形を約 17 耗の距離より凝視せば右方の黒卵形は視えざることとなる、即ち盲點は畧々此形を有するものなり。

第二、眼を構成する媒質全く透明ならずして青色の曇りを帯ぶる故眼中に光の差込むことある時は微力なる青色の螢光

fluorescence を發生して映像の明瞭を害することあり。

第三、角膜は球面の一部と云ふよりも寧ろ橢圓體の一部をなし水平断面と鉛直断面に於ける曲率不同なり、之が爲に少許の亂視 astigmatism を生じ水平面に於ける省畧眼の焦距は鉛直面に於ける焦距と一致せざるなり通常亂視と稱する眼

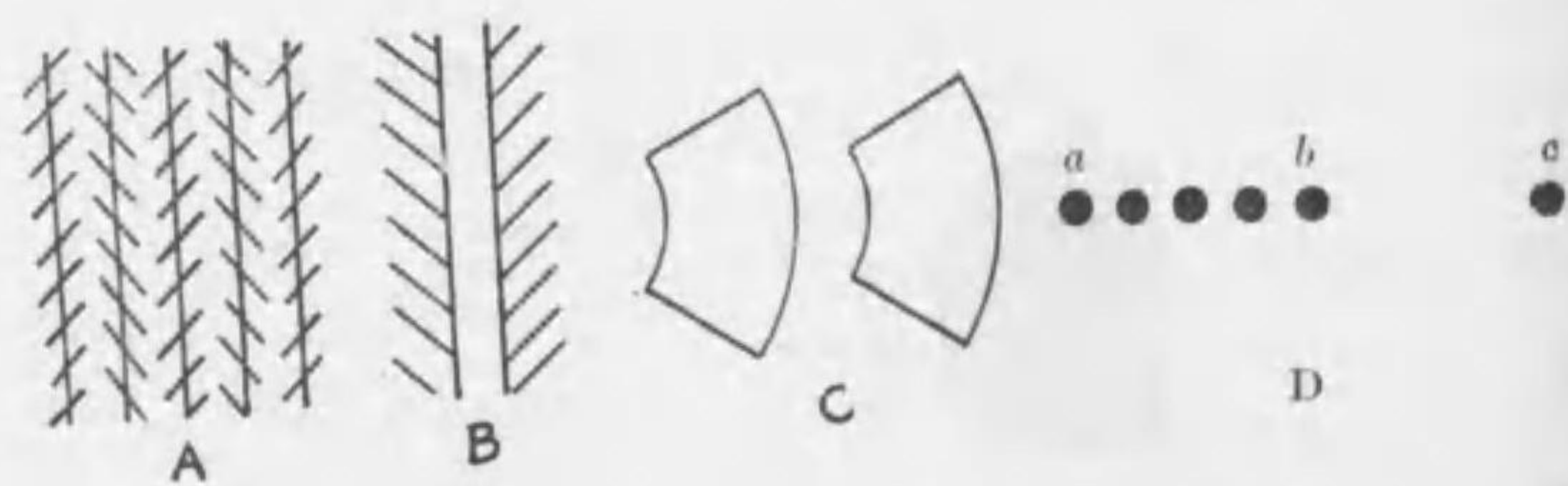
は此弊害の著しく發達せるものなれば之を矯正するには筒形 レンズ cylindrical lens を用ひて曲率の不足を補はしむ。

第四、眼も レンズ と同じく § 228 に説きたる如き色の収差ありて諸色一點に焦點を結ばざるが爲に映像は明瞭を缺くなり。

第五、眼内象 entoptic phenomena と稱し眼内の事物を感ぜし誤りて之を外界の現象の如く想ふことあり、例へば殘像 residual image の如きも之に屬す、凡そ視覚は一般に紫液の化學反應を伴ふを以て血液の代謝作用により舊態に復するまでは視覚は繼續するものなり、其時間は $\frac{1}{10}$ 秒を平均とすれども強き光を視たるのちは殘像は半時間以上も繼續すること稀ならず此れ恰も樂器共鳴の餘音續々たる如きものなり、活動畫は殘像を利用して不連續なる畫を連續的のもの如く視せしむ、交流電燈も同理に連續的に視ゆるなり。他の普通なる眼内象は燈光を眼中に差込ましむるときに眼底の光景殊に盲点附近の血管を明瞭に觀ることを得べし、尙其よりも奇なるは比較的暗き室の窓より白雲を仰視するときは眼底の血球運動を看ることなり、此は外來の光線によりて網膜上に血球の影を印するに因る。

第六、眼は多少色盲にして殊に見慣れたる色の知覺は甚だ遲鈍なり。

第七、眼は物体の周圍の形狀に誤られ屢々其物体に關して錯覺を生ぜ、有名なる例は ツェーメナー 線 (Zöllner lines) と稱するなり (三八九圖 A) 即ち平行

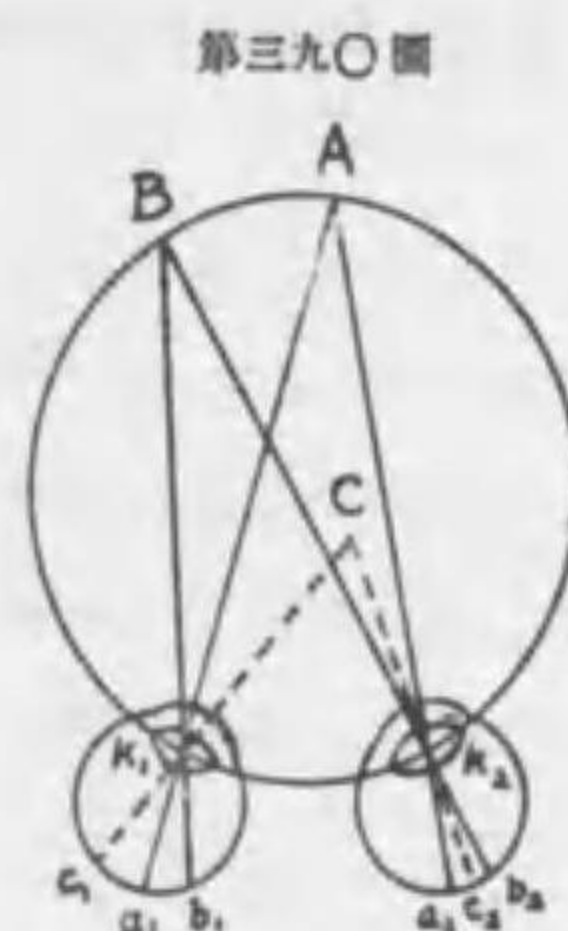


線も平行せざる如く視ゆ其理由は B の如き二條の平行線に刻線を附するとき刻線の方向を見て上部は開くならんと期待するに反し實際は二線平行なるを以て期待は裏切られ平行線は却て上方に窄みたる如く感ずるなり、同理により C の兩圓は同形同大なれども右圖の方小形に視ゆ、又 D 圖に於ては $ab > bc$ に

視ゆべけれども實は $ab = bc$ なり、其理由は ab は變化的にして bc は單調なるを以てなり。

234 兩眼視覚 binocular vision

兩眼を以て (第三九〇圖) 一点 A を凝視すれば眼軸は A に集中し明班上に A の像 a_1, a_2 を生ず今兩眼の節点と A とを通る圓を書くと



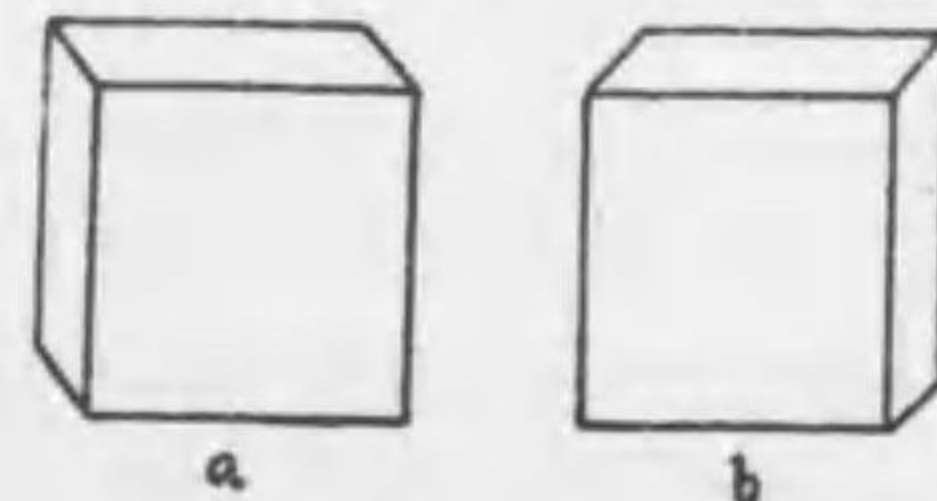
きは此圓を視圈 horopter と云ひ $\angle K_1 A K_2$ を視差 parallax と名づく、視圈上に在る他の物体 B の像は眼底の b_1, b_2 に生じ幾何學にて $\angle K_1 A K_2 = \angle K_1 B K_2$ 従て $\angle a_1 K_1 b_1 = \angle a_2 K_2 b_2$ なるを以て $a_1 b_1 = a_2 b_2$ なり、即ち A を凝視するときは視圈上の他の物体 B の像は兩眼の對位点 corresponding points に生じ精神の綜合力により A を一

物体と感ずる如く B を一物体と感ずることを得るなり、然るに視圈上に在らざる他の物体 C の像は管に兩明班の異なる側に生ずるのみならず屢々距離に於ても $b_1 c_1 > b_2 c_2$ なり、斯く c_1 と c_2 は對位点にあらざるを以て物体 C は二重に視ゆるなり。

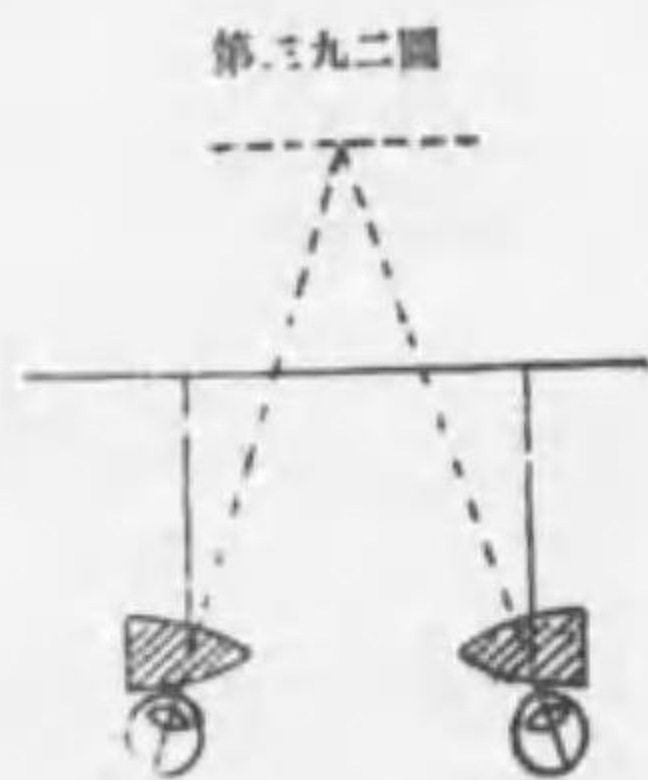
凝視する物体 A が近きときは視圈小にして視差大なり、而して眼軸を旋回する角大なるを以て旋眼筋を勞することも従て大なり、然らば旋眼筋を緊張する度を感ずることによりて精神は物体の遠近を知覺し得べき理なり、此と同時に前述の理に依り視圈上に在らざる物体は二重に視へ其二重像の距離は視角大なるほど彌々大なるべきを以て二重像相互の距離によりても物体の遠近を判定することを

得べし、然れ共そは無意識に行はれつゝある精神作用にして意識は決して上陳の如き論理を追ふて遠近を判定するものには非るなり、例へば兩眼を以て立方体を見るときは 第三九一圖 の如く左眼には a の如く右眼には b の如く視へ觀者に近きほど視差大なり、精神は兩像を綜合し幼時より貯へたる經

第三九一圖



驗に頼り物体を立体的 stereoscopic に認識し平面書を見る如くならず空間世界を見る如く奥行を知覚するを得せしむ、故に離れたる二点より撮りたる書を两眼



の距離(約 64 耗)に等しく置き左眼を以て左書を見右眼を以て右書を見れば直に綜合して奥行ある光景を見るの感を生ず、此種の練習を経ざる人は立体鏡 stereoscope (Brewster 1849) と稱するものを用ひ二個の半レンズにより二像を綜合すべし(第三九二圖)最後の像は眼より 25 耗の距離に生ず。総じて遠所の物体は視差零にして平面書の如く視へ遠所を識別し難きを以て反射鏡を

用の两眼の距離を増加し視差を著しくするなり、アッペの立体望遠鏡 stereotelemer は其一例なり。

235 廓大レンズ magnifying lens 物体をレンズにより廓大するには虚像を使用す、故に物体の距離 g は焦距よりも短く虚像は明視の距離 25 耗に生ず、式は $1/g - 1/25 = 1/f$ となり f が 25 に比して小なるときは g は極めて

f に近し、従て倍率は § 220 (15)

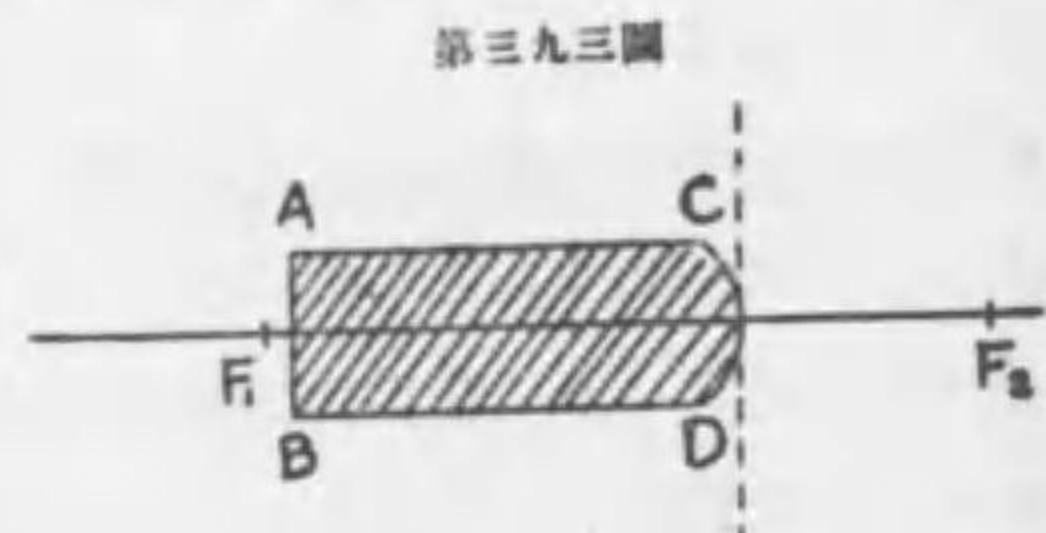
により $\mu = -\frac{25}{g} \approx -\frac{25}{f}$ なり。プ

リウスマー廓大レンズは第三九三圖の形を有し殆ど平面なる AB 面上に物体を粘著し CD より見るなり、

レンズの屈折率を n とすれば CD の左側と右側の媒質の屈折率は夫々 n と 1 なるを以て § 219 (7) により

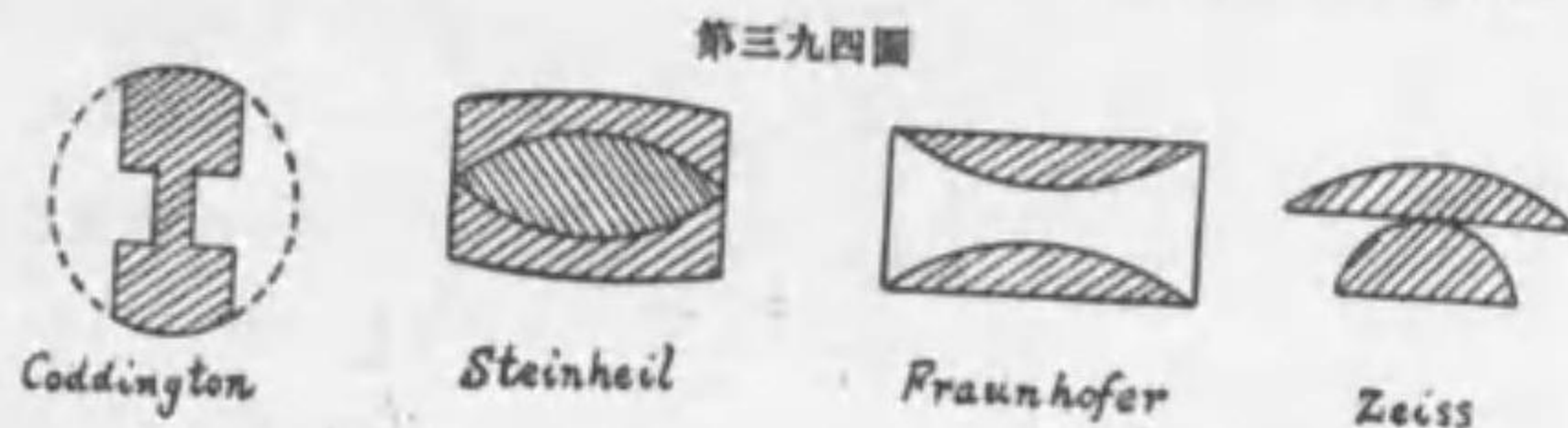
$$\frac{1-n}{r} = \frac{n}{g} + \frac{1}{h}$$

