趙繚編

數學辭典

此書現由
上海熱河路中
求益書社發售

五版

群益書社印行

王運長題

第　一　門

辭 典 之 部

FIRST SECTION

DICTIONARY

OF

The Technical Terms Containing In

Elementary Mathematics.

第一門　辭典之部　目次

例言

● 本門搜集算術,代數,幾何,三角,範圍內之辭,及數學大科目之辭,以其辭首字爲序,次註英字,[法美字間亦註之]而解釋之.

● 我國固有數辭,如周髀,九章,天元等,日本特有數辭,如寄算,引算等,譯音不一之數辭,如米突,邁當等,及近日沿用新造數字,如兙,瓸,瓩,粁等,均收入此門.

● 凡欲查一辭,先將其辭首字畫數,於本頁眉上,查得其頁數,次於本門眉上,查得其首字,即容易查得其辭矣.

● 字之畫數,有難定者,茲將本門數辭首字,集爲檢字如次.

檢字

【一畫】一【二畫】二七八九十【三畫】
三大小弓巳子口千【四畫】不公
內中分比方反水切五六文月
化元天日支付太引孔心手片
勿火少尺升【五畫】平正外代立
四可生加半未凸凹布打永仕
句北本必母世仙弗瓦矛司
【六畫】共同有劣合多因自地交
列米夸次曲西百收仲行全式
回名仰冰向年安吋兆【七畫】角
完作利克求希折発布成系夾
更投位延足吟研序玨均【八畫】
直垂定法股亞近長弧周披的
底阿果兩初命金所和取非函
並奇空沿昇弦例性附林廷奸
券受承河【九畫】相指省計表重
負恆保約軌面前後括度架係
耶紀星秒首要限洛即按英背
南封降廻派柱瓸瓱竕粉瓰兙
粁盈【十畫】逆眞根乘特海記除
株消素純高倍差配格展容殺
做矩扇射原値術馬時息徑航
粍粎瓲埋敵哩浬哥振借差
【十一畫】斜球逕第商被基組假
密啓常部累既動頂混通側逐
理符從路票得現旋梯細帶添
速偶研推問移排規趾接黃透
訥寄掛砸瓸竡瓱【十二畫】等單
最無幾普減開測傍割循鈍爲
絕期閏軸超剩畫短虛寒溫惠
圍象距順量菱硯華階項答買
結散插隅發甄粨筋陽渾粟策
【十三畫】圓補極解經匯運傾
資零裏視楔微愛損鉛稜酬暗
置會廉葩【十四畫】對算截實遞
銀演廣齊誘遠滿臺聚誤衛境
輕僑蜒頭瓼【十五畫】複數調線
輪適鄰緯竰圖銳歐標窮橫價
磅碼糎噎甏篩節億【十六畫】餘
積整諸錐錯辨糖靜噸確麵優
【十七畫】總壔點邁擬薛縷
應聯輿彊【十八畫】雜歸轉額鎊
【十九畫】麗羅邊證藥【二十一畫】
攝變【二十三畫】體驗籤

目次

序

近世一科學問,必有一科參攷書.參攷書之便於檢查者,厥惟辭典.數學一科,何獨不然,余留日時,見長澤龜之助所著數學辭書,亟欲譯以貢獻於我國數學界.顧其第一門辭書之部,乃以羅馬字併日本音,於我國不便,且無我國數辭.第九門數學小史之部,僅述歐洲之數學史亦於我國數千年來之創造,足以鼓勵來茲者,則付闕如,是固不可不重行編纂者也.乃於修學之暇,教授之餘,編之譯之,其間人事阻隔,或作或輟者有年.三年春,袁世凱興黨獄,湯薌銘取媚於袁,凡隸國民黨黨籍者,多遭荼毒.余遂走上海,應羣益書社之聘,編纂是書.閱二年而初稿成.復以湘中變亂,扶老攜幼,匍匐於兵匪之間.當張敬堯入湘時,原稿之埋藏於土窟者數閱月,是書幸存,不得謂非刼灰之餘燼也.爾後每獲寸暇,時有增修.去歲更潛心改訂,又復一年,乃底於成.雖不敢遽稱完美,而余之用力於此者,蓋已多矣.是書凡分九門,曰辭典之部,

曰英漢學語之部,曰算術問題解法之部,曰代數學問題解法之部,曰平面幾何學解

曰立體幾何學解法之部,曰平面三角法問題解法之部附球面三角法問題解法,曰數學小史內篇,曰數學小史外篇.附錄有問題解法索引及索引目次,曰數學小史內篇人名索引曰數學小史外篇人名地名之譯音及索引,數學用略字,各門體例目次等,述於各門之始,茲不贅.印刷時,關於修改譯文,校正訛誤,深感余叔奎楊湘三兩君之力,尚盼海內專家,賜以教言,幸甚.

中華民國十二年八月二日

長沙趙繚識

數學辭典

第一門　辭典之部

一畫

一次方程式. 日 英 Equation of the first degree. 或 Linear equation. 又 Simple equation. 謂僅含未知數一乘羃之方程式. 例如一元一次方程式, 卽一未知數之一次方程式, 其一般之形, 爲 $ax+b=0$. 解之, 爲 $x=-\frac{b}{a}$. 又含二未知數之一次方程式, 其一般之形, 爲 $ax+by+c=0$.

一般之二次式. 日 英 General quadratic expression. 含一未知數之一般二次式, 爲 ax^2+bx+c. 含二未知數之一般二次式, 爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$.

一般之解答. 日 英 General solution. 作一般之答之公式也. 例如父年 30 歲, 子年 10 歲, 問自今幾年後, 父年爲子年之二倍之問題, 而將父年爲 a, 子年爲 b, 求自今幾年後, 父年爲子年之 m 倍, 則 $a+x=m(b+x)$, 卽 $x=\frac{a-mb}{m-1}$.

一般式. 日 英 General expression. 例[illegible]數之一次一般式, 爲 $ax+b$. [illegible]般式, 爲 ax^2+bx+c. 又如 [illegible]$+2ab+b^2$ 等, 有用爲範式[illegible]

[illegible] 英 Universal arithmetic. 數學大家奈端, [Newton 1642-1727] 曾著一書, 名 Arithmetica Universalis, 卽一般算術 [Generalized arithmetic] 之起原也. 卽論一般之數之算術, 爲代數學之別名. 然當時之一般算術究非若現今代數學之發達也.

一項式. 日 英 Monomial expression. 謂自一項而成之代數式也. 例如 a 或 $3xy^2$ 等.

一乘方. 中 日 英 First power. 對於某數之二乘方三乘方, 而謂其本數爲其數之一乘方. 例如 5 之一乘方爲 5^1, 卽 5. 而 a 之一乘方爲 a^1, 卽 a. 皆本數也.

一乘羃. 中 日 英 First power 與一乘方同.

一從. 中 古籌算名. 一位之數, 豎籌記之, 故云.

一覽拂. 中 英 Sight draft 日本匯兌票名. 卽卽期票期也. 見卽期票條.

二畫

二十四面體. 日 英 Tetrahexahedron. 謂以二十四平面所成之立體.

二十面體. 日 英 Icosahedron. 謂以二十平面所成之立體.

二次方程式. 日 英 Quadratic equation, 或 Equation of the second degree. 方程式, 含未知數之二乘羃, 或二

次元之項,謂之二次方程式.例如 $3x^2-5x+6=0$, $x^2-xy+y^2=0$, $xy+x-2y-7=0$,等,是也.一未知數之普通二次方程式,有二根,以 α, β 表之,則

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

$$及\ \beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-5ac)}}{2a}.$$

因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, 及 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. 故二根之和,等於 $-\frac{b}{a}$.而二根之積,等於 $\frac{c}{a}$ 例如 $6x^2-x-9=0$, 則二根之和,爲 $\frac{1}{6}$. 其積,爲 $-\frac{1}{3}$. 1. $b^2-4ac>0$, 則二根爲不相等之實數.例如 $x^2+4x-12=0$, 則因 $b^2-4ac=64$. 故二根爲不相等之實數. 2. $b^2-4ac=0$,則二根爲相等之實數.例如 $x^2-4x+4=0$, 則因 $b-^24ac=0$. 故二根爲相等之實數. 3. $b^2-4ac\leqq0$, 則二根爲共軛虛數.例如 $x^2-2x+3=0$, 則因 $b^2-4ac=-8$, 故二根爲共軛虛數. 4. b^2-4ac 爲正,且爲有理數之平方,則二根爲有理之實數.例如 $x^2-5x+4=0$, 則因 $b^2-4ac=9$. 故二根爲有理之實數. 5. b^2-4ac 爲正,而非有理數之平方,則二根爲共軛無理之實數.例如 $x^2-5x+2=0$, 則因 $b^2-4ac=17$. 故二根爲共軛無理之實數. 6. $b=0$, 則二根之絕對值相等,而符號相反.例如 $2x^2+5=0$, 則二根之絕對值相等,而符號相反. 7. $c=0$, 則一根爲有理之實數,一根爲0.例如 $2x^2-3x=0$,則一根爲有理之實數,一根爲0. 8. $b=0$, $c=0$, 則二根俱爲0,例如 $2x^2=0$, 則二根俱爲0. 又如 a 爲0,則元方程式,非二次而爲一次.然須研究 a 漸小時,二根將如何之値. (1). $a=0$, $b\neq0$, $c\neq0$, 則一根爲無窮大,而餘一根爲 $-\frac{c}{b}$ 蓋雖 $\alpha=-\frac{b}{0}+\frac{\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0}$ 成不定之形,然

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{[-b+\sqrt{(b^2-4ac)}][-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}{2a[-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{[2a-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

故 $a=0$,則 $\alpha=-\frac{c}{b}$ 又 $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-2b}{0}=\infty$. 例如 $0.x^2+2x+3=0$, 則一根爲無窮大一根爲 $-\frac{3}{2}$. (2). $a=0$, $b=0$, $c\neq0$, 則二根皆爲無窮大.蓋

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{b^2(b^2-4ac)}{2a[-b-\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}},\ 及$$

$$\beta=\frac{-b^2-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a[-b+\sqrt{(b^2-4ac)}]}$$

$$=\frac{2c}{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

故 $a=0$, $b=0$, $c\neq0$, 則 $\alpha=\infty$, $\beta=\infty$. 例如 $0.x^2+0.x+2=0$, 則二根俱爲無窮大.

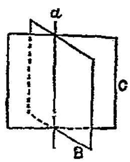
二次式. 圖 英 Quadratic expression. 代數式含某文字之二乘方或含二文字以上二次元之項,謂之二次式.例如 $3x^2-5x+6$, $xy+y^2-1$, $xy-xz-y+6$ 等.又 x 之普通二次式,爲 ax^2+bx+c.

二次函數之分別式. 圖 英 Discriminant of quadratic function. x 之二次函數

ax^2+bx+c 之分別式,爲 b^2-4ac. 其分別之法,見二次方程式之條.

二次根數. 代 英 Surd of the second order 或 Quadratic surd. 謂根指數爲 2 之根數. 例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{a}$ 等.

二面角. 幾 英 Dihedral angle. 謂二平面 [B,C] 相交所成之二面角. 其交線 a, 謂之二面角之稜, 其各平面, 謂之二面角之面. 又二面角, 亦可視爲以稜爲軸, 而旋轉一面所生之角



而角之大小, 因其旋轉量之多少, 而不關於其面之大小. 二直線相交成每二相等二組之角, 謂之對頂角. 二平面相交, 亦成每二相等二組之角, 謂之對稜角. 於二面角稜之任一點, 作稜之垂線於各平面, 則所成之角爲常數. 此角謂之二面角之平面角. 測二面角時, 用此角.

二面角之平面角. 幾 英 Plane angle of dihedral angle. 見二面角條.

二乘方. 算 代 英 Second power. 謂某數或某式之平方也. 例如 5 之二乘方, 爲 5^2. 而 a 之二乘方, 爲 a^2. [詳見乘方條].

二乘比. 算 代 英 Duplicate ratio. 比 $a^2:b$ 謂爲 $a:b$ 之二乘比.

二乘根. 算 代 英 Second root. 同平方根.

二乘冪. 算 代 英 Second power 與二乘方同.

二項方程式. 代 英 Binomial equation. a 爲正數或負數, 實數或虛數, 而 m 爲任意之正整數, 則能化成 $x^m-a=0$ 之形之方程式. 謂之二項方程式. 二項方程式, 可化爲最簡之形. 蓋將 a, 之 m 乘根爲 a' 而 $a'y=x$, 則 $ay^m=a$. 故 $ay^m-a=0$, 即 $y^m-1=0$, 故二項方程式之研究, 以 $y^m-1=0$ 之形而始. 1. m 爲奇數, 則方程式有一實根, 即 1. 其餘根皆爲虛數. 蓋將大於 1 之數, 代入 y, 則左邊爲正數, 將小於 1 之數代入 y, 則左邊爲負數, 故無論如何之正數或負數, 不能適當於 $y^m-1=0$. 2. m 爲偶數, 則 $+1$ 及 -1, 爲 $y^m-1=0$ 之根. 其餘根皆爲虛數. 其理同上. 3. r 爲方程式之一根, 則 r 任意乘方, 亦爲方程式之一根. 蓋 r 爲一根, 則 $r^m=1$. 取兩邊之 n 乘冪, 則 $r^{mn}=1$. 故 $r^m-1=0$ 之根爲 r, 則 $r^2, r^3, r^4 \ldots\ldots r^{-1}, r^{-2} \ldots\ldots$, 亦其根也. 然方程式於此等之中, 惟能得 m 個相異之根, 而又能證明任二根之不相等. 4. m 爲奇數, 則各虛數之代數和爲 -1. 蓋凡方程式諸根之和, 爲第二項係數 [此則爲 0] 之符號相反者. 而 $y^m-1=0$ 之實根爲 1, 故也. 若 m 爲偶數, 則各虛根之和爲 0, 其理同上. 5. m 爲奇數, 則各虛根之連乘積, 等於 $+1$. 蓋凡方程式諸根之積, 等於不含 x 項之符號相反者. 即在此爲 $+1$. 而實根爲 $+1$. 故各虛根之連乘積, 亦當爲 $+1$. 依同理, 能證明 m 爲偶數, 其各虛根之連乘積, 亦爲 $+1$. 又依同理, 能證明各根相異二個之和, 或相異三個和之和, …… 相異 n 個 [但 $n<m$] 之和, 亦爲 0. 6. $y^m-1=0$ 各之根, 能自

$$y=\cos\frac{2k\pi}{m}\pm\sin\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}$$ 之公式求之

但 k 爲 0, 或爲正整數, 而 $\pi=180^\circ$ 也各根之在此公式, 而 m 爲奇數, 則∋

第自 $k=0,\ k=1,\ k=2,\ldots\ldots\ldots k=\frac{m-1}{2}$ 得之. 如斯所得 y 之值, 雖互相異, 而此等 k 以上之值, 所得 y 之值, 亦同前, 且同次序而循環之. 此理已述於前之[3]. 例如欲求 $y^m-1=0$ 之根. 其 $m=4$, 而 $k=0$, 則 $y=1$, $k=1$, 則 $y=\pm\sqrt{-1}$, $k=2$, 則 $y=-1$. 故此方程式有 $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ 之四根.

又如欲求 $y^3-1=0$ 之根. 其 $m=3$. 而 $k=1$ 則 $y=1$, $k=2$, 則

$y=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}$. 但 $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. 故 $y=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$ … 因得三根爲 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3-})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$. 通例以 $1, w, w^2$ 表之. 若欲求 $x^m-a=0$ 之根, 則將 a 之 m 乘冪, 乘 $y^n-1=0$ 之根, 卽得.

二項式. 圖 英 Binomial expression. 謂自二項所成之式. 例如 $a+b$, $3x+2y^2$ 等.

二項式定理. 圖 英 Binomial theorem 二項式定理, 謂

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2$$
$$+\ldots\ldots+\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{n-r}a^r+\ldots.$$

但 n 爲正數或負數, 爲整數或分數, 皆可, 玆證明之. 先將 n 爲正數, 假定

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2+\ldots$$
$$+{}_nC_rx^{n-r}a^r+\ldots\ldots+a^n$$

爲眞. 將 $x+a$ 之因數乘其兩邊, 則

$$(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+(1+{}_nC_1)x^na+({}_nC_1+{}_nC_2)x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)x^{n-r}a^r+\ldots\ldots+a^{n+1}.$$

而 $1+{}^nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$,

${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{(n+1)n}{2!}={}_{n+1}C_2$,

而一般 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$

故 $(x+1)^{n+1}=x^{n+1}+{}_{n+1}C_1x^na+{}_{n+1}C_2x^{n-1}a^2+\ldots\ldots+{}_{n+1}C_rx^{n+1-r}a^r+\ldots\ldots+a^{n+1}$

故此定理, 若 n 爲任意之值而眞, 則 $n+1$ 亦眞, 如是 $(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$,

$(x+a)^3=x^3+3x^2a+\frac{3.2}{1.2}xa^2+a^3$.

故 $n=3$, 此定理亦眞. 而 $n=4$, 此定理亦眞. 既知 $n=4$ 亦眞, 則 $n=5$ 亦眞. 故知此定理 n 爲任意之整數, 皆眞, 如此之證明法, 謂之數學的歸納法. [Mathematical induction] [最大項] $\frac{(n+1)x}{x+1}+1>r>\frac{(n+1)x}{x+1}$, 則 $(1+x)^n$ 之展開式第 r 項之絕對值, 大於其餘諸項之絕對值. 若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$, 則第 r 項與第 $r+1$ 項相等, 而其絕對值大於其餘諸項之絕對值. [最大係數]. n 爲偶數. 而 $r=\frac{n}{2}+1$, 則第 r 項之係數最大, n 爲奇數, 則 $(n+1)/2$ 項及 $(n+3)/2$ 項之係數相等, 而大於其餘諸項之係數. [係數之性質]. 將二項展開式, 記爲

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+{}_2cx_2+\ldots\ldots+c_rx^r$$
$$+\ldots\ldots+c_nx^n\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

但 $c_0=c_n=1$, $c_1=c_{n-1}=n$. 而凡 $c_r=c_{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. I. 於 (1) 而 $x=1$, 則

$2^n=c_0+c_1+c_2+\ldots\ldots\ldots+c_n$,

卽 $(1+x)^n$ 之展開式係數和爲 2^n.

II. 於 (1) 而 $x=-1$, 則

$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2\ldots\ldots\ldots+(-1)^nc_n$, ∴

$0=(c_0+c_2+c_4+\dots\dots)-(c_1+c_3+c_5+\dots)$. 故$(1+x^n)$之展開式,其奇數項之係數和,等於偶數項之係數和. 次再證明此定理n為任意數皆眞. 試先補一題. [依x方而序列之二級數,取其成收斂級數時x之各值,而使二級數相等,則對應之係數,必互相等.] 卽方程式 $a+bx+cx^2+dx^3+\dots\dots$
$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots\dots\dots$ (1). 二級數以x之各值而收斂時為眞. 然則$x=0$,此方程式亦必眞. 今將$x=0$,則$a=A\dots\dots\dots(2)$.
自(1)減(2),而以x除其兩邊,則$b+cx+dx^2+\dots.=B+Cx+Dx^2+\dots\dots\dots(3)$,若$x=0$,則$b=B\dots\dots(4)$,自(3)減(4),而以$x$除其兩邊,則$c+dx+\dots\dots.=C+Dx+\dots\dots\dots\dots(5)$,若$x=0$,則$c=C$. 餘類推. 以上既證明本定理$n$為正整數,而

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\dots\dots\dots$$

再論n為分數及負數者. I. n為正分數,而等於p/q. 如x之$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots\dots\dots$為收斂級數,假定$(1+x)^p=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots\dots\dots.)^q$ $\dots\dots\dots\dots$(1),[此假定之適當,蓋若將(1)之兩邊各展開,則

$$1+px+\frac{p(p-1)}{1.2}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^3+\dots\dots$$

及 $$A^q+qA^{q-1}Bx+\left(\frac{q(q-1)}{1.2}A^{q-2}B^2+qA^{q-1}C\right)x^2$$
$$+\left(\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}A^{q-3}B^3+q(q-1)A^{q-2}BC+qA^{q-1}D\right)x^3+\dots\dots$$

此第二級數,其前k個係數,為A, B, C, D……k個相雜而成. 若令二級數至第k項相對之係數相等,(補題)則可得其前k個未知數A, B, C, D………故(1)之假定為適當也. 二第一項使相等,又二第二項使相當,則$A^q=1$. $\therefore$ $A=1$. 又 $qA^{q-1}B=p$, $\therefore$ $B=\frac{q}{p}$.

取兩邊之q乘根,則

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{q}x+Cx^2+Dx^3+\dots\dots.(2).$$

但x須取其右邊之級數為收斂者.

II. $n=-m$,則m為正,而

$$(1+x)^n=(1+x)^{-m}=\frac{1}{(1+x)^m}.$$

自(2)知m為整數或分數,皆為

$$\frac{1}{(1+x)^m}=\frac{1}{1+mx+cx^2+dx^3+\dots..}.$$

依實際之除法,知其為

$$(1+x)^{-m}=1-mx+Cx^2+Dx^{-3}+\dots\dots\dots(3)$$

之形. 自(2)及(3)知n為整數或分數,正數或負數,均為

$$(1+x)^n=1+nx+Cx^2+Dx^3+\dots\dots\dots,$$

但其右邊須為收斂級數,兩邊若平方之,則

$$(1+2x+x^2)^n=1+2nx+\left(2C+n^2\right)x^2+\left(2D+2nC\right)x^3+\dots.(4)$$

又 $(1+y)^n=1+ny+Cy^2+Dy^3+\dots\dots\dots$

故置$y=2x+x^2$,則

$$(1+2x+x^2)^n=1+n(2x+x^2)+C(2x+x^2)^2+D(2x+x^2)+\dots\dots$$
$$=1+2nx+\left(n^2+4C\right)x^2+\left(4C+8D\right)x^3+\dots\dots(5)$$

將(4)及(5)相對之係數使相等,而

$$n+4C=2C+n^2,$$
$$4C+8D=2D+2nC,$$

$2C=n^2-n, \qquad \therefore C=\frac{n(n-1)}{1.2}$

$3D=(n-2)C, \qquad \therefore D=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

餘類推. 故n爲整數或分數, 正數或負數, 皆爲

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3\cdots\cdots$$

但右邊須爲收斂級數. n非正整數, 則所得之數, 爲無窮級數, 例如

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}x^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3.6}x^2+\frac{2.5}{3.6.9}x^3-\cdots$$

但右邊必爲收斂級數方合. 又將344之立方根, 求至小數第六位.

$$344=343\left(1+\frac{1}{343}\right)=7^3\left(1+\frac{1}{343}\right)$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{344}=7\left(1+\frac{1}{343}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=7\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{343}\right)+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}\left(\frac{1}{343}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=7(1+0.00097187-0.000000944$$

$$=7.006796.$$

二項係數. 圖 英 Binomial coefficients. 二項係數者, 爲依二項式定理, 展開$(x+a)^m$之係數而爲$1, m, \frac{m(m-1)}{2!}, \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}, \ldots, \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{r!}$

其m爲正整數, 則此係數等於$1, {}_mC_1, {}_mC_2, \ldots\ldots, {}_mC_r, \ldots\ldots$

但${}_mC_r$者, 謂自m物式取r物組合之數也.

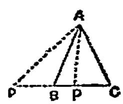
二項級數. 圖 英 Binomial series. 謂將$(x+a)^m$, 依二項式定理展開之級數也. 即

$$x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}a^3+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{r!}x^{m-r}a^r+\cdots\cdots,$$

若m爲分數或負數, 則爲無窮級數.

二等分線. [角的]. 圖 英 Bisector. 角之二等分線者,謂將角分爲全相等二部分之直線也, 又某角之外角之二等分線, 謂爲其角之外二等分線, 因此謂其角之二等分線, 爲內二等分線. 某角之內二等分線, 與其外二等分線, 成直角.

二等邊三角形. 圖 英 Isosceles triangle. 三角形二邊相等者, 謂之二等邊三角形, 或謂之等脚三角形, 或謂之等腰三角形, 而其餘一邊, 謂之底, 其對於底之角, 謂之頂角. 三角形之二邊相等, 則對之之角亦相等. 而其逆亦眞. 二等邊三角形頂角之二等分線, 爲底之垂直二等分線, 而其逆亦眞. 自頂角向二等邊三角形之底, 作一中線, 則爲底之垂直二等分線, 又爲頂角之二等



分線. 於二等邊三角形ABC之底BC上, 或其延長上, 取一點P, 則
$\overline{AP}^2 \sim \overline{AB}^2=BP.CP.$

二等邊梯形. 圖 英 Isosceles trapezoid. 梯形不平行之二邊相等者. 謂之二等邊梯形. 二等邊梯形, 平行二邊之一,其兩端之角相等.

二進記法. 圖 英 Binary scale. 謂記數滿2進位之法也. 現行於世者, 爲

十進法，滿 10 則進位．將此 10 變爲用 2，謂之二進記法．故二進記法．但用 0 及 1 之數字，足矣．例如以二進記法所書之1101．卽爲 $1\times2^3+1\times2^2+1$ 之意．德意志之來不里慈氏[Leibnity 1646–1716] 研究此記法之算術乃輕實用而重奇巧也．

二線所成之矩形． [幾] 英 Rectangle contained by two lines. 謂以二直線爲兩鄰邊所作之矩形也．

二羃． [算] [代] 英 Square 同二乘羃．

七角形． [幾] 英 Heptagon. 以七直線所成之多角形也．

八角形． [幾] 英 Octagon. 以八直線所成之多角形也．

八面體． [幾] 英 Octahedron. 以八平面所成之多面體也．

八線． [三] 英 Trigonmetricl functions 舊譯三角函數之名．謂正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割，正矢，餘矢也．

九十面體． [幾] 英 Enneacontahedron. 謂以九十個平面，所成之多面體也．

九九數． [算] 英 Multiplication table 見乘法表條中．

九角形． [幾] 英 Nonagon, 或 Enneagon. 以九直線所成之多角形也．

九容． [數] 古算術名．元李冶得之洞淵老人者也．見測圓海鏡二卷中．卽句上容圓，股上容圓，弦上容圓，句股上容圓，句外容圓，股外容圓，弦外容圓，句外容半圓，股外容半圓，是也．句股容圓，非洞淵所創，故不在內．

九章． [數] 方田，粟米，衰分，少廣，商功，均輸，盈不足，方程，句股，謂之九章．

九減法． [算] 英 Rule for casting out the nines. 某數字之和，可以9除盡者，則其數能以9除盡，而數字之和，不能以9除盡者，則其數亦不能以9除盡．例如 $4532=4000+500+30+2$

$$=4(999+1)+5(99+1)+3(9+1)+2$$

$$=4\times999+4+5\times99+5+3\times9+3+2.$$

如是 4×999, 5×99, 3×9 皆能以9除盡，故 4532 以9除之之剩餘，等於以9除 4+5+3+2 之剩餘．故某數數字之和，以9除之之剩餘爲0，卽其數字之和能以9除盡，則此數能以9除盡．例如24573以9除之之剩餘，等於以9除 2+4+5+7+3 之剩餘．卽皆爲3也．以9除數字之和而求其剩餘，其數字中之9與1, 2, 6, 及4, 5, 均可省之．例如求以 9 除 1926754 之剩餘．其數字中之9與1,2,6, 及4, 5, 均可省之，惟餘一數字7．又如254786省其5, 4, 及2, 7, 惟自8+6減9剩餘爲5．用此理，可檢算加減乘除之結果．示之如次．

I. [以九減驗加法]．

$$\left.\begin{array}{r} 81346=(\text{九之倍數})+4 \\ 27632=(\text{九之倍數})+2 \\ 38507=(\text{九之倍數})+5 \\ \underline{67549}=(\text{九之倍數})+\underline{4} \end{array}\right\}\text{加}$$

6……215034　　　15……6

自應加之各數，減去 9，又自其各剩餘之和，減去 9，得剩餘 6，而與自其和減去 9 之剩餘同，卽知此運算，大抵無誤．

II. [以九減驗減法]．

$$\left.\begin{array}{r} 176543=(\text{九之倍數})+8 \\ \underline{85674}=(\text{九減倍數})+\underline{3} \end{array}\right\}\text{減}$$

5……90869　　　5

自被減數及減數，各減去 9，又自被減數之剩餘，減減數之剩餘，得剩餘 5，而與自其差減去9之剩餘同，卽知此運算，大抵無誤．

又　51786531＝九之倍數＋0 } 減
　　23456780＝九之倍數＋8 }

1.........28329751　　　　1

若被減數之剩餘，小於減數之剩餘，則須加 9 於被減數之剩餘.

III. [以九減驗乘法].

$47=45+2$, $61=54+7$, 故

$$47\times61=(45+2)\times61=45\times61+2\times61,$$
$$=45\times(54+7)+2\times(54+7),$$
$$=45\times54+45\times7+2\times54+2\times7.$$

45×54, 45×7, 2×54, 爲 9 之倍數故全積爲 (9 之倍數)$+2\times7$, 但 $2\times7=9+5$, 故全積爲 (9 之倍數)$+5$, 而 57×61 之積卽 2867, 爲 (9 之倍數) $+5$. 故此運算，大抵無誤.

今將此方法，列之於次，

```
 47.........2 }
 61.........7 } 乘
 ──          ──
 47          14.........5
282
────
2867...................5
```

IV. [以九減驗除法].

```
498)1348708(2708
     996
     ────
     3527
     3486
      ────
      4108
      3984
       ────
        124
```

卽　$1348708=498\times2708+124$,

但　1348708＝九之倍數＋4,

由前條

498×2708＝九之倍數 ＋6,

124＝九之倍數 ＋7,

故

$498\times2708+124$＝九之倍數＋6＋7,

＝九之倍數＋4,

故　1348708 及 $498\times2708+124$ 二數各以 9 除之，而同得剩餘 4，故上之運算，大抵無誤.

今將此方法列之於次，

```
            8..................2708
            3.......498)1348708......4
            ─
    6......24          996
                       ────
                       3527
                       3486
                       ────
                        4108
                        3984
                        ────
           7......................124
   4.....13
```

驗加減乘除之結果，若所誤者，爲 9 之倍數，則此法失其效力. 例如有加法之和，本應爲 215 034，誤爲 210534，或誤爲 214134，以此法驗之，無效力也.

九數. 數　卽九章也. 以數言之，曰九數，以篇言之，曰九章.

九點圓. 幾 英 N[illegible]oint circle. 謂三角形之垂心與各頂角之中點 (三個)，各邊之中點 (三個)，各垂線之趾 (三個)，同在一圓周上. 此定理係龐士勒發明. (Poncelek 法國數學者 1788-1867).

幾 見平面幾何學解法之部 121 題.

十一角形. 幾 英 Hendecagon，或 Undecagon. 謂以十一直線所成之平面形.

十二角形. 幾 英 Dodecagon. 謂以十二直線所成之平面形.

十二面體. 幾 英 Dodecahedron. 謂以十二平面所成之立體.

十二進法. 算 英 Duodecimal method. 謂以十二爲記數之底之命數記數法也. 此法必有表十及十一之數字. 今將十爲 t，十一爲 l，則如以十二進

法書 350 t 7 l, 爲 $3\times12^5+5\times12^4+t\times12^2+7\times12+1$.

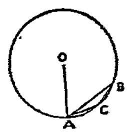
十分之要件. 國 英 Sufficient condition. 數學中恆有所謂十分之要件,及必要之要件者. 某事成立,必有不可缺之要件,謂之必要之要件. 又某要件不缺,則某事必成立,此要件謂之十分之要件.

例如 ab, 若 $a=0$, 則必 $ab=0$, 故 $a=0$ 爲 $ab=0$ 之十分之要件.

然 $ab=0$, 則不必要 $a=0$, 卽 $b=0$ 亦可, 故此要件,非必要之要件.

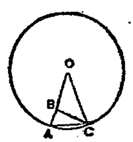
又 $ab=0$ 則必 $a=0$, 或 $b=0$, 故 $ab=0$, 則謂 a 或 b 必有一爲 0 之要件,爲必要之要件. 而 $ab=0$ 則 a 或 b 有一爲 0 卽足,故此爲必要且十分之要件.

十五角形. 國 英 Quindecagon. 謂以十五直線所成之平面形. 圓內欲作內接正十五角形,則作與半徑 OA 等之弦 AB, [此卽圓內內接正六角形之一邊] 又作與此圓內接正十角形之一邊等之弦 AC, 則 BC 卽此圓內接正十五角形之一邊,蓋因 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{16}$ 故也.



十五邊形. 國 英 Quindecagon 同十五角形.

十角形. 國 英 Decagon. 以十直線所成之平面形也. 圓內欲作內接正十角形,則引半徑 OA, 於 OA 上取一點 B, 使其 $OA.AB=\overline{CB}^2$ 則 OB 卽等於內接正十角形之一邊. 故取等於 OB 之 AC, 卽爲內接正十角形之一邊.



十面體. 國 英 Decahedron. 謂以十平面所成之立體.

十進法. 國 英 Decimal system, 或 Denary scale. 以一二三四五六七八九爲基數,九增一則爲十,次第每十倍,則命新名爲百,千,萬,十萬,千萬,億等,此進法卽謂之十進法. 現今行於世界者,大抵皆十進法也.

十進算. 國 英 Decimal arithmetic. 謂十進法之算術.

十橫. 國 古籌算之名. 十位之數,橫籌記之,故名.

力學. 國 英 Dynamics. 原來與重學 [Mechanics] 同,卽今亦有用爲同意義者. 卽重學之中,有靜力學 [Statics] 動力學 [Dynamics]. 然近來恆總稱爲 Dynamics. 卽力學之中,有靜力學 [Statics] 及動力學, [Kinetics] 而重學則單爲器械學也. 由前之說,則重學爲力之加於質點或物體時論其靜止及運動之學科,由後之說,則重學爲器械力學論適用力於器械之原理也.

三畫

三次方程式. 國 英 Cubic equation. 三次方程式,皆可化爲 $x^3+mx^2+nx+c=0$. 令 $x=y-\frac{1}{3}m$, 則得

$$y^3+qy+r=0.$$

故解三次方程式,卽解

$$y^3+qy+r=0$$

式可矣. 而此式,可以之比較 $x^3-3abx-a^3-b^3$, 卽 $(x-a-b)(x-\omega a-\omega^2 b)(x-\omega^2 a-\omega b)=0$ 而得之. 但 ω 爲 1 之立方根之虛數. 故所求之根,爲 $a+b$, $\omega a+\omega^2 b$,

$\omega^2a+\omega b$, 而 a 及 b, 可自 $q=-3ab$, $r=-a^3-b^3$ 求得之. 即

$$a^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例如解 $x^3-15x=126$, 乃將 $q=-15$, $r=-126$, 故 $x=5+1=6$,

或 $x=5.\omega^2+1.\omega^2=-3+2\sqrt{-3}$,

或 $x=5.\omega^2+1.\omega=-3-2\sqrt{-3}$.

[根之研究] (1). $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 爲正,則 a^3, b^3 皆爲實數. 今 a,b, 若爲算術的立方根,則三根 $a+b$, $\omega a+\omega^2b$, $\omega^2a+\omega b$, 之第一根爲實數,而他二根爲虛數, 如次 $-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$,

及 $-\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$,

(2). $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 爲 0, 則 $a^3=b^3$, 即 $a=b$, 而三根爲 $2a$, $a(\omega+\omega^2)$, $a(\omega^2+\omega)$, 即 $2a,-a,-a$.

(3). $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 爲負數,則 a^3 及 b^3 即成 $\alpha+i\beta$, $\alpha+i\beta$ 之形之式. 今將此立方根爲 $m+in$ 及 $m-in$ 則三根如次.

$m+in+m-in$ 即 $2m$,

$(m+in)\omega+(m-in)\omega^2$ 即 $-m-n\sqrt{3}$,

$(m+in)\omega^2+(m-in)\omega$ 即 $-m+n\sqrt{3}$,

由是各根皆爲實數, 然求虛數立方根精密之値, 無算術的及代數的解法,故三根俱爲實數而不等者, 不能以前法解之,遂謂爲不能化之式, [Irreducible case]. 例如

$$x^3-15x-4=0.$$

代入 (1), 而爲

$$a=\sqrt[3]{2\pm\sqrt{\frac{-3375}{27}+4}}=\sqrt[3]{2\pm11\sqrt{-1}}.$$

依視察得 $(2\pm\sqrt{-1})^3=2\pm11\sqrt{-1}$.

$\therefore\ a=2+\sqrt{-1},\quad b=2-\sqrt{-1}.$

因得 $x=4$. 乃以 $x-4$ 除已知之方程式,得二次方程式,解之,得 $x=-2\pm\sqrt{3}$. 但用三角函數解之, 則可免此困難, 即於 (3) 而得 $x=(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{3}}+(\alpha-i\beta)^{\frac{1}{3}}$, 若 $\alpha=r\cos\theta$, $\beta=r\sin\theta$, 則 $r^2=\alpha^2+\beta^2$ 及 $\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$, 而 $(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{3}}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{3}}$ 乃由桑謨阿布魯 * [De moivre,] 之定理, 得三値如次.

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right),$$

$$\text{及}\quad r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

但 $r^{\frac{1}{3}}$ 爲 r 之算術的立方根, 而 θ 爲自 $\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$ 求得之最小正角. 又 $(\alpha-i\beta)$ 之値, 在上之結果, 可由變 i 之符號而得之. 由是所求之三根如次.

$$2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

本條始之解法, 爲自加爾旦氏 [Cardan, 意大利之數學者1501—1576] 解法少變更之者也. 第十一世紀之中葉亞剌伯人阿克黑氏 [Alkhayyami] 所著之代數學書中, 揭載三次方程式, 以幾何學之作圖法解之, 然未論及一切之解法, 第十三世紀之初, 意大利人里阿拉爾氏, [Leonardo], 從亞剌伯人習代數學, 傳之於意大利, 爾後意大利人遂研究斯學. 1494 年勒克巴士革氏 [Lucus Paciolus] 著一書, 準亞剌伯人之法, 立三次方程式之階級, 其解法爲當時之代數學所不能

解者,同時又發明三次式之一切解法,誠數學中之最得力人也三次方程式之解法,雖成於西蒳鄂弗若氏,[Scipio Ferreo],然僅於1505年傳於其門人弗若利杜氏[Florido]而不傳於世1530年塔特利亞氏[Tartaglia]得三次方程式 $x^3+px^2=q$ 之解法,而弗若利杜氏聞之,遂宣言已得方程式 $x^3+m=n$ 之解法.塔特利亞氏聞而疑之,1535年與弗若利杜氏爭論,斯時塔特利亞氏已知 $x^3+mx=n$ 之解法,其解法之要,卽將二根之差 $(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})$ 代入 x,卽爲加爾但氏之法也.當1539年,加爾但氏學此學於塔特利亞氏,初不肯授,屢爲請求,遂漸傳之,且約弗洩,然加爾但氏背此約,於1545年載於其所著書中,而公於世塔特利亞氏,遂欲自刊之.於1556年刊其著述,然爲大部,頗難成功,至1559年僅刊其三次方程式以前之部分而卒.故經歷年代,塔特利亞氏之功,遂湮沒,而歸於加爾但氏之發明.故以加氏之名呼之.

*棣謨阿布魯之定理如次. n 或爲正數,或爲負數,或爲整數,或爲分數,$\cos n\theta+i\sin n\theta$ 恆爲 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 之值之一.但 $i=\sqrt{-1}$.

三次式. 代 英 Cubic expression. 含某字母之三乘方或含二個以上三次元之積,謂之三次式.例如 $4x^3-5x^2+6x-7$, $3x^2y-5xy-7y+1$, $xyz-\times+y^2-3$.

三次式之普通式,爲 ax^3+bx^2+cx+d.

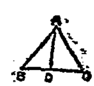
三次根數. 代 英 Cubic surd, 或 Surd of third order. 謂根指數爲3之根數.例如 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$.

三角比. 目 英 Trigonometrical ratio 同三角函數.

三角形. 幾 英 Triangle, 或 Trigon. 謂以三線所成之面.有平面三角形,[Plane triangle],有球面三角形[Spherical triangle].平面三角形,謂以三直線所成之面,球面三角形,謂以三大圓弧所成球面之一部,(見球面三角形之條),平面三角形,往往略稱爲三角形.平面三角形,有次之分類.(1).斜三角形,[Scalene triangle]謂三邊不等之三角形,又謂之不等邊三角形.

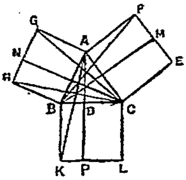
(2).二等邊三角形,[Isosceles triangle]謂二邊相等之三角形,又謂之等脚三角形.又謂之等腰三角形.三角形之二邊相等,則相對之角亦相等.(3).等邊三角形,[Equilateral triangle]謂三邊相等之三角形,三角形之三邊相等,則三角亦相等,故等邊三角形,又謂之等角三角形.[Equiangular triangle]因之又謂之正三角形.[Regulart riangle](4).直角三角形.[Right angled triangle]謂三角形有一角爲直角者,其對直角之邊[卽斜邊]上之正方形,等於餘二邊上正方形之和,[此證明見披他哥剌斯之定理之條] (5).斜角三角形,[Oblique angled triangle]謂其角皆非直角之三角形.(6).銳角三角形,[Acute angled triangle]謂各角皆爲銳角之三角形,而對銳角之邊上之正方形,小於餘二邊上正方形之和,但所小者,等於一邊與在其邊上餘一邊之射影所成之矩形之二倍.

[第一證].三角形ABC,其AD,爲自A向BC所作之垂線,[卽高],則 $AC^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+$



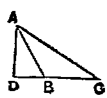
$\overline{BC-BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2BC\cdot BD$
$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC.BD.$

[第二證]. 於 AC, AB, BC 上, 各作正方形 ACEF, ABHG, BCLK, 又於 AB, AC, BC, 各作垂線BM, CN, AP, 則因 ΔBAF, ΔGAC 二邊與夾角各相

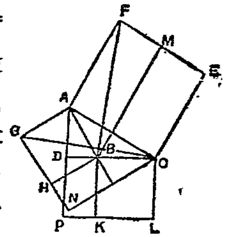


等, [$AB=AG$, $AF=AC$, $B\hat{A}F=G\hat{A}C$] 故全相等. 如是 $\triangle BAF=\frac{1}{2}$▭AM, $\triangle GAC=\frac{1}{2}$▭AN, 故 ▭AM=▭AN 準此 ▭CM=▭CP, $\therefore\ \overline{AC}^2=$▭AN+▭CP$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-$▭BN−▭ BP 又因 $\triangle ABK$, $\triangle HBC$ 二邊與夾角各相等, [$AB=HB$, $BK=BC$, $A\hat{B}K=H\hat{B}C$] 故全相等, 而此兩形等於 BD·BC, 故$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BD.BC.$

(7). 鈍角三角形, [Obtuseangled triangle] 謂有一角爲鈍角之三角形, 而對鈍角邊上之正方形, 大於餘二邊上正方形之和, 但所大者, 等於一邊與在其邊餘一邊之正射影所成之矩形之二倍. [第一證]. $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC+BD}^2$
$=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+2BC.BD=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC.BD.$



[第二證]. 作圖與前條銳三角形同, 證明亦略同 卽 ΔBAF, ΔGAC, 因二邊與夾角各相等, 故全相等, 而 $\Delta BAF=\frac{1}{2}$▭AM, $\Delta GAC=\frac{1}{2}$▭AN, 故 ▭AM = ▭AN. 準此, ▭CM=▭CP, 故 $\overline{AC}^2$ = ▭AN + ▭CP = $\overline{AB}^2$ + $\overline{BC}^2$ + ▭BN + ▭BP$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ + 2 BC.BD.



茲述一切三角形求面積之法.

(1). 若將 ΔABC 之底邊爲 b, 及高爲 h, 面積爲 $\frac{1}{2}bh$. (2). 若以二邊 a, b 與其夾角 C, 求面積, 則等於 $\frac{1}{2}ab\sin C$. (3). 以三邊求面積, 則爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

[第一證]. 將三角 A, B, C 之對邊爲 a, b, c. [看 6 之前圖] $BD=x$, 則因 $b^2=a^2+c^2-2ax$,

故 $x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

故 $\overline{AD}^2=c^2-x^2=(c-x)(c+x)$

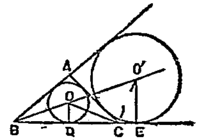
$$=\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\cdot\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}$$

$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$\therefore\ \Delta$ ABC 之面積 $=\frac{1}{2}a\mathrm{AD}$
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

[第二證]. 將內切圓半徑 $OD=r$, 對於角 B 之傍切圓半徑 $O'E=r'$, 則面積 $=sr$.......(1), 又因 ΔODC, $\Delta CEO'$ 相似, 故 OD : CD =CE : O'E, 卽 r :



$s-c=s-a:r'$, 又 OD : BD= : O'E : BE, 卽 $r:r-b=r':s$, 故自此二比例得

$$r^2:(s-b)(s-c)=s-a:s,$$

$$\therefore\ s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

代入 (1), 得面積

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

[第三證]. 自範式, $\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$,

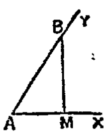
$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$, $\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$=ab\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

三角形之解法. 日 英 Solution of triangles. 謂自三角形之已知件, 而求其未知件也. 已知件, 必有三件, 但在平面三角形. 已知件, 至少必有一邊.

三角法. 國 英 Trigonometry. 三角法爲數學之一分科, 論三角函數 [或謂之圓函數] 之性質及其解法, 且述其應用者也. 三角法大別分爲平面, 球面, 及解析三種. 平面三角法, [Plane trigonometry] 論三角函數之性質及關係, 應用之而述三角形邊角之關係, 且自此論三角形之解法及高遠測量之大要. 球面三角法 [Spherical trigonometry] 用三角函數, 論球面三角形邊角邊關係. 解析三角法 [Analytical trigonometry] 論一切三角函數之關係及性質.

三角函數. 日 英 Trigonometrical functions. XAY 爲任意之角, 於其一邊上, 取任意之一點 B, 向他一邊作垂線 BM, 則將比 $\frac{BM}{AB}$ 名爲 A 角之正弦, 以 sinA 記之, 比 $\frac{AM}{AB}$ 名爲 A 角之餘弦,



以 cosA 記之, 比 $\frac{BM}{AM}$ 名爲 A 角之正切, 以 tanA 記之, 比 $\frac{AM}{BM}$ 名爲 A 角之餘切, 以 cotA 記之, 比 $\frac{AB}{AM}$ 名爲 A 角之正割, 以 secA 記之, 比 $\frac{AB}{BM}$ 名爲 A 角之餘割, 以 cosecA 記之, 此正弦, 餘弦, 正切, 餘切, 正割, 餘割, 謂之三角函數, 又謂之圓函數, [Circular function] 又 $\cos A=\frac{AM}{AB}=\sin B$, 故角之餘弦等於其餘角之正弦. 準此某角之餘切, 等於其餘角之正切, 某角之餘割, 等於其餘角之正割, 而自定義有次之關係. $\sin A=\frac{BM}{AB}$, $\cos A=\frac{AM}{AB}$, $\tan A=\frac{AB}{BM}$, $\cot A=\frac{AM}{BM}$, $\sec A=\frac{AB}{AM}$, $\operatorname{cosec} A=\frac{BM}{AM}$, 故 sinA 小於 tanA. [sinA 與 tanA 之分子相等, 而 sinA 之分母, 大於 tanA 之分母故也] tanA 小於 secA 又 cotA 小於 cosecA. [大小關係.] 又 [二重關係.]

$$\sin A\cdot\operatorname{cosec} A=\frac{BM}{AB}\cdot\frac{AB}{BM}=1,$$

$$\cos A\cdot\sec A=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AB}{AM}=1,$$

$$\tan A\cdot\cot A=\frac{BM}{AM}\cdot\frac{AM}{BM}=1.$$

又 [三重關係].

$$\tan A=\frac{BM}{AM}=\frac{BM}{AB}\div\frac{AM}{AB}=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

$$\cot A=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB}\div\frac{BM}{AB}=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

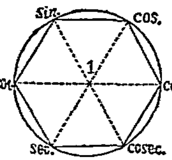
又 [平方關係].

$$\sin^2A+\cos^2A=\frac{\overline{BM}^2}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}^2}=1,$$

$$1+\tan^2A=1+\frac{\overline{BM}^2}{\overline{AM}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AM}^2}=\sec^2A,$$

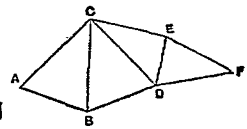
$$1+\cot^2 A=1+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BM}^2}=\mathrm{cosec}^2 A.$$

以上八個關係[二重關係三個,三重關係二個,平方關係三個]均非獨立者,自平方關係任意之一個,與其餘關係任意之四個,可求得其餘之三個. 以上所示之關係,可自次圖記憶之. 此謂之三角比之六角形. [Ratio-hexagon] 卽將三角函數 sin., cos, tan., cot., sec., cosec. 順次平列於六角形之角頂,書1於其中心,則 (1). 左右兩邊向下之值增大. [大小關係 $\sin A < \tan A < \sec A$ 及 $\cos A < \cot A < \mathrm{cosec} A$] (2). 在對角線兩端二個之積,等於在中心之數,卽1. [二重關係]. (3). 在連續三角頂之三函數其一端者,等於以他端者除中間者之數. [三重關係]. (4). 同在水平線上相鄰二數平方之和,等於其下在中間之數之平方. [平方關係] 又三角函數,不限於銳角,任意之角皆可. 但在第一分面則正弦正切正割爲正,在第二分面之正弦爲正而正切正割爲負,在第三分面則正弦正割爲負,而正切爲正,在第四分面則正弦正切爲負,而正割爲正,而各分面之餘弦餘切餘割之正負,同於正割正弦正切之正負.

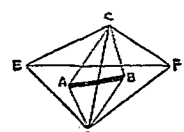


三角級數. 目 英 Trigonometrical series. 見級數條.

三角測量. 目 英 Triangulation. 三角測量第一需測基線之器,第二需測角之器. 在極小之地,可用鏈測測基線. 若極大之地,爲國土測量,則基線之測量,須精密,故須以鋼製之直桿,測量數次,且須檢查溫度,將桿之伸縮,一一算入. [三角網]. 測量地面連接之三角形,謂之三角網. 例如自基線AB,測定F點之位置,則將F點與AB由三角形 ABC, BCD, CDE 連接之,卽C點之目標,爲自A, B, 能望得者, D點之目標,爲自B, C, 能望得者, E點之目標,爲自C, D, 能望得者, F點之目標,爲自D, E, 點能望得者. 夫三角形ABC,旣測定基線AB, 又定測角 ABC, BAC, 則

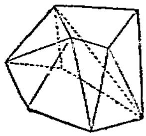


能自三角形公式,算得AC及BC, 而三角形BCD, CDE, DEF, 亦次第如此能測定F點之位置. [三角測量之等級] 三角測量恆分爲一等 [Primary] 二等 [Secondary] 三等 [Tertiary] 陸地測量部之一等三角,其一面之中等距離約 60 粁,而二等三角一邊之中等距離約 12 粁; 三等三角一邊之中等距離約4粁. [基線與一等三角一邊之關係]測定基線AB之長,取他二點C, D [取二點C, D令角 ACB, ADB 爲 34° 以上60° 以下] 而計算CD之長, 又取他二點 E, F, 而計算 EF 之長,如此將AB增大爲CD, 又將CD增大爲EF, 此EF卽取爲一等三角之基線.



三角傍面臺. 圖 英 Prismatoid. 三角傍面臺,其二底爲在平行之二平面

上之多角形，側面則自三角形而成．將三角傍面臺兩底之面積爲 B_1，B_2，中央截面之面積爲 M，高



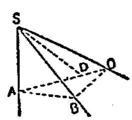
[兩底間垂直距離] 爲 h，則其體積 V 如次．

$$V=\frac{1}{6}h\left(B_1+4M+B_2\right)$$

三角方程式． 目 英 Trigonometrical equation 謂未知數含三角函數之方程式．

三垂線之定理． 圖 英 The theorem of the three perpendiculars 自垂直於一平面之直線之趾，引一直線，使與此平面上已知任意直線成直角，則連結其交點與垂線上任意之點，所引之直線，必垂直於平面上之已知直線，此定理及其逆，謂之三垂線之定理．

三面角． 圖 英 Trichedral angle 以三平面所成之立體角，謂之三面角．三平面相交之頂，謂之三面角之頂點，在頂點之三面之角，謂之三面角之面角．三面角中任意二面角之和，大於第三面角，此定理只須就第三面角大於他二面角者證明之． S-ABC 爲三面角其一面角，爲 ASC，大於他二面角 ASB 及 BSC，然則 $A\hat{S}B+B\hat{S}C>A\hat{S}C$．



[證]．於面 ASC 作直線 SD，使 $A\hat{S}D$ 等於 $A\hat{S}B$，過 SD 任意之一點 D，作任意之直線 ADC，使截 SA 及 SC，取 SB=SD，連結 AB 及 BC，則三角形 ASD 及 ASB，因作圖相等，故 AD=AB，如是在三角形 ABC，而 AB+BC>AC，自此減相等之 AB 及 AD，則 BC>DC，故三角形 BSC 及 DSC，其 $B\hat{S}C>D\hat{S}C$，各加相等之 $A\hat{S}B$ 及 $A\hat{S}D$，則 $A\hat{S}B+B\hat{S}C>A\hat{S}C$．

三率法． 算 英 Rule of three. 例如比例 5 : 6=15 : 18，而 5×18=6×15 凡比例 $a:b=c:d$ 而 $a\times d=b\times c$，故 $d=\frac{b\times c}{a}$，或 $c=\frac{a\times d}{b}$，故比例之一外率，等於以他一外率，除兩內率之積．故知比例四率內之三率，則能求得餘一率，故比例問題之解法，又謂之三率法．

三乘方． 算 代 英 Third power. 謂某數或某式之立方．又古昔謂比立方多一乘者爲三乘方，見乘方之條．

三乘比． 代 英 Triplicate ratio. 比 $a^3:b^3$ 謂之 $a:b$ 之三乘比．

三乘冪． 算 代 與三乘方同．

三項式． 代 英 Trinomial expression. 謂自三項而成之式．表示 x 之一切二次三項式[卽普通式]爲 ax^2+bx+c．[三項式之變化] 三項式 ax^2+bx+c，其 x 之值變，則其式之值亦因之而變，但將 $-\infty$ 與 $+\infty$ 間任意之實數值，定爲 x，而 ax^2+bx+c 之值，不能任意取之．x 定爲實數值，則 ax^2+bx+c 之值可如次求之．定 x 爲某實數值時，三項式 ax^2+bx+c 等於 λ，其必要且十分之要件爲方程式爲 $ax^2+bx+c=\lambda$ 之根爲實數，而此要件爲

$$b^2-4a\ (c-\lambda)\geqq 0,$$

卽 $$b^2-4ac+4a\lambda\geqq 0\text{..............}(1).$$

I. 若 b^2-4ac 爲正，則 $4a\lambda$ 適當於要件 (1) 之值，必或爲正數值，或爲不大於 b^2-4ac 之負數值，方可．故 b^2-ac 爲正而 x 爲實數則 ax^2-bx+c 之值可使等於與 a 同符號任意之量，或使等於

與a異符號，而絕對值不大於$\frac{b^2-4ac}{4a}$之任意之量. II. 若b^2-4ac爲負，則$4a\lambda$適當於(1)之值，必僅爲正數值，且必不小於$4ac-b^2$. 故b^2-4ac爲負，則ax^2+bx+c恆與a同符號，且其絕對值，不能小於$\frac{4ac-b^2}{4a}$. III. 若b^2-4ac爲0，則$a\lambda$適當於(1)之值，必爲正. 由是觀之，三項式ax^2+bx+c，其b^2-4ac爲負或爲0，即方程式$ax^2+bx+c=0$有虛根或等根，則將任意之實數值，定爲x，其式之符號當爲一定，而$ax^2+bx+c=0$之二根，若爲不相等之實量，則可使變其符號. 此別證示如次. 若方程式$ax^2+bx+c=0$有實根則α,β，則$ax^2+bx+c=a(x-a)(x-b)$，然$(x-\alpha)(x-\beta)$之符號x必爲大於α及β之實數值，或爲小於α及β之實數值，則爲正，若x爲在α與β間任意之實數值，則爲負，故對於x之實數值，而三項式ax^2+bx+c除x在方程式$ax^2+bx+c=0$二根間之值外，恆與a同符號. 又三項式ax^2+bx+c，對於x之種種之實數值，而b^2+4ac爲正，則其符號變b^2-4ac爲負則其符號不變，其證明如次.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

I. b^2-4ac爲正，若$x=-\frac{b}{2a}$，則括弧[ ]內之全式爲負. 又x甚大，則$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$當大於$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，故括弧[ ]內之全式當爲正. 由是$b^2-4ac$爲正，$x$爲實數值，則三項式$ax^2+bx+c$可使變其符號. II. b^2-4ac爲負或爲0，則$x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$對於$x$任意之實數值爲正而$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$亦爲正或爲0，故括弧[ ]內之全式，恆爲正故$b^2-4ac$負或爲0，則三項式$ax^2+bx+c$恆與$a$同符號. 由前所述，可知$x$之二次式，將實數定爲$x$，若可使變其符號，則此二次式等於0之方程式之二根，當爲實數. 例如$a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)\times(x-\beta)$之三項式，而各量爲實數，且$\alpha>\beta>\gamma$，則其式$x=\alpha$爲正，而$x=\beta$爲負，明矣. 由是其式可使變其符號，故方程式$a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)=0$之根對於$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$之實數值當爲實數. [例一]. 試證明$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$對於$x$之爲實數值當爲正. 自此四因數內取第一與第四，又取第二與第三，各相乘，則$(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82=\{(x^2-7x)+9\}^2+1$，其對於$x$任意之實數值，必恆爲正明矣. [例二]. 定適當於x之實數值，而$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}$可取任意之實數值，試證明之如次.

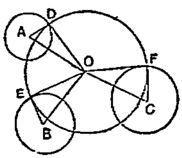
$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}=\lambda$ 則$(4-12\lambda)x^2+(36-8\lambda)x+9-\lambda=0$. 故$x$爲實數，其必要且十分之要件，爲$(36-8\lambda)^2-4(4-12\lambda)\times(9-\lambda)\geqq 0$，即$\lambda^2-8\lambda+72\geqq 0$，即$(\lambda-4)^2+56\geqq 0$. 此$\lambda$爲任意之實數值皆合，故不關於實數值之如何，可求得$x$之實數值. [例三]. $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x-4}$定任意之實數值爲$x$，不能大於7，且不能小於$\frac{1}{7}$，試證明之如次.

$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x-4}=\lambda$，則$(1-\lambda)x^2-3(1+\lambda)x+4\times(1-\lambda)=0$，故$x$爲實數，其必要且十分

之要件爲 $9(1+\lambda)^2-16(1-\lambda)^2 \geqq 0$, 卽 $-7\lambda^2+50\lambda-7 \geqq 0$, 卽 $-(7\lambda-1)(\lambda-7) \geqq 0$, 由是 $7\lambda-\frac{1}{7}$ 及 $\lambda-7$ 必不同符號, 故 λ 必在 $\frac{1}{7}$ 與之 7 間.

三進記法. 算 英 Termary scale. 謂每滿三則進位之記法. 通常之記數法, 爲十進記法, 今將其底 10 代之以 3, 卽三進記法也. 故三進記法之數字, 用 0, 1, 2 三個足矣. 例如三進記法之 31102, 卽爲 $2\times3^4+1\times3^3+1\times3^2+2$ 也.

三圓之直交圓. 幾 英 Orthotomic circle. 謂與三圓相交成直角之圓. 例如三圓 AB,C, 各於 D,E,F, 相交爲直角之圓 0 是也. 如此之圓之成立, 參照根軸之條自明, 又可如次證明之. 將圓 A,B,C, 之半徑各爲 r, r', r'', 則 $\overline{AO}^2-r^2=\overline{BO}^2-r'^2$, 卽 $\overline{AO}^2-\overline{BO}^2=r^2-r'^2$, 而 A 及 B 爲定點, 故點 O 距二定點 A,B, 其平方之差, 爲一定之點, 而其軌跡爲一直線. 準此 $\overline{BO}^2-\overline{CO}^2=r'^2-r''^2$ 故 O 爲距 B 及 C 平方之差, 爲一定之點, 故其軌跡亦爲一直線其二直線之交點, 卽所求圓之中心.



三冪. 算 代 英 Third power 同三乘冪.

大. 幾 英 Magnitude 本來爲指物體所有部分之義. 卽合長闊厚三者謂之大. 今擴張其意義. 凡線, 面, 角, …… 及數, 均以此稱之.

大於. 幾 英 Greater than 謂某數大於他數也表示此意用符號 $>$ 例如表示 8 大於 5 則記爲 $8>5$.

大圓. 幾 英 Great circle. 謂球與過其中心之平面相交之圓.

小圓. 算 英 Small circle. 謂畫於球面任意之圓. [其面不過球之中心]

小數. 幾 英 Decimals, 或 Decimal fraction. 10 或 10 之方爲分母之分數, 以便利方法記之者, 是爲小數. 所謂便利方法者, 例如 $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ 以 0.2, 0.3 記之, 又如 $\frac{97}{100}$, $\frac{369}{1000}$, 以 0.27, 0.369 記之是也. 其首位之 0, 爲表整數之一位. 其點謂之小數點, 以下所續數字之數, 等於分母中 0 之數. 若分子數字不及分母中 0 之數, 則須於小數點之次, 以 0 補之, 卽如

$$\frac{7}{100}=0.07, \qquad \frac{13}{10000}=0.0013.$$

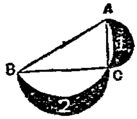
其表整數一位之 0, 亦有不記者, 但作小數點而已. 例如 .26 同於 0.26, 但不省整數之一位而記 0 者爲宜. 又小數點, 有以卡馬 (Comma) 代之者. 例如 0,35 與 0.35 同. 又如 2.26 108.0657 表整數 2 與小數 0.36 之和, 及表整數 108 與小數 0.0657 之和, 謂之帶小數. 凡記整數及小數之命位如次 ……… 千百十一. 分釐毫絲忽 …… 但分爲小數第一位, 釐爲小數第二位, 毫爲小數第三位, 絲爲小數第四位, 忽爲小數第五位.

小數點. 算 英 Sign of decimals, 或 Decimal point. 見小數之條.

小於. 幾 英 Less than 謂某數小於他數. 表而其意味之符號爲例 $<$. 如謂 $8<12$, 謂 8 小於 12.

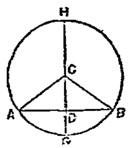
小切手. 算 英 Cheque 銀行支票, 日本謂之小切手, 見支票條.

弓月形. 幾 英 Lune. 謂二弧間所夾



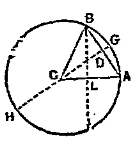
之平面形. 又謂球面二大圓弧間所球面之一部分. 平面之月形, 有所謂希波克拉的士氏 (Hippocrates 希臘之醫者西歷紀元前 460 年生前 357 年死) 之月形者, 即如圖 於直三角形三邊上, 各作半圓, 其 1 與 2 即月形, 而其面積, 等於直角三角形之面積.

弓形. [圓的] 圖 英 Segment [of circle]. 弓形者, 謂圓之弦及其所乘弧之間之面積. 例如 AGB, AHB, 即弓形也. 一弦分圓面爲二弓形, 一曰優弓形, [Major segment] 如 AHB, 一曰劣弓形, [Minor segment] 如 AGB. 求弓形之面積, 須先求與其弓形同弧扇形之面積, 次求將弓形之弦爲底圓之中心爲頂之三角形之面積, 優弓形則取此二者之和, 劣弓形則取此二者之差. 玆述求 ABG 弓形面積之法. 將弧 AGB 之長爲 l, 弦 AB 之長爲 k, 弓形之高 GD 爲 h, 圓之半徑爲 r, 則扇形 $AGBC=\frac{1}{2}lr$, $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB.CD$ $=\frac{1}{2}k(r-h)$, $\therefore$ 弓形之面積 $=\frac{1}{2}lr-\frac{1}{2}k\times(r-h)=\frac{1}{2}(lr-kr+kh)$, 但 $GD.DH=\overline{AD}^2$ 即 $h(2r-h)=\frac{1}{4}k^2$, $\therefore\ r=\frac{\frac{1}{4}k^2+h^2}{2h}$



將此 r 之值, 代入前式而變化之, 則弓形 AGB 之面積

$$=\frac{\frac{1}{4}k^2(l-k)+h^2(l+k)}{4h}$$



又弓形之面積, 等於圓半徑與自其弧減二倍其弧之弦之半之積之半. 蓋扇形 AGBC 之面積 $=\frac{1}{2}lr$, $\triangle ABC=\frac{1}{2}r\times BL$, 故弓形 AGB 之面積 $=\frac{1}{2}r(l-BL)$.

又弓形面積之近似值取 $\frac{2}{3}hk$ 亦可

弓形角. 圖 英 Angle at the segment 謂弓形弧上之一點, 與弓形弧之兩端連結之二弦, 所成之角.

已知件. 圖 英 Datum. 數學所謂已知件, 即指凡已知數及命題已知部分. 問題所謂已知件, 則爲已知部分及自此能決定所求之部分. 幾何之已知件, 則爲定義, 公理, 及前已證明之定理. 又作圖題, 則謂點, 直線, 角, 圓, 平面, 面, 立體等.

已知項. 圖 英 Absolute term. 僅含已知數之項, 例如 ax^2+bx+c 式, 其第三項 c 即已知項也. 方程式之各項, 若皆視爲含未知數, 則已知項爲 x^0 之係數. 而方程式之已知項, 爲各根變符號之積. 故已知項爲^0, 則必有一根或數根爲 0.

已知數. 圖 英 Known number. 問題或方程式之已知數, 爲其值已知, 或假定爲已知之數.

已約項. 算 圖 英 Lowest term. 謂分數之分母分子之公約數, 悉約去而無其一者. 例如 $\frac{2}{3}$, $\frac{a}{bx}$ 爲已約項. 反之, 如 $\frac{6}{14}$, $\frac{ab^2}{a^2b}$, 則非已約項. 自其分母分子約去其公約數, 則得 $\frac{3}{7}$, $\frac{b}{a^2}$ 即爲已約項.

子午線. 算 Meridian 於地球之表面上, 想像一通南北兩極之大圓周, 此圓周, 謂之子午線.

口錢. [算] 英 Brokerage 或 Commission 此日本名詞謂介紹買賣人所得之酬金見酬金條

千儓. [算] 古籌算名. 千位之數 橫籌記之, 故云.

[四] [畫]

不平行四邊形. [幾] 英 Trapezium. 四邊形之任二邊皆不平行之謂.

不名數. [算] 英 Abstract number. 不添單位之名之數, 謂之不名數. 例如 3, 8, 15 等. 若嚴密言之, 則凡數爲不名數也.

不合理. [幾] 英 Absurdity. 命題背於已知之理, 爲不合理. 此不合理, 在證明背理 [Reductio ad absurdum] 時用之, 此證明法, 爲假定一命題爲合理, 逐次推理而達於與已知之理相背, 故知初假定爲合理之命題, 知爲不合理, 而反於此者爲合理. 例如有二直線, 同過二點, 則全相合之命題, 若假設二直線同過二點, 非全相合, 則二者必有一爲不合理, 然後者證明爲不合理, 故知同有二點之二直線爲全相合, 此證明, 在幾何學常用之.

不同初位之循環節. [算] 英 Dissimilar repetend. 見循環小數條.

不同類項. [代] 英 Unlike terms, 或 Dissimilar terms. 有二項, 不論其係數, 但文字或方數不同, 謂之不同類項. 例如 $3a^2bc$, $4ab^2c$, $5xy^2$, $5xyz$ 爲不同類項也.

不完備方程式. [代] 英 Incomplete equation. 某次方程式, 自最高次以下缺次數之項者, 謂之不完備方程式. 例如三次方程式, $x^3-2x+5=0$, 缺 x^2 之項, 卽爲不完備方程式.

不定方程式. [代] 英 Indeterminate equation. 一方程式, 不僅含一未知數, 或 n 方程式, 不僅含 n 個未知數, 其未知數無界限, 故有無數之答, 是之謂不定方程式. 不定方程式, 其未知數之値, 若限制之, [例如限爲整數] 則其未知數之答, 必爲一組或爲有限之若干組.

不定式. [代] 英 Indeterminate expression. 此或分數, 因其中所含之文字, 有成不定之形者, 謂之不定式, 亦謂之不定形. [Indeterminate form] 例如 $\frac{x^2-x}{x^3-x}$, 若 $x=0$, 則成 $\frac{0}{0}$ 之形. 或 $x=1$, 亦成 $\frac{0}{0}$ 之形. 或 $x=\infty$ 則成 $\frac{\infty}{\infty}$ 之形. 然 $\frac{x^2-x}{x^3-x}=\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$, 故 x 較 0 或 1 有微差時則以 $x(x-1)$ 除其分母分子, 而成 $\frac{x^2-x}{x^3-x}=\frac{1}{x+1}$, 故 x 最近於 0 或 1 時, 其極限之値爲 1, 或 $\frac{1}{2}$. 又 $x=\infty$, 則其分數極限之値, 爲 ∞.

不定形. [代] 英 Indeterminate form. 與不定式同.

不定級數. [代] 英 Indeterminate series. 取級數初 n 項之和, 其 n 無限增, 而其和非無限增, 亦非接近一定之極限, 則此級數非收斂級數, 亦非發散級數, 而爲不定級數. 不定級數, 亦謂之中間級數, [Neutral series] 亦謂之動搖級數, [Oscillating series] 例如 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ n 爲奇數, 則其和爲 1, n 爲偶數, 則其和爲 0, 故曰不定級數.

不定係數. 代 英 Indeterminate coefficient. 恆方程式,其中所含任意之一量或數量,以凡數代之恆合,故將此等方程式之各項,移於方程式之一邊,則其任意項各乘方之係數,謂之不定係數. 此非係數本身為不定,而實為不定數之係數也. 是等係數,皆等於0,謂之不定係數之原理. 茲述之如次. (1) 僅含一不定量而第二邊為0之恆方程式,其不定量各乘方之係數,各等於0. 或僅含一不定量之恆方程式,其兩邊不定量同乘方之係數,各相等. (2) 含二以上之不定量,而第二邊為0之恆方程式,其不定量各乘方及其積之各係數,各等於0. 或含二以上不定量之恆方程式,其兩邊不定量各乘方及其積之係數各相等. 此等原理在解析法應用極廣,今述將一級數展開之一例.

將$\frac{1}{1+x}$展開為昇方之級數,定為

$$\frac{1}{1+x}=P+Qx+Rx^2+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其P, Q, R……,乃使此方程式為恆方程式而決定之. 去分母,則

$$1=P+(Q+P)x+(R+Q)x^2+\cdots\cdots\cdots,$$

使兩邊同乘冪之係數相等,則

$$1=P,\ Q+P=0,\ R+Q=0,\cdots\cdots$$

故 $P=1,\ Q=-1,\ R=1,\cdots\cdots\cdots\cdots$

故 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots\cdots$$

不定問題. 算 代 幾 英 Indeterminate problem. 謂有無數解答之問題. 在算術,例如已知三以上同種物之價,與其平均價,而求其混合之比例,是也. 此恆因問題中已知之要件,少於未知數之數,故也. 自此要件,作方程式,其方程式之數,少於未知數之數,故此等方程式為不定. 又在幾何學,則例如知三角形之底與高,而作三角形. 此三角形不能確定,蓋確定三角形之要件不足也.

不待言. 幾 英 A-fortiori. 此語來自拉丁,而以英文釋其義,卽 by a stronger reason. 卽不待言之意,

不能問題. 幾 英 Impossible problem. 凡問題有不能之結果,或解法為不能者,謂之不能問題. 例如算術代數等之問題,自已知之件,求得人數為分數或負數,則為不能問題矣. 又如將任意之角分為三等分,題意雖非不能,而在初等幾何範圍內,其解法為不能也.

不能整除之部分. 算 英 Aliquant part. 謂某數之部分,不能整除某數者,卽取其任意整數倍,不能等於某數之數也. 例如4卽為10之不能整除之部分. 蓋取其二倍,則為8,小於10,取其三倍,則為12,大於10. 又如10兩為1斤不能整除之部分,而所謂不能整除之部分,為對於能整除之部分言之也.

不能通約之量. 幾 英 Incommensurable magnitudes. 見能通約之條.

不能通約之數. 代 英 Incommensurable numbers. 見能通約之條.

不能還原之變化. 代 英 Derivation, irreversible. 見變化式之條.

不等. 幾 英 Unequal. 二數或二量,一大一小之謂.

不等式. 代 英 Inequality. 不等之二式,以不等號>或<連結之,謂之不等式. 文字若皆為正,則如次. 若 $a>b$, 則 (1) $a+x>b+x$, (2) $a-x>b-x$,

(3) $-a<-b$, (4) $ma>mb$, (5) $-ma<-mb$, (6) $a^m>b^m$, (7) $a^{-m}<b^{-m}$ 若 $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$,…則 (8) $a+a'+a''+\ldots>b+b'+b''+\ldots$ (9) $aa'a''\ldots>bb'b''\ldots$ 但 $a\ngtr b$, $a\neq b$, $a\nless b$ 亦有用於不等式者

不等號. [數] 英 Sign of inequality 謂指示二數或二量不相等之符號. 卽 $>$ 或 $<$ 或 $\neq$, 而 $>$ 謂左大於右, $\nless$ 謂左小於右, $\neq$ 則僅謂左右不等. 有時不等符號亦有用 $\ngtr$ 及 $\nless$ 者其 $\ngtr$ 謂其左不大於右, $\nless$ 謂其左不小於右.

不等邊三角形. [幾] 英 Scalene triangle 謂三角形之任二邊不相等者.

不連續量. [數] 英 Discontinuous quantity 謂其量之增減，不能少於一單位者，例如人數是也.

不盡小數. [算] 英 Interminate decimal 謂小數之位數不盡者，如循環小數，爲不盡小數. 又如根數 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 化之爲小數，則得如 1.4142……, 1.7320…… 之不盡小數，又不可通約之數如圓周率 π 之值，[3.14159……]，訥伯爾對數底 e 之值，[2.71828……]，皆爲不盡小數.

公比. [代] 英 Common ratio. 等比級數之某項，與其前項之比之謂. 通例以 r 表之. 例如 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$, …… 爲 $\frac{3}{2}:1=\frac{9}{4}:\frac{3}{2}=\frac{27}{8}:\frac{9}{4}=\frac{3}{2}$，而此 $\frac{3}{2}$ 爲公比

公切線. [幾] 英 Common tangent. 謂二圓公共之切線. 有外公切線及內公切線之二種，而外公切線之交點，及內公切線之交點，均在中心線上. 見外公切線及內公切線之條.

公分母. [算] [代] 英 Common denominator. 謂二以上分數，相同之分母. 將分母不同之分數，化爲公分母，則取各分母之公倍數，爲公分母，以分母除之，將其商各乘其分子，卽得. 例如 $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$ 化成分母爲 30 之分數，則 $30\div3=10$, $30\div5=6$, $30\div10=3$ 故

$\frac{2}{3}=\frac{2\times10}{3\times10}=\frac{20}{30}$, $\frac{4}{5}=\frac{4\times6}{5\times6}=\frac{24}{30}$,

$\frac{7}{10}=\frac{7\times3}{10\times3}=\frac{21}{30}$. 卽各與 $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$ 相等，而得公分母 30 之分數 $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{21}{30}$. 公分母不限於 30，取各分母任意之公倍數皆可. 但公分母爲各分母之最小公倍數，謂之最小公分母.

公司. [算] 英 Company. 共同營商業爲目的者也.

公式. [代] 英 Formula. 以代數式表示一切之定則，謂之公式. 反之，將公式改爲語言則謂之定則. 例如已知二數之和 s 與差 d，而求二數，則可由 $\frac{1}{2}(s+d)$, $\frac{1}{2}(s-d)$ 之公式得之. 若改爲語言，則云和與差之和之半，及和與差之差之半，爲所求之二數，此卽定則也.

公因數. [算] [代] 英 Common factor. 二數或多數之公因數，謂能整除各數之數也. 例如 2, 4, 8 皆爲 24 與 40 之公因數，而 $a+x$ 爲 a^2-x^2, a^2+ax 之公因數.

公法. [幾] 英 Postulate. 解幾何學之作圖題其爲根本而自明者，謂之公法. 公法雖有種種，通例如次三條. (1) 自一點向任意之一點，可作直線. (2) 有限直線，可任意引長. (3) 將任

意之點爲中心,任意之直線爲半徑,可作一圓.

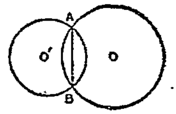
公約數. [算] [代] 英 Common measure. 二數或多數之公約數者,謂能整除諸數或諸式之數或式也. 例如4爲12, 16及20之公約數,而$3a^2-b$爲$9a^4-6a^2b+b^2$及$12a^4-4a^2b$之公約數.

公倍數. [算] [代] 英 Common multiple, 二數或多數之公倍數者,謂以諸數能整除之數也. 例如30, 60, 120, 180, 爲2, 3, 5, 6之公倍數,而a^2b^3爲a^2b, a^2, b^3之公倍數.

公差. [代] 英 Common difference. 等差級數相鄰二項之差,恆相等,此差謂之公差,例如等差級數5, 7, 9, 11... 其7−5=9−7=11−9=......=2, 卽公差也. 公差,通例以d表之.

公理. [幾] 英 Axiom. 公理爲他理之基本,不能用他理說明之,皆自吾人之經驗,而認爲眞者也. 有普通公理,及幾何公理二種,見普通公理及幾何公理之條.

公通弦. [幾] 英 Common chord. 謂相交二圓連結二交點之直線例如O, O'之公通弦爲AB. 公通弦AB,被中心線OO'二等分成直角.



公尺. [算] 英 Meter 美 Meter 一米突謂之一公尺等於3尺1寸2分五釐.

公升. [算] 英 Litre 美 Liter 一立突謂之一公升,等於0.9657461升.

公斤. [算] 英 Kilogramme 一啓羅格蘭姆謂之一公斤,等於26.808933兩.

公項. [代] 英 General term. 謂級數公共之項. 例如級數1.2 + 2.3 + 3.4 +......, 其第n項,卽公項,爲$n(n+1)$. 二項式$(a+b)^n$,其展開式之公項,爲

$$\frac{n!}{r!(n-1)!}a^{n-r}b^r$$

公債票. [算] 英 Bond. 謂政府營某事業,自人民募集資金,交給負債證據之票. 票面載明償還期限,及一定之利息. 公債有內國債外國債之別,有記名不記名之別. 記名者,謂記載所有者之姓名,不記名者謂不記載所有者之姓名. 公債亦謂之國債.

公債證書. [算] 英 Bond 日本數辭,卽公債票也[見上條.

公算. [代] 英 Probability 或 Chance. 與適遇同.

內二等分線. [幾] 英 Internal bisector. 角之內二等分線者,卽角之二等分線,對於角之外二等分線[見外二等分線條]言之也.

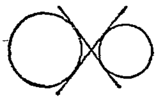
內心. [幾] 英 In-centre. 謂內切圓之中心. 三角形各角之二等分線,相交於一點,卽內切圓之中心. 又內心. [相似的] [幾] 英 Inner centre. 二相似形或二圓,其二中心之中在兩形之內方者之謂. [見相似中心之條].

內分. [幾] 英 To divide internally. 於某有限直線上取一點,則謂此直線被此點內分之. 內分者,對於外分[見外分條]言之也. 例如直線AB內分分於C點,謂之內分.

A ——— C ——— B

內公切面. [幾] 英 Internal common tangent plane. 謂二球之公切面,而二球在面之異側者.

內公切線. 幾 英 Internal common tangent. 謂如圖二圓之公切線. 如此二圓,一圓在他一

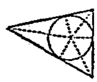


圓之外者,則有二內公切線. 若二圓外相切,則只有一內公切線. 若二圓相交,或內相切,或一圓在他一圓之內,則無內公切線.

內切. 幾 英 To touch internally. 一圓在他圓內互相切之謂.

內切球. 幾 英 Inscribed sphere 或 Insphere 謂切於多面體各面之球.

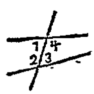
內切圓. 幾 英 Inscribed circle. 謂切多角形各邊之圓. 然恆就三角形言之.



內共通切面. 幾 英 Internal common tangent plane 同內公切面,見其條.

內共通切線. 幾 英 Internal common tangent 同內公切線,見其條.

內角. 幾 英 Interior angle. 如圖,一直線,與他二直線相交,所成 1, 2, 3, 4 之角,謂之內角,



又多角形之各角,謂之內角.

內率. 算 代 英 Mean. 比例第二第三兩率,謂之內率. 例如 $a:b=c:d$, 其 b 與 c 爲內率. 內率亦謂之內項.

內接. 幾 英 To be inscribed. 多角形之各角頂,在一圓或一多角形之邊上,則初之多角形,謂之內接於圓或後之多角形.

內接三角形. 幾 英 Inscribed triangle 或 Intriangle 見內接形之條.

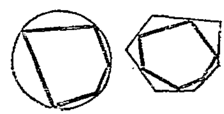
內接正方形. 幾 英 Inscribed square 或 Insquare 見內接形之條.

內接四邊形. 幾 英 Inscribed quadrilateral 見內接形之條.

內接多角形. 幾 英 Inpolygon. 見內接形之條.

內接多面體. 幾 英 Inscribed polyhedron 謂多面體之各角頂在一多面體之面上或在一球面上.

內接形. 幾 英 Inscribed figure. 於一圓周或一多角形之邊上接各頂角之多角形,謂之內接形. 且因其邊數之爲 3 與 4, 而



稱之爲內接三角形,內接四角形.

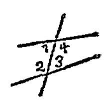
內國滙兌. 算 英 Domestic exchange. 內國匯兌,對於外國匯兌之稱. 收入與付出之地,同在國內之謂. 我國內國匯兌,有匯票匯兌及郵務匯兌之別.

內項. 算 英 Mean 見內率之條.

內對角. 幾 英 Interior opposite angle. 三角形之一外角,其不相鄰之內角,謂爲此外角之內對角. 例如上圖 2 或 3 爲 1

之內對角,又上之四邊形,則謂 5 爲 4 之內對角.

內錯角. 幾 英 Alternate interior angles 一直線與他二直線相交,(如圖)其 1 與 2 或 3 與 4, 謂之內錯角. 若他二直線爲平行線,以一直線交之,則內



錯角相等,而此理之逆亦眞.

中人. 算 英 Broker. 中人者,爲一面之代理人, [Agent] 立於委託代理之人及他人之間,而爲商務買賣之媒

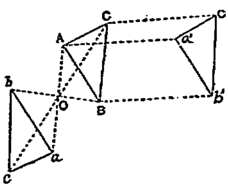
介者也. 普通中人不得有買賣之物,又與本人無特約者,不得定貨物之價値. 中人有船舶中人 [Ship broker] 保險中人, [Insurance broker] 等. 又股票中人, [Stock broker] 期票中人, [Bill broker] 亦中人之類也.

中心. 幾 英 Centre. 中心者,對於圓或球而言. 圓之中心,爲自圓周一點至圓周作諸直線皆相等之點. 球之中心,爲自球心一點至球面作諸直線皆相等之點. 其他如平行四邊形,兩對角線之交點,亦有時謂之中心. 因過此點於形內所作直線,皆以此點二等分之故也. [卽對稱中心之略].

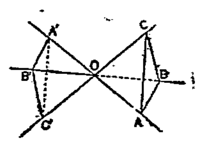
中心角. 幾 英 Angle at the centre. 謂角頂在圓中心之角.

中心線. 幾 英 Centre line. 謂過二圓中心之線.

中心對稱. 幾 英 Central symmetry (1) 在平面上之中心對稱. A, a 爲過一點 O 之直線中之二點,而在兩傍之等距離,則謂之關於 O 而爲對



稱. A 沿任意之線而移動,沿對應之線而移動,則二線謂之關於 O 而爲對稱,而 O 謂之對稱之中心. 將 Oa 在其平面上而繞其 O, 通過二直角,則 a 當與 A 合. 由是中心對稱之二線,或圖形,不離平面繞中心而轉,卽得相並合. 上圖中心對稱,其對應之直線雖平行,然恆在反對之方向. 將其圖彼此換其位置,而對應之線相平行. 然則連結對應點之直線必平行. 此可自圖中 ABC, abc, $a'b'c'$ 之關係說明之. (2) 在空間之中心對稱,乃取三角錐 O-A′B′C′ 將其通過 O 而引長之,使 OA′, OB′, OC′ 等於 OA, OB, OC, 則三角錐 O-A′B′C′ 爲三角錐 O-A′B′C′ 之對稱.



此二三角錐,除極特別者外,皆不能並合. 任意之多角錐亦同. 中心對稱,又稱點對稱. [P‹ int-symmetry]

中率. 代 英 Mean. 在任意二率之間,而依一定之規律相連結者也. 例如等差中率,等比中率,調和中率等. 中率亦謂之中項.

中項. 代 見中率之條.

中間級數. 代 英 Neutral series. 卽不定級數. 見不定級數之條.

中線. 幾 英 Median. 自三角形之一頂角,向對邊中點所作之直線,謂之中線,故三角形有三中線.

中點. 幾 英 Middle point. 謂有限直線中央之點.

中費. 算 英 Brokerage 謂買賣產業立於中間之人所得之報酬依習慣或契約對於賣價或原價而定其成分或謂酬金見其條.

分. 算 英 Minute. 一度六十分之一謂之分,一分等於六十秒. 分[直線的]. 幾 英 Segment[of a finite straight line] 謂直線之一部分.

分子. 算 代 英 Numerator. 例如 $\frac{3}{5}$, 其 3 爲分子. 凡 $\frac{a}{b}$, 其 a 爲分子.

分比之理. 代 英 Dividend. 謂 a,b,c,d

成比例，即 $a:b=c:d$，則 $a\sim b : b=c\sim d:d$，亦謂之除比之理.

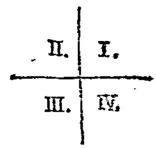
分外根. 代 英 Extraneous root. 方程式 $P=Q$ 之兩邊，以 L 乘之，則 $LP=LQ$，或 $L(P-Q)=0$，但 L, P, Q 皆含未知數之式，則上方程式含 $L=0$ 及 $P-Q=0$ 之二方程式. 故 $L\neq 0$ 則 $P=Q$ 成等值，然 $L=0$ 之根，不適於 $P=Q$，故以含未知數之式乘方程式之兩邊，則必得分外之根. 又將 $P=Q$ 之方程式兩邊，n 乘方之，則 $P^n=Q^n$ 或 $(P-Q)\times(P^{n-1}+P^{n-2}Q+\ldots+Q^{n-1})=0$，故 $P=Q$ 之根必適於 $P^n=Q^n$ 之根，然 $P^n=Q^n$ 之根，爲 $P=Q$ 及 $P^{n-1}+P^{n-2}Q+\ldots.+Q^{n-1}=0$ 之根，故必有不能適於 $P=Q$ 之根. 故方程式兩邊 n 乘方時，則必得分外之根. 解分數方程式，以分母之最小公倍數乘之，解無理方程式，以方程式兩邊自乘之，則必得有不適於方程式之根，即分外之根. 例如方程式

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x-{}^2x-3}{(x-2)(x-3)}-\frac{3}{x-3}=0\ldots\ldots(1).$$

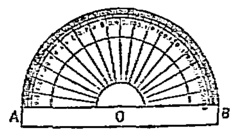
以分母之最小公倍數乘之，則得 $x^3-4x^2+2x+3=0$，即 $(x-3)(x^2-x-1)=0$. 故此方程式之根，爲 $x=3$ 及 $x=(1\pm\sqrt{5})/2$. 乃 $x=(1\pm\sqrt{5})/2$，適當於元方程式之根，而 $x=3$，非元方程式之根. 此理蓋因 $x-3$ 爲 (1) 式左邊分外之除數. 即將 (1) 式左邊分爲部分分數則實爲 $\frac{1}{x-3}+\frac{x^2-x-3}{(x-2)(x-3)}-\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+1$ 故也. 又如解 $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{(x-1)}=1$，而爲 $\sqrt{(x+1)}=1-\sqrt{(x-1)}$，將兩邊自乘，而簡單之，則 $1=-2\sqrt{(x-1)}$，再將兩邊自乘之，則 $1=4(x-1)$，$\therefore x=\frac{5}{4}$，但 $x=\frac{5}{4}$ 非原方程式之根.

分母. 算 代 英 Denominator. 例如分數 $\frac{3}{5}$，其 5 爲分母. 凡 $\frac{a}{b}$，其 b 爲分母.

分面. 目 英 Quadrant. 一平面以互爲垂直之二直線(如圖)四分之，而成四分面，即 I 謂之第一分面，II 謂之第二分面，III 謂之第三分面，IV 謂之第四分面.



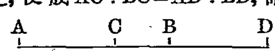
分度器. 幾 英 Protractor. 如圖之半圓形其周圍刻有分數，謂之分度器. 爲欲知含於圓弧之度數，及作某角之用. 凡欲知圓弧之度數，將其 O 置於其弧之中心，而弧之一端，置於直線 AO 之中，自 AO 至弧之他端與 O 連結之直線，計其度數，即得. 又凡欲作某角，即將 O 置於其角之頂點，先計其角之度數，次將 AO 置於所欲作角之處乃自 A 計其度數，而作其角，即得.



分爲相似. 幾 英 To divide similarly. 將已定之直線，分爲二分，使其二分之比，等於他直線已定二分之比，謂之分爲相似. 又相似形以對應之直線分之，亦謂之分爲相似.

分爲對稱. 幾 英 To divide symmetrically 將已定之直線，分之使爲對稱，謂之分爲對稱.

分爲調和. 幾 英 To divide harmonically. 將有限直線 AB，於二點 C,D，分之，使成 AC : BC=AD : BD，謂之分



爲調和. 而AB被C,D分爲調和, 則CD又被A,B分爲調和.

分線. 幾 英 Segment. 同分見其條.

分線器. 幾 英 Divider. 以鋼或銅與他金屬製成之器械, 如圖自兩足而成所以等分

直線者. 又用畫圓, 但一足之螺旋處, 可插鉛或鋼筆嘴, 謂之孔把斯.

分數. 算 代 英 Fraction. 某數a以他數b除之之商表之, 如$\frac{a}{b}$, 謂分數, a爲分子, b爲分母.

分數方程式. 代 英 Fractional equation 謂有未知數爲分母之方程式. 例如, $\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$, $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-3}=0$ 等.

分數式. 代 英 Fractional expression. 謂含分數之代數式. 例如 $\frac{3}{x-2}$, $ax+\frac{c}{x-b}$ 等. 又如 $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{a+b}$ 雖爲分數式, 然自x言之, 則非分數式, 而爲x之整式也.

分數指數. 代 英 Fractional index. 謂指數爲分數者. 例如 $a^{\frac{1}{2}}$, $ab^{-\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{5}}$ 等, 爲有分數指數之式也.

分數係數. 代 英 Fractional coefficient. 謂係數爲分數者.

分數單位. 算 英 Fractional unit 例如$\frac{3}{7}$乃表將1等分爲7個之3倍, 而此$\frac{1}{7}$爲測度$\frac{3}{7}$時之分數單位也. 凡將1等分爲幾者, 爲分數單位, 而以之測度某分數者也.

分離係數法. 代 英 Method of detached coefficients. 二代數式, 俱依某文字之昇方或降方列之, 可僅書係數, 而施乘除法, 最爲簡便. 例如以$3x^2+2x-2$乘$3x^2-x+2$, 則

$$
\begin{array}{r}
3-1+2 \\
3+2-2 \\
\hline
9-3+6 \\
6-2+4 \\
-6+2-4 \\
\hline
9+3-2+6-4
\end{array}
$$

因其積之x最高方爲x^4, 故爲

$9x^4+3x^3-2x^2+6x-4$.

又如以$2x^2-5$除$6x^4+2x^3-19x^2-5x+10$, 則先將$2x^2-5$變爲$2x^2+0.x-5$之形, 而後準上法行之,

$$
\begin{array}{l}
2+0-5)\ 6+2-19-5+10\ (3+1-2 \\
\underline{6+0-15} \\
2-4-5 \\
\underline{2+0-5} \\
-4-0+10 \\
\underline{-4-0+10}
\end{array}
$$

因其商之最高次項爲x^2, 故爲

$3x^2+x-2$.

比. 算 代 幾 英 Ratio. [比之定義一] 某數以與之同類之他數除之, 表之爲$\frac{a}{b}$或a/b, 或最普通者爲$a:b$, 謂之比. a以b除之之商, 謂之比之值. 故比之值$=a\div b$, $a=$(比之值)$\times b$, $b=a\div$(比之值). [比之定義二] 某量A與同種他量B之比, 謂以之乘B可得A之數, 其比記之爲$\frac{A}{B}$. 同種二量A與B之比, 等於以第二量爲單位, 而測度第一量之數. 任何之比, 例如$\frac{3}{5}$, 則其第一量, 等於以$\frac{3}{5}$乘其第二量之積. 但以$\frac{3}{5}$乘某量者, 爲取某量之$\frac{3}{5}$, 是第一量爲第二量$\frac{3}{5}$, 故將第二量爲單位, 則$\frac{3}{5}$爲測度第一量之數也. 若A與B之比, 卽以之乘B而得A之數, 爲不可通約之數, 則試以r表之, 而

將以B爲單位測度A之數爲m，又$\frac{k}{n}$及$\frac{k+1}{n}$爲不及或過於r之$\frac{1}{n}$之，近似值，則$B\frac{k}{n}<A<B\frac{k+1}{n}$故測度A之數$m$，在以B爲單位測度二量$B\frac{k}{n}$，$B\frac{k+1}{n}$之二數$\frac{k}{n}$，$\frac{k+1}{n}$之間．然則$m$及$r$之二數，在$\frac{k}{n}$及$\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$二數之間．此後二數之差，可因$n$極大而爲極小．故在極限，則$r$等於$m$．二量A及B，以同單位C除之，則A與B之比，可以第二量之測度β，除第一之測度α而得之．蓋自前定理之二關係$A=C\alpha$，$B=C\beta$，而得$A=B\frac{\alpha}{\beta}$，故此商$\frac{\alpha}{\beta}$爲A與B之比也．由是任意二數α與β之比，可視爲以β除α之商，此證明於算術者也．而算術論分數之法則，比亦適用之．例如以同數乘比之兩項，其値不變，又如二比之積可取其各相當項之積而得之．[比之定義3] (1)一量與同種他量之比，爲第一量與第二量之關係，但此關係，爲比較二量各幾倍之互相等而定．A與B之比，以A：B表之，其A謂之前項，B謂之後項．例如一斤與十兩之比，謂因5(一斤)＝8(十兩)而定也 (2)一量對於同種他量之比，謂第一量與第二量各倍量之關係．A對於B倍量之關係，乃將A之各倍量遞次增大而序列之，使連續以至無限，知A之諸倍量，如何插於B之諸倍量之間而定者也．例如將正方形對角線爲A，其邊爲B，則其倍量相插之法如次．

	A		2A		3A	4A	
B		2B		3B	4B	5B	6B,,
	5A		6A		7A		
7B		8B		9B		10B,,	
	8A		9A			10A	
11B		12B		13B	14B		15B,,

…………………………………………

	100A	
141B		142B, …………………

但A之各倍量，記之於B之各倍量之間．如此將各倍量之插法，乃依二量A與B而定，雖B與C之差如何小，其A與C之插法，必異於A與B之插法．蓋將B與C之差爲D，則D雖如何小必能求得$mD>A$之m．然則mB與mC之差必大於A．故mB與mC不能在A之同倍二量之間．故A與B諸倍量之插法，不能同於A與C諸倍量之插法，卽其初同倍量之小者，雖相同，至其後倍量之大者，必不同矣．[比之相等]有二比，取其二前項任意等倍量，又取其二後項任意等倍量，其一前項之倍量，比其後項之倍量，或大或等或小，而他一前項之倍量，比其後項之倍量，亦或大或等或小，則此二比謂之相等．但其一比之二量，與他一比之二量，同類異類皆可也．換言之，卽二比A：B及P：Q，而m與n爲任意之正整數，其mP比nQ或大或等或小，而mA比nB亦或大或等或小，則謂比A：B等於比P：Q．又自上定義得次之結果．m爲任意之整數，而n爲mA之在nB及$(n+1)B$之間，或mA等於nB所可決定之整數，乃因mA在nB及$(n+1)B$之間或等於nB，而mP亦在nQ及$(n+1)Q$之間或等於nQ則比A：B，等於比P：Q．故上定義又能如下述之．有二比A;B及P:Q，其A諸倍量

與B諸倍量之插法，及P諸倍量與Q諸倍量之插法相同，則謂之相等．[比之不等] 有二比，取其二前項之等倍量，與其二後項之等倍量，其第一比前項之倍量，比其後項之倍量，或大或等，而第二比前項之倍量，比其後項之倍量，不大或小，則謂第一比大於第二比．換言之，卽將二整數 m, n 之值，能使 mA 大於 nB，而 mP 不大於 nQ，或使 mA 等於 nB，而 mP 小於 nQ，則謂比 A : B 大於比 P : Q．

比之符號． [算] 英 Sign of ratio 二數之比之符號爲 : ，而前項記於其左，後項記於其右．又記爲分數之形，則用橫線．

比之記號． [算] 英 Sign of ratio 同比之符號，見其條．

比例． [算] [幾] 英 Proportion. 謂二比相等而以符號連結之者．例如 3 : 4 = 9 : 12，又 $a : b = c : d$ 等．其 a, d 謂之外率或外項，其 b, c 謂之內率或內項．

比例中率． [算] [幾] 英 Mean proportional. 比例二中率相等者，謂之比例中率．例如 3 : 6 = 6 : 12 又 $a : b = b : c$ 其6爲3與12之比例中率，其 b 爲 a 與 c 之比例中率．自 $a : b = b : c$ 而 $b^2 = ac$，$\therefore\ b = \pm\sqrt{ac}$．故比例中率之平方，等於兩外率之積，而比例中率，等於兩外率之積之平方根．

比例中項． [算] [幾] 與比例中率同，見上條．

比例配分． [算] 英 Proportional parts. 謂將已知一數，比例多數而分之．例如將金319圓，分爲比例5, 7, 11之部分，則先將 5+7+11=23，故取319圓之 $\frac{5}{23}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{11}{23}$，卽得85圓，119圓，187圓．

若將已知之數，比例如 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{25}$ 之分數而分之，則將其分母之最小公倍數150，乘其分數，則成整數之比，卽 15 : 10 : 6．又將金1050圓，分與甲乙丙丁，甲所得與乙所得之比，爲 2 : 3，乙所得與丙所得之比爲 4 : 5，丙所得與丁所得之比爲 6 : 7，則

甲所得 : 乙所得 = 2 : 3 = 16 : 24

乙……. : 丙……. = 4 : 5 = 24 : 30

丙……. : 丁……. = 6 : 7 = 30 : 35

故甲乙丙丁所得之比，爲 16 : 24 : 30 : 35，此數如次求之．

甲		乙		丙		丁
2	:	3		0		0
0		4	:	5		0
0		0		6	:	7
48	:	72	:	90	:	105

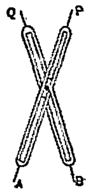
約之卽 16 : 24 : 30 : 35．

但0之處，當塡寫與左或右相同之數．玆省而不書，各行相乘時，宜默識之，若其所得，爲甲之3倍等於乙之2倍，乙之5倍等於丙之4倍，丙之7倍等於丁之6倍，則逆其倍數而取其比，爲甲與乙之比爲 2 : 3，乙與丙之比爲 4 : 5，丙與丁之比爲 6 : 7．

又將工資936圓，分與甲乙丙工頭，依各工人數與日數爲比例，而甲工10人20日，乙工15人18日，丙工14人11日，問工資之分配如何．此問題爲人數之比 10 : 15 : 14，與日數之比 20 : 18 : 11 之複比．化之卽 10×20 : 15×18 : 14×11，卽 200 : 270 : 154，亦卽 100 : 135 : 77，依此分配之，卽得

比例規． [圖] 英 Proportional compass. 此規爲將已知之分線，增減爲已知

之比而用者．卽移動點O使$\frac{OP}{AO}$等於已知之比［此規之足，有分數使容易知其比］AB等於已知之分線，則PQ爲以$\frac{OP}{AO}$之比，而增減AB．AP與BQ之交點，當見爲O．



比例部之理論． 目 英 Theary of proportional parts. 如 $\log(n+d)-\log n=\log\left(1+\frac{d}{n}\right)=\mu\left(\frac{d}{n}-\frac{d^2}{2n^2}+\frac{d^3}{3n^3}-\cdots\cdots\right)$，

但 $\mu=0.43429448\cdots\cdots\cdots$

今假定n爲自五數字所成之整數，故n不小於10000而d不大於1．然則$\frac{\mu d^2}{2n^2}$小於$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{10000}\right)^2$，故必小於0.00000003而$\frac{d^3}{3n^3}$小於此之萬分之一，餘倣此．故至少至小數第七位爲$\log(n+d)-\log n=\frac{\mu d}{n}$，卽對數之變化，約略與對應之數成比例．此之謂比例部之理論．對數表及三角函數表，均自此理論而成．

比例第三率． 算 代 英 Third proportional. 三數成比例，例如 $4:6=6:9$或$a:b=b:c$，則9謂之4，6之比例第三率，c謂之a，b之比例第三率．

比例第四率． 算 代 英 Fourth proportional. 四數成比例，例如 $5:8=15:24$，或$a:b=c:d$，則24爲5，8，15之比例第四率，d爲a，b，c之比例第四率．

比例量． 算 代 英 Proportional quantity. 謂成比例之量．

比例數． 算 代 英 Proportional number. 謂成比例之數．

比左之法． 代 英 Bezout's methed 同未定乘數法，見其條．比左爲法國之數學家．生於1730年死於1783年．

比重． 算 英 Specific gravity. 某物質之比重，乃以其物質之重，而以同容積水重除之之商也．例如水銀之比重爲13.6，卽謂水銀之重爲同容積水重之13.6倍．故水銀一立方生的米突之重爲13.6格蘭姆而一立突之重爲13.6啓羅格蘭姆，又一立方米突之重爲13.6米突噸．又酒精之比重爲0.827，則其酒精之重爲同容積水重之0.827倍．故某物質之重，爲將其一立方生的米突之重，而以格蘭姆表之之數．或爲將其一立突之重，而以啓羅格蘭姆表之之數．或爲將一立方米突之重，而以米突噸表之之數．茲述二三物質之比重如次．

白金	21.5	金	19,3
水銀	13.6	鉛	11.4
銀	10.5	白銅	8.9
銅	8.8	鐵	7.8
木炭	1.6	冰	0.9

比較消去法． 代 英 Elimination by comparison. 含二未知數以上之一組方程式，自其一方程式，以未知數之項，求他未知數．又自其一方程式以同未知數之項求他未知數，將此二者，以相等符號連之，而消去一未知數，謂之比較消去法．例如自$7x-2y=60$，$3x+5y=55$而$y=\frac{7x-60}{2}$，$y=\frac{55-3x}{5}$，使之相等，卽$\frac{7x-60}{2}=\frac{55-3x}{5}$，

此卽以比較消去法,消去一未知數 y 矣.

方田. 圜 古數書篇名. 以御田疇界域,爲九章之一,所以求各形之面積者.

方亭. 圜 古體形名. 見九章商功. 釋名曰亭停也. 人之所停集也. 其積如亭之方者. 圓亭亦然. 又方亭卽角臺,或截頭角錐之一. 見其條.

方陣. 圜 英 Magic square 謂最初若干個整數,列爲正方形,而其縱橫斜之和,恆相等者. 方陣之最簡單者,爲將最初之九個整數,如圖列之,[卽洛書數見洛書條]其縱橫斜相加,皆成15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

將最初之十六個整數,如圖列之,其縱橫斜相加,皆成34.

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

將最初二十五個整數,如圖列之,其縱橫斜相加,皆成65.

16	14	8	2	25
3	22	20	11	9
15	6	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

將最初三十六個整數如圖列之,其縱橫斜相加皆成111.

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

將最初四十九個整數,如圖列之,其縱橫斜相加皆成175.

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

將最初六十四個整數,如圖列之,其縱橫斜相加皆成260.

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
54	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	25	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

將最初八十一個整數,如圖列之其縱橫斜相加,皆成369.

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	81	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	62
71	8	53	64	1	46	69	6	51

將最初百個整數,如圖列之,其縱橫斜相加,皆成555.

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	88	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

然亦有無法列之者,如最初四個整數是也. (注意)本條三十六個整數列法至八十一個整數列法錄自明程大位算法統宗. 百個整數

列法錄自李儼中國數學源流攷略

方程. 古數書篇名. 以御正負雜揉爲九章之一. 羣物總雜,各列有數,總言其實,令每行爲率,二物者再程,三物皆三程,皆如物數程之,並列爲行,故謂之方程,後人譯代數學,有方程之名即本此.

方程式. Equation 此所謂方程式者,若精當言之,則爲規約方程式. [Conditional equation] 其 Equation 之義,若精當言之,則爲相等式,即如次.

相等式[Equation]者,爲將二數或二式,連結以符號 = 而表之者也. 其左右兩邊之式,謂之邊,或謂之節, = 之左邊之式,謂之左邊,亦謂之左節其右邊之式,謂之右邊,亦謂之右節. 相等式中,有恆等式[Identical equation]及方程式 [Conditional equation] 之二者. (1) 恆等式所含文字,無論以如何之值代之,恆不失其相等. 換言之,即謂自其一邊,可求得他一邊者也. 例如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,
$(a^2-b^2)\div(a-b)=(a+b)^2\div(a+b)$.

(2) 方程式,其中必有一文字或多文字,在一定之值,而後能相等者也. 方程式中,已知之數,或假定爲已知者,謂之已知數,而所求之數,謂之未知數. 例如方程式 $x+3=5$, $x+y=3$, 其 x, y 爲未知數. 又如方程式 $ax^2+bx=c$, 其 a, b, c 爲已知數,而 x 爲未知數. 方程式之兩邊, (1) 以等數加之, (2) 以等數減之, (3) 以等數乘之, (4) 以等數除之,均不失其相等. 代數方程式. [Algebraic equation] 爲僅自代數式所成之方程式,因其未知數之次數,分之爲一次二次三次,……例如

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+2bx=cx+d \\ ax+3by+4z=c \end{array}\right\} \text{一次.}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+2bx+c=0 \\ ax^2+bxy+z^2=d \end{array}\right\} \text{二次.}$$

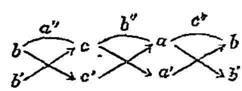
$$\left.\begin{array}{l} cx^3+dx^2+cx+f=0 \\ 4axy+5z^5-3xyz=d \end{array}\right\} \text{三次.}$$

....

方程式之一致. 代 英 Consistency of a system of equations.

一組方程式,有公共之答者,即爲方程式之一致. 例如一組方程式 $ax+b=0$, $a'x+b'=0$, 若此二方程式爲一致則其必要且十分之要件,爲 $ab'-a'b=0$. 又一組方程式爲 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, 及 $a''x+b''y+c''=0$, 若此三方程式爲一致,則求其必要且十分之要件,先自第一,第二方程式,求 x, y 之值,代之於第三方程式,而變化之. 而得 $a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$............(1). 此爲三個一次方程式爲一致之必要且十分之要件也. 若一組有三個以上之方程式,則每加一方程式,必加一要件故有 n 個方程式,則其成一致時,必有 $n-2$ 個獨立之要件. 方程式 (1) 之左邊,在代數學常見者. 故須以次圖記憶之.

即先置 a'', b'', c'' 次置 b, c,



b', c' 於 a'' 之下,自左上向右下之積爲正,自左下向右上之積爲負,以下 b'', c'' 以輪換次序而變,則爲同樣,而記憶 (1) 之各項,即容易矣. 例如驗三方程式 $3x+2y=5$, $2x-3y=1$, $x+y-2=0$ 爲一致與否,則因要件 (1) 爲

$$1.\{2\times(-1)-(-3)\times(-5)\}+1.\{(-5)\times 2-(-1)\times 3\}+(-2)\{3\times(-3)-2\times 2\}$$
$$=-17-7+26\neq 0$$

故三方程式無同一之答,卽非一致也. 又三方程式 $3x+2y=5$, $2x-3y=1$, $(1+c)x+(1-c)y=1$, 欲爲一致而求 c 之值,則代入要件(1)且變化之,而得 $c=\dfrac{-11}{10}$.

方程式之理論. 數 英 Theory of equations. 方程式之理論,爲數學之一分科,求一切方程式之根與係數之關係,及三次四次方程式之解法,及高次方程式根之近似值等,而論凡高次方程式種種關係性質者也.

方程式之變化. 代 英 Derivation of equations. 例如 $6x+5=3x+14$..(1),
故 $(6x+5)-(3x+5)$
$$=(3x+14)-(3x+5)\text{.........}(2),$$
故 $3x=9$ ....(3),
由是 $3x\div 3=9\div 3$ ....(4),
故 $x=3$ ....(5).

如此自己知之方程式(A),變化爲一切有解答之方程式(B),則(B)謂之(A)之變化式. (B)之一切解答爲(A)之解答者,則謂之可還原之變化,而其全同解答之二方程式,謂之等值,如前例(1),(2),(3),(4),(5)互爲等值. 然變化式非皆能還原者, 例如自

$$x-1=0\text{........................}(6)$$

變化爲. $(x-2)(x-1)=0$ ....(7)

其適當於(6)之各值,能適當於(7),然其適當於(7)之各值,則不能適當於(6),蓋其 $x=2$ 爲(7)之解答,而非(6)之解答故也. 故(6)與(7)非等值. 此可自他點,觀察而得之. 自(7)變爲(6),則(7)之兩邊必以 $x-2$ 除之,然(7)之運算,須知其 x 實假定爲1或2之恆等式. $x=1$ 則 $x-2\neq 0$, 然 $x=2$, 則 $x-2=0$, 而必有以0除之之運算,故其不能還原者,卽不能以0除之之關係也.

方程式之節. 代 英 Member of an equation 見方程式條.

方程式之邊. 代 英 Side of an equation. 見方程式條.

方錐. 卽角錐[Pyramid]之一,爲九章商功體形之名,見角錐條.

反三角函數. 目 英 Inverse trigonometric function. $x=\sin A$, 則 $A=\sin^{-1}x$. 準此, $x=\tan A$, 則 $A=\tan^{-1}x$. 其 $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ 等,爲反三角函數,亦稱逆三角函數.

反比. 算 代 英 Reciprocal ratio, 或 Inverse ratio. 比 $a:b$ 之反比爲 $b:a$ 亦謂之逆比.

反氏例. 算 代 英 Inverse proportion. 一量因他量之反數而變,則先量任意之二值,與後量相對之二值,謂之反比例,亦稱逆比例. 例如先量爲作某事之人數,後量爲作成之日數,卽12人10日作成之事,問8人幾日作成,則人數之比 $12:8$, 等於日數之反比 $x:10$, 卽 $12:8=x:10$. 或人數之反比 $8:12$, 等於日數之比 $10:x$. 卽 $8:12=10:x$. 皆爲 $x=15$, 卽15日也. [參看正比例條].

反圓函數. 目 英 Inverse circular function 同於反三角函數,見其條. 亦謂之逆圓函數.

反數. 算 代 英 Reciprocal. 3之反數爲 $\dfrac{1}{3}$, 而 $\dfrac{2}{5}$ 之反數 $\dfrac{5}{2}$, 凡整數之反數,爲以其數爲分母而以1爲分子者.

又凡分數之反數,爲交換其分母分子之分數.或如$\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$,則互稱反分數,[Reciprocal fraction] 反數亦稱逆數,或稱倒數.

反數方程式. 代 英 Reciprocal equation. 反數方程式者,其任意一根之反數,亦爲其根之方程式也.一方程式$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_n=0$若欲爲反數方程式,求其有如何之要件,則因以其根之反數爲根之方程式,爲

$$p_0\left(\frac{1}{x}\right)^n\times p_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n=0,$$

以x^n乘之,則爲

$$p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots\cdots+p_nx^n=0,$$

此方程式,若欲與上方程式同,則當爲

$$\frac{p_0}{p_n}=\frac{p_1}{p_{n-1}}=\frac{p_2}{p_{n-2}}=\cdots\cdots\cdots=\frac{p_n}{p_0}.$$

自其始終二項,而$p_n{}^2=p_0{}^2$故$p_n=\pm p_0$故反數方程式,其距始終相等項之係數,爲相等或僅異其符號.此反數方程式之二形,謂之第一類及第二類.反數方程式,亦稱逆數方程式.反數方程式,有次之性質.(1)第一類奇次之反數方程式,有-1之根.(2)第二類奇次之反數方程式,有$+1$之根.(3)第二類偶次之反數方程式,有±1之二根.(4)去其三根之因數,則爲第一類,而餘偶次之反數方程式.(5)解第一類偶次之反數方程式,則代入$x+x^{-1}=y$而解其次數爲元半分之方程式.蓋元方程式可記爲

$$a_0(x^{2n}+1)+a_1(x^{2n-1}+x)+\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

故將其各項,以x^n除之,則爲

$$a_0(x^n+x^{-n})+a_1(x^{n-1}+a^{-n+1})+\cdots\cdots\cdots=0.$$

若$x+x^{-1}=y$,則$x^2+x^{-2}=y^2-2$.而自$x^n+x^{-n}=(x^{n-1}+x^{-n+1})(x+x^{-1})-(x^{n-2}+x^{-(n-2)})$一切之關係,知$x^n+x^{-n}$可以$y$之$n$次有理整數表之.例如解$6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0$之方程式,因(3)而知其左邊有$x^2-1$之因數而對應之根爲$\pm1$,故

$6(x^6-1)-25x(x^4-1)+31x^2(x^2-1)=0$.故所求之根,爲$\pm1$及

$6x^4-25x^3+37x^2-25x+6=0$之根.

其各項以x^2除之,則

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x+\frac{1}{x}\right)+37=0$$

若$x+\frac{1}{x}=y$,則$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$,

故$6y^2-25y+25=0$,

$\therefore\ y=\frac{5}{2}$,或$y=\frac{5}{3}$.

自$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$,得$x=2$或$\frac{1}{2}$.

自$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{3}$得$x=\frac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11})$故

所求之根,爲±1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11})$.

反數之對數. 代 英 Cologarithm of a number. 謂數之反數之對數也.

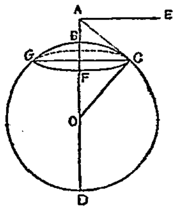
反數式. 代 英 Reciprocal expression a之反數式爲$\frac{1}{a}$,而$\frac{b-x}{a+x}$之反數式爲$\frac{a+x}{b-x}$凡整式之反數式,謂將其式爲分母,而以1爲分子之式,又凡分數式之反數式,謂將其分母分子交換之式.

反轉之理. 代 英 Invertendo. 謂若$a:b=c:d$,則$b:a=d:c$也.

反變. 代 英 Varies inversely. 某數因他數反變者,謂始數因後數之反數而變也.例如a因b而反變,則謂$a:\frac{1}{b}$爲常數,即ab爲常數也.

水平. 目 英 Horizon. 見水平之深條.

水平之深. 目 英 Dip of horizon 如圖之圓,以表地球之截口,A爲地球上之一點,AC爲自A所作切線,則此圓若將AO爲軸而旋轉之,則地球面上之一C點,必畫一圓CFG,而此圓謂之A之水平. 與AO爲垂線作AE,則AF與AC所成之角,謂之水平之深. 關於此之問題,有極有趣味者,如次. [1] 有AB之呎數而求AC哩數之法. 將AB爲h呎,r爲地球半徑之哩數,AB再與圓之交點爲D,今$\overline{AC}^2=AB.AD$



$$=AB.BD=\frac{h}{5280}[略]\times 2r=\frac{7926h}{5280}=\frac{3h}{2}[略]$$

如是水平距離哩數之平方,等於觀測者眼高呎數二分之三. [2] 以h之頂求水平之深法. 水平之深,即EAC,以θ表之,而角AOC及角EAC,各爲角OAC之餘角,故相等,如是$A\hat{O}C=\theta$. 但h比較於r爲極小,故角θ爲極小,而切線AC,殆等於弧BC. 但$\theta=BC/r$,於是殆$\theta=AC/r$,即$=\sqrt{2h/r}$,而r以呎數表之,θ以秒表之,則如次.

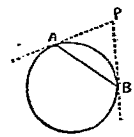
$$\frac{206265\times\sqrt{h}}{\sqrt{(3963\times2640)}}=63.65\sqrt{h}.$$ 如是水平線之深θ之分數,爲$1.06\sqrt{h}$. [3] h爲高之呎數,則自A能見地球面一部分平方哩之數,殆爲$3\pi h/2$. 因自A能見之地球面部分,殆等於以AC爲半徑之圓面積,即$\pi\overline{AC}^2$ 但$\overline{AC}^2=3h/2$,故自A能見之地球面部分面積,爲$3\pi h/2$平方哩. [4] 自A能見之地球面部分面積,與地球全面積之比,等於A之高與地球半徑之比. 蓋自A能見之地球面部分面積,爲$\pi AC^2=\pi AB.AD=\pi AB.BD$[殆]$=2\pi rAB$,而地球之面積$=4\pi r^2$,故所求之比爲$2\pi r.AB:4\pi r^2$,即$AB:2r$. [5] 二點不同高,則其二點能見之地球面部分面積之比,殆等於其二點之高之比.

水平角. 目 英 Horizontal angle. 水平角者,其二邊皆在水平面內之角也.

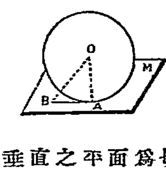
水平面. 目 英 Horizontal plane. 謂與垂直線成垂直之平面.

水平線. 目 英 Horizontal line. 謂在水平面內之直線.

切弦. 圖 英 Chord of contact. 自圓外一點,作其圓之二切線,連結此二切點之直線,謂之切弦.如圖,連結二切線PA, PB之切點A,B之直線AB是也.



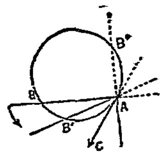
切面. 圖 英 Tangent plane. 球之切面者,爲過球面上一點A,作一割平面,則與其球於一圓相交,將此平面繞A點而轉,則與球相交之圓,漸漸小以至於無窮小之極限,則此平面謂之球之切面.



又球之直徑一端,垂直之平面爲切面,圓壔圓錐之切面,爲其一母線與其交於底面周之點之底面切線而定之平面.

切線. 圖 英 Tangent. 圓之割線AB,繞A

點而轉, B點與A點相接近之極限, 其AB之位置爲AC, 則AC爲在A點之圓之切線, 而A點爲切點. 又圓半徑端之垂線爲切線. 圓周上一點, 惟能作一切線, 過切點之徑, 其所二等分之諸弦, 皆與切線平行.



切點. 幾 英 Point of contact. 見切線切面條.

五角形. 幾 英 Pentagon. 謂以五直線所成之直線形. 圓內接正五角形, 先作內接正十角形,[見十角形條]連結其間一之角頂卽得.

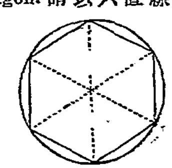
五面體. 幾 英 Pentahedron. 謂以五平面所成之立體.

五乘根. 算 代 英 Fifth root. 某數之五乘根者, 爲其五乘方等於某數之數也. 例如2爲32之五乘根, 記之爲$\sqrt[5]{32}=2$. 凡a之五乘根記之爲$\sqrt[5]{a}$.

五邊形. 幾 英 Pentagon 同五角形.

六十分法. 算 代 三 英 Sexagesimal method. 測角之六十分法者, 謂將直角九十等分之一爲一度, 一度六十之一爲一分, 一分六十等分之一爲一秒, 謂之以度分秒測角法, 而度分秒之記號爲°, ′, ″, 例如38° 52′ 19″爲38度52分19秒. 今將某角度之數爲D, 法度之數爲G, 弧度之數爲C, 則爲 $\frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2C}{\pi}$

六角形. 幾 英 Hexagon. 謂以六直線所成之平面形. 圓內接正六角形, 將等於半徑之弦, 次第作於圓周, 卽得. 蓋正六角形之一邊, 等於其外接圓之半徑故也.



六面體. 幾 英 Hexahedron, 謂以六平面所成之立體.

文字方程式. 代 英 Literal equation 謂方程式之係數, 以文字表之者. 例如 $ax+b=0$, $ax+by=c$ 等, 亦稱字母方程式.

文字係數. 代 英 Literal coefficient 謂項之係數爲文字者. 例如ax之a, 又如ax^2+bx+c之a, b, c, 爲文字係數. [但c當見爲x^0之係數]

月形. 幾 英 Lune 同弓月形, 見其條.

月形角. 幾 英 Lunar angle. 謂月形二弧間之角, 其角等於二弧交點作二弧切線之角.

化無理爲有理. 代 英 Rationalization 謂無理數或無理式, 以某因數乘之, 化爲有理數或有理式. 例如$\sqrt[3]{4}$以$\sqrt[3]{2}$乘之, 則爲$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8}=2$. 又$\sqrt{a}-\sqrt{b}$以$\sqrt{a}+\sqrt{b}$乘之, 則爲$a$ b. 而化無理爲有理之因數. 例如上之$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$謂之化無理爲有理之因數. 又分數之分母爲無理數, 則須令爲有理數. 例如 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 蓋欲使其數便於計算也.

$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$之化無理爲有理之因數, 爲$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$. 而$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$之化無理爲有理之因數, 爲$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$. 須熟審之.

化無理爲有理之因數. 代 英 Rationalizing factor. 見化無理爲有理之條

化出單位. 算 英 Derived unit 同補助單位, 見其條.

元利合計. 算 代 英 Amount. 謂元金利息之和. 將元金爲P, 利率爲r, 期限爲n, 則元利合計A, 在單利等於$P(1+nr)$, 在複利等於$P(1+r)^n$.

元金. 算 英 Capital, 或 Principal. 前者爲經商最初所投之資本金,後者爲利息算所借貸之金.

天元. 古數學名. 又名天元一. 金元之間,欒城李冶,作測圓海鏡,益古演段二書,以暢發其旨. 宋末,秦九韶數學九章,及朱世傑四元玉鑑,均有之. 惟秦書之天元,爲代已知數,朱書則曰四元,[見四元條]因不僅立天元也. 元并宋後,郭守敬用李氏法,造授時術,其學遂顯於世,此後疇人株守其成,習而不察,至明遂無知其法者. 故唐順之與顧應祥,謂立天元一漫不審爲何語,應祥演測圓海鏡,爲分類釋術,其自序亦云立天元一無下手處,竟毅然刪去細草,誠不知而作者矣. 明萬歷中,利瑪竇與徐光啓李之藻等,譯爲同文算指諸書,於古九章皆有辨訂,獨立天元一法,闕而不言. 徐光啓於句股義序中,曾引測圓海鏡,又謂欲說其義而未遑. 淸康熙間,西人以借根方法,[見借根方條]進呈康熙帝,以授蒙養齋諸臣習之. 宣城梅㲄成,乃悟即古天元一,於赤水遺珍詳解之,於是世始知天元一之說. 然李氏書,雖嘗板刻,而海內不多有,故人多學習借根方法,而於天元一之蘊,或有未窺者也. 元和李銳,究核李氏全書,復辨別天元之相消,異乎借根之加減,爲雜記數十條,並刊入知不足齋叢書第二十集. 長沙丁取忠,又以之刊入白芙堂叢書. 江都焦循,謂李冶之書端緒叢繁,鮮能知要,作天元一釋. 南豐吳嘉善,又作天元術釋例,天元名式釋例,天元一草,天元問答,均刊入白芙堂叢書. 至是習天元者衆矣. 金匱華蘅芳學算筆談. 謂演元之書,言之太深,復設淺近之題數則以演之,見華氏學算筆談中.

日利. 算 英 Daily interest 爲言日利率之一方法也. 日利率以甚小之數言之. 因又想像其數之大小,甚屬困難,故以對於百圓之一日利息,而謂之百圓日利幾仙,通例恆省稱爲日利幾仙. 例如日利1仙者,謂元金百圓一日之利息爲1仙也.

日步. 算 英 Daily interest 日本數辭,即日利見日利條.

支票. 算 英 Cheque 支票者,銀行存銀之人,支取銀錢之票也. 普通之支票,不得超過其儲存之數目,然與銀行有特別契約者,得依契約所定之數,超過儲存之額.

支拂平均法. 算 代 英 Equation of payments 日本數辭. 同平均日期算. 見其條.

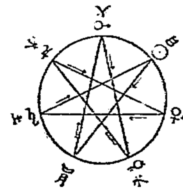
支拂日期之平均. 算 代 英 Average of payments 日本數辭,同発付期日之平均. 見発付平均法條.

互乘法. 代 英 Cross multiplication 方程式 $ax+by+c=0$, 及 $a'x+b'y+c'=0$, 適合於其x及y之値,可自 $\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}$ 得之. 此式欲記憶x, y之値,可如次法. x及y之値,其分母皆爲$ab'-a'b$,可如圖置 $\begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ a' & & b' \end{matrix}$ a,b,a',b'而互乘得之. 但鏃之向右下之積爲正,而其向左下之積爲負. 如此之乘法,謂之互乘法. 同樣x及y之値之分子,亦可以子亦互乘法得之.

互素. 算 英 To be prime to each other 二數,除1之外,無公約數,其二數,謂之互素. 或謂之互單純.

太陽日. 算 英 Solar day. 太陽日者,謂太陽中心,經過某地子午線二次之時間也. 因地球軌道爲楕圓,且其楕圓平面,與赤道平面斜交,故年中太陽日之長,日日不同,故取一年中太陽日之相加平均,謂之平太陽日 [Mean solar day] 卽平常所謂日也.

太陽曆. 算 英 Solar calendar 太陽曆,其曆年之長,等於365日,或366日,前者謂之平年,後者謂之閏年,二者與一回歸年之差,皆在一日以內,故此曆曆年之始,卽爲年之始,曆年之中,亦爲年之眞中,無大差異也. 一曆年分爲十二個月,各冠以自一至十二之數字而稱之. 各月之日數,不皆相等,卽一,三,五,七,八,十,十二,之七個月,各31日,謂之大月,四,六,九,十一,之四個月,各30日,謂之小月,其餘之二月,平年爲28日,閏年爲29日,然皆近於30日,乃自太陰曆一個月之長而來者,而月之長之不齊,則舊習慣也. 定某年之爲平年或爲閏年,則依次之法則.西曆紀元年數之以4得整除者爲閏年,否則爲平年,但以100得整除者,以100除之所得之結果,不能再以4整除者,則爲平年. 依此法則,而以4得整除之年,四年中有一年,又以百得整除之年以100除之所得之數而不得再以4整除者,四百年中有三年,故知400年有 $100-3=97$ 年之閏年,由是太陽曆曆年平均之長爲 $365^{日}+\frac{97^{日}}{400}=365^{日}.2425$. 而與一年之長 $365^{日}.2422$ 之差不過 $0^{日}.0003$ 也. 故無論何人,不依於曆,得按日知其日之爲某日,然太陽曆亦非完全無缺者,如月之長,乃因歷史之關係,而不整齊,七曜日亦不過淵源於舊約,而與天文之學理,毫無關係也. 古昔占星學者,一週七日,命以七遊星[古昔之名稱]之名,其法如圖,自日依時表之針反方向而廻,是爲古昔星學所定七遊星之次序,又自日依自鐵之方向而廻,則爲一週間七曜日之次序,



曉窗隨筆,修改美國紐什州近日發明之二千年七曜一覽表,起西歷紀元後百年,迄二千一百年,在此二千年內,無論何年月日,苟欲知其爲星期第幾,就表推算,頃刻可知,蓋利用貴勾利指用法 [Grégorian Rule of Intercalation] 而作者. 其表如次. (說明) 表分四項,曰百位以上年份,曰百位以下年份,曰月份,曰日序,四項各有對數,取四項對數之和,於其格內配合最末行七曜日,卽知某年月日爲某日曜. 年份內凡遇陰字皆爲閏年,閏年之一,二兩月,應取陰字之月份對數. 例如欲知二千年之二月十日爲何曜,則查百位以上之年份爲二〇其對數爲一,百位以下之年份爲〇〇,對數爲五,閏年之二月對數爲二,十日之對數爲三,而一,五,二,三之和爲一一,乃於對數之和格,求其相配之七曜,卽得木曜四.

二千年七曜一覽表

百位以上

年份	對數
〇一	五
〇二	四
〇三	三
〇四	二
〇五	一
〇六	七
〇七	六
〇八	五
〇九	四
一〇	三
一一	二
一二	一
一三	七
一四	六
一五	五
一六	一
一七	六
一八	四
一九	二
二〇	一

百位以下

年份	對數	年份	對數	年份	對數
〇〇	五	三四	五	六七	四
〇一	六	三五	六	六八	六
〇二	七	三六	一	六九	七
〇三	一	三七	二	七〇	一
〇四	三	三八	三	七一	二
〇五	四	三九	四	七二	四
〇六	五	四〇	六	七三	五
〇七	六	四一	七	七四	六
〇八	一	四二	一	七五	七
〇九	二	四三	二	七六	二
一〇	三	四四	四	七七	三
一一	四	四五	五	七八	四
一二	六	四六	六	七九	五
一三	七	四七	七	八〇	七
一四	一	四八	二	八一	一
一五	二	四九	三	八二	二
一六	四	五〇	四	八三	三
一七	五	五一	五	八四	五
一八	六	五二	七	八五	六
一九	七	五三	一	八六	七
二〇	二	五四	二	八七	一
二一	三	五五	三	八八	三
二二	四	五六	五	八九	四
二三	五	五七	六	九〇	五
二四	七	五八	七	九一	六
二五	一	五九	一	九二	一
二六	二	六〇	三	九三	二
二七	三	六一	四	九四	三
二八	五	六二	五	九五	四
二九	六	六三	六	九六	六
三〇	七	六四	一	九七	七
三一	一	六五	二	九八	一
三二	三	六六	三	九九	二
三三	四				

月份	對數
一月	七
二月	三
三月	三
四月	六
五月	一
六月	四
七月	六
八月	二
九月	五
十月	七
十一月	三
十二月	五
一月	六
二月	二

日序	對數
〇一	一
〇二	二
〇三	三
〇四	四
〇五	五
〇六	六
〇七	七
〇八	一
〇九	二
一〇	三
一一	四
一二	五
一三	六
一四	七
一五	一
一六	二
一七	三
一八	四
一九	五
二〇	六
二一	七
二二	一
二三	二
二四	三
二五	四
二六	五
二七	六
二八	七
二九	一
三〇	二
三一	三

對數之和	七曜
四 …	木曜 四
五 …	金〃 五
六 …	土〃 六
七 …	日〃 初
八 …	月〃 一
九 …	火〃 二
一〇 …	水〃 三
一一 …	木〃 四
一二 …	金〃 五
一三 …	土〃 六
一四 …	日〃 初
一五 …	月〃 一
一六 …	火〃 二
一七 …	水〃 三
一八 …	木〃 四
一九 …	金〃 五
二〇 …	土〃 六
二一 …	日〃 初
二二 …	月〃 一
二三 …	火〃 二
二四 …	水〃 三
二五 …	木〃 四
二六 …	金〃 五
二七 …	土〃 六
二八 …	日〃 初

太陰曆. 算 英 Lunar calendar 是曆創自我國, 而日本韓國遵用之. 惟日本則至明治五年已改用太陽曆, 民間仍有用太陰曆者. 亦如我民國之改用太陽曆, 仍並行太陰曆也. 太陰曆之構造, 並用年月日三者而成, 乃曆之最完備者也. 其曆年之外, 有所謂曆月, 曆月之長, 等於 29 日或 30 日, 前者謂之小月, 後者謂之大月. 又曆年之長, 等於十二個月或十三個月. 曆月自朔之日始至其次朔之前日終. 故定月之大小, 需天文學上之計算. 由是曆月之長, 等於眞月之長 $29^{\text{日}}.5306$.

又曆年始自太陽至黃道上一定位置之曆月, 卽第一月謂之正月, 是亦必俟天文學上之計算也. 太陰曆曆年之長, 與眞年之長, 相差甚多, 故太陰曆之日記, 不能爲表示眞年氣候之用, 因須表示氣候變遷之太陽位置, 乃將黃道等分爲二十四部分, 節氣卽謂太陽至此等部分之時刻, 其名稱爲立春, 雨水, 驚蟄, 春分, 清明, 穀雨, 立夏, 小滿, 芒種, 夏至, 小暑, 大暑, 立秋, 處暑, 白露, 秋分, 寒露, 霜降, 立冬, 小雪, 大雪, 冬至, 小寒, 大寒, 其方向, 自春分點經夏至點至秋分點, 次第如此. 360° 之二十四分之一爲 15°, 故各節氣太陽之黃經度次第爲 315°, 330°, 345°, 360° 卽 0°, 15°, 30°,...... 皆次第加 15° 故依節氣可知爲年之何部分, 自某節氣至次節氣之期限, 謂之一節氣, 凡 15 日也. 又一節氣分三時候, 故一回歸年自 72 時候而成, 其名稱載節氣表中. 立春爲年之始, 且爲春之始, 立夏立秋立冬, 各爲夏秋冬之始, 故春分夏至秋分冬至, 爲春夏秋冬之中央. 而夏則一年中太陽之赤緯最高, 冬則最低, 春秋則在其中央. 由是受光線之量, 夏最甚冬最少, 春秋在其中間, 而互相等, 氣候雖因之寒暑, 然必較後月餘. 故酷暑嚴寒之頃, 不必爲夏冬之眞中. 西洋之四季, [Spring, Summer, Autumn, Winter] 與我之四季不同, 卽自春分夏至秋分冬至始, 而立夏立秋立冬立春爲四季之中央, 故其四季, 可謂夏爲最暑冬爲最寒之時節, 要之我國之春夏秋冬, 依太陽之高而成, 西洋之四季, 自關係於太陽之高之氣候而成, 此其區別也. 節氣時候之表如次

節氣		時候	太陽之黃道經度
立春	舊正月節	東風解凍 蟄蟲始振 魚上冰	315°
雨水	舊正月中	獺祭魚 鴻雁來 草木萌動	330°
驚蟄	舊二月節	桃始華 倉庚鳴 鷹化爲鳩	345°
春分	舊二月中	玄鳥至 雷乃發聲 始電	0°
清明	舊三月節	桐始華 田鼠化爲鴽 虹始見	15°
穀雨	舊三月中	萍始生 鳴鳩振羽 戴勝降於桑	30°
立夏	舊四月節	螻蟈鳴 蚯蚓出 王瓜生	45°
小滿	舊四月中	苦菜秀 靡草枯 麥秋	60°
芒種	舊五月節	螳螂生 鵙始生 反舌無聲	75°

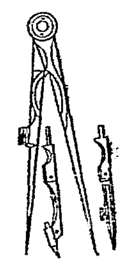
夏至	舊五月中	鹿角解蟬始鳴 半夏生 木堇榮	90°
小暑	舊六月節	溫風至 蟋蟀居壁 鷹乃學習	105°
大暑	舊六月中	腐草爲螢 土潤溽暑 大雨時行	120°
立秋	舊七月節	涼風至 白露降 寒蟬鳴	135°
處暑	舊七月中	鷹祭鳥 天地始肅 登穀	150°
白露	舊八月節	鴻雁來 玄鳥歸 羣鳥養羞	165°
秋分	舊八月中	雷始收聲 蟄蟲坏戶 水始涸	180°
寒露	舊九月節	鴻雁來賓 雀入大水爲蛤 菊有黃華	195°
霜降	舊九月中	豺乃祭獸 草木黃落 蟄蟲咸俯	201°
立冬	舊十月節	水始冰 地始凍 雉入大水爲蜃	225°
小雪	舊十月中	虹藏不見 天氣上騰 地氣下降 閉塞而成冬	240°
大雪	舊十一月節	鶡旦不鳴 虎始交 荔挺出	255°
冬至	舊十一月中	蚯蚓結 麋角解 水泉動	270°
小寒	舊十二月節	雁北嚮 雀始巢 雉始雊	285°
大寒	舊十二月中	雞始乳 征鳥癘疾 水澤腹堅	300°

曆月之名之定法,則立春爲入正月節之時候,驚蟄爲入二月節之時候,清明,立夏,……各爲入三月節,四月節,………之時候,因而雨水在正月節之中央,春分在二月節之中央,穀雨,小滿,……在三月,四月節…………之中央.如此所定之節氣,全因於太陽之經度,故恆爲表示時候者也.太陰曆之各月,卽含雨水之曆月爲正月,含春分之曆月爲二月,含穀雨,小滿,……之曆月爲三月,四月,………由是正月之初一日,與立春相距,不能大於半月.然曆月之長爲29日或30日,而中氣與中氣之間,爲平均一年之十二分之一,卽30日.4385.故必有夾於二中氣之間,而不含中氣之月,依上之法則,無以命其月之名,乃冠以閏字,而謂之閏月,於是其年爲十三個月,其他之年,爲十二個月.

此外又有所謂十干十二支者,本幹枝之義,其10與12之最小公倍數爲60,故六十而一來復,雖與曆法之學理,無何等之關係,而配合於年月日,以調查古來之年代,而正其差誤,大有便利,蓋曆有改正而干支無改正,連綿而傳至今日故也.

引. 算 代 英 To subtract 日本數辭.與減法同,見減之條.又我國長度之補助單位,十丈謂之一引,又我國重量之補助單位,二百斤謂之一引.

引算. 算 代 英 Subtraction 日本數辭,與減法同,見減法條.



孔把司. 幾 英 Compasses 又謂之兩脚規,以銅及鋼製成,而其兩脚,將一端爲樞,可使自在開閉,各爲尖頭,其

一脚可換以鳥嘴,或換以插鉛筆之脚,用以畫圓或移距離之器具也.

心算. 算 英 Mental Arithmetic 謂不用紙筆及計算器械,而以心中計算之也.

手票. 算 英 Bill 記明兌付銀錢數目之證據,或不記名式發行之信用票據也. 手票有匯票期票之二種. 又支票亦手票之一種. 見其條.

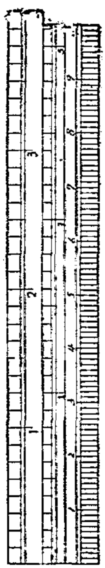
手形. 算 英 Bill 手形爲日本數辭. 卽手票,見上條.

手數料. 算 英 Commission 日本數辭,卽酬金,見酬金之條.

片. 算 英 Pence 爲辨士之省寫,見辨士條.

勿論. 論 英 Afortiori 日本數辭. 卽不待言之意,見不待言條.

火災保險. 算 英 Fire insurance 爲賠償損害保險之一種,被保險者,將一定之保險費,付於保險者.[公司]若干期月之間,賠償火災損害之方法也. 家屋倉庫其中存在之商品及家具等,爲火災保險之通常目的物. 此外建築中之材料,建造中之船舶等,亦得爲火災保險.



尺度. 數 英 Rule 或 Rules 爲量長之器. 緣邊刻有分數,製以金屬象牙竹骨木等. 圖中右邊爲十生的米突,中間爲3.125寸,左邊爲四吋. 又我國通商條約所訂海關尺,其長等於358粍及14.1吋.

少廣. 數 古數書篇名. 爲九章之一,以御冪積方圓,言廣少縱多,截縱之多,益廣之少,故曰少廣.

升. 算 爲我國容量之單位,容積爲31.6立方寸等於1.0354688立突,0.227903加倫. 十升爲斗,五斗爲斛,二斛爲石. 又十分升之一爲合,十分合之一爲勺.

五畫

平方. 算 代 英 Square. 例如5之平方爲5×5卽5^2,6之平方爲6×6卽6^2,凡a之平方爲a^2.

平方根. 算 代 英 Square root. 某數之平方根者,其平方等於某數之數也. 例如$4=2^2$,故4之平方根爲2,而9之平方根爲3,而各記之爲$\sqrt{4}=2$,$\sqrt{9}=3$,凡a之平方根,記之爲$\sqrt{a}$. 其$\sqrt{\ }$謂之根號,乃平方根號$\sqrt[2]{\ }$之略也. 但代數式之平方根,有絕對值等而符號相反之二者.

平方根比. 代 英 Subduplicate ratio. $a:b$之平方根比者,謂$\sqrt{a}:\sqrt{b}$也.

平方根數. 代 英 Quadratic surd. 例如平方根不盡數$\sqrt{2}$,$\sqrt{6}$,$\sqrt{a}$,謂之平方根數又謂之二次根數.

平太陽日. 算 英 Mean solar day. 太陽日者,謂今日正午至明日正午之時間,但此時間每日不同,故將一年中之太陽日平均之,謂之平太陽日,卽通常所謂之日也.

平年. 算 英 Common year, 或 civil year 地球一周太陽之時間爲365日5時48分46秒,故新歷將365日爲一平年,其餘數,積四年,置一閏年,爲366日. 但有特例,詳閏年條. 舊歷平年,則約爲354日,詳太陰歷條.

平行六面體. 圖 英 Parallelepiped, 或 Parallelopiped. 謂六平行四邊形所成之立體. 若六面爲矩形, 則平行六面體爲直角體. 各面爲正方形, 則平行六面體爲立方體. 平行六面體相對之面互相等, 相對之立體角亦相等. 若連結相對面中心作直線, 則皆交於一點. 合相對二稜之平面, 分本體爲等積之兩三角壔. 又表任意之平行六面體之數, 等於表底面積之數乘其高之數.

平行四邊形. 圖 英 Parallelogram. 謂四邊形每相對二邊平行者. 因而平行四邊形相對之邊相等, 相對之角亦相等. 若平行四邊形之一角爲直角, 則他三角亦皆爲直角, 而此平行四邊形爲矩形. 又平行四邊形, 若相鄰二邊相等, 則四邊皆相等, 而爲菱形. 平行四邊形, 若有一角爲直角, 而其相鄰二邊相等, 則此平行四邊形爲正方形. 又平行四邊形之二對角線, 互成二等分, 而其逆亦眞. 平行四邊形之各對角線, 分本形爲二等分. 平行四邊形之面積, 等於其底與高所成之矩形. 二平行四邊形之底相等, 則二形之面積與高成比例. 平行四邊形兩對角線上正方形之和, 等於四邊上正方形之和.

平行四邊形之餘形. 圖 英 Complement of parallelogram 見餘形條.

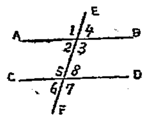
平行角壔. 圖 英 Parallelogramic prism. 謂角壔之底面爲平行四邊形者. 故平行角壔, 同於平行六面體.

平行直線. 圖 英 Parallel straight lines. 二直線, 同在一平面上, 而兩端任引長不相交, 謂之平行. 故平行二直線, 爲同一之方向, 而表示二直線之平行, 書//記號於其間. 例如 AB//CD 爲表示直線AB與直線CD平行也.

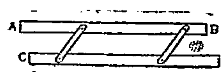
又[別定義] 二直線同方向, 則二直線爲平行. 故自此定義, [第一]知二平行直線必同在一平面上, [第二]知二直線兩端任引長不相交.

又[別定義] 二直線在有限之距離處相交, 則謂之相交, 在無限之距離處相交, 則謂之平行.

一直線, 與二平行直線相交, 則(1)在同傍兩內角2與5, 或3與8, 互成補角. (2)內錯角2與8, 或3與5相等, (3)同傍外角1與6, 或4與7, 互成補角. (4)外錯角1與7, 或4與6相等. 此等之逆亦眞.



[平行尺] 謂作平行線之尺. 如圖, 將等長無分數之二尺, 以動釘連之, 使能推動, 乃置 AB, CD 於適宜之位置, 沿 AB, CD 而作直線, 卽得.



平行線. 圖 英 Parallels. 卽平行直線之略, 見其條.

平角. 圖 英 Straight angle. 謂角之二邊方向相反者, 卽角之一邊, 自他邊之位置, 繞角頂而轉, 越頂而與固定邊之引長線相重, 則其角謂之平角. 平角等於直角之二倍, 卽等於周之半分.

平均中心. 圖 英 Mean centre. 有一組之點, A, B, C, D,…………, 與一組之整數 $a, b, c, d,$………, 分 AB 爲 $a+c$ 等部分, 使 AM_1 僅含 b, 使 BM_1 僅含 a, 又分 CM_1 爲 $a+b+c$ 等部分, 使 M_1, M_2 僅

合C,使 CM_2 僅含 $a+b$, 次第如此, 求 M_3 M_4 之點至求得最後之點M, 則M關於 $a, b, c, d,$………乘數, 而謂之爲點A, B, C, D,……之平均中心

平均日期算. 算 代 英 Equation of payments. 有若干金, 兌取之日期各異, 求其於一時兌取而無損益之法, 謂之平均日期算, 其日期可如次求之. 將各金數乘各日期之和, 以金數之和除之, 卽得. 例如有二個月後應付之金200圓, 四個月後應付之金200圓, 八個月後應付之金100圓, 欲一時付之而無損益, 其日期如何.

$$\begin{array}{ll} 200\times2=400 & \\ 200\times4=800 & \text{答} \\ \underline{100\times8=800} & \text{四個月後} \\ 500\ )\ 2000\ (4 & \end{array}$$

不同日期兌取二項之金, 求平均日期兌取之法, [但依單利算] 有 t_1, t_2 年後兌取之 P_1, P_2, 其 $t_2>t_1$, r 爲利率, 而求平均日期[x年]. [第一法] 今將長日期早兌取之折扣金, 等於短日期遲兌取之利息, 如次解之. 卽 P_2 對於 t_2-x 年之折扣金, 爲 $\frac{P_2(t_2-x)r}{1+(t_2-x)r}$, 而P對於 $x-t_1$ 年之利息, 爲 $P_1(x-t_1)r$. 故 $\frac{P_2(t_2-x)}{1+(t_2-x)r}=P_1(x-t_1)$. 此爲 x 之二次方程式. 卽 $P_1rx^2-\{P_1r(t_1+t_2)+P_1+P_2\}x+P_1rt_1t_2+P_1t_1+P_2t_2=0$ 但須取在 t_1 及 t_2 之間. [第二法] 將 t_1 年後應付之金 P_1 現在付之爲 $\frac{P_1}{1+t_1r}$, t_2 年後應付之金 P_2, 現在付之爲 $\frac{P_2}{1+t_2r}$, 又將 x 年後應付之金 P_1+P_2, 現在付之爲 $\frac{P_1+P_2}{1+xr}$, 故 $\frac{P_1}{1+t_1r}+\frac{P_2}{1+t_2r}=\frac{P_1+P_2}{1+xr}$. [第三法] 變第一法之折扣金爲利息, 則 $P_2(t_2-x)r=P_1(x-t_1)r$. 故 $(P_1+P_2)x=P_1t_1+P_2t_2$ 此乃 x 年 P_1+P_2 之利息, 等於 t_1 年及 t_2 年 P_1 及 P_2 之利息之和. 此法比第一法, 在債務者稍有利益. 蓋其金額之利息, 大於折扣金故也. 在算術則前之法則, 本於第三法, 其與利率無關係明矣.

平均數. 算 代 英 Average value. 同種若干數之平均數, 爲以其數之個數, 除其數之和者也. 故同種若干數之平均數, 以個數乘之, 等於若干數之和. 例如18歲17歲15歲之三人, 其年齡之平均數, 爲 $\frac{1}{3}(18+17+16)=16\frac{2}{3}$. n 個數之和, 以 n 除之, 謂之相加平均. n 個數之連乘積之 n 乘根, 謂之相乘平均. 卽 $a, b, c, d,$….. n 個數之相加平均爲 $\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}$, 而其相乘平均爲 $\sqrt[n]{abcd\cdots\cdots}$,

平均點. 幾 英 Mean point. 見平均中心條.

平面. 幾 英 Plane surface, 或 Plane. 取面上任二點, 連之之直線, 均與面密合, 謂之平面. 靜水之面, 及平滑之鏡面, 有平面之意. 平面之四方無際限. 一直線交於他直線上, 與本線平行而移動, 則生平面. 又一直線迴繞直角之軸, 則生面. (1) 一直線與不在直線上之一點, (2) 不同在一直線上之三點, (3) 相交二直線, (4) 平行二直線, 皆能定一平面. 匠人用尺度之緣當於板之平面, 以驗其平否, 卽用此定義.

平面三角法. 數 英 Plane trigonometry. 平面三角法者, 論三角函數或圓函數之性質關係等, 及三角形解法之科學也.

平面方向. 圖 英 Plane direction. 平面方向者,謂與此平面之垂線成直角之直線方向也.

平面角. 圖 英 Plane angle. 謂在平面上之角,卽一直線在一平面上,以其一端爲樞迴轉之,則作成平面角.

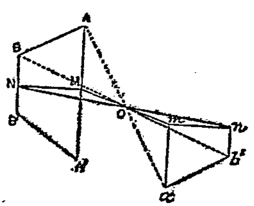
平面形. 圖 英 Plane figure. 平面上以直線或曲線所圍有限部分,謂之平面形. 例如三角形平行四邊形等,爲直線之平面形. [卽平面直線形] 圓,卽曲線之平面形.

平面直線形. 圖 英 Plane rectilinear figure. 謂三直線以上所成之平面形.

平面幾何學. 圖 英 Plane geometry. 研究平面上圖形之形狀大小位置之科學,謂平面幾何學.

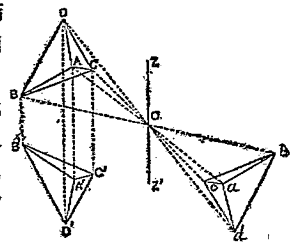
平面圖. 圖 英 Plane figure 謂在平面上之圖形,與平面形同.

平面對稱. 圖 英 Plane symmetry. 一平面之垂線,在其中取等距離之二點,關於此平面而謂之對稱. 而二圖形之一之各點,與他圖形相對之各點,關於此平面成如此之對稱,則此等圖形,關於此平面而謂之對稱. 一立體與其幾何像相對應之線及角皆相等,然不得並置者,又對應之平面及線,等於對稱平面之斜度,且當以同一之點或線相交於其平面. 如斯之圖形,爲可對置,別言之,則關於一平面成對稱之立體,其關於一點,可如對稱置之,而其逆亦眞. 蓋 A, A' 爲



二立體對應之二點,M爲在對稱平面 A, A' 公共之射影,故M爲 AA' 之中點. 將以 A' 爲一點之立體,過對稱平面任意之一點O,繞垂直之直線而轉,通過二直角,則M當至MO延長線中 $Om=OM$ 處之 m, 而 A' 當至過 m, 而與對稱平面成垂直線中之 a 故 ma', MA' 相等,且同方向,而 Aa 且當於O而成等分. 由是第一 ... 之各點,與在新位置第二立體相對之各點連結之線,皆過O且當於O成二等分. 卽二立體,關於O而爲中心對稱.

次圖 $A'B'C'D'$, 爲表過ABCD與O,而關於 AA' 垂直平面成對稱之四面體,而 $abcd$ 爲關於O點與ABCD成對稱之四面體, $A'B'C'D'$ 與 $abcd$,



雖皆不能並置於ABCD之上,而 $A'B'C'D'$ 與 $abcd$ 將其一通過二直角,而繞ABCD與 $A'B'C'D'$ 對稱平面之垂線 ZOZ' 而轉,則得並置於他一之上. 質言之,則ABCD與 $A'B'C'D'$ 爲關於一平面而成對稱. $A'B'C'D'$ 與 $abcd$ 爲關於一軸 (ZOZ') 而成對稱. ABCD與 $abcd$ 爲關於一點(O)而爲對稱.

不能併置之立體而爲對稱,例如人雙手,掌與掌相對,一手可如他手之相而置之,將其一手通過二直角而迴轉,則將對應之指頭連結作直線,當交於一點,且於此點成二等分,故爲中心對稱. 然雙手不能並置

者,猶之右手套,若不翻轉其裏,則不能容左手也.

正二十面體. 幾 英 Regular hexahedron. 見正多面體條.

正十二面體. 幾 英 Regular dodecahedron. 見正多面體條.

正八面體. 幾 英 Regular Octahedron. 見正多面體條.

正切. 三 英 Tangent. 見三角函數條.

正方形. 幾 英 Square. 等邊等角之四方形,謂之正方形. 正方形之各角爲直角,卽等於90°度,而其二對角線相等且互爲二等分成直角. 正方形之一邊,與對角線之比,爲$1:\sqrt{2}$. 而一邊線單位之正方形,爲面積單位. 例如一邊爲一步之正方形,謂之一方步,一邊一里之正方形,謂之一方里. 方陣[Magic square]者,謂將種種之數,列爲正方形,而其縱橫斜之和,恆相等者. 見方陣條.

正比例. 算 代 英 Direct proportion. 一量因他量而變,則前量任意之二值,與後量對應之二量之二值,謂之成比例. 例如前量爲砂糖之斤數,後量爲其價値,卽砂糖7斤之價,爲560錢,則砂糖16斤其價幾何,其斤數之比$7:16$,等於其價之比$560:x$,故$7:16=560:x$自此得$x=128$,卽128錢. [正比例實僅稱比例,謂之正者,對於反比例或逆比例言之也.] 凡能定爲正比例者. (1)言重量,則物品之重量,與其價値. (2)言容積,則物品之容量,與其價値. (3)言個數,則物品之個數,與其價値. (4)言長,則物品之長與其價値. (5)於一定時間,作成之事,與人數. (6)於一定時間,進行之距離與速度. (7)於一定時間之食物,與食之人數. (8)工作時間,與其工資. (9)地面之廣,與其價値. (10)一定時期之利息與元金. 其餘由此類推. [注意]世中有全不依重量容量而買賣者,例如寶石珊瑚之類. 又有同一之物,在若干之內,則依個數比例而買賣,過若干以後,則不依個數比例,例如鉛筆1枝20錢,2枝40錢,3枝60錢,若成一打,[12枝]則爲200錢,或220錢,然在比例問題,通常無此種特例,反之,如次通常定爲反比例,卽逆比例者也. (1)以一定之金,買得物品之重量,與其物品重量一單位之價値. (2)以一定之金,買得物品之容積,與其物品容積一單位之價値. (3)以一定之金,買得物品之個數,與其物品一個之價値. (4)以一定之金,買得物品之長與其一單位之價値. (5)一定之事,作成之時間與人數. (6)行一定之距離,所需之時間與速度. (7)食一定之糧其所需時間與人數. (8)得一定之工資,其所需時間,與其時間一單位之工資. (9)一定矩形之地面積,其長與其寬. 其餘類推.

正五角形. 幾 英 Regular pentagon 見正多角形.

正六面體. 幾 英 Regular hexahedron 卽立方體. 見其條,又見多面體條.

正矢. 三 英 Versed sine. 自1減某角之餘弦,謂爲其角之正矢. 例如

$$1-\cos A = \operatorname{ver} A.$$

正四面體. 幾 英 Regular tetrahedron. 見正多面體條.

正多角形. 幾 英 Regular polygon. 謂等邊等角之多角形. 將正多角形之

邊數爲n，一邊之長爲l，面積爲A．外接圓之半徑爲R，內接圓之半徑爲r，則

$$l=2R\sin\frac{180^\circ}{n}=2r\tan\frac{180^\circ}{n}\ \cdots\cdots(1),$$

$$A=\frac{1}{4}nl^2\cot\frac{180^\circ}{n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

以此等公式，計算正三角形至正十二角形如次．

[第一表]將正多角形一邊之長等於1.

邊數	外接圓之半徑	內切圓之半徑	平方單位之面積
3	0.5773503	0.2886751	0.4330127
4	0.7071068	0.5000000	1.0000000
5	0.8506508	0.6881910	1.7204774
6	1.0000000	0.8660254	2.5980762
7	1.1523825	1.0382617	3.6339124
8	1.3065630	1.2071068	4.8284271
9	1.4619022	1.3737387	6.1818242
10	1.6180340	1.5388418	7.6942088
11	1.7747329	1.7028437	9.3656404
12	1.9318516	1.8660254	11.1961524

[第二表]將外接圓之半徑等於1.

邊數	邊之長	內切圓之半徑	面積
3	1.7320508	0.5000000	1.2990381
4	1.4142136	0.7071068	2.0000000
5	1.1755705	0.8090170	2.3776412
6	1.0000000	0.8660254	2.5980762
7	0.8677674	0.9009689	2.7364102
8	0.7653668	0.9238795	2.8284271
9	0.6840403	0.9396926	2.8925437
10	0.6180340	0.9510565	2.9389263
11	0.5634651	0.9594931	2.9734250
12	0.5176381	0.9659259	3.0000000

[第三表]將內接圓之半徑等於1.

邊數	邊之長	外接圓之半徑	面積
3	3.4641016	2.0000000	5.1961524
4	2.0000000	1.4142136	4.0000000
5	1.4530851	1.2360680	3.6327128
6	1.1547005	1.1547005	3.4641016
7	0.9631491	1.1099160	3.3710222
8	0.8284271	1.0823919	3.3137084
9	0.7279405	1.8641776	3.2757315
10	0.6498394	1.0514622	3.2491970
11	0.5872521	1.0422172	3.2298913
12	0.5358984	1.0355760	3.2153904

[第四表]將面積等於一平方單位.

邊數	邊之長	外接圓之半徑	內切圓之半徑
3	1.5196716	0.8773827	0.4386912
4	1.0000000	0.7071068	0.5000000
5	0.7623870	0.6485251	0.5246678
6	0.6204033	0.6204033	0.5372849
7	0.5245813	0.6045183	0.5446520
8	0.4550899	0.5946034	0.5493420
9	0.4201996	0.5879764	0.5525172
10	0.3605106	0.5833184	0.5547687
11	0.3267617	0.5799148	0.5564242
12	0.2988585	0.5773503	0.5576775

若已知之邊，或外接圓內接圓之半徑，或面積，不等於1，則依相似形相當線之比例，及面積與相當線平方之比例，用此各表求之．例如作正七角形，其面積爲225，則先求得其平方根15，將第四表對於7之各數乘之，即

$$l=0.5245813\times15=7.8687,$$

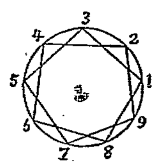
爲一邊之長，又

$$R=0.6045183\times15=9.0678,$$

爲外接圓之半徑，又

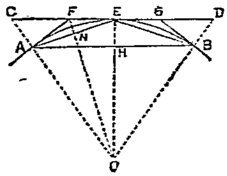
$$r=0.5446520\times15=8.1698,$$

爲內接圓之半徑，而本形容易作之矣．其爲諸表之用法，亦準此．上所述正多角形之邊，爲不相交加者，即除邊相交加之等邊等角形［即一切正多角形之定義］之外也．例如將圓周分爲九，其分點次第爲1, 2, 3, ……8, 9，將1與3, 3與5, 5與7, 7與9, 9與2，次第如此連結之，則得等邊等角之九角形，即一切定義之正九角形．



知圓內接n邊正多角形之周圍，與外切n邊正多角形之周圍，而計算同圓內接或外切$2n$邊正多角形之周圍．n邊內接正多角形之

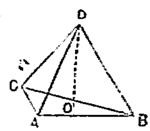
邊為AB，於AB弧之中點E之切線CD，為與內接正多角形相似之外切正多角形之一邊．連結AE，且作A及B點之切線AF，及BG，則AE為外切$2n$邊正多角形之一邊．將內接n邊正多角形之周圍為p，外切n邊之正多角形之周圍為P，而內接及外切$2n$邊之正多角形之周圍，為p'，P'，OC為以P為周圍之多角形之外接圓半徑，故$\frac{P}{p}=\frac{OC}{OA}=\frac{OC}{OF}$，而OF為二等分COE角，故$\frac{OC}{OE}=\frac{CF}{FE}$，故$\frac{P}{p}=\frac{CF}{FE}$，故$\frac{P+p}{2p}=\frac{CF+FE}{2FE}=\frac{CE}{FG}$．夫FG為以P'為周圍之多角形之一邊，而CE合於P中之分數，同於FG合於P'中之分數，故$\frac{CE}{FG}=\frac{P}{P'}$，即$\frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'}$，

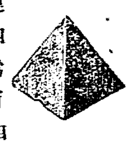


故得$P'=\frac{2pP}{P+p}$ ……………………(1)．

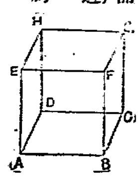
又直角三角形AEH及EFN，其銳角EAH，FEN相等，故相似，因而$\frac{AH}{AE}=\frac{EN}{EF}$，而AH與AE各以同數合於$p$及$p'$，故$\frac{AH}{AE}=\frac{p}{P'}$，而EN與EF各以同數合於$p'$及P'故$\frac{EN}{EF}=\frac{p'}{P'}$，即$\frac{p}{p'}=\frac{p'}{P'}$，故得$p'=\sqrt{p\times P'}$……………………………(2)．

正多面體 參圖 英 Regular polyhedron. 正多面體，為以全相等之正多角形所成之立體，而正多面體之立體角，皆相等．(1)正多面體不能多於五種．[證]作凸多面角，至少須三面，且其面角之和，須小於360°．夫正三角形之各角為60°，故凸多面角能以三個，四個或五個正三角形作之，六個正三角形，其角之和為360°，七個以上正三角形其角之和大於360°，故以正三角形成之正多面體，不能多於三個．又正方形之各角為90°，故能以三正方形作一立體角，而正方形角四個以上之和，不小於360°，故以正方形而成之正多面體，惟有一個．又正五角形之各角為108°，故能以三五角形作一立體角，而五角形角四個以上之和，大於360°，故正五角形而成之多面體，亦惟有一個．而以正六角形以上所成之多面體則無矣．蓋正六角形以上之各角三個之和，恆不小於360°故也．故正多面體，不能多於五個，而五正多面體之成立，可作各立體而證明之．(2)正多面有五個．[將AB為一稜，而求作正四面體．]將AB為一邊，而作正三角形ABC，於其中心O，作ABC面之垂線，於此垂線中取一點D，使DA=AB，將D與三角形ABC之各角頂連結之，則D-ABC為正四面體，蓋因作圖，四面為相等正三角形，而三面角A,B,C,D因其面角相等而亦皆相等故也．

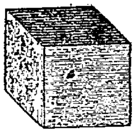


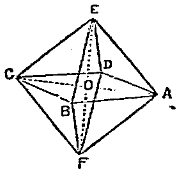


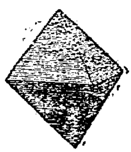
[將AB為一稜而求作正六面體]將AB為一邊，而作正方形ABCD，於其各邊上，各立正方形AF, BG, CH, DE，使成ABCD之垂直平面，則多面體

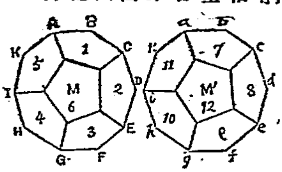


AG,爲正六面體,卽立方體. 蓋六面因作圖爲正方形,而三面角A,B,C,D,因其面角相等,亦全相等故也. [以AB爲一稜而求作正八面體]將AB爲一邊,而作正方形ABCD,過其中心O,而作其平面之垂線,於此垂線上,取E及F點,使AE及AF,皆等於AB,將E及F,連結正方形ABCD之各角頂,則多面體E-ABCD-F,爲正八面體,蓋自E及F向A,B,C,D,所作直線,皆相等,且皆等於AB,故八個三角形爲相等之正三角形. 因O爲正方形ABCD之中心,故此正方形AC之對角線必過O,而在O點相交之直線AC及EF,同在一平面上,故E,C,F,A,在同一平面上. △AEC,△ABC,△AFC共有AC邊,而他各邊皆相等,故此各三角形皆相等,而$A\hat{B}C$爲直角,故$A\hat{E}C$及$A\hat{F}C$皆爲直角,故AECF爲等於ABCD之正方形,而角錐B-AECF及E-ABCD其底AECF與ABCD相等,他四面亦各相等,故全相等. 準此證得他四面亦各全相等,故此多面體爲正八面體. [將AB爲一稜求作正十二面體]以等於一稜

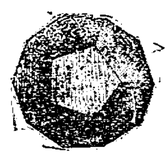


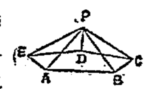


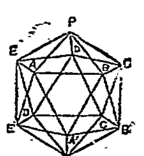




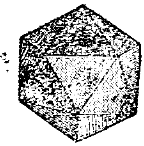
之邊,作正五角形M,使其各邊與相等五個正五角形合,而於其各角頂,作相等五個三面角,作一皿形之面. 次作等於M之正五角形M',使其各邊與相等之五個正五角形合,而又同前作一皿形之面. 夫二皿形之面,皆自六個相等之五角形而成,故M及M'各角頂之三面角相等,故二面角亦相等,而二皿形之面,將其邊與邊合可作成一凸多面體. 蓋將二皿形之面,將其凸凹相對而置之,使頂點a及邊ab,各頂點A及邊AB合,則一皿形面,二個相鄰之面角,與他皿形面一個面角合,而成三面角,蓋任意二個相鄰之面,皆於M及M'之角頂,而含一個三面角之二面,故也. 故三面角皆相等,而此多面體爲正十二面體. [將AB爲一稜而求作正二十面體]作正五角形ABCDE,使其各邊等於已知之稜,於其中心作五角形平面之垂線,於此垂線中取一點P,使PA=AB,將P與五角形之各角頂,連結之,將P爲頂點,作一正五角錐,則在稜PA,PB,………之二面角,皆相等. A,B,C,…………之角,皆加三個等於PAB之正三角形而成五面角,則A,B,C,…………周傍之二面角皆相等. 次作等於P-ABCDE之正五角錐P'-A'B'C'D'E',以之與前之凸面合,則成之凸多面體,而此多



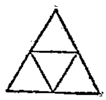




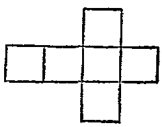
面體爲正二十面體．蓋一凸面相鄰之二面角,與他凸面相鄰之三面角合,而作一正五面角,此蓋二凸面相合,其一頂點之周傍,合成五面角之二面角,有三個故也．故五面角皆相等,而多面體爲正二十面體．[作正多面體如次]將厚紙如圖截之,又以籤釘作如圖之隙縫,曲折之而作面即得．五種正多面體,謂之柏拉圖立體．[Platonic bodies]是等立體,爲披他哥剌斯[Pythagoras, 西曆紀元,前約580年生約510年死]一派人知之．因當時柏拉圖氏[Platon, 西曆紀元前約429年生約348年死]專在學校教授故也．五種正多面體中,簡單之三個,卽正四面體正六面體正八面體恆稍變其形,而用於結晶學中．



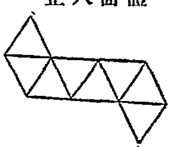
正四面體



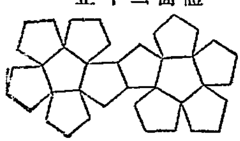
正六面體



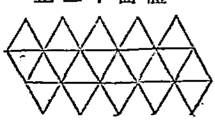
正八面體



正十二面體



正二十面體



正角錐． 幾 英 Regular pyramid. 見角錐條．

正弦． 目 英 Sine. 見三角函數條．

正射影． 幾 英 Orthogonal projection. 見射影之條．

正符號． 代 英 Positive sign. 謂符號 +．

正量． 代 英 Positive quantity. 謂前有符號+之數．數之前無+或 − 之符號者,爲省去符號+而實爲正量也．此量與數同義,故正量無異於正數,究竟正數實僅爲數．謂之正者,對於負數言之也．

正循環小數． 算 英 Pure recurring decimal. 見循環小數條．

正割． 目 英 Secant. 見三角函數條．

正圓函數． 目 英 Direct circular function. 謂普通之圓函數,[卽三角函數] $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. 但謂之正者,對於逆圓函數 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$. 等言之也．

正變． 代 英 Varies directly. 某數因他數而正變者,謂前數與後數之比爲常數．例如 a 因 b 而正變,則 $a:b=$ 常數．正變者對於反變言也．

外二等分線． 幾 英 External bisector. 謂某角補角之二等分線．

外心． 幾 英 Circumcentre, 或 Outer centre [相似的]. 前者謂多角形外接圓之中心,但多對於三角形之外接圓而言,後者謂二相似形或二圓,其相似二中心之中,在兩形之外方者．

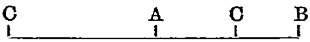
外分． 幾 英 To divide externally. 將有限直線而外分者,謂分成二部分之差,與元有之有限直線等也．例如引長線 A B,於其上取 C 點,則 AB 爲

被C點外分爲AC, BC二部分, 而其差爲AB也.

外切. 國 英 To touch externally. 一圓與他圓外相切, 或多角形之各邊切於一圓, 均謂之外切.

外中比. 國 英 Extreme and mean ratio. 分爲外中比者, 與外中分法同, 見下條.

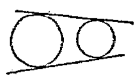
外中分法. 國 英 median section. 謂將直線AB, 於C點內分或外分, 使成



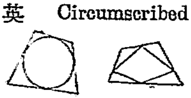
$\overline{AC}^2$=AB.BC 也. 此分法在幾何學爲最要. 古昔希臘之數學者, 謂之黃金分法[Golden section] 當披他哥剌斯[Pythagoras]時, 已發明之.

外公切面. 國 英 External common tangent plane 謂二球之共通切面, 而二球俱在平面之同側者.

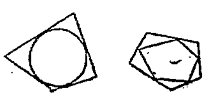
外公切線. 國 英 External common tangent. 謂如圖二圓之公切線, 凡一圓在他圓之外, 或相交, 或相切, 其外公切線均有二. 惟一圓在他圓之內, 則無外公切線.



外切四邊形. 國 英 Circumscribed quadrilateral. 亦稱外接四邊形, 謂圓外切四邊形或四邊形之邊, 過他四邊形之各頂角, 則前四邊形, 謂爲後四邊形之外接四邊形.



外切形. 國 英 Circumscribed figure. 亦謂之外接形, 各邊切於一圓周之多角形謂之外切形, 又各邊過一多角形各頂角之多角形, 謂之外接形.



外切多角形. 國 英 Circumscribed polygon 多角形之各邊, 切於圓者, 謂之外切多角形.

外切多角壔. 國 英 Circumscribed prism 謂角壔之側面及兩底面, 切於一球者.

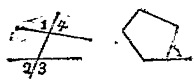
外切多面體. 國 英 Circumscribed polyhedron 謂多面體之各面, 切於一球者.

外切錐. 國 英 Circum-Cone 謂圓錐[或角錐]之曲面[或側面]及底面,切於一球者.

外共通切面. 國 英 External common tangent 同外公切面, 見其條.

外共通切線. 國 英 External common tangent 同外公切線, 見其條.

外角. 國 英 Exterior angle. 一直線與二直線相交所生之1, 2, 3, 4, 之角, 謂之外角, 又多形一邊引長線所成之角, 亦謂之外角.



外率. 算 國 英 Extreme. 比例 $a:b=c:d$, 其 a 與 d 謂之外率.

外接. 國 英 To be circumscribed. 多角形之各邊或圓, 過多角形之各頂角, 謂之外接.

外接四邊形. 國 英 Circumscribed quadrilateral. 見外切四邊形條.

外接多角形. 國 英 Circum-polygon. 多角形之各邊, 過他多角形之各角頂者, 謂之外接多角形.

外接形. 國 英 Circumscribed figure. 見外切形條.

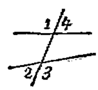
外接球. [幾] 英 Circumscribed sphere. 謂過多面體各角頂之球.

外接圓. [幾] 英 Circumscribed circle. 過多角形之各角頂作一圓, 則此圓謂爲此多角形之外接圓.

外國滙兌. [算] 英 Foreign exchange. 謂自某國匯金向他國所用之匯票, 外國匯兌金額因兌票地之貨幣制度而定有到着兌及定期兌之別.

外項. [算] 英 Extreme 與外率同, 見外率條.

外錯角. [幾] 英 Alternate exterior angles. 一直線與二直線相交, 所成之1與3或2與4之角, 謂之外錯角. 一直線與平行二直線相交, 則外錯角相等, 而其逆理亦眞.



代入法. [代] 英 Substitution. 謂初等代數學, 於某代數式之字母, 以他值代入之, 又謂之代入消去法. [Elimination of substitution] 例如含二未知數之方程式, 自其一式, 將其一未知數, 以他未知數表之, 而變爲他方程式, 卽 $3x+2y=7$, $8x-3y=2$, 自第一方程式, 而 $2y=7-3x$, $\therefore\ y=\frac{1}{2}(7-3x)$, 以之代入第二方程式, 而爲 $8x-\frac{3}{2}(7-3x)=8$ 是也.

代入消去法. [代] 英 Elimination of substitution. 見上代入法條.

代理人. [算] 英 Public agent. 謂代理他人營商者.

代數式. [代] 英 Algebraical expression 代數式者, 謂以運算符號而連結文字與數字者也. 例如 $9x^2+3y$, 卽表以 x 平方之9倍與 y 3倍之和. 不含根號之代數式, 謂之有理式. 例如 $a+b+cx$, 含根號之代數式, 謂之無理式. 例如 $\sqrt{x}+x\sqrt{y}+3$, 各項中無含文字爲分母之有理式, 謂之整式. 有含文字爲分母之有理式, 謂之分數式. 例如 $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^2}{a}+\frac{b}{x}+3$ 等. 惟自一項而成之式, 謂之一項式. 例如 a, $3ax$, by^2 等. 自多項而成之式, 謂之多項式. 例如 $a+b$, x^3+2x^2-3x+5 等. 玆將代數式之類, 圖解如次.

- 代數式
  - 有理式
    - 整式
      - 一項式
      - 多項式
    - 分數式
  - 無理式

代數和. [代] 英 Algebraical sum. 正數或負數, 以符號 + 連結之, 謂之代數和. 例如 $5+(-7)+(+5)+(-2)$. 準此 $a,b,c,$………………爲正負任意之數, 則 $a+b+c+$…………爲代數和, 故代數和非必爲增加之意.

代數函數. [代] 英 Algebraical function. 代數函數者, 其函數與自變數之關係, 爲以代數學通常六種之運算而表之者, 卽以加減乘除四者與常數之方數及根數而表之者也.

代數差. [代] 英 Algebraical difference. a 與 b 之代數差, 爲 $a-b$, 故 $a>b$, 則其代數差爲正, 而 $a<b$, 則其代數差爲負. 反之, 若言 a 與 b 之算術差, 則 a,b 皆爲正, 而謂自大數減小數之餘也.

代數學. [數] 英 Algebra. 數學中之一分科, 用記號而推究數之關係及性質者也. 凡數概以羅馬文字[字母]表之. 當施之運算, 以符號表之. 符

號及羅馬文字,均謂之代數記號. 代數學之運算,爲求加減乘除常數指數之方及常數指數之根. 已知數與未知數之關係,以上述之六種運算表之,謂之方程式,代數學能推究此等方程式之性質者也. 如此之方程式,謂之代數方程式. 代數學最古之書,爲底阿反特氏[Diophantus]之代數學,西曆紀元350年作也. 是書多集關於整數性質及平方數立方數之問題,代數學自印度傳於亞剌比亞,第十三世紀之始,自亞剌比亞傳於意大利學者弗若亞氏[Ferreas]卡爾登[Cardan]太爾太尼亞氏[Tartalea]發明多種新法,其中最重要者,爲三次方程式之解法,其後德意志人斯台夫[Stife]於第十六世紀之中葉,發明精巧之記法,以後遂無甚進步,然次於此之發見,因多數之學者,如諾伯雷卡而得[Robert Recorde]維也太[Vieta]阿爾伯達几拉爾得[Albert Girard]哈利阿特[Harriot]等之研究,遂成現今之代數學. 西歷1637年,笛卡爾特[Descartes]將代數的解析,應用於幾何學而著一書.[爲現今解析幾何學,之幾礎]於是數學中,開一新面目,而對於純正代數學之進步,其功不小,其後之代數學,雖未大改變,而應用之點,則非常推廣矣. 級數理論之成功,多爲伯諾義力斯[Bernouilis]牛頓[Newton],桑謨阿布魯[De moivre],新甫生[Simpson],等之力. 代數學近時之功績家,爲戴勞[Taylor],密諾林[M'Laurin],克勒諾特[Clairaut],克呂羅[Euler]雷假得勒[Legendre],亞波加斯特[Arbogast],哥斯[Gauss],保敦[Bourdon],等. 代數學英語 Algebra,實起原於亞剌伯語,Al jebr e al mokābaba,譯爲英語,則爲 Restration and Reduction 之義. 此名之根源,爲二次方程式無疑,蓋二次方程式,爲亞剌伯代數學最高部分故也. 今詳解其義,則二次方程式,含未知數之邊,爲完全之平方,則爲 Restration,而取其平方根,則爲 Reduction,此名在現今之代數學亦適當,蓋將算術變爲記號算法,即變爲代數學,則爲 Reduction,又擴張其記號之結果,則爲 Restration,[De Morgan's Double Algebra]代數學即我國之四元,在日本謂之點竄,點竄原稱起源整法,其改爲點竄者,出自日向延岡之城主內藤備後守政樹之意,[三國志曹操與韓遂書,多點竄,點爲滅去,竄謂添入也.]

代數學的解法. 代 英 Algebraical solution. 謂自問題已知件,作方程式解之,而求其答之法也.

立. 單 英 Litre立突之省書,見立突條.

立方. 單 代 英 Cube. 某數 a 之立方,謂其三乘方 a^3 也.

立方根. 單 代 英 Cubic root. 某數之立方根者,謂其立方等於某數之數也. 例如 $64=4^3$,故64之立方根爲4,記之爲 $\sqrt[3]{64}=4$,凡 a 之立方根,記爲 $\sqrt[3]{a}$. [1之立方根]欲求1之立方根,則爲 $x^3=1$, $\therefore x^3-1=0$, $\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$,將第一因數爲0,而得 $x=1$,將第二因數爲0,而得 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$,故1之立方根有實數1,及虛數 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}$,而此共軛虛數,將其一自

乘,可得其餘之一,即$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^2=$ $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}$,及$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$.故將其一,以$\omega$表之,則其他爲$\omega^2$,故1之立方根爲1, ω, ω^2之三個.

立方根數. 代 英 Cubic surd 謂$\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{a}$等.

立方體. 幾 英 Cube謂六個相等之正方形,所圍成之立體. 又謂之正六面體. 各稜爲線單位之立方體,則爲測體積之單位,而任意立方體之體積,[含立方單位之數]等於其一稜[以對應之線單位所測之數]之立方.

立突. 度 英 Litre 美 Liter 立突爲米突法中容積之基本單位,一立突爲一立方特西米突之容積,等於我國0升.965746. 一立突之十倍,謂之一特卡立突,百倍謂之一海克立突,千倍謂一之啓羅立突,又一立突之十分之一,謂之一特西立突,百分之一謂之一生的立突,千分之一,謂之一密理立突.

立體. 幾 英 Solid謂空間有限之一部. 換言之,則立體者,有長闊厚者也. 夫空間爲無限大,以平行之二平面分之,則其二平面間之部分,惟厚有限,而長與濶爲無限大,因而此二平面之部分,亦爲無限大,如是者非立體,立體者,謂空間有限之部分也.

立體角. 幾 英 Solid angle見多面角,之條.

立體幾何學. 幾 英 Solid Geometry. 或 stereometry. 又 Geometry of space. 立體幾何學者,論空間點,直線,角,曲線,平面,曲面,所成圖形之科學也. 但曲線若限於圓,則謂之初等立體幾何學.

四元. 歷 古數學名. 元燕山朱世傑,作四元玉鑑,爲書三卷,分門二十有四,立問二百八十有八,以元氣居中,立天元一於下,地元一於左,人元一於右,物元一於上,此四元之所由來也. 阮元序測圓海鏡,謂少廣著開方之法,方程別正負之用,立天元一[見天元條]者,融會少廣方程加精焉者也. 其理較天元一無殊,其法視天元一尤備,蓋天元所假借,惟一求數,非據今有數蔑由盡其妙,四元則元各一數,其所假借,不僅爲所求之數,故凡天元一所能御者,四元固能御之,卽天元一所不能御者,四元亦能御之,顧其書有術無草,賾奥艱深,通之者鮮,梅瑴成能由借根方而悟天元一,然於赤水遺珍中,尙謂是書或問歌彖二則,爲術士自祕其機緘,可謂解人之難索矣. 阮元撫浙時,訪獲朱書大德本,甘泉羅士琳,以之研究一紀,補一細草,間有原術於率不通,及布算傳寫之訛,亦悉爲標出,復著演元九式一卷,以括其進退消長之例. 其同里易之瀚附增釋例一卷,海寧李善蘭又作四元解二卷,四元始大明於世矣. 金匱華蘅芳學算筆談,復設淺近之題數則以演之,見華氏學算筆談.

四分圓. 幾 目 英 Quadrant 謂以互垂直之二徑,分圓之一部分.

四角形. 幾 英 Quadrangle 或 Tetragon 同四邊形,見其條.

四面角. 幾 英 Tetrahedral angle 見多面角之條.

四乘方. 算 代 英 Fourth power 謂某數四個因數連乘之積. 例如 $81=3^4$, 故81為3之四乘方, a^4 為 a 之四乘方. 又我國古昔,謂五個同因數之積為四乘方,見乘方條.

四乘根. 算 代 英 Fourth root 四乘方等於某數之數,謂之某數之四乘根,例如 $16=2^4$, 故2為16之四乘根,而以 $\sqrt[4]{16}$ 表之. 又 $\sqrt[4]{a}$ 為 a 之四乘根.

四則. 算 代 英 Four rules 或 Four fundamental rules 加法減法乘法除法之總稱也.

四次方程式. 代 英 Biquadratic equation 解方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 為福來利[Ferrari]氏之法. 於方程式之兩邊,各加 $(\alpha x+\beta)^2$, 則 $x^4+px^3+(q+\alpha^2)x^2+(r+2\alpha\beta)x+s+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2$, 而此式之左邊,若 $2\lambda+\frac{p^2}{4}=q+\alpha^2$, $p\lambda=r+2\alpha\beta$, $\lambda^2=s+\beta^2$, 則可為 $x^2+\frac{p}{2}x+\lambda$ 之平方. 自此三式,消去 α 及 β, 則得可決定 λ 之三次方程式如次.

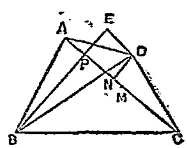
$$4(\lambda^2-s)(2\lambda+\frac{p}{4}-q)-(p\lambda-r)^2=0,$$

夫三次方式程恆有一實根,故先求得其一實根,則可因以決定 α 及 β 之值. 斯時 $(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda)^2=(\alpha x+\beta)^2$, 因而 $x^2+\frac{p}{2}x+\lambda\pm(\alpha x+\beta)=0$, 其 α, β 及 λ 為已知量,故四次方程式完全得解矣. [例] 解方程式 $x^4+6x^3+14x^2+22x+5=0$, 於其兩邊各加 $(\alpha x+\beta)^2$, 則 $x^4+6x^3+(14+\alpha^2)x^2+(22+2\alpha\beta)x+5+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2$, 此方程式之左邊若 $9+2\lambda=14+\alpha^2$, $6\lambda=22+2\alpha\beta$, $\lambda^2=5+\beta$, 則可為 $x^2+3x+\lambda$ 之平方,因而 $(\lambda^2-5)(2\lambda-5)-(3\lambda-11)^2=0$, $\therefore$ $\lambda^3-7\lambda^2+28\lambda-48=0$, 而此方程式之一實根為3, 則 $\lambda=3$, 故 $\alpha=1$, $2\alpha\beta=-4$, $\beta^2=4$, 因而 $(x^2+3x+3)^2=(x-2)^2$, 故所求之根為 $-2\pm\sqrt{3}$, $-1\pm2\sqrt{-1}$, 四次方程式為代數學者次於三次方程式而研究之問題也. 加爾旦[Cardon]氏力求四次方程式之解法,卒不可得,其門人福來利[Ferrari]氏始成其功,有時亦謂之般伯利[Bombelli]氏之法,蓋氏於西曆1579年,著代數學一書曾載其法故也. 此外解四次方程式者,有笛卡爾[Descartes]氏之法,有歐勒爾之法,五次以上之方程式,無一般之解法,亞白爾[Abel]及溫則爾[Wantzel]二氏,且證明五次以上之方程式,不能有一般解法.

四乘冪. 算 代 英 Fourth power 同四乘方,見乘方條.

四進記法. 算 英 Qeteruary scale 謂以四為記數之底而進位之命數記數法,而所用之數字,有1,2,3及0足矣,四進法之20132所表之數,為 $2\times4^4+1\times4^4+3\times4+2$.

四邊形. 幾 英 Qrate nary 或 Tetragram 謂以四直線所圍成之平面形,而任意之四邊形 ABCD, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$, 則面積 $=\frac{1}{4}\sqrt{X.Y.}$ 但



$X=2mn+a^2-b^2+c^2-d^2$, $Y=2mn-a^2+b^2-c^2+d^2$. [證] AC之中點為M, 若 $BP\perp AC$, $DE\perp BP$, $DN\perp AC$, 則

$a^2-b^2=-2m.MP$, $c^2-d^2=2m.MN$,

$\therefore\ a^2-b^2+c^2-d^2=2m(-NP)=-2mED$,

$\therefore\ X=2mn+a^2-b^2+c^2-d^2$

$=2m(n-\text{ED})$,

$\text{Y}=2mn-a^2+b^2-c^2+d^2$

$=2m(n+\text{ED})$,

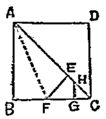
$\therefore\ \text{X.Y}=4m^2(n^2-\overline{\text{ED}}^2)=4m^2.\overline{\text{BE}}^2$,

$\therefore\ \sqrt{\text{X.Y}}=2m.\text{BE}=4\text{ABCD}=4\text{S}$,

若ABCD內接於圓,則依普佗列米[Ptolemy]之定理,而$mn=ac+bd$,

$\therefore\ 2mn+a^2-b^2+c^2-d^2=(a+c)^2-(b-d)^2=(a+c+b-d)(a+c-b+d)$, $2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=(b+d)^2-(a-c)^2=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$,故若$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$,則$\text{S}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.又四邊若內接或外切於圓,則$a+c=b+d$ $\therefore p=a+c=b+d$ $\therefore \text{S}=\sqrt{abcd}$.

可通約之度. 幾 英 Commensurable magnitudes諸度可以共同單位精密表示之者,謂之可通約之度.又諸度不可以共同單位精密表示之者,謂之不可通約之度.今舉不可通約之度之一例.ABCD為正方形,則ABC為直角二等邊三角形,於是直角二等邊三角形之一邊AB,與斜邊AC,為不可通約之度.



AC必大於AB,然必小於AB+BC,即必小於AB之二倍,故自AC截取等於AB或BC之AE,其剩餘EC,當小於AB或BC.今過E引AC之垂線EF,與BC之交點為F,連結AF,斯時二個直三角形ABF,AEF,其邊AB等於邊AE,斜邊AF兩形公用,故BF等於FE.又直角三角形EFC,其F與C二個銳角之和為直角,而其一角ECF為直角之半分,故他一角EFC,亦為直角之半分,因而三角形為二等邊,故EC等於EF且等於FB.若求第二之剩餘,則自BC截取EC,其方法同於自正方形對角線FC截取其一邊EC,故此方法,決無底止,因而正方形之邊與對角線,為不可通約之度.

可通約之根. 代 英 Commensurable root謂方程式之根為可通約之數者.某方程式之係數,悉為有理者,則其可通約之根,易求得之.某方程式之係數,悉為整數且第一項之係數為1者,不能有分數根,蓋若$\frac{a}{b}$為$f(x)=0$之一根,則

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+p_n=0.$$

今以b^{n-1}乘其各項,則第一項為分數[因a對於b為素數故a^n對於b為素數]而其他諸項,悉為整數,是背理也.夫任意之方程式,變形而可使第一項之係數為1,其他諸項悉為整數者,欲求其可通約之根,無異於其求整數根,而a若為$f(x)$之整數根,則$x-a$當為$f(x)$之一因數,故a當為不含x之項之一因數,又x之有理整式,以a代其x,若其式為0,則$x-a$為其式之一因數,故將p^n之一切因數,次第驗之,可得其一切整數之根.[例]$x^4-27x^2+42x+8=0$,求其可通約之根,若為可通約之根,則為8之因數,於是將±8, ±4, ±2, ±1之數,一一於所設方程式中驗之,而知4及2為其根,既知二根,則所設方程式全解矣.何也,$(x-2)(x-4)(x^2+6x+1)=0$,故所設方程式之根,為2, 4, $-3\pm2\sqrt{2}$.

可通約之數. 代 英 Commensurable numbers謂可以同一單位精密表之之數.又不可以同一單位精密表之之數,謂之不可通約之數,例如$2\frac{5}{8}$及$3\frac{7}{9}$.

爲可通約之數,蓋其第一等於$\frac{189}{72}$,其第二等於$\frac{272}{72}$,故皆可以分數單位$\frac{1}{72}$精密表之,然如$\sqrt{2}$與1,則爲不可通約之數. 卽正方形之一邊,以1表之,則對角線爲$\sqrt{2}$,此卽不可通約之數也,何也,若正方形之對角線與邊,可以同一之單位之數表之,則試設對角線與邊互含最大之同一對位m回與n回,斯時m與n不能俱爲偶數,蓋若m與n俱爲偶數,則對角線與邊可以前單位二倍之單位測度之,然前單位爲測度對角線與邊之最大之同一單位,故m與n不能俱爲偶數,但對角線上正方形,含m^2平方單位,邊上正方形,含n^2平方單位,而對角線上正方形,爲邊上正方形之二倍,故$m^2=2n^2$,然m^2爲偶數,卽m^2當爲偶數之平方. 試設$m=2p$則$2n^2=m^2=4p^2$,故$n^2=2p^2$,是n亦爲偶數,然m與n不能俱爲偶數,前已言之,故正方形之對角線與邊無同一單位之數可以表其共同之單位,故正方形對角線與邊之測度,爲不可通約之數.

可還原之變化. 代 英 Derivation irreversible 見變化式條

生的亞爾. 單 英 Centiare 謂一亞爾百分之一,等於我國9平方尺.765625.

生的立突. 單 英 Centilitre 法 Centiliter. 等於一立突之百分之一,等於我國0勺.965746.

生的米突. 單 英 Centimetre 等於一米突之百分之一,等於我國3分.125之長.

生的分畫. 單 英 Centigrade 謂百分之分畫. 例如生的分畫之寒暑表,卽百度之寒暑表,其冰點爲零度,沸點爲百度,所謂攝氏之寒暑表也.

生的格蘭姆. 單 英 Centigramme 法 Centigram 等於一格蘭姆之百分之一等於我國0分.268089之重.

生他爾. 單 法 Centar 卽生的亞爾,見其條.

生命年金. 單 代 英 Life annuity 見年金條.

生命保險. 單 英 Life insurance 或 Assurance 生命保險者,謂每年,或一時,付保險費於保險公司,若此人或第三者,[被保人]死亡或疾病時,則公司交出保險金若干. 生命保險與火災保險及海上保險不同,蓋火災保險,與海上保險,爲損害保險,而生命保險,非損害保險,以生命非可以金錢賠償者也. 且火災保險,與海上保險,若某期限中,無火災或船壞之事,則所付保險費,全歸於損失,含有賭博的分子,生命保險,則不然,由統計與數學之精密計算,而作生死表,[Table of martality] 算出保險費. 無論何人,皆不免一死,故生命保險,含有强制儲蓄的分子.[參看年金條]

加. 單 英 To add 加乙數於甲數者,謂將乙數所含單位,一一加於甲數,而求最後之數也.

加比之理. 代 幾 英 Addendo 諸相等之比,將其前項之和爲前項,其後項之和爲後項,此前後項之比,等於原之各比,謂之加比之理,卽

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}.$$

加合. 單 英 To add each other 日本數辭. 卽相加,見相加條.

加法. [算] [代] 英 Addition 求二數以上相加之法,謂之加法. 所加之數,謂之被加數. 加得之數,謂之和,或謂之合計. 或謂之總數. 小數之加法,使其小數點之位置,列為同行,如整數加之. 分數之加法,化被加數為同分母,而加其分子. 但代數的數之加法,則次第前置符號+而連記之,例如 $a+b+c+$............

加倫. [呏或gal.] [算] 英 Gallon 英國容量之單位,為華氏62度蒸溜水10磅之體積,即等於277立方吋.274 [此定加倫之常法,然其後經精密之測定,一加倫之體積,為277立方吋.123.] 又美國用英國之舊制.故美國之一加倫,為231立方吋之體積,而當英一加倫之0.8331. 又1呏=4.升3878326.

加減消去法. [算] 英 Elimination by addition or Subtraction 加減消去法者,謂二個以上之一組方程式,使其一未知數之係數相等,而依加法或減法而消去其一未知數也. 例如

$$3x+5y+2z=19 \quad \dots \quad \dots \quad (1),$$
$$2x+3y-z=5 \quad \dots \quad \dots \quad (2),$$
$$5x+7y-3z=10 \quad \dots \quad \dots \quad (3),$$

將其(1)與(2)之二倍相加,則得

$$7x+11y=29 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4),$$

自(2)之二倍,減(3),則得

$$x+2y=5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5),$$

則(4),(5)為自(1),(2),(3)之一組,依加減消去法而消去 z 者.

加號. [算] 英 Sign of addition 表示一數加於他數之符號為+,通例記此號符於二數之間. 例如4+3,為表示4與3相加,而呼為4加3,書帶分數時,整數分數之間,此符號恆略之. 例如 $4+\frac{2}{3}$, 書為 $4\frac{2}{3}$.

加算. [算] 英 Addition 同加法,見其條.

半之數. [算] 英 Odd number 日本數辭. 同奇數,見奇數條.

半徑. [幾] 英 Radius 謂自圓或球之中心,至圓周或球面之直線,即徑之半分也. 故圓或球之半徑,皆等長.

半球. [幾] 英 Semisphere 或 Hemisphere 謂過球中心之平面,所分球之一部,即全球之半分也.

半圓. [幾] 英 Semicircle 圓徑所分圓之一部,即全圓之半分也.

半圓周. [幾] 英 Semicircumference 圓徑二分圓周之一部,即全圓周之半分也.

未定長之直線. [幾] 英 Indefinite straight line 謂無定長之直線,例如二直線相交,其對頂角相等,其二直線之長,無論如何,其定理皆成立,此即未定長之直線也. 然將一直線為一邊,於其上作等邊三角形,則此一直線為有限直線,蓋非有限直線,則不能以之為一邊,而於上作等邊三角形也.

未定乘數法. [代] 英 Method of undetermined multipliers 例如三個方程式,

$$ax+by+cz=d \quad \dots \quad \dots \quad (1),$$
$$a'x+b'y+c'z=d' \quad \dots \quad \dots \quad (2),$$
$$a''x+b''y+c''z=d'' \quad \dots \quad \dots \quad (3).$$

(1)以 λ 乘之,(2)以 μ 乘之,而加於(3),

$$\text{則 } x(\lambda a+\mu a'+a'')+y(\lambda b+\mu b'+b'')+z(\lambda c+\mu c'+c'')=(\lambda d+\mu d'+d'')$$

其 λ 與 μ 無論其值之如何皆合,今取此方程式 y 及 z 之係數為零時之值,則

$$x=\frac{\lambda d+\mu d'+d''}{\lambda a+\mu a'+a''}$$

但 λ 及 μ 可自 $b+\lambda b'+b''=0$ 及
$\lambda c+\mu c'+c''=0$ 求得之

即 $\dfrac{\lambda}{b'c''-''bc'}=\dfrac{\mu}{b''c-bc''}=\dfrac{1}{bc'-b'c}$ 故 $x=$
$$\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc-b'c)}$$
如此求未知數之值之法,謂之未定加數法,又謂之比左之法.

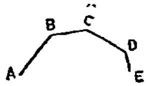
上式 x 之值若變其 a, b, c 及 a', b', c' 及 a'', b'', c'' 之次序則可得 y 之值,若再變其次序,則可得 z 之值,而 x, y, z 之分母,若皆相同,而非爲零,則各未知數,惟有一個有限值.

未知量. 國 英 Unknown quantity 謂未知之數量之値,而可決定之者,參看未知數條. 有時未知量有與未知數同意義用之者.

未知數. 代 英 Unknown number 或 Unknown quantity 問題或方程式之未知數者,謂其値尙不知,而可決定者也,若問題之要件之個數同於未知數之個數,則問題能成立,而答數爲有限. 若聯立方程式之個數,同於未知數之個數,則未知數之値可求得之. 若所設聯立方程式之個數,不及其中所含未知數之個數,則是等方程式爲不定,而未知數可消長變易卽爲變數,未知數通例以希臘字及二十六字母終部之字母卽 x, y, z, u, v, w, 等表之,或以 $x_1, x_2, \ldots\ldots, y_1, y_2, \ldots\ldots, z_1, z_2, \ldots\ldots$ 等表之.

凸角. 國 英 Convex angle 或 Salient angle 謂小於二直角之角,對於凹角言之也.

凸折線. 英 Convex broken line 凸折線者,謂自折線任一部之直線觀之,而其全體在其直線之一傍而不跨於兩旁者也.



凸面. 國 英 Convex surface 凸面者,如球面等,謂面之任何部分皆凸出也.

凸多角形. 國 Convex polygon 謂無一角爲凹角之多角形.

凸多面角. 國 英 Convex polyhedral angle 謂多面角以不過其頂點之截面截之,而成凸多角形者.

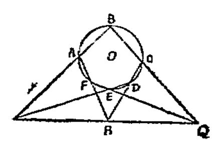
凸多面體. 國 英 Convex polyhedron 謂多面體以任何之平面截之,其截口必成凸多角形者.

凹角. 國 英 Reflex angle 或 Re-entrant angle 或 Re-entering angle 凹角者,謂大於二直角而小於四直角之角.

凹多形角. 國 英 Re-entrant polygon 凹多角形者,謂有一個以上之凹角之多角形. 凸多角形,自其任一邊觀之,其全形皆在其邊之一方. 凹多角形,若自其凹角之一邊觀之,其全形跨於其邊之兩方.

布羅美固卜太之定理. 國 英 Brahmegupta's theorem. 謂圓內接四邊形,兩對角線互爲垂直時,則自其交點,引一邊之垂線,必二等分其對邊. 證見第五門 163 題.

布利安生之定理. 國 英 Brianchon's theorem. 圓外切六角形,連結其相對角頂之直線,爲共點線. 此謂布利安生定理. 如圖,圓 O 內接六角形 ABCDEF,其相對邊 AB 與 DE, BC 與 EF, CD 與 AF 之交點爲 P, Q, R. 今將相對邊 AB, ED 關於圓 O 之極爲 a, a' 則因 P 在直線 AB 上,故點 P 之極線通過 a. 同樣點 P 在



直綫 DE 上, 故點 P 之極綫通過 a'. 因而點 P 之極線爲 aa'. 而此爲圓 O 外切六角形連結相對角頂之直線也. 且三點 P, Q, R, 爲共線點, 故其極線通過 PR 之極.

打. 【算】 英 Dozen 爲計個數之單位. 12 個謂之一打.

打那. [弗] 【算】 英 Dollar 爲美國貨幣之單位. 約當於我國之 2 圓.

永久年金. 【算】 【代】 英 Perpetuity 或 Perpetual annuity. 同永續年金, 見其條.

永續年金. 【算】 【代】 英 Perpetuity 或 Perpetual annuity. 永續年金者, 謂年金之永續者, 其現價爲年金額 a 而以利率 r 除之者, 卽 $\frac{a}{r}$ 也.

仕拂人. 【算】 英 Drawee 日本數辭. 卽兌付人.

仕拂承諾人. 【算】 英 Acceptor 日本數辭. 卽承諾兌付人.

句. 【幾】 見股及句股弦條.

句股弦. 【幾】 英 Right angled triangle. 同直角三角形, 見其條. 又見股之條.

北緯. 【算】 英 North latitude. 在赤道以北之緯度.

本初子午線. 【算】 英 Prime meridian 或 Standard meridian. 本初子午線者, 謂通過英國格林維基天文台子午儀中心之子午線, 世界各國多以此爲起算經度之根原. 自此東西各百八十度計之.

必要之要件. 【幾】 英 Necessary condition. 見十分之要件條.

母線. 【幾】 英 Generating line 或 Generatrix. 某線以某要件運動而生面, 則其線爲此面之母線. 例如一直線恆過一曲線且平行一直線而運動, 則所生之面爲壔曲面. 若此曲線爲圓, 則所生之面爲圓壔, 而始之直線爲母線. 又若半圓周以其徑爲軸而迴轉, 則所生之面爲球面, 而半圓周爲其母線.

世紀. 【幾】 英 Century 謂一百年. 例如自紀元一年至百年, 謂之第一世紀, 自百一年至二百年, 謂之第二世紀.

仙. 【算】 英 Cent. 美國貨幣之名, 爲一打那 [弗] 百分之一. 約我銀幣之 2 分.

弗. 【算】 英 Dollar. 同打那, 見其條, 記以弗字者, 象 $ 之形也.

瓦. 【算】 英 Gramme, 法 Gram. 爲格蘭姆之省書, 見格蘭姆條.

矛盾. 【代】 英 Inconsistent. 二個以上之方程式, 無共同之解答者, 謂之矛盾. 例如 $ax+b=0$ 及 $a'x+b'=0$, 非 $ab'-a'b=0$, 則無共同之解答, 卽謂之矛盾. 又如 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $a''x+b''y+c''=0$, 若欲其不矛盾, 則必 $a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$.

司醴兒. 【算】 英 Stere 美 Ster 量木材一立方米突, 謂之一司醴兒. 一司醴兒十分之一, 謂之一特西司醴兒. 一司醴兒之十倍, 謂之一特卡西醴兒.

六畫

共軛二次根式. 【代】 英 Conjugate quadratic surd expressions. $a+\sqrt{b}$ 及 $a-\sqrt{b}$ 之二式, 互稱共軛二次根式.

共軛平方根數. 【代】 英 Conjugate quadratic surds $a+\sqrt{b}$ 及 $a-\sqrt{b}$ 之二式, 互稱共軛平方根數.

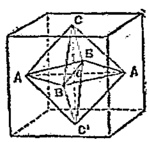
共軛角. 國 英 Conjugate angles 二角之和,等於四直角.則此二角互稱共軛.又見角之條.

共軛弧. 國 英 Conjugate arcs 圓之二弧等於全圓周,則此二弧互爲共軛.

共軛弓形. 國 英 Conjugate segments. 二弓形合之,等於全圓,則二弓形互稱共軛.

共軛複虛式. 國 英 Conjugate complex expressions. $a+b\sqrt{-1}$ 及 $a-b\sqrt{-1}$ 通例以 $a+bi$ 及 $a-bi$ 表之,此二式互爲共軛複虛式.

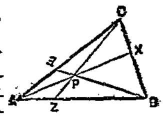
共軛體. 國 英 Conjugate solids 於多面體之各面,取一點,使一立體角周傍之面,所取各點,在同一平面,則以是等點爲立體角之頂所成之多面體,與前多面體,其稜數相同,又前多面體之面數,與後多面體之立體角數同,又前多面體立體角數,與後多面體之面數同,[此自歐勒爾之定理 $F+V=E+2$ 可知之,卽稜E相同,而面數F與立體角數V交換之多面體]如此之二多面體互爲共軛.例如正方面卽立方體,於其各面之中心,取 A,A', B,B', C,C' 諸點,以之爲角頂,作一多面體,則得正八面體,故立方體與八面體,互爲共軛,同樣正十二面體,與正二十面體互爲共軛,又正四面體之軛體亦爲正四面體.



共通弦. 國 英 Common tangent. 同公通弦,見其條.

共通切線. 國 英 Common tangent. 同公切線,見其條.

共點性. [諸直線共一點] 國 英 Concurrency 謂三以上之直線交於同一之點.例如自三角形ABC之各角頂,向對邊所作之直線AX, BY, CZ,若交於同一之點P,則 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$. 而其逆亦眞. [證]今設AX, BY, CZ之交點爲P,則三角形APC, BPC,有同底PC,故二者比例於其高,因而比例於AZ, ZB,故 $\frac{AZ}{ZB}=\frac{\triangle APC}{\triangle BPC}$.



同樣 $\frac{BX}{XC}=\frac{\triangle BPA}{\triangle APC}$, 及 $\frac{CY}{YA}=\frac{\triangle PBC}{\triangle BPA}$.

故相乘則 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

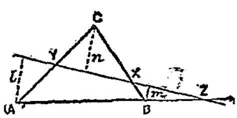
逆.[證] AX, BY, CZ,交於同一之點,假設C與AX, BY之交點P連結之直線,交AB於Z',則 $\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

但 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

故 $\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}$. 故Z'與Z合,此定理謂之薛苑之定理.

共點線. 國 英 Lines of concurrency, 謂三以上之直線,交於同一之點者.

共線性. [諸點在同一直線上] 國 英 Collinearity 謂三以上之點,在同一直線上.例如三角形ABC之三邊[至少必有一延線]上所取之三點X, Y, Z,若在同一直線上,則



$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$. 而其逆亦眞. [證]自A,B,C,向XYZ引垂線,各爲 l, m, n,則由相似三角形,得比例如次.但ZB於上圖爲負,須知之.

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{l}{-m},\ \frac{BX}{XC}=\frac{m}{n},\ \frac{CY}{YA}=\frac{n}{l}.$$

故相乘,則爲 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1.$

逆.[證]有 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$ 之關係時,則X,Y,Z,在同一直線上.若X,Y,Z,非在同一直線上,而直線XY交AB於Z′,則 $\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$. 但 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1.$

故 $\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}$. 故Z′與Z合,此定理謂之美利剌斯之定理.

共線點. 幾 英 Points of collinearity 謂三以上之點,在同一直線上.

同一法. 幾 英 Rule of identity 若有惟一之X,與惟一之Y,而X爲Y,則Y爲X,如此之推定,謂之同一法,例如二等邊三角形其頂角有惟一之二等分線,與其底有惟一之垂直二等分線,既知頂角之二等分線,爲底之垂直二等分線,則底之垂直二等分線,亦爲頂角之二等分線.

同心圓. 幾 英 Concentric circles. 謂二個以上之圓之同心者.

同次式. 代 英 Homogeneous expression 謂式之各項同次者. 例如 $a^3+3a^2b-5b^3$ 爲同次式.

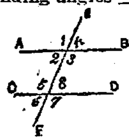
同次積. 代 英 Homogeneous products. 自 n 個文字中,取 r 個文字,作種種之積,而各文字,重複取之,是等之積,謂之同次積,其數以 ${}_nH_r$ 表之. 例如 a, b, c 三個文字,每取二個文字,而作同次積,則爲 $a^2, b^2, c^2, bc, ca, ba$, 而其個數爲 ${}_nH_r={}_3H_2=6$. 其一般者,則如次.

$${}_nH_r=\frac{n(n+1)\cdots\cdots\cdots(n+r-1)}{1.2\cdots\cdots\cdots r}$$

同次對稱式. 代 英 Homogeneous symmetrical expression 謂同次且爲對稱之式. 例如 $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$.

同名數. 算 英 Like numbers 例如5里與3里,4斤與6斤. 若3尺與2寸,7人與8圓,則非同名數.

同位角. 幾 英 Corresponding angles 二直線AB, CD, 以一直線EF截之,則成八角,其中1與5,2與6,3與7,4與8,謂之同位角.



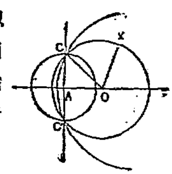
同初位循環節. 算 英 Similar repetend 見循環小數條.

同末位循環節. 算 英 Conterminous repetend 見循環小數條.

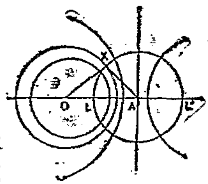
同積同形. 幾 英 Congruent figures 謂面積形狀全相等之圖形,即可使全相重合之圖形也.

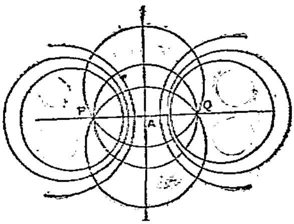
同類項. 代 英 Like terms 或 Similar terms. 二項惟數字係數不同,謂之同類項. 例如 $5a^3b^2c$ 及 $3a^3b^2c$ 爲同類項.

同軸圓. 幾 英 Coaxial circles 諸圓同中心線同根軸,謂之同軸圓. 若O及OX爲同軸圓變移之中心及半徑,則依同軸圓之定義,而 $\overline{OA}^2\sim\overline{OX}^2$ 對於諸圓爲常數,今以 δ^2 代之. (1)若諸同軸圓於任意之二點C及C′相交,則此諸圓過點C及C′,而此諸圓,謂之相交同軸圓,斯時 $CA=\delta=C'A$, 而以 δ 爲半徑之圓,爲諸圓中之最小者. (2)若諸圓不相交,則OX能因O至 $AL=\delta$ 之點L而減小,而將此點爲圓半徑之無窮小之極限,則L爲極小圓. 若L′關



於根軸而爲L之幾何像,則根軸之他傍,有以L′爲極小之諸圓,而是等二羣之圓,謂之限點同軸圓,L及L′,謂之限點.相交同軸圓,與限點同軸圓,無有限之極大圓,然根軸爲諸圓增大極限,以圖明之,取直角相交於A之二直線P,Q,爲自A等距離任意之二點,則P,Q,爲一同軸圓之限點,爲他同軸圓之交點.





有限小數. [算] 英 Finite decimal 謂以有限之數字表之之小數.

有限直線. [幾] 英 Finite straight line 謂有限長之直線.

有限級數. [代] 英 Finite series 謂項數有限之級數.

有限責任. [算] 英 Limited liability 謂公司股東之責任,止於出資者,例如股分有限公司.

有中心形. [幾] 英 Central figure 謂有中心之圖形,例如圓,平行四邊形,球等,則爲有中心形.

有效數字. [算] 英 Significant figure 自1至9之數字,對於0謂之有效數字.又第一之有效數字,[First significant figure]謂在小數點之次,不爲零之第一數字.例如0.00568之5,謂之第一有效數字.

有理化法. [代] 英 Rationalization. 同化無理爲有理,見其條.

有理化因數. [代] 英 Rationalizing factor. 同化無理爲有理之因數,見化無理爲有理條.

有理式. [代] 英 Rational expression 謂不含根號之式.例如 ax, $ax^2+bxy+cy^2$, $\frac{ax+b}{cx-d}$ 等.又如 $x\sqrt{a}+y\sqrt{b}$ 則在 x, y, 爲有理式,在 a, b, 爲無理式.

有理分數. [代] 英 Rational fraction 謂不含根號之分數.例如 $\frac{x}{a+b}$, $\frac{x-1}{x^2+1}$

有理整式. [代] 英 Rational integral expression 謂不含根號之整式.例如 $ax+by$, ax^2+bx+c 等

劣弓形. [幾] 英 Minor conjugate segment 或 Minor segment 二弓形合爲全圓,謂其小者.

劣共軛弓形. [幾] 英 Minor conjugate segment 謂共軛弓形之小者.

劣共軛角. [幾] 英 Minor conjugate angle 謂共軛角之小者,同劣角,見角之條.

劣共軛弧. [幾] 英 Minor conjugate arc 謂共軛弧之小者,同劣弧,見共軛弧之條.

劣比. [代] 英 Ratio of less inequality. 比 $a:b$ 而 $a<b$, 則爲劣比. $a=b$, 則爲等比. $a>b$, 則爲優比.故劣比小於1,等比等於1,優比大於1.

劣角. [幾] 英 Minor conjugate angle 或 Minor angle 二角合成四直角而謂其小者,倘見角之條.

劣弧. [幾] 英 Minor conjugate arc 或 Minor arc 圓之二弧,合成全圓周,而謂其小者.

合同形. [幾] 英 congruent figures. 同同積同形,見其條.

合比之理. 代 幾 英 Componendo 謂 $a:b=c:d$ 則 $a+b:b=c+d:d$.

合計. 數 英 Total 或 Aggregation 又 Amount. 謂二以上之量或數，相加所得之結果.與總計同.

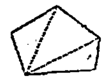
合金. 算 英 Alloy of metals 謂二以上之金屬永久結合之混合物，而其利益爲變化金屬物理的性質，而增加其硬度，又減其熔解點，而使之容易鑄造，且同時減其價值.又其比重，爲其合成金屬之平均比重者甚稀.

合資算. 算 英 Partnership 或 Fellowship 數人合出資本，共營商業，比例於其出資數，或比例於其出資數及出資期間，而分配利益，或負擔損失，謂之合資算. 合資算有單複之二者單合資算，僅比例於出資數，複合資算，比例於出資數及出資期間，而分配利益及負擔損失.

合資會社. 算 英 Limited partnership 日本數辭. 卽我國之兩合公司，見其條.

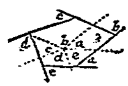
合名會社. 算 英 Ordinary partnership 日本數辭. 卽我國之無限公司，見其條.

多角形. 幾 英 Polygon 謂三以上之直線，所圍成之平面，而是等直線，爲多角形之邊，邊與邊相交之點，爲多角形之頂點，諸邊之和，爲多角形之周圍. 多角形因其角數[邊數]而區別爲三角形[三邊形]四角形[四邊形]五角形[五邊形]. 多角形各邊相等者，謂之等邊形，等邊等角之多角形，謂之正多角形. 多角形之各角，皆小於二直角者，謂之凸多角形，有一以上之角爲凹角者，謂之凹多角形. (1) n 邊之多角形，諸內角之和，等於 $2(n-2)$ 直角，蓋自多角形之一角頂，向相對 $n-3$ 個之角頂，引對角線，



則可分本形爲 $n-2$ 個之三角形，而諸三角形內角之和，等於多角形內角之和，故等於 $(n-2)\times 2\hat{R}$，卽 $2(n-2)\hat{R}$，因而四邊形內角之和爲 $4\hat{R}$. (2) 任意多角形各外角之和，等於 4 直角. 蓋一內

角與其相鄰外角之和，等於 R，故諸內角與諸外角之和，等於 $n\times 2\hat{R}$ 卽 $2n$R. 但諸內角之和，等於 $2(n-\hat{2})$R. 故諸外



角之和，等於 $4\hat{R}$. 此理又可如次證明之，自多角形平面上一點，平行於各邊引直線，則此點之周圍，各等於各外角之故也.

多角數. 代 英 Polygonal numbers 初項爲 1，公差爲 b 之等差級數，表其 n 項之和之式，爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$. 此式次第令 $b=0, 1, 2, 3, \dots\dots$ 則得二次，三次，四次，......多角形之公項，但一次則各項爲 1，卽

次數	第 n 項	級　數
1	1	1, 1, 1, 1,......
2	n	1, 2, 3, 4,......
3	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1, 3, 6, 10,......
4	n^2	1, 4, 9, 16,......
5	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1, 5, 12, 22,......

餘倣此，而二次，三次，四次，......級數，各稱爲直線數，三角數，四角數，......

r次多角數，第n項爲$n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$.

而此級數n項之和，爲

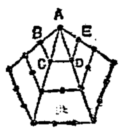
$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{r-2}{2}\times\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$\text{即}\ \frac{1}{6}n(n+1)\left\{(r-2)(n-1)+3\right\}.$$

故在三角數，則爲$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(r+2)$.

在四角數，則爲$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

而一般r角級數，作圖之法，則先畫正r角形ABCDE，[茲畫正五角形以例其餘]自其一角頂A，過其他各角頂B，C，D，E，引數直線，而取AB二倍三倍之長，以爲一邊，作多角形，使與原形相似，且共有角A乃於是等多角形之周邊，取與原形一邊相等之距離，作黑點，則r角數之第一項，爲在A之一點；第二項爲在第一多角形ABCDE各角頂之諸點，第三項爲在第二多角形周邊之諸點，次第如此示之.



多項式. 代 英 Polynomial expression 或 Multinomial expression. 謂自二項以上之項所成之式，因項數爲2，3，………而謂之二項式，三項式，……，例如$a+b$爲二項式，$3x+y-5z$爲三項式，而二項式，三項式，………之通稱，謂之多項式.

多項式定理. 代 英 Multinominal theorem 謂展開多項式任意之冪之範式. 求$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^p$之任意一項之係數，但p爲正整數. 此展開式爲$a+b+c+d+\ldots\ldots p$個因數之積，而展開式之各項，乃自此p個因數，各取一字母而成，故任意之項$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots$最後之積所表之數，等於$p$個字母[其中$\alpha$個$a$，$\beta$個$b$，$\gamma$個$c$，……]列法之數，即$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots$之係數，爲$\frac{p!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots}$.

但$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=p$，而$(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^p$之展開式，含$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots$之項，爲$\frac{p!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\ldots}a^\alpha(bx)^\beta(cx^2)^\gamma(dx^3)^\delta\ldots$，

即$\frac{p!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\ldots\ldots\ldots}$，

但　$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=p$，

此爲多項式之公項. 例如求$(a+bx+cx^2)^9$之展開式x^5之係數，此展開式之公項爲$\frac{9!}{\alpha!\beta!\gamma!}a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta+2\gamma}\ldots\ldots\ldots$，

但$\alpha+\beta+\gamma=9$，依視察，求適當於$\beta+2\gamma=5$之β及γ之正整數値，然後自$\alpha+\beta+\gamma=9$可求得α之値，

$\gamma=2$，則$\beta=1$，而$\alpha=6$.

$\gamma=1$，則$\beta=3$，而$\alpha=5$.

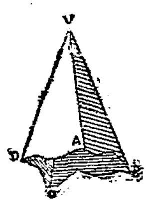
$\gamma=0$，則$\beta=5$，而$\alpha=4$.

所求之係數. 爲此各數各代入於(1)之値之和，故所求之係數，當爲

$$\frac{9!}{9!2!}a^6bc^2+\frac{9!}{5!3!}a^5b^7c+\frac{9!}{4!5!}a^4b^5$$

$$=252a^6bc^2+504a^5b^3c+126a^4b^5.$$

多面角. 幾 英 Polyhedral angle 三個以上之平面，相交於一點，則謂之多面角或立體角. [Solid angle] 例如V-ABCD爲多面角，而平面VAB，VBC，……相交之點V，爲多面角之頂點，VA，VB，….爲多面角之稜，平面角AVB，BVC，…….爲



多面角之面角．多面角因其平面之數,而謂之三面角,四面角,……多面角之各角,以一平面截之,其截口爲凸多角形,則謂之凸多面角．否則謂之凹多面角．凸多面角之面角之和小於四值角．

多面體． 幾 英 Polyhedron 以多角形之面所圍成之立體,謂之多面體,所圍之多角形,爲多面體之面,面與面相交之直線,爲多面體之稜,多面角之頂,爲多面體之頂,連結不同面二頂點之直線,爲多面體之對角線,過不同面三頂點之平面,爲多面體之對角面．多面體之面爲全相等之正多角形,爲正多面體,見其條．

因． 算 我國古數書,一位數乘數之乘法,謂之因．

因子． 算 代 英 Factor 同因數,見其條．

因數． 算 代 英 Factor 二個以上之數相乘,是等之數,謂其積之因數．又能整除某數之數,謂之某數之因數．例如2,3,4,6,皆爲12之因數．求某數一切因數之法,見非素數條．分解某式爲因數,代數學之運算屢用之．分解代數式爲因數,雖無一定之法則,然次之各種,乃所常見者也．(1) 各項之通因數,例如 $ax+bx+cx=x(a+b+c)$．(2) 依已知之式而分解因數,即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$, $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$．(3) m 爲偶數,則 a^m-b^m 能以 $a+b$ 整除之．(4) m 爲奇數,則 a^m+b^m 能以 $a+b$ 整除之．(5) 無論 m 爲奇數偶數,a^m-b^m 恆能以 $a-b$ 整除之．(6) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$．(7) 一般之二次式,即 $ax^2+bx+c=$

$$a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}$$

(8) $f(x)$ 爲 x 之有理整式,若 $f(a)=0$,則 $x-a$ 爲 $f(x)$ 之一因數．例如 x^3-2x^2+1,則 $x=1$ 時爲 0,故 $x-1$ 爲 x^3-2x^2+1 之一因數,即 $x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)$．(9) a 爲素數,則 a 爲 $\{1.2.3.4.\ldots\ldots(a-1)\}+1$ 之一因數．(10) a 對於 r 爲素數,則 a 爲 $r^{a-1}-1$ 之一因數．(11) 含虛因數 $a+b\sqrt{-1}$ 之有理式,必又含虛因數 $ab-\sqrt{-1}$．次之公式,乃分解因數時所常用者,即

$$a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2\sqrt{2}ab+b^2).$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma a^2+2\Sigma ab=(a+b+c)^2.\\ 2\Sigma a^2b^2-\Sigma a^4=(a+b+c)\times\\ \quad(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\ \Sigma a^3+3\Sigma bc(b+c)+6abc=(a+b+c)^3.\end{array}\right\}$$

$$x^3+x^2\Sigma a+x\Sigma ab+abc$$
$$=(x+a)(x+b)+(x+c).$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(b-c)=0.\\ \Sigma a(b-c)=0.\\ \Sigma(b+c)(b-c)=0.\\ \Sigma bc(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).\\ \Sigma a^2(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).\\ \Sigma a(b^2-c^2)=(b-c)(c-a)(a-b).\\ \Sigma bc(b+c)+2abc=(b+c)(c+b)(b+a).\\ \Sigma a^3+\Sigma bc(b+c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).\\ \Sigma a^2(b+c)+3abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).\\ \Sigma a^2(b+c)-\Sigma a^3-2abc\\ \qquad=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).\end{array}\right\}$$

但上之諸式,其Σ爲關於 a,b,c 之三個者．

$$\left.\begin{array}{l}(x\pm y^2)\mp 4xy=(x\mp y)^2.\\ x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2).\ \text{而一般爲}\\ x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-2}y\\ \qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}).\\ x^n\pm y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y\\ \qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\mp xy^{n-2}\pm y^{n-1}).\end{array}\right\}$$

但n爲奇數,則取上符號,n爲偶數,則取下符號.

因數分解法. [算] [代] 英 Factoring 或 Factorisation 謂分解因數之方法.

因數除法. [算] [代] 英 Division by factors. 將除數分解爲因數,以其各因數,次第除被除數,而求其商及剩餘之方法也. 例如以21除819,則因$21=3\times7$,故如右式除之. 又如以56除6737,則因$45=7\times8$,故亦如右式除之,而得量120,及餘剩$=3+2\times7=17$.

$3\,|\,819$
$7\,|\,273$
$\quad\;\; 39$ 商

$7\,|\,6737$ 餘3.
$8\,|\,\;952$ 餘2.
$\quad\;\; 120$

因積變. [代] 英 Vary jointly as. 一量因他二量之積而變,則前量爲後二量之因積變,即$x=kyz$ [k爲常數] 則x爲y與z之因積變. 例如三角形之面積,因其底與高而變也.

自變數. [代] 英 Independent variable 見變數條.

自轉. [幾] 英 Rotation 一物體繞其體內之一軸而轉,謂之自轉. 自轉物體中之各點,畫中心在軸上之圓而其平面垂直於軸. 而其體中任意質點之速度,爲點與軸之距離乘其物體之角速度,而其物體中各質點廻轉之時間皆相同,故各質點之速度,與自軸至點之距離成比例.

自然數. [算] 英 Natural numbers 謂 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,.........

自然對數. [代] 英 Natural logarithms 見對數之條.

地平面. [數] 英 Horizontal plane 同水平面,見其條.

地平線. [數] 英 Horizontal line 同水平線,見其條.

地圖之分數. [數] 英 Representative fraction. 某國土與其地圖爲相似形,而地圖上各線之長,與國土對於此實際之長,有常數比,即一定之比,此常數比,謂之地圖之梯尺. 以分子爲1之分數表之,謂之地圖之分數. 例如5里之長地圖上以3寸表之,則地圖之分數,爲$\frac{3}{5\times18000}$,即$\frac{1}{30000}$.

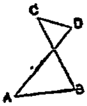
交. [幾] 英 To intersect 謂線與線,線與面,面與面之交. 例如線與線之交爲點,線與面之交亦爲點,平面與平面之交爲直線,平面與球面之交爲圓.

交點. [幾] 英 Point of intersection 謂直線與直線,或直線與曲線,或曲線與曲線之交.

交代式. [代] 英 Alternating expression 含若干字母之式,交換其中任意之二字母時,惟變其式之符號,謂之交代式. 例如$(b-c)(c-a)(a-b)$,交換其b與c,則爲$(c-b)(b-a)(a-c)$,即$-(b-c)(c-a)\times(a-b)$,故$(b-c)(c-a)(a-b)$,爲b及c之交代式. 同樣,交換c與a,a與b亦得絕對值相等而符號相反之式,故$(b-c)\times(c-a)(a-b)$爲a, b, c,之交代式. 交代式有次之性質. (1)交代式與對稱式之積,爲交代式. (2)交代式與對稱式之二商[以其一爲除數以其他爲被除數]爲交代式. (3)交代式與交代式之積或商爲對稱式. (4)偶個交代式之連乘積,爲對稱式. (5)奇個交代式之連乘積爲交代式. (6)若干字母之交代式,其中字母,若有二個相等則爲零. (7)若干字母之交代式,若以其中字母任意二個之差能整除者,則以其各差之連乘積能整除之.

交換定則. [數] 英 Commutative law 見基本定則條.

交截四邊形. 圖 英 Cross quadrilateral. 謂如圖二邊交截之四邊形.



交易所. 圖 英 Exchange 於一定之場所買賣物品或證劵者謂之交易所.

列法. 圖 英 Permutation 或 Arrangement 見序列條.

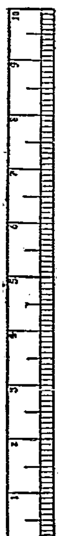
列氏之度分. 圖 英 Réaumur's scale 列氏分畫之標準,用球部水銀1000分之1之容積爲單位. 後以之換算水之冰點與沸點,則冰點恰爲零度,沸點恰爲80度. 此種寒暑表,我國現今使用之者甚少,

列氏之度盛. 圖 英 Réaumur's scale 日本數辭. 卽列氏之度分,見其條.

列替安. 日 英 Radian 測角之弧度法單位,謂之列替安,見弧度法條.

列點. 圖 英 Range 謂在一直線上之諸點而依於某規則者. 例如調和列點

米. 圖 英 Metre 爲米突之省書,見米突條.



米突. 圖 英 Metre 爲米突法長之基本單位,等於我國3尺1寸2分5釐,一米突十分之一,謂之特西米突[粉],百分之一謂之生的米突[糎],千分之一謂之密里米突[粍],又一米突之十倍,謂之特卡米突[籵],百倍謂之海克米突[粨],千倍謂之啓羅米突[粁],萬倍謂之密里亞米突[粫],特西生的密里爲拉丁語之前置詞,特卡,海克,啓羅,密里亞,爲希臘語之前置詞, 又其原器以白金及 Iridium 之合金製成,取其在空氣中其質不變,且不腐蝕於酸類,富於彈性剛性,少膨脹係數,以此爲原器,優於他金屬及合金,乃經鄭重學術上經驗之結果也.

米突法. 圖 英 Metric system 所謂長及重之米突法者,以米突爲基本單位,自此單位發生一切度量之單位也. 此法,起自法國革命之際,西曆1790年,法國政府,決定創造新法之度量衡,且欲使之普通於各國,而撰定新法之單位,以照會於各國,應此照會之各國,皆派遣學者,至巴黎,與法國學者會議,於是此諸委員首先撰定基本單位,雖因事變損失,必得算出者,乃以地球子午線四分之一爲基本,取此基本千萬分之一,爲長之單位,名之曰米突. 1795年,法國政府嘉納此基本之撰定,是時有名之天文學士蔑修,[Mechain][1744年生1805年死]及托蘭伯[Delambre][1749年生1822年死]兩氏,從事於測定法國北部丹克爾克[Dunkirk]及西班牙巴西魯那[Barcelona]間,子午線之弧精密之長,既而法國數學家表替[Biot]及天文學家阿剌果[Arago]兩氏延長此子午線之測定,至斐滿塔剌[Formentara]島,是等之測定,比於祕魯國所測赤道至極精密之長,稍有差異. 如此決定米突二條,平行刻之於白金板,此萬國同盟度量衡長度之起源也. 委員之一部,決定米突精密之長,他一部,決定重之單位,必與長之單位有一定不變之關係,此研究之結果,以一米突百分之一爲一邊之立

方積純水之重爲單位,此水在攝氏4度卽華氏39度.2之溫度[最大密度之溫度]量之,名之曰格蘭姆,取一千格蘭姆之重之白金片,以爲標準.此萬國同盟度量衡重量之起源也.然爾後依精密之計算,發見米突小於地球子午線四千萬分之一,故若以精密論之,米突法究非天地間一定不變之基度,不過爲關於白金之米突尺爲一定不變之基度耳.米突法採用十進法,其裨益於世,良非淺鮮,蓋節省費用及時間爲最大也.米突法原爲爲法國創設,然至今日,則非法所私有,實爲萬國普通之物矣.1870年有二十九國派遣委員五十名,會於巴黎,對於萬國度量衡原器,繼續種種之討論,1872年議決建設萬國度量衡局,日本亦於明治二十四年加入之.

米突噸. 英 Metric ton. 米突噸謂千啓羅格蘭之重,等於我1675斤餘,又謂之噸羅,[Tonneau]或謂之法噸.

夸爾. 英 Quart. 則在英國爲容量[穀量,液量]單位之名,相當於我1升2合2勺餘.在美國爲酒類穀量單位之名.

夸爾脫. 英 Quarter, 在英國爲容量[穀量]及重量[常衡]單位之名,在美國爲容量單位之名.

夸脫爾. 英 Qiuntal 謂百啓羅格蘭姆之重.

次. 英 Degree 或 Order. 代數學之項之次,謂其中所含文字因數之數,例如 abc 爲三次, $3axyz$ 爲四次,乘冪之次數,謂其文字因數指數之和.例如 a^3b^2 爲五次, $3x^2y^4z$ [卽 $3x^2y^4z$] 爲七次,又式之次數,謂其式中最高次項之次數.又有時就其式中特別文字而定其次數,例如 xy^2+ay+b 就 x 言之,爲一次,就 y 言之爲二次,又根數之次數,以根指數表之,例如 $\sqrt{a}$ [卽 $\sqrt[2]{a}$] 爲二次之根數, $\sqrt[3]{a}$ 爲三次之根數,方程式之次數,見方程式之條.

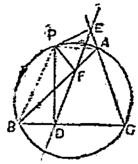
次元. 英 Dimension 幾何學所謂次元,同於廣袤,見其條,在代數學則積某項之文字因數,謂之次元.例如 a^2b 爲三次元之項.代數學一次元之項,幾何學的表示爲線之長,又二次元之項,幾何學的表示爲面積,三次元之項,幾何學的表示爲體積,然幾何學四次元以上無其實象,代數學則四次元以上任至何次皆有之.

曲面. 英 Curved surface 曲面者,謂任意於其面取一點,過此點之任意割平面,其二面之交,爲曲線也.例如球及圓錐等之面,爲曲面也.幾何學曲面之分類如次.(1)單曲面.[Single curved surface]此曲面爲直線運動而生之面,其任意二位置,在同一之平面上,圓錐及圓壔之面,屬於此類,此類之曲面,得展開爲平面,故亦謂之可展面.[Developable surface].(2)複曲面[Double curved surface]此曲面惟曲線所生之面,例如球楕圓體之面,(3)构曲面,[或曰捩曲面][Warped surface]此曲面雖爲直線所生,其位置非在一平面上者,例如一支雙曲線體之面.

曲線. 英 Curved line 或 Curve 謂時時變其方向之線,卽如何鄰近之三點,不在同一直線者.曲線有平面曲線,[Plane curve]及倍曲率曲線[Curve of double curvature] 之二種. 平面曲線者,謂其曲線之一切點,在同一之平面上. 倍曲率曲線者,謂其曲線如何鄰近之四點,不在同一之平面上. 屬於初等幾何學之曲線爲圓. 又曲線分代數曲線,[Algebraic curve] 及超越曲線 [Transcendenta, curve] 之二種. 代數曲線者,其點在坐標間之關係,能以代數學通常之運算,即加減乘除及常數指數之冪及根表之,超越曲線者,其點在坐標間之關係,不得如此表之. 在高等數學,線恆以方程式而定. 若線自運動於一定之法則之點而成,則以代數學的表其法則者,爲其線之方程式,是即可視爲其線之解析的定義. 若點以不規則而運動,則其點之徑路,非曲線,嚴密言之,則謂非數學的曲線,爲僅彎曲之線而已. 故曲線爲數學的曲線,與僅爲彎曲之線大異,即前者因一定之數學的法則而生,後者以不規則之運動而生,恰如音樂與噪聲之不同也. 超越曲線,其方程式含變數指數之冪或根,或含對數或含三角函數,其曲線之種類,有對數曲線,擺線,螺線,懸鏈線等. 代數曲線,則依其方程式之次數,而區別爲一次,二次,三次等. 一次之曲線爲直線,二次之平面曲線,爲圓橢圓雙曲線拋物線,即圓錐曲線.

西經. 圖 英 West meridian 自基本之子午線,向東所測之經度,謂之東經. 向西所測之經度,謂之西經. 通例自本初子午線起算. 本初子午線,即過英國格林維基天文臺子午儀中心之子午線也.

西母生線. 圖 英 Simson's line. 自三角形 ABC 之外接圓周上之一點 P,向邊 BC, CA, AB, [必有延線] 各引垂線 PD, PE, PF, 則 D, E, F 之三點,同在一直線上,而其逆亦眞. 此直線謂之西母生線. 又謂之關於點 P 之 △ABC 之垂趾線, [Pedal line] 或垂足線.



[證] 試於上圖連結 PA, PB, 則 P, E, A, F, 在同一之圓周上,故 $\widehat{PFE}=\widehat{PAE}=\widehat{PBD}=2\widehat{R}-\widehat{PFD}$. ∵ P, B, D, F, 在同一之圓周上故也. 故 D, E, F, 在同一之直線上. [逆] $\widehat{BPD}=\widehat{BFD}=\widehat{AFE}=\widehat{APE}$, ∴ $\widehat{BPA}=\widehat{DPE}=2\widehat{R}-\widehat{C}$. 故 A, P, B, C, 在同一之圓周上,換言之,即 P 在 △ABC 之外接圓周上. [注意1] PD, PF, PE,與三角形之邊成等角[向同方向廻繞而測者]之斜線,亦得同樣證明 D, F, E, 在同一之直線上. [注意2] 四直線相交,生四三角形,自其任意二三角形外接圓之交點,向四直線所引之垂線趾,在同一之直線上. [注意] 此直線本爲吳里斯[Wallace]氏所發見,而西母生氏編之於所著書中,故世亦稱之爲西母生線.

西基耶司單位. 圖 英 C.G.S. units 謂表長之單位爲糎,表質量之單位爲瓦,表時間之單位爲秒之法式也. 此爲用於物理學者,而 C 爲 Centimetre 之首字, G 爲 gramme 之首字, S 爲 Second 之首字也.

百分法. [角度的] 圖 目 英 Centesimal method. 角度之百分法,謂將一

直角百等分之爲一度,將一度百等分之爲一分,將一分百等分之爲一秒. 法國創定米突法,欲將一切度量使成十進法,於是又制定角度的百分法,然數學表,皆自六十分法所成,故此法不適用,其度分秒之記號爲 g, ", `, 例如25度38分40秒,則記爲 $25^g\,38''\,40^`$. 又. [算] 英 Per-cent. 此英語自拉丁語之Per-centum來者,謂對於百之意也. 故百分法之單位爲百分之一. 謂1 Per-cent, 卽分百之一,卽一分,謂5 Per-cent, 卽百分之五,卽五分,謂20 Per-cent, 卽百分之二十,卽二成,而Per-cent,恆以%記之,如5%爲5 Per-cent, 20%爲20 Per-cent.

百立. [算] 古籌算名. 百位之數,立籌記之故名.

收斂. [代] 英 Convergency 見級數條.

收斂級數. [代] 英 Converging series 見級數條.

仲立人. [算] 英 Broker 日本數辭,卽中人,見中人條.

仲買人. [算] 英 Commission agent. 日本數辭,卽經紀,見經紀條.

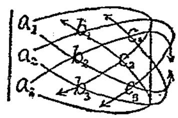
行列式. [代] 英 Determinant. 將 n^2 個之數 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$; ……; $l_1\, l_2, \ldots\ldots, l_n$; 列爲 n 列及 n 行如次.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & l_3 \cdots\cdots l_n \end{vmatrix}$$

自此各列及各行,而作 n 文字種種之積,加以適當之符號,則其各積之代數和,謂之行列式,或謂之的特密南,而如上法作正方形記之,或欲簡略,而以希臘文字△表之. 對角線 $a_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ 謂之主對角線,[Principal]主對角線中 n 文字之積 $a_1b_2c_3d_4 \ldots l_n$, 其符號定爲正. 至決定他任意之積之符號,則先將其文字依羅馬字之序次置之,而其添數,對於主對角線添數之序次,而計其變列之數. 此數若爲偶數,則其項之符號爲正,若爲奇數,則其項之符號爲負. [變列者,謂其添數移動一位置,] 例如主對角線爲 $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$, 而求 $a_3\, b_2\, c_4\, d_1$ 之符號,施三回變列,而得至第一之位置,再施一回變列,而3得在2與4之間,是添數欲置爲1 2 3 4之次序,其變列之全數爲四,故其符號爲正. △之次數,[Order]同於其行或列之數. 次示一例爲三次之△,而作其總積,且附以適當之符號者也. 卽

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5\times9\times4 - 5\times8\times2 + 3\times2\times2 - 3\times1\times4 + 6\times8\times1 - 6\times9\times2.$$

三次之△之總積,附其適當之符號,依次圖定之便爲,卽鏃向上方者爲正,而鏃向下方者爲負.



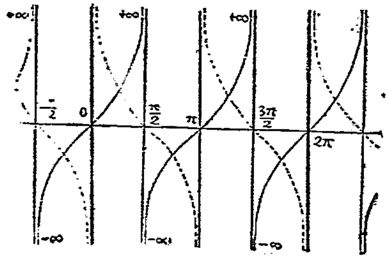
全等形. [幾] 英 Congruent figures 同於同積同形,見其條.

式. [代] 英 Expression 恆爲代數式之略,見代數式條.

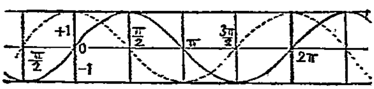
回歸圓函數. [三] 英 Periodic circular function 回歸圓函數者,[或謂之周期函數]謂其函數之值,循環無已者. 凡圓函數,皆爲回歸函數,

蓋 $\tan\theta = \tan(n\pi + \theta)$, 及 $\cot\theta = \cot(n\pi + \theta)$, 故 $\tan\theta$, $\cot\theta$, 其 θ 以 π 之增而無變更, 故 $\tan\theta$, $\cot\theta$, 爲回歸圓函數,而其回歸之期限爲 π. 今以圖解之.

正切及餘切之曲線



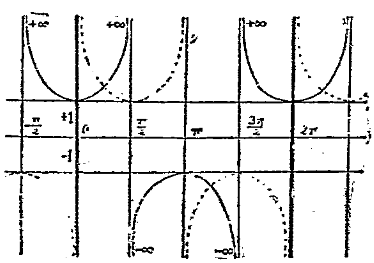
正弦及餘弦之曲線



實線為正切之曲線,虛線為餘切之曲線.

又 $\sin\theta=\sin(2n\pi+\theta)$, $\cos\theta=\cos(2n\pi+\theta)$, $\sec\theta=\sec(2n\pi+\theta)$, $\operatorname{cosec}\theta=\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta)$, 故 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, 亦為回歸圓函數,其回歸之期限為 2π. 今以圖解之,

正割及餘割之曲線



實線為正弦之曲線,虛線為餘弦之曲線,實線為正割之曲線,虛線為餘割之曲線.

名數. [算] 英 Concrete number 或 Denominate number. 名數者,為關於特別單位之數. 例如3圓5尺18斤等. 名數對於不名數[Abstract number]而言,若嚴密之,則此為無意義之語,卽凡數為不名數也.

仰角. [三] 英 Angle of Elevation 垂直角之一邊為水平,而他一邊向上者,謂之仰角,

冰點. [寒暑表的]. [算] 英 Freezing point. [of a thermometer] 冰之融解時,將寒暑表插入其中,管內之液,降下至一定之點,至其冰全融解時而不變者,此定點謂之冰點.

向. [代] [幾] 英 Sense 向之義有二,一謂不等式之向. 例如 $a>b$, 兩邊以 -1 乘之,則不等式之向,變而為 $-a<-b$. 一謂直線之向. 例如有限直線AB,有自A至B之向,與自B至A反對

A ———— B

之向,故謂直線AB,指自A至B之向,謂直線BA,指自B至A之向.

年金. [算] [代] 英 Annuity 謂每年領取或兌付之金. 年金有確實年金 [Certain annuity] 及生命年金 [Life annuity] 之二種. 確實年金,為一定年限中連續之者,而無不確實之計算. 生命年金,則其人生存時連續之,然不能預定其人生命之年限也. 1. 利率 r, $1+r=R$, 期間 n 年, 年金 S 圓, 若 n 年間未兌付年金, 則 n 年之終, 其元利合計為 $A=\frac{S(R^n-1)}{r}$. 2. n 年間繼續之年金S圓之現價, 為 $P=\frac{S}{R-1}\times\frac{R^n-1}{R^n}$. 3. 若年金無期限繼續之,則

上式中 $\frac{R^n-1}{R^n}$ 之極限爲1,故其現價 $P=\frac{S}{r}$. 4. p 年間存儲,其後 q 年間繼續之年金S圓之現價 $P=\frac{S}{R^{p+q}}\times\frac{R^q-1}{R-1}$. 5. p 年間存儲,其後無期限續之年金 S 圓之現價 $P=\frac{S}{R^p(R-1)}$. 6. 欲領取生命年金 A 圓,若 n 年間應免付儲金爲P圓,則因 $A=\frac{P(R^n-1)}{R-1}$, 故 $P=\frac{Ar}{R^n-1}$. 若A圓於最後儲金後一年領取,則 $P=\frac{Ar}{R(R^n-1)}$. 但生命年金之計算,必用死亡生存表.茲將卡來[Carlisle]之生命表,示於左,卽對左行之年齡而示百人中之生存數.

年齡	生存	年齡	生存	年齡	生存
0	38.72	35	31.00	70	9.18
1	44.68	36	30.32	71	8.65
2	47.55	37	29.64	72	8.16
3	49.82	38	28.96	73	7.72
4	50.76	39	28.28	74	7.33
5	51.25	40	27.61	75	7.01
6	51.17	41	26.97	76	6.69
7	50.80	42	26.34	77	6.40
8	50.24	43	25.71	78	6.12
9	49.57	44	25.09	79	5.80
10	48.82	45	24.46	80	5.51
11	48.04	46	23.82	81	5.21
12	47.27	47	23.17	82	4.93
13	46.51	48	22.50	83	4.65
14	45.75	49	21.81	84	4.39
15	45.00	50	21.11	85	4.12
16	44.27	51	20.39	86	3.90
17	43.57	52	19.68	87	3.71
18	42.87	53	18.97	88	3.59
19	42.17	54	18.28	89	3.47
20	41.46	55	17.58	90	3.28
21	40.75	56	16.89	91	3.26
22	40.04	57	16.21	92	3.37
23	39.31	58	15.55	93	3.48
24	38.59	59	14.92	94	3.53
25	37.86	60	14.34	95	3.53
26	37.14	61	13.82	96	3.46
27	36.41	62	13.31	97	3.28
28	35.69	63	12.81	98	3.07
29	35.00	64	12.30	99	2.77
30	34.34	65	11.79	100	2.28
31	33.68	66	11.27	101	1.79
32	33.03	67	10.75	102	1.30
33	32.36	68	10.23	103	0.83
34	31.68	69	9.70		

7. 公債亦爲年金之一種, n 年間繼續之公債額面S圓,以 P 圓買之,其公債之年利率爲 r, 又市場之金利率爲 q 則此人因買公債得年幾何之利率,將 x 爲所求之利率,則 n 年終,放資之元利合計,爲 $P(1+x)^n$, 而公債 n 年間所得金,爲 $Sr(1+q)^{n-1}+Sr(1+q)^{n-2}$

$$+\cdots\cdots+Sr+S=S+\frac{Sr\{(1+q)^n-1\}}{q},$$

$$故\ P(1+x)^n=S+\frac{Sr\{(1+q)^n-1\}}{q},$$

$$\therefore\quad 1+x=\left\{\frac{Sq+Sr(1+q)^n-1}{Pq}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

安. 算 Acre 爲亞爾之略號,見亞爾條.

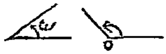
吋. 算 英 Inch 爲1呎12分之1[見呎條].

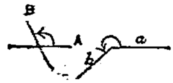
兆. 算 英 Million 謂百萬之數,近日人口國債等數,恆以此記之.外國記數,自右向左,英國每六位增一名,法美各國,則每三位增一名,而向左第七位之名,適當我國百萬之兆,故以兆譯之.例如庚子賠款四萬萬,卽謂之四百兆也.但我國兆之義,尙有二,一謂萬億,[英 Billions 法美各國 Trillions],今之數學書用之.一謂億億,[英 Thousand Billions 法美各國 Ten Quardrillions],則未有用之者.[參看億字條及第八門第5節].

七畫

角. 幾 英 Angle 謂自一點引二直線所成之角,此二直線爲角之二邊,此一點爲角之頂點.或謂一直線以其

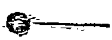
一端爲樞而廻轉之,則成角.角之大,不關係於邊之長,惟關係於其一邊廻轉至他一邊之量.角之廻轉方向,與時表之針反對者爲正,順之者爲負.恆以弧形之鏃表示之.卽得以角內一字母表之,如

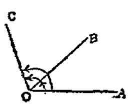


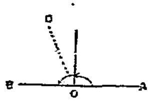


角 a 或 $\hat{a}$ 又得以角頂一字母表之,如角 O 或 $\hat{O}$,又得以三字母表之,如角 AOB 或 $\mathrm{A\hat{O}B}$ 或 $\angle \mathrm{AOB}$,但其在角頂之字母,當置於中央.又得以二邊之字母表之,如角 (a,b) 或 $\widehat{a,b}$.直線 OA, OB 間之角,如圖,自 OA 廻轉於 OB,有右廻與左廻之二者,此二角互謂之共軛,[Conjugate] 大者謂之優角,[Major] 小者謂之劣角.[Minor angle].

一直線以其一端爲樞廻轉,再至原之位置所畫之角,謂之周角.[Circum angle 或 Perigon] 角之二邊,在一直線上,而成反對之方向者,謂之平角 [Straight angle] 故平角爲周角之半分.若自一點,引三直線 OA, OB, OC, 而 OB 在角 AOC 內,則 $\mathrm{A\hat{O}B}$, $\mathrm{B\hat{O}C}$, 謂之接角或鄰角.[Adjacent angles] 若直線 CO, 立於直線 AOB 上,其所成之鄰角相等,則各爲直角.[Right angle] 一直線 DO 與他直線 AOB 相遇,







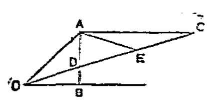
其所成二鄰角之和,等於二直角.

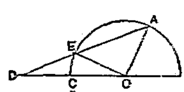
角度. 圖 英 Angular measure 謂角之大也.測角之大,設度分秒之單位,直角九十等分之一,謂之度,一度六十等分之一,謂之分,一分六十等分之一,謂之秒,卽

$$1^{直角}=90^{度}=5400^{分}=32400^{秒}$$
$$1 = 60 = 3600$$
$$1 = 60$$

而度分秒各用 °, ′, ″, 之記號,例如 28° 37′ 54″, 卽二十八度三十七分五十四秒.

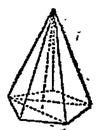
角之三等分. 圖 英 Trisection of an angle 角之三等分,與求倍積之正方體,[The duplication of the cube], 與圓等積之正方形,[The quadrature of the circle], 及於二已知線之間插入二等比中項,[The insertion of two geometrical means between two given lines], 俱爲古代極有名之問題,前三者謂之古來幾何學之三大問題,是等問題,在初等幾何學[卽直線及圓]之範圍不能解.例如 AC 平行於 OB, 而 AB 爲 OB 之垂線,自 O 引直線 ODC, 若得使 DC 爲 AO 之二倍,則角 BOC 爲角 AOB 之三分之一,何也,設 DC 之中點爲 E, 則 $\mathrm{AE}=\mathrm{CE}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=\mathrm{AO}$, 故 $\mathrm{A\hat{O}E}$ $=\mathrm{A\hat{E}O}=\mathrm{A\hat{C}E}+\mathrm{C\hat{A}E}=2\mathrm{A\hat{C}E}=2\mathrm{C\hat{O}B}$ 故也.又作等於角 AOB 三分之一之角.則以 O 爲中心, OA 爲半徑畫圓,自 A 引割線 AED, 若得使 $\mathrm{DE}=\mathrm{EO}=\mathrm{AO}$, 則 $\hat{\mathrm{D}}=$



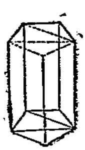


$\frac{1}{3}$ $\mathrm{A\hat{O}B}$. 何也, $\mathrm{O\hat{A}E=O\hat{E}A=\hat{D}+E\hat{O}D=}$ $2\hat{\mathrm{D}}$ 故也.

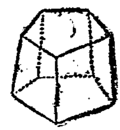
角錐. 幾 英 Pyramid 謂自一多角形[底面],與以其邊爲底之諸[與底面之邊數同數]三角形[側面],而成之多面體,其側面之頂點,爲同一之點[角錐之頂點]者. 角錐因其底面之邊數,而爲三角錐,四角錐,五角錐等. 自角錐之頂點,向底面所引之垂線,爲角錐之高 底面爲正多角形,而其高過底面之中心者,爲正角錐,否則爲斜角錐. 自正角錐之頂點,向底之一邊所引之垂線,謂之斜高,底面爲四邊形以上之角錐,得分爲若干之三角錐,[其高均等於原角錐之高]角錐之體積,爲底[面積]與高之積之三分之一.



角壔. 幾 英 Prism 角壔者,其相對二面[底面]爲全相等之多角形,而多角形之相當邊相平行. 他之各面[側面]爲平行四邊形. 兩底間之距離謂之高. 側面與側面之交謂之稜. 側稜垂直於底面者,謂之直角壔. 側稜爲底面之斜線者,謂之斜角壔. 底面爲三角形四角形五角形等,因而謂之三角壔四角壔五角壔等. 直角壔之底面,爲正多角形者,謂之正角壔. 底面爲四邊形以上之角壔,得分爲若干三角壔. [其高均等於原角壔之高]. (1)任意直角壔之全側面積,等於其底之周圍乘高. (2)任意角壔之體積,等於高乘其底面積.



角臺. 幾 英 Frustum of a pyramid 或 Prismoid. 謂以平行於底之平面截角錐之立體. 角臺兩底之面積爲A, B, 高爲h, 則其體積 $\mathrm{V}=\frac{1}{3}h(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\sqrt{\mathrm{AB}})$.

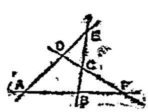


角柱. 幾 英 Prism 卽角壔,見其條.

完全之平方. 算 代 英 Perfect square. 或 Complete square. 或 Exact square. 謂某數或某式,爲他數或他式之平方. 例如1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 因爲1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9之平方,故爲完全之平方,又 $100=10^2$, $121=11^2$, 故 100, 121. 皆爲完全之平方,而式之完全之平方,則如 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$, $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

完全之立方. 算 代 英 Perfect cube 或 Complete cube 或 Exact cube 謂某數或某式,爲他數或他式之立方. 例如1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 因爲1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9之立方,故爲完全之立方. 又 $1000=10^3$, $1331=11^3$, 故1000, 1331, 皆爲完全之立方,而式之完全立方,則如 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

完全四邊形. 幾 英 Complete quadrilateral 謂四邊形ABCD引長其二組對邊,使相交於E, F而生之形,換言之,卽四直線每二直線相交之六點所生之形.



完全商. 算 代 英 Complete quotient. 例如以13除1836, 其商之百位爲3, 十位爲7, 一位爲2, 此300, 70, 2爲部分商, 合之爲372爲完全商. 又以 $a+b$ 除

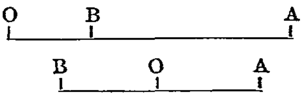
$$
\begin{array}{r}
13)4836(372 \\
\underline{39} \\
93 \\
\underline{91} \\
26 \\
\underline{26}
\end{array}
$$

a^3+b^3,則商之第一項爲a^2,第二項爲$-ab$,第三項爲b^2,合之爲a^2-ab+b^2爲完全商.

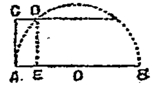
完全數. 國 英 Whole number. 與整數[Integer]同,謂無奇零之數也. 但在算術,完全數與整數同意義. 在代數式,則用整數之語,而完全數之語,恆不用之.

作圖. 國 英 Construction. 謂自已知件而作幾何學之圖形,見作圖題之條. 又代數式之作圖,爲代數式求幾何學的表示,以次例明之. 1. $x=a+b$之作圖,取OA$=a$,於其右方之延線上,取AB$=b$,則OB$=x=a+b$.

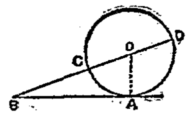
2. $x=a-b$之作圖,取OA$=a$,自A反對之向,取AB$=b$,則OB表x之值.



若$b>a$,則x之值爲負,此法若僅就絕對值言之,則無意義,然加以位置之區別,則x之負值,乃自O反對正值之方向取之.此法爲笛卡爾[Descartes法國之數學者西曆1596年生1650年死]氏之創設,卽[代數學正負相反對之符號對應於幾何學反對之方向]最簡單之例也. 今更詳言之,則[一次式之正值,自一點某方向引直線表之,則其負值,當自同點反對之方向,引直線表之.] 3. 方程式$x^2=ax+b^2=0$之根之作圖. 在代數學二次方程式$x^2+px+q=0$之二根之和爲$-p$,而其二根之積爲q,故本題之二根,若爲x_1, x_2,則$x_1+x_2=a$, $x_1x_2=b^2$. 由此關係,則二根爲實數,故俱爲正,蓋二根之和a與積b^2,皆爲正故也. 故本題爲[知二線之和a,與其積b^2,而求作圖]乃引AB$=a$於AB之上,以之爲直徑畫半圓,而引AB之



垂線AC,使其長等於b,平行於AB引CD,使交半圓周於D,引AB之垂線DE,使交AB於E,則AE及EB爲所求之二直線. [研究]若$b>\frac{1}{2}a$,卽$a<2b$,則CD不交於圓,故二根當爲虛數,若$a=2b$,則CD切於圓,而二根當各等於$\frac{1}{2}a$. 4. 方程式$x^2+ax+b^2=0$之根之作圖,此方程式,可變$x^2-ax+b^2=0$之x爲$-x$而得之,故本題二線之絕對值,同於前題. 5. 方程式$x^2-ax-b^2=0$之根之作圖. 此方程式之二根,當有反對之符號. 蓋二根之積$-b^2$爲負故也. 設x_1爲正根x_2爲負根之絕對值,則$x_1-x_2=a$, $x_1x_2=b^2$,故本題爲「已知二線之差a,與其積b^2,而求作圖」乃以O爲中心,$\frac{1}{2}a$爲半徑畫圓,過此圓周任意之點A,引切線AB$=b$,連結BO,延長之,使交圓周於C及D,則所



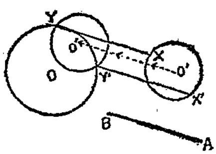
求之二線,爲BC及BD. 6. 方程式$x^2+ax-b^2=0$之根之作圖. 此方程式可變x^2 $ax-b^2$之x爲$-x$而得之,故本題二絕對值之作圖法,同於前題.

作圖之規距. 國 英 Postulate. 同公法,見其條.

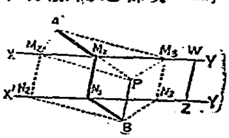
作圖幾何學. 國 英 Constructive Geometry. 作圖幾何學者,爲幾何學之一

分科,自已知件而研究其幾何學之作圖也.所決定之作圖爲有形的,曰實用的作圖幾何學,所決定之作圖爲想像的,[卽取有形的作圖之極限]曰理論的作圖幾何學,實用的作圖幾何學,[或單稱實用幾何學]器械學家建築學家測量學家機關師多用之,而以數學用器施其作圖也.例如畫直線則用矩,畫圓則用規,而理論的作圖幾何學,引直線與畫圓,則爲公法焉.

作圖題. 幾 英 Problem作圖題者,謂求作圖之問題也.初等幾何學之作圖[illegible]成法及解析法[俱見解析法[illegible]跡之交之法,[見其條]又有[illegible]移動之法,[Method of parallel tra[illegible]]此法以次二例明之.(1).於[illegible]圓周O,O′之間,置一直線,使[illegible]直線AB且平行之.若將圓[illegible]行於AB之直線而移動AB之距離,[illegible]至於O″.則XY或X′Y′,爲所求之直線,故逆其法,而先畫圓O″,乃自Y及Y′畫等於BA且平行於BA之XY及X′Y′可也.



(2).有二平行直線XY,X′Y′,又有在其間之直線WZ,又有夾平行線於其間之二點A,B,今欲以最短之折線,連結A及B之間,且使其在平行線間之部分MN,平行於WZ,試將MN之任意一位置,沿NB且平行於原位置而移動,使N與B合,斯時



之M爲P,因$AM_1P<AM_2P$或$<AM_3P$,故AM_1N_1B爲所求最短之折線,故逆其法,先引BP使平行且等於WZ,則連結A及P,而點M_1可決定矣.

利子. 算 代 英 Interest見利息條.

利息. 算 代 英 Interest謂借金之報酬付與債主者.利息皆對於元金之成分算之,惟有年利月利日利之別.[見利率條]借貸金錢之利息,得以借貸者雙方之便利定立契約.但關於[illegible]起訴於法院,則有一定之限制,借其不當之重利,流毒於社會者禁之,又法律上之利息,在民事爲週年百分之五,[民律330條]參照法律上之利息及利率條.

利率. 算 代 英 Rate percent或Rate of interest利率者,謂借貸金之利息對於元金之成分,而其名稱,則有年利月利日利之別,年利率爲元金十分之一,謂之週年一分,百分之一,謂之週年一釐,千分之一,謂之週年一毫……

……月利率爲元金十分之一,謂之見月加一,百分之一,謂之見月一分,千分之一,謂之見月一釐,萬分之一謂之見月一毫,………故見月一分,等於週年一分二釐,見月一分五釐,等於週年一分八釐.日利率我國習慣上無專用之名稱,大都計算其年利率或月利率之分數,而現今學術上,則多仿日本之法,對於百圓一日之利息幾何,而計算之,謂之日利.例如日利四分,謂百圓一日之利息爲一圓之四分[分爲圓,角,分之分]也.

利札. 算 英 Coupon日本數辭.同息票,見其條.

克. 算 法 Gramme克蘭姆之略號,見下條.

克蘭姆. 算 法 Gramme 格蘭姆亦曰克蘭姆,見格蘭姆條.

求積. 算 幾 英 Mensuration 求積者,爲應用幾何學之一分科,求線之長,面積,體積之法也.

I. 線之長.

1. [圓周]圓之半徑爲r,圓周爲S,則

$$S=2\pi r\text{..........................}(1).$$

但$\pi=3.1416$若S′爲任意弧之長,a爲其弧之度數,則

$$S'=\frac{a\pi r}{180}\text{..........................}(2).$$

若弧S′之弦爲c,其弧半分之弦爲c',則

$$S'=\frac{8c'-c}{3}\text{[近似數]..........}(3).$$

2. [橢圓]兩半徑爲a,b,周圍爲S,則

$$S=\frac{199}{200}\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}\text{ [近似數].....}(4).$$

II. 面積.

1. [平面三角形]A爲面積,b爲底,h爲高,則 $A=\frac{1}{2}bh$..........................(5).

又若邊a, b之夾角爲C,則

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C\text{......................}(6).$$

若三邊a, b, c之和之半分爲s,則

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{......}(7).$$

2. [平行四邊形]底爲b,高爲h,則

$$A=bh\text{..............................}(8).$$

又兩鄰邊爲 ,b,其夾角爲C,則

$$A=ab\sin C\text{........................}(9).$$

3. [梯形]二底爲b, b',高爲h,則

$$A=\frac{1}{2}(b+b')h\text{..................}(10).$$

又斜邊之一爲l,且此斜邊與一底間之角爲C,則

$$A=\frac{1}{2}(b+b')l\sin C\text{............}(11).$$

4. [任意四邊形]兩對角線爲d,d',其夾角爲C,則 $A=\frac{1}{2}dd'\sin C$..............(12).

5. [正多角形]邊數爲n,一邊之長爲a,則 $A=n\left(\frac{a}{2}\right)^2\tan\left(\frac{180°}{n}\right)$..............(13).

6. [圓]半徑爲r,則

$$A=\pi^2\text{..........................}(14).$$

若A′爲扇形之面積,n爲其角之度數,則

$$A'=\frac{n}{360}\pi r^2\text{....................}(15).$$

7. [橢圓]兩半徑爲a, b,則

$$A=\pi ab\text{........................}(16).$$

8. [直圓壔]底半徑爲r,高 爲h,側面積爲A,則

$$A=2\pi rh\text{......................}(17).$$

9. [直圓錐]底半徑爲r,斜高爲h,側面積爲A,則

$$A=\pi ra\text{........................}(18).$$

10. 正圓臺之兩底半徑爲r,及r',斜高爲a,側面積爲A′,則

$$A'=\pi(r+r')a\text{................}(19).$$

11. [球]球半徑爲r,則

$$A=4\pi r^2\text{........................}(20).$$

若A′爲球帶之面積,h爲其高,則

$$A'=2\pi rh\text{......................}(21).$$

又若l及l'爲球帶[其兩底與赤道平行]之緯度,則

$$A'=4\pi r^2\sin\frac{1}{2}(l'-l)\cos\frac{1}{2}(l'+l)\text{.........}(22).$$

又二緯度l, l',及二經度m, m',所圍成球面四邊形之面積爲A″,則

$$A''=\frac{\pi}{90°}(m'-m)r^2\times$$

$$\sin\frac{1}{2}(l'-l)\cos\frac{1}{2}(l'-l)\text{.........}(23)$$

又若球面三角形之面積爲A″,而三角以度數表之,爲A, B, C,三直三角形之面積爲T,[等於$\frac{1}{2}\pi r^2$]則

$$A''' = \left(\frac{A+B+C-180^\circ}{90^\circ}\right)\times T \text{............(24).}$$

又 $\overset{iv}{A}$ 為球面多角形之面積, s 為各角度數之和以 90° 除之者, n 為邊數,

則 $\overset{iv}{A}=(s-2n+4)\times T$ .... (25).

III. 體積.

1. [平行六面體]體積為V, 高為h, 底之長為a, 其闊為b, 則

$$V=abh \text{......................(26).}$$

2. [角壔及圓壔]高為h, 底面積為B, 則

$$V=Bh \text{......................(27).}$$

3. [角錐及圓錐]高為h, 底面積為B, 則

$$V=\frac{1}{3}Bh \text{...................... (28).}$$

又圓臺或角臺之體積為V′, 兩底之面積為A, B, 高為h, 則

$$V=\frac{1}{3}h(A+\sqrt{A\times B}+B) \text{.......(29).}$$

4. [球]半徑為r, 體積為V, 則

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \text{...................... (30).}$$

又球分之體積為V′. 其為底之球帶之高為h, 則

$$V'=\frac{2}{3}\pi r^2 h \text{...... ....(31).}$$

又球缺之體積為V″, 其兩底之面積為A及B, 高為h, 則

$$V''=\frac{A+B}{2}h+\frac{1}{6}\pi h^3 \text{....... (32).}$$

5. [三角傍面臺]兩底之面積為A, B, 平行於底之中央截口之面積為M, 高為h, 則

$$V=\frac{1}{6}h(A+4M+B) \text{.........(33).}$$

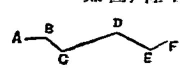
求一術. 國　古數術名. 孫子算經, 物不知數一題, 有術無草, 宋秦九韶以大衍求一術釋之, 其法始顯, 而求一術之名, 亦即始此. 新化黃宗憲作求一術通解, 刊入丁氏白芙堂叢書, 論之最詳. 茲將孫子原題及術, 錄之於次. 今有物不知數, 三三數之賸二, 五五數之賸三, 七七數之賸二, 問物幾何. 答曰, 二十三. 術曰, 三三數賸二, 置一百四十, 五五數之賸三, 置六十三, 七七數之賸二, 置三十, 併之, 得二百三十三, 以二百一十減之, 即得. 凡三三數之賸一, 則置七十, 五五數之賸一, 則置二十一, 七七數之賸一, 則置一十五, 一百六以上, 以一百五減之, 即得.

希臘文字. 國　英 Greek letters. 見希臘字母條.

希臘字母. 國　英 Greek letters. 希臘字母為次二十四.

Α	α (Alpha)	Β	β (Beta)
Γ	γ (Gamma)	Δ	δ (Delta)
Ε	ε (Epsilon)	Ζ	ζ (Zeta)
Η	η (Eta)	Θ	θ (Theta)
Ι	ι (Lota)	Κ	κ (Kappa)
Δ	λ (Lambda)	Μ	μ (Mu)
Ν	ν (Nu)	Ξ	ξ (Xi)
Ο	ο (Omicron)	Π	π (Pi)
Ρ	ρ (Rho)	Σ	σ (Sigma)
Τ	τ (Tau)	Υ	υ (Upsilon)
Φ	φ (Phi)	Χ	χ (Chi)
Ψ	ψ (Psi)	Ω	ω (Omega)

折線. 國　英 Broken line. 如圖, 種種之直線, 其端與端接合而成者.



折扣金. 國　英 Discount. 折扣金有銀行折扣金與眞折扣金之二者.

兌付人. 國　英 Drawee. 謂匯票之兌付人.

兌付日期之平均. 算 代 英 Average of pagments. 見平均日期算.

步. 算 為我國長度之補助單位,五尺曰步. 又面積之步為長度步之平方故240步為一畝,面積步或作方步

步合. 算 英 Percentage. 日本數辭即成分,見下條.

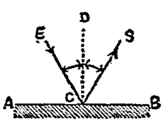
成分. 算 英 Percentage. 謂某數[較小的]對於他數[較大的]之比,以小數表之者. 例如5圓對於百圓之成分,為5÷100=0.05. 成分之十分之一,謂之一成,百分之一謂之一分,千分之一,謂之一釐,萬分之一,謂之一毫……又利率之成分,則略有不同. 見利率條.

系. 幾 英 Corollary. 系者謂自一命題可直推定之命題也. 例如證明三角形之二邊相等則對之之角亦相等之定理,則次之系,可直推定之,即等邊三角形亦為等角三角形.

夾角. 幾 英 Included angle. 或 Contained angle. 謂夾於直線或弧之間之角. 例如謂「知三角形之二邊與其夾角而作本形」之夾角. 又如球之二大圓之弧之夾角. 前者常用之,後者間用之.

更迭之理. 代 幾 英 Alternando. 四量成比例,其四量若同種類,則第二項與第三項可交換,如此交換比例之第二項與第三項,謂之更迭之理. 例如 $a:b=c:d$, 則 $a:c=b:d$.

投射角. 幾 英 Angle of incidence. 謂射線EC,射於表面AB之一點C,面與其點之法線CD所成之角ECD. 投射角ECD等於反射角DCS.



位置. 幾 英 Position. 同一之物,以左手持之,與以右手持之,其位置不同,故物體有位置,所以表示其在何處也.

延線. 幾 英 Production. 謂延長有限直線之部分.

足. [垂線或斜線的] 幾 英 Foot. 自某點向一直線或向一平面,引垂線,或引斜線,其相過之點謂之足.

吟味. 代 幾 日 英 Discussion. 日本數辭. 即研究,見其條.

呏. 算 英 Gallon. 此加倫之省書,見加倫條.

序列. 代 英 Permutation. 或 Arrangement. 同順列,見順列條.

兙. 算 法 Décagramme. 為特卡格蘭姆之省書,當於格蘭姆之十倍.

均輸. 古數書篇名. 以御遠近勞費,為九章之一. 即今之比例配分也.

八畫

直二面角. 幾 英 Right dihedral angle. 謂二面角其平面角為直角者.

直三角形. 幾 英 Right triangle. 同直角三角形,見其條.

直三面角. 幾 英 Trirectangular trihedral angle. 謂三面角之三個面角各為直角者.

直六面體. 幾 英 Right parallelepiped. 同直角平行六面體,見其條.

直交圓. 幾 英 Orthocycle. 謂直角相交之圓.

直向弧. 幾 英 Direct arc. 謂球面上二點間大圓之小弧.

直向線. 圖 英 Direct line. 任意之表面上能以二點確定之線,謂之直向線,故直線爲平面之直向線,而球之大圓,爲球面之直向線.

直角. 圖 英 Right angle. 一直線垂直於他直線,其二直線間之角,謂之直角. 直角等於平角二分之一,周角四,分之一,卽 90°

直角三角形. 圖 英 Right angled triangle. 謂三角形之一角爲直角者.

直角平形六面體. 圖 英 Rectangular parallelopiped. [或 parallelepiped] 謂平行六面體之各面爲矩形者,又謂之直角體 [Cuboid].

直角截口. 圖 英 Right section. (1). 謂與角壔之側稜成直角之截口. (2). 謂與壔之母線成直角之截口. (3). 謂與圓錐之軸成直角之截口.

直角截面. 圖 英 Right section 同直角截口,見其條.

直角柱. 圖 英 Right prism. 卽直角壔,見其條.

直角錐. 圖 英 Right pyramid. 謂角錐之底之底面爲正多角形,而其高之趾在底面之中心者,又謂之正角錐, [Regular pyramid]

直角體. 圖 英 Culoid. 同直角平行六面體,見其條.

直角壔. 圖 英 Right prism. 謂角壔之側稜垂直於底面者.

直角圓錐. 圖 英 Rectangular cone. 謂圓錐之頂角爲直角者.

直角雙曲線. 圖 英 Rectangular hyperbola. 謂兩漸近線間之角爲直角之雙曲線也. 又謂之等邊雙曲線.

直徑. 圖 英 Diameter. 圓或球之直徑,謂過圓或球之中心,而兩端止於圓周或球面之直線也. 直徑又謂之徑.

直截口. 圖 英 Right section. 同直角截口,見其條.

直截面. 圖 英 Normal section 或 Right section. 見直角截口.

直接公切線. 圖 英 Direct common tangents. 謂不於二圓中心間截二圓中心線之公切線. 又爲之外公切線.

直接共通切線. 圖 英 Direct common tangents. 同直接公切線,見其條.

直線. 圖 英 Straight line 或 Right line. 謂始終爲同一方向之線,或謂二點間最短之線,爲直線. 或謂直線者取其一部分任如何重於他部分必全相合之線也.

直線角. 圖 英 Rectilinear angle 謂角之二邊爲直線者.

直線形. 圖 英 Rectilinear figure. 或 Rectilinear figure. 以三直線以上之直線所圍成之平面形. 直線形又謂之多角形.

直聯點. 圖 英 Collinear points. 謂三以上之點,在同一直線者. 例如三角形各外角之二等分線,與對邊相交之點,爲直聯點.

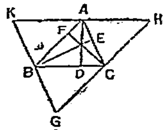
直圓錐. 圖 英 Right circular cone. 謂圓錐之軸,垂直於底面者. 或謂直角三角形以其直角傍之一邊爲軸而廻轉所生之立體,謂之直圓錐.

直圓壔. 圖 英 Right circular cylinder. 謂圓壔之軸垂直於底面者. 或謂以矩形一邊廻轉而生之立體.

直圓柱. 圖 英 Right circular cylinder. 卽直圓壔,見其條.

垂心. 圖 英 Orthocentre. 三角形之三垂線交於同一之點,此交點謂之

垂心. 自三角形ABC之各角頂,向對邊引三垂線爲AD, BE, CF, 過A,B, C, 平行於邊BC, CA AB, 引直線,作△GHK, 則因AKBC爲平行四邊形,故AK=BC, 同樣AH=BC, 故AK=AH, 同樣BK=BG, CG=CH, 故AD, BE, CF, 爲△GHK各邊中點之垂線,故知當交於同一之點.



垂直二等分線. 國 英 Perpendicular bisector. 謂有限直線之直角二等分之直線.

垂直方向. 國 目 英 Vertical direction. 謂鉛垂線之方向.

垂直角. 國 目 英 Vertical angle. 垂直角謂其邊在垂直面上之角,而垂直角之一邊成水平,而他邊向上者,謂之仰角,向下者謂之俯角.

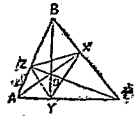
垂直面. 國 目 英 Vertical plane. 謂含垂直線之平面.

垂直線. 國 目 英 Vertical line. 謂成鉛垂線方向之直線.

垂足三角形. 國 英 Pedal triangle. 同垂趾三角形,見其條.

垂足線. 國 英 Pedal line. 同西母生線,見其條.

垂趾三角形. 國 英 Orthique triangle 或 Pedal triangle. 連結三角形三垂線之趾,而生之三角形,謂之垂趾三角形,卽AX, BY, CZ, 爲三角形ABC之三垂線,則XYZ爲垂趾三角形,而AX, BY, CZ, 各爲三角形XYZ各角之二等分線,故其交點O爲△XYZ之內心,而BC, CA, AB, 各爲△XYZ各外角之二等分線,故A, B, C, 又爲其三角形之傍心.



垂趾線. 國 英 Pedal line. 同西母生線,見其條.

垂線. 國 英 Perpendicular 一直線與他直線相遇,其所成二接角,各爲直角者,此二直線,謂之互爲垂直.又一直線,垂直於一平面上諸直線者,謂其直線爲垂直於此平面,亦謂平面爲垂直於直線.又二圓弧其所含之平面,互爲垂直,則謂二圓弧爲互爲垂直.

定則. 國 英 Law 或 Rule. 同定律及法則,見其條.

定理. 國 英 Theorem. 幾何學之定理,謂可依已知之命題而證明之命題,其所謂已知之命題者,謂定義公理,或已證明之定理.定理自假設及終結之二部而成.假設者,謂假定爲眞之事.終結者,謂自假設而生之眞理.定理之一般形式,如[若A爲B則C爲D]則[若A爲B]爲假設,而[則C爲D]爲終結.解析法之定理,則不必如上述之形式,而爲一恆等式,例如二項式定理是也.

定律. 國 英 Law. 數學上之定律,恆與法則同意義,見法則條.定律與定則其意義更爲普通,例如級數之定律者,謂各項次第之關係,定則者謂假定依定律所能表之事實,而於求其各項爲必要之指示也.

定義. 國 英 Definition. 解釋學語之意者,謂之定義.

定長之直線. 國 英 Definite straight 謂一定長之直線.

定期兌. 〔算〕 英 Time draft. 見匯票條.

定期拂. Time draft. 日本數辭,即定期兌,見其條.

法. 〔算〕 〔代〕 英 Divisor. 同除數,見其條.

法則. 〔數〕 英 Rule. 或 Law. 謂欲得某結果而爲必要之運算方法. 又法則者,謂以通常文語陳述範式,而範式則以代數記號表示法則也.

法度. 〔三〕 英 Grade. 謂一直角百分之一,此法爲法國創定米突法時,欲使一切之數,皆爲十進,故角度亦適用十進法而創定之,然現今不用.

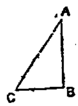
法線. 〔幾〕 英 Normal. 平面曲線某點之法線者,謂於其點而垂直於切線之直線. 故圓之法線,過其中心. 又曲面某點之法線者,謂於其點而垂直於切面之直線. 故球之法線,過其中心. 而平面上一點之垂線,有謂爲其點之法線者.

法噸. 〔算〕 英 Metric ton. 法 Tonneau. 同米突噸,見其條.

法蘭西法. 〔數〕 英 French method. 同百分法,見其條.

法律上之利息. 〔算〕 英 Legal interest. 謂定於民律[第三百三十條]之利息即債權可生利息者,其利率爲週年百分之五分,但法令有特別規定或有特別之意思表示者,不在此限,但商律[百十七條]法定利息爲週年百分之六.

股. 〔幾〕 謂直角三角形其直角傍二邊中之比較的長者. 例如AB是也. 直角三角形ABC,其直角B傍之二邊比較的長者,即AB直立如股,故謂之股. 比較的短者,即BC,其曲如鉤,故謂之句. 而斜邊BC,如弦之張於弓,故謂之弦. 而日本則謂句爲鉤,有鉤股致近集. 而直角三角形,有稱爲鉤股弦者.



股分. 〔算〕 英 Share. 將股分公司之資本金,分爲一定之單位謂之股分. 例如資本金貳拾萬圓之股分公司,其資本之單位,即一股,若爲五拾圓,則此公司之股分爲四千股.

股分有限公司. 〔算〕 英 Joint stock company. 謂集股依法律營利之法人,而其義務爲僅負公司財產之責任者,以七人以上組織之,依商律須向該管官廳註冊.

股東. 〔算〕 英 Shareholder. 謂有股票之人. 其人有爲初出資者,有爲受買股票而得股東之權利者. 但記名股票,若不更名,則不能取得其權利,而股東之權利義務,見公司條例.

股票. 〔算〕 英 Certificate. 股分公司,將其資本金,分爲單位之股分而分配於出資者,證明其出資者之證據,謂之股票. 但股票得合數股爲一張. 而有股票者,有依公司之利益而得分紅息之權利. 政府之公債票[Bond],乃支取一定之利息,與股票不同.

股票中人. 〔算〕 英 Stock broker. 謂立於買賣之間,得一定之中費,而爲買賣股票及公債票之周旋者.

股票交易所. 〔算〕 英 Stock exchange. 謂於一定之場所,及一定之時間,而買賣公債票股票等者.

亞. 〔算〕 英 Are. 美 Ar. 亞爾之省書,見亞爾條.

亞爾. 〔算〕 英 Are. 美 Ar. 米突法中地積之單位,等於百平方米突,等於

我 976.5625 平方尺, 或 0.16276 畝. 一亞爾之百倍, 謂之一海克亞爾[頭], 一亞爾之百分之一, 謂之一生的亞爾[璽].

亞白爾定理. 代 英 Abel's theorem. 謂次之定理.

$(x+a)^n=x^n+A_1a(x+b)^{n-1}+A_2a(a-2b)\times(x+2b)^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_ra(a-rb)^{r-1}\times(x+rb)^{n-r}+\ldots\ldots\ldots+a(a-nb)^{n-1}$;

但 A_r 爲二項式定理之 x^r 之係數. [亞白爾爲那威國之數學者生於西曆 1802 年死於 1829 年] 查理斯密大代數學 [第四版] 259 款例 4 證明次式.

$a^p-n(a-1)^p+{}_nC_2(a-2)^p+\ldots\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)^p=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A).$

但 p 爲小於 n 之正整數. 故 n 以 $n-r$ 代之, a 以 n 代之, p 以 $n-r-1$ 代之, 且以反對之次序書之, 則 $r^{n-r-1}{}_{n-r}C_1(r+1)^{n-r-1}+{}_{n-r}C_2(r+2)^{n-r-1}-{}_{n-r}C_3(r+3)^{n-r-1}+\ldots\ldots+(-1)^{n-r}n^{n-r-1}=0\ldots=\ldots\ldots\ldots(1).$

又(A) 之 n 以 $n-1$ 代之, 其 a 以 n 代之, 其 p 以 $n-2$ 且以反對之次序書之, 則

$$1-(n-1)2^{n-2}+{}_{n-1}C_23^{n-2}-\ldots\ldots+(-1)^{r-1}{}_{n-1}C_rr^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1}n^{n-2}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

故可直得次式.

$$a^n={}_nC_1ab^{n-1}+{}_nC_2a(a-2b)(2b)^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+{}_nC_ra(a-rb)^{r-1}(rb)^{n-r}+\ldots\ldots\ldots+a(a+nb)^{n-1}\ldots\ldots\ldots(B).$$

蓋於此式比較 a^n 之係數, 則 $1=1$. 比較 a^{n-1} 之係數, 則 ${}_nC_{n-1}(\overline{n-1}b)-(n-1)(nb)=0$. 又求 (B) 右邊 a^r 之係數, 則

$${}_nC_r(rb)^{n-r}-{}_nC_{r+1}\cdot{}_rC_1(\overline{r+1}b)(\overline{r+1}b)^{n-r-1}+{}_nC_{r+2}\cdot{}_{n+1}C_2(\overline{r+2}b)^2(\overline{r+2}b)^{n-r-2}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_{n-r}(nb)^{n-r}$$
$$={}_nC_rr^{n-r}-{}_nC_r\frac{n+r}{r+r}\cdot r(r+1)^{n-r}b^{n-r}+{}_nC_r\frac{(n-r)(n-r-1)}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(r+1)r}{1.2}(r+2)^{n-r}b^{n-r}$$
$$+\ldots+(-1)^{n-r}{}_nC_r\frac{r!(n-r)!}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}\times n^{n-r}b_{n-r}=r\cdot{}_nC_rb^{n-r}\{r^{n-r-1}-{}_{n-r-1}C_1\times(r+1)^{n-r-1}+{}_{n-r}C_2(r+2)^{n-r-1}+\ldots\ldots+(-1)^{n-r}n^{n-r-1}\}.$$

將此代入 (1) 式, 而知上式之値爲零, 又取 (B) 式右邊 a 之係數, 則與上之變化行同樣之變化, 而得次式.

$$nb^{n-1}\{1-(n-1)2^{n-2}+{}_{n-1}C_23^{n-2}-\ldots\ldots\ldots+(-1)^{r-1}{}_{n-1}C_rr^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}n^{n-2}\}$$

代入 (2) 式, 而知此式之眞, 故得證明 (B) 式之眞, 則亞白爾定理之眞明矣. 卽

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1a(x+b)^{n-1}+{}_nC_2a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\ldots\ldots+{}_nC_ra(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\ldots\ldots+a(a-nb)^{n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(C).$$

取 (C) 式右邊 x^{n-r} 之係數, 則

$${}_nC_1a_{n-1}C_{r-1}b^{r-1}+{}_nC_2a(a-2b)_{n-2}C_{r-2}(2b)^{r-2}+{}_nC_3a(a-3b)^2{}_{n-3}C_{r-3}(3b)^{r-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}_nC_ra(a-rb)^{r-1}.$$

如前變化 ${}_nC_1\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_nC_2\cdot{}_{n-2}C_{r-2}$, 而爲 ${}_nC_r\{rab^{r-1}+{}_rC_2a(a-2b)(2b)^{r-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a(a-rb)^{r-1}\}$

(B) 式以 n 代 r, 而其式爲 ${}_nC_ra^r$, 又求 (C) 式右邊不含 x 之項, 則得與 (C) 同一之式, 故 (C) 式一般爲眞.

亞剌伯記數法. 算 英 Arabic system of notation. 亞剌伯記數法, 爲現今普通用於算術之記數法. 其法列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 之十個數字, 而記所有之數. 而其位之數字爲表此數字在其右位之十倍且於一位之右, 記小數點, 其定位之法如次.

……十萬千百十一. 分釐毫絲忽……
萬

此記數法,自亞剌伯人傳入歐洲,故有此名,但亞剌伯人,謂得之印度人.

亞剌伯數字. 算 英 Arabic numerals. 謂普通使用之0, 1, 2, ………9之數字.

近數. [連分數的]. 代 英 Convergent. [of the continued fraction] 截取連分數任意階級之分數,謂爲其連分數之近數. 例如連分數 $a+\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}$ ……其初三個近數,爲 $\frac{a}{1}$, $\frac{ab_1+a_1}{b_1}$, $\frac{ab_1b_2+aa_2+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}$.

近世幾何學. 幾 英 Modern Geometry. 謂第十九世紀中卡爾羅 [Carnot-Géométrie de position, 1803年], 布利安生 [Brianchon-Mémoire sur les lignes du second ordre, 1817年], 龐士勒 [Poncelet-Traitédes propriétés projectives des figures, 1822年], 米比斯 [Möbious-Barycentrische calcul, 1827年], 斯太勒爾 [Steiner-Systematische Entwickelung, 1832年], 寫爾 Chasles-Géométrie supèrieure, 1852年], 華施稻弟 [Von Staudt-Geometrie der Lage, 1847年] 及其他諸氏所研究而成之組織幾何學, [Synthetic Geometry] 其中記載之事項,爲非調和比 [An harmonic ratio], 布利安生之定理, 辟瓦之定理, 同軸圓, 完全四邊形, 十字比, [Cross ratio] 迭査爾克 [Desargues] 之定理, 調和列點 Harmonic range] 調和束線, Harmonic pencils] 倒形法 [Inversion], 對合 [Involution], 美利剌斯 [Menelaus] 之定理, 拔司克爾 [Pascal] 之定理, 極及極線, 普佗列米 [Ptolemy] 之定理等.

近似值. 數 英 Approximate value. 謂近於眞值之值,例如欲算出某根數之近似值,則可用開 法而精密求得所希望之程度. 近似值之計算,在實用計算恆用之.

近似法. 算 英 Approximations. 同省略算,見其條.

長方形. 幾 英 Oblong. 同矩形,見其條.

長菱形. 幾 英 Rhomboid. 卽平行四邊形. [Parallelogram]

長徑. 幾 英 Major axis. 謂過橢圓二焦點之直線,而其兩端在曲線上者.

長除法. 算 英 Long division. 長除法對於短除法言之,如次之除法是也. 例如 37562÷7, 及 12345÷23, 前者爲短除法,而後者爲長除法也.

```
7) 37562 (5366        23) 12345 (536
   35                     115
   --                     ---
    25                     84
    21                     69
    --                     ---
     46                    155
     42                    138
     --                    ---
      42                    17
      42
      --
```

長噸. 算 英 Long ton. 美國2240磅之重,謂之一長噸. 此卽英國之一噸,而美國通常之一噸,爲2000磅,而關稅鐵石炭等,用英噸,卽2240之一噸,故美國對於2000磅之一噸,而謂2240磅之噸爲長噸.

弧. 幾 英 Arc. 一般曲線之一部. 在初等幾何學,則謂弧爲圓周之一部. 所謂圓弧也.

弧度. 三 英 Circular measure. 圓周四分之一,謂之象限,一象限九十分之一,謂之度,一度六十分之一謂之分,一分六十分之一,謂之秒,卽如次表

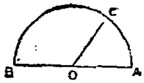
$1^{周}=4^{象限}=360^{度}=21600^{分}=1296000^{秒}$

$1=90=5400=324000$

$1=60=3600$

$1=60$

弧度法. 目 英 Circular method. 於O爲中心之圓,取弧AC,等於半徑OA之長,連結CO,則依幾何學在圓中心之角,比例其所立之弧,故



$$\frac{\hat{AOC}}{2直角}=\frac{半徑}{半圓周}=\frac{徑}{圓周}=\frac{1}{\pi}$$ 故 $\hat{AOC}$

$=\left(2直角之\frac{1}{\pi}\right)=(180°之一定分數)$,

故得以$\hat{AOC}$爲測角之單位.角AOC謂之奈的安.[Radian].以之爲單位而測之測度,謂之弧度.以奈的安爲單位,基於次之二理由,卽(1)凡奈的安相等.(2)以列替安測角,在理論的三角法,能使其範式之簡單,又能使解析的數學之範式之簡單.又1列替安

$=(2直角)x\frac{1}{\pi}=57°.2957......$,

若某角之度數爲D,其弧度之數爲a,

則$\frac{D}{180°}=\frac{a}{\pi}$.由是某角之度數,若以

$\frac{\pi}{180}$乘之,則爲弧度.又弧度以$\frac{180}{\pi}$乘之,則爲度數.

弧三角形. 圖 目 英 Spherical triangle.卽球面三角形,我國之舊名也.見球面三角形條.

周角. 圖 英 Circum-angle. 或 Perigon.見角條.

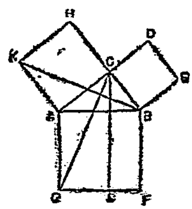
周圍. 圖 英 Perimeter. 或 Contour. 謂幾何學圖形之境界.

周期圓函數. 目 英 Periodic circular function.同回歸圓函數,見其條.[周期或作週期]

周髀. 國 古數書名.以九數句股重差算日月周天行度遠近之數,皆得之於股表,卽推步蓋天之法也.髀者,股也.以表爲股.周天歷度,本包犧氏立法,其傳自周公受之於大夫商高,周人志之,故曰周髀.周髀算經.我國數學書之最古者.

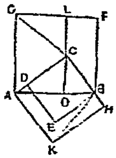
披他哥剌斯表. 圖 英 Pythagoras's table.同乘法表,見其條.

披他哥剌斯定理. 圖 英 Pythagoras's theorem.謂次之定理.卽直三角形斜邊上正方形,等於他二邊上正方形之和.此定理係希臘哲學家披他哥剌斯[西曆紀元前約580年生約510年年死]之發見,或云披他哥剌斯聞之於埃及之僧.此定理有種種之證明法,今示其九個如次.[第一證].此證明法載於普通之幾何學書如次.ABC爲直三角形,C爲直角,於各邊上,畫正方形於三角形之外方,自C平行於AG引CL,連結CG,BK,斯時BC,CH爲同一之直線明矣.而角ABG

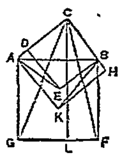


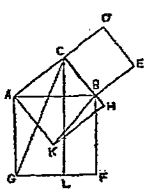
及CAK皆爲直角,故相等,各加角BAC,則角CAG等於角BAK,而AC=AK,AG=AB,故△ACG≡△ABK,但矩形AL=2△ACG,及正方形AH=2△ABK,故矩形AL=正方形AH.同様.矩形BL=正方形BD,又正方形AF等於矩形AL,BL之和.由是正方形AF,等於正方形AH,BD之和.

[註]．本題可將各正方形畫爲各種之方向而證明之． 依各種之方向畫之，凡得八圖，前之證明，卽其一也．次將各正方形皆向內方畫之，過C平行於AG引CL，連結CG，BK，斯時角CAG等於角BAK明矣，且$AC=AK$，$HG=AB$，故$\triangle ACG\equiv\triangle ABK$，但矩形$AL=2\triangle AGC$，及正方形$AH=2\triangle ABK$，故矩形AL＝正方形AH．同樣矩形BL＝正方形BD．由是正方形AF＝矩形AH＋矩形BD．次將二正方形畫於內方．

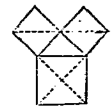


他一正方形畫於外方．如此者，凡三圖．其證明法皆同．自C平行於AG引CL，連結AE，CF，BK，CG，斯時角ABF，CBE，各爲直角，故其和等於二直角，故角CBF，ABE之和等於二直角，卽角ABE爲角CBF之補角，而$BC=BE$，$BF=BA$．由是三角形CBF，ABE，二邊各相等，其夾角互爲補角，故此兩三角形之面積相等，但矩形$BL=2\triangle CBF$及正方形$BD=2\triangle ABE$，故矩形BL＝正方形BD．同樣$\triangle ACG=\triangle ABK$．故矩形AL＝正方形AH．由是正方形AF＝正方形AH＋正方形BD．次將二正方形畫於外方，他一正方形畫於內方，如此者，亦凡三圖．其證明法亦同．自C平行於AG引CL，連結CG，BK，斯時三角形ACG

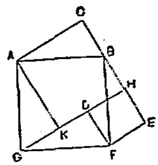




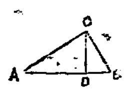
ABK，二邊各相等，且其夾角互爲補角．故此兩三角形之面積相等，因而矩形AL等於正方形AH，又如第一證而知矩形BL等於正方形BD．由是正方形AF，等於正方形AH，BD之和．以上所證八圖盡之矣．又有特別者，卽直角三角形之二邊等者，則更容易，證之如次．卽如圖分之爲同大之二等邊直角三角形，則一望而知矣．



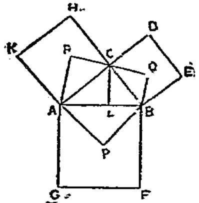
[第二證]．ABC爲直三角形，C爲直角，於AC上，畫正方形ACHK，延引CH，使至於E，使BE等於AC，或等於CH，斯時HE等於BC明矣，故於HE上畫正方形HEFD則此正方形等於BC上之正方形，連結BF，延引HD，使至於G，使DG等於HK，或等於AC，連結AG，FG，斯時三角形ABC，BEF，其$AC=BE$，$CB=EF$，$\hat{C}=\hat{E}=$直角，故此兩三角形全相等．同樣得證明ABC，BEF，DFG，AGK皆互相等．由是四邊形ABFG爲等邊形，而角BAC等於角GAK，故各加角BAK，則角BAG等於CAK，但角CAK爲直角，故角BAG爲直角，由是ABFG爲正方形，且在AB上，但$\triangle AGK=\triangle ABC$，$\triangle DFG=\triangle BEF$，故正方形AF＝圓形$ACEFDK=\square AH+\square DE$，卽AB上之正方形，等於AC，BC上正方形之和．



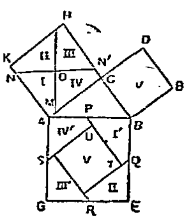
[第三證]．ABC爲直角三角形．自直角頂C向斜邊引垂線CD，斯時三角形ACD，BCD，皆相似於ABC，



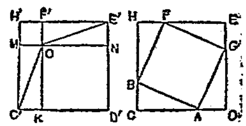
故有次之比例式. AD : AC=AC : AB
∴ AB.AD=$\overline{AC}^2$, 同樣, AB.BD=$\overline{BC}^2$.
由是 AB(AD+BD)=$\overline{AC}^2$+$\overline{BC}^2$, 卽 $\overline{AB}^2$=$\overline{AC}^2$+$\overline{BC}^2$ [第四證]. ABC 爲直三角形, 自直角頂 C, 引垂線 CL, 又引 CQ, 使角 BCQ 等於角 BCL, 自 B 引 CQ 之垂線 BQ, 延引 QC, 自 A 引此線之垂線 AR, 又引 BP, 使角 ABP 等於 ABC, 自 A 引 BP 之垂線 AP, 斯時三角形 BQC, BCL 相等明矣, 而角 ACQ 等於角 DCL, 故其各補角 ACR, 等於角 ACL. 故三角形 ACR 等於三角形 ACL. 又依作圖, 而三角形 ABP 等於三角形 ABC. 由是三角形 ABP, 等於兩三角形 ACR, BCQ 之和. 但是等三角形互相似, 又原三角形各邊上之正方形亦互相似, 而是等三角形, 每一組在同一之邊上, 故在三角形 ABC 各邊上之三角形與正方形之比相等. 由是正方形 AF, 等於正方形 AH 及 BD 之和.



[第五證], 過邊 AC 上正方形 AH 之中心O, 平行於AB 引 ON, 又引 AB 之垂線 MO, 又自 AB 上正方形各邊之中點, 引 AC 之平行線及垂線, 如圖, 斯時 AB N′N 爲平行四邊形, 故 N′N 等於 AB, 因 O 爲 NN′ 之中點, 而P爲 AB 之中點, 故 NO=PB 及 MO=NO=BQ, 而四邊形 I 及I′ 爲等角明矣, 故此兩形相等. 同樣可證四邊形 II, III, IV, 各等於四邊形 II,′III,′IV′, 且互相等. 次因 PT=AN=BN′ 及 PU=CN′, 故 TU=BC, 而四邊 V′ 爲正方形明矣. 故正方形 V 等於正方形 V′, 由是正方形 AF, 等於正方形 AH+BD.

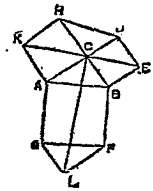


[第六證]. 取等於所設直角三角形直角傍二邊和之長 CD 及 C′D′, 於其上畫正方形 CE 及 C′E′, 於正方形 CE 之各邊上, 取等於所設直角三角形直角傍一邊之長 CA, DG, EF, HB, 連結 AG, GF, FB, BA, 則各等於直角三角形之斜邊, 因而 ABFG 等於斜邊上之正方形明矣. 而四三角形 BCA, ADG, GEF, FHD, 亦互相等明矣. 次於正方形 C′E′ 相鄰二邊 C′H′, H′E′ 之上, 取等於 CA 之 E′F′, C′M, 自 F′ 及 M 平行於邊引 F′K 及 MN, 其交點爲 O, 連結 OE′, OC′, 斯時四三角形 MOC′, C′OK, E′F′O, E′NO 互相等, 且各等於正方形 CE 內之各三角形明矣. 由是正方形 AF 之面積, 等於兩四邊形 OD′ 及 OH′ 之和. 但此兩四邊形皆爲正方形, 而其邊依作圖, 等於所設直角三角形直角傍之二邊. 由是直角三角形斜邊上正方形 AF, 等於他二邊上正方形 OD′, OH′ 之和.

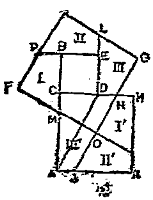


[第七證]. 於直角三角形 ABC 之各邊上, 畫正方形 AF, AH, BD, 又於 GF 上, 畫等於 ABC 之三角形 GFL, 使邊 GL= BC, 邊 FL=AC,

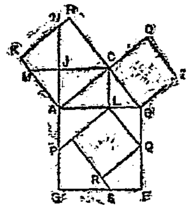
連結HD, CL, KC, CE, 斯時 KC, CE 各二等分在 C 之對頂角, 故 KCE 爲同一之直線, 而三角形 CDH 及 ABC 其二邊及夾角相等, 故此兩形全相等.



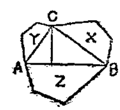
而四邊形 ABEK 及 CBFL 其邊 AB=邊BF, 邊BE=邊BC, 邊AK=邊FL, 及 $A\hat{B}E=C\hat{B}F$, $B\hat{A}K=B\hat{F}L$, 故此兩形相等. 同樣四邊形 EDHK 及 ACLG 相等. 故圖形 ABEDHK, 等於 ACBFLG, 而三角形 ABC 爲此兩形中所共有, 又三角形 HCD, 等於三角形 GFL, 故正方形 AF 等於正方形 AH 及 BD 之和. [第八證] 將所設直角三角形直角傍二邊上正方形 AH 及 BD, 使其一邊相合而置之, 命正方形 AP 之中心爲 O, AB, DH 之中點爲 M,N, 連結 MO, NO, 兩邊延引之, 又延引 DE, EB, 使 EL, BP, 等於 DN. 或等於 NH, 過 L 及 P 各向 ON 及 OM 之延線引垂線. 斯時正方形 AH 內所生之四個四邊形互相等明矣. 而四邊形 I 及 III' 相似, 且 BM=AM, BP=NH=AJ, 故此兩形相等.



同樣四邊形 II 及 III 亦等於 III', 且互相等. 由是四邊形 FG 爲正方形, 而其面積等於兩正方形 AH, BD 之和. 但連結 AD 則 GO=NJ=DA, 故正方形 FG 等於所設直角三角形斜邊上之正方形. 故直角三角形斜邊上正方形 FG, 等於他二邊上正方形 AH, BD 之和. [第九證]. ABC 爲直角三角形, 於其各邊上, 畫正方形, 延引 GA, 使至於 N, 自 C 垂直及平行於 AB 引 CL, CM, 自 L 平行於 CA 及 CB 引 LP, LQ, 乃於 LQ 上畫正方形 LR, 引長其一邊使至於 S.



斯時依作圖知 $\Delta ACJ=\Delta ACL=\Delta APL$, $\Delta AMJ=\Delta BCL=\Delta BLQ$ 及 $\Delta ACM=\Delta AKN$, 故正方形 LR 等於正方形 BD, 而 BF=AB=MC=AN, 及 BQ=AJ, 故 QF=JN, 又 QR=LQ=AM=KN, 故兩四邊形 QRSF 及 KMJN, 其二邊相等, 且各角相等, 故此兩形相等. 又兩四邊形 PS 及 JH 亦明相等, 由是正方形 AF, 等於正方形 AH, 及 BD 之和. [披他哥剌斯定理之擴張]. ABC 爲直角三角形, X, Y, Z, 爲相似直線形, 以相似之位置, 置於角 A, B, C, 相對之邊上, 斯時相似形, 與其對應邊上之正方形成比例,



故 $X:Y=\overline{CB}^2:\overline{AC}^2$, 故 $X+Y:Y=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2:\overline{AC}^2$, 但 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$, 且 $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=Z:Y$, 故 $X+Y=Z$. 卽直角三角形相當邊, 畫相似形於相似之位置, 則斜邊上之形, 等於他二邊上之形之和. 又以各邊爲徑畫半圓, 此定理亦眞, 須知之. 披他哥剌斯之定理, 其應用極廣. 三數 3, 4, 5, 因有 $5^2=3^2+4^2$ 之關係, 故若作三邊爲 3, 4, 5,

寸之三角形,則對於5寸之邊之角爲直角. 又自直角向斜邊所引之高,分斜邊之二分,可自 $5a_1=3^2$ 及 $5b_1=4^2$ 求得之,卽 $a_1=\frac{9}{5}$ 及 $b_1=\frac{16}{5}$,而其高 p,可自 $p^2=\frac{9}{5}\cdot\frac{16}{5}$ 求得之,卽 $p=\frac{12}{5}$.

[問題] 直角三角形之三邊,求以整數表之. 此問題爲求適當於方程式 $x^2=y^2+z^2$ 之 x, y, z. 將 m 及 n 爲二數,則因 $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$, 而問題之答爲以 m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$ 表之之數. 次表爲計算如此之數,而輯錄之者也.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5 3 4	10 6 8	17 8 15	26 10 24	37 12 35	50 14 48	65 16 63	82 18 80
2		13 12 5	20 16 12	29 20 21	40 24 32	53 28 45	68 32 60	85 36 77
3			25 24 7	34 30 16	45 36 27	58 42 40	73 48 55	90 54 72
4				41 9 40	52 48 20	65 56 33	80 64 48	97 72 65
5					61 60 11	74 70 24	89 80 39	100 90 66

的利安問題. 代 英 Delian problem. 於已知二正數之間,插入二個比例中項,謂之的利安問題. 卽如 $a:b=b:c=c:d=1/\rho$, 則 $b=\rho a$, $c=\rho^2 a$, $d=\rho^3 a$. 而 $d/a=\rho^3$, $\therefore \rho=\sqrt[3]{(d/a)}$, $b=a\rho=a\sqrt[3]{(d/a)}=\sqrt[3]{(a^2d)}$. $c=a\rho^2=a\{\sqrt[3]{(d/a)}\}=\sqrt[3]{(ad^2)}$.

的特密南. 代 英 Determinant 卽行列式,見其條.

的反他斯之解法. 代 英 Diophantine solution. 一次方程式其解答之不定者,可加以限制*而解之,最普通者求屬於 x, y 之值俱爲整數. 特別者求其爲正整數. 如此之解答,謂之的反他斯之解法.‡ 例如若取方程式 $3x+2y=5$ 且求 x, y 之解答俱爲正整數,則此方程式惟有一解答,卽 $x=1$, $y=1$,一見而知也. 蓋若將此方程式書爲與此等値之形 $2y=5-3x$, 則易知大於1之 x 之整數値,則 y 不能爲正矣. 又若 $x=0$, 則 $y=5/2$, 卽非整數. 故定 $x=1$ 而 $y=1$ 爲所求惟一之解答. *讀者於限制與要件之意,須知其有區別. 謂求已知圓周上之一點,則爲其點之要件. 又謂點須在已知圓內,則爲限制. ‡此解法起於希臘數學家的反他斯氏,其所著書,多集此種問題. [的反他斯有謂爲西曆第一世紀之人,或謂爲第二世紀之人,且有謂爲第四世紀之人者,未知孰是.]

底. 算 代 幾 英 Base. 平面形之底,謂多角形立於其上之一邊. 在二等邊三角形,則謂二等邊之外之一邊. 多角形之底,又稱底邊. 圓錐角錐之底,謂對於其頂點之面. 圓壔之底,謂其平行之二平面. 記數之底,謂如十進法滿其數則進位之數. 對數之底,見對數條.

底角. 幾 英 Base angle. 謂鄰於底邊之角.

底邊. 幾 英 Base side. 見底之條.

阿爾. 算 英 Are. 卽亞爾,見其條.

阿白兒定理. 代 英 Abel's theorem. 卽亞白爾定理,見其條.

果修四邊形. 幾 英 Gauche quadrilateral. 謂四邊形之諸邊,不在同一之平面上者.

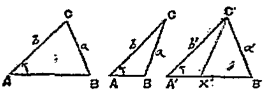
果修多角形. 幾 英 Gauche polygon. 謂多角形之諸邊,不在同一之平面上者.

兩合公司. 國 英 Limited partnership. 以無限責任股東與有限責任股東,組織之公司. 依商律之規定,於該管官廳註冊者.

兩脚規. 國 英 Compasses. 即孔把斯,見其條.

兩意. 國 日 英 Ambiguous case.

[幾何學] 二三角形 $a=a'$, $b=b'$, $\hat{A}=\hat{A}'$, 則 $\hat{B}=\hat{B}'$, 或 $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$. [證] 將 $\triangle ABC$ 重於 $\triangle A'B'C'$ 之上,使 A 在 A′ 上, b 與 b' 合,使 B 及 B′, 在 b 之同傍,則因 $\hat{A}=\hat{A}'$, 故 AB 必重合於 A′B′, 斯時 B 或落於



B′ 之上(1), 或落於 AB 上某點 X 之上(2), 若為(1), 則兩形全重合而 $\hat{B}=\hat{B}'$, 若爲(2), 則因 $C'X=a=a'$, 故 $\hat{B}=C'\hat{X}B'$, 但 $C'\hat{X}A'+C'\hat{X}B'=2\hat{R}$. 故 $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}'$ 本定理 I. $a>b$, 則兩形全等. II. $a=b$, 則兩形全等. III. $a<b$, 則兩形爲兩意. IV. $\hat{B}=\hat{R}$, 則兩形全等. V. $\hat{A}=\hat{R}$ 或 $\hat{A}>\hat{R}$ 則兩形全等.

[三角法] 自 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$, 可求得 $\sin B$, 如此求 $\sin B$, 若 $\frac{b}{a}\sin A<1$, 則可得 B 之二值,其二值皆小於 180°, 而一爲銳角,一爲鈍角. 茲推得三者如次. (1) $b\sin A>a$, 則 $\sin B>1$, 而三角形不成立. (2) $b\sin A=a$, 則 $\sin B=1$, 而適於此之 B 之值惟 90°, 故適於題意之三角形,惟有一個,此即前幾何學之 IV. (3) $b\sin A<a$, 則 $\sin B<1$, 而 B 有二值,一爲銳角,一爲鈍角. (A) 若 $b<a$ 則 $B<A$, 故 B 爲銳角,故適於題意之三角,惟有一個,此即同於前幾何學之 I. (B) 若 $b=a$, 則 $B=A$, 而適於題意之三角形,惟有一個,此即同於前幾何學之 II. (C) 若 $b>a$, 則 B 不必爲鈍角,故 B 之二值,俱合於題意. 故適於題意之三角形有二個,此即同於前幾何學之 III.

初等代數學. 國 英 Elementary Algebra. 謂自代數學之始,至正整數之二項例止. 然初等乃對於高等言之,而究非劃然分界者也.

初等幾何學. 國 英 Elementary Geometry. 見幾何學條. 初等代數學,在代數學中,對於高等無劃然之分界,不過謂代數學之初步而已. 然初等幾何學,在幾何學中,對於高等,則有劃然之分界者也.

命題. 國 英 Proposition. 命題者謂一事項之陳述也. 例如[甲爲乙]爲一命題. 而其可證明之事項之陳述,謂之定理. 其可解答之事項之陳述謂之問題,或作圖題等.

命數法. 國 英 Numeration. 謂立規則而立讀數之方法. 現行者爲十進之命數法. 在代數學用任意之底而表數之方法,則有用 System of numeration. 之英語者.

金法. 國 英 Golden rule. 爲比例之別名. 古來比例,其用極廣,故有斯名.

金衡. 國 英 Troy weight. 在英美國衡金銀等所用之重量,其單位如次.

24 克冷 =1 本尼懷脫,

20 本尼懷脫 =1 溫司,

12 溫司 =1 磅,

1克冷$=0^{\text{瓦}}.0648=0^{\text{錢}}.0176364$(約),
1溫司$=31^{\text{瓦}}.10=8^{\text{錢}}.2748$(約),
1磅$=0^{\text{瓩}}.3732=11^{\text{兩}}.01$(約).

所當作者[略語Q.E.F.]. 國 拉 Quod Erat Faciendun. 英 Which was to be done. 古來證明幾何作圖以後所記之文句. 我國不用之,下條同.

所當證明者[略語Q.E.D.]. 國 拉 Quod Erat Demonstrandum. 英 Which was to be demonstrated. 古來幾何學證明定理以後所記之文句.

和. 算 代 英 Sum. 二個或二個以上之數之和. 在算術,爲各數所含單位之總數,故和大於其部分. 在代數學,則和不必爲增加,蓋其中正量負量之和. 有小於其任意部分之一者. 又有爲0者. 故此和謂之代數和,與算術和區別之.

和較法. 算 英 Alligation Alternate. 見混合法條.

取銀人. 算 英 Payee. 期票匯票支票等取銀之人.

取引所. 算 英 Exchange. 交易所,日本謂之取引所,見交易所條.

取引所仲買人. 算 英 Exchange Broker. 日本數辭,同於我國交易所經紀,參看交易所及經紀條.

非素數. 算 代 英 Composite number. 謂非素數之數,即能以大於1之某整數整除之整數. 例如12,15,27,等. 次表集百以下非素數之素因數. [但百以下之素數亦在內,而以重字區別之.] 用此表先求已知數之十位數字於左行,次求其數之一位數字於上列,取行列相當之處,則爲分解其數爲素因數者. 例如欲將63分解爲素因數,則先覩左行之6列,當於上列之3之處,即得$3^2.7$. 此表可發見次之諸件. (1). 11之各倍數,在表之左上至右下之對角線中. (2). 3^2在表之他對角線中,而平行於此對角線,每隔二數之線,皆含3. (3). 5與2各行中之各列,皆各含5與2,而0行之各列,皆含2與5. 求某非素數之約數之法如次,例如求60即$2^2\times3\times5$之一切因數,先於第一列書1,2,2^2,於第二列書3,於第3列書5,又再置第一列之數. 次以第二列之數乘第一列之各數,以其積置爲新第二列,將舊第三列乘新第一新第二列之數,置爲新第三新第四列,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	2^2	5	2.3	7	2^3	3^2
1	2.5	11	$2^2.3$	13	2.7	3.5	2^4	17	2.3^2	19
2	$2^2.5$	3.7	2.11	23	$2^3.3$	5^2	2.13	3^3	$2^2.7$	29
3	2.3.5	31	2^5	3.11	2.17	5.7	$2^2.3^2$	37	2.19	3.13
4	$2^3.5$	41	2.3.7	43	$2^2.11$	$3^2.5$	2.23	47	$2^4.3$	7^2
5	2.5^2	3.17	$2^2.13$	53	2.3^3	5.11	$2^3.7$	3.19	2.29	59
6	$2^2.3.5$	61	2.31	$3^2.7$	2^6	5.13	2.3.11	67	$2^2.17$	3.23
7	2.5.7	71	$2^3.3^2$	73	2.37	3.5^2	$2^2.19$	7.11	2.3.13	79
8	$2^4.5$	3^4	2.41	83	$2^2.3.7$	5.17	2.43	3.29	$2^3.11$	89
9	$2.3^2.5$	7.13	$2^2.23$	3.31	2.47	5.19	$2^5.3$	97	2.7^2	$3^2.11$

則得一切之約數. 而60之素因數2,3,5之指數爲2,1,1[即$2^2\times3^1\times5^1$之指數]其各增1之連乘積,即$3\times2\times2$爲60之約數之總數. 但其中有1及60之約數,

1	2	2^2
3		
5		
1,	2,	2^2,
3,	2×3,	$2^2\times3$,
5,	2×5,	$2^2\times5$,
3×5,	$2\times3\times5$,	$2^2\times3\times5$,

故某數約數之數[1及其本數常省之]自各素因數指數增1之連乘積減2即得.

函數. 國 英 Function. 有一數與他數,不變化前數,則不能使後數之變化. 如是者,則前數爲後數之函數. 例如方程式$y^2=r^2-x^2$,則y爲x之函數,而x爲y之函數. y爲x之函數,通例以$y=f(x)$表之. x爲y之函數,以$x=f'(y)$表之. 又x,y有如此相互之關係,則以$\phi(x,y)=0$表之. 又一數爲二數或多數之函數者,謂不變化前數,則不能使後之一數或多數之變化. 例如$y^2=2x+3z+b$之方程式,則y爲x及z之函數,z爲x及y之函數,x爲y及z之函數. 而如次記之

$$y=f(x,z),\qquad z=f'(x,y),$$

$$x=f''(y,z),\quad 或\quad \phi(x,y,z)=0.$$

表函數之記號概用f. 但不足時,有用希臘字母ϕ,ψ,π者. 謂y爲x之函數,則x謂之自變數. 若謂y爲x及z之函數,則x及z爲自變數. 函數亦稱因變數. [函數之大別], 爲代數函數及超越函數, 代數函數者,謂其自變數與函數之關係,得以代數學六個通常之運算[即加減乘除常數指數之冪及根]表之者,超越函數者,謂不能以代數學通常之運算表之者. 例如$y^2=4ax$, $y^2=2px+\sqrt{yz}$等,爲代數函數,而$y=a^x$, $y=\sin^{-1}x$等,爲超越函數. 超越函數,又有數種, 對數函數,用對數表之,例如$y=\log x$. 指數函數,其指數爲變數者. 例如$y=a^x$. 圓函數或三角函數,用正弦餘弦正切表之. 例如$y=\sin x$, $u=\cos z$, $z=\tan^{-1}x$等. 又函數有陰陽之別. 陽函數如$y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sin z$等. 謂自變數與函數之關係,能明白表之者. 陰函數如$y^2+2xy+x^2+b=0$, $x\sin y=2a\cos y$等. 謂自變數與因變數相混淆者. 又函數有正[直接]與逆之別. 例如$y=a^x$, 及$x=\log_a y$, 前者爲正函數, 後者爲逆函數. 又如$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$等, 爲正函數. 而$x=\sin^{-1}y$, $x=\cos^{-1}y$, $x=\tan^{-1}y$等,爲逆函數. 茲列舉常用之初步函數如次.

代數函數

$$第一對\begin{cases} u=f(x)+f'(x), & 和. \\ f(x)=f'(x)-u, & 差. \end{cases}$$

$$第二對\begin{cases} u=f(x)\times f'(x), & 積. \\ f(x)=\dfrac{u}{f'(x)}, & 商. \end{cases}$$

但$f(x)$, $f'(x)$爲x之代數函數.

$$第三對\begin{cases} u=x^m, & 冪. \\ x=\sqrt[m]{u}, & 根. \end{cases}$$

超越函數

$$第四對\begin{cases} u=a^x, & 指數. \\ x=\log_a u, & 對數. \end{cases}$$

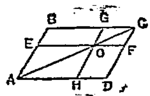
$$第五對\begin{cases} u=\sin x, & 正. \\ x=\sin^{-1}u, & 逆. \end{cases}$$

並行的對稱. 代 英 Symmetry collateral. 對稱式就其二組以上之數,有謂之並行的對稱者. 例如函數$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$, 就$\begin{pmatrix} x,y,z \\ a,b,c \end{pmatrix}$二組之數,而爲並行的對稱. 蓋若交換$x$, y, z,任意之二個,且同時交換其b, c,與之相對之二個,而函數之值不變故也. 細言之,則a, b, c, x, y, z,毫無相互之關係,而函數之新值能變形爲舊值故也. 同樣$a+x^2+by^2+cz^2+dyz+lzx+fxy$. 就$\begin{pmatrix} x,y,z \\ a,b,c \\ d,e,f \end{pmatrix}$而爲對稱,

奇數. 算 英 Odd number 謂不能以2除之整數. 即1, 3, 5, 7, 9, 11, 13......... 自1連續奇數n個之和爲n^2.

空間. 幾 英 Space 試觀吾人之周傍,能容吾人之場所,果有界限乎,則茫茫無涯際,達於日月星辰,猶不知其所終極,晴夜仰視蒼空,則見多數星辰之碁布散列,然若用望遠鏡,則更能發見多數之星辰,若更用强大之望遠鏡,則尚能發見無數之星辰,蒼空之渺茫無窮,不可推歎哉. 故空間雖不能下精密之定義,然可謂於一切無限大之方向而含一切物體之處也. 換言之,空間者,爲所有之場所,而以數學的言之,則空間爲無限大也. 又物體皆占空間之一部,故幾何學可謂爲論空間之學科也. 空間有限之一部爲立體,立體有長有廣有厚有位置,立體與其周傍空間之界爲面,故面有長有廣有位置而無厚,面之四方亦爲無限大,若論面之一部,則其周圍爲線,故線有長有位置而無廣與厚,線之兩方亦爲無限長,若論線之一部,則其兩端爲點,故點惟有位置,而無長廣厚.

沿對角線之平行四邊形. 幾 英 Parallelograms about the diagonal. 謂平行四邊形ABCD之對角線AC上,取任意之一點O,過O平行於各邊引二直線EOF, GOH, 所生之平行四邊形AEOH, CFOG.



昇方. 代 英 Ascending Powers. 某文字列爲昇方之次序之式. 謂自文字低指數項,次第列至高指數項之式. 例如$30-x+18x^2-x^3$,爲x昇方次序之式. 而$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$自a言之爲昇方次序之式,自x言之,爲降方次序之式. [降方條]

昇冪. 代 英 Ascending powers. 同昇方,見其條.

弦. 幾 英 Chord. Hypotenuse. 圓之弦Chord者,謂夾於圓周間之直線. 又直角三角形之弦Hypotenuse者,謂對於直角之邊或謂之斜邊.

東經. 算 英 East meridian. 見西經條.

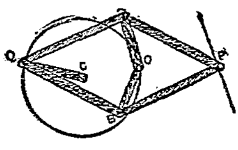
例題. 幾 英 Example. 以一般原理應用之命題,謂之例題. 多爲說明定則之性質及其應用而設者也.

性質之符號. 代 英 Sign of affection. 用符號＋及－,區別量之正負,謂之性質之符號.

附條件的不等式. 代 英 Conditional inequality. 附條件的不等式者,謂其中未知數之值,在某界限之間,而其不等式成立也. 例如$(x-1)(x-2)<0$, 其x之值在1與2之間,而其不等式成立. 又如$x+1>0$, 其x之值大於-1,而其

不等式成立. 是即附條件的不等式也. 解附條件的不等式者,爲求適當於不等式之未知數之界限.

林克志. 幾 英 Linkage. 如圖,爲引直線之器械. 自此器械構造之對稱,而P, O, Q,恆在同一之直線上. 設AB截此直線於N,則在N之角



爲直角. 又N爲菱形對角線之中點,故 $QO\cdot PO=(QN+NO)(QN-NO)=\overline{QN}^2-\overline{NO}^2=\overline{QA}^2-\overline{AO}^2=$常數. 故P, Q互爲倒點,而Q在過倒轉之中心O之圓周上,故P運動於一直線上.

瓩. 算 法 Kilogramme. 爲啓羅格蘭姆之省書,當於格蘭姆之千倍.

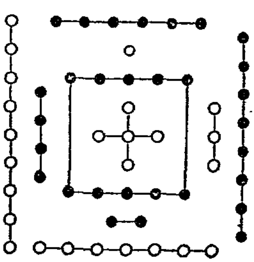
竏. 算 法 Kilolitre. 爲啓羅立突之省書,當於立突之千倍.

券面高. 算 英 Parvalue 日本數辭,同票面數,見其條.

受取人. 算 英 Payee. 謂受取銀錢之人,或曰取銀人,見其條.

承諾兌付人. 算 英 Acceptor. 謂兌票之人.

河圖. 數 古數辭. 河出圖,洛出書,八卦是生,九疇是敘,數學於是肇焉. 河圖如右圖,洛書見洛書條. 又槐西雜志云,世傳河圖洛書出

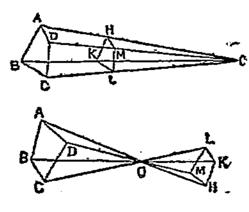


自北宋,唐以前所未見也. 河圖作黑白圈五十五,洛書作黑白圈四十五. 考孔安國論語註,稱河圖即八卦. [孔安國論語註. 今已不傳. 此條乃何晏論語集解所引.] 是孔氏之門,本無此五十五點之圖. 至洛書既謂之書. 當有文字,乃亦四十五圈,與河圖相同,是宜稱洛圖,不得稱書,繫辭又何以別之曰書乎. 劉向劉歆班固,並稱洛書有文. 孔穎達尚書正義,併詳載其字數. 余謂河圖絕無意義. 洛書乃今之方陣. 殆古人偶得此列法,恐其不傳,託之洛書, 復排列一至十之各數,稱爲河圖以配之. 猶之李氏九容之術,必託之洞淵老人也.

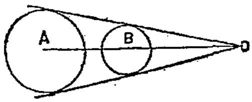
九畫

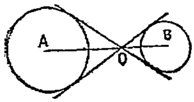
相似形. 幾 英 Similar figures. 謂等角形而其邊成比例者. 但對應邊須爲比例之相當項. 相似形之比,等於其對應邊或對應線之二乘比.

相似之中心. 幾 英 Centre of similitude. 或 Centre of similarity. 二相似形之對應邊,各平行置之,連結其對應角頂之諸直線,其交點謂相似之中心. 例如二相似形ABCD, HKLM,其相似之中心爲O,但O在兩形之外方,即同方者,謂之相似之外心. O在兩形之內方,即兩形之間者,謂之相似之內心. 圓可視爲相似形. 故二圓外公切線



之交點,爲相似之外心. 而內公切線之交點,爲相似之內心. 而二圓相似中心,在其中心線AB或其延線上.





相似分之. 幾 英 To divide similarly. 同分爲相似,見其條.

相似置之. 幾 英 Similarly situated. 已知若干直線,爲相似形之對應邊,則是等相似形,謂於已知直線上,相似置之.

相似根數. 代 英 Similar surds. 或 Like surds. 謂無理數之部分相同之根數. 例如 $2\sqrt{3}$ 及 $5\sqrt{3}$, 又如 $m\sqrt{ab}$. 及 $n\sqrt{ab}$.

相加. 算 英 To add each other. 甲數與乙數相加者,謂加甲數於乙數,或加乙數於甲數也.

相加平均. 算 代 英 Arithmetic mean. 見平均數條.

相乘平均. 算 代 英 Geometric mean. 見平均數條.

指數. 算 代 英 Exponent. 或 Index. 指數者元來爲表以某數爲因數而取若干次之積,於其數之右肩,記小數字,謂之指數. 例如 3^5 爲 $3\times3\times3\times3\times3$ 之意,而5爲指數. 又 a^4 爲 $aaaa$ 之意,而4爲指數. 一般 a^n 爲表 a 因數之 n 次之積,而 n 爲指數. 但此元來爲正整數,擴充之而 n 無論負數分數, a^n 皆爲有意義之量,謂 n 爲其指數. 例如 a^{-2} 而 -2 爲指數,而 a^{-2} 等於 $\frac{1}{a^2}$, 一般 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. 又 $a^{\frac{1}{3}}$ 而 $\frac{1}{3}$ 爲指數,而 $a^{\frac{1}{3}}$ 等於 $\sqrt[3]{a}$, 一般 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$. 又 $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$. 但如 $\sqrt[n]{a}$ 記之,則 n 謂之根指數.

指數方程式. 代 英 Exponential equation. 謂方程式之項,含未知數之指數者. 例如 $a^x=b$, $3^{2x}+5\times3^x-1=0$. 指數方程式,最簡單之形爲 $a^x=b$. 解之之法有二,一用連分數,一用對數. I. 以連分數解之者. $2^x=6$.........(1). 依視察而 $2<x<3$. 斯時 $x=2+\frac{1}{x'}$, 將此代入(1)式,則 $2^{2+\frac{1}{x'}}=6$, 卽 $2^2 2^{\frac{1}{x'}}=6$. 故 $2^{\frac{1}{x'}}=\frac{3}{2}$, 卽 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'}=2$.........(2).

依視察而 $1<x'<2$, 故 $x'=1+\frac{1}{x''}$, 將此代入(2)式,則 $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x''}}=2$. 故變化之,而得 $\left(\frac{4}{3}\right)^{x''}=\frac{3}{2}$......(3). 依視察而 $1<x''<2$, 故 $x''=1+\frac{1}{x'''}$, 代入(3),且變化之,而得 $\left(\frac{9}{8}\right)^{x'''}=\frac{4}{3}$ ......(4). 依視察而 $2<x'''<3$, 故 $x'''=2+\frac{1}{x^{\mathrm{IV}}}$, 如前推求,又發見 $2<x^{\mathrm{IV}}<3$. 餘倣此. 乃將是等之值,代入前之方程式,則

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots\cdots\cdots}}}}$$

此值分數部之第一近似值爲 $\frac{1}{1}$, 第二近似值爲爲 $\frac{1}{2}$, 第三近似值爲 $\frac{3}{5}$, 第四近似值爲 $\frac{7}{12}$, 與眞值之差少於

$\frac{1}{144}$，故x之值爲$2\frac{7}{12}$，與眞值之差，少於$\frac{1}{144}$，他例可同樣解之. II. 以對數解之者. 取前例 $2^x=6$……(1). 取兩邊之對數，則$x\log2=\log6$，

故 $x=\frac{\log6}{\log2}=\frac{0.778151}{0.301030}=2.584.$

又取一例如次，已知$\log2=0.30103$及$\log3=0.47712$，而解$5^{x+1}=3^{x^2-1}$，取兩邊之對數，則$(x+1)\log5=(x^2-1)\log3$，即$(x+1)(1-\log2)=(x^2-1)\log3$.

代入$\log2$及$\log3$之值，而$0.69897(x+1)=0.47712(x^2-1)$，即 $0.47712x^2-0.69897x=1.17609$. 即解此二次方程式，可求得$x$之值. 又用對數之便利，在解複雜之方程式. 即如欲解$(a)^{b^x}=c$，若$b^x=y$，則$a^y=c$. 故如前，

而$y=\frac{\log c}{\log a}$，又$x=\frac{\log y}{\log b}$，將前式代入後式，而$x=\frac{\log\left(\frac{\log c}{\log a}\right)}{\log b}$.

指數定則. 代 英 Index law. 指數定則，謂$a^ma^n=a^{m+n}$，但m及n不論爲正數負數整數分數.

指數級數. 代 英 Exponential series. 謂指數函數之展開如次.

$$a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^3x^3}{3!}+\cdots+\frac{k^nx^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots$$

其k等於a之訥伯爾對數，故$a=l$，則如次，

$$l^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots$$

指數式定理. 代 英 Exponential theorem. 謂l^x之展開式，見指數級數條.

指標. 代 英 Characteristic. 見對數條.

省略算. 算 英 Approximation. 實際上某名數之計算，求至小角第三位以下者甚少，雖最精密之計算，亦罕有超過小數第六位者，換言之，實際上名數之大，知其千分之一足矣. 例如銀錢之計算，恆至厘位止. 郵便局之重量，至格蘭姆止. 我衣尺碼至分位止. 此實際上之計算之最精密者也. 即學術上任意名數之計算，其得精密求至小於其百萬分之一[小數第六位]之數者甚罕. 關於時間，喬治兀立[Sir George Airy]謂以其器械，能算至八百六十四萬分之一. 關於重量，克剌克馬克斯惠羅[Prof. Clerk maxwell]考究能求至五百萬分之一. 長之測算極困難，雖極精密之測算，亦不過約至六萬分之一. 故在實算，欲其絕對的精密，爲不可能之事，然在實用上算至多位，不僅毫無差異，且徒增煩雜耳. 故有省略算之必要焉. 省略算者，於加減乘除開平開立求至適用之程度，而省略無用之計算也. [省略加法]二個以上之小數之加法，欲精密求其和至小數若干位. 則將欲加之數，如常列之. 行加法至所求之小數位. 而所求小數位以下之數之和，當進上者進上之，則加法之運算成矣. 設如所求之小數位爲釐位，其切棄之數，必小於毫位之一行皆爲9者，而毫位之9與釐位加1同，故加數有n個，則毫位以下之數之和，必小於n，故切棄之數最多爲$n-1$. 又切棄之數最少爲0. 故切棄之數之和，當進於上位者，在0與$n-1$之間. 故取所求小數位之次行加$n-1$於其和，視其與不加時而其

當進於上位之數無變動,則行加法至次行,可無差誤. 若有變動,則取次之二行或三行,必至加$n-1$於其和,與不加時其當進於所求小數位末位之數無變動,則切棄其餘可也. [注意]實際恆取至所求小數位以下二行,則大概無差誤矣. [例1] $129.3\dot{5}7\dot{1}$, $22.\dot{4}\dot{2}$ 及 $109.45\dot{2}1\dot{1}$ 求精密加至小數第七位. 其$n-1=2$而當切棄之數字之第一行,即引縱線之右之第一行,其和為8, 而 $8+2=10$ 是當進於小數第七位之數有變動,由是取縱線之次二行其和為93, 而 $93+2=95$, 即當進於小數第七位之小數無變動. 故所求之和為 261.2335116.

129.3571571	57
22.4242424	24
109.4521121	12
261.2335116	93

[例2] $0.\dot{3}$, $2.3\dot{4}\dot{5}$ 及 $0.0\dot{4}3\dot{2}$ 求至小數第五位其 $n-1=2$, 加之於小數第六位之行之和,而當進於小數第五位之數無變動. 故於縱線之右惟取一行可也. 故所求之和為 2.72203.

0.33333	3
2.34545	4
0.04324	3
2.72203	0

[例3] $0.\dot{3}2\dot{1}$, $0.45\dot{6}7\dot{8}$, $7.\dot{3}\dot{2}$ 及 $5.6\dot{2}$ 求加至小數第三位. 其 $n-1=3$ 加 3 於小數第四位之行,而當進於第三位之數無變動,故所求之和為 13.723.

0.321	3
0.456	7
7.323	2
5.622	2
13.723	4

[省略減法] 二小數欲精密求至某位. 列如釐位,則當研究其次位即毫位. (1). 毫位被減數之數字,大於減數之數字,則切棄釐位以下,而行減法. (2). 毫位被減數之數字,小於減數之數字,則加1於減數之釐位,切棄二數釐位以下而行減法. (3). 毫位被減數之數字,等於減數之數字,則依(1)與(2)而行之於絲位,以下類推. [例1]精密求 $314.2\dot{9}0\dot{5}$ 與 $180.41\dot{6}\dot{2}$ 之差至小數第七位. 其第八位小數被減數之數字,大於減數之數字,故依(1)求之.

314.2905905	9
180.4162626	2
133.8743279	

[例2] 自 $0.98958\dot{3}$ 減 $0.291\dot{6}$ 求至小數第五位. 其小數第六位,被減數小於減數. 故依(2)求之.

0.98958	3
0.29166	6
0.69791	

[例3] 自 $6.4\dot{5}$ 減 0.345. 精密求其差至小數第二位,此被減數及減數之小數第三位之數字相同,故觀其第四位數而依於(1)行之. [省略乘法] 省略乘法以次例明之. 4.2567 及 4.2567 之積,求至小數第三位. A 及 B 為不省略之運算,而A為通常之乘法,自乘數右端之數字始者. B 為自乘數左端之數字始者.

A
```
   4.2567
   4.2567
------------
     29|7969
    255|402
   2128|35
   8513|4
 17 0268|
------------
 18.1194|9489
```

B
```
 4.2567
 4.2567
------------
 17.0268|
    8513|4
    2128|35
     255|402
      29|7969
------------
 18.1194|9489
```

C
```
  4.2567
  7.6524
---------
 17.0268
    8513
    2128
     255
      29
---------
 18.1193
```

即A與B惟其部分積,列法順逆之不同,若部分積之定位無誤,則全積無

變易也. C爲B之列法, 惟逆其乘數之次序, 而行其省略耳. 讀者試將C之各部分積, 與 A, B 相對應之各部分積, 相比較, 即明矣. 夫C之部分積如次, 第一部分積爲 42567×4, 第二部分積爲 $4256\times2+1$, [此 1 爲被乘數之次位7乘2而進於上位之數] 第三部分積爲 $425\times5+3$, [此 3 爲 6×5 進於上位之數] 第四部分積爲 $42\times6+3$, [此 3 爲 5×6 進於上位之數] 第五部分積爲 $4\times7+1$, [此 1 爲 2×7 進於上位之數] 而其進於上位之數, 依視察可知之, C 之被乘數與乘數之書法, 爲視其積所欲求之小數位, 而多取一位於被乘數之數字, 乃於其下位數字之直下, 書乘數一位之數字. 但嚴密言之, 則各部分積爲行省略加法者, 故如省略加法行之, 於所取數字之和, 即上例 $8+3+8+5+9=33$, 以加數之個數 5 少 1 者加之, [即 $n-1$] 視其進於上位之數有變動否, 如上例無變動, 故多取一行, 而取其積之小數第三位, 則可無差誤矣. 一般言之, 多取二行, 大抵無差誤. 然當以省略加法驗之. 上例逆列乘數之數字, 自其直上之被乘數始, 次第向左乘之, 而各部分積之末位, 皆爲同位, 如前例.

4.2567×4	至小數第四位,
4.256×0.2	亦至小數第四位,
4.25×0.05	........................,
4.2×0.006	........................,
$4.0.0007$	........................,

故也. 自次例可知省略乘法之簡便. [例 2] 將 0.43275641 乘 0.67540349 至小數第六位.

通常之運算	省略之運算
0.67540349	67540349
0.43275641	146572340
.2701613 | 96	2701614
202621 | 047	202621
13508 | 0698	13508
4727 | 82443	4728
337 | 701745	338
40 | 5242094	40
2 | 70161396	2
| 67540349	0.2922851
0.2922851 | 896338709	

此乘數無一位之數字, 故置0於一位數字之處, 而多取一行. 因小數第七位之和 $4+1+8+8+8+0+2=31$, 故以 $n-1$ 即 6 加之, 其進於上位之數無變動, 故此省略法, 可無差誤. [例 3] 求 $0.\dot{4}0\dot{7}$ 乘 $0.\dot{8}\dot{1}$ 之積至小數第五位. 此乘數之位數爲無窮, 故乘數不記載之數字, 得部分積 032....於縱線之右. 故其 $n-1=4$.

```
 0.818181
 7 047040
 --------
  327273 |
    5727 |
     327 |
       6 |
         | 032.....
 --------
 0.333333
```

[例 4] 求 $\pi^{*}\times\sqrt{2}$ 至小數第三位. *π 爲圓周與圓徑之比, 所謂圓周率, 其値爲 3.14159265358979 3......多取二行, $\pi=3.14159$ ...., $\sqrt{2}=1.41521$......而行省略乘法. [此數多取一行不免差誤也]

```
 3.14159
 1.24141
 -------
 3 14159 |
 1 25663 |
    3141 |
    1256 |
      62 |
       3 |
         | 314......
 -------
 4.44288
```

[連乘積] 以省略算求連乘積, 須謹記一語. 即以眞分數乘則差誤小, 以假分數乘則差誤大. 故大於一之因數之連乘積, 欲求至所求之小數位, 則除第一因數外, 可悉變爲小於一者. 若諸因數皆可使小於一更爲

```
  4.216666
  7 777720
  --------
    843333
    295166
     29516
      2951
       295
        29
         2
  --------
  1.171292
     57240
  --------
    468516
     23425
      8198
       585
  --------
   .500724
```

便利. [例] 0.04275, $4.21\dot{9}$ 及 $2.\dot{7}$ 之連乘積求至小數第四位. 其 $0.04275\times 4.51\dot{6}\times 2.\dot{7}=4.216666\times 0.277777\times 0.4275$, 卽多取二行, 而行省略乘法也. [省略除法] 先須注意次之二結果. (1) 例如 46 之右端添附 7, 則得 467 卽 $(46\times 10)+7$ 也. 又如 547 之右端添附 9, 則得 5479 卽 $(547\times 10)+9$ 也. 其他無論如何之數皆同. 故於某數之右端附一數字, 則同於以 10 乘其數, 而後以其數字所表之一位數加之. (2) 自 754 之右端取去 4, 則得 75, 卽 $(754-4)\div 10$. 又如自 4268 之右端取去 8, 則得 426 卽 $(4268-8)\div 10$, 其他無論如何之數皆同. 故<u>自某數右端取去一數字, 同於自其數以彼數字所表之一位數減之而後以 10 除之.</u> (1) 及 (2) 數之數字愈少, 則省略除法加減一位數字之結果愈重要. 然數字之數若多, 則加減一位數字之結果, 比較十倍十分之結果, 無甚重要. 本於此理, 而省略除法可以次例明之. [例 1] 以 0.6931472 除 0.3010299 求其商至小數第五位.

A. 通常之運算

```
6931472)3010299|0(.43429
        2772588|8
        -------------
         237710|20
         207944|16
        -------------
          29766|40
          27725|888
        -------------
           2040|1520
           1386|2944
        -------------
            653|85760
            623|83248
        -------------
             30|02512
```

A 之欲得每次之商以 10 乘被除數, 又 B 之欲得每次之商, 每消去除數之一數字, 而每消去除數之一數字與每以 10 除者, 殆相等, 而以 10 除除數, 同於以 10 乘被除數, 故其商相同也. 但每次之商乘除數, 其乘消去之數所當進上之數, 須以視察算入之. 而除數之數字, 須較商數之數字多二位, 且通常運算縱線左方之剩餘, 須同於省略運算之剩餘.

B. 省略之運算

```
6931472)3010299(.43429
        2772589
        -------
         237710
         207944
        -------
          29766
          27726
        -------
           2040
           1386
        -------
            654
            624
        -------
             30
```

[例 2] 以 0.093187 除 554.2001 求其商至整數之一位, 使被除數及除數之小數位同一,

則 $\frac{554.2001}{0.093187}=\frac{554.200100}{0.093187}$, 故其運算如次.

A. 通常之運算

```
93187)554200100(5947
      465935
      ---------
       88265|1
       83868|3
      ---------
        4396|80
        3727|48
      ---------
         669|320
         652|309
      ---------
          17011
```

B. 省略之運算

```
93187)554200100(5947
      465935
      ------
       88265
       83868
      ------
        4397
        3727
      ------
         670
         652
      ------
          18
```

將除數之數字, 比商之數字多取一位, 而省略運算之剩餘, 與通常運算之剩餘稍有差異, 此差異宜注意之. 夫每第二商爲以除數除剩餘, 故剩餘之差異大, 則商當生差誤, 欲防此差誤, 可將除數之數字, 比商之數字多取二位, 卽將除數及被除數俱取至小數第七位, 則爲 $\frac{554.2001}{0.03187}=\frac{554.200100}{0.0931870}$

故得更精密之運算如左.

