高中複習叢書

代數學

金品　桂叔超編

改訂本

商務印書館發行

高中複習叢書

代數學

金品 桂叔超編

商務印書館發行

高中複習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之高級中學課程標準，及本館高中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市高中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書為供讀者需要，忽促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

代 數 學

目 次

代數學

第一章

因數分解

1. 分解的方法:

(*a*) 單項因數 各項如有單項公共因數,就把牠提出來記在括弧外面;再把牠除各項所得的商,記在括弧裏面.

(*b*) 分羣因數 把全式分爲若干羣,就各羣中提出單項因數以後,如還有公共的多項因數時,就把這多項因數提出來.

(c) 完全平方式 如三項式是一個完全平方式;就照公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, 寫出牠的因數.

(*d*) 兩平方的差 如一式是兩項平方的差,就照公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 分解成兩式的和及差.

(e) 觀察法 三項式 $x^2 + px + q$ 的因數,往往可視察而得.祇要求出適合 $p = a + b$; $q = ab$, 兩式的 a, b, 就得因

數 $x+a$ 及 $x+b$.

(*f*)　一般二次三項式　用 a 來乘除 ax^2+bx+c, 得 $\dfrac{(ax)^2+b(ax)+ac}{a}$; 再把 ax 當做一個文字,照 (*e*) 法來分解.

(*g*)　配方法　二項式,或三項式,遇有不能照前法分解時;那末增減末項或中項,化成兩平方的差,再照 (*d*) 法來分解.

(*h*)　兩立方的和或差　如一式是兩立方的和或差,或可化成這種形式時,就照公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 來分解.

例 1. 分解 x^2-4y^2+x-2y 之因數　(雲南,二十三年)

〔解〕 用 (*b*) 法,　x^2-4y^2+x-2y

$$=(x^2-4y^2)+(x-2y)$$

用 (*d*) 法, $=(x-2y)(x+2y)+(x-2y)$

$$=(x-2y)(x+2y+1)$$

例 2. 析下之各式爲因子:　　(江蘇,一屆補考)

(i)　$8a^3b^3c^3-1$　　　(ii)　$4(2x+y)^2-(x+y)^2$

(iii)　$a^2-b^2-c^2-2bc$　　　(iv)　$x^2y^2+7xyz-60z^2$

〔解〕 (i) 用 (*h*) 法, $8a^3b^3c^3-1=(2abc)^3-1^3$

$$=(2abc-1)(4a^2b^2c^2+2abc+1).$$

(ii)　用 (d) 法, $4(2x+y)^2-(x+y)^2$

$$=[2(2x+y)]^2-(x+y)^2$$

$$=[2(2x+y)-(x+y)]$$

$$\times[2(2x+y)+(x+y)]$$

$$=(3x+y)(5x+3y)$$

(iii)　用 (d) 法, $a^2-b^2-c^2-2bc$

$$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$$

$$=a^2-(b+c)^2$$

$$=(a-b-c)(a+b+c)$$

(iv)　用 (e) 法, $x^2y^2+7xyz-60z^2$

$$=(xy+12z)(xy-5z)$$

例3.　分解下式之因數：$6x^2-19x+15$　(廣州)

[解]　用 (f) 法, $6x^2-19x+15=\dfrac{(6x)^2-19(6x)+90}{6}$

$$=\frac{(6x-10)(6x-9)}{6}$$

$$=(3x-5)(2x-3)$$

例4.　試分解下列五式之因數：　(上海,一屆)

x^2+y^2, x^2-y^2, x^3+y^3, x^3-y^3, $x^3y-3x^2y^2-18xy^3$.

[解]　$x^2+y^2=x^2-(-y^2)=x^2-(iy)^2=(x-iy)(x+iy)$.

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3y-3x^2y^2-18xy^3=xy(x^2-3xy-18y^2)$$
$$=xy(x-6y)(x+3y)$$

例 5. 劈下列各式之生數：　　(女子師範學院)

(i) $3a^3+a-6a^2b-2b$　(ii) $(2x+3y)^2-(x-4y)^2$

(iii) $a^4+a^2b^2+b^4$

【解】 (i) $3a^3+a-6a^2b-2b$

用 (b) 法, $=(3a^3-6a^2b)+(a-2b)$

$=3a^2(a-2b)+(a-2b)$

$=(a-2b)(3a^2+1)$

(ii) $(2x+3y)^2-(x-4y)^2$

用 (d) 法, $=(2x+3y-x+4y)(2x+3y+x-4y)$

$=(x+7y)(3x-y)$

(iii) $a^4+a^2b^2+b^4$

用 (g) 法, $=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

2. 綜合除法 用 $x-a$, 除含 x 的多項式時：可用綜

合除法.牠的規則是:

挨次列被除式各項的係數,有缺項時,便把 0 來補足.改變除式第二項的正負號,寫在右邊.被除式第一項的係數就是商的第一項係數,應寫在橫線下面.用牠乘[除式]的第二項,加上被除式的第二項;加出的和,便是商的第二項.再用商的第二項,乘[除式]的第二項,加上被除式的第三項.挨次這樣做下去,直到最後一項,所得的和就是剩餘.在牠前面的各數,就是商裏面各項的係數.(參考 4 節下例題)

3. 剩餘定理 用 $x-a$ 除多項式所得的剩餘,等於用 a 代入這多項式而得的值.

例. 應用剩餘定理,求 a 與 b 之值.若 x^3+ax^2+2x+b 能爲 $(x-1)(x+4)$ 除盡之.(上海,二屆)

[解] 用 $x=1$ 代入,得

$$1+a+2+b=0 \text{ 或 } a+b=-3$$

用 $x=-4$ 代入,得

$$-64+16a-8+b=0 \text{ 或 } 16a+b=72$$

解上面二方程式,得 $a=5$, $b=-8$.

4. 因數定理 如用 a 替代多項式裏的 x 時,這多項

式的值,恰巧等於 0; 那末 $x-a$ 就是牠的一個因數.

例. 析 $x^4-9x^2+4x+12$ 爲因式. (江蘇,一屆)

[解] 假定 $x=-3$, 那末

$$\text{原式} =(-3)^4-9(-3)^2+4(-3)+12=0;$$

所以 $x+3$ 是一個因數

利用綜合除法,得

$$\begin{array}{l|l} 1+0-9+4+12 & -3 \\ \quad -3+9+0-12 & \\ \hline 1-3+0+4+0 & \end{array}$$

$$\therefore \quad x^4-9x^2+4x+12=(x+3)(x^3-3x^2+4)$$

假定 $x=2$, 那末

$$x^3-3x^2+4=2^3-3\times 2^2+4=0;$$

所以 $x-2$ 是一個因數.

利用綜合除法,得

$$\begin{array}{l|l} 1-3+0+4 & 2 \\ \quad +2-2-4 & \\ \hline 1-1-2+0 & \end{array}$$

$$\therefore \quad x^3-3x^2+4=(x-2)(x^2-x-2)$$

$$=(x-2)(x+1)(x-2)$$

$$\therefore \quad x^4-9x^2+4x+12=(x+3)(x+1)(x-2)^2$$

5. $x^n\pm a^n$ 的因數分解

定理： 假使 n 是一個任意正整數,那末

$x-a$ 一定能除盡 x^n-a^n;

$x-a$ 決定不能除盡 x^n+a^n;

n 是奇數,那末 $x+a$ 一定能除盡 x^n+a^n;

n 是偶數,那末 $x+a$ 一定能除盡 x^n-a^n.

從上面的定理,可知:

(1) n 是奇質數時,照公式

$x^n\pm a^n=(x\pm a)(x^{n-1}\mp ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\mp\cdots+a^{n-1})$ 分解.

(2) $n=2m$, 卽 n 爲偶數時,先照下面兩個公式分解:

$$x^n-a^n=(x^m)^2-(a^m)^2=(x^m+a^m)(x^m-a^m)$$

又 $x^n-a^n=(x^2)^m-(a^2)^m$

$$=(x^2-a^2)(x^{m-2}+a^2x^{m-4}+a^4x^{m-6}+\cdots+a^{m-2})$$

(3) $n=pq$, 卽 n 爲非質數時,先照下面兩公式分解:

$x^n-a^n=(x^p)^q-(a^p)^q$

$$=(x^p-a^p)\left[x^{p(q-1)}+a^px^{p(q-2)}+\cdots+a^{p(q-1)}\right]$$

又 $x^n-a^n=(x^q)^p-(a^q)^p$

$$=(x^q-a^q)\left[x^{q(p-1)}+a^qx^{q(p-2)}+\cdots+a^{q(p-1)}\right]$$

6. 因數分解的着手方針

(i) 先尋出公共單項因數,或設法分羣;而求得公共

因數.

(ii) 檢驗多項式的形狀，究竟屬於下面的那一種；再決定分解的方法.

(1) $a^2 \pm 2ab + b^2$, (2) $a^2 - b^2$,

(3) $x^2 + px + q$, (4) $ax^2 + bx + c$,

(5) $a^4 + ka^2b^2 + b^4$, (6) $a^3 \pm b^3$,

(7) $a^n \pm b^n$.

(iii) 把所得的多項因數，再繼續用 (ii) 分解下去，直到原式分解成質因數的積.

(iv) 如上面所講的方法，一個都不能分解；那末把因數定理來試一試.

第二章

對稱式及交代式

1. 對稱式及交代式 把對稱式中任意兩個文字交換,原式的形狀不變.把交代式中任意兩個文字交換,祇變原式的符號,而不變牠的值.

a, b, c 三文字的同次對稱公式是:

一次 $\qquad L(a+b+c)$,

二次 $\qquad L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$,

三次 $\qquad L(a^3+b^3+c^3)+M\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+Nabc.$

---

2. 基本定理:

(1) 對稱式的積也是對稱式.

(2) 二個交代式的積,是對稱式.

(3) 對稱式和交代式的積,是交代式.

(4) 許多文字的交代式，一定拿每二個文字的差做因數.

3. 對稱式及交代式的因數分解 利用上面的定理及因數定理，可以分解對稱式及交代式的因數. 舉例如下：

例. 析 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 的因數.

［解］ 因爲原式是三個文字的交代式；從定理(4)知道，$b-c$, $c-a$, $a-b$ 是牠的因數.

或照下面的方法去做：

用 $a=b$ 代入原式，原式就等於零；所以從因數定理知道，$a-b$ 是一個因數. 同樣，可知 $c-c$, $a-b$ 也是牠的因數.

但是原式是四次的同次交代式，從定理(3)知道，還有一個一次同次對稱因數. 所以

原式 $=L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

比較兩邊 a^3b 的係數得，$L=-1$.

L 的值，也可用數字代入法來求得：

用 $a=0$, $b=1$, $c=2$ 代入原式，那末

$$0+1^3\times 2+2^3(-1)=L(1-2)(2-0)(0-1)(0+1+2)$$

$$6L=-6 \quad \therefore \quad L=-1$$

$$\therefore \quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

4. 對稱式及交代式的一次因數　三個文字的對稱式,或交代式,如果有一次因數,那末一次因數的形狀,有下面幾種:

(1)　$a, b,$ 及 c

(2)　$a-b, b-c,$ 及 $c-a$

(3)　$a+b, b+c,$ 及 $c+a$

(4)　$a+b-c, b+c-a,$ 及 $c+a-b$

(5)　$a+b+c$

這裏所講的,在分解對稱式及交代式的因數時很有幫助,大家應當注意.

第 三 章

最高公因式最低公倍式及分式

1. 最高公因式 (H. C. F.) 的求法：

(*a*) 分解因數法 先把各式分解成質因數，再把公共因數連乘起來. 每一因數的指數，應當是各式中的最小的.

(*b*) 輾轉相除法 用次數低的 B 式，除次數高的 A 式，得剩餘 C. 再用 C 除 B，得剩餘 D. 更用 D 除 C. 照這樣除下去，直到除盡爲止. 末一次的除式，就是 A, B 兩式的 H. C. F.

求二式以上的 H. C. F. 時，先求兩式的 H. C. F.，再求這個 H. C. F. 和第三式的 H. C. F.. 照這樣一直做下去，最後求得的 H. C. F.，就是各式的 H. C. F..

例求 $2x^4+9x^3+14x+3$, $3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$ 的 H. C. F.

	$2x^4+9x^3\qquad+14x+3$	$3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$	
	$\times 3$	$\times 2$	
$2x$	$6x^4+27x^3\qquad+42x+9$	$6x^4+30x^3+10x^2+20x+4$	3
	$6x^4+20x^3-44x^2-10x$	$6x^4+27x^3\qquad+42x+9$	
	$7x^3+44x^2+52x+9$	$3x^3+10x^2-22x-5$	$3x$
	$\times 3$	$3x^3+15x^2+3x$	
7	$21x^3+132x^2+156x+27$	$-5x^2-25x-5$	-5
	$21x^3+70x^2-154x-35$	$-5x^2-25x-5$	
	$62\ )\ 62x^2+310x+62$	0	
	x^2+5x+1		

$\therefore$ H. C. F. $=x^2+5x+1$

2. 最低公倍式 (L. C. M.) 的求法:

(*a*) **分解因數法**　先把各式分解成質因數，再把各不同因數連乘起來．每一因數的指數，應當是各式中的最大的．

(*b*) **先求 H. C. F. 法**　先求兩式的 H. C. F. 用這個 H. C. F.，去除兩式的相乘積，所得的商就是這兩式的 L. C. M.．求二式以上的 L. C. M. 時，先求兩式的 L. C. M.；再求這個 L. C. M. 和第三式的 L. C. M.．照這樣做下去，最後求得 L. C. M.，就是各式的 L. C. M.

3. 約分法　用分子分母的 H. C. F.，除分子分母．

例. 將 $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-11x+15}$ 約分　(<u>燕京大學</u>)

【解】 $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-11x+15}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(2x-5)(x-3)}=\dfrac{x+2}{2x-5}$

4. 通分法 先求各分母的 L. C. M., 再用各分母分別去除這個 L. C. M.. 把求得的商,去乘各分式的分子分母.

5. 符號的變換 每一個分式都有三種符號——分子的符號,分母的符號,和分式前的符號——;同時改變二種符號,分式的值依舊不變.

6. 分式加減法 加減同分母的分式時;用原分母做分母,原分子的和或差做分子. 加減異分母的分式時,先把分式通分,再照前法去做. 最後所求得的分式,假使可以約分的,一定要約分.

例 1. 簡約 $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$ (福建)

[解] 原式 $=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}$

$$=\frac{(x+3)-(x-3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{3(x-1)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{6}{x^2-9}-\frac{6}{x^2-1}=\frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}$$

$$=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$$

例 2. 化簡 $\frac{2}{(x^2-1)^2}-\frac{1}{2x^2-4x+2}-\frac{1}{1-x^2}$ (上海,二屆)

〔解〕 原式$=\frac{2}{(x-1)^2(x+1)^2}-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{4-(x+1)^2+2(x-1)(x+1)}{2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{4-x^2-2x-1+2x^2-2}{2(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{x^2-2x+1}{2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{2(x+1)^2}.$$

7. 分式的乘法 分子乘分子,做新分子;分母乘分母做新分母,新分子分母中間,如果有公共因數,一定要約分.

8. 分式的除法 顛倒除式的分子分母,去乘被除式.

例. 化簡$\frac{a^3-b^3}{a+b}\div\frac{a-b}{a^3+b^3}\times\left(\frac{2ab}{a^2+ab+b^2}-1\right)$(北京大學女子學院).

〔解〕 原式$=\frac{a^3-b^3}{a+b}\times\frac{a^3+b^3}{a-b}\times\frac{2ab-a^2-ab-b^2}{a^2+ab+b^2}$.

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)(ab-a^2-b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=(a^2-ab+b^2)(ab-a^2-b^2)$$

$$=-(a^2-ab+b^2)^2.$$

9. 繁分式化簡法:

(a) 把分子及分母化成簡單分式,再用除法來算;或用

各分母的 L. C. M. 去乘原分式的分子分母.

(b) 遇見連分式形狀的繁分式時;應當從最下面的一個分式,逐步演算.

例 1. 化簡 $\dfrac{\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x-1}{x-2}}{\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{x+2}{x-3}}\div\dfrac{\dfrac{x+3}{7}-\dfrac{x+3}{x+4}}{\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-2}{x-1}}$ (稅務專門)

[解] 原式 $=\dfrac{\dfrac{(x-1)(x+1)}{3(x-2)}}{\dfrac{(x+2)(x+1)}{4(x-3)}}\times\dfrac{\dfrac{(x-2)(x+2)}{3(x-1)}}{\dfrac{(x+3)(x-3)}{7(x+4)}}$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)}{3(x-2)}\times\dfrac{4(x-3)}{(x+2)(x+1)}\times\dfrac{(x-2)(x+2)}{3(x-1)}\times\dfrac{7(x+4)}{(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{28(x+4)}{9(x+3)}.$

例 2. 化簡 $\dfrac{\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{2a}{a^2-x^2}}{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{2a}{a^2-x^2}}$ (北京大學)

[解] 用 $(a+x)(a-x)$ 乘分子分母,得

$$原式=\frac{a-x+a+x+2a}{a-x-(a+x)-2a}=\frac{4a}{-2x-2a}=-\frac{2a}{x+a}.$$

例 3. 簡化下式: $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ (上海,二屆)

[解]　原式$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}$

$$=\frac{1}{\dfrac{x+1-x}{x+1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{x+1}}=x+1.$$

第　四　章

一次方程式及一次聯立方程式

1. 去分母法　方程式的係數裏含有分數時；可以用各分母的最小公倍數,個别的乘各項,使得各項,都不含分數.

2. 移項法　方程式裏的各項,假使要從一邊移到别一邊去,一定要改牠原來的符號.

3. 一元一次方程式的解法　先去方程式裏的分母及括弧(如果有);再將含 x 的各項移到左邊,餘下的各項移到右邊;經兩邊各自合併後用 x 的係數除兩邊.

例.　解方程式: $\frac{x}{3}-\frac{3x}{5}\left(\frac{10}{x}-4\right)+3\frac{3}{5}=14$ (稅務專門)

[解]　在原方程裏,先去括弧,

$$\frac{x}{3}-6+\frac{12x}{5}+\frac{18}{5}=14.$$

用 15 乘兩邊, $5x-90+36x+54=210$

移項合併　$41x=246$

$\therefore\quad x=6.$

4. 解法的討論　一元一次方程式的準式是：

$$ax+b=0.$$

(a) 如 $a\neq 0$, 那末 $x=-\dfrac{b}{a}$ 纔是獨解.

(b) 如 $a=0$, $b\neq 0$; 那末 $x=-\dfrac{b}{0}$. 這方程式是沒有解答的.

(c) 如 $a=0$, $b=0$; 那末 $x=\dfrac{0}{0}$. 這方程式有不定解.

5. 二元一次聯立方程式的解法

(a) 加減法　把兩方程式各用合宜的數去乘，使得任意一元的係數相同；然後，相加或相減，便可求得一個未知數的值.

(b) 代入法　解任一方程式，求得一元對於他元的關係式，再用牠代入他一方程式裏.

