

Aus Wissen und Wissenschaft

— 34 —

MATERIEWELLEN
UND
QUANTENMECHANIK

學藝彙刊 (34)

物質波與量子力學

A. HAAS 著

章康直譯



中華學藝社出版

商務印書館發行

MATERIEWELLEN
UND
QUANTENMECHANIK

物質波與量子力學

A. HAAS 著

章康直譯



學藝社出版

商務印書館發行

中華民國二十三年二月初版

(52734.2)

學藝彙刊 物質波與量子力學一冊

Materiewellen und Quantenmechanik

每冊定價大洋伍角

外埠酌加運費匯費

原著者 A. Haas

譯述者 中華學藝社 章康直

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版 翻
權 印
所 必
有 究

精

譯者弁言

從伽利略和牛頓把力學的基礎奠定之後，物理學的進步，幾有一日千里之勢，加以實驗物理的昌明，發明繁多，真有指不勝屈之概。但新現象越多，理論上的困難也越多；像光學電學原子力學等中的現象，已經不是牛頓法則所可解釋；因為籠繫一切的普遍原則不能找到，於是創立了許多獨立的和不自然的假定，物理學的完整性因此失掉，所以一班目光遠大的學者，都專力向根本原則方面努力，以期解決一切困難。到了二十世紀的初期，哄動一時的相對論和量子論發生，物理學的面目一新，範圍也被推廣不少，但在原子論中總還有許多不能解釋的問題，和牽強的假設。

到了1924年物理界又起了一個嶄新的高潮，那就是本書要介紹的布洛利—雪曼汀格爾波動力學

和哈生保—菠綸—約但量子力學。它們不但能解決許多以前不能解決的問題，並且把物質、因果律等基本概念加以變更，使自然哲學的根基也發生震動，因為它們的美滿和重要，所以數年來進展的迅速，和著述的豐富，已駕乎一切；國內雜誌中，略有介紹這種新學說的文章，但求一普通，完備而有系統的著作尚不可得，所以譯者不揣譾陋，把這小書譯出，以貢獻於國內讀者。

本書是奧國維也納大學物理教授哈斯所著，本係德文，在英法等國皆已有譯本，足見其傳讀之廣。內容清穎可讀，且無多量高等數學，足供一班讀者之用。譯者把它先譯出的原意，也就在此。因為這種新學說進展極速，所以兩年之間，已增訂三次，本書係就最近（1930年）德文本所譯，學問疏淺，錯誤自多，加以依據原文，無暇潤飾，文字扞格不入之病，尤所難免；尚祈讀者指正為幸。

一九三〇年，九月，譯者識。

第一版原序(節略)

從哈生保 (Heisenberg) 量子力學和雪里汀格爾 (Schrödinger) 波動力學的基礎組織完成以來,雖則尚不過兩年,但說明這種新物理思想的書本,卷帙已需千頁左右。著者確信除這類完備的著作外,物理學家以及一班普通的讀者們,都還有一種較短書本的需要。這種書的要點是不用高等的數學方式來講得布洛利 (De Broglie),雪里汀格爾和哈生保等思想源流的概要,其中各種思想的關係,以及由各種重要應用以表示其範圍。這小小的書本,就是試行這種計劃的,它的大綱是根據著者1927/28年冬季在維也納大學的講稿。

那是當然的事實,像這樣短而不完全的一本書,於對此有極大興趣的讀者們,固然有許多問題有讀各種原作品的必要;就是就一般敘述的立腳點講,也

有參考其它各種較佳單篇著作的必要,這一層恐就數學立足點言,比物理的更爲重要。

維也納,二月末,1928, 哈斯(A. Haas)。

第二版原序(節略)

本書雖然從第一版到第二版不過半年,但因波動力學和量子力學突前的進步,已不能不有下列四章的增加:——“光對於原子的影響,”“量子力學中的共振,”“波動力學基本方程式的相對論推廣,”以及“狄拉克(Dirac)的電子論,”對於波利原則一章,也已經完全改過;但第一版中的第十五章,則因節省地位而略去。

維也納,十月,1928, 哈斯

第三版原序(節略)

這第三版比一年前的第二版,新添了兩章:——

“變氫的發見，”和“放射的波動力學說。”除此以外，對於“物質波的折散”與“狄拉克的電子論”兩章，也經修改。

作者對倫敦本書英文翻譯者，科特 (Codd) 先生和巴黎法文翻譯者波格魯 (A. Bogros) 與愛司克郎 (F. Esclangon) 兩先生，關於本書許多很有價值的改善建議，表示十二分的感謝；而歐根哥斯 (Eugen Guth) 博士對於新加稿件，加以校閱，尤其覺得十分的心感。

維也納，十一月，1929，哈斯

目 錄

第 一 章	原子力學問題	1
第 二 章	<u>斐馬</u> 原則 <u>羅倫次</u> 轉換及羣速度的概 念	11
第 三 章	<u>得布洛利</u> 的波動力學	22
第 四 章	波動力學與相對論間的關係	33
第 五 章	物質波的折散	39
第 六 章	<u>雪里汀格爾</u> 的理論	46
第 七 章	特性值力學舉例	54
第 八 章	<u>哈生保</u> 的量子力學	65
第 九 章	方陣力學	81
第 十 章	<u>哈生保</u> 量子力學和 <u>雪里汀格爾</u> 理論 的關係	92
第 十 一 章	原子物理學的因果和統計觀念	100
第 十 二 章	<u>波利</u> 原則	106

第十三章	部斯的量子統計學	113
第十四章	勿來統計學	124
第十五章	光波和物質波對於原子的影響	132
第十六章	量子力學中的共振	145
第十七章	變氫的發見	154
第十八章	放射性的波動力學理論	172
第十九章	波動力學基本方程式的相對論推廣	180
第二十章	狄拉克的電子論	184
第二十一章	量子力學與自然哲學	191
附 錄:一	I. 各章內容撮要	193
	II. 常用記號表	201
	III. 普通常數	203
	IV. 文獻	204
	V. 人名中西對照表	206
	VI. 名詞中西對照表	209
注意:一	讀者如對於第八章的第二部,以及九,十,十九,二十等章感覺困難,則可略而不讀.	

物質波與量子力學

第一章

原子力學問題

Das Problem der Atommechanik.

在十七世紀後半期,物理學昌明的初期,物理學先進海互史(Huygens)曾經說過一句話,不但可表示當時的思想,實在也可以代表以後兩百年間的趨勢。他說:“在真實哲學中,我們對於一切自然現象的起源,只有用力學的方式,纔能表明,否則我們惟有把一切了解物理學的願望放棄了。”⁽¹⁾ 這種物理學中力

(1) Huygens, *Traité de la lumière* (Leyden 1690, 第一章:“Dans la vraie philosophie on conçoit la cause de tous les effets naturels par des raisons de mécanique. Ce qu'il faut faire à mon avis ou bien renoncer à toute espérance de jamais rien comprendre dans la physique.”

