16 Problemi di primo grado

16.1 Un po' di storia

Sin dall'antichità l'uomo si è trovato di fronte a difficoltà pratiche, legate alla vita quotidiana e ha perciò messo a punto strategie per superarle.

Sembra che nell'antico Egitto le periodiche piene del Nilo abbiano spinto l'uomo a sviluppare la capacità di tracciare rette parallele, rette perpendicolari, di misurare il perimetro e l'area di particolari figure geometriche o viceversa di calcolare le misure dei lati di poligoni di dato perimetro o data area per poter ridefinire i confini degli appezzamenti di terreno.

Il *papiro di Rhind*[1], testo egizio scritto in ieratico, risalente al 1700 a.C., si autodefinisce "istruzioni per conoscere tutte le cose oscure" e contiene più di 85 problemi con relativi metodi di soluzione riguardanti il calcolo della capacità di recipienti e di magazzini, la ricerca dell'area di appezzamenti di terreno e altre questioni aritmetiche.

Nel problema 24 del papiro, ad esempio, viene calcolato il mucchio quando esso ed il suo settimo sono uguali a 19. Mucchio è l'incognita del problema, indicata con il termine *aha* il cui segno è .

Noi traduciamo la richiesta nell'equazione $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Nel 1202 Leonardo Pisano, conosciuto col nome paterno di "filius Bonacci" o Fibonacci, pubblicò il *Liber Abaci* in cui, a partire dall'ottavo capitolo, presenta vari metodi algebrici per la risoluzione di problemi di matematica applicata, legati alla realtà dell'epoca, in particolare all'ambiente commerciale. I nuovi "algoritmi" presentati da Fibonacci, intendevano facilitare la risoluzione dei problemi di calcolo evitando l'utilizzo dell'abaco. Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra matematici dell'epoca; il problema proposto era il seguente:

«Quante coppie di conigli si ottengono in un anno (salvo i casi di morte) supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?».

Fibonacci vinse la gara dando al quesito una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. La soluzione fu trovata tramite l'individuazione di una particolare successione di numeri, nota appunto come successione di Fibonacci.

Secondo la leggenda, il grande matematico Carl Fiedrich Gauss[2] già all'età di tre anni avrebbe corretto un errore di suo padre nel calcolo delle sue finanze. All'età di 10 anni fu autorizzato a seguire le lezioni di aritmetica di un certo Buttner. Un giorno, agli studenti particolarmente turbolenti, Buttner diede come compito di punizione il calcolo della somma dei primi 100 numeri naturali, da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, "5 050". Si era accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e

[1] Dal nome dell'inglese A. H. Rhind che lo comprò a Luxor nel 1858.
[2] matematico, astronomo e fisico tedesco (1777 - 1855).

nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101; fece dunque il prodotto 100×101 e divise per 2, ottenendo facilmente il risultato. Buttner rimase sgomento.

16.2 Risoluzione dei problemi

> La risoluzione dei problemi [...] serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose.
>
> R. DESCARTES

I problemi che possono presentarsi nel corso degli studi o nell'attività lavorativa sono di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale, possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze del problema.

Analizzeremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di primo grado in una sola incognita. Prima di buttarci alla risoluzione del problema, procediamo a:

a) una lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
b) la scelta della grandezza incognita e la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, ragionando sull'obiettivo del problema (condizioni sull'incognita);
c) la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione dell'equazione risolvente;
d) la risoluzione dell'equazione trovata;
e) il confronto tra la soluzione trovata e le condizioni poste su di essa.

Problema 16.1. Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

Soluzione La situazione può essere materialmente descritta con nella figura 1. Togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio come mostra la figura 2, da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.