(c) 比較法　從二個方程式裏，各自求得同一元對於他一元的關係式，再用這兩個關係式併成方程式（不常用）

(d) 行列式法　假使二元一次聯立方程式的準式是：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

那末

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(e) **圖解法** 畫出二個方程式的圖形,(在這裏的二個圖形都是直線),再找出牠們交點的坐標.橫坐標是 x 的值;縱坐標就是 y 的值.(不常用)

例 1. 試解下方程式: (廣州市)

$$\begin{cases} 4x+9y=3 & (1) \\ 3x+7y=2 & (2) \end{cases}$$

[解] 用代入法 從 (2) 得 $y=\dfrac{2-3x}{7}$,

代入 (1),得

$$4x+9\left(\frac{2-3x}{7}\right)=3$$

$$28x+9(2-3x)=21$$

$$28x+18-27x=21$$

$$\therefore \quad x=3 \qquad y=\frac{2-9}{7}=-1.$$

例2　解 $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m & (1) \\ \dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=n & (2) \end{cases}$　(北平大學)

[解]　用加減法　(1)乘 d; (2)乘 b, 就得

$$\frac{ad}{x}+\frac{bd}{y}=md,$$

$$\frac{bc}{x}+\frac{bd}{y}=nb.$$

相減,
$$\frac{ad-bc}{x}=md-nb,$$

$$\therefore\quad x=\frac{ad-bc}{md-nb}.$$

同樣. (1)乘 c; (2)乘 a, 再相減,可得

$$y=\frac{ad-bc}{na-mc}.$$

例3.　下列兩聯立方程式,用行列式解之:

(i) $\begin{cases} 2y+x=7 \\ 5x-2y=11 \end{cases}$　(ii) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=6 \\ \dfrac{3x}{2}+\dfrac{2y}{3}=8 \end{cases}$　(福建)

[解]　(i) 把原方程式整理做:

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 5x-2y=11 \end{cases}$$

那末

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & 2\\ 11 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-14-22}{-2-10}=\frac{-36}{-12}=3,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 7\\ 5 & 11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}}=\frac{11-35}{-12}=\frac{-24}{-12}=2,$$

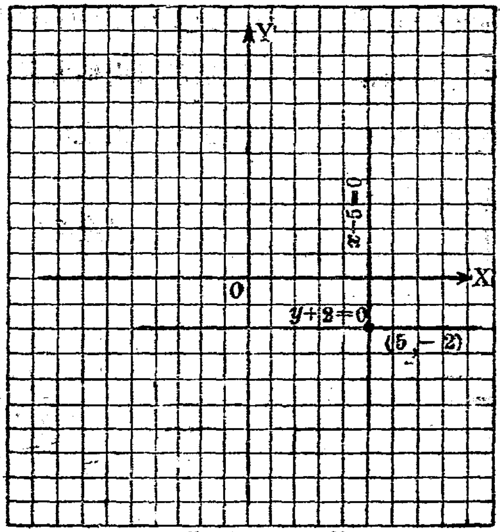
(ii) $$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & -\frac{1}{3}\\ 8 & \frac{2}{3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}}=\frac{4+\dfrac{8}{3}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{20}{3}}{\dfrac{5}{6}}=8,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 6\\ \frac{3}{2} & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}}=\frac{4-9}{\dfrac{5}{6}}=\frac{-5}{\dfrac{5}{6}}=-6.$$

例 4. 用圖形解下列之聯立方程式：(雲南，二十三年)

$$x-5=0$$

$$y+2=0.$$



$x=5$　　$y=-2$

6. 解法的討論

(1) 如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 或 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$;那末 $x.\ y$ 就是獨解.

(2) 如 $a_1b_2-a_2b_1=0$,再 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 或 $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$,

及 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 或 $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$, 這時 x, y 就沒有解. 原來的二個方程式,叫做矛盾方程式.

(3) 如 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, $c_1 b_2 - c_2 b_1$ 及 $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, 那末 x, y 的值不定. 原來的二個方程式,叫做引伸方程式.

例. 解下列聯立方程式,并依 λ 變值而討論之:

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda - 4) y = 2\lambda + 1 \\ (\lambda + 2) x - 3\lambda y = 4\lambda \end{cases} \qquad \text{(安徽)}$$

[解]
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda + 1 & \lambda - 4 \\ 4\lambda & -3\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 4 \\ \lambda + 2 & -3\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-10\lambda^2 + 13\lambda}{-4\lambda^2 + 2\lambda + 8} = \frac{10\lambda^2 - 13\lambda}{2(2\lambda^2 - \lambda - 4)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda + 1 \\ \lambda + 2 & 4\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 4 \\ \lambda + 2 & -3\lambda \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda^2 - 5\lambda - 2}{-4\lambda^2 + 2\lambda + 8} = \frac{-2\lambda^2 + 5\lambda + 2}{2(2\lambda^2 - \lambda - 4)},$$

如 $2\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$, 那末 $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$. 但是這兩數都不能使得 $10\lambda^2 - 13\lambda$ 及 $-2\lambda^2 + 5\lambda + 2$ 等於 0, 所以 x, y 就沒有解;除此以外, λ 等於任何值, x, y 都是獨解.

7. 三元一次聯立方程式的解法:

(a) 消去法　任意取一個方程式, 同別的二個方程式消去同一元;結果就得到一組二元聯立方程式. 解二元聯立

方程式,可求得二元的值,再代入原一方程式,更求得第三元的值.

(b) 行列式法　假使三元一次聯立方程式的準式是:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

那末

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

上面兩個方法中(b)法比較來得方便.(三元以上的一次聯立方程式解法,可依此類推,詳行列式章中).

例. 用行列法,求下列聯立方程式之根:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y-2z=-9 \\ 3x-y+4z=3 \end{cases}$$

(廈門大學)

[解]

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -9 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{-4+9-12+3-2+72}{-4-2-12+3-2-16}$$

$$=\frac{66}{-33}=-2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{-36+6-6+27+6-8}{-33}$$

$$=\frac{-11}{-33}=\frac{1}{3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -9\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-3-2-54+3-9-12}{-33}=\frac{-77}{-33}=\frac{7}{3}.$$

第五章

不　等　式

1. 基本定理：

(1) 在不等式的兩邊,加減同一個數,那末不等號的方向不變.

(2) 不等式裏的各項,可改變牠的符號,從一邊移到他一邊,這就是不等式的移項法.

(3) 如變不等式兩邊中各項的符號,就改變不等號的方向.

(4) 用同一正數乘或除不等式的兩邊,不等號不變牠的方向.

(5) 用同一負數乘或除不等式的兩邊,就改變不等號的方向

2. 不等式的種類：

(1) 絕對不等式　不管文字的數值怎樣,不等式恆能成

立.

(2) **條件不等式**　文字的數值一定要在某一界限裏, 不等式方能成立.

3. 絕對不等式的證法:

(*a*) **綜合法**　從已經知道的定義及定理,逐步推演下去.

(*b*) **解析法**　承認結果是對的,倒推逆溯上去,直到一已經證明的定理爲止.

例 1.　a, b, c 爲不相等之正實數,求證

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}>6$$ (江蘇,二屆)

[證]　用綜合法來證,

$$\because \quad (a-b)^2>0 \quad \therefore \quad a^2+b^2>2ab$$

但是 a, b 都是正數, 所以

$$\frac{a^2+b^2}{ab}>2,$$

就是　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2,$

同樣　$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}>2, \ \dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}>2,$

相加, 得　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}>6.$

例2. 求證 $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ (四川,一屆)

[證] 用解析法來證,

假定原式是對的,那末必定要

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqq 2ab+2bc+2ca;$$

更必定要 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geqq 0;$

就是要 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0.$

但是在末一式裏,不管 a, b, c 是怎樣的實數,都能成立;所以原式是真確的.

例3. $x>y>0$, 求證 $\frac{1}{2}(x+y)>\sqrt{xy}$ (浙江,一屆)

證的方法很容易,所以略去不講.

4. 條件不等式的解法:

(a) 一次不等式 把未知數都移到一邊,其餘的另列在別一邊,經歸併後,一除就得.

(b) 聯立不等式 分別的解各不等式,再求得牠們的公共解答.

(c) 二次不等式 各項都移到左邊,用分解因數的方法,求得 x 的界限.

例1. 解不等式 $5x-8<3x+2,$

[解] 移項 $5x-3x<8+2,$

歸併　　$2x<10$,

用2除　　$x<5$.

例 2　解 $\begin{cases} 2(1-x)>3x+7 & (1) \\ 3x+2<5x+8 & (2) \end{cases}$

［解］ 從(1)得，　$5x<-5$　$\therefore$　$x<-1$,

從(2)得，　$2x>-6$　$\therefore$　$x>-3$,

所以　(1),(2)兩式的公共解答是：

$$-1>x>-3.$$

例 3.　問x爲何值時，不等式$\dfrac{3-x}{x+2}>1$能成立.（中山大學.）

［解］ 用正數$(x+2)^2$乘兩邊，得

$$(x+2)(3-x)>(x+2)^2,$$

移項，　$(x+2)(3-x)-(x+2)^2>0$,

分解因數，　$(x+2)(1-2x)>0$,

$\therefore$　$x+2>0$ 及 $1-2x>0$,

就是　$x>-2$,　$x<\frac{1}{2}$,

$\therefore$　$\frac{1}{2}>x>-2$,

或 $x+2<0$ 及 $1-2x<0$,

$$x<-2, \quad x>\tfrac{1}{2}. \quad \text{不合理.}$$

所設不等式在 $\frac{1}{2}>x>-2$ 時，才能成立.

第六章

二次方程式及二次聯立方程式

1. 一元二次方程式的解法:

(a) 因數法　把各項移到左邊,使得右邊等於零. 把左邊的代數式,分解成兩個一次因數.令兩因數各等於零,再解這兩個一次方程式.

(b) 配方法　含 x 的項移到左邊,不含 x 的項移到右邊. 用 x^2 的係數除兩邊. 兩邊各加上 x 半係數的平方. 然後兩邊各自開平方,就可解出 x.　　(不常用)

(c) 公式法　假使一元二次方程式的準式是:

$$ax^2+bx+c=0,$$

那末

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

例 1. 試解下方程式: $x^2-8x+15=0$. (廣州市)

[解] 把左邊分解因數,得

$$(x-3)(x-5)=0.$$

$$\text{令}\quad x-3=0 \quad \text{及} \quad x-5=0,$$

$$\therefore \quad x=3 \quad \text{及} \quad x=5.$$

例 2. 解 $(a^2-b^2)(x^2-1)=4abx$. (齊魯大學)

[解] 把原方程式整理,得

$$(a^2-b^2)x^2-4abx-(a^2-b^2)=0,$$

用公式,得

$$x=\frac{4ab\pm\sqrt{(-4ab)^2+4(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)},$$

$$=\frac{4ab\pm\sqrt{16a^2b^2+4a^4-8a^2b^2+4b^4}}{2(a^2-b^2)},$$

$$=\frac{4ab\pm(2a^2+2b^2)}{2(a^2-b^2)}.$$

所以 $$x=\frac{2(a+b)^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{a+b}{a-b},$$

或 $$x=\frac{-2(a-b)^2}{2(a^2-b^2)}=-\frac{a-b}{a+b}.$$

2. 根的性質及判別式 上節公式裏的 b^2-4ac,叫做判別式.

(1) 判別式是一個正數,并且是平方數;那末兩個根都是實數,并且是不相等的有理數.

(2) 判別式是一個正數,但不是平方數;那末兩個根都

是實數,并且是不相等的無理數.

(3) 判別式等於零,那末兩個根都是實數,并且是相等的有理數.

(4) 判別式是一個負數,那末兩根都是虛數,并且不等.

例1. 判別 $x^2+7=4x$ 之根之種類. (上海,一屆.)

[解] 把方程式寫成 $x^2-4x+7=0$, 牠的判別式是 $b^2-4ac=16-28=-12$; 所以這方程式的根是不等的虛數.

例2. 方程式 $kx^2-(3k-2)x+4-k=0$ 之二根相等,求 k 之值. (江蘇,一屆補考.)

[解] 如原方程式的二根相等,那末牠的判別式一定等於零;所以 $(3k-2)^2-4k(4-k)=0$.

去括弧以後,再整理,得 $13k^2-28k+4=0$.

分解因數,得 $(k-2)(13k-2)=0$.

$$\therefore \quad k=2, \text{或 } k=\frac{2}{13}.$$

例3. 方程式 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 之根爲虛或爲實,或相等,與 m 之值有何關係,試詳論之. (福建)

[解] 原方程式的判別式是:

$$(2m)^2-4(m+2)=4m^2-4m-8,$$

$$=4(m^2-m-2)=4(m-2)(m+1).$$

(i) 如 $(m-2)(m+1)>0$,

或 $m>2$, 或 $m<-1$, 那末根是實數.

(ii) 如 $(m-2)(m+1)=0$,

或 $m=2$ 或 $m=-1$, 那末兩根相等.

(iii) 如 $(m-2)(m+1)<0$,

或 $2>m>-1$, 那末根是虛數.

例 4. 方程式 $x^2-(k-3)x+k=0$ 有等根, 則 k 應為何數? (漢口)

例 5. 設方程式 $x^2+k(x+1)+3=0$之兩根相等,求 k 之值. (河南)

例 6. 設方程式 $x^2+2(k+2)x+9k=0$ 之兩根相等, 求 k 之值. (湖南)

例 7. 方程式 $(2+k)x^2+2kx+1=0$ 之二根相等, 試求 k 之值. (山西)

例 8. k 為何值則下方程式有相等之實根:

$$(k-4)x^2+(k-2)x+2=0.$$ (青島)

例 9. 若二次方程式 $(\lambda+2)x^2-2\lambda x+1=0$ 之兩根

相等, 則 λ 之值如何?　　(四川, 一屆)

上面的例 4 到例 9 的解法, 同例 2 的差不多, 這裏從略了.

3. 根的符號　當判別式 $b^2-4ac>0$ 時, 如

(1) $\frac{c}{a}>0$; $\frac{b}{a}<0$, 那末兩根都是正.

(2) $\frac{c}{a}>0$; $\frac{b}{a}>0$, 那末兩根都是負.

(3) $\frac{c}{a}<0$, 那末兩根一正, 一負.

4. 根同係數的關係:

(1) α, β 是 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根, 那末

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

(2) α, β 是 $x^2+px+q=0$ 的兩根, 那末

$$\alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q.$$

例 1. 若 x_1, x_2 為二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根, 試表 $x_1^2+x_2^2$ 為 a, b, c 之式.　　(廈門大學)

[解]　$\because\ x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a};$

$$\therefore\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

例 2. 有甲乙二人解 $x^2+px+q=0$ 二次方程式，甲誤書第二項之係數而得 3 與 -8 之二根，乙誤書第三項而得 5 與 -7 之二根，問眞正之方程式之根爲何？

（江西，二十二年）

〔解〕 因爲甲誤書第二項的係數，就得 3 與 -8 兩根，所以

$$q=3(-8)=-24.$$

又因乙誤書第三項，就得 5 與 -7 兩根，所以

$$p=-(5-7)=2.$$

因此，眞正的方程式是 $x^2+2x-24=0$，牠的根是 4 及 -6.

5. 知道根作方程式：

(a) 直接知道方程式的根.

(b) 間接知道方程式的根.

例 1. 求作一個二次方程式，令其二根爲 $(3+2i)$，$(3-2i)$.

（河南）

〔解〕 要求的方程式是：

$$[x-(3+2i)][x-(3-2i)]=0,$$

$$[(x-3)-2i][(x-3)+2i]=0,$$

$$(x-3)^2+4=0.$$

就是　$x^2-6x+13=0.$

例 2. 一方程式之根爲 $3x^2-4x-1=0$ 之根之三倍,其方程式爲何?　(江西,二十三年)

[解] 假定已知方程式的根是 α, β, 那末所求方程式的根是 3α 及 3β.

$$\because \quad \alpha+\beta=\frac{4}{3},\ \alpha\beta=-\frac{1}{3},$$

$$\therefore \quad 3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\times\frac{4}{3}=4,$$

$$3\alpha\cdot 3\beta=9\alpha\beta=9\left(-\frac{1}{3}\right)=-3,$$

所以要求的方程式是　$x^2-4x-3=0.$

例 3. 方程式 $2x^2-3x+7=0$ 之根爲 α, β. 求作以 $2\alpha+\beta$ 及 $\alpha+2\beta$ 爲根之方程式. (江蘇,一屆)

[解] $\because \quad \alpha+\beta=\dfrac{3}{2},\ \alpha\beta=\dfrac{7}{2},$

$$\therefore \quad (2\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)=3(\alpha+\beta)=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2},$$

$$(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)=2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2$$

$$=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta=2\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}+\frac{7}{2}=\frac{16}{2}.$$

所以要求的方程式是:

$$x^2-\frac{9}{2}x+\frac{16}{2}=0,\quad 或\quad 2x^2-9x+16=0.$$

6. 係數等於零的情形 在$ax^2+bx+c=0$方程式裏，如果：

(1) $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c=0$；那末一根是$-\frac{b}{a}$，一根就是零.

(2) $a\neq 0,\ b=0,\ c\neq 0$；那末兩根的值相等，並是異號.

(3) $a\neq 0,\ b=0,\ c=0$；那末兩根都是零.

(4) $a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$；那末祇有一根是$-\frac{c}{b}$.

(5) $a\doteq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$；那末一根$\doteq -\frac{c}{b}$，一根$\doteq\infty$.

(6) $a=0,\ b\neq 0,\ c=0$；那末一根是零.

(7) $a\doteq 0,\ b\neq 0,\ c=0$；那末一根$\doteq 0$，一根$\doteq\infty$.

(8) $a=0,\ b=0,\ c\neq 0$；那末得出一個矛盾的等式.

(9) $a\doteq 0,\ b\doteq 0,\ c\neq 0$；那末兩根都$\doteq\infty$.

(10) $a=0,\ b=0,\ c=0$；那末根有無限多.

例. 使 $5x^2-16lx+kx-4l+k-6=0$ 之兩根皆為 0，則k及l之值應如何？ (工業大學)

[解] 把原方程式寫成

$$5x^2+(-16l+k)x+(-4l+k-6)=0,$$

假如兩根都是零，那末一定要

$$-16l+k=0,\quad -4l+k-6=0.$$

相減,得 $$12l=6$$

$$\therefore\quad l=\tfrac{1}{2},\quad \text{又}\quad k=8.$$

7. 能用二次方程式來解的極大極小值求法:

(a) 二次三項式的極大極小　令 y 等於已知三項式,并作出所得方程式的判別式. 因此求出在方程式兩根都是實數時 y 的界限. 這便是極大值,或極小值.

(b) 可化做二次式的代數式的極大極小　令 y 等於已知代數式,先化做 x 的二次式,再照 (a) 法來求.