茲に $r < 0$ なり而して g はレンズの長さ l に等しく又 $h = -25$ 耗なる故、半径の數値を r とす $(n-1)/r = n/l - 1/25$ 、又倍率は § 219 (11) より $\mu = -n \cdot 25/l$ なり、例へば $n = \frac{3}{2}$ 、 $l = 2$ 耗とすれば $r = 0.7$ 耗、 $\mu = 18.75$ なり、又 § 219 (8) により $f_1 = 2.1$ 耗 $f_2 = 1.4$ 耗にして像の作圖容易なり、倍



第三九三圖

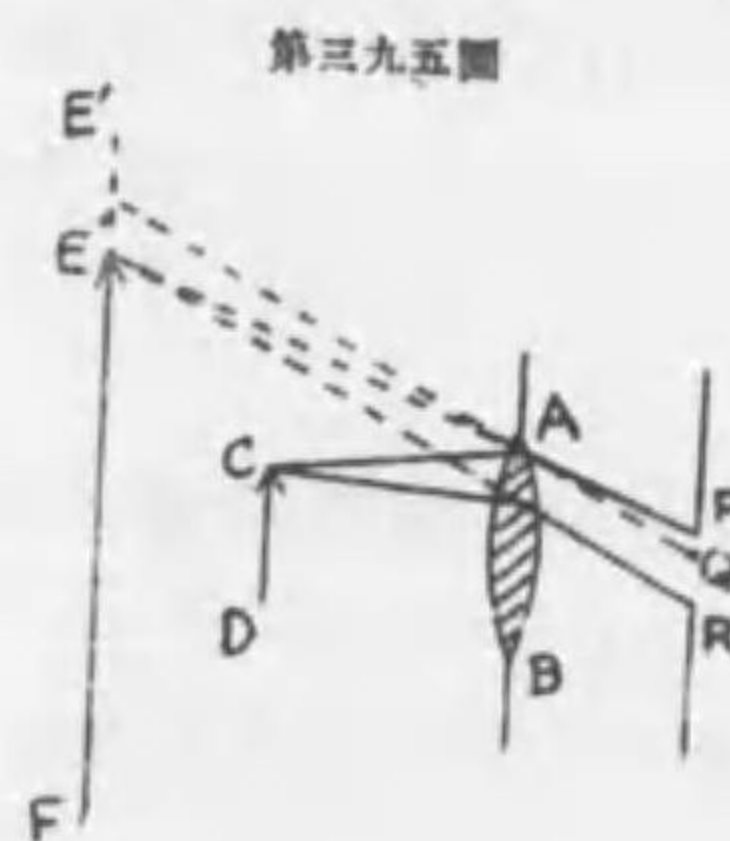
率は l に反比例するを以て大形のものを作るに適せず。其他屈曲せざる像を生ずるを以て目的となす廓大レンズ種々あり第三九四圖に示すが如し



第三九四圖

236 視野の明るさ

第三九五圖 AB をレンズとし CD を物体とし EF



第三九五圖

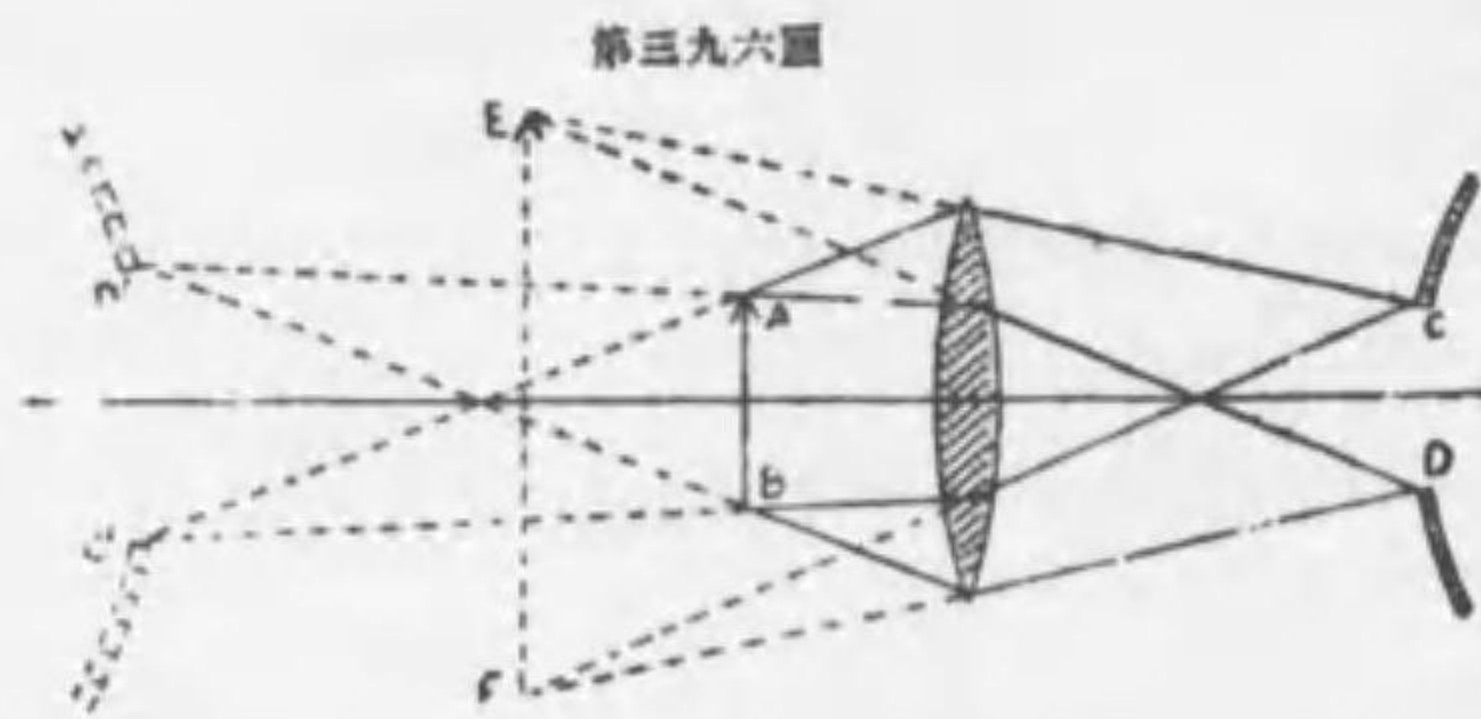
を虚像とすれば CD 以外の点より来る光線は恰も E 以外の点 E' より来ると同一なるゆへ瞳孔 PR 内に進入することを得べし、視野 view-field とは瞳孔に光線を送り得る場處を云ふものなれば視野は CD よりも少し大なる直径を有す、然るに E 以外の点 E' より出づる光線は瞳孔 PR を充滿せしむる能はずして PQ の部分は空虚なり故に E'

より出づる光線の明るさは E より出づるものに較ぶれば弱き理なり、此理により総べて視野の周縁に淡暗き部分を生じて觀者に不快の念を興ふ、依て此を避けんがために孔壁を用ひて適宜に視野を制限す、孔壁は常に CD 面内に設けられ視野の明るさを均一にするを以て目的とす、孔の大きさを狭くすればレンズの縁より来る光線を遮り映像を鮮明ならしむる效力あることは § 230 に於て既に説きたり。

237 レンズの入口と出口 entrance pupil, exit pupil

第三九六圖の AB

を物体とし CD を瞳孔とし EF を虚像とする作圖に於て A, B 二点より出づる線を逆に延長するときは C', D' に於て會合するを見る、圖の作法より考ふれば C', D' は夫々 C, D の像に相當し瞳孔 CD の實像は空氣中に C'D' となりて生ずる理なり、逆に C'D' 瞳孔とすれば CD は其實像なり、C'D' は即ちレ

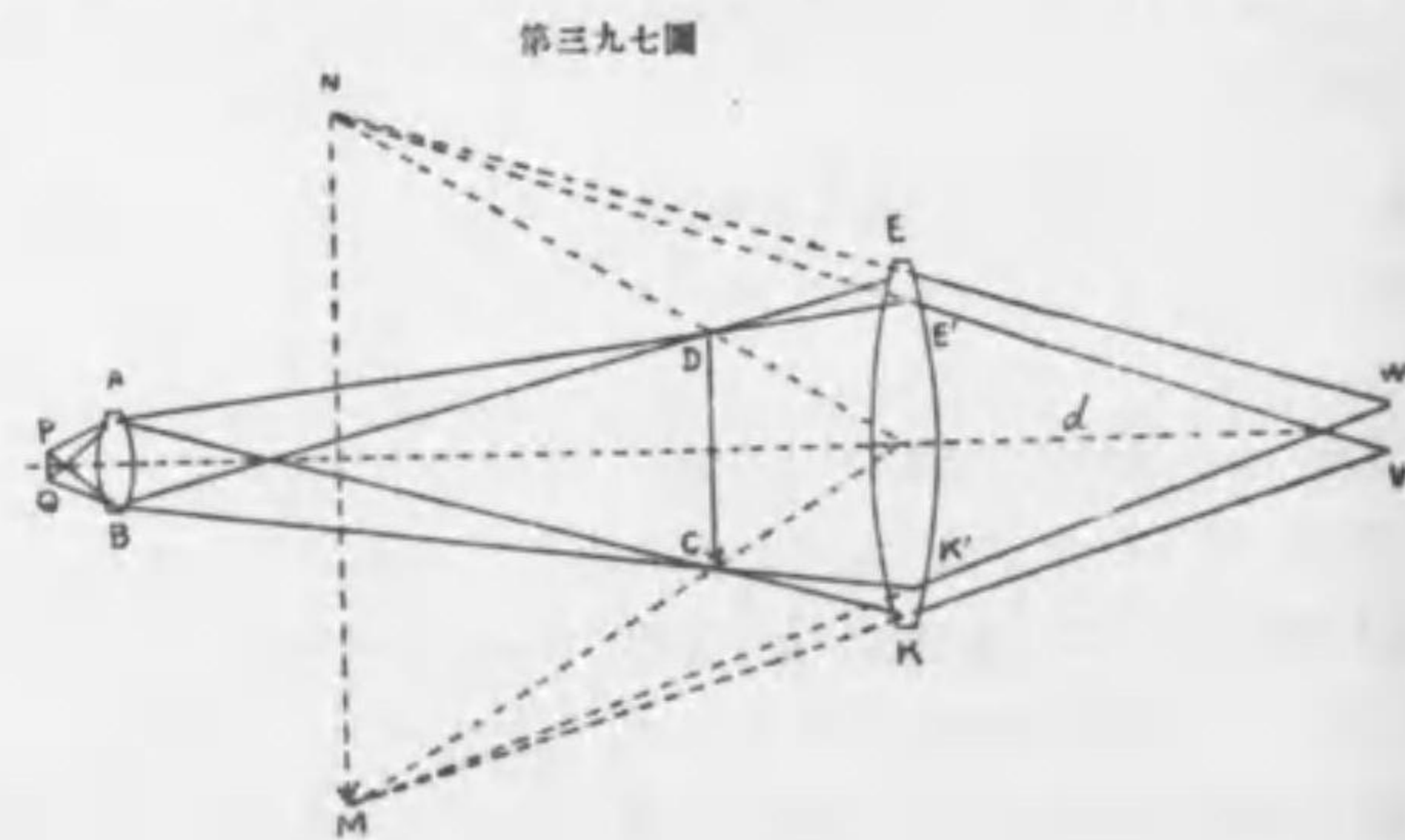


レンズの入口 C
Dは出口と稱せ
らる、其理由は
CDは C'D'
の像なるを以て
C'D'内の諸点
より出づる光線

は屈折後必ず CD 内の諸点に到着し得るも C'D' 外の諸点より出づる光線は屈折後決して CD 内に来る能はざるを以てなり、CC' 及び DD' はレンズの光心を通過すべきものなるのみならず、レンズと入口の距離を g 、レンズと出口の距離を h とすれば レンズの焦距 f は $1/f=1/g+1/h$ を満足すべきものなり。

238 顯微鏡 microscope (Fontana 1646) 最初の複式顯微鏡(複式とは單式なる廓大レンズに對して云ふ)はヨハーン及びザカリアス、ヤンセン兩人(1590)が製出したるものなれ共此は今日使用するものとは異にして焦距短き集光レンズと更に焦距短き散光レンズを組合せて作りたるものにして、對物子も接眼子も集光レンズなる式は其後の製出に係るものなり。

對物子 objective は通常種々の收差を避けんが爲二枚以上の集光レンズより成り接眼子は常に二枚のレンズより成るものなれ共茲には便宜上各一枚のレンズを以て



代表せしめんとす、物体は(第三九七圖)對物子 AB の焦点以外に置き其實像 CD は空氣中に生ず、其實像を廓大レンズ EK を用ひて見るなり、故に最後の像 MN は虚像にして 25 呎の距離に生ず、CD に磨ガラスを置けば其上に PQ の倒像 CD を得べし、之を接眼子 EK を以て廓大して見ると同一なり、試みに PK を連ぬるときは AB の光心を通過す故に對物子と CD との距離を l とし對物子の焦距を f とすれば $CD+PQ=l/f$ 、次ぎに第一像 CD と接眼子 EK との距離は畧々接眼子の焦距 f' に等しきゆへ $MN+CD=25/f'$ なり、故に顯微鏡の倍率は $\mu=MN+PQ$ 即ち

$$\mu = \frac{l}{f} \cdot \frac{25}{f'} \dots\dots\dots (5)$$

なり、 l を顯微鏡の管長 optical tube length と稱す。又上圖によれば A より出でし光線 AK, AE' は接眼子によりて屈折して V に其像を生ず、B より出でし BE, BK' は W に其像を生ず、故に VW は對物子の實像なり而して顯微鏡管に入射する光線は悉く AB を通過するゆへ AB は入口にして VW は出口なり故に眼は茲に置くべきものとす、光線は接眼子を通過後其断面 VW に於て最小となり後ち再び開散す故に VW は光線の密度最大なる處なり、VW は出口にして亦接眼圈 ocular ring と稱せらる、試みに爰に白紙を翳せば接眼圈を視ること容易なり、其直径は常に瞳孔の直径に等しきか又は小さくせざれば光線は瞳孔外に溢るるを以て光力の不經濟を生ずべし。

AB を物体とすれば VW は其像なるゆへ接眼子と接眼圈の距離を d とすれば $\frac{1}{f'} = \frac{1}{l+f'} + \frac{1}{d}$ なり故に $\frac{l+f'}{d} = \frac{l+f'}{f'} - 1 = \frac{l}{f'}$ なり試みに直線を以て AV を連ぬるときはレンズの光心を通るべし故に $(l+f')/d$ は AB/WV に等しく之を(5)に代入すれば $\mu = 25/f \cdot AB/WV$ なり、今 $AB=D, WV=e$ と置くときは

$$\mu = \frac{25}{f} \cdot \frac{D}{e} \dots\dots\dots (6)$$

故に顯微鏡の倍率大なるに従て接眼圈の直径小となる。

人眼の瞳孔の直径と p とするときは前述の如く $e < p$ なり、若し $e=p$ なるときは顯微鏡の入口より入射せし光線は瞳孔の面積に充滿するゆへ視野の明るさ

は物体の明るさと同一となる、然れ共通常 $e < p$ なるを以て視野の明るさは物体の明るさよりも小にして其比は面積の比即ち e^2/p^2 によりて表はすことを得べし、之を顕微鏡の明るさと稱す（此研究に於ては、レンズの光線吸収等を度外視す）明るさを H とすれば (6) により

$$H = \left(\frac{e}{p}\right)^2 = \left(\frac{25}{f} \cdot \frac{D}{p} \cdot \frac{1}{\mu}\right)^2 \dots\dots\dots (7)$$

