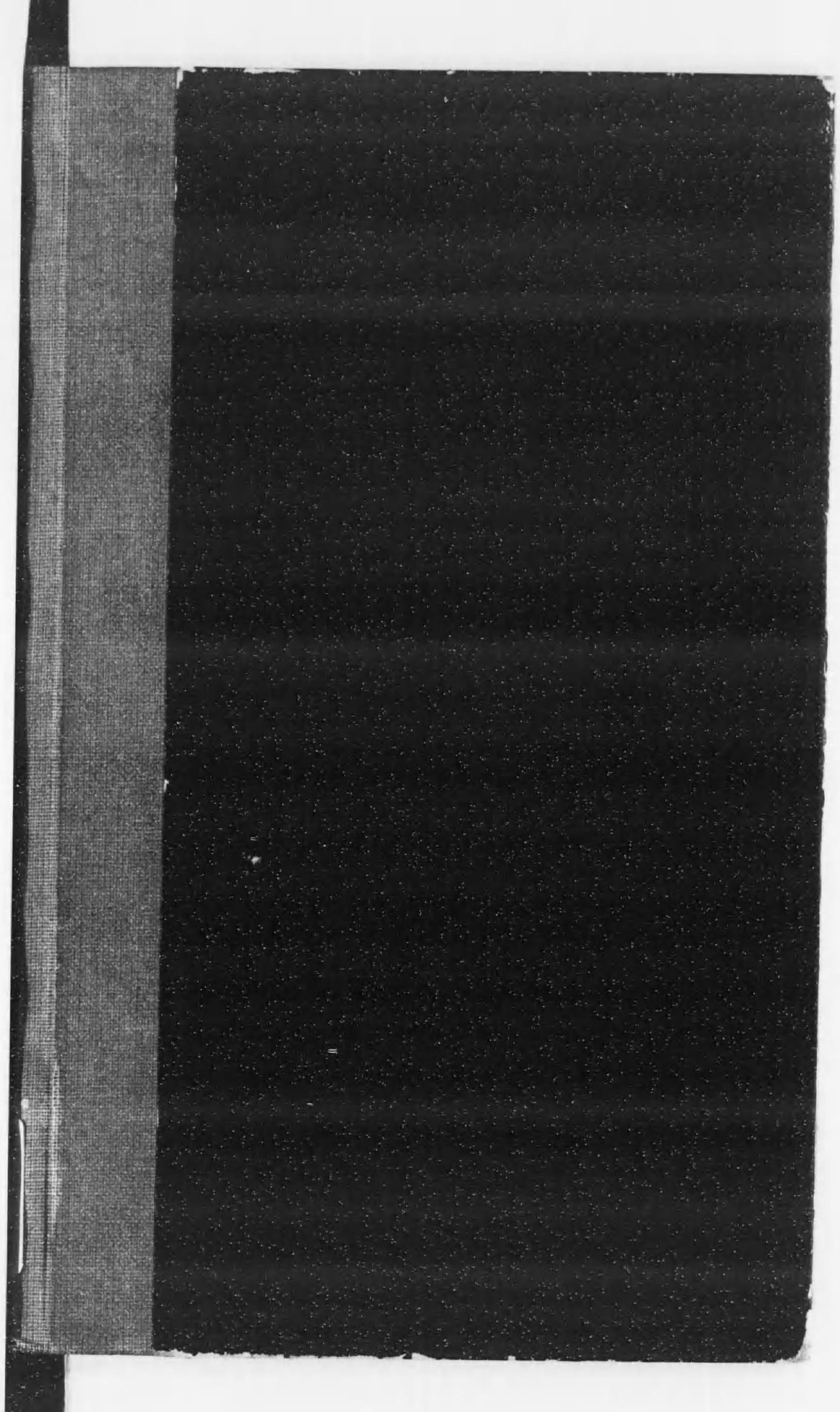
始



林學博士 諸戸北郎著

最小自乗法應用 測量平均法

東京 丸善株式會社

緒　言

最小自乘法ハ諸種ノ觀測特ニ測量ノ結果ヲ平均シ且ツ其精密度ヲ比較スルニ用ヒラル．故ニ余ハ爰ニ其大要ヲ記シ且ツ其ノ應用ノ實例ヲ示シ測量家諸君ノ參考ニ供セントス．

本書ヲ公ニスルニ當リ東京帝國大學講師林學博士伊藤武夫君同林學士石井耒太郎君故林學士鈴木忠吉君助手青沼正人君．ノ助力ヲ受ケタルコト多シ爰ニ特記シテ謝意ヲ表ス．

大正十一年十一月

諸　戸　北　郎識ス

最小自乘法應用 測量平均法目次

（終リ）

最小自乘法應用 測量平均法

第一章　緒論

第一節　最小自乘法ノ應用

最小自乘法ノ測量學上ノ應用ハ測量ヲ整正シ其精密度ヲ比較スルニ在リ數回精密ノ測量ヲナスモ其結果ノ一致セザルコトアリ此時ニ測量ヲ整正スルコト必要ナリ　卽吾人ハ測量ヲナシテ其眞値ヲ見出スヲ得ザル故ニ測量ヲ組合セ整正シテ最モ確カラシキ値ヲ求メザルベカラズ又測量ヲ組合セ整正スル爲メ又ハ最モ良キ測量法ヲ見出ス爲メニ種々ノ測量ノ精密度ヲ比較スルコト必要ナリ

第二節　測量ノ分類

第一. **直接測量**　直接測量ハ或ル物ノ大サヲ定ムル爲メニ直接ニナス測量ナリ. 例ヘバ測鏈ヲ用ヒテ直接ニ距離ヲ測リ或ハ經緯儀ヲ用ヒテ直接ニ角度ヲ測ルガ如シ

第二. **間接測量**　間接測量ハ或ル物ノ大サヲ測ラントスルニ當リ其物ヲ直接ニ測ラズシテ其物ニ關係ヲ有スル或ル他ノ物ヲ測リテ其大サヲ間接ニ定ムルモノナリ　例ヘバ或ル邊及角ヲ測リテ三角形ノ他ノ一邊ヲ定メ又二角ノ和或ハ差ニ依リテ他ノ一角ヲ定メ又兩點ニ於ケル照尺ノ讀數ニ依リテ二點ノ高サノ差ヲ定メ又星ノ高度ヲ測定シテ其地ノ緯度ヲ定ムルガ如シ

第三. **條件附測量**　條件附測量ハ直接測量タルト間接測量タルヲ

問ハズ理論上與ヘラレタル或嚴密ナル條件ニ從ハザル可カラザル如キ測量ナリ

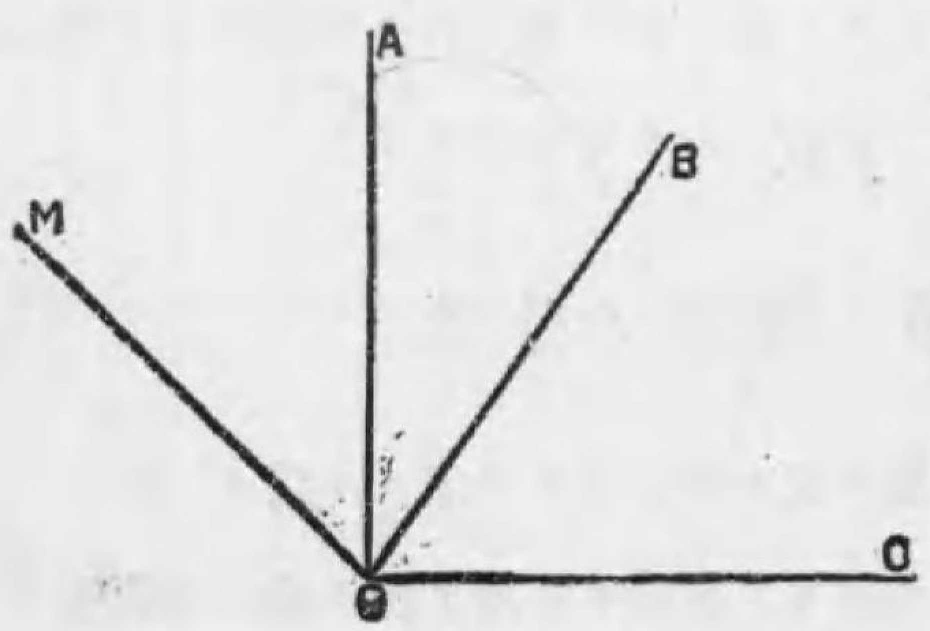
例ヘバ平面三角形ニ於テハ三角形ノ三內角ノ和ハ180度ナラザル可カラザルガ如シ

第四. **獨立測量** 獨立測量ハ直接測量タルト間接測量タルトヲ問ハズ嚴密ナル條件ニ從フコトヲ要セザル如キ測量ナリ

例ヘバ三角形ニ於テ二角ノ測定ハ獨立測量ナリ何トナレバ此二角ノ值ハ互ニ幾何學上ノ關係ヲ有セザレバナリ

以上ノ場合ヲ第一圖ニ就テ說明セン

第一圖



今經緯儀ヲO點ニ据ヘAOB角及BOC角ヲ測ルトキハ此測量ハ何レモ直接測量ナリ

又假點Mヲ設ケMOA角, MOB角, MOC角ヲ測定シ之レヨリAOB角及BOC角ヲ算出スルトキハ此AOB角及BOC角ノ測定ハ間接測量ナリ

$$\angle AOB = \angle MOB - \angle MOA$$

$$\angle BOC = \angle MOC - \angle MOB$$

而シテ直接又ハ間接ニ測定サルルモAOB角及BOC角ノ值ハ互ニ獨立ニシテ他ニ何等ノ關係ヲ有セザレドモAOB角, BOC角, AOC角ノ三角ヲ測ルトキハ此測量ハ條件附測量ナリ卽チ $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ ナルコトノ幾何學上ノ條件ニ從ハザルベカラズ 從テ此條件ヲ滿足スル角ノ值ヲ見出サヾル可カラズ

又邊及角ヲ測定スル測量ハ直接測量ニシテ此邊及角ヨリ面積ヲ算出スルトキハ其面積ノ測定ハ間接測量ナリ

又或ル二邊ノミヲ考フルトキハ此レハ互ニ獨立ナレドモ若シ多角形ノ總テノ邊及角ヲ考フルトキハ製圖スル場合ニ圖ガ閉鎖セザル可カラザル條件アリ

第三節 測量ノ誤差

第一. **常數誤差或ハ**(規則誤差)

常數誤差ハ既知ノ原因ヨリ生ジ測量ノ結果ヨリ除去シ得ベキ誤差ニシテ例ヘバ基線測量ニ於テ使用スル基線測器ノ長サニ溫度ノ影響ノ如キ物理的誤差アリ又基線測器ノ目盛ノ誤差ノ如キ器械的誤差アリ又二個ノ基線測器ヲ接觸スル每ニ同一ノ誤ヲ爲スガ如キ測量者ノ習慣ニ因ル個入的誤差アリ. 常數誤差ハ此誤差ヲ生ズル原因ヲ知ルトキハ之ヲ除去シ得ル故ニ嚴格ニ言ヘバ誤差ナラズ. 故ニ測者ハ測量後ニ出來得ル限リ改正ヲ爲シテ常數誤差ヲ除去スベシ

第二. **過失誤差或ハ**(大誤差)

過失誤差ハ測者ノ心理狀態ノ混亂ヨリ起ル誤差ニシテ熟練セル測者ニテモ時トシテハ爲ス誤差ナリ例ヘバ羅針盤ノ指針ヲ讀ムニ當リ42° ヲ 58° ト讀ムコトアリ又角ヲ測ルトキニ誤リテ他ノ標尺ヲ見透スコトアリ. 此ノ如キ誤差ハ他ノ測量ト比較スレバ直ニ除去シ得ルモノナリ

第三. **偶然誤差或ハ**(不規則誤差)

偶然誤差ハ總テノ常數誤差及過失誤差ヲ研究除去シタル後ニ尙殘存スル誤差ニシテ例ヘバ水準測量ニ於テ水準測器ノ急激ナル膨脹收

縮或ハ風ノ影響或ハ大氣中光線ノ屈折ヨリ起ル誤差ノ如シ此ノ如キ誤差ハ測者ノ觸覺及視覺ノ不完全卽器械ヲ巧妙ニ取扱フヲ得ザルコト測標ノ中心ヲ見透シ得ザルコト．度盛ノ小區劃ヲ讀定シ得ザルコト．常ニ器械ヲ整正ニ保ツヲ得ザルコト等ヨリ起ルモノナリ此誤差ハ如何ニ注意シテ測量ヲナスモ起ルモノニシテ之レヲ除去スルハ最小自乘法ノ目的ナリ

此ノ如キ不規則ナル誤差ハ數學的考究ノ範圍ニ屬セザルガ如ク考ヘラルルモ實ニ驚ク可キ「ぷろばびりちー」ノ法則ニ依リテ支配セラルルモノナリ

〔參考〕 本書ニ於テ誤差ト稱スルハ多數ノ原因ニヨリテ起リタル偶然誤差ニシテ測定セントスルモノノ眞値ト觀測値トノ差ナリ　故ニ今或角ノ眞値ヲ X トシ觀測値ヲ $l_1 l_2 l_3 \ldots\ldots l_n$. 眞誤差ヲ $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \ldots\ldots \epsilon_n$ トスレバ

眞誤差ハ

$$\left.\begin{array}{l} X-l_1=\epsilon_1 \\ X-l_2=\epsilon_2 \\ X-l_3=\epsilon_3 \\ \ldots\ldots \\ X-l_n=\epsilon_n \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

第四．殘差

殘差トハ測定セントスルモノノ最モ確カラシキ値ト觀測値トノ差ナリ此最モ確カラシキ値ハ觀測値ニ最小自乘法ヲ適用シテ得ラルルモノナリ

例ヘバ一個ノ未知量ニ於ケル直接測定ノ如キ簡單ナル場合ニ於テハ最モ確カラシキ値ハ算術的平均數ナリ．

今殘差ヲ $v_1 v_2 v_3 \ldots\ldots v_n$ トシ測定セントスルモノノ最モ確カラシキ値ヲ x トシ觀測値ヲ $l_1 l_2 \ldots\ldots l_n$ トスレバ

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\ldots\ldots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

殘差ハ

$$\left.\begin{array}{l} x-l_1=v_1 \\ x-l_2=v_2 \\ x-l_3=v_3 \\ \ldots\ldots \\ x-l_n=v_n \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\quad \text{ナリ}$$

而シテ測量ノ回數ガ多キ程最モ確カラシキ値ハ眞値Xニ近ヅキ從ツテ殘差 (v) モ亦眞誤差 (ε) ニ近ヅクベシ故ニ精密ナル測量ヲ無限ニ反覆シタリト假定スルトキハ遂ニ x ハ X ト一致スルト同時ニ v ハ ε ト一致ス可シ

此理ニ由テ觀測ノ回數ガ多クナルニ從ヒ殘差ト眞誤差トノ差ハ次第ニ僅小トナリテ遂ニ此兩者ヲ同一ノ法則ニテ支配スルヲ得ルニ至ル故ニ殘差ヲ殘差誤差ト稱スルコトアリ．

第四節　「ぷろばびりちー」ノ原理

數學上ニ於テ「ぷろばびりちー」ナル語ハ1ヨリ小ナル數ヲ意味ス卽チ或ル事柄ガ現ハルヽ場合ノ度數或ハ現ハレザル場合ノ度數ト總可能的場合ノ度數トノ比ニシテ常ニ1ヨリ小ナル數ナリ

例ヘバ一個ノ銅貨ヲ投ゲルトキニ之ニ二ツノ可能的場合アリ卽チ表面或ハ裏面ガ出ヅ而シテ表面ガ出ルト裏面ガ出ルトハ其間ニ何等軒輊ナシ故ニ表面ガ出ル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{1}{2}$ニシテ裏面ガ出ル「ぷろばびりちー」モ亦$\frac{1}{2}$ナリ

又一個ノ賽目ヲ投ゲルトキニ一樣ニ起ルベキ六ツノ場合アリ而シ

ラ一度試ミテ1ガ出ル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{1}{6}$ニシテ1ガ出デザル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{5}{6}$ナリ

一般ニ或ル事柄ガa度現ハレb度現ハレズシテ其間ニ何等軒輊ナキトキハ此事柄ガ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ$\frac{a}{a+b}$ニシテ此事柄ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{b}{a+b}$ナリ

故ニ「ぷろばびりちー」ハ常ニ分數ニテ示サレ或事柄ノ現ハレ或ハ現ハレザルノ信用ノ度ヲ計ルモノナリ．而シテ其値ハ0ヨリ1迄ノ間ニ在リ

若シ此分數ガ0ナレバ事柄ノ全ク現レザルコトヲ意味シ

此分數ガ$\frac{1}{2}$ナレバ事柄ガ現ハルル機會ト現ハレザル機會トハ同數ナルコトヲ意味シ此分數ガ1ナレバ事柄ガ確ニ現ハルヽコトヲ意味ス

故ニ1ハ確實ナルコトヲ示ス數學上ノ記號ナリ．而シテ或ル事柄ハ現ハルヽカ或ハ現ハレザルカ何レカナルヲ以テ此兩者ノ「ぷろばびりちー」ノ和ハ1ナリ

故ニPヲ或事柄ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」トスレバ1−Pハ此事柄ノ現ハレザル「ぷろばびりちー」ナリ

例ヘバ抽籤ニ於テ當籤スル「ぷろばびりちー」ガ$\frac{1}{2000}$ナレバ當籤セザル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{1999}{2000}$ナリ

單獨事柄 單獨事柄ハ或ル事柄ガ獨立ノ方法ニ於テ現ハルルモノナリ而シテ其事柄ガ種々ノ獨立ノ方法ニ於テ現ハルヽ時ハ其レノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ種々ノ獨立ノ場合ニ於テ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ノ總和ナリ卽チ或ル事柄ガa_1場合ニ於テ現ハレ又a_2場合ニ於テ現レ其總場合ガcアレバ其現ハルル「ぷろばびりちー」ハ

a+b

$\frac{a_1+a_2}{c}$ニシテ之レハ種々ノ獨立ノ場合ニ於テ現ハルヽ「ぷろばびりちー」$\frac{a_1}{c}$及$\frac{a_2}{c}$ノ和ニ等シ

例ヘバ今1個ノ袋ノ内ニ $\left.\begin{array}{l}\text{赤球 } 20\\ \text{白球 } 16\\ \text{黑球 } 14\\ \hline \text{計 } 50\end{array}\right\}$ アリトシ此内ノ一球ヲ取出

ストキハ赤球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{20}{50}$

白球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{16}{50}$

黑球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{14}{50}$

赤球或ハ黑球何レカ一球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{20}{50}+\frac{14}{50}=\frac{34}{50}$ナリ

集合事柄 集合事柄ハ獨立シタル種々ノ事柄ノ同時ニ現ハルルモノニシテ例ヘバ一度ニ三個ノ賽目ヲ投ジテ三面ヲ出スコトハ三個ノ事柄ノ集合ヨリ生ズル集合事柄ナリ

故ニ測量ニ於ケル誤差ハ多數且ツ偶然ニ起ル總テノ小サキ獨立誤差ノ集合ヨリ生ズル集合事柄トシテ考ヘラレ得ルモノナリ而シテ集合事柄ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ多數ノ單獨事柄ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ノ相乘積ナリ何トナレバ今爰ニ二個ノ袋アリテ

第一ノ袋ノ内ニハ $\left.\begin{array}{l}\text{黑球 } 7\text{個}\\ \text{白球 } 9\text{個}\end{array}\right\}$ 合計16個アリ

第二ノ袋ノ内ニハ $\left.\begin{array}{l}\text{黑球 } 4\text{個}\\ \text{白球 } 11\text{個}\end{array}\right\}$ 合計15個アリ

第一ノ袋ヨリ黑球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{7}{16}$ニシテ

第二ノ袋ヨリ黒球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{4}{15}$ナリ

而シテ同時ニ兩方ノ袋ヨリ黒球ヲ1個宛合計2個ヲ取出ス集合事柄ノ「ぷろばびりちー」ハ次ノ如シ

第一ノ袋內ノ各球ハ第二袋內ノ各球ト對ヲナスヲ以テ二個ノ球ヲ取出ス組合セハ總計$16\times15=240$アリ而シテ第一袋內ノ七黒球ノ各々ハ第二袋內ノ四黒球ノ各々ト對ヲナシ得ル故ニ二個ノ黒球ヲ取出シ得ル場合ハ $7\times4=28$ ナリ．故ニ二個ノ袋ヨリ同時ニ2黒球ヲ取出ス「ぷろばびりちー」ハ$\frac{7\times4}{16\times15}$ニシテ之レ二個ノ獨立事柄ノ「ぷろばびりちー」ノ相乘積$\frac{7}{16}\times\frac{4}{15}$ニ等シ

一般ニ二個ノ事柄アリテ其第一事柄ハ a_1 場合ニ於テ現ハレ b_1 場合ニ於テ現ハレズ第二事柄ハ a_2 場合ニ於テ現ハレ b_2 場合ニ於テ現ハレズトス卽チ

$$\text{第一事柄}\left\{\begin{array}{ll}\text{現ハルヽ場合} & a_1\\ \text{現ハレザル場合} & b_1\end{array}\right\}\text{合計}(a_1+b_1)\text{場合}$$

$$\text{第二事柄}\left\{\begin{array}{ll}\text{現ハルヽ場合} & a_2\\ \text{現ハレザル場合} & b_2\end{array}\right\}\text{合計}(a_2+b_2)\text{場合}$$

而シテ (a_1+b_1) 場合中ノ各場合ハ (a_2+b_2) 場合中ノ各場合ト組合セ得ル故ニ二個ノ事柄ノ組合セノ總場合ハ $(a_1+b_1)(a_2+b_2)=a_1a_2+a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2$ ニシテ此總場合ノ內ニテ a_1a_2 場合ハ兩事柄ノ現ハルヽ場合, b_1b_2 場合ハ兩事柄ノ現ハレザル場合, a_1b_2 場合ハ第一事柄ノ現ハレ第二事柄ノ現ハレザル場合, a_2b_1 場合ハ第一事柄ガ現ハレズ第二事柄ガ現ハルヽ場合ナリ　故ニ集合事柄ノ「ぷろばびりちー」ハ次ノ如シ

兩事柄ガ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ

$$\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=\frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{a_2}{a_2+b_2}$$

兩事柄ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ

$$\frac{b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=\frac{b_1}{a_1+b_1}\times\frac{b_2}{a_2+b_2}$$

第一事柄ガ現ハレ第二事柄ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ

$$\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=\frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{b_2}{a_2+b_2}$$

第一事柄ガ現ハレズ第二事柄ガ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ

$$\frac{a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=\frac{a_2}{a_1+b_1}\times\frac{b_1}{a_2+b_2}$$

此等ノ「ぷろばびりちー」ノ各々ハ獨立事柄ノ「ぷろばびりちー」ノ相乘積ナル故ニ前述ノ如ク集合事柄ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ多數ノ獨立事柄ノ「ぷろばびりちー」ノ相乘積ナリ

而シテ此理ハ三個以上ノ事柄ノ場合ニモ適用スルヲ得可シ故ニ若シ4個ノ事柄アリテ P_1, P_2, P_3 及 P_4 ヲ其現ハルヽ「ぷろばびりちー」トスレバ總テノ事柄ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ $P_1P_2P_3P_4$ 總テノ事柄ノ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ

$$(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)$$

第一事柄ガ現ハレ他ノ三事柄ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ $P_1(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)$ ナリ而シテ多數ノ事柄ノ中最モ現ハレ易キ事柄ハ數學的最大ナル「ぷろばびりちー」ヲ有スルモノナリ

例ヘバ二個ノ銅貨ヲ同時ニ投グルトキハ三個ノ集合事柄ノ場合アリテ其「ぷろばびりちー」ハ次ノ如シ

1.　二個共表面ノ出ル場合ニシテ其「ぷろばびりちー」ハ$\frac{1}{4}$

2. 一個表面一個裏面ノ出ル場合ニシテ其「ぷろばびりちー」ハ$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3. 二個共裏面ノ出ル場合ニシテ其「ぷろばびりちー」ハ$\frac{1}{4}$

故ニ一個ガ表面他ノ一個ガ裏面ノ出ル場合ハ最大ノ「ぷろばびりちー」ヲ有シ三個ノ集合事柄中ニテ最モ現ハレ易シ又三個ノ場合ノ「ぷろばびりちー」ノ和ハ$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$ナリ之レ此三個ノ集合事柄中ノ一個ハ必ラズ現ハルヽ故ニ三個ノ場合ノ「ぷろばびりちー」ノ和ハ1ナラザルベカラズ或ル距離ヲ四回測量シテ其値ガ720.2尺,720.3尺,720.4尺,720.5尺ナレバ其算術的平均値ハ720.35尺ニシテ之レ一般ニ此距離ノ最モ確カラシキ値ト見做サル而シテ此算術的平均値ノ「ぷろばびりちー」ガ他ノモノヨリ大ナルコトハ第三章ニ在リ

次ニ獨立ノ事柄ヨリ成ル集合事柄ノ場合ヲ考ヘン

Pヲ或ル事柄ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」Qヲ其事柄ノ現ハレザル「ぷろばびりちー」トスレバ　$P+Q=1$

此ノ如キ事柄ガn個アレバ總テノ事柄ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ$P.PP\ldots\ldots P=P^n$

n個ノ中$(n-1)$個ガ現ハレ1個ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ$P^{n-1}Q$ニシテ此場合ハnアル故ニ一般ニ$(n-1)$個ガ現ハレ1個ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ$nP^{n-1}Q$ナリ　同様ニ$(n-2)$個ガ現ハレ2個ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ$P^{n-2}Q^2$ニシテ此場合ハ$\frac{n(n-1)}{2}$アル故ニ一般ニ$(n-2)$個ガ現ハレ2個ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{n(n-1)}{2}P^{n-2}Q^2$ナリ

$(P+Q)^n$ヲ二項定理ニ依リ展開スレバ

$$(P+Q)^n=P^n+nP^{n-1}Q+\frac{n(n-1)}{1.2}P^{n-2}Q^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots m}P^{n-m}Q^m+\ldots\ldots\ldots+Q^n$$

第一項ハn個ガ現ハルヽ「ぷろばびりちー」

第二項ハ$n-1$個ガ現ハレ1個ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」

第$(m+1)$項ハ$(n-m)$個ガ現ハレm個ガ現ハレザル「ぷろばびりちー」

故ニ最モ現ハレ易キ場合ヲ定ムルニハ此等ノ項ノ中ニテ最大ナル項ヲ見出スコト必要ナリ

銅貨ヲ投グル場合ハ　$P=Q=\frac{1}{2}$ニシテ此時ノ各項ハ次ノ如シ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

nガ偶數ナレバ中央ノ項ガ最大ニシテ

nガ奇數ナレバ中央ノ二項ガ相等シク最大ナリ

今$n=6$トスレバ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6+6\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{6(6-1)}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{6(6-1)(6-2)}{1.2,3.}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$+\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$+\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{6\times5}{2\times64}+\frac{6\times5\times4}{1.2.3}$$

$$\times\frac{1}{64}+\frac{6\times5\times4\times3}{1.2.3.4}\times\frac{1}{64}+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1.2.3.4.5}\times\frac{1}{64}+\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\times\frac{1}{64}=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}+\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}$$

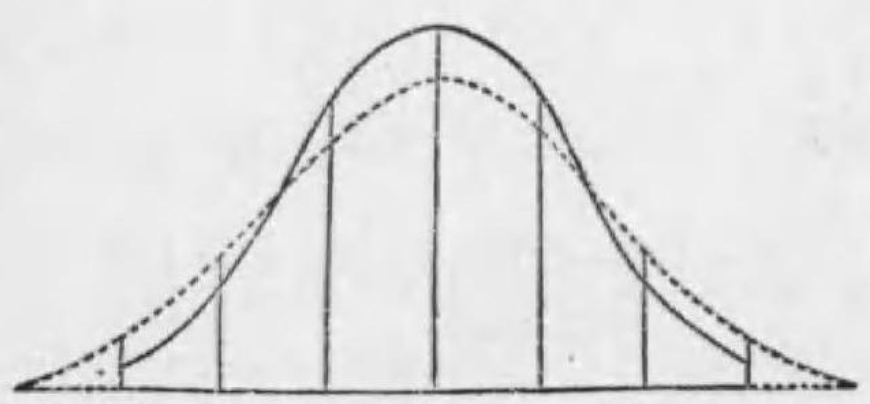
故ニ6個ノ銅貨ヲ投ゲタルトキニ現ハルヽ種々ノ場合ノ「ぷろばびりちー」ハ次ノ如シ

六個共表面ノ出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{1}{64}$
五個表面出デ一個裏面出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{6}{64}$
四個表面出デ二個裏面出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{15}{64}$
三個表面出デ三個裏面出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{20}{64}$
二個表面出デ四個裏面出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{15}{64}$
一個表面出デ五個裏面出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{6}{64}$
六個共裏面ノ出ル場合ノ「ぷろばびりちー」	$\frac{1}{64}$
總計	1

圖解

六個ノ銅貨ヲ投ゲタル場合ニ現ハルヽ七個ノ場合ノ「ぷろばびりちー」ノ値ヲ圖ニ示セバ次ノ如シ

第二圖



水平線ヲ六等分シ其等分點ヨリ各「ぷろばびりちー」$\frac{1}{64}$, $\frac{6}{64}$, $\frac{15}{64}$, $\frac{20}{64}$, $\frac{15}{64}$, $\frac{6}{64}$, $\frac{1}{64}$ ニ比例シテ縦線ヲ立テ其先端ヲ連絡スルトキハ第二圖ノ實線ヲ得.

又八個ノ銅貨ヲ投ゲタル場合ニ現ハルヽ九個ノ場合ノ「ぷろばびりちー」ノ値ハ次ノ如シ

$$(P+Q)^8=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^8+8\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{8\times7}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{8\times7\times6}{1.2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$+\frac{8\times7\times6\times5}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{8\times7\times6\times5\times4}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$+\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{1.2.3.4.5.6.7}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$+\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{1.2.3.4.5.6.7.8.}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$=\frac{1}{256}+\frac{8}{256}+\frac{28}{256}+\frac{56}{256}+\frac{70}{256}+\frac{56}{256}+\frac{28}{256}+\frac{8}{256}+\frac{1}{256}$$

此値ヲ圖ニ示セバ第二圖點線ノ如シ

此曲線ハ測量ノ誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ノ法則ヲ表ハス曲線ニ酷似ス.

第　二　章

誤差ノ「ぷろばびりちー」ノ法則

第一節　總　　說

測量ニ於テ或ル大サノ偶然誤差ガ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ其大サノ誤差ノ數ガ誤差ノ總數ニ對スル割合ナリ

即チ　偶然誤差ノ「ぷろばびりちー」$=\dfrac{\text{其大サノ誤差ノ數}}{\text{誤差ノ總數}}$

次ニ誤差ノ大サト其「ぷろばびりちー」ノ關係ヲ研究セン.

第二節　經驗ヨリ得タル定理

熟練ナル射手ガ銃ヲ撃ツトキニ重力ノ影響ノ如キ規則誤差ヲ除去スレバ誤差ハ全ク規則正シク且對稱的ニ現ハルヽコトガ認メラル即チ

1. 小ナル誤差ハ大ナル誤差ヨリ多ク現ハルヽコト
2. 誤差ハ水平覘線ノ上下兩側ニ略ボ同樣ニ現ハルルコト
3. 非常ニ大ナル誤差ハ現ハレザルコト

例ヘバ600尺ノ距離ニ在ル長サ52尺高サ11尺ノ射的ノ中央水平線ヲ覘ヒ彈丸千個ヲ發射セシニ千發共射的ニ當リタレドモ其位置同ジカラズ. 今射的ノ高サヲ十一等分シテ水平線ヲ引キ此部分ノ各々ニ當リシ彈丸ノ數ヲ數ヘシニ次ノ如シ

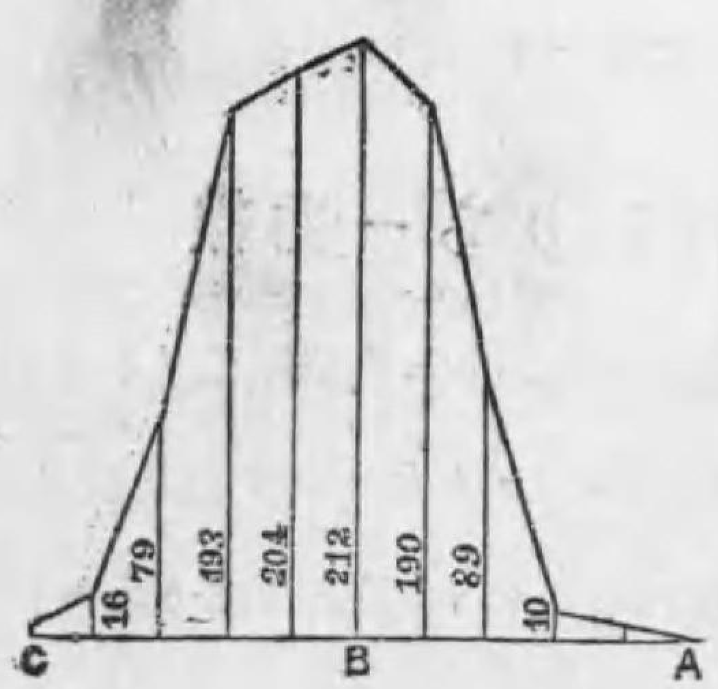
最上部ニ當リシ彈丸數………………………… 1

第二部ニ當リシ彈丸數………………………… 4
第三部ニ當リシ彈丸數…………………………10
第四部ニ當リシ彈丸數…………………………89
第五部ニ當リシ彈丸數………………………… 190
第六部ニ當リシ彈丸數………………………… 212
第七部ニ當リシ彈丸數………………………… 204
第八部ニ當リシ彈丸數………………………… 193
第九部ニ當リシ彈丸數…………………………79
第十部ニ當リシ彈丸數…………………………16
最下部ニ當リシ彈丸數………………………… 2

總　計　　1000

此數ヲ縱線トシテ圖示スルトキハ彈丸ノ分配ノ狀態ハ第三圖ノ如シ　圖ニ於テAハ射的ノ最上部 Bハ中央部 Cハ最下部ナリ　而シテ彈丸ハ上部ヨリモ下部ニ多ク當レルヲ見ル之レ重力ノ爲メ起ル規則誤差ニシテ銃ニテ覘フトキニ全ク除クヲ得ザルモノナリ.

第　三　圖



直接測量ノ場合ニ於テ誤差ノ分布ハ上述ノ覘ヒ外レノ彈丸ノ分布ニ等シ例ヘバ合衆國ニ於ケル一等三角測量ノ角ノ百回ノ測量結果ニ依リ其最モ確カラシキ値ヨリ各觀測値ヲ減ジテ殘差誤差ヲ作リ之ヲ大サニ依リ分類スルトキハ次ノ如シ

+6.″0	乃至	+5.″0	1個	47個
+5.″0	〃	+4.″0	2 〃	
+4.″0	〃	+3.″0	2 〃	
+3.″0	〃	+2.″0	3 〃	
+2.″0	〃	+1.″0	13 〃	
+1.″0	〃	0.″0	26 〃	
0.″0	〃	−1.″0	26 〃	53個
−1.″0	〃	−2.″0	17 〃	
−2.″0	〃	−3.″0	8 〃	
−3.″0	〃	−4.″0	2 〃	
總計			100個	

此結果ニ依レバ小ナル誤差ハ大ナル誤差ヨリモ多ク現ハレ正及負ノ誤差ノ數ハ殆ンド相等シク非常ニ大ナル誤差ハ現ハレザルヲ知ル又此場合ノ最大ナル誤差ハ 5.″2 ナリキ

然レドモ測量ノ方法ガ粗雜ナルトキハ誤差ノ限界ハ此結果ヨリモ廣クナルベシ．故ニ經驗ヨリ得タル定理ハ次ノ如シ

第一．小ナル誤差ハ大ナル誤差ヨリモ多ク現ハルヽコト

第二．正及負ノ誤差ノ數ハ同樣ニ現ハルヽコト

第三．非常ニ大ナル誤差ハ現ハレザルコト

以上ノ定理ハ以下述ブル理論ノ基礎ナリ

第三節 「ぷろばびりちー」曲線

精密ナル測量ニ於テハ小ナル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ大ナル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ヨリ大ニシテ正及負ノ誤差ハ同樣ニ現ハレ非常ニ大ナル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ零ナリ

此非常ニ大ナルトノ語ハ意味漠然ナル如キモ特別ノ場合ニ於テ考

フルトキハ明カナリ．例ヘバ1秒迄讀定シ得ベキ經緯儀ヲ使用スルトキハ 20秒ノ誤差ハ非常ニ大ニシテ 1分迄讀定シ得ベキ經緯儀ヲ使用スルトキハ5分ノ誤差ハ非常ニ大ナリ．測量ニ於テハ限界アリ今 l ヲ限界トスレバ

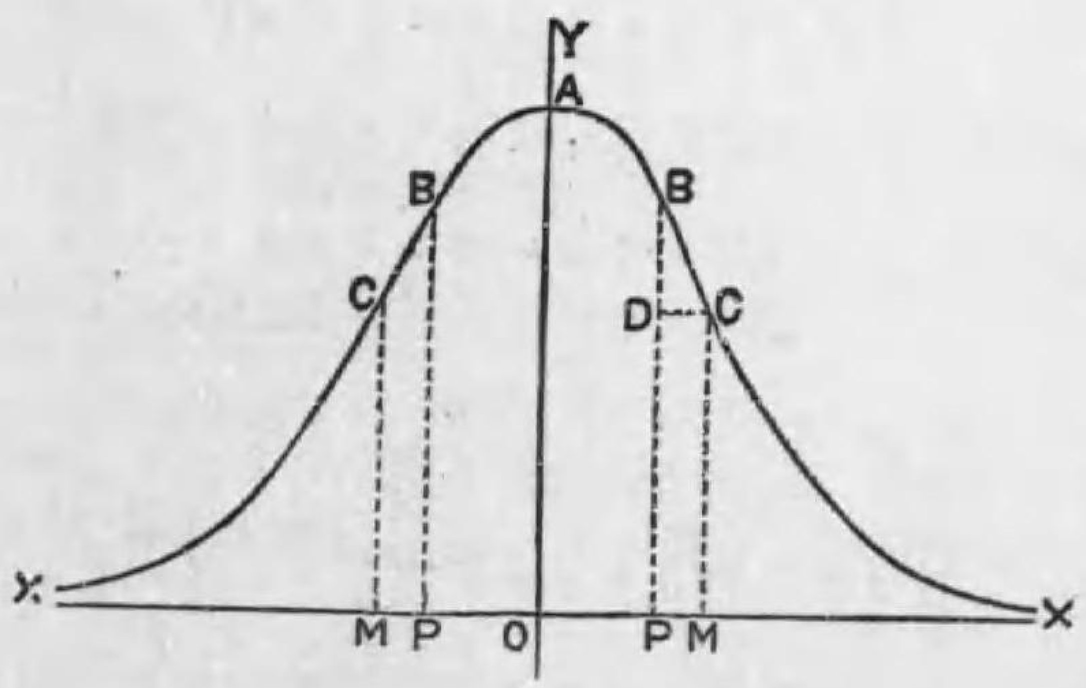
正誤差ハ 0——$(+l)$ ノ間ニ在リ

負誤差ハ 0——$(-l)$ ノ間ニ在リ

故ニ誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ其誤差ノ函數ナリ今 x ヲ或ル誤差トシ y ヲ其「ぷろばびりちー」トスレバ誤差ノ「ぷろばびりちー」ノ法則ハ $y=f(x)$ ナル式ニテ示スヲ得ル故ニ $f(x)$ ノ形狀ヲ見出セバ之ヲ決定スルヲ得可シ

今 y ヲ縦距トシ x ヲ横距トスレバ此曲線式ハ前述ノ三個ノ基礎定理ト一致スル形狀ノ曲線式ナラザルベカラズ卽チ其ノ最大縦距 OA ハ誤差0ト一致シ又同大ノ正負誤差ハ同樣ニ現ハレ得ル故ニ此曲線ハ對稱的ナリ又 x ノ絕對値ガ增加スルニ隨ヒ y ノ値ハ次第ニ減少シ x ガ非常ニ大ニナレバ y ハ 0 トナラザルベカラズ故ニ此曲線ハ第四圖ニ示ス如キ形狀ノ曲線ニシテ OP 及 OM ハ誤差ニシテ PB 及 MC ハ夫々其「ぷろばびりちー」ナリ

第四圖



而シテ其精密ノ度等シカラザル測量ハ各自ニ異ル曲線ヲ有ス可シ此ノ如キ曲

線ヲ「ぷろばびりちー」曲線ト云フ

此曲線ノ方程式ヲ定ムルニハyヲxノ連續函數トシテ考フルコト必要ナリ之レ測量ガ精密ナルトキハ誤差ノ連續値ノ差ハ小トナルヲ以テナリ

又其限界$(\pm l)$ヨリ大ナルxノ値ニ對シテyノ値ガ0トナラザル可カラザル第三ノ定理ハ不合理ナルガ如ク見ユ何トナレバ$x=\pm l$ノトキニ0トナリ且又$\pm l$ヨリ$\pm\infty$ニ至ル間ノxノ總テノ値ニ對シ0トナル可キyノ連續函數ヲ定ムルヲ得ザル故ナリ

然レドモ此限界lハ精密ニ定ムルヲ得ザル故ニ限界ヲ$\pm\infty$迄擴ムルヲ宜シトス　而シテyノ値ハxノ大ナル値ノ場合ニ全ク0トナラザルモ實際ニ於テハ計算ニ入レザルモ可ナル程度ノ非常ニ小ナル値トナル如ク曲線ヲ定ムレバ可ナリ

此「ぷろばびりちー」曲線式ハ測量ノ誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ノ法測ヲ數學的ニ示スモノナリ

此法則ヲ導クニはーげん氏法及がうす氏法ノ二法アリ

第四節　はーげん氏法

はーげん氏法ハ經驗ヨリ得タル假設ヨリ來タルモノニシテ其假設トハ卽チ測量誤差ハ正負何レニモナリ得べキ同大ノ小ナル誤差（元誤差）ガ非常ニ多數集合(代數的和)シテ成レルモノナリト云フニ在リ此說明ハ次ノ如シ

今水準測器及照尺ヲ用キテ二點間ノ高低差ヲ測定シhナル値ヲ得タリト假定セヨ．此値ハ眞ノ高低差ヨリxナル誤差ダケ異ルモノナリ而シテ此xナル誤差ハ測量ニ於ケル多數ノ原因ノ結果ナリ

例ヘバ水準器ガ完全ニ水平ナラズ或ハ風ガ器械ヲ動カシ或ハ太陽ノ熱ガ器械ノ一側面ヲ膨脹セシメ或ハ水準器ノ氣泡ガ精密ナラズ或ハ玻璃ノ質不良ニシテ指度判明ナラズ或ハ三脚ガ固定セズ，或ハ測者ノ眼ガ完全ナラズ或ハ大氣ニ不規則ナル屈折アリ或ハ照尺ガ垂直ニ立タズ或ハ照尺ノ目盛正シカラズ或ハ視的ガ適當ニ固定セラレズ或ハ讀度ノ不正確其他種々ノ原因ガ集リテxナル誤差ヲ生ゼシナリ而シテ此等ノ各原因モ亦多數ノ原因ノ集合ヨリ成ルモノニテ例ヘバ照尺ヲ讀ムトキノ誤差ハ多數ノ原因ガ集合シテ生ジタルモノナリ故ニ測量誤差xハ多數ノ小ナル誤差ノ集合ヨリ成ルモノト考ヘラル，而シテ此等ノ誤差ハ正負何レニモナリ得ルモノナリ

正元誤差ノ數ガ負元誤差ノ數ト略ボ同數ナルコトハ正元誤差ノ數ガ負元誤差ノ數ヨリ非常ニ多クナリ或ハ非常ニ少ナクナルコトヨリモ有リ得べキコトナリ又總テノ元誤差カ正トナリ或ハ負トナルコトノ「ぷろばびりちー」ハ非常ニ小ナリ

第一ノ場合卽チ正及負ノ元誤差ノ數ガ略同數トナル場合ニ於テハ實際ノ誤差ハ非常ニ小ナリ

第二ノ場合卽チ總テノ元誤差ガ正或ハ負ナル場合ニ於テハ實際ノ誤差ハ大ナリ．故ニ小ナル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ最大ニシテ大ナル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ最小ナリ之レ「ぷろばびりちー」曲線ノ有スべキ性質ニ一致ス今$\triangle x$ヲ元誤差ノ大サトシ$\triangle x$ガ正トナル「ぷろばびりちー」ハ$\frac{1}{2}$ニシテ$\triangle x$ガ負トナル「ぷろばびりちー」モ亦$\frac{1}{2}$ナリ故ニn個ノ元誤差ガ總テ正トナル「ぷろばびりちー」ハ$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ニシテ$(n-1)$個ノ元誤差ガ正トナリ1個ノ元

誤差ガ負トナル「ぷろばびりちー」ハ $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$ ナリ以下順次各場合ニ於ケル「ぷろばびりちー」ハ二項定理ノ項ニ同シ即チ n 個ノ元誤差ガ總テ正ナルトキハ誤差ノ大サハ $+n.\triangle x$, $(n-1)$ 個ノ元誤差ガ正ニシテ1個ノ元誤差ガ負ナルトキハ誤差ノ大サハ $(n-1)\triangle x-\triangle x=(n-2)\triangle x$, $(n-m)$ 個ノ元誤差ガ正ニシテ m 個ノ元誤差ガ負ナルトキハ誤差ノ大サハ $(n-m)\triangle x-m\triangle x=(n-2m)\triangle x$ ニシテ此誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$ ノ展開式ノ第 $(m+1)$ 項ナリ故ニ次ノ如ク書クヲ得ベシ

元誤差($\triangle x$)	誤差(x)	ぷろばびりちー
n 個ガ正ナル場合	$n\triangle x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-1)$ 個ガ正. 1 個ガ負ナル場合	$(n-2)\triangle x$	$n\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-2)$ 個ガ正. 2 個ガ負ナル場合	$(n-4)\triangle x$	$\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-3)$ 個ガ正. 3 個ガ負ナル場合	$(n-6)\triangle x$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
…………	…………	…………
$(n-m)$ 個ガ正. m 個ガ負ナル場合	$(n-2m)\triangle x$	$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-m-1)$ 個ガ正. $(m+1)$ 個ガ負ナル場合	$(n-2m-2)\triangle x$	$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$y=f(x)$ ナル曲線ニ於テ (第四圖)

OM＝誤差 (x)

MC＝誤差 (x) ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」(y)

OP＝x ノ次ノ小ナル誤差 (x')

PB＝誤差 (x') ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」(y')

依テ圖上ヨリ極限 $\frac{BD}{CD}$＝極限 $\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{dy}{dx}$

之レ曲線ノ微分式ナリ故ニ誤差ノ「ぷろばびりちー」ノ法則ヲ導クニハ y 及 x ノ項ニテ $\frac{y-y'}{x-x'}$ ヲ見出シ此極限ヲ $\frac{dy}{dx}$ ト等シクシテ之レヲ積分スルコト必要ナリ

今 x' ヲ x ノ次ノ誤差トスルトキハ

$$x-x'=(n-2m)\triangle x-(n-2m-2)\triangle x=2\triangle x$$

而シテ $\frac{y-y'}{x-x'}$ ノ値ハ曲線ガ連續的ナラバ極限ハ $\frac{dy}{dx}$ ナリ二個ノ相連續スル誤差 x 及 x' ノ値ヲ $x=(n-2m)\triangle x$ 及 $x'=(n-2m-2)\triangle n$ トスレバ此兩誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ノ割合ハ次ノ如シ

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{n-m}{m+1}$$

〔參考〕

$$\begin{cases} x=(n-2m)\triangle x \qquad 故=\frac{x}{\triangle x}=n-2m \\ m=\frac{n-\frac{x}{\triangle x}}{2}=\frac{n}{2}-\frac{x}{2\triangle x} \end{cases}$$

$$1-\frac{y'}{y}=1-\frac{n-m}{m+1}=\frac{m+1-n+m}{m+1}=\frac{2m+1-n}{m+1}=\frac{n-\frac{x}{\triangle x}+1-n}{\frac{n}{2}-\frac{x}{2\triangle x}+1}$$

$$=\frac{\frac{\triangle x-x}{\triangle x}}{\frac{n\triangle x-x+2\triangle x}{2\triangle x}}=\frac{2(\triangle x-x)}{n\triangle x-x+2\triangle x}=\frac{2(\triangle x-x)}{(n+2)\triangle x-x}$$

$$y-y'=y\times\frac{2(\triangle x-x)}{(n+2)\triangle x-x}=y\times\frac{-2x}{n\triangle x}=\frac{-2yx}{n\triangle x}$$

但シ分子ニ於テハ $\triangle x$ ハ x ニ比較シテ小ナル故ニ消失ス又分母ニ於テ 2 ハ n ニ比シテ小ナル故ニ消失シ $n\triangle x$ ハ最大正誤差ニシテ之レニ比スレバ x ハ消失ス

$$故＝\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y-y'}{2\triangle x}=\frac{\frac{-2yx}{n\triangle x}}{2\triangle x}=-\frac{yx}{n\triangle x^2}$$

或ハ $$\frac{dy}{dx}=-2h^2yx$$

式中 $$2h^2=\frac{1}{n\triangle x^2}$$ トス

此式ヲ積分スレバ $$\int\frac{dy}{y}=\int-2h^2xdx$$

$$\log y=-h^2x^2+\mathrm{K}'$$

式中 K' ハ定數ナリ

$$y=e^{-h^2x^2+\mathrm{K}'}=e^{-h^2x^2}e^{\mathrm{K}'}$$

式中 $e=2.71828$ 自然對數ノ底數

$e^{\mathrm{K}'}$ ハ定數ナル故ニ之ヲ K トスレバ

$$y=\mathrm{K}e^{-h^2x^2}$$ ナリ

此式ハ「ぷろばびりちー」曲線式卽チ測量誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ノ法則ヲ示ス式ナリ

此式ハ前述ノ條件ヲ滿足サスルモノナリ

卽チ

1) $x=0$ ノ時ニ y ハ最大トナル
2) x ノ同大ノ正負値ニ於テハ y ノ値ハ等シクナルヲ以テ此曲線ハ y 軸ニ對シテ對稱ナリ
3) x ノ値ガ非常ニ大ナル時ハ y ノ値ハ非常ニ小トナル

第五節　がうす氏法

がうす氏法モ亦經驗上ニ立脚スル假設ヲ基トスルモノニシテ卽チ直接ニ數回同樣ノ注意ヲ以テ測量シタル時ニ其ノモノノ最モ確カラシキ値ハ觀測値ノ算術的平均數ナリト云フニ在リ

此算術的平均法ハ同一量ニ於テ等シキ精密度ヲ以テナシタル數多ノ直接測量ヲ結合スルニ最良ノ方法ト認メラル

此一般ノ認定ハ算術的平均數ガ最モ確カラシキ値ナリト云フ定理ヲ證明スルニ充分ナリ何トナレバ「ぷろばびりちー」ノ理論ハ「らぷらーす」氏ノ言ノ如ク計算ニ導キタル常識ニ外ナラザレバナリ故ニ測量ガ二回ナレバ無論算術的平均數ガ最モ確カラシキ値ニシテ尙二回以上ノ場合ニモ古來算術的平均數ヲ最モ確カラシキ値トセリ.