例 1. 求 ax^2+bx+c 之極大極小,

[解] 令 $y=ax^2+bx+c$,

就是 $$ax^2+bx+(c-y)=0,$$

x 是實數時,一定要

$$b^2-4a(c-y)\geqq 0,$$

或 $$4ay\geqq 4ac-b^2,$$

如 $a>0$, 那末 $y\geqq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$,

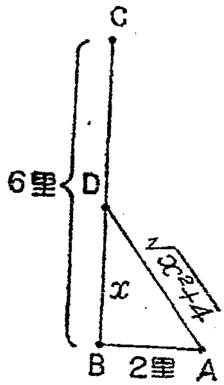
y 的極小值是 $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$,

如 $a<0$, 那末 $y\leqq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

y 的極大值是 $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

例 2. A 船與岸之距離 AB 為 2 里，沿岸有一市鎮 C，與 B 相隔 6 里．設 A 船上之人，欲以最短時間達 C．但知船行速度為每時 4 里，步行速度為每時 5 里，求此人登岸之處應隔 B 若干里？ (江西，一屆)

〔解〕 假定 x 是這人登岸地點同 B 的距離，那末，這人共費的時間有：



$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{6-x}{5},$$

題意是求上式的極小值．

令 $$y=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{6-x}{5},$$

$$5\sqrt{x^2+4}+4(6-x)=20y,$$

$$5\sqrt{x^2+4}=20y-4(6-x),$$

平方， $$25(x^2+4)=400y^2-160(6-x)y+16(6-x)^2,$$

整理，得 $$9x^2+(192-160y)x+(960y-400y^2-476)=0,$$

或 $$9x^2+4(48-40y)x+4(240y-100y^2-119)=0.$$

x 是實數時，一定要

$$(48-40y)^2-9(240y-100y^2-119)\geqq 0,$$

就是 $$2500y^2-6000y+3375\geqq 0.$$

用 125 除全式，得

$$20y^2-48y+27\geqq 0,\quad (10y-9)(2y-3)\geqq 0$$

解不等式，得　$y\geqq\frac{3}{2}>\frac{9}{10}$ 或 $y\leqq\frac{9}{10}<\frac{3}{2}$

若 $\frac{9}{10}<y<\frac{3}{2}$ 則不等式將改變方向．但 x 不僅為實數，且宜為正實數，則 $\frac{c}{a}>0$，而 $\frac{b}{a}<0$，即 $\frac{4}{9}(240y-100y^2-119)>0$，$\frac{4}{9}(48-40y)<0$，即 $240y-100y^2-119>0$ 而 $48-40y<0$ 先以 $y=\frac{9}{10}$ 試之，則 $240\times\frac{9}{10}-100\times\frac{81}{100}-119=16>0$ 而 $48-40\times\frac{9}{10}=12>0$，$x$ 的兩根都是負，不合於本題之要求．所取 y 之值更小，則 $48-40y>0$，是以在 $y<\frac{9}{10}$ 時，x 常得負值．又在 $\frac{9}{10}<y<\frac{3}{2}$ 之時，x 常得虛值．次取 $y=\frac{3}{2}$ 試之，則 $240\times\frac{3}{2}-100\times\frac{9}{4}-119=16>0$ 而 $48-40\times\frac{3}{2}=-12<0$ 是以 $y=\frac{3}{2}$ 為能使 x 得正實值之最小值．

這時的 x 是 $\frac{8}{3}$．

$\therefore$　所求的距離是 $2\frac{2}{3}$ 里

8. 能用二次方程來解的高次方程式：

(*a*) 能分解成一次，或二次因數的．

(*b*) 把方程式裏，用另一文字代替 x 的代數式，可得到一個二次方程式的．

例 1. 試解下列各方程式: (北平,二十三年)

(a) $x^3-1=0$, (b) $x^4+1+x^3+x-4x^2=0$.

[解] (a) 把方程式左邊分解因數,得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$,

如 $x-1=0$, 那末 $x=1$.

如 $x^2+x+1=0$, 那末 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

(b) 把方程式左端改寫做:

$$x^4-2x^2+1+x^3-2x^2+x=0.$$

$$(x^2-1)^2+x(x^2-2x+1)=0,$$

$$(x-1)^2(x+1)^2+x(x-1)^2=0,$$

$$(x-1)^2(x^2+3x+1)=0.$$

如 $(x-1)^2=0$, 就得等根 $x=1$.

如 $x^2+3x+1=0$, 就得 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

例 2. 解方程式 $x^3+2x^2+2x+1=0$. (江蘇,一屆補考)

例 3. 解方程式 $x^3-7x+6=0$. (湖南,四屆)

例 4. 解方程式 $x^3+2x^2-11x+6=0$. (湖南,五屆)

例 5. 試解 $x^3-6x^2+11x-6=0$. (陝西)

上面從例 2 到例 5,牠們的解法同例 1 差不多,所以不再解出了.

例 6. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$. (清華大學)

[解] 把左邊第一因數和第四因數相乘,第二因數和第三因數相乘,得 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$,

令 $x^2+5x=y$, 代入上式, 得 $(y+4)(y+6)=120$

$$y^2+10y+24=120$$

$$y^2+10y-96=0$$

$$(y-6)(y+16)=0$$

$$\therefore\quad y=6 \quad 或 \quad y=-16$$

(i)　如 $y=6$, 那末 $x^2+5x=6$

$$(x+6)(x-1)=0$$

$$\therefore\quad x=-6 \quad 或 \quad x=1,$$

(ii)　如 $y=-16$, 那末 $x^2+5x=-16$

$$\therefore\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2},$$

9. 能用二次方程來解的二元聯立方程式:

(a) 一個是一次方程式;一個是二次方程式.

(b) 二個方程式都是二次,但是不含一次項.

(c) 從二個方程式可設法化成 (a) 或 (b) 類的形狀.

(d) 從二個方程式可設法化成 $x+y=a$, $x-y=b$ 的形狀.

例1　解下列方程系:　(河北,二十二年)

$$\begin{cases} 2x-3y=4 & (1) \\ x^2-y^2=21 & (2) \end{cases}$$

用圖線法覆驗結果.

[解] 從 (1) 解出 x, $$x=\frac{3y+4}{2}$$

代入 (2), 得 $$\left(\frac{3y+4}{2}\right)^2-y^2=21$$

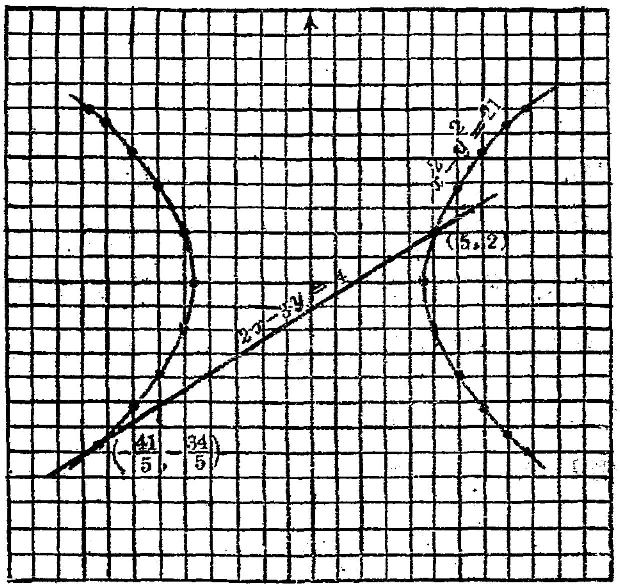
整理, 得 $$5y^2+24y-68=0,$$

$$(y-2)(5y+34)=0.$$

$$\therefore\quad y=2 \text{ 或 } y=-\frac{34}{5},$$

代入 $x=\dfrac{3y+4}{2}$, 得 $x=5$ 或 $x=-\dfrac{41}{5}$,

故所求的根是 $x=5, y=2$; $x=-\dfrac{41}{5}$, $y=-\dfrac{34}{5}$.



例2　求 x 與 y 之値：　(上海,三屆)

$$\begin{cases} x^2+xy-6=0 & (1) \\ x^2-5xy+6y^2=0 & (2) \end{cases}$$

[解]　從 (2), $(x-2y)(x-3y)=0$,

$$\therefore\ x-2y=0 \text{ 及 } x-3y=0,$$

再解下列二聯立方程式：

$$\text{(i)}\ \begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+xy-6=0 \end{cases} \qquad \text{(ii)}\ \begin{cases} x-3y=0 \\ x^2+xy-6=0 \end{cases}$$

解 (i) 得根　$x=\pm 2,\ y=\pm 1$,

解 (ii) 得根　$x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

例3.　解 $\begin{cases} x^2+xy=6 & (1) \\ xy+y^2=10 & (2) \end{cases}$　(北京大學)

[解]　從 (1), (2),消去常數,得

$$5x^2+2xy-3y^2=0,$$

$$(5x-3y)(x+y)=0,$$

$$\therefore\ 5x-3y=0 \text{ 及 } x+y=0,$$

再解下列二聯立方程式：

$$\text{(i)}\ \begin{cases} 5x-3y=0 \\ x^2+xy=6 \end{cases} \qquad \text{(ii)}\ \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy=6 \end{cases}$$

解 (i) 得 $x=\pm\frac{3}{2}, y=\pm\frac{5}{2}$,

解 (ii), $\because$ $y=-x$, 代入第二方程式, 得

$x^2-x^2=6$ 就是 $0=6$ 不合理, 所以沒有解

所以原聯立方程式的根祇是 $x=\pm\frac{3}{2}, y=\pm\frac{5}{2}$.

例 4. 解
$$\begin{cases} x+y=10 & (1) \\ xy=24 & (2) \end{cases}$$

(雲南, 二十二年)

[解] 把 (1) 兩邊平方, 得

$$x^2+2xy+y^2=100, \qquad (3)$$

用 4 乘 (2)

$$4xy=96, \qquad (4)$$

(3)−(4) $\quad x^2-2xy+y^2=4,$

開方得 $\quad x-y=\pm 2.$

再解

$$\text{(i)} \begin{cases} x+y=10, \\ x-y=+2. \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x+y=10, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases}$

例5. 解下之聯立方程式：　(江蘇, 一屆補考)

$$\begin{cases} x+y=12 & (1) \\ x^3+y^3=468 & (2) \end{cases}$$

[解]　用 (1) 除 (2), 得

$$x^2-xy+y^2=39,$$

再解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=12, \\ x^2-xy+y^2=39. \end{cases}$$

解這聯立方程式, 就得 $x=5,\ y=7;\ x=7,\ y=5.$

例6. 解下之聯立方程式：　(四川, 一屆)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} & (1) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2} & (2) \end{cases}$$

[解]　把 (1) 平方, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{b^2} \qquad (3)$$

從 (3) 減去 (2), $\dfrac{2xy}{ab}=2$　(4)

從 (2) 減去 (4), $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{a^2}-2+\dfrac{a^2}{b^2}$

兩邊開方，得 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)$.

再解下列二聯立方程式：

$$(\text{i})\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\end{cases}\quad 及(\text{ii})\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b},\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.\end{cases}$$

解 (i) 得 $x=b,\ y=a$

解 (ii) 得 $x=\frac{a^2}{b},\ y=\frac{b^2}{a}$.

10. 能用二次方程來解的多元聯立方程式：

(a) 一個方程式是二次，餘下的都是一次方程式.

(b) 從各方程式可設法化成 (a) 類的形狀.

例 1. 解
$$\begin{cases}x+y+z+u=0 & (1)\\ 3x+z+u=0 & (2)\\ 3y+2z=0 & (3)\\ x^2+y^2+zu=5. & (4)\end{cases}$$
(上海，一屆)

[解] 從 (1) 減去 (2)，得 $-2x+y=0$,

就是 $y=2x$ (5)

用 (5) 代入 (3)，得 $6x+2z=0$.

就是 $z=-3x$ (6)

用 (6) 代入 (2), 得　　$u=0,$　　(7)

用 (5), (6), (7) 代入 (4), 得 $x^2+(2x)^2+0=5,$

或　$5x^2=5.$

$\therefore\quad x=\pm 1.$

分別代入 (5), (6), 得 $y=\pm 2$, $z=\mp 3.$

$\therefore$　所求的根是 $x=1, y=2, z=-3, u=0;$

及　$x=-1, y=-2, z=3, u=0.$

例 2.　解聯立方程式:　　(浙江, 二屆)

$$\begin{cases} xy=6 & (1) \\ yz=8 & (2) \\ zx=12 & (3) \end{cases}$$

[解]　把 (1), (2), (3) 相乘, 得

$$x^2y^2z^2=6\times 8\times 12,$$

兩邊開方,　　$xyz=\pm 24,$　　(4)

(4)÷(2),　得　$x=\pm 3,$

(4)÷(3),　得　$y=\pm 2,$

(4)÷(1),　得　$z=\pm 4.$

$\therefore$　所求的根是

$x=3, y=2, z=4;\ x=-3, y=-2, z=-4,$

第七章

分式方程式及根式方程式

1. 分式方程式的解法:

(*a*) 化整法 先用各分母的 L. C. M. 乘兩邊, 再求去分母後所得方程式的根. 能使分母成零的根, 叫做僞根, 一定要除去牠.

(*b*) 加減法 把各項統統移到左邊, 用分數加減法求左邊的代數和, 幷且把所得的和約成最簡分式, 然後令分子等於零, 而求得牠的根. 如最簡分式的分子是一個異於零的常數, 那末原方程式沒有解.

(*c*) 分段法 把各分式——或先化成帶分式——分段來合併, 然後再去分母.

(*d*) 代替法 另用一文字代替某一個分式, 就把原方程式改成這文字的整方程式.

例 1. 試解 $\frac{x+7}{9-4x^2}-\frac{1-x}{2x+3}=\frac{4}{2x-3}$ 方程式,

(山西, 二十二年)

［解］ 各分母的 L. C. M. 是 $4x^2-9$，用這 L. C. M. 乘全式，得

$$-(x+7)-(2x-3)(1-x)=4(2x+3)$$

化簡，得　$x^2-7x-8=0.$

分解因數　$(x-8)(x+1)=0.$

$$\therefore\quad x=8 \text{ 或 } x=-1.$$

例 2　解 $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+4x-21}-1=\dfrac{x^3}{6x^3-2x^3}+\dfrac{6}{5}$ (稅務專門).

［解］ 右邊第一項就是$\frac{1}{4}$，把 -1 移到右邊，再加起來，那末方程式變成：

$$\frac{x^2+6x-7}{x^2+4x-21}=\frac{49}{20}.$$

用分母的 L. C. M. 乘兩邊，得

$$20x^2+120x-140=49x^2+196x-1029$$

移項合併，　$29x^2+76x-889=0.$

就是　$(x+7)(29x-127)=0.$

$$\therefore\quad x=-7 \text{ 或 } \frac{127}{29}.$$

因爲 $x=-7$ 能使得分母 $x^2+4x-21$ 成零，所以 $x=-7$ 是僞根；原方程式祇有一個根 $x=127/29$

例 3. 解　$\frac{5x-7}{9}+\frac{14}{2x-3}=x-1$　　(廈門大學)

[解]　把方程式寫成

$$\frac{5x-7}{9}+\frac{14}{2x-3}-x+1=0$$

左邊 $=\frac{(5x-7)(2x-3)+14\times 9-9(x-1)(2x-3)}{9(2x-3)}$

$$=\frac{-8x^2+16x+120}{9(2x-3)}$$

現在來解　$-8x^2+16x+120=0$

或　$x^2-2x-15=0$

$$(x-5)(x+3)=0$$

$\therefore\ x=5$　或　-3.

例 4. 解　$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$ (北平,工學院).

[解]　把各分式化成帶分式, 得

$$1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x+7}=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6}$$

移項,

$$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+6}$$

兩邊各自加減,

$$\frac{-1}{(x+3)(x+2)}=\frac{-1}{(x+7)(x+6)}$$

$$\therefore\quad (x+3)(x+2)=(x+7)(x+6)$$

就是 $$x^2+5x+6=x^2+13x+42$$

$$\therefore\quad x=-\frac{9}{2}$$

例 5. 解 $\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2=8\left(\frac{1-x}{x-2}\right)-15$ （廣東）

［解］ 令 $y=\frac{1-x}{x-2}$ 代入原方程式,得

$$y^2-8y+15=0$$

$$(y-3)(y-5)=0,$$

$$\therefore\quad y=3 \text{ 或 } 5.$$

(i) 如 $y=3$, 就是 $\frac{1-x}{x-2}=3$,

$1-x=3x-6$, $\therefore\quad x=\frac{7}{4}$.

(ii) 如 $y=5$, 就是 $\frac{1-x}{x-2}=5$,

$1-x=5x-10$, $\therefore\quad x=\frac{11}{6}$.

2. 分式聯立方程式的解法:

(a) 化整法　把各方程式去分母,改成整式聯立方程式;再求出牠們的解答.

(b) 代替法　用新文字代替原未知數的關係式.就得

到一個整式的聯立方程式.

例1. 解
$$\begin{cases}\dfrac{x+y-1}{x-y+2}=3 & (1)\\[2mm] \dfrac{y-x-1}{x-y+1}=1 & (2)\end{cases}$$
(中央大學)

[解] 把(1),(2)去分母,得

$$x+y-1=3x-3y+6,$$

$$y-x-1=x-y+1.$$

整理,得
$$2x-4y=-7,$$

$$2x-2y=-2.$$

解這兩方程式,得 $x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{5}{2}$.

例2 解
$$\begin{cases}\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{6}{y+2}=1, & (1)\\[2mm] \dfrac{8}{x-3}-\dfrac{3}{y+2}=\dfrac{1}{8}. & (2)\end{cases}$$

[解] 令 $\dfrac{1}{x-3}=u$, $\dfrac{1}{y+2}=v$, 就得

$$4u+6v=1,$$

$$8u-3v=\frac{1}{8}.$$

解出來,得
$$u=\frac{1}{16},\ v=\frac{1}{8},$$

$$就是\quad \frac{1}{x-3}=\frac{1}{16},\quad \frac{1}{y+2}=\frac{1}{8}.$$

$$\therefore\quad x=19,\ y=6.$$

3. **根式方程式的解法：**

(*a*) **消根法** 把一個根放在一邊，餘下的各項都放在別一邊．兩邊自乘等次冪，就可化去一個，或二個根式．整理以後，再照上法逐次化去餘下的根式，就得一個有理方程式．解這有理方程式，就可以了．

(*b*) **代替法** 另用一文字代替某一根式，把原方程式改成這文字的有理方程式，然後再解出來．

4. **根的驗算** 從根式方程式解出來的各根，要一個一個的代入原方程式去驗算．驗算的結果，如：

(i) 有不適合原方程式的僞根，一定要除去牠．

(ii) 各根都不適合原方程式，那末原方程式就沒有根．

(iii) 各根都適合原方程式，那末牠們都是原方程式的根．

例 1. 解 $x-7-\sqrt{x-5}=0.$ （浙江，二十一年覆試）

［解］ 移項，　$x-7=\sqrt{x-5},$

兩邊平方，　$x^2-14x+49=x-5,$

$$x^2-15x+54=0,$$

$$(x-6)(x-9)=0,$$

$$\therefore\ x=6\ \text{或}\ 9.$$

驗算：(i) $x=6, 6-7-\sqrt{6-5}=6-7-1\neq 0,$

(ii) $x=9, 9-7-\sqrt{9-5}=2-2=0,$

所以 9 是原方程式的根，6 是僞根.

例 2. 試解 $2x-\sqrt{x-6}=0$，方程式，　(廣西，二屆)

例 3. 解 $\sqrt{x}=2-x,$　　(雲南，二十二年)

上面二個例子的解法同例 1 一樣，所以不解出來了.

例 4. 解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$ 求 x 之値.

(上海，一屆)

[解] 移項，$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6},$

兩邊平方，$2x-3+3x-5+2\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=5x-6.$

整理，　$2\sqrt{6x^2-19x+15}=2,$

或　$\sqrt{6x^2-19x+15}=1,$

兩邊平方，　$6x^2-19x+15=1,$

$$6x^2-19x+14=0,$$

$$(6x-7)(x-2=0$$

$$\therefore\quad x=2\ \text{或}\ \frac{7}{6}.$$

驗算： (i) $x=2,\ \sqrt{4-3}+\sqrt{6-5}=\sqrt{10-6},$

$$2=2.$$

(ii) $x=\frac{7}{6},\ \sqrt{\frac{7}{3}-3}+\sqrt{\frac{7}{2}-5}=\sqrt{\frac{35}{6}-6},$

$$\sqrt{-\frac{2}{3}}+\sqrt{-\frac{3}{2}}=\sqrt{-\frac{1}{6}},$$

$$\frac{\sqrt{6}i}{3}+\frac{\sqrt{6}i}{2}=\frac{\sqrt{6}i}{6},$$

$$\frac{5\sqrt{6}i}{6}\neq\frac{\sqrt{6}i}{6}$$

所以 $\frac{7}{6}$ 是僞根，2 是原方程式的根.

例 5. 解　$\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$　(江蘇，一屆)

例 6. 解　$\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$ 之所有根，覆驗其結果，並棄其別根.(按就是僞根)　(河北，二十二年)

上面的例 5 及例 6 的解法和例 4 相同、所以不再來解了.