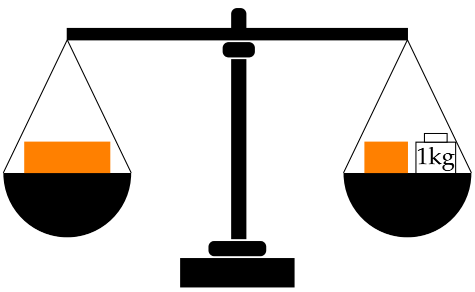


Figura 1

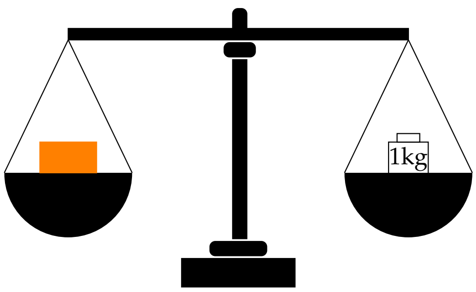


Figura 2

Risolviamo ora il problema seguendo la procedura sopra suggerita:
Dati: peso di un mattone = peso di mezzo mattone +1kg.
Obiettivo: peso del mattone.
Procedura risolutiva:

Come incognita del problema possiamo scegliere il peso del mattone: la indichiamo con p. Il valore di p dovrà essere un numero positivo. L'equazione risolvente è la traduzione con formalismo matematico dell'unica relazione contenuta nel testo del problema: $p = 1 + \frac{1}{2}p$.

Risolviamo l'equazione: $p - \frac{1}{2}p = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}p = 1 \Rightarrow p = 2\text{kg}$. La soluzione ottenuta è accettabile; il problema è determinato.

♦

Problema 16.2. Aggiungendo ad un numero naturale i suoi tre quarti, si ottiene il suo doppio aumentato di 10. Qual è il numero?

Soluzione L'ambiente del problema è numerico: si cerca un numero naturale. Indichiamo con n l'incognita cerchiamo quindi $n \in \mathbb{N}$. La lettura attenta del testo mette in luce le operazioni che dobbiamo eseguire sull'incognita e che traduciamo nei dati:

Dati: $n + \dfrac{3}{4}n = 2n + 10$.
Obiettivo: $n \in \mathbb{N}$.
Procedura risolutiva:
L'equazione risolvente è già indicata nei dati $n + \dfrac{3}{4}n = 2n + 10$.
Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 4, otteniamo:

$$4n + 3n - 8n = 40 \quad \Rightarrow \quad -n = 40 \quad \Rightarrow \quad n = -40.$$

La soluzione non è accettabile per le condizioni poste; il problema non ha soluzione.

♦

Problema 16.3. Il 1° gennaio 1990 Chiara aveva il doppio dell'età di Aldo; il 1° gennaio 2000 Chiara aveva vent'anni più di Aldo. Qual era l'età di Chiara il 1° gennaio 2010?

Soluzione Leggendo attentamente il problema notiamo che le incognite sono due: l'età di Chiara e l'età di Aldo. Indichiamo perciò con c l'età di Chiara al 1990 e con a quella di Aldo.

Nel 2000 la loro età sarà aumentata di 10 anni. Naturalmente la soluzione del problema sarà nell'insieme dei numeri naturali. Scriviamo dati e obiettivo usando il formalismo matematico:
Dati: nel 1990: $c = 2a$, nel 2000: $c + 10 = (a + 10) + 20$.
Obiettivo: L'età di Chiara nel 2010.

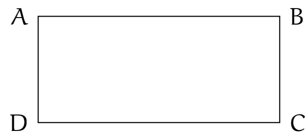
Procedura risolutiva: Osserviamo che una volta determinata l'età di Chiara nel 1990, basterà aggiungere a questa 20 per ottenere la soluzione, pertanto l'età di Chiara nel 2010 è $c + 20$. Trasformiamo la seconda relazione riportata nei dati sostituendo l'informazione relativa al 1990, si ottiene $2a + 10 = a + 10 + 20 \Rightarrow 2a - a = 20 \Rightarrow a = 20$. L'età di Aldo nel 1990 era 20, quindi $c = 40$. Dunque, l'età di Chiara nel 2010 era $c + 20 = 40 + 20 = 60$. La soluzione è accettabile; il problema è determinato.