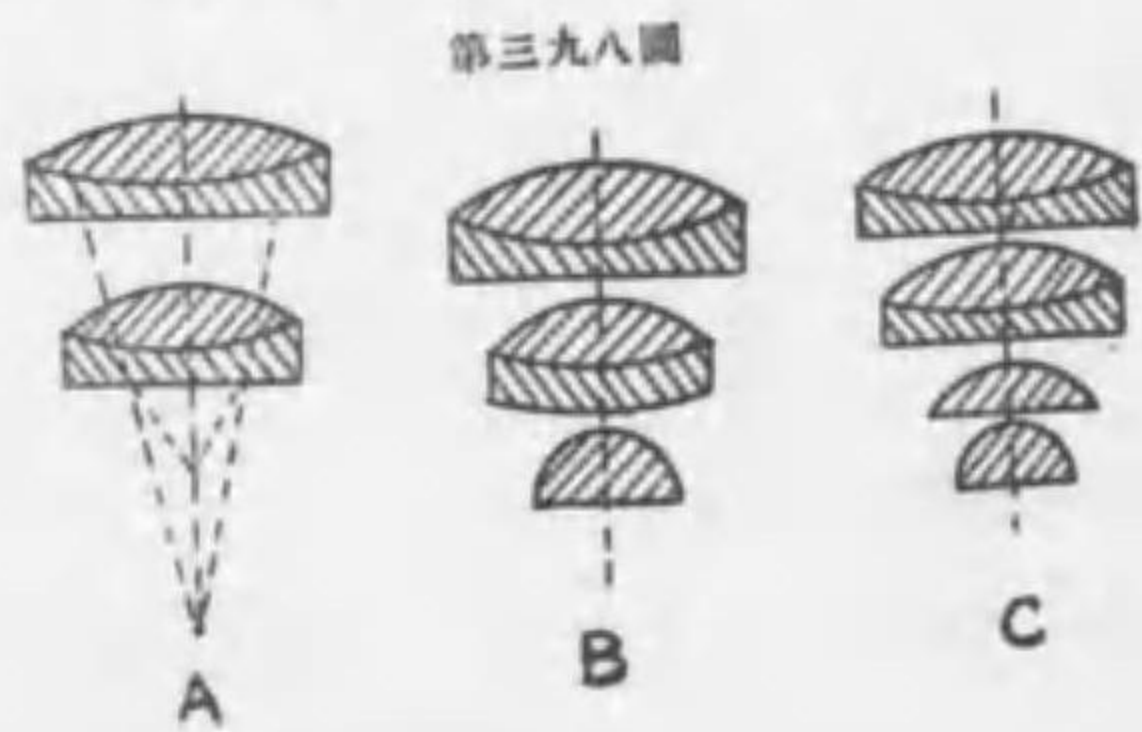
故に明るさは倍率の自乗に反比例し對物子の直径の平方に正比例す。

物体 PQ (第三九七圖) の中点を O とし $\angle AOB = 2u$ と置けば $\sin u$ を開數 numerical aperture と稱す、之を N にて示すときは N は大器 $D = 2f$ に等し、故に前式により

$$H = \left(\frac{50N}{p\mu}\right)^2 \dots\dots\dots (8)$$

を得、此式に依れば明るさは開數の平方に正比例し倍率の平方に反比例す。開數を増さんとせば對物子の焦距を短くし直径を大にすべし、 N はアッペによりて研究せられ顕微鏡學上頗る重要な因子なり。嚴密に云へば開數は $\sin u$ なるを以て決して 1 を超ゆること無し（上式に於ては冪法を用ひ $\sin u$ の代りに $\tan u$ とせり）、然れ共對物子と物体との間を屈折率 n なる透明液を以て充たすときは開數は $n \sin u$ となり其値をして 1 を超へしむることを得べし、之を浸液法 immersion と名づく、浸液法により據り對物子の焦距を最小にし $n \sin u = 1.6$ まで上ることを得ると云ふ。

顕微鏡對物子は シュヴリエー (Chevalier 1830) に至りて始めて使用に耐ゆるものと製出せり、之は没色レンズの集合せるものにして一宛分離して使用するも可なり (第三九八 A 圖)



第三九八圖

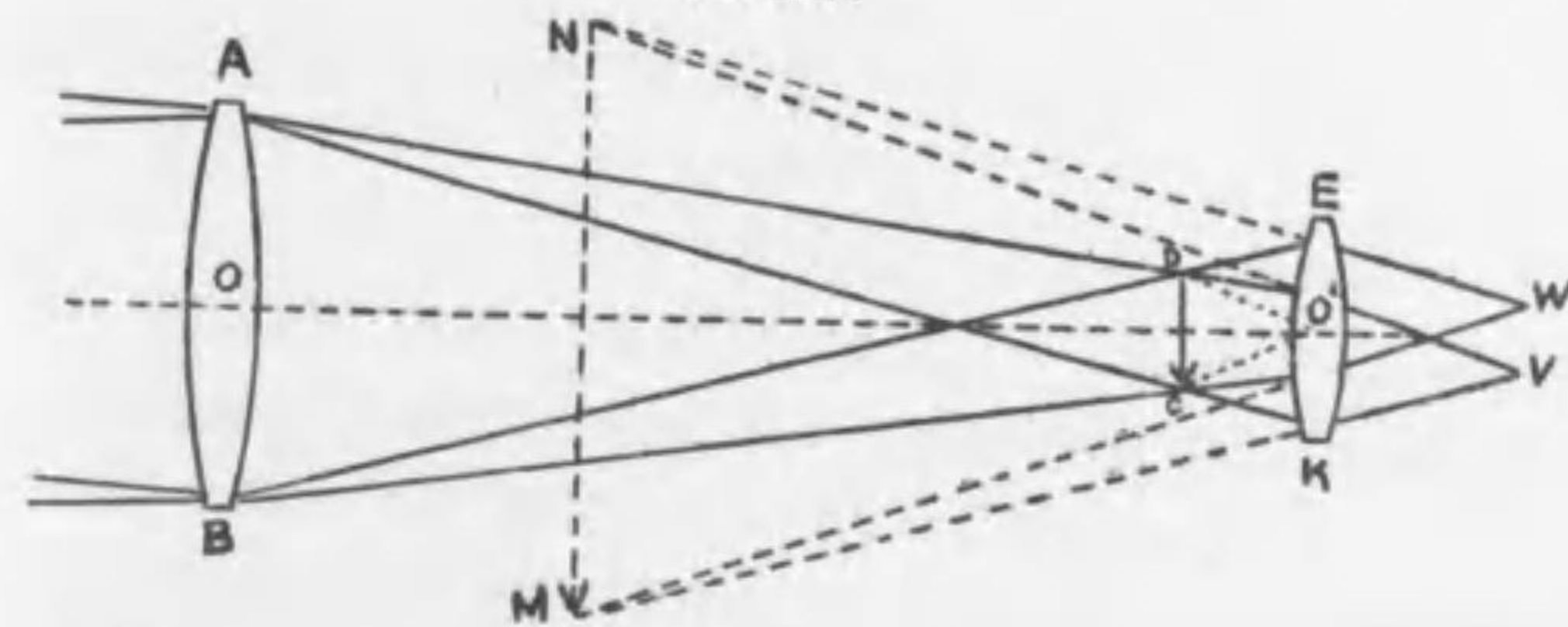
今日も尚ほ低度の顕微鏡に用ひらる。其後 アミチ (Amici) に到り B 圖の如く先レンズは必ず半球を使用することとなり。浸液法も アミチ (1840) に創まる。浸液法は

先レンズ、浸液、蓋ガラスの三物が同一屈折率を有する場合に於て其效力最大なり、之を同質浸液法 homogeneous immersion と名づけ浸液としては $n = 1.515$ なるカナダバルザムを用ふ、第三九八 C 圖は浸液用の對物子なり。

239 望遠鏡 telescope (Kepler 1611) 最初の望遠鏡は所謂ガリレオ望遠鏡にして現行はるる天文望遠鏡にあらず、對物子も接眼子も集光レンズを使用するものはケプラーの理論に創まり始めて之を製造せしはシャイナー (Christoph Scheiner 1630) なり、而して盛に流行するに到りしは 1655 年 ホキヘンが望遠鏡によりて土星の衛星 (Titan) を発見せしに始まる、其頃は未だ没色レンズの発見無かりしを以て色の収差を減少する唯一の法として對物子の焦距を長くし百尺二百尺は普通にして甚しきは六百尺のものあり、斯く長形なるを以て管を有すること無く對物子は高く竿頭に掲げ接眼子は手に携ふるを以て不便極まれり此を氣中望遠鏡 aerial telescope と云ふ現時全く其跟を絶てり。

對物子は天体寫真用以外には常に フリント、クラオン 二枚合用の没色レンズを用ひ接眼子は顕微鏡のと同じく二枚の集合レンズより成立す (接眼子は §240 に詳なり)。第三九九圖は各一個のレンズを用ひて作圖せり、物体は遠

第三九九圖



方に在るを以て其第一像は對物子の焦点 CD に生ず而して接眼子の焦点は器 (O) の中点に在り、最後の像 MN は虚像にして 25 呎の處に生ず。對物子の中点を O 接眼子の中点を O' とすれば物体の視角 angular diameter は $\angle COD$ に等しく最後の像 MN の視角は $\angle CO'D$ なるを以て倍率は $\angle CO'D / \angle COD$ なり、故に畧的に $\mu = \tan CO'D / \tan COD$ となる、今對物子と接眼子の焦距

を夫々 f, f' とし第一像 CD の半部を y とすれば

$$\mu = \frac{\tan CO'D}{\tan COD} = \frac{y}{f'} + \frac{y}{f} = \frac{f}{f'} \dots\dots\dots (9)$$

A より光線 AE, AK は屈折後 W に集まるゆへ V は A の像なり同様に W は B の像なり、従て顕微鏡の場合と同じく接眼鏡 VW は對物子の像に相當し夫々出口、入口の用をなす、VW に白紙を中つれば對物子の像を見るを得べく又望遠鏡を使用するには須く眼を VW に置くべきものなり。

對物子と接眼鏡との距離を望遠鏡の長さとなづけ l を以て之を示す、今接眼鏡と接眼鏡の距離を d とすれば先きの如く

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{d} \text{ 故に } \frac{l}{d} = \frac{l}{f'} - 1 = \frac{l-f'}{f'} = \frac{f}{f'} = \mu$$

を得、試みに AV を結ぶときは EK の光心を通過すべし故に $l/d = AB/VW$ なり、依て $AB = D, VW = e$ と置けば前式より $D/e = \mu$ を得、人眼瞳孔の直径を p とすれば明るさの式は

$$H = \left(\frac{e}{p}\right)^2 = \left(\frac{D}{p\mu}\right)^2 \dots\dots\dots (10)$$

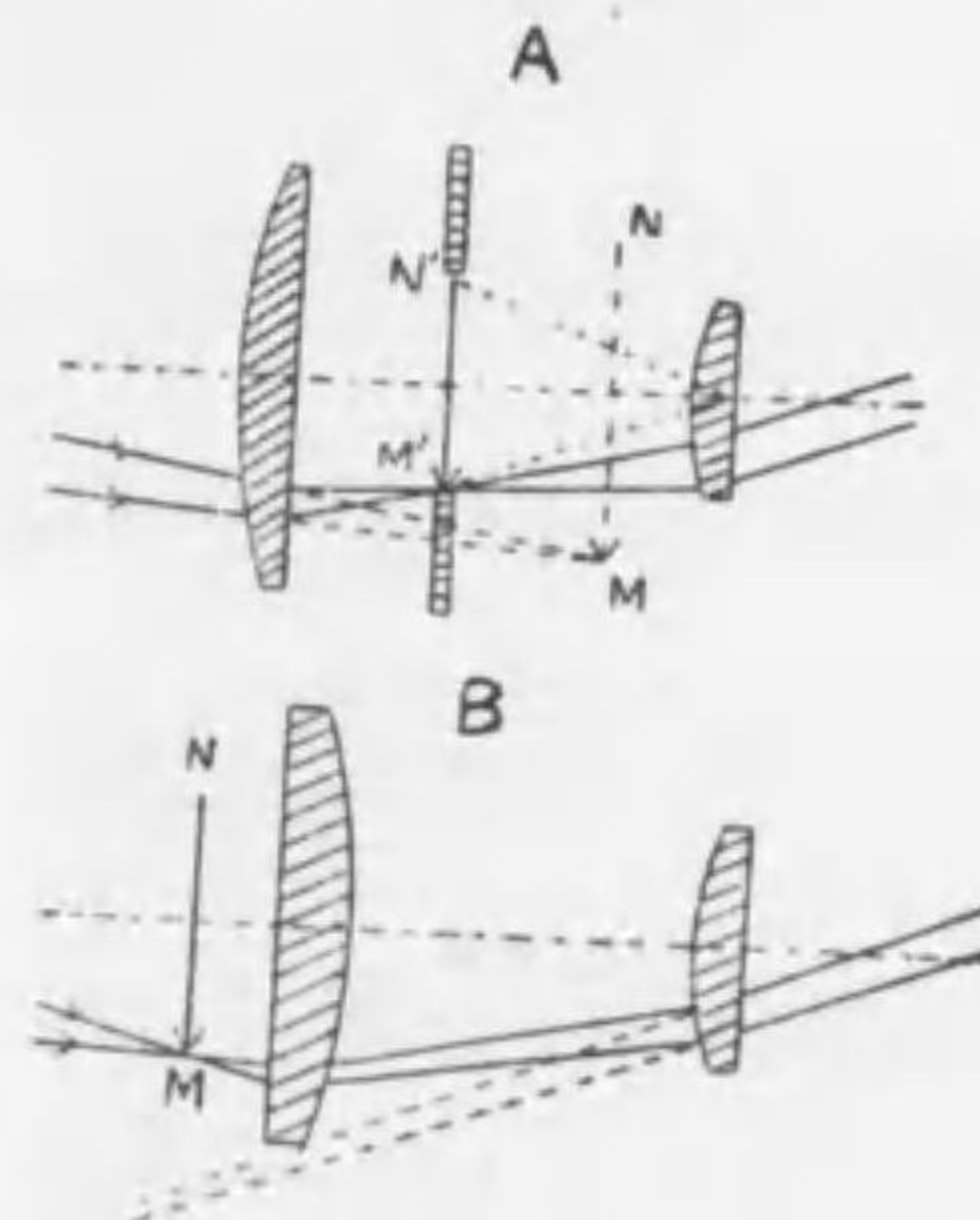
故に明るさは對物子の直径の平方に正比例し倍率の平方に反比例す、當今競ふて大望遠鏡を製造するは光力を増し従て倍率を増加し得んが爲なり。望遠鏡を以て恒星を窺ふときは倍率 $\mu = 1$ なり、従て

$$H = \left(\frac{D}{p}\right)^2 \dots\dots\dots (11)$$

故に對物子大なれば肉眼視力の限度なる六等よりも數等以下の星を認むることを得べし、例へば雙眼鏡を用ふれば既に八等乃至九等星を見ること容易なり、 $D = 63$ 耗なれば十一等星まで観ることを得べし。 p 即ち瞳孔の直径は一定に非るも約四耗なり、故に $D = 63$ 耗とすれば $H = (63/4)^2 = 248.06 = 2.512^x \therefore x = 6$ 、然るに肉眼の限度は六等星なるを以て $6 + 6 = 12$ 即ち十二等星まで視ゆべき筈のものなれども吸収其他の理由により上記の如く十一等星を以て最下限と定むべきなり。又 (11) により望遠鏡裡に於ては接眼鏡の焦距を変更して倍率を増すとも星の光度に於ては變化なし、然れ共遊星、星雲、彗星、合星、連星の如き視角を有する物を見るに當ては μ の大小により視角の膨大を異にするは論無きなり。

240 接 眼 子 ocular, eyepiece 接眼鏡は一般に二枚のレンズより成り二種の別あり。ホキヘン式 Huyghenian と稱するものは二枚の平凸レンズより成り凸面は二つとも對物子の方に向ふ (第四〇〇圖) 對物子より來る光線は MN に像を生ずべき筈なるも第一

第四〇〇圖



レンズに遮られ $M'N'$ に像を生ず其實像を第二レンズによりて見るなり故に孔壁を $M'N'$ 平面内に設けて視野を適宜に制限す、第一第二レンズを夫々 field-lens, eye-lens と稱することあり、又ホキヘン式に於ては MN は兩レンズの間に生ずるを以て陰性接眼鏡 negative ocular と稱せらる。陽性接眼鏡即ちラムスデン式 Ramsden は第四〇〇B圖の如く平凸なるに二枚のレンズより成り凸面は互に相對向す、

對物子が生ずる MN は第一レンズの左方に位し第一第二レンズにより逐次に屈折せられて、肉眼に入る、孔壁は MN 面に設けらるるを以て接眼鏡を動かすも孔壁は其の位置を變ぜざる様望遠鏡の筒身に固著せしむ、故に孔壁に蜘蛛の網を張り (Cross-wire, spider lines) 物体の像 MN と同一平面内に見ることを得せしめ測量器械又は鏡物顯微鏡或は子午儀 transit instrument に必要なり。