例 7. 解　$x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1.$

(浙江，二十一年二期)

〔解〕 把原方程式寫成：

$$x^2-4x+7+2\sqrt{x^2-4x+7}-8=0$$

用 $y=\sqrt{x^2-4x+7}$ 代入,就得

$$y^2+2y-8=0$$

$$(y+4)(y-2)=0$$

$$\therefore\ y=-4 \text{ 或 } 2$$

(i) 如 $y=-4$, 就是 $\sqrt{x^2-4x+7}=-4$

解出來, $x=2\pm\sqrt{13}$

(ii) 如 $y=2$, 就是 $\sqrt{x^2-4x+7}=2$

解出來, $x=1$ 或 3

驗算: (i) 如 $x=2\pm\sqrt{13}$,

$$(2\pm\sqrt{13})^2-4(2\pm\sqrt{13})+2\sqrt{(2\pm\sqrt{13})^2-4(2\pm\sqrt{13})+7}$$

$$=4\pm4\sqrt{13}+13-8\mp4\sqrt{13}$$

$$+2\sqrt{4\pm4\sqrt{13}+13-8\mp4\sqrt{13}+7}$$

$$=9+2\sqrt{9+7}=9+2\times4=17\neq1.$$

(ii) 如 $x=1$, $1-4+2\sqrt{1-4+7}=-3+2\sqrt{4}$

$$=-3+4=1,$$

如 $x=3$, $3^2-4\times3+2\sqrt{3^2-4\times3+7}$

$$=9-12+2\sqrt{9-12+7}$$

$$=-3+2\sqrt{4}=-3+4=1.$$

所以 $2\pm\sqrt{13}$ 是僞根，1 和 3 是原方程式的根.

5. 根式聯立方程式的解法：

(a) 消根法　把各方程式裏的根式設法化去，改成有理式的聯立方程式，然後再解.

(b) 代替法　用新文字代替合宜的根式，再解所得的有理式的聯立方程式.

例. 解

$$\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{7}{4} & (1)\\ x+y-\sqrt{5(x+y)}=10 & (2)\end{cases}$$

(中央大學)

[解]　令　$u=\sqrt{x-1}$；$v=\sqrt{y+1}$，那末 (1) 變成，

$$\frac{2}{u}+\frac{3}{v}=\frac{7}{4} \qquad (3)$$

(2) 變成 $u^2+1+v^2-1-\sqrt{5(u^2+1+v^2-1)}=10.$

$$u^2+v^2-\sqrt{5(u^2+v^2)}-10=0.$$

或　$(\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{20})(\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{5})=0,$

$\therefore$ $\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{20}=0$ 或 $\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{5}=0$

就是　$u^2+v^2=20$　(4)　　或 $u^2+v^2=5$　(5),

從 (3)，得　$v=\dfrac{12u}{7u-8}$，　(6)

代入 (4)，得　$\left(\dfrac{12u}{7u-8}\right)^2+u^2=20,$

去分母再化簡，$49u^4-112u^3-772u^2+2240u-1280=0$.

或 $$(u-2)(49u^3-14u^2-800u+640)=0.$$

$\therefore$ $u=2$，餘下的根不是有理數，不容易解出來.

把 u 的值代入 (6)，得 $v=4$.

再用 (6) 代入 (5)，得 $$\left(\frac{12u}{7u-8}\right)^2+u^2=5,$$

去分母并且化簡，得 $49u^4-112u^3-37u^2+560u-320=0$

這方程式沒有有理根，所以也不容易解出來. 現在祇要把 $u=2, v=4$ 代進

$$\sqrt{x-1}=u,\ \sqrt{y+1}=v,$$

就得 $x=5, y=15$. 這就是所求的解答.

第八章

應用問題

1. 解應用問題的次序：

(1) 細看題意——先把問題的意思，細看清爽；辨別那些數是已知的，那些數是要求的.

(2) 定未知數——普通把問題裏面要求的數，做未知數.有時也把別的合宜的數，做未知數.

(3) 列方程式——按照題意分別寫出代數式，再照題意把各代數式的關係列成方程式. 但是要注意方程式兩邊所表量的單位，一定要相同.

(4) 解方程式——看方程式的形狀，再設法解出來.

(5)討論解答——從方程式解出來的根，一定要代入原問題中來驗算.如果有不合題意的，應當除去，或加上適當的解釋.就是適合題意的，也要註明單位.

2. 一元一次方程式的應用問題：

例. 有甲乙二童賽跑於若干丈之間，甲每分鐘之速度

較乙之 3 倍少 18 丈,若乙先行 48 丈,甲始出發,則經 8 分鐘同達,問 1 分鐘甲乙速度各如何? (天津女子師範學院)

[解]　假定乙每分鐘的速度是 x 丈.

那末甲每分鐘的速度是 $(3x-18)$ 丈.

因爲 8 分鐘以後甲乙二人同時達到,并且乙先走 48 丈,

$$\therefore \quad 8x+48=8(3x-18)$$

解出來,得　　　　$x=12,$

又　　　　$3x-18=3\times 12-18=36-18=18.$

所以甲的速度是每分鐘 18 丈,乙是每分鐘 12 丈.

3. 一次聯立方程式的應用問題:

例 1.　設 $B.$ 給 $A.$ 27 元,則二人所有相等;如 A 給 B 43 元,則 A 所有爲 B 之半.問各有若干?　(廣州)

[解]　假定 A 有銀 x 元,B 有銀 y 元,照題意,得

$$x+27=y-27 \qquad (1)$$

$$x-43=\frac{y+43}{2} \qquad (2)$$

解出來,　　$x=183,\ y=237,$

所以　　A 有銀 183 元,B 有銀 237 元.

例 2.　三角形有兩角相等,且此相等兩角之和等於第三角,求各角之度數?

〔解〕　假定　x, y, z 是三角形三個角的度數，那末

$$\begin{cases} x+y+z=180° & (1)(因為三角形內角的和等於 180°) \\ x=y & (2) \\ x+y=z & (3) \end{cases}$$

用(3)代入(1)　$2x+2y=180°$　　(4)

再(2)代入(4)　$4x=180°$，$\therefore\ x=45°, y=45°\ \therefore\ z=90°$.

所以這三角形的三個角是 45°, 45° 及 90°.

4.　一元二次方程式的應用問題：

例 1.　二數之差為 12，其平方之和為 1130，求二數.

(廣州)

〔解〕　假定 x 是大數，那末 $x-12$ 是小數．照題意，得

$$x^2+(x-12)^2=1130,$$

整理，

$$x^2-12x-493=0.$$

$$(x-29)(x+17)=0,$$

$$\therefore\quad x=29 \text{ 或 } -17.$$

$$29-12=17 \text{ 或 } -17-12=-29.$$

所以這兩個數是 29 和 17 或 −17 和 −29.

例 2.　一長方形之錫片，長大於寬 4 公寸，於其四角各割去每邊 6 公寸之正方形，則可成一容積 840 立方公寸

無蓋之箱.求此箱之長,寬,高. (河北,二十二年)

[解] 假定錫片的寬是 x 公寸,那末長就是 $(x+4)$ 公寸.四角割去以後所成的箱子,牠的寬是 $(x-2\times6)$ 公寸,長是 $(x+4-2\times6)$ 公寸,高是 6 公寸,所以

$$6(x-12)(x-8)=840.$$

解出來, $x=22$ 或 $x=-2$ (負數不合題意)

$$22-12=10,\ 22-8=14.$$

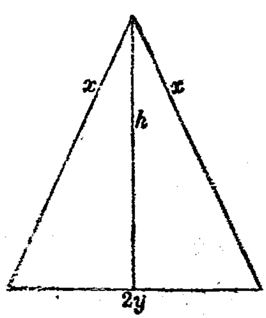
所以這箱子的長是 14 公寸,寬是 10 公寸,高是 6 公寸.

5. 二次聯立方程式的應用問題:

例 1. 有二等邊三角形,其周長等於 $2p$,其高爲 h,求各邊之長. (廣西,二屆)

[解] 假定二個等邊的長是 x,底邊的長是 $2y$,那末

$$x+x+2y=2p \qquad (1)$$



$$x^2-y^2=h^2 \qquad (2)$$

從(1)得 $2x+2y=2p$, $x+y=p$ (3)

從(3)得, $x=p-y$

代入(2) $(p-y)^2-y^2=h^2$

$$\therefore\ y=\frac{p^2-h^2}{2p},\ x=\frac{p^2+h^2}{2p}$$

例2. 一直角三角形周圍長 60 寸, 斜邊長 20 寸, 求他二邊之長,　　　　(雲南,二十三年)

[解] 假定二個直角邊的長是 x 寸及 y 寸, 那末

$$\begin{cases} x+y=60-20, \\ x^2+y^2=400. \end{cases}$$

解出來, 得 x, y 都是虛數, 所以這個題是沒有解答.

例3. 圓內接一矩形, 其面積為 48 平方寸, 設圓半徑為 5 寸, 試求矩形兩邊之長.　　　　(湖北)

[解] 因圓內接矩形的對角線是圓的直徑; 如假定矩形的一邊是 x 寸, 他邊是 y 寸, 那末就得:

$$\begin{cases} x^2+y^2=(2\times5)^2=100 & (1) \\ xy=48 & (2) \end{cases}$$

(1)+2×(2)　　$x^2+2xy+y^2=196$

開平方,　$x+y=14$　(3), 或 $x+y=-14$　(4)

(1)−2×(2),　$x^2-2xy+y^2=4$,

開平方,　$x-y=2$　(5), 或 $x-y=-2$.　(6)

解出　(3), (5) 得　$x=8$, $y=6$;

解出　(3), (6) 得　$x=6$, $y=8$;

解出　(4), (5) 得　$x=-6$, $y=-8$;

解出　(4), (6) 得　$x=-8$, $y=-6$.

因爲負數解答,不合適題意,所以矩形兩邊的長是 8 寸和 6 寸.

例 4. 有三數,其中任意二數之和爲餘一數之逆數,試求此三數. (漢口)

[解] 假定三個數是 x, y, z;牠們的逆數依次是 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$

照題意,
$$x+y=\frac{1}{z} \qquad (1)$$
$$y+z=\frac{1}{x} \qquad (2)$$
$$z+x=\frac{1}{y} \qquad (3)$$

各用 z, x, y 去乘,得
$$xz+yz=1 \qquad (4)$$
$$xy+xz=1 \qquad (5)$$
$$yz+xy=1 \qquad (6)$$

$[(4)+(5)+(6)]\div 2$,
$$xy+yz+xz=\frac{3}{2}, \qquad (7)$$

$(7)-(4)$,
$$xy=\frac{1}{2}, \qquad (8)$$

$(7)-(5)$,
$$yz=\frac{1}{2}, \qquad (9)$$

$(7)-(6)$,
$$xz=\frac{1}{2}, \qquad (10)$$

三式相乘，　$$x^2y^2z^2=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\quad xyz=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\quad (11)$$

用 (9), (10), (8) 依次除 (11), 得

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore$ 所求的三數是 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$；或

$$-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. 分式方程式的應用問題：

例. 一農夫種地若干畝，共可收米 36 石，如每畝可多收一石的$\frac{1}{5}$，則雖少種 2 畝亦仍可收得 36 石. 問每畝收量若干，並其畝數？　　(山西，二十二年)

〔解〕 假定這農夫共種地 x 畝，那末每畝可收$\frac{36}{x}$石米；如少種 2 畝，每畝可收$\frac{36}{x-2}$石米. 所以

$$\frac{36}{x}+\frac{1}{5}=\frac{36}{x-2},$$

去分母，　$180(x-2)+x(x-2)=180x,$

整理，　$x^2-2x-360=0,$

$$(x-20)(x+18)=0.$$

$$\therefore \quad x=20 \text{ 或 } -18 \quad \text{(負數不合題意)}$$

$$\frac{36}{x}=\frac{36}{20}=1\frac{4}{5}=1.8,$$

所以這農夫共種地 20 畝，每畝收 1 石 8 斗米.

7. 根式方程式的應用問題:

例. 一矩形之周圍,爲其對角線之$\frac{34}{13}$倍;又長比寬多 7 寸. 求此矩形之面積.

[解] 假定寬是 x 寸，那末長就是 $(x+7)$寸，周圍是 $2(2x+7)$寸，對角線是$\sqrt{x^2+(x+7)^2}$寸. 所以得方程式:

$$2(2x+7)=\frac{34}{13}\sqrt{x^2+(x+7)^2}.$$

去分母後再平方,

$$169(4x^2+28x+49)=289(2x^2+14x+49)$$

整理，
$$x^2+7x-60=0,$$

$$(x-5)(x+12)=0,$$

$$\therefore \quad x=5 \text{ 或 } -12. \quad \text{(負數不合題意)}$$

$$x+7=5+7=12.$$

所以矩形的面積是$(5\times 12)=60$ 平方寸.

第九章

不定方程式

1. 不定方程式和牠的解答　在一組不定方程式裏，方程式的個數常比較未知數的個數少．不定方程式的解答往往不止一個，在下面的定理裏，說得很明白．

定理： 在二元一次不定方程式 $ax+by=c$ 裏，如 a，b 是互質數，那末至少有一組整數的解答．

2. 二元一次不定方程式的解法　先解出 x，把所得的值化成帶分數．假定牠的分數部份是一個整數 k，那末就得一個含有 y 及 k 的新方程式．從這個新方程式解出 y，把所得的值，化成帶分數．再假定牠的分數部份是一個整數 l，那末又可得一個新方程式．照這樣繼續做下去，就可求得原方程式的解答．

例　求 $7x-13y=26$ 的正整數解．

〔解〕　解出 x，得 $x=\dfrac{13y+26}{7}=y+3+\dfrac{6y+5}{7}$　　(1)

因爲 x, y 都是整數，所以 $\frac{6y+5}{7}$ 也是整數，令 k 代表這個整數，那末

$$6y+5=7k,$$

$$y=\frac{7k-5}{6}=k+\frac{k-5}{6} \qquad (2)$$

因爲 y, k 都是整數，所以 $\frac{k-5}{6}$ 也是整數. 令 m 代表這個整數，那末

$$k-5=6m,$$

$$\therefore \quad k=6m+5.$$

代入(2)， $y=k+m=7m+5.$

代入(1)， $x=y+3+k=7m+5+3+6m+5$

$=13m+13.$

$m=0$ 時， $x=13,$ $y=5;$

$m=1$ 時， $x=26,$ $y=12;$

$m=2$ 時， $x=39,$ $y=19;$

……………………………………………………

3. 三元一次不定方程式的解法 從兩個方程式消去任意一個未知數，再把所得的方程式照上節的方法來解.

例. 有某數以十七除之餘一，以十九除之餘二. 問該數

最小應爲若干?　　　　(武漢大學)

[解]　假定某數是 x, 用 17 去除就得商 y, 餘 1; 用 19 去除就得商 z, 餘 2. 所以

$$\begin{cases} x=17y+1 & (1) \\ x=19z+2 & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \qquad 17y-19z-1=0 \qquad (3)$$

$$\text{從 } (3) \qquad y=\frac{19z+1}{17}=z+\frac{2z+1}{17},$$

因爲 y, z 都是整數,所以 $\frac{2z+1}{17}$ 也是整數. 令 k 代表這個整數,那末

$$2z+1=17k,$$

$$z=\frac{17k-1}{2}=8k+\frac{k-1}{2},$$

同樣, $\frac{k-1}{2}$ 也是整數, 令 n 代表這個整數,那末

$$k-1=2n,$$

$$\therefore \quad k=2n+1.$$

$$\therefore \quad z=8(2n+1)+n=17n+8,$$

$$x=19(17n+8)+2=323n+154,$$

$n=0$ 時,　　$x=154$,

$n=1$ 時,　　$x=477$,

$n=-1$ 時,　　$x=-169$,

………………………………

所以 x 的最小正整數值是 154.

第 十 章

比例及變數法

1 基本定理

(1) 如 $a:b=c:d$, 那末 $ad=bc$,

(2) 如 $a:b=c:d$, 那末 $a:c=b:d$, (更理)

(3) 如 $a:b=c:d$, 那末 $b:a=d:c$, (逆理)

(4) 如 $a:b=c:d$, 那末 $a+b:b=c+d:d$,(合理)

(5) 如 $a:b=c:d$, 那末 $a-b:b=c-d:d$,(分理)

(6) 如 $a:b=c:d$, 那末 $a+b:a-b=c+d:c-d$,

(合分理)

(7) 如 $a:b=c:d$, 那末 $a^n:b^n=c^n:d^n$.

(8) 如 $a:b=b:c$, 那末 $b=\pm\sqrt{ac}$.

(9) 如 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots$, 那末

$$a+c+e+\cdots\cdots:b+d+f+\cdots\cdots=a:b.$$

2. 比例式的解法 把比例式照基本定理 1 化做等式;然後照方程式的例解出來.

3. 比例式的證法:

(a) 綜合法　把已經知道的定理,定義,等等,逐步推演下去.

(b) 解析法　先假定結果是眞確的,倒推逆溯上去,直到一已證明的理,或已知的理.

(c) 代入法　令 $a:b=c:d=k$, 就得 $a=bk$, $c=dk$, 用這結果代入要證的式子,就可證明比例式的眞確不眞確.

例 1. 若 $a:b=c:d$, 求證

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}},\qquad \text{(清華大學)}$$

[證] 用綜合法來證:

$$\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\ \text{(合分理)}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{c^2+2cd+d^2}{c^2-2cd+d^2},\ \text{(定理 7)}$$

用合分理,得 $$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{c^2+d^2}{2cd}.$$

$$\therefore\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2cd}{c^2+d^2},\qquad \text{(逆理)}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2+2cd+d^2}{c^2+d^2},\qquad \text{(合理)}$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\qquad (更理)$$

所以從定理 7, 知道

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}},$$

例 2. 設 $a:b=c:d$, 證

$$b(a+b-c-d)=(a+b)(b-d).\qquad (江蘇,二屆)$$

[證] 用解析法來證:

假定這式是真確的,那末一定有

$$\frac{a+b-c-d}{b-d}=\frac{a+b}{b},$$

從分理,知道一定要

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\ 或\ \frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b},\qquad (更理)$$

$$\therefore\quad 1-\frac{a-c}{a}=1-\frac{b-d}{b}.$$

就是 $$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\ 或\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

$\therefore\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 這式是真, 所以原式也真.

例 3. 同前例.

[證] 用代入法來證:

假定 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那末 $a=bk, c=dk,$

代入，得 左邊 $=b(a+b-c-d),$

$=b(kb+b-d-kd),$

$=b(b-d)(k+1),$

右邊 $=(a+b)(b-d),$

$=(bk+b)(b-d),$

$=b(b-d)(k+1),$

$\therefore\quad b(a+b-c-d)=(a+b)(b-d).$

4. 變的方式:

(1) $x\propto y$，就是 x 因 y 而正變

(2) $x\propto\frac{1}{y}$，就是 x 因 y 而反變.

(3) $x\propto yz$，就是 x 因 y, z 而正變.

(4) $x\propto\frac{y}{z}$，就是 x 因 y 而正變，因 z 而反變

5. 變數法的公式:

(1) $x\propto y$ 時，$x=my$.

(2) $x\propto\frac{1}{y}$ 時，$x=\frac{m}{y}$ 或 $xy=m,$

(3) $x\propto yz$ 時，$x=myz$.

(4) $x \propto \frac{y}{z}$ 時, $x = m\frac{y}{z}$ 或 $xz = my$,

m 是一定的常數;牠的值可以用方法求得.舉例如下:

例. 設有氣體,當温度爲攝氏 90 度,壓力爲水銀柱 750 糎時,其體積有 1 立方粎.問當温度爲 240 度,壓力爲 1000 糎時,其體積幾何?

