

Körper- und Galoistheorie**Arbeitsblatt 6****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 6.1. Zeige, dass die Umkehrabbildung eines Ringisomorphismus wieder ein Ringhomomorphismus ist.

AUFGABE 6.2. Zeige, dass das Bild unter einem Ringhomomorphismus ein Unterring ist.

AUFGABE 6.3. Zeige, dass das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus nicht unbedingt wieder ein Ideal ist.

AUFGABE 6.4. Es sei R ein Integritätsbereich der Charakteristik $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Ordnung von jedem Element $x \in R$, $x \neq 0$, ebenfalls n ist.

AUFGABE 6.5. Es sei R ein kommutativer Ring der Charakteristik $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Ordnung von jedem Element $x \in R$, $x \neq 0$, ein Teiler von n ist.

AUFGABE 6.6. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ der kanonische Homomorphismus. Zeige, dass die Charakteristik von R der eindeutig bestimmte nichtnegative Erzeuger des Kernideals $\ker \varphi \subseteq \mathbb{Z}$ ist.

AUFGABE 6.7. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass der kanonische Homomorphismus $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ eine eindeutige Faktorisierung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow R$$

besitzt, wobei n die Charakteristik von R ist.

AUFGABE 6.8. Bestimme sämtliche Primkörper.

AUFGABE 6.9. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

AUFGABE 6.10. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Berechne das Bild des Polynoms X^3+4X-3 unter dem durch $X \mapsto X^2+X-1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \rightarrow K[X]$.

AUFGABE 6.11. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K, X \longmapsto a.$$

AUFGABE 6.12. Es sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ die Menge derjenigen rationalen Zahlen, die eine abbrechende Dezimalentwicklung besitzen. Zeige, dass A ein Unterring von \mathbb{Q} ist und bestimme die Einheiten von A .

AUFGABE 6.13. Es sei $C = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Entscheide, ob die folgenden Teilmengen von C einen Unterring bilden.

- (1) Die Menge der stetigen 2π -periodischen Funktionen.
- (2) Die Menge der stetigen geraden Funktionen.
- (3) Die Menge der stetigen ungeraden Funktionen.

AUFGABE 6.14. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und es sei $D_{\mathbb{K}} = C^1(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ der Ring der stetig-differenzierbaren Funktionen von \mathbb{K} nach \mathbb{K} . Zeige, dass der Einsetzungshomomorphismus

$$\Psi: \mathbb{K}[X] \longrightarrow D_{\mathbb{K}}, X \longmapsto \text{Id}_{\mathbb{K}},$$

injektiv ist. Bestimme die Polynome $F \in \mathbb{K}[X]$, für die $\Psi(F)$ eine Einheit in $D_{\mathbb{K}}$ ist.

AUFGABE 6.15.*

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R . Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6.16. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Berechne das Bild des Polynoms $X^4 - 2X^2 + 5X - 2$ unter dem durch $X \mapsto 2X^3 + X - 1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \rightarrow K[X]$.

AUFGABE 6.17. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $P \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der durch $X \mapsto P$ definierte Einsetzungshomomorphismus von $K[X]$ nach $K[X]$ injektiv ist und dass der durch P erzeugte Unterring $K[P] \subseteq K[X]$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist.

Zeige, dass bei $\text{grad}(P) \geq 2$ ein echter Unterring $K[P] \subset K[X]$ vorliegt.

AUFGABE 6.18. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Betrachte den Matrizenring $\text{Mat}_3(K)$ und darin die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Definiere einen Ringhomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow \text{Mat}_3(K),$$

der X auf M schickt. Bestimme den Kern dieser Abbildung.

AUFGABE 6.19. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass dies eine einfache Radikalerweiterung ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5