學化的傾向，在十九世紀的後半期還有存在，其最初的失勢是在麥克斯威爾 (Maxwell) 依完全脫離力學的能媒 (Äther) 說，根據電磁學以建立新的光學理論。二十世紀的初期，原子內部現象的發見極多，以此引起了物理學家研究力學，電學，磁學，光學等現象間關係的興趣。到現在似乎可以把海互史的話反轉來說：我們若是不用他種物理學分科中的方式來說明力學現象，那麼我們必須放棄對於了解物理學的希望。在這方面最有成績的進展，是1924年以來布洛利，雪里汀格爾，哈生保，和狄拉克等的理論，那也就是本書要想把它簡單介紹於讀者的。

力學是精密物理學中最古的一科，也是理論物理學始祖伽利略 (Galilei) 所研究的一科；至於那裏基本法則的建立，乃是把全部物理學用數學的根基變到一整個系統的第一人——牛頓 (Newton) 的功績。二百年來動力學 (Dynamik) 的基礎，大家以為被牛頓發展到了極境；所以後來雖則對牛頓學說的方式有不少的改進和修補，但於他的運動法則等，大致沒有什麼新發展。

到二十世紀的初年，大家纔覺得上面的斷語還

太早，1905年至1909年間，由相對論的基礎產生了一種新力學，不但把現在看來是近似真確的古典力學運動法則推廣，它並且給我們一種範圍較廣的新結果；在一方面它使力學與光學間發生了相當的關係，譬如說光速是一切機械速度的極限，在另一方面，它發見質量的力學概念與全部物理中最重要的能力概念間的密切關係，在新的相對力學，已證明這兩種基本概念，完全相等，一物體或物質點的質量，與其能力的不同，僅在一普遍比例率。（卻巧是光速的二乘方）。

不但相對論搖動了古典力學的根本，就是與相對論同時的量子論的重要結果，也互相衝突，講到量子論，它並非一種孤立的東西，實在是近代全部物理學的基礎；它的目的是在發見力學電學和光學間的平行性，在十九世紀末世，已知道所有運動方式的最後，總須假定兩種物質微點的存在，它們的質量是兩個普遍常數，各種原子都由這兩種微點所構成，它們就是現今所分較大質量的質子(Proton)和較小質量的電子(Elektron)。到十九世紀的終了，電的原子構造又發見了，物理學家知道一切的電荷，不過是元電荷

的很大整數倍，並且所有物質，也都由這種元電荷所構成，重的質子是正，輕的電子是負。(1)

在二十世紀的初年，又有一種發見，其重要並不減於物質的微點和電的元電荷，那是光的（廣義）電子構造（實際上可以稱做光原子“Lichtatom”，那裏的光當然不單指可見的一部份，像紅外熱線（Ultraroten Wärmestrahlen），帶電波，無線電話波，紫外線（Ultravioletten Strahlen），鑷琴線（Röntgenstrahlen），放射物質（Radioaktiven Substanzen）的 γ 線（Gamma-Strahlen），等等，都包括在內，這種表面上看來絕不相同的線，實際不過振數的不同而已，振數普通以秒計，例如紅光是 4×10^{14} 次，最硬的鑷琴線是 10^{18} 次，至於有種無線電波則只有幾十萬次。

蒲朗克（Planck）在1900年發見，更在1905年經愛因斯坦（Einstein）確定，知道各種光線都由許多輻射元（Strahlenelement）所組成，它們的能力（Energie）和振

(1) 質子的質量是 1.66×10^{-24} 克；電子的質量是 9.00×10^{-28} 克，是前者的1847分之一。元電荷有 4.77×10^{-10} 靜電單位（Elektrostatistische Einheit）；至於靜電單位，我們曉得是指一電荷量，當與一同等電荷相隔一厘米時有一達（Dyne）的互相作用力。（與一起的重力大約相等）。

數,只有一普遍比例因子的不同,我們可以很普遍的得到放射元能力的絕對單位數,用厄 (Erg)⁽¹⁾ 計算時,等於每秒鐘的振數乘 6.55×10^{-27} ; 因為這數等於每秒振數除能力,所以它的物理度 (Physikalische Dimension) 是能力乘時間;這種乘積,在力學中稱為作用 (Wirkung),因此這能力與振數間的普遍比例率,叫做作用量子 (Elementare Wirkungsquantum), 譬如黃光元的能力是 3.3×10^{-12} 厄。

由多數專家實驗研究,現在已能證明輻射原子 (“Strahlenatomen” 普通稱為光量子 “Lichtquantum” 或則最近稱為光子 “Photon”) 也像電子,原子一樣的實際存在,所謂光電應效 (Lichtelektrische Effekt 當一金屬片受紫外線或變琴線照射時,有電子流 “Elektronenschwärme” 從片面射出) 很明顯的表明光量子的能,已變為電子的動能,反轉來,由陰極線 (“Kathodenstrahlen” 運動極速的電子) 發生變琴線時,光量子乃由電子的動能 (Bewegungsenergie) 消散而生。

由上面所說能力和質量的相等性,每光子自然

(1) 在水平線上,舉一鈺 (Kg) 重的物質至一呎高,所需的功,為 9.81×10^7 厄。

也有它的質量,和振數成正比例。⁽¹⁾用克計算時,等於振數(每秒)乘 7.27×10^{-48} (這數等於光速平方除作用量子)。在可見光線光子的質量,和電子相較,自然很小,(大約小至十萬倍),但在 γ 線,則其質量,常相髣髴。光子單體的確有質量,由光量子 and 電子的撞擊時,很清晰的表明;像 昆普吞(Arthur H. Compton) 於 1923 年,發見在這種撞擊時,不但能力不變定律存在,就是動量 (Bewegungsgrösse) 不變律也能滿足;動量在電子和用光速運動的光子,都等於質量與速度的乘積。

雖然作用量子本來是用作一光學常數,(規定光的原子性的一個普遍常數,)但是後來物理學家又發見,就是在原子內部的純粹力學運動,也必取決於它,所以本來純粹的光學常數,又兼具了原子力學基本常數的第二作用了。⁽²⁾ 原子力學的需要,是由於

(1) 但須注意,由相對論靜質量講,就必定等於零。參看以後的 (43) 式。

(2) 本書著者自信於 1910 年首先發生這思想,並且把它應用於氫原子;見 Sitz.-Ber. der Wiener Akad. d. Wiss., Math. Nat. Kl., Abt. IIa, 1910, 119-144 頁。在那篇文章中,初次引出量析學中基本常數(所謂勒德堡“Rydberg”常數),與電單位荷,電子質量,及作用量子間的關係:

發見各種原子都由負電子圍繞一正電核 (Kern) 而成。⁽¹⁾ 介乎核與圍繞的電子有電吸力作用其間,所以說明這種原子的永久存在,惟有假定離心力的存在,因此我們必須主張電子是繞着核很速的運動,和太陽系中的行星一樣,一個原子全體和太陽系的全體很相像。

原子力學中最簡單的問題,就是氫原子,因為由多數實驗,可證明它祇含一游行電子。這種原子模型中,電子軌道的半徑,起初尚不能決定,到了1913年,波耳 (Bohr) 纔用一假設打破這種困難;那假定由以後原子力學的研究,大致覺得十分美滿。此外他又假定電子軌道的角動量 (Drehimpuls) (由電子質量,軌道半徑,和速度的乘積而定) 等於作用量子,加以因離心力和電吸力必須平衡,所以波耳假定可以完全決定軌道半徑和軌道速度的數值。⁽²⁾