[解] 假定體積是 x 立方粎,温度是攝氏 y 度,壓力是 z 糎,那末

$$x \propto \frac{y+273}{z} \quad \text{卽} \quad x = \frac{m(y+273)}{z}$$

$$\text{或} \qquad xz = m(y+273)$$

$$\text{所以} \qquad 1 \times 750 = m(90+273)$$

$$\therefore \qquad m = \frac{750}{363} = \frac{250}{121}$$

$$\therefore \qquad \text{所求的體積是 } x = \frac{250}{121} \times \frac{240+273}{1000}$$

$$= \frac{250}{121} \times \frac{513}{1000} = 1.06 \text{ 立方粎}.$$

第十一章

初等級數

1. 等差級數的公式:

假定首項是 a, 公差是 d, 第 n 項是 l, 項數是 n, 總和是 s, 那末

(1) 求 n 次項的公式是 $l=a+(n-1)d$,

(2) 求總和的公式是 $s=\frac{n}{2}(a+l)$

或 $$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

例. 有級數 11, 16, 21, 26 等. 級數之和爲 279, 求級數之項數. (福建)

[解] 因爲 $a=11$,

$$\therefore\quad d=16-11=21-16=\cdots\cdots=5,$$

代入公式, 得

$$279=\frac{n}{2}\{22+5(n-1)\}.$$

整理，得　　$5n^2+17n-558=0.$

$$(n-9)(5n+62)=0.$$

$\therefore$　$n=9$，或　$-62/5$　(項數不能爲負數)

所以這級數9項的和是279.

2.　等差級數的中項插入法:

假定在 a, b 兩數中間，插入 m 項，構成等差級數，那末連首末兩項總共有 $(m+2)$ 項，所以

$$b=a+(m+2-1)d \quad \therefore\ d=\frac{b-a}{m+1},$$

所插入的各項就是:

$$a+\frac{b-a}{m+1},\ a+2\frac{b-a}{m+1},\ a+3\frac{b-a}{m+1},\ \cdots\cdots$$

3.　等比級數的公式:

假定首項是 a，公比是 r，第 n 項是 l，項數是 n，總和是 s，又無限等比級數的和是 s_∞，那末

(1) 求第 n 項的公式是 $l=ar^{n-1}$.

(2) 求總和的公式是

$$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ \text{或}\ s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

(3) 求無限項數的和的公式是

$$s_\infty=\frac{a}{1-r},$$ 但是一定要 r 的絕對值小於1.

例1. 級數之和爲 1456, 首項爲 4, 末項爲 972. 求公比及項數. (綏遠)

[解] $a=4,\ l=972,\ s=1456.$

代入公式,得 $$972=4r^{n-1}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$1456=\frac{4(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots(2)$$

從(1)得 $$r^{n-1}=243\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入(2)並且化簡,得 $364(r-1)=243r-1,$

解出來, $$r=3,$$

代入(3), $$3^{n-1}=243=3^5,$$

$$\therefore\ n-1=5\quad\therefore\ n=6.$$

答: 公比是 3, 項數是 5.

例2. 求等比級數 $\frac{5}{7}+\frac{10}{21}+\frac{20}{63}+\frac{40}{189},+\cdots\cdots$ 無窮項之和. (江蘇,一屆補考)

[解] $a=\frac{5}{7},\qquad r=\frac{10}{21}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}.$

$$\therefore\ s_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{15}{7}.$$

例 3. 有一成等差級數之三數，三數相加，和爲 36. 如以 1, 4, 43 分別加此三數，則另成三數，彼此關係適爲等比級數.　　　　（上海，一屆）

[解]　假定這三數是 $a-d$, a 及 $a+d$, 那末

$$a-d+a+a+d=36,$$

就是　$$3a=36 \quad \therefore \quad a=12.$$

又　$a-d+1$, $a+4$, $a+d+43$, 三數成等比級數，所以

$$\frac{a+4}{a-d+1}=\frac{a+d+43}{a+4},$$

就是　$$(a+4)^2=(a-d+1)(a+d+43)$$

用 $a=12$ 代入，得

$$16^2=(12-d+1)(12+d+43),$$

化簡，得　$$d^2+42d-459=0,$$

$$(d+51)(d-9)=0,$$

$$\therefore \quad d=-51 \text{ 或 } 9.$$

$\therefore$　所求的三數是 63, 12 及 -39;

或　　　3, 12 及 21.

4. 等比級數的中項插入法:

假定在 a, b 中間插入 m 個中項，構成等比級數，那末連首末兩項總共有 $m+2$ 項，所以

$$b = ar^{m+2-1} \qquad \therefore \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

而插入的各項就是

$$a\cdot\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \qquad a\cdot\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \cdots\cdots, \text{等等}.$$

例. 設一等比級數之第一項爲 2, 第四項爲 1024, 求第二項與第三項.　　　　(上海,二屆)

[解]　　$r = \sqrt[3]{\frac{1024}{2}} = \sqrt[3]{512} = 8.$

所以插入的中項是 16 及 128.

或者說第二項,第三項是 16 及 128.

5. 求調和級數的項數及第 n 項法:

(1) 要求調和級數 $a, b, c, \cdots\cdots r$ 的項數, 祇要求出等差級數 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots\cdots \frac{1}{r}$ 的項數就行.

(2) 要求調和級數 $a, b, c, \cdots\cdots$ 的第 n 項, 可先求等差級數 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots\cdots$ 的第 n 項. 牠的逆數, 就是所求的調和級數的第 n 項.

6. 調和級數的中項插入法:

要在 a, b 二數中間插入 m 個中項, 構成調和級數, 那末

可先求在 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ 中間的等差級數的 m 個中項,這些中項的逆數,就是要求的調和級數的 m 個中項.

例. 求在 $\frac{1}{7}$ 及 $\frac{1}{27}$ 兩數間插入 4 個中項,構成調和級數.

[解] $\because\quad 27=7+(6-1)d\quad \therefore\quad d=4.$

因爲在等差級數 7 與 27 中間的四個中項是 11, 15, 19 及 23, 所以 $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, 就是所求的調和級數的四個中項.

7. 三種級數的關係:

(1) 如 a, b, c 三數成等差級數,那末 $a-b:b-c=a:a.$

(2) 如 a, b, c 三數成等比級數,那末 $a-b:b-c=a:b.$

(3) 如 a, b, c 三數成調和級數,那末 $a-b:b-c=a:c.$

(4) 因爲 a, b 的等差中項是 $A=\frac{a+b}{2}$,

a, b 的等比中項是 $G=\sqrt{ab}$,

a, b 的調和中項是 $H=\frac{2ab}{a+b}$.

所以 $$G^2=AH.$$

第十二章

指數根式及虛數

1. 特殊的指數：

(1) 零指數　$x^0=1,$

(2) 負指數　$x^{-n}=\dfrac{1}{x^n},$

(3) 分指數　$x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x},\quad x^{\frac{a}{n}}=(\sqrt[n]{x})^a=\sqrt[n]{x^a}.$

2. 指數定律：

(1)　$a^m\times a^n=a^{m+n},$

(2)　$a^m\div a^n=a^{m-n},$

(3)　$(a^m)^n=a^{mn}.$

例 1. 化簡 $\dfrac{a^{-2}x^{-2}}{(ax)^{-1}-(ax)^{-2}}$　（交通大學）

［解］ 原式$=\dfrac{\dfrac{1}{a^2x^2}}{\dfrac{1}{ax}-\dfrac{1}{a^2x^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{a^2x^2}}{\dfrac{ax-1}{a^2x^2}}=\dfrac{1}{ax-1}.$

例 2. 化簡 $\dfrac{ax(a^{-1}x-ax^{-1})}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$　（東吳大學）

〔解〕 原式$=\dfrac{x^2-a^2}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{(x^{\frac{2}{3}})^3-(a^{\frac{2}{3}})^3}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$

$$=(x^{\frac{2}{3}})^2+x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}+(a^{\frac{2}{3}})^2=x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}},$$

例3. 化簡 $\left(\sqrt[4]{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}\sqrt{xy}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (南開大學)

〔解〕 原式$=\left(\sqrt[4]{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[4]{x^{-\frac{1}{6}}y}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$$=\left(x^{-\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(x^{-\frac{1}{24}}y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}},$$

$$=x^{-\frac{1}{24}(-\frac{2}{3})}y^{\frac{1}{4}(-\frac{2}{3})}=x^{\frac{1}{36}}y^{-\frac{1}{6}}.$$

3. 根式的計算律：

(1) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$,　　(2) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

(3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,　　(4) $\sqrt[pn]{a^{pm}}=\sqrt[n]{a^m}$.

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

4. 根式的化簡：

(a) 最簡之條件——根式裏的被開方數要有下面的三個條件：(i) 牠是整數，(ii) 不含指數等於或大於根式指數的因數，(iii) 指數同根式指數一定要成互質數．

(b) 化簡的方法——(i) 如被開方數是一個分式，那末用一最簡的數乘分子分母，使分母恰好開方 (ii) 根式$\sqrt[n]{R}$

裏的 R, 如果有因數 F^m, 而 $m=np+q$, $q<n$; 那末把 F^p 移到根式外面, F^q, 仍留在根式裏面. (iii) 把被開方數裏因數的指數, 同根式指數約去公約數.

例. $\sqrt{\dfrac{2}{3a}}=\sqrt{\dfrac{2\times 3a}{3a\times 3a}}=\dfrac{\sqrt{6a}}{3a}$,

$$\sqrt[4]{80ab^3x^5y^6}=\sqrt[4]{2^4\times 5ab^3x^5y^6}$$

$$=2xy\sqrt[4]{5ab^3xy^2},$$

$$\sqrt[6]{125a^3b^3}=\sqrt[6]{5^3a^3b^3}=\sqrt{5ab}.$$

5. 根式的加減法 先把各根式化簡, 同類的就合併, 不同類的用加減號連起來.

6. 把根式化成同次法 先把各根式化簡, 再求各根式指數的 L. C. M., 然後把各根式改成用這 L. C. M. 做公共根指數的根式.

7. 根式的乘法 如根式的次數不同, 那末先把牠們化成同次. 同次根式相乘時, 根式係數的積是新根式的係數; 被開方數的積是新根式的被開方數, 最後把新根式化成最簡根式.

8. 根式的除法 先記做分數的形式, 再用分母的消根因數乘分子分母. 乘後, 再把牠化簡.

例1. 化簡 $\sqrt{18}-8^{\frac{1}{2}}$,　　　　(燕京大學)

[解] 原式 $=\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}.$

例2. 化簡 $\sqrt[4]{x^{2n+1}}\cdot\sqrt[4]{x^{-1}}.$　　　　(交通大學)

[解] 原式 $=\sqrt[4]{x^{2n+1}\cdot x^{-1}}=\sqrt[4]{x^{2n}}=\sqrt{x^{n}}.$

例3. 試求 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 之近似值至小數三位.(湖北)

[解] 原式 $=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\dfrac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3}$

$$=\frac{10+2\sqrt{21}}{4}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$=\frac{5+4.582}{2}=\frac{9.582}{2}=4.791.$$

例4. 化 $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 爲以有理數作分母之等值分數.　　　　(廈門大學)

[解] 原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(3-5)(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2+3+2\sqrt{6}-5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{15}+5+\sqrt{6}+\sqrt{10})-2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{12}(\sqrt{15}+5+\sqrt{6}+\sqrt{10})-2\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{12}$$

$$=\frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{30}-2\sqrt{30}-4\sqrt{3}}{12}$$

$$=\frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.$$

9. 虛數的類別及記法:

(1) 純虛數 (簡稱虛數) 是虛數單位 $\sqrt{-1}$ 的實數倍數, 記做 $a\sqrt{-1}$ 或 ai.

(2) 複虛數 (簡稱複數)是實數同虛數的代數和,記做 $a+bi$.

10. 虛數的加減法 先把虛數寫成 ai 的形狀;再合併 i 的係數.

11. i 的乘冪公式 $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^{4n+k}=i^k$

12. 虛數的乘法 把虛數寫成 ai 的形狀, 再相乘; 并且應用上節的公式去化簡.

13. 虛數的除法 先把牠記做分數的形狀, 再用同一數乘分子分母,使分母化成有理實數.

14. 複數的加減法 分別合併虛數,實數兩部分.

公式: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$.

15. 複數的乘法 照多項式的乘法來演算.

公式: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

16. 共軛複數 $a+bi$ 及 $a-bi$, 叫做共軛複數. 牠的和同積,都是實數.

17 複數的除法 先把牠記做分數的形狀; 再用分母的共軛複數,乘分子分母

公式: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}i.$

例 1. $(2+3i)(1-4i)=?$ (浙江,二十一年覆試)

[解] 原式 $=2+3i-8i-12i^2=2-5i+12=14-5i.$

例 2. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=?$ (浙江,二十一年二期)

[解] 原式 $=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=\dfrac{1+2i\sqrt{3}-3}{1+3}$

$$=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

第十三章

對數 對數方程式及指數方程式

1. 對數及指數 假使 $b^x=N$, 那末 x 就叫做用 b 做底時 N 的對數. 記做 $\log_b N=x$.

2. 對數的性質:

(1) $\log_b b=1$.

(2) $\log_b 1=0$.

(3) $\log_b(MN)=\log_b M+\log_b N$.

(4) $\log_b\left(\frac{M}{N}\right)=\log_b M-\log_b N$.

(5) $\log_b N^m=m\log_b N$.

3. 對數的種類:

(a) 常用對數——用 10 做底(通常 10 可略去不寫).

(b) 自然對數——用 e 做底.($e=2.7182818284\cdots\cdots$).

4. 常用對數的兩部:

(a) **指標** 對數的整數部分叫指標.決定指標的方法

如下：(i) 凡大於 1 的數，牠的指標是正數，并且比較整數的位數少 1；(ii) 凡小於 1 的數，牠的指標是負數，并且比較小數點以後第一位有效數以前的圈多 1.

(b) 假數　對數的小數部分叫假數. 假數常是正數；并且有效數字順序相同，或爲 10^n 倍，或爲 10^{-n} 分，其假數是相同的.

5. 底的變換：

(1) $\log_a x=\log_b x/\log_b a$.

(2) $\log_{10} x=k\log_e x,\ k=\dfrac{1}{\log_e 10}=0.43429\cdots\cdots$.

例 1. 已知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, $\log 5=0.69897$, 試求 $\log 180$ 之值。　(廣東)

[解] $\log 180=\log(2^2\cdot 3^2\cdot 5)$

$$=2\log 2+2\log 3+\log 5,$$
$$=2\times 0.30103+2\times 0.47712+0.69897.$$
$$=2.25527.$$

例 2. 已知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, 試計算 $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$ 之值.　(福建)

[解] $\log 4=\log 2^2=2\log 2=2\times 0.30103=0.60206.$

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.30103=0.69897.$$

$$\log 6=\log 2\times 3=\log 2+\log 3=0.30103+0.47712$$
$$=0.77815.$$

$$\log 8=\log 2^3=3\log 2=3\times 0.30103=0.90309.$$

$$\log 9=\log 3^2=2\log 3=2\times 0.47712=0.95424.$$

例 3.　$\log 2+\log 5+\log 100-3\log 10^{\frac{2}{3}}=?$

(北平大學)

[解]　原式$=\log[2\times 5\times 100\div(10^{\frac{2}{3}})^3]$

$=\log 10=1.$

例 4.　若 $a^2+b^2=7ab$, 試證　　(北京大學)

$$\log\left\{\frac{1}{3}(a+b)\right\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b).$$

[證]　$\because\ a^2+b^2=7ab\quad\therefore\ a^2+2ab+b^2=9ab.$

兩邊開方,　$a+b=3\sqrt{ab}$ 或 $\frac{1}{3}(a+b)=\sqrt{ab}$,

$$\therefore\quad \log\left\{\frac{1}{3}(a+b)\right\}=\log\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\log a+\log b).$$

6.　指數方程式的解法:

(a) 用指數來解　把兩邊設法改做同底的乘冪；再解合指數相等的方程式.

(b) 用對數來解　兩邊各取對數，然後再解所得的方

程式.

例 1. 設 $2^{x+2}=2\sqrt{2}$, 求 x. (湖南)

[解] $2^{x+2}=2^{\frac{3}{2}}$ $\therefore$ $x+2=\frac{3}{2}$, 得 $x=-\frac{1}{2}$.

例 2. 解指數方程式 $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^{2x}}=\left(\frac{6}{5}\right)^{4-x}$ (同濟大學)

[解] 把原方程式改做:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2x}{3}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{x-4} \quad \therefore \frac{2x}{3}=x-4.$$

解出來, $x=12$.

例 3. 解 $a^{\frac{x+1}{x-1}}=b^{\frac{x-1}{x+1}}$ (同濟大學)

[解] 兩邊取對數, 得

$$\frac{x+1}{x-1}\log a=\frac{x-1}{x+1}\log b,$$

$$(x+1)^2\log a=(x-1)^2\log b.$$

$$(x^2+2x+1)\log a=(x^2-2x+1)\log b,$$

$$(\log a-\log b)x^2+2(\log a+\log b)x+\log a-\log b=0$$

$$[(\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b})x+(\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b})]$$

$$\times[(\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b})x+(\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b})]=0.$$

$$\therefore \quad x=-\frac{\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}}{\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b}}, \text{ 或 } x=-\frac{\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b}}{\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}}.$$

7 對數方程式的解法 把用對數表示的關係式，設法改成用指數表示的關係式；然後解出改變以後的方程式.

例1. 已知 $\log_3 x=-2$，求 x 之值. (湖南，四屆)

[解] $\log_3 x=-2$，就是 $x=3^{-2}$.

$$\therefore\quad x=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

例2. 設 $\log x+\log(x-3)=1$，求 x 之值. (湖南，五屆)

[解] $\log x+\log(x-3)=1$,

就是 $\log x(x-3)=1$.

改成指數的形狀, $x(x-3)=10^1$,

就是 $x^2-3x=10$,

或 $x^2-3x-10=0$,

解出來，得 $x=5$ 或 -2.

因爲負數不可取對數，所以 -2 的根不合理，原方程式祇有 $x=5$ 的一個根.

第十四章

排列組合及適遇

1. 排列的公式：

(1) 在 n 個相異物中，每次取 r 個的排列方法，有

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\text{ 種.}$$

(2) 在 n 個相異物中，每次取 n 個的排列方法，有

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1=\lfloor n\text{ 種.}$$

(3) 如 n 個物中，有 p 個物屬於一類，q 個物屬於別一類，……；每次取 n 個的排列方法，有

$$P=\frac{\lfloor n}{\lfloor p\lfloor q\cdots}\text{ 種.}$$

(4) 在 n 個相異物中，每次取 r 個；如允許重複用同一物，那末排列的方法有 n^r 種.

(5) 在 n 個相異物中，每次取 r 個，做成環狀排列時，排列的方法有 ${}_nP_r/r$ 種.

例 1. 以 1,2,3 三字可作成幾種三位數? (北平大學)

[解] 如 1,2,3 三字中不許重複用同一數字,那末共有

$${}_3P_3=\underline{\lfloor 3}=6\text{ 種.}$$

又如 1,2,3, 三字中許重複用同一數字,那末共有

$$3^3=27\text{ 種.}$$

例 2. 以數字 1,1,1,2,2,2,5 作成七位數,共有幾種?

(河北工學院)

[解] $$P=\frac{\underline{\lfloor 7}}{\underline{\lfloor 3}\,\underline{\lfloor 3}}=14\text{ 種.}$$

例 3. 有四男四女圍坐圓桌,男與男不相鄰,女與女亦然,問坐法有幾? (福建)

[解] 四女席的變化,有

$$\frac{{}_4P_4}{4}=\frac{\underline{\lfloor 4}}{4}=\underline{\lfloor 3}=6\text{ 種.}$$

但這 6 種變化,每種因爲加入四男而發生的變化,有 $\underline{\lfloor 4}=24$ 種 所以總變化是

$$6\times 24=144\text{ 種.}$$

2. 組合的公式:

(1) 在 n 個相異物中,每次取 r 個的組合方法,有

$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{\underline{\lfloor r}}=\frac{\underline{\lfloor n}}{\underline{\lfloor r}\,\underline{\lfloor n-r}}\text{ 種.}$$

(2)　在 n 個相異物中，每次取 $(n-r)$ 個的組合方法，有

$${}_nC_{n-r}={}_nC_r=\frac{}{\lfloor\!\underline{\,r\,}\ \lfloor\!\underline{\,n-r\,}}\text{種.}$$

(3)　在 n 個相異物中，每次取 r 個，并且允許複用的組合方法，有

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor\!\underline{\,r\,}}\text{種.}$$

例 1.　在 a,b,c,d 四字中，每三個字一取之法，共有幾種取法？　(北平大學)

[解]　取法共有 ${}_4C_3=\frac{\lfloor\!\underline{\,4\,}}{\lfloor\!\underline{\,3\,}\ \lfloor\!\underline{\,4-3\,}}=4$ 種.