第一第二レンズの焦距を夫々 f_1, f_2 とし兩者の距離を Δ とすれば、二レンズ併用の焦距 f' は § 224 (28) により

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\Delta}{f_1 f_2} \dots\dots\dots (12)$$

なり、 f' を相當焦距 equivalent focal length と稱す、望遠鏡又は顯微鏡に於ては對物子は没色なるに拘らず接眼鏡は没色にあらざるが如き外觀あれども其實は然らず、上記の如く二枚のレンズを併用するを以てガラスの性質及び各レンズの焦距を適當に定むれば没色の目的を達し得べし、其方法は種々の色をし

て接眼子を通過せしめ諸色同一点に焦点を結ぶべき条件を定むるに在り、即ち屈折率の變化 δn に対して $\delta f' = 0$ なる条件を求むべし、§ 228 (a)(b) に示したる如く

$$0 = \delta \frac{1}{f_1} + \delta \frac{1}{f_2} - \delta \frac{\Delta}{f_1 f_2} \quad \text{よ} \quad \frac{\omega_1}{f_1} + \frac{\omega_2}{f_2} = \frac{\Delta(\omega_1 + \omega_2)}{f_1 f_2} \dots\dots\dots (13)$$

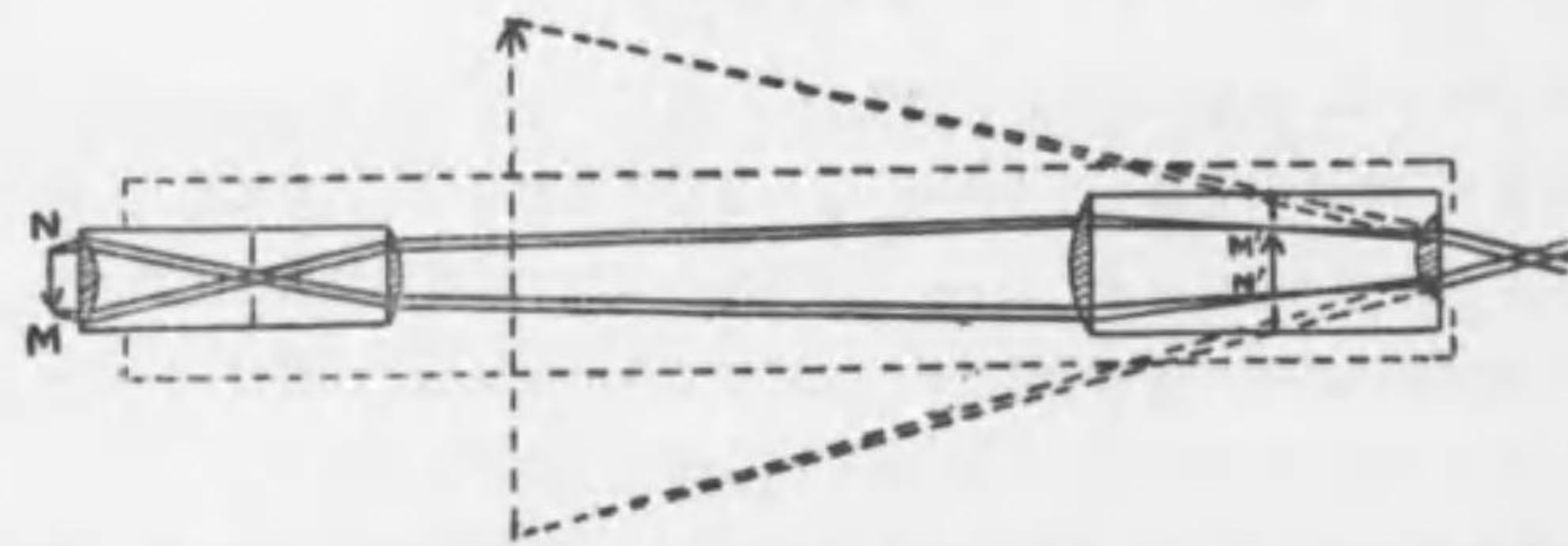
を得べし、茲に $\omega_1 = \delta n_1 / (n_1 - 1)$, $\omega_2 = \delta n_2 / (n_2 - 1)$ にして n_1, n_2 は夫々第一第二レンズの屈折率なり、若し兩レンズが同種のガラスなるときは $n_1 = n_2$ 従て $\omega_1 = \omega_2$ にして (13) は單に

$$\Delta = \frac{f_1 + f_2}{2} \dots\dots\dots (14)$$

となる、即ちレンズの距離は各焦距の和半に等しくすべし。通常ホキヘン式に於ては $f_1 = 2f_2$ とするを慣なるを以て $\Delta = 3f_2/2$ 即ち $f_2 : \Delta : f_1 = 2 : 3 : 4$ なり。ラムズデンに於ては $f_1 = f_2 = \Delta$ なり。

望遠鏡裡に生ずる最後の像は倒像なるを以て地上の物像を観望するに適せざるが故に別に地上用接眼子 terrestrial ocular を使用する (第四〇一圖)、對物子よ

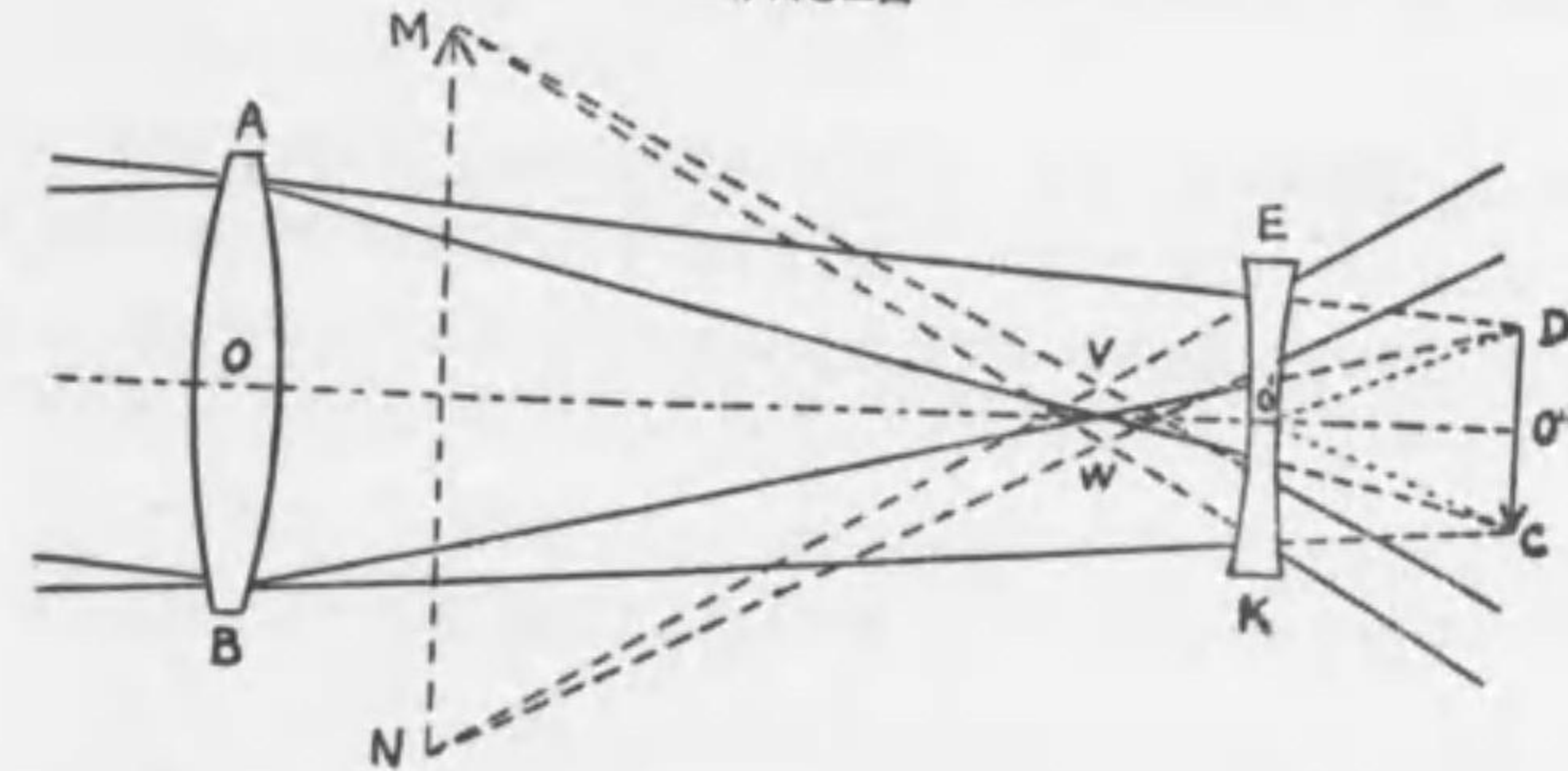
第四〇一圖



り来る光線は MN に第一像を生ず其後三回の屈折を経て M'N' に第二像を投じ之を最後のレンズによりて廓大し最後の虚像は直立なり。地上用接眼子の概念はケプラー (1611) に創まりしも之を製出したるはシルル (Schyrl 1645) なり、當時は三板のレンズを用ひ奏效不充分なりしがフラオンホーフアーに到り今日使用する四枚のものを製出せり

241 ガリレオ望遠鏡 (Hans Liperschy 1608) 此はガリレオが天体觀察に始めて利用せし望遠鏡なれ共倍率小なると視野狭きとの理由によりて今日は双眼鏡に用ひらるのみなり、對物子として没色集光レンズを用ひ接眼子は § 228 の第三七六圖に示せる没色散光レンズを使用す、第四〇二圖に於て

第四〇二圖



は畧式に單一レンズを用ふ、先づ遠方の物体を出發したる光線は CD に其實像を作らんが爲に來るも散光レンズに遮られて散光し 25 哩の距離なる MN に最後の像を生ず、AB 及び EK の焦点は共通にして O' に在り故に C, D より出づると假定されたる光線は散光レンズのために殆ど平行となり M, N に到着す、又物体の視角は $\angle COD$ にして之を $\angle CO'D$ に廓大するものなれば倍率は $\angle CO'D \div \angle COD$ に等しく、§ 239 に使用したると同一論法により

$$\mu = \frac{f}{f'} \dots\dots\dots (15)$$

を得、但し f, f' は夫々對物子、接眼子の焦距にして f' は負數なれ共茲には其數値を使用せり。A より出づる光線 AD, AC は接眼子によりて屈折せられ散光するも此を後方に追跡すれば V に集まる、此理により VW は AB の虚像なり従て接眼鏡即ち出口も亦虚像となる、此場合に於て出口の径を果すものは人眼の瞳孔にして入口なる AB より入射せし光線は瞳孔を充たすのみならず尙ほ外に溢るなり。故にガリレオ望遠鏡の明るさは 1 となり像は物体と同一の光度を有すべし、然れ共視野の大きさは O' に置かれたる瞳孔を O より眺むる

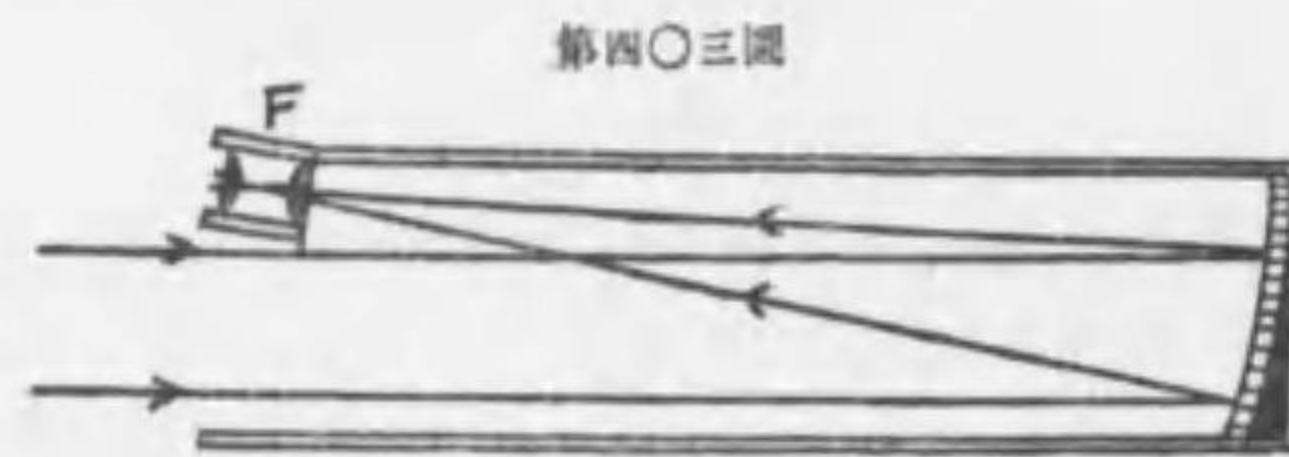
ときの視角に等しくて甚だ狭し、今其視角を $2u$ にて表はし p を瞳孔の直径とすれば

$$\tan 2u = \frac{p}{f-f'} = \frac{p}{(\mu-1)f'} \dots\dots\dots (16)$$

なり、故に倍率 μ を増すときは視野は減ず、普通の双眼鏡は三四倍の倍率を有するに過ぎず、

プリズム 双眼鏡と稱するものは §239 に説明したる天文望遠鏡と同一にして對物子接眼子は何れも集光 レンズ なれば倒像を生ずべき理なれ共對物子を過りたる光線は接眼子に到着する前に直角 プリズム によりて四回の全反射をなし倒像を立像に變ず。

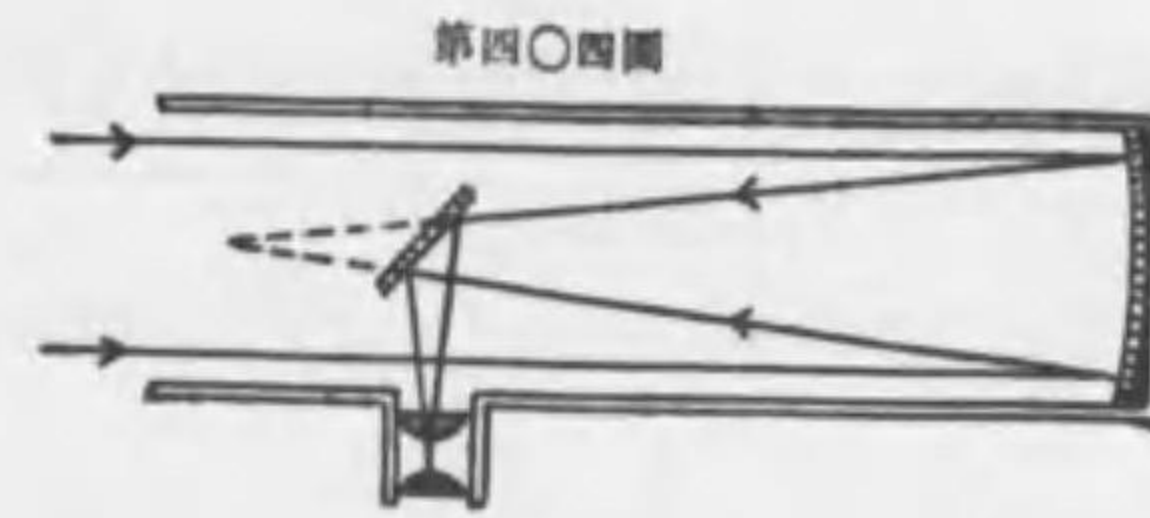
242 反射望遠鏡 reflector 十九世紀の初に當り天文學に大功を奏せしはハースヘル式反射望遠鏡なり (Herschel 1789) 之は構造最簡にして 第四〇三圖