A. 通常之運算

```
931870)5542001000(5947
        4659350
         8826510
         8386830
          439680
          372740
           66932
           65230
            1710
```

B. 省略之運算

```
931870)5542001000(5947
        4659350
         882651
         838683
          43968
          37275
           6693
           6523
            170
```

此通常運算縱線左方之各剩餘,等於省略運算之各剩餘,而其所以相等者,因除數之數字比商之數字多取二位故也.若欲省略除法結果之精密,則自始行省略之商之數字至所求之數字,其數字之數,須較除數數字之數少二個.故欲決定除數數字之數,須知商之整數及小數位之數.[例 3] 以 8.345 除 57.8564327,求其商至小數第六位.將除數及被除數取同小數位.則 $\frac{57.8564327}{8.345}=\frac{57.8564327}{8.3450000}$.其商之最高位,爲整數之一位明矣.

```
83450000) 578564327 (6.933065
          500700000
           77864327
           75105000
            2759327
            2503500
             255827
             250350
               5477
               5007
                470
                417
                 53
```

故商爲整數一位與小數六位.由是整數一位如常除之,而對於以下小數六位而取除數八位.[別法] 以通常之法,除至某位,至商所欲求數字之數,較除數數字少二個,乃以省略行之.

```
8345) 57856.432964 (6.933065
      50070
       77864
       75105
        27593
        25035
         25582
         25035
           547
           500
            47
            42
```

此除法用不書部分積,次第記剩餘之法式.更合省略之目的.

```
8345) 57856.432964 (6.933065
       77864
        27593
         25582
           547
            47
             5
```

[省略開平] 欲求某數之平方根至小數若干位,得所求根之數字半數以上,其餘之數字,可以省略除法求之.[例] 求 7 之平方根至小數第十二位.省略之運算,於根之後六數字行之,然末數字不必爲眞.若欲使末數字必爲眞,則當以通常之法求其根之位數,比所欲求位數半分多二位,而其餘之數字,乃以省略除法行之.此開平之運算,亦用僅記剩餘之法式.如 C 則更便利.[參考] 根爲自 $2n+1$ 個數字而成之完全平方數,其平方根之 $n+1$ 個數字,以通常之法得之,則其餘 n 個數字,得以省略除法求之.N 爲欲求平方根之數,a 爲已得之根之部分,x 爲未得之根之部分.則 $\sqrt{N}=a+x$,故

$N=a^2+2ax+x^2$,

故 $N-a^2=2ax+x^2$,而 $\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}$,即以 $2a$ 除 $N-a^2$,則可得平方根所求部

A. 通常之運算

```
2             ) 7 (2.645751311064
                4
46             300
               276
524             2400
                2096
5285             30400
                 26425
52907             397500
                  370349
529145             2715100
                   2645725
5291501             6937500
                    5291501
52915023            1645999|00
                    1587450|69
529150261             58548|3100
                      52915|0261
5291502621             5633|283900
                       5291|502621
529150262206            341|7812790000
                        317|4901573236
5291502622124            24|291121676400
                         21|166010488496
                          3|125111187904
```

B. 省略之算運

```
2         ) 7 (2.645751311064
            4
46         300
           276
524         2400
            2096
5285         30400
             26425
52907         397500
              370349
529145         2715100
               2645725
5291501         6937500
                5291501
5291502         1645999
                1587450
                  58549
                  52915
                   5634
                   5292
                    342
                    317
                     25
                     21
                      4
```

C.

```
2        ) 7 (2.645751311064
26         3
524         24
5285         304
52907         3975
529145         27151
5291501         69375
5291502 )       1645999
                   58549
                    5634
                     342
                      25
```

分 x 而增以 $\frac{x^2}{2a}$ 者. 而 $\frac{x^2}{2a}$ 可證明*爲眞分數. 故依除法而棄其剩餘, 可得其根所求之部分. $*\frac{x^2}{2a}$ 爲眞分數之理由, 因假定 x 自 n 個數字而成, 故 x^2 不多於 $2n$ 個數字, 而 a 含 $2n+1$ 個數字故也. 此證明其N爲完全平方數之整數, 然其結果, 可容易擴張之. [例] 以求12之平方根而說明之. 欲求12之平方根至小數第四位, 則求1200000000之平方根, 而以10000除其結果卽得. 夫以通常之運算而知 $1200000000-1119=(34641)^2$, 其 $N=1200000000-1119$ 而 $a=34600$, $x=41$, 故上證明爲以69200除2840000而得41. 同樣若欲求12之平方根至小數第六位, 則後之三數字101, 可以6928除70400得之. 但N若非完全之平方數, 則末位稍有差異, 然對於省略略之目的, 無妨害也. [省略開立] 欲求某數之立方根至小數若干位, 得所求根之數字半數以上, 其餘之數字, 可以省略除法求之. [例] 欲求21之立方根至小數第八位. 先以通常之法, 求其根之前五數字, 而後以省略除法行之. [參考] 根爲自 $2n+2$ 個數字

```
3       ) 12 ( 3.4641016
           9
64        300
          256
686        4400
           4116
6924        28400
            27696
69281         70400
              69281
6928201        11190000
                6928201
69282026        426179900
                415692156
                 10487744
```

參

I.	II.	III.
67	12	21 (2.75892417
14	469	8
815	1669	13000
10	49	11683
8258	2187	1317000
16	4075	1113875
82749	222775	203125000
	25	182028512
	226875	21096488000
	66064	20544425469
	22753564	552062531
	64	456691752
	22819692	95370779
	744741	91338350
	2282713941	4032429
	81	2283458
	2283458763	1748971
		1598421
		150550

而成之完全立方數，其立方根後 n 個數字，得以省略除法求之. N 為欲求立方根之數，a 為已得之根之部分，x 為未得之根之部分，則 $\sqrt[3]{N}=a+x$，故 $N=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$，故 $N-a^3=3a^2x+3ax^2+x^3$，而 $\frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a}$，故以 $3a^2$ 除 $N-a^3$，則可得立方根所求之部分 x 而增以 $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$ 者. 而 $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$，可證明* 為真分數，故棄其除法之剩餘，可得根之所求之部分. *假定 x 小於 10^n，故 a 不小於 10^{2n+1}，故 $\frac{x^2}{a}$ 小於 $\frac{10^{2n}}{10^{2n+1}}$，即小於 $\frac{1}{10}$，而 $\frac{x^3}{3a^2}$ 小於 $\frac{10^{3n}}{3\times10^{4n+2}}$ 即小於 $\frac{1}{3\times10^{n+2}}$，故 $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$ 小於 $\frac{1}{10}+\frac{1}{3\times10^{n+2}}$，即小於1也. N 非完全之立方數者，與上之求平方根者同，其末位稍有差異，然與省略之目的無妨害也.

N 非完全平方立方之數，以省略算開之，其根之末位，間有差異，為奚羅[M.J.Hill]之證明如次. 將 N 為整數，先證其平方根為帶小數者，其整數部分為 $(2n+1)$ 個數字，其已得之根 $(n+1)$ 個數字附 n 個 0 之數為 a，其餘 n 個數字為 b，小數為 c，則

$$\sqrt{N}=a+b+c,$$

$$\therefore \frac{N-a^2}{2a}=b+c+\frac{(b+c)^2}{2a},$$

若 $u=c+\frac{(b+c)^2}{2a}$，

且 a, b, c 皆為正數，故 a 之值最小及 b, c 之值最大時，則 u 之值最大，而 a 之最小值為 10^{2n}，b 及 c 之最大值為 10^n-1 及 $0.\dot{9}$，故 u 之最大值為

$$0.\dot{9}+\frac{(10^n-1+0.\dot{9})^2}{2\times10^{2n}}.$$

此式甚近於 $\frac{3}{2}$，故 u 有大於 1 之時，而省略算開平方至所求之末位，有時稍有差異也. 次證其立方根為帶小數者，其整數部分為 $(2n+2)$ 個數字，其已得之根 $(n+2)$ 個數字附 n 個 0 之數為 a，其餘之 n 個數字為 b，小數為 c，則

$$\sqrt[3]{N}=a+b+c,$$

$$\therefore \frac{N-a^3}{3a^2}=b+c+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(b+c)^3}{3a^2},$$

若 $u=c+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(b+c)^2}{3a^2}$，

故 a 之值最小及 b, c 之值最大時，則 u 之值最大，而 a 之最小值為 10^{2n+1}，b 及 c 之最大值為 10^{n-1} 及 $0.\dot{9}$，故 u 之最大值為

$$0.\dot{9}+\frac{(10^{n-1}-1+0.\dot{9})^2}{10^{2n+1}}+\frac{(10^n-1+0.\dot{9})^3}{3\times10^{4n+2}}.$$

即極近於次值，$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{3\times10^{n+2}}$.

此值之最大,在n之最小時,而n最小時爲1,則u之值爲

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{3000}=1.1003.$$

且n卽令增大,其1.100仍不減少,故u有大於1之時,而省略算開立方至所求之末位,亦有時稍有差異也.

[附1]甲乙丙三人共營商,得利金795圓.933.依三人出金額348圓.825,804圓.566,621圓.608配分之,問各幾何.資本全額約1775圓,故如次*解之,得甲之所得爲156圓.418,乙之所得爲360圓.778,丙之所得爲278圓.737,*此解爲尼克生[Prof. R.C.J. Nixon]氏之解.

(1)	(2)	(3)
商=.448413	448413	448413
1775) 795.933	528843	665408
85 93	1345239	3587304
14 933	179365	17936
7330	35873	2242
230	3587	269
52	89	27
	22	360.7778
	156.4175	

[附2]有直圓壔,其高爲6尺.74328,其徑爲2尺.59706,求其體積至立方寸,但π之值爲3.14159.此問題所求之體積爲$3.14159\times(1.29853)^2\times6.74328$,其單位爲立方尺,故欲求至立方寸,無異於求至小數第三位.其乘法無論以何因數爲先,茲先以3.14159乘6.74328,

6.743280000	21.1846210	27.50886
951413	358921	3 58921
20 229840000	21 1846211	27 50886
674328000	4 2369242	5 50177
269731200	1 9066159	2 47579
6743280	1694769	22006
3371640	105923	1375
606895	6355	82
21.184621045	27.5088659	35.72105

次以1.29853乘二次,卽得.而最後之結果,欲求至小數第三位,故6.74328×3.14159×1.29853須求至小數第五位,而6.74328×3.14159須求至小數第七位,故如上式.卽答35立方尺721立方寸.又英國式算法,通常計算至答數所求位之一位下,故1.29853之二乘,可求至小數點下六位止,其運算如次.卽答35立方尺721立方寸.

5.29729	1.298530
82 5476	358921
31 7837	1 298530
3 7081	259706
2119	116868
159	10388
11	649
4	39
35.7211	1.686180
	9 51413
	5 05854
	16862
	6745
	169
	84
	15
	5.29729

省略乘法. 圜 英 Contraction in multiplication. 見省略算條.

省略除法. 圜 英 Contraction in division. 或 Contracted division. 見省略算條.

省略開平. 圜 英 Contracted method of extracting the square root. 見省略算條.

省略開立. 圜 英 Contracted method of extracting the cube root. 見省略算條.

計算. 圜 英 Calculation. 已知式施其運算,而求其結果,謂之計算.除幾何學的推理,而其他之運算,皆計算也.

計算尺. 圜 英 Slide rule. 計算尺者,以對數之原理而作之尺也.其尺之構造,凡算術代數學幾何學三角法等種種之計算,皆得容易迅速行之.其結果於實地工業上之目的爲十分精密者.

計算器. 圜 英 Abacus. 或 Arithmograph. 或 Arithmometer. 爲計算數之

器. 其形狀雖不一,然表數皆用多數之球,在思力幼稚者,數之加減乘除,以實物示之,亦可使容易得其觀念者也. 故小學校幼年級之敎授多用之. 又我國自古所用算盤,亦一種計算器也.

計數器. 算 英 Abacus. 或 Arithmograph. 同 Arthmometer. 同計算器,見其條.

計子術. 算 日本數辭,其術以碁子或他物列爲圓形,自其中之一順或逆或順逆交互計之,而除去其第 n 個,豫知其最後所餘者,及當除去第 n 個之算法也.彼國古來行之,亦謂之繼子立,或謂之算脫. 十六世紀,"土耳古人15人與耶蘇敎國人15人洋中遇颶風"之問題, Mathematical puzzles 亦屬此種.

表. 數 英 Table. 表者,集錄某種之數,而使便於搜索者也. 數學有種種之表,然大要得分之爲二種,其一例如度量衡表,爲狹範圍特別物之集合也. 其一爲集錄一般範式所得之結果,而屬於廣範圍. 例如對數表與三角函數表等.

表面幾何學. 數 英 Surface Geometry. 表面幾何學,爲數學之分科,論曲面上圖形之形狀,大,位置等之學科也. 現今數學之進步,僅於球面幾何學得若干之知識,而一般表面幾何學,則知識尙幼稚也. 平面幾何學,則表面爲平面,可視爲表面幾何學之特別者.

表面積. 數 英 Superficial area. 謂立體之面積.

表差. 數 英 Tabular difference. 謂對數表或三角函數表或三角函數之對數表等,所載相鄰二數之差.

表對數. 數 英 Tabular logarithm. 表對數者,爲三角函數之表對數,而三角函數多小於1,故其對數之指標爲負,因避此不便,乃加10於三角函數之對數,而記於表,謂之表對數. 例如表中有 $\mathrm{L.sin}18°35'=9.50298$, 則爲加10於18°35′正弦之對數者. 卽所謂表對數. 而正弦之眞對數記爲 log sin. 則 $\log\sin 18°35'=\bar{1}.50298$, 表對數用 L. 區別記之.

重心. 數 英 Centroid. 或 Centre of gravity 或 Median point. 謂質量之重心也. 在初等幾何學,則多謂三角形之重心. 三角形之重心,爲三中線之交點. 以此點懸繫三角形,則三角形爲平衡也.

重利. 算 代 英 Compound interest. 借貸金錢將一定期間之利息,加於元金,爲次期之元金,又計利息,算入元金,爲第三期之元金,次第如此. 自最後之元利合計,減去最初之元金,謂之重利,或複利,其算法謂之重利法或複利法. 元金爲P,利率爲 r, 則 n 期間之元利合計爲 $P(1+r)^n$, 故 n 期間之重利爲 $P(1+r)^n-P$, 卽 $P\{(1+r)^n-1\}$.

重分數　算 代 英 Complex fraction. 謂分數之分母與分子又爲分數者. 例如次.

$$\frac{3}{\frac{2}{5}},\quad \frac{\frac{3}{4}}{7},\quad \frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}\ \ \frac{1}{3}},\quad \frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{x}{y}-z}.$$

重學. 數 英 Dynamics. 見力學條.

重噸. 算 英 Long ton. 同長噸,見其條.

負符號. 代 英 Negative sign. 謂符號一,讀若買伊剌斯.

負角. 三 英 Negative angle. 謂角之動徑,與時表之針同方向廻轉,所生之角,謂之負角.

負量. 代 英 Negative quantity 謂前置符號一之量.但此量與數同義,故負量同於負數.負數之由來,乃因減法有不能[減數大於被減數]時,欲避法則上有例外之不便,遂於數內加入一新元素數,謂之負數.

負數. 代 英 Negative number 同負量,見其條.

恆等式. 代 三 英 Identity 謂等式兩邊文字之值,無論如何,皆相等者.例如 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $(x-y)^2+2xy=x^2+y^2$, $2sinAcosA=sin2A$ 恆等式之符號 $=$,有時書爲 $\equiv$. 例如 $(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$, $sin(A+B)+sin(A-B)\equiv 2sinAcosB$.

恆方程式. 代 英 Identity equation. 同恆等式,見方程式條.

恆式. 代 三 英 Identity 同恆等式,見其條.

保險. 算 英 Insurance. 或 Assurance. 謂保險公司受保險費,而對於火災水難及一切天災疾病死亡等,負賠償義務之契約也.

保險者. 算 英 Insurer. 謂受保險費而對於火災水難疾病死亡等負賠償之人.通例爲保險公司.

保險費. 算 英 Premium. 謂被保險者,付與保險者[卽保險公司]之金.

約度. 幾 英 Measure. 一直線恰含他直線之若干個,或一面積恰含他面積之若干個,則後直線或面積,爲前直線或面積之約度.

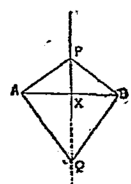
約數. 算 代 英 Measure. 或 Exact measure. 又 Exact divisor. 某數或某式之約數者,爲能整除其數或式之數或式也. 例如 3 爲 18 之約數,而 $x+3$ 爲 $x^2+7x+12$ 之約數.

約束手形. 算 英 Promissory note. 日本數辭,卽期票,見其條.

軌跡. 幾 英 Locus. [第一平面者]一點依某要件而運動,其徑路全體,爲其點之軌跡. 若點之軌跡,限於一平面上,則軌跡爲直線或曲線. [以鉛筆依某要件畫直線或曲線,則鉛筆尖爲動點所畫之直線或曲線爲其軌跡. 在代數學,則其要件以軌跡之方程式表之.] 欲確定某軌跡,須證明次之二命題.

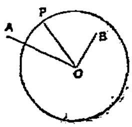
I. 在線X上之點,合於要件A. II. 合於要件A之點,在線X上. 或不證明 I, II, 而證明 III, IV, 亦可. III. 不合於要件A之點,不在線X上. IV. 不在線上之點,不合於要件A. 今取次之問題爲依I, II,而確定軌跡之例.

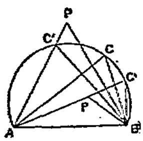
卽自已知二點,求等距離之點之軌跡. A, B 爲已知二點. (I). P 爲 AB 之垂直二等分線上任意之點,連結 PA, PB, 則二三角



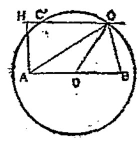
形 AXP, BXP, 其 AX=BX, PX 兩形共用之, $A\hat{X}P(=\hat{R})=B\hat{X}P$, 故 AP=BP. 又 (II) Q 爲 AQ=BQ 任意之點,今連結 XQ, 其 $\triangle AXQ$, $\triangle BXQ$, 三邊各相等,故 $A\hat{X}Q=B\hat{X}Q$, 而 $A\hat{X}Q+B\hat{X}Q=2\hat{R}$, 故 $A\hat{X}Q=B\hat{X}Q=\hat{R}$, 故 Q 在 AB 之垂直二等分線上 (決定) 故自 A, B, 等距離點之軌跡,爲 AB 點垂直二等分線. 又

取次之問題,爲依 I, IV, 而確定軌跡之例. 卽自一定點,求已知距離之點之軌跡. 將一定點爲中心,等於已知之距離爲半徑畫圓. (I.)自此圓周上任意一點P,至中心O,恆等於已知之距離. (IV) 自圓外任心之點A,至圓中心O之直線,必截圓周,故AO大於圓之半徑,又自中心 O 至圓內任意之點B之直線 OB,不截圓周,引長OB,則截圓周,故OB小於圓之半徑,故圓外或圓內任何之點,非在自中心已知之距離. (決定) 故在自一定點已知距離之點之軌跡爲一圓. 又取次問題,爲依 II, III, 而確定軌跡之例. 有一定之底,與已知之頂角之三角形,求其頂點之軌跡. AB 爲一定之底, ABC 爲 C 爲頂角之三角形之一位置,畫 △ABC 外接圓之弧. (II) 底 AB 上頂角等於 C 之三角形,其頂點在弧 ABC [及其對稱弧] 之上. (III) 底 AB 上頂角不等於 C 之三角形,其頂點不在弧 ACB [或其對稱弧] 之上. 何也,不在是等弧上之點 P,若爲 $\hat{P}=\hat{C}$ 之點,則AP或其延線當截弧 ACB [或其對稱弧] 於C′,連結BC′,則 $A\hat{P}B$ <或> $A\hat{C'}B$, 卽 $A\hat{P}B$ <或> $A\hat{C}B$. (決定) 故所求之軌跡,爲弧ABC [及其對稱弧]. [第二立體者] 平面軌跡之定義,得推廣於立體幾何學. 例如自二定點A, B, 等距離點之軌跡爲垂直二等分 AB 之平面. [第三直線之軌跡] 直線依某定則運動所生之面,則此面爲其直線之軌跡. 例如一直線沿圓周平行於一定之方向而移動,則生壔曲面是也.





軌跡之交. 幾 英 Intersection of loci. 幾何學作圖題,常有欲決定屬於二要件之點之位置者,解此種問題,軌跡之法最爲必要,卽對於各要件,而各點當有所屬之軌跡,而此二位置共同之諸點,卽二軌跡之交點,當皆合於已知之二要件. 例如已知三角形之底邊及向底邊之中線與高,而求作本形. 若 AH 爲已知之高,則所求三角形之頂點 C, 在過H而平行於 AB 之直線上. 又若AB之中點爲D,則頂點C,在 D 爲中心中線 CD 爲半徑之圓周上. 故所求之頂點爲此二軌跡之交 C 或 C′.



面. 幾 英 Face. 或 Surface. 面 [Face] 者,謂圍成立體之半面. 面 [Surface] 者,謂有二廣者. 空間之一部,與他一部之界爲面,又立體與周傍之空間之界爲面,有長有闊有位置而無厚. 面亦可見爲線之運動而生者.

面積. 幾 英 Area. 謂平面形內之大. 又謂圍成立體之面之大. 用面積單位測之. 例如一平方尺一平方寸一畝等. 田地之面積,用畝頃之單位測之. 國土之面積,用平方里測之,謂之方里.

前項. 算 代 幾 英 Antecedent. 謂比之第一項. 例如比 $a:b$ 則 a 爲前項, b 爲後項. 若比 $a:b$ 之值爲 r, 則 $a=br$, 卽後項與比之值之積,等於前項.

前率. 算 代 幾 英 Antecedent. 同

前項,見其條.

後項. 算 代 幾 英 Consequent. 見前項條.

後率. 算 代 幾 英 Consequent. 同後項,見前項條.

括弧. 數 英 Bracket. 或 Parenthesis. 括弧者,將二以上之數或式,括之使如一數或一式之記號也. 其種類通例為(),[],{}之三個. 若某式括弧前之符號為+,則得仍其括弧內之符號而去其括弧. 例如 $N+(a+b)=N+a+b$, $N+(a-b)=N+a-b$. 故反之,某式之若干項得仍其符號,而以前置符號+之括弧括之. 例如 $a+b+c=a+(b+c)$, $a+b-c=a+(b-c)$, $a-b+c=a+(-b+c)$, 又若某式括弧前之符號為−,則得變其括弧內之符號而去其括弧. 例如 $N-(+a+b)=N-a-b$, $N-(+a-b)=N-a+b$, $N-(a+b-c)=N-a-b+c$, 故反之,某式之若干項,得變其符號,而以前置符號−之括弧括之,例如 $a+b+c=a-(-b-c)$, $a+b-c=a-(b+c)$, $a-b+c=a-(b-c)$.

括線. 數 英 Vincurum. 全成一個之數或式,用一雙括弧之,有引括線於其數或式之上以代之者. 例如 $a-\overline{b-c}$, 等於 $a-(b-c)$, 又 $\sqrt{a+b}$ 等於 $\sqrt{(a+b)}$. 若不用括線或括弧,則根號直係於其次之數,即如 $\sqrt{}a+b$ 非 $a+b$ 之平方根之意,而為 a 之平方根加 b 之意. 同樣 $\sqrt{}2a$ 非 $2a$ 之平方根之意,而為2之平方根乘 a 之意. 又分數之分母與分子間之橫線,為括線之用. 例如 $\frac{a+b}{3}$ 等於 $\frac{1}{3}(a+b)$.

度量衡. 國 英 Weights and Measures. 度為計長之器,量為計容積之器,衡為計重之器. 我國古代以一黍之廣度之,九十黍為黃鐘之長,一黍為一分,為度之數. 以度審黃鐘之容千二百黍為一龠,為量之數. 以一龠之黍重十二銖,兩之為兩,為權衡之數. 蓋度起於律,而量權衡起於度也. 後世代有因革,迨清光緒三十三年,[西曆1907年],定度以法32生的為1尺,即法1米突合3尺1寸2分5釐. 量以31立方寸600立方分為1升. 衡以1立方寸之純水其重為8錢7分8釐4毫7絲5忽. 此外有海關所用,則為清咸豐四年[西曆1854年],所訂通商條約海關尺. 1尺合英14.1吋,合法358粍,海關秤1兩合英$581\frac{1}{3}$喱,合法37.783125瓩,他國皆準此.

垛積. 數 古數辭. 為少廣一支,與積彈[Piles of shot]及擬形數[Figurate]相似,[見積彈及擬形數條]. 其術始見於朱世傑四元玉鑑茭草形段,如象招數,果垛疊藏諸問. 郭守敬以步躔離,汪萊以釋遞兼,董祐誠以推割圓,其用甚廣. 李善蘭垛積比類,言之最詳. 華蘅芳積較術,[同差之法見其條]尤能得其求積術之原. 各見其所著之書.

係數. 代 英 Coefficient. 或 Cofacter. 係數者,書於某數之前而表其若干倍之數也. 例如 $3ax$ 之3,為 ax 之係數,為將 ax 取3倍之意. 若僅就 x 言之,則 $3a$ 為係數. 故係數有為數字者,謂之數字係數. [Numerical coefficient]有為文字者,謂之文字係數. [Literal coefficient]有數字與文字混者,謂之混係數, [Mixed Coefficient] 然是等名稱,

殆皆不用,所謂係數之廣義者,即分積爲二部,謂其一部爲他一部之係數,且係數不限於整數分數正數負數.例如$\frac{2}{3}ax$之$\frac{2}{3}$爲 ax 之係數. $-5bx^2$ 之 $-5b$,爲x^2之係數.又xy之x,爲y之係數.y爲x之係數.若某項無係數,則其係數爲1,而略之者也.例如x,等於$1x$也.含一未知數之一切方程式,得變爲$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots\cdots+a_n=0$之形.若其諸根爲$\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$則係數$a_1$爲$\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$之和.係數$a_2$爲$\alpha\beta,\alpha\gamma,\cdots\cdots\beta\gamma,\cdots\cdots$即每取二個之積之和.$a_3$爲$\alpha\beta\gamma,\alpha\beta\delta,\cdots\cdots$即每取三個之積之和.餘倣此.最終$a_n$爲$\alpha\beta\gamma\cdots\cdots$即表$n$個之積,而$a_n$可視爲$x^0$之係數.

耶刺托斯帖列斯之篩. 算 代 英 Eratosthenes's sieve.此爲素數淘汰法,乃自所有數中,淘汰非素數,而求素數之法也.[係希臘天文學者耶刺托斯帖列斯之發見,氏爲西曆紀元前275年至195年之人]因偶數皆能以2整除,故先將2以外之偶數省之,而記列如次.

1	2	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27	29
31	33	35	37	39	41	43	45
47	49	51	53	55	57	59	61
63	65	67	69	71	73	75	77
79	81	83	85	87	89	91	93
95	97	99.	…………………………				

乃自3之次每第三數之上記點,又自5之次每第五數之上記點,又自7之次每第七數之上記點,逐次如此,則無點之數爲素數.

美利刺斯之定理. 幾 英 Menelaus's theorem.三角形ABC與其邊BC,CA,AB,或其延線引長交於A′,B′,C′,之直線,則三比AB′:B′C,C′A:A′B,BC′:C′A之複比爲等比,而其逆亦眞.謂之美利刺斯之定理.詳見共線性條.

紀元. 算 英 Era.紀元謂一國紀年所始之年,例如中華民國紀元,黄帝紀元,耶蘇降生紀元[西曆紀元]等.

星形. 幾 英 Star polygon.謂正多角形其邊之交截者.

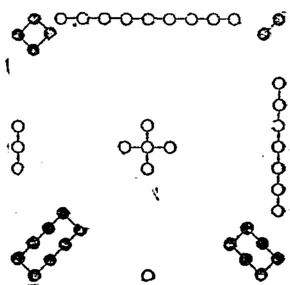
秒. 算 目 英 Second.(1)一時間六十分之一謂之分,一分之六十分之一謂之秒.(2)一度六十分之一謂之分,一分之六十分之一謂之秒,參觀六十分法條.

首線. 幾 目 英 Initial line.[of an angle]一直線以其一端爲樞迴轉之而成角,其直線初之位置,謂之首線.

要件. 幾 英 Condition.即條件也.見的反他斯之解答條.又有必要之要件,及十分之要件之語,數學屢用之.見必要之要件條.

限周最大積形. 幾 英 Didonia.謂以已知周圍所成最大面積之曲線形即圓也.

洛書. 算 英 Magic square. 洛書數.戴九履一,左三右七,二四爲肩,八六爲足,五居其



中. 恰與方陣[見方陣條]之最簡者同. 參看河圖條.

即期票. 算 英 Sight draft. 英謂即兌之票. 見匯票條.

按分比例. 算 英 Proportional parts. 見比例配分條.

英吉利法. 數 英 English method. 同六十分法,見其條.

背理. 數 英 Absurdity. 同不合理,見其條.

南緯. 算 英 South latitude. 見緯度條.

封度. 算 英 Pound. 日本數辭. 即磅,見其條.

降方. 代 英 Descending power. 即降冪,見下條.

降冪. 代 英 Descending power. 某文字之降冪,謂自指數之高者,次第至指數之低者. 例如 $3x^4-4x^3+6x^2+x-7$, $5x^2-2xy+y^2$, 皆列爲 x 之降冪. [如第二式,在 y 則爲昇冪]. 見昇冪條.

廻轉之軸. 幾 英 Axis of revolution. 廻轉之軸爲一直線. 謂將某直線或曲線或平面廻轉之者. 故廻轉之直線或曲線或平面之各點畫圓周,其中心在廻轉之軸上,其平面垂直於之廻轉之軸. 例如球徑皆可見爲廻轉之軸.

派伊記法. 代 英 Pi (Π) Notation. 謂同形因數之積. 書其一個因數,前置Π以表之. 例如就 a, b, c 三文字,書之如 $\Pi(b-c)=(b-c)(c-a)(a-b)$.

柱. 幾 英 Cylinder. 柱即壔,見壔條.

毪. 算 英 Milligramme. 美 Milligram. 爲密里格蘭姆之略書. 謂一格蘭姆千分之一.

竓. 算 英 Millitre. 美 Milliliter. 爲密里立突之略書. 謂一立突千分之一.

竕. 算 英 Decilitre. 美 Deciliter. 爲特西立突之略書. 謂一立突十分之一.

粉. 算 英 Myriametre. 美 Myriameter. 爲一密里亞米突之略書. 謂一米突之一萬倍.

瓱. 算 英 Décigramme. 爲特西格蘭姆之省書,當於格蘭姆十分之一,

兛. 算 法 Décagramme. 爲特卡格蘭姆之省書,當於格蘭姆之十倍.

粁. 算 英 Kilomètre. 爲啓羅米突之省書,當於米突之千倍.

盈朒. 算 古數書篇名. 以御隱雜互見,爲九章之一,朒不足也,故亦曰盈不足. 華蘅芳學算筆談,謂盈朒與天元相似,以非盈朒之題,亦有以盈朒之術求之也.[見學算筆談].

十畫

逆[定理的]. 數 英 Converse. 原定理爲若A爲B則C爲D時,則其逆爲若C爲D則A爲B. 即以某定理之假設與終結,爲終結與假設之定理. 某定理爲眞,其逆定理不必爲眞. 欲知其眞與否,須俟證明也. 例如三角形之二邊相等,則其所對之角相等之逆,爲三角形之二角相等,則其所對之邊相等. 此爲眞理. 然二角各爲直角則其二角相等之逆,爲二角相等則此二角各爲直角,是即非眞理矣. 又定理含數個假設,將其一與終結取換之,亦爲原定理之逆. 例如兩三角形之二邊與其夾角各相等,則底邊各相等,與兩三角形之二邊與底邊各相等,則頂角亦相等. 是即互爲逆也.

逆分數. 算 代 英 Reciprocal. fractions. 謂互爲逆數之分數,見逆數條.

逆運算. 算 代 英 Inverse operation. 謂運算之逆. 例如加法逆運算爲減法,乘法之逆運算爲除法,求羃之逆運算爲求根.

逆對數. 代 英 Antilogarithm. 謂對於已知對數之數,卽眞數也. 又間有指對數正弦對數正切對數正割之餘數者.

逆比. 算 代 英 Reciprocal ratios. 同反比,見其條.

逆比例. 算 代 英 Inverse proportion. 同反比例,見其條.

逆三角函數. 三 英 Inverse trigonometric function. 同反圓函數,見其條.

逆圓函數. 三 英 Inverse circular function. 同反圓函數,見其條.

逆數. 算 代 英 Reciprocals 同反數,見其條.

逆數方程式. 代 英 Reciprocal equation. 同反數方程式,見其條.

逆數之對數. 算 代 英 Cologarithm of a number. 同反數之對數,見其條.

逆數式. 代 英 Reciprocal expressions. 同反數式,見其條.

逆演算. 算 代 英 Inverse operation. 同逆運算,見其條.

眞分數. 算 英 Proper fraction. 謂分子大於分母之分數. 例如 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{14}{17}$ 等.

眞數函數. 三 英 Natural functions. 謂正弦餘弦等之眞數,乃對於其對數言.

眞數正弦. 三 英 Natural sine. 謂正弦之眞值. 例如 $\sin 30^\circ = 0.5$. 乃對於正弦之對數而言.

眞數正切. 三 英 Natural tangent. 謂正切之眞值. 例如 $\tan 45^\circ = 1$. 乃對於正切之對數而言.

眞數正割. 三 英 Natural secant. 例如 $\sec 60^\circ = 2$. 乃對於正割之對數而言.

眞數餘弦. 三 英 Natural cosine. 謂餘弦之眞值. 例如 $\cos 60^\circ = 0.5$. 乃對於餘弦之對數而言.

眞數餘切. 三 英 Natural cotangent. 謂餘切之眞值. 例如 $\cot 45^\circ = 1$. 乃對於餘切之對數而言.

眞數餘割. 三 英 Natural cosecant. 謂餘弦之眞值. 例如 $\mathrm{cosec}\, 30^\circ = 2$. 乃對於餘割之對數而言.

眞折扣. 算 英 True discount. 眞折扣者,謂期票於兌付日期之前,所能兌之現金與其利息之和,恰等於票面數也. 而現兌之金,謂之眞現價. 票面數與眞現價之差,謂之眞折扣金. 例如有六個月後應兌之期票630圓,以年利一分折扣之,則六個月之利率爲5釐. 故其眞現價爲 630圓 ÷ (1+0.05) = 600圓. 而 630−600 卽 30 圓,爲眞折扣金. 眞折扣金爲眞現價之利息,而銀行折扣金爲票面數[現價與眞折扣金之和]之利息. 故「銀行折扣金,等於眞折扣金與眞折扣金利息之和」. 故銀行折扣金,恆大於眞折扣金.

眞現價. 算 代 英 True present. 見眞折扣條.

眞割引. 算 英 True discount. 日本數辭. 卽眞折扣,見其條.

根. 算 代 英 Root. Radix. 此英語之 Root, 乃自拉丁語之 Radix 而來. 故英語於數之根,間有謂之 Radix 者

方程式之根, [Root] 謂以之代入方程式, 能使其方程式兩邊相等之實數或虛數也. 含一未知數之整數方程式, 其根之數, 同於次數. 卽二次方程式有二根, 三次方程式, 有三根是也. 數之根, 謂以之爲因數, 而取若干回之積, 等於其數也. 卽某數之二乘根, [卽平方根] 謂以之爲因數而取二回之積 [卽平方] 等於其數者. 又某數之三乘根, [卽立方根] 謂以之爲因數而取三回之積 [卽立方] 等於其數者. 凡某數之 n 乘根, 謂以之爲因數而取 n 回因數之積 [卽 n 乘冪] 等於其數者. 數之根, 有爲實數者, 有爲虛數者. 凡將 $+a$ 及 $-a$ 二乘之, 皆爲 $+a^2$, 故凡數有二個平方根其絕對值相等而符號相反. 故若 $-a^2$ 則無實數之平方根, 而其根爲 $+a\sqrt{-1}$, 及 $-a\sqrt{-1}$. 又取 $x^3=a^3$ 之方程式, 令爲 $x^3-a^3=0$. 則 $(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$. 自前因數得 $x=a$, 自後因數得 $x=a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ 及 $x=a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$. 故 a^3 有三個之立方根. 卽 a, $a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, $a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$. 通例以 $a, a\omega, a\omega^2$ 表之. 蓋 $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 故也. 又 $x^4=a^4$ 卽 $x^4-a^4=0$, 則 $(x^2-a^2)(x^2+a^2)=0$. 故自前之因數 $x^2-a^2=0$, 卽 $(x-a)(x-a)=0$. 故 $x=a$ 或 $x=-a$. 自後之因數 $x^2+a^2=0$, 卽 $(x-a\sqrt{-1})\times(x+a\sqrt{-1})=0$. 故 $x=a\sqrt{-1}$ 或 $x=-a\sqrt{-1}$. 又根 [Radix] 同於記數之底. 見其條.

根數. [代] 英 Radical. 或 Surd. 根數爲表示非完全冪之數之根. 例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[n]{a}$ 然有理數亦得書爲根數之形. 例如 $3=\sqrt{9}=\sqrt[3]{27}$. 根數因其根之表示爲平方根, 立方根, 四乘根, ..., n 乘根, 而區別爲二次, 三次, 四次, ..., n 次. 例如 $\sqrt{a}$ 爲二次根數, $\sqrt[3]{7}$ 爲三次根數, $\sqrt[n]{a^2}$ 爲 n 次根數. 有時區別爲 Surd 與 Radical 卽 Radical 者, 謂如 $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$ 之數, 而表示其根, 無論其爲實數有理數與無理數也. Surd 者, 謂數或式之無理根, 例如 $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$ 爲根數, 而 $\sqrt{9}$ 非根數.

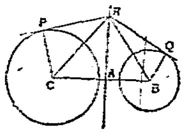
根率. [代] 英 Modulus. 莫立 [Mourey] 氏證明, 凡數得化爲 $a+b\sqrt{-1}$ 之形. 但 a 及 b 爲實數. 且無論正或負, 整數或分數, 有理數或無理數, 或爲零. 若 $b=0$, 則 $a+b\sqrt{-1}$ 爲實數, 而 $\sqrt{a^2+b^2}$ 之正根爲 $a+b\sqrt{-1}$ 之根率. b 不爲零者, 其根率有稱爲虛數率者. 莫立氏於虛數之幾何學的說明. 而根率以一線之長表之, a 及 b 之關係, 則關於一定之主線而決定其直線之方向.

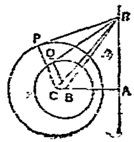
根號. [算] [代] 英 Radical sign. 謂表示欲開某數或某式之根之符號. 例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[n]{a^2+b^2}$, ...而 $\sqrt{\ }$ 之符號, 謂之根號. 根之次數, 書小數字於根號之上而表示之. 例如 $\sqrt[3]{\ }$ 爲立方根, $\sqrt[4]{\ }$ 爲四乘根, 凡 $\sqrt[n]{\ }$ 爲 n 乘根. 惟平方根, 恆不記爲 $\sqrt[2]{\ }$, 而記爲 $\sqrt{\ }$.

根指數. [代] 英 Index of radicals. 謂 $\sqrt[n]{a}$ 形之式之 n.

根軸. [幾] 英 Radical axis. 二圓之根

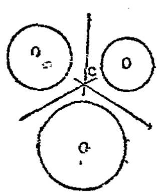
軸者,謂自其上之點,至二圓作切線,相等之軌跡,爲一直線也. 取任意之二圓 C, B, [圖中圓 C 大於圓 B 者] A 爲在於 CB 或其延長線上 $\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$ 之點. 但 CP 爲圓 C 之半徑, BQ 爲圓 B 之半徑, R 爲點 A 之 BC 垂線上任意之點, 引切線 RP, RQ, 則 $\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$, 故 $\overline{CR}^2-\overline{BR}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$ 即 $\overline{CR}^2-\overline{CP}^2=\overline{BR}^2-\overline{BQ}^2$ 故 $\overline{RP}^2=\overline{RQ}^2$ 故 RP=RQ. 又切線 PR=QR 之點 R, 得證明其在直線 AR 上,故 RA 爲二圓 C,B 之根軸.





(系) 二圓相交,則爲共通弦之直線 *爲二圓之根軸. 又二圓內切或外切,則其共通外切線或內切線爲二圓之根軸, *根軸爲共通弦之直線,須除去其爲弦之部分,則根軸之定義須稍擴張之.

根軸心. 幾 英 Radical centre. 三圓每取二圓之根軸,交於同一之點,此點爲是等圓之根軸心.



乘方. 算 代 英 Power. 某數若干回相乘者,謂之乘方. 而將某數一回,二回,三回,……, n 回相乘者,各記爲 a, a^2, a^3,…… a^n, 順次名爲 a 之一乘方 [First power], 二乘方 [Second power], 三乘方 [Third power],……, n 乘方 [N^{th} power]. 任意之數之 0 乘方爲 1, 即 $a^0=1$. 又某數之負數乘方,等於以同數之同整數乘方除 1 者, 即 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. 又某數之分數乘方,爲其數以分子之乘方,而開其分母之乘根也. 即 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. 而某數之一般乘方,皆依 $a^m\times a^n=a^{m+n}$. 謂之指數定則. 又我國古昔乘方次數之命名,則平方立方以上爲三乘方,四乘方,……是較今名每少一也. 且無所謂 0 乘方一乘方二乘方.

乘冪. 算 代 英 Power. 同乘方,見其條.

乘法. 算 代 英 Multiplication. 乘法[整數]者,爲將某數加若干次之簡法也. 如此之事謂之乘,被乘之數謂之被乘數,乘之之數謂之乘數,乘得之數謂之積. 又有謂爲倍者. 又古昔於一位乘數之乘,謂之因. 例如二乘之三乘之,則謂之二因之三因之. 二數之積,交換其乘數與被乘數亦不變. 例如 $a\times b=b\times a$. 故被乘數與乘數,有不區別之,而謂之因數者. 次論以分數乘某數,則不可不擴張整數乘法之定義,使亦適用於以分數之乘法. 因定以分數乘者,爲將被乘數如乘數分子所表之數倍之,如其分母所表之數等分之. 依此定義,例如以 $\frac{3}{5}$ 乘,則以 5 除被乘數之 3 倍即得. 次論小數乘. 例如以 0.1 乘,則因 $0.1=\frac{1}{10}$ 故取被乘數之 $\frac{1}{10}$, 即得. 同樣以 0.5 乘. 則因 $0.5=\frac{5}{10}$, 故以 10

除被乘數之5倍卽得．故例如以0.27乘0.375，則因 $0.375\times0.27=\frac{375}{1000}\times\frac{27}{100}=\frac{375\times27}{100000}$，故可不顧其小數點而行其乘法，而後以被乘數與乘數小數位數之和，而取其積之小數位卽得．終論代數式之乘，則將其各項乘被乘數而取其各積之代數和卽得．例如 $(a+b+c)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)=ax+ay+bx+by+cx+cy$．

乘法表．算 英 Multiplication table．謂記一位二數之積之表，亦謂之披他哥剌斯表，如次．

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

乘法之符號．算 英 Sign of multiplication．爲二個以上之數相乘之記號．通例用×．然多數連乘，若無他記號相混雜，有以(·)代之者．例如3與2與1之連乘積，以3·2·1表之．

乘號．算 英 Sign of multiplication．同乘法之符號，見其條．

乘數．算 代 英 Multiplier．見乘法條．

特卡米突［籵］．算 英 Decametre．美 Dekameter．謂十米突等於我3丈1尺2寸5分．

特卡立突［竍］．算 英 Decalitre．美 Dekaliter．謂十立突等於我9升.65746.

特卡格蘭姆［瓧］．算 英 Decagramme．美 Dekagram．謂十格蘭姆等於我2錢.68089.

特西米突［粉］．算 英 Decimetre．美 Decimeter．謂一米突之十分之一，等於我3寸.125.

特西立突［竕］．算 英 Decilitre．美 Deciliter．謂一立突十分之一，等於我0升.0965746.

特西格蘭姆［瓰］．算 英 Decigramme 美 Decigram．謂一格蘭姆之十分之一，等於我0錢.26467.

海克米突［粨］．算 英 Hectometre．美 Hektometer．謂一米突之百倍，等於我31丈2尺5寸．

海克立突［竡］．算 英 Hectolitre．美 Hektoliter．謂一立突之百倍，等於我96升.5746.

海克格蘭姆［瓸］．算 英 Hectogramme．美 Hektogram．謂一格蘭姆之百倍，等於我2兩.6467.

海克他那［陌］．算 英 Hectare．美 Hektar．謂一亞爾之百倍，等於我16畝.276.

海上保險．算 英 Marine insurance．海上保險，爲損害保險之一種．謂對於航海或停泊所起之損害，而爲賠償之契約者．而被保險者，付與保險者之報酬，謂之保險費，而使擔保其危險也．其所保險者，爲船舶貨物等．而種類則通例爲定價保險，不定價保險，航海保險，期間保險之四者．

海里．算 英 Nautical mile．海里者，爲航海里程之單位，而基於地球周

圜而定者也. 海里之定法,各國略有不同,有以地球赤道周圜一分之弧之長爲一海里者,有以地球子午線一分之弧之長爲一海里者. 在我國之一海里,等於3里38丈7尺5寸. 又海里亦謂之輿地里 [Geographical mile].

記法. 數 英 Notation. 謂以記號表數及運算之法. 數之記法,卽現行之亞剌比亞記數法.[見其條] 又代數學記法,謂和以 $a+b$ 記之,積以 ab 記之,冪以 a^m 記之等. 幾何學記法,直線則以上二文字記之,例如AB. 三角則形以其角頂之三文字記之,例如ABC之類. 三角法記法,角A之正弦餘弦等,則以sinA, cosA等記之.

記號. 代 英 Symbol. 代表數之 a, b, c,……m, n,……x, y, z,等. 運算之符號 +, −, ×, ÷ 等. 關係之符號 =, >, <, 等. 皆謂之記號.

記數法. 算 代 英 System of notation. 謂用符號表數之法,現行之記數法,爲亞剌比亞記數法. 見其條. 又羅馬數字記數法,行於一部分,見羅馬數字條.

記數之底. 算 代 英 Scale of notation. 記數之底,例如通常之記數法,卽十進之記數法,則以10爲底,卽十進法之356,爲 $3\times10^2+5\times10+6$. 凡以 r 爲底之記數法,若所書之數字爲 a_0, a_1, a_2……,則 $a_0a_1a_2\ldots\ldots a_n$ 爲 $a_0r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+a_n$. [但 $a_0,a_1,a_2\ldots$ 爲 r 底任意之數字,而其數字之數加入0,則爲 r 個.]

記底分數. 代 英 Radix fraction. 任意底之記底分數,當於10底之通常小數. 例如 $0.abc\ldots\ldots$ 爲 $\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^3}+\ldots\ldots$ 之意.

記名公債票. 算 英 Registered. 見公債票條.

除. 算 英 To divide. 求某數含他數之若干. 或將某數以他數等分之,而求其一分爲若干. 謂之除. 例如 $15\div3$, 表示15以3除之而其値爲5. 間有謂除爲分者.

除法. 算 代 英 Division. 謂求某數含他數之若干之法,或將某數以他數等分之而求其一分爲若干之法. 或謂除法爲乘法之逆運算,卽有已知二數,而求以何數乘第一數,則爲第二數之法.

除法之符號. 算 英 Sign of division. 某數以他數除之,其表示之符號爲 ÷. 記被除數於此符號之左,而記除數於其右. 例如27以3除之,則記爲 $27\div3$. 又 ÷ 有以橫線或斜線代之者,則書被除數於橫線之上,或斜線之左,書除數於其下或右. 卽如前例,則記爲 $\frac{27}{3}$,或27/3.

除號. 算 英 Sign of division. 同除法之符號,見其條.

除數. 算 代 英 Divisor. 謂除法之除數. 卽以之乘商則與被除數等之數.

除比之理. 代 英 Dividendo. 同分比之理,見其條.

株劵. 算 英 Certificate. 日本數辭. 卽股票. 見其條.

株主. 算 英 Shareholder. 日本數辭,卽股東,見其條.

株式. 算 英 Share. 日本數辭,卽股分,見其條.

株式會社. 算 英 Joint stock Company. 日本數辭,卽股分有限公司,見其條.

株式仲買人. 〔經〕 英 Stock broker. 日本數辭. 卽股票中人,見其條.

株式取引所. 〔經〕 英 Stock exchange. 日本數辭,卽股票交易所,見其條.

消去法. 〔代〕 英 Elimination. 自二個以上之方程,求消去其中一未知數或多未知數,謂之消去法. 消去法有加減消去法,代入消去法,比較消去法,各見其條. 茲示一二例於次. 例如自 $ax+b=0$, $a'x+b'=0$, 消去 x, 則自第一方程式,而 $x=-\frac{b}{a}$, 自第二方程式,而 $x=-\frac{b'}{a'}$, 故 $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, 卽 $ba'-b'a=0$. 此自已知二方程式消去 x 之式也. 又如自 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $a''x+b''y+c''=0$, 欲消去 x 及 y, 則自前方程,而

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-b'a};$$

x 及 y 是等之值適合於第三方程式,故代入且變化之如次.

$a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$, 又如自 $ll'=a$, $mm'=b$, $nn'=c$, $mn'+m'n=2f$, $nl'+l'n=2g$, $lm'+l'm=2h$ 之方程式,欲消去 l, m, n, l', m', n', 則將後之三方程式連乘之如次.

$$8fgh=2lmnl'mn'+ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)$$
$$+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)$$
$$=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2$$
$$+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn'$$
$$=4af^2+4bg^2+4ch^2-4abc,$$

因而 $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

[行列式之消去法] 自四個方程式.

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0,$$

欲消去 x, y, z, 則自前三方程式,求 x, y, z 之值,代入第四方程式,卽

$$x=-\frac{[d_1b_2c_3]}{[a_1b_2c_3]},\quad y=-\frac{[a_1d_2c_3]}{[a_1b_2c_3]},$$

$$z=-\frac{[a_1b_2d_3]}{[a_1b_2c_3]},$$ 將此代第入四方程式,

而 $$-a_4\begin{vmatrix} d_1b_1c_1 \\ d_2b_2c_2 \\ d_3b_3c_3 \end{vmatrix}-b_4\begin{vmatrix} a_1d_1c_1 \\ a_2d_2c_2 \\ a_3d_3c_3 \end{vmatrix}$$
$$-c_4\begin{vmatrix} a_1b_1d_1 \\ a_2b_2d_2 \\ a_3b_3d_3 \end{vmatrix}+d_4\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix}=0,$$

卽 $$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1d_1 \\ a_2b_2c_2d_2 \\ a_3b_3c_3d_3 \\ a_4b_4c_4d_4 \end{vmatrix}=0.$$

此法不限於四方程式,得擴張於含 $n-1$ 個未知數之 n 個方程式.

[西兒維士特爾(Sylvester)氏之消去法] 其法自 x 任意二個有理整方程式,消去 x, 以次例明之. 例如自 $ax^2+bx+c=0$ 及 $px^2+qx+r=0$ 消去 x, 則自是等之方程式,而

$$ax^3+bx^2+cx=0,\quad ax^2+bx+c=0,$$
$$px^3+qx^2+rx=0,\quad px^2+qx+r=0.$$

乃將 x 之各乘羃 x^3, x^2, x 見爲未知數,依前法消去之,則

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ o & a & b & c \\ p & q & r & o \\ o & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

消去式. 〔代〕 英 Eliminant. 自含 x, y 之方程式去消 y. 得僅含 x 之方程式,謂之 [x 消去式]. 例如 $x^2+xy=4x-2$, $y^2+xy=4y-1$ 之一組,則 $y=(-x^2+4x-2)/x$, 而 $(x^2-4x+2)^2-(x^2-4x+2)x^2=4x\times(-x^2+4x-2)-x^2$, 卽與 $y=(-x^2+4x$

$-2)/x$, $3x^2-x+4=0$, 爲等值. 而其終之方程式, 爲「x消去式」. 卽自含x, y之方程式, 而得僅含x之式, 此「x消去式」不可視爲消去x之式, 若最初消去x, 則得「y消去式」.

消失分數. 代 英 Vanishing fraction. 謂分數內對於變數之某值, 而成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$之形者. 見不定形條.

消約法. 算 代 英 Cancellation. 謂除法之被除數與除數, 或分數之分母與分子, 有公共約數時, 則消約之之法也.

消逃點. 畫 英 Vanishing point. 見遠近圖法條.

素數. 算 英 Prime number. 凡數除1及其本數外, 無能整除之者, 謂之素數. 二數無公約數, 則謂之互素數. 例如2, 3, 5, 7,...爲素數, 而7與12爲互素數. 求素數雖無簡單之法, 然耶剌托斯帖列斯 [Eratosthenes] 之素數淘汰法, 爲求素數之一法也. 見其條. 次之第一表爲素數之性質. 1. 一數不能以不大於其平方根之素數整除者, 則爲素數. 2. 凡素數當成$4n\pm1$之形, 卽以4除素數, 則其剩餘當爲±1也. 凡素數又當成$6n\pm1$之形. 此外關於素數之諸式, 均載第一表中, 然其逆不眞, 蓋成是等之形之數, 不必爲素數也. 3. 三素數成等差級數, 則除初項爲3個之外, 皆能以6整除之. 然多於三個之素數, 則決不能成等差級數. 4. n爲素數, 則$1+n!$不能以n整除之. 5. n爲素數, r爲不能以n整除之數, 則以n除r^n及r, 當同其剩餘. 6. 前條之假定, 又$r^{n-1}-1$能以n整除之. 7. $4n+1$之形之素數, 其平方成y^2+25z之形. 自第一表可得素數之諸性質.

數	素數	相等式
1	$4n+1$	y^2+z^2
2	$6n+1$	y^2+yz+z^2
3	$8n+1,7$	y^2-2z^2
4	$8n+1,3$	y^2+2z^2
5	$12n+1$	y^2-3z^2
6	$12n+11$	$3y^2-z^2$
7	$14n+1,9,11$	y^2+7z^2
8	$20n+1,9,11,19$	y^2-5z^2
9	$20n+1,9$	y^2+5z^2
10	$20n+3,7$	$2y^2+2yz+3z^2$
11	$24n+1,19$	y^2-6z^2
12	$24n+5,25$	$6y^2-z^2$
13	$24n+5,11$	$2y^2+3z^2$
14	$24n+1,7$	y^2+6z^2
15	$28n+1,9,25$	y^2-7z^2
16	$28n+3,19,27$	$7y^2-z^2$
17	$30n+1,19$	y^2+15z^2
18	$30n+17,23$	$3y^2+5z^2$
19	$40n+1,9,31,39$	y^2-10z^2
20	$40n+3,13,27,37$	$2y^2-5z^2$
21	$40n+1,9,11,19$	y^2+10z^2
22	$40n+7,13,23,37$	$2y^2+5z^2$
23	$120n+11,29,59,101$	$5y^2+6z^2$
24	$120n+13,37,43,67$	$10y^2+3z^2$
25	$120n+1,31,49,79$	y^2+30z^2
26	$120n+17,23,47,113$	$2y^2+15z^2$

素數之配置, 無一定之法則. 然自下表及較此更多之素數表觀之. 可知某範圍之素數之數, 多於其後同大範圍素數之數. 例如自1至10000素數之數爲1230, 自10000至20000素數之數爲1033, 自20000至30000素數之數爲983, 而90000至100000素數之數爲879.

範式$N=\frac{x}{A\log x-B}$爲x甚大時, 而決定至x之素數之數者也. 但N爲素數之數. A及B爲以實驗決定之數, x爲甚大之數, 則用訥伯爾對數A等於1, B殆等於1.08366, 而爲$N=\frac{x}{l.x-1.08366}$.

0

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	01	11	07	01	03	01	01	09	07
2	03	23	11	09	09	07	09	11	11
3	07	27	13	19	21	13	19	21	19
5	09	29	17	21	23	17	27	23	29
7	13	33	31	31	41	19	33	27	37
11	27	39	37	33	47	31	39	29	41
13	31	41	47	39	57	41	43	39	47
17	37	51	49	43	63	43	51	53	53
19	39	57	53	49	69	47	57	57	67
23	49	63	59	57	71	53	61	59	71
29	51	69	67	61	77	59	69	63	77
31	57	71	73	63	87	61	73	77	83
37	63	77	79	67	93	73	87	81	91
41	67	81	83	79	99	77	97	83	97
43	73	83	89	87		83		87	
47	79	93	97	91		91			
53	81			99					
59	91								
61	93								
67	97								
71	99								
73									
79									
83									
89									
97									

1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
09	03	01	01	09	11	01	09	01	01
13	09	13	03	23	23	07	21	11	07
19	17	17	07	27	31	09	23	23	13
21	23	23	19	29	43	13	33	31	31
31	29	29	21	33	49	19	41	47	33
33	51	31	27	39	53	21	47	61	49
39	53	37	61	47	59	27	53	67	51
49	63	49	67	51	67	37	59	71	73
51	71	59	73	53	71	57	77	73	79
61	81	77	81	59	79	63	83	77	87
63	87	79	99	71	83	67	87	79	93
69	93	83		81	97	69	89	89	97
87		89		83		93			99
91		91		87		97			
93		97		89		99			
97				93					
				99					

2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
03	11	03	09	11	03	09	07	01	03
11	13	07	11	17	21	17	11	03	09
17	29	13	33	23	31	21	13	19	17
27	31	21	39	37	39	33	19	33	27
29	37	37	41	41	43	47	29	37	39
39	41	39	47	47	49	57	31	43	53
53	43	43	51	59	51	59	41	51	57
63	53	51	57	67	57	63	49	57	63
69	61	67	71	73	79	71	53	61	69
81	79	69	77	77	91	77	67	79	71
83		73	81		93	83	77	87	99
87		81	83			87	89	97	
89		87	89			89	91		
99		93	93			93	97		
		97	99			99			

3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	09	03	01	07	11	07	01	03	07
11	19	09	07	13	17	13	09	21	11
19	21	17	13	33	27	17	19	23	17
23	37	21	19	49	29	23	27	33	19
37	63	29	23	57	33	31	33	47	23
41	67	51	29	61	39	37	39	51	29
49	69	53	31	63	41	43	61	53	31
61	81	57	43	67	47	59	67	63	43
67	87	59	47	69	57	71	69	77	47
79	91	71	59	91	59	73	79	81	67
83		99	61	99	71	77	93	89	89
89			71		81	91	97		
			73		83	97			
			89		93				
			91						

4

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	11	01	27	09	07	03	03	01	03
03	27	11	37	21	13	21	21	13	09
07	29	17	39	23	17	37	23	17	19
13	33	19	49	41	19	39	29	31	31
19	39	29	57	47	23	43	33	61	33
21	53	31	63	51	47	49	51	71	37
27	57	41	73	57	49	51	59	77	43
49	59	43	91	63	61	57	83	89	51
51	77	53	97	81	67	63	87		57
57		59		83	83	73	89		67
73		61		93	91	79	93		69
79		71			97	91	99		73
91		73							87
93		83							93
99		89							99
		97							

5

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
03	01	09	03	07	01	23	01	01	03
09	07	27	09	13	03	39	11	07	23
11	13	31	23	17	07	41	17	13	27
21	19	33	33	19	19	47	37	21	39
23	47	37	47	31	21	51	41	27	53
39	53	61	51	37	27	53	43	39	83
51	67	73	81	41	31	57	49	43	87
59	71	79	87	43	57	59	79	49	
77	79	81	93	49	63	69	83	51	
81	89	97	99	71	69	83	91	57	
87	97			77	73	89		61	
99				79	81	93		67	
				83	91			69	
								79	
								81	
								97	

此表爲六千以內之素數. 檢查此表,先於重字求千位,次於重字下之上列求百位,次於各行求其餘二位之數字. 如在表中,則爲素數.

此範式乃自已知之表實驗而作者,決不能證明之也. 素數之大,可證明其無限. 試設p爲最後之素數,N爲諸素數2,3,......p之積,而凡數或爲素數或爲以素數得整除之數, 然 N+1 不能以2,3,5, 或p整除之,因皆當餘1也. 故N+1當爲素數或爲以大於p之素數能整除之數,與p爲最大素數之假設不合. 故知素數無上限.

素數分解法. 圜 英 Resolution into prime factors. 謂求某數素因數之法,見素因數條.

素因數. 圜 英 Prime factor. 某數之素因數,謂能整除其數之素數. 任意數之素因數,以$a, b, c, d,$......表之. 其各素因數之個數,以$m, n, p, q,$.........表之,則其本數爲$a^m b^n c^p d^q$..............而其約數之數[1及本數在內]當爲$(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)$. 今命此數爲N,則小於N而與N爲互素數之數爲

6									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
07 11 29 37 43 47 53 67 73 79 89 91	01 13 21 31 33 43 51 63 73 97 99	03 11 17 21 29 47 57 63 69 71 77 87 99	01 11 17 23 29 37 43 53 59 61 67 73 79 89 97	21 27 49 51 69 73 81 91	21 29 47 51 53 63 69 71 77 81 99	07 19 37 53 59 61 73 79 89 91	01 03 09 19 33 37 61 63 79 81 91 93	03 23 27 29 33 41 57 63 69 71 83 99	07 11 17 47 49 59 61 67 71 77 83 91 97

7									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01 13 19 27 39 43 57 69 79	03 09 21 27 29 51 59 77 87 93	07 11 13 19 29 37 43 47 53 83 97	07 09 21 31 33 49 51 60 93	11 17 33 51 57 59 77 81 87 89 99	07 17 23 29 37 41 47 49 59 61 73 77 83 89 91	03 07 21 39 43 49 69 73 81 87 91	03 17 23 27 41 53 57 59 89 93	17 23 29 41 53 67 73 77 79 83	01 07 19 27 33 37 49 51 63 93

8									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
09 11 17 39 53 59 69 81 87 89 93	01 11 17 23 47 61 67 71 79 91	09 19 21 31 33 37 43 63 69 73 87 91 93 97	11 17 29 53 63 69 77 87 89	19 23 29 31 43 47 61 67	01 13 21 27 37 39 43 63 73 81 97 99	09 23 27 29 41 47 63 69 77 81 89 93 99	07 13 19 31 37 41 47 53 61 79 83	03 07 19 21 31 37 39 49 61 63 67 87 93	23 29 33 41 51 63 69 71 99

9									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01 07 11 13 29 41 43 49 59 67 91	03 09 27 33 37 51 57 61 73 81 87 99	03 09 21 27 39 41 57 77 81 83 93	11 19 23 37 41 43 49 71 77 91 97	03 13 19 21 31 33 37 39 61 63 67 73 79 91 97	11 21 33 39 47 51 87	01 13 19 23 29 31 43 49 61 77 79 89 97	19 21 33 39 43 49 67 69 81 87 91	03 11 17 29 33 39 51 57 59 71 83 87	01 07 23 29 31 41 49 67 73

10									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
07 09 37 39 61 67 69 79 91 93 99	03 11 33 39 41 51 59 63 69 77 81 93	11 23 43 47 53 59 67 71 73 89	01 03 13 21 31 33 37 43 57 69 91 99	27 29 33 53 57 57 63 77 87 99	01 13 29 31 59 67 89 97	01 07 13 27 31 39 51 57 63 67 87 91	09 11 23 29 33 39 53 71 81 89 99	31 37 47 53 59 61 67 83 89 91	03 09 37 39 49 57 73 79 87 93

此表乃自六千至一萬以內之素數表,合之前表,可得自一至一萬之素數,檢查之法,與前表同.(附記)現今最大之素數,爲2147483647.

$N\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{p-1}{p}\cdot\frac{q-1}{q}$. 將某數分爲因數,其因數非素因數,則其分法不一.例如12爲2×6或3×4而6與4皆非素數,若將某數分爲因數,其因數爲素因數,則其分法惟一,此最緊要,而其特別者,則自實驗易知之.[例1]如12除2×2×3,即$2^2\times3$之外,不能以他素因數之積表之.[例2]試求4095之素因數.

4095得以5整除之	5)4095
,, ,, ,, 3 ,, ,, ,,	3)819
,, ,, ,, 3 ,, ,, ,,	3)273
,, ,, ,, 7 ,, ,, ,,	7)91
,, ,, ,, 13 ,, ,, ,,	13

故4095分解爲素因數,則爲$5\times3\times3\times7\times13$,即$5\times3^2\times7\times13$.

素約數. 算 英 Prime measure. 或 Prime divisor. 同素因數,見其條.

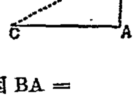
純二次方程式. 代 英 Pure quadratic equation. 謂僅含未知數二乘羃之方程式. 例如$ax^2+b=0$, $3x^2-5=7-4x^2$等.

純正數學. 數 英 Pure mathematics. 論數學之原理者,對於應用數學[Applied mathematics]而言.

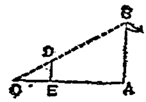
純循環小數. 算 英 Pure recurring decimal. 見循環小數條.

高. 幾 英 Height. 或 Altitude. 高爲物體第三之測度. 三角形之高,謂自三角形之頂點至底邊或其延線之垂直距離.三角形之各邊,皆得以爲底,而其底之對角頂,爲三角形之頂點,故三角形有三高. 若無特別指名爲

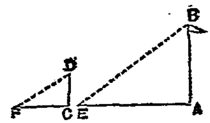
底之一邊,則取圖上見爲水平之邊爲底可也. 直角三角形之底邊,恆爲直角傍之一邊,而他一邊爲其高. 梯形之高,謂其平行二邊間之垂直距離. 平行四邊形之高,謂任取爲底之平行二邊間之垂直距離. 圓錐及角錐之高,謂頂點與底面間之垂直距離. 圓壔及角壔之高,謂兩底面間之垂直距離. 角臺及圓臺之高,謂二底面間之垂直距離. 平行六面體之高,謂任取爲底之平行二平面間之距離. 球缺及球帶之高,謂爲底之圓之二平面間之距離,若球缺或球帶惟有一底,[圓]則其高爲底與切球且平行於底之平面間之距離. 水準測量一點之於他點之高,謂自地心至各點距離之差. 陸地測量物體之高,爲過其物體最高點及最低點[或觀測者之位置]之二水平面間之距離. 而其高有得近者與不得近者,得近之高,爲其底爲得近之物之高,測量者能自其本身之位置測得至其物體之距離. 不得近之高,因有障礙物,測量者不能自其本身之位置,測得至其物體之距離. I. 測得近物體之高法,有三. (1)求決定物體AB之高. 於過A之水平線,選便利之點C,自C以適當之器械,測得$B\hat{C}A$及距離CA,則



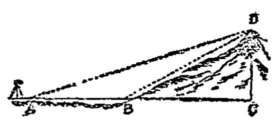
自直角三角形CAB因BA=CAtanBAC,故BA之值,可計算得之. (2)無測角之器械時,則如前選點C,測距離AC,次於物體之方測得距離CE,於E立垂直之標竿,自C望物體之頂,記視線截標竿之點D,測得DE則自相似三角形,因CE:DE



=CA:BA,故$BA=\frac{DE\times CA}{CE}$,由是可知其高. 此方法雖線AC不成水平亦可. (3)得近物體,依其影可決定之. AB爲欲求其高之物體,CD爲垂直而立之標竿,其出地面之長爲已知,於任意一瞬間記點B之影,所落之點E,又



記點D之影,所落之點F,測得FC及AE,則由相似三角形FCD及EAB,而FC:CD=EA:AB,故$AB=\frac{CD\times EA}{FC}$. 此方法AF不成水平面亦可. II. 測不得近物體之高法. (1)求水平面AC上點D之高,於過D之垂直面內,選二點A及B,測得距

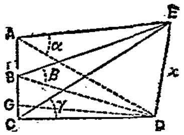


離AB,以適當之器械,於A及B測得仰角DAC及BDC,則△DAB因sinDBC等於sinDBA, 故 sinADB:sinDBC=AB:AD.

故$AD=\frac{AB\times \sin DBC}{\sin ADB}$. 但$A\hat{D}B=D\hat{B}C-D\hat{A}B$,故$AD=\frac{AB\times \sin DBC}{\sin(DBC-DAB)}$.

既自範式求得AD,則自直角三角形

ADC, 而得 DC=ADsinDAC. (2) 於一水平直線上, 選三點 A,B,C, 又測得距離 AB=a, BC=b, 測得仰角 $D\hat{A}E=\alpha$, $D\hat{B}E=\beta$, $D\hat{C}E=\gamma$, 過 AC 之水平面上所求之高 DE, 以 x 表之, 則自直角三角形, 而 AD$=x\cot\alpha$, BD$=x\cot\beta$, CD$=x\cot\gamma$ 若設想自 D 引 AC 之垂 DG, 則 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+2AB.BG$, $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2BC.BG$. 將上測之值, 與所求之值代入之, 則 $x^2\cot^2\alpha=a^2+x^2\cot^2\beta+2a.BG$, $x^2\cot^2\gamma=b^2+x^2\cot\beta-2b.BG$. 自此二程方,式消去BG, 則

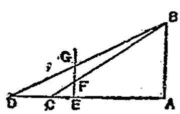


$$x=\sqrt{\frac{ab(a+b)}{b\cot^2\alpha+a\cot^2\gamma-(a+b)\cot^2\beta}}.$$

若 $a=l$, 則

$$x=\sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{2}\cot^2\alpha+\frac{1}{2}\cot^2\gamma-\frac{1}{2}\cot^2\beta}}.$$

若將各測點所測仰角之餘切, 乘物之高, 則得測點至其物之平距離. (3) 若無測角之器械而求高, 則如次, AB=x 為所求之高, 於過 B 水垂直面上, 選二點 C 及 D, 測得 CD=c, 於 C 及 A 之間一點 E, 立標竿, 測得距離 CE$=f$, 又自 C 窺 B 記點 F, 自 D 窺 B 記點 G, 若 AC$=y$, EF$=a$, FG$=b$, 則由相似三角形 CEF 及 CAB, 得 $\frac{a}{f}=\frac{x}{y}$......................(1). 又由相似三角形 DAB 及 DEG 得 $\frac{a+b}{c+f}=\frac{x}{y+c}$...........(2), 自 (1) (2) 消去



y, 而求 x, 則得 $x=\frac{a^2c+abc}{a(c+f)-f(a+b)}$.

高度. 目 英 Angular altitude. 謂天體自地平之仰角.

高等幾何學. 數 英 Higher Geometry 見幾何學條.

倍度. 幾 英 Multiple. 一直線能以他直線精密測度爲整數若干倍, 則前直線爲後直線之倍度.

倍量. 算 代 英 Multiple. 謂某數量之整數若干倍. 例如長6尺爲長2尺之倍量. 參看倍數條.

倍數. 算 代 英 Multiple. 某數能以他數整除, 則前數謂之後數之倍數. 例如 15, 20, 30 等, 爲 5 之倍數, 而 ma 爲 a 之倍數, a^2x 爲 a, ax, a^2 等之倍數.

差. 算 代 英 Difference. 謂自某數減他數之餘. 凡二數之差, 自大者減小者, 其差謂之算術差, 自第一數減第二數, 其差謂之代數差. 故二數之算術差, 恆爲正. 代數差則第一數大於第二數者爲正, 第一數小於第二數者爲負.

差之法. 代 英 Method of difference. 任意級數, 自各項減其前項, 則得差之第一次級數. 同樣, 自此級數又得差之第二次級數. 次第如此行之. 但等差級數, 其差之第二次皆爲零. 故凡級數之差之第三次或第四次等, 必有爲零之級數. 例如取一級數, 而記其各次之差如下.

1 5 12 24 43 71 110......

4 7 12 19 28 39......

3 5 7 9 11......

2 2 2 2......

0 0 0......

卽至差之第四次而皆爲零矣. 設 a_1,

$a_2, a_3, \ldots$ 爲第一之級數,則如次.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7\ldots\ldots \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & b_6\ldots\ldots & \\ & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5\ldots\ldots & & \\ & & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & d_4\ldots\ldots & & & \\ & & & & e_1 & & e_2 & & e_3\ldots\ldots & & & & \end{array}$$

而其終之差,當皆爲零. [求任意項] 玆假定差之第五次悉爲零. 而他次爲零者亦同樣,而作累次之差之法如次.

$a_2=a_1+b_1,\ a_3=a_2+b_2=a_1+2b_1+c_1.$

$b_2=b_1+c_1,\ b_3=b_2+c_2=b_1+2c_1+d_1.$

$c_2=c_1+d_1,\ c_3=c_2+d_2=c_1+2d_1+e_1.$

$d_2=d_1+e_1,\ d_3=d_2+e_2=d_1+2e_1.$

$e_2=e_1,\quad e_3=e_2\quad =e_1$

$a_4=a_3+b_3=a_1+3b_1+3c_1+d_1.$

$b_4=b_3+c_3=b_1+3c_1+3d_1+e_1.$

$c_4=c_3+d_3=c_1+3d_1+3e_1.$

$d_4=d_3+e_3=d_1+3e_1.$

$a_5=a_4+b_4=a_1+4b_1+6c_1+4d_1+e_1.$

$b_5=b_4+c_4=b_1+4c_1+6d_1+4e_1.$

$c_5=c_4+d_4=c_1+4d_1+6e_1.$

$a_6=a_5+b_5=a_1+5b_1+10c_1+10d_1,+5e_1.$

$b_6=b_5+c_5=b_1+5c_1+10d_2+10e_1.$

$a_7=a_6+b_6=a_1+6b_1+15c_1+20d_1+15e_1.$

餘倣此. 夫 a_5 之式之係數,爲 $(x+y)^4$ 之係數,而 a_6, a_7 亦可一例觀之,故 $a_1, b_1, c_1,\ldots$ 以 $a, b, c,\ldots$ 換置之,則得第 $n+1$ 項之式如次.

$$a_{n+1}=a+nb+\frac{n(n-1)}{1.2}c+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d+\ldots\ldots$$

例如級數 1, 5, 12, 24, 43, 71, 110,.....求其第十一項,如上作其差,而 $n=10$. 故 $a_{11}=a+10b+45c+120d=1+40+135+240=\underline{416}.$ [級數之和] 先作一新級數,其第一項爲0,自第二項起,而各次之差之第一項,爲累次各項,卽級數 0, a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $a_1+a_2+a_3+a_4,\ldots\ldots$ 之第 $n+1$ 項,爲級數 $a_1, a_2, a_3,\ldots$ 之 n 項之和. 例如級數1, 5, 12, 24, 43, 71,...,求其前十一項之和,則新級數及其各次之差如次.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 1 & & 6 & & 18 & & 42 & & 85 & & 156 \\ & 1 & & 5 & & 12 & & 24 & & 43 & & 71 & \\ & & 4 & & 7 & & 12 & & 19 & & 28 & & \\ & & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & & \\ & & & & 2 & & 2 & & 2 & & & & \end{array}$$

此 $a=0$, $b=1$, $c=4$, $d=3$, $e=2$ 而 $n=10$,

$\therefore s=a+11b+55c+165d+330e$

$=11+220+495+660=\underline{1386.}$

若 s 爲級數 $a_1, a_2, a_3,\ldots\ldots$ 前 n 項之和

則 $s=0+na+\frac{n(n-1)}{1.2}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c+\ldots\ldots\ldots\ldots$

例如自然數之平方 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2,\ldots\ldots, n^2$,求其前 n 個之和,則所設級數與各次之差如次.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25\ldots\ldots n^2 \\ & 3 & & 5 & & 7 & & 9\ldots\ldots & \\ & & 2 & & 2 & & 2\ldots\ldots & & \\ & & & 0 & & 0\ldots\ldots & & & \end{array}$$

故 $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=0$, 而將是等之值代入公式,則

$$s=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot2$$

$$=n\left\{1+\frac{3n}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}(n^2-3n+2)\right\}$$

$$=\frac{n}{6}\left\{6+9n-9+2n^2-6n+4\right\}$$

$$=\frac{n}{6}\left\{2n^2+3n+1\right\}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

差渡. 圜 英 Diameter. 或 Distance in a straight line. 日本數辭,與徑同,見其條. 又謂兩地間直線之距離.

配分定則. 代 英. Distributive law. 以一項式乘多項式之積,等於其一項式乘其各項之代數和. 例如 $a(b+c-d)=ab+ac-ad$, 此乘法之配分定則也. 又以一項式除多項之商,等於以其一項式除其各項之商之代數和. 例如 $(a+b-c)\div d=a\div d+b\div b-c\div d$.

配當金. 算 英 Dividend. 日本數辭,謂股分公司之紅利,見紅利條.

格蘭姆[瓦]. 算 英 Gramme. 美 Gram 米突法中重之基本單位. 等於我 $0^{\text{兩}}.268089$. 十格蘭姆謂之特卡格蘭姆[瓧]百格蘭姆謂之海格蘭姆[瓸]. 千格蘭姆謂之啓羅格蘭姆[瓩]. 千啓羅格蘭姆謂之米突噸,或謂之法噸,或謂之噸羅. 而一格蘭之十分之一,謂之特西格蘭[瓰],百分之一謂之生的格蘭姆[甅],千分之一謂之密里格蘭姆[瓱].

格洛斯[哥]. 算 英 Gross 謂 12 打, 卽 144 個. 有時謂12格洛斯爲大格洛斯[Great Gross]者. 卽 12 打之 12 倍, 卽 1728 個.

格呂特. 日 英 Grade. 同法度,見其條.

展開. 代-幾 英 Development. 代數之展開,見展開式條. 表面之展開者,謂單曲面廻轉於一平面上,其曲面之各母線,切於平面,而至一廻轉時,則是等母線,於平面上,畫曲面之展開. 例如圓壔面展開,則爲矩形. 圓錐面展開,則爲扇形.

展開式. 代 英 Expansion. 謂表示羃或除法等之結果. 例如 $(a+b)^3$ 之展開式,爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. 又如 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\ldots\ldots$

容量. 幾 英 Capacity. 謂某器物內部之容積.

容積. 幾 Contents. 同體積,見其條.

級數. 代 英 Progression. 或 Series. 級數之英語 Progression. 與 Series. 其意義稍異,前者謂一連之數,其次第之項,與其前項,以一定之關係而增減者. 後者其義較廣. 前者之中,有算術級數或等差級數,與幾何級數或等比級數,與調和級數,各見其條. 又廣義之級數[Series]者,爲自無限之項,而成之一連之數. 其各項由其前一項或數依一定之法則而成. 若已知其級數之多項,則可知其級數之法則. 有時級數之法則,以公項而定. 級數之成,有種種之方法. 有展開函數而得級數者,則以其函數而命名. 例如對數級數指數級數是也. 級數之絕對值,小於其前項之絕對值,則級數爲遞降. 若大於其前項之絕對值,則級數爲遞昇. 取級數之若干項,因其項數之增加,而其和接近於一定之數,[卽其級數之和]則其級數,謂之收歛級數. 否則謂之發散級數. 級數之總和法[Summation],爲求其級數若干項之和之式. 在收歛級數,則可求至無窮項之和. 今舉二三必要之例如次. 1. 算術級數. 2. 幾何級數. 3. 調和級數,上既述之. 4 循環級數,見其條. 5. 對數級數,爲 $\log(1+y)$ 展開爲 y 之昇羃之級數,卽 $\log(1+y)=M\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots\ldots\right)$. 但 M 爲對數率. 在訥伯爾對數,則等於 1. 6. 指數級數,爲展開指數函數之級數如次.

$$a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{k^nx^n}{1.2\ldots n}+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

但 k 等於 a 之訥伯爾對數. 7. 三角級數,爲展開 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$,……爲 x 昇冪之級數,例如次.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots$$

做得門之定理. 圖 英 Vandermonde's theorem. n 爲任意之正整數, a 及 b 爲任意之値,則 $(a+b)_n=a_n+na_{n-1}b_1+\frac{n(n-1)}{1.2}a_{n-2}b_2+\cdots\cdots+\frac{n!}{r!(n-r)!}a_{n-r}b_r+\cdots\cdots+b_n$

但 $a_n=a(a-1)(a-2)\cdots\cdots$[因數之數爲 n] 今假定此定理其於 n 之某値而眞. 若以 $a+b-n$ 乘其左邊,則爲 $(a+b)_{n+1}$ 亦以 $a+b-n$ 乘其右邊級數之各項而如次排列之.

第一項則 $\{(a-n)+b\}$,

第二項則 $\{(a-n+1)+(b-1)\}$,

次第如此,而第 r 項則爲

$$\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\},$$

然則 $(a+b)_{n+1}=a_n\{(a-n)+b\}$
$+{}_nC_1\cdot a_{n-1}b_1\{(a-n+1)+(b-1)\}$
$+{}_nC_2\cdot a_{n-2}b_2\{(a-n+2)+(b-2)\}+\cdots$
$+{}_nC_{r-1}\cdot a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$
$+{}_nC_r\cdot a_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}$
$+\cdots\cdots+b_n\{a+(b-n)\}$.

而 $a_n\{(a-n)+b\}=a_{n+1}+a_nb_1$,

${}_nC_1\cdot a_{n-1}b_1\{(a-n+1)+(b-1)\}={}_nC_1(a_nb_1+a_{n-1}b_2)$,

${}_nC_{r-1}\cdot a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}={}_nC_{r-1}(a_{n-r+2}b_{r-1}+a_{n-r+1}b_r)$,

${}_nC_r\cdot a_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}={}_nC_r(a_{n-r+1}b_r+a_{n-r}b_{r+1})$,

……………………………

$b_n\{a+(b-n)\}=a_1b_n+b_{n+1}$.

故 $(a+b)_{n+1}=a_{n+1}+(1+{}_nC_1)a_nb_1+\cdots\cdots+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a_{n+1-r}b_r+\cdots\cdots+b_{n+1}$
$=a_{n+1}+{}_{n+1}C_1a_nb_1+\cdots\cdots+{}_{n+1}C_ra_{n+1-r}b_r+\cdots\cdots+b_{n+1}$,

因 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$ 故也. 故此定理於任意之値爲眞,則於比 n 大1之値亦眞. 但 $n=1$ 時爲眞明矣,故 $n=2$ 時亦眞. 同樣次第如此,至於無限,則此定理於 n 一切正整値皆爲眞也. [此證明爲教授 Cayley 所發見].

矩形. 圖 英 Rectangle. 或 Oblong. 謂平行四邊形之各角爲直角者. [平行四邊形其一角爲直角,則他三角皆爲直角,故平行四邊形之一角爲直角,則謂之矩形亦可.] 矩形相鄰之二邊相等,則四邊皆相等,而矩形爲正方形. 等底之矩形比例於高. 等高之矩形比例於底. 而任意二矩形之比,等於其高與底之積之比. 於矩形之平面上取一點,自此點至相對角頂之線上正方形之和,等於至他二角頂線上正方形之和.

扇形. 圖 英 Sector. [of a circle] 謂夾於圓之二半徑與弧之間之部分. 扇形之面積A,等於其弧與半徑之積之半分. 若中心角 n° 爲已知,則可求得扇形之弧之長S. 蓋S等於 π 與半徑之積,而以扇形角度數 n° 與 180° 之比乘之者. 即

$$S=\pi r\frac{n^\circ}{180^\circ} \text{ 及 } A=\pi r^2\frac{n^\circ}{360}.$$

射影. 圖 英 Projection. 一點之於一直線之射影,謂自其點向該直線所引斜線[即射線]之趾. 一直線之於

他直線之射影，謂自其直線上之各點，向直線所引平行射線之趾之軌跡．一點之於一平面之射影，謂自其點向該平面所引射線之趾．某線[直線或曲線]之於一平面之射影，謂自其線上各點向平面所引平行射線之趾之軌跡．若射線爲向直線或平面之垂線，則謂之正射影．[Orthogona projection].

原點． 國 英 Origin. 角之一邊，爲自他邊之位置起，廻轉其頂而成，則不動之邊，爲首線，角之頂點爲原點．又方程式之幾何學的表示，即作曲線圖時，取相交之二直線爲縱橫軸，其交點亦爲原點．

値． 國 英 Value. 如謂式之値，例如 $(2+3)\times4$ 之式之値爲20，即其式算得之結果．或謂某文字之値，例如適合於比例式 $2:3=10:x$ 之値爲15．又有所謂比之値及分數之値等．又價値之値，尙見價値條．

俯角． 日 英 Angle of Depression. 垂直角之一邊爲水平，而他邊向下，則此垂直角，謂之俯角．

馬力． 國 英 Horse power. 爲機械力量之單位，一分時間，將33000磅之物體昇上一呎高之力量，謂之一馬力．

時差． 算 英 Difference in times. 謂某處地方時，[見標準時條]與他處地方時之差．

息票． 算 英 Coupon. 謂附着於公債票之小票，每季截斷此小票，而取換利息者．

徑圓． 國 英 Meridian circle. 謂通過球之兩極之圓．

航海羅盤針． 日 英 Mariner's compass. 見羅盤針條．

粍． 算 英 Millimetre. 美 millimeter. 爲密里米突之省書，謂一米突千分之一．

粎． 算 法 Mètre 爲米突之省書，見米突條．

瓩． 算 法 Kilogramme 爲啓羅格蘭姆之省書，當於格蘭姆之千倍．

埋爾． 算 英 Mile. 爲英美兩國長之單位．一埋爾等於1760碼，即5280呎，約等於我國3里不足．海里即 Nautical mile 有時亦單稱埋爾，見海里條．

畝． 算 我國地積之單位一畝爲60方丈即240方步等於6.144阿爾，又等英0.151827愛克．

哩． 算 英 Mile. 英里埋爾之省書，見埋爾條．

浬． 算 英 Nautical mile. 海里之省書，見海里條．

哥． 算 英 Gross. 格洛斯之省書，見格洛斯條．

振出人． 算 英 Drawer. 日本數辭，即出票人，見出票人條．

借根方． 國 舊譯代數學名，淸初入中國．所謂借根者，謂借一根爲所求之物，與借衰[見數理精蘊]略相似，借根而並言方者，初入算雖只借一根，但根乘根則成平方，根乘平方則成立方，以及屢乘至多乘方，故謂之借根方．其法見數理精蘊．梅瑴成謂即中國之天元，解詳所著赤水遺珍．惟梅氏謂其法西名阿爾熱巴達，或作阿爾熱巴拉[見提要注]譯言東來法，指爲中國天元流入西土．然借根方即代數學，而代數學之英語爲 Algebra. [見代數學條] 是語出自亞剌比亞，譯音近於阿爾熱巴拉．或亞剌

比亞語有東來之義，則據泰西數學史此法源出印度，所謂文章的代數學也．印度之發明此法，在我六朝時，[西曆500年頃]而中國天元之名，宋時始有之，而謂東即中國，似有未合．且日本長澤氏謂Algebra爲二次方程式之義，則無東來之義矣．茲，闕之，以俟後之人詳攷焉．

衰分．國 古數書篇名．以御貴賤稟稅，爲九章之一．衰差也．以差而平分，故曰衰分．

十一畫

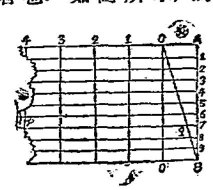
斜邊．國 英 Hypotenuse．見弦條．

斜角．國 英 Oblique angle．謂非直角之角，即銳角或鈍角．

斜高．國 英 Slant height．正圓錐之斜高者，謂自其頂點向底面之周任意之直線．正角錐之斜高者，謂自其頂點向底面之一邊所引之垂線．

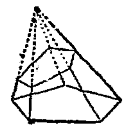
斜線．國 英 Oblique line．或 Oblique．向某直線或平面所作之斜線，謂此直線非某直線或平面之垂線也．即與某直線或平面成斜角之直線也．

斜尺．國 英 Diagonal scale．斜尺者，謂對角線尺．依相似三角形之理，精密定小分線者也．如圖所示，爲定一吋之四十分之一者也．即AO爲一吋四分之一．AB則以水平之平行線十等分之，其分點爲1, 2, 3,……，斯時夾於水平平行線之部分，依相似三角形之理，而爲OA之 $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$,……, $\frac{9}{10}$，明矣．故 pq 之長，爲一吋與其四十分之七也．

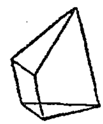


斜稜．國 英 Slant edge．角壔及角錐之斜稜，謂非底邊之稜．

斜角臺．國 英 Truncated-pyramid．角錐以不平行於其底之平面，截去其上部，所餘之部分，謂之斜角臺．



斜角壔．國 英 Oblique prism．謂角壔之兩底面不平行者．斜三角壔，三側稜之長以 l_1, l_2, l_3 表之，而與側稜成直角截口之面積，以B表之，則體積 $V=\frac{1}{3}B(l_1+l_2+l_3)$．



斜角三角形．國 英 Oblique angled triangle．謂三角形其各角皆非直角者．

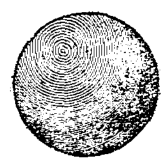
斜三角形．國 英 Scalene triangle．或 Oblique triangle．見三角形條．

斜截口．國 英 Oblique section．謂圓壔與圓錐，以不垂直於其軸之平面截之之截口．或角壔以不垂直於其側稜之平面截之之截口．

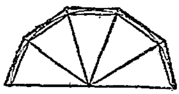
斜截頭三角壔．國 英 Truncated triangular prism．謂斜角壔之底面爲三角形者．

斜截頭角錐．國 英 Truncated pyramid 同斜角臺，見其條．

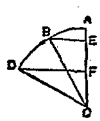
球．國 英 Sphere．謂以球面所成之立體．而自其面上之各點，與其中心之一點，爲等距離．或謂球爲半圓轉以徑爲軸迴所生之立體．自球之中心，至球



面上任意一點之直線，謂之半徑．以任意之平面截球之截口爲圓．自中心等距離之平面截口相等．過中心之平面截口，謂之大圓．凡大圓相等，其半徑等於球之半徑．若將若干邊數之半正多角形，內接於半圓．又將與之相似之半正多角形，外切於同圓．此三圖形，以半圓之徑爲軸而廻轉之，則二個半正多角形所生面積相互之差，又此二個與半圓所生球面之差，可使小於任意之面積．而二個半正多角形所生體積相互之差，又此二個與球之體積之差，可使小於任意之體積．故球之面積及體積，可見爲半正多角形廻轉其徑所生面積及體積之極限．球之面積等於其徑與大圓周之積，又等於四個大圓之面積．球之半徑，以 r 表之，其徑以 d 表之，則面積 $S=4\pi r^2=\pi d^2$．故二個球面積相互之比，等於其半徑或徑之平方之比．若直圓壔外切於球，則圓壔凸面之面積，等於球之面積：球之體積，等於其面積與其半徑之積之三分之一．又等於外圓壔體積三分之一．故體積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$．故任意二球體積之比，等於其半徑或徑之立方之比．

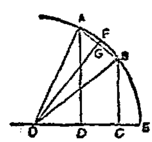


球分． 圖 英 Spherical sector．謂圓之扇形，以過其中心任意之直線爲軸廻轉而成之立體．例如扇形BDC，以過中心C任意之直線AC爲軸而廻轉，則生球分．故扇形至成半圓之極限，則球分爲全球．又BC，CD至相合之極限，則球爲圓錐面．球分之體積，等於爲其底之球帶面積乘其半徑之三分之一．今以BD爲所生球帶之高EF爲 h，半徑爲 r，則球分之體積爲 $\frac{2}{3}\pi r^2 h$．



球帶． 圖 英 Zone. [of a sphere] 球帶，謂球面之夾於平行二平面間之部分．其以平面爲截口之圓周，謂之球帶之底，而其二平面間之距離謂之高．若其平面之一，爲球面之切面，則球帶惟有一底．球可見爲半圓廻轉所生，則其半圓任意之弧畫成球帶．而圓爲弧之極限．球面爲球帶之極限．今將球帶之高爲 h，則其面積爲 $2\pi rh$．

球缺． 圖 英 Spherical segment．球缺者，謂球之夾於平行二平面之部分．其二平行平面之於球之截口，皆爲球缺之底，而其高爲二平行平面間之距離．若平行平面之一，爲球之切面，則球缺爲一底之球缺．球缺之高爲 $2r$，則球缺爲全球．球缺之體積爲 $V=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{\pi}{6}h^3$．茲證之．設ABCD以DC爲軸而廻轉之，則生球面．若 $DC=h$，$DE=h'$，$CE=h''$，$AD=r'$，$BC=r''$，$OE=r$，則(球缺AFBCD)=(球分 OAFB)−(體積AOB)+(臺ABCD)．



而(體積GAFB) $=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{2}{3}\pi\overline{OG}^2 h=\frac{2}{3}\pi h$．

$[r^2-\overline{OG}^2=\overline{AG}^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{h^2+(r'-r'')^2}{4}]$

$=\frac{1}{6}\pi h[(r'-r'')^2+h^2]$．(臺ABCD)

$=\frac{1}{3}\pi h(r'^2+r''^2+r'r'')$. 故(體積AFBCD)
$=\frac{1}{6}\pi h[(r'-r'')^2+h^2]+\frac{1}{3}\pi h\times$
$(r'^2+r''^2+r'r'')=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{\pi}{6}h^3$.

球面. 幾 英 Spherical surface. 謂球之面,見球條.

球面角. 幾 英 Spherical angle. 球面角者,謂球面上相交二大圓其弧間之角. 球面角之測度,同於自其頂[二大圓之交點]所引二大圓之切線間之角之測度. 此角等於二弧之平面間之角. 若球之半徑爲1,則此角以垂直於二弧間之大圓夾於二弧間之部分測度之. 相交二大圓,於其交點作四個球面角,每兩個相等,而相鄰二個之和等於180°. 四個之和,等於360.°

球盤. 幾 英 Spherical segment. 同球缺,見其條.

球狀楔. 幾 英 Spherical wedge 謂球之一部,而以球之月形爲底,以相交徑之二個半圓面爲面者也. 球狀楔之角,同於月形之角. 其體積等於月形面積乘球半徑之三分之一. 故若球狀楔之角爲A°, 半徑爲r, 則體積爲$\pi r^2\times\frac{A°}{90}\times\frac{r}{3}$, 即$\pi r^3\times\frac{A°}{270}$. 球狀楔之角爲360°時,則爲全球.

球狀角錐. 幾 英 Spherical pyramid. 球狀角錐者,謂三個以上之平面,相交於球之中心,所含球之一部. 在是等平面間之球面之一部,爲球狀角錐之底,即一球面多角形. 若球狀角錐之底,爲球之小圓,[球狀角錐其底之多角形爲圓之極限]則球狀角錐,爲球狀圓錐. 球狀角錐或球狀圓錐之體積,等於底面積乘球半徑之積之三分之一.

球狀圓錐. 幾 英 Spherical cone. 見球狀角錐條.

球面圖形. 幾 英 Spherical figure. 謂畫於球面上之圖形.

球面過剩. 幾 三 英 Spherical excess. 謂球面三角形,其三角形之和,超過180°者.

球面三角法. 三 英 Spherical Trigonometry. 球面三角法,爲三角法之一分科,而論球面三角形六部分間之關係,及已知其六部分之三,而求其餘也. 球面三角形三邊及三角,六者之中,已知其三,則可得求其餘,即求得其他一部分也. 惟有一例外,爲二直角三角形,已知二直角及其所對之一邊,則有無數之解答.

球面三角形. 幾 三 英 Spherical triangle. 謂以三個大圓之弧,所圍球面之一部. 此三弧,謂之邊. 其二弧間之角,謂之球面. 三角形之角,二弧之交點,謂之球面三角形之頂. 若球之半徑爲1,則球面三角形之邊,可測度球之中心對之之角. 又球面三角形之角,等於其邊之平面間之角. 又是等之邊及角,得見爲以半徑爲1之圓測度之. 故球面三角形之邊與角,關於共同之單位,容易互相比較之. 故邊與角不必區別論之,故球面三角形之邊與角,皆可定爲小於二直角,即定爲小於180°者. 此限制在相同三弧所圍球面之二部分,必須區別之. 即球面三角形之六部分,若限於皆小於180°者. 則爲比較的小之三角形. 若六部分不設限制,則得定爲

至360°之任意之値,謂之一般球面二角形, [General spherical triangle]. 六部分之二,皆小於90°,或皆大於80°,則此二部分謂之同類. 又其一大於90°,其一小於90°,則謂之異類. 球面三角形,有直角,銳角,鈍角,斜,二等邊,等邊之區別,與平面三角形同. 球面三角形有二個直角者,則謂之二直三角形,有三個直角者,則謂之三直三角形. 三直三角形,爲全球面八分之一,而取之爲多面角測度之單位者也. 二個球面三角形,其一之一角,爲其他一邊[同次序取之]之補角則互謂之極三角形. 球面三角形之一邊等於90°者,謂之象限三角形. 球面三角形性質之最緊要者如次. 1. 最大邊對最大角,最小邊對最小角,中邊對中角,等邊對等角. 若三角相等,則三邊相等,而三角形爲等邊. 而其逆亦眞. 2. 任意之一邊,小於其他二邊之和,而其大於其差. 3. 三角之和,恆大於二直角,而小於六直角. 4. 任意二角之和,大於其第三之補角. 5. 任意二邊之差,小於二直角,而三邊之和,小於四直角. 6. 任意二邊之和,等於二直角者,則其對角之和,亦等於二直角. 而其逆亦眞. 7. 三角皆爲銳角或鈍角或直角者,則三邊皆小於直角,或大於直角,或等於直角. 8. 球面三角形,其一之三部分,各等於其他之三部分[同次序取之]者,則相等. 若一三角形之三部分,各等於其他之三部分,[不同次序取之]則二三角形爲對稱,不能使之相重合,而其面積相等. 球面三角形之面積,等於以求面過剩之與直角之比乘三直三角形之面積,即將三角以度表之爲 A, B, C, 三直三角形之面積爲T,所求之球面三角形之面積爲S,則

$$S=T\times\frac{A+B+C-108^\circ}{80^\circ}\cdots\ \cdots\ \cdots(1).$$

若定直角爲單位,則此式爲

$$S=T\times(A+B+C-2)\cdots\ \cdots\ \cdots(2).$$

但(1)式實用尤多.

球面多角形. 幾 目 英 Spherical polygon. 謂以三個或多個之大圓弧所圍球面之一部.

連線. 幾 英 Joins. 謂連結二點之直線.

連比例. 算 代 英 Continued proportion. $a, b, c, d,$…………爲 $a:b=b:c=c:d=$………, 則謂之連比例, 而 $a, b, c, d,$……成連比例, 則 $a:c=a^2:b^2$, $a:d=a^3:b^3$, 又等比級數之各項, 成連比例.

連分數. 代 英 Continued fraction.

$$\cfrac{a}{b\pm\cfrac{c}{d\pm\cfrac{e}{f\pm\cdots}}}$$

之形之分數,謂之連分數. 通例以 $\frac{a}{b\pm}\,\frac{c}{d\pm}\,\frac{e}{f\pm}\cdots\cdots$ 記之. 今簡單就 $\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cdots}}}$ 之連分數論之, 謂之最簡連分數. I. 已約項之任意眞分數, $\frac{b}{a}$ 得變爲連分數. 將 b 除 a 之商爲 p, 剩餘爲 c, 則 $\frac{b}{a}=\cfrac{1}{\frac{a}{b}}=\cfrac{1}{p+\frac{c}{b}}$, 次以 c 除 b 之商爲 q, 剩餘爲 d, 則 $\cfrac{1}{p+\frac{c}{b}}=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{\frac{b}{c}}}=$

$\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{q+\dfrac{d}{c}}}$, 故 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}+\cdots\cdots}}$

即 $\frac{1}{p+}\frac{1}{q+}\frac{1}{r+}\cdots\cdots$, 此運算之各階級,同於求$a$及$b$之最大公約數,而$a$及$b$爲互素數,故最終達於爲1之剩餘,而連分數乃止. $p, q, r\cdots$當皆爲正. II. 取$p, q, r, \cdots$之商之至一個,二個,三個,......所得之分數, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p+}\frac{1}{q}$, $\frac{1}{p+}\frac{1}{q+}\frac{1}{r}$, ...簡單之各爲 $\frac{1}{p}$, $\frac{q}{pq+1}$, $\frac{qr+1}{(pq+1)r+p}$, 謂之第一,第二,第三,......,近數. III. 累次之近數,每隔一取之,則當皆大或皆小於連分數之眞值. 今將x爲 $\frac{1}{p+}\frac{1}{q+}\frac{1}{r+}\cdots\cdots$之值,則因$p, q, r, \cdots\cdots$爲正整數,故 $p<q+\frac{1}{q+}\frac{1}{r+}\cdots\cdots$, 故 $\frac{1}{p}>\frac{1}{p+}\frac{1}{q+}\frac{1}{r+}\cdots\cdots$, 即 $\frac{1}{p}<x$, 又 $q<q+\frac{1}{r+}\cdots$, $\therefore\ \frac{1}{q}>\frac{1}{q+}\frac{1}{r+}\cdots\cdots$ $\therefore\ \frac{1}{p+}\frac{1}{q+}<\frac{1}{p+}\frac{1}{q+}\frac{1}{r+}\cdots\cdots$,即 $\frac{1}{p+}\frac{1}{q}<x$. 餘倣此.

連鎖法. 算 英 Chain rule. 夫 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$, 今欲使分數$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$之最簡,而各爲$\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$,則$\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$固非爲$\frac{m}{r}$,然其值亦不可不等於$\frac{a}{d}$,以是等分數,表比之值,則得如次述之. 即「甲乙之比,乙丙之比,丙丁之比,是等連鎖之比之積,等於甲丁之比,即首末二項之比.」又得如次述之. 即「甲乙之比,乙丙之比,丙丁之比,丁甲之比,是等連鎖之比之積,等於1.」又知甲乙之比$\frac{a}{b}$,乙丙之比$\frac{c}{d}$,丙丁之比$\frac{e}{f}$,又知丁甲之比之一項,而欲求其他一項. 例如丁爲g欲求其相對之甲之值x,依前述$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{x}=1$. 故$x=\frac{aceg}{bdf}$, 如圖式記之. 即自甲而乙,自乙而丙,自丙而丁,自丁而甲,恰如以鏈鎖繫之者. 則將所題連鎖比之前項,[分子]悉列於左,其後項[分母]悉列於右,而左右

甲 a —— b 乙
乙 c —— d 丙
丙 e —— f 丁
丁 g —— x 甲

各積之比爲1,即左右各積相等. 故以x以外右數之積除左數之積,則得x. 是爲連鎖法問題一般之解法. 如此圖式記之而解者,謂之以連鎖法解之. 然在連鎖法之實用問題. 而所題之各數,多以倍數之關係表之者. 例如有甲乙丙丁四數,甲之a倍,等於乙之b倍,乙之c倍,等於丙之d倍,丙之e倍,等於丁之f倍. 問丁之g倍,等於甲之何倍. 今欲解之,因甲之a倍等於乙之b倍,故甲乙之比,爲其逆之$b:a$,餘倣此. 故將所求甲之倍數

甲 b —— a 乙
乙 d —— c 丙
丙 f —— e 丁
丁 x —— g 甲

爲x,則如左,故$x=\frac{aceg}{bdf}$如斯皆以倍數之關係表之者,不必改書爲比之關係,直就是等倍數,而書其連鎖式可也. 斯時交換式之左右而算出x,與由比之關係算出者無異. 此種題所立之連鎖式如次.

甲 a——b 乙
乙 c——d 丙
丙 e——f 丁
丁 g——x 甲

故 $x=\frac{aceg}{bdf}$ 今再將以數字所設之問題示例如次. [例1]有工匠四人,甲得拾五圓時,乙得拾貳圓,乙得貳拾圓時丙得拾捌圓,丙得四圓時,丁得五圓,問甲得百圓時,丁得幾圓. [解]將丁所得數爲x圓,而本題所設之數,乃以各人所得之比之關係表之者. 但非比之最簡項,而爲實數值. x亦然,故定連鎖式如左.

甲 15——12 乙
乙 20——18 丙
丙 4——5 丁
丁 x——100 甲

$x=\frac{12\times18\times5\times100}{15\times20\times4}$, $=$ 90圓.

[例2]茶3斤與咖啡四斤價相等,咖啡六斤與白糖二十斤價相等,白糖十五斤與米一斗二升價相等. 問米六斗四升與茶幾何斤價相等. [解]茶3斤與咖啡四斤等價,則茶與咖啡之價之比,非4與3,而爲其反比之3與4,此比之關係也. 又俱對於一斤之價,則茶之3倍,爲咖啡之4倍,此倍數之關係也. 以下準此. 故由此關係之連鎖式[x爲茶之斤數]如左. 而由倍數關係之連鎖式如次.

茶 4——3 咖
咖 20——6 糖
糖 12——15 米
米 x——64 茶

茶 3——4 咖
咖 6——20 糖
糖 15——12 米
米 64——x 茶

$x=\frac{3\times6\times15\times64}{4\times20\times12}=18^{斤}$.

[例3]有五數,甲乙二數之比,如三與二,乙之四倍,等於丙之五倍,丙之三分之一,等於丁之五分之一,丁爲六,則戊爲七,問甲爲九時,戊如何.

[解]由各數比之關係所立連鎖式. [x爲戊之數]

甲 3——2 乙
乙 5——4 丙
丙 $\frac{1}{5}$——$\frac{1}{3}$ 丁
丁 6——7 戊
戊 x——9 甲

又由各數倍數之關係所立連鎖式.

甲 2——3 乙
乙 4——5 丙
丙 $\frac{1}{3}$——$\frac{1}{5}$ 丁
丁 7——6 戊
戊 9——x 甲

左右x之値相同,左式甲爲9時,則戊爲x,故右式戊之9倍,爲甲之x倍,即

$$x=\frac{2\times4\times\frac{1}{3}\times7\times9}{3\times5\times\frac{1}{5}\times6}=9\frac{1}{3}.$$

[注意]故凡言甲之如何,等於乙之如何,乙之如何,等於丙之如何者,不能即仍其次序而立連鎖式,必皆以比之關係,或皆以倍數之關係表之. 比與倍數,不可混同也. 未知項x,不必列於式之最下部,列於中間亦可.

連乘積. 算 代 英 Continued product. 第一數以第二數乘之,其積又以第三數乘之,謂之三數之連乘積,四數五數之連乘積,亦準此.

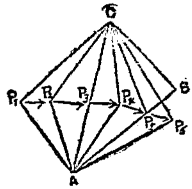
連結線. 幾 英 Join. 同連線,見其條.

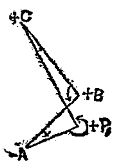
連續量. 解 英 Continuous quantity. 對於不連續量[每個之物]而言. 例如物之長,時間,角度等,相連續而非每個集合者.

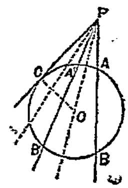
連續的. 解 英 Continuous. 謂相連續者.

連續之定則. 解 英 Law of continuity. 在幾何學則謂證明n邊多角形各內

角之和等於$2(n-2)$直角之定理,通例就凸多角形證明之,然就凹多角形亦眞.例如此定理就凸多角形 P_1ABC 爲眞,若 P_1 移至P_2,則此定理於多角形P_2ABC亦眞. 若P_2移至P_3 則此定理於 P_3ABC [可視爲P_3爲平角之四邊形] 亦眞. [卽就三角形ABC觀之亦眞] 若 P_3 移至P_4,則此定理於凹多角形 P_4ABC 亦眞. 若 P_4 移至 P_5, 則 P_5ABC 之圖形,可視爲$B\hat{A}P_5=0$之四邊形.而此定理亦眞. 若P_5移至P_6, 則 P_6ABC 爲交截四邊形. 雖通常意義所謂內角者不合,然尙能見此定理之眞. 角A因已通過爲0之值,故爲負,而 $A\hat{P}_6C$ 謂之內角,在初學雖不無疑義,然以P_1, P_2, P_3, P_4 爲相連續者觀之,則亦無差異,而 $\hat{A}$(負)$+\hat{B}+\hat{C}+P_6$(凹角)$=4$直角也. 此連續定則,在數學最爲重要. 玆僅以幾何學一例示之耳. 幾何學量之連續,概括言之,即在一圖形所證明之定理,其已知要件連續之,則對於一般圖形爲連續,但須加入零與負之値耳, 前圖爲多角形P_1ABC內角之和爲四直角,其P_1漸向右移,而生變化,然稍變其圖形,而圖形所謂內角者未變,此定理之眞,固不待言,至P越邊AB而移,若注意角之符號,及擴張所謂內角之意義,即已知之要件連續之,則此定理亦可連續也. 再舉一例以明連續之理. 自圓外一點P,引圓之二割線PAB, PA′B′, 及切線PC,則矩形 $PA.PB=PA'.PB'=\overline{PO}^2-\overline{OC}^2$,即爲一定,[甲]. 但O爲圓之中心. 又矩形 $PA \cdot PB=\overline{PC}^2=\overline{PO}^2-\overline{OC}^2$ [乙],此二定理自外面觀之似爲各別之定理,然由連續之定則考之,則全歸於同一,何也, PA′B′ 以P爲樞而廻轉之,A′ 及 B′ 漸相近,終至A′與B′相合時,則PA′B′爲切線PC故也,







第一分面. 日 英 First quadrant. 見分面條.

第一象限. 日 英 First quadrant. 同第一分面,見分面條.

第二分面. 日 英 Second quadrant. 見分面條.

第二象限. 日 英 Second quadrant. 同第二分面,見分面條.

第三分面. 日 英 Third quadrant. 見分面條.

第三象限. 日 英 Third quadrant. 同第三分面,見分面條.

第四分面. 日 英 Fourth quadrant. 見分面條.

第四象限. 日 英 Fourth quadrant. 同第四分面,見分面條.

第利安問題. 假 英 Delian problem. 此問題爲於已知二正數之間, 插入二個比例中項, 即 $a:b=b:c=c:d=1/\rho$, 則 $b=\rho a$, $c=\rho^2 a$, $d=\rho^3 a$, 而 $d/a=\rho^3$

$\therefore\ \rho=\sqrt[3]{(d/a)},\ b=a\rho=a\sqrt[3]{(d/a)}=\sqrt[3]{(a^2d)},$
$c=a\rho^2=a\{\sqrt[3]{(d/a)}\}^2=\sqrt[3]{(ad^2)}.$

商. 【算】【代】 英 Quotient. 謂以某數除他數之結果. 例如 $54\div6=9$, 故 9 爲以 6 除 54 之商, 又 $(a^3+x^3)\div(a+x)=a^2-ax+x^2$, 故 a^2-ax+x^2 爲以 $a+x$ 除 a^3+x^3 之商.

商業算術. 【商】 英 Commercial Arithmetic. 或 Business Arithmetic. 將普通算術數之計算法應用於商業上之計算也.

商業折扣. 【算】 英 Commercial discount. 或 Trade discount. 同銀行折扣, 見其條.

商業公司. 【算】 英 Commercial partnership and companies. 見公司條.

商業割引. 【算】 英 Commercial discount. 日本數辭. 卽商業折扣, 見其條.

商買割引. 【算】 英 Trade discount. 日本數辭. 卽商業折扣, 見其條.

商事會社. 【算】 英 Commercial. partnership and companies. 日本數辭. 卽商業公司, 見其條.

商功. 【算】 古數書篇名, 以御功程積實, 爲九章之一. 商, 度也. 度其功庸. 故曰商功.

被加數. 【算】【代】 英 Summand. 謂以之行加法之各數, 在減法乘法等, 有被減數與減數被乘數與乘數之區別. 而加法則不然, 其相加之各數, 皆被加數也. Summand 本爲德語. 近來英文亦用之 [Fisher's Algebra].

被減數. 【算】【代】 英 Minuend. 謂自此數減他數之數.

被乘數. 【算】【代】 英 Multiplicand. 謂被他數乘之之數.

被除數. 【算】【代】 英 Dividend. 謂被他數除之之數.

被開方數. 【算】【代】 英 Radicand. 將 n 乘冪爲 a 之數, 謂之 a 之 n 乘根. 以 $\sqrt[n]{a}$ 表之. 此 a 謂之被開方數, n 爲根之次數, 謂之根指數.

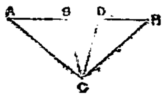
被保人. 【算】 英 Assured. 謂生命保險之被保險者.

被保險者. 【算】 英 Insured. 向保險公司, 立保險契約. 而付保險費之人. 在生命保險, 則謂之被保人.

基. 【算】 英 Kilo. 啓羅之省書, 見啓羅條.

基線. 【三】 英 Base line. 基線者, 謂三角測量爲基礎之線, 而爲最當精密測量之線也. 三角測量之精粗, 全關於基線測量之精粗. 基線測量所需之改正法, 略如次. (1) 測定之基線, 非成水平時, 化之爲水平距離法. B 爲斜距離, b 爲對於此之水平距離, θ 爲交角, 則 $b=\mathrm{B}\cos\theta$. 但 θ 爲甚小之角. 故將 θ 以分計之, 則 $\mathrm{B}-b=\mathrm{B}(1-\cos\theta)=2\mathrm{B}\sin^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}\theta^2\sin1'=\frac{\sin1'}{2}\theta^2\mathrm{B}$, 卽 $\mathrm{B}-b=0.0000004231\times\theta^2\mathrm{B}$. 故用對數而爲 $\log(\mathrm{B}-b)=\overline{8}.626422+2\log\theta+\log\mathrm{B}$. (2) 基線測於地上者, 化之爲中等海水面上之基線法. 將 r 爲對於中等海水面所引基線 b 之地球半徑, $r+a$ 爲對於地上所引基線 B 之地球半徑, 則 $\mathrm{B}-b=\mathrm{B}-\mathrm{B}\frac{r}{r+a}=\mathrm{B}\left(\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\cdots\right)$. 但 r 比較 a 甚大, 故此級數可只取第一項, 而棄其餘. 故 $\mathrm{B}-b=\frac{\mathrm{B}a}{r}$. 若地上基線非成水平, 則 $r+a$ 爲沿基線之平均値可也. (3) 因有障礙物如河川沼澤

等,不能直接測定者. AH爲全基線,BD爲因障礙物不能直接測定之部分. 乃選點C,爲自此點得見點A,B,D,H者. 次於此點



C,精密測得角ACD,以α表之. 又測得角ACH,以β表之. 又基線AB,以a表之. 而DH以b表之. 則BD之值,可自次之算式求得之. 將補助未知數[角]爲ϕ,則

$$\tan^2\phi=\frac{4ab\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}{(a-b)^2\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)},$$

$$BD=-\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{2\cos\phi}.$$

(4) 測定基線之部分a,b非在同一直線上,而殆成180°之角者. 則將此角與180°之差,以分計之,而以θ表之. 則因θ爲甚小角,故$\cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta^2$,而基線之眞長爲

$$a+b-\frac{\sin^2 1'}{2}\cdot\frac{ab\theta^2}{a+b}.$$

$$=a+b-0.00000004231\frac{ab\theta^2}{a+b}.$$

基數. 【算】 英 Simple number. 謂一二三四五六七八九之九個數.

基本之數. 【算】 英 Cardinal number. 謂一二三四五六七八九十十一十二十三…之數,對於第一第二第三……而言.

基本定則. 【算】【代】 英 Fundamental law. 謂運算根本之定則,卽結合定則,交換定則,配分定則,指數定則之四者. (1) 組合定則如次. 對於加法則$a+b+c=a+(b+c)$, $a+b+c+d=a+b+(c+d)=a+(b+c+d)=a+(b+c)+d$. 卽三數以上之和,其加之次序,無論如何,分爲二羣以上亦無異. 此理對於減法亦眞,又對於乘法,則$abcd=a(bcd)=a(bc)d=ab(cd)$. 卽三數以上之積,其乘之次序,無論如何,分爲二羣以上亦無異. 此理對於除法亦眞. (2) 交換定則. 對於加法,則$a+b=b+a$, $a+b+c+d=b+a+d+c=d+c+b+a=\ldots$,卽二數以上之和,無論取如何之次序亦無異. 此理對於減法亦眞. [但在算術,則當爲能施減法者.] 對於乘法,則$ab=ba$, $abc=acb=bca=bac=\ldots$,卽二數以上之積,其因數無論取如何之次序亦無異. 此理對於除法亦眞. (3) 配分定則$(b+c-d)a=ab+ac-ad$,卽以一項式乘多項式之積,爲一項式乘多項式各項之積之代數和. 此理對於除法亦眞. (4) 指數定則. 無論n爲正數,負數整數,分數,皆爲$a^m\times a^n=a^{m+n}$.

基本單位. 【數】 英 Standard unit.. 見單位條.

組合. 【代】 英 Combination. 自相異n個物,選r個物相異之組之方法,謂之自n個物,每取r個之組合. 例如自a,b,c,d四個物,每取三個之組合,爲abc, abd, acd, bcd. 自n個物每取r個組合之數,以${}_nC_r$表之. (I) 求${}_nC_r$之法如次. 將相異n個物,以$a,b,c,\ldots$表之. 而於n個物,每取r個之組合,其含特別一物之數,等於自$n-1$個物每取$r-1$個組合之數. 故取r個物組合之全數,而各字母因皆含${}_{n-1}C_{r-1}$次. 故字母之總數爲$n\times{}_{n-1}C_{r-1}$. 但各組合有r個字母,故字母之總數,又爲$r\times{}_nC_r$ 卽$r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$. 上之關係$r\neq n$,對於$n$及$r$一切値爲眞. 故如次.

$$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2},$$
$$(r-2)\times{}_{n-2}C_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}C_{r-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$2\times{}_{n-r+2}C_2=(n-r+2)_{n-r+1}C_1,$$

又 ${}_{n-r+1}C_1=n-r+1$.

故將上各式兩邊相乘,而約去其公因數,則

$$r!\times{}_nC_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1),$$

即 $${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!},\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

上式之分母與分子,以 $(n-r)!$ 乘之,

則 $${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1).$$

上式又可如次得之. 即於 n 個物每取 r 之組合,以其各組而作其序列,則為 $r!$. 故 ${}_nP_r=r!\times{}_nC_r$. 由此可得(2)式,若(2)式 $r=n$ 時,欲使其眞,則當定為 $0!=1$. 蓋 ${}_nC_n=1$ 故也. 又於 $n!=n\times(n-1)!$ 使 $n=1$,可得 $0!=1$. (II) n 個物每取 r 個組合之數,等於 n 個物每取 $n-r$ 個物組合之數,蓋自 n 個物取相異 r 個物,則易知其所餘亦為相異 $n-r$ 個物. 然由解析的而比較 ${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ 及 ${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 亦可知 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ 也. (III) 求 ${}_nC_r$ 之最大值,因 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}$, 故 $n-r+1\gtreqless r$. 因而 ${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{n-1}$. 即 $r\lesseqgtr\frac{1}{2}(n+1)$, 因而 ${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{n-1}$. 故 n 個物每取 r 個物組合之數,在 r 小於 $\frac{1}{2}(n+1)$ 時,因 r 之增而增. 故 n 為偶數,則 ${}_nC_r$ 在 $r=\frac{n}{2}$ 時為最大. 又 n 為奇數,則 $r\leqq\frac{1}{2}(n+1)$ 因而 ${}_nC_r\leqq{}_nC_{r-1}$, 而 $r=\frac{1}{2}(n+1)$, 則 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$. 故 n 為奇數,則 ${}_nC_r$ 無最大值. 而 ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}={}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$. 此二者大於 ${}_nC_r$ 之 r 為他數之各值.

組合法. 幾 英 Synthesis method of. 組合法為解析法之逆,自公理,定義,及已知之定理,推論而得結論之推理法也. 初等幾何學之推理法,多為組合法在組合法,則由特別者推及於普通者. 在解析法,則由普通者推及於特別者. 參看解析法條.

組合除法. 代 英 Synthetic division 組合除法係賀蘭[Horner]氏之發明,如次, $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\cdots\cdots$ 以 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\cdots\cdots$ 除之,其商為 $Ax^{m-n}+A_1x^{m-n-1}A_2x^{m-n-2}+A_3x^{m-n-3}+\cdots\cdots$ 組合除法者,為決定 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 之方法也. 夫商乘除數,則得被除數. 而此運算以分離係數法行之,則如次.

$$\begin{array}{rrrrr}
A+ & A_1+ & A_2+ & A_3+ & A_4+\cdots\cdots \\
1+ & a_1+ & a_2+ & a_3+ & a_4+\cdots\cdots \\
\hline
A+ & A_1+ & A_2+ & A_3+ & A_4+\cdots\cdots \\
 & a_1A+ & a_1A_1+ & a_1A_2+ & a_1A_3+\cdots\cdots \\
 & & a_2A+ & a_2A_1+ & a_2A_2+\cdots\cdots \\
 & & & a_3A+ & a_3A_1+\cdots\cdots \\
 & & & & a_4A+\cdots\cdots \\
 & & & & \cdots\cdots \\
\hline
A+ & B+ & C+ & D+ & E+\cdots\cdots
\end{array}$$

其末列各項可次第將二橫線間之各行相加而得之. 夫知 $A, B, C, D, \cdots\cdots$ 而求 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 對於此目的,而行上之逆運算,則如次.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & A+ & B+ & C+ & D+ & E+\cdots \\
-a_1 & & -a_1A & -a_1A_1 & -a_1A_2 & -a_1A_3-\cdots \\
-a_2 & & & -a_2A & -a_2A_1 & -a_2A_2-\cdots \\
-a_3 & & & & -a_3A & -a_3A_1-\cdots \\
-a_4 & & & & & -a_4A-\cdots \\
 & & & & & \cdots\cdots \\
\hline
 & A+ & A_1+ & A_2+ & A_3+ & A_4+\cdots
\end{array}$$

前運算之縱行,與後運算之縱行,結局雖同,而後運算對於其目的,更爲便利也. 例如前運算之第四縱行爲 $A_3+a_1A_2+a_2A_1+a_3A=D$, 而後運算之第四縱行,爲 $D-a_1A_2-a_2A_1-a_3A=A_3$, 故其法如次. (1)除數之第一項,有數字係數時,則當以此係數除被除數與除數之各係數,而如此所得係數,如次書之. (2)將被除數之係數,以適當之符號,書爲一橫列,[缺係數則補以0]而得 $A+B+C+D+\cdots\cdots$ 之橫列. (3)於此係數之左引縱線,將除數之係數變符號於縱線之左,書爲一縱行,[缺項亦補以0]而得 $-a_1-a_2-a_3-\cdots\cdots$, 且除數第一項之係數1,則舍之不用. (4)將此縱行之各係數,乘被除數之第一係數,其結果書於第一斜行,此卽 $-a_1A-a_2A-a_3A-\cdots$ 而其第一項,置於B之下. (5)將縱線右之第二行加之,而得 $B=a_1A-A_1$, 此卽商之第二項係數. (6)將如此所得之係數,乘縱線左之各係數,而得第二斜行 $-a_1A_1-a_2A_1-a_3A_1-\cdots\cdots$, 其第一項置於C之下. (7)加縱線之第三行,而得商之第三項係數,卽 $C-a_1A_1-a_2A=A_2$. (8)將是等之運算,至所求之項,連續行之. 例如 $4x^4+3x^2-3x+1$, 以 x^2-2x+3 除之.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4+0+3\ \ -3\ \ +1 \\
2 & \quad 8+16+14-26-92 \\
-3 & \qquad -12-24-21+39+138 \\
\hline
 & 4+8+7\ \ -13-46-53
\end{array}
$$

故商爲 $4x^2+8x+7-13x^{-1}-46x^{-2}-53x^{-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 若商止於7,則棄去斜行 -26, $+39$, 及以後之斜行,而結果爲 $4x^2+8x+7-\dfrac{13x+20}{x^2-2x+3}$.

假設. 醫 英 Hypothesis. 謂假設之事,卽「甲爲乙則丙爲丁」之命題. 其「甲爲乙」爲假設也. 例如三角形之二邊相等則對之之角相等之命題,其引線之文句,爲假設也.

假設法. 醫 英 Rule of positions. 算術上解問題之一種方法也. 有時謂此法爲僞設法[False suppositions]. 蓋先設虛僞之數,而後發見眞答故也. 又謂之試差法[Rule of trial and errors]. 試設其數,以比較其差,而發見眞答故也. 其能得問題之眞解答者,則其問題當爲一次方程式,若問題爲二次方程式以上,則不過得其近似之結果而已. 然假設之次數愈多,則近似之度愈精密. 此法於求高次方程式之根適用之. 又於解指數方程式,及一般超越方程式,亦適用之. 又開數之高次根,亦適用之. 假設法分單複二種. 單假設法,其問題之答,與假設之數,成比例者. 其法如次. 假定任意之數,施之以問題中之各運算,而所得之結果,與眞結果之比等於假定數,與所求數之比. 例如問於如何之數,增其二分之一,三分之一,四分之一,則爲125. [解]先假定本數爲72,斯時 $72+36+24+18=150$ 依法則而

$$150:125=72:x,\quad \therefore x=60.$$

是爲所求之數. 又複假設法者,爲問題之答,與假設之數,不成比例者. 其法如次. 取適宜之任意二數,各依問題之要件運算之,斯時二結果之差,與假定數之差之比,等於眞結果,與推求結果之一之差,與對此之假

定數所當改正之數之比. 推求之結果大於問題之結果, 則當加改正數, 小則當減. 例如問於如何之數, 以6乘之加18於其積, 以9除其和, 則商爲20.

第一假設	第二假設	斯時依法則而
18	30	
6	6	$22-14:30$
108	180	
18	18	$-18=20+14$
9)126	9)199	
14	22	$:x \therefore x=9$

故眞結果爲 $18+9=27$.

又 $8:12=22-20:x \quad \therefore \quad x=3$.

故眞結果爲 $30-3=27$.

假定. 數 英 Assumption. 謂假定之事. 有時同於假設, 見假設條.

假數. 代 英 Mantissa. 謂對數之小數部, 見對數條.

假分數. 算 英 Improper fraction. 謂分數之分子, 不小於分母者. 例如 $\frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{7}$ 等.

密達. 算 英 Metre. 美 Meter. 卽米突, 見米突條.

密里米突 [粍]. 算 英 Millimetre. 美 Millimeter. 謂一米突千分之一, 等於我0尺.003125.

密里立突 [竓]. 算 英 Millilitre. 美 Milliliter. 謂一立突千分之一, 等於我0升.000965746.

密里格蘭姆 [瓱]. 算 英 Milligramme. 美 Milligram. 謂一格蘭姆之千分之一, 等於我0.兩000268089.

密里亞米突 [粨]. 算 英 Myriametre. 美 Myriameter. 謂一米突之一萬倍, 等於我31250尺.

敢羅 [基]. 算 英 Kilo. 同敢羅格蘭姆, 見其條.

敢羅米突 [粁]. 算 英 Kilometre. 美 Kilometer. 謂一米突之千倍, 等於我3125尺. 卽我1里又1325尺.

敢羅立突 [竏]. 算 英 Kilolitre. 美 Kiloliter. 謂一立突之千倍, 等於我965升.746.

敢羅格蘭姆 [瓩]. 算 英 Kilogramme. 美 Kilogram. 謂一格蘭姆之千倍, 等於我26兩.8089.

常數. 數 英 Constant. 常數對於變數而言, 而其值爲一定不變者. 例如三角形之底邊, 爲圓之一定之弦而頂點移動於其弧上, 則三角形之面積消長變易, 故謂之變數. 而頂角爲一定不變, 則爲常數.

常衡. 算 英 Avoirdupois weight. 英美通常之物之重量單位如次.

16 打蘭 (Drams)	=	1 溫司 (Ounce),
16 溫司	=	1 磅 (pound),
14 磅	=	1 斯頓 (Stone),
28 磅	=	1 夸爾 (Quarter),
4 夸爾	=	1 擔 (Hundred weight),
20 擔	=	1 噸 (Ton).

常用對數. 代 英 Common logarithm. 以謂10爲底之對數, 係布利格司 [Briggs] 之發見, 見對數條.

常用記數法. 算 英 Common scale of notation. 爲十進法之記數法, 同亞剌比亞記數法, 見其條.

部分積. 算 代 英 Partial product. 例如以4乘32, 其4乘一位之數2之8, 及4乘十位之數3之120, 爲部分積. 又如23乘467, 其一位之數3乘得之1401, 及十位之數2乘得之9340, 爲部

分積. 又如以 c 乘 $a+b$, 則爲 $ac+bc$, 其 ac 及 bc 爲部分積. 又如 $x-y$ 乘 x^2+xy+y^2, 其 x 乘被乘數之 $x^3+x^2y+xy^2$, 及 $-y$ 乘被乘數之 $-x^2y-xy^2-y^3$, 爲部分積.

部分商. 算 代 英 Partial quotient.

例如以5除325, 先得十位之商60, 次得一位之商5, 其60, 與5爲部分商.

```
5)325(65
  30
  ──
   25
   25
   ──
```

又如以 $x+1$ 除 x^2+3x+2, 則得商 $x+2$, 其商之各項 x 與2, 爲部分商..

```
x+1)x²+3x+2(x+2
    x²+ x
    ──────
        2x+2
        2x+2
        ────
```

部分分數. 代 英 Partial fraction. 求若干分數, 而其和等於已知之一分數, 且由此得低次之分母. 此若干分數, 謂之部分分數, 或謂之散分數, 即

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots\cdots}\equiv\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots\cdots,$$

但 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, 爲 n 個因數之積, 而 $F(x)$ 爲不高於 x 之 $n-1$ 次之代數式, $A,B,C,\ldots\ldots$, 爲不含 x 者. 此恆等式之兩邊, 以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 乘之, 則 $F(x)=A(x-b)(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+B(x-a)(x-c)\ldots\ldots+C(x-a)(x-b)\ldots\ldots\ldots$, 此式無論 x 之値如何恆眞, 故 $x=a$, 則

$$F(a)\equiv A(a-b)(a-c)\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

故　$A=F(a)/(a-b)(a-c)\ldots\ldots\ldots\ldots,$

同樣 $B=F(b)/(b-a)(b-c)\ldots\ldots\ldots\ldots,$

$C, D,\ldots\ldots$ 亦可同樣得之, 例如

$$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2},$$ 則

$3x+7\equiv A(x-2)+B(x-1).$

若　$x=1$, 則 $A=-10.$

若　$x=2$, 則 $B=13.$

故 $$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}\equiv\frac{13}{x-2}-\frac{10}{x-1}.$$

又分母含某因數之羃及含二次以上之因數者, 則如次. 即

$$\frac{8-x}{(2-x^2)(1+x)}\equiv\frac{A}{(2-x)^2}+\frac{B}{2-x}+\frac{C}{1+x},$$

自此得 $A=2, B=1, C=1.$

又 $$\frac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}\equiv\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+C},$$

自此得 $A=\frac{1}{5}, B=\frac{4}{5}, C=-\frac{3}{5}.$

部分被除數. 算 代 英 Partial dividend. 謂除法各次被除數之部分. 例如以41除6847, 右之運算, 各次之被除數68, 274, 287, 即 6800, 2740, 287, 爲部分被除數.

```
41)6847(167
   41
   ───
   274
   246
   ───
    287
    287
    ───
```

累乘法. 算 代 英 Involution. 謂求已知數任意乘方之運算, 乃開方法之逆也. 累乘法可直接累次行乘法求之, 然恆有用二項例式公式求之者.

累乘積. 算 英 Continued product. 同連乘積, 見其條.

累次除法. 算 英 Successive division.

例如以12除3456, 因 $12=4\times3$, 故先以4除之, 次以3除之.

```
4|3456
3| 864
   288
```

[參看因數除法]

累次消去法. 代 英 Method of successive elimination. 三個以上之方程式, 含三個以上之未知數者, 累次消去其未知數之解法, 謂之累次消去法. 例如三個方程式.

$$ax+by+cz=d\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$
$$a'x+b'y+c'z=d'\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$
$$a''x+b''y+c''z=d''\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

其第一以c'乘之,第二以c乘之,而行減法,則

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c\ \cdots(4).$$

又第一方程式以c''乘之,第三方程式以c乘之,而行減法,則

$$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=dc''-d''c\cdots(5).$$

自此(4)與(5)又以同法行之,而

$$x=\frac{-(bc'-b'c)(dc''-d''c)}{(ac'-a'c)(bc''-b''c)},$$
$$\frac{+(dc'-d'c)(bc''-b''c)}{-(bc'-b'c)(ac''-a''c)}.$$

既知件. 【數】 英 Datum. 同已知件,見其條.

既知項. 【代】 英 Absolute term. 同已知項,見其條.

既知數. 【代】 英 Known number. 同已知數,見其條.

既約項. 【算】 【代】 英 Lowest term. 同已約項,見其條.

動徑. 【解】 【三】 英 Radius vector. 例如謂點P沿某線而運動,自一定點[原點]至此點之距離. 在三角法,則點P沿圓周運動而直線OP,自OA之位置起,反對時針方向迴繞O,而畫角,則OP謂之動徑.

動力學. 【數】 英 Kinetics. 爲力學之一部分. 論質點或物體上動力之關係,及因力而生運動之變化者也.

動搖級數. 【代】 英 Oscillating series. 同中間級數,見其條.

項. 【幾】 英 Vertex. (1)角之頂,謂角之二邊相交之點. (2)謂二等邊三角形,對於其底之角. (3)多角形之角頂,謂其多角形各角之頂. (4)圓錐或角錐之頂,謂圓錐或角錐之尖頭. (5)特取三角形之一邊爲底,其對之之角頂,有謂爲三角形之頂,或謂爲頂點者.

項角. 【幾】 英 Vertical angle. (1)三角形之頂角,謂對於底邊之角. (2)圓錐之頂角,謂對其底面之立體角.

項點. 【幾】 英 Vertex. 同頂,見其條.

混數. 【算】 英 Mixed number. 謂自整數與分數而成之數. 例如$2\frac{3}{5}$,或$a+\frac{c}{b}$. 混數又謂之帶分數.

混合法. 【算】 英 Alligation. 或Mixture. 混合法者,爲混合同種類而不同品質之物之法. 其混合之法有二. (1)知各物分量與價,而求其混合物之價,有時謂之混和法,[Alligation, medial]. (2)知各物之價,欲使混合物成所設之價,而求各取幾何分量,有時謂之和較法. [Alligation, alternate]. 混和法同於求平均數法. 例如混合一升72錢之酒6斗,78錢之酒5斗,96錢之酒7斗,問成一升幾錢之酒.

1升72錢之酒	60 升之價	= 4320錢,
………78…………	50…………	= 3900 "
………96…………	70…………	= 6720 "
混合酒	180	=14940.

故混合酒1升之價$=\frac{14940}{180}$錢$=83$錢.

故有次之定則. 同單位所表各物之數,以其一單位之價乘之,其積之和,以各物數之和除之,則得混合物一單位之價. 即如次例,有二十二金6錢,與十七金4錢,問其混合之金性如何.

22金6錢............132
17金4錢　　　　68
　10 „　　　　200

故得200÷10即20金. [illegible],即代數學之不定問題. 甲乙二物之價爲a, b,其單位之數爲x, y,造混合物m單位,使其一單位之價爲c,則$ax+by=mc$............(1), $x+y=m$ ......(2), 自(1), (2),得$(a-c)x+(b-c)y=0$,即$x:y=b-c:c-a$,卽甲乙分量之比,爲$b-c:c-a$,故m爲未知數,僅知x, y之比,則此問題爲不定. 依此理以解次之問題. 以一斤28錢之茶,與一斤35錢之茶,使混合成一斤32錢之茶,問各當混合幾何.

	一斤之價	損　益	成分
廉價茶	28　錢	4錢益	3
混合茶	32　錢		
昂價茶	35　錢	3錢損	4

(說明)造一斤32錢之茶,若盡以一斤28錢之茶,則益4錢,若盡以一斤35錢之茶,則損3錢,故欲其損益相償,則將28錢之茶,與35錢之茶,取其斤數爲3:4之比,卽得. 如次排列之亦可.

$$32\left|\begin{matrix}28\\35\end{matrix}\right.\begin{matrix}3\\4\end{matrix}$$

答3斤與4斤之比.

又若混合三物,則其不定方程式如次. $ax+by+cz=md$......(1), $x+y+z=m$......(2),卽$(a-d)x+(b-d)y+(c-d)z=0$......(3). 故此等方程式,有無數之解答. 然混合法,恆限解答爲正整數. 故解答之數,大概爲有限. 因(3)之中,有三未知數,故可任意定其二,而求其他之一. 凡有n個物,則方程式含n個未知數,故其中$n-1$個,可任意定之. 例如混合一斤27錢31錢34錢之茶,造一斤30錢之茶,問各當取幾何,本例以混合之物有三種以上,故分量之比爲不定,故可先除去一種而其他二種定爲適宜之比,再求其對於前除去一種之比可也. 今定下茶中茶斤數之比爲5:3,則三種茶之比爲5:3:x. 故

	一斤之價	損　益	成分
下　茶	27　錢	3錢益	5
混合茶	30　錢		
中　茶	31　錢	1錢損	3
上　茶	34　錢	4錢損	x

由是取下茶5斤,則有15錢之益. 又取中茶3斤,則有3錢之損,因而相差有12錢之益,故若欲打消此益,當取上茶12÷4卽3斤,故上中下茶斤數之比,爲3:3:5. 若上中下茶斤數之比,定爲2:1:x,則上茶取2斤,有8錢之損,中茶取1斤,有1錢之損,合計有9錢之損,而下茶取1斤,有3錢之益,故欲打消此9錢之損,則下茶當取9÷3卽3斤. 故所求上中下之比,爲2:1:3. 本例又可如次解之,

$$30\left|\begin{matrix}27\\31\\34\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}1\\3\\ \end{matrix}\right|\begin{matrix}4\\ \\3\end{matrix}\left|\begin{matrix}5\\3\\3\end{matrix}\right.$$

此解合於上解之第一答. 此解下中之比1:3,與下上之比4:3,將其一若干倍之,或雙方若干倍之,或有公約數時,則約之,而後加之,亦可. 例如將下上之比4:3二倍之爲8:6,加下中之比,則得上中下之比爲6:3:9,卽2:1:3. 卽合於上解之第二答. 又取一例明之如次. 有十七金十八金二十二金及純金,問以如何之比混合之,則得

二十一金．今定十七金十八金二十二金及純金之比,為3：1：3：x,[純金為二十四金須知之]則

	過不足	成分
17	4 不足	3
18	3 不足	1
平均 21		
22	1 過	3
24	3 過	x

$\cdot 3\times1-1\times3)\div3=4$. 本例依第二　　則如次.

(1)

17	3		3
18		1	1
2		3	3
4	4		4

(2)

21				
17	3	1		4
18			1	1
22		4	3	7
24	4			4

(3)

21				
17	3	1		4
18			3	3
22		4		4
24	4		3	7

(4)

21				
17	1			1
18		3	1	4
22	4		3	7
24		3		3

(5)

21				
17	3			3
18		3	1	4
22			3	3
24	4	3		7

(6)

21					
17	3	1			4
18			3	1	4
22		4		3	7
24	4		3		7

(7)

21			
17	1		1
18		3	3
22	4		4
24		3	3

上之種種解法,可一一檢算之．而(1),(6),為最大及最小者．(1)為解法中之最簡單者．凡以括弧連結之二個,須取過於混合物與不足於混合物者．若同行之差有公約數,得約之而使之簡單．例如上之(3),得如次．又有時分量

21				
17	3	1		4
18			3 1	1
22		4		4
24	4		3 1	5

合計為已知者．例如本題二十一金,欲得三十錢,則依(4)之解,因十七金二十二金純金之比,為1:4:7:3,故$1+4+7+3=15$,故十七金當取1×2錢,十八金當取4×2錢,二十二金當取7×2錢,純金當取3×2錢,即每2,8,14,6錢.

混循環小數． 圜 英 Mixed recurring. 見循環小數條.

通分． 圜 俗 英 Reduction of fractions to a common denominator. 通分者,欲作與多分數等值,且分母相等之分數也．然通例之於其公分母,恆使為最小公分母,而其方法,先使各分為已約分數,次求其各分母之最小公倍數,以之為最小公分母．次求分子,則

以前之分母除最小公分母,以其商乘原之分子,以為分子.

通分母. 算 代 英 Common denominator. 同公分母,見其條.

通常分數. 算 英 Vulgar fraction. 謂普通之分數,對於繁分數而言.

側面. 幾 英 Lateral face. 立體之側面者,謂除底以外側傍之面也. 例如角錐之側面,謂集合於頂點之三角形之面,稱側面時,有指側面之一面者,有指側面之全體者.

側稜. 幾 英 Lateral edge. 同斜稜,見其條.

側面積. 幾 英 Lateral area. 謂以面積單位,測側面之測度.

逐出. 代 英 Elimination. 同消去法,見其條.

逐乘. 代 英 Factorial. 同階乘,見其條.

逐次除法. 算 英 Successive division. 同累次除法,見其條.

理論折扣. 算 英 Theoretical discount. 某日期後應兌之金額,欲於其日期前兌之,將其金額視為元利合計,而減去相當於利息之金額兌之,謂之理論折扣. 例如六個月後,有應兌之金520圓,以年利八釐,行理論折扣,則因六個月之利率為4釐,故$520\div1.04=500$即500圓. 此500圓,以年八釐付利息,則六個月為520圓. 故自520圓中減去20圓,而兌之也. 是謂之理論折扣. 而20圓,謂之理論折扣金. 500圓謂之理論現價.[參看銀行折扣金條]

理論現價. 算 英 Theoretical present worth. 見理論折扣條.

理論割引. 算 英 Theoretical present. 日本數辭,同理論折扣,見其條.

符號. 算 代 英 Sign. 謂$+-\times\div=$等. 在代數學整式之加減,有所謂變符號者,為$+$變為$-$,$-$變為$+$之意,而其所謂符號,單指$+,-$,之二者. 故符號有用廣義而指$+,-,\times,\div,=$者,有用狹義而僅指$+,-$者.

符號定則. 代 英 Law of signs. 用於代數學之乘法除法,在乘法則為

$$(+a)\times(+b)=+ab,\ (-a)\times(+b)=-ab,$$
$$(+a)\times(-b)=-ab,\ (-a)\times(-b)=+ab.$$

即同符號為正異符號為負在除法亦與乘法同,即

$$(+ab)\div(+a)=+b,\ (-ab)\div(-a)=+b,$$
$$(-ab)\div(+a)=-b,\ (+ab)\div(-a)=-b.$$

從價稅. 算 英 Advalorem duty. 稅關輸出入之貨物,課其原價之若干成分,謂之從價稅.

從量稅. 算 英 Specific duty. 稅關輸出入之貨物,依其物重量容量個數,而課其稅,謂之從量稅. 例如雞卵每千個稅幾何,米麥每百斤稅幾何,布疋每方碼稅幾何,洋油每加侖稅幾何.

終結. 幾 英 Conclusion. 某命題如「A為B則C為D」. 其「A為B」為假設,其「C為D」為終結. 即自假設經推理而最後所得之結果也.

終身年金. 算 代 英 Life annuity. 謂給與其人終身之年金. 即其人死後,其年金始消滅也.

略乘法. 算 英 Contraction in multiplication. 見省略算條.

略除法. 算 英 Contraction in division 見省略算條.

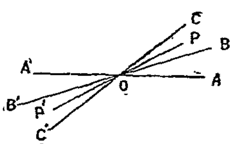
票. 算 英 Bill. 票為記載發銀錢之證券. 有匯票期票等,各見其條. 又銀行取銀人之支票,亦其一種也.

票面數. 算 英 Parvalue. 同額面價格,見其條.

得併置. 幾 英 Superposable. 謂相重得全相密合者. 例如二邊及其夾角相等,則兩三角形得併置. 又半徑相等之圓或球,皆得併置.

得重合. 幾 英 Superposable. 與得併置同,見上條.

得對置. 幾 英 Opposable. 二個立體角,或二個多面體,其對應之面,彼此相等,又其對應面間之二面角,亦彼此相等,有不得併置 [Superposable] 而得對置者. 例如 AOA', BOB' COC', 為過 O 且不在一平面上之三直線,則角 $B'OC'$, $C'OA'$ $A'OB'$, 各等於角 BOC, COA, AOB, 而此組之二面角,雖等於他組之二面角,而立體角 $O(ABC)$ 與 $O(A'B'C')$,究不能相重而密合. 蓋若將 OA' 與 OA 密合置之,又將 OB' 與 OB 密合置之,則 OC' 與 OC 當在平面 AOB 反對之傍. 若將 OA' 與 OB 密合置之,又將 OB' 與 OA 密合置之,則 OC' 與 OC 雖在平面 AOB 之同傍,而角 COA, COB, 只能相等,不能密合. 然對應於其一角內各點 P 之點 P',當在角 $O(A'B'C')$ 之內,即延引 PO 至 P',使 OP' 等於 OP,則 P',關於角 $O(A'B'C')$ 內稜與平面之位置,全同於 P 關於角 $O(ABC)$ 內稜與平面之位置,故是等之立體角,當然相等矣. 是等之立體角,若以平行之二平面截之,所成之角錐,亦得同樣之終結.



由是立體角 $O(ABC)$, $O(A'B'C')$, 謂之對置 [Opposed]. 而是等之立體角,謂之得對置, 故凡有二多面體,其一之各隅,連結其他之對應之隅,若交於一點,且皆於此點二等分,則此等多面體,謂之不得併置而得對置. 因得次之公理. [公理] 得對置之立體角或多面體相等.

得整除. 算 代 英 Exactly divisible. 除法之商得整數者,謂之得整除.

現價. 算 代 英 Present value. 將未到期期票之金,現今兌之,而減去其期間之利息,所兌之金,謂之現價. 現價有真現價與銀行現價之二者. 真現價者,以利息加之,則與票面金相等. 銀行現價者,謂依票面金計利息,而減去之. 今將票面金為 M, 其期間之利息為 r, 則真現價為 $\frac{M}{1+r}$. 而銀行現價為 $M(1-r)$. 但實際多用銀行現價. 參看年金條.

旋轉體. 幾 英 Solid of revolution. 謂一面以一直線為軸而廻轉之,所生之立體. 例如半圓,以其徑為軸,而廻轉之,則生球. 故球為一旋轉體. 又直角三角形,以其直角傍之一邊為軸,而廻轉之,則生圓錐. 故圓錐亦一旋轉體.

梯形. 幾 英 Trapezoid. 謂四邊形僅一雙之對邊平行者. 其平行之二邊,謂之梯形之底. 連結其不平行二邊中點之直線,等於兩底之和之半分. 又連結其兩對角線中點之直線,等於兩底之差之半分.

細格馬記法. 代 英 Siguma notation. [Σ notation] 對稱式及交代式,有書其

一項,而前置Σ以表之者. 例如Σa爲表a之諸項之和,Σab爲表ab之諸項之和,餘做此. 如斯前置Σ之記法,謂之細格馬記法. 今就$a, b, c,$三字母,而以細格馬記法表之如次.

$$\Sigma(b-c)=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$$
$$\Sigma a(b-c)=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$$
$$\Sigma bc(b-c)=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$
$$\Sigma a^2(b-c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$
$$\Sigma a(b^2-c^2)=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)$$
$$+c(a^2-b^2)=(b-c)(c-a)(a-b).$$

帶分數. 算 代 英 Mixed number. 謂自整數與分數而成之數. 例如$5\frac{2}{3}$,卽$5+\frac{2}{3}$. 又如$a+\frac{c}{b}$,亦爲帶分數.
帶分數又謂之混數.

添數. 代 英 Suffix. 如$a_1, a_2, a_3,\ldots\ldots,$添於文字右下之數字,謂之添數.

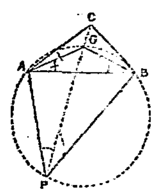
速. 算 英 Speed. 謂已知時間經過之距離,所以計運動之比者也.

偶數. 算 英 Even number. 謂能以2整除之數.

研究. 代 幾 三 英 Discussion 方程式之研究,爲方程式中任意之量,設爲所有之值,而研究其結果也. 又作圖題之研究,爲研究解答之數,及其能不能之界限等者也.

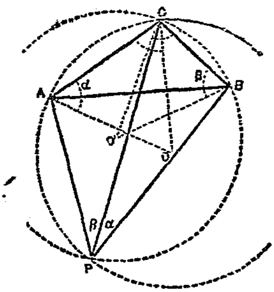
推論. 代 幾 三 英 Discussion 同研究,見上條.

問題. 數 英 Problem. 謂欲求解答之問題也. 問題之解,謂以運算而求合於問題要件之值也. 問題有代數學的及幾何學的之二種. 代數學的問題,須將問題之要件,化爲代數學的語,[卽方程式]. 若問題爲定問題,則有幾個獨立之要件,卽當有幾個方程式. 旣求得問題之方程式,則以代數學的通常運算解之. 而說明求得之根,由是問題所求之部分,卽爲已知矣. 幾何學的問題,有作圖題,有軌跡題,有計算的問題. 作圖題有直接以幾何學的方法[於組合法與解析法]解之者,有依代數學而求得所求之部分或求得與之有關鏈之部分,乃以幾何學的作圖解之者. 解軌跡題,須證明其定理及其逆. [見軌跡條] 解計算的問題,須連結已知未知之部分,而作代數方程式以解之. [三點之問題] 此問題爲港灣泊船等測量距離所用者,如次. 自一點P,覘望三目標A, B, C,而測定角APC, CPB, APB,且已知AB, AC, BC之距離,而求AP, BP CP之距離. 此問題得以三角法如次解之. 想像一圓過A, B, C,三點,截直線PC於O,連結OA, OB,則角OAB等於角CPB. 角OBA等於角CPA,故此二角爲已知. 在三角形AOB,已知一邊及二角,故可計算邊OB, OA,在三角形ABC,已知三邊,故可計算角CAB, CBA. 故角OBC,因其爲已知二角之差,亦爲已知,又因邊

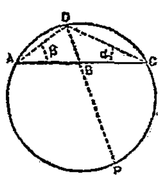


OB及OB爲已知,故可計算角PCB. 在三角形CPB,因已知邊CB,角PCB,及角CPB,故可求得邊BP, CP. 次自角ACB,減角OCB,得角OCA,然則在三角形ACP,因已知邊AC, CP,及角

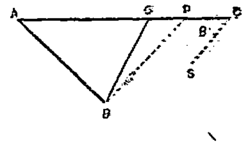
ACP, 故可求 AP, 而問題全解矣. 幾何學的解 若 $A\hat{P}C=\beta$, CPB$=\alpha$, 則 $A\hat{P}B=\alpha+\beta$, 使 $A\hat{C}O=C\hat{A}O=90^\circ-\beta$, 以 O 爲中心, OA 爲半徑, 畫圓周, 又使 $CBO'=B\hat{C}O'=90^\circ-\alpha$, 以 O′ 爲中心, O′B 爲半徑, 畫第二圓周, 與第一圓周相交於 P, 則 P 爲所求之點也. 又可如次求之. [觀本條



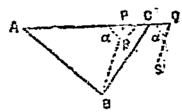
第一圖] 使 $A\hat{B}O=A\hat{P}C=\beta$, $B\hat{A}O=B\hat{P}C=\alpha$, 過三點 O, A, B, 畫圓周, 引直線 CO, 與圓周相交於 P, 則 P 爲所求之點. 若O極近於C, 則以第一法求之爲宜. 若圓周通過 C, 則問題爲不定. 此問題對於點之位置, 有六種. 茲一一研究之如次. 1. 已知三點, 在同一直線上時, 則角 APB 以 α 表之, 角 BPC 以 β 表之, 此種有二個解答, 因點可在直線 ABC 之兩側也. [作圖



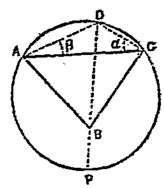
法] 使 $A\hat{C}D=\alpha$, $C\hat{A}D=\beta$, 過三點 A,C,D. 畫圓周, 引直線DB, 延長之交圓周於 P, 則P爲所求之點. 在直線 ABC 之上方, 求P之作圖法, 全同之. 2. 點P在邊AC之延線上時, 則此種爲 $\alpha=\beta$. [作圖法]於AC上,取任



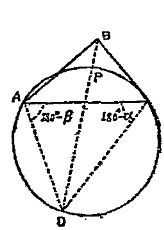
意之點 Q, 引直線 QS, 使 $A\hat{Q}S=\alpha=\beta$, 過B平行於SQ引BP, 交AQ於P, 則P爲所求之點. 3. 點P在A與C之間時, 此種 $\alpha=180^\circ-\beta$. [作圖法] 於 AC 上, 取任意之點 Q, 引直線QS,使 $A\hat{Q}S=\alpha$, 又引



BP, 平行於 QS, 交 AC 於 P, 則 P 爲所求之點. 4. 點P與B在AC之同旁時 [作圖法] 使 ACD$=\alpha$, CAD$=\beta$,過A,C,D畫圓, 引直線 DB, 交圓周於P,則P爲所求之點. 此作圖法, 與一般之場合同. 5. 點 P 在三

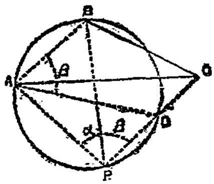


角形 ABC 內時, [作圖法] 使 $A\hat{C}D=180^\circ-\alpha$, $C\hat{A}D=180^\circ-\beta$, 過 A, B, C, 畫圓, 引直線DB, 交圓周於 P, 則 P 爲所求之點. 6. 點P與B, 在 AC 反對之旁時, [作圖法]於 AB 上畫圓之弓形,使其

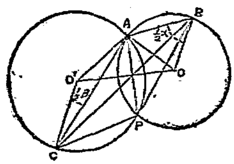


弓形角等於 α, $B\hat{A}D=\beta$, 過 D 引 DC, 交圓周於P, 則P爲所求之點.

若圓周通過A, B, C, 則問題爲不定. 又第一種P在直線ABC上, 則問題亦爲不定. 次之



解析的解更簡單. $B\hat{A}O=A\hat{B}O=\frac{1}{2}\alpha$, $A\hat{C}O'=C\hat{A}O'=\frac{1}{2}\beta$, 以O及O'爲中心, 以OB及O'A爲半徑,畫圓,使相交於P, 引PA, PB, PC, 則



$AO=\frac{\frac{1}{2}AB}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, $AO'=\frac{\frac{1}{2}AC}{\cos\frac{1}{2}\beta}$. $O\hat{A}O'=C\hat{A}B-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=r$. $(AO'+AO):(AO'-AO)=\tan\frac{1}{2}(\hat{O}+\hat{O}'):\tan\frac{1}{2}(\hat{O}-\hat{O}')$, $2AO'\sin\hat{O}'=AP$. $O\hat{A}P=90^\circ-\hat{O}'=\delta$, $C\hat{A}B=\frac{1}{2}\beta+\delta$. $(O'A+AP):(CA-AP)=\tan\frac{1}{2}(C+P):\tan\frac{1}{2}(C-P)$, $\hat{O}'=\frac{1}{2}\beta+O\hat{C}P$, 故 $O'\hat{C}P=\hat{O}'-\frac{1}{2}\beta$, $CP=AO'\cos\left(\hat{O}-\frac{1}{2}\beta\right)$.

移項. 代 英 To transpose. 在等式或不等式兩邊之項,自一邊移向他邊,而變其符號,謂之移項. 例如$ax=bx+c$, 將bx移項,則爲$ax-bx=c$. 又如$a+b>c+d$, 將b與c移項,則爲$a-c>d-b$.

排水噸. 算 英 Ton of displacement. 排水噸者,所以示軍艦之排水量,而爲海水35立方呎之重也.

規約方程式. 代. 英 Conditional equation. 謂通常之方程式,見方程式條.

趾. 幾 英 Foot. 同足,見其條.

接角. 幾 英 Adjacent angles. 或 Contiguous angles. 見角條.

黃金分割. 幾 英 Golden section. 同外中分比,見其條.

透視圖法. 幾 英 Perspective representation. 同遠近圖法,見其條.

訥伯爾對數. 代 英 Napierian logarithm. 見對數條.

寄算. 算 代 英 Addition. 日本數辭,即加法,見其條.

掛算. 算 代 英 Multiplication. 日本數辭,即乘法,見其條.

瓸. 算 英 Hectogramme. 美 Hektogram. 爲海克格蘭姆之省書,謂一格蘭姆之百倍.

竡. 算 英 Hectolitre. 美 Hektoliter. 爲海克立突之省書,謂一立突之百倍.

兝. 算 法 Décigramme. 爲特西格蘭姆之省書,等於格蘭姆十分之一.

毪. 算 法 Milligramme. 爲密里格蘭姆之省書,等於格蘭姆千分之一.

十二畫

等式. 代 英 Equality. 謂以等號＝連結之二代數式. 例如$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$或$x=5$時,則$3x+7=2x+12$, 而第一爲絕對的等式 [Absolute equality],亦即恆方程式 [Identical equation], 或恆等式 [Identity]. 而第二爲附要件等式 [Conditional equality], 或方程式 [Equation].

等號. 數 英 Sign of equality. 謂表示

二數或二式相等之符號，記於相等二數或二式之間．例如8—5等於3，則記爲8—5＝3，讀若8減5等於3．

等比． 算 代 幾 英 Ratio of equality. 見劣比條．

等比之理． 代 幾 英 Exæquali. 有二羣之數 $a, b, c, d, \ldots\ldots l$. 及 $x, y, z, \ldots\ldots t$. 若 $a:b=x:y$, $b:c=y:z$, 則 $a:l=x:t$, 謂之等比之理．

等比中項． 代 英 Geometrical mean. 見幾何級數條．

等比級數． 代 英 Geometrical progression. 同幾何級數，見其條．

等角形． 幾 英 Isogon. 或 Equiangular figure. 謂多角形各角之相等者．

等角三角形． 幾 英 Equiangular triangle. 見三角形條．

等角雙曲線． 幾 英 Equiangular hyperbola. 同等邊雙曲線，見其條．

等根． 代 英 Equal roots. 見二次方程式條．

等積形． 幾 英 Equivalent figures. 謂面積相等之圖形．

等差中項． 代 英 Arithmetical mean. 見算術級數條．

等差級數． 代 英 Arithmetical progression. 同算術級數，見其條．

等腳梯形． 幾 英 Isosceles trapezoid. 謂梯形之不平行二邊相等者．

等腳三角形． 幾 英 Isosceles triangle. 同二等邊三角形，見其條．

等邊三角形． 幾 英 Equilateral triangle. 見三角形條．

等邊雙曲線． 幾 英 Equilateral hyperbola. 謂雙曲線之橫軸縱軸相等者．同直角雙曲線，見其條．

等值方程式． 代 英 Equivalent equations. 二個或二組之方程式，其未知數之値，彼此全相同者，謂之等值方程式．

單式． 代 英 Simple expression. 謂自一項而成之式，同一項式．

單位． 算 英 Unit. 單位以普通言之，則爲計物之數目者．即欲表其量之時而選定一定之量，謂之單位，以之與其量之比，則爲其量之數值．例如有某長爲L，其單位爲 l，則 $\frac{L}{l}$ 爲其長之數值．在學術上，則依量之種類各有特種之單位，其數雖多，然其基本單位，則有三，即長與質量與時而已，有此三單位，即能表一切量之單位．長之單位爲生的米突 [Centimetre]，即一米突百分之一．質量之單位爲格蘭姆 [Gramme]，即攝氏四度純水一立方生的米突之質量．時之單位爲秒 [Second]，即一平太陽日之八萬六千四百分之一．此三單位，選爲基本，而以定一切之單位，在學術上，恆稱爲C. G. S. 單位．即取三單位原語之頭字也．茲說明各種之變化單位．V爲某速度，L爲某長，T爲某時間，其各單位爲 v, l, t，則是等量之數值，爲 $\frac{V}{v}, \frac{L}{l}, \frac{T}{t}$. 但速度之數值，爲以時之數值，除長之數值者．故 $\frac{V}{v}=\frac{L}{l}\cdot\frac{t}{T}$，蓋此式若V，L，T，爲常數，則 v 因 l 正變，因 t 反變．故速度之單位，爲以時之單位除長之單位者，即速度之單位)=(長之單位)÷(時之單位) 今將長之基本單位爲L，質量之單位爲M，時之基本單位爲T，則速度之單位爲L/T．如此之關係，爲其單位次元 [Dimension]．而次元又依其

因數之數,而謂之幾次之次元. 而速度之單位,對於L爲一次元,對於T爲負一次元. 而積以平方糎爲單位,其次元爲L^2. 體積以立方糎爲單位,其次元爲L^3. 速度之單位,爲以時之單位,除長之單位者,即一秒間行一糎之速度,[有時謂一秒行幾尺之速度],其次元爲$L/T=LT^{-1}$. 運動量[Momentum]爲以速度乘質量,故其次元爲LMT^{-1}. 加速度[Acceleration]謂一秒間增速度一糎者. 空間墜體之速度,其關於地球引力者,以g表之,而地球表面出海面有高低,其引力亦各不同,在兩極爲983糎.1, 在赤道爲978糎.1. 然通常恆取中數,爲每秒980糎,而其次元則爲以時除速度之LT^{-2}. 力[Force]之單位,謂之太因[Dyne],爲一瓦之質量,於一秒間昇起一糎速度之力,其次元爲MLT^{-2}. 重量[Weight]爲地球引物質量之力,故一秒爲980太因. 運動[Work]爲以力乘其物體所過之距離,其單位謂之爾格[Erg],即隔一糎而生一太因之力也. 故一爾格亦謂之一生的米突太因,其次元爲L^2MT^{-2}. 一瓦之重量,反於地球之引力,昇上一生的米突之力[生的米突格蘭]爲980爾格. 蓋一格蘭姆爲980太因故也. 又英國式,一磅之重量昇上一呎,即一夫托磅,爲13.825 [g] ergs=1.356×10^7ergs. 動力[Power]爲運動之比,其單位謂之瓦番,[Watt]. 一瓦番一秒間爲10^7爾格之力也. 馬力[Horse power]爲每分33000呎即550夫托磅之力. 但夫托磅爲1.356×10^7ergs,而一瓦番爲10^7ergs,故一馬力爲500×1.356×10^7ergs=746 watts. 熱之單位,謂之克羅利[Calorie],爲攝氏四度之水一瓦其溫度昇上一度之熱量. 依爵羅[Joule英國之物理學者,西曆1818年生1889年死]氏之式,則一克羅利,相當於4.2×10^7ergs. 磁石力之單位[unit pole of magnet]即隔一生的米突,二同强同極之磁石,以一太因之力相反拒之力也. 今將磁石力爲m, m',其距離爲L,其間所生反拒力爲F,以式表之,則爲$F=\frac{mm'}{L^2}$. 但$m=m'$, 故$F=\frac{m^2}{Z^2}$, 即$m^2=FZ^2$. 又因$F=MLT^{-2}$, 故$m^2=L^3MT^{-2}$, 而$m=LM^{\frac{2}{3}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$. 即磁石力單位之次元爲$L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$.

單位圓. 三 英 Unit circle. 謂半徑爲1之圓.

單利. 算 代 英 Simple interest. 謂利息與借貸元金之期間成比例者. 比對於複利而言, 元金爲P, 利率爲r, 期間爲n, 利息爲I, 元利合計爲A, 則$I=Prn$及$A=P(1+rn)$.

單利年金. 算 英 Annuities of simple interest. 謂年金之利息,而以單利計算者. 然用之者甚罕.

單名數. 算 英 Simple number. 謂以一單位表之之數. 例如15尺273圓等. 單名數乃對於複名數而言.

單比例. 算 代 英 Simple proportion. 謂比例之相等,符號之雙方,皆自單比而成者. 例如$5:7=15:21$. 又如$a:b=c:d$. 單比例對於複比例而言. 單比例有正比例與反比例[或逆比例]之二者,各見其條.

單平均. 算 英 Single average. 對於

複平均而言，謂單純之平均也，例如某日曜日正午之溫度，爲華氏88度，月曜日爲70度，火曜日爲69度，水曜日爲68度，木曜日爲71度，金曜日爲70度，土曜日爲67度，求此一週間之平均溫度，爲單平均.

單合資算. 算 英 Simple partnership. 合資算之分配利益，或負擔損失，單比例於出資數者也. 例如甲以金千圓，乙以金千五百圓，共同營商，得利金五百圓，比例於出金數而分配之.

單假設法. 算 英 Single position. 見假設法條.

單循環節. 算 英 Single repetend. 見循環小數條.

最簡項. 算 代 英 Lowest term. 同已約項，見其條.

最簡交代式. 代 英 Simplest alternating expression. a, b, c, 三字母最簡之交代式，謂 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 三字母之一切交代式，得以其最簡交代式整除之.

最大公約數[G.C.M.]. 算 代 英 Greatest common measure. 算術所謂二數以上之最大公約數，謂能整除各數之數之最大者. 例如12與18之最大公約數爲6. 代數學所謂二整式以上之最大公約數，謂能整除各式之式之最高次者. I. [一項式者] 例如 $12x^2y^3zu$, $6x^3y^4z^2u^2$, $24x^6y^2z^3$ 之最大公約數，爲 Ax^2y^2z. 但A爲任意之常數. 蓋此式能整除所設各式，而文字因數之任一個，不能以較之高次之式整除之故也. 故求二項以上一項式之最大公約數，書其各項中公共文字因數之積，而其文字因數之冪，則取各式中次數之最低者. 依上之定義可知係數A之爲任意之常數. 例如 $2x^2y^2z$, $\frac{1}{2}x^2y^2z$, $6x^2y^2z$, 皆得整除所設三個之一項式，而得整除三個一項式之式，在此諸式，又爲 x, y, z, u 之最高次式也. 任意係數A，通例爲1. [係數A有謂爲所設式係數之算術的最大公約數者，然如此言之，反生混雜，且當算術的分數爲係數時，例如 $\frac{1}{2}x^3y^3zu$, $\frac{1}{2}x^3y^4z^2u^2$, $\frac{1}{5}x^6y^2z^3$, 則全不適當矣.] 上之定則，在算術的數之最大公約數，亦適用之. 例如求36, 42, 及84之最大公約數，則如次.

$$\left.\begin{array}{l}36=2^2\times3^2\\42=2\times3\times7\\84=2^2\times3\times7\end{array}\right\}\text{故所求之最大公約數，爲 }2\times3=6.$$

蓋此三數各能以2及3整除之，且無共同之他素因數故也. 求最大公約數，既求其一數之素因數，其餘各數，不必求之. 例如求4095, 3029, 及1703之最大公約數，則將4095分解素因數爲 $5\times7\times3\times3\times13$, 而3029及1703, 見其不能以5, 7, 3整除，而皆能以13整除，即 $3029=13\times233$ 及 $1703=13\times131$, 而233及131, 能分解因數與否，不必知之. 蓋已知其不能以5, 7, 3整除，即再無與前一數公共之素因數故也. 故所求最大公約數爲13. II. [多項式者] 求二個多項式之最大公約數如次. 將二式某共同字母，依降冪之次序列之，以其字母比較低次之式除他式，[若二式同次，則任以何式爲除數可也]. 若有剩餘，則以之爲新除數，將前之除數爲被除數，如此連續除之，至無剩餘，則最後之除數，爲原二式之最大公約數. 例如求 x^3+x^2-2

及x^3+2x^2-3之最大公約數,用係數除法如次.

1+1+0−2)1+2+0−.

1+1+0−2

1+0−2

1+0−1)1+1+0−2(1+1

1+0−1

1+1−2

1+0−1

1−1

1−1)1+0−1(1+1

1−1

1−1

1−1

故所求之最大公約數爲$x-1$. 此定則所求者,惟多項因數,故一項因數當先以視察求之. 例如$x^4+x^3-2x=x(x^3+x^2-2)$, $x^5+2x^4-3x^2=x^2(x^3+2x^2-3)$. 故一項因數之最大公約數爲$x$明矣,而$x^3+x^2-2$及$x^3+2x^2-3$之最大公約數,如前求之爲$x-1$,故全最大公約數爲$x(x-1)$. 上之定則,茲證明之如次. 原之二式爲A,B,而B與A共同之字母,不低於A者. 由是求最大公約數,運算之第一級如次.

A)B(Q　故B=AQ+R.........(1)

AQ

R　　R=B−AQ..........(2)

而A及R任意之約數爲AQ+R之約數明矣,故由(1)而知當爲B之約數,由是而A及R任意之公約數,又爲A及B之公約數. 又B及A任意之約數,爲B−AQ之約數,故由(2)而知當爲R之約數,故A及B任意之公約數,又爲A及R之公約數,因而A及B之公約數,全同於A及R之公約數,故A及B之最大公約數,爲A及R之最大公約數. 今A以R除之,若剩餘爲S,則S及R之最大公約數,當全同於A及R之最大公約數. 故當爲所求之最大公約數. 餘倣此. 故任意除數及相對被除數之最大公約數,爲所求之最大公約數. 但若某級數無剩餘時,則其時除數,當爲其被除數之因數,且其除數,當爲其本身及其被除數之最大公約數明矣. 故其被除數,即爲所求之最大公約數. 依除法之性質,知剩餘次第爲低次,故除法至某次,當無剩餘,或不含共同之字母,其無剩餘者,則其時除數,即爲所設式之最大公約數,其不含共同之字母者,則所設式無公約數. 此方法爲僅求所設式之多項因數,前既言之,故運算中任意之式,可任意以一項因數乘除之. 蓋任意以一項因數乘除之,無影響於多項因數故也. 例如求x^5-y^5及x^7-y^7之最大公約數如次.

x^3	x^5-y^5	x^7-y^7	x^2
	$x^5-x^3y^2$	$x^7-x^2y^5$	
xy^2	$x^3y^2-y^5$	y^5) $x^2y^5-y^7$	
	$x^3y^2-xy^4$	x^2-y^2	x
	y^4) xy^4-y^4	x^2-xy	
	$x-y$	$xy-y^2$	y
		$xy-y^2$	

故$x-y$爲所求之最大公約數. 又求$2x^2-5x+2$及$x^3+4x^2-4x-16$之最大公約數,欲避分數之不便,第二式以2乘之,而運算如次.

$2x$	$2x^2-5x+2$	$x^3+4x^2-4x-16$	
	$2x^2-4x$	2	
-1	$-x+2$	$2x^3+8x^2-8x-32$	x
	$-x+2$	$2x^3-5x^2+2x$	
		$13x^2-10x-32$	
		2	
		$26x^2-20x-64$	13
		$26x^2-65x+26$	
		45) $45x-90$	
		$x-2$	

故$x-2$為所求之最大公約數. 又求三式以上之最大公約數, 先求第一第二式之最大公約數,以之與第三式,求其最大公約數,次第如此. 例如求x^3+x^2-x-1及x^3+3x^2-x-3及x^3+x^2-2之最大公約數,第一式與第二式之最大公約數為x^2-1,而x^2-1及第三式之最大公約數為$x-1$,因而$x-1$為所求之最大公約數. 上方法亦適用於算術之最大公約數. 例如求3077及2567之最大公約數如次.

5	2567	3077	1
	255	2567	
	17	10	510	
		51	3
		51	

故17為所要之最大公約數,又求285,475,及589之最大公約數,其285與475之最大公約數,為95,而95與589之最大公約數為19,故19為所求之最大公約數.

最大公因數. 算 術 英 Great common factor. 同最大公約數,見其條.

最小公倍數 [L.C.M.]. 算 術 英 Least common multiple. 算術二數以上之最小公倍數,謂能整除各數之數之最小者. 例如60, 120, 180.........為3, 4, 5之最小公倍數,其最小之60為3, 4, 5之最小公倍數. [求二數之最小公倍數法]例如求475與589之最小公倍數,先求475與589之最大公約數為19,而475與589,各以此最大公約數19除之,其商為25與31,此二商當為互素數. 夫475之各倍數,必含19及25之因數. 589之各倍數,必含19及31之因數. 故479及589之各公倍數,必含19,25及31之因數. 故所求之最小公倍數,為$19\times25\times31=589\times25=475\times31=14725$. 改書之,則為 $19\times25\times31=589\times(475\div19)=475\times(539\div19)$. 由是求二數之最小公倍數,可以其最大公約數,除其一數所得之商,乘其他一數即得. 或將其二數之積,以其一大公約數除之亦可. [求三數以上之最小公倍數法]先求二數之最小公倍數,以之與第三數,求其最小公倍數,逐次如此. 例如求45, 60, 72之最小公倍數. 其45與60之最小公倍數為180,而180與72之最小公倍數為360,故45, 60, 72之最小公倍數為360. [求最小公倍數之簡法]諸數容易分解素因數者,則可直求得其最小公倍數. 例如求45, 60 ,72, 95之最小公倍數.

$$45=3\times3\times5 \qquad =3^2\times5$$
$$60=2\times2\times3\times5 \qquad =2^2\times3\times5$$
$$72=2\times2\times2\times3\times3 \qquad =2^3\times3^2$$
$$96=2\times2\times2\times2\times2\times3 \qquad =2^5\times3$$

此四數之因數皆自2, 3, 5之乘冪而成,故此四數之公倍數,必含各數中所含是等素因數之最高冪. 而因其為最小公倍數,故不再含他因數,故所求之最小公倍數,為$2^5\times3^2\times5=1440$. 其運算當如次. 將諸數書於一列,以其二數以上之公約數除之. 將其商,與不能除之數,書於第二列.

3	45,	60,	72,	96
5	15,	20,	24,	32
8	~~3~~,	~~4~~,	24,	4,
			3,	4

又將此第二列,以同法行之,逐次如此. 至一列之數為互素數而止. 則各除數及最後一列之數之積,為所求之最小公倍數. 上例消去第三列之3與4者,以其3含於24中,4含於32中故也. 此運算除數當為素數,然求簡便,亦可

用非素數，如上例之8一列之數，皆得整除。又可如次，以除數之各因數除之，蓋以10除，等於以其因數2與5除之也。代數學二整式以上之最小公倍數，

$$\begin{array}{r|l} 10 & 45,\ 60,\ 72,\ 96 \\ \hline 12 & 9,\ 6,\ 36,\ 48 \\ \hline & \quad 3,\ 4 \end{array}$$

$$10\times12\times4\times3=1440$$

謂以其各式得整除之最低次之式例如求 a^3b^2x 及 $a^2b^3x^4$ 之最小公倍數，其二式中 a 之最高冪 a^3，由是二式之任意公倍數中，必含 a^3 之因數。又其任意公倍數中，必含 b^3 及 x^4 之因數。故所求之最小公倍數為 $a^3b^3x^4$。凡A及B為任意二整式，其最大公約數為G，其最小公倍為L，以G除A及B之商，若為 a 及 b，則 $A=G\cdot a$ 及 $B=G\cdot b$。而G為A及B之最大公約數。故 a 及 b 再無公因數。由是A及B之最小公倍數為 Gab。故 $L=Gab$，因而 $L=Ga\times\frac{Gb}{G}=A\times\frac{B}{G}=B\times\frac{A}{G}$。又 $L\times G=Ga\times Gb=A.B$。故任意二式之最小公倍數，等於以其最大公約數除其一式之商，以乘他式之積。又任意二式之積，等於其最大公約數與最小公倍數之積。

最小公分母. 國 國 英 Least common denominator. 不同分母之諸分數，恆可以同分母之分數表之。凡此同分母卽公分母，以最小者為便。最小公分母，為諸分母之最小公倍數。例如 $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{15}$，以最小公分母之分數表之。夫分數之分子分母，以同數乘之，其值不變，故必求為各分母倍數之某數既求得之，則各分母，可依乘法而變為其數矣。故求諸分母之最小公倍數，則為180。而諸分母之變為180，須知各以何因數乘之，卽

$180\div9=20$，故 $\frac{4}{9}=\frac{4\times20}{9\times20}=\frac{80}{180}$，

$180\div12=15$，故 $\frac{5}{12}=\frac{5\times15}{12\times15}=\frac{75}{180}$，

$180\div15=12$，故 $\frac{7}{15}=\frac{7\times12}{15\times12}=\frac{84}{180}$，

故 $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{15}$，各等於 $\frac{80}{180}$, $\frac{75}{180}$, $\frac{84}{180}$。

又 $\frac{x}{a^2-x^2}$ 及 $\frac{y}{(a+x)^2}$ 欲變為最小公分母，則因其分母之最小公倍數，為 $(a-x)(a+x)^2$，而 $(a-x)(a+x)^2\div(a^2-x^2)=a+x$，$(a-x)(a+x)^2\div(a+x)^2=a-x$，

故 $\frac{x}{a^2-x^2}=\frac{x(a+x)}{(a^2-x^2)(a+x)}$。

及 $\frac{y}{(a+x)^2}=\frac{y(a-x)}{(a+x)^2(a-x)}$。

最小二乘法. 國 英 Method of Least squares. 為數學之一分科，求差誤之平均者也。多用於天體測量及測地學等。

最近幾何學. 國 英 Recent Geometry. 為幾何學之一分科，起於第十九世紀之後半期者也。西曆1873年，洛莫安 [Lemoine] 氏，在利若 [Lyons] 學術獎勵會之席上，講演[三角形之奇異點之某性質]之論文，為最近幾何學之起因。[故謂其點為洛莫安點；其三線座標，比例於三邊 a, b, c,] 其後以德國格列比 [Grebe]，法國之克塔剌 [Catalan]，中佐墨西由 [Mathieu]，修列米兒 [Schlömilch]，教授魯比爾 [Neuberg]，布羅克爾 [Brocard]，太勒爾 [Taylor]，克西 [Casey]，諸氏，相繼研究，是學乃成。其內容為逆平行線 [Antiparallels]，等角線 [Isogonals]，逆點 [Inverse points]，布羅克爾點 [Brocard points], 布羅克爾橢圓 [Brocard ellipse], 洛莫安點 [Lemoine point], 及三乘比圓 [Triplicate ratio circle], 布羅克爾圓 [Brocard circle], 及第一布羅克爾三角形 [First brocard triangle], 第克圓 [Tucker circle], 餘弦圓 [Cosine circle], 太勒爾圓 [Taylor circle] 等.

最高公因數. 代 英 Highest common factor. 同最大公約數,見其條.

最高公約數. 代 英 Highest common measure (divisor). 同最大公約數,見其條.

最低公倍數. 代 英 Lowest common multiple. 同最小公倍數,見其條.

最低公分母. 代 英 Lowest Common denominator. 同最小公分母,見其條.

無限. 數 英 Adinfinitum. 此自拉丁語而來者. To an indefinite degree of extent. 卽連續至無限之意.

無限小數. 算 英 Infinite decimal. 不能以有限數字表之之小數. 例如循環小數,爲無限小數之一種. 又如 $\sqrt{2}$, 開之爲小數,則爲無限小數.

無限級數. 代 英 Infinite series. 謂級數之項數,繼續至無限者. 例如對數級數,指數級數,三角級數等. 皆爲無限級數 [參看級數條].

無限責任. 算 英 Unlimited liability. 無限責任者,如無限公司股東之責任,爲無限之意,謂以公司之全財產,及股東之全財產爲擔保者也. 反之如有限公司,則責任限於公司之財產,謂之有限責任. [Limited liability].

無限公司. 算 英 Ordinary partnership. 以數人合出資本而營商業者. 依商法之規定,受該管官廳之註冊,其責任不止於其所出之資者.

無理式. 代 英 Irrational expression. 謂含無理項之式. 例如 $\sqrt{(3+x)}+2\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}$ 等.

無理數. 代 英 Irrational number. 無理數者,不能以整數或分數表之,謂無限接近於二分數間之數也. 卽如 $\frac{m}{n}$ 及 $\frac{m+1}{n}$, 代表二分數之項, 其差無限減少, 恆爲 $\frac{m}{n}<\mathrm{I}<\frac{m+1}{n}$. 此 I 卽爲無理數. 例如 $\sqrt{2}$, 則

$$
\begin{gathered}
1<\sqrt{2}<2,\\
1.4<\sqrt{2}<1.5,\\
1.41<\sqrt{2}<1.42,\\
1.414<\sqrt{2}<1.415,\\
1.4142<\sqrt{2}<1.4143,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

而

$$
\begin{gathered}
2-1=1,\\
1.5-1.4=0.1,\\
1.42-1.41.=0.01,\\
1.415-1.414=0.001,\\
1.4143-1.4142=0.0001,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

故爲無理數.

無理量. 代 英 Irrational quantity. 同無理數,見其條.

無緣根. 代 英 Extraneous root. 同分外根,見其條.

無窮小數. 算 英 Infinite decimal. 同無限小數,見其條.

無窮級數. 代 英 Infinite series. 同無限級數. 見其條.

無理方程式. 代 英 Irrational equation. 謂方程式中含未知數之無理項者. 例如 $\sqrt{(x+2)}=5$, $\sqrt{(x^2+b^2)}+a=x$ 等.

幾何學. 幾 英 Geometry. 幾何學爲數學

之一分科．研究關於物之大及形狀位置之眞理之學科也．初等幾何學[Elementary Geometry]論點，直線，圓及其集合，或自直線及圓所成之面，[卽平面，圓壔面，圓錐面，球面]．或對此之立體．高等幾何學．[Higher Geometry]論更複雜之線，如圓錐曲線等是也．

幾何學公理． 圖 英 Geometrical axiom. 幾何學公理者，謂僅關於幾何學之公理，卽於次．I．圖形不變其形狀及大，得變其位置．II．得使全相合之大相等．III．過一點，向一方向，得引一直線，而惟限於一．又可如次言之．一點與一方向，決定一直線．自此公理，知次之二件．(1)二點決定一直線．[或通過二點之二直線全相合，而爲一直線]．(2)相異二直線，惟得於一點相交．IV．二點間之最短徑，爲其間之直線．V．凡周角相等．VI．過一點，平行一直線，得引直線，而惟限於一，等，等．

幾何體． 圖 英 Geometrical solid. 空間有限之部分，謂之幾何體，或謂之立體．幾何體與物體異，物體爲實質體，如木石等．立體指物體占有空間之一部，而非實質．有長濶厚，且可得分者．

幾何像． 圖 英 Geometrical image 見平面對稱條．

幾何級數． 圖 英 Geometrical progression. 或 Geometrical series. 幾何級數者，其任一項，爲其一定之數，乘其前項者．如斯級數之一般表示，爲a, ar, ar^2, ar^3, …，其a謂之初項，r謂之公比，而各項r之指數，次第增一，較項數少一，故第n項以l表之，$l=ar^{n-1}$……(1)．二數間之等比中項或幾何

既知	公式
$a\ r\ n$	$l=ar^{n-1}$.
$a\ r\ s$	$l=\frac{a+(r-1)s}{r}$.
$a\ n\ s$	$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$.
$r\ n\ s$	$l=\frac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}$.
$a\ r\ n$	$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$.
$a\ r\ l$	$s=\frac{rl-a}{r-1}$.
$a\ n\ l$	$s=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$.
$r\ n\ l$	$s=\frac{lr^n-l}{r^n-r^{n-1}}$.
$r\ n\ l$	$a=\frac{l}{r^{n-1}}$.
$r\ n\ s$	$a=\frac{(r-1)s}{r^n-1}$.
$r\ l\ s$	$a=rl-(r-1)s$.
$n\ l\ s$	$a(s-c)^{n-1}-l(s-l)^{n-1}=0$.
$a\ n\ l$	$r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.
$a\ n\ s$	$r^n-\frac{s}{a}r+\frac{s-a}{a}=0$.
$a\ l\ s$	$r=\frac{s-a}{s-l}$.
$n\ l\ s$	$r^n-\frac{s}{s-l}r^{n-1}+\frac{l}{s-l}=0$.
$a\ r\ l$	$n=\frac{\log l-\log a}{\log r}+1$.
$a\ r\ s$	$n=\frac{\log[a+(r-1)s]-\log a}{\log r}$.
$a\ l\ s$	$n=\frac{\log l-\log a}{\log(s-a)-\log(s-l)}+1$.
$r\ l\ s$	$n=\frac{\log l-\log[lr-(r-1)s]}{\log r}+1$.

中項者,謂插入二數間,而成幾何級數之數. 命a, b,爲二數,G爲幾何中項則依幾何級數之定義,而$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$,故$G=\pm\sqrt{ab}$ ......(2). 有時二數間欲插入數多之幾何中項者,今設m爲欲插入中項之數,則總項數爲$m+2=n$,故方程式$l=ar^{n-1}$中之n,以$m+2$代之,則其結果爲$l=ar^{m+1}$. 故$r^{m+1}=\frac{l}{a}$......(3). 今於3與48之間,插入三個幾何中項,則r之值,因$r^4=\frac{48}{3}=16$,故$r=\pm2$. 因而級數爲3, ±6, 12, ±24, 48. 次將末項爲l,初項爲a,項數爲n,公比爲r,n項之和爲s,則$s=a+ar+ar^2+\text{......}+ar^{n-1}$. 又以$r$乘兩邊,而爲$rs=ar+ar^2+ar^3+\text{......}+ar^{n-1}+ar^n$. 自此第二式減第一式,而$(r-1)s=a(r^n-1)$.

$$\therefore\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\text{ .... }(4).$$

若$r<1$,則上式宜書爲$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$. 又因$l=ar^{n-1}$,而$rl=ar^n$,故(4)可書爲$s=\frac{rl-a}{r-1}$ 若r之絕對值小於1,則n增至極大,而第n項之值ar^{n-1}得減至極小. n項之和之公式$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$,得記爲$\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$. 因$n$無限增,故$\frac{ar^n}{1-r}$得至任何小. 故$n$項之和,以$\frac{a}{1-r}$爲極限而無限接近之. 例如$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\text{......}$至無窮項之和,爲$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

幾何中項. 代 英 Geometric mean. 見幾何級數條.

幾何中數. 代 英 Geometric mean. 同何幾中項,見幾何級數條.

普通式. 代 英 General expression. 謂一般之式. 例如一未知數之一次普通式,爲$ax+b$, 二次普通式,爲ax^2+bx+c, 又如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$等. 有與範式同意味者.

普通項. 代 英 General term. 謂級數之公項. 例如$(a+b)^n$之二項展開式,其普通項爲$\frac{n!}{r!\,(n-r)\,!}$.

普通公理. 幾 英 General axiom. 爲推理基本之命題,謂關於普通量者. 普通公理,通例如次. (1)全量等於其各部分之和. (2)等於同量或相等量者相等. (3)相等量加相等量,其和相等. (4)相等量減相等量,其差相等. (5) 不等量加相等量,其和不等,加於大者之和,大於其他. (6)不等量減相等量,其差不等,減於大者之差,大於其他. (7)相等量減不等量,其差不等,減大者之差,小於其他. (8)相等量之同倍數相等,又相等量之同分數相等.

普通二次式. 代 英 General quadratic expression. 謂二次式之諸項完備者. 例如x之二次式,則爲ax^2+bx+c; x,y之二次式,則爲$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$.

普剌斯(+). 代 英 Plus. 謂正符號+,及加法之符號+.

普佗列米之定理. 幾 英 Ptolemy's theorem. 此定理如次,卽圓內接四邊形兩對角線所包之矩形,等於二組對邊所包矩形之和. [證見第五門336題]

減. 算 代 英 To subtract. 自甲數減乙數者,謂求加如何之數於乙數,則等於甲數. 或謂自甲數中所含單

位之數,取去乙數中所含單位之數,而求其餘爲如何之數. 甲數爲被減數,乙數爲減數,所餘爲差.

減法. 算 代 英 Subtraction. 在算術,則謂自大數減小數,而求其差之法. 或求加如何之數於小數,則爲大數之法. 在代數學. 則謂求加於一數而等於他數之數之法. 而二數之大小可弗論.

減法之符號. 算 代 英 Sign of subtraction. 謂表示減之之符號,爲一,記被減數於其左,記減數於其右. 例如自 8 減 5, 則記爲 8−5. 讀曰 [8 減 5], 或曰 [8 買伊剌斯 5]. 減號爲減法之符號之略. 正稱當爲減法之符號.

減數. 算 代 英 Subtrahend. 謂減法之減數.

減算. 算 代 英 Subtraction. 同減法,見其條.

減號. 算 代 英 Sign of subtraction. 謂減法之符號,見其條.

開. 算 英 Carat. 表示合金或金塊之成色,卽言金性者也. 將合金之重量,分爲二十四,若其中含純金十八,則謂之十八開,或謂之十八金. 若含純金二十,則謂之二十開,或謂之二十金. 又有謂爲金衡 3 或 5 克令 [Grain] 之重,以權寶石類用者. 又有成分之意,如謂 3 開卽 3 成.

開方法. 算 代 英 Evolution. 或 Radication. 謂求某數或某式之根之法.

開方之符號. 算 代 英 Sign of radical. 謂記號 $\sqrt{\ }$. 某數 a 之平方根,單用 $\sqrt{\ }$,記爲 $\sqrt{a}$. [$\sqrt[2]{a}$ 之略也] 又立方根記爲 $\sqrt[3]{a}$, 四乘根記爲 $\sqrt[4]{a}$. 餘倣此.

開平方. 算 代 英 Extraction of square root. 謂求某數或某式之平方根法. 求百以下完全平方數之平方根,可暗記開平九九,卽如次表,可直知之.

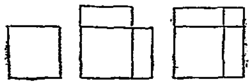
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

又一項式之平方根,可自公式 $\sqrt[2]{(ab)}=\sqrt[2]{a}\times\sqrt[2]{b}$ 直得之. 例如 $\sqrt{16a^2b^4}=\sqrt{16}\times\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^4}=4ab^2$. 又平方根有一正一負,故實爲 $\pm 4ab^2$. 代數式依某字母之降[昇]冪序列之,將其前若干項爲 A, 其餘若干項爲 B, 故 A 之各項之次數,高[低]於 B 之任意項之次數,而 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. 故自 $(A+B)^2$ 減 A^2, 則得 $2AB+B^2$, 卽 $(2A+B)B$. 若自式之書法考之,則知所餘最高[低]次項,爲 A 之第一項與 B 之第一項之積之二倍. 由是欲得所求根之次項,卽 B 之最高[低]次項,可將已得根之部分之平方,減全式所餘之初項,以根之第一項之二倍除之. 故知根之第一項,則可得知其他各項,而根之第一項,爲所設式第一項之平方根. 以此理求一切數及多項式之平方根. 但求數之平方根法,可以圖解之. 例如 $25^2=(20+5)^2=20^2+2\times20\times5+5^2=625$. 如次 20^2, 可以示於 (1) 圖之正方形表之, $2\times20\times5$ 爲長 20 闊 5 之二矩形,添之於 (1) 圖,而爲 (2) 圖者. 5^2 爲完成 (3) 圖,而添於 (2) 圖之正方形.

```
   625|25
   24
45|225
   225
```

欲求 $(20+5)^2=25^2=625$ 之平方根，先

(1) (2) (3)

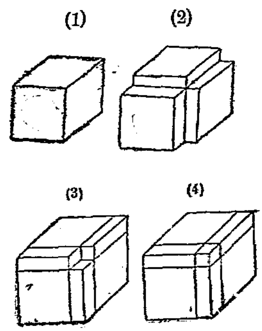


減去一邊20之正方形，餘225. 此面積為長20之二矩形，及其邊與此矩形之闊等之小正方形. 欲求此矩形之闊，可以二矩形之長之和40除225，其商為5，故此矩形之闊為5. [有小於5者] 此40雖為二矩形之長之和，然225非此二矩形之面積，而為此二矩形與小正方形之和，故225以40除之之商，或等於此矩形之闊，或大於此矩形之闊，故其所餘之面積為長20, 20, 5，闊5之三矩形之和，即 $20\times5+20\times5+5\times5$，即 $45\times5=225$.

開立方. 算 代 英 Extraction of cube root. 謂求某數或某式立方根之法. 千以下完全立方數之立方根，暗記開立九九，即次表，可直知之.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

又一項式之立方根，可自公式 $\sqrt[3]{(ab)}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$ 直得之. 例如 $\sqrt[3]{(27a^6x^3)}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{x^3}=3a^2x$. 代數式依某字母之降[昇]冪序列之，將其前若干項為A，其餘若干項為B，故A各項之次數，高[低]於B之任意項之次數，而 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$. 故 $(A+B)^3$ 減 A^3，則得 $3A^2B+3AB^2+B^3$. 即 $(3A^2+3AB+B^2)B$. 若自式之書法考之，則知所餘最高[低]次項，為 $3\times$(A之第一項)$^2\times$(B之第一項). 由是欲得所求之根之次項，即B之最高[低]次項，可將已得根之部分之立方減全式，所餘之初項，以根之初項平方之三倍除之. 故知根之第一項，則可得其他各項，而根之第三項為所設式第一項之立方根. 以正理可求一切數或多項式之立方根. 但求數之立方根法，得以圖解之. 例如 $25^3=(20+5)^3=20^3+3\times20^2\times5+3\times20\times5^2+5^3$，其 20^3 以(1)圖之立方體表之. $3\times20^2\times5$，為長20闊20厚5之三直角體，合之於(1)圖相鄰之三面，則如(2)圖. $3\times20\times5^2$，為長20闊5厚5之三直角體，添之於(2)圖，則如(3)圖. 5^3 為小立方體，添之於(3)圖，則如(4)圖. 即完成 $(20+5)^3$ 之立方體矣. 今欲求 $(20+5)^3=25^3=15625$ 之立方根，



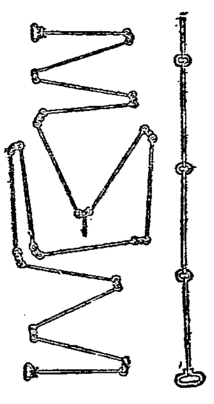
先減一邊20之立方體，所餘體積 15625−8000 即 7625. 此餘之大部分，為添於(1)圖之三直角體，即長20闊20之直角體. 欲求此直角體之厚，則以此三直角體三面之和，即 3×20^2，即以1200而除7625. 其商為6，等於三直角體之厚，或大於三直角體之厚. [其有較大之故，以7625不僅合此三體積也.] 假定為6，則所餘體積7625內，含有七直角體，其面

如次. 添於(1)之三直角體之三面$=3\times20^2=1200$. 添於(2)之三直角體之三面$=3\times20\times6=360$. 添於(3)之一直角體之一面$=6^2=36$. 故加此(1), (2), (3), 則爲1596. 此數1596, 以表厚之數6乘之, 則爲$1596\times6=9576$, 大於所餘體積7625, 故其厚當小於6. 茲以5試之, 則所餘體積7625內, 所含七直角體之面如次. 添於(1)之三直角體之三面$=3\times20^2=1200$. 添於(2)之三直角體之三面$=3\times20\times5=300$. 添於(3)之一直角體之一面$=5^2=25$. 故加此(1), (2), (3), 則爲1525, 此1525, 以表厚之數5乘之, 則爲$1525\times5=7625$, 等於所餘體積7625矣.

開剌替. 〔算〕 英 Carat. 爲表示合金成色之語, 習慣省稱開, 見開之條.

測度. 〔算〕 英 Measure. 某量爲測度者. 謂以同種之他量爲單位, 而表之之數,

測鎖. 〔三〕 英 Surveyor's chain. 測量所用之鎖, 如圖以鋼鐵製成, 其長不一. 英國測地用之測鎖爲66呎, 土木用之測鎖爲100呎, 法國之測鎖爲10米突, 鎖之兩端有把握, 其全長分100節, 每節以三小鐶接續之, 使屈伸自在, 每10節有銅製之小牌, 牌末之齒數, 即十節之數, 每十節之正中, 更附以銅圈, 所以計五節之數, 且爲貫測針[Pin]之用, 而全長百分之一, 即自中央鐶至其鄰之中央鐶之長, 謂之一輪.



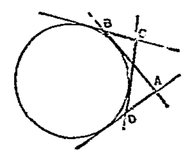
測地學. 〔數〕 英 Geodesy. 爲應用數學之一科, 依三角測量及天文學上之觀測, 而決定地球之表面及形狀者也. 測地學與測量學異, 測量學限於村市府縣故也. 測地學創始於耶剌托斯帖列斯[Eratosthenes].

測地線. 〔幾〕 〔三〕 英 Geodesic [Geodetic] line. 謂地球[橢圓體]表面上二點間之最短線. 推廣言之, 則任意立體二點間之最短線, 謂之測地線.

測角函數. 〔三〕 英 Goniometrical function. 同三角函數, 見其條.

傍心. 〔幾〕 英 Excentre. 謂傍切圓之中心.

傍切圓. 〔幾〕 英 Excribed circle. 或 Escribed circle. 或 Excircle. 謂切於三角形之一邊及他二邊延線之圓. 但不限於三角形, 在四邊形, 亦如圖, 而謂之傍切圓, 然通例多就三角形言之. [圖爲傍切於交截四邊形ABCD之圓]

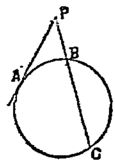


傍切球. 〔幾〕 英 Excribed sphere. 或 Escribed sphere. 又 Exsphere. 謂切於四面體之一面, 及他三面之延面之球.

傍面積. 〔幾〕 英 Lateral area. 謂立體側傍之面積. 例如圓壔, 謂兩底以外之面積. 角錐謂底以外諸三角形之面積. 但角錐之傍面自若干平面形而

成,則傍面積有謂全傍面者,有謂各傍面者.

割線. 圖 英 Secant. 謂截曲線於二點以上之直線. 若割線繞其一交點而轉,與第二交點合,則割線爲切線矣. 初等幾何學,圓之割線切圓周於二點,若自圓外一點 P,引圓之割線 PBC,及切線 PA,則 $\overline{PA}^2=PB.PC$.



割算. 圖 英 Division. 日本數辭. 即除法,見其條

割合. 圖 英 Percentage. 日本數辭. 即成分,見其條.

割引高. 圖 英 Discount. 日本數辭. 即折扣金,見其條.

循環節. 圖 圖 英 Recurring period. 或 Repetend. 見循環小數條.

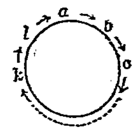
循環小數. 圖 圖 英 Recurring decimal. 或 Repeating decimal. 或 Circulating decimal. 一數字或多數字連續循環者,謂之循環小數,其連續循環一數字或多數字之一組,謂之循環節. 循環小數,有正[純]雜[混]之別,正循環小數,謂小數點次之第一位數字,爲循環節之第一數字,雜循環小數,謂有一數字或多數字,在小數點與循環節之間. 單循環節爲僅一數字循環,例如 0.3333…,如此之循環小數,可於其循環節一數字上,記點以表之,例如 $0.\dot{2}$ 即 0.2222…, $0.\dot{3}$ 即 0.3333…複循環節,例如 0.57235723…,謂循環節,多於一數字者,可於循環節首末二數字上,記點表之,如上例則爲 $0.\dot{5}72\dot{3}$. 正循環小數之值,爲循環節爲分子,依循環節數字之數列書 9 爲分母,而作分數,例如 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$ 而 $0.\dot{5}72\dot{3}=\frac{5723}{9999}$. 雜循環小數之值,則先取循環節小數作分數,再以循環節爲分子,依循環節數字之數列書9,依循環節前小數數字之數附記0,爲分母,而作分數,此二分數相加,即得. 例如 $2.4\dot{1}\dot{8}=2\frac{4}{10}+\frac{18}{990}=2\frac{23}{55}$, 又如 $0.13\dot{0}8\dot{1}=\frac{13}{100}+\frac{81}{99900}=\frac{121}{925}$. 同初位循環節,謂循環節之初位,同爲小數之第幾位者. 例如 $0.3\dot{5}\dot{4}$ 與 $0.7\dot{5}3\dot{4}$. 不同初位循環節,謂循環節之初位,不同爲小數之第幾位者. 例如 $0.1\dot{2}\dot{5}$ 與 $0.\dot{3}5\dot{4}$. 同末位循環節,謂循環節之末位,同爲小數之第幾位者. 例如 $0.\dot{2}35\dot{6}$ 與 $2.35\dot{7}\dot{4}$. [循環小數之性質] (1) 以有限數字,而成任意之小數,可視爲以 0 爲循環節之循環小數. 例如 0.35, 可書爲 $0.35\dot{0}$, $0.35\dot{0}\dot{0}$, 或 $0.35\dot{0}0\dot{0}$ 等. (2) 循環小數,可視爲其循環節之 2 倍, 3 倍等,[數字之數]爲循環節之數. 例如 $0.25\dot{3}\dot{7}$,可書爲 $0.25\dot{3}73\dot{7}$,或 $0.25\dot{3}7373\dot{7}$ 等,故二循環小數,其循環節數字之數不同者,得依次之法則,變爲自同數數字而成者,即取二者循環節數字之數之最小公倍數,爲各循環循環節數字之數. 例如 $0.1\dot{3}\dot{8}$, $7.5\dot{3}\dot{4}$ 及 $0.04\dot{3}5\dot{4}$, 得書爲 $0.1\dot{3}8888\dot{8}$, $7.5\dot{4}3434\dot{3}$ 及 $0.04\dot{3}5435\dot{4}$.

(3) 任意循環小數,可使小數點與循環節間,爲任意若干數字. 例如 $0.\dot{5}\dot{7}$ 可書爲 $0.5\dot{7}\dot{5}$ 或 $0.5\dot{7}5\dot{7}$ 或 $0.575\dot{7}\dot{5}$, 故任意二循環小數,可使爲同初末位循

環節之循環小數. (4) 同初末位循環節之諸循環小數之和,爲一循環小數,其循環節之初末位,與被加數同. (5) 任意循環小數,以不循環之任意數乘之,其積爲循環小數,其循環節之初末位,與被乘數同. 由是得循環小數運算之簡單法則. (I) 循環小數加法,先依上法則,使爲同初末位之循環節,各取一循環節,書爲同行同位而加之,但循環節末位次行之和,[想像]應進上之數,須算入之,則其和,亦爲與被加數同初末位循環節之循環小數. (II) 循環小數之減法,可準加法行之. (III) 循環小數乘循環小數法,則將循環小數化爲分數,而後乘之,其結果亦可化爲循環小數. 除法亦可準此. 又等於已知分數之循環小數,求其循環節數字之數,則先將已知分數,化爲已約分數,而後分解其分母爲素因數,其素因數僅有2或5者,則爲有限小數,否則爲循環小數,故有次之法則. 分解分數爲二個因數,其一之分子,爲所設之分子,而分母爲所設分母中2及5諸素因數之積,又其一之分子爲1,而分母爲所設分母中2及5以外之素因數之積. 於是循環節前,小數位之數,等於第一因數分母中2及5之素因數之數,又以第二因數之分母除9之連續數,取至得整除之9,則所取9之數,等於循環節數字之數. 例如 $\frac{249}{29304}=\frac{83}{9768}=\frac{83}{2^3}\times\frac{1}{1221}$. 故循環節前,小數位之數爲三個. 又以1221除999……,至得整除,須取9六個,故循環節數字之數爲六個,而結果得

$$\frac{83}{9768}=0.008\dot{4}971\dot{3}.$$

循環序次. 代 英 Cyclical order. 例如 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ 之式,其第二項,可將第一項 a 換爲 b, b 換爲 c, c 換爲 a, 而得之. 其第三項,可將第二項之 b 換爲 c, c 換爲 a, a 換爲 b, 而得之, 其第一項可將第三項之 c 換爲 a, a 換爲 b, b 換爲 c, 而得之. 如此文字之列法,謂之爲循環次序. 其式之記法,可記其一項,而謂其他各項爲對稱. 今如圖,將 a, b, c,………k, l 之文字,記於一輪之周,將其各文字與其次文字,換爲循環之次序可也.



循環級數. 代 英 Recurring series. 級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$ 其連續之 $r+1$ 項, 依 $a_nx^n+px(a_{n-1}x^{n-1})+qx^2(a_{n-2}x^{n-2})+\cdots\cdots=0$ 之關係而成者, 則此級數謂 r 次之循環級數, 而 $1+px+qx^2+\cdots\cdots$, 謂之關係式, 而第 n 項前非有 r 項, 則不能有此關係, 故此關係,爲成立於級數前 r 項之後者. 例如 $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$ 爲第一次之循環級數, 而其關係式爲 $1-2x$. 又級數 $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$, 爲第二次之循環級數, 而其關係式爲 $1-2x+x^2$. 今若 $a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots$ 爲循環級數, 其關係式爲 $1+px+qx^2$, 則

$$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots a_nx^n,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_n(1+px+qx^2)=a_0&+(a_1+pa_0)x\\&+(a_2+pa_1+qa_0)x^2+\cdots\cdots\\&+(a_n+pa_{n-1}+q_{n-2})x^n\\&\qquad+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}\end{aligned}$$

$+qa_nx^{n+2}=a_0+(a_1+pa_0)x$

$+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}$.

蓋就大於1之k之諸值,而$a_kx^k+px(a_{k-1}x^{k-1})+qx^2(a_{k-2}x^{k-2})=0$爲眞之關係式,其他諸項爲0故也. 故

$S^n=\{a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}$

$+qa_nx^{n+2}\}/(1+px+qx^2)$.

若所設級數,爲收斂級數,而第n項若n無限增大,則爲無限小. 而至無窮項,此級數之和爲$S_\infty=\dfrac{a_0(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$.

鈍角. 幾 英 Obtuse angle. 謂大於一直角而小於二直角之角.

鈍三角形. 幾 英 Obtuse angled triangle. 同鈍角三角形,見其條.

鈍角三角形. 幾 英 Obtuse angled triangle. 謂三角形之一角爲鈍角者.

爲替. 商 英 Exchange. 日本數辭. 卽匯兌,見其條.

爲替手形. 商 英 Bill of exchange. 日本數辭. 卽匯票,見其條.

爲替證書. 商 英 Draft. 日本數辭同爲替手形. 卽匯票見其條.

爲替相場. 商 英 Rate of exchange. 日本數辭. 卽匯兌行情. 見其條.

絕對值. 代 英 Absolute value. 謂某數之大,而不論其符號者. 如-5之絕對值爲5.

絕對的不等式. 代 英 Absolute inequality. 絕對的不等式者,謂無論其中文字之値如何,恆爲不等式也. 例如$x^2+1>0$,無論x之値如何恆眞也. 又若a與b不相等,則無論a與b之値如何,而$(a-b)^2>0$. 故$a^2+b^2>2ab$.

絕對的收斂級數. 代 英 Absolute convergent series. 級數之各項有異符號時,使之爲同符號,而爲收斂者,則謂之絕對的收斂級數. 對於絕對的收斂級數,而非絕對的收斂級數,謂之附條件的收斂級數[Conditional convergent series]. 有時謂附條件的收斂級數,爲半收斂級數[Semi-convergent series].

期限. 三 英 Amplitude. 期限者,因$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$, 故圓函數$\tan\theta$, $\cot\theta$,其θ以π增之,亦無變更. 卽$\tan\theta$, $\cot\theta$之圓函數,爲回歸圓函數,而π爲其回歸之期限. 而$\sin\theta=\sin(2n\pi+\theta)$, $\cos\theta=\cos(2n\pi+\theta)$, $\sec\theta=\sec(2n\pi+\theta)$, $\operatorname{cosec}\theta=\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta)$. 故亦爲回歸圓函數,而回歸之期限爲$2\pi$.

期間. 商 英 Duration. 或 Term of credit. 謂自一定時刻至他限定之時刻之時間. 期間因其經過,生法律上之效果,故民律恆規定其計算法焉.

期票. 商 英 Promissory note. 自債務者向債權者所出之票,記明若干期日後兌付若干之金,謂之期票. 見商律之規定.

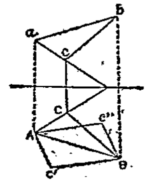
閏年. 商 英 Leap year. 或 Bissextile. 羅馬爵里安斯克查爾[Julius Cæsar 紀元前100年生同44年死]以前無閏年,而克查爾始以一平年爲365日,每四年置一閏年爲366日. 謂之爵里安曆. 但此法於四百年中插入百日,而其實爲$0.2422\times400=96.688$約97日. 故將一世紀之數,以4得整除之年爲閏年,否則爲平年. 卽每第四年置一閏年,而第百年第二百年第三百年非閏年,第四百年置一閏年. 例如西曆1700年, 1800年, 1900年非閏年而2000年爲閏年. 是爲法王格列果利第十三世[Gregory XIII 西曆1502年生1585年死]之改正. 尙見太陽曆及

太陰曆條.

閏月. 曆 英 Intercalary month. 太陰曆一年十三個月中,夾於相鄰二中氣間之月,謂之閏月. 倘見太陰曆條.

軸. 幾 英 Axis. 軸者爲幾何圖形或幾何體,以之置爲對稱之直線也. 例如對稱之軸,角錐或圓錐之軸角壔或圓壔之軸,球之軸[以半圓之徑爲軸而廻轉之則成球.]等.

軸對稱. 幾 英 Axial symmetry. (1) 平面上之軸對稱. 連結二點 A, a 之直線,被已知直線直角二等分之,則謂 A, a, 關於此已知直線,而爲對稱. A 沿任意之線而運動, a 沿對應之線而運動,則謂此二線關於已知直線而爲對稱,此已知直線謂之對稱之軸. 軸對稱之線或圖形,將其對稱軸一方平面之部分,廻其軸而轉,使與平面之他部分合,則可全密合. 然若在平面上廻轉,其對稱之線或其圖形之一,概不能密合. 軸對稱之圖,引長其對應直線,則當交於對稱軸之中,而成相等之角,其對應點連結之直線皆平行. 若不離開平面,而使對應二線密合,則圖形當不密合,然對應二線若同方向,則關於此密合之線而爲對稱,又若以反對方向而密合,則關於過密合線中點之垂線而爲對稱. 一平面形及垂直其平面之反射鏡所照之像,以反射鏡與平面之交爲對稱之軸而成對稱. 故對稱軸之二圖形,其一爲其他之幾何像. [Geometrical image]參上之所述,玆以圖明之. 下圖之 abc, 爲 ABC 之幾何像,而 ABC, ABC″, 爲 abc, 不離平面而動 ab 或 bc 與 AB 密合之位置. (2) 空間之軸對稱. 一立體或多立體,以垂直於已知軸之平面截之,其截面將其平面與軸之交點爲中心而成對稱,則謂此立體關於此軸而成對稱. 而如在一平面之中心對稱所成軸對稱之立體,則得重合明矣.



超越數. 代 英 Transcendental number. 超越數者,謂如 $\log x$, $\sin x$, a^x 等,不能以通常代數學的運算[即含加減乘除及常數指數之羃及根之有限代數項]表之之數.

超越方程式. 代 英 Transcendental equation. 謂含超越數 $\log x$, a^x, $\sin x$ 等之方程式. 超越數者,爲不能以有限代數項表之之數,見超越數條.

剩餘. 算 代 英 Remainder. 謂某數或某式以他數或他式除之之剩餘. 例如 $7\div3$, 則商 2 剩餘 1. 而 $(3x+4)\div(x+1)$, 則商 3 剩餘 1.

剩餘定理. 代 英 Remainder theorem. $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+kx+l$ 爲 $f(x)$ 若以 $x-a$ 除 $f(x)$ 之商爲 Q, 剩餘爲 R. 則 $f(x)=Q(x-a)+R$. 但 Q 爲 x 之 $n-1$ 次式,而 R 之中不含 x, 此式爲恆等式,故此式若 $x=a$, 則 $f(a)=R$. 即以 $x-a$ 除 x 之 n 次有理整式,則其剩餘等於以 a 代入其式之 x 之結果,是之謂剩餘定理. 例如以 $x-2$ 除 x^3-4x^2+2 之剩餘,爲 $2^3-4\cdot2^2+2=-6$, 又如欲以 $x-3$ 整除 $2x^4-7x^3+ax+b$, 問 a 與 b 須有如何之關係,則以 3 代入 x, 此式當爲 0, 故 $2\cdot3^4-7\cdot3^3+3a+b=0$, 即 $3a+b=-27$.

畫面. 幾 英 Picture plane. 在任意位置之立體,人目見之,自其立體之諸點,至目所引直線,謂之射線,目在一定位置時,其同時入目之射線,當限於頂角約六十度之圓錐內. 此射線之圓錐,以垂直於其軸之任意平面截之,得取此平面爲畫面,而射影所交畫面之點,則此立體之圖,成形於畫面之上.

畫法幾何學. 幾 英 Descriptive Geometry. 爲幾何學之一分科. 通例用二補助平面,而將有長闊高之諸圖形,求其圖的解法也. 二補助平面,謂之射影面[Plane of projection], 或投影面. 一爲水平,一爲垂直. 而此二平面之交,謂之地線[Ground line].

短徑. 幾 英 Minor axis. 謂橢圓之中心,垂直於長徑之直線,在橢圓內之一部分.

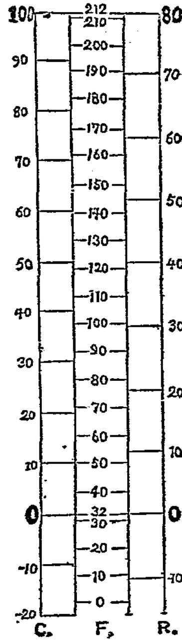
短除法. 算 英 Short division. 短除法,謂如右之除法.
例如 4350÷6.

$$\begin{array}{r} 6\overline{)4350} \\ \hline 725 \end{array}$$

虛數. 代 英 Imaginary quantity. 適當於方程式 $i^2=-1$ 之 i 之值,以 $\sqrt{-1}$ 表之,謂之虛數. 對於虛數,而通常之數,謂之實數.

虛數率. 代 英 Modulus. 二共軛虛數 $a+ib$ 及 $a-ib$ 之積爲 a^2+b^2,而其平方根之正值 $+\sqrt{a^2+b^2}$, 爲 $a+ib$ 及 $a-ib$ 之虛數率.

寒暑表. 算 英 Thermometer. 寒暑表爲表溫度之器,有華氏攝氏列氏之三種. 華氏卽華林海替 [Fahrenheit 和蘭國造玻璃人,西曆 1689 生 1736 年死] 之寒暑表,冰點爲 32 度,沸點爲 212 度. 攝氏卽攝秀斯 [Celsius 瑞典之植物學者,爲林連 (Linnœan) 之師,西曆 1670 年生,1756 年死.] 之寒暑表,冰點爲 0 度,沸點爲 100 度. 列氏卽列握米爾 [Réaumur 法國之物理學者,西曆 1683 年生,1757 年死.] 之寒暑表,冰點爲 0 度,沸點爲 80 度. 冰點爲一氣壓 [水銀高 760 生的米突] 之於冰與水混合物之溫度. 沸點爲同氣壓之於沸湯與蒸氣所接之溫度. 又三氏之每一度,均分爲十小分,故華氏之 180 度,當於攝氏之 100 度. 或列氏之 80 度,故 (F 之 9 度)=(C 之 5 度)=(R 之 4 度). 故度數之換算,有次式.



$$F=C\times\frac{9}{5}+32^\circ=R\times\frac{9}{4}+32,$$

$$C=(F-32^\circ)\times\frac{5}{9}=R\times\frac{5}{4},$$

$$R=(F-32^\circ)\times\frac{4}{9}=C\times\frac{4}{5}.$$

例如水之最大密度,爲攝氏之 4 度,華氏列氏表之,則

$$F=4^\circ\times\frac{9}{5}+32^\circ=39^\circ.2,\quad R=4^\circ\times\frac{4}{5}=3^\circ.2.$$

寒暖計. 算 英 Thermometer. 謂計溫度之器,同寒暑表,見其條.

溫司. 算 英 Ounce. 爲英美重量之

單位．在常衡爲一磅十六分之一,等於我7釐.6002136．在金衡爲一磅十二分之一,等於我8釐.3382457．

温度．【算】英 Temperature．溫度者,爲傳於他物體之熱力,而言其溫暖之程度也．計溫度有三種之寒暑表．見寒暑表條．

惠而末之定理．【代】英 Fermat's theorem．以n爲素數,以m爲對於n而爲互素數,則$m^{n-1}-1$恆得以n整除之,是之謂惠而末之定理．

惠尾白哈之定理．【幾】英 Feuerbach's theorem．三角形之九點圓,切於其內切圓及三傍切圓,謂之惠尾白哈之定理．

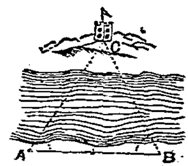
圜繞線．【幾】英 Closed line．謂曲線之兩端密合者．

圜繞面．【幾】英 Closed surface．謂圜繞空間有限部分之面．例如球面．反之如圓錐面,則非圜繞面．

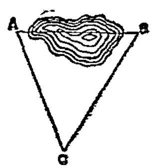
象限．【幾】英 Quadrant．謂圓周四分之一．

象限三角形．【幾】【日】英 Quadrantal triangle．見球面三角形條．

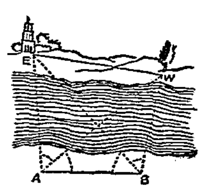
距離．【幾】英 Distance．二點間之距離,謂連結其二點之長．又自一點至一直線或一平面之距離,謂自其點向其直線或平面所引垂線之長．而二平行直線或平面間之距離,謂二平行直線或平面公共垂線之長．球面上二點之距離,謂連結其二點之大圓弧．測量術距離,則有垂直距離［高］,水平距離,及斜距離之三種．今就水平距離說明之．某物之水平距離,有得近者,有不得近者．(1)得近之距離,可以測鎖,或測竿,或卷尺,直接測定者．此測量極宜精密,蓋自此推算之結果,皆關於此測量之精粗故也．(2)不得近之距離,先測定補助距離,及補助角,乃由三角法,或幾何學,而計算之者．又有由聲音之速度而計算之法．茲示二三方法如次．I．三角測量．1．自所設點,決定不得近之物之距離．所設點爲A,不得近之物爲C,欲決定之距離爲AC,則選定得見A及C之點B,測定距離AB,又測定角CAB,CBA,則角C可得知之．而$\sin C:\sin B=AB:AC$, $\therefore\ AC=AB\dfrac{\sin B}{\sin C}$．



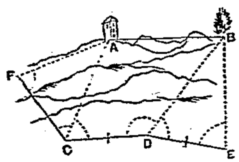
2．測定中間有障礙物之二物間之距離．A及B爲欲測其距離之二物,選定得見此二點之某點C,測定距離AC,CB,及角C,則由$AC+BC:AC-BC=\tan\frac{1}{2}(A+B):\tan\frac{1}{2}(A-B)$及$A+B=180°-C$．故$A-B$可求得之,因而角A及角B可求得之,由是依前法可求得AB．



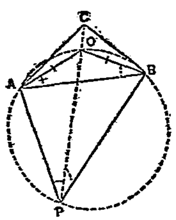
3．決定不得近之物之水平距離．E及W爲不得近之二物,選定得見E及W之二點A及B,但A與B亦須互得見者．測定距離AB,角EBW,EBA,EAW,WAB,自三角形EAB之已知部分,如前



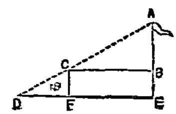
法, 決定邊EB. 又自三角形ABW依同法決定邊BW, 則三角形EAW已知其邊EB, BW, 及其夾角, 故可決定EW. 但AB與EW, 當取於同水平面上. 4. 決定不得近之距離. 但此二物, 不能選同時得見之處者. A及B爲二物, 選二點C, D, 此二點得互相見者. 又自D至B, 及C至A, 爲得相見者. 又選同時得見B, D之點



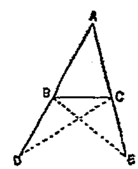
E, 及同時得見A, C之點F, 測得距離FC, CD, DE, 及角CFA, ACF, ACD, BDC, BDE, BED, 想像圖中引補助線CB. 由二三角形AFC, BDE, 如前第一法, 可計算邊AC及BD, 則三角形BCD, 已知二邊及其夾角, 故可如前第二法, 而決定邊BC及角BCD. 自角ACD, 減BCD, 得ACB, 而三角形ACB, 已知二邊及其夾角, 故如前可求得第三邊AB. 但CD與AB當取同於水平面上. 5. 自三點[知其相互距離]求至一物之距離. P爲一物, A, B, C, 爲三定點, 已知距離AB, BC, CA, 及角ABC, ACB, BAC. 自P測定角APC及BPC, 乃於圖中引AO, 使角OAB等於OPB, 引BO使角ABO等於



APO. 夫補助三角形AOB, 已知邊AB, 及在A,B,之角, 故可計算邊AO, 及角OAB, 自角CAB, 減去OAB, 餘OAC, 則因知角OAC, 及邊OA, CA, 故自此可求得角ACP, 斯時三角形ACP, 因已知邊AC, 及角ACP, APC, 故可得知第三角PAC, 則邊AP, PC可計算得之. 同樣可得求邊AP, PC. 此問題對於各種之推論, 見本書之三點問題. 以上所述, 若十分理解, 則各種皆可應用之. II. 無測角之器械, 依初等幾何學之理, 決定二點間之距離. 1. 自所設點, 決定不得近之物之水平距離. [第一法] A爲得近之物, 求其距離EA. 則於點E, 取直角AED, 又於直線ED上, 選任意之點D, 又於C與A之間, 選一

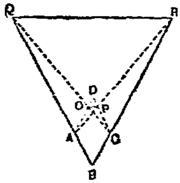


點C, 引DE之垂線CF, 測定距離DF, CF, DE, 則由相似三角形而DF : FC $=$ DE : AE, $\therefore$ AE $=\dfrac{FC.DE}{DF}$. [第二法] A爲不得近之物, B爲所設點, 選某點C, 於AB上取點D, 於AC上取點E, 測定距離BC, CE, BE, BD, BC. 三角形BCE, 已知三邊, 故由平面三角法之範式, 可求得角BCE. 由是求得其補



角ACB. 同樣可求得角ABC. 斯時三角形ABC之二角及其夾邊已知, 故可求得距離AB. 2. 求二不得近之二物間之距離. Q及R爲二物之位置, 選一便利之點B, 於直線BR及BQ上, 測定相等之距離BC, BA, 求得點D, 使AD及CD等於AB及BC,

而AD與CQ之交點爲O,及CD與AR之交點爲P,則補助三角形ODP,當相似於BQR. 若測定距離OD, OP,



PD,則 $RQ=\frac{OP.\overline{BA}^2}{OD.DP}$. 蓋自相似三角形,而 $PD:AD=AB:RB$. ∴ $BR=\frac{\overline{AB}^2.OP}{OD.DP}$. 3. 用望遠鏡上之微分規[Micrometer]而求遠物之距離. 此種器具,可自製作之,而得用以測甚小之角. 今以測距離,則欲測距離之處,須有已知其大之物,而知含其物之角. 實際之最良方法,則於欲測距離之處,直立一已知長之表竿,觀測者以微分規測含此竿之角. 若h爲物之高,a爲所含之角,D爲距離,則 $D=\frac{1}{2}h\cot\frac{1}{2}a$, 或 $D=h\cot a$, 第一式爲稍大之角,而眼正對於物之中央者用之,第二式爲甚小之角,而眼正對於物之一端者用之. 若未攜帶眞數正切表,則一度以下之角,可依次之法則,求得其近似值. 若遠隔物之大爲一呎,含之之角之分數爲n',或爲秒數n'',則距離可自 $D=(n\times3437)$呎,或 $D=(n\times206264)$呎之式求得之. 若遠隔之物爲3, 6, 9,……呎,則其所得距離,各以3, 6, 9,…乘之可也. III. 以聲音之速度測距離. 以理論及實驗,知空中傳音之速度,在同溫度爲常數,而在華氏32°之標準溫度,等於1089呎.42. 而他溫度之速度,可自次之範式求得之.

$$V=1089.42\sqrt{1+(t-32)\times0.00208}.$$

但單位爲呎,V爲速度,t爲華氏溫度. 用此範式計算距離,可在遠距離處發鎗,以每半秒或每四分之一秒移動之時表,計算見烟至聞聲之秒數. 又求得溫度t,乃以秒數乘

$1089.42\sqrt{1+(t-32)\times0.00208}$ 即得.

但單位爲呎,若已知件十分精密,則自此範式所得結果,極近似於眞距離. 若不必如此精密,則32°之速度爲1090呎,由此每增一度增半呎. 每減一度減半呎可也. 但1呎=0尺.952483. 若欲以尺爲單位,則上之呎數,均須換算耳.

順列. 術 英 Permutation. 或 Arrangement. 自若干物內,悉取之,或取其若干,而列爲種種之次序,謂之其物之順列. (1) 例如將Cambridge之字母,悉取之,而爲種種之次序,問其順列之數若干. 因九字母中,任意一字母,可列於第一,故第一之位置,列字母之方法有九. 而第二之位置,可列其餘八字母之一,故第二之位置,列字母之方法有八. 次第如此,可知列於最後之位置,惟一方法. 故所求順列之數,爲 $9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$, 即 $\underline{|9}$ 或 $9!$. 由是凡悉取相異n個物順列之數,爲 $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3\times2\times1$, 即 $\underline{|n}$ 或 $n!$. (2) 又自n個物每每取r個順列之數,爲

$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots r$ 個因數

即 $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{n-(r-1)\}$,

即 $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$,

明矣. (3) 例如eye而求其順列之數. 今將其二e,區別爲e_1, e_2,而如次列之,即 e_1ye_2　e_2ye_1　e_1e_2y　e_2e_1y　ye_1e_2　ye_2e_1.

若去e之添數,則e_1e_2與e_1e_2與無區別,故順列之數惟三,即以$2!$除$3!$者也。又依同理,悉取a, a, a, x, x,順列之數,為$\frac{5!}{3!\,2!}=10$。由是凡n個物中,有p個相同,及q個相同,及r個相同者,則悉取n個物次列之數,為$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$。(4)

相異n個物,每悉取之,而許重複者,其順列之數為n^n。又相異n個物,每取r個,而許重複者,其順列之數為n^r

例如自日本伊呂波四十七字母,每取三十一字母,其順列之數為47^{31}。則日本古今所有之歌,皆包含於其中矣。又(2)之公式,可如次求之。將相異n個物,以$a, b, c, \ldots\ldots$之n字母表之,而自相異n個物,每取r個順列之數,以${}_nP_r$表之,而${}_nP_1=n$明矣。今於${}_nP_r$之特別一字母,列於第一,其順列之數等於${}_{n-1}P_{r-1}$,而此n個字母,任意一字母皆然,故${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$。而此式對於$r \ngtr n$,又$n$及$r$之一切正值皆合,故

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}P_{r-1}&=(n-1)\times{}_{n-2}P_{r-2},\\
{}_{n-2}P_{r-2}&=(n-2)\times{}_{n-3}P_{r-3},\\
\cdots\cdots\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
{}_{n-r+2}P_{n-r+2}&=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}P_{r-r+1}.
\end{aligned}
$$

但${}_{n-r+1}P_{r-r+1}={}_{n-r+1}P_1=n-r+1$。

上式左右兩兩相乘,約其公因數,則

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

若$r=n$,則

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1=n!$$

量。國 英 Quantity. 凡得增減者謂之量。又得測度者謂之量。故數即為量。[在算術及代數學,量與數之意義,有全同其用者。] 時間,空間,重等,亦為量。數學以記號表量,而為便利計,亦有即謂其記號為量者。夫以記號為量,決無混雜,蓋有記號則可直視為所表之量也。擴充斯義。則可謂量為適用於數學定則任意之式。量又分既知量,未知量,實量,虛量,定量,變量,有理量,無理量等。既知量其值為已知者,未知量其值為未知者,實量謂不含$\sqrt{-1}$者,虛量謂含$\sqrt{-1}$者,定量謂其值為一定不易者,變量謂其值消長變易者,有理量謂不含根號者,無理量謂含根號者。

菱形。國 英 Rhombus. 或 Lozenge. 或 Diamond. 謂平行四邊形,其相鄰之邊相等者,故菱形之四邊皆相等。若菱形之一角為直角,則菱形為正方形。菱形之兩對角線互為直角二等分,且二等分其通過之角,而其面積,等於兩對角線所包矩形面積之半。

視水平之俯角。目 英 Dip of Horizon. 謂水平之深,見其條。

華伊耶恩。代 英 Phi n [$\phi(n)$] 在整數論,凡小於n,且對於n而為互素數之整數,通列以$\phi(n)$表其整數之個數。例如小於10且對於10而為互素數之整數,為1, 3, 7, 9之四個。故$\phi(n)=4$。

階乘。代 英 Factorial. 自1始之自然數之連乘積,謂之階乘或逐乘。例如$1.2.3.4\ldots\ldots n$,書為$\underline{|n}$或$n!$讀為階乘n。

項。代 英 Term. 代數學無加減等不等之諸記號之式,謂之項。例如$3a^2ab$, $2a\times3c$, $\sqrt{a^2b}$等。

答。國 英 Answer. 謂數學的運算之結果,及解問題而得之結果。

買伊剌斯。國 英 Minus 謂符號(—)。

結合定則。算 代 英 Associative law. 見基本定則條。

散分數. [代] 英 Partial fractions. 同部分數,見其條.

插入法. [代] 英 Interpolation. 同補間法,見其條.

隅. [幾] 英 Corner. 謂多角形之角頂,或立體之角頂. 又方廉隅之隅.

發散[級數的]. [代] 英 Divergency. 級數最初n項之和,因n無限增,而其絕對值亦無限增,則謂之發散級數. 例如等比級數,初項爲a,公比爲r,則最初n項之和爲$S_n=r^n a/(r-1)-a/(r-1)$. 若r爲正而大於1,則因n之增至無限,而$r^n a/(n-1)$亦增至無限,故S_n之絕對值可使大於任何之正數. 若$r=1$,則$S_n=na$,故n無限增,則S_n亦無限增. 此二種級數,謂之發散級數.

菇. [算] 英 Hectare. 美 Hektar. 爲海克亞爾之略號,見海克亞爾條.

粨. [算] 英 Hectometre. 美 Hektometer. 爲海克米突之略號,見海克米突條.

筋違乘法. [代] 英 Cross multiplication. 日本數辭,同互乘法,見其條.

陽馬. [幾] 古立體名. 謂矩形爲底之角錐,而一稜垂直於底面者. 參看角錐條.

渾天. [數] 古數辭. 言天地之體,狀如鳥卵,天包地外,猶殼之裹黃也. 周旋無端,其形渾渾然,故曰渾天,史官候臺所用銅儀,則其法也. 立八尺圓體,具天地之形,以正黃道,占察發斂,以行日月,以步五緯,官有其器,而無本書. 見周髀算經音義.

粟米. [算] 古數書篇名. 以御交質變易,爲九章之一. 諸米不等,以粟爲率,故曰粟米.

策算. [算] 戴震造之算器. 以九九書於策,而盡乘除開平之用. 不曰籌而曰策,以別於古籌算,不使名稱相亂也. 見算經十書附卷.

十三畫

圓. [幾] 英 Circle. 謂至一點等距離之曲線. 其一點謂之中心. 凡言圓恆用圓周代之. 過中心而兩端終於圓周之直線,謂之徑. 圓與直線,爲平面幾何學之元素. 茲將圓之最要性質示於次. (1) 各徑二等分其圓及其圓周凡等弧對於等弦. (2) 圓周等於以π即3.14159265……乘徑之長. 通例π恆用近似數3.1416. 故任意二圓周之比,等於其徑或半徑之比. (3) 圓之面積,等於半徑之平方乘π者,故任意二圓面積之比,等於其半徑之平方,或徑之平方,或對應二線之平方之比. (4) 圓之面積,小於其外切任意正多角形之面積,而大於其內接任意正多角形之面積,又爲內接或外切多角形之極限,即等於多角形邊數增至無限時之面積,故圓周在外切及內接多角形之周之間. (5) 圓爲同長圍繞線面積之最大者.

圓周. [幾] 英 Circumference. 圓周謂爲圓面積之界線而自其中心一點,至其線上之距離相等. 任意圓周之長,等於π乘其徑. 計算圓周與其徑之比之近似值. 設圓徑爲若干,而計算某內接正多角形,及與之相似之外切正多角形之周,然後計算邊數二倍之內接正多角形及外切正多角形之周,次第如此,計算之值,

爲圓周漸次之近似值. 今設圓徑爲1, 自內接正方形及外切正方形始, 而內接正方形之周 $=4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. 外接正方之周 $=4$, 故 $P=4$, $p=2\sqrt{2}=2.8284271$. 又外切及內接正八角形之周爲 $P'=\frac{2p\times P}{P\times p'}=3.3137085$,

$$p'=\sqrt{p\times P'}=3.0614675.$$

將此取爲已知量置爲 $P=3.3137085$, $p=3.0614675$, 則16邊之正多角形, 依同式得 $P'=3.1825979$, $p'=3.1214452$. 繼續如此行之, 得結果如次. 自此表

邊數	外切多角形之周圍	內接多角形之周圍
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

最終二數, 而知其徑爲1之圓周, 小於3.1415928, 而大於3.1415926. 而徑爲1, 則周爲 π. 故 $\pi=3.1415927$. 則其差誤在小數第七位之一單位以內. 由此求得之 π 之值, 又謂之圓周率. 初定 π 之值者, 爲阿爾几米的司 [Archimedes 希臘之數學者, 西曆紀元前287年生, 212年死]. 氏以與上相似之法, 證明 π 之值, 在 $3\frac{1}{7}$ 與 $3\frac{10}{71}$ 之間. 以小數表之, 則在3.1428與3.1408之間. 故氏得 π 之第三位以內之值. 現今將 $3\frac{1}{7}$ 爲阿爾乞美得士之周率, 而於粗計算用之. 美土斯 [Metius 西曆1640年] 氏發見更精密之 π 之值, 即 $\frac{355}{113}$. 此小數第六位無誤, 記憶此數之法, 將最初奇數, 每二個列書之, 如113355, 則將初三數字爲分母, 後三數字爲分子. 然近世解析學之進步 π 之值有計算至小數200位或500位或700位者. 現英人寫克士 [Shanks] 氏計算至小數第七百七位如次.

3.14159	26535	89793	23846	26433
83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286
20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384
46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211
05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475
64623	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432
66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815
20920	96283	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820
46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218
61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857
52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021
39501	60924	48077	23094	36285
53096	62027	55693	97986	95022
24749	96206	07497	03041	23668
86199	51100	89202	38377	02131
41694	11902	98858	25446	81639
79990	46597	00081	70029	63123
77381	34208	41307	91451	18398
05709	85....			

圓周率. 幾 英 Ludolphian number. 謂圓周與徑之比, 見圓周條.

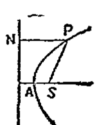
圓周角. 幾 英 Angle at the circumference. 謂自圓周上一點, 引二弦間之角.

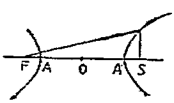
圓錐. 幾 英 Circular cone. 直角三角形, 以直角之一邊爲軸, 廻轉所生之立體謂之正圓錐. 凡圓錐謂錐之母

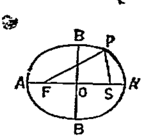
曲線爲圓者．而高之趾，在底面圓之中心，則爲正圓錐，否則爲斜圓錐．凡圓錐之體積，等於高之$\frac{1}{3}$乘底面積．而正圓錐底面之半徑爲r，高爲h，斜高爲s，則其側面積爲πrs，而體積爲$\frac{1}{3}\pi r^2h$．

圓錐曲線．幾 英 Conic. 或 Conic section. 謂以平面截圓錐，其截口之曲線．此曲線有三種，拋物線，橢圓，雙曲線，是也．截圓錐之平面，平行於一母線，則

截口爲拋物線，又平面與底面之角，小於圓錐之底角，則截口爲橢圓．又若大於圓錐之底角，則截口爲雙曲線．又若平面平行於圓錐之底面，則截口爲圓，卽橢圓之特別者．又平面若過圓錐之頂點，則或爲一點，或爲一直線，或爲相交二直線，卽橢圓拋物線雙曲線之特別者．圓錐曲線又有下其平面之定義者，卽拋物線者，謂點自焦點S及準線N等距離者之軌跡．橢圓者，謂點自焦點F，S距離之和爲一定者之軌跡．又雙曲線者，謂點自焦點F，S距離之差爲一定者之軌跡．又點自焦點之距離，與自準線之距離之比，小於1者之軌跡，謂之橢圓．又大於1者之軌跡，謂之雙曲線．







圓錐曲線法．數 英 Conic sections. 爲論圓錐曲線之一分科，有幾何學的及解析的之二者．幾何圓錐曲線法，以幾何學的論圓錐曲線．解析圓錐曲線法，用代數式而解析的論之．卽解析幾何學也．

圓臺．幾 英 Frustum of a cone. 謂以平行於底之平面截圓錐之立體．截正圓錐之圓臺體積，爲$\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$．但$r$，$r'$，爲兩底之半徑，而$h$爲高，又斜高爲$s$，則側面積爲$\pi s(r+r')$．

圓壔．幾 英 Circular cylinder. 矩形一邊爲軸，廻轉所生立體，謂之正圓壔．凡圓壔謂壔之母曲線爲圓者．而母曲線垂直於底面，則謂之正圓壔，否則謂之斜圓壔．凡圓壔之體積，等於底面積乘高，而正圓壔，若底面之半徑爲r，高爲h，則其側面積爲$2\pi rh$，而體積爲πr^2h．

圓柱．幾 英 Circular cylinder. 卽圓壔，見其條．

圓弧．幾 英 Circular arc. 圓周之一部，謂之圓弧，或略之而謂之弧．

圓規．數 英 Compasses. 同孔巴斯，見其條．

圓函數．三 英 Circular function. 同三角函數，見其條．

圓之方積．幾 英 Puissance or potency (of a circle). 關於一點之圓之方積，謂其點至圓心距離之平方，與其半徑之平方之差．

圓亭．算 古體形名．見方亭條．

補角．幾 英 Supplement [of an angle]. 謂以某角減二直角者．二角之和爲二直角，則此二角互爲補角．

補弧．幾 英 Supplement. [of an arc].

謂以某弧減半圓周者. 二弧之和,等於半圓周,則此二弧互爲補弧.

補弦. 圖 英 Chord supplementary. 謂補弧之弦. 互爲補弧之二弧之弦,謂之互爲補弦.

補題. 圖 英 Lemma. 謂補助之命題. 例如欲證明西母生定理, 卽所謂自三角形外接圓周上任意一點, 向各邊所引垂線之趾,在同一直線上. 其證明所引用圓內接四邊形相對角互爲補角而其逆亦眞之定理,謂之補題.

補間法. 囝 英 Interpolation. 以二項式定理展開 $(a+b)^n$, 其 n 爲整數或分數皆同, 故 n 爲分數, 而用範式

$$a+na_1+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2+\cdots\cdots$$

可插入一項或數項於某級數二項之間. 例如 27, 28, 29, 30 之立方根各爲 3, 3.03659, 3.07232, 3.10723. 而求 27.9 之立方根.

0.03659	0.03573	0.03491	(1)
	−0.00086	−0.00082	(2)
	0.00004		(3)

(1) 爲差之第一次, (2) 爲差之第二次, (3) 爲差之第三次, 將此等值代入上之範式, 則

$$3+\frac{9}{10}(0.03659)-\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{0.00086}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{11}{10}\right)\left(\frac{0.00004}{6}\right)$$

$=3.03297$. 是爲所求立方根之近似値. 又已知 $\log 127=2.1038$, $\log 128=2.1072$, $\log 129=2.1106$. 試求 $\log 127.37$, 則

0.0034=差之第一次.

0=差之第二次.

故所求之對數爲 $2.1038+\left(0.0034 \text{ 之 } \frac{37}{100}\right)=2.1038+0.001358=2.1052$.

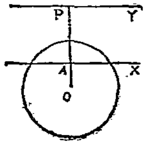
補助角. 目 英 Auxiliary angle. 或 Subsidiary angle. 解三角形使便於對數計數,有用補助角者. 例如直角三角形之解法 $C^2=a^2+b^2$. 使適於對數計算, 則因 $a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$, 若 $\frac{b}{a}=\tan\theta$, 則 $c^2=a^2(1+\tan^2\theta)=a^2\sec^2\theta$, $\therefore$ $c=a\sec\theta$, $\therefore$ $\log c=\log a+\log\sec\theta$, 此 θ 爲補助角, 可由 $\log\tan\theta=\log b-\log a$ 求得之.

補助單位. 圖 英 Auxiliary unit. 謂爲基本單位之若干倍或若干分之單位. 例如米突法長之單位, 生的米突, 密里米突, 啓羅米突等. 謂之補助單位. 又尺度法之寸, 分, 丈等, 爲補助單位. 又謂之化出單位 [Derived unit].

補助未知數. 囝 英 Auxiliary unknown quantity. 解方程式, 欲使其解法之簡明,有用補助未知數者. 例如欲解 $\frac{1+\sqrt{(x^2-1)}}{1+2a\sqrt{(x^2-1)}}=\frac{\sqrt{(x^2-4)}-1}{x^2-2}$, 若 $\sqrt{(x^2-1)}=y$, 則 $x^2-2=y^2-1$. 而所設方程式爲 $\frac{1+y}{1+2ay}=\frac{y-1}{y^2-1}=\frac{1}{y+1}$, $\therefore$ $y^2+2y+1=1+2ay$, 解之, 或 $y=0$, 或 $y=2(a-1)$, 卽 $\sqrt{x^2-1}=0$, $\therefore$ $x=\pm1$, 或 $\sqrt{x^2-1}=2(a-1)$. 又解之爲 $x=\pm\sqrt{\{1+4(a-1)^2\}}$, 此解中之 y 爲補助知數.

極. 圖 英 Pole. (1)球之圓之極,謂垂直於其圓平面之球徑之兩端. (2)球之極,謂球之軸交其球面之點. (3)於圓之任意之徑上取二點, 其一取於

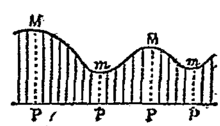
內,其他取於外,使自中心自此二點距離所包矩形,等於半徑之正方形,過此二點引半徑之垂線,則此垂線之一,為其他點之極線. 例如圖 OA.OP=(半徑)^2,則 A 為 PY 之極,P 為 AX 之極,PY 為 A 之極線,AX 為 P 之極線. 關於圓 O 而點 A 之極線過點 P,則點 P 之極線當過點 A.



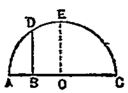
極限. 數 英 Limit. 變量之極限,為漸漸接近之一定量. 此量與變量之差,得使小於任意之量,然變量決不能達於其極限者. 例如 a^2+2ax 為與 x 俱變之量,即為 x 之函數,而因 x 之減小,漸漸接近於 a^2,其適當於 x 之值,可使 a^2+2ax 與 a^2 之差,小於任意之量,故 $x=0$,則 a^2+2ax 之極限為 a^2. 又圓內接正多角形,其邊數漸漸增加,則內接多角形之面積,次第接近於圓之面積. 可使其與圓之面積之差,小於任意之量. 故圓之面積為其內接正多角形邊數無限增加之面積之極限. 同樣圓周為其內接正多角形周圍之極限. 凡對於其變量為真之性質,亦對於其極限為真. 此理用於推求線面體之性質,而在解析法,則極限之理論,應用甚廣. 又微分學之原理,亦多歸於極限論. 惟方程式論,所謂根之極限,正根之極限者,則與此異耳. [但方程式之根,所謂極限,恆謂為界限.] 如某方程式之根,在5與−2之間,則謂5與−2為其根之極限. [此所謂根之極限,謂不定也. 例如謂根在5與−2之間,則根之極限,可取小於5大於−2之任意之數.] 又切線之理論,於極限亦極重要. 例如謂圓之切線者,為過圓周於一點之直線. 此定義適用於圓或橢圓等之凸曲線,而不適用於一切曲線. 又如謂切線者,為迴轉其一交點,使二交點接近之極限. 此定義則適用於一切曲線. 同樣可解釋曲面之切平面.

極圓. 目 英 Polar circle. 謂通過地球面上黃道極二緯度之圓. 又謂之極圈. 極圓在距南北兩極各約23°28′之處,而為一年中若干月太陽不沒於地平線下及不出於地平線上之界線也. 如此太陽不出沒之現象,愈近兩極,其期間愈增,至兩極點,則晝為六個月,夜為六個月,而近北極之極圓,謂之北極圓,或北極圈. 近南極之極圓,謂之南極圓,或南極圈.

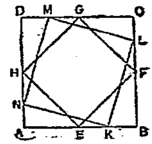
極大值. 數 英 Maximum value. 含一變數 x 之式 y. 其值因 x 變而漸增大又漸減小,則由增大至減小之際,其 y 通過大於前後之值,謂 y 之極大值. 反之,因 x 變而 y 漸減小又增大,則由減小至增大之際,其 y 通過小於前後之值,謂 y 之極小值. 今以例明之. 有一人行一山道,其足跡在海面上之高,時有增減之變化,即登至頂上 M,則其高 MP 為極大,降至低處 m,則其高 mp 為極小. 由是觀之,一曲線之極大與極小不一,而極大與極小,決非最大者與最小者之謂,而為變量前後狀



態之極大或極小也. 卽如上圖MP不一,皆爲極大. 又mp不一,皆爲極小是也. 今將極大極小問題,示二三例如次. (1) 二數之和爲常數a,求其積y之極大値. 將二數之一爲x,則其他爲$a-x$,故$y=x(a-x)$. 若使x自0變至a,則$x=0$時,$y=0$,而$x=a$時,亦$y=0$,因其中間y爲正,故y當始增大而後減小,則y通過極大値明矣. 又$y=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$,故$\frac{a}{2}-x=0$時,卽$x=\frac{a}{2}$時,$y$爲極大. 而其極大値爲$\frac{a^2}{4}$明矣. 又以一般之方法解之,則$y=ax-x^2$,關於$x$而爲$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}$,故$x$爲實數,則$y$不能超過$\frac{a^2}{4}$,故$y$之極大値爲$\frac{a^2}{2}$. (2) 今對應前條研究幾何學的問題. 卽矩形之周圍爲一定時,而求其面積之極大者. AC爲一定周圍之半分,則AC爲一定. 將AC爲徑,畫半圓於其上,自其中心O,作AC之垂線OE,又自AC上任意之點B,作AC之垂線BD,則依幾何學定理$AB.BC=\overline{BD}^2$,故B與O合時,AB.BC之爲極大明矣.



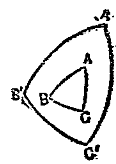
(3) 二數之和爲常數a,求其平方之和y之極小値. 將二數之一爲x,則其他爲$a-x$,故$y=x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2=\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$,故$\frac{a}{2}-x=0$時,卽$x=\frac{a}{2}$時,$y$爲極小.
此題欲以一般之方法解之,則$y=2x^2-2ax+a^2$關於x而爲$x=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2y-a^2}$,故$y$不能小於$\frac{a^2}{2}$,故$y$之極小値爲$\frac{a^2}{2}$.
(4)今對應前條研究幾何學的問題. 卽於已知之正方形,求其內接正方形面積之極小者. 已知之正方形爲ABCD,其內接任意之正方形爲KLMN, EFGH爲各邊中點爲角頂之正方形,則EFGH之面積,爲ABCD之面積之半分明矣.



而AK. KB等於△AKN,△KBL,△LCM,△MDN之二倍,且K與E合時,爲極大. 故EFGH爲內接於ABCD之正方形之最小者明矣.

極小値. 國 英 Minimum value. 見極大値條.

極三角形. 國 英 Polar triangle. 將球面三角形各角頂爲極,而畫大圓之弧,則是等弧相交,又作球面三角形,此球面三角形,爲前球面三角形之極三角形. 例如A, B, C,各爲大圓B′C′, C′A′, A′C′之極,則A′B′C′爲ABC之極三角形. 凡大圓互於二點相交,故引長弧B′C′, C′A′, A′B′,則成三個三角形. 然所謂極三角形者,其對應於A之角頂A′與A,俱在弧BC同傍. 他角頂亦然. 若A′B′C′爲ABC之極三角形,則ABC又爲A′B′C′之極三角形.

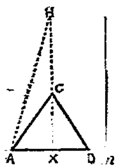


解法. 國 英 Solution. 問題之解法,謂求合於問題要件之未知部分. 解法有算術的,代數學的,幾何學等.

方程式之解法,爲求合於方程式相等之未知數之値.

解答. 國 英 Solution. 同解法,見其條.

解析法. 國 英 Analysis method of. 解析法者,謂以字母表數,以記號示運算之數學的推理法也. 解析法有古代解析法與近世解析法之別. (1) [古代解析法]古代解析法之意義出自拔卜士 [Pappus 西歷紀元約340年頃,生於亞歷山大市之人.]. 所著之書,假定所求者爲已成立,而由此以演出之推理法也. 反之,爲組合法 [Synthesis], 則自解析法最後始,而達於所求者. 今以例明之. [問題]已知自二等邊三角形之頂點至底邊之垂線,與二等邊之一之和,及底邊,而求作本形. [解析法] ABC 爲所求三角形,自 C 引底邊 AB 之垂線 CX, 則 AB 二等分於 X, 引長 XC 至 H, 使 XH 等於 m, 則知 CH=CA, 而連結 AH, 則 $C\hat{A}H=C\hat{H}A$, 故可知 C 點之位置矣.

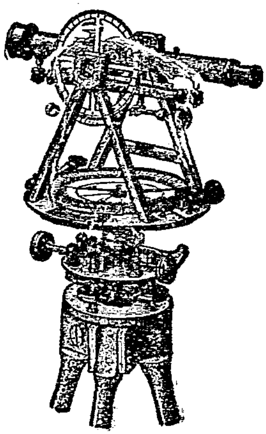


[組合法] 將 AB 二等分於 X, 自 X 作 AB 之垂線 XH, 使 XH=m, 引 AC 使 $H\hat{A}C$ 等於 $A\hat{H}C$, 若 AC 交 XH 之點爲 C, 則 ABC 爲所求之三角形. [證] XH 爲 AB 之垂直二等分線,故 AC=BC, 而 △ABC 爲二等邊,又 HC=AC, 各加 CX, 則 AC + CX=HC+CX=HX=m. 由是觀之,古代之解析法,全爲組合法反對之推理法. 而假定某命題爲眞,乃經推理而達於或眞或僞之結果. 若達於眞之結果,則最初假定之命題爲眞. 若達於僞之結果,則最初假定之命題爲僞. 後者謂之背理證法 [Reductio ad absurdum]. (2) [近世之解析法]近世之解析法,非推理之特別方法,而爲數學的推究之意. 凡用近記號之數學的推理,卽非幾何學的推理,皆解析法也. 以字母表數,以記號示運算,故爲極簡明之法. 解析法不僅於數學之研究最犀利,應用於物理學,其效用亦不少.

解析幾何學. 國 英 Analytical Geometry. 解析幾何學者,爲以解析法論幾何學者也. 解析幾何學,分定與不定之二者. 定解析幾何學,解定問題爲目的,其表旣知未知間之關係之方程式,恆等於所求之部分之數. 解析幾何學之此部分,比較的不必要,因其不過應用代數學於幾何問題故也. 不定解析幾何學,研究直線,圓,圓錐曲線,及一次二次之表面,高次曲線,超越曲線等之性質,用座標推之,此爲第十七世紀之初笛卡特[Descartes 法國之數學者,西歷1596年生1650年死]之發明,現今解析數學之進步,基於此發明者不少.

經度. 國 英 Longitude. 某地之經度,謂自本初子午線,[謂通過英國格林威基天文臺子午儀中心之子午線.] 向東或西,沿赤道之弧測至其地子午線之弧度.

經緯儀. 日 英 Theodolite. 經緯儀爲測量用器械,測垂直角及水平角用之. 用最廣者爲轉鏡經緯儀 [Transit Theodolite]. 轉鏡經緯儀,有垂直及水平之二分度圈. 水平分度圈,同於羅鍼儀之分度圈,而安置望遠之遊標盤有二遊標 [Vernier]. 廻轉水平分度圈之周圍,而測平面角. 又安



置垂直分度圈於望遠鏡軸上,附於遊標,而測傾度角. 望遠鏡之下,附水準器,而測定水平線,或測兩地之高低[水準差]. 望遠鏡之筒中,以蜘蛛絲,或纖細之白金絲,裝置直角相交之十字網,以其交點定視軸[視線過望遠鏡之中心].

經紀. 算 英 Commission agent. 以所依托人之名義,而周旋買賣之商人,謂之經紀.

匯兌. 算 英 Exchange. 欲自甲地寄金於遠隔之乙地,付現金於甲地之銀行或郵務局,而領取匯票,寄之於乙地,使於乙地之銀行或郵政局,而兌換現金,謂之匯兌. 參看匯票條.

匯票. 算 英 Bill of exchange. 匯票者,謂甲地之人,欲寄金與乙地之人時,付現金於甲地之銀行,或郵政局,而向乙地之銀行或郵政局,兌換現金之票也. 甲乙兩地爲內國,則謂之內國匯票 [Bill of domestic exchange]. 爲內國與外國,則謂之外國匯票 [Bill of foreign exchange].

匯兌行市. 算 英 Rate of exchange. 某國之貨幣,以他國之貨幣計之,謂之匯兌行市. 匯兌行市日日變動,而無法定之平價 [Mint par of exchange]. 此因兩國貿易金融之狀况,及鈔票之需用供給而成者也. 而匯兌行市在法定平價以上,則謂之 At premium. 或 Above par. 或 Favourable. 在平價以下,則謂之 At discount. 或 Below par. 或 Unfavourable. 匯兌行市以對於本國貨幣之他貨幣表之者,謂之付出行市 [Paying quotation]. 例如我國對於英國之匯兌行市壹圓爲貳先令半,則謂之付出行市,反之,例如美國一弗爲我國貳圓五仙,則謂之收入行市 [Receiving quotation].

運算. 數 英 Operation. 初等數學之運算,謂因加減乘除冪及根等記號所表示,而實行算之也.

運動學. 數 英 Kinematics. 運動學者,爲不關係於力而論運動之學科也. 此蓋爲純正數學之一分科,而必於力學前論之者.

傾斜. 幾 英 Inclination. 某直線之對於他直線之傾斜,謂其二直線間之角. 某直線之對於某平面之傾斜,謂其直線與其平面上正射影間之角. 又某平面之對於他平面之傾斜,謂之二平面間之角,其角之二邊爲各平面上,直角相交於平面之交之二直線.

傾斜角. 幾 英 Anlgo of inclination. 見傾斜條.

資產. 算 英 Assets. 謂商人所有之財產,或破產人抵債之產業.

資本金. 算 英 Capital. 謂圖利益而投於事業之金. 然不限於現金,凡公債票地面房屋物品勞力等,皆可算入資本金也. 惟有流通資本[Circulating capital. 或 Floating capital.] 與固定資本 [Fixed capital.] 之別. 流通資本如現金公債票物品等,謂得運轉而生利益者. 固定資本如製造廠之機器,營業之地面房屋等,不遷移而生利益者.

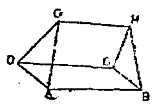
零 [0]. 數 英 Zero. 或 Nought [Naught], 又 Cypher [Cipher]. 零[Zero] 有二意義,其一爲無[Cypher 或 Nought 多爲此義]之義,算術之零,卽此義也. 其一爲小於可任意數之數,卽無窮小之義也. 此義用於代數學,及凡解析的數學. 例如取分數 $\frac{a}{b}$,假定 b 爲常數,a 漸次減小,則此分數之値,亦漸次減小,a 爲無限小時,則亦當爲無限小. 又同分數,若 a 爲常數,b 漸次增大,則分數之値漸次減小,而 b 比較 a 爲極大時,則分數之値當爲極小,b 爲無窮大,卽 ∞ 時,則分數之値當爲無窮小,卽 0. 故 $\frac{a}{\infty}=0$. 此種之零,與自 a 減 a 所得絕對的零不同. 絕對的零,無須研究而皆相等者. 若第二義之零,因其爲無窮小之義,故必溯其所生之根源而研究之,決不能凡零[第二義的]皆相等也. 例如二分數 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{2a}{b}$,若 a 爲常數,b 漸次增大,則此二分數之値,漸次減小,最後 b 無限增大,則無限減小,卽 $b=\infty$ 時,則 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{2a}{b}$ 俱爲 0,然其比仍爲 2 也.

裏 [定理的]. 幾 英 Obverse [of a theorem] 定理之文言,若爲[若 A 爲 B 則 C 爲 D],則[若 A 不爲 B 則 C 不爲 D],謂之原定理之裏. 某定理爲眞,其裏定理不必眞. 例如謂[二三角形二邊相等且其夾角亦相等則二三角形等積]之定理之裏,卽[二三角形二邊各相等,若其夾角不相等,則二三角形不相等],則不必眞. 蓋二邊各相等其夾角爲補角者,其面積相等,故也.

試除數. 算 代 英 Trial divisor. 開平方任意階級之剩餘,取所得商之 2 倍爲除數除之,此除數,謂之試除數. 開立方任意階級之剩餘,取所得商之平方之 3 倍爲除數除之,此除數謂之試除數. 例如求 1369 之平方,第二階級之剩餘以至此所得之商 30 之 2 倍卽 60 除之,此 60 謂之試除數.

```
   1369|37
   9
  67|469
    |469
```

楔. 幾 英 Wedge. 謂以五個平面所成之立體. 如圖,平行四邊形[通例爲矩形] ABCD 謂之背,二梯形 ABHG, CDGH, 謂之面, GH 謂之刃,刃與背之距離謂之高. 若背之長爲 L,廣爲 b,刃之長爲 l,高爲 h,則楔之體積 V 如次.



$$V=\frac{1}{6}bh(2L+l).$$

微分學. 數 英 Differential calculus. 微分學爲數學之一分科,依其法,自一函數,推求其微分之他函數,而論其應用於代數學幾何學力學等者也.

愛克. 算 英 Acre. 爲英美兩國計土地之單位,等於4840平方碼. 故640愛克,爲一平方哩. 1愛克當我39518平方尺,我6.58644畝.

損益算. 算 英 Profit and loss. 謂買賣物品之損益,比於原價之成分之算法,卽成分之直接應用.

鉛垂線. 目 英 Plumb line. 謂附着鉛錘,而自由垂懸之直線.

稜. 幾 英 Edge. 謂立體之面與面之交.

酬金. 算 英 Brokerage. 或 Commission. 謂買賣物品,爲其媒介之業者,所得之報酬,而對於買價或賣價,而定其成分.

暗算. 算 英 Mental arithmetic. 同心算,見其條.

置換法. 代 英 Substitution. 同代入法,見其條.

會社. 算 英 Company. 公司,日本謂之會社,見公司條.

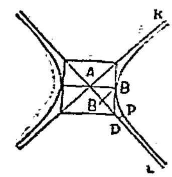
廉. 算 古數辭. 開方法,以形明之,方隅,外皆爲廉. 例如開平方有二廉,開立方有三方廉三長廉,是也. 今曰餘形[Cosecant],見其條.

䄷. 算 法 Hectogramme. 爲海克格蘭姆之省書,等於格蘭姆之百倍.

十 四 畫

對數. 代 目 英 Logarithm. 某數之對數者,謂以一定之數爲底,而使其乘冪與某數等之指數也. 今於方程式$a^x=N$,其a爲一定之數,若N變其值,則x亦因之變其值,而斯時x之值,爲N之值之對數. 其a爲對數之底,除1之外,任意之正數,皆得以爲底. 若對於特別之底,而計算其所有數[例如自一至十萬]之對數,則可得其底之一組對數. 對數之底,可取任意之數,故對數之種類,可至無數,然行於世之對數,僅有二種,卽常用對數[Common logarithm]及納伯爾對數[Napierian logarithm]是也. 納伯爾對數,亦謂之自然對數.[Natural logarithm] 常用對數,以10爲底,納伯爾對數,以e=2.71828.........之不盡數爲底. 數之對數,自整數與小數之二部而成,整數部謂之指標[Characteristic],小數部謂之假數[mantissa]. 例如52之對數爲1.716003,而1爲指標,0.716003爲假數. 各種對數表中,常用對數之便利如次. [第一]不必記載指標,蓋常用對數之指標,比其數之整數位數少一故也. [第二]小數之對數,同於同數字同列法之整數之對數,卽整數小數[與整數同數字同列法者]之假數皆同,惟小數之指標爲負,其絕對值,比小數點與第一有效數字間0之數多一而已. 故常用對數,凡實用計算皆用之. 凡對數之性質示於次. (1)若干因數之積之對數,等於其各對數之和. (2)以一數除他數之商之對數,等於自被除數之對數減除數之對數. (3)某數任意乘冪之對數,等於某數之對數,而以其乘冪指數乘之. (4)某數任意根之對數,等於某數之對數,而以其根指數除之. 此四原理,在乘除及累乘開方,可簡略其計算. 由此得次之法則. 1.欲求二數相乘之積,則自表檢得二數之對數而加之. 又

自表檢得對應其和之眞數,卽所求之積. 2. 某數欲以他數除之,則自表檢得二數之對數,以除數之對數,減被除數之對數,又自表檢得對應其差之眞數,卽所求之商. 3. 某數欲求其任意乘冪,則自表檢得其數之對數,以其乘冪之指數乘之,乃自表檢得對應其積之眞數,卽所求之數. 4. 某數欲求其任意之根,則自表檢得其數之對數,以其根指數除之,乃自表檢得對應其商之眞數,卽所求之數. 此法則爲用於實算者,次更述其用於解析的研究. I. 任意種類之對數,其1之對數爲0. II. 對數之底無論如何,其底之對數爲1. III. 大於1之底之對數,其大於1之數之對數爲正,而小於1之數之對數爲負. ∞之對數爲$+\infty$,而0之對數爲$-\infty$. IV. 小於1之底之對數,其大於1之數之對數爲負,而小於1之數之對數爲正. ∞之對數爲$-\infty$,而0之對數爲$+\infty$. V. 負數無實數之對數,卽負數無對數也. 凡對數,自二因數而成,其一關於其底者而爲常數,其一關於其數者,則因其數之變而變. 第一因數,謂之對數率[Modulus]. 某種類對數之對數率,以任意數之訥伯爾對數乘之,則得其數之同種類對數. 常用對數之對數率,爲0.434294482...,訥伯爾對數之對數率爲1. 任意種類對數之對數率,等於其底之訥伯爾對數之逆數. 訥伯爾對數,爲各種類對數之基本,而因之可得他種類之對數也. 訥伯爾對數,又謂之雙曲線對數,蓋等邊雙曲線與其漸近線間之面積,與訥伯爾對數有關係故也. 如圖,BP爲等邊雙曲線之一部分,AK及AL爲其漸近線,頂點B之橫線AB′定爲1,則縱線BB′與任意他縱線PD間,所夾面積單位之數,等於PD之橫線之訥伯爾對數,卽面積B′BPD=log(AD)也.



凡對數不謂之雙曲線對數,惟訥伯爾對數,謂之雙曲線對數者,此也. 然訥伯爾對數,與等邊雙曲線之間,成立之關係,亦成立於任意種類對數,與斜雙曲線之間,卽在斜雙曲線,則面積以二斜縱線爲界,而其對數率,則等於斜縱線交橫線之角之正弦. [對數表之計算]對數表之計算用級數,而其基本級數如次,

$$\mathrm{Log}(1+y)=M\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\ldots\right)\ldots(1).$$

但log表任意種類之對數,而M爲其對數率,y爲任意之數. 若$M=1$,則得訥伯爾對數. 若以l表訥伯爾對數,則 $l(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\ldots\ldots(2)$. 此級數收斂甚遲,故計算實際表,則變形如次. (2)之y,以$-y$代之,則 $l(1-y)=y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\ldots(3)$. 自(2)減(3),將$l(1+y)-l(1-y)$記爲$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$,則 $l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y}{5}+\ldots\right)\ldots(4)$. 若$y=\frac{1}{2z+1}$,記$l\left(\frac{z+1}{z}\right)$爲$l(z+1)-lz$,則

$$l(z+1)=lz+2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\ldots\ldots\right)\ldots\ldots(5).$$

此級數

則收斂極速矣. 計算對數表,可僅計算素數之對數,蓋非素數之對數,可自前述對數之性質,將素因數之對數相加而得之故也. 茲用範式(5),計算初十個整數之對數如次. 1之對數爲零. 若(5)之中,$z=1$,則得2之對數. 次若$z=2$,則得3之對數,次第如此.

$$l1=0 \qquad =0.000000,$$

$$l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\cdots\cdots\right)=0.693147,$$

$$l3=0.693147+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\frac{1}{7.5^7}+\cdots\cdots\right)=1.098612,$$

$$l4=2\times l2 \qquad =1.386294,$$

$$l5=1.386294+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\cdots\cdots\right)=1.609437,$$

$$l6=l2+l3 \qquad =1.791759,$$

$$l7=1.791759+2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{3.13^3}+\frac{1}{5.13^5}+\frac{1}{7.13^7}+\cdots\cdots\right)=1.945910,$$

$$l8=l4+l2=3\times l2 \qquad =2.079441,$$

$$l9=2\times l3 \qquad =2.197224,$$

$$l10=l5+l2 \qquad =2.302585,$$

同樣,可算出任何數之訥伯爾對數. 其常用對數,可以對數率乘訥伯爾對數而得之.

對數表. 假 日 英 Table of logarithms. 實用對數表,爲數之10底對數之表,[例如自一至十萬]有算出四位者,有算出五位六位七位者. 次揭五位表一頁,以供參考. [對數表用法] I. 求某數之對數. (1) 數在表中者,則可直求得其對數. 例如175之對數之假數,於表之N.行,當175之列,當L列0之行,檢得24304,附以指標2,而爲$\log 175=2.24304$. 又求16.97之對數,於表之N.行,當169之列,又當L.列之7之行,檢出968,將前二數字22附之,得22968,此假數也,故$\log 16.97=1.22968$. (2) 數爲表中所無者,則於表中檢夾此數最近二數之對數,依比例可得所求之數. 例如求0.15403之對數,則檢表如次.

$$\begin{array}{l} \log 0.1541=\bar{1}.18780 \\ \underline{\log 0.1540=\bar{1}.18752} \\ \quad 1 \quad 0.00028 \end{array}$$

此對於小數第四位之1之差,因而$1:0.3=0.00028:x$, $\therefore =0.000084$,* 四捨五入而$x=0.00008$. 故$\log 0.15403=\bar{1}.18752+0.00008=\bar{1}.18760$. *此84記載於表右端比例部[P.P.]行中28之下,對於3之列. II. 求對於某對數之眞數. (1) 數在表中者,可直求得其眞數. 例如對於對數$\bar{5}.27068$之眞數,則自表得0.00001865. (2)所設對數爲表中所無者,則於表中檢最近夾此對數之二對數,依比例可得對於所設對數之眞數. 例如求對數2.2567之眞數,則如次.

$$\begin{array}{ll} \log 164.4=2.21590 & 又\ \log N=2.21567 \\ \underline{\log 164.3=2.21564} & \underline{\log 164.3=2.21564} \\ 對於0.1之差\ 26 & \qquad 3 \end{array}$$

由是$26:3=0.1:x$, $\therefore x\doteqdot 0.01$,*

故N=164.31. *但此x之值,可將比例部之表,逆用而得之. [對數表末位之處分法]茲將哥斯[Gauss]五位表末位之處分法示於次. 1. 末位[第五位]之次位[第六位]大於其位之$0^u.5$,

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	P. P.		
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869		29	28
151		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	1	2.9	2.8
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2	5.8	5.6
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3	8.7	8.4
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	4	11.6	11.2
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5	14.5	14.0
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6	17.4	16.8
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	7	20.3	19.6
158		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	8	23.2	22.4
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9	26.1	25.2
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656		27	26
161		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1	2.7	2.6
162		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	2	5.4	5.2
163	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3	8.1	7.8
164		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	4	10.8	10.4
165		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5	13.5	13.0
166	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	6	16.2	15.6
167		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7	18.9	18.2
168		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8	21.6	20.8
169		780	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	9	24.3	23.4
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274		25	
171		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1	2.5	
172		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2	5.0	
173		805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	3	7.5	
174	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4	10.0	
175		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5	12.5	
176		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6	15.0	
177		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	7	17.5	
178	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8	20.0	
179		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9	22.5	
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744		24	23
181		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1	2.4	2.3
182	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2	4.8	4.6
183		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3	7.2	6.9
184		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4	9.6	9.2
185		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	5	12.0	11.5
186		951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	6	14.4	13.8
187	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	7	16.8	16.1
188		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	8	19.2	18.4
189		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	9	21.6	20.7
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081			

則加1於末位,以下切棄之. 例如0.345678,則為0.34568. 此法若將4為5,則當記為$\dot{5}$. 2. 末位之次位,小於其位之0位.5,則直切棄之. 例如0.430832,則為0.43083. 此法若其結果之末位為5,則當記為$\dot{5}$. 3. 末位之次位,若恰為其位之0位.5,則末位為奇數則進1,為偶數則切棄之.

對數率. 代 目 英 Modulus. 見對數條.

對數級數. 代 英 Logarithmic series. 見級數條及對數條.

對稱. 代 幾 英 Symmetry. [代數學之對稱]一函數交換其一組變數,任意之一對,而其函數之值不變,則變數對於此,謂之對稱. 例如$2x+y+z$,則y及z為對稱. 又如$yz+zx+xy+x+y+z$,則對於x, y, z為對稱,而$a/bc+b/ca+c/ab$, $(a+b+c)(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$,對於$a, b, c$為對稱. 若僅為整數函數,且其變數無所設之要件,則整數函數基本之形之任何項,不變為代數的任意之他項,故一整數函數之為對稱,其必要且十分之要件,為同形之項,必同係數. 蓋交換其一對變數,則其特別之形之任意項,不過變為同形之他項故也. 例如$ax^2+bxy+cy^2$交換x, y,則為$cx^2+bxy+ay^2$,若$ax^2+bxy+cy^2\equiv cx^2+bxy+ax^2$,則必須$a=c$. 上所舉已知次數之對稱整數函數,為普通之例. 上所舉已知次數之齊次對稱整數函數,為最普通之例.

次數	變數	函數
1	x, y	$a+bx+by.$
2	x, y, z	$a+bx+by+bz+cx^2+cy^2+cz^2+dyz+dzx+dxy.$
3	x, y	$a+bx+by+cx^2+dxy+cy^2+ex^3+fx^2y+fxy^2+ey^3.$

次數	變數	函數
1	x, y, z	$ax+ay+az.$
2	x, y, z	$ax^2+ay^2+az^2+byz+bzx+bxy.$
3	x, y	$ax^4+bx^3y+cx^2y^2+bxy^3+ay^4.$

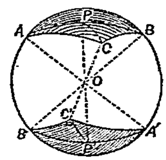
對稱式. 代 英 Symmetrical expression. 同對稱函數,見對稱條.

對稱函數. 代 英 Symmetric function. 見對稱條.

對稱之軸. 幾 英 Axis of symmetry. 見軸對稱條.

對稱之中心. 幾 英 Centre of Symmetry. 見中心對稱條.

對稱之三角形[球面]. 幾 英 Symmetrical triangles [Spherical]. 過球之中心O,引三徑AA′, BB′ CC′,其點A, B, C,以大圓之弧連結之,又點A′, B′, C′,以大圓之弧連結之,則生球面三角形ABC, A′B′C′,謂之對稱三角形. 二對稱三角形,為二等邊,則可重合,故相等. 又二對稱三角形等積. 蓋取此小ABC之極P,將POP′為徑,則ABC,



A'B'C', 分爲三個二等三角形, 皆等積故也.

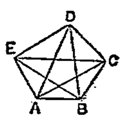
對應. 國 英 Homologous. 或 Corresponding. 在幾何學之相似多角形, 或相似多面體,謂其對應於相似部分之部分. 例如相似多角形之對應邊對應角等. 又相似多面體之對應面對應稜對應立體角等. 在比例, 則第一項與第三項, 又第二項與第四項, 謂之對應項.

對應角. 國 英 Homologous angles. 或 Corresponding angles. 見對應條.

對應邊. 國 英 Homologous sides. 或 Corresponding sides. 見對應條.

對角. 國 英 Opposite angle. 謂方向相對之角. 例如四邊形 ABCD 此字母次序書之之角 A 爲 C 之對角, B 爲 D 之對角. 又對於多角形之邊之角, 或對於多面體之面之角等, 亦謂之對角.

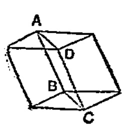
對角線. 國 英 Diagonal. 多角形連結其鄰接二角之直線, 謂之對角線. 例如多角形 ABCDE 其 AC, AD, BD, BE, CE, 皆爲對角線. n 邊之多角形對角



線之數爲 $\frac{1}{2}n(n-3)$. 又多面體之相等角頂連結線, 亦謂之對角線.

對角線尺. 國 英 Diagonal scale. 同斜尺, 見其條.

對角面. 國 英 Diagonal plane. 謂多面體含相對稜之平面或含其一稜及相對角頂之平面. 例如 ABCD 爲對角面.



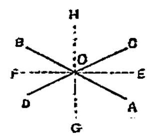
對偶. 國 英 Contraposition [of a theorem]. 定理之文言, 若爲[A 爲 B 則 C 爲 D], 則[C 不爲 D 則 A 不爲 B], 謂之原定理之對偶. 某定理爲眞, 則其對偶必眞. 例如[三角形之二邊相等則對之之角亦相等]之對偶, 卽[三角形之二角不相等則對之之邊不相等]必眞也.

對點. 國 英 Opposite points. 謂相對之點. 例如球徑之兩端.

對消法. 算 代 英 Cancellation. 同消約法, 見其條.

對頂角. 國 英 Vertically opposite angles. 二直線 AB, CD, 相交於一點 O, 其相向之角 AOC 與 BOD, AOD 與 BOC, 謂之對頂角.

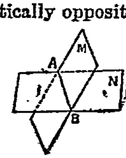
對頂角相等, 蓋對頂角爲同角之補角故也. 又二組之對頂角, 各二等分之, 其四直線 EO, FO, GO, HO,



每二線爲同一之直線, 且此二直線互爲垂直, 蓋 $E\hat{O}C=\frac{1}{2}A\hat{O}C$, $C\hat{O}H=\frac{1}{2}C\hat{O}B$, 而 $A\hat{O}C+COB=2\hat{R}$, 故 $E\hat{O}C+C\hat{O}H=\hat{R}$, 卽 $E\hat{O}H=\hat{R}$, 同樣 $H\hat{O}F=\hat{R}$, 故 EO, OF, 爲同一之直線, 同樣 GO, OH, 亦爲同一之直線, 而此二直線, 互爲垂直明矣.

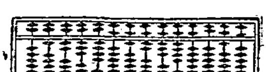
對頂二面角. 國 英 Vertically opposite dihedral angles. 同對稜二面角, 見其條.

對稜二面角. 國 英 Vertically opposite dihedral angles. 謂二平面 [M,N] 相交所生相向之角, 而對稜二面角相等.



算術. 數 英 Arithmetic. 為數學之一分科,以數字而論數之性質及關係者也. 算術大別為二,一論整數,分數,小數之記法,命法,加減乘除,累乘法,開方法,而為算術之根本,一論數之應用,而為諸等數,比及比例,成分算,及利息算,求積等. 現行之記數命數法為十進法,然數之底,可用任意之數,不獨10也. [例如德國之來比尼 (Leibnitz) 發明二進記法]. 算術有因其記法,而定以種種之名稱者. 卽十進算術[Decimal Arithmetic]. 謂現行之十進法之算術. 十二進算術,[Duodecimal Arithmetic] 為用十二為底而計算之算術,於實際某部分行之. 例如年月之計算,呎吋之計算等. 六十進算術,[Sexagesimal Arithmetic] 為用六十為底,而計算之算術,例如度分秒. 一般算術,[Universal Arithmetic] 為就一般之數,而論之算術[見一般算術條]. 器械的算術 [Instrumental Arithmetic] 為用器械而計算之算術,如我國以算盤計算是也[見算盤條]. 又如計算尺,亦屬於器械的算術[見計算尺條]. 表算術 [Tabular Arithmetic.], 謂用表[如對數表等]而計算之算術. 政治算術 [Political Arithmetic], 謂應用於政治的數,例如定國之人口,分為男女兩性,又作生死之統計,及算輸出入之額,論稅則之計算等.

算盤. 算 英 Abacus. 我國之算盤.



如圖,盤中橫貫一梁,上二珠,下五珠,下之一珠表1,二珠表2,三珠表3,四珠表4,五珠表5,上之一珠表5,二珠表10. [但除法而外,上之珠,只用其一]又連上下一貫之珠,謂之位,左位次第為右位之十倍. 以算盤計算之算法,謂之珠算. 加法九九乘法九九之外,除法尚有一種歌訣,卽除數為一位之除法,謂之九歸法如次. [九歸法]逢一進一十,逢二進二十,逢三進三十,逢四進四十,逢五進五十,逢六進六十,逢七進七十,逢八進八十,逢九進九十,二一添作五,逢二進一十,逢四進二十,逢六進三十,逢八進四十,三一三十一,三二六十二,逢三進一十,逢六進二十,逢九進三十,四一二十二,四二添作五,四三七十二,逢四進一十,逢八進二十,五一倍作二,五二倍作四,五三倍作六,五四倍作八,逢五進一十,六一下加四,六二三十二,六三添作五,六四六十四,六五八十二,逢六進一十,七一下加三,七二下加六,七三四十二,七四五十五,七五七十一,七六八十四,逢七進一十,八一下加二,八二下加四,八三下加六,八四添作五,八五六十二,八六七十四,八七八十六,逢八進一十,九一下加一,九二下加二,九三下加三,九四下加四,九五下加五,九六下加六,九七下加七,九八下加八,逢九進一十,又除數在二位以上之歌訣,謂之撞歸法如次. [撞歸法]見一無除作九一,無除退一下還一,見二無除作九二,無除退一下還二,見三無除作九三,無除退一下還三,見四無除作九四,無除退一下還四,見五無除作九五,無除退一下還

五，見六無除作九六，無除退一下還六，見七無除作九七，無除退一下還七，見八無除作九八，無除退一下還八，見九無除作九九，無除退一下還九. 算盤宋代已有之，參看第八門.

算術差. [算] 英 Arithmetical difference. 謂自大數減去小數之差，見差條.

算術中項. [算] [代] 英 Arithmetical mean. 見算術級數條.

算術中數. [算] [代] 英 Arithmetical mean. 同算術中項，見算術級數條.

算術平均. [算] 英 Arithmetical mean. 同相加平均，見其條.

算術級數. [算] [代] 英 Arithmetical progression. 或 Arithmetical series. 算術級數或等差級數者，為加一定數於前項，而得次項之級數也. 如此之級數，其一般之表示，為 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$,……，其 a 謂之初項，d 謂之公差. 而各項 d 之係數，次第增一，較其項數少一. 故第 n 項以 l 表之，則 $l=a+(n-1)d$……(1). 二數間之算術中項或等差中項者，謂插入二數間而成算術級之數. a, b 為二數，A 為算術中項，則 $A-a=b-A$，故 $A=\frac{1}{2}(a+b)$……(2). 又有於二數間插入數個等差中項者，今將 m 為插入中項之數，則總項數為 $m+2=n$. 故於方程式 $l=a+(n-1)d$ 之中，以 $m+2$ 代其 n，則其結果為 $l=a+(m+1)d$……(3). 今於 3 與 17 之間，插入六個等差中項，則 d 之值為 $\frac{17-3}{6+1}=2$，故級數為 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. 又若將 n 項之和，以 S 表之，則 $S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$，或 $S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$ 故 $S=\frac{1}{2}n(a+b)$……(4).

既知	公式
$a\ d\ n$	$l=a+(n-1)d.$
$a\ d\ s$	$l=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}.$
$a\ n\ s$	$l=\frac{2s}{n}-a.$
$d\ n\ s$	$l=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}.$
$a\ d\ n$	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d].$
$a\ d\ l$	$s=\frac{l+a}{2}+\frac{l^2-a^2}{2d}.$
$a\ n\ l$	$s=\frac{n}{2}(l+a).$
$d\ n\ l$	$s=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)d].$
$d\ n\ l$	$a=l-(n-1)d.$
$d\ n\ s$	$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}.$
$d\ l\ s$	$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(l+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}.$
$n\ l\ s$	$a=\frac{2s}{n}-l.$
$a\ n\ l$	$d=\frac{l-a}{n-1}.$
$a\ n\ s$	$d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}.$
$a\ l\ s$	$d=\frac{l^2-a^2}{2s-l-a}.$
$n\ l\ s$	$d=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}.$
$a\ d\ l$	$n=\frac{l-a}{d}+1.$
$a\ d\ s$	$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{[(2a-d)^2+8ds]}}{2d}.$
$a\ l\ s$	$n=\frac{2s}{l+a}.$
$d\ l\ s$	$n=\frac{2l+d\pm\sqrt{[(2l+d^2)-8ds]}}{2d}.$

截口. [幾] 英 Section. 以平面截曲

面或立體,其平面與曲面相交之曲線,或其平面與立體相交之平面形,謂之截口.

截頭體. [幾] 英 Frustum. 同臺,見其條.

截頭角錐. [幾] 英 Frustum of pyramid. 或 prismoid. 同角臺,見其條.

截頭圓錐. [幾] 英 Frustum of a cone. 同圓臺,見其條.

實. [算] 英 Dividend. 同被除數,見其條.

實量. [代] 英 Real quantity. 同實數,即通常之正數負數,對於虛數而言.參看虛數條.

實質體. [幾] 英 Material solid. 謂以吾人之五官,得認其存在之物,即物體也.

實用算術. [算] 英 Practical Arithmetic. 實用算術,謂不以理論爲主,而以實用爲主之算術.

遞昇次. [代] 英 Ascending order. 謂數之次序,次第上昇者.例如式之昇冪列法,即 $1+3x-4x^2-5x^3$.其 x 之指數,爲遞昇次.

遞昇級數. [代] 英 Ascending series. 謂級數各項之絕對值,大於其前項之絕對值者.例如 1, 3, 5, 7,

遞降次. [代] 英 Descending order. 謂數之次序次第下降者.例如式降之冪列法,即 $3x^4-5x^3+2x^2+x-7$.其 x 之指數,爲遞降次.

遞降級數. [代] 英 Descending series. 謂級數各項之絕對值,小於其前項之絕對值者.例如 8, 4, 2, 1,......

銀行支票. [算] 英 Bank cheque. 謂通常之支票,見支票條.

銀行折扣金. [算] 英 Banker's discount. 銀行折扣金,爲將票面金額爲元金,而謂其折扣之期間利息,即票面之金額爲 A,折扣之期間利率爲 r,則其銀行折扣金爲 Ar.

銀行小切手. [算] 英 Bank cheque. 日本數辭,即銀行支票,見支票條.

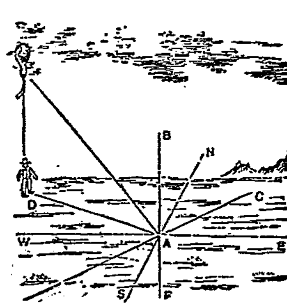
銀行割引高. [算] 英 Banker's discount. 日本數辭,即銀行折扣金,見其條.

演算. [數] 英 Operation. 同運算,見其條.

演算之記號. [算] 英 Symbol of an operation. 謂表示實行運算之記號.例如 $a+b$ 之 $+$ 爲表示加 b 於 a 之運算之記號,又如記號 $+, -, \sim, \times, \div, \sqrt{}$,等.

演繹法. [數] 英 Deduction. 推理法有二大別,一謂歸納法,一謂演繹法.歸納法者,謂自一切之事,依一定之法則,而發見包括一切之眞理也.演繹法者,謂自一般之眞理,而發見其中所含之眞理也.幾何學恆用演繹的推理法.

廣. [幾] 英 Dimension. 設有一原野,一童子南北而走,[即沿直線SN而走]則此童子僅有向南北之進行,而無向東西之進行,換言之,此童子在直線



SN上任何點A時,而無偏向東西之事,又此童子若向東西[直線EW]而走,則亦無偏向南北之事,又此童子若乘飛行機而直上,[直線AB]或穿於A而下降,則此童子雖昇若干之高,及降若干之深,與最初在A時同亦無進行於東西南北之事. 由是過一點[例如A]恆得適於次之規約之三直線所謂規約者,謂沿三直線之一而運動,更無偏於他二方向之事. 例如一室之隅,有一柱與二橫木相遇,一箱之隅,有相遇之三稜是也. 前圖童子若沿東北之線AC而走,則愈走愈對於A遠於北,又遠於東. 同樣此童子若沿西北之線AD而走,則愈走愈對於A漸遠於北又遠於西. 而在D之童子,有飛行機直上,則此飛行機,漸向北,又漸向西,又漸向上,而三直線SN, EW, BF之外,過點A取任何線,得同樣解釋之. 由是過已知之任意點,引若干之直線,沿其一直線方向之運動,而更無他直線方向之進行者,有三而惟限於三. 如此互成直角之三直線方向,為空間之三廣. 而體有三廣即長與闊與厚. 面惟有二廣,即長與闊. 線惟有一廣,即長. 點無廣.

廣袤. [總] 英 Extention. 同廣,見其條. 袤莫候切,長也. 或作廣長.

廣通算術. [總] 英 Universal Arithmetic. 同一般算術,見其條.

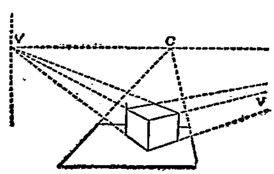
齊次積. [代] 英 Homogeneous products. 同同次積,見其條.

齊次式. [代] 英 Homogeneous expression. 同同次式,見其條.

誘求式. [代] 英 Derivative. 日本數辭,即變化式,見其條.

誘求單位. [量] 英 Derived unit. 同補助單位,見其條.

遠近圖法. [畫] 英 Perspective representation. 謂將映於眼之形,定於平面上之方法. 任意位置之立體,自其一切之點,向眼引直線,謂之射線. 由是得見其立體. 眼之位置,若為一定,則同時入眼之射線,成圓錐狀. 其頂角殆為60度. 此射線之圓錐,若以與其軸成直角之任意平面截之,則得取之為畫面. 而此畫面截光線之點,表立體之影於畫面上. 遠近圖法者,寫此影之眞象也. 自眼向畫面,所引垂線之趾,謂之對眼點,於畫面上,過對眼點,引水平之一直線,謂之水平線. 茲示遠近法數定則如次. [定則1] 物體之諸垂直線,其影為垂直. [定則2] 平行於畫面之物體,其諸線之影,為原之關係與原之形. 例如平行於畫面之物體,其平行線,直角,及相當線,其影亦為平行線,直角,及相當線. [定則3] 物體上互平行而不平行於畫之諸線,集於一點,此點謂之消逃點. [定則4] 物體垂直於畫面之諸線,其影以對眼點為消逃點. [定則5] 物體之諸平行水平線,其影之消逃點,在水平線上. [定則7] 物體之諸平行垂直面,其影之消逃點,在水平線之垂直線上. [定則8] 物體為圓,其影為橢圓.



是等之定則,可如圖以立方體置於矩形之水平面上解之.但矩形水平面之左右兩邊,垂直於畫面.C爲對眼點,V爲立體之稜之二消逝點.觀此圖時,此紙面當爲垂直,且自眼下此紙面之垂線趾,當爲C.

滿足. 代 英 To satisfy. 方程式將某値代入其未知數,使其兩邊保其相等,謂之滿足其方程式,而未知數之此値,謂之滿足問題之要件.滿足之語,有代以適當或適合等者.

臺. 幾 英 Frustum. 立體以平行其底之平面,截去其上部,其所餘者,謂之臺.惟角錐或圓錐,以平行其底之平面,截去其上部,其所餘者,謂之角臺或圓臺.

聚交點. 幾 英 Point of concurrence. 三以上之直線,交於同一之點,其交點謂之聚交點.參看共點性條.

誤差. 算 代 英 Error. 謂運算之眞結果,與近似值之差.此誤差之用,例在假設法,見其條.

漸近線. 幾 英 Asymptote. 謂於無限遠之點切曲線之直線,爲其曲線之漸近線.

境界. 幾 英 Boundary. 或 Limit. 謂物之界,例如平面圖之周圍.

輕噸. 算 英 Short ton. 謂美國之噸.約我國1500斤.

僞設法. 算 英 Rule of positions. 同假設法,見其條.

竰. 算 英 Centilitre. 美 Centiliter. 爲生的立突之省書,見生的立突條.

瓸. 算 英 Hectare. 美 Hektar. 謂一亞爾之百倍.

甅. 算 英 Centigramme. 美 Centigram. 爲生的格蘭姆之省書,見生的格蘭姆條.

蓋天. 國 古數辭.蓋天之說,即周髀.其言天似蓋笠,地似覆槃,天地各中高外下,北極之下,爲天地之中.其地最高,而滂沲四隤,三光隱映,以爲晝夜.詳周髀算經.

塹堵. 國 古立體名.謂直三角形爲底之直角壔,參看直角壔條.

十五畫

複式. 代 英 Compound expression. 謂二項以上之式.例如$a+b$, $2x+3y-z$, $3a^4-2a^3+5a^2+4a-1$,等.

複量. 代 英 Complex quantity. 同複虛數,見其條.

複比. 算 代 英 Compound ratio. 將二以上之比,相乘而成者,謂之複比.例如比2:3及5:7之複比,爲2×5:3×7.記之爲$\left.\begin{matrix}2:3\\5:7\end{matrix}\right\}$,又$a:b$, $c:d$, $e:f$之複比,爲$ace:bdf$.

複比例. 算 代 英 Compound proportion. 比例之相等符號之雙方或一方,爲複比者,謂之複比例.

例如 $\left.\begin{matrix}2:3\\4:5\end{matrix}\right\}=100:x$.

複利. 算 代 英 Compound interest. 利息算,將某期間之利息,加入元金,爲次期之元金.次期間之利息,又加入元金,爲第三期之元金.逐次如此,謂之複利.元金爲P,元利合計爲A,利率爲r,期間爲n,則$A=P(1+r)^n$.複利又謂之重利.

複利法. 算 英 Compound interest. 謂關於複利之算法.

復利年金. [算] [代] 英 Annuity at compound interest. 謂以複利法算年金之利息,而年金皆如此也.

復平均. [算] 英 Compound average. 謂平均之複雜者. 例如火車,每日平均每20哩行3時間,每22哩行5時間,每25哩行2時間,求每時平均之哩數,則以時間之總計$3+5+2=10$,除$20^{\text{哩}}\times 3+22^{\text{哩}}\times 5+25^{\text{哩}}\times 2=220$,得22哩.

復分數. [算] [代] 英 Compound fraction. 謂分數之分數. 例如$\frac{3}{5}$之$\frac{2}{7}$,$\frac{3}{8}$之$\frac{2}{3}$之$\frac{2}{15}$,而$\frac{3}{5}$之$\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$,

$\frac{3}{8}$之$\frac{2}{3}$之$\frac{2}{15}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{15}=\frac{1}{30}$.

復符號. [代] 英 Double sign. 或 Ambiguous sign. 謂$\pm$之複符號,卽$+$或$-$之意也. 例如$a\pm b$.

復因數. [算] 英 Composite factor. 謂自二以上因數之積而成之因數. 例如42分解因數爲7×6而6尙得分爲二因數2×3. 故爲複因數. 若7,則除1及本身外,不能分解爲二因數,故爲單因數.

復虛數. [代] 英 Complex quantity. a及b爲實數,則$a+b\sqrt{-1}$謂之複虛數. 通例以i表$\sqrt{-1}$,故複虛數爲$a+bi$.

復名數. [算] 英 Compound number. 用二單位以上而表之之數,謂之複名數,或謂之諸等數. 例如3斤4兩,7時15分37秒.

復名量. [算] 英 Compound quantity. 同複名數,見其條.

復素數. [算] 英 Composite number. 凡非素數之數,謂之複素數,又謂之非素數. 例如4, 15, 108, 等. 參看非素數條.

復循環節. [算] 英 Compound repetend. 見循環小數條.

復合資算. [算] 英 Compound partnership. 合資算之分配利益,或負擔損失,比例於出資之多寡,及出資期間之長短之算法,謂之複合資算. 例如甲五個月出資本2000圓,乙六個月出資本1600圓,共營商業,得純利金1225圓,比例於出資數與月數,而分配之.

復假設法. [算] 英 Double positions. 見假設法條.

數. [數] 英 Number. 有衆多之物,自其每個,謂之一物之外,而取去其物名,則得數之觀念. 對於一物之數謂之一,一與一集,謂之二,二與集謂之三,三與一集謂之四,次第如此,而至於五,六,七,八,九,而以1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 8, 之記號表之. 再由此進而十,十一,十二,……以至無限,是等謂之數. 如以上所述,自1集成者,謂之整數. 又設a非b之倍數,而$a\div b$卽$\frac{a}{b}$,雖無意義,今欲擴充數之範圍,而謂之爲分數,以加入數之中,謂a爲分子,b爲分母. 例如$\frac{3}{5}$,$\frac{4}{7}$,$\frac{8}{15}$等. 分數亦如整數,能適當於基本定則. 小數卽分母爲10之羃之分數.

例如$\frac{3}{10}$,$\frac{23}{100}$,$\frac{17}{1000}$,……而記之爲0.3, 0.23, 0.017,……又擴充數之範圍,例如$\sqrt{2}$卽平方爲2之數,如是者謂之根數,或無理數,而根數或無理數,惟得求其近似値,卽$(1.4142135)^2$與2之差爲0.00000017641775. 而$(1.4142136)^2$與2之差,爲0.00000010642469. 故$\sqrt{2}$至小數

第六位之近似值,為1.414214. 凡開不盡之根,惟冠以根號$\sqrt{}$而表示之者,謂之根數,或無理數. 例如$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$等. 又有正數負數,見正量負量條. 今將數之關係表,列之如次.

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 正整數 正分數
      - 負整數 負分數
    - 無理數
      - 正之無理數
      - 負之無理數
  - 虛數

數學. 數 英 Mathematics. 數學者為論數及量之學科之總稱,分為三大分科,[第一]算術,[第二]幾何學,[第三]解析法. I. 算術者,以數字表數,而論其關係性質等,分純正與應用之二種. II. 幾何學者,論關於線面體之定理性質等,而有初等高等之別. (1)初等幾何學,以直線及圓為元素,而論其集合所成之圖形. (2)高等幾何學,論直線及圓以外一般之曲線曲面等. 此外有(3)畫法幾何學,凡含三廣之問題,而以畫圖為解法者也. III. 解析法者,以字母表數,以記號表運算,有代數學,解析幾何學,微積分學等. (1)代數學者,論關於代數的數及超越數之性質關係等. 三角函數,亦屬此類. 然三角法有為數學之一分科者. (2)解析幾何學者,應用代數式於幾何學,有定解析幾何學與不定解析幾何學. (3)微積分學,為數學分科之最高科,分之為微分學積分學,又有所謂變分學之一科,微積分學論已知之函數,變分學論未知之函數者也. 此外尚有應用數學之一科,曰力學. 力學為靜力學及動力學. 又因其所論,有一質點力學剛體力學流體氣體力學等,各分為動靜二科,而運動學當於力學之前論之.

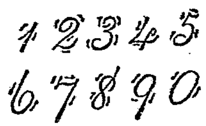
數學諸科. 數 英 Branches of Mathematics. 見數學條.

數學的歸納法. 代 英 Mathematical induction. 數學的歸納法如次例. 依除法$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+\frac{a(x^{n-1}-a^{n-1})}{x-a}$. 故若$x^{n-1}-a^{n-1}$能以$x-a$整除,則$x^n-a^n$能以$x-a$整除. 但$x^2-a^2$, x^3-a^3,能以$x-a$整除,容易知之,故x^4-a^4亦能以$x-a$整除,既知x^4-a^4能以$x-a$整除,則x^5-a^5亦能以$x-a$整除. 逐次如此. 故n為整數,則x^n-a^n能以$x-a$整除. 又一例.證明級數1, 3, 5, 7,..............之n項之和等於n^2. 此級數之第n項,為$2n-1$. 因假定$1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)=n^2$. 於此兩邊加$2n+1$, 則$1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$. 故若此級數$n$項之和,等於$n^2$. 則$(n+1)$項之和,等於$(n+1)^2$. 換言之,則此定理取級數任意若干項若眞,則項數增一時亦眞. 但$1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$. 故取四項時,此定理亦眞,因而取五項取六項亦眞. 故此定理一般皆眞. 由是觀之,數學的歸納法如次. 證明一定理在任意某場合知其為眞,則其在次之場合亦眞,因而證明此定理一般皆眞.

數值. 代 英 Numerical value. 代數式之數值,謂式中以數值代入之,且行其所表示之運算,而得之結果. 例如$a=2$, $b=3$, $c=1$, $d=2$, 則a^2b-c^2d之數

值,為 $2^2.3-1^2.2=10$.

數字. 〔算〕 英 Digit. 或 Figure. 數字為代表九個基數之記號,即1,2,3,4,5,6,7,8,9,然有時亦有加0於其中,而謂之數字者. 自1至9之數,對於零而謂之有效數字 [Significant figure]. 數字之書法,如次圖,依鏃之方向書之.



5又有如右圖連續書之者,此為5之本來書法,然我國一般,如前書之.

數字值. 〔算〕 英 Digit value. 謂數字本身之值,即對於位置值而言.

數字係數. 〔代〕 英 Numerical coefficient5 謂以數字所表之係數. 例如 $5x^3$ 之. 為數字係數. 數字係數,對於文字係數而言.

數字方程式. 〔代〕 英 Numerical equation 謂方程式之係數為數字者. 數字方程式,對於文字方程式而言. 例如 $3x-7=0$, $5x+6y=16$, $x^2-5x+6=0$ 等

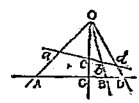
調和級數. 〔代〕 英 Harmonical. [或 Harmonic] Progression. 級數諸項之逆數,為等差級數者,謂之調和級數. 又若級數相鄰任意三項為 m, n, p, 而 $m-n:n-p=m:p$. 則此級數謂之調和級數. 調和命名之由來如次. 有同質同大之絲若干條,其長若比例於 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ 以力緊張之,同時彈其中之二絲,則聲音調和. 此起因於希臘古代音樂理論上所定三弦,以適於 $1:\frac{2}{3}=1-\frac{4}{5}:\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$ 之比例之長,即為 $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ 之長,則發 do, mi, sol 之三音也.

調和中項. 〔代〕 〔幾〕 英 Harmonic mean, a, b, c 為調和級數,即 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ 即 $a-b:b-c=a:c$, 則 b 為 a 與 c 之調和中項,而 $b=\frac{2ac}{a+c}$. 又直線 AB 於 C, D, 而調和分之,則 AD−CD : CD−BD= AD : B.D 故 CD 為 AD 及 BD 之調和中項.

調和比例. 〔代〕 英 Harmonic proportion. 成調和級數之諸數,謂之調和比例. 見調和級數條.

調和列點. 〔幾〕 英 Harmonic range. C, D 關於直線 AB 為調共軛點,則 A, B, C, D, 謂之調和列點.

調和束線. 〔幾〕 英 Harmonic pencil. 束線者謂自一點 O, 發出四直線,而分他一直線 ACBD 於 A, B, C, D, 此諸點者為調和列點,



則此束線再與任意直線相交於四點 a, c, b, d, 亦當為調和列點. 由是而束線謂之調和束線.

調和分割. 〔幾〕 英 Harmonic division. 調和分割者,謂將某直線分為調和,見分為調和條.

調和分之. 〔幾〕 英 To divide harmonically. 同分為調和,見其條.

調和共軛點. 〔幾〕 英 Harmonically conjugate points. 直線 AB 於二點 C,D, 分為調和,則二點 C,D, 關於直線 AB, 謂

之調和共軛點. 故二點C,D,關於直線AB爲調和共軛點,則A,B,亦關於直線CD爲調和共軛點.

線. 幾 英 Line. 面之界謂之線. 面之一部與他部之界爲線. 線有位置與長而無闊與厚. 面與面之交爲線. 幾何學分線爲直線及曲線之二者. 直線爲不變方向之線,曲線爲各點變方向者. 又有所謂折線,見其條.

線分. 幾 英 Segment of a line. 見分之條.

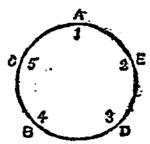
線方向. 幾 英 Line direction. 線有二方向. 例如圖,於B與C之間,取直線之

一部分,若一點自B運動至C,則謂之直線BC. 又若自C至B,則謂之直線CB. 而通例謂自左至右之線爲正,自右至左之線爲負. 則BC爲點自B運動至C者,故CB點又來於原位置,而謂之BC+CB=0,同於代數學之$x+(-x)=0$. 同樣AB+BC+CA=0,但AB+BC+AC=2AC.

線對稱. 幾 英 Line symmetry. 同軸對稱,見其條.

線上之正方形. 幾 英 Square on the line. 謂將一直線爲一邊,而作正方形.

輪換列法. 代 英 Cyclic [或 Circular] permutation. 例如A,B,C,D,E五人坐圓棹之法,問有幾種,若五席不僅相互比對,且必比對於室中之他物,則坐席之方法有5!通. 若僅圓棹相互之比對,不比



對於他物,則圓棹無始無終,故如圖席之番號1,2,3,4,5各爲A,E,D,B,C之坐席. 若不變其相鄰之次序,而A坐於2,E坐於3,D坐於4,次第如此. 向右換一席亦爲同列法,即向右換二席三席四席,其列法亦相同. 故此列法之數有$5!\div5$通,即$4!$通. 一般n個物輪換的列法之數,爲$(n-1)!$ 但此爲n個人坐於圓棹,不比對於室中之他物者. 若爲圓串異色之珠,則其列法之數,爲$(n-1)!\div2$. 蓋圓串之珠若反轉觀之,其左旋與右旋者無異也.

輪換對稱. 代 英 Cyclic permutation. 例如 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 謂其文字有循環次序之對稱式.

適合. 代 英 To satisfy. 謂方程式未知量之値,適合其方程式也.

適遇. 代 英 Probability. 或 Chance. 一事於a個方法而成立,又於b個方法而失敗,而是等方法,若爲「一樣」,則其成立之適遇爲$\dfrac{a}{a+b}$. 而其失敗之適遇爲$\dfrac{b}{a+b}$. 若欲此定義之完全,則須解釋所謂「一樣」之意義. 蓋若干之事,任取其一而希望其成立之理由,無優劣,則謂之「一樣」. 例如一囊中容黑球若干,與白球若干,欲自囊中取出一球,則希望其爲黑之理由與希望其爲白之理由無優劣,故一黑球之取出,與一白球之取出爲一樣. 然既取出一球,則因其球之爲黑白二者之一. 故黑白之中,取出其一之適遇爲$\dfrac{1}{2}$. 蓋一黑球或一白球,有出與不出之二者,而二者之起原爲一樣故也. 又若一囊中容黑白赤三色

球,其所容三色球之成分爲未知,自其囊中取出一球,則希望其爲黑之理由,與希望其爲白之理由,與希望其爲赤之理由,全相同.故三色中其一色取出之適遇爲$\frac{1}{3}$.蓋任意一色出者有其一,而不出者有其二故也.然所謂一樣者,亦別有意義,即長期限間某事成立之度數相等.則得謂其成立之事爲一樣.例如一貨幣數回投之,其表面與裏面現出之數,必不同一,然投之之回數愈增,則表面與裏面現出之數之比,愈近於一,若投之之回數極大,則其比與一之差當極小,於是謂表面與裏面長期限間一樣現出.故若a個成立b個失敗之一事,長期限間爲一樣,則此事長期限間每$a+b$個,成立a回,失敗b回,可知矣.故前之定義,得如次述之,即某事之適遇,爲長期限間其成立回數與其成立與失敗回數之和之比.例如長期限間,每生四十一人.而二十一人爲男,二十人爲女,則此地生男之適遇爲$\frac{21}{41}$.又如甲乙二人爲某遊戲,長期限間,每八次勝負,有五次之勝負歸於甲,則任一次之勝負,甲之可勝之適遇爲$\frac{5}{8}$.此種適遇之算法,現今保險公司,多應用之.換言之,則某事於長期限間,求其成立回數與成立及失敗之回數之和之比,而算定適遇也.

鄰之弓形. 幾 英 Alternate segment. 自圓周上之一點,引切線及割線,其對於切線而在割線反對之傍之弓形,謂之鄰之弓形.蓋對於切線與割線間之弓形而言也.而自圓周某點所引弦及切線間之角,等於鄰之弓形角.

鄰角. 幾 英 Adjacent angles. 鄰角即接角,均見角之條.

緯度. 幾 英 Latitude. 某地之緯度者,謂過其地之地球半徑與赤道所成之角,而其半徑在赤道面之北,則謂之北緯幾度,在南則謂之南緯幾度,而同緯度之圓周,謂之緯度圈.

緯度圈. 幾 英 Circle of latitude. 見緯度條.

羃. 幾 英 Power. 同乘羃,見其條.

羃根. 幾 英 Root. 同根,見其條.

圖. 幾 英 Diagram. 謂幾何學因證明所畫之圖.

圖形. 幾 英 Figure. 點線面體及其集合,謂之圖形.

銳角. 幾 英 Acute angle. 謂小於直角之角.

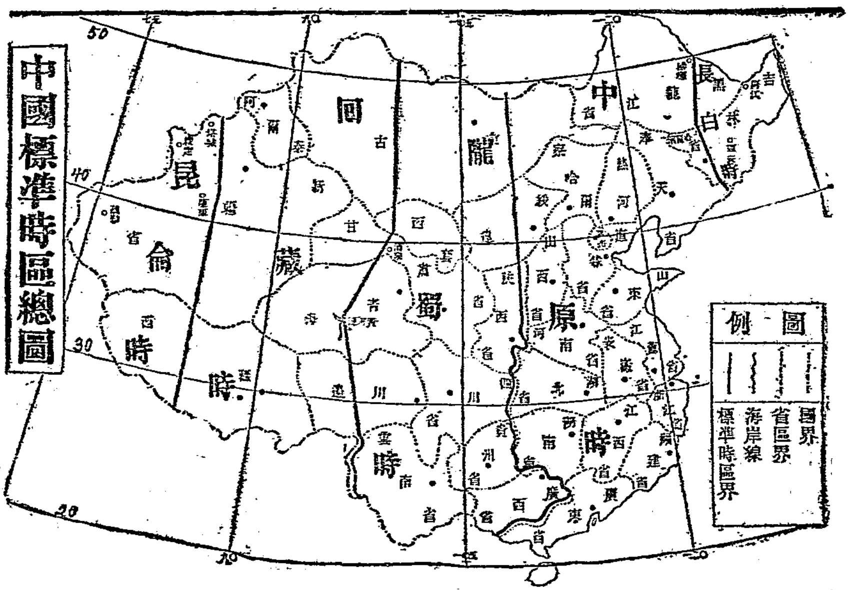
銳角三角形. 幾 英 Acute angled triangle. 謂三角形之各角爲銳角者.

歐几里得. 幾 英 Euclid. 歐几里得爲希臘古代之幾何學者.始著完全之幾何學書.後世因直取爲書名.其書第一卷直線,第二卷面積,第三卷圓,第四卷內接形及外切形,第五卷比例之理論,第六卷比例之應用,第十一卷立體幾何學之初步.現今英國於教育上尙用之,惟加修正而已.歐几里得之第七至十卷,論整數之與幾何學有關係者,第十二卷至第十五卷,論立體,或謂第十四卷至第十五卷,爲後人所續.[是書入我國,曰幾何原本.其前六卷,明徐光啓,與泰西利瑪竇譯,後九卷,淸李善蘭與英人偉列亞力譯.]歐几里得因開設數學學校,自雅典移至埃及之亞歷

山府,其最活動於世,爲普佗列米一世[西曆紀元前306年至283年]時云.

歐勒爾之定理. 圖 英 Euler's theorem. 謂"四點A, B, C, D, 在一直線上,則AC.BD=AB.CD+BC.AD"之定理,及"任意多面體其稜之數爲E,面之數爲F,角頂之數爲V,則E+2=F+V"之定理.

標準時. 圖 英 Standard time. 太陽日之長,恆不相等,故曆日將一年中之太陽日平均之,而用平太陽日. 今想像一平太陽,而於某地以其南中之時刻,爲其地方之正午,謂之地方時,地方時各地不同. 例如北京城之正午,爲長沙城之午前11時45分. 我國幅員遼闊,西起格林威基東經72度,東至東經135度,里差多至4時餘,其不能用一種時刻通行全國明矣. 民國紀元前十年,海關定劃一時刻,嘗以東經120度經線之時刻,爲沿海各關通用之時,謂之海岸時,其時區範圍,雖未規定,而京奉京漢津浦等路線,以及長江一帶,均採用之. 現又本世界標準時之制,將中國全部分爲五區,以東經120度經線之時刻爲標準者,曰中原時區,以105度經線之時刻爲標準者,曰隴蜀時區,以90度之時刻爲標準者,曰回藏時區,以82.5度之時刻爲標準者,曰崑崙時區以127.5度之時刻爲標準者,曰長白時區,其時區範圍,如次圖.



窮竭之法. 圖 英 Proof by exhaustion. 此證明法,爲古代幾何學者傳來之法,可自次例解之. 三角形之二邊相等,則對之之角相等,及三角形之二邊不等,則對大邊之角,大於對小邊之

角,既證明矣. 由是證明[三角之一角大於其他則對大角之邊大於其他]之定理. ABC為三角形, 其角 ABC 大於 ACB, 則邊 AC 大於邊 AB, 蓋若 $AC > AB$, 則 $AC = AB$, 或 $AC < AB$, 但不能 $AC = AB$, 因 $\hat{ABC} \neq \hat{ACB}$ 故也. 又不能 $AC < AB$, 因 $\hat{ABC} \not< \hat{ACB}$ 故也. 故非 $AC = AB$, 亦非 $AC < AB$, 故 $AC > AB$. 是為窮極之法.

橫截線. 幾 英 Transversal. 橫截一列直線之直線, 謂之橫截線.

價. 算 英 Value. 謂物品之價. 例如鉛筆一打之價, 米一石之價等. 又同於值, 見其條.

磅. 算 英 Pound. 為英美兩國所用重之單位, 約常於我12兩. 又為英國貨幣之單位, 約當我國十圓.

碼. 算 英 Yard. 英國長之基本單位, 其單位之關係如次.

1 吋 = 25.4 粍 = 約 8 分

1 呎 = 12 吋 = $30^{\text{粍}}.48$ = 約 $9^{\text{寸}}.5$

1 碼 = 3 呎 = $0^{\text{米}}.9144$ = 約 $2^{\text{尺}}.8$

1 鏈 = 22 碼 = $20^{\text{米}}.12$ = 約 63 尺.

粴. 算 英 Centimetre. 美 Centimeter. 為生的米突之省書, 見生的米突條.

噎. 算 英 Acre. 為愛克之略號, 見愛克條.

瓰. 算 英 Centiare. 為生的亞爾之略號, 見其條.

範式. 代 英 Formula. 範式即公式, 見其條.

節. 算 英 Knot. 繩替, 亦謂之節, 見繩替條.

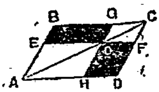
億. 算 英 Hundred million. 或 Hundred thousand. 前者為萬萬之數. 近日人口國債等數, 恆以此記之. 例如我國人口四萬萬, 即謂之四億也. 後者為十萬之數, 謂之古數, 今不用矣. 按前者英字為百兆之義, 是億大於兆, 與我國億小於兆之義為不合, 蓋我國記數有三, 近日所用, 為百萬之兆, 萬萬之億也. [參看兆字條及第八門第5節].

十六畫

餘角. 幾 英 Complement. [of an arc] 二角之和等於一直角, 則此二角互為餘角.

餘弧. 幾 英 Complement. [of an angle] 二弧之和, 等於一象限. 則此二弧互為餘弧.

餘形. 幾 英 Complements. [of the parallelogrames about the diagonal of a Parallelogram] 自平行四邊形 ABCD 對角線上一點 O, 平行於各邊, 引直線 EF, GH, 所得之平行四邊形 BEOG, DFOH 為平行四邊形 AEOH, GOFC 之餘形.



餘數. 算 英 Complement of a number. 某數之餘數, 謂自其上一單位減其數之餘. 例如 7 之餘數為 3, 而 45 之餘數為 $100-45=55$.

餘弦. 三 英 Cosine. 見三角函數條.

餘切. 三 英 Cotangent. 見三角函數條.

餘割. 三 英 Cosecant. 見三角函數條.

餘矢. 三 英 Coversed sine. 謂自 1 減某角之正弦者, 即 $1-\sin A=\operatorname{covers} A$.

餘對數. 代 英 Complement of a logarithm. 謂自1減對數假數之餘.

餘分根. 代 英 Extraneous root. 或 Additional root. 同分外根, 見其條.

積. 算 代 英 Product. 爲某數或式乘他數或式之結果. 例如 $5\times7=35$, 故35爲5與7之積. 又如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, 故 a^2-b^2 爲 $a+b$ 與 $a-b$ 之積.

積彈. 代 英 Piles of shot. 積彈爲將彈丸堆積爲角錐形或楔形也. 因其底爲正三角形, 正方形, 矩形, 而謂之三角積彈, 四角積彈, 矩形積彈. 三角積彈者, 爲正三角形底上, 積每邊少1之正三角形之彈丸, 又於其上, 再積每邊少1之正三角形之彈丸, 逐次如此, 頂上僅積一彈丸. 完三角積彈彈丸之數, 爲 $1, 1+2, 1+2+3, \ldots\ldots, 1+2+3+\ldots\ldots+n$ 之和, 即等於 $1+3+6+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{2}$ 之和, 而依差之法求此級數之和, 則

$$S=na+\frac{n(n-1)}{1.2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}d_3+\ldots\ldots(1).$$

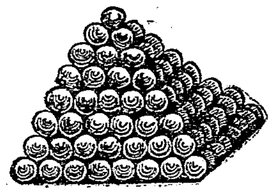
自級數 1, 3, 6, 10,…… 作各次之差, 則

$$\begin{array}{ccccccc}1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \ldots\ldots\\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\ldots\\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots\\ & & & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\end{array}$$

故將 $a=1$, $d_1=2$, $d_2=1$, $d_3=0$, $d_4=0$, ……代入公式(1), 則

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\ldots\ \ldots\ \ldots(2).$$

又如圖作四角積彈, 則頂上彈丸之數爲 1^2, 次一層彈丸之數爲 2^2, 再次一層彈丸之數爲 3^2, 逐次如此, 則 n 層彈丸之總數, 如次求之.



$$\begin{array}{ccccccc}1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots\ldots\\ & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots\ldots\\ & & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots\ldots\\ & & & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\end{array}$$

故 $a=1$, $d_1=3$, $d_2=2$, $d_3=0$, $d_4=0$, ……代入公式(1), 則

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}\ldots\ \ldots\ \ldots(3).$$

再如圖[次頁]作矩形積彈, 頂上一層爲 $m+1$ 個彈丸, 列爲一直線者, 而第二層爲 $2(m+2)$ 個, 第三層爲 $3(m+3)$ 個, 逐次如此. 欲求完矩形積彈彈丸之總數, 有次之級數.

$$\begin{array}{ccccc}(m+1) & 2(m+2) & 3(m+3) & 4(m+4) & \ldots\ldots\\ & m+3 & m+5 & m+7 & \ldots\ldots\\ & & 2 & 2 & \ldots\ldots\\ & & & 0 & \ldots\ldots\end{array}$$

故 $a=m+1$, $d_1=m+3$, $d_2=2$, $d_3=0$, $d_4=0$,…… 代入公式(1), 則

$$S=\frac{n(n+1)(1+2n+3m)}{1.2.3}\ldots\ \ldots(4).$$

又求不完全積彈彈丸之數, 則使完足其積彈之若干層, 自其總數, 減其所增積彈之數, 即得不完全積彈彈丸之數. 範式(2), (3), (4), 得如次記之.

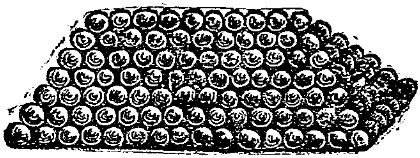
三角積彈 $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}(n+1+1)$.

四角積彈 $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}(n+n+1)$.

矩形積彈 $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\times$

$$\{(n+m)+(n+m)+(m+1)\}.$$

其 $\frac{n(n+1)}{2}$, 爲各積彈三角面彈丸之數, 而其次之因數, 爲底之最長邊, 與對邊, 與平行之頂上一列, 彈丸之數.



故求任意積彈丸之數, 有次法. 底之最長邊彈丸之數, 與對邊彈丸之數, 與頂上一列彈丸之數之和, 以積彈三角面彈丸之數乘之, 以3除之. 此法便於記憶, 三種積彈, 皆適用之. 若欲使積彈之數多, 而所占場所少, 則矩形積彈爲宜, 且愈長愈便. 一個長積, 較二個以上之短積爲便也. 四角積彈所積彈丸之數, 比較的最占場所.

積分學. 微 英 Integral calculus. 積分學爲微分學之逆, 即已知某函數之微分, 而求其原函數, 且應用之於代數學幾何學力學等.

整式. 代 英 Integral expression. 見代數式條.

整數. 算 英 Integer. 或 whole number. 見完全數條.

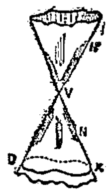
整數論. 代 英 Theory of numbers 論整數之性質, 及其定理等.

整除數之法. 算 英 Aliquotation. 謂某數爲他數幾分之一 [Aliquot parts], 而利用其分數於乘除之計算之方法, 在物價算成分算等, 常用之.

諸等數. 算 英 Compound number. 同複名數, 見其條.

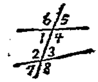
諸等加法. 算 英 Compound addition. 謂諸等數之加法.

錐. 幾 英 Cone. 錐面者, 爲通過一曲線與一點而移動之直線, 所生之平面. 錐者謂錐面與截錐面與平面間之立體. 移動而生錐面之直線, 謂之錐面之母線 [Generatrix], 母線所過之一點, 謂之錐之頂點 [Vertex], 母線所過之曲線, 謂之母曲線 [Directrix], 母線在任意位置之直線, 謂之錐面之元素 [Element]. 例如圖 DX 爲母曲線, V 爲頂點, N 爲錐之下部, N′ 爲錐之上部, V-DX 爲完成之圓形, DX 爲底.



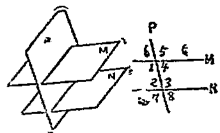
錐面. 幾 英 Conical surface. 見錐條.

錯角. 幾 英 Alternate angles. 如圖二直線與一直線相交, 其1與3, 及2與4, 謂之錯角, 有時5與7, 及6與8, 謂之外錯角, 因此1與3及2與4, 有謂之內錯角者. 一直線與二平行線相交, 則錯角相等, 而其逆亦眞.



錯二面角. 幾 英 Alternate dihedral angles. 二平面 M, N, 以第三平面 P 截之, 則1與3及2與4, [右方之圖表錯二面角之平面角者] 謂錯二面角. 有時5與7及6與8, 謂之外錯二面角,

因此1與3及2與4,謂之內錯二面角. 二平面M, N, 若平行, 則錯二面角相等, 而其逆亦眞.



拼士[片]. 國 英 Pence. 英國貨幣單位之一,在單數則謂之拼尼[Penny]約我銀幣之4分.

拼尼[片]. 國 英 Penny見拼士條.

橢圓. 國 英 Ellipse. 爲圓錐曲線之一, 而一平面截圓錐, 其平面與圓錐之軸所成之銳角, 大於圓錐之半頂角時,所生之截面也. 又斜截圓壔所生之截口, 亦爲橢圓.

橢圓體. 國 英 Spheroid. 或Ellipsoid. 謂以橢圓長徑或短徑爲軸廻轉而生之立體. 若廻轉之軸爲長徑, 則謂之長球 [Prolate spheroid], 廻轉之軸爲短徑, 則謂之扁球[Oplate spheroid].

靜力學. 國 英 Statics. 靜力學爲不關於動力之時間, 而考究質點剛體流體氣體等之關係者也. 故論是等物體在靜止之狀態, 或在不變運動 [Steady or unchanging motion] 之狀態,而謂之諸力在平衡之狀態.

噸. 國 英 Ton. 在英國爲2240磅, 在美國爲2000磅, 1磅約等於我國12兩, 又米突噸卽法噸謂之噸羅[Tonneau]見米突噸條.

確實年金. 國 日 英 Certain annuity. 見年金條.

瓱 國 法 Centigramme. 爲生的格蘭姆之省書, 等於格蘭姆百分之一.

十七畫

優弧. 國 英 Major conjugate. 二弧合爲全圓周時,謂其大者.

優比. 國 英 Ratio of greater inequality. 見劣比條.

優角. 國 英 Major angle. 見角條.

優弓形. 國 英 Major conjugate segment. 見弓形條.

優共軛弧. 國 英 Major conjugate. 同優弧, 見其條.

優共軛角. 國 英 Major conjugate angle. 謂共軛角之大者.

優共軛弓形. 國 英 Major conjugate segment. 謂共軛弓形之大者.

總計. 國 英 Total. 謂二以上之數相加之結果. 通例總計對於多數相加而言.

總和法. 日 英 Summation. 謂求級數總和之法. 求級數之總和, 無一般之法則. 今舉數例如次. [例1]求級數 $1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots$ 之 n 項之和. 茲設 $S_n=1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)n+n(n+1)$. $\Sigma=1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots\ldots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$.

將各項向右一項列之, 則

$$\Sigma=\quad 1.2.3+2.3.4+\ldots\ldots$$
$$+(n-2)(n-1)n+(n-1)n(n+1)$$
$$+n(n+1)(n+2).$$

自前式減此式, 而

$$0=1.2.3+3.2.3+3.3.4+\ldots+3(n-1)n$$
$$+3n(n+1)-n(n+1)(n+2),$$

$$\because 3\{1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-1)n$$
$$+n(n+1)\}=n(n+1)(n+2),$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

[例2] 求級數1.2.3+2.3.4+3.4.5+......之n項之和. 玆設

$$S_n=1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2).)$$

$$\Sigma=1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+\cdots\cdots+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3).$$

與前例同樣,將各項向右一項列之,而

$$\Sigma=\quad 1.2.3.4+2.3.4.5+\cdots\cdots+(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3),$$

依減法,而

$$0=1.2.3.4+4.2.3.4+4.3.4.5+\cdots\cdots+4(n-1)n(n+1)+4n(n+1)(n+2)-n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\because\ 4\{1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)\}=n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

[注意] 此級數及前級數,爲級數最重要之例,而其(1)各項含同數之因數,(2)任意項之因數,成等差級數,(3)遞次各項之第一因數,如第一項遞次因數,成等差級數,(4)求其和時,所用之Σ級數,與所設級數同法則而成,惟增其終之一因數耳. [例3] 級數$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots$試求其n項之和. 先設

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2.$$

而 $n^2=n(n+1)-n$

$$\therefore\ S_n=1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)$$

依例1而 $\qquad -1-2-3-\cdots\cdots-n.$

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

又 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$,

$$因而\ S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

[例4] 試求級數$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$之$n$項之和,

先設 $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

而 $4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2$,

故

$$4.1^3=(1.2)^2,$$
$$4.2^3=(2.3)^2-(1.2)^2,$$
$$4.3^3=(3.4)^2-(2.3)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2$$
$$4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2,$$

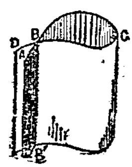
依加法而

$$4\{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3\}=\{n(n+1)\}^2$$

$$\therefore\ 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

此結果又可得次之所云. $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$, 故$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$. 故最初$n$個整數立方之和,等於其和之平方.

壔. 圖 英 Cylinder. 壔面者,謂通過一曲線,且平行原位置而移動之直線所生之表面. 移動之直線,謂之母線. 母線通過之曲線,謂之母曲線. 母線在任意位置之直線,爲壔面之元素. 母曲線爲封閉曲線時,而以二平行平面截壔面,則在其平面與壔面間之立體,謂之壔. 如圖, ABCD爲母曲線, BB′爲元素. 壔丁老切. 見九章商功. 謂以土擁木也. 壔亦作柱.



壔面. 圖 英 Cylindrical surface. 見壔條.

點. 圖 英 Point. 點惟有位置而無長廣厚,卽無大也. 有限直線之端爲點,線與線之交,亦爲點.

點竄. 圖 英 Algebra. 日本數辭. 卽代數學,見其條.

點對稱. 圖 英 Point symmetry. 同中心對稱,見其條.

邁當. 圖 英 Metre. 美 Meter. 邁當亦曰米突,見米突條.

邁爾. 圖 英 Mine. 埋爾亦曰邁爾,見埋爾條.

擬形數. 圖 假 英 Figurate numbers. 擬形數,亦謂之擬形級數 [Figurate series]. 其各項爲1之級數,

卽 1, 1, 1, 1, 1, 1,......,謂之一次擬形數,而

1, 2, 3, 4, 5, 6,......

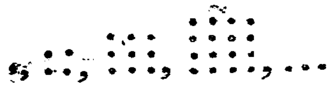
*1, 3, 6, 10, 15, 21,......

....

各謂之二次,三次,......之擬形數. 而各次擬形數任意之第n項,等於前次數擬形數初n項之和. 由此定義,而二次擬形數之第n項爲n,三次擬形數之第n項爲 $1+2+3+\cdots\cdots+n$, 卽 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 四次擬形數之第n項,爲 $\frac{1}{2}\{n(n+1)+(n-1)n+\cdots+1.2\}$, 卽 $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$, 五次擬形數之第$n$項,爲 $\frac{1}{2.3}\{n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)+\cdots\cdots+1.2.3\}$, 卽 $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$,........., 一般$r$次擬形級數之第$n$項,爲 $\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-2)}{(r-1)!}$.

*三次擬形數,又謂之三角數,以其等於

故也. 三角數卽三次擬形數,自自然數1, 2, 3, 4, 5,.........而生,又四角數1, 4, 9, 16, 25,......自1, 3, 5, 7, 9,......而生,等於



又五角數1, 5, 12, 22, 35,......自1, 4, 7, 10, 13,.........而生,等於

此擬形數名稱之所由來也.

薛瓦定理. 圖 英 Ceva's theorem. 三角形ABC,自其各角頂,向對邊所引直線,爲AA', BB', CC',此三直線,若於一點相交,則三比 $AB': CB'$, $CA': BA'$, $BC': AC'$ 之複比爲等比,又其逆亦眞,謂之薛瓦定理.

螺旋. 圖 英 Screw. 有二圓壔,一爲內實圓壔,而其周圍,以始終均等之角度,有凸起之連續曲線,一爲內空圓壔,而其周圍,以始終同一之角度,作凹陷之連續曲線,而第一圓壔,恰入於第二圓壔之中,而密合廻轉,前圓壔,謂之雄螺旋,後圓壔,謂之雌螺旋. 故雄螺旋恰如將直角三角形之一. ,卷如圓壔之形,其一卷恰爲螺旋之長,其一卷始終之距離,謂之螺旋之步.

縷替[節]. 圖 英 Knot. 爲表示商船或軍艦之速者. 例如謂15縷替之輪

船,爲1時間有15海里之速之輪船也.元來縷替爲測航程繩之結節.測速時,測其於某時間[通例爲1分或30秒故各結節之間有長短]航行若干結節.若結節與結節間之距離爲一海里之$\frac{1}{120}$,則因一時爲30秒之120倍,故若30秒間航行其15結節,則其船爲15縷替之速,而一時間航行15海里也.

應用數學. 圖 英 Applied mathematics,應用數學對於純正數學而言,不主理論,而論應用者也.

聯立方程式. 代 英 Simultaneus equations.一組聯立方程式者,謂以未知數一組或多組之値能滿足之諸方程式也.聯立方程式之解答者,謂一組未知數之値,能使其方程式俱爲恆等式也.而一組聯立力程式,(1)方程式之數,等於未知數之數.(2)方程式悉爲獨立,而不矛盾.則有一定之解答.解聯立方程式,通例有加減消去法,代入消去法,比較消去法,各見其條.

輿地理. 圖 英 Geographical mile.海里亦謂之輿地里,見海里條.

瓈. 圖 英 Centiare.生的亞爾之省書,又生他爾[Centar]之省書,見生的亞爾條.

十八至二十四畫

雜二次方程式. 代 英 Adfected quadratic equation.謂含一未知數x之一次及二次之方程式.例如$3x^2+5x-8=0$,此對於純二次方程式而言.

雜循環小數. 圖 英 Mixed recurring decimal.見循環小數條.

歸一法. 圖 英 Unitary method.爲解比例問題之一種方法,如次例.(1)茶5斤之價金3圓3角,問此茶8斤之價幾何,因5斤之價=33角,故1斤之價=(33÷5)角,故8斤之價=(33÷5)×8=52.8,卽5圓2角8分.(2)以27人4日能成之事,問欲18日成之,當用幾人,因欲4日成,則需27人之事,若欲1日成之,則需27×4人,故欲18人成之,則需27×4÷18=6人.(3)以5人4日耕完30畝之田,欲以12人耕完72畝之田,需幾人.

以5人耕完30畝爲4日,故

5×4……………30………… 1……,

$\therefore\ 5\times\frac{4}{12}$……………30…………12……,

$\therefore\ 5\times\frac{4}{12}\times\frac{1}{15}$…………1…………12……,

$\therefore\ 5\times\frac{4}{12}\times\frac{36}{15}$…………36…………12……,

故所求之人數,爲$5\times\frac{4}{12}\times\frac{36}{15}=4$.

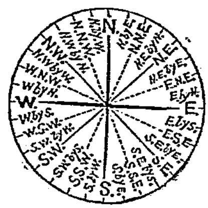
轉換法. 圖 英 Rule of conversion.有已證明之一羣定理,其假設皆某事所能成之現象,其結果彼此不能兩立,卽其中二個不能同時爲眞,則此一羣定理之逆,亦當爲眞.如此一羣定理最簡之一例,爲證明其一定理與其逆,而其轉換法之爲眞者,以其二定理之逆,能自他定理之對偶而明瞭也.又幾何學常見之一例如次.A大於B,則C大於D,A等於B,則C等於D,A小於B,則C小於D,若證明此三定理爲眞,則此各定理之逆必眞.

額面價格. 圖 英 Face value.謂公債票與股票票面之價格,非實際買賣之價格.

鎊. 圖 英 Pound.英美金衡之單位,亦作磅,見磅之條.

臞士勒之定理. 國 英 Poncelet's theorem. 謂九點圓之定理,見九點圓條.

羅針盤. 日 英 Compass. 測地用羅針盤[Surveyor's compass],爲裝置磁針之圓盤,記東西南北之四方位,自南北兩點,各向左右九十度記數字. 又航海用羅針盤[Mariner's compass],亦爲裝置磁針之圓盤,分全面爲三十二方位. 今以北爲基,與時表針同方向而廻,次第示其方位如次. 北,北微東,北北東,北東微北,北東,北東微東,東北東,東微北,東,東微南,東南東,南東微東,南東,南東微南,南南東,南微東,南,南微西,南南西,南西微南,南西,南西微西,西南西,西微南,西,西微北,西北西,北西微西,北西,北西微北,北北西,北微西.



羅馬數字. 國 英 Roman numerals. 羅馬數字記數法,現今計算不用之,然時表面之時間,書籍之卷冊,及凡號數恆用之. 羅馬數字如次. I(一), V(五), X(十), L(五十), C(百), D(五百), M(千). 此外之數,皆以此七數連接而成之,其連接之定則如次. I. 某數字之右,記不大於其値之數字,則其全體爲表各數字之値之和. 例如 II 爲 2, III 爲 3, VI 爲 6, VIII 爲 8, LV 爲 55, LXXVII 爲 77, CCXI 爲 211 是也. II. 某數字之左,記小於其値之數字,則其全體爲表各數字之値之差. 例如 IV 爲 5−1 卽 4, IX 爲 10−1 卽 9, XIX 爲 $10+\overline{10-1}$ 卽 19, XL 爲 50−10 卽 40, XC 爲 100−10 卽 90 是也. III. 某數字上引橫線者,爲表其原値之千倍. 例如 $\overline{\mathrm{V}}$ 如爲 5000, $\overline{\mathrm{C}}$ 爲 100000, $\overline{\mathrm{IX}}$ 爲 9000 是也.

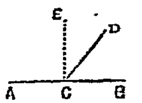
羅馬記數法. 國 英 Roman notation. 謂羅馬數字之記數法,見羅馬數字條.

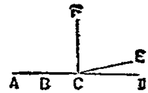
邊. 國 英 Side. 謂包圍多角形之直線.

邊心距. 國 英 Apothem. 謂正多角形中心至一邊之距離. 日本古昔,稱爲離中徑.

證明. 國 英 Proof. 或 Demonstration. 證明[Proof]者,謂證驗法則或運算之正否. 又謂逆追運算之跡,而查驗其正否. 加法可變其加之之次序而證驗之. [例如逆其次序而加之,然嚴密言之則非證驗,而爲加之別法.] 加法亦可自其和內,次第減其所加數而證驗之,卽將被加數悉減去,若爲0,卽加法無誤也. 減法之證驗,若加其差於減數,而與被減數等者,則減法無誤. 乘法得依除法而證驗之,卽以一因數除其積,若得其他因數,則乘法無誤. 除法可依乘法而證驗之,卽加其剩餘於除數與商之積,若與被除數等,則除法無誤. 又加減乘除之運算,得依九去法而證驗之,見九去法條. 累乘法得以開方法證驗之,開方法得以累乘法證驗之. 又證明[Demonstration]者,謂達於終結之推理法. 證明之目的,必某結果依假定之眞理而來. 數學的假定之眞理,爲定義,公理,及已證明之命題. 證明法有二種,卽直接與間接是也. 間接證明法,卽通例所謂背理化法[Reductio ad absurdum]. 直接證明其

假定之眞理，爲定義公理及已證明之命題．間接證明法，將終結之不能爲假設，推得矛盾於已知眞理之結果，則決定原之終結爲眞理，即背理化法也．[參看不合理條] Proof 亦有與 Demonstration 同意義用之者，今自雷假得勒 [Legendre] 之幾何學，取例而說明之．[直接證明法之例] 一直線與他直線相遇，則兩鄰角之和，等於兩直角．直線 CD 遇直線 AB 於點 C，則兩鄰角 DCA，DCB 之和，等於二直角．欲證明此命題，而假定直角之定義 [1]，三公理 [2,3,4] 一公法 [5]．1．一直線遇他一直線，而使兩鄰角互相等，則各角謂之直角，二直線謂之互爲垂直．2．等於同物或相等物之物，互相等．3．加同物或等物於等物，則其和相等．4．全者等於其諸部分之和．5．於已知直線上之已知點，恆得引其直線之一垂線．[證] 於直線 AB 上之點 C，引其垂線 CE，則自 [1] 而知 $E\hat{C}A$，$E\hat{C}B$，皆爲直角．自公理 [4]，而知 $A\hat{C}D$ 等於 $A\hat{C}E+E\hat{C}D$．又自公理 [3]，而知 $A\hat{C}D+D\hat{C}B$ 等於 $A\hat{C}E+E\hat{C}D+D\hat{C}B$．但 $E\hat{C}D+D\hat{C}B$ 等於 $E\hat{C}B$ [4]，而 $A\hat{C}D+D\hat{C}B$ 等於 $A\hat{C}B$ [2]，即等於二直角，而本命題證明矣．此證明其假定之眞理，爲公理定義及公法．[間接證明法之例] 通過二點之直線全相合，而爲一直線．欲正明此命題，於前公理定義及公理之外，而用前命題之結果，及次之 [6, 7] 二公理．6．二點間惟得引一直線．7．自同物或等物減等物，其餘相等．[證] 二已知直線共同之二點爲 A，B，則自公理 [6]，而知此二直線 A，B，之間當相合．今若此二直線超過 B 而於某點 C 漸分離，而第一直線試取 CD 之方向，第二直線試取 CE 之方向，乃於點 C 作 AC 之垂線，CF．夫 ACE 爲一直線，而 FC 於點 C 遇之，故自前命題，而知 $A\hat{C}F+F\hat{C}E=2\hat{R}$，又 ACD 爲一直線，而 FC 於點 C 遇之，故自前命題，而知 $A\hat{C}F+F\hat{C}D=2\hat{R}$．故 $A\hat{C}F+F\hat{C}E=A\hat{C}F+F\hat{C}D$ [2]，因自公理 [7]，而 $F\hat{C}E=F\hat{C}D$，而此明爲不合理，因一部分不能等於其全也．故二直線於某點分離之假定爲不眞，然則二直線不能於某點分離，故當全相合．此證明法，將二直線於某點分離之假設，推得不合理之終結，故知此假設之反對爲眞．是即背理化法也．





藥衡． 圖 英 Apothecaries' weight．藥衡者．英美秤藥品之所用也．藥衡之重單位及等値如次．

1 打蘭＝60 克冷＝ $3^{瓦}.888$＝ $1^{錢}.04256$，
1 溫司＝ 8 打蘭＝$31^{瓦}.104$＝ $9^{錢}.3386$，
1 　磅＝12 溫司＝$0^{瓩}.3732$＝$99^{錢}.449$．

藥衡之記號，打蘭爲 ʒ，溫司爲 ℥ 磅爲 ℔．

攝氏之度分． 圖 英 Celsius's scale．攝氏之寒暑表，將水之沸點爲 100 度，冰點爲 0 度其間分爲 100 等分，爲現今最進步之寒暑表也．

變化式. 㘝 英 Derivative. 方程式P=0,變化爲方程式Q=0,而後者合前者一切之解答,則後者稱爲前者之變化式. 又若方程式Q=0之一切解答,爲方程式P=0之一切解答,則謂之可還原之變化. 若方程式P=0一切之解答,雖合於方程式Q=0,而方程式Q=0一切之解答,不必能爲方程式P=0之一切解答,則謂之不可還之變化. 例如自$6x+5=3x+14$......(1),而$(6x+5)-(3x+5)=(3x+14)-(3x+5)$.......(2),故$3x=9$......(3),自(3)而$3x\div3=9\div3$......(4),卽$x=3$......(5),此解法之次序,可反對行之,卽(1),(2),(3),(4),(5),爲可還原之變化式. 又自$x-1=0$....(6),而$(x-2)(x-1)=0$......(7),此(7)雖適合於(6)之x之值,而其逆不眞,蓋$x=2$爲(7)之解答,而非(6)之解答也. 故(7)爲(6)之不可還原之變化式.

變數. 㘝 英 Variable. 謂某式或某方程式中得任意取之之數. 例如ax^2+bx+c,其x爲變數,又$x^2+y^2=r^2$,其x,y爲變數. 能自消長變易之數,謂之自變數. 因自變而定之數,謂之因變數. 例如$y=ax^2+bx+c$,若x爲自變數,則y爲因變數. 又$x^2+y^2=r^2$,若y爲自變數,則x爲因變數. 因變數謂之自變數之函數. 自變數因變數,非固定之名,合二變數之方程式,任取其一爲自變數,則其他爲因變數. 例如$y=ax^2+bx+c$之式,若就x而解之,則得以$x=f(y)$表之,故取y爲自變數,則x爲因變數. 而合三變數之式,如$x^2+y^2+z^2=a^2$,任取二變數,例如取x,y爲自變數,則z爲因變數. 餘倣此.

變數法. 㘝 英 Variation. 變數法,爲解比例問題之一種方法,今以次例明之. 例如三角形之面積,若高爲常數,則因其底而變. 今有底爲8寸之三角形,面積爲20平方寸,而與之等高之三角形面積,爲45平方寸,問其底如何. 若三角形面積爲A,底爲b,則$A=mb$,而$b=8$, $A=20$,故$m=\frac{5}{2}$.

故$45=\frac{5}{2}b$, $\therefore b=18$寸.

體積. 㘝 英 Volume. 或 Solidity. 立體所占空間之大,謂之體積. 測體積,用體積單位.

驗算. 㘝 英 Verification. 或 Proof. 謂試驗計算結果之正否.

鼈臑. 㘝 古立體名. 謂直三角形爲底之角錐,而一稜垂直於底面者,參看角錐條.

(第一門畢)

第二門

漢英學語之部

SECOND SECTION

VOCABULARY

IN

English and Chinese

OF

The Terms Containing In Mathematics.