♦

Problema 16.4. Calcolare l'area di un rettangolo in cui l'altezza supera $\frac{1}{3}$ della base di 8m e il perimetro è $\frac{20}{7}$ della base stessa.

Soluzione Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Facendo riferimento alla figura abbiamo:

Dati: $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} + 8, \quad 2p = \frac{20}{7}\overline{AB}.$



Obiettivo: L'Area$(ABCD)$.

Procedura risolutiva: Area$(ABCD) = $ misura base $\cdot$ misura altezza $= \overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

Dobbiamo dunque determinare queste due misure. I dati del problema indicano che la misura dell'altezza dipende da quella della base; una volta trovata questa misura basta farne un terzo e aggiungere 8 per avere quella dell'altezza; questo ragionamento ci fa scegliere come incognita $\overline{AB} = x$ con x numero reale positivo.

Traduciamo con formalismo matematico la prima e la seconda relazione contenuta nei dati: $\overline{AD} = \frac{1}{3}x + 8$ e $2p = \frac{20}{7}x$.

Sappiamo che il perimetro di un rettangolo è il doppio della somma della base con l'altezza. Riscriviamo con linguaggio matematico anche questa relazione: $2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}x + 8\right) = \frac{20}{7}x$ che risulta l'equazione risolvente.

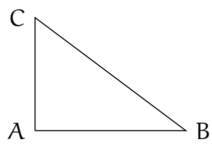
Svolgiamo i calcoli e otteniamo $4x = 21 \cdot 16 \Rightarrow x = 84 \Rightarrow \overline{AB} = 84$ e quindi $\overline{AD} = 36$. Ottenute le misure della base e dell'altezza calcoliamo Area$(ABCD) = 36 \cdot 84 = 3\,024\,m^2$.

♦

Problema 16.5. In un triangolo rettangolo il perimetro è 120cm e un cateto è 3/5 dell'ipotenusa. Determinare l'area del triangolo.

Soluzione Il problema è di tipo geometrico e riguarda un triangolo rettangolo. Rappresentiamo il triangolo:

Dati: $C\hat{A}B = $ angolo retto, $2p = 120$, $\overline{AC} = \frac{3}{5}\overline{CB}$.



Obiettivo: L'Area(ABC).

Procedura risolutiva: Area$(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Per calcolare l'area, occorre determinare la misura dei cateti del triangolo rettangolo; i dati del problema ci danno una relazione tra la misura di un cateto e la misura dell'ipotenusa; conosciamo anche il perimetro del triangolo.

Scegliamo come incognita la misura in cm di $\overline{CB}$, cioè $\overline{CB} = x$ con $x \in \mathbb{R}^+$.

Formalizziamo i dati:

$$\overline{CB} = x; \quad \overline{AC} = \frac{3}{5}x; \quad \overline{AB} + x + \frac{3}{5}x = 120. \tag{16.1}$$

Per poter scrivere un'equazione che ci permetta di determinare il valore dell'incognita ci manca la misura di $\overline{AB}$. Sembra che il problema sia privo di un'informazione. Tuttavia, il triangolo dato è rettangolo, quindi tra i suoi lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora: $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Pertanto possiamo determinare la misura di $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}x^2} = \frac{4}{5}x.$$

Con questo dato riscriviamo la 16.1 che risulta essere l'equazione risolvente del problema

$$\frac{4}{5}x + x + \frac{3}{5}x = 120 \quad \Rightarrow \quad 12x = 120 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad x = 50 \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = 50.$$

Quindi $\overline{AC} = 30\text{cm}$ e $\overline{AB} = 40\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \text{Area}(ABC) = \dfrac{30 \cdot 40}{2} = 600\text{cm}^2.$

♦