在另一方面,由景析術 (Spektroskopie) 的觀察,知

(1) 1911年刺得福德 (Rutherford) 所創核原子假說,經 α -線通過金屬箔觀察,得到重要的實驗證明。

(2) 根據波耳假設,軌道半徑是 5.30×10^{-9} cm, 軌道速度是每秒 2.188×10^8 cm 而每秒的繞轉數是 6.5×10^{15} 。

道每種化學原質的原子，總有一羣有一定振數的特殊光線，普通稱謂那原質的線景 (Linienpektrum)。這種線不但可以是放射線 (Emissionslinien) 也可以是吸收線 (Absorptionslinien)，就是說原子可以放射或吸收一定振數的光子。依能力不滅定律，在前者是消失原子能力，後者是獲得原子能力，因為光子的能力和振數間有比例率的存在，所以原子能力的變化，在各種不同化學原質，只能是一定不易的特殊數值。

實際上從電子和原子⁽¹⁾ 撞擊的觀察，可知我們只能給原子以一定可量的能力量，並且當原子接受能力後所放射的景線 (Spektrallinien) 的振數，卻等於作用量子除那能力量，就此我們可得一重要的結果：——原子除居於基本狀態 (Grundzuständen) (最小變化的) 外，又能在和一定能力階相應的能力狀態，由這種各原質特殊能力階間的變化，就產了一定放射或吸收景線。

波耳由假定氫在非正常 (Abnormal) 狀態時， 2π 乘其角動量，不等於作用量子自身，而等於其整數倍，因

(1) 電子撞擊的實驗是 1913 年 佛朗克 (Frank) 和 赫芝 (Hertz) 所初創。

此得到氫景的正確解釋。波耳假定在這系原子狀態之下， 2π 乘角動量除以作用量子的商，是一正數系（1, 2, 3, 4, 等等），所以波耳方法的主要點是先由古典力學求出原子全部可能的軌道，然後再由上述的量子假設，從全部中選出幾種特具的軌道，使它們滿足一定的量子條件（Quantenbedingung）。

波耳方法不久又經紹麥斐爾德（Sommerfeld）的修補和推廣，在以後理論物理學的發展上，都覺得很滿意。用這種幫助，在十年間產生了一大部的理論，使所有已知景色現象得到一種有系統的解釋；但是當原子物理學的問題數目逐漸加多，物理學家有時感到波耳方法有放棄的必要，譬如簡單僅次於氫的氦（Helium）原子，用他的方法，已不能得到和經驗相符的說明。

因波耳理論有時的失敗，引起了物理學家重新對基本困難的注意，那些困難，都是理論起始就研究的，不過在得到很順利結果的那幾年，卻把它們忘記了。現在這理論在各方面既經失敗，所以又重復很深切的感到這種困難了。定量的（Gequantelten）軌道，自舊力學的立足點，實在完全不能了解；而力學軌道的要

由一光學基本常數來決定；其費解也不下於此，脫離這種範圍的傾向（1923年以來所創的新原子論），只有根據新的第三力學基礎（我們或可以這樣稱它）。在這種新的方式，不但伽利略的第一種力學，就是愛因斯坦的第二力學，也不過是它的特例。

愛因斯坦給我們在極大速度運動的新知識，而古典力學不過在普通速度真確而已，當然這第三種力學應當用於原子大小度區域時，可以得到新的結果，而應用於大度量（Makroskopische）時，仍舊和舊力學相合。由此線索，我們希望由這新力學的自身，可以引出原子現象中視為神祕的量子條件，不再會被看作一種孤獨的贅物。最後這新力學更要免去從前量子論所有的困難，因為在那裏時常會發生和實驗相矛盾的結果。

第二章

斐馬原則 羅倫次轉換及羣速度的概念

Das Fermatsche Prinzip, die Lorentz-Transformation
und der Begriff der Gruppengeschwindigkeit.

力學與光學,在很早的時候就從事於求一普遍超越原則,使那裏的重要基本法則,都能由力學或光學數量,用極大或極小條件的簡單形式表出.在光學中,這樣一條原則,斐馬已於十七世紀用最短光時(Lichtzeit)的方式表明出來.那原則說:自一點 A 至一點 B ,一條光線實際所經過的路,是和 A, B 間其他的路相較所需時間最短的那一條.⁽¹⁾ 由 斐馬 原則,光線的形

(1) 和 斐馬 原則相似的,尚有一原則,那原則係古時亞歷山特利的 希綸 (Heron von Alexandria) 爲光線反射的特殊情形而立,它說光線所經過的路線是一極小數值,在反光時,其全部速度相等,所以在這時最短時間和最短路線相等.

式很易決定,譬如屈折法則 (Brechungsgesetz), 就可從那裏引出。

所以假使我們研究有波速 u_1 和 u_2 的兩媒質 (Medien); 自 A 至 B 在兩媒質中所經路線的長, 用 s_1 和 s_2 來代表時, 則在路中的總時間 $\left(\frac{s_1}{u_1} + \frac{s_2}{u_2}\right)$ 必為極小值。在不勻 (Inhomogen) 媒質中, 速度隨處而變, 我們可用下法求光時的公式: 先分所經路為極小段, 每小段用相應速度除之, 然後取其總和; 在數學言語中, 就是 A B 間速度倒數的線積分 (Wegintegral), 用普通數學記號可寫成下列關係:——

$$(1) \quad \int_A^B \frac{ds}{u} = \text{極小} (u \text{ 是波速}).$$

這斐馬原則的普遍形式和十八世紀中葉所創立的一個公式 (被視作超越原則), 有密切的關係; 那公式的原始, 要算是摩拍塔伊 (Maupertuis); 雖則較精密的形式, 是歐拉 (Euler) 所得。依那原則, 在實際運動物體自 A 到 B 時, 其機械速度 (Mechanische Geschwindigkeit) 的線積分, 是一極小值。⁽¹⁾ 我們可有下列的

(1) 即使普遍一點, 以及相對論的立場, 也有這種要求, 就是動量的線積分是一極小值。

關係：——

$$(2) \quad \int_B^A v ds = \text{極小值}$$

(v 是機械速度)。

從這公式,就可以引出力學中各基本公式,並且不用其他的定理,就可以決定軌道的形狀,例如拋擲運動的拋物線軌道等。

在摩拍屠伊定理中的力學速度,與斐馬原則定理的波速倒數,佔有同等地位,斐馬原則,在某種條件之下,是對於所有各種波動都適合的普遍原則,由(1)(2)兩式的比較,可見力學法則有根據波動原則說明的可能性,於是由這超越力學原則,很確定的顯示一切運動現象;都根據於波動的方式上,在那裏力學速度和波動速度倒數間,有一普遍比例率,因為要很詳細的討論這種關係,我們對於普遍的波動公式,先要加以一點很短很基本的研究。

任何波動方式,當我們看定了波路中一定點時,總可看作是一種振動,它在最簡單的形式可寫成下列方程式：——

$$(3) \quad S = A \sin(2\pi vt).$$

此處 S 代表一變動量,⁽¹⁾ A 是振幅 (Amplitude), ν 是振數, t 是時間, 實際上方程式(3)裏的 S , 當時間變更 $\frac{1}{\nu}$ 時, 又回到原來的數值,⁽²⁾ 所以方程式(3)可寫成:—

$$(4) \quad S = A \sin \varphi,$$

φ 可稱為振動相 (Phase der Schwingung). 這方程式有和(3)一樣的簡單形式, 不過那裏的零點, 是這樣選擇法, 卻巧使 S 的數值, 在那裏也等於零. 這要求當幾個振動同時存在時, 大約總是不可能的, 所以那裏對振相外, 必須另加一振相當數.