算術的平均法ノ特徴ハ其ノ殘差誤差ノ代數的和ガ零トナルコナリ.

例ヘバ $l_1l_2l_3\ldots\ldots l_n$ ヲ n 回ノ觀測値トスレバ算術的平均數ハ

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\ldots\ldots+l_n}{n}$$

$$nx=l_1+l_2+l_3+\ldots\ldots+l_n$$

$$(x-l_1)+(x-l_2)+(x-l_3)+\ \ldots\ldots+(x-l_n)=0$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots+v_n=0$$

卽チ算術的平均法ニ於テハ殘差誤差ノ代數的和ガ零ナルコトヲ要ス

〔例〕

730.4 尺, 730.5 尺及 730.9 尺ヲ三回ノ觀測値トスレバ.

算術的平均數ハ,

$$x=\frac{730.4+730.5+730.9}{3}=730.6\text{尺}$$

殘差誤差ハ次ノ如シ,

$$v_1=730.6-730.4=+0.2$$
$$v_2=730.6-730.5=+0.1$$
$$v_3=730.6-730.9=-0.3$$

計　0

卽チ殘差誤差ノ代數的和ハ零トナル

間接測量ノ一般ノ場合

z_1 及 z_2 ナル二個ノ量ノ函數ヲ測量シ間接ニ z_1 及 z_2 ノ最モ確カラシキ値ヲ見出サントス　而シテ觀測値ト函數ノ眞値トノ差卽チ眞誤差ヲ $x_1,x_2,x_3\ldots\ldots\ldots x_n$ トス

此 $x_1,x_2,x_3\ldots\ldots\ldots x_n$ モ亦 z_1 及 z_2 ノ函數ナリ

此眞誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ次ノ如シ

$$y_1=f(x_1)\quad y_2=f(x_2)\ldots\ldots\ldots y_n=f(x_n)$$

而シテ或ル系統誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ

$$\mathrm{P}=y_1y_2y_3\ldots\ldots\ldots y_n=f(x_1)f(x_2)\ldots\ldots\ldots f(x_n)$$

之ヲ對數ニテ示セバ

$$\log\mathrm{P}=\log f(x_1)+\log f(x_2)+\ldots\ldots\ldots+\log f(x_n)$$

未知數 (z_1 及 z_2) ノ最モ確カラシキ値ハ P ヲ最大ニナス値ナリ故ニ此ノ z_1 及 z_2 ノ各々ニ關シテ P ヲ微分シ其微分係數ヲ零トシテ之ヲ求ム

卽チ $$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}dz_1}=\frac{df(x_1)}{f(x_1)dz_1}+\frac{df(x_2)}{f(x_2)dz_1}+\ldots\ldots\ldots+\frac{df(x_n)}{f(x_n)dz_1}=0$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}dz_2}=\frac{df(x_1)}{f(x_1)dz_2}+\frac{df(x_2)}{f(x_2)dz_2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{df(x_n)}{f(x_n)dz_2}=0$$

一般ニ $df(x)=\phi(x)f(x)dx$ ナル故ニ ……………………(1)

$$\left.\begin{aligned}\phi(x_1)\frac{dx_1}{dz_1}+\phi(x_2)\frac{dx_2}{dz_1}+\ldots\ldots\ldots+\phi(x_n)\frac{dx_n}{dz_1}=0\\ \phi(x_1)\frac{dx_1}{dz_2}+\phi(x_2)\frac{dx_2}{dz_2}+\ldots\ldots\ldots+\phi(x_n)\frac{dx_n}{dz_2}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(2)$$

此等ノ式ノ數ハ未知數ノ數ト等シキ故ニ函數 ϕ ノ形狀ヲ知ルトキハ未知數ノ値ヲ定メ得可シ

此等ノ式ハ一般的ニシテ未知數ノ任意ノ數ニ適用シ得ル故ニ函數 ϕ ノ形狀ハ或ル特種ノ場合卽チ只 1 個ノ未知數ヲ直接ニ測定セシ場合ニ於テ之ヲ定メ得ベシ

例ヘバ z ヲ測量セシトキニ其觀測値ガ

$l_1\ l_2\ l_3\ldots\ldots\ldots l_n$ ナルトキハ誤差ハ

$$x_1=z-l_1\quad x_2=z-l_2\ldots\ldots\ldots x_n=z-l_n$$

$\log f(x)=\Phi(x)$ $\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=0$

之レヨリ

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{dx_2}{dz}=\ldots\ldots\ldots=\frac{dx_n}{dz}=1$$

故ニ (2) 式ハ次ノ如クナル

$$\phi(x_1)+\phi(x_2)+\phi(x_3)+\ldots\ldots\ldots+\phi(x_n)=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

此場合ハ 1 個ノ未知數ヲ直接ニ測量セシ故ニ算術的平均數ハ最モ確カラシキ値ナリ

而シテ算術的平均數ノ特徵ハ殘差誤差ノ代數的和ガ零トナルコトナリ　故ニ v ヲ殘差誤差トスレバ

$$v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots\ldots+v_n=0$$

前述ノ如ク. 測量ノ回數 (n) ガ非常ニ多キトキハ殘差誤差 (v) ハ眞誤差 (x) ト一致ス

故ニ $$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots\ldots+x_n=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

此式ヲ (2) 式ト比スルトキハ　(2) 式中ノ ϕ ハ常數ヲ乘ズルコトヲ意味スルコトトナル故ニ

$$\phi(x_1)+\phi(x_2)+\ldots\ldots\ldots\phi(x_n)=\mathrm{C}x_1+\mathrm{C}x_2+\ldots\ldots\ldots+\mathrm{C}x_n$$

(1) 式ニ依リ　$\phi(x_1)$, $\phi(x_2)$………ノ値ヲ入ルヽトキハ

$$\frac{df(x_1)}{f(x_1)dx_1}+\frac{df(x_2)}{f(x_2)dx_2}+\ldots\ldots\ldots=\mathrm{C}x_1+\mathrm{C}x_2+\ldots\ldots\ldots$$

此關係ハ測量ノ回數ガ何程ナルモ眞ナル故ニ兩方ノ相應スル項ハ相等シカルベシ故ニ x ヲ或ル誤差トシ

$y=f(x)$ トスレバ　$$\frac{df(x)}{f(x)dx}=\frac{dy}{ydx}=\mathrm{C}x$$

故ニ $$\frac{dy}{y}=\mathrm{C}xdx$$

之ヲ積分スルトキハ　$$\log y=\frac{\mathrm{C}x^2}{2}+\mathrm{K}'$$

故＝ $$y=e^{\frac{1}{2}Cx^2}e^{K'}$$

而シテ「ぷろばびりちー」(y) ハ x ノ絶對値ガ増加スルトキ＝減少スルモノナル故＝常數 C ハ負數ナラザルベカラズ故＝

$$C=-2h^2 \qquad e^{K'}=K$$ トスレバ

$$y=Ke^{-h^2x^2}$$

之レ「ぷろばびりちー」曲線ノ式＝シテ測量ノ誤差ノ「ぷろばびりちー」ノ法則ヲ示ス式ナリ

第六節　$y=Ke^{-h^2x^2}$ ナル曲線ノ研究

此曲線式ハ x ノ値等シキトキハ正負＝拘ラズ y ノ値等シキ故＝此曲線ハ Y ノ軸＝關シテ對稱ナリ

又 $x=0$ ノトキハ y ノ値ハ最大＝シテ $y=K$ トナル故＝ K ハ零ナル誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ナリ

又 x ノ値ガ増加スルトキハ y ノ値ハ減少シ $x=\pm\infty$ ノトキ＝ $y=0$ トナル

第一微分係數ノ値ハ次ノ如シ

$$\frac{dy}{dx}=-2Kh^2e^{-h^2x^2}x$$

之レハ　　$x=0$ ノトキ＝ 0 トナリ

$x=\pm\infty$ ノトキ＝ 0 トナル

故＝此曲線ハ y 軸トノ交點＝於テ水平＝シテ x ノ軸ハ此曲線ノ漸近線トナル又第二微分係數ノ値ハ次ノ如シ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2Kh^2e^{-h^2x^2}+2Kh^2e^{-h^2x^2}x\times 2h^2x$$

$$=-2Kh^2e^{-h^2x^2}(-2h^2x^2+1)$$

此式ハ $-2h^2x^2+1=0$ ナルトキ＝零トナル故＝此曲線ハ $x=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$ ナル處＝變曲點ヲ有ス。曲線ノ形狀ヲ示ス爲メ＝ K 及 h ヲ 1 トスレバ此曲線式ハ次ノ如クナル

$$y=e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}$$

此式＝依レバ x 及 y ノ値ハ次ノ如シ

x	y	x	y
0	1.0000	±1.8	0.0392
±0.2	0.9608	±2.0	0.0183
±0.4	0.8521	±2.2	0.0079
±0.6	0.6977	±2.4	0.0032
±0.8	0.5273	±2.6	0.0012
±1.0	0.3679	±2.8	0.0004
±1.2	0.2370	±3.0	0.0001
±1.4	0.1409		
±1.6	0.0773	±∞	0.0000

第四圖ハ縱ノ縮尺ヲ横ノ縮尺ノ二倍トシテ此表ノ値＝依リ畫キタルモノナリ而シテ C ハ變曲點＝シテ其横距ハ 0M＝0.707 ナリ e ノ指數 h^2x^2 ハ不名數ナルガ故＝常數 (h) ハ $\frac{1}{x}$ ノ如キ同種ノモノナリ而シテ或ル測量＝對スル h ノ値ヲ定ムル方法ハ第四章＝在リ

或ル誤差 (x) ノ現ハルル「ぷろばびりちー」(y) ハ h ガ増大スルトキ＝減少スルモノナリ．故＝測量ガ精密ナル＝從ヒ h ハ大トナル．故＝此 h ヲ精密度ト云フ

又常數 (K) ハ不名數＝シテ零ナル誤差ノ「ぷろばびりちー」ナル故＝ K ノ値ハ精密ナル測量ノトキハ粗雜ナル測量ノトキヨリモ大＝シテ測量ガ精密ナル＝從ヒ益々大トナル

第七節「ぷろばびりちー」積分

常數 K ノ値ヲ定メ或ル限界内ノ誤差ノ「ぷろばびりちー」ヲ研究スルニハ次ノ理論ヲ用フ

今 $x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ ヲ誤差ノ一組トシ

x_1 ヲ最小誤差. x_2 ヲ其次ノ誤差. x_n ヲ最大ノ誤差トス

而シテ相連續スル二個ノ誤差ノ差ヲ等シトスルトキハ此等ノ誤差中ノ或ル一誤差ガ現ハルル「ぷろばびりちー」即チ x_1 及 x_n ノ間ニ在ル一誤差ガ現ハルヽ「ぷろばびりちー」P ハ前述ノ如ク種々ノ「ぷろばびりちー」即 $Ke^{-h^2x^2_1}, Ke^{-h^2x^2_2}, \ldots\ldots\ldots Ke^{-h^2x^2_n}$ ノ總和ニシテ

$$P=K\left(e^{-h^2x^2_1}+e^{-h^2x^2_2}+\ldots\ldots\ldots+e^{-h^2x^2_n}\right)=K\Sigma_{x_1}^{x_n}e^{-h^2x^2}$$

又積分ノ符號ニテ示シ相連續スル二個ノ誤差ノ差ヲ dx トスレバ誤差ガ x_1 及 x_n ナル兩極限ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ハ

$$P=\frac{K}{dx}\int_{x_1}^{x_n}e^{-h^2x^2}dx \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

而シテ誤差ガ $-\infty$ 及 $+\infty$ ノ間ニ在ルコトハ確實ニシテ確實ノ符號ハ 1 ナルヲ以テ次ノ如シ

$$1=\frac{K}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{2K}{dx}\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{2K}{dx}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2h} \text{故ニ} 1=\frac{K\sqrt{\pi}}{hdx}$$

〔參考〕

$$\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2h} \text{ナル證明}$$

$hx=t$ トスレバ $hdx=dt$ 或ハ $dx=\frac{dt}{h}$ 故ニ $\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{1}{h}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$

$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{\infty}e^{-v^2}dv=A$ トスレバ $A^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(t^2+v^2)}dvdt$

次ニ $v=tu$ トスレバ $dv=tdu$

故ニ $A^2=\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-t^2(1+u^2)}tdt$

然ルニ $\int_0^{\infty}e^{-t^2(1+u^2)}tdt=\left[-\frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{2(1+u^2)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2(1+u^2)}$

故ニ $A^2=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\left[\text{tag}^{-1}u\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}\left(\text{tag}^{-1}\infty-\text{tag}^{-1}0\right)=\frac{\pi}{4}$

故ニ $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{1}{h}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{A}{h}=\frac{\sqrt{\pi}}{2h}$$

或ハ次ノ方法ニ依リ.

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ナルコトヲ證スルヲ得可シ}$$

此積分ノ値ヲ A トシ t ノ代リニ αt ヲ入ルルトキハ

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2t^2}\alpha dt=A$$

故ニ $\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha dt=Ae^{-\alpha^2}$

之レヨリ $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha d\alpha dt=A\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=A^2$

而シテ $\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha dx=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}$

故ニ $\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=A^2$

又 $\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\left[\text{tag}^{-1}t\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$

故ニ $\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}=A^2$

故ニ $\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=A=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

之レヨリ $K=\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}$ ナルヲ以テ之レヲ「ぷろばびりちー」曲線式ニ入ルヽトキハ

$$y=Ke^{-h^2x^2}=\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}=hdx\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-h^2x^2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

故ニ誤差ガ或二個ノ限界誤差 x_1 及 x_n ノ間ニ在ル「ぷろばびりち

ー」ハ (2) 式ヨリ次ノ如シ

$$P_{x_1}^{x_n}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_n}e^{-h^2x^2}dx\text{.......................................}(4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y=\mathrm{K}e^{-h^2x^2}\\ (2)\ y=hdx\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-h^2x^2}\\ (3)\ P_{x_1}^{x_n}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_n}e^{-h^2x^2}dx\end{array}\right\}$$ ナル式ハ測量ノ偶然誤差ノ理論ニ於ケル原式ナリ

「ぷろばびりちー」曲線ハ對稱的ナルヲ以テ誤差ガ $(-x)$ 及 $(+x)$ ナル限界ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ハ誤差ガ (0) 及 $(+x)$ ナル限界ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ノ二倍ナリ即チ

$$P_{-x}^{+x}=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}dx$$

此式ハ誤差ガ $\pm x$ ヨリ小ナルコト即チ 0 ト $(+x)$ ノ間及 0 ト $(-x)$ ノ間ニ在ルコトノ「ぷろばびりちー」ヲ示ス

此形狀ハ次ノ如ク書クヲ得ベシ

$$P_{-hx}^{+hx}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx}e^{-h^2x^2}d\,hx)\text{..................................}(5)$$

之レヲ「ぷろばびりちー」積分ト云フ

x ナル大サノ誤差ノ數ハ其「ぷろばびりちー」y ニ比例シ又 $P_{-x}^{+x}=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}dx$ ナル式ハ $-x$ 及 $+x$ ノ間ニ在ル總テノ誤差ノ「ぷろばびりちー」ノ總和ナル故ニ P ハ誤差ガ $-x$ 及 $+x$ ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」曲線ト X 軸トノ間ノ面積ニシテ 1 ナリ．故ニ或ル二個ノ限界ノ間ニ在ル誤差ノ數ト誤差ノ總數トノ比ハ此等ノ限界ノ間ニ在ル誤差ノ P ト 1 トノ比ニ等シ積分法ニ依リ hx ノ値ニ相當スル「ぷろばびりちー」積分ノ値ヲ計算スレバ第一表ノ如シ.

第一表「ぷろばびりちー」積分ノ値

$$P_{+hx}^{-hx}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx}e^{-h^2x^2}d(hx)$$

hx	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
0.0	0.0000	0.0113	0.0226	0.0338	0.0451	0.0564	0.0676	0.0789	0.0901	0.1013	113
1.0	0.1125	0.1236	0.1348	0.1459	0.1569	0.1680	0.1790	0.1900	0.2009	0.2118	110
0.2	0.2227	0.2335	0.2443	0.2550	0.2657	0.2763	0.2869	0.2974	0.3079	0.3183	106
0.3	0.3286	0.3389	0.3491	0.3593	0.3694	0.3794	0.3893	0.3992	0.4090	0.4187	100
0.4	0.4284	0.4380	0.4475	0.4569	0.4662	0.4755	0.4847	0.4937	0.5027	0.5117	92
0.47694	0.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.5	0.5205	0.5292	0.5379	0.5465	0.5549	0.5633	0.5716	0.5798	0.5879	0.5959	83
0.6	0.6039	0.6117	0.6194	0.6270	0.6346	0.6420	0.6494	0.6566	0.6638	0.6708	74
0.7	0.6778	0.6847	0.6914	0.6981	0.7047	0.7112	0.7175	0.7238	0.7300	0.7361	64
0.8	0.7421	0.7480	0.7538	0.7595	0.7651	0.7707	0.7761	0.7814	0.7867	0.7918	55
0.9	0.7969	0.8019	0.8068	0.8116	0.8163	0.8209	0.8254	0.8299	0.8312	0.8385	45
1.0	0.8427	0.8168	0.8508	0.8548	0.8586	0.8624	0.8661	0.8698	0.8733	0.8768	37
1.1	0.8802	0.8835	0.8868	0.8900	0.8931	0.8961	0.8991	0.9020	0.9048	0.9076	30
1.2	0.9103	0.9130	0.9155	0.9181	**0.9205**	0.9229	0.9252	0.9275	0.9297	0.9319	23
1.3	0.9340	0.9361	0.9381	0.9400	0.9419	0.9438	0.9456	0.9473	0.9490	0.9507	18
1.4	0.9523	0.9539	0.9554	0.9569	0.9583	0.9597	0.9611	0.9624	0.9637	0.9649	14
1.5	0.9661	0.9673	0.9684	0.9695	0.9706	0.9716	0.9726	0.9736	0.9745	0.9755	10
1.6	0.9763	0.9772	0.9780	0.9788	0.9796	0.9804	0.9811	0.9818	0.9825	0.9832	7
1.7	0.9838	0.9844	0.9850	0.9856	0.9861	0.9867	0.9872	0.9877	0.9882	0.9886	5
1.8	0.9891	0.9895	0.9899	0.9903	0.9907	0.9911	0.9915	0.9918	0.9922	0.9925	4
1.9	0.9928	0.9931	0.9934	0.9937	0.9939	0.9942	0.9944	0.9947	0.9949	0.9951	3
2.0	0.9953	0.9955	0.9957	0.9959	0.9961	0.9963	0.9964	0.9966	0.9967	0.9969	2
2.1	0.9970	0.9972	0.9973	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9979	0.9980	0.9980	1
2.2	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	1
2.3	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	
2.4	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	
2.	0.9953	0.9970	0.9981	0.9989	0.9993	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	
∞	1.0000										

第一. 表ノ使用法

表ニ於テ $hx=1.24$ ナルトキハ P=0.9205 ナルコトヲ知ル故ニ

0.9205 ハ誤差ガ$\frac{1.24}{h}$ヨリ小ナルコトノ「ぷろばびりちー」ナリ換言スレバ10000回ノ測量中ニテ9205回ハ誤差ガ$-\frac{1.24}{h}$及$+\frac{1.24}{h}$ノ間ニ在リテ795回ハ誤差ガ此限界外ニ在ルコトヲ豫期シ得ベシ

h ハ精密度ニシテ人々及場合ニ依テ等シカラズ h ヲ 1 トスレバ hx ハ測量ノ誤差ニシテ之レガ ±0.1 ナレバ誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ 0.1125 卽チ$\frac{112.5}{1000}$ナリ　卽チ 1000 個ノ誤差中ニテ 112.5 個ハ 0.1 ナル値ヲ越エズ卽チ 0.1 ナル誤差ガ 1000 個ノ誤差中ニ 112 個. 100 個ノ誤差中ニ 11 個. 10 個ノ誤差中ニ 1 個アルコトヲ意味ス

第八節　理論ト實驗トノ比較

第一表ニ依テ (1)(3)(4) 及 (5) 式ノ誘導ニ用ヒシ理論ヲ証明スルヲ得ベシ

(1)　$$y=\mathrm{K}e^{-h^2x^2}$$

(3)　$$y=hdx\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-h^2x^2}$$

(4)　$$\mathrm{P}_{x_1}^{x_n}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_n}e^{-h^2x^2}dx$$

(5)　$$\mathrm{P}_{-hx}^{+hx}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx}e^{-h^2x^2}d(hx)$$

第一表ヲ用フルニハ先ヅ常數 (h) ノ値ヲ知ラザルベカラズ然レドモ爰ニ h ハ旣知ノモノト假定シテ理論及經驗ノ一致ヲ証セントス

第二章第二節ノ 100 個ノ殘差誤差ニ於テ $h=\frac{1}{2.''236}$ トスレバ

第一表ヨリ

$x=1.''0$ ナルトキハ $hx=0.447$ 面積 P=0,473

$x=2.0$ ナルトキハ $hx=0.894$　　P=0.794

$x=3.0$ ナルトキハ $hx=1.341$　　P=0.942

$x=4.0$ ナルトキハ $hx=1.788$　　P=0.989

$x=5.0$ ナルトキハ $hx=2,235$　　P=0.998

$x=\infty$ ナルトキハ $hx=\infty$　　P=1.000

之レニ誤差ノ總數100ヲ乘ジテ各々ヲ次ノモノヨリ減ズレバ x ノ連續スル値ノ間ニ在ル理論誤差ヲ見出シ得ベシ

今實際ニ現ハレシ誤差ノ數ト理論上現ハルベキ誤差ノ數トノ比較ヲ示セバ次ノ如シ

限　界	實際ニ現ハレシ誤差數	理論上現ハルベキ誤差數	差
0.''0 及 1.''0	52	47	+5
1.0 及 2.0	30	32	-2
2.0 及 3.0	11	15	-4
3.0 及 4.0	4	5	-1
4.0 及 5.0	2	1	+1
5.0 及 6.0	1	0	+1
6.0 及 ∞	0	0	0

此表ニ依レバ理論ト實驗ノ結果ト略ホ一致ス

第九節　原式ニ關スル注意

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y=\mathrm{K}e^{-h^2x^2}\\ (3) & y=h.dx\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-h^2x^2}\end{array}\right\}$$ ナル兩「ぷろばびりちー」曲線式ハ相似ナリ

而シテ (1) 式ハ旣ニ論究セリ (3) 式ニ於テハ (dx) ハ x ノ連續スル値ノ差ナリ. 例ヘバ角度ノ測量ヲ秒ノ$\frac{1}{10}$迄爲ストキハ dx ハ $0.''1$ナリ. 又秒ノ$\frac{1}{100}$迄爲ストキハ dx ハ $0.''01$ ナリ又連續曲線ヲ考フルトキハ dx ハ x ノ微分ナリ

y ハ不名數ナル故ニ $h.dx$ モ亦不名數ナリ故ニ h ハ $\frac{1}{dx}$ ノ如キ種類ノモノナラザル可カラズ

零ナル誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ $\frac{hdx}{\sqrt{\pi}}$ ナリ．故ニ秒ノ $\frac{1}{100}$ 迄角ヲ測ルトキニ零ナル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ $\frac{0.''01h}{\sqrt{\pi}}$ ナリ．此値ハ h ガ増大スレバ増大スル故ニ h ノ値ハ測量ノ精密度トシテ考ヘラル而シテ h ヲ定ムル方法ハ第四章ニ在リ

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & P_{x_1}^{x_n}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_n} e^{-h^2x^2}dx \\ (5) & P_{-hx}^{+hx}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{hx} e^{-h^2x^2}d(hx)\end{array}\right\}$$

ナル兩ぷろばびりちー積分式ハ相似ニシテ其限界異ル

(4) 式ハ誤差ガ x_1 及 x_n ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ニシテ (5) 式ハ誤差ガ $-hx$ 及 $+hx$ ノ間ニ在ルコト即チ誤差ノ絶對値ガ hx ヨリ小ナルコトノ「ぷろばびりちー」ナリ故ニ (5) 式ハ (4) 式ノ特別ノ場合ナリ

第一表ハ (5) 式ニ關係スルモノニシテ簡單ニ加減スレバ或ル限界ノ間ニ在ル誤差ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ヲ見出シ得ベシ例ヘバ誤差ガ $(-2.''0)-(+4.''0)$ ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ハ誤差ガ $(0.''0)-(2.''0)$ ノ間及 $(0.''0)-(4.''0)$ ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ノ和ナリ又誤差ガ $(+2.''0)-(+4.''0)$ ノ間ニ在ル「ぷろばびりちー」ハ此兩限界ノ「ぷろばびりちー」ノ差ナリ

此積分 (P) ハ或ル限界ノ間ノ y ノ和ニシテ即チ

$$P=\Sigma y$$

之レ前述ノ $\frac{a+a'}{c}=\frac{a}{c}+\frac{a'}{c}$ ト同理ナリ

〔參　考〕

符　號	常　數	對　數
hr	0.4769363	$\bar{1}$.6784604
$hr\sqrt{2}$	0.6744897	$\bar{1}$.8289754
$hr\sqrt{\pi}$	0.8453476	$\bar{1}$.9270353
$\sqrt{2}$	1.4142136	0.1505150
π	3.1415927	0.4971499
$\sqrt{\pi}$	1.7724539	0.248 749
$\pi^{-\frac{1}{2}}$	0.5641896	$\bar{1}$.7514251
e	2.7182818	0.4342945
常用對數ノ係數	0.4342945	$\bar{1}$.6377843

第三章　測量ノ整正

最小自乘法ニハ次ノ二個ノ目的アリ

第一. 測量ノ整正. 卽チ測量シタルモノノ最モ確カラシキ値ヲ定ムルコト

第二. 測量ノ精密度ヲ硏究スルコト

第一節　觀測値ノ重み

觀測値ノ重みトハ觀測ノ比較的ノ價値ヲ示ス數ニシテ例ヘバ同一測鏈ヲ以テ或ル距離ヲ20回測リ此ノ20回ノ内

$$\left.\begin{array}{ll} 10\text{回ハ} & 934.2^{R} \\ 8\text{回ハ} & 934.0'' \\ \underline{2\text{回ハ}} & 934.6'' \\ 20\text{回} & \end{array}\right\}$$ ナリシトスレバ此10, 8, 及2ヲ各觀測値ノ重みト云フ.

重みハ只比較的ノ値ヲ示スモノナル故ニ5.4.及1ナル數モ亦重みナリ. 又10, 8, 及2ノ比例ニアル數ハ總テ其重みナリ. 卽チ934.2尺ナル結果ハ934.6尺ナル結果ヨリ五倍ノ價値アリ故ニ之レヲ934.6尺ト平均スル場合ニハ五倍ノ價値ヲ有セシメザル可ラズ又或ル觀測値ノ重みハ1ナル重みヲ有スル觀測値ノ數ヲ示ス例ヘバ各觀測値ノ重みヲ1ト爲ストキハn個ノ精密度ノ等シキ直接測量ノ平均値ハnナル重みヲ有ス.

pナル重みヲ有スル或觀測値ハ重み1ナルp個ノ觀測値ト同樣ト考ヘラレ又單一ノモノヨリモp倍ノ價値ヲ有スルモノト考ヘラル故

ニ重みハ省略法トシテ必要ノモノナリ

故ニ934.2尺ナル結果ガ10ノ重みヲ有スト云フトキハ平均スル場合ニ934.2尺ナル値ヲ10回書キテ各々ヲ單一測量ノ結果ト考フルニ等シ

重み付觀測値ハ觀測値ニ其重みヲ乘ジタルモノナリ卽チ今

$$\left.\begin{array}{l} l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots\ldots\ldots l_n \text{ヲ觀測値} \\ p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots p_n \text{ヲ其重み} \end{array}\right\}\text{トスレバ}$$

$p_1l_1, p_2l_2, p_3l_3 \ldots\ldots p_nl_n$ ハ重み付觀測値ナリ

又 $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ ヲ各觀測値ノ誤差トスレバ

$p_1x_1, p_2x_2, p_3x_3 \ldots\ldots p_nx_n$ ハ重み付誤差ナリ

而シテ誤差xハ眞値Xト觀測値lトノ差ナル故ニpxハ觀測値lガpナル重みヲ有スルコトヲ含意スベシ又此ノ關係ハ誤差ニ對シテノミナラズ殘差誤差vニ對シテモ亦同ジ又二個ノ未知數z_1及z_2ノ函數$f(z_1,z_2)$ノ觀測値ヲlトシz_1及z_2ヲ未知數ノ最モ確カラシキ値トスレバ殘差誤差ハ次ノ如シ

$$v=f(z_1, z_2)-l$$

今觀測値lノ重みヲpトスレバ

$$pv=pf(z_1, z_2)-pl$$

故ニ重み付觀測値ハ常ニ重み付殘差誤差ヲ含意シ重み付殘差誤差ハ常ニ重み付觀測値ヲ含意ス

重みハ前述ノ精密度ト同シカラズ卽チ重みpハ比較的ノ不名數ニシテ通常整數ニ選バル可キモノ又精密度(h)ハ絕對量ナリ此關係ハ次節ニ在リ.

第二節　最小自乘法ノ主義

最小自乘法ナル語ノ起原ハ次ノ如シ

精密度ノ等シキ測量ニ於テ測定スベキモノノ最モ確カラシキ値ハ殘差誤差ノ二乘ノ和ヲ最小ナラシムルガ如キ値ナリト

此證明ハ次ノ如シ

間接測量ノ場合ニ於テ n 回ノ精密度ノ等シキ測量ヲ二個ノ未知數 z_1 及 z_2 ノ函數ニ就テ行ヒ卽チ

$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ヲ $f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2) \ldots\ldots\ldots f_n(z_1, z_2)$ ナル函數ノ觀測値トセヨ.

此觀測値ハ函數ノ眞値ト一致セズシテ眞値ト $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ナル差アリトス

卽チ

$$f_1(z_1, z_2) - l_1 = x_1$$
$$f_2(z_1, z_2) - l_2 = x_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(z_1, z_2) - l_n = x_n$$

而シテ此等ノ誤差ノ「ぷろばびりちー」ハ前述ノ原則ニ依リ

$$y_1 = \mathrm{K}e^{-h^2x^2}$$
$$y_2 = \mathrm{K}e^{-h^2x_2^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \mathrm{K}e^{-h^2x_n^2} \quad ナリ$$

而シテ測量ヲ等シキ精密度ニテ測量セシモノト假定セル故ニ h ノ値ハ等シ而シテ前述ノ如ク獨立誤差 $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$ ガ同時ニ現ハルル集合事柄ノ「ぷろばびりちー」ハ

$$\mathrm{P}' = \mathrm{K}^n e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2)}$$

此等ノ誤差ハ測定セントスル數量 z_1 及 z_2 ノ函數ナル故ニ z_1 及 z_2 ノ異ル値ニ對シ P' ノ異ル値アリ而シテ誤差ノ最モ確カラシキ組ハ P' ヲ最大ニナスモノナリ.

又 z_1 及 z_2 ノ最モ確カラシキ値ハ誤差ノ最モ確カラシキ組ニ相當スルモノナリ而シテ「ぷろばびりちー」P' ノ最大ノトキハ e ノ指數ノ最小ノトキニシテ卽チ　$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2 =$ 最小ノトキナリ

故ニ z_1 及 z_2 ノ値ノ最モ確カラシキ組ハ

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots\ldots + x_n^2 = 最小ノトキナリ$$

之ニ依テ最小自乘法ノ原則ヲ証スルコトヲ得

$x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ ハ測量ノ眞ノ誤差トシテ考ヘラレタリ然レドモ其ノ二乘ノ和ガ最小ナリトノ條件ヲ滿足セシムル必要アルトキハ此誤差ハ殘差誤差ニシテ z_1 及 z_2 ノ最モ確カラシキ値ハ

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots\ldots\ldots + v_n^2 = 最小 \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ナル條件ヲ滿足セシムルコトヲ要シ卽チ z_1 及 z_2 ガ最モ確カラシキ値ナレバ殘差誤差 $f_1(z_1, z_2) - l_1 = v_1$, $f_2(z_1, z_2) - l_2 = v_2 \ldots\ldots f_n(z_1, z_2) - l_n = v_n$ 等ハ此條件ヲ充スモノナリ

以上ノ理論ハ未知數ガ2個ナル場合ニ限ラズ多數ナル場合ニモ亦適用セラル

最小自乘法ヲ用フル一般ノ場合ハ測量ノ精密度ガ等シカラザル場合ナリ. 此場合ニ於ケル一般ノ原則ハ次ノ如シ

重みノ等シカラザル測量ニ於テ測定シタルモノノ最モ確カラシキ値ハ重み付殘差誤差ノ自乘ノ和ヲ最小ニナスモノナリト

今二個ノ未知數 z_1 及 z_2 ノ函數ヲ n 回測量シテ $l_1, l_2 \ldots\ldots l_n$ ナル

値ヲ得タリト假定セヨ．而シテ其ノ重みヲ夫々 $p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ トシ觀測値ト眞値トノ差卽チ眞誤差ヲ $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ トスレバ此等ノ「ぷろばびりちー」ハ

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = K_1 e^{-h_1^2 x_1^2} \\ y_2 = K_2 e^{-h_2^2 x_2^2} \\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots \\ y_n = K_n e^{-h_n^2 x_n^2} \end{array}\right\}\text{但シ K 及 } h \text{ ハ各測量ニ於テ等シカラズ}$$

獨立誤差 $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ ノ一組ノ現ハルヽ「ぷろばびりちー」ハ次ノ如シ

$$P' = K_1 K_2 \ldots\ldots K_n e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + \ldots\ldots + h_n^2 x_n^2)}$$

而シテ x ノ値ノ最モ確カラシキ組ハ P' ヲ最大ニナスモノ卽チ $h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + \ldots\ldots + h_n^2 x_n^2 =$ 最小ノ場合ナリ　而シテ此條件ヨリ求ムル $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ノ値ハ殘差誤差 $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ ナリ故ニ次ノ如ク書クヲ得ベシ

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots h_n^2 v_n^2 = \text{最小}$$

h ヲ標準精密度トシテ $h_1^2 = p h_2^2,\ h_2^2 = p_2 h^2 \ldots\ldots h_n^2 = p_n h^2$ ナル如ク之レヲ選ビ前式ヲ h^2 ニテ除スレバ次式ヲ得ル

$$\frac{h_1^2}{h^2} v_1^2 + \frac{h_2^2}{h^2} v_2^2 + \ldots\ldots + \frac{h_n^2}{h^2} v_n^2 = \text{最小}$$

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots\ldots + p_n v_n^2 = \text{最小} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

卽チ最小自乘法ノ主義ヲ證スルヲ得タリ

$$\text{故ニ}\quad \left.\begin{array}{l} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots\ldots + v_2^2 = \text{最小} \ldots\ldots (6) \\ p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots\ldots + p_n v_n^2 = \text{最小} \ldots\ldots (7) \end{array}\right\}\text{ナル條件ハ獨立}$$

測量ノ整正ニ關スル實地ノ規則ヲ立ツル基礎トナルモノナリ．

若シ觀測値ノ重みガ等シキトキハ (7) 式ハ (6) 式トナル

爰ニ測量ノ精密度ノ自乘ハ重みニ比例スルコトヲ見ル卽チ

$$h_1^2 : h_2^2 : h^2 = p_1 : p_2 : p$$

精密度 (h) ハ理論上ニハ非常ニ便利ナルモノナレドモ應用上ニハ使用セラレズ之ニ反シテ重み (p) ハ常ニ使用セラル

第三節　一個ノ未知數ニ於ケル直接測量

等シキ精密度ヲ以テ或ル未知數ヲ直接ニ測量スルトキハ算術的平均數ガ最モ確カラシキ値ナルコトハ一般ニ認メラル而シテ最小自乘法ノ基礎原理ヨリ次ノ如ク之ヲ説明スルヲ得ベシ

今 $l_1 l_2 \ldots\ldots l_n$ ヲ重み或ハ精密度ノ等シキ直接測量ノ結果トシ z ヲ未知數ノ最モ確カラシキ値トスレバ殘差誤差ハ $z - l_1,\ z - l_2, \ldots\ldots z - l_n$ ナリ

而シテ基礎原理 (6) ヨリ

$$(z - l_1)^2 + (z - l_2)^2 + \ldots\ldots + (z - l_n)^2 = \text{最小}$$

之レノ第一微分係數ヲ作リ之ヲ零トナス　卽チ

$$2(z - l_1) + 2(z - l_2) + \ldots\ldots + 2(z - l_n) = 0$$

之レヨリ z ノ値ヲ求ムルトキハ

$$z = \frac{l_1 + l_2 + \ldots\ldots + l_n}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

卽チ最モ確カラシキ値ハ觀測値ノ算術的平均數ナリ

故ニ或數ヲ等シキ精密度ヲ以テ直接ニ數回測量ヲ爲セシトキニ之レヲ整正スルニハ觀測値ノ算術的平均ヲ取レバ可ナリ．然レドモ測量ノ精密度等シカラザルトキハ算術的平均ハ採用スルヲ得ズ此場合ニハ重み付殘差誤差ノ自乘ノ和ヲ最小ニナス如クス．卽チ

$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ノ重みヲ夫々 $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ トスレバ (7) 式ハ

$p_1(z-l_1)^2+p_2(z-l_2)^2+\ldots\ldots+p_n(z-l_n)^2=$最小

之レノ第一微分係數ヲ作リ之レヲ零トナス即チ

$$p_1(z-l_1)+p_2(z-l_2)+\ldots\ldots+p_n(z-l_n)=0$$

之レヨリ

$$z=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\ldots\ldots+p_nl_n}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]}\ldots\ldots\ldots(2)$$

即チ未知數ノ最モ確カラシキ値ハ各觀測値ニ其重みヲ乘ジタルモノノ和ヲ重みノ和ニテ除シテ得.

此平均法ヲ算術的平均法ト區別シテ一般的平均法或ハ重み付平均法ト云フ

故ニ算術的平均數ガ精密度ノ等シキ測量ノ最モ確カラシキ値ナレバ一般的平均數ハ精密度ノ等シカラザル測量ノ最モ確カラシキ値ナリ故ニ重みノ等シカラザル直接測量ノ整正ニハ觀測値ノ一般的平均數ヲ取レバ可ナリ

第四節　多數ノ未知數ニ於ケル精密度等シキ獨立測量

獨立測量ノ一般ノ場合ハ多數ノ未知數ヲ決定スル場合ナリ.

前節ノ平均法ハ一個ノ未知數ニ於ケル觀測値ヲ平均スル場合ニ用ヒラル

多數ノ未知數ヲ定ムル爲メニ未知數ノ數 q ヨリモ多クノ測量ヲナシタル場合ノ平均法ハ次ノ如シ

觀測式トハ求メントスル未知數ト觀測値トヲ結合スル式ナリ故ニ

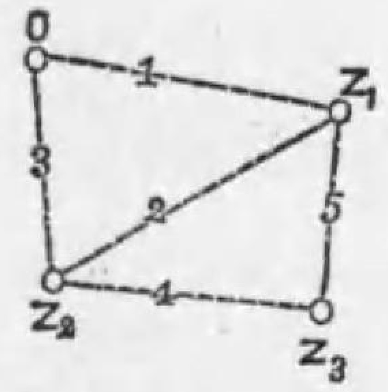
l ヲ $f(z_1, z_2)$ ノ觀測値トスレバ $l=f(z_1, z_2)$ ハ觀測式ナリ

此等ノ式ノ數ハ測量ノ回數ト等シクシテ一般ニ測定セントスル未知數ノ數ヨリモ多シ.

故ニ嚴密ニ觀測式ヲ滿足セシムル所ノ値ノ組ヲ見出シ得ズ　併シ近似値ノ多クノ組アリ故ニ此中ニテ最モ確カラシキ組即チ最大ノ「ぷろばびりち－」ヲ持ツ組ヲ決定スルヲ要ス

次ニ例ヲ以テ之レヲ説明セン

第五圖



0ヲ或ル水準基點. Z_1, Z_2, Z_3 ヲ水準高ヲ定メントスル3點トシ而シテ水準測量線ガ5線アリトス

第一測量線ニ依レバ Z_1 點ハ0點ヨリ10尺高シ

第二測量線ニ依レバ Z_2 點ハ Z_1 點ヨリ 7尺高シ

第三測量線ニ依レバ Z_2 點ハ0點ヨリ18尺高シ

第四測量線ニ依レバ Z_2 點ハ Z_3 點ヨリ 9尺高シ

第五測量線ニ依レバ Z_3 點ハ Z_1 點ヨリ 2尺低シ

今 Z_1, Z_2 及 Z_3 點ノ高サヲ夫々 z_1, z_2 及 z_3 トスレバ次ノ觀測式ヲ得

$$z_1=10 \qquad z_2-z_3=9$$
$$z_2-z_1=7 \qquad z_1-z_3=2$$
$$z_2=18$$

此各式ハ眞値ニ近似ノモノナレドモ式數ガ未知數ノ數ヨリ多キ故ニ正解ヲナシ得ズ故ニ z_1, z_2 及 z_3 ノ最モ確カラシキ値ヲ見出サントス(此解法ハ第十節ニ在リ)

觀測式ハ一次二次或ハ二次以上ノ代數式トナリ或ハ圓函數或ハ對

數函數ヲ含有スルコトアリ然レドモ非直線式ハ直線式ニ導キ得ル故ニ常ニ一次式トナシ得ベシ先ヅ精密度等シキ觀測ノ場合ヲ考ヘヨ.

