Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Es sei $b > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeige für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$b^x = \exp(x \cdot \ln b).$$

Aufgabe 17.2. Zeige, dass für die Exponentialfunktionen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z,$$

zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$ die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $z, w \in \mathbb{C}$, bei (4) sei zusätzlich $z \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$.
(2) $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.
(3) $(ab)^z = a^z b^z$.
(4) $(a^z)^w = a^{zw}$.

Aufgabe 17.3. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt

$$\log_a y = \log_a\left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 17.4.*

(1) Zeige die Gleichheit

$$\left|\ln\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\right| = \left|\ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\right|.$$

(2) Stimmt diese Gleichung auch ohne die äußeren Beträge?
(3) Wie sieht es aus, wenn man die inneren Beträge weglässt?

Aufgabe 17.5.*

Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei Exponentialfunktionen keine Exponentialfunktion sein muss.

Aufgabe 17.6. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 17.7. Es seien $b, d > 0$ und d fixiert. Zeige

$$\lim_{b \to 0} b^d = 0.$$

Aufgabe 17.8. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit dem positiven Grenzwert a. Zeige, dass die durch $w_n = a_n^{z_n}$ definierte Folge gegen a^z konvergiert.

Aufgabe 17.9. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit dem Grenzwert 0. Zeige durch ein Beispiel, dass die durch $w_n = a_n^{z_n}$ definierte Folge nicht konvergieren muss.

Aufgabe 17.10. Es sei a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Zeige, dass auch die Teilfamilie a_i, $i \in J$, summierbar ist.

Aufgabe 17.11.*

Es sei a_j, $j \in J$, eine Familie komplexer Zahlen. Zeige, dass die Familie genau dann summierbar ist, wenn die Familie der Realteile $\operatorname{Re}(a_j)$, $j \in J$, und die Familie der Imaginärteile $\operatorname{Im}(a_j)$, $j \in J$, summierbar ist. Zeige, das in diesem Fall

$$\sum_{j \in J} a_j = \Big(\sum_{j \in J} \operatorname{Re}(a_j)\Big) + \mathrm{i}\Big(\sum_{j \in J} \operatorname{Im}(a_j)\Big)$$

gilt.

Aufgabe 17.12. Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Die Betragsfamilie $|a_i|$, $i \in I$, sei summierbar. Zeige, dass a_i, $i \in I$, summierbar ist.

Aufgabe 17.13. Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Die Familie a_i, $i \in I$, sei summierbar. Zeige, dass $|a_i|$, $i \in I$, summierbar ist.

Tipp: Man zeige dieses Resultat zuerst für reelle Familien und ziehe dann Aufgabe 17.11 heran.

Für Familien, anders als wie bei Reihen, gibt es also keinen Unterschied zwischen summierbar und absolut summierbar.

Aufgabe 17.14. Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Familie

$$|a_E| = \left| \sum_{i \in E} a_i \right|, E \subseteq I, \, E \text{ endlich} \, ,$$

nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 17.15.*

Eine echte Potenz ist eine natürliche Zahl der Form n^k mit $n, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeige, dass die Familie der Kehrwerte der echten Potenzen summierbar ist.

Aufgabe 17.16. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zeige, dass die Familie

$$z^k z^\ell, \, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \, ,$$

summierbar ist.

Aufgabe 17.17. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Berechne zur summierbaren Familie

$$z^k z^\ell, \, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \, ,$$

die Teilsummen

$$s_k = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} z^k z^\ell$$

zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und berechne $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_k$.

Aufgabe 17.18. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zu $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$I_j = \left\{ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid k - \ell = j \right\} .$$

Berechne zu jedem $j \in \mathbb{Z}$ zur summierbaren Familie

$$z^k z^\ell, \, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \, ,$$

die Teilsummen

$$t_j = \sum_{(k, \ell) \in I_j} z^k z^\ell$$

und berechne $\sum_{j \in \mathbb{Z}} t_j$.

Aufgabe 17.19.*

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2,3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 17.20. Wir betrachten die Familie

$$\frac{k^n}{n!},\ (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

(1) Zeige, dass diese Familie nicht summierbar ist.

(2) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Ist die Teilfamilie

$$\frac{k^n}{n!},\ (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, k \leq \alpha,$$

summierbar?

(3) Es sei $\beta \in \mathbb{R}_+$. Ist die Teilfamilie

$$\frac{k^n}{n!},\ (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, k \leq \beta n,$$

summierbar?

Aufgabe 17.21. Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_3$ der geometrischen Reihe im Entwicklungspunkt $\frac{1}{2}$.

(Für d_1 ist es hilfreich, eine Formel für $\sum_{n=k}^{\infty} z^n$ aufzustellen. Für d_2, d_3 wird die Aufsummierung ziemlich kompliziert. Mit dem Ableitungskalkül haben wir bald eine einfache Möglichkeit, diese Koeffizienten auszurechnen. Dieser beruht für Potenzreihen allerdings auf dem Entwicklungssatz.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.22. (4 Punkte)

Sei a_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 17.23. (3 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, aber nicht die Nullfunktion. Zeige, dass die Wertefamilie $f(q)$, $q \in \mathbb{Q}$, nicht summierbar ist.

Aufgabe 17.24. (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus allen Zahlen besteht, in deren Dezimalentwicklung keine 9 vorkommt. Zeige, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$

summierbar ist.

Aufgabe 17.25. (5 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{a^2+b^2},\ a,b \in \mathbb{N}_+\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 17.26. (5 Punkte)

Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie von nichtnegativen reellen Zahlen. Zeige, dass die Teilmenge

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$$

abzählbar ist.

Aufgabe 17.27. (3 Punkte)

Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_6$ der Exponentialreihe im Entwicklungspunkt 1.

Abbildungsverzeichnis