規定一振動方式, 除了時間週期性外, 尚有一空間週期性; 一波動向一定方向 (可選作 x 一方向) 的散佈, 有一特性, 就是離一任意選擇的原點 (Origin) (即 $x = 0$) x_1 距離處的振動, 和 t_1 秒前在原點所見者同; x_1 等於 t_1 和波速 u 的乘積, 於是 t_1 等於 $\frac{x_1}{u}$, 而在 t 時, 任意一點 x 振動的情形, 也可以得到, 祇要使(3)式

(1) 這變量可以是距離或角度 (如在擺的振動), 也可以是密度電場磁場的強度或溫度等等. 繞一靜點而動的振動 (像擺), 是振動方式最明晰的例子. 但不當, 也不必對任意週期而變的物理量的振動, 都存着一個機械擺動的影像.

$$(2) \quad \sin \left[2\pi\nu \left(t + \frac{1}{\nu} \right) \right] = \sin (2\pi\nu t + 2\pi) \\ = \sin (2\pi\nu t)$$

中的 t 變成 $(t - \frac{x}{u})$ 好了;所以波動公式是:—

$$(5) \quad S = A \sin \left[2 \pi \nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \right],$$

振相是由方括弧中的數值決定,在一般情形,我們當另加一個相常數(ϵ).通常又叫離原點的直線距離為 S ,於是下列關係,可以用來表示振相,

$$(6) \quad \varphi = 2 \pi \nu \left(t - \frac{s}{u} \right) + \epsilon.$$

波動公式到現在纔得到一個:(很重要而且新近值得注意的)和相對論基本方程式——所謂羅倫次 (Lorentz) 轉換式間的關係。我們知道愛因斯坦的相對論有一假定說:全部時間計算,不過是相對的,就是說依觀察者的立足點而變;所以在互相運動的觀察者,所見各不相同。相對論又假定兩觀察者的地位與時間的測算,必一關係存在,就是光線向各方面的速度總是一樣。⁽¹⁾

在等速直線運動的特殊情形,這關係是由所謂羅倫次轉換式的形式表示。假使兩觀察者以 v 速度相互運動,並且它們的運動方向和 x 軸相合,那末兩

(1) 這是由於從實驗證明地球的運動,對於地面上光線傳佈毫無影響的事實。

觀察者的空間坐標與時間測定,可有下列的相互關係:⁽¹⁾——

$$(7) \quad x' = \beta (x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$

這裏 c 是光速, β 是下式的簡寫:——

$$(8) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

現在最有興趣的,是關於波動公式在方程式(7)中兩相對時間的關係,我們假使規定機械速度外另有一個速度,和光速成反比,⁽²⁾它們的關係是:——

$$(9) \quad uv = c^2;$$

於是方程式(7)的第四式,可寫作:——

$$(10) \quad t' = \beta \left(t - \frac{x}{u} \right),$$

它與波動式的相似,一望可知。

因為要明瞭上式的意義起見,可研究任意一種

(1) 實際引用方程式(7)的數值,則 $(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2)$ 與 $(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)$ 相等,再則:——

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

是表示光線在各方向是用同樣速度 c 散佈的。

(2) 就是說當光速被用作速度單位時, u 卻是 v 的倒數。

和運動物體相連的振動方式。假使物體對於一坐標系的速度是 v ，我們使這個坐標系是沒有加“'”的 (x, y, z, t) 而另外取一個物體在那裏不動的加“'”坐標 (x', y', z', t') ，所以這加“'”坐標系，循着 x 軸方向對原坐標系用 v 速運動。現在對於加“'”動的坐標而言，這振動方式可用下式來描寫：——

$$S = A \sin (2 \pi v' t').$$

應用方程式 (10) 並且簡單一下可使：

$$(11) \quad \beta v' = v,$$

由羅倫次轉換的結果，所以有：——

$$S = A \sin \left[2 \pi v \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

根據這方程式，任何與運動物體相連的振動方式，總有一種相俱的波動，它的傳佈速度，對光速講是機械速度的倒數。

依照相對論的基本定理，機械速度不能超過或等於光速；但方纔所研究的波動，必定要用大於光速的速度傳佈；對這種思想起初好像有很大的困難，因為物體運動的速度和與之相連的波速，竟有這樣的不同。譬如在一輛極速的馬達車，它的速度不過光速

的千萬分之一，而這種相連的波速，則大約 10^{14} 倍於車速自身，對一步行者講，這種相差更大了，但只要引用十年前理論物理學者，在光學 (Optik) 和水力學 (Hydromechanik) 中所知道的，以及羣速度 (Gruppengeschwindigkeit) 概念等，困難立刻就解決了。

一羣振數在一定範圍內的波動，叫做波羣 (Wellengruppe)。在這種波羣的性質，應當記得假使不問正負號時，全部可能角度的正弦平均值是零，因為每一個正的正弦，必有一個與之相應的負值，結果互相消去，所以假使研究一振相不完全相符的振數羣，則結果振動（等於振幅同它們相應振相角的正弦乘積的總和）和振幅的代數和相較，是極小的，假使我們祇看波羣中的一點（在那裏振相的符合較佳），則結果振動比較起來也大一點，因此這地方的能力密度，和其四週相較，是一極大值，所以稱做波羣的能力中心 (Energiezentrum)。我們可以說兩波動的振數，倘若僅差一無限小值時，則振相差 (Phasenunterschied) 是次階可略小數，換句話說，在能力中心點，振相依振數的偏微分商等於零，所以

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$$

把方程式(6)中的 φ 代進,再用普通的微分規則,我們得到:——

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 2\pi t - 2\pi s \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv} + \frac{d\varepsilon}{dv}.$$

於是根據方程式(12)可得:——

$$s = \frac{1}{\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv}} \left(t + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varepsilon}{dv} \right).$$

所以 s 一量,依時間而變,就是說能力中心自己也在變動,速度等於上式括弧中的係數,假使叫這因子爲 g ,由上式可見速度(路線的時間微分商)卻等於 g ,所以 g 是代表能力中心推移的速度,也就是波動能力傳佈的速度,這數量叫做波動的羣速度,它並非和振數無關的,它也有分散 (Dispersion),這就是和波速的分別,對上式的羣速,可以有下例最初由累力爵士 (Lord Rayleigh) 引出的關係:⁽¹⁾——

(1) 算出 (13) 中的微分可得

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{u} - \frac{v}{u^2} \frac{du}{dv}$$

由此可見當沒有分散現象時,羣速和波速相等.

$$(13) \quad \frac{1}{g} = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv}.$$