今 q 個ノ未知數ヲ $z_1, z_2 \ldots\ldots z_q$ トシ未知數ト其觀測値トノ間ニ成立ツ式ヲ

$$az_1+bz_2+\ldots\ldots+fz_q=l \text{ トス} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

式中 $a, b, \ldots\ldots f$ ハ常數ニシテ理論上既知ノモノ又 l ハ觀測値ナリ. 而シテ各觀測値ニ對シ各一個ノ式アル故ニ坌證ニテ n 個ノ觀測式アリ卽チ

$$\left.\begin{array}{l} a_1z_1+b_1z_2+\ldots\ldots+f_1z_q=l_1 \\ a_2z_1+b_2z_2+\ldots\ldots+f_2z_q=l_2 \\ a_3z_1+b_3z_2+\ldots\ldots+f_3z_q=l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nz_1+b_nz_2+\ldots\ldots+f_nz_q=l_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

第一式ハ第一回測量ヨリ起リ第二式ハ第二回測量ヨリ起リ第 n 式ハ第 n 回測量ヨリ起ル而シテ觀測式ノ數ハ未知數ノ數ヨリ多キ故ニ之ヲ精密ニ滿足セシムル値ノ組ナシ併シ最良ノ方法ハ最小自乘法ノ基礎原理ニ依リ最モ確カラシキ組ヲ見出スニ在リ

今 $z_1 z_2 \ldots\ldots z_q$ ヲ最モ確カラシキ値トシ之ヲ觀測式ニ入ルルモ零トナラズシテ小ナル殘差 $v_1 v_2 \ldots\ldots v_n$ ヲ生ジ次ノ如クナル

$$\left.\begin{array}{l} a_1z_1+b_1z_2+\ldots\ldots+f_1z_q-l_1=v_1 \\ a_2z_1+b_2z_2+\ldots\ldots+f_2z_q-l_2=v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nz_1+b_nz_2+\ldots\ldots+f_nz_q-l_n=v_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

旣ニ基礎原理ニ依テ最モ確カラシキ値 $z_1 z_2 \ldots\ldots z_q$ ハ

$v_1^2+v_2^2+v_3^2+\ldots\ldots+v_n^2=[vv]$ ノ最小ナル場合ナルコトヲ知ル.

次ニ未知數 z_1 ノ最モ確カラシキ値ノ條件式ヲ求メン

今上式中ニテ z_1 ノ入ラザル項ヲ $N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots N_n$ トスルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} a_1z_1+N_1=v_1 \\ a_2z_1+N_2=v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nz_1+N_n=v_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

此式ノ兩項ヲ二乘シテ之ヲ加フルトキハ

$$(a_1z_1+N_1)^2+(a_2z_1+N_2)^2+\ldots\ldots+(a_nz_1+N_n)^2=v_1^2+v_2^2+\ldots\ldots+v_n^2 \ldots(5)$$

此和ヲ最小ニナス條件ヲ求ムルニハ z ニ對シ之レヲ微分シ其微分係數ヲ零トナスニ在リ 卽チ

$$a_1(a_1z_1+N_1)+a_2(a_2z_1+N_2)+\ldots\ldots+a_n(a_nz_1+N_n)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

之レ z_1 ノ最モ確カラシキ値ノ條件式ナリ之レト同理ニテ同樣ノ條件式ハ他ノ未知數 $z_2 z_3 \ldots\ldots z_n$ ニモ亦作ラル.

此等ノ條件式卽チ法正式ノ數ハ未知數ノ數ニ等シ而シテ之レヲ解クトキハ未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ得ベシ故ニ精密度等シキ獨立間接測量ノ整正法ハ次ノ如シ

測量ヲナシテ其測量ニ對シテ觀測式ヲ作リ次ニ z_1 ノ法正式ヲ作ルベシ之レニハ其觀測式ニ於ケル未知數 z_1 ノ係數ヲ其觀測式ニ乘ジテ其結果ヲ加フ 卽チ

$$a_1(a_1z_1+N_1)+a_2(a_2z_1+N_2)+\ldots\ldots+a_n(a_nz_1+N_n)=0$$

同樣ニ各未知數ニ對スル法正式ヲ作ルベシ

而シテ此等ノ法正式ヲ解ケバ未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ得.

今此ノ方法ヲ示セバ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}
&a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+f_1z_q=l_1\\
&a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+f_2z_q=l_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+f_nz_q=l_n
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

而シテ z_1 ニ對スル法正式ハ此等ノ式中ノ第一式ニ a_1 ヲ乘ジ第二式ニ a_2 ヲ乘ジ第 n 式ニ a_n ヲ乘ジタルモノ卽チ

$$\left.\begin{aligned}
&\text{第一式}\times a_1\;\; a_1^2z_1+a_1b_1z_2+a_1c_1z_3+\cdots\cdots+a_1f_1z_q=a_1l_1\\
&\text{第二式}\times a_2\;\; a_2^2z_1+a_2b_2z_2+a_2c_2z_3+\cdots\cdots+a_2f_2z_q=a_2l_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\;\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{第}n\text{式}\times a_n\;\; a_n^2z_1+a_nb_nz_2+a_nc_nz_3+\cdots\cdots+a_nf_nz_q=a_nl_n
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

之レヲ加フレバ

$$\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2)z_1+(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)z_2\\
&+\cdots\cdots+(a_1f_1+a_2f_2+\cdots\cdots+a_nf_n)z_q\\
&=(a_1l_1+a_2l_2+\cdots\cdots+a_nl_n)
\end{aligned}$$

同樣ニ他ノ未知數ニ對スル法正式ヲ作ルヲ得而シテ此等ノ式ヲ示スニ次ノ略符ヲ用フ

$$\begin{aligned}
[aa]&=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n^2\\
[ab]&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nb_n\\
[af]&=a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nf_n\\
[bb]&=b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n^2\\
[al]&=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nl_n
\end{aligned}$$

然ルトキハ法正式ハ次ノ如クナル

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]z_1+[ab]z_2+\cdots\cdots+[af]z_q=[al]\\
&[ab]z_1+[bb]z_2+\cdots\cdots+[bf]z_q=[bl]
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&[ac]z_1+[bc]z_2+\cdots\cdots+[cf]z_q=[cl]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[af]+[bf]z_2+\cdots\cdots+[ff]z_q=[fl]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

此等ノ法正式ヲ見ルニ未知數ノ係數ハ對稱的ヲナス卽チ

第一橫列ノ係數 $[aa], [ab], \cdots\cdots\cdots\cdots [af]$ ハ

第一縱列ノ係數 $[aa], [ab], \cdots\cdots\cdots\cdots [af]$ ト等シク

第二橫列ノ係數 $[ab], [bb], \cdots\cdots\cdots\cdots [bf]$ ハ

第二縱列ノ係數 $[ab], [bb], \cdots\cdots\cdots\cdots [bf]$ ト等シ

故ニ精密度等シキ獨立間接測量ヲ整正スル方法ハ先ヅ n 回ノ測量ニ對シ n 個ノ觀測式ヲ書キ次ギニ法正式ヲ作リ之ヲ解キテ未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ得ルニ在リ

此方法ノ應用ハ第七章ニ在リ

第五節　二個ノ未知數ノ場合

$$\left.\begin{aligned}
&l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots\cdots l_n, \text{ ヲ觀測値}\\
&x, y, \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ ヲ未知數}
\end{aligned}\right\}\text{トシ}$$

次ノ n 個ノ誤差式アリトス

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=a_1x+b_1y-l_1\\
v_2&=a_2x+b_2y-l_2\\
v_3&=a_3x+b_3y-l_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n&=a_nx+b_ny-l_n
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

修正數 v ノ二乘ノ和ガ最小ニナル如ク v ヲ定メントス

各 v ノ二乘ヲ作ルトキハ

$$v^2=a^2x^2+2abxy-2alx+b^2y^2-2bly+l^2$$

總テノ v ヲ二乘シテ加フルトキハ

$$[vv]=[aa]x^2+2[ab]xy-2[al]x+[bb]y^2-2[bl]y+[ll]\ldots\ldots(2)$$

最小二乘平均法ノ主義ニ依リ $[vv]$ ヲ未知數ニ關シ微分シテ其微分係數ヲ零トナストキハ

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial[vv]}{\partial y}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$2[aa]x+2[ab]y-2[al]=0$$

$$2[ab]x+2[bb]y-2[bl]=0$$

之レヲ共通ノ因子 2 ニテ除シ次ノ法正式ヲ得ル

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y-[al]=0\\ [ab]x+[bb]y-[bl]=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

此式ヲ通常ノ方法ニテ解クトキハ

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{[bb][al]-[ab][bl]}{[aa][bb]-[ab][ab]}\\ y=\dfrac{[aa][bl]-[ab][al]}{[aa][bb]-[ab][ab]}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

此 (4) 式或ハ (5) 式ハ完全ナル平均式ナリ．故ニ誤差式 (2) ノ係數 ab 及絕對項 l ヨリ法正式 (4) ヲ作リ之レヲ解キテ (5) 式ヲ得ベシ

又法正式ヲ次ノ如ク書クヲ得ベシ

$$\left.\begin{array}{l}[av]=0\\ [bv]=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

[參考]

(2) 式ヨリ

$[av]=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots\ldots\ldots\ldots=[aa]x+[ab]y-[al]=0$

(6) 式ハ算術的平均ノ場合ニ於ケル $[v]=0$ 式ニ相當スルモノナリ．

第六節　實驗ニ依リ常數ヲ求ムル法

其一．$l=\alpha x+\beta y$ ナル場合

此式ノ變數 $x.y.l.$ ノ値ヲ觀測シテ成ルベク精密ニ常數 α 及ビ β ノ値ヲ定メントス從ツテ α 及ビ β ハ $x.y$ 及ビ l ノ間ノ關係ヲ精密ニ示スモノトナル

$$\left.\begin{array}{l}x_1\ y_1\ l_1\\ x_2\ y_2\ l_2\\ x_3\ y_3\ l_3\\ \ldots\ldots\ldots\\ x_n\ y_n\ l_n\end{array}\right\}$$

ヲ觀測ノ結果トスレバ觀測誤差式ハ次ノ如シ

$$v_1=\alpha x_1+\beta y_1-l_1$$

$$v_2=\alpha x_2+\beta y_2-l_2$$

$$v_3=\alpha x_3+\beta y_3-l_3$$

$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$

$$v_n=\alpha x_n+\beta y_n-l_n$$

此式ヲ第五節 (1) 式ニ比スレバ

$$x=\alpha \quad y=\beta \quad a=x \quad b=y$$

故ニ (5) 式ニ於テ $x=\alpha$　$y=\beta$　$a=x$　$b=y$ トスレバ α 及ビ β ニ對スル法正式ヲ得

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{[yy][xl]-[xy][yl]}{[xx][yy]-[xy][xy]}\\ \beta=\dfrac{[xx][yl]-[xy][xl]}{[xx][yy]-[xy][xy]}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

〔例一〕 運動法則ノ場合

始メノ速度 (c) 及加速度 (p) ヲ見出ス爲メニ種々ノ時間 ($t_1t_2t_3$ ....) ニ對スル距離 ($s_1s_2s_3$..........) ヲ測定シテ次ノ結果ヲ得タリトス

時間(秒) t	0	1	3'	5	7	10
距離(呎) s	0	3	20	28	$58^1/_2$	101

而シテ $s=ct+\frac{pt^2}{2}$ ナル式ハ運動ノ基礎トナルベキモノナル故ニ此式ノ常數 (c 及 p) ヲ見出サントス　本節 (1) 式ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} x&=t\\ y&=t^2\\ \alpha&=c\\ \beta&=\frac{p}{2}\\ l&=s \end{aligned}\right\}\text{トスレバ}$$

c 及 p ハ次式ニ依リテ算出サル

$$c=\frac{[t^2t^2][st]-[tt^2][st^2]}{[tt][t^2t^2]-[tt^2][t^2t]}$$

$$\frac{p}{2}=\frac{[tt][st^2]-[tt^2][st]}{[tt][t^2t^2]-[tt^2][t^2t]}$$

故ニ次ノ計算ヲナス

t	t^2	tt^2	t^2t^2	s	st	st^2
1	1	1	1	5	5	5
3	9	27	81	20	60	180
5	25	125	625	38	190	950
7	49	313	2401	58.5	409.5	2866.5
10	100	1000	10000	101.0	1010.0	10100
計	184	1496	13108	222.5	1674.5	14101.5
	$[tt]$	$[tt^2]$	$[t^2t^2]$	$[s]$	$[st]$	$[st^2]$

之レヨリ

$$c=\frac{13108\times1674.5-1496\times14101.5}{184\times13108-1496\times1496}=\frac{853502}{173856}=4.909\text{ 呎}$$

$$\frac{p}{2}=\frac{184\times14101.5-1496\times1674.5}{184\times13108-1496\times1496}=\frac{89624}{173856}=0.5155\text{ 呎}$$

故ニ次式ヲ得

$$s=4.909t+0.5155t^2$$

此式ニ從ヘバ

時間(秒) t	0	1	3	5	7	10
距離(呎) s	0	5.42	19.39	37.43	59.62	100.64

其二. $l=\alpha+\beta y$ ナル場合

此場合ハ $x=1$ ナル場合ナル故ニ

$$[xy]=[y]$$

$$[xl]=[l]$$

$$[xx]=1+1+1+\cdots\cdots+1=n\ (\text{觀測ノ回數})$$

故ニ (1) 式ハ次ノ如クナル

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\frac{[yy][l]-[y][yl]}{n[yy]-[y][y]}\\ \beta&=\frac{n[yl]-[y][l]}{n[yy]-[y][y]} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其三. $l=\beta y$ ナル場合

此場合ハ α ガ零ナル場合ナル故ニ

$$\beta=\frac{[yl]}{[yy]}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

其四. $l=\alpha$ ナル場合

此場合ハ $x=1$　$\beta=0$ ナル場合ナル故ニ (1) 式ハ次ノ如クナル

$$\alpha=\frac{[l]}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此値ハ總テノ觀測値ノ算術的平均數ナリ

第七節　三個ノ未知數ノ場合

$$\left.\begin{aligned} &l_1l_2l_3\cdots\cdots\text{觀測値}\\ &xyz\cdots\cdots\text{未知數}\\ &abc\cdots\cdots\text{係數(誤差ナキモノトス)}\\ &n\cdots\cdots\text{觀測回數}\\ &v_1v_2v_3\cdots\cdots v_n\ \text{殘差} \end{aligned}\right\}\text{トスレバ}$$

誤差式ハ n 個アリテ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1\\ v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=a_nx+b_ny+c_nz-l_n \end{aligned}\right\} n\text{個} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而シテ最小自乘法ニ於テハ次ノ條件式アリ

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+v_3^2\cdots\cdots+v_n^2=\text{最小}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{aligned} v^2&=a^2x^2+2abxy+2acxz-2alx\\ &\quad+b^2y^2+2bcyz-2bly+c^2z^2-2clz+l^2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{aligned} [vv]&=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz-2[al]x\\ &\quad+[bb]y^2+2[bc]yz-2[bl]y\\ &\quad+[cc]z^2-2[cl]z+[ll] \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial[vv]}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial[vv]}{\partial z}=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$2[aa]x+2[ab]y+2[ac]z-2[al]=0$$

$$2[ab]x+2[bb]y+2[bc]z-2[bl]=0$$

$$2[ac]x+2[bc]y+2[cc]z-2[cl]=0$$

法正式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]&=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

此式ヲ解キテ x,y,z ノ値ヲ求メ得

第八節　「がうす」氏ノ法正式解法

法正式ハ代數法ニテモ之レヲ解クヲ得レドモ式ノ數ガ5個ヨリ多

キトキハ解法ヲ規則正シクナシ且數回計算ノ正否ヲ檢定スルコト必要ナリ

「がうす」氏ノ解法ハ法正式ノ係數ガ常ニ對稱ヲ保ツヲ以テ宜シ

今等シキ精密度ノ測量ヲ行ヒテ3個ノ未知數ヲ定ムル場合ニ就テ說明セン

先ヅ n 個ノ觀測式ヲ次ノ如ク書ク

$$a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3-l_1=0$$

$$a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3-l_2=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3-l_n=0$$

式中 $l_1l_2\cdots\cdots l_n$ ハ絕對項ナリ

之レヨリ3個ノ法正式ヲ作ルトキハ次ノ如シ

$$a_1a_1z_1+a_1b_1z_2+a_1c_1z_3-a_1l_1=0$$

$$a_2a_2z_1+a_2b_2z_2+a_2c_2z_3-a_2l_2=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underline{a_na_nz_1+a_nb_nz_2+a_nc_nz_3-a_nl_n=0}$$

$$[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3-[al]=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故ニ

$$z_1=\frac{-[ab]z_2-[ac]z_3+[al]}{[aa]}$$

$$b_1a_1z_1+b_1b_1z_2+b_1c_1z_3-b_1l_1=0$$

$$b_2a_2z_1+b_2b_2z_2+b_2c_2z_3-b_2l_2=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underline{b_na_nz_1+b_nb_nz_2+b_nc_nz_3-b_nl_n=0}$$

$$[ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3-[bl]=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$c_1a_1z_1+c_1b_1z_2+c_1c_1z_3-c_1l_1=0$$

$$c_2a_2z_1+c_2b_2z_2+c_2c_2z_3-c_2l_2=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_na_nz_1+c_nb_nz_2+c_nc_nz_3-c_nl_n=0$$

$$[ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3-[cl]=0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)式ヨリ z_1 ノ値ヲ求メテ之レヲ(2)式ニ入ルルトキハ次ノ如シ

$$[ab]\left(\frac{-[ab]z_2-[ac]z_3+[al]}{[aa]}\right)+[bb]z_2+[bc]z_3-[bl]=0$$

故ニ

$$\left([bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)z_2+\left([bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right)z_3-\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)=0 \cdots(4)$$

又(1)式ヨリ z_1 ノ値ヲ求メテ之レヲ(3)式ニ入ルルトキハ次ノ如シ

$$[ac]\left(\frac{-[ab]z_2-[ac]z_3+[al]}{[aa]}\right)+[bc]z_2+[cc]z_3-[cl]=0$$

故ニ

$$\left([bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right)z_2+\left([cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right)z_3-\left([cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]\right)=0 \cdots\cdots(5)$$

次ノ略符ヲ用フルトキハ

$$[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb.1]$$

$$[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=[bc.1]$$

$$[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=[cc.1]$$

$$[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=[bl.1]$$

$$[cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]=[cl.1]$$

(4)及(5)ノ兩式ハ次ノ如クナル

$$[bb.1]z_2+[bc.1]z_3-[bl.1]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$[bc.1]z_2+[cc.1]z_3-[cl.1]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

此兩式ハ(2)及(3)法正式ト相似形ニシテ只 z_1 ヲ含ム項ノナキト[ ]括弧內ニ1ガ入リタルノミナリ

(6)式ヨリ z_2 ノ値ヲ求メテ之レヲ(7)式ニ入ルヽトキハ

$$[bc.1]\left(\frac{-[bc.1]z_3+[bl.1]}{[bb.1]}\right)+[cc.1]z_3-[cl.1]=0$$

略符ヲ用ヒ

$$\left.\begin{aligned}[cc.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]&=[cc.2]\\ [cl.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]&=[cl.2]\end{aligned}\right\}\text{トスルトキハ}$$

$$[cc.2]z_3-[cl.2]=0$$

此式ヨリ z_3 ノ値ヲ見出ストキハ

$$z_3=+\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$$

z_3 ノ此値ヲ z_2 及 z_3 ヲ含有スル二式ノ一ツニ入レテ z_2 ノ値ヲ得次ニ法正式ノ一ツヨリ z_1 ノ値ヲ見出シ得ベシ

或數ノ法正式ニ於ケル $[bb.2]$, $[cl.2]$ 等ハ補助係數ニシテ其値ハ直ニ書クヲ得ル即チ前述ノ如ク先ヅ z_1 ヲ除クトキニ第一補助係數ハ法正式ニ於ケル考フル項ノ係數ヨリ $\frac{PQ}{R}$ ヲ減ジタルモノナリ.

式中 P ハ考フル項ヲ含ム横列ノ左端ニ在ル係數

Q ハ考フル項ヲ含ム縦列ノ項上ニ在ル係數

R ハ法正式ノ第一式ノ第一係數ナリ

第二以上ノ補助係數ノ値モ亦同様ニ書クヲ得ル

例ヘバ

$$\left.\begin{array}{l}[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3-[al]=0\\ [ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3-[bl]=0\\ [ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3-[cl]=0\end{array}\right\}$$ナル法正式ニ於テ

考フル項ノ係數 $[bb]$ $P=[ab]$ $Q=[ab]$ $R=[aa]$	$[bc]$ $[ab]$ $[ac]$ $[aa]$	$[bl]$ $[ab]$ $[al]$ $[aa]$
$[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]z_2$	$[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]z_3$	$[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$

故ニ $[bb.1]z_2+[bc.1]z_3-[bl.1]=0$

考フル項ノ係數 $[bc]$ $P=[ac]$ $Q=[ab]$ $R=[aa]$	$[cc]$ $[ac]$ $[ac]$ $[aa]$	$[cl]$ $[ac]$ $[al]$ $[aa]$
$\left([bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right)z_2$	$\left([cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right)z_3$	$\left([cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]\right)$

故ニ $[bc.1]z_2+[cc.1]z_3-[cl.1]=0$

法正式ノ形成及其解法ハ測量ノ整正ノ仕事中ニテ最モ多ク勞力ヲ要スル部分ナリ　故ニ自乘表，乘數表．算盤及計算器械ヲ使用シテ之レヲ爲ス又屢々檢算ヲ爲スコト必要ナリ而シテ仕事ヲ配列シ且檢算スルニ次ノ方法ヲ用フルコトアリ

觀測式ノ係數及絶對項ヲ書キ而シテ各横列ニ在ル數ノ代數的和ヲ作リ之レヲ右方ノ縦列ニ記入スベシ　三個ノ未知數 z_1z_2 及 z_3 ニ對スル場合ニ於テ表ヲ書クトキハ次ノ如シ

a	b	c	$-l$	s
a_1 a_2	b_1 b_2	c_1 c_2	$-l_1$ $-l_2$	s_1 s_2
………	………	………	………	………
a_n	b_n	c_n	$-l_n$	s_n

$a+b+c-l=s$

次ニ法正式ノ係數 $[ll]$, $[as]$, $[bs]$, $[cs]$ 及 $[ss]$ ヲ作ルベシ　而シテ法正式ニ於ケル各項ノ係數ヲ次ノ如ク表ニ記入シ右方ニ縦列ヲ加ヘ又對角線ノ上下ノ係數ハ同ジキヲ以テ之ヲ省略スベシ

z_1	z_2	z_3	$l]$	$s]$
$[aa]$	$[ab]$ $[bb]$	$[ac]$ $[bc]$ $[cc]$	$-[al]$ $-[bl]$ $-[cl]$ $[ll]$	$[as]$ $[bs]$ $[cs]$ $-[ls]$ $[ss]$

而シテ $[as]$ ガ其横列ニ於ケル數ノ代數的和ニ等シケレバ計算ハ正シキナリ

此他同様ナル檢算四個アリ卽チ

$$[bs]=-[bl]+[bc]+[bb]+[ab]$$

$$[cs]=-[cl]+[cc]+[bc]+[ac]$$

$$-[ls]=\quad[ll]-[cl]-[bl]-[al]$$

$$[ss]=-[ls]+[cs]+[bs]+[as]$$

而シテ此檢算ガ履行セラレザレバ計算ニ誤リアリ故ニ再算ス可シ

次ニ第一補助係數 $[ll.1]$, $[bs.1]$, $[cs.1]$, $[ls.1]$ 及 $[ss.1]$ ヲ計算スベシ

例ヘバ

$$[ls.1]=[ls]-\frac{[al]}{[aa]}[as]$$

次ニ z_1 ヲ除ケバ表ハ次ノ形トナル

z_2	z_3	$l.1]$	$s.1]$
$[bb.1]$	$[bc.1]$ $[cc.1]$	$-[bl.1]$ $-[cl.1]$ $[ll.1]$	$[bs.1]$ $[cs.1]$ $-[ls.1]$ $[ss.1]$

之レニモ亦次ノ四個ノ檢算法アリ

$$[bs.1]=-[bl.1]+[bc.1]+[bb.1]$$

$$[cs.1]=-[cl.1]+[cc.1]+[bc.1]$$

$$-[ls.1]=\ [ll.1]-[cl.1]-[bl.1]$$

$$[ss.1]=-[ls.1]+[cs.1]+[bs.1]$$

次ニ第二補助係數ヲ計算スルトキハ表ハ次ノ如クナル

z_3	$l.2]$	$s.2]$
$[cc.2]$	$-[cl.2]$ $[ll.2]$	$[cs.2]$ $-[ls.2]$ $[ss.2]$

之レニモ亦次ノ三個ノ檢算法アリ

$$\left.\begin{aligned}[cs.2]&=-[cl.2]+[cc.2]\\-[ls.2]&=\ [ll.2]-[cl.2]\\[ss.2]&=-[ls.2]+[cs.2]\end{aligned}\right\}\text{而シテ之レニ誤リナキトキハ}$$

$$z_3=+\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$$

尚完全ナル檢算法ハ第三補助係數 $[ll.3]$, $[ls.3]$ 及 $[ss.3]$ ヲ算出スルニ在リ然ルトキハ表ハ次ノ如クナリテ此三個ノ値ハ互ニ等シク又此各自ハ $[vv]$ 即チ法正式ヨリ算出シタル z_1, z_2, z_3 ノ値ヲ觀測式

$[ll.3]$	$-[ls.3]$ $[ss.3]$

中ニ入レテ得タル殘差ノ自乘ノ和ニ等シ

〔參考〕 觀測式ヲ $az_1+bz_2+cz_3-l=0$ トシ最モ確カラシキ値 z_1, z_2 及 z_3 ヲ入ルルトキハ此式ハ零トナラズシテ小ナル殘差 (v) ヲ殘ス 即チ

$$az_1+bz_2+cz_3-l=v$$

而シテ v ノ n 個ノ値ヲ自乘シテ加ヘ $[vv]$ ノ値ヲ算出ス即チ

$$v_1^2=a_1^2z_1^2+2a_1b_1z_1z_2+2a_1c_1z_1z_3+b_1^2z_2^2+2b_1c_1z_2z_3$$
$$-2a_1l_1z_1-2b_1l_1z_2+c_1^2z_3^2-2c_1l_1z_3+l_1^2$$
$$v_2^2=a_2^2z_1^2+2a_2b_2z_1z_2+2a_2c_2z_1z_3+b_2^2z_2^2+2b_2c_2z_2z_3$$
$$-2a_2l_2z_1-2b_2l_2z_2+c_2^2z_3^2-2c_2l_2z_3+l_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n^2=a_n^2z_1^2+2a_nb_nz_1z_2+2a_nc_nz_1z_3+b_n^2z_2^2+2b_nc_nz_2z_3$$
$$-2a_nl_nz_1-2b_nl_nz_2+c_n^2z_3^2-2c_nl_nz_3+l_n^2$$

$$[vv]=[aa]z_1z_1+2[ab]z_2z_1+2[ac]z_3z_1+[bb]z_2z_2$$
$$+2[bc]z_2z_3-2[al]z_1-2[bl]z_2+[cc]z_3z_3-2[cl]z_3+[ll]$$
$$=z_1([aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3-[al])+z_2([ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3-[bl])$$
$$+z_3([ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3-[cl])-[al]z_1-[bl]z_2-[cl]z_3+[ll]$$

而シテ

$$[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3-[al]=0$$
$$[ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3-[bl]=0$$
$$[ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3-[cl]=0 \text{ ナル故ニ}$$

$$-[al]z_1-[bl]z_2-[cl]z_3+[ll]=[vv] \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而シテ之ヲ第四ノ法正式ト考ヘ z_1 ヲ除クトキハ

$$-[bl.1]z_2-[cl.1]z_3+[ll.1]=[vv] \text{ トナル}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

何トナレバ $[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3-[al]=0$ ナル式ヨリ

$$z_1=-\frac{[ab]z_2+[ac]z_3-[al]}{[aa]} \qquad \text{此ノ値ヲ (1) 式ニ入ルトキハ}$$

$$-[al]\left(\frac{-[ab]z_2-[ac]z_3+[al]}{[aa]}\right)-[bl]z_2-[cl]z_3+[ll]=[vv]$$

故ニ

$$-\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)z_2-\left([cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]\right)z_3+\left([ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]\right)=[vv]$$

故ニ

$$-[bl.1]z_2-[cl.1]z_3+[ll.1]=[vv]$$

次ニ z_2 ヲ除クトキハ

$$-[cl.2]z_3+[ll.2]=[vv] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

何トナレバ $[bb.1]z_2+[bc.1]z_3-[bl.1]=0$ ナル式ヨリ

$$z_2=-\frac{[bc.1]z_3-[bl.1]}{[bb.1]}$$ 此ノ値ヲ(2)式ニ入ルヽトキハ

$$-[bl.1]\left(\frac{-[bc.1]z_3+[bl.1]}{[bb.1]}\right)-[cl.1]z_3+[ll.1]=[vv]$$

故ニ $$-\left([cl.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]\right)z_3+\left([ll.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]\right)=[vv]$$

故ニ $$-[cl.2]z_3+[ll.2]=[vv]$$

次ニ z_3 ヲ除クトキハ $[ll.3]=[vv] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

何トナレバ $[cc.2]z_3-[cl2]=0$ ナル式ヨリ

$$z_3=\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$$

此ノ値ヲ(3)式ニ入ルヽトキハ

$$-[cl.2]\times\frac{[cl.2]}{[cc.2]}+[ll.2]=[vv]$$

故ニ $[ll.3]=[vv]$ トナル

故ニ補助係數 $[ll.3]$, $-[ls.3]$ 及 $[ss.3]$ ノ各々ハ $[vv]$ ニ等シ即チ

$$[ll.3]=[ls.3]=[ss.3]=[vv]$$

第九節　法正式解法ノ實例

第五圖ニ於テ0點ヲ或水準基標トシ $z_1 z_2$ 及 z_3 ヲ基點ヨリノ高低トセヨ

1 線ノ測量ニ依リ 0 點ヨリ Z_1 點ノ高サ ＝10尺

2 線ノ測量ニ依リ Z_1 點ヨリ Z_2 點ノ高サ ＝ 7尺

3 線ノ測量ニ依リ 0 點ヨリ Z_2 點ノ高サ ＝18尺

4 線ノ測量ニ依リ Z_3 點ヨリ Z_2 點ノ高サ ＝ 9尺

5 線ノ測量ニ依リ Z_3 點ヨリ Z_1 點ノ高サ ＝ 2尺

z_1, z_2 及 z_3 ヲ3點ノ高サトスレバ次ノ觀測式ヲ得ベシ

$$z_1=10 \text{ 即チ } +z_1+0+0-10=0$$

$$z_2-z_1=7 \qquad -z_1+z_2+0-7=0$$

$$z_2=18 \qquad +0+z_2+0-18=0$$

$$z_2-z_3=9 \qquad +0+z_2-z_3-9=0$$

$$z_1-z_3=2 \qquad +z_1+0-z_3-2=0$$

此等ノ式ヲ前節ノ觀測式ト對照スレバ係數及絶對項ノ値ハ次ノ如シ

$a_1=+1 \quad b_1=0 \quad c_1=0 \quad -l_1=-10$

$a_2=-1 \quad b_2=+1 \quad c_2=0 \quad -l_2=-7$

$a_3=0 \quad b_3=+1 \quad c_3=0 \quad -l_3=-18$

$a_4=0 \quad b_4=+1 \quad c_4=-1 \quad -l_4=-9$

$a_5=+1 \quad b_5=0 \quad c_5=-1 \quad -l_5=-2$

故ニ觀測式ニ於ケル係數及絶對項ノ表ハ次ノ如シ

a	b	c	$-l$	s
+1	0	0	−10	−9
−1	+1	0	−7	−7
0	+1	0	−18	−17
0	+1	−1	−9	−9
+1	0	−1	−2	−2

次ニ $[aa][ab][ac]$ 等ヲ算出スレバ次ノ如シ

$[aa]=+3$	$[bb]=+3$	$[cc]=+2$
$[ab]=-1$	$[bc]=-1$	$[cl]=-9-2=-11$
$[ac]=-1$	$[bl]=+7+18+9=+34$	$[cs]=+9+2=+11$
$[al]=+10-7+2=+5$	$[bs]=-7-17-9=-33$	$[ll]=100+49+324+81+4=+558$
$[as]=-9+7-2=-4$		$[ls]=-90-49-306-81-4=-530$
		$[ss]=+81+49+289+81+4=+504$

故ニ法正式ニ於ケル各項ノ係數表ハ次ノ如シ

z_1	z_2	z_3	$l]$	$s]$
+3	−1	−1	+5	−4
	+3	−1	+34	−33
		+2	−11	+11
			+558	−530
				+504

次ノ5個ノ檢定ヲ行フニ計算ニ誤ナシ

(1) $[aa]+[ab]+[ac]-[al]=[as]$

$+3\ -1\ -1\ -5\ =-4$

(2) $-[bl]+[bc]+[bb]+[ab]=[bs]$

$-34-1\ +3\ -1\ =-33$

(3) $-[cl]+[cc]+[bc]+[ab]=[cs]$

$11\ +2\ -1\ -1\ =+11$

(4) $[ll]-[cl]-[bl]-[al]=[ls]$

$558+11-34\ -5\ =+530$

(5) $-[ls]+[cs]+[bs]+[as]=[ss]$

$530+11\ -33\ -4\ =+504$

次ニ第一補助係數ヲ計算スレバ次ノ如シ

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=3-\frac{-1}{3}\times(-1)=+2\frac{2}{3}$$

$$[bc.1]=[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=-1+\frac{1}{3}\times(-1)=-1\frac{1}{3}$$

$$[bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=34-\frac{1}{3}\times(-5)=+35\frac{2}{3}$$

$$[bs.1]=[bs]-\frac{[ab]}{[aa]}[as]=-33+\frac{1}{3}\times(-4)=-34\frac{1}{3}$$

$$[cc.1]=[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=+2-\frac{-1}{3}\times(-1)=+1\frac{2}{3}$$

$$[cl.1]=[cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]=-11-\frac{-1}{3}\times5=-11+1\frac{2}{3}=-9\frac{1}{3}$$

$$[cs.1]=[cs]-\frac{[ac]}{[aa]}[as]=11-\frac{-1}{3}\times(-4)=11-1\frac{1}{3}=+9\frac{2}{3}$$

$$[ll.1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]=558-\frac{5}{3}\times5=+549\frac{2}{3}$$

$$[ls.1]=[ls]-\frac{[al]}{[aa]}[as]=-530-\frac{5}{3}\times(-4)=-523\frac{1}{3}$$

$$[ss.1]=[ss]-\frac{[as]}{[aa]}[as]=504-\frac{-4}{3}\times(-4)=+498\frac{2}{3}$$

之レヲ表ニ示セバ次ノ如シ

z_2	z_3	$l\ 1]$	$s.1]$
$+2\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$+35\frac{2}{3}$	$-34\frac{1}{3}$
	$+1\frac{2}{3}$	$-9\frac{1}{3}$	$9\frac{2}{3}$
		$549\frac{2}{3}$	$-523\frac{2}{3}$
			$498\frac{2}{3}$

次ノ四個ノ檢算ヲナスニ計算ニ誤リナシ

(1) $[bb.1]+[bc.1]-[bl.1]=[bs.1]$

$+2\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}\ -35\frac{2}{3}\ =-34\frac{1}{3}$

(2) $-[cl.1]+[cc.1]+[bc.1]=[cs.1]$

$+9\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}\ -1\frac{1}{3}\ =+9\frac{2}{3}$

(3) $[ll.1]-[cl.1]-[bl.1]=-[ls.1]$

$+549\frac{2}{3}+9\frac{1}{3}\ -35\frac{2}{3}\ =+523\frac{1}{3}$

$$(4)\ -[ls.1]+[cs.1]+[bs.1]=[ss.1]$$

$$+523\frac{1}{3}+9\frac{2}{3}\quad -34\frac{1}{3}=+498\frac{2}{3}$$

次ニ z_2 ヲ除ク爲メニ第二補助係數ヲ計算スレバ次ノ如シ

$$[cc.2]=[cc.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]=1\frac{2}{3}-\frac{-1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}}\left(-1\frac{1}{3}\right)=+1.00$$

$$[cl.2]=[cl.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]=-9\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times 35\frac{2}{3}=+8.50$$

$$[cs.2]=[cs.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bs.1]=9\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(-34\frac{1}{3}\right)=-7.50$$

$$[ll.2]=[ll.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]=549\frac{2}{3}-\frac{35\frac{2}{3}}{2\frac{2}{3}}\times 35\frac{2}{3}=+72.625$$

$$[ls.2]=[ls.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1]=-523\frac{1}{3}-\frac{107}{8}\left(-34\frac{1}{3}\right)=-64.125$$

$$[ss.2]=[ss.1]-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bs.1]=498\frac{2}{3}-\frac{-34\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}}\left(-34\frac{1}{3}\right)=+56.625$$

z_3	$l.2]$	$s.2]$
+1.00	+8.50	−7.50
	+72.625	−64.125
		+56.625

次ノ三個ノ檢算ヲナスニ計算ニ誤ナシ

$$(1)\quad [cc.2]-[cl.2]=[cs.2]$$

$$1.00\ -8.50\ =-7.50$$

$$(2)\quad [ll.2]-[cl.2]=[ls.2]$$

$$72.625-8.50\ =+64.125$$

$$(3)\quad -[ls.2]+[cs.2]=[ss.2]$$

$$+64.125-7.50\ =+56.625$$

今 z_3 ノ値ハ　$z_3=+\frac{[cl.2]}{[cc.2]}=\frac{8.50}{1.00}=+8.5$

此 z_3 ノ値ヲ z_2 及 z_3 ヲ含ム式ニ入レテ

$z_2=+17.625$ ヲ見出ス

〔參考〕　$[bb.1]z_2+[bc.1]z_3-[bl.1]=0$

$$2\frac{2}{3}z_2+\left(-1\frac{1}{3}\right)8.5-\left(+35\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\frac{8}{3}z_2-\frac{34}{3}-\frac{107}{3}=0$$

故ニ　$8z_2-141=0$

故ニ　$z_2=+17.625$

次ニ z_2 及 z_3 ヲ法正式ニ入レテ $z_1=+10.375$ ヲ見出ス

〔參考〕　$[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3-[al]=0$

$$+3z_1-1.z_2-1z_3-5=0$$

$$+3z_1-17.625-8.5-5=0$$

$$+3z_1-31.125=0$$

次ニ　$z_1=+10.375$

次ニ最後ノ檢定トシテ z_1z_2 及 z_3 ノ値ヲ觀測式ニ入レテ殘差ヲ見出ス可シ

$$\left.\begin{array}{l} z-10=0 \\ -z_1+z_2-7=0 \\ +z_2-18=0 \\ +z_2-z_3-9=0 \\ +z_1-z_3-2=0 \end{array}\right\}\text{觀測式}\quad \begin{array}{l} 10.375-10=0.375=v_1 \\ -10.375-17.625-7=0.250=v_2 \\ 17.625-18=-0.375=v_3 \\ 17.625-8.50-9=0.125=v_4 \\ 10.375-8.5-2=-0.125=v_5 \end{array}$$

$$[vv]=0.375^2+0.25^2+(-0.375)^2+0.125^2+(-0.125)^2$$

$$=0.140625+0.0625+0.140625+0.015625+0.015625=0.375$$

次ニ第三補助係數ヲ計算スレハ次ノ如シ

$$[ll.3]=[ll.2]-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2]=72.625-\frac{8.50}{1.00}\times(8.50)=0.375$$

$$[ls.3]=[ls.2]-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cs.2]=-64.125-\frac{8.50}{1.00}\times(-7.50)=-0.375$$

$$[ss.3]=[ss.2]-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cs.2]=56.625-\frac{-7.50}{1}\times(-7.50)=0.375$$

故ニ計算ハ正シ

第十節　二個ノ未知數ノ場合ニ於ケル「がうす」氏消去法及誤差二乘ノ和

第五節ノ法正式ハ

$$[aa]x+[ab]y-[al]=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$[ab]x+[bb]y-[bl]=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

(1) 式ニ $-\frac{[ab]}{[aa]}$ ヲ乘ジ (2) 式ニ加フルトキハ

$$\left([bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)y-\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

$$[bb.1]y-[bl.1]=0 \qquad y=\frac{[bl.1]}{[bb.1]} \quad\cdots\cdots(4)$$

式中　$[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb.1] \quad [bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=[bl.1]$ ...(5)

又 (2) 式ニ $-\frac{[ab]}{[bb]}$ ヲ乘ジ (1) 式ニ加フルトキハ

$$\left([aa]-\frac{[ab]}{[bb]}[ab]\right)x+\left([al]-\frac{[ab]}{[bb]}[bl]\right)=0$$

$$[aa.1]x-[al.1]=0 \cdots\cdots x=\frac{[al.1]}{[aa.1]} \quad\cdots\cdots(6)$$

式中　$[aa]-\frac{[ab]}{[bb]}[ab]=[aa.1] \quad [al]-\frac{[ab]}{[bb]}[bl]=[al.1]$ ..(7)

〔參考〕 $[bb.1]$ $[bl.1]$ 等ヲ作リ誤リナキヤヲ檢スルニハ文字ヲ代數的ニ加ヘ此値ガ零トナレハ可ナリ例ヘバ

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=bb-\frac{ab}{aa}ab=bb-\frac{b}{a}ab=bb-bb=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

殘差ノ二乘ノ和　　$[vv]=[ll.2]$ ナリ

〔參考〕　$[vv]=[aa]x^2+2[ab]xy-2[al]x+[bb]y^2-2[bl]y+[ll]$ ......(9)

法正式ノ二乘ヲ作レバ

$$\left.\begin{array}{r}([aa]x+[ab]y-[al])^2=[aa]^2x^2+2[aa][ab]xy-2[aa][al]x+[ab]^2y^2\\ -2[ab][al]y+[al]^2\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(10)$$

之レヲ $[aa]$ ニテ除セバ

$$\left.\begin{array}{r}\frac{([aa]x+[ab]y-[al])^2}{[aa]}=\frac{[aa]^2x^2}{[aa]}+\frac{2[aa][ab]xy}{[aa]}-\frac{2[aa][al]x}{[aa]}\\ +\frac{[ab]^2y^2}{[aa]}-\frac{2[ab][al]y}{[aa]}+\frac{[al]^2}{[aa]}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(11)$$

之レヲ (9) 式ヨリ減ズレバ

$$\left.\begin{array}{r}[vv]-\frac{([aa]x+[ab]y-[al])^2}{[aa]}=\left([bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)y^2-2\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)y\\ +\left([ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]\right)=[bb.1]y^2-2[bl.1]y+[ll.1]\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

又 $([bb.1]y-[bl.1])^2=[bb.1]^2y^2-2[bb.1][bl.1]y+[bl.1]^2$

$$\frac{([bb.1]y-[bl.1])^2}{[bb.1]}=[bb.1]y^2-2[bl.1]y+\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1] \quad\cdots\cdots(13)$$

此 (13) 式ヲ (12) 式ヨリ減ズレバ

$$[vv]-\frac{([aa]x+[ab]y-[al])^2}{[aa]}-\frac{([bb.1]y-[bl.1])^2}{[bb.1]}=[ll.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]=[ll.2] \quad\cdots(14)$$

$$[vv]=\frac{([aa]x+[ab]y-[al])^2}{[aa]}+\frac{([bb.1]y-[bl.1])^2}{[bb.1]}+[ll.2] \quad\cdots\cdots(15)$$

而シテ

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y-[al]=0\\ [bb.1]y-[bl.1]\qquad=0\end{array}\right\}\text{ナル故ニ}$$

$$[vv]=[ll.2] \quad\cdots\cdots(16)$$

又

$$[ll.2]=[ll.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1] \text{ 及ビ}$$

$$[ll.1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al] \text{ ナル故ニ}$$

(16) 式ハ次ノ如クナル

$$[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} \quad\cdots\cdots(17)$$

第十一節　二個ノ未知數ニ於ケル係數ノ計算及總和檢定法

$$\left.\begin{array}{l} a_1+b_1-l_1+s_1=0 \\ a_2+b_2-l_2+s_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$ トスルトキハ …………(1)

$$\left.\begin{array}{r} [aa]+[ab]-[al]+[as]=0 \\ [ab]+[bb]-[bl]+[bs]=0 \\ -[al]-[bl]+[ll]-[ls]=0 \\ [as]+[bs]-[ls]+[ss]=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$[aa]$	$[ab]$	$-[al]$	$[as]$
	$[bb]$	$-[bl]$	$[bs]$
		$[ll]$	$-[ls]$
			$[ss]$

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

$$-[bl.1]=-\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)$$

$$[ll.1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]$$

$$[bs.1]=[bs]-\frac{[ab]}{[aa]}[as]$$

$$-[ls.1]=-\left([ls]-\frac{[al]}{[aa]}[as]\right)$$

$$[ss.1]=[ss]-\frac{[as]}{[aa]}[as]$$

$[bb.1]$	$-[bl.1]$	$[bs.1]$
	$[ll.1]$	$-[ls.1]$
		$[ss.1]$

之レガ正否ハ次ノ如クシテ容易ニ檢スルヲ得ベシ例ヘバ

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

$$-[bl.1]=-\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)$$

$$0=[ab]-\frac{[ab]}{[aa]}[aa]$$

$$[bb.1]-[bl.1]=-[bs]-\frac{[ab]}{[aa]}(-[as])=-[bs.1]$$

故ニ　$[bb.1]-[bl.1]+[bs.1]=0$

同樣ニ　$-[bl.1]+[ll.1]-[ls.1]=0$

$[bs.1]-[ls.1]+[ss.1]=0$

$[ll.2]=[ll.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]$	$-[ls.2]=-\left([ls.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1]\right)$
	$[ss.2]=[ss.1]-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bs.1]$

$[ll.2]$	$-[ls.2]$
	$[ss.2]$

…………(4)

之レニ依テ檢算ヲナスヲ得ル

$[ll.2]=[ls.2]=[ss.2]$

$[ll.2]=[vv]$ …………(5)

又　$[ss]=[aa]+2[ab]-2[al]+[bb]-2[bl]+[ll]$

又ハ　$[ss]=[aa]+[ab]-[al]+[ab]+[bb]-[bl]-[al]-[bl]+[ll]$

第十二節　二個ノ未知數ノ場合ニ於ケル消去法ノ實例

第七章第三節ノ例ニ於テ

	$[a$	$[b$	$-[l$	$[s$
$a]$	$+9.00$	-40.74	$+4.88$	$+26.86$
$b]$		$+229.87$	-25.26	-163.87
$-l]$			$+4.33$	$+16.05$
$b.1]$		$+45.45$	-3.17	-42.28
$-l.1]$			$+1.68$	$+1.49$
$-l.2]$			$+1.46$	-1.46

計算

	検算
$[aa]=+9.00,\ [ab]=-40.74,\ -[al]=+4.88,\ [as]=+26.86$	0.00
$[bb]=+229.87,\ -[bl]=-25.26,\ [bs]=-163.87$	0.00
$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=-184.42,\ \frac{[ab]}{[aa]}[al]=+22.09,\ -\frac{[ab]}{[aa]}[as]=+121.59$	
$[bb.1]=+45.45\quad -[bl.1]=-3.17\quad [bs.1]=-42.28$	0.00
$[ll]=+4.33\quad -[ls]=+16.05$	0.00
$-\frac{[al]}{[aa]}[al]=-2.65,\ +\frac{[al]}{[aa]}[as]=-14.56$	
$(-[bl.1]=-3.17)\quad [ll.1]=+1.68,\quad -[ls.1]=+1.49$	0.00
$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]=-0.22,\ \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1]=-2.95$	
$[ll.2]=+1.46\quad -[ls.2]=-1.46$	0.00