第二門　英漢學語之部　目次

第二門　英漢學語之部　例言

● 第二門爲英漢學語之部先記以英語間有以德法等他國語代英語者次記漢字之義或音依A, B, C,……之序次列之

● 第三門所記之辭其百分之九十九解釋於第一門中其省解釋者必爲單語無須解釋而明瞭者又第一門有而第二門無之語亦有之即我國固有之辭而無適當之英語者故第三門可見爲第一門英語之索引

● 近來學數學之人於英語皆有密接之關係然譯語則各不同今於第二門英語中求之直得其譯語再自第一門可查得其解釋

● 譯語有相異之意義者並列記之例如Figure, 數字, 圖形之類而同意義之語有二以上之譯解者亦列記之例如Geometrical mean. 等比中項, 幾何中項, 相乘平均之類

● 同義之語而異其綴法者亦並集之例如Metre, Meter, Gramme與Gram, 之類 为

● 學語之單複皆成立者則揭載單數之字但元來僅有複數之形而無單數之形者例如Mathematics [數學], Dynamics [力學], 又有非複數則難成立者例如Similar figures [相似形] Conjugate angles [共軛角] 則揭載複數字

● 學語以揭載名詞爲主形容詞, 動詞等, 文法上之變化不及之是等之變化於普通之英文字典容易查之故也

● 英語或譯語之次有加註於括弧內者例如Supplement (of an arc) 又加外心 [相似的] 或Pi (π) Notation之類

● 算術之英語爲Arithmetic出自拉丁語之Ars metrica其Metric art即測度術之義

● 代數學之英語爲Algebra其語源詳第一門代數學之條

● 幾何學之英語爲Geometry出自希臘語即 γεωμέτρης 自 γῆ [地] 及 μέτρου [測] 之二語而成

● 三角法之英語Trigonometry自 γριγωνου [三角形] 及 μέτρου [測] 之二希臘語而成

數學辭典

A.

Abacus. 算盤.
Abel's theorem. 亞白爾之定理.
Absolute inequality. 絕對的不等式.
Absolutely convergent series. 絕對的收斂級數.
Absolute term. 已知項.
Absolute value. 絕對值.
Abstract number. 不名數.
Absurdity. 背理. 不合理.
Accepter. 承諾兌付人.
Acceptor. 承諾兌付人.
Acre. 愛克.
Acute angle. 銳角.
Acute angled triangle. 銳角三角形.
Addendo. 加比之理.
Addition. 加法.
Additional root. 無緣根,或分外根.
Adfected quadratic equation. 雜二次方程式.
Ad-infinitum. 無限.
Adjacent angles. 接角,鄰角.
Advalorem duty. 從價稅.
A-fortiori. 不待言.
Aggregation. 合計.
Algebra. 代數學.
Algebraical difference. 代數差.
Algebraical expression. 代數式.
Algebraical function. 代數函數.
Algebraical solution. 代數的解法.
Algebraical sum. 代數和.
Aliquant part. 不能整除之部分.
Aliquotation. 整除數之法.
Aliquot part. 能整除之部分.
Alligation. 混合.
Alligation, alternate. 和較法.
Alligation, medial. 混和法.
Alloy. 合金.
Alloy of metals. 合金.
Alternando. 更迭之理.
Alternate angles. 錯角.
Alternate dihedral angles. 錯二面角.
Alternate exterior angles. 外錯角.
Alternate interior angles. 內錯角.
Alternate segment. 鄰之弓形.
Alternating expression. 交代式.
Altitude. 高.
Ambiguous case. 兩意之事項.
Ambiguous sign. 複符號.
Amount. 元利合計.
Amplitude. 期限.
Analysis, method of. 解析法.
Analytic Geometry. 解析幾何學.
Angle. 角.
Angle at the centre. 中心角.
Angle at the circumference. 圓周角.
Angle at the segment. 弓形角.
Angle of depression. 俯角.
Angle of elevation. 仰角.

Angle of incidence. 投射角.
Angle of inclination. 傾斜角.
Angular altitude. 高度.
Angular measure. 角度.
Annuity. 年金.
Annuity at compound interest. 複利年金.
Annuity at simple interest. 單利年金.
Annuity, certain. 確實年金.
Answer. 答.
Antecedent. 前率. 前項.
Antilogarithm. 逆對數.
Apothecaries' weight. 藥衡.
Apothem. 邊心距.
Applied Mathematics. 應用數學.
Approximate value. 近似值.
Approximation. 省略算. 近似法.
Ar. 亞爾[亞].
Arabic numerals. 亞剌伯亞數字.
Arabic system of notation. 亞剌伯亞記數法.
Arc. 弧.
Are. 亞爾[亞].
Hectare 或 Hektar. 海克亞爾. [𤰞]
Centiare. 生的亞爾. [𤰝].
或 Centar. 生的亞爾. [𤰝].
Area. 面積.
Arithmetic. 算術.
Arithmetic (或Arithmetical)mean. 等差中項. 算術中項. 相加平均.
Arithmetical (或 Arithmetic) difference. 算術差.
Arithmetical (或 Arithmetic) progression. 等差級數. 算術級數.
Arithmograph. 計數器.
Arrangement. 列方.
Ascending order. 遞昇次.
Ascending powers. 昇冪.
Ascending series. 遞昇級數.
Assets. 資產.
Associative law. 結合定則.
Assumption. 假定.
Assurance. 生命保險.
Assured. 被保人.
Asymptote. 漸近線.
Auxiliary angle. 補助角.
Auxiliary unit. 補助單位.
Auxiliary unknown quantity. 補助未知數.
Average of payments. 兌付期日之平均.
Average value. 平均數.
Avoirdupois weight. 常衡.
Axial-symmetry. 軸對稱.
Axiom. 公理.
Axis. 軸.
Axis of revolution. 旋轉之軸.
Axis of symmetry. 對稱之軸.

B.

Bank cheque. 銀行支票.
Banker's discount. 銀行折扣.
Base. 底.
Base angle. 底角.
Base line. 基線.
Bezout's method. 比左之法.
Bill. 票.
Bill of exchange. 匯票.
Binary scale. 二進記法.
Binomial coefficients. 二項係數.
Binomial equation. 二項方程式.

Binomial expression. 二項式.
Binomial series. 二項級數.
Binomial theorem. 二項式定理.
Biquadratic equation. 四次方程式.
Bisector. 二等分線.
Bissextile. 閏年.
Bonds. 公債票.
Boundary. 境界.
Bracket. 括弧.
Brahmegupta's theorem. 布剌米格普他之定理.
Branches Mathematics. 數學諸科.
Brianchon's theorm. 布利安生之定理.
Broken line. 折線.
Broker. 中人,經紀.
Brokerage. 酬金.

C.

Calculation. 計算.
Cancellation. 消約法. 對消法.
Capacity. 容量.
Capital. 元金. 資本金.
Carat. 開剌替.
Cardinal numbers. 基數.
Casting out of nines. 九去法.
Celsius's scale. 攝氏之度分.
Cent. 仙.
Centar. 生他爾[䅚].
Centesimal method. 百分法.
Centiare. 生的亞爾.
Centigrade. 百分法[角的].
Centigram. 生的格蘭姆[瓰].
Centigramme. 生的格蘭姆[瓰].
Centiliter. 生的立突[竰].
Centilitre. 生的立突[竰].
Centimeter. 生的米突[糎].
Centimetre. 生的米突[糎].
Central figure. 有中心形.
Central-symmetry. 中心對稱.
Centre. 中心.
Centre-line. 中心線.
Centre of gravity. 重心.
Centre of similarity. 相似之中心.
Centre of symmetry. 對稱之中心.
Centroid. 重心.
Century. 世紀.
Certain annuity. 確實年金.
Certificate. 股票.
Ceva's theorem. 薛瓦定理.
C. G.·S. units. 西基耶司單位.
Chain rule. 連鎖法.
Chance. 適遇.
Characteristic. 指標.
Cheque. 支票.
Chord. 弦.
Chord of contact. 切弦.
Chord, supplementary. 補弦.
Circle. 圓.
Circle of latitude. 緯度圈.
Circular arc. 圓弧.
Circular cone. 圓錐.
Circular cylinder. 圓壔.
Circular function. 圓函數.
Circular measure. 弧度.
Circular method. 弧度法.
Circular permutation. 輪之列方.
Circulating decimal. 循環小數.
Circum-angle. 周角.
Circum-centre. 外心.
Circum-cone. 外接錐.

Circumference. 圓周.
Circum-polygon. 外接多角形. 外切多角形.
Circumscribed circle. 外接圓.
Circumscribed figure. 外切形.
Circumscribed polygon. 外接多角形. 外切多角形.
Circumscribed polyhedron. 外切多面體. 外接多面體.
Circumscribed prism. 外切多角壔. 外接多角壔.
Circumscribed quadrilateral. 外切四邊形. 外接四邊形.
Circumscribed sphere. 外接球.
Civil year. 平年.
Closed line. 圍繞線.
Closed surface 圍繞面.
Co-axial circles. 同軸圓.
Coefficient. 係數.
Co-factor. 係數.
Collinearity. 共線性[在同一直線上者].
Collinear points. 直聯點[在同一直線之點].
Cologarithm of a number. 逆數之對數.
Combination. 組合.
Commensurable magnitudes. 可通約之度.
Commensurable numbers. 可通約之數數.
Commensurable root. 可通約之根.
Commercial discount. 商業折扣.
Commercial partnership and companies. 商業公司.
Commission. 酬金.
Commission agent. 中人.
Common chord. 共通弦. 公通弦.
Common denominator. 公分母.
Common difference. 公差.
Common factor. 公因數.
Common logarithm. 常用對數.
Common measure. 公約數.
Common multiple. 公倍數.
Common ratio. 公比.
Common scale of notation. 常用記數法.
Common tangent. 公通切線. 公切線.
Common year. 平年.
Commutative law. 交換定則.
Company. 公司.
Compass. 羅針盤.
Compasses. 圓規,或兩脚規,孔把司.
Complement (of an angle). 餘角.
Complement (of an arc). 餘弧.
Complement of a logarithm. 餘對數.
Complement of a number. 餘數.
Complement (of the parallelograms about the diagonal of a parallelogram). 餘形.
Complete quadrilateral. 完全四邊形.
Complete quotient. 完全商.
Complete square. 完全之平方.
Complex fraction. 重分數. 複雜分數.
Complex quantity. 複量.
Componendo. 合比之理.
Composite number. 非素數. 複素數.
Compositive factors. 複因數.
Compound addition. 諸等加法.
Compound average. 複平均.
Compound expression. 複式.
Compound fraction. 複分數.

Compound interest. 複利. 重利.
Compound number. 諸等數. 複名數.
Compound partnership. 合資算.
Compound proportion. 複比例.
Compound quantity. 複名量.
Compound ratio. 複比.
Compound repetend. 複循環節.
Concentric circles. 同心圓.
Conclusion. 終結.
Concrete number. 名數.
Concurrency. 共點性. [數直線過同一之點].
Condition. 要件.
Conditional equation. 規約方程式.
Conditional inequality. 附條件不等式.
Cone. 錐.
Congruent figures. 合同形. 同積同形.
Conical surface. 錐面.
Conic section. 圓錐曲線法.
Conjugate angles. 共軛角.
Conjugate arcs. 共軛弧.
Conjugate complex expressions. 共軛複虛式.
Conjugate quadratic surd expressions. 共軛二次根式.
Conjugate quadratic surds. 共軛平方根數.
Conjugate segments. 共軛弓形.
Conjugate solids. 共軛體.
Consequent. 後率. 後項.
Consistency of a system of equations. 方程式之一致.
Constant. 常數.
Construction. 作圖.
Constructive Geometry. 作圖幾何學.
Contained angle. 夾角.
Contents. 容積.
Conterminous repetend. 同末位循環節.
Contiguous angles 接角.
Continued fraction. 連分數.
Continued product. 連乘積.
Continued proportion. 連比例.
Continuous. 連續的.
Continuous quantity. 連續量.
Contour. 周圍.
Contracted division. 省略除法.
Contracted method of extraction the cube root. 省略開立.
Contracted method of extracting the square root. 省略開平.
Contraction in division. 省略除法.
Contraction in multiplication. 省略乘法.
Contrapositive (of a theorem). 對偶.
Convergency. 收斂.
Convergent (of a continued fraction). 近數[連分數的].
Convergent series. 收斂級數.
Converging series. 收斂級數.
Converse (of a theorem). 逆.
Convex angle. 凸角.
Convex broken line. 凸折線.
Convex polygon. 凸多角形.
Convex polyhedral angle. 凸多面角.
Convex polyhedron. 凸多面體.
Convex surface. 凸面.
Corner. 隅.
Corollary. 系.
Corresponding. 對應.

Corresponding angles. 同位角. 對應角.
Corresponding sides. 對應邊.
Cosecant. 餘割.
Cosine. 餘弦.
Cotangent. 餘切.
Coupon. 息票.
Coversed sine. 餘矢.
Cross multiplication. 乘法.
Cross quadrilateral. 交截四邊形.
Cube. 立方. 立方體.
Cube root. 立方根.
Cubic equation. 三次方程式.
Cubic expression. 三次式.
Cubic surd. 三次根數. 立方根數.
Cuboid. 直角體.
Curve. 曲線.
Curved line. 曲線.
Curved surface. 曲面.
Cyclical order. 輪換序次. 循環之順序.
Cyclic permutation. 輪換的列方.
Cylinder. 壔.
Cylindrical surface. 壔面.
Cypher. 零.

D.

Daily interest. 日利.
Datum. 已知件.
Decagon. 十角形.
Decagramme. 特卡格蘭姆[兙]
Decahedron. 十面體.
Decalitre. 特卡立突[竍].
Decametre. 特卡米突[籵].
Decigrame. 特西格蘭姆[兝].
Decigramme. 特西格蘭姆[兝].
Deciliter. 特西立突[竕].
Decilitre. 特西立突[竕].
Decimal. 小數.
Decimal Arithmetic. 十進算.
Decimal point. 小數點.
Decimal system. 十進法.
Decimeter. 特西米突[粉].
Decimetre. 特西米突[粉].
Deduction. 演繹法.
Definite straight line. 定長之直線.
Definition. 定義.
Degree. 度. 次.
Dekagram. 特卡格蘭姆[兙].
Dekaliter. 特卡立突[竍].
Dekameter. 特卡米突[籵].
Delian problem. 的利安問題.
Demonstration. 證明.
Denary scale. 十進法.
Denominate number. 名數.
Denominator. 分母.
Derivation, irreversible. 不能還原之變化.
Derivation, reversible. 可還原之變化.
Derivative of equations. 方程式之變化式.
Derived unit. 化出單位.
Descending order. 遞降次.
Descending powers. 降冪.
Descending series. 遞降級數.
Descriptive Geometry. 畫法幾何學.
Detached coefficients. 分離係數.
Determinant. 行列式的特密南.
Development. 展開.
Diagonal. 對角線.

Diagonal plane. 對角面.
Diagonal scale. 對角線尺. 斜尺.
Diagram. 圖.
Diameter. 徑. 直徑.
Didonia. 限周最大積形.
Difference. 差.
Difference in times. 時差.
Differential calculus. 微分學.
Digit. 數字.
Digit value. 數字值.
Dihedral angle. 二面角.
Dimension. 廣袤次元.
Diophantine solution. 的反他斯之解法.
Dip of visible horizon. 視水平之俯角.
Direct arc. 直向弧.
Direct circular function. 正圓函數.
Direct common tangent. 直接公切線. 直接共通切線.
Direct line. 直向線.
Direct proportion. 正比例.
Discontinuous quantity. 不連續量.
Discount 折扣數.
Discriminant of a quadratic function. 二次函數之分別式.
Discussion. 研究,推論.
Dissimilar repetend. 不同初位循環節.
Dissimilar term. 不同類項.
Distance. 距離.
Distributive law. 配分定則.
Divergency. 發散.
Divergent series. 發散級數.
Dividend. 被除數. 實.
Dividendo. 分比之理. 除比之理.
Divider. 分線器.
Division. 除法.
Division by factors. 因數除法.
Divisor. 除數. 法.
Dodecagon. 十二角形.
Dodecahedron. 十二面體.
Dollar. 銀元.
Domestic exchange. 內國匯兌.
Double positions. 複假設法.
Double sign. 複符號(±).
Dozen. 打.
Draft. 匯票.
Drawee. 兌付人.
Drawer. 出票人.
Duodecimal method. 十二進法.
Duplicate ratio. 二乘比.
Dynamics. 力學.

E.

East meridian. 東經.
Edge. 稜.
Elementary Algebra. 初等代數學.
Elementary Geometry. 初等幾何學.
Eliminant. 消去式.
Elimination. 消去法.
Elimination by addition or subtraction. 加減消去法.
Elimination by comparison. 比較消去法.
Elimination by substitution. 代入消去法.
Ellipse. 橢圓.
Ellipsoid. 橢圓體.
English method. 英吉利法.
Enneacontahedron. 九十面體.
Enneagon. 九角形.

Equality. 等式.
Equal roots. 等根.
Equation. 方程式.
Equation of payments. 平均日期算.
Equation of the first degree. 一次方程式.
Equation of the second degree. 二次方程式.
Equiangular figure. 等角形.
Equiangular hyperbola. 等角雙曲線.
Equiangular triangle. 等角三角形.
Equilateral hyperbola. 等邊雙曲線.
Equilateral triangle. 等邊三角形.
Equivalent equations. 等值方程式.
Equivalent figures. 等積形.
Era. 紀元.
Eratosthenes's sieve. 耶剌托斯帖列斯之篩.
Error. 誤差.
Escribed circle. 傍切圓.
Escribed sphere. 傍切球.
Euclid. 歐几里.
Euler's theorem. 歐勒爾之定理.
Even number. 偶數.
Evolution. 開方法.
Exact divisor. 約數.
Exactly divisible. 得整除.
Exact measure. 約數.
Exact square. 完全之平方.
Ex-aequali. 等比之理.
Example. 例題.
Ex-centre. 傍心.
Exchange. 匯兌,交易所.
Exchange broker. 交易所經紀人.
Ex-circle. 傍切圓.
Excribed circle. 傍切圓.
Excribed sphere. 傍切球.
Expansion. 展開式.
Exponent. 指數.
Exponential equation. 指數方程式.
Exponential series. 指數級數.
Exponential theorem. 指數式定理.
Expression. 式.
Extention. 廣袤.
Exterior angle. 外角.
External bisector. 外二等分線.
External common tangent. 外公切線. 外共通切線.
External common tangent plane. 外公切面,或外共通切面.
Extraction of cube root. 開立法.
Extraction of square root. 開平法.
Extraneous root. 分外根.
Extreme. 外項. 外率.
Extreme and mean ratio. 外中比.

F.

Face. 面.
Face value. 票面價格.
Factor. 因數. 因子.
Factorial. 逐乘. 階乘.
Factoring. 因數分解法.
Factorisation. 因數分解法.
False suppositions. 假設法.
Fellowship. 合資算.
Fermat's theorem. 惠而未之定理.
Feuerbach's theorem. 惠尾白哈之定理.
Fifth root. 五乘根.
Figurate numbers. 擬形數.
Figure. 數字. 圖形.

Finite decimal. 有限小數.
Finite series. 有限級數.
Finite straight line. 有限直線.
Fire insurance. 火災保險.
First quadrant. 第一分面,或第一象限.
Foot (of a perpendicular or an oblique). 趾,或足. [垂線斜線的].
Foreign exchange. 外國匯兌.
Formula. 範式. 公式.
Four fundamental rules. 四則.
Four rules. 四則.
Fourth power. 四乘冪.
Fourth proportional. 比例第四項.
Fourth quadrant. 第四分面,或第四象限.
Fourth root. 四乘根.
Fraction. 分數.
Fractional coefficient. 分數係數.
Fractional equation. 分數方程式.
Fractional expression. 分數式.
Fractional index. 分數指數.
Fractional unit. 分數單位.
Freezing point (of a thermometer). 冰點[寒暑表的].
French method. 法蘭西法.
Frustum. 臺. 截頭體.
Frustum of a cone. 圓臺. 截頭圓錐.
Frustum of a pyramid. 角臺. 截頭角錐.
Function. 函數.
Fund. 資金.
Fundamental law. 基本定則.

G.

Gallon. 加倫[呏].
Gauche polygon. 果修多角形.
Gauche quadrilateral. 果修四邊形.
General axiom. 普通公理.
General expression. 一般式. 普通式.
General quadratic expression. 一般之二次式. 普通二次式.
Général solution. 一般之解答.
General term. 公項. 普通項.
Generating line. 母線.
Generatrix. 母曲線.
Geodesic line. 測地線.
Geodesy. 測地學.
Geometrical axiom. 幾何學公理.
Geometrical image. 幾何像.
Geometrical (或 Geometric) progression. 等比級數. 幾何級數.
Geometrical solid. 幾何體.
Geometric (或 Geometrical) mean. 等比中項. 幾何中項. 相乘平均.
Geometry. 幾何學.
Geometry of Space. 立體幾何學.
Golden rule. 金法.
Golden section. 黃金分割.
Goniometrical function. 測角函數.
Grade. 格呂特法度.
Gram. 格蘭姆[瓩].
Gramme. 格蘭姆[瓩].
Graphical solution of an equation. 方程式之圖解.
Great circle. 大圓.
Greater than. 大於.
Greatest common factor. 最大公因數.
Greatest common measure. 最大公約數.
Greek letters. 希臘文字[字母].
Gross. 格洛斯[哥][罜].

H.

Harmonically conjugate points. 調和共軛點.

Harmonic conjugate points. 調和共軛點.

Harmonic division. 調和分割.

Harmonic (或 Harmonical) mean. 調和中項.

Harmonic pencil. 調和束線.

Harmonic (或 Harmonical) progression. 調和級數.

Harmonic proportion. 調和比例.

Harmonic range. 調和列點.

Hectare. 海克他爾[㼹].

Hectogramme. 海克格蘭姆[兡].

Hectolitre. 海克立突[竡].

Hectometre. 海克米突[粨].

Height. 高.

Hektar. 海克亞爾[㼹].

Hektogram. 海克格蘭姆[兡].

Hektoliter. 海克立突[竡].

Hektometer. 海克米突[粨].

Hemisphere. 半球.

Hendecagon. 十一角形.

Heptagon. 七角形.

Hexagon. 六角形.

Hexahedron. 六面體.

Higher Geometry. 高等幾何學.

Highest common factor. 最高公因數.

Highest common measure (divisor). 最高公約數.

Horizon. 水平.

Horizontal angle. 水平角.

Horizontal line. 水平線.

Horizontal plane. 水平面.

Homogeneous expression. 同次式. 或齊次式.

Homogeneous product. 同次積, 或齊次積.

Homogeneous symmetrical expression. 同次對稱式, 或齊次對稱式.

Homologous. 對應.

Homologous angles. 對應角.

Homologous sides. 對應邊.

Horse power. 馬力.

Hypotenuse. 斜邊.

Hypothesis. 假設.

I.

Icosahedron. 二十面體.

Identical equation. 恆方程式.

Identity. 恆等式.

Imaginary quantity. 虛數. 虛量.

Impossible problem. 不能問題.

Improper fraction. 假分數.

In-centre. 內心.

In-circle. 內切圓.

Inclination. 傾斜.

Included angle. 夾角.

Incommensurable magnitudes. 不可通約之量.

Incommensurable numbers. 不可通約之數.

Incomplete equation. 不完備方程式.

Inconsistent. 矛盾.

Indefinite straight line. 未定長之直線.

Independent variable. 自變數.

Indeterminate coefficients. 未定係數.

Indeterminate equation. 不定方程式.
Indeterminate expression. 不定式.
Indeterminate form. 不定形.
Indeterminate problem. 不定問題.
Indeterminate series. 不定級數.
Index. 指數.
Index law. 指數定則.
Index of radicals. 根指數.
Inequality. 不等式.
Infinite decimal. 無窮小數,或無限小數.
Infinite series. 無窮級數,或無限級數.
Initial line. 首線[角的].
Inner centre. 內心[相似的].
In-polygon. 內接多角形.
Inscribed circle. 內切圓.
Inscribed figure. 內接形.
Inscribed polyhedron. 內接多面體.
Inscribed quadrilateral. 內接四邊形.
Inscribed sphere. 內切球.
Inscribed square. 內接正方形.
Inscribed triangle. 內接三角形.
In-sphere. 內切球.
In-square. 內接正方形.
Insurance. 保險.
Insured. 被保險者.
Insurer. 保險者.
Integer. 整數.
Integral calculus. 積分學.
Integral expression. 整式.
Intercalary month. 閏月.
Interest. 利息,或利子.
Interior angle. 內角.
Interior opposite angle. 內對角.
Internal bisector. 內二等分線.
Internal common tangent. 內公切線,或內共通切線.
Interpolation. 插入法,或補間法.
Intersection of loci. 軌跡之交.
In-triangle. 內接三角形.
Inverse circular function. 逆圓函數.
Inverse operation. 逆運算,或逆演算.
Inverse proportion. 逆比例,或反比例.
Inverse ratio. 逆比,或反比.
Inverse trigonometric function. 逆三角函數.
Invertendo. 反轉之理.
Involution. 累乘法.
Irrational equation. 無理方程式.
Irrational expression. 無理式.
Irrational number. 無理數.
Irrational quantity. 無理量.
Isogon. 等角形.
Isosceles trapezoid. 二等邊梯形,或二等脚梯形.
Isosceles triangle. 二等邊三角形,或二等脚三角形.

J.

Joins. 連線.
Joint stock company. 股分公司.

K.

Kilo. 啓羅.
Kilogram. 啓羅格蘭姆[瓩].
Kilogramme. 啓羅格蘭姆[瓩].
Kiloliter. 啓羅立突[竏].
Kilolitre. 啓羅立突[竏].

Kilometer. 啓羅米突[粁].
Kilometre. 啓羅米突[粁].
Kinematics. 運動學.
Kinetics. 動力學.
Knot. 樓替[節].
Known number. 已知數

L.

Lateral area. 傍面積,或側面積.
Lateral edge. 側稜.
Lateral face. 側面.
Latitude. 緯度.
Law. 定則. 法則. 定律.
Law of continuity. 連續之定則.
Law of signs. 符號定則.
Leap year. 閏年.
Least common denominator. 最小公分母.
Least common multiple. 最小公倍數.
Least squares. 最小二乘法.
Legal interest. 法律上之利息.
Lemma. 補題.
Less than. 小於.
Life annuity. 生命年金.
Life insurance. 生命保險.
Like number. 同名數.
Like terms. 同類項.
Limit. 極限. 境界.
Limited liability. 有限責任.
Limited partnership. 合資公司.
Line. 線.
Linear equation. 一次方程式.
Line direction. 線方向.
Lines of concurrency. 共點線.
Line symmetry. 線對稱.
Linkage. 林克志.
Liter. 立突.
Literal coefficient. 文字係數.
Literal equation. 文字方程式.
Litre. 立突.
Local value. 位置値[數字的].
Locus. 軌跡.
Logarithm. 對數.
Logarithmic series. 對數級數.
Long division. 長除法.
Longitude. 經度.
Long ton. 長噸,或重噸.
Lowest common denominator. 最低公分母.
Lowest common multiple. 最低公倍數.
Lowest term. 既約項. 最簡項.
Lozenge. 菱形.
Ludolphian number. 圓周率.
Lunar angle. 月形角
Lunar calendar. 太陰曆.
Lune. 月形. 弓月形.

M.

Magnitude. 大.
Major angle. 優角.
Major axis. 長徑.
Major conjugate angle. 優共軛角.
Major conjugate arc. 優弧.
Major conjugate segments. 優弓形.
Mantissa. 假數.
Marine insurance. 海上保險.
Mariner's compass. 航海用羅針盤.
Material solid. 實質體.

Mathematical induction. 數學的歸納法.
Mathematics. 數學.
Maximum value. 極大值.
Mean. 中項. 中率. 內項. 內率.
Mean centre. 平均中心.
Mean point. 平均點.
Mean proportional. 比例中項,或比例中率.
Mean solar day. 平太陽日.
Measure. 測度,或約數,又約度.
Mechanics, 重學.
Medial section. 外中分割.
Median. 中線.
Median point. 重心.
Members of an equation. 方程式之節.
Menelaus's theorem. 美利剌斯之定理.
Mensuration. 求積.
Mental Arithmetic. 諳算.
Meridian. 子午線.
Meridian circle. 經圓.
Meter. 米突[米].
Method of difference. 差之法.
Method of successive eliminations. 累次消去法.
Method of undetermined multipliers. 未定乘數法.
Metre. 米突[米].
　Millimetre. 密里米突[粍].
　Centimetre. 生的米突[糎].
　Decimetre. 特西米突[粉].
　Decametre. 特卡米突[籵].
　Hectometre. 海克米突[粨].
　Kilometre. 啓羅米突[粁].
　Myriametre. 密里亞米突[粫].
Metric system. [米突法].
Metric ton. [米突噸].
Middle point. 中點.
Mile. 哩. 埋爾.
Millier. 密里亞[千瓩].
Milligram. 密里格蘭姆[瓱].
Milligramme. 密里格蘭姆[瓱].
Milliliter. 密里立突[竓].
Millilitre. 密里立突[竓].
Millimeter. 密里米突[粍].
Millimetre. 密里米突[粍].
Minimum value. 極小值.
Minor angle. 劣角.
Minor axis. 短徑.
Minor conjugate angle. 劣共軛角.
Minor conjugate arc. 劣弧.
Minor conjugate segment. 劣弓形.
Minuend. 被減數.
Minus (–). 減號,負號.
Minute. 分.
Mixed number. 混數,或帶分數.
Mixed recurring decimal. 雜循環小數.
Mixture. 混合法.
Modern Geometry. 近世幾何學.
Modulus. 對數率. 根率. 虛數率.
Monomial expression. 一項式,或單項式.
Multinomial expression. 多項式.
Multinomial theorem. 多項式定理.
Multiple. 倍度. 倍數.
Multiplicand. 被乘數.
Multiplication. 乘法,或掛算.
Multiplication table. 乘法表.
Multiplier. 乘數.
Myriameter. 密利亞米突[粫].
Myriametre. 密利亞米突[粫].

N.

Napierian logarithm. 訥伯爾對數.
Natural cosecant. 眞數餘割.
Natural cosine. 眞數餘弦.
Natural cotangent. 眞數餘切.
Natural function. 眞數函數.
Natural logarithm. 自然對數.
Natural numbers. 自然數.
Natural secant. 眞數正割.
Natural sine. 眞數正弦.
Natural tangent. 眞數正切.
Naught. 零.
Nautical mile. 海里, 或浬.
Necessary and sufficient condition. 必要且十分之要件.
Necessary condition. 必要之要件.
Negative. 負.
Negative angle. 負角.
Negative quantity. 負量.
Neutral series. 中間級數.
Nine point circle. 九點圓.
Nonagon. 九角形.
Normal. 法線.
Normal section. 直截面.
Notation. 記數法. 記法.
Nought. 零.
N^{th} root. n乘根.
Number. 數.
Numeration. 命數法.
Numerator. 分子.
Numerical coefficient. 數字係數.
Numerical equation. 數字方程式.
Numerical value. 數值.

O.

Oblique. 斜線.
Oblique angle. 斜角.
Oblique angled triangle. 斜三角形, 或斜角三角形.
Oblique prism. 斜角壔.
Oblique section. 斜截口.
Oblique triangle. 斜三角形.
Oblong. 矩形. 長方形
Obtuse angle. 鈍角.
Obtuse angled triangle. 鈍角三角形.
Obtuse triangle. 鈍三角形.
Obverse. 裏[定理的].
Octagon. 八角形.
Octahedron. 八面體.
Odd number. 奇數.
Operation. 運算, 或演算.
Opposable. 得對置.
Opposite angles. 對角.
Opposite points. 對點.
Order. 次.
Ordinary partnership. 兩合公司.
Origin. 原點[角的].
Orthique triangle. 垂趾[足]三角形.
Orthocentre. 垂心.
Orthogonal projection. 正射影.
Orthotomic circle. 三圓之直交圓.
Oscillating series. 動搖級數.
Ounce. 溫司.
Outer centre. 外心[相似的].

P.

Parallelepiped. 平行六面體.
Parallelogram. 平行四邊形.

Parallelogramic prism. 平行形角壔.

Parallelograms about the diagonal. 沿對角線之平行四邊形.

Parallelopiped. 平行六面體.

Parallels. 平行線.

Parallel straight lines. 平行直線.

Parenthesis. 括弧.

Partial dividend. 部分被除數

Partial fractions. 部分分[illegible]，或散分數.

Partial product. 部分積.

Partial quotient. 部分商.

Partnership. 合資算.

Payee. 領收人.

Peaucellier's cell. 頗些利亞引直線之器械.

Pedal line. 垂趾線. 垂足線.

Pedal triangle. 垂趾三角形. 垂足三角形.

Pence. 辨士.

Penny. 辨士.

Pentagon. 五角形.

Pentahedron. 五面體.

Per-cent. 百分法.

Percentage. 百分折扣.

Perfect cube. 完全之立方.

Perfect square. 完全之平方.

Perigon. 周角.

Perimeter. 周圍.

Periodic circular function. 回歸圓函數，周[週]期圓函數.

Permutation. 列方，或順列，序列.

Perpendicular. 垂線.

Perpendicular bisector. 垂直二等分線.

Perpetual annuity. 永續年金.

Perpetuity. 永續年金.

Perspective representation. 透視圖法，或遠近圖法.

Phi. n: 華伊耶恩 [$\phi(n)$].

Pi (π) Notation. 派伊記法.

Picture-plane. 畫面.

Piles of shot. 積彈.

Plane. 平面.

Plane angle. 平面角.

Plane angle of a dihedral angle. 二面角之平面角.

Plane direction. 平面方向.

Plane figure. 平面圖. 平面形.

Plane Geometry. 平面幾何學.

Plane rectilinear figure. 平面直線形.

Plane surface. 平面.

Plane symmetry. 平面對稱.

Plane Trigonometry. 平面三角法.

Planimetry. 平面幾何學.

Plumb-line. 鉛垂線.

Plus. (+). 普剌斯.

Point. 點.

Point of concurrence. 聚交點.

Point of contact. 切點.

Point of intersection. 交點.

Point symmetry. 點對稱.

Polar circle. 極圓.

Polar triangle. 極三角形.

Pole. 極.

Poliedral angle. 多面角.

Polygon. 多角形.

Polygonal numbers. 多角數.

Polyhedral angle. 多面角.

Polyhedron. 多面體.

Polynomial expression. 多項式.

Poncelet's theorem. 龐士勒之定理.

Position. 位置.
Positive. 正的.
Positive angle. 正角.
Positive integer. 正整數.
Positive quantity. 正量.
Postulate. 公法. 作圖之規矩.
Pound. 磅.
Power. 乘冪,或冪.
 First power. 一乘冪.
 Second power. 二乘冪.
 Third power. 三乘冪.
Practical Arithmetic. 實用算術.
Premium. 保險費.
Present value. 現價.
Prime divisor. 素約數.
Prime factor. 素因數.
Prime measure. 素約數.
Prime meridian. 本初子午線.
Prime number. 素數.
Prime to each other. 互素.
Principal. 元金.
Prism. 角壔.
Prismatoid. 三角傍面臺.
Prismoid. 角臺.
Probability. 適遇. 公算 [决疑數學].
Problem. 問題. 作圖題.
Product. 積.
Production. 延線.
Profit and loss. 損益.
Progression. 級數.
Projection. 射影.
Promissory note. 期票.
Proof. 證明. 驗,或驗算.
Proof by exhaustion. 窮極之法.
Proper fraction. 眞分數.
Proportion. 比例.
Proportional. 比例數. 比例量.
Proportional compasses. 比例規.
Proportional division. 比列配分.
Proportional quantity. 比例量.
Proposition. 命題.
Protractor. 分度器.
Ptolemy's theorem. 普佗列米之定理.
Public agent. 代辨人.
Pure Mathematics. 純正數學.
Pure quadratic equation. 純二次方程式.
Pure recurring decimal. 正循環小數,或純環循小數.
Pyramid. 角錐.
Pythagoras's table. 披他哥剌司之表.
Pythagoras's theorem. 披他哥剌司之定理.
Pythagorean table. 披他哥剌司之表.

Q.

Q. E. D. 所當證明者.
Q. E. F. 所當作者.
Quadrangle. 四角形.
Quadrant. 分面,或象限.
Quadrantal triangle. 象限三角形.
Quadratic equation. 二次方程式.
Quadratic expression. 二次式.
Quadratic surd. 平方根數,或二次根數.
Quadrilateral. 四邊形.
Quantity. 量. 數.
Quart. 夸爾.
Quarter [四分之一]. 夸爾脫.
Quaternary scale. 四進記法.
Quindecagon. 十五角形.

Quintal. 夸脱爾. (百啓羅兎)
Quotient. 商.

R.

Radian. 列替安.
Radical. 根數.
Radical axis. 根軸.
Radical centre. 根軸心.
Radical sign. 根號.
Radicand. 被開方數.
Radication. 開方法.
Radius. 半徑.
Radius vector. 動徑.
Radix. 根. 底.
Radix fraction. 記根分數, 或記底分數.
Range. 列點.
Rate of exchange. 匯兌行市.
Rate of interest. 利率.
Rate percent. 利率.
Ratio. 比.
Rational expression. 有理式.
Rational integral expression. 有理整式.
Rationalization. 有理化法.
Rationalizing factor. 有理化因數.
Ratio of equality. 等比.
Ratio of greater inequality. 優比.
Ratio of less inequality. 劣比.
Real quantity. 實數. 實量
Reaumur's scale. 列氏之度分.
Recent Geometry. 最近幾何學.
Reciprocal equation. 反數方程式, 或逆數方程式.
Reciprocal expressions. 反數式, 或逆數式.
Reciprocal fractions. 逆分數.
Reciprocal ratios. 反比, 或逆比.
Reciprocals. 反數, 或逆數.
Rectangle. 矩形.
Rectangle contained by two lines. 二線所包之矩形.
Rectangular cone. 直角圓錐.
Rectangular hyperbola. 直角雙曲線.
Rectangular parallelopiped. 直角平行六面體.
Rectilinear angle 直線角.
Rectilinear figure. 直線形.
Recurring decimal. 循環小數.
Recurring period. 循環節.
Recurring series. 循環級數.
Reduce. 約.
Reduction of fractions to a common denominator. 通分.
Re-entering angle. 凹角.
Re-entrant angle. 凹角.
Re-entrant polygon. 凹多角形.
Reflex angle. 凹角.
Registered bond. 記名公債票.
Regular dodecahedron. 正十二面體.
Regular hexahedron. 正六面體.
Regular icosahedron. 正二十面體.
Regular octahedron. 正八面體.
Regular pentagon. 正五角形.
Regular polygon. 正多角形.
Regular polyhedron. 正多面體.
Regular pyramid. 正角錐.
Regular tetrahedron. 正四面體.
Remainder. 剩餘.
Remainder theorem. 剩餘定理.
Repeating decimal. 循環小數.
Repetend. 循環節.

Representative fraction. 地圖之分數.
Resolution into prime factors. 素數分解法.
Rhomboid. 長菱形.
Rhombus. 菱形.
Right angle. 直角.
Right angled triangle. 直角三角形, 或句股弦.
Right circular cone. 直角圓錐.
Right circular cylinder. 直圓壔.
Right dihedral angle. 直二面角.
Right line. 直線.
Right parallelepiped. 直六面體.
Right parallelopiped. 直六面體.
Right prism. 直角壔.
Right pyramid. 直角錐.
Right section. 直角截口, 或直截口.
Right triangle. 直三角形.
Roman notation. 羅馬記數法.
Roman numerals. 羅馬數字.
Root. 根.
Rotation. 自轉.
Rule. 定則. 法則. 尺度.
Rule for casting out the nines. 九去法.
Rule of conversion. 轉換法.
Rule of false positions. 僞設法.
Rule of identity. 同一法.
Rule of positions. 假設法.
Rule of three. 三率法.
Ruler. 矩.

S.

Salient angle. 凸角.
Scalene triangle. 斜三角形.
Scale of notation. 記數之底.
Screw. 螺旋.
Secant. 割線. 正割.
Second. 秒.
Second power. 二乘冪.
Second quadrant. 第二分面, 或第二象限.
Second root. 二乘根.
Section. 截口. 截面.
Sector. 扇形[圓的].
Segment (of a circle). 弓形[圓的].
Segment (of a straight line). 分[直線的].
Semi-circle. 半圓.
Semi-circumference. 半圓周.
Semi-sphere. 半球.
Sense. 向[不等式的, 直線的].
Series. 級數.
Sexagesimal method. 六十分法.
Shape. 形.
Share. 股分.
Shareholder. 股東.
Short division. 短除法.
Short ton. 輕噸.
Side. 邊.
Sides of an equation. 方程式之邊.
Sight draft. 卽期票.
Sigma-notation. 細格碼(Σ)記法.
Sign. 符號.
Significant figure. 有效數字.
Sign of addition. 加法之符號, 或加號.
Sign of affection. 性質之符號.
Sign of decimal. 小數點.
Sign of division. 除法之符號, 或除號.
Sign of equality. 相等之符號, 或等號.
Sign of inequality. 不等之符號, 或不等號.

Sign of radication. 開方之符號.
Sign of rati . 比之符號,或比號.
Sign of subtraction. 減之符號,或減號.
Similar. 相似的.
Similar figures. 相似形.
Similar repetend. 同初位循環節.
Similar surds. 相似根數.
Similar terms. 同類項.
Simple equation. 一次方程式.
Simple expression. 單式.
Simple interest. 單利.
Simple number. 單名數. 基數.
Simple partnership. 單合資算.
Simple proportion. 單比例.
Simplest alternating expression. 最簡交代式.
Simson's line. 西母生線.
Simultaneous equation. 聯立方程式.
Sine. 正弦.
Single positions. 單假設法.
Single repetend. 單循環節.
Slant edge. 斜稜.
Slant height. 斜高.
Slide rule. 記算尺.
Small circle. 小圓.
Solar calendar. 太陽曆.
Solar day. 太陽日.
Solid. 立體.
Solid angle. 立體角.
Solid Geometry. 立體幾何學.
Solidity. 體積.
Solid of revolution. 旋轉體.
Solution. 解法. 解答.
Solution of triangles. 三角形之解法.
South latitude. 南緯.
Space. 空間.
Specific duty. 從量稅.
Specific gravity. 比重.
Speed. 速.
Sphere. 球.
Spherical angle. 球面角.
Spherical cone. 球狀圓錐.
Spherical excess. 球面過剩.
Spherical figure. 球面圖形.
Spherical polygon. 球面多角形.
Spherical pyramid. 球狀角錐.
Spherical sector. 球分.
Spherical segment. 球缺.
Spherical surface. 球面.
Spherical triangle. 球面三角形.
Spherical Trigonometry. 球面三角法.
Spherical wedge. 球狀楔.
Spheroid. 橢圓體.
Square. 平方. 正方形.
Square on the line. 線上之正方形.
Square root. 平方根.
Standard meridian. 本初子午線.
Standard time. 標準時.
Standard unit. 基本單位.
Star polygon. 星形.
Statics. 靜力學.
Ster.
Stere. [司醴兒]卽一米突之立方.
Stereometry. 立體幾何學.
Stock. 資本.
Stock broker. 股票中人.
Stock exchange. 股票交易所.
Straight angle. 平角.
Straight line. 直線.
Subduplicate ratio. 平方根比.
Subsidiary angle. 補助角.

Substitution. 代入法,或置換法.
Subtraction. 減法,或引算.
Subtrahend. 減數.
Successive division. 累次除數,或逐次除法.
Sufficient condition. 十分之要件.
Suffix. 添數.
Sum. 和.
Summand. 被加數.
Summation. 總和法.
Superficial area. 表面積.
Superposable. 得併置.
Supplement (of an angle). 補角.
Supplement (of an arc). 補弧.
Surd. 根數.
Surd of the second order. 二次根數.
Surd of the third order. 三次根數.
Surface. 面.
Surface Geometry. 平面幾何學.
Surveyor's chain. 測棣.
Symbol. 記號.
Symbol of operations. 演算之記號.
Symmetrical expression. 對稱式.
Symmetrical function. 對稱函數.
Symmetrical triangles. 對稱三角形.
Symmetry. 對稱.
Symmetry, collateral. 並行的對稱.
Symmetry, cyclic. 輪換的對稱.
Synthesis, method of. 組立法.
Synthetic division. 組立除法.
System of notation. 記數法.
System of numeration. 命數法.

T.

Table. 表.
Table of logarithms. 對數表.
Tabular difference. 表差.
Tabular logarithm. 表對數.
Tangent. 正切. 切線.
Tangent plane. 切面.
Temperature. 溫度.
Term. 項.
Ternary scale. 三進記法.
Tetragon. 四角形.
Tetragram. 四邊形.
Tetrahedral angle. 四面角.
Tetrahexahedron. 二十四面體.
Theodolite. 經緯儀.
Theorem. 定理.
Theoretical discount. 理論折扣.
Theoretical present worth. 理論現價.
Theory of equations. 方程式之理論.
Theory of numbers. 整數論.
Theory of proportional parts. 比例部之理論.
Thermometer. 寒暖計.
The theorem of three perpendiculars. 三垂線之定理.
Third power. 三乘冪.
Third proportional. 比例第三項.
Third quadrant. 第三分面,或第三象限.
Time draft. 定期兌.
To add. 相加,助足,加.
To be circumscribed. 外接.
To be homologous. 相當.
To be inscribed. 內接.
To be similarly situated. 相似置之.
To correspond. 對應.
To deduct. 減.
To divide. 除.
To divide externally. 外分.

To divide harmonically. 調和分之.
To divide internally. 內分.
To divide similarly. 相似分之.
To divide symmetrically. 對稱分之.
To intersect. 交.
To multiply. 乘.
Tonneau. 洛托.
Ton of displacement. 排水噸.
To satisfy. 適合或使滿足.
To solve. 解.
To subtract. 減.
Total. 總計.
To touch externally. 外切.
To touch internally. 內切.
To vary directly. 正變.
To vary inversely. 反變.
Trade discount. 商賣折扣.
Transcendental equation. 超越方程式.
Transcendental number. 超越數.
Transpose. 移項.
Transversal. 橫截線.
Trapezium. 不平行四邊形.
Trapezoid. 梯形.
Trial divisor. 試除數.
Triangle. 三角形.
Triangulation. 三角測量.
Trigon. 三角形.
Trigonometrical equation. 三角方程式.
Trigonometrical function. 三角函數.
Trigonometrical ratio. 三角函數,或三角比.
Trigonometrical series. 三角級數.
Trigonometry. 三角法.
Trihedral angle. 三面角.
Trinomial expression. 三項式.
Triplicate ratio. 三乘比.
Trirectangular trihedral angle. 直三面角.
Trisection of an angle. 角之三等分.
Troy weight. 金衡.
True discount. 眞折扣.
True present worth. 眞現價.
Truncated pyramid. 斜角臺,或斜截頭角錐.
Truncated triangular prism. 斜截頭三角壔.

U.

Undecagon. 十一角形.
Undetermined multipliers, method of. 未定乘數法.
Unequal. 不等的.
Unit. 單位.
Unitary method. 歸一法.
Unit circle. 單位圓.
Unity. 一,僅,同樣.
Universal Arithmetic. 廣通算術,或一般算術.
Unknown number. 未知數.
Unknown quantity. 未知量.
Unlike terms. 不同類項.
Unlimited liability. 無限責任.

V.

Value. 值.
Vandermonde's theorem. 倣得門之定理.

Vanishing fraction. 消失分數.
Vanishing point. 消逃點.
Variable. 變數.
Variation. 變數法.
Vary jointly as. 因變.
Velocity. 速度.
Verification. 驗證.
Versed sine. 正矢.
Vertex. 頂.
Vertical angle. 頂角. 垂直角.
Vertical direction. 垂直之方向.
Vertical line. 垂直線.
Vertically opposite angles. 對頂角.
Vertically opposite dihedral angles. 對頂二面角. 對稜二面角.
Vertical plane. 垂直面.
Vinculum. 括線.
Volume. 體積.
Vulgar fraction. 通常分數.

W.

Wedge. 楔.
Weights and measures. 度量衡.
West meridian. 西經.
Whole number. 完全數,或整數.

Y.

Yard. 碼.
Year. 年.

Z.

Zero. 零.
Zone (of a sphere). 球帶.

(第二門畢)

第三門

算術解法之部

THIRD SECTION

The Solutions of Exercises

IN

ARITHMETIC

第三門　算術解法之部　目次

● ＋加法之符號 ● －減法之符號 ● ×乘法之符號 ● ÷除法之符號 ● ＝相等之符號 ● :比之符號 ● √ 平方根 ● ∛ 立方根 ● ∞無窮大 ● $元(打那) ● ¢仙 ● £磅 ● s.先(先令) ● d.片(辨士) ● @ At. ● %百分之記號 ● ℔碼(依亞) ● ℥(溫司) ● ʒ(打蘭) ● 北京天文臺之緯度(北) 39° 55′經度(東) 116° 23′ 45″ 比綠威之時差7時46分11秒 ● 地球之半徑(赤道)爲6377粁.4,(極)爲6356粁.1 ● 太陽之半徑692650粁 ● 月之半徑1733粁 ● 自地球至太陽之距離148×10⁶粁 ● 自地球至月之距離384000粁 ● 赤道g之值978糎.1 ● 極g之值983糎.2, 但g爲(每秒每秒)墮體之加速度 ● 圓周率$\pi=3.14159265358979323846264338327950288419716\,9\cdots\cdots$

數	平方根	立方根	數	平方根	立方根	數	平方根	立方根
1	1.0000000	1.0000000	11	3.3166248	2.2239801	21	4.5825757	2.7589243
2	1.4142136	1.2599210	12	3.4641016	2.2894286	22	4.6904158	2.8020393
3	1.7320508	1.4422496	13	3.6055513	2.3513347	23	4.7958315	2.8438670
4	2.0000000	1.5874011	14	3.7416574	2.4101422	24	4.8989795	2.8844991
5	2.2360680	1.7099759	15	3.8729833	2.4662121	25	5.0000000	2.9240177
6	2.4494897	1.8171206	16	4.0000000	2.5198421	26	5.0990195	2.9624960
7	2.6457513	1.9129312	17	4.1231056	2.5712816	27	5.1961524	3.0000000
8	2.8284271	2.0000000	18	4.2426407	2.6207414	28	5.2915026	3.0365889
9	3.0000000	2.0800837	19	4.3588989	2.6684016	29	5.3851648	3.0723168
10	3.1622777	2.1544347	20	4.4721360	2.7144177	30	5.4772256	3.1072325

數學辭典

第三門　算術解法之部

算術之法則及諸數

命數法及記數法

● 基數. 一 二 三 四 五 六 七 八 九.

● 數字. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

● 定位.

……兆千百十億千百十萬千百十一.
　　　億億億　萬萬萬

分釐毫絲忽………………………

● 符號. ＋ － × ÷ ＝.

● 羅馬數字.

I (一), V (五), X (十), L (五十), C (百), D (五百), M (千). (1). 某數字之右有等或小於其數值之數字,則其數以各數字之和表之. (2). 某數字之左,有小於其數值之數字,則其數以各數字之差表之. (3). 某數字之上,引一橫線者表其原值之千倍.

整數小數之四則

● 諸數以任意次序加之,其和不變.

● 被減數－減數＝差. 故被減數＝差＋減數. 被減數－差＝減數.

● 二數之積,不論其因數之次序.

● 諸數之和,乘某數之積,等於各數乘某數之積之和.

● 被除數與除數,同以某數乘之,或除之,其商不變.

● 除數×商＋剩餘＝被除數.

● 同種若干數之和,等於其平均數乘其個數.

● 加減運算之式,當次第自左及右.

● 乘除運算之式,當次第自左及右.

● 加減乘除運算之式,當先乘除而後加減.

諸等數

● 米突法之長.

1 密理米突 [粍] ＝ $0^{\text{粎}}.001$.

1 生的米突 [糎] ＝ $0^{\text{粎}}.01$.

1 特西米突 [粉] ＝ $0^{\text{粎}}.1$.

1 米突 [粎]

1 特卡米突 [粁] ＝ $10^{\text{粎}}$.

1 海克米突 [粨] ＝ $100^{\text{粎}}$.

1 啓羅米突 [粁] ＝ $1000^{\text{米}}$.

1 米利亞米突 [粉] ＝ $10000^{\text{米}}$.

1 米 ＝ 3 尺 1 寸 2 分 5 釐.

1 尺 ＝ $0^{\text{米}}.32$.

● 地積.

1 生的亞爾 [甅] ＝ 1 平方粎.

1 亞爾 [安] ＝ 100 平方粎.

1 海克亞爾 [姡] ＝ 10000 平方粎.

1 亞爾 ＝ $0^{\text{畝}}.79036$.　1 畝 ＝ $6.^{\text{安}}144$.

1 平方粁 ＝ $3^{\text{方里}}.01408$.

● 容量.

1 密理立突 [竓] ＝ $0^{\text{米}}.001$.

1 生的立突 [竰] ＝ $0^{\text{米}}.01$.

1特西立突[竕] = $0^{米}.1$.
1立突 [竍]
1特卡立突[竔] = $10^{立}$.
1海克立突 [竡] = $100^{立}$.
1啓羅立突[竏] = $1000^{立}$.
1立 = $0^{升}.965747$. 1升 = $1^{竏}0355$.

● 重量.

1密理格蘭姆[瓱] = $0.^{瓦}001$.
1生的格蘭姆[甅] = $0.^{瓦}01$.
1特西格蘭姆[瓰] = $0.^{瓦}1$.
1格蘭姆 [瓦]
1特卡格蘭姆[瓧] = $10^{瓦}$.
1海克格蘭姆[瓸] = $100^{瓦}$.
1啓羅格蘭姆[瓩] = $1000^{瓦}$.
1米突頓 = $1000^{瓦}$.
1瓦 = $0^{兩}.026808932$. 1瓩 = $1^{斤}.675558$.

● 度制.

$1^{丈}=10^{尺}=100^{寸}=1000^{分}=10000^{釐}$
$1^{尺}=10=100=1000$
$1=10=100$
$1=10$

1海關尺 = $\frac{358}{320}$ 尺 = $1^{尺}.11875$.

● 里制.

$1^{里}=360^{弓}=1800^{尺}$≒英 $0^{哩}.356$
$1=5$ =英海里 $0^{浬}.311$

● 畝制.

$1^{方里}=540^{畝}=129600^{方步}=3240000^{方尺}$
$1=240=6000$
$1=25$

● 量制.

$1^{石}=2^{斛}=10^{斗}=100^{升}$
$1=10$
$1^{升}=31^{立方寸}600^{立方分}$

● 衡制.

$1^{斤}=16^{兩}=160^{錢}=0^{瓩}.596816$
$1=10=37^{瓦}.301$

關秤1兩 = $1^{兩}.01292525$
=(英)$583\frac{1}{3}$喱=(法)37.983125.
廣秤1兩 = $1^{兩}.0072939$.
漕秤1兩 = $1^{兩}.9827241$.

● 外國度量衡之主要者.

英美長度之主要者如次.
1吋[因制或 in.] = $0^{尺}.0793736$.
1呎[幅地或 ft.] = 12吋 = $0^{尺}.952483$.
1碼[依亞或 yd.] = 3呎 = $2^{尺}.857448$.
1鏈[奢因] = 22碼 = $62^{尺}.863875$.
1哩[埋爾] = 1760碼 = $3^{里}.215277$.
1浬[海里] = 6076呎 = $2^{里}.79395$.
英美容量之主要者如次.
1呏[加倫或 gal.] = $4^{升}.3878326$.
英美常衡之主要者如次:
1喱[克令或 gr.] = $\frac{1}{7000}$ 磅 =
$1^{厘}.7371916$.
1温司[OZ.] = $\frac{1}{60}$ 磅 = $7^{錢}.6002136$.
1磅[ㄅ] = $12^{兩}.16034178$.
1噸 = 2240磅 = 約1700斤.
= 關秤1680斤.
但美謂224磅為長噸, 其單稱噸者, 為2000磅, 等於關秤1500斤.
日本之長度.
1尺 = 10寸 = (中) $0^{尺}.946969$.
1鯨尺 = $1^{尺}.25$. 1丈 = 10尺.
1間 = 6尺. 1町 = 36間.
1里 = 36町 = (中) $6^{里}.92929$.
日本之面積.
1步或坪 = 10合 = 1間之平方.
1畝 = 30步. 1段 = 10畝.
1町 = 10段 = (中) $1^{畝}.61415$.
日本之容量.
1升 = 10合. 1斗 = 10升.

1石 = 10斗 = (中) 1石.7420637.

日本之重量.

1貫 = 1000匁, 1斤 = 160匁.

1匁 = (中) 1錢强 = (法) 3瓦.75.

幣制.

圓	角	分	文
1 =	10 =	100 =	1000
	1 =	10 =	100
		1 =	10

1圓 = 純銀重量7錢2分.

銀圓之成分. 純銀9分. 參和銅1分.

● 外國貨幣中之主要者.

英 $\left\{\begin{array}{l}1\text{磅} = 20\text{先令} = 240\text{辨士}.\\ \quad 1\text{先令} = 12\text{辨士}.\end{array}\right.$

1磅 = 約10圓.

法 1佛郎 = 100生丁 = 約4角.

美 1打那 = 100仙 = 約2圓.

德 1馬克 = 100布.

俄 1盧布 = 100哥

日本1圓墨西哥1打那與中國1圓略同要皆有時價不定.

● 時

週	日	時	分	秒
1 =	7 =	168 =	10080 =	604800
	1 =	24 =	1440 =	86400
		1 =	60 =	3600
			1 =	60

1平年 = 12月 = 365日.

1閏年 = 12月 = 366日.

● 月之大小.

大月[一, 三, 五, 七, 八, 十, 十二月].

小月[二, 四, 六, 九, 十一月].

但大月31日, 小月30日, 惟二月平年28, 日, 閏年29日.

● 平年閏年之區別.

西歷紀元年數4之倍數, 而非100之倍數者, 爲閏年, 但400之倍數, 仍爲閏年.

整數之性質

● 約數之性質.

(1) 二數之公約數, 爲其和或差之約數.

(2) 某數之約數, 爲其倍數之約數.

(3) 二數之公約數, 爲其一任意若干倍, 與其他之任意若干倍之和或差之約數.

● 可約數之條件.

(1) 某數之末位爲0或爲偶數, 則其數能以2整除.

(2) 某數之末位爲0或5, 則其數能以5整除.

(3) 某數之末二位爲0, 或末二位所成之數, 能以4或25整除, 則其數能以4或25整除.

(4) 某數之末三位爲0, 或末三位所成之數, 能以8或125整除, 則其數能以8或125整除.

(5) 某數之數字和, 能以9或3整除, 則其數能以9或3整除.

(6) 某數之第一第三第五……卽第奇位數字之和, 減其第二第四第六…卽第偶位數字之和, [不足減則加11之倍數於被減數] 若所餘能以11整除, 則其數能以11整除.

● 二數之最大公約數, 與最小公倍數之積, 等於二數之積.

十干　甲乙丙丁戊己庚辛壬癸.

十二支　子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥.

分數

● 以整數乘分子,則其分數被此整數乘,以整數除分子,則其分數被此整數除.

● 以整數乘分母,則其分數被此整數除,以整數除分母,則其分數被此整數乘.

● 分母與分子,俱以同整數乘之或除之,其分數之值不變.

● 二分數之分母同,則分子大者,其分數大.

● 二分數之分子同,則分母小者,其分數大.

● 諸分數之最大公約數,爲將諸分母之最小公倍數爲分母,及諸分子之最大公約數爲分子之分數.

● 諸分數之最小公倍數,爲將諸分母之最大公約數爲分母,及諸分子之最小公倍數爲分子之分數.

循環小數

● 化正循環小數爲分數,取一循環節爲分子,依循環節數字之數,列記9爲分母,即得.

● 化雜循環小數爲分數,自小數點之次起,至第一循環節之末位止,取之爲分子,依循環節數字之數,列記9於其次,依不循環之數字之數附以0,以爲分母,即得.

比

比之值 = 前項 ÷ 後　項.

前　項 = 後項 × 比之值.

後　項 = 前項 ÷ 比之值

百分數

百分數 = 百分值 ÷ 原值

百分值 = 原值 × 百分數

原值 = 百分值 ÷ 百分數

內折扣之現價 = 原值 × (1−百分數)

外折扣之現價 = 原值 × (1+百分數)

利息算

● 單利. 利息 = 元金 × 利率 × 期間.

元利合計 = 元金 + 元金 × 利率 × 期間,

= 元金 × (1 + 利率 × 期間).

元金 = 利息 ÷ (利率 × 期間).

$$= \frac{\text{元利合計}}{1+\text{利率}\times\text{期間}}.$$

利率 = 利息 ÷ (元金 × 期間).

期間 = 利息 ÷ (元金 × 利率).

● 複利. 元利合計 = 元金 × $(1\times\text{利率})^{\text{期間}}$

利息 = 元金 × $(1+\text{利率})^{\text{期間}}$ − 元金

= 元金 × $\{(1+\text{利率})^{\text{期間}}-1\}$

期間	2 分	$2\frac{1}{2}$ 分	3 分	$3\frac{1}{2}$ 分
1	1.020000	1.025000	1.030000	1.035000
2	1.040400	1.050625	1.060900	1.071225
3	1.061208	1.076891	1.092727	1.108718
4	1.082432	1.103813	1.125509	1.147523
5	1.104081	1.131408	1.159274	1.187686
6	1.126162	1.159693	1.194052	1.229255
7	1.148686	1.188686	1.229874	1.272279
8	1.171659	1.218403	1.266770	1.316809
9	1.195093	1.248863	1.304773	1.362897
10	1.218994	1.280085	1.343916	1.410599
11	1.243374	1.312087	1.384234	1.459970
12	1.268242	1.344889	1.425761	1.511069
13	1.293607	1.378511	1.468534	1.563956
14	1.319479	1.412974	1.512590	1.618695
15	1.345868	1.448298	1.557937	1.675349
16	1.372786	1.484506	1.604706	1.733986
17	1.400241	1.521618	1.652848	1.794676
18	1.428246	1.559659	1.702433	1.857489
19	1.456811	1.598650	1.753506	1.922501
20	1.485947	1.638616	1.806111	1.989789
21	1.515666	1.679582	1.860295	2.059431
22	1.545980	1.721571	1.916103	2.131512
23	1.576899	1.764611	1.973587	2.206114
24	1.608437	1.808726	2.032794	2.283328
25	1.640606	1.853944	2.093778	2.363245

期間	4分	4½分	5分	6分
1	1.040000	1.045000	1.050000	1.060000
2	1.081600	1.092025	1.102500	1.123600
3	1.124864	1.141166	1.157625	1.191016
4	1.169859	1.192519	1.215506	1.262477
5	1.216653	1.246182	1.276282	1.338226
6	1.265319	1.302260	1.340096	1.418519
7	1.315932	1.360862	1.407100	1.503630
8	1.368569	1.422101	1.477455	1.593848
9	1.423312	1.486095	1.551328	1.689479
10	1.480244	1.552969	1.628895	1.790848
11	1.539454	1.622853	1.710339	1.898299
12	1.601032	1.695881	1.795856	2.012196
13	1.665074	1.772196	1.885649	2.132928
14	1.731676	1.851945	1.979932	2.260904
15	1.800944	1.935282	2.078928	2.396558
16	1.872981	2.022370	2.182875	2.540352
17	1.947901	2.113377	2.292018	2.692773
18	2.025817	2.208479	2.406619	2.854339
19	2.106849	2.307860	2.526950	3.025600
20	2.191123	2.411714	2.653298	3.207135
21	2.278768	2.520241	2.785963	3.399564
22	2.369919	2.633652	2.925261	3.603537
23	2.464716	2.752166	3.071524	3.819750
24	2.563304	2.876014	3.225100	4.048935
25	2.665836	3.005434	3.386355	4.291871

期間	7分	8分	9分	1成
1	1.070000	1.080000	1.090000	1.100000
2	1.144900	1.166400	1.188100	1.210000
3	1.225043	1 259712	1.295029	1.331000
4	1.310796	1.360489	1.411582	1.464100
5	1.402552	1.469328	1.538624	1.610510
6	1.50073[illegible]	1.586874	1.677100	1.771561
7	1.605781	1.713824	1.828039	1.948717
8	1.718186	1.85093[illegible]	1.992563	2.143589
9	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948
10	1.967151	2.15892[illegible]	2.367364	2.593742
11	2.104852	2.331639	2.58[illegible]426	2.853117
12	2.252192	2.51817[illegible]	2.812565	3.138428
13	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271
14	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498
15	2.759032	3.172169	3.642482	4.177248
16	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973
17	3.158815	3.700018	4.327633	5.054470
18	3.379932	3.99602[illegible]	4.717120	5.559917
19	3.616528	4.315701	5.141661	6.115909
20	3.869684	4.660957	5.604411	6.727500
21	4.140562	5 033834	6.108808	7.400250
22	4.430402	5.43654	6.658600	8.140275
23	4.740530	5.871464	7.257874	8.954302
24	5.072367	6.34118	7.911083	9.849733
25	5.4274[illegible]	6.84847	[illegible].623081	10.834706

上表爲元金爲1期間至25期間複利之元利合計.

次二表[第一第二]爲元金爲1之元利合計,自1期間至25期間.

又其次一表[第三]爲自1年至25年爲1之元金. 元利合計.

終一表[第四]爲自1年至25年,年金爲1之元利合計.

雜　數

● 1對爲2個. ● 1打爲12個. ● 洋紙1連爲500張. ● 1世紀爲100百年. ● 1年之長爲365日5時48分46秒. 化爲小數,爲365日.2422.

期間	2½分	3分	3½分	4分
1	0.975610	0.970874	0.966184	0.961538
2	0.951814	0.942596	0.933511	0.924556
3	0.928599	0.915142	0.901943	0.888996
3	0.905951	0.888487	0.871442	0.854804
5	0.883854	0.862609	0.841973	0.821927
6	0.862297	0.837484	0.813501	0.790315
7	0.841265	0.813092	0.785991	0.759918
8	0.820747	0.789409	0.759412	0.730690
9	0.800728	0.766417	0.733731	0.702587
10	0.781198	0.744094	0.708919	0.675564
11	0.762145	0.722421	0.684946	0.649581
12	0.743556	0.701380	0.661783	0.624597
13	0.725420	0.680951	0.639404	0.600574
14	0.707727	0.661118	0.617782	0.577475
15	0.690466	0.641862	0.596891	0.555265
16	0.673625	0.623167	0.576706	0.533908
17	0.657195	0.605016	0.557204	0.513373
18	0.641166	0.587395	0.538361	0.493628
19	0.625528	0.570286	0.520156	0.474642
20	0.610271	0.553676	0.502566	0.456387
21	0.595386	0.537549	0.485571	0.438834
22	0.580865	0.521893	0.469151	0.421955
23	0.566697	0.506692	0.453286	0.405726
24	0.552875	0.491934	0.437957	0.390121
25	0.539391	0.4770[illegible]	0.423147	0.375117

期間	5分	6分	7分	8分
1	0.952381	0.943396	0.934579	0.925926
2	0.907029	0.889996	0.873439	0.857339
3	0.863838	0.839619	0.816298	0.793832
4	0.822702	0.792094	0.762895	0.735030
5	0.783526	0.747258	0.712986	0.680583
6	0.746215	0.704961	0.666342	0.630170
7	0.710681	0.665057	0.622750	0.583490
8	0.676839	0.627412	0.582009	0.540269
9	0.644609	0.591898	0.543934	0.500249
10	0.613913	0.558395	0.508349	0.463193
11	0.584679	0.526788	0.475093	0.428883
12	0.556837	0.496969	0.444012	0.397114
13	0.530321	0.468839	0.414964	0.367698
14	0.505068	0.442301	0.387817	0.340461
15	0.481017	0.417265	0.362446	0.315242
16	0.458112	0.393646	0.338735	0.291890
17	0.436297	0.371364	0.316574	0.270269
18	0.415521	0.350344	0.295864	0.250249
19	0.395734	0.330513	0.276508	0.231712
20	0.376889	0.311805	0.258419	0.214548
21	0.358942	0.294155	0.241513	0.198656
22	0.341850	0.277505	0.225713	0.183941
23	0.325571	0.261797	0.210947	0.170315
24	0.310068	0.246979	0.197147	0.157699
25	0.295303	0.232999	0.184249	0.146018

年數	4分	5分	6分	7分
1	0.961538	0.952381	0.943396	0.934579
2	1.868095	1.859410	1.833393	1.808018
3	2.775091	2.723248	2.673012	2.624316
4	3.629895	3.545951	3.465106	3.387211
5	4.451822	4.329477	4.212364	4.100197
6	5.242137	5.075692	4.917324	4.766540
7	6.002055	5.786373	5.582381	5.389289
8	6.732745	6.463213	6.209794	5.971299
9	7.435332	7.107822	6.801692	6.515232
10	8.110896	7.721735	7.360087	7.023582
11	8.760477	8.306414	7.886875	7.498674
12	9.385074	8.863252	8.383844	7.942686
13	9.985648	9.393573	8.852683	8.357651
14	10.563123	9.898641	9.294984	8.745468
15	11.118387	10.379658	9.712249	9.107914
16	11.652296	10.837770	10.105895	9.446649
17	12.165669	11.274066	10.477260	9.763223
18	12.659297	11.689587	10.827603	10.059087
19	13.133939	12.085321	11.158116	10.335595
20	13.590326	12.462210	11.469921	10.594014
21	14.029160	12.821153	11.764077	10.835527
22	14.451115	13.163003	12.041582	11.061241
23	14.856842	13.488574	12.303379	11.272187
24	15.246963	13.798642	12.550358	11.469334
25	15.622080	14.093945	12.783356	11.653583

年數	4分	5分	6分	7分
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.040000	2.050000	2.060000	2.070000
3	3.121600	3.152500	3.183600	3.214900
4	4.246464	4.310125	4.374616	4.439943
5	5.416323	5.525631	5.637093	5.750739
6	6.632975	6.801913	6.975319	7.153291
7	7.898294	8.142008	8.393838	8.654021
8	9.214226	9.549109	9.897468	10.259803
9	10.582795	11.026564	11.491316	11.977989
10	12.006107	12.577893	13.180795	13.816448
11	13.486351	14.206787	14.971643	15.783599
12	15.025805	15.917127	16.869941	17.888451
13	16.626838	17.712983	18.882138	20.140643
14	18.291911	19.598632	21.015066	22.550488
15	20.023588	21.578564	23.275970	25.129022
16	21.824531	23.657492	25.670528	27.888054
17	23.697512	25.840366	28.212880	30.840217
18	25.645413	28.132385	30.905653	33.999033
19	27.671229	30.539004	33.759992	37.378965
20	29.778079	33.065954	36.785591	40.995492
21	31.969202	35.719252	39.992727	44.865177
22	34.247970	38.505214	43.392290	49.005739
23	36.617889	41.430475	46.995828	53.436141
24	39.082604	44.501999	50.815577	58.176671
25	41.645908	47.727099	54.864512	63.249038

折扣及日利

● 銀行折扣值＝眞折扣值＋眞折扣之利息.

● 日利年利換算表.

日利	年利	日利	年利	日利	年利	日利	年利
錢	分	錢	分	錢	分	錢	分
1.0	3.65	2.0	7.30	3.0	10.95	4.0	14.60
1.1	4.02	2.1	7.67	3.1	11.32	4.1	14.97
1.2	4.38	2.2	8.03	3.2	11.68	4.2	15.33
1.3	4.75	2.3	8.40	3.3	12.05	4.3	15.70
1.4	5.11	2.4	8.76	3.4	12.41	4.4	16.06
1.5	5.48	2.5	9.13	3.5	12.78	4.5	16.43
1.6	5.84	2.6	9.49	3.6	13.14	4.6	16.79
1.7	6.21	2.7	9.86	3.7	13.51	4.7	17.16
1.8	6.57	2.8	10.22	3.8	13.87	4.8	17.52
1.9	6.94	2.9	10.59	3.9	14.24	4.9	17.89

● 年利日利換算表.

年利	日利	年利	日利	年利	日利	年利	日利
分	錢	分	錢	分	錢	分	錢
2.0	0.55	6.5	1.78	11.0	3.01	15.5	4.25
2.5	0.68	7.0	1.92	11.5	3.15	16.0	4.38
3.0	0.82	7.5	2.05	12.0	3.29	16.5	4.52
3.5	0.96	8.0	2.19	12.5	3.42	17.0	4.66
4.0	1.10	8.5	2.33	13.0	3.56	17.5	4.79
4.5	1.23	9.0	2.47	13.5	3.70	18.0	4.93
5.0	1.37	9.5	2.60	14.0	3.84	18.5	5.07
5.5	1.51	10.0	2.74	14.5	3.97	19.0	5.21
6.0	1.64	10.5	2.88	15.0	4.11	19.5	5.34

寒暖計

● 華氏寒暖計冰點爲23°, 沸點爲212°.

● 攝氏寒暖計冰點爲0°, 沸點爲100°.

1° 之比較	度數之換算
華 1°=攝$\left(\frac{5}{9}\right)^\circ$	華=攝$\times\frac{9}{5}+32^\circ$.
攝 1°=華$\left(\frac{9}{5}\right)^\circ$	攝=(華-32°)+$\frac{5}{9}$.

● 此外列氏寒暖計冰點爲0°, 沸點爲80°. 故列1°=華$\left(\frac{9}{5}\right)$=攝$\left(\frac{5}{9}\right)$.

整數小數四則問題

1. 有金1000圓, 分與甲乙二人, 甲所得爲乙之4倍, 問各應與若干.

解 此問題當注意者, 卽甲爲乙之4倍, 而1000爲甲乙之和, 卽爲乙之5倍也, 故乙爲 1000÷5, 卽200圓, 由此知甲爲200×4 卽800圓.

2. 有松杉二林, 松爲杉之9倍, 其差爲400本, 問各若干本.

解 因松爲杉之9倍, 則其差之400本, 卽相當於杉之9−1=8倍. 故杉爲400本 ÷8=50本, 而松比此多400本, 故爲50+400=450本.

3. 有金900圓, 甲乙丙三人分之, 乙所得爲甲之二倍, 丙所得爲乙之三倍, 問各得若干.

解 乙爲甲之2倍而丙又爲乙之3倍然則丙爲甲之6倍, 故甲乙丙之和900圓, 爲甲1倍與2倍與6倍之和, 卽與甲之9倍相當, 故甲爲900÷9=100圓由此知乙爲100×2 卽200圓, 丙爲200×3 卽600圓.

注意 如1, 2, 3種類之問題, 至後比例配分, 尙有簡法.

4. 有大小二數, 其和爲30, 其差爲10, 問二數各幾何.

解I 大數比小數多10, 故大小兩數之和, 爲小數之2倍多10也. 故30−10=20爲小數之2倍, 則小數爲20÷2=10, 而大數爲 10+10=20.

解II. 小數比大數少10, 故大小兩數之和, 爲大數之2倍少10也. 故30+10=40爲大數之2倍, 則大數爲40÷2=20, 而小數爲20−10=10

5. 有金85圓, 分與甲乙二人, 甲所得金, 比乙多15圓, 問各得若干.

解 兩人所得之和爲85圓, 而其差爲15圓, 故知與前題同類. 先自85圓減15圓爲70圓, 二等分之得35圓, 卽乙所得之數, 再將甲數多15圓加之得50圓, 卽甲所得之數. 若先求乙數亦可.

6. 甲乙兩人所有金之和爲74圓, 若甲與乙13圓, 則兩人所有金相等, 問各有金若干.

解I. 甲與乙13圓, 然後與乙相等, 是自甲減去13圓, 尙比乙多13圓也, 故兩人所有之差爲13+13=26圓. 而兩人所有之和, 旣知爲74圓, 故可依前題4之法, 而得48圓÷2=24圓………乙, 24圓+26圓=50圓………甲.

解II. 甲與乙13圓之後, 兩人所有之

和仍為74圓，因其相等，故知各為 $74\div2=37$ 圓，是即甲與乙13圓之後兩人各有之金也. 故其初各有之金甲為 $37+13$ 即50圓，乙為 $37-13$ 即24圓也.

7. 有甲乙二人，所有金相等，合之買布，甲取12疋，乙取9疋，於是甲付乙金3圓8角7分，問布一疋之價若干.

解 I. 因所買之布，為 $12+9$ 即21疋，二人分之，當為 $21\div2$ 即10.5疋. 但甲取12疋，乙取9疋，是比平均之疋數，甲多1.5疋，乙少1.5疋，則甲應出此所多疋數之金，乙應得此所少疋數之金，故甲與乙3圓8角7分，是即1.5疋之價，由是得1疋之價，為 $387^{分}\div1.5=258^{分}$，即2圓5角8分也.

注意 問題若未知甲乙所取疋數，僅知所取疋數之差，則當如此解

解 II. 甲與乙 $3\div2=1.5$ 疋即與乙一疋半則甲乙當相等. 但甲今與乙金387分故布一疋半之價即相當於387分，因而布一疋之價為 $387^{分}\div1.5$ 即2圓5角8分.

8. 有甲乙丙三人之所有金，甲乙之和為35圓，乙丙之和為45圓，甲丙之和為40圓，問各若干.

解 I. 因 $35^{圓}+45^{圓}=80^{圓}$，為甲乙之和，與乙丙之和之合計，亦即乙之2倍與甲丙之和之合計也，故自此減去甲丙之和40圓，即 $80^{圓}-40^{圓}=40^{圓}$，即為乙之二倍，故知乙為 $40^{圓}\div2=20^{圓}$. 既得乙數，則甲為 $35^{圓}-20^{圓}=15^{圓}$，丙為 $45^{圓}-20^{圓}=25^{圓}$. 若先求甲數，則為 $(35^{圓}+40^{圓}-45^{圓})\div2=15^{圓}$. 若先求丙數，則為 $(45^{圓}+40^{圓}-35^{圓})\div2=25^{圓}$.

解 II. $35+45+40$ 即120圓，為甲乙之和乙丙之和與甲丙之和之合計，即等於甲乙丙各2倍之合計也，將此折半得60圓，即甲乙丙之和，故自60圓減乙丙之和45圓，即得甲數15圓，自60圓減甲丙之和40圓，即得乙數，自60圓減甲乙之和35圓，即得丙數，故知乙為20圓而丙為25圓也.

解 III. 因 $45^{圓}-35^{圓}=10^{圓}$，為甲乙之和與乙丙之和之差，亦即甲丙之差也. 既得甲丙之差為10圓又已知甲丙之和為40圓，即可依(前題4)之法求之矣. $(40^{圓}-10^{圓})\div2=15^{圓}$ 為甲數，而 $35^{圓}-15^{圓}=20^{圓}$ 為乙數，$40^{圓}-15=^{圓}25^{圓}$ 為丙數.

9. 甲乙丙三人分金133圓，甲所得比乙多5圓，乙所得比丙多7圓，問各得金若干.

解 乙比丙多7圓，甲更比乙多5圓，是甲比丙多 $7+5=12$ 圓，故甲乙丙之和133圓內，有一丙者，有一比丙多7圓者，有一比丙多12圓者，即丙之三倍，與 $7+12=19$ 圓之和. 故 $133-19$ 圓 $=114$ 圓，即相當於丙之三倍，則 $114\div3=38$ 圓為丙之所得金，由是知乙為 $38+7=45$ 圓，甲為 $45+5=50$ 圓.

注意 以本解同樣之理由，133圓比乙之3倍少 $7-5$，即2圓，由是可得乙數，又133圓比甲之3倍少 $5+5+7$，即17圓，由此可得甲數.

10. 有五個連續整數，其和為80，問各數若干.

解 I. 因連續整數，必次第增1，故第二數比最小數多1，第三數最小數多2，第四數比最小數多3，第五數比最小數多，4，是和數80，為最小數之五倍，與 $1+2+3+4=10$ 之和，故自80減10得70，即最小數之五倍，是最小數

為 $70\div5=14$，而所求五數，可次第加1如次．

14　15　16　17　18

圖II. 或以最大一數為本，則第四數比之少1，第三數比之少2，第4數比之少3，第五數比之少4，是和數80，比最大數之五倍少 $1+2+3+4=10$，故加10於80得90，即最大數之五倍，是最大數為 $90\div5=18$，從此次第減1，即可得其餘四數．

圖III. 第一數比第三數少2，第五數比第三數多2，是第一數與第五數之和，為第三數之2倍．由是知第二數與第四數之和，亦為第三數之2倍，故和數80，相當於第三數之五倍，是第三數為 $80\div5=16$．由是可得其餘四數．

注意 本題無論以何數為本，皆可求之，但通例用以上之三法．上三法中在I，II，二法，連續整數之數太多，亦不甚便，而III法遇連續整數之數為偶數時，若不稍改此法，亦不能求之．若再欲深究此種問題，當閱代數學等差級數之條．

11. 於長30丈之道旁，每距2丈，植柳一本，植至此道之兩端，問共植柳若干．

圖 30丈之道，每2丈區分之，則得15分，今每分植一柳，則末端尚少一柳，故柳數須比區分之數多1，是知為 $15^{本}+1^{本}=16^{本}$ 也．

注意 如此種問題，以及年齡日數等之計算，有當加一或減一者，宜知之．

12. 每距48丈立一電信柱，共立64柱，除其兩端一柱之外，餘俱取去之，再於兩柱之間，以相等之距離立電信柱83，問柱與柱之相距幾何．

圖 因電信柱合兩端者共64柱，而區分為48丈之數為63，故知64柱兩端之距離，為 $48^{丈}\times63=3024^{丈}$．又因此距離兩端，尚各存留一柱，欲於其間立83柱是等分此距離之數，比柱之數多1即84，其區分之處，即立柱之處也．故其區分之處為 $3024\div84$，即36丈，即所求之數也．

13. 有長328丈，闊124丈之地，自其周圍2丈內之周圍，每距一丈植一樹，問植樹若干．

圖 因自外圍2丈內之周圍，其長闊之兩端，各減少2丈，即長闊各減少4丈，是植樹之處，為長324丈闊120丈之地也．故其全周圍為 $(324^{丈}+120^{丈})\times2=888^{丈}$，但1丈植1本是共計888本也．

注意 此類之題，非如前二題植為一直線之處，乃將全周植盡，故其區分之數，恰與樹數相等，無須如前題之加減1也，宜注意之，若尚未了解，可作圖顯之．

14. 有正方形之紙，其周圍粘3分之郵票，其總價值為72分，然則其紙一邊之郵票為幾張但郵票視為正方形．

圖 正方形周圍，所貼之郵票之張數，為 $72\div3$ 即 24 張，故所求之張數，為 $24^{張}\div4+1^{張}=7^{張}$．

15. 有縱橫各6尺1寸之窗，欲作格子，縱橫皆21枝，其格子1枝之寬為1寸，問格子之距離若干．但四圍必各有一枝．

圖 因四圍必有一枝，故格子之數，縱橫皆比間隔之數多1，故自窗之縱橫61寸，減去格子1枝之寬1寸，餘6尺，即格子20與間隔20之長，由是 $60^{寸}\div20=3^{寸}$，即一格子與一間隔之長，故間隔之縱橫為 $3^{寸}-1^{寸}=2^{寸}$ 也．

16. 1879年所生之人,至1907年,其年齡若干.

【解】 1907−1879=28年,即自1879年至1907年之年數. 凡計年齡,於所生之年,即爲1歲,故此人之年齡,須加1年而爲29歲.

17. 有甲乙二人,甲一分間走36步,乙一分間走28步,今此兩人同走一道,乙比甲多費4分時,問此道之長若干.

【解】 乙比甲後4分,故甲到達時,乙在28步×4=112步之後,而一分間,乙後於甲36步−28步=8步,故乙後於甲112步須費112÷8=14分間,因而知甲自出發至到達之時間,爲14分,故所求之距離,爲36步×14=504步.

18. 有鎗擊274步.5之的,發鎗後,經4秒,聞彈丸中的聲. 又有立於鎗與的等距離之人,聞鎗聲後,經2.5秒而聞中的聲,問聲之速度如何.

【解】 彈丸行274步.5之時間,與聲傳同距離之時間之和爲4秒,又立於鎗與的等距離之人,聞鎗聲後,經2.5秒,而聞中的聲,故彈丸行274步.5之時間爲2.5秒,故聲傳274步.5之時間,爲4−2.5即1.5秒,故聲之速度,每秒爲274步.5÷1.5=183步.

19. 甲乙二人,同時同向而行,則二時間相距4里,若反向而行,則相距36里,問各一時之速.

【解】 二人同時同向而行,則相距之路,爲二人所行里數之差,二人反向而行,則相距之路,爲二人所行里數之和,故4里爲二人二時間所行之差,36里爲二人二時間之和,於是與問題4全相同. 故(36里+4里)÷2=20里,爲速者二時間所行里數,而20里−4里=16里,爲遲者二時間所行里數,故20里÷2=10里,爲速者一時間之速,而16里÷2=8里,爲遲者一時間之速.

20. 兩停車場,相距18里,兩火車同時自各停車場相向而行,則2分時相會,若甲車追乙車,則18分時追及,問各一分時之速.

【解】 兩車相向而行,則兩車所行之和相會,甲車追乙車,則兩車所行之差追及. 故兩車2分時所行之和爲18里,而兩車18分時所行之差亦爲18里,是一分時兩車所行之和爲18里÷2=9里. 而兩車所行之差爲18里÷18=1里. 故以前題之法求之,則(9里+1里)÷2=5里爲甲車之速,而5里−1里=4里,爲乙車之速.

21 有舟子行舟,逆流而行,每時3里,順流而行,每時9里,問此舟子盪力之速,及此川水流之速各若干.

【解】 此種問題,順流而行,所行里數,爲舟子盪力速度(在靜水所盪之速)與水流速度之和,逆流而行,所行里數,爲盪力速度與水流速度之差. 故此題9里,爲盪速與水速之和,而3里爲盪速與水速之差. 是9+3即12里爲盪速之2倍,而9−3即6里爲水速之2倍,故盪速爲12÷2即6里,水速爲6÷2即3里.

【注意】 如19,20,21,等題,關於兩人步行里程,兩車速度,舟子上行下行之速之類,多歸於知二數之和及差而求二數之問題,知此則於解法思過半矣.

22. 甲乙二人,每日甲行42里,乙行35里,甲每行100里,即休息二日,乙每行230里,即休息3日,今二人同時同地,往於630里之處,問到日相差之月數若干.

解 630里之中有100里者6，有230里者2，故途中甲休息6次，乙休息2次，是甲休息日數爲2×6，即12日，而乙休息日數，爲3×2即6日．又行路中之日數甲爲630÷42，即15日，而乙爲630÷35即8日，故到時甲爲$12^{日}+15^{日}=27^{日}$，乙爲$6^{日}+18^{日}=24^{日}$，是甲比乙遲到之日，爲27−24，即3日也．

23. 兩火車，一長92尺，一長84尺，相向而行，則自相會至離開，歷時2秒，若一車追一車，則自追及至越過，歷時8秒，問二車各一秒之速．

解 兩車自相會至相離，兩車所行之和，恰等於兩車長之和，一車追一車，自追及至越過，兩車所行之差，亦恰等於兩車長之和．又兩車相向而行，則一車同於以兩車速度之和而行，而一車追一車，則一車同於以兩車速度之差而行，故$(92^{尺}+84^{尺})\div2=88^{尺}$，爲兩車速度一秒之和，而$(92^{尺}+84^{尺})\div8=22^{尺}$爲兩車一秒速度之差，故如前求得$(88^{尺}+22^{尺})\div2=55^{尺}$，爲急車一秒時之速，而$(88^{尺}-22^{尺})\div2=33^{尺}$，爲緩車一秒時之速．

24. 聲之速度，每秒1098尺，今在鐵道線旁，聞汽笛聲後，經57秒火車始過其前，但發汽笛時，火車距此地4392尺，其線路且無彎曲，問火車每秒之速．

解 汽聲傳到之時間，爲4392÷1098，即4秒，故聞聲時，火車已進行4秒矣，是火車過此已行$4^{秒}+57^{秒}=61^{秒}$，故其一秒時之速度，爲$4392^{尺}\div61=72^{尺}$．

25. 有長1560尺之鐵橋，長492尺之火車，每秒之速爲114尺，問此車幾秒時越過此橋．

解 自火車前端上橋，至橋後端離橋，所行之路，爲橋長及車長之和，故所求之時間爲(1560+492)÷114，即18秒．

26. 有學生346人，成雙行隊而行，每列相距3尺，每分時之速度爲174尺，若越過長3里之路，需幾分時．

解 此隊學生爲346÷2即173列，其間隔之數，比列數少1，故爲172，而各列相距3尺，故此隊之長爲$3^{尺}\times172=516^{尺}$，又將路長化爲尺數，即$3^{尺}\times1800=5400^{尺}$．即以前題之法求之，即$5400^{尺}+516^{尺}=5916^{尺}$是其時間爲爲5916÷174，即34分．

27. 有提燈行列，每列5人，通過120丈之橋，自行列之前頭上橋，至行列之後尾離橋，費13分時，今列與列之間爲5尺，每分之速度爲15丈，問人數幾何．

解 自行列之前頭上橋，至行列之後尾離橋，則所行之距離爲橋長與行列之長之和，故進行13分間之距離爲15×13，即195丈即橋長與行列之長之和，因而行列之長爲$195^{丈}-120^{丈}=75^{丈}$，而列數比列與列間隔之數多1，故列數爲75÷0.5+1即151，故所求之人數，爲$5^{人}\times151=755^{人}$

28. 有二舟子，環繞一島，同時自同處同向而航，則10時間再相會，若反向而航，則5時間再相遇，而二人每時速度之差爲2里，問各一時之速度若干．

解 反向而航，二人行程之和，恰等於島之周圍時，則相遇，同向而航，二人行程之差，恰等於島之周圍時，則再相會，但兩人每時速度之差爲2里，則因同向而航，10時間再相會，故島之周圍爲$2^{里}\times10=2\ ^{里}$，因反向而航，5時間相遇，故5時間兩人行程之和，

為島之周圍20里也，是1時間兩人行程之和，為$20^{\text{里}}\div5=4^{\text{里}}$. 故$(4^{\text{里}}+2^{\text{里}})\div2=3^{\text{里}}$ $(4^{\text{里}}-2^{\text{里}})\div2=1^{\text{里}}$，為兩人每時之速.

29. 有舟子行舟，自下埠至上埠，需26時間，自上埠至下埠，需13時間，上下二埠相距156里，問二舟子盪速及水流速度，每時各若干.

【解】 一時間上行為$156^{\text{里}}\div26=6^{\text{里}}$，而下行為$156^{\text{里}}\div13=12^{\text{里}}$，故可依問題21之法解之. $(12^{\text{里}}+6^{\text{里}})\div2=9^{\text{里}}$為舟子盪速，而$(12^{\text{里}}-6^{\text{里}})\div2=3^{\text{里}}$為水流速度.

30. 有一河降雨後，每時水流速度，中流為75里，沿岸為45里，今有輪船沿岸，上行480里，需12時間，問此船歸路，下行於中流，需時若干.

【解】 沿岸水流之速，一時間為$480^{\text{里}}\div12=40^{\text{里}}$，而沿岸水流之速，一時間為45里，故此輪船沿岸上行之速，一時間為$40^{\text{里}}+45^{\text{里}}=85^{\text{里}}$，則此船下行於中流之速，一時間為$85^{\text{里}}+75^{\text{里}}=160^{\text{里}}$，其所需時間，為$480\div160$，即3時間.

31. 有舟子，其盪速一時間為27里，自某河下埠至上埠所需之時間，為自上埠至下埠時間之2倍，問此河一時間水流之速度若干.

【解】 因上行之時間，為下行之2倍，故上行速與下行速之和，為上行速之3倍，則其半，即為上行速之1.5倍，但上行速與下行速之和之半，等於盪速，(問題21)是上行速之1.5倍為27里，故知上行之速為$27^{\text{里}}\div1.5=18^{\text{里}}$而水流之速為$27^{\text{里}}-18^{\text{里}}=9^{\text{里}}$.

32. 某河同時甲舟自下埠至上埠，乙舟自上埠至下埠，各一時間之盪速，甲為45里，乙為51里，經9時間，於兩埠距離中央之下流243里，二舟相遇，問此河每時水流之速若干.

【解】 此二舟每時盪速之差為$51^{\text{里}}-45^{\text{里}}=6^{\text{里}}$. 而二舟自中央下流243里之處相會，故甲所行比全距離之半多243里，乙所行比全距離之半少243里，是兩舟所行之差為243×2即486里，而其時間之差為9時，故知二舟一時間所行之差，為$486\div9$，即54里，而甲逆流，是盪速與水速之差，乙順流，是盪速與水速之和，故二舟一時間之差54里，即盪速之差6里，與水速之2倍也. 故知$54^{\text{里}}-6^{\text{里}}=48^{\text{里}}$為水速之2倍，是水速為$48^{\text{里}}\div2=24^{\text{里}}$.

33. 甲乙二舟，盪力相等，甲自上埠至下埠，乙自下埠至上埠，同時相向而航，經4時間相會，而上下埠之距離24里，每時水流速度一里，問甲到下埠，乙到上埠，各需時若干.

【解】 因相向行，4時間相會，是4時間，二舟行程之和為24里，則一時行程之和，為$24^{\text{里}}\div4=6^{\text{里}}$，因乙自盪速減水速而上，甲自盪速加水速而下，故其和恰為盪速之2倍，是二舟之盪速，各為$6^{\text{里}}\div2=3^{\text{里}}$，故一時間之行程，甲為$3^{\text{里}}+1^{\text{里}}=4^{\text{里}}$ 乙為$3^{\text{里}}-1^{\text{里}}=2^{\text{里}}$，而甲到下埠，乙到上埠之時，為$24\div4$即6時及$24\div2$即12時.

34. 有甲乙二舟，往返長252里之河，甲上行需21時間，下行需7時間，乙上行需14時，下行需時若干.

【解】 因252里之河，上行需21時，下行需7時，故一時間上行為$252^{\text{里}}\div21=12^{\text{里}}$ 下行為$252^{\text{里}}\div7=36^{\text{里}}$，故知水流速度，一時間為$(36-12)\div2$即12里，(見問題21)乙上行一時間為$252^{\text{里}}\div14=$

18里,故乙之盪速為 18里+12里=30里,則其一時間下行之里程,當為30里+12里=42里,是下行之時間,為 252÷42 即6時間.

注意 河長無論為幾里,亦得同樣結果,參看221題.

35. 有二舟,在河源同時與一漂流物,向河口而行,乙舟亦同時自河口向河源而行,甲舟行3時間,與漂流物相距90里,乙舟行6時間,與漂流物相遇,二舟盪速相等,問河源至河口之距離若干.

解 下行舟與漂流物,相離之里程,恰等於其舟之盪速,因甲舟3時間離物90里,是1時間盪速為30里,又上行舟與漂流物,行程之和,亦等於盪速,[參看問題21]而上行舟6時間遇漂流物,故此河之長,恰等於6時之盪速,而為30里×6=180里.

36. 有舟每時之盪速為5里,順行於某川之中流,以6時可達之處,若順行於沿岸,則需8時間達之,但知中流水速,為沿岸水速之3倍,問中流每時水速為若干里.

解 中流水速為沿岸水速之3倍,故舟立在中流,6時間下行之距離,等於6時之盪速與沿岸3時×6=18時間水速之和. 而此距離等於沿岸8時間下行之距離,即等於8時間盪速與沿岸8時間水速之和. 故此二者比較,在盪速,則前比後少8−6即2時間,在沿岸水速,則前比後多18−8即10時間. 故所少2時間之盪速,必等於所多沿岸10時間之水速也. 但2時間盪速為5里×2=10里,故沿岸一時間水速為10里÷10=1里,而中流一時間水速為1里×3=3里.

37. 長沙至湘潭,水程比陸程長30里,今於兩邑間,以每時6里之速,陸路往返各二次之時間,比以每3里之速,水路由長至潭之時間多10時,問兩邑之距離,水陸各若干里.

解 以每時6里之速,往返各二次之時間,等於以每時3里之速,往返各一次之時間. 故以每時3里之速往返各一次之時間,比以每時3里之速,自湘潭水路至長沙之時間多10時,是往返之陸路,比水路多10時間之里程,即多3里×10=30里,又水程比陸程多30里,而往返陸程,比水程多30里.是兩邑之陸程,為30里+30里=60里,而水程更多30里,是水程為60里+30里=90里.

38. 兩人同時同地同向而行,每日甲行12里,中途返行乙4日之歸路,再向前追乙,至追及乙時,計二人已行16日,問乙每日所行里數若干.

解 甲返行乙4日之歸路,往返各一次,若乙行甲之路,必須16日+4日×2=24日,但甲16日所行之路,為72里×16=1152里,故乙一日所行之路為192里÷24=48里,而全路為48里×16=768里也.

39. 有甲乙二人,甲自長沙往岳州,每日行80里,乙於次日亦往岳州,每日行44里,甲到後即歸長沙,問二人相遇之處,距岳州若干里. 但長岳二縣相距,為350里.

解 兩人相遇時,所行里數之和,為350×2即700里,甲比乙先一日起行,故自乙起行之日始,兩人所行里數之和,為700−80=620里,而兩人一日所行里數之和,為80+44=124里,故自

乙起行始,兩人遇時,已行$620\div124=5$,即5日,是乙所行里數爲220里,故兩人當距岳州$350-220=\underline{130}$里之處相會.

注意 解此問題,先求甲至岳州爲若干日,求其時乙行若干里,將乙所餘之里數,再以甲乙相向而行求之亦可.此解法初學者常用之,但此法必用分數小數,不若上法之簡單,凡求一題,有必用分數小數者,亦有可以他法用整數求之,極宜注意.

40. 有乘自轉車之三人,甲每時行15哩,乙每時行16哩,丙每時行17哩,甲乙自東市,丙自西市,同時相向出發,丙遇乙後一時間遇甲,問兩市之距離幾何.

解 甲丙相遇時,丙與乙相離$17^{\text{哩}}+16^{\text{哩}}=33^{\text{哩}}$,此又甲與乙相離之距離,而甲與乙每時相離$16^{\text{哩}}-15^{\text{哩}}=1^{\text{哩}}$,故自出發至此時,所經過之時間爲33時,故甲丙出發東西兩地,經33時相遇,而此兩人一時間接近$17^{\text{哩}}+15^{\text{哩}}=32^{\text{哩}}$,故33時間接近$32^{\text{哩}}\times33=\underline{1056^{\text{哩}}}$,此即兩地之距離.

41. 有母子,母44歲子8歲,問幾年後母年齡爲子年齡之4倍.

解I. 母子年齡之差爲$44^{\text{歲}}-8^{\text{歲}}=36^{\text{歲}}$,每年母子之歲,各增加1,故無論何時,其差恆爲36歲.今母年齡爲子年齡之4倍,則母子年齡之差,恰爲子年齡之3倍.而此時母子年齡之差,仍爲36,卽在所求之年,子之年齡之3倍爲36也.由是知其時子之年齡爲$36\div3$,卽12歲,因子現年爲8歲,故12歲爲$12-8$,即$\underline{4}$年後,即答數也.

注意 此問題,兩人年齡之差,無論何時,皆不變,極宜注意,凡關於此種二人年齡之問題,知此則易解矣.

解II. 今年子之4倍,爲8×4,即32歲,不及母之年齡爲$44-32$即12歲.明年子年比今多1,故明年之4倍,比今年多4,然母年亦增加1,故明年子年之4倍,不及母年之差,比今年少$4-1=3$,再明年此差更少3,故此差爲0時,則母年爲子年之4倍,求12爲3年之若干倍,即所求之年數,故

$12^{\text{年}}\div3=4^{\text{年}}$ 即$\underline{4}$年後也.

42. 滿90歲之人,有滿21歲之孫,與滿19歲之孫,問祖父年齡爲兩孫年齡之3倍,在今之幾年前.

解 兩孫年齡之和爲$21^{\text{歲}}+19^{\text{歲}}=40^{\text{歲}}$,故其3倍,爲120歲,大於祖父之年齡,爲$120^{\text{歲}}-90^{\text{歲}}=30^{\text{歲}}$,然去年兩孫之年齡,比今年年齡之和少2歲,故其3倍,比今年少6歲,而祖父去年僅少一歲,故去年兩孫年齡之和之3倍,超過祖父年齡之數,比今年所超過少5歲,同理前年當再少5歲,故今年不足之30歲,當於$30^{\text{年}}\div5=6^{\text{年}}$前,恰爲0,即所求之年,爲$\underline{6}$年前.

43. 有兄弟之年齡,兄爲弟之5倍,5年後爲弟之3倍,問現年各幾何.

解I. 現今兄爲弟之5倍,其年齡之差爲弟之4倍,而5年後,兄爲弟之3倍,其時年齡之差爲弟之2倍.但年齡之差,無何時皆同,[參考41題]故今年弟之4倍,即等於5年後弟之2倍,而5年後弟之2倍,即今年弟之2倍與10之和,而今年弟之$4-2$即2倍,恰當於10歲,故弟今年之年齡爲$10^{\text{歲}}\div2=\underline{5^{\text{歲}}}$,而兄年爲$5^{\text{歲}}\times5=\underline{25^{\text{歲}}}$.

解II. 5年間弟年增加5,若兄年仍爲5倍,則當增加25.然5年間,兄年亦僅增加5,而爲弟之3倍,則是兄少長

$25^{年}-5=20^{年}$，適相當於5年後弟年齡之$5-3$即2倍，由是得5年後，弟年爲$20^{歲}\div2=10^{歲}$，而弟現年爲$10^{歲}-5^{歲}=5^{歲}$，兄現年爲$5^{歲}\times5=25^{歲}$.

44. 兄年爲弟年之5倍，自今22年後，兄年比弟年之2倍少16歲，問現年各若干.

解 二人年齡之差，爲弟現年之4倍，而22年後，兄年比弟年之2倍少16歲，故現今弟年齡之4倍，比22年後弟之齡少16歲，卽比弟現今年齡大$22^{歲}-16^{歲}=6^{歲}$，故弟現年爲$6^{歲}\div3=2^{歲}$而兄爲其5倍，卽10歲也.

45. 有父子，父現年比子年之2倍多14歲，13年後，父比子年之3倍少29歲，問現年各若干.

解 父子年齡之差，今年比子之1倍多14歲，13年後，比子2倍少29，卽比現今子年齡之2倍少$29^{歲}-13^{歲}\times2=3^{歲}$，故將子今年之年齡加14，卽比子年齡之2倍少3歲，而今年子年之$2^{倍}-1^{倍}=1^{倍}$爲$14^{歲}+3^{歲}=17^{歲}$，由是得父現年爲$17^{歲}\times2+14^{歲}=48^{歲}$也.

46. 父年45歲，母年40歲，其五子之年齡爲18歲，15歲，13歲，10歲，5歲，自今幾年後，父母年齡和與五子年齡和等.

解 五子年齡和爲61歲，父母年齡和爲85歲，其年齡之差卽$85^{歲}-61=24^{歲}$，至明年父母年齡和增加2歲，五子年齡和增加5歲，於是每年五子所增比父母所增多3歲，若欲補足現今不足之24歲，當爲$24^{年}\div3=8^{年}$卽所求之年數也.

47. 父之年齡，等於3子年齡之和，自今9年後，父之年齡，等於長子次子之和，再3年後，等於長子末子之和，再3年後，等於次子末子之和，問現在父子四人年齡各若干.

解 因9年後等於長子次子之和，是比現在長子次子之和多9年. 但現在父年等於長子次子末子之和，故知末子年齡爲9歲，依此求得次子之年齡爲$9^{歲}+3^{歲}=12^{歲}$長子之年齡爲$9^{歲}+3^{歲}+3^{歲}=15^{歲}$而父爲36歲.

48. 有甲乙丙三人，甲30歲，甲與乙年齡和，等於丙之2倍，而乙與丙之和，等於甲之2倍，問乙丙之年齡若干.

解 甲乙年齡和，爲丙之2倍，故甲乙丙年齡之和，爲丙之3倍，又乙丙之和爲甲之2倍，故甲乙丙之和爲甲之3倍，則丙之年齡，等於甲之年齡，而爲30歲，而乙之年齡，亦等甲之年齡，而爲30歲.

49. 有龜鶴共頭爲100，共足240，問各若干頭.

解 假設100頭皆爲鶴，則因每鶴爲2足，故足數當爲$2^{隻}\times100=200^{隻}$，是比問題之足數少$240^{隻}-200^{隻}=40^{隻}$，若於此內將鶴與龜換入一頭，則頭數無所增減，但龜爲4足與鶴相差$4-2$，卽2足，故足數當增加2隻，故若欲將所少之足數40悉補之，則必換入$40^{頭}\div2=20^{頭}$. 其初將100頭皆爲鶴，因其換入20頭，故20頭爲龜，而所餘$100^{頭}-20^{頭}=80^{頭}$爲鶴. 或先假設100頭皆爲龜亦可. 但足數當爲$4^{隻}\times100=400^{隻}$，故比問題之足數多$400^{隻}-240=160^{隻}$，若將鶴與龜換入一頭，則頭數不變，而足數減去$4^{隻}-2^{隻}=2^{隻}$，是換入$160^{頭}\div2=80^{頭}$，則所多160足皆減去矣. 亦得鶴80，龜20之答.

注意 此種問題，在後混合法中，尙

有別解. 至以下 56 之問題, 皆此種問題之稍變其形者也.

50. 某會場, 其入場費, 大人 80 錢, 小孩 50 錢, 入場者共 1355 人, 入場費共 100 圓, 問大人及小孩之數各若干. 但一圓值一千錢.

圖 設入場者皆爲小孩, 則入場費爲 50×1355 卽 65 圓 750 錢, 是比問題少 $100000^{錢}-67750^{錢}=32250^{錢}$. 若將小孩與大人換入一人, 則可增加 $80^{錢}-50^{錢}=30^{錢}$. 故若欲合問題, 則須換入 $32250 \div 30$ 卽 1075 人. 是卽大人之數, 而 $1355-1075$, 卽 280 人卽小孩之數.

51. 有陶器 100 個, 命人運送, 每個給運送費 60 錢, 若破損者, 則不給錢, 且每個須罰 120 錢, 及運到給與 600 錢, 求破損之數.

圖 100 個若無破損, 則當給 60×100 卽 6000 錢, 但僅給與 600 錢, 故所差 $6000^{錢}-600^{錢}=5400^{錢}$, 卽其破損之數所減去之錢. 破損一個, 則無 60 錢之運費, 且有 120 錢之罰金, 故共須少給 180 錢也. 一個少給 180 錢, 則少給 5400 錢, 是破損之數, 爲 $5400 \div 180$, 卽 30 個.

52. 有競射者, 中的則得 10 點, 不中則失 15 點, 一人發 10 矢, 失 50 點, 問此人中的之數若干.

圖 若 10 矢皆中則當得 $10^{點} \times 10=100^{點}$, 今失 50 點, 是比皆中者失 150 點. 但一矢不中, 則比中者失 $10^{點}+15^{點}=25^{點}$, 故失 150 點爲 $150 \div 25$ 卽 6 矢不中明矣, 是中的之數, 爲 $10-6$, 卽 4 矢.

53. 有某日報, 刊刷廣告, 以五號活字, 一行 19 字 20 行之處, 塡入二號活字, 及五號活字, 共 300 字, 但二號活字之大, 恰爲五號活字之四倍, 問此廣告各號字各若干.

圖 容廣告之處, 爲五號活字 19×20 卽 380 字, 是比此廣告多 $380^{字}-300^{字}=80^{字}$, 此所餘之 80 字, 以二號活字換入補之, 因二號活字每字比五號活字大 4 倍, 則每換入一字卽少餘 $4-1$, 卽 3 字. 故所換入之二號活字爲 $80 \div 3$ 之整數部分, 卽 26 字, 其 $80 \div 3$ 之除不盡者, 卽換入 26 字所空之白也. 但此空白, 若再換入一二號活字則不足, 是二號活字爲 26, 五號活字爲 $300^{字}-26^{字}=274^{字}$, 而空白者仍爲空白也.

54. 某學校學生共 520 人, 每月一人學費, 高等科 800 錢, 尋常科 150 錢, 若將共人數與共錢數, 平均計算, 則每人爲 275 錢, 問此學校高等尋常二科各若干.

圖 學費之總數爲 $275^{錢} \times 520=143000^{錢}$, 若皆爲尋常科學生, 則爲 $150^{錢} \times 520=78000^{錢}$, 兩者相差 $143009^{錢}-78000^{錢}=65000^{錢}$, 而高等科尋常科一人之差, 爲 $800^{錢}-150^{錢}=650^{錢}$, 故高等科人數爲 $65000^{人} \div 650=100^{人}$, 而尋常科人爲數 $520^{人}-100^{人}=420^{人}$.

55. 一事雇男女工人, 共 50 人營之, 而日給工資每男 400 錢, 每女 150 錢, 8 日共給工資 120 圓, 問男女人數各若干.

圖 平均每日工資爲 $120000^{錢} \div 8=15000^{錢}$. 若僅爲女, 則當爲 7500 錢, 兩者之差, 爲 $15000^{錢}-7500^{錢}=7500^{錢}$, 而男女各一人日給之差, 爲 $400^{錢}-150^{錢}=250^{錢}$, 故男數爲 $7500^{人} \div 250=30^{人}$, 而女數爲 $50^{人}-30^{人}=20^{人}$.

56. 有二種雞卵箱, 一種每箱 12 個, 一種每箱 18 個, 共有 18 箱, 其價共 3 圓 2 分 4 厘, 若每個落價 2 厘, 則其價爲 2 圓 5 角 2 分, 問二種之箱數如何.

解 一個落價2厘，則總價落 3024厘 −2520厘 = 504厘，故雞卵之總數爲 504 ÷ 2 = 252 故每箱12個之箱數，爲 (181 × 8 − 252) ÷ (18 − 12) = 12 [49題] 即12箱，因而每箱18個之箱數，爲 18 − 12 = 6，即6箱.

57. 有上下二種米，共216升；上米一升價32錢，下米一升價28錢，今上米之共價，比下米之共價，多1572錢，問各種升數若干.

解 若216升皆爲上米，則其價當爲上米 32錢 × 216 = 6912錢，則下米當爲0，今一米共價比下米多6912錢，試出上升一升，而入下米一升，則減去上米之價32錢，而加入下米一升之價28錢故上米共價與下米共價之差，比以前之6912錢當少 32 + 28 = 60錢，若欲自此差6912錢減去1572即5340錢，而合題之1572錢，則 5340 ÷ 60 即89升，即出上米而入下米之數，是下米爲89升，而上米爲 216 − 89 = 127升.

58. 有人每年用費600圓，5年間所負之債，若每年儉約僅用400圓，則7年間恰償淸此債，問此人每年收入若干.

解 5年用去之金爲 600 × 5 = 3000圓，7年用去之金爲 400圓 × 7 = 2800圓，而5年所負之債，恰以後7年償淸，則前後12年用去 3000圓 + 2800圓 = 5800圓，恰等於此人12年之收入，是每年所收入爲 5800 ÷ 12 即483圓3角3分强.

注意 此題前5年所負者，與後7年所餘者，雖皆不知，然互相等，而此不知之數，前後12年間，彼此相抵，則12年之收入，可得而知矣. 以此法能解之問題亦不少，如次之59及60皆此類也. 關於負債或儲金，在實際上，不能不算利息，然問題未言明利息者，可看做無利息計算之.

59. 有人賣去雞20隻，其中13隻，每隻賣得420錢，其餘7隻，每隻賣得480錢，而兩次所得之利相等，問每隻之原價若干.

解 13隻之賣價爲 420錢 × 13 = 5460錢，7隻之賣價，爲 480錢 × 7 = 3360錢，而此兩次所得之利相等，故自13隻之賣價，減7隻之賣價，其利益必互相減去，僅餘 13 − 7 即6隻之原價. 故 5460 − 3360 即2100錢，爲6隻之原價，是一隻之原價，爲 2100錢 ÷ 6 = 350錢

60. 有人每月得30圓，其3年所餘蓄金，等於每月得40圓1年所餘蓄金，問此人每月用費若干.

解 因每月用費不變，故後所餘蓄，比前所餘蓄多 40圓 − 30圓 = 10圓，故每多餘蓄10圓，則一年間餘蓄之總數，與前3年之餘蓄全同. 每月多餘蓄10圓，則一年間比初之一年多餘蓄 10圓 × 12 = 120圓 故此120圓恰等於初之 3年 − 1年 = 2年 間之餘蓄金，是每月餘蓄金，爲 120圓 ÷ (12 × 2) = 5圓 而用費爲 30圓 − 5圓 = 25圓.

注意 比較前3年之收入總額，與後1年之收入總額，而餘蓄金相等，可與前題同樣解之.

61. 有上下二種白糖，上12斤下8斤共價2圓，又上7斤下16斤共價2圓1角3分，問各種一斤之價若干.

解 此題下種白糖，前爲8斤，後爲16斤，是後斤數爲前斤數之2倍. 故將前之關係2倍之，即上24斤下16斤，共價爲4圓. 但上7斤下16斤，共價2圓1角3分，故二總價相減所差之 400 − 213 即187分，爲上種 24 − 7 即17斤之

價. 故上一斤之價爲$187^{\text{分}}\div 17=11^{\text{分}}$而下8斤之價爲$200^{\text{分}}-11^{\text{分}}\times 12=68^{\text{分}}$則一斤之價爲$68^{\text{分}}\div 8=8.5^{\text{分}}$.

62. 有兄弟二人,兄年齡之7倍,與弟年齡之5倍之和爲201,又兄年齡之9倍,與弟年齡之7倍之差爲57,問兄弟之年齡各若干.

解 兄年齡之7倍與弟年齡之5倍之和爲201,故9倍之,[後兄年齡之倍數]則兄年齡之63倍,與弟年齡之45倍之和爲1809,又兄年齡之9倍與弟年齡之7倍之差爲57,故7倍之,[前兄年齡之倍數]則兄年齡之63倍,與弟年齡之49倍之差爲399,是兄年齡之63倍,與弟年齡之45倍之和爲1809,又兄年齡之63倍,與弟年齡之49倍之差爲399,故弟年齡之45+49即94倍爲1809−399=1410,是弟爲$1410^{\text{歲}}\div 94=15^{\text{歲}}$.故其5倍爲7歲,以之減201,則餘126,爲兄年齡之7倍,是兄爲$126^{\text{歲}}\div 7=18^{\text{歲}}$. 又將前之關係,即兄年齡之7倍與弟年齡之倍之和以7倍之,[後弟年齡之倍數]又將後之關係,即兄年齡之9倍與弟年齡之7倍之差,以5倍之,[前弟年齡之倍數]二者相加,則得兄年齡之94倍.

注意 此等題[本題及前各題]於分數條中,尙有別法.

63. 有人命婢持265錢,買酒5斤,及醬油3斤,而婢誤買酒3斤,及醬油5斤,餘10錢而歸,問各一斤之價若干.

解 265錢爲酒5斤與醬油3斤之價,誤之餘10錢,則$265^{\text{錢}}-10^{\text{錢}}=255^{\text{錢}}$爲酒3斤與醬油5斤之價,故$265^{\text{錢}}+255^{\text{錢}}=520^{\text{錢}}$,爲酒5+3即8斤及醬油3+5即8斤之和之價,而$265^{\text{錢}}-255^{\text{錢}}10=^{\text{錢}}$,爲酒$5^{\text{斤}}-3^{\text{斤}}=2^{\text{斤}}$與醬油$5^{\text{斤}}-3^{\text{斤}}=2^{\text{斤}}$之差之價,故$520^{\text{錢}}\div 8=65^{\text{錢}}$爲酒一斤與醬油一斤之價之和,而$10^{\text{錢}}\div 2=5^{\text{錢}}$爲酒一斤與醬油一斤之價之差,故$65^{\text{錢}}+5^{\text{錢}}=70^{\text{錢}}$,爲酒2斤之價,而$65^{\text{錢}}-5^{\text{錢}}=60^{\text{錢}}$錢爲醬油二斤之價. 故$70^{\text{錢}}\div 2=35^{\text{錢}}$,爲酒一斤之價,而$60^{\text{錢}}\div 2=30^{\text{錢}}$爲醬油一斤之價.

注意 本題與61,62.雖爲同類因前酒與醬油之斤數,與後醬油與酒之斤數,互相等,故能如此異其方法,而得稍簡單解之.

64. 有30人集一會,其費用以全員等分付之,忽有6人加入,因而各人所出金額,比前減少1角,問全費用幾何. 但後6人加入,而全費用爲增減.

解 因一人減少1角,故30人減少$1^{\text{角}}\times 30=30^{\text{角}}$,故此30角,即爲後6人之負擔,因而每人所出之金額爲$30^{\text{角}}\div 6=5^{\text{角}}$,故全費用爲$5^{\text{角}}\times(30+6)=18^{\text{圓}}$.

65. 有賣蘋果人,金1圓賣20個,則獲利20圓,若金1圓賣25個,則失本10圓,問蘋果之數爲若干.

解 每個以$100^{\text{分}}\div 20=5^{\text{分}}$賣之,則獲利20圓,若每個以$100^{\text{分}}\div 25=4^{\text{分}}$賣之,則失本10圓,故一個以$5^{\text{分}}-4^{\text{分}}=1^{\text{分}}$之差賣之,則全體有$20^{\text{圓}}+10^{\text{圓}}=30^{\text{圓}}$之差,因而蘋果之數$30^{\text{圓}}\div 0^{\text{圓}}.01=3000$.

66. 將柿子分與童子,每人分7枚,則不足4枚,若分5枚,則餘12枚,問童子及柿子之數若干.

解 因題每人與7枚,比每人與5枚,其柿子之數應多12+4即16枚,是每人欲多與7−5即2枚則需多柿子16枚,故童子之數爲$16^{\text{人}}\div 2=8^{\text{人}}$,而柿子之數爲$7^{\text{枚}}\times 8-4^{\text{枚}}=52^{\text{枚}}$.

別解 若將柿子之數,補足4枚,則每

人與7枚,應無不足,而每人與5枚,必餘12+4卽16枚,故知人數爲(12+4)÷(7−5)卽8也.

67. 將橘子分與童子,其內三人,每人4枚,其餘爲每人3枚則餘9枚,其內一人3枚,其餘每人5枚,則恰合,問橘子及人數各若干.

解 三人各4枚,其餘各3枚,則餘9枚,故全數童子若皆與3枚,則當餘12枚,又一人3枚,其餘各5枚,則恰合,故全數童子若皆與5枚,則當不足2枚,卽可如前題解之,而(12+2)÷(5−2)=7卽人數,7×5−2=33…橘子之數.

68. 有梨桃,桃爲梨之2倍,分與童子,每人與梨5枚,則餘梨2枚,每人與桃11枚,則不足桃21枚,問童子及梨桃各若干.

解 桃爲梨之2倍,每人與5枚,則餘2枚,故若每人與桃5×2卽10枚,則必餘2×2卽4枚,又每人與桃11枚,則不足21枚,是(4+21)÷(11−10)=25爲童子之數,而25×5+2=127爲梨數,127×2=254爲桃數.

69. 日出午前五時,問日沒何時.

解 時間有地方時標準時等類,十二時不必爲晝之正中及夜之正中,但此等問題,恆假定十二時爲晝及夜之正中也. 本題自午前五時至十二時之時間,等於十二時至日沒之時間. 午前五時至十二時之時間,爲12−5卽7時間,故自十二時至日沒,亦有7時間. 自十二時經七時,卽午後7時,故日沒7時也.

注意 本題可自12減日出時間之數,卽得日沒時間之數.

70. 日沒五時問日出何時.

解 自十二時至日沒之時間,等於自日出至十二時之時間. [如前題之假定]. 本題自十二時至日沒之時間爲5時,故日出時間之數爲自十二時逆計5時間之數,爲12−5卽7時也.

注意 本題無論何時間,可自12減日沒時間之數,卽得日出時間之數.

71. 日出四時半,問夜長如何.

解 夜十二時爲夜之正中,[如69題之假定]故自夜十二時至日出時間之數之2倍,卽爲夜之長. 本題自夜十二時至日出時爲四時半,卽4.5時間,而夜長爲此之2倍,卽9時間也.

注意 此等題,無論何時,可將日出時間之數2倍之,卽夜之長也.

72. 日沒六時半,問晝長如何.

解 自正午十二時,至日沒時間之數,爲晝之半分. 本題日沒時間爲六時半,卽6.5時.故晝長爲此之2倍,卽13時間也.

注意 此等題無論何時,可將日沒時間2倍之,卽得晝之長.

73. 自日出至午前八時之時數,等於自日沒至午後十時之時數,問晝長如何.

解 因假定晝之十二時,爲日出與日沒之正中,故自日出至八時之長,等於自午後四時至日沒之長,故本題可換言之如次. 自午後四時至日沒之時間,等於自日沒至午後十時之時間,試求晝之長,從此可知日沒爲午後四時與十時之正中,但四時與十時之正中,爲$(4^{時}+10^{時})\div2=7^{時}$是日沒爲午後7時因晝長爲此之2倍,卽14時間也. [參看問題72注意]

74. 一人於午前云,自現在至午後八時之時間數,與現在時數相等,問現在爲何時.

解 因現在爲午前,故現在之時數,爲

自夜十二時至現在之時間數,而本題自夜十二時,至現在之時間數,與自現在至午後八時之時間數等,換言之,則現在爲前夜十二時至本日午後八時之正中,自前夜十二時,至本日午後八時爲$12^{時}+8^{時}=20^{時}$間,則自前夜十二時,至現在之時間爲$20^{時}\div2=10^{時}$間,故現在爲午前十時也.

75. 有一月某日所生之孩,至二月二十三日,此孩生於世之日數,恰與生日同數,問此孩生於何日.

解 依題意,自一月一日,至生日之日數,與自生日至二月二十三日之日數相等.故生日在一月一日,與二月二十三日之中央.自一月一日,至二月二十三日之日數,爲$3^{日}23+{}^{日}=54^{日}$是自一月一日至生日之日數,爲$54^{日}\div2=26^{日}$即此孩生於正月二十七日也.

76. 有某司事人,每月得銀60圓,消費45圓,問此人若欲貯900圓,須司事千月.

解 因此人每月能貯銀60−45即15圓,故欲貯900圓須900÷15即60月明矣.

注意 此等題,當例如此解法,但貯之意義,若作一時貯積解之,則當先由此法計算$900^{圓}-60^{圓}$即840圓之月數,即知爲840÷15即56月,其翌月即57月加60圓於已貯之840圓,其所持銀即貯至900圓矣.故若如斯解釋,則以57月答之.

77. 有蝸牛上高十六尺之竿,晝上六尺,夜降四尺,問幾日能至竿杪.

解 此題雖與前題同,但因竿長十六尺,決不能再上,即令亦有設爲再下者,然求初至竿頂之時,故必以前題注意之法解之,故須將最後一日所上六尺,減去所餘十尺,以每日上下之差二尺除之,即得五日,加最後一日,即得六日爲所求之答.

78. 有蝸牛上樹,晝上五尺,夜降三尺第五日即達於樹杪,問樹高若干.

解 減去再後一日所餘四日,以每日晝夜所上之差爲2尺,則得8尺,爲第五日晨之高,故第四日夕之高,當爲$8+3=11^{尺}$,故樹之高,當高於11尺,又第五日再上5尺,故樹不得高於$8+5=13^{尺}$故樹之高,爲1丈1尺而不能高於1丈3尺.

79. 有某數以25加之,以5除之,以15減之,以7乘之,則爲70.問某數若干.

解 因最後所得爲70,故未以7乘以前,當爲70÷7=10,而未減15以前,當爲10+15=25,未以5除以前,當爲25×5=125,未加25以前當爲100,是所求之數也.

注意 此等問題,皆自最後之數加者減之,減者加之,乘者除之,除者乘之,次第逆推之,即得答數.至以下85皆此問題,可如此解之者.

80. 有某數,本應將其平方加8以4除之者,乃將平方誤以2倍代之,於是得11,問若不誤,則得數如何.

解 因最後以4除之得11,則未除以前當爲11×4=44,由是未加8以前,當爲44−8=36,因此爲某數之2倍,故某數爲36÷2=18明矣,則不誤之得數如次.

$$(18^2+8)\div4=83.$$

81. 有甲乙二數,相乘爲84,若加24於其積,則等於甲數之9倍,問各數若干.

解 84加24爲108,因此爲甲之9倍,故甲爲10÷89=12.又因甲乙相乘積爲

84,故乙數爲84÷12=7.

82. 有三數,甲乙之和爲45,其差之3倍,比丙少8,丙爲41,問甲乙各幾何.

解 因3倍其差比丙少8,故41−8=33,而其差爲此之三分之一即11也.既知甲乙之和及差.即可如問題4之法解之,而甲爲(45+11)÷2=28,乙爲(45−11)÷2=17.

83. 甲與乙8圓,乙與丙12圓,丙與甲18圓,則各有30圓,問各原有銀若干.

解I. 因最後各有30圓,若丙未與甲18圓,則甲爲30圓−18圓=12圓,乙爲30圓,丙爲30圓+18圓=48圓又若乙未與丙12圓,則甲爲12圓,乙爲30圓+12圓=42圓,丙爲48圓−12圓=36圓,又若甲未與乙8圓,則甲爲12圓+8圓=20圓,乙爲42圓−8圓=34圓.丙爲36圓,是即各原有之銀也.

解II. 甲與乙8圓,自丙得18圓,則爲30圓,故甲最初所有金,爲30圓−18圓+8圓=20圓同樣乙爲30圓+12圓−8圓=34圓丙爲30圓+18圓−12圓=36圓

84. 有賣雞卵者,在甲家賣去全數之半分與半卵,在乙家又賣去其餘之半分與半卵,在丙家又賣去其餘之半分與半卵,於是賣盡,且各家並未切開一卵,問此人原有雞卵若干.

解 因賣雞卵者至丙家時,賣去所持之半分與半卵,則恰盡,是在丙家所賣爲一卵明矣.故在乙家賣去所持之半分,與半卵之所餘爲一卵,是持至乙家之卵數爲(1+0.5)×2即3個,而持至甲家之卵,即最初所持之卵數,爲(3+0.5)×2即7個.

85. 荷包中有銀若干圓,用去一半又加入3圓6角8分,又用去現在之半與1圓2角7分,尙餘3圓,問荷包中初爲若干.

解 此與問題79全同,可以逆推解之,即3圓+1圓2角7分=4圓2角7分,4圓2角7分×2=8圓5角4分,8圓5角4分−3圓6角8分=4圓6角8分,4圓6角8分×2=9圓7角2分是最初荷包中爲9圓7角2分也.

86. 甲乙二人,乙所有銀,爲1245圓,比甲所有銀之3倍少3345圓,問甲所有銀,比乙所有銀之3倍少若干圓.

解 因1245圓,比甲所有銀之3倍少3345圓,故甲所有銀之3倍,爲1245圓+3345圓=4590圓,是甲所有銀爲4590圓÷3=1530圓,乙所有銀之3倍,爲1245圓×3=3735圓,而甲比此少3735圓−1530圓=2205圓.

87. 有砂糖200斤,其原價一斤爲100錢,賣時所得之利,等於40斤之原價,問一斤之利若干.

解 40斤之原價,爲100錢×40=4圓,是一斤所得之利,爲4圓÷200=20錢.(假定1圓換千錢)

88. 有鉛筆若干枝,每枝買入之價爲15錢,賣出之價爲18錢,賣得本錢之外,得利60錢,尙餘10枝,問買入時若干枝.

解 若將所餘盡賣之,則必得利18×10+60=240錢,但買賣一枝,則有18錢−15=3錢之利,是買入之枝數爲240錢÷3錢即80枝也.

89. 有米商以銀210圓,買米若干石,對於1圓昂1升之價賣之,於是得利42圓,問石數及1圓買賣之升數若干.

解I. 因1圓少賣1升,則210圓必少賣210升,因得42圓之利,則此210升賣得42圓明矣,是一圓賣出之米,爲210升÷42=5升,而一圓買入之米爲

$5^{升}+1^{升}=6^{升}$，全米升數爲 $6^{升}\times 210=1260^{升}$，即12石6斗.

[解]II. 以金210圓，而得42圓之利，故對於1圓當得 $42^{圓}\div 210=0^{圓}.2$ 即2角之利，故對於1圓昂貴1升之賣價爲2角. 故所求之石數爲 $(210+42)\div 0.2=1260$，即12石6斗. 因而1圓所買之米，爲 $1260\div 210=6^{升}$.

90. 以600圓買紙若干刀，對於一圓落4刀之價賣之，則虧本150圓，問共紙若干刀.

[解] 因1圓落價4刀，則共落價 $4^{刀}\times 600=2400^{刀}$ 因此2400刀即150圓之價，故1圓賣出之數爲 $2400\div 150$ 即16刀，因總賣價爲 $600^{圓}-150^{圓}$ 即450圓，故共紙爲 $16^{刀}\times 450=7200^{刀}$.

[注意] 與前題解II同樣，對於1圓爲 $150^{圓}\div 600=0^{圓}.25$ 之損，故知4刀之賣價爲2角5分，故紙之刀數爲 $(600-150)\div(0.25\div 4)$ 即7200刀.

91. 牛乳之比重爲1.04，設水一升之重爲279錢，則將牛乳1斗5升，盛於重186錢之器中，共重若干.

[解] 牛乳一升之重，爲 $279^{錢}\times 1.04=290.16^{錢}$ 是牛乳1斗5升之重，爲 $290.16^{錢}\times 15=43524^{錢}$. 盛之於重186錢之器中，則共重爲621.24錢.

92. 有一桶，其中容比重3之液體，則全重爲362斤半，若容比重5之液體，則全重量爲562斤半，問桶重若干.

[解] $562.5^{斤}-362.5^{斤}=200^{斤}$ 即對於比重差 $5-3$ 即2之重量，則 $200\div 2$ 即100斤，即對如比重1之重量也. 故比重3之液體之重，爲 $100^{斤}\times 3=300^{斤}$ 則桶重爲 $362.5^{斤}-300^{斤}=62.5^{斤}$ 即62斤半也.

93. 有時表二個，各附以等價之鏈，甲價80元，乙價60元，而甲表價比其鏈價之2倍昂5元，問時表之價如何.

[解] 因甲表比鏈之2倍多5元，故添鏈於甲之80元，比鏈之3倍多5元，故鏈之3倍爲 $80-5$ 即75元，而鏈之價爲 $75\div 3$，即25元，因而甲表爲 $80-25$，即55元. 而乙表爲 $60-25$，即35元.

94. 有騎兵四人，以馬三匹，行八里之道，交換乘馬，且各乘馬之里數相等，問各乘馬若干里.

[解] 因馬爲3匹，故4人所能乘之全里數爲 $8^{里}\times 3=24^{里}$ 因4人平均乘之，是每人爲 $24^{里}\div 4=6^{里}$.

[注意] 如此一人乘馬之道，雖平均爲6里，若不注意換乘之法，則一名之騎兵，同時必乘二以上之馬也.

95. 有某河，其上流有上村，下流有下村，上村與下村之間有渡舟，舟價上爲70錢，下爲25錢，今自兩村有乘客之二舟，自上村下3里之處，自下村上2里之處相遇，交換乘客，各返本村，問兩舟之交涉如何.

[解] 此兩村之距離爲 $3^{里}+2^{里}=5^{里}$，故上一里之舟價爲 $70^{錢}\div 5=14^{錢}$，而下一里之舟價爲 $25^{錢}\div 5=5^{錢}$ 今自上村之舟因上下3里，故應得 $(14^{錢}+5^{錢})\times 3=57^{錢}$，但已得25錢，故應受下村舟子 $57^{錢}-25=32^{錢}$.

[注意] 此題乃對於二舟各一客之交涉，若自下村計算，亦須交32錢於上村舟子，可知爲兩無損益也.

96. 有甲乙二輪船航海，其船價甲6圓，乙4圓8角，而行李甲至50斤無運費，其餘每斤1角5分，乙至20斤無運費，其餘每斤1角，依所帶行李之多寡，計算乘於何船，方爲便利.

解 因船價甲比乙多6圓−4圓8角＝1圓2角，乙船若以之作行李運費，則無價限制，20斤當加1圓2角÷1角＝12斤，即32斤，而32斤尙在甲船無價範圍內，故行李未滿32斤者則乘乙船便利，若恰爲32斤則甲乙皆無損益，但甲船至50斤無運費，故自32斤至50斤，則乘甲船便利，若恰有50斤，則乘乙船有1角×(50−32)＝18角之損，因每斤之運費，甲比乙多5分，故50斤以上至180÷5即36斤，即86斤，則乘甲船便利，若恰爲85斤，則甲乙皆無損益，故行李多於32斤而少於86斤，則乘甲船便利，若恰爲86斤，則甲乙皆無損益，若多於86斤則乘乙船便利.

97. 有甲乙二旅人，乘三等火車，其所攜之行李，共200斤，除二人三等車無運費之重量外，甲應付加磅費1元8角，乙應付1元，若將此行李屬於一人，則加磅費須3元4角，問三等車每人行李不加磅費之限制若干.

解 二人共付18角＋10角＝28角之運費，若爲一人之行李，則須付34角，故34角−28角＝6角，爲一人行李無價限制之運費，故200斤若全付運費，則當爲34角＋6角＝40角，因知一斤之運費爲40角÷200＝2分，故一人行李無價限制，爲60斤÷2＝30斤.

98. 有繩長132尺，分爲二分，其一分之長，比他分之3倍短8尺，問各分之長如何.

解 加8尺於132尺爲140尺，分之爲一部分與他部分之3倍相等，則他部分爲140尺÷(3＋1)＝35尺而一部分爲35尺×3＝105尺，自此減去所加之8尺，則爲97尺，故求得35及97爲二部分之長也.

99. 以3圓2角一疋之絹，交換9角一疋之布，得1圓3角之利，絹之疋數，比布之疋數少50，問各疋數若干.

解 布50疋之價，爲9×50即45圓，布比絹多50疋之價多1圓3角，故若將所多50疋布棄去，而與絹疋數相同，則絹價必比布價多45圓−1圓3角＝43圓7角矣. 但絹價與布價一疋之差爲3圓2角−9角＝2圓3角，今總差爲43圓7角÷2圓3角即19疋即所求絹之數，因知布之疋數爲19疋＋50疋＝65疋.

100. 有小麥若干石，以之換每石4圓9角之大麥，則大麥比之多5石，以之換每石7圓之米，則米比之少7石，問小麥之石數，及其一石價各若干.

解 大麥5石之價，爲49角×5＝245角，米7石之價爲7圓×7＝490角，故小麥之石數，爲(245＋490)÷(70−49)即35石，其每石之價，爲49角×(35＋5)÷35＝56角.

101. 一嶺之上下，有甲乙二村，由甲村至乙村，需6時20分，由乙村至甲村，需3時56分，每分時之速，上行爲50丈，下行爲80丈，問甲乙二村之距離如何.

解 I. 因上行每分時50丈，下行每分時80丈，故上行80分之處，等於下行50分之處. 故往返80＋50即130分之道程，上行爲50丈×80＝4000丈，下行亦爲80丈×50＝4000丈，但本題乃求(60×6＋2)＋(60＋3＋56)＝362×236即598分時往返之道程，而598÷130＝4·6，故所求之距離，4000丈×4·6＝18400丈.

解 II. 往返甲乙兩地間，須6時2分＋3時56分＝9時58分＝598分. 但上1丈須1分÷50＝0分·02，下1丈須1分÷80＝0分·0125，

因而往返1丈則需$0^{\text{分}}.02+0^{\text{分}}.0125=0^{\text{分}}.0325$,故所求之距離,爲$598\div0.0325$即18400丈.

102. 筆一枝墨一條之價之差爲50錢,筆16枝與墨6條之價相等,問筆一枝墨一條之價各若干.

解 筆一枝墨一條之價之差爲50錢,故筆6枝與墨6條之價之差爲$50^{\text{錢}}\times6=300^{\text{錢}}$,即墨6條之價比筆6枝之價多300錢,但墨6條與筆16枝同價,故知筆$16^{\text{枝}}-6^{\text{枝}}=10^{\text{枝}}$之價爲300錢,則筆一枝之價爲30錢,而墨一條之價,爲$30^{\text{錢}}+50^{\text{錢}}=80$.

103. 有工人,每日工資2圓,日曜日休業無工資,土曜日半休業其工資亦爲半額,問此人作工10日共得工資若干.

解 初日若爲日曜日,則10日有二日曜日一土曜日,故10日之工資須減去2.5日之工資,即$2^{\text{圓}}\times(10-2.5)=15^{\text{圓}}$. 初日若爲月火水,則10日中有一日曜日一土曜日,故依前法求之,當爲$2^{\text{圓}}\times(10-1.5)=17^{\text{圓}}$. 初日若爲木曜日,則10日中有一日曜日二土曜日,故當得$2^{\text{圓}}\times(10-2)=16^{\text{圓}}$. 初日若爲土曜日,則10日中有二日曜日二土曜日,故當得$2^{\text{圓}}\times(10-3)=14^{\text{圓}}$.

注意 此等問題有種種之答須皆求之.

104. 一囊中,蘋果之數爲橘子之數之2倍,同時取出橘子三枚及蘋果四枚,取出若干次之後,橘子恰盡,蘋果尚餘16枚,問蘋橘共若干枚.

解 因蘋果爲橘子之2倍,則同時取出橘子3枚蘋果6枚,必同時恰盡.但每次取出橘子3枚蘋果4枚,是每次當餘蘋果2枚,今餘蘋果16枚,是共取出$16\div2$即8次明矣.故知總數爲$(3+4)\times8+16$即72枚,或因同時取出橘子3枚蘋果6枚,則皆恰盡,以次之算式其總數亦可求得,即$(3+6)\times8$即72枚

注意 此題與68題之作法同.

105. 某書出版,與印刷所定約,500部則爲90圓,1000部則爲150圓,若5000部,當爲若干圓.

解 此種問題,須先知出版之情事,出版分組字,紙,摺,製本四種之費,其紙,摺,製本三種,因部數之多少變動,惟組字之費,自一部至任何部無變者也.故$150^{\text{圓}}-90^{\text{圓}}=60^{\text{圓}}$,即爲$1000^{\text{部}}-500^{\text{部}}=500^{\text{部}}$紙,摺,製本之費,故$90^{\text{圓}}-60^{\text{圓}}=30$圓爲組字費,而5000部全體之費爲$60^{\text{圓}}\times10=600^{\text{圓}}$,故所求之費用,爲$30^{\text{圓}}+6006=30^{\text{圓}}$.

106. 有牛30頭,6週間,食盡一牧場之草,若以牛20頭,則10週間食盡之,問此牧場之草,5週即食盡,牛爲幾何,但草之長成,假定爲每日相等者.

解 牛30頭6週間之食料,等於$30^{\text{頭}}\times6=180^{\text{頭}}$ 1週間之食料,20頭10週間之食料,等於$20^{\text{頭}}\times10=200^{\text{頭}}$ 1週間之食料,是$10-6$即4週間長成之草,等於$200^{\text{頭}}-180^{\text{頭}}=20^{\text{頭}}$牛1週間之食料,故此牧場之草,1週間所長成者,等於$20^{\text{頭}}\div4=5^{\text{頭}}$牛1週間之食料,但已知6週間此牧場之草,恰等於180頭牛1週之食料,故5週間之草,等於$180^{\text{頭}}-5^{\text{頭}}=175^{\text{頭}}$牛1週間之食料,若以5週間食盡此牧場之草,則須放牛$175^{\text{頭}}\div5=35^{\text{頭}}$.

107. 有噴水池,用4唧筒,15分時能吸

盡其水，若用8喞筒，則7分時能吸盡之，若欲以5分時吸盡，須用喞筒若干.

解　此與前題爲同類之問題也. 以4喞筒15分時所吸出之水，等於以4×15即60喞筒1分時吸出之水，以8喞筒7分時吸出之水，等於8×7即56喞筒1分時吸出之水，故$15-7$即8分時噴出之水，等於$60-56$即4喞筒1分時吸出之水，於是1分時噴出之水，等於$4\div8$即0.5喞筒1分時吸出之水，而7分時吸出之水，等於0.5×7即35喞筒1分時吸出之水，是滿池之水，即以$56-35$即52.5喞筒1分時喞出之水，故5分時應吸出之水，等於滿池之水及5分時噴出之水，而5分時噴出之水，爲0.5×5即2.5喞筒1分時吸出之水，是5分時應吸出之水，等於$52.5+2.5$即55喞筒1分時吸出之水，則欲以5分時吸出之，即知爲須用$55\div5$即11喞筒矣.

108. 牛22頭54日食盡牧場3畝3分之草，牛17頭84日食盡牧場2畝8分之草，問牛幾頭24日食盡牧場4畝之草，但每畝草之元量同，其生長亦同.

解　(33分之草之元量)＋(33×54分之草一日生長之量)以牛22×54頭一日食盡之，故(1分之草之元量)＋(54分之草一日生長之量)以牛$22\times54\div33$即36頭一日食盡之，……(1).又(28分之草之元量)＋(28×84分之草一日生長之量)以牛(17×84)頭一日食盡之，故(一畝之草之元量)＋(84畝之草一日生長之量)，以牛$17\times84\div28$即51頭一日食盡之，……(2). 自(2).減(1)可得15牛一日食盡3畝一日生長之草，故可得一牛一日食盡2分一日生長之草，故(54分一日生長之草)以牛$54\div2$即27頭一日食盡之，因而一分之草之元量，以牛$36-27$即9頭一分之草之元量，以牛(9×40)頭一日日食盡之，若40食盡之，即牛15頭24日食盡之，而40分之草24日生長之量，以牛20頭24日食盡之，故所求之牛數爲35頭.

109. 有某數其3倍加24，等於其5倍減6，問其數若干.

解　某數之$5-3$即2倍爲$24+6=30$明矣，故其數爲$30\div2=15$.

110. 有長竿以一繩二折量之，則餘15尺，若以三折量之，則不足8尺，問繩及竿之長若干.

解　二折則餘15尺，故繩之全長，爲竿長之2倍，及$15^{尺}\times2=30^{尺}$. 又三折則不足8尺，故繩之全長比竿長之3倍短$8^{尺}\times3=24^{尺}$，是竿長爲$30^{尺}+24^{尺}=54^{尺}$，而繩長爲$(54+15)\times2$即$138^{尺}$.

111. 有童子以繩繞樹繞五周，尙餘5寸，將繩作三折繞之，繞一周尙餘2寸5分，問繩長及樹之周圍各若干.

解　繩比樹周之5倍長5寸，因三折繞之，則一周餘2.5寸，故繩又比樹周之3倍長$2^{寸}5\times3=7.5^{寸}$，是樹周之2倍爲$7^{尺}5-5^{寸}=7^{尺}$，而樹周爲$7^{尺}\div2=3^{尺}5^{寸}$，故繩長爲，$3^{尺}5^{寸}\times5+5^{寸}=18^{尺}$

112. 一人買橘子及柿子，其總價之和爲1圓6角，其個數之和爲130枚，而橘子之總價，比柿子之價多8角，橘子之數爲柿子之數之2倍，問橘子及柿子各一枚之價若干.

解　因橘子與柿子之總數爲150，而橘子爲柿子之數之2倍，故柿子之數爲$150-(1+2)$即50枚，而橘子之數，爲

150−50卽100枚，又因橘子總價及柹子總價之和爲1圓6角，而橘子總價比柹子總價多8角，故柹子總價爲(16角+8角)÷2=1圓2角，而柹子總價爲(16角−8角)÷2=4角，是橘子一枚之價，爲1圓2角÷100=1分2厘，而柹子一枚之價爲4角÷50=8厘.

113. 有甲乙二隊兵，甲隊積米504石，每日食8石，乙隊積米316石，每日食12石，問若干日後，甲隊存米爲乙隊存米之2倍.

解 假設乙隊積米及每日食米皆二倍之，則爲積米316石×2=632石，每日食米12石×2=24石，乃求此時乙隊存米等於甲隊存米，則其實際爲乙隊存米之2倍，等於甲隊之存米，如此求之，因乙隊之積米，比甲隊積米多632石−504石=128石，而每日食米多24石−8石=15石，故若欲使每日16石之差爲128石，則必須128÷16卽8日明矣，此卽所求之日數也.

114. 甲池有水96石，乙池有水12石，每時自甲池流出6石入乙池，問幾時乙池水爲甲池水之3倍.

解 二池之水之和，爲96石+12石=108石，此水乙池爲甲池之3倍，則甲池必爲108石÷(3+1)=27石，是自甲池流出96石−27石=69石也，每時流出6石，則流出69石必爲69÷6卽11.5時，卽所求之數.

115. 有高6尺之杉，與高10尺之松，每年所長杉比松之2倍短2寸，自今15年後，杉比松短1尺，問每年各長幾何.

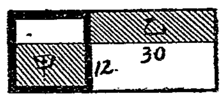
解 松初比杉高10尺−6尺=4尺，後僅比杉高1尺，故15年間杉比松所長多3尺，是每年杉比松多長3尺÷15=2寸，又杉每年所長，比松之2倍短2寸，故杉每年所長，若加2寸，卽松每年所長之2倍，亦必比松每年所長多4寸，比松多長4寸，卽爲松所長之2倍，是松每年所長爲4寸，而杉每年所長爲4+2=6寸也.

116. 甲有銀60圓，乙有銀28圓，各得相等之銀，於是甲之3倍，等於乙之5倍，問所得相等之銀若干.

解 甲之3倍爲60圓×3=180圓，乙之5倍爲28圓×5=140圓，是所得銀之5−3卽2倍，爲180圓−140圓=40圓，於是其相等之銀爲40圓÷2=20圓.

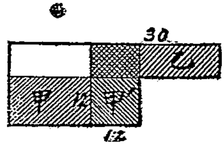
117. 有兵士若干人，列爲方陣，後因改爲長方陣，遂減去12列，每列加30人，問人數若干.

解I. 圖中甲之人數，爲方陣人數一列之12倍，而乙之人數，爲方陣一列人數之30倍，內減去30×12卽360者，



而甲乙之人數相等，因而方陣一列人數之30−12卽18倍，爲360，故360÷18=20，爲方陣一列之人數，因而方陣之總人數爲20×20=400人.

解II. 圖中甲′之人數，等於甲之人數，甲之人數，等於乙之人數，是由12^2÷(30−12)卽8人，爲原方陣之一邊



之人數. 減12人者，故12+8=20，爲原方陣一邊之人數.

118. 有甲乙二樽，甲樽有酒精10斤，乙樽有酒精與水共90斤，今將二樽混

合，則酒精比水之50倍少2斤，問各量幾何.

解 因 $10^{\text{斤}}+90^{\text{斤}}=100^{\text{斤}}$，內之酒精，比水之50倍少2斤，若將此內增酒精2斤，爲 $100^{\text{斤}}+2^{\text{斤}}=102^{\text{斤}}$，則其中之酒精，爲水之5倍明矣，故102斤爲水與水之50倍之和，卽水之51倍也，是 $102^{\text{斤}}\div 51=2^{\text{斤}}$ 爲水，而 $100^{\text{斤}}-2^{\text{斤}}=98^{\text{斤}}$ 爲酒精.

119. 將 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 …… 連續書之，問第一百之數字爲何數字.

解 自100內減去自1至9之九個數字，則餘 $100-9=91$，而自10以後之數，皆爲二個數字所成，因 $91=2\times 45+1$，故於9之後書數字91個，則爲 $45+9=54$ 之次數之第一數字，卽55之第一數字5也.

諸等數問題

120. 民國前三十五年一月所生之人至民國十一年十月，爲若干歲.

解 自民國前三十五年一月，至民國前一年終有35年. 又自民國元年初至民國十一年十月，有10年 10月. 故此人之年齡，爲 $35^{\text{年}}+10^{\text{年}}10^{\text{月}}=45^{\text{年}}10^{\text{月}}$.

121. 現在時刻，爲午前九時二十八分，問自現今至日入時刻午後五時五十七分，計時間幾何.

解 自午前9時28分，至正午12時，有 $12^{\text{時}}-9^{\text{時}}28^{\text{分}}=2^{\text{時}}32^{\text{分}}$，故至午後5時57分爲 $2^{\text{時}}32^{\text{分}}+5^{\text{時}}57^{\text{分}}$ 卽 8時29分.

注意 時制年月日，與時分秒之間，有習慣上之差異，例如前題民國十一年十月非已經過十一年十個月之意義，乃謂民國之第十一年之第十月也，而時分秒則不然，例如本題午前九時二十八分，非謂午前第九時之第二十八分，乃謂自其日午前零時已經過9時間28分也.

122. 有二十萬分之一之地圖，其長爲45.5糎，寬爲37糎，問此圖中之地面積爲幾方里.

注意 二十萬分之一地圖，非其實際面積之二十萬分之一，乃其實際一邊二十萬分之一也，故面積爲實際 200000^2，卽 40000000000 分之一也.

解 長 $45^{\text{糎}}.5\times 200000=91000^{\text{米}}=3^{\text{尺}}.125\times 91000=284375^{\text{尺}}$，寬 $37^{\text{糎}}\times 20000=74000^{\text{米}}=3^{\text{尺}}.125\times 74000=231250^{\text{尺}}$，故實際之面積，爲 $284375\times 231250=65761718750$. 但一方里爲3240000方尺，故 $65761718750\div 3240000=202968.2\cdots$，卽202968方里强.

123. 有二時表，與眞時對準，正指2時，但24時間之中，一遲7秒，一快8秒，問二時表相差半時間，須經幾日. 又問二時表所指之時.

解 經24時間，二時表生 $8^{\text{秒}}+7^{\text{秒}}$，卽15秒之差，故生半時間卽1800秒之差，須 $1800\div 15$，卽120日. 其時一快 $8^{\text{秒}}\times 120=960^{\text{秒}}=16^{\text{分}}$，故所指爲 $2^{\text{時}}+16^{\text{分}}=2^{\text{時}}16^{\text{分}}$. 其他遲 $7^{\text{秒}}\times 120=840^{\text{秒}}=14^{\text{分}}$. 故爲 $2^{\text{時}}-14^{\text{分}}=1^{\text{時}}46^{\text{分}}$.

124. 有旅人出甲地達乙地，行56里48步4尺，問至乙地之里程，答者謂前途里程之三倍，比行過之里程少2里6步2尺，問兩地之距離如何.

解 前途里程之三倍，爲 $56^{\text{里}}48^{\text{步}}4^{\text{尺}}-2^{\text{里}}7^{\text{步}}2^{\text{尺}}=54^{\text{里}}41^{\text{步}}2^{\text{尺}}$，故前途之里程，爲 $54^{\text{里}}41^{\text{步}}2^{\text{尺}}\div 3=18^{\text{里}}3^{\text{步}}4^{\text{尺}}$，故兩地之距離爲 $56^{\text{里}}48^{\text{步}}4^{\text{尺}}+18^{\text{里}}13^{\text{步}}4^{\text{尺}}=74^{\text{里}}62^{\text{步}}3^{\text{尺}}$.

125. 有舟子，溯某川5時間，達於3里12丈5尺之處，此舟子每時盪速爲水流速度之3倍，問盪速及水流速各幾何.

解 此舟子每時能盪 3里12丈5尺÷5=110丈5尺，因盪速爲水流速度之3倍，故舟行速度爲水流速度之3−1即2倍，是水流速度，爲110丈5尺÷2=55丈2尺5寸，而盪速爲55丈2尺5寸×3=165丈7尺5寸.

126. 有甲乙二農夫，甲每2週間，耕一頃7畝4分22步之田，乙5日，耕1頃2畝9分4步之田，若二人合作二週間，耕田若干.

解 甲二週間所耕之田，爲1頃7畝4分22步×2=2頃14畝9分20步，乙一日所耕之田，爲1頃2畝9分4步÷5=20畝5分20步，是二週間所耕之田，爲20畝5分20步×14=2頃88畝1分16步，故二人二週間所耕之和，爲2頃14畝9分20步+2頃88畝1分16步=5頃3畝1分12步.

127. 有人自日出至午前十時，行19里105丈，自日沒至午後九時，行7里150丈，問日長若干.

解 自日出至午前10時之時間，爲自日沒至午後9時之19里105丈÷7里150丈=2倍.5，因晝之正中爲12時，[四則69題之假定]故自日出至午前10時之時間，等於午後2時至日沒之時間，故午後2時至日沒之時間，爲自日沒至午後9時之時間2.5倍，是自日沒至午後9時之時間之1+2.5即3.5倍，等於自午後2時至9時之時間，即等於9時−2時=7時間，故自日沒至9時之時爲7時÷3.5=2時間是自日沒之時爲9時−2時=7時而晝長爲14時間.

128. 每時川流4里16步1尺，有甲乙二舟，乙在甲下流120里64步，今二舟同時下盪經4時間，自甲出發處至乙到達處之距離，爲甲進行距離之五倍，問舟子每時之盪速.

解 因兩同速度，故兩舟之距離恆相同，而爲120里64步也. 今自甲出發處至乙到達處之距離，爲甲進行距離之五倍，故此距離恰爲甲進行距離之5倍−1倍=4倍，因而甲進行距離爲120里64步÷4=30里16步，故甲一時間之進路爲30里16步÷4=7里196步，因而每時之盪速，爲7里196步−4里16步1尺=3里179步4尺.

129. 有貨車運米，自甲地至乙地，往路每時進行5里，歸路空車每時進行8里，依往反五次需65時間，問甲乙兩地之距離幾何.

解 往路一里需60分÷5=12分歸路一里需60分÷8=7分.5故往反一里之時間爲12分+7分.5=19分.5而甲乙兩地間往返一次，需65時÷5=13時即780分，故此距離爲780分÷19分.5=4里.

130. 有人雇工，約定半年，與以前金，則每月工價減1角2仙5錢，若一年與以前金，則每月工價更減1角2仙5錢，而一年前金之總數，比半年前金之總數多29圓5角5仙. 問此人每月工價若干.

解 半年分支前金，比半年分之月給少125錢×6=750錢，一年分支前金，比一年分之月給少(125+125)×12即3000錢. 故一年分之月給內，減3000錢及29550錢，等於半年分之月給減750錢，故半年分之月給爲29550錢+3000錢−750錢=31800錢，因而一月之工價，爲31800÷6，即5圓3角.

131. 有米若干包，每包4斗2升，則餘2斗2升5合，若每包37升，則增2包，且餘1斗3升5合，問此米之量。

圖 3斗7升之包2包，與1斗3升5合，爲37升×2+13升.5=87升.5，故作3斗7升之包與前之42升包同包數，則比4斗2升包之時，當餘米87.5−22.5卽當多米65升，但一包之差爲42升−37升=5升故其包數爲65升÷5升卽13包，因而米量全體42升×13+22.5=5石6斗8升5合.

132. 甲午之役，繳還遼東半島之償金，庫平銀叁千萬兩，換算英幣爲4935147磅1先1片75，而日本銀幣1圓換算英幣爲2先2片5，問此償金爲日本銀幣幾何，又庫平銀一兩爲日本銀幣幾何.

圖 1鎊爲20先，而1先爲12片，故4935147鎊1先1片75，爲1184435293片.75，而2先2片.5爲26片.5，故4935147鎊1先1片.75，爲1184435293.75÷26.5，卽44695671圓26錢2厘，因而庫平1兩，爲44695671.462÷30000000=1.489……，卽1圓49錢弱.

133 有人自東京經朝鮮，旅行浦鹽斯德，在日本用去日貨137圓50錢，在朝鮮用去韓貨228貫文，在俄國用去350留，而朝鮮1貫文爲日本1圓50錢，俄國之1留爲日本1圓10錢，問此人共用去日貨幾圓.

圖 在朝鮮用去之228貫文，爲日貨1圓.50×228=342圓，而在俄國用去之350留，爲日貨1圓.10×350=385圓，故此人共用去日金，爲137圓.50+342圓+385圓=860圓50錢.

134 有甲乙二俄人，甲所有金之留數，爲其哥數之2倍，乙所有金之留數，爲其哥數之半分，而甲乙二人所有金之和爲65留55哥，又甲所有之哥數，比乙所有之哥數少5，問各所有金幾何. 但一留爲100哥.

圖I. 甲之留數爲哥數之2倍，故其留之金額，爲其哥之金額之2×100倍卽200倍，依題文乙之哥數，比甲之哥數多5，而其留數爲其哥數之0倍.5，故乙留數之金額，比甲哥數之金額之0.5×100卽50倍多5×100×0.5卽250哥，故甲乙之和6555哥，爲甲哥數之1+200+1+5卽252倍與250哥+5哥=255哥. 因而甲哥數爲(6555−255)÷252=25. 故甲留數爲25×2=50，而乙之哥數25+5=30，乙之留數爲30×0.5=15，因而各所持金，甲爲50留25哥，乙爲15留30哥.

圖II. 若甲之所有增10留5哥，則甲乙之哥數相等，其留數，甲爲哥數之2倍，乙爲哥數之半分，而金額之合計65留55哥+10留5哥=75留60哥=7560哥，此卽乙所有哥數之2+(2+0.5)×100卽252倍，故乙所有之哥數，爲7560÷252=30，因而所求之所有金，可直由題文得乙爲15留30哥，甲爲50留25哥.

135. 日本東京天文臺，爲東經139° 45′ 15″，而我國北京，爲東經116° 23′ 45″，問東經正午北京爲何時.

圖 兩經度之差爲139° 45′ 15″−116° 23′ 45″，卽23° 21′ 30″，而經度差15°，則時間差1時，故兩地之時差爲23° 21′ 30″÷15°卽1時33分26秒，而東京經度大於北京經度，故東京正午爲北京午前12時−1時33分26秒=10時26分34秒.

136. 英國格林維基天文台正午之時，問一地爲午前四時半之經度.

解 正午與午前四時半時間之差,為 $12^{\text{時}}-4^{\text{時}}.5=7^{\text{時}}.5$, 因時差1時間,則經度之差為 $15°$, 故時間差 $7^{\text{時}}.5$ 之經度之差,為 $15°\times7.5+112°.5$, 而此地之時表遲於格林維基之時表,故此地在格林維基之西,故所求之經度,為西經 $112°\ 30'$.

137. 日本中央標準時,為東經 $135°$ 之子午線之時,而東京與 $135°$ 之子午線之時差約10分,問東經之經度. 但東京標準時在中央標準時經度之東.

解 時差1時間,則經度差 $15°$, 而時差1分則經度差 $15'$, 故時差19分,則經度差 $15'\times19+285'$, 即 $4°\ 45'$, 而東京在此標準時之東,故所求之經度,為東經 $135°+4°45'$, 即約 $139°45'$.

138. 有石於空氣中稱之,重 $1^{\text{瓩}}.3$, 於水中稱之,重 $0^{\text{瓩}}.68$, 若將此石附以木片而稱之,則在空氣中為 $1^{\text{瓩}}.55$, 在水中為 $0^{\text{瓩}}.63$, 問此木片之比重若干.

解 重物質在水中稱之,較在空氣中稱之,須減去物質排除水量之重量,故石與同容量水之重量,為 $1^{\text{瓩}}.3-0^{\text{瓩}}.68+0^{\text{瓩}}.62$. 而石與木之和之同容量水之重量,為 $1^{\text{瓩}}.55-0^{\text{瓩}}.63=0^{\text{瓩}}.92$, 故此木與同容量水之重量,為 $0^{\text{瓩}}.92-0^{\text{瓩}}.62=0^{\text{瓩}}.3$, 而木之重量為 $1^{\text{瓩}}.55-0^{\text{瓩}}.3=0^{\text{瓩}}.25$, 故木之比重為 $0.25\div0.3=0.8333\cdots\cdots$

139. 有書記生,以3日2時20分,寫完一部之書籍,今欲寫完此書七部,問幾日寫完,但一日寫字12時.

解 寫完七部需 $3^{\text{日}}2^{\text{時}}20^{\text{分}}\times7=21^{\text{日}}14^{\text{時}}140^{\text{分}}$, 但60分為一時間,而一日寫字時間,為12時間,故將60分歸於一時間,12時間歸於一日,則為 $22^{\text{日}}4^{\text{時}}20^{\text{分}}$.

140. 純金一錢之時價,為5元1角5分,有十八金之戒指,重5錢6分,欲鎔化為純金,問其價值幾何.

注意 純金之質柔軟,故以製作器物,必混合他金屬,如銀銅等. 故凡非純金之器物,必明言其成分,而其成分乃將金量等分為二十四分,而記明其中純金之部分,例如十八金,謂二十四之中,純金為十八也.

解 十八金 $5^{\text{錢}}6^{\text{分}}$ 之中,含純金 $5^{\text{錢}}.6\times18\div24=4^{\text{錢}}.6$, 故此戒指鎔化之價值,為 $5^{\text{元}}.15\times4.2=21^{\text{元}}.63$.

141. 有海船距港40浬,船底破損,每12分,浸入海水 $3^{\text{噸}}.75$, 此船若浸入60噸之海水,則當沈沒,若用每時汲出12噸之唧筒,則此船恰沈於港口,問其向港進行之速度幾何.

解 海水一時間,浸入 $3^{\text{噸}}.75\times(60\div20)=18^{\text{噸}}.75$, 但每時汲出12噸,故兩者相差每時間入水 $18^{\text{噸}}.75-12^{\text{噸}}=6^{\text{噸}}.75$, 故入水 $60^{\text{噸}}$, 需 $(60\div6.75)$ 時間,而此時間航40浬,故一時間當航 $40\div(60\div6.75)$ 浬,即 $4^{\text{浬}}.5$.

142. 錫之比重 7.291, 鉛之比重 11.35, 銅之比重 8.85, 銀之比重 10.47, 托爾克之比重 0.24, 試求是等物質一瓦之體積.

解 水一立方糎之重量為一瓦,而錫之比重為7.291, 故錫1立方糎之重量為 $7^{\text{瓦}}.291$, 故錫一瓦之大為 $1\div7.291$ 即 $0^{\text{立方糎}}.137$ 强. 同樣鉛銅銀托爾克一瓦之體積各為 $1\div11.35$ 即 $0^{\text{立方糎}}.808$ 强. $1\div8{,}85$ 即 $0^{\text{立方糎}}.113$ 弱. $1\div10.47$ 即 $0^{\text{立方糎}}.096$ 弱. $1\div0.24$ 即 $4^{\text{立方糎}}.167$ 弱.

143. 有金銀製之花瓶,其價爲286鎊12先令,若有與此花瓶同重量之金製花瓶,則其價爲373鎊16先令,又若有交換其金銀重量之花瓶,則其價爲112鎊4先令,今金一溫司之價爲3鎊17先令10辨士.5,問銀一溫司之價幾何.

解 1鎊爲20先令,1先令爲12辨士,與此花瓶同重量之金製花瓶,其價爲373鎊16先令,即$(20\times373+16)\times12$即89712辨士,而金一溫士之價爲3鎊17先令10辨士.5,即$(20\times3+17)\times12+10.5$,即934辨士.5,故此花瓶乃自$89712\div934.5=96$溫司所製成,而其初花瓶之價爲286鎊12先令,而金銀交換重量之花瓶之價爲112鎊4先令,故286鎊12先令+112鎊4先令=398鎊16先令,恰爲金96溫士銀96溫士之價之和,因而金銀各一溫士之價之和,爲398鎊16先令÷96=4鎊3先令1辨士,因而銀一溫司之價,爲4鎊3先令1辨士−3鎊17先令10辨士.5=5先令2辨士.5.

144. 自實驗,水之重爲空氣重之770倍,而水銀之比重,爲13.6,然則空氣幾立突之重,等於水銀一立突之重.

解 水銀之比重爲13.6,故水銀一立突之重,等於水13立.6之重,而水爲空氣之770倍,故水一立突之重,等於空氣770立突之重,故水銀一立突之重,等於空氣770立×13.6=10472立.

145. 有直角體之冰,其縱2丈橫1丈4尺厚5尺,今此冰之比重爲0.93,問此冰浮於水面上之高幾何.

解 等於水面下所沈冰量之水之重,恰等於冰全體之重,而此冰之比重爲0.93,故其厚之0.93即50寸×0.93=46寸.5,當沈於水面下,故水面之高,爲5寸−46寸.5=3寸.5.

注意 此問題縱橫之長,與答數無關係.

146. 有動體,以某速行某距離,費1分30秒,若其速每分增1丈2尺,則此時間當減短18秒,問其一分時之速幾何,又距離爲幾何.

解 一分間增速1丈2尺,即一秒間增速2寸,則以1分30秒−18秒=72秒,行此距離,而以此速行72秒,則當多行2寸×72=144寸,故此144寸爲當以前速行18秒間之距離,因而一秒之速,爲144寸÷18=8寸,而一分之速爲4丈8尺. 其距離爲4丈8尺×1.5=7丈2尺.

147. 有短艇競渡,甲艇追乙艇,自甲之艫,追及乙之舳,至兩艇全相離,經過1分30秒,若甲艇一分間之速增1丈2尺,則前之時間當減短18秒,而甲艇較乙艇長2尺,問兩艇之長各幾何.

解 與前題全同樣,而前題之距離爲本題兩艇之長之和,故兩艇之長之和,爲7丈2尺,而兩艇之長之差,依題文爲2尺,故甲艇爲(72尺+2尺)÷2=37尺. 而乙艇爲(72尺−2尺)÷2=35尺.

整數之性質 I

148. 問以2,3,4,5,6除之,恆餘1之最小數.

解 以2,3,4,5,6,得整除之最小數,爲此五數最小公倍數60,故所求之數,爲60+1,即61.

149. 以8,9,10,12,整除之,恆不足3,試求其最小數.

解 以8,9,10,12,能整除之最小數,爲此四數之最小公倍數360. 故所求之數爲360−3,即357.

150. 試求以除2556餘36,除2959,餘19之數.

圖 所求之數除2556,則餘36,故2556−36=2520,能以所求數整除之,又除2959,則餘19,故2959−19=2940,亦能所求數整除之,故所求數,即2520與2940之公約數,但此二數之最大公約數爲420.故所求之數,爲420之約數中之大於36者,但$420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7$,故420之約數,有$(2\times1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)$個,即24個,但其中大於36者,有420,210,140,105,84,70,60,42之八個,即爲所求之數.

151. 試求120與72之諸公約數.

圖 先求120與72之最大公約數,則所求之數,爲此最大公約數之各約數,而120與72之最大公約數爲24,故所求之數爲1,2,3,4,6,8,12,24之八個.

152. 4里13丈2尺,及1里50丈3尺中,所含整倍數尺數之最大者.

圖 4里13丈2尺=7332尺,1里50丈3尺=2303尺,而7332,2303之最大公約數爲47,故所求之數爲47尺.

153. 問以如何之最小數乘222,則其積爲1295之倍數.

圖 222,1295之最小公倍數,爲7770,故以某數乘222爲7770,則爲1295之倍數,且其數爲最小,故其數爲777÷222=35.

154. 有鉛二塊爲636錢及948錢,今將此二鉛各造若干錢之彈丸,使其重量最大,且無餘數,問其彈丸之重如何.

圖 使最大且無餘數,則求此二數之最大公約數即得,因而所求之重爲12錢.

155. 自某數減其數字之和,則爲13a51,問在a之數字爲何數字.

圖 自其數減其數字之和,爲9之倍數,故13a51欲爲9之倍數,則其數字之和,須爲9之倍,由是a爲8.

156. 有四鐘,各經過3,4,5,6分而鳴,問此四鐘經幾時間再同時鳴.

圖 此四數之最小公倍數60,爲所求之數,故求之時間爲60分,即一時間.

157. 郵票縱8分5釐,横7分,欲貼成最小正方形,問須若干枚.

圖 先求正方形一邊之長,其最長爲8分5釐7分之倍數,且須最小,故最小公倍數1190,乃表正方形一邊之長之釐數,故横之枚數,爲1190÷70=17,縱之枚數,爲1190÷85=14,因而所求之枚數爲17×14=238即238枚.

158. 某學校,男生徒221人,與女生徒143人,各分爲若干組,每組之人數相等,欲使組數爲最少,問組數爲若干.

圖 組數最少,則一組之人數必最多,故221,143之最大公約數13,乃表一組之人數,因而其組數,男爲221÷13,即17組,女爲143÷13,即11組,故合計爲28組.

159. 有二齒輪,其齒數爲80及128,問小齒輪幾廻轉後,同齒再與同齒相合.

圖 80,128之最小公倍數爲640,故所求之數,爲640÷80,即8廻轉.

160. 有大小中三輪車,大輪之周爲24尺,中輪之周爲10尺,小輪之周爲9尺,各輪同時觸於道路之點,至同時再觸於道路,問行幾何之距離.

圖 所求之距離爲24尺,10尺,9尺之公倍數,依題意最小公倍數360,乃表所求距離之尺數,故答爲360尺.

161. 每分間行330丈,264丈,198丈之三自轉車,同時同所同向,廻繞一1980

丈之圓城，問幾分時再集合於一處.

圖 每分間走340丈，264丈之人之集合，爲 $1980\div(330-264)$ 分，卽30分. 又每分間走264丈，198丈之人之集合，爲 $1980\div(264-198)$ 分，卽30分. 故此三人之會合，依題意爲30及30之最小公倍數，卽30分.

162. 有二數，其最大公約數爲15，而最小公倍數爲315，試求此二數.

圖 二數爲 $15\times a$ 及 $15\times b$ 之形，最小公倍數爲 $15\times a\times b$ 之形，故最小公倍數 $15\times a\times b=315$，以最小公約數15除之，其商21，當爲 $a\times b$，因而 a，b 爲分解21爲互素數之二因數，故必爲1與21或3與7，因而二數爲 $15\times1=15$，及 $15\times21=315$，否則爲 $15\times3=45$，及 $15\times7=105$.

163. 二數之最小公倍數，與最大公約數之積，等於原二數之相乘積，問其證.

圖 二數之最大約數爲G，以G除二數之商爲 a，b，則原二數當爲 $G\times a$，$G\times b$，而此 a 與 b 必爲互素數，若 a 與 b 非爲互素數，設其公約數爲 c，則 $G\times c$ 必能整除二數，然已假設G爲最大公約數，故 a，b 不有公約數，因而二數之最小公倍數爲 $G\times a\times b$ 之形，故最大公約數與最小公倍數之積，爲 $G\times(G\times a\times b)=(G\times a)\times(G\times b)$，卽等於原二數之相乘積明矣.

164. 有二數，其積爲21636151，其最小公倍爲527711，問其最大之公約數.

圖 最大公約數與最小公倍數之積，等於二數之積，但其積爲21636151，而最小公倍數爲527711，故最大公約數爲 $21636151\div527711=41$.

165. 某數之8倍，與5倍之和，以10除之餘9，問其數如何.

圖 8倍與5倍之和爲13，其數之13倍，以10除之餘9，則其數之3倍，以10除之，亦餘9，因而其數以10除之，必餘 $9\div3=3$. 故所求之數，爲一位爲3之諸數.

166. 有旅人，往來於東西兩市間，往路平均每日12里，歸路平均每日15里，而到西市之一日，與歸東市之一日，各行7里，問往復此兩市間須幾日，但兩市之距離，不遠於70里.

圖 自題文兩市距離之里數，比12及15之公倍數多7，而12及15之公倍數，爲60之倍數，然所求之距離，不遠於70里，故60之二倍以上之數，不適於此條件. 故兩市間之里數，爲比60多7之數，卽67. 因而往返兩市間之日數，爲 $(60\div12+1)+(60\div15+1)$，卽11日.

167. 有縱120丈橫84丈之地面，今欲於周圍及四隅植樹，使其兩樹之間相等，且使其間隔最闊，問須植樹若干.

圖 兩樹間距離，爲能整除120丈及84丈之數，卽兩數之公約數，又自間隔最闊之要件，知爲最大公約數，故其距離爲12丈，因而周圍所植樹數，爲 $(120+84)\times2\div12$，卽34本.

168. 有棋子352個，分之爲若干等分，使其各部分成正方形，而無過與不足，問當分爲幾分.

圖 將352分解爲素因數，則爲 $2^5\times11$，此中所含最大之平方數爲 2^4，而其餘之因數爲 2×11，故將352分爲 2×11 分，卽以22除之，則得最大之平方數，因而所求分之數爲22.

169. 丙戌日與月曜日同一日，問一年內有二度否.

【解】 自丙戌而為月曜之日，至其次丙戌又為月曜之日，恰為十干十二支及七曜最小公倍數之日數，即為420日．因而一年間，決無二度．

170． 某數以27除之餘19，則其10倍以6除之餘4，試證之．

【解】 本數為27之倍數與19之和，故其10倍為270之倍數與19之和．但270=6×45．故270之倍數．又必為6之倍數，因而本數之10倍，以6除之之餘，等於190以6除之之餘，但190=6×31+4，故其餘數為4．

171． 有東西兩港，其距離324浬，今有甲乙二船，同時相向出發，甲以每時12浬之速，自東港向西港，又乙以每時9浬之速，自西港向東港，而二船到港後，即行歸港，如此若干日後，二船同時到同港，問其日數及其同時到着之港．

【解】 兩港之距離，一回航行，甲須時間324÷12，即27時間．乙須時間324÷9，即36時間．今所求之時間，為甲乙航行此距離整數倍之時間，故必為27與36之倍數，而此兩數之最小公倍數為108，而108時間，甲航108÷27=4回，乙航108÷36=3回，故兩船皆到着東港，故此108時間，即4日.5．為所求之日數，其時兩船皆在東港．

【別解】 二船同時到着同港，則甲比乙多航兩港間之距離，故自出發至此時之時間，為324÷(12−9)=108，即108時=4日.5．而乙於此時間，航行兩港間9×108÷324=3回，故兩船皆在東港．

172． 將千人不足之人數，等分為四隊，各隊之人數，每14人列之，或每12人列之，皆餘8人，若每8人列之，則恰無餘，問總人數如何．

【解】 自一隊之人數，減去8人，則每14人列之，或每12列之，或每8人列之，皆無過不足．因而其數為14，12，8之公倍數．故各隊之人數，等於此公倍數加8者．但依題意，各隊之人數，未滿1000÷4即250人，故先求其最小公倍數，以8加之，則為176，而未滿250，而其他之公倍數，在250以上，不適於題意．因而一隊之人數，為176人．故總人數，為176×4即704人．

173． 有二位之數，其數字之和為10，若本數加36，則其數字之次序倒轉，問其數．

【解】 依題文，倒轉數比本數多36，故本數之十位數字，比一位數字，少36÷9=4．因而十位數字與一位數字，其和為10，而其差為4．故十位數字為(10−4)÷2=3，而一位數字為(10+4)÷2=7，即本數為37．

174． 有二位之數，其數字之和為6，自本數之2倍減6，則其數之次序倒轉，問本數．

【解】 依題文，自本數之2倍減6，則得倒轉數．故自本數之3倍減6，則為本數與倒轉數之和，但數字之和6之11倍即66，為本數與倒轉數之和．故自本數之3倍減6，則為66．因而本數之3倍為66+6=72．故本數為72÷3=24．

175． 有二位之數，其數等於諸數字之和之4倍，又加27於本數，則其諸數字之次序倒轉，問本數幾何．

【解】 二位之數，即十位數字之10倍與一位數字之和，等於諸數字之和之4倍，即十位數字之4倍與一位數字之4倍之和，故十位數字之10−4即6倍，

等於一位數字之4−1即3倍.故一位數字爲十位數字之2倍,而加27於本數,則得倒轉數.故一位數與十位數字之差,爲27÷9=3. 故十位之數字爲3,而一位之數字爲6,即本數爲36.

176. 有三數,其諸數字之和爲11,若加297於本數,則其諸數字之次序倒轉,問本數幾何.

解 百位之數,比一位之數少297÷99=3,故本題之要件,爲百位之數,比一位之數少3.而三個數字之和爲11,今假設十位之數字爲0,則爲407.十位之數字爲2,則爲326. 十位之數字爲4,則爲245. 十位之數字爲6,則爲164. 十位之數爲此外之數,則百位及一位之數爲分數,或爲0. 即爲不適於題文之數. 故所求之數,爲407, 326, 245, 164之四數.

177. 以5除之餘3, 又其2倍以15除之餘6,問其最小數.

解 以5除之餘3,故其2倍以10除之當餘6,故本數之2倍以10除之或以15除之餘6,因而本數之2倍−6,爲10與15之最小公倍數30,故本數之2倍爲36. 因而本數爲18.

178. 一主人,命其僕買雞鶩鵝三種,使其三種之價各相等,且使其隻數最少,若多買一隻,則罰銀元3分. 此僕至店問一隻之價,雞爲2角4分,鶩爲6角,鵝有1圓5角,與1圓8角之二種,而僕買來1圓5角之鵝,問斯時主人當如何.

解 三種既以同價買之,且使隻數最少,則其價亦爲最少.故同價爲三種每隻之價之最小公倍數,但24, 60, 150之最小公倍數,爲600. 故買1圓5角之鵝,則三種之隻數合爲600÷24+600÷60+600÷150, 即39隻.同樣若買1圓8角之鵝,則三種之隻數合爲23隻. 因而罰金當爲(39−23)×3, 即4角8分.

179. 有甲乙二工人,甲自作事始,第三日休息,第六日休息,第九日不休息,第十二日休息,第十五日休息,第十八日不休息,次第如此,每九日休息二次. 乙自作事始,每四日休息,問甲乙二人同日休息,幾日間,有幾次.

解 甲9日休息2次,故每9日同樣循環.乙每4日休息,故4日同樣循環.故甲乙皆同樣循環爲9與4之最小公倍數9×4[9與4爲互素數,故其積爲最小公倍數.]即每36日也. 而36日中,甲每3日休息,而其中尚有三回不休息,

故第3日第6日第12日第15日第21日第24日第30日第33日爲甲之休息.而乙每4日休息,故甲休息日中爲4之倍數之第12日第24日,爲甲乙同休息之日,故甲乙同日休息每36日間有2次,如圖,同日休息之日,附○示之.

180. 太陽曆400年間,有閏年97,問二月有五日曜日者,幾年間,有幾次.

解 一平年之日數,爲7之倍數加1,今假設每4年有一閏年,則每四年之日數,爲7之倍數加5,而2月之日曜有5,則其年爲閏年,且其二月一日爲日曜日,故自二月有五日曜日起,至再有五日曜日之二月之年數,當爲4年之若干倍,且當爲7之倍數,即4與7最小公倍數之28年. 蓋28年爲

4年之倍數，故爲閏年．其日爲7之倍數，故再二月一日爲日曜日，因而所求之年每28年有一次．但400年間閏年有97，故所求之數，當取28及400之最小公倍數之2800年，而於其間求其有若干次可也．但每400年有一閏年，則當有$2800\div28=100$回，然爲100年之倍數，且爲28年之倍數之年，非閏年，故當除去．又其400年之倍數，則不當除去．因而第700，1400，2100年，故當除去．因而$100-3=97$，爲2800年間二月有五日曜日之回數．

整數之性質 II.

(百五減)

181．有某數以7除之餘3，以13除之餘2，問其數如何．

解 先求$n+3=$(7之倍數)及$n+2=$(13之倍數)之n之最小值，則得11．故某數加11，則爲7及13之公倍數．故某數爲7及13之公倍數減11之數，而其最小者，乃7及13之最小公倍數91減11之數，即80．

182．有小兒數棋子，三三數之餘2，四四數之餘3，五五數之不足1，問棋子之總數如何．

解 先求$n+2=$(3之倍數)，$n+3=$(4之倍數)，及$n-1+5=$(5之倍數)之n之最小數，則得1，故棋子之數增1，則三個四個五個數之皆無餘．斯時棋子之數爲3，4，5之公倍數，故所求棋子之數爲3，4，5之公倍數減1之數．而其最小者乃自3，4，5之最小公倍數60減1之數，即59．

183．有不滿百之數，以3除之餘2，以5及7除之皆餘4，問其數如何．

解 自其數減2，則以3能整除，而以5及7除之則餘2，而以5及7除之餘2之數，爲$5\times7\times n+2$之形，故求$5\times7\times n$以3除之餘1之n之值，則爲$5\times7\times n=33n+2n$．而n爲2，5，………，且所求之數不滿百，故惟$n=2$適於要件．故所求之數，爲$5\times7\times2+2+2=74$．

184．以8除之餘6，以11除之餘7，以14除之餘10，問最小數．

解 8與11之最小公倍數爲$8\times11=88$，而88之倍數中，以14除之餘10之最小數爲88之6倍，即$88\times6=528$．*又8與14之最小公倍數爲$4\times14=56$．而56之倍數中，以11除之餘7之最小數爲56之7倍，即$56\times7=392$．又11與14之最小公倍數，爲$11\times14=154$．而154之倍數中，以8除之餘6之最小數爲154之3倍，即$154\times3=462$．故$528+392+462=1382$爲以8，11，14除之各餘6，7，10之數，其中能減之8，6，14之最小公倍數$8\times6\times14=616$之倍數，則減之即$1382-616\times2=150$，爲所求之數．

注意 此種解法之前半，可如次決定之．例如*8與14之最小公倍數56，以11除之，則得剩餘1．故剩餘欲使爲$7\div1$即7倍，則必取$56\times7=392$．

185．以2除之得剩餘1，以3除之得剩餘2，以4除之得剩餘3，………至以10除之得剩餘9，試求其最小數．

解 I. 以2，3，4，………，10中相異素因數之有最大乘羃者列舉之，則爲$8=2^3$，$9=3^2$，5，7．而3^2，5，7，之公倍數中，能以2^3除之餘7者，有$3^2\times5\times7\times21$．又$2^3$，5，7之公倍數中，能以$3^2$除之餘8者，有$2^3\times5\times7\times8$．又$2^3$，$3^2$，7之公倍數中，能以5除之餘4者，有$2^3\times3^2\times7$．

又 $2^3, 3^2, 5$ 之公倍數中，能以7除之餘6者，有 $2^3\times3^2\times5\times2$. 故以8, 9, 5, 7, 等除之，次第餘7, 8, 4, 6 之最小數，爲自 $3^2\times5\times7\times21+3^2\times5\times7\times8+2^3\times3^2\times7+2^3\times3^2\times5\times2=10079$ 減 $8\times9\times5\times7=2520$，即得2519. 故所求之數，爲加 $8\times9\times5\times7$ 之若干倍於2519. 但 $8\times9\times5\times7$ 乃含自2至10所含素因數最大乘冪，故爲自至10之倍數，故2519爲所求之數. 否則問題爲不能. 但以實際除法試之，全與題合. 故所求之數爲2519.

解II. 加1於所求之數，則得以2, 3, 4, ……, 9, 10整除. 故所求之數爲自2, 3, 4, ………, 9, 10之最小公倍數減1之2519.

186. 以33除之餘32，以37除之餘36，以43除之餘42，問其最小數.

解 各剩餘皆比除數少1之數，故問題可如此變之. 即比33之倍數少1，比37之倍數少1，比43之倍數少1，故所求之數爲比33, 37, 43之最小公倍數少1之數，而此最小公倍數爲50303，因而所求之數爲50302.

187. 以5除之餘3，以6除之餘4，以7除之餘5，其數最近於200，問其數如何.

解 以5除之餘3之數，即爲以5除之不足2之數，同樣以6除之餘4，以7除之餘5之數，爲以6或7除之皆不足之數. 今先求以5, 6, 7, 能整除之最小數爲210，故所求之數爲 $210-2=208$.

整數之性質 III.

188. 凡數其末位[即一位]爲0或2之倍數，得以2整除之，其證如何.

解 凡數可見做10之倍數，與末位之數之和，例如 $2356=2350+6=235\times10+6$. 而10爲2之倍數，故10之倍數之 235×10，即2350，[即末位數字爲0之數]必爲2之倍數，故若一位之數6爲2之倍數，則本數爲二個2之倍數之和，故得以2整除之.

189. 凡數其末二位之數，[即十位與一位所成之數]爲4之倍數，則以5能整除之. 又末三位之數爲8之倍數，則以8能整除之. 凡末 n 位之數，能以 2^n 整除，則本數能以 2^n 倍整除，其證如何.

解 凡數爲100之倍數與末二位之數之和，例如 $2356=23\times100+56$. 但100爲4之倍數，因而 23×100，亦必爲4之倍數. 故末二位爲56，若能以4整除，則本數必能以4整除. 同樣凡數等於 2^n 之倍數與末二位數之和，故題文云云，可得知之.

190. 相鄰二整數之積，能以 1×2 整除之. 相鄰三整數之積，能以 $1\times2\times3$ 整除之. 又四個之積，能以 $1\times2\times3\times4$ 整除之. 凡相鄰 n 個整數之積，能以 $1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times n$ 整除之，求其證.

解 相鄰二整數之一必爲偶數，故其積能以 1×2 整除之. 次於相鄰三整數之一必爲偶，而其一必爲3之倍數，而 2×3 互爲素數，故其積能以 $1\times2\times3$ 整除之. 例如 $6\times7\times8\times9$，能以 $1\times2\times3\times4$ 整除. 則因 $6\times7\times8$ 之4倍，能以 $1\times2\times3$ 之4倍整除. 即 $6\times7\times8$ 之4倍，能以 $1\times2\times3\times4$ 整除. 而 $6\times7\times8\times9=(6\times7\times8$ 之4倍$)+(6\times7\times8$ 之5倍$)=6\times7\times8\times4+5\times6\times7\times8$，故若 $6\times7\times8\times9$ 能以 $1\times2\times3\times4$ 整除，則必 $5\times6\times7\times8$ 能以 $1\times2\times3\times4$ 整除. 以同理 $5\times6\times7\times8$ 能以 $1\times2\times3\times4$ 整除，則必 $4\times5\times6$

$\times 7$能以$1\times2\times3\times4$整除. 因而$3\times4\times5\times6$,因而$2\times3\times4\times5$,因而$1\times2\times3\times4$,能以$1\times2\times3\times4$整除. 故題云云.

191. 柔位之數,其各位數字之和爲3之倍數,則本數得以3整除. 又其和爲9之倍數,則本數得以9整除. 試證之.

圖 見第一門九去法之條,以9得整除者,已有說明,而以3得整除者,亦準此.

192. 問如何之數,則得以7, 13, 19, 23, 29等整除.

圖 [7之倍數]凡數2倍或9倍其末位之數,自上位之數減之,或將其末位之5倍加於上位,而去其末位. 次第如此,若最後之結果,爲7之倍數或爲0,則本數得以7整除. 蓋因$20=21-1=\underline{7之倍數}-1$. 例如將5768末位數字8,以2倍之,自上位減之,則$576-8\times2$等於$(5768-8\times2)\div10$,故結局等於自本數減末位數之21倍[即7之倍數]之十分之一,故其差若爲0或7能整除之數,則本數亦必能7整除. 又$90=91-1=\underline{7之倍數}-1$, $50=49+1=\underline{7之倍數}+1$,故亦得同樣說明之.

[7之倍數之別解]一數自右起,每三位區分之,其奇段數之和與偶段之和之差,爲0或爲7之倍數,則本數亦必得以7整除之. 蓋$1000+1$, $1000000-1$, $1000000000+1$,等,皆爲7之倍數,例如$534575687=534000000+575000+637=534\times\{(1000000-1)+1\}+575\times\{(1000+1)-1\}+637=534\times(1000000-1)+534+575\times(1000+1)-575+637=534\times(7之倍數)+534+575\times(7之倍數)-575+637=(7之倍數)+(534-575+637)$. 故$(534-575+637)$若能以7整除,則本數亦必能以7整除.

[13之倍數]凡數將末位之數字4倍之而加於上位之數,或將末位之數字9倍之自上之數減之,次第如此,最後之結果爲0或爲13之倍數,則本數得以13整除之. 蓋$40=39+1$, $90=91-1$,而39及91皆爲13之倍數,故可如7之倍數,而說明其理.

[13之倍數之別解]凡數自右端每三位區分爲若干節,其奇節之和與偶節之和之差,爲0或爲13之倍數,則本數亦必爲13之倍數. 其證明與7之倍數之別解同樣,故略之.

[17之倍數]凡一數之末位5倍之,而自上位之數減之,次第如此,最後若爲0或爲17之倍數,則本數亦必爲17之倍數. 蓋$50=51-1=\underline{17之倍數}-1$,故亦得與前同樣證明之. 又$20=19+1$, $70=69+1$, $30=29+1$,等,故29, 23, 29等之倍數,皆得倣此類推之.

193. 六位之數,其前半三數字與後半三數字,全相同,又同次序. 例如428428, 653653,則必爲7及13之公倍數.

圖 蓋$428428=428000+428=428\times(1000+1)$,而$(1000+1)$能以7及13整除之,故題意云云.

194. 二位之數,與倒轉其數字之數之和,等於二數字之和之11倍,又其差等於二數字差之9倍,求其證.

圖 二位之數爲$10a+b$,則倒轉其數字之數爲$10b+a$,故其和及差如次,即$(10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11\times(a+b)$, $(10a+b)\sim(10b+a)=(10-1)a\sim(10-1)b=9a\sim9b=9(a\sim b)$. 故題意云云.

195. 三位之數,與倒轉其數字次序之數之差,恆等於兩端數字之差之99倍. 試證明之.

解 三位之數為$100a+10b+c$，則倒轉其數字次序之數，為$100c+10b+a$，故其差為$(100a+10b+c)\sim(100c+10b+a)=99(a\sim c)$. 故題意云云。

196. 自某數之第一位，其第奇位數字之和，減第偶位數字之和，[不足減則加11之倍數]其餘為11之倍數，則其數為11之倍數。

解 例如取53675證明之，$10=11-1$，$100=99+1$，$1000=990+11-1$，$10000=9999+1$ 其9每為偶個並書者，為11之倍數，故如次 $10=$11之倍數-1，$100=$11之倍數$+1$，$1000=$11之倍數-1，故

$50000=5\times$11之倍數$+1=$11之倍數$+5$,
$3000=3\times$11之倍數$-1=$ 〃 -3,
$600=6\times$11之倍數$+1=$ 〃 $+6$,
$70=7\times$11之倍數$-1=$ 〃 -7,
$5=$ 5,

故其左邊之和53675，當等於右邊之和，但右邊之和為加$5-3+6-7+5$，即加$(5+6+5)-(3+7)$於11之倍數，故其$(5+6+5)-(3+7)$若為11之倍數，則本數必為11之倍數。

分數雜題

197. 有兵一隊，戰死全數十分之三，其餘之四分之一負傷，尚餘健全者630人，問全人數。

解 戰死之餘為全軍之$1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$，而負傷之餘為戰死之餘之$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，故健全者恰相當於全軍$\frac{7}{10}+\frac{3}{4}=\frac{21}{40}$，故所求之全人數為$630\div\frac{21}{40}$，即1200人。

198. 某學校其學生全數之$\frac{1}{3}$，於試驗得滿點之$\frac{1}{3}$，又其他之$\frac{1}{3}$，得滿點之$\frac{1}{2}$，其餘之$\frac{1}{3}$，得滿點之$\frac{2}{3}$，問全學生得點數，為滿點之幾分。

解 得滿點$\frac{1}{3}$之$\frac{1}{3}$之學生，所得點為全點$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，又得滿點$\frac{1}{2}$之$\frac{1}{3}$之學生，所得點為全點之$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，又得滿點$\frac{2}{3}$之$\frac{1}{3}$之學生，所得點為全點之$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，故全學生共得點，為滿點之$\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}=\frac{1}{2}$.

199. 某人有財產若干，若歲入全儲蓄而不消費，則經20年，其財產當為今之三倍。若自今全無歲入，則經18年當盡，問經若干年，此人之財產，增殖為三倍。

解 將歲入全部儲蓄，則以20年為財產之3倍，故20年收入，等於其財產之2倍，故其一年之收入，為其財產之$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，又無歲入，則18年其財產全盡，故其一年之消費，為其財產之$\frac{1}{18}$，因而此人一年得儲蓄其財產之$\frac{1}{10}-\frac{1}{18}=\frac{2}{45}$，故欲使其財產為三倍，即使增加其2倍，須$2\div\frac{2}{45}$即45年。

200. 自長崎至浦鹽斯德，為655海里，比橫濱至桑港航程$\frac{5}{24}$少160海里，問自橫濱至桑港為若干海里。

解 自題文 655海里+160海里=815海里，為自橫濱至桑港航路之$\frac{5}{24}$，故所求之

里程，爲 $815^{\text{浬}} \div \frac{5}{24} = 3912^{\text{浬}}$.

201. 某數 $\frac{4}{5}$ 之 $\frac{7}{8}$ 爲 105，問某數如何.

【解】 $\frac{4}{5}$ 之 $\frac{7}{8}$ 爲 $\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$，故所求之數，爲 $105\div\frac{7}{10}=150$.

202. 有某數加其 $\frac{1}{3}$，則爲 60，問某數如何.

【解】 60爲某數爲與其 $\frac{1}{3}$ 之和，故某數爲 $60\div\left(1\times\frac{1}{3}\right)=45$.

203. 有某數，其 $\frac{1}{2}$ 大於其 $\frac{1}{3}$ 者爲 12，問某數如何.

【解】 12爲某數之 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，故某數爲 $12\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=72$.

204. 某人自東市往西市，其 $\frac{3}{4}$ 乘汽車，其 $\frac{4}{21}$ 乘馬車，又步行15里，問兩市之距離如何.

【解】 15里相當於兩市間之 $1-\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{21}\right)$，故其距離爲 $15^{\text{里}}\div\left\{1-\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{21}\right)\right\}=252^{\text{里}}$.

205. 有某事，甲4日作成，乙6日作成，問甲乙俱作，幾日成之.

【解】 甲一日作此事之 $\frac{1}{4}$，乙一日作此事之 $\frac{1}{6}$，故甲乙兩人一日作此事之 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$，因而作成此事之日數，爲 $1\div\frac{5}{12}=2\frac{2}{5}$ 即 $2^{\text{日}}\frac{2}{5}$.

【別解】 作成其事，甲費4日，乙費6日，故一日甲乙所作事爲甲所作之事 $\frac{4}{6}$，即 $\frac{2}{3}$. 故甲乙兩人作成甲作事之 $1+\frac{2}{3}$，即 $\frac{5}{3}$. 故所求日數，爲4日之 $\frac{3}{5}$ 即 $2^{\text{日}}\frac{2}{5}$.

【注意】 此答之 $\frac{2}{5}$ 日非一晝夜之 $\frac{2}{5}$，乃一日作事時間 $\frac{2}{5}$ 也.

206. 有浴池，有冷水與熱水之二管，若浴池空虛，同時開二管，則6分間充滿，若僅開冷水管，則10分間充滿，問若僅開熱水管，則幾分間充滿.

【解】 二管同時開，則一分間注入其池之 $\frac{1}{6}$，若僅開冷水管，則一分間注入其池之 $\frac{1}{10}$，故僅開熱水管，則一分間注入其池之 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$，因而注滿全量當爲 $1\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)=15$，即需15分間.

207. 有一事，甲作之 $2^{\text{日}}\frac{1}{2}$ 成，乙作之3日成，丙作之 $3^{\text{日}}\frac{3}{4}$ 成，若三人俱作，問幾日成.

【解】 甲一日成其事之 $\frac{2}{5}$，乙一日成其 $\frac{1}{3}$，丙一日成其 $\frac{4}{15}$，故三人俱作，則成其事之 $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=1$，因而作成之日數爲1日.

308. 有甲乙二人，甲每時以 $3^{\text{里}}\frac{1}{4}$ 之速自東地向西地，乙一時間後，以每時 $3^{\text{里}}\frac{3}{4}$ 之速，自西地向東地，今東西兩地之距離爲 $52^{\text{里}}\frac{1}{4}$，問乙出發後，幾時與甲相遇.

解 乙出發時,甲乙之距離,爲$\left(52^{里}\frac{1}{4}-3^{里}\frac{1}{4}\right)=49^{里}$. 但一時間相接近$\left(3^{里}\frac{1}{4}+3^{里}\frac{3}{4}\right)=7^{里}$. 故接近49里,需49÷7即7時間爲所求之數.

209. 試求$\frac{10}{21}$及$\frac{15}{28}$之最大公約數.

解 所求數之分母,必爲已知二分母21, 28之公倍數,此分母愈小,則所求數愈大,故所求之分母爲21, 28之最小公倍數84. 又所求數之分子,必爲已知二分子之10, 15,之公約數,此分子愈大,則所求數愈大,故所求之分子爲10, 15之最大公約數5. 因而所求數,爲84分之5.

210. 試求$\frac{4}{21}$及$\frac{6}{35}$之最小公倍數.

解 所求之分母必爲已知二分母21, 35之公約數,此分母愈大,則所求數愈小,故所求數之分母爲21, 35之最大公約數7, 又所求數之分子,必爲已知二分子4, 6之最小公倍數12, 因而所求之數,爲$\frac{12}{7}$,即$1\frac{5}{7}$.

211. 求合18尺$\frac{2}{5}$及57尺$\frac{1}{2}$之最大整倍數之長.

解 $18\frac{2}{5}$及$57\frac{1}{2}$之最大公約數爲$2\frac{3}{10}$,即表其所求長之尺數明矣.

212. 欲知一井之深,以繩二折量之餘9尺,三折量之餘1尺,問井之深.

解 先求繩之長,此繩之$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,相當於$9^{尺}-1^{尺}$,故繩之長爲$(9^{尺}-1^{尺})\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=48^{尺}$. 因而井深爲$48^{尺}\div 2-9^{尺}$,即15尺.

213. 有分數,其分母加1,則爲$\frac{3}{4}$,加2則爲$\frac{5}{7}$,問原分數如何.

解 $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$,爲約分之結果,故未約分以前,其分子爲原分數之分子,故不可不相等,因而若將3與5之最小公倍數15爲公分子,則二分數爲$\frac{15}{20}$及$\frac{15}{21}$,而此分母爲加1及2於原分數之分母者,故其差必爲1,今上之二分數,恰合此要件,故所求之分數爲$\frac{15}{19}$.

214. 自$\frac{15}{23}$之分母分子減同數,則爲$\frac{5}{9}$,問所減之數如何.

解 自分數之分母分子減同數,其差當爲一定,但其一爲23−15=8,而其他爲9−5=4,故知後分數,乃以8÷4=2約者也,故其未約以前爲$\frac{10}{18}$,因而減數爲23−18=5. [又15−10=5]

215. 有等於$\frac{7}{8}$之分數,其分母與分子之差爲4,而其分母分子,以同數加之,則爲$\frac{9}{10}$. 問所加之數如何.

解 若爲$\frac{7}{8}$之分母分子之差,當爲8−7=1,乃謂分母分子之差爲4,因知$\frac{7}{8}$乃以4約所設之分數者,故所設之分數,當爲$\frac{7\times4}{8\times4}=\frac{28}{32}$,而其分母分子各加同數其差不變,當爲32−28=4,而$\frac{9}{10}$則爲10−9=1,故知$\frac{9}{10}$乃以同數加之,而以4約之者,因而未約以前,爲$\frac{9\times4}{10\times4}=\frac{36}{40}$. 故$\frac{28}{32}$之分母與分子所加之數爲8.

216. 有兄弟二人,現在之年齡兄爲12歲,弟爲7歲,問自今幾年後,弟年齡爲兄年齡十七分之十二.

解 兄弟年齡之差,恆爲一定,而所求之時,其差爲兄年齡之$1-\frac{12}{17}=\frac{5}{17}$,實際爲$12-7=5$,故其時兄年齡爲$5\div\frac{5}{17}=17$,因而爲自今$17-12=$5年後也.

217. 米3石之價,等於麥5石之價,今以其價各等分買米麥,問其石數如何.

解 取米一石之價爲單位,則麥一石之價爲$\frac{3}{5}$,故各一石之價之和爲$1+\frac{3}{5}$,因而得各買$3\div\left(1+\frac{3}{5}\right)$,即$1^{\text{石}}\frac{7}{8}$.

218. 有二位之數,十位數字爲一位數字三分之二,若加18於本數,則其數字之次序倒轉,問本數如何.

解 凡二位之數,若加某數,而其數字之次序倒轉,則其所加之數,恆爲十位數字與一位數字之差之$10-1$倍,即9倍,因而十位數字與一位數字之差,爲$18\div9=2$,又自一面考之,則其數字之差爲一位數字之$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,故一位數字爲$2\div\frac{1}{3}=6$,而十位數字爲4,因而本數爲46.

219. 有二位之數,其數字之和爲15,又其轉位數爲本數之一倍與二十六分之三,問本數如何.

解 本數與轉位數之和爲本數之$2^{\text{倍}}\frac{3}{26}$,但本數與轉位數之和,等於數字和15之11倍即165,故165爲本數之$2^{\text{倍}}\frac{3}{26}$,因而本數爲$165\div2\frac{3}{26}=78$.

220. 有二人行路,若每時之速,甲3里,乙5里,甲比乙多費6時間,問此路若干里.

解 行一里,甲爲$\frac{1}{3}$時,乙爲$\frac{1}{5}$時,故行一里時間之差,爲$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$,因而此路爲$6\div\frac{2}{15}$,即45里.

別解 本題可改爲「二人行路,每時之速甲3里乙5里,而甲早起身6時間,因而同時到着,問此路若干里.」是甲於乙起身之前,已行$3\times6=18$里,而乙每一時間追近甲2里,故追近18里之時間爲$\frac{18}{2}$,即9時間,因而所求之距離爲$5^{\text{里}}\times9=45^{\text{里}}$.

221. 有甲乙二船,上下某河流,甲上需14時間,下需6時間,乙上需21時間,問乙下需幾時間.

解 甲一時間上此河之$\frac{1}{14}$,而下其$\frac{1}{6}$,故一時間之流速,爲此河之$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{14}\right)\div2=\frac{1}{21}$,而乙一時上此河之$\frac{1}{21}$,故下一時間之速,爲河之$\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}$.故所求之時間,爲$1\div\frac{1}{7}$,即7時間.

222. 有一時間盪速爲5里之水夫,上下某河,其上行之速,爲其下行之速之五分之三,而流速則上行時爲下行時之三分之二,問上行時一時間之流速.

解 將下行之速爲1,則上行之速爲$\frac{3}{5}$,又將下行之流速爲1,則上行之流速爲$\frac{2}{3}$.故下行時之流速,爲下

行之速之$\left(1-\frac{3}{5}\right)\div\left(1+\frac{2}{3}\right)$，即$\frac{6}{25}$，因而遡速爲$1-\frac{6}{25}=\frac{19}{25}$，此即相當於5里．故下行時一時間之流速，爲$5^{\text{里}}\div\frac{19}{25}\times\frac{6}{25}=1^{\text{里}}\frac{11}{19}$．因而上行時一時間之流速爲$1\frac{11}{19}\times\frac{2}{3}$，即$1^{\text{里}}\frac{1}{19}$．

223. 有米商買米若干，每元5升5合賣之，則得12元5角之利益，若每元6升賣之，則損失6元之本．問米爲若干．

解 先之一升之賣價爲$\frac{1}{5.5}$元，後之一升之賣價爲$\frac{1}{6}$元，即一升相差之價，爲$\frac{1}{5.5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{66}$元，因而全體之價之差，爲$12^{\text{元}}.5+6^{\text{元}}=18^{\text{元}}.5$，故$18.5\div\frac{1}{66}=1221$，即12石2斗1升爲所求之米量．

224. 一童子有紙鳶繩若干尺，失去$\frac{11}{12}$，遂加1丈1尺，因而其長爲原長之$\frac{1}{18}$．問此繩之原長爲若干尺．

解 $1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$，爲所餘之長，加11尺，因爲$\frac{1}{8}$，故$\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$，相當於11尺，因而全長爲$11^{\text{尺}}\div\frac{1}{24}=264^{\text{尺}}$．

225. 有三數，其和爲116，而甲爲乙之三分之二，又以丙除乙，則爲$\frac{9}{14}$．問各數如何．

解 甲爲乙之三分之二，丙爲乙之九分之十四，故甲乙丙悉以乙表之，則其和爲乙之$\frac{2}{3}+1+\frac{14}{9}=\frac{29}{9}$，即相當於116也．由是乙爲$116\div\frac{29}{9}=36$，因而甲$=24$，丙$=56$．

226. 有三種茶，上茶比全斤數$\frac{1}{3}$少30斤，中茶等於上茶之$\frac{3}{5}$，下茶等於上茶中茶之和，問斤數如何．

解 將斤數爲1，則下茶斤數爲$\frac{1}{2}$，因而上茶中茶之和，亦爲$\frac{1}{2}$，故上茶斤數爲$\frac{1}{2}\div\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{16}$，故全斤數爲$30\div\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{16}\right)=1440$斤．

227. 將36三分之，甲之$\frac{1}{2}$，與乙之$\frac{1}{3}$，與丙之$\frac{1}{4}$，皆相等，問各部分幾何．

解 甲之$\frac{1}{2}$等於乙之$\frac{1}{3}$，故乙爲甲之$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$，同樣丙爲甲之$\frac{4}{2}$，即甲之2倍，故甲乙丙之合計，爲甲之$1+\frac{3}{2}+2=4^{\text{倍}}\frac{1}{2}$，故甲爲$36\div4\frac{1}{2}=8$，因而乙爲$8\times\frac{3}{2}=12$，丙爲$8\times2=16$．

228. 五元金幣，與貳角銀幣，合計爲25元，而五元金幣之數之15倍，相當於貳角銀幣之數之2倍，問各幣之數各幾何．

解 貳角銀幣之數，爲五元金幣之數之$\frac{15}{2}$倍，故其價值爲五元金幣之$20\times\frac{15}{2}\div500=\frac{3}{10}$倍，由是52元中，有五元金幣$52\div\left(1+\frac{3}{10}\right)$，即40元，與貳角銀幣$52^{\text{元}}-40^{\text{元}}=12^{\text{元}}$，故其幣之數$40\div5=8$，及$120\div2=60$，

229. 五仙銀幣與貳仙銅幣，共有6元5角，而五仙銀幣之數，多於貳仙銅幣之數者，爲其三分之一，問各幾何．

解 五仙銀幣之數，多於貳仙銅幣之數者，爲貳仙銅幣之數之$\frac{1}{3}$，故五仙

銀幣之數爲貳仙銅幣之數之$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，故五仙銀幣之價值，爲貳仙銅幣之價值之$5\times\frac{4}{3}\div2=\frac{10}{3}$，故貳仙銅幣之價值，爲$650^{仙}\div\left(1+\frac{10}{3}\right)=150^{仙}$，由是貳仙銅幣之數，爲$150^{仙}\div2^{仙}=75$，即75個．因而五仙銀幣之數，爲$75\times\frac{4}{3}=100$，即100個．

230．有龜鶴，其足數，鶴爲龜之十七分之十，而其頭數之差爲3，問各若干頭．

圝 將龜之足數爲1，則鶴之足數爲$\frac{10}{17}$，由是其頭數，鶴爲$\frac{10}{17}\div2=\frac{5}{17}$，龜爲，$\frac{1}{4}$，故其差爲$\frac{5}{17}-\frac{1}{4}=\frac{3}{68}$，但此分數相當於3，故爲1之數即龜之足數爲$3\div\frac{3}{68}$即68，而鶴之足數爲$68\times\frac{10}{17}$即40，故其頭數龜爲$68\div4$，即17，而鶴爲$40\div2$，即20．

231．有龜鶴，足數共320，頭數鶴爲龜之七分之二，問各若干頭．

圝 鶴之頭數爲龜之$\frac{2}{7}$，故足數之和，爲龜頭數之$4+\frac{2}{7}\times2=4\frac{4}{7}$，此分數依題文，相當於320，故龜之頭數，爲$320\div4\frac{4}{7}=70$，而鶴之頭數，爲$70\times\frac{2}{7}=20$．

232．甲乙二人，各有等額之金，甲以之營商業，獲利金94元，乙以之買股票，失本金71元，由是乙所有金，爲甲之十八分之十三，問初之所有金各若干．

圝 甲益乙損，其後所有金之差，爲$94^{元}+71^{元}=165^{元}$，又其時乙所有金爲甲之$\frac{13}{18}$，由是其時甲與乙所有金之差，爲甲之$1-\frac{13}{18}=\frac{5}{18}$，此即相當於165元，故其時甲之所有金爲$165^{元}\div\frac{5}{18}=594^{元}$，故甲乙最初之所有金爲$594^{元}-94^{元}=500^{元}$．

233．有陶器商，恆得元價五分之三之利，今此商人賣去陶器120個，於搬運之際，破損若干，因僅獲元價二十五分之十一之利，問破損之器若干．

圝 若無破損，則當得一個元價之$120\times\frac{3}{5}$，即72倍之利，今僅得$120\times\frac{11}{25}$，即$52^{倍}\frac{4}{5}$之利，故$72^{倍}-52^{倍}\frac{4}{5}=19^{倍}\frac{1}{5}$，爲自破損若干個所生之損失，若破損一個，則損失$1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$，故共破損之個數爲$19\frac{1}{5}\div\frac{8}{5}$，即12個．

234．開掘運河，雇甲乙二組之工人，甲組則100日能成，乙組則150日能成，今使二組工夫同作，乙組工夫休息若干日，則需80日成之，問乙組工夫休息之日數．

圝 甲組工夫一日成全業之$\frac{1}{100}$，乙組工夫一日成全業之$\frac{1}{150}$，甲組作工80日，成全業之$\frac{1}{100}\times80=\frac{4}{5}$，故乙組所成之部分，爲全業之$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$，故乙組所成之日數，爲$\frac{1}{5}\div\frac{1}{150}=30$．因而休業之日數，爲$80^{日}-30^{日}=50^{日}$．

235．甲匠6人之工資，等於乙匠5人工資，今將甲匠7人之工資，付於乙匠6人，則不足1角，問各工資若干．

圝 甲6人之工資，等於乙匠5人之

工資，故甲匠7人之工資，等於乙匠 $7\times\frac{5}{6}=5\frac{5}{6}$ 人之工資，但以之付於乙匠6人，則不足1角，故乙匠 $6-5\frac{5}{6}$ 卽 $\frac{1}{6}$ 人之工資爲1角，則故乙匠一人之工資爲6角，因而甲匠一人之工資爲 $6\times\frac{5}{6}=5$角.

236. 車行則五日與四分之三到達，步行則八日與四分之一到達，今欲6日到達，問車行步行各若干日.

圖 車行則一日行全路之 $1\div5\frac{3}{4}=\frac{4}{23}$，步行則一日行全路之 $1\div8\frac{1}{4}=\frac{4}{33}$，故一日行程之差，爲 $\frac{4}{23}-\frac{4}{33}=\frac{40}{759}$，今若僅以步行，則6日間行 $\frac{4}{33}\times6=\frac{8}{11}$，故未達之道路，爲全路之 $1-\frac{8}{11}=\frac{3}{11}$，乃以車行補之，由是車行之日數爲 $\frac{3}{11}\div\frac{40}{759}$，卽 $5^{日}\frac{7}{40}$，由是步行之日數，爲 $6^{日}-5^{日}\frac{7}{40}=\frac{33}{40}$日.

237. 絹一疋之價，爲布一疋之價之四倍與五分之一，布11疋絹7疋之價之和，爲30元3角，問各一疋之價如何.

圖 絹一疋之價，爲布一疋之價之 $4\frac{1}{5}$，故絹7疋之價，等於布 $7^{疋}\times4\frac{1}{5}=\frac{147}{5}$ 疋之價，故布 $11^{疋}+\frac{147}{5}{}^{疋}=\frac{202}{5}$ 疋之價爲30元3角，由是布一疋之價爲 $303^{角}\div\frac{202}{5}=7.^{角}5$，因而絹一疋之價爲 $7.^{角}5\times4\frac{1}{5}=31.^{角}5$.

238. 空車一日行15里，實車一日行12里，今用車12輛，每輛積米3包，將720包之米4日間運盡，問所運之距離若干.

圖 一日所運包數爲 $720^{包}\div4=180^{包}$，故一輛所運回數爲 $180\div12\div3$，卽5回，由是往復一回費 $\frac{1}{5}$日，而往復一里之日數，爲 $\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{3}{20}$，故所求之距離，爲 $\frac{1}{5}\div\frac{3}{20}$，卽 $1^{里}\frac{1}{3}$.

239. 日本以車將甲處之貨物，運往乙處，往路每時行32町，歸路因係空車，每時行1里12町，如此往復四回，費20時間，問此兩處之距離.（日本一里爲36町）.

圖 實車行一町，需 $\frac{1}{32}$ 時間，空車行一町，需 $\frac{1}{48}$ 時間，故往復道路一町之時間，爲 $\frac{1}{32}+\frac{1}{48}$，卽 $\frac{5}{96}$ 而往復全道路之時間，爲 $20^{時}\div4=5^{時}$間. 由是全道路爲 $5\div\frac{5}{96}$，卽96町，卽2里24町.

240. 有3000元之股票，減其四十五分之二賣之，且賣價每百元消費一元又三分之一；問所賣之實價幾何.

圖 減四十五分之二賣之，故其賣價爲 $3000^{元}\times\left(1-\frac{2}{45}\right)=\frac{8600}{3}$元，再於賣價每元消費 $1^{元}\frac{1}{3}$，故實價當爲賣價之 $\frac{100-1\frac{1}{3}}{100}$ 因而所求之實價爲 $\frac{8600}{3}\times\frac{100-1\frac{1}{3}}{100}$，卽 $2828^{元}\frac{4}{9}$.

241. 有甲乙二馬，甲馬價之四分之三，等於乙馬價之五分之四，而乙馬價比

甲馬價之六分之五貴三元又三分之一，問各馬之價若干.

解 乙馬價等於甲馬價之$\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}=\frac{15}{16}$，故若自乙減甲之六分之五，則其差爲甲之$\frac{15}{16}-\frac{5}{6}=\frac{5}{48}$，依題文此爲$3^{元}\frac{1}{3}$，故甲馬爲$3^{元}\frac{1}{3}\div\frac{5}{48}=32^{元}$，因而乙馬爲$32^{元}\times\frac{15}{16}=30^{元}$.

242. 製造軍艦二艘，其價甲比乙之三倍少32000元，乙爲總價七分之三，問各幾何.

解 乙爲總價之$\frac{3}{7}$，因而甲爲總價之$\frac{4}{7}$，故乙之三倍爲$\frac{9}{7}$，而比甲多$\frac{9}{7}-\frac{4}{7}=\frac{5}{7}$，依題文此爲乙之3倍與甲之差，是相當於32000元，故總價爲$32000\div\frac{5}{7}=44800^{元}$，而甲爲$44800^{元}\times\frac{4}{7}=25600^{元}$，乙爲$44800^{元}\times\frac{3}{7}=19200^{元}$.

243. 有人自甲府往乙府，步行全路八分之五，忽有事直歸甲府，卽以自此達乙府之時間，歸於甲府，由是每時步行之速增一里，而其往復總計費16時間，問甲乙兩府間之距離幾里.

解 步行兩府間之$\frac{5}{8}$，而其餘爲$\frac{3}{8}$明矣. 而16時間，恰等於自甲府達乙府之時間，故始之行$\frac{5}{8}$之時間，爲$16^{時}\times\frac{5}{8}=10^{時}$，而後之行$\frac{3}{8}$之時間，爲6時間，卽歸$\frac{5}{8}$之時間，由是自題文知行10時間之距離，若歸途每時增速1里，則6時間可歸，但每增速1里，則得6時間多行6里，故此6里，當爲行$10^{時}-6^{時}=4^{時}$之距離，由是得一時間行$6^{里}\div4=1^{里}.5$，故全距離爲1.5×16，卽24里.

244. 以若干之金，買馬2頭，與羊3頭，馬一頭之價，比全價四分之一多五元，羊一頭之價，比全價八分之一多四元又二分之一，問各一頭之價幾何.

解 馬一頭比全價$\frac{1}{4}$多5元，故馬二頭之價，比全價$\frac{1}{2}$多10元，又羊一頭之價，比全價$\frac{1}{8}$多$4^{元}\frac{1}{2}$，故羊三頭之價，比全價$\frac{3}{8}$多$13^{元}\frac{1}{2}$，故馬二頭與羊三頭之價，卽全價，比全價之$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$多$10^{元}+13^{元}\frac{1}{2}=23^{元}\frac{1}{2}$，故全價之$1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$，爲$23^{元}\frac{1}{2}$，因而全價爲$23^{元}\div\frac{1}{8}=188^{元}$，由是馬一頭爲$188^{元}\times\frac{1}{4}+5^{元}=52^{元}$，而羊一頭爲$188^{元}\times\frac{1}{8}+4^{元}\frac{1}{2}=28^{元}$.

245. 有甲乙丙三等工夫，甲4時間成某事之三分之二，乙一時間成其餘之四分之三，丙以二十分間成之，問此三工，若始終同作，需幾時間成此事.

解 甲成全事之$\frac{2}{3}$，乙成$\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，丙成$1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}$，故每時間甲成全事之$\frac{2}{3}\div4=\frac{1}{6}$，乙成$\frac{1}{4}$，丙成$\frac{1}{12}\times\frac{60}{20}=\frac{1}{4}$，由是三人同作，則一時成$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$，故作成全事需$1\div\frac{2}{3}=1\frac{1}{2}$，卽1時間半.

246. 有四工人作某事，甲25日成，乙20日成，丙24日成，今三人共作2日後，以丙一人獨作8日$\frac{3}{5}$，又甲丁來與丙同作3日而成其全事，問若以丁一人獨作，當幾日成。

解 甲乙丙各作一日之事，為全事之$\frac{1}{25}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{24}$故三人同作2日之事，為$\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}\right)\times2=\frac{79}{300}$，次丙一人8日$\frac{3}{5}$獨作之事，為$\frac{1}{24}\times8\frac{3}{5}=\frac{43}{120}$，終為甲丁與丙同作，則甲丙作3日之事，為$\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{24}\right)\times3=\frac{49}{200}$，由是丁所作之事，為$1-\left(\frac{79}{300}+\frac{43}{120}+\frac{49}{200}\right)=\frac{2}{15}$，故丁一人獨力作成此事需3日$\div\frac{2}{15}=$22日.5.

247. 有麥田，割取其七分之四，得6包2斗5升，而其餘可割得5包，問全田之麥量幾何。

解 割取七分之四之餘，即七分之三，因可割得5包，故依此比例，割七分之四，則可得$5\div\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=6^{包}\frac{2}{3}$，但依題文，則為6包與25升，故一包之$\frac{2}{3}$，為25升，由是一包為25升$\div\frac{2}{3}=\frac{75}{2}$升，而全田之麥量即6包+5包=11包與25升，亦即為$\frac{75}{2}$升×11+25升=437升.5，亦即4石3斗7升5合.

248. 將十開金9錢，與十五開金5錢，與不知成色者7錢，鎔化得十四開金，問未知成色之金如何。

解 十開金9錢，含純金$9\times\frac{10}{24}$錢，十五開金5錢，含純金$5\times\frac{15}{24}$錢，十四開金(9+5+7)錢，含純金$21\times\frac{14}{24}$錢，故7錢含純金$\frac{14\times21-10\times9-15\times5}{24}$錢，即7錢之中，含純金$\frac{129}{24}$錢，即含7錢之$\frac{18\frac{3}{7}}{24}$，故所求之金為$18\frac{3}{7}$開.

249. 有甲乙二人，其所有金之和為150元，而甲消費其所有金之九分之四，乙消費其所有金之六分之一，於是二人之所餘金同額，問二人初之所有金各幾何。

解 甲消費其所有金之$\frac{4}{9}$，故消費前之所有金為消費後之所有金之$1\div\left(1-\frac{4}{9}\right)=\frac{9}{5}$，同樣乙消費前之所有金，為消費後之所有金之$1\div\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{5}$，故二人原有金之和，為消費後等額殘金之$\frac{9}{5}+\frac{6}{5}=3$倍，由是150元÷3=50元，即各人之殘金，故原之所有金，甲為50元$\times\frac{9}{5}=$90元. 乙為50元$\times\frac{6}{5}=$60元.

250. 有容水14石6斗2升之桶，以甲乙二管注入水，甲3分間7升，乙5分間9升，又有流出之丙丁二管，丙4分間5升，丁7分間8升，今使各管同時出入，問此桶幾時間可滿。

解 甲一分間注入$\frac{7}{3}$升，乙一分間注入$\frac{9}{5}$升，丙一分間流出$\frac{5}{4}$升，丁一分間流出$\frac{8}{7}$升，故同開各管，則一分間相

差,當注入$\frac{7}{3}+\frac{9}{5}-\frac{5}{4}-\frac{8}{7}=\frac{731}{420}$升,由是注滿全桶需$1462\div\frac{731}{420}=840$分,即14時間.

251. 有水桶注滿水後,45分間全漏盡,今此桶若不漏,則25分間當注滿,問同時注入與漏出,此桶需幾時間可滿,又問注滿時漏出之水爲幾石,但桶之容量爲100石,而每時漏出水量同一.

解 一分間注入之量,與漏出之量,爲$\frac{100}{25}$, $\frac{100}{45}$石,故此桶可滿之時間,爲$100\div\left(\frac{100}{25}-\frac{100}{45}\right)$即$56^{分}\frac{1}{4}$. 又此時間漏出之量爲$\frac{100}{45}^{石}\times 56\frac{1}{4}=125^{石}$.

注意 求當滿之時,則100石可不用,又試參看次252題之注意.

252. 有水桶容水1石9斗2升,今於其桶之底,插入甲乙二漏水管,開其二管,經3時後,而閉其甲管,則僅以乙管於11時漏盡,若開其二管經6時間而閉其甲管,則僅以乙管於6時間漏盡,問各管一時間漏水之升數,但各管每時漏水之量相等.

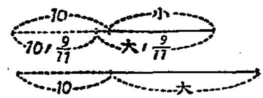
解 前以甲管3時間,及乙管$3^{時}+11^{時}=14^{時}$間漏盡,後以甲管6時間及乙管$6^{時}+6^{時}=12^{時}$間漏盡,由是自甲管漏6−3即3時間,等於自乙管漏$14^{時}-12^{時}=2^{時}$間之水量,故1時間自甲管漏水之量,等於自乙管漏水之量之$\frac{2}{3}$,由是自甲及乙漏3時間,自乙漏11時間之水量192升,爲自乙管漏1時間之水量之$\left(1+\frac{2}{3}\right)\times 3+11\times 1=16$倍,故自乙管漏1時間之水量爲$192^{升}\div 16=1^{斗}2^{升}$,而自乙管漏1時間之水量爲$12^{升}\times\frac{2}{3}=8^{升}$.

注意 實際的,各管每時漏水之量恆不同一,蓋水量漸次減少,因而壓力亦漸次減少,故漏出之水量恆相異,然在算術問題,通例恆假定如本題末語之所云.

253. 小數爲大數三分之二,若兩數各加10,則小數爲大數十一分之九,問兩數如何.

解 初之大小二數之差,爲大之$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,因而大者爲其差之3倍,次大小之差爲大之$1-\frac{9}{11}=\frac{2}{11}$,因而大者爲其差之$\frac{11}{2}$,但次之兩數爲加同數10於初之兩數者,故其差相等,而後之大者比初之大者多10,故其差之$\frac{11}{2}-3=\frac{5}{2}$,相當於10,因而其差爲$10\div\frac{5}{2}=4$,因題言差爲大者之$\frac{1}{3}$,故大者爲$4\div\frac{1}{3}=12$,而小者爲$12\times\frac{2}{3}=8$.

別解 依圖自大之$\frac{9}{11}$減小者,(即大之$\frac{2}{3}$)等於自10減10之$\frac{9}{11}$,由是大者之$\frac{9}{11}-\frac{2}{3}$爲$10\times\left(1-\frac{9}{11}\right)$,因而大者爲$10\times\left(1-\frac{9}{11}\right)\div\left(\frac{9}{11}-\frac{2}{3}\right)=12$,小者爲$12\times\frac{2}{3}=8$.



254. 筆2支,墨3條,共價31錢,筆5支,墨4條,共價53錢,問筆一支墨一條之價各幾何.

解　墨3條筆2支之共價爲31錢,故以3除之,得墨1條筆$\frac{2}{3}$支之共價爲$\frac{31}{3}$錢,同樣墨1條筆$\frac{5}{4}$支共價爲$\frac{53}{4}$錢,故$\frac{53}{4}$錢$-\frac{31}{3}$錢$=\frac{35}{12}$錢,爲筆$\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\right)$支$=\frac{7}{12}$支之價,因而筆一支爲$\frac{35}{12}$錢$\div\frac{7}{12}=5$錢,而墨一條爲$(31$錢$-5$錢$\times 2)\div 3=7$錢.

255. 有農夫一日耕則3畝,一日耘則8畝,一日植則6畝,今一人作耕耘植之三業,問一日可得幾畝.

解　耕一畝要$\frac{1}{3}$日,耘一畝要$\frac{1}{8}$日,植一畝要$\frac{1}{6}$日,故一畝之耕耘植,要$\frac{1}{3}$日$+\frac{1}{8}$日$+\frac{1}{6}$日$=\frac{5}{8}$日,故一日可得1畝$\div\frac{5}{8}=1$畝$\frac{3}{5}$,即1畝144步.

256. 有球墜地,其反動爲其原高之$\frac{4}{7}$,今墜地三回,其反動之高爲3寸$\frac{7}{8}$,問其初墜之高幾何.

解　三回墜地後,反動之高爲3寸$\frac{7}{8}$,故其最初之高,爲

3寸$\frac{7}{8}\div\frac{4}{7}\div\frac{4}{7}\div\frac{4}{7}=2$尺$\frac{393}{5120}$.

257. 將純金於水中量之,減其重之七十七分之四,將純銀於水中量之,減其重之二十一分之二,今有金銀之混合物12錢$\frac{1}{4}$,於水中量之,爲11錢$\frac{1}{7}$,問金銀之量各如何.

解　若盡爲金,則當減少12錢$\frac{1}{4}\times\frac{4}{77}=\frac{7}{11}$錢,但依題文,乃減少12錢$\frac{1}{4}-$11錢$\frac{1}{7}=\frac{31}{28}$錢,因有$\frac{31}{28}$錢$-\frac{7}{11}$錢$=\frac{145}{308}$錢之差,對於金銀一錢減少之差爲$\frac{2}{21}$錢$-\frac{4}{77}$錢$=\frac{10}{231}$錢,故生$\frac{145}{308}$錢之差,必爲$\frac{145}{308}\div\frac{10}{231}$,即10錢$\frac{7}{8}$,故銀爲10錢$\frac{7}{8}$,因而金爲12錢$\frac{1}{4}-10$錢$\frac{7}{8}=1$錢$\frac{3}{8}$.

258. 有賣冰商,以7元5角買得冰500斤,欲得原價十分之二之利賣之,則一斤賣價必爲2分,問此冰融解之斤數.

解　得利十分之二之賣價,爲$\left\{750\times\left(1+\frac{2}{10}\right)\right\}$錢,而每斤賣2分得此之金,則必爲$750\times\left(1+\frac{2}{10}\right)\div2$,即450斤.但買入爲500斤,故融解之冰,爲500斤$-$450斤$=$50斤.

259. 有賣獸肉商,賣去若干斤之肉,其九分之五爲牛肉,其二十七分之十爲羊肉,其餘爲豚肉,而各一斤之原價,牛肉爲2角,羊肉爲2角2分,豚肉1角6分.若平均一斤賣2角又$\frac{4}{9}$分,問其損益及各斤數如何,但牛比羊多40斤.

解　牛爲總斤數之$\frac{5}{9}$,羊爲$\frac{10}{27}$,而其差相當於40斤,故總斤數爲40斤$\div\left(\frac{5}{9}-\frac{10}{27}\right)=216$斤.故牛爲216斤$\times\frac{5}{9}=120$斤,羊爲216斤$\times\frac{10}{27}=80$斤,豚爲216斤$-(120$斤$+80$斤$)=16$斤.故全體之原價爲20分$\times120+22$分$\times80+16$分$\times16=4416$分.而平均一斤爲4416分$\div216=20$分$\frac{4}{9}$.如此賣價與原價互相等,故無損益.

260. 自日出至現時之二分之一，等於自現時至正午．而自現時至日沒爲8時間，問現時及日出時刻如何．

解 自日出至正午，等於自正午至日沒之時間，[通例如此假定之]故若自日出至現時爲1，則自現時至正午爲$\frac{1}{2}$，而自正午至日沒爲$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，由是自現時至日沒爲$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$，依題文此爲8時間，故爲1之時間卽自日出至現時之時間爲$8^{時}\div2=4^{時}$．由是日出爲$12-(4+4\div2)=6$，卽午前6時也．因而現時爲午前10時．

261. 於日出前問時，答曰自現時至日出，爲自現時至正午之$\frac{1}{2}$，且今日之日沒，爲午後5時，問現時如何．

解 日出之時刻爲$12-5=7$，卽午前7時，此因自日出至正午之時間，同於自正午至日沒之時間故也．但自現時至日出，爲自現時正午之半分，因而自現時至日出，恰爲自日出至正午之時間，卽5時間也．故現時爲$7-5$，卽午前2時．

262. 買咖啡若干斤，每斤價120錢，以每斤144錢賣去其三分之二，尙多賣去10斤，則已得原價，問全斤數幾何．

解 將每斤120錢買入者，以每斤144錢賣之，則賣去所買斤數之$120\div144=\frac{5}{6}$，卽得原價，故買價之$\frac{5}{6}$，相當於$\frac{2}{3}$與10斤之和，由是$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$，相當於10斤，因而所買之斤數，爲$10^{斤}\div\frac{1}{6}=60^{斤}$．

263. 有通常車，於午前10時，自某停車場開行，每時爲30哩之速，是日午前11時15分，有快車在同停車場同方向開行，每時爲45哩之速，問至何處追及通常車．

解 快車開行之時，通常車在$30^{哩}\times1\frac{1}{4}$之前，經一時間後，相接近$(45-35)$哩，故追及之時間，爲$30\times1\frac{1}{4}\div(45-35)$，卽$\frac{5}{2}$時，故距開車處爲$45^{哩}\times\frac{5}{2}=112^{哩}\frac{1}{2}$．

264. 有火車長88碼，有行人沿鐵道與火車同方向進行，每時之速4哩，自火車追及此人，經10秒間離開此人，忽又追及一人，經9秒間離開其人，問後之一人，每時之速爲幾哩．

解 $88^{碼}\div10=\frac{88}{10}^{碼}$，爲火車與前人之速[一秒間]之差，$88^{碼}\div9=\frac{88}{9}^{碼}$，爲火車與後人之速[一秒間]之差，$\frac{88}{9}^{碼}-\frac{88}{10}^{碼}=\frac{88}{90}^{碼}$，爲前後二人之速[一秒間]之差，因而$\frac{88}{90}^{碼}\times60\times60=3520^{碼}=2^{哩}$爲二人一時間之速之差，由是$4^{哩}-2^{哩}=2^{哩}$爲後一人一時間之速．

265. 兩校之學生，共爲372人，其中男學生爲女學生二十七分之三十五，若僅言甲校，則女學生爲男學生之五分之四，若僅言乙校，則女學生爲男學生之十分之七，問各校之學生幾何．

解 總數爲372人，男學生爲女學生之$\frac{35}{27}$，故女學生爲$372人\div\left(1+\frac{35}{27}\right)=162^{人}$，男學生爲$372^{人}-162^{人}=210^{人}$，甲校女學生，爲男學生之$\frac{4}{5}$，故若乙校

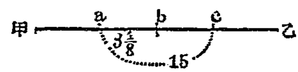
女學生,亦為男學生之$\frac{4}{5}$即$\frac{8}{10}$,則總數女學生亦當為男學生$\frac{4}{5}$,因而當為$210^{人}\times\frac{4}{5}=168^{人}$,然乙校為$\frac{7}{10}$,故總數為162人,由是其差$168^{人}-162^{人}=6^{人}$,為乙校男生徒之數之$\frac{8}{10}-\frac{7}{10}=\frac{1}{10}$,由是乙校之男學生為60名,因而乙校學生之數為$60^{人}\times\left(1+\frac{7}{10}\right)=\underline{102^{人}}$,甲校學生之數為$372^{人}-102^{人}=\underline{270^{人}}$.

266. 有自橫濱往布哇之汽船,至全海道之中央,每時12海里之速開行,自此1000海里之間,每時10海里,其餘海路每時以11海里而行,其總時間為$291^{時}\frac{4}{11}$,問全航路如何.

[解] 全海路之後半,若全部每時以11海里之速進行,則比題文之時間,當早$\frac{1000}{10}^{時}-\frac{1000}{11}^{時}=\frac{100}{11}^{時}$,由是前半以每時12海里之速而行之時間,與後半以每時11海里而行之時間之和,為$291^{時}\frac{4}{11}-\frac{100}{11}^{時}=282^{時}\frac{3}{11}$,一海里以每時11海里之速而行之時間,為$\frac{1}{11}$時,以每時12海里之速而行之時間為$\frac{1}{12}$時,故2海里中之一海里,以每時11海里之速而行,其一海里以每時12海里之速而行,則其時間為$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)$時間,由是所求之全航路,為$\left[282\frac{3}{11}\div\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)\right]\times2$,即$\underline{3240\text{海里}}$.

267. 有甲乙二童子,自相隔120丈之兩處,相向而行,6分間相會,若各童子每分之速減2丈,則相會處,離前相會處$3^{丈}\frac{1}{8}$,問各童子一分間之速.

[解] 兩童初於a相會,次於b相會,依題文ab之長為$3^{丈}\frac{1}{8}$,因甲乙各至a,需6分間,故兩童各一分間之速之和,為$120^{丈}\div6=20^{丈}$,次因兩童各減2丈之速,故相會於b,需$120\div(20-2\times2)$即$7^{分}\frac{1}{2}$間,此$7^{分}\frac{1}{2}$間,若仍以原速而行,則甲當自b至$2\times7\frac{1}{2}$即15丈之前c.



故ac之距離,$15^{丈}-3^{丈}\frac{1}{8}=11^{丈}\frac{7}{8}$,為甲6分與$7^{分}\frac{1}{2}$之差,即$1^{分}\frac{1}{2}$間之行程.由是甲1分間行$11^{丈}\frac{7}{8}\div1\frac{1}{2}=\underline{7^{丈}\frac{11}{12}}$,因而乙一分間行$20^{丈}-7^{丈}\frac{11}{12}=\underline{12^{丈}\frac{1}{12}}$.

[注意] 本解假定點b在點a與甲出發點之間,若點b在點a與乙出發點之間,則甲乙之速當各為前乙甲之速.

268. 有競渡會,兩艇同時出發,經12分18秒捷艇已達勝標,敗艇在40丈後,但出發後經8分時間,敗艇尚距勝標700丈,問捷艇之速,一時間幾里.

[解] $40^{丈}\div12\frac{48}{60}=\frac{25}{8}$丈,為一分間之速之差,而$700^{丈}-\frac{25}{8}^{丈}\times8=675^{丈}$為8分間後捷艇距決勝點之所在地,$675^{丈}\div\left(12\frac{48}{60}-8\right)=\frac{1125}{8}$丈為捷艇一時間之速,由是$\frac{1125}{2}$丈$\times60=8437^{丈}\frac{1}{2}$

$=8437^{丈}5^{尺}$，卽46里157丈5尺，爲從艇一時間之速.

269. 有甲乙二競走者，甲每秒比乙之三分之二多走1丈，今甲在乙2丈後，同時出發，經18秒達決勝點，其時乙尙在1丈後，問各速如何.

解 18秒甲比乙之$\frac{2}{3}$多走18丈，但甲在乙之2丈後且勝1丈，故爲多走3丈，由是比乙之$\frac{2}{3}$多走18丈者，爲比乙多走3丈也．故$(18-3)\div\left(1-\frac{2}{3}\right)=45$，爲18秒乙走之丈數．由是1秒乙走$45^{丈}\div18=2^{丈}\frac{1}{2}$，甲走$(45^{丈}+3^{丈})\div18=2^{丈}\frac{2}{3}$.

270. 有甲乙二股東，甲之股票，比股票全額二十五分之一少50元，乙比股票全額四十分之一多100元，而乙之股票，當甲之五分之四，問股票全額幾何.

解 甲比全額$\frac{1}{25}$少50元，甲乙相當於甲之$\frac{4}{5}$，故乙比全額之$\frac{1}{25}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{125}$少$50^{元}\times\frac{4}{5}=40^{元}$，依題文乙比全額之$\frac{1}{40}$多100元，故全額之$\frac{4}{125}-\frac{1}{40}=\frac{7}{1000}$爲$100^{元}+40^{元}=140^{元}$，由是全額爲$140\div\frac{7}{1000}=20000^{元}$.

271. 有畜收家，以馬牛羊共100頭，出市賣之，其價牛一頭88元，馬一頭50元，羊一頭6元，平均一頭爲9元4角，若將馬少賣四分之三，而易以羊25頭，則收金無增減，問馬牛各幾頭.

解 馬價全體四分之三，等於羊25頭之價，故馬價爲$6^{元}\times25\div\frac{3}{4}=200$元．由是馬之頭數爲$200\div50$卽4頭，次牛羊之總數爲$100^{頭}-4^{頭}=96^{頭}$，其總價爲$9^{元}.4\times100-200^{元}=740^{元}$，故可歸於龜鶴問題．由是得牛之頭數爲$(740^{元}-6^{元}\times96)\div(88^{元}-6^{元})=2$，卽2頭.

272. 以容量相等之桶，汲出滿池之水，以3桶則12時間可汲盡，以6桶則5時間可汲盡，今此池水若汲盡後，至水再滿池，需何時間．又若其容量爲120石，則一桶汲出一時間之量如何.

解 將一時間一桶汲出之量爲1，池水與12時間湧出之水之和，爲$1\times3\times12=36$，池水與5時間湧出之水之和爲$1\times6\times5=30$．故12−5卽7時間湧出之量爲$36-30=6$，故1時間湧出之量$=6\div7=\frac{6}{7}$．故水滿此池之時間，爲$\left(36-12\times\frac{6}{7}\right)\div\frac{6}{7}$卽30時間．又池水之量若爲120石，則一時間之桶汲出之量，爲$120^{石}\div\left(36-12\times\frac{6}{7}\right)=4^{石}\frac{2}{3}$.

273. 有高15尺之檜，與9尺之桐，其長成之度，檜爲桐之三分之一，經7年後，檜之高爲桐之高之三十九分之三十七，問每年各長幾尺.

解 將桐每年長成之高爲1，則檜每年長成之高爲$\frac{1}{3}$，依題意，檜15尺與其7年長成之尺數之和，等於桐9尺與其7年長成之尺數之和之$\frac{37}{39}$．故桐7年長成者之$\frac{37}{39}$，與檜7年長成者之差，爲$15-\frac{37}{39}\times9$，卽$\frac{84}{13}$尺．故桐每年之長成爲$\frac{84}{13}^{尺}\div\left(\frac{37}{59}\times7-\frac{1}{3}\times7\right)$

$=1^{尺}\frac{1}{2}$，即1尺5寸，故檜每年之長成，爲$1^{尺}\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$尺，即5寸.

274. 五月某日生一兒，至八月二十四日，其經過之日數，等於表其生日之數之$6^{倍}\frac{1}{4}$，問其生日如何.

圖 自五月一日至生日之日數爲1，則自其日至八月二十四日之日數爲$6\frac{1}{4}$，故$(31+30+31+24)\div\left(1+6\frac{1}{4}\right)=16$，即生日爲五月十六日.

275. 秦皮樹之苗，植五年後，有6角之價，其後每年增價6角，而因其生長所占地面亦漸廣，至其伐之年，需其年數之二倍之步數，今植其苗每年伐取同數，將其價之五分之一爲雜費，則20畝40步之田，每年最大之收入幾何.

圖 經5年而伐者，則20畝40步即4840步有$\frac{4840}{2\times5}$本，故每年伐取同數之數爲$\frac{2420}{5\times5}$，由是其價爲$6\times\frac{2420}{25}$角.同樣第六年伐之，從此每年伐取同數，則其價爲$6\times\frac{2420}{36}\times2$角，又第7年伐之，從此每年伐取同數，則其價爲$6\times\frac{2420}{49}\times3$角，餘做此，而$\frac{1}{25},\frac{2}{36},\frac{3}{49},\frac{4}{64},\frac{5}{81}$……之分數中，$\frac{4}{64}$最大.由是第8年伐之，從此每年伐取同數，則有最大之收入，而其金額爲$6\times\frac{2420}{64}\times4\times\frac{4}{5}$，即72元6角.

276. 有一事，僅以童子作之，則14日成，若始以大人作一日，以後即以大人與童子隔日作之，即恰以若干日而成，若始以童子作一日，以後即以大人童子隔日作之，則比前多半日，問僅以大人作之，當幾日成.

圖 大表大人，小表童子，$\frac{1}{2}$大表半大人，則本題當爲

大，小，大，小，……大……(1)

小，大，小，大，……小，$\frac{1}{2}$大(2)

即自大人始，則當以大人終，蓋若自大人始，而自童子終，則自童子始，當自大人終，即終於半大人也.故自(1)，(2)，知童子一日所作事等於大人半日所作事，故童子14日所作事，大人當以$14^{日}\times\frac{1}{2}=7^{日}$作成之.

277. 問$\frac{111130}{2111109}-\frac{1}{19}=0.\dot{0}00009\dot{}$之理由.

圖 $\frac{111130}{2111109}-\frac{1}{19}=\frac{1}{19}\times\left(\frac{111130}{111111}-1\right)=\frac{1}{19}\times\frac{19}{111111}=\frac{1}{111111}=\frac{9}{999999}=0.\dot{0}0000\dot{9}$.

單比例

278. 有15斤價36元之物，問50斤之價幾何.

圖 以重量買賣物品之價，與重量成正比例，故所求之價，爲次比例式中x之值，即

$15:50=36:x$，故$x=120$元.

279. 將米若干石，以1100人食之，則45日而盡，若以500人食之，則幾日盡.

圖 食盡一定量之米之人數，與日數成逆比例，故所求之日數，爲次比例式中x之值，即

$500:1100=45:x$，故$x=99$日.

280. 有負債總額，12899元.49，而執行破產者，其負債中，合有應付全額之

稅金 $282^{\text{元}}.27$，今公賣此人之財產得 $10796^{\text{元}}.62$，問債主對於1元當得幾何.

解 公賣之金，雖有 $10796^{\text{元}}.62$，此中有應付全額之稅金，故結局將 $10796^{\text{元}}.62-282^{\text{元}}.27=10514^{\text{元}}.35$，分償 $12899^{\text{元}}.49-282^{\text{元}}.27=12617^{\text{元}}.22$ 之負債，由是對於1元債主受取之金，為 $12617^{\text{元}}.22:1^{\text{元}}=10514^{\text{元}}.35:x^{\text{元}}$，故 $x=\underline{8^{\text{角}}.43}$ 强.

281. 清算某破產者之財產，定為負債每100元発付 $32^{\text{元}}.5$，後查出負債中有1200元已經償還，於是負債每100元発付48元，問此人負債之總數幾何.

解 $48^{\text{元}}-32^{\text{元}}.5$ 之差，因1200元已經償還也，故有次之比例式，$48-32.5:32.5=1200:x$ 故 $x=\underline{2516^{\text{元}}.129}$.

282. 日本明治三十七年第一回國庫債劵壹億圓，其應募總額有452,115,100圓，其中每戶200圓以下及最低價額以上之應募者皆募入之，總額為85,097,250圓，而其不足額，則比例於其他之應募者募入之，斯時分配於應募壹萬圓之人，其債劵之金額如何，但債劵額面少於百圓者，有50圓及25圓之二種，未滿25圓捨之.

解 $452115100^{\text{圓}}-85097250^{\text{圓}}=367017850^{\text{圓}}$ 為最低價額之應募金，而 $100000000^{\text{圓}}-85097250^{\text{圓}}=14902750^{\text{圓}}$，為應分配於200圓之應募者之數，由是得次之比例式，即 $367017850^{\text{圓}}:14902750^{\text{圓}}=10000^{\text{圓}}:x^{\text{圓}}$，故 $x=406^{\text{圓}}$ 餘，但25圓未滿者切去，故所求債劵金額為 $\underline{400}$圓.

283. 買筆若干支，每12支價72錢，以150錢賣出20支，問得幾錢之利益.

解 20支之價，由比例式 $12:20=72:x$，知為120錢，故有 $150^{\text{錢}}-120^{\text{錢}}=\underline{30^{\text{錢}}}$ 之利益.

284. 有守備隊1500人，其糧米足支33個月，今增兵700人，問此糧米足支幾個月.

解 食盡一定之米之月數，與人數成反比例，故 $1500^{\text{人}}+700^{\text{人}}:1500^{\text{人}}=33^{\text{月}}:x^{\text{月}}$，故所求之月數為 $\underline{22^{\text{月}}.5}$.

285. 每日快3分12秒之時表，於月曜日之正午，與眞時對準，問火曜日之午後三時，此時表指何時.

解 自月曜日之正午，至火曜日之午後三時，有27時間，故自 $24^{\text{時}}:27^{\text{時}}=3^{\text{分}}\ 12^{\text{秒}}:x^{\text{分}}$，得 x 為 $3^{\text{分}}36^{\text{秒}}$，即此時表當快 $3^{\text{分}}36^{\text{秒}}$，故所求之時刻，為午後 $\underline{3^{\text{時}}3^{\text{分}}36^{\text{秒}}}$.

286. 以農夫7人，每日勞動10時間，一週間所耕之田，今欲於5日耕完之，問每日之勞動當增幾時間，但一週中末一日休息.

解 初農夫耕一週，然末日休息，故其眞勞動之日數為6日，故此田以6日耕完，每日須勞動10時間，因而求以5日耕完，每日須勞動幾時間，凡一定之事，每日勞動時間之數，與日數成反比例，故其時間之數為適於比例式 $5:6=10:x$ 之 x 之值，即為12時間，故每日當增 $\underline{2}$時間.

注意 本題農夫之人數，與答數無關係.

287. 有新設橋梁，每日役工56人，則150日可成，然忽因事故發生，欲以80日成之，問當增工幾人.

解 一定之事，役工之人數，與從事之日數，成逆比例，故求80日可成之人數，則自比例式 $80:150=56:x$，得 $x=105$，即105人. 由是當更增 $105^{\text{人}}-56^{\text{人}}=\underline{49^{\text{人}}}$.

288. 今掘一淵,每日使役工夫150人,則90日可成,若欲早30日成,須增工夫幾人.

解 一定之事,作成之日數,與人數成逆比例,故此事欲使90日－30日＝60日成,則可自60：90＝150：x得x＝225人,由是須再增225人－150人＝75人.

289. 將米7石3斗6升,作4斗之包,其未滿一包者,賣得3元4分,問賣全包數,當得幾何.

解 自7石3斗6升作4斗之包,則得18包與其餘米1斗6升,此1斗6升之價爲3圓4分,故一包之價爲自16：40＝3.04：x而得之x之値也.由是x＝7圓6角,故賣全包數,則爲7圓.6×18＝136圓.8,卽136元8角.

注意 上解中一包之價以下,可改爲「爲自16升：736升－16升＝3圓.04：x圓而得x之値,卽136圓8角爲所求之數.」

290. 以5元2角一石之小麥,製麵包130斤,其價爲8元4角5分,問以5元8角一石之小麥,製麵包130斤,其價如何.

解 以重量買賣之物,其重量與價値成正比例,故所求之價,得次之比例式.卽5.2：5.8＝8.45：x,故x＝9.425卽9元4角2分5厘.

注意 兩次麵包俱爲130斤,故此斤數於解無關係.

291. 欲於一週間成一事,甲匠則需8人,乙匠則需9人,今傭甲匠4人與乙匠幾人,則8日與4時間可成,但一日作事10時間.

解 一日之作事爲10時間,故8日與4時爲8日.4,先因一週間成此事,甲要8人,而8日.4成此事,甲要幾人,因人數與日數成逆比例,故其人數爲適於比例式8.4：7＝8：x之x之値,卽$x=\frac{20}{3}$.故於其中$\frac{20}{3}-4=\frac{8}{3}$,變爲作事之乙,卽爲所求之數.依題文,甲8人與乙9人所作事相同,故此之乙爲比例式8：9＝$\frac{8}{3}$：x之x,卽爲3人.

292. 有桿長7尺,欲以之掀動450斤之物,但人力能動54斤,問支點當在何處.

解 依物理學上之原則,自支點至重點與力點之距離,爲重與力之逆比例,今將自支點至力點之距離爲x,則得比例式450＋54：450＝7：x,故x＝6尺.25.

注意 此答爲可取之支點之最近於力點者,故此點與重點間之點,皆爲所求之點也.

293. 有重160斤之石,以長8尺之桿,使甲乙二人荷之,甲只能荷60斤,問甲至重物之距離幾尺.

解 甲只能荷60斤,故乙必荷100斤.而甲乙所荷之斤數,與自甲乙至重物之距離,成逆比例,由是自甲至重物爲$\frac{100}{160}\times 8$,卽5尺.

注意 參照前題之注意.

294. 牛25頭,羊10頭,一個月之食草,若僅以羊25頭食之,則能食二個月,問若僅以牛12頭食之,則能食幾個月.

解 題文中之草,以牛25頭羊10頭一個月食盡,而牛與羊一日食料之比,爲40與25之比,何也,牛25頭一月食盡之食料,以羊25×2－10卽40頭一月能食盡之故也.但全草以羊食之,則25頭×2＝50頭一月食盡之,故牛一頭則以$50\times\frac{25}{40}$卽$\frac{125}{4}$月食盡,由是以牛12頭,則$\frac{125}{4\times 12}=\frac{125}{48}$卽2月$\frac{29}{48}$食盡.

295. 男子3人之食糧,等於女子5人之食糧,今有男子10人與女子5人3日之食糧,以女子10人食之,問幾日盡.

解 男子一人之食糧,與女子一人之食糧之比爲5:3,故男子10人女子5人之食糧,與女子10人之食糧,爲$(10\times5+5\times3):10\times3$,即13:6之比,而一日之食糧與食盡一定食糧之日數,成逆比例,故$6:13=3:x$,由是$x=$6日.5爲所求之日數.

296. 有父子耕一田,父一人須20時間,若子助之,則16時間耕完,問子一人耕之,須幾時間.

解 父一人之力若爲16,則父子共同之力爲20,故以此比例,而子一人之力爲$20-16=4$,由是得次之比例式$4:20=16:x$,故$x=80$,即所求時間之數.

297. 米若干石,以1元6升之行市買之,若1元貴1升買之,則得6元之利,問米爲若干.

解 買價與賣價之比,等於一元買量與賣量之反比,即5:6,故買價與賣價之差,即爲利益,此利益與買價之比,爲$6-5:5$,即1:5.由是買價可自$1:5=6^{元}:x^{元}$得$x=30^{元}$,因而米量爲$6^{升}\times30=180^{升}$,即1石8斗.

298. 測一直樹之影,得4丈2尺,其時立一垂直6尺之竿於地,其影之長爲7尺,問樹之高.

解 影長7尺之竿之長爲6尺,故樹之高爲比例式$7^{尺}:6^{尺}=42^{尺}:x$之x之值,故$x=36^{尺}$.

299. 有甲乙二人競走,甲30丈,乙在後3丈,問乙走81丈,則甲在前幾何丈.

解 乙走$30^{丈}-3^{丈}=27^{丈}$,甲在前$3^{丈}$,故乙走81丈,可求甲在前幾何丈,即$27:81=3:x$,故$x=9$丈.

300. 行某距離,每時之速,甲爲3里,乙爲5里,而甲比乙多費6時間,問此距離如何.

解 行同距離時間之比,等於每時之速之比之反比,故甲與乙行所求距離時間之比爲5:3.由是$5-3:5=6:x$,故得甲行此距離之時間爲15.由是所求之距離爲3×15即45里.

301. 作某事男子3人之力,等於女子4人之力,今將此事,以男子4人與女子9人作之,則5日成,若以男子5人女子4人作之,問幾日成.

解 男子之力若爲4,則女子之力爲3,故以此比例,而男子4人與女子9人之力爲$4\times4+3\times9=43$,而男子5人與女子4人之力爲$5\times4+4\times3=32$,而作事之力與日數成逆比例,故得次之比例式,即$32:43=5:x$,由是$x=$6日$\frac{23}{32}$.

302. 有父子共作一事,其力之比,子爲父之三分之二,今以父一人4日作成之事,二人共作之,問幾日成.

解 父子共力作事,則所作爲父一人之$1+\frac{2}{3}$倍,故得次之比例式,即$1\frac{2}{3}:1=4:x$.由是所求之日數,爲$x=2\frac{2}{5}$.

303. 有甲乙二工夫,其力之比,甲與乙如3與2今以甲乙二人3日可作成之事,以乙一人作之,問幾日成.

解 甲與乙其力之比,如3與2,故甲乙共同之力如5.由是所求之日數,爲次比例式中x之值,即$2:5=3:x$,故$x=$7日.5.

304. 有甲乙二人,甲3日作成一事,乙2日成其事之四分之三,今甲一人9日可作成事,問乙當幾日作成之.

解 乙初之作事,須$2\div\frac{3}{4}$,即$\frac{8}{3}$日,故後之作事之日數,可自$3:\frac{8}{3}=9:x$得之,即8日.

305. 男15人女12人童9人共作某事,50日能成,今以男9人女15人童18人作某事之四倍,問幾日能成. 但男女童能力之比,如3與2與1之比.

解 因能力為男3女2童1之比,故男15女12童9能力之比,等於$3\times15+2\times12+1\times9=78$. 又男9女15童18能力之比,等於$3\times9+2\times15+1\times18=75$. 故問題可如次求之,即每日以78之能力作之,則須50×4,即200日成之,若每日以75之能力作之,當幾日成. 故得次之比例式,即$75:78=200:x$, $x=208$日. 即所求之日數.

306. 女7人之工價,等於男4人之工價,今男48人女14人得98元之工價,問以男幾人與女20人於同時日間,可得工價49元.75.

解 男一人之工價為7,則女一人之工價為4,故以此比,而男48人與女14人之工價,為$7\times48+4\times14=392$. 但對於此之金額為98元,故相當於49元.75之比,可自$9800:4975=392:x$,而得$x=199$. 而此數為對於女20人與男若干人之比,故其中對於男之比,為$199-4\times20=119$. 由是男之數,為$119\div7$,即17人.

307. 有甲乙二數,其比為7:9,其差為26,問二數各如何,又甲之3倍,等於乙之2倍$\frac{1}{5}$,而甲乙之差為80,問各數如何.

解I. 甲數若為7,則乙數為9,而其差為2,故甲乙可自次之比例式得之,$2:7=26:$甲,$2:9=26:$乙. 故甲為91,而乙為117.

解II. 甲與乙之比,如$2\frac{1}{5}$與3之比,由是甲可自$3-2\frac{1}{5}:2\frac{1}{5}=80:x$得之,乙可自$3-2\frac{1}{5}:3=80:x$得之,即甲為220,而乙為300.

注意 自比例式得甲或乙,則可加減80而得乙或甲.

308. 有數分之為左右二等分,若自左數減3,加於右數,則其結果為5與8之比,問原數幾何.

解 左數為5,則右數為8,其差為$8-5=3$,但實際左右之差為$3\times2=6$,而在前之比例兩數之和為$8+5=13$,由是$3:13=6:x$,故兩數之和,即原數$=26$.

309. 有甲乙二人,其所有金之比為7:9,而乙將其金之三分之一與甲,次將甲之七分之一與乙,則甲比乙多32元,問初之各有金幾何.

解 甲為7乙為9,故乙將$\frac{9}{3}=3$與甲,則甲為10,而乙為6. 次甲將$\frac{10}{7}$與乙,則甲為$\frac{60}{7}$,而乙為$\frac{52}{7}$. 由是甲比乙多$\frac{8}{7}$,其金為32元,故甲之原有金,可自$\frac{8}{7}:7=32^{元}:x^{元}$,得$x=196^{元}$,乙之原有金,可自$\frac{8}{7}:9=32^{元}:x$,得$x=252^{元}$.

310. 粉飾徑8寸之球面,費16時間,若粉飾徑1尺之球面,需幾時間.

圖 球之表面積，與徑之自乘成比例，故 $8^2:10^2=16:x$，由是所求時間之數為 $x=25$，即 25 時間.

311. 有上下二種砂糖，上 5 斤之價，等於下 6 斤之價，今將上砂糖 3 斤，盛入盒內，則其價為 510 錢，若將下砂糖 3 斤盛入此盒，則其價幾何．但此盒之價為 150 錢.

圖 上一斤之價為 6，則下一斤之價為 5，故上 3 斤之價為 $6\times3=18$，而實際為 $510^{錢}-150^{錢}=360^{錢}$，故對於下 3 斤，即 $5\times3=15$ 之金額，為 $18:15=360:x$ 之 x 之值，即 300 錢．故盛入於盒內為 450 錢.

312. 空氣立積，百分中含酸素 $20^{分}.7$ 窒素 $79.^{分}3$，(假定不含他原素)又酸素及窒素各一立方尺之重之比，如 8 與 7，則空氣重之百分中含幾分之酸素及窒素，各求至小數一位以下，用四捨五入.

圖 酸素窒素立積之比，為 207 與 793，同立積兩元素之重之比，如 8 與 7，故空氣百分中所含兩元素之重之比，如 $20.7\times8=165.6$ 與 $79.3\times7=555.1$，由是得次之比例式，即 $165.6+555.1:100=165.6$：酸素，故酸素$=23.0$弱．$165.6+555.1:100=555.1$：窒素，故窒素$=77.0$強.

313. 有兵卒 2 小隊，每隊 80 人，將 4 人為一列，每列之距離為 3 尺，每 2 分間進行之速為 415 尺 8 寸，今過 576 尺之橋，當費幾何時間.

圖 因每列為 4 人，故列數為 $80\times2\div4=40$，而各列之間隔為 3 尺，故全列之長為 $3^{尺}\times(40-1)=117^{尺}$．又全通過橋之時間，為行過列長與橋長之和之時間，由是所求之時間，為比例式 $415^{尺}.8:576^{尺}+117^{尺}=2^{分}:x^{分}$ 之 x 之值，即 3 分 20 秒.

314. 35 人豫定 50 日可成就之事，至 23 日，其中 17 人，忽往他處，問所餘之人，尚須若干日，始能成就此事.

圖 所餘之事，以 35 人作之，則於 $50^{日}-23^{日}=27^{日}$ 可成就，然以 $35^{人}-17^{人}=18^{人}$ 作之，故所求之日數，可自比例式 $18:35=27:x$ 得之，即 $52.^{日}5$.

315. 犬追兔，兔在 60 步前，而兔走 9 步時間，犬走 6 步，又兔 7 步之距離，等於犬之 3 步，問犬走幾步，得追及兔.

圖 犬走 3 步之距離，等於兔 7 步，故犬走 6 步之距離，等於兔之 $6^{步}\times\frac{7}{3}=14^{步}$，但犬走 6 步之時間，兔走 9 步，故犬每走 6 步近於兔者，為兔之 $14^{步}-9^{步}=5^{步}$，故犬追近兔之 60 步，則犬之步數為比例式 $5:60=6:x$ 之 x 之值，即 72 步.

316. 甲乙丙三人，繞一池周，三人同時同所出發，甲反於乙丙二人而行，而甲乙丙各一分間之速為 36 丈，33 丈，27 丈，今甲遇乙後，2 分間遇丙，問池周之長.

圖 甲自遇乙後至遇丙之時間為 2 分間，故甲遇乙時，距丙為 $(36^{丈}+27^{丈})\times2=126^{丈}$，即乙遇甲時，丙後於乙之距離也．即三人自出發至此時之時間，為比例式 $33-27:126=1^{分}:x^{分}$ 之 x 之值，即 21 分．故所求池之周圍，為 $(33^{丈}+36^{丈})\times21=1449^{丈}$，即 8 里 9 丈.

317. 有酒缸，容酒若干，其中所含純酒與水之比，為 $17:3$，今再混入水 3 升，則其比為 $4:1$，問初缸中，容酒幾何.

圖 純酒與水之比，等於 $17:3$，則純酒為 4，故水之量可自 $17:3=4:x$，得

$\therefore x=\frac{12}{17}$. 但混水3升,則純酒爲4,而水之量爲1,是純酒之量前後相同,而$1-\frac{12}{17}=\frac{5}{17}$爲對於3升之差,故後者之總量,可自$\frac{5}{17}:4+1=3:x$,得$x=51$升.因而初之總量爲$51^{升}-3^{升}=48^{升}$,即4斗8升.

318. 甲乙二球,體積之比,等於其半徑之立方之比,今甲乙二球等積部分之重之比,爲12:7,而甲球之重爲256兩,問乙球之重如何.但半徑之比爲4:5.

圖 甲乙二球體積之比爲$4^3:5^3$,而等積部分之比爲12:7,故甲乙二球之重之比爲$12\times4^3:7\times5^3$,而甲球之重爲256兩,故乙球之重爲$256^{兩}\times\frac{7\times5^3}{12\times4^3}=291^{兩}\frac{2}{3}$.

319. 以男子175人,童子240人,於55日5時間作成之事,設以男子603人,童子1005人作之,則14日7時間能成,問男子與童子一日作事能力之比.但一日作事12時間.

圖 以男子175人,童子240人,以55日5時間,即$12^{時}\times55+5^{時}=665^{時}$間,作成之事,故以男子$175\times665$人,與童子$240\times665$人,能於1時間作成之……(1).又以男子603人,與童子1005人,以14日7時間,即$12^{時}\times14+7^{時}=175^{時}$間,作成同前之事,故以男子$603\times17$人,與童子$1005\times175$人,能於1時間作成之……(2).由此(1),(2)得男子$(175\times665-603\times175)$人,所作之事,等於童子$1005\times175-240\times665)$人所作之事,即男子2人所作之事等於童子3人所作之事,由是男子與童子各一日所作事之比,爲此逆比3:2.

320. 有一工場,每日用一定人數之工人,作工一定之時間,而工人中有甲乙二組,每週一人之工錢,甲組爲3元1角8分,乙組爲2元2角2分,而各組一人之力之比,甲與乙如5與4,今欲縮短成功之時日,僅用一組之工人,則比僅用他組之工人早成4週間,而工錢則多648元,若自兩組各取半數之工人,問工錢當爲若干.

圖 乙組工人與甲組工人成業週數之比,爲$1:\frac{4}{5}$,而乙組比甲組遲4週,故乙組成業之週數,爲$4^{週}\div\left(1-\frac{4}{5}\right)=20$週,因而甲組成業之週數爲$20^{週}\times\frac{4}{5}=16^{週}$.又甲組一人16週間之工錢,爲$318^{分}\times16=50^{元}8$角8分,乙組一人20週間之工價,爲$222^{分}\times20=44^{元}4^{角}$.因各組之人數相等,故$64800\div(5088-4440)$,即得100人.次自兩組各取半數之工人,成業之週數爲$\frac{5+4}{2}:4=2:x$,故$x=\frac{160}{9}$週或$\frac{5+4}{2}:5=16:x$,故$x=\frac{160}{9}$,故所求之工錢,爲$(318^{分}+222^{分})\times50\times\frac{160}{9}=4800^{元}$.

321. 鉛60立方糎,與可爾克54立方糎之重,等於木$1538\frac{2}{3}$立方糎之重,又鉛與木等積之重之比,爲11.324:0.45,問此與等積可爾克之重之比如何.

圖 立方糎略記爲*c.c.m.*則鉛60 *c.c.m.*與可爾克54 *c.c.m.*之和之重,等於木$1538\frac{2}{3}$*c.c.m.*之重,故可爾克54 *c.c.m.*

之重,等於自木$1538\frac{2}{3}$ c.c.m. 之重減木$60\times\frac{11.324}{0.45}$即$1509\frac{13}{15}$ c.c.m. 之重,即等於木$\left(1538\frac{2}{3}-1509\frac{13}{15}\right)28$即$\frac{4}{5}$ c.c.m. 之重,故可爾克與木等積之重之比,爲28.8:54,即0.24:0.45,故等積之鉛與可爾克與木之重之比,爲11.324:0.24:0.45,故所求表可爾克之重之數爲0.24.

322. 某軍艦乘600人,豫備17週間之食料,解纜後,經一週間,救漂流人150人,使其乘2週間上陸,問食料尙能支幾週.

解　救上漂流人,則爲750人,故此人數2週間之食料,以600人食之,則自600:750=2:x,得x=2週.5,即食2週.5之食料,其初已食去1週間,今又食去2週.5,由是所餘,恰可食17週−(1週+2週.5)=13週.5.

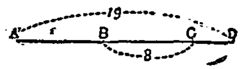
323. 某城內,有士官與兵士共600人,婦人210人,童子120人,有糧米55石5斗8升,婦人一人給兵士一人三分之二之糧,童子一人給婦人一人四分之三之糧,則可支10日,但第6日之夜,士官3人率兵士200人,護衛婦人童子,拔城出,問所餘士官兵士,尙能支幾日.

解　婦人201人之食糧,等於兵士$201\times\frac{2}{3}=134$人之食糧,童子120人之食糧,等於兵士$120\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=60$人之食糧,故本題可云兵士若爲134+60+600=794人,則有10−6=4日之食糧,今以600−203=397人食之,問可支幾日,故所求之日數,爲4日$\times\frac{794}{397}$=8日.

注意　本題糧米55石5斗8升,與解無關係.

324. 一直線上,有A,B,C,D,四驛,AD之間爲133里,BC之間爲56里,今甲自A,乙自D,同時相向而行,乙至不及B 7里時,甲已過C 23里$\frac{1}{3}$,問AB及CD之距離如何.

解　甲自A越過C 23里$\frac{1}{3}$其所行道程,與甲乙二人所行道程之和之比,爲



2.5:2.5+1.5,即2.5:4,斯時甲乙之距離爲$56+23\frac{1}{3}-7$,即72里$\frac{1}{3}$,故甲乙二人所行道程之和,爲133里+72里$\frac{1}{3}$=205里$\frac{1}{3}$,由是甲所行道程205里$\frac{1}{3}\times\frac{2.5}{4}$=128里$\frac{1}{3}$,故AB=128里$\frac{1}{3}$−56里−23里$\frac{1}{3}$=49里,而CD=133里−49里−56里=28里.

325. 有甲乙二種煤,甲種10000斤28圓乙種10000斤21圓5角,將甲種26500000斤,換乙種,尙收回10000圓,問乙種煤10000斤,有若干之折扣.

解　甲煤2650萬斤之價爲28圓×2650=74200圓,故作爲乙煤74200圓+10000圓=84200圓即得,換言之,即將84200圓之乙煤折扣爲74200圓,與甲煤交換可也.由是求得適於次比例式之x,即84200:74200=21.5:x,故x≒18圓.947.

326. 有父子,8年前,父年爲子年之4倍,自今8年後,父年爲子年之2倍.5,問現時父子年各若干.

解　8年前父子年齡之比爲4:1,斯時父年齡與父子年齡之差之比,爲4:4−1,即4:3,又8年後父子年齡之比爲2.5:1,即5:2,斯時父年齡與父子

年齡之差之比，爲$5:5-2$，即$5:3$ 但年齡之差爲一定，而8年後與8年前，即增加16年，因而父之年齡對於其差3，而4變爲5，故$5-4:4=16:$(8年前父子年齡)，由是8年前父之年齡爲64歲，子年齡爲16歲，是現今父年齡爲64歲+8歲=72歲．而子現年爲24歲．

327. 有甲乙二等農夫，雇甲種若干人，3日耕田5000步，尚餘田25000步，再增甲種6人，乙種10人，其後經6日，而全耕完，問初雇之甲夫幾人．但甲乙之力之比爲$5:3$．

解 初以甲若干人，一日耕田$\frac{5000}{3}$步，後增甲6人乙10人，一日耕田$\frac{25000}{6}$步，故後一日所作事，比初一日所作事，多$\frac{25000}{6}$步$-\frac{5000}{3}$步$=2500$步，而甲6人乙10人，等於甲之6人+10人$\times\frac{3}{5}=$12人，即後者因甲多12人，多耕田2500步，故自次之比例，而知初之甲之人數，即$2500:\frac{5000}{3}=12:x$，故$x=8$人．

328. 長264呎之通常火車，與急行火車，自相遇至相離，計經7秒，又通常火車中之人，見急行火車經3秒行過，且急行車之速，與通常車之速之比，如5與4，問通常車與急行車，各一時間行幾哩，又急行車之長如何．

解 二車之首端，於二車相遇時相合，又二車相離時，其相距當等於二車之長之和，故二車7秒間所行距離之和，等於二車之長之和．同樣3秒間所行距離之和，等於急行車之長，故7秒−3秒=4秒間所行距離之和，等於通常車之長，即264呎．由是1時間即60×60秒間所行距離之和，即速之和爲$\frac{264}{5280}\times\frac{60\times60}{4}$即45哩，而急行與通常車之速之比如5與4，故急行車之速爲45哩$\times\frac{5}{9}=25$哩．又通常車之速爲45哩$\times\frac{4}{9}=20$哩．又二車所行距離之和，4秒間爲264呎，而3秒間爲急行車之長，故急行車之長，爲$264\times\frac{3}{4}$，即198呎．

329. 有甲乙二商，其資本之比如4與5，甲得利60圓，乙損失70圓，於是各所有金之比如9與4，問各之資本幾何．

解 先於甲加60圓，而甲乙所有金之比不變，仍爲$4:5$，則乙當加60圓$\times\frac{5}{4}=75$圓．但甲加60圓者，與自乙減70圓者之比，爲$9:4$，又甲加60圓者，與乙加75圓者之比，爲$4:5$，故自乙減70圓者，與自乙加75者之比，爲$\frac{4}{9}:\frac{5}{4}$，即$16:45$，故$45-16:45=75+70:x$，故$x=225$圓，爲乙加75圓者，由是乙之資本爲150圓，因而甲之資本爲120圓．

330. 有四水車，甲3廻轉時，乙4廻轉，乙5廻轉時，丙6廻轉，丙8廻轉時，丁11廻轉，問此四車廻轉數之比如何．

解 甲3廻轉時乙4廻轉，故甲1廻轉時乙$\frac{4}{3}$廻轉，又乙5廻轉時丙6廻轉，故乙$\frac{4}{3}$廻轉時，丙之廻轉，爲適於比例式$5:\frac{4}{3}=6:x$之x之值，即$\frac{8}{5}$廻轉，丙8廻轉時，丁11廻轉，故丙$\frac{8}{5}$廻

轉時，丁之廻轉，有適於比例式 $8:\frac{8}{5}=11:x$ 之 x 之值，卽 $\frac{11}{5}$ 廻轉，故甲乙丙丁廻轉數之比，爲 $1:\frac{4}{3}:\frac{8}{5}:\frac{11}{5}$，或以其分母之最小公倍數 15 乘之，而得整數之比，則爲 15 : 20 : 24 : 33.

注意 求此連比之簡法如次.

甲		乙		丙		丁
3	:	4		→4		→4
5←		5	:	6		→6
8←		8←		8	:	11
120	:	160	:	192	:	264

先置甲乙丙丁四處，於其下書對應之比，其右肩左脊無數字處，書其同列最近之數字，[以矢示之]乃將其同行之數相乘，卽得所求之連比，如斯所得之連比，非最簡單者，故當簡約之上數以 8 約之卽得.

331. 有甲乙丙丁戊五數，甲與乙如 5:4，乙與丙如 7:8，丙與丁如 5:6，丁與戊如 2:3，問甲乙丙丁戊五數之比如何.

解 如前題之注意，卽

甲		乙		丙		丁		戊
5	:	4		→4		→4		→4
7←		7	:	8		→8		→8
5←		5		5	:	6		→6
2←		2←		2		2	:	3
350	:	280	:	320	:	384	:	576

省其公約數，卽

175 : 140 : 160 : 192 : 288

332. 甲走 3 步時，乙走 5 步，乙走 8 步時，丙走 9 步，丙走 15 步時，丁走 16 步，又甲之 4 步，與乙之 5 步，丙之 6 步，其長相等，乙之 6 步，丁之 7 步，其長亦相等，問各人步行之速之比.

解

甲		乙		丙		丁
3	:	5		→5		→5
8←		8	:	9		→9
15←		15	:	15	:	16

$3\times8\times15:8\times5\times15:5\times9\times15:5\times9\times16.$

又

甲		乙		丙		丁
4	=	5	=	6		
		6		=		7

$\therefore\ 4\times6=5\times6=6\times6=7\times5.$

由是甲乙丙丁之速之比，爲 $\frac{3\times8\times15}{4\times6}:\frac{5\times8\times15}{5\times6}:\frac{5\times9\times15}{6\times6}:\frac{5\times9\times16}{7\times5}$ 簡約之爲 420 : 560 : 525 : 576.

333. 有人乘自轉車 5 日，第一日乘 7 時間行 50 哩，第二日乘 $9^{\text{時}}\frac{1}{2}$ 間行 70 哩，第三日乘 $10^{\text{時}}\frac{1}{4}$ 間行 104 哩，第四日乘 $8^{\text{時}}\frac{1}{2}$ 間行 70 哩，第五日乘 $6^{\text{時}}\frac{1}{4}$ 間行 56 哩，問每時平均當行幾哩，且問三週間當行若干哩，但日曜日停止.

解 $7+9\frac{1}{2}+10\frac{1}{4}+8\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}$，卽 $41^{\text{時}}\frac{1}{2}$，共行 $50+70+104+70+56$，卽 350 哩，由是每時之平均爲 $350^{\text{哩}}\div41\frac{1}{2}=8^{\text{哩}}\frac{36}{83}$.

次於 5 日間行 350 哩，故三週間卽 18 日間，當行 $\frac{350}{5}\times18=1260$，卽 1260 哩.

334. 甲乙丙三人競走，其速之比，如 8:9:10，但丙達中央時，其速之比改爲 10:9:8，問決勝點之次序如何.

解　將全路假設爲1，則因其初速之比爲8：9：10，故丙行$\frac{1}{2}$間，甲$\frac{8}{2\times10}=\frac{2}{5}$，乙行$\frac{9}{2\times10}=\frac{9}{20}$而其餘丙爲$\frac{1}{2}$，甲爲$\frac{3}{5}$，乙爲$\frac{11}{20}$，但其後速之比爲10：9：8，故行此殘路所需時間之比，丙爲$\frac{1}{2\times8}=\frac{1}{16}$，甲爲$\frac{3}{5\times10}=\frac{3}{50}$，乙爲$\frac{11}{20\times9}=\frac{11}{180}$，化爲同分母，而甲爲$\frac{216}{3600}$，乙爲$\frac{220}{3600}$，丙爲$\frac{225}{3600}$，即甲時間最少，乙次之，丙最多，故達決勝點之次序，當爲甲乙丙.

時表之問題

335. 時表之長針與短針，4時後於幾分相重.

解　短針指4時，長針指12時，故長針若比短針多走20分，則短針當與長針相重，而長針每走12分，每比短針多走11分，故長針走$\frac{12}{11}$分，當追近短針1分，由是長針走$\frac{12}{11}\times20$分，當追近短針20分，故所求之分數，爲$\frac{12}{11}\times20$，即4時21分$\frac{9}{11}$，即21分49秒$\frac{1}{11}$.

注意　本題長針短針，皆假定爲以同一之速，連續運動者，但實際時表之針，因齒輪而動，其速非連續同一者，乃一瞬間一飛越之運動也. 故上解法所得之答，尙非眞實者. 然通例恆如上解之.

336. 問時表之兩針，12時後，初成直角爲何時何分.

解　12時之兩針相重，故長針越過短針15分之時，即爲所求之時，但如前題多走12−1=11分，則長針必走12分. 由是將x爲所求之分數，則得次之比例式11：15=12：x，故x=16分21秒$\frac{9}{11}$.

337. 問時表兩針，在5時與6時之間成直角之時.

解　先求5時後，長針在短針之後，而兩針成直角之時. 因5時之長針指XII，短針指V，故長針比短針多走25−15即10分，則爲兩針成直角之時，而長針每行12分，則比短針多行12−1即11分，因有次之比例式，即11：10=12：x，故$x=10\frac{10}{11}$，即過5時者爲10分$\frac{10}{11}$，即10分54秒$\frac{6}{11}$. 次求5時後長針追過短針針成直角之時，即11：25+15=12：x，故$x=43\frac{7}{11}$，即過5時者，爲43分$\frac{7}{11}$，即43分38秒$\frac{2}{11}$.

注意　如本題「問何時與何時之間成直角之時」，則凡適於題意之時須皆求之，若「問何時後成直角之時」則惟求一初成直角之時可也.

338. 問3時後幾分，時表兩針始成反對之方向.

解　成反對之方向，則兩針當相隔30分，故分針比時針當多走30+15=45分，故45÷(60−5)，即$\frac{9}{11}$時，即49分5秒$\frac{5}{11}$，爲所求之數.

339. 問7時與8時之間，時表兩針，成一直線，爲7時後之何分.

解　7時之時，短針在長針5×7=35分之前，故成一直線，即兩針相隔30分.

則長針比短針當多走35—30即5分,由是有次之比例式,即$11:5=12:x$,即$5^{分}27^{秒}\frac{3}{11}$.

注意 自7時至12時有25分,而$25<30$,故長針越過短針後,無適於題意之時刻.

340. 問2時後長針與短針成直角之時,又其次成直角之時如何.

解 2時之長針在短針10分後,故長針當走過短針15分之前,則兩針成直角,故長針比短針多走$10+15=25$分,則兩針成直角,因而$25\div\left(1-\frac{1}{12}\right)$,即$27^{分}\frac{3}{11}$,即2時之$27^{分}\frac{3}{11}$. 又其次成直角,則因長針在短針45分之先,故長針當比短針多走$10+45=55$分,因而$55\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=60$,即2時之60分,故為3時.

341. 4時與5時之間,見時表之V,在兩針之中央,問其時刻如何.

解 時表為4時與5時之間,故短針在IV與V之間,長針在V與VI之間,而V在兩針之中央,故4時兩針廻轉分數之和,為$25+5=30$,若將分針廻轉之分數為1,則時針廻轉之分數為$\frac{1}{12}$,故所求之時為$30\div\left(1+\frac{1}{12}\right)$,即$27^{分}\frac{9}{13}$,即$4^{時}27^{分}\frac{9}{13}$.

342. 3時與4時之間,見時表之XII,在兩針之中央,問其時刻如何.

解 依題意,自III至時針等於自分針至IX,故3時後,兩針經過之分數,為45,由是與前題同樣,$45\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=41\frac{7}{13}$,即3時後之$41^{分}\frac{7}{13}$.

343. 時表之時分,兩針經若干分,則相重一次.

解 時針走5分劃,則分針走60分劃,故分針每60分,比時針多走55分劃,故分針每$\frac{60}{55}$分即$\frac{12}{11}$分,比時針多走1分劃,由是每走$\frac{12\times60}{11}$分,即每$65^{分}\frac{5}{11}$,比時針多走60分劃,而分針比時針多走60分劃,則分針與時針相重.

注意 12時分針與時針相重,故自此過$65^{分}\frac{5}{11}$,即1時後$5^{分}\frac{5}{11}$,而分針重於時針,又自此過$65^{分}\frac{5}{11}$即自12時過$130^{分}\frac{10}{11}$即2時後$10^{分}\frac{10}{11}$,而分針又與時針相重.故時表兩針,1日[1晝夜]即24時間,由$24\times60\div65\frac{5}{11}$而知有22回相重.

344. 時表兩針,若每66分相重,問此時表一日快幾分或慢幾分.

解 依前題時表每$65^{分}\frac{5}{11}$當相重,然本題兩針每66分相重,故此時表兩針每回相重,慢$66-65\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$分,即每66分當慢$\frac{6}{11}$分,故一日當慢$\frac{6}{11}$分$\times\frac{60\times24}{66}=11^{分}\frac{109}{121}$.

345. 時表兩針,每65分相重,問此時表一日快幾分或慢幾分.

解 正時表之兩針,每$65^{分}\frac{5}{11}$相重,故此時表兩針每相重一次,當快$\frac{5}{11}$,即

每65分當快$\frac{5}{11}$分，故一日當快$\frac{5}{11}$分$\times\frac{60\times24}{65}=10$分$\frac{10}{143}$.

346. 時表有將秒針與時針分針同軸裝置者，今時分秒三針相重於正午，則此三針於正午之外，決不相重.

圖 分針走60分，越過時針55分劃，故分針當於$60\times\frac{60}{55}$，即$\frac{720}{11}$分，越過時針60分之分劃，故時針與分針，每$\frac{720}{11}$分相重. 同樣分針與秒針每$\frac{60}{59}$相重. 而此三針相重時分劃之數，爲合$\frac{720}{11}$分與$\frac{60}{59}$分之整數之倍數，故如此分劃數之最小者，即此二分數之最小公倍數720，[以11，59之最大公約數除72，60之最小公倍數者.]爲所求分劃之數，而720分等於12時，故如題言.

寒暑表之問題

注意 華氏寒暑表，冰點32度，沸點212度，攝氏寒暑表，冰點零度，沸點100度，列氏寒暑表，冰點零度，沸點80度，凡解關於寒暑表之問題，當記憶之.

347. 華氏寒暑表50度之溫度，問攝氏寒暑表當爲幾度.

圖 攝氏與華氏度劃之比，爲$100:(212-32)=5:9$，故依次之比例式，得等於華氏50度之攝氏度數，即$9:5=(50-32):x$，故$x=20$度.

348. 攝氏寒暑表60度之溫度，問當華氏寒暑表之幾度.

圖 $5:9=60:x$，故$x=108$，即108度. 但此度數爲冰點上之度數，而華氏度劃冰點下有32度；故108度$+$32度$=$140度.

349. 華氏寒暑表之度數與其改爲攝氏之度數之比，如43與15，試以三氏度數表此溫度.

圖(I) 皆在零度以上者. 自華氏度數減32者之$\frac{5}{9}$，爲攝氏之度數，而此攝氏之度數，又等於華氏度數之$\frac{15}{43}$，即自華氏數之$\frac{5}{9}$，減$32^\circ\times\frac{5}{9}$，$=\frac{160^\circ}{9}$者，等於華氏度數之$\frac{15}{43}$，故華氏度數之$\frac{5}{9}-\frac{15}{43}=\frac{80}{387}$，相當於$\frac{160^\circ}{9}$. 由是華氏之度數爲$\frac{160}{9}\div\frac{80}{387}=86$，即86度，化之爲攝氏，則$86\times\frac{15}{43}=30$即30度. 而列氏度劃，爲攝氏度劃之$\frac{4}{5}$，故以列氏示之則爲$30\times\frac{4}{5}=24$即24度. (II)華氏0度上攝氏0度下者. 此自32減華氏度數之$\frac{5}{9}$，相當於華氏度數$\frac{15}{43}$，由是華氏之度數爲$32\times\frac{5}{9}\div\left(\frac{5}{9}+\frac{15}{43}\right)=19\frac{23}{35}$. 即19度$\frac{23}{35}$. 以攝氏列氏表之，則爲$\left(32-19\frac{23}{35}\right)\times\frac{5}{9}$，即6度$\frac{6}{7}$. 及$6\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}$，即5度$\frac{17}{35}$. (III)皆在0度以下者. 此爲加32於華氏度數之$\frac{5}{9}$，等於其$\frac{15}{43}$，但$\frac{5}{9}>\frac{15}{43}$，故無適於題意之度數.

350. 同溫度，華氏之度，爲列氏之3度$\frac{1}{2}$，問各度數如何.

【解】 僅計算華氏冰點以上之度數,則爲列氏之$\frac{180}{80}=2\frac{1}{4}$,但華氏之度數,爲冰點以上之度數加32者,故列氏度數之$3\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}$卽$1^{倍}\frac{1}{4}$,相當於32度,由是$32\div1\frac{1}{4}=25\frac{3}{5}$,爲攝氏之度數,而華氏之度數爲其$3^{倍}\frac{1}{2}$,卽$89^{度}\frac{3}{5}$.

【注意】 華氏零度上及列氏零度下者,或皆在零度下者,可如前題求之.

351. 同溫度華氏攝氏所示兩度數之和爲144度,問各度數如何.

【解】 僅計算冰點以上,則兩寒暑表度數之和爲$144^{度}-32^{度}=112^{度}$,冰點以上攝氏之100度爲華氏之180度,故合計爲$100^{度}+180^{度}=280^{度}$,故冰點上華氏之度數,可自次之比例式得之.$280:112=180:x$,故$x=72$度,因而華氏之度數爲$72^{度}+32^{度}=104^{度}$,而攝氏之度數爲$144^{度}-104^{度}=40^{度}$.

352. 同溫度華氏與攝氏之度數相等,問其度數.

【解】 在冰點華氏比攝氏多32度,自此以上,華氏之度數,恆多於攝氏,故冰點以上決無兩氏度數相等者,故必於冰點以下求之.而自冰點,向冰點以下,所計度數,華氏比攝氏多32度時,卽所求之時.而攝氏5度,相當於華氏9度,故若欲華氏比攝氏多32度,則由$9-5:5=32:x$,得$x=40$,故攝氏零度以下40度,爲所求之度數.

353. 同溫度,華氏攝氏列氏三度數之和爲86度,問其各度數如何.

【解】 僅就冰點以上之度數考之,則題文之86度爲$86^{度}-32^{度}=54^{度}$,在沸點之時,則爲$180^{度}+100^{度}+80^{度}=360^{度}$,故所求之度數,在攝氏則可自$360:54=100:x$,得$x=15$度,自此可得他氏之度數.

354. 某溫度,以華氏攝氏二表測之,其溫度之差爲48度,問二氏寒暑表所示度數如何.

【解】 華氏攝氏兩度數之差爲48,而華氏度數多於攝氏度數明矣,故在冰點以上,度數之差,爲$48-32=16$,故得$9-5:5=16:x$,故$x=20$,卽爲攝氏之20度而自$9-5:9=16:x$,得$x=36$,加32得華氏之度數68.又冰點度數之差爲$48+32=80$,故自$9-5:5=80:x$,得$x=100$.爲攝氏之度數,而自$9-5:9=80:x$得$x=180$,爲冰點下華氏之度數,故0度下華氏之度數爲$180-32=148$.

355. 同溫度,華氏度數與攝氏度數之差爲52度,問爲列氏幾度.

【解】 華氏之冰點爲32度,故冰點以上華氏攝氏溫度之差爲$52^{度}-32^{度}=20$度,但在攝氏100度,則溫度之差爲$180^{度}-100^{度}=80^{度}$,故自比例式$80:20=100:x$,而知所求之溫度,在攝氏爲25度,故在列氏寒暑表,則自$100:25=80:x$得$x=20$,卽列氏之20度.次於冰點以下華氏攝氏度數之差,爲$52^{度}+32^{度}=84^{度}$,故自比例式$80:84=100:x$,而知所求之溫度在攝氏爲零度以下105度,故在列氏寒暑表,則自$100:105=80:x$,得$x=84$,卽零度下84度.

356. 某溫度,自華氏攝氏列氏所示度數至其各沸點之度數之和,等於華氏所示度數,試以華氏示其度數.

【解】 自華氏所示度數,至沸點之度數,假設爲1,則攝氏之此度數爲$\frac{5}{9}$,而列

氏之此度數為$\frac{4}{9}$，而此三度數之和，為$1+\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=2$，且等於華氏之度數，故再加1之3，則等於華氏之沸點，即等於212度，故華氏之度數為$212^{\text{度}}\times\frac{2}{3}=141^{\text{度}}\frac{1}{3}$.

複比例

357. 米4斗包35包之價，為240圓，問4斗2升包65包之價如何.

圖 價與每包升數，包數，成正比例，

故 $$\left.\begin{array}{r}4^{\text{升}}:42^{\text{升}}\\36^{\text{包}}:65^{\text{包}}\end{array}\right\}=240^{\text{圓}}:x^{\text{圓}},$$

故 $x=\frac{42\times65\times240}{40\times35}=468$，即468圓.

358. 欲得金6圓，則須以4人作事15日，然則欲以5人得金11圓，問須作事幾日.

圖 作事日數，與工錢成正比例，與人數成逆比例，故

$$\left.\begin{array}{r}6^{\text{圓}}:11^{\text{圓}}\\5^{\text{人}}:4^{\text{人}}\end{array}\right\}=15^{\text{日}}:x^{\text{日}},\ \text{故}\ x=22^{\text{日}}.$$

359. 有旅人，每日行8時間，36日行180里，若每日行7時間，欲行210里，問需幾日.

圖 日數與每日所行時間成逆比例，與距離成正比例，故

$$\left.\begin{array}{r}7^{\text{時}}:8^{\text{時}}\\180^{\text{里}}:210^{\text{里}}\end{array}\right\}=360^{\text{日}}:x^{\text{日}},\ \text{故}\ x=48^{\text{日}}.$$

360. 3人4週間之火食為35圓，若13週又5日之火食為200圓，問為幾人.

圖 人數與火食為正比例，與日數為逆比例，故

$$\left.\begin{array}{r}35^{\text{圓}}:200^{\text{圓}}\\13^{\text{週}}5^{\text{日}}:4^{\text{週}}\end{array}\right\}=3^{\text{人}}:x^{\text{人}},$$

故 $x=\frac{200\times28\times3}{35\times96}=5$，即5人.

361. 日本一升，縱橫4寸9分，深2寸7分，問其長6尺3寸闊4尺2寸深9寸8分之箱之容量.

圖 箱之容量與縱橫深皆成正比例，

故 $$\left.\begin{array}{r}49:630\\49:420\\27:98\end{array}\right\}=1^{\text{升}}:x^{\text{升}},$$

故 $x=\frac{630\times420\times98}{49\times49\times27}=400$，即4石.

362. 有甲乙二水池，長之比為4:5，闊之比為7:6，深之比為3:4，以一水道管注水入甲池，則4時40分滿，若以此水道注水入乙池，問幾時間滿.

圖 水滿之時間，與水池容積成正比例，因而與水池之長闊深成正比例，

故 $$\left.\begin{array}{r}4:5\\7:6\\3:4\end{array}\right\}=4^{\text{時}}40^{\text{分}}:x^{\text{時}},$$

故 $x=\frac{5\times6\times4\times4\frac{2}{3}}{4\times7\times3}=6\frac{2}{3}$，即6時40分.

363. 248人於甲地每日作事12時間，$5^{\text{日}}.5$掘長$232^{\text{丈}}.5$闊$2^{\text{丈}}.2$深$1^{\text{丈}}.4$之土，24人於乙地每日作事9時間，問幾日能掘長$387^{\text{丈}}.5$闊3丈1尺5寸深$2^{\text{丈}}.1$之土，但乙地掘7立方尺之工成，等於甲地掘4立方尺之工程.

圖 成功之日數，與人數及，每日作事之時間，工程難易之立方尺數，各成反比例，又與長闊深成正比例，故

$$\left.\begin{array}{r}24^{\text{人}}:248^{\text{人}}\\9^{\text{時}}:12^{\text{時}}\\232^{\text{丈}}.5:387^{\text{丈}}.5\\2^{\text{丈}}.2:3^{\text{丈}}1^{\text{尺}}5^{\text{寸}}\\1^{\text{丈}}.4:2^{\text{丈}}.1\\7^{\text{立方尺}}:4^{\text{立方尺}}\end{array}\right\}=5^{\text{日}}.5:x^{\text{日}}.$$

如此含複名數者，必先化之爲單名數，即3丈1尺5寸，當化爲3丈.15而後計算也，故

$$x=\frac{248\times12\times3875\times315\times21\times4\times55}{24\times9\times2325\times220\times14\times7\times10},$$

即155日.

364. 以農夫7人，每日作事10時間，4日耕完1頃5畝之田，若以5人每日作事8時間，耕完1頃65畝之田，需若干日.

圖 $\left.\begin{array}{r}5^{人}:7^{人}\\8^{時}:10^{時}\\105^{畝}:165^{畝}\end{array}\right\}=4^{日}:x^{日},$

故 $x=11$ 日.

365. 有書168頁，每頁12行，每行25字，欲改爲每頁15行每行30字之書，當爲若干頁.

圖 $\left.\begin{array}{r}15^{行}:12^{行}\\30^{字}:25^{字}\end{array}\right\}=168^{頁}:x^{頁},$

故 $x=112$ 頁.

366. 有長12丈闊7丈之地，一年租50圓4角，問長9丈闊15丈之地，一年租幾何.

圖 $\left.\begin{array}{r}12^{丈}:9^{丈}\\7^{丈}:15^{丈}\end{array}\right\}=504^{角}:x^{角},$

故 $x=810^{角}$，即81圓.

367. 男1人與女1人之力之比爲5∶3，而男子30人12日可作成之事，使女子24人作之，當幾日成.

圖 $\left.\begin{array}{r}3:5\\24^{人}:30^{人}\end{array}\right\}=12^{日}:x^{日}$，故 $x=25$ 日.

368. 有甲乙兵士二人，其放鎗時間之比，甲4發乙3發，其火藥之量，甲7發等於乙8發，今甲1時24分間用火藥2斤，問火藥1斤.5，乙以幾時間用完.

圖 $\left.\begin{array}{r}3^{發}:4^{發}\\7^{發}:8^{發}\\2^{斤}:1^{斤}.5\end{array}\right\}=1^{時}24^{分}:x^{時},$

故 $x=1^{時}36^{分}$.

369. 今有要塞守備兵，儲12週間之糧，忽來援兵600人，而每人一日之糧，減其前之三分之一，問現在之糧，能支幾週間.

圖 援兵來後之人數，爲1800+600，即2400人，食糧減$\frac{1}{3}$，則爲前之$\frac{2}{3}$，故

$$\left.\begin{array}{r}2400^{人}:1800^{人}\\\frac{2}{3}\quad:\quad1\end{array}\right\}=12^{週}:x^{週},$$

故 $x=13^{週}\frac{1}{2}$.

370. 某人以某速度，行某距離需8時間，若距離減五分之一，速度增六分之一，需幾時間.

圖 距離爲$\frac{4}{5}$，速度爲$\frac{7}{6}$，故得次之比例式，即

$$\left.\begin{array}{r}1:\frac{4}{5}\\\frac{7}{6}:1\end{array}\right\}=8^{時}:x^{時}，故\quad x=5^{時}\frac{17}{35}.$$

371. 以喞筒15個，每日使用8時間，則7日能汲上1260噸之水，問以同喞筒幾個，每日使用12時間，則4日能汲上7560噸之水.

圖 $\left.\begin{array}{r}12^{時}:8^{時}\\14^{日}:7^{日}\\1260^{噸}:7650^{噸}\end{array}\right\}=15^{個}:x^{個},$

故 $x=30$ 個.

372. 有二水池，甲寬3尺8寸長6尺2寸，能容水6石2斗，乙池寬4尺2寸長7尺6寸，能容12石6斗，問其深乙爲甲之幾倍.

圖 欲求乙爲甲幾倍，故取甲之深爲單位，其時乙之深，即所求之數，由是

$$\left.\begin{array}{r}42^{寸}:38^{寸}\\76^{寸}:62^{寸}\\62^{斗}:126^{斗}\end{array}\right\}=1:x,\qquad 故\ x=1\frac{1}{2},$$

即 $1^{倍}\frac{1}{2}$.

373. 有鐵板2塊,各長4尺,闊9寸,厚2寸,共重216斤,今有長6尺5寸,闊8寸,厚3寸之鐵板15塊,問共重若干.

圖 $$\left.\begin{array}{l}40^{寸}:65^{寸}\\ 9^{寸}:8^{寸}\\ 2^{寸}:3^{寸}\\ 2^{塊}:15^{塊}\end{array}\right\}=216^{斤}:x^{斤},$$

故 $x=$3510斤.

374. 有米倉若干,各有同量之米,今因將賣去此米,每日牛3匹與馬5匹,使用12時間,則3日間運完24倉之米,問將牛馬各增一匹,運完44倉之米,每日須使用幾時間. 但牛馬之力,如2與1,其速如9與10.

圖 牛3匹馬5匹所運之量,與牛4匹馬6匹所運之量之比,爲$2\times3\times9+5\times1\times10:4\times2\times9+6\times1\times10$, 即$26:33$,故

$$\left.\begin{array}{l}33:26\\ 4^{日}:3^{日}\\ 24^{倉}:44^{倉}\end{array}\right\}=12^{時}:x^{時},\quad 故\ x=13,$$

即13時間.

375. 牛車與馬車之力之比,如8與7,其速之比,如5與8,今用牛車8輛,與馬車20輛,5日運完米280包,至$10^{里}\frac{1}{2}$之處,若牛馬車各10輛,10日運完米350包,問距離幾何.

圖 將牛車8輛,化爲馬車,則由

$$\left.\begin{array}{l}7:8\\ 8:5\end{array}\right\}=8^{輛}:x^{輛},\ 得\ x=\frac{40}{7}^{輛}.$$

又將牛車10輛,化爲馬車,則由

$$\left.\begin{array}{l}7:8\\ 8:5\end{array}\right\}=10^{輛}:x^{輛},\ 得\ x=\frac{50}{7}^{輛}.$$

由是所求之距離,可自次之比例式得之,即

$$\left.\begin{array}{lcl}\frac{40}{7}+20&:&\frac{50}{7}+10\\ 5^{日}&:&10^{日}\\ 350^{包}&:&280^{包}\end{array}\right\}=10^{里}.5:x^{里},$$

故 $x=11^{里}\frac{1}{5}$.

376. 絹一疋之價,等於布18疋之價,今有米36包,每包6斗4升,以之換得$14^{疋}\frac{2}{5}$之絹,若以米22包,每包8斗,可換布幾疋.

圖 $$\left.\begin{array}{l}3^{疋}:14^{疋}\frac{2}{5}\\ 32^{升}:40^{升}\\ 36^{包}:22^{包}\end{array}\right\}=18^{疋}:x^{疋},\quad 故\ x=66疋.$$

377. 有二種酒,甲4升與乙5升之價如6與7,今甲酒4升瓶26瓶,其價爲13圓,問3升瓶28瓶,其價幾何.

圖 $$\left.\begin{array}{l}5^{升}:4^{升}\\ 6:7\\ 4^{升}:3^{升}\\ 26^{瓶}:38^{瓶}\end{array}\right\}=13^{圓}:x^{圓},\quad 故\ x=9^{圓}.8,$$

即9圓8角.

378. 犬走5步,兔走6步,又犬之3步,與兔之4步,其長相等,若犬3時間,走35里,問兔4時48分走幾里.

圖 $$\left.\begin{array}{l}5^{步}:6^{步}\\ 4^{步}:3^{步}\\ 3^{時}:4^{時}\frac{48}{60}\end{array}\right\}=35^{里}:x^{里},$$

故 $x=50^{里}\frac{2}{5}$.

379. 有舟子,於靜水中,3時間能盪50里,今以3人上盪流水,則4時160里,問水流速度,每時幾里.

圖 自次之比例式,得3人4時間盪靜水之里程,即

$$\left.\begin{array}{l}3^{時}:4^{時}\\ 1^{人}:3^{人}\end{array}\right\}=50^{里}:x^{里},\ 即\ x=200^{里},$$ 故流速

每時爲$(200^{里}-150^{里})\div4=12^{里}\frac{1}{2}$.

380. 有船順盪流水,則5時間行84里,若流速減四分之一,盪速增五分之一,則船行速度與前不變,今將最初流速

減八分之三,盪速增五分之二,逆流而上,問 15 時間,當行幾里.

解　減流速 $\frac{1}{4}$,增盪速 $\frac{1}{5}$,而船速平均,故流速之 $\frac{1}{4}$,等於盪速之 $\frac{1}{5}$,由是流速爲 4,則盪速爲 5,而流速減 $\frac{3}{8}$,則爲 $4\times\left(1-\frac{3}{8}\right)$,盪速增 $\frac{2}{5}$,則爲 $5\times\left(1+\frac{2}{5}\right)$,故初之順流而下之速,爲 $4+5=9$,而後之逆流而上之速,爲 $5\times\left(1+\frac{2}{5}\right)-4\times\left(2-\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{2}$,因得次之比例式.

$$\left.\begin{array}{l}5^{\text{時}}:15^{\text{時}}\\ 9\ :\frac{9}{2}\end{array}\right\}=84^{\text{里}}:x^{\text{里}},\ \text{故}\ x=\underline{126^{\text{里}}}.$$

381. 以男 5 人,或女 7 人,每日勞動 8 時間,於 10 日耕完之田,若以男 8 人,女 3 人每日勞動 10 時間,問幾日耕完之.

解　依題意,男 1 人同於女 $\frac{7}{5}$ 人,故男 8 人,同於女 $\frac{7}{5}\times8=\frac{56}{5}$ 人,故男 8 人女 3 人,同於 $\frac{56}{5}+3=\frac{71}{5}$ 人,由是得下之比例式.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{71}{5}\text{人}:7^{\text{人}}\\ 10^{\text{時}}\ :8^{\text{時}}\end{array}\right\}=10^{\text{日}}:x^{\text{日}},\ \text{故}\ x=\underline{3^{\text{日}}\frac{67}{71}}.$$

382. 有二類之織工,甲 60 人,每日 8 時間,若干日織絹 1760 丈,乙每日 10 時間,其日數爲甲之三分之二,織紬 880 丈,問乙之人數.但甲與乙之力,如 5 與 4,而甲織紬 15 丈之時間,等於乙織絹 8 丈之時間.

解　織絹與織紬難易之比,如 $\frac{5}{15}$ 與 $\frac{4}{8}$.故

$$\left.\begin{array}{l}10^{\text{時}}:8^{\text{時}}\\ 1760^{\text{丈}}:880^{\text{丈}}\\ \frac{2}{3}:1\\ 4:5\\ \frac{4}{8}:\frac{5}{15}\end{array}\right\}=60^{\text{人}}:x^{\text{人}},\ \text{故}\ x=\underline{30^{\text{人}}}.$$

383. 以 21 人於 25 日,築成長 181丈 $\frac{1}{2}$ 闊 5 尺 高 2 尺 6 寸之堤,問以 8 人,於 49 日,築成闊 7 尺高 2 尺 2 寸之堤,其長爲幾尺.

解
$$\left.\begin{array}{l}21^{\text{人}}:8^{\text{人}}\\ 25^{\text{日}}:49^{\text{日}}\\ 7^{\text{尺}}:5^{\text{尺}}\\ 32^{\text{寸}}:26^{\text{寸}}\end{array}\right\}=181^{\text{丈}}.5:x^{\text{丈}},$$

故 $x=\underline{114^{\text{丈}}.\frac{2}{5}}$.

384. 以 160 人,每日勞動 11 時間,於 6 日掘得長 230 丈闊 5丈.5 深 1丈.5 之澗,問以 96 人,每日勞動 8 時間,得長 220 丈闊 3丈.5 深 1 丈之溝,須幾何日.但土之硬,前與後如 5 與 7,後之 4 人之力,與前之 5 人之力相等.

解
$$\left.\begin{array}{l}96^{\text{人}}:160^{\text{人}}\\ 8^{\text{時}}:11^{\text{時}}\\ 230^{\text{丈}}:220^{\text{丈}}\\ 5^{\text{丈}}.5:3^{\text{丈}}.5\\ 1^{\text{丈}}.5:1^{\text{丈}}\\ 5:7\\ 5^{\text{人}}:4^{\text{人}}\end{array}\right\}=6^{\text{日}}:x^{\text{日}},\ \text{故}\ x=\underline{6^{\text{日}}\frac{86}{345}}.$$

385. 有飼犬與猫者,其食料之費用,猫 1 隻 1 年間爲 6 圓,犬 1 隻 6 週間 2 圓,今物價低落,猫 1 隻 1 年間減 1 圓 5 角,則以 3 圓飼犬 1 隻,可支幾日.

解　6 圓之費用,低落 1 圓 5 角,則爲 $6^{\text{圓}}-1^{\text{圓}}.5=4^{\text{圓}}.5$,故得下之比例式.

$$\left.\begin{array}{l}4^{\text{圓}}.5:6^{\text{圓}}\\ 2^{\text{圓}}\ :3^{\text{圓}}\end{array}\right\}=7^{\text{日}}\times6:x^{\text{日}},\ \text{故}\ x=\underline{84^{\text{日}}}.$$

386. 有二滑車,其一爲複轆,能生4倍之力,其一爲單轆,能生3倍之力,又滑車省力費時,故其力愈加增,則其時愈延長,今以8人用此複轆滑車,則6分時提起480斤之重於1丈6尺高,問以15人用此單轆滑車,提起360斤之重於1丈8尺之高,費時間幾分.

解 $\left.\begin{array}{rcr} 15^{\text{人}} & : & 8^{\text{人}} \\ 480^{\text{斤}} & : & 360^{\text{斤}} \\ 16^{\text{尺}} & : & 18^{\text{尺}} \\ 3 & : & 4 \end{array}\right\} = 6^{\text{分}} : x^{\text{分}}$, 故 $x = 3^{\text{分}}36^{\text{秒}}$.

387. 有船航行1400里之地,於月曜日午前8時開行,每時以35里之遲速而行,自半途得順風,而於火曜日午後4時到其地,此後又以其一倍半之速航行1260里,問其時爲何曜日何時.

解 自月曜日午前8時,至火曜日午後4時,有32時間,而每時以35里之速航至1400里之半途,即700里,則時間當爲700÷35,即20時間,故航其餘之700里,當爲$32^{\text{時}}-20^{\text{時}}=12^{\text{時}}$間明矣.由是以一倍半之速航行1260里之時間,可自次之比例式得之,即

$$\left.\begin{array}{l} 700^{\text{里}} : 1260^{\text{里}} \\ 1.5 : 1 \end{array}\right\} = 12^{\text{時}} : x^{\text{時}},$$

故 $x = 14^{\text{時}}\frac{2}{5}$, 即爲14時24分而自火曜日午後4時經過14時24分,即爲水曜日午前6時24分.

388. 長40哩之鐵道,豫定4個月修成,使役375人,每日作工12時間,經3個月已修成25哩,其餘之工程,比前之工程,其難易如2:3,但此後工人,每作工10時間,問須增加工人若干,始能於豫定之期限竣功.

解 40哩之鐵道,已成25哩,故其餘爲$40^{\text{哩}}-25^{\text{哩}}=15^{\text{哩}}$, 而豫定之期限所餘爲一個月,由是得次之比例式,

$$\left.\begin{array}{rcr} 10^{\text{時}} & : & 12^{\text{時}} \\ 1^{\text{月}} & : & 3^{\text{月}} \\ 25^{\text{哩}} & : & 15^{\text{哩}} \\ 3 & : & 2 \end{array}\right\} = 375^{\text{人}} : x^{\text{人}}, \quad \text{故 } x = 540^{\text{人}}.$$

故當增 $540^{\text{人}}-375^{\text{人}}=165^{\text{人}}$.

389. 運送米120包,麥154包,每日運$10^{\text{時}}\frac{3}{8}$, 13日運完,今欲運送米240包,麥208包,每日運$11^{\text{時}}\frac{1}{4}$,問幾日運完. 但米與麥每包容量之比,如2與3,同升數重量之比如$8\frac{1}{2}$與7.

解 米1包之容量爲2,則麥1包之容量爲3,米量1之重量爲$8\frac{1}{2}$,則麥量1之重量爲7,故前之總重量爲$8\frac{1}{2}\times 2\times 120+7\times 3\times 154=5274$,而後之總重量爲$8\frac{1}{2}\times 2\times 240+7\times 3\times 280=9960$,故所求之日數,可由次之比例式得之.

$$\left.\begin{array}{l} 11^{\text{時}}\frac{1}{4} : 10^{\text{時}}\frac{3}{8} \\ 5274 : 9960 \end{array}\right\} = 13^{\text{日}} : x^{\text{日}},$$

即 $x = 22^{\text{日}}\frac{9072}{7911}$.

390. 紺絲30斤之價,等於白絲45斤之價,今取紺絲與白絲如1與2織成裁料10疋,其價爲20圓,若取紺絲與白如3與4織成裁料20疋,其價如何. 但前後絲之時價如6與7.

解 一疋所用絲量相等,假設爲1,則前者所用紺絲與白絲之比,爲$\frac{1}{1+2}:\frac{2}{1+2}$,而後者所用紺絲與白絲之比,爲$\frac{3}{3+4}:\frac{4}{3+4}$, 又其價之比,紺絲與白絲爲45:30,故所求之價,爲

$$\left.\begin{array}{ccc}\frac{1}{3}\times45+\frac{2}{3}\times30 & : & \frac{3}{7}\times45+\frac{4}{7}\times30\\ 10^{疋} & : & 20^{疋}\\ 6 & : & 7\end{array}\right\}$$

$=20^{圓}:x^{圓}$, 故 $x=48^{圓}\frac{4}{7}$.

391. 以男子4人,女子2人,每日耕作8時間,於15日耕完21畝之田,今增男女各1人,於16日耕完縱80丈橫33丈之田,問每日當耕作幾時間. 但男一人與女一人之力之比爲8:5.

圝 如次式計算可也.

$4\times8+2\times5=42$, $5\times8+3\times5=55$,

$(33\times80)^{丈方}=44^{畝}$,

$$\left.\begin{array}{lcl}55 & : & 42\\ 16^{日} & : & 15^{日}\\ 21^{畝} & : & 44^{畝}\end{array}\right\}=8^{時}:x^{時},\ 故\ x=12^{時間}.$$

392. 男5人,每日耕作7時間,於6日耕完田9畝,又女子12人,每日耕作6時間,於14日耕完田27畝,今男3人女5人,合力耕作,則於8日耕完田21畝,問彼等每日耕作幾時間.

圝 男一人於一時間所耕田,爲 $\frac{9}{5\times7\times6}$, 卽 $\frac{3}{70}$ 畝,女一人於一時間所耕田爲 $\frac{27}{12\times6\times14}$, 卽 $\frac{3}{112}$ 畝,故男3人與女5人所耕田之和爲 $\frac{3}{70}\times3+\frac{3}{112}\times5$, 卽 $\frac{21}{80}$ 畝,因而

$$\left.\begin{array}{lcl}\frac{21}{80} & : & 5\times\frac{3}{70}\\ 8^{日} & : & 6^{日}\\ 9^{畝} & : & 21^{畝}\end{array}\right\}=7^{時}:x^{時},\ 故\ x=10^{時間}.$$

393. 有牛車與馬車,其所載之重,牛車與馬車如7與3,又其速如2與9,今將7000斤之物,運送於56里之地,用牛車20輛,須費12時間,問將4500斤之物,運送於126里之地,用馬車30輛,當費幾時間.

圝
$$\left.\begin{array}{lcl}3 & : & 7\\ 9 & : & 2\\ 7000^{斤} & : & 4500^{斤}\\ 56^{里} & : & 126^{里}\\ 30^{輛} & : & 20^{輛}\end{array}\right\}=12^{時}:x^{時},\ 故\ x=6^{時間}.$$

394. 有二舟子其盪速甲與乙如4:3,乙之盪速爲流速之2倍半,而甲於3日上盪流水爲140里,問乙下盪流水210里,須費幾日.

圝 甲之盪速爲4,則乙之盪速爲3,乙之盪速爲流速之$2^{倍}.5$,故流速爲 $3\div2\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$,甲爲上盪流水,故以 $4-\frac{6}{5}$ 之速而上,乙爲下盪流水,故以 $3+\frac{6}{5}$ 之速而下,因得次之比例式,

$$\left.\begin{array}{lcl}3+\frac{6}{5} & : & 4-\frac{6}{5}\\ 140^{里} & : & 210^{里}\end{array}\right\}=3^{日}:x^{日},\ 故\ x=3^{日}.$$

395. 麥一石之價爲4圓,製若干之麵包,給與30人,每日之費用爲4圓5角,若1圓換麥2斗3升,而每人每日支給之量,減前之八分之一,問以140圓養40人,能養幾日.

圝
$$\left.\begin{array}{lcl}\frac{1}{4}^{石} & : & 23^{升}\\ 40^{人} & : & 30^{人}\\ 45^{角} & : & 1400^{角}\\ 1-\frac{1}{8} & : & 1\end{array}\right\}=1^{日}:x^{日},\quad 故\ x=24^{日}\frac{8}{15}.$$

396. 攝氏10度之溫度,及750粍之氣壓,有百立突之炭酸瓦斯,問其於標準溫度及標準氣壓之容積爲幾立突.

圝 瓦斯之容積,與其所受壓力成反比例,與其絕對溫度,成正比例,而攝氏零度之標準溫度,若瓦斯之容積

為273,則攝氏每增一度,容積亦每增1,又水銀760粍之氣壓,為標準氣壓,故攝氏10度容積為273+10,即283,由是.

$$\left.\begin{array}{r}283:273\\760:750\end{array}\right\}=100:x,$$

故$x=95^{立}.2$.[近似數]

注意 此題之普通者可自次之公式計算之,$V_o=V_t\times\frac{P}{760}\times\frac{1}{1+\alpha t}$,本題為$V_o=x$, $V_t=100$, $\alpha=\frac{1}{273}$, $t=10$, $P=750$,但P表氣壓V_o,V_t表零度及t度之瓦斯容積,α稱為瓦斯之膨脹率,為$\frac{1}{273}$.

連鎖法

397. 法幣516佛郎,當美幣100元,法幣123佛郎,當德幣100馬克,問德幣2580馬克,當美幣幾元.

解 本題先當問「法幣516佛郎,當美幣100元,求法幣123佛郎,當美幣幾元.」即$516^{佛郎}:123^{佛郎}=100^{元}:x^{元}$,故$x=\frac{100\times123}{516}$. 但法幣123佛郎,當德幣100馬克,故次當問「德幣100馬克當美幣$\frac{100\times123}{516}$元,求德幣2580馬克,當美幣幾元.」即$100:2580=\frac{100\times123}{516}:x$,故$x=\frac{100\times123\times2580}{516\times100}$,即615元,但此等題常如次解之為便.

x元——2580馬克
100馬克——123佛郎
516佛郎——100元

故 $x=\frac{2580\times123\times100}{100\times516}$, 即615元.

398. 茶3斤之價,等於咖啡4斤之價,咖啡6斤之價,等於白糖20斤之價,白糖15斤之價等於1斗2升之價,問茶18斤之價,等於米幾升之價.

解 米 x升——茶 18斤
茶 3斤——咖 4斤
咖 6斤——糖 20斤
糖 15斤——米 12升

故 $x=64^{升}$.

399. 一[晝夜]日為幾秒.

解 一日為24時,一時60分,一分60秒,故得如次解之.

x秒——1日
1日——24時
1時——60分
1分——60秒

故 $x=86400^{秒}$.

400. 有甲乙丙丁四工人,其力之比,甲與乙如3與4,乙與丙如5與4,丙與丁如8與15,今比例其力給工錢,而甲之工錢為7角5分,問丁之工錢當若干.

解 此題雖非相等之關係,亦可與上同樣以連鎖法求之.

甲與乙之力之比,如3與4,故其工錢之比,亦為3與4之比,即見為甲取3角,則乙取4角,其餘均同樣,可作次式.

丁 x角——甲 7角.5
甲 3角——乙 4角
乙 5角——丙 4角
丙 8角——丁 15角

故$x=15^{角}$, 即1圓5角.

401. 有兄弟甲乙丙丁四人,其年齡之比,甲與乙為6:5,乙與丙為10:9,丙與丁為3:2,而丁之年齡為12歲,問甲之年齡如何.

圖

甲	x年	丁	12年
乙	2	丙	3
丙	9	乙	10
丁	5	甲	6

故 $x=24$年.

402. 有金若干圓,分與甲乙丙丁四人,甲與乙如8與7,乙與丙如6與5,丙與丁如10與9,而丁之所得420圓,問甲之所得若干.

圖

甲	x圓	丁	420圓
丁	9	丙	10
丙	5	乙	6
乙	7	甲	8

故 $x=640$圓.

403. 梨3個之價,等於蘋果4個之價,蘋果5個之價,等於橘3個之價,橘8個之價,等於柚3個之價,梨1打之價,爲720錢,問柚1打之價如何.

圖 1打爲12個,故如次解之.

價	x錢	柚	12
柚	3	橘	8
橘	3	蘋	5
蘋	4	梨	3
梨	12	價	720錢

故 $x=2400$錢.

404. 有工匠四名,其力之比,甲與乙如4與3,乙20日所成之業,等於丙21日所成之業,今丙3日之工錢爲1圓2角,問甲8日之工錢如何.

圖 甲與乙其力如4與3故其工錢,甲之3日分,等於乙之4日分,故可如次解之.

工錢	x圓	甲	8日
甲	3日	乙	4日
乙	20日	丙	21日
丙	3日	工錢	1圓.2

故 $x=4$圓$\frac{12}{25}$, 即4圓4角8分.

405. 有穀商,以119圓,買得小麥85包。但以小麥8包換大麥9包,則有1成之利,又以大麥100包,換高粱112包,則有3分之損,問高粱180包之價幾何.

圖 以大麥100包,換高粱112包,有3分之損,故以大麥97包,換高粱112包,則無損益,又以小麥8包,換大麥9包,有1成之利,故以小麥8包.8,換大麥9包則無損益,故可如次解之.

價	x圓	高粱	180包
高粱	112包	大麥	97包
大麥	9包	小麥	8包.8
小麥	85包	價	119圓

故 $x=213$圓4角.

406. 以平年算土星之一年,當於火星之15年687分之635,天王星之一年,當於土星之2年5分之4,火星之一年,當於水星之7年29分之26,地球之一年,當於水星之4年87分之17,天王星之1年21分之20,當於海王星之一年,問海王星之一年,當於地球之幾年.

圖

地	x年	海	1年
海	1年	天	1年$\frac{20}{21}$
天	1年	土	2年$\frac{4}{5}$
土	1年	火	15年$\frac{635}{687}$
火	1年	水	7年$\frac{26}{29}$
水	4年$\frac{17}{87}$	地	1年

故 $x=163$年$\frac{931}{1095}$.

407. 柚3個與梨5個之價,如7與4,梨2個比橘10個之價少2成,今以柚80個,賣得3080錢,則有1成之利,若欲以橘300個,賣得2成之利,其價爲幾何.

解 柚3個與梨5個之價，如7與4，故柚$3\times4=12$個之價，等於梨$5\times7=35$個之價，又梨2個比橘10個之價少2成故梨2個等於橘8個之價，又橘80個賣3080錢，有1成之利，故原價為3080錢$\times\frac{10}{11}$，又欲將橘300個賣得2成之利，則將橘300個作360個賣之可也，故得如次解之.

價 x錢——橘 360個
橘 8個——梨 2個
梨 35個——柚 12個
柚 80個——價 3080錢$\times\frac{10}{11}$

故 $x=$1080錢.

或如次解之.

x錢——橘300個
10成——12成
橘10個——梨2個
8成——10成
梨 5個——柚3個
7成——4成
柚80個——3080錢
11成——10成

408. 甲組5人分，與乙組4人分，其價相等，乙組8人分，與丙組7人分，其價相等，丙組14人分與丁組15人分，其價相等，今甲組4人分，與丁組5人分之差，為1圓1角2分，問各組1人分之價如何.

解 先求甲4人分，與丁何人同如次.

丁 x人分——甲 4人分
甲 5人分——乙 4人分
乙 8人分——丙 7人分
丙 14人分——丁 15人分

故$x=3$人分，

既得甲4人分，等於丁3人分，故丁5人$-$3人$=$2人之價，為1圓1角2分，由是丁1人分之價為$112\div2$，即5角6分，因而丙1人分為$56\times\frac{15}{14}$，即6角．乙1人分為6角$\times\frac{7}{8}=$5角2分.5，甲1人分為5角2分.5$\times\frac{4}{5}=$4角2分.

409. 有甲乙丙三時表，於午前6時，三表均對準，是日午前，甲指10時，乙快8分，是日午後，乙指8時28分，丙遲35分，翌日甲指正午，丙遲幾分.

解 甲$10-6$即4時即240分，等於乙之4時8分，即等於其248分，乙之14時28分，即868分，等於丙之$868-35=833$分而自午前6時，自翌日正午，有30時，由是得次式，即

丙 x時——甲 30時
甲 240分——乙 248分
乙 868分——丙 833分

$x=$29時45分，故丙當遲15分.

410. 柿6個與梨5個，其價相等，梨8個與橘30個，其價相等，橘15個與栗80個其價相等，今若將柿3個，交換栗40個，則損失15錢，問柿1個之價幾何.

解 先求栗40個，等於柿幾個之價如次.

柿 x——栗 40
栗 80——橘 15
橘 30——梨 8
梨 5——柿 6

即$x=$2個$\frac{2}{5}$，而栗40個，等於柿子2個$\frac{2}{5}$之價也.

故15錢為柿3個$-$2個$\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$個之價，因而柿1個之價，為$15\div\frac{3}{3}$即25錢.

411. 米2石之價，等於大豆3石之價，大豆4石之價，等於麥5石之價，今以大豆27石換米麥共20石，問米麥各幾石.

解 先求大豆27石，等於米之幾石，

米 x石——豆 27石
豆 3石——米 2石　　故 $x=18$石.

故生$20^{石}-18^{石}=2^{石}$之差,由是混入若干之麥,而求同價之麥與米之比,

米 x石——麥 1石
麥 5石——豆 4石　　故 $x=\frac{8}{15}$石.
豆 3石——米 2石

故將麥1石與米交換,則其量增$1-\frac{8}{15}$,即增$\frac{7}{15}$石,故欲使增2石,則須$2^{石}\div\frac{7}{15}$石$=4^{石}\frac{2}{7}$,即所求之石數爲$4^{石}\frac{2}{7}$,而米爲$20^{石}-4^{石}\frac{2}{7}=15^{石}\frac{5}{7}$.

412. 甲行5步時,乙行6步,乙行7步時丙行8步,丙行9步時,丁行10步,其各一步之長之比,爲15:14:12:10,問甲行63丈時,丁行幾何.

圖I. 先求甲行一步時,丁行幾步如次.

丁 x步——甲 1步
甲 5步——乙 6步
乙 7步——丙 8步
丙 9步——丁 10步

即$x=\frac{32}{21}$,而甲行1步之時間,與丁行$\frac{32}{21}$步之時間相等,將此比以整數表之,則甲行21步之時間,與丁行32步之時間之相等,又甲與丁1步之長之比爲15:10,即3:2,故

$$\left.\begin{matrix}21:32\\3:2\end{matrix}\right\}=63^{丈}:x^{丈},\ 故\ x=64^{丈}.$$

圖II. 丁 x丈——甲 63丈
甲 15×5——乙 14×6
乙 14×7——丙 12×8
丙 12×9——丁 10×10

故得$x=64$丈.

413. 有畜收家,豢養牛馬羊其用費之比,馬5頭3日之費用,等於牛3頭4日之費用,馬6頭7日之費用,等羊7頭16日之費用,今以牛4頭15日之費用,豢養羊8頭,得支幾日.

圖 依題意,一日間,馬5×3即15頭之費用,等於牛3×4即12頭之費用,馬6×7即42之費用,等於羊7×16即112頭之費用,故牛4×15即60頭一日之用,以豢羊一日間之頭數,則

羊 x頭——牛 60頭
牛 12頭——馬 15頭　　故 $x=200$頭.
馬 42頭——羊 112頭

因而豢羊8頭,則可支200÷8即25日.

414. 紐約一商人,負柏林一商人1500馬克之債,其時匯兌時價,在紐約匯柏林100馬克爲23元50分,匯倫敦1磅爲4元87分.5,又在倫敦匯柏林1磅爲$20^{馬克}\frac{3}{4}$,問紐約之商人直接匯向柏林,與經過倫敦,何者爲利.

圖 直接匯柏林,則

所求之元數——1500馬克
100馬克——23元.5

故所求之元數爲$\frac{1500\times 23.5}{100}$即352元.5. 又經過倫敦匯柏林者,則

所求之弗數——1500馬克
20馬克.75——1磅
1磅——4元8.75

故所求之元數爲$\frac{1500\times 4.875}{20.75\times 1}$,即352元.41[近似值],故經倫敦匯者有352元.5−352元.41=0元.09之利.

415. 甲乙丙丁四人,所有田地之比,甲與乙如27與16,乙之11倍,等於丙之12倍,丙之4分之1,等於丁之3分之1,而丁有66畝,問甲之所有如何.

【解】乙之11倍,等於丙之12倍,故乙之所有,若為12,則丙之所有為11,又丙$\frac{1}{4}$等於丁之$\frac{1}{3}$,故丙之所有為4,則丁之所有為3,故可如次解之.

甲 x畝——丁 6畝

乙 3——丙 4　　故 $x=162$畝.

丙 11——乙 12

丁 16——甲 27

416. 甲商以540圓買米若干,將其$\frac{5}{6}$賣與乙,每7角5分得2分之利,乙商將所買得之米之$\frac{18}{25}$賣與丙商,以8升之買價賣7升7合,問丙商付乙商之錢若干.

【解】先求乙之買價.

乙 x圓——甲 540圓$\times\frac{5}{6}$

甲 75分——乙 77　　故 $x=462$圓,

次求丙之買價

丙 x圓——乙 462圓$\times\frac{18}{25}$

乙 $\frac{1}{8}$——丙 $\frac{1}{7.7}$　　故 $x=345$圓.6,

即345圓6角.

【別解】甲7角5分之米量,等於乙7角7分之米量,乙7角7分之米量,等於丙8角之米量,由是求與甲之$540\times\frac{5}{6}\times\frac{18}{25}=324$圓,同石數之丙之價即得,故

x——324

75——77　　故 $x=345.6$,

77——80　　即345圓6角.

417. 有上中下三種糖,將上10斤,交換中12斤,則有$\frac{4}{100}$之損,又將中8斤交換下12斤,則有$\frac{25}{100}$之利,今下1斤為1角,問上1斤之價幾何.

【解】上$10\times\left(1-\frac{4}{100}\right)$斤等於中12斤之價,中$8\times1.25$斤等於下12斤之價,下1斤之價為1角,故得如次解之,

x角——上 1斤

上 10斤$\times\frac{96}{100}$——中 12斤　　故

中 8斤$\times1.25$——下 12斤　　$x=1$角.5.

下 1斤——1角

418. 有甲乙二人於100丈競走,甲勝4丈,丙丁二人於150丈競走,丁勝丙5丈,甲丁二人於180丈競走,甲負丁5丈,問乙丙二人於174丈競走,其勝負如何.

【解】甲走100丈時,乙走96丈,丁走150丈時,丙走145丈,丁走180丈時,甲走175丈,由是求丙走174丈,乙走幾何如次.

乙 x丈——丙 174丈

丙 145丈——丁 150丈　　故

丁 180丈——甲 175丈　　$x=168$丈.

甲 100丈——乙 96丈

由是得丙勝174丈$-$168丈$=$6丈.

419. 有5工人,甲9日所作事,等於乙10日所作事,丙5日所作事,等於丁6日所作事,戊18日所作事,等於丙11日與丁3日所作事,又等於甲10日與丙1日所作事,問乙成一事,丁能成其幾分.

【解】丙11日丁3日所作事之和,與甲10日丙1日所作事之和,皆與戊18日所作事相等,故丙10日丁3日所作事,等於甲10所作事,又甲工10日所作事,可由

乙 x——10 甲

甲 9——10 乙　　而知其等於乙$\frac{100}{9}$

日所作事,又丙10日所作事,可由

丁 x——10 丙

丙 5——6 丁　　而知其等於丁12

日所作事,因而丙10丁3日所作事,等於丁15日所作事,卽乙$\frac{100}{9}$日所作事,等於丁15日所作事,由是所求之分數,爲$\frac{100}{9}\times\frac{1}{15}=\frac{20}{27}$.

420. 有甲乙丙三種物,甲5個與乙8個之價之比,如32與35,乙8個之價比丙9個之價,昂6分2釐5毫,今若將甲10個,賣得4圓,則每圓有2角5分之利,今欲賣丙30個,而每圓得2角之利,問其賣價當爲幾何.

解 甲1個與乙1個之比,等於$\frac{32}{5}$與$\frac{35}{8}$之比,或化爲整數之比,而爲32×8與35×5之比,換言之,卽甲35×5個之價,等於乙32×8個之價,又甲10個之原價爲$4^{\text{圓}}\times\frac{1}{1+0.25}=3^{\text{圓}}.2$,故先求乙8個之價,則

$x^{\text{圓}}$——乙 8

乙 32×8——甲 35×5 故

甲 10——$3^{\text{圓}}.2$ $x=1^{\text{圓}}.75$.

由是丙9個之價爲$1^{\text{圓}}.75-0^{\text{圓}}.0625=1^{\text{圓}}.6875$. 但欲賣丙30個,而1圓得2角之利,則以$30\times\frac{120}{100}$卽36個之原價,賣30個卽得,由是求丙36個之原價,則

$x^{\text{圓}}$——丙 $36^{\text{個}}$ 故

$9^{\text{個}}$——$1^{\text{圓}}.6875$ $x=6^{\text{圓}}.75$.

421. 有二人甲$20^{\text{分}}$時行$3^{\text{里}}30^{\text{丈}}$,乙$3^{\text{時間}}$行$24^{\text{里}}$,而乙行$66^{\text{里}}$時,有馬車馳$120^{\text{里}}$,問此馬車馳$1920^{\text{里}}$時,甲當行若干里.

解 甲 $x^{\text{里}}$——馬車 $1920^{\text{里}}$

馬車 $120^{\text{里}}$——乙 $66^{\text{里}}$

乙 $24^{\text{里}}$——$3^{\text{時間}}$ 故

$1^{\text{時間}}$——$60^{\text{分}}$ $x=1254^{\text{里}}$.

$20^{\text{分}}$——$3^{\text{里}}30^{\text{丈}}$

$180^{\text{丈}}$——$1^{\text{里}}$

比例配分[合資算]

422. 將鉛筆94支,分與甲乙丙三童子,其所得之比,甲與乙爲4:5,乙與丙爲3:4,問各得幾支.

解 求甲乙丙之連比,則爲

甲 乙 丙

4 : 5 → 5

3 ← 3 : 4

12 : 15 : 20

而$12+15+20=47$,故甲之所得,爲$94^{\text{支}}\times\frac{12}{47}=24^{\text{支}}$,乙之所得,爲$94^{\text{支}}\times\frac{15}{47}=30^{\text{支}}$,丙之所得,爲$94^{\text{支}}\times\frac{20}{47}=40^{\text{支}}$.

423. 甲乙丙丁四人,各出資本800圓,600圓,500圓,400圓,合營商業,得純利460圓,問四人各應分若干.

解 所分利益,比例於所出資本,故將460圓比例於800:600:500:400,卽8:6:5:4配分之可也,而$8+6+5+4=23$;故甲之所分,爲$460^{\text{圓}}\times\frac{8}{23}=160^{\text{圓}}$,乙之所分,爲$460^{\text{圓}}\times\frac{6}{23}=120^{\text{圓}}$,丙之所分,爲$460^{\text{圓}}\times\frac{5}{23}=100^{\text{圓}}$,丁之所分爲$460^{\text{圓}}\times\frac{4}{23}=80^{\text{圓}}$.

424. 甲將資本1000圓出5個月,乙將800圓出6個月,共營商業,得純利2450圓,問當如何配分之.

解 配分額比例資本數,亦比例於出資月數,而1000圓出5個月,則等於將$1000^{\text{圓}}\times5=5000^{\text{圓}}$出一個月,又800圓出6個月,則等於將$800^{\text{圓}}\times6=4800^{\text{圓}}$出一個月,故將2450圓,比例於5000:4800卽25:24配分之可也,而$25+24=49$,故甲之所分,爲$2450^{\text{圓}}\times\frac{25}{49}=1250^{\text{圓}}$,乙之所分爲$2450^{\text{圓}}\times\frac{24}{49}=1200^{\text{圓}}$.

425. 甲乙丙三人合資營商，其所出資本之比，爲5:3:2，出資月數之比，爲4:6:7，問所得利益1040圓，當如何配分之。

解 比例於資本及月數，則甲乙丙配分額之比，爲$5\times4:3\times6:2\times7$，即$10:9:7$，但$10+9+7=26$，故甲之所分爲$1040^{圓}\times\frac{10}{26}=400^{圓}$，乙之所分爲$1040^{圓}\times\frac{9}{26}=360^{圓}$，丙之所分爲$1040\times\frac{7}{26}=280^{圓}$。

426. 將232圓，分配於男12人，女8人，童20人，男一人之所得，2倍於女一人之所得，女一人之所得，3倍於童一人之所得，問各一人之所得如何。

解 將童一人之所得爲1，則女一人之所得爲3，而男一人之所得爲6，且男12人，女8人，童20人之所得爲$6\times12+3\times8+20=116$，故童一人之所得爲$232^{圓}\times\frac{1}{116}=2^{圓}$，因而女一人之所得爲$2^{圓}\times3=6^{圓}$，男一人之所得爲$6^{圓}\times2=12^{圓}$。

427. 將120疋，分與三人，其所得，甲爲乙之四分之三，丙比乙多乙之四分之一，問各幾何。

解 乙爲1，則甲爲$\frac{3}{4}$，而丙爲$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，或化爲整數之比，則甲爲3，乙爲4，丙爲5，故將120疋，分爲3，4，5之比可也。而$3+4+5=12$，故甲爲$120^{疋}\times\frac{3}{12}=30^{疋}$，乙爲$120^{疋}\times\frac{4}{12}=40^{疋}$，丙爲$120^{疋}\times\frac{5}{12}=50^{疋}$。

428. 將小麥若干包，三分之，乙得甲之四分之三，丙得甲乙和之七分之二，而甲比丙多百包，問各得幾何。

解 甲乙丙之比爲$1, \frac{3}{4}, \left(1+\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{7}=\frac{1}{2}$，或化爲整數之比，而爲$4:3:2$，由是$4-2=2$，相當於甲多於丙之100包，故甲爲$100^{包}\times\frac{4}{2}=200^{包}$，乙爲$100^{包}\times\frac{3}{2}=150^{包}$，丙爲$100^{包}\times\frac{2}{2}=100^{包}$。

429. 晝長爲夜長之$1^{倍}.\dot{3}$，問晝夜之長各幾時幾分。

解 $1.\dot{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{4}{3}$，故晝夜之長之比如$4:3$，故晝夜之長之和如$4+3=7$而共爲24時間，故晝長爲$24^{時}\times\frac{4}{7}=13^{時}\frac{5}{7}=13^{時}42^{分}51^{秒}\frac{3}{7}$，夜長爲$24^{時}\times\frac{3}{7}=10^{時}\frac{2}{7}=10^{時}17^{分}8^{秒}\frac{4}{7}$。

430. 有水車之廻轉，晝18000回，夜14000回，問日出之時。

解 晝之時數與夜之時數之比，爲$18000:14000$，即$9:7$，故夜之長爲$24^{時}\times\frac{7}{9+7}=\frac{21}{2}$時，而日出之時數恰爲夜長之半分，故日出之時爲$\frac{21}{2}^{時}\div2=\frac{21}{4}^{時}$即$5^{時}15^{分}$。

431. 農夫終日刈若干之田，初日日出6時6分，次日日沒5時36分，其兩日所刈之田，共46畝，問各一日刈田幾何。

解 日出6時6分，則日沒爲$12^{時}-6^{時}6^{分}=5^{時}54^{分}$，故初日刈田時間之長，爲$5^{時}54^{分}\times2=11^{時}48^{分}$，又次日刈田時間之長，爲$5^{時}36^{分}\times2=11^{時}12^{分}$，故將46畝分爲11時48分與11時12分之比，或皆化爲分，而爲708與672之比或省去公因數，而爲59與56之

比，故初日刈 $46^{畝}\times\frac{59}{59+56}=24^{畝}\frac{50}{111}$，次日刈 $46^{畝}\times\frac{56}{59+56}=23^{畝}\frac{23}{111}$.

432. 茶，咖啡及白糖，各1斤之價之和，爲1圓3角7分，而茶7斤之價，等於咖啡16斤之價，咖啡3斤之價，等於白糖11斤之價，問各1斤之價.

圝 茶1斤之價與咖啡1斤之價之比，爲16∶7，而咖啡1斤之價，與白糖1斤之價之比，爲11∶3，故求此茶咖啡白糖之連比，則爲

$$\begin{array}{ccccc} 16 & : & 7 & & \to 7 \\ 11\leftarrow & & 11 & : & 3 \\ \hline 176 & : & 77 & : & 21 \end{array}$$

而 $176+77+21=274$，故茶1斤之價爲 $137^{分}\times\frac{176}{274}=88^{分}$，咖啡1斤之價爲 $137^{分}\times\frac{77}{274}=28^{分}.5$，白糖1斤之價爲 $137^{分}\times\frac{21}{274}=10^{分}.5$.

433. 小麥3石，與大麥5石，與高粱6石其價相等，今小麥12石，大麥25石，高粱40石，共219圓，問各1石之價若干.

圝 小麥大麥高粱各1石之價之比，爲 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，因得次之比例式，即

$\frac{12}{3}+\frac{25}{4}+\frac{40}{5}:\frac{1}{3}=219:x$，自此得 $x=4^{圓}$，爲小麥1石之價，上之比例式第二項之 $\frac{1}{3}$ 以 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ 代入，則可得大麥，高粱各1石之價爲3圓，2圓4角.

434. 甲乙丙三人，共出金6000圓，甲之三倍，等於乙丙和之一倍又六分之一，乙之五倍，等於丙之七倍，問各出金幾何.

圝 出金之比，乙之5倍，等於丙之7倍，故乙爲7，則丙爲5，然乙丙之和爲 $7+5=12$，而甲之3爲此12之 $1^{倍}\frac{1}{6}$，故甲爲 $12\times1\frac{1}{6}\div3=\frac{14}{3}$，或將此三人出金之比，化爲整數之比，則甲爲14，乙爲21，丙爲15，而 $14+21+15=50$，故甲爲 $6000^{圓}\times\frac{14}{50}=1680^{圓}$，乙爲 $6000^{圓}\times\frac{21}{50}=2520^{圓}$，丙爲 $6000^{圓}\times\frac{15}{50}=1800^{圓}$.

435. 有織工，以男三人織布7疋之時間，等於以女四人織5疋之時間，今其人數，男爲女之二倍，而織成142疋，問男女各幾何.

圝 以男1人織布 $\frac{7}{3}$ 疋之時間，等於以女1人織布 $\frac{5}{4}$ 疋之時間，故男與女之力之比爲 $\frac{7}{3}$ 與 $\frac{5}{4}$，化爲整數之比，爲28與15，故二倍之男與女共事，則其比男爲 $28\times2=56$，而女爲15，故即將142疋分爲56∶15可也．即男爲 $142^{疋}\times\frac{56}{56+15}=112^{疋}$，而女爲 $142^{疋}\times\frac{15}{56+15}=30^{疋}$.

436. 有二商，甲出金2100圓，乙出金4800圓，但甲尙出一船，故取利金之八分之三，問船之價金幾何.

圝 甲取利金之 $\frac{3}{8}$，故若將船見爲資本，則甲之資本當爲資本全額之 $\frac{3}{8}$，故乙之資本，當爲全資本之 $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$，由是甲之資本，自 $\frac{5}{8}:\frac{3}{8}=4800:x$，而知爲2880圓，故船之價金，爲 $2880^{圓}-2100^{圓}=780^{圓}$.

437. 有工匠二名,甲以4日成一事,乙以5日成之,今甲乙同作一事,得金18圓,問各當得幾何.

圖 各1日所作事,甲爲$\frac{1}{4}$,乙爲$\frac{1}{5}$,故將18圓分爲$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$之比,卽分爲5與4之比可也. 故甲爲$18^{圓}\times\frac{5}{5+4}=10^{圓}$,而乙爲$18^{圓}\times\frac{4}{5+4}=8^{圓}$.