我們現在要應用這公式到以前所研究的超光速（或則可以這樣簡稱法）波動的特例，分散法則是包含在方程式(11)（再用方程式8）裏，假使叫方程式(11)中和速度無關的振數 ν' 爲 $\nu_0^{(1)}$ ，我們得到：

$$(14) \quad v = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

依方程式(9)可知在超光速波動：——

$$\frac{v}{u} = \frac{v\nu}{c^2},$$

並且那裏：——

$$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv} = \frac{\nu}{c^2} + \frac{v}{c^2} \frac{d\nu}{dv}.$$

但是從方程式(14)：——

$$\frac{d\nu}{d\nu} = \frac{\nu_0 \nu}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{\nu\nu}{c^2 - v^2}.$$

於是

(1) ν_0 是對隨物體運動的坐標系而言的振數。

$$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv} = \frac{v}{c^2} + \frac{c^2 - v^3}{c^2 v} = \frac{1}{v}.$$

這和方程式 (13) 合起來,得到下列重要的結果:

$$(15) \quad g = v$$

所以我們想像一和運動體相連的振動,根據羅倫次轉換,這振動可看作一個超光速的波動,而它的羣速卻等於物質點的機械速度。

第三章

得布洛利的波動力學

Die Wellenmechanik von de Broglie.

前章所說的種種，都是關於前幾世紀的力學，光學，普通波動論以及相對論等。那是 1924 年路易得布洛利 (Louis de Broglie) 的大貢獻；使最近物理學的發展受了一個大影響；他將以前所研究的種種關係，都歸入自己的範圍，而創立他的新理論。那裏的一個基本假定，就是說在每物質總有一個振動與之相連，振動的能力元，（振數和作用量子的乘積）等於那質點的固有能力 (Eigenenergie)；或則依相對論講，是等於質量和光速平方的乘積。

根據上章，可知每質點總有一個相連的超光速波動，並且那裏的羣速度，卻巧等於那質點的機械速度。所以摩拍屠伊的運動法則，是得布洛利假定的必

然結果,而非一個單獨的公理(Axiom),物質於是分解成了波動的形式,電子質子不過是能力的中心;因此大家稱得布洛利所創的力學爲波動力學,而稱那裏超光速的波爲物質波(Materiewellen)。

由上面講過的,波動力學的基本方程式是:—

$$(16) \quad h \nu = m c^2,$$

這裏 m 是質量, h 是作用量子,所以假使 m 是電子的質量,則與之相連的振數,是每秒 1.24×10^{20} 次;至於比電子重 1847 倍的質子,則是 2.29×10^{23} 次,因爲振數和質量間的比例關係,所以當運動速度不近光速大小度時,振數(像依速度而變的質量一樣)祇在一極小限度內變動,物質波自然也像其它的波動一樣,滿足振數乘波長等於傳佈速度的關係,就是:

$$(17) \quad u = \lambda \nu$$

或依方程式(9)

$$\lambda = \frac{c^2}{v \nu}.$$

因此由方程式(16)

$$(18) \quad \lambda = \frac{h}{m v}.$$

在電子這波長的種數,是等於電子速度(每秒種數)除 7.28. 在速度等於光速 20% 到 40% 時(像

陰極線), λ 的大小度是 10^{-9} 釐; 由白熱絲放射出來較慢的電子, 則為 10^{-7} 釐, 和樂琴線的大小度相同. 質量和機械速度的乘積, 是等於動量 (Impuls) G , 所以方程式 (18) 也可以寫作:—

$$(19) \quad G = \frac{h}{\lambda},$$

或則依 (17) 式

$$(20) \quad G = \frac{h\nu}{u}.$$

我們現在要研究一閉軌道中的週期運動, 假使 dr 是一軌道元 (Bahnelement) 依方程式 (6), 在某定時間軌道元兩端的振相地位差 (Die örtliche Verschiedenheit der Phase), 等於

$$d\varphi = -2\pi\nu \frac{dr}{u}.$$

若 A 和 B 是閉軌道中的兩點, 並且在某時 A 點的振相是 φ_1 , 則 B 點的振數是

$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\pi \int_A^B \frac{\nu dr}{u}.$$

因為軌道是環閉的, 所以若把 $A B$ 間所包含的部分漸漸增加, 最後總有一時 A 和 B 相合. 在 A 點的振動度, 祇能是一定的數值, 所以當 A 和 B 相合時, 必須

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1$$

這在一般言祇有當

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi$$

時，纔屬可能（ n 是一整數）。假使我們用 \oint 記號代表在全閉合軌道上所施的線積分，於是。

$$(21) \quad \oint \frac{vdr}{u} = n,$$

或依方程式(20)，

$$(22) \quad \oint G dr = nh.$$

上面兩式，在等速度運動的特別情形，成爲非常簡單的形式。因爲這時，像在等速的圓運動（Kreisbewegung），波速和振數（由於質量不變）都是常數，方程式(21)可寫成：——

$$(23) \quad \oint dr = n\lambda;$$

就是說在等速度運動，祇有波長整數倍的軌道，纔屬可能。根據方程式(22)，這定律在常速度和等速度時又可寫成：——

$$2a\pi G = nh,$$

那裏 a 是圓的直徑，對等於動量和半徑乘積的角動量，則有下列的關係：

$$(24) \quad 2\pi U = nh,$$

那就是說只有[方程(23)的另一形式] 2π 乘角動量

等於單位作用量子整數倍的圓軌道,是可能的,這定理其實並非別的,不過是 1913 年波耳早已用來解釋氫景的基本定量法則,現在卻是物質波假說的必然結果了;同樣由很普遍的方程式(22),普遍問題中的定量問題也可以引出。⁽¹⁾

再在(像愛因斯坦知道的)一閉器中氣體變移能力(Translationsenergie)的定量法則,也是得布洛利理論的必然結果,這對氣體運動論和熱力學(Thermodynamik)中極有意義的結論,是根據 1900 累力爵士所用和 1905 年錢恩(Jeans)使它變為精密的一種更普遍的研究;那就是所謂閉體積內的特性振動,現在為簡單計,我們以下只有立方體的特例,我們先從已知的事實出發,就是在長 l 的緊張線上,只有在下面方程式

$$l = n \frac{\lambda}{2}$$

中, n 是整數(所謂節分數“Unterteilungszahl”)時能適合的定波(Stehende Welle)波長,纔屬可能,至於立方體我們不過沒有節點(Knotenpunkt)而有和立方體面

(1) 參看 Einstein, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 19, 1917,

平行的節平面 (Knotenebene)

現在試懸想,坐標系統的原點是立方體的一角,三軸是立方體的三邊.在 x - y - z 方向的節分數是 n_1, n_2, n_3 . 假使 (圖 1) RS (是和 x -軸平行的任意線) 和相鄰的三平行 y - z -面的節面交於 A, B, C 三點.這些節

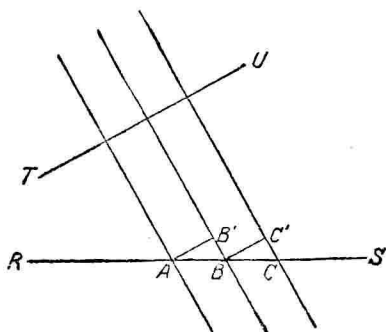


圖 1

面間的距離是 $\frac{a}{n_1}$. (是 a 立方體每邊的長) 再假使 TU 是和三坐標軸成 α, β, γ 角的一任意意線. 則經過 A, B, C . 我們畫三垂直於這線的波面 (Wellenebene) 時, 它們的振相差當然是半週期. 所以

$$AB' = B'C' = \frac{\lambda}{2}.$$

在另一方面.