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{[bl.1]}{[bb.1]}=\frac{-3.17}{+45.45}=+0.06975 \\ p_y=[bb.1]=45.45,\ [vv]=1.46 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又反對ニ y ヲ消去シテ x 及 p_x ヲ定ムル法ハ次ノ如シ

	$[b$	$[a$	$-[l$	$[s$
$b]$	$+229.9$	-40.7	-25.3	-163.9
$a]$		$+9.0$	$+4.9$	$+26.8$
$-l]$			$+4.3$	$+16.1$
$a.1]$		$+1.8$	$+0.4$	-2.2
$-l.1]$			$+1.5$	-1.9
$-l.2]$			$+1.4$	-1.4

計算

	検算
$[bb]=+229.9,\ [ab]=-40.7,\ -[bl]=-25.3,\ [bs]=-163.9$	0.0
$[aa]=+9.0,\ -[al]=+4.9,\ [as]=+26.8$	0.0
$-\frac{[ab]}{[bb]}[ab]=-7.2,\ \frac{[ab]}{[bb]}[bl]=-4.5,\ -\frac{[ab]}{[bb]}[bs]=-29.0$	
$[aa.1]=+1.8\quad -[al.1]=+0.4,\quad [as.1]=-2.2$	0.0
$[ll]=+4.3,\quad -[ls]=+16.1$	0.0
$-\frac{[bl]}{[bb]}[bl]=-2.8,\ \frac{[bl]}{[bb]}[bs]=-18.1$	
$(-[al.1)=+0.4)\quad [ll.1]=+1.5,\quad -[ls.1]=-1.9$	0.0
$-\frac{[al.1]}{[aa.1]}[al.1]=-0.1,\ \frac{[al.1]}{[aa.1]}[as.1]=+0.5$	
$[ll.2]=+1.4\quad -[ls.2]=-1.4$	0.0

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{[al.1]}{[aa.1]}=\frac{-0.4}{+1.8}=-0.226 \\ p_x=[aa.1]=1.8\ ;\ [vv]=1.4 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

第十三節　四個ノ未知數ノ場合

x,y,z,t ヲ未知數トスレバ誤差式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t-l_1 \\ v_2=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t-l_2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &v_n=a_nx+b_ny+c_nz+d_nt-l_n\end{aligned}\right\}$$

第一法正式ハ

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]t-[al]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]t-[bl]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cd]t-[cl]&=0\\ [ad]x+[bd]y+[cd]z+[dd]t-[dl]&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

第一法正式ヲ略記スルトキハ

$$\left.\begin{aligned}\underline{[aa]}x+[ab]y+[ac]z+[ad]t-[al]&=0\\ \underline{[bb]}y+[bc]z+[bd]t-[bl]&=0\\ \underline{[cc]}z+[cd]t-[cl]&=0\\ \underline{[dd]}t-[dl]&=0\\ \underline{[ll]}&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

第二法正式ヲ略記スルトキハ

$$\left.\begin{aligned}\underline{[bb.1]}y+[bc.1]z+[bd.1]t-[bl.1]&=0\\ \underline{[cc.1]}z+[cd.1]t-[cl.1]&=0\\ \underline{[dd.1]}t-[dl.1]&=0\\ \underline{[ll.1]}&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

第三法正式ヲ略記スルトキハ

$$\left.\begin{aligned}\underline{[cc.2]}z+[cd.2]t-[cl.2]&=0\\ \underline{[dd.2]}t-[dl.2]&=0\\ \underline{[ll.2]}&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

第四法正式ヲ略記スルトキハ

$$\left.\begin{aligned}\underline{[dd.3]}t-[dl.3]&=0\\ \underline{[ll.3]}&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$[ll.4]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

〔注意〕 (1) 補助係數ノ文字ヲ代數的ニ加フレバ零トナル

$$[bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=bl-\frac{ab.al}{aa}$$

$$=bl-bl=0$$

(2) 活弧ニ 1,2,3 ガアルトキハ減ズル項ノ分母ニ

$[aa]$, $[bb.1]$, $[cc.2]$…………等アリ

〔實例〕 法正式解法

$$\left.\begin{aligned}+\underline{459}x-308y-389z+244t-507&=0\\ +\underline{464}y+408z-269t+695&=0\\ +\underline{676}z-331t+653&=0\\ +\underline{469}t-283&=0\\ +\underline{1129}&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

此式ノ解法ハ次ノ如シ

各短縮法正式ノ第一式ヲ集メタルモノヲ完全短縮法正式或ハ終式ト云フ此式ニ於テハ各式ノ未知數ノ數ガ次第ニ一個宛減少ス

$$\left.\begin{aligned}&\text{第一式}\quad A=[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]t+[al]=0\\ &\text{第二式}\quad [bb.1]+[bc.1]z+[bd.1]t+[bl.1]=0\\ &\text{第三式}\quad [cc.2]z+[cd.2]t+[cl.2]=0\\ &\text{第四式}\quad [dd.3]t+[dl.3]=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$[ll.4]=[vv]$$

(8) 式ヨリ次ノ終式ヲ得

$$\left.\begin{aligned}&\text{第一式}\quad +459x-308y-389z+244t-507=0\\ &\text{第二式}\quad +256y+146z-105t+354=0\\ &\text{第三式}\quad +263z-\ \ 64t+\ \ 21=0\\ &\text{第四式}\quad +281t+137=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$11=[vv]$$

此第四式ニ依リ t ヲ定メ之レヲ第三式ニ入レテ z ヲ定メ順次ニ y,x ヲ定ム

四個ノ法正式ノ解法

	a	b	c	d	l	s	検定	
A	+459	−308	−389	+244	−507	+501	0	
		+464	+408	−269	+695	−990	0	
		−208	−162	+164	−341	+337		$\frac{308}{459}\times 308=208$
			+676	−331	+653	−1017	0	
			−330	+207	−430	+425		$\frac{308}{459}\times 389=262$
				+469	−283	+170	0	
				−130	+270	−267		$\frac{208}{459}\times 244=164$
					+1129	−1687	0	
					−560	+554		
B′		+256	+146	−105	+354	−653	−2	$\frac{308}{459}\times 507=311$
			+346	−124	+223	−592	−1	
			−83	+60	−202	+373		$\frac{308}{459}\times 501=337$
				+339	−13	−97	0	
				−43	+145	−268		
					+569	−1133	0	$\frac{389}{459}\times 389=330$
					−490	−902		
C″			+263	−64	+21	−219	+1	
				+296	+132	−365	−1	$\frac{389}{459}\times 244=207$
				−15	+5	−53		
					+79	−231	+1	$\frac{389}{459}\times 507=430$
					−2	+17		
D‴				+281	+137	−418	0	$\frac{389}{459}\times 501=425$
					+77	−214	0	
					−66	+203		
					+11	−11		

$t=-\frac{+137}{+281}=-0.488$

第十四節　多數ノ未知數ニ於ケル精密度等シカラザル獨立測量

測量ノ精密度等シカラザル場合卽チ觀測値 $l_1 l_2 \ldots\ldots l_n$ ノ重み等

シカラザル場合ノ整正法ハ次ノ如シ

各觀測値ニテ觀測式ヲ作ルトキハ

$$\left.\begin{array}{ll}a_1z_1+b_1z_2+\ldots\ldots+f_1z_q=l_1 & \text{此式ノ重みヲ}\ p_1\\ a_2z_1+b_2z_2+\ldots\ldots+f_2z_q=l_2 & \quad〃\quad〃\quad p_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nz_1+b_2z_2+\ldots\ldots f_nz_q=l_n & \quad〃\quad〃\quad p_n\end{array}\right\}\ldots(1)\ \text{トス}$$

式中　　$z_1z_2\ldots\ldots z_q$ ハ未知數

　　　　$a.b,\ldots\ldots f$ ハ係數

今 $z_1z_2\ldots\ldots z_q$ ヲ求メントスル未知數ノ最モ確カラシキ値トシ此値ヲ (1) 式ニ入ルルトキハ之レハ零トナラズシテ小ナル殘差 $v_1v_2\ldots v_n$ ヲ生ズ故ニ誤差式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{ll}a_1z_1+b_1z_2+\ldots\ldots+f_1z_q-l_1=v_1 & \text{重み}\ p_1\\ a_2z_1+b_2z_2+\ldots\ldots+f_2z_q-l_2=v_2 & \text{重み}\ p_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nz_1+b_nz_2+\ldots\ldots+f_nz_q-l_n=v_n & \text{重み}\ p_n\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

最小二乘法ノ一般平均法ノ原理ニ從ヘバ q 個ノ未知數 $z_1z_2\ldots\ldots z_q$ ノ最モ確カラシキ値ハ

$p_1v_1^2+p_2v_2^2+\ldots\ldots p_nv_n^2=[pvv]$ ヲ最小ニナスモノナリ而シテ $v_1^2, v_2^2,\ldots\ldots v_n^2$ ハ $z_1,z_2,\ldots\ldots z_q$ ノ函數ナルヲ以テ各變數ニ關シテ $[pvv]$ ノ微分係數ヲ作リ之レヲ零トナストキハ次ノ q 個ノ條件式ヲ得ル

$$\left.\begin{array}{l}p_1v_1\dfrac{dv_1}{dz_1}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dz_1}+\ldots\ldots+p_nv_n\dfrac{dv_n}{dz_1}=0\\ p_1v_1\dfrac{dv_1}{dz_2}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dz_2}+\ldots\ldots+p_nv_n\dfrac{pv_n}{pz_2}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_1v_1\dfrac{dv_1}{dz_q}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dz_q}+\cdots\cdots\cdots+p_nv_n\dfrac{dv_n}{dz_q}=0\end{array}\right\}$$

此等ノ條件式ニ於テ微分係數$\dfrac{dv}{dz}$ノ値ハ各變數ニ關シテ誤差式ノ微分係數ヲ作レバ之レヲ見出シ得ベシ

即チ　$\dfrac{dv_1}{dz_1}=a_1$　$\dfrac{dv_2}{dz_1}=a_2$　$\dfrac{dv_1}{dz_2}=b_1$………等

故ニ條件式ハ次ノ如クナル

$$\left.\begin{array}{l}p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\cdots\cdots\cdots+p_na_nv_n=0\\ p_1b_1v_1+p_2b_2v_2+\cdots\cdots\cdots+p_nb_nv_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_1f_1v_1+p_2f_2v_2+\cdots\cdots\cdots+p_nf_nv_n=\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此等ノ式ノ數ハ未知數 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_q$ ノ數ニ等シ

而シテ此等ノ式中ノ $v_1, v_2, \cdots\cdots\cdots v_n$ ノ値ヲ殘差式ニ代入スルトキハ法正式ヲ得

$$\begin{array}{l}p_1a_1(a_1z_1+b_1z_2+\cdots\cdots\cdots+f_1z_q-l_1)\\ +p_2a_2(a_2z_1+b_2z_2+\cdots\cdots\cdots+f_2z_q-l_2)\\ +\cdots\cdots\cdots+p_na_n(a_nz_1+\cdots\cdots\cdots+f_nz_q-l_n)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\end{array}$$

而シテ次ノ略符ヲ用フルトキハ法正式ハ (6) 式トナル

$$\begin{array}{l}[paa]=p_1a_1^2+p_2a_2^2+\cdots\cdots\cdots+p_na_n^2\\ [pab]=p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\cdots\cdots\cdots+p_na_nb_n\\ [pal]=p_1a_1l_1+p_2a_2l_2+\cdots\cdots\cdots+p_na_nl_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}[paa]z_1+[pab]z_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+[paf]z_q=[pal]\\ [pab]z_1+[pbb]z_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+[pbf]z_q=[pbl]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [paf]z_1+[pbf]z_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+[pff]z_q=[pfl]\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

此式ヲ解クトキハ $z_1\,z_2\cdots\cdots\cdots z_q$ ノ値ヲ得

此等ノ式ニ於ケル係數ハ前述ノ如ク對稱的ニシテ第一横列ノ係數ハ第一縱列ノ係數ニ同ジク第二横列ノ係數ハ第二縱列ノ係數ニ同ジ

q 個ノ未知數ヲ決定スル爲メニ n 回ノ測量ヲ爲シテ未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ見出スニハ n 個ノ觀測式ヲ作リ之レヨリ q 個ノ法正式ヲ作リテ之レヲ解クトキハ未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ得ベシ最モ普通ノ場合ハ觀測式ニ於ケル係數ハ $(+1)$,(-1) 或ハ (0) ナルヲ以テ法正式ノ係數ヲ作ルトキニ此符號ニ注意スルヲ要ス

此方法ヲ用ヒテ整正スル例ハ第七章ニ在リ

第四節ノ場合ハ重みガ等シキ場合ニシテ本節ノ場合ハ其ノ特別ノ場合ニ過キズ

重みハ反覆ノ回數ヲ示ス數ニ過ギザル故ニ一般ノ場合ハ特別ノ場合ヨリ導カルルコト明ナリ即チ v 及 v^2 ヲ p 回反覆スルニ過ギズ故ニ第四節ノ規則ハ重みノ等シカラザル測量ニモ之ヲ適用シ得即チ初メニ各觀測式ニ其重みノ平方根ヲ乘ジ置ケバ法正式ニ重みガ (2) 式ノ如ク入ルベシ

第十五節　四個ノ未知數ノ場合

$$\left.\begin{array}{ll}X,\ Y,\ Z,\ T & \text{ヲ未知數}\\ L_1, L_2, \ldots\ldots L_n & \text{ヲ函數ノ値}\\ a,\ b,\ c,\ d & \text{ヲ係數}\\ n & \text{ヲ實測ノ數}\end{array}\right\}\text{トスレバ}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1T=L_1 \\ a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2T=L_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nX+b_nY+c_nZ+d_nT=L_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ x,y,z,t トシ觀測値ヲ $l_1,l_2,\ldots\ldots l_n$ トシ其最モ確カラシキ修正數ヲ $v_1v_2\ldots\ldots\ldots v_n$ トスレバ次ノ誤差式ヲ得

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=l_1+v_1 \text{ 重み } p_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=l_2+v_2 \text{ 重み } p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx+b_ny+c_nz+d_nt=l_n+v_n \text{ 重み } p_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此誤差式ヨリ未知數ヲ求ムルニハ

$U=[pvv]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\ldots\ldots\ldots+p_nv_n^2=$ 最小ナル條件ニ從フ.

條件滿足サルヽ爲メニハ未知數 $x.y.z.t$ ニ關シテ U ヲ微分シ其微分係數ヲ零トス卽チ

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0,\ \frac{\partial U}{\partial y}=0,\ \frac{\partial U}{\partial z}=0,\ \frac{\partial U}{\partial t}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1v_1\dfrac{dv_1}{dx}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dx}+\ldots\ldots\ldots+p_nv_n\dfrac{dv_n}{dx}=0 \\ p_1v_1\dfrac{dv_1}{dy}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dy}+\ldots\ldots\ldots+p_nv_n\dfrac{dv_n}{dy}=0 \\ p_1v_1\dfrac{dv_1}{dz}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dz}+\ldots\ldots\ldots+p_nv_n\dfrac{dv_n}{dz}=0 \\ p_1v_1\dfrac{dv_1}{dt}+p_2v_2\dfrac{dv_2}{dt}+\ldots\ldots\ldots+p_nv_n\dfrac{dv_n}{dt}=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(4)$$

然ルニ (2) 式ヨリ

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dv_1}{dx}=a_1 & \dfrac{dv_2}{dx}=a_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dv_1}{dy}=b_1 & \dfrac{dv_2}{dy}=b_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dv_1}{dz}=c_1 & \dfrac{dv_2}{dz}=c_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dv_1}{dt}=d_1 & \dfrac{dv_2}{dt}=d_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\text{ナルヲ以テ}$$

(4) 式ハ次ノ如クナル

$$\left.\begin{array}{l} p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\ldots\ldots\ldots+p_na_nv_n=[pav]=0 \\ p_1b_1v_1+p_2b_2v_2+\ldots\ldots\ldots+p_nb_nv_n=[pbv]=0 \\ p_1c_1v_1+p_2c_2v_2+\ldots\ldots\ldots+p_nc_nv_n=[pcv]=0 \\ p_1d_1v_1+p_2d_2v_2+\ldots\ldots\ldots+p_nd_nv_n=[pdv]=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

誤差式ヨリ得タル v ノ値ヲ上式ニ代入スレバ四ケノ未知數ヲ含ム四ケノ法正式ヲ得之レヨリ未知數ヲ求メラル

$$\left.\begin{array}{l} [paa]x+[pab]y+[pac]z+[pad]t=[pal] \\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbd]t=[pbl] \\ [pac]x+[pcb]y+[pcc]z+[pcd]t=[pcl] \\ [pad]x+[pdb]y+[pdc]z+[pdd]t=[pdl] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

此等ノ法正式ノ係數ハ $[paa]$ ト $[pdd]$ トヲ結ブ線ニ對シテ對稱的ナリ

第十六節　四個ノ未知數ノ場合ニ於ケル「がうす」氏消去法及誤差二乘ノ和

前節 (6) 式ノ法正式ヲ解クニハ先ヅ之レヲ次ノ如ク書キ

$$\left.\begin{array}{l} A^{(0)}\equiv[paa]x+[pab]y+[pac]z+[pad]t-[pal]=0 \\ A^{(1)}\equiv[pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbd]t-[pbl]=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
A^{(2)} &\equiv [pac]x+[pbc]y+[pcc]z+[pcd]t-[pcl]=0 \\
A^{(3)} &\equiv [pad]x+[pbd]y+[pcd]z+[pdd]t-[pdl]=0
\end{aligned}\right)$$

第一ノ式ニ順次ニ $\frac{[pab]}{[paa]}$, $\frac{[pac]}{[paa]}$, $\frac{[pad]}{[paa]}$ ヲ乘ジ斯クシテ得タル新シキ式ヲ他ノ式ヨリ減ズルコト次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}
A^{(1)}-A^{(0)}\frac{[pab]}{[paa]} &= \left([pbb]-\frac{[pab][pab]}{[paa]}\right)y+\left(\frac{[pbc]-[pab][pac]}{[paa]}\right)z \\
&\quad +\left([pbd]-\frac{[pab][pad]}{[paa]}\right)t-\left([pbl]-\frac{[pab][pal]}{[paa]}\right)=0 \\
A^{(2)}-A^{(0)}\frac{[pac]}{[paa]} &= \left([pbc]-\frac{[pab][pac]}{[paa]}\right)y+\left([pcc]-\frac{[pac][pac]}{[paa]}\right)z \\
&\quad +\left([pcd]-\frac{[pac][pad]}{[paa]}\right)t-\left([pcl]-\frac{[pac][pal]}{[paa]}\right)=0 \\
A^{(3)}-A^{(0)}\frac{[pad]}{[paa]} &= \left([pbd]-\frac{[pab][pad]}{[paa]}\right)y+\left([pcd]-\frac{[pac][pad]}{[paa]}\right)z \\
&\quad +\left([pdd]-\frac{[pad][pad]}{[paa]}\right)t-\left([pdl]-\frac{[pad][pdl]}{[paa]}\right)=0
\end{aligned}\right\}\ (8)$$

簡單ナル記號ヲ用ヒテ上式ヲ書キ直シ之ヲ一次短縮法正式ト云フ

$$\left.\begin{aligned}
B^{(1)} &\equiv [pbb.1]y+[pbc.1]z+[pbd.1]t-[pbl.1]=0 \\
B^{(2)} &\equiv [pbc.1]y+[pcc.1]z+[pcd.1]t-[pcl.1]=0 \\
B^{(3)} &\equiv [pbd.1]y+[pdc.1]z+[pdd.1]t-[pdl.1]=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

本式ヲ (8) 式ト比較スレバ容易ニ記號ノ意味ヲ理解シ得可シ

次ニ y ヲ消去スル爲メニ (9) 式ノ $B^{(1)}$ 式ニ $\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$, $\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$ ヲ乘シ之レヲ $B^{(2)}$ 並ニ $B^{(3)}$ 式ヨリ減ズルトキハ

$$\left.\begin{aligned}
B^{(2)}-B^{(1)}\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]} &= \left([pcc.1]-\frac{[pbc.1][pbc.1]}{[pbb.1]}\right)z \\
&\quad +\left([pcd.1]-\frac{[pbc.1][pbd.1]}{[pbb.1]}\right)t \\
&\quad -\left([pcl.1]-\frac{[pbc.1][pbl.1]}{[pbb.1]}\right)=0 \\
B^{(3)}-B^{(1)}\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]} &= \left([pcd.1]-\frac{[pbc.1][pbd.1]}{[pbb.1]}\right)z \\
&\quad +\left([pdd.1]-\frac{[pbd.1][pbd.1]}{[pbb.1]}\right)t \\
&\quad -\left([pdl.1]-\frac{[pbd.1][pbl.1]}{[pbb.1]}\right)=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(10)$$

更ニ簡單ナル記號ヲ用ヒテ上式ヲ書キ直シ之ヲ二次短縮法正式ト云フ.

$$\left.\begin{aligned}
C^{(2)} &\equiv [pcc.2]z+[pcd.2]t-[pcl.2]=0 \\
C^{(3)} &\equiv [pcd,2]z+[pdd.2]t-[pdl.2]=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

新記號ノ意味ハ本式ヲ第 (10)式ト比較スレバ容易ニ理解スルヲ得可シ.

次ニ z ヲ消去スル爲メニ同樣ノ方法ヲ用ヒテ,

$$\begin{aligned}
C^{(3)}-C^{(2)}\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]} &= \left([pdd.2]-\frac{[pcd.2][pcd.2]}{[pcc.2]}\right)t \\
&\quad -\left([pdl.2]-\frac{[pcd.2][pcl.2]}{[pcc.2]}\right)=0\ \ldots\ldots(12)
\end{aligned}$$

簡單ナル記號ヲ用ヒテ上式ヲ書キ直シ之ヲ第三次短縮法正式ト云フ、

$$D^{(3)}\equiv[pdd.3]t-[pdl.3]=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

(7), (9), (11), 及 (13) 式中ノ初メノ式ヲ書キ並ベ之ヲ消去式ト云フ

$$\left.\begin{aligned}
A^{(0)} &\equiv [paa]x+[pab]y+[pac]z+[pad]t-[pal]=0 \\
B^{(1)} &\equiv [pbb.1]y+[pbc.1]z+[pbd.1]t-[pbl.1]=0 \\
C^{(2)} &\equiv [pcc.2]z+[pcd.2]t-[pcl.2]=0 \\
D^{(3)} &\equiv [pdd.3]t-[pdl.3]=0
\end{aligned}\right\}\ldots(14)$$

運算ノ正否ヲ檢スル爲ニ

$$s=-(a+b+c+d-l)$$

或ハ

$$a+b+c+d-l+s=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

トスルトキハ次ノ如キ和ノ檢算式ヲ得

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]+[pab]+[pac]+[pad]-[pal]+[pas]=0\\
&[pab]+[pbb]+[pbc]+[pbd]-[pbl]+[pbs]=0\\
&[pac]+[pcb]+[pcc]+[pcd]-[pcl]+[pcs]=0\\
&[pad]+[pdb]+[pdc]+[pdd]-[pdl]+[pds]=0\\
&[pal]+[plb]+[plc]+[pld]-[pll]+[pls]=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[pbb.1]+[pbc.1]+[pbd.1]-[pbl.1]+[pbs.1]=0\\
&[pbc.1]+[pcc.1]+[pcd.1]-[pcl.1]+[pcs.1]=0\\
&[pbd.1]+[pdc.1]+[pdd.1]-[pdl.1]+[pds.1]=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(17)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[pcc.2]+[pcd.2]-[pcl.2]+[pcs.2]=0\\
&[pcd.2]+[pdd.2]-[pdl.2]+[pds.2]=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

$$[pdd.3]-[pdl.3]+[pds.3]=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

法正式ヲ解クニ當リテハ各係數系ニ對シテ少クトモ此等ノ內第一ノ檢算ハ行ハザル可カラズ.

又法正式ヲ次第ニ短縮スルニハ次ノ様式ニ依ルヲ便トス.

$A^{(0)}$	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pad]$	$[pal]$	$[pas]$	檢算=0
		$[pbb]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]$	$[pbc]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pac]$	$[pbd]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pad]$	$[pbl]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]$	$[pbs]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pas]$	
$B^{(1)}$		$[pbb.1]$	$[pbc.1]$	$[pbd.1]$	$[pbl.1]$	$[pbs.1]$	0
			$[pcc]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pac]$ $-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}[pbc.1]$	$[pcd]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pad]$ $-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}[pbd.1]$	$[pcl]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]$ $-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}[pbl.1]$	$[pcs]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pas]$ $-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}[pbs.1]$	
$C^{(2)}$			$[pcc.2]$	$[pcd.2]$	$[pcl.2]$	$[pcs.2]$	0
				$[pdd]$ $-\frac{[pad]}{[paa]}[pad]$ $-\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}[pbd.1]$ $-\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}[pcd.2]$	$[pdl]$ $-\frac{[pad]}{[paa]}[pal]$ $-\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}[pbl.1]$ $-\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}[pcl.2]$	$[pds]$ $-\frac{[pad]}{[paa]}[pas]$ $-\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}[pbs.1]$ $-\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}[pcs.2]$	
$D^{(3)}$				$[pdd.3]$	$[pdl.3]$	$[pds.3]$	0
					$[pll]$ $-\frac{[pal]}{[paa]}[pal]$ $-\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}[pbl.1]$ $-\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}[pcl.2]$ $-\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}[pdl.3]$	$[pls]$ $-\frac{[pal]}{[paa]}[pas]$ $-\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}[pbs.1]$ $-\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}[pcs.2]$ $-\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}[pds.3]$	
$L^{(4)}$					$[pll.4]$	$[pls.4]$	0

未知數ノ計算法

總テノ消去式ノ係數ノ値ヲ知レバ之レヨリ未知數ヲ定ムルヲ得可シ. 之レニ逆進算法ト獨立算法トアリ

一. 逆進算法.

此法ハ (13) 式ヨリ未知數 t ヲ計算シ之レヲ (11) 式ニ入レテ z ヲ計算シ總未知數ヲ得ルマデ此法ヲ續行ス. 斯クシテ求メタル未知數ノ値ハ計算ニ誤リナケレバ初メノ法正式ヲ滿足セザル可カラズ

二. 獨立算法

此法ハ (14) 式ヲ次ノ形ニ書キ換フ.

$$\left.\begin{array}{r|l}
x+\frac{[pab]}{[paa]}y+\frac{[pac]}{[paa]}z+\frac{[pad]}{[paa]}t=\frac{[pal]}{[paa]} & 1 \\[2ex]
y+\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}z+\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}t=\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} & A_1\ \ 1 \\[2ex]
z+\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}t=\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} & A_2\ \ B_2\ \ 1 \\[2ex]
t=\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]} & A_3\ \ B_3\ \ C_3
\end{array}\right\}\cdots\cdots(20)$$

各式ニ順次ニ 1, A_1, A_2, A_3 ヲ乘ジ加フ. 但シ A_1, A_2, A_3 等ハ未知數 y, z, t ノ係數ヲ消去セシムル樣選ブモノニシテ 次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}
0&=\frac{[pab]}{[paa]}+A_1 \\
0&=\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}A_1+A \\
0&=\frac{[pad]}{[paa]}+\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}A_1+\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}A_2+A_3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

然ルトキハ x ヲ得. 次ニ殘リノ三式ニ順次ニ 1, B_2, B_3 ヲ乘ジテ加フ. 但シ $B_2 B_3$ ハ z 及 t ノ係數ノ消滅スル樣ニ選ブモノニシテ次ノ

如シ.

$$\left.\begin{aligned}
0&=\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}+B_2 \\
0&=\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}+\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}B_2+B_3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

然ルトキハ y ヲ得

次ニ殘リノ二式ニ順次ニ 1. C_3 ヲ乘ジテ加フ. 但シ C_3 ハ t ノ係數ヲ消滅セシムル樣選ブモノニシテ次ノ如シ.

$$0=\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}+C_3\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

然ルトキハ z ヲ得.

斯クシテ得タル未知數ノ値ヲ列記スレバ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{[pal]}{[paa]}+\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}A_1+\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}A_2+\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}A_3 \\
y&=\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}+\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}B_2+\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}B_3 \\
z&=\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}+\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}C_3 \\
t&=\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}
\end{aligned}\right\}\cdots(24)$$

但シ A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 及 C_3 等ハ (21)(22) 及 (23) 式ヨリ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=-\frac{[pab]}{[paa]} \\
A_2&=-\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pab][pbc.1]}{[paa][pbb.1]} \\
A_3&=-\frac{[pad]}{[paa]}+\frac{[pab][pbd.1]}{[paa][pbb.1]}+\frac{[pac][pcd.2]}{[paa][pcc.2]}-\frac{[pab][pbc.1][pcd.2]}{[paa][pbb.1][pcc.2]} \\
B_2&=-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}
\end{aligned}\right\}(25)$$

未知數ノ計算法

總テノ消去式ノ係數ノ値ヲ知レバ之レヨリ未知數ヲ定ムルヲ得可シ. 之レニ逆進算法ト獨立算法トアリ

一. 逆進算法.

此法ハ (13) 式ヨリ未知數 t ヲ計算シ之レヲ (11) 式ニ入レテ z ヲ計算シ總未知數ヲ得ルマデ此法ヲ續行ス. 斯クシテ求メタル未知數ノ値ハ計算ニ誤リナケレバ初メノ法正式ヲ滿足セザル可カラズ

二. 獨立算法

此法ハ (14) 式ヲ次ノ形ニ書キ換フ.

$$\left.\begin{array}{rl|l}
x+\dfrac{[pab]}{[paa]}y+\dfrac{[pac]}{[paa]}z+\dfrac{[pad]}{[paa]}t= & \dfrac{[pal]}{[paa]} & 1 \\[2ex]
y+\dfrac{[pbc.1]}{[pbb.1]}z+\dfrac{[pbd.1]}{[pbb.1]}t= & \dfrac{[pbl.1]}{[pbb.1]} & A_1\ \ 1 \\[2ex]
z+\dfrac{[pcd.2]}{[pcc.2]}t= & \dfrac{[pcl.2]}{[pcc.2]} & A_2\ \ B_2\ \ 1 \\[2ex]
t= & \dfrac{[pdl.3]}{[pdd.3]} & A_3\ \ B_3\ \ C_3
\end{array}\right\}\cdots\cdots(20)$$

各式ニ順次ニ 1, A_1, A_2, A_3 ヲ乘ジ加フ. 但シ A_1, A_2, A_3 等ハ未知數 y, z, t ノ係數ヲ消去セシムル樣選ブモノニシテ 次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}
0&=\frac{[pab]}{[paa]}+A_1 \\
0&=\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}A_1+A \\
0&=\frac{[pad]}{[paa]}+\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}A_1+\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}A_2+A_3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

然ルトキハ x ヲ得. 次ニ殘リノ三式ニ順次ニ 1, B_2, B_3 ヲ乘ジテ加フ. 但シ B_2B_3 ハ z 及 t ノ係數ノ消滅スル樣ニ選ブモノニシテ次ノ

如シ.

$$\left.\begin{aligned}
0&=\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}+B_2 \\
0&=\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}+\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}B_2+B_3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

然ルトキハ y ヲ得

次ニ殘リノ二式ニ順次ニ 1. C_3 ヲ乘ジテ加フ. 但シ C_3 ハ t ノ係數ヲ消滅セシムル樣選ブモノニシテ次ノ如シ.

$$0=\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}+C_3\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

然ルトキハ z ヲ得.

斯クシテ得タル未知數ノ値ヲ列記スレバ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{[pal]}{[paa]}+\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}A_1+\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}A_2+\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}A_3 \\
y&=\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}+\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}B_2+\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}B_3 \\
z&=\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}+\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}C_3 \\
t&=\frac{[pdl.3]}{[pdd.3]}
\end{aligned}\right\}\cdots(24)$$

但シ A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 及 C_3 等ハ (21)(22) 及 (23) 式ヨリ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=-\frac{[pab]}{[paa]} \\
A_2&=-\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pab][pbc.1]}{[paa][pbb.1]} \\
A_3&=-\frac{[pad]}{[paa]}+\frac{[pab][pbd.1]}{[paa][pbb.1]}+\frac{[pac][pcd.2]}{[paa][pcc.2]}-\frac{[pab][pbc.1][pcd.2]}{[paa][pbb.1][pcc.2]} \\
B_2&=-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}
\end{aligned}\right\}(25)$$

$$\left.\begin{aligned}B_3&=-\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}+\frac{[pbc.1][pcd.2]}{[pbb.1][pcc.2]}\\ C_3&=-\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}\end{aligned}\right|$$

誤差自乘ノ計算

$$\left.\begin{aligned}&a_1x+b_1y+c_1z+d_1t-l_1=v_1\\ &a_2x+b_2y+c_2z+d_2t-l_2=v_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_nx+b_ny+c_nz+d_nt-l_n=v_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

上記ノ誤差式ニ於テ v ヲ自乘シ之レニ相應スル p ヲ乘ジテ加フル時ハ.

$$\left.\begin{aligned}[pvv]=&x([paa]x+[pab]y+[pac]z+[pad]t-[pal])\\ &+y([pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbd]t-[pbl])\\ &+z([pac]x+[pcb]y+[pcc]z+[pcd]t-[pcl])\\ &+t([pad]x+[pdb]y+[pdc]z+[pdd]t-[pdl])\\ &+[pll]-[pal]x-[pbl]y-[pcl]z-[pdl]t\end{aligned}\right\}\cdots(27)$$

括弧內ハ法正式ニシテ零ニ等シ故ニ

$$[pvv]=[pll]-[pal]x-[pbl]y-[pcl]z-[pdl]t\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

本式ノ未知數ヲ消去スル爲メニ本式ヲ (27)式ノ一部ト考ヘ第十節ト同法ニ依リ第十五節 (5) 及 (6) 式ヲ用ヒテ之レヲ短縮シ次式ヲ得,

$$[pvv]=[pll]-\frac{[pal]^2}{[paa]}-\frac{[pbl.1]^2}{[pbb.1]}-\frac{[pcl.2]^2}{[pcc.2]}-\frac{[pdl.3]^2}{[pdd.3]}=[pll.4]$$

〔參考〕 一般ニ未知數 u 個ナルトキハ

$$[pvv]=[pll.u]$$

$$[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}-\frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}-\frac{[dl.3]^2}{[dd.3]}=[ll.4]$$

一般ニ

$$[vv]=[ll.u]$$

第十七節 條件附測量

上述ノ場合ハ測量ニ依テ決定スベキ未知數ガ互ニ獨立ナル場合ニシテ此等ノ未知數ハ互ニ觀測式ニ依テ關係ヲ有シ且ツ此等ノ式ヲ略ボ滿足セシムルヲ要セシモ此等ノ未知數ハ或ル一個ガ他ノ未知數ノ値ニ變化ヲ及ボサズニ變ズルト假定シ得ベキ程互ニ獨立ナリキ

故ニ未知數ノ値ノ總テノ組ハ同樣ニ起リ得ベキモノト考ヘラレ上述ノ方法ハ最モ確カラシキ組ヲ決定スル方法ナリ之ニ反シテ條件附測量ニ於テハ正確ニ滿足セシムルヲ要スル條件アルヲ以テ未知數ノ値ノ總テノ組ハ同樣ニ起リ得ベキモノナラズ

例ヘバ三角形ノ二角ヲ測ルトキニ一角ノ値ハ他ノ一角ノ値ニハ關係ナク全ク獨立ナレドモ若シ第三角ヲ測ルトキハ此等ノ三角ハ其和ガ 180° トナラザル可カラザルコトノ幾何學上ノ條件ニ從ハザル可ラズ. 故ニ條件附測量ニ於テハ式ニ觀測式及條件式ノ二種アリ觀測式ノ數ハ一般ニ未知數ノ數ヨリ多クシテ條件式ノ數ハ未知數ノ數ヨリ少シ

$$\left.\begin{aligned}&\text{觀測式ノ數ヲ } n\\ &\text{未知數ノ數ヲ } q\\ &\text{條件式ノ數ヲ } n'\end{aligned}\right\}\text{トスルトキハ } n>q>n'$$

若シ條件式ガ無ケレバ最小自乘法ノ主義ニ依リ未知數ノ値ノ整正シタル組ハ n 個ノ獨立觀測式ノ最モ確カラシキモノナレドモ爰ニ n' 個ノ條件式アリテ且此條件式ノ數ハ未知數ノ數ヨリ少キヲ以テ種々ノ方法ニテ滿足サレ得ベシ

而シテ未知數ノ値ノ最後ノ整正シタル組ハ精密ニ此式ヲ滿足セシ

メザル可カラズ. 故ニ n' 個ノ條件式ヲ精密ニ滿足セシムル所ノ未知數ノ値ノ組ノ中ニテ n 個ノ觀測式ノ重み付殘差ノ二乘ノ和ヲ最小ニナス所ノ組ヲ選バザル可カラズ

故ニ條件附測量ノ問題ヲ獨立測量ノ問題ニナスニハ n' 個ノ條件式ニ依リ n' 個ノ未知數ノ値ヲ $(q-n')$ 個ノ未知數ノ項ニテ示シ之レヲ n 個ノ觀測式ニ入ルレバ $(q-n')$ 個ノ未知數ノ項ニテ n 個ノ獨立觀測式ヲ生ズ. 之レヨリ法正式ヲ作リテ $(q-n')$ 個ノ未知數ノ最モ確カラシキ値ヲ見出シ得次ニ此値ヲ n' 個ノ條件式中ニ入ルルトキハ殘餘ノ n' 個ノ未知數ノ値ヲ見出シ得ベシ

此クノ如クシテ見出シタル q 個ノ未知數ノ値ハ精密ニ條件式ヲ滿足セシメ同時ニ觀測式ノ最モ確カラシキ値ナリ

例ヘバ平面三角形ノ三角測量シタル場合ニ於テ z_1, z_2 及 z_3 ヲ三角ノ最モ確カラシキ値トスレバ

觀測式ハ次ノ如シ

$$z_1=l_1,\quad z_2=l_2 \text{ 及 } z_3=l_3$$

又條件式ハ次ノ如シ

$$z_1+z_2+z_3=180^\circ$$

今條件式ヨリ z_3 ノ値ヲ取リ之レヲ觀測式ニ入ルルトキハ次ノ如シ

$$z_1=l_1$$
$$z_2=l_2$$
$$z_1+z_2=180^\circ-l_3$$

然ルトキハ z_1 及 z_2 ノ最モ確カラシキ値ハ此等ノ觀測式ヨリ第五節ノ方法ニ依リ求メラル

而シテ z_3 ノ最モ確カラシキ値ハ $180^\circ-z_1-z_2$ ナリ

其方法ヲ記スレバ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} z_1&=l_1 \\ z_2&=l_2 \\ z_1+z_2&=180^\circ-l_3 \end{aligned}\right\} \text{觀測式}$$

z_1	z_2		
a	b	$-l$	s
1	0	$-l_1$	$1-l_1$
0	1	$-l_2$	$1-l_2$
1	1	$-180^\circ+l_3$	$2-180^\circ+l_3$

z_1	z_2		
$[aa]=2$	$[ab]=1$ $[bb]=2$	$[al]=-l_1-180^\circ+l_3$ $[bl]=-l_2-180^\circ+l_3$ $[ll]=l_1^2+l_2^2+l_3^2+(180^\circ)^2-2\times180^\circ l_3$	$[as]=(1-l_1)+(2-180^\circ+l_3)$ $[bs]=(1-l_2)+(2-180^\circ+l_3)$ $[ls]=-l_1(1-l_1)-l_2(1-l_2)-(180^\circ-l_3)(2-180^\circ+l_3)$ $[ss]=(1-l_1)^2+(1-l_2)^2+(2-180^\circ+l_3)^2$

z_2

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$$

$$[bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=-l_2-180^\circ+l_3-\frac{1}{2}(-l_1-180^\circ+l_3)$$

$$=\frac{l_1}{2}-l_2+\frac{l_3}{2}-90^\circ$$

上述ノ方法ハ一般的ニシテ理論ハ非常ニ簡單ナレドモ實際ニ於テハ計算面倒ニシテ特ニ條件式ノ數ガ多クナルニ從ツテ益々面倒ナリ故ニ「がうす」氏ノ不定係數法ヲ一般ニ採用ス

第十八節　「がうす」氏不定係數法

其一　測量ノ重み等シキ場合

條件式ヲ一次式ト考ヘ測量ノ數ヲ測定セントスル未知數ノ數ト等シトス即チ $n=q$ トシ n 個ノ未知數ガ次ノ n' 個ノ條件式ニ依リ結付ケラレ居ルモノト假定ス

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n=0 \\ b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n=0 \\ c_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_0'+n_1'x_1+n_2'x_2+\cdots\cdots+n'_nx_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式ニ示ス條件式ニ於テ $x=l+v$ トシ未知數ノ値ノ代リニ觀測値並ニ其修正數ヲ用フルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1l_1+\cdots\cdots+a_nl_n+a_1v_1+\cdots\cdots+a_nv_n=0 \\ b_0+b_1l_1+\cdots\cdots+b_nl_n+b_1v_1+\cdots\cdots+b_nv_n=0 \\ c_0+c_1l_1+\cdots\cdots+c_nl_n+c_1v_1+\cdots\cdots+c_nv_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_0+n'_1l_1+\cdots\cdots+n'_nl_n+n'_1v_1+\cdots\cdots+n'_nv_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

即チ此等ノ n' 個ノ式ノ初メノ $(n+1)$ 個ノ項ノ和ハ零ニ等シカル可キモ觀測誤差ノ爲メニ次式ニ示ス如キ誤差ヲ生ズ

$$\left.\begin{array}{l} w_1=a_0+a_1l_1+\cdots\cdots+a_nl_n \\ w_2=b_0+b_1l_1+\cdots\cdots+b_nl_n \\ w_3=c_0+c_1l_1+\cdots\cdots+c_nl_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{n'}=n_0'+n'_1l_1+\cdots\cdots+n'_nl_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此等ノ値ヲ (2) 式ニ入ルルトキハ次ニ示ス如キ誤差條件式ヲ得

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1+\cdots\cdots+a_nv_n+w_1=0 \\ b_1v_1+\cdots\cdots+b_nv_n+w_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_1'v_1+\cdots\cdots+n'_nv_n+w_{n'}=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此 n' 個ノ條件式ヲ夫々 $\varphi_1\varphi_2\cdots\cdots\varphi_{n'}$ トスレバ

$x_1x_2\cdots\cdots x_n$ ノ最モ確カラシキ値ハ

$$[vv]-2K_1\varphi_1-2K_2\varphi_2\cdots\cdots-2K_{n'}\varphi_{n'}$$

ヲ最小トスルモノナリ

式中 $K_1,K_2,\cdots\cdots K_{n'}$ ハ條件式ノ乘數或ハ不定係數ナリ．v ニ關シテ此式ヲ微分シ其微分係數ヲ零トナストキハ次ノ n 個ノ不定係數式ヲ得

$$\left.\begin{array}{l} v_1-(a_1K_1+b_1K_2+\cdots\cdots+n_1'K_{n'})=0 \\ v_2-(a_2K_1+b_2K_2+\cdots\cdots+n_2'K_{n'})=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n-(a_nK_1+b_nK_2+\cdots\cdots+n'_nK_{n'})=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此 n 個ノ式ト n' 個ノ條件式トニ依リ n 個ノ殘差及 n' 個ノ不定係數ヲ定ムルヲ得ベシ

(5) 式ヨリ殘差誤差ヲ次ノ如ク書クヲ得

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_1K_1+b_1K_2+\cdots\cdots+n_1'K_{n'} \\ v_2=a_2K_1+b_2K_2+\cdots\cdots+n_2'K_{n'} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=a_nK_1+b_nK_2+\cdots\cdots+n'_nK_{n'} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

之レヲ條件式 (4) ニ入ルルトキハ

$$\left.\begin{aligned}&[aa]\mathrm{K}_1+[ab]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+[an']\mathrm{K}_{n'}+w_1=0\\&[ab]\mathrm{K}_1+[bb]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+[bn']\mathrm{K}_{n'}+w_2=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&[an']\mathrm{K}_1+[bn']\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+[n'n']\mathrm{K}_{n'}+w_{n'}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

此等ノ式ノ係數ハ法正式ノ係數ト等シキ性質ヲ有ス而シテ式數n'個アル故ニn'個ノ不定係數ヲ定メ得ベク從テ殘差誤差vヲ知ルヲ得

此殘差誤差ヲ觀測値ニ加ヘテ修正スルトキハ未知數$x_1x_2\cdots\cdots\cdots x_n$ノ最モ確カラシキ値ヲ得．且之レハ正確ニ條件式ヲ滿足セシムルモノナリ．此方法ノ應用ノ例ハ第八章ニ在リ．

其二．測量ノ重み等シカラザル場合

測量ノ重み等シカラザルトキハ條件式 (4) ニ於テ $\mathrm{U}=[pvv]$ ヲ最小ニナサントス之レガ爲メニ誤差條件式φニ不定係數 $-2\mathrm{K}$ ヲ乘シテUニ加フルトキハ次ノ新シキ函數ヲ得．

$$\mathrm{F}=\mathrm{U}-2\mathrm{K}_1\varphi_1-2\mathrm{K}_2\varphi_2-2\mathrm{K}_3\varphi_3\cdots\cdots\cdots-2\mathrm{K}_{n'}\varphi_{n'}$$

之レヲ各修正數vニ關シテ微分シ其微分係數ヲ零ニ等シトスレバ次ノn個ノ不定係數式ヲ得

$$\left.\begin{aligned}&p_1v_1=a_1\mathrm{K}_1+b_1\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+n_1'\mathrm{K}_{n'}\\&p_2v_2=a_2\mathrm{K}_1+b_2\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+n_2'\mathrm{K}_{n'}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&p_nv_n=a_n\mathrm{K}_1+b_n\mathrm{K}_2+\cdots\cdots+n'_n\mathrm{K}_{n'}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

本式ニ於テ不定係數Kノ値ヲ知レバ最モ確カラシキ修正數vヲ計算シ得可シ．不定係數ヲ求ムルニハ不定係數式ヨリ．

$$v=\frac{a}{p}\mathrm{K}_1+\frac{b}{p}\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{n'}{p}\mathrm{K}_{n'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ノ如キ誤差式ヲ作リ之レヲ誤差條件式ニ入レKノ順ニ配列スレバ．次ノ法正式ヲ得．

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{aa}{p}\right]\mathrm{K}_1+\left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{an'}{p}\right]\mathrm{K}_{n'}+w_1=0\\&\left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{K}_1+\left[\frac{bb}{p}\right]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{bn'}{p}\right]\mathrm{K}_{n'}+w_2=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\left[\frac{an'}{p}\right]\mathrm{K}_1+\left[\frac{bn'}{p}\right]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{n'n'}{p}\right]\mathrm{K}_{n'}+w_{n'}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(10)$$

之レヨリ不定係數Kヲ求ム求メタルKノ正否ヲ檢スルニハ之レガ法正式ヲ滿足スルヤ否ヤヲ見ルニ在リ．斯クシテvヲ知レバ之レヲ觀測値ニ加ヘテ平均セラレタル未知數ヲ得可シ．卽チ

$$x_1=l_1+v_1,\quad x_2=l_2+v_2,\cdots\cdots\cdots x_n=l_n+v_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

斯クシテ得タルxノ値ガ (1) 式ヲ滿足スルヤ否ヤニ依リテ全計算ノ正否ヲ檢スルヲ得可シ．

誤差ノ自乘和$[pvv]$ヲ得ルニハ (9) 式ニ$\sqrt{p}$ヲ乘ジテ次式ヲ得

$$\sqrt{p}\,v=\frac{a}{\sqrt{p}}\mathrm{K}_1+\frac{b}{\sqrt{p}}\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{n'}{\sqrt{p}}\mathrm{K}_{n'}\cdots\cdots\cdots(12)$$

斯カル式ヲ自乘シテ加ヘKノ順ニ配列スレバ

$$\begin{aligned}[pvv]=&\mathrm{K}_1\left(\left[\frac{aa}{p}\right]\mathrm{K}_1+\left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{an'}{p}\right]\mathrm{K}_{n'}\right)\\&+\mathrm{K}_2\left(\left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{K}_1+\left[\frac{bb}{p}\right]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{bn'}{p}\right]\mathrm{K}_{n'}\right)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\mathrm{K}_{n'}\left(\left[\frac{an'}{p}\right]\mathrm{K}_1+\left[\frac{bn'}{p}\right]\mathrm{K}_2+\cdots\cdots\cdots+\left[\frac{n'n'}{p}\right]\mathrm{K}_n\right)\cdots\cdots(13)\end{aligned}$$

法正式 (10) ニ依レバ上式ノ括弧中ハ $-w$ ニ等シキガ故ニ

$$[pvv]=-[wK] \quad \text{......}(14)$$

此關係ハ $[pvv]$ ノ檢算ニ重要ナリ.