438. 有甲乙二人,共作一事,可得金70圓,若將甲一人作之,則15日能成,若將乙一人作之,則20日能成,今兩人同作,因病休息3日,問其金應各得幾何

圖 作事之比,爲

$$\left(\frac{1-\frac{1}{15}\times 3}{\frac{1}{15}+\frac{1}{20}}\right)\times\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\times 3=\frac{23}{35}, \text{甲}$$

$$\left(\frac{1-\frac{1}{15}\times 3}{\frac{1}{15}+\frac{1}{20}}\right)\times\frac{1}{20}=\frac{12}{35}\cdots\cdots \text{乙}$$

故將全金分爲23與12之比,卽得,故甲$=46^{圓}$,乙$=24^{圓}$.

439. 以甲乙二人,4日成一事,以乙丙二人,則5人成之,以甲丙二人,則6日成之,若三人共事,得407圓,而配分之,問各得幾何.

圖 以甲乙二人,則1日成其事之$\frac{1}{4}$,以乙丙二人,則成其$\frac{1}{5}$,以甲丙二人,則成其$\frac{1}{6}$,化其比爲整數,甲乙爲15,乙丙爲12,甲丙爲10,故將甲乙丙每三人之力,爲$15+12+10=37$,則甲二人之力爲$15+10-12=13$,由是三人之力與甲之比,爲37與13,同樣將三人之力爲37,則乙及丙之力爲17及7,故各取之金可自次之比例式得之,卽$37:13=407:$甲,故甲$=143^{圓}$. 又$37:17=407:$乙,故乙$=187^{圓}$. 又$37:7=407:$丙,故丙$=77^{圓}$.

440. 有築垣者,甲乙二人,則6日築成其$\frac{1}{3}$,其餘之$\frac{1}{4}$,以乙丙二人2日成之,其後三人共作,以5日成功,共得36圓,而配分之,問各得幾何.

圖 甲乙二人,1日成其$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$,以乙丙二人,則1日成其$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$,又以甲乙丙三人,則1日成其$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$,故丙一人,則1日成其$\frac{1}{10}-\frac{1}{18}=\frac{2}{45}$,因而乙一人,則1日成其$\frac{1}{12}-\frac{2}{45}=\frac{7}{180}$,甲一人,則1日成其$\frac{1}{18}-\frac{7}{180}=\frac{1}{60}$,故甲乙丙各一人1日作事之比,爲$\frac{1}{60}$,$\frac{7}{180}$,$\frac{2}{45}$,或化爲整數之比,而爲3, 7, 8, 但甲前後共作$5^{日}+6^{日}=11^{日}$,乙共作$6^{日}+2^{日}+5^{日}=13^{日}$,丙共作$2^{日}+5^{日}=7^{日}$,故甲乙丙作事之比爲11×3, 13×7, 7×8,卽33, 91, 56; 由是將此比分配36圓,但$33+91+56=180$ 故 $180:33=36^{圓}:$甲, $180:91=36^{圓}:$乙, $180:56=36^{圓}:$丙,卽甲爲6圓6角,乙爲18圓2角,丙爲11圓2角.

441. 某商人,謂其子女曰男先開店,則與以所有金之四分之一,女先開店,則與以所有金之五分之一,但若同時開店,當各與所有金之若干.

圖 與男以$\frac{1}{4}$,故父之所餘,與男之所得之比爲$3:1$,同樣父之所餘,與

女之所得之比爲 4:1, 故求男所得, 與父所餘, 與女所得之連比如次,

男		父		女
1	:	3	→	3
4 ←		4	:	1
4	:	12	:	3

由是將所有金以此比分之可也. 但 $4+12+3=19$, 故男所分爲全體之 $\frac{4}{19}$, 而女所分爲全體之 $\frac{3}{19}$.

442. 某人有一樽酒, 甲先來則與 $\frac{1}{3}$, 乙先來則與其 $\frac{1}{4}$, 丙先來則與其 $\frac{1}{5}$, 若三人同時來, 當各與幾何.

解 與前題同樣解之可也. 卽餘酒與甲之比爲 2:1, 而餘酒與乙之比爲 3:1, 餘酒與丙之比爲 4:1, 故餘酒若爲 12, [2, 3, 4 之最小公倍數] 則甲爲 6, 乙爲 4, 丙爲 3, 故甲爲 $\frac{6}{12+6+4+3}=\frac{6}{25}$, 乙爲 $\frac{4}{25}$, 丙爲 $\frac{3}{25}$.

443. 將 161 四分之, 甲乙之和與丙丁之和, 如 15 與 8, 乙丙之和與甲丁之和如 12 與 11, 丁爲甲之八分之三, 問各數幾何.

解 丁爲甲之 $\frac{3}{8}$, 故甲爲 8, 則丁爲 3, 因恰爲甲丁之和 11, 故乙丙之和爲 12, 由是則甲乙丙丁之和爲 $12+11=23$, 而甲乙爲 15, 丙丁爲 8, 合計亦爲 23, 故恰甲爲 8 丁爲 3, 則甲乙爲 15, 丙丁爲 8, 由是乙爲 $15-8$, 卽 7, 丙爲 $8-3$, 卽 5, 故將 161 分爲 8, 7, 5, 3 之比卽得, 但 $8+7+5+3=23$, 故甲爲 $161\times\frac{8}{23}=56$, 乙爲 $161\times\frac{7}{23}=49$, 丙爲 $161\times\frac{5}{23}=35$, 丁爲 $161\times\frac{3}{23}=21$.

444. 有甲乙二人, 甲出金 1200 圓, 乙出金 2000 圓, 但甲經理其事, 應得其利益之十分之一, 其餘則依原金配之, 而甲之所得共爲 350 圓, 問乙之所得幾何.

解 甲分得全利益之 $\frac{1}{10}$, 其餘 $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$, 當依原金配分之, 故甲之所得爲 $\frac{9}{10}\times\frac{1200}{1200+2000}+\frac{1}{10}=\frac{7}{16}$, 而乙之所得爲 $\frac{9}{10}\times\frac{2000}{1200+2000}=\frac{9}{16}$, 故甲爲 7, 而乙爲 9, 但甲之所得爲 350 圓, 故乙之所得可依次之比例得之, 卽 $7:9=350:x$, 故 $x=450$ 圓.

445. 父與三子年齡之和, 爲 108 歲, 而三子年齡之比, 如 4 與 3 與 1, 但自今 6 年後, 三子年齡之和, 與父之年齡相等, 問今年之年齡各幾何.

解 今年父與三子年齡之和爲 108 歲, 故 6 年後之和爲 108歲+6歲×4 卽 132 歲, 而斯時三子年齡之和, 與父之年齡相等, 故斯時父之年齡爲 132歲÷2=66歲, 因而今年父爲 66歲−6歲=60歲, 故今年三子年齡之和, 爲 108歲−60歲=48歲, 依 4, 3, 1, 配分之, 則可得三子之各年齡, 乃因 $4+3+1=8$, 故 48歲×$\frac{4}{8}$=24歲, 48歲×$\frac{3}{8}$=18歲, 48歲×$\frac{1}{8}$=6歲.

446. 甲乙二人各持金若干圓, 行於市, 甲買羊 41 頭, 尙餘金 6 圓, 乙欲買羊 33 頭, 尙不足 2 圓, 而甲乙所有金之和爲 300 圓, 問各一人所有銀幾何.

解 合計 300 圓, 因甲餘 6 圓, 乙不足 2 圓, 故兩人買羊之總價, 爲 300圓+2圓−6圓=296圓, 由是將此 296 圓配分爲

甲41與乙33之比，即可得兩人買羊之價，卽甲爲 $296^{圓}\times\frac{41}{41+33}=164^{圓}$，乙爲 $296^{圓}\times\frac{33}{41+33}=132^{圓}$，故甲爲 $164^{圓}+6^{圓}=170^{圓}$，而乙爲 $132^{圓}-2^{圓}=130^{圓}$.

447. 將4755圓，四人分之，其所得，乙等於甲之三倍，甲乙之和等於丙，乙丙之和等於丁，問各得幾何.

圖 甲爲1，則乙爲3，丙爲 $1+3=4$，又丁等於乙丙之和，故丁爲 $3+4=7$，由是將4755圓，配分爲甲1乙3丙4丁7之比可也．但 $1+3+4+7=15$，故甲爲 $4755\times\frac{1}{15}$，卽317圓，乙爲 $4755\times\frac{3}{15}$，卽951圓，丙爲 $4755\times\frac{4}{15}$，卽1268圓，丁爲 $4755\times\frac{7}{15}$，卽2219圓.

448. 有三商，甲出金800圓，乙出金900圓，丙出金500圓，又甲出地200步，乙出地130步，丙出地110步，共得利金1650圓，其三分之二，依原金配分之，其餘依地面配分之，問各得幾何.

圖 $1650^{圓}\times\frac{2}{3}=1100^{圓}$，依原金分之，$1650^{圓}-1100^{圓}=550^{圓}$，依地面分之，夫 $1100^{圓}$ 依原金分之，則因 $800+900+500=2200$，故甲爲 $1100^{圓}\times\frac{800}{2200}=400^{圓}$，乙爲 $1100^{圓}\times\frac{900}{2200}=450^{圓}$，丙爲 $1100^{圓}\times\frac{500}{2200}=250^{圓}$，又將550圓依地面分之，則因 $200+130+110=440$，故甲爲 $550^{圓}\times\frac{200}{440}=250^{圓}$，乙 $550^{圓}\times\frac{130}{440}=162^{圓}.5$，丙爲 $550^{圓}\times\frac{110}{440}=137^{圓}.5$，因而所分，甲爲 $400^{圓}+250^{圓}=650^{圓}$，乙爲 $450^{圓}+162^{圓}.5=612^{圓}.5$，丙爲 $250^{圓}+137^{圓}.5=387^{圓}.5$.

449. 有三商，其出金之比如6與5與9，又其作事勞力之比，如5與3與2，今得利180圓，其三分之二，依元金分之，其餘依勞力分之，問各所得幾何.

圖 三分之二，依元金分之，則三分之一，依勞力分之，故各之所得，因 $6+5+9=20$ 及 $5+3+2=10$，故甲爲 $\frac{2}{3}\times\frac{6}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}=\frac{11}{30}$，乙爲 $\frac{2}{3}\times\frac{5}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{4}{15}$，丙爲 $\frac{2}{3}\times\frac{9}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{10}=\frac{11}{30}$，故其所分甲丙各爲 $180^{圓}\times\frac{11}{30}=66^{圓}$，而乙爲 $180^{圓}\times\frac{4}{15}=48^{圓}$

450. 將金392圓四分之，甲與乙如5與6，丙比乙多24圓，丁比丙多22圓，問各幾何.

圖 丙比乙多24圓，丁更多22圓，假令於總金額減去此所多之金額，則丙丁皆等於乙而總金額爲 $392-(24+24+22)$，卽322圓，由是先將甲爲5乙丙丁各爲6而配分之，則甲爲 $322\times\frac{5}{5+6\times3}$，卽70圓，乙爲 $322\times\frac{6}{5+6\times3}$，卽84圓，故所配分數，甲爲70圓，乙爲84圓，丙爲 $84^{圓}+24^{圓}=108^{圓}$，丁爲 $108^{圓}+22^{圓}=130^{圓}$.

451. 將120五分之，乙比甲少2個，乙與丁如9與7，丁比乙少3個，戊比丁少2個，問各幾何.

圖 使甲少2個，使丙多3個，使戊多2個，則甲乙丙互相等，而丁戊亦互相等，而乙與丁如9與7，故如斯之甲乙丙皆如9，而丁戊皆如7，而如斯之甲

乙丙丁戊之合計,比以前之合計,多 $2+3-2$,卽多3個,而爲123,故先將123以甲乙丙各爲9,丁戊各爲7之配分之,則甲乙丙各爲 $123\times\frac{9}{9\times3+7\times2}=27$,而丁戊各爲 $123\times\frac{7}{9\times3+7\times2}=21$,故不多2個之甲不多3個之丙不多2個之戊,卽原之甲乙丙丁戊,各如次,卽 29, 27, 24, 21, 19.

452. 有三商,甲出原金500圓茶100斤,乙出原金600圓酒10罎,丙出原金610圓,共得若干之利,而配分之,甲得全利45分之14,乙得20分之7,其餘丙得之,問茶1斤酒1罎之價幾何.

圖 丙之所得爲 $1-\left(\frac{14}{45}+\frac{7}{20}\right)=\frac{61}{180}$,故甲乙丙出金之比,爲 $\frac{14}{45}, \frac{7}{20}, \frac{61}{180}$,或化爲整數之比,而爲甲56,乙63,丙61,故資本全額,自比例式 $61:56=610:x$,得甲爲560圓,自比例式 $61:63=610:x$,得乙爲630圓,故茶100斤之價,爲 $560^{圓}-500^{圓}=60^{圓}$,因而茶1斤之價,爲 $60^{圓}\div100=6^{角}$,酒10罎之價,爲 $630^{圓}-600^{圓}=30^{圓}$,因而酒1罎之價,爲 $30^{圓}\div10=3^{圓}$.

453. 有三人牧羊,甲有5畝乙有10畝之野地,丙借其地,因而丙出地租75圓,甲乙分之,各所畜羊之數,如4與5與6,問甲乙所得各幾何.

圖 野地之總畝數,爲 $5^{畝}+10^{畝}=15^{畝}$,而牧羊各使用之地面,因 $4+5+6=15$,故甲爲 $15^{畝}\times\frac{4}{15}=4^{畝}$,乙爲 $15^{畝}\times\frac{5}{15}=5^{畝}$,丙爲 $15^{畝}\times\frac{6}{15}=6^{畝}$,故丙所出地租75圓,恰當於此6畝之地租,甲初有5畝之野地,因使用4畝當可得 $5^{畝}-4^{畝}=1^{畝}$ 之地租,乙初有10畝之野地,因使用5畝,當可得 $10^{畝}-5^{畝}=5^{畝}$ 之地租,故甲與乙當以1與5之比,配分丙所出75圓之地租,卽甲爲 $75^{圓}\times\frac{1}{5+1}=12^{圓}.5$,而乙爲 $75^{圓}\times\frac{5}{5+1}=62^{圓}.5$.

454. 有徑100丈之圓地,外圍寬10丈之田,又其外圍有寬10丈之園,今耕田及刈園,共費25時間,問耕田刈園之時間各幾何. 但耕田與刈園,同時間得成同面積.

圖 圓之半徑爲 $50^{丈}+10^{丈}+10^{丈}=70^{丈}$,田之半徑爲 $50^{丈}+10^{丈}=60^{丈}$,而圓之面積,與半徑之平方成比例,故園及田面積之比,爲 70^2-60^2 與 60^2-50^2,卽13與11,故刈及耕所費之時間,園爲 $25^{時}\times\frac{13}{13+11}=13^{時}\frac{13}{24}$,田爲 $25^{時}\times\frac{11}{13+11}=11^{時}\frac{11}{24}$.

455. 有三種茶,各1斤之價之和,爲1圓3角4分,但甲騰貴 $\frac{1}{10}$,乙落下 $\frac{2}{10}$,丙騰貴 $\frac{3}{10}$ 各價皆相等,問各1斤之原價.

圖 先求甲乙丙之比,乃以後之相等價爲1,則甲未騰貴以前爲 $\frac{1}{1.1}$,乙未下落以前爲 $\frac{1}{0.8}$,丙未騰貴以前爲 $\frac{1}{1.3}$,或化爲整數之比,則爲甲104,乙143,丙88之比,故所求之價,卽將1圓4角3分,依此比配分之. 但 $104+143+88=335$,故甲爲 $134^{分}\times\frac{104}{335}=41^{分}.6$ 卽4角1分6釐,乙爲 $134^{分}\times\frac{143}{335}=$

$57^{\text{分}}.2$ 即5角7分2釐，丙爲 $134^{\text{分}}\times\frac{88}{335}=35^{\text{分}}.2$，即3角5分2釐.

456. 有三人營一商業，甲出金800圓，三個月後再出250圓，乙最初出950圓，二個月之終，忽取去200圓，又丙最初出650圓，六個月之終，再出400圓，營業一年後，得純利2516圓，問各配分幾何.

圖 甲將800圓出12個月，250圓出12－3即9個月，故爲將 $800^{\text{圓}}\times12+250^{\text{圓}}\times9=11850^{\text{圓}}$，出1個月之比．同樣乙爲將 $950^{\text{圓}}\times12+200^{\text{圓}}\times10=9400^{\text{圓}}$，出1個月之比，丙爲將 $650^{\text{圓}}\times12+400^{\text{圓}}\times6=102000^{\text{圓}}$，出1個月之比，省去此比之公因數，而爲237，188，204，依此比配分純利可也．但 $237+188+204=629$，故甲所取爲 $2516^{\text{圓}}\times\frac{237}{629}=948^{\text{圓}}$，乙所取爲 $2516^{\text{圓}}\times\frac{188}{629}=752^{\text{圓}}$，丙所取爲 $2516^{\text{圓}}\times\frac{204}{629}=816^{\text{圓}}$.

457. 甲出金2100圓，乙出金1750圓，合營商業，一年之終，二人各增出金700圓，丙於此時，又出金2500圓，自此經18個月，得利金2166圓5角，問配分各幾何.

圖 甲將2100圓，出12＋18＝30個月，將700圓出18個月，故同於將 $2100^{\text{圓}}\times30+700^{\text{圓}}\times18=75600^{\text{圓}}$，出一個月．同樣乙將 $1750^{\text{圓}}\times30+700^{\text{圓}}\times18=65100^{\text{圓}}$，出一個月，丙將 $2500^{\text{圓}}\times18=45000^{\text{圓}}$，出一個月，故其配分之比，爲75600與65100與45000，或簡單之，爲252與217與150，依此比配分21665角可也．但 $252+217+150=619$，故其配分額，甲爲 $21665^{\text{角}}\times\frac{252}{619}=882^{\text{圓}}$，乙爲 $21665^{\text{角}}\times\frac{217}{619}=749^{\text{圓}}.5$，丙爲 $21665^{\text{角}}\times\frac{150}{619}=525^{\text{圓}}$.

458. 甲乙丙三人，合力營商，甲初出金3000圓，六個月後減去其半分，乙初出金2000圓，四個月後減去金500圓，丙初出金2500圓，一年後，配分利金7700圓，問各得幾何.

圖 甲 $3000^{\text{圓}}$，爲六個月所出金，$3000^{\text{圓}}\div2=1500^{\text{圓}}$，爲後六個月所出金，故同於將 $3000^{\text{圓}}\times6+1500^{\text{圓}}\times6=27000^{\text{圓}}$，爲一個月所出金、同樣乙同於將 $2000\times4+(2000^{\text{圓}}-500^{\text{圓}})\times(12-4)=20000^{\text{圓}}$，爲一個月所出金，丙同於將 $2500^{\text{圓}}\times12=30000^{\text{圓}}$，爲一個月所出金，故配分7700圓之比，爲27000，20000，30000之比，或簡單之，而爲27，20，30之比．但 $27+20+30=77$，故其配分額甲爲 $7700^{\text{圓}}\times\frac{27}{77}=2700^{\text{圓}}$，乙爲 $7700^{\text{圓}}\times\frac{20}{77}=2000^{\text{圓}}$，丙爲 $7700^{\text{圓}}\times\frac{30}{77}=3000^{\text{圓}}$.

混合法

459. 一斤1圓4角之茶8斤，與1斤2圓5角之茶3斤．混合之，得1斤幾圓之茶.

圖 混合茶之斤數，爲 $8^{\text{斤}}+3^{\text{斤}}=11^{\text{斤}}$，混合茶之價，爲 $1^{\text{圓}}.4\times8+2^{\text{圓}}.5\times3$，即18圓7角，故混合茶1斤之價，爲 $18^{\text{圓}}.7\div11=1^{\text{圓}}.7$.

注意 解此種問題，不必知混合物之分量，但知其分量之比，可也.

460. 有上下二種糖，每斤上2角5分，下1角4分，問以如何之比混合之，則得每斤1角7分之糖.

圖 將一斤2角5分之糖，以1角7分賣之，則一斤有 $25^{\text{分}}-17^{\text{分}}=8^{\text{分}}$ 之損，又將

一斤1角4分之糖，以1角7分賣之，則一斤有17分－14分＝3分之益，故將上糖取3斤，則有8分×3＝24分之損，下糖取8斤，則有3分×8＝24分之益，於是損益相償，故得上下斤數之比，爲3：8，此運算如次列之爲便，

	一斤之價	損益	比
上　糖	25分	8分損	3
混合糖	17分		
下　糖	14分	3分益	8

【注意】 本題僅求混合斤數之比而止，若題文已定混合之斤數，例如求55斤，則依比例配分，得上爲15斤，下爲40斤．

461. 有二位之數，其數爲數字之和之4倍，問二位之數如何．

【解】 依題意一位數字之1倍，與十位數字之10倍，爲數字和之4倍，故以混合法，可求得二數字之比．

	倍數	過不足	比
一位數字	1	3不足	$\cancel{6}$ 2
二位數	4		
十位數字	10	6過	$\cancel{3}$ 1

故十位數字與一位數字之比爲1：2，本數爲12，24，36，48．

【注意】 12，24，36，48，各爲12之1，2，3，4倍，但數字必小於10，故12之5倍以上不能取，故本題惟四數．

462. 有龜鶴共50頭共140足，問各幾頭．

【解】 平均一頭之足數，爲140÷50＝2.8即2足.8，故龜鶴之比，可依混合法求之如次．

	一頭足數	過不足	比
龜	4	1.2 過	$\cancel{8}$ 2
平均	2.8		
鶴	2	0.8不足	$\cancel{12}$ 3

故龜與鶴頭數之比如2與3，由是龜之頭數爲$50\times\frac{2}{2+3}=20$．而鶴之頭數爲$50\times\frac{3}{2+3}=30$．

【注意】 見四則49題．

463. 有甲乙丙三種茶，一斤之價，甲爲72錢，乙爲60錢，丙爲48錢，問以如何之比混合之，則可得一斤57錢之茶．但甲乙斤數之比爲1：7．

【解】	一斤之價	損益	比
甲　茶	72錢	15錢損	1
乙　茶	60錢	3錢損	7
混合茶	57錢		
丙　茶	48錢	9錢益	x

故損金爲15錢×1＋3錢×7＝36錢，因而x＝36÷9＝4，故所求之比爲1：7：4．

【注意】I. 混合三種以上之物，除其一而知其他物分量之連比者，可如本例解之．

【注意】II. 混合物分量之比全不知，則可得幾種之答數．謂之不定問題，尙見第一門混合法之條．

464. 混合一斤68錢62錢54錢之酒而造一斤60錢之酒，今將54錢之酒與62錢之酒斤數之比，爲5：3，問三種斤數之連比如何．

【解】	一斤之價	損益	比
上　酒	68錢	8錢損	x
中　酒	62錢	2錢損	3
混合酒	60錢		
下　酒	54錢	6錢益	5

故中酒之損金爲2錢×3＝6錢，而下酒之益金爲6錢×5＝30錢，故將上酒加$x=(30-6)\div8=3$可也．故所求上中下酒之比爲3：3：5．

465. 有上中下三種茶,一斤之價,上72錢,中60錢,下40錢今混合上6斤中4斤下幾斤,則得一斤48錢之茶.

圖	一斤之價	損益	比
上茶	72錢	24錢損	6
中茶	62錢	12錢損	4
混合茶	48錢		
下茶	40錢	8錢益	x

故損金為 24錢×6+12錢×4=192錢,

故 $x=192\div8=24$, 即24斤.

466. 有茶商,混合一斤45錢之茶,與一斤33錢之茶,共百斤,以一斤42錢賣之,得原價六分之一之利,問各種當混合幾斤,

圖 賣42錢得原價六分之一之利,故原價為42錢$\div1\frac{1}{6}$=36錢, 故如次解之.

	一斤之價	損益	比
上茶	45錢	9錢損	1
平均	36錢		
下茶	33錢	3錢益	3

故所求之斤數,即將100斤配分為1與3之比即得. 故45錢之茶,為100斤$\times\frac{1}{1+3}$=25斤, 33錢之茶,為100斤$\times\frac{3}{1+3}$=75斤.

467. 將1圓1斗3升之麥,與1斗8升之豆,共買22石2斗,賣得168圓,得2成之利,問石數各如何.

圖 賣168圓得2成之利,故賣168圓$\div(1+0.3)$=140圓 則無損益,故取二種作平均一升 $\frac{140}{2220}$圓$=\frac{7}{111}$圓可也. 但麥為一升$\frac{1}{13}$圓,豆為一升$\frac{1}{18}$圓,故如次解之,

	一升之價	損益	比
麥	$\frac{1}{13}$ 圓	$\frac{20}{13\times111}$ 損	13
平均價	$\frac{7}{111}$ 圓		
豆	$\frac{1}{18}$ 圓	$\frac{15}{18\times111}$ 益	24

故將22石2斗配分為麥13豆24之比即得, 但13+24=37, 故麥為

2220升$\times\frac{13}{37}$=7石8斗, 豆為2220升$\times\frac{24}{37}$=14石4斗.

注 此種問題,如此求一升之價,而計算之固可,然即以一圓之升數求之,亦得同樣之結果,即將22石2斗賣140圓,得一圓之升數,為$\frac{2220}{140}$升$=\frac{111}{7}$升, 故得次式.

	一圓之升數	過不足	比
麥	13	$\frac{20}{7}$ 過	3
平均	$\frac{111}{7}$		
豆	18	$\frac{15}{7}$ 不足	4

因而麥與豆之價,如3圓與4圓,故升數之比如13×3與18×4, 即13與24, 亦得與前同樣之答數.

468. 成分0.9重量26瓦.957之日本舊壹圓銀貨1000個,以之改鑄成分0.8重量2匁[約一錢]7分之五拾錢(即半圓)銀貨,若毀造時無損耗,問能參加銅幾何,可鑄造五拾錢銀貨幾何.

圖	成分	過不足	比
壹圓銀貨	0.9	0.1 過	8
平均	0.8		
參加銅	0	0.8不足	1

即壹圓銀貨與參加銅重量之比為8:1, 但壹圓銀貨之重量為26瓦.957,

故1000個爲26957瓦，故參加銅爲 $\frac{1}{8}$，即爲3369瓦.625．又全重量爲26957瓦＋3369瓦.625＝30325瓦.625，而五拾錢銀貨一個之重量爲 $\frac{15}{4}$ 瓦×2.7＝10瓦.125，故依除法，得商2995，剩餘2瓦.25，而2瓦.25之中，所含之銀爲2瓦.25×0.8＝1瓦.8，故五拾錢銀貨之數爲2995，尙餘純銀1瓦.8.

注意 若言2瓦.25中所含之銅，則因2瓦.25×0.2＝0瓦.45，故欲得五拾錢銀貨2995個，則當參加銅3369瓦.625－0瓦.45＝3369瓦.175.

469. 十八金與十四金與十二金，以如何之比混合，則得十六金，但十四與十二金分量之比爲3：2，

解	成分	過不足	比
十八金	18	2 過	x
混合十六金	16		
十四金	14	2 不足	3
十二金	12	4 不足	2

故將十四金與十二金混合爲3與2之比，則有2×3＋4×2＝14之不足，故必將十八金混合14÷2＝7，由是所求之比爲7：3：2.

470. 成分0.75之銀塊，與成分0.85及0.9之銀塊，以如何之比混合，則得成分0.8之銀塊，但成分0.75與0.85之銀塊分量之比爲3：2.

解	成分	過不足	比
	0.75	0.05 不足	3
混合塊	0.8		
	0.85	0.05 過	2
	0.9	0.1 過	x

故將成分0.75及0.85之銀塊，混合爲3：2，則有0.05×3－0.05×2＝0.05之不足，由是成分0.9之銀塊，必混合爲0.05÷0.1＝0.5，故混合之比爲3：2：0.5，化爲整數之比，即6：4：1.

471. 有越嶺之道路，其長爲3里，而上下之時間需5時42分，今每時之速，上爲5里，下爲6里120丈，問上下之路程各幾何.

解 此嶺若皆爲上道，則上之需 $\frac{32}{5}$ ＝6時.4，又若皆下道，則下之需 $\frac{32}{\frac{20}{3}}$＝4時.8，但越過此嶺，而爲5時42分，即5時.7，故如次.

	時間	過不足	比
上	6.4	0.7 過	9
平均	5.7		
下	4.8	0.9 不足	7

故上道與下道之比，爲9：7之比，因而全道路當分爲9：7之比，由是爲32里× $\frac{9}{9+7}$＝18里，而下爲32里× $\frac{7}{9+7}$＝14里.

472. 有旅人，晴一日行48里，陰一日行36里，雨一日行30里，今行往某地，有晴天7日，陰天3日，平均一日行39里，問雨天有幾日.

解	一日之行程	過不足	比
晴	48	9 過	7
平均	39		
陰	36	3 不足	3
雨	30	9 不足	x

故晴天7日，陰天3日，則有9里×7－3里×3＝54里之過剩，故若不加雨天54里÷9里＝6日，則不得平均，故所求之雨天爲6日.

473. 買入蘋果若干個，其中之若干

個得5成之利賣之，而其餘因有腐爛失1成之本賣之，然總價尙得4成之利，問所腐爛者爲幾成.

解　一部分得5成利，一部分失1成本，等於平均得4成利，故

	價	得　失	比
得者	1·5	0·1 得	5
平均	1·4		
失者	0·9	0·5 失	1

故得5成者與失1成者之比，爲5：1，由是腐爛者爲全數之$\frac{1}{5+1}=0{\cdot}166\cdots\cdots$即1成6分7厘弱.

474. 100中含鹽25分之海水，問須以如何之比與水混合，則得100分中含鹽13分之水.

解　海水含0·25之鹽，混合之鹽水含0·13之鹽，故

	鹽量	過不足	比
海　水	0·25	0·12 過	13
混合鹽水	0·13		
水	0	0·13不足	12

故所求之比，爲海水13與水12之比.

475. 有甲乙二樽，各盛酒水之混合液，甲樽有酒84升與水21升，乙樽有酒56升與水8升，今自兩樽各汲取若干升而造酒24升與水4升之混合液，問自兩樽汲取之量如何.

解　甲酒合$\frac{84}{84+21}=\frac{4}{5}$之酒，乙酒合$\frac{56}{56+8}=\frac{7}{8}$之酒，今欲混合此兩種酒而成合$\frac{24}{24+4}=\frac{6}{7}$之酒，製造$24^{升}+4^{升}=28^{升}$，乃將此$\frac{4}{5}$，$\frac{7}{8}$，及$\frac{6}{7}$之比，整數表之，則爲224，245，240，故得次式，

	過不足	比
245	5　過	16
混合酒 240		
224	16不足	5

故汲出之量，自甲樽爲16，自乙樽爲5之比，故所求之答數，爲將28升分爲16與5之比，即甲樽爲$28^{升}\times\frac{16}{5+16}=21^{升}\frac{1}{3}$，而乙樽爲$28^{升}\times\frac{5}{5+16}=6^{升}\frac{2}{3}$.

476. 將19斤之金，入於水中，其重減1斤，又將10斤之銀入於水中，其重減1斤，今將金銀混合物126斤，入於水中，其重量爲117斤，問各幾斤.

解　金在水中稱之，則減重量$\frac{1}{19}$，銀在水中稱之，則減重量$\frac{1}{10}$，而混合物減$\frac{126-117}{126}=\frac{9}{126}$，故依混合法如次.

	過不足	比
金 $\frac{1}{9}$	$\frac{45}{126\times19}$	38
混合物 $\frac{9}{126}$		
銀 $\frac{1}{10}$	$\frac{36}{126\times10}$	25

由是所求之斤數，爲將126斤分爲38與25之比，故金爲$126^{斤}\times\frac{38}{25+38}=76^{斤}$，銀爲$126^{斤}\times\frac{25}{25+38}=50^{斤}$.

注意　金之比重爲19·3，銀之比重爲10·5，而19與10，乃銀與金比重之近似數.

477. 有元金若干圓，內120圓年利2分，80圓年利1分2厘，其餘年利1分，平均年利1分5厘，問元金幾何.

圝

	過不足	比
2分	0.5 過	120
平均1分.5		
1分.2	0.3 不足	80
1分	0.5 不足	x

故2分之金與1分2厘之金，有 $126\times0.5-80\times0.3=36$ 之過剩，由是1分之金爲 $36\div0.5$，即72圓，故元金共爲120圓+80圓+72圓=272圓.

478. 有上中下三種筆，共爲27支，其價爲1圓8分，而一支之價，上爲1角，中爲5分，下爲2分，問各爲幾支．但上比中少7支.

圝 中比上多7支，假令除去此7支，則上與中同數，而總數爲27支−7支=20支，且總價爲108分−5分×7=73分，故平均一支之價爲 $\frac{73}{20}$分，而上中下及平均一支之價爲10分，5分，2分，$\frac{73}{20}$分，今將此價之比，以整數表之，則爲200，100，40，73，故可得次式.

	過不足	比
上 200	127 過	1
中 100	27 過	1
平均 73		
下 40	33 不足	x

故 $x=(127+27)\div33=\frac{14}{3}$，由是20支之中，含上1中1下 $\frac{14}{3}$ 之比，化爲整數之比，則爲上3中3下14，而其合計，恰爲20，故20支之中，上爲3支，中爲3支，下爲14支，由是原之27支之中，上爲3支，中爲3支+7支=10支，下爲14支.

479. 有甲乙丙三組工人，一人一日之工錢，甲爲72錢，乙比丙多7錢，其和比甲之2倍少21錢，而甲組爲五人，乙組爲8人，一人一日之工價，平均爲64錢3分，問丙組之人數.

圝 甲爲72錢，而乙丙之和爲72錢×2−21錢=123錢，又乙比丙多7錢，故丙爲(123錢−7錢)÷2=58錢，而乙爲58錢+7錢=65錢．故

	過不足	比
甲 72錢	7.7 過	5
乙 65錢	0.7 過	8
平均 64錢.3		
丙 58錢	6.3 不足	x

由是 $x=(7.7\times5+0.7\times8)\div6.3=7$，故丙組之人數爲7人.

480. 有船順流而下，每時以18里之速行5時間，其後4時行60里，又其後遇順風，每時以30里之速行若干時間，由是平均一時間之速爲24里，問其順風所行時間幾何.

圝 最初每時間行18里，其次每時間行 $\frac{60}{4}$ 即15里，最後每時間行30里，而平均一時間行24里，故

	過不足	時間
18里	6里不足	5
15里	9里不足	4
平均 24里		
30里	6里 過	x

故 $x=(6\times5+9\times4)\div6=11$ 即11時間.

481. 有穀商賣米20石，得2成之利，賣小麥140石，得1成5分之利，賣大豆若干石，得1成之利，平均得1成2分之利，問大豆賣幾何．但米3石之價，等於小麥4石之價，小麥5石之價，等於大豆6石之價.

解　米3石等於麥4石之價，故米1石與小麥1石之價之比爲4:3，而大豆1石之價，與小麥1石之價之比爲6:5故米小麥大豆各一石之價之比如次，

米		小麥		大豆
4	:	3	→	3
6	←	6	:	5
24	:	18	:	15

或簡單之爲8:6:5，由是米20石與小麥140石之價之比，如20×8與140×6，故得次式．

	利	過不足	比
米	2成	0.8 過	20×8
小麥	1成.5	0.3 過	140×6
平均	1成.2		
大豆	1成	0.2 不足	x

由是大豆全價之比，爲$(0.8\times20\times8+0.3\times140\times6)\div0.2=1900$，而大豆1石之價之比，爲5，故大豆爲$1900\div5$，即380石．

482. 有甲乙丙三種球，其重量，甲3個等於乙4個，乙5個等於丙6個，今取若干個，而其平均一個之重，等於甲之五分之四，問各幾個．

解　甲之重爲4，則乙之重爲3，而乙之重爲6，則丙之重爲5，故甲乙丙重量之比如次，

甲		乙		丙
4	:	3	→	3
6	←	6	:	5
24	:	18	:	15

即8:6:5，而平均一個之重爲甲之$\frac{4}{5}$，故爲$8\times\frac{4}{5}=6.4$，故得次式．

		過不足	比
甲	8	1.6 過	
平均	6.4		
乙	6	0.4 不足	
丙	5	1.4 不足	

如此三物以上之混合，其比之二者，可任意定之*．例如此問題，若混合甲3個乙5個，則因有$1.6\times3-0.4\times5=2.8$之過，故混合丙$2.8\div1.4=2$個可矣．或將此三過中，任意2個之比，任意定之亦可，換言之，即求$1.6m-0.4n-1.4p=0$†之m, n, p，而m, n, p中任意二個，可任意定之也．今若$m=2, p=2$，則$n=1$，故爲甲一乙二丙一之比．*此謂任意定之者，亦有限制，即必使問題能成立而定之也．†此式將其各項10倍之，而爲$16m-4n-14p=0$，又以2除之，則爲$8m-2n-7p=0$，此即代數學中所謂不定方程式，故m, n, p之中任意定其二個，而得求其他之一．

483. 甲每日行13里，自某地出發，經3日乙始追之，每日行20里，其後疲乏，每日行17里，其後又疲乏，每日行15里，而某日之終，同宿於一處，問甲乙所行日數如何．

解　不行之3日，可看做每日行0里，故乙每日行0里，或20里，或17里，或15里，至追及甲，平均每日行13里，[甲恆以此而行故也.]由是

	過不足	比
20里	7里 過	3
17里	4里 過	3
15里	2里 過	3
平均 13里		
0里	13里 不足	3

因 $7+4+2=13$, 故過與不足互相等, 故各行一日, 恰爲平均行13里之路程, 但行0里之日數爲3日, 故其他亦皆爲3日, 然如前解所云, 此種問題爲不定, 故不必限於3日, 此不過示其答數之一耳. 例如乙每日以20里之速行1日, 以17里之速行7日, 以15里之速行2日, 則甲以13里之速行$(1+7+2+3)$日, 而甲乙所行之路程亦相等.

注意 若將行20里, 17里, 15里之日數, 爲m, n, p, 故使 $7m+4n+2p=13\times 3$, 而求m, n, p之值, 則甲所行日數爲$m+n+p+3$, 而乙爲$m+n+p$.

484. 一圓上米4升中米5升下米5升5合, 三種共爲11石, 其價爲225圓, 問各幾何.

解 上中下各1升之價, 爲$\frac{1}{4}$圓, $\frac{1}{5}$圓, $\frac{1}{5.5}$圓, 三種合而平均則$\frac{225}{1100}$, 即$\frac{9}{44}$圓, 故將此上中下混合者, 各一升之價之比, 改爲整數之比, 則爲55, 44, 40, 及45, 故得次式, 即

	過不足	比
55	10過	p
平均 45		
44	1不足	q
40	5不足	r

故此問題爲不定問題, 而p, q, r之中, 可任意定其二個, 然若得最後之答爲整數, 則必依觀察求之, 即如$p=6$ $q=5$, 因而$r=11$, 由是將11石配分爲6, 5, 11之比, 則可得所求答數之一組, 即上3石, 中2石5斗, 下5石5斗.

注意 最後之答, 欲得整數之一般方法, 必依代數學之不定方程式, 在算術遭遇此種問題, 惟以觀察達此目的之外無方法.

485. 有三位之數, 其數等於其數字之和之19倍, 問本數如何.

解 三位之數爲一位十位百位三數之和, 而各數字各以1, 10, 100乘之之和, 等於以19乘數字之和, 由是可以通常之混合法求之, 即

	過不足	比
100	81過	p
平均 19		
10	9不足	q
1	18不足	r

此問題之比爲不定, 然p, q, r, 各爲百位十位一位之數字, 故不可不各爲一位之整數而p, q, r之間, 不可不有$81p=9q+18r$, 或$9p=q+2r$之關係, 今於此關係若$p=1$, 則$9=q+2r$, 而$2r$爲偶數, 故q不可不爲奇數, 因次第得如下之關係,

$$p=1,\begin{cases} q=1 & \text{則} & r=4 \\ q=3 & \text{則} & r=3 \\ q=5 & \text{則} & r=2 \\ q=7 & \text{則} & r=1 \\ q=9 & \text{則} & r=0 \end{cases}$$

故得適於此題要件之數, 爲114, 133, 152, 171, 190之五個, 若$p=2$, 則$18=q+2r$, 故q不可不爲偶數,

$$p=2,\begin{cases} q=0 & \text{則} & r=9 \\ q=2 & \text{則} & r=8 \\ q=4 & \text{則} & r=7 \\ q=6 & \text{則} & r=6 \\ q=8 & \text{則} & r=5 \end{cases}$$

故得適於此題要件之數爲209, 228, 247, 266, 285之五個, 若$p=3$則$27=q+2r$, 故q不可不爲奇數.

$$p=3,\begin{cases} q=1 & \text{則}\quad r=(\text{二位之數}) \\ q=3 & \text{則}\quad r=(\text{二位之數}) \\ q=5 & \text{則}\quad r=(\text{二位之數}) \\ q=7 & \text{則}\quad r=(\text{二位之數}) \\ q=9 & \text{則}\quad r=9 \end{cases}$$

故得399之一數,若$p=4$,則爲$36=q+2r$,而q,r,不能成一位之數,$p=5$以上亦然,由是所求之數,爲114,133,152,171,190,209,228,247,266,285及399之十一個.

百分法　利息算

486. 有票面20圓之勸業公債票,以18圓7角之時價買30張,付中人以票面價格5厘之中費,忽時價騰貴,每張爲19圓3角,問此人得利幾何.

【解】 中費爲票面價格之0.005,故每張爲20圓×0.005=0圓.1,故買票者同於以18圓.7+0圓.1=18圓.8買一張,其後時價騰貴,而爲19圓.3,故每張之利益,爲19圓.3−18圓.8=0圓.5,而30張則爲0圓.5×30=15圓.

487. 某物賣3圓,則有百分之25之利,若以2圓8角8分賣之,則利益幾何.

【解】 某物之原價,爲3÷(1+0.25),即2圓4角,故以之賣288分,則有288分−240分=48分之利,此利益爲48÷240=0.2,即百分之二十.

488. 某人將住宅火災保險,其保險金爲其住宅價格三分之二,而保險費一年爲1分5厘,而一年付18圓4角,問住宅之價格如何.

【解】 1分5厘之保險費,而爲18圓4角,故保險金爲18.4÷0.015,因其相當於住宅價格之$\frac{2}{3}$,故其價格爲18圓.4÷0.015÷$\frac{2}{3}$=1840圓.

489. 有三個月後應付金百圓之期票,欲以年6分之折扣,而取現金,問當得金幾何.

【解】 年6分則三個月之利率爲1分5厘,故金百圓三個月之利息爲100圓×0.015=1圓.5,即1圓5角,謂之折扣金,故現金爲100圓−1圓.5=98圓.5,即98圓5角.

490. 金600圓之內2折扣與外2折扣,何者多幾何.

【解】 內折扣之價格爲600圓×0.8=480圓,外折扣之價格,爲600圓÷(1+0.2)=500圓,由是內折扣比外折扣多500圓−480圓=20圓.

491. 內2折扣等於外幾折扣.

【解】 0.2÷(1−0.2)=0.25,故內2折扣等於外2折扣之2折5分.

492. 自483200圓減若干圓而爲302000圓,爲內幾折扣,又爲外幾折扣.

【解】 483200−302000=181200,故內折扣爲181200÷483200=0.375,即3折7分5厘,而外折扣爲181200÷30200=0.6,即6折.

493. 軍司令官於戰勝後,調查死傷,全軍之4分爲名譽之戰死,其餘之1成5分負傷,而負傷者與死者之差,爲2184人,問全軍之兵數幾何.

【解】 負傷者爲全軍之(1−0.04)÷0.15=0.144,故負傷者與戰死者之差,爲全軍之0.144−0.04=0.104,由是全軍之兵數,爲2184人÷0.104=21000人.

494. 日利1分7厘,[對於百圓之壹圓之分厘非百分法之分厘]當年利幾何.

【解】 17厘×365=6205厘,爲100圓一年之利息,故6圓.205÷100圓=0.06205,即6分

2厘5絲.

495. 以1折買之,得1成之利賣之,問為幾分之利.

解 買賣均得1成之利,故將原價為1,則買為$1-0.1=0.9$,而賣為$1+0.1=1.1$,故賣價對於買價,為$1.1\div0.9$,即$1.2\frac{2}{9}$,而利益為$1.2\frac{2}{9}-1=0.2\frac{2}{9}$,即2成2分2厘強.

496. 以現金買,則得10個,六個月兌價,則得8個,問利息年幾何.

解 以1買得之物,六個月兌價,而為$\frac{10}{8}$,故對於現金為1之六個月之利息,為$\frac{10}{8}-1=\frac{1}{4}$明矣,故所求之年利,為$\frac{1}{4}\times2=0.5$,即5成也.

注意 上解依外折算者,若依內折算之,則如次. 對於10個6個月之利息,為$10-8$,即2個,而1年為12個月,則為$2^{個}\times2=4^{個}$,故所求之年利,為$4\div10=0.4$,即4成也.

497. 某物以定價減1折賣之,尚得原價8分之利,問定價對於原價增幾何.

解 賣價為定價之0.9,此尚相當於原價之1.08,故定價相當於原價之$1.08\div0.9=1.2$,由是定價比原當增2成.

498. 某商人欲得原2成之利以定其價,而賣時得定價8折之價,問此商人損原價之幾分.

解 定價為原價之1.2,賣價為其8折,故為原價之$1.2\times0.8=0.96$,由是此人損原價之$1-0.96=0.04$,即損4分.

499. 一物賣40圓,而有1成2分之損失,若賣50圓,問有幾分之利益.

解 賣40圓,則損失1成2分,即得原價之$1-0.12=0.88$,故原價為$\frac{40}{0.88}$圓,而賣價,50圓,相當於原價之$50\div\frac{40}{0.88}=1.1$,由是此人之利益,恰相當於$1.1-1=0.1$,即1成.

500. 將金2800圓,分為二分,一部年利9分,一部年利8分5厘,而二部所得利息相等,問各部幾何.

解 二部利率之比為0.09:0.085,即18:17,故原金之比,必為17:18,故所求之數,為將2800圓配分為17與18之比,

即$2800^{圓}\times\frac{17}{18+17}=1360^{圓}$,

及$2800^{圓}\times\frac{18}{18+16}=1440^{圓}$.

501. 將金1000圓為二分,一部年利8分,一部年利一成,雙方所得利益,共為88圓,問各部之金額幾何.

解 1000圓得88圓之利,故相當於平均$\frac{88}{1000}=0.088$之利,故

	過不足	比
0.08	0.008 不足	3
平均 0.088		
0.1	0.012 過	2

由是將1000圓,配分為3與2之比,可也,即一部為$1000^{圓}\times\frac{3}{3+2}=600^{圓}$,而一部為$1000^{圓}\times\frac{2}{3+2}=400^{圓}$.

502. 有販賣冰者,以3圓1角5分買得63斤,每斤以1角賣之,得純利2成,問融解斤兩幾何.

解 賣價為$3^{圓}.15\times1.2=3^{圓}.78$,而每斤價1角而得3圓7角8分之價,故總斤數為$3.75\div0.1$即$37^{斤}.8$,故融解者,為$63^{斤}-37^{斤}.8=25^{斤}.2$,即25斤3兩2錢.

503. 某人以年利6分,於三月一日,借

金200圓，於五月一日還50圓，七月一日還70圓，其餘十一月十一日還之.其時當還若干.

解 年利爲6分，故月利爲$\frac{0.06}{12}=0.005$，故200圓三四兩月間之利息，爲$200^{\text{圓}}\times0.005\times2=2^{\text{圓}}$，而$200^{\text{圓}}-50^{\text{圓}}=150^{\text{圓}}$，五六兩月間之利息，爲$150^{\text{圓}}\times0.005\times2=1^{\text{圓}}.5$. 又$150^{\text{圓}}-70^{\text{圓}}=80^{\text{圓}}$，七八九十四個月間之利息，爲$80^{\text{圓}}\times0.005\times4=1^{\text{圓}}.6$，故十一月一日當還元金80圓，與利息$2^{\text{圓}}+1^{\text{圓}}.5+1^{\text{圓}}.6=5^{\text{圓}}.1$之和，即85圓1角.

504. 有酒店，將純酒混水4分，而每升又比純酒每斤之原價貴2成賣之，問利益之成分幾何.

解 一圓之酒混水與$1^{\text{圓}}.04$之酒同量，將此看做純酒，以原價貴2成賣之，故此酒之價爲原價之$1.04\times1.2=1.248$，故利益爲$1.248-1=0.248$，即2成4分8厘.

505. 將某物輸入某港，其海關稅課物價之1成2分，但因其物破損1成5分免稅，其餘之海關稅，爲408圓，問此物之總價幾何.

解 因破損1成5分.故其餘爲$1-0.15$，而對於此之海關稅爲408圓，故若全部課稅，則當爲$408^{\text{圓}}\div0.85=480^{\text{圓}}$價之1成2分，而爲480圓，故總價爲$480\div0.12$，即4000圓.

506. 白米時價，每圓5升3合，忽又每圓5升，問騰貴幾分.

解 1升之價，爲$\frac{1}{5.3}$圓，而騰貴後1升之價爲$\frac{1}{5}$圓，故爲對於$\frac{1}{5.3}$圓，而騰貴$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5.3}\right)$圓，由是當騰貴原價之$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5.3}\right)\div\frac{1}{5.3}=0.06$，即騰貴6分，

別解 $5^{\text{升}}.3-5^{\text{升}}=0^{\text{升}}.3$，而$0^{\text{升}}.3\div5^{\text{升}}=0.06$，即6分也.

507. 年利8分，而一年半之單利與複利之差，爲121圓6角，問元金幾何.但複利每半年計算利息，加入元金.

解 年利8分，一年半之單利，爲0.08×1.5，即0.12，而每半年計算之一年半之複利，爲1.04^3-1，即0.124864，故複利與單利之差，爲$0.124864-0.12=0.004864$，但依題文，此差相當於121圓6角，故元金爲$121^{\text{圓}}.6\div0.004864=2500^{\text{圓}}$.

508. 同金額，同利率，同期間，眞折扣爲22圓，銀行折扣爲24圓，問其金額幾何.

解 額面金＝眞現價＋眞折扣金，故額面金×利率＝眞現價×利率＋眞折扣金×利率，但額面金×利率，爲銀行扣折金，而眞現價×利率爲眞折扣金，由是銀行折扣金＝眞折扣金＋眞折扣金×利率＝眞折扣金×1＋利率，故銀行折扣金÷眞折扣金，相當於1＋利率，故本題之利率，爲$\frac{24}{22}-1=\frac{1}{11}$，故所求之金額爲264圓.

注意 觀於本解，可知某金額之銀行折扣金與其眞折扣金之差，恆等於眞折扣金之利息.

509. 遞加稅率，一年所得金，[圓位未滿者捨去]300圓以上百分之一，1000圓以上百分之一半，10000圓以上百分之二，20000圓以上百分之二半，依此稅率有所得金1000圓以上之人，自其所得金減所得稅之餘金，少於1000圓未滿

之人自所得金減所得稅之餘金,問所得金1000圓以上者至幾圓,又1000圓未滿者至幾圓.

解 所得金1000圓之所得稅,為15圓,而餘金為985圓,所得金1000圓未滿而餘金為985圓之人,其所得金為$985^{\text{圓}}\div0.99=994^{\text{圓}}$餘. 然所得金圓位未滿者不算,故所得金1000圓未滿而餘金恰為985圓,夫所得金995圓之餘金,為$985^{\text{圓}}.05$,而多於985圓所得金994圓之餘金,為$984^{\text{圓}}.06$,而少於985圓. 又所得金999之餘金,為$989^{\text{圓}}.01$,而所得金為1000圓以上,其餘金相等者,為$989^{\text{圓}}.01\div0.985$,即1004圓. 夫所得金1004圓之餘金為$988^{\text{圓}}.94$,而少於$989^{\text{圓}}.01$所得金1005圓之餘金為$989^{\text{圓}}.295$,而多於$989^{\text{圓}}.01$,故所求之界限,自995圓至1004圓.

510. 將七個月以後兌換之期票,欲兌現金,其商業折扣金,等於理論折扣金之$10^{\text{折}}.35$問利率如何.

解 理論折扣之現價,與理論折金之和,為票面金額,商業折扣金,為理論折扣之現金與理論折扣金之和,乘七個月之利率. 但理論折扣之現價乘七個月之利率,為理論折扣金,因而[508題參照]理論折扣金+理論折扣金×七個月之利率:理論折扣金$=103.5:100$,故七個月之利率為$\frac{3.5}{100}$,故年利率為$\frac{3.5\times12}{100\times7}=0.06$,即6分.

511. 有物以定價賣之,則每個得2圓之利,今將此物五個,依定價減1折2分賣之,所得之利益,等於將8個依定價減1折5分賣之,問此物一個之定價,及元價如何.

解 5個減定價之1折2分,即以8折8分賣之,故其所賣金為一個定價之$0.88\times5=4.4$,即5個之原價及其利益也. 又8個減定價之1折5分,即以8折5分賣之,故其所賣金為一個定價之$0.85\times8=6.8$,即8個之原價及其利益也,因此兩次之利益互相等,故$6.8-4.4=2.4$,相當於$8-5=3$個之原價,故$2.4\div3=0.8$,為一個之原價. 但以定價賣之,則每個得2圓之利,故$1-0.8=0.2$,相當於2圓,由是$2^{\text{圓}}\div0.2=10^{\text{圓}}$為定價,而原價為8圓.

512. 有商人賣物,獲利8分,若比前賤5分買之,賤4分[此圓角分之分]9厘賣之,則得1折之利,問原價如何.

解 初之賣價為原價之$(1+0.08)$,而賤5分買之,則其買價為原價之0.95,若以此得1折之利賣之,則其賣價為原價之0.95×1.1,故本題如次,自原價之$(1+0.08)$減4分[圓角分之分]9厘,則為原價之0.95×1.1,由是原價之$(1+0.08)-0.95\times1.1=0.035$,為4分9厘,故原價為$4^{\text{分}}.9\div0.035=1^{\text{圓}}.4$.

513. 某人借金1000圓,欲每8個月付還等額之金,而5回元利皆清,問等額之金如何. 但利率為年1折之單利.

解 8個月之利率$=\frac{1}{10}\times\frac{8}{12}=\frac{1}{15}$,故所求之金如次.

$$1000\div\left(\frac{1}{1+\frac{1}{15}}+\frac{1}{1+\frac{2}{15}}+\frac{1}{1+\frac{3}{15}}+\frac{1}{1+\frac{4}{15}}+\frac{1}{1+\frac{5}{15}}\right),\text{即 }238^{\text{圓}}.512\text{ 餘}.$$

514. 有儲蓄銀行,其年利率為6分,每半年計算利息,加入元金,問儲蓄300圓,二年間之元利合計幾何. 但元金之一圓未滿者,不計利息.

解　年利率為6分，故半年為3分，而二年為四回，故其計算如次．最初之元金＝300圓，第一回之利息，為300圓×0.03＝9圓，第二回之元金＝309圓，第二回之利息為309圓×0.03＝9圓.27，第三回之元金＝318圓.27，第三回之利息318圓×0.03＝9圓.45，第四回之元金＝327圓.81，第四回之利息為327圓×0.03＝9圓.81，第四回末之元利合計為337圓.62．故所求之元利合計為337圓6角2分．

515．於某年之初，存若干圓於銀行，此三年間每年終可領取100圓，問初存之金幾何．但以年6分之複利，每半年計算利息，加入元金．

解　年6分每半年利息加入元金，故今年末可領取100圓之現時儲金，當為 $\frac{100}{1.03^2}$ 圓，同樣明年末可領取100圓之現時儲金，為 $\frac{100}{1.03^4}$ 圓，而後年末可領取100圓之現時儲金為 $\frac{100}{1.03^6}$ 圓．故所求之金為 $\frac{100}{1.03^2}+\frac{100}{1.03^4}+\frac{100}{1.03^6}\fallingdotseq$ 266.856，即約266圓8角5分6厘．

516．三年間每滿一年付一定之金，而償淸滿三年後應付之3000圓之債．但利率為年6分，每滿一年將利息加入元金，依複利計算之．

解　每滿一年付金1圓，則滿三年後之元利合計，為 $(1.06^2+1.06+1)$ 圓，即3圓.1836，但本題為三年後應付之金額為3000圓，故每年應付之金額為3000圓÷3.1836＝942圓.329餘．

517．某國有公債之募集，票面為100圓，應募最低價格為95圓，年利為5分；償還期為五年之終，問以最低價格應募，一時発付全額其利率等於年幾分．

解　償還期五年後，可領取其額面金100圓，故每年領取5圓利息之外，尙有五年後100圓−95圓＝5圓之利息，今將此5圓於五年後一回取者，分之為五圓，而每年末領取等額之金加之為5圓，則為眞利率，故欲求此數，亦以年利5分，且一年一回之複利計算之如次．

5圓 $\div(1.05^4+10.5^3+1.05^2+1.05+1)=$ 5圓 $\div 5.52563125=$ 0圓.9049………，故每年之利息為5圓.9049……，由是其利率為 $5.9049\div 95=0.06215$，即6分2厘强．

518．有某公司之司事，每年末領得薪資，將其中之若干圓，以年8分之複利儲存之，經5年解職，而儲金每年之利息，恰等於每年之費用，問所儲存者，為薪資之幾分．

解　每年儲存同額之金，故5年終儲存額為 $1.08^4+1.08^3+1.08^2+1.08+1$，而第六年以降，從此所生之利息，為 $(1.08^4+1.08^3+1.08^2+1.08+1)\times 0.08$，[為簡便將此為B]而此等於每年之費用額，故 $1+B$ 為全額，而所求之分數為 $\frac{1}{1+B}$，即約6成8分.06．

519．有六分利之市公債之時價為109圓5角，及五分利之整理公債之時價為102圓．今賣若干之市公債而買若干之整理公債，因而一年之收入生129圓之差，問賣市公債所得之金幾何．

解　市公債對於賣價109圓.5，可得6圓之利息，又整理公債對於買價102圓，可得5圓之利息，由是對於1圓利息之差為 $\frac{6}{109.5}-\frac{5}{102}$，而收入之差，即利息之差，為129圓，故買賣金額為

$129^{\text{圓}}\div\left\{\frac{6}{109.5}-\frac{5}{102}\right\}=\underline{22338^{\text{圓}}}$.

520. 某人託中人以減折6分買某股票35張,[一張票面金額100圓]經一個月取得5分之利息,經4個月以減折8分賣之,皆付票面價格5厘之中費,若利息爲年1成,問此之損益如何.

解 減折6分買之,故一張之價,爲$100^{\text{圓}}\times(1-0.06)$,即94圓,由是35張之價爲$94^{\text{圓}}\times35$,即3290圓,其5厘之中費爲$17^{\text{圓}}.5$,由是此人最初所出金額爲$3290^{\text{圓}}+17^{\text{圓}}.5=3307^{\text{圓}}.5$,五個月後之元利合計,以1成之利率計算爲

$3307^{\text{圓}}.5\times\left(1+\frac{1}{10}\times\frac{5}{12}\right)=3445^{\text{圓}}.312\cdots\cdots$,

賣時之中費加$17^{\text{圓}}.5$,故此人之出金額,於五個月後計算,爲$3462^{\text{圓}}.812\cdots$,自股票取得5分之利息,爲175圓,而4個月後此利息當爲$175^{\text{圓}}\times\left(1+\frac{1}{10}\times\frac{4}{12}\right)=180^{\text{圓}}.833\cdots\cdots$,賣股票所得之金爲$92^{\text{圓}}\times35=3220^{\text{圓}}$,而結局此人所得金爲$3220^{\text{圓}}+180^{\text{圓}}.833\cdots\cdots=3400^{\text{圓}}.843\cdots\cdots$,故此人有$3462^{\text{圓}}.812\cdots\cdots-3400^{\text{圓}}.833\cdots\cdots$=約16圓9角7分9厘之損.

521. 某人將其所有金之金額,投入一投機事業,第一回獲利爲資本之一倍,第二回第三回第四回每回損失2折,則第四回之終,所獲之利,爲最初資本之2分4厘,試證明之.

解 第一回之終,爲資本之2倍,第二回之終,爲其1−0.2即8折,第三回之終,又爲8折之8折,即6折4分,由是第四回之終,爲資本之$2\times0.8\times0.8\times0.8$即$1^{\text{倍}}.024$,故第四回之終,所獲利益,爲最初資本之2分4厘.

522. 民國三年一月十一日,甲與乙期票三張,第一張金500圓,兌換期爲三月二日,第二張金1000圓,兌換期爲五月一日,第三張金1500圓,兌換期爲七月二十日,若欲此三張期票同時兌換,問其日期如何.

解 民國三年爲平年,故自一月十一日至三張期票之日期爲50日,110日,190日,夫至三月一日使用500圓,同於一日間使用$500^{\text{圓}}\times50$,同樣第二第三之期票同於一日間使用$1000^{\text{圓}}\times110$, $1500^{\text{圓}}\times190$,故此三張之期票,同於一日間使用$500^{\text{圓}}\times50+1000^{\text{圓}}\times110+1500\times190$,而此數等於$500^{\text{圓}}+1000^{\text{圓}}+1500^{\text{圓}}$乘自一月十一日至平均日期之日數,故自一月十一日至平均期之日數,爲

$\frac{500\times50+1000\times110+1500\times190}{500+1000+1500}=140$ 故平均日期爲五月三十一日.

523. 有甲乙二種期票,甲票面金318圓5角,而日期爲四月四日,乙票面金323圓7角,於本年三月十日,依內折扣法以日利1分6厘[每百圓日利金1分6厘]而折扣兌現,於是自二期票所得之金相等,問乙期票之日期如何. 但日數之兩端,計算其一而省其一.

解 日利金1分6厘,爲日利率0.00016,而自三月十日至四月四日之日數爲25日,故三月十日甲之內折扣金爲$318^{\text{圓}}.5\times0.00016\times25=1^{\text{圓}}.274$,而其兌現爲$318^{\text{圓}}.5-1^{\text{圓}}.274=317^{\text{圓}}.226$,但三月十日乙之內折扣之兌現,亦與此相等,故乙之內折扣金爲$323^{\text{圓}}.7-317^{\text{圓}}.226=6^{\text{圓}}.474$,而乙一日之折扣金爲$323^{\text{圓}}.7\times0.00016$,故折扣之日數爲

$6.474 \div (323.7 \times 0.00016)$，即 125，由是乙之日期爲三月十日之 125 日後，即七月十三日.

524. 某年之四月，五分利之公債票，額面百圓，而時價爲96圓，又某公司之股票，一股爲50圓，而時價爲92圓，公司之紅利，於十二月二十五日領取全額，公債票之利息，爲六月二十五日與十二月二十五日各領取半額，且三個月以上銀行之定期存款，可得年利3分，今以 11040 圓買前之股票，至本年末所得利益，不少於買公債票之利益，問公司紅利之分數，至少爲幾何，但答數求至毛位，而毛位未滿者，加1於毛位而切去之.

圖 以所有金買公債票與股票之數，爲 $11040 \div 96 = 115$，及 $11040 \div 92 = 120$，而票面數爲 115×100 圓，及 120×50 圓，即爲 11500 圓，及 6000 圓，而六月二十五日領取之公債之利息，爲 11500圓 $\times 0.05 \div 2 = 287$圓$.5$，將此存於銀行，至十二月二十五日，其利息爲 4圓$.312$，而公債票一年之利息爲 287圓$.5 \times 2$，即 575 圓，故全利息爲 $575 + 4.312$，即 579圓$.312$，而額面 6000 圓之股票，至少當有 579圓$.312$ 之紅利，其紅利之分數，爲 $579.312 \div 6000 = 0.09655\cdots\cdots$，收上至毛位而爲9分6厘6毛.

開方應用問題

525. 某數之5倍與其3倍之積，爲 960，問某數幾何.

圖 某數之5倍與其3倍之積，爲某數之平方之 5×3 倍，即其15倍，故某數爲 $\sqrt{960 \div 15} = 8$.

526. 某數六分之一與其八分之七之積，爲 524244，問某數如何.

圖 某數之 $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{7}{8}$ 之積，等於某數之平方乘 $\frac{1}{6} \times \frac{7}{8}$，故某數爲

$$\sqrt{524244 \div \left(\frac{1}{6} \times \frac{7}{8}\right)} = 1896.$$

527. 有兵士169列，每列4人，今欲改爲方陣，問每方幾人.

圖 169列每列4人，故兵士之總數，爲 4×169 人，今改爲方陣故每方人數爲 $\sqrt{4 \times 169} = 26$，即26人.

528. 有兵士一隊，列爲中空方陣，每方外面一列爲970人，厚9人，若改爲實心方陣，問其每方外面一列人數爲幾何.

圖 兵士之總數，爲 $970^2 - (970 - 9 \times 2)^2$，即34596人，故列爲實心方陣，其每方外面一列之人數，爲 $\sqrt{34596}$，即186人.

529. 有商人，以金169圓，買布若干疋，每疋得一圓之利賣之，總計得利，等於一疋之原價，問所賣之疋數爲幾何.

圖 一疋得1圓之利，其圓數等於1疋之原價，則知疋數與1疋原價之圓數相等，故169等於疋數之平方，故疋數爲 $\sqrt{169} = 13$ 即13疋.

530. 有士官及水兵共3025人，乘水雷艇若干隻，每艇所乘人數相等，忽一艇破壞不堪用，且溺死水兵一名，其餘人數，收容於各艇，恰爲每艇一人，而無過不足，問原之艇數如何.

圖 一艇破壞且溺死水兵一人，將該艇餘人，每艇一人收容於他艇，而無不足，故未破壞以前，艇數與每艇所乘人數互相等，故原之艇數爲 $\sqrt{3025} = 55$.

531. 自3000減如何之最小數,則其餘爲完全之立方數.

解 將3000開立方,則得其根之整數部14,而餘256,故自初之3000減256,則可得完全之立方數,若減比256小之數,則不得完全之立方數,故所求之最小數爲256.

532. 某人以金10000圓買股票,其股數與每股之圓數相等,而餘金396圓,問股票之張數爲幾何.

解 所買股票之張數,與一股之圓數互相等,故買股票之總圓數,當爲完全之平方,而其餘數爲396圓,故其總圓數爲$10000^{圓}-396^{圓}=9604^{圓}$,而其張數及每張之圓數,爲$\sqrt{9604}=98$.

533. 某工場內,有徑1寸5分之水管36個,問水源須徑幾寸之水管一個.

解 管內之水量,與管之平方成比例,故徑1寸5分之管內水量,以$1{\cdot}5^2$表之,因而36管之水量,以$1{\cdot}5^2\times36$表之,則欲將此水以一管出之,故其管徑當爲$\sqrt{1{\cdot}5^2\times36}$,即9寸.

534. 以徑1寸5分之管注水入池,則19時36分間充滿,今欲使10時間充滿,問當用徑幾寸之管.

解 注入同水量之時間,與水管徑之平方成逆比例,故將所求之管徑爲x,則$10^{時}:9^{時}36^{分}=1{\cdot}5^2:x$,由是得$x=\sqrt{\dfrac{19{\cdot}6\times1{\cdot}5^2}{10}}=2{\cdot}1$,即2寸1分.

535. 有同質之鉛球六個,其大小不等,其重之比,甲球7個,與乙球9個相等,乙球5個,與丙球6個相等,丙球10個,與丁球32個相等,丁球64個,與戊球49個相等,戊球28個,與己球25個相等,今己球之徑爲$3寸\frac{1}{3}$,問甲球之徑幾何.

解 球之體積,與徑之立方成比例,故將甲球之徑爲x寸,則己球與甲球體積之比如$\left(3\frac{1}{3}\right)^3$與$x^3$,換言之,即己球之$x^3$倍,等於甲球之$\left(3\frac{1}{3}\right)^3$倍,故得次之連鎖式.

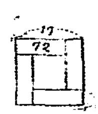
己 x^3	甲 $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$		
甲 7	乙 9		故
乙 5	丙 6		$x^3=125$,
丙 10	丁 32		因而
丁 64	戊 49		$x=5$寸.
戊 28	己 25		

536. 有帶分數,其分數之分母,等於整數之二倍,又分子爲17,今化爲假分數,則分子爲2467,問原之帶分數如何.

解 分母等於整數部之二倍,故化爲假分數時之分子,爲整數部平方之2倍與17之和,故$2467-17=2450$,爲整數部平方之2倍,由是整數部爲$\sqrt{2450\div2}=35$,因而其分母爲$35\times2=70$,故所求之帶分數爲$35\frac{17}{70}$.

537. 有矩形之地面,其面積爲72方丈,其長短兩邊之和爲17丈,問兩邊各長幾何.

解 如圖,自長短兩邊之和之平方,減矩形面積之4倍,等於兩邊之差之平方,故本題之$\sqrt{17^2-72\times4}=1$,爲兩邊之差,由是長邊爲$(17+1)\div2$,即9丈.而短邊爲$(17-1)\div2$,即8丈.



538. 有二數,其差爲2,其積爲143,問二數各如何.

解 以題所云之二數,表矩形之兩

邊，則其積表矩形之面積，由是依前圖如次解之，即 $\sqrt{143\times4+2^2}=24$，爲兩邊之和，故兩邊爲 $(24+2)\div2=13$ 及 $(24-2)\div2=11$. 此卽所求之二數.

539. 將蘋果176個，等分與兒童若干人，而恰無餘，若人數減少一名，則每人多分1個，尚餘6個，問一人所得及人數各幾何.

解 人數減少一名，則每人多分1個尚餘6個，故將初之一人所得，分與全體兒童，則每人1個，尚餘5個，換言之，卽一人之所得，比兒童之數多5個，故將兒童之數，及一人所得蘋果之數，以矩形之兩邊表之，則其差爲5，而其積卽蘋果之總數爲176，故兒童之數，及一人所得蘋果之數之和，爲 $\sqrt{176\times4+5^2}=27$，故一人之所得爲 $(27+5)\div2=16$，卽16個，而兒童之數，爲 $16-5=11$，卽11人.

540. 借米5石，半年還麥16石，借麥8石，半年還米3石，問其年利率如何.

解 借麥8石，半年還米3石，故借麥16石，半年當還米6石，故將問題所云，借米5石，半年所還之麥16石，再借半年，則當還米6石矣，故每半年計算複利，其一年元利合計之分數，恰爲 $6\div5=1.2$，由是若將半年之利率爲 r，則 $(1+r)^2=1.2$. 故 $\sqrt{1.2}-1$，卽 $0.09544\cdots\cdots$，爲半年之利率，因而年利率爲1成9分.08……

541. 借米18石，而還金175圓，若以同利率，同期間，借金52圓2分，卽還米7石，問米1石之價幾何.

解 米18石之價：175圓＝52圓.02：米7石之價，故 $\sqrt{\dfrac{175\times52.02}{18\times7}}=8.5$，卽8圓5角.

542. 甲商以320圓，所買之物，賣與乙商，乙商又以405圓賣之，兩商所得之利率相等，求乙商之買價.

解 320：乙商之買價＝乙商之買價：405，故乙商之買價 $=\sqrt{320\times405}$圓＝360圓.

543. 某縣以米120包，分配於出征軍人之遺族，等分於縣內之各村，而各村分配米之包數，比村數少2，問村數.

解 各村分配米之包數，與村數之積爲120，而分配米之包數，比村數少2，故依538題之例，而 $\sqrt{120\times4+2^2}=22$，爲分配米之包數與村數之和，由是 $(22+2)\div2=12$，爲所求之村數.

544. 買米若干石，以1成5分之利賣之，則得利54圓，又若一石得4角5分之利賣之，則得利等於2石之原價，問石數如何.

解 以1成5分之利賣之，則得利54圓，故54圓÷0.15＝360圓，爲買入之價，一石得4角5分之利賣之，則得利等於2石之原價，故一石得 $\frac{45}{2}$分＝22分.5之利賣之，則得利爲一石之原價，換言之，卽石數與22分.5之積，爲一石之原價，故一石之原價乘石數(卽總買價)之分數，等於石數之平方與22.5之積，故所求之石數，爲 $\sqrt{36000\div22.5}=40$，卽40石.

545. 有以12人25日能成之事，今欲雇若干人，每日工價爲8圓，而此事成之日，各人得6圓，問所雇若干人.

解 因每日工價爲8圓，故總工價之 $\frac{1}{8}$，爲成此事之日數，又因各工得6圓，故總工價之 $\frac{1}{6}$ 爲人數，由是總工

價之$\frac{1}{8}$與其$\frac{1}{6}$之積，即總工價平方之$\frac{1}{48}$，為日數與人數之積，而此積等於$12\times25=300$，故總工價為$\sqrt{300\times48}$，即120圓，因而人數為$120\div6$，即20人.

546. 某人二分其所有金，買米麥各同石數，若以其買米之金買麥，則得63石，又若以其買麥之金買米，則得28石，問所買米麥各幾何.

解 將米麥之同石數為x，則麥63石當於米x石，又麥x石，當於米28石即$63:x=x:28$，由是$x=\sqrt{63\times28}=\sqrt{3^2\times7^2\times2^2}=3\times7\times2=42$，即42石.

547. 有東西兩市，甲自東市，乙自西市，同時相向而行，於途中相遇後，甲以16時間達西市，乙以9時間達東市，問此二人各幾時間達東西兩市.

解 將起行至相遇之時間為x，則$9:x=$甲速:乙速，又$x:16=$甲速:乙速 故$9:x=x:16$，故$x=\sqrt{9\times16}=3\times4=12$，由是甲為$12+16$，即28時間，乙為$12+9$，即21時間.

548. 有甲乙丙三數，其比甲與乙如4與3，乙與丙如7與9，而三數之連乘積為15876，問各數如何.

解 甲乙丙之連比如下，

甲		乙		丙
4	:	3		→3
7←		7	:	9
28	:	21	:	27

故甲為某數之28倍，而乙及丙各為同數之21倍及27倍，故某數之立方，以$28\times21\times27$乘之，等於15876，由是某數為$\sqrt[3]{\frac{15876}{28\times21\times27}}=1$，故甲乙丙各為$1\times28=28$，$1\times21=21$，$1\times27=27$.

549. 以年利幾何之複利，借金二年，而為1成8分8厘1毛之息.

解 利率為r，則二年之元利合計為元金之$(1+r)^2$，故$(1+r)^2=1+0.1881$，由是$\sqrt{1.1881}-1$，即0.09，為所求之年利率.

550. 以年若干之複利，借400圓，三年之利息為208圓3角5分，問年利率如何.

解 將利率為r，則400圓三年之元利合計，為$400\times(1+r)^3=400+208.35=608.35$，故所求之年利率，為$\sqrt[3]{\frac{608.35}{400}}-1=0.15$，即1成5分.

551. 以年若干分之複利，借600圓，6年之利息為462圓9角3分6厘6毛，問其年利率幾何.

解 如前題求之，$600\times(1+r)^6=600+462.9366$. 即1062.9366，故求(1+利率)，則不可不求$\sqrt[6]{1062.9366\div600}$，但$1062.9366\div600=1.771561$，而求其6乘根，則先開平方而後開立方可也. 由是將1.771561開平方，則為1.331，再開立方，則為1.1，故所求之年利率，為$1.1-1=0.1$，即1成.

552. 以複利借金若干圓，其7年之元利合計，與3年之元利合計之比，如1296與625，問其年利率幾何.

解 將同一之元金，借7年之元利合計，與借3年之元利合計之比，為$\frac{(1+r)^7}{(1+r)^3}=(1+r)^4$，故$(1+r)^4=\frac{1296}{625}$，由是欲求利率，不可不先求相當於$(1+r)$之$\frac{1296}{625}$之四乘根. 但求四乘根，可將開平方所得之根，再開平方，故先將$\frac{1296}{625}$開平方，則為$\frac{36}{25}$，再開平方，則為$\frac{6}{5}$，故所求之利率，為$\frac{6}{5}-1=0.2$，即2成.

553. 某人貸金若干圓,以某利率之複利,2年後算之,則元利合計爲720圓,又6年後算之,則元利合計爲1492圓9角9分2釐,問所貸之元金幾何.又試求其年利率.

解 如前題,貸同一之元金,以同一之利率,6年後計算之元利合計,與2年後計算之元利合計之比,爲$(1+r)^6:(1+r)^2=(1+r)^4$,而此比相當於$1492.992\div720=2.0736$,故先求相當於(1+利率)之$\sqrt[4]{2.0736}$,由是求$\sqrt[2]{2.0736}$,則爲1.44,再求$\sqrt[2]{1.44}$,則爲1.2.故所求之年利率爲2成,故元金爲$720^{圓}\div1.2^2=500^{圓}$.

554. 某數之平方之六分之一與五分之一與四分之一之連乘積,爲6075000,問元數如何.

解 平方之$\frac{1}{6}$與$\frac{1}{5}$與$\frac{1}{4}$之連乘積,爲平方之三次連乘者,與$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$之積,故結局爲其數之6乘與$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$之積,故$6075000\div\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)=729000000$,爲其數之6乘冪,由是將729000000,開立方,再將其根開平方,可得其所求之數,卽先將729000000開立方,則爲900,再開平方,則爲30,卽所求之數.

555. 將徑3寸之球,鎔鑄三球,其二球之徑,爲1寸5分及2寸,問他一球之徑如何.但求之體積,與其徑或半徑之立方成比例.

解 球之體積,比例於徑之立方,故所求之球徑,爲$\sqrt[3]{3^3-1.5^3-2^3}=2.5$,卽2寸5分.

556. 有姊妹三人,各有相等之綫,共卷爲一球,其半徑爲7寸5分,問所卷之厚各幾寸.

解 $\sqrt[3]{(7.5^3\div3)}$爲最初之球半徑,約5寸2分. 中部爲$5.2\times\sqrt[3]{2}-5.2=5.2\times(\sqrt[3]{2}-1)$,卽約1寸3分5釐. 又外部爲$7.5-(1.35+5.2)$,卽約9分5釐.

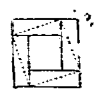
557. 有直角體,其相遇於一隅之三面之面積,爲9平方尺,16平方尺,25平方尺,問各稜之長.

解 相遇一隅之三面之面積,等於三稜每二個之積,故三稜之積之平方,爲$9\times16\times25=60^2$,因而各稜之長爲$60\div9$, $60\div16$, $60\div25$,卽$6^{尺}\frac{2}{3}$, $3^{尺}\frac{3}{4}$, $2^{尺}\frac{2}{5}$.

558. 有四數,其相異每三數之連乘積,爲315, 385, 495, 693,問各數.

解 $315\times385\times495\times693$爲各數立方之積,故$\sqrt[3]{315\times385\times495\times693}=5\times7\times9\times11$,爲四數之積. 由是各以693, 495, 385, 315除之,得,5, 7, 9, 11,爲所求之四數.

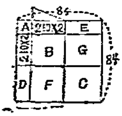
559. 有直角三角形,其直角傍二邊之差爲7寸,而斜邊爲1尺7寸,問二邊之長各幾何.

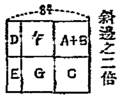


解 如圖$17^2-7^2=240$,爲直角三角形面積之四倍,故以17^2之平方加之,爲$2\times17^2-7^2$,等於直角傍二邊和之平方,由是直角傍二邊之和,爲$\sqrt{2\times17^2-7^2}=23$,故二邊爲$(23+7)\div2$,卽1尺5寸,及$(23-7)\div2$,卽8寸.

560. 有直角三角形,其周圍8尺4寸,而面積爲210平方寸,問三邊之長.

解 自84寸之平方中,減去面積210之4倍,其餘$84^2-210\times4=6216$之中,含斜邊之平方二個,含斜邊與直角傍各邊之積各二個,由是$6216\div(84\times2)=37$,即3尺7寸,爲斜邊,故直角傍二邊





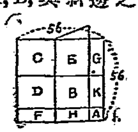
之和爲84−37,即47寸,而$\sqrt{47^2-210\times8}$,即23寸,爲直角傍二邊之差,故$(47+23)\div2=35$,即3尺5寸,及$(47-23)\div2=12$,即1尺2寸,爲直角傍之二邊.

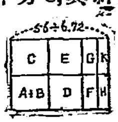
561. 有直角三角形,其直角傍二邊之和爲1尺4寸,而垂線與斜邊之和爲1尺4寸8分,問三邊之長. 但垂線者,謂自直角頂向斜邊所引垂線也.

解 14.8^2乃自垂線之平方,與斜邊之平方,與面積之4倍而成,而14^2乃自直角傍二邊平方之和,與面積之4倍而成,即自斜邊之平方,與面積之4倍而成,(圖解難明略之)由是$\sqrt{14.8^2-14^2}$,即4寸.8,爲垂線,故斜邊爲14.8−4.8,即10寸=1尺,而因$14^2-10^2=96$,爲面積之4倍,故$\sqrt{10^2-96}=2$,爲直角傍二邊之差,因而$(14+2)\div2$即8寸,及$(14-2)\div2$即6寸,爲直角傍之二邊.

562. 有直角三角形,其三邊之和,爲5尺6寸,而自直角頂向斜邊所引垂線爲6寸7分2釐,問三邊之長.

解 如左圖,56^2乃自直角傍二邊之平方A,B,與斜邊之平方C,與斜邊及直





角傍之二邊之積,D,E,F,G,與直角傍二邊之積H,K,而成,而A,B之和,等於斜邊之平方C,又H,K,等於斜邊與垂線之積,故左圖當變爲右圖.由是$56^2\div\{(56+6.72)\times2\}=25$,即2尺5寸,爲斜邊,而直角邊傍二邊之和=56寸−25寸=31寸,故直角傍二邊之差,爲$\sqrt{\{25^2-(31^2-25^2)\}}=17$,自此得直角傍之二邊爲7寸及二尺4寸.

563. 有直角三角形,其直角傍之二邊爲3寸及4寸,今將過直角頂與斜邊平行之直線爲軸,而廻轉此直角三角形,求所生立體之體積.

解 此立體乃將直角三角形之斜邊爲高,自直角頂至斜邊之垂線爲半徑之圓壔,自其上下減去二圓錐者也,而此二圓錐體積之和,爲圓壔之$\frac{1}{3}$,故所求之體積,爲圓壔之$\frac{2}{3}$,而直角三角形之斜邊,爲$\sqrt{(3^2+4^2)}$即5寸,因而高爲$3\times4\div5$即2寸4分,故所求之體積爲$2.4^2\times5\times3.1416\times\frac{2}{3}$,即約60立方寸.31872.

564. 有人買馬若干頭,其一頭之價之圓數,同於其頭數,後以善價賣之,而得總元金之倍數,同於其頭數,又將所得金之$\frac{1}{7}$,買與前同頭數之馬,尚餘金2552圓,問前後一頭馬之買價及賣價各幾何.

解 將總金額假定爲1,則因用去$\frac{1}{7}$,尚有餘金2352圓,故其總金額爲2352圓$\div\left(1-\frac{1}{7}\right)=2744$圓,此2744圓乃以與頭數同之圓數買之,又以頭數倍之總元金賣之所得之金額,故此金額恰爲一頭之價之立方,故一頭之買價

爲$\sqrt[3]{2744}=14$，即14圓，而因頭數亦爲14，故一頭之賣價爲$2744\div14=196$，即196圓．次因其後所買之馬1頭之價爲$2744\times\frac{1}{7}\div14=28$，即28圓．

565．二整數之差爲1，則其積之平方根之整數部，等於二數中之小者試證之．

圖 例如小數爲17，則大數爲$17+1$，而二數之積爲$(17+1)\times17$，即17^2+17，但$17+1$之平方爲$17^2+17\times2+1$，而大於17^2+17，故17^2+17小於$17+1$之平方，而大於17之平方，由是17^2+17之平方根，小於$17+1$，而大於17，即爲17加小數若干者也，故17^2+17之平方根之整數部爲小數17．

566．二數之積，及其和之平方，及其差之平方，三者之中，知其二而求其他之方法．

圖 二數和之平方，等於各數平方之和加其積之二倍，二數差之平方，等於自各數平方之和，減其積之二倍．故(I)知積與和之平方者．自和之平方減積之4倍，則爲自平方之和減積之2倍者也，即等於差之平方．(II)知積與差之平方者，於差之平方加積之4倍，則爲平方之和加積之2倍者也，即等於和之平方．(III)知和之平方與差之平方者．自和之平方，減差之平方，則得積之4倍，故以4除之，則得積．

567．12345 * * * * 欲開盡立方，則 * * * * 當爲如何之數．

圖 12345 * * * * 開立方之根，不小於12345 00000開立方之根，又不大於1234599999開立方之根，而12345 00000及1234599999開立方之整數部，皆爲1072，故12345 * * * * 終之五數字，無論如何，決不能開盡．

(第三門畢)

第 四 門

代數學解法之部

FOURTH SECTION

The Solutions of Exercises

IN

ALGEBRA

第四門　代數學解法之部　目次

● $+$ Plus, 加. ● $-$ Minus, 減. ● $\times$ Into or times, 乘. ● $:$ 或 $\div$ Divided, 除. ● $\sim$ 差, Difference. ● $<$ 小於, Is less than. ● $>$ 大於, Is greater than. ● $:$ Is to. 比之記號. ● $\sqrt{}$ 平方根, Radical. ● $\sqrt[3]{}$ 立方根. ● $\sqrt[n]{}$ n乘根. ● Σ Sigma, 同樣之項之和. ● Π Pi, 同樣之因數之積. ● $\therefore$ 故, therefore. ● $\because$ 因, Because.

數學辭典

第四門　代數學解法之部

代數學之公式

交換之理

● 和可任意列其被加數之次序.

$a+b+c=b+a+c=c+b+a=\cdots\cdots\cdots$

● 積可任意列其因數之次序.

$a\times b\times c=b\times a\times c=c\times b\times a=\cdots\cdots\cdots$

結合之理

● 和以符號示之,可任意將其各項結合之.

$a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)=\cdots\cdot$

● 積以符號示之,可任意將其各因數結合之.

$a\times b\times c=a\times(b\times c)=b\times(a\times c)=\cdots\cdots\cdots$

配分之理

● 自加減之若干項之式,以某數乘之,可乘其各項,而後加之.

$(a+b-c+d)m$

$=am+bm-cm+dm.$

● 反之,自加減之若干項之式,以某數除之,可除其各項而後加之.

$(a+b-c+d)\div n$

$=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}+\frac{d}{n}.$

指數之理

$a^m\times a^n=a^{m+n}.$

$a^m\div a^n=a^{m-n},\quad [m>n].$

$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}},\quad [m<n].$

符號定則

● 加法. $+a+(+b)=+a+b.$

$+a+(-b)=+a-b.$

$-a+(+b)=-a+b.$

$-a+(-b)=-a-b.$

● 減法. $+a-(+b)=+a-b.$

$+a-(-b)=+a+b.$

$-a-(+b)=-a-b.$

$-a-(-b)=-a+b.$

● 乘法. $(+a)\times(+b)=+ab.$

$(+a)\times(-b)=-ab.$

$(-a)\times(+b)=-ab.$

$(-a)\times(-b)=+ab.$

● 除法. $(+ab)\div(+a)=+b.$

$(-ab)\div(+a)=-b.$

$(-ab)\div(-a)=+b.$

$(+ab)\div(-a)=-b.$

公式及因數

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc.$

公約數及公倍數

● A 及之最大公約數爲G,最小公倍數爲L,若 $A=aG$, $B=bG$, 則

$L=abG=A\times\frac{B}{G}=B\times\frac{A}{G}=\frac{A\times B}{G}.$

分數

● $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

● $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}$

$$=\left(\frac{pa_1^n+qa_2^n+\cdots\cdots}{pb_1^n+qb_2^n+\cdots\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

● $\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_3}{b_3}>\cdots>\frac{a_n}{b_n}$, 則

$$\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}>\frac{a_n}{b_n}.$$

[但 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\cdots b_n$ 爲正數].

方程式

● 一元一次方程式 $ax+b=0$ 之根爲

$$x=-\frac{b}{a}.$$

● 聯立一次方程式

自 $ax+by+c=0$, 及 $a'x+b'y+c'=0$, 得

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

● 含 x, y 之一方程式, 例如 $x+y=5$, 則有無數之解答, 謂之不定方程式.

● 含 x, y 之二方程式. 例如 $x+y=5$, $y-x=1$, 表示同未知數相異之關係者, 謂之獨立方程式.

● 含 x, y 之二方程式. 例如 $x+y=5$, $3x+3y=25$, 同未知數無同一之值, 謂之矛盾方程式.

● 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ 之根, 爲 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

若 $b^2-4ac>0$, 則得相異之實根.

若 $b^2-4ac=0$, 則得相等之實根.

若 $b^2-4ac<0$, 則得相異之虛根.

● 根數與係數之關係.

將 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

冪及根

$a^m\times a^n\times a^r\times\ldots=a^{m+n+q+\cdots\cdots}$

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

$(a^xb^yc^z\ \ldots\ldots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\ \ldots\ldots$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}.$$

$$a^0=1.$$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m.\quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$

$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{1}}.$

比例

● 若 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$.

● 反之 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$.

● 又若 $a:b=c:d$, 則

$b:a=d:c$. (反轉之理).

$a+b:b=c+d:d$. (合比之理).

$a\sim b:b=c\sim d:d$. (分比之理).

$a+b:a\sim b=c+d:c\sim d$. (分合比之理).

$a:c=b:d$. (更迭之理).

$a^n:b^n=c^n:d^n$.

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

● 若 $a:b=b:c=c:d$ 則 $a:c=a^2:b^2$, $a:d=a^3:b^3$, $b^2=ac$.

級數

初項 $=a$,　　末項 $=l$,

項數 $=n$,　　公差 $=d$,

公比 $=r$,　　總和 $=$S.

● 等差級數. $l=a+(n-1)d$.

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}.$$

$$d=\frac{l-a}{n-1}.$$

● 等比級數. $l=ar^{n-1}$.

$$S=\frac{rl-a}{r-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

若 $-1<r<1$ 而 $n=\infty$

則 $S=\dfrac{a}{1-r}$.　$r=\sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$.

● a, b, c 為等差級數則

$$a-b:b-c=a:a.$$

● a, b, c 為等比級數則

$$a-b:b-c=a:b.$$

● a, b, c 為調和級數則

$$a-b:b-c=a:c.$$

● 二數 a, b 之等差,等比,調和中項各為 A, G, H, 則

$$A=\frac{1}{2}(a+b).\qquad G=\pm\sqrt{ab}.$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}.\qquad G^2=A.H.$$

● $1.2+2.3+\cdots\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

● $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

● $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

列方組合

● 相異 n 個物,每回悉取列法之數 ${}_nP_n$ 如次.

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\times2\times1=n!.$$

● 相異 n 個物,每回取 r 個列法之數 ${}_nP_r$ 如次.

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

● n 個物輪列法之數 $(n-1)!$.

● n 個物中有 p 個 q 個 r 個相同之物每回悉取列法之數,為

$$\frac{n!}{p!q!r!}.$$

● 列法之許重複者.

相異 n 個物,悉取列法之數為 n^n. 又相異 n 個物,每回取 r 個列法之數為 n^r.

● 相異 n 個物,每回取 r 個組合之數,為

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

● ${}_nC_r$ 之最大值.

n 為偶數,則 $r=\dfrac{n}{2}$ 時 ${}_nC_r$ 為最大.

n 為奇數,則 $r=\dfrac{n-1}{2}$ 及 $r=\dfrac{n+1}{2}$ 時 ${}_nC_r$ 之值相等,而最大.

二項式定理

● $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$
$\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$

● 公項[卽第 $r+1$ 項]$={}_nC_ra^{n-r}b^r$.

● $(1\pm x)^n$ 之展開式最大項[絕對值]如次. 第 r 項最大,則

$$\frac{(n+1)x}{x+1}+1>r>\frac{(n+1)x}{x+1}.$$

若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$, 則 $\frac{n-r+1}{r}x=1$, 而第 r 項與第 $r+1$ 項相等,而大於他項.

● $(1\pm x)^n$ 之展開式最大係數[絕對值]如次. n 爲偶數,則 $r=\frac{n}{2}+1$ 時,第 r 項之係數最大. n 爲奇數,則第 $\frac{n+1}{2}$ 項及 $\frac{n+3}{2}$ 項之係數相等,而大於他之各項之係數.

● $(1+x)^n$ 之展開式之係數和爲 2^n.

● $(1+x)^n$ 之展開式奇數項係數和,等於偶數項係數和.

不等式

● 次之字母皆爲正實數.

(1) $a>b$ 則 $a\pm x>b\pm x$.

(2) $a>b$ 則 $-a<-b$.

(3) $a>b$ 則 $ma>mb$.

及 $-ma<-mb$.

(4) $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$,......

則 $a+a'+a''+\cdots>b+b'+b''$.........

(5) $a>b$ 則 $a^m>b^m$, 及 $a^{-m}<b^{-m}$

● a, b, c......皆不相等,則

$$\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}>\sqrt[n]{(abcd\ldots)}.$$

但 $a, b, c, d,\ldots$若皆相等,則符號 $>$ 變爲 $=$.

對數

● $\log_a a=1$, $\log_a a^m=m$, $\log_a 1=0$.

$\log(ab)=\log a+\log b$.

$\log(a\div b)=\log a-\log b$.

$\log a^m=m\log a$.

$\log\sqrt[m]{a}=\frac{1}{m}\log a$.

$\log_b N=\log_a N\times\frac{1}{\log_a b}$.

$\log_a b\times\log_b a=1$.

● 訥白爾對數之底爲

$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots$

$=2.7182818\ldots\ldots\ldots\ldots$

複利,年金

元金 $=P$, 元利合計 $=A$,

利率 $=r$, $1+r=R$,

期間之數 $=n$.

● 利息每年算入元金,則 n 年之元利合計爲 $A=PR^n$.

● 利息每年 q 回算入元金,則

$$A=P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}.$$

● 年金 S 圓 n 年後之價格,爲 $\frac{S(R^n-1)}{R-1}$.

● n 年間之年金 S 圓之現價,爲

$$\frac{S}{R-1}\left(1-\frac{1}{R^n}\right).$$

● 永久年金之現價爲 $\frac{S}{r}$.

● p 年後 q 年間之年金 S 圓之現價,爲

$$\frac{S}{R^{p+q}}\times\frac{R^q-1}{R-1}.$$

● p 年後無限年金S圓之現價，爲

$$\frac{S}{R^p(R-1)}.$$

整　式

1. $16-x-[7x-\{8x-(9x-\overline{3x-6x})\}]$，試簡單之.

解 I. 本式 $=16-x-[7x-\{8x-(9x-3x+6x)\}]=16-x-[7x-\{8x-12x\}]=16-x-[7x+4x]=16-x-11x=16-12x.$

解 II. 題式 $=16-x-7x+\{8x-(9x-[\overline{3x-6x}])\}=16-8x+8x-(9x-\overline{3x-6x})=16-9x+3x-6x=16-9x+\overline{3x-6x}=16-12x.$

2. $a-\{a-[a-(a-\cdots\cdots)]\}$ 試去括弧而最簡之，但括弧有 n 組，而最內括弧內成 $a-a$ 形.

解 將括弧次第自外去之，則爲 $a-a+a-a+a-a+\cdots\cdots$，故 n 爲奇數，則此結果爲 a，又爲偶數則爲零.

3. 有 $-(-(-(\cdots\cdots(-a)\cdots\cdots)))$ 之括弧式 n 組，試去其括弧而簡單之.

解 符號－之個數，比括弧之數多1，故爲偶數，則－之數爲奇數．即此式爲 $-a$．又 n 爲奇數，則－之數爲偶數即此式爲 a.

4. $(-\cdots\cdots(-(-(-a)^1)^2)^3\cdots\cdots)^{4n}$ 試去括弧而簡單之，但 n 爲正整數.

解 $4n$ 爲偶數，故結果之符號爲＋故答 $a^{1.3.3\ldots 4n}$.

5. $\frac{1}{6}\{x(x+1)(x+2)+x(x-1)(x-2)\}+\frac{2}{3}\times(x-1)x(x+1)$ 試簡單之.

解 題式 $=x\left[\frac{1}{6}\{(x+1)(x+2)+(x-1)(x-2)\}+\frac{2}{3}(x-1)(x+1)\right]=x\left[\frac{1}{6}\{x^2+3x+2+x^2-3x+2\}+\frac{2}{3}(x^2-1)\right]=x\left[\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2x^2}{3}-\frac{2}{3}\right]=x.\frac{3x^2}{3}=x^3.$

6. $x=5$，$y=2$，而 $(x-y)^3+3xy(x-y)=(x+y)^3-3xy(x+y)-2y^3$ 試驗之.

解 左邊 $=3^3+3\times5\times2\times3=117.$

右邊 $=7^3-30\times7-2\times2^3=117.$

7. 三角形之三邊爲以 a, b, c，表之，其三邊和之半分以 s 表之，又三角形之面積以 $\triangle$ 表之，則 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，今若 $a=9$米，$b=12$米，$c=15$米 則 $\triangle$ 如何.

解 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=18$米，$s-a=9$米，$s-b=6$米，$s-c=3$米，故 $\triangle=\sqrt{18.9.6.3}=\sqrt{9^2.2^2 3^2}=9.2.3=54$，卽54平方米.

8. 試求 x^3+x^2+x 與 x^3-x^2+x 之積.

解 所求之積 $=\{(x^3+x)+x^2\}\{(x^3+x)-x^2\}=(x^3+x)^2-x^4=x^6+x^4+x^2.$

9. 試求 x^4+1, x^2+1, x^2-1 之連乘積.

解 $(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)=(x^4+1)(x^4-1)=x^8-1.$

10. 試求 $(x^2+1)^2$，$(x+1^2)$，$(x-1)^2$ 連乘積

解 $(x^2+1)^2(x+1)^2(x-1)^2=\{(x^2+1)(x+1)(x-1)\}^2=\{(x^2+1)(x^2-1)\}^2=\{x^4-1\}^2=x^8-2x^4+1.$

11. 試證 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

解 I. 左邊 $=x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy^2+y^2)=4xy.$

解II. 左邊$=(x+y+x-y)(x+y-x+y)$ $=2x.2y=4xy$.

12. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)\times(-a+b+c+d)=4(ab+cd)$ 試證之.

解 左邊 $=\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}+\{(c+d)+(a-b)\}\{(c+d)-(a-b)\}$ $=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}+\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$ $=(a+b)^2-(a-b)^2+(c+d)^2-(c-d)^2=4ab+4cd=4(ab+cd)$.

13. $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 試證之.

解 題式左邊$=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)(c^2+d^2)+(c^2+d^2)^2+4(a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2)=(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)(c^2+d^2)+(c^2+d^2)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

14. 試證次式$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2+2(a+b)(a+c)+2(b+c)(b+a)+2(c+a)(c+b)$ $=4(a+b+c)^2$.

解 題式左邊$=\{(b+c)+(c+a)+(a+b)\}^2=(2a+2b+2c)^2=4(a+b+c)^2$.

15. $(x-y)^2(x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots\cdots+xy^{n-3}+y^{n-2})=x^n-x^{n-1}y-xy^{n-1}+y^n$ 試證之.

解 $(x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots\cdots+xy^{n-3}+y^{n-2})(x-y)=x^{n-1}-y^{n-1}$ 故本題左邊爲 $(x^{n-1}-y^{n-1})(x-y)=x^n-x^{n-1}y-xy^{n-1}+y^n$.

16. $a+b+c=0$時試證次式.
$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

解 $a+b+c=0$ 時故 $a+b=-c$, 將此式兩邊平方之移項, 則$a^2+b^2-c^2=-2ab$, 更將此式兩邊平方之移項, 則 $a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$, 故 $2(a^4+b^4+c^4)=a^4+b^4+c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2\times b^2=(a^2+b^2+c^2)^2$.

別解 因 $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=2a^2b^2+2c^2a^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$, 上式左邊爲0, 故右邊亦爲0, 因而 $a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$.

17. $\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}^2=2\{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\}$ 試證之.

解 左邊$=4\{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\}^2$ $=4\{a^4+b^4+c^4-2a^3b-2a^3c-2ab^3-2b^3c-2ac^3-2bc^3+3a^2b^2+3b^2c^2+3a^2c^2\}$, 解右邊可得同一之結果.

別解 因 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, 故依前題可明也.

18. $x+y+z=0$ 時, 則 $x^3+y^3+z^3=3xyz$, 試證之.

解 $x+y=-z$ 將兩邊三乘之, 則 $x^3+3xy(x+y)+y^3=-z^3$, $\therefore$ $x^3+y^3+z^3=-3xy(-z)=3xyz$,

19. $3s=a+b+c$時, 則 $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$ 試證之.

解 $(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-a-b-c=0$ 故依前題得如題言.

20. $x+y=1$時, 則 $x^3+y^3+3xy=1$, 試證之.

解 $x+y+(-1)=0$, 故依18題 $x^3+y^3+(-1)^3=3xy(-1)$, 故 $x^3+y^3+3xy=1$.

21. $3y=x+2z$, 則 $x^3-27y^3+8z^3+18xyz=0$, 試證之.

解 $x+(-3y)+2z=0$, 故依18題, 而 $x^3+(-3y)^3+(2z)^3=3x(-3y)(2z)$, 卽 x^3-27y^3

$8z^3+18xyz=0$.

22. $2x=a+b+c$, 則 $2(x-a)(x-b)(x-c)+a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=abc$ 試證之.

解 $2(x-a)(x-b)(x-c)=(2x-2a)(x-b)\times(x-c)=(b+c-a)(x-b)(x-c)$, ∴ 題式左邊$=(b+c)(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c\times(x-a)(x-b)=b(x-c)(2x-a-b)+c(x-b)(2x-a-c)=b(x-c)c+c(x-b)b=bc(2x-b-c)=abc$.

23. $2s=a+b+c$, 則 $2\{(s-a)(s-b)+(s-b)\times(s-c)+(s-c)(s-a)\}=2s^2-a^2-b^2-c^2$ 試證之.

解 左邊$=2\{3s^2-2(a+b+c)s+ab+bc+ac\}=2(3s^2-4s^2+ab+bc+ac)=2(ab+bc+ac)-2s^2=(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2-2s^2=4s^2-a^2-b^2-c^2-2s^2=2s^2-a^2-b^2-c^2$.

24. $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=\frac{n}{2}s$ 則 $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\cdots\cdots+(s-a_n)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2$ 試證之.

解 左邊$=ns^2-2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)s+a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2=ns^2-2\times\frac{n}{2}s\times s+a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2$.

25. $12a^3-5a^4+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}a-\frac{31}{6}a^2$, 試以 $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a^2-a$ 除之.

解 將兩式列爲 a 之降羃次序, 而後行除法如次.

$$\begin{array}{r|l}
-5a^4+12a^3-\frac{31}{6}a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{6} & \frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{6} \\ \cline{2-2}
2a^3-\frac{7}{2}a^2 \qquad\qquad & -10a^2+4a \\
\frac{1}{2}a^2-\quad a+\frac{1}{6} & \qquad\qquad +1 \\
0 &
\end{array}$$

答 $-10a^2+4a+1$.

26. x^2+7x+a, 若欲以 $x+4$ 得整除之, 則 a 之值如何.

解 行除法, 則得商 $x+3$ 與剩餘 $a-12$, 故 $a=12$, 則得整除.

27. x^3+8x^2+5x-a, 若欲以 x^2+3x-b 得整除之, 則 a 與 b 之值如何.

解
$$\begin{array}{r|l}
x^3+8x^2+\qquad 5x-a & x^2+3x-b \\ \cline{2-2}
5x^2+(b+5)x-a & x+5
\end{array}$$
$(b-10)x+(5b-a)$…剩餘.

故將剩餘爲 0 可也, 但欲將此爲 0, 先 $b=10$, $a=5b$, 即 $a=50$ $b=10$.

28. x^3+y^3 試以 $x+y$ 除之, 又自其結果而書以 $x+y+z$ 除 $(x+y)^3+z^3$ 之商.

解 $(x^3+y^3)\div(x+y)=x^2-xy+y^2$, 故所求之商即將此結果之 x 以 $(x+y)$ 代之, 又將其 y 以 z 代之, 則爲 $(x+y)^2-(x+y)z+z^2=x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2$.

29. 試求以 $x^m+x^{m-1}+\cdots\cdots\cdots+x+1$ 除 $x^{2m+1}+x^{2m}+\cdots\cdots\cdots+x+1$ 之商.

解 兩式皆以 $x-1$ 乘之, 則爲 $x^{2m+2}-1$ 與 $x^{m+1}-1$ 即所求之商, 爲以 $x^{m+1}-1$ 除 $(x^{m+1})^2-1$ 之商, 即 $x^{m+1}+1$.

30. $7^{2n}-1$ 得以48整除, 但 n 爲正整數, 其證如何.

圖 $7^{2n}-1=49^n-1=(49-1)(49^{n-1}+49^{n-2}+\dots\dots+1)$，故此式得以 48 整除之．

別圖 $7^{2n}-1=(7^n-1)(7^n+1)$，若 n 爲偶數時，則 $7^{2n}-1=(7-1)(7+1)(7^{n-2}+\dots\dots)\times(7^n+1)=48(7^{n-2}+\dots\dots)(7^n+1)$，又 n 爲奇數時，則 $7^n-1=(7-1)(7^{n-1}+\dots\dots)=6(7^{n-1}+\dots)$，及 $7^n+1=(7+1)(7^{n-1}-\dots\dots)=8(7^{n-1}-\dots\dots)$，故如題言．

31 $7^{2n-1}+1$ 得以 8 整除，試證之，但 n 爲正整數．

圖 a^n+x^n 其 n 爲奇數時，則得以 $a+x$ 整除．但 $2n-1$ 無論 n 爲奇數偶數，恆代表奇數，又 $1=1^{2n-1}$，故 $7^{2n-1}+1$ 得以 $7+1$，卽 8 整除．

別圖 $7^{2n-1}=(8-1)^{2n-1}$，依二項式定理展開之，則除末項外各項悉含 8 之因數，而末項 $2n-1$ 爲奇數，故爲 -1，因而 $7^{2n-1}=\underline{8之倍數}-1$，故知 $7^{2n-1}+1$ 得以 8 整除．

32. n 爲正整數，則 $(3n+1)\times7^n-1$ 恆得以 9 整除試證之．

圖 $u_n\equiv(3n+1)\times7^n-1$，故 $u_{n-1}=[3\times(n-1)+1]\cdot7^{n-1}-1$，因而 $u_n-u_{n-1}=(3n+1).7-[3n-2].7^{n-1}=7^{n-1}[7(3n+1)-(3n-2)]=7^{n-1}[18n+9]=9(2n+1)\times7^{n-1}$，故 $u_n-u_{n-1}=$(9 之倍數)．

同樣 $u_{n-1}-u_{n-2}=$(9 之倍數)，

$u_{n-2}-u_{n-3}=$(9 之倍數)，

…………………………

$u_2-u_1=$(9 之倍數)．

相加而 $u_n=$(9 之倍數)$-u_1$，但 $u_1=(3+1).\ 7-1=27=$(9 之倍數)．故 $u_n=$(9 之倍數)．

33. n 爲正數時，則 n^3+1 與 n^2+n 何者爲大．

圖 $n^3+1-(n^2+n)=(n+1)(n^2-n+1-n)=(n+1)(n-1)^2$．故非 $n=1$，則此值恆爲正．故 $n^3+1>n^2+n$，而 $n=1$，則 $>$ 變爲 $=$．

34. n 爲正整數，則 1 以外諸整數，含於 3_n 及 $3_n\pm1$ 之中，試證之．

圖 得以 3 整除之數，以 3_n 表之，若以 3 除餘 1 之數，則以 3_n+1 表之，又以 3 除餘 2 之數，卽不足 1 之數，則以 $3n-1$ 表之，故 1 以外諸數，皆含於 $3n$ 及 $3n\pm1$ 之中．

35. 完全平方之數，當成 $5n$ 或 $5n\pm1$ 之形，但 n 爲正整數．

圖 凡數 N 必成 $5m$，$5m-1$，$5m-2$，$5m+1$，或 $5m+2$ 諸形之一，若 $N=5m$ 則 $N^2=25m^2=M(5)=5n$，若 $N=5m\pm1$，則 $N^2=M(5)+1=5_n+1$，若 $N=5m\pm2$，則 $N^2=M(5)+4=M(5)+5-1=M(5)-1=5n-1$，而此等形，悉含於 $5n$ 或 $5n\pm1$ 之中．

36. 平方又立方之數，當成 $7n$ 或 $7n+1$ 之形，但 n 爲正整數．

圖 凡數當成 $7n\pm a$ 之形，但 $a=0$，或 $a=1$，$a=2$，$a=3$，但平方且立方之數，爲六乘冪，故 $(7m\pm a)^6=M(7)+a^6$．而 $a=0$，則 $a^6=0$，$a=1$，則 $a^6=1$，$a=2$，則 $a^6=64=7\times9+1$，$a=3$，則 $a^6=729=7\times104+1$．故 $(7m\pm a)^6$ 成 M(7) 或 M(7)+

$+1$. 卽 $7n$, 或 $7n+1$ 之形.

37. 鄰接三整數之積,必能以1,2,3,之連乘積整除,試證之.又 $2x^3+3x^2+x$, 必能以6整除,試證之,但 x 爲整數.

圖 三個連續之整數,能以 n, $n+1$, $n+2$ 表之,而二個連續之整數中,必有一個爲2之倍數,故三個連續之整數中,至少必有一個爲2之倍數,又三個連續之整數必有一個爲3之倍數,而2與3互爲素數,故 $n(n+1)(n+2)$ 必能以 2×3 卽 $1\times2\times3$ 整除,而 $2x^3+3\times x^2+x=x(x+1)(x+2)+(x-1)x(x+1)$, 此式之右邊爲三個連續整數之積之和,是能以6整除,故知左邊亦能以6整除,若擴張此定理,可云[n 個連續整數之積,能以 $1.2.3\cdots\cdots n$ 整除.].

38. n 爲正整數時,則 $n(n+1)(2n+1)$ 爲6之倍數,試證之.

圖 $n(n+1)(2n+1)=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)=M(1.2.3)+M(1.2.3)$ [37題]$=M(6)$.

別證 I. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ [見第一門總和法之條]知右邊爲整數,故左邊亦爲整數,故如題言.

別證 II. 本題亦得以歸納法證明之. $\phi(n)=n(n+1)(2n+1)$, $\therefore\phi(n+1)=(n+1)(n+2)(2n+3)$, $\therefore\phi(n+1)-\phi(n)=(n+1)(n+2)(2n+3)-n(n+1)(2n+1)=6\times(n+1)^2=M(6)$, $\therefore\phi(n+1)=\phi(n)+M(6)\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$. 而 $\phi=1.2.3=6$. 於 (a) 式內 $n=1$. 則 $\phi(2)=\phi(1)+M(6)=M(6)$, 次於 (a) 式內 $n=2$, 則 $\phi(3)=\phi(2)+M(6)=M(6)$. 逐次如此,則 n 爲正整數,卽 $\phi(n)=M(6)$

39. 鄰接 n 個整數之積,得以逐乘 n [卽 $n!$]整除之.

圖 因 m 個物,每取 n 個組合之數,必爲整數故也.今再直接證明之,先假定鄰接 $n-1$ 個整數之積,能以 $1.2.3\cdots\cdots\cdots(n-1)$ 整除,若然,則鄰接任意 n 個整數之積,亦能以 $1.2.3\cdots\cdot(n-1)n$ 整除,而一整數恆能以1整除,故二個鄰接整數之積,恆能以1.2整除,故三個鄰接整數之積,恆能以1.2.3整除,然則任意 $n-1$ 個之鄰接整數之積,能以 $1.2.3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n-1)$ 整除.今若將 $\phi(r)$ 爲自 r 以上 n 個鄰接整數之積,則 $\phi(r)=r(r+1)(r+2)\cdots\cdots\cdots(r+n-2)(r+n-1)$, $\therefore\phi(r+1)=(r+1)(r+2)(r+3)\cdots\cdots(r+n-1)(r+n)$, $\therefore\phi(r+1)-\phi(r)=(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+n-1)\{(r+n)-r\}=n(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+n-1)$. 但 $(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)$ 爲 $n-1$ 個鄰接整數之積,故爲 $1.2.3\cdots\cdots\cdots(n-1)$ 之倍數,故 $\phi(r)$ 爲 $1.2.3\cdots\cdots\cdots n$ 之倍數,則 $\phi(r+1)$ 亦然,但 $\phi(1)=12\cdots\cdots n$, 故此題就 $\phi(2)$ 而眞,就 $\phi(3)$ 亦眞,連續此方法,則可見此題就 $\phi(3)$ 爲眞,故此題就 $n-1$ 個鄰接整數之積爲眞,則就任意 n 個鄰接整數之積亦眞,故一般皆眞.

別證 例如四個連續整數之積,卽如

7.8.9.10，證其以1.2.3.4能整除，則因 $7.8.9.10=(7.8.9.$ 之6倍$)+(7.8.9.$ 之4倍$)$ $=6.7.8.9+7.8.9.4$ 而7.8.9能以1.2.3整除，觀37題可知之．故7.8.9.4能以 $1\times2\times3\times4$ 整除，故6.7.8.9若能以1.2.3.4整除，則7.8.9.10能1.2.3.4整除，又5.6.7.8若能以1.2.3.4整除，則6.7.8.9以及 $7\times8\times9\times10$，亦能以1.2.3.4整除．逐次如斯．然1.2.3.4能以1.2.3.4整除，故2.3.4.5，3.4.5.6，………以及7.8.9.10亦能以1.2.3.4整除．五個連續整數……之證明準此．

40. x^2+px+q 恰能整除 x^3+x^2+2x+2 問 p 及 q 當有如何之要件．

[解] 以 x^2+px+q 除 x^3+x^2+2x+2 之商，因對於 x 而為一次式，故設其商為 $x+A$ 若能整除，則得次之關係式．$x^3+x^2+2x+2=(x^2+px+q)(x+A)=x^3+(A+p)x^2+(pA+q)x+Aq$，比較 x 同乘方之係數，$A+p=1$………(1)，$pA+q=2$…………(2)，$Aq=2$…………(3)，自(1)而 $A=1-p$ 代入(2)及(3)，而得 $p^2-p-q+2=0$．及 $pq-q+2=0$ 即所求之要件．

[注意] 解本題結果之二方程式可得 $p=0$，及 $q=2$；及 $p=1+\sqrt{-2}$，及 $q=\sqrt{12}$ 二組之值．

41. $x^4+5x^3+6x^2+px+q$，恰能以 x^2+2x+1 整除，試決定 p,q 之值．

[解] $x^4+5x^3+6x^2+px+q$ 以 x^2+2x+1 除之之商，對於 x 為二次式，則試將其商設為 x^2+Ax+B，若能整除，則得次之關係式．$x^4+5x^3+6x^2+px+q=(x^2+2x+1)(x^2+Ax+B)=x^4+(A+2)x^3+(2A+B+1)x^2+(A+2B)x+B$．比較 x 之同乘冪之係數，而，$A+2=5$……(1)，$2A+B+1=6$………(2)，$A+2B=p$……(3)，$B=q$…(4)．自(1)得 $A=3$，將 A 之值代入(2)，而得 $B=-1$；將 A,B，之值代入(3)，(4)，而得 $p=1$，$q=-1$．

42. $x^4+4x^3+3x^2+px+q$ 及 x^3+x^2+2x+1，各以 x^2+2x+1 除之，若同剩餘，則 p 與 q 之值當如何．

[解] 今假設以 x^2+2x+1 除 x^3+3x^2+2x+1 之商，為 $x+A$，剩餘為 $Bx+C$，而除 $x^4+4x^3+3x^2+px+q$ 之商為 x^2+Dx+E，剩餘為 $Fx+G$，則得次 (α)，(β) 之二關係式．即 (α) $x^3+3x^2+2x+1=(x^2+2x+1)(x+A)+(Bx+C)=x^3+(A+2)x^2+(2A+B+1)x+A+C$．比較 x 之同乘冪之係數，而 $A+2=3$…(1)，$2A+B+1=2$……(2)，$A+C=1$……(3)．自(1)得 $A=1$，自(2)得 $B=-1$，自(3)得 $C=0$．故此剩餘為 $-x$……(4)．又 (β) $x^4+4x^3+3x^2+px+q=(x^2+2x+1)(x^2+Dx+E)+Fx+G=x^4+(D+2)x^3+(2D+E+1)x^2=(2E+F+D)\times x+E+G$．比較 x 同乘冪之係數而 $D+2=4$……(I)，$2D+E+1=3$……(II)，$p=2E+F+D$……(III)，$q=E+G$……(IV)．自(I)得 $D=2$，自(II)得 $E=-2$，自(III)得 $F=p+2$，自(IV)得 $G=q+2$，故此剩餘為 $(p-2)x+(q+2)$……(5)．(4)，(5)不關於 x 之值而相等，則 $(p+2)x+q+2=-x$，

比較x同乘方之係數,而$p+2=-1$,故$p=-3$, 又$q+2=0$,故$q=-2$.

別解 實行除法.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+2x+1 & x^2+2x+1 \\
\underline{x^3+2x^2+\ \ x\quad} & \overline{x+1} \\
x^2+x\ +1 & \\
\underline{x^2+2x+1} & \\
-\ x &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+4x^3+3x^2+px+q & x^2+2x+1 \\
\underline{x^4+2x^3+\quad x^2\qquad\quad} & \overline{x^2+2x-2} \\
2x^3+2x^2+px\quad & \\
\underline{2x^3+4x^2+2x\quad} & \\
-2x^2+(p-2)x+q & \\
\underline{-2x^2-4x\qquad -2} & \\
(p+2)x+q+2 &
\end{array}
$$

依題意剩餘相等,則

$(p+2)x+q+2=-x$, 故$p+2=-1$,

故$p=-3$, $q+2=0$, 故$p=-2$.

43. 試依分離係數法以$2x^2-3x+5$乘$3x^3+5x^2-x+4$.

解

$$
\begin{array}{r}
3+\ 5-\ 1+4 \\
\underline{2-\ 3+\ 5} \\
6+10-\ 2+\ 8\qquad\qquad \\
-\ 9-15+\ 3-12\qquad \\
\underline{15+25-\ 5+20} \\
6+\ 1-\ 2+36-17+20
\end{array}
$$

答 $6x^5+x^4-2x^3+36x^2-17x+20$.

44. 試依分離係數法以$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$除$x^5-5ax^4+7a^2x^3-a^3x^2-4a^4x+2a^5$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
1-5+7-1-4+2 & 1-3+3-1 \\
\underline{1-3+3-1\qquad\quad} & \overline{1-2-2} \\
-2+4+0-4\quad & \\
\underline{-2+6-6+2\quad} & \text{答} \\
-2+6-6+2 & \\
\underline{-2+6-6+2} & x^2-2ax-2a^2.
\end{array}
$$

45. 試依分離係數法,以$4x^3-2x+3$除$4x^5-12x^4+2x^3+9x^2-11x+3$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
4-12+2+9-11+3 & 4+0-2+3 \\
\underline{4+\ 0-2+3\qquad\qquad} & \overline{1-3+1} \\
-12+4+6-11\quad & \\
\underline{-12-0+6-\ 9\quad} & \text{答}\ x^2-3x+1. \\
4+0-\ 2+3 & \\
\underline{4+0-\ 2+3} &
\end{array}
$$

46. 試依分離係數法,以x^2+4+4x除$x^4+x^3-9x^2-5-15x$.

解 先將除數及被除數之係數,以x之降方次序列之,而計算如次.

$$
\begin{array}{r|l}
1+1-\ 9-15-5 & 1+4+4 \\
\underline{1+4+\ 4\qquad\quad} & \overline{1-3-1} \\
-3-13-\ 15\quad & \\
\underline{-3-12-\ 12\quad} & \text{答商}\ x^2-3x-1 \\
-1-\ 3-5 & \\
\underline{-1-\ 4-4} & \text{剩餘}\ x-1. \\
1-1 &
\end{array}
$$

47. $\{(x-1)^3+3(x-1)^2+2(x-1)+1\}(3x+2)$ 試以 $A(x-1)^4+B(x-1)^3+C(x-1)^2+D\times(x-1)+E$ 形表之,但 A, B, C, D, E, 為數字係數.

解 題式$=\{(x-1)^3+3(x-1)^2+2(x-1)+1\}\{3(x-1)+5\}=3(x-1)^4\left.\begin{matrix}+9\\+5\end{matrix}\right|(x-1)^3\left.\begin{matrix}+\ 6\\+15\end{matrix}\right|(\times-1)^2\left.\begin{matrix}+\ 3\\+10\end{matrix}\right|(x-1)+5=3(x-1)^4+14(x-1)^3+21(x-1)^2+13(x-1)+5$.

48. 式 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 其x, y, z, 各以$x+m$, $y+m$, $z+m$ 代之不變,試證之.

解 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=\frac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$, 而$y+m-(z+m)=y-z$, $z+m-(x+m)=z-x$, $x+m-(y+m)=x-y$ 故自上式右邊觀之,可知題式之x, y, z, 各以$x+m$, $x+m$, $z+m$代之,其式不變.

49. 試就x一切值,而求$A(x-3)(x-5)+B(x-5)(x-7)+C(x-7)(x-3)=8x-120$時之A, B, C.

解 題式為x之二次式,故對於三個

値而眞時，則爲恆等式，卽對於 x 一切値皆眞之式也，今將題式之 x 順次以 3, 5, 7 代之，則可得次之三式，$8B=-96$, $-4C=-80$, $8A=-64$，故所求之値爲 $A=-8$, $B=-12$, $C=20$.

剩 餘 定 理

50. 問以 $x-2$ 除 x^3-4x^2+2 之剩餘.

解 依剩餘定理，以 2 代 x^3-4x^2+2 之 x，則得 $2^3-4\times2^2+2=-6$，卽得剩餘爲 -6.

51. 以 $x-3$ 整除 $2x^4-7x^3+x+a$，則 a 之値如何.

解 以 $x-3$ 除 $2x^4-7x^3+x+a$ 之剩餘，爲 $2\times3^4-7\times3^3+3+a=a-24$，故 a 之値當爲 24.

52. 以 $x-a$ 能整除 $x^3-2a^2x+a^3$，試證之.

解 將 a 代入 $x^3-2a^2x+a^3$ 之 x，則 $a^3-2a^3+a^3=0$，故如題云.

53. 以 $x-a$ 能整除 $x^3+2mx+a^3$，試定 m 之値爲如何.

解 依剩餘定理，以 a 代 $x^3+2mx+a^3$ 之 x，則得 $a^3+2am+a^3$，今此式爲 0，則 $m=-\dfrac{2a^3}{2a}=-a^2$.

54. m 爲奇數，則能以 $b+c$ 整除 $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ 試證之.

解 $b+c=b-(-c)$ 故本題之剩餘，依剩餘定理 $(a-c+c)^m-a^m-(-c)^m-c^m$，卽 $a^m-a^m-(-c)^m-c^m$，卽 $-(-c)^m-c^m$，但 m 爲奇數，則 $-(-c)^m=-(-c^m)=+c^m$，故 $-(-c)^m-c^m=c^m-c^m=0$，故剩餘爲 0，故如題言.

55. 以 $a+b+c$ 能整除 $a^3+b^3+c^3-mabc$，則 m 之數値如何.

解 $a+b+c=a-\{-(b+c)\}$ 故依剩餘定理，以除數除被除數之剩餘，爲 $\{-(b+c)\}^3+b^3+c^3-m\{-(b+c)\}bc=-\{b^2+3bc\times(b+c)+c^3\}+b^3+c^3+mbc(b+c)=-3bc\times(b+c)$，故欲使此剩餘爲 0，則得 $m=3$

56. 以 $x-3$ 能整除 $2x^4-7x^3+ax+b$，則 a 與 b 之關係如何

解 題式以 $x-3$ 能整除，則以 3 代入題式之 x 當爲 0，卽 $2.3^4-7.3^3+a.3+b=0$，卽 $3a+b=27$

57. 以 $(x-1)^2$ 能整除 $nx^{n+1}-nx^n-x^n+1$ 試證之.

解 先以 $x-1$ 除被除數，則

$$\begin{array}{l|l} nx^{n+1}-nx^n-x^n+1 & x-1 \\ \underline{nx^{n+1}-nx^n} & nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2} \\ \qquad -(x^n-1) & \qquad +\ldots+x+1) \end{array}$$

又將此商 $nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$ 之 x 以 1 代之，則得 $n-(1+1+1+\cdots n\text{項})=0$，卽此商能以 $x-1$ 整除，故被除數能以 $(x-1)^2$ 整除.

58. 以 x^3-7x+5 能整除 $x^5-2x^4-4x^3+19x^2-31x+12+a$，則 a 之値當如何.

解 $x^5-7x^3+5x^2-2x^4+14x^2-10x+3x^3-21x+15-3+a=x^2(x^3-7x+5)-2x(x^3-7x+5)+3(x^3-7x+5)-3+a$，此式若能以 x^3-7x+5 整除，則將 $x^3-7x+5=0$ 代入，而題式當爲 0，故 $-3+a=0$，故 $a=3$.

59. 將代數式P及P′以D除之,其剩除各爲R, R′則PP′及RR′,以D除之,其剩餘同一,試證之.

圖 將P及P′以D除之之商,各爲p, p',則$P=pD+R$, $P'=p'D+R'$,因而$PP'=(pD+R)(p'D+R')=pp'D^2+R'pD+Rp'D+RR'$,故以D除PP′之剩餘,與除其右邊之剩餘,卽除RR′之剩餘同一.

60. 以$x-\alpha$除$P=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$之剩餘爲A,又以$x-\beta$除P之剩餘爲B,試求以$(x-\alpha)(x-\beta)$除P之剩餘.

圖 $P=(x-\alpha)(x-\beta)Q+xQ'+R$,則以$x-\alpha$除P之剩餘,爲$\alpha Q'+R=A$⋯⋯⋯⋯(1),以$x-\beta$除之之剩餘,爲$\beta Q'+R=B$⋯(2),今自(1),(2),得$Q'=(A-B)/(\alpha-\beta)$及$R=(\alpha B-\beta A)/(\alpha-\beta)$,但以$(x-\alpha)(x-\beta)$除P之剩餘,爲$xQ'+R$,故將(1),(2),所得Q′, R之值代入,則得$(A-B)x/(\alpha-\beta)+(\alpha B-\beta A)/(\alpha-\beta)$.

61. $x^4-3x^3+5x^2+lx+m$,能以x^2-5x+6整除,試定l及m之值.

圖 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$,而$x-3$不能以$x-2$整除,故若欲以$(x-2)(x-3)$能整除,則必以$x-2$能整除,亦以$x-3$能整除,但$x^4-3x^3+5x^2+lx+m$以$x-2$又$x-3$除之之剩餘,爲$l^4-3.2^3+5.2^2+l.2+m=2l+m+12$,及$3^4-3.3^3+5.3^2+l.3+m=3l+m+45$,故若能整除,則必$2l+m+12=0$, $3l+m+45=0$,由此二方程式,求得l及m,則得惟一之解答$l=-33$, $m=54$.

Σ及Π記法

62. 試就x,y,z三字母,而證$\Sigma x^2\times\Sigma x=\Sigma x^3+\Sigma x^2y$.

圖 $\Sigma x^2\times\Sigma x=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)=x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2z+xy^2+xz^2+yz^2=\Sigma x^3+\Sigma x^2y$.

63. $(x+y+1)(x+y)$之結果,試以Σ表之.

圖 $(x+x+1)(x+y)=(x+y)^2+(x+y)=x^2+2xy+y^2+(x+y)$. $\therefore$ $(\Sigma x+1)\Sigma x=\Sigma x^2+2xy+\Sigma x$.

64. $(a+b+c)^3$之結果,試以Σ表之.

圖 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc$.

65. $(x+a)(x+b)(x+c)$之結果,試以Σ表之.

圖 $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\Sigma ax^2+\Sigma abx+abc$.

66. 試就a, b, c,三字母而證$\Pi(a+b)=\Sigma a^2b+2abc$.

圖 $\Pi(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=\Sigma a^2b+2abc$.

67. 試就a, b, c,三字母,而證$\Sigma a\Sigma bc-\Pi(b+c)=\Pi a$.

圖 左邊$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)\times(c+a)(a+b)=\Sigma a^2b+3abc-\{\Sigma a^2b+2abc\}=abc=\Pi a$.

因數分解

68. $3a^4-3a^3b+6a^2b^2$，試分解因數。

解 各項皆含 $3a^2$，故 $3a^2(a^2-ab+2b^2)$ 爲其因數。

69. $mx-ma+nx-na$，試分解因數。

解 本式 $=m(x-a)+n(x-a)$

$=(x-a)\ (m+n)$.

70. $9x^2+30x+25$，試分解因數。

解 本式 $=(3x)^2+2(3x)\times5+5^2$

$=(3x+5)^2$.

71. $5a^3+30a^2b+45ab^2$ 試分解因數。

解 本式 $=5a(a^2+6ab+9b^2)=5a(a+3b)^2$.

72. $81x^2-4y^2$ 試分解因數。

解 本式 $=(9x)^2-(2y)^2$

$=(9x+2y)(9x-2y)$.

73. $(a-b)^2-(x+y)^2$，試分解因數。

解 本式 $=\{(a-b)+(x+y)\}\{(a-b)-(x+y)\}=(a-b+x+y)\ (a-b-x-y)$.

74. $9x^2+6xx+y^2-4$，試分解因數。

解 $9x^2+6xy+y^2-4=(3x+y)^2-4=(3x+y+2)(3x+y-2)$.

75. $x^2-y^2+2ax+a^2$ 試分解因數。

解 本式 $=x^2+2ax+a^2-y^2=(x+a)^2-y^2=(x+a+y)(x+a-y)$.

76. a^2-b^2+a-b，試分解因數。

解 本式 $=(a+b)(a-b)+(a-b)$

$=(a-b)(a+b+1)$.

77. $2x^2+7x+6$，試分解因數。

解 本式 $=2x^2+4x+3x+6=2x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(2x+3)$.

78. x^4+x^2+1 試分解因數。

解 本式 $=x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

79. x^4-3x^2+1 試分解因數。

解 $x^4-2x^2+1-x^2=(x^2-1)^2-x^2$

$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$.

80. x^4-23x^2+1 試分解因數。

解 本式 $=x^4+2x^2+1-25x^2=(x^2+1)^2-(5x)^2=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$.

81. $2x^2-5xy+2y^2$ 試分解因數。

解 本式 $=2x^2-4xy-xy+2y^2$

$=2x(x-2y)-y(x-2y)=(x-2y)(2x-y)$.

82. x^4+4 試分解因數。

解 本式 $=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

83. x^2+4x-3 試分解因數。

解 本式 $=x^2+4x+4-7=(x+2)^2-(\sqrt{7})^2=(x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})$.

84. $ax^2+1+(a+1)x$ 試分解因數。

解 本式 $=ax^2+1+ax+x=ax^2+ax+x+1=ax(x+1)+(x+1)=(x+1)(ax+1)$.

85. x^4-29x^2+100 試分解因數。

解 本式 $=x^4+(-4-25)x^2+(-4)(-25)$

$=(x^2-4)(x^2-25)$

$=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$.

86. $x^2-2ax-b^2+2ab$，試分解因數。

解 本式 $=x^2-b^2-2ax+2ab=(x+b)(x-b)-2a(x-b)=(x-b)(x+b-2a)$.

87. $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$,試分解因數.

解 本式 $=abx^2-aby^2+a^2xy-b^2xy=(abx^2+a^2xy)-(aby^2+b^2xy)=ax(bx+ay)-by(ay+bx)=(ay+bx)(ax-by)$.

88. $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$ 試分解因數.

解 本式 $=axy^3+ab^3x+b^2x^2y+a^2by^2=axy^3+b^2x^2y+ab^3x+a^2by^2=xy(ay^2+b^2x)+ab(b^2x+ay^2)=(xy+ab)(ay^2+b^2x)$.

89. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$試分解因數.

解 I. $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$故直依18題得題式$=3(a-b)(b-c)(c-a)$

解 II. 若$b=c$則題式為0,故$b-c$為因數,同樣$c-a,a-b$亦各為其因數,因而題式$=M(b-c)(c-a)(a-b)$ 比較兩邊a^3之係數而$M=3$.故題式

$$=3(b-c)(c-a)(a-b).$$

解 III. 題式明為交代式,故可以$(b-c)(c-a)(a-b)$整除故云.

90. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$,試分解因數.

解 本式$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=(x^2+5x)(x^2+5x+10)=x(x+5)(x^2+5x+10)$.

91. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$ 試分解因數.

解 $x^2+7x+6=a$則本式為$a(a+6)-280=a^2+6a-280=(a+20)(a-14)$,故本式$=(x^2+7x+6+20)(x^2+7x+6-14)=(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)=(x^2+7x+26)(x-1)\times(x+8)$.

92. $x^2-y^2-3z^2+2xz-4yz$,試分解因數.

解 本式 $=x^2+2xz+z^2-(y^2+4yz+4z^2)=(x+z)^2-(y+2z)^2=\{(x+z)+(y+2z)\}\times\{(x+z)-(y+2z)\}=(x+y+3z)(x-y-z)$.

93. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$,試分解因數.

解 將題式列為a之降冪,則

$$a^2-2(b+c)a-(3b^2-10bc+3c^2)$$
$$=a^2-2(b+c)a-(3b-c)(b-3c)$$
$$=\{a-(3b-c)\}\{a+(b-3c)\}$$
$$=(a-3b+c)(a+b-3c).$$

注意 如此等題式,恆須列為某字母降方或昇方之次序,而後求其因數.

94. $2a^2-7ab-22b^2-5a+35b-3$試分解因數.

解 本式$=(a+2b)(2a-11b)+(a+2b)-3(2a-11b)-3=(a+2b)\{(2a-11b)+1\}-3\times\{(2a-11b)+1\}=(2a-11b+1)(a+2b-3)$.

95. $2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$試分解因數.

解 本式$=(2x-y)(x-2y)+a(x-2y)-a(2x-y)-a^2=(x-2y)\{(2x-y)+a\}-a\{2x-y+a\}=(2x-y+a)(x-2y-a)$.

96. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$ 試分解因數.

本式$=\{(x^2+4x+8)+x\}\{x^2+4x+8+2x\}=\{x^2+5x+8\}\{x^2+6x+8\}$

$$=(x^2+5x+8)(x+2)(x+4).$$

97. $(x-1)(x-y-z-1)+yz$ 試分解因數.

解 本式 $=(x-1)\{(x-1)-(y+z)\}+yz$

$$=(x-1)^2-(y+z)(x-1)+yz$$

$$=\{(x-1)-y\}\{(x-1)-z\}$$

$$=\underline{(x-y-1)(x-z-1)}.$$

98. $(1+x)^2(1+y^2)-(1+x^2)(1+y)^2$ 試分解因數.

解 本式 $=(1+x)^2+y^2(1+x)^2-(1+y)^2-(1+y)^2x^2=(1+x)^2-(1+y)^2+y^2(1+x)^2-(1+y)^2x^2=(x-y)(2+x+y)+\{y(1+x)-(1+y)x\}\{y(1+x)+(1+y)x\}$

$$=(x-y)(2+x+y)+(y-x)(x+y+2xy)$$

$$=(x-y)(2-2xy)=\underline{2(x-y)(1-xy)}.$$

99. $x^3+(2a+1)x^2+x(a^2+2a-1)+a^2-1$, 試分解因數.

解 本式 $=x^3+(2a+1)x^2+(a^2+2a-1)x+a^2-2+1=x^3+1+\{(2a+1)x+a^2-2\}(x+1)=(x+1)(x^2-x+1)+\{(2a+1)x+a^2-2\}(x+1)=(x+1)\{(x^2-x+1)+(2a+1)x+a^2-2\}=(x+1)(x^2+2ax+a^2-1)=(x+1)\times\{(x+a)^2-1\}=\underline{(x+1)(x+a+1)(x+a-1)}.$

100. $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3$ 試分解因數.

解 本式 $=a(a-b-b)^3+b(a+a-b)^3$

$$=a\{(a-b)-b\}^3+b\{a+(a-b)\}^3$$

$$=a(a-b)^3-3ab(a-b)^2+3ab^2(a-b)-ab^3+a^3b+3a^2b(a-b)+3ab(a-b)^2+b(a-b)^3$$

$=a(a-b)^3+b(a-b)^3+3a^2b(a-b)+3ab^2(a-b)+a^3b-ab^3=(a+b)(a-b)^3+3ab(a-b)(a+b)+ab(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)(a+b)^2=\underline{(a-b)(a+b)^3}.$

101. $x^2-z(a+b)x-ab(a-z)(b+z)$, 試分解因數.

解 題式 $=x^2+\{b(a-z)-a(b+z)\}x-ab(a-z)(b+z)=\{x+b(a-z)\}\{x-a(b+z)\}=\underline{(x+ab-b-bz)(x-ab-az)}.$

102. $(1+a)^2-2b^2(1+a^2)+b^4(1-a)^2$ 試分解因數.

解 本式 $=(1+a)^2-b^2(1+a)^2-b^2(1-a)^2+b^4(1-a)^2=(1+a)^2(1-b^2)-b^2(1-a)^2(1-b^2)=(1-b^2)\{(1+a)^2-b^2(1-a)^2\}=(1+b)\times(1-b)\{1+a+b(1-a)\}\{1+a-b(1-a)\}=\underline{(1+b)(1-b)(1+a+b-ab)(1+a-b+ab)}.$

103. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$ 試分解因數.

解 本式 $=x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a+b)^2(a-b)^2=\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\}$

$$=\underline{(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)}.$$

104. $x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)xy+y^2$ 試分解因數.

解 $x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)xy+y^2=m\cdot\frac{1}{m}x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)xy+y^2=x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)xy+m\cdot\frac{1}{m}y^2=\frac{1}{m}\{mx^2+(m^2+1)xy+my^2\}.$

故題式之因數分解之法有三如次.

$$\underline{(mx+y)\left(\frac{1}{m}x+y\right)},$$

或 $\underline{(x+my)\left(x+\frac{1}{m}y\right)}$,

或 $\underline{\frac{1}{m}(mx+y)(x+my)}$.

105. $a=y+z-2x$, $b=z+x-2y$ 及 $c=x+y$

$-2z$, 則 $b^2+c^2+2bc-a^2$, 値如何.

解 $b^2+c^2+2bc-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$ [最後之式以 a, b, c, 之値代入則] $=0.(4x-2y^3-2z)=0$.

106. $x=a^2-bc,\ y=b^2-ca,\ z=c^2-ab$, 則 $ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$, $bc(x^2-yz)=ca(y^2-xz)=ab(z^2-xy)$ 試證之.

解 $ax+by+cz=a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\times\{(a^2-bc)+(b^2-ca)+(c^2-ab)\}=(a+b+c)(x+y+z)$. 次 $x^2-yz=(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$\therefore\ bc(x^2-yz)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

同樣 $ca(y^2-xz)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$ab(z^2-xy)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$\therefore\ bc(x^2-yz)=ca(y^2-xz)=ab(z^2-xy)$.

107. $2+11x+11x^2+x^3-x^4$, 知其 $x=-1$ 或 $x=-2$, 則爲零, 試分解因數.

解 題式若 $x=-1$, 則爲零, 故得以 $x+1$ 整除, 又同樣得以 $x+2$ 整除, 故得以 $(x+1)(x+2)$ 整除, 即得以 x^2+3x+2 整除, 因實行除法, 得商 $1+4x-x^2$, 而 $1+4x-x^2=1+4x+4x^2-5x^2=(1+2x)^2-5x^2=(1+2x+\sqrt{5}x)(1+2x-\sqrt{5}x)$ $=\{1+(\sqrt{5}+2)x\}\{1-(\sqrt{5}-2)x\}$, 故題式 $=(x+1)(x+2)\{1+(\sqrt{5}+2)x\}\{1-(\sqrt{5}-2)x\}$.

108. 試自 $x(x+3)=-4$, 不算出 x 之値, 而直求 $x(x^2-5)$ 之値.

解 $x(x+3)=-4$ 故 $x^2+3x+4=0$, 而 $x(x^2-5)=(x-3)(x^2+3x+4)+12=12$.

109. $(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)$ 則 $a=b=c$ 試證之.

解 $(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0$, 故 $b-c=0,\ c-a=0,\ a-b=0$, 即 $a=b=c$.

110. $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f$ 須如何之方法, 乃能分解爲一次之有理因數.

解 Ay^2+By+C 之一次因數, 須 B^2-4AC 爲完全之平方, 則爲有理, 故 $ay^2+(bx+d)y+cx^2+ex+f$ 之一次因數, 須 $(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f)$, 即 $(b^2-4ac)x^2+(2bd-4ae)x+d^2-4af$ 爲完全之平方時, 則爲有理, 換言之, 則 $(bd-2ae)^2=(b^2-4ac)(d^2-4af)$ 時, 即 $(ae^2+cd^2+fb^2=bde+4acf$ 時, 則題式能分解爲一次之有理因數.

對稱式　交代式

111. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ 試分解因數.

解 將本式中之 x 以 $-y$ 代之, 則 $z^3-(-y)^3-y^3-z^3$ 即爲 0, 故依剩餘定理, 本式有 $(x+y)$ 之因數, 故亦有 $(y+z)$, $(z+x)$ 之因數, 故 $=M(y+z)(z+x)(x+y)$, 但 M 爲數字係數, 比較兩邊同字母同乘方之係數, 例如左邊 x^2 之係數, 爲 $3(y+z)$, 而右邊 x^2 之係數, 爲 $M(y+z)$, 故 $M(y+z)=3(y+z)$, $\therefore\ M=3$, 因而本式 $=3(y+z)(z+x)(x+y)$. 又求 M 之別

法，將 x, y, z 爲 1，則 $(1+1+1)^3-1^3-1^3-1^3=M(1+1)(1+1)(1+1)$，即 $24=M\times8$，$\therefore 3=M$.

112. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$，試分解因數.

解 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$，若 $x+y+z=0$，則此式爲 $(-x)(-y)(-z)+xyz=0$，故 $x+y+z$ 爲此式之一因數，故題式 $=(x+y+z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$，但此式之左邊無 x^3 之項，故 $L=0$，故題式 $=M(x+y+z)(yz+zx+xy)$.

比較兩邊 x^2 之係數 $(y+z)=M(y+z)$，$\therefore M=1$. 故題式 $(x+y+z)(yz+zx+xy)$.

又於兩邊 $x=y=z=1$，亦能求得 M 之值.

別解 本式 $=(yz+zx+xy+z^2)(x+y)+xyz=(yz+zx+xy)(x+y)+yz^2+z^2x+xyz=(yz+zx+xy)(x+y)+(yz+zx+xy)z+(yz+zx+xy)(x+y+z)$.

113. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$，試分解因數.

解 $a=b$，則本式爲 $bc(b-c)+cb(c-b)=0$，故 $a-b$ 爲題式之一因數，同樣 $b-c$，$c-a$，亦爲因數，故 $bc(b-c)+ca(c-a)+ab\times(a-b)=M(b-c)(c-a)(a-b)$，次求 M 之數值，令 $a=0$，$b=1$，$c=2$，則此式 $1\times2(1-2)=M\times(-1)\times(-1)\times2$. $\therefore M=-1$. 故本式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

注意 M之值，使兩邊同字母同乘方之係數相等，亦能得之.

別解 $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ 爲交代式，故能以最簡之交代式 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 整除之，故云.

114. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$，試分解因數.

解 $a=0$，則本式 $=b^2(c-b)+c^2(b-c)-(b+c)(c-b)(b-c)=b^2c-b^3+bc^2-c^3-b^3-bc^2-b^2c+c^3=0$，故本式有 a 之因數，同樣有 b, c 之因數，$\therefore$ 本式 $=Mabc$，求 M 之值，將 a, b, c 爲 1，則 $1+1+1-1=M\times1\times1\times1$，即 $2=M$，故本式 $=2abc$.

115. 試求 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ 之因數.

解 題式若 $b=c$，則爲 0，故 $b-c$ 爲題式之一因數，同樣 $c-a$, $a-b$，亦爲題式之一因數，故題式 $=M(b-c)(c-a)(a-b)$，比較兩邊 a^2 之係數，而 $-(b-c)=-M(b-c)$，$\therefore M=1$，

$\therefore$ 題式 $=(b-c)(c-a)(a-b)$.

別解 因題式爲交代式，故可以 $(b-c)\times(c-a)(a-b)$ 整除之，故云.

116. $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$ 試求其因數.

解 題式之 a^2, b^2, c^2 爲交代式，故能以 $(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$ 整除之，但此式爲六次式，而題式爲四次式，故題式不可不爲0.

注意 題式去括弧，則爲0明矣.

117. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, 試求其因數, 因此再求 $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$ 之因數.

解 $y=z$, 則題式為0, 故 $y-z$ 為其一因數, 同樣 $z-x$, $x-y$ 亦為其因數, 故題式 $=M(y-z)(z-x)(x-y)$, 比較 x^2 之係數而 $M=-1$,

故題式 $=-(y-z)(z-x)(x-y)$.

次將第二式以 x^2, y^2, z^2, 代上式之 x, y, z, 則題式 $=-(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$ $=-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$.

別解 題式為交代式, 故可以 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 整除之, 由是亦能得其因數.

118. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ 試求其因數.

解 $y=z$, 則題式為0, 故 $y-z$ 為其一因數, 同樣 $z-x$, $x-y$, 亦為其一因數, 然題式為四次式, 故他一因數為 $x+y+z$.

故題式 $=M(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$, 比較 x^3 之係數而 $M=-1$, 故

題式等於 $-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

別解 題式為四次之交代式, 故題式 $=M(x+y+z)(y-z)(z-x)(x-y)$, 故云.

119. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$ 試求其因數.

解 $y=z$, 則題式為0, 故 $y-z$ 為其一因數, 同樣 $z-x$, $x-y$ 亦為其一因數, 然題式為四次式, 故他一因數為 $x+y+z$. 故題式 $=M(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$. 比較 x^3 之係數而 $M=1$, 故題式 $=(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

別解 題式為四次交代式, 故題式 $=M(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

120. $a(x-a)(b-c)+b(x-b)(c-a)+c(x-c)(a-b)$, 試求其因數.

解 題式中就 a, b, c, 為交代式, 故題式 $=M(b-c)(c-a)(a-b)$, 比較 a^2 之係數而 $M=1$, 故題式 $=(b-c)(c-a)(a-b)$.

別解 題式 $=\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}x-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=M(b-c)(c-a)(-b)$ 故云.

121. 試求 $y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)+x^2y^2(x-y)$ 之因數.

解 $y=z$, 則題式為0, 故 $y-z$ 為其一因數, 同樣 $z-x$, $x-y$ 亦其一因數, 故題式 $=(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$. 比較 x^4 之係數, 得 $L=0$, 比較 x^3 之係數, 得 $M=-1$, 故題式 $=-(y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)$.

別解 題式為五次交代式, 故 $=(y-z)\times(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$.

122. 試求 $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$ 之因數.

解 $b=-c$, 則題式為0, 故 $b+c$ 為題式之一因數, 同樣 $c+a$, $a+b$ 亦為其因數, 故題式 $=M(b+c)(c+a)(a+b)$. 比較 a^2

之係數，而 $M=1$，故題式 $=(b+c)(c+a)\times(a+b)$.

123. 試求 $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$ 之因數.

解 $b=c$，則題式為 0，故 $b-c$ 為一因數，同樣 $c-a$, $a-b$，亦為其一因數，然題式為四次，故他一因數，為 $a+b+c$，故題式 $=M(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$，比較兩邊 x^3 之係數，而得 $(b-c)=-M(b-c)$，$\therefore M=-1$. 故題式為 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

124. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$ 試分解因數.

解 $b=c$，則本式為 0，故本式有 $b-c$ 之因數，同樣又有 $c-a$, $a-b$，之因數，但本式為四次，故尚有他之一次因數，而本式 a, b, c 為對稱，故其因數當為 $a+b+c$. 本式 $=M(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$. 今若 $a=0$, $b=1$, $c=2$，則 $-1\times(3)^3+2(2)^3+(-1)(1)^3=M(-1)\times2\times(-1)\times3$，即 $-12=6M$，$\therefore M=-2$，故本式 $=-2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

別解 因題式為交代式，當有 $(b-c)(c-a)(a+b)$ 之因數，但題式為四次式，故他之一因數當為 $a+b+c$.

125. $(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3+(x^2-y)^3$，試求其因數.

解 依 89 題，得

題式 $=3(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$

$=3(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$.

126. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$ 試求其因數.

解 $a=0$ 題式為 0，故 a 為其一因數，同樣 b, c 亦為其一因數，故題式 $=Mabc$，比較 a 之係數，而 $M=24$，故題式 $=24abc$.

127. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$，試求其因數.

解 $y=z$，則題式為 0，同樣 $z=x$, $x=y$，題式皆為 0，故 $=(y-z)(z-x)(x-y)$ 為題式之因數，故題式 $=(y-z)(z-x)(x-y)\{L\times(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$，比較 x^4 之係數，而 $L=-1$，又比較 x^3 之係數，而得 $M=-1$，故題式

$=-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.

128. $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$ 試求其因數.

解 $a=0$，則題式為 0，故 a 為其一因數，同樣 b, c 亦為其一因數，然題式為四次，故他一因數為 $a+b+c$，故題式 $=Mabc(a+b+c)$，比較 a^2 之係數，而 $M=12$，故題式 $=12abc(a+b+c)$.

公因數 公倍數

129. 試求 $2x^2-7x+5$ 及 $3x^2-7x+4$ 同時為零之 x 之值.

解 $2x^2-7x+5=(2x-5)(x-1)$, $3x^2-7x+4=(3x-4)(x-1)$，此二式公共之因數，為 $x-1$，故 $x-1=0$，即 $x=1$ 時兩式皆為 0.

130. 試求 $x^3-41x-30$ 為零，而同時 x^3-

$11x^2+25x+25$ 不爲零之 x 之值.

圖 先將二式分解因數,求其最大公約數,得 x^2-6x-5, 故 $x^3-41x-30=(x^2-6x-5)(x+6)$, $x^3-11x^2+25x+25=(x^2-6x-5)(x-5)$, 而 $x^3-41x-30$ 有 $x+6$ 之因數, $x^3-11x^2+25x+25$ 無 $x+6$ 之因數,故 $x+6=0$, 卽 $x=-6$ 合於所求之要件矣.

131. x^2+lx+2 及 x^2+3x+5 有一公因數試定 l 之值.

圖 $x^2+lx+2\cdots\cdots(1)$, $x^2+3x+5\cdots\cdots(2)$, 自 (1) 減 (2), 則 $(l-3)x-3$, 而 (1), (2),若有一次之公因數,則必爲 $(l-3)x-3$, 依剩餘定理,而 $\frac{9}{(l-3)^2}+\frac{9}{l-3}+5=0$,

故 $9+9(l-3)+5(l-3)^2=0$, 故 $5l^2-21l+27=0$, 故 $l=\frac{21\pm3\sqrt{-11}}{10}$.

132. x^n-px+q 及 $nx^{n-1}-p$, 若有一次之公因數時,則 p, q 及 n 間之關係如何.

圖 將公因數爲 $x-f$, 然則題之二式在 $x=f$ 時爲零,故 $f^n-pf+q=0\cdots\cdots(1)$, $nf^{n-1}-p=0\cdots\cdots\cdots(2)$, 自 (2) $f^n=ff^{n-1}=\frac{p}{n}\times f$, 由是自 (1) $\frac{p}{n}\times f-pf+q=0$.

故 $f=\frac{n}{n-1}\frac{q}{p}\cdots\cdots(3)$, 將 f 代入 (2), 則 $\frac{p}{n}=\left(\frac{n}{n-1}\frac{q}{p}\right)^{n-1}$, 卽 $\left(\frac{p}{n}\right)^n=\left(\frac{q}{n-1}\right)^{n-1}$ $\cdots\cdots(4)$, 爲所求之關係,而其公因數爲 $x-f=x-\frac{n}{n-1}\frac{q}{p}$.

133. ax^2+bx+c, px^2+qx+r, 有 x 一次之公因數,則 $(cp-ar)^2=(bp-aq)(cq-br)$ 試證之.

圖 $(ax^2+bx+c)p-(px^2+qx+r)a=(bp-aq)x+cp-ar$, 又 $(px^2+qx+r)c-(ax^2+bx+c)r=(cp-ar)x^2+(cq-br)x$, 此二結果,若有同一之公因數,則

$$\frac{bp-aq}{cp-ar}=\frac{cp-ar}{cq-br},$$

故 $(cp-ar)^2=(bp-aq)(cq-br)$.

134. $x^2+(l+1)x+(m+2)$ 及 $x^2+(l+12)x-2m$ 之值,皆能 $x-1$ 整除,問 l, m 之值如何.

圖 二式若必能以 $x-1$ 整除,則其十分之要件爲 $1^2+(l+1).1+(m+2)=0$, 卽 $l+m+4=0$, 及 $1^2+(l+12).1-2m=0$. 卽 $l-2m+13=0$. 故 $l=-7$. $m=3$.

135. x^3+Px^2+Qx+6 與 x^3-Qx^2+Px+6, 有 $x-2$ 之公因數,則 P, Q 之關係如何.

圖 $x-2$ 能整除二式差之 $x^3+Px^2+Qx+6-(x^3-Qx^2+Px+6)=(P+Q)x^2+(Q-P)x$, 故依剩餘定理,當爲 $(P+Q)\times2^2+(Q-P)\times2=0$, 卽 $4P+4Q+2Q-2P=0$, 故 $2P=-6Q$, 故 $P=-3Q$.

注意 題式之 x 以2代之,得 $2P+Q+7=0$ 及 $P-2Q+7=0$ 相減亦可得 P, Q 之關係 $P=-3Q$.

136. $x+a$ 爲 x^2+Px+Q 與 x^2+mx+n 有公因數,則 $a=\frac{Q-n}{P-m}$ 試證之.

圖 $x^2+Px+Q-(x^2+mx+n)=(P-m)x+a-m$, 依剩餘定理 $(P-m)(-a)+(Q-n)=0$, 故 $Q-n=(P-m)a$, 故 $a=\frac{Q-n}{P-m}$.

137. x^2+ax+b 及 $x^2+a'x-b$ 有一次之公

因數，則 $4b=a^2-a'^2$，而其公因數爲 $x+\frac{1}{2}(a+a')$ 試證之.

圖 題式有一次之公因數，則設其因數爲 $x-A$，依剩餘定理 $A^2+Aa+b=0$ $A^2+Aa'-b=0$，將此二式相加，則 $2A^2+A(a+a')=0$，故 $A\{2A+(a+a')\}=0$，但 $A\neq0$，故 $2A+(a+a')=0$，即 $A=-\frac{1}{2}\times(a+a')$，故公因數爲 $x+\frac{1}{2}(a+a')$. 又因 $x+\frac{1}{2}(a+a')$ 爲 $x^2+a'x-b$ 之因數，故 $\left\{-\frac{1}{2}(a+a')\right\}^2+a'\left\{-\frac{1}{2}(a+a')\right\}-b=0$，故 $4b=a^2-a'^2$.

138. x^2+px+q 及 x^2+rx+s 之最大公約數爲 $x+c$，則其最小公倍數爲 $x^3+(p+r-c)x^2+(pr-c^2)x+(p-c)(r-c)c$，試證之.

圖 今所設最大公約數爲一次式，故最小公倍數爲 x^3+Ax^2+Bx+D 之形. 而決定無關係於 x 之 A, B, D 因二數之積，等於其最大公約數及最小倍公數之積，故得次之關係式. $(x^2+px+q)\times(x^2+rx+s)=(x+c)(x^3+Ax^2+Bx+D)$. 即 $x^4+(p+r)x^3+(pr+q+s)x^2+(ps+qr)x+qs=x^4+(A+c)x^3+(Ac+B)x^2+(Bc+D)x+Dc$. 比較 x 同乘方之係數，而

$A+c=p+r$ .... (1).

$Ac+B=pr+y+s$ .... (2).

$Bc+D=ps+qr$ .... (3).

$Dc=qs$ .... (4).

又 $x+c$ 爲最大公約數，故依剩餘定理，得 $c^2-cp+q=0$ .... (5)，

$c^2-cr+s=0$ .... (6)，

自 (1) 得 $A=p+r-c$，代入於 (2)，而 $B=pr+q+s-pc-rc+c^2$，自此減 (5) (6) 之和，則 $B=pr-c^2$，又自 (5) 得 $(p-c)c=q$，自 (6) 得 $(r-c)c=s$，將此 sq，代入於 (4)，而 $D=(p-c)(r-c)c$，故最小公倍數，爲 $x^3+(p+r-c)x^2+(pr-c^2)x+(p-c)(r-c)c$.

139. 將三數 a, b, c，每取二數之三組，若將其每組二數之最大公約數爲 g_1, g_2, g_3，而其最小公倍數，爲 l_1, l_2, l_3，則 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=(abc)^2$ 試證之.

圖 $l_1g_1=bc$, $l_2g_2=ca$ 及 $l_3g_3=ab$ 故 $l_1l_2l_3g_1g_2g_3=(abc)^2$.

140. A, B, C, 爲任意之三代數式，而 (BC), (CA), (AB), (ABC), 各爲 B 及 C; C 及 A; A 及 B; A, B 及 C 之最大公約數，則 A, B 及 C 之最小公倍數爲 $A.B.C.(ABC)\div\{(BC).(CA).(A)B\}$，試證明之.

圖 $(BC)=(ABC)\alpha$, $(CA)=(ABC)\beta$, 及 $(AB)=(ABC)\gamma$，則依假定而 α, β, γ，無公約數，且必有次之關係，$A=(ABC)\times\beta.\gamma.x$, $B=(ABC).\gamma.\alpha.y$, $C=(ABC)\alpha.\beta.z$，而 x, y, z，爲無公約數者，故 A, B, 及 C 之最小公倍數，爲 $(ABC)\alpha\beta\gamma xyz$

$$=\frac{(ABC)^4\alpha^2\beta^2\gamma^2xyz}{\{(ABC)\alpha\}\{(ABC)\beta\}\{(ABC)\gamma\}}$$

$$=\frac{A.B.C.(ABC)}{(BC)(CA)(AB)}.$$

141. 三式 A, B, C, 就其中一字母，例如 x 之最大公約數，等於三式 $a_1A+b_1B+c_1C$, $a_2A+b_2B+c_2C$, $a_3A+b_3B+c_3C$

之最大公約數，試證之.但 $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3$ 九數，非如行列式 $[a_1b_2c_3]=0$ 之任意數.

圝 A,B,C,任意之公因數，爲

$a_1A+b_1B+c_1C$…………………(1),

$a_2A+b_2B+c_2C$…………………(2),

$a_3A+b_3B+c_3C$…………………(3),

之一因數明矣.又(1),(2),(3)三式任意之公因數，爲

$(a_1A+b_1B+c_1C)A_1+(a_2A+b_2B+c_2C)\times A_2+(a_3A+b_3B+c_3C)A_3=(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)A+(b_1A_1b_2A_2+b_3A_3)B+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)C$ 之一因數，但此 A_1,A_2,A_3，若爲行列式 $[a_1b_2c_3]$ 中 a_1,a_2,a_3 之係數，則 $a_1A_1+a_3A_2+a_3A_3=[a_1b_2c_3]$ $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3,=0$, $c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$，故前式等於 $[a_1b_2c_3]A$，而 $[a_1b_2c_3]$ 不含 x，故非 $[a_1b_2c_3]=0$，則三式(1),(2),(3)，任意之因數，爲A之因數.同樣將 $[a_1b_2c_3]$ 中 b_1,b_2,b_3 之係數，各乘(1),(2),(3)，而加之，則知(1),(2),(3)，任意之公因數爲B之一因數，又將 $[a_1b_2c_3]$ 中 c_1,c_2,c_3 之係數乘(1),(2),(3)，而加之，則知(1),(2),(3)任意之公因數爲C之一因數，但皆須 $[a_1b_2c_3]=0$，故三式A,B,C,之最大公約數，卽(1),(2),(3)之最大公約數，而 $[a_1b_2c_3]\neq0$.

142. 試求下列三式之最大公約數.

$3x^4+11x^3+12x^2+9x+1=A$,

$x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=B$,

$x^4+x^3+9x^2+8x+8=C$.

圝 將 $A+0.B+(-3)C=8x^3-15x^2-15x-23$ 爲 A', $A+B+0.C=x(x^4+4x^3+12x^2+11x+8)$ 爲 $x.B'$, $0.A+0.B+C=x^4+x^3+9x^2+8x+8$ 爲 C'.

$$\begin{vmatrix}1&0&-3\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1.$$

而 $A'+0.B'+0.C'=8x^3-15x^2-15x-23$ 爲 A'', $0.A'+B'+(-1)C=3x(x^2+x+1)$ 爲 $3x.B''$, $8A'+0.B'+23C'=x(23x^3+87x^2+87x+64)$ 爲 $x.C''$.

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\8&0&23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&23\end{vmatrix}=23.$$

又 $A''+23B''+0.C''=8x(x^2+x+1)$,

$0.A''+B''+0.C''=x^2+x+1$,

$0.A''+(-64)B''+C''=23x(x^2+x+1)$,

$$\begin{vmatrix}1&23&0\\0&1&0\\0&-64&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\-64&1\end{vmatrix}=1.$$

故所求之最大公約數，爲 x^2+x+1.

分數式

143. $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$ 試簡單之.

圝 以各分母除各分子，則

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=0.$

144. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$ 試簡單之.

圝 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$,

$\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}$.

$$\therefore \frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}.$$

145. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$ 試簡單之.

圖 本式$=\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{2}{(x-1)(x-3)}$

$$+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)-2(x-2)+(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{0}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0.$$

146. $\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x-5}{x^2-7x+10}+\frac{x-6}{2(x^2-9x+18)}$ 試簡單之.

圖 本式$=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2(x-3)}+$

$$\frac{x^2-5x+6-2(x^2-4x+3)+x^2-3x+2}{2(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

147. $\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{ab}-\frac{4}{(a-b)^2}\right\}\div$ $\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2-\frac{1}{ab}\right\}$ 試簡單之.

圖 本式$=\left\{\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}-\frac{1}{ab}-\frac{4}{(a-b)^2}\right\}$

$$\div\left\{\frac{(b-a)^2}{a^2b^2}-\frac{1}{ab}\right\}=$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2-ab(a-b)^2-4a^2b^2}{a^2b^2(a-b)^2}\div$$

$$\frac{a^2-3ab+b^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2(a^2-3ab+b^2)}{a^2b^2(a-b)^2}\times$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2-3ab+b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}.$$

148. $\frac{x-2-\frac{1}{x-2}}{x-2-\frac{4}{x-5}}\times\frac{x-4-\frac{4}{x-4}}{x-4-\frac{1}{x-4}}$ 試簡單之.

圖 $\frac{x-2-\frac{1}{x-2}}{x-2-\frac{4}{x-5}}=\frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

$$\times\frac{x-5}{(x-1)(x-6)}=\frac{(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-6)}.$$ 又

$$\frac{x-4-\frac{4}{x-4}}{x-4-\frac{1}{x-4}}=\frac{(x-4)^2-4}{(x-4)^2-1}=\frac{(x-x)(x-6)}{(x-3)(x-5)}.$$

$\therefore$ 本式$=\frac{(x-5)(x-3)}{(x-2)(x-6)}$

$$\times\frac{(x-2)(x-6)}{(x-3)(x-5)}=1.$$

149. $\left(y-\frac{a^2-xy}{y-x}\right)\left(x+\frac{a^2-xy}{y-x}\right)$

$+\left(\frac{a^2-xy}{y-x}\right)^2$ 試簡單之.

圖 本式$=\frac{y^2-a^2}{y-x}\times\frac{a^2-x^2}{y-x}$

$$+\left(\frac{a^2-xy}{y-x}\right)^2$$

$$=\frac{(y^2-a^2)(a^2-x^2)+(a^2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{a^2(y-x)^2}{(y-x)^2}=a^2.$$

150. $\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3-3\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2+3\frac{a-b}{a+b}-1\right\}$ $\div\left\{1+3\frac{a-b}{a+b}+3\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}-\frac{(b-a)^3}{(b+a)^3}\right\}$, 試簡單之.

圖 將原式稍變之,而

$$\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3-3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+3\frac{a-b}{a+b}-1\right\}$$

$$\div\left\{1+3\frac{a-b}{a+b}+3\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}\right\}$$

$$=\left\{\frac{a-b}{a+b}-1\right\}^3\div\left\{1+\frac{a-b}{a+b}\right\}^3$$

$$=\left\{\frac{a-b}{a+b}-1\right\}^3\div\left\{1+\frac{a-b}{a+b}1\right\}^3$$

$$=\frac{-8b^3}{(a+b)^3}\div\frac{8a^3}{(a+b)^3}=-\frac{b^3}{a^3}.$$

151. $\dfrac{x+\frac{1}{y}}{x+\cfrac{1}{y+\frac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$ 試簡之.

【解】 本式 $=\dfrac{\frac{xy+1}{y}}{x+\frac{z}{yz+1}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$

$=\dfrac{(xy+1)(yz+1)}{y(xyz+x+z)}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$

$=\dfrac{xy^2z+xy+yz}{y(xyz+x+z)}=\dfrac{y(xyz+x+z)}{y(xyz+x+z)}=1.$

152. $\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$ 試簡單之.

【解】 本式 $=\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{1}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}+\dfrac{1}{x^n+1}=\dfrac{x^{3n}-1}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}-1}{x^n+1}=x^{2n}+x^n+1$

$-(x^n-1)=x^{2n}+2.$

153. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ 試簡單之.

【解】 本式 $=\dfrac{a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$

154. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ 試簡單之.

【解】 本式 $=-\dfrac{a^2}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{b^2}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{c^2}{(c-a)(b-c)}$

$=-\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=-\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$

155. $\dfrac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{a+y}{y(y-z)(y-x)}+\dfrac{a+z}{z(z-x)(z-y)}$ 試簡單之.

【解】 本式 $=-\{yz(a+x)(y-z)+xz(a+y)(z-x)+xy(a+z)(x-y)\}/\{xyz(x-y)(y-z)(z-x)\}$

$=\dfrac{a\{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)\}}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=-\dfrac{-a(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{a}{xyz}.$

156. $\dfrac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{x+b}{x^2-(a+c)x+ac}+\dfrac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$ 試簡單之.

【解】 本式 $=\dfrac{x+c}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{(x+b)}{(x-a)(x-c)}+\dfrac{x+a}{(x-b)(x-c)}=\dfrac{x^2-c^2+x^2-b^2+x^2-a^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\dfrac{3x^2-a^2-b^2-c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$

157. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$ 試簡單之.

【解】 本式 $=-\dfrac{1}{(a-b)(c-a)(x-a)}-\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(x-b)}-\dfrac{1}{(c-a)(b-c)(x-c)}$,

通分則其分子,爲 $(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-a)(x-c)+(a-b)(x-a)(x-b)$,

即 $\Sigma(b-c)x^2-\Sigma(b^2-c^2)x+\Sigma! c(b-c)$.

但 $\Sigma(b-c)=0,\Sigma(b^2-c^2)=0$, 故前式爲 $\Sigma bc(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$, 又分母爲 $-(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)$, 故題式等於 $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

158. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{y^2-(z-x)^2}{(y+z)^2-x^2}$

$+\frac{z^2-(x-y)^2}{(z+x)^2-y^2}$，試簡單之.

解 $\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}+$

$\frac{(y+z-x)(y-z+x)}{(y+z-x)(x+y+z)}+\frac{(z+x-y)(z-x+y)}{(x+y+z)(z+x-y)}$

$=\frac{x-y+z}{x+y+z}+\frac{y-z+x}{x+y+z}+\frac{z-x+y}{x+y+z}$

$=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1.$

159. $\frac{b^2(c+d)}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2(b+d)}{(c-d)(c-b)}$

$+\frac{d^2(b+c)}{(d-b)(d-c)}=0$ 試證之.

解 題式左邊$=\{b^2(c+d)(c-d)-c^2(b+d)(b-d)+d^2(b+c)(b-c)\}/\{(b-c)(b-d)(c-d)\}$

$=\frac{b^2(c^2-d^2)-c^2(b^2-d^2)+d^2(b^2-c^2)}{(b-c)(b-d)(c-d)}$

$=\frac{0}{(b-c)(b-d)(c-d)}=0.$

160. $\frac{b^2(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2(a-d)(a-b)}{(c-d)(c-b)}$

$+\frac{d^2(d-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}$ 試簡單之.

解 題式為 a 之二次式,故

$\frac{b^2(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2(a-d)(a-b)}{(c-d)(c-b)}$

$+\frac{d^2(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}=Aa^2+Ba+C$, 若 $a=b$,

則 $b^2\equiv Ab^2+Bb+C$, 卽 $(A-1)b^2+Bb+C=0$, $\therefore$ $A-1=0$, 因而 $A=1$, 及 $B=0$, $C=0$, 故題式等於 a^2.

別解 將題式列為 a 之降方之次序,

則 a^2 之係數為 $\frac{b^2}{(b-c)(b-d)}$

$+\frac{c^2}{(c-d)(c-b)}+\frac{d^2}{(a-b)(d-c)}=1$ [154 題]

而 a 之係數,為 $\frac{b^2(c+d)}{(b-c)(b-d)}$

$+\frac{c^2(b+d)}{(c-d)(c-b)}+\frac{d^2(b+c)}{(d-b)(d-c)}=0$ [159 題].

又不含 a 之項,為 $\left\{\frac{b}{(b-c)(b-d)}\right.$

$\left.+\frac{d}{(c-d)(c-b)}+\frac{b}{(d-b)(d-c)}\right\}bcd=0.$

[153 題]故題式等於 a^2.

161. $\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$

試簡單之.

解 分子$=\frac{\Sigma a^3(c-b)}{abc}=\frac{(a+b+c)\Pi(b-c)}{abc}$

分母$=\frac{\Sigma a^2(c-b)}{abc}=\frac{\Pi(b-c)}{abc}$.

故分數$=a+b+c$.

162. $\frac{\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}-3\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x+b)(x-c)}}{\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}-3\frac{x^3+(bc+ca+ab)x}{(x-a)(x-b)(x-c)}}$

試簡單之.

解 分母$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x-a}-1+\frac{2x}{x-b}-1\right.$

$\left.+\frac{2x}{x-c}-1-3\left\{\frac{2x^3+2x\Sigma bc}{(x-a)(x-b)(x-c)}-1\right\}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}\right.$

$\left.-3\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\right]$, 何則 $2x^3+2x\Sigma bc-(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+x^2\Sigma a+x\Sigma bc+abc=(x+a)(x+b)(x+c)$]. 因而分母為分子之 $\frac{1}{2}$ 故分數等於2.

163. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=\left(xy-\frac{1}{xy}\right)$

$\times\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ 試證之.

圖 左邊$=\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\left\{(x+y)+\frac{x+y}{xy}\right\}\left\{(x-y)-\frac{x-y}{xy}\right\}$

$=(x^2-y^2)-\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}=\frac{(x^2y^2-1)(x^2-y^2)}{x^2y^2}$

$=\frac{x^2y^2-1}{xy}\cdot\frac{x^2-y^2}{xy}=\left(xy-\frac{1}{xy}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$

164. $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-b}{1+ca}$, $\frac{a-b}{1+ab}$ 之和與其連乘積相等, 試證之.

圖 和之分子$=(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+(a-b)(1+bc)(1+ca)$

$=\Sigma(b-c)+\Sigma a(b^2-c^2)+abc\Sigma a(b-c)=0+\Sigma a(b^2-c^2)+0=\Pi(b-c)$,

$\therefore\ \frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}$

$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}.$

165. $x=\frac{1}{2}$時試求$\frac{4x^3-4x^2-x+1}{2x^2-x}$之值.

圖 題式之x,若直以$\frac{1}{2}$代之,則成不定形$\frac{0}{0}$,故先將題式簡單之,則

$\frac{(4x^2-1)(x-1)}{x(2x-1)}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$,故$x=\frac{1}{2}$時,此式爲$-2$.

166. $x=\frac{a^n+b^n}{2}$時,試求次式之值.

$\frac{a^n}{2na^n-2nx}+\frac{b^n}{2nb^n-2nx}.$

圖 $2x=a^n+b^n$, $\therefore\ 2nx=na^n+nb^n$,

$\therefore$ 所求之值 $=\frac{a^n}{na^n-nb^n}+\frac{b^n}{nb^n-na^n}$

$=\frac{a^n}{na^n-nb^n}-\frac{b^n}{na^n-nb^n}=\frac{a^n-b^n}{n(a^n-b^n)}=\frac{1}{n}$

167. $x=\frac{ab}{a+b}$ 則$\frac{a-2x}{b-2x}$之值如何.

圖 $\frac{a-2x}{b-2x}=\frac{a-\frac{2ab}{a+b}}{b-\frac{2ab}{a+b}}=\frac{a^2+ab-2ab}{ab+b^2-2ab}$

$=\frac{a^2-ab}{b^2-ab}=\frac{-a(b-a)}{b(b-a)}=-\frac{a}{b}.$

168. $x=\frac{1}{2}(a+b)$時,試求$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$之值.

圖 題式$=\left(\frac{2x-2a}{2x-2b}\right)^2-\frac{2x-4a+2b}{2x+2a-4b}$

$=\left(\frac{b-a}{a-b}\right)^2-\frac{3b-3a}{3a-3b}=(-1)^2+1=0.$

169. $x-\frac{1}{x}=1$,問$x^2+\frac{1}{x^2}$及$x^3-\frac{1}{x^3}$之值.

圖 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1+2=3.$

$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)=4.$

170. $a+b=\frac{4cd}{c+d}$ 時,試求 $\frac{a+b+2c}{a+b-2c}+\frac{a+b+2d}{a+b-2d}$ 之值.

圖 題式$=\frac{(a+b)(c+d)+2c(c+d)}{(a+b)(c+d)-2c(c+d)}$

$+\frac{(a+b)(c+d)+2d(c+d)}{(a+b)(c+d)-2d(c+d)}=\frac{4cd+2c(c+d)}{4cd-2c(c+d)}$

$+\frac{4cd+2d(c+d)}{4cd-2d(c+d)}=\frac{3d+c}{d-c}+\frac{3c+d}{c-d}=2.$

171. $x+y+z=\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y$, 試求 $\frac{x+y+z}{z}$ 之值.

圖 $\frac{x+y+z}{14}=\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{(x+y+z)-x-y}{14-3-4}=\frac{z}{7}$,

$\therefore\ \frac{x+y+z}{z}=\frac{14}{7}=2.$

172. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，則此各分數，與 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ 等值，試證之.

解 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=x$，則 $a=bx$，$cd=x$，$e=fx$. 因而 $a+c+e=bx+dx+fx=(b+d+f)x$，$\therefore\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=x$.

173. $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$，則此各分數之值，等於 $\frac{ma+nb+pc}{mx+ny+pz}$ 試證之.

解 I. $\frac{a}{x}=k$，$\frac{b}{y}=k$，$\frac{c}{z}=k$，故 $a=xk$，$b=yk$，$c=zk$，$\therefore\ ma=mxk$，$nb=nyk$，$pc=pzk$，故 $ma+nb+pc=mxk+nyk+pzk=(mx+ny+pz)k$，

$\therefore\ k=\frac{ma+nb+pc}{mx+ny+pz}$.

解 II. $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{ma}{mx}=\frac{nb}{ny}=\frac{pc}{pz}$
$=\frac{ma+nb+pc}{mx+ny+pz}$ [前題].

174. $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，則 $\frac{x-y}{x+y}=\frac{a-b}{a+b}$，試證之.

解 I. $\frac{x}{y}=k$ 則 $x=yk$，$\therefore\ \frac{x-y}{x+y}=\frac{yk-y}{yk+y}$
$=\frac{k-1}{k+1}$. 同樣 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{k-1}{k+1}$，$\therefore\ \frac{x-y}{x+y}$
$=\frac{a-b}{a+b}$.

解 II. 自題式兩邊減 1，則 $\frac{x-y}{y}=\frac{a-b}{b}$，又兩邊加 1，則 $\frac{x+y}{y}=\frac{a+b}{b}$
各邊相除得 $\frac{x-y}{x+y}=\frac{a-b}{a+b}$.

175. $\frac{x}{y+z}=a$，$\frac{y}{z+x}=b$，$\frac{z}{x+y}=c$，
則 $\frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$，試證之.

解 $\frac{x}{y+z}=a$，$\therefore\ 1+a=1+\frac{x}{y+z}$
$=\frac{x+y+z}{y+z}$，$\therefore\ \frac{1}{1+z}=\frac{y+z}{x+y+z}$，同樣
$\frac{1}{1+b}=\frac{x+z}{x+y+z}$，$\frac{1}{1+c}=\frac{x+y}{x+y+z}$.
又 $\frac{b}{1+b}=1-\frac{1}{1+b}=1-\frac{x+z}{x+y+z}$，
$=\frac{y}{x+y+z}$，同樣 $\frac{c}{1+c}=\frac{z}{x+y+z}$，
故 $\frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

176. $\frac{x-y}{x+y}=a$，$\frac{y-z}{y+z}=b$，$\frac{z-x}{z+x}=c$，
則 $(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$，或 $a+b+c+abc=0$ 試證之.

解 I. $1-a=1-\frac{x-y}{x+y}=\frac{2y}{x+y}$，$1+a=1+\frac{x-y}{x+y}=\frac{2x}{x+y}$，$\therefore\ \frac{1-a}{1+a}=\frac{2y}{x+y}\times\frac{x+y}{2x}=\frac{y}{x}$，同樣 $\frac{1-b}{1+b}=\frac{z}{y}$，$\frac{1-c}{1+c}=\frac{x}{z}$，
故 $\frac{1-a}{1+a}\times\frac{1-b}{1+b}\times\frac{1-c}{1+c}=\frac{y}{x}\times\frac{z}{y}\times\frac{x}{z}$
$=1$. $\therefore\ (1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)\times(1+c)$. 變化此式，則 $a+b+c+abc=0$.

解 II. $a+b+c+abc=\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}\cdot\frac{x-y}{x+y}=$
$\{(y-z)(z+x)(x+y)+(z-x)+(y+z)(x+y)+(x-y)(y+z)(z+x)+(y-z)(z-x)(x-y)\}/\{(y+z)(z+x)(x+y)\}$，但此分數之分子，就爲 x, y, z，三次交代式，故以 L 示數係數則爲 $L(y-z)(z-x)(x-y)$ 見

第一門交代式條]而數係數比較 xyz 項之係數而知爲0，故上之分數式之値爲0，因而 $a+b+c+abc=0$，或 $(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$.

177. $x=by+cz+du$, $y=ax+cz+du$. $z=ax+by+du$, $u=ax+by+cz$, 而 x,y,z,u, 各不相等，則 $\frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}$，試證之.

圖 自第一式減第二式，而 $x-y=by-ax$, $\therefore x(1+a)=y(1+b)$，同樣自第二第三式，而 $y(1+b)=z(1+c)$，自第三，第四式而 $z(1+c)=u(1+d)$，故 $x(1+a)=y(1+b)=z(1+c)=u(1+d)$，故若 $x(1+a)=k$，則 $x=\frac{k}{1+a}$, $y=\frac{k}{1+b}$, $z=\frac{k}{1+c}$, $u=\frac{k}{1+d}$，將此各値代入一式，則 $\frac{k}{1+a}=\frac{bk}{1+b}+\frac{ck}{1+c}+\frac{dk}{1+d}$，其各項以 k 約之，得 $\frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}$.

178. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ 則 $(b-c)x+(c-a)y+(a+b)z=0$ 試證之.

圖 各分數之値，以 k 表之，則 $x=(b+c-a)k$, $\therefore (b-c)x=(b-c)(b+c-a)k$，同樣 $(c-a)y=(c-a)(c+a-b)k$, $(a-b)z=(a-b)(a+b-c)k$, $\therefore$ $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=\{(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)\}k=0$.

179. $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$，則 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$，試證之，

圖 等式左邊之分母子，以 bc 除之，右邊之分母子，以 ac 除之，則

$$\frac{\frac{z}{c}-\frac{y}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}$$ 故此各分數，等於

$$\frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$，即 $\frac{bx-ay}{b-a}$，若 $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{bx-ay}{b-a}=k$，則 $(bz-cy)+(cx-az)-(bx-ay)=\{(b-c)+(c-a)-(b-a)\}k$ $=0$，即 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y=0$.

180. $\frac{l}{x^2-yz}=\frac{m}{y^2-zx}=\frac{n}{z^2-xy}$，則 $lx+my+nz=(l+m+n)(x+y+z)$，試證之.

圖 $\frac{l}{x^2-yz}=\frac{m}{y^2-zx}=\frac{n}{z^2-xy}$

$$=\frac{l+m+n}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$$

$$=\frac{(x+y+z)(l+m+n)}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz+zx-xy)}$$

$$=\frac{(l+m+n)(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$. 又 $\frac{l}{x^2-yz}$

$$=\frac{m}{y^2-zx}=\frac{n}{z^2-xy}=\frac{lx}{x^3-xyz}=\frac{my}{y^3-xyz}$$

$$=\frac{nz}{z^3-xyz}=\frac{lx+my+nz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$. 故

$x+my+nz=(l+m+n)(x+y+z)$.

181. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$，則次之等式成立，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$. 試證之.

圖I. $(a^2+b^2+^2c)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$.

但 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ 故 $ay=bx$, $\therefore$ $(ay-bx)^2=0$. 同樣 $(bz-cy)^2=0$, $(cx-az)^2=0$, $\therefore$ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=0$.

解II. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}$
$=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{ax}=\frac{y^2}{by}=\frac{z^2}{cz}$
$=\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}$. ∴ $(ax+by+cz)^2$
$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

解III. 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, 則 $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$. ∴ $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$ $=k^2(a^2+b^2+c^2)^2$, 又 $(ax+by+cz)^2=$ $\{k(a^2+b^2+c^2)\}^2=k^2(a^2+b^2+c^2)^2$. ∴ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$.

182. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{b+c}{2(b-c)}=\frac{c+a}{3(c-a)}$, 則 $8a+9b+5c=0$, 試證之.

解 將各分數爲 k, 則 $6(a+b)=6(a-b)k$, $3(b+c)=6(b-c)k$, $2(c+a)=6(c-a)k$, 故 $6(a+b)+3(b+c)+2(c+a)=\{6(a-b)+6(b-c)+6(c-a)\}k$. 即 $8a+9b+5c=0\times k=0$.

183. $\frac{a}{2y+2z-3x}=\frac{b}{2z+2x-3y}=\frac{c}{2x+2y-3z}$, 則 $\frac{x}{a+2b+2c}=\frac{y}{b+2c+2a}=\frac{z}{c+2a+2b}$, 試證之.

解 若 $\frac{a}{2y+2z-3x}=k$, 則 $a=(2y+2z-3x)k$, 同樣 $2b=(4z+4x-6y)k$, $2c=(4x+4y-6z)k$, 相加得 $a+2b+2c=5xk$, ∴ $\frac{x}{a+2b+2c}=\frac{x}{5xk}=\frac{1}{5k}$, 同樣 $\frac{y}{b+2c+2a}=\frac{1}{5k}$, $\frac{z}{c+2a+2b}=\frac{1}{5k}$. 故 $\frac{x}{a+2b+2c}=\frac{y}{b+2c+2a}=\frac{z}{c+2a+2b}$.

184. $(a+b+c)x=(-a+b+c)y=(a-b+c)z=(a+b-c)w$, 則 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$, 試證之.

解 若 $(a+b+c)x=\frac{1}{k}$, 則 $x=\frac{1}{(a+b+c)k}$ ∴ $\frac{1}{x}=(a+b+c)k$, 同樣 $\frac{1}{y}=(-a+b+c)k$, $\frac{1}{z}=(a-b+c)k$, $\frac{1}{w}=(a+b-c)k$, ∴ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=(a+b+c)k=\frac{1}{x}$.

185. 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, 則 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$, 試證之.

解 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, 而 $\frac{bc+ac+ab}{abc}=0$, ∴ $ab+bc+ca=0$, ∴ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=a^2+b^2+c^2+0=a^2+b^2+c^2$.

186. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, 而 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, 則 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 試證之.

解 $1^2=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ $+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ $+2\times\frac{xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ $+2\times\frac{xyz}{abc}\times 0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

187. $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, 則 $x^2y^2z^2=1$ 試證之.

解 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$, ∴ $x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}$. ∴ $yz(x-y)=y-z$, 同樣 $zx(y-z)=z-x$, $xy(z-x)=x-y$. 將此三式連乘之,而去其公因數,則 $x^2y^2z^2=1$.

188. $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$ 則 $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$, 試證之.

圖 $yz=(az+cx)(bx+ay)=a^2yz+x(bcx+cay+abz)$. $\therefore$ $yz-a^2yz=x(bcx+cay+abz)$, $\therefore$ $yz(1-a^2)=x(bcx+cay+abz)$,

$\therefore$ $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{xyz}{bcx+cay+abz}$. 同樣作第一第三兩式之積, 及第一第二兩式之積, 則知 $\frac{y^2}{1-b^2}$, $\frac{z^2}{1-c^2}$ 之值, 皆與 $\frac{x^2}{1-a^2}$ 之值同.

189. 若 $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{z}=1$, 則 $z+\frac{1}{x}=1$ 及 $xyz+1=0$ 試證之.

圖 $x+\frac{1}{y}=1$, 而 $\frac{1}{y}=1-x$……………(1),

$y+\frac{1}{z}=1$, 而 $y=1-\frac{1}{z}$……………(2),

若將(1), (2), 兩邊各相乘, 則 $1=(1-x)\times\left(1-\frac{1}{z}\right)$, 即 $x+\frac{1}{z}=\frac{x}{z}$, 將此式之兩邊, 以 $\frac{z}{x}$ 乘之, 則 $z+\frac{1}{x}=1$.

又自 $x+\frac{1}{y}=1$ 而 $x=1-\frac{1}{y}$,

$\therefore$ $xy=y-1$……………(3), 由 $y+\frac{1}{z}=1$ 而 $y-1=-\frac{1}{z}$, 將此 $y-1$ 之值代入(3), 則 $xy=-\frac{1}{z}$, $\therefore$ $xyz=-1$, $\therefore$ $xyz+1=0$.

190. $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$, 則 $x+y+z=0$ 及 $ax+by+cz=0$, 試證之.

圖 $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k$, 則 $x=k(b-c)$, $y=k(c-a)$, $z=k(a-b)$, 故 $x+y+z=k\Sigma(b-c)=0$, 及 $ax+by+cz=k\Sigma a(b-c)=0$,

191. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, 則 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$, 試證之.

圖 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$,

即 $\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$,

故 $(a+b)\left\{\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right\}=0$,

故 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 若果爲眞, 則 $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$ 中必有一因數爲 0, 今設 $a+b=0$, 即 $a=-b$, 則

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}$

$=\frac{1}{c^{2n+1}}$, $\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$

$=\frac{1}{(-b)^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$,

故題式爲眞, 同樣 $b+c=0$, 或 $c+a=0$ 亦能證明題式爲眞.

192. $\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2$, 而 a, b, c 不互相等, 則 $abc=(b+c)(c+a)(a+b)$, 試證之, 但題之兩式, 又等於 $\frac{abc}{a+b}$, 而其三式等於 $bc+ca+ab$, 試研究之.

圖 $\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2$,

故 $\frac{abc}{b+c}-\frac{abc}{c+a}=a^2-b^2$.

或 $abc\times\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=a^2-b^2$.

因 $a\neq b$, 故 $\frac{abc}{(b+c)(c+a)}=a+b$.

故 $abc=(b+c)(c+a)(a+b)$. 次因此式爲對稱故 $a\neq c$, $b\neq c$,

則 $\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2=\frac{abc}{a+c}-c^2$,

而上式 $=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{b+c}-a^2$

$=(c+a)(a+b)-a^2=bc+ca+ab.$

193. 試變 $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}$ 爲 $A+\frac{B}{x-a}$ $\frac{C}{x-b}$ 之形, 但 A, B, C 爲常數.

解 $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}=A+\frac{B}{x-a}+\frac{C}{x+b}$, 去分母則 $x^2=A(x-a)(x-b)+B(x-b)+C(x-a)$, 此式對於 x 爲恆等式, 故將 $x=a$, 則得 $B=\frac{a^2}{a-b}$, $x=b$, 則得 $C=\frac{b^2}{b-a}$, 次比較 x^2 之係數, 而得 $A=1$, 故題式 $=$

$1+\frac{a^2}{(a-b)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-a)(x-b)}$.

194. A, B, C 爲無關於 x, y, z 之係數 $\frac{Ayz}{x}+\frac{Bzx}{y}+\frac{Cxy}{z}$ 之値, 若交換其 y 與 z, 而不變, 則 B=C, 試證之.

解 由問題交換其 y 與 z, 則得次之等式.

$\frac{Ayz}{x}+\frac{Bzx}{y}+\frac{Cxy}{z}=\frac{Azy}{x}+\frac{Byx}{z}+\frac{Cxz}{y}$,

$\therefore\ (B-C)\frac{zx}{y}-(B-C)\frac{xy}{z}=0.$

$\therefore\ (B-C)\left(\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}\right)=0,$

而 $=\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}$ 必不爲 0, 故 $B-C=0$,

$\therefore\ B=C.$

一元一次方程式

195. $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$ 試解之.

解 $x^2-3x+2=x^2-7x+12$, $\therefore\ -3x+7x=12-9$, $\therefore\ 4x=10$. $\therefore\ x=2\frac{1}{2}$.

196. 試解 $(x+1)(2x+1)=(x+3)(2x+3)-14$.

解 $2x^2+3x+1=2x^2+9x+9-14$, $6x=6$, $\therefore\ x=1$.

197. 試解 $0.15x+1.575-0.875x=0.0625x$.

解 移項則 $0.0625x+0.875x-0.15x=1.575$, 卽 $0.7875x=1.575$, 故 $x=2$.

別解 將方程式之兩邊, 以 10000 倍之, 又移項且單簡之, 則 $7875x=15750$, 故 $x=2$.

198. 試解 $1.2x-\frac{1}{5}(0.18x-0.05)=0.4x+8.9$.

解 兩邊以 5 乘之, 則 $6x-0.18x+0.05=2x+44.5$, $\therefore\ 6x-0.18x-2x=44.5-0.05$

$\therefore\ 3.82x=44.45$, $\therefore\ x=11\frac{243}{382}$.

199. 試解 $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$.

解 $x^3-3x^2+3x-1+x^3-6x^2+12x-8+x^3-9x^2+27x-27=3x^3-18x^2+33x-18$.

$\therefore\ 3x+12x+27x-33x=-18+1+8+27$

$\therefore\ 9x=18$, $\therefore\ x=2$.

注意 參看 207 題之別解.

200. $1-2\{x-3(1+x)\}=0$ 試解之.

解 $1-2\{x-3-3x\}=0$, $\therefore\ 1-2\{-2x-3\}=0$, $\therefore\ 1+4x+6=0$, $\therefore\ 4x=-7$.

$\therefore\ x=-1\frac{3}{4}$.

201. $x^2+b^2=(x-a)^2$ 試解之.

解 $x^2+b^2=x^2-2ax+a^2$, $\therefore\ x^2-x^2+2ax=a^2-b^2$ $\therefore\ 2ax=a^2-b^2$,

$\therefore x=\frac{a^2-b^2}{2a}$.

202. $(a-b)(x-a)=(a-c)(x-b)$ 試解之.

解 $ax-bx-a^2+ab=ax-cx-ab+bc$, $cx-bx=a^2-2ab+bc$, $(c-b)x=a^2-2ab+bc$. $\therefore x=\frac{a^2-2ab+c}{c-b}$.

203. $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$ 試解之.

解 $a^2x-a^3+b^2x-b^3=abx$,

$(a^2-ab+b^2)x=a^3+b^3$,

$\therefore x=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$.

204. $(a+x)(b+x)=x(x-c)$ 試解之.

解 $ab+ax+bx+x^2=x^2-cx$, $ax+bx+cx=-ab$, $(a+b+c)x=-ab$, $x=-\frac{ab}{a+b+c}$.

205. $(x-a)(x+b)=(x-a+b)^2$ 試解之.

解 $x^2-ax+bx-ab=x^2+2(-a+b)x+a^2-2ab+b^2$. $\therefore -ax+bx+2ax-2bx=a^2-ab+b^2$. $\therefore ax-bx=a^2-ab+b^2$, $(a-b)x=a^2-ab+b^2$, $\therefore x=\frac{a^2-ab+b}{a-b}$.

206. $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$ 試解之.

解 題試變形則 $(a+b)x=\frac{a^2c}{b}+ac=\frac{ac(a+b)}{b}$, 故 $x=\frac{ac}{b}$.

207. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$ 試解之.

解 $3x^3-3(a+b+c)x^2+3(a^2+b^2+c^2)x-a^3-b^3-c^3=3x^3-3(a+b+c)x^2+3(bc+ca+ab)x-3abc$, 故 $3(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)x=a^3+b^3+c^3-3abc$.

$\therefore 3x=a+b+c$, $\therefore x=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

別解 恆等式 $\Sigma X^3-3XYZ=\Sigma X(\Sigma X^2-\Sigma XY)$ 其 $X=x-a$, $Y=x-b$, $Z=x-c$, 則題之方程式得如次變形, $\Sigma(x-a)\{\Sigma(x-a)^2-\Sigma(x-b)(x-c)\}=0$, 故

$\Sigma(x-a)=0$ ……………………(1),

$\Sigma(x-a)^2-\Sigma(x-b)(x-c)=0$ ……………(2).

自 (1) 得 $x=\frac{1}{3}(a+a+c)$, 又自 (2) 得 $\Sigma a^2-\Sigma bc=0$, 僅有已知數之關係, 則不得 x 之值.

208. $\frac{x}{4}+\frac{x-5}{3}=10$ 試解之.

解 將分母之最小公倍數12乘各項, 而去分母, 則 $3x+4(x-5)=120$,

$\therefore 3x+4x-20=120$, $\therefore 3x+4x=120+20$,

$\therefore 7x=140$, $x=20$.

209. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=a+b$ 試解之.

解 去分母, 則 $bx+ax=ab(a+b)$,

$\therefore (a+b)x=ab(a+b)$, 故 $x=ab$.

210. $\frac{a(a-x)}{b}-\frac{b(b+x)}{a}=x$ 試解之.

解 去分母, 則 $a^2(a-x)-b^2(b+x)=abx$, $a^3-a^2x-b^3-b^2x=abx$, $(a^2+ab+b^2)x=a^3-b^3$, 故 $x=a-b$.

211. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0$ 試解之.

解 題式變形, 則

$\frac{5}{12}x-\frac{8a}{60}=0$, 故 $x=\frac{8a}{25}$.

212. $\frac{x-a}{a-b}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$ 試解之.

解 去分母, 則 $(a+b)(x-a)-(x+a)(a-b)$

$=2ax$, $\therefore (a+b)x-a(a+b)-(a-b)x-a(a-b)=2ax$. $2bx-2ax=2a^2$,

$\therefore\ x=\frac{2a^2}{2(b-a)}=\frac{a^2}{b-a}$.

213. $\frac{3x-5}{x-5}=0$ 試解之.

解 $3x-5=0$, 故 $3x=5$, $\therefore\ x=\frac{5}{3}$.

214. $\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}=0$, 試解之.

解 分母與分子以 $x-3$ 約之, 則 $\frac{x-4}{x-2}=0$, 故 $x-4=0$, 故 $x=4$.

215. $\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{b}$ 試解之.

解 [假定 $x\neq0$] 去分母, 則 $bx-ab=ab-ax$, $(a+b)x=2ab$, 故 $x=\frac{2ab}{a+b}$.

別別 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{x}$, 即 $\frac{a}{x}=\frac{a+b}{ab}$,

故 $x=\frac{2ab}{a+b}$.

注意 假定 $x\neq0$ 而去分母之後, 若有 $x=0$ 之根, 則其根概爲無緣根. 凡方程式之兩邊以含未知數之式乘之之時, 其式之 x, 若有爲 0 之值, 則概爲無緣根. 故分數方程式去分母解得之根, 非知其合於假定, 或代入原方程式之未知數而適合後, 不能斷定其爲根. 在本書則未言明者, 即爲合於假定也.

216. $\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3x-6}{x-1}$ 試解之.

解 [假定 $x\neq2$, $x\neq1$], 以 $(x-1)(x-2)$ 乘兩邊, 則 $(3x+1)(x-1)=(3x-6)(x-2)$, 故 $3x^2-2x-1=3x^2-12x+12$, $12x-2x=12+1$, 故 $10x=13$, 故 $x=\frac{13}{10}$.

別解 I. 自題之方程式, 而 $3+\frac{7}{x-2}=3-\frac{3}{x-1}$, 因而 $\frac{7}{x-2}=-\frac{3}{x-1}$, 故 $7x-7=-3x+6$, 即 $10x=13$.

別解 II. 自題之方程式, 而 $\frac{3x+1}{3x-6}=\frac{x-2}{x-1}$, $\therefore\ \frac{3x+1}{3x-6}-1=\frac{x-2}{x-1}-1$, 即 $\frac{7}{3x-6}=\frac{-1}{x-1}$, 或 $\frac{7}{3x-6}=\frac{7}{7-7x}$, $\therefore$ $3x-6=7-7x$, $\therefore\ 10x=13$.

注意 變化方程式使兩邊之分子相等, 與使分母相等, 而以分母之積乘方程式之兩邊同, 須知之.

217. $\frac{x+25}{2x+75}=\frac{x-5}{2x-15}$ 試解之.

解 [假定 $2x+75\neq0$, $2x-15\neq0$], 以 $(2x+75)(2x-15)$ 乘兩邊, 則 $2x^2+35x-375=2x^2+65x-375$, $\therefore\ -30x=0$, $\therefore\ x=0$.

218. $\frac{x-a}{b-x}=\frac{x-b}{a-x}$ 試解之.

解 [假定 $x\neq a$, $x\neq b$], 去分母, 則 $(x-a)(a-x)=(x-b)(b-x)$, 故 $ax-a^2-x^2+ax=bx-b^2-x^2+bx$, 故 $2(a-b)x=a^2-b^2$, $\therefore\ x=\frac{a+b}{2}$.

別解 自題之方程式, 而 $\frac{x-a}{b-x}+1=\frac{x-b}{a-x}+1$. 故 $\frac{b-a}{b-x}=\frac{a-b}{a-x}$, $\therefore\ x-b=a-x$, 由是 $x=\frac{a+b}{2}$.

219. $\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x+6}=1$, 試解之.

解 [假定 $x+2\neq0$, $x+6\neq0$], 兩邊以

$(x+2)(x+6)$ 乘之，則 $x(x+6)+4(x+2)=(x+2)(x+6)$，故 $x^2+6x+4x+8=x^2+2x+6x+12$，故 $2x=4$． $\therefore x=2$．

220. $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x-3}{3x+1}$ 試解之．

解 $\dfrac{2x+3}{x+1}-2=\dfrac{4x+5}{4x+4}-1+\dfrac{3x+3}{3x+1}-1$，

$\therefore\ \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{2}{3x+1}$，故於 $x+1\neq0$，$3x+1\neq0$ 假定之下，以 $4(x+1)(3x+1)$ 乘兩邊，則 $4(3x+1)=3x+1+8(x+1)$，$\therefore\ 12x+4=3x+1+8x+8$，$\therefore x=5$．

221. $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x-c}$，試解之．

解 自題之方程式，而

$\dfrac{ax-bx}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{a-b}{x-c}$，$\therefore\ \dfrac{x}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{1}{x-c}$，$\therefore\ (x-a)(x-b)=x(x-c)$，

$\therefore\ (a+b-c)x=ab$，$\therefore\ x=\dfrac{ab}{a+b-c}$．

222. $\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-7}{x-8}-\dfrac{x-8}{x-9}$ 試解之．

解 $\dfrac{(x-4)(x-6)-(x-5)^2}{(x-5)(x-6)}=\dfrac{(x-7)(x-9)-(x-8)^2}{(x-8)(x-9)}$，

即 $\dfrac{-1}{(x-5)(x-6)}=\dfrac{-1}{(x-8)(x-9)}$，

故 $(x-5)(x-6)=(x-8)(x-9)$，

故 $x^2-11x+30=x^2-17x+72$，

$\therefore\ 6x=42$，$\therefore\ x=7$．

別解 $1+\dfrac{1}{x-5}-\left(1+\dfrac{1}{x-6}\right)=1+\dfrac{1}{x-8}-\left(1+\dfrac{1}{x-9}\right)$，即 $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{x-8}-\dfrac{1}{x-9}$，即 $\dfrac{-1}{(x-5)(x-6)}=\dfrac{-1}{(x-8)(x-9)}$．

223. $\dfrac{3+x}{3-x}-\dfrac{2+x}{2-x}-\dfrac{1+x}{1-x}=1$，試解之．

解 $\dfrac{3+x}{3-x}-\dfrac{2+x}{2-x}=1+\dfrac{1+x}{1-x}$，$1+\dfrac{2x}{3-x}-\left(1+\dfrac{2x}{2-x}\right)=\dfrac{2}{1-x}$，即 $\dfrac{2x}{3-x}-\dfrac{2x}{2-x}=\dfrac{2}{1-x}$，即 $x\left(\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{2-x}\right)=\dfrac{1}{1-x}$，

故 $\dfrac{-x}{(3-x)(2-x)}=\dfrac{1}{1-x}$，今 [假定 $1-x\neq0$, $2-x\neq0$, $3-x\neq0$]，以 $(1-x)(2-x)(3-x)$ 乘兩邊，則 $x(x-1)=(3-x)(2+x)$，即 $x^2-x=6-5x+x^2$，故 $4x=6$，故 $x=\dfrac{3}{2}$．

224. $\dfrac{5x-8}{x-2}+\dfrac{6x-44}{x-7}-\dfrac{10x-8}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}$，試解之．

解 $\left(5+\dfrac{2}{x-2}\right)+\left(6+\dfrac{-2}{x-7}\right)-\left(10+\dfrac{2}{x-7}\right)=1+\dfrac{-2}{x-6}$，

即 $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x-7}-\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{2}{x-6}$，

即 $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-6}$，

故 $\dfrac{-5}{(x-2)(x-7)}=\dfrac{-5}{(x-1)(x-6)}$，

故 $(x-2)(x-7)=(x-1)(x-6)$，即 $x^2-9x+14=x^2-7x+6$，$\therefore\ -2x=-8$，故 $x=4$．

225. $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{5}{2x+6}-\dfrac{5}{4x+4}$ 試解之．

解 自題之方程式，而 $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{5}{2x+6}$

$=\frac{2}{x+1}-\frac{5}{4x+4}$，即 $\frac{3}{2(x+3)}=\frac{3}{4(x+1)}$，故 $2(x+3)=4(x+1)$，

故 $2x=2$，∴ $x=1$.

別解 分母之最小公倍數，為 $4(x+1)\times(x+3)$，因而[假定 $x+1\neq0$, $x+3\neq0$]，去分母，則 $16(x+1)-8(x+3)=10(x+1)-5(x+3)$，∴ $16x+16-8x-24=10x+10-5x-15$，∴ $3x=3$，故 $x=1$.

226. $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$，試解之。

解 題之方程式，可如次書之，即

$\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=0$，或 $\frac{3x+1}{x+1}=0$，[限制 $x\neq-1$]

去分母，則 $3x+1=0$，故 $x=-\frac{1}{3}$.

227. $\frac{x^3+7x^2+24x+30}{x^2+5x+13}=\frac{2x^3+11x^2+36x+45}{2x^2+7x+20}$ 試解之。

解 題之方程式變形，則

$x+2+\frac{x+4}{x^2+5x+13}=x+2+\frac{2x+5}{2x^2+7x+20}$，或 $(x+4)(2x^2+7x+20)-(2x+5)(x^2+5x+13)=0$. 此方程式簡單之，則 $-3x+15=0$，故 $x=5$.

別解 如前解而 $\frac{x+4}{x^2+5x+13}=\frac{2x+5}{2x^2+7x+20}$，∴ $\frac{x^2+5x+13}{x+4}=\frac{2x^2+7x+20}{2x+5}$，即 $x+1+\frac{9}{x+4}=x+1+\frac{15}{2x+4}$，故 $9(2x+5)=15(x+4)$，∴ $x=5$.

228. $\frac{x+4a+b}{x+a+b}+\frac{4x+a+2b}{x+a-b}=5$，試解之。

解 題之方程式，如下書之，則

$\frac{x+4a+b}{x+a+b}-1+\frac{4x+a+2b}{x+a-b}-4=0$，或 $\frac{3a}{x+a+b}-\frac{3(a-2b)}{x+a-b}=0$，即 $a(x+a-b)-(a-2b)(x+a+b)=0$，$2bx=-2b^2$，故 $x=-b$.

229. $\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}$ 試解之。

解 $\frac{a+b+2c}{x+a+b}=\frac{a+c}{x+a+b}+\frac{b+c}{x+a+b}$ 故得如次變形，而 $\frac{a+c}{x+2b}-\frac{a+b}{x+a+b}=\frac{b+c}{x+a+b}-\frac{b+c}{x+2a}$，或 $\frac{(a+c)(a-b)}{(x+a+b)(x+2b)}=\frac{(b+c)(a-b)}{(x+a+b)(x+2a)}$. 就題之方程式觀之，則 $x+a+b\neq0$，故自上之方程式，而得與之同值之方程式 $\frac{a+c}{x+2b}=\frac{b+c}{x+2a}$，但在題之方程式 $x+2a\neq0$，$x+2b\neq0$，故上之方程式之兩邊，以 $(x+2a)(x+2b)$ 乘之，次移項而得與之同值方程式如次，$(a-b)x=-2(a^2-b^2+ac-bc)=-2(a-b)(a+b+c)$，故 $x=-2(a+b+c)$.

230. $\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n$ 試解之。

解 題之方程式變形，則為

$\frac{m(x+a-x-b)}{x+b}-\frac{n(x+a-x-b)}{x+a}=0$，或 $\frac{m(a-b)}{x+b}-\frac{n(a-b)}{x+a}=0$，即 $\frac{m}{x+b}-\frac{n}{x+a}=0$，[$x+b\neq0$, $x+a\neq0$] 去分母，則 $m(x+a)-n(x+b)=0$，$(m-n)x=nb-ma$，故 $x=\frac{nb-ma}{m-n}$.

231. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}$

$=3cx+\frac{bx}{a}$, 試解之.

解 題式變形,則

$$\frac{3ac(a+b)^2+b(a+b)^2-(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}x$$
$$=\frac{3abc(a+b)^2+a^2b^2}{(a+b)^3},$$

即 $\frac{3ac(a+b)^2+a^2b}{a(a+b)^2}x$

$=\frac{b\{3ac(a+b)^2+a^2b\}}{(a+c)^3}$, ∴ $x=\frac{ab}{a+b}$.

232. $\frac{x-a^2+2bc}{b+c}-\frac{x-b^2+2ca}{a+c}+\frac{x-c^2-2ab}{a-b}=0$, 試解之.

解 $a^2+b^2+c^2=M$, 將題式之方程式變形,則 $\frac{x-M+(b+c)^2}{b+c}-\frac{x-M+(a+c)^2}{a+c}+\frac{x-M+(a-b)^2}{a-b}=0$, 或 $\frac{x-M}{b+c}-\frac{x-M}{c+a}+\frac{x-M}{a-b}=0$, 或 $(x-M)\left\{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a-b}-\frac{1}{c+a}\right\}=0$, 故 $x=M=a^2+b^2+c^2$.

233. $\frac{b+c-a}{x^2-(b+c)x+bc}+\frac{c+a-b}{x^2-(c+a)x+ca}+\frac{a+b-c}{x^2-(a+b)x+ab}=0$, 試解之.

解 題之方程式變形,則

$$\frac{b+c-a}{(x-b)(x-c)}+\frac{c+a-b}{(x-c)(x-a)}+\frac{a+b-c}{(x-a)(x-b)}$$

$=0$, [$x-a\neq0$, $x-b\neq0$, $x-c\neq0$] 將 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 乘之,則 $(b+c-a)(x-a)+(c+a-b)(x-b)+(a+b-c)(x-c)=0$, 或 $(a+b+c)x=a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)$ $=-(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)$.

故 $x=-\frac{a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab}{a+b+c}$.

234. $(x-9)(x-7)(x-5)(x-1)=(x-2)(x-4)\times(x-6)(x-10)$, 試解之.

解 $(x-9)(x-1)\cdot(x-7)(x-5)=(x-4)(x-6)\cdot(x-2)(x-10)$, 即 $(x^2-10x+9)(x^2-12x+35)=(x^2-10x+24)(x^2-12x+20)$,

即 $\{(x^2-10x)+9\}\{(x^2-12x)+35\}$ $=\{(x^2-10x)+24\}\{(x^2-12x)+20\}$,

即 $(x^2-10x)(x^2-12x)+9(x^2-12x)+35(x^2-10x)+315=(x^2-10x)(x^2-12x)+24(x^2-12x)+20(x^2-10x)+480$, 即 $15(x^2-10x)-15(x^2-12x)=165$, 即 $(x^2-10x)-(x^2-12x)=11$, 即 $2x=11$, ∴ $x=5\frac{1}{2}$.

別解 $x=4$, $x=6$, $x=7$, $x=5$ 明非題之方程式之根, 故以 $(x-4)(x-6)(x-7)(x-5)$ 除之,則

$\frac{(x-9)(x-1)}{(x-4)(x-6)}=\frac{(x-2)(x-10)}{(x-7)(x-5)}$, 即

$\frac{x^2-10x+9}{x^2-10x+24}-1=\frac{x^2-12x+20}{x^2-12x+35}-1$, 即

$\frac{-15}{x^2-10x+24}=\frac{-15}{x^2-12x+35}$. ∴ $x^2-10x+24=x^2-12x+35$ 即 $2x=11$,

∴ $x=5\frac{1}{2}$.

235. $\left(\frac{x-a}{x+b}\right)^3=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}$ 試解之.

解 題式變形,則 $\frac{(x-a)^3+(x+b)^3}{(x-a)^3-(x+b)^3}=\frac{2x-a+b}{-3(a+b)}$. 但 $(x-a)+(x+b)=2x-a+b$, $(x-a)-(x+b)=-(a+b)$, 故上方程式分解爲二個,則 $\frac{2x-a+b}{a+b}=0$……………(1);

$\frac{(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}=\frac{1}{3}$……(2).

自(1)而 $2x=a-b$, 故 $x=\dfrac{a-b}{2}$, 自 (2) 而 $\dfrac{(x-a)^2+(x+b)^2}{(x-a)(x+b)}=2$, 或 $(x-a-x-b)^2=0$, 即 $a+b=0$, 故自(2)僅得已知數之關係,而不得根.

236. 若 a, b, c 爲有限之實數,而三個方程式 $ax+b-c=0$, $bx+c-a=0$, $cx+a-b=0$, 悉爲一致,則 $a=b=c$ 試證之.

【解】 將三個方程式相加,則 $ax+bx+cx=0$, $\therefore (a+b+c)x=0$, 因 a, b, c, 爲有限實數,必非 $a+b+c=0$, $\therefore x=0$. 因而自題之方程式而 $b-c=0$, $c-a=0$, $a-b=0$, $\therefore a=b=c$.

237. 二方程式 $hx+a=bx+h$, $ax+h=hx+b$ 爲一致,試決定 h,若 $a=b$ 如何.

【解】 將已知方程式,書爲 $(b-h)x=a-h$, 若 $b\neq h$ 則 $x=\dfrac{a-h}{b-h}$, 書爲 $(a-h)x=b-h$, 若 $a\neq h$ 則 $x=\dfrac{b-h}{a-h}$, 因欲使二個方程式爲一致, 則 $\dfrac{a-h}{b-h}=\dfrac{b-h}{a-h}$, 即 $(a-h)^2=(b-h)^2$, 即 $2(a-b)h=a^2-b^2$, 若 $a\neq b$ 則 $h=\dfrac{1}{2}(a+b)$ 若 $a=b$, 則 h 任取如何之值,二方程式恆爲一致.

【注意】 $b=h$ 時,若 $a=h$,則爲不定,$a\neq h$,則爲不能,又 $a=h$ 時,若 $b=h$ 則爲不定,$b\neq h$,則爲不能.

聯立一次方程式

238. $7x+2y=47$……(1), $5x-3y=7$……(2), 試解之.

【解】 (1)×3……$21x+6y=141$.

(2)×2……$10x-6y=14$.

相加,則 $31x=155$, 故 $x=5$, 代入(1)式, 而 $35+2y=47$, 故 $2y=12$, 故 $y=6$.

239. $5x+y=13$……(1), $4x+3y=17$……(2), 試解之.

【解】 自(1)而 $y=13-5x$, 代入(2), 則 $4x+3(13-5x)=17$, 故 $4x+39-15x=17$, $-11x=-22$, 故 $x=2$, 故 $y=13-10=3$.

240. $x+y=2a$, $x-y=2b$, 試解之.

【解】 相加,則 $2x=2a+2b$, 故 $x=a+b$, 故自第一式,而得 $y=2a-(a+b)=a-b$.

241. $\dfrac{1}{3}(4x+3y)=\dfrac{7x-5y}{4}+\dfrac{8x+1}{12}$, $16x-5y=27$, 試解之.

【解】 去第一式之分母,將同類項合一,則 $13x-27y=-1$, 以之減第二式,而 $3x+22y=28$, 以5乘之, 而 $15x+110y=140$, 自此減第二式,而 $115y-x=113$, 故 $x=115y-113$, 代入第二式, 而 $16(115y-113)-5y=27$, 故 $y=1$, 而 $x=2$.

242. $2.4x+0.32y-\dfrac{0.36x-0.05}{0.5}=0.8x+\dfrac{2.6+0.005y}{0.25}$……(1), $\dfrac{0.04y+0.1}{0.3}=\dfrac{0.07x-0.1}{0.6}$……(2), 試解之.

【解】 (1)式以2乘第一分數之分母分子,以4乘第二分數之分母分子,則乘 $2.4x+0.32y-0.72x+0.1=0.8x+10.4+0.02y$, 即 $0.88x+0.3y=10.3$…(3). 自(2)而 $0.08y+0.2=0.07x-0.1$, $0.07x-0.08y=0.3$, 即 $7x-8y=30$…(4). $\therefore$ 自(3)而

$704x+240y=8240$，自(4)而$210x-240y=900$，$\therefore 914x=9140$，$\therefore x=10$．將此代入(3)或(4)得$y=5$．

243. $\left.\begin{array}{l}axy=c(bx+ay)\\ bxy=c(ax-by)\end{array}\right\}$試解之．

解　此二方程式以$x=y=0$適合明矣，今求其他根，則將此二方程式以cxy除之，則$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{y}+\dfrac{a}{x}$，$\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{y}-\dfrac{b}{x}$，其前式以$a$乘之，後式以$b$乘之，而行減法，則$\dfrac{a^2-b^2}{c}=\dfrac{a^2+b^2}{x}$，

$\therefore x=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot c$，同樣$y=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}\cdot c$．

244. $ax+by=bx+ay=c$，試解之．

解　$ax+by=bx+ay$．故$(a-b)x=(a-b)y$，故$x=y$代入題式，則$(a+b)x=c$，

故$x=\dfrac{c}{a+b}=y$．

245. $(2a+b)x-(2a-b)y=8ab$，$(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2$，試解之．

解　取二方程式之和及差，而簡單之，則$2ax+by=4a^2+4ab-b^2$…………(1)，

$bx-2ay=-4a^2+4ab+b^2$……………(2)，

自(1)，(2)，$x=\{2a(4a^2+4ab-b^2)-b(4a^2-4ab-b^2)\}\div(4a^2+b^2)=2a+b$．

同樣而知$y=2a-b$．

246. $(a+h)x+(b-h)y=c$，$(b+k)x+(a-k)y=c$，試解之．

解　$(a+h)x+(b-h)y=(b+k)x+(a-k)y$，

故$(a+h)x-(b+k)x=(a-k)y-(b-h)y$，

故$(a-b+h-k)x=(a-b+h-k)y$，

故$x=y$代入第一式而$(a+h)x+(b-h)x=c$，故$x=y=\dfrac{c}{a+b}$．

247. $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a$………(1)，$\dfrac{x-y}{2ab}=\dfrac{x+y}{a^2+b^2}$…………(2)，試解之．

解　將(2)改書之，則$\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，

故$\dfrac{x}{y}=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$，故$x=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}y$……(3)，

將(3)代入(1)，而$\dfrac{(a+b)y}{(a-b)^2}+\dfrac{y}{a-b}=2a$，

故$2ay=2a(a-b)^2$，故$y=(a-b)^2$，代入於(3)，而$x=(a+b)^2$．

248. $3x+2y+z=11$……(1)，$x+3y+2z=11$……(2)，$2x+y+3z=14$……(3)．試解之．

解　自(1)，(2)消去z，則$6x+4y+2z-(x+3y+2z)=22-11$，則$5x+y=11$，又自(1)，(3)消去z，則$7x+5y=19$，自此二式消去y，則$18x=36$，故$x=2$，而$y=1$，$z=3$．

249. $x+y=24$，$y+z=14$，$z+x=18$，試解之．

解 I．三式相加，則$2(x+y+z)=56$，故$x+y+z=28$，自此式次第減各式，而得$z=4$，$x=14$，$y=10$．

解 II．三式之中二式相加，再減他一式，因而得$x=14$，$y=10$，$z=4$．

250. 試自$ax+by=1$，$by+cz=1$，$cz+ax=1$，求x, y, z之值．

解　三式加則$2(ax+by+cz)=3$，故$ax+by+cz=\dfrac{3}{2}$，自此式減各式而得$cz=\dfrac{1}{2}$，故$z=\dfrac{1}{2c}$同樣$x=\dfrac{1}{2a}$，$y=\dfrac{1}{2b}$．

解 可與前題之解II同樣解之.

251. $cy+bz=bc,\ az+cx=ca,\ bx+ay=ab,$ 試解之.

解 自第一第二兩式消去z, 則$bx-ay=0$, 與第三式組合, 而得$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, 故$z=\frac{c}{2}$.

252. $x+y+z=0\cdots\cdots(1),\ (a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0\cdots\cdots\cdots(2),\ abx+acy+bcz=1\cdots\cdots\cdots(3)$ 試解之.

解 自(1)而$(b+c)x+(b+c)y+(b+c)z=0$,

自(2)而$(a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0$,

$\therefore\ (a-c)x+(a-b)y=0\cdots\cdots\cdots(4)$, 又自(1)而$bcx+bcy+bcz=0$, 自(3)而$abx+acy+bcz=1$, $\therefore\ (ab-bc)x+(ab-bc)y=1$, 即$b(a-c)x+c(a-b)y=1$, 自(4)而$c(a-c)x+c(a-b)y=0$, $\therefore\ (a-c)(b-c)x=1$, $\therefore$ $x=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$. 而因$y=\frac{-1}{(a-b)(b-c)}$, $z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$.

253. $xz+xy-yz=5xyz,\ xy+yz-xz=3xyz,\ yz+zx-xy=xyz$, 試解之.

解 $x=y=z=0$合於所設方程式明矣. 次假設$x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$, 以xyz除各式, 則$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=5$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1$, 將此三式相加, 則$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$, 自此式次第減各項, 而得$\frac{2}{x}=4$, 故$x=\frac{1}{2}$, $\frac{2}{y}=6$, 故$y=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{z}=8$, 故$z=\frac{1}{4}$.

254. $cy+bz=a\cdots\cdots(1),\ az+cx=b\cdots\cdots(2),\ bx+ay=c\cdots\cdots\cdots(3)$, 試解之.

解 以b乘(2)以c乘(3)之和, 而減以a乘(1), 則$2bcx=b^2+c^2-a^2$, 故$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 同樣作$(3)\times c+(1)\times a-(2)\times b$, 則$y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, 而自$(1)\times a+(2)\times b-(3)\times c$, 得$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

255. $\left.\begin{array}{l}x-ay+a^2z=a^3\\x-by+b^2z=b^3\\x-cy+c^2z=c^3\end{array}\right\}$ 試解之.

解 於方程式$X^3-zX^2+yX-x=0$之X, 次第以a, b, c, 代之, 則得題之方程式, 故a, b, c為上方程式之根, 而以a, b, c, 為根之方程式, 為$(X-a)(X-b)(X-c)=0$, 或$X^3-\Sigma a.X^2+\Sigma bc.X-abc=0$, 此方程式與上方程式比較, 而得$z=\Sigma a=a+b+c$, $y=\Sigma bc=bc+ca+ab$, $x=abc$.

256. $yz=a(y+z),\ zx=b(z+x),\ xy=c(x+y)$ 試解之.

解 $x=y=z=0$適當於題式明矣. 次假定$x\neq0,\ y\neq0\ z\neq0$, 將題式各以ayz, bzx, cxy除之, 則

$\frac{1}{a}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, 相加, 以2除之, 而$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{bc+ca+ab}{2abc}$, 自此減$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$, 而$\frac{1}{x}=\frac{-bc+ca+ab}{2abc}$, 故$x=\frac{2abc}{-bc+ca+ab}$, 同樣$y=\frac{2abc}{bc-ca+ab}$, $z=\frac{2abc}{bc+ca-ab}$.

257. $\frac{2x}{a}+\frac{3y}{b}-\frac{4z}{c}=1$…………(1), $\frac{4x}{a}+\frac{2y}{b}-\frac{3z}{c}=3$……(2), $\frac{3x}{a}+\frac{4y}{b}-\frac{2z}{c}=5$……(3), 試解之.

解　(1), (2), (3), 相加以9除之, 則

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=1$………………………………(4).

(3)−(2) 得 $-\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}+\frac{z}{c}=2$…………(5).

(2)−(1) 得 $\frac{2x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$……………(6).

(4)+(5) 得 $\frac{3y}{b}=3$, 故 $y=b$.

(4)+(6) 得 $\frac{3x}{a}=3$, 故 $x=a$.

將 x, y 之值代入 (4), 而得 $z=c$.

258. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8$……(1), $\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13$……(2), 試解之.

解　因此二式爲 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ 之聯立一次方程式, 而 (1)×3……$\frac{9}{x}+\frac{12}{y}=24$,

(2)×2……$\frac{10}{x}+\frac{12}{y}=26$,

相減, 而 $\frac{1}{x}=2$, 故 $x=\frac{1}{2}$, 代入(1), 而 $6+\frac{4}{y}=8$, 故 $\frac{4}{y}=2$, 故 $y=2$.

259. $4x+3y=3xy$……………(1),

$2x-6y=-xy$……………(2), 試解之.

解　$x=y=0$ 合於所設方程式明矣, 假定 $x\neq0$, $y\neq0$, 以 xy 除各式之各項, 則 $\frac{4}{y}+\frac{3}{x}=3$, $\frac{2}{y}-\frac{6}{x}=-1$, 自此卽可如前題求之, 得 $x=3$, $y=2$.

260. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2$………(1), $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$………(2), $\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=2$………(3), 試解之.

解　將 (1),(2),(3) 相加, 而以2除之, 則 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=3$………(4), 故自 (4) 次第減 (1),(2),(3) 而 $\frac{c}{z}=1$, $\frac{a}{x}=1$, $\frac{b}{y}=1$, 故 $z=c$, $x=a$, $y=b$.

注意　將三式中二式相加, 再減他式亦得解之.

261. $\frac{2a}{x}-\frac{b}{y}=1$, $\frac{2b}{y}-\frac{a}{x}=1$ 試解之.

解　將第一方程式2倍之, 加於第一方程式, 則 $\frac{3a}{x}=3$, 故 $x=a$, 代入第一式, 而 $\frac{b}{y}=2-1=1$, 故 $y=b$.

262. $\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+y}=\frac{4}{3}$………(1), $\frac{2}{2-x}+\frac{3}{1+y}=3$………(2), 試解之.

解　此乃以 $\frac{1}{2-x}$, $\frac{1}{1+y}$, 爲未知數之聯立方程式, 故以3乘( )而減(2), 則 $\frac{3-2}{2-x}=4-3$, 故 $x=1$, 而 $y=2$.

263. $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{b}{a}$, $\frac{xy}{ax+by}=\frac{a}{b}$, 試解之.

解　假定 $x\neq0$, $y\neq0$, 而以 xy 除各式之分母子, 則 $\frac{1}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}}=\frac{1}{\frac{a}{b}}$, $\frac{1}{\frac{a}{y}+\frac{b}{x}}=\frac{1}{\frac{b}{a}}$,

故 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a}{b}$, $\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=\frac{b}{a}$, 又自此兩式, 得 $\frac{a^2-b^2}{x}=\frac{a^3-b^3}{ab}$,

故 $x=\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$. 同樣 $y=-(a+b)$.

264. $\frac{9a^2-13ab+4b^2}{36abxy}=\frac{1}{4by}+\frac{1}{9ax}$, $ax-by=a^2-b^2$, 試解之.

解　以 $36abxy$ 乘第一式, 而 $9ax+4by=$

$9a^2-13ab+4b^2$，加之於第二式之4倍，而 $13ax=13a^2-13ab=13a(a-b)$，故 $x=a-b$，$y=\dfrac{a^2-b^2-a(a-b)}{-b}=-(a-b)$.

265. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{9}{z}=0$………(1)，$\dfrac{6}{x}+\dfrac{10}{y}-\dfrac{3}{z}=4$………(2)，$\dfrac{8}{x}-\dfrac{15}{y}+\dfrac{12}{z}=5$………(3)，試解之.

解 自(1)+(2)+(3)，得 $\dfrac{18}{x}=9$，故 $x=2$.

自(2)×3−(1)得 $\dfrac{14}{x}+\dfrac{25}{y}=12$，將 x 之值代入，得 $\dfrac{25}{y}=5$，故 $y=5$，將 x，y 之值代入(1)，而得 $\dfrac{9}{z}=2+1=3$，故 $z=3$.

266. 有四數，其相異每三數之和，爲20，22，24，27問各數如何.

解 將四數爲 y，z，u，v，則得次式

$y+z+u=20$………………………(1).

$y+z+v=22$………………………(2).

$z+u+v=24$………………………(3).

$u+v+y=27$………………………(4).

相加以3除之，則 $y+z+u+v=31$………(5). 自(5)次第減(1)，(2)，(3)，(4)而得 $v=11$，$u=9$，$y=7$，$z=4$，故四數爲11，9，7，4.

注意 將四數之和爲 s，則四數爲 $s-20$，$s-22$，$s-24$，$s-27$，故 $(s-20)+(s-22)+(s-24)+(s-27)=s$，解之得 $s=31$.

267. $\left.\begin{aligned} y+z+t-x&=a\\ z+t+x-y&=b\\ t+x+y-z&=c\\ x+y+z-t&=d\end{aligned}\right\}$ 試解之.

解 $x+y+z+t=s$，則題式爲 $s-2x=a$，$s-2y=b$，$s-2z=c$，$s-2t=d$，相加，得 $4s-2s=a+b+c+d$，故 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$，而 $x=\dfrac{1}{2}(s-a)=\dfrac{1}{4}(-a+b+c+d)$.

同樣 $y=\dfrac{1}{2}(s-b)=\dfrac{1}{4}(a-b+c+d)$，$z=\dfrac{1}{2}(s-c)=\dfrac{1}{4}(a+b-c+d)$，$t=\dfrac{1}{2}(s-d)=\dfrac{1}{4}(a+b+c-d)$.

268. $x+3(y+z+t)=26$………(1),

$2y+3(x+z+t)=29$………(2),

$z+3(x+y+t)=24$………(3),

$t+3(x+y+z)=22$………(4). 試解之.

解 $x+y+z+t=s$，則自題式，(1)，而 $2x=26$，故 $\dfrac{3}{2}s-x=13$………………(5).

自(2)而 $3s-y=29$………………………(6).

自(3)而 $3s-2z=24$，故 $\dfrac{3}{2}s-z=12$…(7).

自(4)而 $3s-2t=22$ 故 $\dfrac{3}{2}s-t=11$…(8).

取(5)，(6)，(7)，(8)之和，則 $7\dfrac{1}{2}s-s=65$，故 $s=10$，代入(5)，(6)，(7)，(8)，而得 $x=2$，$y=1$，$z=3$，$t=4$.

269. $ax+by+cz=a+b-c$，$a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$，試解之.

解 $(a+b+c)(ax+by+cz)=(a+b+c)^2=a^2x+b^2y+c^2z$ 故 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$………………………(1),

$\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{b}y+\dfrac{1}{c}z=0$………………………(2),

故 $\dfrac{x}{\dfrac{b(c+a)}{c}-\dfrac{c(a+b)}{b}}=\dfrac{y}{\dfrac{c(a+b)}{a}-\dfrac{a(b+c)}{c}}$

$=\dfrac{z}{\dfrac{a(b+c)}{b}-\dfrac{b(c+a)}{a}}$, 故 $\dfrac{bcx}{(b-c)(\Sigma bc)}=\dfrac{cay}{(c-a)(\Sigma bc)}=\dfrac{abz}{(a-b)(\Sigma bc)}=k$. 故

$x=\dfrac{(b-c)(\Sigma bc)}{bc}k$, $\quad y=\dfrac{(c-a)(\Sigma bc)}{ca}k$,

$z=\dfrac{(a-b)(\Sigma bc)}{ab}k$, 故 $\dfrac{a(b-c)(\Sigma bc)}{bc}k+\dfrac{b(c-a)(\Sigma bc)}{ca}k+\dfrac{c(a-b)(\Sigma bc)}{ab}k=(a+b+c)$. 故 $(\Sigma bc)\left\{\dfrac{a(b-c)}{bc}+\dfrac{b(c-a)}{ca}+\dfrac{c(a-b)}{ab}\right\}k=a+b+c$. $(\Sigma bc)\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}k=abc(a+b+c)$,

但 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$,

故 $\quad k=\dfrac{abc(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)(\Sigma bc)}$.

故 $\quad x=\dfrac{a(a+b+c)}{(a-b)(a-c)}$.

270. $4x-6y+1=0$, $3x+4y-1=0$, $px-5y+2=0$, 若有一共通之答, 則 p 之值當爲如何.

解 初二方程式共通之答, 爲 $x=\dfrac{1}{17}$, $y=\dfrac{7}{34}$, 故此值不能不適當於第三方程式, 故 $\dfrac{1}{17}p-\dfrac{35}{34}+2=0$, 故 $p=-\dfrac{33}{2}$.

271. 問 λ 之値爲如何, 則方程式 $(3+\lambda)\times x+(2+\lambda)y+4=0$, 及 $(5-\lambda)x+(4-\lambda)y+6=0$ 之答無限且不定.

解 將二方程式依互乘法解之, 則

$\{(3+\lambda)(4-\lambda)-(2+\lambda)(5-\lambda)\}x=6(2+\lambda)-4(4-\lambda)$, $\{(3+\lambda)(4-\lambda)-(2+\lambda)(5-\lambda)\}y=4(5-\lambda)-6(3+\lambda)$, 即 $2(1-\lambda)x=2(5\lambda-2)$, $2(1-\lambda)y=2(1-5\lambda)$. 若欲合於所求之要件, 則須 $1-\lambda=0$, 而 $5\lambda-2\neq 0$, $1-5\lambda\neq 0$, 求得 λ 之值, 故 $\lambda=1$ 則合於此要件.

272. $\dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=\dfrac{x}{a+2\lambda}+\dfrac{y}{b+2\lambda}=\dfrac{x}{a+3\lambda}+\dfrac{y}{b+3\lambda}=1$, 若爲一致, 試求 λ 之值.

解 $\dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=1$ ....(1),

$\dfrac{x}{a+2\lambda}+\dfrac{y}{b+2\lambda}=1$ ....(2), $\quad \dfrac{x}{a+3\lambda}+\dfrac{y}{b+3\lambda}=1$ ....(3). 自 (1) 減 (2) 則

$\dfrac{x}{a+\lambda}-\dfrac{x}{a+2\lambda}=\dfrac{y}{b+2\lambda}-\dfrac{y}{b+\lambda}$,

即 $\dfrac{\lambda x}{(a+\lambda)(a+2\lambda)}=\dfrac{-\lambda y}{(b+\lambda)(b+2\lambda)}$,

故 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-(a+\lambda)(a+2\lambda)}{(b+\lambda)(b+2\lambda)}$ ....(4),

自 (1) 減 (3) 與前同樣運算, 則

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{(a+\lambda)(a+3\lambda)}{(b+\lambda)(b+3\lambda)}$ ....(5),

而所設方程式若爲一致, 則

$\dfrac{(a+\lambda)(a+2\lambda)}{(b+\lambda)(b+2\lambda)}=\dfrac{(a+\lambda)(a+3\lambda)}{(b+\lambda)(b+3\lambda)}$,

即 $(a+2\lambda)(b+3\lambda)=(a+3\lambda)(b+3\lambda)$,

即 $a\lambda=b\lambda$. 即 $(a-b)\lambda=0$. 即 $a=b$, 或 $\lambda=0$, 但 $\lambda\neq 0$, 而 $a=b$, 則爲不能, 故必 $\lambda=0$, 又 $a=b$, $\lambda=0$, 則爲不定.

273. $ax+by+c=0$, $a^2x+b^2y+c^2=0$, $a^3x+b^3y+c^3=0$, 試求一致之要件, 且共通之解答如何.

解 $a \neq 0, b \neq 0$ 將最初方程式,依互乘法解之,則

$(ab^2-a^2b)x=bc^2-b^2c$, 故 $x=\dfrac{c(b-c)}{a(a-b)}$.

$(ab^2-a^2b)y=ca^2-c^2a$, 故 $y=\dfrac{c(c-a)}{b(a-b)}$.

此卽初二方程式共通之解答,若適當於第三方程式,則必

$\dfrac{a^3c(b-c)}{a(a-b)}+\dfrac{b^3c(c-a)}{b(a-b)}+c^3=0$, 卽

$c\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=0$,

卽 $c(b-c)(c-a)(a-b)=0$.

此卽爲一致之要件也. 又若 $c=0$, 則其解答爲 $x=0$, $y=0$, 若 $b=c$, 則其解答爲 $x=0$, $y=-1$, 若 $c=a$, 則其解答爲 $x=-1$, $y=0$, 有限且一定之普通解答,如是而已.

274. x, y, z, 適合於 $(a-l)^2x+(a-m)^2y+(a-n)^2z=(a-p)^2$, $(b-l)^2x+(b-m)^2y+(b-n)^2z=(b-p)^2$, $(c-l)^2x+(c-m)^2y+(c-n)^2z=(c-p)^2$, 之三個方程式,則無論 d 爲如何之數,恆能 $(d-l)^2x+(d-m)^2y+(d+n)^2z=(d-p)^2$ 試證之.

解 $(d+l)^2x+(d-m)^2y+(d-n)^2z=(d-p)^2$ 爲 d 之二次式,其式中之 d, 順次以 a, b, c 代入,則得題之三個方程式,故 x, y, z 適合於題之三個方程式時,則 $(d-l)^2x+(d-m)^2y+(d-n)^2z=(d-p)^2$ 爲恆等式,故 d 之值無論如何恆眞.

275. $7^{\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)}=2401$, $6^{\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)}=1296$, 試解之.

解 $2401=7^4$, $1296=6^4$, 故 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4$, $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=4$. 自此第二方程式之2倍,減第一方程式,則 $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)y=4$, 故 $y=6$, 將 y 之值代入上之一方程式,得 $x=4$.

276. 試自 $2^{y-1}=16^{x-1}$, $3^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{z}}$, $\sqrt[x]{2^{y-3}}=\sqrt[2x]{8^{z-2}}$ 求 x, y, z 之值.

解 第一式爲 $2^{y-1}=(2^4)^{x-1}$, $\therefore 2^{y-1}=2^{4x-4}$, $\therefore y-1=4x-4$, $\therefore 4x-y=3 \cdots\cdots(1)$ 又第二式爲 $3^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{z}}$, $\therefore 3^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{z}}$, $\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{z}$, $\therefore 2x-z=0 \cdots\cdots(2)$. 又第三式爲 $2^{\frac{y-3}{x}}=8^{\frac{z-2}{2x}}=2^{3\times\frac{z-2}{2x}}$, $\therefore \dfrac{y-3}{x}=\dfrac{3z-6}{2x}$, $\therefore 2y-6=3z-6$. $\therefore 2y-3z=0 \cdots\cdots(3)$, 因而解 (1), (2), (3) 之聯立方程式,則得 $x=3$, $y=9$, $z=6$.

一次方程式應用

277. 有人雇工,約定每日給錢48文,若惰一日,則須減少18文,但知惰日爲勤日之半,共給錢936文,問勤之數日數如何.

解 將勤日數爲 x, 則 $\dfrac{1}{2}x$ 爲惰日數,故 $48x-18\times\dfrac{x}{2}=936$, $\therefore 48x-9x=936$, $\therefore 39x=936$, $\therefore x=24$, 卽 24日.

278. 有人買地若干方步,每方步價金1圓,忽地價騰貴3倍,此人留地750方

步,其餘均賣出,獲利金 150圓,問原買入總方步數若干.

圖 將總方步數爲 x,則賣出方數步爲 $x-750$,而賣出一方步之利益爲 $3-1$,卽 2 圓,故 $(x-750)\times 2=150$,

$\therefore x-750=75$, $x=825$, 卽 825 方步.

279. 有人自甲地至乙地,往路每時 3 里,歸路每時 2 里,往返共 20 時間,問兩地之距離如何.

圖 將里數爲 x,則往路及歸路所費時間爲 $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{2}x$,故 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x=20$,

$\therefore 2x+3x=120$, $5x=120$, $\therefore x=24$, 卽 24 里.

280. 龜鶴共 42 隻,共足 108,問各若干.

圖 將鶴之數爲 x,則龜之數爲 $42-x$,故 $2x+4(42-x)=108$, $\therefore 2x+168-4x=108$, $\therefore 2x=60$, $\therefore x=30$. 卽爲鶴之隻數,因而龜之隻數爲 $42-30=12$.

281. 有酒精與水混合,其全量之半分中加 25 升爲酒精,由其全量 $\frac{1}{3}$ 減 5 升爲水,問各幾升.

圖 將全量之升數爲 x,則 $\frac{1}{2}x+25+\frac{1}{3}x-5=x$, $\therefore 3x+150+2x-30=6x$, $\therefore x=120$, $\therefore \frac{120}{2}+25=85$……酒精之升數, $\frac{120}{3}-5=35$……水之升數.

282. 有工人一年中得公司股票 3 張,及金 180 圓,又五個月得股票 1 張,及金 95 圓,問股票 1 張之價值若干.

圖 股票一張之價格之圓數爲 x,則 $\frac{3x+180}{12}=\frac{x+95}{5}$, $15x+900=12x+1140$, 卽 $3x=240$, $\therefore x=80$, 卽 80 圓.

283. 以銅圓 30 枚買雞卵,若其價下落四分之一,則可多買五個,問一卵之價值如何.

圖 將雞卵 1 個之價爲 x,則下落時 1 個之價爲 $x-\frac{x}{4}$, 卽 $\frac{3}{4}x$, 故 $\frac{30}{x}=\frac{30}{\frac{3}{4}x}-5$, $\therefore \frac{30}{x}=\frac{120}{3x}-5$, 卽 $\frac{30}{x}=\frac{40}{x}-5$. $\therefore 5x=10$, $\therefore x=2$, 卽 2 個.

284. 有童子若干人,分桃及梨,每人與梨子 5 個,桃子 8 個,則剩梨子 2 個,桃子 5 個,又桃比梨多 18 個,問童子若干.

圖 以童數爲 x,則 $5x+2=8x+5-18$, 卽 $3x=15$, $\therefore x=5$. 卽 5 人.

285. 有甲乙二種酒,一瓶之價,乙爲甲之七分之五,若甲種每瓶落價 2 角,則乙 30 瓶與甲 25 瓶同價,問各一瓶之價如何.

圖 甲一瓶價之角數爲 x,則乙一瓶價之角數爲 $\frac{5}{7}x$, 故 $(x-20)25=\frac{5x}{7}\times 30$, 卽 $7(25x-500)=150x$,

卽 $175x-3500=150x$, $25x=3500$, 故 $x=14$……甲. 乙 $=140\times\frac{5}{7}=100$,

故甲爲 1 圓四角,乙爲一圓.

286. 有父子其年齡父爲 42 歲,而子爲 18 歲,問父年齡爲子年齡四倍時,在自今幾年前.

圖 所求年數爲x，則$42-x=4(18-x)$，$42-x=72-4x$，$\therefore 3x=30$，$\therefore x=10$，即10年前.

287. 某人爲a歲，其子爲b歲，問父年爲子年m倍之時．且試研究此題之答.

圖 x年之後，父年爲子年之m倍，則依題意得次之方程式.

$a+x=m(b+x)\cdots\cdots\cdots(1)$. 故$x=\dfrac{a-mb}{m-1}$，依問題之性質，當$m>1$明矣．今$a-mb>0$，則上所得$x$之值適當，而自今$\dfrac{a-mb}{m-1}$年後，父年爲子年之$m$倍．若$a-mb=0$，則$x$之值爲0，即現在父年爲子年之$m$倍也．若$a-mb<0$，則$x$之值爲負，今於問題之方程式中，將$x$變爲$-x$，則方程式爲$a-x=m(b-x)$，此方程式之根爲$\dfrac{mb-a}{m-1}$，即$\dfrac{-(a-mb)}{m-1}$之正根，而上方程式父年爲子年之$m$倍，爲自今幾年前之事，故方程式(1)之根爲負，則父年爲子年m倍，其負根之絕對值，當知爲自今幾年前，故依方程式(1)，而所得之根，恆適於問題，但得負根，則依其絕對值溯於過去計之可也.

288. 有甲乙二工作一事，甲8日完之，乙12日完之，今二人合作其事，中途甲休業2日，問幾日完之.

圖 所求日數爲x，則甲一日作其事$\dfrac{1}{8}$，乙1日作其事$\dfrac{1}{12}$，故$\dfrac{1}{8}(x-2)+\dfrac{1}{12}x=1$，即$3(x-2)+2x=24$，即$3x-6+2x=24$，$5x=30$，$\therefore x=6$，即6日.

289. 有貧民若干名，每人給與50錢，則不足錢100，又若每人給與40錢，則餘50，錢問人數如何.

圖 將人數爲x，則$50x-100=40x+50$，$\therefore 10x=150$，$\therefore x=15$，即15人.

290. 有上下二卷，合爲600頁之書，第二版時，下卷減四分之一，上卷增30頁，則兩卷之頁數相等，問初版上下二卷之頁數如何.

圖 將初版上卷之頁數爲x，則其下卷之頁數爲$600-x$，故$x+30=\dfrac{3}{4}(600-x)$，由是上卷爲$x=240$頁，下卷爲$600-240$，即360頁.

291. 有商人買入每尺7錢之布若干尺，其內8尺，每尺獲利9錢，其餘每尺獲利12錢賣之，又將其所得金，買得與前同價之布4丈，問初次所買布之尺數如何.

圖 將所求尺數爲x，則$(7+9)\times 8+(7+12)(x-8)=7\times 40$，解之，得$x=16$，即1丈6尺.

292. 有人賣去其所有之雞卵之半及7個，次賣去其所餘之半及7個，又賣去其所餘之半及7個，則恰盡，問初之雞卵數如何.

圖 初之雞卵數爲x，則第一回所餘爲$\dfrac{x}{2}-7$，第二回所餘爲$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}-7\right)-7$，第三回所餘爲$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}-7\right)-7\right\}-7=0$，解之，得$x=98$.

293. 某人將金250000圓分爲二分，其一分以4分之利，他一分以3分5厘之利借與人，得利9000圓，問其分法如何，

解 4分利之本金圓數爲x，則$\frac{4}{100}x+\frac{3.5}{100}(250000-x)=9000$，解之得

$x=50000$圓，故3分5厘之本金爲

$250000-50000=200000$圓.

294. 某考試對於受考者13人，有及格者11之比，而未及格者內18人交白卷，今若將其內9人使及格，則對受考者11人有及格者10人之比，問受考者人數若干.

解 將受考人數爲x，則$\frac{11}{13}x$爲及格之人數，故$\frac{11}{13}x+9=\frac{10}{11}x$，解之，$x=143$人.

注意 本題交白卷之18人，無關係於問題之答.

295. 攝氏與華氏兩寒暑表之度數，問其同溫度同高低者如何.

解 攝氏華氏兩寒暑表同溫度同高低者，當在零度以下，今將攝氏之x度，爲所求之溫度，則零度以下，對於x度，華氏度數爲$\frac{9}{5}x-32$，故$x=\frac{9}{5}x-32$，

∴ $x=40$，即零度以下40度.

別解 攝氏x度當於華氏之$\left(\frac{9}{5}x+32\right)$度，故$x=\frac{9}{5}y+32$，∴ $x=-40$，此x之負符號，爲示零度以下者，故所求之答爲零度以下40度.

96. 於36瓩之水中，溶解鹽200瓦之液，今欲得含溶液20瓩中鹽80瓦之液，問初之溶液，當加水幾何.

解 將當加之水爲x瓩，則依題意得次之方程式，$\frac{200}{36+x}=\frac{80}{20}$，解此方程式，得$x=14$，即當加水14瓩也.

297. 二軍合操，第一軍自甲地每時8里，向乙地發，第二軍比第一軍後3時，自乙地每時10里，向甲地發，每時10里，第二軍行至兩地距離三分之一之處，與第一軍遇，問兩地距離若干.

解I. 設第一軍至相遇之時數爲x，則第一軍進行之里數爲$8x$里，而第二軍進行之里數爲$10(x-3)$里，而其相遇點爲第二軍行至全距離三分之一之處故 $8x=2\times10(x-3)$，故$x=5$，因而兩地間之距離，爲$8\times5+10\times2$，即60里.

解II. 兩地間之距離爲x里，則第二軍進行之時數爲$\frac{x}{3}\div10=\frac{x}{30}$，而第一軍進行之時數爲$\frac{2x}{3}\div8=\frac{x}{12}$，故$\frac{x}{30}=\frac{x}{12}-3$. 故$x=60$，即60里.

298. 某人於二時三時之間看時表，誤將分針爲時針，其所見之時，在眞時55分之前，問眞時如何.

解 將眞時爲2時x分，則此人所誤見之時爲1時$\left(10+\frac{x}{12}\right)$分，[但$10+\frac{x}{12}$爲自XII至時針之分數] ∴ $2^{時}x^{分}-\left\{1^{時}\left(10+\frac{x}{12}\right)^{分}\right\}=55^{分}$，∴ $x=5\frac{5}{11}$

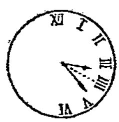
∴ 眞時爲2時$5\frac{5}{11}$分.

299. 時表正午兩針相重後,問再至何時相重.

【解】 時表正午兩針相重後,至再相重,則分針比時針多回轉60分,故將所求之分數爲x,則有次之方程式,$x-\frac{x}{12}=60$,故$x=65\frac{5}{11}$,卽所求之時爲1時$5\frac{5}{11}$分. 普通以k表一正整數,則正午後,時針與分針相合有次式,$x-\frac{x}{12}=k.60$,故$x=\frac{720}{11}k$.

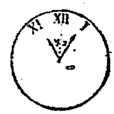
今設k爲1, 2, 3,………之值,則次第得兩針相合之時. 但k若不小於11,則x不小於720分,卽12時,故自重於正午後重11回,則第11回重已經過十二時,故自正午重後十二時間,可答有11回相重.

300. 三時後,問時表兩針,夾IIII於正中之時.



【解】 將所求之時爲x,則長針廻轉x分劃,短針廻轉$\frac{x}{12}$分劃,故兩針間角之半分爲y分劃,則可得次之二方程式,$x-y=20$, $\frac{x}{12}+15+y=20$. 從此消去y,則得$x=23\frac{1}{13}$分.

301. 時表短針在XI與XII之間,而長針在XII與I之間,經若干時,短針恰在原之長針位置,長針恰在原之短針位置,問初之時如何.



【解】 將XII與長針所成之角爲x分劃,XII與短針所成之角爲y分劃,因長針與短針在十二時相合,故依題意得次之方程式,$12y=60-x$, $12x=60-y$,解之得$x=4\frac{8}{13}$分,卽11時4分$\frac{8}{13}$.

302. 有時表其時分秒三針,同裝置於針軸,此三針在正午相重,經若干時,秒針二等分他二針所成之角.

【解】 x分之後,秒針二等分時針分針所成之角,將其時時針分針間之角爲$2y$分劃,則分針廻轉x分劃之間,秒針及時針各廻轉$60x$分劃及$\frac{x}{12}$分劃,故得次之方程式.

$60x=\frac{x}{12}+y+60$, $2y=x-\frac{x}{12}$ 消去y而求x,則$x=\frac{1440}{1427}$,卽$1\frac{13}{1247}$分.

【注意】 本解示秒針二等分他二針間之劣角,若秒針二等分他二針間之優角,則自$60x=\frac{x}{12}+y+30$, $2y=x-\frac{x}{12}$而得$x=\frac{720}{1427}$分,卽30秒$\frac{390}{1427}$.

303. 某年之初,甲借乙100圓,乙於其年終當還110圓2角,今以利率10%計算,問自始至若干日後,則甲乙之借金互相償却. 但乙之借金,以銀行折現計算,其日數有奇零者棄之.

【解】 將所求日數爲x,則依題意而得

$$100\times\frac{1}{10}\times\frac{x}{365}+100=110.2-110.2\times\frac{1}{10}$$

$\times\dfrac{365-x}{365}$,解之,故 $x=293\dfrac{22}{51}$. 故 293 日後,即 294 日.

註 若爲閏年,則以 366 代 365 可也.

304. 甲乙二人間,有借貸若干,由他處與甲 500 圓,與乙 100 圓,甲乙各以此金償還借貸後,於是甲所有爲乙所有之二倍,問各借貸之金額若干,又孰爲借者,孰爲貸者.

解 今設甲貸與乙 x 圓,則償還借貸後各所有金,當爲 $(500+x)$ 圓,及 $(100-x)$ 圓,故得次之方程式.

$500+x=2(100-x)$, $\therefore x=-100$, 故得甲貸與乙 -100 圓,即乙貸與甲 100 圓也.

註 方程式之 x, 若以 $-x$ 代入,則 $500-x=2(100+x)$, 此甲貸與乙 x 圓之方程式也. 解之則得 $x=100$.

305. 有一旅人,自甲地一時間,以 5 哩之速,向乙地出發,又有一旅人,同時自乙地,一時間以 3 哩之速,向甲地出發,而第一人至半途時,距第二人 5 哩,問甲乙兩地之距離如何.

解 將所求之哩數爲 x, 則

$\dfrac{\frac{1}{2}x}{5}=\dfrac{\frac{1}{2}x-5}{3}$, $\therefore x=25$, 即 25 哩.

306. 某人以資本金若干圓營商,初年經費千圓,其餘金得利六分之一,第二年經費千圓,其餘金得利五分之一,第三年經費千圓,其餘金得利八分之一,現在資本比最初資本多千七百元,問最初之資本金.

解 將最初資本金爲 x 圓,則第二年初之資本金,爲

$x-1000+\dfrac{x-1000}{6}$ 即 $\dfrac{7}{6}(x-1000)$ 圓,而第三年初之資本金,爲

$\dfrac{6}{5}\left\{\dfrac{7}{6}(x-1000)-1000\right\}$ 圓,第四年資本金,爲 $\dfrac{9}{8}\left[\dfrac{6}{5}\left\{\dfrac{7}{6}(x-1000)-1000\right\}-1000\right]$ 圓,因而 $\dfrac{9}{8}\left[\dfrac{6}{5}\left\{\dfrac{7}{6}(x-1000)-1000\right\}-1000\right]$ $=x+1700$, 即 $\dfrac{63}{40}x-1575-1350-1125=x+1700$, 即 $\dfrac{23}{40}x=5750$, $\therefore x=10000$ 圓.

307. 有舟子乘短艇,溯流而上一里之時間,等於下盪 $1\frac{1}{4}$ 里之時間,今於此河流下盪 5 分時,又隨水流之速度下漂 5 分時,次又下盪 5 分時,又隨水流之速度下漂 5 分時,交互如此,40 分時下盪至 $2\frac{1}{2}$ 里,問水流每時之速度如何.

解 將每時盪速及流速,爲 x 里 y 里,故自問題之前部分,得 $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1\frac{1}{4}}{x+y}$,其各分母不爲 0 明矣,故去分母,而簡單之,則得 $x=9y\cdots\cdots(1)$, 次因每 5 分間交互盪漂,則等於 40 分間每 20 分間一回,故 $\dfrac{20}{60}(x+y)+\dfrac{20}{60}y=2\dfrac{1}{2}$, 簡單之,則爲 $2x+4y=15$, 將此式代入 (1) 式,而得 $18y+4y=15$, 故 $y=\dfrac{15}{22}$, 即 $\dfrac{15}{22}$ 里.

308. 有雇工一日之工資,夏日比冬日多 2 錢,於夏日雇 13 日,因其損害什物,減其工資 22 錢,又於冬日雇 17 日,此工人非常勤勉,乃於工資外,與以 28 錢,於是冬日夏日之工資相等,問

夏日一日之工價若干.

解 將夏一日之工價爲x，則冬一日之工價爲$(x-2)$，故夏日13日之工錢，爲$(13x-22)$錢，而冬日17日之工價爲$17(x-2)+28$，因得次之方程式$13x-22=17(x-2)+28$，∴ $4x=-16$，∴ $x=-4$. 故此工人夏日之工價爲-4錢，實際無此事，故本問題爲不能.

309. 有兄弟若干人分配產業，長兄取a圓及其餘之n分之一，次兄取$2a$圓及其餘之n分之一，三兄取$3a$圓及其餘之n分之一，次第如此，至滿弟而所得之金皆相等，問產業及兄弟之人數如何.

解 將產業爲x圓，長兄所取之金爲$a+\frac{x-a}{n}=\frac{n-1}{n}a+\frac{x}{n}$，次兄所取之金爲$2a+\frac{1}{n}\left(x-\frac{n-1}{n}a-\frac{x}{n}-2a\right)=\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}a+\frac{n-1}{n^2}x$，∴ $\frac{n-1}{n}a+\frac{x}{n}=\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}a+\frac{n-1}{n^2}x$ ∴ $x=(n-1)^2a$圓即產業之數，又各人所取之數，爲$\frac{n-1}{n}a+\frac{(n-1)^2}{n}a=(n-1)a$，故人數$=(n-1)^2a\div(n-1)a=n-1$，即$n-1$人.

310. 有分數，分子加1，則其值爲$\frac{1}{3}$，又分母加1，則其值爲$\frac{1}{4}$，問此分數如何.

解 將分子爲x，分母爲y，則得二方程式$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}$，$\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$ 解之得$x=4$，$y=15$，故所求之分數爲$\frac{4}{15}$.

311. 有甲乙二人，7年前甲年齡3倍於乙年齡，又自今7年後，則甲年齡2倍於乙年齡，問各現年齡如何.

解 將甲現年爲x，乙現年爲y，則得二方程式$x-7=3(y-7)$，$x+7=2(y+7)$，解之得$y=21$，$x=49$，故甲爲49歲，乙爲21歲.

312. 將金若干圓，等分與若干人，若預定之人數增6人，則每人所得減2圓，若減3人，則每人所得增2圓，問金及預定人數各若干.

解 將人數爲x，每人所得金之圓數爲y，則成xy，$(x+6)(y-2)$，$(x-3)(y+2)$，皆表金之圓數，故$xy=(x+6)(y-2)$，∴ $6y-2x=12$，又$xy=(x-3)(y+2)$，∴ $3y-2x=-6$. 自此兩方程式，得$x=12$，$y=6$，故人數爲12. 而金之圓數爲$xy=72$.

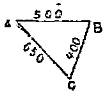
313. 甲乙二人各射30箭，其中的之數，乙二倍於甲，又不中的之數，甲3倍於乙，問中的數，與不中的數，各幾何.

解 將甲中的之數爲x，則不中的之數爲$30-x$，又乙中的之數爲y，則不中的之數爲$30-y$，故$2x=y$，$30-x=3(30-y)$，解之得$x=12$，$y=24$，故甲中的之數爲12，不中的之數爲$30-12=18$，而乙中的之數爲24，不中的之數爲$30-24=6$.

314. 有人距離標的500碼發鎗，過$4\frac{1}{3}$秒時聞中的聲，又有距離標的400

碼距發鎗人650碼之人，聞鎗聲後經$2\frac{1}{3}$秒聞中的之聲，問每時聲音之速度，彈丸之速度各若干。

解 將發鎗人及標的之位置為A, B，距A 650碼距B 400碼之人之位置為C，乃將一秒時聲音及彈丸速度之碼數為x, y，則聲音傳播於AB間之時間為$\frac{500}{x}$而彈丸行AB間須$\frac{500}{y}$秒，又聲音傳播於AC之間須$\frac{650}{x}$秒，傳播於BC之間須$\frac{400}{x}$，故由題意，可得次之二方式程式$\frac{500}{x}+\frac{500}{y}=4\frac{1}{3}$，$\frac{500}{y}+\frac{400}{x}-\frac{650}{x}=2\frac{1}{3}$，解之，而得$x=375$碼，$y=166$碼$\frac{2}{3}$。



315. 某鐵道公司，分配利益，營業用費4成9分，儲金1成，又資本$\frac{1}{5}$為保險費，每年5分，其餘40000圓，分配於股東每年4分，問資本總額及收益之數各若干。

解 將資本金之圓數為x，則$40000=(x-\frac{x}{5})\times\frac{4}{100}$解之而得$x=1250000$，即125萬圓。又收益之圓數為$y$，則$y=\frac{49}{100}y+\frac{10}{100}y+\frac{1250000}{5}\times\frac{5}{100}+40000$，$\therefore 41y=5250000$，$\therefore y\doteqdot 128048$圓。

316. 有電車公司，其全道之車票為3角，因受1成之損，乃將全道分為三區賣票，每一區2角，[車票每區一張]於是一週間比前多賣3300張，因得4分之利，問前之一週間乘客幾何。

解 將人數為x，一週間費用資本之角數為y，則得$3x=y\times\frac{9}{10}$，$2(x+3300)=y\times\frac{104}{100}$，兩方程式解之，則得$x=4500$人。

317. 某鐵道公司，當季之紅利，對於債務每年6分，對於股金每年8分6厘，平均8分，前季則債務6分，股金9分，平均8分5厘，而債務少四百萬圓，問此公司之股金，并當季債務之金額如何。

解 當季之債額為x圓，股金為y圓，則前季之債額為$x-4000000$圓，故有次之方程式$0.06(x-4000000)+0.09=0.085(x+y-4000000)$，及$0.06x+0.086y=(x+y)\times 0.08$。解之，而得$x=2400000$，$y=8000000$，即債額為240000圓，股金為8000000圓。

318. 某學校試驗，受驗生四分之一落第，而及格分數之最下限，比受驗生總數平均分數少2，又比及第生平均分數少11，而為落第生平均分數之2倍，問及格分數之最下限如何。

解 將受驗生之人數為$4x$，則及格生之人數為$3x$，落第生之人數為x，及格分數之最下限為y，則受驗生總平均分數為$y+2$，而及格生平均分數為$y+11$，故落第生之平均分數為$\frac{y}{2}$，因而$4x(y+2)=3x(y+11)+x\cdot\frac{y}{2}$，以$x$除之，變化之，而得$y=50$，即50分。

319. m人之受驗生中，及格生之平均分數為a，落第生之平均分數為b，受驗

生總數之平均分數為 c，試求及格及落第之各人數.

解 及格生之人數為 x，落第生之人數為 y，依題意可得次之方程式
$x+y=m\cdots\cdots(1)$, $ax+by=cm\cdots\cdots(2)$,
自(2)減(1)之 b 倍，則 $(a-b)x=m(c-b)$，故 $x=\frac{m(c-a)}{a-b}$，交換 x 與 y，同時交換 a 與 b，而得 $y=\frac{m(a-c)}{a-b}$.

320. 有甲乙二人甲所有之辨士數，二倍於其先令數，乙所有之先令數，二倍於其辨士數，而此二人所有之和，則辨士數比先令數多1，問二人各所有金幾何. 但1先令=12辨士.

解 將甲所有之先令數為 x，則其所有之辨士數為 $2x$，又乙所有之先令數為 y，則其所有之辨士數為 $\frac{y}{2}$，故依題意得 $12y+\frac{y}{2}=12x+2x+8$, $x+y+1=2x+\frac{y}{2}$，解之，得 $x=3$, $y=4$. 故甲有3先令6辨士，乙有4先令2辨士.

321. 法國火車票價，比例於旅行之距離，又旅人之行李，重25瓩無運費，過此重，則每瓩須加運費，其運費亦比例於距離，今有一旅人以50瓩之行李，行200哩付25法郎，又以35瓩之行李行150哩，付 $16\frac{1}{2}$ 法郎，若行100哩，持100瓩行李，當付運費幾何.

解 一哩之運費為 x 法郎，過限制外之重每瓩一哩之運費為 y 法郎，今求行李運費以50瓩行200哩，則 $(50-25)\times200y$ 需 $5000y$ 法郎，又35瓩行150哩，則 $(35-25)\times150y$，即需 $1500y$ 法郎，故 $200x+5000y=25$, $150x+1500y=16\frac{1}{2}$，解之 $x=\frac{1}{10}$, $y=\frac{1}{1000}$，依此以100瓩之行李行100哩，則為 $\frac{1}{10}\times100+\frac{1}{1000}\times(100-25)\times100=17\frac{1}{2}$，即 $17\frac{1}{2}$ 法郎.

322. 有甲乙二人，分兌10圓之票，各出所有金之半，不足則由甲出，而甲出其不足之2圓，所餘之金，尚等於乙最初所有之金，問各所有金若干.

解 所有金數甲為 x，乙為 y，則 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+2=10$, $\frac{x}{2}-2=y$，解此二式，得 $x=12$, $y=4$.

323. 水中稱37斤之錫輕5斤，稱23斤之鉛輕2斤，今有錫與鉛合金質120斤，稱於水中輕14斤，問此合金含錫與鉛各若干.

解 將所求錫之斤數為 x，鉛之斤數為 y，則 $x+y=120$, $\frac{5x}{37}+\frac{2y}{23}=14$，解此二式得 $x=64$, $y=46$.

324. 有二位之數，其數等於各位數字和之5倍，若加之以9，則其各位數字之次序倒轉，問原數如何.

解 將十位之數字為 x，一位之數字為 y，則 $10x+y$ 為原數，而 $10y+x$ 為轉位數，故 $10x+y=5(x+y)$，即 $5x-4y=0$. 又 $10x+y+9=10y+x$，即 $x-y=-1$，解之，得 $x=4$, $y=5$，故原數為45.

325. 有二位之數,本數等於數字和之4倍,試求本數.

解 將十位及一位之數字爲x及y,則$10x+y=4(x+y)$, $\therefore 6x-3y=0$,即$2x-y=0$. 此x, y, 皆爲基數,[自1至9之整數]故得如次之答. $x=1$,則$y=2$, $x=2$,則$y=4$, $x=3$,則$y=6$, $x=4$,則$y=8$. 故本數爲12, 24, 36, 48.

326. 有自三個有效數字所成之數,本數等於其數字和之48倍,自本數減198,則數字之次序倒轉,又各數字爲等差級數,問本數如何.

解 將所求之數爲$100a+10b+c$,則$100a+10b+c=48(a+b+c)$, $100a+10b+c-198=100c+10b+a$, $2b=a+c$, 自此三方程式得$a=4$, $b=3$, $c=2$,故所求之數爲432.

327. 有甲乙二酒樽,今自甲汲出乙內所有之酒量,入於乙,再自乙汲出甲內所餘之酒量入於甲,則甲樽爲1斗,乙樽爲3斗5升,問二樽初之酒量如何.

解 將最初甲樽所有之酒量爲x,乙樽所有之酒量爲y,則自甲樽汲出在乙樽者入於乙樽,故甲樽餘$(x-y)$升,而乙樽之酒量爲$2y$升,次自乙樽汲出$(x-y)$升入於甲樽,故甲樽最後之酒量爲$2(x-y)$升,而乙樽餘$2y-(x-y)$,即$(3y-x)$升,依此得二方程式如次. $2(x-y)=10$, $3y-x=35$,解之得$x=25$升, $y=20$升.

328. 一年有收入207圓之鑛山股票[5分利]及鐵路股票[6分利],票面每100圓之鑛山股票,則以91圓3角賣之,票面每100圓之鐵路股票,則以93圓8角賣之,共得金3433圓1角,問兩種票面之金額各若干.

解 將鑛山股票及鐵路股票[票面百圓]之張數爲x及y,則其票面之金,爲$100x$及$100y$,因得二方程式如次. $100x\times0.05+100y\times0.06=207$, $91.3x+93.8y=3433.1$,解之, $x=15$, $y=22$,故鑛山股票面總額爲100圓×15=1500圓. 而鐵路股票面總額爲100圓×22=2200圓.

329. 甲乙二人自隔120里之兩處,同時相向而行,甲比乙早到6日,歸路甲每日增速五分之一,乙每日增速四分之一,於是甲比乙早到四日,問往路每日之速各如何.

解 所求速之里數,甲爲x,乙爲y,則歸路甲之速爲$x+\frac{x}{5}$,即$\frac{6x}{5}$,而乙之速爲$y+\frac{y}{4}$,即$\frac{5y}{4}$,故$\frac{120}{x}=\frac{120}{y}-6$, $\frac{120}{\frac{6x}{5}}=\frac{120}{\frac{5y}{4}}-4$,解之得$x=5$, $y=4$,即甲5里,乙4里.

330. 有一人乘自轉車,至中途機損,因修繕費30分時,其後比前速減半,全道30哩,費5時間,若修機在再行10哩之後,則全道程以4時間可達,問損壞之處,及原速如何.

解 將至損壞處之哩數爲x,原速爲

y哩，則 $\frac{x}{y}+\frac{30}{60}+\frac{30-x}{y\times\frac{1}{2}}=5$，$\frac{x+10}{y}+\frac{30}{60}+\frac{30-(x+10)}{y\times\frac{1}{2}}=4$，解此二式而得 $x=15$，$y=10$，即15哩及10哩.

331. 有甲乙二人，乘自轉車，甲比乙先 p 時間起行，各行若干時，乙追及甲，此後乙將其前速之5增爲6，甲將其前速之4增爲5，而各進行，則比乙最初起行至追及甲之時間尙多 p 時間，而甲與乙隔92里，若二人各以原速進行，則只隔80里，於是乙之速二倍於甲之速，試證之。又 $p+q=16$，則每時之速甲爲10里，乙爲5里，試求其證.

解 將甲乙每時之速爲 x 里 y 里，則乙至追及甲之時爲 $\frac{px}{y-x}$ 時間，而因 $\frac{px}{y-x}+q=\frac{px+qx+qy}{y-x}$ 時間進行，則甲乙之距離爲80里，故

$$(y-x)\frac{(px-qx+qy)}{y-x}=80\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

又甲乙若各以 $\frac{5}{4}x$ 里，$\frac{6}{5}y$ 里之速，進行 $\frac{px-qx+qy}{y-x}$ 時間，則其距離爲92里，

故 $\left(\frac{6}{5}y-\frac{5}{4}x\right)\frac{(px-qx+qy)}{y-x}=92\cdots\cdots(2)$，

自(1)得 $px-qx+qy=80\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$，

將(3)代入於(2)，而 $\left(\frac{6}{5}y-\frac{5}{4}x\right)\frac{80}{y-x}=92$，$\therefore\ 96y-100x=92(y-x)$，$\therefore\ y=2x$，即乙之速爲甲之2倍證明矣．將此 y 之值代入於(3)，則 $px-qx+2xq=80$，$\therefore\ (p+q)x=80$，$p+q=16$，故 $16x=80$，$\therefore\ x=5$．因得 $y=10$，即得第二證.

332. 有甲乙二人競走於池之周圍，以五周而決定勝負，甲走完三周，乙後甲75步，此時乙增其速，而與甲以前之速同，甲減其速，而與乙以前之速同，至最後甲勝15步，問池周及甲乙初速之比如何.

解 將甲乙初之速度步數爲 x, y，池周爲 z 步，則甲三周其池時，乙行 $3z-75$ 步．故 $\frac{3z}{x}=\frac{3z-75}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$，

次就其餘之距離，則甲之速度爲 y 步，乙之速度爲 x 步，而甲行 $2z$ 步，乙行 $2z+75-15=(2z+60)$ 步，故

$$\frac{2z}{y}=\frac{2z+60}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

自(1)，(2)得次式.

$$\frac{3z}{3z-75}=\frac{x}{y}=\frac{2z+60}{2z}\cdots\cdots\cdots(3),$$

故 $z=150$ 步，將此 z 之值代入(3)，而得 $x:y=6:5$.

333. 甲乙二人兩次競走於880碼之地，第一回甲與乙10碼之 Handicap.［競走前，甲讓乙先進10碼之謂.］而勝15秒，第二回甲與乙16秒之 Handicap.［乙走16秒甲始走之謂.］而勝 $4\frac{8}{11}$ 碼，問甲走一分時之距離如何.

解 將甲走1分時之距離爲 x 碼，乙走一分時之距離爲 y 碼，則甲走880碼之時間，與乙走 $880-10=870$ 碼之時間之差，爲15秒，即 $\frac{1}{4}$ 分，故 $\frac{880}{x}=\frac{870}{y}-\frac{1}{4}\cdots\cdots(1)$，又甲走880碼之時間，與

乙走 $880-4\frac{8}{11}=\frac{9628}{11}$ 碼之時間之差，爲16秒，卽 $\frac{4}{15}$ 分，故 $\frac{880}{x}=\frac{9628}{11y}-\frac{4}{15}$ ………(2)，∴ $\frac{870}{y}-\frac{1}{4}=\frac{9628}{11y}-\frac{4}{15}$，$\frac{58}{11y}=\frac{1}{60}$，∴ $y=\frac{3480}{11}$ 碼. 將 y 之値代入(1)，而得 $x=352$ 碼.

334. 有長92碼之火車，與長84碼之火車，相向而駛，則 $1\frac{1}{2}$ 秒全行過，若相並駛，則6秒一車越過他車，試求各一秒之速.

解 將兩車各一秒之速度爲 x 碼與 y 碼，其兩車相向而全行過，則 $1\frac{1}{2}$ 秒所行距離之和，等於兩車長之和，又相並而行，一車越過他車，則6秒所行距離之差，亦等於兩車長之和，因得次之方程式.

$$1\frac{1}{2}(x+y)=92+84\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$6(x-y)=92+84\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

自(1)而 $x+y=\frac{352}{3}$，自(2)而 $x-y=\frac{88}{3}$，因得 $x=73\frac{1}{3}$，$y=44$. 故所求之速爲 $73^{碼}\frac{1}{3}$，及44碼.

335. 有甲乙丙三牧場，其面積爲5,6,8畝，所生牧草之高相等，其生長之速亦相等，而甲牧場則75牛可飼養12日，乙牧場則81牛可飼養15日，問丙牧場幾牛可飼養18日.

解 以 x 爲所求之牛數，若欲此問題之解法容易，當取二個補助之未知數，卽各牧場草之高爲 y，其草每日生長之速爲 z，而牛一頭一日之食量，設爲相等，自不待言. 甲牧場最初所有之草，爲 $y\times5$，而12日生長之草爲 $5\times12z$，故12日間75牛食盡之草，爲 $5y+60z$，而一牛一日所食之草，爲 $\frac{5y+60z}{12\times75}$，同様乙，丙牧場一牛一日所食之草，爲 $\frac{6y+6\times15z}{15\times81}$，$\frac{8y+8\times18z}{18x}$，因得次之方程式.

$$\frac{5y+60z}{12\times75}=\frac{6y+6\times15z}{15\times81}=\frac{8y+8\times18z}{18x}$$

或 $\frac{y+12z}{180}=\frac{2(y+15z)}{405}=\frac{4(y+18z)}{9x}$.

三未知數，惟有二方程式，是當爲不定問題，但此問題之不定，惟在 y 及 z 爲不定，而 x 當有一定之値，今設 $\frac{y}{z}=u$，則上方程式能變形如次.

$$\frac{u+12}{180}=\frac{2(u+15)}{405}=\frac{4(u+18)}{9x},$$

自此方程式消去 u，則

$\frac{6}{45}=\frac{24}{9x-720}$，故得 $x=100$，卽100頭.

336. 有甲乙丙三工作一事，甲一人作成日數，等於乙丙合力作成日數之 m 倍，乙一人作成日數，等於甲丙合力作成日數之 n 倍，丙一人作成日數，等於甲丙合力作成日數 p 倍，則甲乙丙各一人作成日數之比，爲 $m+1:n+1:p+1$ 試證之. 又 $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$ 試證之.

解 將甲乙丙各以一人作成日數爲 x,y,z 則依題意得次之方程式.

$x=\dfrac{m}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}}$, $y=\dfrac{n}{\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}}$、$z=\dfrac{p}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$,

卽 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{m+1}{x}$ ....(1),

$\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{n+1}{y}$ ....(2),

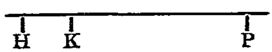
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{p+1}{z}$ ....(3),

自 (1), (2), (3) 得 $x:y:z=m+1:n+1:p+1$ ....(4),

今將 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ 爲 s, 將 (1), (2), (3) 變形, 則得次式 $\dfrac{s}{m+1}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{s}{n+1}=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{s}{p+1}=\dfrac{1}{z}$, 故 $\dfrac{s}{m+1}+\dfrac{s}{n+1}+\dfrac{s}{p+1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=s$, 故 $\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{p+1}=1$.

337. 甲乙二人, 在某街道, 甲在H點, 乙在K點, 同時同向進行, HK之距離爲n里, 今將每時之速, 甲爲a里, 乙爲b里, 乙所在地K, 在甲所在地H之前, 問出發後幾時間, 甲追及乙.

解 將甲於t時間追及乙之處爲P, 斯時甲進行之距離, 爲



$HP=at$, 乙之進行之距離, 爲 $KP=bt$, $\therefore\ at-bt=HK=n$, $\therefore\ t=\dfrac{n}{a-b}$. 再研究此根. (1) 若 $a>b$ 則 t 爲正數. (2) $a<b$ 則爲負數, 實卽甲比乙遲緩, 故甲決不能追及乙. 但二人若非自H與K起身, 其到H與K以前, 卽以 a, b 里之速同方向進行, 某時到H, K, 則甲乙當於到H, K以前, 遇於一處, 而其時間爲到H, K之t時間前. 又 $HP=at$, 及 $HP=bt$ 而 t 爲負數, 則HP及KP皆爲負數, 故甲乙乃出發H, K, 與前反向進行, 則t時間後乙追及甲. (3) 若 $a=b$, 則 $t=\dfrac{n}{0}=\infty$, 則甲追及乙, 當經過無窮大之時間, 換言之, 卽甲決不能追及乙, 實卽甲乙之速相等, 故二人進行恆有n里之距離.

338. 有甲乙丙三鐵路公司, 各招集a, b, c股, 而所定每一股之股金, 各公司皆相等, 其後乙公司每股多收p圓, 丙公司每股多收q圓, 於是各公司募集所得股金額, 甲乙二公司之和, 恰當丙公司之二倍, 問其初各公司每股所收金額如何.

解 所求之金額爲x圓, 則依題意而 $ax+b(x+p)=2c(x+q)$, $\therefore\ (a+b-2c)x=2cq-pb$, 因而 $x=\dfrac{2cq-pb}{a+b-2c}$.

注意 $a+b-2c=0$, 且 $2cq-pb\neq 0$, 例如 $a=9000$, $b=11000$, $c=10000$, $p=19$, $q=10$ 則x之值爲∞, 問題不成立. 又 $a+b-2c=0$, 且 $2cq-pb=0$, 例如 $a=9000$, $b=11000$, $c=10000$, $p=10$, $q=5\dfrac{1}{2}$, 則x之值爲任意, 問題爲不定.

339. 西曆1843年一月一日爲日曜日, 問其次一月一日爲日曜日者係何年.

解 平年爲365, 卽 $7\times 52+1$ 日, 而閏年爲 $7\times 52+2$ 日, 故一月一日在1844年

比1843年七曜後1日，而1845年比1844年七曜後2日明矣，餘倣此，故任意年一月一日距日曜日數，爲

1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1,………………………級數之和，[卽1843年以後之年數] 今將$(1843+x)$年爲所求之年，則$(1843+x)$年一月一日爲日曜日，則上級數x項之和能以7整除，故$x=11, 11+6, 11+6+5, 11+6+5+6$………，故所求之年爲1854年，1860年，1865年，1871年，等.

累乘開方

340. 試求$(a+b+c)^2$之積.

圖 多項式之平方，等於各項之平方，加相異二項之積之2倍，故$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

341. 試求$(x+y-z)^2$.

圖 $(x+y-z)^2=x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2x\times(-z)+2y(-z)=x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$.

342. 試求$(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$之平方根.

圖 本題之式$=(a-b)^4+4ab(a-b)^2-2(a^2-b^2)^2+2(a^4+b^4)=(a-b)^4+4ab(a-b)^2+4a^2b^2=\{(a-b)^2+2ab\}^2=(a^2+b^2)^2$.

所求之平方根爲a^2+b^2.

343. 試求$1-2^{2n+1}+4^{2n}$之平方根.

圖 本式$=1-2(2^{2n})+4^{2n}=1-2(4^n)+(4^n)^2$，∴ 根$=1-4^n$，或$4^n-1$.

344. 試求$9^n-2(6^n)+4^n$之平方根.

圖 本式$=3^{2n}-2(3\times2)^n+(2^2)^n=(3^n)^2-2\times(3^n)(2^n)+(2n)^2$，∴ 根$=3^n-2^n$.

345. $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$若爲完全之平方，則$8c=a(4b-a^2)$及$(4b-a^2)^2=64d$試證之.

圖 將$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+px+q)^2$. 則展開左邊，而比較兩邊之係數，得次式，

$a=2p$…………(1)，　$b=p^2+2q$………(2)，

$c=2pq$…………(3)，　$d=q^2$……………(4)，

自(1)，(2)，(3)得次式，

$a(4b-a^2)=2p(4p^2+8q-4p^2)=16pq=8c$.

卽$8c=a(4b-a^2)$. 又自(1)，(2)，(4)得次式. $(4b-a^2)^2=(8q)^2=64q^2=64d$.

346. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$爲完全之平方，試證之.

圖 本題之式$=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4=(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+25a^4=(x^2+5ax+5a^2)^2$.

347. $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25$爲完全之平方，則A，B，C之值爲如何.

圖 題式爲完全之平方，則其平方根爲x之三次. 故其根若爲$2x^3+px^2+qx+r$，則爲$4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25=(2x^3+px^2+qx+r)^2=4x^6+4px^5+(p^2+4q)x^4+(4r+2pq)x^3+(2pr+q^2)x^2+2qrx+r^2$. 比較$x$同乘冪之係數，而

$-24=4p$………(1)，　$A=p^2+4q$………(2)，

$4r+2pq=B$……(3), $q^2+2pr=C$……(4),
$2qr=-40$………(5), $r^2=25$…………(6)
自(1)得$p=-6$, 自(6)得$r=\pm5$, 自(5)得$q=\mp4$, 將p, q之值代入(2), 則得$A=20$, 或$A=52$. 將p, q, r之值代入(3), 則得$B=68$, 或$B=-68$. 將p, q, r之值代入(4), 則得$C=-44$, 或$C=76$. 故 $A=20$, $B=68$, $C=-44$, 或 $A=52$, $B=-68$, $C=76$.

348. 試求$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$之之四乘根.

解 求得題式平方根之平方根即得, 故先將題依x之降冪列之,而開平方如次.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4-4x^2+6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}\ \left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right. \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2-2 & -4x^2+6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & -4x^2+4 \\ \hline
2x^2-4+\frac{1}{x^2} & 2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & 2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\ \hline
\end{array}$$

而$x^2-2+\frac{1}{x^2}$之平方根為$x-\frac{1}{x}$易明矣.

349. ax^3+bx^2+cx+d為完全之立方, 則$b^2=3ac$及$c^2=3bd$試證之.

解 題式為完全之立方,則當等於$(x\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{d})^3=ax^3+3x^2\sqrt[3]{a^2d}+3x\sqrt[3]{ad^2}+d$, 故 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$, $c=3\sqrt[3]{ad^2}$, 而 $b^2=3ac$, $c^2=3bd$.

350. 自n個數字所成之數,其平方根之整數位,含$\frac{1}{4}\left\{2n+1-(-1)^n\right\}$數字,試證之.

解 設n為偶數.試將$n=2m$,則平方根整數之數字為m, 而$\frac{1}{4}\{2n+1-(-1)^n\}=\frac{1}{4}\{4m+1-1\}=m$. 次設$n$為奇數,試將$2m+1$,則平方根整數之數字為$m+1$, 而$\frac{1}{4}\{2n+-(-1)^n\}=\frac{1}{4}\{4m+2+1+1\}=m+1$.

351. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$, 試求其為有理整式之平方之要件.

解 題式為x, y, z,之有理整式,則當等於$(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c})^2=ax^2+by^2+cz^2+2yz\sqrt{bc}+2zx\sqrt{ca}+2xy\sqrt{ab}$, 故 $f=\sqrt{bc}$, $g=\sqrt{ca}$, $h=\sqrt{ab}$. ∴ $gh=af$, $hf=bg$, $fg=ch$.

352. $(a-\lambda)x^2+(b-\lambda)y^2+(c-\lambda)z^2+2fyz+2gzx+2hxy$為$x$, y, z有理整式之平方, 則$a-\frac{gh}{f}=b-\frac{hf}{g}=c-\frac{fg}{h}=\lambda$試證之.

解 如前題之要件,則為
$gh-(a-\lambda)f=0$,………………………… 故
$a-\frac{gh}{f}=\lambda=$…………………………

353. $(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3\times(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$為完全之平方, 試證之.

解 題式$=\{(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\}\times\{(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)-(z^2-xy)(x^2-yz)-(x^2-yz)(y^2-zx)\}$, 而此第一因數,等於$(x^2+y^2+$

$z^2-yz-zx-xy)$，又 $(x^2-yz)^2-(y^2-zx)\times(z^2-xy)=x(x^3+y^3+z^3-3xyz)$，故題式當爲 $(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\{x(x^3+y^3+z^3-3xyz)+y(x^3+y^3+z^3-3xyz)+z\times(x^3+y^3+z^3-3xyz)\}=(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x+y+z)=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$.

根　　數

354. $3\sqrt{45}-\sqrt{20}+7\sqrt{5}$，試簡單之.

解　本式 $=3\sqrt{9\times5}-\sqrt{4\times5}+7\sqrt{5}=9\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}=\underline{14\sqrt{5}}$.

355. $\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-512}+\sqrt[3]{192}-7\sqrt[6]{9}$，試簡單之.

解　本式 $=2+\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{(-8)^3}+\sqrt[3]{64\times3}-7\sqrt[3]{3}=2+3\sqrt[3]{3}+8+4\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{3}=\underline{10}$.

356. $5\sqrt{8}-2\sqrt{7}$ 試以 $5\sqrt{8}+2\sqrt{7}$ 乘之.

解　$(5\sqrt{8}-2\sqrt{7})(5\sqrt{8}+2\sqrt{7})=(5\sqrt{8})^2-(2\sqrt{7})^2=(25\times8)-(4\times7)=200-28=\underline{172}$.

357. $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$，試以 $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 乘之.

解　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+5)$
$=\{\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})\}\{\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{5})\}$
$=2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=2-(8-2\sqrt{15})=2-8+2\sqrt{15}=\underline{2\sqrt{15}-6}$.

358. $2+\sqrt{3}$ 試以 $2-\sqrt{3}$ 除之.

解　$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{4-3}=\underline{7+4\sqrt{3}}$.

359. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ 試簡單之.

解　本式 $=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\underline{\frac{1}{4}\sqrt[3]{4}}$.

360. $(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{(8)^{-\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[5]{2}}{(4)^{-\frac{2}{5}}}$

解　本式 $=3^2+2^3-2\times2^2+\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{4^2}$
$=9+8-8+\sqrt[5]{2^5}=9+2=11$

361. $\sqrt{(yx+x^2)}\times\sqrt{(xz+yz)}$，試簡單之.

解　本式 $=\sqrt{x(x+y)}\times\sqrt{z(x+y)}$
$=\sqrt{xz(x+y)^2}=\underline{(x+y)\sqrt{xz}}$.

362. $\frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+x}$，試簡單之.

解　$\frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}=\frac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}}$，$\frac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}=\frac{4}{1-x}$，$\frac{4}{1-x}+\frac{4}{1+x}=\underline{\frac{8}{1-x^2}}$.

363. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 試簡單之.

解　本式 $=\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}\times\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
$=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}=\underline{\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}$.

364. 不開出其根，問 $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 與 $\sqrt{6}+2$，何者爲大.

解　$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=10+2\sqrt{21}$，$(\sqrt{6}+2)^2=10+4\sqrt{6}$，又 $(2\sqrt{21})^2=4\times21=84$，

$(4\sqrt{6})^2=96$. ∴ $\sqrt{3}+\sqrt{7}<\sqrt{6}+2$.

365. $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}-\sqrt{3}$, 試簡單之.

解 $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}-\sqrt{3}=\sqrt{\{\sqrt{3}+\sqrt{2}\}^2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}$.

366. $\sqrt[4]{(49+20\sqrt{6})}$ 試簡單之.

解 $\sqrt[4]{(49+20\sqrt{6})}=\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})^2}=\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

367. $(14+6\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}+(14-6\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}$ 試簡單之.

解 本式$=\{(3+\sqrt{5})^2\}^{\frac{3}{2}}+\{(3-\sqrt{5})^2\}^{\frac{3}{2}}=(3+\sqrt{5})^3+(3-\sqrt{5})^3=\{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})\}\{(3+\sqrt{5})^2-(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})^2\}=6\{14+6\sqrt{5}-(9-5)+14-6\sqrt{5}\}=6\times 24=144$.

368. 次式試簡單之.

$$\left\{\frac{(9^{n+\frac{1}{4}})\times\sqrt{3\times 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

解 本式$=\left\{\frac{9^{\frac{4n+1}{4}}\times 3^{\frac{n+1}{2}}}{3\times 3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\left\{\frac{3^{\frac{4n+1}{2}+\frac{n+1}{2}}}{3^{1-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{3^{\frac{5n+2}{2}}}{3^{\frac{2-n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\{3^{\frac{5n+2}{2}-\frac{2-n}{2}}\}^{\frac{1}{n}}=3^{3n\times\frac{1}{n}}=3^3=27$.

369. $\frac{\sqrt{x}}{y^{-\frac{1}{3}}}\left(\frac{\sqrt[4]{y}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)\div\frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$ 試簡單之.

解 本式$=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\times y^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{6}}\div y^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}$

$=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}\times y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{12}}y^{\frac{10}{12}}=\sqrt[12]{x^7y^{10}}$.

370. $\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=2+x^{\frac{2}{3}}$, 試證之.

解 左邊$=\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$

$=(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)-(x^{\frac{1}{3}}-1)=2+x^{\frac{2}{3}}$.

371. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ 試簡單之.

解 本題須知 $4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2$, $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$, 故題式可變化如此.

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{6}\{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}=\sqrt{2}$.

372. $x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$, 則 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ 之值如何.

解 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

$=\frac{x^2\{(x+1)^2+(x-1)^2\}}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

但 $x^2=\frac{n-1}{n+1}$, $x^2+1=\frac{2n}{n+1}$, $(x^2-1)^2=\left(\frac{-2}{n+1}\right)^2=\frac{4}{(n+1)^2}$ 故 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{4n(n-1)}{(n+1)^2}\Big/\frac{4}{(n+2)^2}=n(n-1)$.

373. $x=\frac{4mnp}{p^2+1}$, 試求

$\frac{\sqrt{2mn+x}+\sqrt{2mn-x}}{\sqrt{2mn+x}-\sqrt{2mn-x}}$ 之值.

解 $\sqrt{2mn+x}=\sqrt{\dfrac{2mnp^2+2mn+4mnp}{p^2+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2mn}(p+1)}{\sqrt{p^2+1}}$，同樣 $\sqrt{2mn-x}$

$=\dfrac{\sqrt{2mn}(p-1)}{\sqrt{p^2+1}}$．故題之分子，為

$\dfrac{2p\sqrt{2mn}}{\sqrt{p^2+1}}$．同樣其分母為 $\dfrac{2\sqrt{2mn}}{\sqrt{p^2+1}}$，

故題式之值為 p．

別解 題式 $\dfrac{(\sqrt{2mn+x}+\sqrt{2mn-x})^2}{(2mn+x)-(2mn-x)}$

$=\dfrac{4mn+2\sqrt{4m^2n^2-x^2}}{2x}=$

$\dfrac{2mn+\sqrt{4m^2n^2-x^2}}{x}$.........(1)．而

$\sqrt{4m^2n^2-x}=\dfrac{2mn(p^2-1)}{p^2+1}$，代入(1)，

得題式 $=\dfrac{2mn.2p^2}{(p^2+1)x}=\dfrac{4mnp^2}{p^2+1}\times$

$\dfrac{p^2+1}{4mnp}=p$．

374. $x=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right\}$ 之時，問此

$\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ 之值．

解 $x^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)$，$\therefore\ \sqrt{1+x^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$，故

題之分數 $=\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}(x-\sqrt{1+x^2})}{-1}$．

故所求之值 $=2a(1+x^2)-2ax\sqrt{1+x^2}$

$=2a.\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)-2a.\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$

$=2a\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{2}\right)=a+b$．

375. 試求 $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 之平方根．

解 $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$，$\therefore\ x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$，$\therefore\ x+y+z=6$............(1)．$xy=2$，$xz=3$，$yz=6$．自此三方程式，得 $x=1$，$y=2$，$z=3$，此各值適當於(1)，故所求之平方根，為 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$．

376. 試求 $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{(ab)}$ 之平方根．

解 $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{(ab)}=(a-b)^2-4(a-b)\sqrt{(ab)}+4ab=\{(a-b)-2\sqrt{(ab)}\}^2$．

$\therefore$ 題式之平方根，為 $a-b-2\sqrt{(ab)}$．

377. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$，則此分數，等於 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}$ 試證之．

解 將各分數之值，以 k 表之，則 $y+z=(b-c)k$．故 $(y+z)+(z+x)+(x+y)$

$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}k$，

即 $2(x+y+z)=0\times k$　$\therefore\ x+y+z=0$，

又 $k^2=\dfrac{(y+z)^2}{(b-c)^2}=\dfrac{(z+x)^2}{(c-a)^2}=\dfrac{(x+y)^2}{(a-b)^2}$

$=\dfrac{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$

$=\dfrac{x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$，

$\therefore\ k=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}$．

378. $1-\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$

$=\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$ 試證之．

解 $1-\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$

$=1-\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b)(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}=$

$1-\frac{ab^{-1}+a^{-1}b}{ab+a^{-1}b^{-1}}=\frac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

$=\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

379. $\sqrt[3]{90+34\sqrt{7}}+\sqrt[3]{90-34\sqrt{7}}$ 試化為最簡.

解 $\sqrt[3]{90+34\sqrt{7}}=\sqrt[3]{(3+\sqrt{7})^3}=3+\sqrt{7}$. 同樣 $\sqrt[3]{90-34\sqrt{7}}=3-\sqrt{7}$, 故題式最簡之,則為 $3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}=6$.

別解 $\sqrt[3]{90+34\sqrt{7}}=x+\sqrt{y}$, $\sqrt[3]{90-34\sqrt{7}}=x-\sqrt{y}$, 則題式為 $x+\sqrt{y}+x-\sqrt{y}=2x$. 若將上二式相乘,則 $x^2-y=\sqrt[3]{90^2-(34\sqrt{7})^2}=2$. 又將上之第一式,作立方,則 $90+34\sqrt{7}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$, 故 $x^3+3xy=90$, 或代入自前式所得之 $y=x^2-2$, 則得次式, $2x^3-3x-15=0$, 卽 $(x-3)(2x^2+6x+15)=0$, 故 $x=3$, 或 $2x^2+6x+15=0$, 自此末式得 x 之值為虛數,故捨之,則得 $x=3$. 故 $2x=6$ 為所求之值.

380. 有一有理數,與二次根數之和,所成之二項式,其式之立方,以8除之,則等於原式與其有理數之和,問原之二項式如何.

解 將一有理數為 x, 二次根數為 $\sqrt{y}$, 則依題意,可得次之方程式.

$\frac{(x+\sqrt{y})^3}{8}=2x+\sqrt{y}$. 或改書之,為 $x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}=16x+8\sqrt{y}$, 則 $(x^3+3xy-16x)+(3x^2+y-8)\sqrt{y}=0$,

故 $x^2+3y-16=0$ ……………………(1),

$3x^2+y-8=0$ ……………………(2),

自(2)將 y 之值,以 x 及已知數表之,得 $y=8-3x^2$ 代入(1)式,約之,則 $x^2-1=0$. 故 $x=\pm1$, 因而 $y=\sqrt{5}$, 故所求之二項式為 $\pm1+\sqrt{5}$.

381. 自 n 個數字所成之數,問其乘根數字[整數位]之數.

解 題數之 r 乘根為 a, 其整數位數字之數為 x, 則 $10^x>a\geqq10^{x-1}$, ∴ $a^r<10^{rx}$, 而 $a^r\geqq10^{rx-r}$. ∴ $n\leqq rx$, 但 $n\geqq rx-r+1$, ∴ $x\geqq\frac{n}{r}$, 但 $x\leqq\frac{n+r-1}{r}$. 故在 $n+r-1$ 之 r, 若其最大整數倍為 qr 時, 則知 $x=q$.

一元二次方程式

382. $x^2=25$ 試解之.

解 $x=\pm\sqrt{25}=\pm5$.

別解 $x^2-25=0$, ∴ $(x-5)(x+5)=0$, ∴ $x-5=0$, ∴ $x=5$, 或 $x+5=0$, ∴ $x=-5$.

383. $2(x^2-7)+3(x^2-11)=33$, 試解之.

解 $2x^2-14+3x^2-33=33$, ∴ $5x^2=80$, ∴ $x^2=16$, ∴ $x=\pm4$.

384. $x^2-3x+2=0$, 試解之.

解 $(x-2)(x-1)=0$, ∴ $x-2=0$, ∴ $x=2$, 或 $x-1=0$, ∴ $x=1$.

385. $x^2+5x=14$, 試解之.

解 $x^2+5x-14=0$, $\therefore (x-2)(x+7)=0$,

$\therefore x=2$, 或 $x=-7$.

386. $6x^2-19x+10=0$, 試解之.

解 $(2x-5)(3x-2)=0$, $\therefore 2x-5=0$,

$\therefore x=\frac{5}{2}$, 或 $3x-2=0$, $\therefore x=\frac{2}{3}$.

387. 求二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根, 試記其公式.

答 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

388. $2x^2-5x+1=0$, 試解之.

解 自387題之公式, 得 $x=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}$ $=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$.

389. $x^2-(a-m)x=(a-1)(m-1)$, 試解之.

解 $x^2-(a-m)x-(a-1)(m-1)=0$.

$\therefore \{x-(a-1)\}\{x+(m-1)\}=0$, $\therefore x-(a-1)=0$. $\therefore x=a-1$. 或 $x+m-1=0$,

$\therefore x=1-m$.

390. $(a^2-b^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x$ 試解之.

解 $(a^2-b^2)x^2+(a^2-b^2)=2(a^2+b^2)x$,

$\therefore (a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$,

$\therefore \{(a+b)x-(a-b)\}\{(a-b)x-(a+b)\}=0$,

$\therefore (a+b)x-(a-b)=0$, $\therefore x=\frac{a-b}{a+b}$,

或 $(a-b)x-(a+b)=0$, $\therefore x=\frac{a+b}{a-b}$.

391. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$, 試解之.

解 將題之方程式變形, 則 $\{(a-b)x-(c-a)\}(x-1)=0$, 故 $x=1$, 及 $x=\frac{c-a}{a-b}$.

392. $x^2-(2+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0$, 試解之.

解 將題之方程式變形, 則 $(x-2)(x-\sqrt{2})=0$, 故 $x-2=0$, 或 $x-\sqrt{2}=0$, 即 $x=2$, 或 $x=\sqrt{2}$.

393. $mx^2-1=\frac{x(m^3-n^2)}{mn}$, 試解之.

解 去分母移項, 而 $m^2nx^2-(m^3-n^2)x-mn=0$, 故 $(m^2x+n)(nx-m)=0$,

故 $m^2x+n=0$, 或 $nx-m=0$, 即

$x=-\frac{n}{m^2}$, 或 $\frac{m}{n}$.

394. $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$, 試解之.

解 [假定 $x-1\neq 0$] 去分母, 則 $5x+7=(x-1)(3x+2)$, $\therefore 5x+7=3x^2-x-2$,

$\therefore 3x^2-6x-9=0$, $\therefore x^2-2x-3=0$,

$\therefore (x-3)(x+1)=0$, $\therefore x-3=0$,

$\therefore x=3$, 或 $x+1=0$, $\therefore x=-1$.

395. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{9}{5}$, 試解之.

解 [假定 $x-1\neq 0$, $x+2\neq 0$] 去分母, 則 $5(x+1)(x+2)-5(x-2)(x-1)=9(x-1)(x+2)$. $\therefore 9x^2-21x-18=0$, $\therefore 3x^2-7x-6=0$, $\therefore (3x+2)(x-3)=0$, $\therefore 3x+2=0$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$, 或 $x-3=0$, $\therefore x=3$.

396. $\frac{3x}{x-2}-\frac{4}{x+3}+\frac{4}{2-x}=0$, 試解之.

解 $\frac{3x}{x-2}-\frac{4}{x-2}-\frac{4}{x+3}=0$,

即 $\frac{3x-4}{x-2}-\frac{4}{x+3}=0$, 假定 $x-2\neq 0$, $x+3\neq 0$, 而去其分母, 則 $(3x-4)(x+3)-4(x-2)=0$, $\therefore (3x+4)(x-1)=0$,

$\therefore 3x+4=0$, $\therefore x=-1\frac{1}{3}$, 或

$x-1=0$, $\therefore x=1$.

397. $\frac{x}{x-3}-\frac{x-3}{x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x+3}{x}=\frac{2}{3}$，試解之.

解 將上方程式,稍變其形,而為 $1+\frac{3}{x-3}-1+\frac{3}{x}+1-\frac{3}{x+3}-1-\frac{3}{x}=\frac{2}{3}$，∴ $\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{3}$，假定 $x-3\neq0$, $x+3\neq0$, 而去分母,則 $9(x+3)-9(x-3)=2(x^2-9)$, 解之,而得 $x=6$ 或 $x=-6$.

398. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}$，試解之.

解 $\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1=\frac{a-c}{x+a-c}-1+\frac{b+c}{x+b+c}-1$, ∴ $\frac{-x}{x+a}+\frac{-x}{x+b}=\frac{-x}{x+a-c}+\frac{-x}{x+b+c}$, 預置 $x=0$ 為一根,兩邊以 $-x$ 除之,即 $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a-c}+\frac{1}{x+b+c}$, ∴ $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a-c}+\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+b+c}=0$,

即 $\frac{-c}{(x+a)(x+a-c)}+\frac{c}{(x+b)(x+b+c)}=0$. 兩邊以 c 除之,而假定分母之因數不為零,而去其分母,則 $-(x+b)(x+b+c)+(x+a)(x+a-c)=0$, 解之 $x=\frac{-(a+b)}{2}$. 故所求之根,為前預置之根 0 及 $-\frac{a+b}{2}$.

399. $\frac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\frac{1}{x}$，試解之.

解 左邊 $x-8+\frac{24}{x+3}$，故 $x-8+\frac{24}{x+3}=x-3+\frac{1}{x}$, ∴ $\frac{24}{x+3}-5=\frac{1}{x}$，假定 $x\neq0$, $x+3\neq0$ 去分母而簡單之,則 $(5x-3)(x-1)=0$, ∴ $x=\frac{3}{5}$，或 1.

400. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}$，試解之.

解 將 $\frac{x+2}{x-2}=p$, 則此方程式為 $p-\frac{1}{p}=\frac{5}{6}$, ∴ $6p^2-5p-6=0$, ∴ $(2p-3)(3p+2)=0$, ∴ $p=\frac{3}{2}$，或 $-\frac{2}{3}$，自 $\frac{x+2}{x-2}=\frac{3}{2}$，得 $x=10$, 又自 $\frac{x+2}{x-2}=-\frac{2}{3}$，得 $x=-\frac{2}{5}$.

401. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$ 試解之.

解 $\frac{x+3}{x+2}-1+\frac{x-3}{x-2}-1=\frac{2x-3}{x-1}-2$, $\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x-2}=\frac{-1}{x-1}$, ∴ $\frac{-4}{(x+2)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}$，假定 $x+2\neq0$, $x-2\neq0$, $x-1\neq0$, 而去分母, $4(x-1)=(x+2)(x-2)$, $4x-4=x^2-4$, ∴ $x(x-4)=0$, ∴ $x=0$, 或 $x=4$.

402. $\frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=\frac{a}{a-2cx}$，試解之.

解 $1+\frac{2cx}{a+c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=1+\frac{2cx}{a-2cx}$，故 $\frac{a+x}{x}=2cx\times\left(\frac{1}{a-2cx}-\frac{1}{a+c(a-x)}\right)$，即

$\dfrac{a+x}{x}=2cx\times\dfrac{c(a+x)}{(a-2cx)\{a+c(a-x)\}}$.

$\therefore\ a+x=0,\ \therefore\ x=-a.$ 又

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2c^2x}{(a-2cx)\{a+c(a-x)\}}$，由是

$x=\dfrac{a(1+c)}{c(2c+3)}$.

403. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$，試解之.

解 將題改書之，則 $x+1+\dfrac{1}{x+1}+x+4+\dfrac{4}{x+4}=x+2+\dfrac{2}{x+2}+x+3+\dfrac{3}{x+3}$，故 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{4}{x+4}$，或 $\dfrac{-x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{-x}{(x+3)(x+4)}$，故 $x=0$，及

$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$ 將此式簡單之，則 $2x=-5$，故 $x=-2\frac{1}{2}$. 故所求之根爲 0，及 $-2\frac{1}{2}$.

404. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$ 試解之.

解 將題之方程式移項，則 $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{x-b}{a}-\dfrac{b}{x-a}=0$，或 $\dfrac{x^2-(a+b)x}{b(x-b)}+\dfrac{x^2-(a+b)x}{a(x-a)}=0$，故 $x^2-(a+b)x=0$，從此可得 $x=0$ 及 $a+b$ 之根，而其他之根，可自 $\dfrac{1}{b(x-b)}+\dfrac{1}{a(x-a)}=0$ 得之，卽將 $x\neq a$，$x\neq b$ 而去其分母，而得 $a(x-a)+b(x-b)=0$，卽 $(a+b)x=a^2+b^2$，$\therefore\ x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$，故所求之根爲 $0,\ a+b,\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

405. $\dfrac{x^2+4x-6}{(2x-7)(x-2)}+\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{2x^2-4x+12}{(x-1)(2x-7)}=0$ 試解之.

解 將題之方程式變形，則

$$\frac{x^2+4x-6}{(2x-7)(x-2)}+\frac{2x^3-6x^2+7x-3}{(x-1)(x-2)(2x-7)}=0,$$

但 $2x^3-6x^2+7x-3=2x^3-2x^2-4x^2+4x+3x-3=2x^2(x-1)-4x(x-1)+3(x-1)$，卽 $(x-1)(2x^2-4x+3)$，故 $\dfrac{x^2+4x-6}{(2x-7)(x-2)}+\dfrac{2x^2-4x+3}{(2x-7)(x-2)}=0$，卽 $\dfrac{3x^2-3}{(2x-7)(x-2)}=0$. 故 $3x^2-3=0$，$\therefore\ x^2=1$，故 $x=\pm1$.

406. $\dfrac{a(b+c)}{a-x}+\dfrac{b(c+a)}{b-x}+\dfrac{c(a+b)}{c-x}=\dfrac{bc+ca+ab}{x}$，試解之.

解 將題之方程式變形，則 $\dfrac{a(b+c)}{a-x}-\dfrac{bc}{x}+\dfrac{b(c+a)}{b-x}-\dfrac{ca}{x}+\dfrac{c(a+b)}{c-x}-\dfrac{ab}{x}=0$，

或 $\dfrac{(bc+ca+ab)x-abc}{x(a-x)}+\dfrac{(bc+ca+ab)x-abc}{x(b-x)}+\dfrac{(bc+ca+ab)x-abc}{x(c-x)}=0$. 卽 $\{(bc+ca+ab)x-abc\}\left\{\dfrac{1}{x(a-x)}+\dfrac{1}{x(b-x)}+\dfrac{1}{x(c-x)}\right\}=0$，故 $(bc+ca+ab)x-abc=0$

…(1), 及 $\frac{1}{x(a-x)}+\frac{1}{x(b-x)}+\frac{1}{x(c-x)}=0$…(2), 自(1)得 $x=\frac{abc}{bc+ca+ab}$. 次設 $x\neq0$, $a-x\neq0$, $b-x\neq0$, $c-x\neq0$, 以(2)乘 $x(a-x)(b-x)(c-x)$ 而簡單之, 則爲 $3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$. 故 $x=\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$.

【注意】 $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$ 故 x 之值爲實數, 明矣.

407. $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\frac{cx}{ab}$ 試解之.

【解】 自題式, 而 $\frac{4ax}{(a-x)^2}=\frac{cx}{ab}$, 設 $a-x\neq0$, 去母分, 則 $4a^2bx=cx(a-x)^2$, 故 $x=0$, 或 $4a^2b=c(a-x)^2$, 自後式而 $x=a\left(1\pm2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$.

408. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x$ 試解之.

【解】 將題式變形, 則 $x-1+\frac{x}{x-1}+x+1+\frac{-x}{x+1}=2x$, 或 $x\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right\}=0$. 故 $x=0$, 或 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$, 故 $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}$, 此方程式一望而知其 x 之有限值不成立.

【別解】 $x-1\neq0$, $x+1\neq0$ 去分母, 則 $x^3+1+x^3-1=2x(x^2-1)$, 即 $2x=0$, 故 $x=0$.

409. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}$ 試解之.

【解】 $\frac{x+a}{x-a}+1+\frac{x+b}{x-b}+1=\frac{x-a}{x+a}+1+\frac{x-b}{x+b}+1$, $\frac{2x}{x-a}+\frac{2x}{x-b}=\frac{2x}{x+a}+\frac{2x}{x+b}$. 預置 $2x=0$, 即 $x=0$ 之根, 而以 $2x$ 除之, 則 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}$, ∴ $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x-b}$. ∴ $\frac{2a}{x^2-a^2}=\frac{-2b}{x^2-b^2}$, ∴ $a(x^2-b^2)=-b(x^2-a^2)$. ∴ $x=\pm\sqrt{ab}$. 故所求得之根, 爲 $0, \pm\sqrt{ab}$ 之三個.

【別解】 將題之方程式變形, 則 $1+\frac{2a}{x-a}+1+\frac{2b}{x-b}=1-\frac{2a}{x+a}+1-\frac{2b}{x+b}$, 故 $a\left\{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}\right\}=-b\times\left\{\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x+b}\right\}$, 或 $\frac{2ax}{x^2-a^2}=\frac{-2bx}{x^2-b^2}$, 故 $x=0$, 或 $\frac{a}{x^2-a^2}=\frac{-b}{x^2-b^2}$.

410. $\frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\cdot\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\cdot\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}$, 試解之.

【解】 將題之方程式變形, 則

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\cdot\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\cdot\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13},$$

即 $\frac{1}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{(x+6)(x+8)}=0$, 因而 $\frac{1}{(x+2)(x-4)}-\frac{1}{(x+6)(x-8)}=\frac{1}{(x+6)(x-8)}-$

$\frac{1}{(x+4)(x-6)}$，即 $\frac{40}{(x+2)(x-4)(x+6)(x-8)}$
$=\frac{-24}{(x+4)(x+6)(x-6)(x-8)}$，故將右邊移至左邊，化為一分數，則
$\frac{5(x+4)(x-6)+3(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-16)(x^2-36)(x-8)}=0$，故
$5(x^2-2x-24)+3(x^2-2x-8)=0$，因而
$x^2-2x-18=0$，故 $x=1\pm\sqrt{1+18}$
$=1\pm\sqrt{19}$.

411. $\frac{1}{x+a+\frac{1}{x+b}}=\frac{1}{x-a+\frac{1}{x-b}}$ 試解之.

解 $x+a+\frac{1}{x+b}=x-a+\frac{1}{x-b}$，

故 $2a+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x-b}$，乃假定 $x+b\neq0$，$x-b\neq0$，而以 $(x+b)(x-b)$ 乘之，則
$2a(x^2-b^2)+x-b=x+b$，
∴ $x^2=b^2+\frac{b}{a}$，$x=\pm\sqrt{\left(b^2+\frac{b}{a}\right)}$.

412. $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}$

試解之.

解 $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}-1$
$=\frac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}-1$，∴ $\frac{2(a+b)x}{(x-a)(x-b)}$
$=\frac{2m(a+b)x}{(x-ma)(x-mb)}$，∴ $x=0$，或 $(x-ma)\times$
$(x-mb)=m(x-a)(x-b)$，∴ $x=\pm\sqrt{mab}$.

413. $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=$
x^2 試解之.

解 此方程式 $x=a$，$x=b$，則適當明矣．故 a，b 為此方程式之根，而此為二次方程式，故二根以外無他根.

414. $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$
$+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$，試解之.

解 $x=a$，$x=b$，$x=c$，適於此方程式明矣，因此為 x 之二次方程式，而適當於方程式之 x 之值有三個，故為恆等式.

準二次方程式

415. $x^3-2x+1=0$ 知其一根為1，而求其他一根.

解 因知 $x=1$ 為 $x^3-2x+1=0$ 之一根，故 $x-1$ 必為 x^3-2x+1 之一因數，乃以 $(x-1)$ 除題之方程式，而知 $(x-1)(x^2+x-1)=0$，∴ $x^2+x-1=0$，∴ $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．即知所設方程式之根除1之外，有 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 之二根.

416. $x^4-2x^3+x^2=36$，試解之.

解 $x^2(x^2-2x+1)-36=0$，即 $x^2(x-1)^2-6^2=0$，即 $\{x(x-1)+6\}\{x(x-1)-6\}=0$，
∴ $(x^2-x+6)(x^2-x-6)=0$，∴ $x^2-x+6=0$，∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{-23}}{2}$，或 $x^2-x-6=0$，
即 $(x-3)(x+2)=0$，∴ $x=3$，或 -2.

417. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$，試解之.

解 今將 x^2+x 以 p 表之，則上方程式為 $(p+1)(p+2)=12$，∴ $p^2+3p+2=12$，
∴ $(p-2)(p+5)=0$，∴ $p=2$，或 -5，即 $x^2+x=2$，或 -5，∴ 自 $x^2+x-2=0$，而得 $x=1$，$x=-2$，又自 $x^2+x+5=0$，而得

$x=\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}$，故題之方程式之根，為$1$，$-2$，$\frac{-1+\sqrt{-19}}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{19}}{2}$.

418. $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$試解之.

【解】於兩邊加2，則$x^2+2+\frac{1}{x^2}=a^2+2+\frac{1}{a^2}$，即$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(a+\frac{1}{x}\right)^2$，∴ $x+\frac{1}{x}=\pm\left(a+\frac{1}{a}\right)$……(1)，又兩邊減2，則$x^2-2+\frac{1}{x^2}=a^2-2+\frac{1}{a^2}$，∴ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$，∴ $x-\frac{1}{x}=\pm\left(a-\frac{1}{a}\right)$……(2)，將(1)，(2)相加，則$2x=\pm 2a$，或$\pm\frac{2}{a}$，∴ $x=\pm a$，或$\pm\frac{1}{a}$，故此方程式之根，為a，$-a$，$\frac{1}{a}$，$-\frac{1}{a}$.

【別解】自題之方程式$x^2-a^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}$，即$x^2-a^2=\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$，故$x^2-a^2=0$，及$1=\frac{1}{a^2x^2}$，故$x^2=a^2$，及$x^2=\frac{1}{a^2}$，故$x=\pm a$及$x=\pm\frac{1}{a}$.

419. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=\frac{5}{2}$，試解之.

【解】$\frac{x^2}{x+1}=p$，則上方程式為$p+\frac{1}{p}=\frac{5}{2}$，∴ $2p^2-5p+2=0$，∴ $(2p-1)(p-2)=0$，∴ $p=\frac{1}{2}$，或2. 即$\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$，或2，∴ $\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$，∴ $2x^2-x-1=0$，∴ $(2x+1)(x-1)=0$，∴ $x=-\frac{1}{2}$，或1. 又自$\frac{x^2}{x+1}=2$，而$x^2-2x-2=0$，∴ $x=1\pm\sqrt{3}$，故所設方程式之根，為$-\frac{1}{2}$，1，$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$.

420. $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$，試解之.

【解】各項以x^2除之，則$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$. 即$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0$，∴ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$，今將$x+\frac{1}{x}=p$，則$p^2+p-6=0$，∴ $(p-2)\times(p+3)=0$，∴ $p-2$，或$p=-3$ 即$x+\frac{1}{x}=2$，∴ $x^2-2x+1=0$，∴ $x=1$，或$x+\frac{1}{x}=-3$，∴ $x^2+3x+1=0$，∴ $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

【注意】此等方程式若欲知其詳，須觀第一門逆數方程式之條.

421. 解 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 之方法如何.

【解】各項以x^2除之，則$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$，∴ $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$，乃將$x+\frac{1}{x}=p$則$a(p^2-2)+bp+c=0$，解此式，則得$p$之值，代入$x+\frac{1}{x}=p$之$p$，而得$x$之值.

【注意】參看第一門逆數方程式之條.

422. 解$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$之方法如何.

【解】各項以x^2除之，則$ax^2+bx+c-\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=1$，∴ $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0$，乃將$x-\frac{1}{x}=p$則$a(p^2+2)+bp$

$+c=0$解此式,則得p之值,代入於$x-\frac{1}{x}=p$之p,而得x之值.

注意 參看第一門逆數方程式之條.

423. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$,試解之.

解 由觀察知$x=1$, $x=2$,適當於題之方程式,由除法得$(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$,故所設方程式除$x=1$, $x=2$.二根之外,有解$x^2+5x+2=0$而得之根$\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

424. $x^3=1$,試解之.

解 $x^3-1=0$, $\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$, $\therefore x-1=0$, $\therefore x=1$. 或$x^2+x+1=0$, $\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{3}$,

注意 1之立方根,有實數1及虛數$\frac{1}{2}\times(-1\pm\sqrt{-3})$之三個,試觀第一門立方根之條.

425. $x^4=1$,試解之.

解 $x^4-1=0$, $\therefore (x^2-1)(x^2+1)=0$, $\therefore x=\pm 1$, 又$x^2=-1$, $\therefore x=\pm\sqrt{-1}$.

注意 1之四乘根有$+1$, -1, $+\sqrt{-1}$. $-\sqrt{-1}$之四個.

426. $x^5=1$,試解之.

解 $x^5-1=0$, $\therefore (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$, $\therefore x-1=0$, $\therefore x=1$, 又$x^4+x^3+x^2+x+1=0$,各項以x^2除之,則$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $\therefore \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$,今將$x+\frac{1}{x}=p$,則$p^2-2+p+1=0$, $\therefore p^2+p-1=0$ $\therefore p=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,因而$x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,或$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,自此得$x$之值,即

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10-2\sqrt{5}}.$$

或 $$\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10+2\sqrt{5}}.$$

427. 試求$x^6-19x^3=216$之實數之根.

解 $(x^3-27)(x^3+8)=0$, $\therefore x^3-27=0$…………(1), $x^3+8=0$…………(2),自(1)而得$(x-3)(x^2+3x+9)=0$,自此第一因數,得$x=3$,若自第二因數爲0而得之根,即爲虛數.自(2)而得$(x+2)(x^2-2x+4)=0$,自此第一因數得$x=-2$,若自第二因數爲0而得之根,即爲虛數,故實數之根僅3及-2之二根.

428. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$試解之.

解 將所設方程式變形,則爲$16(x^2+3x)(x^2+3x+2)=9$,將$x^2+3x=X$則上方程式如次, $16X^2+32X-9=0$,故$X=\frac{-16\pm\sqrt{16^2+16\times 9}}{16}=\frac{-16\pm 20}{16}$,即$X=\frac{1}{4}$,或$X=-\frac{9}{4}$.故$4x^2+12x-1=0$…………(1). $4x^2+12x+9=0$…………(2),自(1)得$x=\frac{-6\pm\sqrt{40}}{4}=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{10})$.自(2)得$x=-\frac{3}{2}$.

429. $x^2-x+\frac{72}{x^2-x}=18$,試解之.

解 將$x^2-x=X$,則所設方程式,可如次書之. $X+\frac{72}{X}=18$, $\therefore X^2-18X+72=0$, $\therefore (X-12)(X-6)=0$, $\therefore X=12$,或

6. 故若 $x^2-x=12$, 則 $(x+3)(x-4)=0$, $\therefore\ x=-3$, 或 4. 又若 $X=6$, 則 $x^2-x=6$, $\therefore\ (x-3)(x+2)=0$, $\therefore\ x=3$, 或 -2, 故所設方程式, 有 $-3, 4, 3, -2$ 之四根.

430. $x(x-2a)=\dfrac{8a^4}{x^2-2ax}+7a^2$ 試解之.

圖 $x(x-2a)=X$, 則 $X=\dfrac{8a^4}{X}+7a^2$, $\therefore\ X^2-7a^2X-8a^4=0$, $\therefore\ (X-8a^2)(X+a^2)=0$ $\therefore X=8a^2$, 或 $-a^2$. 若 $X=8a^2$, 則 $x(x-2a)=8a^2$, $\therefore\ (x-4a)(x+2a)=0$, $\therefore\ x=4a$, 或 $-2a$. 又若 $X=-a^2$, 則 $x(x-2a)=-a^2$, $\therefore\ (x-a)^2=0$, $\therefore\ x=a$, 故原方程式有 $4a, -2a, a, a$ 之四根.

431. $a^4\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4$, 試解之.

圖 此方程式以 $x=a$, $x=b$. $x=c$, 則適當明矣, 而因此方程式 x^3 之係數爲 0, 故他一根爲 $-(a+b+c)$, 又因此方程式爲四次, 故所求之根, 爲 $a, b, c, -(a+b+c)$.

432. $8x^3+16x=9$ 試解之.

圖 由視察知 $x=\dfrac{1}{2}$, 適當於所設方程式, 故由除法, 得 $(2x-1)(4x^2+2x+9)=0$, 故他二根卽解 $4x^2+2x+9=0$ 而得之 $\dfrac{1}{4}(-1\pm\sqrt{35})$. 故本題之方程式, 有 $\dfrac{1}{2}$ 及 $\dfrac{1}{4}(-1\pm\sqrt{-35})$ 之三根.

433. $(x-2)(x-3)(x-4)=1.2.3$, 試解之.

圖 $x=5$ 適當於所設方程式明矣. 乃行乘法得 $x^3-9x^2+26x-30=0$, 卽 $x^3-5^3-9(x^2-5^2)+26(x-5)=0$, $\therefore\ (x-5)\times\{x^2+5x+25-9(x+5)+26\}=0$, $\therefore$ 5 以外之根, 可解 $x^2-4x+6=0$ 而得之, 卽 $x=2\pm\sqrt{-2}$.

434. $x(x-1)(x-2)(x-3)=9.8.7.6$ 試解之.

圖 所設方程式以 $x=-9$, $x=6$ 適當明矣, 故行除法, 得 $(x-9)(x+6)(x^2-3x+56)=0$, 此外之根, 可解 $x^2-3x+56=0$ 而得之, 卽 $\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{-215})$.

435. $x(x^2-2)=m(x^2+2mx+2)$ 試解之.

圖 所設方程式爲 $x^3-mx^2-2(m^2+1)x-2m=0$, 其以 $x=-m$ 適當明矣. 卽 $-m^3-m^3+2(m^2+1)m-2m=0$, 將此式減前式, 而得 $x^3+m^3-m(x^2-m^2)-2\times(m^2+1)(x+m)=0$, 以 $x+m$ 除之, 而得 $x^2-mx+m^2-m(x-m)-2(m^2+1)=0$. 故 $x^2-2mx-2=0$, $\therefore\ x=m\pm\sqrt{m^2+2}$.

436. $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3\times(a-b)^3=0$, 試解之.

圖 所設方程式, 以 $x=a$, $x=b$, $x=c$ 適當明矣, 而此爲三次式, 故此外無他根.

437. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$, 試解之.

圖 $(a-x)^3+(b-x)^3=\{(a-x)+(b-x)\}^3$, $\therefore\ 3(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$, 故所求之根, 爲 $a, b, \dfrac{1}{2}(a+b)$.

438. $(x+a)^4+(x+b)^4=17(a-b)^4$, 試解之.

圖 $x=y-\dfrac{1}{2}(a+b)$, 則題之方程式爲

$\left\{y+\frac{1}{2}(a-b)\right\}^4+\left\{y-\frac{1}{2}(a-b)\right\}^4=17(a-b)^4$, 故 $2y^4+3y^2(a-b)^2+\frac{1}{8}(a-b)^4=17\times(a-b)^4$, 卽 $16y^4+24(a-b)^2y^2-135(a-b)^4=0$, $\therefore\ \{4y^2-9(a-b)^2\}\{4y^2+15(a-b)^2\}=0$ 因而 $y=\pm\frac{3}{2}(a-b)$. 故 $x=a-2b$, 或 $x=b-2a$. 又 $y=\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-15}$,

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}\left\{-(a+b)\pm(a-b)\sqrt{-15}\right\}.$$

439. $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$, 試解之.

圖 $(a-x)^4+(b-x)^4=\{(a-x)+(b-x)\}^4$ 故 $(a-x)(b-x)\{4(a-x)^2+6(a-x)(b-x)+4(b-x)^2\}=0$, 故所求之根爲 a, b, 及解 $4(a-x)^2+6(a-x)(b-x)+4(b-x)^2=0$ 而得之根, 卽 $\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{14}(a-b)\sqrt{-7}$.

440. $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5$, 試解之.

圖 於 $X^5+Y^5=(X+Y)(X^4-X^3Y+X^2\times Y^2-XY^3+Y^4)$ 式中, 若 $X=a-x$, $Y=x-b$, 則所設方程式如次.

$(a-x+x-b)\{(a-x)^4-(a-x)^3(x-b)+(a-x)^2(x-b)^2-(a-x)(x-b)^3+(x-b)^4\}=(a-b)^5$, 或 $(a-x)^4-(a-x)^3(x-b)+(a-x)^2(x-b)^2-(a-x)(x-b)^3+(x-b)^4-(a-b)^4=0$, 由觀察知上方程式之根爲 a, b, 故以 $(x-a)(x-b)$ 除上方程式, 且簡單之, 則 $x^2-(a+b)x+(a^2+b^2-ab)=0$, 故 $x=\frac{1}{2}\{(a+b)\pm(a-b)\sqrt{-3}\}$, 故所求之根, 爲 a, b, 及 $\frac{1}{2}\{(a+b)\pm(a-b)\sqrt{-3}\}$ 之四個.

441. $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$, 試解之.

圖 $(a-x)^5+(b-x)^5=\{(a-x)+(b-x)\}^5$
$=(a-x)^5+5(a-x)^4(b-x)+10(a-x)^3(b-x)^2+10(a-x)^2(b-x)^3+5(a-x)(b-x)^4+(b-x)^5$, 故 $5(a-x)(b-x)[(a-x)^3+(b-x)^3+2(a-x)(b-x)(a+b-2x)]=0$, 卽 $(a-x)(b-x)(a+b-2x)[(a-x)^2+(a-x)(b-x)+(b-x)^2]=0$, 故所求之根, 爲 a, b, $\frac{1}{2}(a+b)$, 及 $3x^2-3(a+b)x+a^2+ab+b^2=0$ 之根, 卽 $\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{6}(a-b)\sqrt{-3}$.

442. $(x^2-a^2)(x+a)b+(a^2-b^2)(a+b)x+(b^2-x^2)(b+x)a=0$, 試解之.

圖 $x=a$ 適當於所設方程式明矣. 乃將原方程式變形, 而爲 $x^3-(a^2+ab+b^2)x+ab(a+b)=0$, 又 $a^3-(a^2+ab+b^2)a+ab(a+b)=0$, 相減 $x^3-a^3-(a^2+ab+b^2)\times(x-a)=0$, 以 $x-a$ 除之, 而 $x^2+ax+a^2-(a^2+ab+b^2)=0$, 故 $x=b$, 又爲其一根明矣. 因而 $x^2-b^2+a(x-b)=0$, 以 $x-b$ 除之, 而得 $x+b+a=0$, $\therefore\ x=-(a+b)$ 故所求之根, 爲 a, b, $-(a+b)$.

443. $x^4+(1-x)^4=a^4$ 試解之.

圖 因 $x+(1-x)=1$………(1), 四乘之, 則 $x^4+4x^3(1-x)+6x^2(1-x)^2+4x(1-x)^3+(1-x)^4=1$, 代入題式 $2x(1-x)\{2x^2+3x(1-x)+2(1-x)^2\}=1-a^4$………(2), 又將 (1) 二乘之, $x^2+2x(1-x)+(1-x)^2=1$, $\therefore$ $2x^2+3x(1-x)+2(1-x)^2=2-x(1-x)$, 代入

(2), 而 $2x(1-x)\{2-x(1-x)\}=1-a^4$, 故若 $x(1-x)$ 代之以X, 則 $2X(2-X)=1-a^4$, $\therefore\ 4X^2-8X=-2+2a^4$, 即 $(2X-2)^2=2+2a^4$, $\therefore\ X=\frac{1}{2}\{2\pm\sqrt{2+2a^4}\}$ 即 $x(1-x)=\frac{1}{2}\left\{2\pm\sqrt{2+2a^4}\right\}$ 解之, 得

$$x=\frac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{-3\pm2\sqrt{2+2a^4}}\right\}$$

444. $2^{x+1}+4^x=80$, 試解之.

解 題式 $2^{x+1}+2^{2x}=80$, 即 $2.2^x+2^{2x}=80$, $\therefore\ 2^{2x}+2\times2^x+1=81$, $\therefore\ 2^x+1=\pm9$, $\therefore\ 2^x=8$ 或 -10, 故 $x=3$. 其餘之一爲不能.

445. $x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0$ 試解之.

解 $x(x^2+px+p-1)+\frac{x+p-1}{p-1}=0$, 即 $x\left\{x^2-1+p(x+1)\right\}+\frac{x+p-1}{p-1}=0$, 即 $x(x+1)(x-1+p)\ \frac{x+p-1}{p-1}=0$, 即 $(x+p-1)\left\{x(x+1)+\frac{1}{p-1}\right\}=0$. 故 $x+p-1=0$, 或 $x^2+x+\frac{1}{p-1}=0$,

$\therefore\ x=1-p$, 及 $x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{p-5}{p-1}}\right)$.

446. $abx(x+a+b)^3-(ax+bx+ab)^3=0$, 試解之.

解 題式可書爲 $(x^2-ab)(a^2-bx)(b^2-ax)=0$, 故其根爲 $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{a}$ 及 $\pm\sqrt{ab}$.

447. $abcx(x+a+b+c)^2-(xbc+xca+xab+abc)^2=0$, 試解之.

解 題式爲 $x^3abc-x^2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+xabc(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2c^2=0$, 即 $(ax-bc)(bx-ca)(cx-ab)=0$,

故 $x=\frac{bc}{a}$, 或 $x=\frac{ca}{b}$, 或 $x=\frac{ab}{c}$.

448. $\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0$, 試解之.

解 $\frac{2x^2-2x-16}{(x^2+11x-8)(x^2-13x-8)}+\frac{1}{x^2+2x-8}=0$, 通分之, 若將分子爲零, 則 $(2x^2-2x-16)(x^2+2x-8)+(x^2+11x-8)(x^2-13x-8)=0$, 解括弧而簡單之, 則 $x^4-65x^2+64=0$ 從此得 $x^2=\frac{1}{2}(65\pm63)=64$, 或 1, 故 $x=\pm8$ 或 ±1.

449. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\frac{62}{63}\cdot\frac{1+x}{1-x}$ 時, 試求 x.

解 $\frac{62}{63}=\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{1-x^3}{1+x^3}$,

$\therefore\ \frac{2x^3}{2}=\frac{63-62}{63+62}$, 即 $x=\frac{1}{125}$, $\therefore\ x^3-\frac{1}{125}=0$, 即 $\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x^2+\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right)=0$,

故 $x=\frac{1}{5}$, 及 $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{10}$.

450. $x^3-\sqrt[3]{6}x=1$, 試解之.

解 若 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, 則 $1-\sqrt[3]{6z^2}=z$, $\therefore\ 6z^2=1-3z+3z^2-z^3$, $\therefore\ z^3+3z^2+3z+1=2$, $\therefore\ z+1=\sqrt[3]{2}$, 而 $x=\sqrt[3]{1/(\sqrt[3]{2}-1)}$.

1之立方根

451. 解 $x^3=1$ 即 $x^3-1=0$ 而得之根, 爲 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, 及 $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ [424題

此之後二根，爲1之立方根之虛數，其一根等於他一根之平方，試證之.

〔解〕 $\left\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\right\}^2=\frac{1}{4}\left\{1-2\sqrt{-3}+(-3)\right\}=\frac{1}{2}\left\{-1-\sqrt{-3}\right\}$，又 $\left\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\right\}^2=\frac{1}{4}\left\{1+2\sqrt{-3}+(-3)\right\}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)$. 故將其虛數之一根爲 ω，則其他一根爲 ω^2.

452. 1之三個立方根之和爲零，而其二虛數之根之積爲1，試證之.

〔解〕 自 $x^3-1=0$，得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$，因而 ω 及 ω^2 爲 $x^2+x+1=0$ 之根，故 $\omega^2+\omega+1=0$，故1之三個立方根之和爲零. 又 $\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$.

〔注意〕 n 爲任意之正整數，則 n 或爲3之倍數，即 $n=3m$，或 $n=3m+1$，或 $n=3m+2$. 而 $n=3m$，則 $\omega^n=\omega^{3m}=1$. 若 $n=3m+1$，則 $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}\cdot\omega=\omega$. 若 $n=3m+2$，則 $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}\cdot\omega^2=\omega^2$.

453. $(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ 試證之.

〔解〕 於 $a+\omega b+\omega^2c$ 及 $a+\omega^2b+\omega c$ 之積，而 b^2 及 c^2 之係數爲 ω^3，即1. bc 之係數爲 $\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$，而 ac 及 ab 之係數爲 $\omega^2+\omega=-1$，故 $(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

454. $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$ 試證之.

〔解〕 $1+\omega+\omega^2=0$，故 $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3=-8\omega^6+8\omega^3=-8+8=0$.

455. x^3+y^3 試分解爲三個一次之因數.

〔解〕 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$，故 $x+y$ 爲 x^3+y^3 之一因數. 同樣 $x+\omega y$ 爲 $x^3+(\omega y)^3$，即 $x^3+\omega^3y^3$，即 x^3+y^3 之一因數，而 $x+\omega^2y$ 爲 $x^3+(\omega^2y)^3$，即 $x^3+\omega^6y^3$，即 x^3+y^3 之一因數，故 $x^3+y^2=(x+y)\times(x+\omega y)(x+\omega^2y)$.

456. $a^3+b^3+c^3-3abc$，試分解爲三個一次之因數.

〔解〕 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$，故 $a+b+c$ 爲 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因數. 同樣 $a+\omega b+\omega^2c$ 爲 $a^3+(\omega b)^3+(\omega^2c)^3-3a(\omega b)(\omega^2c)$，即 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因數. 而 $a+\omega^2b+\omega c$ 爲 $a^3+(\omega^2b)^3+(\omega c)^3-3a(\omega^2b)(\omega c)$. 即 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因數. 故 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$.

〔注意〕 後二因數，可直自453題得之.

457. 若 $x=a+b$, $y=a\omega+b\omega^2$, $z=a\omega^2+b\omega$，則 $x^2+y^2+z^2=6ab$，試證之.

〔解〕 $x^2+y^2+z^2=(a+b)^2+(a\omega+b\omega^2)^2+(a\omega^2+b\omega)^2=a^2(1+\omega^2+\omega^4)+2ab(1+\omega^3+\omega^3)+b^2(1+\omega^4+\omega^2)=a^2(1+\omega^2+\omega)+6ab+b^2(1+\omega+\omega^2)=6ab$.

聯立二次方程式

458. $x+y=3$ ……………………(1),

$xy=2$……………………(2), 試解之.

解 自(1)而$y=3-x$, 代入(1), 則$x(3-x)=2$. ∴ $-x^2+3x=2$. ∴ $x^2-3x+2=0$, ∴ $(x-1)(x-2)=0$, ∴ $x=1, x=2$, 因而$y=2$, $y=1$. 卽 $x=1$, 則$y=2$, 又$x=2$, 則$y=1$.

別解 I. 自乘(1), $x^2+2xy+y^2=9$. 4倍(2), $4xy=8$. 相減則$x^2-2xy+y^2=1$. ∴ $x-y=\pm1$………(3), (1)與(3)相加得$2x=3\pm1$, ∴ $x=2$, 或1. 又自(1)減(3), 得$2y=3\mp1$. ∴ $y=1$, 或2.

故 $\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\}$, 或 $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$.

別解 II. 自(1), (2)而知x, y爲$X^2-3X+2=0$之根, 故解之, 則$(X-1)(X-2)=0$ ∴ $X=1$, $X=2$. 故x, y之値各爲1, 2或2, 1.

注意 聯立方程式一爲一次, 一爲二次者, 則自一次式求其一未知數之値, 代入二次式, 則得他一未知數之二次方程式, 便能解之. 然能如此題之別解爲宜. 本題乃解二未知數二方程式基本形之一也.

459. $x-y=2$…………………(1), $xy=15$…………………(2), 試解之.

解 將(1)自乘之, $x^2-2xy+y^2=4$. 作(2)之4倍, $4xy=60$, 故相加, 而$x^2+2xy+y^2=64$, 開平方$x+y=\pm8$……(3). 故(1)與(3)相加, 以2除之, 得$x=5$, 或-3. 又自(3)減(1)以2除之, 得$y=3$, 或-5. 故所求之根如次.

$\left.\begin{matrix}x=5\\y=3\end{matrix}\right\}$, 或 $\left.\begin{matrix}x=-3\\y=-5\end{matrix}\right\}$.

別解 將題之方程式$y=-y'$, 則$x+y'=2$, $xy'=-15$, 故x, y', 爲$X^2-2X-15=0$, 卽$(X-5)(X+3)=0$之根, 故x, y'爲5, −3, 或−3, 5, 因而x, y爲5, 3, 或−3, −5.

注意 本題亦基本形之一也. 凡解二次聯立方程式, 若能化爲基本形之一最宜.

460. $2x+y=4$, $xy=2$, 試解之.

解 自第一式而$y=4-2x$代入第二式, 則$x(4-2x)=2$. ∴ $4x-2x^2=2$, ∴ $2x^2-4x+2=0$, ∴ $x^2-2x+1=0$, ∴ $(x-1)^2=0$. ∴ $x=1$, 因而 $y=2$.

別解 第二式以2乘之. 則$2xy=4$, 故自此式與第一式爲$(2x)y=4$, $2x+y=4$, 若將前題之x, 視爲$2x$, 則可如458題別解I, II解之矣.

461. $x-y=10$……(1), $x^2+y^2=58$……(2), 試解之.

解 I. 自(1)而$y=x-10$, 代入於(2), 則$x^2+(x-10)^2=58$, ∴ $x^2+x^2-20x+100=58$, ∴ $2x^2-20x+42=0$, ∴ $x=3$, 或7. 因而$y=-7$, 或-3.

卽 $\left.\begin{matrix}x=3\\y=-7\end{matrix}\right\}$, 或 $\left.\begin{matrix}x=7\\y=-3\end{matrix}\right\}$.

解 II. 將(1)自乘之, $x^2-2xy+y^2=100$, 將此式自(2)減之, $2xy=-42$………(3), (1)與(3)卽爲基本之形矣[459題].

解 III. 取(2)之2倍, $2x^2+2y^2=116$. 將(1)自乘之, $x^2-2xy+y^2=100$.

相減，$x^2+2xy+y^2=16$,

開平方，$x+y=\pm4$…………(3),

將(1)與(3)相加減可得 x, y.

462. $x+y=5$……(1), $x^2+y^2=13$……(2), 試解之.

解 (2)以二倍之, $2x^2+2y^2=26$,

將(1)自乘之, $x^2+2xy+y^2=25$,

相減, $x^2-2xy+y^2=1$,

開平方, $x-y=\pm1$…………(3),

自(1)與(3), $\left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}$, 或 $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\}$.

別解 自(1)之平方減(2), 則 $2xy=12$, 故 $xy=6$………(3), 自(1)與(3), 如458題解之.

463. $2x^2-xy=56$, $2xy-y^2=48$, 試解之.

解 題之方程式爲 $x(2x-y)=56$, $y(2x-y)=48$, 將此第一式以第二式除之, 則 $\frac{x}{y}=\frac{7}{6}$, 故 $x=\frac{7}{6}y$, 代入第一式, 則 $y^2=36$, ∴ $y=\pm6$. 故 $x=\pm7$.

464. $x^2+y^2=97$………(1), $xy=36$……(2), 試解之.

解 將(2)之2倍加於(1), 則 $x^2+2xy+y^2=169$. 開平方 $x+y=\pm13$………(3), 又將(2)之2倍自(1)減之, 開平方 $x-y=\pm5$…………(4), 自(3)與(4)得之如次.

$$\left.\begin{matrix}x=9\\y=4\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=-9\\y=-4\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=4\\y=9\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=-4\\y=-9\end{matrix}\right\}.$$

注意 自(3)與(2), 依458題, 亦可解之.

465. $x+y=7$………(1), $x^3+y^3=91$……(2) 試解之.

解 自(2)而 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=91$, 代入(1), 則 $x^2-xy+y^2=13$……(3), 自(1)之平方減(3), 以3除之, 則 $xy=12$……(4), 自(1)與(4)得 $\left.\begin{matrix}x=4\\y=3\end{matrix}\right\}$, 或 $\left.\begin{matrix}x=3\\y=4\end{matrix}\right\}$.

466. $x-y=2$…………………(1), $x^3-y^3=8$……………(2) 試解之.

解 自(2)而 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=8$, 代入(1), 則 $x^2+xy+y^2=4$…………(3), 自(3)減(1)之平方, 以3除之, 得 $xy=0$, 故或 $x=0$, 或 $y=0$. 若 $x=0$, 則 $y=-2$. 又若 $y=0$, 則 $x=2$, 故

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=-2\end{matrix}\right\},\ 或\ \left.\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}\right\}.$$

467. $x+y=4$…………(1), $x^4+y^4=82$…………(2) 試解之.