$$AB' = AB \cos \alpha = \frac{a}{n_1} \cos \alpha.$$

在 y -軸和 z -軸也有相似的關係, 所以可得下列三方程式:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{2a}{\lambda} \cos \alpha = n_1 \\ \frac{2a}{\lambda} \cos \beta = n_2 \\ \frac{2a}{\lambda} \cos \gamma = n_3. \end{cases}$$

把這三方程式平方再加起來我們得到。(因三餘弦的和等於一)

$$(26) \quad \frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$$

因此 (25) 式又可寫為:

$$(27) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \cos \beta = \pm \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \cos \gamma = \pm \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \end{cases}$$

(在圖 1 中 TU 線也可以是依 RS 對稱的線)。我們因此從 (26) 和 (27) 式,可見每一組 n_1, n_2, n_3 等三數,總和一個定波長及定方向的特性振動相應。反轉來說,也祇有當 n_1, n_2, n_3 是整數時, $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$, 能滿足方程式 (26) 和 (27) 的振動纔屬可能。

從這點知識,我們可以用一簡單的幾何圖案引

出一重要結果，我們先想像立起一個直角坐標系，那裏只取正的半軸，所以祇有全空間的八分之一。依圖 2 的平面圖我們懸想把這八分之一的空間組成一格子 (Punktgitter)，那裏長的單位就是格子常數 (Gitterkonstante)。

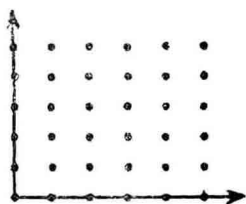


圖 2

所以全部格點 (Gitterpunkte) 的坐標都是整數值，並且反轉來說，我們可以把 (26) 和 (27) 式中三整數規定的特性振動，用坐標等於那三數的格點代表。這格點和坐標原點的距離是：

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2},$$

所以依 (26) 式

$$r = \frac{2a}{\lambda}$$

或

$$(28) \quad r = 2az, \quad z = \frac{r}{2a}$$

這裏 z 表示波數 (Wellenzahl)，(就是每單位長度中所包含的波長數)。

這格子的創立可以回答在波數區間 (z 到 $z + \Delta z$) 中究有多少可能特性振動的問題，這數 (我們叫它 ΔZ) 是等於半徑 $2az$ 和 $2a(z + \Delta z)$ 兩球間空間中

的格點數,平均言每單位體積中有一格點。(因為兩相鄰格點間的距離被選作長度的單位)所以 ΔZ 很簡單的等於兩球面間體積的八分之一,就是

$$\frac{1}{8} 4 r_1^2 \pi (r_2 - r_1),$$

那裏

$$r_1 = 2 a z, \quad r_2 = 2 a (z + \Delta z)$$

因此假使立方體的體積是 V , 我們得到

$$(29) \quad \Delta Z = 4 \pi V z^2 \Delta z.$$

這裏雖則引出這公式在立方體的特例,不過像累力爵士以及以後錢恩更精密得着的,知道對於空間的形式完全無關。

現在我們可以應用在電磁波和彈性波以及在光波和聲波都適合的累力-錢恩公式,到閉空間內氣體的物質波,依(19)式,波數是質點動量和作用量子的除商,並且假使 Z 等於 $\frac{G}{h}$, ΔZ 代表動量數值 (G) 在區間 G 到 $G + \Delta G$ 中可能數值的數目;因此

$$(30) \quad \Delta Z = \frac{4\pi V}{h^3} G^2 \Delta G.$$

因為 G 是分子速度 (v) 和分子質量 (m) 的乘積,所以 ΔZ 又可看作在 v 到 $v + \Delta v$ 區內可能速度值的數目。

所以我們有

$$(31) \quad \Delta Z = \frac{4\pi V m^3}{h^3} z^2 \Delta v.$$

現在試研究在室溫度的氦 (Helium), 那裏 $\frac{m}{h}$ 大約是 1,000, 而 v 大約是 10^5 . 依(31)式在一立呎的體積和 1 呎/秒的速度時, 得到一大小度是 10^{20} 的數目, 但在每邊等於 10^{-6} 呎的立方體, 則那數的大小度只有一面. 像在閉軌道的週期運動一樣, 根據得布洛利理論, 一閉器中氣體的變移運動, 也是定量的. 實際上這分子狀態的定量法則思想, 在 1916 年已由蒲郎克 ⁽¹⁾ 創立, 並且早已應用到各種熱力學的計算 (像算氣體的化學常數等). 可見以前完全不能了解的假說, 現在已變為物質波的必然結果.

假使我們對氣體規定一動量空間 (Impulsraum), 使每分子都由一“動量點 (Impulspunkt)” 代表, 它的坐標, 就是那分子的動量分向 (mv_x, mv_y, mv_z). 這樣一來, 可給 (31) 式一個很清晰的解釋. 動量點和原點的距離就代表動量的值 (mv). 假使我們在動量空間中用半徑 mv 和 $m(v + \Delta v)$ 繞原點上作兩同心球面, 於

(1) M. Planck Sitz.-Ber d. Wiss. Berlin 1916, 653 頁.

是在這兩球面所包的球殼體積 $4\pi m^3 v^2 \Delta v$ 中,可得所有數值在 mv 和 $m(v + \Delta v)$ 間的動量點,所以依 (31) 式在這球殼內一單位體積中有

$$g = \frac{V}{h^3}$$

所能動量值,反言之我們也可以看動量空間分爲下列大小

$$(32) \quad \sigma = \frac{h^3}{V}$$

的間格 (Zell), 在每間格中動量的數值,不能再行分別, (這就是說在每間格內只有一個動量數值) 當然因此也祇能有一個速度值,這代表不連續性的間格,由所盛氣體體積的愈小而愈大.

第 四 章

波動力學與相對論間的關係

Der Zusammenhang zwischen Wellenmechanik
und Relativitätstheorie.

從得布波利以及羅倫徹轉換做理論的出發點，可知波動力學和相對論間必有密切的關係；並且給我們一個希望，相對論力學或許可以用物質波的概念從古典力學和幾何波動論中引出。著者⁽¹⁾已經指出除假定能力和蒲朗克能力元間的關係外，對物質波不必再假定任何性質，已可證明這在實際是可能的。

爲計算起見，我們只用下面的原則做出發點。就是說物質點是羣速等於它機械速度波動的能力中

(1) A. Haas, Physik, Zeitschr 28, 1927, 632 頁.