の如く筒底に凹面鏡を置きて其焦点 F に第一像を生ぜしめ之を接眼子にて膨大す、焦距を夫々 f, f' とすれば $\mu = f/f'$

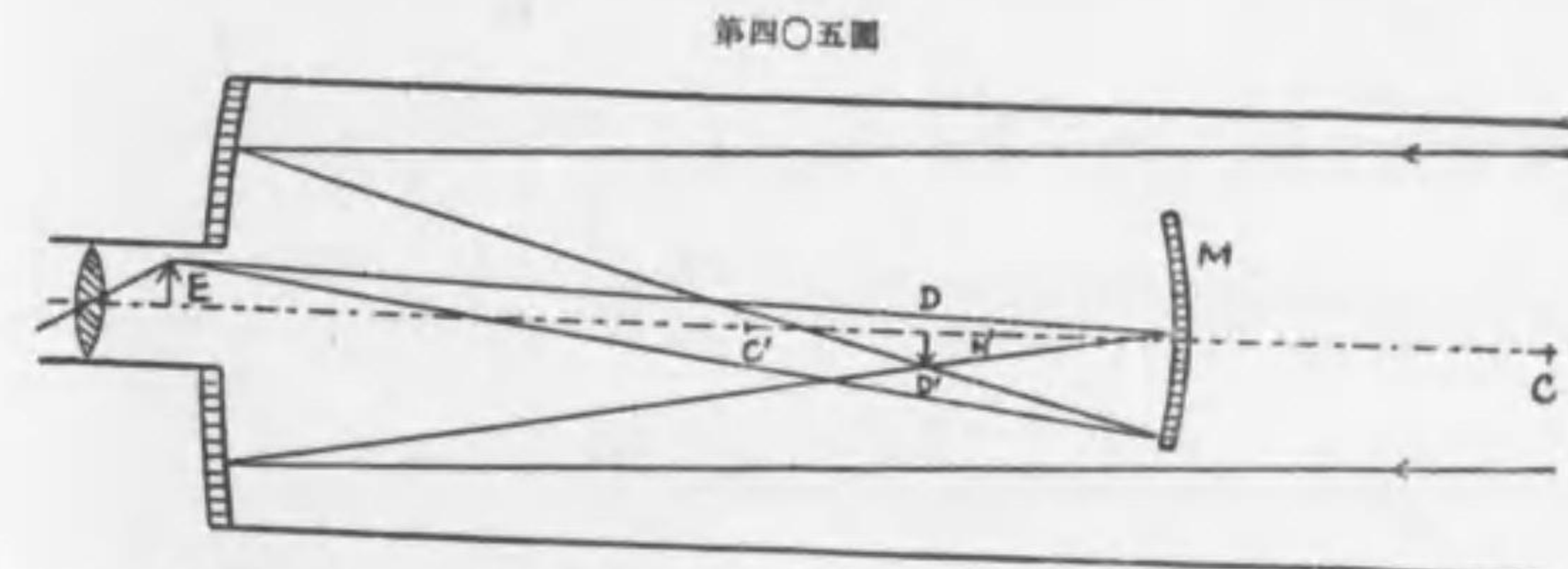
なり、最後の像は實物の裏返しにして不便尠からざるも製造し易きを以て昔時は廣く行はれたるものなり、老 ハースヘル 自作の ハースヘル 式を以て天王星を發見し (1781) 星雲の研究をなせり。凹面鏡は回轉拋物面にして其軸は筒軸に對して少許の傾角を有し觀察者の頭部の爲に光線を遮斷することを出来るだけ少からしむ。

ニュートン式 (Newton 1672) は ニュートン が レンズ の分色性に失望して製造したるものにして凹鏡は球面の一部をなし之が爲に色の收差を消し得たるも球面收差は残留せり。ニュートン は此を用ひて木星の衛星、金星の兩角を觀察することを以て満足せり、ハッドレー (Hadley) に到り凹面鏡を拋物面となし球面收差を消滅し大に ニュートン 式の效力を發揮したる爲英國及び其殖民地に於て今尙 ニュートン 式の小反射鏡大に流行す。光線は凹鏡にて反射したるのち第四〇四



圖の如く筒軸に 45° 傾ける平面鏡に依り反射して接眼子に入るなり、倍率は ハースヘル 式と同一なり。

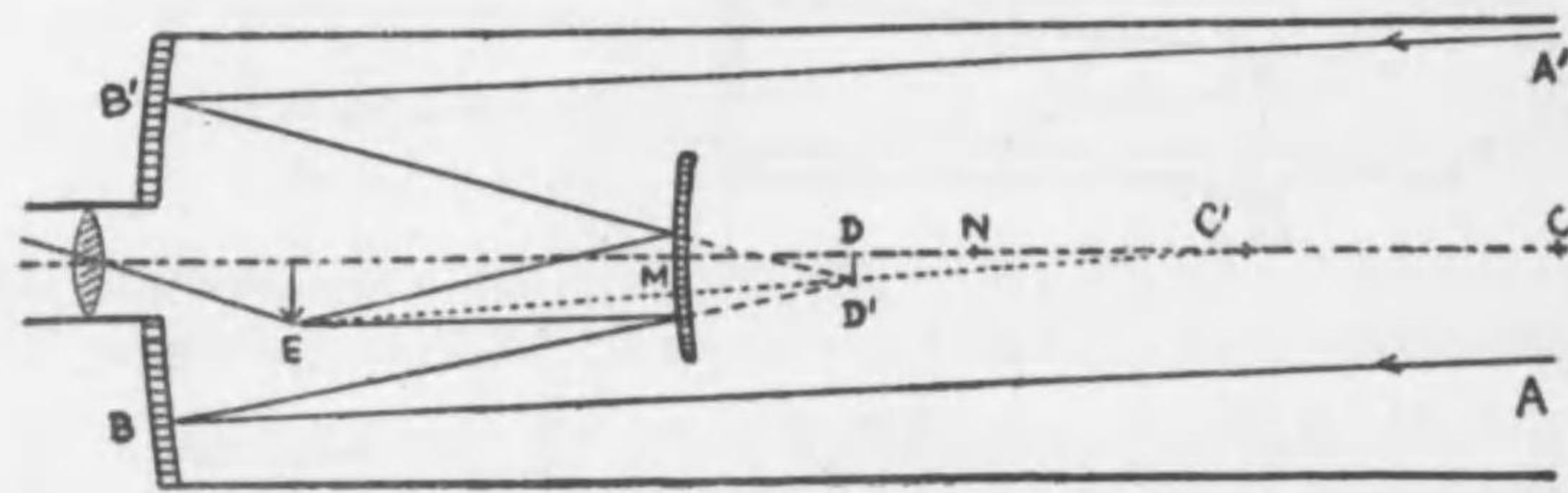
上記二式は觀察せんとする物体に眼を向けざるを以て不便多し、グレゴリ式 (James Gregory 1663) は此点及び映像の逆轉せざる点に於て遺憾なし、グレゴリ は球面收差を矯正するには拋物面、雙曲面又は橢圓面の凹鏡を使用すべきこと、又球面鏡を用ふれば映像は窪みて視ゆるものなるを知り之を其著書 Optica Promota 中に論ぜし惜むべし製造の技巧を具へず又當時製造専門家を見出す能はざりしなり。筒軸に平行に入射する光線は (第四〇五圖) は拋物面の凹鏡によりて反射し先づ其焦点に



DI' の倒像を作り、光線は更に進みて M なる小凹面鏡 (M は回轉橢圓面なり) に來りて再度反射し遂に E に立像を生じ接眼子に依り之を膨大す、 D は大凹鏡の焦点 N は小凹鏡の焦点にして $ND=x$ とし大小凹鏡の焦距を夫々 F 及び f とし接眼子の相當焦距を e とすれば $D'C'E$ は同一直線をなすべき理なるを以て倍率は $\mu = f.F/ex$ なり、該式の證明は次ぎに演べんとする カッスグラン 式を參考すべし。

カッスグラン式 (Cassegrain 1672) は グレゴリ 式に似たるものなれ共其異なる点は小反射鏡 (第四〇六圖 M) は凸面にして其形は雙曲面なることなり、 $CC'ND$ は筒身に平行なる軸にして C 及び C' は夫々大鏡小鏡の曲率中心なり、從て其焦点は夫々曲率半径の二分の一の点即ち D と N なり、 $ND=x$ と

第四〇六回



置き大小鏡の焦距を夫々 F 及び f とす。平行しつゝ遠方より来る光線 AB , $A'B'$ は反射後焦点 DD' に像を作るべき筈なれ共凸鏡に反射せられて E に倒像を生じ之を接眼子によりて廓大す、故に カッスグラン 式の最後の像は倒像なり。圖によれば $MD = MN - ND = f - x$ 、而して接眼子の焦距を e とすれば $C'D'E$ は一直線をなし $C'D'$ は AB に平行なるべきを以て

$$\mu = \frac{EC'}{e} \cdot \frac{CD}{C'D} = \frac{EM + 2f}{e} \cdot \frac{F}{2f - (f - x)} = \frac{EM + 2f}{e} \cdot \frac{F}{f + x}$$

は倍率なり然るに E に生ずる像は D に生じたる DD' の像なるを以て反射鏡の公式により

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{MD} + \frac{1}{EM} \quad \text{即ち} \quad EM = \frac{f(f-x)}{x}$$

を得、之を代入すれば

$$\mu = \frac{fF}{ex} \dots\dots\dots (17)$$

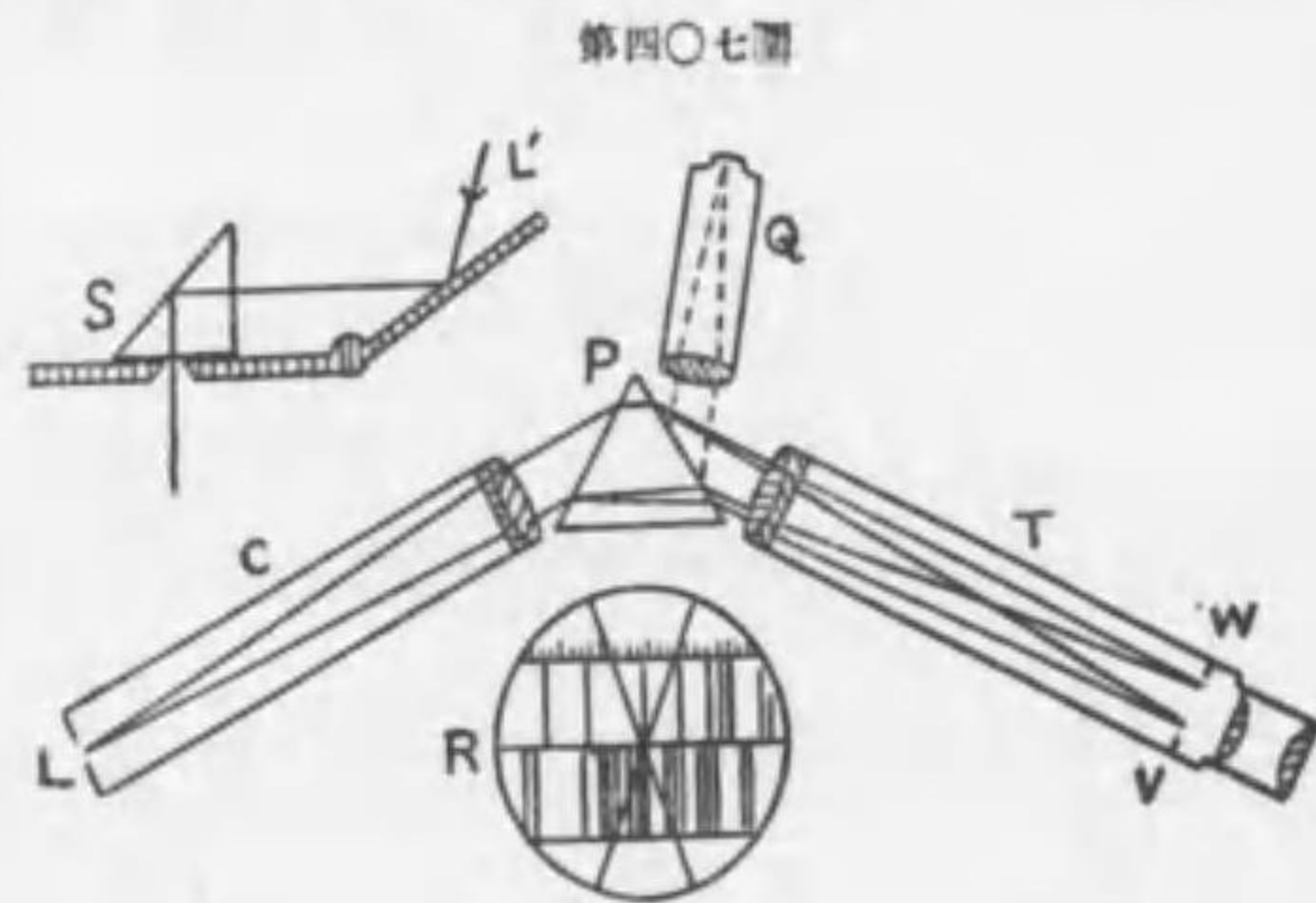
現今行はるる大反射望遠鏡の大部は カッスグラン 式なり、小反射面は凸面なること上説の如くなるを以て一旦集合したる光は再び開きて大凹鏡の焦距を長くしたると同一結果を得従て筒身の長さと比較して倍率を大にすることを得るなり。因に記す カッスグラン は路易十四世の官人にして彫刻に妙技を得たる人なりき。

反射鏡に用ふる大凹鏡は ガラス 又は銅四分錫一分の合金を用ひ最初球面形に磨き後ち抛物面に直すを常法とす、凹面には銀を沈澱せしめて之に光澤を與ふ、銀は錆び易く屢々鍍銀を替へざるべからず其都度金属面を再磨するの必要を生じ

反射面の曲率を變更する恐れあり、ガラス面を用ふるときは此患尠し。屈折望遠鏡は レンズ の光線吸収あるも反射望遠鏡は銀面の吸収は皆無なりとするも銀面に錆を生ずること及び夜中使用時に濕氣の沈澱多きこと等の理由により其效力に於て屈折望遠鏡に劣るものと云はざるべからず。

第七 章 分 光 學 SPECTROSCOPY

243 分光器 spectroscopes 分光器(第四〇七圖)はプリズム、整光管 collimator 及び望遠鏡の三部を主要部とす、整光管 C は一端に細隙 slit を有し

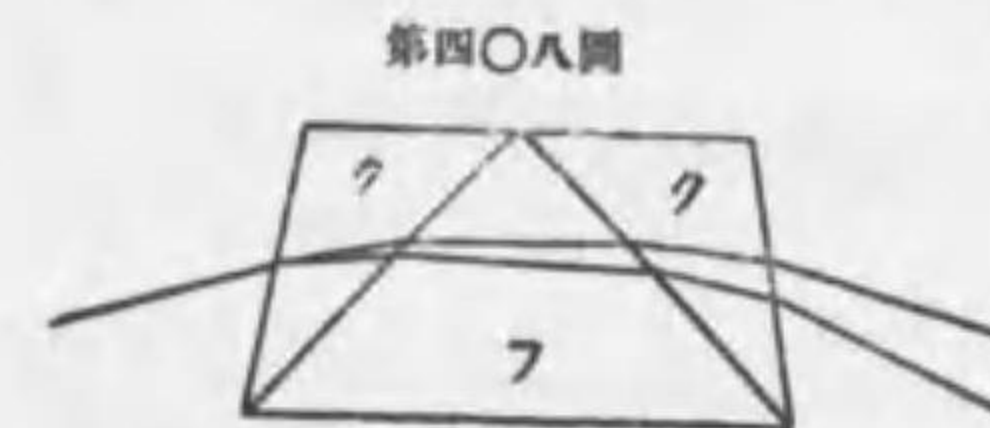


第四〇七圖

光源 J の光線は細隙を漏れて整光管の集光レンズを過りて平行線となりプリズム P に入る、故に整光管の長さはレンズの焦距に等し、光線は P 内にて既に分色し P を出づるとき更に分色するも各色は各自に平行線をなし望遠鏡 T に入るや各色其焦点 VW に集り茲にスペクトラを生ず、スペクトラ平面には十字線 cross wire を設けラムズデン接眼子を用ひスペクトラと十字線とを併せ観るなり。茲に生じたるスペクトラは細隙の像の軌跡なるを以てプリズムを除去し二管を同一直線上に來らしめて眺むるときは單に細隙を明視するのみなり。Q は尺度管にして一端に尺度の縮圖を附著し他端にレンズを固定す、管長は此レンズの焦距に等し故 Q より出でたる光線は平行しつゝプリズムの表面に於て反射し T 管に入る、故に望遠鏡を覗けば B に示したるが如き視野を得るなり。又細隙の外部には S に畫ける如く直角プリズムにて細隙を半ば被ひ L' の方向より來る他の光線を平面鏡によりて反射せしめ再度直角プリズムにて全反射せしめて整光管内に送る装置あり、此プリズムを比較プリズム comparison prism と云ふ、即ち兩光源より來るスペクトラを比較するに便なるが故なり、從て B