例 2.　有正十邊形，取其頂點聯線，可得若干個三角形，又可得對角線若干？　(四川，一屆)

[解]　總共可得 ${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$ 個三角形.

又共有對角線 ${}_{10}C_2-10=35$ 根，

裏面有 10 根是正十邊形的邊，牠們不是對角線，所以應該除去.

3.　**組合的極大值：**

(1)　如 n 是偶數，那末 ${}_nC_r$ 在 $r=\frac{1}{2}n$ 時，有極大值.

(2) 如 n 是奇數,那末 ${}_nC_r$ 在 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $r=\frac{1}{2}(n-1)$ 時,有極大值.

4. 成適遇與敗適遇. 做一件事,有 m 次成功,有 n 次失敗.假使成功和失敗出現的機會是均等的,那末這件事的成適遇是 $\frac{m}{m+n}$,又牠的敗適遇是 $\frac{n}{m+n}$.

5 適遇的求法:

(*a*) 諸件事不能同時並立. 在相異的諸件事中,任意一件事的成適遇等於各事成適遇的和.

(*b*) 諸件事能同時並立 可以同時並立的二件事,牠們同時成功的適遇等於各事成適遇的相乘積.

例 今有甲乙二囊,甲容紅球五個,白球七個;乙容紅球三個,白球十二個.求由此二囊任取一紅球之適遇.

〔解〕 先求出選囊的適遇是 $\frac{1}{2}$. 如已經選定甲囊,那末從甲囊取出一個紅球的適遇是 $\frac{5}{12}$ 這二件事是同時並立,所以從甲囊取出一個紅球的適遇是 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$;同樣,從乙囊中取出一個紅球的適遇是 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$ 因爲二件事不能同時並立;所以要求的適遇是

$$\frac{5}{24}+\frac{1}{10}=\frac{37}{120}$$

第十五章

二項定理

1. 二項定理的公式及應用：

(1) $$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1\,a^{n-1}\,b+{}_nC_2\,a^{n-2}\,b^2+\cdots$$
$$+{}_nC_r\,a^{n-r}\,b^r+\cdots+b^n$$

(2) $$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}x^r+\cdots+x^n$$

利用這兩個公式，可以展開任意二項式的乘冪.

例 1. 試依 y 昇冪展 $(x-3y)^{\frac{1}{3}}$ 至前四項爲止.(安徽)

[解] $$(x-3y)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(3y)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}x^{-\frac{5}{3}}(3y)^2$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3\cdot2\cdot1}x^{-\frac{8}{3}}(3y)^3+\cdots$$
$$=x^{\frac{1}{3}}-\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^2}{x^{\frac{5}{3}}}-\frac{5y^3}{3x^{\frac{8}{3}}}-\cdots$$

例 2. 用二項定理求 $\sqrt[3]{1025}$ 之值至小數三位.

(江蘇, 一屆)

［解］ $\sqrt[3]{1025}=(1025)^{\frac{1}{3}}=10\left(\frac{1025}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}=10\left(1+\frac{1}{40}\right)^{\frac{1}{3}}.$

用公式 (b), 就得

$$\left(1+\frac{1}{40}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{40}-\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{40}\right)^2+\frac{5}{81}\times\left(\frac{1}{40}\right)^3+\cdots$$

$$=1+0.00833-0.00007+0.00000+\cdots$$

$$=1.00826$$

所以 $\sqrt[3]{1025}=10.0826.$

2. 公項的公式. 二項定理中的公項 (就是第 $r+1$ 項) 是:

(1) $$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}a^{n-r}b^r$$

或 $$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\cdot a^{n-r}b^r$$

(2) $$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}x^r \text{ 或 } \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

從 (1) 及 (2), 可求得二項定理中的任意項.

例 1. 求 $(1+2x)^8$ 展開式之中央項. (湖南)

或 求 $(1+2x)^8$ 展開式之第五項. (河南)

［解］ 這裏的中央項就是第五項, 所以是

$$\frac{\underline{|8}}{\underline{|4}\,\underline{|4}}(2x)^4=1120x^4$$

例 2. 求 $(1-x)^{-3}$ 之第 $(r+1)$ 項.　　(湖南, 四屆)

[解] 照公式知道第 $(r+1)$ 項是

$$\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\cdot\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(r+2)}{\underline{|r}}(-1)^r x^r$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$$

例 3. 求 $(x^2-x^{-1})^{14}$ 中 x^{10} 之係數. (河北, 二十二年)

[解] 從公式 (a), 知道第 $r+1$ 項是

$$\frac{\underline{|14}}{\underline{|r}\,\underline{|14-r}}(x^2)^{14-r}(-1)^r(x^{-1})^r=\frac{\underline{|14}}{\underline{|r}\,\underline{|14-r}}(-1)^r x^{28-3r}$$

令 $28-3r=10$　$\therefore$　$r=6$

所以 x^{10} 的係數是 $\dfrac{\underline{|14}}{\underline{|6}\,\underline{|8}}=3003$

3. 二項展開式的最大係數項:

(1) 如 n 是偶數, 那末第 $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ 項的係數最大.

(2) 如 n 是奇數, 那末第 $\dfrac{n+1}{2}$ 項及第 $\dfrac{n+3}{2}$ 項的係數相等, 並且都是最大.

例. 試求 $(1+x)^{10}$ 展開式中之最大係數項, 及其所含

x 之指數.　　　　(廣西, 二屆)

因爲 $n=10$, 所以第 6 項的係數最大. 展開式的第 6 項是 $\frac{|\underline{10}}{|\underline{5}\,|\underline{5}}x^5=252x^5$, 所以牠的指數是 5.

4. 二項展開式係數間的關係:

例 1. 求 $(1+x)^6$ 展開式中各項係數之和. (湖南, 五屆)

[解] 各係數的和 $=1+6+\frac{6\times5}{1\times2}+\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}$

$$+\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5}+1$$

$$=(1+1)^6=2^6=64.$$

例 2. 試證 $(a+b)^n$ 展式內, 諸係數之和爲 2^n.

(北平, 二十三年)

[證] 各係數的和 $={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots{}_nC_r+\cdots+{}_nC_n$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}+\cdots+1$$

$$=(1+1)^n=2^n.$$

第 十 六 章

恆等式及部份分數

1. 恆等式的證法:

(a) 綜合法. 利用已知的公式,定義,和定理,逐步推演下去.

(b) 數學歸納法. 先從實驗求得一普偏式;再證這普偏式對於任意值 m 成立時,對於 $m+1$ 也成立. 今 m 爲某數時這普偏式能成立,則 m 爲大於某數之任何整數,皆能使之成立.

(c) 未定係數法. 預先決定一代數式的變形,在牠的各項,附以未定係數,然後再從恆等式的性質,來求出各未定係數的值.

例 1. 求證 $\;{}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$ (四川,一屆)

(證) 用綜合法來證,那末

$$ {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} = \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r-1}} + \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|r-1}\;\underline{|n-r}} $$

$$=\frac{\lfloor n-1}{\lfloor r \lfloor n-r}\left[(n-r)+r\right]$$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}={}_nC_r$$

例 2. 用數學歸納法證二項定理 (浙江大學)

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

[證] $\because$ $(a+b)^1=a+b$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+{}_2C_1ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+{}_3C_1a^2b$$

$$+{}_3C_2ab^2+b^3$$

$(a+b)^6=a^6+{}_6C_1a^5b+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3\ldots$

$+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5ab^5+b^6$

假定 $n=m$ 時, 這定理照樣成立, 那末有

$= a^6+6a^5b+\frac{6\cdot5}{2}a^4b^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}a^3b^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2}\ldots$

$$(a+b)^m=a^m+{}_mC_1a^{m-1}b+{}_mC_2a^{m-2}b^2+{}_mC_ra^{m-r}b^r$$

$$+\cdots+b^m$$

$\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5\cdot4\cdot3\cdot2}ab^5+b^6$

用 $a+b$ 乘兩邊, 得

$= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3$

$+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$$(a+b)^{m+1}=a^{m+1}+(1+{}_mC_1)a^mb+({}_mC_1+{}_mC_2)a^{m-1}b^2$$

$$+\cdots+({}_mC_{r-1}+{}_mC_r)a^{m-r+1}b^r+\cdots$$

$$\cdots+({}_mC_{m-1}+{}_mC_m)ab^m+b^{m+1}$$

從例 1, 知道 $1+{}_mC_1={}_mC_0+{}_mC_1={}_{m+1}C_1$

$${}_mC_1+{}_mC_2={}_{m+1}C_2$$

....

$${}_mC_{r-1}+{}_mC_r={}_{m+1}C_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_mC_{m-1}+{}_mC_m={}_{m+1}C_m$$

$$\therefore\quad (a+b)^{m+1}=a^{m+1}+{}_{m+1}C_1a^mb+{}_{m+1}C_2a^{m-1}b^2+\cdots$$
$$+{}_{m+1}C_ra^{m-r+1}b^r+\cdots+{}_{m+1}C_mab^m+b^{m+1}.$$

這便證明在 $n=m+1$ 時, 本定理也能成立.但是已經知道 $n=1$ 時能成立,所以 $n=2$ 時也成立; $n=3$時也能成立普偏的講, n 是任意正整數時, 也都能成立.

例 3. 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2$ 之和.　　(北平大學)

[解] 假定 $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=a+bn+cn^2+dn^3$
$$+en^4+\cdots$$

用 $n+1$ 來代 n, 得

$$1^2+1^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=a+b(n+1)$$
$$+c(n+1)^2+d(n+1)^3+e(n+1)^4+\cdots$$

相減, 得

$$n^2+2n+1=b+2cn+c+3dn^2+3dn+d+4en^3$$
$$+6en^2+4en+e+\cdots$$

比較同次項的係數, 知 $e, f\cdots$ 等都是零, 并且

$$3d=1,\ 3d+2c=2,\ d+c+b=1.$$

解出來,得 $d=\frac{1}{3}, c=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{6}$.

又 a 是零.這個是很容易明白,祇要在第一個式子裏,令 $n=0$ 就得到了.

$$\text{所以 } 1^2+2^2+3^2\cdots\cdots n^2=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

2. 部分分數. 應用上節的 (c) 法,可把已知分數分做許多部分分數的和.

(1) 分母統統能分解成一次因數時,用公式

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots\cdots.$$

(2) 分母能分解成一次及二次因數時,用公式

$$\frac{F(x)}{(x-a)\cdots\cdots(x^2+px+q)}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{C}{x-a}+\cdots\cdots.$$

(3) 分母有重複因數時,用公式

$$\frac{F(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B}{(x-a)^{m-1}}+\frac{C}{(x-a)^{m-2}}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{Mx+N}{(a^2+px+q)^n}+\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$
$$+\frac{Rx+S}{(x^2+px+q)^{n-2}}+\cdots\cdots$$

例1. 分 $\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)}$ 爲部分分數. (北平大學)

[解] 令 $\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$.

去分母, $3x+7=A(x-2)+B(x-1)$.

用 $x=1$ 代入, 得 $-A=10$ $\therefore$ $A=-10$.

用 $x=2$ 代入, 得 $B=13$.

$$\therefore \quad \frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=\frac{13}{x-2}-\frac{10}{x-1}.$$

例2. 散分 $\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)(x^3+1)}$ 爲部分分數.

(上海,二十三年)

[解] 令 $\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)(x^3+1)}=\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}.$$

去分母, $x^2-4x+5=(Ax+B)(x-1)(x+1)$

$$+C(x+1)(x^2-x+1)+D(x-1)(x^2-x+1)$$

用 $x=1$ 代入, 就得 $2=2C$. $\therefore$ $C=1$.

用 $x=-1$代入, 就得 $10=-6D$. $\therefore$ $D=-\dfrac{5}{3}$

比較 x^3 的係數,得 $A+C+D=0$ $\therefore$ $A=\dfrac{2}{3}$.

比較常數項, 得 $-B+C-D=5$. $\therefore$ $B=-\dfrac{7}{3}$.

$$\therefore \quad \frac{x^2-4x+5}{(x-1)(x^3+1)}=\frac{2x-7}{3(x^2-x+1)}+\frac{1}{x-1}-\frac{5}{3(x+1)}$$

例3. 分 $\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}$ 爲部分分數. (武漢大學)

[解] 令 $\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

去分母, $x^2-4x+5=A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)$

$$+(Cx+D)(x-1)^2.$$

用 $x=1$ 代入, 就得 $2=2A$. $\therefore$ $A=1$.

把 A 的數值代入, 整理以後, 再用 $x-1$ 除兩邊,

就得 $-4=B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)$.

用 $x=1$ 代入, 就得 $-4=2B$. $\therefore$ $B=-2$.

比較 x^2 係數,得 $B+C=0$. $\therefore$ $C=2$.

比較常數項,得 $-4=B-D$. $\therefore$ $D=2$.

$$\therefore \quad \frac{x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2(x+1)}{x^2+1}.$$

第十七章

方程式理論

1. n 次方程式的準式:

(1) a 式: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$.

(2) p 式: $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=0$.

2. 基本定理:

(1) 任意 n 次方程式一定有 n 個根.

(2) n 次方程式,不能有 n 個以上的不同的根.

(3) 如 n 次方程式,有 n 個以上的不同的數値適合,那末所有的各係數都等於零.

(4) 係數都是實數的方程式,如有複數根 $a+bi$,那末一定也有複數根 $a-bi$.

(5) 係數都是有理數的方程式,如有無理根 $a+\sqrt{b}$,那末一定也有無理根 $a-\sqrt{b}$.

例. 設方程式 $x^4-2x^3+4x-4=0$ 之一根爲 $1+i$. 試

求此方程式之其餘三根.　　　　(勷勤大學)

［解］ 因為 $1+i$ 是一個根, 所以 $1-i$ 也是一個根; 而且 $[x-(1+i)][x-(1-i)]=x^2-2x+2$

一定能除盡 x^4-2x^3+4x-4.

現在 $$\frac{x^4-2x^3+4x-4}{x^2-2x+2}=x^2-2.$$

解出 $x^2-2=0$, 就得 $x=\pm\sqrt{2}$.

所以原方程式的根, 是 $1+i, 1-i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

3. 根同係數的關係. 如 p 式方程式:

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$$

的根是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots \alpha_n$, 那末

$$p_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n)=-\Sigma\,\alpha_1,$$

$$p_2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)=\Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2,$$

$$p_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)=-\Sigma\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

…………………………………………………………

$$p_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n.$$

例 1. 已知方程式 $x^3-12x^2+29x+42=0$ 有二根之積為 -6, 試求各根.　　　　(同濟大學)

［解］ 假定積是 -6 的兩根叫 α 和 β, 第三個根是 γ, 那末 $\alpha\beta\gamma=-42$; 就是 $-6\gamma=-42$ $\therefore\ \gamma=7$.

因爲　$-(\alpha+\beta+\gamma)=-12$, 就是 $\alpha+\beta=5$;　(1)

又因爲　$\alpha\beta=-6.$　(2)

解出 (1),(2), 得 $\alpha=6$, $\beta=-1$.

所以要求的各根, 是 $6,-1,7$.

例2.　若方程式 $2x^3+3x^2+5x+k=0$ 之根成等差級數, 試求 k 之值.　(廈門大學)

[解]　假定做成等差級數的三根是 $\alpha-\beta,\alpha,\alpha+\beta$, 那末

$$(\alpha-\beta)\alpha(\alpha+\beta)=-\frac{k}{2}, \text{ 就是 } \alpha(\alpha^2-\beta^2)=-\frac{k}{2}, \quad (1)$$

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=-\frac{3}{2}, \text{ 就是 } 3\alpha=-\frac{3}{2}, \quad (2)$$

$$\alpha(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\alpha(\alpha+\beta)=\frac{5}{2},$$

就是　$$3\alpha^2-\beta^2=\frac{5}{2}. \quad (3)$$

從 (2), 得　$$\alpha=-\frac{1}{2},$$

代入 (3), 得　$$\beta^2=3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}=-\frac{7}{4}.$$

再一同代入 (1), $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)=-\frac{k}{2}$.　$\therefore\ k=2$.

例3.　若方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ 之根成等比級數, 試證 $ac^3-b^3d=0$.　(廈門大學)

［解］ 假定做成等比級數的三根是. $\alpha,\alpha\beta,\alpha\beta^2$,

那末　$\frac{b}{a}=-(\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta^2)=-\alpha(1+\beta+\beta^2)$

$$\frac{c}{a}=\alpha\cdot\alpha\beta+\alpha\beta\cdot\alpha\beta^2+\alpha\cdot\alpha\beta^2=\alpha^2\beta(1+\beta+\beta^2)$$

$$\frac{d}{a}=-\alpha\cdot\alpha\beta\cdot\alpha\beta^2=-\alpha^3\beta^3$$

$$\therefore\quad\left(\frac{c}{a}\Big/\frac{b}{a}\right)^3=\left[\frac{\alpha^2\beta(1+\beta+\beta^2)}{-\alpha(1+\beta+\beta^2)}\right]^3=-\alpha^3\beta^3=\frac{d}{a}$$

就是　$\frac{c^3}{b^3}=\frac{d}{a}\quad\therefore\quad ac^3-b^3d=0$

4. 知根作方程式法:

(*a*) 如 $\alpha_1, \alpha_2\,\alpha_3,\cdots\alpha_n$ 都是已知的根，就把 $x-\alpha_1, x-\alpha_2$ $\cdots, x-\alpha_n$ 連乘起來，使得牠們的積等於零.

(*b*) 應用根同係數的關係，可求得所作方程式的各項係數.

例 1. 已知方程式之根爲 2, 3, 5, 試作此方程式.

(青島)

［解］ 要作的方程式是

$$(x-2)(x-3)(x-5)=0,$$

就是　$x^3-10x^2+31x-30=0.$

例2. 求作三次方程式，其根爲 $x^3+2x^2-6x+3=0$ 之根之立方者. (中山大學)

［解］ 假定原方程式的三根是 α, β, γ，那末

$$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-6,\ \alpha\beta\gamma=-3.$$

假定有 $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ 做根的方程式是

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0,$$ 那末

$$\begin{aligned}
-p_1&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
&\qquad-3\beta\gamma(\beta+\gamma)-3\gamma\alpha(\alpha+\gamma)-6\alpha\beta\gamma\\
&=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)-3\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\
&\qquad-3\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)+9\alpha\beta\gamma-6\alpha\beta\gamma\\
&=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+3\alpha\beta\gamma\\
&=(-2)^3-3(-6)(-2)+3(-3)=-53.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ p_1=53.$$

$$\begin{aligned}
p_2&=\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\alpha^3\gamma^3=(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3\\
&\quad-3(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\\
&\qquad+3\alpha^2\beta^2\gamma^2\\
&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3-3(\alpha\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)\\
&\quad(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+3(\alpha\beta\gamma)^2\\
&=(-6)^3-3(-3)(-2)(-6)+3(-3)^2=-81
\end{aligned}$$

$$-p_3=\alpha^3\beta^3\gamma^3=(\alpha\beta\gamma)^3=(-3)^3=-27.$$

$$\therefore\quad p_3=27.$$

所以要求的方程式是 $x^3+53x^2-81x+27=0$.