心,由比較斐馬和摩拍屠伊兩舊原則,可以引出機械速度 v 和波速倒數 $\frac{1}{u}$ 間的普遍比例率,換句話說,我們可以使 u 和 v 的乘積等於一用 w^2 代表的普遍常數,所以

$$(33) \quad uv = w^2,$$

這裏 v 與 u 間的關係,和 (13) 式中 g 與 u 的關係相同,所以由 (13) 和 (33) 式,我們有

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{w^2} \frac{d(vv)}{dv},$$

或

$$w^2 dv = v^2 dv + v d\left(\frac{v^2}{2}\right);$$

因爲 w 是常數,所以也可寫作,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{d(w^2 - v^2)}{w^2 - v^2},$$

積分這微分方程式,就得到

$$\ln v = \ln \frac{1}{\sqrt{w^2 - v^2}} + \ln C,$$

(C 是一個積分常數)或

$$(34) \quad v = \frac{C}{w \sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

現在我們可以把已應用的物質波存在假說,和振數與作用量子乘積等於質點能力的蒲朗克 $h\nu$ 假說相連合,我們先再引用一個有下列關係的新常數 K ,

$$(35) \quad K = \frac{hC}{w^3},$$

於是一質點的能力是:

$$(36) \quad E = \frac{Kw^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

因為要使這公式在這裏的討論屬於可能,所以先加一點關於古典力學的研究,我們懸想一質量是 μ 的物質,它的速度向運動方向略增一無限小的數值 dv ,因為這“橫 (Longitudinal)”速度的增加使動能也增加 $\mu v dv$; 在另一方面更想像當能力 P_1 作用於運動方向時發生加速度 b_1 , 所以依牛頓第二運動法則, $\frac{P_1}{b_1}$ 等於 μ , 我們於是所以有下列方程式:

$$(37) \quad dE = \frac{P_1}{b_1} v dv.$$

把 (36) 式微分一下,則得到

$$(38) \quad \frac{dE}{dv} = \frac{Kv}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

再依牛頓第二運動法則,力的向量等於動量的時間微商,我們現在想像力和動量都分爲橫(在運動方向)和縱(垂直於運動平面)兩分向,假使用指標 1 表示橫分向,2 代表縱分向,所以能力分向有下列關係:

$$P_1 = \frac{d(mv_1)}{dt}, \quad P_2 = \frac{d(mv_2)}{dt}.$$

假使在微分時不引用質量依時間而變的可能性,因爲 v_2 等於零,⁽¹⁾ v_1 等於 v , 所以

$$(39) \quad \begin{cases} P_1 = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \\ P_2 = m P_2 \end{cases}$$

最後由力學的基本關係,知道速度的時間微商等於加速度橫分向,就是說

$$b_1 = \frac{dv}{dt}.$$

用 b_1 除 (39) 的第一式,依 (37) 和 (38) 式我們有

$$(40) \quad \frac{K}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m + v \frac{dm}{dv}.$$

這微分方程的解,很容易知道就是:

(1) 因爲速度和運動方向相合。

$$(41) \quad m = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

於是

$$\frac{dm}{dv} = \frac{K \frac{v}{w^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m \frac{v}{w^2}}{1 - \frac{v^2}{w^2}}$$

並且因此

$$m + v \frac{dm}{dv} = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{w^2}},$$

和方程式 (40) 與 (41) 相合。

在 (41) 式中使 v 等於零, 我於是得到

$$(42) \quad m_0 = K;$$

所以 K 是代表靜質量 (Ruhmass). 另一方面在 u 和 v 相等的特別情形, 依方程式 (33), v 等於 w , 所以依 (41) 式靜質量不等於零時, 質量總是無限大, 反轉來講, 在速度等於 w 時, 祇有靜質量等於零時, 質量和能纔能是有限的數值. 由這根據, 我們可以使 w 等於“不可稱 (Imponderable)”而有動量的光量子的傳佈速度. 那裏使 w 等於光速 (c), 並且由 (42) 式, 我們可以把方

程式 (41) 寫作

$$(43) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

這方程式並非別的,就是著名的相對論質量公式,那裏質量是速度的函數.由 (43) 式又可以知道一有不等於零靜質量的物體,它的機械速度決不能等於光速.(37) 和 (38) 式的比給我們 [由 (42) 式] 著名的相對論橫物質 $\frac{P_1}{b_1}$ 的公式,

$$(44) \quad m_{\text{long}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

由方程式 (39) 的第二式以及方程式 (43), 可得縱物質 $\frac{P_2}{b_2}$ 的公式,

$$(45) \quad m_{\text{trans}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

和相對論相符合.最後比較方程式 (36) 和 (41), 因為 $w=c$, 所以

$$(46) \quad E = m c^2,$$

這是能力慣性質量 (Träge Masse) 的相對論基本定律.

第 五 章

物 質 波 的 折 散

Die Beugung der Materiewellen.

從得布洛利的理論可引到一必然的結果,就是一物質點的運動,能够被另外的質點所偏折,譬如一原子或分子或自由電子的軌道,和一障礙的距離近到和相屬布洛利波的大小度相等時,必定引起物質波的折散,並且發生和舊運動法則不同的運動,這重要的結論,是愛因斯坦⁽¹⁾和厄沙瑟爾 (Elsasser)⁽²⁾首先從布洛利理論引出,從布洛利波長和動量間的基本關係(方程式 18),可知用光速百分之一速度進行的電子的波長是 10^{-8} 厘米,至於用室溫度時氣體分子運動速度運動的質子,也大約有和這相等的波長,

(1) A. Einstein, Sitz.-Ber. Berlinern Akad. d. Wiss., 1925, 9 頁.

(2) W. Elssasser, Naturwiss. 13, 1925, 711 頁.

因爲速度愈緩，布洛利波長愈長，所以物質波的折散現象在運動很慢的電子以及在極低溫度時，可以希望發現。

實際上愛因斯坦早已想這樣解釋“理想(Ideal)”氣體在極低溫度對通常法則所生的差誤。這種所謂氣體衰變(Gasentartung)現象，愛因斯坦以爲是由於在極低溫度界內物質波的波長恰有分子直徑的大小的緣故。根泰爾(Günther)⁽¹⁾在根據奈恩斯忒(Nernst)以前意見所作對於極低溫度時氫滯度(“Viskosität”就是內部阻力)的實驗，也和愛因斯坦的假定相符合，那裏他證明滯度的降落，在近臨界溫度(Kritische Temperatur)時，有突進的加速。

厄沙瑟爾由指出電子原子間撞擊時折散現象的或然性，完成了上面所說愛因斯坦的思想，電子的經過氣體已由許多實驗物理學家像拉姆繞爾(Ramsauer)⁽²⁾等加以精密的研究，拉姆繞爾做了一個很有

(1) P. Günther, Zeitschr. f. Physik. Chemie 110, 1924; 626 頁。

(2) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 72, 1923, 345 頁; 也可參看 R. Minkowski 和 H. Sponer 在 “Ergebnissen der exakten Naturwissenschaften” 卷三的撮要。

意義的發見，就是在有種不活潑氣體⁽¹⁾中，電子通過的自由路徑長度 (Freien Weglänge)，由速度的減小而增加，所以在慢行電子，能够像沒有阻礙似的通過原子，厄沙瑟爾以爲這神祕的“拉姆繞爾應效 (Ram-sauer-Effekt) 應當歸之於和電子相連物質波的折散，因爲低速電子在原子上的折散與有同樣波長的光波在原子半徑大小的球點上的折散，是完全相同的方式。