に示す如く視野には二種のスペクトラ相重なりて現はるべし。

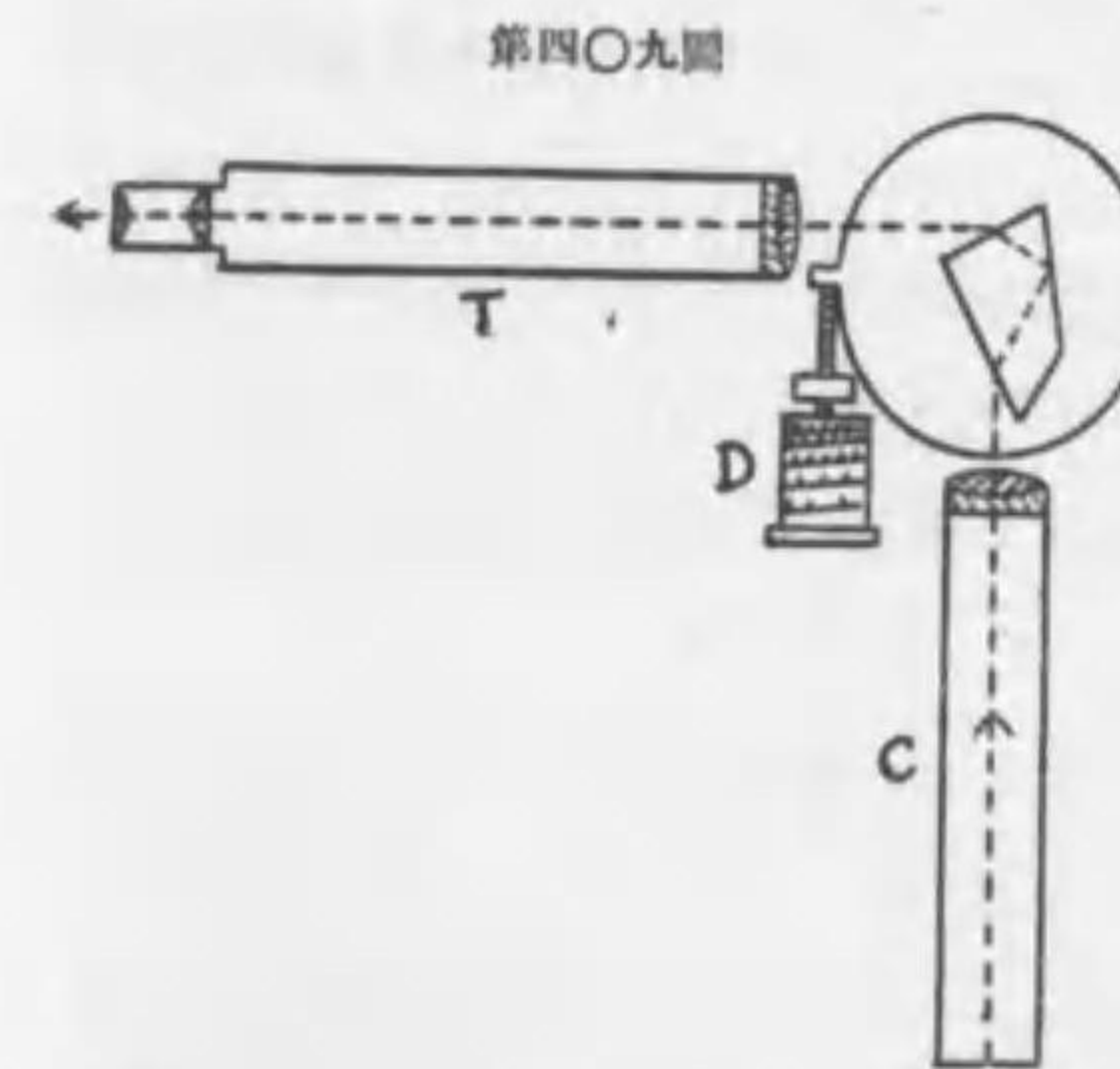
分光器に使用する中央プリズムは正三角形のフロントを普通とすれどもフロントは風化の恐多く久用に耐へ難きを慮りて中央のフロントを兩側より



第四〇八圖

クラオンにて擁護するものあり(第四〇八圖)之を Rutherford (1865) プリズムと稱す、此場合にはフロントは直角なり。或は分色角を増さんが爲に數多のプリズムを圍上に並ぶるものあり此場合には光線は各プリズムを可成最小轉向角に於て通過する様に置くべきなり。

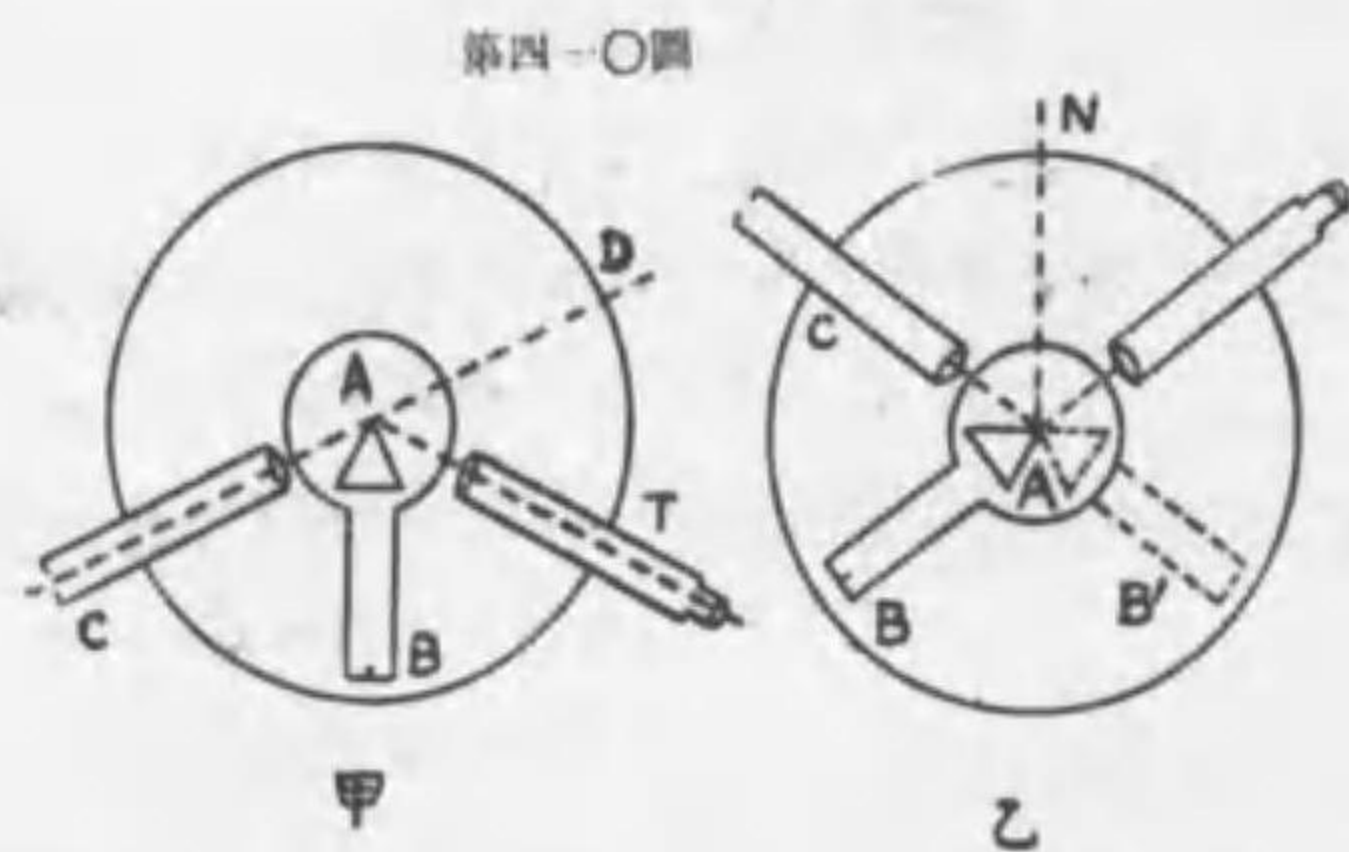
常定轉向分光器 constant-deviation spectroscope と稱するものは §217 (第三五四圖)に説明したるヘルガー式プリズムを使用し望遠鏡と整光管は互に垂直の位置を保ちて固定す、故にスペクトラ中の種々異なる線を吟味するには鼓尺 D を旋回してプリズムを載せたる圓盤を微轉せしむるなり、吟味中の光線は常にプリズムを最少轉向角に於て通過するものなることは §217 に詳論せり、鼓尺 D に



第四〇九圖

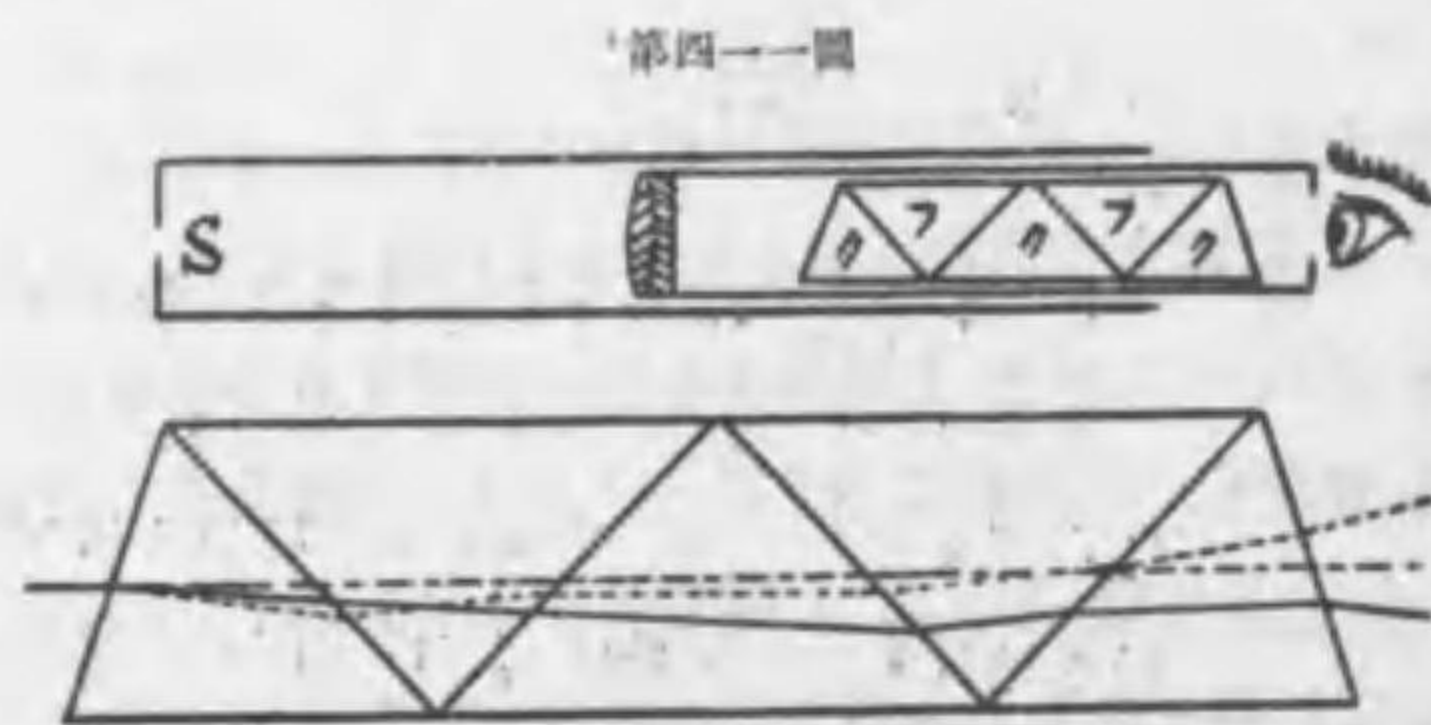
は螺旋狀の尺度あり之により直に吟味中の光線の波長を讀み得るを以て便利甚大なり。

格子分光器、階段分光器は後節に審なり。分光計 spectrometer は任意のプリズムに就き各色の屈折率を計るを目的となす、屈折率は波長の函數なるのみならず又プリズムを構成する媒質に關するものにして一般に波長短きに從て屈折率増加す。分光計は §217 (17) の最少變差式を利用するものなればプリズム角 θ と最少變差角 Δ を測定せざるべからず、構造は第四一〇圖甲に示す如く周縁に目盛を附したる圓と共心に臂 B を有する圓板 A を設け圓心を軸として



自由に回轉するを得せしめ、別に分光器の如く蓋光管 C と望遠鏡 T を備へ此等も圓心を軸として回轉するを得べき爲に各々臂上に座す、プリズム A の頂角 (プリズム角) の位置を圓心と一致せしめて最少變差に對する目盛を讀み之を α とす、C の細隙より入射する光線は半ば CAT の道を取りて屈折し半ば CAD の道を直線に進むゆへ T を回轉して AD の位置に持來りて目盛を讀み之を β とす、然るときは $\alpha - \beta$ は最少變差角に等し。次ぎにプリズム角を測るには第四一〇圖乙の如く C と T とを固定せしめてプリズムの側面より反射する光線が T 管内に入り得るため $\angle CAN = \angle NAT$ を満足せしむ此時 B の位置を目盛にて讀むべし、次ぎに B を B' の位置に持來り CA なる入射線をしてプリズムの他の側面より反射せしむ、此時再び目盛を讀むべし、兩讀の差は即ちプリズム角の補角なり。液体の場合にはプリズム塊を使用す。

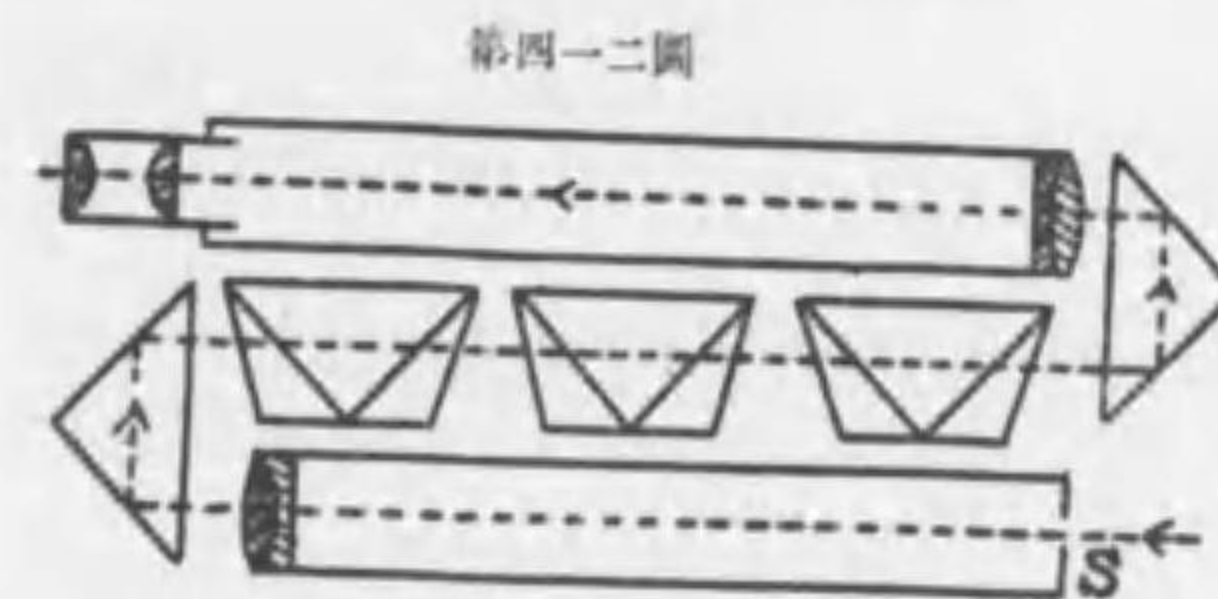
244 直視分光器 direct-vision spectroscopy (Amici 1860) 此は平均轉向零なるを以て直に光源の方向を眺めつゝ使用することを得るの便利あり、少くとも三個のプリズムを組合すを要す、其最簡なるものに在りては唯一個の沒色レンズを併用し吸収少くして光力多し (第四一〇圖) プリズム列及びレンズを藏する管は出入自在にして細隙 S を明視するに適す、プリズムを出づる光線は筒軸の方向を平均として上下に分解しスペクトラ全長は同一



第四一〇圖

自由に回轉するを得せしめ、別に分光器の如く蓋光管 C と望遠鏡 T を備へ此等も圓心を軸として回轉するを得べき爲に各々臂上に座す、プリズム A の頂角 (プリズム角) の

視野内に収まるなり、若し分色度大なるときは一望の下にスペクトラの全長を視る能はざるゆへ筒の中央に關接を設けプリズム管をして多少屈旋せしむる装置を必要とすべし、故にホフマン式直視分光器に於ては第四〇七圖の如くして數多のレンズを用ひ二管を同一直線上に來らしめ中間に直視分光器を置くなり、此は甚だ長形にして使用上の不便あるを以て分色大なる直視分光器は屢々第四一