5. 方程式的變形：

(*a*) 作出新方程式，使牠的根是原方程式根的 k 倍——把原方程式的係數，從第二項起，一個一個的用 $k, k^2, k^3, \cdots k^n$ 去乘，如原方程式有缺項的，應當用零做係數去補足牠.

(*b*) 作出新方程式，使牠的根是原方程式根的變號——把原方程式的係數，從第二項起，間隔地改變各項的符號.遇見有缺項時，用零係數來補足.

(*c*) 作出新方程式，使牠的根是原方程式根的逆數——把原方程式的係數，從第一項起，到末一項爲止，顛倒過來，把末一項改做第一項，…就行.遇見有缺項時，用零係數來補足.

(*d*) 作出新方程式，使牠的根比較原方式的根減少常數 k (增加常數 k 就是減少 $-k$)—(i) 用 $x+k$ 代原方程式的 x，而整理所得的方程式.或 (ii) 假定 $A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n=0$ 是新方程式，再用綜合除法求出 $A_0, A_1, A_2, \cdots A_n$ 的值.

例. 求一方程式使其根較 $x^4-6x^3+4x^2+18x-5=0$ 之根減少 2. (北洋工學院)

[解] 用 (i) 法, 得所求的方程式是

$$(x+2)^4-6(x+2)^3+4(x+2)^2+18(x+2)-5=0.$$

用二項定理來展開. 以後再整理, 得

$$x^4+2x^3-8x^2-6x+15=0.$$

用 (ii) 法, 假定所求的方程式是

$$A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0.$$

$$\begin{array}{rrrrrl|l}
1 & -6 & +4 & +18 & -5 & \underline{\lfloor 2} & \\
 & 2 & -8 & -8 & +20 & & \\
\hline
1 & -4 & -4 & +10 & +15 & & A_4=15 \\
 & +2 & -4 & -16 & & & \\
\hline
1 & -2 & -8 & -6 & & & A_3=-6 \\
 & +2 & +0 & & & & \\
\hline
1 & +0 & -8 & & & & A_2=-8 \\
 & +2 & & & & & \\
\hline
1, & +2 & & & A_1=1, & & A_2=2
\end{array}$$

所以得方程式 $x^4+2x^3-8x^2-6x+15=0$.

6. 探根原則 用兩個實數 a, b 代 x 而求得的 $f(a)$ 及 $f(b)$, 如有相反的符號時, 那末方程式 $f(x)=0$ 至少有一個實根, 在 a, b 兩數的中間.

7. Descartes 氏法則:

(1) 方程式 $f(x)=0$ 的正實根, 不能多於 $f(x)$ 中變

號的次數.

(2) 方程式 $f(x)=0$ 的負實根，不能多於 $f(-x)$ 中變號的次數.

例. 試求下方程式正根及負根數目之最大限度：

$$x^5-2x^4-3x^3+4x^2+x+1=0. \qquad (山西)$$

［解］ $f(x)$ 的符號是 $+--+++$，中經二次變號，所以正根最多有二個.

$f(-x)$ 的符號是 $--++-+$. 中經三次變號，所以負根最多有三個.

8. **求有理根法** 應用下面二個定理及綜合除法來求：

(a) 方程式如果有整數根，那末這些根一定是常數項的因數.

(b) 方程式如果有分數根，那末這些根的分子一定是常數項的因數. 牠的分母，一定是第一項係數的因數.

例 1. 證明下列方程式有三個有理根，并求此三個有理根之值：

$$x^3-9x^2+23x-15=0. \qquad (上海，三屆)$$

［解］ 因爲第一項的係數是 1，所以方程如果有有理

根，這些根一定是整數，並且是 15 的因數．但是 15 的因數是 ±1, ±3, ±5, ±15. 用綜合除法來試，那末有

$$\begin{array}{l} 1-9+23-15\,\underline{|1} \\ \quad 1-\ 8+15 \\ \hline 1-8+15+\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1-9+23-15\,\underline{|3} \\ \quad 3-18+15 \\ \hline 1-6+\ 5+\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1-9+23-15\,\underline{|5} \\ \quad 5-20+15 \\ \hline 1-4+\ 3+\ 0 \end{array}$$

因為 1, 3, 5 都適合原方程式，所以原方程式有三個有理根，牠的數值就是 1, 3, 5.

例 2.　解方程式 $8x^3-16x^2+12x-3=0$　(中山大學)

[解]　原方程式的有理根，應當在下面各數中間去找：

$$\pm1,\ \pm3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm\frac{1}{8},\ \pm\frac{3}{8}.$$

用綜合除法來試，得

$$\begin{array}{l} 8-16+12-3\,\underline{|\tfrac{1}{2}} \\ \quad +\ 4-\ 6+3 \\ \hline 8-12+\ 6+0 \end{array}$$

所以知道 $\frac{1}{2}$ 是一個根，餘下的根，可以從 $\frac{1}{2}(8x^2-12+6)=0$，或 $4x^2-6x+3=0$ 求出．

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{4}.$$

所以原方程式的根是 $\frac{1}{2}$, $\frac{3+\sqrt{3}i}{4}$, $\frac{3-\sqrt{3}i}{4}$.

9. 求無理根法　普通利用 Hornor 氏法，可以求得無

理根的近似值. 要明白怎樣求法, 可看下面的例子.

例. 應用 Horner's 法求 $x^3+2x-28=0$ 之實根之近似值至小數三位. (江蘇, 一屆)

[解] $f(x)=x^3+2x-28=0,$

$$\because \quad f(2)=-16, f(3)=5.$$

所以知道至少有一根在 2 同 3 中間.

$$\begin{array}{l}
1+\quad +2-28 \,|\, \underline{2} \\
\quad +2+4+12 \\
\hline
1+2+6 \,|\, -16 \\
\quad +2+8 \\
\hline
1+4 \,|\, +14 \\
\quad +2 \\
\hline
1+6
\end{array}$$

說明: 把 $f(x)=0$ 的各根減少 2, 就得 $f_1(x)=x^3+6x^2+14x-16=0$. 這方程式的根, 應當在 0 同 1 中間, 用 0.1, 0.2, 0.3, …來試, 得:

$$\begin{array}{l}
1+6 \quad +14 \quad -16 \,|\, \underline{0.8} \\
\quad 0.8+\ 5.44+15.552 \\
\hline
1+6.8+19.44-\ 0.448
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1+6 \ +14 \quad -16 \,|\, \underline{0.9} \\
\quad 0.9+\ 6.21+18.189 \\
\hline
1+6.9+20.21+\ 2.189
\end{array}$$

所以 $f_1(x)=0$ 的根在 0.8 同 0.9 中間, 就是 $f(x)=0$ 的根在 2.8 同 2.9 中間.

$$\begin{array}{l}
1+6 \quad +\ 14 \quad -16 \,|\, \underline{0.8} \\
\quad 0.8+\ 5.44-15.552 \\
\hline
1+6.8+19.44 \,|\, -\ 0.448 \\
\quad 0.8+\ 6.08 \\
\hline
1+7.6 \,|\, +25.52 \\
\quad +0.8 \\
\hline
1+8.4
\end{array}$$

說明. 把 $f_1(x)=0$ 的各根減少 0.8, 就得 $f_2(x)=x^3+8.4x^2+25.52x-0.448=0$, 這方程式的根, 應當在 0 同 0.1 中間, 牠的數值可從下式求出:

$$25.52x-0.448=0 \quad \therefore \quad x=\frac{0.448}{25.52}=0.01\cdots\cdots$$

用綜合除法來試，得：

$$\begin{array}{l|l}
1+8.4\ \ +25.52\quad\ -0.448 & 0.01 \\
\quad\ 0.01+\ \ 0.0841+0.256\,041 & \\ \hline
1+8.41+25.6041-0.191\,959 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
1+8.4\ \ +25.52\quad\ -0.448 & 0.02 \\
\quad\ 0.02+\ \ 0.1684+0.513768 & \\ \hline
1+8.42+25.6884+0.065768 &
\end{array}$$

所以 $f_2(x)=0$ 的根在 0.01 同 0.02 中間，就是原方程式的根，在 2.81 同 2.82 中間.

$$\begin{array}{l|l}
1+8.4\ \ +25.52\quad\ -0.448 & 0.01 \\
\quad\ 0.01+\ \ 0.0841+0.256041 & \\ \hline
1+8.41+25.6041\,|\,-0.191959 & \\
\quad\ 0.01+\ \ 0.0842 & \\ \hline
1+8.42\,|\,+25.6883 & \\
\quad\ +0.01 & \\ \hline
1+8.43 &
\end{array}$$

說明：把 $f_2(x)=0$ 的各根減少 0.01 就得 $f_3(x)=x^3+8.43x^2+25.6883x-0.191959=0.$ 這方程式的根，應當在 0 同 0.01 中間，牠的數值可從下式求出：

$$25.6883x-0.191959=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{0.191959}{25.6883}=0.007.\cdots\cdots$$

$\therefore$ 所求的實根是 2.817⋯⋯

10. 求引數法. 把 $f(x)$ 中第 k 項的指數乘原有係數做係數,把原數減 1 做指數.這樣就得 $f(x)$ 的一級引數 $f'(x)$ 的第 k 項. 照上法, 可求出 $f'(x)$ 的一級引數 $f''(x)$, 叫做 $f(x)$ 的二級引數, 餘倣此類推.

11. 定重根法. 如果一數是 $f(x)=0$, 及開始 $r-1$ 個方程式 $f'(x)=0, f''(x)=0, \cdots f^{r-1}(x)=0$ 的根.但不是 $f^{r}(x)=0$ 的根, 那末這數是 $f(x)=0$ 的 r 級重根.

例. 如方程式 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三級重根,試決定 a,b 之值, 并求其根. (交通大學)

〔解〕 假定 $f(x)=3x^3+ax^2+x+b$, 那末

$$f'(x)=9x^2+2ax+1, f''(x)=18x+2a,$$

因爲 $f(x)=0$ 有三級重根, 所以

$f(x)=0, f'(x)=0, f''(x)=0$, 三方程式有公共根.

在 $f''(x)=0$ 中, 求得 $x=-\frac{a}{9}$

代入 $f'(x)=0$, 得 $9\left(-\frac{a}{9}\right)^2+2a\left(-\frac{a}{9}\right)+1=0.$

整理以後, 得 $a^2=9. \quad \therefore \quad a=\pm 3,$

所以 $$x=-\frac{a}{9}=\mp\frac{1}{3}.$$

用 a 及 x 的值代入 $f(x)=0$, 得

$$3\left(\mp\frac{1}{3}\right)^3+(\pm3)\left(\mp\frac{1}{3}\right)^2+\left(\mp\frac{1}{3}\right)+b=0.$$

整理,得 $\mp\frac{1}{9}+b=0$, $\therefore$ $b=\pm\frac{1}{9}$.

所以 $a=\pm3$, $b=\pm\frac{1}{9}$,而所求的根是 $\mp\frac{1}{3}$.

12. 三次方程式的解法 (Cardan 氏公式) 把三次方程式

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

的各根增加 $p_1/3$,就可删去 x^2 的項,得着

$$x^3+px+q=0$$

如令 $A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, $B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

那末 (1) 的根就是

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$$

(ω, ω^2 是 1 的立方根).

13. 解法的討論:

(1) 如 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, 那末有一個實根兩個虛根.

(2) 如 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, 那末有三個實根,并且二實根相等.

(3) 如 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, 那末有三個實根.

14. 四次方程式的解法 (Ferrari 氏解法) 把四次

方程式 $x^4+p_1x^3+p_1x^2+p_3x+p_4=0$.

的各根增加 $p_1/4$ 就可删去 x^3 的一項，得着

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

如能把方程式 $u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0$ 的根 u_1 求得，那末 (1) 的根可從下面二個方程式中求出：

$$x^2+\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0,$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0.$$

15. 逆數方程式的解法. 在任何次的方程式中，如從左向右各項的係數，同從右向左各項的係數相同；或絕對值同而符號相反；那末這種方程式叫逆數方程式．牠的解法是：

(1) 先看原方程式有沒有 1 及 -1 的根，如果有，應當先求出來．把原方程式除去有理因數 $x-1$，及 $x+1$ 以後，就得一新方程式．

(2) 把新方程式中，係數相同的各項，分別集合．

(3) 用 x 的最高指數的一半，除全方程式．

(4) 用 $x+\dfrac{1}{x}=z$ 的關係式代入，就得一含 z 的方程式．牠的次數可減少一半．再設法解出牠來．

例 解 $2x^8-x^7-12x^6+14x^5-14x^3+12x^2+x-2=0.$

[解] 這個逆數方程式有 1 及 -1 兩個根，把牠的左邊除去 $x-1$ 及 $x+1$ 兩個因數，得着

$$2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0.$$

集合同係數的各項，得

$$2(x^6+1)-(x^5+x)-10(x^4+x^2)+13x^3=0.$$

用 x^3 除全方程式，

$$2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

令 $x+\dfrac{1}{x}=z$，那末 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=z^2-2,$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=z^3-3z.$$

代入上面的方程式，得

$$2(z^3-3z)-(z^2-2)-10z+13=0,$$

或 $$2z^3-z^2-16z+15=0.$$

解出來， $z=1,-3,$ 或 $^5/_2$

如 $z=1$，就得 $x+\dfrac{1}{x}=1$ 或 $x^2-x+1=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

如 $z=-3$, 就得 $x+\frac{1}{x}=-3$ 或 $x^2+3x+1=0$.

$$\therefore \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

如 $z={}^5/_2$, 就得 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 或 $2x^2-5x+2=0$.

$$\therefore \quad x=2 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

所以原方程式的根是 $1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

16. 二項方程式 $x^n\pm a^n=0$ 的解法 把 $x=ay$ 代入原方程式;原方程式就變成 $y^n\pm 1=0$. 這是一個逆數方程式. 照上節的方法, 可求得 y 的值. y 的值如果求出, 那末 x 的值也不生問題了.

第十八章

行列式

1. 二次及三次行列式的展開：

(a) 二次 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

(b) 三次 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

例. 求 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 內 x 之值.

(河北, 二十二年)

［解］ 把行列式展開就得

$$x+6+6x^2-9x-2x^2-2=0,$$

就是　$4x^2-8x+4=0$, 或 $x^2-2x+1=0$.

$$\therefore \quad x=1.$$

2.　n 次行列式的展開:

(a)　法. 把 n 次行列式展開, 一共有 $\lfloor n$ 項. 每一項是 n 個元的積. 這 n 個元不在同一行, 也不在同一列, 各項的正負完全照每一個積裏面變換數 (Inversions) 的偶和奇來決定.

(b)　法. 把 n 次行列式展開一共有 n 項; 每一項含兩個因數. 第一個因數是任一行或一列的元. 第二因數是第一因數的子行列式. 各項的正負, 照第一因數的行數同列數的和是偶數, 還是奇數來決定.

3.　行列式的性質:

(1)　用一常數乘行列式的任意一行或一列, 等於用這常數乘行列式的全體.

(2)　行列式的行同列對調, 行列式的值不變.

(3)　行列式的任意兩行或兩列對調, 那末行列式的符號改變, 但是牠的絕對值不改變.

(4)　行列式兩行或兩列完全相同, 那末行列式的值

是零.

(5) 行列式任一行或一列的各元,都是兩數的和,那末行列式可寫做兩行列式的和.

(6) 行列式任一行(或任一列)的各元,如加上別一行(或別一列)的相當各元的同倍數,那末這行列式之值不變.

(7) 假定行列式照某一行(或列)的子行列式展開,在展開式中,如果用他行(或列)的元代替這一行(或列)的元,那末展開式的值就等於零.

例 1. 證

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & s+p \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix} = 0.$$

(稅務專門)

[證]

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & s+p \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p+q+r+s & q & r+s \\ 1 & p+q+r+s & r & s+p \\ 1 & p+q+r+s & s & p+q \\ 1 & p+q+r+s & p & q+r \end{vmatrix}$$

$$= (p+q+r+s)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & q & r+s \\ 1 & 1 & r & s+p \\ 1 & 1 & s & p+q \\ 1 & 1 & p & q+r \end{vmatrix} = 0.$$

例 2. 分解下行列式爲因數：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$ (唐山交通大學)

[解] $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

令 $a=b$, 就得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b & c \\ b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad a-b \text{ 是 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \text{ 的因數.}$$

同樣, $b-c$ 及 $c-a$ 也是牠的因數.

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = k(a-b)(b-c)(c-a).$$

比較 ab^2 的係數, 得 $k=1$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

例3 求 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 之值. (交通大學)

〔解〕 原行列式 $= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

4. 行列式的求值法 求高次行列式的值時，應當用下面的方法，將牠改低一次.重複做下去，直到改成二次的行列式爲止.這時高次行列式的值，也就唾手可得了.

(a)法， 儘量設法把行列式改成別種形狀，使某一行(或

列)中的元，祇有一元不是零，餘下的元都是零. 最後照這一行(或列)的子行列式來展開，就得低一次的行列式.

(b) 法. 照下面公式去改，但是 $a_1 \neq 0$. 如果 $a_1=0$，那末不妨先把行列式，改成第一個元不是零的行列式.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & \vdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \vdots & \vdots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^{\,n-2}} \begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & a_1c_2-a_2c_1 \cdots \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_1c_3-a_3c_1 \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

例 1. 求 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 之值. (北平交通大學)

[解] $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1.$$

例 2. 求 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ 之值.(唐山交通大學)

[解]
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} -18 & -16 & -22 \\ 4 & 5 & -13 \\ 14 & 19 & 17 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 9 & 8 & 11 \\ 4 & 5 & -13 \\ 14 & 19 & 17 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 13 & -161 \\ 59 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}(-13+9499)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times 9486=-527.$$

例 3. 證 $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=x^3(x+10)$. (交通大學)

[證]

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix} 1+x & -2x & -3x & -4x \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=x^3\begin{vmatrix}1+x & -2 & -3 & -4\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=x^3\begin{vmatrix}5+x & -2 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=x^3\begin{vmatrix}5+x & -2 & -3\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=x^3\begin{vmatrix}8+x & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=x^3\begin{vmatrix}8+x & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=x^3(8+x+2)=x^3(x+10).$$

例4. 證

$$\begin{vmatrix}a & b & b & b\\ a & b & a & a\\ b & b & a & b\\ a & a & a & b\end{vmatrix}=-(a-b)^4$$ （浙江大學）

［證］

$$原行列式=\frac{1}{a^2}\begin{vmatrix}0 & a^2-ab & a^2-ab\\ ab-b^2 & a^2-b^2 & ab-b^2\\ a^2-ab & a^2-ab & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot a(a-b)(a-b)a(a-b)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ b & a+b & b\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^3\begin{vmatrix}0&0&1\\b&a&b\\1&1&0\end{vmatrix}=(a-b)^3\begin{vmatrix}b&a\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^3(b-a)=-(a-b)^4$$

5. 行列式的應用. 應用行列式,來解二元及三元的一次聯立方程式,在前面已經講過;現在把他推廣到 n 元的一次聯立方程式.n 元一次聯立方程式的解法是一任意一元的數值都等於一個分數.牠的分母是,各元的係數所做成的行列式;(尋常叫做聯立方程式的行列式,記做 Δ)牠的分子,是用各方程式中獨在右端之常數項逐一替代 Δ 中所求元的係數而得的行列式.如果 $\Delta=0$ 那末這聯立方程式就沒有解.

6. 齊次一次聯立方程式的解法. 常數項都是零的一次聯立方程式,叫做齊次一次聯立方程式.牠的解法可分成兩種:

(1)　如 $\Delta\neq0$,那末各元的數值都等於零.