解 將(1)四乘之, 則 $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=256$, 自此減(2)而變其形, 則 $xy(2x^2+3xy+2y^2)=87$………………(3), 自(1)而 $2x^2+3xy+2y^2=32-xy$, 代入於(3), 得 $xy(32-xy)=87$, 因其爲 xy 之二次方程式, 故解之得 $xy=3$, 或29. 將其一與(1)組合而解之.

$$\left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=1\\y=3\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=2\pm5i\\y=2\mp5i\end{matrix}\right\}.$$

但 i 爲表 $\sqrt{-1}$ 者.

別解 將 $x=2+z$, 則 $y=2-z$, 故(2)如次, $(2+z)^4+(2-z)^4=82$. 變形而得 $z^4+24z^2-25=0$, 自此求 z 之值, 因而得 x, y.

468. $x+y=1$…………………(1), $x^5+y^5=31$…………………(2), 試解之.

解 自(2)得 $(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=31$, 代入(1), 則 $x^4-x^3y+x^2y^2-$

$xy^3+y^4=31$……(3), 將(1)四乘之, 以(3)減之, 變形則 $xy(x^2+xy+y^2)=-6$……(4). 自(1)而 $x^2+xy+y^2=1-xy$, 代入於(4), 而 $xy(1-xy)=-6$, 解之得 xy之值, 由此與(1)得

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=-1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-1\\y=2\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-11})\\y=\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{-11})\end{matrix}\right\}.$$

469. $x-y=2$……………(1), $x^5-y^5=242$…………(2), 試解之.

解 自(2)而 $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=242$, 代入(1)變形, 則 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=121$………(3), 又將(1)四乘之, 則 $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4=16$……(4), 自(3)減(4), 以5除之, $xy(x^2-xy+y^2)=21$……………(5). 自(1)而 $x^2-xy+y^2=4+xy$, 代入於(5), $xy(4+xy)=21$, 此為 xy之二次方程式, 將此與(1)組合解之, 而得

$$\left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-1\\y=-3\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\ \ 1\pm i\sqrt{6}\\y=-1\pm i\sqrt{6}\end{matrix}\right\}.$$

別解 將 $x=z+1$, 則 $y=z-1$, 故(2)為 $z^4+2z^2-24=0$, 由此可如467題解之.

470. $x^2+y^2+x+y=4$…………………(1), $x^2+y^2-xy=1$…………………(2) 試解之.

解 自(1)減(2), 則 $x+y+xy=3$. $\therefore x+y=3-xy$………(3), ∴平方之, 則 $x^2+2xy+y^2=9-6xy+x^2y^2$, 移項, 則 $x^2y^2-8xy+9=x^2+y^2$, 而自(2) $x^2+y^2=1+xy$, $\therefore x^2y^2-8xy+9=1+xy$,

$\therefore x^2y^2-9xy+8=0$, $\therefore (xy-8)(xy-1)=0$, $\therefore xy=8$, 或1…………………………(4), 將(4)代入(3), 則 $x+y=-5$, 或2………(5) 自(4)與(5)可容易求得次之答矣.

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}\right\}.\quad \left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{-7})\\y=\frac{1}{2}(-5\mp\sqrt{-7})\end{matrix}\right\}.$$

471. $2x^2-9xy-3y^2-6x+6y+4=0$, 及 $2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0$, 試解之.

解 將二方程式相減, 以9除之, 則 $4xy+y^2-3y=0$, 或 $y(4x+y-3)=0$, 故得 $y=0$, 及 $4x+y-3=0$, 若 $y=0$, 則將此值代入所設方程式之一, 而得 $x=4$, 及 $x=2$. 又若自 $4x+y-3=0$ 求 y, 則可得 $y=3-4x$, 將此值代入所設方程式之一, 例如代入第二方程式, 則 $2x^2-3x+1=0$, 或 $(2x-1)(x-1)=0$, 故得 $x=1$, 或 $x=\frac{1}{2}$. 再將此值代入 $y=3-4x$, 而得 $y=-1$ 及 $y=1$, 故可得次之四組答數.

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\ \ 1\\y=-1\end{matrix}\right\}.$$

472. $x^2+xy+y^2=13$, $x^2-xy+y^2=7$, 試解之.

解 自第一式減第二式 $2xy=6$, $\therefore xy=3$. 將此式加於第一式, 而 $x^2+2xy+y^2=16$, $\therefore x+y=\pm4$, 因而組合 $x+y=4$, $xy=3$ 得 $x=3$, $y=1$. 或 $x=1$, $y=3$, 又若組合 $x+y=-4$, $xy=3$, 得 $x=-3$, $y=-1$, 或 $x=-1$, $y=-3$.

473. $x^2-xy+y^2=9$…………………………(1), $x^4+x^2y^2+y^4=243$……………(2), 試解之.

解　自(2)而 $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=243$, 將(1)代入, 而 $x^2+xy+y^2=27\cdots\cdots(3)$, 自(1)與(3), 得 $xy=9\cdots\cdots(4)$, 自(1)與(4), 得 $(x+y)^2=36$, $(x-y)^2=0$, 故 $x=y$, $x+y=\pm6$, 故 $x=y=\pm3$.

474.　$a(x+y)=b(x-y)=xy$, 試解之.

解　$x(b-a)=(a+b)y$, $a(x+y)=xy$.

故 $a\{(a+b)y+(b-a)y\}=(a+b)y^2$,

故 $y=0$, 或 $y=\frac{2ab}{a+b}$, 故 $x=0$,

或 $x=\frac{2ab}{b-a}$.

475.　$2y^2-4xy+3x^2=17$,　$y^2-x^2=16$, 試解之.

解　題式無 $x=y=0$ 之根明矣, 故於二式令 $y=vx$, 則 $x^2(2v^2-4v+3)=17$, $x^2(v^2-1)=16$, 故由除法, 得 $\frac{2v^2-4v+3}{v^2-1}=\frac{17}{16}$, 因而 $15v^2-64v+65=0$, 解之得 $v=\frac{5}{3}$, 或 $\frac{13}{5}$. 取 v 之前之值, 則 $x=\pm3$, $y=\pm5$. 又若取 v 之後之值, 則 $x=\pm\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{13}{3}$, 但複符號當同時取上與上或取下與下.

別解　自第一式減第二式, 則得 $y^2-4xy+4x^2=1$, 即 $(y-2x)^2=1$, 故 $y=2x\pm1$, 將此代入第二式則 $3x^2\pm4x-15=0$, 自此得 $x=\pm3$, 或 $\pm\frac{5}{3}$, 故 $y=\pm5$, 或 $\pm\frac{13}{3}$.

476.　$x^2+y^2-1=2xy\cdots\cdots(1)$, $xy(xy+1)=6\cdots\cdots(2)$, 試解之.

解　自(1)而 $(x-y)^2=1$, ∴ $x-y=\pm1\cdots\cdots(3)$, 自(2)而 $x^2y^2+xy-6=0$, ∴ $(xy+3)(xy-2)=0$, ∴ $xy=-3\cdots\cdots(4)$, 或 $xy=2\cdots\cdots(5)$, 即基本之形矣, 故組合(3)與(4)或(3)與(5)可容易解之.

477.　$18+9(x+y)=2(x+y)^2\cdots\cdots(1)$, $6-(x-y)=(x-y)^2\cdots\cdots(2)$, 試解之

解　自(1)而 $2(x+y)^2-9(x+y)-18=0$.

∴ $\{2(x+y)+3\}\{(x+y)-6\}=0$,

∴ $x+y=6\cdots\cdots(3)$,

或 $x+y=-\frac{3}{2}\cdots\cdots(4)$,

自(2)得 $(x-y)^2+(x-y)-6=0$,

∴ $\{(x-y)+3\}\{(x-y)-2\}=0$,

∴ $x-y=2\cdots\cdots(5)$,

或 $x-y=-3\cdots\cdots(6)$,

組合(3),(4),(5),(6)如次.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=6\\x-y=2\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x+y=6\\x-y=-3\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x+y=-\frac{3}{2}\\x-y=2\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=-\frac{3}{2}\\x-y=-3\end{array}\right\}.\text{ 從此得 }\left.\begin{array}{l}x=4\\y=2\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{9}{2}\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\y=-\frac{7}{4}\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=-\frac{9}{4}\\y=\frac{3}{4}\end{array}\right\}.$$

478.　$x^3+1+9y\cdots\cdots(1)$, $x^2+x=6y\cdots\cdots(2)$, 試解之.

解　自(1), (2)消去 y, 則 $2(x^3+1)=3(x^2+x)$, 即 $2(x^3+1)-3x(x+1)=0$,

∴ $(x+1)(2x^2-5x+2)=0$,

∴ $(x+1)(2x-1)(x-2)=0$,

∴ $x=-1$, 或 $\frac{1}{2}$, 或 2.

若 $x=\frac{1}{2}$, 則自(1)得 $y=\frac{1}{8}$,

若 $x=2$, 則自(1)得 $y=1$,

若 $x=-1$，則自(1)得 $y=0$.

故所設方程式有次之三組之根.

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{8}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=2\\ y=1\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-1\\ y=\ \ 0\end{array}\right\}.$$

別解 (1)，(2)，為 $(x+1)(x^2-x+1)=9y$，$x(x+1)=6y$，故 $x+1=0, y=0$ 之一組．即 $x=-1$．$y=0$ 之一組，合於方程式明矣，若欲求其他根，則將(1)之兩邊以(2)之兩邊除之，則 $\frac{x^2-x+1}{x}=\frac{3}{2}$，故 $2x^2-5x+2=0$，即 $(2x-1)(x-2)=0$，自此得 $x=\frac{1}{2}$，$x=2$，將此值代入(1)或(2)，而得 $y=\frac{1}{8}$，$y=1$.

479. $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13$⋯⋯⋯(1)，$3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9$⋯⋯(2) 試解之.

解 自(1)得 $(x+y)^2+4(x+y)+xy-13=0$⋯⋯⋯(3)，自(2)得 $3(x+y)^2+2(x+y)-7xy-9=0$⋯⋯(4)，將(3)之7倍加於(4)，則 $(x+y)^2+3(x+y)-10=0$．∴ $\{(x+y)+5\}\{(x+y)-2\}=0$，∴ $x+y+5=0$，或 $x+y-2=0$．∴ $x+y=-5$⋯⋯(5)，$x+y=2$⋯⋯(6)，將(5)代入於(3)，而得 $xy=8$⋯⋯⋯(7)．自(7)與(5)，得

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\\ y=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\\ y=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\end{array}\right\}.$$

將(6)代入於(3)，而得 $xy=1$⋯⋯⋯⋯(8)．自(6)與(8)得 $x=1, y=1$，故求得之根為

$$\left.\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\\ y=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\\ y=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\end{array}\right\}.$$

480. $x^2-xy=a(x+1)+b+1$⋯⋯⋯⋯⋯(1)，$xy-y^2=ay+b$⋯⋯⋯⋯⋯(2)，試解之.

解 自(1)減(2)，則 $x^2-2xy+y^2=a(x-y)+a+1$，∴ $(x-y)^2-a(x-y)-(a+1)=0$，$\{(x-y)+1\}\{(x-y)-(a+1)\}=0$．∴ $x=y-1$⋯⋯⋯(3)，$x=y+a+1$⋯⋯⋯⋯(4)，將(3)代入(2)，而得 $-y=ay+b$，∴ $y=-\frac{b}{a+1}$，因而 $x=-\frac{a+b+1}{a+1}$．將(4)代入(2)，而得 $y=b$，因而 $x=a+b+1$，故所求之根為

$$\left.\begin{array}{l}x=-\frac{a+b+1}{a+1}\\ y=-\frac{b}{a+1}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=a+b+1\\ y=b\end{array}\right\}.$$

481. $x^2-3xy+2y^2+x-y=0$⋯⋯⋯⋯⋯(1)，$x^3-y^3+(x-y)(x-1)(y-1)=0$⋯⋯⋯⋯⋯(2)，試解之.

解 自(1)而 $(x-y)(x-2y)+(x-y)=0$，∴ $(x-y)(x-2y+1)=0$，∴ $x-y=0$⋯⋯(3)，或 $x-2y+1=0$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4)，又自(2)而 $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)\times(x-1)(y-1)=0$，∴ $(x-y)(x^2+xy+y^2+xy-x-y+1)=0$，∴ $x-y=0$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(5)，或 $x^2+2xy+y^2-x-y+1=0$，即 $(x+y)^2-(x+y)+1=0$⋯⋯⋯⋯⋯⋯(6)，將(4)之值，代入於(6)，則 $(3y-1)^2-(3y-1)+1=0$，∴ $3y^2-3y+1=0$，∴ $y=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$，因而 $x=\pm\frac{\sqrt{3}i}{3}$，故得次之二組之答.

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}i}{3}\\ y=\frac{3+\sqrt{3}i}{6}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{-\sqrt{3}i}{3}\\ y=\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\end{array}\right\}.$$

自(3),(5)示此方程式一部之解答為不定，即含合於$x-y=0$之x及y之各值。

482. $0.1y+0.125x=y-x$, $y-0.5x=0.75xy-3x$, 試解之.

解 將所設方程式變形$\frac{y}{10}+\frac{x}{8}=y-x$, $y-\frac{x}{2}=\frac{3xy}{4}-3x$. 自此第一方程式，得$y=\frac{5}{4}x$, 將此代入第二式，即得$x=0$, $y=0$. 或$x=4$, $y=5$.

483. $5y^2-38xy+x^2-12y+1056x=0$, $y^2-4xy+20x^2+3y-264x=0$, 試解之.

解 將第二式4倍之加入第一式，則$9(y^2-6xy+9x^2)=0$, 故$(y-3x)^2=0$.

$\therefore$ $y=3x$, 代入題式之一因得$x=0$, $y=0$, 或$x=15$, $y=45$.

484. $2x^2-3xy+y^2=4\cdots\cdots(1)$, $8x^2+2xy-3y^2=-12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ 試解之.

解 將(1)之3倍加於(2), 則$14x^2-7xy=0$, $\therefore$ $7x(2x-y)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$,

$\therefore$ $x=0\cdots\cdots\cdots(4)$, 或$y=2x\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$.

將(4)代入於(1), 而得

$\left.\begin{matrix}x=0\\y=2\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=0\\y=-2\end{matrix}\right\}$, 二組之根。

次將(5)代入(1)之y, 則$2x^2-6x^2+4x^2=4$, $\therefore$ $0=4$為不能. 故原方程式除上所求二組之根之外無根矣.

485. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 試解之.

解 將第一式之兩邊平方之，自此減第二式，則得次之方程式，即

$\frac{2xy}{ab}=0$, $\therefore$ $xy=0$, $\therefore$ $x=0$或$y=0$

若$x=0$則$y=b$, 若$y=0$, 則$x=a$, 故所求之根 $\left.\begin{matrix}x=0\\y=b\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=a\\y=0\end{matrix}\right\}$.

486. $\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{20}{3}$, $xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$, 試解之.

解 題之方程式，為$\frac{y^2+1}{xy}=\frac{20}{3}$, $\frac{x(y^2+1)}{y}=\frac{5}{3}$, 將第二式以第一式除之，則$x^2=\frac{1}{4}$, 故$x=\pm\frac{1}{2}$, 以之代入第二式，而得$3y^2\pm10y+3=0$, $\therefore$

$y=\pm3$ 或 $\pm\frac{1}{3}$.

故 $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=3\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\-3\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}$.

487. $x^2-2xy-y^2=a^2-2a-1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$, $(a-1)x(x-y)=a(a+1)y(x-y)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$, 試解之.

解 自(2)得$(a-1)x^2-(a^2+1)xy+a(a+1)y^2=0$, $\therefore$ $(x-ay)\{(a-1)x-(a+1)y\}=0$, $\therefore$ $x-ay=0$, 或$(a-1)x-(a+1)y=0$, 即$x=ay\cdots\cdots(3)$, $x=\frac{a+1}{a-1}y\cdots\cdots(4)$,

將(3)代入(1), 則$(a^2+2a-1)y^2=a^2+2a-1$, 所以$y=\pm1$, 若$y=1$, 則$x=a$, 若$y=-1$. 則$x=-a$, 又將(4)代入(1), 則$2(a^2+2a-1)y^2=(a^2+2a-1)(a-1)^2$,

$\therefore$ $y^2=\frac{(a-1)^2}{2}$, $\therefore$ $y=\pm\frac{a-1}{\sqrt{2}}$.

若$y=\frac{a-1}{\sqrt{2}}$, 則$x=\frac{a+1}{\sqrt{2}}$, 若$y=-\frac{a-1}{\sqrt{2}}$, 則$x=-\frac{a+1}{\sqrt{2}}$.

488. $x^2+3xy=28$……(1), $xy+4y^2=8$……(2) 試解之.

解 將(2)加於(1), 得 $x^2+4xy+4y^2=36$, 開平方得 $x+2y=\pm6$……(3), 自(3)得 $x=-2y\pm6$, 將此代入(1)或(2), 卽得 y 之值, 因而得 x 之值.

489. $x^2-3xy+2y^2=3$……(1), $2x^2+y^2=6$……(2) 試解之.

解 自(1)之2倍減(2), 則 $-6xy+3y^2=0$, $\therefore\ y=0$……(3), 或 $y=2x$……(4), 將(3)與(4)各與所設之方程式組合而解之卽得.

490. $xy(x+y)=30$……(1), $x^3+y^3=35$……(2) 試解之.

解 將(1)之3倍加於(2), 則 $x^3+3xy(x+y)+y^3=125$, 開立方 $x+y=5$……(3), 將(3)代入(1), $xy=6$……(4), 故可自(3)與(4)求得 x, y.

注意 (3)式僅取立方根之實根, 若取虛根, 則得 $x+y=5\omega$, $x+y=4\omega^2$, 以此代入(1), 而得 $xy=6\omega^2$, $xy=6\omega$, 因而可得 x, y 之他根.

491. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18$……(1), $x+y=12$……(2) 試解之.

解 自(1)得 $(x+y)(x^2+xy-y^2)=18xy$, 將(2)代入此式, 則 $x^2-xy+y^2=\dfrac{3}{2}xy$, 卽 $(x+y)^2=\dfrac{9}{2}xy$, 再將(2)代入此式得 $xy=32$……(3), 故可自(2)與(3)求得 x, y, 卽 $x=4$, $y=8$. 及 $x=8$, $y=4$.

492. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=9$……(1), $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}$……(2) 試解之.

解 自(1) $x^3+y^3=9xy$, 自(2) $x+y=\dfrac{3}{4}xy$, 將此式代入前式, 則 $x^2-xy+y^2=12$, 但 $x^2-xy+y^2=\dfrac{9}{16}x^2y^2-3xy$. 故 $\dfrac{9}{16}x^2y^2-3xy=12$. 由是得 $xy=-\dfrac{8}{3}$ 及 8. 若 $xy=-\dfrac{8}{3}$ 則因 $x+y=-2$, 故 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{4}$, $y=\dfrac{-2\mp\sqrt{10}}{4}$. 又若 $xy=8$, 則因 $x+y=6$, 故 $x=2$, $y=4$, 及 $x=4$, $y=2$.

493. $x+y=6$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$, 試解之.

解 $x+y=6$……(1).
$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$……(2)
但 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}$, 故 $x+y$ 以6代之, 則(2)得變形如次, $6(36-2xy)(36-3xy)=1440$. 故簡單之, 則 $x^2y^2-30xy+176=0$, 卽 $(xy-8)(xy-22)=0$, $\therefore\ xy-8=0$, $xy-22=0$, 故 $xy=8$, $xy=22$, 將此二式與(1)組合, 卽可得次之二組方程式; $\left.\begin{array}{r}xy=8\\x+y=6\end{array}\right\}$……(3), $\left.\begin{array}{r}xy=22\\x+y=6\end{array}\right\}$……(4).

(3)之 x, y, 爲方程式 $X^2-6X+8=0$ 之二根, 故 $X=2$, 或4, 因得 $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=2\end{array}\right\}$. 又(4)之 x, y 爲 $X^2-6X+22$

$=0$之二根，而$X=3\pm\sqrt{-13}$. 因得次之二組答數.

$$\left.\begin{matrix}x=3+\sqrt{-13}\\y=3-\sqrt{-13}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=3-\sqrt{-13}\\y=3+\sqrt{-13}\end{matrix}\right\}.$$

卽所設方程式，有上所得四組答數，若交換第一之x, y，則爲第二之答數，若交換第三之x, y，則爲第四之答數，蓋所設方程式交換x, y而不變形也，

494. $x(x+y+z)=8$, $y(x+y+z)=12$, $z(x+y+z)=5$, 試解之.

解 將上三方程式相加，則$(x+y+z)(x+y+z)=25$，卽$x+y+z=\pm5$，將此式代入三方程式，則可直求得x, y, z之值，卽$x=\pm\frac{8}{5}$, $y=\pm\frac{12}{5}$, $z=\pm1$.

495. $2x+y-2z=0\cdots\cdots(1)$. $7x+6y-9z=0\cdots\cdots\cdots(2)$, $x^3+y^3+z^3=1728\cdots\cdots\cdots(3)$, 試解之.

解 自(1), (2) $x=\frac{3}{5}z$. $y=\frac{4}{5}z$. $\therefore\ \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\lambda$, $\therefore\ x=3\lambda$, $y=4\lambda$, $z=5\lambda$, 將此x, y, z之值代入(3)，則$(27+64+125)\lambda^3=1728$. $\therefore\ \lambda^3=8$, $\therefore\ \lambda=2$ 因而$x=6$, $y=8$, $z=10$.

注意 取λ之虛根，可得他根.

496. $x+y-z=4$, $x^2+y^2+z^2=14$, $2xy+z(x+y)=17$ 試解之.

解 將第二式與第三式相加，則$(x+y)^2+z(x+y)+z^2=31$，代入自第一式所得之$x+y=z+4$，則$(z+4)^2+z(z+4)+z^2=31$，解之得$z=1$，或-5，將$z=1$代入第一式第二式，則得$x+y=5$, $x^2+y^2=13$ 自此可求得x, y之值，而$z=-5$者準此.

497. $\frac{17}{4}xy=x^2+y^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$, $15\frac{x}{y}=x^2-y^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ 試解之.

解 若$x=ny$則自(1)得$\frac{17}{4}ny^2=n^2y^2+y^2$而$y\neq0$，故以$y^2$除之，得$\frac{17}{4}n=n^2+1$，自此得$n=4$，或$\frac{1}{4}$，自(2)得$15n=n^2y^2-y^2\cdots\cdots(3)$，將$n=4$代入(3)，得$y=\pm2$，故若$y=2$，卽$x=8$，若$y=-2$，則$x=-8$，又將$n=\frac{1}{4}$代入(3)，得$y=\pm2\sqrt{-1}$，故自$y=2\sqrt{-1}$得$x=\frac{1}{2}\sqrt{-1}$，自$y=-2\sqrt{-1}$，得$x=-\frac{1}{2}\sqrt{-1}$，

故 $\left.\begin{matrix}x=8\\y=2\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}-8\\-2\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\sqrt{-1}\\2\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\\-2\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}.$

498. $x^2+y^2+z^2=14$, $xy=2$. $x+y+z=6$ 試解之.

解 將第二式之2倍，加於第一式，則$x^2+2xy+y^2+z^2=14+4$，卽$(x+y)^2+z^2=18$，又自第三式，得$x+y=6-z$，代入前式，則$(6-z)^2+z^2=18$, $\therefore\ z^2-6z+9=0$, $\therefore\ z=3$，因此自第三式得$x+y=3$，將此式與第三式組合，得$x=1$，或2, $y=2$或1，故x, y, z之值爲1, 2, 3或2, 1, 3.

499. $x^2yz=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$, $y^2zx=12\cdots\cdots\cdots(2)$, $z^2xy=18\cdots\cdots\cdots(3)$試解之.

解 依題意得解之如次，

$(1)\times(2)\div(3)$ $x^2y^2=4$, $\therefore$ $xy=\pm2\cdots(4)$,

$(2)\times(3)\div(1)$ $y^2z^2=36$, $\therefore$ $yz=\pm6\cdots(5)$,

$(3)\times(1)\div(2)$ $z^2x^2=9$, $\therefore$ $zx=\pm3\cdots(6)$,

$(4)\times(6)\div(5)$ $x^2=1$, $\therefore$ $x=\pm1$.

$(4)\times(5)\div(6)$ $y^2=4$, $\therefore$ $y=\pm2$.

$(5)\times(6)\div(4)$ $z^2=9$, $\therefore$ $z=\pm3$.

但x, y, z之複符號,須同時皆取上之符號或同時皆取下之符號,故方程式只有二組之根.

別解 將(1),(2),(3),連乘之,則$x^4y^4z^4=6.12.18=6^4$, $\therefore$ $xyz=\pm6$, 次第以(1),(2),(3)除之,即得.

500. $x(y+z)=27\cdots\cdots(1)$,
$y(z+x)=32\cdots\cdots(2)$,
$z(x+y)=35\cdots\cdots(3)$, 試解之.

解 自$(1)+(2)-(3)$得$2xy=24$, $\therefore$ $xy=12\cdots\cdots(4)$, 自$(2)+(3)-(1)$得$2yz=40$, $\therefore$ $yz=20\cdots\cdots(5)$, 自$(3)+(1)-(2)$得$2zx=30$, $\therefore$ $zx=15\cdots\cdots(6)$, 自$(4)\times(6)\div(5)$得$x^2=9$, $\therefore$ $x=\pm3$. 將此代入(4),(5),

則得 $\left.\begin{matrix}x=3\\y=4\\z=5\end{matrix}\right\}$ 及 $\left.\begin{matrix}x=-3\\y=-4\\z=-5\end{matrix}\right\}$ 二組之根.

別解 將(1),(2),(3)各邊相加以2除之,則$yz+zx+xy=47$, 自此次第減(1),(2),(3)則得$yz=20$, $zx=15$, $xy=12$, 將此三式連乘之,得$x^2y^2z^2=20.15.12$,
$\therefore$ $xyz=\pm4.3.5=\pm60$, 因得$x=\pm3$, $y=\pm4$, $z=\pm5$.

501. $(x+y)(x+z)=12\cdots\cdots(1)$,
$(x+y)(y+z)=15\cdots\cdots(2)$,
$(x+z)(y+z)=20\cdots\cdots(3)$ 試解之.

解 自$(1)\times(2)\div(3)$得$(x+y)^2=9$,
$\therefore$ $x+y=\pm3$ 將此代入(1),(2),而得

$\left.\begin{matrix}x+y=3\\x+z=4\\y+z=5\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(4)$, $\left.\begin{matrix}x+y=-3\\x+z=-4\\y+z=-5\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(5)$,

則得二組之方程式.

自(4)得 $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\\z=3\end{matrix}\right\}$, 自(5)得 $\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-2\\z=-3\end{matrix}\right\}$.

502. $\left.\begin{matrix}yz-23=4y+3z\\zx-13=2z-4x\\xy-9=3x+2y\end{matrix}\right\}$, 試解之.

解 於三方程式之兩邊各加35, 21, 15而變其形,則
$(y-3)(z-4)=35\cdots\cdots(1)$,
$(z-4)(x-2)=21\cdots\cdots(2)$,
$(x-2)(y-3)=15\cdots\cdots(3)$,
故取(1),(2),(3),連乘積之平方根,則$(x-2)(y-3)(z-4)=\pm105$, 次第以(1),(2),(3)除之,得$x-2=\pm3$, $y-3=\pm5$, $z-4=\pm7$, $\therefore$ $x=5$, $y=8$, $z=11$, 或$x=-1$, $y=-2$, $z=-3$,

503. $yz=a+y+z$, $zx=b+z+x$, $xy=c+x+y$ 試解之.

解 將所設方程式改書之,則$yz-y-z+1=a+1$, $zx-z-x+1=b+1$, $xy-x-y+1=c+1$ 即$(y-1)(z-1)=a+1\cdots\cdots(1)$, $(z-1)(x-1)=b+1\cdots\cdots(2)$, $(x-1)(y-1)=c+1\cdots\cdots(3)$, 以(1)除(2),(3)之積,則得$(x-1)^2=\dfrac{(b+1)(c+1)}{a+1}$, $\therefore$ $x=1\pm\sqrt{\dfrac{(a+1)(c+1)}{a+1}}$; y, z, 亦可同樣求之.

504. $x^2-yz=a\cdots\cdots(1)$, $y^2-zx=b\cdots\cdots(2)$, $z^2-xy=c\cdots\cdots(3)$ 試解之.

解 自(1)之平方減(2),(3)之積,而得 $x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$, ∴ $\frac{x}{a^2-bc}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$, 自(2)之平方減(1),(3)之積,而得 $\frac{y}{b^2-ca}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$, 自(3)之平方減(2),(1)之積,而得 $\frac{z}{c^2-ab}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$.

∴ $\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ca}=\frac{z}{c^2-ab}=f$…(4),

∴ $x=(a^2-bc)f$……(5), $y=(b^2-ca)f$…(6), $z=(c^2-ab)f$……(7). 自(5)之平方減(6),(7)之積,則 $x^2-yz=a(a^3+b^3+c^3-2abc)\times f^2=a$……………………………[自(1)]

∴ $f=\pm\sqrt{\frac{1}{a^3+b^3+c^3-3abc}}$. 自(4)求 x, y, z 之值,則

$x=\pm(a^2-bc)\sqrt{\frac{1}{a^3+b^3+c^3-3abc}}$. 同樣亦可求得 y, z 之值.

505. $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2}$, $xyz=1$, 試解之.

解 $z=\frac{1}{xy}$. 將此代入他二式,則 $x+y+\frac{1}{xy}=\frac{7}{2}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy=\frac{7}{2}$, 依減法,得 $(x+y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)+\frac{1-x^2y^2}{xy}=0$, 故 $xy-1=0$, 或 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1+xy}{xy}$, 如此則易解矣.

別解 $x+y+z=\frac{7}{2}$……………………(1),

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{7}{2}$,

∴ $yz+zx+xy=\frac{7}{2}$…………(2), $xyz=1$…………(3), 故 x, y, z 為適於次之方程式之根, $X^3-\frac{7}{2}X^2+\frac{7}{2}X-1=0$,

$(X-1)(X-2)\left(X-\frac{1}{2}\right)=0$, ∴ $X=1$, $X=2$, $X=\frac{1}{2}$. 故其答當為次之六組.

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\\z=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=1\\y=\frac{1}{2}\\z=2\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=2\\z=1\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=\frac{1}{2}\\z=1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=2\\y=1\\z=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=1\\z=2\end{matrix}\right\}$$

506. $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$, 試解之.

解 $(x+y+z)^3=1$, $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=1$, $x^3+y^3+z^3=1$, 故 $(x+y+z)^3+2(x^3+y^3+z^3)-3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=0$, 即 $6xyz=0$. [答 0, 0, 1. 可列為三組]

507. $x^2+yz-a^2=y^2+zx-b^2=z^2+xy-c^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, 試解之.

解 自 $x^2+yz-a^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, 得 $x^2-(y-z)^2=2a^2$, 同樣 $y^2-(z-x)^2=2b^2$, $z^2-(x-y)^2=2c^2$, 故 $(-x+y+z)^2=2\frac{b^2c^2}{a^2}$, 等. ∴ $-x+y+z=\pm\sqrt{2}\,\frac{bc}{a}$, 同樣 $x-y+z=\pm\sqrt{2}\,\frac{ca}{b}$, 因此得

$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$, 等.

508. 試解次之三方程式,(1) $x^2+y^2=0$, (2) $(x-1)^2+(y+2)^2=0$, (3) $x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2=2ax+2by+2cz$. 但 a, b, c, x, y, z 為實數.

【解】 (1)之x, y俱爲實數,故x^2+y^2恆爲正,故若欲$x^2+y^2=0$,則必$x=0$, $y=0$. (2)之$(x-1)^2+(y+2)^2$恆爲正,故若欲$(x-1)^2+(y+2)^2=0$,則$(x-1)^2=0$, $(y+2)^2=0$,爲必要且十分之要件,故題之方程式之根,爲$x=1$, $y=-2$. (3)將題之方程式變形,則$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$,但此式若成立,其必要且十分要件,爲$x-a=0$, $y-b=0$, $z-c=0$,因而所求之根爲$x=a$, $y=b$, $z=c$.

根數方程式

【注意】 以下之問題之根數,爲取絕對值者.

509. $\sqrt{(5x+3)}=2\sqrt{(x+3)}$,試解之.

【解】 將兩邊各平方之,而去其根號,則$5x+3=4(x+3)$, $5x+3=4x+12$, $\therefore\ x=9$.

【驗證】 $\sqrt{(5\times 9+3)}=4\sqrt{3}$, $2\sqrt{(9+3)}=4\sqrt{3}$.

510. $\sqrt{(x+25)}=1+\sqrt{x}$,試解之.

【解】 兩邊平方之則$x+25=1+2\sqrt{x}+x$, $\therefore\ 2\sqrt{x}=24$, $\therefore\ \sqrt{x}=12$, $x=12^2=144$.

【驗證】 $\sqrt{(144+25)}=13$, $1+\sqrt{144}=13$.

511. $\sqrt{(x+3)}-\sqrt{x}=5$,試解之.

【解】 $\sqrt{(x+3)}=5-\sqrt{x}$,將兩邊平方之,而得$x+3=25-10\sqrt{x}+x$, $\therefore\ 10\sqrt{x}=22$, $\therefore\ \sqrt{x}=\frac{11}{5}$, $\therefore\ x=\frac{121}{25}$.

【驗證】 $\sqrt{\left(\frac{121}{25}+3\right)}+\sqrt{\frac{121}{25}}=\frac{14}{5}+\frac{11}{5}=5$.

512. $\sqrt{(2x+9)}-\sqrt{(x+4)}=1$,試解之.

【解】 $\sqrt{(2x+9)}=1+\sqrt{(x+4)}$. $\therefore$ 兩邊平方之則$2x+9=1+2\sqrt{(x+4)}+x+4$, $\therefore\ x+4=2\sqrt{(x+4)}$, $\therefore\ (x+4)^2=4(x+4)$, $\therefore\ x^2+8x+16=4x+16$, $\therefore\ x^2+4x=0$, $\therefore\ x(x+4)=0$, $\therefore\ x=0$,或-4.

【驗證】 $\sqrt{(2\times 0+9)}-\sqrt{(0+4)}=3-2=1$, $\sqrt{\{2\times(-4)+9\}}-\sqrt{(-4+4)}=1-0=1$.

【注意】 於前解,得$x+4=2\sqrt{(x+4)}$後,可分解爲$(x+4)=0$,及$\sqrt{(x+4)}=2$,因而$x+4=0$,及$x+4=4$,故亦可得$x=-4$,及$x=0$.

513. $\sqrt{(x+8)}-\sqrt{(x+3)}=\sqrt{x}$,試解之.

【解】 $\sqrt{(x+8)}-\sqrt{x}=\sqrt{(x+3)}$,將其兩邊平方之,得$x+8-2\sqrt{(x^2+8x)}+x=x+3$. $\therefore\ x+5=2\sqrt{(x^2+8x)}$,再將兩邊平方之,得$x^2+10x+25=4x^2+32x$,故$3x^2+22x-25=0$,故$(x-1)(3x+25)=0$, $\therefore\ x=1$.或$-\frac{25}{3}$.

【驗證】 $\sqrt{(1+8)}-\sqrt{(1+3)}=3-2=1=\sqrt{1}$.故1爲所求之根,而$-\frac{25}{3}$不合題之方程式.

514. $2x^2+6x=226-\sqrt{(x^2+3x-8)}$,試解之.

【解】 自兩邊減16,則$2x^2+6x-16=210-\sqrt{(x^2+3x-8)}$,即$2(x^2+3x-8)=210-\sqrt{(x^2+3x-8)}$, $\therefore\ 2(x^2+3x-8)+\sqrt{(x^2+3x-8)}-210=0$,若將$\sqrt{(x^2+3x-8)}$爲A,則上之方程式,爲$2A^2+A-210=0$,即$(2A+21)(A-10)=0$, $\therefore\ A=-\frac{21}{2}$,或10,

而 $\sqrt{(x^2+3x-8)}$ 必爲正數，故棄 $-\frac{21}{2}$，而 $\sqrt{(x^2+3x-8)}=10$，∴ $x^2+3x-8=100$，∴ $x^2+3x-108=0$，即 $(x+12)(x-9)=0$，∴ $x=-12$，或 9.

【驗】 $x=-12$，或 9，則 $x^2+3x-8=100$，$\sqrt{(x^2+3x-8)}=10$，∴ 原式爲 $2\times144-72=226-10$，或 $2\times81+54=226-10$，此等式爲眞，故 $x=-12$，及 9，爲所設方程式之根.

515. $x^2+3=2\sqrt{(x^2-2x+2)}+2x$ 試解之.

【解】 $x^2-2x+2+1=2\sqrt{(x^2-2x+2)}$. 若 $\sqrt{(x^2-2x+2)}=p$，則上式爲 $p^2+1=2p$. ∴ $p^2-2p+1=0$，∴ $p=1$. 因而 $\sqrt{(x^2-2x+2)}=1$，$x^2-2x+1=0$，∴ $(x-1)^2=0$，∴ $x=1$.

【驗】 $1+3=2\sqrt{(1-2+2)}+2\times1=2+2$.

516. $\sqrt{(2x+9)}-\sqrt{(x-4)}=\sqrt{(x+1)}$ 試解之.

【解】 $\sqrt{(2x+9)}=\sqrt{(x-4)}+\sqrt{(x+1)}$，將其兩邊平方之，則

$2x+9=x-4+2\sqrt{(x-4)(x+1)}+x+1$，

∴ $12=2\sqrt{(x-4)(x+1)}$，即 $6=\sqrt{(x^2-3x-4)}$，∴ $36=x^2-3x-4$，∴ $(x-8)(x+5)=0$，∴ $x=8$，或 -5.

【驗】 8合於題之方程式，而 -5 不合.

517. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(a+b-2x)}$ 試解之.

【解】 兩邊平方之而得

$a-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}+b-x=a+b-2x$，

$\sqrt{(a-x)(b-x)}=0$，∴ $a-x=0$，∴ $x=a$. 或 $b-x=0$，∴ $x=b$.

【驗】 a 與 b 皆適合於所設之方程式.

518. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$ 試解之.

【解】 將兩邊平方之，則

$x-a+x-b+2\sqrt{(x-a)(x-b)}=a-b$，

∴ $\sqrt{(x-a)(x-b)}=a-x$，又平方之，則 $(x-a)(x-b)=a^2+x^2-2ax$ 故 $(a-b)x=(a-b)a$，∴ $x=a$.

【驗】 $\sqrt{a-a}+\sqrt{a-b}=\sqrt{a-b}$.

519. $\sqrt{x}+\sqrt{\{x-\sqrt{(1-x)}\}}=1$，試解之.

【解】 $\sqrt{\{x-\sqrt{(1-x)}\}}=1-\sqrt{x}$，兩邊平方之，而得 $x-\sqrt{(1-x)}=1-2\sqrt{x}+x$.

∴ $-\sqrt{(1-x)}=1-2\sqrt{x}$，又將此兩邊平方之，而得 $1-x=1-4\sqrt{x}+4x$，∴ $4\sqrt{x}=5x$，∴ $16x=25x^2$，∴ $x(25x-16)=0$，∴ $x=0$，或 $\frac{16}{25}$.

【驗】 0與 $\frac{16}{25}$ 皆不適合於所設之方程式，故無根.

520. $\frac{1}{1+\sqrt{(1-x)}}+\frac{1}{1-\sqrt{(1-x)}}=\frac{2}{3}$，試解之.

【解】 $\frac{1-\sqrt{(1-x)}+1+\sqrt{(1-x)}}{\{1+\sqrt{(1-x)}\}\{1-\sqrt{(1-x)}\}}=\frac{2}{3}$，

即 $\frac{2}{1-1+x}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{2}{x}=\frac{2}{3}$ ∴ $x=3$.

【驗】 $\frac{1}{1+\sqrt{(-2)}}+\frac{1}{1-\sqrt{(-2)}}=\frac{2}{1+2}$，$=\frac{2}{3}$.

521. $\sqrt{2x^2+5x-7}+\sqrt{3(x^2-7x+6)}-\sqrt{7x^2-6x-1}=0$，試解之.

【解】 $\sqrt{(2x+7)(x-1)}+\sqrt{3(x-1)(x-6)}-\sqrt{(7x+1)(x-1)}=0$，$\sqrt{(x-1)}\{\sqrt{2x}+7$

$+\sqrt{3(x-6)}-\sqrt{7x+1}\}=0$, $\therefore\sqrt{(x-1)}=0$, $\therefore x=1$. 又 $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$ 將兩邊平方之,而得 $2x+7+2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}+3x-18=7x+1$, $\sqrt{(2x+7)(3x-18)}=x+6$, 各平方之 $(2x+7)(3x-18)=(x+6)^2$, $\therefore 6x^2-15x-126=x^2+12x+36$, $\therefore 5x^2-27x-162=0$, $\therefore (x-9)(5x+18)=0$, $\therefore x=9$, 或 $x=-\frac{18}{5}$.

驗 1 及 9 適當於所設方程式,而 $-\frac{18}{5}$ 非所設方程式之根.

522. $\sqrt{a(x-b)}+\sqrt{b(x-a)}=x$ 試解之.

解 移項 $\sqrt{a(x-b)}=x-\sqrt{b(x-a)}$, 兩邊平方之, $a(x-b)=x^2+b(x-a)-2x\sqrt{b(x-a)}$, $\therefore ax=x^2+bx-2x\sqrt{b(x-a)}$, 預置 $x=0$ 之根,以 x 除之,集於一邊,則 $x-a-2\sqrt{b(x-a)}+b=0$, $\therefore (\sqrt{x-a}-\sqrt{b})^2=0$, $\therefore \sqrt{x-a}-\sqrt{b}=0$, $\therefore x=a+b$.

驗 0 不適於所設之方程式, $a+b$ 則適於所設之方程式.

523. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$, 試解之.

解 將題式兩邊平方之,則 $a-bx+c-dx+2\sqrt{(a-bx)(c-dx)}=a+c-(b+d)x$, $\therefore \sqrt{(a-bx)(c-dx)}=0$, 又平方之 $(a-bx)(c-dx)=0$, $\therefore (dx-c)(bx-a)=0$, $\therefore x=\frac{c}{d}$ 或 $x=\frac{a}{b}$.

驗 $x=\frac{c}{d}$, $x=\frac{a}{b}$ 皆適於所設之方程式.

524. $\frac{\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}}=\frac{a}{x}$, 試解之.

解 $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, 則 $\frac{m-n}{m+n}=\frac{p-q}{p+q}$ 之關係,故自題之方程式,得次之關係,

$\frac{2\sqrt{(a-x)}}{2\sqrt{(a+x)}}=\frac{a-x}{a+x}$, $\therefore\sqrt{\frac{(a-x)}{(a+x)}}=\frac{a-x}{a+x}$, 兩邊平方之,則 $\frac{a-x}{a+x}=\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$,

$\therefore\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\left(1-\frac{a-x}{a+x}\right)=0$, $\therefore\frac{a-x}{a+x}=0$, $\therefore a-x=0$, $\therefore x=a$, 或 $1-\frac{a-x}{a+x}=0$, $\therefore x=0$, 又自 $\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}$ 得 $x=-a$.

驗 $x=\pm a$ 則題式為真,又 $x=0$ 則式不成立.

525. $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$, 試解之.

解 依分合比之理,得 $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}$, 平方之,則 $\frac{x+1}{x-1}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}$.

又依分合比之理,得 $\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8}$, $\therefore x=\frac{16x^2-8x+5}{16x-4}$.

因而 $16x^2-4x=16x^2-8x+5$, $\therefore x=\frac{5}{4}$.

驗 $\frac{\sqrt{\frac{5}{4}+1}+\sqrt{\frac{5}{4}-1}}{\sqrt{\frac{5}{4}+1}-\sqrt{\frac{5}{4}-1}}=2$, $\frac{4\times\frac{5}{4}-1}{2}=2$.

526. $\frac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\frac{6}{x}}$, 試解之.

解 $x+\frac{x+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\frac{6}{x}}$, $\therefore\frac{1}{x-1}=\sqrt{\frac{6}{x}}$ $\therefore\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{6}{x}$, $\therefore x=6x^2-12x+$

6, ∴ $6x^2-13x+6=0$, ∴ $(3x-2)(2x-3)=0$, ∴ $x=\frac{2}{3}$, 或 $\frac{3}{2}$.

驗證 $\frac{3}{2}$ 適合於所設方程式, $\frac{2}{3}$ 則否.

527. $x\sqrt{\left(\frac{6}{x}-x\right)}=\frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$, 試解之.

解 去分母, 則 $x\sqrt{(6-x^2)}=1+x^2\cdots\cdots(1)$ 平方之, 而得 $x^2(6-x^2)=1+2x^2+x^4$, ∴ $6x^2-x^4=1+2x^2+x^4$, ∴ $2x^4-4x^2+1=0$, ∴ $x^2=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, ∴ $x=\pm\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}}$.

驗證 驗證 x 之值代入 (1) 即得, 而 x 之負值, 不適於 (1) 明矣, 故將 $x=\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}}$ 代入 (1), 則左邊 $=\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\frac{10\mp\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{(18\pm8\sqrt{2})}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$, 右邊亦同, 故 x 之正值, 為所設方程式之根.

528. $\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x-1}{x}$, 試解之.

解 $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\frac{x-1}{x}$, 即 $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\times\sqrt{(x+1)}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2$, ∴ $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left\{\sqrt{(x+1)}+1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right\}=0\cdots\cdots\cdots(1)$, ∴ $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0$, ∴ $x=1$.

又 $\sqrt{(x+1)}+1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$, ∴ $\sqrt{(x+1)}+1=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, 兩邊平方之, $x+1+2\sqrt{(x+1)}+1=\frac{x-1}{x}$, ∴ $x^2+2x+2x\sqrt{(x+1)}=x-1$, ∴ $x^2+2x\sqrt{(x+1)}+(x+1)=0$, ∴ $\{x+\sqrt{(x+1)}\}^2=0$, ∴ $x+\sqrt{(x+1)}=0$, ∴ $x=-\sqrt{(x+1)}$, ∴ $x^2=x+1$ ∴ $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

驗證 1適當於所設方程式明矣, 故為其一根. 又若驗證 $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, 則代入與題式等值之(1), 即得. 但 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ 適當於(1), 故為所題方程式之根, 而 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 不適當於(1), 故非其根.

529. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{a}{x}}=\sqrt{\frac{6x-a}{x}}$, 試解之.

解 將兩邊平方之, 則 $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+2=\frac{6x-a}{x}$. 將 x 不為0, 而去其分母, 則 $x^2-4ax+2a^2=0$, 故 $x=2a\pm\sqrt{2a^2}=a(2\pm\sqrt{2})$.

驗證 將此值代入題式左邊之 x, 則 $\sqrt{2\pm\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{2\pm\sqrt{2}}}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}$, 又右邊為 $\sqrt{6-\frac{1}{2\pm\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{11\pm6\sqrt{2}}{2\pm\sqrt{2}}}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}$, 故上所得之根, 適當於所設方程式.

530. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$ 試解之.

解 $\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}=8\sqrt{x^2-1}$, ∴ $4x\sqrt{x^2-1}=8\sqrt{x^2-1}$, ∴ $\sqrt{x^2-1}(x-2)=0$, ∴ $\sqrt{x^2-1}=0$, 或 $x-2=0$, ∴ $x=\pm1$, 或 $x=2$.

【驗證】 $\pm1, 2$，皆爲題式之根.

531. $x+y=10,\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}$，試解之.

【解】 $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=p$，則第二式爲 $p+\dfrac{1}{p}=\dfrac{5}{2}$.

$\therefore\ 2p^2-5p+2=0,\ (2p-1)(p-2)=0,$

$\therefore\ p=\dfrac{1}{2}$，或 2，即 $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{2}$，或 2，

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{4}$，或 4，因而 $x=\dfrac{1}{4}y$，或 $x=4y$，將此代入第一式，而得 $y=2$，或 8. 因而 $x=8$，或 2，

【驗證】 $x=8,\ y=2$，與 $x=2,\ y=8$，皆適當於所設方程式.

532. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1,\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78$ 試解之.

【解】 去第一式之分母，則 $x+y=7+\sqrt{xy}$，又第二式爲 $\sqrt{xy}(x+y)=78$.

$\therefore\ \sqrt{xy}(7-\sqrt{xy})=78$，若 $\sqrt{xy}=p$，則此式爲 $7p+p^2=78$，$\therefore\ p^2+7p-78=0$，

$\therefore\ (p-6)(p+13)=0$，$\therefore\ p=6$，或 -13，但 p 爲正，故棄 -13，而自 $\sqrt{xy}=6$.

$\therefore\ xy=36$，又 $x+y=13$. 自此兩式，得 $x=4$，或 9，$y=9$，或 4.

【驗證】 $x=4,\ y=9$，與 $y=9,\ y=4$，俱適於所設方程式.

533. $x+y+\sqrt{x+y}=30\cdots\cdots(1),\ xy=144\cdots\cdots\cdots(2)$，試解之.

【解】 將 $\sqrt{x+y}=X$，則自 (1) 得 $X^2+X-30=0$，$\therefore\ X=5$，或 $X=-6$，因 X 爲正數，故 -6 不適於問題. $\therefore\ X=\sqrt{x+y}=5$. $\therefore\ x+y=25\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$，

$\therefore$ 自 (2), (3) 得 $\left.\begin{matrix}x=10\\ y=9\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=9\\ y=16\end{matrix}\right\}$.

【驗證】 此二組之答，皆適於所設方程式明矣.

534. $x^2+y^2=34,\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20$，試解之.

【解】 第二式 $\sqrt{x^2-y^2}$，以 p 表之，則 $p^2-p=20$，$\therefore\ p^2+p-20=0$，$\therefore\ (p+5)(p-4)=0$. $\therefore\ p=-5$ 或 4，即 $\sqrt{x^2-y^2}=-5$，或 4. 但 $\sqrt{x^2-y^2}$ 必爲正，故棄 -5，而 $\sqrt{x^2-y^2}=4$，$\therefore\ x^2-y^2=16$，將此加於第一式，則 $2x^2=50$，$\therefore\ x^2=25$，$\therefore\ x=\pm5$，若 $x=5$，則自第一式得 $y=\pm3$ 又若 $x=-5$，亦得 $y=\pm3$，故 $x,\ y$ 之得次之四組，$(5,\ 3),\ (5,-3),\ (-5,\ 3),\ (-5,-3)$.

【驗證】 此 $x,\ y$ 之值，皆適於題式.

535. $\sqrt{(x+y)}+2\sqrt{(x-y)}=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{(x-y)}},\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{34}{15}$，試求 $x,\ y$ 之實數值.

【解】 自第二式 $15x^2-34xy+15y^2=0$，

$\therefore\ (3x-5y)(5x-3y)=0$，$\therefore\ 3x-5y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$，或 $5x-3y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$，

去第一式之分母則 $\sqrt{(x^2-y^2)}-2y=-2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$，自 (1) 得 $x=\dfrac{5}{3}y$，將此式代入於 (3)，則得 $y=3$，$x=5$，自 (2) 得 $x=\dfrac{3}{5}y$，將此代入於 (3)，則得 $x,\ y$ 之虛數值.

【驗證】 $x=5,\ y=3$，適於所設方程式.

536. $\sqrt{(3+x^2)}+2y=8,\ 2x^2+\sqrt{(5y^2+4x^4)}=9$，試求 $x,\ y$ 之實數值.

〔解〕 $3+x^2=(8-2y)^2$, $5y^2+4x^4=(9-2x^2)^2$ 自第二式得 $x^2=\frac{1}{36}(81-5y^2)$, 將此式代入一式,而變其形,則 $149y^2-1152y+2115=0$, 即 $(y-3)(149y-705)=0$, ∴ $y-3=0$, 或 $149y-705=0$, ∴ $y=3$, 因而 $x=\pm1$. 又 $y=\frac{705}{149}$, 則 x 為虛數值.

〔驗〕 $\sqrt{(3+1)}+2\times3=8$, $2\times1+\sqrt{(5\times9+4\times1)}=2+7=9$.

537. $\left(\frac{a^2-x^2}{y^2-b^2}+\frac{y^2-b^2}{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a^2+x^2}{y^2+b^2}+\frac{y^2+b^2}{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=4$, $xy=ab$ 試解之.

〔解〕 將 $\frac{ab}{x}$ 代第一式之 y, 則 $2\left(\frac{b^2}{x^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}=4$⋯⋯(1), 故 $\frac{b^2}{x^2}+\frac{x^2}{b^2}=4$, 故 $x^4-4b^2x^2+b^4=0$, ∴ $x^2=b^2\{2\pm\sqrt{3}\}$, $y^2=a^2\{2\mp\sqrt{3}\}$, ∴ $x=\pm b\sqrt{(2\pm\sqrt{3})}$, $y=\pm a\sqrt{(2\mp\sqrt{3})}$.

〔驗〕 將答代入與題式等值之(1), 即得,

$$2\left\{\frac{1}{2\pm\sqrt{3}}+\frac{2\pm\sqrt{3}}{1}\right\}^{\frac{1}{2}}=2\{2\mp\sqrt{3}+2\pm\sqrt{3}\}^{\frac{1}{2}}=2\{4\}^{\frac{1}{2}}=2.2=4.$$

二次方程式

根數與係數之關係

〔注意〕 將 $ax^2+bx+c=0$ 之根,以 α,β 表之,則 $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 及 $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 因而有次之關係, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. 又 b^2-4ac 謂之判別式,因判別式為正或為負或為零,而根為相異之實數虛數或為相等之實數.

538. $x^2+4x+2=0$ 試求其根平方之和.

〔解〕 $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$, 而 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-2\times2=16-4=12$.

539. $x^2+ax+b=0$ 之根之平方之和,等於 $x^2+3ax+b+4a^2=a$ 之根之平方之和,試證之.

〔解〕 第一方程式 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-a)^2-2b=a^2-2b$, 第二方程式 $\alpha^2+\beta^2=(-3a)^2-2(b+4a^2)=a^2-2b$.

540. $4x^2+(1+a)x+1=0$ a 之值如何則.

〔解〕 α,β 若相等,則前公式根號內之 b^2-4ac 當為0, 即 $(1+a)^2-4\times4\times1=0$, ∴ $1+a=\pm4$, ∴ $a=3$, 或 -5.

541. $2x^2-5x+3=0$ 之根,為 α,β, 則 $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ 為根之方程式如何.

〔解〕 所求方程式,為 $x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=0$, ∴ $x^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}x+1=0$, 但 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$, 故 $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{13}{6}$, ∴ $x^2-\frac{13}{6}x+1=0$, ∴ $6x^2-13x+6=0$.

542. $x^2-11x+22=0$ 之根為 α, β, 則以 $\alpha+\beta$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 為根之方程式如何.

〔解〕 所求方程式為 $x^2-\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+(\alpha+\beta)\times\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=0$, 即 $x^2-\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x+(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=0$,

$\therefore\ x^2-\left(11+\frac{11}{22}\right)x+11\times\frac{11}{22}=0,$

$\therefore\ 2x^2-23x+11=0.$

543. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ 之根,爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根之平方,其要件如何.

圖 將第二式之根之平方,爲根之方程式,則 $x^2-\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}\right\}x+\left(\frac{c}{a}\right)^2=0$, $\therefore\ x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0,$

$\therefore\ a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$, 故所求之要件,爲 $-b^2=b^2-2ac$, $\therefore\ 2ac=2b^2$,

$\therefore\ b^2=ac.$

544. $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α,β 則以 $\alpha\beta,\frac{1}{\alpha\beta}$ 爲根之方程式如何.

圖 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$,又所求之方程式爲

$x^2-\left\{\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\right\}x+\alpha\beta\times\frac{1}{\alpha\beta}=0,$

$\therefore\ x^2-\left\{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right\}x+1=0$, $\therefore\ acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0.$

545. α,β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根,則有次之關係,試證之.

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0,\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$

圖 因 α,β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根,

故 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{a}\Big/\frac{c}{a}=-\frac{b}{c}$, $\therefore$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0$, 又 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$, 卽 $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2bc}{a^2}$, 而 $\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}$, $\therefore\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\div\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$

546. $100x^2+60x+m=0$ 之一根,爲他根之2倍,則 m 之値如何.

圖 將其一根以 α 表之,則他一根當以 2α 表之, $\therefore\ \alpha+2\alpha=-\frac{60}{100}$, 卽 $3\alpha=-\frac{3}{5}$, $\therefore\ \alpha=-\frac{1}{5}$, 又 $\alpha\times2\alpha=\frac{m}{100}$, 卽 $2\alpha^2=\frac{m}{100}$, $\therefore\ \alpha^2=\frac{m}{200}$. 而依前所得之 $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\therefore\ \alpha^2=\frac{1}{25}$, $\therefore\ \frac{m}{200}=\frac{1}{25}$,

$\therefore\ m=8.$

547. α,β 爲 $x^2+px+q=0$ 之根,則以 $(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha-\beta)^2$ 爲根之二次方程式,則 $x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$, 試證之.

圖 $\alpha+\beta=-p$, $\therefore\ (\alpha+\beta)^2=p^2$, 又 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2-4q$, $\therefore$ 將 $(\alpha+\beta)^2,(\alpha-\beta)^2$ 爲二根之二次方程式,爲 $x^2-\{p^2+(p^2-4q)\}x+p^2(p^2-4q)=0$, 卽 $x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0.$

548. α,β 爲 $x^2+px+q=0$ 之二根,試作 $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$ 爲根之二次方程式.

圖 $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$ 爲根之方程式,爲

$x^2-\left\{\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}x+\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=0$, 卽 $x^2-\left\{(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\right\}\times x+\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\right)=0$, 而 $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$. 故所求之二次方程式,爲 x^2-

$\left(-p+\frac{-p}{q}\right)x+\left(q+\frac{1}{q}+2\right)=0,$

$\therefore$ 變形爲 $qx^2+p(q+1)x+(q+1)^2=0.$

549. 試判別 $5x^2-7x+1=0$ 之根.

解 判別式 $=7^2-4\times5\times1=29.$ $\alpha+\beta=-\frac{7}{5}$, $\alpha\beta=\frac{1}{5}$. 故此方程式之二根爲實數且俱爲正.

550. 試判別 $3x^2+5x+1=0$ 之根.

解 判別式 $=5^2-4\times3\times1=13$, $\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$. 故此方程式之二根爲實數,且俱爲負.

551. 試判別 $5x^2+7x-1=0$ 之根.

解 判別式 $=7^2-4\times5\times(-1)=69$, $\alpha+\beta=-\frac{7}{5}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{5}$, 故此方程式二之根,爲實數而一爲正一爲負. 其絕對值負數大.

552. 試判別 $5x^2-7x-1=0$ 之根.

解 判別式 $=69$, $\alpha+\beta=\frac{7}{5}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{5}$, 故此方程式之二根爲實數而一爲正一爲負其絕對值正數大.

553. $x^2-8x-8=0$ 之正根大於8,試證之.

解 $\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=-8$, 故此方程式之二根,一爲正一爲負,而其和爲8,故正根大於8.

554. $x^2-ax+10=0$ 之二根之差爲3,則 a 之值如何.

解 $\alpha+(\alpha+3)=a$, $\therefore$ $\alpha=\frac{a-3}{2}$, 又 $\alpha(\alpha+3)=10$, $\therefore$ $\frac{a-3}{2}\times\left(\frac{a-3}{2}+3\right)=10$,

$\therefore$ $\frac{a-3}{2}\times\frac{a+3}{2}=10.$ $\therefore$ $a^2-9=40.$

$\therefore$ $a^2=49$, $\therefore$ $a=\pm7.$

555. $(x^2-2x+1)+\lambda(x^2+3x+5)=0$ 有實根,則 λ 之值如何.

解 $x^2-2x+1+\lambda(x^2+3x+5)=0.$ $\therefore$ $(1+\lambda)x^2+(3\gamma-2)x+(1+5\lambda)=0$ 之判別式爲0,即得 $(3\lambda-2)^2-4(1+\lambda)(1+5\lambda)=0$, 解之,則 $\lambda=0$, 或 $\lambda=-\frac{36}{11}$.

556. $(x^2-2x+1)+\lambda(x^2+3x+5)=0$ 有實根,則 λ 之值之界限如何.

解 將題式變形則 $(1+\lambda)x^2-(2-3\lambda)x+1+5\lambda=0$. 若有實根,則判別式須不小於0,即 $(2-3\lambda)^2-4(1+\lambda)(1+5\lambda)\geqq0$, $\therefore$ $(-\lambda)(11\lambda+36)\geqq0$, $\therefore$ $0\geqq\lambda\geqq-\frac{36}{11}$.

557. $2x^2+2(p+q)x+p^2+q^2=0$ 若非 $p=q$, 則不能有實根,試證之.

解 使 $(p+q)^2-2(p^2+q^2)\geqq0$, 即使 $-(p-q)^2\geqq0$, 故必 $p=q$ 明矣.

558. $x^2-px+q=0$ 之根,若爲二個連續整數,則 $p^2-4q-1=0$ 試證之.

解 $\alpha+(\alpha+1)=p$, $\therefore$ $\alpha=\frac{p-1}{2}$, $\alpha(\alpha+1)=q$, $\therefore$ $\frac{p-1}{2}\times\left(\frac{p-1}{2}+1\right)=q$, $\therefore$ $\frac{p-1}{2}\times\frac{p+1}{2}=q$, $\therefore$ $\frac{p^2-1}{4}=q$, $\therefore$ $p^2-4q-1=0.$

559. $x^2+px+q=0$, $x^2+p'x+q'=0$ 試求其有共同一根之要件.

解 將共同之一根爲 α, 則 $\alpha^2+p\alpha+q=0$, 及 $\alpha^2+p'\alpha+q'=0$, 相減 $(p-p')\alpha=$

$-(p-q')$, ∴ $\alpha=\frac{-(q-q')}{p-p'}$ 將此式代入前式，則 $\frac{(q-q')^2}{(p-p')^2}+\frac{-p(q-q')}{p-p'}+q=0$,

∴ $(q-q')^2+(p-p')(pq'-p'q)=0$.

560. $ax^2+bx+c=0$, 及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 試求其有共同二根之要件.

解 將共同之根爲 α,β, 則 $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b'}{a'}$ 皆爲 $\alpha+\beta$ 而 $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, 皆爲 $\alpha\beta$, 故 $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ ∴ $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$, 又 $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$, ∴ $\frac{a'}{a}=\frac{c'}{c}$, 因而 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.

561. 試求變 $a'x^2+b'x+c'=0$ 二根之符號，而爲 $ax^2+bx+c=0$ 二根之要件.

解 $\alpha+\beta=-\frac{b'}{a'}$, ∴ $(-\alpha)+(-\beta)=\frac{b'}{a'}$, 又 $\alpha\beta=\frac{c'}{a'}$, ∴ $(-\alpha)(-\beta)=\frac{c'}{a'}$, ∴ $\frac{b'}{a'}=-\frac{b}{a}$, 及 $\frac{c'}{a'}=\frac{c}{a}$, 即 $\frac{a}{a'}=-\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

562. 試求變 $ax^2+bx+c=0$ 二根之一符號而爲 $a'x^2+b'x+c'=0$ 二根之一要件.

解 將 $ax^2+bx+c=0$ 之一根爲 α, 則 $a'x^2+b'x+c'=0$ 之一根爲 $-\alpha$, 因得 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, 及 $a'(-\alpha)^2+b'(-\alpha)+c'=0$ 自此消去 α^2, 則 $(ab'+a'b)\alpha=-(ca'-c'a)$, 又消去末項, 則爲 $(ca'-c'a)\alpha=bc'+b'c$,

故 $\frac{ab'+a'b}{ca'-c'a}=-\frac{ca'-c'a}{bc'+b'c}$,

∴ $(bc'+b'c)(ab'+a'b)=-(ca'-c'a)^2$,

即 $(ca'-c'a)^2+(bc'+b'c)(ab'+a'b)=0$,

563. $x^2-px+q=0$ 之二根，若爲實數，而其差小於 f, 則 q 不大於 $\frac{1}{4}p^2$, 又大於 $\frac{1}{4}(p^2-f^2)$, 試證之.

解 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$, ∴ $\alpha-\beta=\sqrt{p^2-4q}$. 因而 $\sqrt{p^2-4q}<f$, ∴ $p^2-4q<f^2$, ∴ $q>\frac{p^2-f^2}{4}$, 又因根爲實數, 故 $p^2-4q\geqq 0$, ∴ $\frac{p^2}{4}\geqq q$. 故 $\frac{p^2}{4}\geqq q>\frac{p^2-f^2}{4}$.

564. 有兄弟二人，解同一之二次方程式，兄誤書 x 之係數，因得6及1之根，弟誤書不含 x 之項，因得4及1之根，問正根如何.

解 兄得6及1之根，故所解之方程式爲 $x^2-7x+6=0$,同樣弟所解之方程式爲 $x^2-5x+4=0$, 依題意得正方程式爲 $x^2-5x+6=0$. 故方程式之根爲2及3.

565. x 爲實數值時，問 $2x^2-x+1$ 所得之數值有限制否.

解 將 $2x^2-x+1=y$, 則對於 y 之任意值之 x 之值, 可自 $2x^2-x+(1-y)=0$ 得之, 因而求此式之判別式, 則爲 $1-8\times(1-y)=8\left(y-\frac{7}{8}\right)$, 故欲使 x 爲實數值, 則必 $y=\frac{7}{8}$, 或 $y>\frac{7}{8}$, 換言之, 即 y 可以大於 $\frac{7}{8}$, 而不可小於 $\frac{7}{8}$, 即 y 之最小值爲 $\frac{7}{8}$.

別解 $2x^2-x+1=2\left\{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right\}=2\left\{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right\}=2\left\{\frac{7}{16}+\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\right\}=\frac{7}{8}+2\times\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$, 故 x 爲實數值, 則 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ 必爲正數, 因而本式之値以

$\frac{7}{8}$為最小，而此時$x=\frac{1}{4}$.

二次方程式應用

566. 問某人兄弟之數，答曰吾兄弟之數之11倍，比其數之平方多12，問此人兄弟之數.

解 將兄弟之人數為x，則依題意$11x=2x^2+12$，$2x^2-11x+12=0$，即$(x-4)(2x-3)=0$，故$x=4$，或$\frac{3}{2}$，故所求兄弟之人數為4，而$\frac{3}{2}$雖適當於自本題所得之方程式，而非問題之答，因人數無分數故也.

注意 本題之x，依題文當限於正整數，然將題文作方程式時，不能將限於為正整數之意以定x，故當察其所得之根，而取其適於題意者.

567. 有父子其歲數之和為100，而其歲數之積之十分之一，比父之歲數多180，問父子之歲數各幾何.

解 將父之歲數為x，則子之歲數為$100-x$，依題意得$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180$，變形而得$x^2-90x+1800=0$，即$(x-60)(x-30)=0$，$\therefore\ x-60=0$，或$x-30=0$，$\therefore\ x=60$，或30，故父之歲數為60，則子之歲數為40．又父之歲數為30，則子之歲數為70．惟因子大於父，不適於題理，故本題之答父為60歲子為40歲.

注意 父大於子，雖未明言，實本題暗設之要件也.

568. 有竿其長之尺數之11倍，比其數之平方之2倍多12，問竿長為幾尺.

解 將竿長之尺數為x，則由題意得$11x=2x^2+12$，解之得$x=4$，或$\frac{3}{2}$，故所求之x為4尺，或$\frac{3}{2}$尺，即1尺5寸.

注意 在本題竿長不必限於整數，即分數亦可，故二根俱適於題意.

569. 有二位之數，其數等於數字之積之3倍．又其十位之數字，比其一位之數字少2，問其數如何.

解 將十位數字為x，則一位數字為$x+2$，而本數為$10x+(x+2)$，故$10x+(x+2)=3x(x+2)$，$\therefore\ 3x^2-5x-2=0$，即$(x-2)(3x+1)=0$，故$x=2$，或$-\frac{1}{3}$，故十位數字為2，而一位數字為4，因得本數為24.

注意 數字當限於正整數，故$-\frac{1}{3}$之根須棄之.

570. 將金85圓買羊若干頭，死去2頭，將其餘羊每頭高價1圓，仍得利5圓，問買入羊數若干.

解 以x表羊數，則一頭之賣價為$\frac{85}{x}+1$，故$\left(\frac{85}{x}+1\right)(x-2)=85+5$，

$\therefore\ (x+85)(x-2)=90x$，即$x^2-7x-170=0$，

$\therefore\ (x-17)(x+10)=0$，$\therefore\ x=17$，即17頭.

注意 自方程式得$x=-10$之根，不適於問題明矣.

571. 某人將80圓，分與若干人，若其人數增4人，則平均每人所得須減1圓，問人數若干.

【解】以x表人數，則$\frac{80}{x}-\frac{80}{x+4}=1$，變形而為$x^2+4x-320=0$，∴ $(x-16)(x+20)=0$，∴ $x=16$，或-20 故人數為16，而人數無負數，故-20當棄之.

【注意】方程式含有問題以外之答數者，因方程式雖由普通之文言而成，實包含一切之性質，即普通之文言，其未知數雖有種種之限制，[例如人數不能為負數或分數等]而方程式中之x，乃表正負整分任意之數，不能以如此限制，設於式中故也. 然將題文少變其形，則負值亦能適當. 例如將本題文修正如次. [將80圓分與若干人，若其人數減4人，則平均所得須增1圓，問人數.]即將前題文增易作減，減易作增. 則此題之方程式，為$\frac{80}{x-4}-\frac{80}{x}=1$，而其根為20及$-16$，實即於本文之方程式，以$-x$代其$x$，則$\frac{80}{-x}-\frac{80}{-x+4}=1$，即$\frac{80}{x-4}-\frac{80}{x}=1$. 故本文方程式之根，為16及$-20$，則此方程式之根，即為20及$-16$.

572. 有果子12個之價之錢數，比以12錢買得果子之數之2倍多2，然則以54錢買得此果子之數若干.

【解】以x為54錢買得之個數，則$\frac{54}{x}$為1個之價之錢數. 故$12\times\frac{54}{x}=\frac{12}{\frac{54}{x}}\times2+2$，即$\frac{324}{x}=\frac{2x}{9}+1$，∴ $2x^2+9x-2916=0$，∴ $(x-36)(2x+81)=0$，∴ $x=36$，即36個.

【注意】x之負根當棄之.

573. 有甲乙丙三工，作某工事，甲一人作之，比三人同作之時間增6時，乙一人作之，則增15時，丙一人作之，則時間增2倍，問三人同作之時間如何.

【解】以x表三人同作之時間，則$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+15}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$，∴ $\frac{2x+21}{(x+6)(x+15)}=\frac{1}{2x}$，∴ $3x^2+21x-90=0$，即$x^2+7x-30=0$，∴ $(x-3)(x+10)=0$，∴ $x=3$，即3時間.

574. 一國之兵力，為陸軍兵士之數與海軍軍艦排水噸之二乘數相乘積成正比例，今欲擴張軍備，將現時陸軍兵士之數，增三分之一，新造軍艦若干隻，於是有今之四倍之兵力，問須新造軍艦之數幾何，但現今所有軍艦之總噸數為十萬噸.

【解】將兵力為現今四倍時，軍艦之總噸為x噸，現今陸軍兵士之總數為y，則依題意有次式.

$4y\times100000^2=y\left(1+\frac{1}{3}\right)x^2$，故兩邊以$y$除之，而求$x$，則$x=100000\sqrt{3}$. 故所求之噸數，為自$x$減100000噸者，即$\{100000\times(\sqrt{3}-1)\}$噸，即約73205噸.

575. 有滿盛清酒8石1斗之罎，自其內取出若干，以水換入，再取出與前同之量，亦以水換入，於是現在清酒之量為6石4斗，試求每回取出之量.

【解】將每回取出之量為x斗，則

$(81-x)\left(1-\frac{x}{81}\right)=64$,變形而為 $x^2-162x+1377=0$, $\therefore$ $(x-153)(x-9)=0$,

$\therefore$ $x=153$,或 9. 但所求之量須少於 81 斗,故 153 斗不適於題意,故酒量為9斗.

576. 有二支蠟燭A,B,其距離三尺,A之光度等於B之光度之4倍,今於連結A,B直線上如何之處,置一障子,則自A,B所受之光量相等,但障子所受同面積之光量,與光度成正比例,而與距離之平方成逆比例.

解 將自A至B相等光量之點之距離為 x 尺,則依題意得次之方程式.

$\frac{(3-x)^2}{x^2}=\frac{1}{4}$,變形為 $3x^2-24x+36=0$,

故 $x=2$,或 6,即所求之處,為自 A 向 B 之方測至2尺或6尺之處.

577. 有半徑9寸之圓,試計算三等分其面積之同心圓之半徑.

解 將同心圓中最小圓之半徑為 x 尺,餘之同心圓之半徑為 x' 尺,則有次式. $\frac{x^2}{9^2}=\frac{1}{3}$, $\frac{x'^2}{9^2}=\frac{2}{3}$,因 x, x' 當為正,棄負根而取正根,則得 $x=3\sqrt{3}$ 尺, $x=3\sqrt{6}$ 尺.

578. 有甲乙二童,共以雞卵100枚,賣於市,各所得之錢相等,今若將乙所賣雞卵之個數,以甲之價賣之,則當得1圓8角,又若將甲所賣雞卵之個數以乙之價賣之,則當得8角,問各所賣雞卵之個數如何.

解 將甲所賣雞卵之個數為 x,則乙所賣雞卵之個數為 $100-x$,故甲所賣1個之價為 $\frac{180}{100-x}$ 錢,乙所賣1個之價為 $\frac{80}{x}$ 錢,故有下之方程式.

$$\frac{180}{100-x}\cdot x=\frac{80}{x}(100-x).$$

而上式之分母 x, $100-x$,皆不為零,故兩邊以 $x(100-x)$ 乘之,將其所得式簡單之,則 $(5x-200)(x+200)=0$,故 $x=40$,或 -200,故甲賣雞卵之個數為40,乙所賣雞卵之數為 $100-40$,即60.

注意 $x=-200$,不適於問題,棄之.

579. 有甲乙二人,共營商,甲以資本金若干圓,一年得元利合計520圓,乙以資本600圓,一年四個月得元利合計若干,但知甲乙利益之和,為360圓,問甲之資本金若干.

解 將甲之資本金為 x 圓,則對於資本金一年之利益為 $\frac{520-x}{x}$ 圓之成分,故對於資本金1年4個月之利益為 $\frac{520-x}{x}\times 600\times 1\frac{1}{3}$,即 $\frac{800(520-x)}{x}$ 故得下之方程式,即 $520-x+\frac{800(520-x)}{x}$ $=360$,故 $\frac{(520-x)(x+800)}{x}=360$,因 x 不為0故如次式 $(520-x)(x+800)=360x$,即 $(400-x)(1040+x)=0$, $\therefore$ $x=400$,或 -1040. 故甲之資本金為400圓.

注意 $x=-1040$ 不適於題意.

580. 駝羊毛呢[Alpaca]及嗶嘰[Serge]各以36碼為一匹,其價對於一元,駝羊毛呢比嗶嘰賤一碼,今將其價,駝羊毛

呢高80仙，嗶嘰高60仙，則駝羊毛呢比嗶嘰，對於一元賤四分之三碼，問各一匹之價如何。

解 將駝羊毛呢一匹之價為x元，嗶嘰一匹之價為y元，則對於一元，駝羊毛呢為$\frac{36}{x}$碼，嗶嘰為$\frac{36}{y}$碼，次將駝羊毛呢嗶嘰各高價80仙，60仙，則對於一元，駝羊毛呢為$\frac{36}{x+0.8}$碼，嗶嘰為$\frac{36}{x+0.6}$碼，因得次之方程式

$$\frac{36}{x}=\frac{36}{y}+1\cdots\cdots(1),$$

$$\frac{36}{x+0.8}=\frac{36}{y+0.6}+\frac{3}{4}\cdots\cdots(2),$$

自(1)，(2)兩式去分母，所得之式，消去xy之項，則$0.8y=0.9x+0.72$，

$$\therefore\quad y=\frac{0.9x+0.72}{0.8}\cdots\cdots(3),$$

將去(1)式分母之式$36y-36x=xy$中之y，以(3)式右邊之值代入，則

$$36\cdot\frac{0.9x+0.72}{0.8}-36x=x\cdot\frac{0.9x+0.72}{0.8}.$$

$$\therefore\quad x^2-32x-28.8=0\cdots\cdots(4),$$

即$(x-7.2)(x+4)=0$，$\therefore\quad x=7.2$元，或-4。若$x=7.2$元，則自(1)得$y=9$元。

581. 某人將布疋若干疋，增買價之5分賣之，而得16圓之利益，若欲每疋得2角5分之利賣之，則所得利益之拾圓金幣之個數，等於每疋買價之五角銀幣之個數，問此人買賣之疋數，及一疋之買價各如何。

解 將買賣之疋數為x，一疋之買價為$0.5y$圓，[但y為每疋買價之5角銀幣之個數.] 則$0.5xy\times0.05=160\cdots\cdots(1)$，

$$0.25x=10y\cdots\cdots(2),$$

自(1)得$xy=640\cdots\cdots(3)$，

自(2)得$x=40y\cdots\cdots(4)$，

將(3)，(4)兩邊相乘，則得$x^2=25600$，

$\therefore\quad x=\pm160$，但$x=-160$不適於題意，故將$x=160$代入(4)，而得$y=4$，故買賣之疋數為16圓，而一疋之買價為0.5×4圓，即2圓。

582. 有兵士若干人，可使整列為厚三人之中空方陣，若增9人，則可使列為中實方陣，且此中實方陣每邊人數，比前中空方陣內一邊之人數少32，問人數如何。

解 將中空方陣外一邊之人數為x，則內一邊之人數為$x-4$人，因而中實方陣一邊之人數為$x-4-32=x-36$，又原人數為$x^2-(x-6)^2$，故得次之方程式。$x^2-(x-6)^2+9=(x-36)^2$，$\therefore$ $x^2-84x+1323=0$，$\therefore$ $(x-63)(x-21)=0$，$\therefore$ $x=63$，或$x=21$。但21人比32人少，不適於題意，故所求之人數，為$x^2-(x-6)^2=63^2-(63-6)^2$，即720人。

583. 以3000圓，存於銀行，至一年於其利息之內取出80圓，其餘之利息，加入元金，再以比前少5厘之利率，再存一年，於是元利合計為3270圓5角，問前後之利率各如何。

解 將前之利率為年r，則後之利率為年$r-0.005$，因得次之方程式。

$$[3000\times(1+r)-80](1+r-0.005)=3270.5,$$

即 $30000(1+r)^2-950(1-r)-32701=0$,

將 $(1+r)$ 爲未知數,而解此方程式,則得 $1+r=\frac{950\pm62650}{60000}$,得 $1+r$ 之二值一爲正,一爲負,但所求之利率,當爲正數,故上之等式右邊之複符號當取 $+$,得 $1+r=1.06$, 即 $r=0.06$, 故前利率爲6分,因而後利率 $0.06-0.005=0.055$, 即5分5厘.

584. 兄自甲地,弟自乙地,同時相向而行,於途中相會,以後,兄以9時間至乙地,弟以4時間至甲地,問兩地間各行時間幾何.

解 將二人相會之地,設爲丙地,二人至相會之時間爲 x 時,則兄行於甲乙兩地間,

甲　　丙　　乙

需 $(x+9)$ 時間,弟需 $(x+4)$ 時間,而速度與經過之路程成逆比例,故依題意得次之方程式.

$\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$, 或 $x^2=36\cdots\cdots(1)$, 但 x 當爲正數,故自 (1) 得 $x=6$ 時間,故甲乙兩地之間,兄需行 $x+9=15$ 時間,弟需行 $x+4=10$ 時間.

別解 將每時之速度,兄爲 y 里,弟爲 z 里,則由題意得 $xy=4z\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$,

$xz=9y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$,

故 (1) (2) 兩邊相乘,得 $x^2yz=9\times4yz$, 即 $x^2=36$.

585. 以自轉車甲市至乙市,兩市距離20里,午前五時出發,行8里休息一時間,其後每時之速增一里,乃以豫定之時間到乙市,問原來每時之速,及達乙市之時刻如何.

解 將原來每時之速爲 x 里,則自甲市至乙市,所需之時間爲 $\frac{20}{x}$, 又自一方觀之,則此時間等於 $\frac{8}{x}+1+\frac{12}{x+1}$,

故 $\frac{8}{x}+1+\frac{12}{x+1}=\frac{20}{x}$, 即 $x^2+x-12=0$, 故 $x-3=0$, 或 $x+4=0$, 但 x 當爲正數,故棄負根而得 $x=3$ 里.因而自甲市達乙市之時間爲 $\frac{20}{3}=6$ 時40分,故達乙市之時刻爲午前11時40分.

586. 舟子盪小舟上下河流3.5里,須1時40分,若水流1時間之速爲2里,則此水夫盪於靜水1時間之速如何.

解 以 x 爲盪於靜水1時之速之里數,則上1時間之速爲 $(x-2)$里,而下1時間之速爲 $(x+2)$里,故 $\frac{3.5}{x-2}+\frac{3.5}{x+2}=1\frac{40}{60}=\frac{5}{3}$. $\therefore$ $3.5\times3(x+2)+3.5\times3(x-2)=5(x^2-4)$, 變形而爲 $5x^2-21x-20=0$, 即 $(x-5)(5x+4)=0$, $\therefore$ $x=5$. 即5里.

注意 x 之負根,當棄之.

587. 直角相交之二直線上,有二動點A及B,每秒A動3米突,B動4米突,今A點距交點9米突,B點距交點12米突,皆自交點遠離,問自今幾秒後,二點間之距離爲40米突,又問自今幾秒前,二點間之距離爲40米突.

圖 自今x秒後A, B適於所求要件之位置,則自交點至A之距離爲$(9+3x)$米突,自交點至B之距離爲$(12+4x)$米突,故$(9+3x)^2+(12+4x)^2=40^2$, $\therefore$ $(x+11)(x-5)=0$, $\therefore$ $x=5$,或$x=-11$.故自今5秒後,及自今-11秒後,即自今11秒前,二點間之距離爲40米突.

588. 某鐵路一號二號三號之車,其速度一號比二號速10哩,二號比三號速10哩,今一號與三號在甲車站,二號在乙車站相向而發,二號與一號相會後,45分二號與三號相會,甲乙兩地車站間,爲180哩,問各車每時之速度爲如何.

圖 將三號車之速度爲x哩,一號車與二號相會之時間爲y時,則二號車與三號車相會之時間爲$\left(y+\frac{3}{4}\right)$時故可依題意得次之二方程式. $y(x+20+x+10)=180$, $\left(y+\frac{3}{4}\right)(x+10+x)=180$, 或 $y(2x+30)=180\cdots\cdots(1)$, $\left(y+\frac{3}{4}\right)(2x+10)=180\cdots\cdots(2)$,

自(1), (2)消去y,則

$$\frac{180(2x+10)}{2x+30}=\frac{3}{4}(2x+10)=180,$$

故$(x-25)(x+45)=0$,因其負根不適於問題,捨之而取正根,則得$x=25$,故三車之速度45哩, 35哩, 25哩.

589. 甲自東地,乙自西地,同時相向出發.兩人會時,甲比乙多行m里,又相會後,甲行b^2分達西地,乙行a^2分達東地,問東地與西地間之距離.

圖 將東西間之距離爲$(2x+m)$,則相會時,甲行$(x+m)$里,乙行x里,故各一時間之速,甲爲$\frac{x}{b^2}$里,乙爲$\frac{x+m}{a^2}$里. $\therefore$ $\frac{x+m}{\frac{x}{b^2}}=\frac{x}{\frac{x+m}{a^2}}$, $\therefore$ $b^2(x+m)^2=a^2x^2$, $\therefore$ $x=\frac{bm}{a-b}$. 因而東西之距離,爲$\frac{2bm}{a-b}+m$,即$\frac{(a+b)m}{a-b}$里.

590. 有人旅行若干里,先乘56里火車,其餘程乘馬車而行,此人達目的地時,火車已過彼處35里,此馬車走5里之時間,等於火車走全路四分之一之時間,[旅人在56里處下火車,即上馬車,與火車同時出發]試求馬車所行路程.

圖 將旅人以馬車行之里程爲x里,則此時火車行$(x+35)$里,又由題意,馬車行5里,火車行全路程$(x+56)$里之四分之一, $\therefore$ $\frac{5}{\frac{x+56}{4}}=\frac{x}{x+35}$,

簡單之,則$x^2+36x-700=0$, $\therefore$ $(x+50)\times(x-14)=0$, $\therefore$ $x=14$,或-50,故14里適於本題.

591. 有A, B二火車,自P站發向Q站,同時有C, D二火車,自Q站發向P站,A於距P站120哩處與C會,又於距P站140哩處與D會,而B於距Q站126哩處與C會,又於P站與Q站之中央與D會,問P, Q兩站間之距離如何.

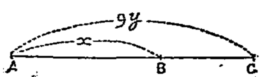
解 將 A, B, C, D 每時之速度爲 a, b, c, d 哩, P, Q 之距離爲 x 哩, 則 C 行 $(x-120)$ 哩, A 行 120 哩, D 行 $(x-140)$ 哩, A 行 140 哩, C 行 126 哩, B 行 $(x-126)$ 哩, D 行 $\frac{x}{2}$ 哩, B 亦行 $\frac{x}{2}$ 哩.

故 $\frac{120}{a}=\frac{x-120}{c}$, $\frac{140}{a}=\frac{x-140}{d}$,

$\therefore \frac{120}{140}\times\frac{c}{d}=\frac{x-120}{x-140}$, 又 $\frac{x-126}{b}=\frac{126}{c}$, 及 $b=d$, $\therefore \frac{d}{c}=\frac{x-126}{126}$, 因而 $\frac{120}{140}=\frac{x-120}{x-140}\times\frac{x-126}{126}$, 故 $x^2-354x+30240=0$, 即 $(x-144)(x-210)=0$, $\therefore x=144$, 或 210 而, 144, 與 210, 俱適於題意.

592. 乙旅人自 B 市發足, 甲旅人自 A 市發足, 同向而行, 經若干時後, 甲追及乙, 算其行程共 15 里, 此時乙距 A 市以其速度算之, 當於 9 時間之行程, 又甲過 B 市時, 在今 4 時間前, 問 A, B 兩市之距離如何.

解 將 A, B 兩市間爲 x 里, 乙每時速度爲 y 里, 則甲追及乙之點 C, 與 B 市之距離爲 $(9y-x)$ 里, 故甲每時之速



爲 $\frac{9y-x}{4}$, 故得次之二方程式,

$2\times 9y-x=15\cdots\cdots(1)$, $\frac{9y}{\frac{9y-x}{4}}=\frac{9y-x}{y}\cdots\cdots\cdots(2)$, 自 (1), (2) 兩式消去 y, 則 $x^2-78x+225=0$, 即 $(x-3)(x-75)=0$, $\therefore x=3$, 或 75.

研究 若 $x=3$ 里, 則自 (1) 得 $y=1$ 里, 故甲每時之速爲 $\frac{9-3}{4}=\frac{3}{2}$ 里, 而甲追及乙之時間, 恰爲 6 時間, 故此時乙距 A 市爲 $\frac{3}{2}$ 里 $\times 6=9$ 里, 而以其速行之, 則如題意需 9 時間, 故知 $x=3$ 里, 適於問題, 若取 $x=75$ 里, 則 $y=5$ 里, 而甲每時之速, 爲 $\left[\frac{9\times5-75}{4}, 即 -\frac{30}{4}里\right]$ 負數, 故 $x=75$ 里, 不適於問題, 又後者之研究, 甲追及乙時, 行程之和爲 15 里, 今 A, B 兩市之距離, 多於 15 里, 其不適於問題明矣.

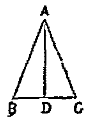
注意 $x=75$ 里, 適當之問題如次. 乙旅人自 B 市發足, 甲旅人自 A 市發足, 相向而行, 經若干時後, 甲乙相會, 算其行程之差爲 15 里, 此時乙距 A 市, 以其速度算之, 當於 9 時間之行程, 又甲到 B 市時, 在今 4 時間後, 問 A, B 兩市之距離如何.

593. 有矩形及正方形, 而積相等, 其正方形之一邊, 比矩形之一邊短 6 寸, 今若將矩形之寬增 1 寸, 長減 2 寸, 其面積仍不變, 問其矩形之長及寬各若干.

解 將兩邊之長爲 x, y 寸, 則依題意, 得 $xy=(x-6)^2$, $xy=(x-2)(y+1)$. 自第二方程式, 得 $x-2y=2$, $\therefore y=\frac{1}{2}(x-2)$, 將此代入第一方程式, 變形爲 x^2-22x

$+72=0$, $\therefore (x-4)(x-18)=0$, $\therefore x=4$, 或 18. 故若 $x=18$, 則 $y=8$. 卽矩形之二邊爲 18寸, 8寸. [若 $x=4$, 則 $y=1$, 由是短6寸之邊不能成正方形, 故此 x, y 之值, 須棄之].

594. 二等邊三角形之相等邊之長爲 l 寸. 其面積爲 s 平方寸, 問底邊之長.



解 二等邊三角形 ABC, AB=AC=l 寸, 底邊 BC 之長爲 $2x$ 寸, 自頂點 A 至底邊 BC, 所作垂線爲 AD, 則 BD 爲 x 寸明矣, 依幾何學得知 AD=$\sqrt{l^2-x^2}$ 寸, 而 $\sqrt{l^2-x^2}.x$ 爲 s 平方寸, 故 $\sqrt{l^2-x^2}.x=s$, $\therefore x^4-l^2x^2+s^2=0$,

$$\therefore \quad x^2=\frac{1}{2}(l^2\pm\sqrt{l^4-4s^2}),$$

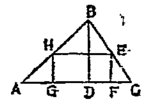
$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(l^4\pm\sqrt{l^4-4s^2})}.$$

x 爲實數, 且當爲正, 則 x^2 爲實數, 且當爲正, 但 x^2 爲實數, 則必爲正, 因和及積皆爲正故也. 故問題若成立其十分之要件, 爲 x^2 爲實數, 卽 $l^4-4s^2\geqq 0$, 卽 $l^2\geqq 2s$, 此要件能滿足, 則所求底邊之長, 爲

$$2x=2\sqrt{\frac{l^2\pm\sqrt{l^4-4s^2}}{2}} \text{ 寸}.$$

595. 三角形之高爲 h, 底邊爲 b, 試求面積爲 m^2 之矩形, 而內接於三角形者, 但矩形之底邊, 與三角形之底邊, 相合.

解 △ABC 使 AC=b, BD=h, 則矩形 EFGH 內接於△ABC之面積爲 m^2,



則 BD−EF : EH=BD : AC, 而 EF=x, EH=y, 則上之比例式, 爲 $h-x : y=h : b$

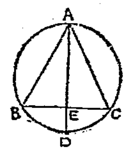
$$\therefore\ y=\frac{b(h-x)}{h}, \quad \therefore\ xy=m^2=\frac{bx(h-x)}{h},$$

$$\therefore\ bx^2-bhx+hm^2=0,$$

$$\therefore\ x=\frac{bh\pm\sqrt{b^2h^2-4bhm^2}}{2b}.$$

596. 半徑 a 之圓, 使其內接二等邊三角形, 而其各邊平方之和, 等於 $2b^2$.

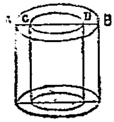
解 三角形等邊之一之長爲 x, 底之長爲 $2y$, ABC 爲二等邊三角形, AD 爲過 A 之徑, 使交 BC 於 E, 則



因 ABD 爲直角, 故 $\overline{AB}^2=AD.AE$, 因而 $x^2=2a\sqrt{(x^2-y^2)}$·········(1), 又按題意, $2x^2+4y^2=2b^2$, 卽 $x^2+2y^2=b^2$·········(2), 由(1), (2) 消去 y, 則 $x^4-6a^2x^2+2a^2b^2=0$, 因而 $x=\pm a\sqrt{\left\{3\pm3\sqrt{\left(1-\frac{2b^2}{9a^2}\right)}\right\}}$. 而對此 y 之值, 可自(2)得之, 若欲 x 及 y 爲實數其必要且十分之要件, 爲 $b\leqq 3a/\sqrt{2}$, 若此要件滿足, 則 x 有二個正實數值 又若 $b<\frac{3a}{\sqrt{2}}$, 則 y 對此 x 當有二個實數值, 自上之結果, 其 $b=\frac{3a}{\sqrt{2}}$ 時, 則內接二等邊三角形其各邊平方之和爲最大, 而相對之 x, $2y$ 各爲 $\sqrt{3}a$, 及 $\sqrt{3}a$. 故內接三角形爲等邊時, 其各邊平方之和最大.

597. 如圖，圓柱形中空之物，其外徑AB，等於其高，其厚為a糎，其內部與外部間之體積，等於其厚二分之三之半徑球之體積，試求其高.

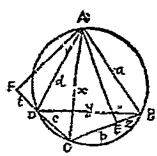
圖 高=AB=x糎，則CD=$(x-2a)$糎，故依題意，得次之方程式，



$$\frac{1}{4}\pi x^3-\frac{1}{4}\pi(x-2a)^2x=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}a\right)^3$$，即 $2x^2-2ax-9a^2=0$ ………………(1)，(1)式x^2之係數，與已知項異符號，故必有實根，且一根為正，一根為負，而x當為正，故捨負根而取正根如次， $x=\frac{1}{2}a(1+\sqrt{19})$糎.

598. 圓內接四邊形之四邊為a, b, c, d試求二對角線x, y.

圖 向邊BC, CD，作垂線AE, AF，若EB$=z$，FD$=t$，則依幾何學定理得 $x^2=a^2+b^2-2bz$ …………(1)，$x^2=c^2+d^2+2ct$ ………………(2)，又 △AEB, △AFD為相似，故 $\frac{z}{t}=\frac{a}{d}$…………(3)，自(1),(2)而得 $a^2+b^2-2bz=c^2+d^2+2ct$，將自(3)所得 $t=\frac{dz}{a}$代入，而得



$$z=\frac{a^3+ab^2-ac^2-ad^2}{3(ab+cd)}$$. 將此代入(1)變形，則 $x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$，因$x$當為正，故 $x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$.

又若將x之值以a換b，以b換c，以c換d，以d換a，則得

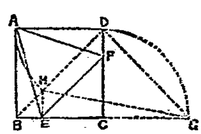
$$y=\sqrt{\frac{(bd+ac)(ab+cd)}{bc+ad}}.$$

注意 若將x, y之值相乘，則得 $xy=ac+bd$，此即幾何學普陀列米之定理也 又將x之值以y之值除之，則 $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$. 故得次之定理圓內接四邊形，兩對角線之比，等於對角線端二邊所成二矩形之和之比.

599. 已知正方形內，畫等邊三角形，使其一角頂與正方形共同，而他二角頂，使在正方形二邊之中.

圖 ABCD為已知正方形，AEF為所求之三角形，若AB$=a$，BE$=x$，則 $\overline{AE}^2=a^2+x^2$，及 $\overline{EF}^2=2(a-x)^2$ 但AE=EF，故 $a^2+x^2=2(a-x)^2$，此方程式，就x解之，則 $x=a(2\pm\sqrt{3})$. x之二值為正，但其大值大於a，故若將正方形之邊見為角頂間有限直線，則大值宜棄去.

作圖法 將BC延長至G，使CG$=a$，連接DG, DB，於DB之上，取DH=DA，連結GH，則 GH$=a\sqrt{3}$，於GB之上，取GE=GH，則BE$=2a-a\sqrt{3}$，E為所求三角形之一角頂，將A



為中心AE為半徑畫圓，截CD於F，連

接EF,則AEF爲所求之三角形. AEF爲等邊三角形,容易證明.

研究 欲將他根 $2a+a\sqrt{3}$ 作圖,則將BC越延長越G,取點K,使GK=GH,又取L於DC之延線,使AL=AK,則三角形AKL又爲等邊,亦易證明. 故正方形之邊,若見爲過角頂之無限直線,則三角形AKL亦爲本題之一解.

比　比例　變數法

600. $\frac{4x+5y}{3x-y}=2$ 時, y 之於 x 之比如何.

解 $4x+5y=6x-2y$, ∴ $7y=2x$, 將各邊以 $7x$ 除之,則 $\frac{y}{x}=\frac{2}{7}$.

601. 若 $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, 則 $7x-4y$ 之於 $3x+y$ 之比如何.

解 $y=4m$, 則 $x=4m\times\frac{3}{4}=3m$, 因而 $7x-4y=21m-16m=5m$, $3x+y=9m+4m=13m$. ∴所求之比,爲 $5m:13m$, 即 $5:13$.

別解 自 $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, 得 $\frac{7x}{4y}=\frac{21}{16}$, 故 $\frac{7x-4y}{4y}=\frac{5}{16}$, 因而 $\frac{7x-4y}{y}=\frac{5}{4}$, 又自 $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ 得 $\frac{3x}{y}=\frac{9}{4}$, 故 $\frac{3x+4y}{y}=\frac{13}{4}$, 因而

$$\frac{7x-4y}{3x+y}=\frac{5}{4}\times\frac{4}{13}=\frac{5}{13}.$$

602. 若 $x^2+6y^2=5xy$, 則 x 之於 y 之比如何.

解 $x^2-5xy+6y^2=0$, ∴ $(x-2y)(x-3y)=0$, ∴ $x-2y=0$, ∴ $\frac{x}{y}=2$. 又 $x-3y=0$, ∴ $\frac{x}{y}=3$. 因而所求之比爲2或3.

603. 試求 a^3b 與 ab^3 之比例中項.

解 $a^3b:x=x:ab^3$, ∴ $x^2=a^4b^4$, ∴ $x=\pm a^2b^2$.

604. $\frac{x^2-2x+3}{2x-3}=\frac{x^2-3x+5}{3x-5}$ 試解之.

解 依合比之理,而 $\frac{x^2}{2x-3}=\frac{x^2}{3x-5}$, ∴ $x^2=0$, ∴ $x=0$, 或 $2x-3=3x-5$, ∴ $x=2$.

605. $\frac{p}{b-c}=\frac{q}{c-a}=\frac{r}{a-b}$, 則 $p+q+r=0$ 試證之.

解 $\frac{p}{b-c}=\frac{q}{c-a}=\frac{r}{a-b}=$

$\frac{p+q+r}{(b-c)+(c-a)+(a-b)}$, 但 $(b-c)+(c+a)+(a+b)=0$, ∴ 所設之比各爲有限,則必 $p+q+r=0$.

注意 參照190題.

606. $a:b=c:d$, $p:q=s:t$, 則 $ap:bq=cs:dt$.

解 自第一比例,得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 又自第二比例,得 $\frac{p}{q}=\frac{s}{t}$, 故 $\frac{a}{b}\times\frac{p}{q}=\frac{c}{d}\times\frac{s}{t}$, 即 $ap:bq=cs:dt$.

607. $3a-5b:3c-5d=5a+3b:5c+3d$, 則 $a:b=c:d$, 試證之.

解 $(3a-5b)(5c+3d)=(3c-5d)(5a+3b)$, 即 $15ac-25bc+9ad-15bd=15ac-25ad+9bc-15bd$, ∴ $34ad=34bc$, ∴ $ad=bc$, ∴ $a:b=c:d$.

別解 自題之關係,得 $3a-5b:5a+3b=3c-5d:5c+3d$. 故將此第一項第三

項，以3乘之，第二項第四項，以5乘之，則 $9a-15b:25a+15b=9c-15d:25c+15d$，$34a:25a+15b=34c:25c+15d$，卽 $a:5a+3b=c:5c+3d$，即 $5a:5a+3b=5c:5c+3d$，即 $5a:3b=5c:3d$，$\therefore\ a:b=c:d$.

608. $a:b=c:d$，則 $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$，試證之.

圖 $a^4+b^4:c^4+d^4=b^4:d^4$ ……………(1)，$a^2:b^2=c^2:d^2$，$b^2:d^2=a^2:c^2$，又 $b^2:d^2=b^2:d^2$，$\therefore\ b^4:d^4=a^2b^2:c^2d^2$，將此代入(1)，$a^4+b^4:c^4+d^4=a^2b^2:c^2d^2$，卽 $\frac{a^4+b^4}{ab}:\frac{c^4+d^4}{cd}=ab:cd$，卽 $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$.

609. $a+b:b+c=c+d:d+a$，則 $a=c$，或 $a+b+c+d=0$ 試證之.

圖 $a+b-(b+c):b+c=c+d-(d+a):d+a$，卽 $a-c:b+c=c-a:d+a$，$\therefore$ $(a-c)(d+a)=-(a-c)(b+c)$，$\therefore$ $(a-c)(d+a)+(a-c)(b+c)=0$，卽 $(a-c)(a+b+c+d)=0$，$\therefore$ $a-c=0$，或 $a+b+c+d=0$.

610. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，則 $b+c$ 爲 $a+b$ 與 $c+d$ 之比例中項，試證之.

圖 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，$\therefore$ $a+b:b+c=b:c$，又 $\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，$\therefore$ $b+c:c+d=c:d$，但 $b:c=c:d$. $\therefore$ $a+b:b+c=b+c:c+d$.

611. $a:b=b:c$ 則 $4a^2-9b^2:4b^2-9c^2=a^2:b^2$，試證之.

圖 $a^2:b^2=b^2:c^2$，$\therefore$ $4a^2:9b^2=4b^2:9c^2$，$\therefore$ $4a^2-9b^2:4b^2-9c^2=9b^2:9c^2=b^2:c^2=a^2:b^2$.

612. a,b,c,d 成連比例，則 $a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3=a:d$，試證之.

圖 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，$\therefore$ $\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$，又 $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$，$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，之兩邊相乘，則 $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{d}$，

$\therefore$ $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$.

613. $a:b=c:d$，則 $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$，試證之.

圖 $a:b=c:d$，故 $a:c=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$ …………(1)，又 $a:b=c:d$，故 $a^3:b^3=c^3:d^3$，$\therefore$ $a^3:a^3+b^3=c^3:c^3+d^3$，$\therefore$ $a:c=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$ …(2)，自(1)，(2)得 $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$.

別圖 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=f$，則 $a=bf$，$c=df$，

$\therefore$ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{b^2f^2+b^2}}{\sqrt{d^2f^2+d^2}}=\frac{b}{d}$，又

$\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{\sqrt[3]{c^3+d^3}}=\frac{\sqrt[3]{b^3f^3+b^3}}{\sqrt[3]{d^3f^3+d^3}}=\frac{b}{d}$，故

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{\sqrt[3]{c^3+d^3}}$.

614. $a:b=b:c$，則 $(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4$，試證之.

圖 $a:b=b:c$，故 $b^2=ac$，而 $(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2+c^2)=\{(a+c)^2-b^2\}(a^2-ac+c^2)=\{(a+c)^2-ac\}(a^2-ac+c^2)=(a^2+ac+c^2)(a^2-ac+c^2)=a^4+a^2c^2+c^4=a^4+b^4+c^4$.

615. $a:b=c:d$, 則 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}=\frac{1}{ad}\left\{\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d\right\}$, 試證之.

解 $a:b=c:d$, 故 $ad+bc$, 因而 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}=\frac{1}{ad}\left\{d-\frac{ad}{2b}-\frac{ad}{3c}+\frac{a}{4}\right\}=\frac{1}{ad}\times\left\{\frac{a}{4}-\frac{bc}{3c}-\frac{bc}{2b}+d\right\}=\frac{1}{ad}\left\{\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d\right\}$.

616. $z^2=x^2+y^2$, 試證次式, $y-z+x:z-x+y=x-y+z:x+y+z$.

解 因 $z^2=x^2+y^2$, 故有次式, $(x+y)^2-z^2=2xy=z^2-(x-y)^2$, 或 $(x+y+z)(x+y-z)=(z-x+y)(x-y+z)$, 即 $y-z+x:z-x+y=x-y+z:x+y+z$.

617. $0<x<1$, 試順列 $1:1+x$, $1+x:1+2x$, $1-x:1$ 之大小.

解 $\frac{1}{1+x}=\frac{1+2x}{(1+x)(1+2x)}$, $\frac{1+x}{1+2x}=\frac{1+2x+x^2}{(1+x)(1+2x)}$, $\frac{1-x}{1}=\frac{(1-x)(1+x)(1+2x)}{(1+x)(1+2x)}=\frac{1+2x-x^2-2x^3}{(1+x)(1+2x)}$, 而 $1+2x+x^2>1+2x>1+2x-x^2-2x^3$, 故其大小之次序, 爲 $1+x:1+2x>1:1+x>1-x:1$.

618. $x\propto y$, 且 $x=18$ 時, 若 $y=7$, 問 $y=21$ 時, x 之值如何.

解 $x=my$, ∴ $18=m\times7$, ∴ $m=\frac{18}{7}$, ∴ $x=\frac{18}{7}\times21=54$.

619. $x\propto\frac{1}{y}$, 且 $x=15$ 時, 若 $y=4$ 問 $x=6$ 時 y 之值如何.

解 $x=m\times\frac{1}{y}$, ∴ $15=m\times\frac{1}{4}$, ∴ $m=60$, ∴ $6=60\times\frac{1}{y}$, ∴ $y=10$.

620. $x\propto\frac{1}{y}$, 且 $y\propto\frac{1}{z}$, 則 $z\propto x$, 試證之.

解 $x=m\times\frac{1}{y}$, $y=n\times\frac{1}{z}$, 故 $m\times\frac{1}{y}\times y=x\times n\times\frac{1}{z}$, ∴ $mz=nx$, ∴ $z=\frac{n}{m}x$, ∴ $z\propto x$.

621. $x\propto z$, 且 $y\propto z$, 則 $x^2-y^2\propto z^2$, 試證之.

解 $x=mz$, $y=nz$, ∴ $x^2-y^2=m^2z^2-n^2z^2=(m^2-n^2)z^2$, 但 m^2-n^2 爲常數, ∴ $x^2-y^2\propto z^2$.

622. a 爲常數, 而 $x\propto y+a$, 且 $y=1$, 則 $x=15$, 又 $y=5$, 則 $x=35$, 問 $y=2$, 則 x 之值如何.

解 $x=m(y+a)$, ∴ $15=m(1+a)$, 又 $35=m(5+a)$, ∴ $35-15=5m-m$, 即 $20=4m$. ∴ $m=5$, 因而 $15=5(1+a)$, ∴ $a=2$. ∴ $x=5(2+2)=20$.

623. $z\propto(x+a)(y+b)$, 而 $x=y=0$, 則 $z=ab(a+b)$, 又 $x=b$, $y=a$, 則 $z=(a+b)^3$, 試證之.

解 $z=m(x+a)(y+b)$, ∴ $ab(a+b)=m(0+a)(0+b)$, ∴ $m=a+b$, 故於 $z=m(x+a)(y+b)$ 而以 $m=a+b$, $x=b$, $y=a$ 代入之, 則 $z=(a+b)(b+a)(a+b)=(a+b)^3$.

624. 有甲乙丙三工, 比較其各一人成一事之日數, 則甲乙日數之和, 等於丙日數之二倍, 又甲丙合力之日數.

與乙丙合力之日數之比，為10:7，問三工力量之比如何．

圖 甲乙丙各人成事之日數為x, y, z，則依題意，得次之方程式，

$x+y=2z$……………………(1)，

$\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}:\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=10:7$…………(2)，

將(2)變化書之如次，$xy+xz:xy+yz=10:7$………(3)，自(1)所得z之值，代入(3)而變化之，則得$10y^2+9xy-7x^2=0$，或$(2y-x)(5y+7x)=0$．但依題意，可知x, y, z俱為正，且不為0，故$5y+7x \neq 0$，故$2y-x=0$．因而$x:y=2:1$，依此式與(1)則$y:z=2:3$，故$x:y:z=4:2:3$．但力之比為日數之比之逆比，故甲乙丙三工力量之比，為$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:6:4$.

625. 遊星繞太陽日數之平方，依遊星至太陽距離之立方而變，今太陽至地球與水星之距離，約91百萬哩及35百萬哩，試算出水星一週太陽之日數．

圖 地球一週太陽之日數為365日，則$365^2=m91^3$，$\therefore\ m=\dfrac{365^2}{91^3}$，將所求日數為$x$，則$x^2=m35^3=35^3\times\dfrac{365^2}{91^3}$，

$\therefore\ x=\dfrac{5\times365}{13}\sqrt{\dfrac{5}{13}}\fallingdotseq 87$日[近似數]．

626. 甲乙兩地相距一百哩，其鐵路機關車用煤之量，與其速度之平方成正比例，今欲使每時有16哩之速度，每時用2噸之煤，又此車所用人工及一切雜費，每時需5圓4角，煤之市價一噸4圓8角，此車一百哩需費90圓，問其速度如何．

圖 將每時用煤之量為y，每時之速度為x哩，則y與x^2為正比，故$y=kx^2$………(1)，但k為常數，今於(1)式，將$y=2$，$x=16$，則$k=\dfrac{1}{128}$．又依題意，得次之方程式，$\dfrac{100}{x}\times5.4+y\times\dfrac{100}{x}\times4.8=90$．於此式將$y$之值，及上所得$k$之值代入，則得$\dfrac{100}{x}\left\{5.4+\dfrac{4.8}{128}x^2\right\}=90$，即$x^2=24x+144=0$，卽$(x-12)^2=0$，$\therefore\ x=12$．故所求之速度每時為12哩．

627. 輪船用煤之量與其速度之平方成比例，今欲使每時有16哩之速度，需二百斤之煤，每百斤煤之價為5角而一切雜費每時為$\frac{9}{16}$圓，其對於100哩之轉運，問最有利益之速度．

圖 將輪船每時之速度為x哩，每時用煤之量為q百斤，則$q=kx^2$，但$2=k\times(16)^2$，$\therefore\ q=\dfrac{2}{256}x^2$，故每時用煤之價，為$\dfrac{1}{2}$圓$\times\dfrac{2}{256}x^2=\dfrac{x^2}{256}$圓，$\therefore$ 每哩用煤之價為$\left(\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x^2}{256}\right)$圓$=\dfrac{x}{256}$圓．又因一切雜費對於一哩為$\left(\dfrac{9}{16}\times\dfrac{1}{x}\right)$圓$=\dfrac{9}{16x}$圓，故對於一哩之費用，為$\left(\dfrac{x}{256}+\dfrac{9}{16x}\right)$圓，而此式若求得其最小值，則最有利益，因變其形，則此式$=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{16}-\dfrac{3}{4\sqrt{x}}\right)^2+\dfrac{3}{32}$．故$\dfrac{\sqrt{x}}{16}-\dfrac{3}{4\sqrt{x}}=0$，卽$x=12$時最小，故

每哩最小代價爲 $\frac{3}{32}$ 圓,故對於 100 哩爲 $\frac{300}{32}$ 圓,即9圓3角7分4厘.

注意 記＊式,巧變其形而求最小值,惟視解者熟練之耳,然大概如次求之爲便,即將 $\frac{x}{256}+\frac{9}{16x}=y$, 而求 y 之最小值,先去分母移項爲 $x^2-256xy=-144$, 將此對於 x 而解之,則 $x=128y\pm\sqrt{128^2y^2-144}$, 但 x 爲實數,故當 $128^2y^2\geqq 114$, 故 y 之最小值,即 $128^2y^2=144$, 故 $y=\frac{3}{32}$.

628. 輪船用煤之量,與其速度之立方成比例,今有某艦,一晝夜用去煤45000斤,每時平均之速度爲9哩,若將此艦載360000斤之煤,每時以平均6哩之速度航行,問能航行幾晝夜.

解 能航行之日數,與煤成比例,而與速度之立方成逆比例明矣,故將 k 爲一常數,則得次式, $x=ky\frac{1}{v^3}$, [但 x 爲日數 y 爲煤量, v 爲速度.] 將 $x=1$, $y=45000$, $v=9$, 代入之,則 $k=\frac{81}{5000}$ 次於上式,將所得 k 之值及 $y=360000$, $v=6$ 代入,則 $x=\frac{81}{5000}\times\frac{360000}{6^3}=27$. 即所求之日數爲27日.

629. 有直三角形其三邊之長,爲連續三整數,問其整數如何.

解 將連續三整數爲 $x-1, x, x+1$ 則 $(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$, ∴ $x^2-4x=0$, ∴ $x(x-4)=0$, ∴ $x=0$, 或 $x=4$, 但因 x 爲整數 故 $x=0$ 不適題意, ∴ 所求三數爲3, 4, 5.

630. 試求直角三角形三邊之整數值.

解 將直傍二邊之數值爲 x, y, 則斜邊數值之平方爲 x^2+y^2, 故當爲平方數,若 $y=vx$, 則 $x^2+v^2x^2=x^2(1+v^2)$ 當爲平方數,因而 $1+v^2$ 當爲平方數,試使爲 $(v+m)^2=v^2+2vm+m^2$, ∴ $v=\frac{1-m^2}{2m}$, 而 $x^2+y^2=x^2\left\{1+\frac{(1-m^2)^2}{4m}\right\}=x^2\left(\frac{1+m^2}{2m}\right)^2$, 因而三邊之比爲 $1:\frac{1-m^2}{2m}:\frac{1+m^2}{2m}$, 即 $2m:1-m^2:1+m^2$. 今若 $m=\frac{q}{p}$, 則 $2pq:p^2-q^2:p^2+q^2$.

注意 本題之法謂之的反托斯之解析法[見第一門八畫內].

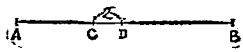
631. 有每時能行24哩之機關車,今將此機關車拖客車,則其所減之速度,依其客車數平方根之比例. 若以此機關車拖客車四輛,則每時能行20哩,然則此機關車能拖客車若干輛,尙能轉運.

解 將拖 x 輛車時其速度爲0,則依題意可得次之二方程式. $24-k\sqrt{x}=0$, $24-k\sqrt{4}=20$, [但 k 爲一常數.] 自第二方程式得 $k=2$, 故將此代入第一方程式,而得 $24=2\sqrt{x}$, ∴ $x=144$. 因知此機關車能轉運所得拖客車之數至143輛.

632. 有有限直線AB分於一點C, 使AC與BC之比例如2:4, 又分於一點D. 使AD與BD之比例如3:4, 已知CD間

之距離,為2尺,問AB之長幾尺.

解 將AB之長為$7x$尺, 則$AD=3x$尺, $BD=4x$尺,而$AC:CB=2:3$,即$AD-CD:BD+CD=2:3$. ∴ $3x-2:4x+2=2:3$, ∴ $3x-2:7x=2:5$, ∴ $5(3x-2)=14x$, ∴ $x=10$尺, 故AB為10尺$\times 7=$70尺.



等差級數

633. 試求$1+2+3+\cdots\cdots+n$之結果.

解 $a=1$, $d=1$, 故

$$S=\frac{1}{2}\{1+1+(n-1)\times 1\}\times n=\frac{1}{2}(n+1)n.$$

634. 自1起連續n項奇數之和等於n^2試證之.

解 連續奇數為$1,3,5,7,\cdots\cdots,(2n-1)$,故

$$S=\frac{1}{2}\left\{1+(2n-1)\right\}n=\frac{1}{2}\times 2n\times n=n^2.$$

635. 初項為$\frac{3}{2}$,第七項為3之等差級數,試求其第十項至第二十項之和.

解 公差$=\left(3-\frac{3}{2}\right)\div(7-1)=\frac{1}{4}$,

第十項$=\frac{3}{2}+9\times\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$,

第二十項$=\frac{3}{2}+19\times\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$,

∴ $S=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}+\frac{25}{4}\right)\times 11=55.$

636. $12, 10, 8,\cdots\cdots$之等差級數幾項之和為-68.

解 公差為$10-12=-2$,末項為$12+(n-1)\times(-2)$, ∴ $S=\frac{1}{2}\{12+12+(n-1)\times(-2)\}n=-68$, ∴ $n^2-13n-68=0$, ∴ $(n-17)(n+4)=0$, ∴ $n=17$.

注 n之負值-4,乃自此級數第17項逆取4項之和,亦為-68也.

637. 於5與15之間加入十二個等差中項,問此中項之和如何.

解 $S=\frac{5+15}{2}\times(12+2)-(5+15)=140-20=120.$

638. 試求$1+(2+3)+(4+5+6)+\cdots\cdots$之第十項.

解 至第十項之自然數之個數,為$\frac{1}{2}(1+10)\times 10=55$,即第十項之末項,為55. ∴ $S=\frac{1}{2}\left\{55-9+55\right\}\times 10=505.$

639. 試求$\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}+\frac{2n-3}{n}+\cdots\cdots$至第$n$項之和.

解 初項為$\frac{1}{n}$,公差為$\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n}=\frac{n-2}{n}$,故 $S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+(n-1)\times\frac{n-2}{n}\right\}n=\frac{n^2-3n+4}{2}.$

640. 有等差級數之第二項與第三項之和為19,而第五項與第七之和為40,問初項如何.

解 $a+d+a+2d=19$, 即 $2a+3d=19\cdots\cdots\cdots(1)$, 又 $a+4d+a+6d=40$, 即 $a+5d=20\cdots\cdots\cdots(2)$, 故自(1),(2)得$a=5$.

641. 有三數為等差級數,其和為18,其平方之和為126,問三數各如何.

解 此等差級數之三數，可以$x-y$，x，$x+y$表之，故依題意可得次之方程式．$x-y+x+x+y=18$，$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=126$，即$x=6$，及$3x^2+2y^2=126$．故$y=\pm3$，故三數爲3，6，9．

642. 有四數爲等差級數，其和爲20，其平方之和爲120，問四數各如何．

解 將此等差級數之公差爲$2y$，則四數能以$x-3y$，$x-y$，$x+y$，$x+3y$表之，故得次之方程式．

$x-3y+x-y+x+y+x+3y=20$，$(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=120$，即$x=5$及$x^2+5y^2=30$．因而$y=\pm1$，故所求之數爲2，4，6，8．

643. $\frac{1}{a+b}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{b+c}$爲等差級數，則a^2，b^2，c^2，亦爲等差級數，試證之．

解 $\frac{1}{a+b}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{b+c}$爲等差級數，故$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}$，

$\therefore\ \frac{b-c}{(a+c)(a+b)}=\frac{a-b}{(b+c)(a+c)}$，此分數之兩邊，以$(a+c)(a+b)(b+c)$乘之，則$b^2-c^2=a^2-b^2$，故$a^2$，$b^2$，$c^2$爲等差級數．

644. $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$爲等差級數，則$a-b:b-c=a:c$，試證之．

解 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$，即$\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$，

$\therefore\ \frac{a-b}{b-c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$．

645. 等差級數之公差爲初項之2倍，則至第m項之和之對於至第n項之和，之比爲$m^2:n^2$，試證之．

解 將初爲項a，公差爲$2a$之等差級數，m項之和爲S，n項之和爲S′，則

$S=\frac{m}{2}\left\{2a+(m-1)\times2a\right\}$及，$S'=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\times2a\right\}$，$S:S'=\frac{m}{2}\left\{2a+(m-1)\times2a\right\}:\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\times2a\right\}=m^2:n^2$．．

646. 試求自100至1000能以7整除之整數之和．

解 7之倍數，最近於100且大於100之數爲105，而最近於1000且小1000之數爲994，於是自100至1000能以7整除之整數之和，等於初項105末項994之等差級數$(994-105)\div7+1=128$項之總和，因而$\frac{(105+944)\times128}{2}=70336$．

647. x，y，z，爲等差級數，則$x^2(y+z)$，$y^2(z+x)$，$z^2(x+y)$，亦爲等差級數，試證之．

解 x，y，z爲等差級數，故$x-y=y-z$，此兩邊以$xy+yz+zx$乘之，則$(x-y)\times(xy+yz+zx)=(y-z)(xy+yz+zx)$，

$\therefore\ x^2y+x^2z-y^2z-xy^2=y^2z+xy^2-z^2x-yz^2$，$\therefore\ x^2(y+z)-y^2(z+x)=y^2(z+x)-z^2\times(x+y)$，故$x^2(y+z)$，$y^2(z+x)$，$z^2(x+y)$，亦爲等差級數．

648. 將連續之奇數，如(1)，(3,5)，(7,9,11)，(13,15,17,19)，(………)，………分之，則其第n組之和等於n^3，試證之．

解 第n組之和爲n項之等差級數之和，其公差爲2，其初項爲以前各組項數之和$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)$

$=\frac{(n-1)n}{2}$ 之2倍加1，卽等於 $n(n-1)+1$，故 $\frac{n}{2}[2n(n-1)+2+(n-1)\times 2]=n[n^2-n+1+n-1]=n^3$.

649. 第 r 項爲 $4r+1$ 之等差級數，試求其第 n 項之和.

解 將此級數之初項爲 a 公差爲 d，則第 r 項爲 $a+(r-1)d$，故 $4r+1=a+(r-1)d$，因此式對於 r 爲恆等式，故對於 r 任意之値皆成立，故 $r=1$，則 $a=5$，若 $r=2$，則 $d=4$，故將 n 項之和爲 S，則

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=n(2n+3).$$

650. 自然連續整數中，自 a 起 n 個數之和以 S_a 表之則，$S_{3a+n-1}=3S_a$，試證之.

解 $S_a=\frac{n}{2}\{a+(a+n-1)\}=\frac{n}{2}\{2a+n-1\}$，又 $S_{3a+n-1}=\frac{n}{2}\{(3a+n-1)+(3a+n-1+n-1)\}=\frac{n}{2}\{6a+3(n-1)\}=3\cdot\frac{n}{2}\{2a+n-1\}=3S_a$.

651. 等差級數之第 m 項爲 n，而第 n 項爲 m，其級數之和爲 $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$，問項數如何.

解 將此項級數之初項爲 a，公差爲 d，所求之項數爲 x，則 $n=a+(m-1)d$ ⋯⋯⋯(1)，$m=a+(x-1)d$ ⋯⋯⋯(2)，$\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)=\frac{x}{2}\{2a+(x-1)d\}$ ⋯⋯⋯(3)，自(1)減(2)而得 $n-m=(m-n)d$，因 $n-m\neq 0$，故 $d=-1$，因而 $a=n+m-1$，故(3)可如次書之. $(m+n)(m+n-1)=x\{2(m+n-1)+(x-1)(-1)\}$ ∴ $x^2-(2m+2n-1)x+(m+n)(m+n-1)=0$，

∴ $\{x-(m+n)\}\{x-(m+n-1)\}=0$，

故 $x=m+n$，或 $x=m+n-1$.

652. 甲乙二人，同時同地同向而行，甲初日行12里，次日以後，次第減2里，乙每日平均行8里，問至若干日後乙追及甲.

解 將所求日數以 n 表之，則甲所行全里數爲 $\frac{1}{2}\{12+12+(n-1)\times(-2)\}\times n$，即 $\frac{1}{2}\{24-2(n-1)\}n$，而乙所行全里數爲 $8n$，故 $\frac{1}{2}\{24-2(n-1)\}n=8n$，∴ $n=5$.

653. 甲乙二人，同時同地同道旅行，甲每日行10里，乙初日行8里，第二日行8.5里，第三日行9里，如此每日增其路程半里，問幾日後追及甲.

解 將所求之日數爲 x，則甲所能之路程爲 $10x$ 里，而乙所行之路程，等於初項8，公差 $\frac{1}{2}$ 之等差級數 x 項之和，故得次之方程式，

$$10x=\frac{x}{2}\left\{2\times 8+(x-1)\frac{1}{2}\right\}，\quad ∴\ x=9\text{ 日}.$$

654. 有樹百根，欲每隔5丈植之. 今有在植第一根前10丈之人，每根運至植處，問運完共走路若干.

解 所求之路程，等於初項爲 $10\times 2=20$，公差爲 $5\times 2=10$ 之等差級數100項之和，故 $\frac{100}{2}\{2\times 20+(100-1)\times 10\}=51500$，∴ 所求之路程爲51500丈，卽286里20丈.

655. 有112頁之書，欲於7日寫完，初日寫10頁，以後每日所寫紙數，須使成等差級數，問每日須增若干頁.

解 $\frac{1}{2}\left\{10+10+(7-1)d\right\}\times 7=112$,

∴ $d=2$, 即2頁.

656. 有直三角形ABC,表其直角傍二邊AB, AC與斜邊BC之長之數,為以5為公差之等差級數,問表各邊之數如何.

解 $AC=x$, 則 $AB=x-5$, $BC=x+5$, 故 $(x+5)^2=(x-5)^2+x^2$, ∴ $x=20$,

即 $AB=15$, $AC=20$, $BC=25$.

657. 有多角形,其內角為等差級數,其公差為4°其最大之角為172°,試求其邊數.

解 將所求之邊數為x,則此x等於初項172,公差-4,總和$90(2x-4)$之等差級數之項數.

∴ $90(2x-4)=\frac{x}{2}\left\{2\times172-4(x-1)\right\}$,

∴ $x^2+3x-180=0$, ∴ $x=12$, 或 $x=-15$, $x=-15$,不適於題意,故捨之,而所求之邊數為12.

等比級數

658. 試求公項為32,公比為$\frac{1}{2}$之等比級數之第八項.

解 $l=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=32\times\frac{1}{128}=\frac{1}{4}$.

659. 2與54之間,試加入二等比中項.

解 項數為4,故$54=2\times r^3$,

∴ $r^3=27$, $r=3$, 故二中項為 $2\times3=6$, $6\times3=18$.

660. 試求公比為2,第六項為96之等比級數之初項.

解 $a\times2^5=96$, ∴ $a=\frac{96}{2^5}=3$.

661. 有初項為3,公比為$\frac{2}{3}$之等比級數,試求其和之極限.

解 $S=\frac{3}{1-\frac{2}{3}}=9$.

662. 有 $4+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots$之級數,試求其和之極限.

解 $S=\frac{4}{1-\frac{1}{3}}=4\times\frac{3}{2}=6$.

663. 有 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$之級數,試求其和之極限.

解 $S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

664. 等比級數 $s=4400$, $a=11$, $n=4$, 則r之值如何.

解 $4400=\frac{11(1-r^4)}{1-r}$, ∴ $400=\frac{1-r^4}{1-r}$,

即 $400=1+r+r^2+r^3$, ∴ $r^3-343+r^2-49+r-7=0$, ∴ $r^3-7^3+r^2-7^2+r-7=0$,

∴ $(r-7)(r^2+7r+49+r+7+1)=0$, ∴ $r=7$.

注意 自 $r^2+8r+57=0$ 所得之r之值為虛數,故棄之.

665. $s=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 為等比級數,則 $S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$ 亦為等比級數,而 $\frac{s}{S}=a_1a_n$,試證之.

解 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots\cdots=r$, 故

$\frac{1}{a_2}\div\frac{1}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{r}$, $\frac{1}{a_3}\div\frac{1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{1}{r}$, ⋯⋯

……故S之級數亦爲等比，又 $s \div S$

$$=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \div \frac{\frac{1}{a_1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{a_1 \times a_1 r^n}{r}$$

$=a_1 \times a_1 r^{n-1}=a_1 \times a_n$.

666. a, b, c 爲等比差數，而 $a=n^x$, $b=n^y$, $c=n^z$，則 x, y, z 亦爲等差級數，試證之.

解 將所題之關係式之第一與第三相乘，則 $ac=n^{x+z}$，但 a, b, c 爲等比級數，故 $ac=b^2$，因得 $n^{x+z}=n^{2y}$，故 $x+z=2y$，或 $x-y=y-z$，即 x, y, z 爲等差級數.

667. 等比級數初六項之和，爲初三項之和之9倍，試求其公比.

解 將初項爲 a，公比爲 r，則

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{9a(r^3-1)}{r-1}$,　$\therefore\ r^3+1=9$,

$\therefore\ r=2.$

668. $S_p=1+r^p+r^{2p}+$,……… 至無限，及 $s_p=1-r^p+r^{2p}-$,……… 至無限，則 $S_p+s_p=2S_{2p}$，試證之.

解 $S_p=1+r^p+r^{2p}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-r^p}$,

$\therefore\ S_{2p}=\frac{2}{1-r^{2p}}$，又 $s_p=1-r^p+r^{2p}-\cdots\cdots$

$=\frac{1}{1+r^p}$，$\therefore\ S_p+s_p=\frac{1}{1-r^p}+\frac{1}{1+r^p}$

$=\frac{2}{1-r^{2p}}=2S_{2p}$.

669. 有等比級數之三數，其和爲28，其平方之和爲336，問各數如何.

解 三數爲等比級數能以 x^2, xy, y^2 表之，故依題意，可得次之方程式.

$x^2+xy+y^2=28$……………………(1),

$x^4+x^2y^2+y^4=336$……………………(2),

將(2)如次書之，$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=336$，依此式與(1)式，得 $x^2-xy+y^2=12$……(3)，自(1)，(3)得次之二方程式.

$x^2+y^2=20$, $2xy=16$，故 $x+y=\pm 6$, $x-y=\pm 2$，故 $\left.\begin{matrix}x=4,\\ y=2,\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}x=-4,\\ y=-2,\end{matrix}\right\}$ 因得 x^2, xy, y^2，三數爲16, 8, 4.

670. 有等比級數之四數，其和爲40，其平方之和爲820，問各數如何.

解 等比級數之四數，能以 x^2/y, x, y, y^2/x 表之，故依題意，可得次之方程式.

$\frac{x^2}{y}+x+y+\frac{y^2}{x}=40$，及 $\frac{x^4}{y^2}+x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=820$. 此二方程式中 x, y 俱不可爲0，故去分母簡單之，則得

$(x+y)(x^2+y^2)=40xy$……………………(1),

$(x^2+y^2)(x^4+y^4)=820x^2y^2$…………(2),

因 x, y，不爲零，故以(1)除(2)，則得

$\frac{x^4+y^4}{x+y}=\frac{41}{2}xy$，$\therefore\ x^4+y^4=\frac{41}{2}xy(x+y)$……

……(3)，又自(1)，$x^2+y^2=\frac{40xy}{x+y}$,

$\therefore\ x^4+y^4=\frac{1600x^2y^2}{(x+y)^2}-2x^2y^2$，從此式與(3)式，得 $\frac{41}{2}xy(x+y)=\frac{1600x^2y^2}{(x+y)^2}-2x^2y^2$，故 $\frac{41}{2}(x+y)^3=1600xy-2xy(x+y)^2$

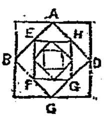
………(4)，又自(1)得 $(x+y)^3=2xy(x+y)+40xy$，將此代入(4)，以 xy 除之，則

$2(x+y)^2+41(x+y)-780=0$, ∴

$\{(x+y)-12\}\{2(x+y)+65\}=0$, $x+y$ 之負值代入(1),則x, y之值爲虛數,不合題意,故$x+y=12$……(5),將此代入(1),而得$3(x^2+y^2)=10xy$, 卽$(3x-y)(x-3y)=0$, ∴ $3x-y=0$,或$x-y=0$,將此二式之一與(5)組合,而得$x=3, y=9$,或$x=9, y=3$,皆爲所求之四數爲1, 3, 9, 27.

671. 連結正方形各邊之中點,作第二正方形,又連結第二正方形各邊之中點,作第三正方形,次第如此,其無數內接正方形之和之極限,等於原正方形,試證之.

解 將原正方形之邊爲x,則其面積爲x^2,而第二正方形之面積,爲$2\times\frac{1}{4}x^2=\frac{x^2}{2}$,同樣第三,第四,……之面積,爲$\frac{x^2}{2^2}$, $\frac{x^2}{2^3}$, ……,故內接正方形之和如次, $x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$,但此括弧內之量,爲初項$\frac{1}{2}$,公比$\frac{1}{2}$,之等比級數無窮項之和,故其值爲



$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$ 故上式等於x^2.

672. AB爲定長之直線,有一點自A起,第一秒進行AB之半分AM,第二秒進行其餘之半分MM_1,次第如此,問其點進行距離之極限如何.

解 第一秒 $AM=\frac{1}{2}AB$,第二秒

$MM_1=\frac{1}{2^2}AB$,第三秒 $M_1M_2=\frac{1}{2^3}AB$, ……,故第一秒,第二秒,第三秒,……進行之和之極限,爲$AB\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\text{至無限}\right\}$,此括弧內之和等於1,故其進行距離之極限爲AB.

調 和 級 數

673. 有二數其等比中項爲12,其調和中項爲$9\frac{3}{5}$,問此二數.

解 $\sqrt{ab}=12$, $\frac{2ab}{a+b}=9\frac{3}{5}$, ∴ $ab=144$, $a+b=30$,從此得二數爲6及24.

674. a及b之等差中項,等比中項,調和中項,爲A, G, H,則G爲A與H之比例中項,試證之.

解 $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$, $H=\frac{2ab}{a+b}$,故$A.H=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$. 故如題言.

675. 二數a, b之調和中項與等比中項之比,爲12與13,問二數之比如何.

解 $\frac{2ab}{a+b}:\sqrt{ab}=12:13$,從此得$6a-13\sqrt{ab}+6b=0$,卽$(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})=0$,故$\frac{a}{b}=\frac{9}{4}$或$\frac{4}{9}$.

676. a, b, c爲調和級數,則$a:a-b=a+c:a-c$,試證之.

解 $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$, ∴ $\frac{a}{a+c}=$

$\frac{a-b}{(a-b)+(b-c)}=\frac{a-b}{a-c}$, $\therefore\ a:a+c=a-b:a-c$, 即 $a:a-b=a+c:a-c$.

677. 調和級數之第p項為P, 第q項為Q, 則其第$(p+q)$項之x如何.

圖 調和級數之逆數之等差級數, 初項為a, 公差為b, 則 $\frac{1}{P}=a+(p-1)b$.

$\frac{1}{Q}=a+(q-1)b$, $\frac{1}{x}=a+(p+q-1)b$.

$\therefore\ \frac{p}{P}-\frac{q}{Q}=(p-q)\{a+(p+q-1)b\}$

$=(p-q)\frac{1}{x}$, $\therefore\ x=\frac{PQ(p-q)}{pQ-Pq}$.

678. 調和級數之第p項, 第q項, 第r項, 為a, b, c則$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0$, 試證之.

圖 調和級數之逆數之等差級數, 初項為α, 公差為β, 則 $\frac{1}{a}=\alpha+(p+1)\beta$,

$\frac{1}{b}=\alpha+(q-1)\beta$, $\frac{1}{c}=\alpha+(r-1)\beta$, 此各方程式各以$q-r$, $r-p$, $p-q$乘之相加, 則得題之結果.

679. 等差級數之第$m+1$項, 第$n+1$項, 第$r+1$項, 為等比級數, 而m, n, r為調和級數, 則其等差級數之公差之於初項之比為$\frac{2}{n}$, 試證之.

圖 等差級數之初項為a, 公差為d,

則 $\frac{a+md}{a+nd}=\frac{a+nd}{a+rd}$, $\therefore\ a^2+(m+r)ad+mrd^2=a^2+2nad+n^2d^2$, $\therefore\ \frac{d}{a}=\frac{m+r-2n}{n^2-mr}$, 但 $\frac{2}{n}=\frac{1}{m}+\frac{1}{r}$,

$\therefore\ 2mr=nm+nr$, $\therefore\ \frac{d}{a}=\frac{2(m+r-2n)}{2n^2-(nm+nr)}=\frac{2}{n}$.

680. 任意二數之間, 插入二等差中項A_1, A_2, 二等比中項G_1, G_2, 二調和中項H_1H_2, 則 $G_1G_2:H_1H_2=A_1+A_2:H_1+H_2$ 試證之.

圖 將二數為x, y, 則 $y-A_2=A_1-x$,

即 $x+y=A_1+A_2$ ……………………(1),

$\frac{y}{G_2}=\frac{G_1}{x}$, 即 $xy=G_1G_2$ ………………(2)

$\frac{1}{y}-\frac{1}{H_2}=\frac{1}{H_1}-\frac{1}{x}$, 即 $\frac{x+y}{xy}=\frac{H_1+H_2}{H_1H_2}$ ……………………(3),

以(2)除(1), 使與(3)相等, 則得所設之結果.

記數法

681. 182以何數為底, 則為222.

圖 將記數之底為r, 則 $182=2r^2+2r+2$, 即 $r^2+r-90=0$, $\therefore\ r=9$.

682. $\frac{25}{128}$以何數為底, 則為0.0302.

圖 將r為記數之底, 則 $\frac{25}{128}=\frac{3}{r^2}+\frac{2}{r^4}$, 即 $25r^4-384r^2-256=0$, 即 $(25r^2+16)(r^2-16)=0$, $\therefore\ r=4$.

683. 554為表24之平方, 問其記數之底如何.

圖 $5r^2+5r+4=(2r+4)^2$, 即 $r^2-11r-12=0$, 即 $(r+1)(r-12)=0$. $\therefore\ r=12$.

684. 以如何之數為底, 則511197為1746335.

圖 因後數小於前數, 故底當小於10, 而其數中有7之數字, 故底又當大於

7,因知其底爲8或9也．以實驗而知其底爲8.

685．有479, 698, 907,三數爲等差級數,其記數之底如何．

解 $(4r^2+7r+9)+(9r^2+7)=2(6r^2+9r+8)$, 即 $r^2-11r=0$, $\therefore r=11.$

686．在大於7之任意底之記數法,則1367631爲完全之立方,試證之．

解 $r^6+3r^5+6r^4+7r^3+6r^2+3r+1=(r^2+r+1)^3$ 故如題言．

687．以底r記之數,與其數字和之差,得以$r-1$整除試證之．

解 本數爲N,數字和爲S,數字爲d_0, d_1, d_2,…… 則 $N=d_0+rd_1+r^2d_2+\cdots\cdots+r^nd_n$, 及 $S=d_0+d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n$, $\therefore$ $N-S=(r-1)d_1+(r^2-1)d_2+\cdots\cdots\cdots+(r^n-1)d_n$. 其右邊之各項,得以$r-1$整除,故N−S亦得以$r-1$整除．

例 在底10記數法之數,與其數字和之差,得以9整除．

688．r底之任意數,其右端奇數位之數字和與偶數位之數字和之差,得以$r+1$整除,試證之．

解 $N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\cdots\cdots$, 及 $D=d_0-d_1+d_2-d_3+\cdots\cdots$, 則爲 $N-D=d_1(r+1)+d_2(r^2-1)+d_3(r^3+1)+\cdots\cdots\cdots$, 其右邊之各項,能以$r+1$整除,故N−D亦能以$r+1$整除,故D能以$r+1$整除,則N亦能以$r+1$整除．

例 在底10記數法之數,自其右端奇位數之數字和與偶位數之數字和之差,能以11整除,則本數亦能以11整除．

列方組合

689．試求${}_5P_3$, ${}_5C_3$之值．

解 ${}_5P_3=5\times4\times3=60.$

${}_5C_3=\dfrac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10.$

690．試求${}_{20}C_{17}$之值．

解 ${}_{20}C_{17}={}_{20}C_{20-17}={}_{20}C_3$

$$=\frac{20.19.18}{1.2.3}=1140.$$

691．${}_nC_6={}_nC_3$ 則n之值如何．

解 因 ${}_nC_6={}_nC_{n-6}$ 故 $n-6=3$,

$\therefore$ $n=9.$

692．${}_nP_5=12\times{}_nP_3$, 則n之值如何．

解 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=12n(n-1)\times(n-2)$, $\therefore (n-3)(n-4)=12$, $\therefore n^2-7n=0$, 但 $n\nless5$, 故 $n=7.$

693．${}_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$, 則$n$之值如何．

解 ${}_{2n}P_3=2n(2n-1)(2n-2)$, $2\times{}_nP_4=2\times n(n-1)(n-2)(n-3)$, $\therefore$ $2n(2n-1)(2n-2)=2n(n-1)(n-2)(n-3)$ $\therefore n^2-9n+8=0$, $\therefore$ $(n-1)(n-8)=0$, 但自題意 $n\nless4$ 故 $n=8.$

694．${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ 試證之．

解 ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$,

$${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!(n-n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

別解 自n個物中取去相異r個之物之組合,則所餘$(n-r)$個物,亦成相異之組合,故自n個物中取r個物之組合之數,等於自n個物中取$(n-r)$個物之組合之數.

695. 1, 2, 3, 4, 5五數字中,每三個列作三位之數,問有幾種.

解 所求之種類,為自五數字中每取三數字之列法,故$_5P_3=5\times4\times3$,即60種.

696. 0, 1, 2, 3, 4, 5六數字中,每三個列作三位之數,問有幾種.

解 $_6P_3=6\times5\times4$,即120種,但首位為0之數,亦在其中,故須減去,而其首位為0之數,有$_5P_2=5\times4=20$種,故所求之數有120−20,即100種.

697. 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3悉列作七位之數,問有幾種.

解 $7!\div(2!\times3!\times2!)=210$種.

698. 有學生30人,使每回組合五人競走,問組合之法有若干.

解 $_{30}C_5=\dfrac{30.29.28.27.26}{1.2.3.4.5}$,

即142506.

699. 有n個之點,無三點在同一直線上者,連結每兩點作直線,則直線之數為$\dfrac{n(n-1)}{2}$,試證之.

解 自A, B, C, D,………n個之點,連結AB得一直線,但BA與AB同一直線,故不能取,其他諸點皆同,故此題為自n個之中每取二個之組合,因得直線之數,為$_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{1.2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

700. n邊之多角形,共能作幾何之對角線.

解 n邊形角頂之數為n,故其每二個連結之直線之數,為$_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{1.2}$,但其中$n$個,為多角形之邊故去之,而為$\dfrac{n(n-1)}{2}-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$對角線之數也.

別解 自n邊多角形之一角頂,除去其相鄰之二角頂,至其他$(n-3)$個之角頂,能作對角線之數,為$(n-3)$個,各角頂皆如此行之,則得$n(n-3)$個對角線,但其一對角線已二回計之,故對角線之線為其半數,即$\dfrac{n(n-3)}{2}$個.

701. 平面上有n個點,任取三個,不在一直線上,則將是等之點為角頂之三角形之數,為$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$,試證之.

解 同699題.

$_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

702. 有n個之點,其中m個,同在一直線上,其他各點,任取三個,不在同一直線上,則連結其每二點所作直線之數,為$\dfrac{1}{2}n(n-1)-\dfrac{1}{2}m(m-1)+1$,試證之.

解 依699題自n個點所得直線之數,為$\dfrac{1}{2}n(n-1)$,但此數之中$_mC_2$,即$\dfrac{1}{2}m\times(m-1)$在一直線上,故所求直線之數,為$\dfrac{1}{2}n(n-1)-\dfrac{1}{2}m(m-1)+1$.

703. 有10點,其任何四點,不在一平面上,又其任何三點,不在一直線上,問以其任意三點決定之平面有若干.

解 $_{10}C_3=\frac{10.9.8}{1.2.3}$, 卽120種.

704. 有兵士20人,每回任意選3人執要務,問同一人能選幾回.

解 20人中之一人,例如求甲幾回被選,則每回3人之選拔,甲恆爲其選拔中之人,故其餘之二人,卽自19人中選之可也. 故所求之回數爲 $_{19}C_2=171$.

705. 將書十五本,列於書箱,問其列法若干.

解 $_{15}P_{15}=15!$ 卽 1307674368000.

706. 將書6本,列於書箱,問其列法若干. 但其中有一本,不許列於首與末.

解 6本書之列法爲 $_6P_6$, 卽720, 其中一本列於首者爲 $_5P_5=120$, 列於末者亦同,故所求列法,爲 $720-120\times2$ 即 480.

別解 除不許列於首末之某一本,所餘五本之列法爲 $_5P_5=120$, 而此各列法之中,某一本能列入之時有4,故所求之列法爲 120×4 卽 480.

707. 男學生5人女學生5人,並爲一列,使男女相間,問其列法若干.

解 僅爲男生之列法爲 $_5P_5=120$, 僅爲女生之列法亦同,但男生列法之一種,能配女生列法120種,故所求之列法爲 120×120 卽 14400.

708. 自將校5人兵士40人中,選出將校2人兵士38人,爲某任務,問其選法幾何.

解 僅自將校之選法爲 $_5C_2$, 卽10通,僅自兵士之選法爲 $_{40}C_{38}={}_{40}C_2$, 卽780通,故所求之選法爲 10×780 卽 7800通.

709. 甲組5人乙組6人擊庭球,問其組法幾何.

解 甲組每2人之組合,爲 $_5C_2=10$, 乙組每2人之組合,爲 $_6C_2=15$, 故每四人之組數爲 10×15, 卽150通.

710. 5郵箱,3封信,問一箱每投書信一封,方法有幾種.

解 先將3封信所投入箱之組合爲 $_5C_3$, 卽10種,就其一種投入書信之次序變換之,故爲 $_3P_3=6$, 故所求之方法爲 10×6 卽 60種.

711. 5男4女,自3男2女,作成一組,且變換其組中之次序,問共得幾何.

解 自男5人中,取3人之方法爲 $_5C_3=10$, 又自女4人中取2人之方法爲 $_4C_2=6$, 因而男3人女2人之組合,爲此各組中之5人,變換其次序,其方法爲 $_5P_5=120$, 故所求之列法,爲 60×120, 卽 7200.

712. Success [成功] 之字母,悉取而換其次序,問其列法之數如何.

解 字母之數爲7個, s 3個, c 2個, u, e 各1個,故所求列法之數爲 $7!\div(3!\times2!)=420$.

713. 壹錢銅貨3枚,貳錢銅貨2枚,五拾錢銀貨4枚,合爲一列,以銀貨始,以一錢銅貨終,問其列法若干.

解 除去列於始之銀貨一枚,與列於終之壹錢銅貨一枚,將其餘依列法列之,乃將銀貨及壹錢銅貨列於首尾卽得. 因將壹錢爲2枚,五拾錢爲3枚,而求其列法,則列法爲 $7!\div(2!\times 3!\times 3!)$,卽 210.

714. 某街市,區分爲棋盤格,南北五條,東西八條,一人自此街市之西北隅行往東南隅,問能選之道路種類如何,但禁迂廻而行.

解 南北五條,皆被東西八條,區分爲7段,又東西八條,皆被南北五條區分爲4段,而人之行過此道,無論如何必經南北道7段,東西道4段,例將南北道7段,以 a, a, a, a, a, a, a 表之,而東西道4段以 b, b, b, b 表之,則所選道路之形,爲 $aaaaaaabbbb$, $aaabbaababa$, $abbbaaabaaa$……………………故所求之道路,爲 $(7+4)!\div(7!\times 4!)$ 卽 330.

715. 前題南北道爲 m 條,東西道爲 n 條,問能選之道路種類如何.

解 南北道被東西道區分爲 $(n-1)$ 段,東西道被南北道區分爲 $(m-1)$ 段,故與前解同樣,得

$$\frac{(n-1+m-1)!}{(n-1)!(m-1)!}=\frac{(m+n-2)!}{(n-1)!(m-1)!}.$$

716. 有五種之金貨,問合二個以上之價有幾種,但各種以每一個爲限.

解 ${}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=10+10+5+1$ 卽 26 種.

717. ${}_{12}C_4$ 中含有特別一物組合之數,等於不含其物組合之數之半,試證之.

解 含有特別一物組合之數,可先將全物除去其特別一物,再自所餘11每3個組合之,然後將除去之特別一物,加入於其各組,故其組數爲 ${}_{11}C_3=\frac{11.10.9}{1.2.3}=165$. 又同樣將不含特別一物之組合,爲 ${}_{11}C_4=\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}=330$, $\therefore$ ${}_{11}C_3$ 爲 ${}_{11}C_4$ 之半分.

718. Examination [試驗] 之字母,悉取而列爲種種之方法,問其列法之數若干. (1) 列法無限制. (2) 各字母之位置,不離原相鄰位置之外.

解 (1) a, i, n, 皆有二個,而字母之數爲11,故所求之總數,爲 $\frac{11!}{2!2!2!}=2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11=4989600$.

(2) 各字母不離於相鄰位之外,其列變如次. 先將英語 Examination 之字母,不離原相鄰位置之外,而列變之數,卽所求之數以 F(11) 表之,但 $F(11)=2\times F(9)+F(8)$……(1),能解此式,則本題解矣,玆說明之, Examination 可分爲 Ex 與 amination. 此第二部分列變之數,爲 F(9), 以 Ex 與 Xe 附之,則其列變之數爲 $2\times F(9)$, 但 Ex 之 X 與 amination 之第一字 a 交換之列法,不含於其內,而 Ex 之 X, 與 amination 第一字母 a 交換之列法爲 F(8), 故 F(11) 爲 F(9) 之二倍與 F(8) 之和,同様 $F(9)=2\times F(7)+F(6)$……(2), $F(8)=2\times F(6)$

$+F(5)\cdots\cdots(3)$, $F(7)=2\times F(5)+F(4)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$, $F(6)=2\times F(4)+F(3)\cdots\cdots\cdots(5)$, $F(5)=2\times F(3)+F(2)\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$, $F(4)=2\times F(2)+F(1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$, 次第代入之 $F(11)=22\times F(3)+33\times F(2)+12\times F(1)$, 但 $F(3)=3$, $F(2)=2$, $F(1)=1$, 故 $F(11)=44$.

二 項 式 定 理

719. 試展開 $(x+a)^5$

解 $(x+a)^5=x^5+{}_5C_1x^4a+{}_5C_2x^3a^2+{}_5C_3x^2a^3+{}_5C_4xa^4+{}_5C_5a^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

720. 試展開 $\left(2-\frac{3x}{2}\right)^5$.

解 本式 $=2^5+{}_5C_1\times2^4\left(-\frac{3x}{2}\right)+{}_5C_2\times2^3\left(-\frac{3x}{2}\right)^2+{}_5C_3\times2^2\left(-\frac{3x}{2}\right)^3+{}_5C_4\times2\left(-\frac{3x}{2}\right)+{}_5C_5\left(-\frac{3x}{2}\right)^5=32-120x+180x^2-135x^3+\frac{405}{8}x^4-\frac{243}{32}x^5$.

721. 試求 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^8$ 之第七項.

解 第七項 $={}_8C_6(2x)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^6={}_8C_2\times2^2x^2\times\frac{1}{64}=\frac{7}{4}x^2$.

722. 試求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ 之第五項.

解 第五項 $={}_8C_4\times x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^4=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\times x^4\times\frac{1}{x^4}=70$.

723. 試求 $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^6$ 之第五項.

解 第五項 $={}_6C_4(9x)^2\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^4=\frac{6.5}{1.2}\times9^2x^2\times\frac{1}{3^4\times y^2}=15$.

724. 試求 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ 中不含 x 之項.

解 不含 x 之項爲 $x^{2n-n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 明矣, 故其係數爲 ${}_{2n}C_n$, 故所求之項爲 $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$

725. 試求 $(x+2y)^{10}$ 之中央之項.

解 中央之項爲 $\frac{10}{2}+1$, 卽第六項, 故得 ${}_{10}C_5x^5(2y)^5=8064x^5y^5$.

726. 試求 $(x^2+x)^{10}$ 含 x^{16} 之項爲第幾項.

解 依公式 ${}_{10}C_r(x^2)^{10-r}x^r$ 之 $x^{20-2r}\times x^r$, 卽 x^{20-r} 之指數爲16, 則 $20-r=16$, 故 $r=4$, 故所求之項爲第五項.

727. $(1+x)^{10}$ 之展開式, 若 $x=\frac{1}{3}$, 問最大項如何.

解 依公式先求 r, 則 $\frac{(10+1)\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}+1>r>\frac{(10+1)\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$, 卽 $\frac{11}{4}+1>r>\frac{11}{4}$, 卽 $3.75>r>2.75$, 故 r 在3.75與2.75之中間之整數, 卽3也. 故所求之項爲第三項, 而其值爲 ${}_{10}C_2\times x^2=\frac{10.9}{1.2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=5$.

728. $x=\frac{2}{5}$, 則 $(1+3x)^{18}$ 之最大項爲第幾項.

解 $3x$ 以 y 表之, 則 $y=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$, 因 $\frac{(18+1)\times\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}+1}+1>r>\frac{(18+1)\times\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}+1}$, 卽 $11\frac{4}{11}>r>10\frac{4}{11}$, 故 r 爲11, 而所求之項, 卽第十一項.

729. $(1+x)^8$之展開式,有最大係數之項爲第幾項.

解 係數最大之項,其x以1代之爲最大項,故將最大項之公式,爲

$\frac{(8+1)x}{x+1}+1>r>\frac{(8+1)x}{x+1}$之$x$,以1代之,而

$\frac{9\times 1}{1+1}+1>r>\frac{9\times 1}{1+1}$,即$5.5>r>4.5$故$r=5$,即所求之項爲第五項.

730. 試求$(4+8x)^6$之最大係數之項.

解 $(4+8x)^6=4^6(1+2x)^6$,故所求最大係數之項,即爲$(1+2x)^6$之最大係數之項,而$\frac{(6+1)\times 2}{2+1}+1>r>\frac{(6+1)\times 2}{2+1}$,即$5\frac{2}{3}>r>4\frac{2}{3}$,故$r=5$,即所求之項爲第五項.

731. $(x+a)^n$之展開式,其奇數項之和爲A,偶數項之和爲B,則$A^2-B^2=(x^2-a^2)$,試證之.

解 $(x+a)^n=A+B$, $(x-a)^n=A-B$,故$A^2-B^2=(x+a)^n(x-a)^n=(x^2-a^2)^n$.

732. $(1+x)^n$之展開式,係數之和爲2^n,試證之.

解 將$(1+x)^n$之展開式,如次記之.

$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots\cdots+c_nx^n\cdots\cdots\cdots(1)$,但$c_0=c_n=1$, $c_1=c_{n-1}=n$,而一般$c_r=c_{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$故(1)之$x=1$,則$2^n=c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots\cdots+c_n$

733. $(1+x)^n$之展開式,奇數項係數之和,等於偶數項係數之和,試證之.

解 前題之(1), $x=-1$,則$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots\cdots\cdots+(-1)^nc_n$,故$0=(c_0+c_2+C_4+\cdots\cdots\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots\cdots)$即如題言.

734. $(1+x)^n$之展開式,係數平方之和,爲$\frac{(2n)!}{n!n!}$,試證之.

解 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots\cdots+c_nx^n$,又$c_r=c_{n-r}$,故$(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots\cdots+c_{n-r}\times x^r+\cdots\cdots+c_0x^n$故右邊二個係數之積之$x^n$之係數,等於$c_0^2+c_1^2+c_r^2+\cdots\cdots\cdots+c_n^2$,又等於$(1+x)^n\times(1+x)^n$,即$(1+x)^{2n}$之$x^n$之係數,而此係數爲$\frac{(2n)!}{n!n!}$.

735. $(1+x)^n$之係數,爲$c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots\cdots, c_n$,則$c_0^2-c^2+c_3^2-c_3^2+\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\times c_n^2$,若$n$爲奇數,則爲0,若$n$爲偶數,則$(-1)^{\frac{n}{2}}n!\Big/\left(\frac{1}{2}n!\right)^2$試證之.

解 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$, $(1-x)^n=c_n-c_{n-1}x+c_{n-2}x^2-\cdots\cdots\cdots+(-1)^nc_0x^n$,而此右邊二級數之積$x^n$之係數爲$(-1)^n\{c_0^2-c_1^2+c_2^2-c_3^2+\cdots\cdots+(-1)^nc_n^2\}$,故左邊二式之積,即$(1-x^2)^n$,其$x^n$之係數,若$n$爲奇數,則爲0,若$n$爲偶數,爲則$(-1)^{\frac{n}{2}}n!\Big/\left(\frac{1}{2}n!\right)^2$即如題言.

736. ${}_nC_1+2\times{}_nC_2+3\times{}_nC_3+4\times{}_nC_4+\cdots$如$+n\times{}_nc_n=2^{n-1}\times n$,試證之.

解 左邊$=n+2\times\frac{n(n-1)}{1.2}+$

$$3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+4\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

$$+\cdots+n\times1=n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}+\cdots\cdots+1\right\}.$$

$$=n\{1+1\}^{n-1}=n\times2^{n-1}.$$

737. ${}_nC_1-2\times{}_nC_2+3\times{}_nC_3-\cdots\cdots(-1)^{n-1}\times n\times{}_nC_n=0$, 試證之.

解 左邊 $=n-2\times\frac{n(n-1)}{1.2}+$

$$3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\times n$$

$$=n\left\{1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots(-1)^{n-1}\right\}=n\times\{1-1\}^{n-1}=n\times0=0.$$

738. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2m}$ 之展開式,試求其 x^m 之係數.

解 公項 $={}_{2m}C_r(x^2)^{2m-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

$$={}_{2m}C_rx^{4m-2r}\times\frac{1}{x^r}={}_{2m}C_rx^{4m-3r},$$

$\therefore$ x^{4m-3r} 之指數, 若令為 m, 則 $4m-3r=m$, $\therefore$ $r=m$, 故所求之係數, 為 ${}_{2m}C_m$

$$=\frac{|2m}{|m\,|m}.$$

739. $(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ 至無限$)^n$ 之展開式試求 x^r 之係數.

解 $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$(至無限)$=(1-x)^{-2}$, 故所求之係數, 即 $(1-x)^{-2n}$ 展開式為 x^r 之係數, 即 $\frac{2n(2n+1)\cdots(2n+r-1)}{r!}$.

740. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 試展開至第四項.

解 $$(1-x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}(-x)+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{1.2}(-x)^2$$

$$+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{1.2.3}(-x)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots\cdots\cdots$$

741. $(2+3x)^{-4}$ 試展開至第四項.

解 $(2+3x)^{-4}=2^{-4}(1+\frac{3}{2}x)^{-4}$

$$=\frac{1}{2^4}\left[1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{(-4)(-5)}{1.2}\left(\frac{3x}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(-4)(-5)(-6)}{1.2.3}\left(\frac{3x}{2}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3+\cdots\cdots\right).$$

742. $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots\cdots$(至無限) $=2\sqrt{2}$, 試證之.

解 $$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=1+\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}-1)}{1.2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)}{1.2.3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots$, 而本題之左邊 $=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}}$

$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

對數 複利 年金

743. 以4為底之32之對數為如何.

解 依對數定義 $4^x=32$, 即 $(2^2)^x=2^5$ $2^{2x}=2^5$, $\therefore$ $2x=5$, $\therefore$ $x=2.5$, 即所求之對數.

744. $\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}+\log\frac{c}{a}=0$, 試證之.

解 左邊 $=\log a-\log b+\log b-\log c+\log c-\log a=0$.

別解 左邊 $=\log\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\right)=\log1=0$.

745. $x=a^2bcd^3$, 試以對數式表之.

解 $\log x=\log a^2+\log b+\log c+\log d^3$
$=2\log a+\log b+\log c+3\log d$.

746. $a^x=b$, 試作求 x 之值之式.

解 $x\log a=\log b$, $\therefore$ $x=\frac{\log b}{\log a}$.

747. $a^x=c\times b^x$ 試作求 x 之值之式.

解 $x\log a=\log c+x\log b$, $\therefore$ $x(\log a-\log b)$
$=\log c$, $\therefore$ $x=\frac{\log c}{\log a-\log b}$.

748. $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}=c$ 試作求 x 之值之式.

解 $\log a^{mx}-\log b^{nx-1}=\log c$, $\therefore$ $mx\log a-$
$(nx-1)\log b=\log c$, $(m\log a-n\log b)x=\log c$
$-\log b$, $\therefore$ $x=\frac{\log c-\log b}{m\log a-n\log b}$.

49. 知 $\log2=0.3010300$, $\log3=0.4771213$, 求 $6^x=20$ 之 x 之值.

解 $x\log6=\log20$, 卽 $x(\log2+\log3)=\log2$
$+\log10$, 因 $x\times0.7781513=1.3010300$,
$\therefore$ $x=\frac{1.3010300}{0.7781513}\doteqdot1.67195$.

750. $\log x^3-\frac{12}{\log x}=5$, 試求 x 之值.

解 $3\log x-\frac{12}{\log x}=5$, $\therefore$ $3(\log x)^2-12=$
$5(\log x)$, $\therefore$ $3(\log x)^2-5(\log x)-12=0$,
$\therefore$ $(3\log x+4)(\log x-3)=0$, $\therefore$ $\log x=3$, 或
$\log x=-\frac{4}{3}$, 故若 $\log x=3$, 則 $x=1000$.
又若 $\log x=-\frac{4}{3}$, 則 $x=10^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{10^{\frac{4}{3}}}=$
$\frac{1}{\sqrt[3]{10^4}}=\frac{1}{10\sqrt[3]{10}}$.

751. $a^{\frac{x+1}{x-1}}=b^{\frac{x-1}{x+1}}$, 試作求 x 之值之式.

解 $\frac{x+1}{x-1}\log a=\frac{x-1}{x+1}\log b$,
$\therefore$ $(x+1)^2\log a=(x-1)^2\log b$,
$\therefore$ $\frac{x+1}{x-1}=\pm\sqrt{\frac{\log b}{\log a}}$, $\therefore$ $x=$
$\left(\pm\sqrt{\frac{\log b}{\log a}}+1\right)\Big/\left(\pm\sqrt{\frac{\log b}{\log a}}-1\right)$.

752. 試自 $\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)+1$
$=0$, 求 x 之值.

解 $\log\frac{x-1}{x^2-5x+4}=-1$, $\log\frac{1}{x-4}$
$=\log\frac{1}{10}$, $\therefore$ $\frac{1}{x-4}=\frac{1}{10}$, $\therefore$ $x-4=10$,
$x=14$.

753. $\log_ab.\log_bc.\log_ca=1$, 試證之.

解 若 $\log_ab=x$, $\log_bc=y$, $\log_ca=z$, 則
$a^x=b$, $b^y=c$, $c^z=a$, 自此三式得 $a^{xyz}=a$,
故 $xyz=1$, 卽 $\log_ab.\log_bc.\log_ca=1$.

754. 試解 $\log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}\log(5x+1)=$
$1, +\log 3$.

解 將已知方程式變形, 則
$\log\sqrt{3x+4}\sqrt{5x+1}=\log10+\log3=\log30$,
卽 $(3x+4)(5x+1)=900$, 卽 $15x^2+23x-$
$896=0$, 卽 $(15x+128)(x-7)=0$, 但 x 不可
爲負, 故捨負根而取正根, 則得 $x=7$

755. 以年利5分5厘之複利, 借元金600圓, 問10年間之元利合計幾何.

解 元利合計 $=600\times1.055^{10}$, 故以對數計算之如次.

$\log1.055^{10}$	$=10\times0.0232525$
	$=0.232525$
$\log600$	$=2.7781513$
	3.0106763
$\log1024.88$	$=3.0106730$
	33

卽元利合計約1024圓8角8分.

756. 以年利5分之複利,儲蓄於銀行300年,問元利合計爲元金之若干倍.

圖 元金爲a,則元利合計爲$a\times 1.05^{300}$,故所求之倍數,爲1.05^{300},以對數計算之,則

$$\begin{array}{lr} \log 1.05 & =0.0211893 \\ & 300 \\ \hline & 6.35679 \\ \log 2274000 & = 6.35679 \end{array}$$

約2274000倍.

757. 以年利5分之複利,問若干年,則元利合計爲元金之10倍.

圖 元金爲a,年數爲n,則$a\times 1.05^n=10a$, $\therefore\ 1.05^n=10$, $\therefore\ n\log 1.05=\log 10$,

$\therefore\ n=\dfrac{1}{\log 1.05}=\dfrac{1}{0.0211893}=47.1\cdots\cdots$,

卽47年餘則不足,48年則少超過10倍,故約爲48年.

758. 以年利5分5厘之複利,每年之初存元金100元,問10年之元合計若干.

圖 a爲元金,p爲利率,則n年之元利合計,爲$A=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$,

故元利合計$=\dfrac{100\times 1.055\times\{1.055^{10}-1\}}{0.055}$

$\log 1.055^{10}=0.232525=\log 1.7081$,

$\therefore$ 元利合計$=\dfrac{100\times 1.055\times 0.7081}{0.055}$

$=1358.2$,卽約1358圓2角.

759. 負債5000元,年利8分,欲每年償還同額之金,則20年償淸,問每年當償還之數若干.

圖 A爲負債額,a爲年付金,r爲利率,則

$A(1+r)^n=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$,

故 $a=\dfrac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}$,

$\log a=\log 5000+\log 0.08-\log(1-1.80^{-20})$.

而 $\log 5000=3.6989700$

$\log 0.08=\bar{2}.9030900$

$\mathrm{colog}\{1-1.08^{-20}\}=0.1048815^*$

$\log 509.26=2.7069415$

卽每年須償還509元2角6分餘.

$^*\log 1.08^{-20}=0.0334238\times(-20)=-0.668476=\bar{1}.331524=\log 0.21455$,故

$\log(1-0.21455)=\bar{1}.8951185$,

$\therefore\ \mathrm{colog}\{1-0.21455\}=-\bar{1}.8951185=1-0.8951185=0.1048815$.

760. 有定期年金,其現價爲年金之p倍,若將年數二倍之,則其現價爲年金之q倍,問其年利率若干.

圖 年利率爲r,年金額爲A,則n年之定期年金現價,爲$\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}A$

$=pA$,故$\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}=p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$,

同樣 $\dfrac{1-(1+r)^{-2n}}{r}=q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$,

自(1)得$(1+r)^{-n}=1-pr$,平方之,而得$(1+r)^{-2n}=(1-pr)^2$. 又自(2)得$(1+r)^{-2n}=1-qr$. 故$(1-pr)^2=1-qr$,或$p^2r^2+(q-2p)r=0$,但$r\neq 0$,故$r=\dfrac{2p-q}{p^2}$.

別圖 年金額爲A,年利率爲r,則n年間之定期年金之現價,爲

$\{1-(1+r)^{-n}\}A/r$,故$\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}A=pA$,

或 $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}=p$ ……………(1), 同樣

$\frac{1-(1+r)^{-2n}}{r}=q$ ………………………(2),

故 $1+(1+r)^{-n}=\frac{q}{p}$, 而 $(1+r)^n=p/(q-p)$.

故 $r=\sqrt[n]{\frac{p}{q-p}}-1$.

注意 觀上之二解法,可知

$\frac{2p-q}{p^2}=\sqrt[n]{\frac{p}{(q-p)}}-1$.

不　等　式

注意 次問題之字母,恆以實數表之.

761. 試證 $a^2+b^2>2ab$.

解 凡實數之平方為正,故大於0,故 $(a-b)^2$ 為正,而大於 0, 即 $(a-b)^2>0$, 即 $a^2-2ab+b^2>0$, $\therefore a^2+b^2>2ab$.

注意 $\frac{a^2+b^2}{2}>ab$, 同樣 $\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$, 故二正數之等差中項,大於等比中項. 又 $a=b$ 時,則不等式為等式.

762. $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$, 試證之.

解 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2\}$, 但此式之右邊,若非 $a=b=c$, 則恆為正,故 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$, 故 $a^2+b^2+c^2>^2ab+bc+ca$.

別解 依 761 題.

$a^2+b^2>2ab$, $b^2+c^2>bc$, $c^2+a^2>2ca$, 此三不等式左右各相加,以 2 除之,則得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

注意 若 $a=b=c$, 則不等式為等式.

763. 試證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

解 $a^2+b^2>2ab$, $\therefore a^2-ab+b^2>ab$, 因 $(a+b)(a^2-ab+b^2)>(a+b)ab$, 故 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

注意 若 $a=b$, 則為等式.

764. $\frac{2x}{5}-\frac{3x}{4}>\frac{9}{4}-\frac{x}{2}$, 試解之.

解 去分母,則 $8x-15x>45-10x$, 移項 $8x-15x+10x>45$, 即 $3x>45$, $\therefore x>15$.

765. $3x-\frac{x+2}{4}<\frac{2x+3}{5}$, 試解之.

解 去分母,則 $60x-5x-10<8x+12$, 即 $47x<22$, $\therefore x<\frac{22}{47}$.

766. $5x+3y>121$, 及 $1\frac{3}{4}x+y=42$, 試定 x, y 之值之界限.

解 將第二式 3 倍之,為 $\frac{21}{4}x+3y=126$, 以 $5x+3y>121$ 減之,為 $\frac{1}{4}x<5$. $\therefore x<20$. 又將第一式 7 倍之,為 $35x+21y>847$ 將第二式 20 倍之為 $35x+20y=840$, 相減得 $y>7$.

注意 定 x, y 之界限,非謂適合於 $x<20$, $y>7$ 之任意值,皆適合於已知式也.

767. 試解 $ax^2+bx+c>0$.

解 (1)方程式 $ax^2+bx+c=0$, 其二實根為 α, β, $[\alpha>\beta]$ 時,則所設之不等式,為 $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$, $a>0$, 則兩邊以 a 約之,則 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 故 $x-\alpha>0$, 及 $x-\beta>0$, 或 $x-\alpha<0$. 及 $x-\beta<0$, 此二組之要件惟 $x>\alpha$ 或 $x<\beta$ 能適合.

又 $\alpha<0$, 則 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 故 $x-\alpha>0$, $x-\beta<0$, 或 $x-\alpha<0$, $x-\beta>0$, 然 $\alpha>\beta$, 故 x之同値, 不能合適於$x-\alpha>0$, $x-\beta<0$. 故自第二要件, 須$\alpha>x>\beta$. (2) $ax^2+bx+c=0$, 有等根α時, 則所設之不等式, 爲 $a(x-\alpha)^2>0$. 若$x\neq\alpha$, 而$a>0$, 則此不等式恆成立, 若$a<0$, 則x之値無論如何不能成立 (3) $ax^2+bx+c=0$有虛根時, 則

$$ax^2+cx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\},$$

其中 $4ac-b^2>0$, 故括弧 { } 內x之値, 無論如何, 恆爲正數, 故所設之不等式, 若$a>0$恆成立, 若$a<0$, 則不能成立. (4)若$a=0$. 則不等式爲一次不等式.

注意 同樣$ax^2+bx+c<0$亦可如此解之, 但示x之界限之不等號方向, 與本題全相反.

768. 試解$1+x-x^3-x^4>0$.

解 $1+x-x^3-x^4=(1+x)(1-x)(1+x+x^2)$, 故$(1+x)(1-x)(1+x+x^2)>0$, 而$1+x+x^2>0$, [767題], ∴ $(1+x)(1-x)>0$, 或$(x-1)\{x-(-1)\}<0$, ∴ $1>x>-1$. [767題].

769. $(x-5)(x+1)>0$, 及 $(x+2)(x+9)>0$, 試求x之値之界限.

解 自第一不等式得$x>5$, 或$x<-1$, [767題]. 自第二不等式得$x>-2$, 或$x<-9$, 則適合二不等式之x之界限値, 爲$x>5$, 或$-1>x>-12$, 或$x<-9$.

770. $\frac{4x^2-20x+81}{x^2-5x+4}>3$……(1), 試求$x$之値之界限.

解 移項 $\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}-3>0$, 卽

$\frac{4x^2-20x+18-3(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4}>0$, 或

$\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}>0$, ∴ $(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)>0$, 卽 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$……(2), 不等式(1)與(2)爲等値, 故若$x<1$, 則四因數皆爲負數, 而其連乘積爲正數, 故x在此界限內之値適合於不等式(2), 因而適合於不等式(1). 又$1<x<2$時, 則$x-1>0$, 而他三因數爲負, 故x在此界限內之値不能適合於(1), 又$2<x<3$時, 則不等式(2)之二因數爲負而他二因數爲正, 因而x在此界限內之値適合於(1). 又$3<x<4$, 則與$1<x<2$同樣, x在界限內之値, 不能適合於(1). 又$x>4$, 則與$x<1$同樣, x在此界限內之値能適合於(1), 故不等式(1), 能成立之x之値之界限, 爲$x<1$, $2<x<3$, $4>x$.

注意 若所設不等號方向若相反, 則$1<x<2$, $3<x<4$.

771. 試解 $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}>\frac{1}{x-1}$.

解 移項通分, 則

$$\frac{(x^2+1)+x(x-1)^2-(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}>0,$$

卽 $\frac{x^2+1+x^3-2x^2+x-x^3+x^2-x+1}{(x-1)^2-(x^2+1)}$ >0, 或 $\frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}>0$, 此不等

式之左邊分母之二因數，無論x之值如何，必為正數，故所設之不等式恆成立。

極大極小

注意　次問題之字母為表實數者.

772. 試求$3x^2+4x+5$之最小值.

解　題式 $=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{3}+5$ $=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$. 但平方之最小值為0，故$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$之最小值為0，而$x=-\frac{2}{3}$，故題式為$\frac{11}{3}$，則為最小值.

773. 試求$9+8x-7x^2$之最大值.

解　題式 $=9-7\left\{x^2-\frac{8}{7}x+\left(\frac{4}{7}\right)^2\right\}$ $+7\times\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{79}{7}-7\left(x-\frac{4}{7}\right)^2$.

$\therefore$ $x-\frac{4}{7}=0$，即 $x=\frac{4}{7}$，其式為最大，而其值為$\frac{79}{7}$.

774. 問$\frac{1}{2}(x+1)(x+2)$之最小值.

解　$\frac{1}{2}(x+1)(x+2)=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+2-\frac{9}{4}\right\}$，但$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$恆為正，故上式最小，則$x+\frac{3}{2}=0$，即 $x=-\frac{3}{2}$，而其最小值為 $\frac{1}{2}\left(2-\frac{9}{4}\right)=-\frac{1}{8}$.

775. 有二數其和為a，其積為b^2，問其積最大，則二數各幾何.

解　所求二數為方程式 $X^2-aX+b^2=0$之二根，故二數為$\frac{a\pm\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}$，而此二數為實數，則必$a^2\geqq 4b^2$，由是二數之和$a$為已知，而其積$b^2$最大，則$a^2-4b^2=0$，即$b^2=\frac{1}{4}a^2$，故二數皆為$\frac{1}{2}a$.

別解　將二數之一為$\frac{1}{2}a+x$，則其他為$\frac{1}{2}a-x$，故其積為$\left(\frac{1}{2}a+x\right)\left(\frac{1}{2}a-x\right)=\frac{1}{4}a^2-x^2$，而$x=0$時為最大，其二數各為$\frac{1}{2}a$.

注意　將某數二分之，若欲使其積為最大則為二等分.

776. 有二數其和為a，而其平方之和b^2最小時，二數各幾何.

解　二數為x, y，則有次之方程式，$x+y=a$·········(1)，$x^2+y^2=b^2$················(2).

(1)之兩邊平方之，以(2)減之，則$2xy=a^2-b^2$，因而x, y為次方程式之根.

$X^2-aX+(a^2-b^2)/2=0$. 故二數為

$\frac{a\pm\sqrt{\{a^2-2(a^2-b^2)\}}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}$.

而此二數如為實數，則必$2b^2-a^2\geqq a$，由是二數和為已知時，其平方之和b^2為最小，則$2b^2-a^2=0$，而$b^2=\frac{1}{2}a^2$，故二數皆為$\frac{1}{2}a$.

別解　將二數之一為$\frac{1}{2}a+x$，則他之一為$\frac{1}{2}a-x$，故其平方之和為

$\left(\frac{1}{2}a+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2=\frac{1}{2}a^2+2x^2$，

而$x=0$時為最小，故其二數當各為$\frac{1}{2}a$.

注意 將某數二分之,若欲使其平方之和最小,則二等分之.

777. 二數之積已知,試求其和之最小值.

解 將二數爲 x, y, 而 $xy=b^2$, $x+y=x+\frac{b^2}{x}=\frac{x^2+b^2}{x}=\frac{x^2-2bx+b^2}{x}+2b=2b+\frac{(x-b)^2}{x}$, 此式 $x=b$ 時最小,是則 $y=b$, 故二數相等,其和最小,而爲 $2b$.

778. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 試求其最大及最小值.

解 $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\lambda$, 則 $(1-\lambda)x^2+(1+\lambda)x+1-\lambda=0$, 此方程式爲實數,則必 $(1+\lambda)^2-4(1-\lambda)^2\geqq 0$, 或 $3\lambda^2-10\lambda+3\leqq 0$, 卽 $(3\lambda-1)(\lambda-3)\leqq 0$, 故 $3\geqq\lambda\geqq\frac{1}{3}$, 因而 λ 之最大値爲 3, 而最小値爲 $\frac{1}{3}$.

779. $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$ 試求其值之界限.

解 $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}=\lambda$, 去分母,則 $x^2-2(1+3\lambda)x+21+14\lambda=0$......(1). x^2 爲實數,故 (1) 之根爲實數. 由是 $(1+3\lambda)^2-(21+14\lambda)$, 卽 $9\lambda^2-8\lambda-20$, 卽 $9(\lambda-2)\left(\lambda+\frac{10}{9}\right)$ 不能爲負數,故 $\lambda-2$ 及 $\lambda+\frac{10}{9}$ 須同符號. 若 $\lambda>2$, 則二因數俱爲正. 若 $\lambda<-\frac{11}{9}$, 則二因數俱爲負. 若 λ 在 2 及 $-\frac{10}{9}$, 則第一因數爲負,而第二因數爲正,故 λ 之值不小於 2, 或不大於 $-\frac{10}{9}$, 決不能在 2 與 $-\frac{10}{9}$ 之間.

780. 三角形之底及周圍爲一定,其最大者,爲二等邊,試證之.

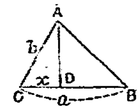
證 三角形之底邊爲 a, 他二邊爲 b, c, 周圍之半分爲 p, 則其面積 S, 以次公式定之.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

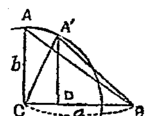
上式 $p, p-a, (p-b)+(p-c)=a$ 爲不變,故 $(p-b)(p-c)$ 最大時,卽 $p-b=p-c$, 卽 $p-b=p-c$, 卽 $b=c$, 則 S 爲最大.

781. 已知三角形之二邊 a, b, 試求其面積極大者.

解 $\triangle ABC$ 之邊 $BC=a$, $AC=b$, 高 $AD=y$, $CD=x$, 則 $y=\sqrt{(b^2-x^2)}$, 而三角形之面積, $u=\frac{1}{2}ay=\frac{1}{2}a\sqrt{(b^2-x^2)}$, 故 u 之極大,則 $x=0$, 故角 ACB 爲直角.

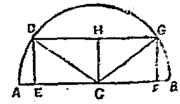


注意 本題若欲以幾何學解之,則以二邊 a, b, 作直三角形,將 C 爲中心 b 爲半徑畫圓,則有二邊 a, b, 之三角形之頂點,皆在此圓周上,設 A′ 爲 A 之外,任意一點,作 BC 之垂線 A′D, 則 $A'D<A'C$, 卽 $A'D<AC$, 故 $\triangle ABC>\triangle A'BC$.



782. 試求半圓內容最大矩形.

解 將 DEFG 爲容於半圓內任意之矩形 DEFG 之邊 $DE=x$, $EF=2EC=2y$, 半徑 $DC=r$,



面積DEFG$=u$，則$u=2xy=2x\sqrt{(r^2-x^2)}$，二乘之變形，則$4x^4-4r^2x^2=-u^2$，就x解之，則$x^2=\frac{1}{2}\{r^2\pm\sqrt{(r^4-u^2)}\}$，若欲使$x$爲實數，則必$r^4\geqq u^2$，因而$u$之最大值，爲$u^2=r^4$，斯時$x=\frac{r}{\sqrt{2}}$，卽半徑$r$爲對角線之正方形之一邊爲$x$也．

注意 本題亦可如前題以幾何學直接解之，何則，矩形DEFG之面積，爲△DCG之2倍，若使△DCG爲最大，則矩形亦最大．但△DCG最大，則其角$D\hat{C}G$爲直角[觀前題之注意]．

消去法

783 $ax+b=0$，及$a'x+b'=0$，試消去x．

解 自第一式$x=-\frac{b}{a}$，自第二式$x=-\frac{b'}{a'}$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$，$\therefore ba'-b'a=0$．

784.
$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ a'x+b'y+c'&=0\\ a''x+b''y+c''&=0\end{aligned}\right\}$$
試消去x．

解 自第一第二式得$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$，將$x$，$y$之値代入第三方程式，則$a''\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}+b''\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}+c''=0$，卽$a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$．

785. $\frac{y-z}{y+z}=a$，$\frac{z-x}{z+x}=b$，$\frac{x-y}{x+y}=c$，試消去x,y,z．

解 $\frac{y-z}{y+z}=\frac{a}{1}$，故$\frac{2y}{2z}=\frac{1+a}{1-a}$，同樣$\frac{2z}{2x}=\frac{1+b}{1-b}$，$\frac{2x}{2y}=\frac{1+c}{1-c}$，故依乘法得
$1=\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$，
卽$a+b+c+abc=0$．

786. $a+c=\frac{b}{x}-dx$，$a-c=\frac{d}{x}-bx$，試消去x．

解 自題式得$\frac{2a}{b+d}=\frac{1}{x}-x$，及$\frac{2c}{b-d}=\frac{1}{x}+x$，二乘相減，以4除之，則
$\frac{c^2}{(b-d)^2}-\frac{a^2}{(b+d)^2}=1$．

787. $x^2-yz=a$，$y^2-zx=b$，$z^2-xy=c$，$ax+by+cz=d$，試消去x,y,z．

解 前三式各以x,y,z乘之，兩邊相加，則$x^3+y^3+z^3-3xyz=ax+by+cz=d$，又$(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)=a^2-bc$，故$x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$，因而$dx=a^2-bc$，同樣$dy=b^2-ca$，$dz=c^2-ab$，故$a^3+b^3+c^3-3abc=dax+dby+dcz=d^2$．

788. $x+y=a$，$x^2+y^2=b^2$，$x^3+y^3=c^3$，試消去x,y．

解 自第一式之平方，減第二式，得$a^2-b^2=2xy$，則第三式爲
$c^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=a\left(b^2-\frac{a^2-b^2}{2}\right)$
$=\frac{a}{2}(3b^2-a^2)$，$\therefore 2c^3=a(3b^2-a^2)$．

不定方程式

789. $5x+3y=22$，試求正整數之解答．

解 將各項以3[x,y之係數之小者]

除之，$x+\frac{2}{3}x+y=7+\frac{1}{3}$，將整數項移於一邊，則 $x+y-7=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$ ……(1)，因 x, y，為整數，故 $x+y-7$ 為整數，故 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$ 亦為整數，試以 p 代之.

$\therefore\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}x=p$，$\therefore\ 1-2x=3p$，此又 x 及 p 之不定方程式，依上法以 2 [x, p 係數之小者] 除之，將整數項移於一邊，則 $x+p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p$……(2)，因 x, p，為整數，故 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p$，又以 q 代之，$\therefore\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}p=q$，$\therefore\ 1-p=2q$……(3)，此又 p, q，之不定方程式，然其未知數之一之係數為 1，故無須再施前法，直自(3)得 $p=1-2q$，代入(2)，為 $x=3q-1$，再代入(1)，得 $y=9-5p$，故所設方程式之解答，含於 $x=3q-1$，及 $y=9-5q$. 若 q 為整數，則 x, y，之值，亦為整數，而 x, y，不僅為整數，且為正數，故 y 為正，則 q 當小於 2，又 x 為正，則 q 當為正，故 q 之值惟 1. 因而 $q=1$，故所設方程式正整數之解答，即 $x=2$，$y=4$ 而已.

790. 試求 $3x+4y=22$ 正整數之解答.

【解】 自所設方程變為次式 $4y=22-3x$，因 y 為正整數，故此式之左邊能以 2 整除，而右邊亦即能以 2 整除，因而 x 亦能以 2 整除，今將 $x=0, 2, 4, \ldots\ldots$ 試之，若 $x=0$，則 y 為分數，故 $x\neq 0$，若 $x=2$，則 $y=4$，若 $x=4$，則 $y=\frac{5}{2}$，故 $x\neq 4$，若 $x=6$，則 $y=1$，若 x 大於 6，則 y 為負，故所求之答數，惟 $x=2$，$y=4$，及 $x=6$，$y=1$.

【別解】 自題式 $y=5-x+\frac{2+x}{4}$ ……(1)，y 為正整數，設 $\frac{2+x}{4}=t$，則 t 為正整數，而 $x=4t-2$，又知 x 為正整數，今將此值代入(1)，而求 y，則 $y=7-3t$，因而 x, y，之一切值，為 $x=4t-2$，及 $y=7-3t$，若 $t=0$，則 x 為負，若 $t=1$，則 $x=2$，$y=4$，若 $t=2$，則 $x=6$，$y=1$，若 t 為 3 及大於 3，則 y 為負，故所求之答數，自 $t=1$，$t=2$，得之，而其值為 $x=2$，$y=4$，及 $x=6$，$y=1$.

791. 試求 $x^2-y^2=63$ 之正整數之解答.

【解】 $(x+y)(x-y)=63$，因 x, y，為正整數，故 $x+y$ 及 $x-y$ 為正整數，而 63 之正整數之因數，僅為 63 及 1，21 及 3，9 及 7，故所求之解答如次.

即 $\left.\begin{array}{r} x+y=63 \\ x-y=1 \end{array}\right\}\quad\therefore\quad\left.\begin{array}{r} x=32 \\ y=31 \end{array}\right\}$，

又 $\left.\begin{array}{r} x+y=21 \\ x-y=3 \end{array}\right\}\quad\therefore\quad\left.\begin{array}{r} x=12 \\ y=9 \end{array}\right\}$，

又 $\left.\begin{array}{r} x+y=9 \\ x-y=7 \end{array}\right\}\quad\therefore\quad\left.\begin{array}{r} x=8 \\ y=1 \end{array}\right\}$.

792. 有龜鶴不知其數，惟云足數共 272，問龜鶴各幾何.

【解】 將鶴數為 x，龜數為 y，則 $2x+4y=272$，$\therefore\ x+2y=136$，$\therefore\ x=136-2y$. 故若 $y=1$，則 $x=134$，若 $y=2$，則 $x=132$，若 $y=3$，則 $x=130$…… 若 $y=67$，則 $x=2$.

793. 有如下之帳條,試填蟲蝕之處之數目.

解 一疋之價為 x 分,總價圓之部分為 y 圓,則 $100y+52=253x$, 即 $100y=253x-52$, 故 $y=2x+\frac{53x-52}{100}$, 若 $\frac{53x-52}{100}=z$, 則 $53x-52=100z$, $\therefore 53x=100z+52$, 因而 $x=\frac{100z+52}{53}=2z+\frac{52-6z}{53}$, 而 $\frac{26-3z}{53}=t$, $\therefore 3z=26-53t$, 因而 $z=9-18t+\frac{t-1}{3}$, 若 $\frac{t-1}{3}=u$, 則 $t=3u+1$, $\therefore z=-53u-9$, $\therefore x=-100u-16$, 因而 $y=-253u-41$, 若 $u=-1$, 則 $x=84$, $y=212$, 即一疋為8角4分,總價金212圓5角2分.

若 $u=-3$, 則總價之圓數及每疋之分數,皆得更大之數,故不取之.

794. 有二位之數,其數為二數字之積之倍數,問二位之數如何.

解 十位之數字為 x, 一位之數字為 y, 則 $10x+y=kxy$ ……(1), 而 $10+\frac{y}{x}=ky$, 因 ky 為整數,故 $\frac{y}{x}$ 亦必為整數,今若 $\frac{y}{x}=1$, 則 $y=x$, 故自(1)得 $11y=ky^2$, 或 $11=ky$, 而 y 為11之約數,且為一位之數,故必為1,是所求之數當為11. 又若 $\frac{y}{x}=2$, 則自(1)得 $12=ky$ 及 $6=kx$, 故 k 必為12及6之公約數,即為1, 2, 3, 6中之數,但 k 若為1,則 $y=12$, 不合理,故 $k=2, 3, 6$, 因而 $y=6$, $x=3$, 及 $y=4$, $x=2$, 及 $y=2$, $x=1$, 而所求之數為36, 24, 12. 又若 $\frac{y}{x}=3$. 則自(1)得 $13=3kx$, 而13不能為3之倍數,故不能得其所求之數. 又若 $\frac{y}{x}=4$, 亦同樣不能得其所求之數. 又若 $\frac{y}{x}=5$, 則得所求之數為15. 又若 $\frac{y}{x}=6$ 以上之數,亦不能得其所求之數,故所求之數惟11, 36, 24, 12, 15之五數.

795. 試求二方程式 $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$, 之整數解答.

解 先將二方程式消去未知數之一,例如消去 z, 則得方程式 $(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y+=dc'-d'c$……(1). 若 $ac'-a'c$ 及 $bc'-b'c$ 互為素數,或雖不互為素數,而以 $dc'-d'c$ 之一因數除 $ac'-a'c$ 及 $b'c-b'c$ 之結果,互為素數,則方程式(1)有整數之解答,因得一切之解答如次,

$x=\alpha+(bc'-b'c)n$, $y=\beta-(ac'-a'c)n$. 但 $x=\alpha$, $y=\beta$, 為任意之解答,而 n 為任意之整數. 次將 x, y, 之此等之值代入原方程之一,則 $Az+Bn=C$ 之方程式. 若A及B互為素數,或雖不互為素數,而以C之一因數除A及B之結果,互為素數,則自此方程式得 $z=\gamma+Bm$, $n=\delta-Am$ 之整數解答.

第 五 門

平面幾何學解法之部

FIFTH SECTION

The Solutions of Exercises

IN

PLANE GEOMETRY

第五門 平面幾何學解法之部 目次

● ＋增 ● －減 ● ～差 ● ＝相等 ● ≡全等 ● ∽相似 ● ∧或∠角 ● ⊥垂線

● ∥平行 ● △三角形 ● □正方形 ● ▭矩形 ● ▱平行四邊形 ● ◉圓 ● $\hat{R}$直角

半徑1之圓之面積
徑1之圓周
徑1之球之面積 $\Big\}= \pi$ $=3.1415926536$，其對數 0.4971499.

徑1之圓之面積 $=\frac{1}{4}\pi$ $=0.7853981634$，其對數 $\bar{1}.8950899$.

徑1之球之體積 $=\frac{1}{6}\pi$ $=0.5235987756$，其對數 1.7189986.

半徑1之球之體積 $=\frac{4}{3}\pi$ $=4.1887902048$，其對數 0.6220886.

面積1之圓之徑 $=\sqrt{4\div\pi}=1.1283791671$，其對數 0.0524550.

體積1之球之徑 $=\sqrt[3]{6\div\pi}=1.2407009818$，其對數 0.0936671.

$\sqrt{\pi}=1.7724538509$，其對數 0.2485749

$\pi^2=9.8696044011$，其對數 0.9942997.

$\frac{1}{\pi}=0.3183098862$，其對數 $\bar{1}.5028501$.

斜三角形之邊及面積	邊			面積	邊			面積	邊			面積
	4	13	15	24	12	17	25	90	13	30	37	180
	3	25	26	36	19	20	37	114	12	55	65	198
	9	10	17	36	16	25	39	120	7	65	68	210
	7	15	20	42	13	20	21	126	17	25	28	210
	6	25	29	60	15	28	41	126	9	73	80	216
	11	13	20	66	11	25	30	132	15	41	52	234
	5	29	30	72	11	90	97	132	13	37	40	240
	13	14	15	84	13	40	51	156	9	65	70	252
	8	29	35	84	15	26	37	156	33	34	65	264
	10	17	21	84	10	35	39	168	15	37	44	264

數學辭典

第五門　平面幾何學解法之部

平面幾何學定理

普通公理

●全量等於各部分之和.
故全量大於其部分.

●等於同量或相等量者相等.

●加等量於等量,其和相等.

●自等量減等量,其差相等.

●相等量與不等量之和不等,加於大量之和,大於其他.

●自不等量減等量,其差不等,自大量所減之差,大於其他.

●自等量減不等量其差不等.減大量之差,大於其他.

●等量之同倍數相等,又等量之同分數相等.

幾何學公理

●圖形不能變其形狀大小,而能變其位置.

●可使全相合者,則其大相等.

●過一點向一方向,能引一直線,而惟限於一.
換言之,即一點與一方向,
決定一直線.
自此公理,知次之二件,

(1)二點決定一直線.
換言之,即同有二點之二直線,全相合而成一直線.

(2)相異二直線,惟得於一點相交.

●二點間之最短徑,爲其間之直線.

●凡周角相等.

●過一點與一直線平行,能引一直線而惟限於一.

直　線

●自直線上一點,能引其直線之一垂線,而惟限於一.

●自直線外一點,能引其直線之一垂線,而惟限於一.

●自直線外一點,引其直線之諸分線,
(1)垂線最短.
(2)相等斜線之趾,自垂線之趾,在相等之距離.
(3)大斜線之趾,距垂線之趾,遠於小斜線之趾,距垂線之趾.

●前條之逆.

●自直線外一點,能引相等二分線,而惟限於二,而此二線在垂線之異方.

●已知之有限直線,能以任意之比內分爲二分,又能以不等任意之比外分爲二分,而各分點惟限於一.

角

●自一點引諸直線所成相鄰接諸角之和,等於一周角,即四直角.

●一直線會於他一直線,其兩鄰角之和,等於一平角,即二直角.又此定理之逆.

●二直線相交,則對頂角相等.

●兩鄰角之和,成二直角,則其二等分線互成直角.

平行直線

●一直線截二直線成相等錯角,則後之二直線當為平行.又此定理之逆.

●一直線截二直線,所成同傍二內角.互為補角,則後之二直線,當為平行,又此定理之逆.

●一直線截二直線,所成同位角相等,則後之二直線,當為平行.又此定理之逆.

●一直線上之二垂線平行.

●平行直線,有公共之垂線.

●平行於一直線之二直線,互平行.

●三平行線,若截取一橫截線,成相等分線,則其他任意之橫截線,皆被三平行線,截取相等分線.

●與諸平行直線相交之二橫截線,其互相截之各段橫截線,與平行直線成比例.又此定理之逆.

多角形

●n邊之多角形各角之和$=(2n-4)\hat{R}$

●n邊之多角形外角之和$=4\hat{R}$

●正多角形各角二等分之直線,皆相會於一點.此點與各頂點之距離相等,且與各邊之距離相等.

●正多角形能內接或外切於圓.

●將圓周分為任意相等之弧,則其弧之弦所成內接形為正多角形.又於各分點作切線所成之外切形,亦為正多角形.

●圓內接等邊多角形,必為正多角形,圓外切之等邊多角形,邊數為奇數,必為正多角形.

●圓外切之等角多角形,必為正多角形.又圓內接之等角多角形,邊數為奇數,必為正多角形.

●正多角形之面積$=\frac{1}{2}$邊心距.周.

●同邊數之正多角形為相似形.

將對應邊為$a, b, c, \cdots\cdots, a', b', c'\cdots\cdots$,外接圓之半徑為$r, r'$,則

$$\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}$$

●兩相似直線形,將其各對邊平行置之,則連結一形之頂點與他形相對應之頂點之直線,或平行,或過同一之點,而過其點作任意之直線,自其點至此直線與二形對應邊交點距離之比,等於對應邊之比.

●相似多角形之比,等於其對應邊之二乘比.

●四直線成比例.於其第一及第二之上,畫兩相似形於相似之位置,於其第三及第四之上,亦畫兩相似形,則此諸形成比例.又此定理之逆.

●直角三角形斜邊上之直線形,與他二邊上之直線形爲相似,則斜邊上之直線形,等於他二邊上直線形之和.

三角形

●三角形各角之和,等於二直角.

●三角形一外角,等於二內角之和,故三角形之一外角,大於相對之任一內角.

●兩三角形全等者.

(1) 二邊及其夾角各相等.

(2) 一邊及同位置之二角各相等.

(3) 三邊各相等.

(4) 二邊及對其大邊之角相等.

●兩三角形兩意者.

二邊及對其小邊之角相等,則對其大邊之角,或相等或互爲補角.

●三角形二邊相等,則對其邊之角亦相等. 又其逆.

●二等邊三角形頂角之二等分線,二等分其底成直角. 又其逆.

●引二等邊三角形底之中線,爲底之垂直二等分線,又爲頂角之內二等分線. 又其逆.

●三角形大邊對大角,又大角對大邊.

●三角形二角之和,大於他一邊,故二邊之差,小於他一邊.

●自三角形一邊之兩端,向三角形內之一點引直線,則此二直線之和,小於他二邊之和,而其夾角大於他二邊之夾角.

●兩三角形二邊各相等,其夾角不等則大角之對邊,大於小角之對邊. 又其逆.

●三角形三中線交於一點[重心]. 重心將中線分爲1:2之比.

●三角形各邊之垂直二等分線,交於一點[外心].

●自三角形各角之頂點向對邊引垂線交於一點[垂心].

●三角形各角之內二等分線交於一點[內心].

●三角形一角之內二等分線,及他二角之外二等分線交於一點[傍心].

●$\Delta=\frac{1}{2}$·底·高.

●$\Delta=\frac{1}{2}$(等底等高之平行四邊形).

●$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.　$s=\frac{a+b+c}{2}$.

●直角三角形斜邊上之正方形,等於他二邊上正方形之和[披氏定理].

●三角形對銳角之邊上正方形,等於自他二邊上正方形之和,減其一邊與此邊上他一邊正射影所包矩形之二倍.

●三角形對鈍角之邊上正方形,等於自他二邊上正方形之和,加其一邊與此邊上他一邊正射影所包矩形之二倍.

●以上三定理之逆.

●三角形之二邊上之正方形之和,等

於第三邊半分上之二倍,與第三邊中線上正方形之二倍之和.

●兩三角形相似者.

(1) 兩三角形三角各相等.

(2) 兩三角形三邊順次成比例.

(3) 兩三角形彼此二邊成比例,其夾角相等.

(4) 兩三角形彼此二邊成比例,其對大邊之角相等.

●直角三角形,自直角之頂點,向斜邊引垂線,則分三角形為與全形相似之三角形,故分為互相似之兩三角形.

●兩三角形彼此二邊成比例,對其小邊之角相等,則對其大邊之角,或相等或互為補角.

●將三角形之二邊,分為相等比之直線,必平行於底邊.

●三角形之頂角或其外角之二等分線,與底邊之交點,內分或外分其底邊如他二邊之比. 又其逆.

●一角相等之兩三角形之比,等於夾此角之二邊所包矩形之比.

●相似三角形之比,等於其對應邊之二乘比.

●三角形ABC之三邊為a, b, c,邊a之垂線為h,外接圓之半為徑R.則$bc=2R.h$,及$4R\Delta=abc$.

四　邊　形

●四邊形內接於圓,則其相對之角,互為補角. 又其逆.

●四邊形外切於圓,則其相對二邊之和,等於其他相對二邊之和. 又其逆.

●圓內接四邊形,兩對角線所包之矩形,等於兩雙對邊所包矩形之和.

●平行四邊形.

(1) 相對邊相等.

(2) 相對角相等.

(3) 相鄰角互為補角.

(4) 兩對角線互為二等分.

(5) 面積等於底與高所包之矩形.

●一四邊形.

(1) 相對邊各相等,

(2) 相對角各相等,

(3) 相對邊相等且平行,則其四邊形為平形四邊形.

●等底等高之二矩形相等.

●矩形之面積＝底×高.

●梯形之面積$=\frac{1}{2}$高.兩底和.

●同底邊,或相等底邊上,在平行線間之平行四邊形相等.

●沿平行四邊形對角線之平形四邊形之餘形相等.

●一平形四邊形之相鄰邊,各等於他平行四邊形之相鄰邊,且一角相等,則兩平行四邊形全相等.

●等高之矩形,與底成比例.

●等底之矩形,與高成比例.

●X, Y,……為分線,XY, XZ,……為矩形,X^2, Y^2……為正方形,則

(1) $X(Y+Z)=XY+XZ$.

(2) $(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$.

(3) $(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY$.

(4) $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$.

圓

●半徑相等之圓全相等.

●圓關於其中心而爲對稱.

●圓關於其任意之徑而爲對稱.

●自中心至一點之距離爲 d. 圓之半徑爲 r. 則

(1) 點在圓內則 $d<r$.

(2) 點在圓周上則 $d=r$.

(3) 點在圓外則 $d>r$.

又此三者之逆.

●過圓中心垂直於弦之直線, 二等分此弦. 又其逆.

●圓之弦之二等分線過中心.

●圓之弦之二等分線, 二等分其弦所分之共軛弧.

●同圓或相等圓之相等弦, 在中心之等距離. 又其逆.

●同圓或相等圓之不等二弦, 其大者距中心近, 而小者距中心遠. 又其逆.

●同圓或相等圓之相等中心角, 立於相等弧之上. 又其逆.

●同圓或相等圓中心角不等, 則中心角大者立於大弧之上. 又其逆.

●同圓或相等圓, 對於相等弧之弦相等. 對於不相等之劣弧者, 則對於大對劣弧之弦, 大於其他. 又其逆.

●圓周角等於立於同弧之中心角之半分.

●圓之同弓形之角相等. 又其逆.

●圓內[或外]二弦相交之角, 能以其所夾弧之和[或差]之半分, 而測度之.

●弓形之角, 因其弓形大或小或等於半圓, 而爲銳角或直角或鈍角. 又其逆.

●過圓周上一點之一切直線, 惟與半徑成垂線之直線, 不再會於圓周, 其他皆必會於圓周之他一點.

●直線與一圓中心之距離, 因其小或等或大於半徑, 而交於圓周, 或切於圓周, 或不會於圓周.

●圓之切線, 垂直於其切點所引之半徑. 又其逆.

●過圓之切線之切點, 引切線之垂線, 必過圓之中心.

●切線與自其切點所引之弦所成之角, 等於其相鄰之弓形角.
又其逆.

●圓外一點, 引其圓之二切線相等.

●切於不過同一之點, 又不平行三直線之圓有四, 而惟限於四.

●相交二圓之中心線, 爲其共通弦之垂直二等分線.

●二圓周若不在連結其中心之直線上一點相會, 則圓周在他二點相會,

而為相交之圓,而中心間之距離,小於半徑之和,而大於其差.

●二圓周若在連結其中心之直線上一點相會,則此二圓周不再會於他一點,而為外切或內切之圓,其中心間之距離,外切者等於半徑之和,內切者等於半徑之差.

●二圓相切,其切點與二圓中心在同一之直線上.

●將圓之弦,內分或外分之,則二分所包之矩形,等於半徑上正方形,與分點連結圓心之直線上正方形之差.

●過一定點之圓之諸割線,自其交圓周之二點,至定點之分線,所包之矩形,皆相等. 又其逆.

●自圓外一點,引其圓之切線及割線,其切線上正方形,等於割線之二分所包之矩形. 又其逆.

●同圓或相等圓之角之比,等於其所立之弧之比.

●圓半徑為r,周為c,則$c=2\pi r$.

●圓之面積$=\pi r^2$.

●扇形之面積$S=r^2\pi\cdot\frac{a}{360^\circ}$.
但a為扇形之角度.

軌　跡

●確定軌跡,須證明次之二命題.

(1) 在線X之點,適於要件A.

(2) 適於要件A之點,在線X之上.

或以(3)代(1),以(4)代(2),而證明之亦可.

(3) 不適於要件A之點,不在線A之上.

(4) 不在線X之點,不適於要件A.

●二定點A,B,成等距離之點之軌跡,為AB之垂直二等分線.

●一定點等距離之點之軌跡,為圓之弧.

●一直線一定距離之點之軌跡,為平行其直線之二直線.

●三角形之底及對之之角,皆為一定,則其頂點之軌跡為圓弧.

●相交二直線等距離之點之軌跡,為其角之內外二等分線.

●相交二直線,其有已知比之距離之軌跡,為二直線.

●已知二點之距離,其有已知比之點之軌跡,為將連結二點之直線,內分或外分為已知比之二點間距離為徑之圓周.

比　例

●$\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, $\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$, 則$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

●$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. [反轉之理]

●$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. [更迭之理]

●$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則$ad=bc$.

● $ad=bc$, 則次之比例式成立.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

● $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. [合比之理]

● $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a\sim b}{b}=\frac{c\sim d}{d}$. [分比之理]

● $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{a\sim b}=\frac{c+d}{c\sim d}$. [分合比之理].

● $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$, 則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$

$=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$, [加比之理]

● $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 則 $b^2=ac$, $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

● $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$.

● $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$, 則 $\frac{ax}{by}=\frac{cz}{dw}$.

● $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 則因 $a \gtreqless c$ 而 $b \gtreqless d$.

定理之關係

●定理變態四種.

定理, A 爲 B, 則 C 爲 D.

其裏, A 不爲 B, 則 C 不爲 D.

其逆, C 爲 D, 則 A 爲 B.

其對偶, C 不爲 D, 則 A 不爲 B.

其定理眞, 則其對偶必眞, 而其逆與裏不必眞.

又其逆與裏, 互爲對偶, 故同時爲眞.

●同一法.

若有惟一之 X, 與惟一之 Y, 而 X 爲 Y, 則 Y 爲 X.

●轉換法. 一組之定理,

$$\left.\begin{array}{l} A>B,\ 則\ C>D. \\ A=B,\ 則\ C=D. \\ A<B,\ 則\ C<D. \end{array}\right\}$$

自此推定其逆,

$$\left.\begin{array}{l} C>D,\ 則\ A>B. \\ C=D,\ 則\ A=B. \\ C<D,\ 則\ A<B. \end{array}\right\}$$

直線角

1. 有限直線 AB 上取點 C, 而 BC 之中點爲 M, AB 之中點爲 M′, 則 AB+AC=2AM, AB−AC=2CM, AC∼BC=2C′M′, 試證之.

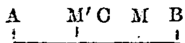
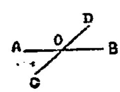


圖 因 CM=MB, 故 AB+AC=AM+MB+AC=AM+CM+AC=AM+AM=2AM. AB−AC=CB=2CM. 又 C 在 BM′ 上, 則 AC−BC=AM′+CM′−BC=BM′+CM′−BC=CM′+CM′=2CM′, 若點 C 在 AM′ 上, 亦可同樣證明之.

2. 四直線交於一點, 其不相鄰之角相等, 則此四直線, 在同直線之上.

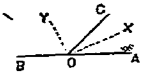
圖 OA, OB, OC, OD, 爲交於 O 之四直線, $A\hat{O}C=B\hat{O}D$, $C\hat{O}B=D\hat{O}A$, 則 $A\hat{O}D+A\hat{O}C=C\hat{O}B+B\hat{O}D=2\hat{R}$, 故 COD 爲同一直線. 同様, AOB 亦爲同一直線.



3. 角 AOC 之二等分線爲 OX, 補角 COB 之二等分線爲 OY, 則 OX, OY, 互爲垂

直,試證之.[有謂OX爲角AOC之內二等分線,OY爲其角之外二等分線者.]

證　$C\hat{O}X=\frac{1}{2}A\hat{O}C$, $C\hat{O}Y=\frac{1}{2}BOC$, 故 $X\hat{O}Y=\frac{1}{2}AOB$, 但 $A\hat{O}B=2\hat{R}$, 故 $X\hat{O}Y=\hat{R}$.

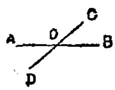


4. 斜折方紙之一隅,則其折縫及一邊,折爲二部分,所成角之二等分線成直角,試證之.

證　此問題與前問題3全相同,而方紙邊AOB之AO,折成CO之位置,故OX爲折縫,而OY爲折邊二部所成角之二等分線.

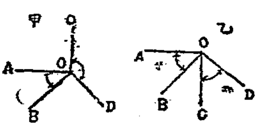
5. AOB爲一直線,而CO, OD, 在AB之異方,爲與AOB成$A\hat{O}C=B\hat{O}D$之角之二直線,則CO, OD爲同一之直線,試證之.

證　$B\hat{O}D=A\hat{O}C$, 各加以 $B\hat{O}C$, 得 $C\hat{O}D=A\hat{O}B=2\hat{R}$, 故CO, OD, 爲同一之直線.



6. 二角$A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$, 有同一之頂點O, 邊AO爲邊CO之垂線,邊BO爲邊DO之垂線,則角AOB,等於角COD,或爲其補角,試證之.

證　$A\hat{O}C=B\hat{O}D=\hat{R}$, 故 $A\hat{O}B+C\hat{O}D=2\hat{R}$[甲圖]. 次於乙圖,則$A\hat{O}C=B\hat{O}D$ $(=\hat{R})$, 各減去$B\hat{O}C$,而$A\hat{O}B=C\hat{O}D$.



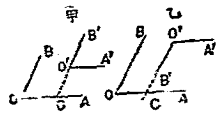
注意　OB, OD, 對於OA, OC, 在同方向廻轉,則二角相等,在反對方向廻轉,則互爲補角.

7. 交平行直線之一之直線,亦必交其他諸直線.

證　平行直線AB, CD,………,有直線XY,與諸平行線之一之AB,相交於G,則XY亦必與其他諸直線CD,……相交,何則.XY若不與CD相交,則XY即平行於CD,故過一點G,有平行於CD之二直線AB, XY,是背於公理,故XY必交CD,同樣XY亦必與平行於AB之諸直線相交.

8. 二角之各二邊,兩兩平行,則其二角相等,或互爲補角.

證　二角AOB, A′O′B′, 其 AO∥A′O′,

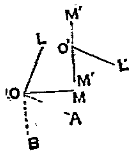


OB∥O′B′, 則B′O′或其延線,必交OA[7題]. 其交點若爲C, 則$A\hat{O}B=O'\hat{C}A$ $=B'\hat{O}'A'$[甲圖], 或$A\hat{O}B=A\hat{C}O'=2\hat{R}-A'\hat{O}'B'$[乙圖].

注意　參照6題之注意.

9. 角LOM之二邊LO, MO, 垂直於角$L'\hat{O}'M'$之二邊L′O′, M′O′, 則$L\hat{O}M=L'\hat{O}'M'$, 或$L\hat{O}M+L'\hat{O}'M'=2\hat{R}$.

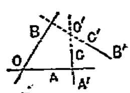
證　過O, 平行於O′L′, 引OA, 平行於



$O'M'$, 引 OB, 則 $O'L'\perp OL$, 故 $OA\perp OL$, 又 $O'M'\perp OM$, 故 $OB\perp OM$, 故 $L\hat{O}M=A\hat{O}B$, 或 $L\hat{O}M+A\hat{O}B=2\hat{R}$ [6題], 又 $L'\hat{O'}M'=A\hat{O}B$, 或 $L'\hat{O'}M'+A\hat{O}B=2\hat{R}$ [8題], 故 $L\hat{O}M=L'\hat{O'}M'$, 或 $L\hat{O}M+L'\hat{O'}M'=2\hat{R}$.

注意 與6題之注意,有同樣之關係.

10. 垂直於相交二直線之二直線,亦相交.



證 $A'C\perp AO$, $B'C'\perp BO$, 則 $A'C$, $B'C'$, 當於某點O'相交,何則, $A'C$與$B'C'$若不相交,即必平行,是$B'C'\perp AO$, 故AO, BO, 皆垂直於$B'C'$, 故$AO // BO$背於假設, 故$A'C$, $B'C'$,必於某點O'相交.

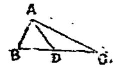
三角形

11. 三角形二角之二等分線,必相交.

證 三角形二角之和,小於二直角,故其半分之和,更小於二直角, 故二角之二等分線必相交,何則,若不相交,即當平行,而平行則必同傍二內角和為$2\hat{R}$故也.

12. 直三角形斜邊之中點,在自三角形頂點之等距離,而其逆亦眞.

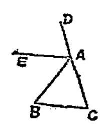
證 自直角三角形 ABC 之直角頂A作等於$A\hat{B}C$之$B\hat{A}D$,而引直線AD,若AD與BC之交點為D,



則$AD=BD$. 又 $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, 之餘角 $D\hat{A}C=D\hat{C}A$, 故三角形ACD為二等邊, 而$AD=CD$, 故$AD=BD=CD$, 即D為BC之中點,而在自A,B,C之等距離. 本題之假設,為ABC為直角三角形,及D為斜邊之中點之二者,故將D為斜邊之中點,與終結交換, 則得本定理之逆,又將為直角三角形與終結交換,亦得一個之逆,今順次證明之. D為自A,B,C,在等距離之點,連結DA DB, DC,則因三角形ABD, ACD, 皆為二等邊,故$D\hat{A}B=\hat{B}$, $D\hat{A}C=\hat{C}$, 故$\hat{B}+B\hat{A}C+\hat{C}=2\hat{R}$, 但四邊形$ABDC$內角之和,等於$4\hat{R}$, 故$B\hat{D}C=2\hat{R}$, 故$BD$, DC, 為同一直線,而D為斜邊之中點. 次D為$\triangle ABC$之邊BC之中點,且自A,B,C,為等距離,則因$\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 皆為二等邊,故$D\hat{A}B=\hat{B}$, $D\hat{A}C=\hat{C}$, 故$D\hat{A}B+D\hat{A}C=\hat{B}+\hat{C}$, 即 $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$, 故 $\hat{A}=\hat{R}$.

注意 本題若知直角三角形之斜邊為其外接圓之徑,則得極簡單證之.

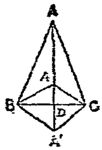
13. 二等邊三角形之外二等分線,平行於底.



證 二等邊三角形ABC, 其頂角之外角BAD之二等分線為AE, 則因$\hat{B}+\hat{C}=D\hat{A}B$, 故 $E\hat{A}B=\hat{B}$, 故$AE // BC$.

14. 立於同底上之二個二等邊三角形,連結其二頂點之直線,為共同底之垂直二等分線

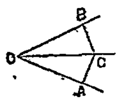
[證] 立於同底之上二個二等邊三角形,為ABC, A'BC,於△ABC,而AB=AC, $A\hat{B}C=A\hat{C}B$, 又於△A'BC,而A'B=A'C, $A'\hat{B}C=A'\hat{C}B$,故於△ABA' △ACA',而AB=AC, A'B=A'C, $A\hat{B}A'=A\hat{C}A'$, 故 $B\hat{A}A'=C\hat{A}A'$,故AA'為$B\hat{A}C$之二等分線,因而AA'為底BC之垂直二等分線.



[注意] 本題於△ABA', △ACA',自AB=AC, A'B=A'C, AA'共同,證明之亦可.

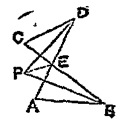
15. 一角之二等分線上之各點,在自角之二邊之等距離,而其逆亦眞.

[證] 自角AOB之二等分線上一點C,向OA, OB,引垂線CA, CB,則$C\hat{B}O=C\hat{A}O(=\hat{R})$, $B\hat{O}C=A\hat{O}C$,而CO為二三角形$B\hat{C}O$, $A\hat{C}O$,之共同邊,故此兩形全等,而CB=CA. [逆] C為自OA, OB,等距離之點,即CA=CB,則因三角形CAO, CBO,之邊CO共同. $C\hat{A}O=C\hat{B}O=\hat{R}$,故$C\hat{O}A=C\hat{O}B$,故C在$A\hat{O}B$之二等分線上.



16. 已知直線上之二定點為A及B又其他已知直線上之二定點為C及D則$A\hat{D}C$及$C\hat{B}A$之二等分線所成之角,等於$D\hat{A}B$與$B\hat{C}D$之和之半分.

[證] AD, BC之交點為E, $A\hat{B}C$, $A\hat{D}C$之二等分線之交點為P,則$P\hat{E}C=\frac{1}{2}A\hat{B}C+B\hat{P}E$, $P\hat{E}A=D\hat{P}E+\frac{1}{2}A\hat{D}C$,故$A\hat{E}C=\frac{1}{2}A\hat{B}C+\frac{1}{2}A\hat{D}C+B\hat{P}D$,即$2A\hat{E}C=A\hat{B}C+A\hat{D}C+2B\hat{P}D$,又$2A\hat{E}C=\hat{A}+A\hat{B}C+\hat{C}+A\hat{D}C$,故$2B\hat{P}D=\hat{A}+\hat{C}$,即$B\hat{P}D=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C})$.

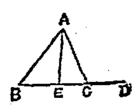


[別證] $\hat{C}+C\hat{D}P=B\hat{P}D+P\hat{B}E$, $\hat{A}+A\hat{B}P=B\hat{P}D+P\hat{D}A$,但$C\hat{D}P=P\hat{D}A$, $A\hat{B}P=P\hat{B}E$,故$\hat{C}+\hat{A}=2B\hat{P}D$云.

[注意] 二等分線在前反對之側相交,則因$P\hat{E}C$, $P\hat{E}A$,非三角形之外角而為內角,亦可得同樣證明之.

17. 三角形ABC之邊BC,引長至D,引二等分$B\hat{A}C$之直線AE,使交BC於E,則$2A\hat{E}D=A\hat{B}D+A\hat{C}D$.

[證] $A\hat{B}D=A\hat{E}D-\frac{1}{2}\hat{A}$, $A\hat{C}D=A\hat{E}D+\frac{1}{2}\hat{A}$,故$A\hat{B}D+A\hat{C}D=2A\hat{E}D$.



18. 三角形之一外角之二等分線,與其一內對角之二等分線,所成之角,等於其他一內對角之半分.

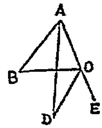


圖 △ABC其AD, CD, 爲$\hat{A}$及$\hat{C}$之外角之二等分線,其交點爲D,則$A\hat{D}C=D\hat{C}E-\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})-\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{B}$.

19. 三角形ABC之邊BC,延長至D,引二等分$A\hat{C}B$之直線CE,使交AB於E,自E引平行於BC之直線,與AC相交於F,與二等分$A\hat{C}D$之直線相交於G,則EF=FG.

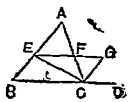


圖 △CEG爲直角三角形明矣,而$F\hat{E}C=\frac{1}{2}\hat{C}=FCE$,故EF=CF,同樣GF=CF,因而EF=FG.

20. 三角形一角之二等分直線之垂線,[甲]與夾之之邊所成之角,等於其他二角之和之半分.[乙]與第三邊所成之角,等於其他二角之差之半分.

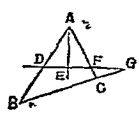


圖 △ABC其$\hat{A}$之二等分線AE之垂線DEF,與AB, AC,及BC,或其延線之交點爲D, F, G,則明△ADF爲二等邊三角形. 故$\hat{D}=\hat{F}=\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$. 次 $B\hat{G}D=\hat{D}-\hat{B}=\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})-\hat{B}=\frac{1}{2}(\hat{C}-\hat{B})$.

注意 諸平行線與他一直線所成之同位角皆相等,本題垂直於二等分線AE之直線,皆互平行,故本題直線DEF之位置無關係明矣.

21. 三角形ABC,其B及C之外二等分線所成之角,等於A之外角之半分.

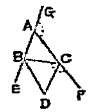


圖 B及C外角之二等分線,交點爲D,而△ABC之A, B, C,各外角之和,等於$4\hat{R}$,故其半分等於2R. 但B,C,外角之半分,與$\hat{D}$之和,亦等於$2\hat{R}$. 故$\hat{D}$等於A之外角之半分.

22. 三角形ABC內,一點爲O,試證OB+OC<AB+AC,及$B\hat{O}C>B\hat{A}C$.

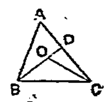


圖 BO之延線與AC之交點爲D,則BD<AB+AD,即OB+OD<AB+AD……(1). 又自△OCD而OC−OD<DC……(2). 將(1),(2)各邊相加,則OB+OC<AB+AD+DC,即OB+OC<AB+AC. 次因$B\hat{O}C$爲△ODC之外角,故$B\hat{O}C>O\hat{D}C$同樣$O\hat{D}C>B\hat{A}C$,故$B\hat{O}C>B\hat{A}C$.

23. 自三角形之一頂點,向對邊之中點引直線,小於他二邊之和之半分.

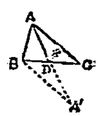


圖 自△ABC之頂點A,引中線AD於AD之延線上取A′,使A′D=AD,連結BA′,則△BDA′≡△CDA,因而BA′=AC,故AB+AC=AB+A′B,但AB+A′B>AA′,故AB+AC>2AD,即$AD<\frac{1}{2}\times(AB+AC)$.

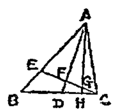
24. 自三角形ABC之各角頂,向其內一點O,引三直線AO, BO, CO,其和大

於三角形之周之半分，而小於其周.

圖 $AO+BO>AB$, $BO+CO>BC$, $CO+AO>AC$, 故 $2(AO+BO+CO)>AB+BC+CA$, 卽 $AO+BO+CO>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$. 又 $OA+OB<AC+BC$ [22題]. $OB+OC<AB+AC$, $OC+OA<AB+BC$, 故各邊相加，取其半分，則 $OA+OB+OC<AB+BC+CA$.

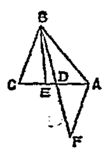
25. 三角形一角之二等分線，與自其頂點向對邊所引垂線，所成之角，等於他二角之差之半分.

圖 自$\triangle ABC$所引之高，及$\hat{A}$之二等分線，爲AH, AD, 又自C引AD之垂線CE, 與AH, AD, AB之交點，爲G,F,E, 則 $B\hat{C}E=\frac{1}{2}(\hat{C}-\hat{B})$, [20題]. 但因$\triangle AGF$, $\triangle CGH$, 爲等角，故$D\hat{A}H=B\hat{C}E=\frac{1}{2}(\hat{C}-\hat{B})$.



26. 三角形ABC, 其$AB>BC$, BD二等分其底AC, BE二等分$A\hat{B}C$, 則 (1) $A\hat{B}D<D\hat{B}C$, (2) $BD>BE$.

圖 (1)延長BD, 使$DF=BD$, 連結AF, 則 $\Delta BCD\equiv\Delta FAD$, 而 $BC=AF$, $A\hat{F}D=C\hat{B}D$ 但 $AB>BC$, 故 $A\hat{B}D<A\hat{F}D$, 卽 $A\hat{B}D<DBC$. (2) 故 $A\hat{B}C$ 之二等分線 BE, 在 $C\hat{B}D$ 內，而與CD交於點E, 而 $B\hat{E}D=\hat{C}+C\hat{B}E$, $B\hat{D}E=\hat{A}+A\hat{B}D$, 而 $\hat{C}>\hat{A}$, $C\hat{B}E>A\hat{B}D$, 因而 $B\hat{E}D>B\hat{D}E$, 故 $BD>BE$.



27. 自三角形一角之頂點，向對邊引垂線中線，及其角之二等分線，則二等分線在他二線之間.

圖 ΔABC其AD爲$B\hat{A}C$之二等分線，AM爲中線，AH爲垂線，先定$AB<AC$. 則 $B\hat{A}M>C\hat{A}M$ [26題], 故AD在$B\hat{A}M$內，又$B\hat{A}H<C\hat{A}H$, 故AD在$C\hat{A}H$內，故AD在AH與AM之間明矣.

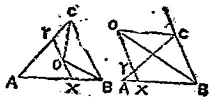
28. 直角三角形，自直角之頂點，向斜邊引中線垂線所成之角，被直角之二等分線二等分之.

圖 直角三角形ABC, AF爲直角之二等分線，AE爲中線，AD爲垂線，因 $C\hat{A}E=E\hat{C}A=B\hat{A}D$, 故 $D\hat{A}F=E\hat{A}F$.

29. ABC爲任意之三角形，而角B及C之內二等分線之交點爲O，過O引平行於BC之直線，使交AB於X，交AC於Y，則$XY=BX+CY$. 又O若爲角B之內二等分線，與角C之外二等分線之交點，則$XY=BX\sim CY$.

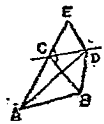
圖 $C\hat{O}Y=O\hat{C}B=O\hat{C}Y$, 故$CY=OY$, 同樣$BX=OX$, 故$OX+OY=XY=BX+CY$. 同樣$OX\sim OY=XY=BX\sim CY$.

注意 依本題,凡三角形引平行於底之直線XY,可使BX與CY之和,等於XY.



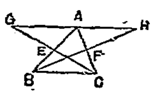
30. $\triangle ABC$自C角之外二等分線上一點D,連結A及B,則$\triangle ABD$三邊之和,大於$\triangle ABC$三邊之和.

證 將AC延長至E,使CE=BC,連結ED,則$\triangle CED \equiv \triangle CBD$,蓋CE=CB, CD共同, $E\hat{C}D=B\hat{C}D$ 故也,故 ED=DB, 因而 ED+DA=DB+DA, 但 DA+ED>AE, 即 DA+ED>AC+CB, 故 BD+DA>AC+CB, 故 AB+BD+AD>AB+BC+CA.



31. $\triangle ABC$之二邊AB, AC,之中點爲E, F,延長CE,使EG=CE,又延長BF,使FH=BF,則G, A, H三點在同一之直線上.

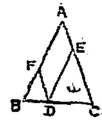
證 連結AG, AH,則$\triangle AHF \equiv \triangle BCF$,因而 $F\hat{A}H=B\hat{C}A$,同樣 $G\hat{A}E=C\hat{B}A$,因而 $G\hat{A}E+B\hat{A}C+H\hat{A}F=A\hat{B}C+B\hat{A}C+A\hat{C}B=2\hat{R}$, 故AG, AH,爲一直線,即G, A, H在同一直線上.



別證 連結EF,則$\triangle BAH$之EF//AH,同樣EF//AG,故AH, AG,爲一直線,即G, A, H在同一之直線上.

32. 自二等邊三角形底邊上任意一點,作他二邊之平行線,所得平行四邊形之周圍,爲定長.

證 自二等邊三角形ABC之底邊BC上,任意一點D,平行於邊AB, AC,引DE, DF,則$\triangle FBD$, $\triangle EDC$,皆爲二等邊三角形,故FD=FB, ED=EC, 故 DF+DE+AE+AF=AB+AC=2AB=定長.

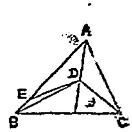


33. 二個三角形之三邊各垂直,則此三角形互爲等角.

證 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$之三邊各垂直,則(1) $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, (2) $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}+\hat{C}'=2\hat{R}$, (3) $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$, $\hat{C}+\hat{C}'=2\hat{R}$, (4) $\hat{A}+\hat{A}'=2\hat{R}$, $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$, $\hat{C}+\hat{C}'=2\hat{R}$, 而其(3)及(4),因二三角形內角之和大於$4\hat{R}$,故不成立.次於(2)二三角形之二角相等,故第三角亦相等,即$\hat{C}=\hat{C}'$,但$\hat{C}+\hat{C}'=2\hat{R}$故$\hat{C}=\hat{C}'=\hat{R}$,故本題之成立者,惟(1)而已.

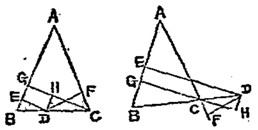
34. 自$\triangle ABC$角A二等分線上任意一點D,至B, C之距離之差,小於AB, AC之差.

證 於AB或其延線上,取AE=AC,連結DE,則 $AB \sim AC=BE$, 而 CD=ED, 但 $BD \sim DE<BE$, 故 $AB \sim AC>BD \sim CD$.



35. 二等邊三角形,自其底上任意一點,向二等邊引垂線,其和爲一定,若點在底之延線上如何.

證 自二等邊三角形ABC之底BC上任意一點D,引AB,AC之垂線DE,DF,又自C引AB之垂線CG,且引DH



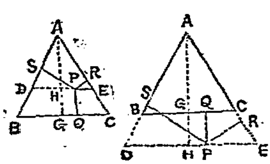
平行於AB,則DE=HG,又三角形DHC,CFD之DC共同,$H\hat{D}C=A\hat{B}C=A\hat{C}B$, $\hat{H}=\hat{F}=\hat{R}$,故CH=DF,故DE+DF=HG+CH=CG=定長.次D在BC之延線上,則DE−DF=CG=定長.

別證 $\frac{1}{2}DF.AB=\triangle ABD$, $\frac{1}{2}DF.AC=\frac{1}{2}DF.AB=\triangle ACD$, ∴ $\frac{1}{2}AB(DE\pm DF)=\triangle ABC=\frac{1}{2}AB.CG$,

∴ $DE\pm DF=CG=$ 長定.

36. 自正三角形內任意一點,至各邊所引垂線之和爲一定.若點在正三角形之外,則如何.

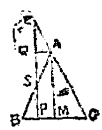
證 過正三角形ABC內任意一點P平行於BC引DE,又作高AG,AG與DE之交點爲H,則自E引AB之垂



線,等於AH,故自P引各邊之垂線PQ,PR,PS,則PR+PS=AH,而PQ=HG,故PQ+PR+PS=AG=定長.P若在三角形外,[圖中在角A之內形之外]則與前同樣,PR+PS=AH,PQ=HG,故PR+PS−PQ=AG=定長.

37. 有二等邊三角形ABC,於底邊上,任意一點P,作BC之垂線,與他一邊CA延線之交點爲K,與AB之交點爲S,則HG,故KP+SP爲一定不變.

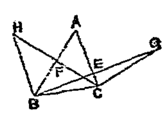
證 引$\hat{A}$之外角二等分線AQ,則AQ∥BC,故AQ⊥KP,故△AKS爲二等邊,因而KQ=QS,次自A引BC之垂線AM,則AM=QP,故



KP+SP=2QP [1題]=2AM 即一定不變.

38. 三角形自大角之頂點向對邊所引垂線,小於自小角之頂點向對邊所引垂線.

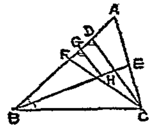
證 △ABC,$\hat{B}<\hat{C}$,自B,C引垂線BE,CF,今於BE,CF之延線上,取EG=BE,取FH=CF,連結GC,BH,則



BH=BC=CG,且$H\hat{B}C=2\hat{B}$, $G\hat{C}B=2\hat{C}$明矣,故△BHC,△CGB,二邊相等,且$G\hat{C}B>H\hat{B}C$,故BG>CH,因而BE>CF.

39. 三角形大角之二等分線,小於小角之二等分線.

證 △ABC,$\hat{B}<\hat{C}$,$\hat{B}$,$\hat{C}$之二等分線爲



BE, CF, 則因 $A\hat{C}F > E\hat{B}A$, 故與 CF 成等於 $E\hat{B}A$ 之角之直線 CD, 關於 CF, 而與 AC 同側, 則 CD 與 AB 之交點 D, 在 A 與 B 之間, 且因 $D\hat{B}C < D\hat{C}B$, 故 CD<BD, 故取 BG=CD, 則 G 在 B 與 D 之間, 因而自 G 引 CD 之平行線 GH, 與 BE 之交點為 H, 則 H 在 B 與 E 之間, 故 BH<BE, 但 ΔBHG 與 ΔCFD, 其二角與其間之邊各相等, 故為全等形, 而 BH=CF, 因而 CF<BE.

多角形

40. 凸多角形之內角, 無四個以上之銳角.

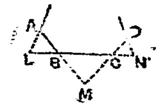
圖 若凸多角形之內角, 有四個以上之銳角, 則其外角之和, 大於四直角, 是背理也, 故凸角多形之內角, 無四個以上之銳角.

41. 某多角形內角之和, 等於其外角之和, 問此多角形為何邊.

圖 多角形內角之和, 若將邊數為 n, 則為 $(2n-4)\hat{R}$; 又其外角之和為 $4\hat{R}$, 故 $2n-4=4$, 因而 $n=4$.

42. n 邊之多角形, 每間一邊引長之使相交, 而作星形, 其尖頭諸角之和, 等於 $2(n-4)\hat{R}$.

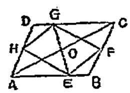
圖 n 邊之多角形, 為 ABCD………, 每間一邊引長之, 則成星形, 其尖頭為 L, M, N,……, 則 ΔALB, ΔBMC,……之



內角之和為 $2n\hat{R}$, 但 $L\hat{A}B$, $L\hat{B}A$, $M\hat{B}C$, $M\hat{C}B$,………之和, 為 ABCD………多角形外角之和之二倍, 即等於 $8\hat{R}$, 為 L, M,………諸角之和, 為 $2n\hat{R}-8\hat{R}=2(n-4)\hat{R}$.

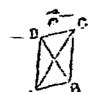
43. 有平行四邊形, 其各角之頂點, 在他平行四邊形各邊之上, 則二平行四邊形之對角線, 相交於同一之點.

圖 平行四邊形 EFGH, 各角之頂點 E, F, G, H, 在他四邊形 ABCD 各邊之上, 今將 AC, GE 之交點為 O, 則因 AE, CG 平行, 而 ΔAEH ≡ΔCGF 明矣, 故 GC=AE, 因而 ΔAEO ≡ΔCGO, 故 O 為 AC, GE 共同之中點, 但 BD 為過 AC 之中點, HF 為過 GE 之中點, 故 AC, BD, EG FH, 於同一之點相交.



44. 平行四邊形之對角線, 等於一邊, 則其他一對角線, 大於各邊.

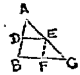
圖 平行四邊形 ABCD 之一對角線 BD, 等於一邊 BC, 則因 ΔBCD 為二等邊, 故 $B\hat{C}D < \hat{R}$, 因而 $A\hat{B}C > \hat{R}$, 故自 ΔBCD, ΔABC, 而知 AC>BD, 即 AC>BC, 次証 AC>AB, 夫



ΔABC之$\hat{B}>\hat{R}$, 故$B\hat{C}A<\hat{R}$, 因而AC>AB.

45. 自三角形一邊之中點,平行於他一邊引直線,過第三邊之中點.

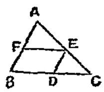
圖 自AB之中點D,平行於BC,引直線DE,又自E平行於AB,引EF,則DBFE為平行四邊形,故AD=DB=



EF,而$B\hat{A}C=F\hat{E}C$,同樣$A\hat{D}E=A\hat{B}C=E\hat{F}C$,故ΔADE≡ΔEFC,因而AE=EC.

46. 連結三角形二邊中點之直線,必平行其第三邊,等於其半分.

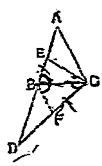
圖 自三角形ABC之一邊AB之中點F,平行於他一邊BC,引直線FE,則過第三邊AC之中點E,但二點之過



直線惟一,故連結二邊AP, AC之中點F, E之直線,平行於他一邊BC. 自E平行於AB引ED,則D為BC之中點[題45],故EF=CD=DB=$\frac{1}{2}$BC.

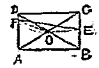
47. 有二等邊三角形ABC,引長其邊AB使BD等於AB,截取BD,若AB之中點為E,則CD等於CE之二倍.

圖 CD之中點為F,連結BF,則BF=$\frac{1}{2}$AC=$\frac{1}{2}$AB=BE,且BF∥AC,故$F\hat{B}C=A\hat{C}B=A\hat{B}C$,因而ΔFBC≡ΔEBC,故CD=2CF=2CE.



48. 矩形之對角線,大於其兩對邊所夾任意之直線.

圖 矩形ABCD,其兩對邊BC, AD,所夾任意之直線EF,兩對角線AC, BD之交點為O,連結OE, OF,則ΔOAD, ΔOBC,皆為二等邊,故OF<

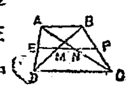


OA, OE<OC,故AC>OE+OF,但OE+OF>EF,故AC>EF.

注意 EF在他對邊之間,亦同樣,又EF若過點O,則OE+OF>EF之>變為=.

49. 梯形ABCD之不平行二邊AD, BC,之中點為E, F,兩對角線BD, AD之中點為M, N,則(1) E, M, N, F在同一之直線上. (2) EF=$\frac{1}{2}$(AB+CD),及MN=$\frac{1}{2}$(AB∼CD)試證之.

圖 (1) 自E引平行於邊BC之直線,則必過三角形ACD之邊BD之中點M,又必過三角形ACD之邊AC之中點N,而自N平行於AB

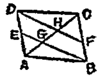


引直線,必過ΔABC之邊BC之中點F,故E, M, N, F,在同一之直線上,(2) EN=$\frac{1}{2}$DC, NF=EM=$\frac{1}{2}$AB,故EF=$\frac{1}{2}$(AB+CD),及MN=$\frac{1}{2}$(AB∼CD).

50. 平行四邊形ABCD,相對邊AD, BC.之中點為E, F,則BE, DF,三等分AC.

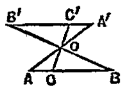
圖 BE, DF,與AC之交點為G, H,則

因 $DE=BF$, 且 $DE \parallel BF$, 故 BFDE 爲平行四邊形, 因而 $DF \parallel BE$, 故 $\triangle CFO$, $\triangle ADH$, 之 H 爲 CG 之中點, G 爲 AH 之中點, 即 BE, DF, 三等分 AC.



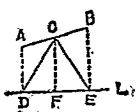
51. 就一點成對稱之二雙之點, 連結所成二直線, 又爲其點對稱, 而此二直線互平行且相等.

證 就一點O而成對稱之二雙之點爲 A, A′, B, B′, 連結 AB, A′B′, 過O引任意之直線 CC′, 與 AB, A′B′, 之交點爲 C, C′, 則 $AO=OA'$, $BO=OB'$, 故此四邊形 ABA′B′ 爲平行四邊形, 因而 CC′ 於O二等分, 即直線 AB, A′B′, 就O而爲對稱, 而 $AB \parallel A'B'$, 且 $AB=A'B'$.



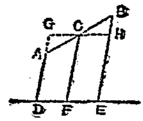
52. 一直線射於他直線上之正射影之兩端, 自其直線之中點, 在相等之距離.

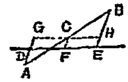
證 一直線AB之中點爲C, AB之射於直線L之正射影爲DE, 則CD等於CE, 自C引DE之垂線CF, 則F爲DE之中點, 故CF爲DE之垂直二等分線; 因而 $\triangle CDE$ 爲二等邊, 而 $CD=CE$.



53. 自任意直線之兩端及其中點, 至他之任意直線, 引三平行線, 則前直線之兩端, 在此直線之同傍或異傍, 因而三平行線外二線之和或差, 等於中一線之二倍.

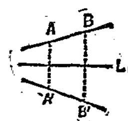
證 自一直線之兩端A, B, 及其中點C, 引三平行線 AD, BE, CF, 使與他直線DFE相交, 次過C引平行於DE之直線GH, 與AD, BE之交點爲G,H, 則 $\triangle CAG \equiv \triangle CBH$, 而 $AG=BH$, 故 $AD+BE=GD+HE=2CF$, 或 $AD \sim BE=GD+HE=2CF$.





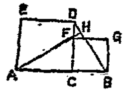
54. 就一直線而成對稱二雙之點, 連結之之直線, 又就其直線而成對稱. 若此二直線或其延線相交, 則其交點在前直線之上, 又若如何, 則此二直線互平行.

證 就一直線L而成對稱二雙之點爲 A, A′, 及 B, B′, 連結 AB, A′B′, 將直線L爲折縫而折之, 則因A′與A合, B′與B合, 故直線A′B′與直線AB合, 即直線AB, A′B′就直線L而爲對稱, 而直線AB與L相交, 其交點之對稱點爲其點之本身, 故AB與A′B′相交於L上之一點, 若自A, B至L之距離相等, 因而自A, B, A′, B′, 至L之距離皆相等, 則AB, A′B′俱平行於L, 因而互平行.



55. 於有限直線AB上取一點C, 於AC, BC上, 作正方形ACDE, BCFG, 於AB之同傍, 則AF垂直於BD.

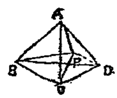
證 AF 與 BD 之交點爲 H, 則 $\Delta ACF \equiv \Delta DCB$, 故 $C\hat{A}F = C\hat{D}B$,



故 ΔACF 與 ΔDHF 爲等角, 故 $D\hat{H}F = A\hat{C}F = \hat{R}$,

56. 於四邊形內, 其兩對角線交點外, 任取一點, 自其點至各角頂點距離之和, 大於兩對角線之和.

證 P 爲在四邊形內而非對角線之交點之任意一點, 則 $AP+CP>AC$, $BP+DP>BD$, 若 P 在一對角線上, 則此二不等式

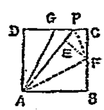


中之一爲等式, 亦爲 $AP+BP+CP+DP>AC+BD$.

注意 作圖題謂[於四邊形內求一點使自其點至各角頂點距離之和爲最小]依本題取兩對角之交點可也.

57. 於正方形 ABCD 之邊 CD 上取一點 P, 使 $AP=PC+CB$, 若 CD 之中點爲 G, 則 $B\hat{A}P = 2G\hat{A}D$.

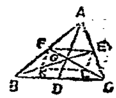
證 於 AP 上取 $PE=PC$, 於 E 引 AP 之垂線, 與 BC 之交點爲 F, 則 $\triangle PEF \equiv \triangle PCF$, 因而 $EF=CF$,



又連結 AF, 則直三角形 AEF, ABF, 之 $AE=AB$, AF 共同, 故此兩形全等, 因而 $EF=BF$, $B\hat{A}P = 2F\hat{A}P$, 故 $CF=EF=BF$, 但 $\triangle ADG \equiv \triangle ABF$ 明矣, 故 $G\hat{A}D = F\hat{A}B$, 故 $B\hat{A}P = 2G\hat{A}D$.

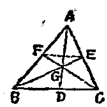
58. 三角形之三中線, 相交於同一之點. [此點爲三角形之重心].

證 二中線 BE, CF, 之交點爲 G, BG, CG, 之中點爲 K, L, 則 $EF \parallel BC$, 且 $EF = \frac{1}{2}BC$, 又 $KL \parallel BC$, 且



$KL = \frac{1}{2}BC$, 故 $EF \parallel KL$, 且 $EF=KL$. 故 EFKL 爲平行四邊形, 而 $FG=GL=CL$, $EG=GK=BK$, 卽 G 在自 B 度 BE 三分之二之處. 同樣 BE, AD 之交點, 亦在自 B 度 BE 三分之二之處, 故三中線 AD, BE, CF, 於同一之點相交而 G 在各角頂度各中線三分之二之處.

注意 依面積定理證明三角形三中線會於一點. $\triangle ABC$ 之二中線 BE, CF, 之交點爲 G, 連結 AG 之直線, 與 BC 之交點爲

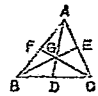


D, 今連結 EF, 則因 $EF \parallel BC$, 故 $\triangle BEF = \triangle CEF$, 雙方各減去共同之 $\triangle GEF$, 而 $\triangle FGB = \triangle EGC$, 但 $\triangle EGC = \triangle EGA$, $\triangle FGB = \triangle FGA$, 故 $AGC = 2\triangle EGC = 2\triangle FGB, = \triangle AGB$, 夫 $\triangle AGB$, $\triangle AGC$, 在同底 AG 之異傍, 且等積, 故連結頂點 B, C 之直線, 被 AG 二等分, 卽 D 爲 BC 之中點, 故 $\triangle ABC$ 三中線, 相交於一點 G.

59. $\triangle ABC$ 之二邊 AB, AC, 不等, 則中

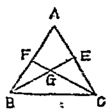
線BE, CF亦不等. [AB>AC則BE>CF].

解　引他中線AD，則三中線於同一之點G相交，且BG, CG, 爲BE, CF, 之三分之二，而△ABC之AB>AC, 則$A\hat{D}B>A\hat{D}C$. 次△BDG, △CDG, 之BD=CD, DG共同, $B\hat{D}G>C\hat{D}G$, 故BG>CG, 故BE>CF.



60. 二中線相等之三角形，爲二等邊三角形.

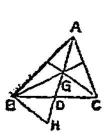
解　△ABC之二邊AC, AB, 之中線爲BE, CF, 若AB>AC, 則BE>CF, AB=AC, 則BE=CF, 又AB<AC, 則BE<CF [59題], 故是等之逆亦眞[轉換法], 故BE=CF, 則AB=AC.



別解　BE, CE之交點爲G, 則BG=$\frac{2}{3}$BE=$\frac{2}{3}$CF=CG, 故$G\hat{B}C=G\hat{C}B$, 故△BEC≡△CFB, 故$\frac{1}{2}$AB=BF=CE=$\frac{2}{1}$AC, 故AB=AC.

61. 連結△ABC之重心G與頂點A之直線，引長之，取GH=AG, 將三點B, G, H, 爲頂點，作△BGH, 則其三邊等於△ABC中線之三分之二.

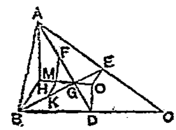
解　△ABC之重心爲G, 則AG=GH=$\frac{2}{3}$AD, 又BG, CG, 爲自B, C, 所引中線之三分之二. 次因GD=$\frac{1}{2}$AG=$\frac{1}{2}$GH, 故GD=HD, 因而△BDH≡△CDG, 故BH=CG, 故△BGH之三邊等，於△ABC中線之三分之二.



注意　依本題之作圖，知三角形任意二中線之和，大於其餘一中線.

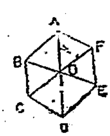
62. 三角形之垂心H重心G外心O在一直線上，而GH等於OG之二倍.

解　三角形爲ABC, 中線AD, BE, 之交點爲G, 今過D引BC之垂線OD, 與HG之延線相交於O, 引OE, BH, 若AG, HG, BG, 之中點爲F, M, K, 則FM∥AH, AH∥OD, 故FM∥OD, 又AG=2GD, 因而FG=GD, 故△FGM≡△DGO, 故GM=GO, 故HG=2OG, 次因KG=GE, GM=GO, $K\hat{G}M=E\hat{G}O$, 故△KGM≡△FGO, 故$G\hat{K}M=\hat{G}EO$, 但$G\hat{K}M$, $G\hat{B}H$, 故$G\hat{E}O=G\hat{B}H$, 故OE∥BH, 但因BH⊥AC, 故OE⊥AC, 故O爲外心，即H,G,O,在同一之直線上，而GH=2OG.



63. 六角形之三組對邊平行相等，則其三對角線，相交於同一之點.

解　六角形ABCDEF, 其AB=DE, 且AB∥DE, BC=EF, 且BC∥EF, CD=FA, 且CD∥FA, 若AD, BE, 之交點爲O, 則四邊

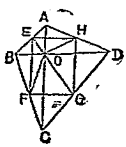


形ABCD為平形四邊形，故O為AD, BE,之共同中點，換言之，卽AD過BE之中點，同樣CF亦過BE之中點，故三對角線AD, BE, CF,必相交於同一之點.

注意 依本證明，知六角形二雙之對邊，平形相等，則其餘一雙之對邊，亦必平行相等.

64. 取四邊形之紙片，若折其四隅，可使諸頂點會於一點，且所折部分之邊，可無間隙，則此四邊形之對角線，互相垂直.

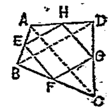
證 紙片之四邊形ABCD, 折其四隅，可使會於一點O, 且其所折部分之邊無間隙，相重合於EO, FO, GO, HO,



則 $F\hat{E}H=O\hat{E}F+O\hat{E}H=B\hat{E}F+A\hat{E}H$, 故 $F\hat{E}H=\hat{R}$, 同樣 $E\hat{F}G, F\hat{G}H, \hat{G}HE$, 皆為直角，故四邊形EFGH為矩形，且AE=OE=BE,故E為AB之中點. 同樣F, G, H為BC, CD, DA之中點，故AC, BD平行於矩形EFGH相鄰之二邊，故BD⊥AC.

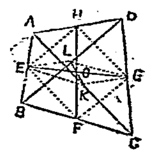
65. 將四邊形各邊之中點，次第連結之，則成平行四邊形，又此四邊形之周，等於原四邊形兩對角線之和.

證 將四邊形ABCD各邊之中點，如圖為E, F, G, H, 則ΔABD之EH, 平行於BD, 且等於其半分，同樣FG平行於BD, 且等於其半分，故EH, FG相等且互平行. 同樣EF, GH, 亦相等且互平行，故此四邊形EFGH為平行四邊形，且其周等於AC與BD之和.



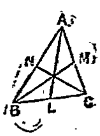
66. 四邊形二組對邊之中點連結之直線，與兩對角線中點連結之直線，相交於同一之點，且互為二等分.

證 四邊形ABCD, 各邊之中點為E, F, G, H, 兩對角線之中點為K, L, 因四邊形EFGH為平行四邊形[65題]，故EG, HF, 於各之中點O相交. 次因ELGK亦明為平行四邊形，故EG, KL, 互為二等分，故EG, KL之交點為EG, HF之交點，卽EG, HF, KL, 於同一之點相交，且互為二等分.



67. 三角形三中線之和，小於三邊之和，而大於其和之半.

證 △ABC三中線為AL, BM, CN,則因 $AL<\frac{1}{2}(AB+CA)$[23題], $BM<\frac{1}{2}(BC+AB)$, $CN<\frac{1}{2}(CA+BC)$,故 $AL+BM+CN<AB+BC+CA$, 次因 $AL+BL>AB$, $AL+CL>AC$, $BM+CM>BC$, $BM+AM>AB$, $CN+AN>AC$, $CN+BN>BC$, 故 $2\times(AL+BM+CN)+AB+BC$ -

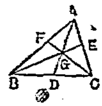


$+AC>2(AB+BC+AC)$, 即 $2(AL+BM+CN)>AB+BC+AC$, 即 $AL+BM+CN>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

注意 本題之後段,依68題易明也.

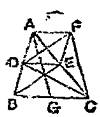
68. 三角形三中線之和,大於三邊之和之四分之三.

證 $\triangle ABC$之三中線為AD, BE, CF,則 $\frac{2}{3}(BE+CF)>BC$, $\frac{2}{3}(CF+AD)>CA$, $\frac{2}{3}(AD+BE)>AB$, $\therefore \frac{4}{3}(AD+BE+CF)>BC+CA+AB$, 即 $AD+BE+CF>\frac{3}{4}(BC+CA+AB)$.



69. 三角形ABC,其BE, CD為二中線,平行於BE,引DF平行於AB,引EF使相交於F,連結CF,則三角形CDF之三邊,等於三角形ABC之三中線.

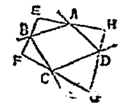
證 引DE, AF, 及中線AG,則BDFE為平行四邊形,故DF=BE,且EF=BD=AD,故ADEF為平行四邊形,故AF=DE=$\frac{1}{2}$BC=CG,而BC∥DE∥AF,所以AGCF為平行四邊形,而AG=CF,故三角形CDF之三邊CF, FD, DC,等於$\triangle ABC$之三中線AG, BE, CD.



注意 依本題之作圖,可知三角形三中線中任意之二之和,大於其餘之一.

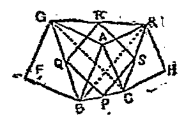
70. 四邊形外角之二等分之直線,所成四邊形之兩對角,互為補角.

證 四邊形ABCD外角之二等分直線,所成之四邊形為EFGH 則 $F\hat{A}B+E\hat{B}A+G\hat{C}D+G\hat{D}C=2\hat{R}$, 故 $\hat{E}+\hat{G}=2\hat{R}$.



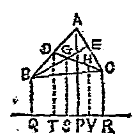
71. $\triangle ABC$之二邊AB及AC上之正方形ABFG, ACHK,在三角形外,則此二正方形之中心,與BC及GK之中點,為一正方形之四個角頂.

證 P, Q, R, S, 為BC, BG, GK, CK之中點,則QR//BK//PS, PQ//CG//RS,次因二邊及夾角等之二三角形ACG, AKB全等,故CG=BK,故其各半分相等,即PQ=QR=RS=SP. 又因$\triangle ACG$,與$\triangle AKB$二邊各垂直,故其他邊CG, BK亦互垂直,故PQRS之各角為直角,故PQRS為正方形.



72. 自三角形之三角頂,向不交此三角形之無限直線上,引三垂線之和,等於自其重心向此直線所引垂線之長之三倍,又直線若與三角形相交,則如何.

證 自三角形ABC各角之頂點及重心G,向一直線所引垂線為AP, BQ, CR, GS,又自AB, CG,之中點, D, H,引QR之垂線DT, HV,則AP+BQ=2DT, 2(DT+HV),=4GS, GS+CR=2HV, 故將此

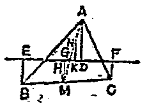


各式,各邊相加,則 $AP+BQ+CR=3GS$. 直線 QR 截 $\triangle ABC$, 若 A 關於 QR 在 B, C 之異傍, 則 $PA\sim(BQ+CR)=3GS$, 亦得同樣証明之.

注意 本題不限於垂線, 即一般之平行線皆成立.

73. 過三角形之重心, 作任意之直線, 自在其同傍之二角頂, 至此直線距離之和, 等於自在異傍之角頂, 至此直線之距離.

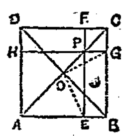
證 過 $\triangle ABC$ 之重心 G, 引任意之直線, 自 A,B,C 及 BC 之中點 M, 及 AG 之中點 N,引垂線 AD, BE, CF, MH, NK, 則 $BE+CF=2MH$, $AD=2NK$, 但 $\triangle NGK\equiv\triangle MGH$, 而 $NK=MH$. 故 $BE+CF=AD$.



圓

74. 過正方形之對角線上任意一點, 引平行於邊之直線, 則此直線與邊之交點, 皆在以對角線交點爲中心之圓周上.

證 正方形 ABCD 之對角線, 交點爲 O, 對角線 AC 上任意一點爲 P, 過 P 平行於邊之直線爲 EF, GH, 則 $EB=CG$, $OB=OC$, $\widehat{OBE}=\widehat{OCG}\left(=\frac{1}{2}\hat{R}\right)$, 故 $\triangle OBE\equiv\triangle OCG$. 故 $OE=OG$, 同樣 $OF=OH$, $OE=OF$ 故 $OE=OG=OF=OH$, 故 E, F, G, H, 在 O 爲中心之圓周上.

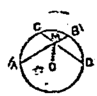


75. 同圓或相等圓, 一弧爲他弧之二倍, 則對前者之弦, 小於對後者之弦之二倍.

證 相等圓得全重合, 故就同圓證之可也. 圓 O 之弧 AB 爲弧 AC 之二倍, 則因弧 AC 等於弧 BC, 故弦 AC 等於弦 BC, 但 $\triangle ABC$ 之 $AB<AC+CB$, 即 $AB<2AC$.

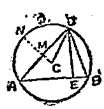
76. 圓內之二弦, 不在其中心相交, 則決不能互爲二等分.

證 中心 O 之圓內二弦 AB, CD, 交點爲 M, 連結 OM, 若 AB, CD, 於 M 互爲二等分, 則 OM 不可不爲 AB, CD, 之垂線, 是背理也, 故 AB, CD, 決不能互爲二等分.



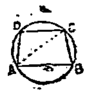
77. AB 爲中心 C 之圓之弦, 自圓周上一點 D, 引弦之垂線 DE, 則角 ADE 等於角 BDC.

證 自中心 C 引 AD 之垂線 CM, 延長之使交弧 AD 於 N, 則 N 二等分弧 AD, 故 $\widehat{DCM}=\widehat{DBE}$, 故 $\widehat{CDM}=\widehat{BDE}$, 故 $\widehat{ADE}=\widehat{BDC}$.



78. 圓內接四邊形, 其一雙相對邊相等, 則他一雙相對邊必平行.

解 圓內接四邊形ABCD,其一雙相對邊DA=BC,則弧DA=弧BC,今引對角線AC,則 $A\hat{C}D=B\hat{A}C$,故邊AB, CD平行.



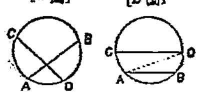
79. AB, CD, 為圓之平行二弦,則弧AC, BD及弦AC, BD相等.

解 連結AD,則因AB∥CD,故 $C\hat{D}A=D\hat{A}B$,故弧AC=弧BD,因而弦AC=弦BD.

80. 弧AC, BD相等,則弦AB等於CD,或AB平行於CD.

解 弧AC=弧DB,故弧CAD=弧BDA [1圖],故CD=AB.

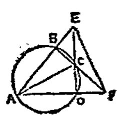
[1圖]　[2圖]



又連結AD,則[2圖]弧AC=弧BD,故 $A\hat{D}C=D\hat{A}B$,故CD∥AB.

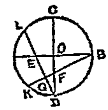
81. 圓內接四邊形ABCD,延長其二邊AB, DC,使相交於點E,又延長其他二邊BC, AD,使相交於點F,若過B, E, F, D,得畫一圓,則AC為第一之圓徑,EF為第二之圓徑.

解 過B, E, F, D,得畫一圓,故 $F\hat{B}E=E\hat{D}F=A\hat{B}C$,故BF垂直於AE,因而AC為外接於ABCD之圓徑,而EF為過B, E, F, D之圓徑.



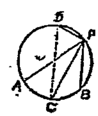
82. 圓O之二徑AOB, COD,互為垂直,於OA上任意取OE,於OD上取等於OE之OF,延長BF,必垂直於DE,又BF, DE之延線,與圓周相交於K, L,則弧KL為圓周四分之一.

解 BF與DE之交點為G, $\triangle ODE\equiv\triangle OBF$,故 $E\hat{B}G=E\hat{D}O$,但 $B\hat{E}G+E\hat{D}O=\hat{R}$,故 $E\hat{B}G+B\hat{E}G=\hat{R}$,因而 $B\hat{G}E=\hat{R}$.次因 $E\hat{D}O=E\hat{B}F$,故弧CL=弧AK,故弧KL=弧AC=$\frac{1}{4}$(圓周).



83. AB為一圓已定之弧,P為圓周上任意之一點,AP與BP所成角二等分之直線,皆過二定點中之一.

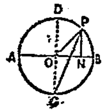
解 角APB之內二等分線PC,與圓之交點為C,則因弧AC=弧BC,故C為弧AB之中點,而為定點.次於在P之角,引外二等分線PD,與圓周之交點為D,則 $C\hat{P}D=\hat{R}$,故D為過C之徑之他端而為定點.若點P在弧ACB上,則弧 $A\hat{P}B$ 之內二等分線過D,外二等分線過C,故無論如何二等分線,必過二定點C, D之一.



84. 自中心O之圓周上任意一點P,引徑之垂線PN,則二等分 $O\hat{P}N$ 之直線,必過某二定點中之一.

解 $O\hat{P}N$ 之二等分線PC,與圓周之交

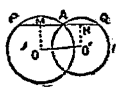
點為C, 連結O, 則$O\hat{C}P=$ $O\hat{P}C=C\hat{P}N$, 故 $OC /\!/ PN$, 即OC垂直於AB, 故C為弧ACB之中點而為定點. 同樣P在弧ACB上, 則過過C之圓徑之他端D, 故$O\hat{P}N$之二等分線, 必過定點C, D中之一.



注意 $O\hat{P}N$之外二等分線, 亦同樣.

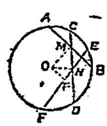
85. 過二圓之交點, 引一直線, 其端各在圓周上, 連結圓心之直線, 射於此直線上之正射影, 等於其直線之半分.

證 二圓之中心為O, O′, 過二圓之交點A之任意之弦為PAQ, 此弦上中心線OO′之正射影為MN, 則因 $AM=PM$, $AN=QN$, 故 $MN=\frac{1}{2}QP$.



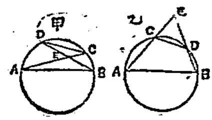
86. 圓之一弦, 被其第二弦二等分之, 此第二弦又被其第三弦二等分之, 第三弦又被第四弦二等分之, 次第如此, 則二等分點, 次第接近於中心.

證 中心O之圓之弦AB, CD, EF,⋯之中點為M, N, P,⋯⋯⋯⋯, 則ΔOMN之斜邊OM, 大於直角一邊ON, 次於ΔONP, 而$ON>OP$⋯⋯, 故各弦之中點M, N, P,⋯, 次第近於圓之中心O.



87. AC, BD, 為一圓之弦, 其交角為一定不易, 則二弧AB, CD, 之和或差, 無論二弦位置之如何, 恆相等.

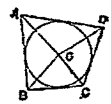
證 E為二弦之交點, 則$B\hat{E}A$在甲圖以$\frac{1}{2}$(弧AB+弧CD)測度之, 在乙圖以$\frac{1}{2}$(弧AB∼弧CD)測度之, 但$B\hat{E}A$為一定, 故$\frac{1}{2}$(弧AB±弧CD)為一定, 因而弧AB±弧CD為一定, 即



無論AC, BD, 之位置如何, 而弧AB+弧CD, 或弧AB∼弧CD, 恆相等.

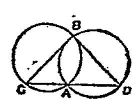
88. 於圓外切四邊形之中心, 對兩對邊之二角之和, 等於二直角.

證 圓之中心為O, 則AO, BO, CO, DO, 二等分$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, 故$O\hat{A}B+O\hat{B}A+O\hat{C}D+O\hat{D}C=2\hat{R}$, 但$\Delta OAB$, ΔOCD, 之內角之和為$4\hat{R}$, 故$A\hat{O}B+C\hat{O}D=2\hat{R}$, 而$A\hat{O}D+B\hat{O}C=2\hat{R}$.



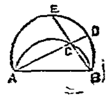
89. 相等之二圓周於A, B相交, 過O之直線, 與圓周之交點為C, D, 作BC, BD, 則ΔBCD為二等邊.

證 因二圓相等, 故圓ABC之弧AB, 等於圓ABD之弧AB, 因而$B\hat{C}A=B\hat{D}A$, 故ΔBCD為二等邊.



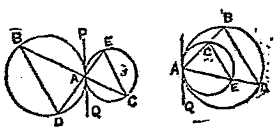
90. 立於同弦 AB 上之二弓形 ACB, ADB, 弧 ACB 上任意之點為 C, 連結 A, B, 而 AC, BC, 或其延線, 交弧 ADB 之點為 D, E, 則弧 DE 之大為一定不易.

圖 $\hat{ACB}$ 以弧 ADB 之共軛弧與弧 DE 之和之半分測度之, 但 $\hat{ACB}$ 為弓形 ACB 之角, 故為一定, 而弧 ADB 之共軛弧, 亦為一定, 故弧 DE 之大, 為一定不易.



91. 二圓相切, 則過切點之任意二直線, 截取二圓之弧之弦互平行.

圖 過切點 A 之二個倍弦為 BC, DE,



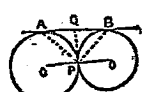
今於點 A, 引共同切線 PAQ, 則 $\hat{ADB}=\hat{PAB}=\hat{QAC}=\hat{AEC}$[左圖], $\hat{ADB}=\hat{PAB}=\hat{AEC}$ [右圖], 故 BD // CE.

92. 二圓相切, 則過切點之任意直線, 為自圓截取含相等角之弓形.

圖 過二圓之切點 A 之直線為 BAC, 則弓形 ADB, AEC, 含相等角之弓形, 依前題可明也.

93. 二圓外切於點 P, 又切直線 AB 於 A, B, 則將 AB 為徑畫圓, 必過點 P, 且於其點切中心線.

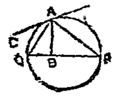
圖 於 P 引共同切線 PQ, 與 AB 之交點為 Q, 則因 AQ=PQ=BQ, 故 AB 為徑之圓過 P, 今引中心線 OO′, 則 OO′ 過 P, 且 $\hat{OPA}$, $\hat{BPQ}$, 皆為 $\hat{QPA}$ 之餘角, 故相等, 故 $\hat{OPA}=\hat{BPQ}=\hat{PBQ}$, 故圓 ABP 於 P 切 OO′.



注意 證明 AB 為徑之圓過 P, 則自 PQ⊥OO′ 可知其圓切 OO′.

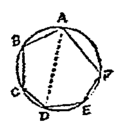
94. 圓周上任意一點 A, 連結任意之徑 PQ 一端之直線 AQ, 二等分自 A 引 PQ 之垂線 AB 與在 A 之切線 AC 所成之角.

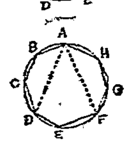
圖 連結 AP, 則因 $\hat{APQ}$, $\hat{QAB}$, 皆為 $\hat{AQP}$ 之餘角, 故相等, 又 $\hat{CAQ}=\hat{APQ}$, 故 $\hat{CAQ}=\hat{QAB}$, 即 AQ 二等分 $\hat{CAB}$.



95. 圓內接任意之六角形, 每間隔一角之三角之和為四直角, 而內接八角形, 每間隔一角之和為六直角.

圖 圓內接六角形 ABCDEF, 引對角線 AD, 則因 $\hat{C}+\hat{BAD}=2\hat{R}$, $\hat{E}+\hat{FAD}=2\hat{R}$, ∴ $\hat{A}+\hat{C}+\hat{E}=4\hat{R}$, 同樣 $\hat{B}+\hat{D}+\hat{F}=4\hat{R}$. 又於內接八角形 ABCDEFGH, 引對角線 AD, AF, 則 $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{E}$, $\hat{G}$, 之和為 $6\hat{R}$ 明矣.

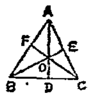




注意 擴張本題, 容易證明〔圓內接 $2n$ 角形, 每間隔一角之和, 等於 $(2n-2)$ 直角.〕.

96. △ABC之垂心為O,則△ABC, △AOB, △BOC, △COA之外接圓,皆相等.

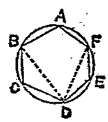
證 垂線之趾為D, E, F, 則 $O\hat{F}A+O\hat{E}A=2\hat{R}$, 故 $\hat{A}+B\hat{O}C=2\hat{R}$, 而邊BC共同,



故△ABC, △BOC之外接圓相等,同樣可證明△AOB, △COA之外接圓皆等於△ABC之外接圓.

97. 圓內接六角形,其相對角之和,大於二直角.

證 圓內接六角形ABCDEF,其一雙相對角,例如 $\hat{A}+\hat{D}$, 當大於 $2\hat{R}$, 何則,試引對角線BD, FD,

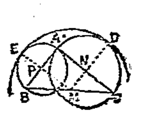


則因 $\hat{A}+B\hat{D}F=2\hat{R}$, 故 $\hat{A}+\hat{D}$, 即 $\hat{A}+B\hat{D}F+B\hat{D}C+F\hat{D}E$ 大於 $2\hat{R}$.

別證 $B\hat{A}F$ 以弧BDF之半分測度之, $C\hat{D}E$ 以弧CAE之半分測度之,故 $B\hat{A}F+C\hat{D}E$ 以全圓周與弧BC, EF之和之半分測度之,故大於 $2\hat{R}$.

98. 將直角三角形直角之二邊AB, AC,為徑畫圓,則此二圓周,切於以斜邊中點為心以AB+AC為徑之圓.

證 直三角形ABC各邊之中點為M, N, P, 而AB, AC,為徑之圓與MP, MN之延線相交於E, D,則因



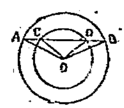
$MN=\frac{1}{2}AB$, 故 $MD=\frac{1}{2}(AB+AC)$, 同樣 $ME=\frac{1}{2}(AB+AC)$, 故以P, N為中心之二圓,切於M為中心AB+AC為徑之圓.

99. 一直線截圓,不能多於二點.

證 自中心至一直線之直線,等於半徑者,不能多於二故也.

100. 二同心之圓周,所夾一直線之部分相等.

證 共同之中心為O,夾於二圓周間一直線之部分為AC, BD,今連結OA, OB, OC, OD,則自二個二等邊三角形OAB及

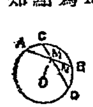


OCD, 而 $O\hat{C}D=O\hat{D}C$, $O\hat{A}B=O\hat{B}A$, 故 $O\hat{C}D-O\hat{A}B=O\hat{D}C-O\hat{B}A$, 即 $A\hat{O}C=B\hat{O}D$, 又AO=OB, OC=OD, 故△OAC≡△OBD, 故AC=BD.

別證 自O下AB之垂線OE,則AE=BE, CE=DE,故取其差,則AC=BD.

101. 過圓內一已知點最短之弦,垂直於過其點之徑.

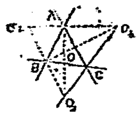
證 中心為O之圓內,一已知點為M,今將垂直於過M之徑之弦為AB,及過M之任意之弦為CD,引ON垂直於



CD,則ON<OM,故AB<CD.

102. 過三角形ABC之二頂點P, C,及內心,及切於邊BC之傍切圓之中心,得畫一圓. 又過三角形之二傍心及二頂點,得畫一圓.

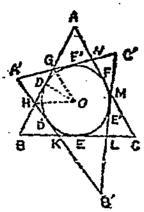
證 內心爲O，切於邊BC之傍切圓之中心爲O_1，則$O\hat{B}O_1=\hat{R}$，



$O\hat{C}O_1=\hat{R}$，故O, B, O_1, C在同一之圓周上. 又切於邊AC之傍切圓之中心爲O_2，則因$O_1\hat{B}O_2$, $O_1\hat{A}O_2$皆爲直角，故O_1, B, A, O_2，在同一之圓周上.

103. 一圓外切二個等邊三角形，相交所生六角形，恆爲等邊而不必等角.

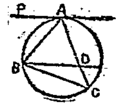
證 圓O外切二個等邊三角形ABC, A′B′C′，其切點爲E,F,D, 及E′,F′,D′，又此三角形之邊相交所生六角形GHKLMN，則因△AGN, △A′GH，之$\hat{A}'=\hat{A}$，於G之角相等，且$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}A'C'=A'F'$，DG=GF′，故



AG=A′G，故△AGN≡△A′GH，故GH=GN. 同樣六角形GHKLMN之各邊皆相等，若六角形GHKLMN爲等角，則因OG, OH，爲$\hat{G}$, $\hat{H}$，之二等分線，故$O\hat{G}D=O\hat{H}D$，故△O$\hat{G}$H爲二等邊，故DG=DH，故六角形GHKLMN，若欲成等角多角形，則△ABC之切點D, E, F，限於在弧F′D′, D′E′, E′F′，之中點，故一般六角形GHKLMN不等角.

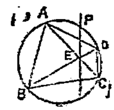
104. AB, AC，爲自圓周一點A所引二弦，引BD平行於點A之切線，使與AC相交於點D，則圓BCD切於AB.

證 將點A之切線爲AP，則$D\hat{B}A=P\hat{A}B=A\hat{C}B$，故圓BCD切於AB.



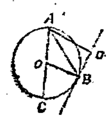
105. ABCD爲圓內接四邊形，其對角線之交點爲E，畫三角形AEB之外接圓，則E點切此圓之直線，平行於四邊形之一邊.

證 於E引三角形AEB之外接圓之切線EP，則$P\hat{E}A=A\hat{B}E=A\hat{C}D$，故切線EP，平行於CD.



106. 一圓之弦，自其一端引切線，又自他端引此切線之垂線，及圓之徑，則徑與垂線所成之角，被弦二等分之.

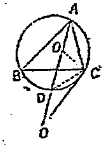
證 中心O之圓之弦爲AB，過AB之一端A之徑爲AOC，自A向在B之切線之垂線AD，今將中心O連結於



B，則$O\hat{A}B=O\hat{B}A$，但$O\hat{B}A$, $B\hat{A}D$，皆爲$A\hat{B}D$之餘角，故相等，故$O\hat{A}B=B\hat{A}D$，即AB二等分$D\hat{A}C$.

107. 連結三角形內心與傍心之直線，被其外接圓之周二等分之.

證 △ABC之之內心爲O，三個傍心爲O_1, O_2, O_3，則O, A, O_1，明在同一之直線上，今將OO_1與△ABC之外接圓周之交點爲D，連結

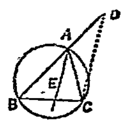


CO, CD，則$D\hat{O}C=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C})$，$B\hat{C}D=$

$B\hat{A}D=\frac{1}{2}\hat{A}$, 故 $O\hat{C}D=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C})$, 因而 $D\hat{O}C=O\hat{C}D$, 而 CD=CD, 但因 COO_1 爲直角三角形, 故 $OD=CD=DC_1$, 故 D 爲 OO_1 之中點. 同樣 OO_2, OO_3 亦被△ABC之外接圓周二等分.

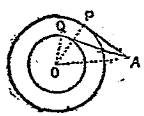
108. 將△ABC之邊BA引長至D, 使AD等於AC, 則 $B\hat{A}C$ 之二等分線AE, 切於過三點C, A, D, 之圓周.

證 因△ACD爲二等邊, 故 $A\hat{D}C=\frac{1}{2}\hat{A}=E\hat{A}C$, 故AE切於過三點A, C, D, 圓.



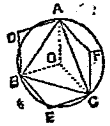
109. 自一定點, 向諸同心圓引切線, 其諸切點, 皆在一圓周上.

證 同心圓之中心爲O, 已知定點爲A, 自A引諸同心圓之切線爲AP, AQ, ……, 連結OP, OQ, ……. 則因 $A\hat{P}O=A\hat{Q}O=\cdots\cdots=\hat{R}$, 故切點P, Q, ……, 在以AO爲徑之圓周上.



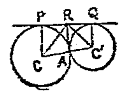
110. 過三角形之各角頂, 平行於外心, 連結他角頂之直線引直線, 則是等直線所成六角形之邊皆相等, 而其角每二個相等.

證 O爲△ABC之外心, 過各角頂平行於OA, OB, OC, 引直線AD, AF, BD, BE, CE, CF, 作六角形ADBECF, 則因AO=BO, 故AOBD爲菱形, 因而AD=DB=AO, 同樣BE, CE, CF, AF, 皆等於AO, 次因AD∥OB, AF∥OC, 故 $D\hat{A}F=B\hat{O}C=A\hat{E}C$, 同樣 $A\hat{D}B=E\hat{C}F$, $D\hat{B}E=A\hat{F}C$.



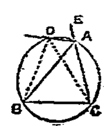
111. 有外切於A之二圓, 其中心爲C及C', 引此圓之共同切線, 其切點爲P, Q, 則 $P\hat{C}A$, $Q\hat{C'}A$, 之二等分線, 垂直相交於PQ上之點R. 又RA爲二圓之共同切線.

證 引 $P\hat{C}A$ 之二等分直線CR, 使交PQ於R, 連結RA, 則因△PCR, △ACR, 之CP=AC, CR共同, $P\hat{C}R=A\hat{C}R$, 故兩形全相等, $R\hat{A}C=R\hat{P}C=\hat{R}$, 同樣 $Q\hat{C'}A$ 之二等分直線C'R'與PQ之交點爲R', 則 $R'\hat{A}C'=\hat{R}$, 故R'與R合, RA爲圓C及C'之共同切線, 而CR二等分 $P\hat{R}A$, C'R二等分 $Q\hat{R}A$, 故 $C\hat{R}C'=\hat{R}$.



112. 三角形之頂點之外二等分線, 與外接圓之周, 於他一點相交, 則此點自底邊兩端在相等距離.

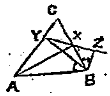
證 △ABC之頂點A之外二等分線AD, 與△ABC之外接圓之周於D相交, 連結BD CD, 則因ADBC爲圓內接四邊形, 故 $D\hat{B}C=E\hat{A}D=D\hat{A}B=D\hat{C}B$, 故△DBC爲二等邊, 而DB=DC.



113. 自三角形ABC之A, B, 向對邊引垂線, 其趾爲X, Y, 若BZ垂直於XY,

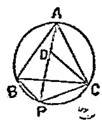
則 $A\hat{B}Y=X\hat{B}Z$. [須知 A, Y, X, B, 在同一之圓上.]

【解】 AX, BY 垂直於 BC, CA, 故 A, Y, X, B, 在同一之圓周上, 故 $A\hat{B}Y$ $=A\hat{X}Y=\hat{R}-C\hat{X}Y=\hat{R}-B\hat{X}Z=X\hat{B}Z$.



114. 自圓周上一點, 至內接正三角形之一頂點之距離, 等於至他二頂點之距離之和.

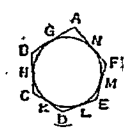
【解】 ABC 爲圓內接正三角形, P 爲弧 BC 上之點, 於 AP 上取點 D, 使 AD=BP, 連結 DC, 則因 $P\hat{A}C=P\hat{B}C$, AD=BP, AC=BC, 故 △ADC≡△BPC, 因而 CP=CD, 故 △CDP 爲二等邊, 且 $D\hat{P}C=A\hat{B}C=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 △CDP 爲正三角形, 故 BP+CP=AD+DP=AP.



【別解】 於四邊形 ABPC 適用普佗列米之定理, 而 AB.CP+AC.BP=BC.AP, 但 AB=AC=BC, 故 BP+CP=AP.

115. 圓外切六邊形, 每間隔一邊之三邊之和, 等於他三邊之和.

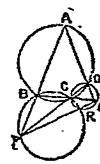
【解】 外接六邊形 ABCDEF 之切點, 爲 G, H, K, L, M, N, 則 AG=AN, GB=BH, CK=CH, KD=DL, EM=LE, MF=NF, 將此各等式兩邊相加, 得 AB+CD+EF=AF+BC+DE.



【注意】 此定理擴張, 得[圓外切 $2n$ 邊之多角形每間隔一邊之各邊之和等於其餘各邊之和].

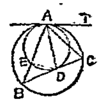
116. 延長圓內接四邊形, ABCD 之各邊 AB, CD 之交點爲 P, BC, AD, 之交點爲 Q, 又 △PBC 及 △QCD 之外接圓, 再於 R 相交, 則三點 P, Q, R, 在同一之直線上.

【解】 連結 PR, QR, CR, 則 $A\hat{B}C=P\hat{R}C$, $A\hat{D}C=Q\hat{R}C$, 但 $A\hat{B}C+A\hat{D}C=2\hat{R}$, 故 $P\hat{R}C+Q\hat{R}C=2\hat{R}$, 故 P, R, Q, 在同一之直線上.



117. 二圓內切, 則切小圓之大圓之弦, 於其切點所分二部分, 自二圓之切點視爲等角.

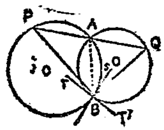
【解】 二圓於 A 內切, BC 於 D 切內圓, 乃於 A, 引共同切線 AT, AB 與內圓之交點爲 E, 連結 E, D, 則 $T\hat{A}D=A\hat{E}D$, $T\hat{A}C=A\hat{B}D$, 故 $C\hat{A}D=T\hat{A}D-T\hat{A}C=A\hat{E}D-A\hat{B}D=B\hat{D}E=D\hat{A}E$.



【別解】 因 AT, DC, 俱爲小圓之切線, 故 $T\hat{A}D=C\hat{D}A$, $T\hat{A}C=A\hat{B}C$, 故 $C\hat{A}D=T\hat{A}D-T\hat{A}C=C\hat{D}A-A\hat{B}C=B\hat{A}D$.

118. 過相交二圓之一交點, 引任意之直線, 將其再與二圓相交之點, 連結二圓之他交點, 則此二直線所成之角爲一定不易, 而此角等於二圓交點二切線所成之角.

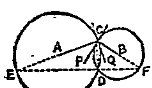
證 二圓之交點爲A, B, 過A引任意之倍弦PAQ, 則因 $A\hat{P}B$=定角,



$A\hat{Q}B$=定角, 故 $P\hat{B}Q$=定角. 各圓點B之切線爲SB, TBT′ 則因 $S\hat{B}A=A\hat{P}B$, $T\hat{B}A=A\hat{Q}B$, 故 $T'\hat{B}S=P\hat{B}Q$.

119. 中心爲A及B之二圓, 相交於C, 則二圓於C二切線之角, 爲 $A\hat{C}B$ 之補角.

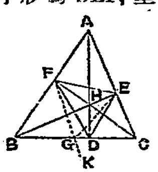
證 二圓於C之切線爲CP, CQ, 而CA, CB, 與各圓之交點爲E, F, 二圓之他交點爲D, 則因 $C\hat{D}E=$



$\hat{R}=C\hat{D}F$, 故E, D, F在同一之直線上, 但 $Q\hat{C}D=C\hat{E}D$, $P\hat{C}D=C\hat{F}D$, 故 $A\hat{C}B+P\hat{C}Q=E\hat{C}F+C\hat{E}F+C\hat{F}E=2\hat{R}$.

120. 自三角形之各角頂, 下對邊之垂線, 二等分其垂趾三角形之各角.

證 △ABC之垂趾三角形爲DEF, 垂心爲H, 則 $B\hat{E}C=C\hat{F}B=\hat{R}$, 故B, C, E, F在同一之圓周上, 故 $C\hat{B}E=C\hat{F}E$, 又 $H\hat{D}B=H\hat{F}B=\hat{R}$, 故四邊形HDBF得內

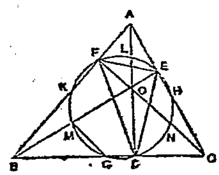


圓, 故 $D\hat{F}H=D\hat{B}H$, 故 $D\hat{F}C=C\hat{F}E$, 同樣AD, BE二等分 $E\hat{D}F$, $D\hat{E}F$.

別證 本題不依圓之定理, 得證明之. 今將BC之中點爲G, 延長FG至K, 則 $B\hat{E}C=B\hat{F}C=\hat{R}$, 故 BG=FG=EG=CG, 因而 $E\hat{G}K=2E\hat{F}G$, $C\hat{G}K=2C\hat{F}G$, 故其差 $E\hat{G}C=2E\hat{F}C$, 但 $E\hat{G}C=2E\hat{B}G$, 故 $E\hat{F}C=EBG$, 同樣 $D\hat{F}C=H\hat{A}E$, 次因直角三角形AHE, BHD一銳角相等, 故 $H\hat{A}E=H\hat{B}D$, 故 $E\hat{F}C=D\hat{F}C$. 即CF二等分 $D\hat{F}E$, 其他亦同樣.

121. 三角形之垂心與各頂之中點, 各邊之中點, 各垂線之趾, 在同一之圓周上[此圓謂之九點圓], 而九點圓之中心, 爲外心與垂心之中點, 其半徑等於外接圓半徑之半分.

證 △ABC之垂線趾爲D,E,F, 圓DEF截AO, BO, CO於L, M, N, 則因 $O\hat{F}B$, $O\hat{D}B$, 各爲直角, 故OB爲過F, D之圓之徑, 又 $F\hat{M}O=$

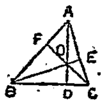


$F\hat{D}E=2F\hat{D}O$, 故M爲OB爲徑之圓之中心, 故M爲OB之中點. 同樣N, L, 爲OC, OA, 之中點. 次於圓DEF再截邊BC, CA, AB於G, H, K, 則因 $M\hat{G}B=M\hat{E}D=O\hat{C}B$, 故MG∥OC, 但M爲OB之中點, 故G爲BC之中點. 同樣H, K各爲CA, AB之中點, 故D, E, F, G, H K, L, M, N之九點, 在同一之圓周上. 次因GD之垂直二等分線, 當通過九點圓之中心及外心與垂心之中點, 又FK之垂直二等分線, 亦通過九點

圓之中心及外心與垂心之中點，故外心與垂心之中點爲九點圓之中心．又外心與A連結之直線，平行於九點圓之中心與L連結之直線，故九點圓之半徑，等於外接圓半徑之半分．

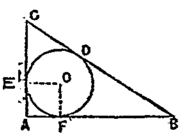
122. △ABC之垂心爲O，則△ABC之九點圓爲△OAB，△OBC，△OCA，之九點圓．

解　自各角頂向對邊引垂線之趾，爲E，D，F，則△ABC之九點圓爲△DEF之外接圓．但自△OAB，△OBC，△OCA，之各角頂，向對邊所引垂線之趾，又爲D，E，F，而△OAB，△OBC，△OCA，之九點圓亦爲△DEF之外接圓故也．



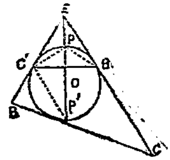
123. 直三角形內接圓之徑，與斜邊之和，等於他二邊之和．

解　ABC爲$\hat{A}=\hat{R}$之三角形，其內切圓之中心爲O，切點爲D，E，F，則CE=CD，BF=BD，AE=AF=OE=OF．故CE+AE+AF+BF=CD+BD+2OE．或CA+AB=BC+（內切圓之徑）．



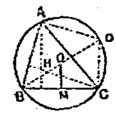
124. △ABC之內切圓中心爲O，其與AB，AC，之切點爲C′，B′，而AO及其延線與圓周之交點爲P，P′，則P，P′，爲△AB′C′之內切圓及傍切圓之中心．

解　△AB′C′明爲二等邊，故弧B′P=弧C′P，因而$A\hat{C'}P=C'\hat{B'}P=B'\hat{C'}P$，卽C′P爲$A\hat{C'}B'$之二等分線，故P爲△AB′C′之內心．次因$P\hat{C'}P'$爲直角，而C′P爲$\hat{C'}$之內二等分線，故C′P′爲$\hat{C'}$之外二等分線，故P′爲△AB′C′之傍心之一．



125. 自三角形之一角頂，至其垂心之距離，等於自外心至對邊之距離之二倍．

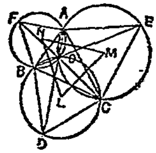
解　△ABC之垂心爲H，外心爲O，自O引AB之垂線OM，今將BO之延線與外接圓周之交點爲D，則AH∥CD，CH∥DA，故四邊形AHCD爲平行四邊形，故AH=CD，但OM∥CD，且O爲BD之中點，故OM爲CD之半分，因而$OM=\frac{1}{2}AH$．



126. 於△ABC之各邊上，作正三角形BCD，CAE，ABF，則AD，BE，CF，相等且於一點相交，其交點爲△BCD，△CAE，△ABF之外接圓之交點．又△BCD，△CAE，△ABF之外心，爲L，M，N，則△LMN爲正三角形．

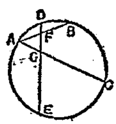
解　AE=AC，AB=AF，$B\hat{A}E=F\hat{A}C=\hat{A}+\frac{2}{3}\hat{R}$，故△ABE≡△AFC，因而BE=CF．同樣AD=CF，故AD=BE=CF．

次因圓 BDC, CEA 交點為 O, 則 $B\hat{O}C = \frac{4}{3}\hat{R} = C\hat{O}A$, 故 $A\hat{O}B = \frac{4}{3}\hat{R}$, 故圓 $A\hat{F}B$ 過 O, 而 $B\hat{O}D + A\hat{O}B = B\hat{C}D + \frac{4}{3}\hat{R} = 2\hat{R}$, 故 AOD 為一直線. 同樣 BE, CF 過 O. 次因 LM⊥CO, MN⊥AO, 故 $\hat{M} + A\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 $\hat{M} = \frac{2}{3}\hat{R}$. 同樣 $\hat{N} = \frac{2}{3}\hat{R}$, $\hat{L} = \frac{2}{3}\hat{R}$ 故 △LMN 為正三角形.



127. 於一圓周上,以反對之方向,取二弧 AB, AC, 其中點為 D, E, 則弦 DE 與二弦 AB, AC, 作二等邊三角形.

證 弧 AD+弧 EC=弧 DE+弧AE, 故 $A\hat{G}F = A\hat{F}G$, 因而 △AGF 為二等邊三角形.

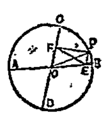


128. 圓內接平行四邊形,必為矩形,而其對角線過中心.

證 邊四形內接於圓,則其相對二角之和,等於二直角,又平行四邊形相對之角相等,故相其對角各為直角,故圓內接之平行四邊形為矩形,故其對角線過中心.

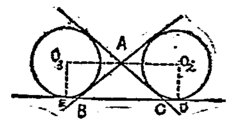
129. AB, CD, 為已知圓之二定徑, E,F 為自圓周上任意之一點 P, 下 AB, CD 之垂線趾, 則 EF 之長為一定.

證 四邊形PEOF內接於定長OP為徑之圓,且 $E\hat{O}F$ 為一定, 故 EF 為定長.



130. 三角形之二傍切圓相等,則此三角形為二等邊三角形.

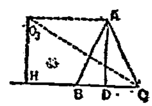
證 傍切圓 O_2, O_3, 之中心, 連結 BC 延線切圓之點 D, E, 則因 $O_3E /\!/ O_2D$ 且 $O_3E = O_2D$, 故 O_2DEO_3 為矩形, 而 O_2O_3



過頂點 A, 且為 $\hat{A}$ 之外二等分線, 故 $\hat{B} = O_3\hat{A}B = O_2\hat{A}C = \hat{C}$, 因而 AB=AC.

131. 二等邊三角形之二相等傍切圓之半徑,等於其自頂點向底邊引之垂線.

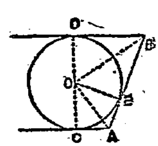
證 二等邊三角形 ABC, 頂角 A 之外二等分線,與C之內二等分之線交點為 O_3, 則 O_3 為傍心, 而 AO_3 平行 BC, 今



引 O_3H, AD, 為 BC之垂線, 則 O_3H 為傍切圓之半徑, 而 $ADHO_3$ 為矩形, 故 $AD=O_3H$. 同樣切於邊 AC 之傍切圓之半徑, 亦等於 AD.

132. 於圓 O 一徑之兩端,引二切線,與任意第三切線相交於A,B,則 $A\hat{O}B$ 為直角.

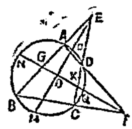
證 圓徑之兩端為 C, D, 第三切線之切點為E, 連結 OE, 則 △OCA≡△OEA,



△ODB≡△OEB, 故 $A\hat{O}B=\frac{1}{2}C\hat{O}D=\hat{R}$.

133. 圓內接四邊形,引長其二組對邊,使相交所成二角之二等分線,互爲垂直.

證 圓內接四邊形ABCD,其對邊延線之交點爲E,F,而$\hat{E}$,$\hat{F}$之二等分線,與圓周之交點爲P,M,及Q,N 則 弧AP~弧BM=弧PD~弧CM, 及 弧CQ~弧BN=弧DQ~弧AN, 故 弧PD+弧DQ+弧BN+弧BM=弧AP+弧AN+弧CQ+弧CM, 即 弧PDQ+弧MBN=弧PAN+弧QCM=半圓周, 故EM⊥FN.

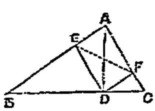


別證 I. 在E,F之角之二等分線,爲EO,FO,而FO與AB,CD之交點爲G,K,則$E\hat{A}G=K\hat{D}F+\frac{1}{2}C\hat{F}D=A\hat{B}C+B\hat{F}G=F\hat{G}E$,故△EGK爲二等邊,因而EO垂直於底GK.

別證 II. 依16題,而$E\hat{O}F=\frac{1}{2}(E\hat{A}F+E\hat{C}F)=\frac{1}{2}(B\hat{C}D+B\hat{A}D)\equiv\hat{R}$.

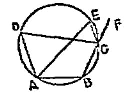
134. 自直角三角形ABC之角頂A,引斜邊BC之垂線AD,自垂趾D引他邊之垂線DE,DF,則過B,E,F,C,得畫一圓.

證 連結EF,因AEDF爲矩形,故$A\hat{F}E=A\hat{D}E$,而$A\hat{D}E$,$D\hat{B}E$,皆爲$B\hat{D}E$之餘角,故相等,而$A\hat{F}E=D\hat{B}E$,故過B,E,C,F,得畫一圓.



135. 圓內接四邊形,任意一角之內二等分線,與其對角之外二等分線,俱於圓周上相交.

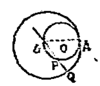
證 ABCD爲圓內接四邊形,$\hat{A}$之內二等分線與$\hat{C}$之外二等分線之交點爲E,則因$\hat{A}$=($\hat{C}$之外角),故$E\hat{A}B=E\hat{C}F$,故E在△ABC之外接圓周上,即E在ABCD之外接圓周上.



別證 $\hat{A}$之二等分線,及$\hat{C}$之外二等分線,俱過弧BCD之中點[83題],故如題言.

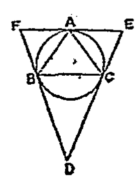
136. 一圓內切於以其半徑之二倍爲半徑之圓,循周而輪轉之,則小圓周上一點畫大圓之徑.

證 圓O內切於圓O′,其半徑等於圓O′半徑之半分,且圓O之周,內切於圓O′之周,而輪轉之,於圓O之周上,取任意一點P,引連結O′P之徑,則因$A\hat{O}P=2A\hat{O'}P$,故弧AP=弧AQ,明矣.因而P畫圓O′之徑.



137. 於二等邊三角形之各角頂,引其外接圓之切線,則此三直線成二等邊三角形.又此二三角形,若非俱爲正三角形,則其頂角不等.

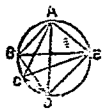
證 過二等邊三角形ABC之角頂A,B,C,引△ABC之外接圓之切線,相交於D,E,F,因$E\hat{A}C=A\hat{B}C=A\hat{C}B=F\hat{A}B$,故底邊底角相等之二個二



等邊三角形全等, 因而 FB=EC, 又 BD=CD, 故 △DEF 爲二等邊. 次若 $\hat{A}=\hat{D}$, 則 $\hat{A}=D\hat{B}C=D\hat{C}B=\hat{D}=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故二等邊三角形 ABC, DEF, 皆爲正三角形, 故 △ABC, △DEF, 若非俱爲正三角形, 則不能 $\hat{A}=\hat{D}$.

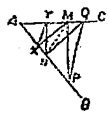
138. ABCDE 爲內接於圓之任意五角形, 則角 ABE, BCA, CDB, DEC, EAD 之和, 等於二直角.

圖 $A\hat{B}E=A\hat{D}E$, $B\hat{C}A=B\hat{D}A$, $C\hat{D}B=C\hat{A}B$, $D\hat{E}C=C\hat{A}D$, 故 $A\hat{B}E+B\hat{C}A+C\hat{D}B+D\hat{E}C+E\hat{A}D=A\hat{D}E+B\hat{D}A+C\hat{A}B+C\hat{A}D+E\hat{A}D=B\hat{D}E+B\hat{A}E=2\hat{R}$.



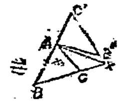
139. 於直線 AB 上, 取一點 P, 又於直線 AC 上取一點 Q, PM, MX, 爲 AC, AB 之垂線, 而 QN, NY 爲 AB, AC 之垂線, 則 PQ 平行於 XY.

圖 四邊形 PQMN, 及四邊形 MNXY, 得內接於 PQ, MN, 爲徑之圓, 故 $O\hat{P}N=N\hat{M}Y=Y\hat{X}A$, 故 PQ // XY.



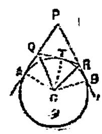
140. 一三角形將其頂爲樞而廻轉之, 使頂角傍之一邊, 與其他邊最初位置成一直線, 則二位置底邊之交點, 連結頂點之直線, 二等分二位置底邊間之角.

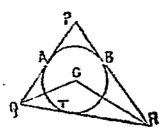
圖 三角形 ABC 將其頂點爲樞而廻轉之, 使 AC 與 AB 同在一直線上, 斯時 △ABC 之位置, 爲 △AB′C′, 則因 $A\hat{C'}X=A\hat{C}B$, 故四邊形 ACXC′ 得內接於圓, 因而立於相等弦 AC, AC′ 之圓周角 AXC, AXC′ 相等, 即 XA 二等分 △ABC 二位置之底邊間之角 CXB′



141. 自中心 C 之圓外一點 P, 引切線 PA, PB, 於其劣弧 AB 上一動點 T, 引第三切線, 使與 PA, PB 相交於 Q, R, 則無論 T 之位置如何, (1) 三角形 PQR 之周圍爲一定. (2) 角 QCR 爲一定. 又 T 在優弧 AB 上, 則如何.

圖 C 爲 △PQR 之傍心明矣, 故 QC, RC, 爲 $A\hat{Q}R$, $B\hat{R}Q$ 之二等分線, 因而 $A\hat{C}Q=T\hat{C}Q$, 而 $B\hat{C}R=T\hat{C}R$, 故 $Q\hat{C}R=\frac{1}{2}A\hat{C}B=$ 定角. 次因 AQ =QT, BR=RT, 故 △PQR 之周圍爲 AP+BP=2AP=2BP =定長. 又 T 在優弧之上, 則 AQ=QT, BR=RT, 故 PQ+PR −QR=2AP= 定長,

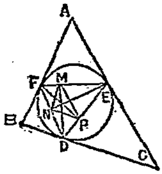




而 $Q\hat{C}R=2\hat{R}-\frac{1}{2}\left(\hat{Q}+\hat{R}\right)=2\hat{R}-\frac{1}{2}\left(2\hat{R}-\hat{P}\right)=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{P}=$ 定角.

142. 三角形內切圓, 連結其三切點所成三角形之垂趾三角形之各邊, 平行於原三角形之各邊.

證 △ABC之內切圓之切點爲D, E, F, 自D, E, F, 向FE, FD, DE所引垂線之趾爲M,N,P, 則EFNP爲得內接於圓之四邊形, 故$N\hat{F}E=D\hat{P}N$.



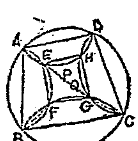
但$E\hat{D}C=D\hat{F}E$, 故NP∥BC, 同樣PN∥AC, MN∥AB.

143. 三角形ABC之內切圓,切BC於D, 則三角形ABD, ACD之內切圓互相切.

證 內切圓切AC, AB之點爲E, F, 則AB−BD=AF=AE=AC−CD, 故$\frac{1}{2}$(AB+AD−BD)=$\frac{1}{2}$(AC+AD−CD), 但△ABD之內切圓,切AD於H, 則AH=$\frac{1}{2}$(AB+AD−BD), [參照141題證]. 而△ACD之內切圓切AD於H′, 則AH′=$\frac{1}{2}$(AC+AD−CD), 故AH=AH′, 故H與H′相合, 因而△ABD, 及△ACD之內切圓,切AD於同一之點, 故此二內切圓互相切.

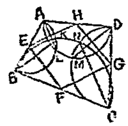
144. 圓內接四邊形,將其各邊爲弦之圓,其相交之四點,又在同一之圓周上.

證 圓內接四邊形ABCD, 將其各邊爲弦之圓之交點爲E, F, G, H, 連結AE, BF, CG, DH, 而AE, CG,之延線上之點爲P, Q, 則四邊形AEFB, BFGC, CGHD, DHEA, 皆內接於圓, 故$P\hat{E}H=H\hat{D}A$, $P\hat{E}F=\hat{F}BA$, $Q\hat{G}F=F\hat{B}C$, $Q\hat{G}H=H\hat{D}C$, 故$F\hat{E}H=F\hat{G}H=\hat{D}+\hat{B}=2\hat{R}$, 故EFGH爲得內接於圓之四邊形.



145. 將四邊形之各邊爲徑畫圓於其上,其相鄰任意二圓之共同弦,平行於他二圓之共同弦.

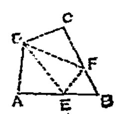
證 四邊形ABCD, 將其各邊爲徑畫圓, 任意相鄰二圓之交點,爲K,L,M,N, 其四邊形ABCD各邊之中點爲E,F,G,H, 則EFGH爲平行四邊形, 但E,F,G,H,爲各圓之中心故EF⊥BK, HG⊥DM, 故BK∥DM, 同樣AL∥CN.



別證 連結AK, CK, 則因$A\hat{K}B=B\hat{K}C$, 故A, K, C在同一之直線上, 故BK⊥AC. 同樣AMC亦爲一直線, 而DM⊥AC, 故BK, DM, 俱垂直於同一之直線AC, 故BK∥DM, 同樣可知AL∥CN.

146. 四邊形ABCD之AD+BC=AB+CD, 則此四邊形,可畫內切圓,試直接證明之.

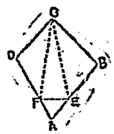
證 於邊AB, CB上,取AE=AD, CF=CD, 則AD+BC=AE+CF+BF, AB+CD=AE+EB+CF, 但AD+BC=AB+CD, 故BE=BF, 即△BEF爲二



等邊，故$\hat{A},\hat{B},\hat{C}$之二等分線，為$\triangle DEF$各邊之垂直二等分線，故於同一之點相交，故O為自ABCD各邊之等距離，故將O為中心，至ABCD一邊之距離為半徑之圓，切於四邊形ABCD.

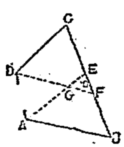
147. 前題之証明，若$AD=AB$，則失敗，如此者，得畫內切圓，當如何證明之.

證 前題若$AD=AB$，則DE為DB之對角線，不能得二等邊三角形BEF，故上方法失敗，然$AD=AB$，故$CD=BC$，故於DA, AB上，取DF, BE使等於CD, CB，連結CF, CE, EF，則$\triangle AFE$, $\triangle DCF$, $\triangle BCE$皆為二等邊三角形，故在A, B, D之角之二等分線，為$\triangle CEF$各邊垂直二等分線，故相交於同一之點O，而此點O為自四邊形ABCD各邊之等距離，故以O為中心得畫切於四邊形ABCD之圓.



148. 四邊形相對角互為補角，則此四邊形得畫外接圓，試直接證明之.

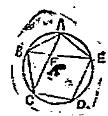
證 取$B\hat{A}E=\hat{B}$, $C\hat{D}F=\hat{C}$，則$\triangle EAB$, $\triangle FCD$，皆二等邊三角形，而AB, CD之垂直二等分線為$G\hat{E}F$, $G\hat{F}E$之二等分線，故於一點O相交. 次因$D\hat{A}E=2\hat{R}-\hat{B}-\hat{C}$, $A\hat{D}F=2\hat{R}-\hat{C}-\hat{B}$, 故$D\hat{A}E=A\hat{D}F$，即$\triangle GAD$為二等邊，故DA之垂直二等分線，為$E\hat{G}F$之二等分線，即過O，故O在自四邊形各角頂點之等距離，故將O為中心，得畫過A,B,C,D之圓，即ABCD之相對角互為補角，則ABCD得畫外接圓.



注意 若$\hat{A}=\hat{B}$，則本證明失敗，然斯時$\hat{C}=\hat{D}$，即ABCD為等腳梯形，其得畫外接圓，明也. 又$\hat{A}=\hat{C}=\hat{R}$，則將對角線BD中點為中心，而外接圓之成立明矣.

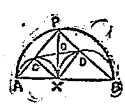
149. 正五角形兩對角線相交，互為二等分，其二部分之大者，等於正五角形之一邊，又其小者，等於正五角形為對角線之正五角形之一邊.

證 正五角形之兩對角線AC, BE之交點為F，對角線AC之大部分為CF，則弧CDE＝弧AE＋弧BC，故$C\hat{B}F=C\hat{F}B$，因而$CF=BC$. 次因$AF=BF$，而$A\hat{B}F=B\hat{A}F=\frac{2}{3}\hat{R}$，故AF, BF，皆AB為對角線之正五角形之一邊.



150. 一有限直線二分於X，以AB, AX, BX，為徑畫半圓於AB之同傍，自點X引AB之垂線，使交外部之半圓於P，連結PA, PB，與內部半圓之交點為C, D，則CD為內部二圓之公共切線.

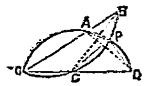
證 PX為AX, BX為徑之二圓之共同切線，連結CX, DX，則四邊形PCXD之各角為直角，故此四邊



形爲矩形，故若PX,CD之交點爲O，則OC=OD=OX，而OX爲內部二圓之共同切線，故OC, OD, 爲內部二圓之切線，即CD爲內部二圓之共同切線.

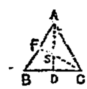
151. 二有限直線AB, CD, 延長相交於O, 若P爲△AOD, △BOC之外接圓之他交點，則△PAB, △PDC, 爲等角.

證 四邊形BOCP, AODP, 皆內接於圓，故 $\hat{ABP}=\hat{PCD}$, $\hat{BAP}=\hat{CDP}$, 故三角形PAB, 及三角形PDC, 爲等角.

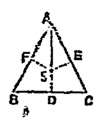


152. △ABC之內切圓之中心爲I, 外切圓之中心爲S, (1) I與S相合，則其三角形爲等邊. (2) I與S在過一頂點之一直線上，則其三角形爲二等邊. (3) 連結I與S之直線，於任意一角頂合之之角，等於他二角之差之半分.

證 (1) I與S相合者，連結AS, CS, 次自S引BC, AB之垂線SD, SF, 則AS等於CS, SD等於SF, 故二三角形ASF, CSD全等，而AF=CD, 但S爲外心，故D, F爲BC, AB之中點，因而AB=CB. 同樣AC=BC, 故三角形ABC爲等邊.



(2) A, I, S, 若同在一直線上，則AS爲 $\hat{A}$ 之二等分線，今自S引AB, AC之垂線SF, SE, 則二直角三角形ASE, ASF全等，因而



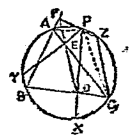
AE=AF, 故各二倍之AC=AB, 即△ABC爲二等邊. (3) $\hat{IAS}=$

$\frac{1}{2}(\hat{BAS}-\hat{CAS})=\frac{1}{2}(\hat{SBA}-\hat{SCA})=$
$\frac{1}{2}(\hat{SBA}+\hat{SBC}-\hat{SCA}-\hat{SCB})=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$.
其他二角亦同樣.

注意 (2)證明之後，再用(2)證明(1)，甚容易，即如次. I與S若相合，則I在AS之上，故依(2)而AB=AC, 又I在BS之上，故AB=BC, 故△ABC爲等邊.

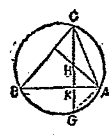
153. 於西母生定理，延長PD, PE, PF, 使再交圓周於X, Y, Z, 則AX, BY, CZ, 平行於西母生線.

證 四邊形APZC, 內接於圓，故 $\hat{ACZ}=\hat{APF}=\hat{AEF}$, 故CZ∥DEF. 同樣AX, BY, 亦得證明平行於DEF.



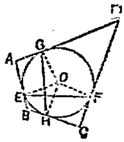
154. 自三角之垂心，引一邊之垂線，延長至外接圓周，則其分線被其邊二等分之.

證 自△ABC之垂心H, 引邊AB之垂線HK, 其延線與圓周之交點爲G, 連結GA, 則GH, 過C明矣，故 $\hat{GAB}=\hat{GCB}=\hat{BAH}$, 且 $\hat{AKG}=\hat{AKH}\ (=\hat{R})$, 而AK爲△AHK, △AGK共同，故是等三角形全相等，故GK=KH.



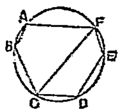
155. 內接於圓之四邊形,又外切於圓,則連結其二組對邊之切點之直線,互爲垂直.

證 圓內接之四邊形ABCD,又外切於中心O之圓,其切點爲E, F, G, H,今連結OE, OF, OG, OH,則 OE⊥AB, OH⊥BC, OF⊥CD, OG⊥AD,故 $\hat{C}+H\hat{O}F=2\hat{R}=\hat{C}+\hat{A}$. 故 $\hat{A}=H\hat{O}F$. 同樣 $\hat{C}=E\hat{O}G$,故 $H\hat{O}F+E\hat{O}G=\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$. 故弧EG+弧HF=半圓周,故 EF⊥HG.



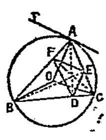
156. 圓內接六角形,相鄰二邊平行於其相對之邊,則他二邊平行.

證 ABCDEF內接於圓,且 AB∥DE, BC∥EF,則 $A\hat{B}C=D\hat{E}F$,連結FC,則 $A\hat{F}C$, $F\hat{C}D$,各爲 $A\hat{B}C$, $D\hat{E}F$,之補角,故相等,故 AF∥CD,



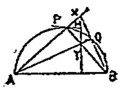
157. 自三角形各角之角頂,向對邊引三垂線之趾爲D, E, F,又其外邊圓之中心爲O,則OA, OB, OC,各垂直於EF, FD, DE.

證 於A引△ABC外接圓之切線AT,則因四邊形BFEC得內接於圓,故 $T\hat{A}B=\hat{C}=A\hat{F}E$,故 EF∥AT,但 OA⊥AT,故 OA⊥EF,同樣 OB⊥FD, OC⊥DE,



158. AB爲半圓之徑, P, Q,爲其半圓周上任意之點,若AP, BQ,相交於X,而AQ, BP相交於Y,則 (1) XY垂直於AB. (2)在P, Q,之切線,於XY之中點相交.

證 (1)因 $A\hat{P}B=A\hat{Q}B=\hat{R}$,故Y爲△XAB之垂心,因而XY垂直於AB. (2)在P之切線,與XY之交點爲M,則△XPY爲直三角形,而 $X\hat{P}M=P\hat{B}A=M\hat{X}P$,因而 $M\hat{P}Y=M\hat{Y}P$. 故XM=PM=MY,卽M爲XY之中點. 同樣在Q之切線,亦過XY之中點M.

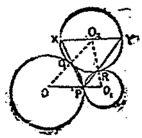


159. 過△ABC之垂心H與B, C,畫圓,延長自A所引之中線,使與此圓相交於X,則AX等於其中線之二倍.

證 過垂心H與B, C,畫圓,則立於弧BHC之圓周角,等於$\hat{A}$,今自B, C,引AC, AB,之平行線BX, CX,其交點爲X,則因$\hat{X}=\hat{A}$,故X在圓BHC之周上,且四邊形ABXC爲平行四邊形,故AX, BC,之交點M,爲BC之中點,而AM=MX,卽AX=2AM.

160. 三圓外切於P, Q, R,延長PQ, PR,使與過Q,R,之圓交於X,Y,則XY爲其圓之徑,而平行於他二圓之中心線.

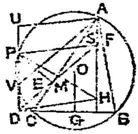
證 三圓之中心爲O, O_1, O_2,連接其中心之三直線,必各過切點P, Q, R之一. 今連接O_2X, O_2Y,則因二個二等三邊角



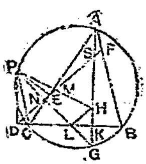
形O_2XQ, OPQ, 一底角相等,故為等角形,因而O_2X平行於OO_1,同樣$O_2Y /\!/ OO_1$,故O_2X與O_2Y為同一直線,而平行於OO_1.

161. 連結垂心與取西母生線之點之直線,被西母生線二等分之.

圖 P為△ABC外接圓周上之點,關於P之西母生線DEF,與A與垂心H連結之直線之交點為S, PD再與圓周之交點為V, 於DVP之延線上,等於VD取PU,連結SP,又自心外O引BC之垂線OG,則OG∥UD,而自O引UD之垂線,二等分PV,故UD為OG之二倍,且等於AH,故四邊形AHDU,為平行四邊形,又AV∥DS[153題],故ASDV為平行四邊形,而AS=DV=PU,故ASPU亦為平行四邊形,因而PSHD為平行四邊形,故PH被DESF二等分.



別證 AH之延線與BC,及外接圓周之交點為K, G, 則HK=KG[154題],次於連結PG之直線與BC, DEF,之交點為L, N, 又AH與DEF之交點為S, 則$L\hat{H}K=L\hat{G}K=P\hat{C}A=P\hat{D}E=D\hat{S}H$,故LH∥DF,又$N\hat{P}D=P\hat{G}K$,故$N\hat{P}D=P\hat{D}N$,但PDL為直角三角形,故N為斜邊PN之中點,因而△PLH若NM∥LH,則M為PH之中點.

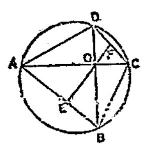


162. △PQR, △XYZ, 內接於同一之圓PX, QY, RZ, 於同一之點O相交,O為一三角形之內心,則O又為他三角形之垂心. 逆之,O為一三角形之垂心,則O又為他三角形之內心.

圖 O為△PQR之內心,PX, QY, RZ, 與YZ, ZX, XY,之交點為D, E, F, 則因弧QX=弧RX, 弧RY=弧PY, 弧PZ=弧QZ, 故弧PY+弧QZ+弧QX=半圓周,故$Z\hat{D}X=\hat{R}$,卽PX垂直於YZ.同樣QY⊥ZX, RZ⊥XY, 故O為△XYZ之垂心. 逆之,O為△XYZ之垂心,則四邊形ZEFY得內接於圓,故$E\hat{Y}F=E\hat{Z}F=X\hat{P}R$,及$E\hat{Y}F=Q\hat{P}X$,故PX為$\hat{P}$之二等分線. 同樣QY, RZ, 為$\hat{Q}$, $\hat{R}$,之二等分線,故知O為△PQR之內心.

163. 圓內接四邊形之兩對角線,互為垂直,則自其交點引一邊之垂線,必二等分其對邊.

圖 圓內接之四邊形ABCD之對角線AC, DB,互為垂直,其交點為O,自O引AB之垂線OE,其延線與CD之交點為F,則$C\hat{O}F=A\hat{O}E=A\hat{B}O=O\hat{C}F$,

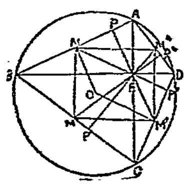


故CF=OF. 同樣 DF=OF, 故 CF=DF.

注意 本題謂之布刺米打昔他之定理.

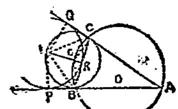
164. 圓內接四邊形,兩對角線,互為垂直,則(1)自其一邊至中心之距離等於其對邊之半分. (2)自對角線之交點,下各邊垂線之趾,及各邊之中點,共八點同在一圓周上.

圖 中心O之圓,內接四邊形ABCD之對角線AC, BD, 於E直角相交,今自E引AB之垂線EP, 其延線與CD之交點為M″,則依布刺米打昔他之定理, M″為CD之中點. 同樣自E下邊BC, CD, DA之垂線EP′, EP″, EP″,二等分其對邊於M‴, M, M′. 次連結OM, OM″, 則 OM∥EM″, OM″∥ME, 故OM=EM″=$\frac{1}{2}$CD, 其他亦得同樣證明之. 又因於P, P″, 之角,皆為直角,故P, P″, M″, M, 在以MM″為徑之圓周上. 同樣P′, P‴, M‴, M′, 在以M′M‴為徑之圓周上,而M, M′, M″, M‴, 為矩形之角頂,故為內接於MM″, M′M‴, 之交點為中心之圓,故 P, M, M′, P′, M″, P″, P″, M‴, 在同一之圓周上.



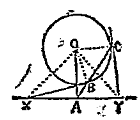
165. 將O為中心畫一圓,又將其周上任意一點G為中心畫第二圓,使截前圓於B, C, 又將第二圓周上一點I為中心,切於BC畫第三圓,則自B, C, 引第三圓之他切線,必於第一圓周上相交.

圖 中心I之圓切BC之點為R, 自B, C引此圓之切線BP, CQ, 其交點為A, 則因 $\hat{A}+P\hat{I}Q=2\hat{R}$, 而 △PIB≡△RIB, △CIQ≡△CIR, 故 $P\hat{I}Q=2B\hat{I}C=E\hat{G}C$, 故 $B\hat{G}C+\hat{A}=2\hat{R}$, 故在中心O之圓周上,即BP, CQ相交於中心O之圓周上.



166. 自已知圓之中心O,作任意直線XY之垂線,過A作割線,使與圓周相交於B, C, 則於B, C, 切圓周之直線,與XY相交之二點,在自A相等之距離.

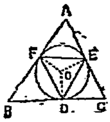
圖 於B, C, 之切線,與XY之交點,為X, Y, 連結 OB, OC, OX, OY, 則A, B, 在OX為徑之圓周上,又A, C, 在OY為徑之圓周上,故 $X\hat{O}B=B\hat{A}Y=Y\hat{O}C$, 故直角三角形 OBX, OCY, 全等,而 OX=OY, 因而三角形 OXY為二等邊,故AX= AY.



167. 連結三角形內切圓之切點,所得三角形,為銳角三角形.

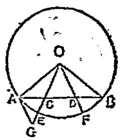
圖 三角形ABC之內切圓之中心為O, 其切點為D, E, F, 則 OD⊥BC, OE⊥CA, OF⊥AB, 故 $\hat{A}+E\hat{O}F=2\hat{R}$, 故 $E\hat{O}F<2\hat{R}$,

但 $\widehat{EDF}=\frac{1}{2}\widehat{EOF}$, 故 $\widehat{EDF}<\widehat{R}$, 同樣 $\widehat{DEF}$, $\widehat{EFD}$, 亦小於直角, 故DEF爲銳角三角形.



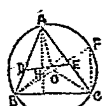
168. 圓之三等分其弦之二半徑,不能三等分其弦所對之弧.

圖 中心O之圓之弦爲AΓ,三等分AB之二半徑爲OE, OF, 與AB之交點爲C,D, 則AC=BD, OA=OB, $\widehat{OAC}=\widehat{OBD}$, 故△OAC≡△OBD,因而OC=OD, 及$\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$, 今延長OC, 使OC=CG, 連結AG, 則△OCD≡△GCA, 故AG=OD=OC=CG, 而$\widehat{AGC}=\widehat{COD}$, 但OA>OC, 故OA>AG, 故$\widehat{AOG}<\widehat{AGC}$, 或$\widehat{AOG}<\widehat{COD}$, 故弧AE=弧BF, 皆小於弧EF, 卽三等分其弦AB之半徑OE, OF,不能三等分其弧AB.



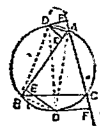
169. O爲△ABC之外心, H爲其垂心,於AB上截AD,使等於AH,於AC上截AE,使等於AO,則DE等於外接圓之半徑.

圖 BO之延線,與外接圓周之交點爲F, 則因FC, FA,各垂直於BC, AB, 故FC∥AH, FA∥CH,故AHCF爲平行四邊形, 而CF=AH=AD. 又AE=OF, 且$\widehat{A}=\widehat{OFC}$, 故連結OC, 則△ADE, △FCO全等, 而DE=OC.



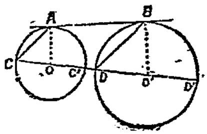
170. ABC爲圓內接之三角形,自弧BC之中點D,作AB之垂線DE, 則AE=$\frac{1}{2}$(AB+AC), BE=$\frac{1}{2}$(AB∼AC). 又自弧BAC之中點D′, 作AB之垂線D′E′, 則AE′=$\frac{1}{2}$(AB∼AC), BE′=$\frac{1}{2}$(AB+AC), 而連結AD′, AD′, DD′, 則$\widehat{ADD'}$等$\widehat{ACB}$與$\widehat{ABC}$之差之半分.

圖 自D引AC之垂線DF,又連結BD, CD, 則因D爲弧BC之中點,故弦BD=弦CD, 而AD爲$\widehat{A}$之二等分線,故DE=DF, 故△ADE≡△ADF, △BDE≡△CDF, 因而AE=AF, BE=CF, 故AE+AF=2AE=AB+AC, BE+CF=2BE=AB∼AC, 故AE=$\frac{1}{2}$(AB+AC), BE=$\frac{1}{2}$(AB∼AC). 又自弧BAC之中點D′,引AC之垂線D′F′, 則D′爲過D之徑之他端,同樣△AD′E′≡△AD′F′, △BD′E′≡△CD′F′, 而AE′=AF′, 故AE′+AF′=2AE′=AB∼AC, BE′+CF′=2BE′=AB+AC, 故AE′=$\frac{1}{2}$(AB∼AC), BE′=$\frac{1}{2}$(AB+AC). 又$\widehat{ADD'}=\widehat{ABD'}=\widehat{ACD'}$ 但$\widehat{D'CB}=\widehat{D'BC}$, 故$\widehat{ACB}\sim\widehat{ABC}=\widehat{ACD'}+\widehat{ABD'}=2\widehat{ADD'}$, 卽$\widehat{ADD'}=\frac{1}{2}$(ACB∼ABC).



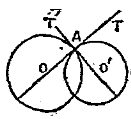
171. 自二圓共同切線之切點A, B,至連結圓之中心之直線,與圓周之交點C, D, 引直線AC, BD, 互平行.

證 連結OA, O'B, 則OA, O'B, 各爲AB之垂線, 故OA∥O'B, 故$A\hat{O}C=B\hat{O'}D$, 故此角之補角之半分, $A\hat{C}O$, $B\hat{D}O'$, 相等, 即AC∥BD, 同樣取他之交點C', D', 即AC'∥BD', 又切線AB若爲共同內切線, 亦同樣.



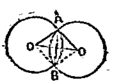
172. 二圓互相直交, 其交點各圓之切線, 過他圓之中心.

證. 互直交之二圓O, O', 之交點爲A, 過之之二圓切線爲AT, AT', 則因$T\hat{A}T'$爲直角, 故AT'垂直於圓O'之切線AT, 故T'A過中心O', 同樣TA過中心O.



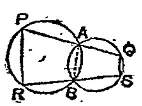
173. 二相等圓互相直交, 其共同弦, 等於二中心間之距離.

證 二相等圓之交點爲A, B, 其中心爲O, O', 則因二圓直交, 故OA, O'A, 爲各圓之切線, 同樣OB, O'B亦爲各圓之切線, 而因OA=OB=OB'=O'A 且$\hat{A}=\hat{B}=\hat{R}$, 故AOBO'爲正方形, 因而OO'=AB.



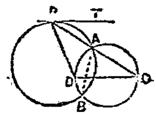
174. 過相交二圓之交點A, B, 引倍弦PAQ, RBS, 則弦PR, 平行於弦QS,

證 連結AB, 則$A\hat{P}R=A\hat{B}S=2\hat{R}-A\hat{Q}S$, 故PR∥QS.



175. 二圓於A, B, 相交, 過其一圓周上任意一點P, 引直線PAC, PDB, 使截他圓於C及D, 則CD平行於點P之切線.

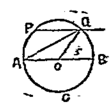
證 點P之切線爲PT, 連結AB, 則$T\hat{P}A=A\hat{B}P=A\hat{C}D$, 故PT∥CD.



注意 本題可看做前題點P, R, 接近至成一點之極限.

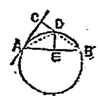
176. PQ爲平行於中心O之圓之徑AB之任意之弦, 則弦QA及QB, 二等分角PQC及其外角.

證 因PQ∥AB, 故$P\hat{Q}A=Q\hat{A}O=A\hat{Q}O$, 故QA二等分$P\hat{Q}O$. 次因$A\hat{Q}B=\hat{R}$, 故QB爲$P\hat{Q}O$之外角二等分線.



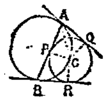
177. 自圓周上任意一點, 引此圓之弦及切線, 則自其弦所對弧之中點, 至弦及切線之距離相等.

證 自圓周上一點A, 引圓之弦AB, 及切線AC, 自弧ADB之中點D, 引AB, AC, 之垂線DE, DC, 連結AD, BD, 則弧AD=弧BD 故$D\hat{A}B=D\hat{B}A$, 但$D\hat{A}C=D\hat{B}A$, 故$D\hat{A}B=D\hat{A}C$, 故AD爲$B\hat{A}C$之二等分線, 而CD=DE.



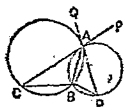
178. 一圓之中心, 在他圓之周上, 其共同二切線, 切於第二圓之點爲A, B, 則AB切於第一圓.

解 弧AC之等於弧BC易明也, 故自C引AB之垂線CP, 等於CQ及CR [177題], 故AB切中心C之圓於P.



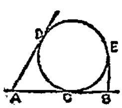
179. 二圓周相交於A, B, 引各圓之切線AC, AD, 使交各圓周於C, D, 則BC, BD, 與BA成等角.

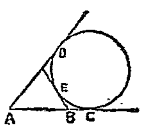
解 延長CA, DA, 至P, Q, 則 $A\hat{B}D=P\hat{A}D=Q\hat{A}C=A\hat{B}C$, 卽BC, BD, 與AB成等角.



180. 自已知直線上之已知二點, 引切於此直線之圓之切線, 則此二切線之和或差, 恆爲一定.

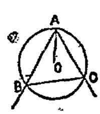
解 已知直線AB上之已知二點, 爲A, B, 畫切直線AB之任意之圓, 切AB之點爲C, 又自A, B, 引此圓之切線, 其切點爲D, E, 則AD=AC, BE=BC, 故AD±BE=AB, 故AB±BE恆等於一定不易之AB.





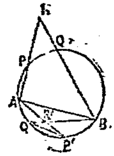
181. 於已知角BAC內, 加入已知長之直線BC, 於AB, AC, 之中點, 作垂線, 其交點爲O, 則AO之長, 不關於BC之位置, 恆爲一定.

解 畫△ABC之外接圓, 則O爲其外接圓之中心明矣, 故AO爲此外接圓之半徑, 但 $\hat{A}$ 及BC之大爲一定, 故其半徑之大亦爲一定.



182. AB爲圓APQB之已知弦, PQ爲同圓之弦, 而其長爲一定. AP, BQ, 若於點R相交, 則PQ無論在如何之位置, 而R恆在一定之圓周上.

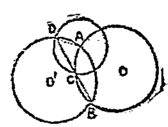
解 $A\hat{R}B$ 以 $\frac{1}{2}$(弧AB±弧PQ)測度之, 故爲一定之大, 故R在以AB爲弦含一定角之圓周上.



注意 $A\hat{R}B+A\hat{R'}B=2\hat{R}$.

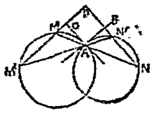
183. 二相等圓周之交點爲A, B, 將A爲中心, 以小於AB之半徑畫圓周, 與二圓周於AB之同傍, 相交於點C, D, 則C, D, B, 在同一之直線上.

解 二圓中心爲O, O′, 連結BD之直線, 截圓O之周之點爲X, 連結AD, AX, 則 $A\hat{X}D$ 等於立於弧ACB上之圓周角, 故以弧ACB之半分測度之, 而 $A\hat{D}X$ 以圓O之弧AB之半分測度之, 但二圓O, O′相等, 故弧ACB等於圓O′之弧AB, 故 $A\hat{X}D=A\hat{D}X$, 而AD=AX, 故X在中心A之圓周上, 故X與C爲同一之點, 卽B, C, D, 在同一之直線上.



184. 過二圓之交點A, 作二直線MAN, M′AN′, 使與圓周相交於M, N, 及M′, N′, 則MM′及NN′之延線所成之角D, 爲一定不易.

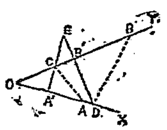
證 過A引各圓之切線AB, AC, 則 $D\hat{N}M = B\hat{A}N'$, $D\hat{M}N$ [$M'\hat{M}A$ 之補角] $=$ $M'\hat{A}C$, 故 $D\hat{N}M + D\hat{M}N$



$= B\hat{A}N' + M'\hat{A}C$, 因而 $M\hat{D}N = C\hat{A}B$ = 定角.

185. 於已知角XOY之二邊OX, OY, 截任意之長OA, OB, 自OA之中點A'作AO之垂線, 使交OY於C, 又自OB之中點B', 作OB之垂線, 使交OX於D, 此二垂線之交點爲E, 則A, C, E, B, D, 在同一之圓周上.

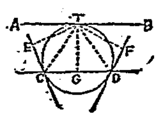
證 連結AC, BD, 則CA'爲OA之垂直二等分線, 故 $C\hat{A}O = X\hat{O}Y =$



$C\hat{E}D = O\hat{B}D$, 故過C, A, D之圓又過B, E.

186. 有二平行線AB, CD, 又AB上有一定點T, 切AB於T之任意之圓, 與CD之交點爲C, D, 於C, D, 引此圓之切線, 則此切線恆切於一定圓.

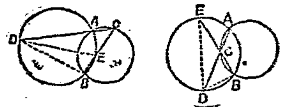
證 圓CDT於C, D, 之切線爲CE, DF, 自T引CD, CE, DF, 之垂線TG, TE, TF, 連結TC, TD, 則 $T\hat{C}D$



$= T\hat{D}C = T\hat{C}E$, 因 △TCE≡△TCG, 因而TE=TG=定長, 同樣TF=TG=定長 故切線CE, DF, 恆切於T爲中心TG爲半徑之圓.

187. A, B, 爲二圓之交點, 過一圓周上之一點C, 引直線CAD, CEB, 使交他圓周於D, E, 則弧DE之大爲一定.

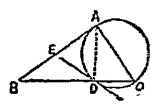
證 連結DE, DB, 則 $B\hat{C}A$, $A\hat{D}B$, 皆爲



一定, 故 $C\hat{B}D$ 爲一定之大, 因而弧ED爲一定之大.

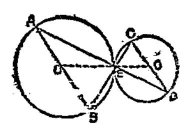
188. 有直三角形以夾直角之一邊爲徑畫圓, 則於此圓與斜邊之交點作切線, 必過他邊之中點.

證 將 $\hat{A}=\hat{R}$ 之 △ABC之邊AC爲徑畫圓, 與BC之交點爲D, 於D之切線, 與AB之交點爲E, 連結AD, 則△DAB爲直角三角形, 又 $\hat{A} = \hat{R}$, 故BA切圓ADC, 因而EA=DE, 故 $E\hat{A}D = E\hat{D}A$, 故 $\hat{B} = E\hat{D}B$, 故BE=ED, 即E爲AB之中點.



189. 二圓外切於點E, AB, CD, 平行且爲各圓之徑, 則直線AD, BC, 相交於點E.

證 二圓之中心爲O, O', 連結AE, ED, 引中心線OO', 則 $A\hat{O}E = D\hat{O'}E$, 故二個二等邊三角形OAE, O'DE.

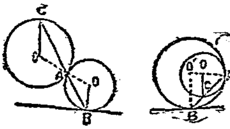


爲等角, 故 $O\hat{E}A = O'\hat{E}D$, 故AE, ED, 爲

同一直線，同樣 CE, EB 爲一直線，即 AD, BC, 於點 E 相交.

190. 有切已知圓與已知直線之圓，其垂直於已知直線之已知圓徑之一端，與二切點在同一之直線上.

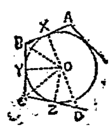
圖 已知圓之中心爲 O, 切已知圓與已知直線之圓爲 O′, 其切點爲 A, B, 垂直於已知直線之已知圓徑之一端



爲 C, 連結 CA, BA, OO′, O′B, 則因二等邊三角形 OAC, O′AB, 之頂角相等，故底角之 $O\hat{A}C=O'\hat{A}B$, 故 CA, BA, 爲同一之直線，即 A, B, C, 在同一之直線上.

191. 邊數爲奇數之外接等邊多角形，必爲正多角形.

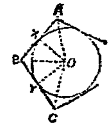
圖 外切中心 O 之圓之等邊多角形爲 ABC………, 其各邊之切點爲 X, Y, Z, ……, 今連結 OX, OB, OY, OC, OZ, OD, …………, 則



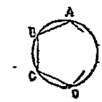
CD=BC, CY=CZ, 故 BY=DZ, 故 △OBX≡△OBY≡△ODZ≡………, 因而 $O\hat{D}Z=O\hat{B}Y=$………, 故 $\hat{B}=\hat{D}=$……, 即每間一角之角相等，故邊數爲奇數，則各角當相等，故 ABCD…, 爲正多角形.

192. 等角多角形之外切於圓者，爲正多角形. 又內接者，邊爲奇數，則爲正多角形.

圖 外切於中心 O 之圓之等角多角形，爲 ABC………, 將其切點 X, Y, …… 及其頂點 A, B, …… 連結於中



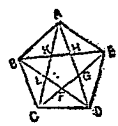
心 O, 則因 $O\hat{A}X=\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{B}=OBX=$…, 故 △OAX≡△OBX≡△OBY≡△OCY≡………, 故 AX=BX=BY=CY=………, 故 AB=BC=………, 故 ABCD…… 爲正多角形. 次於內接於圓之等角多角形 ABC……, 則因 $\hat{B}=\hat{C}$, 故弧 ADC=弧 BAD, 自雙方減去共同之弧，而得弧 CD=弧 AB, 故多角形之邊 AB, 等於 CD. 同樣每間一邊之



邊相等，故邊數爲奇數，則諸邊皆相等，故此多角形若邊數爲奇數，則爲正多角形.

193. 正五角形之五對角線之五角形，爲正五角形.

圖 正五角形 ABCDE 之五對角，所成之五角形，爲 FGHKL, 則 △AKB, △BLC, △CFD, △DGE, △EHA, 皆爲全等之二等邊

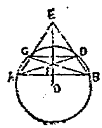


三角形明矣，[149 題]，故 $\hat{F}=\hat{G}=\hat{H}=\hat{K}=\hat{L}$, 故 FGHKL 爲等角五角形. 次因 AK=BK=BL=CL=CF=DF=DG

=EG=EH=AH,是五對角線AC, AD, BD, BE, CE, 皆相等明矣, 故EGHKL, 爲等邊五角形爲正五角形.

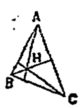
194. AB及CD爲圓之二弦,而AB∥CD, 則AC及BD,又AD及BC,皆相交於垂直於AB及BD之徑,或其延線上,且與此徑成相等角. 若AB=CD則如何.

圖 因AB∥CD, 故弧AC=弧BD, 又弧AD=弧BC, 因而$\hat{EAB}=\hat{EBA}$, 故△EAB爲二等邊, 又$\hat{ABC}=\hat{BAD}$, 故△FAB爲二等邊, 因而連接EF之直線,爲AB之垂直二等分線[14題]. 故EF過圓之中心O, 且垂直於平行AB之CD, 因知EF爲$\hat{E}$, $\hat{F}$, 之二等分線, 即AC, BD, 及AD, BC,於垂直於AB, CD, 之徑EFO上相交,且與EFO成相等角,若AB, CD, 相等,則AD, BC,於垂直於AB, CD之徑上相交, 且與此徑成相等角, 而AC, BD,則皆平行於垂直於AB, CD之徑.



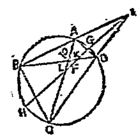
195. 將三角之各邊爲弦,畫圓之弓形於內方, 使各弓形之角爲對於其弦之角之補角,則(1)各弓形之弧,過同一之點. (2)各弓形之圓周相等. (3)弓形之二共同弦,垂直於三角形之對邊.

圖 (1)將△ABC之邊BC, CA, 爲弦畫含$\hat{A}$, $\hat{B}$, 之補角之弓形之弧,其交點爲H, 則因$\hat{BHC}+\hat{A}=2\hat{R}$, $\hat{CHA}+\hat{B}=2\hat{R}$, 故$\hat{AHB}+\hat{C}=2\hat{R}$ 明矣, 故將AB爲弦,含$\hat{C}$之補角之圓弧過點H. (2) 圓BHC與圓ABC, 因$\hat{BHC}+\hat{A}=2\hat{R}$, 故相等. 同樣圓CHA, AHB, 亦等於圓ABC, 故圓周BHC≡圓周CHA≡圓周AHB≡圓周ABC. (3) 自前條之結果, $\hat{CBH}=\hat{CAH}$, 故$\hat{AHB}=\hat{C}+2\hat{CAH}=2\hat{R}-\hat{C}$, 故$\hat{C}+\hat{CAH}=\hat{R}$, 故AH⊥BC.



196 圓內接四邊形, 過其對角線之交點, 垂直於二對邊交角之二等分線引直線,此直線二等分對角線之交角.

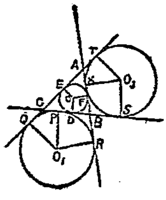
圖 圓內接四邊形ABCD,其對角AC, BD, 之交點爲O, 二對邊BA, CD, 之延線之交角爲BEC, 二等分此角之直線,與圓周及對角線AC, BD之交點,爲G, H, L, K, 自O引直線EH之垂線OF,則弧BH∼弧AG=弧CH∼弧DG, 故弧BH+弧DG=弧CH+弧AG, 故$\hat{OLK}=\hat{OKL}$, 故OE二等分$\hat{COD}$.



197. △ABC其A_e爲自A至邊b之延線上傍切圓切點之距離. A_i爲自A至邊b上內切圓切點之距離. A_b, A_c爲自A至邊b, c, 上傍切圓切點之距離. 其他同樣記之,則得次之結果.

$A_e=B_e=C_e=s$, 但$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. $A_i=B_c=C_b=s-a$, $B_i=C_a=A_c=s-b$, $C_i=A_b=B_a=s-c$.

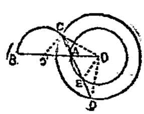
圖 △ABC 之內切圓爲O,傍切圓爲O_1, O_3,切於邊a, b, c,之點爲D, E, F, P, Q, R, S, T, X,則AQ+AR=AC+CQ+AB+BR



=AC+CP+AB+BP=AC+CB+AB=$a+b+c$,故$A_a=s$,同樣$B_b=C_c=s$,次因AE=AF, CE=CD, BD=BF,故AE=AF=$\frac{1}{2}(b+c-a)$,即$A_i=s-a$又BX=BS=$s-a$,即$B_c=s-a$,故$A_i=B_c=C_b=s-a$,同樣$B_i=C_a=A_c=s-b$, $C_i=A_b=B_a=s-c$.

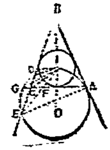
198. 自二同心圓之中心,引任意直線OB,使與內圓交於A,且OB等於OA之三倍,將AB爲徑畫半圓,截外圓於C,則外圓之弦CAD,被內圓周三等分之.

圖 外圓之弦CAD,與內圓再交之點爲E, BA之中點爲O′,連接O′C,OE,OC,OD,則一邊與底角相等之二等邊三角形之△ACO′≡△AEO,故△OCE≡△ODA,故CA=AE, CE=DA,故CA=AE=ED.



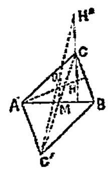
199. 過△ABC之頂點A,與內心I,且切邊AB於A之圓周,與BC及其延線之交點爲D, E,則IC爲$D\hat{I}E$之二等分線.

圖 過I切AB於A之圓,其中心爲O,圓周O切AC之點爲G,連結AI, IG,則$I\hat{A}G=\frac{1}{2}\hat{A}$, $A\hat{G}I=B\hat{A}I=\frac{1}{2}\hat{A}$,故弧AI=弧IG,故弧AI+弧GE=弧IE,因而$A\hat{F}I$以$\frac{1}{2}$弧IE測度之,又$I\hat{D}B=I\hat{A}E$以$\frac{1}{2}$弧IE測度之,故$A\hat{F}I=I\hat{D}B$,又IC爲$\hat{C}$之二等分線,故$I\hat{C}F=I\hat{C}D$,因而$I\hat{C}F\sim I\hat{F}A=I\hat{C}D\sim I\hat{D}B$,即$C\hat{I}F=C\hat{I}D$.



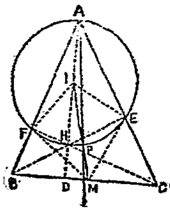
200. △ABC之垂心,對於一角頂C之對稱點爲H′,三角形之外心爲O,將CA, CB,爲二邊,而作平行四邊形,其他一角頂爲C′,則H′, O, C′,在同一之直線上.

圖 垂心爲H,其關於C之對稱點爲H′,外心爲O,則AB之中點M,又爲CC′之中點,而OM∥CH,且依125題,而OM=$\frac{1}{2}$CH=$\frac{1}{2}$CH′,故O爲C′H′之中點明矣,即C′, O, H′,三點同在一直線上.



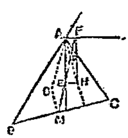
201. 三角形底邊之中點,與頂角二等分線上垂心之正射影,與九點圓之中心,在同一之直線上.

圖 自△ABC之各角頂,向對邊引垂線,爲AD, BE, CF,垂心爲H, BC及AH之中點爲M, I, IM與AH爲徑之圓之交點爲P,連結IE, IF, ME, MF, AP, 則 EI=FI, EM =FM=$\frac{1}{2}$BC, 故 △MEI≡MFI, 因而 $M\hat{I}E=M\hat{I}F$, 故其半分之 $E\hat{A}P=F\hat{A}P$, 卽 AP 爲 $\hat{A}$ 之二等分線, 而因 $H\hat{P}A=\hat{R}$, 故 P 爲 H 在 $\hat{A}$ 之二等分線上之正射影. 次因九點圓爲四邊形 MEIF 之外接圓, 且 $M\hat{E}I=M\hat{F}I=\hat{R}$, 故九點圓之中心, 在直線 IM 上, 卽九點圓之中心, 底 BC 之中點及 $\hat{A}$ 之二等分線上垂心之正射影, 在同一之直線上.



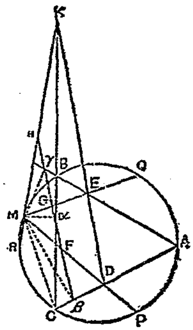
202. △ABC 之 A 之內二等分線上及外二等分線上, 自垂心作其垂線, 則其趾與 BC 之中點, 在同一之直線上.