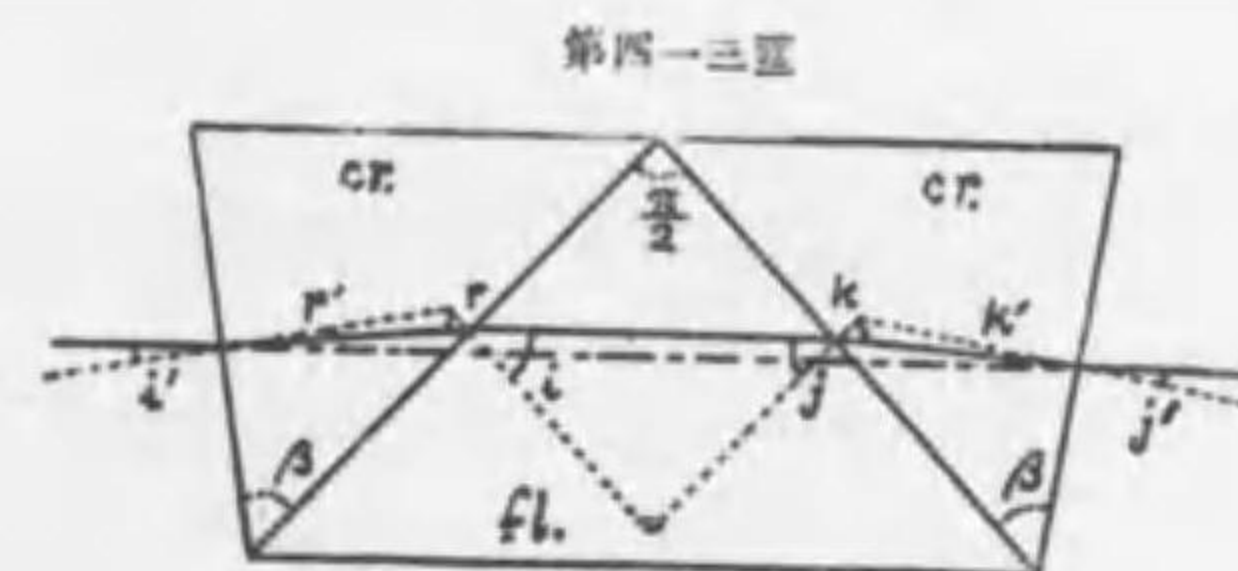


第四一二圖

二圖の如き形を備へ三個以上のアミチと (各アミチは直角クラオンと二個のフリントより成立す) 二個の直角プリズムを用ひ細隙 S より入射する光線は

二回の全反射の後三個のアミチを通過しつゝ分色し更に二回の全反射をなして望遠鏡に入る、望遠鏡は對物子の附近を軸として少許回轉の自由を有す。

直視プリズムの分色角 angle of dispersion を算出するには次ぎの如くす、例へば第四一三圖の如く中央は重フリントの直角プリズムにして左右にクラオンを附著せる場合には先づスペクトラ中 E 線は畧々中央に位するものと假定し其轉向を零と定めて計算に著手すべし、今クラオンの頂角を β とす



第四一三圖

ればクラオンを通過する光線は中央プリズムに於て底邊に平行となるを以て轉向零なり故に §217 の公式により $\Delta = 0$ と置き $0 = i + i' - \beta$. 又 n 及び n' を夫々クラオン及びフリントの E 線の屈折率とすれば $n' \sin i = n \sin r$, $\sin i' = n \sin r'$ なり、然るに $i = \frac{\beta}{2}$ なるを以て $\beta = i + i' = r + r'$ により $n \sin(\beta - r) = \sin(\beta - \frac{\beta}{2})$ を得、此より β を算出し得べし、今 $n_n = 1.603$, $n'_n = 1.762$ を採用すれば

$$r = 51^\circ, r' = 9^\circ 45', i' = 15^\circ 45', \beta = 60^\circ 45'$$

を得てプリズムの形状決定せらるるなり。而して他の光線に向ては一般に $\beta = r + r' = k + k'$, $i + j = \frac{\pi}{2}$ 及び

$$n = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin j'}{\sin k'}, \quad n' = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\sin k}{\sin j}, \quad \Delta = \frac{\pi}{2} - 2\beta + i' + j' \dots\dots\dots (1)$$

茲に Δ は最初の方角に對して轉向したる角を示す、然るに i' 及び β は常定なるを以て $\delta\Delta = \delta j'$ を得、而して分色角を知らんと欲せば紅及び紫の Δ の差を求めざるべからず即ち δn に對する $\delta\Delta$ 又は $\delta j'$ を求むれば可なり、

(1) の諸式を變化すれば

$$\cos j' \delta j' = \sin k' \delta n + n \cos k' \delta k'$$

$$\cos k \delta k = \sin j \cdot \delta \frac{n'}{n} + \frac{n'}{n} \cos j \cdot \delta j$$

$$\cos i \delta i = \sin r \cdot \delta \frac{n}{n'} + \frac{n}{n'} \cos r \cdot \delta r$$

$$0 = \sin r' \cdot \delta n + n \cos r' \delta r'$$

茲に最後の變化は $\sin i' = n \sin r'$ 及び $i' = \text{常定}$ より得たるものなり、上四式より j' 以外の角を消去すれば

$$\delta j' = \delta n \cdot \frac{\sin \beta}{\cos k \cdot \cos j'} \left(\frac{\cos k' \cos j}{\cos i \cos r'} + 1 \right) - \delta n' \frac{\cos k'}{\cos k \cos i \cos j'} \dots\dots\dots (2)$$

なり。此公式より分色角の近似値を得んとするには上式に $i' = j'$, $r' = k'$, $r = k$, $i = j = \frac{\pi}{2}$ と置き

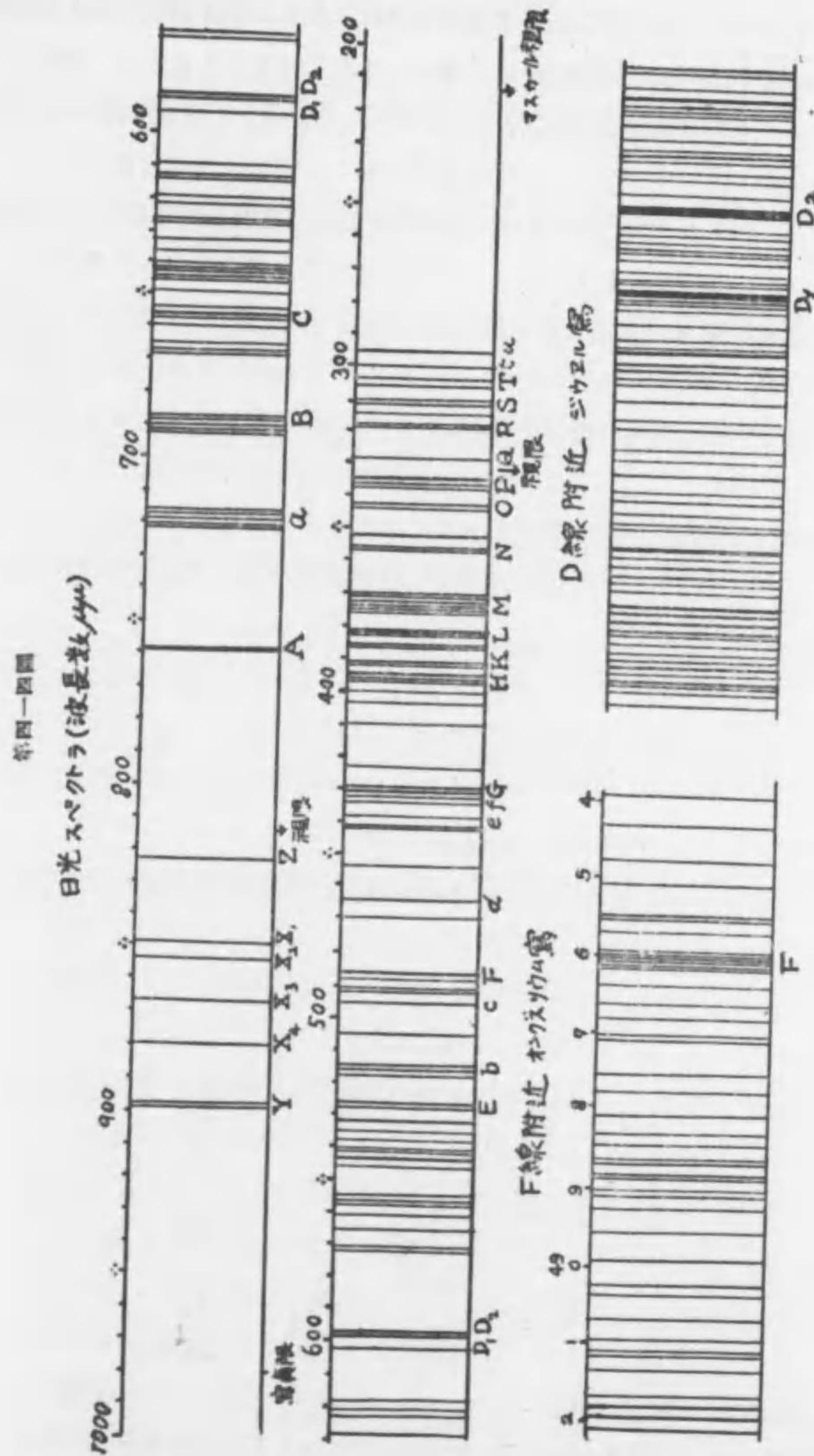
$$\delta j' = \frac{1}{\cos r \cdot \cos i'} \left[2 \sin \beta \cdot \delta n - \frac{\cos r'}{\cos \frac{\pi}{2}} \delta n' \right] \dots\dots\dots (3)$$

に到着す、紅と紫を夫々スペクトラ線 B 及び G を以て代表せしむれば

$$\delta n = n_G - n_B = 0.014, \quad \delta n' = n_G' - n_B' = 0.052$$

又 r, r', i, β は前出の E 線の値を代入し (3) より $\delta j' = -0.085$ ラヂアン 即ち分色角は $4^\circ 52'$ なることを知るべし。第四一圖に示すが如き組合せに於ては分色角は 8° 以上に達す。

245 日光スペクトラ solar spectrum 日光スペクトラの光度は黄色最強く左右に光度衰ふ是れ肉眼感光器の然らしむるところにして黄色のエネルギー



第四一圖

の最大なるを教示するものにあらざ又他の動物に在りては鶏鳩類の如く紅色を最強とし、蚊母鳥の如く緑青部を最強なりと心得居るものもあらん、肉眼には日光スペクトラの可視部は紅端に於ては $813 \mu\mu$ 邊を限とし紫端に於ては $330 \mu\mu$ を限とするゆへ約 1.3 オクターヴの境域を有する理なれ共此は個人によりて大に不同あり、マスカール (Mascart) の報告によれば夜行動物に似て $200 \mu\mu$ の邊まで視ることを得る人ありと云ふ、一般に分色力と光力と弱き分光器に於ては B, G 線以外を視るは甚困難なり而して B, G 間は僅に 0.675 オクターヴの間隔を有す。第四十四圖の日光スペクトラは波長に正比例する距離を以て書きたるものにして格子分光器のスペクトラに相當す、プリズム、スペクトラに於ては各色の長さは波長に正比例せず紅色部最短く紫青部最長くして F 線は凡そ可視スペクトラ visible spectrum の中央に位す(格子スペクトラの中央は D 線なり)。日光スペクトラに現はるる諸線の波長及び其由来する元素は次表に示すが如し

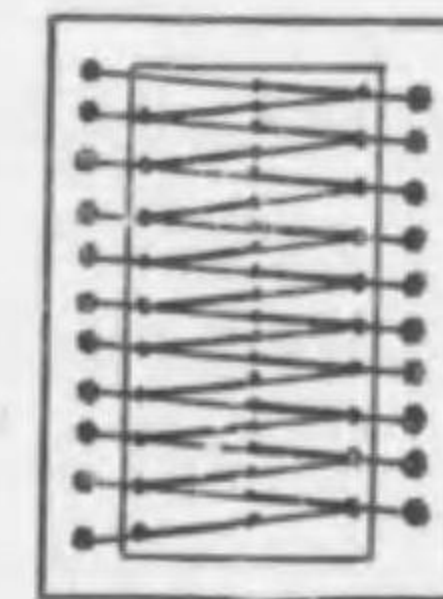
| 線 | 波長($\mu\mu$) | 元素 |
|----------------|----------------------|----------|
| A | 759.4 | O |
| a | 718.5 | 雨線 |
| B | 686.7 | O |
| C | 656.3 = H_{α} | H |
| D ₁ | 589.6 | Na |
| D ₂ | 589.0 | Na |
| D ₃ | 587.6 (紅焰) | He |
| E ₁ | { 527.05 527.04 | Fe Ca |
| E ₂ | 526.97 | Fe |
| b ₁ | 518.38 | Mg |
| b ₂ | 517.29 | Mg |
| b ₃ | { 516.92 516.91 | Fe Fe |
| b ₄ | { 516.77 516.75 | Fe Mg |

| | | |
|---|-----------------------|----------|
| F | 486.15 = H_{β} | H |
| G | { 430.81 430.79 | Fe Ca |
| h | 410.19 = H_{γ} | H |
| H | 396.86 | Ca |
| K | 393.38 | Ca |

246 紅外スペクトラ infra-red spectrum (Herschel 1800) 最初ハーシエルは鋭敏なる寒暖計を撰びて日光スペクトラ中の諸色の温度を測定せり(スペクトラを白紙上に投影して実験す) 温度は緑部に於て最低にして波長増すに従て温度上り紅部に於て最高なり、ハーシエルは寒暖計を紅外の暗部に移せしに茲にもスペクトラは熱線として存在するものなることを発見せり、其後メロニ (Melloni 1831) は熱電柱 (§ 135) を用ひ、ラングレー (Langley 1883) はボロメーター-bolometer (§ 135 § 324) を用て紅外部にもフラオンホーフアー線の如き吸収線あることを確め其一部を寫真的に撮影せり、今日に於ては約 330μ までは研究を経たるものなりと云ふて可なり(最短電波は 100μ のものを實驗せり)。ガラス製プリズムは太陽熱線を吸収すること尠からざるを以て紅外即ち熱スペクトラ研究には岩鹽製プリズムを使用するを常則とす。

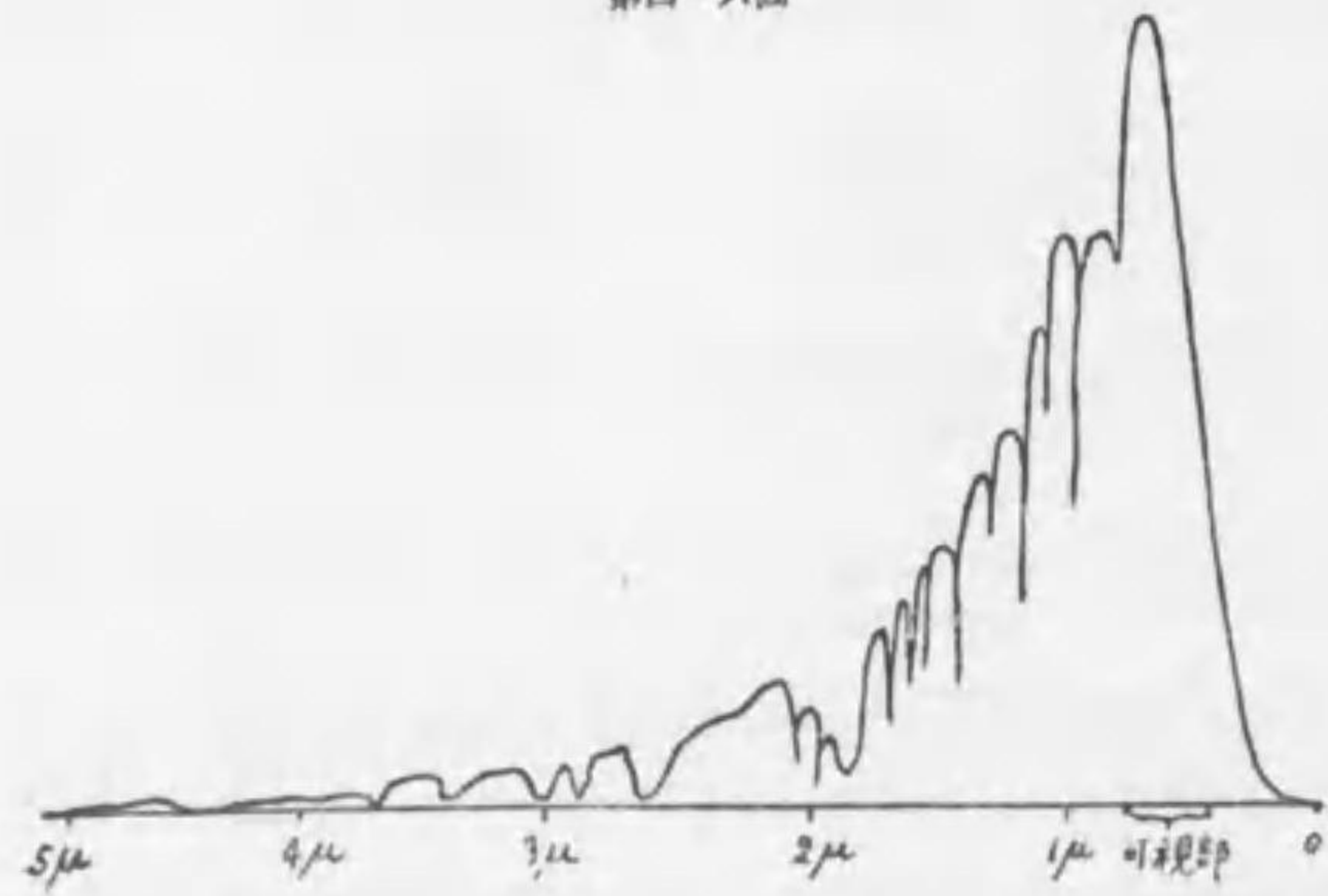
熱電柱を使用するには分光器の接眼子を除去し其代りに細隙を設けて吟味せんとする線を漏出せしめ 第四一五圖に示す鐵線と常抗線 constantan (60 Cu + 40 Ni の合金にて作り電流抵抗殆ど常定なる張金) の合著点に觸れしめ電流計によりて茲に生ずる電流を測定するなり、圖中厚線は常抗線、淡線は鐵線なり。ラングレーはボロメーターを用ひ熱スペクトラを寫真し 5.3μ までの熱エネルギー分布の圖(第四一六圖)を公にせり(1888)。紅外部の寫真は近來張金の格子によりて生ずる廻折を使用し 330μ まで撮影し得るに到れり (Rubens)。