第十九節 四個ノ未知數ニ於ケル條件附測量ヲ不定係數法ニ依リ平均スル法

其一. 測量ノ重ミ等シキ場合.

四個ノ未知數 $x_1x_2x_3x_4$ ノ間ニ次ノ三個ノ條件式アリトス

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \\ b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0 \\ c_0+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=0 \end{array}\right\} \text{......}(1)$$

此式ノ $x_1x_2x_3x_4$ ノ代リニ觀測値 $l_1l_2l_3l_4$ ヲ入ルルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+a_4l_4=w_1 \\ b_0+b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3+b_4l_4=w_2 \\ c_0+c_1l_1+c_2l_2+c_3l_3+c_4l_4=w_3 \end{array}\right\} \text{......}(2)$$

今 w ヲ消去センガ爲メニ次ノ如ク l ニ修正數 v ヲ加フ

$$\left.\begin{array}{l} x_1=l_1+v_1 \\ x_2=l_2+v_2 \\ x_3=l_3+v_3 \\ x_4=l_4+v_4 \end{array}\right\} \text{......}(3)$$

然ルトキハ (1) 式ハ次ノ如クナルベシ

$$a_0+a_1(l_1+v_1)+a_2(l_2+v_2)+a_3(l_3+v_3)+a_4(l_4+v_4)=0$$
$$b_0+b_1(l_1+v_1)+b_2(l_2+v_2)+b_3(l_3+v_3)+b_4(l_4+v_4)=0$$
$$c_0+c_1(l_1+v_1)+c_2(l_2+v_2)+c_3(l_3+v_3)+c_4(l_4+v_4)=0$$

而シテ之レヨリ (2) 式ヲ減ズルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+w_1=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4+w_2=0 \\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+w_3=0 \end{array}\right\} \text{......}(4)$$

略式ニスレバ

$$\left.\begin{array}{ll} (2)\text{ 式ハ} & \left\{\begin{array}{l} a_0+[al]=w_1 \\ b_0+[bl]=w_2 \\ c_0+[cl]=w_3 \end{array}\right. \\ (4)\text{ 式ハ} & \left\{\begin{array}{l} [av]=-w_1 \\ [bv]=-w_2 \\ [cv]=-w_3 \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{......}(5)$$

而シテ (4) 式ハ v ヲ精密ニ滿足セシムベキ條件ナルヲ以テ條件式ナリ

又此 (4) 式ノ外ニ v ヲ定ムル原式アリ　卽チ

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2=\text{最小} \quad \text{......}(6)$$

條件式 (4) ニ此最小條件ヲ關係セシムル爲メニ次ノ如クナス

今條件式 (4) ニ不定ノ係數 $-2K_1-2K_2-2K_3$ ヲ乘ズルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} -2a_1K_1v_1-2a_2K_1v_2-2a_3K_1v_3-2a_4K_1v_4-2w_1K_1=0 \\ -2b_1K_2v_1-2b_2K_2v_2-2b_3K_2v_3-2b_4K_2v_4-2w_2K_2=0 \\ -2c_1K_3v_1-2c_2K_3v_2-2c_3K_3v_3-2c_4K_3v_4-2w_3K_3=0 \end{array}\right\} \text{......}(7)$$

此式ヲ最小條件式 (6) ニ加フルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} \Omega=v_1^2-2v_1(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3) \\ \quad +v_2^2-2v_2(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3) \\ \quad +v_3^2-2v_3(a_3K_1+b_3K_2+c_3K_3) \\ \quad +v_4^2-2v_4(a_4K_1+b_4K_2+c_4K_3) \end{array}\right\} \text{......}(8)$$

$$-2(w_1K_1+w_2K_2+w_3K_3))$$

此 Ω ノ最小ヲ定ムルトキハ $[vv]$ ノ最小及 (4) 式ノ條件モ含マルル故ニ之レヲ $v_1v_2v_3v_4$ ニ從ヒ微分シ其ノ微分係數ヲ零トナストキハ

$$0=2v_1-2(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)$$
$$0=2v_2-2(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)$$
$$0=2v_3-2(a_3K_1+b_3K_2+c_3K_3)$$
$$0=2v_4-2(a_4K_1+b_4K_2+c_4K_3)$$

卽チ

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3\\ v_2&=a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3\\ v_3&=a_3K_1+b_3K_2+c_3K_3\\ v_4&=a_4K_1+b_4K_2+c_4K_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

此式ヲ (4) 式ニ入レ $K_1K_2K_3$ ノ順序ニ配列スレバ

$$\left.\begin{aligned}&[aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3+w_1=0\\ &[ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3+w_2=0\\ &[ac]K_1+[bc]K_2+[cc]K_3+w_3=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

之レ法正式ニシテ其數ハ條件式ノ數ニ同ジ

計算ノ順序

(4) 式ノ $a,b,c,$ 及 w ヲ定メ次ニ法正式 (10) ノ係數 $[aa][ab]$ 等ヲ計算シ之レヲ解キテ $K_1K_2K_3$ ヲ定メ之ヲ (9) 式ニ入レテ修正數 v ヲ算出シ之レヲ l ニ加フルトキハ未知數ノ最モ確カラシキ値 x ヲ得ベシ

其二. 測量ノ重み等シカラザル場合

觀測値ノ重みヲ $p_1p_2p_3p_4$ トスレバ最小ノ條件ハ

$$[pvv]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+p_3v_3^2+p_4v_4^2=\text{最小}\ \cdots\cdots(1)$$

又 a,b,c ノ代リニ $\frac{a}{p},\frac{b}{p},\frac{c}{p}$ トナリ (9) 及 (10) 式ハ次ノ如クナル

法正式

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{aa}{p}\right]K_1+\left[\frac{ab}{p}\right]K_2+\left[\frac{ac}{p}\right]K_3+w_1=0\\ &\left[\frac{ab}{p}\right]K_1+\left[\frac{bb}{p}\right]K_2+\left[\frac{bc}{p}\right]K_3+w_2=0\\ &\left[\frac{ac}{p}\right]K_1+\left[\frac{bc}{p}\right]K_2+\left[\frac{cc}{p}\right]K_3+w_3=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

修正式

$$\left.\begin{aligned}v_1&=\frac{a_1}{p_1}K_1+\frac{b_1}{p_1}K_2+\frac{c_1}{p_1}K_3\\ v_2&=\frac{a_2}{p_2}K_1+\frac{b_2}{p_2}K_2+\frac{c_2}{p_2}K_3\\ v_3&=\frac{a_3}{p_3}K_1+\frac{b_3}{p_3}K_2+\frac{c_3}{p_3}K_3\\ v_4&=\frac{a_4}{p_4}K_1+\frac{b_4}{p_4}K_2+\frac{c_4}{p_4}K_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

若シ重み p ヲ計算式ヨリ除カントセバ初メノ係數 $a\ b\ c$ ヲ $\sqrt{p}$ ニヲ除シテ總テノ重みガ 1 ナルカノ如ク計算スベシ

卽チ 第一條件式ハ

$$\frac{a_1}{\sqrt{p_1}}v_1\sqrt{p_1}+\frac{a_2}{\sqrt{p_2}}v_2\sqrt{p_2}+\frac{a_3}{\sqrt{p_3}}v_3\sqrt{p_3}+\frac{a_4}{\sqrt{p_4}}v_4\sqrt{p_4}+w_1=0$$

或ハ $\quad a_1'v_1'+a_2'v_2'+a_3'v_3'+a_4'v_4'+w_1=0$

第一法正式ハ

$$[a'a']K_1+[a'b']K_2+[a'c']K_3+w_1=0$$

第一修正式ハ

$$v_1'=v_1\sqrt{p_1}=a_1'K_1+b_1'K_2+c_1'K_3$$

故＝ $$v_1=\frac{v_1'}{\sqrt{p_1}}$$

$$[pvv]=[(v\sqrt{p})^2]=[v'v'] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

第二十節 一次ナラザル函數ノ場合

[其一] 測量ノ精密度等シキ場合

X.Y ヲ未知數. $L_1L_2L_3$ ヲ其函數ノ觀測値トスレバ

$$\left.\begin{aligned}F_1(X,Y)-L_1&=0\\F_2(X,Y)-L_2&=0\\F_3(X,Y)-L_3&=0\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\F_n(X,Y)-L_n&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

誤差式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}v_1&=F_1(X,Y)-L_1\\v_2&=F_2(X,Y)-L_2\\v_3&=F_3(X,Y)-L_3\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\v_n&=F_n(X,Y)-L_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

或ハ　$F(X,Y)-(L+v)=0$ ノ形トナス ......(3)

今　(X) 及 (Y) ヲ X 及 Y ノ近似値トスレバ

$$X=(X)+x \qquad Y=(Y)+y \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

「てーらー」ノ公理ヨリ

$$F(X,Y)=F((X)+x,\ (Y)+y)$$

$$F(X,Y)=F((X),\ (Y))+\frac{\partial F}{\partial X}x+\frac{\partial F}{\partial Y}y$$

〔參考〕

$$(x+h,\ y+k)=u+h\frac{du}{dx}+k\frac{du}{dy}+\frac{h^2d^2u}{1.2dx^2}+hk\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{k^2d^2u}{1.2dy^2}+\cdots\cdots$$

故＝(2) 式ハ次ノ如クナル.

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1x+b_1y-l_1\\v_2&=a_2x+b_2y-l_2\\v_3&=a_3x+b_3y-l_3\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\v_n&=a_nx+b_ny-l_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

式中 $$\left.\begin{aligned}a&=\frac{\partial F}{\partial X}\\b&=\frac{\partial F}{\partial Y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$-l=F((X),(Y))-L \text{ 或ハ } -l=(L)-L \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

或ハ　$F((X),(Y))-(L-l)=0$ 或ハ $(L)-(L-l)=0$ ......(8)

(5) 式ハ (2) 式＝代リテ未知數ハ x, y トナリ L ハ l トナリタル誤差式ナリ

其二. 測量ノ精密度等シカラザル場合

若シ未知數ト觀測値トノ間ノ關係ガ一次ナラズシテ

$$F(X,Y,Z,\cdots\cdots)=L \quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

ノ如キ關係アルトキハ近似値ヲ代入シテ一次式＝導クヲ得

卽チ $$\left.\begin{aligned}X&=X_0+dX\\Y&=Y_0+dY\\\cdots&\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(10)$$

トシ「てーらー」氏ノ法則＝從ヒテ (9) 式ヲ展開スレバ

$$\frac{\partial F}{\partial X}dX+\frac{\partial F}{\partial Y}dY+\frac{\partial F}{\partial Z}dZ+\cdots\cdots=L-F(X_0Y_0Z_0\cdots\cdots)\cdots\cdots(11)$$

或ハ　$adX+bdY+cdZ+\cdots\cdots=dL$ ......(12)

未知數一個ナル場合ノ間接觀測ノ平均.

此ノ場合ニハ決定式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l} a_1X=L_1 \\ a_2X=L_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_nX=L_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

式中Lハ眞値ニシテ未知ナル故ニ未知數ノ眞値Xヲ知ル能ハズ. 依テXノ代リニ最モ確カラシキ値xヲ用ヒLノ代リニ觀測値l並ニ其最モ確カラシキ修正數vヲ用フルトキハ次ノ誤差式ヲ得

$$\left.\begin{array}{l} a_1x=l_1+v_1 \\ a_2x=l_2+v_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_nx=l_n+v_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

測量ノ重みヲ夫々 $p_1p_2\cdots\cdots p_n$ トシ $U=[pvv]$ ガ最小トナル如クxノ最モ確カラシキ値ヲ定メントセバ

$$\frac{dU}{dx}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

ヨリ次式ヲ得

$$[pav]=p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\cdots\cdots+p_ia_iv_i+\cdots\cdots+p_na_nv_n=0\cdots(16)$$

此式ノ $v=$(14)式ノvノ値ヲ用フレバ次ノ法正式ヲ得

$$[paa]x=[pal]$$

依テ

$$x=\frac{[pal]}{[paa]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

誤差計算ノ檢算トシテ次式ヲ用フ

$$[pvv]=[pll]-[pal]x=-[plv] \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

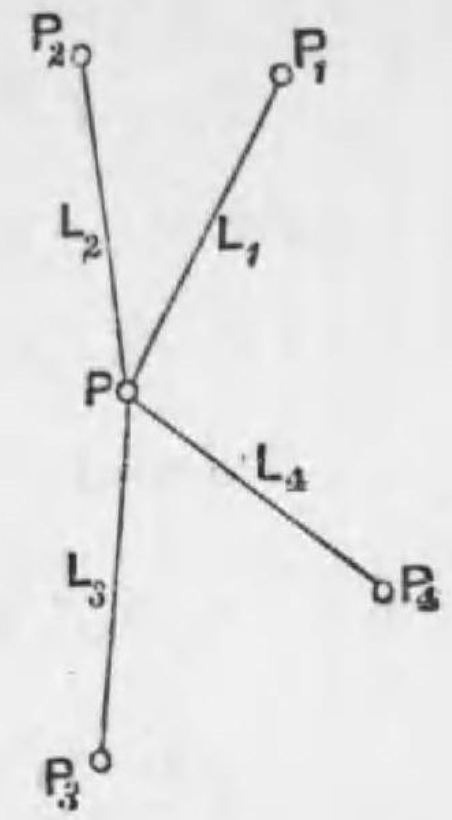
此式ハ(14)(16)及(17)式ヨリ容易ニ求メラル

第二十一節　多數ノ測線ノ交切點ノ平均法

第六圖ニ於テ $P_1P_2P_3$ 及 P_4 點ノ經緯距ヲ次ノ如シトス

$$\left.\begin{array}{ll} X_1=+551.78\text{米} & Y_1=+899.06\text{米} \\ X_2=+548.11\text{米} & Y_2=+824.95\text{米} \\ X_3=+307.63\text{米} & Y_3=+850.40\text{米} \\ X_4=+377.57\text{米} & Y_4=+955.51\text{米} \end{array}\right\} \cdots\cdots(1)$$

第六圖



以上ノ四點ヨリ定メントスル點Pニ至ル距離ヲ測定シテ次ノ結果ヲ得タリ.

$$\left.\begin{array}{l} L_1=123.81\text{米} \\ L_2=114.59\text{米} \\ L_3=129.25\text{米} \\ L_4=118.78\text{米} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此距離ヨリP點ノ經緯距X及Yヲ算出セントス

測定距離ハ平均スルニ當リ修正スルヲ要スル故ニ次ノ關係式アリ

$$\left.\begin{array}{l} L_1+v_1=\sqrt{(X_1-X)^2+(Y_1-Y)^2} \\ L_2+v_2=\sqrt{(X_2-X)^2+(Y_2-Y)^2} \\ L_3+v_3=\sqrt{(X_3-X)^2+(Y_3-Y)^2} \\ L_4+v_4=\sqrt{(X_4-X)^2+(Y_4-Y)^2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

卽チ誤差式ハ

$$\left.\begin{array}{l} v_1=-L_1+\sqrt{(X_1-X)^2+(Y_1-Y)^2} \\ v_2=-L_2+\sqrt{(X_2-X)^2+(Y_2-Y)^2} \\ v_3=-L_3+\sqrt{(X_3-X)^2+(Y_3-Y)^2} \\ v_4=-L_4+\sqrt{(X_4-X)^2+(Y_4-Y)^2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

前節ノ方法ヲ應用スル爲メニ任意二線例ヘハL_1及L_iノ交切點ヨリP點ノ近似經緯距(X)及(Y)ヲ計算シ修正經緯距ヲ次ノ如クス

$$\left.\begin{aligned} X&=(X)+x \\ Y&=(Y)+y \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

然ルトキハ誤差式(4)ノ第一式ハ

$$v_1=-L_1+\sqrt{(X_1-(X)-x)^2+(Y_1-(Y)-y)^2}$$

此平方根ヲ「てーらー」氏ノ公理ニ依リ展開シx及yノ二乘以上ヲ捨ツルトキハ次ノ如シ

$$v_1=-L_1+L_1^0-\frac{X_1-(X)}{L_1^0}x-\frac{Y_1-(Y)}{L_1^0}y$$

式中 $$L_1^0=\sqrt{((X_1-(X))^2+(Y_1-(Y))^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又 $$-L_1+L_1^0=-l_1 \quad -\frac{X_1-(X)}{L_1^0}=a_1 \quad -\frac{Y_1-(Y)}{L_1^0}=b_1 \ldots(7)$$

トスルトキハ誤差式(4)ハ直線式トナル.

$$\left.\begin{aligned} v_1&=-l_1+a_1x+b_1y \\ v_2&=-l_2+a_2x+b_2y \\ v_3&=-l_3+a_3x+b_3y \\ v_4&=-l_4+a_4x+b_4y \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

今 $$(X)=+436.95 \quad (Y)=+852.66 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

トスレバ(6)式ニ依リ

$$L_1^0=123.850 \quad L_2^0=114.562 \quad L_3^0=129.340 \quad L_4^0=118.761$$

故ニ(7)式ニ依リ.

$$-l_1=+0.040 \quad a_1=-0.928 \quad b_1=-0.375$$
$$-l_2=-0.028 \quad a_2=-0.970 \quad b_2=+0.242$$
$$-l_3=+0.090 \quad a_3=+1.000 \quad b_3=+0.017$$

$$-l_4=-0.019 \quad a_4=+0.500 \quad b_4=-0.866$$

故ニ誤差式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} v_1&=+0.040-0.928x-0.375y \\ v_2&=-0.028-0.970x+0.242y \\ v_3&=+0.090+1.000x+0.017y \\ v_4&=-0.019+0.500x-0.866y \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

之レヨリ法正式ヲ作レバ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} 3.0521x-0.3028y+0.0705&=0 \\ -0.3028x+0.9494y-0.0039&=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

之レヨリ $x=-0.0234 \quad y=-0.0034$

(5)式及(9)式ニ依リ

$$X=+436.927 \quad Y=+852.657 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

次ニ曲線式(4)ヲ直線式(10)ニ變化セシコトヲ檢定セントス.

即チx及yヲ定メタル後(10)式ニ依リvヲ算出シv及X,Yヲ(3)及(4)式ニ入ルルトキハ滿足セザル可カラズ

修正數vヲ算出スレバ

$$\left.\begin{aligned} v_1&=+0.062 \quad & v_3&=+0.067 \\ v_2&=-0.007 \quad & v_4&=-0.028 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

故ニ修正距離ハ

$$\left.\begin{aligned} L_1+v_1&=123.872 \quad & L_3+v_3&=129.317 \\ L_2+v_2&=114.583 \quad & L_4+v_4&=118.752 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

又P及四定點ノ經緯距ヨリ距離ヲ算出スレバ

$$\left.\begin{aligned} PP_1&=123.873\text{米} \quad & PP_3&=129.317\text{米} \\ PP_2&=114.583\text{米} \quad & PP_4&=118.751\text{米} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

(14) 及 (15) ノ差ハ 1 粍以下ニシテ之レ計算ニ當リ圓約スル爲メナリ.

第四章

測量ノ精密度

第一節　總說

測量ヲ整正スルニ當リ精密度ノ等シカラザル多數ノ測量ヲ結合スルノ必要アルコトアリ之レガ爲メニ測量ノ重みヲ定ムルコト必要ナリ故ニ最モ確カラシキ値卽チ整正シタル値ガ得ラレタルトキハ他ノ事情ノ下ニ得ラレタル値ト比較スル爲メニ如何ナル信用ノ度ヲ其整正値ニ置キ得ルカヲ知ルヲ要ス. 測量ノ値及其精密度ヲ知ルコトハ測量ノ利用上重要ノコトニシテ尙又測量ノ精密度ノ研究ハ常ニ測量ノ方法ヲ進步セシムルニ必要ノコトナリ.

第二節　平均誤差

平均誤差 (t) ハ多數ノ同種ノ誤差ヲ其符號ニ無關係ニ加ヘテ平均シタルモノナリ. 卽チ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots\ldots \varepsilon_n$ ヲ n 個ノ眞誤差トスレバ平均誤差ハ

$$t=\frac{[\pm\varepsilon]}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$ ナリ

〔實例〕

22 個ノ三角形ノ三內角ヲ測定シ之レヲ理論的內角和ト比較セシニ次ノ 22 個ノ誤差ヲ生ゼリ.

三角形番號	眞誤差 (ε)	三角形番號	眞誤差 (ε)
1	+0.36″	12	0.00″
2	+0.93	13	−1.36
3	−0.51	14	+1.86
4	−1.46	15	−0.42
5	−0.95	16	+1.08
6	−1.40	17	+1.62
7	+1.76	18	+1.62
8	+0.92	19	+1.67
9	+0.56	20	−0.72
10	0.00	21	−1.35
11	−0.59	22	−0.98

和 22,72″ = [±ε]

$$平均誤差\quad t=\frac{22.72''}{22}=\pm 1.03''$$

此例ハ三角形ノ內角ノ和ヲ一觀測値ト考ヘ其ノ平均誤差ヲ求メテ±1.03″ ヲ得タリ故ニ此誤差ハ三角形ノ平均誤差ニシテ內角ノ平均誤差ニアラズ

無數ノ誤差ニ基キテ算出スル平均誤差ハ精密度ヲ表スモノナレドモ誤差ノ數有限ナル以上ハ單ニ平均誤差ヲ求メ得ルノミニシテ精密度ヲ知ルヲ得ズ．又眞誤差ヲ知ルコトハ稀レナリ然レドモ多數ノ觀測値ノ算術的平均値ト各觀測値トヲ比較スレバ容易ニ殘差ヲ知ルヲ得ベシ卽チ $l_1 l_2 \ldots\ldots l_n$ ヲ n 個ノ觀測値トスレバ其算術的平均値ハ

$$x=\frac{l_1+l_2+\ldots\ldots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

依テ殘差ハ $v_1=x-l_1\quad v_2=x-l_2\ldots\ldots v_n=x-l_n\ldots\ldots\ldots(3)$

(3) 式ヨリ $v_1+v_2+\ldots\ldots+v_n=nx-(l_1+l_2+\ldots\ldots+l_n)$

(2) 式ヨリ $\qquad [v]=nx-[l]=0$

故ニ $\qquad [v]=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

卽チ殘差ノ代數的總和ハ零ナリ此式ハ檢算ニ使用セラル殘差 v ヲ近似的ニ眞誤差 ε ト同樣ニ取扱ヒ平均誤差ノ計算式ニ於テ ε ノ代リニ v ヲ用フルコトアリ卽チ

$$t=\frac{[\pm v]}{n}$$

〔實例〕 或ル角ヲ測定シテ次ノ結果ヲ得タリトス

觀測値 (l)	殘差 (v)	檢算
35° 26′ 16″	+2.8″	
〃 〃 20″	−1.2″	
〃 〃 18″	+0.8′	[+v] = +7.4
〃 〃 25″	−6.2″	[−v] = −7.4
〃 〃 15″	+3.8″	[v] = 0
和 94″	14.8″	

平均 $\qquad x=35°\ 26'\ 18.8''$

$$t=\frac{14.8}{5}=2.96''$$

之レ測量ノ平均誤差ナリ

各觀測値ノ精密度ト算術的平均値ノ精密度トノ關係ヲ知ルコト必要ニシテ之レニハ中數誤差或ハ現ハレ易キ誤差ニ依ラザルベカラズ．

第三節 中數誤差

n 個ノ眞誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_n$ ヲ知ラバ次式ニ依テ誤差ノ中庸ナル値ヲ作ルヲ得可シ

$$m=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots\ldots+\varepsilon_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\ldots\ldots(1)$$

之レヲ中數誤差ト云フ．

一般ニ中數誤差ハ平均誤差ヨリモ大ニシテ特ニ總テノ誤差ガ等シキトキニハ兩者ハ互ニ相等シ.

誤差二個ナル場合ニ就キテ之ヲ證明セン

平均誤差　　中數誤差

$$t=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \qquad m=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}$$

$$t^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} \qquad m^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}=\frac{2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2}{4}$$

$$m^2-t^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4}\text{..................}(2)$$

$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2$ ハ常ニ正符ナルヲ以テ $m^2>t^2$ 依テ $m>t$ ナリ

又 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ ナルトキハ $m^2-t^2=0$　$m^2=t^2$　$m=t$ ナリ

此ノ證明ハ一般的ニ擴ムルヲ得ベシ

今次ノ如キ二ツノ眞誤差群アリトス.

		和	自乘和
I	5, 6, 2, 7, 3, 8, 10, 9, 3, 5	58	402
II	14, 3, 0, 0, 6, 20, 2, 2, 1, 10	58	750

此ノ兩場合ニ於テ平均誤差ハ共ニ $\frac{58}{10}=5.8$ ナレドモ中數誤差ハ等シカラズ卽チ

$$m_{\mathrm{I}}=\sqrt{\frac{402}{10}}=\pm 6.34, \qquad m_{\mathrm{II}}=\sqrt{\frac{750}{10}}=\pm 8.66$$

依テ I 群ノ誤差ヲ有スル測量ハ II 群ノ誤差ヲ有スル測量ヨリモ精密ナルヲ知ル

I 群ノ誤差ノ限界ハ 10 ニシテ II 群ノ誤差ノ限界ハ 20 ナリ而シテ II 群ニ於テハ誤差ノ零ナルコト二回アレドモ其限界大ナルガ爲メニ中數誤差大ナリ

次ニ前節ノ例ノ殘差ヲ眞誤差同樣ニ取扱フトキハ

觀測値	v	v^2
35° 26′ 16″	+2.8″	7.84
〃 〃 20″	−1.2″	1.44
〃 〃 18″	+0.8″	0.64
〃 〃 25″	−6.2″	38.44
〃 〃 15″	+3.8″	14.44
和 94″	$[v]=0.0''$	$[v^2]=62.80$

平均　$x=35°\ 26'\ 18.8''$

$$m=\sqrt{\frac{62.80}{5}}=\pm 3.54''\ (?)\text{..........................}(3)$$

然レドモ殘差ノ場合ニハ $m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ 式(本章第十節 (10) 式)ヲ用ヒザルベカラズ

第四節　現ハレ易キ誤差

現ハレ易キ誤差トハ一群ノ誤差ノ中ニテ其レヨリ大ナル誤差ノ數ガ其レヨリ小ナル誤差ノ數ト同數ナル如キ値ヲ有スル誤差ナリ

故ニ現ハレ易キ誤差ハ「ぷろばびりちー」積分ニ於テ $P=\frac{1}{2}$ ノトキノ x ノ値ナリ. 卽チ次式ヨリ出デタル x ノ値ナリ

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}\,d{\cdot}hx$$

故ニ第二章第一表ニ依テ　P=0.5 ナルトキハ

$$hx=0.4769$$

故ニ x ノ此値ヲ r トスレバ $hr=0.4769$ ナル式ハ精密度 (h) 及現ハレ易キ誤差 (r) ノ間ノ關係ヲ示スモノナリ而シテ此式ニ依ルトキハ h ハ r ニ反比スルモノナリ

〔參考〕

$$P_{-x}^{+x}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{xh}e^{-t^2}dt \text{ ....} (1)$$

一般＝ $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\text{..............}$ナル故＝

$x=-t^2$ トスレバ

$$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\text{..............}$$

$$\int e^{-t^2}dt=t-\frac{t^3}{3\cdot1!}+\frac{t^5}{5\cdot2!}-\frac{t^7}{7\cdot3!}+\frac{t^9}{9\cdot4!}-\text{..............}$$

故＝

$$\int_0^{xh}e^{-t^2}dt=xh-\frac{(xh)^3}{3\cdot1!}+\frac{(xh)^5}{5\cdot2!}-\frac{(xh)^7}{7\cdot3!}+\frac{(xh)^9}{9\cdot4!}-\text{..............} (2)$$

(1) 及 (2) 式ヨリ誤差ガ $-x$ ヨリ $+x$ ノ間＝在ル「ぷろばびりちー」ハ

$$P_{-x}^{+x}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(xh-\frac{(xh)^3}{3\cdot1!}+\frac{(xh)^5}{5\cdot2!}-\frac{(xh)^7}{7\cdot3!}+\frac{(xh)^9}{9\cdot4!}-\dots\right)\text{..........} (3)$$

$xh=0.1$ トスレバ

$$P_{-x}^{+x}=1.12838(0.100000-0.000333+0.000001)=0.112463$$

(3) 式＝依リ P_{-x}^{+x} ノ値ハ第二章第一表ノ如シ.

〔參考〕

現ハレ易キ誤差 r ガ $0-x$ ノ間＝在ルトキノ P ヲ 0.5 トスレバ $x-\infty$ ノ間＝在ルトキノ P モ亦 0.5 ナルベシ此場合ノ x ノ値ヲ r トス

$P_0^r=\frac{1}{2}=P_r^{\infty}$ r ハ (3) 式＝依リ定ムルヲ得ル (3) 式＝於テ x ヲ r トスレバ

$$P_{-r}^{+r}=\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(rh-\frac{(rh)^3}{3\cdot1!}+\frac{(rh)^5}{5\cdot2!}-\frac{(rh)^7}{7\cdot3!}+\frac{(rh)^9}{9\cdot4!}-\text{........}\right)\text{..........} (4)$$

今 $rh=\rho$ トスレバ

$$\rho-\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{10}-\frac{\rho^7}{42}+\frac{\rho^9}{216}-\text{......}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.443113$$

今 ρ ヲ見出ス爲メ＝ ρ ノ第一近似値ヲ p トスレバ

$$\rho=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.443113\text{.........}=p \quad \text{故＝} \ \rho^3=p^3$$

第二近似値 $\rho=p+\frac{p^3}{3}$

故＝ $\rho^3=p^3+3p^2\frac{p^3}{3}+\text{..............}$

$=p^3+p^5$

及 $\rho^5=p^5+\text{..............}$

$$\rho-\left(\frac{p^3}{3}+\frac{p^5}{3}\right)+\frac{p^5}{10}=p$$

故＝ $\rho=p+\frac{p^3}{3}+\frac{7}{30}p^5+\text{..............}$

斯ク進ムトキハ

$$\rho=p+\frac{p^3}{3}+\frac{7}{30}p^5+\frac{127}{630}p^7+\text{..............}$$

$=0.4431+0.0290+0.0040+0.0007+\text{..............}$

$\fallingdotseq 0.4768$

「がうす」氏＝依レバ

$rh=\rho=0.4769363 \qquad \log\rho=9.6784064$

而シテ $h=1$ トスレバ $r=\rho$ ナリ故＝ ρ ハ精密度ガ 1 ナルトキノ現ハレ易キ誤差ナリ.

(3) 式＝於テ h ノ代リ＝ $\frac{\rho}{r}$ ヲ入ルル時ハ

$$P_0^{x}=P_{-x}^{+x}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{r}\rho-\frac{1}{3\cdot1!}\left(\frac{x}{r}\rho\right)^3+\frac{1}{5\cdot2!}\left(\frac{x}{r}\rho\right)^5-\frac{1}{7\cdot3!}\left(\frac{x}{r}\rho\right)^7\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9\cdot4!}\left(\frac{x}{r}\rho\right)^9-\text{........}\right)\text{..............................} (5)$$

$\frac{x}{r}=n$ トスレハ

$$P_0^{x}=P_0^{nr}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(n\rho-\frac{(n\rho)^3}{3\cdot1!}+\frac{(n\rho)^5}{5\cdot2!}-\frac{(n\rho)^7}{7\cdot3!}+\frac{(n\rho)^9}{9\cdot4!}-\frac{(n\rho)^{11}}{11\cdot5!}+\text{......}\right)\text{.........} (6)$$

$=0.5381650n-0.0108051n^3+0.0027846n^5$

$-0.0001508n^7+0.0000067n^9-0.0000002n^{11}+\text{..........................}$ (7)

此式ヲ檢定スルニハ $n=1$ トスルニアリ之レ P=0.5 ノ時ナリ此式ヲ計算スルニハ對數＝依ルヲ便トス.

$[9.7309154]n-[8.6107149]n^3+[7.4447570]n^5-[6.178128]n^7$

$+[4.82414]n^9-[3.3949]n^{11}+\text{..}$ (8)

此値ハ第二表＝在リ

精密度 (h) 及現ハレ易キ誤差 (r) ノ意義ヲ尙明白＝ナス爲メ＝精密度ノ等シカラザル二組ノ測量ノ場合ヲ考ヘヨ. 而シテ

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = \text{第一測量ノ精密度} \\ h_2 = \text{第二測量ノ精密度} \end{array}\right\} \text{トスルトキハ}$$

第二章第七節 (3) 式ヨリ第一組ノ誤差ノ「ぷろばびりちー」ハ

$$y=h_1 dx \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-h_1^2 x^2} \quad \text{ナル曲線式ニテ示サル.}$$

又第二組ノ誤差ノ「ぷろばびりちー」ハ

$$y=h_2 dx.\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-h_2^2 x^2} \quad \text{ナル曲線式ニテ示サル}$$

式中 dx ハ二個ノ相連續スル誤差ノ間ノ定差ナリ

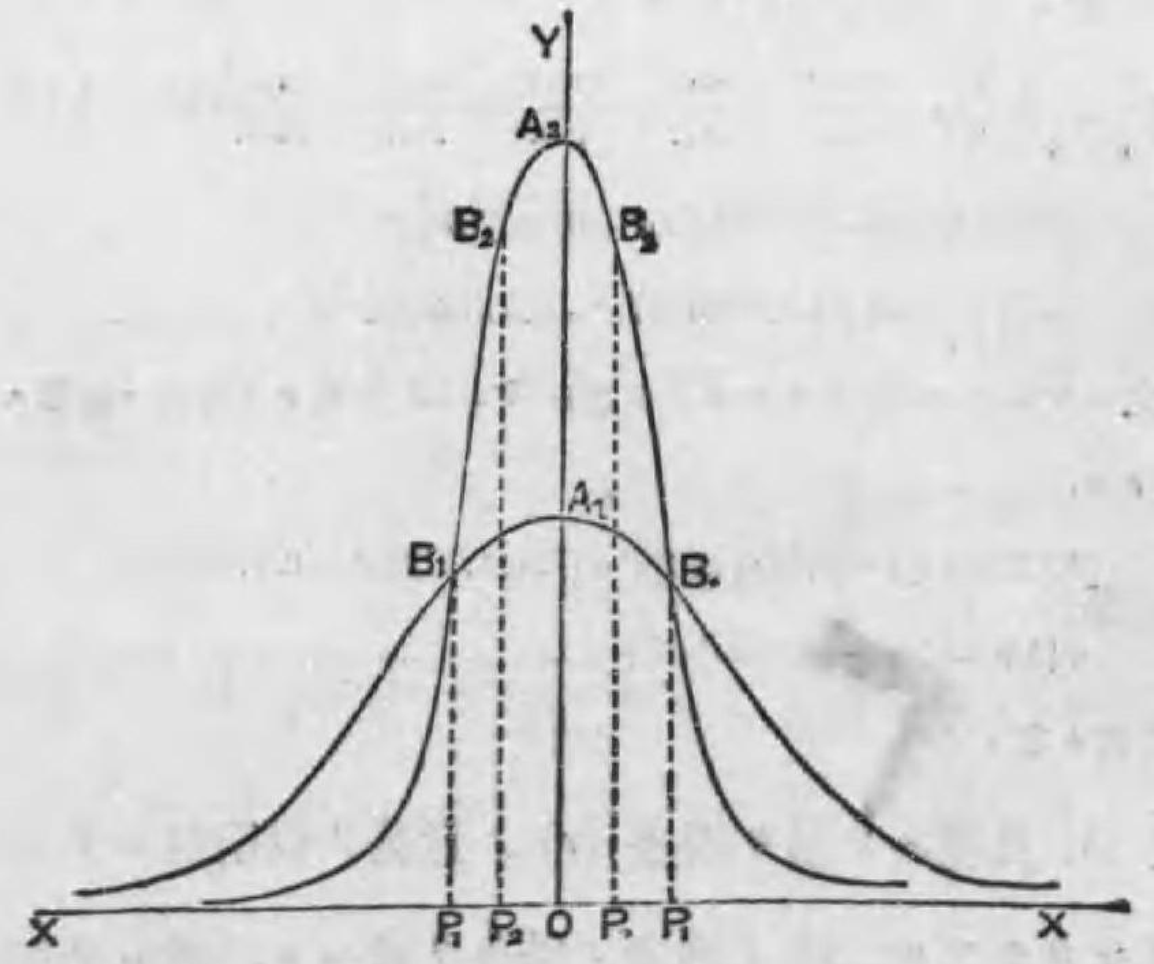
今第二組ハ第一組ヨリ二倍精密ナリト假定シ

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = h \\ h_2 = 2h \end{array}\right\} \text{トスルトキハ兩曲線式ハ次ノ如シ}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = ahe^{-h^2x^2} \\ y = 2ahe^{-4h^2x^2} \end{array}\right\} \text{式中 } a \text{ ハ定數}$$

此兩式ニ相當スル曲線ハ第七圖ニテ示サル

第七圖



$XB_1A_1B_1X$ ナル曲線ハ精密度ガ $h_1=h$ ナル測量ノ曲線ニシテ

$XB_2A_2B_2X$ ナル曲線ハ精密度ガ $h_2=2h$ ナル測量ノ曲線ナリ

此曲線ハ二組ニ於ケル相當誤差ノ「ぷろばびりちー」ヲ示ス此ノ如ク誤差 (零) ノ「ぷろばびりちー」ハ第二組ニ於テハ第一組ノ二倍ナリ

誤差 (OP_1) ノ「ぷろばびりちー」ハ兩組共ニ等シ

而シテ (OP_1) ヨリモ大ナル誤差ノ「ぷろばびりちー」ハ第二組ハ第一組ヨリモ小ナリ

今 $P_1B_1A_1B_1P_1$ ナル面積ガ相當曲線ノ總面積ノ二分ノ一ニナル如ク P_1B_1 ナル線ヲ引クトキハ OP_1 ハ第一組ノ測量ノ現ハレ易キ誤差ナリ

又 $P_2B_2A_2B_2P_2$ ナル面積ガ相當曲線ノ總面積ノ二分ノ一ニナル如ク P_2B_2 ナル線ヲ引クトキハ OP_2 ハ第二組ノ測量ノ現ハレ易キ誤差ナリ

今此現ハレ易キ誤差ヲ r_1 及 r_2 トスレバ

$$\left.\begin{array}{l} h_1 r_1 = 0.4769 \\ h_2 r_2 = 0.4769 \end{array}\right\} \text{故ニ } h_1 r_1 = h_2 r_2$$

而シテ假定ニ依リ　$h_2=2h_1$ ナル故ニ

$$r_1 = 2r_2 \qquad \text{故ニ} \qquad \frac{r_1}{2} = r_2 \text{ 卽チ}$$

r_2 ハ r_1 ノ二分ノ一ナリ

故ニ現ハレ易キ誤差ハ測量ノ精密度ヲ比較スルニ用ヒラレ之レノ小ナル程測量ハ精密ナリ

例ヘバ二組ノ距離測量アリテ其結果ハ次ノ如シ

$$L_1 = 427.^{*}32 \pm 0.04 \text{ 及 } L_2 = 427.^{*}30 \pm 0.16$$

而シテ此 0.04 及 0.16 ヲ現ハレ易キ誤差トス此意味ハ卽チ第一組

ノ結果ハ眞値ヨリ0.04米以内ニ在リ第二組ノ結果ハ眞値ヨリ0.16米以内ニ在ルコトナリ

故ニ第一組ノ精密度ハ第二組ノ精密度ノ4倍ナリ

此ノ如ク現ハレ易キ誤差ハ精密度ノ比較ニ用ヒラレ又測量ノ結果ノ確定不確定ヲ知ラシムルモノナリ

既ニ第三章第二節ニ於テ精密度 (h) ノ自乘ハ重み (p) ニ正比スルコトヲ述ベタリ

又本節ニ於テ精密度ハ現ハレ易キ誤差ニ反比スルコトヲ知ル

故ニ觀測ノ重みハ其現ハレ易キ誤差ノ自乘ニ反比ス

即チ　$$p_1:p_2:p=\frac{1}{r_1^2}:\frac{1}{r_2^2}:\frac{1}{r^2} \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

而シテ精密度 h ハ唯理論上ニ於テ用ヒラルルノミナレドモ重み及現ハレ易キ誤差ハ最小自乘法ノ應用上ニ於テ常ニ用ヒラル

前述ノ關係ニ依テ精密度ノ等シカラザル觀測値ノ重みハ其現ハレ易キ誤差ヨリ見出シ得ルモノニシテ測量ノ整正ニ用ヒラル

例ヘバ二組ノ測量ノ結果ガ

$$\left.\begin{array}{l} L_1=427.^{*}32\pm0.04 \\ L_2=427.^{*}30\pm0.16 \end{array}\right\}$$ ナルトキハ

427.32ノ重みハ427.30ノ重みヨリ16倍大ナルコトヲ知ル

〔參考〕　$$p_1:p_2=\frac{1}{r_1^2}:\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{4^2}:\frac{1}{16^2}=\frac{1}{16}:\frac{1}{256}$$

故ニ　$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{256}}=16$$

零ヨリ $\frac{x}{r}$ ノ間ニ在ル或誤差ノ現ハルルぷろばびりちーヲ示ス表

(第　二　表)

$\frac{x}{r}$	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	差
0.0	0.0000	0.0054	0.0108	0.0161	0.0215	0.0269	0.0323	0.0377	0.0430	0.0484	54
0.1	0538	0591	0645	0699	0752	0806	0859	0913	0966	1020	53
0.2	1073	1126	1180	1233	1286	1339	1392	1445	1498	1551	52
0.3	1603	1656	1709	1761	1814	1866	1918	1971	2023	2075	52
0.4	2127	2179	2230	2282	2334	2385	2436	2488	2539	2590	51
0.5	0.2641	0.2691	0.2742	0.2793	0.2843	0.2893	0.2944	0.2994	0.3043	0.3093	50
0.6	3143	319[illegible]	3242	3291	3340	3389	3438	3487	3535	3583	49
0.7	3632	3680	3728	3775	3823	3870	3918	3965	4012	4059	46
0.8	410	4152	4198	4244	4290	4336	4381	4427	4472	4517	45
0.9	4562	4606	4651	4695	4739	4783	4827	4860	4914	4957	43
1.0	0.5000	0.5043	0.5085	0.5128	0.5170	0.5212	0.5254	0.5295	0.5337	0.537[illegible]	41
1.1	5419	5460	5500	5540	5581	5620	5660	5700	5739	5778	39
1.2	5817	5856	5894	5932	5970	6008	6046	6083	6120	6157	37
1.3	6194	6231	6267	6303	633[illegible]	6375	6410	6445	6480	6515	35
1.4	6550	6584	6618	6652	6686	6719	6753	6786	6818	6851	32
1.5	0.6883	0.6915	0.6947	0.6979	0.7011	0.7042	0.7073	0.7104	0.7134	0.7165	30
1.6	7195	7225	7255	7284	7313	7342	7371	7400	7428	7457	28
1.7	7485	7512	7540	7567	7594	7621	7648	7675	7701	772[illegible]	26
1.8	7753	7778	7804	7829	7854	7879	7904	7928	7952	7976	24
1.9	8000	8023	8047	8070	8093	8116	8138	8161	8183	8205	22
2.0	0.8227	0.824[illegible]	0.8270	0.8291	0.8312	0.8332	0.8353	0.8373	0.8394	0.8414	19
2.1	8433	8453	8473	8492	8511	8530	8549	8567	8585	8604	18
2.2	8622	8639	8657	8674	8692	8709	8726	8742	8759	8775	17
2.3	8792	8808	8824	8810	8855	887[illegible]	8886	8901	8916	8930	15
2.4	8945	8960	8974	8988	9002	9016	9029	9043	9056	9069	13
2.5	0.9082	0.9095	0.9108	0.9121	0.9133	0.9146	0.9158	0.9170	0.9182	0.9193	12
2.6	9205	9217	9228	9239	9250	9261	9272	9283	9293	9304	10
2.7	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9373	9383	9392	9401	9
2.8	9410	9419	942[illegible]	9437	9446	9454	9463	9471	9479	9487	8
2.9	9495	9503	9511	9[illegible]19	9526	9534	9541	9548	9556	9563	7
3.0	0.9570	0.9577	0.9583	0.9590	0.9597	0.9603	0.9610	0.9616	0.9622	0.9629	6
3.1	9635	9641	9647	9652	9658	9664	9669	9675	9680	9686	5
3.2	9691	9696	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9735	5
3.3	9740	9744	9749	9753	9757	9761	9766	9770	9774	9778	4
3.4	9782	9786	9789	9793	9797	9800	9804	9807	9811	9814	4
3.5	0.9818	0.9821	0.9824	0.9827	0.9830	1.9833	0.9837	0.9840	0.9842	0.9845	3
3.6	984[illegible]	9851	9854	98[illegible]6	9859	9862	9864	9867	9869	9872	2
3.7	9874	9877	9879	9881	9884	9[illegible]86	9888	9890	9892	9894	2
3.8	9896	9898	99[illegible]0	9902	9904	9906	9908	9909	9911	9913	2
3.9	9915	9916	9918	9920	9921	9923	9924	9926	9927	9[illegible]29	1
4.0	9930	9932	99[illegible]3	9934	9936	9[illegible]37	9938	9939	9941	9942	1
4.1	9943	9944	9945	9947	9948	9949	9950	9951	9952	9953	1
$\frac{x}{r}=$	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	
P=	0.9943	0.9954	0.9965	0.9970	0.9976	0.9981	0.9985	0.9988	0.9991	0.9993	