(2)　如 $\Delta=0$,那末各元有一異於零的解答.這個解答是 $x:y:z:w:\cdots\cdots=A_1:A_2:A_3:A_4:\cdots$但 $A_1, A_2, A_3, A_4\cdots$是 Δ 中同一行各元的餘因式.

例. 下列聯立方程式中有多少解?

$$\begin{cases} 3x-y-3z+2w=0, \\ 2x-2y+6z-6w=0, \\ 4x+3y-9z-w=0, \\ 3x-2y+3z-4w=0. \end{cases}$$

(唐山交通大學)

[解]

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -6 \\ 4 & 3 & -9 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

所以原聯立方程式除零解以外，沒有別種解答.

第十九章

極限及不定值

1. 極限的意義及記法. 當 x 無限接近一個定值 a 時，函數 $f(x)$ 也跟着牠接近別一個定值 l. 函數 $f(x)$ 同 l 的差可以小到無限小，但是決不能等於零. 這樣的 l 叫做 $f(x)$ 當 x 無限接近 a 時的極限. 記做 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

2. 不定值的求法. 函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時，如果可以化成下面幾種形狀的一種:

(i) $\dfrac{0}{0}$

(ii) $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$.

(iii) 0^0, ∞^0, 0^∞

那末函數 $f(x)$ 有一個不定值. 用 x 無限接近 a 時，$f(x)$ 的極限來表牠.

凡 (ii) 中的各式，一定要先化成 $\dfrac{0}{0}$ 的形狀，然後再去求不定值. (iii) 中的各式，要先取對數.

例 1. 當 $x=a$ 時，$\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}$ 之値爲何？ (武漢大學)

〔解〕

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{6}}-a^{\frac{3}{6}}}{x^{\frac{2}{6}}-a^{\frac{2}{6}}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}}=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{6}}.$$

例 2. 求 $x\to\infty$ 時，$f(x)=\dfrac{4x^2-3x+7}{x^2-5x+1}$ 之值.

〔解〕 $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=4.$$

第二十章

無限級數

1. 無限級數的種類：

(1) 收斂級數. 無限級數的項數 n, 如增加到無限, 而牠的總和接近一個定值；那末這個級數叫收斂級數.

(2) 發散級數. 無限級數的項數 n, 如增加到無限, 而牠的總和也增加到無限；那末這個級數叫做發散級數.

(3) 中性級數. 如級數的總和 (n 增加到無限)不增加到無限, 但是也不接近一個定值, 那末這個級數叫做中性級數.

2. 試驗正項級數的收斂或發散法：

(a) 比較法. 利用定理："凡級數的各項, 都比別一個收斂級數的相當項小, 那末這個級數便是收斂級數", 及定理："凡級數的各項, 都比別一個發散級數的相當項大, 那末這個級數便是發散級數", 把要試的級數同標準級數比

較;就可決定這級數是收斂,還是發散.

(b) 相比法. 利用下面的定理:

(i) 如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$,那末級數就是收斂.

(ii) 如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,那末級數就是發散.

(iii) 如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,那末級數的收斂,或發散,一定要用別種方法才可決定.

常常可以決定一個級數是不是收斂.

3. 試驗收斂級數時,常用的標準級數:

(i) $a+ar+ar^2+\cdots+ar$, $r<1$.

(ii) $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$, $p>1$.

4. 試驗發散級數時,常用的標準級數:

(i) $a+ar+ar^2+\cdots+ar^n$, $r>1$,

(ii) $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$, $p<1$.

例 1. 決定 $\frac{3}{4}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}+\cdots+\frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{4\cdot 6\cdots(2n+2)}$ 爲收斂抑爲發散 (北平大學)

[解] $\because \frac{n+1}{2n}-\frac{n+2}{2n+2}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{2n(n+1)}=\frac{1}{2n(n+1)}$,

$$\therefore \frac{n+1}{2n}>\frac{n+2}{2n+2}.$$

$$\therefore\ \frac{3}{4}>\frac{4}{6}>\frac{5}{8}\cdots\text{等},$$

就是上一級數的相當項都比級數

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot+\cdots$$

或
$$\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

的相當項小. 但其後一級數是等比級數, 並且 $r=\frac{3}{4}<1$, 所以原級數是收斂.

例 2. 求證指數級數.

$$1+x+\frac{x^2}{\boxed{2}}+\frac{x^3}{\boxed{3}}+\frac{x^4}{\boxed{4}}+\cdots\text{爲收斂級數.}$$

(江蘇, 一屆)

[證] 因爲
$$u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{\boxed{n+1}},\quad u_n=\frac{x^n}{\boxed{n}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}}{\boxed{n+1}}\cdot\frac{\boxed{n}}{x^n}=\frac{x}{n+1}.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

所以是收斂級數.

5. 試驗交錯級數的收斂或發散法. 如各項的絕對值愈趨愈小, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$; 那末這級數是收斂; 不然, 就是發散.

6. 試驗絕對收斂法. 級數的各項有正也有負，如各項都改爲正項時，所成的級數是收斂；那末這級數也是收斂. 這樣的收斂，叫做絕對收斂.

7. 冪級數. 級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n+\cdots$,叫做冪數. 用相比試驗法,常常可以決定 x 是什麼值時,冪級數是收斂或發散.

例. 決定級數.

$$x+2x^2+3x^3+\cdots$$

之收斂或發散.

［解］
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n},$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{(n+1)x}{n}=x\cdot\lim\frac{n+1}{n}=x.$$

所以在 $0\leqq x<1$ 時，這級數是收斂；$x>1$ 時,這級數是發散. 又 $x=1$ 時,不能決定牠的收斂,或發散. 但 $x=1$ 時,這級數就變成 $1+2+3+4+5+\cdots$,所以也是發散.

8. 重要級數:

(a) 二項級數:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots.$$

(b) 指數級數:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots$$

(c) 對數級數：

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots,$$

$$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right].$$

(d) 三角級數：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\frac{x^6}{\underline{|6}}+\cdots.$$

(e) 反三角級數：

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots,$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots.$$

9. 級數的求和法：

(a) 級數的形狀，是

$$\frac{a}{x(x+a)}+\frac{a}{(x+a)(x+2a)}+\frac{a}{(x+2a)(x+3a)}+\cdots.$$

這級數中，每一項都可分成兩式的差；所以

$$s_n=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)+\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}\right)+\left(\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}\right),$$

就是 $$s_n=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+na}=\frac{na}{x(x+na)}.$$

(b) 級數的各項是 r 個等差因數的積；牠的第 n 項是

$$u_n=(a+\overline{n-1}b)(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots(a+\overline{n+r-2}b)$$

假定 $$v_n=(a+\overline{n-1}b)(a+nb)$$

$$(a+\overline{n+1}b)\cdots(a+\overline{n+r-1}b)$$

那末 $$u_n=\frac{v_n-v_{n-1}}{(r+1)b}$$

所以級數的和是

$$s_n=\frac{v_1-v_0}{(r+1)b}+\frac{v_2-v_1}{(r+1)b}+\frac{v_3-v_2}{(r+1)b}+\cdots+\frac{v_n-v_{n-1}}{(r+1)b}$$

$$=\frac{v_n-v_0}{(r+1)b}$$

但是 $$v_0=(a-b)a(a+b)\cdots(a+\overline{r-1}b).$$

(c) 級數的各項是 (b) 中各項的逆數；牠的第 n 項是

$$u_n=\frac{1}{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}.$$

假定　$v_n=\dfrac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}$,

那末　$$u_n=\frac{v_{n-1}-v_n}{(r-1)b}$$

$$\therefore\quad s_n=\frac{v_0-v_1}{(r-1)b}+\frac{v_1-v_2}{(r-1)b}+\cdots+\frac{v_{n-1}-v_n}{(r-1)b}$$

$$=\frac{v_0-v_n}{(r-1)b}.$$

但是　$$v_0=\frac{1}{a(a+b)\cdots(a+\overline{r-2}b)}.$$

例 1. 求級數

$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots n$ 項之和．（江蘇，二屆）

〔解〕　$$\because\quad \frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$$

$$\frac{1}{5\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

$$\therefore\quad s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

例2. 同題.

[解] $\because \quad u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

令 $$v_n=\frac{1}{2n+1},\ v_0=1,$$

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{(2-1)\times 2}=\frac{n}{2n+1},$$

例3. 求級數

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots n(n+1)(n+2)$ 之和.

[解] $$u_n=n(n+1)(n+2).$$

$$\therefore \quad v_n=n(n+1)(n+2)(n+3),$$

及 $$v_0=0\cdot1\cdot2\cdot3,$$

$$\therefore s_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)-0\cdot1\cdot2\cdot3}{(3+1)\times 1}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

附　錄

會　考　題　索　引

上海市第一屆

(1)　試分解下列五式之因數：

$$x^2+y^2,\quad x^2-y^2,\quad x^3+y^3,\quad x^3-y^3$$

及

$$x^3y-3x^2y^2-18xy^3$$

(2)　解　$\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+3\sqrt{3x-5}=0$，求 x 之值.

(3)　解

$$\begin{cases} x+y+z+u=0, \\ 3x+z+u=0, \\ 3y+2z=0, \\ x^2+y^2+zu=5. \end{cases}$$

(4)　判別　$x^2+7=4x$ 之根之種類.

(5)　有一成等差級數之三數，三數相加其和爲 36，如以 1, 4, 43 分別加此三數，則另成三數，彼此關係適爲等比級數.

上海市第二屆

(1) 簡化下列二式:

(a) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, (b) $\dfrac{2}{(x^2-1)^2}-\dfrac{1}{2x^2-4x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$.

(2) 設一等比級數之第一項爲 2, 第四項爲 1024, 求第二項與第三項.

(3) 應用剩餘定理, 求 a 與 b 之值, 若 x^3+ax^2+2x+b 能爲 $(x-1)(x+4)$ 除盡之.

上海市第三屆

(1) 散分 $\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)(x^3+1)}$ 爲分項分數式 (Partial fraction)

(2) 求 x 與 y 之值:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+xy-6=0 \\ x^2-5xy+6y^2=0 \end{array}\right\}.$$

(3) 證明下列方程式有三個有理根, 並求此三個有理根之值:

$$x^3-9x^2+23x-15=0,$$

江蘇第一屆

(1) 析 $x^4-9x^2+4x+12$ 爲因式.

(2) 解下之無理方程式:

$$\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$$

(3) 方程式 $2x^2-3x+7=0$ 之根爲 α,β. 求作以 $2\alpha+\beta$ 及 $\alpha+2\beta$ 爲根之方程式.

(4) 求證指數級數 $1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots$ 爲收斂級數.

(5) 應用二項式定理求 $\sqrt[3]{1025}$ 之值至三位小數.

(6) 應用 Horner s method 求 $x^3+2x-28=0$ 之實根之近似値至小數三位.

江蘇第一屆補考

(1) 析下之各式爲因子:

(i) $8a^3b^3c^3-1$. (ii) $4(2x+y)^2-(x+y)^2$.

(iii) $a^2-b^2-c^2-2bc$. (iv) $x^2y^2+7xyz-60z^2$.

(2) 解下之聯立方程式:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ x^3+y^3=468 \end{array}\right\}.$$

(3) 方程式 $kx^2-(3k-2)x+4-k=0$ 之二根相等，求 k 之値.

(4) 解方程式 $x^3+2x^2+2x+1=0$.

(5) 求等比級數 $\frac{5}{7}+\frac{10}{21}+\frac{20}{63}+\frac{40}{189}+\cdots$ 無窮項之和.

江蘇第二屆

(1) 若 a, b, c 爲不相等之正實數.

求證 $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}>6.$$

(2) 若 $a:b=c:d$

求證 $$b(a+b-c-d)=(a+b)(b-d)$$

(3) 求級數 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots n$ 項之和.

浙江二十一年

(1) 解 $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1$.

(2) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=?$

浙江二十一年覆試

(1) 解下列根式方程式:

$$x-7-\sqrt{x-5}=0$$

(2) $(2+3i)(1-4i)=?$

浙江二十二年

(1) 解聯立方程式

$$\begin{cases} xy=6, & (1) \\ yz=8, & (2) \\ zx=12. & (3) \end{cases}$$

(2) 設 $x>y>0$,試證 $\frac{1}{2}(x+y)>\sqrt{xy}$

江西二十二年

(1) 有甲乙二人解 $x^2+px+q=0$ 二次方程式,甲誤書第二項之係數而得 3 與 -8 之二根,乙誤書第三項而得 5 與 -7 之二根,問眞正之方程式之根爲何?

(2) A 船與岸之距離 AB 爲 2 里,沿岸有一市鎮 C 與 B 相隔 6 里.設 A 船上之人欲以最短時間達 C,但知船行速度爲每時 4 里,步行速度爲每時 5 里.求此人登岸之處應隔 B 若干里.

江西二十三年

(1) 一方程式之根爲 $3x^2-4x-1=0$ 之根之三倍,其

方程式如何?

河南省

(1) 求作一個二次方程式,令其二根爲 $(3+2i),(3-2i)$.

(2) 設方程式 $x^2+k(x+1)+3=0$ 之兩根相等,求 k 之値.

(3) 求 $(1+2x)^8$ 展開式中之第五項,

湖南第四屆

(1) 已知 $\log_3 x=-2$,求 x 之値.

(2) 求 $(1-x)^{-3}$ 之第 $(r+1)$ 項.

(3) 解方程式 $x^3-7x+6=0$.

湖南第五屆

(1) 求 $(1+x)^6$ 之展開式中各項係數之和.

(2) 解方程式 $x^3+2x^2-11x+6=0$

(3) 設 $\log x+\log(x-3)=1$,求 x 之値.

福建省

(1) 簡約 $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

(2) 下列兩聯立方程式用行列式解之:

(a) $\begin{cases} 2y+x=7, \\ 5x-2y=11. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=6, \\ \dfrac{3x}{2}+\dfrac{2y}{3}=8. \end{cases}$

(3) 有級數 11, 16, 21, 26 等, 級數之和爲 279, 求級數之項數.

(4) 有四男四女圍坐圓桌, 男與男不相鄰, 女與女亦然. 問坐法有幾?

福建省

(1) 已知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$; 試計算 $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$ 之值.

(2) 方程式 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 之根爲虛或爲實或相等, 與 m 之值有何關係, 試詳論之.

安徽省

(1) 試依 y 昇冪展 $(x-3y)^{\frac{1}{3}}$ 至前四項爲止.

(2) 解下列聯立方程式, 並依 λ 變值而討論之:

$$\begin{cases} \lambda x+(\lambda-4)y=2\lambda+1, \\ (\lambda+2)x-3\lambda y=4\lambda. \end{cases}$$

四川第一屆(高理)

(1) 解下之聯立方程式:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}.\end{cases}$$

(2) 證明 $a^2+b^2+c^2 \geqq bc+ca+ab$.

(3) 證明 ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$.

四川第一屆(高普)

(1) 若二次方程式 $(\lambda+2)x^2-2\lambda x+1=0$ 之二根相等,則 λ 之值爲何?

(2) 有正十邊形,取其頂點聯線可得若干個三角形.又可得對角線若干?

湖北

(1) 試求 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 之近似值至小數第三位.

(2) 已知一矩形之對角線與長邊之和,爲短邊之五倍,又長邊比短邊長三十五尺,問長短邊各幾何?

湖 南 省

(1) 設方程式 $x^2+2(k+2)x+9k=0$ 之兩根相等,求 k 之値.

(2) 求 $(1+2x)^8$ 展開式之中央項.

(3) 設 $2^{x+2}=2\sqrt{2}$, 求 x.

河 北 省 二 十 二 年

(1) 解下列方程系:

$$x^2-y^2=21,$$

$$2x-3y=4,$$

用圖線法覆驗結果

(2) 求

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$ 內 x 之値.

(b) $(x^2-x^{-1})^{14}$ 內 x^{10} 之係數.

(3) 求 $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$ 之所有根.

覆驗其結果, 並棄去其別根 (Extraneous root)

(4) 一長方形之錫片, 長大於寬 4 公寸, 則於其四角

各割去每邊 6 公寸之正方形，則可成一容積 840 立方公寸無蓋之箱，求此箱之長，寬，高．

北平市二十三年

(1) 試解下列各方程式：

(a) $x^3-1=0$

(b) $x^4+1+x^3+x-4x^2=0$

(2) 試證 $(a+b)^n$ 展式 (Expansion) 內，諸係數之和為 2^n

廣東省

(1) 解 $\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2=8\left(\frac{1-x}{x-2}\right)-15.$

(2) 已知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, $\log 5=0.69897$. 試求 $\log 180$ 之値．

廣州市

(1) 分解下式之因數 $6x^2-19x+15$,

(2) 試解下方程式：

$$\begin{cases}4x+9y=3,\\3x+7y=2.\end{cases}$$

(3) 設 B 給 A 27 元，則二人所有相等，如 A 給 B 43 元，則 A 所有爲 B 之半. 問各有若干?

(4) 試解下方程式 $x^2-8x+15=0$.

(5) 二數之較爲 12，其平方之和爲 1130，求二數.

漢口市

(1) 有三數，其中任意二數之和爲餘一數之逆數，試求此三數.

(2) 方程式 $x^2-(k-3)x+k=0$ 有等根，則 k 應爲何數?

陝西省

(1) 試解 $x^3-6x^2+11x-6=0$.

山西省

(1) 方程式 $(2+k)x^2+2kx+1=0$ 之二根相等，試求 k 之值.

(2) 試求下方程式正根及負根之最大限度 (個數):

$$x^5-2x^4-3x^3+4x^2+x+1=0.$$

青島市

(1) 已知方程式之根爲 2, 3, 5，試作此方程式.

(2) k 爲何值,則下方程式有相等之實根?

$$(k-4)x^2+(k-2)x+2=0.$$

綏遠省

(1) 有一等比級數.其首項爲 4, 末項爲 972, 而其和爲 1456, 求公比及項數.

山西省二十二年

(1) 試解 $\dfrac{x+7}{9-4x^2}-\dfrac{1-x}{2x+3}=\dfrac{4}{2x-3}$ 方程式.

(2) 一農夫種地若干畝, 共可收米 36 石, 如每畝可多收一石的 $\frac{1}{5}$, 則雖少種 2 畝亦仍可收得 36 石,問每畝收量若干, 並其畝數.

廣西省二屆

(1) 試解 $2x-\sqrt{x-6}=0$ 方程式.

(2) 有二等邊三角形, 其周長等於 $2p$, 其高爲 h, 求各邊之長.

(3) 試求 $(1+x)^{10}$ 展開式中之最大係數項及其所含 x 之指數.

雲南省二十二年

(1) 三角形有兩角相等，且此相等兩角之和等於第三角，求各角之度數.

(2) 解

$$\begin{cases} x+y=10, \\ xy=24. \end{cases}$$

(3) 解 $\sqrt{x}=2-x$

雲南二十三年

(1) 用圖形解下列之聯立方程式:

$$x-5=0,$$

$$y+2=0.$$

(2) 分解 x^2-4y^2+x-2y 之因數.

(3) 一直角三角形周圍長 60 寸，斜邊長 20 寸，求他二邊之長.

中國農民銀行

圖書館簡則

1. 本館借書時間除星期日及例假外每日上午八時至十一時半下午一時半至五時半
2. 借書以二星期為限期滿時欲續借者須先將原書攜至借書處聲請續借如管理員審核並無他人需要得酌量展期但至多不得再過二星期
3. 借閱圖書不得塗寫[illegible]污損如有以上等情者應照時價賠償

中華民國二十四年四月初版
中華民國三十二年六月改訂蓉一版
(52576)

高中複習叢書 代數學一冊
每冊定價國幣貳元
印刷地點外另加運費

編著者 金品 桂叔超
發行人 王雲五 重慶白象街
印刷所 商務印書館
發行所 各地 商務印書館

(本書校對者胡達聰)