第四一五圖



太陽の平均仰角に於て紅外部のエネルギーは 60、可視部のエネルギーは

第四一六圖



40. 紫外部のエネルギーは僅に1の割合を有す、大気は大陽エネルギーの一部を吸収す、故に太陽天頂に在るときは最大エネルギーは黄部に在れども平均仰角を有する時は最大エネルギーは橙紅の界に偏し、仰角極て小なるときは紅部に偏す。

247 紫外スペクトラ ultra-violet spectrum (Ritter 1801) リッターは始て鹽化銀の種板を用て日光スペクトラを寫眞し紫色以外の暗き部分にも寫眞板に感すべき線の存在することを發見し之を化學線 actinic rays と稱し其部分に化學線スペクトラの名を與へたり、其後の研究に依り今日に於ては紫線 $400\mu\mu$ より波長 $12\mu\mu$ 邊までの區域を有す。ガラスは紫外線を吸収すること大なるを以て其研究に使用するに適せず、水晶プリズムを用ふれば $200\mu\mu$ まで寫眞することを得 (Stokes)、螢石プリズムを用ふれば $185\mu\mu$ まで達することを得べし (Cornue)、近頃乾板のゼラチンを薄くすることによりて $36\mu\mu$ まで寫眞することを得たりと云ふ (Millikan)、プリズム媒質の吸収を避くるには格子 grating に據るを最良とす。肉眼にて紫外スペクトラの一部を見るにはスペクトラを螢光板上に投影するか或はウランガラス (Ur 鹽を含むガラス) を眼に宛て、スペクトラを望見するに在り、然れ共此方法は寫眞に較ぶれば區域甚狭し。

太陽エネルギー中殊に波長小なる部分は地上に到着するまでに大氣の吸収に遇ふことは前節既に之を説きたり、 $180\mu\mu$ より短き線は殆ど其全部が大氣の上層に於て吸収せられ此が爲最高層の空氣は荷電物を發生す、 180 より $290\mu\mu$ ま

での紫外線は雲霧の凝結核なる H_2O_2 又は NO_2 の如きもの或はオゾン の爲に吸収せらるゝものならんと云ふ (Lenard, Ramsauer)。

之を要するに、太陽スペクトラの日光部は一オクターヴ内外の區域を有するものに過ぎざれども全スペクトラは 330μ より $12\mu\mu$ に亘り殆ど15オクターヴに達せんとす、然れ共此は單に物理學が今日まで研究し得たる部分を示すのみにして太陽スペクトラの全境域は遙に此よりも大なることを想ふべし。

紫外線に化學線の別名を附したるを以て太陽エネルギー中化學反應力を有する部分は紫外線其他波長短き日光スペクトラの専有の如く考ふるは不可なり、最初リッターが使用したる鹽化銀は紫色附近に於て最大反應を生じたれども臭化銀の如きは却て紅色部に於て反應盛なる場合あり、殊に日光が葉綠中に於て炭酸瓦斯を分解して葡萄糖を生ずる化學的作用の如き事日光中の紅色を用て之を行ひつゝあるを思ふべきなり。

248 連続スペクトラ continuous spectrum スペクトラを大別して五種となす、第一、連続スペクトラ、第二、輝線スペクトラ、第三、群線スペクトラ、第四、吸収線スペクトラ、第五、吸収群線スペクトラ是なり。

固体又は液体を熱して發光せしむれば分子は分子力大なる位置に於て振動するを以て自由に各分子の固有振動を行ふこと能はずして種々難多の週期運動を混交し其光は分光器に檢すれば連續的となり總べての振動を含有する理なり。熱學篇ドレーパー則に於て説明したる如く固体液体が漸く發光し始むる溫度に於ては紅色を發し溫度上るに従ひ白色となる此時の状態を白熾態と云ふ、故に白熾態の物体のスペクトラは紅より紫まで残らず含蓄せるものなり、更に溫度を高くすれば紫外線を得べし、炭火は紅色を主とし黄色部少しく加はりスペクトラの區域短きも弧燈の炭は可視スペクトラ的全長を提供す、煤爐中の金屬も同様なり。

249 輝線スペクトラ bright line spectrum 發光氣體のスペクトラは七色の列を有することなく、少きは二三本 (鹽素蒸氣) 多きは數百本 (例、鐵の蒸氣) の自明なる細線が暗地上に出現するものなり、然れ共各線の色は其位置に

よりに定まり両端に在れば紅或は紫にして中央に在れば緑等の如く連続スペクトラにて見たる位置の色を有す。此種のスペクトラは發光氣體に於てのみ目撃するところにして、氣體分子は自由に移動し得るのみならず亦其原子は平均位置を中心として諧の振動を営むに當り他の分子の干渉を受くること無く原子固有の週期を以て一定の軌道に沿ふて運動し得るゆへスペクトラ中に現はるゝ輝線の位置は原子の固有振動の週期に相當するものなるを悟るべし、従て元素異なれば輝線の位置と數とを異にし、逆に輝線の位置を知れば其元素の何たるかを判定し得べし、スペクトラ分析 spectral analysis は此理を應用し化學分析法中有力なるものとなれり、殊に天体の如く遠處に在りて直接之を取扱ふ能はざる場合に於ては其スペクトラによりて構造を推測するの外なきなり。

自然物にして輝線スペクトラを供するものは太陽の本体を圍繞する彩球 chromosphere と名づくる氣體なり、望遠鏡を以て太陽を觀望すれば彩球の下層に接する實体の表面即ち粒狀面を見る、斑点 sun-spots 及び白紋 faculae は粒狀面に發生するものなり、平常は大陽の實体より發する強烈なる光線に妨げられ彩球より來る光線のスペクトラを觀る能はざれども皆既日他の際月球は太陽と地球との間に來り徐々に日面を覆ひ隠すを以て日蝕中前後二回月球は全く太陽を隠して彩球のみを剝す瞬間あり、此稀有の瞬間を利用し彩球のスペクトラを觀れば輝線羅列し日常視るところの日光スペクトラの逆現象を演じ黒地の上へに著色光輝あるフラオンホーフアー線を觀ることを得べし、之を flush-spectrum と名づけ彩球を一名逆轉層 reversing layer と云ふなり、紅焰 prominence 又は protuberance は彩球より外方に突出したるものにして(第四一七圖)逆轉層と同時に觀察し得べきものなれば皆既日蝕以外に之を見る方法無かりしをジャンセンの實驗とロッキヤーの研究(Janssen, Lockyer 1868)とにより平日にても分光器を望遠鏡に接續して觀察し得べき事を證せり、其方法は分光器の分色度を増加して(例へばプリズムの數を増すことによりて)輝線の光度は衰へざるも輝線間の色地の光度を減ぜし

第四一七圖



ひるに在り、此時分光器の細隙を開き水素に緣故ある C 線又は F 線を吟味すれば紅焰を見ること容易なり、第四一七圖は細隙を開き紅焰を現はしたる有様なり。元素ヘリウム helium の特有線 D₃も紅彩のスペクトラ中に認むるを得べし。

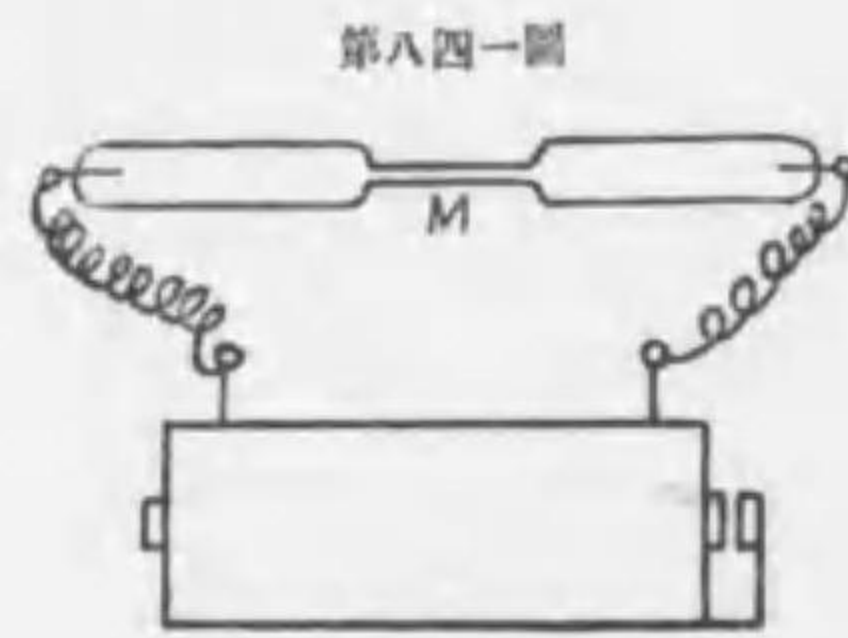
太陽彩球の外部を包圍するコロナ corona も亦輝線スペクトラを提供す、元來コロニウム coronium と稱する元素は分光器によりてコロナ中に發見($\lambda = 530.33\mu\mu$)せられたるものなり、然れ共コロナのスペクトラは上述綠色輝線の外に微力なる連続スペクトラより成立するところより察すれば主として細粉より成立し日光を反射して輝くものなるべし。

太陽の實体は液体にして其自身に連続スペクトラを生ずべき發光体なれ共之を圍繞する彩球は諸種金屬元素の蒸氣及び水素ヘリウム等の氣體より成立し實体が發する光線中自己に適當なるものを共鳴作用によりて吸收するものなり、故に地球に到着する日光を吟味すれば彩球の吸收に相當する諸線は其光度薄弱となりフラオンホーフアー黒線及び其他無數の吸收線となりて顯はるゝなり、然れ共前述の如く日蝕時に彩球のみを分光器によりて吟味し得る機會に違ふて初て彩球も亦一個の發光体なるを確定し得たるなり。

分光器を削て星雲 nebula の研究に使用せしはハッキンズ(Huggins 1864)なり最初老ハーシエルは星雲は氣體なるべきことを教示したるも其後ロックスの大反射望遠鏡製造せられ二三の星雲は彙星の集合体なることを發見したるを以て總べての星雲は合星 cluster ならんとの臆説を生じたり、然るにハッキンズの研究によりて氣體の構造を有する星雲の夥多存在することを證明せり、合星のスペクトラは畧々連続スペクトラに似たるものなれ共星雲の多數は輝線スペクトラを提供し明かに其氣體なるべきことを表はすなり、其スペクトラは常に水素、ヘリウム、又屢々カルク線と併せて未知の元素星雲素 nebulum ($\lambda = 500.7, 495.9\mu\mu$ 綠色)なるものゝ存在を教示す。

輝線スペクトラを供する他の自然物は雷に伴ふ線狀電光、極光 aurora、獸帶光 zodiacal light (獸帶光は日出前凡そ二時間東天に、日没後凡そ二時間西天に現はるゝ光象にして太陽を圍繞し日光を反射する廣袤大なる扁平の氣體より發するものと信ぜらる)等あり、然れ共獸帶光の輝線は未だ判然せざるなり。

実験室内にて観察し得べき輝線スペクトラは極めて多種に属し又元素の蒸気は殆ど全部に亘りて実験し得べし(炭素の如く空气中に於て其蒸気を発生し難きものを除く)、観察法は金属の如く電導体なる場合には此を兩極となして弧状電燈を作り集光レンズを用ひて電弧を分光器細隙上に投影せしむべし、若し集光レンズを用ひざるときは固体金属より来る連続スペクトラの光力優勢なるため揮發蒸気のスペクトラを観る能はざるなり。第二の方法は吟味せんとする金属鹽類の溶液を管中に入れ感應捲 induction coil より来る電流によりて液の放面に於て液を揮發發光せしむるに在れ共其光微弱なるのみならず導線材料の揮發蒸氣混合して結果精確ならず。第三法はブンゼン燈の殆ど無色なる焰中に鹽類を揮發せしめ之によりて焰を染色し其スペクトラを観るなり、而して鹽を焰中に維持するには白金線を以て製したる網狀の匙を使用す、此際見ゆるものは悉く金属のスペクトラなり、酸のスペクトラを見るには焰を冷却すべし。第四法はガイスラー管 Geissler tubes (Plücker 1801) を用ふ、此は管内を先づ真空にし所要の氣體にて之を充たしたるものにして此管を用ふればスペクトラの模様は管内の氣體の壓力の大小に因り大に異なるものなるを學び得べし、又多少揮發性なる固体(P, S, Na 等の如し)に在りては單に真空管内に其一片を入れ置くを以て充分となす、分光器は第四一八圖ガイスラー管の中央光力細大なる部分に向はしむべし。



第八四一圖

氣體のスペクトラは前述の如く其壓力によりて一定ならず、低壓なるときは氣體分子の飛行中衝突の度數少く従て原子振動は束縛を受くること最小なるを以て其原子に獨得なる振動の模様を観察し得べき理なり、然るに壓力次第に増すと

きは分子衝突の度數頻繁となり(溫度増すも同一結果を呈す)原子特有の自由振動を發揮する能はざるに到るべし、壓力更に増加せば蒸氣は液化点に接近し隣接せる分子引力に感じて彌々原子振動の特色を失ふに到ること明なり。今適宜なる壓力の下に諸元素のスペクトラを吟味するに各元素は各自特殊の輝線を提供し殆ど其スペクトラを一見するのみにて其元素の何たるを占ひ得べし、而して氣

體の壓力を増すとときは前述の理によりてスペクトラ中の輝線の數増加し壓力を減ずれば輝線の數も減ずるを以て屢々元素を物色し得ざる(同一なるを確め得ざる)場合を生ずるの恐あれ共幸にして各元素には其元素の特有線 characteristic lines なるもの存在して恰も母音の固有音の如く他の元素と混同する恐なからしむるものなり、特有線は溫度及び壓力の如何に拘らず其元素のスペクトラ中に必然現出すべきものなれば此に依り直に其元素の何たるを知り得べく、數千乃至數萬の輝線の位置と強さを記録と比較對照するの勞を省くこととなる、例へば食鹽(Naと同一)の特有線は§245の表中にある如く日光スペクトラ中には黃部に D_1, D_2 の吸收線として現はるゝものと同一なる輝線なれば $D_1 = 589.615 \mu\mu$, $D_2 = 589.018 \mu\mu$ の波長を有す(第四一四圖)、同様に $D_3 = 587.594 \mu\mu$ はヘリウムの特有線なり、水素の特有線は日光スペクトラ中フラオンホーフアー線 C, F, G', h, H に相當する輝線にして、此等の吸收線は太陽の彩球中に存在し太陽の實体より来る連続スペクトラ中此等振動に該當する振動を共鳴作用により吸收したる爲黒線として現はるゝものなり、水素の特有線は下表の如し(可視スペクトラに在るもののみを示す)

| | | |
|------------------|----|----------------------------|
| $H_\alpha = C$ | 紅 | $\lambda = 656.304 \mu\mu$ |
| $H_\beta = F$ | 黃綠 | 486.149 |
| $H_\gamma = G'$ | 藍 | 434.066 |
| $H_\delta = h$ | 紫 | 410.185 |
| $H_\epsilon = H$ | 紫 | 397.025 |

250 バルマー公式 前節の波長の列は甚だ規則的にしてバルマー(Balmer 1885)は始て此を一種の公式によりて表はせり、之をバルマー公式と云ふ即ち

$$\lambda_n = A \frac{n^2}{n^2 - 4} \dots\dots\dots (4)$$

中 $A = 364.613 \mu\mu$ とし n に逐次 $n = 3, 4, 5, 6 \dots\dots$ の如き自然數を代用すれば前表の波長を得べし、然しながら此は水素に限りたる譯にあらず他の氣體も適當に取扱へば一般的公式

$$\lambda_n = A \frac{n^2}{n^2 - m^2} \dots\dots\dots (5)$$