零ヨリ$\frac{x}{m}$ノ間ニ在ル或誤差ノ現ハルルぷろばびりちーヲ示ス表

(第　三　表)

$\frac{x}{m}$	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	差
0.0	0.0000	0.0080	0.0159	0.0239	0.0319	0.0398	0.0478	0.0558	0.0637	0.0717	80
0.1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507	78
0.2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282	76
0.3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035	73
0.4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759	70
0.5	0.3829	0.3900	0.3969	0.4039	0.4108	0.4177	0.4245	0.4313	0.4381	0.4448	67
0.6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098	63
0.7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5746	5705	58
0.8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6090	6157	6211	6265	54
0.9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778	49
1.0	0.6827	0.6875	0.6923	0.6970	0.7016	0.7063	0.7109	0.7154	0.7198	0.7243	44
1.1	7287	7330	7373	7415	7457	7498	7539	7580	7620	7660	39
1.2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030	34
1.3	8064	8098	8132	8165	8197	8229	8262	8293	8324	8355	30
1.4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638	26
1.5	0.8664	0.8689	0.8715	0.8740	0.8764	0.8789	0.8812	0.8836	0.8859	0.8882	22
1.6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090	19
1.7	9109	9127	9146	9164	9181	9 99	9216	9233	9249	9266	15
1.8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412	14
1.9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9518	9533	9534	11
2.0	0.9545	0.9556	0.9566	0.9576	0.9586	0.9596	0.9606	0.9616	0.9625	0.9634	9
2.1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715	7
2.2	9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780	5
2.3	9785	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832	4
2.4	9836	9840	9 45	9849	9853	9867	9861	9865	9869	9872	4
2.5	0.9376	0.9879	0.9883	0.9886	0.9889	0.9892	0.9895	0.9898	0.9901	0.9904	3
2.6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928	3
2.7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947	2
2.8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961	2
2.9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	1
$\frac{x}{m}=$	3.0	3,1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	
P=	0.9973	0.9981	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9999	0.9999	
$\frac{x}{m}=$	4.0	4.1								$\frac{x}{m}=\infty$	
P=	0.9999	1.0000								P=1	

第五節　測量ノ精密度ト平均誤差ノ關係

xナル誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」yハ第二章第六節ニ依リ

$$y_x=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx$$

n觀測ニ於テxノ現ハルル數ハny_xニシテ總テノ誤差ノ和ハ

$$ny_xx=nx\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx$$

此式ヲ一般ニ現ハルル誤差ニ適用シ總テノ和ヲ作レバ

$$[x]=\int nx\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx$$

$$[\pm x]=2n\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty xe^{-h^2x^2}dx$$

平均誤差　$$(t)=\frac{[\pm x]}{n}=2\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty xe^{-h^2x^2}dx$$

今　$hx=t$　$x=\frac{t}{h}$　$dx=\frac{dt}{h}$ トスレバ

$$t=\frac{2h}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t\,e^{-t^2}dt$$

而シテ　$\int_0^\infty t\,e^{-t^2}dt=+\frac{1}{2}$　ナル故ニ平均誤差 $(t)=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$

第六節　測量ノ精密度ト中數誤差ノ關係

精密度ヲhトシ誤差ヲx_1, x_2, x_3……..トスレバ其現ハルル「ぷろばびりちー」ハ第二章第六節ニ依リ

$$y_1=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_1^2}\quad y_2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_2^2}\quad y_3=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_3^2}\ldots\ldots$$

而シテx_1, x_2, x_3……..等ノ誤差ガ同時ニ現ハルル「ぷろばびりちー」

ハ次ノ如シ

$$\mathrm{P}=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2x_1^2-h^2x_2^2-h^2x_3^2-\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[x^2]}$$

最大ノ「ぷろばびりちー」ヲ以テ此誤差ノ組ヲ生ズル測量ハ此式ヲ最大ニナス所ノ h ヲ有スルモノト假定ス.

$$\frac{d\mathrm{P}}{dh}=\frac{d\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[x^2]}}{dh}=0$$

今定數 $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ ヲ除キ微分スルトキハ

$$\frac{d(h^n e^{-h^2[x^2]})}{dh}=nh^{n-1}e^{-h^2[x^2]}+h^n e^{-h^2[x^2]}(-2h[x^2])$$

$$=h^{n-1}e^{-h^2[x^2]}(n-2h^2[x^2])=0$$

之レガ零トナルニハ　$n-2h^2[x^2]=0$ ナラザル可カラズ

即チ　$\frac{[x^2]}{n}=\frac{1}{2h^2}$　　或ハ　$h=\sqrt{\frac{n}{2[x^2]}}$

$$\frac{[x^2]}{n}=m^2=\frac{1}{2h^2}$$

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}\qquad h=\frac{1}{m\sqrt{2}}$$

故ニ　$y_x=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$

故ニ　x ナル誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ

$$y_x=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2m^2}}dx$$

今 m ヲ誤差ノ單位トナシテ

$$\frac{x}{m}=x' \text{ 及 } \frac{dx}{m}=dx' \text{ トスレバ}$$

$$y_x=y_{mx'}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'$$

$$y_{x'}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

〔參考〕

$$ny_x x^2=nx^2\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx \text{ ナル式ハ}$$

總テノ誤差ノ二乘ノ和ニシテ總テノ現ハルル誤差ニ此式ヲ適用スレバ

$$[xx]=n\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx$$

故ニ中數誤差ハ

$$m^2=\frac{[xx]}{n}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx$$

從テ　$\left.\begin{aligned}hx&=t\\dx&=\frac{dt}{h}\end{aligned}\right\}$ トスレバ

$$m^2=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt$$

而シテ第二章第七節ニ於テ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ ナルコトヲ知ル}$$

$t=t\sqrt{\mathrm{S}}$ トスレバ

$$\int_0^\infty e^{-t^2s}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}$$

t ヲ常數ト考ヘ s ニ關シテ此式ヲ微分スルトキハ

$$-\int_0^\infty e^{-t^2s}t^2dsdt=-\frac{\sqrt{\pi}ds}{4\sqrt{s^3}}$$

之レヲ $-ds$ ニテ除シ $s=1$ トスレバ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}t^2dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

故ニ　$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^2dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

故ニ
$$m^2=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2h^2}$$

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}\quad 或ハ\quad h=\frac{1}{m\sqrt{2}}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt$ ヲ求ムル別法：　先ヅ$\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt$ ヲ求ム

今　$u=-\frac{t}{2}$ トシ　　$v=e^{-t^2}$ トスルトキハ

$$du=-\frac{dt}{2}\qquad dv=-2te^{-t^2}dt$$

部分積分式卽 $\int udv=uv-\int vdu$ ニ依リ

$$\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt\quad\text{......(A)}$$

然ルニ
$$e^{-t^2}=\frac{1}{e^{t^2}}=\frac{1}{1+\frac{t^2}{1}+\frac{t^4}{\lfloor\underline{2}}+\frac{t^6}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots}$$

故ニ
$$te^{-t^2}=\frac{t}{1+t^2+\frac{t^4}{\lfloor\underline{2}}+\frac{t^6}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots}=\frac{1}{\frac{1}{t}+t+\frac{t^3}{\lfloor\underline{2}}+\frac{t^5}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots}$$

上式ニ於テ　$t=0$ ナレバ

右邊ハ　$\frac{1}{\frac{1}{0}+0+0+\cdots\cdots}=\frac{1}{\infty}=0$

又　$t=\infty$ ナレバ

右邊ハ　$\frac{1}{0+\infty+\infty+\cdots\cdots}=0$

(A) 式ノ第一項ハ　$t=0$ ト $t=\infty$ トデ消失シ (A) 式ハ次ノ如クナル

$$\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$$

然ルニ第二章第七節ニ依リ　$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ナリ

故ニ
$$\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

故ニ
$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

第七節　平均誤差,中數誤差及現ハレ易キ誤差ノ關係

平均誤差 (t), 中數誤差(m)及現ハレ易キ誤差 (r) ノ關係ヲ示セバ次ノ如シ.

$$t=\frac{[\pm\varepsilon]}{n}\qquad m=\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$$

$$\rho=0.4769363$$

$$r=\rho\sqrt{2}\,m=0.6744898m$$

$$r=\rho\sqrt{\pi}\,t=0.8453576t$$

$$m=\frac{1}{\rho\sqrt{2}}r=1.4826021\,r$$

$$m=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t=1.2533141\,t$$

$$t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}m=0.7978846\,m$$

$$t=\frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}r=1.1829372r$$

第八節　誤差移行ノ法則

本節ニ於テハ測定セラレタル未知數ノ中數誤差ガ之レヨリ導カレタル未知數ノ上ニ如何ニ移行スルカヲ乘法加法等ノ場合ニ就テ論ゼン

其一.　倍數ノ場合

觀測値 l ニ或ル定數 a ガ乘ゼラルヽトキ卽チ

$$x=al\quad\text{..............................(1)}$$

定數 a ハ誤差ナキモノ，觀測値 l ハ中數誤差 m ヲ有スルモノトスルトキ其ノ積 x ノ中數誤差 mx ハ次式ノ如シ

$$mx=am.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

〔參考〕

$\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots\ldots\Delta^{(n)}$ ヲ l_1 ノ誤差トシ之レヨリ x ノ中數誤差ヲ計算スレバ次ノ如シ

$$a(l+\Delta')-al=a\Delta'$$

$$a(l+\Delta'')-al=a\Delta''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a(l+\Delta^{(n)})-al=a\Delta^{(n)}$$

誤差ノ自乘ノ和　$(a\Delta')^2+(a\Delta'')^2+\ldots\ldots+(a\Delta^{(n)})^2$

$$=a^2(\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots\ldots+\Delta^{(n)2})=a^2[\Delta\Delta]$$

故ニ中數誤差　$m_x=\sqrt{\frac{a^2[\Delta\Delta]}{n}}=a\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$

而シテ $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ ハ l ノ中數誤差 m ナルヲ以テ

$$m_x=am$$

例ヘバ

$$\left.\begin{aligned} l&=35^\circ\ 16'\ 25'' \\ m&=\pm 8'' \\ x&=3\times(35^\circ\ 16'\ 25'') \end{aligned}\right\}\text{ナルトキハ}$$

$$m_x=am=\pm 3\times 8''=\pm 24''$$

同理ニテ　$r_x=ar$

其二．加減ノ場合

x ヲ獨立ニ測定シタル觀測値 l_1 及 l_2 ノ和トスレバ

$$x=l_1+l_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

l_1 及 l_2 ガ夫々中數誤差 $\pm m_1$ 及 $\pm m_2$ ヲ有スルモノトスレバ其ノ和 x ノ中數誤差ハ次式ノ如シ

$$m_x=\sqrt{m_1^2+m_2^2}$$

〔參考〕

x ノ中數誤差ハ $m_x=m_1+m_2\ldots\ldots\ldots(3_a)$ ノ如ク思ヘルレトモ之レハ只誤差 m_1 及 m_2 ノ累積セル特別ノ場合ニ外ナラズ然ルニ符號ニハ正負アルガ故ニ m_1-m_2 ノ場合アルコトモ考ヘザルベカラズ故ニ (3_a) 式ノ如キ簡單ナルモノニ非ズ今 $l_1+l_2=x$ ガ n 回ノ繰返サレタルモノトシ x ノ誤差ヲ $\Delta'\Delta''\Delta'$ 等トシ之レニ相當スル l_1 及 l_2 ノ誤差ヲ $\Delta'_1\Delta'_2$，$\Delta_1''\Delta_2''$，$\Delta_1'''\Delta_2'''$ 等トスレバ

$$\Delta'=\Delta_1'+\Delta_2'$$

$$\Delta''=\Delta_1''+\Delta_2''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^{(n)}=\Delta_1^{(n)}+\Delta_2^{(n)}$$

之レヲ自乘スルトキハ

$$(\Delta')^2=(\Delta_1')^2+(\Delta_2')^2+2\Delta_1'\Delta_2'$$

$$(\Delta'')^2=(\Delta_1'')^2+(\Delta_2'')^2+2\Delta_1''\Delta_2''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\Delta^{(n)})^2=(\Delta_1^{(n)})^2+(\Delta_2^{(n)})^2+2\Delta_1^{(n)}\Delta_2^{(n)}$$

自乘ノ和ハ　$[\Delta\Delta]=[\Delta_1\Delta_1]+[\Delta_2\Delta_2]+2[\Delta_1\Delta_2]$

自乘ノ平均ハ　$\frac{[\Delta\Delta]}{n}=\frac{[\Delta_1\Delta_1]}{n}+\frac{[\Delta_2\Delta_2]}{n}+\frac{2[\Delta_1\Delta_2]}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{[\Delta\Delta]}{n}&=m_x^2\quad \text{ハ } x \text{ ノ中數誤差ノ二乘} \\ \frac{[\Delta_1\Delta_1]}{n}&=m_1^2\quad \text{ハ } l_1 \text{ ノ中數誤差ノ二乘} \\ \frac{[\Delta_2\Delta_2]}{n}&=m_2^2\quad \text{ハ } l_2 \text{ ノ中數誤差ノ二乘} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$\frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n}$ ハ誤差相乘積ノ平均値ニシテ $(+)(-)$ ノ符號ノモノガ同樣ニ現レ得ル故ニ零トナル

故ニ　$m_x^2=m_1^2+m_2^2$

即チ　$m_x=\sqrt{m_1^2+m_2^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

同理ニテ　$r_x=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$

故ニ二個ノ無關係ニ測量シタル觀測値ノ和或ハ差ノ中數誤差ハ各觀測値ノ中數誤差ノ二乘ノ和ノ平方根ニ等シ而シテ m_2 ガ m_1 ニ比シテ小ナルトキハ m_x ニ影響スルコト少ナシ　例ヘバ

$$m_1=10\quad m_2=1'\quad \text{ナルトキハ}\ m=10.5$$

然ルニ $m_1+m_2=11.00$ ナリ. 故ニ小誤差ハ殆ンド影響セズト云フ經驗上ノ事實ト一致ス.

以上ハ二個ノ數ニ付テ述ベシモ二個以上ノ數ニ於テモ亦同ジ

l_1, l_2, l_3……..ヲ觀測値

m_1, m_2, m_3……..ヲ夫々其中數誤差トスレバ

先ヅ　l_1+l_2 ヲ一ツト見做シテ (6) 式ニ依リ

$x=(l_1+l_2)+l_3+$……… ノ中數誤差ヲ算出シ順次ニ此法ヲ反覆應用スルトキハ

$$m_x=\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2+\cdots\cdots}=\sqrt{[mm]}\cdots\cdots\cdots (7)$$

同理ニテ　$r_x=\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2+\cdots\cdots}=\sqrt{[rr]}$

〔實例. 一〕

$$\left.\begin{array}{ll} l_1=129^\circ\ 24'\ 30'' & m_1=\pm\ 5'' \\ l_2=\ 39^\circ\ 58'\ 20'' & m_2=\pm 10'' \\ \underline{l_3=\ 74^\circ\ 45'\ 25''} & m_3=\pm\ 8'' \end{array}\right\}\text{ナルトキハ}$$

$$x=l_1+l_2-l_3=94^\circ\ 37'\ 25''$$

$$m_x=\sqrt{5^2+10^2+8^2}=\pm 14''$$

又　m_1, m_2, m_3 ガ m ニ等シクシテ其數ガ n ナルトキハ

$$m_x=\sqrt{nm^2}=m\sqrt{n}\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

同理ニテ　$r_x=\sqrt{nr^2}=r\sqrt{n}$

〔實例. 二〕

三角形ニ於テ兩内角ヲ等シキ精密度ヲ以テ測定シ

$$\left.\begin{array}{ll} l_1=64^\circ\ 16'\ 38'' & m_1=\pm 6.5'' \\ l_2=76^\circ\ 39'\ 35'' & m_2=\pm 6.5'' \end{array}\right\}\text{ナルトキハ}$$

$$x=\pi-(l_1+l_2)=180-(64^\circ 16' 38''+76^\circ 39' 35'')=39^\circ 03' 47''$$

$$m_x=\pm m\sqrt{n}=\pm 6.5\sqrt{2}=\pm 9.2''$$

此 (2) 及 (8) 式ノ簡單ナル應用ハ間尺ヲ以テ或ル線ヲ測ル場合ナリ。

間尺ノ中數誤差ガ m ナルトキ卽チ間尺ガ $\pm m$ 丈ケ長キカ短キカナレバ此間尺ヲ a 回正シク置クモ線ノ長サハ $\pm am$ 丈不確實ナリ. 之ニ反シテ間尺ハ正シキモ之レヲ n 回或ル線上ニ置キシニ各回ノ中數誤差ガ $\pm m$ ナルトキハ距離測量ノ中數誤差ハ $m\sqrt{n}$ ナリ

其三　一次函數ノ場合

倍數ニ對スル法則幷ニ加減ニ對スル法則ヲ結合スレバ測定セラレタル一次函數ノ中數誤差ニ對スル法則ヲ得ベシ　卽チ

$l_1, l_2, l_3,$………ガ觀測値ニシテ $m_1, m_2, m_3,$………ガ夫々其ノ中數誤差ナルトキハ

$$x=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

ナル一次函數ノ中數誤差ハ

$$m_x=\sqrt{(a_1m_1)^2+(a_2m_2)^2+(a_3m_3)^2+\cdots\cdots} \quad (10)$$

$m_1=m_2=m_3=$………$=m$ ナルトキハ

$$m_x=m\sqrt{[aa]}\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

〔實例〕

$$\left.\begin{array}{ll} l_1=39^\circ\ 21'\ 36'' & m_1=\pm 8'' \\ l_2=39^\circ\ 21'\ 24'' & m_2=\pm 8'' \\ l_3=39^\circ\ 21'\ 33'' & m_3=\pm 8'' \end{array}\right\}\text{ナルトキハ}$$

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3}{3}=\frac{1}{3}l_1+\frac{1}{3}l_2+\frac{1}{3}l_3$$

$$=\frac{1}{3}(39^\circ 21' 36'')+\frac{1}{3}(39^\circ 21' 24'')+\frac{1}{3}(39^\circ 21' 33'')=39^\circ 21' 31''$$

$$m_x=\pm\sqrt{(am_1)^2+(bm_2)^2+(cm_3)^2}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{3}8\right)^2+\left(\frac{1}{3}8\right)^2+\left(\frac{1}{3}8\right)^2}$$

$$=\pm 8\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 4.''6$$

其四. 二數ノ積ノ場合

x ヲ l_1 及 l_2 ナル二個ノ獨立測量ノ値ノ積トシ m_1 及 m_2 ヲ夫々 l_1 及 l_2 ノ中數誤差トス

x ノ誤差ヲ Δ トシ l_1 及 l_2 ノ誤差ヲ夫々 ε_1 及 ε_2 トナストキハ

$$x+\Delta=(l_1+\varepsilon_1)(l_2+\varepsilon_2)=l_1l_2+l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$x=l_1l_2$ ニシテ $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ハ $l_1\varepsilon_2$ 及 $l_2\varepsilon_1$ ニ比スレバ小ニシテ消ユルモノナリ

故ニ　$\Delta=l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1$

Δ ヲ自乘シテ其總和ヲ作ルトキハ

$$[\Delta^2]=[l_1^2\varepsilon_2^2]+[l_2^2\varepsilon_1^2]+2[l_1l_2\varepsilon_1\varepsilon_2]$$

積 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ハ正負何レニモナリ得ルモノナル故ニ此最後ノ項ハ消失ス

故ニ　$$[\Delta^2]=l_1^2[\varepsilon_2^2]+l_2^2[\varepsilon_1^2]$$

故ニ　$$m_x^2=l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2$$

$$m_x=\sqrt{l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

同理ニテ　$$r_x=\sqrt{l_1^2r_2^2+l_2^2r_1^2}$$

$m_1=m_2$ ナルトキハ

$$m_x=m\sqrt{l_1^2+l_2^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

同理ニテ　$$r_x=r\sqrt{l_1^2+l_2^2}$$

其五. 一般函數ノ場合 probable error

一般函數ノ誤差ハ比較的小ナリトノ假定ノモトニ「てーらー」氏ノ法則ニ從テ近似的ニ一次函數ニ導クモノトス

今觀測値ノ函數ヲ次ノ如キモノトス

$$x=f(l_1,l_2,l_3,\cdots\cdots l_m)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

但シ $l_1,l_2,l_3,\cdots\cdots l_m$ ハ觀測値

$m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots m_n$ ヲ夫々觀測値ノ中數誤差トシ $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\cdots\cdots\Delta_n$ ヲ此等ノ觀測値ガ有スル一定ノ誤差トシ此等ノ誤差ハ小ニシテ其ノ二乘以上ハ除外サレ得ルモノトセバ「てーらー」氏法則ニ從ッテ X ニ相應スル誤差 Δ ヲ定メ得卽チ

$$\Delta=f(l_1+\Delta_1,l_2+\Delta_2,l_3+\Delta_3,\cdots\cdots l_n+\Delta_n)-f(l_1,l_2,l_3,\cdots\cdots l_n)$$

$$\Delta=\frac{\delta f}{\delta l_1}\Delta_1+\frac{\delta f}{\delta l_2}\Delta_2+\frac{\delta f}{\delta l_3}\Delta_3+\cdots\cdots+\frac{\delta f}{\delta l_n}\Delta_n$$

〔參考〕「てーらー」氏法則

$$f(x+h,y+k)=u+h\frac{du}{dx}+k\frac{du}{dy}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}+hk\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^2u}{dy^2}+\cdots\cdots$$

依テ其一及其二ニ於テ得タル法則ニ依リテ次式ヲ得

$$m_x=\pm\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta l_1}m_1\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta l_2}m_2\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta l_3}m_3\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\delta f}{\delta l_n}m_n\right)^2}\quad\cdots\cdots(15)$$

或ハ　$m_x=\pm\sqrt{q_1^2m_1^2+q_2^2m_2^2+q_3^2m_3^2+\cdots\cdots+q_n^2m_n^2}$

同理ニテ　$r_x=\pm\sqrt{q_1^2r_1^2+q_2^2r_2^2+q_3^2r_3^2+\cdots\cdots+q_n^2r_n^2}$

中數誤差等シキトキハ

$$m_x=\pm m\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+\cdots\cdots+q_m^2}=\pm m\sqrt{[qq]}$$

同理ニテ　$r_x=\pm r\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+\cdots\cdots+q_n^2}=\pm r\sqrt{[qq]}$

$[qq]$ ヲ重みノ係數ト云フ

又　$$x=l_1+l_2+l_3+\cdots\cdots+l_n$$

ニテ表ハサルヽ如キ精密度等シキ觀測値ノ和ニ對シテハ $q=1$ ナル

故ニ　$$m_x=\pm m\sqrt{n}$$

故ニ　**精密度等シキ觀測値ノ和ノ中數誤差ハ觀測回數ノ平方根ニ比例ス**

同理ニテ　$$r_x=\pm r\sqrt{n}$$

次ニ示ス如キ算術的平均ノ場合ニハ

$$x=\frac{1}{n}(l_1+l_2+l_3+\cdots\cdots+l_n)=\frac{[l]}{n}$$

$q=\dfrac{1}{n}$ ナル故ニ

$$[qq]=n\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

故ニ　$$m_x=\pm m\sqrt{[qq]}=\pm\frac{m}{\sqrt{n}}$$

故ニ　**算術的平均値ノ中數誤差ハ一觀測ノ中數誤差ヲ觀測回數ノ平方根ニテ除シタルモノニ等シ**

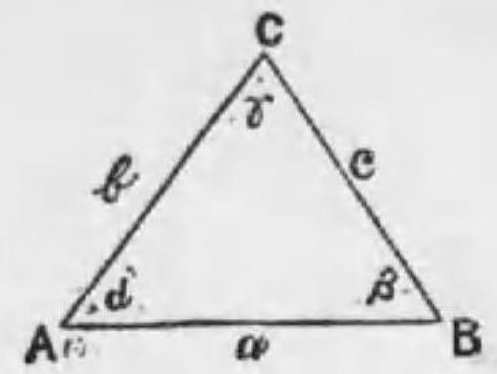
同理ニテ $r_a=\pm r\sqrt{[qq]}=\pm\dfrac{r}{\sqrt{n}}$

簡單ナル例ヲ擧グレバ

AB=a ナル基線アリ而シテ α 及 γ ナル二角ヲ測定スルトキハ

BC=c ヲ定ムルヲ得ベシ

第八圖.



即チ $c=\dfrac{a}{\sin\gamma}\sin\alpha$ ……………(16)

α 角ノ中數誤差ハ $\pm m_\alpha$

γ 角ノ中數誤差ハ $\pm m_\gamma$

基線 a ハ誤差ナキモノト考ヘ c 邊ノ中數誤差 m_c ヲ求メントス

$c=\dfrac{a}{\sin\gamma}\sin\alpha$ ノ微分ヲ作ルトキハ

$$dc=\frac{\partial c}{\partial a}d\alpha+\frac{\partial c}{\partial\gamma}d\gamma$$

$$dc=\frac{a}{\sin\gamma}\cos\alpha\ d\alpha-a\ \sin\alpha\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}d\gamma$$

$d\alpha$ 及 $d\gamma$ ノ代リニ中數誤差 $\pm m_\alpha$ 及 $\pm m_\gamma$ ヲ置クトキハ

$$m_c=\pm\frac{a}{\sin\gamma}\cos\alpha m_\alpha\pm\frac{a}{\sin\gamma}\sin\alpha\ \cos\gamma'\ m_\gamma$$

(16) 式ニ依リ $\pm m_c=c\ \cot a\ m_a\pm c\ \cot\gamma\ m_\gamma$

然ルトキハ (15) 式ニ依テ

$$m_c=\pm c\sqrt{\cot^2\alpha(m_a)^2+\cot^2\gamma(m_\gamma)^2} \quad \text{……………(17)}$$

而シテ α 及 γ 角ヲ等シキ精密度ヲ以テ測リタリトスルトキハ

$m_\alpha=m_\gamma=m$ ナルヲ以テ

$$m_c=\pm cm\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\gamma}$$

〔參考〕
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{dc}{d\alpha}=\frac{a}{\sin\gamma}\cos\alpha=\frac{a}{\sin\gamma}\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=c\cot\alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{dc}{d\gamma}=-a\sin\alpha\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}=-\frac{a\sin\alpha}{\sin\gamma}\times\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=-c\cot\gamma$$

$$m_c=\sqrt{(c\cot\alpha m_\alpha)^2+(-c\cot\gamma m_\gamma)^2}$$
$$=c\sqrt{\cot^2\alpha(m_\alpha)^2+\cot^2\gamma(m_\gamma)^2}$$

而シテ m ガ秒ニテ顯ハサルルトキハ次ノ如クセザル可カラズ

$$m_c=\pm\frac{m''}{\rho''}\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\gamma}$$

例ヘバ $\left.\begin{array}{l}\alpha=\gamma=60^\circ\\ m=10''\end{array}\right\}$ トスレバ

$$\frac{m_c}{c}=\frac{10''}{\rho''}\sqrt{\cot^260+\cot^260}=\frac{10''}{\rho''}\sqrt{2\cot^260^\circ}=\frac{10''}{\rho''}\sqrt{2\times(0.5778503)^2}$$

$$=\frac{10''}{\rho''}\sqrt{0.665858}=\frac{10''}{\rho''}\times0.8=\frac{10\times0.8}{206265}=\frac{8}{206265}=\frac{8.00000}{206265}=0.0000396$$

$$\frac{m_c}{c}=\pm0.0000396$$

即チ m_c ハ c ノ $\dfrac{0.004}{100}$ ナリ.

今 $\left.\begin{array}{l}a=235.19\text{米}\\ \alpha=63^\circ30'30''\\ \beta=47^\circ16'30''\\ \gamma=69^\circ13'00''\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}m_a=\pm0.004\sqrt{a}=\pm0.004\sqrt{235.19}\\ \quad=\pm0.004\times15.3=\pm0.061\text{米}\\ m=\pm20''=\pm0.000097\ (\text{弧度})\end{array}$

〔參考〕 $\dfrac{3.1416\times20''}{180\times60\times60}=0.000097$

ナルトキハ b 及 c 邊ノ長サ及中數誤差ハ次ノ如シ

$$b=a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=235.19\times\frac{\sin47^\circ16'30''}{\sin63^\circ30'30''}=235.19\times\frac{0.73462}{0.89500}=\frac{172.7752778}{0.89500}=193.04\text{米}$$

$$c=a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=235.19\times\frac{\sin69^\circ13'00''}{\sin63^\circ30'30''}=235.19\times\frac{0.93493}{0.89500}=\frac{219.8861867}{0.89500}=245.68\text{米}$$

$$m_b=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)}{\partial a}m_a\right)^2+\left(\frac{\partial\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)}{\partial\alpha}m_\alpha\right)^2+\left(\frac{\partial\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)}{\partial\beta}m_\beta\right)^2}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}m_a\right)^2+\left(a\frac{-\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}m_\alpha\right)^2+\left(a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}m_\beta\right)^2}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}m_a\right)^2+\left(b\cot g\alpha\ m_\alpha\right)^2+\left(b\cot g\beta\ m_\beta\right)^2}$$

$$=\pm b\sqrt{\left(\frac{1}{a}m_a\right)^2+\left(\cot g\alpha\ m_\alpha\right)^2+\left(\cot g\beta\ m_\beta\right)^2}$$

$$=\pm 193\sqrt{\left(\frac{1}{235}0.061\right)^2+\left(0.498\times 0.000097\right)^2+\left(0.924\times 0.000097\right)^2}$$

$$=\pm 193\sqrt{0.000000067378+0.000000002333+0.000000008033}$$

$$=\pm 193\sqrt{0.000000077744}=\pm 0.054\text{米}$$

同様ニ

$$m_c=\pm c\sqrt{\left(\frac{1}{a}m_a\right)^2+\left(\text{cotag}\alpha\ m_\alpha\right)^2+\left(\text{cotag}\gamma\ m_\gamma\right)^2}$$

$$=\pm 245.68\sqrt{\left(\frac{1}{235}\times 0.061\right)^2+\left(0.498\times 0.000097\right)^2+\left(0.37953\times 0.000097\right)^2}$$

$$=\pm 245.68\sqrt{0.000000067.378+0.000000002333+0.000000001354}$$

$$=\pm 245.68\sqrt{0.000000071065}$$

$$=\pm 245.68\times 0.00027=\pm 0.0657\text{米}$$

第九節　規則誤差及不規則誤差ノ同時ニ現ハルヽ場合

間尺ヲ以テ距離ヲ測ルトキハ不規則誤差ノミナラズ規則誤差モ亦現ハルルモノナリ

例ヘバ直線ガ左右上下ノ一方ニノミ行クハ規則誤差 (A) ニシテ n 回間尺ヲ置クトキハ其ノ誤差ハ An ナリ而シテ不規則誤差ハ $B\sqrt{n}$ ナリ故ニ中數誤差ハ次ノ如シ

$$m=\sqrt{(An)^2+(B\sqrt{n})^2}=\sqrt{A^2n^2+B^2n}$$

第十節　算術的平均値ノ中數誤差

同シ方法ニテ數回反覆測量セシ或ル未知數ノ最モ確カラシキ値ハ其觀測値ノ算術的平均値ナリ．此方法ガ正シキコトノ證明ハ次ノ如シ．

今 x ナル未知數ヲ定ムル爲メニ n 個ノ同種ノ測量ヲ行ヒタリトシ其觀測値ヲ $l_1, l_2, l_3, \dots\dots\dots\dots l_n$ トス

最モ確カラシキ値ハ算術的平均値ニシテ

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\dots\dots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

而シテ此算術的平均値ト各觀測値トノ差ヲ作ルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} v_1=x-l_1 \\ v_2=x-l_2 \\ v_3=x-l_3 \\ \dots\dots\dots \\ v_n=x-l_n \end{array}\right\}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

v ノ總和ハ (1) 式ニ依リ零ナリ即チ

$$[v]=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

又此 v ヲ二乘シテ次式ニ依リ槪略ニ一觀測ノ中數誤差ヲ算出ス即チ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

次ニ算術的平均値ノ中數誤差 m_x ヲ求メン

x ハ l ノ直線函數ナルヲ以テ (1) 式ハ次式ノ如ク書クヲ得

$$x=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\frac{1}{n}l_3+\dots\dots\dots+\frac{1}{n}l_n\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

之レヲ誤差移行ノ法則第八節 (9) 式

$$x=al+a'l'+a''l''+\dots\dots\dots+a^{(n)}l^{n}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5_a)$$

ト比較シ

$$m_x=\sqrt{(am)^2+(a'm')^2+(a''m'')^2+\dots\dots\dots}\qquad(5_b)$$

又　$a=a'=a''=\cdots\cdots=a^{(n)}=\frac{1}{n}$ トスレバ

$$a^2+a'^2+a''^2+\cdots\cdots+a^{(n)2}=n\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}$$

又　$m=m'=m''=\cdots\cdots=m^{(n)}$ ナル故ニ

$$m_x=\sqrt{\left(\frac{1}{n}m\right)^2+\left(\frac{1}{n}m\right)^2+\left(\frac{1}{n}m\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}m\right)^2}$$

而シテ此項數ハ n ナル故ニ

$$m_x=\sqrt{n\left(\frac{1}{n}m\right)^2}=\sqrt{\frac{m^2}{n}}=\frac{m}{\sqrt{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

而シテ $m=\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ ナル式ハ m ノ眞値ナラズシテ近似値ナリ何トナレバ v ハ眞誤差ナラズシテ殘差誤差ナルヲ以テナリ而シテ眞誤差ヲ知ルコト能ハザレドモ次法ニ依リ尙 m ヲ定ムルコトヲ得ベシ

今Ｘヲ未知數ノ眞値, ε ヲ眞誤差, v ヲ殘差トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\mathrm{X}-l_1\\ v_1&=x-l_1\end{aligned}\right\}\text{故ニ}\quad \varepsilon_1=v_1+(\mathrm{X}-x)\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

今 ε ノ二乘ヲ作ルトキハ次ノ如シ

$$\varepsilon_1^2=v_1^2+(\mathrm{X}-x)^2+2v_1(\mathrm{X}-x)$$
$$\varepsilon_2^2=v_2^2+(\mathrm{X}-x)^2+2v_2(\mathrm{X}-x)$$
$$\varepsilon_3^2=v_3^2+(\mathrm{X}-x)^2+2v_3(\mathrm{X}-x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n^2=v_n^2+(\mathrm{X}-x)^2+2v_n(\mathrm{X}-x)$$

$$[\varepsilon\varepsilon]=[vv]+n(\mathrm{X}-x)^2+2[v](\mathrm{X}-x)$$

而シテ (3) 式ニ依テ $[v]=0$ ナル故ニ $2[v](\mathrm{X}-x)=0$

故ニ　$[\varepsilon\varepsilon]=[vv]+n(\mathrm{X}-x)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

今未知數ノ眞値Ｘト算術的平均値 x トノ差ガ算術的平均値ノ中數誤差 m_x ニ等シト假定スレバ $(\mathrm{X}-x)^2=m_x^2$ ナリ

而シテ (6) 式ニ依テ $m_x=\frac{m}{\sqrt{n}}$ ナル故ニ

$$(\mathrm{X}-x)^2=m_x^2=\frac{m^2}{n}\qquad\text{故ニ}\quad n(\mathrm{X}-x)^2=m^2$$

然ル時ハ (8) 式ヨリ $[\varepsilon\varepsilon]=[vv]+m^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

而シテ中數誤差ノ定義ニ依リ $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}=m^2\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

(9) 式及 (10) 式ヨリ

$$[\varepsilon\varepsilon]=nm^2=[vv]+m^2\ \text{故ニ}\ m^2(n-1)=[vv]$$

故ニ各觀測ノ中數誤差 $m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$

而シテ此 m ノ値ヲ (6) 式ニ入ルヽトキハ

平均値ノ中數誤差 $m_x=\frac{m}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$

〔參考〕　$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ ナル式ハ $n=1$ ナルトキハ

$m=\frac{0}{0}$ ニシテ不定ナル故ニ宜シク $m=\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ ナル式ハ $n=1$ ナルトキハ $m=\sqrt{\frac{0}{1}}=0$ トナル故ニ宜シカラズ何ントナレバ只一回ノ測量ノミナルトキハ精密度ヲ云フヲ得ザルヲ以テナリ　故ニ　$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ 式ニテハ最初ノ一回ノ測量ヲ除キテ殘餘ノ $(n-1)$ 回ノ測量ガ精密度ヲ定ムルニ用立ツコトヲ示ス

〔實例〕

	觀測値(l)	v	v^2
1	35°26′16″	+2.8″	7.84
2	〃 〃 20″	−1.2	1.44
3	〃 〃 18″	+0.8	0.64
4	〃 〃 25″	−6.2	38.44
5	〃 〃 15″	+3.8	14.44
計	94″	0.0	62.80＝$[vv]$

算術的平均値　$=35°26'18''$

各觀測値ノ中數誤差　$m=\sqrt{\frac{62.80}{4\times5}}=\frac{\pm3.96}{\sqrt{5}}=\pm1.77''$

次＝算術的平均値　　$x=35°26'18.8'\pm1.77''$

而シテ　$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{62.80}{5-1}}=\pm3.96'$ ハ $m=\sqrt{\frac{[vv]}{n}}=\sqrt{\frac{62.80}{5}}=\pm3.5?''$

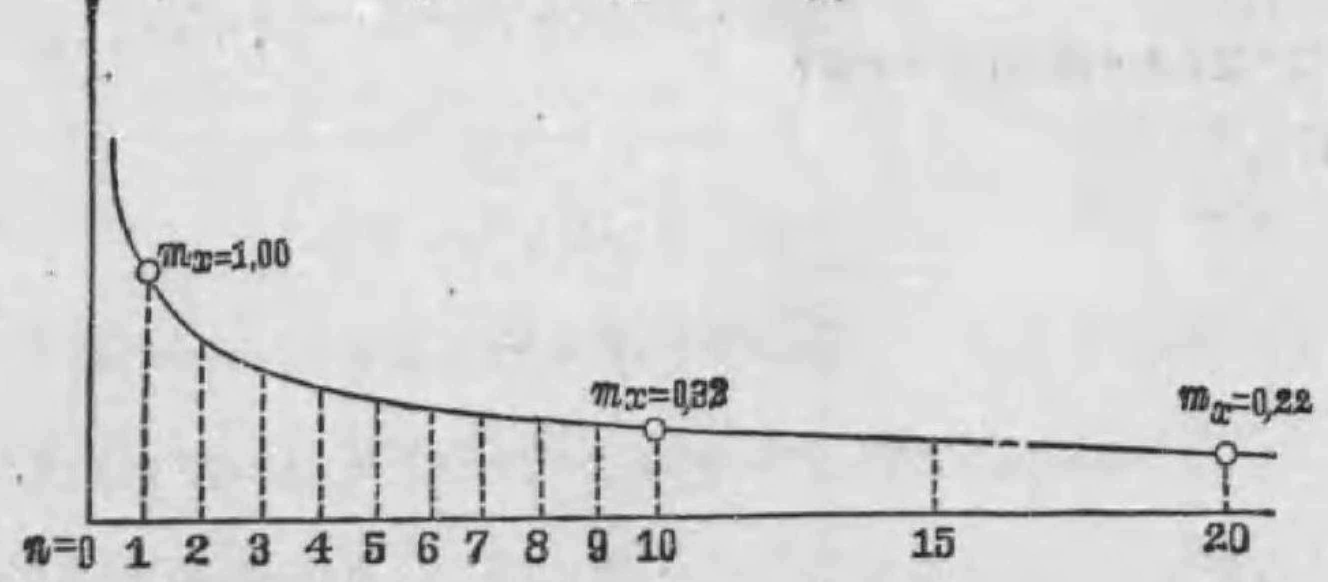
ヨリ宜シ.

$m_x=\frac{m}{\sqrt{n}}$ ナル式ハ必要ナル式ニシテ算術的平均値ノ中數誤差ハ測量回數ノ平方根ニ反比例スルコトヲ示ス今此法則ヲ明カニスル爲メニ $m=1$ トスレバ

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
$m_x=\frac{1}{\sqrt{n}}=$	1.00	0.71	0.56	0.50	0.45	0.41	0.38	0.35	0.33	0.32	0.22	0.14	0.10

ナリ, m_x ヲ縱距トシ n ヲ横距トシ之ヲ圖示スレバ次ノ如シ

第　九　圖



此曲線ハ漸近線ヲ有ス卽チ中數誤差 m_x ハ次第ニ零ニ近寄ルモ零トナラズ

10回マデ m_x ハ非常ニ速ニ減ジ精密度ヲ增セドモ之レ以上反覆測量スルモ其効果少シ. 例ヘバ中數誤差ヲ第一測量ノ中數誤差ノ$\frac{1}{10}$ニナスニハ100回ノ測量ヲナスヲ要ス

〔參考〕　$\frac{m_x}{m}=\frac{1}{10}=\frac{1}{\sqrt{100}}$　故ニ $n=100$

故ニ通常ハ10回ノ測量ニテ充分ナリ

上述ノ式ニ於テハ測量ノ誤差ハ不規則誤差ニシテ正負同樣ニ現レ易キ誤差ナリト假定セシガ實際ニ於テハ然ラズシテ測量ヲ精密ニ行ヒ又反覆スルニ從ヒ規則誤差ノ存スルヲ發見スルヲ得ベシ　故ニ測量ヲ反覆スルニ當リテハ其事情ヲ變ジテ行フベシ

例ヘバ角ノ測定ニ於テハ水平圓盤ノ部分ヲ變更シテナスベシ

今 $m_x=\frac{m}{\sqrt{n}}$ 或ハ $m_x^2=\frac{m^2}{n}$ ナル式ニ依ルトキハ算術的平均値 x ヲ m_x ナル中數誤差ヲ有スル一回ノ測量ノ結果ト考ヘ得ベシ然ルトキハ此ノ測量ト原測量トノ精密度ノ割合ハ m_x ト m トノ割合ナリ

之ヨリ重みノ意味ヲ理解シ得ベシ m_x^2 ト m^2 ノ割合ハ $n:1$ ノ割合ナル故ニ一觀測値ノ重みヲ1トスレバ算術的平均値ノ重みハ n ナリ

又算術的平均値ノ現ハレ易キ誤差ハ次ノ如シ

$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ヲ同一量ニ於ケル n 回ノ直接觀測値
$p=1\ldots\ldots$ ヲ各測量ノ重み
$p_{(n)}=n\ldots\ldots$ ヲ算術的平均値ノ重み　トスレバ
$r\ldots\ldots$ ヲ各測量ノ現ハレ易キ誤差
$r_x\ldots\ldots$ ヲ算術的平均値ノ現ハレ易キ誤差

前述ノ如ク

$$p_x : p : n : 1 = \frac{1}{r_x^2} : \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{n}{r^2} = \frac{1}{r_x^2} \qquad 故ニ\ r_x^2 = \frac{r^2}{n}$$

故ニ
$$r_x = \sqrt{\frac{r^2}{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

卽チ算術的平均値ノ現ハレ易キ誤差ハ測量ノ回數ノ平方根ニテ各測量ノ現ハレ易キ誤差ヲ除シタルモノニ等シ

故ニ算術的平均値ノ現ハレ易キ誤差ハ測量ノ回數 n ガ增スト共ニ減ズルモノナリ 故ニ 10回ノ測量ノ算術的平均値ノ現ハレ易キ誤差ガ r_{10} ナレバ其現ハレ易キ誤差ヲ二分ノ一ニナスニハ 40 回ノ測量ヲナスヲ要ス卽チ

〔參考〕　$r_x = \dfrac{r}{\sqrt{n}}$ 式ニ依リ $r_{10} = \dfrac{r}{\sqrt{10}}$　　$\dfrac{r_{10}}{2} = \dfrac{r}{2\sqrt{10}} = \dfrac{r}{\sqrt{40}}$

故ニ $r_{40} = \dfrac{r}{\sqrt{40}}$　　故ニ $n = 40$

各測量ノ現ハレ易キ誤差 (r) ハ次ノ如シ

第六節ニ於テ　　$h = \sqrt{\dfrac{n}{2[xx]}}$

第四節ニ於テ　　$hr = 0.4769$　卽チ　$r = \dfrac{0.4769}{h}$

故ニ　$$r = \frac{0.4769}{\sqrt{\frac{n}{2[xx]}}} = \frac{0.4769}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[xx]}}} = 0.4769 \times \sqrt{\frac{[xx]}{n}} \times 1.414 = 0.6745\sqrt{\frac{[xx]}{n}}$$

第十節 (10) 式ニ依リ　　$m^2 = \dfrac{[xx]}{n} = \dfrac{[vv]}{n-1}$

之ヲ r ノ値ニ入ルルトキハ

$$r = 0.6745\sqrt{\frac{[xx]}{n}} = 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

此式ハ單獨直接測量卽チ重み1ナル測量ノ現ハレ易キ誤差ノ式ナリ

此式ヲ用フルニハ先ヅ算術的平均値ヨリ各觀測値ヲ減ジテ殘差誤

差ヲ見出シ其自乘ノ和ヲ作ルヲ要ス

而シテ r ヲ知レバ算術的平均値ノ現ハレ易キ誤差 (r_x) ハ次式ニ依テ見出シ得ベシ卽チ

$$r_x = \frac{r}{\sqrt{n}} = 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

第十一節　一般的平均値ノ中數誤差

一ケノ未知數ヲ定ムルニ精密度ノ等シカラザル多數ノ觀測値アル時ハ次法ニ依テ平均ス.

今5個ノ觀測値 $l_1', l_2', l_3', l_4', l_5'$ アリトスレバ其簡單ナル算術的平均ハ次ノ如シ

$$x = \frac{l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5'}{5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又此等5個ノ觀測値ヲ2個ト3個トニ別ケテ別々ニ平均スレバ

$$l_1 = \frac{l_1' + l_2'}{2} \qquad l_2 = \frac{l_3' + l_4' + l_5'}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式ヨリ　$l_1' + l_2' = 2l_1$　　$l_3' + l_4' + l_5' = 3l_2$　トシテ

(1) 式ニ代入スレバ $l_1', l_2', \cdots\cdots l_5'$ 等ニ無關係ニ總平均値 x ヲ得ル

$$x = \frac{2l_1 + 3l_2}{2+3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

依テ一般ニ $l_1', l_2', l_3' \cdots\cdots$ 等ヲ精密度等シキ觀測値トシ $l_1, l_2, l_3 \cdots\cdots$ 等ヲ部分的平均値トスレバ (3) 式ト同樣ニ次ノ一般式ヲ得

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots\cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots} = \frac{[pl]}{[p]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此式ニ於テ $p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots$ 等ハ重みヲ意味ス.