證 垂心爲 H, 外心爲 O, 自 O 向 BC 引垂線 OM, 則 M 爲 BC 之中點, 而 OM=$\frac{1}{2}$AH. 今連結 AH 之中點 D 與 M 之直線爲 DM, DM 與 $\hat{A}$ 之內外二等分線之交點爲 E, F, 則 AOMD 爲平行四邊形, 而 $\hat{A}$ 之內二等分線 AE, 明爲 $O\hat{A}H$ 之二等分線, 故 $D\hat{A}E=O\hat{A}E=A\hat{E}D$, 因而 ED=AD=DH, 故連結 HE, 則 HE 垂直於 AE. 同樣連結 HF, 則 HF 垂直於 $\hat{A}$ 之外二等分線 AΓ, 卽自 H 向 $\hat{A}$ 內外二等分線引垂線, 其趾 E, Γ, 與 BC 之中點 M, 在同一之直線上.

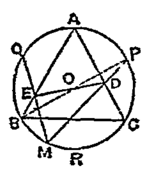


203. 將等邊三角形 ABC 外接圓周上一點 M, 連結對各邊之弧之中點, 引三直線, 與其邊之交點, 在 △ABC 關於 M 之西母生線之平行線上.

證 弧 AC, AB, BC, 之中點爲 P, Q, R, MP, MQ, MR, 之與 AC, AB, BC, 之交點爲 D, E, K, 關於點 M 之西母生線爲 $\beta\alpha\gamma$, 連結 MC, 則 β, α, 在 MC 爲徑之圓周上, 故 $A\hat{\beta}\alpha=\alpha\hat{M}C=M\hat{C}B$ 之餘角, 但因弧 BP 等於半圓周, 故 $A\hat{\beta}\alpha$ 以 $\frac{1}{2}$ 弧 MP 測度之, 又 $M\hat{D}C$ 以 $\frac{1}{2}$(弧 MC+弧 AP) 測度之, 而弧 AP=弧 CP, 故 $M\hat{D}C$ 以 $\frac{1}{2}$ 弧 MP 測度之, 故 $A\hat{\beta}\alpha=M\hat{D}C$, 但因 M$\beta$D 爲直角三角形, 故 $D\hat{M}\beta=F\hat{\beta}M$, 因而 βF=MF=DF, 同樣 EM 及 KM, 與 $\beta\alpha\gamma$ 之交點 G, H, 各爲 EM, KM, 之中點, 故 $\beta\alpha\gamma$ 平行於 DEK.



別證 O 爲正三角形 ABC 之外心, 則 O 又爲 △ABC 之垂心, P 爲弧 AC 之中點, 故弧 BCP 爲半圓周, 故 BP 爲徑而過中心, 因而 BP 垂直於

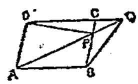


AC, 故OD平行於點M之西母生線[161題別證], 同樣CQ過O且垂直於AB, 故OE平行於M之西母生線. 又MR之延線與BC之延線之交點K與O連結之直線, 亦平行於西母生線. 故三點D, F, K, 在平行於M之西母生線之直線上.

面　　積

204. 過平行四邊形ABCD之頂點A, 引任意之直線與BC, CD, 或其延線之交點爲P, Q, 則二三角形ABQ, ADP, 爲等積.

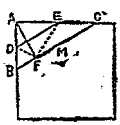
證 $\triangle ABQ=\frac{1}{2}$▱ABCD, $\triangle ADP=$



$\frac{1}{2}$▱ABCD, 故$\triangle ABQ=\triangle ADP$.

205. 將正方形之紙, 折其一隅, 又再折之, 但二折縫平行, 且所折之隅, 在第二折縫之上, 則第一折縫截開之三角形, 爲二折縫間面積三分之一.

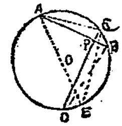
證 於正方形之一頂角A, 折其隅, 所生之三角形爲ADE, 再折之, 其折縫爲BC, △ADF與△FDE



爲重合者, 是則△ADE≡△FDE, 今若BC之中點爲M, 則因AD=DB, 故DMCE明爲平行四邊形, 因而△DFE=△MDE=△EMC=△DMB, 故△ADE$=\frac{1}{3}$圖形DBCE.

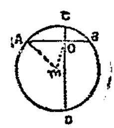
206. 圓之弦AB, CD, 互爲垂直, 相交於P, 則$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=$徑^2.

證 立於弧CB＋弧AD上之周角爲直角, 又引徑AOE, 則立於弧AE卽弧AD＋弧DE上之周角爲直角, 故弧DE＝弧CB因而弧EC＝弧DB, 故弦CE＝弦BD, 但$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AC}^2$, $\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=\overline{BD}^2=\overline{CE}^2$, 故$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AC}^2+\overline{CE}^2=\overline{AE}^2$.



207. AB, CD, 爲直角相交於O之弦, 則$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=8\overline{AM}^2=4\overline{OM}^2$, 但M爲圓之中心, 試證之.

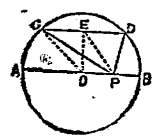
證 $\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{OB}^2+2AO.BO=\overline{AO}^2+\overline{OB}^2+2\overline{AM}^2-2\overline{OM}^2$. 同樣$\overline{CD}^2=\overline{CO}^2+\overline{OD}^2+2\overline{AM}^2-2\overline{OM}^2$, 故$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2+\overline{DO}^2+4\overline{AM}^2-4\overline{OM}^2=$徑$^2+4\overline{AM}^2-4\overline{OM}^2$[206題]$=8\overline{AM}^2-4\overline{OM}^2$.



208. 自圓徑AB上任意一點P, 連結平行此徑之弦CD之兩端, 則$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$.

證 自圓之中心O, 引CD之垂線OE, 則E爲CD之中點,

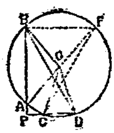
故　$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=2\overline{PE}^2+2\overline{CE}^2=2\overline{OP}^2+2\overline{OE}^2+2\overline{CE}^2=2\overline{OP}^2+2\overline{CO}^2$, 又



$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{(AO+OP)}^2+\overline{(AO-OP)}^2$
$=2\overline{AO}^2+2\overline{OP}^2$,故$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2$
$+\overline{BP}^2$.

209. 有直角相交之二割線PAB, PCD, 今將此割線與圓之交點A, C, 及B, D, 連結中心O, 則$\triangle AOC$, $\triangle BOD$, 爲等積.

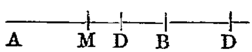
圖 AO之延線,與圓周再相交之點爲F, 則因 $A\hat{B}F=\hat{R}$, 故 BF∥CD, 故 弧BC=弧DF, 故弧BCD=弧



FDC, 因而$B\hat{O}D=C\hat{O}F$, 故$\triangle OBD\equiv\triangle OCF$. 但 $\triangle AOC$, $\triangle OCF$, 因 AO=OF, 故爲等積, 故$\triangle OBD$與$\triangle AOC$爲等積.

210. 一有限直線內分或外分, 則其二部分所包矩形, 等於其直線半分上之正方形, 與其中點分點間上之正方形之差.

圖 一有限直線AB之中點爲M, 將



AB於D內內分或分之, 則 AD.BD = (AM+MD)(AM∼MD)=$AM^2\sim MD^2$.

211. 一有限直線內分或外分之, 則其二部分上正方形之和, 等於其直線半分上之正方形, 與其中點分點間上之正方形之和之二倍.

圖 $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AM+MD}^2+\overline{AM\sim MD}^2$
$=2\overline{AM}^2+2\overline{MD}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MD}^2)$.

[參照前題之圖].

圖 本題可於阿波羅尼阿斯之定理, 卽[三角形二邊上正方形之和, 等於第三邊半分上正方形與同第三邊之中線正方形之和之二倍]. 看做頂點在底邊上之特別者.

212. 若四點A, B, C, D, 依此次序在一直線上, 則矩形AC.BD等於矩形AB.CD及矩形BC.AD之和. [此謂之俄伊列羅(Eulea)之定理].

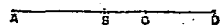
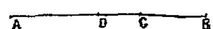


圖 AC.BD=(AD−CD)(BC+CD)
=AD.BC−BC.CD+CD(AD−CD)
=AD.BC−BC.CD+CD(AB+BC)
=AD.BC−BC.CD+CD.AB+BC.CD
=AD.BC+CD.AB.

213. 將直線AB二等分之於D, 又不等內分於C, 則AC及BC上正方形之和, 大於AC.BC之二倍者, 爲CD上正方形之四倍.

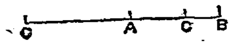
圖 $2AC.BC+4\overline{CD}^2=2(AD+CD)(AD-DC)+4\overline{CD}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$.



又 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AD+CD}^2+\overline{AD-CD}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$, 故 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2AC.BC+4\overline{CD}^2$.

214. 將有限直線AB, 分爲外中比, 其大部爲AC, 則$3\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$.

圖 內分者爲

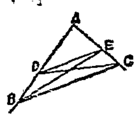


$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC+BC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+2AC.BC+2\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+2BC.AB=3\overline{AC}^2$. 又外分者爲 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{BC-AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-2AC.BC+2\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+2BC(BC-AC)=3\overline{AC}^2$.

215. 直三角形ABC,平行其斜邊BC之直線DE,在二邊之間,則 $\overline{CD}^2+\overline{BE}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$.

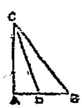
「平行」一語有何意義?

圖 $\overline{CD}^2+\overline{BE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2+\overline{AE}^2+\overline{AB}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$.



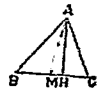
216. 自直三角形銳角之頂點,過對邊之中點引直線,則此直線上正方形,等於自斜邊上正方形,減二等分邊之半分上正方形之三倍.

圖 直角三角形ABC之邊AB之中點爲D,則 $\overline{CD}^2=\overline{CA}^2+\overline{AD}^2$,但 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$,且 $4\overline{AD}^2=\overline{AB}^2$,故 $\overline{BC}^2-4\overline{AD}^2=\overline{CA}^2$,或 $\overline{BC}^2-3\overline{AD}^2=\overline{CA}^2+\overline{AD}^2$, ∴ $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2-3\overline{AD}^2$.



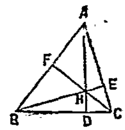
217. 三角形二邊之和及差所包之矩形,等於底邊中點與垂趾間之部分,及底邊所包矩形之二倍.

圖 △ABC之底邊BC之中點爲M,自頂點A向BC引垂線其趾爲H,則$(AB+AC)(AB\sim AC)=\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BH}^2\sim\overline{CH}^2=(BH+CH)(BH\sim CH)=BC.2MH=2BC.MH$.



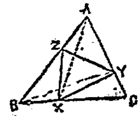
218. 三角形之各垂線,自垂心分爲二部分,其各二部分所包之矩形相等.

圖 自△ABC之各角頂,向對邊引垂線AD, BE, CF,其垂心爲H,因 $B\hat{E}C=\hat{R}$, $B\hat{F}C=\hat{R}$,故E, F,在BC爲徑之圓周上,故BH.EH=CH.FH,同樣BH.EH=AH.DH,故AH.HD=BH.HE=CH.HF.



219. 於△ABC之BC上取X,於CA上取Y,於AB上取Z,使$BX=\frac{1}{3}BC$, $CY=\frac{1}{3}CA$, $AZ=\frac{1}{3}AB$,則ΔXYZ之面積試以△ABC之面積表之.

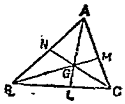
圖 連結AX,則$\triangle ABX=\frac{1}{3}ABC$, △BXZ=2△AXZ,故$\triangle BXZ=\frac{2}{3}\triangle ABX$,故$\triangle BXZ=\frac{2}{9}\triangle ABC$,同樣$\triangle CXY=\triangle AYX=\frac{2}{9}\triangle ABC$,故$\triangle BXZ+\triangle CXY+\triangle AYX=\frac{2}{3}\triangle ABC$,因而三角形$XYZ=\frac{1}{3}\triangle ABC$.



220. 三角形之中線,分面積爲六等分.

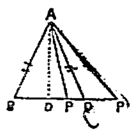
圖 △ABC之三中線爲AL, BM, CN

其交點為G, 則$\frac{1}{2}\triangle AGB=\triangle BGL=\triangle CGL=\triangle AGN=\triangle BGN$, 又$\frac{1}{2}\triangle AGC=\triangle CGL=\triangle BGL=\triangle AGM=\triangle CGM$. 故$\triangle BGL$, $\triangle CGL$, $\triangle CGM$, $\triangle AGM$, $\triangle AGN$, $\triangle BGN$相等.



221. 於二等邊三角形之底邊BC上, 取任意一點P, 則$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$. 若點P在BC之延線上, 則$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=BP.CP$.

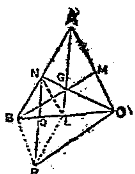
證 P在BC上, 自A向底BC引高AD, 則



$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=\overline{BD}^2-\overline{DP}^2=(BD+DP)(BD-DP)=BP.CP$. 次若P在BC之延線上, 則$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=\overline{DP}^2-\overline{BD}^2=(DP+BD)(DP-BD)=BP.CP$.

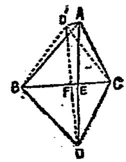
222. 以三角形三中線為三邊之三角形面積為三角形面積四分之三.

證 $\triangle ABC$之三中線為AL, BM, CN, 其交點為G, 今自N引AL之平行線NQ, 與BD之交點為Q, 於NQ之延線上取點P, 使QP=NQ, 則$\triangle PCN$為$\triangle ABC$三中線為三邊之三角形, [69題]. 而PL之L為BC之中點, 且PL∥AB, 故PL之延線,過CN之中點,因而CQ, PL之交點L, 為$\triangle PCN$之重心, 但將重心連結各角頂之直線, 三等分三角形[參照220題], 因而$\triangle NCL=\frac{1}{3}\triangle PCM$, 而$\triangle NCL=\frac{1}{2}\triangle BCN=\frac{1}{4}\triangle ABC$, 故$\triangle PCN=\frac{3}{4}\triangle ABC$.



223. 二三角形在同底之異傍, (1)若三角形互為等積, 則連結頂點之直線, 二等分其底. (2)若連結頂點之直線二等分其底, 則三角形互為等積.

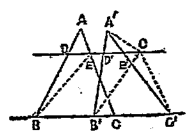
證 (1) $\triangle ABC$, $\triangle DBC$, 互為等積, 自B,C作CB,BD之平行線,其交點為D′, 則BDCD′為平行四邊形. 故$\triangle DBC\equiv\triangle D'BC$, DF=D′F, 連結D′A, 則因$\triangle ABC=\triangle D'BC$, 故D′A平行於BC,而BD過DD′之中點F, 故AE=DE.



(2)AD被BC二等分於E,與前同樣,作$\triangle D'BC$, 連結D′D則F為DD′之中點, 故BC平行英AD′, 故$\triangle ABC$, $\triangle D'BC$, 同底等高, 因而等積, 但$\triangle D'BC\equiv\triangle DBC$, 故$\triangle DBC=\triangle ABC$.

224. 同底邊[或同一直線上之相等底邊]同傍同高之二三角形, 其邊[或其延線]截取平行底邊之直線之部分相等.

證 三角形ABC, A′B′C′等高, 其底邊BC, B′C′, 在同一直線上且相等, 今將平行於BC之直線DED′E′, 被$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C$, 之各二邊, 截取



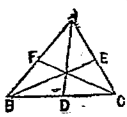
之部分，爲 DE, D'E'，若 DE>D'E'，則取 DE=D'O 之點 O，連結 OA', OB', OC', BE，則因 △ADE=△A'D'O，△DBE=△D'B'O，△EBC=△OB'C'，故 △ABC=A'B'C'O，但 △ABC=△A'B'C'，故 O 不可不與 E' 合，即 DE=D'E'. 平行於底邊之直線，與二三角形底邊之延線相交時，亦同樣.

225. 自正三角形之一頂點，向對邊引垂線，其垂線上之正方形，等於其邊之半分上正方形之三倍.

圖 正三角形 ABC 之高爲 AD，則 D 爲 BC 之中點，而 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=3\overline{BD}^2$.

226. 三角形之邊上正方形之和之三倍，等於中線上正方形之和之四倍.

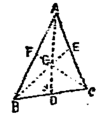
圖 △ABC 之三中線爲 AD, BE, CF，則 $2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$，$2\overline{BE}^2+2\overline{CE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$，



$2\overline{CF}^2+2\overline{AF}^2=\overline{CA}^2+\overline{BC}^2$，故 $2(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)-2(\overline{BD}^2+\overline{CE}^2+\overline{AF}^2)$，取兩邊之二倍，則 $4\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$，$4\overline{CE}^2=\overline{CA}^2$，$4\overline{AF}^2=\overline{AB}^2$ 故 $4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$.

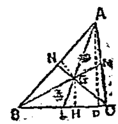
227. ΔABC 之重心爲 G，則 (1) $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$. (2) $\overline{BC}^2+3\overline{AG}^2=\overline{AC}^2+3\overline{BG}^2=\overline{AB}^2+3\overline{CG}^2$.

圖 (1) ΔABC 各邊之中點爲 D, E, F，則 $\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2\overline{GD}^2+2\overline{BD}^2$，$\overline{CG}^2+\overline{AG}^2=2\overline{GE}^2+2\overline{CE}^2$，$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2=2\overline{GF}^2+2\overline{AF}^2$，故



$4(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)=4(\overline{GD}^2+\overline{GE}^2+\overline{GF}^2)+4(\overline{BD}^2+\overline{CE}^2+\overline{AF}^2)=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$，因而 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$.

(2) ΔABC 之三中線爲 AL, BM, CN，自 A, G 引 BC 之垂線 AD, GH，即 LD=3LH 明矣.

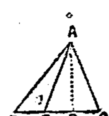


$\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BD}^2\sim\overline{CD}^2=2BC.LD=6BC.LH$.

又 $\overline{BG}^2\sim\overline{CG}^2=\overline{BH}^2\sim\overline{CH}^2=2BC.LH$，因而 $\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=3(\overline{BG}^2\sim\overline{CG}^2)$，或 $\overline{AB}^2+3\overline{CG}^2=\overline{AC}^2+3\overline{BG}^2$，同樣 $\overline{BC}^2+3\overline{AG}^2=\overline{AC}^2+3\overline{BG}^2$，故 $\overline{BC}^2+3\overline{AG}^2=\overline{AC}^2+3\overline{BG}^2=\overline{AB}^2+3\overline{CG}^2$.

228. P 爲三角形 ABC 之邊 BC 上之一點，CP 等於 BP 之二倍，則 AB 上正方形之二倍，與 AC 上正方形之和，等於 BP 上正方形之六倍，與 AP 上正方形之三倍之和.

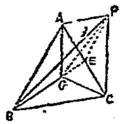
圖 PC 之中點爲 Q，連結 AQ 則 $2(\overline{AB}^2+\overline{AQ}^2)=4\overline{AP}^2+4\overline{BP}^2$.



又 $\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{BP}^2$，故 $=2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{AP}^2+6\overline{BR}^2$.

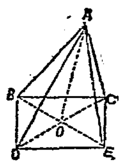
229. 自任意一點,至三角形各角頂引直線,其上正方形之和,等於自重心至角頂所引直線上正方形之和,加其點至重心所引直線上正方形之三倍.

證 △ABC之重心爲G, 邊AC之中點爲E,則 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=2\overline{PE}^2+2\overline{AE}^2$, 又依前題 $2\overline{PE}^2+\overline{BP}^2=3\overline{PG}^2+6\overline{GE}^2$, 故 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=3\overline{PG}^2+4\overline{GE}^2+2\overline{GE}^2+2\overline{AE}^2=3\overline{PG}^2+\overline{BG}^2+\overline{AG}^2+\overline{CG}^2$.



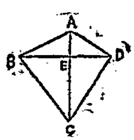
230. 於△ABC之邊BC上,畫任意之矩形,則 $\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{AB}^2$.

證 BE, CD之交點爲O, 連結AO則 $\overline{DA}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{CO}^2$, 同樣 $\overline{EA}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{BO}^2$. 但BDEC爲矩形, 故BO=CO, 因而 $\overline{DA}^2+\overline{AC}^2=\overline{EA}^2+\overline{AB}^2$.



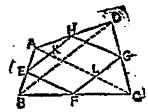
231. 四邊形之對角線,互爲垂直,則一雙相對邊上正方形之和,等於他一雙邊上正方形之和.

證 四邊形ABCD對角線之交點爲E, 則 $\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{PE}^2$, $\overline{CD}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2$, 故 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2$. 同樣 $\overline{BC}^2+\overline{DA}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2$, 因而 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$.



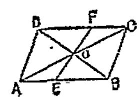
232. 將四邊形之各邊二等分之,次第連結其分點,所生之平行四邊形,與原形之半分等積.

證 四邊形ABCD各邊之中點, 爲E, F, G, H, 次第連結之, 所生之平行四邊形, 其二邊EH, FG, 與對角線AC之交點爲K, L,則因E, F, 爲AB, BC,之中點,故平行四邊形EFLK之底及高,等於△ABC之底及高之半分, 故 ▱EFLK$=\frac{1}{2}$△ABC, 同樣 ▱HGLK$=\frac{1}{2}$△DAC, 因而 ▱EFGH$=\frac{1}{2}$ABCD.



233. 過平行四邊形對角線之交點,引任意直線,分本形爲二等分.

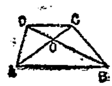
證 過平行四邊形ABCD對角線之交點O, 引任意直線EF. 則 △OAD≡△OBC, △ODF≡△OBE, △OAE≡△OCF, 明矣 故圖形AEFD=圖形BEFC.



註 依本題於過一點之直線,二等分平行四邊形之作圖題, 可連結其點與對角線之交點,以解之.

234. 四邊形以對角線分爲四個三角形,其一雙相對之二三角形相等,則相對一雙之邊必平行.

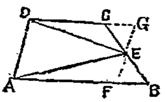
證 四邊形ABCD以其對角線分爲四個三角形OAB, OBC, OCD, ODA,若其△ODA=△OBC,則於雙方加



$\triangle OAB$, 而 $\triangle DAB=\triangle CAB$, 故 $AB \parallel CD$.

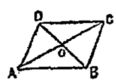
235. 將梯形不平行二邊之一爲底,對邊之中點爲頂點之三角形,等於梯形之半分.

圖 梯形ABCD,其不平行二邊之一BC之中點爲E,過E平行於AD引直線FG,與AB交於F,與BC之延線交於G,則平行四邊形AFGD,等於梯形ABCD明矣,但$\triangle EAD=\frac{1}{2}$▱AFGD, 故 $\triangle EAD=\frac{1}{2}$梯形ABCD.



236. 平行四邊形之邊上正方形之和,等於其對角線上正方形之和.

圖 平行四邊形ABCD之對角線之交點爲O, 則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{OB}^2+2\overline{AO}^2$, $\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{OD}^2=2\overline{AO}^2$, 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{OB}^2+4\overline{OA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.

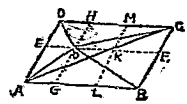


237. 自平行四邊形ABCD各頂點,如圖引直線AE, CF, CG, DH, 使AE=DH, BF=CG, 則面積M+N=P+Q.

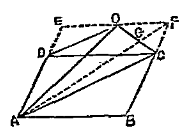
圖 因DH=AE,故自E引平行於DH之直線,而知$D\hat{H}A=E\hat{A}H$, 故自$\triangle DHA\equiv\triangle EAH$, 而知DA=EH. 同樣FG=BC, 因而EH=FG, 又因$EF \parallel HG$, 故知$\triangle EFG\equiv\triangle EHG$, 因而四邊形EHGF爲平行四邊形,故EF=HG,但AB=CD,因而AEFB, CGHD,以同高而等積,故兩形減去共同之部分,而M+N=P+Q.

238. ABCD爲平行四邊形,O爲形內之一點,則(1) $\triangle AOB+\triangle COD=\frac{1}{2}$▱ABCD, (2) $\triangle AOC=\triangle AOD\sim\triangle AOB$. 若O在平行四邊形外,則如何.

圖 (1)過O引AB之平行線EF,則因$\triangle AOB=\frac{1}{2}$▱ABFE, $\triangle COD=\frac{1}{2}$▱CDEF, 故 $\triangle AOB+\triangle COD=\frac{1}{2}$▱ABCD.

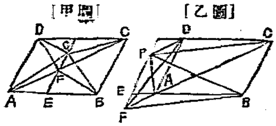


(2) EF與AC之交點爲K, 過O, K, 引DA之平行線GH, LM, 則$\triangle AOC=\frac{1}{2}\times$(▱HK+▱GK)$=\frac{1}{2}$▱HL, 又$\triangle AOD\sim\triangle AOB=\frac{1}{2}$(▱AH∼▱AF)$=\frac{1}{2}$(▱EH∼▱GF),但▱EM=▱LF, 故$\frac{1}{2}$(▱EH∼▱GF)$=\frac{1}{2}$(▱EM∼▱MO)$\sim\frac{1}{2}\times$(▱GK+▱LF)$=\frac{1}{2}$▱HL, 故$\triangle AOC=\triangle AOD\sim\triangle AOB$. 次若O在平行四邊形外,則(1) $\triangle AOB\sim\triangle COD=\frac{1}{2}$▱ABCD明矣. 又(2) $\triangle AOD\sim\triangle AOB=\triangle AOD\sim(\triangle AOE+\triangle BOF)=\triangle DOE+\triangle BOF=\triangle DOE+\triangle AOF=\triangle DOE+\triangle FOG+\triangle AOG=\triangle AGC+\triangle AOG=\triangle AOC$. [$\triangle DOE$



$+\Delta FOG=\Delta AGC$ 者, 因 $\Delta DEO+\Delta OCF=\frac{1}{2}\,▱CDEF=\Delta ACF$ 故也.]

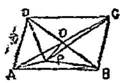
證　取O於形內[甲圖], 平行於AD



引OE, 使截AB, AC於點E, F, 連結DF, BF, 則 $\Delta AOD=\Delta DFA=\Delta ABF$, 而 $\Delta OCF=\Delta OBF$, 故 $\Delta OAC=\Delta OAF+\Delta OCF=\Delta OAF+\Delta OBF=\Delta AOB\sim\Delta AOD$. 若O在形外[乙圖], 則 $\Delta AOC=\Delta OFC-\Delta OAF=\Delta OBF-\Delta AOF=\Delta AOB+\Delta AOD$.

239.　將四邊形ABCD之對角線之交點爲O, P爲ΔAOB內一之點, 則 $\Delta CPD-\Delta APB=\Delta APC+\Delta BPD$.

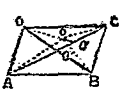
證　連結OP則 $\Delta CPD-(\Delta APC+\Delta BPD)=\Delta OCD-(\Delta BPO+\Delta APO)=\Delta OAB-(\Delta BPO+\Delta APO)=\Delta APB$.



因而 $\Delta CPD-\Delta APB=\Delta APC+\Delta BPD$.

240.　將四邊形內一點, 連結四角頂所得三角形, 皆爲等積, 則四邊形爲平形四邊形, 其點爲此平行四邊形對角線之交點.

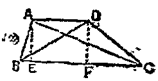
證　將四邊形ABCD內一點O, 連結各角頂作ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA, $\Delta OAB=\Delta OBC=\Delta OCD=\Delta ODA$, 連結AC之直線, 與DO, BO, 或其延線之交點爲O′, O″,



則因ΔOAD, ΔOCD爲等積, 在同底邊OD之上, 且在OO′之異傍, 故O′爲AC之中點, 同樣O″亦爲AC之中點. 故O′, O″, 同在AC之中點, 因而O不可不爲AC之中點, 因而O又不可不爲BD之中點, 故O爲AC, BD, 之交點, 卽對角線共同之中點, 因而ABCD爲平行四邊形, 而O爲其對角線之交點.

241.　梯形二對角線上正方之和, 等於加不平行二邊之正方形之和, 於平行二邊所包矩形之二倍.

證　自梯形ABCD二角頂A, D作BC之垂線AE, DF, 則EF=AD, 而 $\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=\overline{AE}^2+\overline{EF+CF}^2=\overline{AE}^2+\overline{EF}^2+\overline{CF}^2+2EF.CF$,

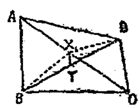


同樣 $\overline{BD}^2=\overline{DF}^2+\overline{EF}^2+\overline{BE}^2+2EF.BE$.　故

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2EF(EF+CF+BE)=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2AD.BC$.

242.　四邊形之邊上正方之和, 大於其對角線上正方形之和者, 爲對角線中連結線上正方形之四倍.

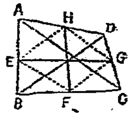
證　四邊形ABCD之對角線AC, BD, 之中點爲X, Y, 連結BX, DX, 則



$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BX}^2+2\overline{AX}^2$,　$\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{DX}^2+2\overline{AX}^2$, $\therefore\ AB^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{BX}^2+2DX^2+\overline{AC}^2=4\overline{XY}^2+4\overline{BY}^2+\overline{AC}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{XY}^2$.

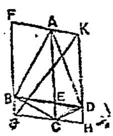
243. 四邊形對角線上正方形之和，爲相對邊中點，連結線上正方形之和之二倍.

證 四邊形ABCD各邊之中點爲E, F, G, H, 則四邊形EFGH爲平行四邊形故 $\overline{EG}^2+\overline{HF}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2=2\overline{EF}^2+2\overline{FG}^2$, 故 $2(\overline{EG}^2+\overline{HF}^2)=4\overline{EF}^2+4\overline{FG}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.



244. 四邊形之面積，等於其二對角線及其夾角，爲二邊及夾角之三角形之面積.

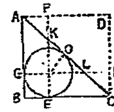
證 四邊形ABCD，其對角線AC, BD之交點爲E，過A, C, 及B, D，作平行於BD, AC之直線，此直線所成之平行四邊形爲FGHK，則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}$▱AFGC, $\triangle ADC=\frac{1}{2}$▱ACHK, 故 $ABCD=\frac{1}{2}\times$▱FGHK, 但 $\triangle FGK=\frac{1}{2}$▱FGHK, 故四邊形 ABCD=△FGK，而△FGK之二邊FG, FK，等於AC, BD，且其夾角F等於AC, BD所成之角.



注意 對角線AC, BD，互爲垂直，則平行四邊形FGHK，等於AC, BD，所包之矩形，故四邊形對角線，若互爲垂直，則其對角線所包之矩形，等於四邊形之二倍明矣.

245. 直三角形ABC之內切圓，切斜邊AC之點爲O，則矩形AO.OC，等於三角形ABC之面積.

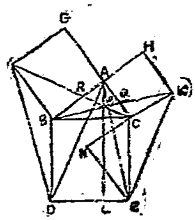
證 三角形ABC之內心爲I，將AB, BC，爲二邊作矩形，連結IO過I平行於AB, BC引直線EIF, GIH，截AC之點爲K, L，則IO=AF=CH，故 △AFK≡△IOK △LHC≡△IOL，因而矩形IHDF等於△ABC，但AO=AG=IF, CO=CE=IH，故 AO.CO=△ABC.



別證 $AO=AB-r$, $OC=BC-r$ [但 r 爲內切圓之半徑]故 $AO.OC=(AB-r)(BC-r)=AB.BC-(BC+AB)r+r^2=AB.BC-(AC+2r)r+r^2=AB.BC-AC.r-r^2$. 但 $AB.BC=2\triangle ABC$, 及 $AC.r+r^2=\triangle ABC$, 故矩形 $AO.CO=\triangle ABC$.

246. ABC爲A爲直角之三角形，AF AK, BF，爲正方形，AL垂直於BC，則(1)，AE, BK，互爲垂直. (2)三角形KCE, DBF，爲等積. (3) $\overline{EK}^2+\overline{FD}^2=5\overline{BC}^2$. (4) AQ, AR，相等. (5) CF, BK, AL，相交於同一之點.

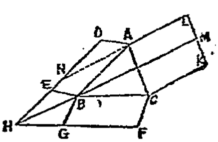
證 (1)三角形ACE, KCB爲全等，且 CE⊥BC, AC⊥CK，故第三邊AE⊥BK. (2)引長KC，取CN=CK之點N，連結NE，則三角形ABC, NEC,



於 C 之角相等, 且夾之之二邊相等, 故此二三角形全等, 但 $\triangle CNE=\triangle CEK$, 故 $\triangle ABC=\triangle CEK$. 同樣 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BDF$ 等積. 故 $\triangle CEK$, $\triangle BDF$, 等積. (3) $\overline{EK}^2=\overline{NE}^2+\overline{NK}^2=\overline{BB}^2+4\overline{AC}^2$, 同樣 $\overline{FD}^2=\overline{AC}^2+4\overline{AB}^2$, 故 $\overline{EK}^2+\overline{FD}^2=5(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=5\overline{BC}^2$. (4) $\triangle BQH=BHKC-\triangle BCK-\triangle HQK=BHKC-\frac{1}{2}ACKH-\frac{1}{2}ACKH=BHKC-ACKH=\triangle ABC$, 同樣 $\triangle CRG=\triangle ABC$, 故 $\triangle BQH$, $\triangle CRG$ 為等積. 但 $BH=CG$, 故高 AQ, AR 相等. (5) 自 D, E, 引 AE, AD 之垂線, 與 AL 俱於 $\triangle ADE$ 之垂心 O' 相交, 但 $BK\perp AE$, $CF\perp AD$, 故自 D, E, 引 AE AD, 之垂線, 各與 BK, CF, 平行, 因而 BK, CF, 自 O' 之同距離截 AL, 故 AL, BK, CF, 於同一之點相交.

247. 於 $\triangle ABC$ 之邊 BA, BC 上, 作任意之平行四邊形 AE, BF, 引長 DE, FG, 使相交於 H, 則平行四邊形 AE, BF, 之和, 等於 AC 上, 將 AC 為一邊, 其鄰邊等於 BH, 且平行於 BH, 作所平行四邊形. [此謂披他哥剌斯定理之拍卜斯之擴張]

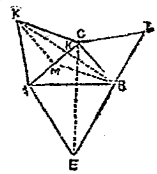
圖 AL之延線, 與 DE 之交點為 N, 則 ▱AE=▱AH, [因 AE, AH, 為同底同高之平行四邊形.]



但 $BH=AL$, 而 $AL\parallel BH$, 故 ▱AH=▱AM=▱AE, 同樣 ▱BF=▱CM, 故 ▱AE+▱BF=▱AK.

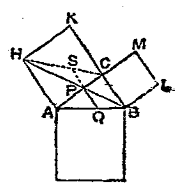
248. 直三角形斜邊上所畫正三角形, 等於他二邊上所畫正三角形之和.

圖 $\hat{C}$ 為直角之三角形 ABC, 於其各邊形畫正三角形 ACK, ABE, BCL, 夫 $\triangle ACE$, $\triangle AKB$ 之 $AC=AK$, $AE=AB$, $C\hat{A}E=K\hat{A}B$, 故 $\triangle ACE\equiv\triangle AKB$. 次自 K 引 AC 之垂線 KM, 則 KM 平行於 BC, 因而 $\triangle AKB=\triangle ABM+\triangle AKM+\triangle KMB=\triangle ABM+\triangle AKM+\triangle KMC=\frac{1}{2}\triangle ABC+\triangle KAC$, 故 $\triangle ACE=\frac{1}{2}\triangle ABC+\triangle KAC$. 同樣 $\triangle BCE=\frac{1}{2}\triangle ABC+\triangle LBC$, 故 $\triangle ACE+\triangle BCE=\triangle ABC+\triangle KAC+\triangle LBC$, 因而 $\triangle EAB=\triangle KAC+\triangle LBC$.



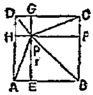
249. 披他哥剌斯之定理, 於次圖 AC 及 BH 之交點為 P, 自 P 平行於 CB 引 PQ, 使交 AB 於 Q, 則 $CP=PQ$.

圖 QP 之延線與 HC 之交點為 S, 則 $\triangle BAH=\triangle CAH$, 而 $SQ\parallel HA$, 故 $PQ=SP$ [224 題]. 次因 $P\hat{C}S=\frac{1}{2}\hat{R}=P\hat{S}C$, 故 $SP=CP$, 故 $CP=PQ$.



250. 將正方形內一點,與各角頂點連結線上正方形之和,等於自其點至各邊引垂線上正方形之和之二倍.

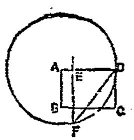
圖 正方形 ABCD 內之一點為 P, 自 P 引各邊垂線之趾為 E, F, G, H, 則 $\overline{AP}^2=\overline{PE}^2+\overline{AE}^2=\overline{PE}^2+\overline{PH}^2$, 同樣 $\overline{BP}^2=\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$, $\overline{CP}^2=\overline{PF}^2+\overline{PG}^2$,



$\overline{DP}^2=\overline{PG}^2+\overline{PH}^2$, 故 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2)$.

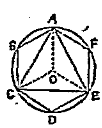
251. ABCD 為矩形, DE 為 DA 之一部分, 等於 DC, 引 AD 之垂線 EF, 畫 A 為中心 AD 為半徑之圓周, 使交 EF 於 F, 則 DF 等於與矩形等積之正方形之對角線.

圖 $\overline{DF}^2=\overline{EF}^2+\overline{ED}^2=\overline{AF}^2-\overline{AE}^2+\overline{ED}^2=\overline{AD}^2-\overline{AE}^2+\overline{ED}^2$
$=(AD+AE).ED+\overline{ED}^2$
$=AD.DC+AE.AB+\overline{ED}^2=2AD.DC$. 故 DF 上之正方形為與矩形等積之正方形之二倍, 因而 DF 等於與矩形等積之正方形之對角線.



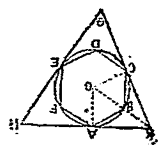
252. 圓內接正六角形之面積,等於同圓內接正三角形之面積之二倍.

圖 內接於中心 O 之圓之正六角形為 ABCDEF, 則 ACE 為內接於同圓之正三角形, 今連結 OA, OE, OC, 則四邊形 ABCD 為菱形明矣, 故 △ABC=△AOC, 同樣 △CDE=△COE, △EFA=△AOE, 故 ABCDEF=2△ACE.



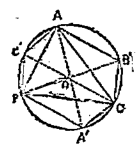
253. 試比較圓內接正六角形,與外切三角正形之面積.

圖 中心 O 之圓內接正六角形為 ABCDEF, 於 A, C, E, 之切線所成之三角形為 GHK, 連結 AO, CO, 則 GHK 為正三角形, 而 ABCO, AKCO, 各為正六角形及正三角形之三分之一明矣, 又 △ABK≡△BCK=$\frac{1}{2}$▱ABCO, 故 AKCO=2▱ABCO, 因而 △GHK=2.ABCDEF.



254. 圓內接三角形,過其各角之徑之他端,連結三角形之他二角頂所得六角形之面積,等於三角形之面積之二倍.

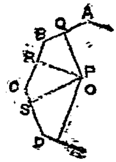
圖 △ABC 之外心為 O, 過 A, B, C, 之徑之他端, 為 A′, B′, C′, 則因 AO=OA′, 故 △ABO, △A′BO 等積, 同樣 △BCO=△OCB′, △ACO=△OCA′, ∴ △ABC=四邊形 A′BB′C, 同樣 △ABC=四邊形 AB′BC′, 故六角形 AC′BA′CB′=2△ABC.



255. 自 n 邊正多角形內任意一點, 至各邊引垂線之和, 等於其邊心距之 n 倍.

圖 n 邊之正多角形 ABCD………之中

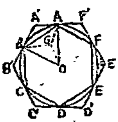
心爲O,其邊心距之長爲h,則此多角形之面積爲$\frac{1}{2}n.AB.h$.



又自此多角形內任意一點P,向各邊引垂線PQ, PR, PS,…,則此多角形之面積,可以$\frac{1}{2}AB.(PQ+PR+PS+\cdots\cdots)$表之,而$\frac{1}{2}n.AB.h=\frac{1}{2}AB.(PQ+PR+PS+\cdots\cdots)$, 故$PQ+PR+PS+\cdots\cdots=n.h$.

256. 圓內接正六角形之面積,爲同圓外切正六角形面積之四分之三.

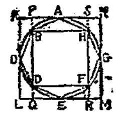
證 圓內接正六角形爲ABCDEF, 過其各角頂, 引圓之切線,所得六角形A′B′C′D′E′F′,爲此圓外切正六角形.



今將圓之中心O連結A, B, 則△OAB, 四邊形AOBA′, 各爲內接六角形及外切六角形面積六分之一, 今將△OAB之重心爲G, 則因△OAB爲正三角形,故OG=BG=AG,而四邊形GAA′B爲菱形明矣. 故$\triangle OAB=\frac{3}{4}OAA'B$, 因而$ABCDEF=\frac{3}{4}A'B'C'D'E'F'$.

257. 圓內接正八角形,與內接正方形及外切正方形之邊所包矩形等積.

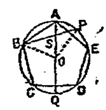
證 圓內接正八角形爲ABCDEFGH, 則BDFH爲圓內接正方形,而A,C,E,G之切線所成之四邊形KLMN,爲外切正方形明矣. 今BD, HF之延線與KN, LM之交點爲P, Q, S, R, 則四邊形PQRS, 爲外切正方形之邊與內接正方形之邊所包之矩形,



但$\triangle ABH\equiv\triangle CBD\equiv\triangle EDF\equiv\triangle GFH=\frac{1}{2}PBHS=\frac{1}{2}QPFR$, 故正八角形ABCDEFGH=▭PQRS, 卽正八角形ABCDEFGH, 等於內接正方形與外切正方形之邊所包之矩形.

258. 半徑r之圓,內接正五角形,將其一邊之兩端,連結其一鄰邊所對劣弧之中點,則(1)此連結二直線之差等於r. (2)其二直線上正方形之和等於$3r^2$. (3)其二直線所包之矩形等於r^2.

證 (1)正五角形ABCDE之外接圓中心爲O,弧APE之中點爲P, 今將AO之延線與圓周再交之點爲Q,



則Q爲弧CD之中點明矣,故弧PEDQ=弧AP+弧BCQ, 故$\hat{SAP}=\hat{ASP}$, 而AP=SP. 同樣BS=BO, 故BP−AP=BS=r.

(2) 連結PO則$\hat{POS}=\hat{OBS}$, 故圓BOS切PO於O, 因而$PS.PB=r^2$.

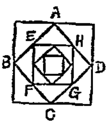
但$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2PS^2+2BS.PS+BS^2=r^2+2PS.PB=3r^2$.

(3) $PS.PB=r^2$ 故$AP.BP=r^2$.

259. 連結正方形各邊之中點,作第二正方形,又連結第二正方形各邊之中

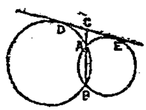
點,作第三正方形,次第如此,其無數內接正方形之和之極限,等於原正方形.

證　第一內接正方形,等於在其外部之原正方形部分之和,作其內接正方形之對角線易得知之. 同樣第二內而接正方形,等於在其外部之第一內接正方形部分之和,以下次第如此,則內接正方形之和之極限,可知等於原之正方形.



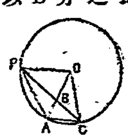
260. 二圓相交,引長連結其交點之直線,二等分共同切線兩切點間之部分.

證　二圓之交點爲A, B,共同切線切各圓之點爲D, E, AB之延線,與DE之交點爲C,則$\overline{CD}^2$=CA.CB=$\overline{CE}^2$, 故CD=CE,即BA之延線,二等分DE.



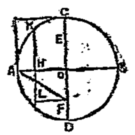
261. 圓內接正五角形一邊上之正方形,等於其內接正十角形一邊上之正方形,與半徑上正方形之和.

證　圓O之半徑OA,以B分之爲OA.AB=$\overline{OB}^2$,取AC=OB,則爲正十角形之一邊,而CB之延線,與圓周之交點爲P,則$A\hat{O}C=\frac{1}{2}A\hat{B}C=A\hat{C}B=\frac{1}{2}A\hat{O}P$,故AP爲正五角形之一邊,而三角形PBO爲二等邊,故依221題$\overline{PA}^2-\overline{PO}^2=AB.AC=\overline{OB}^2$故$\overline{PA}^2=\overline{PO}^2+\overline{OB}^2$.



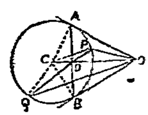
262. 於中心O之圓,引互垂直之二徑AB, CD,將CO之中點E爲中心,EA爲半徑畫圓周,使與CD相交於點F,則OF等於內接正十角形之一邊,AF等於內接正五角形之一邊.

證　於OF, OA,各作正方形FH, CG,延長LH,使交CG於K, 則$\overline{AO}^2=\overline{AE}^2-\overline{OE}^2=(AE+OE)\times(AE-OE)=CF.OF=$矩形CL.故矩形HG=正方形OL. 故OH=OF爲分半徑OD爲外中比二部分之大者,因而OF爲內接於圓O之正十角形之一邊,而AF爲內接正五角形之一邊[前題].



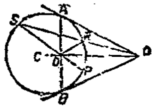
263. OA, OB,爲自中心C之圓外一點O所引二切線,過AB之中點D,引弦PDQ,則OC二等分角POQ.

證　OC過AB之中點D明矣.今作CA, CB, CP, CQ之半徑,則$C\hat{A}O=C\hat{B}O=\hat{R}$,故過O, A, C, B得畫圓,因而AD.BD=CD.OD, 但AD.BD=PD.QD, 故C, Q, O, P在同一之圓周上. 故立於此圓等弦CP, CQ上之圓周角POC, QOC,相等,即CO二等分$P\hat{O}Q$.



264. 前題過O引割線ORS,則AC二等分角RDS.

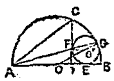
證 SD之延線,與圓周之交點為P,則依前題 $R\hat{O}D=P\hat{O}D$,故將OC為折縫而折OPD,則OPD



與ORD合明矣,故 $C\hat{D}S=P\hat{D}O=R\hat{D}O$,故 $S\hat{D}A=R\hat{D}A$,即 AB二等分 $R\hat{D}S$.

265. 自半圓周上一點C.引徑AB之垂線為CD,切BD於E,切CD於F,切半圓周於G之圓周為EFG,則弦 AC等於AE,而A, F, G,之三點,在同一之直線上.

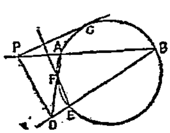
證 二圓之中心為O, O′,連結OF, OO′, AG,則OO′過G,而O′F⊥CD,故OF∥AO,而 $A\hat{O}G=F\hat{O'}G$,故



二等邊三角形FO′G, AOG,為等角形,因而GF與GA相合,即A, F, G,之三點,在同一之直線上. 次因 $A\hat{G}C$ 為立於弧AC上之圓周角,故為立於弧BC上之圓周角 $C\hat{A}D$ 之餘角,而 $A\hat{C}D$ 亦為 $C\hat{A}D$ 之餘角,故AC切圓周CFG,因而 $\overline{AC}^2$=AF.AG=$\overline{AE}^2$,故AC=AE.

266. 自圓外一點,引圓之切線及割線,又自同點,向任意之方向,引與切線等長之直線,自其端向割線之交點,引二直線,過此二直線與圓交點之弦,平行於與切線等長之直線.

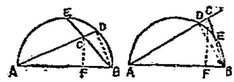
證 自圓外一點P,引切線PC,割線PAB,自P向任意方向,引與切線等



長之直線為PD,而DA, DB,與圓周之交點為F, E,則 PA.PB=$\overline{PC}^2$=$\overline{PD}^2$,故PD切△ABD之外接圓於D,因而 $P\hat{D}A=A\hat{B}D=D\hat{F}E$,故PD∥EF.

267. 自半圓之徑AB之兩端,引二弦AD, BE,其交點為C,則AC. AD+BC. BE=$\overline{AB}^2$.

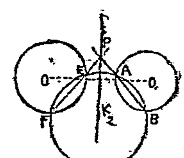
證 自AD, BE,之交點C,引AB之垂線CF,則因 $C\hat{F}B=A\hat{D}B=\hat{R}$,故C, F, B, D,



在同一之圓周上,故 AC.AD=AF.AB,同樣 BC.BE=BF.AB,故 AC.AD+BC.BE=AB(AF+BF) =$\overline{AB}^2$.

268. 過二定點之諸圓,與已定之圓,其根軸與二定點之直線,相交於同一之點.

證 已定圓之中心為O,過二定點與已定圓相交畫圓,其中心為O_2,二圓之交點為E, F, EF, AB之交點為P,則PE.PF

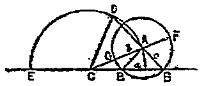


=PB.PA,今過A, B,畫任意圓O_1,則自P引圓O, O_1,之切線之平方,各等於HE.PF及PA.PB,故自P作此二圓之切線相等. 故P在二圓O, O_1之根軸上,故過A, B,之諸圓,與圓O之根軸,皆過P.

注意　自O下AB之垂線,過AB之中點,則AB∥EF,故點P在有限距離範圍內則本題不成立.

269.　△ABC之$\hat{C}$,小於30°,且其三邊有$b^2=c(a+c)$之關係,將C爲中心CA爲半徑畫圓,使與BA,BC,相交　點D,E,則$D\hat{C}E$等於$A\hat{C}B$之五倍.

證　畫中心A半徑AB之圓,截BC於B′,截CA及其延線於G,F,則

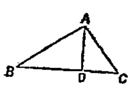


$CB'.CB=CG.CF=(b-c)(b+c)=b^2-c^2$. 又因$b^2=c(a+c)$,故$CB'.a=ac$,故$CB'=c=AB'$,故△AB′C爲二等邊,而$\hat{C}$爲$A\hat{B'}B$或$A\hat{B}C$之半分,因而$D\hat{C}E=\hat{B}+C\hat{D}B=\hat{B}+C\hat{A}D=\hat{B}+\hat{B}+\hat{C}=5\hat{C}$. 此證明爲點A在B,D之間,即$C\hat{A}D$不大於直角,但因$C\hat{A}D=3\hat{C}$,故$\hat{C}<30°$.

比　例

270.　自直角三角形直角之頂點,引斜邊之垂線,則分本形爲與原形相似[因而互相似]之三角形.

證　自直角三角形ABC直角頂點A引斜邊之垂線AD,



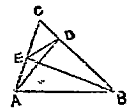
則$\hat{C}$[$\hat{B}$之餘角]$=B\hat{A}D$,故△ABC∽△DBA. 同樣△ABC∽△DAC,因而△DBA∽△DAC.

271.　三角形平行於底之直線,截取與原形相似之三角形.

證　三角形以平行於底之直線,截取之三角形之各角,等於原三角形之各角,故二三角形相似.

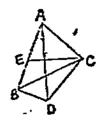
272.　自三角形ABC之頂點A及B,向對邊引垂線AD,BE,則三角形ABC,DEC,相似.

證　E,D,在AB爲徑之圓周上,故$C\hat{A}B=C\hat{D}E$,$C\hat{B}A=C\hat{E}D$,故△ABC∽△DEC.



273.　三角形ABC之邊AB,AC,引垂線BD,CD,引CE垂直於AD,與AB之交點爲E,則△ABC及△ACE相似.

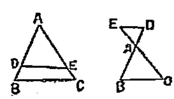
證　因$A\hat{B}D$,$A\hat{C}D$,皆爲直角,故四邊形ABDC,得內接於圓,因而$A\hat{B}C=A\hat{D}C$,但$A\hat{D}C$,$E\hat{C}A$,皆爲$D\hat{A}C$之餘角,



故相等,因而$A\hat{C}E,=A\hat{B}C$,但△ACE,△ABC,其$B\hat{A}C$共同,故△ACE∽△ABC.

274.　將三角形之二邊,分爲成比例之直線,平行於底.

證　直線ED,分△ABC之二邊AB,AC成$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,則DE當平行於BC.若DE不平行於

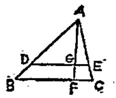


BC,自D平行於BC引直線,截AC之點爲E′,則$\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$,但$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,

故 $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$，故E, E′, 若非相合則背理, 故DE平行於BC.

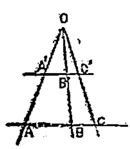
275. 分三角形之二邊為同比之直線, 分頂點至底邊之諸直線為同比.

證 將三角形ABC, 分為同比之點為D, E, 則因AD : BD=AE : CE, 故DE∥BC. 今自頂點至底邊引任意之直線AF, 與DE之交點為G, 則因BF∥DG, 故AG : FG=AD : BD=AE : CE, 或F在底BC之延線上, 又D, E, 在AB, AC之延線上, 將AB, AC, 分為同比, 本題亦眞, 可同樣證明之.



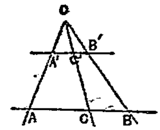
276. 二平行直線AB, A′B′, 於點C及C′內或外分為同比, 則AA′, BB′, CC′, 過同一之點或互平行.

證 AA′, CC′, 之交點為O, 則AC : A′C′=OC : OC′, 又CC′, BB′之交點為O′, 則BC : B′C′=O′C : O′C′, 但AC : BC=A′C′ : B′C′, 或AC : A′C′=BC : B′C′, 故OC : OC′=O′C : O′C′, 故O, O′ 必為同一之點, 即AA′, BB′, CC′, 過同一之點, 若A′B′=AB, 則B′C′=BC, 而AA′∥CC′∥BB′.



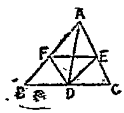
277. 自一點O, 引三直線與二平行線相交於A, B, C, 及A′, B′, C′, 則AC : CB=A′C′ : C′B′.

證 AC : A′C′=OC : OC′=CB : C′B′, 故 AC : CB=A′C′ : C′B′.



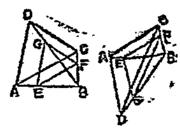
278. 三角形ABC之底邊BC, 二等分於D, 而角ADC, ADB之二等分線, 與邊AC, AB, 相交於點E, F, 則EF平行於BC.

證 AF : BF=AD : BD, AE : CE=AD : CD; 但BD=CD, 故AF : FB=AE : EC, 因而EF∥BC.



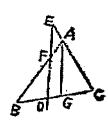
279. 二三角形ACB, ADB, 自其共同之底AB上一點E, 引平行於AC, AD, 之直線, 使交BC, BD, 於點F, G, 則FG平行於CD.

證 二三角形無論在AB之同傍與異傍, BF : CF=BE : AE=BG : DG, 故FG∥CD.



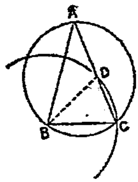
280. △ABC平行其$\hat{A}$之二等分線作直線, 使截BC, CA AB, 於D, E, F, 則BD與DC之比, 等於FB與EC之比.

證 △ABC之$\hat{A}$之二等分線為AG, 則$A\hat{E}F=\frac{1}{2}\hat{A}$, $A\hat{F}E=\frac{1}{2}\hat{A}$, 故AE=AF, 而BD : DG=FB : FA=FB : AE, DG : DC=AE : EC, 故BD : DC=FB : EC.



281. 三角形ABC之邊AB,等於邊AC,以中心B及半徑BC畫圓,使與AC再交於點D,則BC為AC, CD之比例中項.

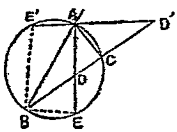
圖 連結BD,則因二個二邊等三角形ABC, BCD,一底角C共同,故相似,因而AC:BC=BD:CD,或AC:BC=BC:CD.



別圖 $C\hat{B}D=B\hat{A}C$,故圓ABD切BC於B,故 $\overline{CB}^2=AC.CD$,即AC:BC=BC:CD.

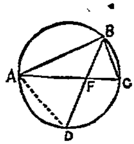
282. △ABC之$\hat{A}$之內外二等分線,與邊BC及其延長線相交於D, D′,又與外接圓周相交於E, E′,則BE為EA與ED之比例中項,而BE′為E′A與E′D′之比例中項.

圖 $E\hat{B}D=\frac{1}{2}\hat{A}=B\hat{A}E$,共有$A\hat{E}B$之二三角形ABE與BDE相似,因而EA:BE=BE:ED,同樣$B\hat{A}E'=E'\hat{B}D'$共有$\hat{E'}$之△BAE′與△D′BE′相似,因而E′A:BE′=BE′:E′D′.



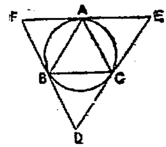
283. 直角三角形ABC其直角B之二等分線,與AC相交於點F,與外接圓相交於D,則矩形BD.BF等於三角形之二倍.

圖 $A\hat{B}D=C\hat{B}F$, $A\hat{D}B=F\hat{C}B$,故△ABD∽△FBC. 因而AB:BD=BF:BC,即BD.BF=AB.BC=2△ABC.



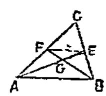
284. 同圓內接正三角形,與外切正三角形,試比較其周圍及面積.

圖 圓內接正三角形ABC,於其角頂A, B, C,作切線,是等切線所成之三角形為DEF,則DEF,為同圓外切之正三角形,而A, B, C,為EF, FD, DE,之中點明矣. 但相似三角形周圍之比,等於對應邊之比,其面積之比,等於對應邊之二乘比,故ΔABC之周圍與ΔDEF之周圍之比,為1:2,而其面積之比,為1:4.



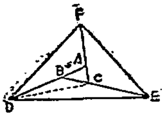
285. 三角形ABC之二中線AE, BF,相交於G,試比較三角形AGB, EGF之面積.

圖 ΔAGB∽ΔEGF,故ΔAGB:ΔEGF=$\overline{AG}^2:\overline{GE}^2$=4:1,即ΔAGB=4ΔEGF.



286. 將三角形之各邊,次第引長,而引長之部分,使等於其邊之二倍,連結其三端所得三角形,試與原三角形比較其面積.

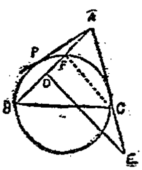
圖 於ΔABC各邊AB, BC, CA之延線上,取點D, E, F, AF=2AC, BD=2AB, CE=2BC,連結DC,則ΔABC:ΔACD



=1 : 3, △ACD : △ADF=1 : 2, ∴ △ABC : △ADF= 1 : 6. 同樣△ABC : △BDE=1 : 6, △ABC : △CEF=1 : 6, 故 △ABC : △ADF+△BDE+△CEF=1 : 18, 或 △DEF : △ABC=19 : 1.

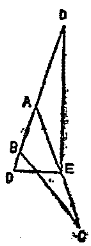
287. 將銳三角形ABC之邊BC為徑畫圓,於邊AB上,取AD,等於自A之切線,引DE垂直於AB,使與AC之延線交於E,則三角形ABC, ADE,相等.

圖 連結CF,則 $B\hat{F}C=B\hat{D}E=\hat{R}$,故CF∥DE,因而△ABE∽△AFC,而△ADE : △AFC $=\overline{AD}^2:\overline{AF}^2$, 又△ABC : △AFC =AB : AF= AB.AF : $\overline{AF}^2$. 但 AB.AF $=\overline{AP}^2=\overline{AD}^2$, 故△ADE : △AFC=△ABC : △AFC, 故△ADE=△ABC.



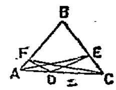
288. 將等於△ABC之[或其補角]$\hat{A}$為頂角,又將等於AB, AC之比例中項之直線,為二邊之三角形,與原三角形等積.

圖 將△ABC之二邊AB, AC之比例中項為二邊之二等邊三角形為ADE,則AB : AD =AE : AC,故AB.AC= AD.AE,但△ABC : △ADE =AB.AC : AD.AE, 故△ABC=△ADE.



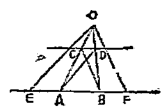
289. D為二等邊三角形ABC之底AC上任意之點,引與AC成等角之直線DE, DF,使交相等邊BC, AB,於E, F,則△AED及△CDF等積.

圖 △DAF, △DCE因 $\hat{A}=\hat{C}$, $A\hat{D}F=C\hat{D}E$, 故相似,因而AD : FD =CD : ED. 或AD.ED =CD.FD, 但△ADE, △FDC因 $A\hat{D}E=F\hat{D}C$,故△ADE : △FDC =AD.ED : CD.FD, 故△ADE=△FDC.



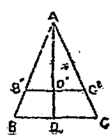
290. 於同底同傍,畫等積之二三角形ABC, ADB,自AC, BD之交點O,引平行於DA, CB之二直線,其交AB之點為E, F,則AE=BF.

圖 △ACB, △ABD為等積,故CD∥AB, 因而AE : AB= OD : DB=OC : CA = BF : AB, 故AE=BF.



291. 二個二等邊三角形其頂角相等,則其高之比,等於其底邊之比.

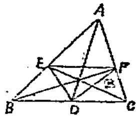
圖 二個二等邊三角形,頂角相等,故得如圖重合之,其高AD, A′D,相合,而垂直於BC, B′C′,而AD : AD′=AB : AB′ = BC : B′C′,即高之比,等於底邊之比.



292. 直線AD為△ABC之角$\hat{A}$之二等分線,與邊BC相交於D,而直線DE, DF,

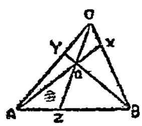
各為角ADB, ADC之二等分線, 各與邊AB, AC, 相交於點E, F, 則三角形BEF與CEF之比, 等於BA與AC之比.

證 $\triangle BEF : \triangle AEF = BE : AE = BD : AD$, $\triangle AEF : \triangle CEF = AF : CF = AD : DC$, 故 $\triangle BEF : \triangle CEF = BD : CD$, 又 $AB : AC = BD : CD$, 故 $\triangle BEF : \triangle CEF = AB : AC$.



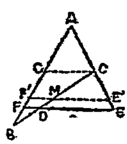
293. 過$\triangle ABC$內任意一點O, 自A, B, C, 引三直線AX, BY, CZ, 使交對邊於X, Y, Z, 則 $\dfrac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\dfrac{BX}{CX}$.

證 $\dfrac{\triangle AOB}{\triangle BOX}=\dfrac{AO}{OX}$, $\dfrac{\triangle AOC}{\triangle COX}=\dfrac{AO}{OX}$, 故 $\dfrac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\dfrac{\triangle BOX}{\triangle COX}=\dfrac{BX}{CX}$.

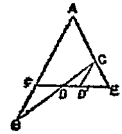


294. 直線DEF與三角形之邊BC, CA, AB, 相交於點D, E, F, 與AB及AC成相等角, 則 $BD : CD = BF : CE$.

證 自CB之中點M及C, 引EDF之平行線E′MF′及CG, 則 $CE'=GF'=BF'$. 而 $\triangle BDF \backsim \triangle BMF'$, $\triangle CED \backsim \triangle CE'M$, 故 $\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BM}{BF'}$, $\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{CM}{CE'}$, 但 $BM=CM$, $BF'=CE'$, 故 $\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{CD}{CE}$, 或 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BF}{CE}$.

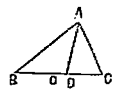


別證 自C引AB之平行線CD′, 使與EF相交於D′, 則 $\hat{AFE}=\hat{CD'E}=\hat{AEF}$, $\therefore CD'=CE$. 又 $\triangle BFD \backsim \triangle CD'D$, $\therefore BD : CD = BF : CD' = BF : CE$.



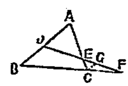
295. 三角形ABC之$\hat{A}$之二等分線, 與底相交之點為D, BC之中點為O, 則 $OB : OD = AB+AC : AB \sim AC$.

證 $AB : AC = BD : CD$, 或 $AB+AC : AB \sim AC = BD+CD : BD \sim CD = 2OB : 2OD$, 故 $OB : OD = AB+AC : AB \sim AC$.



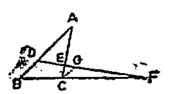
296. 直線DEF與$\triangle ABC$之邊AB, AC, BC, 相交於D, E, F, 若 $AE : EC = BF : CF$, 則 $AD=BD$.

證 自C引AB之平行線CG則 $BF : CF = BD : CG$, $AE : EC = AD : CG$. 但 $AE : EC = BF : CF$, 故 $BD : CG = AD : CG$, 因而 $BD=AD$.



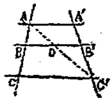
297. 直線DEF與$\triangle ABC$之邊AB, AC, BC, 相交於D, E, F, 若 $CF=2BC$, $AE=3CE$, 則 $AD=2BD$.

證 自C引BA之平行線CG, 則 $BD : CG = BF : CF = 3 : 2$, $CG : AD = CE : AE = 1 : 3$, 故 $BD : AD = 1 : 2$, 即 $AD=2BD$.



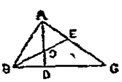
298. 已知三平行線 AA', BB', CC', 與二直線 AC, $A'C'$, 相交, AB 及 BC 或 $A'B'$ 及 $B'C'$ 之比, 等於已知之比 $m:n$, 則 $(m+n).BB'=n.AA'+m.CC'$.

證 連結 AC' 與 BB' 之交點為 D, 則因 $AB:BC=A'B':B'C'=m:n$, 故 $AC:AB=m+n:m=CC':BD$, 同樣 $AA':B'D=m+n:n$, 因而 $mCC'=(m+n)BD$, 及 $n.AA'=(m+n)B'D$, 故 $(m+n)BB'=n.AA'+m.CC'$.



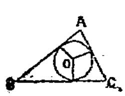
299. 直角三角形ABC自直角之頂點A, 引BC之垂線AD, 而角B之二等分線BE與AC相交於E, 與AD相交於O, 則 $DO:OA=AE:EC$.

證 因BO為 $\hat{B}$ 之二等分線, 故 $BD:BA=DO:OA$, 同樣 $AB:BC=AE:EC$. 但 $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$ 而 $BD:AB=AB:BC$, 因而 $DO:OA=AE:EC$.



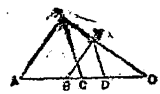
300. 將三角形之內心, 連結各角頂, 所成三角形之面積, 與原三角形之邊成比例.

證 ΔABC 之內心為O, 則自O至各邊之距離相等, 故以 h 表之, 則 $\Delta OAB=\frac{1}{2}h.AB$, $\Delta OBC=\frac{1}{2}h.BC$, $\Delta OCA=\frac{1}{2}h.CA$, 故 $\Delta OAB:\Delta OBC:\Delta OCA=AB:BC:CA$.



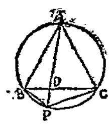
301. A, B, C, D, 為順序在一直線上之點, 今於AC, BD上之同傍, 畫相似三角形AXC, BYD, 使AX與BY, CX與DY為對應邊, 若XY與AD相交於點O, 則矩形OA.OD, 等於矩形OB.OC.

證 $OA:OB=OX:OY=OC:OD$, 故 $OA.OD=OB.OC$.



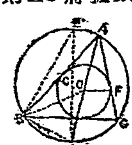
302. ABC為正三角形, P為其外接圓周上一點, 且對於BC在與A反對之傍, 則PA上之正方形, 等於PB, PC所包矩形及BC上正方形之和.

證 AP與BC之交點為D, 則 $\Delta ABP \backsim \Delta CDP$, 因而 $AP:BP=CP:DP$, 又 $AP.DP=BP.CP$, 同樣 $\triangle ABP \backsim \Delta ADB$, 而 $AP.AD=\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$. 故 $AP.DP+AP.AD=\overline{AP}^2=BP.CP+\overline{BC}^2$.



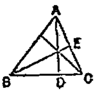
303. 三角形外接圓之徑, 及內切圓之半徑, 所包矩形, 等於過內切圓中心之外接圓之弦之分, [內切圓中心所分]所包矩形.

證 $\triangle ABC$ 之內心為O, 則AO將弧BC二等分於D, 今作過D之徑DCE, 及內切圓之半徑OF, 連結OB, BE, BD, 則 $\Delta DBE \backsim \Delta FOA$, 因而 $\frac{AO}{OF}=\frac{ED}{BD}$, 或 $AO.BD=OF.ED$, 但 $B\hat{O}D=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})=D\hat{B}O$, 故 $BD=OD$, 故 $AO.OD=OF.ED$.



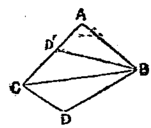
304. 自三角形之角頂，向對邊引垂線，則一邊與他一邊之比，等於其垂線之反比.

【證】自 $\triangle ABC$ 之角頂 A，引 BC 之垂線 AD，自角頂 B，引 CA 之垂線 BE，則因 $\triangle ABC : \triangle ABC = AD.BC : BE.CA$，故 $AD.BC = BE.CA$，或 $BC : CA = BE : AD$.



305. $A\hat{C}B$, $B\hat{C}D$，為相等之角，而 CB 為三角形 ABC, DBC 之共同邊，則二三角形之比，等於 $AC : CD$.

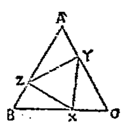
【證】$\triangle ABC$, $\triangle DBC$ 之角 BCA, BCD，相等，故將 $\triangle DBC$ 以 BC 為折角而折之，則此三角形當來於 $\triangle D'BC$ 之位置，而 $\triangle ABC : \triangle D'BC = AC : CD'$，故 $\triangle ABC : \triangle DBC = AC : CD$.



【別證】$A\hat{C}B = D\hat{C}B$，故 $\triangle ABC : \triangle DBC = AC.BC : CD.BC = AC : CD$.

306. 於正三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 上取點 X, Y, Z，使 $\frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} = \frac{2}{1}$，試求 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle ABC$ 之比.

【證】依假設 $AY = \frac{1}{3}AC$. $AZ = \frac{2}{3}AB$，故 $\frac{\triangle AYZ}{\triangle ABC} = \frac{AY.AZ}{AC.AB} = \frac{2}{9}$，但 $\triangle AYZ \equiv \triangle BXZ \equiv \triangle CXY$，故 $3\triangle AYZ = \frac{2}{3}\triangle ABC$，故 $\triangle XYZ = \triangle ABC - \frac{2}{3}\triangle ABC = \frac{1}{3}\triangle ABC$，即 $\frac{\triangle XYZ}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$.

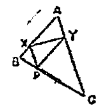


【注意】參照 219 題.

307. ABC 為三角形，自底邊 BC 上一點 P，平行於二邊 AB, AC，引 PY, PX，使交 AC, AB 於 Y, X，則三角形 AXY 為二三角形 BPX, CPY 之比例中項.

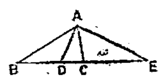
【證】$\triangle BPX : \triangle AXY = BX : AX$, $\triangle AXY : \triangle CPY = AY : CY = BP : PC = BX : AX$，故 $\triangle BPX : \triangle AXY = \triangle AXY : \triangle CPY$.

即 $\triangle AXY$ 為二三角形 BPX, CPY 之比例中項.



308. 三角形 ABC 之角 A，及其外角之二等分線與底邊 BC［其一必為延線］之交點為 D, E，則 $\frac{1}{BD} + \frac{1}{BE} = \frac{2}{BC}$.

【證】$BD : CD = AB : AC = BE : CE$. 故 $BE.CD = BD.CE$，但 $CD = BC - BD$, $CE = BE - BC$，故 $BE(BC - BD) = BD(BE - BC)$，或 $BE.BC + BD.BC = 2BD.BE$，兩邊以 $BD.BE.BC$ 除之，得 $\frac{1}{BD} + \frac{1}{BE} = \frac{2}{BC}$.

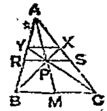


【注意】此關係式乃表示 BC 為 BD, BE，之調和中項.

309. P 為三角形 ABC 之中線 AM 上任意之點，BP, CP，交 AC, AB，之點為 X, Y，則 XY 平行於 BC.

【證】過 P 平行於 BC 引直線 RPS，與 AB, AC 之交點為 R, S，則 RP :

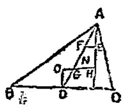
BC=YP:YC, PS:BC=XP:XB, 但AM二等分BC, 故亦二等分平行於BC之RPS, 卽PS=RS,



故YP:YC = XP:XB, 因而YP:PC =XP:PB, 而 $X\hat{P}Y=B\hat{P}C$, 故 △PXY∽△PBC, 而 $P\hat{X}Y = P\hat{B}C$, 故XY∥BC.

310. 九點圓之中心N, 分連結垂心H與重心G之直線, 爲NH:NG=3與1之比.

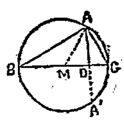
證 三角形ABC之外心爲O, 則N爲OH之中點[121題], 今自O引BC之垂線OD, 則D爲BC之中點, 而AD爲一中線,



將AD, OH, 之交點爲G, 則G爲三角形ABC之重心, 且 $OG=\frac{1}{2}GH$ [62題], 故 $GN=\frac{1}{2}OH-\frac{1}{3}OH$, 因而 $NH:NG=\frac{1}{2}OH:\frac{1}{6}OH=3:1$.

311. 自直角三角形直角之頂點, 向斜邊引垂線上之正方形, 等於斜邊二部所包之矩形, 試以二三之方法證明之

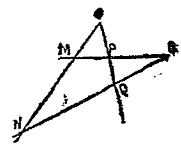
證 ABC爲 $\hat{A}$ 爲直角之三角形, AD爲高, (I)斜邊之中點爲M, 則 $\overline{AD}^2=\overline{AM}^2-\overline{MD}^2=(AM+MD)(MA-MD)$, 但 AM = BM = CM, 故 $\overline{AD}^2=BD.CD$. (II) 將M爲中心BM爲半徑畫圓, 則此圓過A, B, C, 今將AD之延線截圓之點爲A′, 則AD =A′D, 而 $BD.CD=AD.A'D=\overline{AD}^2$. (III)



△ADB∽CDA, 故 $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$, 故 $\overline{AD}^2$ =BD.CD.

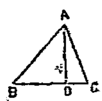
312. OMN, OPQ, 爲二直線MP與NQ相交於R, 若OM:MP=ON:NQ, 則三角形PQR爲二等邊.

證 OM:MP=ON:NQ, 且O共同, 故 $M\hat{P}O$ 與 $N\hat{Q}O$ 相等或互爲補角, 若 $M\hat{P}O = N\hat{Q}O$, 則 MP∥NQ, 是戾於假設, 故 $M\hat{P}O+N\hat{Q}O=2\hat{R}$, 因而 $R\hat{P}Q=R\hat{Q}P$, 卽△PQR爲二等邊.



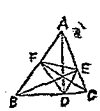
313. 自三角形之頂點, 向底邊引垂線, 若此垂線在三角形內, 而爲底邊之分之比例中項, 則此三角形爲直三角形.

證 △ABC之高AD, 爲BD, CD, 之比例中項, 卽 BD : AD = AD : CD, 而 $B\hat{D}A = C\hat{D}A = \hat{R}$, 故 △ADB∽△ADC, 因而 $B\hat{A}D=A\hat{C}D$, $D\hat{A}C=A\hat{B}D$, 但AD在形內, 故 $B\hat{A}D+D\hat{A}C=B\hat{A}C$, 故 $B\hat{A}C=A\hat{B}C+A\hat{C}B$, 卽 $\hat{A}=\hat{R}$.



314. 自△ABC之各頂A, B, C, 各向對邊所引垂線之趾, 爲D, E, F, 則△ABC : △DBF等於AB ; BD之二乘比.

證 $B\hat{A}C=B\hat{D}F$, 故共有 $A\hat{B}C$ 之二三角形ABC, DBF相似, 故 △ABC : △DBF $=\overline{AB}^2 : \overline{BD}^2$.



315. 前題AFDC : ΔBFD, 等於 AD : BD 之二乘比.

圖 $\Delta ABC : \Delta BFD = \overline{AB}^2 : \overline{BD}^2$, 故 $AFDC : \Delta BFD = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 : \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{BD}^2$.

316. 圓內接三角形ABC, 畫A之切線, 與BC之延線之交點爲D, 則 $CD : BD = \overline{CA}^2 : \overline{BA}^2$.

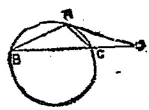


圖 因$D\hat{A}C = A\hat{B}D$, 故 $\Delta DAB \backsim \Delta DCA$, 因而 $CD : AD = CA : BA$, 故 $\overline{CD}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{BA}^2$. 但 $\overline{AD}^2 = DC.DB$, 故 $CD : BD = \overline{CA}^2 : \overline{BA}^2$.

317. ΔABC之AC上取一點A′, 自CB之延線截BB′, 而AA′=BB′, 則以AB所截A′B′之二分之比, 等於BC與AC之比.

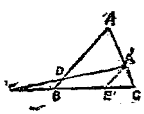


圖 自A′引AB之平行線A′E, 則 $A'D : DB' = EB : BB' = EB : AA' = BC : AC$.

318. 二直線所包矩形, 等於各線上正方形之比例中項.

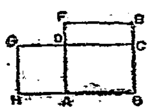


圖 直線AB與DA所包矩形爲ABCD AB上之正方形爲ABEF, DA上之正方形爲ADGH 則 □AE : ▭AC = AB : AD, ▭AC : □AG = AB : AD, 故 □AE : ▭AC = ▭AC : □AG.

319. 將正方形之各邊, 如圖以E, E′, F, F′, G, G′, H, H′, 三等分之, 連結AE, BF, CG, DH, 則所成之正方形, 等於原形五分之二. 若連結AE′, BF′, CG′, DH′則如何.

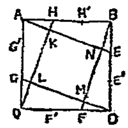


圖 連結AE, BF, CG, DH, 所生之正方形爲KLMN則ΔABN ∽ΔBEN, 故 $\frac{\Delta ABN}{\Delta BEN} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2} = 9$, 故 $\frac{\Delta ABN}{\Delta ABE} = \frac{9}{19}$, 又 $\Delta ABN \equiv \Delta BMC \equiv \Delta CDL \equiv \Delta ADK$, $\Delta ABE = \frac{1}{6}$ □ABCD 故 4ΔABN = $\frac{3}{5}$ □ABCD, 故 □KLMN = □ABCD − $\frac{3}{5}$ □ABCD = $\frac{2}{5}$ ▭ABCD, 同樣得第二者爲原形之$\frac{1}{13}$.

320. 過梯形對角線之交點, 平行於底之直線, 夾於二邊間之部分, 被此交點二等分之.

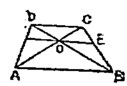
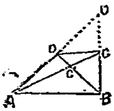


圖 過梯形ABCD, 對角線AC, BD之交點O, 平行於底之直線EF, 與二邊BC, DA, 相交於E, F, 則 $CE : CB = OE : AB$, 及 $DF : DA = OF : AB$. 但 $CE : CB = DF : DA$, 故 $OE : AB = OF : AB$, 卽 $OE = OF$.

注意 本題爲224題之特別者, 故可不依比之定理證明之.

321. 梯形之平行二邊, 其一爲其他之二倍, 則兩對角線, 互於三等分點之一相交.

證 梯形ABCD之平行二邊之一AB,爲CD之二倍,其不平行二邊延線之交點爲O,則$\triangle ODC \backsim \triangle OAB$,

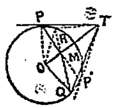


故$\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{1}{2}$,故D, C,各爲$\triangle OAB$,之二邊OA, OB,之中點,因而AC, BD,爲二中線,故梯形ABCD之兩對角線AC, BD,互於三等分點之一相交.

別證 AC, BD之交點爲O′,則$\triangle O'AB \backsim \triangle O'CD$, 故$O'A:O'C=O'B:O'D=AB:CD=2:1$, 故AC, BD,互於三等分點之一相交.

322. PT爲中心O之圓點P之切線,PM垂直於TO,而Q爲圓周上任意之點,則$TQ:QM=TP:PM$.

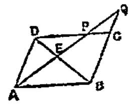
證 自T引其他之切線TP′, QM之延線,再交圓周之點爲R,連結OP, OR OQ, 則$TM.OM=\overline{PM}^2=PM.MQ$, 故四邊形TROQ,內接於圓, 故



$O\hat{Q}R=O\hat{T}Q$, 因而$\triangle OTQ \backsim \triangle OQM$, 故$TQ:QM=OT:OQ=OT:OP=PT:PM$.

323. 將平行四邊形ABCD之一邊BC,延引適宜之長至Q,連結AQ,與對角線BD交於點E,與AB之對邊CD交於點P,則$\overline{AE}^2=PE.EQ$.

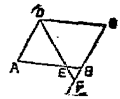
證 $\triangle DAE$, $\triangle BQE$, 其$D\hat{A}E=B\hat{Q}E$,故此二三角形相似,故$AE:EQ=DE:BE$,同樣$\triangle DEP \backsim \triangle BEA$,故



$PE:AE=DE:BE$,因而$PE:AE=AE:EQ$, 即$\overline{AE}^2=PE.EQ$.

324. 自平行四邊形ABCD之一角頂D,引一直線,使交AB於E,交CB之延線於F,則$EA:AD=AB:CF$.

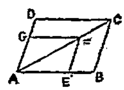
證 $A\hat{E}D=E\hat{D}C$, $D\hat{A}E=D\hat{C}F$ 故$\triangle AED \backsim \triangle CDF$,



因而$EA:AD=CD:CF=AB:CF$.

325. 相似二平行四邊形,有一共同角,且在相似之位置,過其共同角頂點之對角線,爲同一之直線.

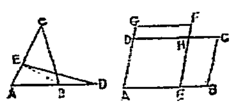
證 二平行四邊形ABCD, AEFG, 其一角A爲共同,故當爲如圖之位置,但因此二平行四邊形爲



相似,故$AB:AE=BC:EF$, 故A, F, C,在同一之直線上,即二對角線AC, AF,爲同一直線.

326. 一角相等之二三角形,或平行四邊形,若二形相等,則各形夾角一邊之比,等於他邊之反比.

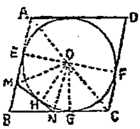
證 $\triangle AED:\triangle ABC=AD.AE:AB.AC$, 或 ▱AF:▱AC=AG.AE:AD.AB, 但$\triangle ADE=\triangle ABC$, 及 ▱AF=▱AC 故



$AD.AE=AB.AC$, 卽 $AD:AB=AC:AE$, 或 $AG.AE=AD.AB$, 卽 $AG:AD=AB:AE$.

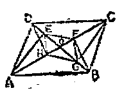
327. 菱形ABCD,其內切圓之中心爲O,引內切圓任意之切線MN,使交AB, BC,於M, N,則 $AM.CN=\overline{AO}^2$.

圖 AB, BC, CD, MN,之切點爲E, G F, H,連結OA, OC, OE, OF, OH,則AOC及EOF各爲一直線明矣,而 $M\hat{A}O=\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{C}=N\hat{C}O$,又 $E\hat{M}H$, $H\hat{O}F$,皆爲 $E\hat{O}H$ 之補角,故相等,故其半分之 $O\hat{M}A=N\hat{O}C$,因而 $\Delta AOM \backsim \Delta CNO$,故 $\frac{AO}{AM}=\frac{CN}{OC}=\frac{CN}{AO}$,故 $AM.CN=\overline{AO}^2$.



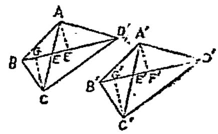
328. 自平行四邊形之各角頂,向兩對角線引垂線,連結其趾,則爲平行四邊形,而此形與原形相似.

圖 自平行四邊形ABCD之各角頂,下兩對角線之垂線,爲AF, BF, CG. DH,則四邊形AHED,得內接於AD爲徑之圓,故 $H\hat{E}G=D\hat{A}H$,同樣 $F\hat{E}G=D\hat{C}F=F\hat{A}B$,故 $H\hat{E}F=\hat{A}$.同樣知四邊形HGFE之各角,等於四邊形ABCD之各角,因而四邊形HEFG爲平行四邊形,而對角線交點爲O,則 $\Delta OAD \backsim \Delta OEH$,故 $OH:OD=HE:DA$,同樣 $OH:OB=GH:AB$,故 $HG:AB=HE:DA$.故平行四邊形EFGH與ABCD相似.



329. 二四邊形各兩對角線,各相等,且夾相等角,則爲等積.

圖 四邊形ABCD, A′B′C′D′,有相等



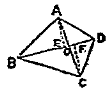
對角線, $AC=A'C'=d$, $BD=B'D'=d'$,且 $B\hat{E}C=B'\hat{E}'C'$,自A, C, A′, C′,引BD, B′D′之垂線AF, CG, A′F′, C′G′,則 ΔAEF, ΔCEG, $\Delta A'E'F'$, $\Delta C'E'G'$,皆相似,故 $\frac{AE}{AF}=\frac{CE}{CG}=\frac{A'E'}{A'F'}=\frac{C'E'}{C'G'}=\frac{AE+CE}{AF+CG}=\frac{A'E'+C'E'}{A'F'+C'G'}$,故 $AF+CG=A'F'+C'G'$,但四邊形 $ABCD=\frac{1}{2}BD\times(AF+CG)=\frac{1}{2}d'(AF+CG)$,又四邊形 $A'B'C'D'=\frac{1}{2}B'D'(A'F'+C'G')=\frac{1}{2}\times d'(A'F'+C'G')$,故四邊形ABCD與四邊形A′B′C′D′爲等積.

別圖 作二三角形P, Q,其二邊各等於兩四邊形之兩對角線,其夾角等於兩對角線之夾角,則 $P\equiv Q$ 明矣,而P, Q,各等於四邊形ABCD, A′B′C′D′ [244題],故二四邊形等積.

330. 四邊形ABCD兩對角線之交點爲O,則 ΔABD, ΔBCD,之比,等於AO, CO,之比.

圖 自角頂A, C引對角線BD之垂線

AE, CF 則 $\triangle AEO \backsim \triangle CFO$, 因而 $\frac{AO}{CO}=\frac{AE}{CF}$, 但 $\triangle ABD$: $\triangle BCD=AE:CF$, 故 $\triangle ABD:\triangle BCD=AO:CO$.



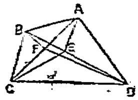
331. 前題若ABCD內接於圓, 則矩形AB.AD, BC.CD之比, 等於AO, CO之比.

證 四邊形ABCD內接於圓, 若圓之半徑爲R, 則AB.AD=AE.2R, BC.CD=CF.2R, 故AB.AD : BC.CD=AE : CF, 而AE : CF=AO : CO, 故AB.AD : BC.CD=AO : CO.

別證 ABCD內接於圓, 則 $\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$. 故AB.AD : BC.CD = $\triangle ABD$: $\triangle BCD$= AO : CO [前題].

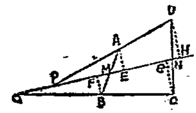
332. 四邊形一雙對角之二等分線, 若交於對角線之一點, 則他一雙對角之二等分線, 必交於他一對角線上.

證 四邊形ABCD一雙對角A及C之二等分線之交點E, 在對角線BD上, 則AB : AD=BE : ED=BC : CD, 故AB : BC = AD : CD, 今 $\hat{B}$ 之二等分線BF, 交對角線AC之點爲F, 連結DF, 則AB : BC=AF : FC=AD : DC, 故DF爲 $\hat{D}$ 之二等分線, 故 $\hat{B}$, $\hat{D}$, 之二等分線, 於對角線AC上之點F相交.



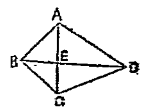
333. 四邊形連結一雙相對邊之中點之直線, 外分他一雙相對邊爲同比.

證 四邊形ABCD一雙相對邊AB, CD, 之中點爲M, N, 連結MN之直線, 與DA, CB, 之延線相交之點爲P, Q, 今自A, B, C, D, 引MN之垂線AE, BF, CG, DH, 則AE=BF, CG=DH, 明矣, 但PA : PD=AE : DH, 及QB : QC=BF : CG, 故PA : PD= QB : QC.



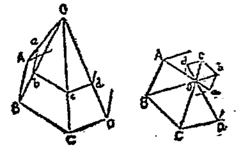
334. 任意之四邊形, 以其兩對角線分爲成比例之四三角形.

證 四邊形ABCD兩對角線之交點爲E, 則 $\frac{\triangle ABE}{\triangle ADE}=\frac{BE}{DE}$, $\frac{\triangle BCE}{\triangle CDE}=\frac{BE}{DE}$, 故 $\frac{\triangle ABE}{\triangle ADE}=\frac{\triangle BCE}{\triangle CDE}$.



335. 將任意一點O, 連結一直線形ABCD……之角頂A, B, C, D, ……, 於OA, OB, OC, OD, …, 上, 各取點a, b c, d, …, 使 OA : Oa=OB : Ob=OC : Oc=OD Od=……, 則直線形$abcd$…, 與直線形ABCD……相似.

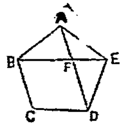
證 依作圖 $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, …… 明矣, 故 $\hat{a}=\hat{A}$, $\hat{b}=\hat{B}$, $\hat{c}=\hat{C}$, $\hat{d}=\hat{D}$, …, 且 Oa : OA =ab : AB= Ob : OB= bc : BC=…



故直線形 $abcd$……與直線形 ABCD…相似.

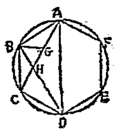
336. ABCDE 爲正五角形,而 AD 及 BE 之交點爲 F,則 AF : AE=AE : AD.

解 ΔADE, ΔAEF 之 $D\hat{A}E=A\hat{E}F=A\hat{D}E$, 故 ΔADE∽ΔAEF. 因而 AF : AE=AE : AD.



337. 正六角形 ABCDEF, 其對角線 AC, BD, 互分爲如何之比.

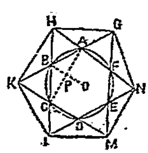
解 AC, BD 之交點爲 H, 取 AG=CH 之點 G, 則 ΔGAB, ΔHBC, 爲全等之二等邊三角形, 而其底角爲 $\frac{1}{3}\hat{R}$, 又 $A\hat{B}C=\frac{4}{3}\hat{R}$, 故 $H\hat{B}G=\frac{2}{3}\hat{R}$, 因而 ΔBHG 爲等邊, 故 AH=2CH, 同樣 DH=2BH, 即 AC, BD, 互分爲 1 : 2 之比.



別解 連結 AD 之直線爲圓之徑,而內接正六角形之一邊,等於半徑明矣,而因 ΔBHC∽ΔAHD, 故 CH : AH=BC : AD=1 : 2.

338. 將正六角形之各邊,雙方引長,連接其交點,得一正六角形,此二正六角形之比爲 1 : 3.

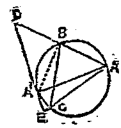
解I. 正六角形 ABCDEF 外接圓之中心爲 O, AC, OB 之交點爲 P, 引長 ABCDEF 之各邊,連結其交點所得六角形爲 GHKLMN, 則此六角形爲正六角形, 而 HK=AC, BP=$\frac{1}{2}$AB 明矣, 而 $\overline{AP}^2=\overline{AB}^2-(\frac{1}{2}AB)^2=\frac{3}{4}\overline{AB}^2$ 故 $\overline{AC}^2=\overline{HK}^2=3\overline{AB}^2$, 但二正六角形相似,故其比爲 $\overline{AB}^2 : \overline{HK}^2$, 即 1 : 3.



解II. 因 $A\hat{G}N=\hat{R}$, $G\hat{A}N=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 $AG=AF=\frac{1}{2}AN$, $\overline{GN}^2=\overline{AN}^2-\overline{AG}^2=3\overline{AG}^2=3\overline{AF}^2$.

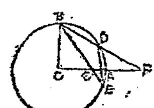
339. 自圓周上任意一點 A, 引二弦 AB, AC, 使與過 A 之徑之他端切線相交於 D, E, 則 ΔAED, ΔABC, 相似.

解 連結過 A 之徑之他端 A′ 與 B, 則 $A'\hat{D}B$, $A\hat{A'}B$, 皆爲 $B\hat{A'}D$ 之餘角, 故相等. 但 $A\hat{A'}B=A\hat{C}B$, 故 $A\hat{D}E=A\hat{C}B$, 因而共有 $\hat{A}$ 之 ΔABC 與 ΔAED 相似.



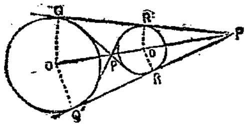
340. CA, CB, 爲一圓互垂直之半徑, DE 爲任意之弦, 今 BD, BE, 與 CA 交於點 F 及 G, 則三角形 BFG, BED, 相似.

解 $B\hat{E}D$ 以弧 BD 之半分測度之, $B\hat{F}G$ 以四分圓弧與弧 DA 之差之半分測度之, 即以弧 BD 之半分測度之, 故 $B\hat{E}D=B\hat{F}G$, 故共有 $G\hat{B}D$ 之二三角形 BFG, BED, 相似.



341. 二圓共同切線之各交點, 將其連結中心之直線, 內分及外分爲半徑之比.

證 共同切線 QR, 與中心線 OO' 之交

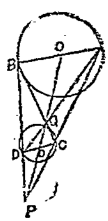


點爲 P, 則 $\Delta POQ \backsim \Delta PO'R$, 故 $OQ : O'R = PO : PO'$, 卽 P 內分或外分 OO' 爲半徑之比. 次共同切線 $Q'R'$ 交 OO' 之點爲 P_1; 則 $OQ' : O'R' = P_1O : P_1O'$, 但內分或外分 OO' 爲半徑之比, 各惟一點, 故 P 與 P_1 爲同一之點, 卽一雙共同切線於中心線上, 內分或外分中心線爲半徑之比之點相交.

系 內分中心線爲半徑之比之點, 爲共同內切線之交點, 卽相似之內心, 而外分之點, 爲共同外切線之交點, 卽相似之外心.

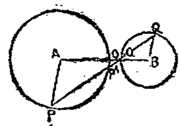
342 過二圓互平行之徑之兩端引直線, 是等直線俱過相似之中心.

證 二圓中心線 OO' 之延線, 與平行二徑 AB, CD, 之端 A, C, 之直線相交於 P, 則 $PO : PO' = AO : CO'$, 故 P 爲二圓相似之外心, 又 BD 與 OO' 之延線之交點爲 P', 則 $P'O : P'O = OB : O'D = AO : CO'$, 故 P 又爲二圓相似之外心. 故 P, P', 爲同一之點, 卽 AC, BD, 俱過相似之外心 P. 同樣 BC, AD, 俱過相似之內心 Q.



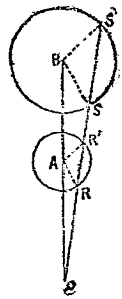
343. 過二圓相似之中心 O, 引任意之直線, 使與二圓之點 P, P', 及 Q, Q', 相交, [但 OP 小於 OP' 則 OQ 小於 OQ'], 則 P 與 Q [或 P' 與 Q'] 連結其中心之直線互平行.

證 今將 O 爲相似之內心, 則於 O 之角相等, 且 $AO : BO = AP : BQ$, 故 $\Delta APO \backsim \Delta BQO$, 或 $A\hat{P}O + B\hat{Q}O = 2\hat{R}$, 但 $A\hat{P}O + B\hat{Q}O = 2\hat{R}$, 爲不能, [何則, 此二角或俱爲銳角, 或俱爲鈍角, 故也.] 因而 $A\hat{P}O = B\hat{Q}O$, 故 $AP \parallel BQ$, 同樣 $AP' \parallel BQ'$, 而在相似之外心亦同樣.



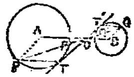
344. 自二圓相似之中心 O, 引一直線, 使交二圓於點 R, R', 及 S, S', [點 R 對應點 S, 點 R' 對應點 S', 卽 OR 小於 OR', 則 OS 小於 OS'.] 則矩形 $OR.OS'$ 及矩形 $OR'.OS$ 相等, 且任何之直線恆同.

證 今將 O 爲相似之外心, 連結 AR, AR', BS, BS', 則 $AR \parallel BS$, $AR' \parallel BS'$ [前題], 因而 $AO : BO = OR : OS = OR' : OS'$, 故 $OR.OS' = OR'.OS$. 同樣 O 爲相似之內心, 亦得證 $OR.OS' = OR'.OS$.



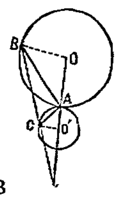
345. 過二圓 A, B, 相似之中心 O, 引任意之割線爲 $PP'Q'Q$, 又其共同切線之切點爲 T, T', 則 PT 平行 QT', 而 $P'T$ 平行於 $Q'T'$.

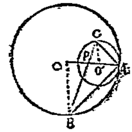
證 O為相似之內心，連結 AP, BQ, 則 OA : OB = OP : OQ = PA : QB, 又連結 AT, BT′, 則 OA : OB = OT : OT′, 故 OP : OQ = OT : OT′, 且於 O 之角相等，故 $\Delta OPT \backsim \Delta OQT'$, 因而 $O\hat{P}T = O\hat{Q}T'$ 卽 PT // QT′. 同樣 P′T // Q′T′, 而相似之外心，亦得同樣證之.



346. 過相切二圓之切點 A, 作互為垂直二圓之弦 AB, AC, 則過點 B, C, 之直線，必過一定之點.

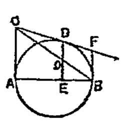
證 BC 與中心線 OO′, 或與其延線之交點為 P, 連結 OB, O′C, 則 $A\hat{O}B = 2\hat{R} - 2O\hat{A}B$, $A\hat{O'}C = 2\hat{R} - 2O'\hat{A}C$, 故 $A\hat{O}B + A\hat{O'}C = 4\hat{R} - 2(O\hat{A}B + O'\hat{A}C) = 2\hat{R}$, 因而 OB // O′C, 故 PO : PO′ = OB : O′C = 定比，因而 P 為內分或外分中心線 OO′ 為定比之點，即為相似之中心，卽 BC 過定點 P.





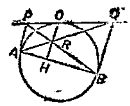
347. 自圓周上一點 A, 引徑 AB 及切線 AC, 自切線上一點 C, 引第二之切線 CD, 自切點 D, 引 AB 之垂線 DE, 則 DE 被 BC 二等分.

證 於徑 AB 之他端 B, 引切線 BF, 使與切線 CD 之延線相交於點 F, DE, BC, 之交點為 O, 則 DF = BF, CA = CD, 故 OE : CA = BE : AB = DF : CF = BF : CF = OD : CD = OD : CA, 故 OE = OD.



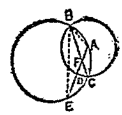
348. AB 為圓之徑, PCQ 為圓周上任意一點 C 之切線, PCQ 與 A, B, 之切線之交點為 P, Q, 而 AQ, BP, 之交點為 R, 則 CR 平行於 AP, BQ.

證 因 AP // BQ 故 $\Delta APR \backsim \Delta QBR$, 故 AP : BQ = PR : BR, 但 AP = PC, BQ = CQ, 故 PC : CQ = PR : RB, 因而 CR // BQ, 故 CR // BQ // AP.



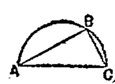
349. 將圓 ABC 之周上任意一點 A 為中心；以任意之半徑畫圓 BDC, 使截前圓於 B 及 C, 又自 A 引任意之直線 AFE, 使交弦 BC 於點 F, 交圓周 BDC, ABE, 於 D, E, 則 AD 為 AF 及 AE 之比例中項試證明之.

證 連結 AB, BE, 則 弧BA = 弧AC, 故 $A\hat{B}F = A\hat{E}B$, 因而共有 $\hat{A}$ 之 $\Delta ABE \backsim \Delta AFB$. 故 AF : AB = AB : AE, 又 AB = AD, 故 AF : AD = AD : AE.



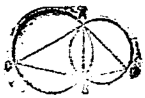
350. AC 為半圓之徑，於其周上取一點 B, 使 BC 等於半圓之半徑，則 AB 為 BC 及 BC + CA 之比例中項.

證 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$
$= (CA + BC)\ (CA - BC)$
$= (BC + CA)\ BC$, 故 BC + CA : AB = AB : BC.



351. 二圓之交點爲A及B,於A引各圓之切線,其與各圓之交點爲C及D,連結CB, BD,則BD爲CB, BA,之比例第三項.

證 $B\hat{A}C = A\hat{D}B$, $A\hat{C}B = B\hat{A}D$, 故$\Delta ACB \backsim \Delta DAB$,因而 $CB:AB=AB:BD$.

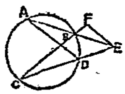


352. 於半圓之徑AB上,取任意一點C,引AB之垂線CD,使交圓周於D,連結圓之中心O與D,引OD之垂線CE,則DE爲AO及DC之比例第三項.

證 $\Delta CDO \backsim \Delta EDC$ 故 $OD : DC=DC : DE$, 或 $AO:DC=DC:DE$.

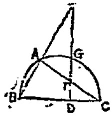
353. 將圓之弦AB, CD,各引長之,使相交於點E,過E平行於AD,引直線EF,使交CB之延線於F,則$FB:EF=EF:FC$.

證 $E\hat{B}F=A\hat{D}C=F\hat{E}C$, 故共有$\hat{F}$之$\Delta EFB \backsim \Delta CFE$,因而$FB:EF=FE:FC$.



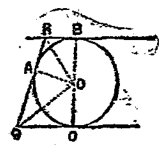
354. A爲BC爲徑之半圓周上任意一點,自BC上任意一點D,引BC之垂線,使交AB, AC及半圓周於點E, F, G,則DG爲DE, DF,之比例中項.

證 $A\hat{C}B$, $B\hat{E}D$皆爲$A\hat{B}C$之餘角,故相等.因而$\Delta EBD \backsim \Delta CFD$, 故 $BD:DE=DF:CD$. 或$BD.CD=DE.DF$, 但$\overline{DG}^2=BD.CD$, 故$\overline{DG}^2=DE.DF$, 或$DE:DG=DG:DF$.



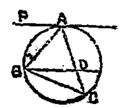
355. 圓之二平行切線,與A之第三切線,交於點P, Q,則半徑爲AP, AQ,間之比例中項.

證 PB之切點爲B,則因BP∥QC,故QC之切點C,爲過B之徑之他端,連結PO, QO, AO,則$P\hat{O}Q=\hat{R}$,而AO垂直於PQ明矣,故$\Delta QPOA \backsim \Delta OQA$,故$AP:OA=OA:AQ$.



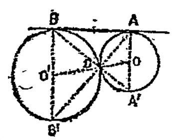
356. ΔABC外接圓周,平行其切線AP,過點B引直線BD,使與AC相交於D,則AB爲AC, AD,之比例中項.

證 $A\hat{C}B=P\hat{A}B=A\hat{B}D$, 故$\Delta ABC \backsim \Delta ADB$,因而$AD:AB=AB:AC$.

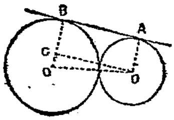


357. 二圓外相切,其外共同切線切點間之部分,爲二圓徑之比例中項.

證 自切點A, B,引徑AA′, BB′,連結BA′, AB′,當過二圓之切點D,易明也[189題].而$\Delta A'AB$ $\Delta ABB'$,其$\hat{B'}=A\hat{B}A'$, $B\hat{A}B'=\hat{A'}$, 故是等三角形相似,故$AA':AB=AB:BB'$.



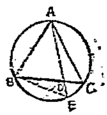
別證 引中心線OO′及半徑OA, O′B,引OC垂直於O′B,圓之半徑爲r, r',則$\overline{AB}^2=\overline{OC}^2=\overline{OO'}^2-\overline{O'C}^2=(r+r')^2-$



$(r\sim r')^2=4rr'=2r\times 2r'$, 故 $2r:AB=AB:2r'$, 即AB爲二圓徑間之比例中項.

358. 正三角形ABC之邊上任意一點D, 則 $\overline{BC}^2=BD.DC+\overline{AD}^2$.

圖 三角形ABC之外接圓周, 與AD之延線之交點爲E, 則因 $A\hat{E}B=A\hat{B}C$, 故AB於B切ΔBDE之外接圓, 故

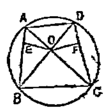


$\overline{AB}^2=AD.AE=\overline{AD}^2+AD.DE=\overline{AD}^2+BD.DC$, 故 $\overline{BC}^2=BD.DC+\overline{AD}^2$.

別圖 $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$, 故 $AD:AB=AB:AE$, $\therefore \overline{AB}^2=AD.AE$, 自此式可同樣得知 $\overline{BC}^2=BD.DC+\overline{AD}^2$.

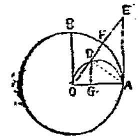
359. 自圓內接四邊形對角線之交點, 作相對邊之垂線, 與對應邊成比例.

圖 自圓內接四邊形ABCD對角線之交點O, 向相對邊AB, CD, 引垂線OE, OF, 則因 $E\hat{A}O$, $F\hat{D}O$, 相等, 故$\Delta EAO \backsim \Delta FDO$, 故 $OE:OF=AO:OD$. 又三角形BOA與CDO相似, 故 $AB:CD=AO:OD$, 故 $OE:OF=AB:CD$.



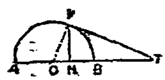
360. 四分圓OAB之半徑OA上畫半圓ODA, 於點A引切線AE, 自中心O引任意之直線ODFE, 使交二圓周於點D, F, 使交切線於點E, 引AO之垂線DG, 則OE, OF, OD, OG成連比例.

圖 連結DA, 則共有 $A\hat{O}E$ 之三直角三角形OAE, ODA, OGD互相似, 故 $OE:OA=OA:OD=OD:OG$. 但 $OA=OF$, 故 $OE:OF=OF:OD=OD:OG$.



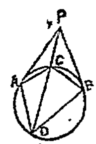
361. APB爲徑AB中心C之半圓, N爲CB上任意之點, 將AB延長至T, 使 $CT:AC=AC:CN$, 自點T引切線, 切半圓於點P, 則角 $C\hat{N}P$ 爲直角.

圖 引半徑CP, 則 $CT:AC=AC:CN$ 故 $CT.CP=CP:CN$, 故 $\Delta CPN \backsim \Delta CTP$, 因而 $C\hat{N}P=C\hat{P}T=\hat{R}$.



362. 自圓外一點, 引其圓之二切線及一割線, 將二切點連結割線之二分點, 所成之四邊形, 其兩對邊所包之矩形相等.

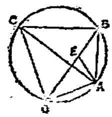
圖 自一點P, 所引切線爲PA, PB, 一割線爲PCD, 則因ΔAPD, ΔAPC之 $A\hat{P}D$ 共同, 且 $P\hat{A}C=A\hat{D}P$, 故此二三角形相似, 而 $AC:AD=PA:PD$. 同樣 $\Delta BPD \backsim \Delta CPB$. 故 $BC:BD=PB:PD$. 但 $PA=PB$, 故有次之比例式, $AC:AD=BC:BD$, 因而 $AC.BD=AD.BC$.



363. 圓內接四邊形, 兩對角線所包矩形, 等於二組對邊所包矩形之和.

圖 ABCD爲內接於圓之四邊形, 引

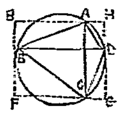
AE, 使 $A\hat{E}D=A\hat{B}C$, 則 $B\hat{C}A=B\hat{D}A$, 故 $\triangle EDA \backsim \triangle BCA$, 故 BC.AD =AC.DE, 又 $A\hat{E}B$ 為 $A\hat{E}D$ 之補角, 而 $C\hat{D}A$ 為 $A\hat{B}C$ 之補角, 故 △BEA, △CDA 相似. 故 AB.CD= AC.EB, 此二結果相加, 得 AB.CD+ BC.AD=AC.BD.



注意 本定理,謂之普佗列米之定理.

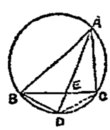
364. 圓內接四邊形兩對角線,互為直交,則二組兩對邊所包矩形之和,等於四邊形之面積之二倍.

證 四邊形ABCD兩對角線AC, BD, 互為垂直, 故其所包矩形 AC.BD. 等於ABCD之二倍[244題]. 但ABCD內接於圓, 故依普佗列米之定理[363題], AD.BC=AB.CD=AC.BD, 故 AD.BC+AB.CD=2ABCD.



365. △ABC之 $\hat{A}$ 之二等分線,再交外接圓周之點為D,連結BD,則 AD.BC= BD(AB+AC).

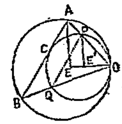
證 $\triangle ABD \backsim \triangle BED$, 故 AB : AD=BE : BD, 或 AB.BD=AD.BE, 同樣 AD.CE= AC.BD. 故 AB.BD+ AC.BD = AD.BE+ AD×CE, 或 BD.(AB+AC)=AD.BC.



別證 依普佗列米之定理, 而 AD.BC =AB.DC+AC.BD, 但 BD=DC, 故 AD.BC=(AB+AC).BD.

366. 有二圓內切於點O, 今內圓點C之切線, 截外圓於二點A, B. 又外圓之弦OA, OB, 截內圓於二點P, Q, 則OP與OQ之比, 等於AC與BC之比.

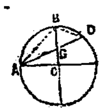
證 二圓之中心為E, E′, 連結AE, PE′, 則二個二等邊三角形EAO, E′PO, 在點O之角共通, 故此二三角形為等角形, 因而 $\hat{E}=\hat{E}'$, 及 $\hat{B}=\hat{Q}$, 故 AB∥PQ, 而 PO : QO=AP : BQ=AO : BO, 因而 $\overline{OP}^2 : \overline{OQ}^2$=OA.AP : OB.BQ=$\overline{AC}^2$: $\overline{BC}^2$, 因而 OP : OQ=AC : BC.



別證 於切點Q, 引切線OD, 則 $B\hat{A}O$= $B\hat{O}D=Q\hat{P}O$, 故 PQ∥AB, 因而 AO : OB =OP : OQ. 次連結OC, 則OC為 $A\hat{O}B$ 之二等分線, [何也 $B\hat{C}O=B\hat{C}O$=PQO, 又 $C\hat{P}O=B\hat{C}O$, 故二三角形CPO, BCO, 有二角相等, 即為等角形, 故 $B\hat{O}C$= $C\hat{O}P$,] 故 OA : OB=AC : BC. 因而 OP : OQ=AC : CB.

367. 過圓周上一點A, 引一弦AD, 使交垂直於過A之徑之點於C, 使交圓周於點D, 則矩形AC.AD, 等於半徑上正方形之二倍.

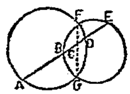
證 圓之中心為O, 垂直於半徑AO之半徑為OCB, 連結AB, AD, 則因 $A\hat{B}C=B\hat{D}A$, 故 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$, 因而



$AD:AB=AB:AC$, 或 $AC.AD=\overline{AB}^2=2\overline{AO}^2$.

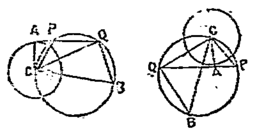
368. 過相交二圓共同弦上一點C,引一直線ABCDE,與一圓之交點爲A, D:與他圓之交點爲B, E,則AB : BC=ED : DC.

證 二圓之交點爲F, G, 則AC.CD=CF.CG=BC.CE. 故AC : BC=CE : CD, 或AC∼BC : BC=EC∼DC : DC. 即 AB : BC=ED : DC.



369. 一定圓周上一點A之切線,與過此圓中心C之一定圓,相交於點P, Q, 則PC.QC爲一定不易.

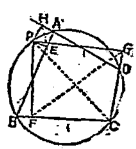
證 過C引第二圓之徑CB,連結BQ,



則二直角三角形ACP, QBC因$A\hat{P}C=Q\hat{B}C$故相似,故CA : CP=CQ : CB,或PC.CQ=AC.CB=定量.

370. 自圓周上一點,向其內接四邊形相對邊引垂線,此二雙垂線所包矩形相等,試證此定理及其逆.

證 自四邊形ABCD外接圓周上之點P,引AB, BC, CD, DA之垂線爲PE, PF, PG, PH連結HE, AP, FG, PC,則$H\hat{P}E+H\hat{A}B=H\hat{P}E+B\hat{C}D=G\hat{P}F+B\hat{C}D=2\hat{R}$,



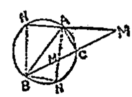
因而$H\hat{P}E=G\hat{P}F$. 又$H\hat{E}P=P\hat{A}H=P\hat{C}G=P\hat{F}G$,故△PEH∽△PFG,因而PH : PE=PG : PF,

或PH.PF=PE.PG. 次證其逆. 夫PH.PF=PE.PG,故PH : PE=PG : PF,又$H\hat{P}E+H\hat{A}E=F\hat{P}G+F\hat{C}G=2\hat{R}$. 但ABCD內接於圓,故$H\hat{A}E=F\hat{C}G$,故$H\hat{P}E=F\hat{P}G$,因而ΔPEH∽ΔPFG, $P\hat{A}H=H\hat{E}P=P\hat{F}G=P\hat{C}D$. 故P, A, D, C,在同一之圓周上,即P在四邊形ABCD外接圓周上.

注意 依本題,知點P之軌跡,爲四邊形之外接圓.

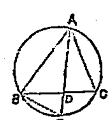
371. 自三角形ABC之頂點A,引其內角或外角之二等分線,與BC或其延線交於點M,與圓周交於點N,則AB, AC,所包矩形,等於AM, AN,所包矩形.

證 連結BN,則$B\hat{A}N=C\hat{A}M$, $A\hat{N}B=A\hat{C}M$,因而ΔABN∽ΔAMC,故AB : AN=AM : AC,或AB.AC=AM.AN.

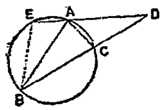


372. 三角形二邊所包矩形,等於此二邊所成之角或外角之二等分線分第三邊爲二部分所包矩形,與此二等分線上正方形之和或差.

證 ΔABC之$\hat{A}$之二等分線,與BC之交點爲D,與其外接圓之交點爲E,連結BE,則AB.AC=AD.AE [前題],但AE=AD+DE,而



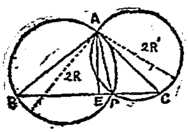
BD.CD=AD.DE, 故 AB.AC=AD.AE
=AD.(AD+DA)
$=\overline{AD}^2+$AD.DE=
$\overline{AD}^2+$BD.CD. 次



於 ΔABC 之 A 之外二等分線,與BC之延線,交於點D' 與外接圓周,交於點 E, 則 AB.AC=AE.AD=AD.(ED−AD) AD.ED$-\overline{AD}^2$ =DB.DC$-\overline{AD}^2$.

373. D為三角形ABC之底邊上一點,則三角形ABD, ACD,外接圓之徑之比,等於 AB : AC.

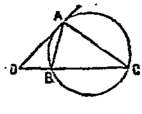
證 ΔABD, ΔACD, 外接圓之徑,各為 R, R', 自 A 引 BC之垂線 AE 為 h, 則 AB : h=2R : AD, h : AC=AD : 2R', 故 AB : AC=2R : 2R'.



注意 本題三角形為二等邊,則 R=R', 即 ΔABD, ΔACD, 之外接圓相等.

374. ABC為內接於圓之三角形,點 A 之切線 AD, 交 CB 之延線於點 D, 則三角形ABD及ACD外接圓之徑之比,等於 AD : CD.

證 自A向BC所引之高為 h, ΔABD, ΔACD, 外接圓之徑為 d, d', 則 AD : h=d : AB, AD : h=d' : AC, 故 d : d'=AB : AC, 但 ΔABD, ΔACD, 共有 $\hat{\mathrm{D}}$, 且 $\mathrm{D\hat{A}B=D\hat{C}A}$, 故 ΔABD ∽ ΔCAD, 故 AB : AC=AD : CD, 因而 d : d'=AD : CD.



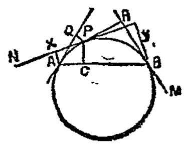
375. L, M 為圓周上定點 A, B, 之切線, N 為弧AB上任意點 P 之切線, 今 AX, BY, 垂直於N, 而 PC, PQ, PR, 各垂直於 AB, L, M, 則 (1) AX.BY=$\overline{PC}^2$, (2) PQ.PR=$\overline{PC}^2$.

證 (1) $\mathrm{Y\hat{P}B=P\hat{A}B}$, $\mathrm{P\hat{Y}B=P\hat{C}A=\hat{R}}$, 故 ΔPBY∽ΔAPC, 故

$$\frac{BY}{PC}=\frac{PB}{PA}.$$

同樣 $\dfrac{PC}{AX}=\dfrac{PB}{PA}$.

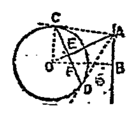
故 $\dfrac{BY}{PC}=\dfrac{PC}{AX}$, 即



AX.BY=$\overline{PC}^2$. (2)△APQ≡△PAX, 故 AX=PQ. 同樣 BY=PR, 故 PQ.PR =$\overline{PC}^2$.

376. 一直線上之諸點,關於已知圓之極線,通過其直線之極. [逆]通過一點諸直線之極,在其點之極線上.

證 已知圓之中心為O,自直線AB上任意一點A,引圓之切線 AC, AD, 連結切點 C, D, 則 CD 為點 A 關於圓 O 之極

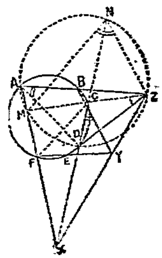


線,今將OA與CD之交點為E,自O引AB之垂線OB; OB與CD之交點為F, 則 ΔOEF∽ΔOBA, 故 OE.OA=OF.OB 但 OE.OA=$\overline{OC}^2$, 故 OF.OB=$\overline{OC}^2$,因而F為直線AB關於圓O之極,故AB上之點,關於圓O之極線,過直線AB關於圓O之極F. 次於過點F之諸直線

之極，在F之極線AB上，可將前證逆而證之．點在圓外亦同樣．

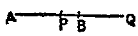
377. 圓內接六角形，引長其相對邊使相交，則三交點在同一之直線上．

圖 內接六邊形ABCDEF，相對邊延線之交點為X, Y, Z，今過A, D, Z，畫圓，切AF於M，又延長BC，切圓ADZ於N，連結AD, FC, MN, ZN，則 $\hat{MND}=\hat{MAD}=\hat{FCD}$，因而MN∥FC，同樣NZ∥CY，MZ∥FY，故△NMZ∽△CFY，且此二三角形在相似之位置，故對應二角頂及相似之中心之點X, Y, Z，在同一之直線上．



378. P, Q，對於A, B，為調和共軛點，則A, B，亦對於P, Q，為調和共軛點．

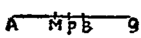
圖 P, Q，對於A, B，為調和共軛點，故AP : BP=AQ : BQ．或 AP : AQ=BP : BQ，此表示A, B，對於P, Q，為調和共軛點也．



379. A, P, P, Q，為調和列點，而M為AB之中點，則MA為MP, MQ，之比例中項．

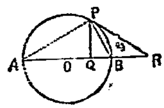
圖 A, P, B, Q，為調和列點，故AP : BP＝AQ : BQ，或

AP～BP : AP＋BP＝AQ～BQ : AQ＋BQ，或 2MP : 2MA=2MA : 2MQ，即MP : MA=MA : MQ．



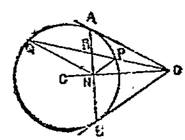
380. 圓周上任意一點之切線，及自其點向徑所引垂線，分徑為調和．

圖 中心O之圓周上任意一點P之切線，與徑AOB之交點為R，自P引AOB之垂線，其趾為Q，今連結AP，與BP，則 $\hat{QPB}=\hat{PAB}=\hat{BPR}$，故BP為△PQR之 $\hat{P}$ 之內二等分線．次因BP, AP，互為垂直，故AP為△PQR之 $\hat{P}$ 之外二等分線．因而A, Q, B, R，為調和列點，即Q, R，分AB為調和．



381. OA, OP，為中心C之圓之切線，OPQ為過O之任意之割線，此割線與圓周交於點P, Q，與AB交於點R，則PQ於O及I，分為調和．

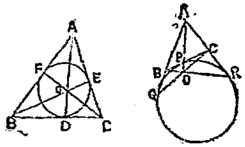
圖 AB, OC，之交點為N，則因NR為 $\hat{PNQ}$ 之二等分線[264題]，故垂直於NR之ON，為 $\hat{PNQ}$ 之外二等分線．因而RP : RQ=PN : QN=OP : OQ，即PQ於O及R，分為調和．



382. 三角形之內切圓或傍切圓之切點，連結其邊所對頂點之三直線，過同一之點．

圖 △ABC之內切圓切BC, CA, AB之點為D, E, F，則BD=BF, CD=CE, AE

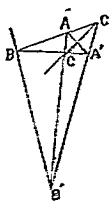
=AF, 故 $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$, 故 AD, BE, CF 於同一之點O相交,[薛瓦之



定理見第一門共點性之條]. 同樣傍切圓切三邊之點爲P, Q, R, 則 $\frac{BP}{PC}\times\frac{CR}{RA}\times\frac{AQ}{QB}=1$, 故 AP, BR, CQ, 過同一之點.

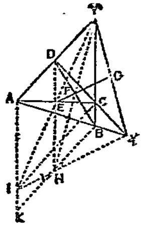
383. 三角形之外角之二等分線,與對邊相交之三點,在同一之直線上.

圖 ΔABC之角A,B,C,之外角二等分線,與邊BC, CA, AB,之交點爲A′, B′, C′, 則 CA′ : A′B=AC : AB, BC′ : C′A=BC : AC, AB′ : B′C=AB : BC, 故 (CA′ : A′B)(BC′ : C′A)(AB′ : B′C)=(AC : AB)(BC : AC)(AB : BC)=1. 故A′, B′, C′, 在同一之直線上.[美列剌斯之定理見第一門共線性之條]

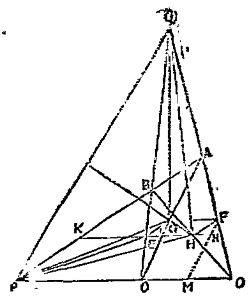


384. 四邊形ABCD之邊AB, DC之交點爲X, AD, BC, 之交點爲Y, 則AC, BD, XY, 之各中點,在同一之直線上.[本題直線XY, 謂之四邊形之第三對角線.]

圖 四邊形ABCD之對角線AC, BD, 及其第三對角線XY各中點爲E, F, G, 作平行四邊形AYBX, 次引DH, CI, 平行於YB, DA, 則XCD爲ΔYAB之橫截線, 故(AX : XB)(BC : CY)×(YD:DA)=1, 但BC=IK, CY=AI, YD=BH, DA=KH, 故(AX : XB)(IK : AI)(BH : KH)=1, 故XHI爲一直線,而爲ΔAKB之横截線. 今連結YI, YH, 則AC, BD XY, 之中點,各爲YI, YH, YX之中點E, F, G, 故E, F, G, 在平行於IHX之直線上明矣.



別證 不用比例證之,則如次圖四邊形ABCD, 對邊之交點爲P, Q, 對角線AC, BD, 之中點爲G, H, 邊BC, AD, 之中點爲E, F, 連結EH, HF, FG, GE. 先證三角形PGH, QGF, 皆等於四邊形ABCD四分之一, 因 ▱EHIG$=\frac{1}{2}$(△ACD−ΔBCD)[連結DC之中點M與F, 引EH交AC, FM, 於L, N, 則 ▱EHFG=▱LNFG=▱GFCM−▱ECMN, 但 ▱GFCM$=\frac{1}{2}$ΔADC, ▱LNMC=▱EHMC



$=\frac{1}{2}\Delta BDC$, 故也.] 故 $\Delta EGH=\frac{1}{4}(\Delta ACD-\Delta BCD)$. 次以HE之延線, 與BP之交點為K, 則因 HE∥DC, 且E為BC之中點, 故K為BP之中點, 因而 $\Delta BEH=\Delta PEH$, 即 $\Delta PEH=\frac{1}{4}\Delta BCD$, 同樣 $\Delta PEG=\frac{1}{4}\Delta ABC$, 故 $\Delta PGH=\Delta EGH+\Delta PEH+\Delta PEG=\frac{1}{4}(\Delta ABC+\Delta BCD+\Delta ACD-\Delta BCD)=\frac{1}{4}ABCD$, 同樣 $\Delta QGH=\frac{1}{4}ABCD$, 因而 $\Delta PGH=\Delta QGH$, 而此三二角形, 在同一之底邊GH上, 且在反對之側, 故其高相等, 而PQ被GH二等分之, 即PQ, AC, BD, 之中點, 在同一之直線上,

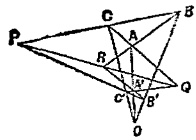
385. 自三角形ABC之各角頂, 至對邊作三直線 Aa, Bb, Cc, 相交於一點O, 則 $\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1$, 又O在三角形外, 則如何.

證 $\frac{\Delta OBC}{\Delta ABC}=\frac{Oa}{Aa}$, $\frac{\Delta OCA}{\Delta ABC}=\frac{Ob}{Bb}$, $\frac{\Delta OAB}{\Delta ABC}=\frac{Oc}{Cc}$, 故

$$\frac{\Delta OBC+\Delta OCA+\Delta OAB}{\Delta ABC}=\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc},$$

即 $\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Ba}+\frac{Oc}{Cc}=1$. 若O在 ΔABC 之形外, 而在 $\hat{A}$ 之二邊間, 則 $\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}-\frac{Oa}{Aa}=1$. O在A之對頂角內, 則 $\frac{Ca}{Aa}-\frac{Ob}{Bb}-\frac{Oa}{Aa}=1$.

386. 二三角形ABC, A′B′C′, 連結其角頂與角頂之直線AA′, BB′, CC′, 過同一之點, 則相應邊之交點P, Q, R, 在同一之直線上[並其逆].



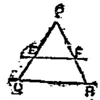
證 ΔABC, $\Delta A'B'C'$, 其AA′, BB′, CC′, 相交於一點O, 將BC, B′C′, 之交點為P, AC, A′C′之交點為Q, AB, A′B′之交點為R, 則 ΔOAB 被橫截線RA′B′截之, 故 $(AR:RB)(BB':B'O)(OA':AA')=1\cdots(\alpha)$[見美列剌斯之定理第一門共線性之條]. 同樣 ΔOBC 被橫截線PC′B′截之, 而 $(BP:PC)(CC':C'O)(OB':B'B)=1\cdots(\beta)$. 又 ΔOAC 被橫截線QA′C′截之, 而 $(CQ:QA)(AA':A'O)(OC':C'C)=1\cdots(\gamma)$. 故將 (α), (β), (γ) 相乘而簡單之, 則 $(AR:RB)(BP:PC)(CQ:QA)=1$, 故P, Q, R, 在同一之直線上. [逆]. B′C′與BC, C′A′與CA, A′B′與AB, 之交點P, Q, R, 在同一之直線上, 若CC′ BB′, 之交點為O, 則 $\Delta B'BR$ 與 $\Delta C'CQ$ 連結相對應之角頂之直線, 相交於一點P, 故依初之證明知BB′, 與CC′, RB′與QC′, BR與CQ, 之交點O, A′, A, 在同一之直線上. 故AA′, BB′, CC′, 於同一點之相交.

注意 本題謂之迭查爾克之定理.

軌跡

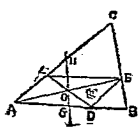
387. 求自一定點, 至一定直線, 所引直線之中點軌跡.

解 一定點為P，一定直線為QR，今過P引二直線PQ，PR，連結其中點E，F，則EF平行於QR．同樣自P向QR引直線，其中點皆在EF上．[逆]．於EF上取任意一點F，連結PF，其延線與QR相交於點R，則因$\triangle$PQR之EF過PQ之中點，且平行於QR，故F為PR之中點，故自P向QR所引直線之中點軌跡，為直線EF．



388． 平行四邊形ADEF，與三角形ABC，共有$\hat{A}$，且對A之角頂E在BC上，問其對角線交點之軌跡如何．

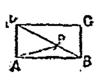
解 對角線之交點為O，則AO=OE，故O之軌跡與自A向BC所引直線中點之軌跡同，故O之軌跡，為平行於BC之直線在二邊AB，AC，間之部分GH．



注意 平行四邊形，共有$\hat{A}$之補角，則點在BC之延線上，而軌跡為GH雙方引長無限，而除去GH之部分．

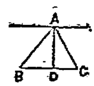
389． 對矩形之相鄰二邊成補角之點之軌跡．

解 矩形ABCD之相鄰二邊AB，AD，對此成補角之點為P，連結AP，BP，DP，則$B\hat{P}A+D\hat{P}A=2\hat{R}$，故B，P，D，為同一之直線，即P在對角線BD上．[逆]取BD上任意之一點P，連結AP，則$B\hat{P}A+D\hat{P}A=2\hat{R}$，而$B\hat{P}A$，$D\hat{P}A$，各為二邊AB，AD，所對之角，故軌跡為有限直線BD．



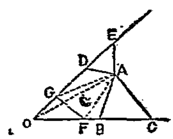
390． 三角形之底及面積為一定，其頂點之軌跡如何．

解 ΔABC之面積及底BC為一定，則高AD為一定，故頂點A之軌跡，為平行於BC之二直線．

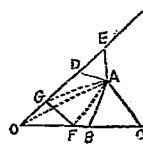


391． 二三角形有共同之頂點，其各底之大及位置為既知，又其面積之和為既知，問其頂點之軌跡如何．

解 ΔABC，ΔADE，共有頂點A，其各底BC，DE之大及位置為已知，且其面積之和為已知，夫BC，DE，之交點為O，取OF，OG，各等於BC，DE，則ΔOFG為一定．今連結AG，AF，GF，則ΔABC=ΔACF，ΔADE=ΔAOG，故四邊形AGOF之面積為一定，因而ΔAGF之面積為一定，且GF之位置及大為一定，故A之軌跡，為平行於GF之直線，在二直線OF，OC間之部分．

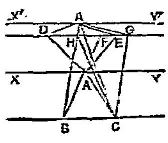


注意 I． A在角BOD之外，則OG及OF之一方或雙方，取於O之反對之側，同樣得求其軌跡，故其一般所求之軌跡，為



將O爲中心之平行四邊形之周圍.如次圖A在$E\hat{O}S$內,乃於OS上,取OK,等於BC,連結$A'K$, $A'O$, $A'G$,則$\Delta A'BC=\Delta A'KO$, $\Delta A'DE=\Delta A'OG$,故$\Delta A'BC+\Delta A'DE=\Delta A'KO+\Delta A'OG$,故四邊形$A'KOG=$四邊形AGOF,但$\Delta GOF=\Delta GOK$,故$\Delta AGF=\Delta A'KG$,今連結KP,則因$\Delta KPG=\Delta FPG$,故$\Delta PKG=\Delta A'KG$,因而$PA'\parallel GK$,卽A在$E\hat{O}S$內之軌跡,爲過P平行於GK所引直線PS. 而PS以外之點,不適於要件,容易知之. 同樣A在$S\hat{O}R$內爲SR,在$C\hat{O}R$內爲OR,故A之軌跡,若BC與DE相交,則爲平行四邊形PQRS.

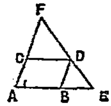
注意II. 已知面積小於三角形GOF,則將其差爲積平行四邊形GFHK之各邊爲底之三角形,頂點之軌跡,在此四邊形內,因而軌跡爲GFHK內之平行四邊形. 次若BC與DE平行,且$DE>BC$,設A爲二平行線間適於要件之點,連結AB,AC,AD,AE,又於DE上,取等於BC之DF,連結AF,則$\Delta ABC+\Delta ADF$,等於BC爲底二平行線BC, DE,間之距離爲高之三角形之面積,此面積爲一定,故ΔAFE亦爲一定,故過A平行於BC之直線XY爲軌跡之一部. 又A'爲在BC與DE外適於要件之點,作$\Delta A'\hat{B}C$, $\Delta A'DE$, $A'B$與DE之交點爲H,則$\Delta ABC+\Delta ADE=\Delta A'BC+\Delta A'DE$,而$\Delta HBC=\Delta ABC+\Delta ADF$,故$\Delta A'HC+\Delta A'DE=\Delta AFE$,今自C引平行於BH之CG與DE,或其延線之交點爲G.則$\Delta A'HC=\Delta A'HG$,故$\Delta A'HG+\Delta A'DE=\Delta AFE$,此式左邊二三角形高相等,底爲$DE+BC$故$A'$之軌跡爲過A平行於ED之直線$X'Y'$. 而自A, A',下DE之垂線各爲m, n,則$\Delta AEF=\frac{1}{2}m\times EF$, $\Delta A'DE+\Delta A'HG=\frac{1}{2}n(DE+BC)$,故$m:n=DE+BC:DE-BC$.



注意III. 二平行線BC及DE之距離爲l,已知面積爲P,小於$\frac{1}{2}l\,BC$,則無適於要件之點. 又$\frac{1}{2}l.DE>P>\frac{1}{2}l.BC$,則軌跡在二平行線間,有如XY之一直線,及對於DE與XY在反對之側如$X'Y'$之一直線. 又$P>\frac{1}{2}l.ED$,則二平行線間無軌跡,其兩外側各有一軌跡. $P=\frac{1}{2}l.BC$,則軌跡爲無限直線DE,而$P=\frac{1}{2}l.DE$,則軌跡爲無限直線BC. 次若$BC=DE$,而$P<\frac{1}{2}l.BC$,則無軌跡. $P=\frac{1}{2}l.BC$,則二平行線及夾於其間之平面,皆爲軌跡. $P>\frac{1}{2}l.BC$,則軌跡爲在二平行線外側一雙之平行線.

392. 平行四邊形ABCD之周圍及點A及二鄰邊AB, AC,之方向爲一定,問點D之軌跡如何.

[解] 平行四邊形ABCD之周圍爲$2m$，今於AB，及AC上，各取點E及F，使AE，AF，皆等於m，則E，F，爲定點．而ΔBDE，ΔCDF，皆爲二等邊，且互等角，因而

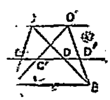


$C\hat{D}F+B\hat{D}E=2\hat{R}-\hat{A}=2\hat{R}-\hat{D}$，故連結E，F，之直線，恆過點D，卽D在EF上．[逆]於EF上取一點D，引DB，DC，各平行於AC，AB，作平行四邊形ABCD，則ΔBED，ΔCDF，皆爲二等邊，而ABCD四邊之和，爲AE+AF=$2m$，故點D之軌跡，爲有限直線EF．

[注意] 取D於EF之延線上，則平行四邊形ABCD相鄰二邊之差爲一定．

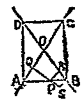
393. AB爲已知直線，CD爲平行於AB之直線，其長爲已知，而AC，BD之交點爲O，則CD變其位置，而點O之軌跡，爲平行於AB之直線．

[解] AC及BD之交點爲O，於CD上，取C′D′=CD，連結AC′，BD′其交點爲O′，則AO：CO=AB：CD，AO′，：C′O′=AB：C′D′，因而AO：CO=AO′：C′O′，或AC：CO=AC′：C′O′，故OO′∥CD∥AB．[逆]．OO′上之點，合於要件，可容易證明，故軌跡爲平行於AB之直線OO′．



394. 自一點至二直線距離之和，等於一定之長，求其點之軌跡．

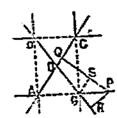
[解] 二定直線AC及BD之交點爲O，軌跡之一點爲P，自P引OA及OB之垂線PQ，PR，其和等於l，今於QP之延線上，取PS=PR之點S，自S引AC之平行線SB，與BD之交點爲B，連結BP之直線，與AC之交點爲A，則二直角三角形RPB與SPB全等，故$R\hat{B}P=S\hat{B}P=Q\hat{A}P$，因而$\Delta$OAB爲二等邊，卽P在二等邊三角形OAB之底邊AB上．[逆]．自AB上之一點P，引AC及BD之垂線PQ，PR，則其和等於l[35題]．又取OA=OB=OC=OD，連結BC，CD，DA，則ABCD爲矩形，而此矩形之各邊，皆爲所求之軌跡．



[注意] AC∥BD，且其距離等於l，則平面之在此平行線間之部分，爲所求之軌跡，若其距離，小於l，則軌跡爲二平行線，大於l，則爲不能．

395. 自一點至二定直線之距離之差，等於一定之長，求其點之軌跡．

[解] P爲軌跡上之一點，自P引AC及BD之垂線PQ，PR，則PQ∼PR=l，於PQ上取PS，等於PR，引SB平行於AC，與BD之交點爲B，連結BP，此直線與AC之交點爲A，則ΔPBS≡ΔPBR，而ΔOAB爲二等邊三角形明矣，卽P在ΔOAB之底AB之延線上[35題]．同樣取OA=OB=OC=OD，則

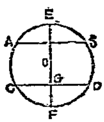


ABCD 爲矩形，而 P 在此矩形四邊雙方延長之直線上. 逆. 在此矩形四邊雙方延長之直線取一點 P, 自 P 向二定直線 AC, BD, 引垂線 PQ, PR, 則 PQ∼PR$=l$, 故所求之軌跡爲矩形 ABCD 各邊之延線.

【注意】 AC∥BD, 且其距離等於 l, 則平面之在此平行線外之二部分, 爲所求之軌跡, 若其距離不等於 l, 則爲二平行線.

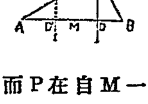
396. 圓之平行諸弦中點之軌跡如何.

【解】 中心 O 之圓之一弦爲 AB, 則平行於 AB 之諸弦之中點, 在垂直於 AB 之徑 EF 上明矣. [逆]. 於 EF 上取一點 G, 過 G 引平行於 AB 之弦 CD, 則 EF 垂直於 CD, 故 G 爲弦 CD 之中點, 因而所求之軌跡爲圓之徑 EF.



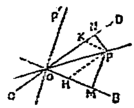
397. 自一動點 P 至二定點 A, B, 之距離上正方形之差爲一定, 問點 P 之軌跡如何.

【解】 連結 AB, M 爲 AB 之中點, 自軌跡上之一點 P, 下 AB 之垂線 PD, 則 $\overline{AP}^2\sim\overline{BP}^2=\overline{AD}^2\sim\overline{BD}^2=4\,AM.DM=k^2$[定量], 故 DM 爲一定之長, 因而 P 在自 M 一定之距離之點 D, 垂直於 AB 之直線上. [逆]. 於直線 PD 上取一點 P, 連結 PA, PB, 則 $4AM.DM=k^2=\overline{AD}^2\sim\overline{BD}^2=\overline{AP}^2\sim\overline{BP}^2$, 故所求之軌跡, 爲直線 PD, 若 AP > BP, 則 D 在 BM 之間, 若 AP<BP, 則 D 在 AM 之間.



398. 自已知二直線, 其距離之比, 等於已知之比, 求點之軌跡.

【解】 已知二直線 AB, CD, 之交點爲 O, 設 P, 爲適於要件之點, 但 P 在角 BOD 或其對頂角之內, 自 P 引 AB, CD, 之垂線 PM, PN, 並自 P 引 AB, CD 之平行線 PK, PH, 連結 OP, 則 $P\hat{M}H=P\hat{N}K=\hat{R}$, $P\hat{H}M=P\hat{K}N\,[=B\hat{O}D]$, 因而 $\Delta PMH\backsim\Delta PNK$, 故 $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{PH}{PK}=\dfrac{OK}{PK}=$ 定比, 但 $P\hat{K}O=[B\hat{O}D$ 之補角$]=$ 定角, 故 $K\hat{O}P$ 爲一定之大, 卽 P 在與 OD 成一定角之直線 OP 上. 同樣 P′ 在角 AOD 或其對頂角內, 而爲適於要件之點, 則 P′ 在與 OD 成一定角之直線 OP′ 上. [逆]. 於 OP 或 OP′ 上, 取任意一點 P, 自 P 引 AB, CD, 之垂線 PM, PN, 則 $\Delta PMH\backsim\Delta PNK$, 故 $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{PH}{PK}=\dfrac{OK}{PK}=$ 定比, 因而所求之軌跡爲二直線 OP, OP′.

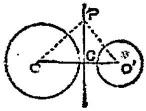


【注意】 AB∥CD, 而已知之比爲等比, 則軌跡爲一直線.

399. 關於二圓周方積相等之點之軌跡如何.

【解】 半徑爲 r, r', 之二圓之中心爲 O,

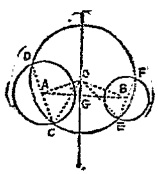
O′, 關於此二圓方積相等之點爲 P, 連結 OP, O′P, 下 OO′ 之垂線 PC, 則 $\overline{PO}^2 \sim r^2 = \overline{PO'}^2 \sim r'^2$, 或 $\overline{PO}^2 \sim \overline{PO'}^2 = r^2 \sim r'^2$, 但 $\overline{PO}^2 \sim \overline{PO'}^2 = \overline{CO}^2 \sim \overline{CO'}^2$, 故 $\overline{CO}^2 \sim \overline{CO'}^2 = r^2 \sim r'$, 故 C 分 OO′ 爲二部分, 其二部分上之平方之差, 等於已知二圓半徑平方之差, 而 P 在自 C 作 OO′ 之垂線上 [397 題]. [逆]. 此直線上任意之一點爲 P, 則因 $\overline{CO}^2 \sim \overline{CO'}^2 = r^2 \sim r'^2$, 故 $\overline{PO}^2 \sim \overline{PO'}^2 = r^2 \sim r'^2$, 或 $\overline{PO}^2 \sim r^2 = \overline{PO'}^2 \sim r'^2$, 即點 P 之關於二圓之方積相等, 故所求之軌跡爲直線 PC.



【註】 OO′ 分爲二部分, 其含大圓中心之部分, 大於其他.

400. 二等分已知二圓周之圓周之軌跡如何.

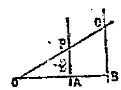
【證】 中心 O 之圓周, 將中心 A, B, 之已知二圓周分爲二等分, 將圓 O 截二圓 A, B, 之點爲 C, D, E, F, 則 CD, EF, 爲二圓之徑明矣, 今自 O 引中心線 AB 之垂線 OG, 連結 OA, OB, OC, OE, 則 $\overline{AG}^2 \sim \overline{BG}^2 = \overline{OA}^2 \sim \overline{OB}^2 = (\overline{OC}^2 - \overline{AC}^2) \sim (\overline{OE}^2 \sim \overline{BE}^2) = \overline{BE}^2 \sim \overline{AC}^2$, 故 G 分 AB 爲二分, 其各分上正方形之差, 等於半徑上正方形之差, 因而 G 爲定點, 故 O 在定點 G 所作 AB 之垂線上 [397 題]. [逆]. 此直線上之點, 適於要件, 可得證明之, 故軌跡爲直線 OG.



【註】 AB 分爲二部分, 其含大圓中心之部分, 小於其他.

401. 自點 O 引任意之直線於其上, 取二點 P, Q, 使 OP : OQ 等於已知之比, 若點 P 之軌跡爲一直線, 則點 Q 之軌跡, 爲其平行線.

【證】 OP : OQ $= m : n$, [$m < n$ 則 Q 對於 AP 與 O 在異傍, $m > n$, 則 Q 對於直線 AP 與 O 在同傍.] 今 P 之軌跡爲直線 AP, 自 O 引 AP 之垂線 OA, 於其上取點 B, 使 OA : OB $= m : n$, 連結 BQ, 則 BQ∥AP, 即 Q 在平行於 AP 之直線 BQ 上. [逆]. 於 BQ 上取一點 Q, 連結 OQ, 與 AP 相交於點 P, 則 $m : n =$ OA : OB = OP : OQ, 故點 Q 之軌跡爲平行於點 P 之軌跡之直線.

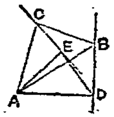


【註】 取 P, Q, 於點 O 之異傍, 則關於點 O 爲 BQ 對稱之直線, 亦爲所求之軌跡.

402. 三角形與已知三角形相似, 其角頂在一定之點, 其他一角頂, 在一直線上, 則第三角頂之軌跡爲一直線.

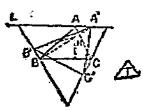
【證】 將適於要件之三角形爲 ABC, 定點爲 A, 定直線爲 BD, 自 A 引 BD 之垂線 AD, 於 AD 上作相似於 △ABC 之三角形 ADE, 則此三角形爲一定, 乃連

結CE, 則因△ABC∽△ADE, 故AD:AB=AE:AC, 又由$E\hat{A}D=C\hat{A}B$, 而$C\hat{A}E=B\hat{A}D$, 故△AEC∽△ADB. 因而$A\hat{E}C=A\hat{D}B=\hat{R}$, 卽角頂C在定點E所引定直線AE之垂線CE上. [逆]. 於CE上取一點C, 連結AC, 引直線AB, 使與AC成$C\hat{A}B=E\hat{A}D$, 與BD於點B相交, 連結BC, 則△DAB與△EAC相似, 而AD:AE=AB:AC, 因$D\hat{A}E=B\hat{A}C$, 故△DAE與△BAC亦相似, 故點C之軌跡爲直線CE. 若三角形ABC之方向相反, 如圖中點C, 在AB之下側, 則點C之軌跡, 關於直線AD, 而爲CE之對稱線.



403. 有△ABC, 恆相似於同一之三角形, 其垂心之位置爲一定, 其點A恆移動於一定直線上, 問點B及點C之軌跡,

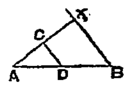
【解】已知三角形爲T, 已知直線爲L. 已知之垂心爲H, 今畫適於要件之△ABC, △A'B'C', 其BC平行於L, 故△ABC之位置固定矣, 乃因△ABC, △A'B'C', 皆相似於T, 故互相似, 故$\frac{BH}{B'H}=\frac{AH}{A'H}$, 因$B\hat{H}B'=A\hat{H}A'$, 故△BHB'∽△AHA', 故$H\hat{B}B'=H\hat{A}A'=\hat{R}$, 故點B'在垂直於BH之直線上, 同樣點C'在垂直於CH之直線上, 而其逆亦可得證明之, 故所求之軌跡爲過點B及C各垂直於BH, CH, 之直線.



【注意】直線L及二軌跡直線所成之角, 各等於△ABC之角, 可容易知之.

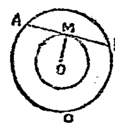
404. AB爲已知之直線, AX爲自A向過B之任意直線所引垂線, 則AX中點之軌跡如何.

【解】AX之中點爲C, AB之中點爲D, 則D爲定點, 而因$A\hat{C}D=\hat{R}$, 故C在ABD爲徑之圓周上. [逆]. 此圓周之諸點, 適於要件, 故C之軌跡, 爲AD爲徑之圓周.



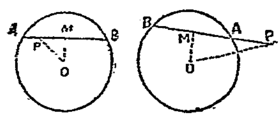
405. 圓之定長弦中點之軌跡爲一同心圓.

【解】同圓或相等圓之相等弦, 在自中心之等距離, 故圓ABC之弦, 等於其圓之弦AB者, 其中點自中心在等於OM [M爲AB之中點] 之距離, 故所求之軌跡爲O爲中心OM爲半徑之圓周.



406. 過已知點, 引已知圓之弦, 則弦中點之軌跡爲一圓周.

【解】過已知點P, 引任意之弦AB, 連

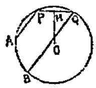


結AB之中點M與中心O, 則OM⊥AB, 而點M不能在圓外, 故點M之軌跡

為PO為徑之圓周,在圓O內一部分之弧.

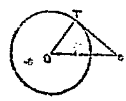
407. 自圓周上二定點A,B,引平行直線AP,BQ,使再截圓周於點P及Q,則PQ中點之軌跡,為一同心圓.

解 因AP∥BQ,故QP=AB=定長.故自中心O引PQ之垂線OM,為一定之長,而M為PQ之中點也.故PQ中點M之軌跡,為中心為O半徑為OM之圓周.



408. 於已知圓引已知長之切線之端之軌跡如何.

解 於中心O之已知圓,引已知長之切線為TP,則$OP^2=\overline{OT}^2+TP^2$,故OP之長為一定,故點P之軌跡,為中心為O之圓周.

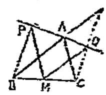


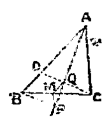
409. 過已知有限直線AB之兩端各有一直線,此二直線,最初自BA之方向,同時各以其端為中心,其一以其他二倍之速,同方向迴轉於同平面上,問此二直線交點之軌跡如何.

解 AC以BC二倍之速而迴轉,於BA之延線上,取點D,則$C\hat{A}D=2C\hat{B}A$,但$C\hat{B}A+B\hat{C}A=C\hat{A}D$,故$C\hat{B}A=B\hat{C}A$,因而AC=AB,故點C之軌跡,為中心為A半徑為AB之圓周.

410. 三角形之底之大及位置為已知.(1)又他二邊之和為已知,自底之兩端,下頂角之外二等分線之垂線,求其二垂線之趾之軌跡. (2)又他二邊之差為已知,自底之兩端,下頂角之內二等分線之垂線,求此二垂線之趾之軌跡.

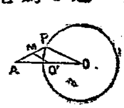
解 △ABC之底邊BC之大及位置為已知. (1)又他二邊之和AB+AC=m,引長BA至D,使AD=AC,則BD=m.連結CD,則DC垂直於$\hat{A}$之外二等分線AQ且其交點Q為CD之中點,今將BC之中點為m,連結MQ,則MQ=$\frac{1}{2}m$. 同樣自B向$\hat{A}$之外二等分等線,引垂線,其垂趾為P,則MP=$\frac{1}{2}m$,故P,Q,之軌跡為中心為M半徑為$\frac{1}{2}m$之圓周. (2) AB∼AC=m,而$\hat{A}$之內二等分線上,自B,C,所下垂線之趾為P,Q,引長CQ與AB之交點為D,則AC=AD而Q為CD之中點明矣,今將BC之中點M,連結P,Q,則MQ=$\frac{1}{2}$BD=$\frac{1}{2}$(AB∼AC)=$\frac{1}{2}m$,MP=$\frac{1}{2}m$,故P,Q,之軌跡,為中心為M半徑為$\frac{1}{2}m$之圓周.





411. 自一定點至一圓周所引諸直線,其中點在一圓周上.

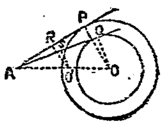
解 自一定點A至中心為O之一定圓周,引任意之直線AP,連結OA之中點O′與AP之中



點M, 因 $O'M//OP$, 且 $O'M=\frac{1}{2}OP$, 故 M 在O'為中心定圓半徑之半分為半徑之圓周上.

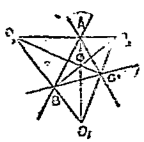
412. 自已知之點,向諸同心圓切引線,求此諸切線中點之軌跡.

解 自已知之點A,向諸同心圓引切線AP, AQ,……, 其中點為R, S,……,連結OA之中點O'與R, S,……, 則O'R, O'S,……, 各平行於OP, OQ,……, 故 $O'\hat{R}A=O'\hat{S}A=\cdots\cdots=\hat{R}$. 故R, S,……, 之軌跡為AO'為徑之圓周.



413. 三角形之底邊為一定,而頂角之大亦為一定,求之各軌跡如何. (1) 內心, (2) 傍心, (3) 垂心, (4) 重心, (5) 九點圓之中心.

解 (1) △ABC之內心為O, 三傍心為 O_1, O_2, O_3, 則 $B\hat{O}C=\hat{A}+\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}=$ 定角. 故O之軌跡為將BC為弦含 $\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$ 之圓弧.

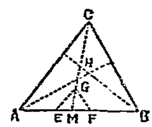


注意 自已知直線AB之兩端,引任意之二平行線AP, BQ, 則 $P\hat{A}B$, $Q\hat{B}A$ 二等分線交點之軌跡為圓周.

(2) $B\hat{O}_1C=2\hat{R}-\left(\hat{R}-\frac{\hat{A}}{2}\right)=\hat{R}-\frac{\hat{A}}{2}=$ 定角, 故 O_1 之軌跡, 為內心軌跡圓弧之共軛弧. 又 $B\hat{O}_2C=\frac{\hat{A}}{2}$ 及 $B\hat{O}_3C=\frac{\hat{A}}{2}$, 故 O_2, O_3, 之軌跡, 為BC為弦含 $\frac{\hat{A}}{2}$ 之圓弧.

注意 $O\hat{B}C<\hat{R}$, $O\hat{C}B<\hat{R}$, $O_1\hat{B}C<\hat{R}$, $O_1\hat{C}B<\hat{R}$, 今於B, C, 引BC之垂線, 則內心O及傍心 O_1,必在此二垂線之間, 而 $B\hat{O}C=\hat{R}+\frac{\hat{A}}{2}>\hat{R}$, $B\hat{O}_1C=\hat{R}-\frac{\hat{A}}{2}<\hat{R}$, 故O之軌跡為BC弦之圓弧全體, 而 O_1 之軌跡為BC為弦含 $\hat{R}-\frac{\hat{A}}{2}$ 之圓弧中夾於前二垂線間之部分. 次因 $O_2\hat{C}B>\hat{R}$, $O_3\hat{B}C>\hat{R}$, 故 O_2, O_3, 之軌跡, 為BC為弦含 $\frac{A}{2}$ 之圓弧中不夾於前二垂線間之部分.

(3) △ABC之底BC之位置與大及頂角C之大為一定, H為其垂心, 則 $A\hat{H}B=$ ($\hat{C}$之補角) = 定角, 故H之軌跡, 為AB為弦之圓弧,



(4) G為重心, 則 $GM=\frac{1}{3}CM$, 故自G引AC, BC, 之平行線GE, GF, 與AB之交點為E, F, 則 $ME=MF=\frac{1}{3}AM$, 故E, F, 為定點, 且 $E\hat{G}F=\hat{C}=$ 定角. 故G之軌跡為EF為弦之圓弧.

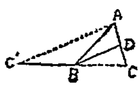
(5) △ABC之底邊BC及頂角A為已知, 故頂點A恆在一定之圓周上, 將此定圓之中心為O, 垂心為H, 九點圓之中心為N, 因 $B\hat{H}C=2\hat{R}-\hat{A}$, 故此角為一

定,因而垂心H之軌跡為BC為弦之圓弧,但N為OH之中點,故N之軌跡,乃將圓BHC之中心與O連結之直線之中點為中心,而以圓BGC之半徑之半分[中心為O之圓之半徑之半分]為半徑之圓周.

【注意】(3) $H\hat{A}B$, $H\hat{B}A$,俱為銳角,故垂心H之軌跡,為將BC為弦含$\hat{A}$之補角之圓弧之在A, B,引AB二垂線間之部分. 而九點圓之中心N之軌跡,乃自O向H之軌跡之弧所引直線中點之軌跡,故其界限,容易求得之.

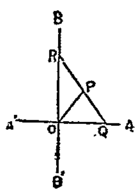
414. 三角形之底之大及位置為一定,且自其底之一端,所引中線之長為一定,問頂點之軌跡如何.

【解】△ABC之底BC之大及位置為一定,且自底之一端B,所引中線BD之長為一定, 將BC引長至C′,使BC=BC′,則C′為定點,連結AC′,則C′A=2BD=定長,故頂點A之軌跡為中心為C′半徑為2BD之圓周.



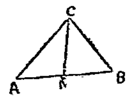
415. 定長之直線,其端恆在互垂直之已知二直線上,而移動之,求其中點之軌跡.

【解】定長之直線為QR,其端恆在直角相交之已知二直線AA′, BB′上,今將P為QR之中點,將P連結AA′, BB′,之交點O,則$OP=\frac{1}{2}QR$,[12題],故OP為一定之長,故P之軌跡為以O為中心之圓周.



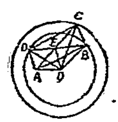
416. 三角形之底,及他二邊上正方形之和為一定,求其頂點之軌跡如何.

【解】△ABC之底AB,及他二邊AC, BC,上正方形之和為一定,今將AB之中點連結C,則$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)$=定量,但AM為一定,故CM亦必為一定,故C之軌跡為以M為中心一定長CM為半徑之圓周.



417. 矩形之一頂角在一定點,又其相鄰二角頂,沿已知一圓周而移動,求其餘一角頂之軌跡.

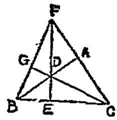
【解】矩形ABCD之一角頂為定點,而B, D,移動於中心O之已知圓周上,今將對角線AC, BD之交點為E,連結OA, DB, OC, OD, OE,則$\overline{AO}^2+\overline{CO}^2=2(\overline{OE}^2+\overline{AE}^2)=2(\overline{BE}^2+\overline{OE}^2)=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2$,但AO, BO, DO,為一定之長,故OC之長為一定,故C之軌跡為一同心圓.



418. 三角形ABC其$\hat{A}$為直角,而垂直於BC之任意直線EF與AB, AC,或其延線相交於D, F,求BF與DC交點之軌跡.

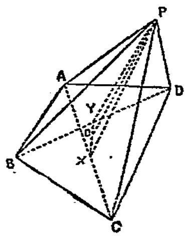
【解】BA, EF,各垂直於AC, BC,故D為

△FBC 之垂心,故 CD 垂直於BF,由是CD與BF之交點爲G,則G之軌跡爲BC爲徑之圓周.



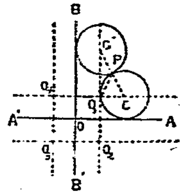
419. 自一點至已知四邊形各角頂距離平方之和爲一定,其點之軌跡爲圓周.

解 已知之四邊形 ABCD 之對角線 AC, BD, 其中點爲X, Y, 而XY之中點爲O, 則O爲定點, 今設軌跡上之一點爲P,則 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$=定量=$k^2$ [但k^2爲一定者]. 因而 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=2\overline{PX}^2+2\overline{AX}^2$, $\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=2\overline{PY}^2+2\overline{BY}^2$, $2\overline{PX}^2+2\overline{PY}^2+4(\overline{PO}^2+\overline{OX}^2)$, 故 $2\{2(\overline{PO}^2+\overline{OX}^2)+(\overline{AX}^2+\overline{BY}^2)\}=k^2$. 但此式OX, AX, BY, k^2 皆爲一定,故PO爲一定之長,故P之軌跡爲定點O爲中心定長PO爲半徑之圓周.



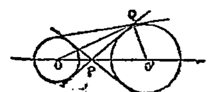
420. 二圓相等相切,各圓又各切於直角相交之已知二直線之一而移動之,求二圓切點之軌跡.

解 二圓中心爲C, C′,其切點爲P,過C, C′平行於 AA′, BB′ 引直線CO_1O_4, $C'O_1O_2$,其交點爲O_1,則O_1在自AA′, BB′,等於其半徑之距離,故爲定點,今連結中心C, C′,則CC′過切點P,且其長等於圓之徑而爲一定,因而P之軌跡,依415題,爲O_1爲中心相等圓之半徑爲半徑之圓周四分之一之弧. 又O_2, O_3, O_4,皆爲所求軌跡之圓之中心,故軌跡爲O_1, O_2, O_3, O_4,爲中心之四個四分圓周.



421. 有不相交二圓,其中心爲一定變其半徑,求共同切線交點之軌跡.

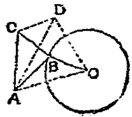
解 不相交二圓之中心O, O′,爲一定其內共同切線之交點爲P,外共同切線之交點爲P′,則P, P′,恆在無限直線OO′上. [逆]. OO′上之點爲二圓共同切點之交點,容易證明之. 又其一外共同切線,與其一內共同切線之交點爲Q,連結OQ, O′Q,則因 $O\hat{Q}O'=\hat{R}$,故點Q之軌跡,爲OO′爲徑之圓周,故本題之軌跡,爲引長中心線OO′之無限直線及以OO′爲徑之圓周.



422. 固定已知形狀之三角形一角頂,其他一角頂運動於一定之圓周上,問第三角頂之軌跡如何. [三角形各角各爲一定,謂之已知形狀,凡多角形各角爲一定,且各邊之比爲一定,謂之已知形狀].

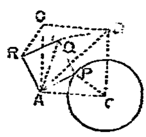
解 ABC爲適於要件之三角形,A爲

定點, B在一定圓周上, 將A連結中心O於OA上, 作與△ABC相似之三角形AOD, 則點D為定點, 而△ABC∽△AOD, 故 $\frac{AO}{AB}=\frac{AD}{AC}$, 而 $D\hat{A}C=\hat{O}AC\sim O\hat{A}D=O\hat{A}C\sim B\hat{A}C=B\hat{A}O$, 故△ADC∽△AOB, 故 $\frac{AO}{OB}=\frac{AD}{CD}$, 但AO, OB, AD, 為一定之長, 故CD亦為一定之長, 即C在自定點D一定之距離, 故點C之軌跡, 為中心為D之圓周.

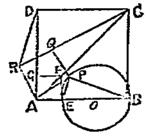


423. 自已知圓外之已知一點, 至圓周引直線, 於其上作正方形, 他二角頂之軌跡如何. [其一角頂之軌跡, 不用比例可得知之, 然其他一角頂之軌跡, 則須用比例.]

【解】 連結定點A, 與圓之中心O, 於AO上作正方形AOBC. 則B, C, 為定點, 今自A向圓周引任意之直線AP, 於其上作正方形APQR, 連結CR, OP, 則因AC=AO, AR=AP, $C\hat{A}R=O\hat{A}R\sim\hat{R}=O\hat{A}P$, 故△ACR≡△AOP, 因而CR=OP=定長, 故R之軌跡, 為C為中心等於已知圓之圓周. 次因 $P\hat{A}Q=\frac{1}{2}\hat{R}=O\hat{A}B$ 故 $B\hat{A}Q=O\hat{A}P$, 而 $\frac{AB}{AO}=\frac{AQ}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{1}$, 故△ABQ∽△AOP, 因而 $\frac{BQ}{OP}=\frac{\sqrt{2}}{1}$, 但OP為一定, 故PQ亦為一定, 故Q之軌跡, 為B為中心之圓周.

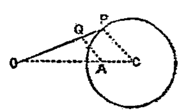


【別解】 過已知點引圓之徑AEOB, 於AE, AB上, 作正方形AEFG, ABCD, 則G, F, C, D, 皆為定點, 今自A引任意之直線AP, 於其上作正方形APQR, 連結GR, RD, CQ, QF, CF, PE, PB, 則因 $D\hat{A}R=P\hat{A}E$, RA=AP, AG=AE, AD=AB, 故△AGR≡△AEP, △ADR≡△ABP, 因而 $A\hat{R}G=A\hat{P}E$, $D\hat{R}A=A\hat{P}B$, 故 $D\hat{R}A-A\hat{R}G=D\hat{R}G=A\hat{P}B-A\hat{P}E=\hat{R}$, 由是一頂點R之軌跡, 為GD為徑之圓周. 次求頂點Q之軌跡, 因A, F, C, 在同一之直線上, 而 $Q\hat{A}C$, $G\hat{A}R$, 皆自 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 減 $Q\hat{A}G$ 之所餘, 故相等, 且 AF:AG=QA:RA=$\sqrt{2}$:1, 故△AGR∽△AFQ, 同樣△ARD∽△AQC, 因而 $A\hat{R}G=A\hat{Q}F$, $A\hat{R}D=A\hat{Q}C$, 故 $G\hat{R}D=F\hat{Q}C=\hat{R}$, 故點Q為FC為徑之圓周.



424. 自已知之點O引直線OP, 其一端P之軌跡為圓周, 則分OP為已知之比 $m:n$ 之點Q之軌跡, 亦為圓周.

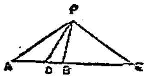
【解】 點P之軌跡, 為中心為C之圓周, 連結CP, A為OC: OA=OP:OQ=$m:n$之點, 連結QA, 則QA∥CP, 因而△OAQ∽△OCP, 而PC:QA=$m:n$, 故QA=定長, 由是所求之軌跡, 為A



爲中心之圓周. 同樣Q爲OP之外分點,知其軌跡亦爲圓周.

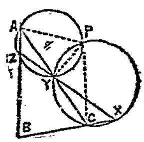
425. 自二定點A, B, 至一動點之距離有定比, 問此動點之軌跡如何.

【解】 軌跡上之一點爲P, 連結PA, PB, 引$A\hat{P}B$之內外二等分線PD, PE與AB及其延線之交點爲D, E, 則 $\frac{PA}{PB}=\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{BE}=$定比, 故D, E, 爲定點, 而$D\hat{P}E=\hat{R}$, 故點P之軌跡爲DE爲徑之圓周.



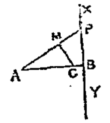
426. 引任意之直線, 使截三角形ABC交A, B, C, 之對邊於X, Y, Z, 求三角形CXY, AYZ, 外接圓他一交點之軌跡.

【解】 △CXY及△AYZ外接圓之他一交點爲P, 連結AP, PY, PC, 則因 $A\hat{P}Y=Y\hat{Z}B$, $Y\hat{P}C=Y\hat{X}C$, 故 $A\hat{P}C+\hat{B}=Y\hat{Z}B+Y\hat{X}C+\hat{B}=2\hat{R}$, 由是P在△ABC外接圓周上. [逆]. △ABC外接圓周上之諸點,適合要件,可得容易證明之,故點P之軌跡,爲△ABC之外接圓周.

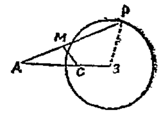


427. 有定點A, 及定直線XY, 自A至XY上任意一點P, 引直線AP, 二分之於M, 使AP.AM之値, 等於已知之常數, 問點M之軌跡如何. 若XY非直線, 而爲圓周, 則如何.

【解】 $AP.AM=m^2$, 今自A引XY之垂線AB, 將AB於C分爲$AB.AC=m^2$, 則C爲定點, 而AB.AC=AP.AM, 故四邊形PBCM得內接於圓, 因而$A\hat{M}C=\hat{R}$, 由是M之軌跡爲AC爲徑之圓周.

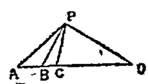


若取等於AC之AC′, 則AC′爲徑之圓周, 亦爲所求之軌跡. 次將點P之軌跡爲圓B, 將其中心B連結於A, 將AB於C分爲$AC.AB=AM.AP=m^2$, 則C爲定點, 而因AC.AB=AM.AP, 故AC:AM=AP:AB, 故△AMC∽△ABP, 因而AM:MC=AB:BP=定比, 由是點M之軌跡, 爲將AC, 以AB:BP內分及外分二點間距離爲徑之圓周[425題].



428. 三點A, B, C, 在同一之直線上, 求視AB與BC成等角之點之軌跡.

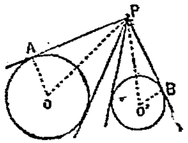
【解】 P爲軌跡上之點, 則$A\hat{P}B=B\hat{P}C$, 故AP:CP=AB:BC=定比, 由是點P之軌跡, 爲外分AC爲AB:BC之點D與B之距離爲徑之圓周 [425題].



【別解】 分線AC, 雙方引長, 其延線上之點, 皆視AB, BC, 成等角, 故此延線, 亦爲所求之軌跡. 若AB, BC, 相等, 則爲軌跡之圓周爲AC之垂直二等分線.

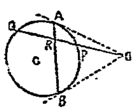
429. 就已知二圓周成等角之點之軌跡.

【解】已知二圓之中心為O, O′, 自軌跡上之一點P, 引二圓之切線PA, PB, 連結OA, OP, O′B, O′P. 則因 $\hat{APO}=\hat{BPO'}$, 故二直角三角形AOP, BO′P, 相似, 而PO : PO′=OA : O′B=定比, 故點P之軌跡, 若二圓不相等, 則為將中心線OO′以定比[二圓半徑之比]內分及外分之點E, E′, 間之距離為徑之圓周, 若二圓相等, 則為OO′之垂直二等分線.



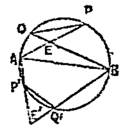
430. 自定點O引任意之直線, 與定圓交於點P, Q, 而R對於P, Q, 為O之共軛點, 求R之軌跡.

【解】設R為軌跡上一點, 自O引圓之切線OA, OB, 若AB與OPQ之交點為R′, 則R′對於P, Q, 為O之共軛點[331題], 故R, R′, 為同一之點, 即R在直線AB上. [逆]. 於AB上取一點R, 連結OR之直線, 與圓周之交點為P, Q, 則R對於P, Q, 為O之共軛點, 故所求之軌跡為中心為O之圓之弦AB.



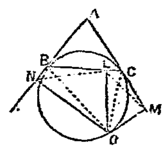
431. 將一定圓之一定徑之兩端, 連結於一定長之弦之兩端, 引直線, 求是等直線交點之軌跡.

【解】一定圓之一定徑為AB, 其一定長之弦為PQ, 連結A與P及B與Q, 引直線, 其交點為E, 則弧PQ為一定之長, 故弧PQ+半圓周=定量, 故$\hat{AEB}$=定角, 由是E之軌跡為AB為弦之圓弧. 今若PQ來於P′Q′之位置, 則亦因$\hat{E'}+\hat{E}=2\hat{R}$, 故軌跡為全圓周. 若E為AQ, BP, 之交點, PQ來於P′Q′之位置, 則其軌跡, 關於AB為前軌跡之對稱圓周.



432. 自一點向二等邊三角形之兩等邊引垂線所包之矩形, 等於自同點向底邊所引垂線上之正方形, 如此之點之軌跡, 為切相等兩邊於底邊兩端之圓周.

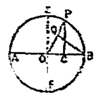
【解】自軌跡上之一點O, 向BC, CA, AB, 所引垂線, 為OL, OM, ON, 則因$\overline{OL}^2$=OM.ON, 故OM : OL=OL : ON, 今連結OB, OC, LN, LM, 則因四邊形BLON, CLOM, 得內接於圓, 故$\hat{LOM}=\hat{ACB}=\hat{ABC}=\hat{LON}$, 故△LNO∽△MOL, 而$\hat{OCM}=\hat{OLM}=\hat{LNO}=\hat{LBO}$, 故△OBC之外接圓, 切AC於C, 同樣知此圓切AB於B, 即O在切AB, AC於B, C之圓周上. [逆]. 於此圓周上取一點O, 引BC, CA, AB, 之垂線OL, OM, ON, 連結BO, CO, LN.



LM, 則因四邊形BLON, CLOM, 得內接於圓, 故 $\hat{OLM}=\hat{OCM}=\hat{OBL}=\hat{ONL}$. 同樣 $\hat{OML}=\hat{OLN}$, 故 $\Delta OML\backsim\Delta OLN$, 因而 OM : OL=OL : ON, 或 $\overline{OL}^2=OM\times ON$, 故點O之軌跡, 為切AB, AC於點B, C之圓周.

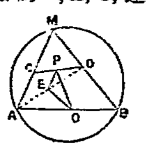
433. 自定圓O之周上一動點P, 向定徑AOB引垂線PC, 自半徑OP, 取等於OC之OQ, 求點Q之軌跡.

解 先將點P關於垂直AB之徑EF在B同側者. 因 OQ=OC, OP=OB, $\hat{POB}$共同, 故二三角形, POC, BOQ全等, 由是 $\hat{OQB}=\hat{OCP}=\hat{R}$, 故點Q之點跡, 為OB為徑之圓周. 同樣P關於徑EF, 在B反對之側, 則點Q之軌跡, 為OA為徑之圓周. 由是所求之軌跡, 為OA, OB各為徑之相等二圓周.



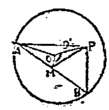
434. 將一定圓周上之任意一點M, 連結此圓周上之定點A, B, 於AM上取AC, 等於定長m, 於BM上取BD, 等於定長n, 問CD中點之軌跡如何.

解 CD, AD, AB之中點為P, E, O, 連結PE, OE, OP, 則PE // AC, 而 $PE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}m$, 同樣EO // BD, 而 $EO=\frac{1}{2}n$. 由是ΔPEO之二邊PE, EO之長, 為一定不易, 而其夾角, 因為$\hat{AMB}$之補角, 亦為一定不易, 而點M在優弧AMB上, 則ΔPEO之大不變, 故PO為定長. 由是點P之軌跡, 為中心為O半徑為PO, 在AB上方之圓弧. 次若點M在劣弧AB上, 則點P之軌跡, 為在AB下方之圓弧. [然其半徑, 與前軌跡之半徑, 不必相等] 次於AM, BM, 之延線上取C, D, 則所得P之軌跡之二半圓周, 可得補足前之二半圓周.



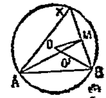
435. 一定圓之弦, 於圓內或外一定點含直角, 則其弦中點之軌跡為圓, 但其中心為定圓中心與定點之中點.

解 定圓O之弦AB, 於定點P含直角, M為AB之中點. 今將PO之中點為O′, 連結MO, MO′ PM, AO, 則 PM=AM=BM, 而 $\overline{OM}^2=\overline{AO}^2-\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{PM}^2$, 由是 $\overline{OM}^2+\overline{PM}^2=\overline{AO}^2=2\overline{PO'}^2+2\overline{O'M}^2$. 但AO, PO′為一定之長, 故M之軌跡, 為中心為O′之圓周. 點P在圓外, 亦全同樣.



436. AB為一定圓之一定弦, AX為同圓之定弦, 將AB, AX, 為相鄰二邊, 作平行四邊形, 求其對角線交點之軌跡, 又求自A所引對角線最長之位置.

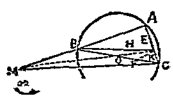
解 將AB, AX, 為相鄰二邊之平行四邊形, 其對角線之交點, 為弦BX之中點M明矣, 今將定圓之中心為O, 連結OM, OB, 則因 OM



⊥BX, 故M之軌跡, 爲OB爲徑之圓周. 次自A所引對角線之最大者, 則其半分AM, 亦最大. 但因M之軌跡, 爲OB爲徑之圓周, 故AM最大, 則AM過OB之中點, 即圓OMB之中心O′, 故AO′之延線與圓周OMB之交點爲M, 則AM之二倍, 爲所求對角線之最大者.

437. 直角三角形ABC斜邊BC之中點爲O, 於AB之延線上取一點M, 使ΔMBC與ΔABC等積, MO與AC之交點爲E, 於直線BE上取一點H, 使BH : HE等於一定之比$\frac{m}{n}$, 斜邊BC之位置及大爲一定, 而點A移動, 求點H之軌跡.

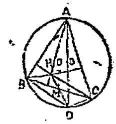
解 自E引AB之平行線EF, 則$F\hat{E}C=\hat{R}$, 又CF : BC=EF : AB=EF : BM=OF : OB=



OF : OC, 由是CF : OF=BC : OC=2 : 1, 因而F爲定點, 故點E之軌跡, 爲CF爲徑之圓周. 夫BE乃自定點B至CF爲徑之圓周之直線, 故分此直線爲已知比$m : n$之點H之軌跡, 爲CF之中點K與B之距離, 分爲$m : n$之點爲中心之圓周[424題].

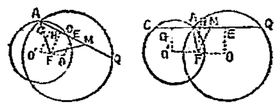
438. 一定圓內接三角形, 使其垂心在一定點, 則各邊中點之軌跡爲圓.

解 一定圓內接三角形ABC, 其垂心H爲定點, 將過A之徑之他端爲D, 連結BD, CD, 則四邊形BHCD爲平行四邊形, 故HB, BC, 之交點M, 爲HD, BC, 之中點, 故若OH之中點爲O′, 則$O'M=\frac{1}{2}OD$, 由是點M之軌跡, 爲HO之中點O′爲中心定圓半徑OD之半分爲半徑之圓周.



439. 過二圓O, O′, 之交點A, 引倍弦ACQ, 求其中點M之軌跡.

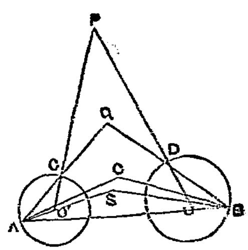
解 將中心線OO′之中點爲F, 自O, O′, F, 引倍弦ACQ之垂線爲OE, O′G,



FH, 則AG=CG, AE=GE, GH=EH, 明矣, 但$CM=QM=\frac{1}{2}(AC\pm AQ)$, 故$ME=MQ\sim EQ=\frac{1}{2}AC=AG$, 由是AH=HM, 故ΔFAM爲二等邊, 而AF=ME, 故點M之軌跡, 爲點F爲中心定長FA爲半徑之圓周.

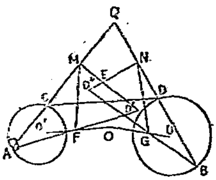
440. A, B, 爲O′, O″, 爲中心之圓周上之定點, 而$O'\hat{P}O''$爲一定之角, 問ΔAQB, 之內心及ΔCQD之外心之軌跡.

解 $2O'\hat{A}C=2\hat{R}-A\hat{O'}C$, $2O''\hat{B}D=2\hat{R}-\hat{B}O''D$, 故 $2O'\hat{A}C+2O''\hat{B}D=4\hat{R}-(A\hat{O'}C+BO''D)$,



若命ASB爲$\hat{S}$, 因 $2O'\hat{A}C+2O''\hat{B}D+2\hat{Q}=2\hat{S}$, 故用前之圖

係, 而 $2\hat{Q}+4\hat{R}-(A\hat{O'}C+B\hat{O''}D)=2\hat{S}$, 即 $2\hat{Q}+4\hat{R}-(4\hat{R}-\hat{S}+\hat{P})=2\hat{S}$, 即 $2\hat{Q}=\hat{S}+\hat{P}$ ＝定角. [若P與S在AB反對之傍, 則 $2\hat{Q}=\hat{S}-\hat{P}$]. 故△AQB內心之軌跡, 因 $\hat{Q}$ 爲一定之角, 而其軌跡爲圓弧. 次因 $\hat{Q}$ 爲一定, 故AQB之外心O爲定點, 今將OO′, OO″, 之中點爲F, G, 而

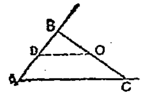


QC, QD, 之中點爲M, N, 連結AF, BG, MF, NG, 又於M及N作CQ, DQ, 之垂線ME, NE, 其交點爲E, 又AF, ME, 之交點爲D′, 又BG, NE之交點爲D″, 則E爲△CQD之外心, 且AQ爲過中心O, O′, 之二圓交點A所引之弦, 而CQ爲夾於此二圓間之部分, 故CQ之中點M, 在OO′之中點F爲中心AF爲半徑之圓周上[439題]. 故直角三角形AMD′之AF=MF=FD′, 因而D′爲定點. 同樣D″亦爲定點, 而 $\hat{E}$ 爲定角 $\hat{Q}$ 之補角, 故爲定角, 故點之軌跡, 爲D′D″爲弦, 含 $\hat{Q}$ 之補角之圓弧.

作圖題

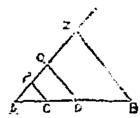
441. 過已知角BAC內之一點O, 引直線BOC, 使BC二等分於O.

解 所求之直線爲BOC, 若平行於AC引OD, 則D爲AB之中點, 由是自O引AC之平行線OD, 於AB上取AD=BD之點B, 連結OB, 其延線與AC之交點爲C, 則直線BOC爲所求.



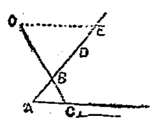
442. 將已知直線, 分爲若干相等部分.

解 自已知直線AB之一端A, 引直線AZ, 使與AB成適宜之角, 於AZ取任意之長AP, 次取若干等分之點, P, Q, ..., Z, 使AP=PQ=......, 連結ZB, 自各分點P, Q, ..., 引ZB之平行線PC, QD, ..., 與AB之交點爲C, D, ..., 則C, D, ...爲所求之分點. 證明容易, 略之.



443. 自已知角BAC外之一點O, 引直線OBC, 使OB爲BC之二倍.

解 本題自O引AC之平行線OE, 將AE三等分於B, D, 連結OB, 其延線與AC之交點爲C, 則OBC爲所求之直線, 明矣.

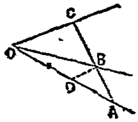


注意 AE能分爲任意等分[442題], 故OB與OC之比, 能設爲任意之比.

444. 過一點有已知三直線, 引一直線, 在此三直線之間, 使所分之二部分相等.

解 已知三直線爲AO, BO, CO, 所求之直線爲ABC, 自B引CO之平行線

BD,與 AO 之交點爲 D, 則 DO=DA, 由是於 OB 上取任意一點 B, 自 B 引 CO 之平行線 BD, 於 OD 取 OD=DA 之點 A, 連結

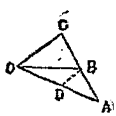


AB 之直線,與 OC 之交點爲 C, 則 ABC 爲所求之直線, 點 B 任意取於 OB 之何處皆可,故所求之直線有無數.

注意 若所求之直線,設定過一點,則先依本題方法引 ABC, 再自所設點,引 ABC 之平行線,即得所求之直線.

445. 自一點引已知長之三直線,其外側兩直線之末端,至中間直線之末端,使成等距離,且可使三末端在一直線上. 試研究問題之能不能.

解 設已得所求之直線爲 ABC, 自 B 引 OC 之平行線 BD, 且三已知長 OA $=l$, OB$=m$, OC$=n$, 則 Δ OBD 之三邊各等於

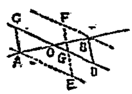


$\frac{1}{2}l$, m, $\frac{1}{2}n$, 故爲已知. 由是將 $\frac{1}{2}l$, m, $\frac{1}{2}n$, 爲三邊,作三角形 OBD, 引長 OD 至 A, 使 OD=DA, 連結 AB, 取點 C 使 BC=BA, 則 OA, OB, OC, 各等於 l, m, n, 其端 A, B, C, 在一直線上, 且 B 爲 AC 之中點明矣. 此問題必要且爲十分之要件,爲能作 Δ BDO, 即 $\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n>m>\frac{1}{2}l\sim\frac{1}{2}n$, 或 $l+n>2m>l\sim n$, 若此要件備,則問題爲能成立,否則爲不能.

別解 本題與[已知三角形二邊及向第三邊之中線而作本形]之問題同. 故將 OB 引長至 O′, 使 O′B=OB, 則 Δ OO′A 之三邊爲 l, $2m$, n, 故由是又可解本題;而問題之能成立,爲 $l+n>2m>l\sim n$.

446. 於相交二直線之間,引已知長之直線,使與他已知直線平行.

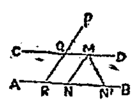
解 於相交二直線 AB, CD 之間置等於既知長 l 之直線 AC, 平行於他之已知直線 L, 今自 CD 上任意一點 G, 引 AC 之平行線



EG, 使 EG $=l$, 連結 AE, 則 AE∥CG, 由是先過 CD 上任意一點,引平行於 L 之直線 EAF, 使 EG=FG=l, 過 E,F, 平行於 CD, 引 EA, FB, 與 AB 之交點爲 A, B, 自 A, B, 平行於 L, 引 AC, BD, 與 CD 之交點爲 C, D, 則 AC, BD, 爲所求之直線.

447. 過已知一點,引已知二平行線之橫截線,使其在二平行線間之部分,等於已知之長. 且研究之.

解 已知之平行線爲 AB, CD, 所求之直線爲 PQR, 而 QR $=m$, 今自 CD 上之一點 M, 引 MN 平行 PQR, 則 MN=QR=m, 由是得次之作圖法. 自



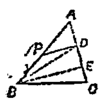
CD 上之一點 M, 取 MN=m 於 AB 上.

乃自P引平行於MN之直線PQR，即為所求之直線。

【研究】MN若小於二平行線間之距離則無解。若等於二平行線間之距離，則惟有一解。若大於二平行線間之距離，則有平行於MN，MN′之二直線PQR，PQ′R′之二解。

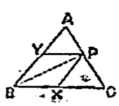
448. 於$\triangle ABC$之邊AB上，取一點P，使P與AC之距離，等於分線BP。

【解】自P至AC之距離PD，等於BP，引BE垂直於AC，次連結BD，則PD∥BE，故$P\hat{B}D=P\hat{D}B=D\hat{B}E$，則BD為$A\hat{B}E$之二等分線。由是引BE垂直於AC，自$A\hat{B}E$二等分線與AC之交點D，引AC之垂線DP與AB之交點為P，則P為所求之點。



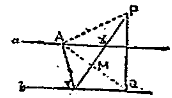
449. 於$\triangle ABC$之一邊AC，或其延線上，求一點P，自P引AB，BC，之平行線，使與BC，AB，交於X，Y，且使PX=PY。

【解】設已得所求之點P，連結PB，則PXBY為菱形，故PB為$\hat{B}$之二等分線，由是$\hat{B}$之內外二等分線與AC，或其延線之二交點P，P′，為所求之點。



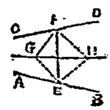
450. 有平行二直線a，b，其a之上有已知一點A，今過平行線外已知點引直線，截a於X，截b於Y，使XA，AY，相等。

【解】已知點為P，若已得所求之直線為PXY，則因AX=AY，故XY之中點M與A連結之直線，與直線b交於Q，則AQ⊥PY，且M為AQ之中點明矣，故$\triangle PAQ$為二等邊，而PA=PQ，由是以P為中心，等於PA之長為半徑畫圓，截直線b之點為Q，Q′而AQ，AQ′，之中點M，M′，與P連結之直線PXY，PX′Y′，為所求之直線。



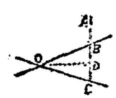
451. 不平行二直線，不延長而求其間之角之二等分線。

【解】不平行直線為AB，CD，求AB CD，所成角之二等分線。今引與AB，CD，相交之任意直線EF，於E，F，所成角之二等分線EG，FG，EH，FH，其交點為G，H則G，H，為自AB，CD，EF三直線等距離之點。故連結G，H之直線為AB，CD，所成角之二等分線。



452. 過已知一點，引一直線，與已知二直線成等角。

【解】已知點為A，已知二直線為OB，OC，其交點為O，設已得所求之直線ABC，與$B\hat{O}C$之二等分線OD之交點為D，則因$\triangle OBC$為二等邊，故ABC垂直於OD，由是先引已知二直線OB，OC，所成二接角之二等分線，乃自A引其垂線

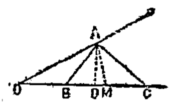


ABC, AB′C′, 即所求之直線.

注 若不用已知直線之交點，則依前題求GH, 而作GH之垂線可也.

453. 既知角之一邊上,有已知一點A, 於他二邊上求二點B, C, 使BC等於已知之分線, 且使$B\hat{A}C$爲直角.

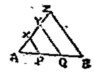
解 設已求得B, C, 若BC之中點爲M, 則因$B\hat{A}C=\hat{R}$, 故$AM=\frac{1}{2}BC$, 故得次之作圖法, 即將A爲中心$\frac{1}{2}BC$爲半徑畫圓, 與OC之交點爲M,



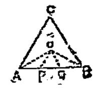
乃於直線OB上M之兩側, 取二點B, C, 使$MB=MC=\frac{1}{2}BC$即得. 若$\frac{1}{2}BC$短於自A下直線OC之垂線AD, 則A爲中心$\frac{1}{2}BC$爲半徑之圓, 不交直線OM, 故無解. 若$\frac{1}{2}BC=AD$, 則惟有一解. 若$\frac{1}{2}BC>AD$, 則有二解.

454. 將有限直線AB, 分爲三等分之點爲P, Q, 試以次之三方法求之. (1) 自A引任意直線, 於其上取AX, XY, YZ, 皆相等, 連結BZ, 引BZ之平行線XP, YQ, 使交AB於P, Q. (2) 於AB上以AB爲一邊, 作正三角形, 將角A, B, 之二等分線之交點爲O, 自O平行於AC, BC, 引直線OP, OQ, 使交AB於P, Q. (3) 於AB上將AB爲一邊, 作任意之三角形ABC, 引中線AM, 自C向AM之中線N, 引直線, 延長之, 使交AB於P, 自M平行於CP, 引直線MQ, 使交AB於Q.

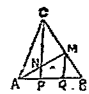
解 (1) 因$BZ /\!/ QY /\!/ PX$, 故$AP=PQ=QB$, 即P, Q, 爲AB三等分之點.



(2) 依作圖而O爲正三角形ABC之中心, △AOP, △BOQ, 爲全等之二等邊三角形, 且△OPQ爲正三角形, 容易證明, 因而$AP=OP=PQ=OQ=QB$, 故可知P, Q, 爲AB三等分之點.

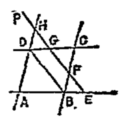


(3) M爲BC之中點, N爲AM之中點, 且$CP /\!/ MQ$; 故自△BCP, △AMQ, 而知$BQ=QP=AP$, 故P, Q, 爲AB三等分之點.



455. 有甲乙二雙之平行線, 其交點次第爲A, B, C, D, 今自一點P, 引一直線, 夾於甲乙二雙平行線之間, 使其二部相等, 求作圖法.

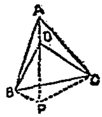
解 過P引直線PFE, 其夾於甲乙二雙平行線間之二部, $HF=GE$, 則$HG=EF$, 而△HGD, △EFB, 爲等角形明矣, 故此二三角形全等, 而B, D在直線BFE之同側, 故連結角頂B, D之直線, 平行於PE. 由是過P平行於BD, AC引二直線, 則皆爲所求之直線.



456. 作正三角形, 使其各角頂, 自已知點在已知之距離.

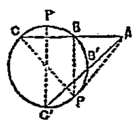
解 已知點爲O, 所求得之正三角形

爲 ABC, 而 $AO=\alpha$, $BO=\beta$, $CO=\gamma$, 今於 OC 上, 作正三角形 COP, 連結 BP, 則 OC=PC, AC=BC, $A\hat{C}B-B\hat{C}O=P\hat{C}O-B\hat{C}O$, 故 $\triangle AOC\equiv\triangle BPC$, 而 AO=BP, 故三角形 OBP 之邊爲已知. 由是將 α, β, γ, 爲三邊作三角形 OBP. 次於 OP 上, 作正三角形 OPC, 連結 CB, 乃於 BC 上, 作正三角形 ABC, 則 ABC 爲所求之正三角形.



457. 過已知點, 作已知圓周之割線, 使其內部之長, 與外部之長相等.

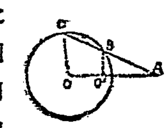
解 過已知點 A, 引割線 ABC, 而 AB=BC, 今過 C 引圓之徑 CP, 連結 BP, AP, 則 BP 爲 AC 之垂直二等分線, 故 CP=AP, 由是以 A 爲中心已知圓之徑爲半徑畫圓弧, 此圓弧截已知圓之點爲 P, P′. 過 P, P′, 引圓之徑 PC, P′C′, 連結 AC, AC′, 引直線 ABC, AB′C′, 則 ABC, AB′C′, 爲所求之割線.



別解 將 A 與圓之中心連結直線之中點爲中心, 圓之半徑之半分爲半徑畫圓, 可得點 B, B′.

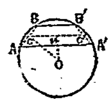
458. 前題, 試使其外部之長, 等於內之長之 n 倍.

解 設已得所求之割線爲 ABC, 引圓之半徑 OC, 及自 B 引 CO 之平行線 BO′ 與 AO 之交點爲 O′, 則因 $AB=\frac{n}{n+1}AC$, 故 $AO'=\frac{n}{n+1}AO$, $BO'=\frac{n}{n+1}OC$, 故 O′ 爲定點, 而 O′B 爲定長, 故於 AO 上取 $AO'=\frac{n}{n+1}AO$ 之點 O′, 次以 O′ 爲中心, $BO'=\frac{n}{n+1}OC$ 爲半徑畫圓, 此圓截已知圓 O 之點爲 B, B′, 則連結 AB, AB′, 之二直線 ABC, AB′C′, 爲所求之直線

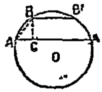


459. 過圓周上之二點, 作二平行弦, 使其和等於已知之長, 又使其差等於已知之長.

解 先使等於已知長 $2l$, 過中心 O 之圓周上已知二點 A, B, 所求得之平行弦爲 AA′, BB′, 若過 AB 之中點 C, 平行於平行弦引直線 CC′, 與 A′B′ 之交點爲 C′, 則 $CC'=l$, 而 CC′ 之中點 M, 在 OC 爲徑之圓周上, 且因 $CM=\frac{1}{2}l$, 故 CC′ 可得作之, 因而可作所求之平行弦. 由是先連結 AB 之中點 C, 與中心 O, 於 CO 爲徑之圓周上, 取 $CM=\frac{1}{2}l$ 之點 M, 連結點 C, M, 乃自 A, B 平行於 CM, 引平行弦 AA′, BB′, 則 AA′, BB′, 爲所求之弦. 而徑爲 CO 之圓周, 與 C 爲中心 $\frac{1}{2}l$ 爲半徑之圓周之交點, 若 $l<CO$, 則有 M, M′, 之二個, 因而所求之平行弦, AA′, BB′ 之外, 尚有一組之平行弦 AA″, BB″. 若 $l=CO$, 則惟有一組. 若



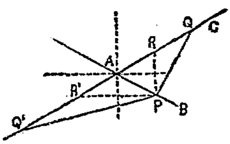
$l>$CO,則無解. 次求 $AA'\sim BB'=2l$,自B引AA'之垂線BC,則



AC$=l$明矣,由是C可求得之,因而可作AA', BB',故先將AB爲徑畫圓,次於此圓周上取AC$=l$之點C,連結AC之弦爲AA',則自B作AA'之平行弦BB'可得所求平行弦AA', BB'之一組. 而中心A半徑l之圓周,與徑爲AB之圓周之交點,若$l<$AB,則有C, C'之二點,故一般所求之平行弦,有AA', BB',與AA'', BB''之二組. 若$l\geqq$AB,則無解.

460. 自定角BAC之一邊AB上之定點P,向AC引直線PQ,使$A\hat{P}Q$等於$A\hat{Q}P$之三倍.

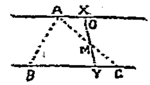
【解】設已得所求之直線爲PQ,引直線



PR,使$Q\hat{P}R=A\hat{Q}P$,則$P\hat{R}A=2P\hat{Q}A=A\hat{P}R$,故PR爲垂直於$\hat{A}$之二等分線. 由是引$\hat{A}$之內外二等分線之垂線PR, PR',於AC上RR'之雙方延線上,取RQ及R'Q',等於PR及PR',連結PQ, PQ',則PQ, PQ'爲所求之直線.

461. 已知二平行線上,有已知二點A及B,過此二平行線中間已知點O,引直線,截二平行線於X, Y,使AX, BY,之和等於已知之長.

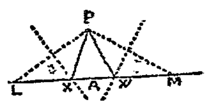
【解】所求之直線爲XY, O爲已知點,AX+BY$=m$,取BY+CY$=m$之點C,則YC=AX,連結AC,則AC, XY之交點M,



爲AC, XY之共同中點,故點M可得定之. 由是取BC$=m$之點C,連結AC之中點M與O之直線,與二平行線之交點爲X, Y,則直線XY爲所求之直線. 又點C亦可取於B之左方,故其他所求之直線X'Y'.可與前同樣求得之,因而本題有二解.

462. 已知直線上,有已知點A,又直線外,有已知點P,於直線求一點X,使AX與XP之和,等於已知長m.

【解】假令問題爲已解者,取XL等於PX,則因AL$=m$,故點L定矣. 由是於已知直

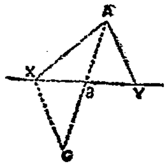


線上取AL=AM$=m$之二點L, M,而PL, PM之垂直二等分線,截LM之點爲X, X'則X, X'爲所求之點.

463., 有已知二點A, B,及過點B之已知直線,於此直線上點B之相等距離,定二點X, Y,求自A視XY之角等於已知之角.

【解】引長AB至C,使BC=AB,因$\triangle ABY\equiv\triangle BCX$,故$B\hat{A}Y=B\hat{C}X$,故$B\hat{A}X+A\hat{C}X=X\hat{A}Y$=定角. 因而$A\hat{X}C=2\hat{R}-X\hat{A}Y$=定角,由是於AB延線上,取AB=BC之點C,於AC上,畫弓形之弧,

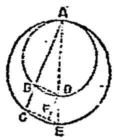
使其弓形所含之角，等於已知角之補角，此弧截XY之點爲X，及取BY，等於



BX，連結AX，AY，則$X\hat{A}Y$等於已知角.

464. 有內切之二圓，過其切點，引一直線，使其夾於二圓周間之部分，等於已知之長.

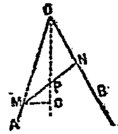
圖 設已得所求之直線爲ABC，A爲切點，BC等於已知長l，過切點A，引圓之徑ADE，連結BD，CE，自D引ABC之



平行線DF與CE之交點爲F，則因$A\hat{B}D=A\hat{C}E=D\hat{F}E=\hat{R}$，故F在DE爲徑之圓周上，且DF=$l$. 由是先引過點A之徑ADE而DE爲徑之圓周與中心爲D半徑爲l之圓周之交點F，F′，連結EF，EF′之直線，與大圓周之交點C，C′，則連結A與C與A及C′之直線ABC，AB′C′，爲所求之直線．此問題之所以成立，其必要且爲十分之要件，爲DE⩾l. 但DE爲已知二圓中心間距離之二倍，故已知內切二圓中心間之距離，不能小於$\frac{1}{2}l$.

465. 過已知點引直線，止於已知角之二邊，使於此點分爲二部分所包矩形，與已知之正方形等積.

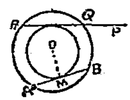
圖 過已知點P，引直線MN，截已知角AOB之二邊OA，OB於點M，N，而PM.PN=k^2 [但k表已知正方形之一邊]. 畫△OMN之外接圓，與OP之交點爲C，連結MC，因OP.PC=PM.PN



=k^2，故點C可得定之，又$C\hat{M}P=C\hat{O}N$，故M可定．由是定OP.PC=k^2之點C，於PC上畫圓弧，使含等於$C\hat{O}B$之角，此圓弧與OA之交點爲M，M′，則MPN，M′PN′，爲所求之直線.

466. 過已知一點，引已知圓之割線，使夾於其圓內之部分，等於已知之長

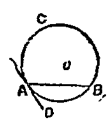
圖 將夾於圓內部分之長爲l，而AB爲等於l之弦，OM爲AB之垂線，則凡等於l之長之弦，皆切O爲中心OM爲半徑之圓，



由是得次之作圖法．先引有長l任意之弦AB，自O作AB之垂線OM，畫OM，爲半徑之同心圓，自P作此圓之切線PQR，則爲所求之割線，而因l<=>(圓O之徑)，而解數爲2，1，0.

467. 自已知之圓，截取一弓形，使其弓形角，等於已知之角.

圖 假設問題爲已解者，弦AB乃自已知圓截取弓形ACB之角等於α，若於A引切線AD，則$B\hat{A}D=\alpha$，由是於圓周上之一點A，



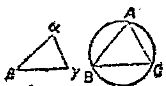
作切線AD，作直線AB，使與AD成$B\hat{A}D=\alpha$之角，則AB爲截圓之弓形

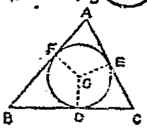
ACB之角，等於已知角α之直線.

注意 弦長等於AB之割線，皆截取弓形角等於α之弓形，故自已知一點引割線，自已知圓截取含已知角α之弓形，甚爲容易.

468. 與已知三角形等角之三角形，內接又外切於已知圓內.

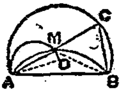
圖 (I) [內接者]. 引弦AB使弓形ACB之角等於$\hat{\gamma}$，次自B引弦BC，使弓形BAC之角等於$\hat{\alpha}$，則ABC爲所求之三角形明矣. (II) [外切者]. 設已求得△ABC，將切點D, E, F，連結於中心O，則$E\hat{O}F$=(α之補角)，$F\hat{O}D$=(β之補角). 由是引圓之任意半徑OE, OF，使成α之補角，次引半徑OD與OF成β之補角，且半徑OD關於OF在OE反對之側乃於D, E, F，引切線，則得所求之△ABC.





469. 於圓之已知弓形ACB之弧上，求一點C，使直線AC=2CB.

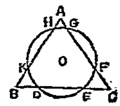
圖 設已得所求之點C，連結AC, BC，且將AC之中點M，連結於B，則△CMB爲二等邊，且$\hat{C}=\alpha$爲已知，故$A\hat{M}B=\hat{R}+\frac{\alpha}{2}$爲已知，因M在AB爲弦含$\hat{R}+\frac{\alpha}{2}$之角之圓弧上，又若弓形ACB之中心爲O，則因OM⊥AC，故M在AO爲徑之圓周上. 由是於AB上畫含$\hat{R}+\frac{1}{2}\alpha$之圓弧，次畫AO爲徑之圓周，此二圓弧之交點M，與A連結之直線，與弓形之交點爲C，則C爲所求之點.



注意 因AC : BC=2 : 1，故參考541題，可得別解.

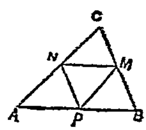
470. 自已知三角形之各邊，截取相等長之弦，求圓之中心.

圖 所求圓之中心爲O，其圓周截各邊於D, E, F, G, H, K，則因DE=FG=HK，故自O向△ABC之各邊所引垂線之長相等，故O爲△ABC之內心，由是求△ABC之內心O，即所求圓之中心.



471. 知三角形各邊中點之位置，試作本形.

圖 知△ABC各邊中點M, N, P，之位置，今設△ABC爲已求得者，連結MN, NP, PM，則MN, NP, PM，各平行於AB, BC, CA，由是過△MNP之各角頂點，平行於對邊引直線，其交點爲A, B, C，則ABC爲所求之三角形明矣.



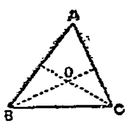
472. 知夾頂角之二邊及底角之差，求作三角形.

圖 △ABC之二邊AB=c, AC=b, [但

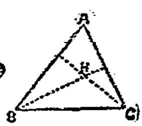
$c>b$]. 及 $\hat{C}-\hat{B}=\hat{S}$, 引 AD, 使 AD=AC $=b$, 則因 $B\hat{A}D=\hat{C}-\hat{F}=\hat{S}$, 故△ABD已知二邊及其夾角, 故可得作圖. 由是作 AB$=c$, AD$=b$, $B\hat{A}D=\hat{S}$之△ABD, 次畫中心爲A半徑爲b之圓周,此圓周截BD延線之點爲C, 則ABC爲所求之三角形, 證明容易,故略之.

473. 以次之已知件,而作三角形ABC. (1) 一邊 a 之大及其位置,並內心之位置. (2) 一邊a之大及其位置,並垂心之位置. (3) 一邊a之大及其位置, 並重心之位置.

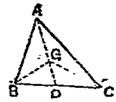
圖 (1)已知一邊BC之大, 及其位置, 並內心O之位置,故△OBC定矣,由是引直線BA, CA, 對於OB, OC, 在BC之異傍, 且使$A\hat{B}O$, $A\hat{C}O$, 各等於$C\hat{B}O$, $B\hat{C}O$,其交點爲A,則ABC爲所求之三角形.



(2) 已知一邊BC之大及其位置, 並垂心H之位置,故△HBC定矣,由是自B, C下CH, BH之垂線BA, CA,若其交點爲A,則ABC爲所求之三角形.

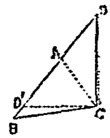


(3)已知一邊之大,及其位置, 並重心G之位置,故ΔGBC定矣,由是求得BC之中點D於DG之延線上,取AG=2GD之點A,則ABC爲所求之三角形.



474. 已知底邊頂角,及他二邊之和或差,而作三角形.

圖 (I) 二邊之和爲s, 頂角A之大爲a, 底邊爲m, 設已求得△ABC, 於BA之延線上取點D,使AC=AD, 連結CD, 則 BD$=s$, BC$=m$, BDC$=\frac{1}{2}a$. 由是先取BD$=s$, 自D作直線DC, 使與BD成$\frac{1}{2}a$之角, 乃將B爲中心,m爲半徑畫圓,截DC於點C, C′,作CD及C′D之垂直二等分線, 此直線截BD之點爲A, A′,則△ABC, △A′BC′, 爲所求之三角形. (II) $\hat{A}=a$, AB∼AC$=d$. 今設已求得△ABC, 乃於AB上取AD′=AC, 則BD′$=d$,BC$=m$, $B\hat{D}'C=\hat{B}+\frac{1}{2}a$. 由是將BC爲弦作含$\hat{B}+\frac{1}{2}a$之弓形, 乃將B爲中心$d'$爲半徑畫圓弧, 截弓形之弧於D′,而作CD′之垂直二等分線,弧BD′之延線之交點爲A, 則ABC爲所求之三角形.



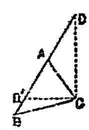
475. 知三角形之底,二底角之差,及他二邊之和或差,而作本形.

圖 設已求得△ABC, [參照前題之圖] 於AB上如AD=AD′=AC,取點D, D′, 則BD等於二邊之和, BCD′等於二底

角之差之半分，又△DCD′爲C爲直角之三角形明矣. 由是作直線CD′，使與底BC成等於二底角之差之半分之角，次引CD′之垂線CD，乃以B爲中心等於二邊之和之半徑畫圓，截CD之點爲D，欲作CD之垂直二等分線與BD之交點爲A，則ABC爲所求之三角形. B爲中心BD爲半徑之圓，截CD於二點，故本題有二解. 次論二邊AB，AC之差爲已知者. 使AC=AD′，取點D′，則△D′BC因已知二邊BC，BD′，及$\hat{BCD'}$，故可作之，次引CD′之垂直二等分線，此直線與BD′之延線之交點爲A，則ABC爲所求之三角形. 本題如D′之點有二個，故有二解.

476. 知三角形之底，及他二邊之和或差與一底角，試作本形.

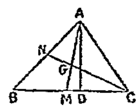
解 設已求得△ABC，知二邊AB+AC=s，底爲BC及一底角B之大，延長BA，使BD=s，連結DC，則因△DBC其BD=s，及BC爲已知長，且$\hat{B}$爲一定之大，故△DBC可得作之.



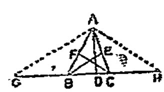
而△ADC爲二等邊，故A爲DC之垂直二等分線與BD之交點，故欲作△ABC，先取等於已知長之BC，次引BD使與BC成已知角，且使BD=s，連結CD，而CD之垂直二等分線，與BD之交點爲A，則ABC爲所求之三角形. 知AB∼AC=s者，則取AD′=AC之點D′，而△BD′C可容易作之，因而與前同樣，可得作△ABC. 但已知底角B小於其他底角C，則取BD′於AB上，若$\hat{B}>\hat{C}$，則取BD′於AB之延線上.

477. 知三角形之一垂線與二中線，試作本形.

解 (1) △ABC之二中線AM，CN，及一垂線AD爲已知，則直角三角形ADM，可得作之，因而使AG=$\frac{2}{3}$AM之點G，可求得之.



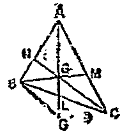
由是先作△ADM，次取如AG=$\frac{2}{3}$AM之點G，即以G爲中心，等於CN之$\frac{2}{3}$之長爲半徑畫圓，截MD之延線於C，乃於直線MD上，對於M爲C之異傍，取MC=MB之點B，則ABC爲所求之三角形. (2)已知高AD=h，自底兩端所引中線BE=m，CF=n，自A平行於BE，CF，引AG，AH，與BC延線之交點爲G，H，則因AG=2m，AH=2n，故直角三角形ADG，ADH，可得作之.



由是先作AG=2m，AD=h，之直三角形ADG，次以A爲中心2n爲半徑畫圓，此圓弧截GD或其延線之點爲H，H′，若將GH及GH′於B，C，及B′，C′，三等分之，則ABC，AB′C′，爲所求之三角形.

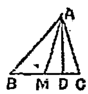
478. 已知三中線,而作三角形.

圖 所求之三角形為 ABC, 其中線 AL, BM, CN 之交點為 G, 乃於 AL 之延線上, 取 GL=LG′ 之點 G′, 連結 BG′, 則知 ΔBGG′ 之三邊為 ΔABC 三中線之三分之二. 由是先作已知三邊之 ΔBGG′, 次將 B 連結 GG′ 之中點 L, 於 BL 之延線上, 取 BL=CL 之點 C, 又於 GG′ 之延線上取 GA=GG′ 之點 A, 連結 AB, AC, 則 ABC 為所求之三角形.



479. 知底邊及向底邊所引中線及高,而作三角形.

圖 底邊 BC, 中線 AM, 高 AD, 為已知, 則 ΔAMD 可得作之. 由是先作直角三角形 AMD 其 AM, AD, 使等於已知之長, 將 MD 雙方延長, 使 BM =CM, 各等於已知底邊之長之半分, 則 ABC 為所求之三角形.

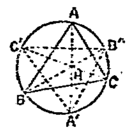


480. 知底邊與高,及自底邊之一端所引之中線,試作三角形.

圖 底邊 BC, 高 AD, 中線 CE 為已知, 設已求得 ΔABC, 若引長 BC, 使 CF=BC, 連結 AF, 則 AF 為已知中線 CE 之二倍, 而頂點 A 在自 BC, 等於已知高 AD 之距離, 且為平行於 BC 之直線, 與中心為 F 半徑為 2CE 之圓周之交點. 由是引 BC 之平行線, 使其與 BC 之距離, 等於已知之高, 引長 BC 至 F, 使 BC=CF, 乃以點 F 為中心, 已知中線之二倍為半徑畫圓周, 此周與前所作 BC 之平行線相交於 A, A′, 則 ΔABC, ΔA′BC 為所求之三角形.

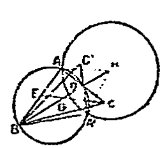
481. 已知三角形各角之二等分線,與外接圓周之交點 A′,B′,C′, 而作原三角形.

圖 設已得所求之三角形 ABC, 則因弧 AC′= 弧 BC′, 弧 BA′=弧 CA′, 弧 B′C =弧 AB′, 故弧 B′CA′ + 弧 AC′= 半圓周, 故 AA′ 垂直於 B′C′. 同樣知 BB′, CC′, 垂直於 C′A′, A′B′, 由是次第連結 A′,B′,C′, 而作 ΔA′B′C′ 自此各角頂向對邊引垂線 AA′, BB′, CC′, 與 ΔA′B′C′ 之外接圓之交點為 A, B, C, 則 ABC 為所求之三角形.



482. 已知自斜邊兩端所引二中線,而作直角三角形.

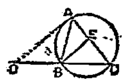
圖 設已求得 ΔABC 自 B, C, 所引中線 BD, CE 之長各以已知長 m, n 表之, 則頂點 A 在 BD 為徑之圓周上. 次取點 H, 使 $GL=LH=\frac{1}{3}m$, 連結 AH, 則因 AH // EG, 且 $AH=2EG=\frac{2}{3}n$, 故 A 在



中心爲H半徑爲$\frac{2}{3}n$之圓周上. 由是以BD=m之直線畫圓周, 次延長BD使DH=$\frac{1}{3}m$以定H, 而中心爲H半徑爲$\frac{2}{3}n$之圓周, 截前圓周之點爲A, 乃引長AD, 使DC=DA, 則ABC爲所求之三角形. 圓周ABD與中心爲H之圓周相交, 則自此二圓之他之交點A′, 尙可得一三角形A′B′C′.

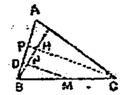
483. 已知底邊及自底邊一端所引中線及外接圓之半徑, 而作三角形.

圖 △ABC之底邊BC=m, 自底邊一端B所引中線, BE=l, 及外接圓之半徑R爲已知. 今自A引BE之平行線AO, 與CB之延線之交點爲O, 則因AO=2BE=2l, BC=BO=m, 故A爲中心爲O半徑爲2l之圓與△ABC之外接圓之交點. 由是先畫半徑爲R之圓, 作此圓之弦BC, 使等於m, 次於BC之延線上使BO=BC=m取點O, 乃畫中心爲O半徑爲2l之圓, 此圓周截半徑爲R之圓周之點爲A, A′, 則△ABC, △A′BC, 爲所求之三角形.



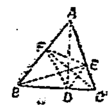
484. 有已知三點M, N, P, 其M爲一邊BC之中點, N爲點B與垂心H連結線BH之中點, P爲自角頂C向對邊所引垂線之趾, 求作△ABC.

圖 設已得所求之三角形ABC, 若MN與AB之交點爲D, 則D爲BP之中點, 且BP⊥MN. 由是卽自P引MN之垂線PD, 次於PD之延線上, 取PD=DB之點B, 連結BM又於BM之延線上, 取BM=CM之點C, 連結BN, 自C引BN之垂線CA, 與BP之交點爲A, 則ABC爲所求之三角形.



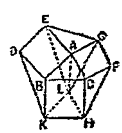
485. 知三垂線之趾, 而作三角形.

圖 △ABC三垂線之趾爲D, E, F, 作△DEF, 則BC, CA, AB, 各爲△DEF外角之二等分線[120題]. 由是先連結DEF而作三角形, 次引△DEF各外角之二等分之三直線BC, CA, AB, 其交點爲C, A, B, 則ABC爲所求之三角形.



486. 於△ABC之各邊上, 向外方作正方形ABDE, ACFG, BCHK, 已知三直線EG, FH, KD, 而作△ABC.

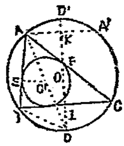
圖 設已得所求作之△ABC, 作HL平行於CA, 且HL=CA, 連結LK, LE, LA, LG, 則EDKL, GFHL, 皆爲平行四邊形, 而FH=LG, DK=EL, 故△LEG之三邊爲已知. 次因△AGL≡△CFH=△BDK≡△AEL=△AEG, 故AG, AE, AL之延線, 分EL, LG, GE爲二等分, 因而A爲△LEG之重心. 由是將已知三邊作△LEG, 求其重心A, 引直線AC, AB,



使 AC=AG, AB=AE, 且 AC⊥AG, AB⊥AE, 連結 BC, 則 ABC 爲所求之三角形.

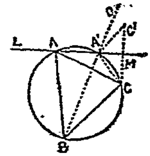
487. 三角形之三邊爲等差級數, 且知其外接圓及內切圓之半徑, 求作此三角形.

解 設△ABC爲已求得之三角形, 外接圓之半徑爲R, 內切圓之半徑爲r, 內切圓切於邊AB, AC之點爲E, F, $\hat{A}$之二等分線與外接圓之交點爲D, 過D之徑DD′與邊BC之交點爲I, 又自A引DD′之垂線AKA′, 則依題意 $2BC=AB+AC=BE+CF+2AE=BC+2AF$, 故 $2AE=BC=2BI$. 次於二直角三角形DIB, AEO′, 因 $AE=BI$, $E\hat{A}O'=\frac{1}{2}\hat{A}=D\hat{B}C$, 故全等. 故 $DI=O'E=r$, 又 $IK.BC=2\triangle ABC=r(AB+BC+CA)=3r\times BC$, 故 $IK=3r$, 由是先畫半徑爲R之圓, 於其圓徑DD′上, 取$DI=r$之點I, 次取$IK=3r$之點K, 乃過I, K, 引DD′之二垂線BIC, AKA′, 與圓周之交點爲B, C, A, A′, 則△ABC, △A′BC, 爲所求之三角形. 此問題之能成立須 $DK\leqslant 2R$, 即 $r\leqslant\frac{R}{2}$.



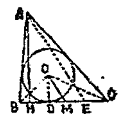
488. 已知底之大及位置, 與底角之差, 且頂點在已知直線上, 求作此三角形.

解 △ABC之底BC及 $\hat{B}\backsim\hat{C}=\alpha$ 爲已知, 且頂點A在已知直線LM上. 設已得△ABC, 畫外接於△ABC之圓, 此圓與LM之交點爲A′, 而C之關於LM之對稱點爲C′, 則因 $\hat{C}=A\hat{A}'B=D\hat{A}'M$, $\hat{B}=M\hat{A}'C=M\hat{A}'C'$, 故 $D\hat{A}'C'=\alpha$, 因而 $B\hat{A}'C'=2\hat{R}-\alpha$, 由是A′爲BC′爲弦含角$2\hat{R}-\alpha$之弓形之弧與LM之交點, 因而畫△A′BC之外接圓, 此圓與LM之他之交點A, 即所求三角形之頂點.



489. 自一角頂所引垂線及中線之趾, 並內切圓之中心, 爲已知, 求作三角形.

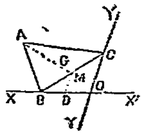
解 設△ABC已求得之, 其H爲垂線之趾, M爲BC之中點, O爲內心, D爲內切圓切邊BC之點, 則因 $OD\perp BC$, 而D可定, 今引AE平行於OM, 則因 $\triangle AHE\backsim\triangle ODM$, 故 $HE:DM=AH:OD=\triangle ABC:\triangle OBC=AB+BC+CA:BC$, 故 $HE\backsim DM:DM=AB+CA:BC$, 但因 $\overline{AB}^2\backsim\overline{AC}^2=\overline{BH}^2\backsim\overline{CH}^2$, 或 $BH\backsim CH:AB\backsim CA=AB+AC:BH+CH=AB+CA:BC$, 故 $BH\backsim CH:AB\backsim CA=HE\backsim DM:DM$, 卽 $2MH:2DM=HE\backsim DM:DM$, 卽 $MH=HE\backsim DM$, 卽 $ME=DM$, 故E爲定點, 因而可求得A. 由是連結HM於H, 引HM之垂線AH, 次畫中心爲O之圓, 切於HM, 其切點爲D. 取等於DM之ME, 自E引OM之平行直線EA, 與AH之交點爲A. 若自A引圓O之切



線 AB, AC, 與 HM 之延線之交點為 B, C, 則 ABC 為所求之三角形.

490. 知一角頂,及三中線之交點,即重心,且知他二角頂在已知二直線上,求作三角形.

圖 知三角形ABC之重心G,角頂A,且B, C,在已知二直線XOX′, YOY′,之上,AG與BC交於M,則M為BC之中點,自M引平行於YO之直線MD,使交OX於D,



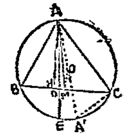
則因D為OB之中點,且AG=2GM,故M為定點,因而D亦可得而定矣. 由是於AG之延線上取點M,使AG=2GM,乃自M引YO之平行線MD,又於OX上取點B,使OD=BD,而連結BM之直線,與OY之交點為C,則ABC為所求之三角形.

491. 作正方形,使與已知三角形等積.

圖 已知三角形之高為h,底邊為$2m$,所求正方形之一邊為l,則$l^2=hm$,或$h:l=l:m$. 由是求得已知三角形之高與其底之半分之比例中項,乃以之為一邊而作正方形,即所求之正方形.

492. 過同角頂之垂線,中線,及其角之二等分線,[在角頂與對邊間之部分]為已知,而作三角形.

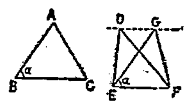
圖 ΔABC之垂線AH=h,中線AM=l, $\hat{A}$之二等分線AD=m. 今設ΔABC已求得之,乃引其外接圓之徑AA′,連結CA′,則ΔAHB.與ΔACA′為等角形,而$B\hat{A}H=C\hat{A}A'$,因而AD



為$A'\hat{A}H$之二等分線,且OM垂直於BC,而ΔAHD可得作之,又點M亦可得而定矣. 由是先作AH=h, AD=m之直角三角形AHD,次以A為中心以l為半徑畫圓弧,截HD之延線於M,自M引HM之垂線MO,又引直線AOA′與AD成等於$D\hat{A}H$之角,且在AH之異傍,此二直線之交點為O,乃將O為中心OA為半徑畫圓,使截HM之延線於B, C,則ABC為所求之三角形.

493. 求作三角形,與已知三角形等積,而其底之一角,等於已知之角,且其底等於已知之有限直線.

圖 設已作得之三角形為ABC,與已知三角形DEF等積,其底之一角B,等於已知之角α,且其底等於有限直線BC. 今引直線

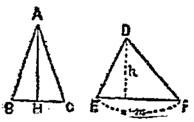


EG,使與EF成α之角,其面積若等於ΔDEF,則DG平行於EF,故ΔGEF可得作之,夫ΔGEF與ΔABC因一角及面積相等,故AB.BC=GE.EF,或BC:EF=GE:AB,故AB可求得之.

因而ΔABC可得作之. 故得次之作圖法. 先自E引直線EG與EF成角α, 過D平行於EF, 引直線DG, 與EG, 之交點為G, 作ΔGEF次自B引直線BA與BC成角α, 且截取BA, 使等於BC, EF, GE, 之比例第四項, 而作ΔABC, 則ABC為所求之三角形.

494. 求作二等邊三角形, 與已知三角形等積, 而其底在已知直線上.

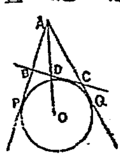
解 已知三角形DEF之邊EF之長為m, 自D引EF之垂線, 其長為h, 則ΔDEF之面積S為$\frac{1}{2}hm$. 今設已作得二等邊ΔABC, 其面積等於S, 而其底在已知直線BC上, 若



自其頂點A至底BC之高為x, 則$S=\frac{1}{2}BC.x$, 因而$BC.x=hm$, 或$BC:m=h:x$, 故x可求得之. 由是求得BC, m, h, 之比例第四項x, 乃於BC之垂直二等分線AH上, 取AH等於x, 則ABC為所求之三角形.

495. 已知三角形之周圍, 與頂角, 及頂角之二等分線之長, 試作本形.

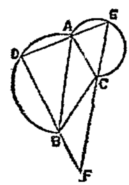
解 頂角$A=\alpha$, 周圍為$2p$, $\hat{A}$之二等分線$AD=l$, 為已知. 設所求之三角形ABC, 已作得之, 乃畫$\hat{A}$之二邊間之傍切圓, 與AB, AC, 之延線之切點為P, Q, 則因$AP=AQ=p$, 故得



次之作圖法. 先於$\hat{A}$之二邊AP, AQ上, 取$AP=AQ=p$之長, 畫切AP, AQ, 於點P, Q之圓, 次於其中心O與A之連結線上, 取$AD=l$之長, 自D引此圓之切線BDC, B′DC′, 與AP, AQ, 之交點為B, B′, C, C′, 則ABC, AB′C′, 為所求之三角形. 但D若在圓O之周上, 則惟有一個二等邊三角形, D在圓O之內, 則無解.

496. 求作三角形, 與已知三角形等角, 而外接其他之已知三角形.

解 已知三角形之三角為α, β, γ, 求作外接於其他已知$\triangle$ABC之$\triangle$DEF, 而其三角為$\hat{D}=\alpha$, $E=\beta$, $F=\gamma$, 則D在AB外所畫含角α之弓形之弧上, 同樣E在AC

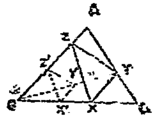


外方所畫含角β之弓形之弧上. 由是於AB, AC, 外方畫含角α, β之弓形, 過A引任意之倍弦DAE, 連結DB, EC, 其交點為F, 則DEF為所求之三角形. 而本題倍弦DAE, 可引無數, 故所求之三角形DEF, 亦為無數, 然其大, 則在某界限之間, 可容易證之.

497. 求作三角形, 內接於已知三角形, 其各邊平行於已知三直線.

解 ΔABC內接所求之三角形為XYZ, 引X′Z′為平行於XZ之任意

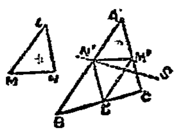
直線，又引 X′Y′，Z′Y′，各平行於XY，ZY，其交點爲Y′，則ΔXYZ與ΔX′Y′Z′相似，且在相似之位



置，故連結YY′之直線，過相似中心之點B. 由是於BC上任取一點X′，引X′Z′使平行於已知直線之一，其與AB之交點爲Z′，又引X′Y′，Z′Y′，各平行於他二已知直線，其交點爲Y′，乃連結BY′，若交於AC之點爲Y，則自Y引YX，YZ，各平行於Y′X′，Y′Z′，與BC，BA，之交點爲X，Z，則ΔXYZ爲所求之三角形.

498. 求作三角形，相似於ΔLMN，而內接於ΔABC.

解 設已得所求之△L′M′N′，相似於△LMN，而內接於△ABC，則若固定L′於BC上，移動M′於AC上其角頂N′之軌

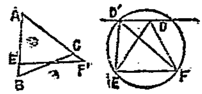


跡與AB相交，則角頂M′定矣. 由是先於BC上取任意一點L′，自L′至AC，引任意之直線爲一邊，於其上作相似於△LMN之三角形，而求他一角頂之軌跡，爲直線S［402題］，此直線S與AB之交點，爲所求三角形之一角頂N′. 故於L′N′上作相似於△LMN之△L′M′N′，則L′M′N′爲所求之三角形，故本題有無數之解.

499. 求作二等邊三角形，與已知三角形等積，且頂角等於已知之角.

解 所求之三角形爲ABC，$\hat{A}=\alpha$及面積等於△DEF.

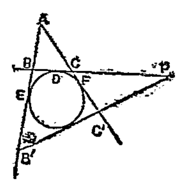
今作△D′EF等於△DEF，其一角ED′F等於



α，乃將此三角形置於△ABC上，使D′與A合，而D′E，D′F，與AB，AC合，而得△AE′F′. 則$\overline{AB}^2$=AE′.AF′=D′E×D′F. 由是先於EF上，畫含角α之弓形，自D引EF之平行線，此直線截弓形之點爲D′，則△D′EF之$\hat{D'}=\alpha$，而面積等於三角形DEF之面積. 次求D′E，D′F，之比例中項，取之於已知角A之二邊上，得AB，AC，連結BC，則ABC爲所求之三角形.

500. 過已知點作直線，截已知角之二邊，而作周圍等於已知長之三角形. 又作三角形，使其已知角之二邊，與他一邊之差，等於已知長.

解 △ABC之周圍$2p$爲已知，設△ABC爲已求得之三角形，畫切BC及他二邊之延線之傍切圓，其切點爲D，E，F，則AE=AF=p. 由是於

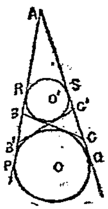


已知角A之二邊上，取AE=A =p之點E，F，畫切A之二邊於E，F，之圓，自定點P，引此圓之切線PCB，對於

圓在A之同傍，則ABC爲所求之三角形．次於$\triangle AB'C'$而$AB'+AC'-B'C'=2p$爲已知，則自點P對於圓在A之異傍，引切線$PC'B'$，而得所求之$\triangle AB'C'$，證明容易略之．

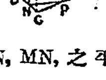
501．於已知角之二邊間，入以有限直線，而作已知周圍之三角形．

解　設已得所求之$\triangle ABC$，其周圍爲$2p$，在$\hat{A}$之二邊間之邊BC爲l，今畫$\triangle ABC$之內切圓O′，及在$\hat{A}$之內之傍切圓O，切$\hat{A}$之二邊之點爲R, S, P, Q，則$AP=AQ=p$，$AR=AS=p-l$．由是於$\hat{A}$之二邊上取$AP=AQ=p$，及$AR=AS=p-l$之點P, Q, R, S，乃於P, Q，及R, S，畫切$\hat{A}$之二邊之二圓O, O′，作此二圓之內共同切線BC, B′C′，使切$\hat{A}$之二邊於B, C，及B′, C′，則ABC, AB′C′，爲所求之三角形．



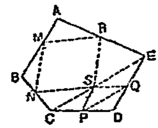
502．知四邊形三邊中點之位置，求第四邊中點之位置．

解　M, N, P，爲四邊形ABCD之邊AB, BC, CD，之中點且其位置爲已知，今設已求得第四邊之中點Q，則MNPQ爲平行四邊形明矣．由是自MN, PN之端M, P，作PN, MN，之平行線MQ, PQ，其交點爲Q，則Q爲所求之點．



503．知五角形各邊中點之位置，而求作本形．

解　五角形ABCDE各邊之中點爲M, N, P, Q, R，今引對角線CE，其中點爲S，則因MNSR爲平行四邊形，故S爲定點可得而知之，[502題]因，而$\angle CDE$可得而作之[471題]．次作CNP, ERA，使$BN=CN$，連結BM，而BM與ERA之交點爲A，則ABCDE爲所求之五角形．

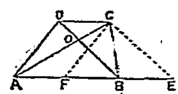


注意　此作圖法，不限於五角形，凡邊數爲奇數之多角形，皆可畫之．

504．已知梯形之兩對角線，及其夾角，及其兩鄰邊之和，而求作本形．

解　梯形ABCD之兩對角線AC, BD，及其夾角AOB，及其兩鄰邊BC, CD，之和爲已知．

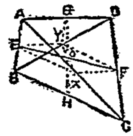
試引CE平行於BD，取$BF=BC$，則四邊形BECD爲平行四邊形，故$BD=CE$，且$A\hat{C}E=A\hat{O}B$，故$\triangle ACE$可得作之，因而$C\hat{E}A$爲一定，而$CD=BE$，$BF=BC$，故EF爲已知，故$\triangle CFE$亦可得而作之．由是先作$\triangle CAE$，次取EF，等於兩鄰邊之和作$F\hat{C}B$，等於$C\hat{F}B$，而定點B，次作AB之平行線CD，使$CD=BE$，連結DA，則ABCD爲所求之梯形明矣．



505．已知四邊形各邊之長與其兩對

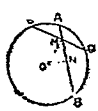
邊中點之位置,而求作本形.

【解】 對角線AC, BD, 之中點爲X, Y, 已知之對邊中點爲E, F, 未知對邊之中點爲G, H, 則GH, XY, FF, 於同一之點O相交[66題], 而EXFY, 及HXGY, 皆爲平行四邊形, 其各邊皆爲所求之四邊形ABCD各邊之半分. 由是於EF上,作$EX=\frac{1}{2}BC$, $FX=\frac{1}{2}AD$之$\triangle XEF$,又作EY, FY,各平行於XF, XE,次於XY上,作$XH=\frac{1}{2}AB$, $HY=\frac{1}{2}CD$之$\triangle HXY$,及$GY=\frac{1}{2}AB$, $GX=\frac{1}{2}CD$之$\triangle GXY$,而定點G, H, 但已知E, G, Y之三點,故可作$\triangle ABD$ [471題], 又自H, F, Y之三點,可作$\triangle BCD$, 因而可得四邊形ABCD.



506. 於已知圓內, 作等於已知長之弦,且使被已知弦二等分之.

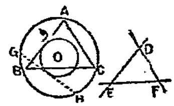
【解】 已知圓之中心爲O,已知弦爲AB,所求之弦爲CD,若$CD=2l$, 則$AM.BM=\overline{CM}^2=l^2$, 故點M可得求之,因而可作CD. 由是先將直線AB, 以$AM.BM=l^2$內分於M,連結OM,作其垂線CMD,則爲所求之弦. 但$l<\frac{1}{2}AB$, 則有二解,$l=\frac{1}{2}AB$,則有一解,$l>\frac{1}{2}AB$,則無解.



【別解】 設已得所求之弦CD,自O引AB之垂線ON,則N爲定點,且ON爲一定長,又因CD有一定長,故OM爲一定長,故直角三角形OMN可得作之.

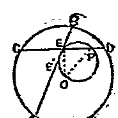
507. 求作三角形,其三邊各平行於已知三直線,且內接於已知圓.

【解】 $\triangle ABC$之三邊AB, BC, CA,各平行於三直線DE, EF, FD,則因$\hat{A}=\hat{D}$, $\hat{B}=\hat{E}$, $\hat{C}=\hat{F}$,故可得次之作圖法. 先自已知圓截取含$\hat{F}$之弓形GCH,又將自中心至弦GH之距離爲半徑,畫同心圓,作此圓之切線,而爲平行於DE之弦AB,使與外圓交於A, B. 次自A引直線AC使與AB成等於$\hat{D}$之角,而AC與外圓之交點爲C,則ABC爲所求之三角形.



508. AB爲已知圓之已知弦,試過一點P引一弦,使被AB二等分之.

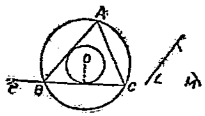
【解】 AB爲已知圓O之已知弦,CD爲過P被AB二等分於E之弦,則$OE\perp CD$,由是OP爲徑之圓周,與AB之交點,爲E, E′,則連結PE, PE′,之直線CD, C′D′,爲所求之弦.



509. 求作三角形,內接於已知圓,其

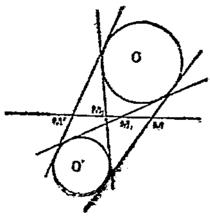
二邊平行於已知二直線,而他一邊過已知點.

解　已知圓之中心爲O,已知二直線爲L, M,已知點爲P. 今求得AB//L, AC//M,而BC過P之△ABC,內接於中心爲O之已知圓,

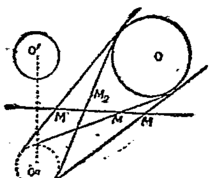


則A等於L, M,所成之角,或爲其補角,而爲一定之大,因而自O至BC之距離爲一定. 由是於圓O作弓形等於二直線L, M,所成之角或其補角之弦,將此弦至中心之距離爲半徑畫同心圓,乃自P引此圓之切線PBC, PB′C′,自B及B′作直線L之平行線BA及B′A′,與已知圓之交點爲A及A′,則ABC及A′B′C′,爲所求之三角形.

510. 於已知直線上求一點,引已知二圓之切線,使與其直線成相等之角.



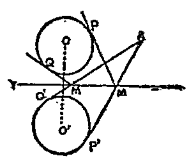
解　已知二圓,在已求直線之異傍,則二組共同切線,與已知直線相交之四點,爲所求之點明



矣. 若已知二圓,在已知直線之同傍,則作其一圓之關於已知直線而爲對稱之圓,此圓與他圓共同切線之二組,與直線相交之四點爲所求之點,易明也. 次於前者作圓O′之關於已知直線而爲對稱之圓O″,而二圓O, O″,之共同切線之交點,爲所求之點. 又於後者二圓O, O′之共同切線,與直線之交點亦然.

511. 無限直線XY之同傍,有已知圓O點A,自XY上之一點M,引圓之切線MP,使MP及MA與XY,成相等角,求點M之位置.

解　求得所求之點M,則因AMX=PMY,故此圖形以YY爲折綫而折之,則圓O與關於XY而爲對稱之圓O′相重

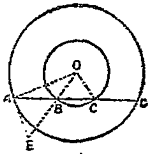


合, PM變爲P′M之位置, AMP′爲同一直線明矣. 由是作關於XY而爲圓O之對稱圓O′,乃自A引圓O′之切線AP′, AQ′,則其交於XY之點M, M′,爲所求之點. 又自A引圓O之切線與直線XY之交點亦爲所求之點,易明也.

註　本題爲前題第二之一圓爲無限小之極限.

512. 有已知二同心圓,求作被內圓周三等分之外圓之弦.

解　求得所求多圓之弦AD,此弦與

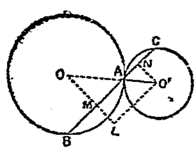


內圓交於B, C, 則 $AB=BC=BD$. 今同心圓之中心爲O, 連結OA, OB, OC, 則OB爲三角形OAC之一中線, 而OA, OC, 俱爲已知. 由是引外圓任意之半徑OA, 作OA, 及 $OE=2OB$, $AE=OB$ 之 $\triangle OAE$, 而OE與內圓之交點B, 連結於A之直線, 與二圓之交點爲C, D, 則AD爲所求之弦.

研究 半徑可取任意之位置, 故所求之弦爲無數, 惟 $OA>3OB$, 則爲不能耳. 若所求之弦, 須過一點, 或有其他之已知事項, 則弦爲一定矣.

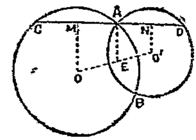
513. 有外切之二圓, 過其切點, 引已知長之直線, 使其兩端各在一圓周上.

解 二圓之中心爲O, O′, 其切點爲A, 所求之直線爲BAC, 其長爲l, 連結OO′, 自O, O′, 引BAC之垂線OM, O′N, 次自O′引OM之垂線O′L, 則 $MN=\frac{1}{2}l=O'L$. 由是以OO′爲徑畫圓, 與中心O′半徑 $\frac{1}{2}l$ 之圓之交點爲L, L′, 乃過A平行於O′L, O′L, 引直線BAC, B′AC′, 則此二直線爲所求之直線. 此問題之能成立, 惟l須不大於二圓徑之和.



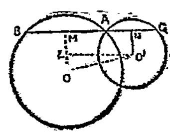
514. 過二圓之交點, 引一直線, 使其屬於各圓之弦相等.

解 過二圓之交點A, 引 $AC=AD$ 之弦CAD, 自中心O, O′, 引弦之垂線OM, O′N, 則 $AM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AD=AN$, 故自A引弦之垂線AE, 與中心線OO′之交點爲E, 則E爲OO′之中點. 由是連結OO′之中點E與A, 作其垂線之弦CAD, 則CAD爲所求之弦. 又作垂直於BE之弦, 亦爲所求之弦.



515. 過二圓之交點, 求作最大直線, 而兩端各在一圓周上.

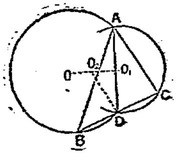
解 過二圓O, O′, 之交點A, 引任意之弦BAC, 而OM, O′N, 垂直於弦BAC, 自小圓之中心O′, 引OM之垂線O′L, 則 $O'L=MN=\frac{1}{2}BC$, 故弦BAC最大, 則O′L最大, 但O′L乃O′至OM之垂線, 故 $O'L\leqq OO'$, 故O′L與OO′合爲最大, 因而弦BC最大, 爲過A平行於中心線之OO′時.

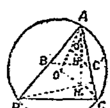


516. 三角形. (1) 二角及一中線. (2) 二角及垂心與外心之距離. (3) 二角及內心與外心之距離, 爲已知, 而求作本形.

解 (1) 知 $\triangle ABC$ 之二角B, C, 及一中線AD. 今求得本形ABC, 其角頂B在含 $\hat{B}$ 以AD爲弦之圓弧上. 同樣C

在含$\hat{C}$以AD爲弦之圓弧上,且B,C爲過此二圓之交點D之倍弦之兩端,且BD=CD. 由是先將直線AD,取既知中線之長,乃以AD爲弦,於其兩傍作含$\hat{B}$, $\hat{C}$之圓弧ABD, ACD,連結此二圓弧之中心O, O_1,此直線中點O_2,連結於D,引O_2D之垂線BDC,與二圓弧之交點爲B, C,則ABC爲所求之三角形. 何則$\hat{B}$, $\hat{C}$各等於已知之角,又BC被D二等分[541題],因而AD爲△ABC之中線,此中線已取爲等於已知直線故也. 若已知事項$\hat{B}$, $\hat{C}$變爲$\hat{A}$, $\hat{B}$,則先求得$\hat{C}$,與前同樣解之可也. (2)於AB上取任意之長AB′,平行於BC引B′C′,則△ABC與△AB′C′相似,而△AB′C′之垂心H′在AH上明矣. 今將△AB′C′之外心爲O′,則$O'\hat{A}B'=H'\hat{A}C'=H\hat{A}C=O\hat{A}B$,因而$H'\hat{A}O'==H\hat{A}O$,故AO, AC′爲同一之直線. 今連結OH, O′H′則因OH∥O′H′,故△AOH∽△AO′H′,因而O′A : OA=O′H′ : OH,由是先取任意之長爲一邊,於其上作相似於△ABC之三角形,求得其外接圓之半徑r,外心與垂心之距離d',又求得d'及已知外心與





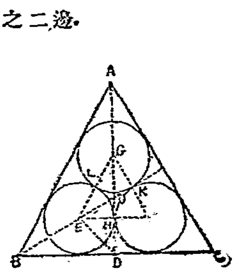
垂心之距離d與r之比例第四項R,則R爲所求△ABC之外接圓半徑,因而畫R爲半徑之圓,截取含$\hat{A}$, $\hat{C}$之弓形,作其弦AP, AC,則ABC爲所求之三角形. (3)已知內心與外心之距離,亦可與前同樣求得外接圓之半徑,因得與前同樣作得△ABC.

517. 在四定點之等距離畫圓.

【解】 先過四定點中之三點例如B, C, D,畫圓,將此圓中心O,連結其他一點A之直線,或其延線,與圓周相交於點F,取直線AF之中點E,乃以O爲中心,OE爲半徑畫圓,即得所求之圓. 四點中每取三點之方法有四,故此題有四解. 又將初之四點,每二個分爲二組,合其一組作二同心圓,乃作在二同心圓中央之圓,則此圓亦爲所求之圓. 分四點爲二組之方法有三,故有三解. 若四點在同一之圓周上,則其同心圓皆適於要件,故解爲無數.

518. 於正三角形內,畫三相等圓,互相切,且切三角形之二邊.

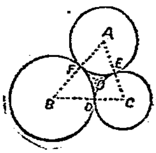
【解】 正三角形爲ABC,所求圓之中心爲E, F, G,其互相切之點爲H, K, L,



於H作二圓E, F, 之共同切線, 此直線與自A向BC之垂線AD, 依對稱之理可知之. 故E為$\widehat{ABC}$, $\widehat{ADB}$之二等分線之交點. 由是先自A引BC之垂線AD, 次以$\widehat{ADB}$之二等分線DE, 與$\widehat{ABC}$之二等分線BE之交點E, 為中心, 切AB, BC, 畫圓, 則此圓為所求之圓之一. 同樣可求得他二圓之中心F, G.

519. 將已知三點, 各為中心, 畫互相切之三圓.

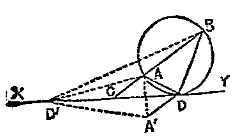
解 已知三點為A, B, C, 而△ABC內切圓之中心為O, 而OD, OE, OF, 各垂直於BC, CA, AB, 則BD=BF, CD=CE, AE=AF, 故將A, B, C為中心, AF, BD, CE為半徑畫圓, 即得所求之圓周.



注意 自△ABC之傍心, 向邊及邊之延線下垂線, 將其垂趾為切點, 各角頂為中心畫三圓, 則得二互相外切圓, 及一內切圓, 而各傍心皆可同樣作之, 故本題之解法有四. [參照197題].

520. 過已知二點, 切已知直線, 畫圓.

解I. A, B為已知二點, XY為已知直線, 過A, B切直線XY點於D畫圓, 若A′為A之對稱點, 則A′為定點. 引長BA, 交XY於C, 連結BD, AD, A′D, 則$\widehat{DBA}=\widehat{ADC}=\widehat{A'DC}$, 故$\widehat{A'DB}=\widehat{CDB}+\widehat{A'DC}=\widehat{CDB}+\widehat{ADC}=\widehat{CDB}+\widehat{DBA}=\widehat{BCD'}$=定角, 故將A′B為弦, 於其上畫含定角BCD′之圓, 則其圓交XY於D, D′, 即為所求之點, 而外接於△ABD, △ABD′之圓, 為所求之圓. [欲證圓D′AB切XY於點D′, 則證$\widehat{AD'C}=\widehat{D'BA}$可矣. 夫$\widehat{A'D'B}=2\hat{R}-\widehat{A'DB}=2\hat{R}-\widehat{BCD}=\widehat{BCD}$, 故$\widehat{A'D'B}-\widehat{CD'B}=\widehat{BCD}-\widehat{CD'B}$, 即$\widehat{A'D'C}=\widehat{D'BC}$, 即$\widehat{AD'D}=\widehat{C'BA}$.]

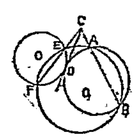


解II. 依已知之定理$AC.CB=\overline{CD}^2$, 故點D之位置為已知, 故得證次之作圖法. 即自BA之延線與XY之交點C取CD, 使等於CA與CB之比例中項之長, 畫過A, B, D三點之圓, 即得所求. 但點D可取於C之左右兩方, 故本題有二解.

研究 (1) 二點A, B俱在XY上, 則無解. (2) 二點A, B在XY之異傍, 則無解. (3) A, B之一在XY之上, 則有一解. (4) AB∥XY, 則有一解.

521. 過二已知點, 切已知圓, 畫圓.

解 A, B為已知點, O為已知圓. 過AB畫任意之圓, 使交圓O於點E, F, 自EF與AB之交點C, 引圓O之切線CD, 乃過三點A, B, C畫圓, 即所求之圓. 何則

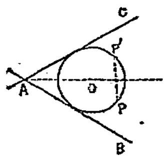


$CA.CB=CE.CF=\overline{CD}^2$，故所畫之圓，切CD於點D，而圓O亦切CD於點D，故此二圓互相切.

【注意】自C所引切線有二，故本題有二解.

522. 過已知一點，切已知二直線畫圓.

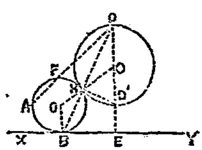
【解】已知二直線AB, AC，其交點為A，已知點為P，所求圓之中心為O，則AO為$B\hat{A}C$之二等分線，而關於AO之P之對稱點為



P'，則P'亦在所求之圓周上，故圓O為過二定點P, P'，切直線AB之圓. 由是作$B\hat{A}C$之二等分線AO，求得關於AO之P之對稱點P'，乃畫過P, P'，切直線AB之圓[520題]，即所求之圓而如此之圓，概有二個. 若AB, CD平行，則角之二等分線，變為在AP, CD等距離之平行線.

523. 過已知一點，切已知直線，及已知圓畫圓.

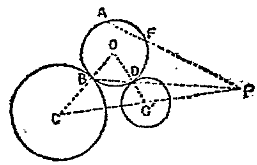
【解】過已知一點A，切已知直線XY，及已知圓C畫圓O，其切點為B及H，作垂直於XY之已知圓之徑DD'，引DA, DH,



BH, OC, HD'，而AD截圓O之點為F，DD'交XY之點為E，則$B\hat{O}H=D\hat{C}H$，故$O\hat{H}B=D\hat{H}C$，而BH, DH為同一之直線，又因$D\hat{H}D'=D\hat{E}B=\hat{R}$，故$\triangle DHD' \backsim \triangle DEB$，而$DD'.DE=DH.DB=DF.DA$，故F為定點. 由是先作垂直於XY之已知圓C之徑DD'，DD'與XY之交點為E，過D', E, A畫圓，截DA之點為F，乃過A, F，切XY畫二圓[520題]，此二圓為所求之圓. 又若圓D'EA變為過D, E, A畫圓，則得適於題意之他二圓，故本題有四解.

524. 過已知一點，切已知二圓，畫圓.

【解】過已知點A，切已知二圓C, C'，於

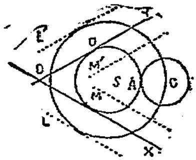


B, D之圓O，其BD, CC'之交點為P，則P為已知二圓C, C'之相似中心，故為定點. 今連結PA，若PA，與圓O之交點為F，則$PA.PF=PD.PB=$定量[344題]，故F為定點. 由是求得已知二圓C, C'之相似中心P，次求使$PF.PA$為定量之點F，乃過A, F切圓C畫二圓[521題]，即為所求之二圓. 又用相似之內心P'，亦得所求之二圓，故本題概有四解.

525. 切已知二直線，與已知圓，畫圓.

【解】切已知二直線OX, OY，及已知圓C畫圓S，自OX, OY，在等於圓C之半徑之距離引平行於OX, OY之直線L, M, L', M'，則所求之圓之中心S，為過

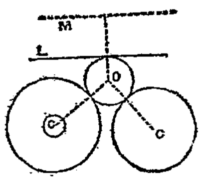
C切L, L′, 或M, M′之圓之中心. 由是以過C切L, L′, 或M, M′之圓之中心爲中心,



切已知二直線之一或已知圓畫圓, 則爲所求之圓. 過一點切二直線之圓有二[522題], 故本題有八解.

526. 切已知直線及已知二圓畫圓.

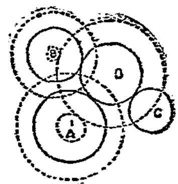
解 切已知直線L及已知二圓C, C′之圓, 其中心爲O, 假令已知二圓之圓C′爲其小者, 乃以C爲中心, 圓C, C′之半徑之和或差爲半徑, 畫圓C之同心圓, 次引直線L之平行線M, 其與L之距離, 等於圓C′之半徑, 由是過



C′切直線M, 及前畫圓C之同心圓[523題], 畫圓, 而求其圓之中心O, 即爲所求圓之中心. 以此中心爲中心, 畫切於L之圓, 即所求之圓. 本題有八解.

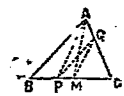
527. 切於已知三圓畫圓.

解 本題與前題同樣, 將已知三圓A, B, C之最小者, 爲圓C, 乃以圓A, C, 之半徑之和或差, 畫圓A之同心圓, 以圓B, C之半徑之和或差畫圓B之同心圓, 由是過C切所作二同心圓畫圓[524題], 而求其中心O, 即爲所求圓之中心. 以此中心爲中心切於圓A, B, C之一畫圓, 即所求之圓. 本題有八解.



528. 過三角形一邊上已知一點, 引一直線使分本形爲二等分.

解 △ABC之一邊BC上, 已知一點爲P, 引過A之中線AM, 連結AP. 今求得所求一直線PQ, 則△ABM=四邊形ABPQ, 自雙方減去△ABP,

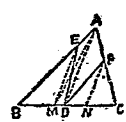


而△APM=△APQ, 故直線QM平行於AP. 由是先引中線AM, 次平行於AP自M引直線MQ, 連結PQ, 即所求之直線.

注意 與本解法同樣, 可過點P引一直線, 分三角形之面積爲已知之比$m:n$, 即將邊BC以點M分爲BM:MC$=m:n$, 乃平行於AP, 引MQ與邊AC之交點爲Q, 則PQ爲所求之直線.

529. 過已知三角形一邊上已知一點, 以二直線三等分之.

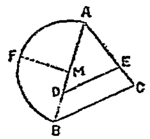
解 過△ABC一邊BC上之已知一點D, 以二直線DE, DF, 三等分△ABC, 取M, N, 爲BC之三等分點, 則因△ABM=△BDE=$\frac{1}{3}$△ABC, 故△AEM=△DEM, 故EM∥AD, 同樣NF∥AD, 由是過M, N,



平行於AD, 引直線ME, NF, 連結DE, DF, 則DE, DF, 爲所求之直線.

530. 平行於三角形之一邊作直線, 二等分其面積.

【解】 平行於△ABC之一邊BC, 求得所求之直線, 則因



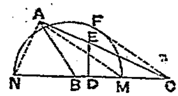
$\triangle ABC : \triangle ADE = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 = 2 : 1$,

故AD爲AB爲徑之圓內接正方形之一邊, 故可求得之, 因而可作DE. 由是先將AB爲徑畫半圓, 於AB之中點M, 作AB之垂線MF, 此直線截半圓之點爲F, 則AF爲AB爲徑之圓內接正方形之一邊, 明矣. 因而於AB取等於AF之AD, 自D平行於BC, 引直線DE, 則DE爲所求之直線.

【注意】 與本解法同樣, 可平行於△ABC之一邊BC, 引直線, 分三角形之面積, 爲已知之比$m:n$, 即將AB以M分爲$AM:MB=m:n$, 自M引AB之垂線MF與半圓之交點爲F, 乃於AB上,取等於AF之AD,平行於BC引DE, 即得. 蓋$AM=\frac{m}{m+n}AB$, 故$\overline{AF}^2=AM.AB=\frac{m}{m+n}\overline{AB}^2$, 因而$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{AF}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{m}{m+n}$, 故$\frac{\triangle ADE}{DBCE}=\frac{m}{n}$.

531. 以垂直於一邊之直線, 二等分三角形.

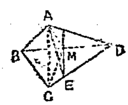
【解】 以垂直於△ABC之一邊BC, 引直線DE, 二等分△ABC, 自A引AC之垂線AN,



與BC, 或其延線之交點爲N, 而BC之中點爲M, 則因M, N爲定點, 而$\triangle ANC \backsim \triangle DEC$, 故$\triangle DEC : \triangle ANC = \overline{CE}^2 : \overline{CN}^2$, 又$\triangle ANC : \triangle AMC = CN : CM$, 故$\triangle DEC : \triangle ANC = \overline{CE}^2 : CN.CM = 1$, 故$\overline{CE}^2 = CN.CM$. 由是將MN爲徑畫圓, 自C引此圓之切線CF, 於CA上, 取等於CF之CE, 自E引BC之垂線ED, 則爲所求之直線.

532. 四邊形以過其一角頂之一直線二等分之.

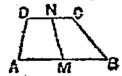
【解】 所求之直線爲AE, 引對角線AC, BD, 而BD之中點爲M, 連結AM, MC, ME,



則$\triangle ABM=\frac{1}{2}\triangle ABD$, $\triangle BCM=\frac{1}{2}BCD$, 故四邊形$ABCM=\frac{1}{2}$四邊形ABCD=四邊形ABCE, 因而$\triangle AMC=\triangle AEC$. 故ME平行於AC. 由是過對角線BD之中點M, 引平行於對角線AC之直線ME, 若ME截CD之點爲E, 則AE爲所求之直線.

533. 以過梯形平行二邊一中點之直線, 二等分本形.

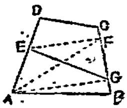
【解】 AB∥CD之梯形ABCD, 過AB中點M之直線MN, 二等分梯形, 則梯形$AMND=\frac{1}{2}$梯形ABCD, 但梯



形 AMND$=\frac{1}{2}h$(AM+DN), 梯形 ABCD $=\frac{1}{2}h$(AB+CD) [但 h 爲梯形之高]. 故 AM+DN$=\frac{1}{2}$(AB+CD). 但 AM$=\frac{1}{2}$AB, 因而 DN$=\frac{1}{2}$CD, 卽 N 爲 CD 之中點.

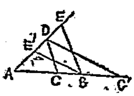
534. 過四邊形之邊上已知一點引直線, 二等分其四邊形.

【解】 過四邊形 ABCD 之邊 CD 上已知點 E, 引直線 EG, 二等分 ABCD 之面積, 若過 A 引直線 AF, 二等分四邊形 ABCD 之面積, 連結 EF, AG, 則因 EABG$=\frac{1}{2}$ABCD$=\triangle$ABF, 減去共同之部分, 而 $\triangle$EAG$=\triangle$FAG, 因而 AG∥EF. 由是先過 A 引直線 AF, 二等分四邊形 ABCD [532題], 連結 EF, 自 A 平行 EF 引 AG, 連結 EG, 則 EG 爲所求之直線.



535. 將已知線分, 分爲已知二線之比.

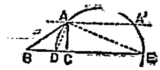
【解】 已知線分爲 AB, 他已知二線分之長爲 l, m, [但 $l>m$]. 過 A 引任意之直線 AE, 於其上取等於 l 之 AD, 又於其 D 之兩傍, 取等於 m 之 DE, DE′, 連結 EB, E′B, 自 D 平行於 EB, E′B, 引 DC, DC′, 則 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{DE}=\frac{l}{m}$, $\frac{AC'}{BC'}=\frac{AD}{DE'}=\frac{l}{m}$, 卽 C, C′, 爲將內分或外分已知線, 分爲已知二線分之比之點.



【注意】 將已知直線內分及外分爲同比, 謂之分爲調和.

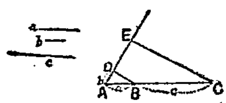
536. 已知底與高及他二邊之比, 作三角形.

【解】 求得三角形 ABC, 底爲 l, 高爲 h, 二邊之比爲 $m:n$, 因頂點 A 在 BC 之 h 之距離, 而平行於底 BC 之直線上, 此直線與 BC 爲 $m:n$ 內外分點 D, E 間之距離爲徑之圓周 [425題] 相交, 卽爲頂點 A. 由是先取 BC$=l$, 將 BC 以 $m:n$ 內外分於 D, E [前題], 將 DE 爲徑畫圓. 次在 BC 之 h 之距離, 引 BC 之平行線 AA′. 此直線與圓周之交點爲 A, A′, 則 ABC, A′BC 爲所求之三角形. 又頂點在 BC 之下方有二解. 若 h 大於 BE 之半分, 則無解. 若等於 h 之半分, 則 AA′ 切圓. 故 $\triangle$ABC 與 $\triangle$A′BC 相合, 而惟有一解.



537. 求作已知三線分之比例第四項.

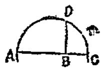
【解】 a, b, c 爲已知之線分, 於直線 AC 上, 取 AC$=a$, BC $=c$, 又過 A 作直線 AE, 與 AC 成適宜之角, 於 AE 上, 取 AD$=b$, 連結 BD, 引 BD 之平行直線 CE, 與 ADE 之交點爲 E, 則 DE 爲所求之直線, 因 $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$, 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{DE}$.



【注意】 若 $b=c$ 時, 則本題爲求已知二線分之比例第三項.

538. 求作已知二線分之比例中項.

圖 將已知二線分AB, BC, 置於一直線上, 以AC爲徑畫圓, 於B作AC之垂線BD, 而BD截圓之點爲D,

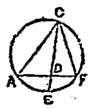


則BD爲AC, BC之比例中項, 蓋 $AB.BC=\overline{BD}^2$, 故 $\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{BC}$.

注意 若AB, BC, 爲矩形相鄰之二邊, 則本解法爲作與已知矩形等積之正方形.

539. 將圓弧分爲二分, 使其弦之比, 等於已知之比.

圖 將圓之弧ACB, 分爲二分, 使其弦AC:BC, 等於$m:n$之已知之比, 而$\hat{C}$之二等分線, 與弦AB交於D, 與弧AEB交於E, 則E爲弧AEB之中點, 而D爲分AB爲$m:n$之點,

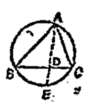


故求得弧AEB之中點E, 及AB之分點D, 連結ED, 與弧ABC之交點爲C, 則C爲所求之點.

注意 依425題, 可得別解.

540. 知三角形之頂角及夾之之二邊之比, 並其外接圓之徑, 而作本形.

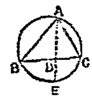
圖 △ABC之外接圓之徑爲2R, 二邊之比爲 $AB:AC=m:n$, 及頂角α, 爲已知, 乃畫R爲半徑之圓, 自此圓周截取含α之弓形BAC, 其弦爲BC,



將BC分爲$BC:CD=m:n$其分點爲D [535題], 連結弧BEC之中點E與D之直線, 與圓周之交點爲A, 則ABC爲所求之三角形. 由前題可明之. 若取BC之外分點D′, 則取弧BAC之中點E′, 而D′E′與圓周之交點與A同.

541. 底邊及他二邊之比及一角爲已知, 而作三角形.

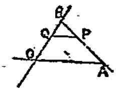
圖 (I) 底邊l, 頂角α, 他二邊之比$m:n$, 爲已知. 先將BC等於l, 乃於BC上, 畫含角α之圓弧, 其共軛弧之中點爲E,



次求點D分BC爲$BD:CD=m:n$ [535題], 而DE與弧之交點爲A, 則△ABC爲所求之三角形, 自539題可明之. (II) 底邊l, 一角$B=\beta$, 他二邊之比$m:n$, 爲已知. 求得所求之三角形ABC, 則BC, 以$m:n$內分及外分之點D, E間之距離爲徑畫圓周, 及與BC成角α之直線BA相交之點, 即所求三角形之頂點A. 由是先將BC等於l, 將BC以比$m:n$內外分點D, D′間之距離爲徑畫圓, 次引直線BA, 使與直線BC成α之角, 而BA與圓周之交點爲A, A′, 則ABC, A′BC, 爲所求之三角形. 若$BD:DC>1$, 或$\hat{B}\geqq\hat{R}$, 則本題恆爲不能.

542. 過已知之角, 與同平面上之已知一點, 引直線, 夾於角之二邊間, 使以其已知點所分二部分, 等於已知之比.

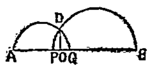
解 已知之比為 $\frac{m}{n}$, BPA 為所求之直線, 則 $\frac{BP}{AP}=\frac{m}{n}$, 今過 P 平行於 OA, 引 PQ, 則 $\frac{BQ}{OQ}=\frac{BP}{AP}=\frac{m}{n}$. 由是自 P 引 OA 之平行線 PQ, 取 $\frac{BQ}{QO}=\frac{m}{n}$ 之點 B, 連結 BP 之直線, 與 OA 相交於 A, 則 BPA 為所求之直線. 若 $\frac{m}{n}\neq 1$, 則 OQ 上有 $\frac{BQ}{OQ}=\frac{m}{n}$ 之二點 B, B′, 故有 BPA, B′PA 之二直線.



注意 $m=n$, 則歸於 441 題.

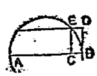
543. 有限直線 AB 上, 已知二點 P, Q 之位置, 於其直線上, 求一點 O, 使 AO : BO=PO : QO.

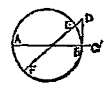
解 求得所求之點 O, 則因 AO : BO =PO : QO, 故 AO.QO=BO.PO, 今將 AO.QO=BO.PO= m^2, 引直線 OD 垂直於 AB, 其長等於 m, 則 D 為 PB 及 AQ 為徑之二圓周之交點. 由是求得 PB, QA 為徑之二圓周之交點 D, 自 D 引 AB 之垂線 DO, 則 O 為所求之點.



544. 一直線, (1) 內分, (2) 外分, 使所分之二部分所包之矩形, 等於已知之面積.

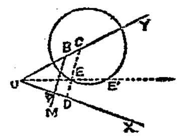
解 (1)將已知直線 AB, 內分於 C, 其二部分所包之矩形, 等於已知正方形 m^2 之面積, CE 垂直於 AB, 且其長等於 m, 則因 AC.BC=m^2, 故 E 在 AB 為徑之圓周上, 由是將 AB 為徑畫圓周, 次於 B 引此圓之切線 BD, 取 BD $=m$, 自 D 引 AB 之平行線 DE, 與圓周之交點為 E, 引 EC 垂直於 AB, 與 AB 之交點為 C, 則 C 為所求之點. 本題之能成立, 為 $2m \ngtr$ AB. (2) 求外分點 C, 則過 D 引圓之徑 DEF, 因 DE.DF = $\overline{BD}^2=m^2$, 故於 AB 之延線上, 取 BC 等於 DE, 則 C 為所求之點明矣.





545. 已知角 XOY 之平面內, 有已知點 M, 今作直線 MAB 與 OX, OY, 相交於 A, B, 使 OA+OB=2AB.

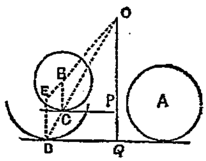
解 MAB 為所求之直線, 即 OA+OB =2AB, 平行於此直線引任意之直線, CD, 則 △COD ∽△AOB 明矣. 今若 $X\hat{O}Y$ 之二等分線, 交 CD 於 E, 則 $\frac{CE}{DE}=\frac{OC}{OD}$, 或 $\frac{CE}{CD}=\frac{OC}{OC+OD}$. 但 CD$=\frac{1}{2}$(OC+OD), 故 CE $=\frac{1}{2}$OC. 由是於 OY 上, 取任意之一點 C, 乃以 C 為中心 $\frac{1}{2}$OC 為半徑畫圓, 此圓與 $X\hat{O}Y$ 之二等分線 OE 之交點為 E, E′, 自 M 平行於 CE, CE′, 引二直線 MAB, MA′B′, 則為所求之二直線.



546. 有已知一點 O, 與已知二圓 A,B,

引各圓之一切線,使相平行,且使自點O至此二直線之距離,等於已知之比.

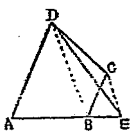
解 切已知二圓之二平行線,爲DQ, CP,引BC, OB, OCD,自D引DQ之垂線DE,與OB或其延線之交點爲E,則



$m:n=OP:OQ=OC:OD=OB:OE=BC:ED$. 由是於OB上,定$OB:OE=m:n$之點E,次求(圓B之半徑)$:ED=m:n$之長ED,乃將E爲中心ED爲半徑畫圓,引此圓與圓A之共同切線DQ,平行於ED引圓B之半徑BC,乃於C引圓B之切線,則此二切線,即爲所求之切線.

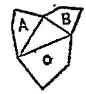
547. 求作與已知四邊形等積之三角形.

解 求得與已知四邊形ABCD等積之三角形DAE,連結DB, CE,則$\triangle CDB=\triangle EDB$,故CE平行於DB. 由是先連結DB,自C作DB之平行線CE,與AB之延線之交點爲E,則$\triangle DAE$爲所求之三角形.



548. 有已知相似多角形A, B,求作與之相似多角形,而面積等於A與B之和或差.

解 先作等於A與B之和者. 將A與B對應之二邊,爲直角傍之二邊,作直角三角形,乃於其斜邊上,作其相似之多角形C,且使其在相似之位置,則C爲所求之多角形,



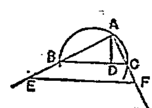
何則,A,B,C互相似明矣. 今將直角三角形之斜邊,以l表之,其他二邊以m, n表之,則$\frac{A}{B}=\frac{m^2}{n^2}$,或$\frac{A+B}{B}=\frac{m^2+n^2}{n^2}=\frac{l^2}{n^2}$,又$\frac{C}{B}=\frac{l^2}{n^2}$,故$A+B=C$.

次作等於A與B之差者. 取A與B之對應二邊,其二邊中之大者,爲斜邊,小者爲直角傍之一邊,作直角三角形,乃於其他一邊上,作其相似之多角形C,則C爲所求之多角形,可與前同樣證明之.

注意 等於已知二圓之面積之和或差之作圖,可自本題推知之.

549. 對於已知正方形之比,等於已知之比作正方形.

解 已知正方形之一邊爲l,所求之正方形之一邊爲m,已知之比爲$n:p$. 取直線$BD=n$, $DC=p$於一直線上,



乃將BC爲徑畫半圓,引直線DA,垂直於BC,而D與半圓之交點爲A,連結AB, AC,又於AB上,取$AE=l$,自E引BC之平行線,與AC或其延線之交點爲F,則AF爲所求正方形之一邊.

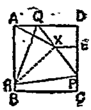
何則,$\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$,故$\frac{l^2}{m^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BD.FC}{CD.BC}=\frac{BD}{CD}=\frac{n}{p}$.

550. 與已知直線形相似，且與之成已知之比，而作其直線形.

解 已知直線形之任意一邊爲m求得與之相似之直線形m之對應邊爲n，則$m^2:n^2=A:B$.[但A:B爲已知之比]依此比例可求得n[前題]. 由是求得適合於$m^2:n^2=A:B$之n，將n爲m之對應邊，於其上作直線形，與已知直線形相似，卽所求之直線形.

551. 正方形內接正三角形，其一角頂使爲正方形一邊上任意之已知點.

解 P爲正方形ABCD之邊CD上之已知點，且在邊DC上近於C之處，今畫所求之三角形PQR，自R引PQ之垂線RX，則X爲PQ之中點，而四邊形RAQX

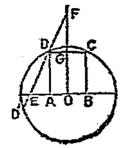


得內接於圓，因而$Q\hat{A}X=Q\hat{R}X=\frac{1}{3}\hat{R}$，今平行於AD引XE，則E爲DP之中點，故爲定點，因而點X可得定之. 由是自PD之中點E，引平行於AD之直線EX，次自A引直線AX，與AD成等於$\frac{1}{3}\hat{R}$之角，其交點爲X，連結PX之直線，與AD之交點爲Q，於X作PQ之垂線XR，截AB之點爲R，則△RPQ爲所求之正三角形.

注意 正三角形恆爲已知，故參照402題，可得本題之別解.

552. 知矩形之底與高之和，求內接於已知之半圓.

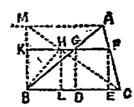
解 作得之矩形ABCD，自圓之中心O，作AB之垂線OF，使OF等於已知底與高之和m，連結FD，其延線與徑之交點爲E，則△FDG∽△FEO，故



FG : DG=FO : OE，但GF等於CD，而爲DG之二倍明矣. 卽FG : DG=FO : OE=2 : 1，故$OE=\frac{1}{2}FO=\frac{1}{2}m$. 由是於徑上取$OF=\frac{1}{2}m$，又自中心O，於垂直於AB之直線上，取$OF=m$，連結EF之直線與半圓之交點爲D, D′，則自D, D′引徑之平行線DC, D′C′，自D, C, D′, C′引徑之垂線DA, CB, D′A′, C′B′，則ABCD及A′B′C′D′，爲所求之矩形. 若EF切圓，則惟有一解，若不相交，則無解. 若EF切圓. 則半徑爲R，而爲次式，卽自OE.OF=R.EF，而得$m^2=5R^2$，卽R爲$\frac{1}{5}m$與m之比例中項，故R等於$\frac{1}{5}m$與m之比例中項，則有一解，若小於比例中項，則無解.

553. 於已知三角形內接正方形.

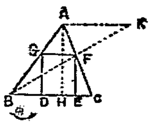
解 已知三角形ABC，內接正方形DEFG，FG之延線，與點B之BC之垂線MB，相交之點爲K，自A引BC之平行線，與BM之



交點爲M，CM與FK之交點爲H，連結BH，因HK=GF，故自H引BC之垂線HL，則BLHK爲正方形，而BH爲

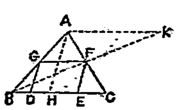
$M\hat{B}C$之二等分線,由是引BC之垂線BM,與平行於BC之直線AM之交點爲M,引$M\hat{B}C$之二等分線,與CM之交點爲H,自H平行於BC引直線HGF,與AB, AC之交點爲G, F,自G, F引BC之垂線GD, FE,則四邊形DEFG,爲所求之正方形.

別解 ΔABC內接正方形DEFG,引高AH,連結BF之直線之延線,與自A所引BC之平線AK,相交之點爲K,則$\frac{AH}{GD}=\frac{BA}{BG}=\frac{AK}{GF}=\frac{AK}{GD}$,故AK=AH. 由是過A引平行於BC之直線AK,取AK等於高AH,連結BK之直線,與AC之交點爲F,則自F平行於BC,引直線FG,爲所求正方形之一邊.



554. 已知三角形ABC,內接平行四邊形DEFG,使其兩鄰邊DE, DG之比,等於已知之比,且其夾角,等於已知之角.

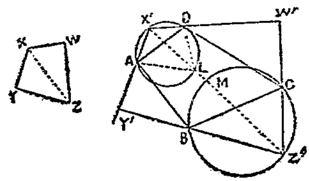
解 求得所求之平行四邊形,連結BF之直線,與平行於BC之直線AK相交之點爲K,引AH平行於邊GD,若DE:DG$=m:n$,則AB:BG=AK:GF=AH:DG,或AK:AH=GF:DG$=m:n$.由是先引AH使與BC成已知角,自A平行於BC,引AK,使AK適於AK:AH$=m:n$,連結BK,得其與AC之交點F,乃自F平行於BC引FG,則FG爲所求平行四邊形之一邊.



注意 已知三角形內接矩形,爲本題之特別者.

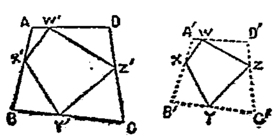
555. 求作一四邊形,相似於已知四邊形XYZW,而外接於已知四邊形ABCD,

解 求得所求之四邊形X'Y'Z'W',畫ΔAX'D, ΔBZ'C之外接圓,連結X'Z'之直線,與此圓周之交點爲L, M,則$D\hat{A}L=L\hat{X'}D=Z\hat{X}W$, $A\hat{D}L=A\hat{X'}L=$ $Y\hat{X}Z$,故ΔADL定矣,同樣ΔBCM亦定矣,由是先畫ΔADL ΔBCM,連結L,M之直線,與ΔADL, ΔBCM之外接圓周之交點爲X', Z',則連結X'A, Z'B, Z'C, X'D之直線,則X'Y'Z'W',爲所求之四邊形.



556. 求作一四邊形,相似於已知四邊形,而內接於其他已知之四邊形.

解 依前題,作四邊形A'B'C'D',外接於已知四邊形XYZW,而相似於已知四邊形ABCD,於ABCD之各邊上,取



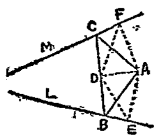
A′X : B′X = AX′ : BX′, B′Y : C′Y = BY′ : CY′,………之點X′, Y′, Z′, W′, 順序連結之, 則X′Y′Z′W′爲所求之四邊形.

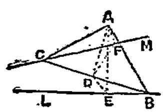
557. 已知四邊形, 畫外接正方形.

【解】 本題爲555題XYZW爲正方形之特別者. 故XZ二等分$\hat{X}$, $\hat{Z}$, 故二圓將AD, BC爲徑, 二點L, M, 各爲弧ALD, 弧BMC之中點, 而得容易作圖也.

558. 將已知一點, 爲直角頂, 他二角頂各在已知二直線上, 而求作直角二等邊三角形.

【解】 將已知點A, 爲直角頂, 他二角頂B, C, 各在已知二直線L, M上, 求作直角二等邊三角形ABC, 今自A向BC, L, M, 各引垂線AD, AE, AF, 連結DE, DF, 則四邊形ADCF, ADBE,



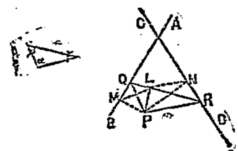


各內接於AC, AB爲徑之圓, 故$A\hat{F}D = A\hat{C}D = \frac{1}{2}\hat{R}$, [或($A\hat{C}D$之補角)$=\frac{3}{2}\hat{R}$], 同樣$A\hat{E}D = \frac{1}{2}\hat{R}$, 因而點D可求得之, 由是自A向L, M, 各引垂線AE, AF, 引直線ED, 使與AE成$A\hat{E}D = \frac{1}{2}\hat{R}$之角, 又引直線FD, 使與AF成$\frac{1}{2}\hat{R}$, 或$2\hat{R} - \frac{1}{2}\hat{R} = \frac{3}{2}\hat{R}$之角, 而ED, FD之交點爲D, 連結AD, 作AD之垂線BC, BC與二直線L, M之交點爲B, C, 則ABC爲所求之三角形.

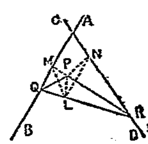
【注意】 本題爲次題之特別者. 又與本解法同樣, 可將已知點爲一角, 他二角頂在已知二直線上, 而畫正方形.

559. 將已知一點, 爲一角頂, 他二角頂在已知二直線上, [或一直線一圓周, 或二圓周.] 而畫與已知三角形相似之三角形.

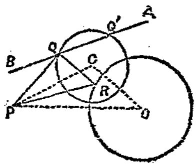
【解】 (1) [於已知點, 與已知二直線上, 畫



相似已知三角形之角形.] AB, CD爲已知二直線, P爲已知點, α, β, γ, 爲已知三角形之三角. 所求之三角形爲PQR, 引PL, PM, PN, 各垂直於QR, AB, CD, 則四邊形PLQM, PLNR, 各內接於PQ, PR, 爲徑之圓, 故$P\hat{Q}R = P\hat{M}L = \beta$, $P\hat{R}Q = P\hat{N}L = \gamma$. 由是自P引AB, CD, 之垂線PM, PN, 作直線ML, NL, 各與PM, PN成等於β, γ, 之角, [第二圖ML, NL對於PM, PN在第一圖之異傍.] 其交點爲L, 連結PL, 引PL之垂線QLR, 與AB, CD之交點爲Q, R, 則PQR爲所求之三角形. (2) [點P與一直線AB,



及一圓O,爲已知者.]求得△PQR,角頂Q在直線AB上,角點R在圓O之周上,且P,Q,R,各等於已知三角形之三角α,β,γ,則於PO上,作等於α,β,γ,之△PCO,而所求三角形之角頂Q

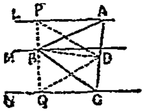


之軌跡,在△PCO之角頂C爲中心之圓周上[422題],故將此圓周與直線AB之交點Q,Q',連結於P,作直線PR,PR',與PQ及PQ',成α之角,其與圓O之交點爲R及R',則PQR,PQ'R',爲所求之三角形. (3)[點P,與圓O,O'爲已知者.] 此與(2)同樣,作Q之軌跡之圓周,此圓周與圓O'之交點爲Q,Q',乃引直線PR,PR',使與PQ,PQ',成α之角,其與圓O之交點爲R,R',則PQR,PQ'R',爲所求之三角形.

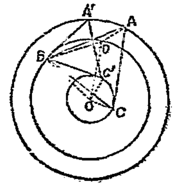
注意 本題(1)及前題,可參照402題,依軌跡解之.

560. 三角頂在已知三平行線,或三同心圓周上,而作等邊三角形.

解 (1)[三角頂在三平行線上者.] 三平行線爲L,M,N,所求之正三角形爲ABC,自B引AC之垂線BD,及三平行線之共同垂線PBQ,則此四邊形



APBD,BQCD,皆得內接於圓,故$B\hat{A}D=D\hat{P}B$, $B\hat{C}D=B\hat{Q}D$,故△DPQ爲正三角形. 由是引三平行之共同垂線,乃於PBQ上,作正三角形DPQ,連結BD之直線,過D而引垂線AC,與L,N之交點爲A,C,則ABC爲所求之三角形. (2)[三角頂各在三同心圓周上.] 求得所求之正三角形ABC,連結OB於中間之圓周上,取BD=OB之點D,連結DO,則BOD爲正三角形,而△BCO及△BAD,其BC=BA,BO=BD,$O\hat{B}C=D\hat{B}A$,故△



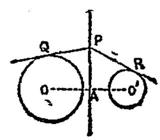
BCO≡△BAD,故OC=DA,由是先作任意之半徑OB,於其圓周上取點D,使BD=OB,乃以D爲中心OC爲半徑畫圓,截外圓於A,A',則BA或BA'爲所求正三角形之一邊. 故將BA或BA'爲半徑B爲中心畫圓,此圓截最小圓之點爲C,C',則ABC,A'BC',爲所求之正三角形.

注意I. 本題有無數之解答,明矣.

注意II. 參照402題及422題,可得本題之別解.

561. 畫已知二圓之根軸.

解 將已知二圓之中心線,分爲二分,使其二分上正方形之差,等於半徑上正方形之差,而求其分點,過其點垂直於中心線,作直線卽得. 若

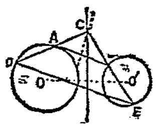


二圓相切或相交，則於其切點作共同切線或共同弦，卽得.

注意 參照第一門根軸之條. [111頁].

562. 圓周O, O'上，有已知點A及B，於此二圓周之根軸上，取一點C，引割線CAD及CBE，使直線DE，平行於AB.

解 求得點C，則因C在二圓O, O'之根軸上，故$CA.CD=CB.CE$............(1)，又因$AB /\!/ DE$，故$CA:CD=CB:CE$............(2)，自(1), (2)，得$\overline{CA}^2=\overline{CB}^2$，卽$CA=CB$，故點$C$在自$A$, B之等距離



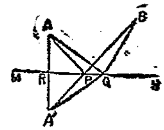
由是使AB之垂直二等分線，此直線與根軸之交點爲C，引CA, CB，使交各圓周於D, E，則$DE /\!/ AB$，明矣. 此題之能成立，爲AB之二等分線，不與根軸平行. 若AB之垂直二等分線，與根軸合，則問題爲不定.

極大極小

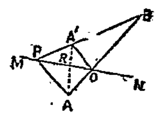
注意 次之問題，最大最小，與極大極小同義，換言之，極大極小爲學語，最大最小爲普通語也.

563. 定直線MN之同傍，有二定點，A, B，今於MN上取一點P，而求$AP+BP$之最小者. 若A, B，在MN之異傍，則求$AP\sim BP$之最大者.

解 AP, BP，與MN成相等角，引長BP，取$PA'=PA$之點A'，連結AA'，則ΔAPR, $\Delta A'PR$之$AP=A'P$, PR共同，$A\hat{P}R=A'\hat{P}R$，故$\Delta APR\equiv\Delta A'PR$，



因而MN爲AA'之垂直二等分線，而$AP+BP=A'P+PB=A'B$. 次於MN上，取任意一點Q，連結AQ, BQ, $A'Q$，則$AQ=A'Q$，明矣. 因而$AQ+BQ=A'Q+BQ$，而$A'B<A'Q+BQ$，卽$AP+BP<AQ+BQ$，故$AP+BP$爲最小. 次若A, B在MN之異傍，則$AP=A'P$, $AQ=A'Q$，故$AP\sim BP=BA'$, $AQ\sim BQ=A'Q\sim BQ$，



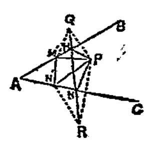
但$BA'>A'Q\sim BQ$，因而$AP\sim BP>AQ\sim BQ$，卽$AP\sim BP$爲最大.

由是二者所求之點，爲連結關於MN之A之對稱點A'，與B之直線與MN之交點.

注意 若已知二點在已知直線之同傍或異傍，自二點向已知直線上之一點，求引二直線與已知直線成相等角，自本題可明也.

564. $B\hat{A}C$內有定點P，今於邊BA, AC上取點M, N，使$PM+MN+NP$爲最小.

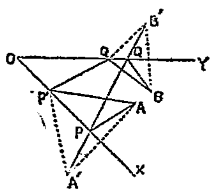
解 關於AB, AC，而取P之對稱點Q, R，連結QR之直線，與AB, AC之交點爲M, N，連結PM, PN，則$PM+MN+PN$爲最小.



蓋於AB, AC上，取他二點M′, N′, 連結M′P, M′Q, N′P, N′R, 則 PM′=M′Q, PN′=N′R,故PM′+M′N′+PN′=QM′+M′N′+N′R, 又 PM+MN+NP=QM+MN+NR=QR, 但 QR<QM′+M′N′+N′R, 即 PM+MN+NR<PM′+M′N′+N′P.

565. 已知角XOY內，有二已知點A及B，於OX上取一點P，於OY上取一點Q，使AP+PQ+QB之長爲最小.

證 連結A, B之關於OX, OY之對稱點A′, B′，交於OX, OY之點爲P, Q, 則

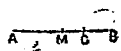


AP+PQ+BQ爲最小，蓋於OX, OY上，取其他任意之點P′, Q′, 連結P′A′, P′A, P′Q′, Q′B′, Q′B, 則 A′P′=AP′, B′Q′=BQ′, 故 AP′+P′Q′+BQ′=A′P′+P′Q′+B′Q′, 而此大於B′A′=AP+PQ+BQ, 明矣.

別證 A, B之關於OY, OX之對稱點爲A″, B″，而A″B″與OY, OX之交點，亦爲所求最小之點.

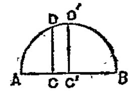
566. 將一有限直線，分爲二分，使其各部所包矩形最大.

證 將有限直線AB，分之於C，且AB之中點爲M，則



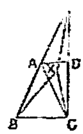
AC.CB=(AM+CM)×(AM∼CM)=$\overline{AM}^2$∼$\overline{CM}^2$，而$\overline{AM}^2$爲一定，故AC.CB爲最大，則$\overline{CM}^2=0$，即C當與M合. 故將AB分爲三分，使其二部分所包之矩形爲最大，則將AB二等分於M即得.

別證 將AB爲徑，畫半圓於其上，而CD⊥AB，因AC.CB=$\overline{CD}^2$，故C與圓之中心C′合，則AC.CB爲最大.



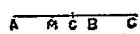
567. 三角形之底邊及周圍爲一定，若面積最大，則爲二等邊.

證 △ABC爲AB=AC之二等邊三角形，△CXB與△ABC等周，而BX≠CX. 今於BA之延線上，取AB′=AB，連結XB′，則因AB′=AC，故AB+CA=AB+AB′=BB′, BX+XC=AB+AC=BB′, 但BB′<BX+XB′，即XB+XC<BX+XB′，故XC<XB′，今作$\widehat{CAB'}$之二等分線AD，則AD爲B′C之垂直二等分線，即B′, C, 等距離點之軌跡. 因而X與BC在AD之同傍，而AD∥BC明矣. 故△XBC之高，小於△ABC之高，故△ABC>△XBC.

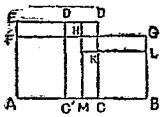


568. 將有限直線，分爲二分，使其爲各部分上正方形之和爲最小.

證 將有限直線AB，二分於C，又AB之中點爲M，則$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)$，但$\overline{AM}^2$爲一定，故$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$若爲最小，則$\overline{CM}^2=0$，即C與M合.

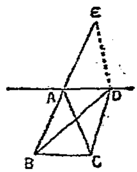


【別證】 於 AC, CB, AM, MB 上, 作正方形 AD, BK, AH, BH, 則 □AD+□BK=□AH+□BH+▭FD−▭KG, 但若使C'M=CM, 引 C'D'∥CD, 則 ▭KG=▭FD' 明矣, 故 □AD+□BK = □AH+□BH+□HD+□HD', 但 □HD=□HD'=$\overline{MC}^2$, 故 □AD+□BK 在 MC=0 時為最小.



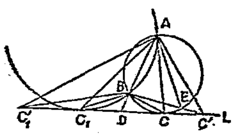
569. 等底等高之諸三角形, 其周圍最小者為二等邊三角形.

【證】 △ABC, △DBC, 為同底等高之二三角形, 而 △ABC 為二等邊三角形, 則 AD 平行於 BC, 而為 A 之外角之二等分線明矣. 今延長 BA 取 AE=BA 之點 E, 連結 DE, 則 ED=CD 明矣. 但 EB<BD+ED, 故 AB+AC+BC<BD+CD+BC.



570. 一已知直線之同傍, 有已知二點 A, B. 今於其直線上求一點 C, 而使角 ACB 為最大.

【證】 連結 AB, 其延線與直線 L 於點 D 相交, 又於直線 L 上取點 C, 使 AD·BD=$\overline{CD}^2$, 乃過 A, B, C 畫圓, 此圓切直線 L 於點 C [520 題]. 今於直線 L 上, 取任意之一點 C', 連結 AC', BC', 為二直線, 例如 BC', 截圓周 ABC 之點為 E, 則 $\hat{ACB}=\hat{AEB}>\hat{AC'B}$, 故 C 為所求之點.

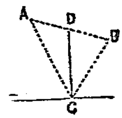


【研究】 過 A, B 切直線 L 之圓有二, 故使角 ACB 最大之點 C 亦有二.

【注意】 數學上之極大極小, 非絕對的極大極小之意義, 而為比較的意義, 即 $\hat{ACB}$ 在點 C 之近傍為極大, 而 AC_1B 在點 C_1 之近傍為極大也.

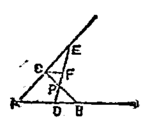
571. 於已知直線上求一點, 此點至已知二點之距離上正方形之和, 使其最小.

【證】 已知二點為 A, B, 已知直線為 L, 又連結 AB 之直線之中點為 D, 今將直線 L 上之一點 C, 連結 A, B, D, 則 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$, 而若 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 為最小, 則 $2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$ 必為最小, 但 $2\overline{AD}^2$ 為一定, 故 $2\overline{CD}^2$ 必為最小, 即 CD 必為最小, 而 CD 垂直於 L 時, 則為最小, 故所求之點 C, 為自 AB 之中點 D, 向 L 所引垂線之趾.



572. 有同一之角頂之諸三角形, 其底皆過已知之一點, 則其底被已知點二等分之三角形為最小.

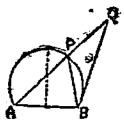
【證】 有同一之頂角 A, 且其底過已知點之任意之三角形為 ADE, 而其底被 P 二等分之三角形為 ABC, 則因 $\hat{ECB}>\hat{CBA}$, 故自 C



引 AB 之平行線 CF, 與 DE 之交點為 F, 則 F 在 E 與 P 之間, 而 $\Delta CPF \equiv \Delta BPD$, 故 ΔABC=四邊形 ACFD, 但四邊形 ACFD$<\Delta ADE$, 故 $\Delta ABC<\Delta ADE$.

573. 於弦 AB 上畫圓之弓形, 於其弧上取一點 P, 使 AP, BP 之和為最大.

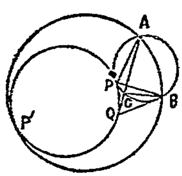
解 引長 AP, 使 $PQ=PB$, 則 $AP+BP=AQ$, 且 $A\hat{Q}B=\frac{1}{2}A\hat{P}B$, 故點 Q 之軌跡, 在 AB 為弦, 而含 $A\hat{Q}B=\frac{1}{2}A\hat{P}B$ 之弓形之弧上. 若



AP+BP 最大, 則 AQ 最大, 但 AQ 最大, 則 AQ 當過弓形 AQB 之中心, 而弓形 AQB 之中心, 在 AB 之垂直二等分線上, 且 $A\hat{Q}B=\frac{1}{2}A\hat{P}B$, 故中心為弧 APB 之中點, 明矣. 由是將弧 APB 之中點 P, 連結於 A, B, 則 AP+BP 為所求之最大者.

574. 於已知圓周上求一點, 以為角之頂點, 而夾其角之二邊, 過已知之二點, 且使其角為最大或最小.

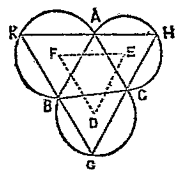
解 過已知二點 A, B, 畫外切於圓 PQP′ 之圓 APB [521 題], 其切點為 P, 則 $A\hat{P}B$ 為最大.



蓋於圓 PQP′ 之周上, 取他一點 Q, 連結 AQ, BQ, 其 AQ 與圓 APB 之交點為 C, 則 $A\hat{P}B=A\hat{C}B$, 而 $A\hat{C}B>A\hat{Q}B$ 故也. 同樣求其最小角, 則過 A, B, 而畫內切於圓 PQP′ 之圓, 其切點 P, 即所求之點.

575. 有已知三點, 以各過其一點之三直線, 而作等邊三角形, 使其周圍最大.

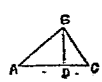
解 已知之三點, 為 A, B, C, 以過 A, B, C 之三直線而作等邊三角形 GHK, 則角頂 G, H, K, 在 BC, CA, AB 為弦, 含 $\frac{2}{3}\hat{R}$ 之圓弧上, 今將此三弓形弧之中心為 D, E, F, 則 HG, HK, KG 之最大者, 其各直線平行於 DE, FE, FD [515 題]. 由是於 BC, CA, AB 各作含 $\frac{2}{3}\hat{R}$ 之圓弧 BGC, CHA, AKB, 乃平行於中心線 EF, 作倍弦 HAK, 引直線 HCG, KBG, 則二直線相交於弧 BGC 上明矣, 而 GHK 為所求之三角形.



注意 一邊 HAK, 平行於 EF, 則其他倍弦 KG, HG, 各平行於 ED, FD, 容易知之.

576. 已知二邊之三角形, 而求其面積之最大者.

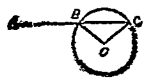
解 二邊 AB, AC, 為已知, 自角頂引 AC 之垂線 BD, 則 $\Delta ABC=\frac{1}{2}AC.BD$, 故 ΔABC 為最大, 則 BD 最大, 但 BD 非 BA 垂直於 AC, 恆小於 BA, 而 BA $\perp$ AC, 則 BD=BA, 故 ΔABC 為最大, 則



BA, AC, 當夾直角, 卽 $\triangle ABC$ 爲直角三角形[又見第四門781題].

577. 自圓O外之一點A, 引割線ABC, 使與圓周相交於B及C, 且使 $\triangle BOC$ 之面積爲最大.

圖 $OB=OC$ 爲已知, 故 $\triangle BOC$ 最大, 則 $BO\perp CO$ [前題], 而BC爲內接於圓O之正方形之一邊, 故自O引BC之垂線, 爲BC之半分, 由是將圓O內接正方形一邊之半分, 爲



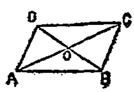
半徑, 畫同心圓, 自A引此圓之切線, ABC, AB′C′, 與已知圓周之交點爲B, C, 及B′, C′, 則 $\triangle BOC=\triangle B'OC'$, 爲所求之二三角形.

578. 求半圓內接矩形之最大者.

圖 依576題, 將半圓之中心, 與矩形之二角頂之連結線, 夾直角, 卽得. [又見第四門782題].

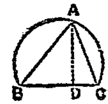
579. 平行四邊形之兩對角線爲已知, 求其面積之最大者.

圖 平行四邊形ABCD之對角線AC, BD之交點爲O, 則 $AO=\frac{1}{2}AC$, $OB=\frac{1}{2}BD$, 故二者皆爲一定之長, 因而 $\triangle AOB$ 在 $AO\perp BO$ 時最大[576題], 但平行四邊形 $ABCD=4\triangle AOB$, 故 $\square ABCD$ 之最大, 爲 $AO\perp BO$ 時, 而此時之 $\square ABCD$ 爲菱形.



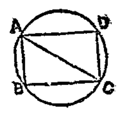
580. 底邊及角爲已知之三角形, 其面積最大者, 爲二等邊三角形.

圖 底邊BC及 $\hat{A}$ 爲已知, 故 $\triangle ABC$ 之頂點A, 恆在弧BAC上, 自A所引之高爲AD, 則因 $\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AD$, 故 $\triangle ABC$ 之面積最大, 則AD最大, 但AD爲BC之垂直二等分線時最大, 故 $\triangle ABC$ 爲二等邊時, 爲最大之面積.



581. 圓內接矩形之中, 正方形爲最大.

圖 圓內接矩形爲ABCD, 則AC爲圓之徑, 而爲一定, 又 $\square ABCD=2\triangle ADC$, 故 $\square ABCD$ 最大, 則 $\triangle ADC$ 最大, 但 $\triangle ADC$ 最大, 則 $AD=CD$ [前題], 故ABCD爲正方形, 故圓內接矩形之最大者爲正方形.



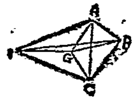
582. 四邊形之對角線爲已知時, 求其面積之最大者.

圖 對角線爲二邊, 對角線之交角爲夾角之三角形, 與四邊形等積[244題], 如此之三角形之面積最大, 則其二邊之夾角爲直角[576題], 故四邊形最大, 則兩對角線互爲直交.

583. 將 $\triangle ABC$ 之平面內一點P, 連結三角形之各角頂, 試定三直線上正方形之和爲極小時之點P.

圖 $\triangle ABC$ 之重心爲G, 則 $\Sigma\overline{PA}^2=$

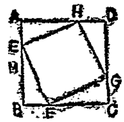
$\Sigma\overline{GA}^2+3\overline{PG}^2$ [229題],



而 $\Sigma\overline{GA}^2$ = 定量, 故 $\Sigma\overline{GA}^2$ 爲極小, 則 PG=0, 卽P與△ABC之重心G合.

584. 已知正方形, 求內接極小之正方形.

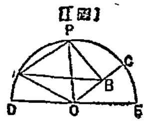
解 已知正方形ABCD, 內接正方形爲EFGH, 則四個三角形 AHE, BEF, CFG, DGH 相等, 而 AH=EB=CF=DG, AE=BF=CG=DH 明矣. 故 $\overline{EF}^2$, 卽 EFGH $=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2$, 今將M爲AB之中點, 則 $\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{ME}^2)$, 故 M與E合時, 卽E爲AB之中點, 則 $\overline{EF}^2$, 卽EFGH, 爲極小, 而E與AB之中點M合, 則F, G, H 各與BC, CD, DA之中點合, 而正方形EFGH爲 $\frac{1}{2}$ABCD.



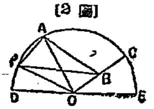
585. 於半圓周上取一定點, 又於其半圓內取一定半徑自其半圓周上一動點, 至定半徑中點之距離之二倍, 與至定點之距離之和爲極小, 或其差爲極大, 求其動點之位置.

解 P爲半圓周DPE上之動點, A爲半圓周上之定點OC爲定半徑, B爲OC之中點, 先如1圖, P在扇形AOC之弧上, 則 PB.OA+AP.OB>AB.PO, 或 OB.(2BP + AP) > 2OB.AB, 因而四邊形APBO, 若不內接於圓, 則 2BP+AP, 恆大於 2AB, 故 AP+2BP之極小爲2AB. 次如2圖, P在弧AD或CE之上. 則 2AB.OB>OB×(2BP∼AP), 卽 2BP∼AP 之極大, 爲 2AB, 故點P所求之位置, 爲四邊形APBO內接於圓, 卽P爲過三點A, O, B之圓與半圓周之交點.

[1圖]

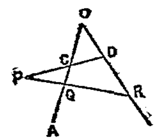


[2圖]



586. 過已知點P與已知角之二邊相交於Q, R引直線, 使矩形PQ.PR之面積爲最小.

解 所求之直線爲PQR, 自P引任意之直線PCD, 與角O二之邊OA, OB, 交於C, D, 則因PQ.PR<PC.PD, 故D在過C, Q, R之圓之外, 故 $A\hat{Q}R>C\hat{D}R$. 但直線PCD, 若接近於PQR, 故 $C\hat{D}R$ 之大, 亦可得無限接近於 $B\hat{R}Q$, 故 $A\hat{Q}R<B\hat{R}Q$. 次將PCD對於PQR引於O之異傍, 則同樣得 $O\hat{Q}R<O\hat{R}Q$, 而因 $O\hat{Q}R+A\hat{Q}R=O\hat{R}Q+B\hat{R}Q=2R$, 故 $A\hat{Q}R\geqq B\hat{R}Q$, $O\hat{Q}R\geqq O\hat{R}Q$ 之二式, 同時成立, 則不可不 $O\hat{Q}R=O\hat{R}Q$, 卽PQ.PR最小, 則△OQR爲二等邊.



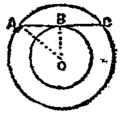
注意 上圖點P, 取於角AOB之外, 然P在角AOB之內, 亦同樣.

關於圓之面積

587. 二同心圓周間之面積, 等於切小

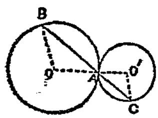
圓周之大圓周之弦爲徑之圓之面積.

圖 同心圓之中心爲O, ABC爲切小圓周於B之大圓弦, 則$AB=\frac{1}{2}AC$, 而$\overline{AO}^2-\overline{BO}^2=\overline{AB}^2$, 而二圓周間之面積, 爲$\pi(\overline{AO}^2-\overline{BO}^2)=\pi\overline{AB}^2$, 故此面積等於AC爲徑之圓周.



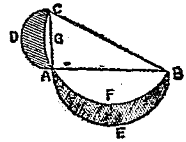
588. 過相切二圓之切點, 引直線, 所得優弓形或劣弓形面積之比, 等於其半徑平方之比.

圖 二圓之中心爲O,O,′ 過其切點A之直線, 與二圓周之交點爲B, C, 連結OO′, OB, O′C, 則得二扇形, 而扇形OAB$=\frac{1}{2}OA\times$(弧AB). 扇形O′AC$=\frac{1}{2}O'A\times$(弧AC), 但弧AB : 弧AC=OA : O′A明矣. 故扇形OAB : 扇形O′AC$=\overline{OA}^2:\overline{O'A}^2$, 又△OAB : △O′AC$=\overline{OA}^2:\overline{O'A}^2$, 故扇形OAB : △OAB=扇形O′AC : △O′AC, 或扇形OAB±△OAB : △OAB=扇形O′AC±△O′AC : △O′AC, 即弓形AB : 弓形AC=△OAB : △O′AC$=\overline{OA}^2:\overline{O'A}^2$.



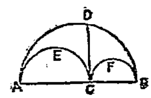
589. 直角三角形, 將其直角傍之二邊各爲徑, 畫半圓於三角形外, 又將斜邊爲徑, 畫半圓, 與三角形相重, 所生二月形之和, 等於三角形之面積.

圖 半圓BAC$=\frac{1}{8}\pi\overline{BC}^2$, 半圓AEB$=\frac{1}{8}\pi\overline{AB}^2$, 半圓ADC$=\frac{1}{8}\pi\overline{AC}^2$, 但$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$. 故半圓BAC=半圓AEB+半圓ADC. 自雙方減弓形AGC+弓形AFB, 而得△ABC=月形ADCG+月形AEBF.



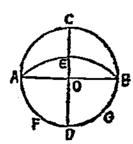
590. 自半圓之徑AB上之一點C, 立AB之垂線, 使與周交於D, 又將AC, BC, 爲徑畫二半圓周於已知半圓內, 則三半圓周, 所成曲線形之面積, 等於CD爲徑之圓之面積.

圖 半圓ADB$=\frac{1}{8}\pi\overline{AB}^2$, 半圓AEC$=\frac{1}{8}\pi\overline{AC}^2$, 半圓BFC$=\frac{1}{8}\pi\overline{BC}^2$, 故圖形ADBFCE$=\frac{1}{8}\pi(\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)$, 但$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=(AC+BC)^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=2AC.BC=2\overline{CD}^2$, 因而圖形ADBFCE$=\frac{1}{4}\pi\overline{CD}^2$=(CD爲徑之圓之面積).



591. 於圓O引互垂直之二徑AB, CD, 將D爲中心, DA爲半徑, 畫弧AEB, 則月形ACBE與△DAB等積.

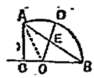
圖 弓形AEB, AFD, BGD之中心角皆相等明矣, 故此三弓形相似, 而$\frac{\text{弓形AFD}}{\text{弓形AEB}}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}$, $\frac{\text{弓形BGD}}{\text{弓形AEB}}=$



$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2}$. 故 $\frac{\text{弓形AFD}+\text{弓形BGD}}{\text{弓形AEB}}=\frac{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2}=1$. 即弓形AFD+弓形BGD=弓形AEB. 因而月形ACBE=△DAB.

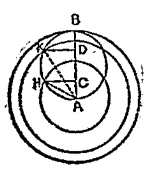
592. 自中心O之弧AB之一端A, 下OB之垂線, 其趾為C, 於弧AB上, 截取等於AC之長之弧AD, 作AB, DO, 則弓形ADB, 與扇形DOB等積.

證 連結AO, 此圓之半徑為R, 則△AOB=$\frac{1}{2}$AC.R, 又扇形OAD=$\frac{1}{2}$弧AD.R, 但弧AD=AC, 故△AOB=扇形OAD, 因而△EOB=圖形EAD, 故扇形DOB=弓形ADB.



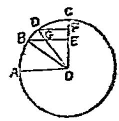
593. 將圓A之半徑AB為徑畫半圓, 次將AB等分為任意之數, 自各分點引AB之垂線, 使與半圓交於H, K,………… 將A為中心, AH, AK,…………為半徑畫圓, 則原之圓面積, 被同心圓周等分之.

證 將AB於C, D,………分之, AC=CD=………=$\frac{1}{n}$AB 則 $\overline{CH}^2=\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\overline{AB}^2$ 故 $\overline{AH}^2=\overline{CH}^2+AC^2=\frac{n-1}{n^2}\overline{AB}^2+\frac{1}{n^2}\times\overline{AB}^2=\frac{n^2}{n^2}\overline{AB}^2=\frac{1}{n}\overline{AB}^2$, 故 $\pi AH^2=\frac{1}{n^2}\pi\overline{AB}^2$, 即AH為半徑之圓, 等於AB為半徑之圓之$\frac{1}{n}$. 同樣AK為半徑之圓, 等於AB為半徑之圓之$\frac{2}{n}$. 因而此二圓周間之面積, 等於半徑AB之圓之面積之$\frac{1}{n}$. 同樣知相鄰二圓周間之面積, 等於半徑為AB之圓之面積之$\frac{1}{n}$. 即AH, AK,………,為半徑之圓周, 分AB為半徑之圓之面積為n等分.



594. OA, OC為圓O互垂直之二半徑, 今於弧AC上, 取點B, D, 而弧AB, CD, 相等, 自B, D下OC之垂線, 其趾為E, F, 則圖形BEFD, 與扇形BOD等積.

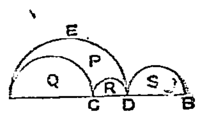
證 因弧CD=弧AB, 故 $C\hat{O}D=A\hat{O}B=O\hat{B}F$, 故二直角三角形OBE, ODF, 全等, 各加圖形GBD, 又各減△GEO, 則其餘等積. 即扇形BOD=圖形BEFD.



595. 將直線AB二等分於C, 又於D分為不等之二分, 如圖畫半圓, 則P+S=Q+R. [但P為半圓周之罅隙.]

證 $\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)$,

$\frac{\text{半圓AED}}{S}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{DB}^2}$, 或 $\frac{\text{半圓AED}+S}{\text{半圓AED}}=\frac{\overline{AD}^2+\overline{DB}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{2(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)}{\overline{AD}^2}$……(1). $\frac{Q}{R}=$

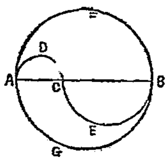


$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CD}^2}$, 或 $\frac{Q}{Q+R}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}$……(2). $\frac{\text{半圓AED}}{Q}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}$……(3). 將(1),(2),(3)

相乘而 $\frac{\text{半圓AED}+S}{Q+R}=\frac{2}{1}$，即半圓 $AED+S=2(Q+R)$. 自此之兩邊減 $Q+R$ 則 $P+S=Q+R$.

596. 於圓徑 AB 上，取任意一點 C，將 AC，BC 爲徑畫半圓，則 $\frac{\text{面積AFBECD}}{\text{面積BECDAG}}=\frac{BC}{AC}$，而曲線 ADCEB，等於半圓周.

圖 半圓 $AFB=\frac{1}{8}\pi\overline{AB}^2$，半圓 $ADC=\frac{1}{8}\pi\overline{AC}^2$，半圓 $CEB=\frac{1}{8}\pi\overline{BC}^2$，故 $\frac{\text{面積AFBECD}}{\text{面積BECDAG}}=$



$\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\frac{(AB+AC)BC+\overline{BC}^2}{(AB+BC)AC+\overline{AC}^2}$

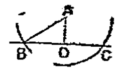
$=\frac{BC(AB+AC+BC)}{AC(AB+AC+BC)}=\frac{BC}{AC}$. 又 $AC+CB=AB$，故 $\frac{1}{2}\pi AC+\frac{1}{2}\pi CB=\frac{1}{2}\pi AB$，即自二半圓周所成之曲線 ADCEB，等於半圓周 AFB.

注意 若於 AB 之 n 等分點，各作如圖 ADCEB 之曲線，則是等曲線，分圓面積爲 n 等分，且互等長，而等於半圓周明矣.

計算問題

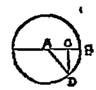
597. 定點與定直線之距離爲 3 寸，將定點爲中心畫圓，自定直線截取之弦爲 8 寸，問圓之半徑幾何.

圖 定點 A 與定直線 BC 之距離 AD 爲 3寸，$AB=R$寸，爲半徑畫圓，此圓之弦 BC 爲 8寸，則 $BD=4$寸，故 $R=\sqrt{4^2+3^2}$，即 5寸.



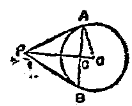
598. 半徑 1 尺之圓，過自中心 6 寸之距離之一點，此點分其弦爲二分，試計算此二分所包矩形之面積.

圖 半徑 $AB=1$ 尺之圓，自中心 6寸之距離一點 C，過 C 之弦，以 C 爲分點，分其弦爲二分，則此二分所包之矩形，等於自 C 作 AB 之垂線，交圓周於 D 之 DC 上之正方形，故若將所求之面積爲 S，則 $S=\overline{CD}^2=10^2-6^2$，即 64 平方寸.



599. 自半徑 2 尺 1 寸之圓周距離 3 尺 5 寸之一點 P，引此圓之二切線，計算連結切點之弦之長.

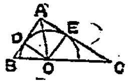
圖 圓之中心爲 O，二切線爲 PA，PB，而 PO 與 AB 之交點爲 C，則 $PO=21$寸$+35$寸$=56$寸，$OC.OP=\overline{AO}^2$，故 $OC=\frac{\overline{AO}^2}{OP}=\frac{21寸}{56寸}$，故 $AB=2AC=2\sqrt{21^2-\frac{21^4}{56^2}}$，即 $\frac{21}{4}\sqrt{55}$寸.



600. 直角三角形，夾直角之二邊爲 4 尺及 5 尺，中心在斜邊上，而切於他二邊之半圓，試計算其半徑.

圖 直角三角形 ABC，$AB=4$尺，$AC=$

5尺, 而圓之中心爲O, AB, AC, 切圓之點爲D, E, 連結OD, OE, 則ADOE爲正方形, 故AO爲$\hat{A}$之二等分線, 因而CO : BC=AC : AC+AB=5 : 9, 但CO : BC=OE : BA, 故OE : BA=5 : 9, 故OE=$\frac{20}{9}$尺.

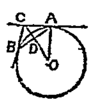


601. 有甲乙丙三家欲於各之等距離處掘井, 甲乙隔4丈, 乙丙隔13丈, 丙甲隔15丈, 問各家至井之距離如何.

解 井在過甲乙丙三家之圓之中心, 故將各家至井之距離爲R, 則 $R=\frac{abc}{4\triangle}=\frac{4\times13\times15}{4\triangle}$, 但△乃表連結三家所得三角形之面積, 而$\triangle=\sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)}=\sqrt{16\times12\times3}=4\times3\times2$, 故 R=8丈$\frac{1}{8}$.

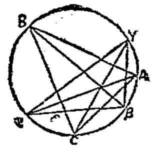
602. 求圓外接正六角形之一邊. [但圓之半徑R爲已知].

解 半徑R之圓內接正六角形, 於其一端AB之兩端A, B, 引切線, 其交點爲C, 則爲AC外切正六角形一邊之半分, 明矣, 今連結OA, OC, 而OC與AB之交點爲D, 則$AD=\frac{1}{2}R$, 而$OD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$, 但$\frac{AC}{AO}=\frac{AD}{OD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 故$AC=\frac{R}{\sqrt{3}}$, 由是外切正六角形之一邊爲$2R/\sqrt{3}$.



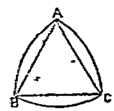
603. 圓內接三角形αβγ之各角, 爲30°, 100°, 及50°, 此三角形之二等分線, 與圓周相交之點爲A, B, C, 則△ABC各角之大如何.

解 $\Delta\alpha\beta\gamma$ 其 $\hat{\alpha}=30^\circ$, $\hat{\beta}=100^\circ$, $\hat{\gamma}=50^\circ$ 則 $B\hat{A}C=\alpha\hat{A}C+\alpha\hat{A}B=\alpha\hat{\gamma}C+\alpha\hat{\beta}B=25^\circ+50^\circ=75^\circ$. 同樣 $A\hat{B}C=15^\circ+25^\circ=40^\circ$, $A\hat{C}B=15^\circ+50^\circ=65^\circ$.



604. 有以半徑相等之三弧, 所成三角狀圖形, 各弧之中心, 爲他二弧之交點, 試計算此圖形之面積.

解 弧三角形爲ABC, 各弧之半徑爲R, 則△ABC之面積爲$\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$, 而弓形AB=弓形BC=弓形AC, 明矣, 而弓形AB=扇形CAB−△ABC$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi R^2-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}=\frac{R^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}$, 故AB, BC, CA所成圖形之面積爲S, 則$S=\frac{R^2(\pi-\sqrt{3})}{2}$.



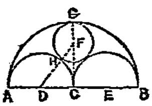
605. 半徑10尺之圓, 其中心角等於二直角三分之二之弧, 與其弦所成之弓形, 試計算其面積.

解 半徑10尺之圓周之長爲20π, 其中心角爲$2\hat{R}$三分之二, 其所立弧之長P, 依$P:20\pi=1:3$之式, 得弧AB=P=$\frac{20}{3}\pi$尺, 故扇形AOB之面積爲$\left(\frac{1}{2}\times10\times\frac{20}{3}\pi\right)$平方尺$=\left(\frac{100}{3}\pi\right)$平方尺, 又

△OAB之面積 $=\frac{1}{2}\left(AO\times\frac{\sqrt{3}}{2}OA\right)=\frac{1}{2}\times10\times\sqrt{3}\times5$, 卽 $(25\sqrt{3})$ 平方尺, 故弓形AB之面積, 爲 $\left(\frac{100}{3}\pi-25\sqrt{3}\right)$ 平方尺 $=\frac{1}{3}(100\pi-75\sqrt{3})$ 平方尺.

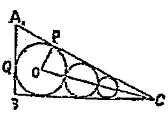
606. 將已知半圓周兩端之半徑爲徑, 而於其內方畫相等二圓, 則切此三半圓之圓徑, 等於二圓之徑之三分之二.

解 相等二圓之半徑爲R, 中心F之圓之半徑爲r, 則F在切相等二圓之大圓半徑上, 且其半徑過切點G, 依對稱之理可明之, 又DF過切點H, 而因 $r(2R+r)=(2R-r)^2$, 故 $2R+r : 2R-r=2R-r : r$, 或 $2R : r=2R : 2(R-r)$, 故 $r=2(R-r)$, 因而 $2r=\frac{2}{3}\times2R$.



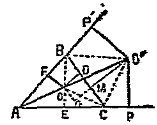
607. 直角三角形ABC, 如圖, 累次內切無數之圓, 試求是等諸徑之和, 但已知其直角傍之二邊 AB=5, BC=12.

解 AB=5, BC=12, 故斜邊AC=13, 而中心O之圓之半徑爲 r, 則 $r=(5+12-13)\div2=2$, 因而 $AP=AQ=5-2=3$, 而 $CP=10$, 故 $OC=\sqrt{100+4}=2\sqrt{26}$, 故所求諸徑之和, 爲 $2\sqrt{26}+2=2(\sqrt{26}+1)$.



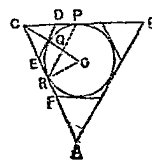
608. 三角形ABC之三邊爲 a, b, c, 其和之半分爲 s, 內切圓之半徑爲 r, 對於A, B, C之傍切圓之半徑爲 r_1, r_2, r_3, 則面積△等於 sr, $r_1(s-a)$, $r_2(s-b)$, 及 $r_3(s-c)$.

解 半徑 r, r_1 之對應圓之中心爲O, O_1, 則 △ABC=△AOB+△BOC+△COA $=\frac{1}{2}(a.r+b.r+c.r)=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$. △ABC=△=△AO′B+△AO′C−△BO′C $=\frac{1}{2}(c.r_1+b.r_1-a.r_1)=\frac{1}{2}(c+b-a)r_1=r_1(s-a)$. 同樣知 △ABC=△=$sr=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$.



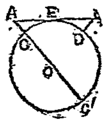
609. 半徑5尺之圓, 外切正三角形及正六角形, 試計算其面積.

解 △ABC爲圓O外切之正三角形, 則BC, AC, 切於圓, 其切點P, R, 之連結線, 爲內接正三角形之一邊, 而弧PR中點Q之切線, 與BC, AC交點間之距離, 爲外切正六角形之一邊, QR爲內接正六角形之一邊明矣, 而OC, PR之交點爲H, 則 $PR=2HR=2\sqrt{\overline{OR}^2-\left(\frac{1}{2}OR\right)^2}=\sqrt{75}$ 尺 $=(5\sqrt{3})$ 尺, QR=OR=5尺, 故外切正三角形之一邊, 可於 $b'=\frac{2aR}{\sqrt{(4R^2-a^2)}}$ 得之, 卽 $a=5\sqrt{3}$, $R=5$, 而得 $b'=(10\sqrt{3})$ 尺. 外切正六角形之一邊, 可於 $b'=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$ 得之, 卽 $a=R=5$, 而得 $b'=\frac{10}{\sqrt{3}}$ 尺.



610. 二山之高,各爲1350呎,可得互相望見之,問其最遠距離當如何.

解 二山之高爲CA, DB, 可得互相望之,其最遠距離,即切於地平面之直線AB. 今將其切點爲E, 則因CA=DB, 故E爲AB之中點. 又AC, BD, 皆過地球之中心O,故若引長AC,而與地球之表面,再交於C′, 則CC′爲地球之徑,而$\overline{AE}^2=AC.AC'$. 但AC比於CC′爲甚小,故可視爲$AC'=CC'$,因而可視爲$\overline{AE}^2=AC.CC'$,而$AC=1350$呎$=\frac{45}{176}$哩, $CC'=3963$哩$\times 2=7926$哩, 故 $AE=\sqrt{\left(\frac{45}{176}\times 7926\right)}$哩$=45$哩, 因而$AB=AE\times 2=45$哩$\times 2=$90哩.



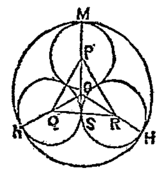
611. 於靜湖水之表面上,假定眼高6呎,恰得望見距離6哩在湖水之表面上高6呎之燈光,因之求地球之徑之哩數. 又由此已知件,若h爲海面上眼高之呎數,d爲望洋之哩數, 則$d=\sqrt{\left(\frac{3}{2}h\right)}$.

解 前題之圖 $AC=6$呎$=\frac{1}{880}$哩, $AE=3$哩, 故$CC'=3^2\div\frac{1}{880}=7920$ [前題], 故地球之徑爲7920哩, 次$AC=h$呎$=\frac{h}{5280}$哩, $AE=d$哩, 故$d^2=\frac{h}{5280}\times 7920$, 因而$d=\sqrt{\left(\frac{h}{5280}\times 7920\right)}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}h\right)}$.

別解 $\overline{AE}^2=AC.AC'$, 即$d^2=\frac{h}{5280}\times\left(7920+\frac{h}{5280}\right)$, 則$d=\sqrt{\left\{\frac{3}{2}h+\left(\frac{h}{5280}\right)^2\right\}}$, 但$\left(\frac{h}{5280}\right)^2$比$\frac{3}{2}h$爲甚小,故在根號內之數,殆等於$\frac{3}{2}h$.

612. 於半徑爲r之圓,畫內切又互相外切之三等圓,其半徑如何.

解 圓之中心爲O, 三等圓之中心爲P, Q, R, 其切外圓之點爲M, N, H, 二圓Q, R之切點爲S, 因O, P, M在同一直線上,同樣O, Q, N及O, R, H亦在同一直線上, 故$OP=OQ=OR$, 故O爲正三角形PQR之中心, 而圓Q, R之切點爲S, 則OS爲正三角形之中心與邊之距離. 今將等圓之半徑爲a, 則$RS=\sqrt{(\overline{OR}^2-\overline{OS}^2)}=\sqrt{\left\{\overline{OR}^2-\left(\frac{1}{2}OR\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OR$, 即$a=\frac{\sqrt{3}}{2}OR$, 故$OR=\frac{2}{\sqrt{3}}$, 故$OH=OR+RH$, 即$r=\frac{2}{\sqrt{3}}a+a$, 由此得$a=(2\sqrt{3}-3)r$.



613. 半徑爲r之圓,求內接正三角形,正方形,正五角形,正六角形,正八角形,正十二角形之面積.

解 將正多角形之中心,連結各角頂,則可得與邊數同數之相等三角形,故其面積,等於以邊心距爲高,一邊爲底之三角形面積,乘其邊者. 由是內接正三角形之面積,爲$3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}r\cdot\frac{1}{2}r$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. 正方形爲 $4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}r=2r^2$, 正五角形爲 $5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r\times\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})}}{4}r=\frac{5}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}r^2$. 正六角形爲 $6.\frac{1}{2}r.\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$, 而正八角形爲 $8\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2-\sqrt{2})}\,r.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}r=2\sqrt{2}r^2$, 正十角形爲 $10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\times\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}r=\frac{5}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r^2$.

注意　已知圓之半徑,可求其內接正多角形之一邊,故可求其二倍之內接正多角之面積. 又外切正多角邊心距,等於半徑,故已知半徑,即可得知其一邊之長,因而可得求其面積.

614. 半徑爲 r 之圓,求其內接正十二角形之面積.

解　內接正六角形之一邊,等於圓之半徑,故如前題,可得內接正十二角形之面積,爲 $12\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}r=3r^2$, 即等於半徑上正方形之3倍.

(第 五 門 畢)

第 六 門

立體幾何學解法之部

SIXTH SECTION

The Solutions of Exercises

IN

SOLID GEOMETRY

第六門　立體幾何學解法之部　目次

π之倍數及其對數

$\pi = 3.14159265358979323846$

$2\pi = 6.28318530717958647693$

$3\pi = 9.42477796076937971539$

$4\pi = 12.56637061435917295385$

$5\pi = 15.70796326794896619231$

$6\pi = 18.84955592153875943078$

$7\pi = 21.99114857512855266924$

$8\pi = 25.13274122871834590770$

$9\pi = 28.27433388230813914616$

$\log \pi = 0.49714987269413385435$

$\log_e \pi = 1.14472988584940017414$

$\pi^2 = 9.86960440108935861884$

$\log \pi^2 = 0.99429974538826770870$

$\sqrt{\pi} = 1.77245385090833697522$

$\log \sqrt{\pi} = 0.24857493634706692718$

$\pi^{-1} = 0.31830988618379067153$

$\log \pi^{-1} = \bar{1}.50285012730586614565$

$\frac{4}{3}\pi = 4.18879020478639098462$

$\log \frac{4}{3}\pi = 0.62208860930243380748$

$\pi^3 = 31.00627668029982017488$

$\log \pi^3 = 1.49144961808240156305$

$\sqrt[3]{\pi} = 1.46459335069332351713$

$\log \sqrt[3]{\pi} = 0.16571662423137795145$

正多面體　一稜以 a 表之則

正四面體之體積	$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$
正六面體, 即正方體之體積	$V=a^3.$
正八面體之體積	$V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$
正十二面體之體積	$V=\frac{1}{4}a^3(15-7\sqrt{5}).$
正二十面體之體積	$V=\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}).$

拔卜士[Pappus]之定理. 一圖綫平面之曲線, 以在其平面上且不截之之直線爲軸, 而迴轉之, 則其所生體之體積, 等於其重心所畫圓周, 乘其面積.

旋轉體　正多角形以其一邊爲軸而迴轉所生體之體積, 但 R 爲外接圓之半徑, c 爲一邊.

三角形	$\frac{3}{4}\pi R^3\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\pi c^3$
四角形	$2\pi R^3\sqrt{2}$	πc^3
五角形	$\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$
六角形	$\frac{9}{2}\pi R^3$	$\frac{9}{2}\pi c^3$
八角形	$2\pi R^3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$2\pi c^3(3+2\sqrt{2})$
十角形	$\frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{5}$	$\frac{5}{2}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$
十二角形	$\frac{3}{2}\pi R^3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$3\pi^3(7+4\sqrt{3})$

數學辭典

第六門　立體幾何學解法之部

立體幾何學定理

平面之定

●一直線與不在其直線上之一點.

●不在同一直線上之三點.

●相交二直線.

●相平行二直線.

二平面之交

●二平面之交,爲一直線.

平面之垂線及斜線

●相交二直線,其交點二直線之垂線,垂直於前二直線所定之平面.

●於平面上[外]一點,得引此平面之一垂線,而唯限於一.

●自平面外一點,作其平面之垂線及斜線,則

(1) 自垂線之趾等距離之趾之斜線相等.

(2) 自垂線之趾遠距離之趾之斜線,長於近距離之趾之斜線. 本題之逆亦眞.

●自平面外一點,向其平面所作直線之中,惟垂線最短.

●於一直線上同一點,所作一切垂線,在此點之垂直其直線之平面上.

●過一直線上[外]之一點,得作垂直其直線之一平面,而惟限於一.

●自一平面之垂線之趾,至在此平面而不過其趾之直線作垂線,將此趾連於初直線上任意一點,則此直線亦爲後直線之垂線.

平行直線及平面

●垂直於同一平面之二直線,互平行.

●二平行直線之一,垂直於一平面,則其他亦垂直於同平面.

●平行於同一直線之二直線,互平行.

●二平行直線之一,平行於含其他之各平面.

●平行其平面之交之直線,平行於其各平面.

●一直線平行一平面,則其平面,與含其直線之平面之交,皆平行於其直線,因而又互相平行.

●垂直於同一直線之二平面,互平行.

●相交二直線,皆平行一平面,則是等二直線之所定之平面,平行於前之平面.

●平行二平面與第三平面之交,爲平行直線.

●夾於平行二平面之間之平行直線,其長相等.

●垂直於平行二平面之一之直線,亦垂直於其他.

●過一點平行於一平面,得作一平面,而惟限於一.

●不在同一平面上之二角,有平行之各邊,則此二角相等,或互爲補角.

●不在同一平面之直線,過其一而平行於其他之平面,唯有一.

●被截於平行三平面之二直線,其對應線分成比例.

●二直線不在同一平面上,垂直於此二直線之垂線,有一而惟限於一.此直線爲二直線間最短線.

軌跡

●一有限直線之垂直二等分面,爲自其兩端成等距離點之軌跡.

●自圓周上之各點成等距離點之軌跡,爲過其圓之中心,而垂直於其平面之直線.

●自平行二直線成等距離點之軌跡,爲其公垂線之垂直二等分面.

●至一平面之距離爲一定之點之軌跡,爲與此面平行之二平面.

垂直平面及二面角

●含垂直一平面之直線之諸平面,垂直於前之平面.

●垂直於二角之稜之平面,垂直於其二面.

●過一平面之斜線,得作垂直於其平面之一平面,而惟限於一.

●二平面交爲直角,於其一之上作交線之垂線,則其垂線與他面交爲直角.

●自二面角之稜上二點,於各面上作其稜之垂線,所成二直線角相等.

●自二面角內一點,作各面之垂線,則此二線之夾角與二面角之對應直線角成補角.

射影

●不垂直於一平面之一有限直線,其在其平面上之射影,爲連其兩端之射影之有限直線.

●一平面之斜線,與在其面之射影,所成銳角,小於此斜線與過其趾之同平面上之他直線所成之角.

多面角

●三面角之任意二面角之和,大於其他之一面角.

●凸多面角各面角之和,小於四直角.

●二三面角其面角同序相等,則此二三角面相等.若逆序相等,則爲對稱.

●一凸n面角之二面角之和爲S,則有$2n$直角$>S>(2n-4)$直角之關係.

多　面　體

●正多面體不能多於五種.［實有五種］.

●［歐勒爾之定理］.將凸多面體之稜之數爲E,面之數爲F,頂點之數爲V,則$E+2=F+V$.

●過正多面體各面中心之垂線,過同一點.而此點至各面各稜及各角頂,皆成等距離.

●一多面體之諸面角之和.等於其角頂數倍之四直角與八直角之差.

●一平行六面體之各對角線,過同一點,而皆以此點平分之.

●二三角錐,等底等高,則體積相等.

●二角壔,其直角截口及側稜相等,則體積相等.

●相等之底面及相等之高之平行六面體,相等.

●一三角壔,得分爲三個相等之三角錐.

●斜三角臺之三側稜爲S, S_1, S_2,底面積爲B,其體積爲V,則

$V=\frac{1}{3}(S+S_1+S_2).B$

●相似多面體之體積,與對應邊之三乘成比例.

壔,錐,臺之面積,體積

●求側面積.

(1) 正角臺$S=\frac{1}{2}l(p+p')$.

但l爲斜高,p及p'爲底之周.

(2) 正圓臺$S=\pi l(r+r')$.

但r及r'爲兩底之半徑.

(3) 正角錐$S=\frac{1}{2}lp$.

(4) 正圓錐$S=\pi rl$.

(5) 角壔$S=hp$.　但h爲高.

(6) 圓壔$S=2\pi rh$.

●求體積V.

(1) 正角臺$V=\frac{1}{3}h(B+\sqrt{BB'}+B')$.

但B及B′爲兩底之面積.

(2) 正圓臺$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$.

(3) 角錐$V=\frac{1}{3}hB$.

(4) 圓錐$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(5) 角壔$V=Bh$.

(6) 圓壔$V=\pi r^2 h$.

旋　轉　體

●球以平面截之,其截口爲圓.

●球之圓之軸,過球之中心,而諸平行圓,有同軸與同極.

●球之諸大圓相等,且皆二等分其球及其球面.

●球面與球面之交爲圓.

●自球外一點,切於球之諸直線相等.且切點之軌跡爲圓.

●球之半徑之端,垂直於半徑之平面,切於球.

●球之半徑之端,垂直於半徑之各直線,切於球.

●切於球之圓之直線,在過切點而切於球之平面上.

●於切於球之平面上,過切點,引任意之直線,切球於其點.

●於同一之點,切於球之任意二直線,定於其點切球之平面.

●於球之圓周上諸點,在其極之等距離.

●過球面上非對點之二點之大圓,惟有一.

●自球面上一點,至他一點之最短徑,爲過其二點之大圓弧.

●二個對稱球面三角形等積.

●球面三角形之各邊,小於他二邊之和.

●球面多角形之任意一邊,小於他各邊之和.

●球面多角形各邊之和,小於360°.

●一球面三角形,爲他球面三角形之極三角形,則後之三角形,又爲前之三角形之極三角形.

●二球面三角形,互爲極三角形,則其一之各角,與他之一所對之邊,互爲補角.

●球面五角形各角之和,大於六直角而小於十直角.

●球之半徑爲r,則

球之面積$S=4\pi r^2$.

月形之面積$=\frac{a}{360}S=\frac{a}{90}\pi r^2$.

但a爲月形角.

球帶之面積$=2\pi rh$.

但h爲球帶之高.

●球之體積$V=S\cdot\frac{1}{3}r=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$.

但d爲球之徑.

●球缺之體積$=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}\pi h^3$.

但r', r''爲兩底之半徑.

●球狀錐之體積,等於其底與球半徑之積之三分之一.

●球狀楔之角爲a直角,則其體積S,爲

$$S=\frac{1}{3}(\pi r^3.a).$$

●二有限直線,在同之平面上,不相交,且不垂直,將其一廻轉之至原位置所生之表面積,等於[廻轉線之垂直二等分線,在兩線間之部分爲半徑之圓周]與[廻轉線在其軸之射影]之積.

●一三角形,以在其平面,過其頂點,而不截之之一直線爲軸,廻轉至原位置,所生之體積,等於三角形之底所生之表面,與其高之積之三分之一.

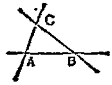
●圓之弓形,將不截之之徑爲軸,廻轉至原位置所生之體積,等於[圓之弓形爲底,半徑在於軸之射影爲高]之圓錐體積之半分.

直線及平面

1. 於三點相交之三直線,在同一之平面上.

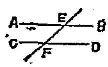
圖 三直線之交點爲A, B, C, 合直線

AB及點C之平面,有一而惟限於一. 此平面為P, 則直線AC, BC, 其上二點A, C及B, C在平面P上, 故是等直線在平面P上, 即三直線AP, BC, CA在同一平面P上.



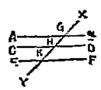
2. 二平行直線,將其一之上任意點,與其他之上任意點,連結之直線,在平行直線所定之平面之上.

解 二平行直線為AB, CD. AB上一點E, 與CD上一點F, 在平行直線AB, CD所定之平面上, 故依平面之定義, 而直線EF, 全在AB, CD所定平面上.



3. 三平行直線,與第四直線相交,則四直線在同一之平面上.

解 三平行直線AB, CD, EF相交於G, H, K之直線XY, 則XY在AB, CD所定之平面上[2題].



又XY在AB, EF所定之平面上. 但XY與AB所定之平面惟一個, 故AB, CD所定平面與AB, EF所定平面, 皆與AB, XY所定之平面同一, 即AB, CD, EF, XY在同一之平面上.

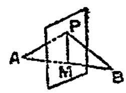
注意 平行線不限於三,無論若干,本題皆真.

4. 二直線平行,則與其一相交之平面,又與其他相交.

解 AB∥CD, 與AB交之平面P, 與AB, CD所定之平面之交為直線EF. 是AB, CD, EF在同一之平面上. 而EF與AB交, 故必與CD交, 故平面P又與CD交. [見2題之圖].

5. 問已知二點,等距離點之軌跡如何.

解 自已知二點A, B, 等距離之點為P, 連結AB之中點M, 則$\Delta PMA \equiv \Delta PMB$, 故PM垂直於AB, 即P在AB之中點M垂直於AB之平面上. 逆取此平面上一點P, 連結PM, PA, PB, 則二直角三角形PMA, PMB全等, 故PA=PB, 因而所求之跡跡, 為AB之中點M垂直於AB之平面.



6. 於已知平面上,自平面外已知二點,等距離點之軌跡如何.

解 自已知二點等距離點之軌跡,為連結此二點之直線中點,垂直此直線之平面P[前題]. 故所求之軌跡,為已知平面,與平面P之交之直線. 然連結二點之直線,若垂直於平面P,則其中點在平面P上者,其所求之軌跡,為平面P,其中點不在平面P上者,無所求之軌跡.

7. 以氣泡水準器,決定一平面成水平與否,當就水準器不平行二位置試驗之.

解 二相交直線,決定一平面故也. 但若置為平行之位置,則氣泡水準之

氣泡,恆在同一之位置,故不得決定平面之水平.

8. 與一平面相交之直線,相交其平面平行之一切平面.

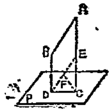
證 與一平面P相交之直線XY,若不與平行於平面P之平面Q相交,則XY平行於平面Q,且XY上之一點,在平面P上,即XY不可不全在平面P上,是戾於假設,故XY必交於平面Q.同樣證XY與平行於平面P之一切平面相交.

9. 一有限直線,在已知平面之正射影,等其於原長,問其直線之位置及又若正射影為一點之直線之位置.

證 有限直線,在已知平面之正射影,等於其原長,則其直線,平行於已知平面.又正射影為一點之直線,則其直線垂直已知平面,易明也.

10. 一直線在已知平面上之正射影,等於原長之半,問其直線與平面成角之大如何.

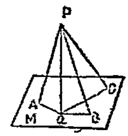
證 直線AB在平面P上之正射影為CD,於平面ABCD上,作直線DE,使平行於AB,則AB=DE,且$\hat{EDC}$等於AB傾斜於平面P之角,但AB=2CD,故將DE之中點為F,則



自直三角形CDE,而知DF=EF=CF=CD,故$\hat{EDC}=\frac{2}{3}\hat{R}$ 即AB傾斜於平面P之角,為$\frac{2}{3}\hat{R}$.

11. 自一平面外一點,向此平面作垂線及斜線,則 (1)自垂線之趾等距離之趾之斜線相等. (2)自垂線之趾,遠距離之趾之斜線,大於近距離之趾之斜線,而其逆亦真.

證 (1)自平面M外一點P,向M作垂線PQ及斜線PA, PD,若AQ等於BQ,則二直三角PQA, PQB全等,故PA=PB. (2)今作他之斜線PC,若QC>AQ,則二直三角形PQA, PQC, PC>PA.



明矣. [逆] 依本定理,因QA>=<QC,而PA>=<PC,故依轉換法,而其逆亦成立.

12. 自平面外一點,作等於某長之斜線,問其趾之軌跡如何.

證 於前題之證,若PA之位置變,而其長不變,則QA之長亦不變,故等長斜線之軌跡為「垂線之趾,為中心,QA為半徑」於其平面上,所畫圓周[參照前題之圖].

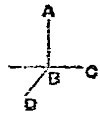
13. 自平面外一點,向平面所作直線,惟垂線最短.

證 依11題之證QA<QC,則PA<PC,故QA最短,則PA最短,但QA最短,即Q與A一致,則PA當為PQ,故垂線BQ短於他之諸斜線.

14. 過直線外之一點,得作垂直於直線之平面,而惟限於一.

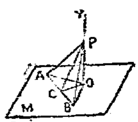
證 一直線BC外之一點為A,自A作

引BC之垂線AB,過其趾B作垂直於BC之他直線BD,則二直線AB,BD所定平面,垂直於BC. 又垂直於BC之二平面互平行,若過A垂直於BC有二平面,則過A有互平行之二平面,是背理,故過A垂直於BC,有一平面,而惟限於一.



15. 直線YO,垂直於平面M,而OC垂直於M上任意直線AB,連結C及YO上任意之點P,則CP⊥AB. [逆]. 自YO上任意之點P,作直線AB之垂線PC,則OC⊥AB [此謂三垂線之定理].

證 於直線AB上取二點A,B,使AC=BC,連結PA,PB,則CO為AB之垂直二等分線,故OA=OB,故PA=PB [11題].



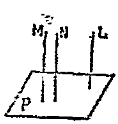
即P,C,為自A,B,等距離之二點,故PC⊥AB. 次證PC⊥AB,則OC⊥AB. 同前作圖,則AC=BC,PC⊥AB,故PA=PB,因而OA=OB,即O,C自A,B為等距離,故OC⊥AB.

16. 前題之圖AB,垂直於平面PCO.

證 AB垂直於二直線PC,OC,故亦垂直於平面PCO.

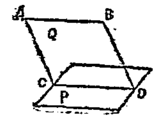
17. 平行於同一直線之二直線,互平行.

證 二直線M,N,皆平行於直線L,作垂直於直線L之平面P,則直線M,N,皆垂直於平面P,故M∥N.



18. 一直線平行於一平面,則含此直線之任意平面,與前之平面之交,平行於前之直線.

證 直線AB為平行於平面P者,含AB之任意平面Q,與P之交為CD,則CD當平行於AB. 蓋AB平行於P,故不交於P,因而AB不交於CD,但AB,CD在同一之平面上,故AB∥CD.

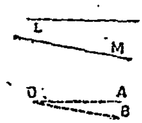


19. 一直線平行一平面,則過平面上一點,而平行此直線之直線,全在此平面上.

證 前題之圖,直線AB為平行於平面P者. 過P之一點C,作平行於直線AB之直線CD,則CD當全在P上. 蓋含AB及C之平面與P之交,平行於AB [前題]. 而過C平行於AB之直線,惟限於一,故過C平行於AB之直線,為含AB及C之平面與P之交. 故過C平行於AB之直線,在P上.

20. 過一點平行於任意二直線,得作一平面,而惟限於一.

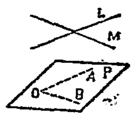
證 一點為O,任意二直線為L,M. 過O作平行於直線L,M之直線OA,OB,作含OA,OB之平面,則此平面當平行於二直線L,M. 蓋OA,OB,所定之平面,含平行於L之直線OA,故



平行於L. 同樣此平面又含平行於M之直線OB, 故平行於M. 卽OA, OB所定之平面, 平行於二直線L, M. 次將過O平行於二直線L, M之平面爲P, 則OA平行於L, 故在平面P上. 同樣OB亦在平面P上, 而OA, OB所定平面, 惟一, 故過O平行於L, M之平面惟一. 若L, M平行, 則OA, OB爲一致, 故過O平行於L, M之平面, 有無數.

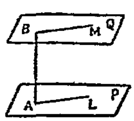
21. 相交二直線, 皆平行一平面, 則此二直線所定之平面, 平行於前之平面.

解 相交二直線爲L, M, 平面爲P. 自平面P上任意一點O, 平行於L, M作OA, OB, 則OA, OB在平面P上. 而含二直線L, M之平面, 平行於OA, OB. 故含L, M之平面, 平行於含直線OA, OB之平面.



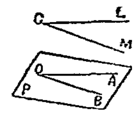
22. 垂直於平行二平面之一之直線, 亦垂直於其他之一.

解 平行二平面P, Q, 垂直於P之直線爲AB, 則AB又垂直於Q. 蓋過B於平面Q上, 引任意之直線BM, 若BM, 與AB所定之平面, 與平面P之交爲AL, 則BM∥AL. 而BA⊥P, 故 $\hat{BAL}=\hat{R}$, 故 $\hat{ABM}=\hat{R}$, 卽AB垂直於平面Q上任意之直線, 故AB垂直於平面Q.



23. 過一點, 平行於不含此點之平面, 得作一平面, 而惟限於一.

解 一點爲C, 一平面爲P, 過平面P上任意之一點O, 於此平面上, 作任意之二直線OA, OB, 次過C作平行於OA, OB之直線CL, CM, 作CL, CM所定之平面, 則此平面平行於P[21題]. 次過C, 而平行於P之平面惟限於一. 蓋過C平行於P之平面, 當含CL, CM故也.



24. 平行二平面等距離點之軌跡如何.

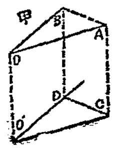
解 作平行二平面之共通垂線, 過其中點作平行於各平面之平面, 因平行平面爲等距離, 故此平面在初之二平面之等距離. 又此平面外之點, 非在初之二平面之等距離明矣, 故所求之軌跡, 爲過二平行平面共通垂線之中點, 作平行各平面之平面.

25. 在平行二平面之等距離, 又之二點之等距離點之軌跡如何.

解 平行二平面之等距離點之軌跡, 爲過此二平面共通垂線之中點, 平行各平面之平面[前題]. 又在二點等距離之點之軌跡, 爲連結此二點之直線之中點, 所作垂直此直線之平面[5題]. 故所求之軌跡, 爲此二平面之交之直線. [參照第5題末文]

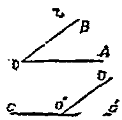
26. 不在同一之平面上之二角，其各邊平行，則此二角相等，或互為補角.

圖 二角為 $A\hat{O}B$, $C\hat{O'}D$, $AO /\!/ CO'$, $BO /\!/ DO'$, 先證如甲圖者.



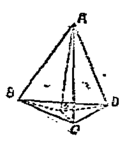
$OA=O'C$, $OB=O'D$, 取任意之長，連結 OO', AC, BD, AB, CD, 則四邊形 $OO'CA$, $OO'DB$ 為平行四邊形，故 BD, AC, 皆等於 OO', 且互平行，故 $ABCD$ 為平行四邊形，而 $AB=CD$, 故三角形 OAB, $O'CD$, 三邊各相等，故全相等，因而 $A\hat{O}B=C\hat{O'}D$.

次證 $A\hat{O}B+C\hat{O'}D=2\hat{R}$ 者. 引長 CO' 至 C', 則依甲圖 $A\hat{O}B=C'\hat{O'}D$, 但 $C'\hat{O'}D+C\hat{O'}D=2\hat{R}$, 故 $A\hat{O}B+C\hat{O'}D=2\hat{R}$.



27. AB, AC, AD 為自同一之點，不在同一平面上，等長之三直線，自 A 向平面 BCD, 所作垂線之趾，為三角形之外心.

圖 自 A 向平面 BCD 作垂線，其趾為 O 連結 OB, OC, OD, 則 $OB=OC=OD$, [11 題], 卽 O 為 $\triangle BCD$ 之外心.



28. 對頂二面角相等.

圖 垂直於二平面之交之平面，截此二平面，則其交之二直線所成之對頂角，為測前二面角之角，依平面幾何學，此角相等，故二對頂二面角相等.

29. 二面角之二平面，各與他二面角之二平面平行，則此二二面角相等，或互為補角.

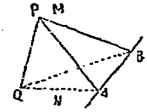
圖 其一二面角之二平面之交，平行於其二二面角之二平面之交明矣，垂直於其一之交之平面，與四平面之交之四直線，為測二二面角之角，且互平行. 故其二角相等，或互為補角[26 題]. 故題言云云.

30. 一平面與二平行平面相交，則(甲)其錯二面角相等. (乙)同位二面角相等. (丙)在同傍二內二面角之和，等於二直角.

圖 二平行平面與第三平行平面之交，為平行二直線，作垂直於此二直線之一平面，與二平行平面之交為 AB, CD, 與第三平面相交為 AC, 則 $\hat{A}$ 及 $\hat{C}$, 為測各二面角之平面角，依平面幾何學，易知本題為眞.

31. 一平面上之直線，與其射於他平面上之正射影，所成之銳角，其二直線垂直於二平面之交所成測二面角之平面角為最大.

圖 二平面 M, N 之交為 AB, 而 PB 為平面 M 上之直線，PB 射於平面 N 上之射影為 BQ. 今將 PA 為垂直於 AB 之直線，連結 QA, 則 PQ 垂直

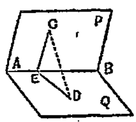


於平面 N, 而 PA 垂直於平面 N 上之

AB, 故QA垂直於AB[15題]. 故$P\hat{A}Q$為測M, N二面角之平面角. 而QA為AB之垂線, QB為斜線, 故QB>QA, 因而 $P\hat{B}Q<P\hat{A}Q$, 卽測二面角之平角面$P\hat{A}Q$為最大.

32. 與對頂角之二面成相等角, 且垂直於其稜之直線, 與二面之交點在其稜之等距離.

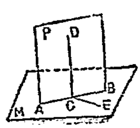
圖 與二面角之二面P, Q成相等角, 且垂直於 P, Q之交之直線CD, 其與二面之交點為C, D, 作含CD垂直於稜AB之平面, 與AB之交點為E, 則CE⊥AB, DE⊥AB, 依假設$E\hat{C}D=E\hat{D}C$, 故△ECD為二邊, 而CE=ED.



注意 CD不垂直於AB者, 本題亦成立.

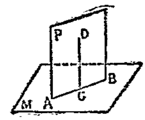
33. 二平面互垂直, 則在其一平面上, 而垂直於二平面之交之直線, 亦垂直於其他之一平面.

圖 M, P為互垂直之二平面, AB為此二平面之交, CD為在平面P上, 而垂直於AB之直線. 今自C於平面M上作直線CE, 垂直於AB, 則$D\hat{C}E$為測二平面P, M之二面角為直角. 故DC為垂直於平面M上之二直線AB, CE, 故DC垂直於平面M.



34. 二平面互垂直, 則於其交之任一點作垂直其一平面之直線, 在他之一平面上.

圖 互垂直之二平面為P, M, 其交為AB. 今過AB上任一點C, 於平面P上, 作垂直於AB之直線DC, 則DC垂直於平面M[前題]. 然過C而垂直於平面M之直線惟一, 故過C而垂直於平面M之直線, 在平面P上.

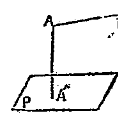


35. 二平面互垂直, 則自其一上任意之一點向其他作垂線, 在前之平面上.

圖 互垂直二平面為P, M, 平面P之上之一點為D. 自D於平面P上, 作二平面之交AB之垂線CD, 則CD垂直於平面M [33題]. 但自D作平面M之垂線惟一, 故自D作平面M之垂線為CD, 而在平面P上[參照前題之圖].

36. 過已知一直線, 垂直於已知一平面, 得畫一平面, 而惟限於一.

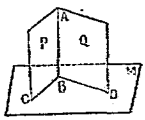
圖 自已知直線AB上一點A, 向已知平面P上作垂線AA′, 作AA′, AB所定之平面, 則此平面, 含向P之垂線, 故垂直於P, 但自AB上向P所作垂線, 皆在AA′, AB所定之平面上, [3題], 故含AB垂直於P之一平面,



惟限 AA′, AB 於所定之一平面. 若 AB垂直於平面P時, 則含 AB 之平面, 皆垂直於平面P, 故含AB垂直於P之一平面有無數.

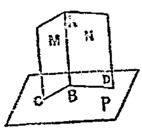
37. 相交二平面,皆垂直於第三平面,則前二平面之交,又垂直於第三平面.

圖 相交二平面P,Q,垂直於第三平面M,平面P,Q之交為AB;平面P,M之交為BC,平面Q,M之交為BD. 自直線AB上任意之一點,作垂直於平面M之直線,則此直線在平面P上[35題]. 同樣此直線又在平面Q上,故此直線為二平面P,Q之交,因而與AB合. 故AB垂直於平面M.



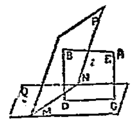
38. 一平面P垂直於互垂直之二平面M,N,則是等平面任意二平面之交,垂直於第三平面,而三平面之交,各垂直於他二平面之交.

圖 平面M,N,垂直於平面P,故M,N之交AB,垂直於平面P[前題]. 同樣平面M,P之交BC,垂直於平面N,而平面N,P之交BD,垂直於平面M. 因而AB垂直於平面P上之直線BC, BD. 同樣BC垂直於AB,BD,而BD垂直於AB,BC.



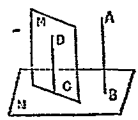
39. 垂直於一平面之直線,在他平面上之正射影,垂直於二平面之交.

圖 AB為垂直於一平面P之直線,其在平面Q上之正射影為CD,則含AB,BD之平面R,垂直於P及Q. 故平面P,Q之交MN,垂直於平面R[前題],因而MN⊥CD.



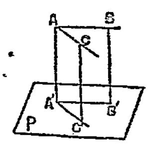
40. 一直線與一平面,垂直於同一之平面,則此直線與平面平行.

圖 平面M及直線AB,垂直於平面N. 今過MN之交上一點C,作垂直於交之直線CD於平面M上,則CD垂直於平面N[33題]. 故AB,CD,皆垂直於平面N,而互平行. 故M與AB互平行.



41. 一直角之在一平面上之正射影,若欲成直角,則其必要且十分之要件,即其一邊平行於平面,而他邊不垂直於平面.

圖 $B\hat{A}C=\hat{R}$, BA, CA, 在平面P上之正射影為$B'A'$, $C'A'$. 今AB若平行於平面P,則$B'\hat{A'}C'=\hat{R}$. [但AC不垂直於平面P,若垂直,則其正射影當為一點A']. 故$B\hat{A}C=\hat{R}$之正射影$B'\hat{A'}C'$成直角之十分之要件,成$B\hat{A}C$



之一邊, 平行於P. 次言此爲必要之要件, 何則, AC若不平行於P, 而A'B'爲垂直於AA', AC'之二直線, 故垂直於平面AC', 故平面AB'⊥平面AC', 今將過A垂直於AC之平面爲Q, 則AB在平面Q與平面AB'之上, 故AB爲其二平面之交, 而平面Q垂直於平面AC', 故其交AB垂直於平面AC', 因而AB∥A'B', 故不可不AB∥P.

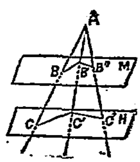
42. 試求已知三點等距離於已知之平面上.

證 已知三點A, B, C等距離之點之軌跡, 爲將AB, AC直角二等分之平面之交, 故此交之直線與已知平面之交點, 爲所求之點.

注意 此交之直線垂直於A, B, C所定之平面, 且過A, B, C之圓之中心. 若此交之直線, 平行於已知之平面, 或已知三點同在一直線上, 則本題無解.

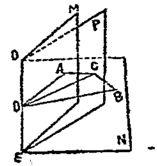
43. 自同一之點所出諸直線, 以平行之二平面截之, 則其對應分線成比例.

證 自同一點A, 所出諸直線爲ABC, AB'C' AB''C''………, 是等直線與平行二平面M, N之交點爲B, B'B''………C, C'C''……. 今連結BB', B'B''……, CC', C'C''……, 則BB'∥CC', B'B''∥C'C''………, 故AB : BC=AB' : B'C'=AB'' : B''C''=…………



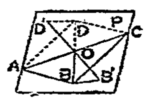
44. 二等分二面角之平面上各點, 在二面角之二面之等距離.

證 二平面M, N所成之二面角, 其二等分之平面爲P, 自此平面任意之一點C, 作二平面M, N, 及其稜DE之垂線CA, CB, CO, 連結AO, BO, 則依垂線之定理[15題] AO, BO, 皆垂直於DE, 故$A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$爲測相等二面角之角, 故相等, 因而二直角三角形AOC, BOC, 全等, 故CA=CB, 即平面P上之點在二平面M, N之等距離.



45. 一平面過平行四邊形之一對角線, 則自他對角線之兩端, 向此平面作二垂線, 其長相等.

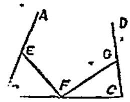
證 一平面P, 過平行四邊形ABCD之對角線AC, 自他對角線BD之兩端, 向平面P作垂線BB', DD', 則因BB'∥DD', 故含BB', DD'之平面, 與平面P之交, 爲B'D'之直線, 且O在此二平面之上, 故B'D'過O, 故△DOD'≡△BOB'. 而BB'=DD'.



46. 三有限直線AB, BC, CD不在同一之平面上, 則過此三直線中點之平面, 當平行於AC及BD.

證 AB, BC, CD之中點爲E, F, G, 則

EF∥AC, 及 FG∥BD, 故平面 EFG 平行於 AC 及 BD.



47. 相交三平面, 能分空間為若干部分.

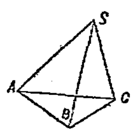
【解】 二平面分空間為四部分, 故以第三平面截之, 最多分空間為八部分. 若三直線相交於公共一直線, 則分空間為六部分.

48. 不過同一之點之四平面, 分空間為十五部分.

【解】 前題三平面分空間為八部分. 今第四平面交之, 則八部分減一部分之七部分, 每部分分為二部分, 故四平面分空間為十五部分.

49. 三面角之任意　面角之和, 大於他之一面角.

[此定理證明最大面角小於他二面角之和可也. 其證明見第一門三面角之條].

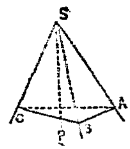


50. 三面角其任意二面角之差, 小於他之一面角.

【解】 依前題二面角之面角為 $A\hat{S}B$, $B\hat{S}C$, $C\hat{S}A$, 則 $A\hat{S}B+B\hat{S}C>C\hat{S}A$. 故 $A\hat{S}B>C\hat{S}A\sim B\hat{S}C$. 同樣 $C\hat{S}A>A\hat{S}B\sim B\hat{S}C$, $B\hat{S}C>A\hat{S}B\sim C\hat{S}A$.

51. 三面角之三稜等距離點之軌跡如何.

【解】 在三面角 S-ABC 之二稜 SA, SB 等距離點之軌跡, 為含面角 ASB 之二等分線, 且垂直於平面 ASB 之平面明矣. 同樣自稜 SB, SC 等距離點之軌跡, 為含面角 BSC 之二等分線, 且垂直於平面 BSC 之平面. 故此二平面之交之直線 SP, 為自三稜 SA, SB, SC 等距離點之軌跡.



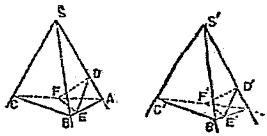
【注意】 此直線即自三稜上取 A, B, C 三點, 使 SA=SB=SC, 將三角形 ABC 之外心 P, 與 S 連結之直線 PS. 依 27 題及 15 題, 容易知之.

52. 三面角之三個二等分二面角之平面相交於同一之直線.

【解】 於三面角 S-ABC 之稜 SA, 二等分相交二平面 SAC, SAB 之二面角之平面, 在平面 SAC, SAB 之等距離. 又於稜 SB 二等分二平面 SAB, SBC 之二面角之平面, 在平面 SAB, SBC 之等距離. 故此二平面之交之直線 SP, 在三平面 SAB, SBC, SAC 之等距離. 因而於 SC 相交二平面 SAC, SBC 之等距離平面, 即二等分此二面所成之二面角之平面過 SP. 故二等分三個二面角之平面, 相交於同一之直線.

53. 二個三面角, 其三個面角各同序相等, 則是等之三面角相等. 若逆序相等, 則如何.

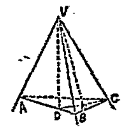
圖 二個三面角S—ABC, S'—A'B'C', 其 $A\hat{S}B=A'\hat{S'}B'$, $B\hat{S}C=B'\hat{S'}C'$, $C\hat{S}A=C'\hat{S'}A'$, 取SA=SB=SC=S'A'=S'B'=



S'C', 則△SAB≡△S'A'B', △SBC≡△S'B'C', △SAC≡△S'A'C', 因而△ABC≡△A'B'C', $S\hat{A}B=S'\hat{A'}B'$, $S\hat{A}C=S'\hat{A'}C'$, …次於SA, S'A'上, 取DA=D'A'之點D, D', 於平面ASB, ASC上, 作垂直於SA之直線DE, DF, 於平面A'S'B', A'S'C'上, 作垂直於S'A'之直線D'E', D'F', 則△DAE≡△D'A'E', △DFA≡△D'F'A', 故DE=D'E', DF=D'F', 且△AEF≡△A'E'F', 故EF=E'F', 是△DEF, △D'E'F'三邊各相等, 故全等, 故 $E\hat{D}F=E'\hat{D'}F'$, 卽在SA之二面角等於在S'A'之二面角. 同樣在SB, S'B'及SC, SC'之面二角各相等, 故三面角S-ABC, S'-A'B'C'其面角及二角面各同序相等, 得相重合, 卽二個三面角相等. 若逆序相等, 則同樣可證明二個三面角爲對稱.

54. 有二三面角其面角皆爲直角, 以平面截之, 所得 角形之垂心, 與自此三面角之角頂, 下此平面之垂線之趾, 在同一之點.

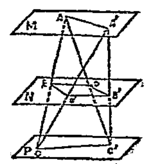
圖 三面角V-ABC之面角皆爲直角, 故VA, VB, VC之一, 各垂直於其二. 今以一平面截此三面角之截口爲ABC, 自V作平面ABC之垂線VN, 其CN



與AB之交點爲D, 則因面VCD垂直於二面VAB, ABC, 故AB垂直於平面VCD[37題], 故CD⊥AB. 同樣BN⊥AC, AN⊥BC, 故N爲△ABC之垂心. 卽自V向平面ABC所作垂線之趾, 與△ABC之垂心爲同點.

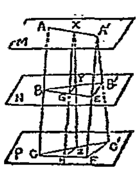
55. 二直線AC, A'C', 不同在一平面上, 以三平行平面M, N, P截之於A, B, C, A', B', C'. 連結AC'之直線, 與N之交點爲D, 連結A'C之直線與N之交點爲D', 則BDB'D'爲平行四邊形.

圖 連結BD, DB', B'D', BD', 則BD'∥AA', DB'∥AA', 故BD'∥DB'. 同樣BD∥B'D'. 故四邊形BDB'D'爲平行四邊形.



56. 前題AA'之中點X, 與CC'之中點Z, 連結直線, 過BDB'D'兩對角線之交點.

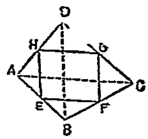
圖 本題證明BB'之中點Y, 在直線XY上可也. 自X, A', 平行ABC, 作直線XH, A'F, 與平面N之交點爲G, E, 與平面P之交點爲H,



F. 則因G爲BE之中點,故$YG=\frac{1}{2}B'E$,同樣$ZH=\frac{1}{2}C'F$,故$YG:ZH=B'E:C'F=A'E:A'F=XG:XH$,而$YG\parallel B'E\parallel C'F\parallel ZH$,故X, Y, Z在同一之直線上明矣.即直線XZ過Y.

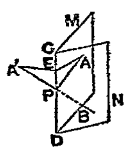
57. 果修四邊形各邊之中點,爲平行四邊形之角頂.

圖 果修四邊形ABCD各邊之中點爲E, F, G, H,連結HE, EF, FG, GH,則HE, GF,俱平行於對角線BD,且爲其半分,故HE, GF相等,且平行,因而四邊形EFGH爲平行四邊形,而E, F, G, H,爲平行四邊形之角頂.



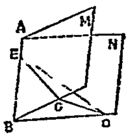
58. 相交二平面M, N之上,各有一點A, B,試於M, N之交,求一點P,使AP+PB最小.

圖 A爲在平面M上一點,B爲在平面N上一點.自A向二平面之交CD作垂線AE,過E垂直於CD,於平面N上作A'E,使等於AF,且A'對CD,在B之異傍,連結A'B,若A'B與CD之交點爲P,則P爲所求之點.蓋若於CD上任取他一點Q,則AQ+BQ=A'Q+BQ,而大於A'B,而AP+BA=A'B故也.



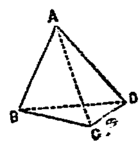
59. 自二面角之稜上一點,作二斜線於各面上,使二斜線與其稜所成之二角相等,問其角之界限如何.

圖 自二面角之稜AB上一點F,作二斜線EC, ED,於各平面M, N上,使成等角$C\hat{E}B$, $D\hat{E}B$,又於AB上一點B,作垂直於AB之平面P,與平面M, N之交爲BC, BD,則因$E\hat{B}C=E\hat{B}D=\hat{R}$, $B\hat{E}C=B\hat{E}D$, BE公用,故△EBC≡△EBD,故EC=ED,且BC=BD,但DB爲自D向BE之垂線,而DE爲斜線,故DE>DB,故△DEC與△DBC,爲俱立於同底之二等邊三角形,而等邊DB小於DE,故$D\hat{E}C<D\hat{B}C$,即$C\hat{E}D$小於M, N所成之二面角,而EC, ED,接近於EB之極限,則$C\hat{E}D=0$,故此角在0度與測二面角之角之間.



60. 果修四邊形四角之和小於四直角.

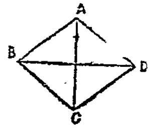
圖 ABCD爲果修四邊形,作其對角線AC, BD,則$C\hat{A}D+A\hat{D}C+A\hat{C}D=2\hat{R}$, $C\hat{A}B+A\hat{B}C+A\hat{C}B=2\hat{R}$,故$A\hat{D}C+A\hat{B}C+C\hat{A}D+C\hat{A}B+A\hat{C}B+A\hat{C}D=4\hat{R}$,但A, C爲三面角之頂點,故$C\hat{A}D+C\hat{A}B>B\hat{A}D$, $A\hat{C}B+A\hat{C}D>B\hat{C}D$,故$A\hat{D}C+A\hat{B}C+B\hat{A}D+B\hat{C}D<4\hat{R}$.



61. 四點之中,任取二點,其距離等於

其他二者之距離,其一連結其他之三直線所成三角之和,等於二直角.

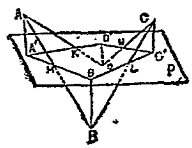
圖 四點為A, B, C, D, 若 $AB=CD$, $BC=DA$, $AC=BD$, 則



$\triangle ABC \equiv \triangle ADC \equiv \triangle DCB \equiv \triangle ABD$, 故 $B\hat{A}C=B\hat{D}C$, $C\hat{A}D=C\hat{B}D$, $B\hat{A}D=B\hat{C}D$, 故 $B\hat{A}C+C\hat{A}D+D\hat{A}B=B\hat{D}C+C\hat{B}D+B\hat{C}D=2\hat{R}$. 同樣在B, C, D之角之和,亦各等於二直角.

62. 過果修四邊形ABCD相對二邊AB, CD之中點M, N之任意平面,與他二邊AD, BC相交於K, L之二點,則 $AK:KD=BL:LC$.

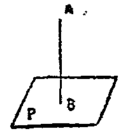
圖 自果修四邊形ABCD各頂角,向過M, N之平面P,作垂線 AA', BB', CC', DD', 連結 $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$,則是等之直線皆在平面P上,故是等之



直線與果修四邊形ABCD之交點,為平面P與ABCD各邊之交點M, L, N, K,而 $AK:KD=AA':DD'$. $BL:LC=BB':CC'$, 又 $AA':BB'=AM:MB=1$, $DD':CC'=DN:NC=1$, 故 $AA':BB'=DD':CC'$, 或 $AA':DD'=BB':CC'$, 因而 $AK:KD=BL:LC$.

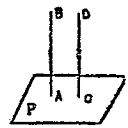
63. 過已知一直線上已知一點作垂直於直線之一平面.

圖 已知一直線為AB,其上已知一點為B. 過B垂直於AB之平面. 今過B垂直於AB作二直線,此二直線所定之平面為P,則P為垂直於AB之平面,明矣.



64. 過已知平面上之已知一點,作此平面之垂線.

圖 已知平面為P,此平面上之已知一點為C. 自平面P外之一點B,作垂直於P之直線BA,過C平行於BA作直線,則為所求之直線,明矣.

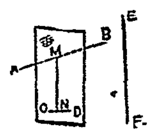


65. 過已知一點,作平行於已知一平面之平面.

圖 已知一點為O,已知一平面為M. 過O平行於平面M,作二直線OA,OB,作OA, OB所定之平面,則其平面平行於平面M,明矣.

66. 交於不在同一平面上之二直線,且平行於他一直線,求作一直線.

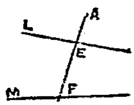
圖 不在同一平面上之二直線為AB, CD,他一直線為EF. 所求之直線為MN,則因MN與EF平行,故在同一之平面上. 次含CD與MN之平面與AB相交於點M,且平行於EF,由是先作含CD平行於EF之平面,過此平面與AB之



交點M,作平行於EF之直線MN,則MN為所求之直線。若此MN平行於CD,則本題為不能。

67. 一直線過已知一點,與已知二直線相交,求其位置。

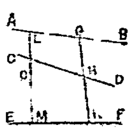
【解】已知一點為A,已知二直線為L,M. 過A相交於L,M之直線為AEF,則AEF在含A與L之平面上.又在含A與M之平面上.故此二平面之交,為所求直線AEF之位置.但此交若平行於L或M,則問題為不能。



【別解】作含點A與直線L之平面,與M之交點為F,連結AF之直線,與L之交點為E,則AEF為所求之直線.若此平面平行於M,則無解.又此平面雖交於M,而AF平行於L,亦無解.

68. 不相交不平行之三直線,以一直線截之,使夾於其間之二部分,有已知之比.

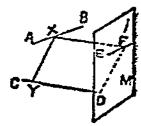
【解】所求之直線為GHK,與已知三直線AB,CD,EF之交點為G,H,K,且GH:HK=$m:n$,先將AB,EF之共通垂線LM,於點O分之為LO:OM=$m:n$,過O作平行於AB,EF,之平面,則H在此平面上.由是先作AB,EF之共通垂線LM,將LM內分及外分於O,使LO:OM=$m:n$,過此



點平行於AB,EF作平面,此平面與CD之交點H,H′,而H,H′,與AB所定之二平面,與EF之交點為K,K′,則KHG,K′H′G′,為所求之直線.但自三直線,每二直線如是作之,有三作法,故本題一般有2×3,即六解.

69. 將已知長之直線,平行於已知平面,使其兩端在空間已知二直線上.

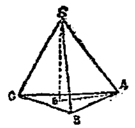
【解】已知之長為l,已知二直線為AB,CD,已知之平面為M.所求之直線為XY.自X作平行於CD之直線XF,使與平面M於點F相交,其含XY與XF之平面,與M之交為FD,而FD與CD之交點為D,則XY=FD=l,而含XF,AB之平面,平行於CD,故F在含AB且平行於CD之平面與M之交之上,且在CD與M之交點D之l距離.由是求含AB平行於CD之平面,與M之交EF,自CD與M之交點D,作直線DF,使DF=l.自F平行於CD,作FX,與AB之交點為X,作XY平行於DF,使與CD交於Y,則XY為所求之直線.



多　面　體

70. 正四面體之高上正方形之三倍,等於其稜上正方形之二倍.

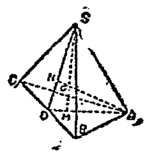
【解】作正四面體之高SO,則O為



△ABC之外心明矣。故連結OA，則 $\overline{SO}^2=\overline{AS}^2-\overline{AO}^2$，但AO爲正三角形ABC外接圓之半徑，故 $OA=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{AS}{\sqrt{4}}$，故 $\overline{SO}^2=\overline{AS}^2-\frac{\overline{AS}^2}{3}=\frac{2}{3}\overline{AS}^2$，或 $3\overline{SO}^2=2\overline{AS}^2$，卽高SO上之正方形之三倍，等於其稜上正方形之二倍。

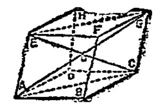
71. 於正四面體各面之中心，作垂線相交於同一之點。

證 於四面體S−ABC之面ABC之中心所作垂線，爲自A, B, C, 等距離點之軌跡，故此垂線過S，將此垂線爲SM。同樣自A, B, C, 向其各對面之中心作AN……，則爲各面之垂線。SN, AM, 皆垂直於BC，而交於同一之點D明矣，故SM, AN, 當在同一之平面上，故 $\frac{AD}{DM}=\frac{CD}{DN}=\frac{3}{1}$，因而MN∥SA。故SM, SN之交點爲G，則△GNM∽△GSA，∴ $\frac{AS}{MN}=\frac{AG}{NG}=\frac{SG}{MG}=\frac{3}{1}$。同樣於他各面之心作垂線，可證明其皆過G點，而內分SM爲 $\frac{SG}{MG}=\frac{3}{1}$。故正四面體各面之中心所作垂線，皆相交於同一之點。



72. 平行六面體之四對角線，相交於同一之點。

證 平行六面體ABCD-EFGH之二對角線，爲AG, CE，連結EG, CA，則四邊形ACGE爲平行四邊形明矣，故AG, CE，於O點相交，且互二等分。同樣連結AH, BG, 及AF, GD亦得證明他二對角線HB, DF，亦過AG之中點O，卽平行六面之四對角線，相交於同一之點。



73. 正角臺及正圓臺之側面積，等於兩底面等距離之平截口之周，與斜高之積。

證 正角臺之側面積爲S，其斜高爲l，其兩底之周爲p_1, p_2。則 $S=\frac{1}{2}(p_1+p_2)l$，但p_1+p_2爲自兩底等距離，以平面截之之截口之周之2倍明矣，故若此周爲p，則$S=pl$。正圓臺之側面積爲S，兩底之圓半徑r_1, r_2，自兩底等距離，以平面截之，其截口之圓半徑爲r，斜高爲l，則$S=\pi(r_1+r_2)l$，但$r_1+r_2=2r$明矣，故$S=2\pi rl$。

74. 有正圓臺其底面之半徑爲1尺及5寸，其斜高爲8寸，問全面積如何。

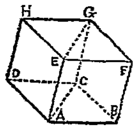
證 正圓臺之全面積爲S，則 $S=\pi(r+r_1)l+\pi(r^2+r_1^2)=\pi(15\times8+10^2+5^2)=245\pi$，卽$245\pi$平方寸。

75. 直角體之高，平行於側稜。

證 直角體之側稜，垂直於兩底，故平行於高明矣。

76. 平行六面體相對之面相等。

證 平行六面體ABCD−EFGH, 其EF平行於AB, 且相等, HE平行於DA, 且相等, 故 $H\hat{E}F=D\hat{A}B$, 故平行四邊形ABCD與EFGH全等, 同樣他相對之面亦相等.

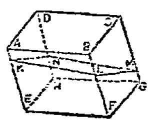


77. 平行六面體, 其過相對面對應對角線之平面, 分此立體為二三角壔, 體積相等.

證 相對面ABCD, EFGH, 過其對應之對角線AC, EG之平面, 分平行六面體, 則 △ABC≡△ACD, 故二角壔ABC-EFG, DAC-HEG等底等高, 故等.

78. 與平行六面體之二雙相對面交, 而不與他一雙交之平面截口, 為平行四邊形.

證 與平行六面體ABCD-EFGH之二雙相對面交, 而不與其他一雙交之平面截口, 為KLMN, 則平面AEHD∥平面BFGC, 故KN∥LM. 同樣KL∥NM. 故KLMN為平行四邊形.

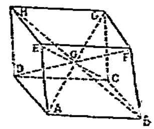


79. 直角體之對角線皆相等, 其上正方形等於其一角頂所出三稜上正方形之和.

證 直角體ABCD-EFGH, 其ACGE為矩形, 故AG=EC. 同樣諸對角線皆相等. 次 $\overline{EC}^2=\overline{EG}^2+\overline{CG}^2=\overline{GH}^2+\overline{GF}^2+\overline{GC}^2$.

80. 平行六面體四對角線上正方形之和, 等於十二稜上正方形之和.

證 平行六面體ABCD-EFGH 其 $\overline{AG}^2+\overline{BH}^2=\overline{AB}^2+\overline{HG}^2+\overline{AH}^2+\overline{BG}^2$. $\overline{CE}^2+\overline{DF}^2=\overline{EF}^2+\overline{DC}^2+\overline{DE}^2+\overline{CF}^2$. ∴ $\overline{AG}^2+\overline{BH}^2+\overline{CE}^2+\overline{DF}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{EF}^2+\overline{HG}^2+\overline{HA}^2+\overline{GB}^2+\overline{CF}^2+\overline{DE}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{EF}^2+\overline{HG}^2+\overline{EA}^2+\overline{DA}^2+\overline{HD}^2+\overline{HE}^2+\overline{BC}^2+\overline{CG}^2+\overline{BF}^2+\overline{GF}^2$.



81. 有相等底與相等高之二直角體相等.

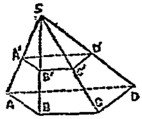
證 相等之高為h, 相等之底面積為S之二直角體, 其二底之矩形之邊為a, b, 及a', b', 其二體積為V, V'. 今作一直角體, 將二邊為a, b'之矩形為底, 而高為h, 體積為V'', 則 $V:V''=b:b'$, $V'':V'=a:a'$, 明矣, 故 $V:V'=ab:a'b'$. 但 $ab=a'b'=S$, 故 $V=V'$.

82. 角壔以平行於其底之平面截之, 其截口與底, 全相等.

證 角壔以平行於其底之平面截之, 則其截口之邊, 與對應之底邊, 及相鄰之二稜, 成平行四邊形. 故截口之邊, 與對應之底邊平行, 且相等, 故截口多角形之各角, 與底多角形之各角, 亦相等, 因而截口與底全相等.

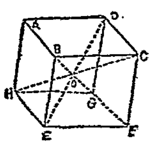
83. 角錐以平行於底之平面截之,其截口與底相似.

證 角錐S-ABCD,以平行於其底ABCD之平面截之其截口爲$A'B'C'D'$,則$AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DA \parallel D'A'$,明矣,故多角形ABCD之各角,等於多角形$A'B'C'D'$之各角,而$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{SC}{S'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{SD}{SD'}=\frac{AD}{A'D'}$. 故多角形ABCD與$A'B'C'D'$對應邊成比例,且對應角互相等,故相似.



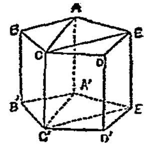
84. 四角壔之四對角線,過同一之點,則此四角壔爲平行六面體.

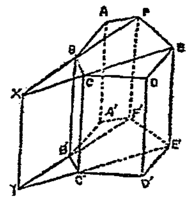
證 ABCD—EFGH爲四角壔,其對角線AF, BG, CH, DE,過一點O,則底ABCD與EFGH平行,且AH與CF平行,故AH=CF,故AHFC爲平行四邊形,而O爲AF, CH之中點. 同樣O又爲他對角線之中點,故ABFG爲平行四邊形,而$AB \parallel GF$. 又角壔之側面,皆爲平行四邊形,故$AB \parallel HE$,且AB=HE,故$HE \parallel FG$,且HE=FG,故EFGH爲平行四邊形. 故ABCD與EFGH全相等,爲平行四邊形,因而此四角壔爲平行六面體.



85. 角壔之不平行二對角面,垂直於底,則此角壔爲直角壔.

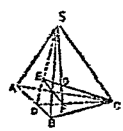
證 ABCDE—$A'B'C'D'E'$其二對角面$CC'E'E$, $CC'A'A$,相交於角壔之一稜,此對角面皆垂直於底面$A'B'C'D'E'$,則其交CC'垂直於底面$A'B'C'D'E'$. [因而又垂直於ABCDE]. 故平行於CC'之各稜DD', EE',……, BB',亦垂直於底面. 次論二對角面$BB'F'F$, $CC'E'E$,不相交於角壔之一稜者. 其二對角面之交XY,垂直於底面,故證明角壔之稜平行於XY足矣. 夫含平行二直線之之一二平面,其交亦平行於其平行二直線,故EE'及FF',皆平行於XY,以下如前云云.





86. 自四面體之各角頂,連結相對面之重心之直線,相交於同一之點.

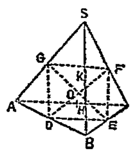
證 E, F爲四面體S-ABC之面ABC, SAB之重心,連結CE, SF, SE, CF,則SE, CF,皆相交於AB之中點D明矣,故CE, SF,在平面SDC上,且不平行,故於一點G相交,而$\frac{DF}{DC}=\frac{DE}{DS}=\frac{1}{3}$,故$EF \parallel CS$, $\therefore$ $\frac{DF}{DC}=\frac{DE}{DS}=\frac{EF}{SC}=\frac{1}{3}$,但$\triangle GEF \backsim \triangle GCS$, $\therefore$ $\frac{EF}{CS}=\frac{FG}{CG}=\frac{GF}{GS}=\frac{1}{3}$.



同樣自他角頂,向相對面之重心作直線,亦內分SF爲3:1之比,而過點G,故是等之直線,相交於同一之點.

87. 含四面體之一稜,且過相對稜之中點之諸平面相交於同一之點.

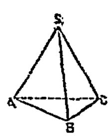
圖 四面體S-ABC之稜之中點,爲D, E, F, G, H, K,取相對稜之四中點,所得四邊形,爲平行四邊形明矣,[57題],故是等四邊形之對角線,皆於DF之中點O相交.



但含稜AB與點F之平面含DF,含稜BC與點G之平面含EG,故此二平面俱含O. 同樣含一稜與其對稜中點之平面,皆過O,即其六平面,皆相交於O.

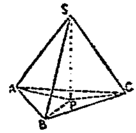
88. 於四面體各稜之中點,作垂直於其稜之平面,相交於同一之點.

圖 於稜之中點,作垂直於其稜之平面,爲自稜之兩端等距離點之軌跡. 故於四面體S-ABC之稜SA, SB, SC之中點,各作垂直於其稜之三平面,其交點O,爲自S, A, B, C四點之等距離,故於各稜中點所作垂直於其稜之平面,皆過點O.



89. 正四面體之高,等於自其趾向一面所作垂線之三倍.

圖 正四面體S-ABC之高SP,將其趾P與A, B, C連結,則得三全等之四面體P-SAB, P-SBC, P-SCA. 故自P向面SAB, SBC, SCA,作垂線皆相等,[四面積之體積,爲底與高相乘積之三分之一,而是等三四面體之底面,皆相等,故也.] 今將此垂線之長爲h,則此三四面體之和,等於$h\times\triangle ABC$,而等於此三個之和之四面體S-ABC之體積,爲$\frac{1}{3}SP\times\triangle ABC$,故$h=\frac{1}{3}SP$,即$3h=SP$.



90. 凸多面體稜數爲E,面數爲F,角頂之數爲V,則E+2=F+V.

圖 假設最初取一面,以下每附加一面,以成多面體,即將V_p, E_p,爲面數至於p時V, E之值. 若最初之面之邊數爲a,則$V_1=a$, $E_1=a$,而$V_1=E_1$. 次將邊數爲b之面附加,則此面與最初一面共有一稜及二角頂,故新附加之稜數爲$b-1$,新附加之角頂數爲$b-2$,因而$V_2=a+b-2$, $E_2=a+b-1$,而$V_2+1=E_2$. 如此每加附一面,其稜數比其角頂之數每多增加1. 故$V_3+2=E_3$……,一般$V_p+p-1=E_p$,多面體之面數爲F,故附加之面數在$F-1$時,則爲$V_{F-1}+F-2=E_{F-1}$. 今附加最後之一面,其稜及角頂亦不增加,故$V=V_{F-1}$, $E=E_{F-1}$,因而$V+F-2=E$,或$V+F=E+2$.

91. 任意多面體面角之和,等於自角頂之數減2之四直角.

解 任意之多面體稜數為E, 角頂之數V, 面數為F, 面角之和為S, 各面多角形邊數之半分為$N, N_1, N_2, \cdots\cdots$, 則各面多角形內角之和,為(邊數$\times 2\hat{R}-4\hat{R}$), 即 $(2N\times 2\hat{R}-4\hat{R})$, 故 $S=(2N\times 2\hat{R}-4\hat{R})+(2N_1\times 2\hat{R}-4\hat{R})+\cdots\cdots(N+N_1+N_2+\cdots\cdots)4\hat{R}-(4\hat{R}+4\hat{R}+\cdots\cdots)$, 但 $N+N_1+N_2+\cdots$ 為多面體稜之總數E, 又$4\hat{R}+\cdots$ 之項數,等於其面之數, 故 $S=E\times 4\hat{R}-F\times 4\hat{R}=(E-F)\times 4\hat{R}=\{(V+F-2)-F\}4\hat{R}=(V-2)4R$.

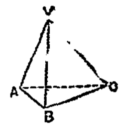
92. 少於6之稜,不能作多面體.

解 以三個平面,不能圍一個空間,故欲作多面體,則$F\geqq 4$, 而角頂最少,則各面為三角形,而一立體角不能少於三面,故其時$V=4$, 故$V\geqq 4$. 由是$F+V\geqq 8$, 故自90題$E+2\geqq 8$, 即$E\geqq 6$.

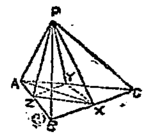
別解 成一立體角,不能少於三個平面,故成一多面體,不能少於四個平面,且其中之一平面,不能不與其他之三平面相交,故其稜數至少為${}_4C_2=6$, 即少於6個之稜,不能作多面體.

93. 一三面角,其一二面角為直角,則以垂直於其任意之稜之平面截之,其截口為直三角形.

解 三面角V-ABC於其稜VB之二面角為直角,則以垂直於稜VB之平面截之,其截口△ABC,為B為直角之直三角形明矣. 次於垂直於他稜例如VA之平面截之,其截口為△ABC,則平面VAB垂直於二平面ABC, VBC,故平面ABC與VBC之交BC,垂直於平面VAB,故$BC\perp AB$, 即△ABC為在B為直角之直角三角形.



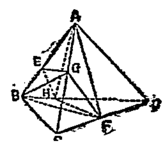
94. 自一點P,作三直線PA, PB, PC,其任一直線垂直於其他二直線,自P向BC, CA, AB,作垂線PX, PY, PZ,則三角形XYZ,為三角形ABC之垂趾三角形.



解 PA垂直於PB, PC,故垂直於平面PBC,又$PX\perp BC$,依三垂線之定理$AX\perp BC$. 同樣$BY\perp CA$, $CZ\perp AB$, 故△XYZ為△ABC之垂趾三角形.

95. 過四面體相對二稜之中點之任意平面,二等分此四面體之體積.

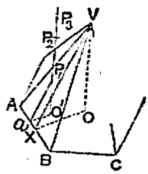
解 四面體A-BCD,相對二稜AB, CD之中點為E, F,截口為EHFG,則EHFG為底面A, B,為頂點之四角錐,因E為AB之中點,故高相等,因而四角錐B-EHFG=四角錐A-EHFG……..(1). 次自B, H,作CD之垂線,其長為h, h', 則$\triangle BCF:\triangle HFD=h:h'=BD:HD$, 又二



四面體 G-BCF, A-HFD 之高之比,爲 GC : AC, 故四面體 G-BCF : 四面體 A-HFD = BD.CG : HD.AC, 但關於果修四邊形 ABCD, 其 BD.CG = HD.AC, [62 題], 故四面體 G-BCF = 四面體 A-HFD……(2). 故自 (1), (2) 得多面體 BCFHEG = 多面體 ADFHEG, 卽過 E, F 之平面,二等分四面體 A-BCD.

96. 自正多角錐底面上一點,作底面之垂線,與其傍面及其延長面交點距離之和,恆爲一定.

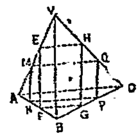
圖 正多角錐 V-ABCD……之底面 ABCD……上之一點 O′,作底面之垂線,與其傍面及延長面 VAB, VBC,……之交點爲 P_1, P_2, P_3 ……, 底面



ABCD…之中心爲 O. 自 O, O′, 作 AB 之垂線 OX, O′a, 連結 VX, P_1a, 則 VX ⊥ AB, P_1a ⊥ AB. 故 $P_1\hat{a}O' = V\hat{X}O$, 故 $\triangle P_1aO' \backsim \triangle VXO$, 因而 VO : OX = P_1O' : O′a, 又自 O′, 向底面之各邊,作垂線 O′b, O′c……, 則因自 O 向底面各邊所作垂線之長,皆等於 OX, 故 VO : OX = P_2O' : O′b, VO : OX = P_3O' : O′c,……, 故 VO : OX = $P_1O'+P_2O'+P_3O'+$…… : O′a+O′b+O′c+……, 依平面幾何學 O′a+O′b +O′c+…= n OX, [n 表底面 ABC … 邊之數]. 故 VO : OX = $P_1O'+P_2O'+P_3O'+$………… : nOX, 而 VO, OX, nOX, 爲一定, 故 $P_1O'+P_2O'+P_3O'+$…… 亦爲一定.

97. 四面體以平行於其相對稜之平面截之,其截口爲平行四邊形,又求其截口最大之位置.

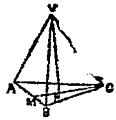
圖 四面體 V-ABC, 以平行於其相對二稜 VB, AC 之平面截之, 其平面與四面體之各面相交, 故其截口爲四邊形, 此截口爲 HEFG, 則平面 HEFG 因平



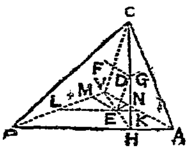
行於 AC,故含 AC 之平面 ABC 與此平面之交 FG // AC [18 題]. 同樣 EH // AC, EF // VB, HG // VB, 故四邊形 HEFG, 爲平行四邊形. 又求其截口最大之位置,將任意二截口 EFGH, MNPQ,則 ▱EFGH : ▱MNPQ = EH.HG : MQ.QP, 但 EH : MQ = VH : VQ, HG : QP = CH : CQ, 故 EH.HG : MQ.QP = VH.CH : VQ.CQ, 而 VH+CH = VQ+CQ = VC = 定長, 故 VQ.CQ 爲最大,可依平面幾何知之,卽 Q 爲 VC 之中點也, 故 M, N, P, Q, 爲 VA, AB, BC, VC 之中點時, 其截口 ▱MNPQ 爲最大.

98. 四面體之底爲等邊三角形,在其頂點之各角爲直角,則 (I) 其高上之正方形,等於過頂點之稜上正方形三分之一. (II) 自其底中任意一點,至各面作垂線之和,爲一定.

圖 四面體 V-ABC 之底 ABC, 爲等邊



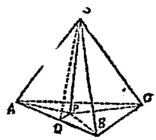
三角形, 在V之各平面角, 皆爲$\hat{R}$. (I) △VAB≡△VBC≡△VCA 故VA=VB=VC, 而△ABC爲正三角形, 故高VH之趾H爲其重心, 故 $CH=\frac{2}{3}CM=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{1}{\sqrt{3}}AC$, 而 $\overline{VC}^2=\overline{VH}^2+\overline{CH}^2=\overline{VH}^2+\frac{1}{3}\overline{AC}^2$, 又 $2\overline{VC}^2=\overline{AC}^2$, 故 $\overline{VH}^2=\overline{VC}^2-\frac{1}{3}\overline{AC}^2=\overline{VC}^2-\frac{2}{3}\overline{VC}^2=\frac{1}{3}\overline{VC}^2$. (II) 自底面ABC上任意一點D, 向平面VAB, VBC, VCA, 作垂線DE, DF, DG, 過E作AB之平行線KL, 與VA, VB之交點爲K, L, 則因DE∥CV, 故含DE, CV之平面, 與AB之交點爲H, 則CD, VE相交於H明矣, 但DE:CV=EH:VH=AK:AV, 而CV=AV, 故DE=AK, 又自E作AV, BV之平行線EM, EN, 則EM, EN垂直於平面VBC, VCA, 而DE平行於平面VBC, VCA, 故EM=DF, EN=DG. 而三角形VLK爲直角二等邊三角形, 故EM+EN=VK, 故DE+DF+DG=AV=定長.



註 四面體V-ABC, 將D爲頂點三個三角形VAB, VBC, VCA爲底, 分爲三個四面體, 而此三底皆全等, 故將其一個底之面積爲S, 則V-ABC之體積, 等於$\frac{1}{3}S(DE+DG+DF)$, 由是可知本題(II)之眞.

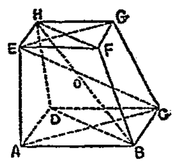
99. 三角錐之側面積, 恆大於底面積.

證 三角錐S-ABC之高爲SP, 自P作AB之垂線PD, 則SD垂直於AB明矣, 但△SPD之$S\hat{P}D=\hat{R}$, 故SD>PD, 故△SAB>△PAB. 同樣△SBC>△PBC, △SCA>△PCA, 故三角錐之側面積, 大於底面積.



100. 底爲平行四邊形之角臺, 其對角線, 皆過同一之點.

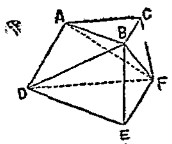
證 底爲平行四邊形之角臺ABCD-EFGH, 其二對角線HB, DF之交點爲O, EC, HB之交點爲O', 則△OBD∽△OHF, △O'BC∽△O'HE, 故BO:HO=BD:HF, BO':HO'=BC:HE, 但△BCD∽△FGH∽△EHF, 故BD:HF=BC:HE, 故BO:HO=BO':HO', 故O, O'在同一之點. 同樣AG亦過O, 即ABCD-EFGH之對角線, 皆過同一之點.



101. 三角臺之體積, 等於「以其上底, 下底及上下兩底之比例中項, 爲底, 原三角臺之高, 爲共通高」之三個角錐體積之和.

證 ABC-FDE爲三角臺, 其上下兩底

之面積爲B, B′, 高爲h, 則體積$=\frac{1}{3}h\times\{B+\sqrt{BB'}+B'\}$



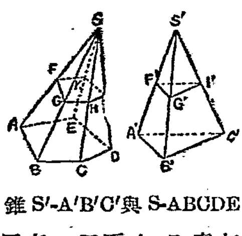
將三角臺以二平面BDF, ABF截之, 則得三個三角錐B-DEF, F-ABC, B-ADF, 而三角錐B-DEF$=\frac{1}{3}hB'$. 及三角錐F-ABC$=\frac{1}{3}hB$, 則欲得三角臺之體積, 求三角錐B-ADF之體積, 可矣.

而 $\frac{\text{三角錐 B-ADF}}{\text{三角錐 B-ACF}}=\frac{\text{底 ADF}}{\text{底 ACF}}$, 卽

$\frac{\text{三角錐 B-ADF}}{\text{三角錐 F-ABC}}=\frac{DF}{AC}=\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}$, 故三角錐B-ADF$=\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}\times$三角錐F-ABC$=\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}\times\frac{1}{3}hB=\frac{1}{3}h\sqrt{BB'}$. 故(三角臺之體積)$=\frac{1}{3}h\{B+\sqrt{BB'}+B'\}$.

102. 任意之角臺[圓臺]之體積, 等於[以其上底, 下底, 及兩底之比例中項, 爲底, 原角臺[圓臺]之高, 爲共通高]之三個角錐[圓錐]體積之和.

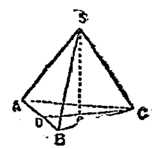
解 ABCDE-FGHIK爲角臺, 其側稜AF, BG,………之交點爲S. 今想像一



三角錐S′-A′B′C′與S-ABCDE等積, 且底面同在一平面上, 且高相等, 而平面FGHIK之延長, 截S′-A′B′C′之截口爲F′G′I′, 則因體積S-ABCDE=體積S′-A′B′C′, 且體積S-FGHIK=體積S′-F′G′I′, 故ABCDE-FGHIK=A′B′C′-F′G′I′. 又面積ABCDE=面積A′B′C′, 面積FGHIK=面積F′G′I′, 依前題三角臺A′B′C′-F′G′I′之體積, 等於以其上底F′G′I′下底A′B′C′及此二底之比例中項爲底原三角臺之高爲共通高之三個角錐體積之和. 故ABCDE-FGHIK亦等於以上底FGHIK, 下底ABCDE及此上下兩底之比例中項爲底, 共通之高爲高之三個角錐體積之和明矣. 圓臺亦得同樣證明之. 卽圓臺之上底半徑爲r, 下底半徑爲r', 則$B=\pi r^2$, $B'=\pi r'^2$, 故體積如次, $\frac{1}{3}\pi h\{r^2+rr'+r'^2\}$.

103. 知正四面體之一稜a, 而計算其高及其體積.

解 正四面體S-ABC之高爲SO, 則O爲正三角形ABC之重心, 故CO與AB相交於D, 則D爲AB之中點, 故$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,



因而$CO=\frac{a}{\sqrt{3}}$, 因而$SO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 又$\triangle ABC=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 故$S\text{-}ABC=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

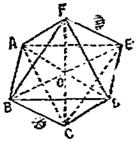
104. 試以正八面體之一稜, 表其一對角線.

解 正八面體相對之角頂, 爲正方形

相對之角頂，且其正方形之一邊，爲正八面體之一稜，以 a 表之，則一稜爲 a 之正八面體之對角線，爲 $\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$.

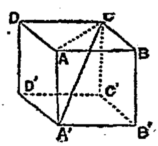
105. 計算一邊之長爲 a 之正八面體之體積，及內切於此八面體之球之體積.

圖 ABCDEF 爲正八面體，則各稜皆爲 a，故正四角錐 C-ABDE 之體積，爲 $\frac{1}{3}a^2.OC=\frac{1}{3}a^2.OA=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a$，故正八面體 ABCDEF 之體積，爲 $2\times\frac{1}{3}a^2.\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. 今自 O 作八面體之一面之垂線 R，則四面體 O-ABC 之底面 ABC 爲正三角形，而在角頂 O 之三個面角，皆爲直角，故 $R^2=\frac{1}{3}\overline{OA}^2=\frac{1}{6}a^2$. [98 題]. 故 $R=\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot a$，故正八面體 ABCDEF 內切球之體積，爲 $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot a\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\times\pi a^3$.



106. 對角線爲 $\sqrt{3}$ 之立方體積之體積如何.

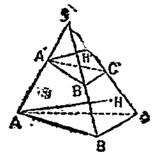
圖 立方體爲 ABCD-A′B′C′D′ 則 △ACA′ 爲直角三角形明矣，故 $\overline{A'C}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AC}^2=\overline{AA'}^2+\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=3\overline{AA'}^2$. ∴ $A'C=\sqrt{3}AA'$，但 $A'C=\sqrt{3}$，故 $AA'=1$，故立方體之體積爲 P，則 $P=1^3=1$.



107. 一三面角之四面體體積之比，等於此三面角頂點三稜連乘積之比，又二相似四面體[相似多面體]體積之比，等於其對應稜之立方之比.

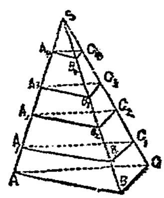
圖 二四面體 S-ABC, S-A′B′C′ 相等，故得如圖之相重合.

今將 △SBC, △SB′C′，視爲二四面體之底，自頂點 A′A′，作高 AH, A′H′，則 $\frac{AH}{A'H'}=\frac{SA}{SA''}$，又 $\frac{\triangle SBC}{\triangle SB'C'}=\frac{SB.SC}{SB'.SC'}$ [因 $B\hat{S}C$ 爲二三角形之共用]. 故 S-ABC : S-A′B′C′=SA.SB.SC : SA′.SB′.SC′，而四面體 S-ABC, S-A′B′C′ 相似，則 $\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{SC}{SC'}$. 故上之比例如次，即 S-ABC : S-A′B′C′$=SA^3 : SA'^3$，一般相似多面體，能分爲同數相似四面體，故二相似多面體體積之比，等於其對應稜之立方之比.



108. 角錐之高，以平行於底之平面五等分之，所成之角臺及全角錐之連比如何.

圖 相似多面體與對應邊之三乘成比例，故 S-ABC : S-$A_1B_1C_1$: S-$A_2B_2C_2$: S-$A_3B_3C_3$: S-$A_4B_4C_4$ = $\overline{SA}^3 : \overline{SA_1}^3 : \overline{SA_2}^3 : \overline{SA_3}^3 : \overline{SA_4}^3$，但 SA : SA_1 : S〔illegible〕 : SA_3 :



$SA_4=5:4:3:2:1$ 明矣,故 $\overline{SA}^3:\overline{SA_1}^3:\overline{SA_2}^3:\overline{SA_3}^3:\overline{SA_4}^3=125:64:27:8:1$, 因而 $(S\text{-}ABC):(S\text{-}ABC)-(S\text{-}A_1B_1C_1):(S\text{-}A_1B_1C_1)-(S\text{-}A_2B_2C_2):(S\text{-}A_2B_2C_2)-(S\text{-}A_3B_3C_3):(S\text{-}A_3B_3C_3)-(S\text{-}A_4B_4C_4):(S\text{-}A_4B_4C_4)=125:125\text{-}64:64\text{-}27:27\text{-}8:8\text{-}1:1$, 即 $(S\text{-}ABC):(ABC\text{-}A_1B_1C_1):(A_1B_1C_1\text{-}A_2B_2C_2):(A_2B_2C_2\text{-}A_3B_3C_3):(A_3B_3C_3\text{-}A_4B_4C_4):(S\text{-}A_4B_4C_4)=125:61:37:19:7:1$

109. 知直角體之不等三對角面之面積計算各稜之法如何.

圖 直角體之三稜爲 x, y, z 三對角之面積爲 m, n, p, 則 $x\sqrt{y^2+z^2}=m$, $y\sqrt{z^2+x^2}=n$, $z\sqrt{x^2+y^2}=p$, 故 $x^2(y^2+z^2)=m^2$ ...(1), $y^2(z^2+x^2)=n^2$ ....(2), $z^2(x^2+y^2)=p^2$ .... (3), 因而 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{1}{2}(m^2+n^2+p^2)$..(4).

自 (4) 次第減 (1), (2), (3) 開平方

$yz=\sqrt{\frac{1}{2}(n^2+p^2-m^2)}$,

$zx=\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+p^2-n^2)}$,

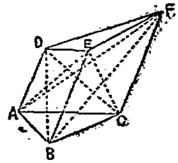
$yx=\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2-p^2)}$, 此三式之第二第三之積以第一除之開平方

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+p^2-n^2)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2-p^2)}}{\sqrt{\frac{1}{2}(n^2+p^2-m^2)}}}.$$

同樣可求得 y, z 之值.

110. 斜三角壔之體積與[其底爲共通之底,其斜截面之三角頂,爲各頂點]之三個錐體之和,等積.

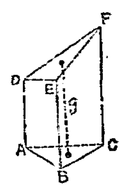
圖 ABC-DEF 爲斜三角壔, ABC 爲其底,斜截面爲 DEF.



以二平面 AEC, 及 DEC, 分其斜角壔爲三錐體 E-ABC, E-ACD E-CDF, 則第一錐體 E-ABC, 其底爲 ABC, 其頂點爲 E, 第二錐體 E-ACD, 與錐體 B-ACD 等積,何則,因有同底 ACD, 其頂點 E 及 B, 在與底平行之直線 EB 上,又等高故也. 而錐體 B-ACD, 得見做有頂點 D 底 ABC 者,第三錐體 E-CDF, 與錐體 B-ACF 有底等積,而其頂點 E 及 B, 在平行於其底之直線 EB 上,故等高,故兩錐體等積,又錐體 B-ACF, 與錐體 F-ABC, 同一. 故此斜三角壔之體積,等於共通底 ABC, 頂點爲 E, D, F, 三個錐體體積之和.

111. 斜三角壔之體積,等於自一底之重心向他底所作垂線,與他底之積.

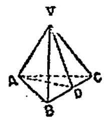
圖 斜三角壔 ABC-DEF 之底 DEF, 自其角頂 D, E, F, 作底 ABC 之垂線之長爲 h, h', h'', 則其體積爲 $\triangle ABC\times\frac{h+h'+h''}{3}$. 自底 DEF 之重心,作底 ABC 之垂線之長爲 g, 則 $3g=h+h'+h''$ 明矣. 故斜三角壔 ABC-DEF 之體積,爲 $\triangle ABC\times\frac{h+h'+h''}{3}=\triangle ABC\times g$.



112. 四面體之一立體角,自三個直角而成時,則其對於立體角之面之平方

等於他三面之平方之和.

圖 四面體V-ABC其$A\hat{V}B=B\hat{V}C=C\hat{V}A=\hat{R}$,則$\triangle VAB=\frac{1}{2}VA.VB$,

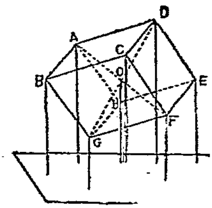


$\triangle VBC=\frac{1}{2}VB.VC$, $\triangle VCA=\frac{1}{2}VC.VA$, 故將VA, VB, VC爲$x$, y, z, 則$\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCA$之平方之和爲$\frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$又$AB=\sqrt{x^2+y^2}$, $BC=\sqrt{y^2+z^2}$, $CA=\sqrt{z^2+x^2}$, 故$\triangle ABC$之面積之平方爲$\frac{1}{16}(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2})\times(\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}-\sqrt{x^2+y^2})\times(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+x^2}-\sqrt{y^2+z^2})\times(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}-\sqrt{z^2+x^2})=\frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$, 故$\triangle VAB$, $\triangle VBC$ $\triangle VCA$之面積之平方之和等於$\triangle ABC$之面積之平方.

別證 自V作BC之垂線VD, 連結AD, 則VA垂直於平面VBC, 故$BC\perp AD$,而BC垂直於平面VAD. 故$\triangle ABC$之面積之平方,等於AD與BC之積之平方之四分之一. 又$(\triangle VBC)^2=\overline{VD}^2.\overline{BC}^2/4$, $(\triangle VAC)^2=\overline{VA}^2.\overline{VC}^2/4$, $(\triangle VAB)^2=\overline{VA}^2.\overline{VB}^2/4$, 故是等之和$(\triangle VBC)^2+(\triangle VAC)^2+(\triangle VAB)^2=(\overline{VD}^2.\overline{BC}^2+\overline{VA}^2\times\overline{VC}^2+\overline{VA}^2.\overline{VB}^2)/4=\{\overline{VD}^2.\overline{BC}^2+\overline{VA}^2\times(\overline{VC}^2+\overline{VB}^2)\}/4=\{\overline{VD}^2.\overline{BC}^2+\overline{VA}^2\times\overline{BC}^2\}/4=\overline{BC}^2(\overline{VD}^2+\overline{VA}^2)/4=\overline{AD}^2\times\overline{BC}^2/4$. 故$(\triangle ABC)^2=(\triangle VBC)^2+(\triangle VAB)^2+(\triangle VAC)^2$.

113. 自平行六面體之各角頂,至不截之之平面之距離之和,等於其對角線之交點,至同平面之距離之八倍.

圖 自平行六面體ABCD-EFGH之各角頂A, B, C, D,……, 向一平面作垂線爲a, b, c, d, ……自其對角線之交點O,向同平面作垂線爲g,則$a+f=2g$, $b+c=2g$,……故$\Sigma a=8g$.



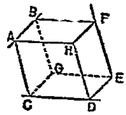
114. 有角臺與角壔,其高相等,而角壔之底,等於自角臺兩底面之等距離平行於底之截面,則此二體積之差,爲$\frac{h}{12}(\sqrt{B}-\sqrt{b})^2$. 但B與$b$爲角臺兩底之面積,而$h$爲其高.

圖 角臺之兩底面,爲相似多角形,將其對應邊爲x, y,自兩底等距離之截面爲S,則其對應邊爲$\frac{1}{2}(x+y)$明矣,而$S:B=\frac{1}{4}(x+y)^2:y^2$, $x:y=\sqrt{b}:\sqrt{B}$. 故$\frac{1}{4}(x+y):y=\frac{1}{4}(\sqrt{B}+\sqrt{b})^2:B$, 因而$S=\frac{1}{4}(\sqrt{B}+\sqrt{b})^2$,而底面等於S之角壔之體積爲$\frac{h}{4}(\sqrt{B}+\sqrt{b})^2$, 而其角臺之體積, 爲$\frac{h}{3}(B+\sqrt{B}\sqrt{b}+b)$, 故二體積之差, 爲$h\left[\frac{B+\sqrt{B}\sqrt{b}+b}{3}-\frac{(\sqrt{B}+\sqrt{b})^2}{4}\right]=\frac{h}{12}(B-2\sqrt{B}\sqrt{b}+b)=$

$\frac{h}{12}(\sqrt{B}-\sqrt{b})^2$.

115. 求作平行六面體.其三稜在不相交之已知三直線上.

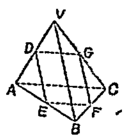
圖 已知三直線爲AB. CD, EF, 所作之平行六面體ABFH-CDEG, 則含AB之平面AEGC及ABFH, 各平行於EF, CD. 同樣含



CD之平面CDEG, CDHA, 各平行於AB, EF, 含EF之平面EFHD, EFBG.各平行於AB, CD. 由是作含AB, CD, EF之一而平行於其他之二之平面, 則是等之平面,爲所求之平行六面體.

116. 以平面截四面體,使其截口爲菱形.

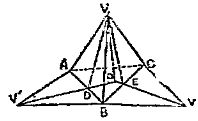
圖 四面體V-ABC以平行於其相對稜VB, AC之平面截之,其截口DEFG爲平行四邊形. 今欲其平行四邊形爲菱形,則由AE : AB=



DE : VB, AB : BE=AC : EF之二式,得AE : BE=AC : VB,因而可得點E. 由是求得AE : EB=AC : VB之點E,乃過E平行於VB, AC作平面,則此平面之截口DEFG爲所求之菱形. 又不取VB, AC,而取他二雙相對稜,亦可得所求之二菱形,故本題有三解.

117. 四面體之各稜已知時,試依平面之作圖,而求其高.

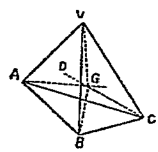
圖 四面體V—ABC之高VP,依平面作圖法求之,將面VAB, VBC,折開至三角形ABC



之平面上,其位置爲V′AB, V″BC,則△VAB, △VBC之高VD, VE,與△V′AB, △V″BC之高V′D, V″E,於底AB, BC上相交,因而四面體V-ABC之高VP之趾P,與V′D, V″E之交點合,但四面體V-ABC之各稜爲已知,故△ABC, △V′AB, △V″BC,皆可作之,因而可求得V′D, V″E之交點P,再將V′D[或V″E]爲直三角形之斜邊,DP[或EP]爲一邊,而求其他一邊,卽得VP.

118. 求四面體內一點,連結各角頂,使所得四個四面體皆等積.

圖 四面體爲V-ABC,所求之點爲G, CG之延線與平面VAB之交點爲D,自C, G,作平面VAB之垂線爲h, h',則CD : GD=h : h'=

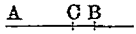


V-ABC : V-BAG=4 : 1,同樣連結G與各角頂之直線,至其與相對面交點之距離,皆於G分爲4 : 1,故G必爲V-ABC之重心,由是求得四面體V-ABC之重心G,連結G及角頂,則V-ABC分爲四個等積之四面體.

119. 將已知有限直線,內分及外分爲二部分之比,使等於已知二立方體體

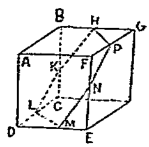
積之比.

解 已知有限直線AB, 於C分為AC:BC=$a^3:b^3$, [但a, b為表已知立方體之稜]. 今求$a:b=b:c$之c, 次求$b:c=c:d$之d, 則$a:d=a^3:b^3$. 由是求$a:b=b:c=c:d$之d, 等於$a:d$內分及外分AB於C, 則C為所求之點.



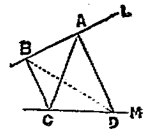
120. 以平面截立方體,使其截口為正六角形.

解 立方體之邊BG, BC, CD, DE, EF, FG之中點H, K, L, M, N, P, 則LM∥CE, HP∥BF, 而BF∥CE, 故LM∥HP, 同樣KL∥PN, HK∥MN, 而BF∥KN, 故HP∥KN, 故三邊KH, HP, PN, 在同一平面上, 如此相鄰三邊皆在同一平面上, 故六點H, K, L, M, N, P, 在同一平面上. 次△BKH, △CKL, ……………, 皆相等, 且HM=PL=KN, 故HKLMNP為正六角形, 由是所求之截口, 為過不過相對二角頂之邊之中點之面平截口, 且如斯之截口有四.



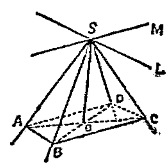
121. 四面體相對二稜,在已知二直線上,且其長為一定,則無論其二稜位置如何,其四面體之體積,恆為一定.

解 二直線L, M上, 有相對二稜AB, CD之四面體A-BCD, 且AB, CD之長為一定. 夫AB, CD, 移動於L, M上. 茲先將AB不移動而移動CD, 次將CD不移動而移動AB. 今AB不移動而CD移動直線M上, △BCD之面積為一定, 且恆在同一之平面上. 故自A至△BCD之距離為一定, 因而四面體A-BCD之體積為一定. 同樣AB移動L上, 四面體A-BCD之體積為一定, 故AB, CD移動L, M上, 四面體A-BCD之體積為一定.



122. 以一平面截四面角,使其截口為平行四邊形.

解 四面角S-ABCD, 以一平面截之, 其截口ABCD為平行四邊形, 將AC, DB之交點為O, 則AC, BD於O互為二等分, 又O在平面SAC, SBD之交之直線SO上. 由是先於含對稜SA, SC及SP, SD之平面之交SO上取一點O, 過O於平面SAC, SBD上, 作直線AOC, BOD, 使AO=OC, OB=OD, 則直線AOC, BOD, 所定平面之截口ABCD, 為所求平行四邊形.

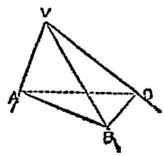


別解 以一平面截四面角S-ABCD. 截口ABCD為平行四邊形. 今過S

作 AB 之平行線 L 則因 L∥AB∥CD, 故 L 為二平面 SAB, SCD 之交. 同樣過 S 作 BC 之平行線 M, 則 M 為 SBC, SAD 之交. 由是作含四面角相對面之交之平面, 以平行於此平面之平面截四面角, 則其截口為平行四邊形.

123. 三面角之三個平面角之大已知時, 試依作圖求其三面角之大.

〔解〕 將三面角 V-ABC 之一稜 VA, 定為任意之長, 於 A 作垂直於 VA 之平面 ABC, 與 VB, VC 之交點為 B, C, 則二直三角形 VAB, VAC 定, 因而 VB, VC, AB, AC 定. 次因 VB, VC 定, $B\hat{V}C$ 為已知, 故 △VBC 定, 因而 BC 定, 故 △ABC 定, $\hat{A}$ 定, 而 $\hat{A}$ 為在稜 VA 測二面角之角, 而得知之矣. 同樣可知在稜 VB, VC 二面角之大.

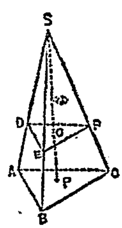


124. 已知之角錐, 以平行於其底之平面截之, 使其截口, 等於底之半分.

〔解〕 已知之角錐為 S-ABC, 截口為 DEF, 高 SP, 交於 DEF 之點為 G, 則

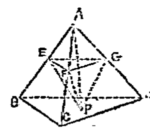
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\overline{SG}^2}{\overline{SP}^2}=\frac{1}{2},$$

∴ $SG=\frac{1}{\sqrt{2}}SP$, 即 SP 為正方形之對角線, 而 SG 為其正方形之一邊也. 故作高 SP, 作 SP 為對角線之正方形, 於 SP 上截 SG, 使等於正方形之一邊, 過 G 作平行於 ABC 之平面, 則截角錐 S-ABC 之截口 DEF 為所求.



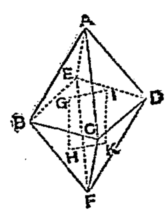
125. 正四面體得內接正四面體.

〔解〕 自正四面體 A-BCD 之頂點, 作底面 BCD 之垂線 AP, 作直角二等分 AP 之平面, 此平面與 AB, AC, AD 之交點為 E, F, G, 則平面 EFG ∥ 平面 BCD, 故 △EFG∽△BCD, 但 △BCD 為正三角形, 故 △EFG 亦為正三角形. 又 AE=EP, 而 △AEF 為正三角形, 故 AE=EP=EF=AF=FP, 故 △PEF 為正三角形. 同樣四面體 P-EFG 之各面為正三角形, 故四面體 P-EFG 為正四面體. 次將四面體 A-BCD 各面中心為頂點之四面體, 亦為正四面體, 容易知之.



126. 正六面體, [即立方體] 得作內接正八面體, 又正八面體, 得作內接正六面體.

〔解〕 將正六面體各面正方形對角線之六個交點, 為各頂點, 作八面體, 則此八面體為正八面體, 蓋六點之中相鄰三點, 皆為正三角形之頂點故也. 又正八面體 AF 各面之中心



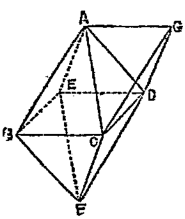
爲 G, H, K, I,……則 GH, HK, KI,……, 等於 AF, BD, AF,……之三分之一, 而 AF=BD=EC=……, 故 GH=HK=KI=……, 且 $G\hat{H}K=H\hat{K}I=\ldots\ldots=\hat{R}$, 故將正八面體各面之中心爲角頂,作六面體,則此六面體爲立方體.

127. 正十二面體,得內接於正二十面體,又正二十面體,得內接於正十二面體.

圖 正十二面體之各面,爲正五角形,而正二十面體之各立體角,爲五個正三角形集合而成,故將作此立體角之各面中心,次第連結之,則爲正五角形明矣,而二十面體立體角之數爲 $\frac{20\times3}{5}=12$, 故將正二十面體相鄰面之中心,次第連結,卽得自十二個正五角形所成之正多面體,卽正十二面體,同樣正十二面體頂點之數爲20,故得內接正十二面體.

128. 正四面體之二面角,與正八面體之二面角,互爲補角.

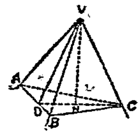
圖 AF 爲正八面體,作 AG 使等於 BC, 且平行於 BC, 連結 CG, DG, 則因 △ABC 爲正三角形,故 △ACG 亦爲正三角形. 同樣



四面體 G-ACD 之各面,皆爲正三角形,卽 G-ACD 爲正四面體. 而正八面體與正四面體在共通稜 AC 之二面角,因 ABC, ACG 在同一之平面上,故此二面角互爲補角.

129. 於立方體一角頂之三稜上,每取一點 A, B, C, 則 △ABC 之各角爲銳角.

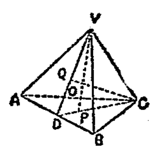
圖 在立方體一角頂V之三稜,其一稜各垂直於其他之二. 今於其三稜上,各取一點 A, B, C, 自角頂V, 向 △ABC 之平面,作垂線 VN, 而 CN



與 AB 之交點爲 D, 則因 VC, VN 各垂直於平面 VAB, ABC, 故平面 VCD 垂直於平面 VAB, ABC, 故 AB⊥VD, AB⊥CD, 但 $A\hat{V}B=\hat{R}$, 故 VD 與 AB 之交點 D, 在 AB 上. 同樣 AN, BN 各垂直於 BC, CA, 而 AN, BN 與 BC, CA 之交點各在 BC, CA 之中,故 △ABC 之垂心爲 N, 而 N 在 △ABC 之內,因而 △ABC 之各角爲銳角.

130. 四面體之三組相對之二稜互爲垂直,則自其四面體之各角頂至相對面作四垂線,相交於同一之點.

圖 三組之相對稜互爲垂直之四面體 V-ABC, 自其一角頂 V, 作其對面 ABCD 之垂線 VP, 則因 VP⊥AB, VC⊥AB, 故 AB 垂直

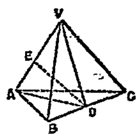


於平面 VCD, 因而二平面 VAB, VCD, 互爲垂直,故自C作平面 VAB 之垂線 CQ 在平面 VCD 之上,因而 VP, CQ 在

同一之平面上,且不平行,故必相交,其交點爲O. 同樣自A, B向其對面作垂線與VP及CQ相交,然自A, B向對面所作垂線,不在平面VOC內,故自A, B向對面所作垂線與VP及CQ之交點必爲O,即自四面體V-ABC之角頂,向對面所作四垂線,相交於同一之點.

131. 正四面體相對稜之間之最短距離,等於其一稜上正方形對角線之半分.

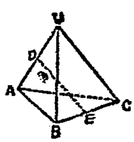
證 正四面V-ABC,含其一稜VA,垂直於其對稜BC,作平面VAD與BC之交點爲D,自D作VA之垂線DE,則因DE爲VA, BC之共通垂線,



故爲此二稜間最短矩離,但因BC⊥VD,故D爲BC之中點,又VD=AD,故E又爲VA之中點,因而$\overline{DE}^2=\overline{VD}^2-\frac{1}{4}\overline{VA}^2=\overline{VA}^2-\frac{1}{2}\overline{VA}^2=\frac{1}{2}\overline{VA}^2$,即DE=$\frac{\sqrt{2}}{2}$VA,故DE爲VA上正方形對角線之半分.

132. 正四面體關於其連結相對稜中點之直線爲對稱.

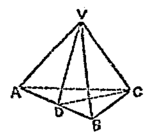
證 正四面體V-ABC,其相對二稜VA, BC之中點爲D, E,則因DE垂直於VA, BC, [VAB, VAC皆爲正三角形,故VD與DB, DC,成直角,故



VD與平面CDB直角相交,故$V\hat{D}E$爲直角]故垂直於DE之平面,平行於VA, BC,故其截口爲平行四邊形,而其平行四邊形對角線之交點O,在DE上明矣,但截口關於O爲點對稱,因而正四面體V-ABC以DE爲對稱之軸.

133. 四面體二面角之一,其二等分之平面,分相對稜爲二部分之比,等於此二面角之二面積之比.

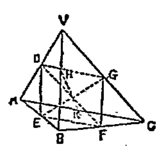
證 四面體V-ABC,其在稜VC之二面角二等分之平面VCD,與AB之交點爲D,則因自D至二面VBC, VCA之距離相等,故四面體



D-CVA:四面體D-BVC=△VCA:△VBC,但四面體D-CVA, D-BVC,可視爲頂點爲V,底面爲ADC, BDC之四面體,故其體積之比,等於△ADC:△BDC,而△ADC:△BDC=AD:BE,故△VCA:△VBC=AD:BD.

134. 任意四面體稜上正方形之和,爲連結相對稜中點之直線上正方形之和之四倍.

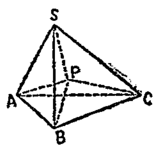
證 四面體V-ABC,其稜之中點爲D, E, F, G, H, K,則DEFG, DHFK, GHEK,因其皆爲平行四邊形,故



$\overline{EG}^2+\overline{DF}^2=2\overline{DE}^2+2\overline{EF}^2$, $\overline{DF}^2+\overline{HK}^2=2\overline{DK}^2+2\overline{KF}^2$, $\overline{HK}^2+\overline{EG}^2=2\overline{EH}^2+2\overline{EK}^2$, 故 $4(\overline{EG}^2+\overline{DF}^2+\overline{HK}^2)=4(\overline{DE}^2+\overline{EF}^2+\overline{DK}^2+\overline{EH}^2+\overline{KF}^2+\overline{EK}^2)=\overline{VA}^2+\overline{VB}^2+\overline{VC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$.

135. 自正四面體 S-ABC 內之一點，至四面距離之和，恆等於四面體之高.

證 自四面體內一點P，至四面之距離為 r_1, r_2, r_3, r_4，連結PS, PA, PB, PC，將正四面體S-ABC分為以P為頂點之四個四面體，則是等四面體體積之和，卽S-ABC，以 $\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3+r_4)\times\triangle ABC$ 表之. 但四面體之高若為h，而S-ABC之體積，能以 $\frac{1}{3}h\times\triangle ABC$表之. 故 $r_1, r_2, r_3, r_4, =h$.

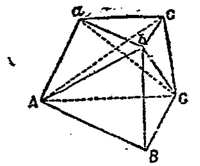


136. 自正多面體內一點，至諸面作垂線之和，無論點之位置恆為一定.

證 將正多面體一面之面積為m，自中心向各面作垂線，其和為s，自此正多面體內一點，向諸面作垂線為 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots$，則與前題同同樣，得 $\frac{1}{3}sm=\frac{1}{3}(\Sigma r_1)\times m$, $\therefore s=\Sigma r_1$.

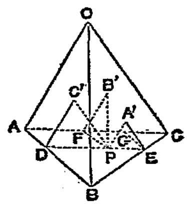
137. 取三角臺之兩底之不平行二邊，為相對稜之四面體，皆為等積.

證 三角臺為 abc-ABC，則四面體 a-BbC, A-Bbc，相等，何也，此二四面體乃以a及A為頂點以Bbc及BbC為底之三角錐，而其高為自a及A向面bBC所作垂線，故等於ab:AB，其底面之比，等於自C, c，作Bb兩垂線之比，因而等於BC:bc，但 $\triangle abc\backsim\triangle ABC$，故 ab:AB=bc:BC，故此二四面體 a-Bbc, A-Bbc之高，等於底之反比，故此二四面體相等.



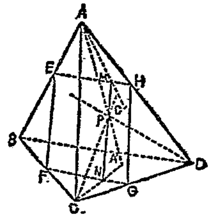
138. 三角錐O-ABC之底上一點P，過P平行於OA, OB, OC作直線，使交面於A′, B′, C′，則其三比 $\frac{PA'}{OA}, \frac{PB'}{OB}, \frac{PC'}{OC}$ 之和，等於1.

證 過P平行於AC，作直線DE，次作平行於AB之直線PF, EG，則因PC′∥OC, PD∥AC，故平面PDC′平行於平面OAC，因而 OA∥C′D，故$\triangle OAC\backsim\triangle C'DP$，故 $\frac{PC'}{OC}=\frac{PD}{CA}$，同樣 $\frac{PB'}{OB}=\frac{PF}{AB}=\frac{EG}{AB}=\frac{CG}{CA}$, $\frac{PA'}{OA}=\frac{PE}{CA}$，故 $\frac{PA'}{OA}+\frac{PB'}{OB}+\frac{PC'}{OC'}=\frac{DE+CG}{CA}=\frac{CA}{CA}=1$.



139. 一點P連結四面體之四個角頂A, B, C, D，是等直線或其延長，與相對面之交點為A′, B′, C′, D′，則四個比 $\frac{PA'}{AA'}, \frac{PB'}{BB'}, \frac{PC'}{CC'}, \frac{PD'}{DD'}$ 之和，等於1.

證　過P平行於AC, BD之平面截口，為EFGH，過P作EF之平行線MN，則MN∥AC，而CA′, AC′，過N, M明矣．



故 $\frac{PA'}{AA'}=\frac{PN}{AC}$，同樣 $\frac{PC'}{CC'}=\frac{PM}{AC}$，故 $\frac{PA'}{AA'}+\frac{PC'}{CC'}=\frac{MN}{AC}=\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}$，同樣 $\frac{PB'}{BB'}+\frac{PD'}{DD'}=\frac{EH}{BD}=\frac{AE}{AB}$，故 $\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=\frac{AE+BE}{AB}=1.$

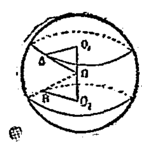
別證　P為頂點之四面體P-BCD, P-CDA, P-DAB, P-ABC，各與四面體A-BCD之比，各等於 $\frac{PA'}{AA'}$, $\frac{PB'}{BB'}$, $\frac{PC'}{CC'}$, $\frac{PD'}{DD'}$ 明矣．故 $\Sigma\frac{PA'}{AA'}=\Sigma\frac{P\text{-}BCD}{A\text{-}BCD}=\frac{A\text{-}BCD}{A\text{-}BCD}=1.$

注意　P在四面體之外時，注意比之符號，則本題一般皆眞．

球

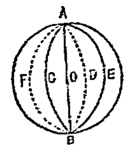
140. 自球中心等距離之小圓，相等．其自中心在不等距離之兩小圓，近於中心者，大於遠於中心者．

證　自球之中心O，作二小圓之垂線OO_1, OO_2，則O_1, O_2，為小圓之中心．今$OO_1=OO_2$，將A, B為二小圓周上之點，則 $\triangle OAO_1\equiv\triangle OBO_2$，因而二小圓之半徑 $AO_1=BO_2$，即二小圓相等．若 $OO_1>OO_2$，則二直三直形 OAO_1, OBO_2，之 $BO_2>AO_1$ 矣，即在遠於中心之距離之小圓，小於在近於中心之距離之小圓．



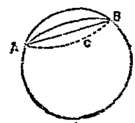
141. 球之任意二大圓，互為二等分．

證　ACBD, AFBE，為中心為O之球之二大圓，其平面之交，為直線AB，則因ABCD, AEBF，皆過球之中心，故AB過中心O，故AOB為各大圓之徑，故二圓各二等分其他．



142. 過球面上任意之三點，可畫小圓之弧．

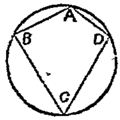
證　球面上三點為A,B,C，則含此三點之平面有一，而惟限於一，且其平面，一般截球為小圓ABC，故過球面上任意三點，可畫小圓之弧．



143. 過不在同一平面上四點，得作一球，而惟限於一．

證　自A, B等距離點之軌跡，為垂直二等分直線AB之平面，同樣自B, C等距離點之軌跡，為垂直二等分BC之平面，故此二平面之交之直線，為

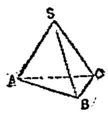
自三點A, B, C等矩離點之軌跡. 又自C, D等矩離點之軌跡爲垂直二等分CD



之平面,故此平面與前二平面之交之交點,爲自A, B, C, D等距離之點,故此點爲中心得畫過A, B, C, D之球. 但此點爲直線與平面之交惟限於一,故過A, B, C, D之球,惟限於一.

144. 任意四面體,得作內切球.

證 四面體S-ABC,將在其稜SA, SB, AB之二面角,二等分之,其三平面之交點,爲平面SAB, SAC, SBC, ABC等距離點,



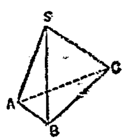
故將此點爲中心,得畫內切於四面體之球.

145. 任意四面體,得作外接球.

證 過四面體S-ABC之四頂點,得畫球[143題],卽外接此四面體得畫球.

146. 垂直二等分四面體之六稜之六平面,相交於同一之點.

證 將四面S-ABC,外接球之中心爲O,則O在四角頂之等距離,故垂直二等分四面體六稜之六平面,相交於同一之點明矣.



147. 切於球之直線,或平面,垂直於過切點之半徑.

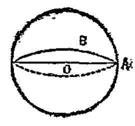
證 球半徑之端,垂直於半徑之平面,切於球,但半徑之端垂直於半徑之平面惟一,故切於球之平面,垂直於過切點之半徑. 次切球之平面上,過切點作直線,垂直於半徑. 又逆半徑之端垂直於半徑之直線,在切球之平面上,故切球之直線垂直於過切點之半徑.

148. 於一點切球之二直線,定於其點切球之平面.

證 於同一之點切球之任意二直線,垂直於過切點之半徑,故在切球之平面上. 但此二直線定一平面,故此二直線定切球之平面.

149. 試求過球面上已知二點之大圓之弧.

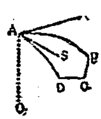
證 球面上已知二點爲A, B,將O爲球之中心,則因過A, B, O,之平面,與球之交爲大圓,故得過A, B之大圓之弧.



150. 球面多角形之各角,以其各邊平面間之二面角測之.

證 球面多角形之邊及角以在球中心對應之多面角之面角,及二面角測之,故自多面角之性質,得知球面多角形類似之性質.

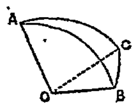
證 球面多角形爲ABCD,球之中心爲O. 夫球面多角形之角A爲點A切弧AB, AD之切線所成之角. 但



此切線AT, AS, 各在平面OAB, OAD之上,且垂直於二平面之交之直線OA,故$T\hat{A}S$爲球面多角形之邊AB, AD之平面所成之角,卽$\hat{A}$以二邊AB, AD之平面所成之角測之.

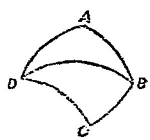
151. 球面三角形之一邊,小於他二邊之和.

證 球面三角形爲ABC,其中心爲O,其弧AB, BC, CA之比,等於角AOB, BOC, COA之比.但$A\hat{O}B$ $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$之中任取其一,小於其他之二之和,故球面三角形ABC之邊BC, CA, AB,任取其一,小於其他之二之和.



152. 球面多角形之任一邊,小於其他各邊之和.

證 球面多角形爲ABCD,今以大圓之弧連結BD,乃取球面多角形任意之一邊AB,則$AB<AD+DB$, $DB<DC+BC$, $\therefore AB<AD+DC+BC$,同樣球面多角形之邊數無論若干,得證本題之眞.



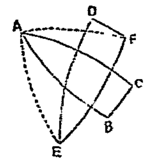
15?. 球面多角形各邊之和,小於360°.

證 將球面多角形各邊之端,連結球之中心,則成立體角,此立體角之面角,各以球面多角形之各邊測之,但立體角各面角之和,小於四直角,卽小於360°,故此各邊之和小於360°.

154. 若一球面三角形爲他球面三角形之極三角形,則後三角形,又爲前三角形之極三角形.

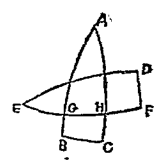
證 球面三角形ABC之極三角形爲DEF,則ABC又爲DEF之極三角形.

因E爲弧CA之極,故弧AE爲四分圓周,同樣弧FA亦爲四分圓周,故A爲EF之極. 夫D爲BC之極,而A與D在大圓BC之同傍,故弧AD小於四分圓周,故A與D亦在EF之同傍,同樣B爲FD之極,而B與E在大圓FD之同傍,又C爲DE之極,而C與F在大圓DE之同傍,故球面三角形ABC,爲球面三角形DEF之極三角形.



155. 二球面三角形,互爲極三角形,其一之各角與其他相對之邊,互爲補角

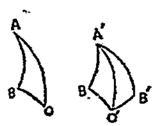
證 互爲極三角形之球面三角形ABC, DEF,則$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$,各爲邊EF, FD, DE之補角,何則,今將邊AB, AC,或其延線,與EF之交點,爲G, H,因A爲EF之極,故$\hat{A}$以弧GH測度,但E, F,爲弧AC, AB之極,故弧EH, FG,皆爲四分圓周,故弧EF與GH之和,等於半周,故$\hat{A}$與邊EF互爲補角,同樣$\hat{B}$與邊DF, $\hat{C}$與邊ED,

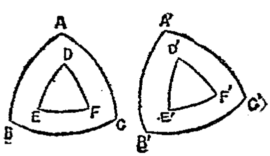


互爲補角.

156. 二球面三角形如次者,得重合或爲對稱. (I)二邊及夾角各相等. (II)二角及其間之邊各相等. (III)三邊各相等. (IV)三角各相等.

圖 (I)二球面三角形ABC, $A'B'C'$,其$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\hat{A}=\hat{A}'$,則將$A'B'$重於AB之上,則$A'B'$全與AB合,因$\hat{A}=\hat{A}'$,故$A'C'$全與AC合,因而$B'C'$全與BC合,故球面三角形ABC,與球面三角形$A'B'C'$,得全相重合. 若$AB=A'C'$, $AC=A'B'$, $\hat{A}=\hat{A}'$,則作球面三角形$A'B'C'$之對稱球面三角形,則與前同樣,得與ABC重合,然ABC與$A'B'C'$不得重合,故ABC與$A'B'C'$爲對稱. (II)得與(I)同樣證明. (III)二球面三角形之邊,乃於球之中心所作三面角,相等或互爲對稱,故球面三角形ABC, $A'B'C'$,全等或互爲對稱明矣. (IV)二球面三角形ABC, $A'B'C'$作其極三角形DEF, $D'E'F'$,則因DE

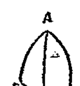


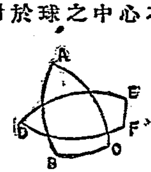


$=D'E'$, $DF=D'F'$, $EF=E'F'$ [155題],故二球面三角形DEF, $D'E'F'$全等,因而$\hat{D}=\hat{D}'$, $\hat{E}=\hat{E}'$, $\hat{F}=\hat{F}'$,故球面三角形DEF, $D'E'F'$之極三角形ABC, $A'B'C'$,三邊各相等,因而球面三角形ABC≡球面三角形$A'B'C'$. 若其各角逆序相等,則邊逆序相等,二球面三角形爲對稱.

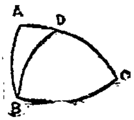
157. 球面三角形. (I)二邊相等,則對之之角亦相等. (II)二角相等,則對之之邊亦相等. (III)二角不等,則對大角之邊,大於對小角之邊. (IV)二邊不等,則對大邊之角,大於對小邊之角. (V)一三角形之二邊,各等於他三角形之二邊,而其二邊之夾角不等,則其第三邊不等,角大者之第三邊大. (VI)一三角形之二邊,各等於他三角形之二邊,而其第三邊不等,則其二邊之夾角不等,第三邊大者之夾角大.

圖 (I)過球面三角形ABC之頂點A,與BC之中點D畫大圓,則因$AB=AC$, AD共同, $BD=CD$,故球面三角形ABD與ABC爲對稱,故$\hat{B}=\hat{C}$. (II)作球面△ABC之極三角形DEF,則因DE, DF,對於球之中心之角各爲$\hat{B}$, $\hat{C}$,之補角,故相等,因而弧DE=弧DF,故依(I)而$\hat{E}=\hat{F}$,故等於$\hat{E}$, $\hat{F}$之補角之中心角之弧AB==弧AC. (III)球面三角形ABC,其

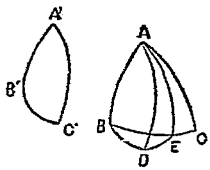




$\hat{B}>\hat{C}$, 今作等於 $\hat{C}$ 之角 CBD, 而作大圓弧 BD, 則弧 BD=弧CD, 但弧AB<弧BD+弧AD, 故 弧AB<弧AC.



(IV) AC>AB, 若 $\hat{C}>\hat{B}$, 則AB>AC, $\hat{B}=\hat{C}$, 則 AB=AC, 故 AC>AB, 則不可不 $\hat{B}>\hat{C}$. (V) 二球面三角形 ABC, A′B′C′, 其 AB = A′B′, AC=A′C′, $\hat{A}>\hat{A}'$. 今取球面三角形 A′B′C′, 重於 ABC 上, 則因 $\hat{A}'<\hat{A}$, 故 A′C′ 在 AB 與 AC 之間, 其位置爲 AD, 因而 B′C′ 爲 BD.



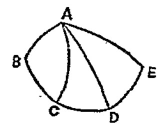
次二等分 $D\hat{A}C$ 畫大圓之弧 AE 與 BC 之交點爲E, 則因球面△ADE 與球面△ACE 爲對稱, 故 DE=CE, 但 BE+DE>BD. 故 BC>B′C′. 若 A′C′ 對於 AB, 在 AC 反對之側, 亦得同樣證明之. (VI) 次 AB=A′B′, AC=A′C′, BC>B′C′, 若 AB=A′B′, AC=A′C′, 而 A<A′, 則 B′C′>BC. 又若 AB=A′B′, AC=A′C′, 而 $\hat{A}=\hat{A}'$, 則 BC=B′C′, 故 AB=A′B′, AC=A′C′, 而 BC>B′C′, 則不可不 $\hat{A}>\hat{A}'$.

158. 球面三角形各角之和, 大於二直角, 而小於六直角.

圖 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, 各與邊 EF, DF, DE, 互爲補角, [前 11 題之圖], 而弧 EF, DF, DE 之和, 小於360°, 故 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>2R$. 次因球面三角形之各角小於二直角, 故 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<6\hat{R}$.

159. 球面五角形各角之和, 大於 6 直角, 而小於 10 直角.

圖 ABCDE 爲球面五角形, 則 $\hat{A}<2\hat{R}$, $\hat{B}<2\hat{R}$, $\hat{C}<2\hat{R}$, $\hat{D}<2\hat{R}$, $\hat{E}<2\hat{R}$, 故 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}<10\hat{R}$. 又畫大圓之弧 AC, AD, 則

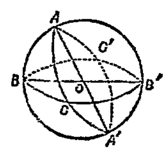


得三球面三角形, 而球面三角形各角之和, 大於 $2\hat{R}$, 故 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}>3\times2\hat{R}$, 卽 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}>6\hat{R}$.

注意　一般球面 n 角形各角之和, 大於 $(2n-4)\hat{R}$, 而小 $2n\hat{R}$.

160. 球面三角形之面積, 與半球之面積之比, 等於球面過剩, 與 4 直角之比.

圖 ABC 爲球面三角形, O爲球之中心, 將 AB, BC, CA, 之各邊, 延長作大圓, 則得 A′B′C′ 對稱球面三角形, 但球面三角形 ABC=

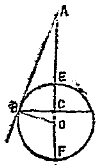


球面三角形 A′B′C′, 故 ABC+CA′B′=A′B′C′+CA′B′=月形CA′B′C′=月形 C, ABC+A′BC=月形A, ABC+ACB′=月形 B, 相加得 2ABC+半球面=月形(A+B+C), 但半球面=$2\hat{R}$月形, 故球面三角形 ABC, 等於將球面過剩之半分

為頂角之月形,故球面三角形ABC:半球面=球面過剩:$4\hat{R}$.

161. 假定地球為眞球,自海面昇上地徑長之高,可得見地球面之幾分.

圖 海面上地球高之點為A,則自A可得見地球之部分,為自A作切線,自切點B垂直於徑作平面所截之部分.因$B\hat{O}C=A\hat{B}C$,故$AC \cdot AO=\overline{AB}^2=AE \cdot AF$. 今將半徑為$r$,CE之長為$x$,則$\overline{AB}^2=AE \cdot AF=8r^2=(2r+x)3r$, $\therefore x=\frac{2}{3}r$,但球帶之面積,與高成比例,故所求之部分,為全地球之$\frac{1}{3}$.

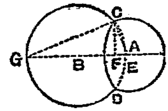


162. 球之面積,為其外接直圓壔表面積三分之二,而體積為其外接直圓壔體積三分之二.

圖 球之表面積為$4\pi r^2$,而其外接直圓壔之表面積為曲面積$4\pi r^2$[底為半徑為r之圓,故其周圍,等於$2\pi r$,高為$2r$,故其面積為$2\pi r\times 2r=4\pi r^2$.]與兩底面積$2\pi r^2$[因皆為半徑為r之圓]之和$6\pi r^2$,故球之表面積為外接直圓壔全面積三分之二明矣.又球之體積為$\frac{4}{3}\pi r^3$,而外接直圓壔之體積為$2\pi r^3$,故球之體積為其外接直圓壔體積三分之二.

163. 已知之球面,以過其中心之他球面截取之球帶面積,恆為一定.

圖 已知之球之中心為A,過A之他球之中心為B,其二球之交之小圓為CED,連結AB之直線,與平面CED之交點為F,中心為A, B之二球半徑為R, R′,則球帶$A\text{-}CED=2\pi.R'.AF$,今延長AB,使與中心B之球交於G,連結CG, CA, CF,則因$A\hat{C}G=\hat{R}$,而$CF\perp$於AB,故依平面幾何學$\triangle ACG \backsim \triangle AFC$,而$\overline{CA}^2=AF\times AG$,或$R^2=AF.2R'$,故球帶$A\text{-}CED=2\pi R'.AF=\pi R^2$為一定之面積.

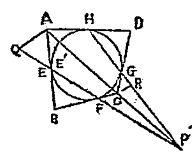


164. 一邊為a之立方體,試計算其外接球之體積.

圖 外接球之徑為$\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$,故其體積為$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3=\frac{4}{3}\pi\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\ a^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

165. 果修[Gauche]四邊形之四邊切於球,則其切點在同一之圓周上.

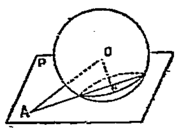
圖 果修四邊形ABCD之四邊,切於球,其切點為E, F, G, H,過H, G, F,畫小圓,延長HG, AC,其交點為P,連結PF,則因PH, PF,俱在小圓HGF之平面上,故PF與AB之交點E′,在小圓HGF之平面上,又DH=DG, CG=CF, BF=BE, AE=AH,故



$C\hat{G}P+A\hat{H}P=2\hat{R}$. 今自C作CR平行於AH, 則$C\hat{G}P$, $C\hat{R}G$, 皆為$A\hat{H}P$之補角, 故相等, 而CG=CR. 故PC : PA=CR : AH=CG : AH, 又作AQ平行於BC, 則PC : PA=CF : AQ, 故AQ=AH=AE, 而AE′ : BE′=AQ : BF=AE : BE, 而AE′+BE′=AB=AE+BE, 故E, E′, 必為同一之點, 即H, G, F, E, 在過H, G, F, 之小圓周上.

166. 以含一已知點之平面截一球, 其截口為圓, 求其圓心之軌跡.

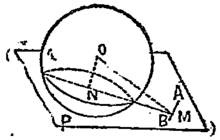
圖 含已知點A之平面P, 截已知中心O之球, 連結所成截口之圓心N與O, 則因ON垂直於平面P, 故$O\hat{N}A=\hat{R}$,



故點N之軌跡, 為OA為徑之球面在球O內之部分. 但A非在球O之外時, 則軌跡為全球.

167. 以含一已知直線之平面截球, 求其截口圓之中心之軌跡.

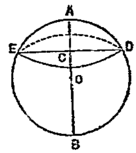
圖 以含已知直線AB之平面P, 截中心O之已知球所成截口圓之中心為N, 則ON垂直於平面P. 今自O



作AB之垂線OM, 連結NM, 則$M\hat{N}O=\hat{R}$, 且△OMN之平面, 垂直於AB, 而N恆在過O垂直於AB之平面△OMN上, 而$M\hat{N}O=\hat{R}$, 故點N之軌跡, 在過O垂直於AB之平面上, 以OM為徑之圓周, 在球O內之部分. 但點M非在球O之外時, 則軌跡為全圓周.

168. 一底之球缺之高為h, 其底半徑為ρ, 則其體積為$\frac{1}{6}\pi h\{h^2+3\rho^2\}$.

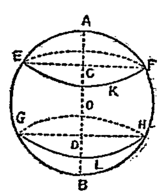
圖 球缺ADE, AC=h, CD=ρ, $\overline{CD}^2=\overline{OD}^2-\overline{OC}^2$, 故$\rho^2=r^2-(r-h)^2=2rh-h^2$, 或$r=\frac{\rho^2+h^2}{2h}$, 但球缺ADE之體積為



$\pi h^2\left(r-\frac{1}{3}h\right)$, 故將前得$r$之值代入此式, 則得$\pi h^2\left(\frac{\rho^2+h^2}{2h}-\frac{1}{3}h\right)=\frac{1}{6}\pi h\{h^2+3\rho^2\}$.

169. 球缺之高為h, 其兩底半徑為ρ_1, ρ_2, 則其球缺之體積, 為$\frac{1}{6}\pi h\left\{h^2+3\left(\rho_1^2+\rho_2^2\right)\right\}$.

圖 球缺EKF-GLH=球缺AGH∼球缺AEF. 然CE=ρ_1, DG=ρ_2, CD=h, AC=x, 則球缺AGH=$\pi(h+x)^2\left\{r-\frac{1}{3}(h+x)\right\}$, 球缺AEF=$\pi x^2\left\{r-\frac{1}{3}x\right\}$. 故球缺EKF-GLH=$\frac{\pi h}{3}\{3rh+6rx-(h^3+3hx+3x^2)\}$. 但$\rho_1^2=x(2r-x)$, 或$2rx=\rho_1^2+x^2$ …(1). 同樣$2r(h+x)=\rho_2^2+(h+x)^2$, 因而$hr=\frac{1}{2}(\rho_2^2-\rho_1^2+h^2)+$



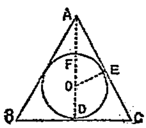
hx...(2). 將(1)與(2)之和三倍之代入球缺體積之式內, 則球缺EKF-GLH $=\frac{1}{3}\pi h\{\frac{3}{2}(\rho_2^2-\rho_1^2+h^2)+3hx+3\rho_1^2+3x^2-(h^2+3hx+3x^2)\}=\frac{1}{6}\pi h\{h^2+3(\rho_1^2+\rho_2^2)\}$.

170. 有同中心之二球, 其半徑爲 r, r', 今於中心同傍在 a 及 $a+b$ 之距離之平面, 截此二球, 試求此二平面, 與二球面間之部分之體積.

解 以二平面截球之截面半徑, 爲 $\sqrt{r^2-a^2}, \sqrt{r^2-(a+b)^2}$, 其球缺之高爲 b, 故此二平面所生第一球缺之體積, 爲 $\frac{1}{6}\pi b\{b^2+3(r^2-a^2+r^2-\overline{a+b}^2)\}$. 同様 $\frac{1}{6}\pi b\{b^2+3(r'^2-a^2+r'^2-\overline{a+b}^2)\}$ 爲第二球缺之體積, 故所求之體積爲其差 $\pi b(r^2-r'^2)$.

171. 外切於球正圓錐之高, 爲球徑之二倍, 則圓錐之全面積, 與體積, 各爲球之面積與體積之二倍.

解 O爲球之中心, ABC爲外切於球之正圓錐, AD爲自A作BC之垂線, 則D爲切點明矣. 將母線AC切球之點



爲E, 則 $AC:CD=AO:OE=3:1$, 故 $AC=3.CD$, 而 $\overline{AC}^2-\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$, 故 $8\overline{CD}^2=16\overline{OD}^2$, 卽 $\overline{CD}^2=2\overline{OD}^2$, 但因此圓錐之側面積爲 $\frac{1}{2}AC.2\pi CD=3\pi\overline{CD}^2$, 故其全面積爲 $3\pi\overline{CD}^2+\pi\overline{CD}^3=4\pi\overline{CD}^2=8\pi\overline{OD}^2$. 又此圓錐之體積爲 $\frac{1}{3}\pi AD.\overline{CD}^2=\frac{1}{3}\pi.4OD.2\overline{OD}^2=\frac{8}{3}\pi\overline{OD}^3$. 故此圓錐之全面積及體積爲球之面積及體積之二倍.

172. 球之體積與其外切立方體之體積之比, 爲 $\pi:6$.

解 球之半徑爲R, 其體積爲 $\frac{4}{3}\pi R^3$, 而其外切立方體之體積爲 $(2R)^3=8R^3$, 故球之體積:立方體之體積 $=\frac{4}{3}\pi R^3:8R^3=\pi:6$.

173. 球之體積與其內接立方體之體積之比爲 $\pi\sqrt{3}:2$.

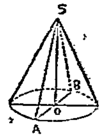
解 球之半徑爲R, 則其體積爲 $\frac{4}{3}\pi R^3$. 而將其內接立方體之一邊爲 a, 則 $a^2+2a^2=4R^2$, 故 $a=\frac{2}{\sqrt{3}}R$, 故立方體之體積爲 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^3=\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3$, 故所求體積之比爲 $\frac{4}{3}\pi R^3:\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3=\pi\sqrt{3}:2$.

174. 有一直圓壔兩端, 附半球之鍋爐, 其全長爲20呎, 其周圍爲11呎, 問其面積, 充滿之水量如何.

解 直圓壔之半徑爲R, 則 $2\pi R=11$呎, 故 $R=\frac{11}{2\pi}$呎, 而二半球之面積爲 $4\pi\times\left(\frac{11}{2\pi}\right)^2$, 卽 $\frac{121}{\pi}$平方呎. 圓壔部分之側面積爲 $11\times\left(20-2\times\frac{11}{2\pi}\right)$, 卽 $11\times\left(20-\frac{11}{\pi}\right)$平方呎. 故鍋爐之面積爲 $\frac{121}{\pi}+11\times\left(20-\frac{11}{\pi}\right)$, 卽 220平方呎. 又其體積爲 $\frac{4}{3}\pi R^3+\pi R^2\left(20-\frac{11}{\pi}\right)=\frac{4}{3}\pi\frac{11^3}{8\pi^3}+\pi\frac{11^2}{4\pi^2}\times\left(20-\frac{11}{\pi}\right)$, 卽 $\frac{11^2\times60\pi-11^3}{12\pi^2}$ 立方呎.

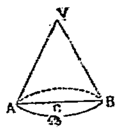
175. 正圓錐以含其軸之任意平面截之,其截口關於軸而爲線對稱.

解 正圓錐之軸爲SO,含軸之平面截口爲SAB,則因SAO爲直三角形迴轉時之一位置,故SA爲母線,同樣SB亦爲母線,而二直角三角形SAO,SBO,全等,故截口SAB關於SO而爲線對稱.



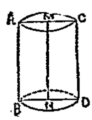
176. 正圓錐之側面積,爲其底面積之二倍,而其高爲4寸,問底之半徑如何.

解 正圓錐V-AB之高VC爲h,底半徑AC爲r,斜高VA爲s,則其側面積爲πrs,而底面積爲πr^2,而因$\pi rs=2\pi r^2$,故$s=2r$. 又$s^2-h^2=r^2$,故$4r^2-h^2=r^2$,因而$r=\frac{h}{\sqrt{3}}$,即$\frac{4}{\sqrt{3}}$寸.



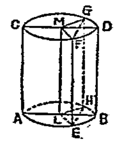
177. 求自一直線在已知距離之點之軌跡.

解 自一直線MN已知距離之點之軌跡,在平面幾何學,則爲自MN在已知距離之二平行線AB,CD,而在立體幾何學,則爲將MN爲軸,AB,CD,迴轉MN一周,所成之直圓壔明矣. 而迴轉AB,CD,所生之直圓壔同一. 故自一直線MN已知距離之點之軌跡,爲此已知距離爲半徑,已知直線爲軸,無限之高之直圓壔.



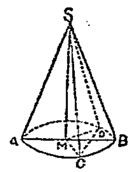
178. 直圓壔平行其軸之平面截口爲矩形.

解 直圓壔平行於其軸LM之平面截口爲EFGH. 夫直圓壔爲將矩形一邊爲軸,迴轉而成者,故含ML過E之平面與圓壔之面之交,爲平行於ML之直線. 又平面EFGH與平面MLE之交,亦爲平行於ML之直線,故直線EF爲圓壔之面與平面EFGH之交,而EF平行於LM. 同樣HG亦平行於LM,但LM垂直於兩底面,故EF,GH,皆垂直於EH,FG,故EFGH爲矩形.



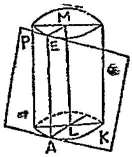
179. 過正圓錐之頂點之平面截口爲二等邊三角形.

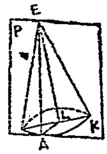
解 過正圓錐頂點S之平面截口爲SCD,連結MC,MD,則△SMC爲迴轉之直三角形之一位置,故SC爲一母線,同樣SD亦爲一母線,故SC,SD,爲相等之直線,而截口SCD爲二等邊三角形.



180. 直圓壔或正圓錐之切面,垂直含軸及切線[即切面所含母線]之平面.

解 於直圓壔或正圓錐之母線AE切之之平面爲P,則P爲中心L之圓之切線AK及EA所定之平面,在圓壔,則AL垂直於AK,EA,故含AL之平





面,卽含EA, ML,之平面,而垂直於平面P. 在圓錐,則EL垂直於底面,而LA垂直於底面上直線AK,故EA垂直於AK,故AK垂直於AL, EA,故含AK之平面P,與EA, AL,所定之平面,互爲垂直,卽與EA, EL,所定之平面,互爲垂直.

181. 相似直圓壔側面積之比,等於其高之平方之比,又等於其底半徑之平方之比. [全面積之比亦同樣].

證 相似直圓壔之高爲h, h',底之半徑爲R', R,則其側面積爲$2\pi Rh$, $2\pi R'h'$,故此二圓壔側面積之比爲$Rh : R'h'$. 但二圓壔爲相似圓壔,故$R : R'=h : h'$,故$Rh : R'h'=h^2 : h'^2=R^2 : R'^2$,卽二相似直圓壔之側面積之比,等於$h^2 : h'^2$或$R^2 : R'^2$. 同樣相似直圓壔全面積之比,亦等於$h^2 : h'^2$或$R^2 : R'^2$.

182. 相似正圓錐側面積之比及全面積之比,等於底半徑之平方比,等於高之平方之比,又等於斜高之平方之比.

證 相似正圓錐之半徑爲R, R',高爲h, h',斜高爲S, S',側面積爲a, a',則因$a=\pi RS$, $a'=\pi R'S'$,故$a : a'=\pi RS : \pi R'S'=RS : R'S'$, 但 $R : R'=S : S'=h : h'$,故$a : a'=RS=R'S'=R^2 : R'^2=S^2 : S'^2=h^2 : h'^2$,同樣全面積之比,亦知等於$R^2 : R'^2$, $S^2 : S'^2$, $h^2 : h'^2$.

183. 球帶之面積,等於底爲大圓等高之直圓壔之側面積.

證 球帶之高爲h,球半徑爲R,則球帶之面積爲$2\pi Rh$,故此面積等於底爲大圓高爲h之直圓側面積壔明矣.

184. 相似圓壔體積之比,等於其高之三乘比,又等於其底半徑之三乘比.

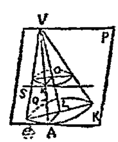
證 相似圓壔之高爲h, h',底半徑爲$R. R'$,其體積爲V, V',則$V=\pi R^2 h$ $V'=\pi R'^2 h'$,故$V : V'=R^2 h : R'^2 h'$,但$R : R'=h : h'$,故$V : V'=R^3 : R'^3=h^3 : h'^3$.

185. 相似圓錐體積之比,等於其高之立方之比,又等於其底半徑之立方之比.

證 $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, $V=\frac{1}{3}\pi R'^2 h'$,故與前題同樣,而知$V : V'=R^3 : R'^3=h^3 : h'^3$.

186. 試於正圓錐側面上一點,作切之之平面.

證 正圓錐底之中心爲L,過側面上一點Q之母線爲VQA,於A切中心L底圓之直線爲AK,則含二直線,

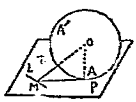


VA, AK,之平面P,爲切正圓錐之平面蓋過平面P上任意一點S,畫平行

於底之平面,則截口爲中心爲O之圓明矣,今將此圓與母線VA之交點爲R,連結SR,則SR平行於AK,又因AL//OR,而AL垂直於AK,故OR⊥SR,故SR爲中心O之圓之切線,因而S在圓錐之外,故平面P,不於VA外之點與圓錐相遇,即平面P爲過Q切圓錐之平面.

187. 含已知直線,作切於已知球之平面.

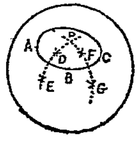
【解】P爲所求之平面,A爲切點,OM爲自O向直線L所作垂線,連結AM,則因OA垂直於平面P,故OA⊥AM,且AM⊥L,故平面OAM,過O垂直於已知直線L,而OM, OA,有一定之長,$\hat{A}$爲直角,故△OAM可得作之,因而點A可得而定. 由是先作過O垂直於L之平面,此平面與L之交點爲M,於此平面上以OM爲徑畫圓周,此圓周與已知球面截點爲A, A′,則含L過A,及A′,之二平面P, P′,爲所求.



【注意】若直線L與球交,則此問題爲不能.

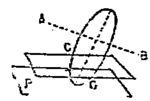
188. 過球面上已知三點畫圓周.

【解】已知三點爲A, B, C,過A, B, C,得畫圓,將P爲小圓ABC之極,而作大圓之弧PA, PB, PC,則弧PA, PB, PC,互相等. 由是求點P,使PA, PB, PC相等,乃將P爲中心,PA爲半徑,於球面上畫小圓ABC,則此小圓爲所求. [求所求小圓之極法,以A, B,爲中心,畫半徑相等之圓,其交點爲D, E,又以B, C,爲中心,畫半徑相等之圓,其交點爲F, G,過D, E,與F, G之二大圓周之交點即點P即是.]



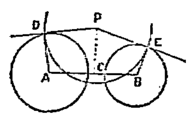
189. 過已知二點,切已知平面,作已知半徑之球.

【解】A, B,爲中心,已知半徑爲半徑,所作二球之交爲小圓,所求之球之中心C,在此小圓之圓周上,且在自平面P距離已知半徑之平面上. 由是將小圓周與平面之交點C爲中心,CA爲半徑畫球,則此球爲所求. [所求之點C,恆有二個.]



190. 有已知二球,試畫直角截之之球.

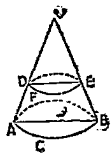
【解】所求之球中心爲P,自P作已知二球之切線PD, PE,連結AD, BE,則球P直角截球A, B,因而$A\hat{D}P=B\hat{E}P=\hat{R}$,故D, E,爲球面P截二球面A, B,截口上之點,即PD, PE,爲球P之半徑. 今自P作垂直於中心線之平面與AB之交點爲C,則$\overline{PD}^2=\overline{PA}^2-\overline{DA}^2$, $\overline{PE}^2=\overline{PB}^2-\overline{BE}^2$,而



PD=PE, 故 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{DA}^2-\overline{BE}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$, 因而C為定點, 而P在過定點C, 且垂直於AB之平面上. 由是將AB分於C, 使 $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{DA}^2-\overline{BE}^2$, 乃於C作垂直於AB之平面, 則此平面上之點, 為所求球之中心.

191. 正圓錐之側面, 以平行於其底之平面二等分之.

解 正圓錐V-ABC, 二等分其側面, 以平行於其底之平面截之, 其截口為圓DEF, 其半徑為r, 底ABC之半徑為R, 則VD:VA=r:R, 而V-DEF, V-ABC之側面積, 為 $\pi.r.$VD, $\pi.$R.VD, 故 $\pi.r.$VD : $\pi.$R.VA $=r.$VD : R.VA $=\overline{VD}^2:\overline{VA}^2=1:1$, 因而VD為將VA為對角線之正方形之一邊. 由是將正圓錐V-ABC之斜高VA, 為正方形之對角線, 等於其正方形之一邊取VD, 過D平行於底作平面, 則此平面, 二等分其側面.



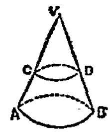
192. 正圓錐之側面, 以平行於其底之平面, 分為任意之比.

解 所求之平面截口圓之半徑為r, 底之半徑為R, 已知之比為$m:n$, 則[前題之圖]VD:VA=r:R, 故直圓錐V-DEF, V-ABC, 之側面積為 a, a', 則 $a:a'=$VD.r:VA.R$=\overline{VD}^2:\overline{VA}^2=m:m+n$. 由是將正圓錐之斜高VA, 於D分為 $\overline{VD}^2:\overline{VA}^2=m:m+n$, 過D平行於底作平面, 則此平面為所求.

注 參照第五門530題之注意.

193. 使正圓錐之底面積, 與平行於底之平面截口面積之比, 等於已知之比.

解 將正圓錐V-AB, 以平行於其底之平面截之, 其底及截口之半徑為R, R$'$, 已知之比, 為$m:n$, 則因 $\mathrm{R}^2:\mathrm{R}'^2=\overline{VA}^2:\overline{VC}^2=m:n$, 故將VA於C分為 $\overline{VA}^2:\overline{VC}^2=m:n$, 作過C平行於其底之平面, 即得.



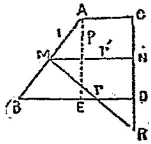
194. 有圓壔, 其高為其底半徑之半分, 其全面積, 等於其他已知圓之面積 πa^2, 求作其高及其底之半徑.

解 圓壔之高為h, 則此圓壔之全面積, 為 $2\pi.2h^2+2\pi(2h)^2=12\pi h^2=\pi a^2$, 故 $12h^2=a^2$, 或 $a:h=h:\frac{a}{12}$, 由是作 a, $\frac{a}{12}$, 之比例中項h, 則h為所求圓壔之高, 而取其長之二倍, 則得所求之半徑.

旋轉體

195. 一直線以在其平面上一直線為軸, 而迴轉之, 所生曲面之面積, 等於此直線中點所作垂線, 夾於此直線及軸間之部分, 為半徑之圓周, 與此直線在軸上之正射影之積.

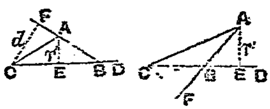
圖 生曲面之直線AB之長為h，其在軸上之正射影為CD$=p$，AB中點M所畫圓周之半徑MN為r'，中點M之AB垂線MR之長為r，則AB所生之面積為$p.2\pi r$. 試平行於CD作AE，夫



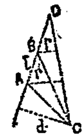
以AB所生之面積$=h.2\pi r'$，而因△ABE∽△MRN，故$\frac{r'}{p}=\frac{r}{h}$，∴ $pr=r'h$，故以AB所生之面積為$p.2\pi r$.

196. 任意三角形ABC，以在其平面上，過其頂點，而不截之之直線為軸，而廻轉之，所生體之體積，等於自C所作高之三分之一，乘以AB所生之面積.

圖 任意三角形ABC，C為一角頂，以過C且在其平面上而不截之之直線CD，為軸而廻轉之. (1) 軸CD與邊CB相合者. 自A作軸CD之垂線AE$=r'$，自C作AB之垂線CF$=d$，則



△ABC廻轉所生體之體積，為二直三角形ACE, ABE，以CD為軸廻轉所生二正圓錐體積之和[甲圖]，或差[乙圖]，故△ABC廻轉所生體之體積，為$\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2(EC\pm BE)=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2\times BC$，但$\triangle ABC=\frac{1}{2}AE.BC=\frac{1}{2}CF.AB$，故$\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2.BC=\frac{1}{3}CF.\pi AE.AB=\frac{1}{3}d\pi r'.AB$，而$\pi r'AB$等於AB廻轉所生之面積，故△ABC以CD為軸廻轉所生體之體積，等於自C所作高之三分之一乘邊AB所生之面積. (2) 軸CD與邊CD不相合者. 將AB之延線與CD之交點為D，乃自B作CD之垂線，其長為r，則△ACD, △BCD，以一邊CD為軸廻轉之體積為S, S'，依(1)求之如次. $S=\frac{1}{3}d.\pi r'.AD$,

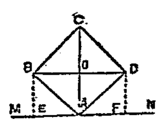


$S'=\frac{1}{3}d.\pi rBD$，∴ △ABC以CD為軸廻轉所生體之體積為$S-S'=\frac{1}{3}d\pi(r'.AD-r.BD)$. 但$\pi(r'.AD-r.BD)$等於AB廻轉所生面之面積，故如題言.

注意 過C之直線CD，平行於AB者，亦得容易證明之.

197. 一邊之長為h之正方形ABCD，過其一頂點A平行於BD之直線廻轉所生之立體，試計算其全表面積及體積，又由是證明此體全表面積，等於正方形之周，與二對角線交點廻轉所畫圓周之積，而其體積，等於正方形之面積，與其對角交點所畫圓周之積.

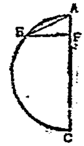
圖 正方形ABCD，過A平行於BD之直線MN，廻轉所生體之表面積，為邊AB, BC, CD, DA，廻轉MN所生面之面積之和，但$AE=BE=AF=DF=\frac{1}{\sqrt{2}}h$,



故 AB 廻轉 MN 所生面之面積，爲 $\pi.\frac{1}{\sqrt{2}}h.h=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi h^2$，AD 廻轉 MN 所生面之面積，爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi h^2$，BC 廻轉 MN 所生面之面積爲 $\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h+\sqrt{2}h\right)h=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\pi h^2$，CD 廻轉 MN 所生面之面積，爲 $\frac{3}{\sqrt{2}}\pi h^2$，故所求之表面積爲 $\frac{8}{\sqrt{2}}\pi h^2=4\sqrt{2}.\pi.h^2$. 次於正方形 ABCD 廻轉 MN 所生體之體積，等於自梯形 ABCE 廻轉所生圓臺體積之二倍，減 $\triangle$ABE 所生正圓錐體積之二倍，但 ACBE 廻轉所生圓臺之體積，爲 $\frac{1}{3}\pi\times\frac{1}{\sqrt{2}}h\left(\frac{1}{2}h^2+2h^2+\frac{1}{\sqrt{2}}h.\sqrt{2}h\right)=\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{\sqrt{2}}h\times\frac{7}{2}h^2=\frac{7}{6\sqrt{2}}\pi h^3$，而 $\triangle$ABE 廻轉所生正圓錐之體積，爲 $\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}h^2.\frac{1}{\sqrt{2}}h=\frac{1}{6\sqrt{2}}\times\pi h^3$，故所求之體積爲 $\frac{7}{3\sqrt{2}}\pi h^3-\frac{1}{3\sqrt{2}}\pi h^3=\frac{6}{3\sqrt{2}}\pi h^3=\sqrt{2}\pi h^3$. 次因 OA$\perp$MN，而 OA$=\frac{1}{\sqrt{2}}h$，故 O 畫圓周爲 $2\pi.\frac{1}{\sqrt{2}}h=\sqrt{2}\pi h$，因而 ABCD 之周與此之相乘積爲 $4\sqrt{2}\pi h^2$，而此值等於所求表面積之值，又因正方形之面積爲 h^2，故與 O 所畫圓周之相乘積爲 $\sqrt{2}\pi h^3$，而此值等於所求體積之值.

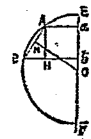
198. 球帶之底之一至爲零之極限，其面積，即以半圓徑 AFC 爲軸，弧 AB 廻轉所生之面積，等於以 AB 爲半徑之圓面積.

證 球帶之面積爲 $2\pi r.$AF，[見第一門球帶之條]，或 $\pi.$AF.AC$=\pi.\overline{\text{AB}}^2$，即球帶之面積，等於以 AB 爲半徑之圓面積.



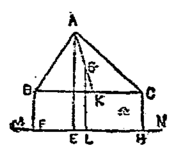
199. 球缺之二底[截口]半徑爲 r'，r''，高[平行二平面間之距離]爲 h，則其體積 $V=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}h^3$.

證 自半圓周上之點 A, B, 作徑 EF 之垂線 Aa, Bb，以徑 EF 廻轉半圓，則 AabB 成球缺明矣. 本題之證，見第一門球缺之條.



200. $\triangle$ABC 之邊 AB, BC, CA, 爲 13 寸，14 寸，15 寸，此三角形同一之平面上，距離 BC 8 寸，平行於 BC 之直線 MN，以之爲軸，廻轉三角形，試計算所生體之全表面積及體積. 又由是證明此體之全面積，等於 $\triangle$ABC 之周與重心廻轉所畫圓周之積，其體積，等於 $\triangle$ABC 之面積，與其重心所畫圓周之積.

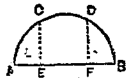
證 $\triangle$ABC 以平行於 BC 之直線 MN 爲軸，而廻轉之所生之全表面積，爲 AB, AC, 廻轉所生二圓臺之側面積，與 BC 廻轉所生直圓壔之側面積之和. 但 BF$=$CH$=8$ 寸，AE$=\frac{2\Delta}{\text{BC}}+BF=\frac{2\sqrt{21\times8\times7\times6}}{14}+8=20$ 寸，故 AB 廻轉所生圓臺之側面積，爲 $\pi(8+20)\times13$，



即364π平方寸，AC廻轉所生直圓壔之側面積，爲$\pi(8+20)\times15$，即420π平方寸，BC廻轉所生直圓壔之面側積，爲$2\pi\times8\times14$，即224π平方寸．故所求之面積，爲$(364+420+224)\pi$平方寸$=1008\pi$平方寸．次△ABC廻轉所生體之體積，爲梯形ABFE, ACHE,廻轉所生二正圓臺體積之和，減矩形BCHF廻轉所生直圓壔之體積．但$EF=\sqrt{13^2-12^2}$，即5寸，$HE=14-5$，即9寸，故梯形ABFE廻轉所生正圓臺之體積，爲$\frac{1}{3}\pi\times5\times(64+400+160)$，即$1040\pi$立方寸，梯形ACHE廻轉所生正圓臺之體積，爲$\frac{1}{3}\pi\times9\times(64+400+160)$，即$1872\pi$立方寸，矩形BCHF廻轉所生直圓壔之體積，爲$\pi\times64\times14$，即$896\pi$立方寸，故所求之體積，爲$(1040+1872-896)\pi$即$2016\pi$立方寸．又ABC之重心爲G，則自G作MN之垂線GL，其長爲$\frac{1}{3}(20+8\times2)$，即12寸，故G所畫圓周爲$2\pi\times12$，即24π寸，故△ABC之周，與G所畫圓周之相乘積爲$24\pi\times42$，即1008π平方寸，而此值爲已求得表面積之值．次△ABC之面積，與重心G所畫圓周之積，爲$84\times24\pi$，即2016π立方寸，而此值等於已求得體積之值．

201. 半圓周分爲三等分，將其徑爲軸而廻轉之，則中央之弧，所生球帶之面積，等於他二部分所生球帶面積之和．

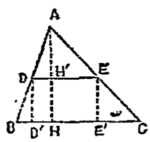
【解】半圓周於C, D, 三等分之，自C,D, 向AB之垂線CE, DF,



則因CE, DF, 爲AB爲徑之圓內接正三角形一邊之半分，故將半徑爲R，則$CE=DF=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，因而$AE=BF=\frac{1}{2}R$，$EF=R$，故弧AC, CD, BD, 以AB爲軸所生球帶之面積，爲$2\pi R.\frac{1}{2}R=\pi R^2$，$2\pi R.R=2\pi R^2$，$\pi R^2$，即弧CD，因廻轉所生球帶之面積，等於弧AC, BD，因廻轉所生球帶之面積之和．

202. 連結三角形二邊之中點，分三角形爲二部分，以第三邊爲軸而廻轉之，求二部分所生體積之比．

【解】將△ABC之二邊AB, AC, 之中點爲D, E, 其高爲H, BC爲a，則△ABE以BC爲軸而廻轉之所生體之體積，



爲$\frac{1}{3}\pi h^2a$，而梯形BCED以BC爲軸而廻轉所生體之體積，爲

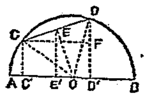
$$\frac{1}{3}\pi\overline{DD'}^2.BD'+\pi\overline{DD'}^2.D'E'+\frac{1}{3}\pi\overline{DD'}^2\times CE'=\frac{1}{3}\pi DD'^2(BD'+3D'E'+CE')=\frac{1}{3}\pi\overline{DD'}^2.2BC=\frac{2}{3}\pi\frac{h^2}{4}.a=\frac{1}{6}\pi h^2.a,$$

故△ADE以BC爲軸廻轉所生體之體積，爲$\frac{1}{3}\pi a.h^2-\frac{1}{6}\pi a.h^2=\frac{1}{6}\pi ah^2$．故△ADE與梯形BCED，以BC爲軸廻轉所生二體體積之比爲1．

203. 弓形以不截之之徑爲軸而廻轉所生體之體積，等於以弓形之弦爲半

徑之圓為底,此弦在軸上之正射影為高,之直圓壔體積之六分之一.

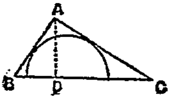
圖 不截弓形CD之徑為AB,自C, D,向AB作垂線CC′, DD′,則扇形OCD,以AB為軸廻轉所生體之體積,



若此圓之半徑為R,則為 $\frac{2}{3}\pi R^2.C'D'$, 而△OCD以AB為軸廻轉所生體之體積,為 $\frac{2}{3}\pi EE'.CD.OE$. [OE⊥CD, EE′⊥AB, CF⊥DD′]. 又因△CDF∽△EOE′, 故 CD.EE′=OE.CF=OE.C′D′, 因而 $\frac{2}{3}\pi EE'.CD.OE=\frac{2}{3}\pi.\overline{OE}^2C'D'$. 故弓形CD廻轉所生體之體積,為 $\frac{2}{3}\pi C'D'\left(R^2-\overline{OE}^2\right)=\frac{2}{3}\pi C'D'\left(\frac{CD}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\pi\overline{CD}^2.C'D'$. 但CD為底之半徑與C′D′為高之直圓壔之體積,為 $\pi\overline{CD}^2.C'D'$, 故弓形CD廻轉所生體之體積,等於底半徑為CD高為C′D′之直圓壔體積 $\frac{1}{6}$.

204. 直三角其夾直角之二邊,為4尺及5尺,以斜邊為軸廻轉此三角形所生體之體積,及切於此體內之球之體積,試計算之.

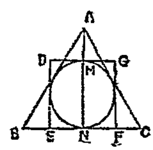
圖 AB=4尺, AC=5尺,故BC=$\sqrt{41}$尺, 但因 BD.BC=$\overline{AB}^2$, 故 BD=$\frac{16}{\sqrt{41}}$尺, CD=



$\frac{25}{\sqrt{41}}$尺,而△ABC廻轉BC所生體之體積,為△ABD, △ACD,廻轉所生二正圓錐體積之和. 夫△ABD廻轉所生正圓錐之體積,為 $\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.BD=\frac{1}{3}\pi.\frac{20^2}{41}.\frac{16}{\sqrt{41}}$, 即 $\left(\frac{6400}{123,\sqrt{31}}\pi\right)$ 立方尺, △ACD廻轉所生直圓錐之體積,為 $\frac{1}{3}\pi.\frac{20^2}{41}.\frac{25}{\sqrt{41.}}$, 即 $\left(\frac{10000}{123\sqrt{41}}\pi\right)$ 立方尺, 故△ABC廻轉所生體之體積,為 $\left(\frac{16400}{123\sqrt{41}}\pi\right)$ 立方尺, 又△ABC廻轉所生體內切球之半徑為 $\frac{20}{9}$ 尺, 故所求球之體積,為 $\frac{4}{3}\pi\times\frac{20^3}{9^3}$, 即 $\left(\frac{32000}{2187}\pi\right)$ 立方尺.

205. 同一之圓,外切正三角形,及正方形之一邊,在同一之直線上,以垂直於此直線之徑為軸,而廻轉此全形,則正方形廻轉所生直圓壔之全面積,[又體積]為正三角形廻轉所生正圓錐之全面積,[又體積]與圓之廻轉所生之球面積[又體積]之比例中項.

圖 半徑為R之圓,外切正三角形ABC, 及正方形EDFG, 其一邊BC與EF, 在同一之



直線上,垂直於BC之徑為MN, 則因MN過A及DG, EF, 之中點, 故△ABC廻轉MN所生正圓錐之全面積,及體積,為 $\pi BN.AB+\pi\overline{BN}^2=\pi BN(AB+BN)=\pi.BN.3BN=\pi.\sqrt{3}R.3\sqrt{3}R=9\pi R^2$, 及 $\frac{1}{3}\pi\overline{BN}^2.AN=\frac{1}{3}\pi.(\sqrt{3}R)^2.3R=3\pi R^3$, 而

球之表面積及體積,爲$4\pi R^2$及$\frac{4}{3}\pi R^3$,又正方形DEFG廻轉MN所生全面積及體積,爲$2\pi EN(MN+EN)=2\pi R(2R+R)=6\pi R^2$,及$\pi\overline{EN}^2.MN=2\pi R^3$,但$9\pi R^2 : 6\pi R^2=3:2$, $6\pi R^2 : 4\pi R^2=3:2$, $3\pi R^3 : 2\pi R^3=3:2$, $2\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R^3=3:2$, 故$9\pi R^2 : 6\pi R^2=6\pi R^2 : 4\pi R^2$, $3\pi R^3 : 2\pi R^3=2\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R^3$.

(第六門畢)

第七門

平面三角法解法之部

SEVENTH SECTION

The Solutions of Exercises

IN

PLANE TRIGONOMETRY

第七門 平面三角法解法之部 目次

●圓周率 π 之近似值爲 $\frac{22}{7}$,更精密之近似值爲 $\frac{355}{113}$,而至小數第二十位之值,爲 3.14159265358979323816. 又其逆數爲 0.31830988618379067153.

●計算 π 之值,則爲自 $\frac{1}{3}\sqrt{3}=\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ 而得 $\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\right\}$ 但更便利者爲 $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\cdots\cdots$

●本書不論三角和之範式,以作之甚容易也. 例如次 $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$, 又 $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin A\sin C-\cos C\sin A\sin B$,

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B},$$

$$\cot(A+B+C)=\frac{\cot A+\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1}.$$

用此公式則 670 頁 54 題可直得其結果.

sin a = $\frac{斜}{对}$

cos = $\frac{斜}{底}$

sin a $\frac{斜}{对}$

cos $\frac{斜}{底}$

Tan $\frac{底}{对}$

數學辭典

Tan $\frac{底}{对}$

第七門　平面三角法解法之部

平面三角法之公式

角之測法

六十分法	六十分法與弧度法之比較
1直角=90度. 1度=60分. 1分=60秒.	$\frac{D}{180}=\frac{a}{\pi}$.

三角函數之定義

sinA= 垂線÷斜邊.

cosA= 底邊÷線邊.

tanA= 垂線÷底邊.

cosecA. secA, cotA 爲上之三逆數

易知之三角函數之關係

$\sin A\times \operatorname{cosec} A=1$.

$\cos A\times \sec A=1$.

$\tan A\times \cot A=1$.

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

$1+\tan^2 A=\sec^2 A$.

$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$.

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$　　$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$.

餘角之三角函數

$\sin(90^\circ-A)=\cos A$.

$\cos(90^\circ-A)=\sin A$.

$\tan(90^\circ-A)=\cot A$.

補角之三角函數

$\sin(180^\circ-A)=\sin A$.

$\cos(180^\circ-A)=-\cos A$.

$\tan(180^\circ-A)=-\tan A$.

負角之三角函數

$\sin(-A)=-\sin A$.

$\cos(-A)=\cos A$.

$\tan(-A)=-\tan A$.

差90°之二角之三角函數

$\sin(90^\circ+A)=\cos A$.

$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$.

$\tan(90^\circ+A)=-\cot A$.

差180°之二角之三角函數

$\sin(180^\circ+A)=-\sin A$.

$\cos(180^\circ+A)=-\cos A$.

$\tan(180^\circ+A)=\tan A$.

和 270° 之二角之
三角函數

$$\sin(270°-A)=-\cos A.$$
$$\cos(270°-A)=-\sin A.$$
$$\tan(270°-A)=\cot A.$$

差 270° 之二角之
三角函數

$$\sin(270°+A)=-\cos A.$$
$$\cos(270°+A)=\sin A.$$
$$\tan(270°+A)=-\cot A.$$

和 360° 之二角之
三角函數

$$\sin(360°-A)=-\sin A.$$
$$\cos(360°-A)=\cos A.$$
$$\tan(360°-A)=-\tan A.$$

二角之三角函數

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$
$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$
$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$
$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}.$$
$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$
$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B.$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B.$$
$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B.$$
$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B.$$
$$\sin S+\sin T=2\sin\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}.$$
$$\sin S-\sin T=2\cos\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}.$$
$$\cos S+\cos T=2\cos\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}.$$
$$\cos T-\cos S=2\sin\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}.$$

倍角之三角函數

$$\sin 2A=2\sin A\cos A.$$
$$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$$
$$=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A.$$
$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}.$$
$$\cot 2A=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A}.$$
$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.$$
$$\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A.$$
$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.$$
$$\cot 3A=\frac{\cot^3A-3\cot A}{3\cot^2A-1}.$$

分角之三角函數

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$
$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$
$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}.$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)=\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$

$$=(-1\pm\sec A)\cot A.$$

與角A同三角函數之一切角

$$\cos(n.260^\circ\pm A)=\cos A.$$

$$\sin[n.180^\circ+(-1)^n A]=\sin A.$$

$$\tan(n.180^\circ+A)=\tan A.$$

三角形邊與角之關係

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\left.\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B.\\ b&=c\cos A+a\cos C.\\ c&=a\cos B+b\cos A.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A.\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B.\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}\right\}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}.$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}.$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$$(b+c)\sin\frac{1}{2}A=a\cos\frac{1}{2}(B-C).$$

$$(c+a)\sin\frac{1}{2}B=b\cos\frac{1}{2}(C-A).$$

$$(a+b)\sin\frac{1}{2}C=c\cos\frac{1}{2}(A-B).$$

$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}.$$

$$\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{C-A}{2}.$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}.$$

三角形之面積

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$$

$$=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$$

$$=\frac{1}{2}h_a a=\frac{abc}{4R}.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

三角形之角，邊，面積，與外接圓，內切圓，傍切圓之半徑之關係

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4S}.$$

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=\frac{S}{s}.$$

$$r_1=s\tan\frac{A}{2}=\frac{S}{s-a}.$$

$$r_2=s\tan\frac{B}{2}=\frac{S}{s-b}.$$

$$r_3=s\tan\frac{C}{2}=\frac{S}{s-c}.$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

$$rr_1r_2r_3=S^2.$$

三角函數之正負

函數 \ 分面	I.	II.	III.	IV.
sin. 與 cosec.	+	+	−	−
cos. 與 sec.	+	−	−	+
tan. 與 cot.	+	−	+	−

三角函數之大

$\sin0°=0.$ $\cos0°=1.$ $\tan0°=0.$

$\sin15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$ $\cos15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

$\tan15°=2-\sqrt{3}.$ $\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$\cos18°=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}.$

$\tan18°=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}.$ $\sin30°=\frac{1}{2}.$

$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\tan30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\sin45°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ $\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ $\tan45°=1.$

$\sin60°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ $\cos60°=\frac{1}{2}.$ $\tan60°=\sqrt{3}.$

$\sin72°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$ $\cos72°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$\tan72°=\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$ $\sin75°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

$\cos75°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$ $\tan75°=2+\sqrt{3}.$

$\sin90°=1.$ $\cos90°=0.$ $\tan90°=\infty.$

$\sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\cos120°=-\frac{1}{2}.$

$\tan120°=-\sqrt{3}.$ $\sin135°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\cos135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$ $\tan135°=-1.$

$\sin150°=\frac{1}{2}.$ $\cos150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\tan150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$ $\sin180°=0.$

$\cos180°=-1.$ $\tan180°=0.$

銳角之三角函數

1. 直角三角形三邊之比，為 25:24:7，試求各銳角之各三角函數.

圖 △ABC之$\hat{C}$為直角，若 AB:BC:CA=25:24:7，則

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{24}{25}$，$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{7}{25}$，

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{24}{7}.$ 而 cosecA, secA, cotA 各為 sinA, cosA, tanA 之逆數，即

各爲 $\frac{25}{24}$, $\frac{25}{7}$, $\frac{7}{24}$. 又同樣 $\sin B=\frac{7}{25}$, $\cos B=\frac{24}{25}$, $\tan B=\frac{7}{24}$, $\cot B=\frac{24}{7}$, $\sec B=\frac{25}{24}$, $\operatorname{cosec} B=\frac{25}{7}$.

2. $\sec A=\frac{m^2+n^2}{2mn}$ 試求其他之三角函數.

解 $\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$,

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{\left\{1-\left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2\right\}}$

$=\sqrt{\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, $\operatorname{cosec} A$

$=\frac{1}{\sin A}=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$, $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

$=\frac{m^2-n^2}{2mn}$, $\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{2mn}{m^2-n^2}$.

3. $m.\cot A=\sqrt{n^2-m^2}$ 試求 $\sin A$.

解 $\cot A=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{m}$, 而

$\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, 故

$\sin A=1\div\sqrt{\left(1+\frac{n^2-m^2}{m^2}\right)}=\frac{m}{n}$.

4. $\tan A+\cot A=\sec A.\operatorname{cosec} A$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\cos A\sin A}$

$=\sec A.\operatorname{cosec} A$.

5. $\sec^2 A.\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}$

$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A.\sin^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\sin^2 A}$

$=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A$.

6. $(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A+\cot A)^2$ $=2\sec A.\operatorname{cosec} A$ 試證之.

解 左邊 $=(\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A)$

$+2\sec A.\operatorname{cosec} A-(\tan A+\cot A)^2$

$=(\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A)+2\sec A.\operatorname{cosec} A$

$-\sec^2 A.\operatorname{cosec}^2 A$ [4 題],

$=2\sec A.\operatorname{cosec} A$ [5 題].

7. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A.\sin^2 A$ 試證之.

解 $\tan^2 A-\sin^2 A=\sin^2 A\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}\right)$

$=\tan^2 A.\sin^2 A$.

8. $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=(\operatorname{cosec} A-\cot A)^2$ 試證之.

解 $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}$

$=\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}=(\operatorname{cosec} A-\cot A)^2$.

9. $(1+\sin A+\cos A)^2.(1-\sin A-\cos A)^2$ $=4\sin^2 A.\cos^2 A$ 試證之.

解 左邊 $=\{1-(\sin A+\cos A)^2\}^2$

$=(2\sin A\cos A)^2=4\sin^2 A.\cos^2 A$.

10. $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)\times(2-\sin^2 A)$ 試證之.

解 左邊 $=(1+\sin^2 A)\frac{\sin^2 A+2\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\frac{1+\sin^2 A}{\sin^2 A}(\sin^2 A+2\cos^2 A)=(\operatorname{cosec}^2 A+1)(1+\cos^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$.

11. $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$, 則 $(m^2-n^2)^2=16mn$ 試證之.

解 $(m^2-n^2)^2=(4\tan A.\sin A)^2$

$=\frac{16\sin^4 A}{\cos^2 A}$, 又 $16mn=16(\tan^2 A-\sin^2 A)$

$=16\frac{\sin^2 A(1-\cos^2 A)}{\cos^2 A}=16\frac{\sin^4 A}{\cos^2 A}$.

故 $(m^2-n^2)^2=16mn$.

12. $\cot^2 A=\left(\frac{\cos B}{\tan C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\tan C}\right)^2$.

則 $\operatorname{cosec}^2 A=\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2$ 試證之.

解 $\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$

$=1+\left(\frac{\cos B}{\tan C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\tan D}\right)^2$

$=1+\frac{\cos^2 B\cos^2 C}{\sin^2 C}+\frac{\sin^2 B\cos^2 D}{\sin^2 D}=$

$1+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C}(1-\sin^2 C)+\frac{\sin^2 B}{\sin^2 D}(1-\sin^2 D)$

$=1+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C}-\cos^2 B+\frac{\sin^2 B}{\sin^2 D}-\sin^2 B$

$=\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2.$

13. $\cot^2\theta.\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta.\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}=0$ 試證之.

解 左邊 $=\cot^2\theta\frac{(\sec\theta-1)(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$+\sec^2\theta\frac{(\sin\theta-1)(\sec\theta-1)}{\sec^2\theta-1}$

$=\frac{(\sec\theta-1)(1-\sin\theta)}{\sin^2\theta}+\frac{(\sin\theta-1)(\sec\theta-1)}{\sin^2\theta}$

$=0.$

特別角之三角函數

14. 試求 $\sin^3 60^\circ\cot 30^\circ-2\sec^2 45^\circ+3.\cos 60^\circ.\tan 45^\circ$ 之值.

解 $\sin^3 60^\circ\cot 30^\circ-2\sec^2 45^\circ+3.\cos 60^\circ.\tan 45^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{8}\sqrt{3}-4+\frac{3}{2}=-\frac{11}{8}.$

15. $\sin^2 30^\circ$, $\sin^2 45^\circ$, $\sin^2 60^\circ$, $\sin^2 90^\circ$ 爲等差級數試證之.

解 $\sin^2 30^\circ=\frac{1}{4}$, $\sin^2 45^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin^2 60^\circ=\frac{3}{4}$, $\sin^2 90^\circ=1$, 故 $\sin^2 45^\circ-\sin^2 30^\circ=\sin^2 60^\circ-\sin^2 45^\circ=\sin^2 90^\circ-\sin^2 60^\circ=\frac{1}{4}$, 即 $\sin^2 30^\circ$, $\sin^2 45^\circ$, $\sin^2 60^\circ$, $\sin^2 90^\circ$ 爲等差級數.

16. $\frac{1+\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ}=\frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$, 右邊 $=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$=2+\sqrt{3}$, 因而右邊與左邊相等.

17 $\sin^2 60^\circ-\sin^2 30^\circ=\frac{1}{6}\tan 60^\circ.\cot 30^\circ$ 試證之.

解 $\sin^2 60^\circ-\sin^2 30^\circ=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{6}\sqrt{3}.\sqrt{3}=\frac{1}{6}\tan 60^\circ.\cot 30^\circ.$

18 $\frac{\cos 45^\circ-\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ+\sin 30^\circ}=(\operatorname{cosec}45^\circ-\cot 45^\circ)^2$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2=(\operatorname{cosec}45^\circ-\cot 45^\circ)^2.$

一切之角之三角函數

19. $\sin 7321^\circ$, $\cos(-8146^\circ)$, $\tan 7389^\circ$, $\cot 375^\circ$, $\sec(-8325^\circ)$, $\operatorname{cosec}1732^\circ$, 試化爲小於 45° 之角之三角函數.

解 $\sin 7321^\circ=\sin 121^\circ=\sin(180^\circ-121^\circ)=\sin 59^\circ=\cos 31^\circ.$

$\cos(-8146^\circ)=\cos(-360^\circ\times22-226^\circ)$
$=\cos(-226^\circ)=-\cos(-46^\circ)=-\cos46^\circ$
$=\underline{-\sin44^\circ}$. $\tan7389^\circ=\tan189^\circ=\underline{\tan9^\circ}$.
$\cot375^\circ=\underline{\cot15^\circ}$. $\sec(-8325^\circ)$
$=\sec(360^\circ\times23+45^\circ)=\underline{\sec45^\circ}$.
$\operatorname{cosec}1732^\circ=\operatorname{cosec}(360^\circ\times4+292^\circ)$
$=\operatorname{cosec}292^\circ=-\operatorname{cosec}68^\circ=\underline{-\sec22^\circ}$.

20. $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\dfrac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\dfrac{\cos A}{\sin(90^\circ+A)}$ 試最簡之.

解 所題式 $=\dfrac{-\sin A}{-\sin A}-\dfrac{-\cot A}{\cot A}+\dfrac{\cos A}{\cos A}=1+1+1=\underline{3}$.

21. $A=202^\circ37'$ 及 $\sin A=-\dfrac{5}{13}$ 試求 $\cos A$ 及 $\cot A$.

解 $202^\circ37'$ 在第三分面內故餘弦爲負,餘切爲正,因而 $\cos A=-\sqrt{(1-\sin^2A)}=-\sqrt{\left(1-\dfrac{5^2}{13^2}\right)}=-\dfrac{12}{13}$, $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{12}{5}$.

22. $2\sec^2180^\circ.\cos0^\circ+3\sin^3270^\circ+\operatorname{cosec}270^\circ$, 試求其值.

解 $\sec180^\circ=-1$, $\cos0^\circ=1$, $\sin270^\circ=-1$, $\operatorname{cosec}270^\circ=-1$, 故所求之值,爲 $2\times(-1)^2\times1+3(-1)^3-1=\underline{-2}$.

23. 問 $(a^2-b^2)\cos360^\circ-4ab\sin270^\circ$ 之值.

解 $\cos360^\circ=1$, $\sin270^\circ=-1$, 故所求之值,爲 $(a^2-b^2)+4ab=\underline{a^2-b^2+4ab}$.

24. $\sin A\tan(90^\circ-A)\sec(90^\circ-A)=\cot A$ 試證之.

解 左邊 $=\sin A\cot A\operatorname{cosec}A=\cot A$.

25. $\dfrac{\cot^2A\sin^2(90^\circ-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90^\circ-A)-\cos A$ 試證之.

解 左邊 $=\dfrac{\cos^4A}{\sin^2A}\div\dfrac{\cos A+\sin A\cos A}{\sin A}=\dfrac{\cos^3A}{\sin A(1+\sin A)}=\dfrac{\cos A(1-\sin^2A)}{\sin A(1+\sin A)}=\dfrac{\cos A-\sin A\cos A}{\sin A}=\cot A-\cos A=\tan(90^\circ-A)-\cos A$.

26. A 自 0° 變至 90°, 則 $\sin A+\cos A$ 及 $\sin A-\cos A$ 相因而變如何.

解 $\sin A$, $\cos A$, 俱爲正, 故 $\sin A+\cos A$ 恆爲正. 故 $\sin A+\cos A$ 等於 $(\sin A+\cos A)^2$ 之平方根之正符號者, 卽等於 $1+2\sin A\cos A$ 之平方根之正符號者, 而 $1+2\sin A\cos A$ 在 $A=0^\circ$ 時, 爲 1, 而自 0° 增加至 45°, 則 $\sin A$ 漸增加, $\cos A$ 漸減少, 其值次第接近, 其積次第增加, 至 $A=45^\circ$ 時則爲 2. 次 A 自 45° 變至 90°, 則 $\sin A$, $\cos A$ 之值, 次第相離, 其積次第減少, 故 $1+2\sin A\cos A$ 亦次第減少, 至 $A=90^\circ$, 亦爲 1, 故 A 自 0° 增加至 45°, 則 $\sin A+\cos A$ 自 1 增加而成爲 $\sqrt{2}$. A 自 45° 增加至 90°, 則 $\sin A+\cos A$ 次第次減少而成爲 1. 又 $\sin A-\cos A$, 在 $A=0^\circ$ 時爲 -1, 自 0° 次第增加, 則 $\sin A$ 次第增加, $\cos A$ 次第減少, 故 $\sin A-\cos A$ 之值次第增加, $A=45^\circ$ 時, 其值爲 0, A 再增加, 則 $\sin A-\cos A$ 之值, 亦再增加, $A=90^\circ$ 時, 其值爲 1. 卽 $\sin A-\cos A$ 因 A 自 0° 變至 90°, 恆相因而增加, 自 -1 至 $+1$.

注意　*$\sin A$, $\cos A$, 俱為正, 故 $\sin A\cos A$ 因 $\sin^2 A\cos^2 A$ 之增減, 而增減, 但 $\sin^2 A+\cos^2 A=1=$定量, 故 $\sin^2 A\cos^2 A$ 在 $\sin^2 A=\cos^2 A$ 時, 即 $A=45°$ 時, 為極大. 用關於和差之公式, 則 $\sin A+\cos A=\sin A+\sin(90°-A)=\sqrt{2}\cos(A-45°)$, 亦得容易知其變化.

27. A 自 $0°$ 變至 $360°$, 其 $\tan A+\cot A$ 相因而變如何.

解　$\tan A+\cot A=\tan A+\dfrac{1}{\tan A}$, A 自 $0°$ 變至 $90°$, 則 $\tan A$ 自 0 變為無窮大, 故 $\tan A+\dfrac{1}{\tan A}$ 恆為正, 而 $A=45°$ 時, 其值最小, 何則, $\left(\tan A+\dfrac{1}{\tan A}\right)^2=\left(\tan A-\dfrac{1}{\tan A}\right)^2+4$, 故 $\left(\tan A+\dfrac{1}{\tan A}\right)^2$ 在 $\tan A-\dfrac{1}{\tan A}=0$ 時, 其值最小, 即 $\tan^2 A=1$ 時, 其值最小, 故 $\tan A+\cos A$ 因 A 自 $0°$ 變至 $45°$ 則自無窮大減少而為 2. 因 A 自 $45°$ 變至 $90°$, 則自 2 增加而為無窮大. 次 A 自 $90°$ 變為 $180°$, 則 $\tan A+\cot A$ 與 A 自 $0°$ 變至 $90°$ 所得者, 同值而異符號, 且次序相反. 又 A 自 $180°$ 變至 $360°$, 則 $\tan A+\cot A$ 與 A 自 $0°$ 變至 $180°$ 所得者同值.

注意　用倍角之公式, 則 $\tan A+\cot A=\dfrac{1}{\sin A\cos A}=\dfrac{2}{\sin 2A}$, 故亦得容易知其變化.

28. a 及 b 若不等時, 則 $\sec^2 A=\dfrac{4ab}{(a+b)^2}$ 能成立否.

解　自代數學知 a 及 b 不等時, 則 $2ab<a^2+b^2$, 故 $4ab<a^2+b^2+2ab$, 即 $4ab<(a+b)^2$, 故 $\dfrac{4ab}{(a+b)^2}<1$, 而任意之正割, 不小於 1, 故知題式不能成立.

29. 試求 $\sin\left\{\dfrac{n\pi}{2}+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right\}$ 之一切值. 但 n 為任意之整數.

解　題式若 $n=0$, 則得 $\sin\dfrac{\pi}{6}$ 即 $\dfrac{1}{2}$. 次若 $n=1$, 則得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 即 $\sin\dfrac{\pi}{3}$ 即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 次若 $n=2$, 則得 $\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 即 $-\sin\dfrac{\pi}{6}$ 即 $-\dfrac{1}{2}$. 次若 $n=3$, 則原式為 $-\sin\dfrac{\pi}{3}$, 而得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 至此以後, 則上之諸值, 當相循環, 何則, 若 $n=4$, 則得 $\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$, 即 $\sin\dfrac{\pi}{6}$, 故以下可類推矣.

30. 六個三角函數之變化, 試以曲線表之.

解　見第一門同歸圓函數之條.

關於二角之和差及倍角之問題

31. $\sin 75°=\cos 15°=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, 試證之.

解　$\sin 75°=\cos(90°-75°)=\cos 15°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

32. $\cot A=\dfrac{5}{7}$, $\cot B=\dfrac{7}{5}$, 試求 $\cot(A+B)$ 及 $\tan(A-B)$.

解　$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=\dfrac{\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}-1}{\frac{5}{7}+\frac{7}{5}}=0$, $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\operatorname{tat}B}$

$=\dfrac{\frac{7}{5}-\frac{5}{7}}{1+\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}}=\dfrac{12}{35}$.

33. $\sec A=\dfrac{17}{8}$, $\operatorname{cosec}B=\dfrac{5}{4}$, 試求 $\sec(A+B)$.

解　$\sec(A+B)=\dfrac{1}{\cos(A+B)}=\dfrac{1}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$. 但 $\cos A=\dfrac{1}{\sec A}=\dfrac{8}{17}$, $\sin B=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}B}=\dfrac{4}{5}$, 而 $\sin A=\sqrt{(1-\cos^2A)}=\dfrac{15}{17}$, $\cos B=\sqrt{(1-\sin^2B)}=\dfrac{3}{5}$, 故 $\sec(A+B)=\dfrac{1}{\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}-\frac{15}{17}\times\frac{4}{5}}$

$=-\dfrac{5\times17}{36}=-\dfrac{85}{36}$.

注　上解法,若取函數之負值,亦得所求之函數值,玆略之.

34. $\tan^2(45°+A)=\dfrac{1+\sin2A}{1-\sin2A}$ 試證之.

解　$\tan^2(45°+A)=\left(\dfrac{\tan45°+\tan A}{1-\tan45°\tan A}\right)^2=\left(\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}\right)^2=\left(\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}\right)^2=\dfrac{1+\sin2A}{1-\sin2A}$.

35. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ 試證之.

解　左邊 $=\dfrac{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

36. $\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha=\cot\alpha-8\cot8\alpha$ 試證之.

解　$2\cot2\alpha=\cot\alpha-\tan\alpha$, $4\cot4\alpha=2\cot2\alpha-2\tan2\alpha$, $8\cot8\alpha=4\cot4\alpha-4\tan4\alpha$, 故 $2\cot2\alpha+4\cot4\alpha+8\cot8\alpha=\cot\alpha-\tan\alpha+2\cot2\alpha-2\tan2\alpha+4\cot4\alpha-4\tan4\alpha$, 即 $\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha=\cot\alpha-8\cot8\alpha$.

37. $\sec\alpha\pm\tan\alpha=\tan\left(45°\pm\dfrac{1}{2}\alpha\right)$ 試證之.

解　左邊 $=\dfrac{1\pm\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}\pm\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\div\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=\left(1\pm\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)\div\left(1\mp\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\tan45°\pm\tan\frac{\alpha}{2}}{1\mp\tan45°\tan\frac{\alpha}{2}}$

$=\tan\left(45°\pm\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

38. 若 $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha.\cos\beta}$, 則 $\tan^2\dfrac{1}{2}\theta=\tan^2\dfrac{1}{2}\alpha.\cot^2\dfrac{1}{2}\beta$ 試求其證.

解　自題之關係式得 $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha+\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha-\cos\beta}=\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$, 故 $\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}=\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha.\,2\cos^2\frac{1}{2}\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha.\,2\sin^2\frac{1}{2}\beta}$, ∴ $\tan^2\dfrac{1}{2}\theta=\tan^2\dfrac{1}{2}\alpha.\cot^2\dfrac{1}{2}\beta$.

39. $2\sin^2A\sin^2B+2\cos^2A\cos^2B=1+\cos2A\cos2B$ 試證之.

解　左邊 $=\dfrac{(1-\cos2A)(1-\cos2B)}{2}+\dfrac{(1+\cos2A)(1+\cos2B)}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos2A$

$-\cos2B+\cos2A\cos2B)+\frac{1}{2}(1+\cos2A$

$+\cos2B+\cos2A\cos2B)=1+\cos2A\cos2B.$

40. $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)$ 試最簡之.

解 所題之式 $=\frac{\tan45^\circ+\tan A}{1-\tan45^\circ\tan A}$

$-\frac{\tan45^\circ-\tan A}{1+\tan45^\circ.\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

$=\frac{(1+\tan A)^2-(1-\tan A)^2}{1-\tan^2A}=\frac{4\tan A}{1-\tan^2A}$

$=2\tan2A.$

41. $3\sin A-\sin3A=2\sin A(1-\cos2A)$ 試證之.

解 左邊 $=3\sin A-(3\sin A-4\sin^3A)$

$=4\sin^3A=2\sin A\times2\sin^2A$

$=2\sin A(1-\cos2A).$

42. $\frac{\sin A+2\sin3A+\sin5A}{\sin3A+2\sin5A+\sin7A}=\frac{\sin3A}{\sin5A}$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{\sin A+\sin5A+2\sin3A}{\sin3A+\sin7A+2\sin5A}$

$=\frac{2\sin3A\cos2A+2\sin3A}{2\sin5A\cos2A+2\sin5A}$

$=\frac{2\sin3A(1+\cos2A)}{2\sin5A(1+\cos2A)}=\frac{\sin3A}{\sin5A}.$

43. $\frac{\cos2A-\cos4A}{\sin4A-\sin2A}=\tan3A$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{2\sin3A\sin A}{2\cos3A\sin A}=\frac{\sin3A}{\cos3A}=\tan3A.$

44. $\operatorname{cosec}2A+\cot4A=\cot A-\operatorname{cosec}4A$ 試證之.

解 左邊 $=\frac{1}{\sin2A}+\frac{\cos4A}{\sin4A}=\frac{2\cos2A}{2\cos2A.\sin2A}$

$+\frac{\cos4A}{\sin4A}=\frac{2\cos2A(1+\cos2A)}{2\sin2A.\cos2A}-\frac{1}{\sin4A}$

$=\frac{1+\cos2A}{\sin2A}-\frac{1}{\sin4A}=\frac{2\cos^2A}{2\sin A\cos A}-\frac{1}{\sin4A}$

$=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{1}{\sin4A}=\cot A-\operatorname{cosec}4A.$

45. $\cos^2(A-B)+\cos^2B-2\cos(A-B)\times\cos A\cos A=\sin^2A$ 試證之.

解 左邊 $=\cos^2(A-B)-2\cos(A-B)\cos A\times\cos B+\cos^2A\cos^2B+\cos^2B-\cos^2A\times\cos^2B=\{\cos(A-B)-\cos A\cos B\}^2+\cos^2B(1-\cos^2A)=\sin^2A\sin^2B+\cos^2B\times\sin^2A=\sin^2A(\sin^2B+\cos^2B)=\sin^2A.$

46. $\frac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)}=\sin2A$ 試證之.

解 左邊 $=\left\{1-\frac{\sin^2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)}\right\}\div\left\{1+\frac{\sin^2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)}\right\}=\{\cos^2(45^\circ-A)-\sin^2(45^\circ-A)\}\div\{\cos^2(45^\circ-A)+\sin^2(45^\circ-A)\}=\cos2(45^\circ-A)=\cos(90^\circ-2A)=\sin2A.$

別解 左邊 $=\frac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{\sec^2(45^\circ-A)}$

$=\cos^2(45^\circ-A)-\sin^2(45^\circ-A)$

$=\cos2(45^\circ-A)=\cos(90^\circ-2A)=\sin2A.$

47. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec}A$ 試證之.

解 左邊 $=\sin A\left(1+\frac{\sin A}{\cos A}\right)+\cos A\times\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}\right)=\sin A+\frac{\sin^2A}{\cos A}+\cos A+\frac{\cos^2A}{\sin A}=\sin A+\frac{1-\cos^2A}{\cos A}+\cos A+\frac{1-\sin^2A}{\sin A}=\sin A+\frac{1}{\cos A}-\cos A+\cos A+\frac{1}{\sin A}-\sin A=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\sec A+\operatorname{cosec}A.$

48. $\sin^3A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin3A$ 試證之.

解 $\sin^3A=\frac{1}{4}\{3\sin A-\sin3A\}$, $\sin^3(120^\circ+A)=\frac{1}{4}\{3\sin(120^\circ+A)-\sin3(120^\circ+A)\}$

$=\frac{1}{4}\{3\sin(120^\circ+A)-\sin3A\}$, $\sin^3(240^\circ+A)=\frac{1}{4}\{3\sin(240^\circ+A)-\sin3(240^\circ+A)\}$ $=\frac{1}{4}\{3\sin(240^\circ+A)-\sin3A\}$,依加法得次式,所題之式之左邊$=\frac{3}{4}\{\sin A+\sin(120^\circ+A)+\sin(240^\circ+A)\}-\frac{3}{4}\sin3A$ $=-\frac{3}{4}\sin3A$,何則 $\sin A+\sin(120^\circ+A)+\sin(240^\circ+A)=\sin A+\sin(60^\circ-A)-\sin(60^\circ+A)=\sin A-2\cos60^\circ\sin A=\sin A-\sin A=0$ 故也.

49. $\cos nA.\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2A=0$ 試證之.

圖 $\cos nA\cos(n+2)A=\cos\{(n+1)A-A\}\times\cos\{(n+1)A+A\}=\cos^2(n+1)A-\sin^2A$,故原式之左邊等於零.

50. $\sin nA\operatorname{cosec}^2A\sec A-\cos nA\sec^2A\times\operatorname{cosec}A=4\sin(n-1)A\operatorname{cosec}^22A$ 試證之.

圖 左邊$=\frac{\sin nA}{\cos A.\sin^2A}-\frac{\cos nA}{\cos^2A\sin A}$

$$=\frac{\sin nA\cos A-\cos nA\sin A}{\sin^2A\cos^2A}=\frac{4\sin(nA-A)}{4\sin^2A\cos^2A}$$

$$=\frac{4\sin(nA-A)}{\sin^22A}=4\sin(n-1)A\operatorname{cosec}^22A.$$

51. 次之三式,因 A 自 0° 變至 360°,問其變化如何.

$\frac{1+\sin A}{1+\cos A}$, $\operatorname{cosec}A+\cot A$, $\operatorname{cosec}A-\cos A$,

圖 $$\frac{1+\sin A}{1+\cos A}=\frac{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

故研究此式之變化,卽研究

$$\frac{\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

之變化可也,而 A 自 0° 變爲 360°,則 $\frac{A}{2}$ 自 0° 變至 180°,$\frac{A}{2}=0^\circ$,則此式之值爲$\frac{1}{\sqrt{2}}$,至$\frac{A}{2}=90^\circ$,則此式次第增加.$\frac{A}{2}=90^\circ$ 時,則此式之值爲 ∞.自$\frac{A}{2}=90^\circ$,至$\frac{A}{2}=180^\circ$,則此式自 ∞ 急變爲 −∞,又次第增加至$\frac{A}{2}$爲180°時,此式之值卽爲$\frac{1}{\sqrt{2}}$,故其平方卽題式,當 A 自 0° 增至 180° 之間,自$\frac{1}{2}$ 次第增加,及至 A=180° 時,而爲 ∞.次若 A 自 180° 變至 360°,則自 ∞ 次第減少,而爲$\frac{1}{2}$. $\operatorname{cosec}A+\cot A=\frac{1+\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\cot\frac{A}{2}.$$ 今若$\frac{A}{2}$自 0° 增加至 90°,則此式之值,自 ∞ 減少至於 0. $\frac{A}{2}$若自 90° 變至 180°,則此式之值,再次第減少而爲 −∞,故題式之值,當 A 自 0° 變至 360° 之間,則自 ∞ 減少至 −∞. $\operatorname{cosec}A-\cos A$ 其 A 若自 0°變至 90°,則自 ∞ 減少至於 1,其 A 若自 90° 變至 180°,則自 1 增加至於∞,其 A 稍超過 180°,則爲 −∞.其 A 再增加至 270°,則題式自 −∞ 增加至 −1,超過 270° 至 360° 之間,則其值自 −1 減少至 −∞.

52. 若 $\left(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$,則 $\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$ 試證之.

圖 $\left(\frac{\tan\alpha-\cos\theta\tan\beta}{\sin\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$,

故 $(\tan\alpha-\cos\theta\tan\beta)^2=(1-\cos^2\theta)\times(\tan^2\alpha-\tan^2\beta)$, 故 $\tan^2\beta-2\cos\theta\tan\alpha\times\tan\beta+\cos^2\theta\tan^2\alpha=0$, 即 $(\tan\beta-\cos\theta\tan\alpha)^2=0$, 故 $\tan\beta-\cos\theta\tan\alpha=0$, 故 $\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.

53. 若 $\tan\phi=\cos\theta\tan\alpha$, 及 $\tan\alpha'=\tan\theta\sin\phi$, 則 $\tan^2\frac{\phi}{2}$ 之一值爲 $\tan\frac{\alpha+\alpha'}{2}\tan\frac{\alpha-\alpha'}{2}$ 試求其證.

證 $\cos\theta=\frac{\tan\phi}{\tan\alpha}$, 故 $\tan^2\theta=\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\phi}{\tan^2\phi}$, 故 $\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\phi}{\tan^2\phi}=\frac{\tan^2\alpha'}{\sin^2\phi}$, 故 $\frac{\cos^2\phi\tan^2\alpha-\sin^2\phi}{\sin^2\phi}=\frac{\tan^2\alpha'}{\sin^2\phi}$, 故 $\cos^2\phi\tan^2\alpha-(1-\cos^2\phi)=\tan^2\alpha'$, 故 $\cos^2\phi=\frac{1+\tan^2\alpha'}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha'}$.

故 $\cos\phi=\pm\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$, 取上符號則 $\cos\phi=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$, 故 $\tan^2\frac{\phi}{2}=\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}=\frac{\cos\alpha'-\cos\alpha}{\cos\alpha'+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')}$

$=\tan\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\tan(\alpha+\alpha')$.

54. 若 $A+B+C=\pi$ 試證次之範式.

(1) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

(2) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

(3) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cdot\cos\frac{\pi-B}{4}\cdot\cos\frac{\pi-C}{4}$.

證 (1) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$

$=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$, 而 $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\cot\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}\left\{\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\right\}$

$=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\times\left\{\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}$

$=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\times\left\{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\div\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

(2) $\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B)$, 而 $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\times\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A+B)$, 故 $\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}=2\cos\frac{C}{2}2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\times\cos\frac{C}{2}$.

(3) $\frac{1}{2}(\pi-A)+\frac{1}{2}(\pi-B)+\frac{1}{2}(\pi-C)=\pi$, 故將 $\frac{1}{2}(\pi-A)$, $\frac{1}{2}(\pi-B)$, $\frac{1}{2}(\pi-C)$ 各代入於(2)式之 A, B, C, 則得 $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+$

$\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$.

55. 若 n 爲奇數, 則 $\sin nA+\sin nB+\sin nC=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$, 試求其證. 但 $A+B+C=\pi$.

解 $\sin nA+\sin nB=2\sin\frac{n}{2}(A+B)\times\cos\frac{n}{2}(A-B)=2\sin\frac{n}{2}(\pi-C)\cos\frac{n}{2}(A-B)=2\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nC}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nC}{2}\right\}\times\cos\frac{n}{2}(A-B)=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nC}{2}\cos\frac{n}{2}(A-B)$.

$\because$ n 爲奇數, 故 $\cos\frac{n\pi}{2}=0$. 又 $\sin nC=2\sin\frac{nC}{2}\cos\frac{nC}{2}=2\sin\frac{n}{2}(\pi-A-B)\cos\frac{nC}{2}=2\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n}{2}(A+B)-\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n}{2}(A+B)\right\}\times\cos\frac{nC}{2}=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n}{2}(A+B)\cos\frac{nC}{2}$, 故 $\sin nA+\sin nB+\sin nC=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nC}{2}\times\left\{\cos\frac{n}{2}(A-B)+\cos\frac{n}{2}(A+B)\right\}=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$.

56. 若 $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$, 及 $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$, 則 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$ 試證之.

解 $\frac{\sin\{\theta-\beta-(\alpha-\beta)\}}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$, 故 $\frac{\sin(\theta-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$, 故 $\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cot(\theta-\beta)=\frac{a}{b}$, 又 $\frac{\cos\{\theta-\beta-(\alpha-\beta)\}}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$, 故 $\cos(\alpha-\beta)+\tan(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{a'}{b'}$. 由是 $\sin(\alpha-\beta)\cot(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)\tan(\theta-\beta)=\left\{\cos(\alpha-\beta)-\frac{a}{b}\right\}\left\{\frac{a'}{b'}-\cos(\alpha-\beta)\right\}$. 故 $\sin^2(\alpha-\beta)=-\frac{aa'}{bb'}+\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)$, 故 $1+\frac{aa'}{bb'}=\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\cos(\alpha-\beta)$, 故 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$.

57. $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$, 則 $\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\phi}{2}=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$, $\tan\theta+\tan\phi=\frac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$, $\sin(\theta+\phi)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ 試證之.

解 $\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)=a\ldots(1)$. $\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)=b\ldots(2)$. 於 (1), (2) 平方之和, 再加 (2) 之 2 倍, 則 $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)+4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)=a^2+b^2+2b$, 或 $4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\left\{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\right\}+4\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)=a^2+b^2+2b$. 或 $4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\times\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\right\}=a^2+b^2+2b$. 或 $8\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}=a^2+b^2+2b\ldots\ldots(3)$, (3) 除 (1) 之 4 倍, 則

$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}}=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$, 或

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}}=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}.$$

或 $\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\phi}{2}=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$. 次於(1), (2)平方之和加(1)之2倍,

則 $4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\right\}=a^2+b^2+2a$ .... (4).

同樣 $4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\right\}=a^2+b^2-2a$ .... (5),

(4), (5)相乘則 $16\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\left\{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\right\}=(a_2+b^2)^2-4a^2$ ... (6). 以(6)除(1)(2)相乘積之8倍,則

$$\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)}=\frac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}.$$

或 $\frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\theta\cos\phi}=\frac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$, 或 $\tan\theta+\tan\phi=\frac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$. 次取(1), (2)平方之和,則 $4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)=a^2+b^2$...... (7), 以(7)除(1), (2)相乘積之2倍,則

$2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

或 $\sin(\theta+\phi)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

58. $a\cos A+b\sin A$ 試化爲一項式.

解 求 $\frac{b}{a}$ 爲正切角 a, 則

$\cos a=\pm\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ 故 $a\cos A+b\sin A=a\left(\cos A+\frac{b}{a}\sin A\right)=a(\cos A+\tan a\sin A)=a\left(\frac{\cos A\cos a+\sin A\sin a}{\cos a}\right)=\frac{a\cos(A-a)}{\cos a}=\pm\sqrt{a^2+b^2}\cos(A-a)$.

三角方程式

59. $\sin\theta+\cos\theta=1$ 試解之.

解 題式之各項,以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 乘之,則

$\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 但

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, 故上式爲

$\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, 卽

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$ 但 $\cos(2n\pi\pm A)=\cos A$,

故 $\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. 卽 $\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ......(1). 此卽所求之 θ 之值.

注意 將題式平方之 $\sin^2\theta+2\sin\theta.\cos\theta+\cos^2\theta=1$, 但 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 及 $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta\sin2\theta=0$, 故 2θ 故 $\sin2\theta=n\pi$, ∴ $\theta=\frac{1}{2}n\pi$...(2). 如斯解法,初學者往往樂爲之,然而非也. 元來解三角方程式所得之角之值,形狀雖異其所含之角不得不同,今謂(1)與(2)爲含同角島乎可. 何則,於(1)之中次第以 $n=0, 1, 2,\ldots$, 代之,則得0°或90°或各加360°之若干倍之角,若爲0°,則 $\cos\theta=1$, $\sin\theta=0$, 若爲90°,則 $\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$, 皆適於所題之方程式. 若於(2)以 $n=0, 1, 2,\ldots$, 代之,則得0°或90°,又180°或270°及是等加360°之若干倍

之角, 0° 及 90°, 適於所題之方程式, 自不待言, 然 180° 及 270°, 則 $\sin\theta+\cos\theta=-1$, 不適於所題之方程式. 此何理歟, 後之解法, 將題式平方之, 卽將 $\sin\theta+\cos\theta=1$ 平方之, 而爲 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1$. 則 $(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=0$, 卽 $(\sin\theta+\cos\theta-1)\times(\sin\theta+\cos\theta+1)=0$, 因而適於此第二因數爲0之式, 其 θ 之值爲 180° 及 270° 之諸角故也. 然若將 $\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 變之, 而爲 $\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$, 則爲 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$, 因而得 $\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$, 此式與 $\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 之形狀雖相異, 而其所含之角, 則全相同也.

60. $\sec^3\theta-2\tan^2\theta=2$, 試解之.

解 $\sec^3\theta=2(1+\tan^2\theta)$, 故 $\sec^3\theta=2\sec^2\theta$, $\sec^2\theta(\sec-2)=0$, 故 $\sec^2\theta=0$, 或 $\sec\theta-2=0$, 此式中之第一不合理捨之, 而取第二, 則得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 故 θ 之最小正角, 爲 $\frac{\pi}{3}$, 故 $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}=(6n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

61. $\sin3\theta+\cos\theta=0$ 試解之.

解 原方程式可如次書之. $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$, 因而 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$, $\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $\therefore\ \theta+\frac{\pi}{4}=n\pi$, $2\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, 卽 $(4n-1)\frac{\pi}{4}$ $(8n-1)\frac{\pi}{8}$, $(8n+3)\frac{\pi}{8}$.

別解 自原方程式 $\sin3\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$, 因而 $3\theta=2n\pi+\theta-\frac{\pi}{2}$ 及 $3\theta=2n\pi-\theta+\frac{\pi}{2}$, 卽 $\theta=\frac{\pi}{4}(4n-1)$ 及 $\theta=\frac{\pi}{8}(4n+3)$.

註 二解之結果, 乃表同一之角.

62. $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}$ 試解之.

解 $\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$ 故所題之方程式爲 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 故 $\theta-\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=(24n+4\pm3)\frac{\pi}{12}$.

63. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1+\sin2\theta$ 試解之.

解 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$, $1+\sin2\theta=(\cos\theta+\sin\theta)^2$, 故所題之方程式爲 $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=(\cos\theta+\sin\theta)^2$, 故 $\cos\theta+\sin\theta=0$.........(1), 或 $(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=1$.........(2), 卽自 (1) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$, 故 $\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$. 又自 (2) 式而 $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta=1$, $\therefore\ 2\theta=2n\pi$, $\therefore\ \theta=n\pi$.

64. $2\sin2\theta-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$ 試解之.

解 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$, 故所題之方程式爲 $4\sin\theta.\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta+\sqrt{3}=0$, $2\cos\theta(2\sin\theta-1)-\sqrt{3}(2\sin\theta-1)=0$, 分解因數, 則 $(2\sin\theta-1)(2\cos\theta-\sqrt{3})=0$, $\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因得 $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}=\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{6}$, 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

65. $6\cot^2\theta-4\cos^2\theta=1$ 試解之.

解 變化所題之方程式則 $6\cos^2\theta-4\sin^2\theta.\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$, 卽 $6-6\sin^2\theta-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta-\sin^2\theta=0$, $\therefore\ 4\sin^4\theta-11\sin^2\theta+6=0$, 分解因數, 則 $(4\sin^2\theta-3)(\sin^2\theta-2)=0$, $\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\pm\sqrt{2}$, 但此第二值有大於直之絕對值正弦不可不捨之, 故得

$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore\ \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

66. $\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=3\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ 試解之.

解 $\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\theta+1}{\cot\theta-\cot\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$, 同樣 $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\cot\theta-1}{1+\cot\theta}$

將所題之方程式變形, 則爲 $\frac{1+\cot\theta}{\cot\theta-1}=3\frac{\cot\theta-1}{1+\cot\theta}$. 因而 $(1+\cot\theta)^2-3(\cot\theta-1)^2=0$, 或 $\cot^2\theta-4\cot\theta+1=0$, 故 $\cot\theta=2\pm\sqrt{3}$, 故 $\theta=m\pi+\frac{\pi}{12}$, 或 $m\pi+\frac{5\pi}{12}$.

67. $(\cot\theta-\tan\theta)^2(2+\sqrt{3})=4(2-\sqrt{3})$ 試解之.

解 $(\cot\theta-\tan\theta)^2=\frac{4(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=4(2-\sqrt{3})^2$,

但 $\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}=\frac{2\cos2\theta}{\sin2\theta}=2\cot2\theta$, 故 $\cot2\theta=\pm(2-\sqrt{3})$,

故 $\tan2\theta=\pm\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\pm(2+\sqrt{3})$,

$2\theta=n\pi\pm\frac{5}{12}\pi$. $\therefore\ \theta=\frac{\pi}{24}(12n\pm5)$.

68. $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1=\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi$, 則 $x=\left(\cos\frac{\theta+\phi}{2}\div\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)a$,

$y=\left(\sin\frac{\theta+\phi}{2}\div\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)b$ 試證之.

解 $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$, 故 $\frac{y}{b}=\dfrac{1-\frac{x}{a}\cos\theta}{\sin\theta}$, 而 $\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1$, 故

$\frac{x}{a}\cos\phi+\dfrac{1-\frac{x}{a}\cos\theta}{\sin\theta}\times\sin\phi=1$,

$\frac{x}{a}\cos\phi+\dfrac{\sin\phi-\frac{x}{a}\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}=1$, 卽

$\frac{x}{a}\{\cos\phi\sin\theta-\sin\phi\cos\theta\}=\sin\theta-\sin\phi$, 卽

$\frac{x}{a}\sin(\theta-\phi)=\sin\theta-\sin\phi\ldots(1)$, 故

$x=\frac{\sin\theta-\sin\phi}{\sin(\theta-\phi)}a=\dfrac{2\sin\frac{\theta-\phi}{2}\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{2\sin\frac{\theta-\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}}a$

$=\dfrac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}a$. 交換題式之 x 與 y, 同時變 a 爲 b, 變餘弦爲正弦, 則得同樣之關係, 故自 (1) 式得 $y=\frac{\cos\theta-\cos\phi}{\sin(\phi-\theta)}b=$

$\dfrac{2\sin\frac{\phi-\theta}{2}\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{2\sin\frac{\phi-\theta}{2}\cos\frac{\phi-\theta}{2}}b=\dfrac{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}b$

69. 若 $\sin A+\cos A=+\sqrt{1+\sin2A}$, 則 $A<135°$, 或 $A>315°$, 試證之. 但本題之 A 小於 360°.

解 因 $\sin A+\cos A$ 爲正, 故 (1) $\sin A$, $\cos A$, 或俱爲正, 或 (2) $\sin A$ 爲正, 而 $\cos A$ 爲負, 且 $\sin A$ 之值大於 $\cos A$ 之絕對值, 或 (3) $\sin A$ 爲負, 而 $\cos A$ 爲正, 且 $\sin A$ 之絕對值小於 $\cos A$. 但 A 爲小

於360°之角，故在(1)則$A<90°$，在(2)則$A<135°$，在(3)則$A>315°$明矣．而(2)之要件備，則(1)自然能成立，故$\sin A+\cos A=+\sqrt{1+\sin 2A}$，卽$\sin A+\cos A>0$，則$A<135°$，或$A>315°$．

70. $\tan\phi=\dfrac{a\sin\theta+a'\sin\theta'}{a\cos\theta+a'\cos\theta'}$ 則ϕ在θ與θ'之間，試證之．但ϕ,θ,θ'，皆表銳角，又a,a'，皆表正數．

解 $\tan\phi=\dfrac{a\sin\theta+a'\sin\theta'}{a\cos\theta+a'\cos\theta'}$ 去分母，則

$\sin\phi(a\cos\theta+a'\cos\theta')=\cos\phi(a\sin\theta+a'\sin\theta')$

或 $a(\sin\phi\cos\theta-\cos\phi\sin\theta)=a'(\cos\phi\sin\theta'-\cos\theta'\sin\phi)$，或 $a\sin(\phi-\theta)=a'\sin(\theta'-\phi)$．

故 $\dfrac{\sin(\phi-\theta)}{\sin(\theta'-\phi)}=\dfrac{a'}{a}$．故$\sin(\phi-\theta)$與$\sin(\theta'-\phi)$有同符號，但$\phi-\theta$及$\theta'-\phi$，皆在$-\dfrac{\pi}{2}$與$\dfrac{\pi}{2}$之間，故$\sin(\phi-\theta)$及$\sin(\theta'-\phi)$，各與$\phi-\theta$及$\theta'-\phi$，有同符號，因而若$\phi-\theta>0$，則$\theta'-\phi>0$，若$\phi-\theta<0$，則$\theta'-\phi<0$，前者$\theta<\phi<\theta'$，後者$\theta>\phi>\theta'$，卽二者之$\phi$，皆在$\theta$與$\theta'$之間．

71. $x-y\cos\gamma-z\cos\beta=0$，$y-z\cos\alpha-x\cos\gamma=0$，$z=x\cos\beta-y\cos\alpha=0$，有不等於0之根，置$2s=\alpha+\beta+\gamma$，則$s,s-\alpha,s-\beta,s-\gamma$，四者之中，至少有其一爲$\dfrac{\pi}{2}$之奇數倍，試證之．

解 $x-y\cos\gamma-z\cos\beta=0$ .... (1)

$y-z\cos\alpha-x\cos\gamma=0$ .... (2)

$z-x\cos\beta-y\cos\alpha=0$ .... (3)

以$\cos\beta$乘(3)加於(1)，則$x(1-\cos^2\beta)-y(\cos\gamma+\cos\gamma\cos\beta)=0$，或$x\sin^2\beta-y(\cos\gamma+\cos\alpha.\cos\beta)=0$ .... (4)，以$\cos\alpha$乘(3)加於(2)，則

$y\sin^2\alpha-x(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)=0$......(5)，以$\sin\alpha$乘(4)以$\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta$乘(5)，二者相加，則$x[\sin^2\alpha\sin\beta-(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)^2]=0$，因$x$不爲零，則$\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)^2=0$......(6)，今將(6)式次第變化，則$(\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)\times(\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)=0$，或

$\{\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma\}=0$，

卽$4\cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\times\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=0$，因$2s=\alpha+\beta+\gamma$，故上式又得如次表之，$\cos s\cos(s-\alpha)\cos(s-\beta)\times\cos(s-\gamma)=0$，此式成立，則必$\cos s=0$，或$\cos(s-\alpha)=0$，或$\cos(s-\beta)=0$，或$\cos(s-\gamma)=0$，因而$s,s-\alpha,s-\beta,s-\gamma$之中，至少有一爲$\dfrac{\pi}{2}$之奇數倍．

72. a及b爲不爲零之數，二方程式$(b^2-a^2-1)b\cos x+(2b^2-1)a\sin x=ab$，$(2a^2-1)b\cos x+(a^2-b^2-1)a\sin x=ab$，同時成立，則有$a^2+b^2=1$，或4之關係，試證其爲必要且十分，並於二者求其共通其根．

解 $(b^2-a^2-1)b\cos x+(2b^2-1)a\sin x=ab$ ....(1)． $(2a^2-1)b\cos x+(a^2-b^2-1)\times a\sin x=ab$...............(2)．以$a^2-b^2-1$乘(1)，以$2b^2-1$乘(2)，相減，則$\{(b^2-a^2-1)(a^2-b^2-1)b-(2a^2-1)(2b^2-1)b\}\cos x=ab(a^2-b^2-1)-ab(2b^2-1)$，∴

$\cos x=\dfrac{a(3b^2-a^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)}$ .... (3)．

同樣消去cos$x$, 得sin$x$ $=\frac{b(3a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2-2)}$……(4). 取(3), (4), 平方之和, 則得 $\frac{a^2(3b^2-a^2)^2+b^2(3a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2(a^2+b^2-2)^2}=1$. 去分母簡單之, 則 $(a^2+b^2)^3=(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)^2$, 或 $a^2+b^2=(a^2+b^2-2)^2$, 或 $(a^2+b^2)^2-5(a^2+b^2)+4=0$, 故 $a^2+b^2=1$, 或4為必要之要件. 又於其逆能證明此要件為十分. 先置 $a^2+b^2=1$, $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, 則cos$x$之值, 自(3)得 $\cos x=-\cos\alpha(3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\cos3\alpha$, sin$x$之值, 自(4)得 $\sin x=-\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\sin3\alpha$, 故共通之根, 得 $x=2n\pi-3\alpha$. 次置 $a^2+b^2=4$, $a=2\cos\beta$, $b=2\sin\beta$, 則得 $\cos x=\cos\beta(3\sin^2\beta-\cos^2\beta)=-\cos3\beta$, $\sin x=\sin\beta(3\cos^2\beta-\sin^2\beta)=\sin3\beta$, 故共通之根, 得 $x=(2n+1)\pi-3\beta$.

73. $(m-2)\sin^4x-2(m-3)\sin^2x+m-5=0$, 試解之.

解 所設方程式之$\sin^2x$, 若為實數, 則 $(m-3)^2-(m-2)(m-5)\geqq0$, 即 $m-1\geqq0$, 因而 $m\geqq1$. 次於$\sin^2x$之值之符號, 能依其積及和之 $\frac{m-5}{m-2}$ 及 $\frac{2(m-3)}{m-2}$ 而定之. 又將 $+1$ 代入方程式左邊之$\sin^2x$, 得 $m-2-2(m-3)+m-5=-1$, 而小於零, 故 $+1$ 在二根之間, 故二根中之大者不可用. 次將m之值, 依大小排列之, 則為1, 2, 3, 5, 蓋 $m<1$, 則$\sin^2x$之值為虛, 故不可用. 若 $1<m<2$, 則$\sin^2x$二根之和及積俱為正, 因而二根俱為正, 而一根大於1捨之, 而用他之一根, 從此定sin$x$之二值. 若 $2<m<3$, 則二根之和及積俱為負, 而1在二根之間, 故二根俱不可用. 若 $3<m<5$, 則二根之和為正積為負, 故一根為正, 一根為負, 而一在二根之間, 故二根俱不可用. 若 $5<m$, 則二根皆為正, 且1在二根之間, 故$\sin^2x$之小者之值可用之. 因得sin$x$異符號而相等之二根, 約言之, 即 $1<m<2$ 及 $5<m$ 時, 自$\sin^2x$之小者之值, 以定sin$x$之二值, 今求其值, 則得

$$\sin x=\pm\sqrt{\frac{m-3-\sqrt{(m-1)}}{m-2}},$$

$$\therefore\quad x=\sin^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{m-3-\sqrt{m-1}}{m-2}}\right\}.$$

74. $\tan^2 2x-\tan^2x=-2\tan2x.\tan x$ 試解之.

解 $\tan^2 2x-\tan^2x=(\tan2x+\tan x)\times(\tan2x-\tan x)=\frac{\sin3x\sin x}{\cos^2 2x\cos^2x}$, 故將所題之方程式變形則為 $\frac{\sin^2x}{\cos2x.\cos x}\times\left\{\frac{3-4\sin^2x}{\cos2x.\cos x}+4\cos x\right\}=0$, 或 $\frac{\sin^2x}{\cos2x.\cos x}\left\{\frac{4\cos^2x-1+4\cos^2x\cos2x}{\cos2x\cos x}\right\}=0$, ∴ $\sin^2x=0$………(1), $4\cos^2x-1+4\cos^2x(2\cos^2x-1)=0$, ∴ $8\cos^4x-1=0$………(2), 自(1)得 $x=n\pi$, 自(2)得 $\cos^2x=\frac{1}{2\sqrt2}$, ∴ $\cos x=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)}$, ∴ $x=\cos^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\sqrt2}}\right)$.

75. 試求正切為餘弦二倍之弧.

解 將所求之弧為x, 則依題意, $\tan x=2\cos x$, 或 $2\sin^2x+\sin x-2=0$………(1)

此方程式之根恆爲實，而一根爲正，一根爲負．今將正根比較於$+1$，負根比較於-1，而定適合於(1)式之根，以$+1$代入(1)式左邊之$\sin x$，則得$+1$之正數，故1在$\sin x$二根之外，而1不能小於負根，故大於正根，因而知$\sin x$之正根可用．次以-1代入(1)式左邊之$\sin x$，則得-1之負數，故-1在二根之間，故負根不可用．約言之，即方程式(1)之根，僅正根可用，其値爲$\sin x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$，$\therefore x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{17}-1}{4}$．

76. $x+y=a$, $\sin^2x-\sin^2y=b$試解之．

解 將所題之第二方程式變形則爲$\sin(x+y)\sin(x-y)=b$，$\therefore\ \sin(x-y)=\frac{b}{\sin a}$，自此式得$x-y=\sin^{-1}\frac{b}{\sin a}$……(1)，自(1)式與$x+y=a$得$x=\frac{1}{2}\times\left\{a+\sin^{-1}\frac{b}{\sin a}\right\}$，$y=\frac{1}{2}\left\{a-\sin^{-1}\frac{b}{\sin a}\right\}$．

77. $\sin(x-a)=\sin x-\sin a$試解之．

解 將所題之方程式變形則爲$2\sin\frac{x-a}{2}\left\{\cos\frac{x-a}{2}-\cos\frac{x+a}{2}\right\}=0$，或$4\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{a}{2}=0$，$\therefore\ \sin\frac{x-a}{2}=0$，$\sin\frac{x}{2}=0$，因而$\frac{x-a}{2}=n\pi$，及$\frac{x}{2}=n\pi$，故$x=2n\pi+a$，及$x=2n\pi$．

78. 試解次之不等式，但x爲正，而不大於$180°$．

$$1-\frac{\cos x}{4\cos^2x-3}<\frac{1}{3-4\cos^2x}.$$

解 將不等式集於一邊，且通分之，則$\frac{4\cos^2x-\cos x-2}{4\cos^2x-3}<0$，自此不等式，得次之不等式，$(4\cos^2x-3)(4\cos^2x-\cos x-2)<0$，或$\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\times\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{33}+1}{8}\right)<0$．故$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<-\frac{\sqrt{33}-1}{8}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}>\cos x>\frac{\sqrt{33}+1}{8}$．

79. $x+\phi=\frac{\pi}{2}$，$\sin(x+a)-\sin(x-a)+2m\cos^2\frac{\phi}{2}=k$試解之，且求$x=\frac{\pi}{4}$，或$x=\frac{\pi}{2}$之要件．

解 自第二方程式得$2(\sin a\times\cos x+m\cos^2\frac{\phi}{2})=k$，或$2\sin a\cos x+m(1+\cos\phi)=k$，但$\phi=\frac{\pi}{2}-x$，故$2\sin a\cos x+m\sin x=k-m$………(1)，又若$\frac{m}{2\sin a}=\tan\psi$，則上方程式爲$\cos(x-\psi)=\frac{k-m}{2\sin a}\cos\psi$……(2)，此方程式有適當之根，則$\left(\frac{k-m}{2\sin a}\right)^2\cos^2\psi\leqq1$，或$(k-m)^2\cos^2\psi\leqq4\sin^2a$，但$\cos^2\psi=\frac{1}{1+\tan^2\psi}=\frac{1}{1+\frac{m^2}{4\sin^2a}}=\frac{4\sin^2a}{4\sin^2a+m^2}$，故上之要件爲$(k-m)^2\leqq4\sin^2a+m^2$，或$k^2-2mk\leqq4\sin^2a$之關係式，故$x=\cos^{-1}\left(\frac{k-m}{2\sin a}\cos\psi\right)+\psi$．次若$x=\frac{\pi}{4}$，則$x+\phi=\frac{\pi}{2}$，故$\phi=x=\frac{\pi}{4}$，而自(1)式得$\sin x=\cos x=\frac{k-m}{2\sin a+m}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即$(k-m)\sqrt{2}=2\sin a+m$之關係，次若$x=\frac{\pi}{2}$則自(1)式得$m=k-m$，即$2m=k$之關係式．

80. $\sin x+\sin y=p$, $\cos x+\cos y=q$ 之方程式，試解之.

解 將所題之方程式變形則為

$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=p$……(1), $2\cos\frac{x+y}{2}\times\cos\frac{x-y}{2}=q$………(2), 以(2)除(1) 則

$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{p}{q}$, 故 $\frac{x+y}{2}=\tan^{-1}\frac{p}{q}$………(3). (3) 之值代入於(1) 則

$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{p}{2\sin\left(\tan^{-1}\frac{p}{q}\right)}$, ∴

$\frac{x-y}{2}=\cos^{-1}\left\{\frac{p}{2.\sin\left(\tan^{-1}\frac{p}{q}\right)}\right\}$………(4),

因而自(3), (4)得

$x=\tan^{-1}\frac{p}{q}+\cos^{-1}\left\{\frac{p}{2\sin\left(\tan^{-1}\frac{p}{q}\right)}\right\}$,

$y=\tan^{-1}\frac{p}{q}-\cos^{-1}\left\{\frac{p}{2\sin\left(\tan^{-1}\frac{p}{q}\right)}\right\}$.

81. 試解 $x\sin a+y\sin 2a=\sin 3a$…………(1), $x\sin 3a+y\sin 6a=\sin 9a$…………………………(2).

解 (1), (2) 變形，則為 $x+2y\cos a=3-4\sin^2 a$ ……………………………………(3), $x+2y\cos 3a=3-4\sin^2 3a$…………………(4),

∴ $y(\cos a-\cos 3a)=2\{\sin^2 3a-\sin^2 a\}$ $=2(\sin 3a+\sin a)(\sin 3a-\sin a)$, 或 $y\sin 2a\sin a=4\sin 2a\sin a\cos 2a\cos a$,

$y=4\cos 2a\cos a$. 次以 $4\cos^2 a-3$ 乘(3), 取(3), (4), 之差，則得 $4\sin^2 a.x=-4\sin^2 a(16\sin^4 a-20\sin^2 a+5)$, 故 $x=-(16\sin^4 a-20\sin^2 a+5)$.

82. $a\cos^2 x+(2a^2-a+1)\sin x-3a+1=0$ 試解之.

解 $a\sin^2 x-(2a^2-a+1)\sin x+2a-1=0$, 括因數，則 $\{\sin x-(2a-1)\}(a\sin x-1)=0$, ∴ $\sin x=\frac{1}{a}$, 或 $\sin x=2a-1$.

而 $\sin x=\frac{1}{a}$ 若為適當根之，則 $\frac{1}{a^2}\leqq 1$, 即(1) $a^2\geqq 1$. 又適當於 $\sin x=2a-1$ 之根，則 $(2a-1)^2\geqq 1$, 即 $(2a-1)^2-1\leqq 0$, 即 $4a(a-1)\leqq 0$, 即(2) $0\leqq a\leqq 1$. 自(1), (2), 而 $a>1$ 時，則僅有一根可用，$a=1$ 時，則二根俱可用[二根俱為1]. $1>a>0$ 時，則僅有一根可用. 又 $a<-1$ 時，則亦僅有一根可用.

83. 知 $\tan\alpha$ 及 $\tan\beta$ 為方程式 $x^2+px+q=0$ 之根，試以 p, q, 計算次式. $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$.

解 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 為 $x^2+px+q=0$ 之根，故 $\tan\alpha+\tan\beta=-p$, $\tan\alpha\tan\beta=q$, 故

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{-p}{1-q}$,

$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=$ $\frac{1}{1+\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2}=\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2+p^2}$, 因而

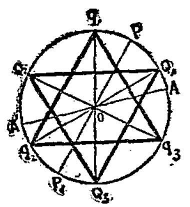
$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=\cos^2(\alpha+\beta)\{\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q\}=\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2+p^2}\left\{\frac{p^2}{(1-q)^2}-\frac{p^2}{1-q}+q\right\}=\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2+p^2}\times\frac{p^2-p^2(1-q)+q(1-q)^2}{(1-q)^2}=q\{(1-q)^2+p^2\}\div\{(1-q)^2+p^2\}=q$.

84. 以 $\tan\alpha$ 求 $\tan\frac{\alpha}{3}$, 其值有三，試言其理.

解 $\tan\alpha$ 已知,則 α 一般之值為 $n\pi+\alpha$, 故 $\tan\frac{\alpha}{3}$ 為 $\tan\left(n\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$. 今若 $n=0$, 則 $\tan\frac{\alpha}{3}$ 為 $\tan\frac{\alpha}{3}$ ……(1). 若 $n=1$, 則 $\tan\frac{\alpha}{3}$ 為 $\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$…(2). 若次 n=2, 則 $\tan\frac{\alpha}{3}$ 為 $\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)$ ………………(3) 次若 $n=3, 4,$……………,則無益矣,何則,若 $n=3$, 則 $\tan\frac{\alpha}{3}=\tan\left(\pi+\frac{\alpha}{3}\right)=\tan\frac{\alpha}{3}$, 若 n 次第置為4, 5………,則其結果與前得之值循環無已,故本題 $\tan\alpha$ 已知而求 $\tan\frac{\alpha}{3}$, 則其值不外上之三值.

別解 $\tan\alpha=\dfrac{3\tan\frac{1}{3}\alpha-\tan^3\frac{1}{3}\alpha}{1-3\tan^2\frac{1}{3}\alpha}$ …………(1)

故 $\tan\alpha$ 之值已知,則 $\tan\frac{1}{3}\alpha$ 之值有三. 今以圖明之如次,與 α 同正切之角,為 (OA, OP) 及 (OA, OP_1), 其 OQ_1, OQ_2, OQ_3,為初二線所表一組之角之三等分線,



而 Oq_1, Oq_2, Oq_3, 為後二線所表一組之角之三等分線,故 $q_1q_2q_3$ 成等邊三角形,而 $q_1OA=\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$, 而 Q_1Oq_2, Q_2Oq_3, Q_3Oq_1 為圓徑, (OA, OQ_1), (OA, Oq_2) 一組角之正切,為 $\tan\frac{1}{3}\alpha$, (OA, OQ_2), (OA, Oq_3) 一組角之正切,為 $\tan\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\alpha\right)$, 而 (OA, OQ_3), (OA, Oq_1) 一組角之正切為 $\tan\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{3}\alpha\right)$, 故 $\tan\frac{1}{3}\alpha$, $-\tan\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{3}\alpha\right)$, $\tan\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{3}\alpha\right)$ 為(1)之三次方程式之根.

85. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 試求其各角代數上相互之關係.

解 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 故 $\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$, 或 $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$, 或 $\tan(A+B)=-\tan C$, $\therefore$ $A+B=n\pi-C$, 即 $A+B+C=n\pi$.

86. $\tan\frac{x}{2}$ 為未知數,試解 $a\sin x+b\cos x=c$, 且研究之.

解 $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, 故所題之方程式,將 $\tan\frac{x}{2}$ 為未知數,則 $\dfrac{2a\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\dfrac{b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=c$, 或 $(c+b)\tan^2\frac{x}{2}-2a\tan\frac{x}{2}+(c-b)=0$, 此方程式有實數之根,則其根為 $\tan\frac{x}{2}$ 之值,而可用之,何則,凡角之正切,有自 $+\infty$ 至 $-\infty$ 之值故也. 而根為實數之要件,即 $a^2-(c^2-b^2)\geqq 0$, 或 $a^2+b^2\geqq c^2$, 此要件備,則 $\tan\frac{x}{2}$ 之值可用,而

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},$$

$$\therefore\quad x=2\tan^{-1}\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}\right).$$

87. $x+y=a$, $\tan x+\tan y=m$ 試求 x, y.

解 第二方程式變形如次

$\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=m$, $\dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=m$, 或 $m\cos(x-y)=2\sin a-m\cos a$,

$\therefore\quad \cos(x-y)=\dfrac{1}{m}(2\sin a-m\cos a)$. 此方程式成立則必 $\left(\dfrac{2\sin a-m\cos a}{m}\right)^2\leqq 1$, 但

$x-y=\cos^{-1}\left(\dfrac{2\sin a-m\cos a}{m}\right)$,

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left\{a+\cos^{-1}\left(\frac{2\sin a-m\cos a}{m}\right)\right\},$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{a-\cos^{-1}\left(\frac{2\sin a-m\cos}{m}\right)\right\}.$$

88. $\tan^2x+\cos^2x=m$, 試解之.

解 將所題之方程式變形, 則 $\cos^4x-(1+m)\cos^2x+1=0$…………(1), $\cos^2x$ 之值可用者, 必為正且小於1. 而 $\cos^2x$ 為實數, 則必 $(1+m)^2-4\geqq 0$, 或 $m^2+2m-3\geqq 0$, $(m-1)(m+3)\geqq 0$, 故 $m\leqq -3$, 或 $m\geqq 1$. 若欲定此要件, 又因 $\cos^2x$ 二根之積為正故 $\cos^2x$ 之值為正, 則必其和 $1+m>0$, 即 $m>-1$, 因而將前所得之 $m\leqq -3$ 捨之, 何則, 若非 $m>-1$, 則 $\cos^2x$ 之值為負不用故也. 但非 $m\geqq 1$, 或 $m\leqq -3$, 則 $\cos^2x$ 之值為虛數, 故若 $m>-1$, 則必 $m>1$, 故上三要件其 $m>1$………(2), 為唯一要件, 此要件備, 則 $\cos^2x$ 之值為實數, 且必正. 次求 $\cos^2x$ 小於1之要件, 將1代入方程式(1)左邊之 $\cos^2x$, 則其結果為 $1-m$, 但既知 m 必大於1, 故 $1-m<0$, 因而1在 $\cos^2x$ 之二根之間, 故 $\cos^2x$ 之根之大者不可用. 約言之, 即方程式(1) $\cos^2x$ 之值, 若可用, 則必 $m>1$, 且此要件備, 則依方程式(1)而定 $\cos^2x$ 之二根, 僅可用其小者, 因自 $\cos^2x$ 之值, 定 $\cos x$ 之二根, 符號異而絕對值相等如次, $\cos x=$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\{1+m-\sqrt{(m^2+2m-3)}\}}$. 故 $x=$

$$\cos^{-1}\left\{\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}[1+m-\sqrt{(m^2+2m-3)}]}\right\}.$$

89. $\tan^2x=k\tan(x+a)\tan(x-a)$ 之研究及 $k=1$ 時如何.

解 所題之方程式變形, 則為 $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

$=k\dfrac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{\cos(x+a)\cos(x-a)}=k\dfrac{\cos 2a-\cos 2x}{\cos 2a+\cos 2x}$,

或 $(k-1)\cos^2 2x+(k+1)(1-\cos 2a)\cos 2x-(k-1)\cos 2a=0$………(1), 此方程式之根若欲為實數則必 $(k+1)^2(1-\cos 2a)^2+4(k-1)^2\cos 2a\geqq 0$……(2). 且(1)之根必在 ± 1 之間, 今將(1)式左邊 $\cos 2x$, 以 $+1$ 代之, 則其結果為 $k-1+(k+1)(1-\cos 2a)-(k-1)\cos 2a=(k-1)(1-\cos 2a)+(k+1)(1-\cos 2a)=(1-\cos 2a)2k$…………(3). 又以 -1 代之, 則其結果為 $(k-1)-(k+1)(1-\cos 2a)-(k-1)\cos 2a=(k-1)(1-\cos 2a)-(k+1)(1-\cos 2a)=-2(1-\cos 2a)$……(4). 先將 $\cos 2a>0$, 則(2)式成立明矣, 若 $k>1$, 則(1)式二根之和為負, 而其積亦為負, 故一根為正, 而他一根為負, 就(3), (4), 觀之, 則(3)為正而(4)

爲負，故 $+1$ 在二根之外，而 -1 在二根之間，故 $+1$ 大於其大根，因此知其大根可用．其他 $\cos 2\alpha<0$, $k<-1$, $1>k>-1$ 等者，亦可同樣研究之．次令 $k=1$，則自方程式(1)可直知 $\cos 2x=0$，因而 $2x=n\pi+\frac{\pi}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$，即

$x=(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

90. 若 $\sin B=\sin A$, $\cos B=\cos A$，則 $(A-B)$ 等於 $n.360°$，但 n 得爲 0.

圖 $\sin B=\sin A$，則必 $A-B\equiv n.360°$，或 $(A+B)=(2n+1).180°$，又 $\cos B=\cos A$，則必 $A-B=n.360°$，或 $A+B=n.360°$，因而 $\sin B=\sin A$，及 $\cos B=\cos A$，同時成立，則必 $A-B=n.360°$ 也．

91. 知 $p=r\sin\theta$, $q=r\cos\theta$，試以 r 及 θ 之項，求方程式 $x^2+2px-q^2=0$ 之二根．

圖 $x^2+2px-q^2=0$ 之二根爲 x', x''，則 $x'+x''=-2p=-2r\sin\theta$, $x'x''=-q^2=-r^2\cos^2\theta$，故 $x'x''$ 爲 $x^2+2r\sin\theta x-r^2\cos^2\theta=0$ 之根，故得 $-r(\sin\theta+1)$，及 $-r(\sin\theta-1)$.

逆三角函數

92. 次之各式試證之．

(1) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=90°$.

(2) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

(3) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(4) $4\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{4x(1-x)^2}{1-6x^2+x^4}$.

(5) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$.

(6) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

(7) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

(8) $2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}=\cos^{-1}\frac{a-x}{a+x}$.

(9) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

圖 (1) $\sin^{-1}x=\alpha$, $\cos^{-1}x=\beta$，則 $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=x$，故 $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$, $\sin\beta=\sqrt{1-x^2}$.

因而 $\sin(\alpha+\beta)=x^2+1-x^2=1$.

$\therefore\ \alpha+\beta=90°$.

(2) $\tan^{-1}x=\alpha$，則 $\tan\alpha=x$，故

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}$，即 $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

(3) $\tan^{-1}x=\alpha$，則 $\tan\alpha=x$，故 $\tan 3\alpha=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$，即 $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(4) $\tan^{-1}x=\alpha$，則 $\tan\alpha=x$，故

$$\tan 4\alpha=\frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\frac{\frac{4\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\frac{4\tan^2\alpha}{(1-\tan^2\alpha)^2}}$$

$=\frac{4\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}$，即 $4\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$.

(5) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{120}{119}$，故 $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}=\tan^{-1}\frac{120}{119}-\tan^{-1}\frac{1}{70}=$

$$\tan^{-1}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{70}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{70}}=\tan^{-1}\frac{8281}{8450},$$

故 $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=$

$$\tan^{-1}\frac{8281}{8450}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\tan^{-1}\frac{\frac{8281}{8450}+\frac{1}{99}}{1-\frac{8281}{8450}\times\frac{1}{99}}$$

$=\tan^{-1}\frac{828269}{828269}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$.

(6) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}$

$=\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-x\times\frac{1}{x}}=\tan^{-1}\infty=\frac{\pi}{2}$.

(7) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

$=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$.

(8) $2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{x}{a}}}{1-\frac{x}{a}}$

$=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{ax}}{a-x}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\frac{4ax}{(a-x)^2}\right\}}}$

$=\cos^{-1}\frac{1}{\frac{a+x}{a-x}}=\cos^{-1}\frac{a-a}{a+x}$.

(9) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}=\sin^{-1}\sqrt{1-\frac{2}{3}}$

$=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$

$=\sin^{-1}\sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{6}+1}{12}}$

$=\sin^{-1}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$,

故 $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{1}}=$

$\cos^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right\}$

$=\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$

$=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}(2+1)}{6}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{6}$.

93. 試求適於次之方程式之x之值.

$\tan^{-1}\frac{x}{a}+\tan^{-1}\frac{x}{b}+\tan^{-1}\frac{x}{c}=\frac{\pi}{2}$.

解 $\tan^{-1}\frac{x}{a}+\tan^{-1}\frac{x}{b}+\tan^{-1}\frac{x}{c}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}-\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}\cdot\frac{x}{c}}{1-\frac{x^2}{ab}-\frac{x^2}{bc}-\frac{x^2}{ca}}$

$=\tan^{-1}\frac{x\{(bc+ca+ab)-x^2\}}{abc-x^2(a+b+c)}=\tan^{-1}\infty$,

故 $abc-x^2(a+b+c)=0$, 或

$x=\pm\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

94. 若$x=1$, 試求次式之數值.

$\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{5}}\right)$.

解 $\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{x}}\right)=$

$\tan^{-1}\frac{\frac{x+2}{\sqrt{3}}-\frac{4x-3}{\sqrt{3}}}{1+\frac{x+2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4x-3}{\sqrt{3}}}=\tan^{-1}\frac{(-3x+5)\sqrt{3}}{4x^2+5x-3}$.

今於此式, 若$x=1$, 則

$\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{3}}\right)=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{6}$

$=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=n.180°+30°$.

注意 若於題式, 直令$x=1$, 則其解最簡單, 本解乃示其一般之法.

95. 次之方程式試解之.

$\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$.

解 $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)$

$=\cot^{-1}\frac{x(n^2-x+1)-1}{x+(n^2-x+1)}$

$=\cot^{-1}\frac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}=\cot^{-1}(n-1)$,

即 $\frac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}=n-1$, 或 $n^2x-x^2+x-1=(n-1)(n^2+1)$, $x^2-(n^2+1)x+(n^2+1)\times(n-1)+1=0$, 或 $x^2-(n^2+1)x+n(n^2-n+1)=0$, 或 $(x-n)\{x-(n^2-n+1)\}=0$.

故 $x=n$, 或 $x=n^2-n+1$.

96. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$，試解之.

圖 $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{(1-x^2)}$,
$\sin^{-1}\frac{x}{2}=\cos^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$，故 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{x}{2}=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}+\frac{x}{2}\sqrt{(1-x^2)}\right\}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore x\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}+\frac{x}{2}\sqrt{(1-x^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，或 $x\sqrt{(4-x^2)}+x\sqrt{(1-x^2)}=\sqrt{2}$...(1)，將(1)式移項而平方之，則 $x^2(4-x^2)=2-2\sqrt{2}x\sqrt{1-x^2}+x^2(1-x^2)$，或 $3x^2-2=-2\sqrt{2}x\sqrt{1-x^2}$ ...... (2)，更將(2)式平方之移項，則 $17x^4-20x^2+4=0$，$\therefore$ $x=\pm\sqrt{\left\{\frac{10\pm4\sqrt{2}}{17}\right\}}$.

97. $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)$，試解之.

圖 $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$，$\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)=\cos^{-1}\sqrt{\left\{1-\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}\right\}}=\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$，$\sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)$，故

$\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)=$

$\sin^{-1}\left\{\frac{2a(1-b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}+\frac{2b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right\}$

$\sin^{-1}\left\{\frac{2(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right\}$，同樣

$\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)=$

$\cos^{-1}\left\{\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}-\frac{4ab}{(1+a^2)(1+b^2)}\right\}$

$=\cos^{-1}\left\{\frac{(1-a^2)(1-b^2)-4ab}{(1+a^2)(1+b^2)}\right\}$

$=\cos^{-1}\left\{\frac{(1-ab)^2-(a+b)^2}{(1+a^2)(1+b)^2}\right\}$，故

$\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)$

$=\tan^{-1}\left\{\frac{2(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2-(a+b)^2}\right\}$，因而所題之方程式為 $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\left\{\frac{2(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2-(a+b)^2}\right\}$，即 $\frac{2x}{1-x^2}=\frac{2(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2-(a+b)^2}$，或 $(a+b)(1-ab)x^2+\{(1-ab)^2-(a+b)^2\}x-(a+b)(1-ab)=0$，或 $\{(a+b)x+(1-ab)\}\{(1-ab)x-(a+b)\}=0$，

故 $x=-\frac{1-ab}{a+b}$，或 $x=\frac{a+b}{1-ab}$.

98. $\cot^{-1}\frac{1}{x+1}+\cot^{-1}\frac{1}{x-1}=\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x$ 試解之.

圖 $\cot^{-1}\frac{1}{x+1}+\cot^{-1}\frac{1}{x-1}=$

$\cot^{-1}\frac{\frac{1}{x^2-1}-1}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}=\cot^{-1}\left(\frac{2-x^2}{2x}\right)$

$=\tan^{-1}\frac{2x}{2-x^2}$，$\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1+3x^2}$，故此方程式為 $\tan^{-1}\frac{2x}{2-x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1+3x^2}$，或 $2x\{1+3x^2-2+x^2\}=0$，即 $2x(4x^2-1)=0$，故 $x=0$，及 $x=\pm\frac{1}{2}$.

99. $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{47}$ 試證之.

圖 $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=$

$\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}=\tan^{-1}\frac{15}{55}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$,

又 $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{47}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{47}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{47}}$

$=\tan^{-1}\frac{51}{187}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$，故 $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{47}$.

100. $\tan^{-1}=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c$ 試求其證.

解 $\tan^{-1}a=\theta$ 及 $\tan^{-1}b=\phi$，則 $a=\tan\theta$，及 $b=\tan\phi$，而 $\tan(\theta-\phi)=\frac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$

$=\frac{a-b}{1+ab}$. 故 $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b$，同樣 $\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}b-\tan^{-1}c$，故 $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}c$，即 $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c=\tan^{-1}a$.

101. $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$，則 $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ 試證之.

解 $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$，故

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)}=\frac{1-\cos2\theta}{1-\cos2\theta},$$

故 $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(2\theta-\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\theta-\alpha-\beta)}=\dfrac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$,

故 $\cos(\alpha-\beta)\cos2\theta=\cos(2\theta-\alpha-\beta)=\cos2\theta\times\cos(\alpha+\beta)+\sin2\theta\sin(\alpha+\beta)$，故 $\tan2\theta\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$,

故 $\tan2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

102. $\tan^{-1}\frac{x}{y}=\tan^{-1}\frac{c_1x-y}{c_1y+x}+\tan^{-1}\frac{c_2-c_1}{c_2c_1+1}+\tan^{-1}\frac{c_3-c_2}{c_3c_2+1}+\cdots\cdots+\tan^{-1}\frac{c_n-c_{n-1}}{c_nc_{n-1}+1}+\tan^{-1}\frac{1}{c_n}$ 之證如何，但 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ 爲任意之數.

解 $\tan^{-1}\dfrac{c_1x-y}{c_1y+x}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{1}{c_1}}{1+\frac{x}{c_1y}}$

$=\tan^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}\frac{1}{c_1}$，同樣.

$\tan^{-1}\frac{c_2-c_1}{c_2c_1+1}=\tan^{-1}\frac{1}{c_1}-\tan^{-1}\frac{1}{c_2}$,

$\tan^{-1}\frac{c_3-c_2}{c_3c_2+1}=\tan^{-1}\frac{1}{c_2}-\tan^{-1}\frac{1}{c_3}$, ……

故題式右邊諸項之和，等於 $\tan^{-1}\frac{x}{y}$.

103. 試記 $\sin^{-1}\frac{(-1)^m}{2}$ 一切之值，但 m 爲整數.

解 $\sin^{-1}\frac{(-1)^m}{2}$ 最簡之值，可定爲 $(-1)^m\frac{\pi}{6}$，何則，先將 m 爲偶數，次將 m 爲奇數，即可得明其理故也，而一切之解答，爲 $n\pi+(-1)^{m+n}\frac{\pi}{6}$. 或變形而爲 $(m+n)\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 何則，此角之正弦，爲 $\sin m\pi\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$

$+\cos m\pi\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$

$=\cos m\pi\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}=\cos m\pi\times\frac{1}{2}$

$=(-1)^m\times\frac{1}{2}$ 故也.

104. $\tan^{-1}(-1)^m$ 試記其一切之值，但 m 爲整數.

解 m 若爲偶數，則題之值，爲 $\tan^{-1}1$,

即$n\pi+\frac{\pi}{4}$，若m為奇數，則為$\tan^{-1}(-1)$，即$n\pi-\frac{\pi}{4}$，故包括此二者之形，則為$n\pi+(-1)^m\frac{\pi}{4}$。

分角之問題

105. 角A若在450°與630°之間，則$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{(1+\sin A)}-\sqrt{(1-\sin A)}$，試求其證。

圖 $\frac{A}{2}$在225°與315°之間，故$\sin\frac{A}{2}$為負，而絕對值大於$\cos\frac{A}{2}$，故$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{(1+\sin A)}$. $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{(1-\sin A)}$，故$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{(1+\sin A)}-\sqrt{(1-\sin A)}$.

106. $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，而$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，試計算$\sin\frac{\alpha}{2}$及$\cos\frac{\alpha}{2}$。

圖 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，故$\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$，故$\cos\frac{\alpha}{2}<0$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$，而$\cos\frac{\alpha}{2}$之絕對值，大於$\sin\frac{\alpha}{2}$之絕對值。

故$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$為負，而$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1+\sin\alpha}$，$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}$為正，故$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{1-\sin\alpha}$，因而$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\{-\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\}$.

$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\{-\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\}=-\frac{1}{2}\{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\}$，於此二式之中代入$\sin\alpha$之值$-\frac{24}{25}$，則得$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$.

107. 試求22°30′及112°30′之三角函數。

圖 $22°30'=\frac{45°}{2}$，故$\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. $\cos 22°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$180°-112°30'=67°30'=90°-22°30'$，故依上得之值得$\sin 112°30'=\cos 22°30'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\cos 112°30'=-\sin 22°30'=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

108. $\frac{A}{2}$在$-45°$及$-135°$之間，試以$\sin A$之項，求$\sin\frac{A}{2}$。

圖 $\frac{A}{2}$在$-45°$與$-135°$之間，故$\sin\frac{A}{2}$為負，而絕對值大於$\cos\frac{A}{2}$，故$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{(1+\sin A)}$, $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{(1-\sin A)}$，故$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{(1+\sin A)}-\sqrt{(1-\sin A)}$.

109. A等於(1) 100°, (2) 260°, (3) 450°, (4) 1890°時，試決定範式。

$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$之複符號。

圖 (1) $\sin 100°$為正，而$\cos\frac{100°}{2}=\cos 50°$，亦為正，因而$\sqrt{1+\sin A}$大於$\sqrt{1-\sin A}$，而$\cos\frac{A}{2}$當為正，故定$2\cos\frac{A}{2}$之式之

前項符號必爲正，卽 $2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$. 次定後項之符號，因 $\cos\frac{A}{2}=\cos 50°$，故 $\cos\frac{A}{2}<\cos 45°$，卽 $\cos\frac{A}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$，故 $\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$ 不可不小於 $\sqrt{2}$，卽其平方之 $2(1\pm\sqrt{1+\sin A}\sqrt{1-\sin A})$，不可不小於 2，因此 $\sqrt{1-\sin A}$ 之前，當取負符號，卽 $2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$.

(2) $\sin 260°<0$， $\cos\frac{260°}{2}=\cos 130°<0$，故 $\sqrt{1+\sin A}<\sqrt{1-\sin A}$，而 $2\cos\frac{A}{2}$ 當爲負，故 $\sqrt{1-\sin A}$ 之前，必爲負符號，而 $\cos 130°=-\cos(180°-130°)=-\cos 50°$， 故 $\cos\frac{A}{2}$ 之絕對値，小於 $\cos 45°$，卽小於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，因而 $\pm\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$ 之平方，卽 $2(1\pm\sqrt{1+\sin A}\sqrt{1-\sin A})$，不可不小於 2，故 $\sqrt{1+\sin A}$ 之前當取正符號，卽 $2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$.

(3) $\sin 450°=\sin 90°=1$，$\cos\frac{450°}{2}\cos 225°=-\cos 45°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，故 $\sqrt{1-\sin A}=0$，因 $2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$，而 $\cos\frac{A}{2}<0$，故 $2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}\,[=-\sqrt{2}]$，卽當定爲負符號.

(4) $\sin 1890°=\sin(360°\times 5+90°)=\sin 90°=1$，故 $\sqrt{1-\sin A}=0$，故 $2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$，但 $\cos\frac{1890°}{2}=\cos 945°=\cos 225°=-\cos 45°$，故 $2\cos\frac{A}{2}$ 爲負，因而 $\sqrt{1+\sin A}$ 之前，當定爲負符號，卽 $2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}\cdot[=-\sqrt{2}]$.

110. A 等於 (1) 10°, (2) 200°, (3) 300°, (4) 8000°, 試決定 $\tan\frac{A}{2}=\cot A(\pm\sec A-1)$ 之複符號.

圖 (1) $\tan\frac{A}{2}=\tan 5°>0$， $\cot A=\cot 10°>0$，故 $\pm\sec A-1>0$，但 $\sec A=\sec 10°>0$，故 $\pm\sec A-1>0$，則 $\sec A$ 之前，必爲正符號，卽可決定 $\tan\frac{A}{2}=\cot A(\sec A-1)$

(2) $\tan\frac{A}{2}\tan 100°<0$； $\cot A=\cot 200°>0$，故必 $\pm\sec A-1<0$，但 $\sec A=\sec 200°<0$，故 $\sec A$ 之前，當定爲正符號.

(3) $\tan\frac{A}{2}=\tan 150°<0$，$\cot A=\cot 300°<0$，故 $\pm\sec A-1>0$，而 $\sec A=\sec 300°>0$，故 $\sec A$ 之前，當定爲正符號.

(4) $\tan\frac{A}{2}=\tan 4000°=\tan 40°>0$， $\cot A=\cot 8000°=\cot 80°>0$，故 $\pm\sec A-1>0$，而 $\sec A=\sec 80°>0$，故 $\sec A$ 之前，當定爲正符號.

111. 求試 $11°\frac{1}{4}$ 之餘弦.

圖 $11°\frac{1}{4}=A$，則 $\cos 4A=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

而 $\cos 4A=(4\cos^3 A-3\cos A)\cos A-(3\sin A-4\sin^3 A)\sin A=\cos^2 A(4\cos^2 A-3)-(1-\cos^2 A)(4\cos^2 A-1)=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1$，

因而 $8\cos^4 A-8\cos^2 A+\frac{2-\sqrt{2}}{2}=0$，或 $16\cos^4 A-16\cos^2 A+2-\sqrt{2}=0$，

$$\cos A=+\sqrt{\frac{8+\sqrt{64-16(2-\sqrt{2})}}{16}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

別解 $\cos 11^\circ\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 22^\circ\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 45^\circ}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

112. $\sin 224^\circ=-0.69$, 試書 $\sin 112^\circ$ 之值.

解 $224^\circ=A$, 則 $112^\circ=\frac{A}{2}$, $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$, 而 $\sin A=-\sin 44^\circ<0$, $\sin\frac{A}{2}=\sin 68^\circ>0$, 故 $\sqrt{1-\sin A}$ 之前, 當取正符號, 次因 $\sin\frac{A}{2}=\sin 68^\circ>\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 故 $2(1\pm\sqrt{1+\sin A}\sqrt{1-\sin A})>2$, 因而 $\sqrt{1+\sin A}$ 之前, 亦當取正符號, 故 $\sin\frac{A}{2}=\sin 112^\circ=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 224^\circ}+\sqrt{1-\sin 224^\circ})=\frac{1}{2}\sqrt{1-0.69}+\sqrt{1+0.69})$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{0.31}+1.3)=\frac{1}{20}(\sqrt{31}+13)$ $=0.928\cdots\cdots$

113. 試證 $\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$, 且說明其複符號.

解 $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$, 故 $\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$, 若 $\cos A=\cos\alpha$, [但 α 爲最小正角], 則 $A=2n.180^\circ\pm\alpha$, 故 $\frac{A}{2}=n.180^\circ\pm\frac{\alpha}{2}$, 故 $\tan\frac{A}{2}=\tan\left(n.180^\circ\pm\frac{\alpha}{2}\right)$, 故無論 n 爲奇數或偶數, 減 180° 之若干倍, 而爲 $\tan\frac{A}{2}=\tan\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\tan\frac{\alpha}{2}$, 及 $-\tan\frac{\alpha}{2}$, 卽 $\cos A$ 已知時, 其 $\tan\frac{A}{2}$ 有相等而異符號之二値 $\tan\frac{\alpha}{2}$, $-\tan\frac{\alpha}{2}$.

114. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A+\sin A}{1+\cos A+\sin A}$ 試證之.

解 $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1-\cos A+\sin A}{1+\cos A+\sin A}.$$

115. $\sin A$ 以 $\sin\frac{A}{2}$ 表之, 則有相等而異符號之二値, 又 $\cos A$ 以 $\cos\frac{A}{2}$ 表之, 則惟有一値, 問其證.

解 若 $\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}$ [但 α 爲最小正角], 則 $\frac{A}{2}=2n.180^\circ+\frac{\alpha}{2}$, 或 $\frac{A}{2}=n.180^\circ-\frac{\alpha}{2}$, [但 n 爲奇數], 故 $A=4n.180^\circ+\alpha$, 或 $A=2n.180^\circ-\alpha$, 故減 360° 之若干倍, 而爲 $\sin A=\sin(\pm\alpha)=\sin\alpha$ 及 $-\sin\alpha$, 卽設 $\sin\frac{A}{2}$ 求 $\sin A$ 有二個異符號之等值. 次將 $\cos\frac{A}{2}$ 爲已知, 卽 $\frac{A}{2}=2n\times 180^\circ\pm\frac{\alpha}{2}$, 則 $A=4n.180^\circ\pm\alpha$ 減 360° 之若干倍, 則 $\cos A=\cos(\pm\alpha)=\cos\alpha$, 故設 $\frac{A}{2}$ 而求 $\cos A$, 惟有一値.

116. 將某角二分之, 試使其分角之正切有定比.

解 已知角爲A, 定比爲 m. 又將 x 爲一部, 則他一部爲 $A-x$, 則 $\tan x=m\tan(A-x)$, 於是 $\tan x$

$=\frac{m(\tan A-\tan x)}{1+\tan A\tan x}$, 故 $\tan x(1+\tan A\tan x)=m(\tan A-\tan x)$, 故可求得 $\tan x$ 之值, 因而可求得 x 及 $A-x$ 之值.

117. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3}{8}\pi+\cos^4\frac{5}{8}\pi+\cos^4\frac{7}{8}\pi=\frac{3}{2}$ 試證之.

解 $2\cos^4\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$, 故 $4\cos^4\frac{\theta}{2}=(1+\cos\theta)^2=1+2\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}=\frac{1}{2}(3+4\cos\theta+\cos2\theta)$, 故 $\cos^4\frac{\theta}{2}=\frac{1}{8}(3+4\cos\theta+\cos2\theta)$. 用此範式,變化題式左邊之各項,則 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3}{8}\pi+\cos^4\frac{5}{8}\pi+\cos^4\frac{7}{8}\pi=\frac{12}{8}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{5}{2}\pi+\cos\frac{7}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}$.

118. $\tan7^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$, 試證之.

解 $\tan7^\circ\frac{1}{2}=\frac{\sin15^\circ}{1+\cos15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\div\left(1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}+1-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)(2\sqrt{2}+1-\sqrt{3})}=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-4+2\sqrt{3})\div(6+4\sqrt{2})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$.

分母子以 $3-2\sqrt{3}$ 乘之,則分母爲1,分子爲 $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

119. $\tan x+(2+\sqrt{3})\tan\frac{x}{3}$, 試求 $\tan x$ 之值.

解 $\tan x=\frac{3\tan\frac{x}{3}-\tan^3\frac{x}{3}}{1-3\tan^2\frac{x}{3}}$, 因其等於 $(2+\sqrt{3})\tan\frac{x}{3}$, 故 $\frac{3-\tan^2\frac{x}{3}}{1-3\tan^2\frac{x}{3}}=2+\sqrt{3}$, 故 $3-\tan^2\frac{x}{3}=(2+\sqrt{3})\left(1-3\tan^2\frac{x}{3}\right)$, 故 $(6+3\sqrt{3}-1)\tan^2\frac{x}{3}=2+\sqrt{3}-3$, 故 $\tan^2\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{5+3\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(5-3\sqrt{3})}{(5+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})}=\frac{8\sqrt{3}-14}{25-27}=7-4\sqrt{3}$, 故 $\tan\frac{x}{3}=\pm\sqrt{(7-4\sqrt{3})}=\pm(2-\sqrt{3})$, 故 $\tan x=\pm(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\pm1$. 又自前約去之因數 $\tan\frac{x}{3}=0$, 故得 $\tan x=0$.

120. $\alpha=\frac{\pi}{17}$, 試求 $\frac{\cos\alpha\cos13\alpha}{\cos3\alpha+\cos5\alpha}$ 之值.

解 $\frac{\cos\alpha\cos13\alpha}{\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\frac{\cos\alpha\cos13\alpha}{2\cos\alpha\cos4\alpha}=\frac{\cos13\alpha}{2\cos4\alpha}=-\frac{1}{2}$. 因 $13\alpha+4\alpha=\pi$. 故 $\cos13\alpha=-\cos4\alpha$.

121. $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, 則 $\cos\phi=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, 試求其證.

解 $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, 故 $\frac{1}{\cos(\phi+\alpha)}+\frac{1}{\cos(\phi-\alpha)}=\frac{2}{\cos\phi}$, 故 $\frac{\cos(\phi-\alpha)+\cos(\phi+\alpha)}{\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha)}=\frac{2}{\cos\phi}$, 故 $\frac{2\cos\phi\cos\alpha}{\cos^2\phi-\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos\phi}$, 故 $\cos^2\phi\cos\alpha=\cos^2\phi-\sin^2\alpha$, 故 $\cos^2\phi=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, 故 $\cos\phi=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

122. $\tan\frac{\theta}{2}=\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\frac{\phi}{2}$，則 $\cos\theta=\frac{\cos\phi-c}{1-c\cos\phi}$ 試證之.

解 $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+c}{1-c}\tan^2\frac{\phi}{2}$，故

$$\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\left(1-\frac{1+c}{1-c}\cdot\frac{\sin^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}}\right)\div\left(1+\frac{1+c}{1-c}\cdot\frac{\sin^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}}\right)$$

$$=\frac{(1-c)\cos^2\frac{\phi}{2}-(1+c)\sin^2\frac{\phi}{2}}{(1-c)\cos^2\frac{\phi}{2}+(1+c)\sin^2\frac{\phi}{2}}，故 \cos\theta$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}-c\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+\sin^2\frac{\phi}{2}\right)}{\cos^2\frac{\phi}{2}+\sin^2\frac{\phi}{2}-c\left(\cos^2\frac{\phi}{5}-\sin^2\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\phi-c}{1-c\cos\phi}.$$

消去法

123. 自方程式 $x=a\cos\phi$ 及 $y=b\sin\phi$，試消去 ϕ.

解 $\cos^2\phi=\frac{x^2}{a^2}$，$\sin^2\phi=\frac{y^2}{b^2}$，故

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

124. 試自方程式 $\tan(a+\phi)=m$，及 $\tan(a-\phi)=n$，消去 ϕ.

解 $(a+\phi)+(a-\phi)=2a$，故

$\tan 2a=\frac{\tan(a+\phi)+\tan(a-\phi)}{1-\tan(a+\phi)\tan(a-\phi)}$，即

$\tan 2a=\frac{m+n}{1-mn}$.

125. 試自方程式 $x=a\tan^2\phi$，及 $y=2a\cot\phi$，消去 ϕ.

解 自前式 $\tan^2\phi=\frac{x}{a}$ ……………………(1)，

自後式 $\cot^2\phi=\frac{y^2}{4a^2}$ ……………………(2)，

(1)，(2)，相乘，則 $\frac{x}{a}\cdot\frac{y^2}{4a^2}=1$，即

$xy^2=4a^3$.

126. 試自次之方程式消去 ϕ. $m\sec\phi=1+\tan\phi$，$n\sec\phi=1-\tan\phi$.

解 自第一方程式，得 $\frac{m}{\cos\phi}=\frac{\cos\phi+\sin\phi}{\cos\phi}$，或 $m=\cos\phi+\sin\phi$ ……….(1).

同樣自第二方程式得 $n=\cos\phi-\sin\phi$ ……(2)，取 (1)，(2) 平方之和，則 $m^2+n^2=(\cos\phi+\sin\phi)^2+(\cos\phi-\sin\phi)^2=2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)$，即 $m^2+n^2=2$.

別解 取所題二式平方之和，則 $(m^2+n^2)\sec^2\phi=2(1+\tan^2\phi)=2\sec^2\phi$，故

$m^2+n^2=2$.

127. 試自方程式 $x=3\cos\phi+\cos3\phi$，$y=3\sin\phi-\sin3\phi$，消去 ϕ.

解 $x=3\cos\phi+4\cos^3\phi-3\cos\phi=4\cos^3\phi$……(1). $y=3\sin\phi-3\sin\phi+4\sin^3\phi=4\sin^3\phi$……(2). 自 (1)，(2) $\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\phi+\sin^2\phi$. 即 $\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

128. 試自方程式 $x=\sec\phi-\cos\phi$，$y=\operatorname{cosec}\phi-\sin\phi$，消去 ϕ.

解 將題式變形，得 $x=\frac{1-\cos^2\phi}{\cos\phi}=\frac{\sin^2\phi}{\cos\phi}$ …..(1)，及 $y=\frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi}=\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$

........(2), 因而 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{\sin^{\frac{4}{3}}\phi}{\cos^{\frac{2}{3}}\phi}+\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\phi}{\sin^{\frac{2}{3}}\phi}$ $=\frac{1}{\sin^{\frac{2}{3}}\phi.\cos^{\frac{2}{3}}\phi}$, 將 (1), (2), 相乘, 則 $xy=\sin\phi.\cos\phi$. 故 $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=\sin^{\frac{2}{3}}\phi.\cos^{\frac{2}{3}}\phi$, 故 $(xy)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$.

129. 試自次之方程式消去φ. $y\cos\phi-x\sin\phi=a\cos2\phi$, 及 $y\sin\phi+x\cos\phi=2a\sin2\phi$.

解 所題第一式, 以sinφ乘之, 其第二以cosφ乘之, 乃自第二之式, 減第一之式, 則 $(\sin^2\phi+\cos^2\phi)x=2a\sin2\phi\cos\phi-a\cos2\phi\sin\phi=a\sin\phi(4\cos^2\phi-\cos2\phi)=a\sin\phi(2\cos^2\phi+1)$, 卽 $x=a\sin\phi(2\cos^2\phi+1)$ ....(1). 次將方程式之第一, 以cosφ乘之, 其第二以sinφ乘之, 相加與前同樣, 得 $y=a\cos\phi(2\sin^2\phi+1)$ ...... (2) 因而 $x+y=a\{(\sin\phi+\cos\phi)+2\sin\phi\cos\phi(\sin\phi+\cos\phi)\}=a(\sin\phi+\cos\phi)(1+2\sin\phi\cos\phi)=a(\sin\phi+\cos\phi)^3$ ...... (3) 同樣 $x-y=a(\sin\phi-\cos\phi)^3$ ....(4), 故 $(x+y)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(\sin\phi+\cos\phi)^2$, 及 $(x-y)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(\sin\phi-\cos\phi)^2$, 因而 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\{(\sin\phi+\cos\phi)^2+(\sin\phi-\cos\phi)^2\}=2a^{\frac{2}{3}}$.

130. 試自次之各組方程式消去θ, 及φ.

(1) $\sin\alpha=2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$, 及 $\cos\alpha=\cos\beta\cos\phi=\cos\gamma\cos\theta$.

(2) $x=x'\cos\phi+y'\sin\phi\cos\theta$, $y=x'\sin\phi-y'\cos\phi\cos\theta$, 及 $z=y'\sin\theta$.

(3) $x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, 及 $z=c.\cos\phi$.

解 (1) $\sin\alpha=2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$, 故 $\sin^2\alpha=4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}=(1-\cos\theta)(1-\cos\phi)$.......(1). 又 $\cos\alpha=\cos\beta.\cos\phi=\cos\gamma.\cos\theta$, 故 $\cos\phi=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, $\cos\theta=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, 此二值代入(1)式中, 則 $\sin^2\alpha=\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$, 或 $\sin^2\alpha\cos\beta\cos\gamma=(\cos\gamma-\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha)=\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma+\cos^2\alpha$, 又移項而 $\cos\gamma.\cos\beta-\cos\beta.\cos\gamma(1-\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=\cos\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\cos\gamma$, 或 $(\cos\beta\cos\gamma+1)\cos^2c=\cos\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)$ 即 $\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma+1)=\cos\beta+\cos\gamma$.

(2) 將各式平方相加, 則 $x^2+y^2+z^2=x'^2\cos^2\phi+y'^2\sin^2\phi\cos^2\theta+2x'y'\sin\phi\cos\theta\cos\phi+x'^2\sin^2\phi+y'^2\cos^2\phi\cos^2\theta-2x'y'\sin\phi\cos\theta\cos\phi+y'^2\sin^2\theta=x'^2+y'^2\cos^2\theta+y'^2\sin^2\theta=x'^2+y'^2$.

(3) 將題之三方程式變化, 則 $\frac{x}{a}=\sin\phi\cos\theta$, $\frac{y}{b}=\sin\phi\sin\theta$, $\frac{z}{c}=\cos\phi$, 取其前二方程式平方之和, 則 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\phi$, 此式與 $\frac{z}{c}=\cos\phi$ 之平方相加, 則 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$.

131. 試自次之一組方程式消去x.

$$\frac{2a\tan\phi}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{a\tan^2\phi-x}{\tan\alpha\tan\beta}=a-x.$$

解 $\frac{2a\tan\phi}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{a\tan^2\phi-x}{\tan\alpha\tan\beta}$, 故

$$x=a\tan^2\phi-\frac{2a\tan\phi\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

$=\{a\tan^2\phi(\tan\alpha+\tan\beta)-2a\tan\phi\times\tan\alpha\tan\beta\}/\{\tan\alpha+\tan\beta\}=$ $a\tan\phi\left\{\begin{array}{l}\{\tan\phi(\tan\alpha+\tan\beta)\\-2\tan\alpha\tan\beta\}/\{\tan\alpha+\tan\beta\}\end{array}\right\}$,

又 $\dfrac{2a\tan\phi}{\tan\alpha+\tan\beta}=a-x$, 故

$x=a\left\{1-\dfrac{2\tan\phi}{\tan\alpha+\tan\beta}\right\}$

$=a\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta-2\tan\phi}{\tan\alpha+\tan\beta}$,

故將此x之二值,置爲相等,而 $\tan\phi\{\tan\phi(\tan\alpha+\tan\beta)-2\tan\alpha\tan\beta\}=\tan\alpha+\tan\beta-2\tan\phi$, 或 $(\tan\alpha+\tan\beta)\times(\tan^2\phi-1)-2\tan\phi(\tan\alpha\tan\beta-1)=0$, 或

$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\dfrac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}$, 故

$\tan(\alpha+\beta)=\tan2\phi$.

132. 試自方程式 $\cos(\alpha+x)=m$, $\cos(\alpha-x)=n$, 消去x.

解 $\cos(\alpha+x)=\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x=m$ …… (1), $\cos(\alpha-x)=\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=n$ … (2), 自 (1) 與 (2) 而 $\sin x=\dfrac{n-m}{2\sin\alpha}$, $\cos x=\dfrac{n+m}{2\cos\alpha}$, 故 $\left(\dfrac{n-m}{2\sin\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{n+m}{2\cos\alpha}\right)^2=1$,

即 $\dfrac{(m-n)^2}{4\sin^2\alpha}+\dfrac{(m+n)^2}{4\cos^2\alpha}=1$.

133. $\dfrac{\sin\theta}{a^2-1}=\dfrac{\cos\theta}{2a\sin2\phi}=\dfrac{1}{1+2a\cos2\phi+a^2}$

試消去ϕ.

解 自 $\dfrac{\sin\theta}{a^2-1}=\dfrac{\cos\theta}{2a\sin2\phi}$, 而 $\sin2\phi=\dfrac{(a^2-1)\cos\theta}{2a\sin\theta}$ ……………………(1). 又自 $\dfrac{\sin\theta}{a^2-1}=\dfrac{1}{1+2a\cos2\phi+a^2}$, 而 $\cos2\phi=\dfrac{(a^2-1)-\sin\theta(a^2+1)}{2a\sin\theta}$ …………………(2).

取 (1), (2) 平方之和, 則

$\dfrac{(a^2-1)^2\cos^2\theta+\{(a^2-1)-\sin\theta(a^2+1)\}^2}{4a^2\sin^2\theta}$

$=1$, 或 $(a^2-1)^2\cos^2\theta+(a^2-1)^2-2\sin\theta(a^2-1)(a^2+1)+\sin^2\theta(a^2+1)^2=4a^2\sin^2\theta$, 或 $2(a^2-1)^2-(a^2-1)^2\times\sin^2\theta-2\sin\theta(a^2-1)(a^2+1)+\sin^2\theta(a^2+1)^2-4a^2\sin^2\theta=0$, 即

$(a^2-1)-\sin\theta(a^2+1)=0$.

134. 試自次之三方程式消去α及β.

$b+c\cos\alpha=u\cos(\alpha+\theta)$, $b+c\cos\beta=u\cos(\beta+\theta)$, $\alpha-\beta=2\delta$.

解 $b+c\cos\alpha=u\cos\alpha\cos\theta-u\sin\alpha\sin\theta$, $b+c\cos\beta=u\cos\beta\cos\theta-u\sin\beta\sin\theta$, 或 $(u\cos\theta-c)\cos\alpha-u\sin\theta\sin\alpha=b$…..(1), $(u\cos\theta-c)\cos\beta-u\sin\theta\sin\beta=b$…..(2).

以 $\sin\beta$ 乘 (1), 以 $\sin\alpha$ 乘 (2), 相減, 則 $(u\cos\theta-c)(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)=b(\sin\beta-\sin\alpha)$, 或 $(u\cos\theta-c)\sin(\beta-\alpha)$ $=2b\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}$, 或 $(u\cos\theta-c)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=b\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}$, 即

$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{(u\cos\theta-c)\cos\delta}{b}$ ……………(3),

次以 $\cos\beta$ 乘 (1), 以 $\cos\alpha$ 乘 (2), 兩邊相減, 與前同樣變化之, 則 $u\sin\theta\sin(\beta-\alpha)=2b\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 或 $-u\sin\theta\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=b\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 即

$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{-u\sin\theta\cos\delta}{b}$ …………. (4), 作 (3), (4) 平方之和, 則 $\dfrac{(u\cos\theta-c)^2\cos^2\delta}{b^2}+\dfrac{u^2\sin^2\theta\cos^2\delta}{b^2}=1$, 或 $(u\cos\theta-c)^2+$

$u^2\sin^2\theta=b^2\sec^2\delta$, 此左邊爲 $u^2\cos^2\theta-2cu\cos\theta+c^2+u^2-u^2\cos^2\theta=c^2+u^2-2cu\cos\theta$, 故 $c^2+u^2-2cu\cos\theta=b^2\sec^2\delta$.

135. 次之方程式試消去其 x, y,

$a\sin^2x+b\cos^2x=m$ ……… (1),

$b\sin^2y+a\cos^2y=n$ ……… (2),

$a\tan x-b\tan y=0$ ……… (3).

圖 自 (1) 得 $(a-b)\sin^2x=m-b$, $(a-b)\cos^2x=a-m$, 因而 $\tan^2x=\dfrac{m-b}{a-m}$ …… (4). 同樣自 (2) 而得 $\tan^2y=\dfrac{n-a}{b-n}$ ……… (5). 自 (4), (5), 得

$\dfrac{\tan^2x}{\tan^2y}=\dfrac{(m-b)(b-n)}{(a-m)(n-a)}$ ……………… (6),

又自 (3) 得 $\dfrac{\tan^2x}{\tan^2y}=\dfrac{b^2}{a^2}$ ………… (7).

自 (6), (7) 得 $\dfrac{(m-b)(b-n)}{(a-m)(n-a)}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

136. 試消去次之方程式之 x.

$\sin a\sin x=8\cos^2\dfrac{a+x}{2}$ …………… (1).

$\tan\dfrac{x}{2}=\tan\dfrac{a}{2}\cot^2\dfrac{b}{2}$ …………… (2).

圖 (1)變形則

$4\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=8\left(\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)^2=8\cos^2\dfrac{a}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}-16\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+8\sin^2\dfrac{a}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}$,

或 $8\cos^2\dfrac{a}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}-20\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+8\sin^2\dfrac{a}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}=0$, 或 $2\tan^2\dfrac{a}{2}\tan^2\dfrac{x}{2}-5\tan\dfrac{a}{2}\tan\dfrac{x}{2}+2=0$, 或 $\left(2\tan\dfrac{a}{2}\tan\dfrac{x}{2}-1\right)\times\left(\tan\dfrac{a}{2}\tan\dfrac{x}{2}-2\right)=0$, $\therefore$ $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2\tan\dfrac{a}{2}}$, $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\tan\dfrac{a}{2}}$, 故自此二式與 (2) 式得 $2\tan^2\dfrac{a}{2}\cot^2\dfrac{b}{2}=1$, 及 $\tan^2\dfrac{a}{2}\cdot\cot^2\dfrac{b}{2}=2$.

極大 極小

137. 試求 $\tan a\tan x+\cot a\cot x$ 之極大極小值, 次求其 x 之值. [a 爲銳角 x 變化於 $0°$ 與 $180°$ 之間].

圖 將 $\tan a\tan x+\cot a\cot x=s$, 則 $\tan^2a\tan^2x-s\tan a\tan x+1=0$, 此二方程式之根, 關於 $\tan x$ 爲實, 則必 $s^2\tan^2a-4\tan^2a\geqq0$ 或 $s^2-4\geqq0$, $\therefore$ $s\geqq2$, 或 $s\leqq-2$. 卽 s 之極大值爲 -2, 而極小值爲 2. 今若對於此極大極小值, 而求 $\tan a$ 之值, 則 $\tan x=\dfrac{s}{2\tan a}$, 而極大時 $s=-2$, 故 $\tan x=-\cot a$, 極小時 $s=2$, 故 $\tan x=\cot a$. 又因 x 在 $0°$ 與 $180°$ 之間, 故極大時, x 之值爲鈍角, 而, $x=\tan^{-1}(-\cot a)$ 極小時 x 之值爲銳角, 而 $x=\tan^{-1}(\cot a)$. 但此 x 之值, 乃極大極小之各一值也.

138. x 自 $0°$ 至 $\dfrac{\pi}{2}$ 變化, 試求 $\dfrac{\tan 3x}{\tan^3x}$ 之極小值.

圖 $\dfrac{\tan 3x}{\tan^3x}=\dfrac{(3-4\sin^2x)(1-\sin^2x)}{(1-4\sin^2x)\sin^2x}$.

今將此值等於 s, 去分母移項, 則 $4(1+s)\sin^4x-(7+s)\sin^2x+3=0$, 此方程

式根之平方，關於$\sin x$，若為實數，則必$(7+s)^2-48(1+s)\geqq 0$，或$s^2-34s+1\geqq 0$，

$\therefore\ s\geqq 17+\sqrt{17^2-1}$，或$s\leqq 17-\sqrt{17^2-1}$

故s之極小值，為$s=17+\sqrt{17^2-1}$.

而$\sin x=\pm\sqrt{\dfrac{7+s}{8(1+s)}}$，但斯時$s$為正，故$\sqrt{\dfrac{7+s}{8(1+s)}}<1$，而$x$在0與$\dfrac{\pi}{2}$之間，故$\sin x>0$，因而$\sin x=\sqrt{\dfrac{7+s}{8(1+s)}}$. [但$s=17+\sqrt{17^2-1}$.]

139. x, y，為正，而$x+y$為小於π一定不易之數，試求$\operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}y$之極小值.

圖　若$x+y=a$與$\operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}y=s$，

則$\dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x\sin y}=s$，或

$\dfrac{4\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}=s$，或

$$s=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\cos^2\frac{1}{2}(x-y)-\cos^2\frac{1}{2}(x+y)}$$

$$=\sin\frac{1}{2}(x+y)\left\{\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(x-y)+\cos\frac{1}{2}(x+y)}+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(x-y)-\cos\frac{1}{2}(x+y)}\right\}.$$

但依假設$\dfrac{1}{2}\pi>\dfrac{1}{2}(x+y)>0$，及各分母為正，故上式極小，則$\cos\dfrac{1}{2}(x-y)$極大，故$\cos\dfrac{1}{2}(x-y)=1$，即$x=y$時，則$\operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}y$極小，而其值為$2\operatorname{cosec}\dfrac{1}{2}(x+y)$.

140. $x+y$為一定，試將$1-\sin^2x-\sin^2y$，化為對數計算之式，而求極大及極小值.

圖　$x+y=a$，$1-\sin^2x-\sin^2y=s$，$1-\sin^2x-\sin^2y=\cos^2x-\sin^2y=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x-1+\cos 2y)=\cos(x-y)\cos(x+y)=s$，而$\cos(x+y)=$定量$=m$. $\therefore\ s=m\cos(x-y)$，而$\cos(x-y)$之值在$+1$與-1之間，故s之極小值如次. [$m>0$者]，則$\cos(x-y)=-1$，即$x-y=(2n+1)\pi$，而極小值，為$s=-m=-\cos(x+y)$. [$m<0$者]，則$\cos(x-y)=1$，即$x-y=2n\pi$，而極小值為$s=m=\cos(x+y)$. 次求極大者反之.

141. 試將$\sin x\cos(x+a)$，變為二正弦之差，而求x變時，其積之極大極小值.

圖　$\sin x\cos(x+a)=\dfrac{1}{2}\{\sin(2x+a)-\sin a\}$，此式$x$變時，僅有$\sin(2x+a)$之項變化，故$\dfrac{1}{2}\{\sin(2x+a)-\sin a\}$，在$\sin(2x+a)$極小時極小，在$\sin(2x+a)$極大時極大，但$\sin(2x+a)=-1$時極小，而$\sin(2x+a)=1$時極大，故$\sin x\cos(x+a)$之極小值，為$-\dfrac{1}{2}(1+\sin a)$. 而極大值為$\dfrac{1}{2}(1-\sin a)$.

對　數

142. 次之諸式，試化為適於對數計算之式.

(1) $1+\sin a$.	(2) $\sin^2a-\sin^2b$.
(3) $1-\tan^2a$.	(4) $\cot a-\tan a$.
(5) $\dfrac{\sin a}{1+\cos a}$.	(6) $\tan a+\cot a$.

(7) $\sec a+\operatorname{cosec} b$. (8) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(9) $1+\sqrt{3}$. (10) $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}$.

解 (1) $1+\sin a=\sin\frac{\pi}{2}+\sin a$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$,

(2) $\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\times\cos\frac{a+b}{2}\times\cos\frac{a-b}{2}=\sin(a+b)\sin(a-b)$.

(3) $1-\tan^2 a=1-\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=(\cos^2 a-\sin^2 a)\div\cos^2 a=\frac{\cos 2a}{\cos^2 a}$.

(4) $\cot a-\tan a=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a.\cos a}=\frac{2\cos 2a}{\sin 2a}=2\cot 2a$.

(5) $\frac{\sin a}{1+\cos a}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\tan\frac{a}{2}$.

(6) $\tan a+\cot a=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{\sin^2 a+\cos^2 a}{\sin a\cos a}=\frac{2}{\sin 2a}=2\operatorname{cosec} 2a$.

(7) $\sec a+\operatorname{cosec} b=\frac{1}{\cos a}+\frac{1}{\sin b}=\frac{\sin b+\cos a}{\sin b\cos a}=\frac{\sin b+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\sin b.\cos a}$

$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)}{\sin b.\cos a}$.

(8) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$.

(9) $1+\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}.\sin\frac{7\pi}{12}$.

(10) $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}=\sqrt{a}\left\{\sqrt{1-\frac{b}{a}}+\sqrt{1+\frac{b}{a}}\right\}$.

今若 $\frac{b}{a}=\cos\phi$*, 則 $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}$

$=\sqrt{a}\{\sqrt{1-\cos\phi}+\sqrt{1+\cos\phi}\}$

$=\sqrt{2a}\left\{\sin\frac{\phi}{2}+\cos\frac{\phi}{2}\right\}$

$=2\sqrt{a}\cos\left(45^\circ-\frac{\phi}{2}\right)$.

*[$\frac{b}{a}=\cos\phi$ 能成立者, 因 $a<b$ 時, 則 $\sqrt{a-b}$ 爲虛數, 故必 $a>b$, 又 $\sqrt{\ }$ 之前恆爲正符號, 更不待言.]

143. $\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x$, 試化爲適於對數計算之式, 且自其結果求此式爲 0 之 x 之值.

解 $\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x$

$=2\sin 2x\cos x+2\sin 2x\cos 7x$

$=2\sin 2x(\cos x+\cos 7x)$

$=4\sin 2x\cos 4x\cos 3x$,

故題式爲 0, 其 x 之值, 可自 $\sin 2x=0$, $\cos 4x=0$, $\cos 3x=0$, 求得之, 卽

$$x=\begin{cases} n\frac{\pi}{2}, \\ (2n+1)\frac{\pi}{8}, \\ (2n+1)\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

三角形之邊角之關係

144. $2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)$ 試證之.

圖 $a=b\cos C+c\cos B$ ....(1)

$b=c\cos A+a\cos C$ ....(2)

$c=a\cos B+b\cos A$ ....(3)

以 $\cos A$ 乘 (1), 以 $\cos B$ 乘 (2), 以 $\cos C$ 乘 (3), 各邊相加, 則 $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2\{a\cos B\cos C+b\cos A\cos C+c\cos A\cos B\}=a\{\cos(B+C)+\cos(B-C)\}+b\{\cos(A+C)+\cos(C-A\}+c\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}=a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)-(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$, $\therefore$ $2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)$.

145. $c(\cos A+\cos B)=2(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C$ 試證之.

圖 $a=b\cos C+c\cos B$..............(1)

$b=c\cos A+a\cos C$..............(2)

故 (1), (2) 相加, 則 $a+b=c(\cos A+\cos B)+(a+b)\cos C$, 或 $c(\cos A+\cos B)=(a+b)(1-\cos C)=(a+b).2\sin^2\frac{1}{2}C=2(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C$.

146. $\tan B\div\tan C=(a^2+b^2-c^2)\div(a^2-b^2+c^2)$ 試證之.

圖 $a=b\cos C+c\cos B$..............(1)

$b=c\cos A+a\cos C$..............(2)

$c=a\cos B+b\cos A$..............(3)

故以 a 乘 (1), 以 b 乘 (2), 以 c 乘 (3), 則得

$a^2=ab\cos C+ac\cos B$..........(4)

$b^2=bc\cos A+ab\cos C$..........(5)

$c^2=ac\cos B+bc\cos A$..........(6)

自 (4), (5) 之和減 (6), 則得

$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$..............(7)

自 (4), (6), 之和減 (5), 則得

$a^2-b^2+c^2=2ac\cos B$..............(8)

故 $(a^2+b^2-c^2)\div(a^2-b^2+c^2)$

$=\frac{b}{c}.\frac{\cos C}{\cos B}$, 但 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$, 故

$(a^2+b^2-c^2)\div(a^2-b^2+c^2)=\frac{\sin B\cos C}{\sin C\cos B}$

$=\tan B\cot C=\tan B\div\tan C$.

147. ϕ 爲 $\sin^2\phi=\frac{4ab\cos^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}$ 之補助角. 試證 $c=(a+b)\cos\phi$.

圖 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2ab\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=(a+b)^2-4ab\times\cos^2\frac{C}{2}$, 自所題之關係式, 而 $(a+b)^2\sin^2\phi=4ab\cos^2\frac{C}{2}$, 故 $c^2=(a+b)^2-(a+b)^2\sin^2\phi=(a+b)^2(1-\sin^2\phi)=(a+b)^2\cos^2\phi$, 故 $c=(a+b)\cos\phi$.

148. 於任意之三角形, 試證次式.

$$c^2=\frac{(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C-(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C}{\cos(A-B)}.$$

圖 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}$, 故 $\left(\frac{a+b}{\sin A+\sin B}\right)^2=\frac{c^2}{\sin^2C}$, 或 $\frac{(a+b)^2}{4\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}}$

$=\frac{c^2}{4\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$......................(1). 但

$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, 故 $\sin^2\frac{A+B}{2}=\cos^2\frac{C}{2}$, 以 $4\cos^2\frac{C}{2}$ 乘 (1) 式之兩邊, 得

$\frac{(a+b)^2}{\cos^2\frac{A-B}{2}}=\frac{c^2}{\sin^2\frac{C}{2}}$, 或 $c^2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

$=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}$..........................(2),

同樣自 $\left(\dfrac{a-b}{\sin A-\sin B}\right)^2=\dfrac{c^2}{\sin^2 C}$，而

$c^2\sin^2\dfrac{1}{2}(A-B)=(a-b)^2\cos\dfrac{C}{2}$...(3)，自 (2) 減 (3) 而 $c^2\left\{\cos^2\dfrac{1}{2}(A-B)-\sin^2\dfrac{1}{2}(A-B)\right\}$

$=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}-(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$......(4),

但 $\cos^2\dfrac{1}{2}(A-B)-\sin^2\dfrac{1}{5}(A-B)=$ $\cos(A-B)$，故 (4) 式如次，$c^2\cos(A-B)$ $=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}-(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$. 故

$c^2=\left[(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}-(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}\right]\div\cos(A-B)$.

149. 三角形之三角 A, B, C 之外角，各為 A′, B′, C′，則 $2bc\,\mathrm{vers}A'+2ca\,\mathrm{vers}B'+2ab\,\mathrm{vers}C'=(a+b+c)^2$ 試證之.

解 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A'=b^2+c^2+2bc(1-\mathrm{vers}A')$,

$\therefore\ 2bc\,\mathrm{vers}A'=b^2+c^2+2bc-a^2$,

同樣 $2ca\,\mathrm{vers}B'=c^2+a^2+2ca-b^2$,

$2ab\,\mathrm{vers}C'=a^2+b^2+2ab-c^2$,

故 $2bc\,\mathrm{vers}A'+2ca\,\mathrm{vers}B'+2ab\,\mathrm{vers}C'=$ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

150. $\sin(A-B):\sin(A+B)=a^2-b^2:c^2$ 試證之.

解 $\dfrac{\sin^2 A}{a^2}=\dfrac{\sin^2 B}{b^2}=\dfrac{\sin^2 C}{c^2}=$ $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{a^2-b^2}=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

故 $\sin(A+B)\sin(A-B):\sin^2 C$ $=a^2-b^2:c^2$，但 $\sin(A+B)$ $=\sin\{\pi-(A+B)\}=\sin C$，故 $\sin(A-B):$ $\sin(A+B)=a^2-b^2:c^2$.

151. $\dfrac{\tan\frac{1}{2}A-\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B}=\dfrac{a-b}{c}$ 試證之

解 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a-b}{\sin A-\sin B}$

故 $\dfrac{c}{\sin(A+B)}=\dfrac{a-b}{\sin A-\sin B}$,

或 $\dfrac{c}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}$ $=\dfrac{a-b}{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}$，或

$\dfrac{c}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\dfrac{a-b}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}$，或

$\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=(\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$ $-\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A)\div(\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B+$ $\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A)=$

$\dfrac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}$ $\div\dfrac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B+\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}$

$=(\tan\frac{1}{2}A-\tan\frac{1}{2}B)\div(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B)$.

152. $s^2\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C=\sqrt{\{s(s-a)\times(s-b)(s-c)\}}$ 試證之.

解 $s^2\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C=$

$s^2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\times$ $\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

153. x, y, z, 爲以 $\cos x=\frac{a}{b+c}$, $\cos y=\frac{b}{c+a}$, $\cos z=\frac{c}{a+b}$, 決定之三角, 試證次之二式.

$\tan^2\frac{x}{2}+\tan^2\frac{y}{2}+\tan^2\frac{z}{2}=1$,

$\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

圖 $\tan^2\frac{x}{2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$=\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}=\frac{b+c-a}{b+c+a}=\frac{s-a}{s}$. 同樣 $\tan^2\frac{y}{2}=\frac{s-b}{s}$, $\tan^2\frac{z}{2}=\frac{s-c}{s}$, 故

$\tan^2\frac{x}{2}+\tan^2\frac{y}{2}+\tan^2\frac{z}{2}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=\frac{2s-(a+b+c)}{s}=1$. 次因 $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ 皆爲正, 故 $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$, 之正切皆爲正, 故 $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{s-a}{s}}$, $\tan\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{s-b}{s}}$, $\tan\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{s-c}{s}}$, 因而 $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{s-a}{s}}\sqrt{\frac{s-b}{s}}\times\sqrt{\frac{s-c}{s}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

154. a^2, b^2, c^2 爲等差級數, 則 $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ 亦爲等差級數, 試證之.

圖 a^2, b^2, c^2 爲等差級數, 故 $a^2+c^2=2b^2$. 次因 $\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{2b^2}{2\sin^2 B}=\frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{a^2+b^2}{\sin^2 A+\sin^2 C}$. 故

$2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$, 或

$\sin^2 B-\sin^2 A=\sin^2 C-\sin^2 B$, 或

$\sin(B+A)\sin(B-A)=\sin(C+B)\sin(C-B)$,

或 $\sin C.\sin(A-B)=\sin A.\sin(B-C)$. 即

$\sin A\sin C\cos B-\sin B\sin C\cos A$

$=\sin A\sin B\cos C-\sin A\sin C\cos B$,

此式之兩邊, 以 $\sin A\sin B\sin C$ 除之,

則 $\cot B-\cot A=\cot C-\cot B$.

155. 三角形之各角爲等差級數, 其公差爲 δ, 則 $\cos\delta=\frac{a+c}{2b}$ 試證之.

圖 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+c}{\sin A+\sin C}$

$=\frac{a+c}{2\cos\frac{B}{2}\cos\delta}$, 故 $2b\cos\delta=2(a+c)\times\sin\frac{B}{2}$............(1). 但 A, B, C 爲等差級數, 故 $2B=A+C$, 即 $A+B+C=3B=\pi$, 故 $B=\frac{\pi}{3}$, 因而 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$, 故 (1) 式如次, $2b\cos\delta=a+c$, 即 $\cos\delta=\frac{a+c}{2b}$.

156. $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$ 試證之.

圖 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\left(\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right)$

$=\left(\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}\right)\left(\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}\right)$

$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$=\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\div\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$

$=\sin(A-B)\div\sin C$.

157. $\triangle ABC$ 之 $C=2B$, 則 $c^2=ab+b^2$ 試證之.

圖 $\frac{c^2-b^2}{ab}=\frac{\sin^2 C-\sin^2 B}{\sin A\sin B}$

$=\frac{\sin(C+B)\sin(C-B)}{\sin A\sin B}$. 但 $C+B=180^\circ-A$, $C-B=B$, 故 $\frac{c^2-b^2}{ab}=1$, 即 $c^2=ab+b^2$.

158. $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$, 則 $a=b$, 問其證.

解 自所設關係式 $a\left(\tan A-\tan\frac{A+B}{2}\right)+b\left(\tan B-\tan\frac{A+B}{2}\right)=0$, 或

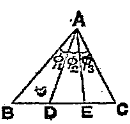
$$a\frac{\sin\left(A-\frac{A+B}{2}\right)}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}+b\frac{\sin\left(B-\frac{A+B}{2}\right)}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}=0,$$

或 $$a\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A}-b\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B}=0,$$

故 $\sin\frac{1}{2}(A-B)=0$, 或 $\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=0$, 若 $\sin\frac{1}{2}(A-B)=0$, 則 $A=B$, 又自 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=0$, 得 $a\cos B=b\cos A$, 但有此關係, 則自頂點C, 作垂線, 必過AB之中點, 故 $A=B$, 即所設之關係, 為 $A=B$, 因而 $a=b$.

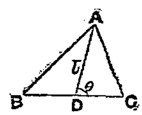
159. 將三角形之底, 分為三等分, t_1, t_2, t_3, 為在頂點含各部分之角之正切, 則 $\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{t_2^2}\right)$, 試證之.

解 將底BC於D及E, 分為BD=DE=EC 將 $B\hat{A}D$ 為 ϕ_1, $D\hat{A}E$ 為 ϕ_2, $E\hat{A}C$ 為 ϕ_3, 則自△AEB得 $\frac{\sin(\phi_1+\phi_2)}{\sin AED}=\frac{BE}{AB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{c}$, 自△AEC得 $\frac{\sin\phi_3}{\sin AEC}=\frac{EC}{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{b}$, 因 $\sin AED=\sin AEC$, 故依除法得 $\frac{\sin(\phi_1+\phi_2)}{\sin\phi_3}=\frac{2b}{c}$. 同樣得 $\frac{\sin(\phi_3+\phi_2)}{\sin\phi_1}=\frac{2c}{b}$, 故 $\frac{\sin(\phi_1+\phi_2)\sin(\phi_3+\phi_2)}{\sin\phi_1\sin\phi_3}=4=4(\sin^2\phi_2+\cos^2\phi_2)$, 故 $(\cos\phi_2+\sin\phi_2\cot\phi_1)(\cos\phi_2+\sin\phi_2\cot\phi_3)=4(\sin^2\phi_2+\cos^2\phi_2)$, 故 $(\cot\phi_2+\cot\phi_1)\times(\cot\phi_2+\cot\phi_3)=4(1+\cot^2\phi_2)$, 因得所題之等式.



160. 三角形之角A二等分線, 至底之長為 l, 其與底所成之角為 θ, 三角形之周圍為 2δ, 則 $\delta\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)=l\cos\frac{A}{2}\sin\theta$, 其證如何.

解 將二等分 $\hat{A}$ 之直線, 與底相交之點為D, 則 $A\hat{D}C=\hat{B}+B\hat{A}D$, 因而 $\sin\theta=\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)$, 故



$\delta\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)=\delta\left\{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\right\}$
$=2\delta\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B}{2}=2\delta\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}=$
$\frac{2\delta}{a}(\delta-a)\sqrt{\frac{(\delta-b)(\delta-c)}{bc}}=\frac{2\delta(\delta-a)}{a}\times\sin\frac{A}{2}$
$=\frac{2bc}{a}\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=\frac{bc}{a}\cos\frac{A}{2}\sin A$. 又 $l\sin\theta$=(自A至BC之垂線)$=b\sin C$, 故 $l\sin\theta\cos\frac{A}{2}=b\sin C\cos\frac{A}{2}=\frac{bc}{a}\sin A\times\cos\frac{A}{2}$, 故 $\delta\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)=l\sin\theta\cos\frac{A}{2}$.

161. 各邊成等差級數之三角形, 其最大角為 θ, 最小角為 ϕ, 則 $4(1-\cos\theta)\times$

$(1-\cos\phi)=\cos\theta+\cos\phi$, 試求其證.

解 在此三角形最大最小之中間之角爲 $\pi-\theta-\phi$, 而其三邊成等差級數, 則其三角之正弦亦成等差級數, 故 $\sin\theta+\sin\phi=2\sin(\pi-\theta-\phi)=2\sin(\theta+\phi)$, 故 $2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=4\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta+\phi}{2}$, 故 $2\cos\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}$. 故 $2\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\phi}{2}$, 故 $\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$, 故 $\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi}{2}=9\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}$, 故 $8\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi}{2}-\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{\phi}{2}\right)=\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\phi}{2}-1=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}=\cos\frac{\theta+\phi}{2}\times\cos\frac{\theta-\phi}{2}$. 故 $4(1-\cos\theta)(1-\cos\phi)=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=\cos\theta+\cos\phi$.

162. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$ 試證之.

解 左邊 $=a\cos A+\frac{a\sin B}{\sin A}\cos B+\frac{a\sin C}{\sin A}\times\cos C=a\cos A+\frac{a(\sin 2B+\sin 2C)}{2\sin A}$
$=a\cos A+\frac{2a\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin A}$
$=a\cos A+a\cos(B-C)=-a\cos(B+C)$
$+a\cos(B-C)=2a\sin B\sin C$.

163. $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, 則 A 爲 $60°$, 試求其證.

解 $(a+b+c)(b+c-a)=(b+c)^2-a^2=b^2+c^2+2bc-a^2$, 故

$a^2=b^2+c^2-bc$..........................(1).

又於三角形, 得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ....(2).

將(1), (2), 兩邊相減, 次以 bc 除之, 則 $2\cos A-1=0$, 卽 $\cos A=\frac{1}{2}$, 故 $A=60°$.

164. 三角形之三邊, 爲等比級數, 則此級數之公比大於 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 而小 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 試證之.

解 a, b, c, 成等比級數, 若將公比爲 r, 則 $a=cr^2$, $b=cr$, 但凡三角形 $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$, 卽 $r^2-r-1<0$......(1),

$r^2-r+1>0$ ....(2),

$r^2+r-1>0$ .... (3),

將(2)之左邊等於0, 則方程式之根爲虛數, 故(2)無論 r 之數爲如何, 恆能成立. 又(1)若欲成立, 則必 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}>r>\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 又(3)若欲成立, 則必 $r>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $r<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 但 r 爲正, 故(1), (3), 若欲同時成立, 則必 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}>r>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 卽 a, b, c, 成等比級數, 則其公比必在 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 與 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 之間.

165. 三角形之三邊爲連續三整數, 又最大角爲最小角之二倍, 試求其三角.

解 三角形三邊爲 a, $a+1$, $a+2$,

則 $\frac{a}{\sin A}=\frac{a+1}{\sin B}=\frac{a+2}{\sin 2A}=\frac{2(a+1)}{\sin A+\sin 2A}$

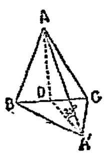
$=\frac{2(a+1)}{\sin A(1+2\cos A)}=\frac{a+1}{\sin B}=\frac{a+1}{\sin 3A}$

$=\dfrac{a+1}{\sin A(4\cos^2 A-1)}$，∴ $\dfrac{1+2\cos A}{2}=4\cos^2 A-1$，自此式得 $8\cos^2 A-2\cos A-3=0$，∴ $\cos A=\frac{1}{8}(1\pm5)$，∴ $\cos A=\frac{3}{4}$，或 $-\frac{1}{2}$。但A爲最小角，故小於直角，故其一值 $-\frac{1}{2}$ 不可用，因得 $A=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$。

三角形之解法
及
距離高等

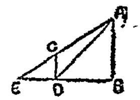
166. 將二等邊三角形之木版，面向太陽，而垂直於地，且頂點向上，今知三角形之底爲 $2a$ 尺，高爲 h 尺，太陽之高度爲30°，則三角形影之頂角之正切，爲 $\dfrac{2ah\sqrt{3}}{3h^2-a^2}$ 試證之。

解　三角形ABC頂點A之影爲A′，作AD垂直於BC，連結A′D，A′B，A′C，則 $A'D\perp BC$，而△ABC爲二等邊，故 $BD=CD=a$，又 $A'D=h\cot 30^\circ=\sqrt{3}h$，而 $\tan CA'D=\dfrac{CD}{A'D}=\dfrac{a}{\sqrt{3}h}=\tan\dfrac{BA'C}{2}$，故 $\tan BA'C=\dfrac{2a}{\sqrt{3}h}\div\left(1-\dfrac{a^2}{3h^2}\right)=\dfrac{2a}{\sqrt{3}h}\div\dfrac{3h^2-a^2}{3h^2}=\dfrac{2ah\sqrt{3}}{3h^2-a^2}$。



167. 自高立16丈丘陵之上測某塔，其頂之俯角爲32度10分，其塔底之俯角爲56度30分，問塔高。

解　AB爲丘陵之高，CD=x丈爲塔高，則 $BD=16\times\tan 33^\circ30'$，$EB=16\times\tan 57^\circ50'$，∴ $ED=16(\tan 57^\circ50'-\tan 33^\circ30')$，但 $\dfrac{x}{16}=\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{\tan 57^\circ50'-\tan 33^\circ30'}{\tan 57^\circ50'}=\dfrac{1.590-0.6619}{1.590}=\dfrac{0.9281}{1.590}$，$x=$9丈.34弱。



168. 知二邊 a, b, 及夾角A，試解三角形。

解　$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，∴ $\dfrac{\sin(A+C)}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，故 $\dfrac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，即 $\sin A\cot C+\cos A=\dfrac{b}{c}$，因而可決定C，故B亦可決定之。然此法於實際上對數計算甚不便，故通例用次之方法。$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，∴ $\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\dfrac{b-c}{b+c}$，

故 $\dfrac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}=\dfrac{b-c}{b+c}$，而 $\tan\frac{1}{2}(B+C)=\tan\frac{1}{2}(180^\circ-A)=\cot\frac{A}{2}$，故 $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ ………(1)，今若 $\dfrac{b}{c}=\tan\theta$，則(1)可如次書之，

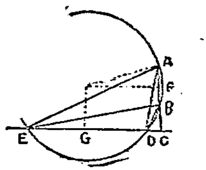
$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{1}{2}(B-C).$$

依此式或(1)式而求得B−C，則因B+C=180°−A，故可求得B及C，因而 a 亦可決定之。

169. 塔頂上有旗竿,自距塔底 a 尺之處,測得旗竿長之視角為15°,又自距塔底 b 尺之處,測得旗竿長之視角亦為15°,問旗竿之長如何. 但角15°之正切為 $2-\sqrt{3}$.

解 AB為旗竿之高,BC為塔高,自D,E,視AB之角相等,則A,B,D,E,在同一之圓周上. 故自中心O作AB,DE,之垂線OF,OG,則將AB,DE,分為二等分,而OFCG為矩形,故 $AF=\frac{1}{2}AB$, $OF=CG=\frac{1}{2}(CD+CE)$,而 $A\hat{O}F$ 為15°明矣,因而 $CD=a$, $CE=b$, $AB=x$, 則 $\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(a+b)\tan 15°$, 或 $x=(a+b)\tan 15°$, 但 $\tan 15°=2-\sqrt{3}$, 故 $x=(a+b)(2-\sqrt{3})$.

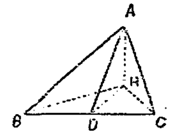


170. $b=14$, $c=11$, $A=60°$, 故 $B=71°44'29''$ 試證之. 但 $L\tan 11°44'29''=9.31774$, $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$.

解 $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{3}{25}\cot 30°=\frac{3\sqrt{3}}{25}$, 故 $L\tan\frac{1}{2}(B-C)=10+\log\frac{3\sqrt{3}}{25}=10+\frac{3}{2}\log 3-\log 25=10+\frac{3}{2}\log 3-\log\frac{100}{4}=10+\frac{3}{2}\log 3-2+2\log 2=9.31774$, 故 $\frac{1}{2}(B-C)=11°44'29''$, 而 $\frac{1}{2}(B+C)=60°$, 故 $B=71°44'29''$.

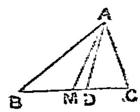
171. 在水平面上長 $2a$ 之直線之兩端及中央,各立一測士,同時望一輕氣球,得其仰角為 α,β,γ,依此問輕氣球之高.

解 三測士之位置為B,C,D,輕氣球之位置為A,其高AH為 x,則 $A\hat{B}H=\alpha$, $A\hat{C}H=\beta$, $A\hat{D}H=\gamma$, $BH=x\cot\alpha$, $DH=x\cot\gamma$, $CH=x\cot\beta$, 但 $\overline{BH}^2+\overline{CH}^2-2\overline{DH}^2=2\overline{BD}^2$, 故 $x^2(\cot^2\alpha+\cot^2\beta-2\cot^2\gamma)=2a^2$, 即 $x=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{(\cot^2\alpha+\cot^2\beta+2\cot^2\gamma}}$.



172. 已知 b,c,A,試以對數式表頂角A之中線及二等分線.

解 AD, AM, 為△ABC之A之二等分線及中線,則 $\frac{a-BD}{BD}=\frac{b}{c}$, $\therefore\ \frac{a}{BD}=\frac{b+c}{c}$, $\therefore\ BD=\frac{ac}{b+c}$, 但 $\frac{AD}{BD}=\frac{\sin B}{\sin\frac{1}{2}A}$, 故 $AD=\frac{ac.\sin B}{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}=\frac{bc.\sin A}{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}=\frac{2bc.\cos\frac{1}{2}A}{b+c}$, 次依幾何學之定理得 $2\overline{AM}^2+2(\frac{1}{2}a)^2=b^2+c^2$, 故 $AM=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, 但 $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$, 故 $AM=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc.\cos A}$



$=\frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-2bc(1-\cos A)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-4bc\sin^2\frac{A}{2}}$，此式若欲變為對數式，則可置為 $\frac{4bc\sin^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}=\tan^2\phi$，則 $AM=\frac{1}{2}(b+c)\sqrt{1-\tan^2\phi}=\frac{1}{2}(b+c)\sqrt{\frac{\cos2\phi}{\cos^2\phi}}=\frac{b+c}{2\cos\phi}\sqrt{\cos2\phi}.$

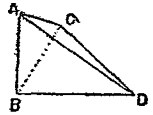
173. 已知二邊 b 及 c，而求夾角A，但自A之中線為 b 及 c 之比例中項.

解 依前題 $AM=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{(b+c)^2-4bc\sin^2\frac{A}{2}\right\}}$，∴ $\frac{1}{4}\left\{(b+c)^2-4bc\sin^2\frac{A}{2}\right\}=bc$，∴ $\frac{1}{4}(b+c)^2-bc=bc\sin^2\frac{A}{2}$，故 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2}{4bc}-1=\frac{(b-c)^2}{4bc}$，

∴ $\sin\frac{A}{2}=\pm\frac{b-c}{2\sqrt{bc}}$，自此可求得 $\frac{A}{2}$.

174. 自一塔之正北，測得其塔之仰角為45°，又在前測處之正東隔 a 尺之處，測得其塔之仰角為15°，則其塔之高為 $\frac{1}{2}a(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})$，試證之.

解 自一塔AB之正北C，測得其塔之仰角 $A\hat{C}B$ 為45°，又自C之正東D，而CD$=a$測得AB之仰角為15°，故



AB$=x$，則 BD$=x\cot15°=x(2+\sqrt{3})$，BC$=x\cot45°=x$，但 $B\hat{C}D=\hat{R}$，故 $\{x(2+\sqrt{3})\}^2-x^2=a^2$，或 $x^2(6+4\sqrt{3})=a^2$，

$x=\frac{a}{\sqrt{(6+4\sqrt{3})}}=\frac{a\sqrt{(4\sqrt{3}-6)}}{\sqrt{12}}$

$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}}}=\frac{a}{2}\left\{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\right\}.$

175. 已知三角形之三角及一高，試解之.

解 △ABC之三角及一高 AD$=h$，則 $b=h\operatorname{cosec}C$，$c=h\operatorname{cosec}B$，

$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{h\sin A}{\sin C\sin B}$.

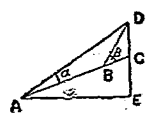
176. 知三角形之頂角A，高 h，及頂角之二等分線 m，試解之.

解 高 AD$=h$，二等分線 AM$=m$，則 $D\hat{A}M=\frac{1}{2}(B\sim C)$，故可自 $\cos\frac{1}{2}(B\sim C)=\frac{h}{m}$，求得B∼C，次因 B+C$=\pi-$A，故B+C為已知，因而求得B, C，故 a, b, c，可自 $b=h\operatorname{cosec}C$，$c=h\operatorname{cosec}B$，$a=\frac{bc\sin A}{h}$ 求得之.

177. 自丘傍之一點，望其頂上紀念碑，含 α 之角，再近 a 尺望之，則含 β 之角，今將紀念碑之高為 h，則丘之傾斜如次式，試證之.

$\cos^{-1}\left\{\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}\right\}$.

解 AB為斜道，CD為紀念碑，AE為水平線，則 $C\hat{A}E$ 為斜道與水平面所成之角，則 $\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$，$\frac{CD}{AD}=\sin\alpha/\sin(90°+CAE)=\sin\alpha/\cos CAE$. 故



$\frac{CD}{AB}=\frac{h}{a}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos CAE}$，即 $\cos CAE=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}$，因而 $C\hat{A}E=\cos^{-1}\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}$.

178. 三角形之各角，其比爲1:2:3，而其最大邊與最小之差爲80尺，問其面積如何.

解　$A:B:C=1:2:3$，故 $\hat{A}=\frac{1}{1+2+3}\times 180^\circ=30^\circ$，$\hat{B}=60^\circ$，$\hat{C}=90^\circ$，故 $a=c\sin A=c\sin 30^\circ=\frac{1}{2}c$，因而 $2a=c$，或 $c-a=a=80$尺，故 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a=80\sqrt{3}$尺，而面積 S 如次 $S=\frac{1}{2}ab=80\times 80\sqrt{3}\div 2$，即 $3200\sqrt{3}$方尺.

179. 知三角形之周圍，及一角，及面積，試解之.

解　知$\triangle ABC$之角 A，周圍 $2s$，及面積 S，則可自 $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$，及 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，而得 $\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{s(s-a)}{bc}$ $=s(s-a)\Big/2\frac{S}{\sin A}=\frac{s(s-a)\sin A}{2S}$，

變形則自 $s-a=\frac{2S\cos^2\frac{A}{2}}{s\sin A}$，或 $a=s-\frac{2S\cos^2\frac{A}{2}}{s\sin A}$，由此可求得 a，因而可求得他之元素.

別解　將內切圓之半徑爲 r，則 $r=\frac{S}{s}$，$s-a=r\cot\frac{1}{2}A$，故 $a=s-\frac{S\cot\frac{1}{2}A}{s}$.

180. 已知三角形之面積，邊 c 及二鄰角之差，試解之.

解　$S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$，因而 $\frac{2S}{c^2}=\frac{\sin A\sin B}{\sin C}=\frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2\sin C}$，

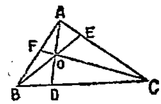
或 $\frac{2S}{c^2}=\frac{\cos(A-B)-\cos C}{2\sin C}$.

可求得 C，因而求得他之元素.

三角形之性質

181. 自三角形之內取一點 O，連結各角頂點 A, B, C，則 $\sin ABO\sin BCO\sin CAO=\sin OAB\sin OBC\sin OCA$，試證之.

解　$\sin ABO:\sin OAB=OA:OB$，$\sin BCO:\sin OBC=OB:OC$，$\sin CAO:\sin OCA=OC:OA$. 故

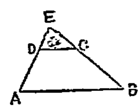


$\sin ABO.\sin BCO.\sin CAO:\sin OAB.\sin OBC.\sin OCA=OA.OB.OC:OB.OC.OA=1$.

因而 $\sin ABO.\sin BCO.\sin CAO=\sin OAB.\sin OBC.\sin OCA$.

182. 知梯形之各角及其平行二邊之長，而求他二邊，其法如何.

解　梯形 ABCD 其不平行之二邊 AD BC之交點爲 E，



$CD=n$，$AB=m$，$\hat{A}=\alpha$，$\hat{B}=\beta$，$\hat{C}=\gamma$. $\hat{D}=\delta$，則 $\triangle EAB$，

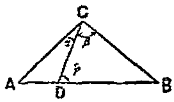
$\frac{m}{\sin E}=\frac{EB}{\sin A}$，即 $EB=\frac{m\sin\alpha}{\sin E}=\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$，同樣自三角形EDC，得 $EC=\frac{n\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. 因而 $BC=EB-EC=\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}-\frac{n\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{(m-n)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

同樣可得知 $DA=\frac{(m-n)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

183. 自三角形ABC之頂點，至底AB作直線CD，使AD/DB等於 m/n，而 $A\hat{C}D=\alpha$，$C\hat{D}B=\phi$，$D\hat{C}B=\beta$，則 $(m+n)\cot\phi=$

$m\cot\alpha-n\cot\beta=n\cot A-m\cot B$，試證之.

圖 $A=\phi-\alpha$，$B=180^\circ-(\beta+\phi)$，$\dfrac{AD}{\sin\alpha}=\dfrac{CD}{\sin(\phi-\alpha)}$ ……



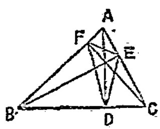
……(1)，$\dfrac{BD}{\sin\beta}=\dfrac{CD}{\sin(\phi+\beta)}$ ………(2)，自 (1)，(2) 得 $\dfrac{AD\sin\beta}{DB\sin\alpha}=\dfrac{\sin(\phi+\beta)}{\sin(\phi-\alpha)}$，或 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\sin\phi\cot\beta+\cos\phi}{\sin\phi\cot\alpha-\cos\phi}$，因而 $(m+n)\cot\phi=m\cot\alpha-n\cot\beta$，以同樣之方法可得 $(m+n)\cot\phi=n\cot A-m\cot B$.

184. 垂趾三角形各邊之長如次.

$a\cos A$，$b\cos B$，$c\cos C$，試證之.

圖 $\triangle ABC$ 之垂趾三角形為 $\triangle DEF$. 則 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

故 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}=\cos A$，$\therefore\ EF=a\cos A$.

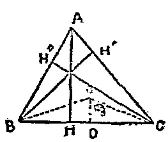


同樣 $DF=b\cos B$，$DE=c\cos C$.

185. 三角形之三垂線，等於次之三式，試證之. 但 s 為周之半分.

$2s/(\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C)$，$2s/(\cot\frac{1}{2}C+\cot\frac{1}{2}A)$，$2s/(\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B)$.

圖 AH，BH'，CH''，為 $\triangle ABC$ 之三垂線，O 為內心，OD 垂直於BC，則 $BD=r\cot\frac{1}{2}B$，$CD=r\cot\frac{1}{2}C$，而 $BC=a$



$=r(\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C)$，又 $\frac{1}{2}a.AH=sr=S$.

$\therefore\ AH=\dfrac{2sr}{a}=\dfrac{2sr}{r(\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C)}=\dfrac{2s}{\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C}$，同樣 $BH'=\dfrac{2s}{\cot\frac{1}{2}C+\cot\frac{1}{2}A}$，$CH''=\dfrac{2s}{\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B}$.

186. e，e'，e''，為三角形三垂線之反數且 $e+e'+e''=2\sigma$，試證次式.

$\sqrt{\sigma(\sigma-e)(\sigma-e')(\sigma-e'')}=\dfrac{1}{4S}$.

圖 由前題觀之，則

$e=\dfrac{\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C}{2s}$，$e'=\dfrac{\cot\frac{1}{2}C+\cot\frac{1}{2}A}{2s}$，

$e''=\dfrac{\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B}{2s}$，而 $\sigma=(e+e'+e'')/2$ $=(\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C)/2s$，$\sigma-e=\cot\frac{1}{2}A/2s$，$\sigma-e'=\cot\frac{1}{2}B/2s$，$\sigma-e''=\cot\frac{1}{2}C/2s$，故 $\sqrt{\sigma(\sigma-e)(\sigma-e')(\sigma-e'')}=$

$$\sqrt{\left\{\frac{\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C}{2s}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}A}{2s}\times\frac{\cot\frac{1}{2}B}{2s}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}C}{2s}\right\}}$$

但 $\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ [53題(i)]，故 $\sqrt{\sigma(\sigma-e)(\sigma-e')(\sigma-e'')}=\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\times\cot\frac{1}{2}C/4s^2$ ……(1). 但 $\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\times\cot\frac{1}{2}C=s^2/S$，故(1)式之左邊 $=s^2/4Ss^2=1/4S$.

187. 有過等邊三角形之中心與二邊相交之直線,將其線於中心所分二部分為x, y,三角形之一邊為a,則

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{9}{a^2}$,試證之.

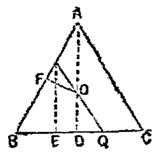


圖 O為正三角形ABC之中心,POQ為與二邊AB, BC,相交之直線,作BC, AB之垂線PE, OF,其AO之延線與BC之交點為D.

若$OP=x$, $OQ=y$,則$OF=OD=\frac{1}{3}AD$

$=\frac{\sqrt{3}a}{2\times3}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$,故$PE=\frac{OD}{OQ}\times PQ$

$=\frac{a(x+y)}{2y\sqrt{3}}$,故$BP=\frac{PE}{\sin60^\circ}$

$=\frac{a(x+y)}{3y}$. 同樣$BQ=\frac{a(x+y)}{3x}$,

但自$\triangle BPQ$　　$(x+y)^2=\frac{a^2}{9x^2}(x+y)^2$

$+\frac{a^2}{9y^2}(x+y)^2-2\frac{a^2(x+y)^2}{9xy}\cos60^\circ$,或

$1=\frac{a^2}{9}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)$,或$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}$

$=\frac{9}{a^2}$.

188. 知三角形之頂角A,底邊a,及自頂點至底邊之垂線h,則可由次之方程式求得b及c,試證之.

$$b+c=\sqrt{a^2+2ah\cot\frac{1}{2}A},$$

$$b\sim c=\sqrt{a^2-2ah\tan\frac{1}{2}A},$$

又試將此等方程式之右邊化為適於對數計算之式.

圖 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,故$b^2+c^2=a^2+2bc\cos A$ ......(1). 及$bc\sin A=ha$,故$bc=\frac{ha}{\sin A}$ ......(2). 自(1), (2)得$(b+c)^2$

$=a^2+\frac{2ha}{\sin A}\cos A+\frac{2ha}{\sin A}$

$=a^2+\frac{2ha(1+\cos A)}{\sin A}=a^2+2ha\cot\frac{A}{2}$,

$\therefore\ b+c=\sqrt{a^2+2ha\cot\frac{A}{2}}$......(3). 同樣

自(1), (2)得$b\sim c=\sqrt{a^2-2ha\tan\frac{A}{2}}$...(4).

今欲將(3), (4),變為對數式,乃取$2h\cot\frac{A}{2}=a\tan^2\theta$之補助角$\theta$,則

$b+c=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=a\sec\theta$,

$b-c=\sqrt{a^2-2ha\tan\frac{A}{2}}$

$=\sqrt{a^2-2ha\cot\frac{A}{2}\tan^2\frac{A}{2}}$

$=\sqrt{a^2-a^2\tan^2\theta\tan^2\frac{A}{2}}$

$=a\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\theta\cos^2\frac{A}{2}}}=\frac{a}{\cos\theta\cos\frac{A}{2}}\times$

$\sqrt{\cos^2\theta\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\theta\sin^2\frac{A}{2}}=$

$\frac{a}{\cos\theta\cos\frac{A}{2}}\sqrt{\left(\cos\left(\theta+\frac{A}{2}\right)\cos\left(\theta-\frac{A}{2}\right)\right)}$.

189. 已知三角形之一邊a,與對角A,求其面積之極大者.

圖 將$\triangle ABC$之面積為S,則

$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{a^2}{4\sin A}\{\cos(B-C)$

$-\cos(B+C)\}=\frac{a^2}{4\sin A}\{\cos(B-C)+\cos A\}$,

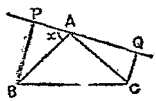
此式中a, $\sin A$, $\cos A$,為已知,故此式極大,則$\cos(B-C)$當為極大,而$\cos(B-C)=1$,即$B-C=0$,或$B=C$則$\cos(B-$

C) 爲極大，而 △ABC 之面積 S 爲極大，即 S 極大，則 B=C，而 △ABC 爲二等邊三角形，而其面積爲

$$S=\frac{1}{4}a^2\cot\frac{1}{2}A.$$

190. 自三角形之一角頂，作直線於三角形之外，又自他二角頂，作此直線之垂線，所成之二直三角角，使成等積，問此直線之作法如何.

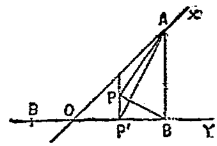
解 過 △ABC 之角頂 A，作直線 PAQ，自 B, C，作 PAQ 之垂線 BP, CQ，使 △ABP=△ACQ. 今將 $\hat{BAP}$ 爲未知數，即 $\hat{BAP}=x$，則 $\triangle PBA=\frac{1}{2}BP\times AP=\frac{1}{2}c\sin x.c\cos x=\frac{1}{2}c^2\sin x\cos x=\frac{1}{2}c^2\sin 2x$. 同樣 $\triangle QCA=\frac{1}{4}b^2\sin 2CAQ$，但 $C\hat{A}Q=\pi-(x+A)$，∴ $2C\hat{A}Q=2\pi-2(x+A)$. ∴ $\triangle QCA=-\frac{1}{4}b^2\sin 2(x+A)=-\frac{1}{4}b^2(\sin 2x\cos 2A+\cos 2x\sin 2A)$，∴ $c^2\sin 2x=-b^2\sin 2x\cos 2A-b^2\cos 2x\sin 2A$，或 $(c^2+b^2\cos 2A)\sin 2x+b^2\sin 2A\cos 2x=0$. 或 $\tan 2x=\dfrac{-b^2\sin 2A}{c^2+b^2\cos_2 A}$.



自此式可得 $2x$，因此可作直線 PAQ.

191. 向所設角之一邊作垂線，此垂線在角之兩邊間之部分爲底，所設一點爲頂點之三角形面積，使等於所設之面積，問此垂線之作法如何. 又試研究此問題.

解 P 爲所設點，且 BA⊥OY，使 △PAB 之面積，等於所設面積 m. 今將自 P 向 OY 所作垂線之趾爲 P′，則此點爲定點，而 △PAB=△P′AB，故若 $OP'=a$, $P'B=x$, $X\hat{O}Y=\alpha$，則 $2m=P'B.AB=x(a+x)\tan\alpha$, $x^2+ax-\dfrac{2m}{\tan\alpha}=0$,



$$\therefore\ x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+\dfrac{8m}{\tan\alpha}}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

自此式求得 x，則點 B 之位置定，因而點 A 定，故得畫 △PAB.

研究 I. 若 $x>0$，則 B 在 P′ 之右，若 $x<0$ 而其絕對值小於 a，則 B 在 OP′ 之上，絕對值大於 a，則 B 在點 O 之左. II. x 若爲實數，則 $a^2+\dfrac{8m}{\tan\alpha}\geqq 0\cdots\cdots\cdots(2)$. III. 若 $\alpha<90°$，則 $\tan\alpha>0$，而 (2) 爲 $a^2\tan\alpha+8m\geqq 0$，∴ $\tan\alpha\geqq-\dfrac{8m}{a^2}\cdots\cdots(3)$. $m\geqq\dfrac{a^2\tan\alpha}{8}\cdots\cdots\cdots(4)$. 因 $\tan\alpha$ 爲正，而 $m>0$，則 (3), (4), 恆成立. 若 $m<0$，則 (3), (4), 恆不成立. 即因所設 α 或 m，而 m 或 α 有限制.

注意 面積 m 正負之區別，點 B 在 P′ 之右時，若 A 在 OY 之上方，則 $m>0$. 若 A 在 OY 之下方，則 $m<0$. 又點 B 在 P′ 之左時，若點 A 在 OY 之下方，則 $m>0$，在上方，則 $m<0$. IV. 若 $\alpha>90°$，則 $\tan\alpha<0$，而 (2) 式爲 $a^2\tan\alpha+8m\leqq 0$，∴

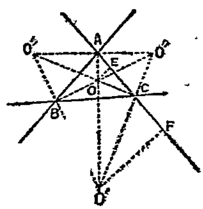
$\tan\alpha \leqslant -\dfrac{8m}{a^2}$……(5), $m \leqslant -\dfrac{a^2\tan\alpha}{8}$……(6). 因 $\tan\alpha<0$, 而 $m>0$, 則(5),(6)不恆成立, 卽有限制. $m<0$, 則(5),(6)恆成立. 點P在 $X\hat{O}Y$ 之平面上任何處, 皆有同理.

192. 垂趾三角形之周圍, 等於 $4R\sin A\sin B\sin C$, 試證之.

解 垂趾三角形爲DEF, 則 $EF=a\cos A$ [184題] $=2R\sin A\cos A=R\sin 2A$, 同樣 $FD=R\sin 2B$, $DE=R\sin 2C$. 故 $EF+FD+DE=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4R\sin A\sin B\sin C$. [$\because$ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ 故也].

193. 連結三傍切圓之中心所成三角形之三邊爲 a', b', c', 則 $a=a'\sin\dfrac{A}{2}$, $b=b'\sin\dfrac{B}{2}$, $c=c'\sin\dfrac{C}{2}$ 試證之.

解 $\triangle ABC$ 之傍心爲 O', O'', O''', 則 O'', O''', B, C, 在同一之圓周上, 故 $O'\hat{O}'''O''=B\hat{C}O'$, $O'\hat{O}''O'''=C\hat{B}O'$, 而 $\triangle O'O''O''' \backsim \triangle O'BC$, $\therefore a':a=O'O'':O'B$, 因而 $a=a'\dfrac{O'B}{O'O''}=a'\dfrac{O'B}{c'}$, 但 $\dfrac{1}{2}A=O'\hat{O}''B$, 故 $\dfrac{O'B}{c'}=\sin\dfrac{1}{2}A$, 因而 $a=a'\sin\dfrac{A}{2}$. 同樣 $b=b'\sin\dfrac{B}{2}$, $c=c'\sin\dfrac{C}{2}$.



別解 $\triangle ABC$ 爲 $\triangle O'O''O'''$ 之垂趾三角形, 而 $\hat{O}'=\hat{R}-\dfrac{1}{2}A$ 等. 故 $a=a'\cos\left(\hat{R}-\dfrac{1}{2}A\right)$[184題]$=a'\cos\dfrac{A}{2}$ 等.

194. 前題三角形 $O'O''O'''$ 之面積爲 $\dfrac{abc}{2r}$, 試證之.

解 $\triangle O'O''O'''=\triangle ABC+\triangle BO'C+\triangle CO''A+\triangle AO'''B=S+\dfrac{1}{2}ar'+\dfrac{1}{2}br''+\dfrac{1}{2}cr'''=S+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{S}{s-a}+\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{S}{s-b}+\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{S}{s-c}$

$=\dfrac{1}{2}S\left\{2+\dfrac{a}{s-a}+\dfrac{b}{s-b}+\dfrac{c}{s-c}\right\}=\dfrac{1}{2}S\left\{\dfrac{s}{s-a}+\dfrac{s}{s-b}+\dfrac{c}{s-c}\right\}=\dfrac{1}{2}S\left\{\dfrac{c}{s-c}+\dfrac{cs}{(s-a)(s-b)}\right\}=\dfrac{abcS}{2(s-a)(s-b)(s-c)}=$

$\dfrac{abcsr}{2(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{abcr}{\dfrac{1}{s}2(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\dfrac{abcr}{2r^2}=\dfrac{abc}{2r}$.

別解 $\triangle O'O''O'''=\dfrac{1}{2}b'c'\sin O'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b}{\sin\frac{1}{2}B}\cdot\dfrac{c}{\sin\frac{1}{2}C}\cdot\cos\dfrac{1}{2}A$[193題]

$=\dfrac{abc}{2\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}=\dfrac{abc}{2r}$.

195. 自前題內心O, 至傍心之三距離, 爲 $a\sec\dfrac{A}{2}$, $b\sec\dfrac{B}{2}$, $c\sec\dfrac{C}{2}$, 試證之.

解 自O, O', 向AC或其延長線作垂線OE, $O'F$, 則 $AE=s-a$, $AF=s$, 故 $EF=s-(s-a)=a$, 因而 $OO'=AO'-AO=AF/\cos\dfrac{1}{2}A-AE/\cos\dfrac{1}{2}A=(AF-AE)\div\cos\dfrac{1}{2}A=\dfrac{a}{\cos\frac{1}{2}A}=a\sec\dfrac{1}{2}A$, 同樣 $OO''=b\sec\dfrac{1}{2}B$, $OO'''=c\sec\dfrac{1}{2}C$.

196. 切於三角形內切圓及二邊之三圓之半徑爲 r_a, r_b, r_c, 內切圓之半徑爲 r, 試證次式. $r_a=r\tan^2\frac{1}{4}(B+C)$, $r_b=r\tan^2\frac{1}{4}(C+A)$, $r_c=r\tan^2\frac{1}{4}(A+B)$.

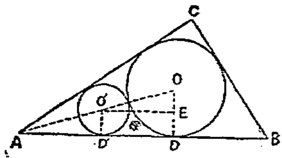


圖 $\triangle ABC$ 之內心爲 O, 切二邊之三圓之中, 半徑爲 r_a 之圓之中心爲 O', 將 O, O', 爲中心之圓切 BA 之點爲 D, D'. 今使 O'E∥AB, 則 $OO'=r+r_a$, $OE=r-r_a$, $O\hat{O}'E=\frac{1}{2}A$

$=\frac{1}{2}\{180°-(B+C)\}=90°-\frac{1}{2}(B+C)$,

而 $\frac{OE}{OO'}=\frac{r-r_a}{r+r_a}=\sin\{90°-\frac{1}{2}(B+C)\}=\cos\frac{1}{2}(B+C)$ 故由比例之性質得

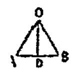
$$\frac{2r_a}{2r}=\frac{1-\cos\frac{1}{2}(B+C)}{1+\cos\frac{1}{2}(B+C)}, \text{或}$$

$$\frac{r_a}{r}=\frac{\sin^2\frac{1}{4}(B+C)}{\cos^2\frac{1}{4}(B+C)}, \text{因而} r_a$$

$=r\tan^2\frac{1}{4}(B+C)$, 同樣 $r_b=r\tan^2\frac{1}{4}(C+A)$, $r_c=r\tan^2\frac{1}{4}(A+B)$.

197. 有甲乙二正多角形乙之邊數爲甲之邊數之二倍, R, r, 爲甲之外接圓及內切圓之半徑, R', r', 爲乙之外接圓及內切圓之半徑, 且甲乙等積, 則 $R'=\sqrt{Rr}$, 及 $r'=\sqrt{\frac{r(R+r)}{2}}$. 試證之.

圖 $AB=a$ 爲 n 邊正多角形之一邊, O 爲其中心, OD 垂直於 AB, 則 $OA=R$, $OD=r$, $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{n}$, 而 $AO\sin A\hat{O}D=AD$, 故 $R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ ....(1). 又 $AD\div OD=\tan AOD$, 卽 $r=\frac{a}{3\tan\frac{\pi}{n}}$ .... (2).



自 (1), (2), 得 $r/R=\cos\frac{\pi}{n}$ .... (3). 同樣就 $2n$ 邊之正多角形, 而得 $r'/R'=\cos\frac{\pi}{2n}$ ...... (4). 但邊數 n 之正多角形之面積, 爲 $nR\sin\frac{\pi}{n}R\cos\frac{\pi}{n}=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\times\cos\frac{\pi}{n}$. 同樣 $2n$ 邊 n 之正多角形之面積, 爲 $2nR'^2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}$. 故 $nR^2\sin\frac{\pi}{n}\times\cos\frac{\pi}{n}=2nR'^2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}=nR'^2\sin\frac{\pi}{n}$, 或 $R'^2=R^2\cos\frac{\pi}{n}=R\times R\cos\frac{\pi}{n}=Rr$, 故 $R'=\sqrt{Rr}$. 又 $r'=R'\cos\frac{\pi}{2n}=\sqrt{Rr}\cos\frac{\pi}{2n}$

$$=\sqrt{Rr\cos^2\frac{\pi}{2n}}=\sqrt{Rr\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

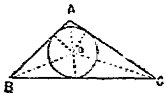
$$=\sqrt{\frac{Rr}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)}=\sqrt{\frac{r(R+r)}{2}}.$$

198. 自三角形之三角頂 A, B, C, 至其內切圓中心 O 之距離爲 d, e, f, 試證次式.

$$d^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+e^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+f^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{d}+\frac{\cos\frac{1}{2}B}{e}+\frac{\cos\frac{1}{2}C}{f}=s\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right).$$

解 $AO=d$, $BO=e$, $CO=f$, 則 $r=d\sin\frac{A}{2}$ 而自 $\triangle AOB$ 得 $\frac{d}{c}$



$$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin AOB}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin(90^\circ+\frac{1}{2}C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}$$，同樣 $\frac{d}{b}=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}$，

故 $d\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}-\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}\right)$

$$=\frac{\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$，因而 $d^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$

$$=\frac{r\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{r\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

同樣 $e^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=\frac{r\sin\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}$，

$f^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{r\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$. 故

$d^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+e^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+f^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

$=r\times 0=0$, 又 $d=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ 故

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{d}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{r}=\frac{\sin A}{2r}=\frac{2S}{bc}\div\frac{2S}{s}$$

$=\frac{s}{bc}$. 同樣 $\frac{\cos\frac{B}{2}}{e}=\frac{s}{ca}$, $\frac{\cos\frac{C}{2}}{f}$

$=\frac{s}{ab}$. 故 $\frac{\cos\frac{A}{2}}{d}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{e}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{f}$

$=s\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)$.

199. (a) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$.

(b) $r_1+r_2+r_3-r=4R$.

(c) $rr_1r_2r_3=s(s-a)(s-b)(s-c)$.

(d) $r_1r_2+rr_3=ab$ 試證之.

解 (a) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{S}+\frac{s-b}{S}$

$+\frac{s-c}{S}=\frac{3s-(a+b+c)}{S}=\frac{s}{S}=\frac{1}{r}$.

(b) $r_1+r_2+r_3-r=\frac{S}{s-a}+\frac{S}{s-b}+\frac{S}{s-c}$

$-\frac{S}{s}=S\left\{\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}\right\}$

$=Sc\frac{2s^2-sc-s(a+b)+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{S}=4R$.

(c) $rr_1r_2r_3=\frac{S}{s}\cdot\frac{S}{s-a}\cdot\frac{S}{s-b}\cdot\frac{S}{s-c}$

$=\frac{S^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=s(s-a)(s-b)(s-c)$.

(d) $r_1r_2=\frac{S}{s-a}\cdot\frac{S}{s-b}=s(s-c)=ab\frac{s(s-c)}{ab}$

$=ab\cos^2\frac{C}{2}$. 同樣 $rr_3=ab\sin^2\frac{C}{2}$，

故 $r_1r_2+rr_3=ab\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)=ab$.

200. 頂角為 2θ 之二等邊三角形，其內切圓及外接圓半徑之比，為 $2\sin\theta(1-\sin\theta)$，試證之. 且試證其值不大於 $\frac{1}{2}$.

解 二等邊三角形之等邊為 b，內切圓及外接圓之半徑為 r, R，則

$r=b\sin\theta\tan\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$, $R=\frac{b\sin\theta}{\sin 2\theta}$

$=\frac{b}{2\cos\theta}$, $\therefore\ \frac{r}{R}=2\sin\theta\cos\theta\tan\left(45^\circ-\right.$

$\left.\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\theta\cos\theta\dfrac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=2\sin\theta\cos\theta\times$

$\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=2\sin\theta\cos\theta\times$

$\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\Big/\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

$=2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=$

$2\sin\theta\dfrac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}=2\sin\theta(1-\sin\theta)$.

次 $2\sin\theta(1-\sin\theta)>\frac{1}{2}$，則 $4\sin\theta(1-\sin\theta)>1$，或 $4\sin^2\theta-4\sin\theta+1<0$，或 $(2\sin\theta-1)^2<0$………(1)，但 $(2\sin\theta-1)^2$ 為正，故 (1) 式背理，故必 $2\sin\theta(1-\sin\theta)\leqq\frac{1}{2}$.

201. 自三角形之三角頂，至對邊作三直線，其與對邊所成之角皆相等，則此三直線所成三角形之面積，與原三角形面積之比為 $4\cos^2\alpha$，試證之．但 α 表三直線與對邊所成之等角．

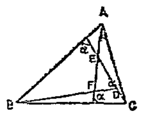


圖 原三角形 ABC，及新三角形 DEF 之面積，為 S, S′，則 $\hat{D}=\alpha-A\hat{C}D=\alpha-(\alpha-\hat{A})=\hat{A}$. 同樣 $\hat{E}=\hat{B}$，$\hat{F}=\hat{C}$，故 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，而 $S':S=\overline{EF}^2:\overline{BC}^2$，但 $\triangle AEC$ 中 $AC=b$，$A\hat{E}C=\pi-\hat{B}$，$A\hat{C}E=\alpha-\hat{A}$，故 $\dfrac{AE}{b}=\dfrac{\sin(\alpha-A)}{\sin(\pi-B)}=\dfrac{\sin(\alpha-A)}{\sin B}$.

$\therefore\ AE=\dfrac{b\sin(\alpha-A)}{\sin B}=\dfrac{a\sin(\alpha-A)}{\sin A}$，同樣 $AF=\dfrac{c\sin(\alpha+A)}{\sin C}=\dfrac{a\sin(\alpha+A)}{\sin A}$，

$\therefore\ EF=\dfrac{a}{\sin A}\Big[\sin(\alpha+A)-\sin(\alpha-A)\Big]$

$=\dfrac{a}{\sin A}\times 2\sin A\cos\alpha=2a\cos\alpha$，故

$S':S=4a^2\cos^2\alpha:a^2$，即

$S':S=4\cos^2\alpha:1$.

202. 次式試簡單之．

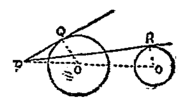
$\left\{\dfrac{abc}{4Rr}\left(\dfrac{abc}{4Rr}-a\right)\left(\dfrac{abc}{4Rr}-b\right)\left(\dfrac{abc}{4Rr}-c\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$．但式中之 R, r 表三角形外接圓及內切圓之半徑 a, b, c，表其各邊．

圖 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=sr$，$R=\dfrac{a}{2\sin A}$，故 $sRr=\frac{1}{4}abc$，或 $s=\dfrac{abc}{4Rr}$，題式為

$\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{\frac{1}{2}}=S.$

203. 有二圓周，其半徑之比為 m，自連結中心之直線上一點 P，作二圓之切線，與連結中心直線所成角之比，為 3 倍．但點與二圓心之距離為 a 及 b，且 $a<b$，問兩圓周之半徑各幾何．

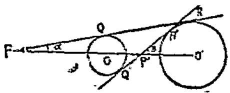
圖 圓 O, O′，之半徑為 r, r'，自點 P 作二圓之切線，與連結中心線 OO′，所成之角 $Q\hat{P}O$，$R\hat{P}O'$，而因 $Q\hat{P}O$



為 $R\hat{P}O'$ 之三倍，即 $Q\hat{P}O=3R\hat{P}O'$，又 $\dfrac{r}{r'}=m$，而 $PO=a$，$PO'=b$，但 $\sin OPQ=3\sin O'PR-4\sin^3 O'PR=\dfrac{r}{a}=\dfrac{mr'}{a}$，又 $\sin O'PR=\dfrac{r'}{b}$，故 $3\dfrac{r'}{b}-4\dfrac{r'^3}{b^3}=\dfrac{mr'}{a}$，或 $r'^2=\dfrac{b^2(3a-mb)}{4a}$，即 $r'=\sqrt{\dfrac{b^2(3a-mb)}{4a}}$，

因而 $r=m\sqrt{\dfrac{b^2(3a-mb)}{4a}}$.

204. 二圓之中心距離爲a,外共同切線之角爲2α,又內共同切線之角爲2β,試計算二圓之半徑.



解 將二圓之半徑爲r, r',外共同切線之交點爲P,則$\frac{a}{PO}=\frac{r'-r}{r}=\frac{a\sin\alpha}{r}$.
同樣$\frac{r'+r}{r}=\frac{a\sin\beta}{r}$, $\therefore r'-r=a\sin\alpha$, $r'+r=a\sin\beta$, 故$r'=\frac{1}{2}a(\sin\alpha+\sin\beta)$
$=a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. $r=\frac{1}{2}a(\sin\beta-\sin\alpha)$
$=a\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

級　　數

205. 試求次之級數n項之總和.
$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots\cdots$

解 $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots\cdots$
$=\cos\left(x+\frac{n-1}{2}x\right)\cos\frac{nx}{2} / \sin\frac{x}{2}$.

註 總和之公式如次,次之問題亦然. 凡求成等差級數之角之餘弦之和或正弦之和,即求$\cos A+\cos(A+2B)+\cos(A+4B)+\cdots\cdots$;或$\sin A+\sin(A+2B)+\sin(A+4B)+\cdots\cdots$;B以$S=\cos A+\cos(A+2B)+\cos(A+4B)\cdots\cdots+\cos\{A+2(n-1)B\}$,以$2\sin B$乘之,則$2S\sin B=2\cos A\sin B+2\cos(A+2B)\sin B+\cdots\cdots+2\cos\{A+2(n-1)B\}\sin B$,又將此右邊之積以正弦之差表之,則$2S\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)+\sin(A+3B)-\sin(A+B)+\cdots\cdots+\sin\{A+B+2(n-1)B\}-\sin\{A+2(n-1)B-B\}=\sin\{A+B+2(n-1)B\}-\sin(A-B)$,再將右邊正弦之差化爲積,則$2S\sin B=2\cos\{A+(n-1)\}\sin nB$,故$S=\frac{\cos\{A+n-1)B\}\sin nB}{\sin B}$.
但在本題,則$A=2B=x$. 若$B=\frac{\pi}{n}$,則$nB=\pi$,故$\sin nB=\sin\pi=0$,故此級數之和爲零.

206. 試求次之級數n項之總和.
$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots\cdots$

解 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots\cdots$
$=\sin\left(x+\frac{n-1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2} / \sin\frac{x}{2}$.

207. 試求次之級數n項之總和.
$\sec\alpha\sec 2\alpha+\sec 2\alpha\sec 3\alpha+\sec 3\alpha\sec 4\alpha+\cdots\cdots$

解 所求之和爲S,則$S=\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\cdots\cdots$,或$S\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\cdots\cdots$,但$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha-\tan\alpha$, $\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}=\tan 3\alpha-\tan 2\alpha$,
……………………
$\frac{\sin\alpha}{\cos n\alpha\cos(n+1)\alpha}=\tan(n+1)\alpha-\tan n\alpha$,故
$S\sin\alpha=\tan(n+1)\alpha-\tan\alpha$,因而
$S=\{\tan(n+1)\alpha-\tan\alpha\}\div\sin\alpha$.

208. 試求次之級數之總和(至n項).

$\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+2\beta)\sin(\alpha+3\beta)+\cdots\cdots\cdots\cdots$

解 所求之和為S, 則 $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\{\cos\beta-\cos(2\alpha+\beta)\}$, $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+2\beta)=\frac{1}{2}\{\cos\beta-\cos(2\alpha+3\beta)\}$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$, $\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\{\alpha+n\beta\}=\frac{1}{2}[\cos\beta-\cos\{2\alpha+(2n-1)\beta\}]$, 故 $S=\frac{1}{2}[n\cos\beta-\{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha+3\beta)+\cdots\cdots\}]=\frac{1}{2}\left[n\cos\beta-\frac{\cos\{(2\alpha+\beta)+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[n\cos\beta-\frac{\cos(2\alpha+n\beta)\sin n\beta}{\sin\beta}\right]$.

[參照 205 題].

209. 試求級數 $\operatorname{cosec}\alpha\sec2\alpha-\sec2\alpha\operatorname{cosec}3\alpha+\operatorname{cosec}3\alpha\sec4\alpha-\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

解 所求之和為S, 則 $S\cos\alpha=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos2\alpha}-\frac{\cos(3\alpha-2\alpha)}{\cos2\alpha\sin3\alpha}+\frac{\cos(4\alpha-3\alpha)}{\sin3\alpha\cos4\alpha}-\cdots\cdots\cdots\cdots$,

但 $\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos2\alpha}=\cot\alpha+\tan2\alpha$, $\frac{\cos(3\alpha-2\alpha)}{\cos2\alpha\sin3\alpha}=\cot3\alpha+\tan2\alpha$, $\frac{\cos(4\alpha-3\alpha)}{\sin3\alpha\cos4\alpha}=\cot3\alpha+\tan4\alpha$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,

故 n 為偶數則 $S\cos\alpha=(\cot\alpha+\tan2\alpha)-(\cot3\alpha+\tan2\alpha)+(\cot3\alpha+\tan4\alpha)-\cdots\cdots\cdots\cdots-\{\cot(n+1)\alpha+\tan n\alpha\}=\cot\alpha-\cot(n+1)\alpha$,

故 $S=\frac{\cot\alpha+\cot(n+1)\alpha}{\cos\alpha}$.

n 為奇數則 $S\cos\alpha=(\cot\alpha+\tan2\alpha)-(\cot3\alpha+\tan2\alpha)+(\cot3\alpha+\tan4\alpha)-\cdots\cdots\cdots\cdots+\{\cot n\alpha+\tan(n+1)\alpha\}=\cot\alpha+\tan(n+1)\alpha$,

故 $S=\frac{\cot\alpha+\tan(n+1)\alpha}{\cos\alpha}$.

210. 試求 $\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots\cdots$ 之級數 n 項之和.

解 $1-2\sin^2\alpha=\cos2\alpha$,

$1-2\sin^2(\alpha+\beta)=\cos2(\alpha+\beta)$,

$1-2\sin^2(\alpha+2\beta)=\cos2(\alpha+2\beta)$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,

故所求和為S, 則 $n-2S=\cos2\alpha+\cos2(\alpha+\beta)+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{\cos\{2\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}$ [205 題], 故

$S=\frac{1}{2}\left\{n-\frac{\cos\{2\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}\right\}$.

211. 試求 $\cos\alpha\sin2\alpha+\sin2\alpha\cos3\alpha+\cos3\alpha\sin4\alpha+\cdots\cdots\cdots$ 至 n 項之和S.

解 $\cos\alpha\sin2\alpha=\frac{1}{2}(\sin3\alpha+\sin\alpha)$.

$\sin2\alpha\cos3\alpha=\frac{1}{2}(\sin5\alpha-\sin\alpha)$,

$\cos3\alpha\sin4\alpha=\frac{1}{2}(\sin7\alpha+\sin\alpha)$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 故

$S=\frac{1}{2}\{\sin3\alpha+\sin\alpha+\sin5\alpha-\sin\alpha+\cdots\cdots\}$,

若 n 為偶數, 則 $\sin\alpha$ 消失, 故

$S=\frac{1}{2}\{\sin3\alpha+\sin5\alpha+\cdots\cdots\cdots\}$

$=\frac{\sin(n+2)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$ [206 題]. 若 n 為奇數,

則 $S=\frac{1}{2}\{\sin3\alpha+\sin5\alpha+\cdots\cdots\cdots+\sin\alpha\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(n+2)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\right\}$

$=\frac{\sin(n+2)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{2}$.

212. 試求 $\frac{1}{1+\tan\alpha\tan2\alpha}+\frac{1}{1+\tan2\alpha\tan4\alpha}+\frac{1}{1+\tan3\alpha\tan6\alpha}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

解 $\frac{1}{1+\tan\alpha\tan2\alpha}=$

$1\Big/\dfrac{\cos\alpha\cos2\alpha+\sin\alpha\sin2\alpha}{\cos\alpha\cos2\alpha}=$

$\dfrac{\cos\alpha\cos2\alpha}{\cos(2\alpha-\alpha)}=\cos2\alpha$，同樣

$\dfrac{1}{1+\tan2\alpha\tan4\alpha}=\cos4\alpha$，

..............................故

$S=\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha+\cdots\cdots$

$=\dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}$.

213. 試求 $\tan^{-1}\dfrac{1}{1+1.2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1+2.3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1+3.4}+\cdots\cdots$ 至無窮項之和S.

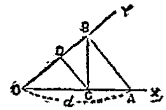
解 $\tan^{-1}\dfrac{1}{1+r(r+1)}=\tan^{-1}\dfrac{r+1-r}{1+r(r+1)}=\tan^{-1}(r+1)-\tan^{-1}r$. 故設此式中 r 之值爲1, 2, 3, ...∞，相加，則得所求之S，即 $S=\tan^{-1}2-\tan^{-1}1+\tan^{-1}3-\tan^{-1}2+\tan^{-1}4-\tan^{-1}3+\cdots\cdots=-\tan^{-1}1+\tan^{-1}\infty=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

214. 試求 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{1+1.2x^2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{1+2.3x^2}\right)+\cdots\cdots$ 至無窮項之和S.

解 $\tan^{-1}\dfrac{x}{1+r(r+1)x^2}=\tan^{-1}\dfrac{(r+1)x-rx}{1+r(r+1)x^2}=\tan^{-1}(r+1)x-\tan^{-1}rx$，故設此式中之 r 爲0, 1, 2, 3, 4, ...∞，則可得原級數之各項，因而得 $S=\tan^{-1}x+\tan^{-1}2x-\tan^{-1}x+\tan^{-1}3x-\tan^{-1}2x+\tan^{-1}4x-\tan^{-1}3x+\cdots\cdots=\tan^{-1}\infty=\dfrac{\pi}{2}$.

215. 於所設角 $XOY=\alpha$ 之一邊OX上取 $OA=d$，作OY之垂線AB，作OX之垂線BC，以下次第如此，試計算所得折線ABCD.........之長.

解 $AB=d\sin\alpha$，$BC=OB\sin\alpha=d\cos\alpha\sin\alpha$，同樣 $CD=d\cos^2\alpha\sin\alpha$，........故折線 ABCD.......$=d\sin\alpha(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots\cdots)=d\sin\alpha\dfrac{1-\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}=d\sin\alpha\left(\dfrac{1}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$. 若 $n=\infty$，則折線ABCD...$=d\sin\alpha\left(\dfrac{1}{1-\cos\alpha}\right)$.



雜　　題

216. 知 $\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\tan\frac{1}{2}\gamma\tan\frac{1}{2}\delta+1=0$，$\Sigma\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta=0$，試證 $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0$.

解 自第一式得 $\tan\frac{1}{2}\delta=-\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\tan\frac{1}{2}\gamma}$，將此值代入第二式中，則 $\Sigma\tan\frac{1}{2}\alpha-\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\times\tan\frac{1}{2}\gamma(\Sigma\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta)=0$，故

$\Sigma[\tan\frac{1}{2}\alpha(1-\tan^2\frac{1}{2}\beta\tan^2\frac{1}{2}\gamma)]=0$，或

$\Sigma\left[\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}\beta\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma}\right)\right]=0$，故

$\Sigma[\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha(\cos^2\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma-\sin^2\frac{1}{2}\beta\times\sin^2\frac{1}{2}\gamma)]=0$，或

$\Sigma[\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha(\cos^2\frac{1}{2}\beta-\sin^2\frac{1}{2}\gamma)]=0$. 或

$\Sigma[2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha(2\cos^2\frac{1}{2}\beta-2\sin^2\frac{1}{2}\gamma)]=0$，

或 $\Sigma[\sin\alpha(2\cos^2\frac{1}{2}\beta-1+1-2\sin^2\frac{1}{2}\gamma)]=0$，或 $\Sigma[\sin\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)]=0$，故 $\sin\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)+\sin\beta(\cos\gamma+\cos\alpha)+\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)=0$，故 $(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)+(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)+(\sin\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma)=0$，卽 $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0$.

217. $2\cos\theta=u+\frac{1}{u}$，則 $2\cos n\theta=u^n+\frac{1}{u^n}$，試證之. 但 n 表整數.

圖 將所題關係式之兩邊平方之，則 $4\cos^2\theta=u^2+2+\frac{1}{u^2}$，或 $2(2\cos^2\theta-1)=u^2+\frac{1}{u^2}$，或 $2\cos2\theta=u^2+\frac{1}{u^2}$，卽 n 爲 2 時，本題爲眞. 次證明爲 n 時眞，卽爲 $n+1$ 時亦眞，則本題爲眞. 今欲證明 $2\cos(n+1)\theta=u^{n+1}+\frac{1}{u^{n+1}}$，先取 $\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\times\cos\theta-\sin\theta\sin n\theta$，則 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$，故將此式中之 $2\cos\theta$ 變爲 $u+\frac{1}{u}$. 則 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2-\frac{1}{u^2}-2}=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\sqrt{-1}$，

同樣 $\sin n\theta=\frac{1}{2}\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)\sqrt{-1}$，

故 $\cos(n+1)\theta=\frac{1}{4}\left(u^n+\frac{1}{u^n}\right)\left(u+\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{4}\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)\left(u-\frac{1}{u}\right)$，簡單之則，得 $2\cos(n+1)\theta=u^{n+1}+\frac{1}{u^{n+1}}$.

218. 三角形之邊 a, b, c，爲等差級數，而 A−C 爲直角，試求各角之正弦.

圖 a, b, c，爲等差級數，故 $a+c=2b$，而

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A+\sin C}{a+c}=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2b}=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{b},$$

故 $\sin B=\cos\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{B}{2}$，或 $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{1}{2}(A-C)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，卽 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

因而 $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$，故 $\sin B=2\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，由是 $\sin A=\frac{\sqrt{7}+1}{4}$，$\sin C=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$.

219. $x+y=a$，$\frac{\tan x}{\tan y}=m$ 試求 x, y.

圖 將第二方程式變形則

$\frac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=m$，或 $\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}=m$，或 $(1+m)\sin(x-y)=(m-1)\sin a$，故 $\sin(x-y)=\frac{m-1}{1+m}\sin a$，此方程式成立，則 $\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\sin^2 a\leqq1$ 有此要件，則 $x-y=\sin^{-1}\left(\frac{m-1}{m+1}\sin a\right)$.

但 $x+y=a$，故

$$x=\frac{1}{2}\left\{a+\sin^{-1}\left(\frac{m-1}{m+1}\sin a\right)\right\},$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{a-\sin^{-1}\left(\frac{m-1}{m+1}\sin a\right)\right\}.$$

220. 三角形角 A 之外角二等分之線，至對邊延線之長，爲 $\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A}{b-c}$，試證之.

圖 △ABC 之角 A 之外角二等分線 AD，與底邊 BC 之延線交點爲 D，若 $b>c$，則 $\frac{AD}{DC}=\frac{\sin C}{\sin DAC}=\frac{\sin C}{\sin(90°-\frac{1}{2}A)}=\frac{\sin C}{\cos\frac{1}{2}A}$ ……(1)，又 $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$，故 $\frac{DC\sim BD}{DC}=\frac{b-c}{b}$，或 $\frac{a}{DC}$

$=\frac{b-c}{b}$ ...... (2), (1)式以(2)式除之,則

$\frac{AD}{a}=\frac{b\sin C}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}$, 故

$$AD=\frac{ab\sin C}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}=\frac{bc\sin A}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}.$$

$$=\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}=\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A}{b-c}.$$

221. 試求次之分數之實數部及虛數部.

$$\frac{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta}.$$

解 $\frac{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta}$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta-\sqrt{-1}\sin\beta)}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}$$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\sqrt{-1}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\cos(\alpha-\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha-\beta)$.

故實數部為$\cos(\alpha-\beta)$, 虛數部為$\sqrt{-1}\sin(\alpha-\beta)$.

222. 若$yz+zx+xy=1$, 則由三角法得

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$ 試證之.

解 $A+B+C=\frac{1}{2}\pi$, 則 $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$, 故若 $x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$, 則

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{\tan A}{1-\tan^2A}+\frac{\tan B}{1-\tan^2B}+\frac{\tan C}{1-\tan^2C}=\frac{1}{2}\{\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C\}=\frac{1}{2}\tan 2A\tan 2B\tan 2C=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}\cdot\frac{2\tan B}{1-\tan^2B}\cdot\frac{2\tan C}{1-\tan^2C}=\frac{4\tan A\tan B\tan C}{(1-\tan^2A)(1-\tan^2B)(1-\tan^2C)}$$

$$=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

223. r, r_a, r_b, r_c, 為切於三角形三邊之圓之半徑,則此三角形之面積,能以次式表之,求其證.

$$S=r^2\sqrt{\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}}.$$

解 $a+b+c=2s$, 則 $S=sr=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$, 故 $r=\frac{S}{s}$, $r_a=\frac{S}{s-a}$, $r_b=\frac{S}{s-b}$, $r_c=\frac{S}{s-c}$, 因而 $\frac{r_b+r_c}{r_a-r}$

$$=\frac{\frac{S}{s-b}+\frac{S}{s-c}}{\frac{S}{s-a}-\frac{S}{s}}=\frac{\frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)}}{\frac{s+a-s}{s(s-a)}}=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

同樣 $\frac{r_c+r_a}{r_b-r}=\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}$, $\frac{r_a+r_b}{r_c-r}=\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}$, 故題式之右邊為

$$r^2\sqrt{\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\text{.........(1)},$$

但 $S=sr=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

故(1)式為 $r^2\sqrt{\frac{S^4}{r^4}\times\frac{1}{S^2}}=S$,

故 $S=r^2\sqrt{\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}}$.

224. 試將半球之體積,以平行其底之平面,分為相等二部分.

解 將球缺之高為x,球之半徑為單位,則可得次之方程式 $\frac{1}{3}\pi x^2(3-x)=\frac{1}{3}\pi$, 或 $x^3-3x^2+1=0$ .... (1),

今設 $x=y+\lambda$, 則 $(y+\lambda)^3-3(y+\lambda)^2+1=0$, 或 $y^3+3(\lambda-1)y^2+3\lambda(\lambda-2)y+\lambda^3-3\lambda^2+1=0$, ∴ $\lambda=1$, 則y^2之項消失,而此方程式為$y^3-3y-1=0$......(2), 但$4p^3+$

$27q^2=-4\times27-27<0$, 故 (2) 之根皆爲實數. 而方程式 $y^3-\frac{3}{4}y-\frac{\cos\alpha}{4}=0$............(3), 依對數計算有次之三根. $y'=\cos\frac{\alpha}{3}$, $y''=\cos\left(120^\circ+\frac{\alpha}{3}\right)$ 及 $y'''=\cos\left(240^\circ+\frac{\alpha}{3}\right)$. 今於 (2) 式而 $y=\mu z$, 則 $z^3-\frac{3}{\mu^2}z-\frac{1}{\mu^3}=0$ .... (4). 自 (3), (4) 得 $\frac{3}{\mu^2}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{\mu^3}=\frac{\cos\alpha}{4}$. 故 $\mu=\pm2$, 而 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$, 故 $y'=\mu\cos\frac{\alpha}{3}=2\cos20^\circ$, $y''=2\cos140^\circ=-2\cos40^\circ$, $y'''=2\cos260^\circ=-2\cos80^\circ$, 但 $x=y+1$, 故 x 之三值爲 $2\cos20^\circ+1$, $-2\cos40^\circ+1$, $-2\cos80^\circ+1$.

注意 若 $\mu=2$, 則 $y'=2\cos20^\circ$, 若 $\mu=-2$, 則 $y'=-2\cos40^\circ$, 後者卽 $\mu=2$ 時 y'' 之值, 其他亦同樣有相等之二值, 故 y 之值僅爲上所示 y', y'', y''' 之三值, 因而 x 之值爲上所示之三值, 蓋方程式就 x 爲三次故也.

225. ω 接近於 λ 時.

$\frac{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\beta)+\sin(\beta-\omega)}{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\alpha)+\sin(\alpha-\omega)}$ 之極限爲 $\left\{\sin\frac{\lambda-\beta}{2}\Big/\sin\frac{\lambda-\alpha}{2}\right\}^2$ 試證之.

解 原式 $=$

$$\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\lambda\right)-\cos\frac{\omega-\beta}{2}\right\}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\left\{\cos\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\lambda\right)-\cos\frac{\omega-\alpha}{2}\right\}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin\frac{\omega-\lambda}{2}\sin\frac{\beta-\lambda}{2}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin\frac{\omega-\lambda}{2}\sin\frac{\alpha-\lambda}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\lambda}{2}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\lambda}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin\frac{\lambda-\beta}{2}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin\frac{\lambda-\alpha}{2}},$$

今 ω 接近於 λ, 則

$$\lim_{\omega=\lambda}\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin\frac{\lambda-\beta}{2}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin\frac{\lambda-\alpha}{2}}=\left[\frac{\sin\frac{\lambda-\beta}{2}}{\sin\frac{\lambda-\alpha}{2}}\right]^2.$$

226. x 將近於 0 時, 試求 $\pi\sin\frac{\pi x}{2}\Big/4x\cos\frac{\pi x}{2}$ 之極限.

解 $\frac{\pi\sin\frac{\pi x}{2}}{4x\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{\pi}{4x}\tan\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}$,

但 x 將近於 0, 則 $\frac{\pi x}{2}$ 亦將近於 0, 故 x 將近於 0, 則 $\lim\limits_{x=0}\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}=1$,

故 $\frac{\pi\sin\frac{\pi x}{2}}{4x\cos\frac{\pi x}{2}}$ 之極限爲 $\frac{\pi^2}{8}$.

227. x 將近於 a, 試求 $\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ 之極限.

解 $\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$

$$=\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2},$$

x 將近於 a, 則 $\frac{x-a}{2}$ 將近於 0, 又 x 將近於 a, 則 $\frac{x+a}{2}$ 將近於 a.

但 $\lim\limits_{x=a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$ 故 x 近於 a

則 $\lim\limits_{x=a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$

228. n無限增加，試求乘積

$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots\cdots$之極限.

圖 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{4}\times\cos\frac{x}{4}$, $\sin\frac{x}{4}=2\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}$, $\cdots\cdots\cdots\cdots$

故 $\sin x=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cdots\times\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$, 或 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\times\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$, 今若 $n=\infty$, 則

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$\frac{\sin x}{x}$, 故原式之極限為 $\frac{\sin x}{x}$.

229. 試研究次之函數之變化.

(A) $\sin^2x-2\sin x+3$,　(B) $4\sin^2x-3\sin x+8$.

圖 (A) $\sin^2x-2\sin x+3=s$, 則 $\sin^2x-2\sin x+3-s=0\cdots\cdots(1)$, 此方程式若有實根, 則必 $1-3+s\geqq0$, 或 $s\geqq2$, 故 s 之極小為2, 因之 $\sin x$ 之值, 為 $\sin x=1$, 卽 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 次因 $\sin^2x-2\sin x+3=(\sin x-1)^2+2$, 故 s 恆為正, 因而 $\sin x$ 為 -1, 則 s 為6, 而 $\sin x$ 自此增加為 $+1$ 時, 則 s 次第減少, 而其終為2.

(B) $4\sin^2x-3\sin x+8=s$, 或 $4\sin^2x-3\sin x+8-s=0$, 此方程式之根若為實數, 則 $9-16(8-s)\geqq0$, 或 $s\geqq\frac{119}{16}$, 故 s 之極小值為 $\frac{119}{16}$, 因之 $\sin x$ 之值為 $\frac{3}{8}$, 又 s 恆為正, 故其變化可與 (A) 同樣研究之.

230. 若 β,γ, 為 θ 之二值, 而適合於 $h^2\cos\alpha\cos\theta+h(\sin\alpha+\sin\theta)+1=0$, 試證 $h^2\cos\beta\cos\gamma+h(\sin\beta+\sin\gamma)+1=0$.

圖 β,γ, 為適合於 $h^2\cos\alpha\cos\theta+h(\sin\alpha+\sin\theta)+1=0$ 之 θ 之值, 故

$h^2\cos\alpha\cos\beta+h(\sin\alpha+\sin\beta)+1=0\cdots\cdots(1)$,

$h^2\cos\alpha\cos\gamma+h(\sin\alpha+\sin\gamma)+1=0\cdots\cdots(2)$.

自 (1) 減 (2), 而 $h^2\cos\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)+h(\sin\beta-\sin\gamma)=0$, 又以 h 除之, 而得 $h\cos\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)+\sin\beta-\sin\gamma=0$,

卽 $2h\cos\alpha\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}-2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\times\sin\frac{\gamma-\beta}{2}=0$, 又以 $2h\sin\frac{\gamma-\beta}{2}$ 除之, 移項得 $\cos\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{1}{h}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$,

以 $\cos\gamma$ 乘 (1), 以 $\cos\beta$ 乘 (2), 相減, 則 $h\sin\alpha(\cos\gamma-\cos\beta)+h\sin(\beta-\gamma)+\cos\gamma-\cos\beta=0$, 卽 $2h\sin\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+2h\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\times\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=0$, 又以 $2h\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ 除之, 移項得

$\sin\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=-\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{1}{h}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cdots\cdots(4)$. 取 (3), (4), 平方之和, 則得 $\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{1}{h^2}+\frac{2}{h}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}$, 卽 $\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}(\sin\beta+\sin\gamma)+\cos\beta\cos\gamma=0$, 故 $h^2\cos\beta\cos\gamma+h(\sin\beta+\sin\gamma)+1=0$.

藉三角函數解方程式

231. 關於 x 之二次方程式之根, 試以三角函數表之.

圖 方程式$x^2-2px+q=0$，其p及q俱爲正，則此方程式之根，爲$x=p\pm\sqrt{(p^2-q)}=p\left\{1\pm\sqrt{\left(1-\frac{q}{p^2}\right)}\right\}$．今若$q<p^2$，乃定$\frac{q}{p^2}=\sin^2\theta$，則得$x=p(1\pm\cos\theta)=2p\cos^2\frac{\theta}{2}$，或$2p\sin^2\frac{\theta}{2}$．又若$q>p^2$，則二根不成立，然定$\frac{q}{p^2}=\sec^2\theta$，則$x=p\{1\pm\sqrt{-1}\tan\theta\}$．方程式$x^2-2px-q=0$，其$p$及$q$俱爲正，則自此方程式得$x=p\pm\sqrt{(p^2+q)}=p\left\{1\pm\sqrt{\left(1+\frac{q}{p^2}\right)}\right\}$．今定$\tan^2\theta=\frac{q}{p^2}$，則$x=p(1\pm\sec\theta)=p\frac{\cos\theta\pm1}{\cos\theta}=\sqrt{q}\frac{\cos\theta\pm1}{\sin\theta}=\sqrt{q}\cot\frac{\theta}{2}$，或$-\sqrt{q}\tan\frac{\theta}{2}$．方程式若爲$x^2+2px+q=0$之形，其$p$及$q$俱爲正，則先解方程式$x^2-2px+q=0$之根，而變其符號．方程式若爲$x^2+2px-q=0$之形，$p$及$q$俱爲正，則先解方程式$x^2-2px-q=0$之根，而變其根之符號．

232．棣謨阿布魯氏之定理．n之值無論正負整分之數，$\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$恆爲$\{\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\}^n$之一值．

圖 $\cos\alpha+i\sin\alpha$以$\cos\beta+i\sin\beta$乘之，則其積爲$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$，即$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$，再以$\cos\gamma+i\sin\gamma$乘之，則爲$\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$，次第如此，則得$\cos\alpha+i\sin\alpha$形之若干因數之積，今若此等因數相等，而爲$\cos\theta+i\sin\theta$，則得$\{\cos\theta+i\sin\theta\}^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，此證$n$爲正整數，$\cos n\theta+i\sin n\theta$爲$\{\cos\theta+i\sin\theta\}^n$之一值．次將$n$爲負整數，若$n=-m$，則$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}$

$$=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$$

$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos m\theta-i\sin m\theta)}$$

$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}=\cos m\theta-i\sin m\theta$$

$$=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

此n爲負整數，證明棣謨阿布魯之定理．次將n爲分數，若$n=\frac{p}{q}$，則p，q，可視爲整數，因而$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=(\cos p\theta+i\sin p\theta)^{\frac{1}{q}}$，此式之$q$乘方得$\cos p\theta+i\sin p\theta$，而其一值爲$\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}$，即$\cos n\theta+i\sin n\theta$，亦以$q$乘方而爲$\cos p\theta+i\sin p\theta$，故$n$爲分數，此定理亦成立．故棣謨阿布魯之定理$n$爲實數恆成立．

233．用前題定理能開$a+bi$式之幾乘根，今示其求立方根之法．

圖 定$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，則$r^2=a^2+b^2$及$\tan\theta=\frac{b}{a}$．但$a+bi=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$，故$\{a+bi\}^{\frac{1}{3}}=r^{\frac{1}{3}}\{\cos\theta+i\sin\theta\}^{\frac{1}{3}}$，而$\{\cos\theta+i\sin\theta\}^{\frac{1}{3}}$之一值爲$\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}$，又其他二值，爲$\cos\frac{2\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}$，及$\cos\frac{4\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}$．

234．試用棣謨阿布魯定理，而展開$\cos n\theta$，$\sin n\theta$．

圖 將$\cos n\theta+i\sin n\theta=\{\cos\theta+i\sin\theta\}^n$

之右邊,依二項式定理展開之,其兩邊虛數實數之兩部各相等,則

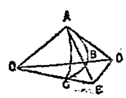
$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$,

$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\times\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots$

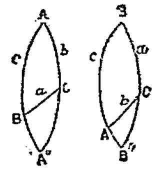
球面三角形

235. 球面三角形[各邊小於半圓而二平面間之角小於二直角者],一角之餘弦試以各邊之正弦餘弦表之。

解 球面三角形ABC,其球之中心為O,在A之弧AC, AB,之切線AE, AD,與OC, OB,之延線之交點為E, D,連結ED,



則$\hat{EAD}$為球面角$\hat{A}$,而$\hat{EOD}$可測度邊a. 今自三角形ADE, ODE,得$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2AD.AE\cos A$, $=\overline{OD}^2+\overline{OE}^2-2OD.OE\cos a$, 又$\hat{OAD}$, $\hat{OAE}$, 各為直角,故$\overline{OD}^2=\overline{OA}^2+\overline{AD}^2$, 及$\overline{OE}^2=\overline{OA}^2+\overline{AE}^2$. 由是相減而$2\overline{OA}^2+2AD.AE\cdot\cos A-2OD.OE\cos a=0$, 故$\cos a=\frac{OA}{OE}\cdot\frac{OA}{OD}+\frac{AE}{OE}\cdot\frac{AD}{OD}\cos A$, 即$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$. I. [右圖] $b<\hat{R}$, $c>\hat{R}$, 則試延長BA, BC,使相交於B″, 因$AB''=2\hat{R}-c(<\hat{R})$, 故△AB″C $\cos(2\hat{R}-a)=\cos b\cos(2\hat{R}-c)+\sin b\sin(2\hat{R}-c)\cos(2\hat{R}-A)$, 故$-\cos a=-\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos A$. II. [左圖] $b>\hat{R}$, $c>\hat{R}$, 則試延長AB, AC,使交於A″, 則$A''B<\hat{R}$, $A''C<\hat{R}$, 故△BA″C得$\cos a=\cos(2\hat{R}-b)\cos(2\hat{R}-c)+\sin(2\hat{R}-b)\sin(2\hat{R}-c)\cos A$, ∴ $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.