今　$m_x = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$ ナル式ニ於テ $n = p$ 及 $n = p'$ ナル二ツノ場合ヲ考

フルトキハ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{p}} \qquad m_x'=\frac{m}{\sqrt{p'}}$$

故＝ $$\frac{p}{p'}=\frac{m'^2_x}{m_x^2} \quad \text{或ハ} \quad \frac{m_x}{m_x'}=\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \qquad \cdots\cdots(5)$$

依テ重みハ中數誤差ノ自乘＝反比例シ中數誤差ハ重みノ平方根＝反比例スルヲ知ル

又 $$x=al+a'l'+a''l''+\cdots\cdots+a^{(n)}l^{(n)}$$

ナル一次函數＝於テ觀測値 $l, l', l'', \ldots\ldots l^{(n)}$ ノ重みヲ夫々 $p, p', p'', \ldots\ldots p^{(n)}$ トシ x ノ重みヲ p_x トスレバ上述ノ理論ヨリ

$$m_x^2=\frac{1}{p_x} \quad m^2=\frac{1}{p} \quad m'^2=\frac{1}{p'} \cdots\cdots m^{(n)2}=\frac{1}{p^{(n)}}$$

誤差移行ノ法則 (10) 式＝依リ

$$m_x^2=a^2m^2+a'^2m'^2+a''^2m''^2+\cdots\cdots+a^{(n)2}m^{(n)2}$$

ナル故＝ $$\frac{1}{p_x}=\frac{a^2}{p}+\frac{a'^2}{p'}+\frac{a''^2}{p''}+\cdots\cdots+\frac{a^{(n)2}}{p^{(n)}}=\left[\frac{aa}{p}\right] \cdots\cdots(5_a)$$

又 (7) 式＝依リ $m_x^2=m^2+m'^2+m''^2+\cdots\cdots+m^{(n)2}$ ナルトキハ

$$\frac{1}{p_x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}+\cdots\cdots+\frac{1}{p^{(n)}}=\left[\frac{1}{p}\right] \cdots\cdots(5_b)$$

$m_x^2=nm^2$ ナルトキハ

$$\frac{1}{p_x}=n\frac{1}{p} \text{ ナリ} \cdots\cdots(5_c)$$

或ハ $$p_x=\frac{p}{n}$$

$l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots l_n$ ヲ與ヘラレタル觀測値トシ $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ ヲ夫々ノ重みトスレバ未知數ノ最モ確カラシキ値ハ次ノ一般的平均値ナリ

$$x=\frac{p_1l_1+p_2l_2+p_3l_3+\cdots\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]} \cdots\cdots(6)$$

此等ノ觀測値ノ殘差ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{ll} v_1=x-l_1 & \text{重み } p_1 \\ v_2=x-l_2 & \quad{''} \quad p_2 \\ v_3=x-l_3 & \quad{''} \quad p_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ v_n=x-l_n & \quad{''} \quad p_n \end{array}\right\} \cdots\cdots(7)$$

此等ノ v ＝夫々ノ重み p ヲ乘ジテ加フレバ (6) 式＝依リ

$$[pv]=0 \text{ ナリ。} \cdots\cdots(8)$$

重み 1 ナル中數誤差ヲ單位重みノ誤差ト云フ.

觀測値 $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots l_n$ 等ノ中數誤差ハ (5) 式＝依テ次ノ如シ

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \quad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \cdots\cdots \frac{m}{\sqrt{p_n}} \cdots\cdots(9)$$

(6) 式ハ次ノ如ク書キ換フヲ得

$$x=\frac{p_1}{[p]}l_1+\frac{p_2}{[p]}l_2+\frac{p_3}{[p]}l_3+\cdots\cdots+\frac{p_n}{[p]}l_n \cdots\cdots(10)$$

故＝誤差移行ノ法則 (9) 式＝依テ x ノ中數誤差ハ次ノ如シ

$$m_x^2=\left(\frac{p_1}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2+\left(\frac{p_2}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2+\left(\frac{p_3}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_3}}\right)^2$$
$$+\cdots\cdots+\left(\frac{p_n}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_n}}\right)^2$$

$$m_x^2=\left(\frac{m}{[p]}\right)^2\left\{(\sqrt{p_1})^2+(\sqrt{p_2})^2+(\sqrt{p_3})^2+\cdots\cdots+(\sqrt{p_n})^2\right\}$$

$$m_x^2=m^2\times\frac{p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n}{[p]^2}=m^2\times\frac{[p]}{[p]^2}=\frac{m^2}{[p]}$$

故＝ $$m_x=\frac{m}{\sqrt{[p]}} \cdots\cdots(11)$$

故＝一般的平均値ノ重みヲ p_x トスレバ $p_x=[p]$ ナリ

次ニ重み1ナル觀測値ノ中數誤差ヲ求メン

次式ニ依リ重みノ等シカラザル觀測値ニ屬スル v ヲ重み1ナル場合ノ値ニ換算ス

重み	誤差	重み	改算誤差
p_1	v_1	1	$v_1\sqrt{p_1}$
p_2	v_2	1	$v_2\sqrt{p_2}$
p_3	v_3	1	$v_3\sqrt{p_3}$
…………	…………	…………	…………

但シ殘差 v ハ眞誤差ノ法則ニ從フモノトス

斯ク重み1ナル場合ニ換算セラレタル誤差ヲ用ヒテ中數誤差ヲ求ムレバ次ノ如シ

$$m^2=\frac{(v_1\sqrt{p_1})^2+(v_2\sqrt{p_2})^2+(v_3\sqrt{p_3})^2+\cdots\cdots+(v_n\sqrt{p_n})^2}{n-1}$$

$$=\frac{[pvv]}{n-1}\qquad m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(11) 式及 (12) 式ヨリ　$m_x=\dfrac{m}{\sqrt{[p]}}=\sqrt{\dfrac{[pvv]}{[p](n-1)}}\cdots\cdots(13)$

〔實例〕　六定點ヨリP點ノ高ヲ定メントス而シテ六點ノ海拔高及P點ヨリノ距離ハ次表ノ如シ

點	P點ヨリノ距離 (a)	海拔高	測定ニヨル高サノ差	P點ノ算出海拔高
A	2010(米)	1043.64(米)	−314.73(米)	728.91(米)
B	8903	619.02	+109.20	728.22
C	5820	480.81	+248.24	729.05
D	2002	1247.01	−518.40	728.58
E	6197	928.18	−199.16	729.02
F	5800	418.71	+310.13	728.84
				平均 728.77

‥(14)

故ニ6個ノ無關係ノ測量ノ算術的平均値ハ 728.77 米ナリ然レドモ高サノ測定ハ「重み」等シカラズ

而シテ高サノ差 (h) ハ次式ニ依リ算定ス

$$h=a\,\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1-\mathrm{K}}{2r}a^2$$

式中 α ハ高低角, K ハ光線屈折係數ニシテ「がうす」氏ニ依レバ 0.13

$\dfrac{1-\mathrm{K}}{2r}a^2$ ハ地球ノ彎曲及光線ノ屈折ニ因ル誤差修正數（測量家必携參照）而シテ a ハ短キ距離ナルガ故ニ誤差ナキモノトスレバ高サノ誤差ハ高低角 α ノ測定誤差トナリ即チ

$$dh=a\frac{d\,\mathrm{tg}\,\alpha}{d\alpha}d\alpha=a\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

而シテ α 角ハ小ナルヲ以テ $\cos^2\alpha=1$ ト見ルヲ得ベシ尚又角度ハ等シキ精密度ヲ以テ測リタルトシ且ツ既知ノ海拔高ヲ正シキモノトスレバ此 (15) 式ニ依リ高サノ測量ノ中數誤差ハ距離 (a) ニ比例スルコトヲ知ル從ツテ高サノ測量ノ重みハ $\dfrac{1}{a^2}$ ニ比例ス

a ヲ粁ニテ示セバP點ヨリ各點ヘノ距離 (a) 及重み (P) ハ次ノ如シ.

	A	B	C	D	E	F
$a=$	2.0	8.9	5.8	3.0	6.2	5.8
$(p)=\dfrac{1}{a^2}=$	0.25	0.01	0.03	0.11	0.03	0.03

故ニ次ノ表ヲ得ル

l	p	pl	$v=x-l$	v^2	pv^2
728+0.91	0.25	0.2275	−0.08	0.0064	0.0016
+0.22	0.01	0.0022	+0.61	0.3721	0.0037
+1.05	0.03	0.0315	−0.22	0.0484	0.0015
+0.58	0.11	0.0638	+0.25	0.0625	0.0070
+1.02	0.03	0.0306	−0.19	0.0361	0.0011
+0.84	0.03	0.0252	−0.01	0.0001	0.0000
計	9.46	0.3808			0.0149

故ニ　$x=\dfrac{[pl]}{[p]}=\dfrac{0.3808}{0.46}=0.83$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.0149}{5}}=\pm0.055\text{米}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{0.55}{\sqrt{0.46}}=\pm0.080\text{米}$$

故ニ　$\mathrm{H}=728+x=728.83$米

此中數誤差ハ　±0.08米

又重み單位卽チ距離1粁ニ付キ中數誤差ハ $m=\pm 0.055$ ニシテ之レニ屬スル高低角ノ誤差ハ

$$\therefore \delta=\frac{m}{a}\rho=\frac{0.055}{1000}\rho=\frac{0.055}{1000}\times 206.265=\pm 11''$$

第十二節 一般的平均値ノ現ハレ易キ誤差

$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ヲ n 個ノ直接觀測値
$p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ヲ重み
$p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n=[p]$ ヲ一般的平均値ノ重み
r ヲ重み1ナル測量ノ現ハレ易キ誤差
r_n ヲ一般的平均値ノ現ハレ易キ誤差
トスレバ

重み及現ハレ易キ誤差ノ關係ヨリ

$$1:[p]=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r_n^2}$$

故ニ

$$\frac{[p]}{r^2}=\frac{1}{r_n^2}$$

$$r_n=\sqrt{\frac{r^2}{[p]}}=\frac{r}{\sqrt{[p]}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

故ニ一般的平均値ノ現ハレ易キ誤差 r_n ハ其重みノ平方根ヲ以テ重み1ナル觀測値ノ現ハレ易キ誤差 r ヲ除シタルモノニ等シ

前述ノ如キ方法ニ依リ r ヲ見出シ得ベシ併シ次ニ r ヲ見出ス他ノ方法ヲ示サン

今 h ヲ重み1ナル測量ノ精密度
$h_1, h_2, \ldots\ldots h_n$ ヲ重み夫々 $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ナル測量ノ精密度

トスレトキハ第三章第二節ニ依テ

$h_1, h_2, \ldots\ldots h_n$ ハ重みノ項ニテ現ハシ得ベシ卽チ

$$h_1^2=p_1h^2$$

$$h_2^2=p_2h^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_n^2=p_nh^2$$

而シテ一般ニ x ヲ或誤差

p ヲ之レニ相當スル測量ノ重み
h ヲ重み1ナル測量ノ精密度
y ヲ其ぷろばびりちー
トスルトキハ

第二章第七節ノ (3) 式ヨリ

$$y=hp^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}dxe^{-h^2px^2}$$

而シテ $p_2x_2^2$ ノ如キ項ハ n 個ノ測量中ニ於テ ny_2 回現ハルル故ニ

$$n[pxxy]=[pxx]$$

故ニ誤差ノ連續スルモノニ向テ

$$\frac{[pxx]}{n}=[pxxy]=\frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}px^2e^{-h^2px^2}dx$$

今 $hx\sqrt{p}=t$ ヲ單位變數トスルトキハ

$$\frac{[pxx]}{n}=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt$$

此積分ノ値ハ第六節ニ依リ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ナリ

故ニ

$$\frac{[pxx]}{n}=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2h^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

而シテ

$$\frac{1}{h^2}=\left(\frac{r}{0.4769}\right)^2$$

故ニ

$$\frac{1}{2h^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{0.4769}\right)^2=\frac{[pxx]}{n}$$

故ニ　$$r=0.6745\sqrt{\frac{[pxx]}{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

之レ重み1ナル測量ノ現ハレ易キ誤差ナリ

而シテ $[pxx]$ ハ眞誤差ノ項ナリ而シテ

$$[pxx]>[pvv]$$

今　$[pxx]=[pvv]+u^2$ (式中 u^2 ハ定メラルル數)

或組ノ誤差ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ

$$P'=Ke^{-h^2[pxx]}=Ke^{-h^2([pvv]+u^2)}=K'e^{-h^2u^2}$$

故ニ u^2 ノ「ぷろばびりちー」ノ法則ハ誤差 (x) ノ「ぷろばびりちー」ノ法則ニ似ルコトヲ見ル

而シテ第二章第七節ニ依リ　$K'=h\pi^{-\frac{1}{2}}du$

u^2 ノ現ハレ得ベキ總テノ値ノ平均數ハ

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-h^2u^2}du=\frac{1}{2h^2}$$

〔參考〕

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-h^2u^2}du=\frac{h}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h^2u^2e^{-h^2u^2}du$$

今 $hu=t$ トスルトキハ

$$hdu=dt$$

之ヲ前式ニ入ルルトキハ

$$\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2h^2}$$

而シテ　$$\frac{1}{2h^2}=\frac{[pxx]}{n}$$ ナリ

故ニ　$$[pxx]=[pvv]+\frac{[pxx]}{n}$$

故ニ　$$\frac{[pxx]}{n}=\frac{[pvv]}{n-1}$$

故ニ現ハレ易キ誤差ハ次ノ如シ

$$r=0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

一般平均値ノ現ハレ易キ誤差ハ次ノ如シ

$$r_n=0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)[p]}}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

而シテ測量ノ重みガ總テ1ナレバ $[p]=n$

$$r_n=0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)n}}$$

之レ第十節 (14) 式ト一致ス

又此重み p ナル第一觀測値ノ現ハレ易キ誤差ハ $\sqrt{p}$ ニテ r ヲ除シテ得

本章第四節 (9) 式

$$p_1:p_2:p=\frac{1}{r_1^2}:\frac{1}{r_2^2}:\frac{1}{r_2}$$　式ノ如ク

測量ノ重みハ其現ハレ易キ誤差ノ自乘ニ反比スルヲ以テ現ハレ易キ誤差ヲ精密ニ求ムルヲ得レバ重みヲ定ムルコト容易ナリ．而シテ重みガ知ラルルトキハ第三章第三節ノ (2) 式卽チ

$$z=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}$$　式ニ依リ

此測量ノ結果ヲ結合シテ最モ確カラシキ値ヲ定メ得可シ

第十三節　二個ノ測量ノ特別ノ場合

〔其一〕　測量ノ精密度ノ等シキ場合

二個ノ精密度等シキ觀測値アリ其差ヲ d トス卽チ

第一觀測値ヲ l
第二觀測値ヲ $l+d$　トスレバ

算術的平均値ハ $x=l+\frac{d}{2}$ ナリ

殘差ハ次ノ如シ

$$v_1=l+\frac{d}{2}-l=+\frac{d}{2}$$

$$v_2=l+\frac{d}{2}-(l+d)=-\frac{d}{2}$$

一測量ノ中數誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}}=\pm\frac{d}{\sqrt{2}}=\pm0.707d \quad \text{……(1)}$$

算術的平均値ノ中數誤差ハ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{d}{2}=0.5d \quad \text{……(2)}$$

［其二］ 測量ノ精密度ノ等シカラザル場合

二個ノ精密度等シカラザル觀測値アリ其差ヲ d トス卽チ

$$\left.\begin{array}{l}\text{第一觀測値ヲ } (l) \quad \text{其ノ重みヲ } (p) \\ \text{第二觀測値ヲ } (l+d) \quad \text{其ノ重みヲ } (q)\end{array}\right\} \text{トスレバ}$$

平均値ハ次ノ如シ

$$x=\frac{pl+q(l+d)}{p+q}=l+\frac{q}{p+q}\times d \quad \text{……(3)}$$

殘差ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l} v_1=x-l=\left(l+\frac{q}{p+q}\times d\right)-l=+\frac{q}{p+q}\times d \\ v_2=x-(l+d)=\left(l+\frac{q}{p+q}d\right)-l-d=-\frac{p}{p+q}\times d \end{array}\right\} \quad \text{……(4)}$$

故ニ $v_1:v_2=\frac{1}{p}:\frac{1}{q}$ ノ比例アリ ……(5)

單位重みノ觀測値ノ中數誤差ハ次ノ如シ

$$m=\sqrt{\frac{pv_1^2+qv_2^2}{2-1}}$$

之レニ殘差 v ノ値ヲ入ルヽトキハ

$$m=\sqrt{p\left(\frac{q^2}{(p+q)^2}\right)d^2+q\left(\frac{p^2}{(p+q)^2}\right)d^2}=d\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \quad \text{……(6)}$$

平均値ノ中數誤差ハ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{p+q}}=\frac{d}{\sqrt{p+q}}\sqrt{\frac{pq}{p+q}}=\frac{d}{p+q}\sqrt{pq} \quad \text{……(7)}$$

平均前ノ中數誤差 (m_1 及 m_2) ハ次ノ如シ

$$m_1=\frac{m}{\sqrt{p}} \qquad m_2=\frac{m}{\sqrt{q}} \quad \text{……(8)}$$

$$m_1:m_2=\frac{1}{\sqrt{p}}:\frac{1}{\sqrt{q}} \quad \text{……(9)}$$

今 $p=1$, $q=2$ トスレバ

	第一測量	第二測量
觀測値	l	$l+d$
重み	$p=1$	$q=2$
平均前ノ中數誤差	$m_1=m$	$m_2=\frac{m}{\sqrt{2}}$
平均値	$x=l+\frac{2}{3}d$	
殘差	$v_1=+\frac{2}{3}d$	$v_2=-\frac{1}{3}d$
	$(v_1-v_2=d)$	

單位重みノ一測量ノ中數誤差 $m=d\sqrt{\frac{2}{3}}$

平均値ノ中數誤差 $m_x=\frac{d}{3}\sqrt{2}$

又次ノ比例アリ

平均前ノ中數誤差 $m_1:m_2=\frac{1}{\sqrt{1}}:\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}:1=1.414:1$

精密度　$\frac{1}{m_1}:\frac{1}{m_2}=1:1.414$

殘差　$v_1:v_2=+\frac{2}{3}d:-\frac{1}{3}d=2:1$

第十四節　三角形ノ內角ノ平均法

其一　精密度等シキ場合

第八圖ノ平面三角形ニ於テ等シキ精密度ヲ以テ其ノ三內角ヲ測定シ α,β 及 γ ナル結果ヲ得タルトキハ $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ナルベキ筈ナルモ測定ニ誤差アルタメ $\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=w$ トナルトキハ此 w ヲ三角ニ等分ス其ノ理由ハ次ノ如シ

今三角中ノ一角ヲ未知數ト假定シ第一角ニ對シ二個ノ無關係ナル觀測値アリトセヨ卽チ

$x_1=\alpha$　　其ノ重み $p_1=1$ ……………(1)

$x_2=180^\circ-(\beta+\gamma)$ 其ノ重み $p_2=\frac{1}{2}$ ……………(2)

〔參考〕

x_1 ノ中數誤差ハ $m_1=\pm m$

x_2 ノ中數誤差ハ $m_2=\pm m\pm m=\pm m\sqrt{2}$

之レ β 及 γ ノ誤差ガ共ニ働クヲ以テナリ

故ニ $m_1:m_2=1:\sqrt{2}$

$$p_1:p_2=\frac{1}{m_1^2}:\frac{1}{m_2^2}=1:\frac{1}{2}$$

平均値ハ次ノ如シ

$$x=\frac{1\times\alpha+\frac{1}{2}[180^\circ-(\beta-\gamma)]}{1+\frac{1}{2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而シテ　$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=w$ ……………………(4)

卽チ　$180^\circ-(\beta+\gamma)=\alpha-w$ ナル故ニ

$$x=\frac{2\alpha+(\alpha-w)}{3}=\alpha-\frac{w}{3}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同樣ニ第二角及第三角ニ於テハ

$$y=\beta-\frac{w}{3}\ 及\ z=\gamma-\frac{w}{3}\ ヲ得$$

而シテ此ノ三內角ノ和ハ次ノ如シ

$$x=\alpha-\frac{w}{3}$$

$$y=\beta-\frac{w}{3}$$

$$z=\gamma-\frac{w}{3}$$

和 $x+y+z=\alpha+\beta+\gamma-w$

次ニ中數誤差ヲ計算セン

x_1 ノ修正數　$v_1=\frac{w}{3}$ ……………………(6)

x_2 ノ修正數　$v_2=\frac{w}{3}+\frac{w}{3}=\frac{2w}{3}$ ……………(7)

單位重みノ觀測値ノ中數誤差ハ次ノ如シ

$$m=\pm\sqrt{\frac{p_1v_1^2+p_2v_2^2}{2-1}}=\pm\sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2w}{3}\right)^2}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots(8)$$

而シテ平均前ノ α,β 及 γ 角ノ重みハ1ナルヲ以テ之レハ平均前ノ角ノ中數誤差ニシテ平均値 (x) ノ重みハ $p_1+p_2=\frac{3}{2}$ ナルヲ以テ

$$m_x=\pm\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{w}{3}\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

〔參考〕

內角ノ誤差 (w) ハ三個ノ誤差 $(\pm m)$ ヨリ起ルモノニシテ卽チ $\pm m\pm m\pm m=\pm w$

$$m^2+m^2+m^2=w^2 \text{ 故ニ } m=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}$$

故ニ $$m_x : m=\pm\frac{w}{3}\sqrt{2} : \pm\frac{w}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}:1=0.816:1 \ldots\ldots(10)$$

平均ノ爲メニ中數誤差ハ 0.8:1 ノ割合ニ減ジ精密度ハ 1:0.8 ノ割合ニ増加ス即チ三角形ノ三角ノ平均ニ依リテ一角ノ精密度ハ二割増スモノナリ

其二　精密度ノ等シカラザル場合

三內角ノ觀測値ヲ　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ……………………(11)

其ノ重ミヲ　$p_\alpha,\ p_\beta,\ p_\gamma$ ……………………(12)

誤差ヲ　$\alpha+\beta+\gamma-180°=w$ ………(13)

單位重ミノ中數誤差ヲ m トスレバ

$$m_\alpha=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha}},\quad m_\beta=\frac{m}{\sqrt{p_\beta}},\quad m_\gamma=\frac{m}{\sqrt{p_\gamma}} \ldots\ldots(14)$$

$$m_\alpha^2=m^2\left(\frac{1}{p_\alpha}\right)\qquad m_\beta^2+m_\gamma^2=m^2\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right) \ldots\ldots(15)$$

今　p_1 ヲ α ノ重ミ
　　p_2 ヲ $(\beta+\gamma)$ ノ重ミ　トスレバ

$$p_1=\frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}},\qquad p_2=\frac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}} \ldots\ldots(16)$$

$$p_1+p_2=\frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}}+\frac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}$$

$$[p]=\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)} \ldots\ldots(17)$$

式中　$$\left[\frac{1}{p}\right]=\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}$$

$$x=\frac{p_1\alpha+p_2[180°-(\beta+\gamma)]}{p_1+p_2}=\frac{p_1\alpha+p_2(\alpha-w)}{p_1+p_2}$$

$$=\frac{(p_1+p_2)\alpha-p_2w}{p_1+p_2}$$

$$=\alpha-\frac{p_2}{p_1+p_2}\times w$$

$$=\alpha-\frac{\dfrac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\dfrac{1}{\frac{1}{p_\alpha}}+\dfrac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}\times w=\alpha-\frac{\dfrac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\dfrac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}}\times w$$

$$x=\alpha-\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times w \ldots\ldots(18)$$

故ニ w ヲ α,β 及 γ 角ニ分ツニハ重ミニ反比シテ分ツベシ

單位重ミノ中數誤差ハ $m=\pm\dfrac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}$ ナリ ……………(19)

〔參考〕

x_1 ノ修正數　$$v_1=\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times w$$

x_2 ノ修正數　$$v_2=\frac{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times w$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{p_1v_1^2+p_2v_2^2}{2-1}}=\pm\sqrt{\frac{p_1\left(\frac{1}{p_\alpha}\right)^2w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2}+\frac{p_2\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)^2w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2}}$$

$$=\pm\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{p_1\left(\frac{1}{p_\alpha}\right)^2+p_2\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{p_1\left(\frac{1}{p_\alpha}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}=\pm\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}=\pm\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}$$

平均前ノ α 角ノ中數誤差ハ

$$m_\alpha=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha}}=w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

平均後ノ α 角ノ中數誤差ハ

$$m'_\alpha=w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

〔參考〕

$$m_\alpha'=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\times\frac{1}{\sqrt{[p]}}$$

(17) 式ニ依リ

$$=\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}}}$$

$$=\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\delta}\right)}}{1}=\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}$$

〔實例〕

球面三角形 ABC (第八圖) ニ於テ次ノ如キ觀測値及重みアリ

	觀測値	重み
α	72° 16′ 44.86″	$p_\alpha=27$
β	90° 1′ 56.46″	$p_\beta=42$
γ	17° 41′ 17.43″	$p_\gamma=65$

和 $\alpha+\beta+\gamma=179°\ 59'\ 58.''75$

條件 $=180°\quad 00'\quad 0.20''$

故ニ $w=-1.54''$

$$\frac{1}{p_\alpha}=0.037\qquad\frac{1}{p_\beta}=0.024\qquad\frac{1}{p_\gamma}=0.015$$

$$\left[\frac{1}{p}\right]=0.037+0.024+0.015=0.076$$

$$v_\alpha=\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times w=\frac{0.037}{0.076}\times1.54=+0.75''$$

$$v_\beta=\frac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times w=\frac{0.024}{0.076}\times1.54=+0.49''$$

$$v_\gamma=\frac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\times w=\frac{0.015}{0.076}\times1.54=+0.30''$$

觀測値	修正數	平均角
72° 16′ 44.80″	+0.75″	72° 16′ 45.61″
90° 1′ 56.46	+0.49	90° 1′ 56.95
17° 41′ 17.43	+0.30	17° 41′ 17.73
179° 59° 58.75″	+1.54″	180° 0′ 0.29″

單位重みノ中數誤差ハ

$$m=\pm\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}=\pm\frac{1.54''}{\sqrt{0.076}}=\pm\frac{1.54}{0.2757}=\pm5.59''$$

又 (21) 式ニ依リ平均角ノ中數誤差ヲ計算スレバ次ノ如シ

$\alpha=72°$	16′	45.″61	±0.77″
$\beta=90$	1	56.95	±0.72
$\gamma=17$	41	17.73	±0.61

〔參考〕

$$m_\gamma=w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.037(0.024+0.015)}}{0.076}$$

$$=\frac{1.54\sqrt{0.037\times0.039}}{0.076}=\frac{1.54}{0.076}\times\sqrt{0.001443}$$

$$=\frac{1.54}{0.076}\times 0.038=\frac{0.05852}{0.076}=0.77''$$

〔參考〕

地球ハ回轉楕圓體ニシテ其外部ハ球面ヲナスガ故ニ地球面上ノ大部分ヲ測量スル場合ニハ地表面ヲ球面トシ球面三角法ニ依リ算定スルヲ要ス

球面餘剩εハ次式ニ依リテ算出ス

$$\varepsilon=\frac{F}{R^2}\rho \qquad \alpha+\beta+\gamma=180^\circ+\varepsilon$$

式中 F ハ三角形ノ面積

R ハ地球ノ半徑 ＝6,500,000米

ρ ハ 206265

第十五節　觀測値ノ差ヨリ中數誤差ヲ定ムル法

$$\left.\begin{array}{l} l_1 \text{ 及 } l_2 \text{ ヲ觀測値} \\ l_1-l_2=d \text{ ヲ觀測値ノ差} \end{array}\right\} \text{トスレバ}$$

算術的平均値　$x=\dfrac{l_1+l_2}{2}$

殘差　$$\left.\begin{array}{l} v_1=x-l_1=-\dfrac{d}{2} \\ v_2=x-l_2=+\dfrac{d}{2} \end{array}\right\}$$

一測量ノ中數誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{[vv]}{2-1}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}{1}}$$

$$=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{4}}=\frac{d}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

算術的平均値ノ中數誤差ハ次ノ如シ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{n}}=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{d}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{d}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $d=m\sqrt{2}$ ナル故ニ二個ノ觀測値ノ差ハ一測量ノ中數誤差ノ$\sqrt{2}$倍ナリ又 n 個ノ部分ニ分チテナストキニハ其各部ノ往復ノ差ヲ d トシ其ノ距離ヲ稍等シクシテ重みノ等シキ場合トスレバ此 n 個ノ差ヨリ平均ノ差ヲ算出スベシ

今往復測定ノ結果ヲ l 及 l' トシ其ノ眞誤差ヲ ε 及 ε' トスレバ

$$\left.\begin{array}{ll} l_1+\varepsilon_1=l_1'+\varepsilon_1' \text{ 或ハ } & l_1-l_1'=d_1=\varepsilon_1'-\varepsilon_1 \\ l_2+\varepsilon_2=l_2'+\varepsilon_2' & l_2-l_2'=d_2=\varepsilon_2'-\varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n+\varepsilon_n=l_n'+\varepsilon_n' & l_n-l_n'=d_n=\varepsilon_n'-\varepsilon_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(3)$$

故ニ往復測定ノ差ノ自乘ノ和ハ

$$[d^2]=[\varepsilon^2]+[\varepsilon'^2]-2[\varepsilon\varepsilon']$$

及　$$\frac{[d^2]}{n}=\frac{[\varepsilon^2]}{n}+\frac{[\varepsilon'^2]}{n}-\frac{2[\varepsilon\varepsilon']}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此式ニテ $\dfrac{[\varepsilon^2]}{n}$ 及 $\dfrac{[\varepsilon'^2]}{n}$ ハ等シキ精密度ヲ以テ測定シタルモノノ中數誤差ノ自乘卽チ m^2 又 $\dfrac{2[\varepsilon\varepsilon']}{n}$ ハ測定ヲ反覆スレバ終ニ零トナルベキモノナルヲ以テ $\dfrac{[d^2]}{n}=m^2+m^2=2m^2$

故ニ一測定ノ中數誤差ハ $m=\sqrt{\dfrac{[d^2]}{2n}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

往復測定ノ中數誤差ハ $m_x=\dfrac{m}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{[d^2]}{n}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

l_1, l_2 等ノ距離等シカラズシテ重み等シカラザルトキハ先ヅ重み 1 ノ測定ノ中數誤差ヲ算出セザルベカラズ例ヘバ

l ノ重みヲ p トスレバ $l\sqrt{p}$ ノ重みハ 1 ナリ

〔參考〕

$$\left.\begin{array}{l} x=al \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ mx=am \ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right\}$$ 式＝依リ

$x=\sqrt{p}\times l$ ナルトキハ

$m_x=\sqrt{p}\times m$

$\frac{1}{m_x^2}:\frac{1}{m^2}=p_x:p \qquad \frac{1}{pm^2}:\frac{1}{m^2}=p_x:p$

故＝ $p_x=1$

今 (3) 式＝ $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$ 等ヲ乘ズレバ等シキ重みノモノトナル

而シテ其眞誤差ハ

$\varepsilon_1\sqrt{p_1}$・$\varepsilon_2\sqrt{p_2}$,……………等トナル

故＝ (4) 式ノ代リ＝次式ヲ得

$$\frac{[d^2p]}{n}=\frac{[\varepsilon^2p]}{n}+\frac{[\varepsilon'^2p]}{n}-\frac{2[\varepsilon\varepsilon'\sqrt{p}\sqrt{p'}]}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

而シテ $\frac{2[\varepsilon\varepsilon'\sqrt{p}\sqrt{p'}]}{n}=0$ ナル故＝

$$\frac{[d^2p]}{n}=m^2+m^2=2m^2$$

故＝重み 1 ナル觀測値ノ中數誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

重み 1 ナル二個ノ觀測値ノ平均値或ハ往復測量ノ平均値ノ中數誤差ハ

$$m_x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

之レガ應用ハ基線測量或ハ水準測量ヲ往復ナス如キ場合ナリ

距離測量ノ中數誤差ハ距離 S ノ平方根＝比例シテ增ス

故＝重みハ $(\sqrt{s})^2$ 即チ S ＝反比例ス

故＝一回測量ノ中數誤差ハ ($s=1$ ＝付キ)

$$m=\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}=\frac{1}{2n}\left(\frac{d_1^2}{s_1}+\frac{d_2^2}{s_2}+\ldots\ldots+\frac{d_n^2}{s_n}\right)=\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \ldots\ldots(10)$$

又二回測量ノ平均ノ中數誤差ハ ($s=1$ ＝付キ)

$$m_x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

〔實例〕 鐵道水準測量ノ場合

測點	I 第一回水準測量＝依ル高低差(米)	II 第二回水準測量＝依ル高低差(米)	I−II d(粍)	d^2	距離 s(粁)	$\frac{d^2}{s}$	平均値(米) $\frac{I+II}{2}$
1	−0.1853	−0.1859	+0.6	0.36	0.72	0.49	−0.1856
2	1.6258	1.6262	−0.4	0.16	0.42	0.36	1.6260
3	1.4329	1.4323	+0.6	0.36	0.47	0.81	1.4326
4	0.5106	0.5094	+1.2	1.44	0.48	2.89	0.5100
5	−0.0073	−0.0049	−2.4	5.76	0.51	11.56	−0.0061
6	0.5894	0.5848	+4.6	21.16	0.57	37.21	0.5871
7	−0.0560	−0.0602	+4.2	17.64	0.74	24.01	−0.0581
8	−0.3869	−0.3861	−0.8	0.64	0.30	2.25	−0.3865
9	0.5384	0.5384	0.0	0.00	0.64	0.00	0.5384
10	2.0364	2.0386	−2.2	4.84	0.85	5.76	2.0375
11	1.3718	1.3740	−2.2	4.84	0.57	8.41	1.3729
$n=11$	7.4698	7.4666	+3.2	10.24	6.27	93.75	7.4682

距離 1 粁ノ一回測量値ノ中數誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}=\sqrt{\frac{1}{22}\times 93.75}=\sqrt{4.26}=\pm 2.06\text{粍} \ldots\ldots\ldots(12)$$

距離 1 粁ノ往復測量平均値ノ中數誤差ハ

$$m_x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{93.75}{11}}=\pm 1.46\text{粍} \ldots\ldots\ldots(13)$$

或ハ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{2.06}{1.414}=\pm 1.46\text{粍}$$

〔實例〕 基線測量ノ場合

線ヲ二ツノ部分＝分チ往復測量シ次ノ結果ヲ得タリ

	第一部分	第二部分	平均距離
第一測定	441.1852米	1381.1571米	1822.344米
第二測定	441.1839米	1381.1632米	
差	$d_1=+1.3$粍	$d_2=-6.1$粍	

差ハ粍 距離ハ粁＝テ示セバ $S_1=0.441$, $S_2=1.381$ $n=2$ ナル故＝ (9) 式＝從テ

$$m^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1.3^2}{0.441}+\frac{6.1^2}{1.381}\right)=7.70 \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

$$m=\pm 2.78\text{粍}\ (1\text{粁}=\text{付キ})$$

之レ長サノ單位1粁ノ一回測量ノ中數誤差ナリ

長サ1粁ノ二回測量ノ平均値ノ中數誤差ハ (10) 式ニ從テ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{2.78}{\sqrt{2}}=\pm 1.96\text{粍}\ (1\text{粁}=\text{付キ})\ \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

全平均 1822.3447 米ノ中數誤差ハ

$$m_x'=m_x\sqrt{S_1+S_2}=1.96\sqrt{1.822}=\pm 2.65\text{粍}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

依テ基線ノ長サハ 1822.3447±0.0027米

第十六節　重みノ係數

今法正式ヲ解キテ x,y,z ヲ l ノ直線函數トシテ表ストキハ

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\alpha_3l_3+c_4l_4\\ y&=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\beta_3l_3+\beta_4l_4\\ z&=\gamma_1l_1+\gamma_2l_2+\gamma_3l_3+\gamma_4l_4\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今　l ノ中數誤差ヲ m、z ノ中數誤差ヲ m_z トスレバ

$$m_z^2=\gamma_1^2m^2+\gamma_2^2m^2+\gamma_3^2m^2+\gamma_4^2m^2$$

$$m_z^2=(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2)m^2=[\gamma\gamma]m^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{p_z}=[\gamma\gamma]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

今 z ヲ法正式ヨリ定ムルニ不定係數ノ方法ニヨリテナサントス即チ不定係數 $Q_1Q_2Q_3$ ヲ法正式ニ乘ズルトキハ

$$\left.\begin{aligned}Q_1[aa]x+Q_1[ab]y+Q_1[ac]z+Q_1[al]&=0\\ Q_2[ab]x+Q_2[bb]y+Q_2[bb]z+Q_2[bl]&=0\\ Q_3[ac]x+Q_3[bc]y+Q_3[cc]z+Q_3[cl]&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

而シテ此三式ヲ加ヘテ x 及 y ヲ消去セシメ z ノ係數ヲ1トスル如ク Q_1, Q_2, Q_3 ヲ定ムレバ即チ

$$\left.\begin{aligned}Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac]&=0\\ Q_1[ab]+Q_2[bb]+Q_3[bc]&=0\\ Q_1[ac]+Q_2[bc]+Q_3[cc]&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

然ルトキハ (4) 式ノ三個ノ式ノ和ハ

$$z-Q_1[al]-Q_2[bl]-Q_3[cl]=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

即チ

$$\begin{aligned}z=Q_1(&a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+a_4l_4)\\ +Q_2(&b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3+b_4l_4)\\ +Q_3(&c_1l_1+c_2l_2+c_3l_3+c_4l_4)\end{aligned}$$

此式ヲ l_1, l_2, l_3, l_4 ノ順序ニ配列スルトキハ

$$\left.\begin{aligned}z=&(Q_1a_1+Q_2b_1+Q_3c_1)l_1\\ &+(Q_1a_2+Q_2b_2+Q_3c_2)l_2\\ &+(Q_1a_3+Q_2b_3+Q_3c_3)l_3\\ &+(Q_1a_4+Q_2b_4+Q_3c_4)l_4\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

此式ヲ (1) 式ノ第三式即チ

$z=\gamma_1l_1+\gamma_2l_2+\gamma_3l_3+\gamma_4l_4$ ト對照スレバ

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=Q_1a_1+Q_2b_1+Q_3c_1\\ \gamma_2&=Q_1a_2+Q_2b_2+Q_3c_2\\ \gamma_3&=Q_1a_3+Q_2b_3+Q_3c_3\\ \gamma_4&=Q_1a_4+Q_2b_4+Q_3c_4\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

此式ニ a_1, a_2, a_3, a_4 ヲ乘ジテ加フル時ハ (5) 式ニ依テ

$$[a\gamma]=[aa]Q_1+[ab]Q_2+[ac]Q_3=0$$

又　b 及 c ヲ乘ズル時ハ同様ニ

$$[b\gamma]=[ab]Q_1+[bb]Q_2+[bc]Q_3=0$$

$$[c\gamma]=[ac]Q_1+[bc]Q_2+[cc]Q_3=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

而シテ x,y ヲ除去シテ z ヲ定ムルニ

$[a\gamma]=0,\ [b\gamma]=0,\ [c\gamma]=1$ ノ三式アリ

同様ニシテ x 及 y ヲ定ムルトキハ $[a\alpha]=1,\ [b\beta]=1$ ヲ得ベシ

故ニ

$$\left.\begin{array}{lll}\underline{[a\alpha]=1} & [b\alpha]=0 & [c\alpha]=0\\ [a\beta]=0 & \underline{[b\beta]=1} & [c\beta]=0\\ [a\gamma]=0 & [b\gamma]=0 & \underline{[c\gamma]=1}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

又　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ヲ (8) 式ニ乘ズルトキハ

$$[\alpha\gamma]=Q_1[a\alpha]+Q_2[b\alpha]+Q_3[c\alpha]$$

而シテ (10) 式ニ依テ

$$[\alpha\gamma]=Q_1\times 1+Q_2\times 0+Q_3\times 0=Q_1$$

同様ニ (8) 式ニ β 及 γ ヲ乘ズルトキハ

$$[\beta\gamma]=Q_2\ \text{及}\ [\gamma\gamma]=Q_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

此 (11) 式ヲ (6) 式ニ入ルヽトキハ

$$z=[\alpha\gamma][al]+[\beta\gamma][bl]+[\gamma\gamma][cl] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

此 (11) 式ヲ (5) 式ニ入ルル時ハ

$$\left.\begin{aligned}&[aa][\alpha\gamma]+[ab][\beta\gamma]+[ac][\gamma\gamma]=0\\&[ab][\alpha\gamma]+[bb][\beta\gamma]+[bc][\gamma\gamma]=0\\&[ac][\alpha\gamma]+[bc][\beta\gamma]+[cc][\gamma\gamma]=1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

此 (12) (13) 式ニ依リテ z ヲ求ムルヲ得ベシ

第十七節　多數ノ未知數ニ於ケル獨立測量ノ現ハレ易キ誤差

今 p_z ヲ z ノ重ミトシ

r ヲ重ミ 1 ナル測量ノ現ハレ易キ誤差トスレバ次ノ關係アリ

$$p_z:1=\frac{1}{r_z^2}:\frac{1}{r^2}$$

故ニ

$$r_z=\frac{r}{\sqrt{p_z}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故ニ整正値 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_q$ ノ現ハレ易キ誤差ヲ見出スニハ r 及此等ノ値ノ重ミヲ見出スコト必要ナリ

一般ニ或ル觀測値ノ現ハレ易キ誤差ハ重ミ 1 ナル觀測値ノ現ハレ易キ誤差 r ヲ其重ミノ平方根ニテ除シタルモノナリ

重ミ 1 ナル觀測値ノ現ハレ易キ誤差ヲ見出スニハ次ノ理論ニ依ル法正式ヲ解キテ最モ確カラシキ値 $z_1, z_2, \cdots\cdots\cdots z_q$ ヲ得タリト假定シ其眞値ヲ $z_1+\delta_1$, $z_2+\delta_2$, $\cdots\cdots z_q+\delta_q$ トス

但シ $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots\cdots\delta_q$ ハ小サキ未知修正數ナリ

觀測式ニ最モ確カラシキ値ヲ代入スルトキハ之レハ零トナラズシテ小サキ殘差 $v_1, v_2, \cdots\cdots\cdots v_q$ ヲ生ズ卽チ

$$a_1z_1+b_1z_2+\cdots\cdots\cdots+f_1z_q-l_1=v_1 \quad 重み\ p_1$$

$$a_2z_1+b_2z_2+\cdots\cdots\cdots+f_2z_q-l_2=v_2 \quad 重み\ p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_nz_1+b_nz_2+\cdots\cdots\cdots+f_nz_q-l_n=v_n \quad 重み\ p_n$$

然レドモ若シ眞値ヲ代入スレバ眞誤差ヲ殘スベシ卽チ

$$a_1(z_1+\delta_1)+b_1(z_2+\delta_2)+\cdots\cdots\cdots-l_1=x_1$$

$$a_2(z_1+\delta_1)+b_2(z_2+\delta_2)+\cdots\cdots\cdots-l_2=x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n(z_1+\delta_1)+b_n(z_2+\delta_2)+\cdots\cdots\cdots-l_n=x_n$$

此等ノ式ヨリ前式ヲ減ズルトキハ次ノ殘差式ヲ得

$$v_1+a_1\delta_1+b_1\delta_2+\cdots\cdots\cdots+f_1\delta_q=x_1$$

$$v_2+a_2\delta_1+b_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots+f_2\delta_q=x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n+a_n\delta_1+b_n\delta_2+\cdots\cdots\cdots+f_n\delta_q=x_n$$

最小二乘法ノ主義ニ依リ z_1, z_2 $\cdots\cdots z_q$ ノ最モ確カラシキ値ヲ得ルニハ $[pxx]$ ヲ最小ニナスヲ要ス而シテ法正式ノ解法ニ於テ其最小値ハ $[pvv]$ ナリ

殘差式ヨリ $[pvv]$ ト $[pxx]$ トノ關係ヲ見出スヲ得ベシ卽チ此等ノ式ノ兩側ノ項ヲ二乘シ其重ミヲ乘ジ此積ヲ加フレバ可ナリ

而シテ $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots\delta_q$ ノ二乘及相乘積ハ一次ノモノト比スレバ小ナル故ニ省クトキハ次ノ結果ヲ得

$$[pvv]+k_1\delta_1+k_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots+k_q\delta_q=[pxx]$$

式中 $k_1, k_2, \cdots\cdots\cdots k_q$ ハ未知修正數ノ係數ニシテ既知係數及重ミニ關係スルモノナリ．而シテ其項數ハ未知數ノ項數ニ等シ．

今 $k_1\delta_1=u_1^2$　$k_2\delta_2=u_2^2\cdots\cdots k_q\delta_q=u_q^2$ トスルトキハ

$$[pvv]+u_1^2+u_2^2+\dots\dots+u_q^2=[pxx]$$

而シテ精密度 h_1 重み p_1 ナル誤差 x_1 ノ現ハルル「ぷろばびりちー」ハ第二章第七節ニ依リ

$$y_1=hp_1^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}dxe^{-h^2p_1x_1}$$

式中 h ハ重み 1 ナル觀測ノ精密度ナリ故ニ第十一節 (18) 式ト同理ニテ n ガ大ナル數ナルトキハ

$$[pxx]=\frac{n}{2h^2}$$

又未知數ガ只一個ノ場合ニハ u^2 モ亦只一個ニシテ其值ハ $\frac{1}{2h^2}$ ナリ

而シテ之レハ如何ナル未知數ノ場合ニテモ正シキ故ニ u^2 ノ値ハ何レモ $\frac{1}{2h^2}$ ニシテ此等ノ値ガ q アル故ニ次ノ結果トナル

$$[pvv]+\frac{q}{2h^2}=\frac{n}{2h^2}$$

故ニ

$$h=\sqrt{\frac{n-q}{2[pvv]}}$$

而シテ $hr=0.4769$ ナル故ニ重み 1 ナル測量ノ現ハレ易キ誤差ハ次ノ如シ

$$r=0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}\dots\dots\dots\dots(2)$$

$z_1, z_2\dots\dots z_q$ ナル値ノ現ハレ易キ誤差ハ其重みヲ知レバ

$\gamma_z=\frac{\gamma}{\sqrt{p_z}}$ ナル式ヨリ見出サル

觀測值 $l_1, l_2\dots\dots l_n$ 等ヨリ觀測式及法正式ヲ作リ法正式ヲ解ケバ $l_1, l_2\dots\dots l_n$ 及未知數ニ關係ナキ係數ノ項ニテ $z_1, z_2\dots\dots z_q$ ノ値ヲ示スヲ得.