故一切$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$, 同樣$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$.

$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$.

236. 球面三角形一角之正弦,試以各邊之三角函數表之.

解 $\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$ [235題], 故

$\sin^2A=1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)^2$

$=\{(1-\cos^2b)(1-\cos^2c)-(\cos a-\cos b\times\cos c)^2\}/(\sin^2b\sin^2c)=(1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c)/(\sin^2b\sin^2c)$, 故

$\sin A=\sqrt{(1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c)}/(\sin b\sin c)$. 但此右邊之根,當取正符號,因$\sin b$, $\sin c$, $\sin A$, 皆為正故也.

237. 球面三角形各角之正弦,與其對邊之正弦成比例試證之.

解 自前題$\sin A$之值,而知$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$, 因此各邊等於同一之式,即皆等於$\sqrt{(1-\cos^2a-\cos^2b-}$

$\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)/(\sin a\sin b\sin c)$, 故如題意云。

238. 試記納白爾之比例式.

答 $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2},$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2},$$

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2},$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2},$$

239. 試記朶謨阿布魯之比例式.

答.

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$$

240. 試記知邊求角之公式.

但 $a+b+c=2s$.

答 $$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}.$$

241. 試記知角求邊之公式.

但 $A+B+C=2S$.

答 $$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin C\sin A}}\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}.$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C\sin A}}\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}.$$

(第七門畢)

第 八 門

數學小史內篇之部

EIGHTH SECTION

A PRIMER

OF

The Chinese History of Mathematics

第八門 數學小史內篇之部 目次

歷代開國與西歷紀元對照表

黃帝元年	前 2349
夏禹元年	前 1989
商湯元年	前 1575
周武元年	前 1061
秦始皇元年	前 246
漢高祖元年	前 206
魏黃初元年	220
晉太康元年	280
宋永初元年	420
齊建元元年	479
梁天監元年	502
陳永定元年	557
隋開皇十年	589
唐武德元年	618
後梁開平元年	907
後唐同光元年	923
後晉天福元年	936
後漢天福十二年	947
後周廣順元年	951
宋建隆元年	960
元至元十七年	1280
明洪武元年	1368
淸順治元年	1644
中華民國元年	1912

數學辭典

第八門　數學小史內篇之部

緒言

1. 宋景德二年 [1005], 敕撰冊府元龜, 其明算一條, 爲我國數學史之嚆矢. 然非專書, 世乏傳本, 迨清揚州阮元, 掇拾史書, 荟萃羣籍, 撰疇人傳, 甘泉羅士琳, 錢塘諸可寶, 澧州黃鍾駿, 各續補之, 閩侯金匱華世芳, 撰近代疇人著述記, 今人李儼, 復采採東西人論著, 且勘正之, 撰中國數學源流攷略, 體例雖各有異同, 其闡揚往哲之功則一, 本書第九門, 譯自日本長澤氏之數學小史, 茲仿其例, 別曰內篇, 前述各書, 分別纂輯, 期諸一覽, 得其大凡, 則是篇之意已.

2. 步天治曆測地諸術, 本屬專門之業, 阮氏疇人傳, 混入數學一家, 悉爲甄錄, 而數學進化之程, 因不可見, 茲絕慨爲分析 其數學家兼通諸學者, 則附記其著述, 而諸家非於數學有功績及有發明者, 則弗及焉.

3. 疇人傳附卷, 甄錄西人, 本篇祇取其來我國從事譯述者, 仍依時代敘述, 其著書人之未入我國者, 與我國數學無關, 且第九門詳之, 概不採錄.

4. 世有謂包羲畫卦, 爲古疇算所自始者, 亦有謂河圖洛書, 爲數理之源者, 易象一經, 未遭秦火, 明爲卜筮之書, 附會疇算, 不足深辯, 河圖微有十進之意, 洛書同於今之方陣, 列數奇妙, 遠勝河圖, 二者對舉, 極爲不倫, 疇人傳序, 謂河圖洛書之數, 傳者非眞, 洵解人矣. (參看第一門河圖洛書方陣各條) 茲篇託始黃帝, 下替周秦, [25cen.B.C.—2cen.B.C.] 爲上古數學, 漢魏以降, 至於宋元之間, [2cen.B.C.—13cen.] 爲中古數學. 元明二代, [13cen.—16cen.] 爲中學衰歇西學輸入初期. 清初以及咸同之間, [16cen—19cen.] 爲中學復興時期. 近五十年來, 又完全爲歐風之數學矣.

上古數學

5. 三代以前之數學, 雖邈不可考, 而後世所傳黃帝九章, 宋楊輝算書, 猶言元豐七年刊入祕書省, 又刻於汀州學校. 其目與古或異, 其名固猶存也, 至於步天治曆必有資於數學者, 尤極發達, 觀於黃帝作蓋天, 顓頊造渾天, 可見其進步之速, 陶唐之世, 創立閏月, 定年爲三百六十六日, 明載虞書, 爲五千年曆法之本. 泰西後千餘年披他哥剌斯 [Pythagoras] 始定年爲三百六十五

日，皆舉成數也．可見我先民數學之研究，在上古固超越泰西人遠已．

6. 隸首．史載黃帝使隸首作算數，數術記遺，謂隸首注術，乃有多種，及余遺忘，記憶數事而已．又謂黃帝爲法，數有十等，及其用也，乃有三焉．十等者，謂億兆京垓秭穰溝澗正載也，三等者謂上中下也．下數者，十十變之，若言十萬曰億，十億曰兆．中數者，萬萬變之，若言萬萬曰億，萬萬億曰兆．上數者，數窮則變，若言萬萬曰億，億億曰兆．孔繼涵算經十書序，引詩伐檀疏，毛傳十萬曰億，古數也，鄭箋萬萬曰億，今數也，以駁記遺之說．按萬位以上，中數便於下數．上古記數簡單，萬位以上，殆不恆用，故隸首仍以十進，每位立名．其後禹使大章豎亥，步東極至西垂，步南極至北垂，皆稱二億三萬餘里，亦用下數，以其去隸首未遠也．周髀算經日道周徑，乃已改爲中數．若謂均隸首所作，當記載不詳之際，豈有已得中數之巧，猶留下數之拙哉，至所謂弘廓無用之上數，更可斷非隸首之所作矣．

7. 商高．商高，周之賢大夫也．傳黃帝蓋天之術，精用矩之道．其與周公之問答，謂折矩以爲句廣三股修四徑隅五，整數句股之嚆矢也．平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠，測量之權輿也．環矩以爲圓，合矩以爲方，畫圖之極則也．詳載周髀算經，爲我國數學最古之書．

8. 榮方．陳子．榮方，陳子，皆周公之後人，習周髀之學，其測日之遠，所謂求邪至日也，以日下爲句，日高爲股，句股各自乘，并而開方除之，得邪至日．立術雖粗，其句股相求之理，卽歐几里幾何原本一卷第四十七題直三角形之性質．然則我國古之言幾何學者，由來久矣．

中古數學

9. 孫子．孫子不知何代人，著算經三卷．詳說乘除開方，可以考見古人縱橫布算之式．下卷物不數一題，同於的反他斯之解法[見第一門 89 頁]，及大衍求一術之起原．其立竿見影一題，則爲相似形相當邊成比例之理．朱彝尊以孫子算經爲孫武作，戴震以書中有長安洛陽相去，及佛書二十九章語，斷爲漢明帝以後人，阮元謂韋曜博奕論，枯棋三百注，引邯鄲淳藝經謂碁局十七道，而孫子乃云碁局十九道，則其人當在漢以後．然術數之書，類多附益，如卷末孕婦所生男女，鄙陋荒誕，必非孫子正文，或恐傳習孫子者，展轉增加，失其本眞云云．阮氏此論，極爲精當，周髀九章，經後人刪補，已多秦漢以後名稱，豈獨孫子算經耶．今從疇人傳，附之周末焉．

10. 中古數學,導源於上古者,周髀而外,厥惟九章,周髀猶兼量天之學,九章則專算數之書也. 其書周時已盛行,所謂九數之流也,嬴秦焚書而後,無復遺餘,西漢疇人,抱殘守缺而已. 迨魏劉徽,始有成書. 我國數學,開化早而進化遲,職是故與.

11. 中古數學,至宋元間,次第發明天元四元之術,乃我國數學之最上乘,而其源實出自九章. 羅士琳謂出自衰分,然衰分所借者爲已知數,而天元四元所借者爲未知數,似猶不類. 惟華蘅芳謂天元與盈朒相似,四元與方程相似,誠篤論耳.

漢

12. 張蒼. 蒼,陽武人,好書律曆. 秦時爲御史柱下方書. 漢興,以功封北平侯. 删補九章,治顓頊術,爲後來步算之宗. 孝景五年[152B.C.]卒,百餘歲.

13. 耿壽昌. 壽昌,宣帝時人. 善爲算,能商功利,賜爵關內侯,删補九章算經,甘露二年[52 B.C.]奏以圓儀度日月行考驗天狀. 西漢諸儒治曆,類多拘守渾蓋,徒事紛爭. 九章之術,則張蒼歿後百年,始得壽昌爲之删補,其闡揚數學之功,安可沒哉.

14. 劉歆. 歆字子駿,少爲黃門郎,河平中受詔與父向領校秘書,數術方技,無所不究,至王莽柄政,歆爲右曹太中大夫,遷中壘校尉羲和京兆尹,封休甯侯,典儒林史卜之官,作三統曆及譜以說春秋,以圓章 $\pi \stackrel{9}{=} \frac{3927}{1250} = 3.1416$, 後稱歆率,印度普黎沙[Pulisa, 300—?]阿耶波陀[Aryabhata, 476—?]及普斯克拉[Bhaskara Acarya, 1114—?]並題此率,惟視歆爲後耳.

15. 尹咸. 許商. 杜忠. 咸,成帝時太史令,時以書頗散亡,使謁者陳農求遺書於天下,詔咸校數術,凡百九家,二千五百十八卷. 許商算術二十六卷,杜忠算術十六卷,其他非數學之書,校錄尚多,今皆不傳. 商字長伯,長安人,善爲算,四至九卿. 忠未詳.

16. 張衡. 衡字平子,南陽西鄂人. 善機巧,尤致思於天文陰陽曆算,著算罔論已亡佚,安帝雅聞衡善曆學,徵拜郎中,再遷爲太史令,遂乃研覈陰陽,妙盡璇璣之正,作渾天儀以步天路,後世言儀象者咸宗之.

17. 順帝初,衡再轉爲太史令. 陽嘉二年[133]復造候風地動儀,以精銅鑄成圓徑八尺,合蓋隆起,形似酒尊,飾以篆文山龜鳥獸之形,中有都柱,傍行八道,施關發機,外有八龍,首銜銅丸,下有蟾蜍,張口承之,其牙機巧制,皆隱在尊中,覆蓋周密無際,如有地動,尊則振,龍機發吐丸,而蟾蜍銜之,振聲激揚,伺者因此覺知,雖一龍發機,而七首不動,尋其方面,乃知震之所在,驗之以事,契合若神,自書典所記未之有也.

18. 衡後遷侍中,永和初出爲河間相,徵拜尚書,年六十二. 永和四年[139]卒,崔瑗撰衡碑文曰,數術窮天地,制作侔造化,豈溢美哉.

19. 馬續. 續字季則,扶風茂林人,嚴之子也. 十歲通論語,十三明尚書,十六治詩,博觀羣籍,善九章算術. 嘗述續漢書天文志. 順帝時[約130]爲護羌校尉,遷度遼將軍,所在有恩威稱.

20. 鄭玄. 玄字康成,北海高密人,初通三統曆九章算術,會稽東部尉劉洪,作乾象術,玄受其法,以爲窮幽極微,加注釋焉,常在馬融門下,三年不得見,融聞其善算,乃召見樓上,因縱質諸疑義,又註天問七政論,建安初,徵爲大司農,以病乞還家. 五年[200]六月卒,年七十四.

21. 徐岳. 岳字公河,東萊人也,著數術記遺一卷,唐時以明算科取士,列入學官,五季佤離,其科既廢,其書亦亡,宋嘉定壬申[1212],鮑澣之復錄得之於汀州七寶山三茅甯壽觀道藏中,淸孔慶涵合刻戴震所校算經十書記遺,即其一也,參看本篇第六節.

22. 趙爽. 爽字君卿,一名嬰,注周髀算經,李籍周髀音義謂爽不知何代人,時人傳本周髀算經題云漢趙君卿注,係之於漢代,其句股方圓圖注五百餘言,阮元謂其精深簡括,爲算氏之最,良不誣也.

魏

23. 劉徽. 徽魏人也,景元四年[263],注九章算術,其目爲方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,贏不足,方程,句股,九章,至是乃有專書,江都焦循,謂與許愼說文解字同有功於六藝,豈尊崇之過當乎.

24. 徽又因九數有重差之名,悟測量之術,謂立兩表於洛陽之城,令高八尺,南北各盡平地,同日度其正中之時,以景差爲法,表高乘表間爲實,實如法而一,所得加表高,即日去地也,以南表之景乘表間爲實,實如法而一,即爲從南表至南戴日下也,以南戴日下及日去地爲句股,爲之求弦,即日去人也,以徑寸之筒南望日,日滿筒空,則定筒之長短以爲股率,以筒徑爲句率,日去人之數爲大股,大股之句即日徑也,當時無地圓之說,故立術謬誤,然其測量之理,則與今之三角法無異焉.

25. 舊術求圓以周三徑一爲率,謂之古率,徽以爲疏,遂更張其率,創以六弧之面割之又割,以求圓徑相與之率,得$\pi=\frac{157}{50}=3.14$後世謂之徽率,雖視歆率爲弱[見前14節],其解法則誠可貴矣.

南北朝

26. 祖冲之. 冲之字文遠,范陽薊人也,宋孝武使直華林學省,賜宅宇車服,解褐南徐州,從事公府參軍,大明六

年[462],上表改曆,排於衆議,未果施行,出爲婁縣令謁者僕射. 宋武平關中,得姚興指南車,有外形而無機杅,每使人於內轉之,昇平中,使冲之追修古法,改造銅機,圓轉不窮,而司方如一,永明中,竟陵王子良好古,冲之造欹器獻之,文惠太子在東宮,見冲之曆法啓武帝施行,文惠尋薨又寢,轉長水校尉領本職. 冲之以諸葛亮有木牛流馬,乃造一器,不因風水,施機自運,不勞人力,又千里造船,於新亭江試之,日行百餘里,於樂遊苑造水碓磨,流傳於世.

27. 冲之開圓周率,法以圓徑一圓周在 3.1415927 與 3.1415926 之間,作密率 $\frac{355}{113}$,約率 $\frac{22}{7}$. 又注九章造綴術數十篇永元二年[500年]卒,年七十二. 按冲之密率恰同於美土司[metius1640]之周徑比例數[見第一門圓周條],約率亦與亞奇默特[Aechimedes, 287—212B. C.]之數同.

28. 祖暅之. 暅之(或作亘)字景秋,冲之子也,少傳家學,究極精微,歷官員外散騎常侍太府卿奉朝請. 著綴術二卷不傳.

29. 信都芳. 芳字玉琳,河間人也.明算術,有巧思,嘗云算玄曆妙,機巧精微,每一沈思,不聞雷霆之聲,其用心如此. 江南人祖暅以諸法授芳,由是彌復精密,安豐王延明欲抄集五經算事爲五經宗,又聚渾天欹器地動銅鳥漏刻候風諸巧事,並繪圖爲器準,令芳算之. 會延明南奔,芳乃自撰注. 又注重差句股著四術周髀宗,又私撰曆書,名曰靈憲曆算書未成而卒.

30. 張邱建. 邱建淸河人也.著算經三卷.其分數除法,不定方程,一問三答,及平面形與高線爲比例,多屬前人未發之秘.

31. 夏侯陽. 陽著算經三卷,於官曹典故,言之甚詳. 其算法視古略有更革,定位之法,以本位爲身,他位爲外,相乘之辨,謂單位曰因,多位曰乘,又以倍折代乘除,以添減之諠致用於身外隔位,故有隔位加幾身外加幾之說.

32. 其十乘加一等,百乘加二等,一除退一等,百除退二等者,則爲進位退位法,如數術記遺所謂數有十等,謂億兆京垓云云也[見前第6節].

33. 舊以夏侯陽爲隋人,以張邱建算經有夏侯陽方倉之語,斷爲夏侯陽以後人,然夏侯陽稱甄鸞劉徽爲之詳釋,而張邱建算經有甄鸞注,彼此互異,不可據此定其前後,殆三人同時,互相徵引注辭耳.

34. 甄鸞. 鸞司隸校尉也. 傳祖冲之之學,撰五經算術二卷,注周髀一卷,數術記遺一卷,張邱建算經一卷,董泉三等數一卷,夏侯陽算經一卷,又九章算術九卷,五曹算經五卷,七曜本起曆五卷,七曜曆算二卷曆術二卷.

隋

35. 韓延. 延注夏侯陽算經一卷,清休寧戴震曰,新唐書甄鸞夏侯陽算經一卷,又韓延夏侯陽算經一卷,則夏侯陽有甄鸞韓延兩本,今所傳者爲韓延所傳無注本.宋元豐時京監所刊者書稱宋元嘉二年[425]徐壽重鑄銅斛及辨度量課租庸調各章,有據隋志言之者,則是韓延傳其學而以己說纂入之,序亦當爲延所作.

36. 此時代之算法書籍,見於隋書經籍志者,尙有李遵義疏九章算術一卷,楊淑撰九九算術二卷張委九章推圖義法一卷,趙歐(河間人)算經一卷,張纘撰算經翼一卷,張去斤算疏一卷,又有不著撰人姓氏九章述義序一卷,九章別術一卷,九章六曹算經一卷,五經算術錄遺一卷,算法一卷,黃鐘算法三十八卷,衆家陰陽法一卷,婆羅門算法三卷,婆羅門陰陽算曆一卷,婆羅門算經三卷,隋人之見唐書藝文志者,宋泉之撰九經算術九卷,陰景愉撰七經算術通義七卷.

唐

37. 王孝通, 孝通武德九年[626]爲算術博士,後爲通直郎太使丞,著緝古算經一卷,並自爲之注,凡二十術,上表進呈,有請訪能算之人考論得失,如有排其一字,臣欲謝以千金之語,其自信之堅如此.唐書選舉志,凡算學,孫子五曹共限一歲,九章海島共三歲,張邱建夏侯陽各一歲,周髀五經共一歲,綴術四歲,緝古三歲,記遺三等數,皆兼習之,限習之久,惟綴術與緝古,數學至祖王,蓋漸次進步矣.

38. 孝通知應用$\pi=\frac{22}{7}$,又以三次方程式求九章商功,其言句股術亦較九章爲奧.例如句股形,因已知bc及$c-a$,則
$$x^3+\frac{5(c-a)}{2}x^2+2(c-a)^2x=\frac{b^2c^2}{2(c-a)}-\frac{(c-a)^3}{2},$$
而$x=a$雖其解法未詳,而天元術已於是乎寄矣.

39. 元和李銳言算書以緝古爲最深,太史造仰觀臺以下三十九術,問數奇殘.入算繁頤,學之未易通曉,惟以天元術御之,則其條理秩然,無可疑惑,蓋孝通緝古,實立天元術之所本也.

40. 李淳風. 淳風岐州雍人也. 貞觀初,以將仕郎,直太史局,制渾天儀,又著法象七篇上之.擢承務郎,遷太常博士,改太史,尋遷爲令,作甲子元曆. 麟德二年[665]頒用,謂之麟德術. 其盈朒遲速之法,已啓寓平定二差,元郭守敬特踵事增加密耳. 以勞封昌樂縣男,奉詔與算學博士梁述,助教王眞儒等,同正孫子五曹等書,刊定注解,立於學官,周髀算經二卷,九章算術九卷,九章算經要略一卷,張邱建算經三卷,海島算經一卷,五曹孫子算經二十卷,甄鸞孫子算經

三卷,祖冲之綴術五卷,王孝通緝古算經四卷,晉書五代史天文律曆志,皆淳風獨作,自祕閣郎中復爲太史令卒.

41. 瞿曇悉達. 瞿曇悉達開元六年[718]官太史監受詔譯梵文曆法,謂之九執術,其算法用字乘除,一舉札而成,凡數至十進入前位,每空位處恆安一點,與今之筆算相似,是爲西算傳入中國之始.

42. 陳從運. 從運著得一算經七卷,江本撰三位乘除一位算法二卷,又以一位因折進退作一作算法九篇,謝察微撰發蒙算經三卷,魯靖新集五曹時要算術三卷,五曹乘除見一捷利算法一卷,黃棲巖心機算術括一卷,一作僧一行心機算術格一卷,僧棲巖注.

43. 宋延美. 延美後唐人,冊府元龜載明宗天成五年[930]明算科及第,是年明算五人,而延美爲之首,據此則唐以明算科取士,後唐之世猶未廢也. 宋因唐制,亦設算科,以算學生隸太史局. 惟元以後天文星曆與陰陽卜筮並試,始視爲方技之學焉.

宋及金元

44. 中古數學,自唐立算書於學官,進步乃速,經宋一代,更臻極盛,觀於唐王孝通之三次式,則天元術當已發明,故宋秦九韶數書獨詳正負開方之法,李冶,朱世傑,郭守敬,雖隸元代,實與秦揚同時,不過或南或北耳. 四元玉鑑之出版,距南宋亡後僅二十三年,自茲以降,終元之世,無可珍之傑作矣.

45. 沈括. 括字存中錢塘人也. 居京口,自號夢溪,以父任爲沭陽主簿,嘉祐癸卯[1063]擢進士第,爲館閣校勘,遷太子中允,提舉司天監,熙寧七年[1074]上渾儀浮漏景表三議,均得要領. 其論閏月,四時失位,算數繁猥,莫若不用十二月,直以立春爲孟春之一日,驚蟄爲仲春之一日,則四時之氣常正,歲政不相凌辱,月之盈虧,事雖有屬之者,如潮汐及孕胎育之類,不預歲時寒暑之節,寓之曆間可也. 深合現時新曆之法. 我國自羲和置閏以來,踵事加密者則有之,未有敢變更其法者,括乃能獨標新議,可謂傑矣.

46. 括學術浩博文藝深長,兼通天文方志律曆算數醫卜之說,喜建事功,城永樂不克,坐謫均州,徙秀州,以光祿少卿分司居潤,八年卒,年六十五. 著夢溪筆談二十六卷,補筆談二卷,續筆談一卷,修城法式二卷.

47. 夢溪筆談卷十八,有隙積會圓二術,爲九章所未及,後世堆垛術及授時術三乘方取矢度,蓋本於此.

48. 秦九韶. 九韶字道古,秦鳳間人也.少寓居潮州,早歲侍親都中,因得訪習太史.又嘗從隱君子授數學.淳祐甲辰四年[1244]八月以通直郎通判建康府,十一月丁母憂解官.七年九月,著成數書九章十八卷,寶祐間爲沿江制置

司參議官,或以曆學薦於朝,得對後,知瓊州,又知梅州,卒於梅.清焦循考其卒年,與李冶相先後蓋在景定咸淳間矣.

49. "九韶於學無所不通,所著數書九章,搜羅弘富,分爲九類,其目皆出自新意,不循古九章之舊.一曰大衍,其術以元問數連環求等,約爲定母,先以諸定母相乘爲衍母,互乘爲衍數,又以定母去衍數,餘爲奇數,以大衍求一術入之,得乘率,以乘衍數爲用數,與各元問餘數相乘,併之爲總數,滿衍母去之,不滿爲所求數.其大衍求一術,則置奇於右上,定於右下,立天元一於左上,先以右上除左下,所得商數,與左上一相生入左下,然後乃以右行上下,以少除多,遞互除之,所得商數,隨即遞互累乘歸左行上下,須使右行末後,奇一而止,乃驗左上所得,以爲乘率.二曰天時,亦大衍及古少廣法也.三曰田域,古少廣及方田句股法也.四曰測望,古少廣重差夕桀法也.其遙度圓城術以開九乘方得數.五曰賦役,古衰分粟米互易法也,復邑修賦術,答數至175條,爲自來算書所未有.六曰錢穀,古方田均輸粟米換易法也.七曰營建,古商功均輸法也.八曰軍旅,古少廣商功均輸及盈朒法也.九曰市易,古盈朒方程法也,諸術所載開方圖,於正負加減益積翻法,說之尤詳.有投胎換骨玲瓏連枝諸目.凡開平開立及開三乘方以上方,通爲一道,與霍氏之術(Horner Process 1819)相同,而時代則先五百七十餘年,其言實常爲負,亦與仲馬華里屋(Thomas Harriot 1560-1621)同.

50. 楊輝.輝字謙光,錢塘人,景定辛酉[1261]作詳解九章算法,後附纂類,總十二卷,(今所傳者爲宜稼堂業書本非其全帙)又嘗著詳解算法若干卷,以發乘除九歸飛歸之蘊,景定壬戌(1262),作日用算法二卷,以明乘除,爲初學用,編詩括十有三首,立圖草六十六問,永嘉陳幾先,爲之題跋,咸淳甲戌(1274),作乘除通變本末三卷,上中卷乘除通變算寶,爲輝自撰.下卷法算取用本末,則與史仲榮合撰.德祐乙亥(1275),作田畝比類乘除捷法二卷.是年冬,因劉碧澗丘虛谷,及舊刊遺忘之文,作續古摘奇算法二卷,以上七卷,稱爲楊輝算法,洪武戊子(1378),古杭勤德書堂新刊行世.

51. 輝田畝比類重修議古截田諸問,皆天元如積之術,其開方縱橫步算之式,與秦九韶數書同,通變卷內,有代乘代除各三百題,與世傳飛歸相似而二次方程式之解法,則見詳解九章算法句股章,而續古摘奇算法,載有縱橫圖,除洛書及衍數圖易象圖九九圖百子圖[張潮更定]已錄第一門方陣[30頁]條下,其餘各圖如次,

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

花十六陰圖

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

花十六圖

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

五五圖

4	19	25	15	2
10	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	26	6
24	11	1	7	22

五五陰圖

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

六六圖

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

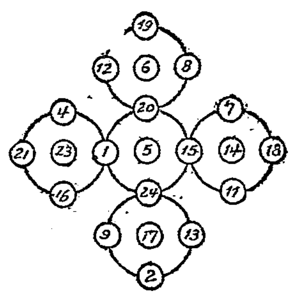
六六陰圖

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

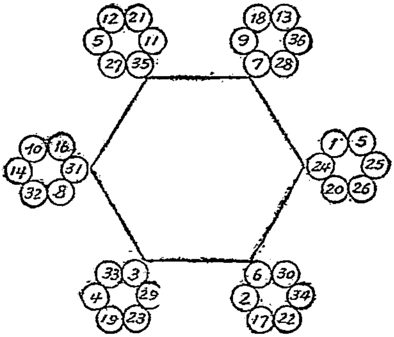
衍數陰圖

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

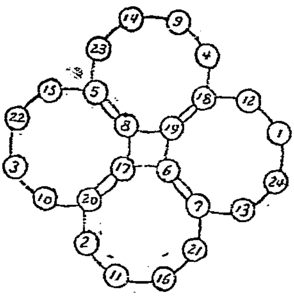
易數陰圖



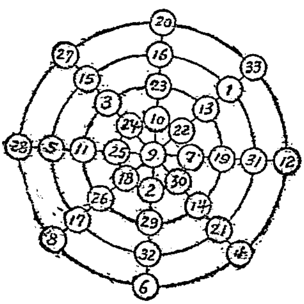
聚五圖



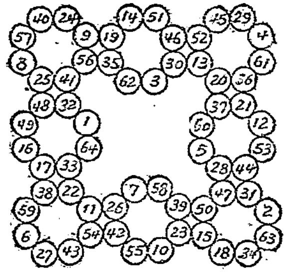
聚六圖



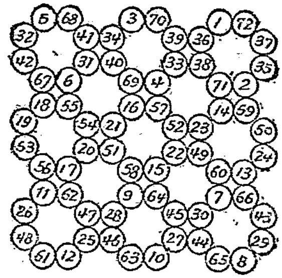
聚八圖



攢九圖



八陣圖



連環圖

52. 續古摘奇算法古言今算書元豐七年 [1084] 刊入秘書省，又刻於汀洲學校者十書，曰黃帝九章，周髀算經，五經算法，海島算經，孫子算法，張邱建算法，五曹算法，緝古算法，夏侯算法，算術記遺，元豐紹興淳熙 (1078—1189) 以來，刊刻議古根源，劉益紹益古算法，證古算法，明古算法，辨古算法，明源算法，金科算法，指南算法，應用算法，曹唐算法，賈憲九章通徵集，通機集，

盤珠集，定盤集，三元化零歌，鈐經，不信道著鈐釋十八種，又嘉定咸淳德祐等年，所刊詳解黃帝九章，詳解日用算法，乘除通變本末，及摘奇四種，十書而外，久經亡佚，阮元於永樂大典中鈔得摘奇算議古百餘番，復假錄蘇州黃丕烈家藏宋刊本楊輝算法六卷，始得其梗概，李儼藏有足本，乃據日本關孝和[1642-1708]傳錄高麗復明洪武刊本鈔校，原書今藏日本帝國大學學士院.

53. 賈憲．朱吉．憲，吉皆楚衍之弟子也．宋世司天算者，以衍爲首，弟子二人賈憲朱吉著名，憲爲右班殿値，吉隸太史，憲運算亦妙，有黃帝九章，細草九卷，算法斅古集二卷傳於世．宋自靖康[1126]以來，黃帝九章，罕有善本，紹興中算士榮棨獲其善本，乃李淳風等注釋，而憲爲之細草者也．其立釋平方立方二法甚善，楊輝算書並宗之.

54. 宋史藝文志所載數學書籍，有李紹穀求一指蒙算術玄要一卷，夏翰(一作翔)新重演議海島算經一卷，徐仁美增成玄一算算三卷，三問田算術一卷，又求一算術化零歌一卷，又龍受益法王守忠求一術歌一卷，新易一法算範九例要訣一卷，算範要訣二卷，明算指掌三卷，任弘濟一法算法問答一卷，楊楷明微算經一卷，法算機要賦一卷，及法秘訣一卷，算術玄要一卷，李籍九章音義一卷，諸書今均不存.

55. 元好問．好問字裕之，晚號遺山眞隱，太原秀容人，系出拔拓魏，故姓元氏，年七歲有神童之目，興定五年[1221]登進士第，歷官至尙書省員外郎，金亡入元不仕，以著作自任，淹貫經傳百家詩文，爲一代宗工，兼通九數天元之學，嘗因劉汝諧撰如積釋鎖，爲撰細草，今二書不傳．又與李冶張德輝相友善，時號龍山三友，晚年傅遊燕趙齊魯間，所至以異人目之，卒年六十八.

56. 金時數學書籍，有楊翼雲句股機要象數雜說，常德陳尙德石塘算法四卷彭絲算經圖釋九卷，均久佚．丁巨算法八卷，知不足齋叢書刊本，不足一卷.

57. 李冶．冶字仁卿，號敬齋，眞定欒城人，自幼喜算數．正大庚寅(1230)，成進士，辟知鈞州事．歲壬辰城潰，冶北渡流落忻崞間，聚書環堵，晚年得洞淵九容之說，日夕玩繹，家元氏，買田封龍山下．歲甲辰受元世祖召對後，卽歸元氏山下．學從益衆，著測圓海鏡十二卷，時在戊申(1248)秋九月．其書以句股容圓爲題，自圓心圓外縱橫取之，得大小十五形，皆無奇零，次列雜記數百條，以窮其理，次設問一百七十則，以盡其用，病革語其子克修曰，吾生平著述，死後可盡燔去，獨測圓海鏡一書，吾嘗精思致力焉，後世必有知者.

58. 又當時有人以方圓周徑冪積和數相求，名益古集者，冶以其蘊猶匿而未發，因爲之移補條目，釐定圖式，演爲

六十四題,都爲三卷,踵其原名,曰益古演段,自序在己未(1259)夏六月,二書皆闡明天元一之術,爲中國數學至精之詣,卽今代數學一元多次之方程式也.

59. 天元一術,始見於秦九韶數書九章大衍數中,而李書言之獨詳,其關於數學者甚大,惜乎此後疇人,皆株守立成,習焉不察,有明一代,遂無知其法者.淸梅瑴成始因借根方法而悟天元一術,於是其學復明於世,楊州阮元於浙江文瀾閣,抄讀李書,刊入知不足齋叢書.長沙丁取忠刊入白芙堂算學叢書,洞淵遺法,庶幾千古永存矣.

60. 蔣周.李文一.石信道.劉汝諧.周平陽人,著益古集,刊於元豐紹興淳熙間,李冶益古演段序,所謂近代有某者,殆指周也.文一博鹿人,撰照膽.信道鹿泉人,撰鈐經,測圓海鏡有鈐經亦載此法,以弦差冪減丙行差冪,復以丙行乘之爲實,以差率冪爲法之語,當卽信道之鈐經.汝諧撰如積釋,元好問且爲撰細草.諸人之書不傳,皆發揮天元術者.

61. 李德載,劉大鑑.德載平陽人,撰兩儀羣英集,於天元之外,增立地元.大鑑字潤夫,霍山邢先生頌不高弟也,撰乾坤括囊,末有人元二門.二人之書,亦不傳,然可見其由立一元而進至三元矣.

62. 朱世傑.世傑字漢卿,號松廷,寓居燕山,著算學啓蒙三卷,自乘除加減求一穿韜反覆還源以至天元如積,總二十門,凡二百五十九問,上卷八門,曰縱橫因法,曰身外加法,曰留頭乘法,曰身外減法,曰九歸除法,曰異乘同除,曰庫務解稅,曰折變互差,中卷七門,曰田畝形段,曰倉囤積粟,曰雙據互換,曰求差分和,曰差分均配,曰商功修築,曰貴賤反率,下卷五門,曰之分齊同,曰堆積還原,曰盈不足術,曰方程正負,曰開方釋鎖,大率由淺入深,初不外乎九章,然視九章,則加精矣.大德己亥(1299)趙城序而刊之.

63. 世傑又著四元玉鑑三卷.大德癸卯(1303),臨州莫若序而刊之,總二十四門,凡二百八十八問,上卷六門,曰直段求源,曰混積問元,曰端匹互隱,曰廩粟廻求,曰商功修築,曰和分索隱,中卷十門,曰如意混和,曰方圓交錯,曰三率究圓,曰明積演段,曰句股測望,曰或問歌彖,曰菱草形段,曰箭積交參,曰撥換截田,曰如像招數,下卷八門,曰果梁疊藏,曰鎖套吞容,曰方程正負,曰𥡴範類會,曰兩儀合轍,曰左右逢源,曰三才變通,曰四象朝元,自直段求源以迄𥡴範類會,凡二十門,悉立一元,惟或問歌彖第九第十兩問,兼立二元,又第十二問兼立三元,末後四門,兩儀合轍,左右逢源皆立二元,三才通變立三元,四象朝元立四元,其四元以天地人物名之,以元氣居中,立天元一於下,地元一於左,人物一於右,物元一於上,卽代數學之聯

立方程式也. 其中元氣,謂之太極,即已知數也. 卷首載古法七乘方圖,以便於解高次方程式,此即巴斯楷(1623—1662)之三角形(Parsca triangle)也.

64. 世傑於發明四元之外,更精於堆朶及級數,就前人所論各堆積外,別立落一撒星嵐峯諸形,以通其變.

落一形, $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n)$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$,

即 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)$
$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

撒星形, $1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n.\overline{n+1})$
$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$,

即 $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$
$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

四角落一形, $1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots\cdots+(1+4+9\cdots\cdots+n^2)$
$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2)$

即 $1.2.3+2.3.5+3.47+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$
$=\frac{1}{2}n(n+1)(n+1)(n+2)$

嵐峯形, $1+(1+5)+(1+5+12)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(1+5+12+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n.\overline{3n-1})$
$=\frac{1}{24}n(n+1)\,n+2)(3+1)$,

即 $1.2.1+2.3,2+3.4.3+\cdots\cdots+n(n+1)n$
$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

就中落一形之 $1,2,3,\cdots\cdots n$, 撒星形之 $1,3,6,\cdots\cdots\cdots\frac{1}{12}n(n+1)$,

四角落一形之 $1\cdot4,9,\cdots\cdots\cdots n^2$, 嵐峯形之 $1,5,12,\cdots\cdots,\frac{1}{2}n(3_n-1)$ 在代數學中謂之直線級數,三角級數,四角級數,五角級數是也. 又三角嵐峯形,(一稱嵐峯更落一形) $1.1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots\cdots+n(1+3+6)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2}n.\,\overline{n+1})$
$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)$.

四角嵐峯形, $1.1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots\cdots+n(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$
$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}$.

撒星更落一形, $1+6+15+35+70+126+\cdots\cdots=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

即 $1.2.3.3+2.3.4.5+3.4.5.6+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$
$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

三角撒星更落一形,
$1+6+21+56+126+253+\cdots\cdots=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$,

即 $1.2.3.4.5+2,3.4.5.6+3.4.5.6.7+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.

65. 世傑在當時發明四元之學,與秦九韶,李冶,可稱鼎足而三,而世傑二書尤兼包衆有,充類盡量,惟元以後天元四元之學失傳,秦李猶有書存,世傑之

書,乃竟亡佚,淸阮元始於浙江獲大德本四元玉鑑,羅士琳又訪獲朝鮮重刊本算學啓蒙,並爲補撰細草刊布,長沙丁取忠,又刊四元玉鑑於白芙堂,算學叢書,測海山房叢書,刊算學啓蒙,四元之學,始復顯於世.

66. 趙城. 城字元鎭,維揚人,當元大德時[約1300]曾從朱世傑學算,並先後爲代刊算學啓蒙四元玉鑑二書.

67. 郭守敬. 守敬字若思,順德邢臺人也. 大父榮,精於算數,使守敬從劉秉忠學,秉忠以其時曆法,自遼金承用二百餘年,寖生差誤,議欲修改而卒. 朝廷思用其言,乃以守敬與王恂,率南北日官分掌測驗推步. 守敬遂造授時術,其草中求周天弧度,以天元術三乘方(卽四次式)取矢,凡垜疊招差方圓句股諸理,皆應用之,我國曆法,號爲最密,施行於世,垂四百年,蓋守敬固我國曆法之大家,抑亦數學之巨子也. 其著述甚多,皆關於曆法者. 官拜昭文殿大學士知太史院事,延祐三年[1316]卒,年八十六.

68. 守敬之學,雖見用於元代,而其學業之成,實在宋時. 自玆而後,元人著述,雖多亡佚,而天元四元之術,蓋已無人傳習矣.

中學衰歇時期

69. 賈亨. 亨字季通,長沙人也. 著算法全能集二卷. 也是園書目,載亨是書作六卷,阮元所藏止二卷,書中有珠算歌訣,阮氏謂其人當在元以後. 乃據古算器攷,明洪武中郭守敬之裔伯玉造珠算. 按漢徐岳太乙兩儀算,有其珠自下而上,自上而下,算九則窮,又移一柱之法,其器雖與今或異,究爲我國珠算之始,而宋楊輝續古摘奇算法,言古今算書,有盤珠集走盤集,其乘除通變算寶且著有九歸詳說,元朱世傑算學啓蒙,有身外加減留頭乘九歸除各法,皆珠算名稱,是我國珠算,由來甚早. 蓋楊朱書久佚,發見在晤人傳出版以後,阮氏初未之見耳.

70. 元人著作,尙有安止齋何平子,詳明算法二卷,其序文及最題,載入李儼所藏鈔本諸家算法中.

明

71. 我國數學,入明以來,天元四元,已成絕學,雖唐順之,顧應祥,程大位諸人,多方蒐討,終以衰歇過久,師授乏人,無從傳習,深可惜耳.

72. 唐順之. 順之字應祥,荊川武進人也. 嘉靖八年[1529],會試第一,官至右都御史,通知回回曆法,精於弧矢割圓之術,嘗著句股測望論,句股容方圓論,弧矢論,分法論,六分論. 三十九年[1560]卒,年五十四.

73. 顧應祥. 應祥號箬溪道人,湖州

長與人也. 嘉靖間[16 cen.],巡撫雲南,遷刑部尚書,自幼好習數學,晚得唐順之所錄測圓海鏡條一書,謂每條下細草,徑立天元一,反覆合之,而無下手之處,乃竟去其細草,立一算術. 又以其所立通句邊股之屬,各以類分之,語意稍繁者,略加芟損,著測圓海鏡分類釋術十二卷,測圓算術四卷,又著句股算術二卷,弧矢算術一卷,授時曆法撮要一卷.

74. 順之,應祥之學,大略相同,皆不知天元四元之術,凡所論述,皆祇得其淺焉者耳. 至應祥刪去海鏡細草,尤貽不知而作之譏焉.

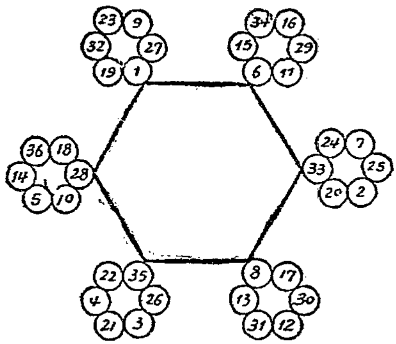
75. 周述學. 述學字繼志號雲淵子山陰人也,聞郭守敬弧矢法,以圓求圓,循弦宛轉極與天肖名曰弧矢經時.唐順之博研古算,顧應祥精演例法,欲求弧矢不可得,述學竭其心思,撰補弧矢,又通曆法,以布衣終.

76. 程大位. 大位字汝思號賓渠新安人也. 著算法統宗十四卷,世傳單行本,乃後人改竄,原本收入古今圖書集成. 其書以古九章為目,雜採古來相傳舊法,後附難題,萬曆[1593]癸巳浙江吳繼綬為之序.卷十二所載縱橫圖十四種,多與楊輝相同,其不同者僅有三圖.

(1)五五圖,(2)六六圖,(3)聚六圖,其六六圖已錄第一門方陣[30頁]條下,餘二圖如下.

5	23	16	4	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	3	10	22	21

五五圖



聚六圖

惟五五圖,當將上下二橫列,中央三數23, 16, 4, 3, 10, 22對換,或將其同列左右二數5, 25, 1, 21對換,方成正則之縱橫圖,語見日本三上義夫和算之方陣問題.

77. 卷末算經源流一篇,明代算家略具,如臨江劉士隆九章通明算法,江寧夏源澤指明算法,錢塘吳信民九章比類,京兆劉洪算學通衍,金陵許榮九章詳註算法,鄱陽余進九章詳通算法,福山鄭高昇啓蒙發明算法,吳橋馬傑

改正算法,吳與顧應祥句股算術弧矢弦術,金臺張爵正明算法,寧都陳必智算理明解,會稽林高訂正算法,宛陵楊溥算林拔萃,銀邑余一鴻算法新安朱元濬庸章算法,諸書雖均不存,大率皆日用算術,且有數種標明九章,蓋天元四元本出九章,元學失傳,不得不重自九章研習也.

西學輸入初期

78. 明萬曆天啓間,[1580—1624],西人利瑪竇(Matteo Ricci)龍華民,(Nicolao Langobardi 意人西曆1597年來華,1654年卒)熊三拔(Sabathinus de Ursis,意人1606年來華1620年卒)陽瑪諾,(Emmanueljeune Diay 葡人1610年來華1659年卒)艾儒略,(Giulio Aleni)鄧玉函,(Jean Terenz)湯若望,(Adam Schaal)羅雅谷,(Jiacomo Rho)南懷仁,(FerdinandVerbiest)等,先後以傳教來我國,輸入數學,我國從之學習及譯述者,則爲李之藻徐光啓李經天諸人,其譯著之書,天文曆法外,約分四類,(1)幾何學,(2)八線表,(3)對數表,(4)借根方,(5)割圓法,

79. 我國天文曆法,以郭守敬授時術爲最密,惟元以來繼起無人,比之西法遂瞠乎其後,然明時西洋天文學亦尙幼稚,有所謂十二重天之說,惟其觀測甚精,且有割圓八線表,備其測算之用,故較中法爲密耳.

80. 幾何學在西洋爲最古之學科,我國上古,亦已於句股露其端倪,惜後人不求進步,且或如欒城李氏,以各邊和較相求,雖天元之術,尋以發揮,其於幾何學終不出句股範圍以內,明時翻譯幾何學,我國數學界,可謂放一異彩矣.

81. 利瑪竇. 利瑪竇(Matteo Ricci)生於嘉靖己丑(1529),萬曆辛巳(1580)來華,從澳門登陸,初名利西泰,以十六世紀之末年,與其徒龐迪我(Digeo De Pantaja,西班牙人,萬曆戊午1618,1,1,卒於澳門),入北京,獻方物,得賜第宅,並於宣武門內,建天主堂,今北京之南堂,其故址也,所著有乾坤體義三卷,與徐光啓譯幾何原本前六卷,測量法義,測量異同句股,又與李之藻共成圜容較義一卷,同文算指前編二卷,(萬曆癸丑(1613)李之藻序,甲寅(1614)徐光啓序,通編八卷行世,徐光啓李之藻皆師之,萬曆庚戌(1610)卒.

82. 艾儒略. 艾儒略(Giulio Aleni)意大利人也,萬曆四十一年[1613]入中國,著幾何法要四卷,卽幾何原本求作線面諸法,而較幾何原本爲詳,淸順治六年[1649]卒.

83. 鄧玉函. 鄧玉函(Jean Tereny)字函璞,德意志人也,天啓元年[1621]來華,崇禎二年[1629]徐光啓薦舉同修曆法,翻譯諸術表草稿八卷,次年四月卒,著有奇器圖說三卷,皆引取乾坤體義

幾何原本及句股法義諸書,與南懷仁靈臺儀象志,互相發明.

84. 羅雅谷. 羅雅谷(Jiacomo Rho)字問韶,意大利人也,天啓四年[1624]入中國,寓河南開封府,崇禎三年[1630]徐光啓奏請訪用,七月赴局供事,其在局譯撰書,經奏請者十一種,又著籌算一卷,九年三月卒.

85. 李之藻. 之藻字振之,號涼庵,仁和人也. 萬曆二十六年[1598年]成進士,官南京工部員外郎,四十一年,改銜南京太僕少卿,上言擧薦西人龐迪莪,熊三拔,龍華民,陽瑪諾,請開館局,翻譯西書,議雖未行,可謂卓識矣.

86. 崇禎二年[1629]詔與大學士徐光啓,同以西法,修改曆法. 越二年,曆未成而卒於官. 先是之藻與光啓從西人利瑪竇遊,盡得其學,之藻本諸西法,著渾蓋通憲二卷,渾度蓋模,通而爲一,以息古來渾蓋之爭. 昔梁崔靈恩亦爲渾蓋合一之論,惟無明確之學說,爲其中堅,故不及之藻之有力耳.

(1)幾何學 (2)割圓八線表

[三角函數表]

87. 之藻又著同文算指前編二卷,通編八卷,容圓較義一卷,皆譯西人利瑪竇之書. 而世行天學初函,之藻所彙刻也.

88. 徐光啓. 光啓字子先,上海人也. 萬曆三十二年[1604]成進士,由庶吉士歷贊善從西人利瑪竇學天文推步,盡得其術,爲譯幾何原本測量法義等書,又引伸測量法義,作句股義一卷.

89. 天啓三年[1623]擢禮部右侍郎,崇禎二年[西曆1629年]五月乙酉朔日食,光啓依西法預推見食分數,屆時光啓法驗,餘皆疏,乃以光啓督修新法. 光啓並推擧西人鄧玉函龍華民襄事,九月癸卯開局,又徵西人湯若望羅雅谷等,譯書演算,是月光啓進本部尚書,五年五月,以本官兼東閣大學士,六年十月,以病辭局務,薦李經天以竣其事. 逾月而卒,贈少保,謚文定,後加贈太保.

90. 光啓等所修崇禎曆書,凡一百二十六卷,曆書總目一卷,日躔曆指四卷,日躔表指四卷,恆星曆指三卷,恆星圖一卷,恆星圖系一卷,恆星曆表四卷,恆星經緯表二卷,恆星出沒表二卷,月離曆指四卷,月離表六卷,交食曆指七卷,交食表七卷,五緯曆指九卷,五緯表十卷,測天約說二卷,大測二卷,割圓八線表六卷,黃道升度表七卷,黃赤道距度表一卷,通率表二卷,元史揆日訂誤一卷,通率立成表一卷,散表一卷,割圓八線立成長表四卷,黃道升度立成中表四卷,曆指一卷,測量全義十卷,比例規解一卷,南北高弧表十二卷,諸方半晝分表一卷,諸方晨昏表一卷,曆學小辨一卷,曆學日辨五卷.

91. 李經天. 經天字長德趙州人也. 萬曆四十一年[1613]成進士, 歷任河南陝西藩臬, 崇禎六年[1633], 以山東右參政, 代徐光啓督修新法, 七年七月進五緯總論一卷, 五星圖一卷, 日躔表一卷, 火木土二百恆年表並歲周時刻表共二卷, 交食曆指三卷, 交時諸表用法二卷, 交食表四卷, 黃平象限表七卷, 木土加減二卷, 交食簡法表二卷, 方根表二卷, 恆星屛障一具, 俱徐光啓督率西人所作也. 十二月又進五緯曆指八卷, 五緯用法一卷, 日躔二卷, 夜中測時一卷, 交食蒙求一卷, 古今交食考一卷, 恆星出沒表二卷, 高弧表五卷, 五緯諸表九卷, 甲戌乙亥日躔細行二卷, 八年四月又上乙亥丙子七政行度四冊, 參訂新法條議二十六則.

92. 是時朝廷分設東西二局, 東局舊法, 西局新法, 新法屢測交食凌犯俱密合, 但東局魏文魁等, 多方阻撓, 然曆法疏密, 恆以預推日月食爲徵驗, 九年正月十五日辛酉曉望月食, 時刻分秒盡合天經預推, 是年天經陞山東按察使尋加光祿寺卿, 仍督修新法, 十年正月辛丑朔日食時刻, 及見食分秒, 惟天經爲密, 十六年三月乙丑朔日時測又獨驗, 八月乃詔改爲大統術法通行天下, 會國變, 竟未施行.

93. 陳藎謨. 藎謨字獻可, 號礪庵嘉興人也, 著測度三卷, 首卷列周髀本文以己意解之, 曰詮經, 次曰詮理, 曰詮器, 則西人之矩度也, 曰詮法, 曰詮算, 則西人三率法也, 曰詮原, 則句股弦互求之術也, 中下二卷, 則以平矩以正繩, 偃矩以望高, 覆矩以測深, 弦矩以見廣, 臥矩以知遠, 環矩以爲圓, 合矩以爲方, 列爲七目, 各以測算之法系之, 末附開方說一卷, 言開平方之法, 度算解一卷, 言西人比例規之用.

94. 湯若望. 若望 (Adam Schaal) 字道未, 德意志人也, 明天啓二年[1622]入中國, 崇禎二年[1629]禮部奏請開局, 修改曆法, 次年五月, 徵若望自西安供事曆局徐光啓李經天前後所進交食曆指, 交食表用法, 交食蒙求, 古今交食考, 恆星出沒表諸書, 及恆星屛障, 皆若望所作也.

清

95. 若望於明亡後, 乃仕於清, 順治二年[1645]十一月, 以若望掌欽天監事, 一切占候, 悉聽舉行, 恩加太僕太常寺卿, 十四年四月, 回回科秋官正吳明烜, 疏言若望所推七政書, 水星二八月, 皆伏不見, 今水星於二月二十九日仍見東方, 八月二十四日又夕見, 清帝命大臣公同測驗, 水星實不見, 議明烜詐妄之罪, 援赦得免, 康熙四年[1665]徽州新安衞官生楊光先, 上言若望新法十謬, 及選擇不用正五行之誤, 下王大臣等集議, 若望所屬各員, 俱罷黜治罪, 於是

廢西法,仍用大統術,次年若望卒,至康熙九年,復用新法.

96. 若望所定新法算書,總一百卷,緣起八卷,大測二卷,測天約說二卷,測日略二卷,曆學小辨一卷,渾天儀說五卷,比例規解一卷,籌算一卷,遠鏡說一卷,日躔曆指一卷,表二卷,黃赤正球一卷,月離指四卷,月離表四卷,五緯曆指九卷,五緯表說一卷,五緯表十卷,恆星曆三卷,恆星表二卷,恆星經緯圖說一卷,恆星出沒表二卷,交食曆指七卷,古今交食考一卷,交食九卷,八線表二卷,幾何要法四卷,測景全義十卷,新法曆引一卷,曆法西傳一卷,新法表異二卷.其曆法西傳新法表異二書,則入清後所作也.

97. 南懷仁. 南懷仁(Ferdinand Verbiest)字勳卿,一字敦伯,比利時人也,崇禎三年[1630]入中國,清康熙初年,吳明烜楊光先等,以舊法强天從人,儀器倒用,以致天道勿協,七年[1668]十二月召懷仁與監官質辯,越明年丁酉正月,同赴觀象臺,測驗立春雨水太陰火星木星,懷仁預測度數與所測皆符,明烜所指不實,康熙九年,乃將時憲書交懷仁推算,以懷仁爲監副.

98. 是年八月,請訪造儀器凡六,曰黃道經緯儀,曰赤道經緯儀,曰地平經儀,曰地平緯儀,曰紀限儀,繪圖立說,次爲十六卷,名曰新製靈臺儀象志,十二年儀成,擢懷仁爲監正,十七年八月預推七政交食表成,表爲湯若望所推,懷仁續成之者,凡三十二卷. 所著又有坤輿圖說二卷,西方要記一卷,別本坤輿外記一卷.

(3) 對數

99. 穆尼閣. 穆尼閣(Jacques Motel)泰西人也(未詳何國)順治中,寄寓江寧喜與人談算,薛鳳祚方中通常從之游,其所傳比例數表,以加減代乘除,以折半代開方,是爲對數入我國之始.

100. 方中通. 中通字位伯,桐城人也.著數度衍二十四卷,附錄一卷,嘗謂乘莫善於籌,除莫善於筆,加減莫善於珠,比例莫善於尺,其珠算歸法三一三十一,四一二十二之類,十字俱作餘字.時廣昌揭暄與中通論難天象曆法,別錄爲一書,曰揭方問答.

101. 薛鳳祚. 鳳祚字儀甫,淄川人也,少從淄城魏文魁學曆,主持舊法,順治中與西人穆尼閣談算,始改從西學,盡傳其術.因著天學會通十餘種曰對數比例,卽西洋之假數也,曰中法四線,以西法六十分爲度,不便於算,改從古法,以百分爲度,表所列止正弦餘弦正切餘切,故曰四線,其推步諸書,皆會通中西以立法,當時數學名家有南王北薛之稱,王謂王錫闡也.

102. 孫蘭. 蘭字滋九,一名御寇,自號柳庭,晚年又號遠翁,居甘泉縣之北

湖,明季爲諸生,精九章六書之學,清初西人湯若望,爲欽天監監正,闌從之受曆法,遂盡通泰西推步諸術,尤精幾何原本之學,著理象數辨疑糾謬八卷,輿地隅說四卷,大地圖說一卷,孟子圭田解,禹排淮泗注江解,柳庭人紀等書,卒年九十餘.

103. 王錫闡. 錫闡字寅旭,號曉庵,又號餘不,又號天同一生,吳江人也,兼通中西之學,自立新法,用以測日月食,不爽秒忽,每遇天色晴霽,輒仰屋臥鴟吻間,仰察星象,竟夕不寐,著曉菴新法六卷,乾隆三十七年(1772),詔開四庫書館,曉菴新法錄入子部,先是曉菴新法未成作曆說六篇曆策一篇,又隱括中西步術,作大統西算啓蒙,丁未歲,因推步大統曆,作丁未算稿,辛酉八月朔,日食,以中西法及己法,豫定時刻分秒,至期與徐發等,以五家法同測,己法獨合,作推步交朔測日小記,治曆重割圜,作割圜解,測天當用儀晷,造三辰晷,兼測日月星,因作三辰晷志,年五十五卒.

104. 徐發. 發字圃臣,嘉興人,著天元曆理十一卷,辯榮方問陳子之言非周髀本文.

105. 杜知耕. 知耕字端甫,號伯崔,柘城舉人也,以利瑪竇徐光啓所譯幾何原本,復加刪削,作幾何論約七卷,後附十餘條,則知耕所作也. 又雜取諸家算法,參以西人之說,依古九章爲目,作數學鑰六卷,言數非圖不明,圖非手指不明,圖用甲乙等字作誌者,代指也,故其書於圖解尤詳,梅文鼎謂其圖注九章,頗中肯綮.

106. 李子金. 子金號隱山,柘城人,與王錫闡梅文鼎游藝揭暄輩,並以算術相尙著隱山鄙事四卷,以著明幾何原本幾何法要之理.

107. 游藝. 藝字子六,建寧人,著天經或問前集四卷,後集無卷數,皆設爲問答,以推闡天地之象,大旨以西法爲宗,與揭暄相友善,故集中多取其說.

108. 揭暄. 暄字子宣,西江廣昌人,著璇璣遺述七卷,一名寫天新語. 康熙己巳[1689],以草稿寄梅文鼎,文鼎抄其精語爲一卷,稱其深明西術,而又別有悟入,其言多古今所未發.卒年逾八十.

109. 黃宗羲. 宗羲字太冲,號梨洲,餘姚人,明之遺老也. 博覽羣書,兼通步算,所著大統曆法辨四卷,時憲書法解,新推交食法一卷,圜解一卷,割圜八線解一卷,授時曆法假如一卷西洋曆法假如一卷,回回曆法假如一卷,康熙十八年(1679)都御史徐元文薦於朝,以老病辭不就,乃詔取所著書宣付史館,年八十六卒.

110. 宗羲子百家,字主一,傳其父學,又從梅文鼎問推步法,著句股矩測解原二卷,上卷曰解矩度,曰解表影,曰解矩度表景,曰解物景,曰解兩景消長,下卷曰以影測高,曰以目測高,曰重矩,曰變影,曰測深,測廣,測遠,皆有圖說詳之.

111. 梅文鼎. 文鼎字定九,號勿庵,宣城人也,兒時侍父士昌,及塾師羅王賓,仰觀星象,輙了然於次舍運轉大意,年二十七,師事竹冠道士倪觀湖,受麻孟璇所藏臺官交食法,與弟文鼐文鼏共習之,稍稍發明其所以立法之故,補其遺缺,著曆學駢枝二卷,後增爲四卷,倪爲首肯,自此遂有學曆之志,值書之難讀者,欲得其說,往往至廢寢忘食,殘篇散帙,手自鈔集,一字異同,不敢忽過,疇人子弟,及西域官生,皆折節造訪,人有問者,亦詳告之無隱,期與斯世共明之,歲辛丑卒[1721]年八十九.

112. 文鼎所著曆算諸書,凡八十餘種,柏鄉魏荔彤兼濟堂纂刻,凡二十九種,後文鼎孫瑴成,以算學起家,謂兼濟堂所刻校讎編次不善,又解割圓之根及句股闡微第一卷,係楊學山所撰,因創去楊書,另爲編次,更名梅氏叢書輯要,總六十二卷,筆算五卷,附方田通法古算器考,籌算二卷,度算釋例二卷,少廣拾遺一卷,方程式論六卷,句股舉隅一卷,幾何通解一卷,平三角要五卷,方圓冪積一卷,幾何補編四卷,弧三角舉要五卷,環中黍尺五卷,塹堵測量二卷,曆學駢枝五卷,曆學疑問三卷,疑問補二卷,交食四卷,七政二卷,五星管見一卷,揆日紀要一卷,恆星紀要一卷,曆學答問一卷,雜著一卷,附錄二卷,則瑴成所著赤水遺珍操縵巵言也. 今四庫全書著錄者,用魏荔彤所刻本,瑴成所刻,則列之存目焉. 清乾隆四五十年間[約1780年],嘉定錢大昕主講鍾山書院. 梅氏子孫,多從受業,訪文鼎未刻諸書,則無一存者矣.

113. 李光地. 光地字晉卿,號厚菴,福建安溪人也,康熙庚戌[1670]進士,官至大學士,著曆象本要二卷. 康熙五十七年[1718],卒於官,年七十七,諡文貞.

114. 孔興泰. 興泰字林宗,睢州人也,通西法,著大測精義,求半弧正弦法,與梅文鼎所著正弦簡法不謀而合.

115. 袁士龍. 士龍一名士鵬,字惠子,號覺庵,仁和人也,受星學於黃弘憲,西域天文有三十雜星之占未譯,士龍有考,與梅文鼎所考不謀而合. 又著測量全義新書二卷,凡二十六篇.

117. 毛乾乾. 乾乾字心易,與梅文鼎論周徑之理,因復推論及方圓相容相變諸率,隱於匡山,號匡山隱者,女壻謝廷逸,字野臣,中州人,一曰上元人,於數學甚有精思,偕隱陽羨,自相師友,著述甚富,多前人所未發.

118. 毛希堯. 希堯字允恭,廣甯人也,以西人測算之切要者,摘錄刊布,爲測算刀圭三卷,一曰三角法摘要,一曰八線眞數表,一曰八線假數(卽對數)表. 又有面體便覽一卷,對數表一卷,對數廣運一卷.

119. 劉湘煃. 湘煃字允恭,江夏人也,聞梅文鼎以曆學名當世,贏糧走千餘里,受業其門,湛思積悟,多所創獲,文

鼎得之喜曰,劉生好學精思,啓予不逮,因以所著曆學疑問囑之討論,湘煃爲著補訂三卷,又作五星法象編五卷,文鼎深契其說,摘其要自爲五星紀要.湘煃又用弧三角法作恆星紀緯表一卷,及月離交均表根各一卷,日月食算稿各一卷,各省北極出地圖說一卷,答全椒吳荀淑曆算十問書一卷,湘煃死,其遺書無一存者.

120. 陳萬策. 萬策字對初,又字謙季,晉江人也,康熙戊戌[1718]進士,官詹事府詹事,受數學於梅文鼎,作中西算法異同論.

121. 楊作枚. 作枚字學山,無錫人也,著解割圓之根一卷,又著句股正義法異一卷.

(4) 借根方[代數學]

122. 愛親覺羅玄燁. 玄燁淸聖祖也. 習西法借根方,探索四十餘年,因有律曆淵源之輯. 律曆淵源,共分三類,一曰曆象考成爲篇二,二曰律呂正義爲篇三,三曰數理精蘊爲篇二,三部共百卷. 雍正癸卯[1723]書成,主其事者爲何宗國梅瑴成,而明安圖亦在攷測之列,帝王習數學而最有成績者,不得不首推玄燁也.

123. 康熙四十一年[1702],玄燁南巡,撫臣李光地扈從,玄燁命取所刻書籍回奏,光地因匆遽未及攜帶,遂以所刻梅文鼎曆學疑問呈進,玄燁謂朕留心曆算多年,此事朕能決其是非,將書留覽再發. 二日後,召見光地,曰昨所呈書甚細心,且議論之亦公平,此人用力深矣. 朕帶書回宮仔細看閱,光地因求親加御筆批駁改定,玄燁肯之. 明年春,復南巡,於行在發還原書,並加圈點塗抹及簽貼批語. 光地復請梅書疵謬所在. 玄燁謂無疵謬,但算法未備. 蓋梅書原未完成,故及之. 四十四年,復南巡,特問宣城處士梅文鼎今焉在,光地對以尙在臣署,玄燁命光地與偕來面見,四月二十日,光地與文鼎俱召對御舟中,從容垂問,至於移時,如是者三日,玄燁曰,曆象算法,朕最留心,此學今鮮知者,如文鼎眞僅見也,其人亦雅士,惜乎老矣,連日賜書扇字幅,頒賚珍饌,臨行特賜績學參徵四大字.越年又命文鼎孫瑴成內廷學習. 五十三年,諭瑴成曰汝祖留心律曆多年,可將律呂正義寄一部令看,或有錯誤處,指出甚好,夫古帝王有都俞吁咈四字,後來止有都俞,即朋友之間亦不喜人規勸,此皆是私意,汝等要須竭力克去,則學問自然長進,可將此意寫與汝祖知道云云,亦可謂虛心不自滿者矣.

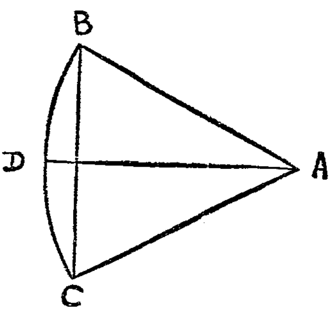
124. 玄燁特設立蒙養齋於內廷,招集漢滿明算靑年入齋學習,一時梅瑴成,陳厚耀,何國宗,顧陳垿,明安圖等,均出其中,而致身通顯者不一,以故習之者甚衆,淸代中國數學之發達,玄燁提

倡之功,不可沒也.

125. 康熙時,西法輸入,借根方外,有割圓之法,傳入借根方則爲淸帝玄燁,傳入割圓之法則爲西人杜德美.

(5) 割圓法 [造三角函數表法]

126. 杜德美. 杜德美(Pierre Jartoux, 1670—1720.11.30)來華,爲十七世紀之末年,距利瑪竇來華之期,恰及一紀,而其有造於中國數學界之功,亦不讓利氏,是時中國適有測地之舉,遂於役其間,杜氏通天文,雅有述作,又嘗與來本之(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716)通訊. 割圓之法,素稱繁劇,自杜氏術出,而繁者簡,今所傳杜氏術凡九,設以



BD$=a$爲弧背,BC$=c$爲通弦,AB$=r$爲半徑,d爲全徑,則

$$a=3d\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots\cdots(2n-5)^2\cdot(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot(2n-1)!}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}\cdots\cdots(2)$$

$$\text{vers}\,a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}\cdot(2n)!}\cdots\cdots(3)$$

$$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2a^{2n-1}}{4^{n-1}\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)!}\cdots\cdots(4)$$

$$\text{vers}\,a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^{n}\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)}\cdots\cdots(5)$$

$$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2 1^2 3^2\cdots\cdots(2n-5)\cdot(2n-3)^2}{r^{2n-1}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1}\cdots\cdots(7)$$

$$a^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2 1^2 3^2\cdots\cdots(n-2)^2\cdot(n-1)^2}{r^{-1}\cdot(2n)!}(2\text{vers})^{n}\cdots\cdots(8)$$

$$(2a)^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2 1^2 3^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{4^{n-1}\cdot(2n)!}\times(8\text{vers}\,a)^n\cdots\cdots(9)$$

以上九式,前三式載於梅瑴成赤水遺珍,稱爲杜術,陳聚新謂後之三式爲明安圖之術,至朱鴻,張豸冠,董祐誠,項名達諸人,復稱杜氏九術.

127. 梅瑴成. 瑴成字玉汝,號循齋,又號柳下居士,文鼎孫也. 文鼎疑日差既有二根,即宜列二表,瑴成以爲定朔時旣有高卑盈縮之加減矣,玆復用此,豈非複乎. 文鼎因其說而復思,然後知交食表之非缺,比之童烏九歲,能與太玄. 康熙乙未[1715]成進士,改編修,與修國史,累官左都御史,瑴成肄業蒙養齋多見祕籍,益以家學所傳,故造詣甚深,嘗與修數理精蘊曆象考成諸書. 增删算法統宗十一卷,重編梅氏叢書六十二卷,末附赤水遺珍一卷,操縵卮言一卷,乃瑴成自著. 又著柳下舊聞十六卷. 乾隆癸未[1763]卒,年八十三諡文穆.

128. 明代算家,唐順之顧應祥輩,均不解立天元術,瑴成嘗讀授時曆草求

弦矢之法,先立天元一爲矢,亦不解所謂,又謂元李冶所著測圓海鏡,亦用天元一立算,傳寫魯魚,算式訛舛,殊不易讀,及肄業淸廷蒙養齋,淸聖祖玄燁授以借根方法,且告之曰,西洋人名此書爲阿爾熱巴達[四庫提要達改作拉],譯言東來法也. 瑴成疑卽天元一之術,復取授時曆草觀之,乃渙然冰釋,謂名異而實同,雖借根方本代數學譯名之異,東來之義,實有未確,[參看第一門代數學及借根方各條]而中國久晦之學,因以復明,是則瑴成最大之功績也.

129. 顧陳垿. 陳垿字玉停,泰昌人,康熙四十四年[1705]舉人,以薦入湛凝齋纂修律曆淵源諸書,初得徐光啓曆書,研求一月遂創開方句股諸法,在湛凝齋日,各省送算學三百餘員至京,主者令與試,玄燁親策之,得七十二人,陳垿爲冠,內廷呼爲算狀元云,官行人二年遂移疾歸,自後屢有薦辟,終其身不復出.

130. 陳厚耀. 厚耀字四源,號曙峯,泰州人也,康熙丙戌[1706]進士,嘗受數學於梅文鼎,以李光地薦通曆法引見,與梅瑴成同修書於蒙養齋,康熙癸巳[1713]書成,特授翰林院編修,後晉國子監司業,擢左諭德兼翰林院修撰,戊戌[1718]會試充同考官. 己亥[1719]以原官致仕,所著天文曆算書甚夥,有春秋長曆十卷,爲補杜預長曆而作,壬寅[1722]春卒,年七十有五.

131. 何國宗. 國宗字翰如,順天府大興縣人也,何氏世業天文,故國宗以算學受知淸聖祖,欽賜進士,入翰林,官至禮部尙書,嘗預修曆象考成上下編,數理精蘊,曆象考成後編,儀象考成,文獻通考,象緯考諸書,乾隆二十年[1755]準噶爾蕩平,奉命出塞,測定東西南北里差,載入時憲書.

132. 嘉定錢大昕官翰林時,於國宗爲後進,國宗聞其善算,卽先往拜,謂曰,今同館諸公,談此道者鮮矣,時國宗已年老,叩以步算諸術猶津津不倦云.

133. 陳訏. 訏字言揚,海寧人也,由貢生授淳安縣敎諭. 嘗受數學於黃梨洲,著句股引蒙五卷.[李儼藏有嘉慶二年守仁堂重刊本]句股述二卷[浙江採集遺書陳訏句股述二卷小山堂藏本,黃宗羲爲之序,又刊本句股引蒙二冊.]

134. 陳世仁. 世仁海寧人也,康熙乙未[1715]進士,辭官養母,著少廣補遺一卷,專明累積之法,首列平立方圓開三角及諸尖十二法,應用次之各級數總和,以資計算.

$$\Sigma n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\Sigma n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1),$$

$$\Sigma n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{2^2},$$

$$\Sigma 2^{n-1}=2^n,$$

$$\Sigma 2n-1=n^2,$$

$$\Sigma(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1),$$

$$\Sigma(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

此外又有開抽奇,抽偶,立尖等之計算.

135. 莊亨陽. 亨陽字元仲,南靖人也. 康熙戊戌[1718]進士,官至淮徐海道. 亨陽自部曹出董河防,於高深測量之宜,隨事推究,因筆之於書. 其後人取稿遺裒輯爲八卷,名曰莊氏算學,(郎李儼藏光緒己丑刊秋水堂算法),其書首載梅勿庵開方法,次曰幾何原本舉要,次曰句股測量,及堆積差分諸雜法,次各體求積法,次曰中西筆算,次曰比例十法,又次雜載各體形及測望之法,末曰七政經緯,乃推步七政法也. 乾隆十一年[1746]卒,年六十有一.

136. 何夢瑤. 夢瑤字報之,號西池,南海人,雍正八年[1730]進士,改知縣,分發廣西,後遷奉天遼陽知州,引疾歸. 合錄精蘊考成及統宗與梅氏書,諸成編要法,爲算法迪十二卷,三角法輯要一卷.

137. 屠文漪. 文漪字莼洲,松江人也. 著九章錄十二卷,言古九章其書不傳,特據所見近世之書,芟其繁謬,補其缺遺,以意隸之. 又言衰分盈朒之外,更有借徵之法. 蓋借差原於差分,疊借原於盈朒,觸類而通之,可以窮難知之數,此九章法外之巧也,故以次九章之後.

138. 余熙. 熙字晉齋,桐城人也,著八線測表圖說一卷. 發明句股和較割圓八線六宗三要諸法.

139. 明安圖. 安圖字靜庵,蒙古正白旗生員,官欽天監監正,習數學於蒙養齋,曾預修曆象考成後編,及儀象考成. 因西士杜德美用連比例演周徑密率,及求正弦正矢之法,以乾隆初年[約1736]爲始,積思三十餘年,深得其解,著割圓密率捷法四卷,書未成而卒.

140. 明新字景臻,安圖之季子習父業,充食俸生. 時安圖病且革,以所著捷法授之. 新遵父命,與門下士共續成之.

141. 陳際新. 際新字舜五,宛平生員,祖籍福建,官靈臺郎,爲監正明安圖高足弟子也,安圖歿後,以割圓密率捷法未竟之稿命續. 際新尋繹推究,質以平日所聞面授之言,越數年至乾隆甲午[1774],始克成書. 圓率解析法之有專書,實自此始.

142. 王元啓. 元啓字宋賢,嘉興人,乾隆辛未[1751]進士,知將樂縣,旋罷歸,究心律曆句股之學,著書已刻者,爲星齋雜著,未刻者爲曆法記疑,句股衍,角度衍,九章雜論,而句股衍一書,因繁求簡,最爲精晰,書分甲乙丙三集,甲集原術三卷,乙集綱要二卷,丙集析義四卷,甲集首卷通論術原未及開方法,爲句股因積求邊張本,二卷專論立方,因及平方法,三卷專論和數開立方,所以看立方諸數之變,乙集兩卷,爲相求法百三十二則之綱要,丙集四卷,郎相求法,逐法分其義,專取發明立法之意.

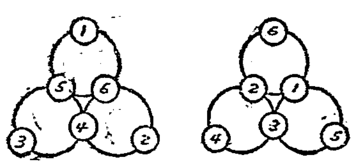
143. 張肱. 肱字良亭,寶應人,以諸生由博士陞夏官正,終戶部主事,與陳際新同受業於監正明安圖,同續割圓密率捷法,相與討論推步校錄,際新極

爲郡道推許.

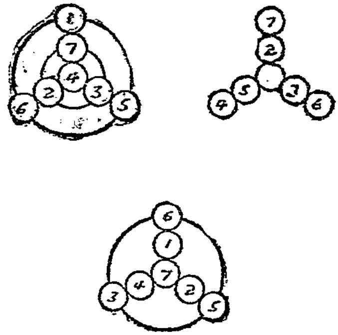
144. 江永. 永字愼修,婺源人也,讀梅文鼎書,有所發明,作數學八卷,一曰數學補論,二曰歲實消長,三曰恆星註術辯,四曰冬至權度,五曰七政術,六曰金星發微,七曰中西合法推算,八曰算賸. 又續數學一卷,曰正弧三角疏義,分支列目,以補算賸所未盡,是書初名翼梅,同郡戴震傳永之學,復爲訂定改今名,所著又有推步法解五卷,乾隆二十七年[1762]卒,年八十二,後震擕永書入都,秦蕙田見而奇之,撰五禮通考,摭其說入觀象授時一類,而推步法解,則載其全書焉.

145. 清初數學諸家,大都研習西法,惟推演洛書之數者,得張潮一人,足繼宋楊輝明程大位而起.

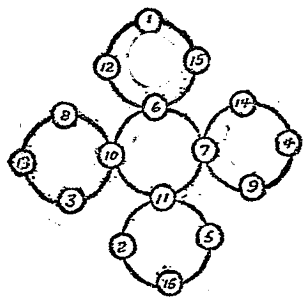
146. 張潮. 潮字心齋,新安人,著心齋雜组二卷,下卷算法補圖,謂算法統宗所載十四圖,橫縱斜正無不妙合自然,有非人力所能爲者,大抵皆從洛書悟得,內惟百子圖於隅徑不能合,因復重加改定,復以意增補雜圖,亦皆有自然之妙,除百子圖,已錄第一門方陣[30頁]條下,餘圖如次.



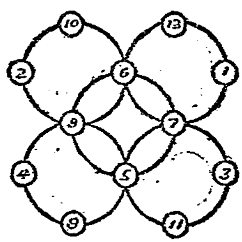
叁三圖



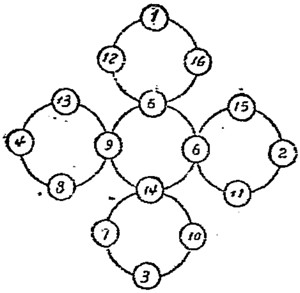
叁三圖



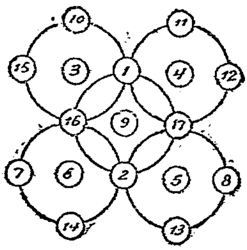
棵四圖



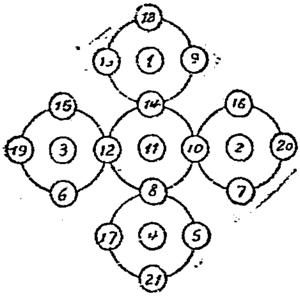
伍五圖



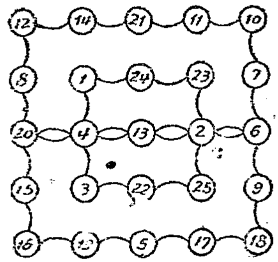
伍五圖



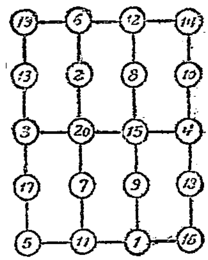
伍五圖



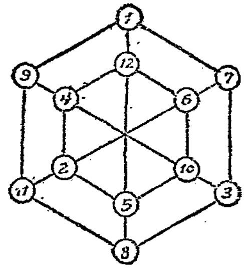
伍



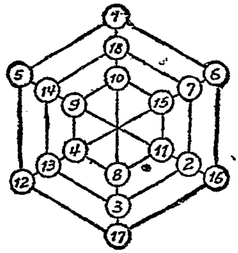
伍五圖



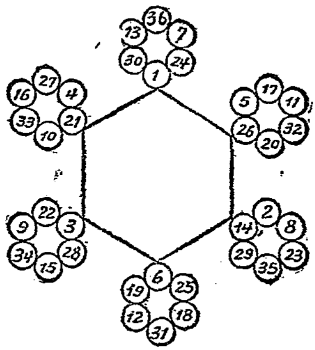
方六圖



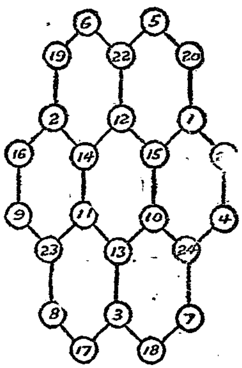
六合圖



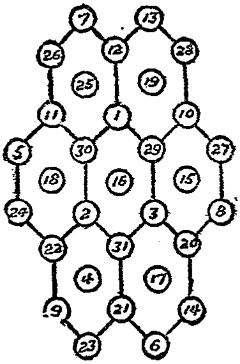
六合圖



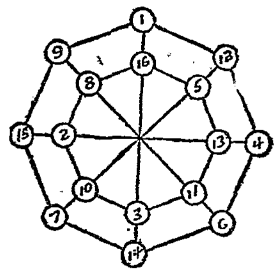
更定聚六圖



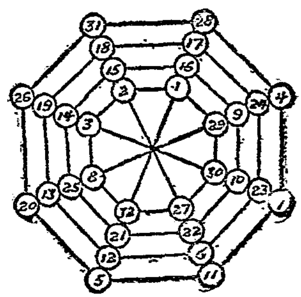
龜文聚六圖



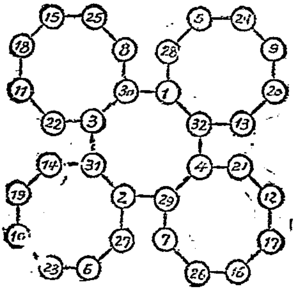
七襄圖



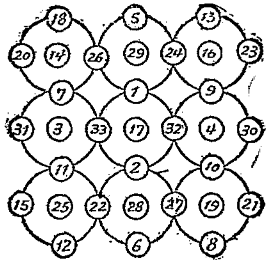
八陣圖



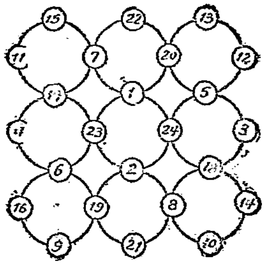
八陣圖



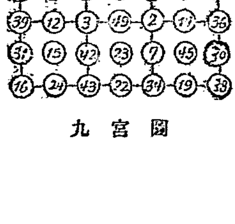
八陣圖



九宮圖



九宮圖



九宮圖

中學復興初期

147. 清康乾間西學盛行,古算乃極沈寂,雖梅瑴成已悟借根方,即中國之天元,而習天元者蓋鮮,至於周髀九章等書,更無論矣. 迨嘉定錢大昕,休寧戴震,曲阜孔繼涵出,蒐討表章,佚書大顯,此後數學,乃分中西兩家,然於數學,皆非深造,依圓率解析之法,雖已大明,而錢塘談泰之徒,皆以圓率為3.16,以較中古祖冲之密率,猶甚疎也.

148. 錢大昕. 大昕字曉徵,號辛楣,又號竹汀,少有神童之目乾隆十六年[1751]清高宗南巡,獻賦行在,召試舉人,以內閣中書補用,十九年[1754]成進士,授翰林院檢討游陞至詹事府少詹事,適西人蔣友仁,以所著地球圖說進,有旨繙譯,並詔大昕與閣學何國宗同潤色,國宗久領監事,精推步,大昕時與討論中西諸法,國宗遜謝以為不及. 時休寧戴震,亦在朝列,戴故婺源江永弟

子,江精西法,戴亦墨守師說,大昕致書譏之,蓋力主中學也. 其跋數學九章,考覈精確,秦九韶生平仕宦蹤跡,乃顯於世. 著書甚夥,於學無所不通. 嘉慶九年[1804]十月十二日卒於蘇州紫陽書院,年七十七.

149. 昕從子塘,字學淵,一字禹美,號溉亭,乾隆四十六年[1781]進士,官江寧府學教授,亦尊宗中學者.

150. 戴震. 震字東原,休寧人也,乾隆壬午[1762]舉人,壬辰[1772]詔開四末庫館,震以薦入館充校理,命與會試中式者同赴廷對,欽賜翰林院庶吉士,及散館而卒,年五十有五,嘗取梅文鼎所著三角法舉要塹堵測量環中黍尺,三書之法,易以新名,飾以古義,作句股割圜記三篇. 又著原象八篇,迎日推策記一篇,以明推步原象. 又著續天文略三卷,或補通志所闕遺,或賡所未及,凡占變推步不與焉.

151. 震在四庫館,分校天文算法書夥,其甚海島算經五經算術二種,則震從永樂大典,掇拾殘賸,集合而成者.

152. 孔廣森. 廣森字衆仲,號撝約,又號顨軒,曲阜人也. 生而穎異,年十七舉於鄉. 乾隆三十六年(1771)成進士,官檢討丁內艱,陳情歸養,築儀鄭堂,讀書其間,蓋心儀鄭氏學云,旋遭家難,以父所著書爲族人所訟,將西戍塞外,扶病走江淮河洛間,稱貸四方納贖鍰父因之獲宥. 未幾居大母與父憂,竟以毀卒,年三十五.

153. 廣森少曾師事戴震,因得盡傳其學,及官翰林,與窺中秘,得見王孝通緝古算法,秦九韶數學九章,李冶益古演段,測圓海鏡諸書,由是精研九數,學益大進. 因梅文鼎少廣拾遺,但有平方立方廉隅圖至三乘方以上,則云不能爲圖,廣森反覆搜索,獨抒新意,取冪積變爲方根,使諸乘方皆可作平方觀,假圖明數,構諸乘方廉隅,俾學者知方廉稠疊之所由生. 又因秦氏方斜求圓術,及算經商功章求方亭術,引申推演,廣秦氏得四術,補斛方得二十五問,著少廣正負術內外篇六卷,內篇以平方三乘方諸開法分上中下三卷,外篇卷上曰割圜弧矢,曰新設三角法,曰方田雜法,曰推秦氏方斜求圓算草,曰堆垛,卷中曰句股和較難題,曰句股冪難題,曰句股邊冪相求難題,曰句股容方難題,曰句股中長難題,曰句股不同式難題,卷下曰斛方補題,末附訂正算法統宗求桀隄法一則,要皆前人所未發,其餘所著書尚多.

154. 孔繼涵. 繼涵字體生,一字誦孟,號葒谷,曲阜人,廣森從父行也. 乾隆二十五年[1760]舉於鄉,三十六年1771]成進士,官戶部河南淸吏司主[事. 四十八年[1783]卒,年四十五.

155. 繼涵得毛氏汲古閣所藏宋元豐七年[1084]京監本周髀九章,孫子,五曹,張邱建,夏侯陽,緝古七種,又假

戴震所輯永樂大典本海島,五經二種,及數術記遺,並戴震之策算,句股割圜記合刊之,號算經十書. 由是古算漸次昌明,不得謂非繼涵刊刻之功矣.

156. 博啓. 博啓字繪亭,滿洲正白旗人. 乾隆中官欽天監監副,嘗因句股和較之術,前人論之甚詳,獨句股形以中所容方邊圓徑垂線三事尙缺,爰三事分配和較,擬法六十,惜今所傳者,惟方邊及垂線求句股一題,法用平行線剖容方冪爲四小句股形,借垂線爲小句股和借方邊爲小弦,求小句股,以小股與垂線比,若方邊與句比,以小句與垂線比,若方邊與股比,以小股與股比,若方邊與弦比. 道光初方履亭官監正時,每拈此題課士.

157. 吳烺. 烺字檆亭,全椒人也,官中書通數學,著周髀算經圖註.

158. 陳昌齊. 昌齊字賓臣,海康人,乾隆三十六年[1771]進士,以精天文爲書局總纂,外任浙江溫處兵備道,會欽天監以推算日食不準,奏言修改曆法,禮部欲奏留之,以精力不足辭,所著有測天約術一卷,曰正弧三角形六術,曰斜弧三角六術. 又著天學脞說,並行於世.

159. 屈曾發. 曾發字省園,蘇州府常熟人也,著九數通考十三卷,一折衷於數理精蘊. 其書初名數學精詳,戴震爲改今名.

160. 許如蘭. 如蘭字芳谷,全椒人,乾隆三十年[1765]舉人,四十六年[1781]大挑知縣,分發福建,親老改江西,歷任浮上猶新建縣事,丁憂服闋,赴福建,會瘴氣發病卒. 如蘭性敏,於曆算始習西法,通薛鳳祚所譯天步眞原,天學會通,時同縣吳煃受梅文鼎學於劉湘煃,如蘭因並習梅氏曆算全書,乾隆四十年[1775]夏,謁戴震於京都,受句股割圜記,四十四年[1779]秋,謁董化星於常州,戴集古算書,而董則專業薛氏者也,於是兼通中西之學.

161. 熊倫. 倫字長衡,號易簝,長洲人也,乾隆丙午[1786]舉人,嘉定錢大昕主講紫陽書院,倫因往受數學,時年已五十餘矣. 發憤力學,無間寒暑,家貧書籍不具,從友人家借讀,手自鈔撮,密行細字. 每歲恆積二尺許,於步算諸法,必究其所以然而后已. 讀海島算經,謂清淵白石術,於率不通,海島九問,惟此有又術,當是後人竄入,非劉徽本文,李淳風依法推衍,蓋未嘗深思其故也. 嘉慶四年[1799]五月卒,年六十一,所著述古適三卷,乃句股弧矢之法,多以古天元術入算,有前人所未及者.

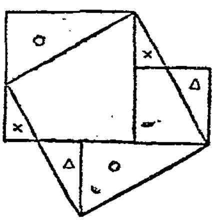
162. 厲之鍔. 之鍔字寶靑,錢塘人,乾隆時常遊京師,考授天文生,著有恣緯瑣言一卷,其書於三角八線小輪橢圓之說,俱能洞見本原. 又嘗自出巧思製刻漏壺,鎔錫爲之,運轉自然,晷刻相應,不爽毫髮,觀者無不稱絕.

163. 范景福. 景福字介茲,錢塘人,以

偃貢終,嘗以曆象考成法,推算春秋朔閏日食,阮元取上律天時義,名其書曰春秋上律表,並爲之序.景福又因見杜德美割圜密率九術,乃取二簡法中,相加相減術,變而通之,綴借弧求弦借弦求弧二法,其時明安圖之書未刊,竟能與之暗合,其精思妙悟如此.

164. 馮經. 經字世則,號來庭,乾隆三十五年[1770]舉人,官曲江縣學教諭. 著算略一卷,周髀算經注一卷.

165. 李潢. 潢字雲門,鍾祥人,乾隆三十六年[1771]進士,由翰林官至工部左侍郎,精算學,宗中法,著九章算術細草圖說九卷,附海島算經一卷,共十卷,書甫寫定,即一病不起,遺囑務俟吳門沈欽裴算校方可付梓,越八年,嘉慶庚辰,[1820]其甥程矞采,延沈至家,爲之校刊,而劉徽九章,從此始有善本. 潢又嘗因古算經十書中最著者九章之外莫如緝古,而世所傳長塘鮑氏,曲阜孔氏羅江李氏,各刻本,悉依汲古閣毛影宋本,只有原術文,而未詳其法,且復傳寫脫誤,爰本九章古義,爲之校正,著考注二卷,稿未成而歿,後亦程矞采爲刻之. 其言句冪股冪等於弦冪之圖如次.



166. 淩廷堪. 廷堪字次仲,號仲子,歙人,寓居海州,家貧少孤,學賈未成,年二十餘始讀書,客揚州爲華氏贅壻,慕其鄉江戴二君之學,遂遊京師,受業於大興翁方綱,乾隆五十四年[1789]舉於鄉,明年成進士,例授知縣,投牒吏部,自改教授,曰必如此,乃可養母治經. 旋選授寧國府教授,畢力著述,兼通羣經,以及聲音訓詁律呂九章句股三角八線中西曆算之學. 嘗謂弧三角,約言之,六類可盡,一曰兩邊夾一角,一曰兩角夾一邊,一曰邊角相對,有對所求之邊角,一曰邊角相對,無對所求之邊角,一曰三邊求角,一曰三角求邊,若邊角相易,兩角夾一邊,即兩邊夾一角,三角求邊,即三邊求角,而兩邊夾一角,又即三邊求角之反其率者,四類可以互通,所謂六類只三法而已,因擬撮其要旨,撰弧三角指南. 嗣以母喪哀毀告一目,妻及兄嫂復相繼殂謝,服闋出遊,得目疾歸歙卒,年五十五.

167. 談泰. 泰字階平,上元人,乾隆五十一年[1786]舉人,大挑選授山陽縣學教諭. 嘗與焦循汪萊相友善,循著開方通釋,泰曾與之互相訂證. 泰於天元算例,初從西法入手,後見焦循天元釋例,始知中法之善. 因錢塘創周徑率,徑一周三·一六有奇,作一丈徑木板,以篾尺量其圓周,正得三丈一尺六寸有奇,著周徑說一卷,力主錢塘之說,其數學

不深,自是嘉慶間數學名家之羽翼中學者也.

168. 戴敦元. 敦元字金溪,開化人,乾隆庚戌[1790]進士,授清書翰林,散館改主事,由廣東高廉道洊升刑部尚書,道光十四年[1834]卒. 生平篤好數學,與李潢友善,嘗校補九章算術脫誤之文. 羅士琳[見後]演四元玉鑑細草,敦元亦曾代爲補訂,著述皆未成書.

169. 程瑤田. 瑤田字易田,號易疇,歙人,嘉慶元年[1796]舉孝廉方正,終嘉定縣教諭. 少與戴震相友善,著數度小記一卷,其目有周髀矩數圖,註周髀用矩述言,亦宗中法者也.

170. 劉衡. 衡字蘊聲,一字訒堂,號廉舫,榜名琛以副貢生教習官學,秩滿任廣東四川等省知縣,遷知府,授河南開歸陳許道,以疾歸,勤學强記,至老不衰,尤精九章句股八線測量中西諸算法曾受數學於李潢,爲補輯古算經佚注,二則,著六九軒算書五種,卒年六十七.

中學復興次期

171. 元明以來,古書久佚,利氏東渡,西學大昌,雖王梅錢戴諸君,力爭復古,而文獻無徵,自儀徵阮元,創著疇人傳,提昌古學,元和李銳,校正天元書籍,而天元術始大明,自茲而後,研求古算者,乃日衆矣.

172. 阮元. 元字伯元,號雲臺,亦號芸臺,晚自號頤性老人,儀徵人,乾隆五十四年[1789]成進士,改翰林院庶吉士,散館第一授編修,五十六年[1791]大考翰詹第一,超授少詹事,南書房行走,召見乾清宮西暖閣,問及書畫天文算學等事,嘉慶二年[1797]提學浙江,乃與李銳商纂疇人傳,還朝歷任兵禮戶三部侍郎,管理國子監算學. 五年[1800]授浙江巡撫,又命門生天台周治平,相助編寫,成疇人傳四十六卷,刊行世.

173. 元官至體仁閣大學士,道光十八年[1838]老病乞休,予告致仕,晉加太子太保銜,二十六年[1846]丙午科重赴鹿鳴筵宴,晉加太傅銜,二十九年十月無疾而薨,年八十六,予謚文達.

174. 元之疇人傳,甄錄自黃帝以下二百八十八人,自起凡例擇友人弟子分任編纂而親加改訂,中國數學之沿革,始有專書矣.

175. 當時數學之著述,如錢大昕三統術衍,地球圖說,錢塘述古錄,孔廣森少廣正負術內外篇,焦循遺書,李銳算書,多賴其表章而刊布之,元所自著,有揅經室集若干卷.

176. 李銳. 銳字尙之,號四香,元和縣學生員,幼得算法統宗,盡通其法,遂志於數學,師事錢大昕,得中西異同之故. 時大昕爲當代通儒第一,生平未嘗輕許人,獨於銳則以爲勝己,一時有南李北李之稱,北李謂李潢,以其爲湖

北人,南李則謂銳也,嘉慶九年[1804]江南主考官耳銳名,欲羅致之,詢之李潢,謂如何而後可得李銳,潢曰吾有策題一,能對者即李銳,主考官如其言,猶慮有失,並益以天之高也一節四書題文,闈中大索不得,竊疑之,及榜發,果無銳名.嗣知銳是年因病未與試,其見重當時如此.

177. 嘉慶二年[1797]阮元提學浙江延銳至杭,問以天算,因欲撰疇人傳,開列古今中西人數,及應採史傳天算各書,屬銳編纂商加論定,元撫浙又命門生天台周治平,相助編寫,成疇人傳四十六卷.

178. 梅文鼎未見古九章,所著方程論,皆以意創補,且囿於西學,致悖直除之旨,銳尋繹古義,以舊術列於前,別立新術附於後著方程新術草.

179. 古天元一術,見於元李冶測圓海鏡益古演段二書,郭守敬以之造授時曆草,明顧應祥不解其旨,妄删細草,遂致是法失傳.自梅瑴成悟其即西法之借根方,李書乃顯,長塘鮑廷博,欲刻入知不足齋叢書,囑銳校注,凡傳寫舛誤,及秘奧難知者,銳加案百餘條,其原術不通者,則別設新術數則,且於梅說外,辨得天元之相消,有減無加,與借根方之兩邊加減法不同.

180. 銳因宋沈括以兩矢冪求弧背,元李冶以三乘方[四次式]取矢度,乃取弧矢十三術,入以天元,著弧矢算術細草,並倣演段例,括句股和較六十餘術,著句股算術細草.又從同邑顧廣圻(字千里)處,得秦九韶數學九章,見其亦有天元一之名,惟與李書不同,蓋秦李雖同時,而宋元南北隔絕,兩家之術,各有所授也.銳亦謂秦書於超步退商正負加減借一為隅諸法,遠勝於梅文鼎少廣拾遺之無方廉者,蓋梅氏本於同文算指西鏡錄二書,究出自西法,初不知立方以上無不帶縱之方,因著開方說三卷.嘉慶二十二年[1817]甫及上中二卷而卒,年四十五.其下卷,則其弟子黎應南續成之,其書深知方程式理論之原則,符號之說亦與笛卡兒[René Descartes, 1596—1650]暗合.

181. 銳於古曆亦多著述,與汪萊焦循齊名,時人稱為談天三友,銳著有召誥日名考,刻入皇清經解中,回回曆元考,稿佚未刊,司天通志稿未全,遺書十七卷,阮元為之刻於廣東曰李氏遺書.

182. 黎應南.應南字見山,號斗一,廣東順德人,嘉慶戊寅[1818]舉人,官浙江麗水平陽等縣知縣,卒於官,年四十有八.其父曾為太倉州牧,因僑寓蘇州,從李銳受數學,生平著述,秘不示人,所傳者惟李銳開方說後跋,又有求整數句股捷法,任設奇偶兩數,各自乘相併為弦,相減為句或為股,副以兩數相乘倍之為股或為句,若任設大小兩奇數,或大小兩偶數,各自乘,則相併半之為弦,相減半之為句或為股,其兩數相

乘,即爲股或即爲句.

183. 汪萊. 萊字孝嬰,號衡齋,歙縣人,著衡齋算學七冊,嘉慶十一年[1806]黃河啓放王營減壩正流直注張家河,會六塘河歸海,兩江總督查量雲梯關外舊海口,與六塘河新海口,地勢高下,延萊測算,十二年以優貢生考取八旗官學教習,被舉續修天文時憲二志. 十四年書成,議敍以本班教習職用,選授石埭縣訓導,十八年應省試得疾歸,卒於官,年四十六.

184. 萊客江淮間,嘗與李銳焦循辯論秦九韶李冶之天元一及正負開方諸法,萊謂二次三次方程式每根之數有可知與不可知,其言堆垛,自三乘方以上,皆可由積知根,並及諸物遞兼之法,以求三角堆(即擬形數 Figurate numbers 見第一門198頁) n 項之總和,如次.

平三角堆 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2!}$.

立三角堆 $1+3+6+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$.

三乘三角堆 $1+4+10+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$.

r乘三角堆 $1+r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n$

$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}$.

185. 焦循. 循字理堂,號里堂,江都人,嘉慶六年[1801]舉人,嘗就與化顧九苞學經,又因九苞子超宗,貽以梅氏叢書,復用力於算,故經史曆算聲音訓詁諸學,無所不精,淡於仕進,立志著書,嗣患足疾,隱於北湖,築雕菰樓以終焉,二十五年[1820]夏,足疾甚,兼病瘧,遂不起,年五十有八.

186. 循嘗以梅文鼎弧三角舉要,環中黍尺,撰非一時,繁複無次,戴震句股割圜記,務爲簡奧,變易舊名,撰釋弧三卷. 錢大昕稱其正弧斜弧次形矢較之用,理無不包,法無不備. 循又謂九章之目雖多,而其綱不外加減乘除,蓋九章不能盡加減乘除之用,而加減乘除,可以通九章之窮,孫子張丘建兩書,似得此意,而說之不詳. 因以加減乘除爲綱,以九章分注而辨明之,撰加減乘除釋八卷. 又嘗與李銳汪萊討論秦九韶數學九章,及李冶測圓海鏡,益古演段諸書,秦書雖亦有天元一之名,而術與李殊,李銳所校海鏡演段二書,專主辨天元借根之殊,故但指其大概,其於朒盈和較之理,究未析其微芒,乃復貫通其理,舉而明之,撰天元一釋二卷,開方通釋一卷,以述兩家之學. 又撰釋輪二卷,釋橢一卷,則屬於曆法者也. 其他著述不下數百卷,不備錄.

187. 駱騰鳳. 騰鳳字鳴岡,號春池山陽人,嘉慶辛酉[1801]舉人,考充覺羅官學教習,道光六年[1826],大挑一等,例用知縣,以母老不願仕,改授舒城縣學訓導,未一年告養歸,教授里中,學徒甚衆,二十二年[1842]八月卒於家,年七十二. 嘗從李潢受算術,所著有開方釋四卷,闡明天元正負開方之法,足補李

銳所未備．又著藝遊錄二卷，亦致力於古算之書．

188．許桂林．桂林字同叔，號月南，又號月嵐，海州人，嘉慶丙子[1816]舉人，嘗撮取數理精蘊切於日用者，著算牖四卷，又著立天元一導窾四卷，未刊．其他著述甚夥，卒年四十三．

189．張鑑．字春治，號秋水，烏程人，嘉慶甲子[1804]副貢，銓授武義縣敎諭，道光二十六年[1846]卒於官．四十後，卽棄舉子業，明出阮元門下，識焦循，羅士琳，數學更進．著書凡三百卷，關於數學者，爲天元借根得一二卷，立天元一捷法一卷．

190．朱鴻．鴻字雲陸，亦字筠麓號小梁，秀水人，嘉慶壬戌[1802]進士，改翰林院庶吉士，散館授編修，擢御史歷給事中，出官督理湖南糧儲道，道光十年[1830]後，罷官仍居京師，時陳杰爲臺官博士，董祐誠亦客京師，皆日從講數學，各出所得相可否，祐誠割圜連比例圖解成，復得密率捷法於李璜家，則明安圖師弟績釋之書，與傳寫本互異者也．鴻嘗依其法布算，得周率小數及其反商各三十九位，其二十四位以前無誤，後徐有壬採入務民義齋算術中．

191．張豸冠．豸冠字神羊，號芝岡，海寧人，乾隆戊申[1788]副貢，久客京師與朱鴻友善，同究數學．初傳之杜德美割圜九術，卽所手寫．卒後，長樂梁章鉅桐鄉程同文爲刻神羊遺著，一曰景獻初編，二曰算術隨錄，前列商除等法二十餘則，並附晉志摘錄，疇人盛衰攷，割圜記摘錄，珠算入門各一卷，三曰讀書偶識都若干卷，傳於世．

192．沈欽裴．欽裴字俠侯，號狎鷗，元和人，嘉慶丁卯[1807]舉人，大挑二等，選授荆溪縣學訓導，病偏枯，罷官，卒於家．生平於天文地形，無不通曉，尤精數學，數書九章，四元玉鑑，測圓海鏡，世所稱爲絕學者，皆能通之，李璜撰九章算術細草，甫寫定，病不起，遺囑務俟欽裴算校，方可付梓，嗣爲校勘算草圖說，均輸一章，增訂尤多，又爲補演海島算經細草一卷．其校訂數學九章也，凡命名布算立術均有改正，而校改訛字，尤爲精確，並本諸海鏡以天元一補草顯之，別爲圖說，於是術意之精深，可豁然矣．又嘗補玉鑑細草四則，與羅士琳（見後）草大同小異，而詳過之，然亦有勝羅者，稿佚未刊，道咸之際，南匯張文虎猶及見而論訂之．

193．宋景昌．毛嶽生．景昌字冕之，亦字勉之，江陰人，沈欽裴之弟子也．著數書九章札記四卷，又著詳解九章算法札記一卷，楊輝算法札記一卷．其友毛嶽生字生甫，寶山人，亦致力於秦書者，校算攷覈，多所發明，景昌札記，頗采其說．道光二十二年[1842]上海郁松年（字泰峯）取秦書十八卷楊書六種，並刻入宜稼堂叢書中．

194. 安清翹. 清翹於嘉道間著有數學書五種若干卷,一推步惟是,二一線表用,三學算存略,四筆算演略,五樂律新得,證有 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 及 $\sin 5\theta=5\sin\theta=5\sin\theta+20\sin^3\theta+16\sin^4\theta$ 兩恆等式. 未刊算稿,有數學指南,周易比例,幾何原本補正. 道光庚寅[1830]卒,年七十二.

195. 張作楠. 作楠字丹邨,金華人,官徐州府知府,乞假終養,歸十餘年,與齊彥槐江臨泰友善,以其同習西法數學者也. 著書若干種,名翠薇山房算學叢書.

196. 齊彥槐. 江臨泰. 彥槐字蔭之,號梅麓,婺源人,嘉慶己巳[1809]進士,改翰林院庶吉士,散館授金匱縣知縣,遷蘇州府同知,與同官張作楠同習西算,雅有著述,其友江臨泰,號雲樵,全椒諸生,善用對數總較法. 所著弧三角舉隅,刊入翠薇山房算學叢書中.

197. 陳杰. 杰字靜菴,烏程諸生,嘉慶之季,考取天文生,任欽天監博士,後官國子監算學助教.道光十九年[1839]有足疾歸田,初著輯古算經細草一卷,後成圖解三卷,音義一卷,晚年撰算法大成上編十卷,首加減乘除,次開方句股,次比例八線,次對數,次平三角弧三角,皆先舊法而附以新法,圖說理解不憚反覆詳明,專為引誘初學設也. 下編十卷,則有目無書.

198. 項名達. 名達一名萬準,字步來,號梅侶,仁和人,嘉慶丁丑[1817]舉人考授國子監學正,道光丙戌[1826]進士,改官知縣不就,專攻算學,三十年卒於家,年六十二. 著下學庵句股六術及圖解,後附句股形邊角相求三十二題. 合為一卷,又著象數一原(一名象象原始)未成,遺囑戴煦續成之,都為七卷,其卷六,有割圓九式如次.

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5}{2^2.4^2.6^2}-\frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\alpha=\sin\alpha+T_1\frac{\sin^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{6r^2}+\cdots\cdots(2)$$

而 T_1 為第一數, T_2 為第二數, 以下同此.

$$\sec\alpha=r+T_1\frac{\sin^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{6r^2}+\cdots\cdots(3)$$

$$\cos\alpha=r-\left\{\frac{\sin^2\alpha}{2r}+T_1\frac{\sin^2\alpha}{4r^2}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right\}\cdots\cdots(4)$$

$$\cot\alpha=\frac{r^2}{\sin\alpha}-\left\{\frac{\sin\alpha}{2}+T_1\frac{\sin^2\alpha}{4r^3}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right\}\cdots\cdots(5)$$

$$\cot\alpha=\cos\alpha+T_1\frac{\cos^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{6r^2}+\cdots\cdots(6)$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=r+T_1\frac{\cos^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{6r^2}+\cdots\cdots(7)$$

$$\sin\alpha=r-\left\{\frac{\cos^2\alpha}{2r}+T_1\frac{\cos^2\alpha}{4r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right\}\cdots\cdots(8)$$

$$\tan a=\frac{r^2}{\cos a}-\left\{\frac{\cos a}{2}+S_1\frac{\cos^3 a}{4r^2}\right.$$

$$\left.+T_2\frac{3\cos^5 a}{6r^2}+T_3\frac{5\cos^7 a}{8r^2}+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots(9)$$

199. 董祐誠. 祐誠字方立,陽湖人,嘉慶戊寅[1818]舉人,初工漢魏六朝文繼通律曆數理輿地名物之學. 己卯[1819]春,秀水朱鴻示以杜德美割圜九術全本,即張豸冠所寫者,反覆尋繹,知其立法之原,即圜容十八觚之術,實兼差分之列差,商功之堆垛,而會通以盡句股之變,乃分圖著解,撰割圜連比例術圖解三卷,於杜氏割圜九術之外,更立四式如次.

$$\sin m\theta=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{m(m^2-1^2)\cdots\{m^2-(2n-3)^2\}}{r^{2(n-1)}(2n-1)}\times\sin^{2n-1}\theta\cdots\cdots(1)$$

$$\text{vers}\, m\theta=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{m^2(m^2-1^2)\cdots\{m^2-(n-1)^2\}}{r^{n-1}(2n)!}\times(2\text{vers}\theta)^2\cdots\cdots(2)$$

$$\sin\frac{\theta}{m}=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\times\frac{(1^2-m^2)(1^2-\overline{3m}^2)\cdots\{1^2-(2n-3)^2m^2\}}{m^{2n-1}r^{2(n-1)}(2n-1)!}\times\sin^{2n-1}\theta\cdots\cdots(3)$$

$$\text{vers}\frac{\theta}{m}=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\times\frac{(1^2-m^2)(1^2-\overline{2m}^2)\cdots\{1^2-(n-1)^2m^2\}}{m^{2r}r^{n-1}(2n)}\times(2\text{vers}\theta)^2\cdots\cdots(4)$$

200. 祐誠釋割圜捷法,更得求諸乘方所成之方錐堆術繼復以縱方堆推之,而得諸乘方所成之縱方堆術,撰堆垛求積術一卷,與四元玉鑑茭草形段果垛疊藏諸問,求其天元如積之原則皆一一符合. 如次求第n項

平方錐堆,$1+4+9+16+\cdots\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(2n+0)}{2!}$.

立方錐堆,$1+5+14+30+\cdots\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$

三乘錐堆,$1+6+20+50+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$.

四乘錐堆,$1+7+27+77\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(n+1)\cdots(2n+3)}{5!}$.

r乘錐堆 $1+(r+3)+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(n+1)\cdots(2n+r-1)}{(r+1)!}$.

又平方縱方堆 $1.3+2.4+3.5+4.6+5.7+6.8+\cdots\cdots\cdots$

即 $3+8+15+24+35+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(2n+2\times2+0)}{2!}$.

立方縱方堆 $3+11+26+50+85+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(n+1)(2n+2\times3+1)}{3!}$.

三乘縱方堆 $3+14+40+90+175+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(2n+2\times4+2)}{4!}$

四乘縱方錐 $3+17+57+147+312+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+2\times5+3)}{5!}.$$

r乘縱方錐 $ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots\cdots$之第$n$項

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r-1)}{(r+1)!}\times\{2n+(r+1)(s-1)+\overline{r-1}\}.$$

201. 又撰斜弧三邊求角術補一卷橢圓求周術一卷,三統術補衍一卷,啓術有序書未成. 道光三年歿年三十三. 祐誠歿後,其兄基誠字玉椒,時官戶曹.

取其已成之曆算稿五種,附以水經注殘稿四卷,文集四卷,蘭石詞一卷,共九種,凡十六卷,名曰方立遺書,囑同里張成孫校而刊之,其橢圓求周術誤有人欲其節去之基誠不知算,堅不允,遂並刊之.

202. 羅士琳. 字次璆,號茗香,甘泉人,考取天文生,出阮元門下. 初習西法,摘九章中切於日用者,悉以比例馭之,首冠各定率,次載借根方,末附諸乘方開法,凡四卷,曰比例匯通,道光二年[1822]試京兆,始見四元玉鑑,三年春假順德黎應南舊鈔本,又得錢塘何元錫新刻大德本,爲元和李銳欲補草而未果者,乃殫精一年,步成細草,原書於率不通,及步算傳寫之訛,悉爲標出,始廣爲二十四卷,附例二卷,道光十六年[1836]刊行之.

203. 元朱世傑所著算學啓蒙三卷,元以後即亡佚,士琳忽於京師廠肆得之,爲朝鮮人依大德本重刊本,乃覆加斠詮,於道光十九年[1839]刊行之.

204. 士琳又校正割圜密率四卷,增補博啓之法,著句股容三事拾遺三卷,附例一卷,演圜九式一卷,括玉鑑進退升降消長諸例,著垛錐演積一卷.

關 $1+3+7+12+19+27+37+48+\cdots\cdots+vn$

設 $n=$ 奇數, $d=6\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $vn=\frac{(d+3)^2+3}{12}$,

則 $Sv_n=$

$$\frac{d\{(d+6)^2+(d+3)^2\}+3^3\{(d+6)(d+3)+6\}}{216}$$

又 $1+3+7+12+19+27+37+48+\cdots\cdots+u_n$,

設 $n=$ 偶數, $d_1=6\left(\frac{n}{2}-1\right)+3$,

$u_n=\frac{(d_1+3)^2}{12}$

則 $Su_n=\frac{d_1\{(d_1+6)^2+(d_1+3)^2\}}{216}$

$+\frac{3^2\{(d_1+6)(d_1+3)+3\}}{216}$

以李銳弧矢術細草原術未備,著弧矢算術補一卷,甄錄古今疇人四十四人,著續疇人傳六卷,道光二十三年[1843]後刊入觀我生室彙稿,又句股截積和較算例二卷,則刊入連筠簃叢書中. 咸豐癸丑[1853]客揚州死於平太之役.

205. 徐有壬. 有壬字君青,亦字鈞卿,烏程人,道光九年[1829]進士,改主事出守揚州遷四川成錦龍茂道,歷滇臬湘藩以至江蘇巡撫,咸豐十年[1860]夏,太平天國軍,克江南,總督肯遁,潰兵肆掠而下,太平軍尾其後,蘇州守卒,不盈四千,倉卒大軍至,有壬死之,舉家殉焉,事聞予卹,賜謚莊愍.

206. 有壬嘗得元人四元玉鑑積思三晝夜,以意步爲細草,董祐誠沈欽裴輩爭相傳鈔以去云.

207. 所著務民義齋算學,今傳者七種. (1)以屢乘屢除遞求正負諸差,而加減相併得所求,爲測圓率三卷,卷一言橢圓餅體,橢圓柱體,橢圓尖體之積,各爲 $\frac{a^2b}{2}$, $\frac{3}{4}abh$, $\frac{1}{8}h\{(2a-a')b+(2a'+a)b'\}$

乘 $\frac{\pi}{2}=1=\frac{1^2}{3!}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1^2.3^2}{5!}\cdot\frac{1}{4^2}+$

$\frac{1^2.2^2.5^2}{7!}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots$，而 a, b 爲長短徑，a', b' 爲又一面之長短徑，h 爲高，卷二有

$$a-\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\mathrm{vers}^{2n}a}{(2n-1)(2n+1)\sin^{2n-1}a}.$$

又(2)以斜弧舊術繁重，乃變立三術，不用垂弧矢較次形，而皆用對數，以所有所求之對數較，加減今有之對數，即求得之對數，爲弧三角拾遺一卷．(3)幾何原本球與同徑同高之圓囷，其外面皮積等，截球與截圓囷同高，其外面皮積亦等，當時無解，有壬於讀李淳風九章注，得其解，爲截球解義一卷，第六術謂(圓周)$^2=54\times$(球積)$\times\frac{\pi^2}{9}$，而 $\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1^2}{3.4}+\frac{1^2.2^2}{3.4.5.6}+\cdots\cdots$ 則從杜氏九術(8)以 $a=\frac{\pi}{3}$ 也．(4)後附橢圓求周術，較項戴之術尤簡捷焉．(5)西人八綫表對數表，明代即已輸入，而所傳之借根方，乃代數學之膚淺者，故未有造表之式，有壬以四元玉鑑𣛮積招差之法，創立五術，爲造簡法一卷，其餘二種，爲關於曆法者．

其見目而未刻者，有堆𣛮測圓三卷，𣛮積招差一卷，圓率通攷一卷，四元算式一卷，及曆法三種亦共七種，稿弗可得．此外有割圓八線綴術三卷，則南豐吳嘉善衍述之，而湘陰左潛爲補細草者也．

208．有壬著述，初自刻於揚州者，無截球造表二種．後爲南海鄒伯奇併橢圓爲三，刻於廣州，同治十二年[1873]，長沙丁取忠，復合刊八種入白芙堂叢書．光緒元年[1875]歸安姚覲元集咫齋叢書就七種又重刊之，今並行於世．

209．謝嘉禾．嘉禾字和甫，一字穀堂，少習西算，嗣復研求宋元間天元四元術，乃輯所得，析通分加減，定方程正負，以標舉立元要義，撰演元要義一卷．又以劉徽祖冲之之率，密於古率，撰弧田問率一卷．又以句股弦和較輾轉相求，撰直積回求一卷，嘉禾歿後，其友戴煦搜其遺稿囑弟煦校而付諸梓．

210．戴煦．煦初名邦棣，字鄂士，號鶴墅，又號仲乙，錢塘人，初與謝嘉禾同學，嘉禾沒，爲校刊其遺書三種，與項名達交最摯，名達疾革，遺囑煦續成其象數原始一書，煦以六閱月而定其稿，並世明算之士，如羅士琳，徐有壬，李善蘭，皆來訂交，互質得失．咸豐十年[1860]二月二十七日太平天國克杭州，煦投井死焉，年五十六．

211．煦十齡，即好數學，夜臥覃思有得，輒起秉燭以記．嘗以劉徽九章重差一卷，李淳風注，有數無理，爲補重差圖說，又著句股和較集成一卷，四元玉鑑細草若干卷，略同羅書，而圖解明暢過之，皆少作，中年益精進，著對數簡法二卷，又續對數簡法一卷，因 $10^x=2$，故 $\log_{10}2=x$，第一法，用開方表，得

$\log_{10}2=0.301029995663$ 第二法不用開方表假設 $\log_e 1.0000001=0.0000001000000$ 準歸納法得 $\log_e 2=0.69314721517963$

$$\log_e 10=2.30258520799343$$

續對數簡法,因

$$10^{\frac{1}{32}}=1.07460782832131 7497=1+m$$

$$\frac{1+m}{m}=14.4034292188686539$$

$$\therefore\ \log_e 10=\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$=2.30258520799943$$

$$\mu=\frac{\log_{10}10}{\log_e 10}=\frac{1}{\log_e 10}$$

$=0.43429448190$ 為對數根或模數,至求任意數之對數,亦有二法,

(1) 因 $\log_{10}(1+y)=\mu\log_e(1+y)$

$$=\mu\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\right\}$$

($y=$ 小數)

故欲求某數N之對數,當先以已知對數之若干數乘之或除之,或屢乘之,或開之,再以 10^r 除之,令成 $1+y$ 之形,而 y 常為小數,卽 $\frac{nN}{10^r}=1+y$ 或 $N=10^r(1+y)\frac{1}{n}$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)-\log_{10}n.$$

又 $\frac{N}{n(10)^r}=1+y$ 或 $N=10^r(1+y)n$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)+\log_{10}n$$

又 $\frac{N^n}{10^r}=1+y$ 或 $N=\left\{10^r(1+y)\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$\log_{10}N=\frac{1}{n}\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\}.$$

又 $\frac{N^{\frac{1}{n}}}{10^r}=1+y$ 或 $N=\left\{10^r(1+y)\right\}^n$

$$\log_{10}N=n\{r+\log_{10}(1+y)\}.$$

(2) 欲求已知對數 $\log_{10}N$ 之數,設 $\log_{10}N=\log_{10}N_1+\log_{10}N_2+\log_{10}N_3+\cdots\cdots=t$,而 $\log_{10}N_1$, $\log_{10}N_2$, $\log_{10}N_3$, ……各對數之數為已知,

又 $\log_{10}(1+p)=\log_{10}(1+0.000001)$

$$=0.0000004342942647542$$

$t=\frac{t}{\log_{10}(1+p)}$, 故 $N=N_1N_2N_3\cdots\cdots\cdots$

$$\left\{1+pt-\frac{1}{2}pt(1+t)+\frac{1}{3}p^3t(1-t)(2-t)-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n-1}p^{n-1}t(1-t)(2-t)\cdots\cdots(\overline{n-2}-t)+\cdots\right\}.$$

212. 照又著外切密率四卷,求八線表捷術也. 又著假數測圓二卷,求八線對數表捷術也. 後又總合四書,名求表捷術,其式如次.

$$\tan a=a+\frac{2a^3}{3!r^2}+\frac{16a^5}{5!r^4}+\frac{272a^7}{7!r^6}+\cdots\cdots$$

$$\sec a=a+\frac{a^2}{2!r}+\frac{5a^4}{4!r^3}+\frac{61a^6}{6!r^5}+\frac{1385a^8}{8!r^7}+$$

$$\tan a=\frac{r^2}{90-a}+\frac{2(90-a)}{3(2!)}+\frac{8(90-a)^3}{3(5!)r^2}+\frac{32(90-a)^5}{3(7!)r^4}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\sec a=\frac{r^2}{90-a}+\frac{90-a}{3(2!)}+\frac{7(90-a)^3}{3(5!)r^2}+\frac{31(90-a)^3}{3(7!)r^4}+\cdots\cdots\cdots$$

$$a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3r^2}+\frac{\tan^5 a}{5r^4}-\frac{\tan^7 a}{7r^6}+\cdots\cdots$$

$$a=\frac{r}{2}\left\{(\sec a-r)-\frac{5.2^2(\sec a-r)^2}{(4!)r}+\frac{64.2^3(\sec a-r)^3}{(6!)r^2}-\frac{1560.2^4(\sec a-r)^4}{(8!)r^3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$90-a=r^2\div\left\{\tan a+\frac{2r^2}{3(2!)\tan a}-\frac{32r^4}{3(5!)\tan^3 a}+\frac{704r^6}{3(7!)\tan^5 a}-\cdots\cdots\right\}$$

$$90-a=r^2\div\left\{\sec a-\frac{r^2}{3(2!)\sec a}+\frac{17r^4}{3(5!)\sec^3 a}-\frac{367r^6}{3(7!)\sec a}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\frac{a}{2}=r\left\{\frac{r(\sec a-r)}{\sec a+r}-\frac{8r^2(\sec a-r)^2}{3.4(\sec a+r)}+\frac{184r^3(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec a-r)^3}-\frac{8448r^4(\sec a-r)^4}{3.4.5.6.7.8(\sec a+r)^4}+\cdots\cdots\right\}.$$

213. 對數二種,先爲金山錢培刻入小萬卷樓叢書,求表捷術副本,南海鄒伯奇得於夏鸞翔,因與其邑伍崇曜刻入粵雅堂叢書.

214. 煦五十後,又著音分古義二卷,因冷州鳩對周景王語知七律七同名義確鑿,自漢以後,劉安房京之徒,用弦定律,韋昭亦遂以四律三同解七律,以致七律之義晦,而七同不得其解. 後世未有正之者,煦追尋古義,以連比例立算,與古律分吻合,原稿於庚申[1860]正月,爲金匱華翼綸假去,太平之役,翼綸匿書複壁得全,後遇煦長子以恆,歸之.

215. 煦著書時,中國僅有數理精蘊所採常對全表,如訥表及代數學諸書,尙未譯行,煦能由四元術,創爲捷法,可謂傑矣. 時英吉利人艾約瑟,初見煦書,甚推服,將所刻代數微積諸書,至杭求見,煦以故辭. 後艾轉譯煦書,入彼國數學公會中.

西學輸入次期

216. 當時中國數學家董項徐戴李顧研精中國天元四元之學,所創諸法,已臻代微積之境,而代微積亦卽適承其後而輸入,譯之者爲李善蘭,善蘭於中學不讓前述諸人,復廣譯西書,嘉惠後學,誠承先啓後之一人也. 善蘭諸譯諸書,所定名詞,極爲精審,實開東亞同文諸國之先,惟算式均用漢字,書寫不易,且橫列直行相雜,尤佔篇幅,嗣後教會出書,改用亞剌伯數字,而甲乙丙天地人等字,仍沿用之,且算式均改直行,亦屬不便,時會使然耳.

217. 李善蘭. 善蘭字壬叔,號秋紉海寧人,幼從長洲老儒陳奐受經,於辭章訓詁之學,雖皆涉獵,然好之終不及數學,故數學用心極深,其精到處,自謂不讓西人,抑且近代罕匹,年十齡,讀書家塾,架上有古九章竊取閱之,以爲可不學而能,十五通幾何,應試杭州,得測圓海鏡句股割圜記以歸,其學始進.
道光乙巳[1845]館嘉興陸費家數年,館蘇撫徐有壬幕,獲交戴煦,汪曰楨,張福禧,張文虎,顧觀光,暇輒著書,咸豐二年[1852]五月至滬,居大境傑閣,與西士偉烈亞力[Alexander wylie],共譯幾何原本後九卷,以六月朔爲始,凡四歷寒暑,至咸豐六年[1856]而畢,明年[1857]二月松江韓應陛爲刊行之.

218. 善蘭在滬十年,續譯幾何原本九卷之外,又與偉烈亞力共譯侯失勒談天十八卷(Herschel's Outline of Astronomy),棣麼甘 Augustus De Morpan 1806—71),代數學十三卷,羅密士(Elias Loomis, 1811—99),代微積拾級十八卷,與艾約瑟共譯胡威立重學十八卷(Whewell's

Mechanics),曲線說一卷,奈端數理若干卷 (Newton's Principia).

219. 善蘭自著,曰方圓闡幽一卷,專言理而不計數凡十條,曰弧矢啓秘一卷,則以尖錐立術,而弧背八線皆可求,中有三術,如次式.

$$a=\frac{1}{r}\Big\{r+\mathrm{vers}a)\sin a-\Big(\frac{2\sin^3 a}{(31)r^7}+\frac{2\cdot3\sin^5 a}{(5!)r^2}+\frac{2\cdot3^2\cdot5\sin^7 a}{(7!)r^5}+\frac{2\cdot3^2.5\cdot^2\cdot7\sin^9 a}{(9!)r^7}+\cdots\cdots\Big)\Big\}$$

$$a^2=2r\Big\{\frac{x}{2!}-\frac{8x^2}{(4!)r}+\frac{184x^3}{(6!)r^2}-\frac{8448x^4}{(8!)r^2}+\cdots\cdots\Big\}$$

而 $x=2(\sec a-r)+\frac{(\sec a-r)^2}{r}$

$$a=r\Big\{y-\frac{2y^2}{(4!)r}+\frac{23y^3}{(6!)r^2}-\frac{264y^4}{(8!)r^3}+\cdots\cdots\Big\}$$

而 $y=\frac{2\cdot3r(\sec a-r)}{2r+(\sec a-r)}$

曰對數探原二卷,亦以尖錐截積起算,以之造表,至爲簡易,曰垛積比類四卷,以立天元一詳演細草,有表有圖有法,爲集垛積術之成,曰四元解二卷,曰麟德術三卷,曰橢圓正術二卷,新術一卷,拾遺解四卷,曰火器眞訣一卷,乃以平圓通之拋物線,曰對數尖錐變法釋一卷,曰級數回求一卷,爲一切級數互求之準繩,曰天算或問一卷,則記朋友門弟子問答之語,擇其理之精者錄存於卷,共二十四卷,凡十三種,號則古昔齋算學,同治六年[1867]彙刊行世.

220. 同治七年[1868],入北京同文館,爲總教習,在館時,傳刻李冶測圓海鏡十二卷,又著測圓海鏡解一卷,考數根法三卷,造整數句股法二卷,光緒八年[1882]十月卒,年七十四,無子,遺稿多散佚,墓在海鹽縣牽詈橋東北.

221. 偉烈亞力. 偉烈亞力,英吉利人,耶蘇教士也,道光二十七年[1847]來華,寓居上海北門外租界開墨海書館,嫻習中國語言文字,初撰數學啓蒙二卷,自加減乘除比例開諸乘方對數而止,附十進對數於末,咸豐三年[1853]刊行,又與李善蘭續譯幾何原本九卷,九年[1859]墨海書館刊行,其與李善蘭所譯代徵積拾級及談天二卷,嘗謂顧項徐戴顧李所著各書,其理有甚近於微分者,又於數學啓蒙卷二,言其所列開諸乘方捷法,無論若干乘方,且無論帶縱不帶縱.俱以一法通之,在中土爲古法,在西土爲新法,蓋即宋秦道古實方廉隅商步益翻之舊也同治元年[1862]以年老歸國,至今西士譯書者皆推偉烈爲首焉.

222. 艾約瑟. 艾約瑟,亦英吉利人,耶蘇教士也,道光季年[1850]來華,寓上海租界,熟諳中國語言文字,與李善蘭同譯胡威立重學十八卷,又自集曲線說三卷,附譯之,爲重學及圓錐曲線入中國之始,與烏程張福禧,南匯張文虎,金山顧觀光,並爲算友,咸豐四年[1854],於李善蘭處,見戴煦著述,大歎服,專至杭州,贄所刻代微積等書見戴,戴以故

辭,乃失望返,後轉譯戴書,寄彼國數學公會中.

223. 顧觀光. 觀光字賓王,號尙之,金山人,承世業爲醫傅通經傳子史百家,尤究極古今中西天文曆算之術,嘗因李善蘭對數探原,布算猶繁,且所得者皆前後兩數之較,而不可徑求,戴煦簡法,及西人數學啓蒙並有新術,而未盡其理,乃别爲變通,以求二至九之八對數,因任意設數,立六術以御之,得數皆合,復立還原四術,又推而衍之,爲和較相求八術,自來言對數者未之聞也,又謂對數之用,莫便於施之八線,而西人未言其立表之根,因冥思力索得之,仍用諸乘差法迎刃而解,尤晚歲造微之詣也. 其他,凡當時新譯代數微積重學諸書,皆有所糾正.

224. 所著曰算賸初續編凡二卷,曰九數存古,依九章爲九卷,而以堆垛大衍四元旁要重差夕桀割圜弧矢諸術附焉,皆採自古書而分門隸之,曰九數外錄,則隱括四術爲對數割圓八線,平三角,弧三角,各等面體,圓錐三曲線,靜重學,動重學,流質重學,天重學,凡記十篇,此外著述關於曆法醫學及子史百家,尙有多種,不備述. 同治元年[1862]卒,年六十四.

225. 夏鸞翔. 鸞翔字紫笙,錢塘人,項名達之高弟子也,又與戴煦爲世好. 研究曲線諸術,洞析方圓諸理,匯通各法,更推衍以窮其變,撰洞方術圖解二卷. 又撰致曲術一卷,曰平圓,曰橢圓,曰拋物線,曰雙曲線,曰擺線,曰對數曲線,曰螺線,類皆於杜德美,項名達,戴煦,徐有壬,羅密士諸術外,自定新術,並謂於辛酉[1861]歲暮以微積分術求得次之二術.

$$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2.3^2.5^2\cdots\cdots(2n-3)^2(\mathrm{vers}a)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2r)^{\frac{2n-3}{2}}(2n-1)!}$$

$$a^2=\sum_{1}^{\infty}\frac{2.4^{n-1}(n-1!)^2\sin^{2n}a}{r^{2n-1}(2n)!}$$

其求橢圓面積則爲 $A=\frac{\pi ab}{4}$ 而以

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{5!}-\frac{1^2.3}{3!}-\frac{1^2.3^2.5}{7!}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{9!}$$

………………………………………………

又撰致曲圖解一卷,乃就二次式曲線四種,溯其本源,並附諸乘方拋物線,其目爲點第一,諸式之心第二,準線第三,規線第四,橫直二徑第五,兌徑亦名相屬二徑第六,兩心差第七,法線切線第八,斜規線又名曲率徑第九,縱橫線式第十,諸式互爲比例第十一,八線第十二云. 又嘗專立捷術,以開各乘方通爲一術,可徑求平方根數十位,不論益積翻積,諸爲坦途,著少廣縋鑿一卷.

(1) $f(x)=x^2-A=0$

設 $a=$ 借根,卽 $r_1=a$, $r_2=\frac{A}{a}$,

$$r_3=\frac{r_1+r_2}{2},\quad r_4=\frac{A}{h_3},\quad r_5=\frac{r_3+r_4}{2},$$

………………………………………………

逐次如此,至借根小者漸大,大者漸小,與方根密合而止.

(2) $f(x)=0$

令 $r_1\gtrless x$, 設 $K=f(\overline{r_1+b}+1)-f(r_1+b)-1$,

$\therefore r_1=r_1 \qquad r_2=r_1-f(r_1)/K,$

$r_3=r_2-f(r_2)/K, \qquad r_4=r_3-f(r_3)/K,$

....

或設 $K=f(r_1+b+1)-f(r_1+1)+1,$

$\therefore r_1=r_1 \qquad r_2=r_1-f(r_1)/K,$

$r_3=r_2-f(r_2)/K, \qquad r_4=r_3-f(r_3)/K$

....

(3) 設 $f(x)=xf_1(x)-A=0$

$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots-A=0$

$\therefore r_1=\frac{A}{f(1)},\ r_2=\frac{A}{f(r_1)},\ r_3=\frac{A}{f(r_2)},$

....

(4) 設 $f(x)=f(x)-ax+A=0,$

$\therefore r_1=\frac{A}{a},\ r_2=\frac{f(r_1)+A}{2},$

$r_3=\frac{f(r_2)+A}{a},$ ....

(5) 設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}$

$+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$

命 $x=r+b$

則 $f(x)=f(r+b)=0=f(r)+f'(r)b+\frac{f''(r)}{2!}b^2$

$+\cdots\cdots+a_0b^n=0$

$f'(r)=na_0r^{n-1}+(n-1)a_1r^{n-2}$

$+(n-2)a_2r^{n-3}+\cdots\cdots+2a_{n-2}r+a_{n-1}$

因 b^2 以上之值為極小,可以截去不用,

故 $b=-\frac{b(r)}{b'(r)},$

$x=r+b=\gamma-\frac{f(r)}{f'(r)}.$

又著萬象一原若干卷,同治二年[1863],遊廣東,交南海鄒伯奇,南豐吳嘉善,三年[1864]五月卒於廣州旅舍,嘉善錄其遺稿,囑伯奇彙刻之.

226. 鄒伯奇. 伯奇字一鶚,又字特夫,南海諸生. 嘗作春秋經傳日月攷,謂昔考春秋朔閏,類以經傳日月求之,今以時憲術上推二百四十二年之朔閏及食限,然後以經傳所書,質其合否,乃知有經誤傳誤及術誤之分. 又論尚書克殷年月,謂鄭玄據乾鑿度,以入戊午蔀四十二年克殷,下至春秋凡三百四十八年. 劉歆三統術,以為積四百年,李銳亦主其說. 今以時憲上推,且以歲星驗之,知鄭玄之是,劉歆之非. 其解孟子由周而來七百有餘歲句,謂閻百詩孟子生卒年月考,據大事記及通鑑綱目,以孟子致為臣而歸,在周赧王元年丁未,逆數至武王有天下,歲在己卯,當得八百有九年,今考綱目年數,本之劉歆,然共和以上,周初年數史遷已不能紀,可考者,魯世家耳,此為劉歆曆譜所據,然將歆曆與史記比對,歆於煬公獻公等年分,多所增加,共衍五十二,若減其所加年數,則歆所謂八百有九年者,實七百五十年耳,又謂向來注家,於算術不盡精通,故解三禮制度,多所疏失,因作深衣考,以訂江永之誤,作戈戟攷,以指程瑤田之疏. 嘗謂羣經注疏,於算術未能簡要,甄鸞五經算術,既多疎略,王伯厚六經天文篇,博引傳注家言,亦無辨證,因即經義中有關天文算術,或先儒所未發,或闡發而未明者,隨時錄出之,成學計一得二卷. 又因修改對數表之根源,求析小術是開極多乘方法,可徑求自然對數,以十進對數根乘之,即得十進對數,著乘方捷術三卷. 其卷二有求正弦餘弦法如次式.

$$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n}}{2n}+\cdots$$

$$\sin a=a-\frac{a^3}{5!}+\frac{a^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

卷三,又有求對數二法,

(1)求某數之對數,由次之各式而得.

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m}\right)+\cdots\right\},$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{n}\right)^4+\cdots\right\},$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}=2\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^7+\cdots\right\}.$$

設 $\frac{m+n}{2}=t$, 則

$$\log_e\frac{m}{t}=\left(\frac{m-t}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-t}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-t}{t}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-t}{t}\right)^4+\cdots,$$

$$\log_e\frac{t}{n}=\left(\frac{m-t}{t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-t}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-t}{t}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-t}{t}\right)^4+\cdots,$$

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\left(\frac{m-t}{t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-t}{t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-t}{t}\right)^5+\cdots\cdots\right\},$$

$$\log_e\frac{t^2}{m-n}=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m-t}{t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-t}{t}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\frac{m-t}{t}\right)^6+\cdots\cdots\right\}.$$

(2)求已知對數之某數,由次之各式而得,

$$\frac{m}{n}=1+\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{m}=1-\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

227. 又因長沙丁取忠輯粟布演草,為之增訂開屢乘方法,以求高次方程式根數之略近值,其法有二,(1)截算法,(2)續商法. 設方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0=(x-r)f'(x)=R=0$

$f(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$.

而 $b_0=a_0b_1+a_1+b_0r$, $b_2=a_2+b_1r$, $\cdots\cdots$

$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}r$, $R=b_n=a_n+b_{n-1}r$,

假令 $x=r$, 則 $R=0$ 又 $b_{n-1}r=s$,

則 $r=-\frac{a_n}{b_{n-1}}$ ……………………(1)

又 $s=-a_n$ ……………………(2)

(1)式為截算法之條件,(2)式為續商法之條件,故在截算法,設 $f(x)=0$ 中, a_n 及 a_{n-1} 之符號相異,則 x 之略近值 $r_1=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 由是得 $f'(x)$,再得 x 之略近值 $r_2=\frac{a_n}{b_{n-1}}$,逐次如是,便得略近值. 其在續商法,設 $f(x)=0$ 中, x 之值在 r_1 及 r_2 之間求得 s_1 及 s_2 則 x 之略近值 r_3 可由

$\frac{s_2-s_1}{s_2-a_n}=\frac{r_2-r_1}{r_2-r_3}$ 而得,逐次如此,即得略近值.

228. 又創對數尺,即今之計算尺,蓋因對數表而變通之,為算器增新製,為算術開捷徑,畫數於兩尺,相併而伸縮之,使原有兩數相對,而今有數即對所求數,一曰形製,二曰界畫,三曰致用,四曰諸善,五曰圖式,為記一卷,又著格術

補一卷,所謂格術宋時言光學之書也,伯奇本其說以數理推求之,而知泰西製鏡之法,皆出於此.

229. 伯奇於天象,著甲寅恆星表,赤道星黃道星圖各一卷. 於地理嘗攷歷代沿革,爲歷代地圖. 著手摹皇輿全圖,測繪南海縣志地圖,又著測量備要四卷. 晚年論算家新法,曰,自董祐誠後,諸家極思生巧,如華嚴樓閣,彈指卽見,實抉算理之奧奧,然恐後之學者,不循塗守轍,而遽趨捷法,將久而忘其所自,誠深切時弊之言也.

230. 同治元年[1862]南豐吳嘉善,錢塘夏鸞翔遊粵,皆與訂交. 三年[1864]湘陰郭嵩燾,特疏薦之,請居北京同文館,以資討論,旋清廷兩次命督撫咨送,伯奇均以疾辭未赴,湘鄉曾國藩督兩江,欲於上海機器局旁設書院,延伯奇以數學敎授生徒,屬劉熙載致書,亦未就. 八年[1869]無疾而卒,年五十一. 劉載熙字融齋,興化人,道光二十四年[1844]進士,授翰林院編修,同治季年,[1874]居上海,主講龍門書院,著有天元正負歌四則. 又伯奇弟子伊德齡字善卿,著有弦矢通術一卷,刻入傳習錄中.

231. 吳嘉善. 嘉善字子登,南豐人,咸豐二年[1852]進士,授編修居京,獲交徐有壬,同治算學.同治元年[1862]來長沙,識丁取忠,明年客廣州,因鄒伯奇又識夏鸞翔. 光緒五年[1879]出使法蘭西,嗣受代還,旋卒.

232. 嘉善所撰算書,首述筆算次九章翼,於句股術後,附平三角弧三角測量高遠三術. 又次則專述天元四元之書,爲天元一術,釋例,天元名式釋例,天元一草,天元問答,方程天元合釋,四元名式釋例並草,四元淺釋,其書芟闢榛蕪,引人入勝,所以嘉惠初學者不淺.

233. 丁取忠. 取忠字果臣,號雲梧,長沙人,少喜步算,而無師承,又地僻不能得書,每持籌凝思,寢食俱廢,垂四十年,然後古今言算之書稍稍搜集,而心力已衰矣. 嘗客益陽胡林翼幕,晚年移林翼所贈貲,廣刻算書二十一種,曰白芙堂叢書板藏古荷池精舍. 所自撰者,爲數學拾遺一卷,粟布演草二卷,對數詳解五卷,四元玉鑑補草一卷.

234. 左潛. 潛字壬叟,湘陰人,長沙丁取忠引爲忘年交. 同治十三年[1874夭死,撰綴術補四卷,綴術釋明二卷,綴術釋戴一卷,均刊入白芙堂叢書.

235. 曾紀鴻. 紀鴻字栗諴湘鄉人,國藩少子也. 習代數學,同治十三年[1874]二月,長沙丁取忠發其以代數式解對數,遂以數月之力,撰對數詳解五卷,而每卷首,皆署取忠之名. 其秋,又撰圓率攷眞圖解一卷,乃以月餘依捷法求得圓周率及其反商至百位,紀鴻沒後,其友新化黃宗憲,隨使至英,於圖書館見其圓率有求至百五十位者,以校紀鴻所演,知無錯誤,刊入其所著憫笑不計中.

236. 黃宗憲. 宗憲字玉屏,新化人,丁取忠高足弟子也,著求一術通解二卷,刊入白芙堂叢書. 又著容圓七術三卷,附容圓書法,則因切兩圓之圓心軌跡爲橢圓及雙曲線,而切一圓一直線之圓心軌跡爲拋物線也. 又著曲面容方一卷,憫笑不計一卷,光緒二十二年[1896]自刊行世

237. 華蘅芳. 蘅芳字若汀,金匱人,年十四,通程大位算法統宗,繼復習數理精蘊及九章算術,又從無錫鄒安鬯受秦九韶,李冶朱世傑之書. 曾遊曾國藩幕,因與李善蘭善. 上海江南製造局成立,與西士傅蘭雅共譯英華里司數難題代數術二十五卷,及微積溯源八卷. 英海麻士三角數理十二卷,英倫德代十六卷,決疑數學十卷,又英白爾尼合數術十一卷. 其翻譯西書之功,李善蘭後,第一人也.

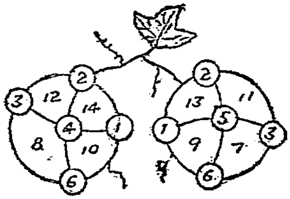
238. 蘅芳自著,有開方別術一卷,數根術解一卷,開方古義二卷,積較術演三卷,學算筆談十二卷,算草叢存四卷,號行素軒算稿,光緒八年[1882]自刊行世,刊入藝經齋算學叢書者,有算法須知一卷,西算初階一卷,此外之未完稿,有求乘數法數根演古,循環小數攷,算齋瑣語四種,光緒二十八年[1902]卒,年七十二.

239. 蘅芳弟世芳字若溪,亦善數學嘗主講湖北自强學堂,常州龍城書院,江陰南菁書院,靖江馬州書院,上海南洋公學. 著有恒河沙館算草,近代疇人著述記刊行之. 尙有專術舉隅,今有術,雙套句股,三角數理等稿,存於家. 光緒三十年[1904]卒,年五十歲.

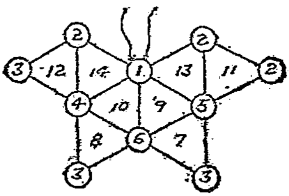
240. 廖家綬. 家綬一名家譸,字子忠,長沙人. 因梅啓照薦入江寧算學書院,光緒八年[1882]應吉林表正書院算學教習之聘十二年[1886]吉林勘界,任測繪地圖. 十六年卒[1890]於吉林,年三十一. 著句股邊角釋術一卷,續句股六術一卷,以中垂線立爲六術,礮法四卷,測圓海鏡翼二十卷,仿海鏡例,以三角容圓設題,對數較表一卷,修竹齋雜著若干卷,存於家.

241. 清末數學,實稱極盛,雖西學輸入,中學漸見衰微,而北宋洛書之數,自張潮增補而後,乃有保其壽者,復改面爲體,變方爲圓,是固不可不記已.

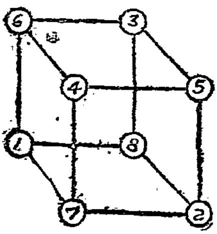
242. 保其壽. 其壽著遊戲算術一卷,增補算法渾圓,謂清初張潮心齋雜組所演皆平圓,不知立方與渾圓,尤爲可喜所演十八圖,其巧實不可思議. (1)(2)圖每面21數,(3)圖每面18數,(4)圖每面26數,(5)圖每面76數(6)圖每面182數,(7)圖每線13數,每面39數,(8)圖每面14數,(9)圖每面72數,(10)每面81數,(11)圖每面48數,(13)圖每面279數,(14)圖每面573數,(15)圖每面79數,(16)圖每面230數,(17)圖每五角十子,積380數,(18)圖三角六子,積228數,其六道渾天圖,以紙六條作圖,相間爲之,甚妙.



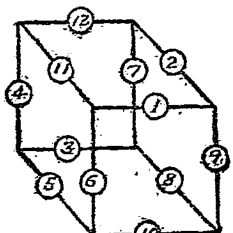
(1) 瓜瓞圖



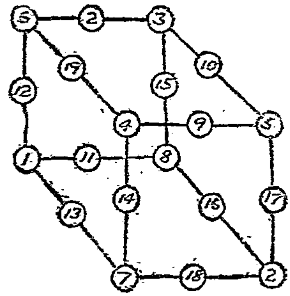
(2) 三圖本一圖



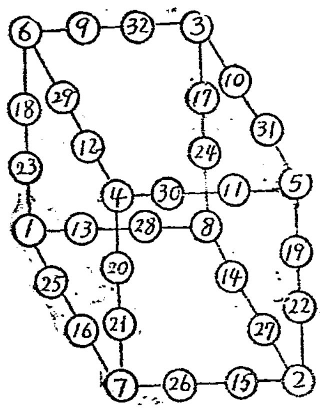
(3) 六合立方



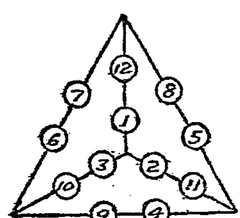
(4) 立方



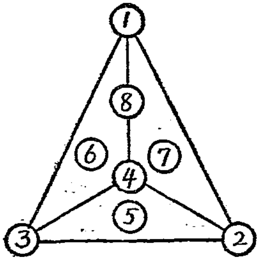
(5) 立方



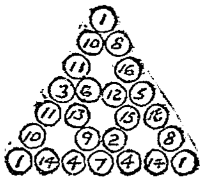
(6) 立方



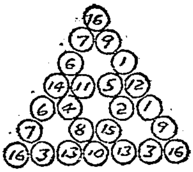
(7) 渾三角



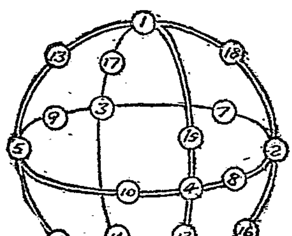
(8) 渾三角



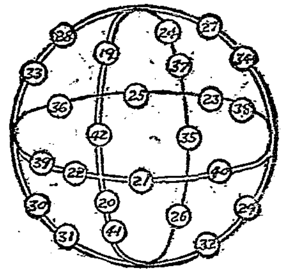
(9)



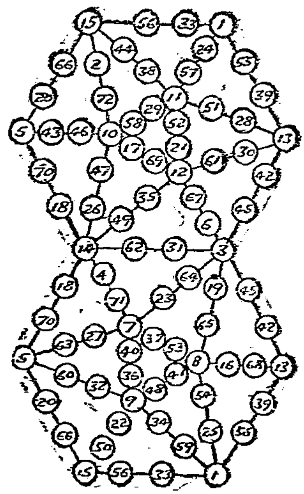
(10)



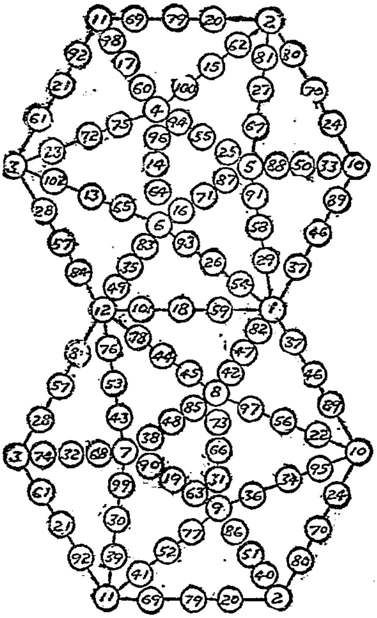
(11)



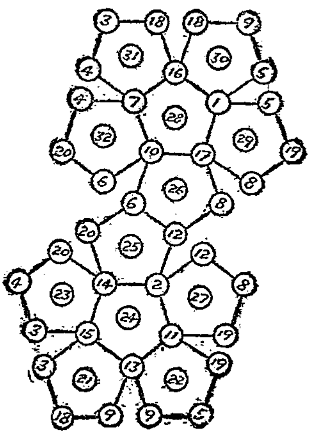
(12)



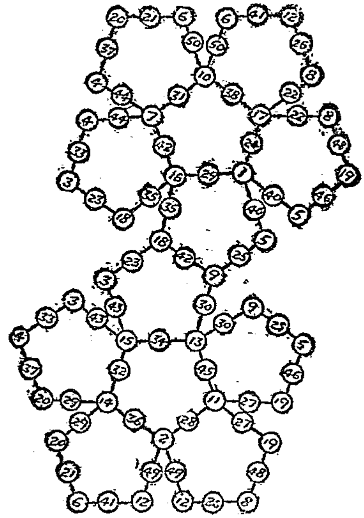
(13)



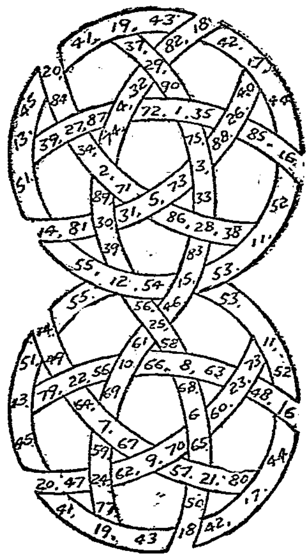
(14)



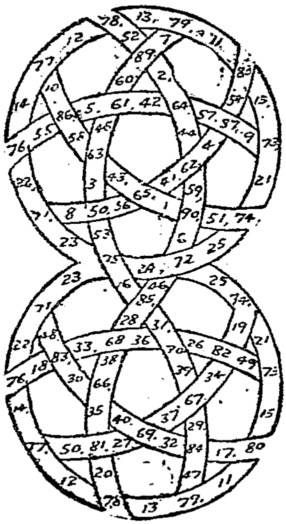
(15) 六合渾圖



(16) 六合渾圖



(17) 六道渾天圖



(18)

243. 吾國女子治數學者,有宋史楚衍女善算術,歸安府志,明嘉靖間,湯希宮妻蔡氏,精九章算法,諸可寶三續疇人傳,記錄海寧葛宜女士,常熟沈綺女士,江寧王貞儀女士事蹟.沈王兩女士,且有撰述.晚近元和江湘芬女士,亦通象數,遺稿有算草一宬.

244. 我國數學,秦火以還,漢魏六朝以及隋唐,代有進步,轍跡可尋,自茲而後,或謂衰於宋,而盛於元,有明又成絕學,是殆不然.夫元人李冶,朱世傑,郭守敬,固爲我國數學之最高峯.然考三子之年齡,入元而已垂暮,豈元代之所養成哉.且數學之發明,由來必以漸,非有外學輸入,如明清兩代,決不能驟然而興,觀於王孝通之四次式,則知天元之術,唐已有之,而況於宋乎.元之中葉,數學即無可紀載.故明初雖好學深思如唐順之流,宜乎不審立天元一爲何語,而謂茫然無下手之處也.降及明末,西學東漸,清代承之,古學因之亦顯,咸同之際,雖西學不再輸入,識者謂微積之術,當自此發明,良非虛語,是在學人之不自畫而已.

(第八門畢)

第　九　門

數學小史外篇之部

NINETH SECTION

A

PRIMER

OF

The Foreign History of Mathematics

第九門　數學小史外編　目次

亞剌比亞數字

其起原不可考　盖4,5,6,7,及9(或8)之記號爲紀元前150年前印度之北部,所用Indo-Bactrian字母同意之語頭文字也. 2及3之記號,爲疾書二及三之平行線而象之者,同樣1之記號,爲表單一之縱線者.

圖之第一列,爲紀元950年頃,印度之Devangari數字.

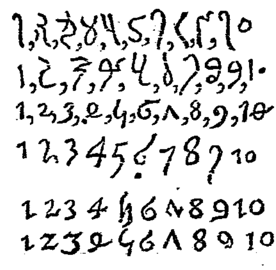
第二列,爲紀元1100年頃,亞剌比亞之Gobar數字.

第三列,爲1385年頃,起源於德意志者.

第四列,爲紀元1400年頃,爲歐羅巴之數字.

第五列,據紀元1480年,Caxton出版之mirrour of the world.

第六列,據紀元1482年,蘇格蘭之歷書,盖起源於法國也.



數學辭典

第九門　數學小史外篇之部

緒言

1. 本編記載泰西數學史,舉凡學人之傳記,及其發見,固非此小冊所能盡,然於斯學進步之迹,亦可略見一班矣,無暇讀外國數學全史者,讀之亦不無興味也.

2. Ionian Greeks 以前之數學史,渺不可考,茲先述希臘人受影響之數學,次述中世及文藝復興時代之數學,次述近世數學之解析,次述近世數學主要之情形.

希臘人受影響之數學

3. 埃及人及非尼斯人之數學. 太古人類,雖記錄不詳,然其略知數學與力學者,蓋無庸疑也,而陸地測量之初步,亦略知之,如埃及人之專心於幾何學與數之學問,非尼斯人亦頗知實用算術,簿記學,航海術及測地術,是也. 是等人民進步發達之結果,多見於事實,今之遊其地者可以知之矣. 紀元前七世紀,埃及之僧侶,相傳幾何學上之命題,頗多趣味,遂爲希臘人研究數學之端緒. 蓋埃及人及非尼斯人之數學,多自觀測與實測所得之結果,乃累數百年之經驗而得者也. 至於希臘數學之研究幾何學,其初卽有演繹的,與科學的傾向焉.

4. Thales. [紀元前約640年至550年] 氏爲希臘最古創立數學及哲學學校者,爲 Miletus 之人也. 少時從事商業,且執公務,因其聰慧,故令名甚隆,青年時代,因事居於埃及,暇輒研究星學及幾何學. 中年棄其業務,歸 Miletus, 專心哲學及數學,以終餘年.

5. Thales 之幾何學,乃孤立夥多之命題,而脈絡不相貫通者. 然其證明,則依演繹法,故其定理,亦如埃及派之幾何學,非僅由特例之大多數而歸納者,蓋氏以演繹的特性而研究科學所以名噪一時也.

6. Thales 所發見重要之命題. (1) 二等邊三角形之底角相等. [Euc. I. 5.]. (2) 對頂角相等. [Euc. I. 15.]. (3) 底邊及兩底角已知,則三角形可定. [Euc. I. 26.]. (4) 二等角三角形之相當邊成比例. [Euc. VI. 4, 或 VI. 2.]. (5) 半圓內之角爲直角. [Euc. III. 31.].

7. Thales 爲希臘七賢之一,其幾何學猶不及其星學之著名. 氏發明地球

之爲球狀,及定一年約365日,又說明日蝕月蝕之原因,且豫言紀元前585年5月28日之日蝕,是皆氏於敎授上得非常勢力之由來也.然其豫言日蝕,實利用埃及人及Chaldea人之記錄,所謂隔18年11月當日蝕也.

8. Pythagoras. [紀元前約569年至500年]. 氏少時研究學術.遍歷小亞細亞及埃及等處,後歸其出生地Samos,而設講席焉.紀元前529年,徙居Sicily,旋赴Tarentum,時往來南部意大利之Croton.氏之設講席於其地也,聽講者恆滿堂,階級之市民,出席者多上流社會,其時雖有不許婦女到會之國典,然卒不惜犯禁而聽其講焉.

9. Pythagoras爲哲學家且爲道德學家,然其敎授哲學及道德,恆以數學爲基礎.分數學爲四類,謂之四藝學,[Quadrivium] 第一靜止量,卽幾何學,第二運動量,卽星學,[或力學],第三絕對數,卽算術,第四應用數,卽音樂,此四分類,後數世紀間尙用之.

10. Pythagoras以幾何學爲其敎授之基礎,且依嚴密之演繹性.其主要定理,脈絡一貫.蓋氏已知Euclid最初二卷之命題不過敎授其要領耳.此外僅少數孤立之定理,與無理量初步之命題數款.[後其學徒曾於Euclid第六卷及第十一卷中增加種種之命題].然其證明多不嚴密,如逆定理,雖無證明,而亦採用之是也.

11. Pythagoras之所發見如次.(1) Euc. I. 32. 所舉之證明,卽所謂三角形內角之和等於二直角.(2)證明Euc. I. 47及48.之直三角形之性質,然Euclid所載是等命題之證明,乃Euclid本人所發見,而Pythagoras之證明,則今不傳.(3)發見Euc. I. 44.及45.之定理,且解決Euc. II. 14.之問題.(4)列舉正多面體爲立方體,四面體,八面體及二十面體,後其學徒Hippasus[紀元前470年頃之人]又增加十二面體.(5)熟知無理量特性之幾分,更證明正方形之邊與對角線難於比較.因之遂使希臘人由幾何學放棄數與量之概念焉.

12. Pythagoras創定高等算術.乃其榮譽之一,爲其學徒所稱道勿置者也.

13. 氏分數爲奇數與偶數,乃算術論理之始,更分數爲素數與非素數,且分數爲比其整數因數之和或大或小或相等之三種.又論特種之形之數,如成$\frac{1}{2}n(n+1)$形之三角數,且論整數之三組如3, 4, 5, 及5, 12, 13, [或將m, n, 爲整數.而爲m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2等].此求直角三角形之三邊爲必要者也.此外他種之問題.有關於比例數者.而其學徒,則又硏究等差,等比,調和,及音樂級數.夫等差等比調和之三級數,固盡人皆知,若音樂級數,乃謂如下所列四整數之比,卽$a:2ab/(a+b):\frac{1}{2}(a+b):b$.

14. 紀元前第五世紀. Pythagoras 死後之數學,皆屬於氏之學派;或由直接受斯派影響之希臘哲學者而研究之也. 茲特記 Oenopides, Parmenides, Zeno. Archytas, Theodorus, Bryso, Antipho, 及 Hippias, 皆第五世紀中.教授之最著者.

15. Oenopides. 爲 Chios 人,以解決如下之問題而得名. "自直線外一點,引其直線之垂線" [Euc. I. 12.] 及 "於所設點,作等於所設角之角". [Euc. I. 23.].

16. Parmenides, 及 Zeno, 皆 Elea 人,對於速之奇異問題而有名. 其最著者,爲龜與 Achilles[希臘勇士之善走者]之奇談,謂 Achilles 以龜十倍之速進行,若龜在 Achilles 前 1000 碼之距離,則決不能追及. 蓋 Achilles 進行 1000 碼時,龜尙在 100 碼之前,再 Achilles 進行 100 碼時,龜尙在 10 碼之前,永久如斯, Achilles 雖漸近於龜,始終龜在其前,而決不能追及.

17. Archytas. 爲 Tarentum 人,紀元前 400 年頃,爲 Pythagorean 學校之校長. 氏應用幾何學,而研究力學之問題,又以幾何學解古代最有名問題之一,卽已知立方體二倍之體積,而求立方體之一邊,氏則利用空間所引曲線以求之也. 且闡明 Euc. III. 18. 及 35. 及 XI. 19. 命題之結果.

18. Theodorus. 爲 Pythagoras 派之一人,生於 Cyrene, 證明幾何學的 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, 及 $\sqrt{17}$ 之數,爲不可與 1 通約者.

19. Bryso, 及 Antipho. 皆與 Theodorus 同時,其所以得名,乃在企圖求圓內接正多角形(其邊非常之多)之極限之面積.

20. 雅典學校之興起. 紀元前第五世紀之終,雅典始爲研究數學之中心. 蓋雅典於此世紀一由貿易最盛,一由利用其同盟國應募之金,致爲希臘中最富之一市,而其執政者,又能以雅典爲中心,運用希臘半島之政略. 雖因其時雅典佔占政治的最優權,各州不無訾議,而雅典人之智能,則當時所公認也.

21. 雅典學校之歷史,始於 Hippocrates 之教授. 得 Plato 及 Eudoxus 之盡力,學校之基礎,於以鞏固,且與其鄰國 Cyzicus 之學校. [此係 Eudoxus 所設,與雅典學校極有親密之關係.] 依此三大幾何學家所定方針而進行,至紀元前 300 年,歷山市大學校起,希臘之賢哲,始未集於此.

22. Hippocrates. [紀元前 420 年人] 氏始編纂幾何學教科書,書中於圖形之各點,附記文字,氏之所創也. 又注意自一定理得他定理之方法,及背理證法, [Reductio ad Absurdum] 皆其特例也. 氏又可謂以圓之幾何學介紹於世者,其所發見之諸定理如下. "圓之相似弓形,有相等之角. 圓之弦因合之之弓形或小於半圓或等於半圓或大於

半圓,而其弦所對之角,或大於直角,或等於直角,或小於直角.” [Euc. III. 31] 其他Euclid第三卷中之命題,多爲氏之發見,又圓與其徑之平方成比例,[Euc.XII.2.],及相似之弓形與其弦之平方成比例,皆爲氏所定.

23. Hippocrates所發明最有名之問題,爲化圓爲正方形,及二倍立方體之立方體.使此二問題,在雅典學校歷史上,爲最重要之事項者,皆氏之力也.

24. 化圓爲正方形,[卽作與圓等積之正方形],爲初等幾何學所難解,氏欲發見其解,而卒不可得,然關於月形之定理,則發見甚多也.

25. Plato.[紀元前249年至348年]在雅典學校,次於Hippocrates而爲哲學家者,Plato也.紀元前399年,其師Socrates被刑後,數年間遍歷各地,於Pythagoras派之學校,研究數學.紀元前380年頃,歸雅典,乃於郭外設一學校,名曰Academy.氏本爲Pythagoras派之哲學家,謂宇宙之祕蘊,於數可見,於形可知,故以幾何學及數學,爲學哲學必要之階梯.其學校門首,特書一紙,曰不學幾何學者不許入,[Let none ignorant of Geometry enter my doors],其醉心於此可知矣.

26. 後世幾何學以定義,公法,公理,等爲基本,自Plato始.其解數學問題,則特定制限,且崇尚解析法焉.

27. Plato所發明數學之定理如次.二直角三角形CAB, DAB,邊AB共同,邊AD, BC,平行,而對直角之邊爲斜邊.今若其斜邊交於點P,則得次之比例式.PC : PB=PB : PA=PA : PD.此定理用於二倍立方體之問題,蓋此三角形,若PD=2PC,則二倍立方體之問題可解矣.

28. Eudoxus.[紀元前408年至355年].氏爲雅典學校第三數學大家,且爲Cyzicus之創設學校者.其傳記至不詳,惟知其爲Pythagoras學派之學徒,而研究數學者耳.

29. Euclid第五卷中之定理,殆爲氏所發見,其證明亦同.Euc. II. 11.“分一直線爲外中比”之問題.爲氏所作,而Euclid第十三卷之初,所載分一直線之諸定理,亦氏所發見.氏更證明窮極之法.[Method of exhaustions]卽“有已知不等二量,自大量減去大於小量之半分者,又自其餘量,減去大於其半分者,如此不止,則所餘之量,必至小於其小量”[Euc. X. 1.]之命題也.古代幾何學家,恆利用此定理,避無窮小數之使用.但此法雖精密,於適用上不便,而其用法之說明,則觀Euc. XII. 2.之論證卽知之.氏利用此定理,證明角錐[或圓錐]之體積,等於角壔[或圓壔]之體積之三分之一.[Euc. XII. 7.及10.].

30. Eudoxus作天球儀,且著實用星學一書,採用日月星各懸於動球面之

臆說,其球之數,合計爲27. 後世星學家遵守此說,而觀測次第精密,欲使事實與理論適合,恆增加新球焉.

31. Menaechmus. [紀元前約375年至325年]. 氏爲 Eudoxus 門人之一. 襲 Cyzicus 學校校長之榮職. 其爲幾何學敎師,名譽甚高,因爲歷山大王之師傅. 王苦氏論證之繁,欲氏以簡單出之. 氏對曰,國中道路,雖有官私之分,而幾何則惟有一道可循耳. [Though in the untry there are private and even royal ads, yet in Geometry there is only one road for all].

32. Menaechmus 爲研究圓錐曲綫之鼻祖,分圓錐曲綫爲三種,而研究其性質,後之學者,稱爲 Menaechmus 之三曲綫.

33. Menaechmus 欲解決二倍立方體之問題,故作成應用圓錐曲綫之二方法.

34. Aristaeus, 及 Theaetetus. 二氏之著述,散失不可得,所可知者, Aristaeus 之論證五多面體, Theaetetus 之擴張不可通約之量之理耳. 而確實歸於 Theaetetus 之惟一定理,則爲 Euc. X. 9 之命題,卽可通約二直線上正方形之比,等於二平方數之比. [及其逆]. 但不可通約二直線上正方形之比,不能等於二平方數之比. [及其逆].

35. 雅典學校之終. 上所述數學家之學徒或同時代之數學家著初等幾何學,及圓錐曲線之敎科書,並論及求軌跡之問題,且沿用 Plato,整齊已知之理爲基礎之方法,而不再求進步. 故學校之成績,遂從此告終焉.

36. 第一歷山學校. 最初建立大學之地,爲歷山市,乃 Ptolemy 之所創也. 此大學,資產甚豐,講堂極多,書籍室,博物館,實驗室,園圃,各種植物,及曾發明之器械,無所不備,千餘年間不衰,誠希臘學問之首府也. 吾人於其內部組織及其學科,雖鮮所知,而此學校影響於社會之有益事實,固甚夥,其最著者,卽第一世紀中,所謂古代數學三大家, Euclid, Archimedes, 及 Apollonius, 同時出現於此校. 至紀元641年,亞剌比亞人破歷山市後希臘之數學史,始不以此校爲中心, 故歷山學校,乃包含希臘數學家者也.

37. Euclid. [紀元前330年至275年]. 氏爲希臘人之子,受敎育於雅典,終其身爲歷山大學之講師. 古語云,幾何學中無王道, [there is no royal road in Geometry] 或云出自 Euclid, 或云出自 Menaechmus, 要之不失爲奇警語也.

Euclid 又嘗謂以知識求知識,知識始有價值. [Knowledge was worth acquiring for its own sake]. 蓋得之幾何學也. 其時有童子初學幾何學問曰. "學之何所得". 氏呼其僕,"出以銅幣若干與之,且曰,汝其從所學而求利益. 故亞剌比

亞人所著歷山大學之紀錄,謂 Euclid 爲和藹可親之長者云.

38. Euclid 著書雖多,其名之顯,實由其所著之"Elements". 是書以圓錐曲線外之初等幾何學及整數論而成. 其第十卷,爲其創作,餘皆編纂先輩之著述,而改其配列次序,或加以新證明,凡希臘爲純正數學教科書之正統者,皆採錄之. 證明命題之方法,以說述,特說,作圖,證明,終結爲次序,乃氏所創定. 此氏書之所以有演繹的性質,而其證明,皆依論理的正確而組成也.

39. Elements 中幾何學之部,人所共知,茲略述之. 其初四卷與第六卷,爲平面幾何學. 第五卷論比例之理,第十一卷及第十二卷,論立體幾何學. 其第五卷所論,無論如何之量,皆能適用,故其結果,可用於數,亦可用於幾何的量. 希臘人知此,始能就下之二次方程式,而爲幾何的解釋,卽 $ax^2 \mp bx \pm c = 0$ [a, b, c, 表數] 此解卽 Euc. VI. 28. 及 29. 所示者.

40. 第七卷,第八卷,第九卷,論有理數之理論. 其第七卷中,言以普通方法求二數最大公約數,而最後之除數爲 1,則原二數爲互素數,且言求二數最大公約數之法則. 次論分數,次論素數,又以若干之命題,斷定最小公倍數. 第八卷及第九卷,論成連比例之數,又擴張素數之理論,而言素數之數之無窮,就奇數偶數,而論其性質,且示作完全數之方法.

41. Euclid 第十卷論無理量. 希臘人無不盡根數之記法,不得已,以幾何學的表之,其初之諸定理,論不可通約之量,然後論以 $\sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}$ 所表之線. [但 a, b 爲可通約之量].

42. 氏於"Elements"後附錄幾何學問題集,圓錐曲線,關於圓錐圓壔之事項,及 Porisms [不定設題] 之論. 又著幾何學的光學,及幾何學的星學. 總之氏之著述,專論量,而不及數之計算耳. [參看第一門 191 頁].

43. Aristarchus. [紀元前 310 年至 250 年]. 氏爲 Samos 人,其有記錄之價值者,即謂太陽在宇宙之中心,而地球廻轉繞之. 惟其見解簡單,故雖能說明諸現象,仍爲當時諸家所擯斥. 然氏論太陽及月之大與其距離,其理精密,故其數上之結論,雖因器械之疎,不無差誤,而其結果,頗近於眞而可用. 氏謂太陽之距離,略爲 5×10^9 stadia [1 stadium 約六百零六呎九吋].

44. Archimedes. [紀元前 287 年至 212 年]. Aristarchus, 及當時之學者,著述之聲名,均爲 Archimedes 之所掩. 氏數學的才力,實可驚歎,惟當讓 Newton 一步耳. 氏爲 Syracuse 之王族,受教育於歷山大學,卒業後直歸其鄉,終身不出.

45. 氏亦如 Plato,謂以學問之結果應用於實際,非哲學家之義務. 其察知金匠之僞造,及以凹鏡燒毀封鎖羅馬之

軍艦,尤爲膾炙人口者也. Hiero 王曾造大船,不能入水,以諮問氏. 氏用齒輪及無數螺旋之器械,舉之下水. 且曰苟使臣立於空中,雖全地球之大,亦不難使之動,[Give me a place on which to stand, and I will raise the world], 蓋當時有名之語也.

46. Archimedean screw 之汲水器,氏之所發明也. 其器爲兩端張開之空管,其中裝置拔栓子形之螺旋,將其一端入於水,而廻轉其管之軸,[但軸與垂線所成之角,必大於螺距,(Pitch)],則水入器中,自上端流出.

47. Syracuse 久被 Rome 人之圍, Archimedes 作投石器,名 Catapults 以禦敵. 此器無論遠近,能自在飛石,而用器之人,又能避敵之狙擊. 敵懼之遂止,改封港之策,經三年始陷落[紀元前 212 紀]云.

48. Syracuse 陷落後,雖有不許殺害 Archimedes 及其家屬之命令,卒被從事擄掠者所害. Rome. 人爲之築壯麗之塚,刻圓壔內容球之圖於其上,蓋從氏生前之言,因球之體積,等於外切圓壔體三分之二,球之面積,等於大圓面積之四倍,皆氏所證明,以爲紀念也.

49. Archimedes 之著述,及其發明,頗難簡略述之. 蓋氏於數學上之事蹟,殆皆有記載,且其著述,每一事成一書,而非相連續者. 今於其著述中,摘錄於次. (1)圓之測度. (2)拋物線之面積論. (3)螺旋論. (4)球及圓壔論. (5) Conoids [拋物線或雙曲線之旋轉體] 及 Spheroids [橢圓之旋轉體] 之旋轉體論. (6)算術. (7)力學. (8)浮體論.

50. Apollonius. [紀元前 260 年至 200 年]. 氏爲紀元前第三世紀數學大家,爲 Perga 人,其傳記不詳

51. Apollonius 之大著述,爲圓錐曲線論,於三曲線之性質,發揮殆盡,後人所增補者至稀. 是書出,乃爲基本教科書,而先哲 Menoechmus, Aristaeus, 及 Euclid 等,所著此種之書,遂全遭廢棄矣.

52. 此大著述之外,氏尚有特別之幾何學問題,數之計算法,星學,及靜力學之螺旋理論等之小篇著述.

53. Eratosthenes. [紀元前 275 年至 194 年]. 氏乃與 Archimedes 及 Apollonius 爲同時之學者. 現行之 Julian 曆,即太陽曆,每四年則一年爲 366 日,而黃道之傾斜爲 23° 51′ 20″,皆氏之所定也. 氏之地理學,亦最知名於世,測得地球表面上一度之長約 79 哩,而地球之周圍爲 252000 St. d a, 今將 Olympic Stadium 以 202 碼$\frac{1}{4}$表之,則推算地球之半徑約 4300 哩. 氏著作之傳於世者尚有二,一爲二倍立方體之問題所用器械之說明,二爲作素數表之規則. [見第一門 103 頁].

54. 紀元前第二世紀. 紀元前第三世紀,爲希臘數學史最盛之時代,然此一世紀間之數學大家,皆爲幾何學者,而世間之注意亦皆集於幾何學之一點,殆不他顧,然繼承此大家者,皆不足紀,及次世紀之終,始得二人焉,爲 Hipparchus 及 Hero, 皆能另闢途徑,爲研究數學者,別開生面焉.

55. Hipparchus. 乃紀元前120年頃之人,爲希臘天文學者中之最有名者也. 其推崇之先輩爲 Eudoxus. Aristarchus, Archimedes, 及 Eratosthenes, 等. 氏之觀測及算定,較前人更爲精密. 例如氏算定一年之長,無時間六分以上之差誤.

56. Hipparchus 論月之運動,謂月以等速度畫圓周,地球之位置,近於其圓之中心.

57. 是等之研究已有三角法之萌芽, Hipparchus 可謂其發明者也. 氏於平面三角法,作弧弦之表,[與實際眞數正弦表同其用],於球面三角法,示解三角形之法,其書雖不傳,然人皆知之. 又以經緯度示地球上一點之位置,亦自氏始.

58. Hero [紀元前120年頃之人]. 氏以工學及測地術建立於科學的基礎之上. 其於數學上之研究,則證明三角形之面積,等於 $\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$ [但式之 s 爲周圍之半,而 a, b, c, 表邊之長].

59. 紀元前第一世紀. 繼承 Hipparchus 及 Hero 者,不致究二氏開拓之新學,而墨守幾何學之舊理,故無可紀述. 至紀元前30年,埃及入羅馬之版圖,是蓋 Ptolemy 家之末世也. 然自 Ptolemy 之初世以來,埃及紀綱紊亂,故大學之受影響者亦不少,是爲第一歷山學校之終.

60. 第二歷山學校. 羅馬於名義及事實,皆由民國變爲帝國. 其間因有種種之革新,而歷山學校亦受其影響. 然斯校仍繼續成立,其教授亦未遭放逐. 一旦秩序回復,學徒復羣集於此. 惟騷亂之際,哲學上優力之見解,不無變更. 於是新 Platon 學派及新 Pythagoras 學派起,而學術界遂開新紀元焉.

61. 紀元第一第二世紀. 第一世紀間,幾何學仍爲學者注意之科學. 然不能擴張 Archimedes 及 Apollonius 之幾何學,惟將先哲之著述,加以註釋而已. 遂至輕視數學,不基學理,而依經驗. 惟第二世紀間,幸有 Ptolemy 之著述. 足爲數學界張目耳.

62. Ptolemy. [紀元168年卒] 氏關於數學之著作最夥,而尤以其星學與地理學,之著述更爲有名. 氏所著星學書,名 "Almagest" Copernicus 未出以前,人皆奉爲基本星學書.

63. 第三世紀. Hipparchus 與 Ptolemy, 不僅以幾何學應用於星學,且應用於解析法,如三角法是也. 然而繼起者

寡矣,至150年後,乃得一拔羣之幾何學者焉.

64. Pappus. 於第三世紀終,住歷山市,執大學教鞭,門徒衆多,遂使研究幾何學之興味復活.

65. Pappus 之著作雖富,其傳於今日者,惟有一書,名希臘數學叢書,後人曾附以註釋,而補其命題焉.

66. 是書後部,大抵爲Pappus 之創作,如發明拋物線之焦點,及圓錐曲線之準線是也. 然氏僅研究其孤立之性質,關於焦點,至Kepler始詳說之,關於準線,至Newton及Boscovich始細述之. 氏於力學,謂三角形之重心同於三邊分爲同比,角頂在原三角形邊上之三角形之重心. 氏又曾發見二定理,今教科書中,尚存氏之名,即"曲線形迴轉其軸所成之體積,等於曲線面積與其重心所畫之長之相乘積,""表面積等於曲線周之長,與重心所畫之長之相乘積"是也.

67. 第四世紀. 第二,第三兩世紀間,研究幾何學之興味,次第冷淡,而傾向於研究數之理論焉, Euclid曾以線代表任何之量,而關於數之定理以嚴密之學理研究之,Hero欲避此等以幾何學代表數之方法,而不得其他良好之記號,故Archimedes仍因其舊. 蓋此問題,爲當時研究未竟之業也.

68. 然第四世紀,始以代數方程式,直接解諸問題, 玆述其一例題於次. "Demochares以生涯四分之一爲幼年,五分之一爲少年,三分之一爲壯年,13年爲老年,問其年齡幾何".

69. 是等問題,中世之學者,以類似問題所用之方法解之,謂之假設法. [Rule of false assumptions 見第一門135頁]

70. 然後之論者,謂是時之數學者,皆以Rhetorical Algebra [文章的代數學]解是等之問題. 所謂Rhetorical Algebra者,即不用何等之記號,而以言語論代數學之理也.

71. 幾何學之風尚,一轉而入於代數的算術,斯時忽出一卓拔之代數學家,即Diophantus其人是也. 創定略記號,以表任何之量及其運算. 但其略記號,不外文法上之略語,謂之Syncopated,即略記法之謂也. 氏教科書中亦用是等略語,而記其論證. 自大體言之,歐羅巴之代數學,從此至第十六世紀,可謂毫未進步也. 夫未知數而以記號表之,誠斯學之一大進步. 氏以前有無此等發明,雖不可知. 然希臘人曾盡以字母用之於數字,以致再無字母,可以表示未知數也.

72. 近世代數學,更進一步,蓋已成爲全用記號之代數學矣,即限於代數學,有一種學語,其記號法式,與其所代表之物,全無關係,而其運算,則離文法上之規則,而以獨立之法則行之也.

73. **Diophantus.** [約420年]. 氏非希臘

人,而住歷山市. 其著述爲多角數之短篇及代數學,而完結者不傳.

74. 氏重要之著作,爲Arithmetic,其實即代數學也,卽用代數學之記號,而解釋問題也,其解釋之次序,能逆而行之,故解決數之問題,此實適當之方法也.

75. Diophantus又曾著"Porisms"一書,共三卷,今不傳,茲摘其二三如次.
"二立方數之差,恆可以二立方之和表之." "$4n-1$之形之數,不能以二平方數之和表之." "$8n-1$ [或$24n+7$] 之形之數,不能以三平方數之和表之." 各有嚴密之論證,後人又加附一則曰,"任何之數,得以二個或三個或四個平方數之和表之".

76. 第五世紀. 第四世紀之終,東方耶蘇教會漸盛,遂與希臘科學者衝突,紀元415年,歷山市Hypatia被害於暴徒.於是多數學者,皆遷雅典以避亂. 雅典自Plato以後專門之數學家住斯土者固多,而皆寂焉無聞也. 惟此移住之人,千辛萬苦,繼承斯業,耶蘇教徒,雖欲絕滅學會,卒歸無效. 529年始迫羅馬帝Justinian,出示,嚴禁講授不適於教旨之學問.

77. 第二歷山學校之終. 此學校最後二世紀間極爲衰微,無可記載,632年Mohammed死,繼者爲回教徒,十年內征服Syria, Palestine, Mesopotamia,波斯及埃及等.歷山市滅亡時日,雖不確,然據亞剌比亞史家之所傳,則謂爲641年12月10日.

中世期之數學

78. 歐羅巴數學史. 近世歐洲之數學發源於西歐之寺院學校及其僧侶等之教授而此等教授之大有進步者又多發源於羅馬也.惟希臘數學前雖詳述,羅馬數學,則殊不足稱焉.

79. Rome之數學. 羅馬無可稱爲數學之學校,其學校所研究之學問,爲治國之術,如法律之類,凡爲政者之所需要也.

80. 羅馬之數學學校,所授之科目,爲普通實用算術,[借助於算盤者無疑]及整數性質之容易者,或Euclid之初步等,然其他種學藝,以數學爲基礎者,頗稱隆盛焉.

81. 第六第七第八世紀之教育. 中世紀之數學寂寞,而乏興味,總之自紀元第六世紀至第八世紀之間,西歐羅巴僅Benedict派僧侶,曾盡微力,然無專攻數學者,偶有之,亦不過知算盤之用法,算數之方法,及算耶蘇更生祭日三者已耳.

82. Boethius及Cassidorus. 二氏乃紀元第六世紀之著作家,爲古代數學與中世數學之關鍵.此二人中,最有名者,爲Boethius, [475年至526年],乃羅馬人中,研究希臘文學及希臘國語,最後

之一人．所出版之幾何學，選Euclid第一卷之命題，[僅題文]及第三第四之少數命題，其他關於面積應用者，而卷末附錄最初三命題之論證，以示其餘命題，皆爲可信者而已．氏亦著有算術書．

83. 中央寺院及僧侶學校．第八世紀之後半紀，Charles大帝，創立一帝國，命其國中之大寺僧院，必開一學校．是等學校，所敎授之數學，限於Boethius之幾何學，算盤用法，乘數表用法，及Boethius之算術等，而是等學校及Benedict派僧院以外，欲研修數學，則難矣．當時所用數學書，爲羅馬書，自不待言，蓋當時西歐羅巴人士，認羅馬爲開化之中心，且當時高僧，與羅馬之交際甚久故也．

84. 第九世紀及第十世紀之敎育．Charles大帝死後，一時學校多僅敎羅甸語，音樂，及神學，至於理學之研究則附諸等閑，然學校恆繼續成立，故不滿足於此有界限之熱心學者，於三學科以外亦有致力之機會焉．且有志求學者旣衆，苟有善良之敎師，則聽講者群集，然所敎理學，至不完備，僅算數之算術，敎會必要之音樂，測量用之幾何學，及計算祝日齋日所需之星學而已．而爲思想豐富學者，所特別注意之問題，爲論理學，超越的神學，及哲學之一部分而已，要之第九第十兩世紀間，敎授之數學，限於Boethius之二書，及算盤與乘數表之實地用法，自茲而後，始漸擴充其區域焉．

85. Gerbert. 第十世紀Gerbert出，奬勵學問．紀元999年，氏爲羅馬法王，受Sylvester二世之尊號．曾著算術，幾何學，及算盤用法諸論．

86. Gerbert於算盤縱列九個小珠，各附以相異記號，卽最初之珠，附以表1之記號，第二珠，附以表2之記號，以下準此．

87. 印度及亞剌比亞數學之發達．亞剌比亞及歷山市數學發達之結果，是時始傳入歐洲，茲且先述亞剌比亞之數學，次述學者之所以得亞剌比亞及希臘之敎科書，及是等書所以使歐洲數學進步之故．

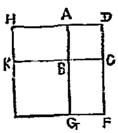
88. 印度之數學，自Aryan人種侵入而後，始有長足之進步．其幾何學則本於希臘，而加以進步，算術，代數學，及三角法，則多出自創作．其最古之著述家，以Arya-Bhata [500年頃] Brahmegupta [630年頃見第一門58頁]二人爲最．是等學者，講述算術之十進法，發明文章的代數學，而適用於普通之方程式，及各種問題，且應用三角法，以研究星學．

89. 亞剌比亞人常與印度通商，至建立帝國時，其交通益盛，自印度敎科書ノ，亞剌比亞始採用其十進法，蓋第八世紀之終也．其時希臘科學書，如

Euclid, Archimedes, Apollonius, Ptolemy, 及其他歷山派之著作,於第九世紀之末,亦漸有翻刻,而由回敎教主保管之.

90. Alkarismi. 爲亞剌比亞數學之鼻祖,於紀元830年頃,著代數學一書.後亞剌比亞及中世之代數學書,恆以之爲基本,故在數學史中占最優之位置.其書名Al-gebr we'l mukabala, Al-gebr可譯爲 the restoration, 此 Algebra 之名稱之所由來也.

91. 是書分五部,第一卷,示解二次方程式之法則,[不載證] Alkarismi所論之根,雖止於實數之爲正者,然氏已知有二根,此則勝於希臘人者.其兩根爲正者,恆僅取根號前爲負符號者求之,可謂奇矣.氏又以Euc. II. 4. 相似之方法,證明是等之法則.例如解$x^2+10x=39$[即$x^2+px=q$之方程式]先分爲二個,其一如下,以AB表x之值,其上作正方形ABCD,[觀下圖]延長DA至H,延長DC至F,若AH=CF=5,[即$\frac{1}{2}p$],則AC, HB, BF之積各爲x^2, $5x$, $5x$,故方程式之左邊爲AC, HB, BF之積之和,即Gnomon



[磬折形] HCG也.兩邊各加以正方形KG,[其積爲25即$\frac{1}{4}p^2$],則得一正方形,其積爲39+25,即64,[$q+\frac{1}{4}p^2$],而各邊之長爲8.若DH=8,則HA=5,故DH大於AH者爲3,即未知數之値.第三卷論$x\pm a$與$x\pm b$之積.第四卷論未知數有平方及平方根之式,而示其加減法則,且示算定平方根之法則,終之以$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$及$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$之定理.第五卷解二三之問題,茲舉其一例如次,"有二數,其和爲10,其平方之差爲40,問二數各如何".

92. 亞剌比亞數學之進步. Alkarismi死後,代數學,雖有進步,然不能脫文章的代數學之範圍.亞剌比亞人所研究之數學,爲方程式之解法,方程式之化法,及數之性質等.爾後代數學中最有聲名者,爲Alkayami及Alkarki,皆第十一世紀初之學者也.亞剌比亞代數學,雖應用甚廣,然僅限於數之問題,故與算術頗相似.今就亞剌比亞之算術書及代數學考之,亞剌比亞所用乘法及除法,與現今所用者略同,惟稍繁雜耳.但術理之應用問題與現今之書無異也.

93. 第十二世紀之數學大家.有Bhaskara者,生於印度.氏之代數學,爲略語的記號,較之先哲之書其進步甚速.氏之算術書,關於十進記法,及零之記號之用法,有明斷之敘述.氏之幾何學,本於希臘數學家之書,頗博亞剌比亞人之稱頌.

94. 亞剌比亞人之著作入歐羅巴.使亞剌比亞數學入歐羅巴者,非亞剌比亞人,乃西班牙人也.747年Moor人,建西班牙國至第十第十一兩世紀,文化

達於高度,與Bagdad之回敎主,政治上雖不親密,而甚歡迎亞刺比亞數學大家之著作入國.由是Euclid, Archimedes, Ptolemy,及其他希臘大家之著作,悉譯爲亞刺比亞文,而亞刺比亞代數學家之書,皆於Granada, Cordova, Seville所設Moor人之三大學校講讀之,且各加以註釋焉.

95. 第十一,十二,十三世紀間,耶蘇敎徒之數學家甚愛是等書籍,故歐羅巴人得傳播其學識.第十三世紀前半期中,可紀之事實,爲大學校之發達,及Leonardo, Jordanus,及Roger Bacon [Oxford之Franciscan monk (僧)]之三大數學家.

96. **Leonardo.** 氏於1175年,生於Pisa,父以巨商而爲Barbary稅關監督,Leonardo遂受敎育於此地,學習亞刺比亞之記數法,及Alkarismi所著代數學書.1200年頃,歸意大利,1202年著文章的代數學"Liber Abaci"一書流傳於世.書中論亞刺比亞記數法,較羅馬數字記數法之便.論代數學之範式.欲嚴密說明,則須用幾何學.示一次方程式之解法,且略述解二次方程式及不定方程式之方法,是等法則,乃依於數學上之問題,而說明之.

97. "Liber Abaci"有使歐羅巴各國用亞刺比亞數字之功績,故於數學史上,爲最貴重之書.

98. **Frederick II.** [1194年至1250年].皇帝Frederick二世,爲第十三世紀中,傳播亞刺比亞數學書於西歐之人.帝於1224年,建立Naples大學,於1238年,建立Padua大學,至今尙存.當時猶太人之長於醫術,且有科學上之知識者,大受西班牙國之優待,帝遂以猶太學者立一局,凡亞刺比亞數學書之原本,及希臘大家之著作,悉使翻譯之,第十三世紀之終, Euclid, Archimedes, Apollonius, Ptolemy,及亞刺比亞數學大家之著述,皆得自猶太人之手,自玆以後,西歐學問之進步,乃不藉助於亞刺比亞矣.

99. **Jordanus.** 與Leonardo同時代之德意志數學家,有Jordanus,氏所著幾何學,雖甚豐富,然其顯著者爲算術及代數學之書.

100. Jordanus所著之書,尙有力學,光學,星學等,而其力學,中世紀間,尤鮮知之者.

101. 足與Leonardo及Jordanus之數學家比擬者,爾後二百年間,數學史上無其人.兩氏之功績,雖非當時學問之基本,而其著作,頗得兩世紀間生徒之稱頌,然是等生徒,能得新定理者極稀,惟Roger Bacon [1214年至1294年],於理科學之硏究,貢獻尙大.

102 第十四紀. 本世紀之數學史與前世紀同.大抵輸入亞刺比亞及希臘之數學敎科書而已.至本世紀之中

葉,Euclid系統之幾何學及算術,數學家恆愛讀之,Ptolemy系統之星學,亦爲人之所注意.斯時之曆書,附錄加減乘除諸法則,與亞剌比亞記號之說明,至更重要之曆書,並陳述比例法則,且集種種實用問題,而解釋之.

103. 第十五世紀.本世紀數學史中以四學藝爲必修科目之法令,不實行矣. 1437年至1438年間,Leipzig大學之講座表,今尚存也.蓋當時數學講義,惟限於占星學,而Bologna, Padua, 及Pisa之記錄,亦言第十五世紀,以占星學爲惟一之數學. 1449年至1463年間Oxford大學之記錄,所教授之數學科目,爲Ptolemy之星學,[或其註釋書],及Euclid之最初二卷,學生之能否悉達此程度,則不能無疑.又觀1536年巴黎出版之Euclid之"Elements",謂1452年以後,欲得學士學位之候補者,必宣誓已聽Euclid最初六卷之講義云.

104. 至第十五世紀之中葉,印刷術發明,容易交換知識,而弘博之著作,亦由是進步矣,是時定爲中世紀之終,實至當之時代也.

文藝復興時代之數學

105. 文藝復興時代之始.數學者得亞剌比亞人數學之知識,及希臘數學家著作之翻譯書,又值東帝國滅亡,自Constantinople逃亡之人,攜來希臘數學書及其口授,於是第十五世紀中葉,歐羅巴人乃得學希臘及亞剌比亞之數學.斯時適印刷術發明,故容易普及,科學之進路,遂爲之一變.夫印刷術之發明,實開近世文明之始,而爲各種學問活潑之時代也.其時組織之新大學,[Scotland在內],雖較中世諸大學稍簡.然各處設立,其學業之隆盛可知也. 1492年亞美利加之發見,及宗教改革前之研究,皆因印刷術之發明,使新思想如洪水,放濫於歐羅巴,而數學之進步,尤較文學美術及政治學爲大焉.

106. Rogiomontahus[1436年至1476年]氏爲是時數學最有名之先輩,於Vienna大學,學數學於Purbach教授.後遊歷諸國十餘年,以1471年定居於Nuremberg,設立天文臺,及印刷所.既應Sixtus四世之聘,往羅馬,改正太陽曆,不幸到羅馬未久乃被暗殺.

107. Regiomontanus得希臘數學書之原本而應用之,蓋當時第一人也.其修學之成蹟,見於1464年所著之De Triangulis書中,雖所用三角函數,僅及正弦餘弦,然說明平面及球面三角法,爲最初有條理之書.而代數學亦應用於其中焉.

108. 符號+,-,=.斯時代數學所改進者有三,即加法,減法,及相等之符號也. 1489年發行之Widman之算術書中有+及-之符號,蓋是等符號使用

最早，有謂原來爲倉庫之標號者，然最可信者，加符號乃自拉丁語 et 之略語 & 而出，而減符號，則因語中省字之表示，恆畫橫線，相等號 = 則 Record 始用之。

109. Pacioli. [1500 年頃]. Lucas Pacioli 於第三世紀之中葉，生於 Tuscany，其傳記不詳。初爲僧侶，宣講於意大利之各市，後於 Milan，始占數學敎授之位置。1510 年頃，死於 Florence.

110. Pacioli 所著重要之書，1494 年出版於 Venice. 是書分二部，第一部爲算術及代數學，第二部爲幾何學。其算術及代數學，爲印刷書中之最古者。

111. 第十六世紀之初，印刷術大發達，昔時數學家所著作，皆能置於學生之座右。雖無何等之大發見，其改良之處亦甚多。代數學則多傾向於解析的，而略語及運算之記號，大都熟習之。

112. Tartaglia [1500 年至 1557 年] Nicholas Tartaglia [即 Nicholas the stammerer 之謂也] 生於 Brescia. 1535 年，因與 Antonio del Fiori 合試數學而有名。Fiori 解三次方程式 $x^3+qx=r$，不本於學理，而由於實驗。Tartaglia 謂其式須化成數上之方程式以解之。Fiori 謂氏言虛僞，互相爭論。氏於是推測 Fiori 所設問題，不外三次方程式，乃悉心研究發明一般之解法。及至爭勝之日，氏所受問題，悉爲三次方程式，氏不出二時間皆化成 $x^3+qx=r$ 之形而解之。而 Fiori 受氏問題，尙未能解其一。

113. Tartaglia 主要之著作爲算術書，1556 年刊行之，又著數之理論。1560 年刊行之。是等之書，文雖冗長，當時所行算術種種之方法，悉網羅而詳說之，且於數學史上，多有可記載之價值。氏算術書，廣集商業上各種問題，且作若干特別問題之代數式。至於數之理論，展開 $(1+x)^n$ 而求 x 之係數，其 n 等於 2, 3, 4, 5, 6 者，則設一方法，自 $(1+x)^{n-1}$ 之展開者而計算之。

114. Cardna. [1501 年至 1576 年]. 氏主要之著作爲代數學書謂之 "Ars Magna", 1545 年刊行之。氏請 Tartaglia 傳以三次方程式之解，而 Tartaglia 不許，因僞招之於 Milan，立誓決不示人，且不爲死後遺書，而人能見而解之者，乃得 Tartaglia 之傳。然氏竟背此誓，而敎授與人，1545 年，公之於世。

115. "Ars Magna" 爲空前之代數學書也。前此之代數學者僅論方程式之正根，Cardan 則論及負根與虛數，且證明虛數恆爲偶而起者。且謂虛數爲絕妙之數，惟目虛數爲無用，而不能說明虛數之意味。其三次方程式之解析，多係氏之創作，且謂三次方程式有三個實根者，Tartaglia 之解，僅以含虛數之形示之。氏死後數年，Bombelli 亦研究此數，自茲而後，經過 200 年間，始有 Euler 研究虛數之理。若言完備

之論證,則當以 Gauss 爲始. Gauss 定複變數之記法,實開近世數學理論之先河.

116. Cardan 實證方程式之係數與根之關係. 又已知 Descartes 記號規則之理,然因當時習慣,將正項列爲兩式相等之方程式,故不能精密表其符號之規則. 凡一函數以二數代入,其結果有反對之符號者,則此函數爲 0 所作之方程式,此二數之間,必有一根,氏本此理,立數字方程式之根之略算法. 氏二次方程式之解,爲幾何學的,即 Alkarismi 之法也. 三次方程式之解亦爲幾何學的. 氏弟子 Ferrari 又將四次方程式化成三次而解之,其法亦載於"Ars Magna".

117. 氏以後之數學家雖皆平凡,然嘗及代數學之知識研究平面三角法,如含二角以上之範式 Sin (A±B),亦甚有力焉. 當時出版之代數學書亦頗多,玆特就 1572 年刊行 Bombelli 之代數學書,而記述之

118. Bombelli 所著之代數學,凡當時所用之法,皆彙集而說明之. 書中論實根虛根之理,及方程式之理論,及不能化之三次方程式,而根皆爲實數之理. 其最有名者,爲改良代數學上之記號法. 當時表未知數及羃之記號,皆用其語之略字,其最普通者,未知數用 Radix 或 res (x) 之略 R 或 Rj,其平方用 Zensus 或 census (x^2) 之略 Z 或 C,至其立方則用 cubus(x^3) 之略 C 或 K. 故 x^2+5x-4,則如 1Zp. 5Rm.4 記之. 式中 p 表 Plus [加符號], m 表 Minus [減符號]. 又有用他文字及記號者,將前記之語式,如1Q+5N−4 記之. 而 Bombelli 之進步,則如次. 氏以 ①̲ 表未知數,以 ②̲ 表其平方,以 ③̲ 表其立方,以下同之,故 x^2+5x-4,則記之如 1②̲p. 5①̲m.4. 1586 年 Stevinus 以相似之方法. 用①,②,③,……,則前記之語式,當記之如 1②+5①−4⓪. 是等記號,雖稍便利,尙爲語之省略,而未脫文法上之規則,不過在運算及結果,可精密記載之速記耳. 此後之進步,則爲記號式代數學,而其發明之名譽,則爲 Vieta 其人也.

119. Vieta. [1540 年至 1603 年] 氏生於 La Rochelle 之附近. 其時法國有和蘭公使某,語 Henry IV 曰,臣同國人,有 Adrian Romanus 者,1593 年設幾何學一問題,求天下之解答,然卒不聞有解之者. 蓋此問題當爲第 45 次之方程式也. 適 Vieta 以數學合試而得名,且知展開 $\sin n\theta$ 而作 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之項之方程式,故見此問題,卽知以中心角爲 $2\pi/45$ 之單位圓之弦,而作方程式,乃走鉛筆以數分鐘解之,此氏不朽之榮譽也.

120. Vieta 所著代數學及幾何學之書甚多,其 1591 年刊行 In Artem Analyticam Isagoge 改良代數學記號,遂知名於世.

121. Girard [1590 年至 1633 年] Vieta

解三角法之結果,及方程式之理論,皆依和蘭數學家Girard而擴充之者也. Girard主要之發見載於所著之"Invention nouvelle en l'algèbre"中. [1629年刊行]. 書中括弧之用法此其最早者,又以幾何的說明負符號,示代數學方程式之根之數,等於其次數,且判別虛根之有無.

122. Napier. [1550年至1617年]. 對數之發明者爲John Napier,生於Merchistoun. 又於1617年,製計算尺,用此器,能以一數乘除他數. 又發見球面三角法之某範式.

123. 對數之發明. 代數學上使用指數,而對數由此而起,此自然之勢也. 然Napier不用何等之記號法,而論究其結果. 此發明實欲省乘除之計算,數年努力,卒以1614年,公之於世.

124. Briggs. [1556年至1631年]. 氏受教育於Cambridge大學,1619年,始於Oxford大學,教授幾何,襲"Savilian chair"之職,而終其身. 氏之講義,始於Euc. I.9.,其聽講者,較Savile尤多,歐洲星學及其他之計算,直接採用對數者,惟氏之書. 氏於1617年,作常用對數第一表,刊行於世.

125. Harriot [1560年至1620年]. 氏擴張方程式之定理,且作成其法則. 少時住亞美利加,爲測量Virginia及North Carolina之第一人. 歸英國,居London專攻數學. 所著"Artis Analyticae Praxis"於1631年刊行之,與近世代數學及方程式理論之教科書,殆無區別. 書中始用大小之記號>及<.

126. Oughtred. [1576年至1660年]. 氏著"Clavis Mathematicae"於1631年刊行之. 書中論乘法之記號×,及比例之記號::,前此比例式$a:b=c:d$,恆書爲$a-b-c-d$,氏改書爲$a.b::c.d$. 1657年著三角法,始用正弦餘弦之略語.

127. 力學之發展. 文藝復興時代之末年,數學全科及他科學,其研究之興味又呈復活之象. 第十六世紀後半期代數學方程式之理論,及三角法,既大進步,第十七世紀之初,幾何學又發明新法焉. 然應用數學,在第十六世紀後半期僅沿用Archimedes所研究之靜力學,[剛體的]及流體靜力學之理論,而無甚進步,如動力學,並未成一科學,自Stevinus出,始致力於靜力學之研究,自Galileo出,始制定動力學之基礎.

128. Stevinus氏於1586年刊行靜力學及流體靜力學,因此名噪一時. 書中論力之三角形即Leonardo da vinci所述之定理,而氏稱爲力學基本之命題也 前此靜力學以槓桿之理爲基礎,自氏出書,乃證明直線可以代表力,由是證明許多定理,可爲幾何學命題,而證力之爲平行四邊形或三角形,特其普通者耳. 氏又發見支持斜面上已知之重量,實爲沿最大傾斜線而動之力,此蓋久爲疑問,而不決者也. 氏於流體

靜力學,則研究壓力之問題.

129. Galileo. [1564年至1642年]. 氏於1587年刊行水秤之說明書, 1588年, 刊行剛體重心論. 旋應Pisa大學之聘,教授數學. 自斜塔墜物,以行墜體之試驗,而確定動力學之原理. 1592年,任Padua大學教授,在職18年. 氏之主要講義,爲力學及流體靜力學,其要領,載於1612年刊行之力學論中.

130. Galileo謂墜體落下之速度,不比例於重量,[當時皆謂爲比例於重量者]且謂墜體以等加速度而落下,則速度,與空間及時,有一定之關係. 其後觀察由斜面上滑下物體之時間,始明示其假設之眞理. 又證明拋體之通路,爲拋物線,惜未將其運動之法則,明確記述之耳,然則謂氏爲動力學之創定者,寗謂爲Newton之先導也. 氏於靜力學,則發見機械所得之力,以同比例而失於速度之定理,於剛體靜力學,則發見已知重量,定於斜面中之力,於流體靜力學,則述壓力及浮體淺近諸定理,而其應用流體靜力學之器械中,其寒暑表,雖不完備,究可謂氏之創作.

131. 總括Galileo之著述,而下以略評,則其力學之研究,可得最高之榮譽. 而星學上之觀測,及其論說,亦甚完善,且其文章暢達,尤能發揮無遺.

132. 純正幾何學之復活. 第十六世紀之末,數學界足以大書特書者,即動力學理論之發見,與幾何學興味之復活是也.

133. Kepler [1571年至1630年] 氏爲近世星學鼻祖之一人,生於Stuttgart之附近,其父雖貧,卒使入Tübingen大學而受教育. 1593年,氏爲Grätz大學之敎授, 1599年,爲Tycho Brahe之助手, 1601年,襲其師之職,而爲德帝Rudolph二世之星學家. 氏於幾何圓錐曲線法,及器物之體積或表面積等,均有所著述.

134. Desargues. [1593年至1662年]. Kepler擴張希臘人幾何學之概念,其時尚有一素不知名之法國人Desargues,研究幾何學,發明一新法,即今之射影幾何學. 斯人自1626年至1630年,在巴黎,不收學費敎授數學,然其射影幾何學,卒見棄於世,則因Descartes之解析幾何學大得勢力也. 氏之研究,多在1639年出版之Brouilon project中,詳載對合,相應[Homology],極及極線,及透視法之基本定理.

135. 文藝復興時代終期之數學. 第十七世紀之初,算術之原理,代數學,方程式之理論,及三角法所用之語,及方法,幾與今無異,然近世代數學及三角法之記法,當時用之者雖多,實非普通之事,而數學特用之語,至第十七世紀之終,亦未確定. 就應用數學觀之,則Archimedes以來,靜力學進步甚微,動力學僅Galileo立其原本之基礎,蓋力學

在Newton未出以前,其基礎尙未十分固定也.

近世之解析

136. 新紀元之始. 解析幾何學及微分積分學之發明,可謂開近世數學之新紀元. 解析幾何學1637年Descartes始用之,微分積分學,再經三四十年Newton始發明之. 近世數學,較前此之數學,其複雜實在數層以上,而解析幾何之發達,其應用於力學及星學,實爲近世紀之特質.

137. Descartes [1596年至1650年] 氏生於Tours之附近,受教育於有名之聖教會學校 la Flèche. 氏一日出遊於街市見一廣告,記載一幾何學問題,求大衆之解答,氏以數時間解之. 於是氏自以爲長於數學,遂專心硏究之.

138. 氏之關於Universal Science之著述,1637年出版於Leyden. 書名"Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la Verité dans les Sciences". 其附錄三書,爲La Dioptrique, Les Météores, 及La Géométrie. 其解析幾何學之發明,卽在此時. 1649年,氏應瑞典女王之召,詣瑞國,數月後,罹肺炎而卒.

139. 氏數學之功績,爲解析幾何學及渦論,其名譽之所歸,亦卽解析幾何上之諸發見.

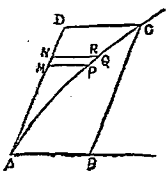
140. Descartes所著"Géométrie"分三卷,第一卷爲解析原理之說明,而Pappus提出之問題,亦卽以此解之. 其問題之主要部分如次,"自一點,向已知二直線,所引垂線之積,與向他二已知直線所引垂線之積,有定比,問此點之軌跡如何,"Pappus謂此軌跡爲圓錐曲線,然未示其證,Descartes亦不能以純正幾何學解之,惟證明此軌跡可以二次方程式表之,卽證明其爲圓錐曲線也. 後Newton始以純正幾何學作巧妙之證明. 第二卷硏究關於曲線之問題,且就切線及法線論之.

141. "Géométrie"之第三卷,爲當時所行代數的解析,表已知量,用字母[羅馬文字]初之部分,表未知量用字母終之部分,定現時所行指數法. 決定代數方程式之正根及負根,而示其規則,且載解方程式用不定係數之法,惟其定任意次數方程式之解法,則氏之誤也.

142. Cavalieri. [1598年至1647年] Descartes之幾何學,出版於1637年,同時積分學之原理[關於求總和者]亦發見於意大利,書名The principle of indivisibles [不可盡數之理]蓋卽Bologna之數學教授Cavalieri所發明也. 氏以之求曲線之長及表面之面積,且以之求體積質量之中心,而廢止希臘所用繁雜之窮極法,蓋不可盡數之理與窮極法,主義雖同,而記法大有精密迂遠之分也. 然

第十八世紀之初,積分學起,是法亦廢.

143. 不可盡數之原理,1604年及1615年, Kepler 曾用之, 然其法不精, 1629年 Cavalieri 始明白述之, 至1635年, 尙未公之於世. 不可盡數數如次, "任何之大, 得以任意必要之比, [卽等比]分爲無數之小量." 例如求直三角形之面積, 將底邊爲自 n 不可盡數而成, 他邊爲自 na 不可盡數而成, 則在底邊次第之點之縱線, 必含 $a, 2a, \cdots\cdots, na$ 之不可盡數, 故面積之不可盡數爲 $a+2a+\cdots\cdots+na$, 而其總計爲 $\frac{1}{2}n^2a+\frac{1}{2}na$. 若 n 爲極大, 則 $\frac{1}{2}na$ 比於 $\frac{1}{2}n^2a$ 爲極小, 故可捨之, 故其面積爲 $\frac{1}{2}(na)n$, 卽 $\frac{1}{2}\times$高$\times$底. 斯證明之說明雖易, 然不能以形表之. 此不可盡數之理之例, 今再依極限法而說明其應用. 如拋物線 APC, A 點之切線 AD, 及徑 CD, 求此三線所成之面積. 先完成平行四邊形 ABCD, 將 AD 依 n 等分之, 使 MA 爲其 r 倍, MN 爲其第 $(r+1)$ 之部分. 引 MP, NQ, 平行於 AB, 引 PR 平行於 AD, 則 n 爲極大時, 面積 APCD 等於 PN 平行四邊形總和之極限. 而面積 PN : 面積 BD $=$ MP.MN : DC.AD, 但 MN : AD $=1:n$, 又依拋物線之性質, 而 MP : DC $=\overline{AM}^2:\overline{AD}^2=r^2:n^2$, 故 MP.MN : DC.AD $=r^2:n^3$,



卽面積 PN : 面積 BD $=r^2:n^3$, 故

$$\frac{\text{面積 APCD}}{\text{面積 BD}}=\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)}{n^3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}.$$

144. Pascal. [1623年至1662年]. 與 Descartes 同時之人, 性質之敏慧, 無及於 Pascal 者. 氏幼具非常之才識, 家庭恐其思慮過度, 除語學外, 如數學者, 不許習之, 乃氏學數學之念, 達非常之高度, 遂於遊戲時間學幾何學, 數週間內發見圖形之諸性質, 且發見三角形內角之和等於二直角. 氏父見氏如此, 卽許學數學, 其進步極速, 十四歲入法國幾何學者所組織之每週會, 十六歲作圓錐曲線之論文, 十八歲作算術器械, 後八年, 加以改良, 受專賣特許. 氏與 Fermat 通信, 研究解析幾何學, 及物理學. 乃1650年, 氏忽棄其酷愛之學問, 而研究宗敎. 然三年後管理其父食邑事務, 復研究數學及理學. 氏體質素弱, 因用功不輟, 十七八歲時患不眠症及胃弱, 常困之.

145. Pascal 最初論文之圓錐曲線論, 成於1639年, 至1779年始刊行之, 此本實以 Desargues 所敎授者爲基礎也. 其二結果極重要, 且最有趣. 第一爲 Pascal 定理, 卽 "圓錐曲線內作六邊形, 則其對邊之交點在同一之直線上." 第二, 實爲 Desargues 之發見, "圓錐曲

線內作四邊形,使直線交之,與其邊之交點,次第爲A, B, C, D, 與曲線之交點,爲P, Q, 則PA.PC : PB.PD=QA.QC : QB.QD".

146. Pascal之算術的三角形,成於1653年,至1665始刊行之,其三角形之作法最容易,且能於任何斜線之數,而定二項式展開之係數.又已知$(a+b)^{n-1}$展開之係數,則$(a+b)^n$之展開可由此得之,氏特詳述其理.氏用此三角形求此係數,又用此三角形求自m個物每取n個之組合之數,卽下式之所表也.

$(n+1)(n+2)\cdots\cdots m/(m+n)$.

147. Pascal雖爲數學家而所以知名於世者,因1654年與Fermat通信也.其信中所論,爲適遇法,當時因某博奕家出一題與氏,氏卽以之轉告Fermat也.

148. 氏最後之著述爲擺線論,擺線[Cycloid]者,爲一圓形物沿直線而旋轉,其圓形物周之一點,所畫之曲線也.1630年Galileo始有此曲線之稱.四年後Roberval發見其面積.當時有將此曲線及軸或其底或廻轉頂點之切線而作成之表面及實體諸題設問者,關於此等問題,或與此類似者並旋轉體重心之諸位置,氏均於1658年解之,將其結果公之於世以求數學比藝,其時Wallis雖能解此,然關於重心之問題,終不得其解.蓋Pascal之解,用不可盡數之理,與近世數學家用積分學者無異.

149. Wallis. [1616年至1703年]氏爲Ashfold牧師之長男,其家寬裕.幼入學於Felstead school,十五歲某聖日,見其兄弟持一算術書,借而觀之,二週間悉通其法.氏欲學醫,赴Cambridge大學,最愛數學上之興味,遂專心研究之.1649年於Oxford占幾何學之Savilian chair雖見拒於Independents,然終得此職,而終其身.氏所著數學書論解析部分,而用無限級數之法,且說明當時之基本的學者及先輩所述解析新法之原理.氏於數學外有神學論理學及哲學之著作,又始創聾啞教授法.

150. Wallis著述中最主要者,爲Arithmetica Infinitorum. 1656年刊行之.書中擴張Descartes及Cavalieri之解析法,而求氏之評論世此書之發端作指數之法則,而x^0, x^{-1}, x^{-2},…………表1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$,………, $x^{\frac{1}{2}}$表x之平方根,$x^{\frac{2}{3}}$表x^2之立方根,而x^{-n}表x^n之逆數,$x^{\frac{p}{q}}$表x^p之q乘根.

151. 三年後氏又著一小論,載Pascal所提出關於擺線之問題,且說明應用Arithmetica Infinitorum中所記述之原理,以求代數曲線之長.1657年氏門人William Neil者,以之求半立方拋物線$x^3=ay^2$之長,此以數學求曲線之長之嚆矢也.從此遂有求橢圓雙曲線

之長之希望,1658年Wren求擺線之長,然斯時有不依Neil之發見而發見之者,此爲Van Heuraët,蓋1659年Van Schooten已於Descartes之Géométrie中,公表也.

152. Fermat. [1601年至1665年] Descartes定解析幾何學基礎時,有與之相伯仲之法國數學大家Fermat,亦考究解析幾何學. 氏生於Montauban之附近,爲皮革商之子,受敎育於家庭.

153. 數之理論,爲Fermat所最嗜好者. 次擧之例,爲氏最有名之發見. (I) p 爲素數,而 a 對 p 於爲素數,則 $a^{p-1}-1$ 能以 p 整除之. (II) 大於2之素數,能以二個平方數之差表之,而惟有一法. (III) $4n+1$ 之形之素數,能以二個平方數之和表之,而惟有一法. (IV) 若 n 爲大於2之整數,則 x, y, z 之整數値,不能適合於 $x^n+y^n=z^n$ 之方程式. 此命題無知其一般之論證者,亦無疑其不眞者,故非常有名.

154. 觀氏與Descartes之通信,似氏未讀Descartes之書時,已能[大抵在1628年頃]考定解析幾何學之原理,及曲線方程式之諸性質. 然其發見,至1637年頃,尙未公之於世. 氏記述之存於今主要者,惟論應用無窮小數於幾何學耳,此外定曲線之切線求曲線之面積. 及極大極小之問題,亦各有記述.

155. Fermat在科學歷史中聲名無匹. 氏所設關於數之性質之問題,後人欲得其解者雖多,而能解其多數者.惟Euler耳,然尙有一問題無論何人不能解答. 因此其他著述反被掩蔽. 其實氏之著作,可珍貴者甚多,惜乎遺書特少耳.

156. Huygens. [1629年至1695年] 氏爲和蘭數學之泰斗,然其傳記甚平凡,僅就數種之紀錄與硏究記之. 氏著作中最貴重者,爲1673年出版之Horologium Oscillatorium.

157. 1689年氏爲訪Newton,自和蘭往英國,蓋氏讀Newton 1687年出版之"Principia"極欽佩之也. 氏歸和蘭,著光學一書,記述波動說.

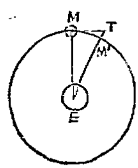
158. 此時代之諸數學家. 數學史至近時代,最爲複雜,其數學家亦多,今記述第十七世紀前半期之諸著述家,皆使數學發達之先輩,而開後繼者之途徑者也. 茲將其中主要者記於次.
Mersenne [1588年至1648年], Van Schooten [1661年死], Hudde [1633年至1704年], Nicholas Mercator [1687年死], Barrow [163年至1677年], Viscount Brouncker [1620年至1684年], James Gregory [1638年至1675年].

159. Newton. [1642年至1727年]. 氏生於Lincolnshire,受敎育於Trinity大學,自1661年至1696年住此處,其時有數學上之大著述. 1696年任政府之高官,遷居London,而終其身. 氏具非常

之才智,故當時所學習數學之各科,能使其特別進步,且發明極多之新術理.

160. Newton之入Cambridge大學也,尙不知數學之爲何物,然四年間成完備之數學家. 得B. A. 之學位之年,有所書之手稿,記爲1665年5月8日,此氏發見Fluxions [微分學]記述最古之確證. 氏發見二項式定理,亦卽此時後一年半,復有顯著之發見,如完成微分學積分學,製作凸凹鏡磨非球面之器械,分解太陽光爲種種之色,考定引力之理之基本.

161. 1666年考定引力原理之概略如次. 引力及於最高山之頂上,且及於遠距離之月,月之環繞地球,而有其軌道,亦以此引力之故. 氏欲確定此假設也,謂於地球之近傍,墜一石則知地球之引力,[卽石之重],使石一秒間落下16呎. 月之軌道近於圓,氏以概算而知月之距離,因而其軌道之長亦知之. 又知月繞地球一周之時間,卽一個月之長. 故氏容易於任意一點M,而發見月之速度. 故得知月於一秒間[假定地球無引力]所行距離MT,然此一秒間,月實際行至M′,此無他地球引月近至TM′之距離也. [地球引力方向爲一定不易者]. 氏依Kepler之第三法則,推測地球引一物體之力,與距地球中心平方成反比,此推測若



眞,則TM′之於16呎之比,等於自地球至月之距離,與地球半徑平方之反比. 氏於1679年反覆研究發見TM′之値,與此假定之値一致. 然1666年氏於月之距離之計算有誤,實際TM′之値,比此假定之値,小八分之一,而氏尙未移其信念以爲或有他力[如Descartes所謂渦捲是]之加入也.

162. Newton於1667年被選爲其大學之給費研究生,永久住於Cambridge. 後二年,Barrow辭其Lucasian chair之職,讓之於氏,氏之在其敎職也,每年一學期間一週,公開講義一次. 而每週四時間,爲氏結論其所曾述之講義,而召其學生之優者,爲之績之,故氏無重複之講義. 任職十八年,有前十七年手訂之講義,至今尙存.

163. 最初Newton選擇光學,爲其講義及研究之材料,1669年,發見以三稜鏡,分解白色之光線,爲諸色之光線,因此說明虹之現象. 氏有奇異之事,誤以一對三稜鏡,改正二色之收差,因而絕望於消色屈折望遠鏡,而計畫反射望遠鏡. 1672年,氏發明反射顯微鏡旣又發明六分儀.

164. Newton次攻究光線由來之問題,於1675年,作成極微分子論,卽放射論. 光之生於器械上之方法,自古有三說,曰目放光至物體,因而得見之,此希臘人之說也,曰物體放射物而達於目,因而得見之,此氏之放射說也,曰

目與物體之間有物[ether]物體因此物之形狀或性質,有所變更,故得見之,此以波動說或搖動說而想像之者也. 放射說與波動說,得說明屈折反射等幾何光學之現象, Newton之說,則為現今不可擁護者也,然氏所述簡單之假說,恆可生某結果,亦須知之.

165. Newton於1676年有與人書二通,言關於解析方法之事. 其一為其6月13日,答Leibnitz之問,說明以級數展開函數之方法,及二項式定理及$\sin^{-1}x$之展開,又自$\sin^{-1}x$之展開,而展開$\sin x$,又以無窮級數,而求橢圓之弧之長. 其二為是年10月24日,寄與Leibnitz者,述展開級數,用三種之方法.

166. Hooke 1679年以Royal Society之要求,致書與Newton,言Society所欲通信之意,及所用Pi ard地球半徑之測量之研究, Newton不得已就其1666年算定月之軌道,反覆推究之,然其結果,卒使氏所假定之引力,得其完全之證明焉. 氏又論依中心力而起之運動,(1)同時畫同面積,(2)依求心力繞一焦點畫橢圓,則其力依焦點距離之平方而反變,(3)逆之,若力依一點之平方而反變,則軌道係以此點為焦點之圓錐曲線. 氏因避科學上之爭論,不以出版,而記載於備忘錄中. 五年後,有以此請求氏之出版者,氏許之,蓋特有之問題也.

16 '. Univer a' Arithmetic 一書由代數學,方程式之理論,及雜問而成. 書中載氏1673年至1693年所述講義之要領. 此Newton始以文字指數紹介於世者也. 氏論一方程式之根,為一問題之解,則其方程式,有此問題可得之根,又就問題而作方程式,則此方程式,亦有不適於問題之根. 氏擴張Descartes所定方程式虛根之數之規則,示數字方程式正根最上限之規則,及數字根略近值之規則,作方程根之n乘冪之和之定理,方程式根之對稱函數之理論基礎.

168. 氏於1685年刊行其所著之"Principia",第一卷專論空間之點或體[或行已知之軌道,或受已知之力而動,或在相互引力之下]之運動. 第二卷論妨礙運動之中間物中之運動,述流體力學之理論,且應用之於波浪潮汐及音響學. 第三卷應用第一卷所得諸定理於太陽系之現象,定行星之質量及其距離,並其衛星之質量,及其距離,論究月之運動及潮汐,又作彗星論,示其屬於太陽系者,且就特種彗星而論其觀測.

169. 歐洲大陸之微分積分學. 近世之解析直接出於Leibnitz及Bernoulli一族之著作,非出於Newton者也. 玆簡單述之.

170. Leibnitz [1646年至1710]年. 氏生於Leipzig,未六歲,其父亡,雖已入學校,其教授至不完全,然氏卒以發憤而戰勝一切困難,十二歲以獨修而通

拉丁文,既又獨修希臘文,二十歲以前,凡數學,哲學,神學,及法律之普通敎科書,悉通之.

171. 氏著述以數學上之論說爲第一,而最可貴重者,爲微分學,其最古者,爲1684年所刊行,而發見極大極小,且示曲線之切線法,研究一逆問題,卽發見次切線之不易曲線也,定x^n之微係數,及積與商之微係數,1686年及1694年,就新微分積分學之原理,作一論文,其記載微分學之目的及方法,雖不無曖昧之點,然氏所用記法,實優於Newton,而近世數學之結果,皆以氏所發明之語表之,氏之著作,誠可傳之無窮也.

172. Leibnitz就曲線及力學問題之疑問,作種種之論說,其解析雖精,而所記符號所論結果,所示應用,恆有謬誤之處. 然氏之名譽,仍確立於堅固之基礎上. 蓋氏之名與其微分積分學之解析相關聯,恰如哲學者Descartes之名,與其解析幾何學相關聯也.

173. Leibnitz爲大陸數學家特別之人,氏之外尙有James Bernoulli [1654年至1705年] 及 John Bernoulli [1667年至1648年]之二人. 此二人不僅精通當時研究之問題,而第十八世紀前半期間大陸數學諸大家,未有不直接或間接受其敎育者,而John Bernoulli爲James Bernoulli之弟也.

174. 大陸解析之發達. 第十八世紀之前半期,英國數學家衰微,而大陸數學家,於解析幾何學,及微分積分學之方法與用語,罔不精通,其傑出者,爲l'Hospital [1661年至1704年] Varignon [1654年至1722年], Nicole [1683年至1738年], 第十八世紀之中葉 Clairaut, D'Alembert, Daniel Bernoulli 及 Euler, 亦爲有名之著作家.

175. Clairaut. [1713年至1765年]. 氏生於巴黎,十八歲時作彎曲線論附論證Newton所謂"三次曲線爲五個拋物線之一之射影",十年後,氏受命測量子午線一度之長,歸而刊行地球形狀論,以Maclaurin之說爲基本.

176. 氏觀Newton及Maclaurin之書所載幾何學,乃拋棄解析,1752年著關於太陰之書,而以幾何學嚴密敘述之,

177. D'Alembert [1717年至1783年], Jean-le-Rond D'Alembert生於巴黎,其母棄之於St. Jean-le-Rond小敎會堂,遂育於僧侶之手.

178. 氏數學上之著作,皆成於1743年至1754年之間,其第一卽關於力學之書,書中載氏名之原理,後人應用此原理得書任意剛體運動之微分方程式.

179. Daniel Bernoulli [1700年至1782年]. 氏爲John Bernoulli之第二子,乃與Euler同時之人,且爲其親友. 1724年,赴St. Petersburg,敎授數學,其地生活

粗野,至1733年,氏失其健康,遂歸Bâle,而爲醫學,心理學及物理學之教授.

180. 第十八世紀英國之數學家. 英國人當初之於微分積分學,不用Leibnitz之記法,而用Newton之記法,蓋嫌忌Leibnitz及John Bernoulli之行動也.遂離大陸派同時代之數學家,而成孤立之勢. 英國派主要之數學家,爲Halley [1656年至1742年], Taylor [1685年至1731年]. Cotes [1682年至1716年,氏始作差誤之理論]. Demoivre [1667年至1754年,氏發明虛數所論三角法之一部而關於循環級數及部分分數亦有著述], Maclaurin [1698年至1764年],及Thomas Simpson [1710年至1761年]. 茲且記述Taylor及Maclaurin之事.

181. Taylor [1685年至1731年] 氏受敎育於Cambridge,崇拜Newton之最熱心者. 氏最初之著作,出版於1716年,書中證明有名之定理如次.

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\cdots\cdots,$$

依此定理,凡單一變數之函數,皆得展開其冪.氏將此應用於他種問題,而作絲之橫振動之理論. 而一光線通過異種之中間物,氏示其通路之微分方程式. 又假定空氣之密度,爲僅關於自地面之距離而用四次曲線,且略定其曲線之形. 氏研究懸鏈線之形,且決定振動與擊之中心. 1719刊行其所著透視法之書,爲講述消逃點原理之最早者.

182. Maclaurin [1698年至1746年]. Colin Maclaurin生於Argyllshire,初爲Aberdeen之數學敎授,後轉任於Edinburgh. 1745年氏對於Young Pretender之襲擊,雖奮力防禦,終避於York,遁走中洗身於Edinburgh之壕中,卒以飢死.

183. 氏所著"Geometria Organica"於1719年公於世,此推闡Newton所設一定理也. 次年刊行其續編,載關於圓錐曲線之徑,漸近線,及各種之幾何學之定理.

184. 1742年著微分學一書,書中載次之定理.

$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+\cdots\cdots$此結果1730年James Stirling示之,其爲自Taylor定理推定者不待言也. 氏又說明重要之定理如次,若$\phi(x)$爲正量,且x因$x=a$至$x=\infty$增大而減少,則級數$\phi(a)+\phi(a+1)+\phi(a+2)+\cdots\cdots\cdots$因$\int_a^\infty\phi(x)dx$爲有限或無限,而爲收斂或發散. 氏又區別極大極小之正確理論,而作其法則.

185. 氏著作中之最可貴重者,爲幾何學,靜力學,引力論,及星學諸問題之解. 氏解是等問題,一依古法Lagrange讀之,謂爲最上之幾何學,可與Archimedes相伯仲者也. 氏又於等質橢圓體定其內點之引力,且亦作其外點引力之某定點. 1773年Lagrange出,紹介Potential之思想,關於引力論,始有進步. 氏又證明扁球體於等質之液體,廻轉

過其質量中心之軸時,可得其鈞衡之形. 後又研究潮汐之理論.

186. 英國學派之衰微. 第十八世紀之前半,英國數學頗見優勢,未幾而衰微, Maclaurin 及 Simpson 沒後,此世之後半,可比肩於大陸派之數學家者,英國無一人焉. 其原因,一則以其學派之孤立,一則以其專賴幾何學及微分學上之方法,不免狹隘也. 至 1820 年以後,解析法盛行之時,英國數學家,始再起其研究之興味.

187. 大陸派之發達. 大陸數學,受 John Bernoulli 之影響,第十八世紀之中葉,微分積分學可驚歎者,爲記法之巧妙,解析之便利也. 然於力學,則仍 Newton 之舊,而無所發明,至 D'Alembert 出,微分學之用法,始有所擴張. 斯時主要之數學家,爲 Euler, Lagrange, Laplace, 及 Legendre 等. 約言之, Euler, 則擴張先輩之著作,蒐集而使之完備. Lagrange, 則以其熟練而發展微分積分學及論理的力學,且其所用之形,亦同於今, Laplace, 則增補微分積分學,而應用於宇宙引力之理,且作適遇法. Legendre, 則發明 Spherical harmonic Analysis, 研究橢圓積分,增補整數之理論.

188. Euler [1707 年至 1783 年], 氏爲當時派遣於 Bâle 之牧師之子,在本國都府,受 John Bernoulli 之教育. 氏初爲教授往俄國,因嚴寒而盲其一目, 1741 年遷 Berlin, 1766 年再來俄國,又盲其一目. 其著述甚多, 1771 年乃被火焚失,然卒改良而刊行之

189. Euler 之著作,茲概論之. 氏訂正純正數學各部分之解析,補足其遺漏,而加以證明,使之圓滿. 如斯之著述,甚爲切要,而得成於大家之手,實斯學之幸福也. 蓋氏之著作極弘博,非僅編纂當時本源事實之教科書也.

190. Lagrange [1736 年至 1813 年]. 氏爲第十八世紀第一數學大家,生於 Turin, 十七歲尚未解數學之趣味,從此以苦力獨修之結果,十九歲時致書與 Euler, 書中揭載 50 年間數學家所苦之等周圓形問題之解. 氏因作此解,而敘述變分學之理. Euler 認其方法通於一般,且優於己之所用方法.

191. 氏論文極多,其數在二百以上,是等論中,有爲完全之書,皆傑作也. 此外有大著,曰 "Mécanique Analytique" 書中假定工事之法則,由此基礎之原理,而借助於變分學,以推論力學之全體. 依座標之方法,設一般之公式,從此可得特別之結果. 此乃氏於解析最有光輝之建設也.

192. 1787 年居巴黎. 1793 年法國發令外國人出境,獨對於氏,則記其姓名,而置之例外. 度量衡選定單位,爲十進法之細別,氏之力居多.

193. Laplace [1749年至1827年]. 氏為Normandy一平民之子,鄉里之豪富,奇氏之才,賠資受學. 1770年為陸軍學校之助教,氏既不苦於生活,乃得專攻學問. 其後出巴黎為教授,以至壽終,多居顯職.

194. 自1784年至1787年,氏出極有勢力之論說若干篇,其中最優者為匾球體引力之完全理論,是蓋入Spherical harmonics [Laplace之係數]於解析及發展Potential之用法也. 次之則行星運動論,亦極有名.

195. Laplace 1812年關於適遇法著一書,為氏解析之上乘,書中且說明最小二乘法. 夫結合諸觀測之最小二乘法,雖Gauss及Legendre以實驗的示之,然其正式之證明,則為本書第四篇之所載也. 至今誤差之理論,莫不本之,

196. Laplace雖有發明必要解析之才能,然單以解析為研究物理學問題之方法. 氏得一結果,恆不說明其求得之次序,立一方法,亦不注意於完備與整齊,惟得所討究問題之解,卽滿足矣,

197. Legendre [1752年至1833年]. 氏生於Toulouse,受教育於巴黎,任數次小官職,以Laplace之勢力,使氏不得高職,不見尊於人,且氏為一膽小之學者. 恐逆Laplace之意,而安於卑位.

198. Legendre之解析為優等,雖少發明之點,亦Lagrange及Laplace之亞也. 而尤以引力之論說,及Circular [或Zonal] harmonics Potential之用法,測地學,最小二乘法之論文,為其顯著者,氏於整數之理論,以基本的代數學之應用為之,然仍認為高等算術,不使為數學中之一科也. 積分學之著述,則載級數之積分,定積分,及β函數γ函數之研究等. 至於橢圓積分,則以為積分學之一問題,而敍述之,但認為高等三角法,而不使成為解析之一部, 近世之方法,為本於Abel及Jacobi之說,而氏晚年亦推薦此二人之發明,而己之苦心,則終湮沒而不顯云.

199. 近世幾何之創設. Euler, Lagrange, Laplace及Legendre完成解析之時,而法國有一羣之數學家,以類似於Desargues及Pascal所用之方法,企圖幾何學之發達,創設近世幾何學. 是等數學家最鉅者,為Poncelet [1788年至1867年],然Monge [1746年至1818年],及L. Carnot [1753年至1823年]之功績亦大. 而晚近促其發達者,為Steiner, Von Staudt及Cremona.

200. 數學物理學之發達. 近世法國派之數學家,專應用解析於物理學. 欲敍述是等法國派之數學家,先介紹英國數學家之物理學者二人之名,卽Henry Cavendish [1731年至1810年],及Thomas Young [1773年至1829年],其著述多被同時之法國數學者所採用.

201. 法國派1830年代 無論何學派,其活動之後,必繼以比較的沈滯之一時期. 然Lagrange, Laplace, Legendre等之死後,法國派之於本世紀之初,仍占顯著之位置,此數年間,無新進之著作家,至於Cauchy,則爲例外也.

202. 解析入英國之始. 英國派孤立,而貢獻幾何學的方法,故可爲第十八世紀後半期數學史上最著名之特質,然設種種計畫以謀數學之改進者,竟乏其人,亦一特質也. 及本世紀之末,始有一深思之數學者Cambridge,痛惜英國不與大陸派相交通. 由是Woodhouse [1773年至1827年]. 始採用大陸微分積分之記法及其方法,氏之見解被少壯學者Babbage, Peacock, 及John Herschel所採用,而後氏所用解析之方法,始得流行於時,即氏所提出算術之改正,亦得成功也. 1817年及1819年,微分記法,用爲大學受驗科目,1820年以後,其使用亦能設定. 繼又刊行說明新法之例解二冊,其一爲Peacock所著,爲微分積分論其一爲Herschel所著定積分論,從此使用解析之教科書,繼續出者亦漸多,至1830年英國始普通使用解析矣.

近世數學

203. 新紀元之始. 第十九世紀之數學可謂開一新紀元也,即純正數學[整數論,高等代數學(包含形式論),方程式論,函數論(及二部函數與重函數之周期),及高等幾何學等],大都入物理學於數學範圍內而研究之者. 其中多專門的說明,而非適於普通者也.

204. 近世德國數學派之興起. 前世紀之末,爲法國派停滯時期,亦爲英國派使用解析時期,而德國新學之興起,亦適在此時. 此於第十九世紀之數學研究最深者也. 同時西大陸之數學家亦有可記載者,蓋近世學派,不能確然限定其時與地也. 此世紀之著作,多成自非數學家之手,較Gauss之書,更有勢力.

205. Gauss [1777年至1855年]. 氏生於Brunswick,父爲瓦師,雖不願氏之從事學問,[蓋欲氏爲勞動者,而以其工資爲生活也],而當時君主公爵深惜氏之英才,助之入學. 1792年,氏遂入Caroline專門學校,1795年悉通其教授所教之事,其校之教授及生徒,莫不歎服. 其時氏研究最小二乘法,且證明Quadratic reciprocity之法則. 後往Gottingen,就學於Kastner,整數論之發見,亦在此時. 1798年氏歸Brunswick,設教於家,以爲生計之助.

206. Gauss於1799年,謂代數方程式必有一根,而述其論證. 旋於1801年刊行理論算術.

207. Gauss從1830年研究電氣磁氣

有二論文,極爲有名.至其光學上之研究,則於1840年著一書,論凸凹鏡之組縿.

208. Gauss之純正數學中最有名之著作爲"Disquisitiones Arithmeticae[理論算術]也.此書及Legendre之書,爲整數論之基本,但Legendre之於整數論,亦如橢圓函數之研究,不能成一新學科,而以爲積分學中之一章,氏則以整數論爲代數學中之一章,而論究之.氏區別不連續量[discrete magnitudes]之理論,爲高等算術,連續量[continuous magnitudes]之理論,爲代數學,而發明其記法及解析,以促其進步.

209. 整數論可分爲二類,即形[forms]之理論,與等剩式[congruences]之理論也.其解binary quadratic forms[二元二次形式]之問題,則Gauss之功也.氏關於含二不定數之ternary quadratic forms[三元二次形式],而加附其結果,然自二不定數擴充爲三不定數,則爲Eisenstein之著作.Gauss亦研究四次剩餘[biquadratic residues]理論[$a+bi$形之複數之意義歸入整數論]之問題,且發明第一次及第二次等剩式之理論.又研究$x^n=1$之二項方程式之解法,又舉一有名之定理,曰,以初等幾何學能作圖之正多角形,惟其邊數爲$2^m(2^n+1)$之正多角形,但式中m,n,爲整數,而2^n+1爲素數.

210. Gauss之書最有名者.爲行列式之理論,證明數字方程式有一實根或虛根之定理,級數之總和,超越幾何級數論[並γ函數之研究]及補間法,而其嚴密查驗無限級數之收斂,尤爲最可注意也.

211. Gauss關於整數論之研究,實集諸數學家之大成.此諸數學家.即Lejeune Dirichlet[1805年至1859年],Riemann[1826年至1866年],Tchebycheff[氏研究素數之配置],Jacobi, Eisenstein, Henry Smith[氏研究形式論].

212. Eisenstein[1823年至1852年]三元二次形式之理論,當屬於Eisenstein之發明.氏考定平方數之和,可以表數之定理,且示一般的定理,當限於八個之平方數,其平方數之數爲奇數者,則稍爲困難.氏於三個平方數,則示其解,而於五個平方數,則缺之.此外氏曾立一最顯著之法則,能區別一級數爲表代數函數或表超越函數.

213. Henry Smith,[1826年至1882年].關於整數論之著作,近世數學家中,最有勢力,且爲創作者,爲Henry Smith.氏受教育於Rugby及Oxford大學,1861年被推選爲本大學幾何學之Savilian教授,終身在其職.Smith之著名,爲論一次不定方程式,等剩式,及orders and genera of ternary quadratic forms.[三元二次形式]氏又曾證明Eisenstein著作之結果,擴張其均一行列式之三

元二次形式,使其分類得以完全.且不僅研究三次之不定,凡 n 個不定,之時,亦設定可爲根據之原理,並得其一般之公式.

214. **Abel** [1802年至1829年]. 生於那威,26歲卒於Arendal. 氏之橢圓函數論文,依方程式論及代數形式論而敍述之. Abel之定理,[後Riemann用之於超越函數之理論]成於1828年. Abel函數之名,最初附於氏所論the higher transcendents of multiple periodicity [重複週期][見第一門83頁]. Abel思想之精深,亦可由其五次方程式解法不能論見其一班.

215. **Jacobi.** [1804年至1851年]. 氏爲猶太人之子,生於Potsdam,受敎育於Berlin大學. 1827年,爲Königsberg之敎授. 1842年普魯士政府,賜以年金,後氏移居Berlin,而終其身.

216. Jacobi最有名之研究,爲橢圓函數論,近世之記號法[此屬於氏之發明]及其理論,[氏與Abel同時立說,然氏之理論究不與Abel相襲]. 氏所著重要之書,爲偏微分方程式之理論,所作諸論文,大都關於變分學,遊星論,及特別力學上之問題,及微分方程式之理論.

217. **Riemann** [1826年至1866年]. 氏生於Hanover,爲第十九世紀創作的最有勢力之數學家. 於Göttingen大學,就學於Gauss,後至Berlin,受Jacobi, Dirichlet, Steiner及Eisenstein [皆同時爲Berlin大學之敎授] 之敎育. 氏暮年爲Göttingen爲敎授.

218. Riemann所作論文,最早者成於1850年,爲複變數之代數函數論. 1854年以幾何學爲基礎,作假設論,而論及整數論橢圓函數. 其於重複週期函數,則用Abel函數.

219. **Weierstrass.** 論θ函數,則當觀現今Berlin大學敎授Weierstrass之著作. 氏於說明modified form [此根率之乘冪所可表者]時,敘述θ函數. 次定敎授橢圓函數之方法,是爲θ函數論之擴張,且改良者也.

220. 關於代數,三角,橢圓,雙曲線及其他函數之研究,皆於此函數論中發其端,此爲證明高深數學所不可缺者也.

221. 整數論可謂之高等算術,橢圓體之理論,及Abel函數之理論,可謂之高等三角法. 而高等代數學,[含有方程式之理論]則現世紀中有三數學家Cauchy, Hamilton, 及Cayley爲研究此之最良者也.

222. **Cauchy.** [1789年至1857年]氏生於巴黎,受敎育於Polytechnic School,即當時法國諸數學家之養成所也,旋任土木工師之職. 18 6年帝政復古,French Academy被封鎖,有改爲法國學藝學會之計畫. 乃襲Monge之後爲Polytechnic School之敎授. 1830年革命

之際,氏被流刑,1837年歸法國,1848年及1851年被特赦,許以不立忠順誓約,而爲數學教授.

223. Cauchy之研究其主要者,爲收斂級數之推論,決定代數方程式實根虛根之數,計算是等之近似數之方法,任意次數之方程式係數之對稱函數之理論,於方程式根與根之間定小於最小差之値量,及關於行列式所作論文[此示一般的用法者也]等. 又關於定積分與科學之運絡,稍加整齊之,然至今所傳積分學尙無超過氏之法式者.

224. Hamilton. [1805年至1865年]四元法之理論,爲第十九世紀一大發明,其發明者,卽Sir William Rowan Hamilton. 氏蘇格蘭人,1824年入學於Dublin之Trinity College. 氏受大學之敎育甚單純,蓋是校天文學敎授之職,1827年爲空座,其時氏雖未卒業,而滿場一致,推選氏任斯職,氏遂以此終其身焉.

225. Hamilton最初研究光學,次講述四元法,1852年刊之,其他有論五次代數方程式之一般解法,卽對於Ruffini及Abel所定諸原理的運算及函數之項不能以五次代數方程式表示者,加以確證也. 又不定函數論,Hodograph[直線之一端,恆在一定點,而恆平行於所設點運動之方向,且比於其點表速度之直線之長而運動,則他端所畫之軌跡,謂之Hodograph. 若所設點沿直線而動,則無Hodograph,若所設點成等加速運動,則Hodograph爲垂直線. 例如墜體是也. 又若與所設點沿一圓而運動,則Hodograph亦畫一圓],及微分方程式數上之解,皆氏之著作也.

226. Grassman. [1809年至1877年]. 氏爲Stettin之敎授,有Non-commutative Algebra及四元法之觀念,同時Hamilton亦有斯意,遂就而研究之,其事載Ausdehnungslehre中. 氏又研究homaloidal hyper-space之性質.

227. Cayley. [1821年至1895年]氏生於倫敦之附近,受敎育於Cambridge大學,後爲純正數學之Sadlerian敎授,自1863年至其壽終,在斯職. 氏之講述,多傾向於代數學的,其久於敎職,及所用方法,極與Euler相似.

228. Cayley之研究,茲述其將Quanties[二重式及三重式]分類作十論文,及Non-commutative Algebra之研究,及matrices之論. 氏始作二重之無窮乘積,且決定週期性其後研究楕圓函數,則以變形之理與根率方程式論之. 氏對於解析幾何學諸問題,及其種種之擴張,均有著述,而尤注重於其所謂"absolute"焉.

229. Modern Synthetic Geometry者,實起原於Monge [1800年生], Carnot [1803年生], Poncelet [1822年生],然皆僅示一斑,而德意志學者乃歡迎之,Steiner及Von Staudt,蓋爲有名之代表者.

230. Steiner. [1796年至186?年]氏爲 Apollonius 以來之大幾何學者，生於 Utzensdorf，父爲農夫，十四歲時，尙無讀書之機會，後往 Heidelberg，由此至柏林，爲苦學生，其所研究，記載於1832年之著述中，書中論究雙對性之原理，又以測度用之性質爲基礎，而論 row [列]，pencil [束線] 射影的關係，及其等形的關係，此氏之最得名者，時柏林初設幾何學教授之職，氏即占之，以終其身。此外氏最要之論文，爲代數曲線及代數表面之性質，垂趾線與轉軌曲線 [roulette] 之性質，及極大極小之性質，而其考究則純粹爲幾何學的。氏之著作，可視爲晚近組織幾何學 [Synthetic Geometry] 分類的基本也。

231. Von Staudt [1798年至1867年] 純正幾何學其組織與古昔全異者，爲1847年 Erlangen 之數學教授 Von Staudt 所著之書。書中排斥關於數或量之一切關係，其所以代抽象的法式者，則設定非測度用之射影圖之性質，並論述想像之點，線及面而得全數之幾何學的定義。Culmann 用此幾何學，爲其 graphical statics [圖形的靜力學] 之基礎。

232. Mathematical Physics. 近世數學史適用於光，熱，彈性，電氣及其他物理的現象，茲欲擴充而評論之，則非此小史所能盡載矣。然姑就第十九世紀最有名之物理學者略述之。即如 Green [1793年至1841年] Clerk Maxwell [1831年至1879年]，Von Helmholtz [1821年至1894年]，Sir George Stokes，Lord Kelvin [前名 Sir William Thomson]，[182? 年至1997年] 皆就數學物理學之問題而論究者也。而 Lord Rayleigh 亦有名，惟 Maxwell 之著述，在電氣磁及光之理論爲有力之研究。氏初拋棄當時人爲的假設，而知有富於彈性之媒質曰以太 [ether]，充滿空間，因其運動及 stress 而說明其現象。夫物理學知識之進步，當屬於諸數學之適用，且實驗者，若非數學家，則其物理學亦不能有何等顯著之發見也。此泰西數學沿革系統之大要，至其詳細，則豈此小冊所能盡哉。

(增訂) 第14節 Elis 之名 Hippias，者爲發明 Quadratrix 曲線之人，用此曲線，可將任意之角，分爲三等分，或分爲任意之比。

(第九門畢)

附録

雜題索引之部

APPENDICES

MISCELLANEOUS

INDEX, &C.

附錄雜輯目次

附錄索引例言

● 本書自第三門至第七門，爲算術代數幾何三角之問題解法辭典，故當有最便利的索引之必要. ● 惟本書與他種辭典異，其問題解法各問，帶練習書之性質，故一步一步，由淺入深，依次編述之. ● 然欲以爲他種辭典用之，因作此索引. ● 索引以問題之種類分之，若以漢字筆畫或音韻分類，均有不便，故索引目次之類別，須熟記之，則容易搜尋矣. ● 一覽索引目次之分類，雖極易知其分類之法，茲再就其類別當注意之點，述之於次. ● 第三門算術之部，除連鎖法外，不依解法，依題文之性質分類. ● 關於量之問題，嚴密言之，在算術問題中，非關於數[不名數]之問題，卽關於量[名數]之問題. ● 然此所謂關於量之問題，非此嚴密之意義，不過問題中無屬於他部分之顯著的事項，僅有一量或多量之關係也，例如有甲乙丙之量，甲之和爲35個，乙丙之和爲45個云云，又如松爲杉之9倍，而其差爲40本云云. ● 成分算問題中，關於買賣者，歸入分數，[11]中. ● 第四門代數學之部，自1至22，集本書整式至比例之問題，依題文最終部分[試求値，試證之，試解之等]分類. ● 而其應用問題，亦如算術之部，依題文中主要分部分類. ● 等差級數及以後之問題，則依本文之次序分類，而各類中題文最終部分相同者，集於一處. ● 第五門平面幾何學之部，其同一之定理，依假設中主要部分分類，復依終結分類. 而一定理中，有數個終結者，則互入各類中. ● 軌跡之問題，依生軌跡之點之性質分類，其同種類問題甚少者，則歸入雜題中. ● 作圖題，依所求之目的物分類 ● 第六門立體幾何學之部，其分類同第五門. ● 第七門三角法之部，區別爲銳角三角函數及一般角之三角函數，銳角者問題少，故不細別，其一般角者，則依題文最終部分分類. ● 三角法角與邊之關係，其性質及解法，應用問題等，各問題之數不甚多，故卽依本文分類，各部類中，題文之主要物同一者，集於一處. ● 各門中有以了解原文爲限，而省略題文者，在幾何學，更有以記號代文言者 ● 三角形常用之術語，及各部之名稱，欲使簡單，置文字於一定之處，例如三角形ABC，垂矩三角形爲DEF，垂心爲G云云.

數學辭典

索引

第三門　算術之部

I. 關於數之問題

二位之數

三位之數

一數

二　數

三　數

四 數

連 續 整 數

2. 關於量之問題

一 量

二 量

三 量

3. 整除 剩餘

4. 倍數 約數

5. 分配之問題

500圓,丙初出金2500圓,一年後,配分利金7700圓,問各得幾何… 458.

6.關於旅行之問題

● 甲乙二人,同時同向而行,則二時間相距4里,若反向而行,則相距36里,問各一時之速……………… 19.

● 甲乙二人,每日甲行42里,乙行35里,甲每行100里,卽休息2日,乙每行230里,卽休息3日,今二人同時同地,往於630里之處,問到日相差之月數若干………………………… 22.

● 兩人同時同地同向而行,每日甲行12里,中途返行乙4日之歸路,再向前追乙,至追及乙時,計二人已行16日,問乙每日所行里數若干…………………………………… 38.

● 一嶺之上下,有甲乙二村,由甲村至乙村,需6時20分,由乙村至甲村,需3時56分,每分時之速,上行爲50丈,下行爲80丈,問甲乙二村之距如何………………………… 101.

● 有甲乙二人,甲一分間走36步,乙一分間走28步,今此兩人同走一道,乙比甲多費4分時,問此道之長若干……………………………… 17.

● 有甲乙二人,甲自長沙往岳州,每日行80里,乙於次日亦往岳州,每日行44里,甲到後卽歸長沙,問二人相遇之處,距岳州若干里.但長岳二縣相距爲350里………… 39.

● 有旅人出甲地達乙地,行56里48步4尺,問至乙地之里程,答者謂前途里程之三倍,比行過之里程少2里6步2尺,問兩地之距離如何…………………………………… 124.

● 有動體,以某速行某距離,費1分30秒,若其速每分增1丈2尺,則此時間當減短18秒,問其一分時之速幾何,又距離爲幾何……… 146.

● 有旅人,往來於東西市間,往路平均每日12里,歸路平均每日15里,而到西市之一日,與歸東市之一日,各行7里,問往復此兩市間須幾日,但兩市之距離,不遠於70里…………………………………… 166.

● 某人自東市往西市,其$\frac{3}{4}$乘汽車,其$\frac{4}{21}$乘馬車,又步行15里,問兩市之距離如何……………………… 204.

● 有甲乙二人,甲每時以3里$\frac{1}{4}$之速,自東地向西地,乙一時間後,以每時3里$\frac{3}{4}$之速,自西地向東地,東西今兩地之距離爲52里$\frac{1}{4}$,問乙出發後,幾時與甲相遇…… 208.

● 有二人行路,若每時之速,甲3里,乙5里,甲比乙多費6時間,問此路若干里……………………… 220, 300.

● 車行則五日與四分之三到達,步行則八日與四分之一到達,今欲

東市,問此二人各幾時間達東西兩市……547.

● 有乘自轉車之三人,甲每時行15哩,乙每時行16哩,丙每時行17哩,甲乙自東市,丙自西市,同時相向出發,丙遇乙後,一時間遇甲,問兩市之距離幾何……40.

● 有人乘自轉車5日,第一日乘7時間,行50哩,第二日乘9時$\frac{1}{2}$間,行70哩,第三日乘10時$\frac{1}{4}$間,行104哩,第四日乘8時$\frac{1}{2}$間,行70哩,第五日乘6時$\frac{1}{4}$間,行56哩,問每時平均當行幾哩,且問三週間當行若干哩,但日曜日停止……333.

● 甲乙丙三人競走,其速之比,如8:9:10,但丙達中央時,其速之比,改爲10:9:8,問決勝點之次序如何……334.

● 有騎兵四人,以馬三匹,行八里之道,交換乘馬,且各乘馬之里數相等,問各乘馬若干里……94.

● 每分間行330丈,264丈,198丈,之三自轉車,同時同所同向,迴繞一1980丈之圓城,問幾分時再集合一處……161.

● 有學生346人,或雙行隊而行,每列相距3尺,每分時之速度,爲174尺,若越過長3里之路,需幾分時……26.

● 有兵卒2小隊,每隊80人,將4人爲一列,每列之距離爲3尺,每2分間進行之速,爲415尺8寸,今過576尺之橋,當費幾何時間……313.

● 有提燈行列,每列5人,通過120丈之橋,自行列之前頭上橋,至行列之後尾離橋,費13分時,今列與列之間爲5尺,每分之速度爲15丈,問人數幾何……27.

● 有蝸牛上高十六尺之竿,晝上六尺,夜降四尺,問幾日能至竿梢……77.

● 有蝸牛上樹,晝上五尺,夜降三尺,五日達於樹梢,問樹高若干……78.

● 犬追兔,兔在60步前,而兔走9步時間,犬走6步,又兔7步之距離,等於犬之3步,問犬走幾步,得追及兔……315.

● 犬走5步,兔走6步,又犬之3步,與兔之4步,其長相等,若犬3時間,走35里,問兔4時48分幾里……378.

7. 關於火車之問題

● 兩停車場,相距18里,兩火車同時自各停車場相向而行,則2分時相會,若甲車追乙車,則18分時追及,問各一分時之速……20.

● 兩火車,一長92尺,一長84尺,相向而行,則自相會至離開,歷時2秒,若一車追一車,則自追及至越

8. 關於船之問題

9. 工作之問題

60噸之海水,則當沉沒,若用每時汲出12噸之喞筒,則此船恰沉於港口,問其向港進行之速度幾何……141.

● 有某事,甲4日作成,乙6日作成,問甲乙俱作,幾日成之……205.

● 有一事,甲作之2日$\frac{1}{2}$成,乙作之3日成,丙作之3日$\frac{3}{4}$成,若三人俱作,問幾日成……207.

● 開掘運河,雇甲乙二組之工人,甲組則100日能成,乙組則150日能成,今使二組工夫同作,乙組工夫休息若干日,則需80日成之,問乙組工夫休息之日數……234.

● 有四工人作某事,甲25日成,乙20日成,丙24日成,今三人共作2日後,以丙一人獨作8日$\frac{3}{5}$,又甲丁來與丙同作,3日而成其全事,問若以丁一人獨作,當幾日成……246.

● 空車一日行15里,實車一日行12里,今用車12輛,每輛積米3包,將720包之米,4日間運盡,問所運之距離若干……238.

● 有農夫一日耕則3畝,一日耘則8畝,一日植則6畝,今一人作耕耘植之三業,問一日可得幾畝……255.

● 有甲乙丙三等工夫,甲4時成某事之三分之二,乙一時間成其餘之四分之三,丙以二十分間成之,問此三工若始終同作,需幾時間成此事……245.

● 以容量相等之桶,汲出滿池之水,以3桶則12時間可汲盡,以6桶則5時間可汲盡,今此池水若汲盡後,至水再滿池,需何時間.又若其容量爲120石,則一桶汲出一時間之量如何……272.

● 以農夫7人,每日勞動10時間,一週間所耕之田,今欲於5日耕完之,問每日之勞動當增幾時間,但一週中末一日休息……286.

● 有新設橋梁,每日役工56人,則150日可成,然忽因事故發生,欲以80日成之,問當增工幾人……287.

● 今掘一溷,每日使役工夫150人,則90日可成,若欲早30日成,須增工夫幾人……288.

● 欲於一週間成一事,甲匠則需8人,乙匠則需9人,今傭甲匠4人與乙匠幾人,則8日與4時間可成,但一日作事10時間……291.

● 有桿長7尺,欲以之掀動450斤之物,但人力能動54斤,問支點當在何處……292.

● 有重160斤之石,以長8尺之桿,使甲乙二人荷之,甲只能荷60斤,問甲至重物之距離幾尺……293.

● 有父子耕一田,父一人須20時間,若子助之,則16時間耕完,問子一

速之比，如5與8，今用牛車8輛，與馬車20輛，5日運完米280包，至10里$\frac{1}{2}$之處，若牛馬車各10輛，10日運完米350包，問距離幾何……375.

● 以160人，每日勞動11時間，於6日掘得長230丈闊5丈.5深1丈.5之澗，問以96人，每日勞動8時間，掘得長220丈闊3丈.5深1丈之溝，須幾何日，但土之硬，前與後如5與7，後之4人之力，與前之5人之力相等……384.

● 有二滑車，其一爲複轆，能生4倍之力，其一爲單轆，能生3倍之力，又滑車省力費時，故其力愈增加，則其時愈延長，今以8人用此複轆滑車，則6分時提起480斤之重於1丈6尺高，問以15人用此單轆滑車，提起360斤之重於1丈8尺之高，費時間幾分……386.

● 欲得金6圓，則須以4人作事15日，然則欲以5人得金11圓，問須作事幾日……358.

● 以農夫7人，每日作事10時間，4日耕完1頃5畝之田，若以5人，每日作事8時間，耕完1頃65畝之田，需若干日……364.

● 以唧筒15個，每日使用8時間，則7日能汲上1260噸之水，問以同唧筒幾個，每日使用12時間，則4日能汲上7560噸之水……371.

● 以21人，於25日，築成長181丈$\frac{1}{2}$，闊5尺高2尺6寸之堤，問以8人，於49日，築成闊7尺高2尺2寸之堤，其長爲幾尺……383.

● 長40哩之鐵道，豫定4個月修成，使役375人，每日作工12時間，經3個月已修成25哩，其餘之工程，比前之工程，其難易如2：3，但此後工人每作工10時間，問須增加工人若干，始能於豫定之期限竣工……388.

● 以男5人，或女7人，每日勞動8時間，於10日耕完之田，若以男8人，女3人每日勞動10時間，問幾日耕完之……381.

● 運送米120包，麥154包，每日10時$\frac{3}{8}$，13日運完，今欲運送米240包，麥280包每日11時$\frac{1}{4}$，問幾日運完，但米與麥每包容量之比，如2與3，同升數重量之比，如8$\frac{1}{2}$與7…389.

● 有牛車與馬車，其所載之重，牛車與馬車如7與3，又其速如2與9，今將7000斤之物，運送於56里之地，用牛車20輛，須費12時間，問將4500斤之物，運送於126里之地，用馬車30輛，當費幾時間……393.

● 男5人，每日耕作7時間，於6日耕完田9畝，又女子12人，每日耕作6時間，於14日耕完田27畝，今男3人女5人，合力耕作，則於8日耕完田21畝，問彼等每日耕作幾時間……392.

10. 水管之問題

滿,若以此水道注水入乙池,問幾時間滿……………………………… 362.

● 有浴池,有冷水與熱水之二管,若浴池空虛,同時開二管,則6分間充滿,若僅開冷水管,則10分間充滿,問若僅開熱水管,則幾分間充滿……………………………… 206.

● 有容水14石6斗2升之桶,以甲乙二管注入水,甲3分間7升,乙5分間9升,又有流出之丙丁二管,丙4分間5升,丁7分間8升,今使各管同時出入,問此桶幾時間可滿……………………………… 250.

● 有水桶容水1石9斗2升,今於其桶之底,插入甲乙二漏水管,開其二管,經3時後,而閉其甲管,則僅以乙管於11時漏盡,若開其二管,經6時間而閉其甲管,則僅以乙管於6時間漏盡,問各管一時間漏水之升數,但各管每時漏水之量相等……………………………… 252.

● 有水桶注滿水後,45分間全漏盡,今此桶若不漏,則25分間當注滿,問同時注入與漏出此桶需幾時間可滿,又問注滿時漏出之水爲幾石,但桶之容量爲100石,而每時漏出水量同一……………………………… 251.

● 以徑1寸5分之管,注水入池,則19時36分間充滿,今欲使10時間充滿,問當用徑幾寸之管……… 534.

● 某工場內,有徑1寸5分之水管36個,問水源須徑幾寸之水管一個……………………………… 533.

11. 關於買賣之問題

● 米3石之價,等於麥5石之價,今以其價各等分買米麥,問其石數如何……………………………… 217.

● 將米7石3斗6升,作4斗之包,其未滿一包者,賣得3元4分,問賣全包數當得幾何……………………………… 289.

● 有米商以銀210圓,買米若干石,對於1圓昂一升之價賣之,於是得利42圓,問石數及1圓買賣之升數若干……………………………… 89

● 米若干石,以1元6升之行市買,之若1元貴1升賣之,則得6元之利,問米爲若干……………………………… 297.

● 有米商買米若干,每元5升5合賣之,則得12元5角之利益,若每元6升賣之,則損失6元之本,問米爲若干……………………………… 223.

● 買米若干石,以1成5分之利賣之,則得利54圓,又若一石得4角5分之利賣之,則得利等於2石之原價,問石數如何……………………………… 544.

● 某人二分其所有金,買米麥各同石數,若以其買米之金買麥,則得63石,又若以其買麥之金買米,則得28石,問所買米麥各幾何… 546.

● 有穀商賣米20石,得2成之利,賣

● 有砂糖200斤,其原價一斤爲100錢,賣時所得之利,等於40斤之原價,問一斤之利若干……87.

● 以600圓買紙若干刀,對於一圓落4刀之價賣之,則虧本150圓,問共紙若干刀……90.

● 有人命婢持265錢,買酒5斤,及醬油3斤,而婢誤買酒3斤,及醬油5斤,餘10錢而歸,問各一斤之價若干……63.

● 有陶器商,恆得元價五分之三之利,今此商人賣去陶器120個,於搬運之際,破損若干,因僅獲元價二十五分之十一,問破損之陶器若干……233.

● 以若干之金買馬2頭,與羊3頭,馬一頭之價,比全價四分之一多五元,羊一頭之價,比全價八分之一多四元又二分之一,問各一頭之價幾何……244.

● 有人買馬若干頭,其一頭之價之圓數,同於其頭數,後以善價賣之,而得總元金之倍數,同於其頭數,又將所得金之$\frac{1}{7}$,買與前同頭數之馬,尙餘金2352圓,問前後一頭馬之買價及賣價各幾何……564.

● 有賣獸肉商,賣去若干斤之肉,其九分之五爲牛肉,其二十七分之十爲羊肉,其餘爲豚肉,而各一斤之原價,牛肉爲2角,羊肉爲2角2分,豚肉1角6分.若平均一斤賣2角又$\frac{4}{9}$分,問其損益及各斤數如何.但牛比羊多40斤……259.

● 買咖啡若干斤,每斤價120錢,以每斤144錢賣去其三分之二,尙多賣去10斤,則已得原價,問全斤數幾何……262.

● 某物賣3圓,則有百分之25之利,若以2圓8角8分賣之,則利益幾何……487.

● 一物賣40圓,而有1成2分之損失,若賣50圓,問有幾分之利益……499.

● 有物以定價賣之,則每個得2圓之利,今將此物五個,依定價減1折2分賣之,所得之利益,等於將8個依定價減1折5分賣之,問此物一個之定價,及元價如何……511.

● 有商人賣物,獲利8分,若比前賤5分買之,賤4分[此圓角分之分]9厘賣之,則得1折之利,問原價如何……512.

● 甲商以320圓,所買之物,賣與乙商,乙商又以405圓賣之,兩商所得之利率相等,求乙商之買價……542.

12. 關於價格之問題

● 有時表二個,各附以等價之鏈,甲價80元,乙價60元,而甲表價比其鏈價之2倍昂5元,問時表之價如何……93.

圓3角4分,但甲騰貴$\frac{1}{10}$,乙下落$\frac{2}{10}$,丙騰貴$\frac{3}{10}$,各價皆相等問各1斤之原價……455.

● 有二種酒,甲4升與乙5升之價,如6與7,今甲酒4升瓶,其價爲13圓,問3升瓶28瓶,其價幾何……377.

● 米4斗包35包之價爲240圓,問4斗2升包65包之價如何……357.

● 絹一疋之價,等於布18疋之價,今有米36包,每包6斗4升,以之換得14疋$\frac{2}{5}$之絹,若以米22包,每包8斗,可換布幾疋……376.

● 紺絲30斤之價,等於白絲45斤之價,今取紺絲與白絲如1與2織成裁料10疋,其價爲2)圓,若取紺絲與白絲如3與4織成裁料20疋,其價如何,但前後絲之時價如6與7……390.

● 有金銀製之花瓶,其價爲286鎊12先令,若有與此花瓶同重量之金製花瓶,則其價爲373鎊16先令,又若有交換其金銀重量之花瓶,則其價爲112鎊4先令,今金一溫司之價爲3鎊17先令10辨士.5,問銀一溫司之價幾何……143.

13. 關於收支之問題

● 有人每年用費600圓,5年間所負之債,若每年儉約僅用400圓,則7年間恰償清此債,問此人每年收入若干……58.

● 有人每月得30圓,其3年所餘蓄金,等於每月得40圓,1年所餘蓄金,問此人每月用費若干……60.

● 有某司事人,每月得銀60圓,消費45圓,問此人若欲貯900圓,須司事若干月……76.

● 荷包中有銀若干圓,用去一半,又加入3圓6角8分,又用去現在之半與1圓2角7分,尙餘3圓,問荷包中初爲若干圓……85.

● 秦皮樹之苗,植五年後,有6角之價,其後每年增價6角,而因其生長所占地面亦漸廣,至其伐之年,需其年數之二倍之步數,今植其苗每年伐取同數,將其價之五分之一爲雜費,則20畝40步之田,每年最大之收入幾何……275.

14. 關於財產之問題

● 某人有財產若干,若歲入全儲蓄而不消費,則經20年,其財產當爲今之三倍,若自今全無歲入,則經18年當盡,問經若干年,此人之財產,增殖爲三倍……199.

● 有負債總額,12899元.49,而執行破產者,其負債中,含有應付全額之稅金282元.27,今公賣此人之財產

15. 關於工錢之問題

金18圓,問各當得幾何……………437.

● 有甲乙二人,共作一事,可得金70圓,若將甲一人作之,則15日能成,若將乙一人作之,則20日能成,今兩人同作,因病休息3日,問其金應各得幾何……………………438.

● 有一工場,每日用一定人數之工人,作工一定之時間,而工人中有甲乙二組,每週一人之工錢,甲組爲3元1角8分,乙組爲2元2角2分,而各組一人之力之比,甲與乙如5與4,今欲縮短成功之時日,僅用一組之工人,則比僅用他組之工人早成四週間,而工錢則多648元,若自兩組各取半數之工人,問工錢當爲若干……………………320.

16. 關於交換之問題

● 以3圓2角一疋之絹,交換9角一疋之布,得1圓3角之利,絹之疋數比布之疋數少50,問各疋數若干……………………………………99.

● 有小麥若干石,以之換每石4圓9角之大麥,則大麥比之多5石,以之換每石7圓之米,則米比之少7石,問小麥之石數,及其一石價各若干…………………………………100.

● 有甲乙二種煤,10000斤28圓,乙種10000斤21圓5角,將甲種26500000斤,換乙種,尚收回10000圓,問乙種煤10000斤,有若干之折扣…325.

● 絹一疋之價,等於布18疋之價,今有米36包,每包6斗4升,以之換得14疋$\frac{2}{5}$之絹,若以米22包,每包8斗,可換布幾疋……………………376.

● 有穀商,以119圓買得小麥85包,但以小麥8包換大麥9包,則有1成之利,又以大麥100包,換高粱112包,則有3分之損,問高粱180包之價幾何……………………405.

17. 關於糧食之問題

● 有牛30頭,6週間,食盡一牧場之草,若以牛20頭,則10週間食盡之,問此牧場之草,5週卽食盡,牛爲幾何. 但草之長成,假定爲每日相等者…………………………106.

● 牛22頭54日食盡牧場3畝3分之草,牛17頭84日食盡牧場2畝8分之草,問牛幾頭24日食盡牧場4畝之草,但每畝草之元量相同,其生長亦相同……………………108.

● 牛25頭,羊10頭,一個月之食草,若僅以羊25頭食之,則能食二個月,問若僅以牛12頭食之,則能食幾個月…………………………294.

● 有守備隊1500人,其糧米足支33個月,今增兵700人,問此糧米足支幾個月……………………284.

18. 年齡之問題

歲，13年後，父年比子年之3倍少29歲，問現年各若干………………45.

● 父年45歲，母年40歲，其五子之年齡爲18歲15歲13歲10歲5歲，自今幾年後，父母年齡和與五子年齡和等……………………………………46.

● 有甲乙丙三人，甲30歲，甲與乙年齡和，等於丙之2倍，而乙與丙之和，等於甲之2倍，問乙丙之年齡若干……………………………………48.

● 父之年齡，等於三子年齡之和，自今9年後，父之年齡，等於長子次子之和，再3年後，等於長子末子之和，再3年後，等於次子末子之和，問現在父子四人年齡各若干……………………………………47.

● 有兄弟二人，兄年齡之7倍，與弟年齡之5倍之和爲201，又兄年齡之9倍，與弟年齡之7倍之差爲57，問兄弟之年齡各若干……………62.

● 有兄弟二人，現在之年齡兄爲12歲，弟爲7歲，問自今幾年後，弟年齡爲兄年齡十七分之十二……216.

● 有父子，8年前，父年爲子年之4倍，自今8年後，父年爲子年之2倍.5，問現時父子年各若干……………326.

● 有兄弟甲乙丙丁四人，其年齡之比，甲與乙爲6:5，乙與丙爲10:9，丙與丁爲3:2，而丁之年齡爲12歲，問甲之年齡如何………………401.

● 父與三子年齡之和，爲108歲，而三子年齡之比，如4與3與1，但自今6年後，三子年齡之和與父之年齡相等，問今年之年齡各幾何…445.

19. 關於人數之問題

● 某會場，其入場費，大人80錢，小孩50錢，入場者共1355人，入場費共1000圓，問大人及小孩之數各若干．但一元値一千錢……………………50.

● 一事雇男女工人共50人營之，而日給工資每男400錢，每女150錢，8日共給工資120圓，問男女人數各若干……………………………………55.

● 某學校學生共520人，每月一人學費，高等科800錢，尋常科150錢，若將共人數與共錢數，平均計算，則每人爲275錢，問此學校高等尋常二科學生各若干……………………54.

● 兩校之學生，共爲372人，其中男學生爲女學生二十七分之三十五，若僅言甲校，則女學生爲男學生之五分之四，若僅言乙校，則女學生爲男學生之十分之七，問各校之學生幾何……………………265.

● 有兵一隊，於某戰死全數十分之三，其餘之四分之一負傷，尙餘健全者630人，問全人數……………197.

● 軍司令官於勝後，調查死傷，全軍之4分爲名譽之戰死，其餘之1成5分負傷，而負傷者與死者之差，

20. 龜鶴之問題

21. 時計之問題

22. 寒暑表之問題

23. 經緯度之問題

24. 關於比重之問題

25. 關於容積重量之問題

26. 關於曆時之問題

27. 關於植樹等之問題

28. 關於廻轉之問題

29. 關於排列之問題

30. 關於射的之問題

31. 關於印刷出版之問題

活字,及五號活字,共300字,但二號活字之才,恰爲五號活字四倍,問此廣告各號字各若干 ……… 53.

● 某書出版,與印刷所定約,500部則爲90圓,1000部即爲150圓,若5000部,當爲若干圓 …………… 105.

● 有書168頁,每頁12行,每行25字,欲改爲每頁15行,每行30字之書,當爲若干頁 ……………………… 365.

32. 換算之問題

○ 甲午之役,續還遼東半島之償金,庫平銀叁千萬兩,換算英幣爲4935147鎊1先1片75,而日本銀幣1圓,算換英幣爲2先2片5,問此償金爲日本銀幣幾何,又庫平銀一兩爲日本銀幣幾何 ………… 132.

● 有人自東京經朝鮮,旅行浦鹽斯德,在日本用去日貨137圓50錢,在朝鮮用去韓貨228貫文,在俄國用去350留,而朝鮮1貫文爲日本1圓50錢,俄國之1留爲日本1圓10錢,問此人共用去日貨幾圓 …………………………………… 133.

● 紐約一商人,負柏林一商人1500馬克之債,其時匯兌時價,在紐約匯柏林100馬克爲23元50分,匯倫敦1鎊爲4元87分.5,又在倫敦匯柏林1鎊爲20馬克$\frac{3}{4}$,問紐約之商人直接匯向柏林,與經過倫敦,何者爲利 …… …………… 414.

33. 混合之問題

● 有甲乙二樽,甲樽有酒精10斤,乙樽有酒精與水共90斤,今將二樽混合,則酒精比水之50倍少2斤,問各量幾何 ……………………… 118.

● 將十開金9錢,與十五開金5錢,與不知成色者7錢,鎔化得十四開金,問未知成色之金如何 … 248.

● 有賣獸肉商,賣去若干斤之肉,其九分之五爲牛肉,其二十七分之十爲羊肉,其餘爲豚肉,而各一斤之原價,牛肉爲2角。羊肉爲2角2分,豚肉1角6分,若平均一斤賣2角又$\frac{4}{9}$,問其損益及各斤數如何,但牛比羊多40斤 …………… 259.

● 有酒缸,容酒若干,其中所含純酒與水之比,爲17:3,今再混入水3升,則其比爲4:1,問初缸中容酒幾何 ……………………………… 317.

● 一斤1圓4角之茶8斤,與1斤2圓5角之茶3斤,混合之,得1斤幾圓之茶 ……………………………… 459.

● 有上下二種糖,每斤上2角5分,下1角4分,問以如何之比混合之,則得每斤1角7分之糖 …………… 460.

● 有甲乙丙三種茶,一斤之價,甲爲72錢,乙爲60錢,丙爲48錢,問以如何之比混合之,則可得一斤57錢

34. 求連比

● 有四水車,甲3廻轉時,乙4廻轉,乙5廻轉時,丙6廻轉,丙8廻轉時,丁11廻轉,問此四車廻轉數之比如何……330.

● 有甲乙丙丁戊五數,甲與乙如5:4,乙與丙如7:8,丙與丁如5:6,丁與戊如2:3,問甲乙丙丁戊五數之比如何……331.

● 甲走3步時,乙走5步,乙走8步時,丙走9步,丙走15步時,丁走16步,又甲之4步,與乙之5步,丙之6步,其長相等,乙之6步,丁之7步,其長亦相等,問各人步行之速之比……332.

35. 連鎖法問題

● 法幣516佛郎,當美幣100元,法幣123佛郎,當德幣100馬克,問德幣2580馬克,當美幣幾元……397.

● 茶3斤之價,等於咖啡4斤之價,咖啡6斤之價,等於白糖20斤之價,白糖15斤之價,等於米1斗2升之價,問茶18斤之價,等於米幾升之價……398.

● 有甲乙丙丁四工人,其力之比,甲與乙如3與4,乙與丙如5與4,丙與丁如8與15,今比例其力給工錢,而甲之工錢爲7角5分,問丁之工錢當若干……400.

● 梨3個之價,等於蘋果4個之價,蘋果5個之價,等於橘3個之價,橘8個之價,等於柚3個之價,梨1打之價,爲720錢,問柚1打之價如何……403.

● 有工匠四名,其力之比,甲與乙如4與3,乙20日所成之業,等於丙21日所成之業,今丙3日之工錢爲1圓2角,問甲8日之工錢如何……404.

● 有穀商,以119圓,買得小麥85包,但以小麥8包換大麥9包,則有1成之利,又以大麥100包,換高粱112包則有3分之損,問高粱180包之價幾何……405.

● 以平年算土星之一年,當於火星之15年687分之635,天王星之一年,當於土星之2年5分之4,火星之一年,當於水星之7年29分之26,地球之一年,當於水星之4年87分之17,天王星之1年21分之20,當於海王星之一年,問海王星之一年,當於地球之幾年……406.

● 柚3個與梨5個之價,如7與4,梨2個比橘10個之價少2成,今以柚80個,賣得3080錢,則有1成之利,若欲以橘300個,賣得2成之利,其價爲幾何……407.

● 甲組5人分,與乙組4人分,其價相等,乙組8人分,與丙組7人分,其價相等,丙組14人分,與丁組15人分,其價相等,今甲組4人分,與丁

● 有甲乙丙三種物，甲5個與乙8個之價之比，如32與35，乙8個之價比丙9個之價，昂6分2釐5毫，今若將甲10個，賣得4圓，則每圓有2角5分之利，今欲賣丙30個，而每圓得2角之利，問其賣價當為幾何……420.

● 有二人甲20分時行3里30丈，乙3時間行24里，而乙行66里時，有馬車馳120里，問此馬馳1920里時，甲當行若干里……421.

● 有同質之鉛球六個，其大小不等，其重之比，甲球7個，與乙球9個相等，乙球5個，與丙球6個相等，丙球10個，與丁球32個相等，丁球64個，與戊球49個相等，戊球28個，與己球25個相等，今己球之徑為3寸$\frac{1}{3}$，問甲球之徑幾何……535.

36. 百分利息之問題

● 某人將住宅火災保險，其保險金為其住宅價格三分之二，而保險費一年為1分5厘，而一年付18圓4角，問住宅之價格如何……488.

● 軍司令官於戰勝後，調查死傷，全軍之4分為名譽之戰死，其餘之1成5分負傷，而負傷者與死者之差，為2184人，問全軍之兵數幾何……493.

● 以1折買之，得1成之利賣之，問為幾分之利……495.

● 某物以定價減1折賣之，尚得原價8分之利，問定價對於原價增幾何……497.

● 某商人欲得原2成之利，以定其價，而賣時得定價8折之價，問此商人損原價之幾分……498.

● 將某物輸入某港，其海關稅課物價之1成2分，但因其物破損1成5分免稅，其餘之海關稅，為408圓，問此物之總價幾何……505.

● 白米時價，每圓5升3合，忽又每圓5升，問騰貴幾分……506.

● 有酒店，將純酒混水4分，而每升又比純酒每斤之原價貴2成賣之，問利益之成分幾何……504.

● 遞加稅率，一年所得金，[圓位未滿者捨去]300圓以上百分之一，1000圓以上百分之一半，10000圓以上百分之二，20000圓以上百分之二半，依此稅率有所得金1000圓以上之人，自其所得金減所得稅之餘金，少於1000圓未滿之人，自所得金減所得稅之餘金，問所得金1000圓以上者至幾圓，又1000圓未滿者至幾圓……509.

● 以現金買，則得10個，六個月免價，則得8個，問利息年幾何……496.

● 有元金若干圓，內120圓年利2分，80圓年利1分2厘，其餘年利1分，

37. 折扣之問題

38. 股票公債之問題

39. 圖形之問題

40. 雜題

第四門 代數學之部

1. 求值

2. 求積

3. 求除得商

4. 求除得之剩餘

5. 分解因數

6. 簡單之

7. 求式

8. 作根之方程式

α,β 爲二次方程式之二根

9. 求關係

10. 求最大公約數

11. 比較大小

12. 證明

I. 絕對的恆等式

II. 附條件恆等式

● $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$，則此分數，等於 $\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b^2)\}}}$ …… 377.

● 若 $x=a+b$, $y=a\omega+b\omega^2$, $z=a\omega^2+b\omega$, 則 $x^2+y^2+z^2=6ab$ …… 457.

● α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根，則有次之關係，$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$ …… 545.

● $x^2-px+q=0$ 之根，若爲二個連續整數，則 $p^2-4q-1=0$ …… 558.

● $\frac{p}{b-c}=\frac{q}{c-a}=\frac{r}{a-b}$，則 $p+q+r=0$ …… 605.

● $a:b=c:d$, $p:q=s:t$, 則 $ap:bq=cs:dt$ …… 606.

● $3a-5b:3c-5d=5a+3b:5c+3d$, 則 $a:b=c:d$ …… 607.

● $a:b=c:d$, 則 $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$ …… 608.

● $a:b=c:d$, 則 $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$ …… 613.

● $a:b=c:d$, 則 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}=\frac{1}{ad}\left\{\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d\right\}$ …… 615.

● $a+b:b+c=c+d:d+a$, 則 $a=c$, 或 $a+b+c+d=0$ …… 609.

● $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，則 $b+c$ 爲 $a+b$ 與 $c+d$ 之比例中項 …… 610.

● $a:b=b:c$, 則 $(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4$ …… 614.

● $x\propto z$, 且 $y\propto z$, 則 $x^2-y^2\propto z^2$ …… 621.

● $x\propto\frac{1}{y}$，且 $y\propto\frac{1}{z}$，則 $z\propto x$ …… 620.

● $z\propto(x+a)(y+b)$, 而 $x=y=0$, 則 $z=ab(a+b)$, 又 $x=b$, $y=a$, 則 $z=(a+b)^3$ …… 623.

● $z^2=x^2+y^2$, 試證次式，則 $y-z+x:z-x+y=x-y+z:x+y+z$ …… 616.

● x, y, z, 適合於 $(a-l)^2x+(a-m)^2y+(a-n)^2z=(a-p)^2$, $(b-l)^2x+(b-m)^2y+(b-n)^2z=(b-p)^2$, $(c-l)^2x+(c-m)^2y+(c-n)^2z=(c-p)^2$ 之三個方程式，則無論 d 爲如何之數，恆能 $(d-l)^2x+(d-m)^2y+(d+n)^2z=(d-p)^2$ …… 274.

III. 整除

● 鄰接三整數之積，必能以 1, 2, 3 之連乘積整除，試證之。又 $2x^3+3x^2+x$ 必能以 6 整除，試證之．但 x 爲整數 …… 37.

● $7^{2n-1}+1$ 得以 8 整除，但 n 爲正整數 …… 31.

● $7^{2n}-1$ 得以 48 整除，但 n 爲正整數 …… 30.

● 以 $x-a$ 能整除 $x^3-2a^2x+a^3$ …… 52.

● m 爲奇數，則能以 $b+c$ 整除 $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ …… 54.

● 以 $(x-1)^2$ 能整除 $nx^{n+1}-nx^n-x^n+1$ …… 57.

● n 爲正整數時，則 $n(n+1)(2n+1)$ 爲 6 之倍數 …… 38.

IV. 雜題

13. 判別根

14. 解一元一次方程式

15. 解一元二次方程式

16. 解準二次方程式

17. 解一元分數方程式

$$\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}\cdots\cdots 222.$$

$$\frac{3+x}{3-x}-\frac{2+x}{2-x}-\frac{1+x}{1-x}=1\cdots\cdots 223.$$

$$\frac{5x-8}{x-2}+\frac{6x-44}{x-7}-\frac{10x-8}{x-1}=\frac{x-8}{x-6}\cdots\cdots 224.$$

$$\frac{4}{x+3}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{2x+6}-\frac{5}{4x+4}\cdots\cdots 225.$$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0\cdots\cdots 226.$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\cdots\cdots 215.$$

$$\frac{x-a}{b-x}=\frac{x-b}{a-x}\cdots\cdots 218.$$

$$\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x-c}\cdots\cdots 221.$$

$$\frac{x^3+7x^2+24x+30}{x^2+5x+13}=\frac{2x^3+11x^2+36x+45}{2x^2+7x+20}\cdots\cdots 227.$$

$$\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}\cdots\cdots 229.$$

$$\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n\cdots\cdots 230.$$

$$\frac{b+c-a}{x^2-(b+c)x+bc}+\frac{c+a-b}{x^2-(c+a)x+ca}+\frac{a+b-c}{x^2-(a+b)x+ab}=0\cdots\cdots 233.$$

$$\frac{x+4a+b}{x+a+b}+\frac{4x+a+2b}{x+a-b}=5\cdots\cdots 228.$$

$$\left(\frac{x-a}{x+b}\right)^3=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}\cdots\cdots 235.$$

$$\frac{5x+7}{x-1}=3x+2\cdots\cdots 394.$$

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{9}{5}\cdots\cdots 395.$$

$$\frac{3x}{x-2}-\frac{4}{x+3}+\frac{4}{2-x}=0\cdots\cdots 396.$$

$$\frac{x}{x-3}-\frac{x-3}{x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x+3}{x}=-\frac{2}{3}\cdots\cdots 397.$$

$$\frac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\frac{1}{x}\cdots\cdots 399.$$

$$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}\cdots\cdots 400.$$

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}\cdots\cdots 401.$$

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}\cdots\cdots 403.$$

$$\frac{x^2+4x-6}{(2x-7)(x-2)}+\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}+\frac{2x^2-4x+12}{(x-1)(2x-7)}=0\cdots\cdots 405.$$

$$\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x\cdots\cdots 408.$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\cdot\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\cdot\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}\cdots\cdots 410.$$

$$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}\cdots\cdots 398.$$

$$\frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=\frac{a}{a-2cx}\cdots\cdots 402.$$

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}\cdots\cdots 404.$$

$$\frac{a(b+c)}{a-x}+\frac{b(c+a)}{b-x}+\frac{c(a+b)}{c-x}=\frac{bc+ca+ab}{x}\cdots\cdots 406.$$

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\frac{cx}{ab}\cdots\cdots 407.$$

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}\cdots\cdots 409.$$

$$\frac{1}{x+a+\frac{1}{x+b}}=\frac{1}{x-a+\frac{1}{x-b}}\cdots\cdots 411.$$

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}\cdots\cdots 412.$$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=\frac{5}{2}\cdots\cdots 419.$$

$$x^2-x+\frac{72}{x^2-x}=18\cdots\cdots 429.$$

18. 解聯立一次方程式

19. 解聯立二次方程式

20. 解根數方程式

21. 應用問題

第一 數之問題

第二 量之問題

第三　配分之問題

保險費,每年5分,其餘爲40000圓,分配於股東每年4分,問資本總額及收益之數各若干…………315.

● 某鐵道公司,當季之紅利,對於債務每年6分,對於股金每年8分6厘,平均8分,前季則債務6分,股金9分,平均8分5厘,而債務少四百萬圓,問此公司之股金,并當季債務之金額如何…………317.

● 某人將金250000圓分爲二分,其一分以4分之利,他一分以3分5厘之利,借與人,得利9000圓,問其分法如何…………293.

● 有兄弟若干人分配產業,長兄取a圓及其餘之n分之一,次兄取$2a$圓及其餘之n分之一,三兄取$3a$圓及其餘之n分之一,次第如此至滿弟而所得之金皆相等,問產業及兄弟之人數如何…………309.

● 某人將80圓,分與若干人,若其人數增4人,則平均每人所得須減1圓,問人數若干…………571.

第四 旅行之問題

● 有人自甲地至乙地,往路每時3里,歸路每時2里,往返共20時間,問兩地之距離如何…………279.

● 二軍合操,第一軍自甲地每時8里,向乙地發,第二軍比第一軍後3時,自乙地每時10里,向甲地發,第二軍行至兩地距離三分之一之處,與第一軍遇,問兩地距離若干…………297.

● 甲乙二人自隔120里之兩處,同時相向而行,甲比乙早到6日,歸路甲每日增速五分之一,乙每日增速四分之一,於是甲比乙早到四日,問往路每日之速各如何…………329.

● 有一旅人,自甲地一時間,以5哩之速,向乙地出發,又有一旅人,同時自乙地,一時間以3哩之速,向甲地出發,而第一人至半途時,距第二人5哩,問甲乙兩地之距離如何…………305.

● 有一人乘自轉車,至中途機損,因修繕費30分時,其後比前速減半,全道30哩,費5時間,若修機在再行10哩之後,則全道程以4時間可達,問損壞之處,及原速如何…………330.

● 有甲乙二人,乘自轉車,甲比乙先p時間起行,各行若干時,乙追及甲,此後乙將其前速之5增爲6,甲將其前速之4增爲5,而各進行,則比乙最初起行至追及甲之時間尙多p時間,而甲與乙隔92里,若二人各以原速進行,則只隔80里,於是乙之速,二倍於甲之速,試證之.又$p+q=16$,則每時之速甲爲10里乙爲5里,試求其證…………331.

● 有甲乙二人競走於池之周圍,以

第五　火車之問題

● 某鐵路一號二號三號之車，其速度一號比二號速10哩，二號比三號速10哩，今一號與三號在甲車站，二號在乙車站相向而發，二號與一號相會後，45分二號與三號相會，甲乙兩地車站間，爲180哩，問各車每時之速度如何………… 588.

● 有每時能行24哩之機關車，今將此機關車拖客車，則其所減之速度，依其客車數平方根之比例，若以此機關車拖客車四輛，則每時能行20哩，然則此機關車能拖客車若干輛，尙能轉運……………… 631.

● 甲乙兩地相距一百哩，其鐵路機關車用煤之量，與其速度之平方成正比例，今欲使每時有16哩之速度，每時用2噸之煤，又此車所用人工及一切雜費，每時需5圓4角，煤之市價一噸4圓8角，此車一百哩需費90圓，問其速度如何…………………………………………… 626.

● 輪船用煤之量與其速度之平方成比例，今欲使每時有16哩之速度，需二百斤之煤，每百斤煤之價爲5角，而一切雜費每時爲$\frac{9}{16}$圓，其對於100哩之轉運，問最有利益之速度……………………………………… 627.

第六 水流之問題

● 有舟子乘短艇，泝流而上一里之時間，等於下盪$1\frac{1}{4}$里之時間，今於此河流下盪5分時，又隨水流之速度下漂5分時，次又下盪5分時，又隨水流之速度下漂5分時，交互如此，40分時下盪至$2\frac{1}{2}$里，問水流每時之速度如何……………… 307.

● 舟子盪小舟上下河流3.5里，須1時40分，若水流1時間之速度爲2里，則此水夫盪於靜水1時間之速如何…………………………………… 586.

第七 工事工價之問題

● 有甲乙二工作一事，甲8日完之，乙12日完之，今二人合作其事，中途甲休業2日，問幾日完之…… 288.

● 有甲乙丙三工作一事，甲一人作成日數，等於乙丙合力作成日數之m倍，乙一人作成日數，等於甲丙合力作成日數之n倍，丙一人作成日數，等於甲丙合力作成日數之p倍，則甲乙丙各一人作成日數之比，爲$m+1:n+1:p+1$試證之．又$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$試證之…………………………… 336.

● 甲乙丙三工，作某工事，甲一人作之，比三人同作之時間增6時，乙一人作之，則增15時，丙一人作之，則時間增2倍，問三人同作之時間如何………………………………… 573.

第八　賣買之問題

第九 年齡之問題

第十 鐘表之問題

第十一 射箭之問題

第十二 試驗之問題

第十三　運費之問題

第十四　混合之問題

第十五　利息之問題

第十六 幾何學之問題

第十七 雜題

22. 等差級數

23. 等比級數

24. 調和級數

25. 記數法

26. 列方組合

27. 二項式定理

- $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2m}$ 之展開式,試求其 x^m 之係數……………………………… 738.
- $(x+a)^n$ 之展開式,其奇數項之和爲A,偶數項之和爲B,則 $A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$ 試證之…………………… 731.
- $(1+x)^n$ 之展開式,係數之和爲 2^n……………………………………………… 732.
- $(1+x)^n$ 之展開式,係數平方之和,爲 $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$………………………………… 734.
- $(1+x)^n$ 之展開式,奇數項係數之和,等於偶數項係數之和,試證之……………………………………………… 733.
- $(1+x)^n$ 之係數,爲 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$,則 $c_0{}^2-c_1{}^2+c_3{}^2-c_3{}^2+\cdots\cdots+(-1)^n\times c_n{}^2$,若 n 爲奇數,則爲0,若 n 爲隅數,則 $(-1)^{\frac{n}{2}}n!\Big/\left(\frac{1}{2}n!\right)^2$………… 735.
- ${}_nC_1+2\times{}_nC_2+3\times{}_nC_3+4\times{}_nC_4+\cdots\cdots+n\times{}_nC_n=2^{n-1}\times n$…………………… 736.
- ${}_nC_1-2\times{}_nC_2+3\times{}_nC_3-\cdots\cdots(-1)^{n-1}\times n\times{}_nC_n=0$……………………………… 737.
- $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$(至無限)$=2\sqrt{2}$……………………………… 742.

28. 對數 復利 年金

- 以4爲底之32之對數如何……… 743.
- $x=a^2bcd^3$,試以對數式表之…… 745.
- $a^x=b$,試作求 x 之値之式………… 746.
- $a^x=c\times b^x$ 試作求 x 之値之式…… 747.
- $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}=c$ 試作求 x 之値之式…… 748.
- 知 $\log 2=0.3010300, \log 3=0.4771213$,試求 $6^x=20$ 之 x 之値……………… 749.
- $a^{\frac{x+1}{x-1}}=b^{\frac{x-1}{x+1}}$ 試作求 x 之値之式… 751.
- $2^{y-1}=16^{x-1}, 3^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{z}}, \sqrt[x]{2^{y-3}}=\sqrt[2y]{8^{z-2}}$……………………………………………… 276.
- $\log x^3-\frac{12}{\log x}=5$,試求 x 之値……… 750.
- $\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)+1=0$…… 752.
- $\log\sqrt{(3x+4)}+\frac{1}{2}\log(5x+1)=1+\log^3$………………………………… 754.
- $\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}+\log\frac{c}{a}=0$……… 744.
- $\log_a b.\log_b c.\log_c a=1$ ……………… 753.
- 以年利5分5厘之複利,借元金600元,問10年間之元利合計幾何……………………………………………… 755.
- 以年利5分之複利,儲蓄於銀行300年,問元利合計爲元金之若干倍…………………………………… 756.
- 以年利5分之複利,問若干年,則元利合計爲元金之10倍……… 757.
- 以年利5分5厘之複利,每年之初存元金100元,問10年之元利合計若干…………………………………… 758.
- 負債5000元,年利8分,欲每年償還同額之金,則20年償淸,問每年當償還之數若干………………… 759.
- 有定期年金,其現價爲年金之 p 倍,若將年數二倍之,則其現價爲年金之 q 倍,問其年利率若干……………………………………………… 760.

29. 不等式

注意 次問題之字母,恆以實數表之.

30. 極大極小

注意 次問題之字母爲表實數者.

31. 消去法

32. 不定方程式

第五門

平面幾何學問題

第一 定理之部
依終結分類

1. 直線之相等大小

BC, 相交於 D, E, F, 若 CF=2BC, AE=3CE, 則 AD=2BD·············297.

● 已知三平行線 AA′ BB′, CC′, 與二直線 AC, A′C′ 相交, AB 及 BC 或 A′B′ 及 B′C′ 之比, 等於已知之比 $m:n$, 則 $(m+n)BB'=n.AA'+m.CC'$ ···298.

● 三角形 ABC 之角 A, 及其外角之二等分線與底邊 BC [其一必爲延線] 之交點爲 D, E, 則 $\frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}=\frac{2}{BC}$ ·································308.

2. 角之相等, 大小

● 二角 $A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$, 有同一之頂點 O, 邊 AO 爲邊 CO 之垂線, 邊 BO 爲邊 DO 之垂線, 則角 AOB, 等於角 COD, 或爲其補角, 試證之··········6.

● 角 LOM 之二邊 LO, MO, 垂直於角 $L'\hat{O}'M'$ 之二邊 L′O′, M′O′, 則 $L\hat{O}M=L'\hat{O}'M'$, 或 $L\hat{O}M+L'\hat{O}'M'=2\hat{R}$·····································9.

● 二角之各二邊, 兩兩平行, 則其二角相等, 或互爲補角···················8.

● 已知直線上之二定點爲 A 及 B 又其他已知直線上之二定點爲 C 及 D, 則 $A\hat{D}C$ 及 $C\hat{B}A$ 之二等分線所之成角, 等於 $D\hat{A}B$ 與 $B\hat{C}D$ 之和之半分··16.

● 三角形 ABC 之邊 BC, 引長至 D, 引二等分 $B\hat{A}C$ 之直線 AE, 使交 BC 於 E, 則 $2A\hat{E}D=A\hat{B}D+A\hat{C}D$·········17.

● 三角形之一外角之二等分線, 與其一內對角之二等分線, 所成之角, 等於其他一內對角之半分···18.

● 三角形 ABC, 其 AB>BC, BD 二等分其底 AC, BE 二等分 $A\hat{B}C$, 則 (1) $A\hat{B}D<D\hat{B}C$, (2) BD>BE·············26.

● 三角形一角之二等分直線之垂線, [甲] 與夾之之邊所成之角, 等於其他二角之和之半分. [乙] 與第三邊所成之角, 等於其他二角之差之半分································20

● 三角形 ABC, 其 B 及 C 之外二等分線所成之角, 等於 A 之外角之半分···21.

● 三角形一角之二等分線, 與自其頂點向對邊所引垂線, 所成之角, 等於他二角之差之半分···········25.

● 三角形 ABC 內, 一點爲 O, 試證 OB+OC<AB+AC, 及 $B\hat{O}C>B\hat{A}C$···· 22.

● 二個三角形之三邊各垂直, 則此三角形互爲等角······················33.

● n 邊之多角形, 每間一邊引長之使相交, 而作星形, 其尖頭諸角之和, 等於 $2(n-4)\hat{R}$························42.

● 於正方形 ABCD 之邊 CD 上取一點 P, 使 AP=PC+CB, 若 CD 之中點爲 G, 則 $B\hat{A}P=2G\hat{A}D$·················57

3. 面積之相等, 大小

● 三角形外接圓之徑,及內切圓之半徑,所包矩形,等於過內切圓中心之外接圓之弦之分,[內切圓中心所分]所包矩形………………303.

● 菱形ABCD,其內切圓之中心為O,引內切圓任意之切線MN,使交AB,BC,於M,N,則 $AM.CN=\overline{AO}^2$ … 327.

● 自二圓相似之中心O,引一直線,使交二圓於點R,R′,及S,S′,[點R對應點S,點R′對應點S′,卽OR小於OR′,則OS小於OS′.]則矩形OR.OS,及矩形OR′.OS相等,且任何之直線恆同………………344.

● 圓內接四邊形兩對角線,互為直交,則二組兩對邊所包矩形之和,等於四邊形之面積之二倍…… 364.

● 圓內接四邊形,兩對角線所包矩形,等於二組對邊所包矩形之和.………………………………363.

● 自圓外一點,引其圓之二切線及一割線,將二切點連結割線之二分點所成之四邊形,其兩對邊所包之矩形相等………………362.

● △ABC之$\hat{A}$之二等分線,再交外接圓周之點為D,連結BD,則AD×BC=BD(AB+AC)………………365.

● 過圓周上一點A,引一弦AD,使交垂直於過A之徑於點C,使交圓周於點D,則矩形AC.AD,等於半徑上正方形之二倍………………367.

● 自圓周上一點,向其內接四邊形相對邊引垂線,此二雙垂線所包矩形相等,試證此定理及其逆…………………………………………370.

● 自三角形ABC之頂點A,引其內角或外角之二等分線,與BC或其延線交於點M,與圓周交於點N,則AB,AC,所包矩形,等於AM,AN,所包矩形………………371.

● 二同心圓周間之面積,等於切小圓周之大圓周之弦為徑之圓之面積………………………587.

● 直角三角形,將其直角傍之二邊各為徑,畫半圓於三角形外,又將斜邊為徑,畫半圓,與三角形相重,所生二月形之和,等於三角形之面積………………………589

● 自半圓之徑AB上之一點C,立AB之垂線,使與周交於D,又將AC,BC,為徑畫二半圓周於已知半圓內,則三半圓周,所成曲線形之面積,等於CD為徑之圓之面積…… 590.

● 於圓O引互垂直之二徑AB,CD,將D為中心,DA為半徑,畫弧AEB,則月形ACBE與△DAB等積………………………………591.

● 自中心O之弧AB之一端A,下OB之垂線,其趾為C,於弧AB上,截取等於AC之長之弧AD,作AB,DO,則弓形ADB,與扇形DOB等積………………………………592.

● OA,OC,為圓O互垂直之二半徑,

4. 垂直

5. 平行

6. 相交

7. 二等分

8. 等距離

9. 一定

● 二等邊三角形，自其底上任意一點，向二等邊引垂線，其和爲一定，若點在底之延線上如何………… 35.

● 自正三角形內任意一點，至各邊引垂線之和爲一定．若點在正三角形之外，則如何…………………… 36.

● 有二等邊三角形ABC，於底邊上，任意一點P，作BC之垂線，與他一邊CA延線之交點爲K，與AB之交點爲S，則KP+SP爲一定不變…… 37.

● AC，BD，爲一圓之弦，其交角爲一定不易，則二弧AB，CD之和或差，無論二弦位置之如何，恆相等… 87.

● 立於同弦AB上之二弓形ACB，ADB，弧ACB上任意之點爲C，連結A，B，而AC，BC，或其延線，交弧ADB之點爲D，E，則弧DE之大爲一定不易……………………………… 90.

● 過相交二圓之一交點，引任意之直線，將其再與二圓相交之點，連結二圓之他交點，則此二直線所成之角爲一定不易，而此角等於二圓交點二切線所成之角…… 118.

● AB，CD，爲已知圓之二定徑，E，F，爲自圓周上任意之一點P，作AB，CD之垂線趾，則EF之長爲一定………………………………………… 129.

● 自中心C之圓外一點P，引切線PA，PB，於其劣弧AB上一動點T，引第三切線，使與PA，PB，相交於Q，R，則無論T之位置如何，(1)三角形PQR之周圍爲一定．(3)角QCR爲一定，又T在優弧AB上，則如何………………………………… 141.

● 自已知直線上之已知二點，引切於此直線之圓之切線，則此二切線之和或差，恆爲一定………… 180.

● 於已知角BAC內，加入已知長之直線BC，於AB，AC，之中點，作垂線，其交點爲O，則AO之長，不關於BC之位置，恆爲一定………… 181.

● 過二圓之交點A，作二直線MAN，M′AN′，使與圓周相交於M，N，及M′，N′，則MM′及NN′之延線所成之角D，爲一定不易……………… 184.

● A，B，爲二圓之交點，過一圓周上之一點C，引直線CAD，CEB，使交他圓周於D，E，則弧DE之大爲一定……………………………………… 187.

● 一定圓周上一點A之切線，與過此圓中心C之一定圓，相交於點P，Q，則PC.QC爲一定不易…… 369.

10. 過同一之點

● 有平行四邊形，其各角之頂點，在他平行四邊形各邊之上，則二平行四邊形之對角線，相交於同一之點…………………………………… 43.

● 三角形之三中線，相交於同一之點[此點爲三角形之重心]……… 58.

● 六角形之三組對邊平行相等，則

11. 在同一直線上

同一之直線上. (2) $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$, 及 $MN=\frac{1}{2}(AB\sim CD)$…… 49.

● 三角形之垂心H, 重心G, 外心O, 在一直線上, 而GH等於OG之二倍…… 62.

● 延長圓內接四邊形ABCD之各邊AB, CD之交點爲P, BC, AD, 之交點爲Q, 又△PBC及△QCD之外接圓, 再於R相交, 則三點P, Q, R, 在同一之直線上…… 116.

● 二相等圓周之交點爲A, B, 將A爲中心, 以小於AB之半徑畫圓周, 與二圓周於AB之同傍, 相交於點C, D, 則C, D, B, 在同一之直線上…… 183.

● 有切已知圓與已知直線之圓, 其垂直於已知直線之已知圓徑之一端, 與二切點在同一之直線上…… 190.

● △ABC之垂心, 對於一角頂C之對稱點爲H′, 三角形之外心爲O, 將CA, CB, 爲二邊, 而作平行四邊形, 其他一角頂爲C′, 則H′, O, C′, 在同一之直線上…… 200.

● 三角形底邊之中點, 與頂角二等分線上垂心之正射影, 與九點圓之中心, 在同一之直線上…… 201.

● △ABC之A之內二等分線上及外二等分線上, 自垂心作其垂線, 則其趾與BC之中點, 在同一之直線上…… 202.

● 將等邊三角形ABC外接圓周上一點M, 連接對各邊之弧之中點, 引三直線, 與其邊之交點, 在△ABC關於M之西母生線之平行線上…… 203.

● 自半圓周上一點C, 引徑AB之垂線爲CD, 切BD於E, 切CD於F, 切半圓周於G之圓周爲EFG, 則弦AC等於AE, 而A, F, G之三點在同一之直線上…… 265.

● 相似二平行四邊形, 有一共同角, 且在相似之位置, 過其共同角頂點之對角線, 爲同一之直線…… 325.

● 圓內接六角形, 引長其相對邊使相交, 則三交點在同一之直線上…… 377.

● 四邊形ABCD之邊AB, DC, 之交點爲X, AD, BC之交點爲Y, 則AC, BD, XY之各中點, 在同一之直線上. [本題直線XY, 謂之四邊形之第三對角線]…… 384.

● 三角形之外角之二等分線, 與對邊相交之三點在同一之直線上…… 383.

● 二三角形ABC, A′B′C′, 連結其角頂與角頂之直線AA′, BB′, CC′, 過同一之點, 則相應邊之交點P, Q, R, 在同一之直線上. [並其逆]…… 386.

12. 在同一圓周上

13. 切

14. 得畫圓

15. 成比例

16. 比例中項

17. 相似

依假設分類

1. 直線角

2. 三角形

3. 直三角形

$[\hat{A}=\hat{R}]$

- 直三角形ABC,平行其斜邊BC之直線DE,在二邊之間,則$\overline{CD}^2+\overline{BE}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$ ………… 215.
- 自直三角形銳角之頂點,過對邊之中點引直線,則此直線上正方形,等於自斜邊上正方形,減二等分邊之半分上正方形之三倍 ………… 216.
- 直三角形ABC之內切圓,切斜邊AC之點為O,則矩形AO.OC,等於三角形ABC之面積 ………… 245.
- ABC為A為直角之三角形,AF,AK,BE為正方形,AL垂直於BC,則(1) AE,BK,互為垂直. (2)三角形KCE,DBF為等積. (3) $\overline{EK}^2+\overline{FD}^2=5\overline{BC}^2$. (4) AQ,AR,相等. (5) CF,BK,AL相交於同一之點…246.
- 直三角形斜邊上所畫正三角形,等於他二邊上所畫正三角形之和 ………… 248.
- 披他哥剌斯之定理,於次圖AC及BH之交點為P,自P平行於CB引PQ,使交AB於Q,則CP=PQ…… 249.
- 自直角三角形直角之頂點,引斜邊之垂線,則分本形為與原形相似[因而互相似]之三角形…… 270.
- 直角三角形ABC,其直角B之二等分線,與AC相交於點F,與外接圓相交於D,則矩形BD.BF等於三角形之二倍 ………… 283.
- 直角三角形ABC自直角之頂點A,引BC之垂線AD,而自B之二等分線BE與AC相交於E,與AD相交於O,則DO : OA=AE : EC…. 299.
- 自直角三角形直角之頂點,向斜邊引垂線上之正方形,等於斜邊二部所包之矩形,試以二三之方法證明之 ………… 311.
- 直角三角形,將其直角傍之二邊各為徑,畫半圓於三角形外,又將斜邊為徑,畫半圓,與三角形相重所生二月形之和,等於三角形之面積 ………… 589.

4. 二邊等三角形

- 二等邊三角形之外二等分線,平行於底 ………… 13.
- 立於同底上之二個二等邊三角形,連結其二頂點之直線為共同底之垂直二等分線 ………… 14.
- 有二等邊三角形ABC,引長其邊AB使BD等於AB,截取BD,若AB之中點為E,則CD等於CE之二倍 ………… 47.
- 自二等邊三角形底邊上任意一點,作他二邊之平行線,所得平形四邊形之周圍為定長 ………… 32.
- 二等邊三角形,自其底上任意一點,向二等邊引垂線,其和為一定,若點在底之延線上如何 ………… 35.
- 有二等邊三角形ABC,於底邊上,

5. 正三角形

6. 邊四形

7. 平行四邊形

8. 矩形

9. 菱形

10. 正方形

11. 梯形

12. 五角形

13. 正五角形

14. 六角形

15. 正六角形

16. 八角形

17. 正十角形

18. 正十二角形

19. 多角形

20. 對稱

21. 弦弧切線

22. 弓形

線，使交AB, AC及半圓周於點E, F, G，則DG為DE, DF之比例中項 ………… 354.

● APB為徑AB中心C之半圓，N為CB上任意之點，將AB延長至T，使CT : AC = AC : CN，自點T引切線，切半圓於點P，則$C\hat{N}P$為角直 ………… 361.

● 自半圓之徑AB上之一點C，立AB之垂線，使與圓周交於D，又將AC, BC，為徑畫二半圓周於已知半圓內，則三半圓周所成曲線形之面積，等於CD為徑之圓之面積 … 590.

● 將直線AB二等分於C，又於D分為不等之二分，如圖畫半圓，則P + S = Q + R. [但P為半圓周之罅隙] ………… 595.

23. 二圓

[二圓之中心為C, C′]

● 過二圓之交點引一直線，其端各在圓周上，連結圓心之直線，射於此直線上之正射影，等於其直線之半分 ………… 85.

● 相等之二圓周於A, B相交，過O之直線，與圓周之交點為C, D，作BC, BD，則△BCD為二等邊 …… 89.

● 過相交二圓之一交點，引任意之直線，將其再與二圓相交之點，連結二圓之他交點，則此二直線所成之角為一定不易，而此角等於二圓交點二切線所成之角 …… 118.

● 中心為A及B之二圓，相交於C，則二圓於C二切線之角，為$A\hat{C}B$之補角 ………… 119.

● 二圓互相直交，其交點各圓之切線，過他圓之中心 ………… 172.

● 二相等圓互相直交，其共同弦等於二中心間之距離 ………… 173.

● 過相交二圓之交點A, B，引倍弦PAQ, RBS，則弦PR，平行於弦QS ………… 174.

● 二圓於A, B，相交，過其一圓周上意一點P，引直線PAC, PDB，使截他圓於C及D，則CD，平行於點P之切線 ………… 175.

● 一圓之中心，在他圓之周上，其共同二切線切於第二圓之點為A, B，則AB切於第一圓 ………… 178.

● 二圓周相交於A, B，引各圓之切線AC, AD，使交各圓周於C, D，則BC, BD與BA成等角 ………… 179.

● 二相等圓周之交點為A, B，將A為中心，以小於AB之半徑畫圓周，與二圓周於AB之同傍，相交於點C, D，則C, D, B，在同一之直線上 ………… 183.

● 過二圓之交點A，作二直線MAN, M′AN′，使與圓周相交於M, N，及M′, N′，則MM′及NN′之延線所成之角D，為一定不易 ………… 184.

24. 三圓

25. 四圓

第二軌跡之部

1. 中點之軌跡

2. 交點之軌跡

3. 頂點之軌跡

4. 視點之軌跡

5. 等點之軌跡

6. 定長點之軌跡

7. 定積點之軌跡

8. 定比點之軌跡

9. 雜題

第三 作圖題之部

1. 求點

2. 引直線

3. 畫三角形

[各角A, B, C, 其對邊爲 a, b, c, 向該邊所引之中線,爲 m_a, m_b, m_c, 垂線爲 h_a, h_b, h_c, 二等分線,爲 w_a, w_b, w_c, 內切圓之半徑爲 r, 外接圓之半徑爲R, 切邊 a, b, c, 傍切圓之半徑爲 p_a, p_b, p_c.]

以次之各已知而作△.

4. 畫四邊形

5. 畫多角形

6. 畫圓

第四　極大　極小之部

第五　計算問題之部

第六門
立體幾何學問題

第一　定理之部
依終結分類

I. 線之相等大小

2. 角之相等大小

3. 面積之相等大小

4. 體積之相等大小

5. 在平面上

6. 過同一之點

7. 相交

8. 垂直

9. 平行

10. 等距離

11. 二等分

12. 全等

13. 一定

14. 對稱

15. 成比例

16. 得作平面

17. 得作內接

18. 得畫球

依假設分類

1. 直線

2. 平行直線

3. 面之垂線斜線

4. 平　面

5. 平行平面

6. 平行之平面與直線

7. 垂直平面

- 二平面互垂直，則在其一平面上，而垂直平於二面之交之直線亦垂直於其他之一平面…………33.
- 二平面互垂直，則於其交之任一點作垂直其一平面之直線，在他之一平面上…………34.
- 二平面互垂直，則自其一上任意之一點向其他作垂線，在前之平面上…………35.
- 一平面P垂直於互垂直之二平面M, N，則是等平面任意二平面之交，垂直於第三平面，而三平面之交，各垂直於他二平面之交……38.
- 一直線與一平面，垂直於同一之平面，則此直線與平面平行……40.

8. 二面角

- 對頂二面角相等…………28.
- 二面角之二平面，各與他二面角之二平面平行，則此二二面角相等，或互為補角…………29.
- 一平面與二平行平面相交，則(甲)其錯二面角相等.(乙)同位二面角相等.(丙)在同傍二內二面角之和，等於二直角…………30.
- 與對頂角之二面成相等角，且垂直於其稜之值線，與二面之交點，在其稜之等距離…………32.
- 二等分二面角之平面上各點，在二面角之二面之等距離…………44.
- 自二面角之稜上一點，作二斜線於各面上，使二斜線與其稜所成之二角相等，問其角之界限如何…………59.

9. 三面角

- 三面角之任意二面角之和，大於他之一面角…………49.
- 三面角其任意二面角之差，小於他之一面角…………50.
- 三面角之三個二等分二面角之平面，相交於同一之直線…………52.
- 有二三面角，其面角皆為直角，以平面截之，所得三角形之垂心，與自此三面角之角頂，下此平面之垂線之趾，在同一之點…………54.
- 一三面角，其一二面角為直角，則以垂直於其任意之稜之平面截之，其截口為直三角形…………93.
- 二個三面角，其三個面角各同序相等，則是等之三面角相等，若逆序相等，則如何…………53.

10. 果修四邊形

- 果修四邊形各邊之中點，為平行四邊形之角頂…………57.
- 果修四邊形四角之和小於四直角…………60.
- 過果修四邊形 ABCD 相對二邊

11. 射影

12. 四面體

13. 正四面體

14. 平行六面體

15. 直角體

16. 立方體

17. 正多面體

18. 角壔

19. 角錐

● 自正多角錐底面上一點,作底面之垂線,與其傍面及其延長面交點距離之和恆為一定…………96.

20. 角臺 圓臺

● 底為平行四邊形之角臺,其對角線,皆過同一之點…………100.

● 三角臺之體積,等於「以其上底,下底及上下兩底之比例中項,為底,原三角臺之高,為共通之高」之三個角錐體積之和…………101.

● 任意之角臺[圓臺]之體積,等於「以其上底,下底,及兩底之比例中項,為底,原角臺[圓臺]之高,為共通高」之三個角錐[圓錐]體積之和…………102.

● 取三角臺之兩底之不平行二邊,為相對稜之四面體,皆為等積…………137.

● 正角臺及正圓臺之側面積,等於兩底面等距離之平面截口之周,與斜高之積…………73.

21. 多面體

● 凸多面體稜數為E,面數為F,角頂之數為V,則$E+2=F+V$…………90.

● 任意多面體角之和,等於自角頂之數減2之四直角…………91.

● 少於6之稜,不能作多面體…………92.

22. 球

● 球之面積,為其外接直圓壔表面積三分之二,而體積為其外接直圓壔體積三分之二…………162.

● 外切於球正圓錐之高,為球徑之二倍,則圓錐之全面積,與體積,各為球之面積與體積之二倍…………171.

● 球之體積與其外切立方體之體積之比,為$\pi:6$…………172.

● 球之體積與其內接立方體之體積之比為$\pi\sqrt{3}:2$…………173.

● 過不在同一平面上四點得作一球,而惟限於一…………143.

● 任意四面體,得作內切球…………144.

● 任意四面體,得作外接球…………145.

23. 球之小圓大圓

● 自球中心等距離之小圓,相等,其自中心在不等距離之二小圓,近於中心者,大於遠於中心者…………140.

● 球之任意二大圓,互為二等分…………141.

● 試求過球面上已知二點之大圓之弧…………149.

● 過球面上任意之三點,可畫小圓之弧…………142.

24. 球之切線切面

● 切於球之直線,或平面,垂直於過切點之半徑…………147.

25. 球面三角形

26. 球面多角形

27. 圓錐

- ● 過正圓錐之頂點之平面截口為二等邊三角形……………………179.
- ● 直圓壔或正圓錐之切面,垂直含軸及切線[即切面所含母線]之平面……………………………………180.

28. 圓壔

- ● 相似圓壔體積之比,等於其高之三乘比,又等於其底半徑之三乘比……………………………………184.
- ● 相似直圓壔側面積之比,等於其高之平方之比,又等於其底半徑之平方之比.[全面積之比亦同樣]……………………………………181.
- ● 直圓壔平行其軸之平面截口為矩形……………………………………178.
- ● 直圓壔或正圓錐之切面,垂直含軸及切線[即切面所含母線]之平面……………………………………180.
- ● 球之面積,為其外接直圓壔表面積三分之二,而體積為其外接直圓壔體積三分之二……………162.

29. 球帶

- ● 已知之球面,以過其中心之他球面截取之球帶面積,恆為一定……………………………………163.
- ● 球帶之面積,等於底為大圓等高之直圓壔之側面積……………………183.
- ● 球帶之底之一至為零之極限,其面積,即以半圓徑AFC為軸弧AB廻轉所生之面積,等於以AB為半徑之圓面積……………………198.

30. 旋轉體

- ● 一直線以在其平面上一直線為軸,而廻轉之,所生曲面之面積,等於此直線中點所作垂線,夾於此直線及軸間之部分,為半徑之圓周,與此直線在軸之正射影之積………195.
- ● 任意三角形ABC,以在其平面上,過其頂點,而不截之之直線為軸,而廻轉之,所生體之體積,等於自C所作高之三分之一,乘以AB所生之面積……………………196.
- ● 一邊之長為h之正方形ABCD,過其一頂點A平行於BD之直線,廻轉所生之立體,試計算其全表面積及體積,又由是證明此體全表面積,等於正方形之周,與二對角線交點廻轉所畫圓周之積,而其體積,等於正方形之面積,與其對角交點所畫圓周之積…………197.
- ● 球缺之二底[截口]半徑為r', r'',高[平行二平面間之距離]為h,則其體積$V=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}h^3$ ………………………………………………199.
- ● △ABC之邊AB, BC, CA,為13寸,14寸,15寸,此三角形同一之平面上,距離BC 8寸,平行於BC之直

第二 軌跡之部

第三 作圖題之部

第四　極大極小之部

第五　計算問題之部

第七門　三角法之部

平面三角法

第一　銳角之三角函數

第二　一切角之三角函數

1. 試求值

● A等於(1) 10°, (2) 200°, (3) 300°, (4) 8000°, 試決定 $\tan\frac{A}{2}=\cot A(\pm\sec A-1)$ 之複符號……110.

2. 試化爲不大於45°之角之三角函數

● $\sin 7321°$, $\cos(-8146°)$, $\tan 7389°$, $\cot 375°$, $\sec(-8325°)$, $\mathrm{cosec}\,1732°$, 試化爲小於45°之角之三角函數……19.

3. 試求極限

● x將近於0時試求 $\pi\sin\frac{\pi x}{2}\div 4x\cos\frac{\pi x}{2}$ 之極限……226.

● x將近於a, 試求 $\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ 之極限……227.

● n無限增加, 試求乘積 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\times\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$……之極限……228.

● ω接近於λ時,

$\frac{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\beta)+\sin(\beta-\omega)}{\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\alpha)+\sin(\alpha-\omega)}$

之極限, 爲 $\left\{\sin\frac{\lambda-\beta}{2}\Big/\sin\frac{\lambda-\alpha}{2}\right\}^2$……225.

4. 試研究變化

● (A) $\sin^2x-2\sin x+3$……229.

● (B) $4\sin^2x-3\sin x+8$……229.

● A自0°變至90°, 則$\sin A+\cos A$, 及$\sin A-\cos A$相因而變如何……26.

● A自0°變至360°, 則$\tan A+\cot A$之相因而變如何……27.

● 六個三角函數之變化, 試以曲線表之……30.

● 次之三式, 因A自0°變至360°, 問其變化如何 $\frac{1+\sin A}{1+\cos A}$, $\mathrm{cosec}A+\cot A$, $\mathrm{cosec}A-\cos A$……51.

5. 試簡單之

● $\frac{\sin(-A)}{\sin(180°+A)}-\frac{\tan(90°+A)}{\cot A}+\frac{\cos A}{\sin(90°+A)}$……20.

● $\tan(45°+A)-\tan(45°-A)$……40.

● $a\cos A+b\sin A$……58.

6. 試證明之

I. 絕對的恆等式

● $\sin A\tan(90°-A)\sec(90°-A)=\cot A$……24.

● $\frac{\cot^2A\sin^2(90°-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90°-A)-\cos A$……25.

● $\tan^2(45°+A)=\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}$……34.

● $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$……35.

● $\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha=\cot\alpha-8\cot 8\alpha$……36.

● $\sec\alpha\pm\tan\alpha=\tan\left(45°\pm\frac{1}{2}\alpha\right)$……37.

● $2\sin^2A\sin^2B+2\cos^2A\cos^2B=1+\cos 2A\cos 2B$……39.

II. 附條件之恒等式

(1) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

(2) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

(3) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cdot\cos\frac{\pi-B}{4}\cdot\cos\frac{\pi-C}{4}$ $\cdots$ 54.

● 若 n 為奇數，則 $\sin nA+\sin B+\sin nC=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nC}{2}$ 但 $A+B+C=\pi$ $\cdots\cdots$ 55.

● 若 $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$, 及 $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$, 則 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$ $\cdots\cdots$ 56.

● $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$, 則 $\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\phi}{2}=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$, $\tan\theta+\tan\phi=\frac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$, $\sin(\theta+\phi)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ $\cdots\cdots$ 57.

● $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1=\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi$, 則 $x=\left(\cos\frac{\theta+\phi}{2}\div\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)a$, $y=\left(\sin\frac{\theta+\phi}{2}\div\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)b$ $\cdots\cdots$ 68.

● $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$, 則 $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\cdots\cdots$ 101.

● 角 A 若在 450° 與 630° 之間，則 $2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{(1+\sin A)}-\sqrt{(1-\sin A)}$ $\cdots\cdots$ 105.

● $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, 則 $\cos\phi=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ $\cdots\cdots$ 121.

● $\tan\frac{\theta}{2}=\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\frac{\phi}{2}$, 則 $\cos\theta=\frac{\cos\phi-c}{1-c\cos\phi}$ $\cdots\cdots$ 122.

● 知 $\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\tan\frac{1}{2}\gamma\tan\frac{1}{2}\delta+1=0$, $\Sigma\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta=0$, 試證 $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0$ $\cdots\cdots$ 216.

● $2\cos\theta=u+\frac{1}{u}$, 則 $2\cos n\theta=u^n+\frac{1}{u^n}$, 但 n 表整數 $\cdots\cdots$ 217.

● 若 $yz+zx+xy=1$, 則由三角法得 $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$ $\cdots\cdots$ 222.

● 若 β,γ, 為 θ 之二值，而適合於 $h^2\cos\alpha\cos\theta+h(\sin\alpha+\sin\theta)+1=0$, 試證 $h^2\cos\beta\cos\gamma+h(\sin\beta+\sin\gamma)+1=0$ $\cdots\cdots$ 230.

III. 雜題

● 若 $\tan\phi=\cos\theta\tan\alpha$, 及 $\tan\alpha'=\tan\theta\sin\phi$, 則 $\tan^2\frac{\phi}{3}$ 之一值，為 $\tan\frac{\alpha+\alpha'}{2}\tan\frac{\alpha-\alpha'}{2}$ $\cdots\cdots$ 53.

● 若 $\sin A+\cos A=+\sqrt{1+\sin 2A}$, 則 $A<135°$ 或 $A>315°$ 試證之. 但本題之 A 小於 360° $\cdots\cdots$ 69.

● $\tan\phi=\frac{a\sin\theta+a'\sin\theta'}{a\cos\theta+a'\cos\theta'}$ 則 ϕ 在 θ 與 θ' 之間，試證之. 但 ϕ,θ,θ', 皆表銳角，又 a, a', 皆表正數 $\cdots\cdots$ 70.

7. 試解次之方程式

8. 試求要件與關係

9. 試研究根

10. 試消去之

11. 試解次之不等式

12. 對數式之變形

13. 極大 極小

數, 試求 $\operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}y$ 之極小值…………………………………… 139.

- $x+y$ 爲一定, 試將 $1-\sin^2x-\sin^2y$, 化爲對數計算之式, 而求其極大及極小值……………………………… 140.
- 試將 $\sin x\cos(x+a)$, 變爲二正弦之差, 而求 x 變時, 其積之極大極小值…………………………………… 141.
- 已知三角形之一邊 a, 與對角 A, 求其面積之極大者……………………… 189.

14. 級數

- a^2, b^2, c^2 爲等差級數, 則 cotA, cotB, cotC 亦爲等差級數…………………… 154.
- $\sin^2 30°, \sin^2 45°, \sin^2 60°, \sin^2 90°$ 爲等差級數…………………………………… 15.
- 試求次之級數 n 項之總和, $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+$ ……………………………… 205.
- $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+$ ………………… 206.
- $\sec a\sec 2a+\sec 2a\sec 3a+\sec 3a\sec 4a+\cdots$ …………………………………… 207.
- $\operatorname{cosec}a\sec 2a-\sec 2a\operatorname{cosec}3a+\operatorname{cosec}3a\sec 4a-$ ……………………………… 209.
- $\sin a\sin(a+\beta)+\sin(a+\beta)\sin(a+2\beta)+\sin(a+2\beta)\sin(a+3\beta)+$ ……………… 208.
- $\sin^2 a+\sin^2(a+\beta)+\sin^2(a+2\beta)+\cdots$ 210.
- $\cos a\sin 2a+\sin 2a\cos 3a+\cos 3a\sin 4a+$ …………………………………… 211.
- $\dfrac{1}{1+\tan a\tan 2a}+\dfrac{1}{1+\tan 2a\tan 4a}+\dfrac{1}{1+\tan 3a\tan 6a}+$ ……………………… 212.
- $\tan^{-1}\dfrac{1}{1+1.2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1+2.3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1+3.4}+$ ………至無窮項之和 S……………………………… 213.
- $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{1+1.2x^2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{1+2.3x^2}\right)+$ ………至無窮項之和 S………………………………… 214.
- 於所設角 $XOY=a$ 之一邊 OX 上, 取 $OA=d$, 作 OY 之垂線 AB, 作 OX 之垂線 BC, 以下次第如此, 試計算所得折線 ABCD…………之長…… 215.

15. 棣謨阿布魯氏之定理

- n 值之無論正負整分之數, $\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$ 恆爲 $\{\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\}^n$ 之一值………………………………… 232.
- 用前題定理能開 $a+bi$ 式之幾乘根, 今示其求立方根之法……… 233.
- 展開 $\cos n\theta, \sin n\theta$ …………………… 234.

第三　三角形角邊之關係

[將各邊爲 a, b, c, 其對角爲 A,B,C. 周爲 2S.]

- $2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)$ ………… 144.
- $c(\cos A+\cos B)=2(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C\cdots$ 145.
- $\tan B\div\tan C=(a^2+b^2-c^2)\div(a^2-b^2+c^2)$ ……………………………………… 146.

第四　三角形之性質

● e, e', e''，爲三角形三垂線之反數，且 $e+e'+e''=2\sigma$，試證次式
$\sqrt{\sigma(\sigma-e)(\sigma-e')(\sigma-e'')}=\frac{1}{4S}$ ………… 186.

● 垂趾三角形之周圍，等於
$4R\sin A\sin B\sin C$ …………………… 192.

● 連結三傍切圓之中心取成三角形之三邊爲 a', b', c'，則 $a=a'\sin\frac{A}{2}$，
$b=b'\sin\frac{B}{2}$，$c=c'\sin\frac{C}{2}$ …………… 193.

● 前題三角形 $O'\,O''\,O'''$ 之面積爲
$\frac{abc}{2r}$ ………………………………… 194.

● 自前題內心 O，至傍心之三距離，爲 $a\sec\frac{A}{2}$，$b\sec\frac{B}{2}$，$c\sec\frac{C}{2}$ ……… 195.

● 切於三角形內切圓及二邊之三圓之半徑爲 r_a, r_b, r_c，內切圓之半徑爲 $r_a=r\tan^2\frac{1}{4}(B+C)$，
$r_b=r\tan^2\frac{1}{4}(C+A)$，$r_c=r\tan^2\frac{1}{4}(A+B)$，
……………………………………… 196.

● 自三角形之三角頂 A, B, C, 至其內切圓中心之距離爲 d, e, f，試證次式.
$d^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+e^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+f^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
$=0,\cdots(1)$ $\frac{\cos\frac{1}{2}A}{d}+\frac{\cos\frac{1}{2}B}{e}+\frac{\cos\frac{1}{2}C}{f}=$
$s\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)$ …………(2)……… 198.

● (a) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$. (b) $r_1+r_2+r_3-r=4R$. (c) $rr_1r_2r_3=s(s-a)(s-b)\times(s-c)$. (d) $r_1r_2+rr_3=ab$ ……… 199.

● 頂角爲 2θ 之二等邊三角形，其內切圓及外接圓半徑之比，爲
$2\sin\theta(1-\sin\theta) \ngtr \frac{1}{2}$ ……………………… 200.

● r, r_a, r_b, r_c，爲切於三角形三邊之圓之半徑，則此三角形之面積，能以次式表求其證.
$S=r\sqrt{\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}}$ …… 223.

● $\left\{\frac{abc}{4Rr}\left(\frac{abc}{4Rr}-a\right)\left(\frac{abc}{4Rr}-b\right)\left(\frac{abc}{4Rr}-c\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$. 試簡單之 ……………… 202.

● 已知 b, c, A，試以對數式表頂角 A 之中線及二等分線 …………… 172.

● 三角形角 A 之外角二等分之線，至對邊延線之長，爲
$\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A}{b-c}$ ………………………… 220.

● 三角形之角 A 二等分線，至底之長爲 l，其與底所成之角爲 θ，三角形之周圍爲 2δ，則 $\delta(\sin\theta-\sin\frac{A}{2})=$
$l\cos\frac{A}{2}\sin\theta$ …………………………… 160.

● 將三角形之底，分爲三等分，t_1, t_2, t_3，爲在頂點含各部分之角之正切，則 $\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=$
$4\left(1+\frac{1}{t_2^2}\right)$ ………………………… 159.

● 自三角形之三角頂，至對邊作三直線，其與對邊所成之角皆相等，則此三直線所成三角形之面積，與原三角形面積之比爲 $4\cos^2\alpha$ ……
……………………………………… 201.

● 有過等邊三角形之中心與二邊相交之直線，將其線於中心所分二部 x, y，分爲三角形之一邊爲 a，

第五　三角形之解法及距離高

1. 試解三角形

2. 雜題

球面三角法

索引目次

依終結分類

依假設分類

第二 軌跡之部…………… 125.

第三 作圖題之部………… 128.

第四 極大極小之部…… 133.

第五 計算問題之部…… 135.

平面三角法之部

數學辭典

小史內篇人名索引以姓氏畫數爲次序

二畫

四畫

五畫

六畫

七畫

八畫

九畫

十五畫

十六畫

十七畫

十八畫

十九畫

二十一畫

二十二畫

數學典辭

小史外篇人名地名之譯音及索引

數學用略字

a. acre；愛克，噎[地積]. *annus*, year；年.
a. or ans. Answer；答.
A.C., *ante Christum*=Before Christ；耶蘇紀元前.
alg. Algebra；代數學.
ans. Answer；答.
arith. Arithmetic or Arithmetical；算術，或算術的.
Avoir., Avdp. Avoirdupois；藥衡.
Ax. Axiom；公理.
B.C. Before Chirst；耶蘇紀元前.
C. Centigrade；百度.
c., ct., cent., *centum*=A hundred；百.
car. Carat；克剌替.
cen. Central；中心的. Century；世紀.
cent., *centum*=A hundred 百.
centig. Centigrade；百度[攝氏].
cg. Centigram；甅.
C.G.S. Centimetre, Gramme, Second；長質量時之單位.
cm. Centimetre；糎.
com. Common；共通的，公.
commn. Commission；酬金.
comp. Compare；比較. Compound or compounded；複.
con., Conclusion；終結.
con. sec. Conic Sections；圓錐曲線，圓錐曲線法.
contr. Contracted；省略的. Contraction；省略.
cos. Cosine；餘弦.
cot. Cotangent；餘切.
cu., cub. Cubic；立方的.
d. Degree；度.
def. Definition；定義.
demon. Demonstrative；證明的.
der. Derivation；變化.
diam. Diameter；徑，直徑.
div. Divide；除.
doz. Dozen；打.
E. East；東.
e.g., ex. gr., *exempli gratia*=For example；例如.
東北東. **E.N.E.** East-north-east；
etc. *et ceteri* or *cetra*=And others, and so forth；等.
ex. Example；例.
ft. Foot, Feet；呎.
fth., fthm. Fathom；尋.
fur. Furlong；英里八分之一[長度].
g. Gramme；瓦.
G.C.M. Greatest common measure：最大公約數.
geom. Geometry；幾何學.
gm. Gramme；瓦.
G.M.T. Greenwich Mean Time；格林維兼平均時.
guin. Guinea；英二十一先令之金幣[貨幣].
hr. Hour；時.
i.e., *id est*=That is；詳言之.
int. Interest；利息.
kilo. Kilogramme；瓩.
km. Kilometre；粁.
L. Napierian logarithm；訥伯爾對數.
lat. Latitude 緯度.
L. C. M. Least common multiple；最小公倍數.
Log. Tabular logarithm；對數表.
log. Common logarithm；常用對數.
lon., long. Longitude；經度.
M., *mille*=A thousand；千.
m., Metre；米.
Math., Mathematics；數學
N., North；北. Northern；北[illegible]
N.B., *nota bene*=Note well；or [illegible] 注意.
N.E. North-east；北東.
N.N.E. North-north-east 北北[illegible]
N.N.W. North-north-west；北北西.

No., *numero*=Number；數.
Nos. Numbers；數.
N.W. North-west；北西.
p. page；頁.
p.p. pages. 頁[複數].
p.p. proportional parts；比例部.
q.e.d., *quod erat demonstrandum*=Which was to be demonstrated；所當證明者.
q.e.f., *quod erat faciendum*=Which was to be done；所當作者.
q.e.i., *quod erat inveniendum*=Which was to be found out；所當求者.
qt. Quart；[夸爾脫] 四分之一.
Rad. Radical；根的.
rad., *radix*=Root. 根.底.
S. South；南.
S.E. South-east；南東.
s.g. Specific gravity；比重.
sh. Shilling；先令.
sol. Solution；解法. 解答.
sq. Square；平方.
S.S.E. South-south-east；南南東.
S.S.W. South-south-west；南南西.
subst. Substitute；代入.
suf., suff. Suffix；添數.
supp. Supplement；補.
S.W. South-west；南西.
W. West；西.
W.S.W. West-south-west；西南西.
X. Unknown number；未知數.
Y., Yr. Year；年.
Y., Yd. Yard；碼.
&, *et*=And；及.
&c., *et cetera*=And so forth；等.

各國數字表

中華			羅馬	亞拉伯	拉丁	希臘	英	法	德
一	壹	〡	I	1	unus	εἷς	One.	Un, une.	Eins.
二	貳	〢	II	2	duo	δύο	Two.	Deux.	Zwei.
三	叁	〣	III	3	tres, tria	τρεῖς	Three.	Trois.	Drei.
四	肆	〤	IV	4	quattuor	τέσσαρες	Four.	Quatre.	Vier.
五	伍	〥	V	5	quinque	πέντε	Five.	Cinq.	Fünf.
六	陸	〦	VI	6	sex	ἕξ	Six.	Six.	Sechs.
七	柒	〧	VII	7	septem	ἑπτα	Seven.	Sept.	Sieben.
八	捌	〨	VIII	8	octo	ὀκτώ	Eight.	Huit.	Acht.
九	玖	〩	IX	9	novem	ἐννέα	Nine.	Neuf.	Neun.
十	拾	十	X	10	decem	δέκα	Ten.	Dix.	Zehn.

英文基礎三千句

△精裝全一册▽
△定價一元六角▽

∴陳嘉編∵

作文會話之利器

在英文中選出極通用之熟語及成句三千四百句、用四百五十個主要字以貫串之、分之爲四百五十節。每主要字之下、有用法變化的引例數句或數十句、皆以漢文對譯之。內容組織、極爲完密。此四百五十字、乃英文中之幹部、而三千四百句者又爲日常之慣用句。倘能熟記、可以應用不窮。

中英會話辭典

（美國東湖先生著）

東湖 F. W. Eastlake. 先生、美國之博言博士也。於東方語言、尤能深造有得。其關於應用文學之著述、不下十數種、每一書出世、皆爲社會所歡迎。本書爲博士生平最得意之作、其體例、第一編摘取日常所用各種名詞形容詞、按照門類分章節目提出、以便學者易於暗記。第二編爲普通各種會話。第三編爲商業各種會話。第四編爲附屬之普通及商業信扎。其中稱呼格式、省略語字、廣告樣式、招牌文字等、無不一一彙舉、計凡分一百六十餘類。搜羅宏富、而剖別至於細微、名之曰辭典、蓋稱實也。

絕小袖珍精本 ◆ 定價一元六角

最新英文典

▲精裝全一冊▼

▲定價二元▼

彭毅編著　[illegible]伯先生序

本書以詳明綿博爲主旨、故參考採西名著、多至數十種。去短取長、新穎精當。英文法中最繁難者、爲前[illegible]本書注重此點、論之極詳。末後附句點法一編、讀者能了解其法則、則於抑揚頓挫、必可心領而神會。「教育部批云」是書體例、略與嚴氏英文漢詁、日人畔柳氏邦文英文典相彷彿。而分類精詳、搜材豐富、則較軼二氏、詢參考書之善本。

新設	英文典	定價一元五角 郵費一角
納氏	英文法講義 第一全	定價七五分 郵費半角
納氏	英文法講義 第二全	定價八角 郵費一角
納氏	英文法講義 第三上	定價一元二角 郵費一角
納氏	英文法講義 第三下	定價一元二角 郵費一角
納氏	英文法講義 第四上	定價一元五角 郵費一角
納氏	英文法講義 第四下	定價一元五角 郵費一角
納氏	英文法第一表解	定價一角六分 郵費六分

譯註	伊索寓言 精裝	定價一元二角 郵費一角
青年英文學叢書第一編	絕島日記	定價七七分 郵費半角
青年英文學叢書第二編	金色王	定價七五分 郵費半角
青年英文學叢書第三編	偉里市商人	定價七四分 郵費半角
青年英文學叢書第四編	三美姬	定價七五分 郵費半角
青年英文學叢書第五編	皇子韓列特	定價七五分 郵費半角
青年英文學叢書第六編	新世界之舊夢談	定價七五分 郵費半角
青年英文學叢書第七編	小人國遊記	定價七七分 郵費半角

中華民國廿四年拾月七日　收到

乙種裝全一冊

數學辭典

定價六元五角

編輯者　趙繚

印刷者　羣益書社

發行者　羣益書社

總發行所

上海棋盤街

羣益書社