今解法ニ依テ次ノ結果ヲ得タリトス.

$$z_1=\sigma_1l_1+\sigma_2l_2+\sigma_3l_3+\dots\dots+\sigma_nl_n$$

$$z_2=\tau_1l_1+\tau_2l_2+\tau_3l_3+\dots\dots+\tau_nl_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_q=\xi_1l_1+\xi_2l_2+\xi_3l_3+\dots\dots+\xi_nl_n$$

式中 $\sigma, \tau\dots\dots\xi$ 等ハ係數ニシテ $a, b\dots\dots f$ 及重み $p_1, p_2\dots\dots p_n$ ニ關係ス

今 γ_{z_1} ヲ z_1 ノ現ハレ易キ誤差トシ $\gamma_1, \gamma_2\dots\dots\gamma_n$ ヲ $l_1, l_2\dots\dots l_n$ ノ現ハレ易キ誤差トスルトキハ誤差移行ノ法則ニ依リ

$$\gamma_{z_1}^2=\sigma_1^2\gamma_1^2+\sigma_2^2\gamma_2^2+\dots\dots+\sigma_n^2\gamma_n^2$$

而シテ現ハレ易キ誤差ノ自乘ガ重みニ反比スル故ニ

$$\frac{1}{p_{z_1}}=\frac{\sigma_1^2}{p_1}+\frac{\sigma_2^2}{p_2}+\dots\dots+\frac{\sigma_n^2}{p_n}=\left[\frac{\sigma\sigma}{p}\right]$$

故ニ

$$p_{z_1}=\frac{1}{\left[\frac{\sigma\sigma}{p}\right]}$$

同樣ニ

$$p_{z_2}=\frac{1}{\left[\frac{\tau\tau}{p}\right]}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$p_{z_q}=\frac{1}{\left[\frac{\xi\xi}{p}\right]}$$

併シ $\sigma_1, \tau_1, \dots\dots\xi$ 等ノ係數ヲ見出スヨリモ他ノ形狀ニテ此等ノ式ヲ導クヲ宜シトス

今法正式ヲ解キテ次ノ結果ヲ得タリト假定セヨ.

$$z_1=\alpha_1[pal]+\alpha_2[pbl]+\dots\dots+\alpha_q[pfl]$$

$$z_2=\beta_1[pal]+\beta_2[pbl]+\dots\dots+\beta_q[pfl]$$

....

$$z_q=\lambda_1[pal]+\lambda_2[pbl]+\cdots\cdots+\lambda_q[pfl]$$

式中 $\alpha,\beta\cdots\cdots\lambda$ ハ $l_1,l_2\cdots\cdots l_n$ ニ關係ナキ係數ナリ

然レバ $z_1,z_2\cdots\cdots z_q$ ノ重サハ $\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_2}\cdots\cdots\frac{1}{\lambda_q}$ ナリ

〔參考〕

z_2 ニ對スル二個ノ式ヲ比較スルニ

$$\tau_1=\beta_1p_1a_1+\beta_2p_1b_1+\cdots\cdots+\beta_qp_1f_1$$

$$\tau_2=\beta_1p_2a_2+\beta_2p_2b_2+\cdots\cdots+\beta_qp_2f_2$$

....

$$\tau_n=\beta_1p_na_n+\beta_2p_nb_n+\cdots\cdots+\beta_qp_nf_n$$

此等ノ式ヲ二乘シテ其レノ重みニテ除シ之レヲ加フレバ

$$\left[\frac{\tau\tau}{p}\right]=\beta_1(\beta_1[paa]+\beta_2[pab]+\cdots\cdots+\beta_q[paf]+\beta_2(\beta_1[pab]+\beta_2[pbb]+\cdots\cdots$$

$$+\beta_q[pbf])+\cdots\cdots+\beta_q(\beta_1[pab]+\beta_2[pbf]+\cdots\cdots+\beta_q[pff])$$

此式ニ次ノ條件ヲ有セシムル時ハ

$$\beta_1[paa]+\beta_2[pab]+\cdots\cdots+\beta_q[paf]=0$$

$$\beta_1[pab]+\beta_2[pbb]+\cdots\cdots+\beta_q[pbf]=1$$

....

$$\beta_1[paf]+\beta_2[pbf]+\cdots\cdots+\beta_q[pff]=0$$

β_2 以外ノ總テノ項ハ零トナリ

β_2 ノ値ハ $\left[\frac{\tau\tau}{p}\right]=\beta_2$　トナル

z_2 ノ重みハ $\frac{1}{\beta_2}$ トナル

法正式ヲ解クニ當リ其ノ絕對項ヲ文字Aニテ示ストキハ z_2 ノ如キ或ル値ノ重みハ z_2 ニ對スル法正式ノ絕對項ノ係數ノ反商ニ等シ

例ヘバ

$$\left.\begin{array}{l}3z_1-z_2-z_3=A_1\\-z_1+3z_2-z_3=A_2\\-z_1-z_2+2z_3=A_3\end{array}\right\}$$ ナル法正式アリ之レヲ解クトキハ次ノ値ヲ得

$$z_1=\frac{5}{8}A_1+\frac{3}{8}A_2+\frac{1}{2}A_3$$

$$z_2=\frac{3}{8}A_1+\frac{5}{8}A_2+\frac{1}{2}A_3$$

$$z_3=\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}A_2+A_3$$

故ニ　　z_1 ノ重みハ $\frac{8}{5}$

z_2 ノ重みハ $\frac{8}{5}$

z_3 ノ重みハ 1

故ニ若シ z_1 ノ重みヲ見出スヲ要スルノミナレバ A_2 及 A_3 ハ計算ニ入ルヽヲ要セズ之レヲ零トナシ得ルコト明カナリ又 z_2 ノ重みヲ見出ス場合ニ於テハ只 A_2 ヲ計算シ置ケバ可ナリ．次ニ之ヲ例示セン

重み1ナル三個ノ觀測式アリトシ

$$z_1=0\quad z_2=0\quad z_1-z_2=+0.51$$

法正式ハ次ノ如シ

$$2z_1-z_2=+0.51$$

$$-z_1+2z_2=-0.51$$

絕對項ニ A_1 及 A_2 ヲ書キ此式ヲ解クトキハ次ノ如シ

$$z_1=\frac{2}{3}A_1+\frac{1}{3}A_2$$

$$z_2=\frac{1}{3}A_1+\frac{2}{3}A_2$$

故ニ整正シタル確カラシキ値ハ次ノ如シ

$$z_1=+0.17$$

$$z_2=-0.17$$

又此値ノ重みハ $1\frac{1}{2}$ ナリ

殘差ノ二乘ノ和ハ $[vv]=0.867$

重み1ナル觀測値ノ現ハレ易キ誤差ハ $\gamma=0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}=\pm0.20$

z_1 及 z_2 ノ整正値ノ現ハレ易キ誤差ハ $\gamma_z=\frac{\gamma}{\sqrt{p_z}}=\frac{0.20}{\sqrt{1.5}}=\pm0{\cdot}16$

第三回ノ觀測ノ整正値ハ $z_1-z_2=+0.34$ ニシテ三個ノ觀測値ノ修正數ハ三個共ニ其絶對値等シ

又未知數ノ中數誤差ハ次ノ如シ

未知數 x, y, z, t ト觀測値 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ トノ關係ハ次ノ一次式ニテ表ハサルヽモノトス

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\ldots\ldots+\alpha_il_i+\ldots\ldots+\alpha_nl_n=[\alpha l]\\ y&=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\ldots\ldots+\beta_il_i+\ldots\ldots+\beta_nl_n=[\beta l]\\ z&=\gamma_1l_1+\gamma_2l_2+\ldots\ldots+\gamma_il_i+\ldots\ldots+\gamma_nl_n=[\gamma l]\\ t&=\delta_1l_1+\delta_2l_2+\ldots\ldots+\delta_il_i+\ldots\ldots+\delta_nl_n=[\delta l] \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(3)$$

m ヲ單位重みノ測量ノ中數誤差トシ m_i ヲ觀測値 l_i ノ中數誤差トスレバ

$$m_i=\frac{m}{\sqrt{p_i}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

各未知數ノ中數誤差ハ第十一節 (11) 式ニ依リ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} m_x&=m\sqrt{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]}=\frac{m}{\sqrt{p_x}}\\ m_y&=m\sqrt{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]}=\frac{m}{\sqrt{p_y}}\\ m_z&=m\sqrt{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]}=\frac{m}{\sqrt{p_z}}\\ m_t&=m\sqrt{\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]}=\frac{m}{\sqrt{p_t}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \left[\frac{\beta\beta}{p}\right]\ldots\ldots$ 等ヲ自乘重係數ト云フ

此等ヲ決定スルニハ法正式ニ不定係數 X_1, X_2, X_3, X_4 ヲ乘ズ

$$\left.\begin{aligned} [paa]x+[pab]y+[pac]z+[pad]t&=[pal]\\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbd]t&=[pbl]\\ [pac]x+[pcb]y+[pcc]z+[pcd]t&=[pcl]\\ [pad]x+[pdb]y+[pdc]z+[pdd]t&=[pdl] \end{aligned}\;\right|\begin{array}{c|c|c|c|} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3\\ X_4 & Y_4 & Z_4 & T_4 \end{array}\ldots\ldots(4)$$

但シ $X_1\ldots\ldots X_4$ ハ不定係數ニシテ次式ヲ滿足スル樣ニ選バレタルモノナリ

$$\left.\begin{aligned} [paa]X_1+[pab]X_2+[pac]X_3+[pad]X_4&=1\\ [pab]X_1+[pbb]X_2+[pbc]X_3+[pbd]X_4&=0\\ [pac]X_1+[pcb]X_2+[pcc]X_3+[pcd]X_4&=0\\ [pad]X_1+[pdb]X_2+[pdc]X_3+[pdd]X_4&=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(5)$$

各式ニ X ヲ乘ジテ加フルトキハ次式ヲ得

$$x=[pal]X_1+[pbl]X_2+[pcl]X_3+[pdl]X_4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

括弧ヲ解キテ l ノ順序ニ並ブレバ

$$\left.\begin{aligned} x=&(p_1a_1X_1+p_1b_1X_2+p_1c_1X_3+p_1d_1X_4)l_1\\ &+(p_2a_2X_1+p_2b_2X_2+p_2c_2X_3+p_2d_2X_4)l_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(p_na_nX_1+p_nb_nX_2+p_nc_nX_3+p_nd_nX_4)l_n \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

然ルニ (1) 式ニ依レバ

$$x=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\ldots\ldots+\alpha_nl_n\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=p_1a_1X_1+p_1b_1X_2+p_1c_1X_3+p_1d_1X_4\\ \alpha_2&=p_2a_2X_1+p_2b_2X_2+p_2c_2X_3+p_2d_2X_4\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n&=p_na_nX_1+p_nb_nX_2+p_nc_nX_3+p_nd_nX_4 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)$$

(9) 式ヨリ $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$ ヲ表ハス式ヲ作レバ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = & X_1([paa]X_1+[pab]X_2+[pac]X_3+[pad]X_4)\\ & +X_2([pab]X_1+[pbb]X_2+[pbc]X_3+[pbd]X_4)\\ & +X_3([pac]X_1+[pcb]X_2+[pcc]X_3+[pcd]X_4)\\ & +X_4([pad]X_1+[pdb]X_2+[pdc]X_3+[pdd]X_4)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(10)$$

此式ニ於テ X_1 ノ係數ハ (5) 式ニ依リ 1 ニ等シク他ノ X ノ係數ハ皆零ニ等シキ故ニ

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=X_1$$

X_1 ノ値ハ他ノ X ノ値ト共ニ (5) 式ヨリ得ラルルコト恰モ法正式ヨリ未知數 x, y, z, t ガ得ラルルガ如シ

消去法ニ依テ得ラレタル結果次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=X_1&=\frac{1}{[paa]}+\frac{A_1^2}{[pbb.1]}+\frac{A_2^2}{[pcc.2]}+\frac{A_3^2}{[pdd.3]}\\ X_2&=\frac{A_1}{[pbb.1]}+\frac{A_2B_2}{[pcc.2]}+\frac{A_3B_3}{[pdd.3]}=\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]\\ X_3&=\frac{A_2}{[pcc.2]}+\frac{A_3C_3}{[pdd.3]}=\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]\\ X_4&=\frac{A_3}{[pdd.3]}=\left[\frac{\alpha\delta}{p}\right]\end{aligned}\right\}(12)$$

X_2, X_3, X_4 ガ夫々 $\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \left[\frac{\alpha\delta}{d}\right]$ ニ等シキハ後ニ知ラル之ヲ非自乗重係數ト名ヅク.

他ノ自乗重係數ヲ定ムル爲メニ (4) ノ法正式ニ順次ニ不定係數 $Y_1 \ldots\ldots Y_4$ ヲ乘ジ加フ. 但シ此等ノ係數ハ次式ヲ滿足スル樣ニ選ブモノトス.

$$\left.\begin{aligned}&[paa]Y_1+[pab]Y_2+[pac]Y_3+[pad]Y_4=0\\ &[pab]Y_1+[pbb]Y_2+[pbc]Y_3+[pbd]Y_4=1\\ &[pac]Y_1+[pcb]Y_2+[pcc]Y_3+[pcd]Y_4=0\\ &[pad]Y_1+[pdb]Y_2+[pdc]Y_3+[pdd]Y_4=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(13)$$

然ルトキハ $y=[pal]Y_1+[pbl]Y_2+[pcl]Y_3+[pdl]Y_4$ ......(14)

而シテ x ノ場合ニ於ケルト同樣ニ

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]=Y_2&=\frac{1}{[pbb.1]}+\frac{B_2^2}{[pcc.2]}+\frac{B_3^2}{[pdd.3]}\\ Y_3&=\frac{B_2}{[pcc.2]}+\frac{B_3C_3}{[pdd.3]}=\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]\\ Y_4&=\frac{B_3}{[pdd.3]}=\left[\frac{\beta\delta}{p}\right]\end{aligned}\right\}\ldots(15)$$

同樣ニ,

$$z=[pal]Z_1+[pbl]Z_2+[pcl]Z_3+[pdl]Z_4 \ldots\ldots(16)$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]=Z_3&=\frac{1}{[pcc.2]}+\frac{C_3^2}{[pdd.3]}\\ Z_4&=\frac{C_3}{[pdd.3]}=\left[\frac{\gamma\delta}{p}\right]\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(17)$$

同樣ニ

$$t=[pal]T_1+[pbl]T_2+[pcl]T_3+[pdl]T_4 \ldots\ldots(18)$$

$$\left[\frac{\delta\delta}{p}\right]=T_4=\frac{1}{[pdd.3]}\ldots\ldots(19)$$

依テ得タル結果ヲ列記スレバ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}m_x&=m\sqrt{\frac{\alpha\alpha}{p}}=m\sqrt{\frac{1}{[paa]}+\frac{A_1^2}{[pbb.1]}+\frac{A_2^2}{[pcc.2]}+\frac{A_3^2}{[pdd.3]}}\\ m_y&=m\sqrt{\frac{\beta\beta}{p}}=m\sqrt{\quad * \quad+\frac{1}{[pbb.1]}+\frac{B_2^2}{[pcc.2]}+\frac{B_3^2}{[pdd.3]}}\end{aligned}\right\}(20)$$

$$m_3 = m\sqrt{\frac{\gamma\gamma}{p}} = m\sqrt{\quad * \qquad * \qquad + \frac{1}{[pcc.2]} + \frac{C_3^2}{[pdd.3]}}$$

$$m_4 = m\sqrt{\frac{\delta\delta}{p}} = m\sqrt{\quad * \qquad * \qquad * \qquad + \frac{1}{[pdd.3]}}$$

本式ニ於ケル係數 A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 及 C_3 ハ第三章第十六節 (25) 式ニ於ケルト同一ノ意味ヲ有ス.

次ニ非自乘重係數ニ就テ論ゼン (9) 式ヨリ

$$\alpha_i = p_i a_i X_1 + p_i b_i X_2 + p_i c_i X_3 + p_i d_i X_4 \quad \text{.....................(21)}$$

同樣ニ

$$\beta_i = p_i a_i Y_1 + p_i b_i Y_2 + p_i c_i Y_3 + p_i d_i Y_4 \quad \text{.....................(22)}$$

依テ (21) 及 (22) 式ヨリ $\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]$ ハ次ノ如クナル

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = & X_1([paa]Y_1 + [pab]Y_2 + [pac]Y_3 + [pad]Y_4) \\ & + X_2([pab]Y_1 + [pbb]Y_2 + [pbc]Y_3 + [pbd]Y_4) \\ & + X_3([pac]Y_1 + [pcb]Y_2 + [pcc]Y_3 + [pcd]Y_4) \\ & + X_4([pad]Y_1 + [pdb]Y_2 + [pdc]Y_3 + [pdd]Y_4)\end{aligned}\right\} \text{......(23)}$$

然ルニ (13) 式ニ依リ X_2 ノ係數ハ 1 ニシテ他ノ係數ハ皆零ナル故ニ

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = X_2 \quad \text{.....................................(24)}$$

(23) 式ヲ Y ノ順序ニ配列スレバ

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = Y_1 \quad \text{.....................................(25)}$$

斯クシテ總テノ重みノ係數ヲ補助係數 X, Y, Z, T ニテ表ハサル.

卽チ

$$X_1 = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \quad Y_1 = \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], \quad Z_1 = \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \quad T_1 = \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right],$$

$$\left.\begin{aligned} X_2 = \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], \quad Y_2 = \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], \quad Z_2 = \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right], \quad T_2 = \left[\frac{\beta\delta}{p}\right] \\ X_3 = \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \quad Y_3 = \left[\frac{\gamma\beta}{p}\right], \quad Z_3 = \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right], \quad T_3 = \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right], \\ X_4 = \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right], \quad Y_4 = \left[\frac{\delta\beta}{p}\right], \quad Z_4 = \left[\frac{\delta\gamma}{p}\right], \quad T_4 = \left[\frac{\delta\delta}{p}\right], \end{aligned}\right\} \text{.....(26)}$$

此等ノ値ヲ (13) 式ニ入ルレバ重みノ方程式ヲ得

第一系

$$\left.\begin{aligned} [paa]\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pab]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pac]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pad]\left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = 1 \\ [pab]\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pbb]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pbc]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pbd]\left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = 0 \\ [pac]\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pcb]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pcc]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pcd]\left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = 0 \\ [pad]\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pdb]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pdc]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pdd]\left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = 0 \end{aligned}\right\} (27)$$

第二系

$$\left.\begin{aligned} [paa]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pab]\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pac]\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right] + [pad]\left[\frac{\delta\beta}{p}\right] = 0 \\ [pab]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pbb]\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pbc]\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right] + [pbd]\left[\frac{\delta\beta}{p}\right] = 1 \\ [pac]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pcb]\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pcc]\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right] + [pcd]\left[\frac{\delta\beta}{p}\right] = 0 \\ [pad]\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pdb]\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pdc]\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right] + [pdd]\left[\frac{\delta\beta}{p}\right] = 0 \end{aligned}\right\} (28)$$

第三系

$$\left.\begin{aligned} [paa]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pab]\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + [pac]\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + [pad]\left[\frac{\gamma\delta}{p}\right] = 0 \\ [pab]\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pbb]\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + [pbc]\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + [pbd]\left[\frac{\gamma\delta}{p}\right] = 0 \end{aligned}\right\} (29)$$

$$\left.\begin{array}{l}[pac]\left[\dfrac{\alpha\gamma}{p}\right]+[pcb]\left[\dfrac{\beta\gamma}{p}\right]+[pcc]\left[\dfrac{\gamma\gamma}{p}\right]+[pcd]\left[\dfrac{\gamma\delta}{p}\right]=1\\ [pad]\left[\dfrac{\alpha\gamma}{p}\right]+[pdb]\left[\dfrac{\beta\gamma}{p}\right]+[pdc]\left[\dfrac{\gamma\gamma}{p}\right]+[pdd]\left[\dfrac{\gamma\delta}{p}\right]=0\end{array}\right\}.$$

第四系

$$\left.\begin{array}{l}[paa]\left[\dfrac{\alpha\delta}{p}\right]+[pab]\left[\dfrac{\beta\delta}{p}\right]+[pac]\left[\dfrac{\gamma\delta}{p}\right]+[pad]\left[\dfrac{\delta\delta}{p}\right]=0\\ [pab]\left[\dfrac{\alpha\delta}{p}\right]+[pbb]\left[\dfrac{\beta\delta}{p}\right]+[pbc]\left[\dfrac{\gamma\delta}{p}\right]+[pbd]\left[\dfrac{\delta\delta}{p}\right]=0\\ [pac]\left[\dfrac{\alpha\delta}{p}\right]+[pcb]\left[\dfrac{\beta\delta}{p}\right]+[pcc]\left[\dfrac{\gamma\delta}{p}\right]+[pcd]\left[\dfrac{\delta\delta}{p}\right]=0\\ [pad]\left[\dfrac{\alpha\delta}{p}\right]+[pdb]\left[\dfrac{\beta\delta}{p}\right]+[pdc]\left[\dfrac{\gamma\delta}{p}\right]+[pdd]\left[\dfrac{\delta\delta}{p}\right]=1\end{array}\right\}\quad(30)$$

(9) 式ノ α, β, γ ニ對スル式ヨリ簡單ニ次ノ關係ヲ導クヲ得

$$\left.\begin{array}{llll}\underline{[pa\alpha]=1} & [pb\alpha]=0 & [pc\alpha]=0 & [pd\alpha]=0\\ [pa\beta]=0 & \underline{[pb\beta]=1} & [pc\beta]=0 & [pd\beta]=0\\ [pa\gamma]=0 & [pb\gamma]=0 & \underline{[pc\gamma]=1} & [pd\gamma]=0\\ [pa\delta]=0 & [pb\delta]=0 & [pc\delta]=0 & \underline{[pd\delta]=1}\end{array}\right\}\text{.........}(31)$$

又誤差式ヨリ次式ヲ得

$$[p\alpha v]=0,\ [p\beta v]=0,\ [p\gamma v]=0,\ [p\delta v]=0\text{..............}(32)$$

此等ノ關係ハ總テ次ノ短縮セラレタル法正式ニ相應ス.

$$[pav]=0,\ [pbv]=0,\ [pcv]=0,\ [pdv]=0\text{...............}(33)$$

此等ノ關係ハ殘差ヨリ重み1ナルトキノ中數誤差ヲ誘導スルニ用セラル.

第十八節　二個ノ未知數ニ於ケル單位重みノ中數誤差

$$\left.\begin{array}{l}x, y \text{ ヲ平均値}\\ \mathrm{X}, \mathrm{Y} \text{ ヲ眞値}\\ v_1, v_2, v_3 \text{ ヲ殘差}\\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ ヲ眞誤差}\end{array}\right\}\text{トスレバ}$$

$$\left.\begin{array}{l}v=ax+by-l\\ \varepsilon=a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}-l\end{array}\right\}\text{..................................}(1)$$

$$v-\varepsilon=a(x-\mathrm{X})+b(y-\mathrm{Y})\text{..............................}(2)$$

故ニ　$v=a(x-\mathrm{X})+b(y-\mathrm{Y})+\varepsilon$ ....(3)

此式ハ誤差式　$v=ax+by-l$ ト同形ヲナス $[av]=0$ 及 $[bv]=0$ ヲ作ルトキハ一種ノ法正式ヲ得ベシ卽チ

$$\left.\begin{array}{l}[av]=[aa](x-\mathrm{X})+[ab](y-\mathrm{Y})+[a\varepsilon]=0\\ [bv]=[ab](x-\mathrm{X})+[bb](y-\mathrm{Y})+[b\varepsilon]=0\end{array}\right\}\text{...........}(4)$$

又　$[vv]$ ノ式ノ形ニ依リテ次式ヲ得

$$\begin{aligned}[vv]=[aa](x-\mathrm{X})^2&+2[ab](x-\mathrm{X})(y-\mathrm{Y})+2[a\varepsilon](x-\mathrm{X})\\ &+[bb](y-\mathrm{Y})^2\qquad+2[b\varepsilon](y-\mathrm{Y})\\ &\qquad\qquad\qquad+[\varepsilon\varepsilon]\end{aligned}$$

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}-\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb.1]}\text{..........................}(5)$$

〔參考〕　$[vv]=[ll]-\dfrac{[al]^2}{[aa]}-\dfrac{[bl,1]}{[bb,1]}$ ....前節(17)式ノ形ニ依ル

故ニ　$[vv]$ ハ $[\varepsilon\varepsilon]$ ヨリ小ナルヲ知ル而シテ $\dfrac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}$ 及 $\dfrac{[b\varepsilon,1]^2}{[bb.1]}$ ノ平均値ハ次ノ如ク定ムルヲ得ベシ

$$[a\varepsilon]^2=(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+\dots\dots)^2=a_1^2\varepsilon_1^2+a_2^2\varepsilon_2^2+a_3^2\varepsilon_3^2+\dots\dots+2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2\text{......}(6)$$

而シテ $\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2$………等ノ自乘ノ代リニ一般ノ平均値 m^2 ヲ入レ相乘積 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ハ其符號不定ニシテ平均ニ於テ消失スルモノトスレバ

$$[a\varepsilon]^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots)m^2+0$$

$$[aa]^2=[aa]m^2 \quad 又ハ \quad \frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}=m^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

同樣ニ

$$[b\varepsilon.1]=[b\varepsilon]-\frac{[ab]}{[aa]}[a\varepsilon]=(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots\cdots)-\frac{[ab]}{[aa]}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots\cdots)$$

$$=\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\varepsilon_1+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_2+\cdots\cdots$$

$$[b\varepsilon.1]^2=\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2\varepsilon_1^2+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_2+\cdots\cdots$$

$$+2\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_1\varepsilon_2+\cdots\cdots$$

又 $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2$ ノ平均値ヲ m^2 トシ相乘積 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ハ消失スルモノトスレバ

$$[b\varepsilon.1]^2=\left\{\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)^2+\cdots\cdots\right\}m^2$$

$$\frac{[b\varepsilon.1]^2}{m^2}=\left(b_1^2+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_1^2-2a_1b_1\frac{[ab]}{[aa]}\right)+\left(b_2^2+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_2^2-2a_2b_2\frac{[ab]}{[aa]}\right)+\cdots$$

$$=(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots)+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}(a_1^2+a_2^2+\cdots)-2\frac{[ab]}{[aa]}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots)$$

$$=[bb]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

$$\frac{[b\varepsilon.1]^2}{m^2}=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb.1]\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

此 (7) 及 (8) 式ヲ (5) 式ニ代入スル時ハ

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-m^2-m^2=[\varepsilon\varepsilon]-2m^2$$

而シテ　$\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}=m^2$ ナル故ニ $[\varepsilon\varepsilon]=nm^2$

故ニ　$[vv]=nm^2-2m^2=(n-2)m^2$

$$m^2=\frac{[vv]}{n-2} \qquad m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

同樣ニ

1個ノ未知數ナルトキハ　$m=\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-1}}$

3個ノ未知數ナルトキハ　$m=\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-3}}$

u 個ノ未知數ナルトキハ　$m=\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-u}}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

第十九節　二個ノ未知數ノ中數誤差

x, β, y ハ觀測値 l ト次ノ直線式ニ依テ結合セラル

$$x=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\alpha_3l_3+\cdots\cdots+\alpha_nl_n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\beta_3l_3+\cdots\cdots+\beta_nl_n\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

m ヲ觀測値 l ノ中數誤差トスレバ

$$m_x^2=\alpha_1^2m^2+\alpha_2^2m^2+\cdots\cdots=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots\cdots)m^2=[\alpha\alpha]m^2\cdots\cdots(3)$$

$$m_y^2=\beta_1^2m^2+\beta_2^2m^2+\cdots\cdots=(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots\cdots)m^2=[\beta\beta]m^2\cdots\cdots(4)$$

今中數誤差 m ノ重ミヲ1トスレバ

$$p_x=\frac{1}{[\alpha\alpha]} \qquad p_y=\frac{1}{[\beta\beta]}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

〔參考〕　$\dfrac{m^2}{m_y^2}=\dfrac{p}{p}-\dfrac{p_y}{1}=\dfrac{1}{[\beta\beta]}$

而シテ　$y=\dfrac{[bl.1]}{[bb.1]}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

此式ト (2) 式トヲ一致セシムル爲ニ先ヅ

$$[bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=(b_1l_1+b_2l_2+\cdots\cdots)-\frac{[ab]}{[aa]}(a_1l_1+a_2l_2+\cdots\cdots)$$

$$=\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)l_1+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)l_2+\cdots\cdots$$

之レヲ (6) 式ニ入ルル時ハ

$$y=\frac{b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1}{[bb.1]}l_1+\frac{b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a^2}{[bb.1]}l_2+\cdots\cdots$$

之レヲ (2) 式　$y=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\cdots\cdots+\beta_nl_n$ ト比スル時ハ

$$\beta_1=\frac{b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1}{[bb.1]}, \quad \beta_2=\frac{b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2}{[bb.1]}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

故ニ

$$\beta_1^2=\frac{1}{[bb.1]^2}\left(b_1^2-2\frac{[ab]}{[aa]}a_1b_1+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_1^2\right)$$

$$\beta_2^2=\frac{1}{[bb.1]^2}\left(b_2^2-2\frac{[ab]}{[aa]}a_2b_2+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_2^2\right)$$

$$[\beta^2]=\frac{1}{[bb.1]^2}\left([b^2]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[a^2]\right)$$

故ニ

$$[\beta\beta]=\frac{1}{[bb.1]^2}\left([bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)=\frac{1}{[bb.1]^2}[bb.1]=\frac{1}{[bb.1]}$$

故ニ $p_y=[bb.1]$ ....(8)

同樣ニ $[\alpha\alpha]=\dfrac{1}{[aa.1]}$ $p_x=[aa.1]$ ....(9)

$$m_y=\frac{m}{\sqrt{p_y}}=\frac{m}{\sqrt{[bb.1]}} \quad \text{..........(10)}$$

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{p_x}}=\frac{m}{\sqrt{[aa.1]}} \quad \text{..........(11)}$$

m ハ第十八節(9)式及第三章第十一節(5)式ニ依テ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}=\sqrt{\frac{[ll.2]}{n-2}} \quad \text{..........(12)}$$

第二十節　測量ノ重み等シカラザル場合

$$\left.\begin{array}{ll}\text{觀測值ヲ} & l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_n \\ \text{其ノ重みヲ} & p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n\end{array}\right\} \text{..........(1)トスレバ}$$

誤差式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{ll} v_1=a_1x+b_1y-l_1 & \text{重み } p_1 \\ v_2=a_2x+b_2y-l_2 & \text{重み } p_2 \\ v_3=a_3x+b_3y-l_3 & \text{重み } p_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ v_n=a_nx+b_ny-l_n & \text{重み } p_n \end{array}\right\} \text{..........(2)}$$

此時ハ $[pvv]$ ガ最小ナルコトヲ要ス..........(3)

法正式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l}[paa]x+[pab]y-[pal]=0 \\ [pab]x+[pbb]y-[pbl]=0\end{array}\right\} \text{..........(4)}$$

又 $[bb.1]$ ノ代リニ $[pbb.1]$ トナル

單位重みノ中數誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}=\sqrt{\frac{[pll.2]}{n-2}} \quad \text{..........(5)}$$

此中數誤差ハ實際ノ觀測值ニ屬スルモノニ非ズシテ重み1ナル假設ノ觀測值ノ有スル誤差ナリ.

今誤差式ニ $\sqrt{p}$ ヲ乘ズルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} v_1\sqrt{p_1}=a_1x\sqrt{p_1}+b_1y\sqrt{p_1}-l_1\sqrt{p_1} \\ v_2\sqrt{p_2}=a_2x\sqrt{p_2}+b_2y\sqrt{p_2}-l_2\sqrt{p_2} \end{array}\right\} \text{..........(6)}$$

之ヲ自乘シテ加フルトキハ $[pvv]$ ヲ得

而シテ次ノ略符ヲ用フ.

$$p_1a_1^2+p_2a_2^2+p_3a_3^2+\ldots\ldots=[paa] \quad \text{..........(7)}$$

第十八節(1)式ニ依リ

$$x=\frac{\alpha_1}{\sqrt{p_1}}(l_1\sqrt{p_1})+\frac{\alpha_2}{\sqrt{p_2}}(l_2\sqrt{p_2})+\ldots\ldots \quad \text{......(8)}$$

$$\frac{1}{p_x}=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \quad \frac{1}{p_y}=\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] \quad \text{..........(9)}$$

$$p_y=[pbb.1] \quad \text{..........(10)}$$

中數誤差ヲ前知スル場合

$$\left.\begin{array}{ll} \text{誤差式} & \text{平均前ノ } l \text{ ノ中數誤差} \\ v_1=a_1x+b_1y-l_1 & \pm m_1 \\ v_2=a_2x+b_2y-l_2 & \pm m_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ v_n=a_nx+b_ny-l_n & \pm m_n \end{array}\right\} \text{..........(11)}$$

平均條件ハ

$$\left[\frac{vv}{mm}\right]=\left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2+\left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2=\text{最小}\cdots\cdots\cdots(12)$$

法正式ハ

$$\left.\begin{array}{l}\left[\dfrac{aa}{mm}\right]x+\left[\dfrac{ab}{mm}\right]y-\left[\dfrac{al}{mm}\right]=0\\ \left[\dfrac{ab}{mm}\right]x+\left[\dfrac{bb}{mm}\right]y-\left[\dfrac{bl}{mm}\right]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

平均後ノ單位重みノ中數誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{vv}{mm}\right]}=\sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{ll}{mm}\times 2\right]}\cdots\cdots(14)$$

平均後ノlノ値ノ中數誤差ハ

$$\left.\begin{array}{l}m'_1=\dfrac{m}{1}m_1\\ m'_2=\dfrac{m}{1}m_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ m'_n=\dfrac{m}{1}m_n\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$m_1, m_2\cdots\cdots\cdots m_n$ ガ平均前ニ正シク定メラレタレバ $m=1$

故ニ $m'_1=m_1$; $m'_2=m_2$; $\cdots\cdots\cdots$

今1個ノ誤差式ノ重みガ2ナルトキハ

$$\left.\begin{array}{ll}v_1=a_1x+b_1y-l_1 & p=1\\ v_2=a_2x+b_2y-l_2 & p=1\\ v_3=a_3x+b_3y-l_3 & p=2\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

法正式ハ

$$(a_1^2+a_2^2+2a_3^2)x+(a_1b_1+a_2b_2+2a_3b_3)y-(a_1l_1+a_2l_2+2a_3l_3)=0$$

第三ノ誤差式ヲ二重ニ入ルヽトキハ

$$\left.\begin{array}{ll}v_1=a_1x+b_1y-l_1 & p=1\\ v_2=a_2x+b_2y-l_2 & p=1\\ v_3=a_3x+b_3y-l_3 & p=1\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

(16) 及 (17) 式ヨリ x, y 及 $[ll.2]=[vv]$ ヲ得ベシ

併シ此場合ノ中數誤差ヲ算出スルニハ

$$m^2=\frac{[vv]}{3-2}\text{トシ}\ m^2=\frac{[vv]}{4-2}\text{トナサズ}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

第二十一節　單位重みノ測量ノ中數誤差

單位重みノ測量ノ中數誤差ハ $m=\pm\sqrt{\dfrac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

式中 ε ハ眞誤差

然シ眞誤差ハ知ラレザル故ニ殘差 v ヲ用ヒテ $[p\varepsilon\varepsilon]$ ノ代リニ $[pvv]$ ヲ用フ.

$$aX+bY+cZ+dT=l+\varepsilon\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$ax+by+cz+dt=l+v\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル二式ヨリ次式ヲ得

$$\varepsilon=v+a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)+d(T-t)\cdots\cdots(4)$$

之レヨリ

$$\begin{aligned}[p\varepsilon\varepsilon]=&p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots\cdots\cdots+p_nv_n^2\\ &+2\{(p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\cdots\cdots\cdots+p_na_nv_n)(X-x)\\ &\quad+(p_1b_1v_1+p_2b_2v_2+\cdots\cdots\cdots+p_nb_nv_n)(Y-y)+\cdots\cdots\}\\ &+(X-x)\{[paa](X-x)+\cdots\cdots\cdots+[pad](T-t)\}\end{aligned}$$

$$+(Y-y)\{[pab](X-x)+\ldots\ldots\ldots+[pbd](T-t)\}$$
$$+(Z-z)\{[pac](X-x)+\ldots\ldots\ldots+[pcd](T-t)\}$$
$$+(T-t)\{[pad](X-x)+\ldots\ldots\ldots+[pdd](T-t)\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

本式ノ二行並ニ三行ハ第十七節 (33) 式ニ依リ零ニ等シ又未知數ノ眞値並ニ殘差ハ

$$x=[\alpha l] \qquad y=[\beta l] \qquad z=[\gamma l] \qquad t=[\delta l]$$

$$X=[\alpha l]+[\alpha\varepsilon],\ Y=[\beta l]+[\beta\varepsilon],\ Z=[\gamma l]+[\gamma\varepsilon],\ T=[\delta l]+[\delta\varepsilon]$$

ヨリ得ラル. 卽チ

$$x-X=[\alpha\varepsilon] \quad Y-y=[\beta\varepsilon] \quad Z-z=[\gamma\varepsilon] \quad T-t=[\delta\varepsilon]\ldots\ldots(6)$$

(4) 式ニ之レニ相應スル係數 pa, pb, pc 及 pd ヲ乘ジ加フレバ次式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}
&[paa](X-x)+[pab](Y-y)+[pac](Z-z)+[pad](T-t)=[pa\varepsilon]\\
&[pab](X-x)+[pbb](Y-y)+[pbc](Z-z)+[pbd](T-t)=[pb\varepsilon]\\
&[pac](X-x)+[pcb](Y-y)+[pcc](Z-z)+[pcd](T-t)=[pc\varepsilon]\\
&[pad](X-x)+[pdb](Y-y)+[pdc](Z-z)+[pdd](T-t)=[pd\varepsilon]
\end{aligned}\right\}(7)$$

(5) (6) 及 (7) 式ヨリ

$$[p\varepsilon\varepsilon]=[pvv]+[\alpha\varepsilon][pa\varepsilon]+[\beta\varepsilon][pb\varepsilon]+[\gamma\varepsilon][pc\varepsilon]+[\delta\varepsilon][pd\varepsilon]\ \ldots\ldots(8)$$

右邊ヲ展開シ ε ノ順序ニ並ブレバ

$$\begin{aligned}
[p\varepsilon\varepsilon]=[pvv]&+(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1+d_1\delta_1)p_1\varepsilon_1^2\\
&+(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2+d_2\delta_2)p_2\varepsilon_2^2\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(a_n\alpha_n+b_n\beta_n+c_n\gamma_n+d_n\delta_n)p_n\varepsilon_n^2+[q\varepsilon_i\varepsilon_\kappa]\ldots\ldots\ldots(9)
\end{aligned}$$

最後ノ項 $[q\varepsilon_i\varepsilon_\kappa]$ ニ於ケル眞誤差 ε ハ正負略同數ニ現ハルルガ故ニ零ニ等シトスルヲ得. 又 ε^2 等ノ代リニ其平均値卽チ單位重みノ

中數誤差ノ自乘 m^2 ヲ用ヒ且ツ $[p\varepsilon\varepsilon]=nm^2$ トスレバ (9) 式ハ次ノ如クニ變ズ.

$$n.m^2=[pvv]+m^2([pa\alpha]+[pb\beta]+[pc\gamma]+[pd\delta])\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

第十七節 (31) 式ニ依リ

$$[pa\alpha]=[pb\beta]=[pc\gamma]=[pd\delta]=1$$

故ニ n ヲ未知數ノ數トスレバ此等ノ和ハ u ニ等シ.

故ニ　$$n.m^2=[pvv]+um^2$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

第二十二節　條件付測量ノ中數誤差

n 個ノ未知數ガ直接測量セラレ其等ノ間ニ滿足セラル可キ條件式 n' 個アルモノトスレバ此法ニ於テハ觀測値ハ此等ノ條件ヲ滿足スルノミナラズ誤差ノ自乘ノ和ガ最小トナル如ク修正セラレザル可カラズ. 但シ $n>n'$ トス.

一般ニ條件付測量ノ平均ハ間接測量ニ誘導スルヲ得ルモノニシテ例ヘバ n 個ノ未知數 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ ヲ決定スル爲メニ精密度等シキ測量ヲ行ヒタリトシ未知數ノ間ニハ滿足サル可キ次ノ n' 個ノ條件式アリトス.

$$n'\text{個}\left\{\begin{aligned}
&a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots\ldots\ldots+a_nx_n=0\\
&b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots\ldots\ldots+b_nx_n=0\\
&c_0+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots\ldots\ldots+c_nx_n=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n_0'+n_1'x_1+n_2'x_2+n_3'x_3+\ldots\ldots\ldots+n_n'x_n=0
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

未知數 x ノ代リニ觀測値 l ヲ用フレバ上式ハ滿足サレズ依テ次式ヲ生ズ

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+\cdots\cdots+a_nl_n=w_1 \\ b_0+b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3+\cdots\cdots+b_nl_n=w_2 \\ c_0+c_1l_1+c_2l_2+c_3l_3+\cdots\cdots+c_nl_n=w_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_0'+n_1'l_1+n_2'l_2+n_3'l_3+\cdots\cdots+n_n'l_n=w_n' \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ觀測値 l ニ對シテ v ナル修正ヲ施セバ誤差 w ヲ消滅セシムルヲ得可シ. 卽チ

$$a_0+a_1(l_1+v_1)+a_2(l_2+v_2)+\cdots\cdots+a_n(l_n+v_n)=0$$

之レヲ (2) ノ第一式ト比較スレバ

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w_1=0$$

同樣ニ此種ノ式 n' 個ヲ得可シ

$$n'\text{個}\left\{\begin{array}{l} a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w_1=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots\cdots+b_nv_n+w_2=0 \\ c_1v_1+c_2v_2+\cdots\cdots+c_nv_n+w_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{n_1'v_1+n_2'v_2+\cdots\cdots+n_n'v_n+w_n'=0}_{n\text{個}} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

此他尙平均條件ハ

$$[vv]=\text{最小}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

未知數及條件式ノ數ニ關シテ次ノ條件アリ

$$n>n'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

然ラザレバ (4) 式ヲ使用セズシテ (3) 式ヨリ v ヲ定ムルヲ得ル故

ナリ

次ニ間接測量ノ形ニ導ク爲メニ任意ノ n' 個ノ未知數ヲ他ノ $n-n'$ 個ノ未知數ニテ示ストキハ

$$n'\text{個}\left\{\begin{array}{l} v_1=A_1v_{n'+1}+B_1v_{n'+2}+\cdots\cdots+H_1v_n \\ v_2=A_2v_{n'+1}+B_2v_{n'+2}+\cdots\cdots+H_2v_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{n'}=\underbrace{A_{n'}v_{n'+1}+B_{n'}v_{n'+2}+\cdots\cdots+H_{n'}v_n}_{(n-n')\text{個}} \end{array}\right\}\cdots\cdots(6)$$

之レニ尙次式ヲ附加シテ考フ

$$(n-n')\text{個}\left\{\begin{array}{l} v_{n'+1}=v_{n'+1}\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{n'+2}=\cdots\cdots v_{n'+2}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots v_n}_{(n-n')\text{個}} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

然ルトキハ未知數 $(n-n')$ 個ヲ有スル $n'+(n-n')$ 卽チ n 個ノ誤差式ヲ得.

故ニ單位重みノ中數誤差ハ第十八節 (10)式ニ依リ次式ニテ求メラル.

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{\{n'+(n-n')\}-(n-n')}}=\sqrt{\frac{[vv]}{n'}}\cdots\cdots(8)$$

又觀測値 $l_1, l_2, l_3\cdots\cdots l_n$ 等ノ重みヲ夫々 $p_1, p_2, p_3\cdots\cdots p_n$ トスレバ

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n'}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

此法ハ n' ニ比シ $(n-n')$ ガ小ニシテ又初メノ n' 個ノ未知數ガ簡單ニ $(n-n')$ 個ノ未知數ニテ示サレ得ル場合ニ屢々用ヒラル

第二十三節　條件付測量ノ現ハレ易キ誤差

條件付測量ガ第三章ノ方法卽チ n 個ノ觀測式ニ於テ q 個ノ未知數ヲ n' 個ノ條件式ニ依リ $q-n'$ 個ノ獨立數ニ爲シ整正シタルトキハ重み 1 ナル測量ノ現ハレ易キ誤差ハ明カニ第十七節 (2) 式ニ於テ q ノ代リニ $q-n'$ ヲ代入スレバ可ナリ卽チ

$$\gamma=0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q+n'}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又重み $p_1, p_2 \cdots\cdots p_q$ 等ノ測量ノ現ハレ易キ誤差ハ

$$\gamma_1=\frac{\gamma}{\sqrt{p_1}}\qquad \gamma_2=\frac{\gamma}{\sqrt{p_2}}\cdots\cdots\gamma_q=\frac{\gamma}{\sqrt{p_q}}$$

$z_1, z_2 \cdots\cdots z_q$ ノ重みハ前節ノ方法ニテ求メラル.

第三章ノ方法ニテ整正セラルル多數ノ未知數ニ於ケル直接測量ノ場合ニハ觀測式ノ數ハ未知數ノ數ニ等シ卽チ

$$n=q$$

而シテ條件式ノ數ガ n' ナレバ重み 1 ナル測量ノ現ハレ易キ誤差ハ

$$\gamma=0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之レヨリ或ル重みノ測量ノ現ハレ易キ誤差ハ直チニ求メラル此場合ニハ殘差 v ハ單ニ觀測値ト整正値ノ差ナリ.

應　用　實　例

第三章及第四章ニ於テ測量ノ整正及比較ニ關スル方法及公式ヲ述ベタリ爰ニ此等ノ方法ノ應用ヲ示サントス而シテ測量ノ最モ普通ノ場合ハ一個ノ未知數ニ於ケル直接測量ノ場合ナリ

第　五　章

一個ノ未知數ニ於ケル直接測量

第一節　重み等シキ測量

或ル未知數ヲ等シキ注意ヲ以テ數回測量スルトキハ其ノ測量ノ重みハ等シ昔ヨリ直接測量ノ算術的平均數ハ其未知數ノ最モ確カラシキ値ト考ヘラレタリ而シテ最小二乘法ノ主義ニ依リ之ガ正シキコトヲ前述セリ

今 x ヲ未知數ノ最モ確カラシキ値, n ヲ測量ノ數, l ヲ或ル觀測値トシ γ ヲ一回ノ觀測ノ現ハレ易キ誤差. γ_x ヲ整正値 x ノ現ハレ易キ誤差. v ヲ殘差誤差トスレバ未知數ノ最モ確カラシキ値ハ算術的平均數ニシテ卽チ

$$x=\frac{[l]}{n}$$

又一回ノ測量ノ現ハレ易キ誤差ハ第十節ニ依リ

$$\gamma=0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

又算術的平均數ノ現ハレ易キ誤差ハ

$$\gamma_x=\frac{\gamma}{\sqrt{n}}=0.6745\sqrt{\frac{(vv)}{n(n-1)}}$$

第三章第三節 (1) 式ニ依リ

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\cdots\cdots+l_n}{n}$$

次ニ x ノ値ヨリ各觀測値ヲ減ジテ n 個ノ v ヲ見出シ之ヲ二乘シテ