至於物質波折散最圓滿的證明，是戴維孫 (Davisson) 和革墨爾 (Germer) 所創立的，在 1923 年戴維孫和昆斯曼 (Kunsman)⁽²⁾ 做金屬面上低速電子的選擇反射 (Selektiven Reflexion) 實驗，厄沙瑟爾首先指出這種實驗或許可以成爲布洛利理論的佐證。1927 年戴維孫和革墨爾⁽³⁾ 合作，又舉行在結晶面上的同樣實

(1) 在化學不活潑氣體沒有原子的電子親和性 (Elektronenaffinität)。

(2) C. J. Davisson, 和 C. H. Kunsman, Phys. Rev. 22, 1923, 243 頁。

(3) C. J. Davisson 和 L. H. Germer, Nature 119, 1927, 558 頁，較完備的敘述見 Physical Review 30, 1927, 705 頁和 Bell System Technical Journal 7, 1928, 1 頁。

驗。這實驗的成功給物質波假說以最滿意的證明，他們能夠指出電子和結晶面相撞所生的折散，和變琴線在結晶面的相同。

他們使一條狹的光線直射在從一鎳的單個結晶 (Nickel-Ein-Kristall) 割下的小平片上面，而用一電表 (Galvanometer) 量各不同方向電子的散射強度 (Streuungintensität)，他們能夠測定在一定方向很清晰的極大值，並且尋出這方向和變琴線在結晶體上有一定法則的反射方向間密切關係。⁽¹⁾假使我們懸想已知的鎳結晶構造，在初次電子輻射平行方向，由一定的比例 (0.7:1 和 0.9:1 之間) 收縮，則電子散射極大極小方向，和變琴線反射方向相同。另一方面從折散現象，我們可以算出和變化相俱物質波的波長 [依 (18) 式是等於質量和速度的乘積除作用量子] 至於以前的收縮因子，可以這樣解釋，就是假定電子波因為電子受原子格子的強大吸力而發生變動；因此在結晶體中，電子的速度變大，所以波長也比結晶面上為小。

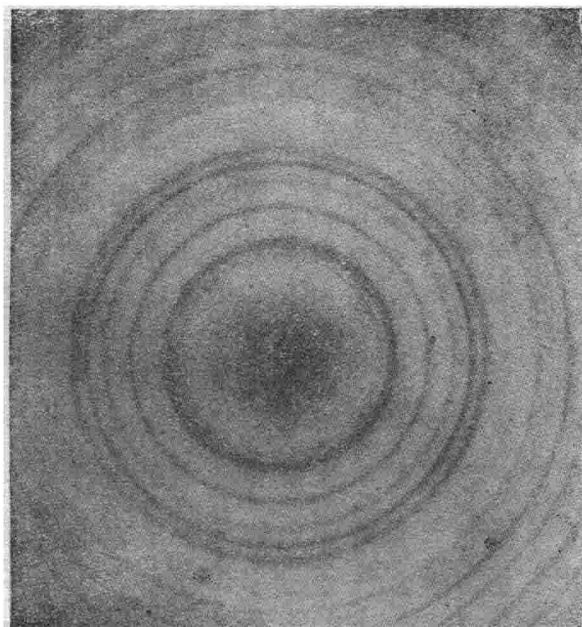
(1) 我們知道一結晶面上由投射的連續變琴線只能反射一完全一定的波長。

戴維孫和革墨爾的研究,經湯姆生(G. P. Thomson)的實驗⁽¹⁾得到重要的推廣。湯姆生用 20,000 到 30,000 弗 (Volt) 的高速電子,射在極薄的金或其他金屬箔上,實際上他得到早前代皮(Debye)和希拉爾(Scherrer)用變琴線射在金屬箔上所得結果,在湯姆生實驗,代皮—希拉耳的特殊折散環 (Bengungsring) 現於置在箔後的照相片上,從這種環湯姆生能計算金屬箔的格子常數,和以前根據變琴線例中所得的數值相同,戴維孫和革墨爾實驗中屈折 (Brechung) 現象所生的困難,在湯姆生實驗已經減少,因為在極高速的電子,並沒可見的屈折。

圖三是表示波脫(Poute)⁽²⁾先生在巴黎高級師範學校(Ecole Normale Supérieure)物理室,用氧化鋅(Zinkoxyd)結晶所得很美麗的折散環圖。他15,000弗左右的電子射到結晶體上面,照片的距離則大約在結晶體後面23厘。

(1) G. P. Thomson, Proc. Roy. Soc. London 117 (A), 1928, 600 頁。

(2) 波脫先生很慷慨的允許把還沒有印行的照片加入本書的法文譯本,並且使這德文版中也得翻印的權利。



電子經結晶體的折散(波脫)

圖 3

和相當於極硬樂琴線的高速電子輻射相反,則有羅泊(Rupp)⁽¹⁾所得經極薄箔低速電子的美麗折散現象.在他的研究中,他應用柯爾(Cole)⁽²⁾在低速電子(大約150—320弗)能使通常照片變黑⁽³⁾的發見

(1) E. Rupp, Ann. d. Phys. 85, 1928, 981 頁.

(2) K. Cole, Phys. Rev. 28, 1926 781 頁.

(3) 電子作用對於底片的銳感度(Empfindlichkeit)可由用油的增感法(Sensibilisierung mit Öl)使之增加.

以及另外一方面勃格爾 (Becker)⁽¹⁾ 在一定速度限界中,金屬箔電子選擇通過性 (Selektive Elektronendurchlässigkeit) 的發見,最後羅泊又指出⁽²⁾ 電子的折散,在光學中所用格子,也可以看見,因此他能夠算出布洛利波的波長,使精確度在5%以內,菊池 (Kikuchi)⁽³⁾ 更從電子射在電母石 (Glimmer) 薄片上,得到折散現象,那裏所得的圖,和光學中所知道的相似,除這許多干涉 (Interferenz) 和折散的實驗外,當然還有所有關於光學上其他現象 (像極化作用 Polarisations-effekt 等) 的研究,但到現在這些努力,尚無相當的成功。

(1) A. Becker, Ann. d. Phys. 84, 1927, 778 頁.

(2) E. Rupp, Naturwiss. 16, 1928, 656 頁.

(3) S. Kikuchi, Japan. Journ. Phys. 5, 1928, 83 頁.

第六章

雪里汀格爾的理論

Die Theorie von Schrödinger.

由得布洛利的思想顯示了力學變化和普遍波動傳佈法則（在光學中已經用最清晰的方式表示出來）間的密切關係。傳統力學的基本方程式，已被得布洛利引到斐馬原則的形式；這原則在均勻媒質的特例，就是光的直線進行說。⁽¹⁾實際上光線的直線傳佈，在均勻媒質中，也不正確。那假定不過近似的真確，它和光的折散現象等相矛盾；祇有在和光波長相較極大的區間，這假定以及斐馬原則纔十分正確。

不是這樣時，光的傳佈必須根據十七世紀後半

(1) 假使波速是一常數由方程式(1)所示全光線過程的和，必定等於一極小數，所以這必定是一直線，因為直線是連絡兩點的最短線。

期海互史所創的所謂海互史原則,那原則的主要點是說光波上的每點,都自身又成一小波的原點,那些新波,仍用原波的速度向四方散佈。

海互史原則有一個精密的數學表示式,就是一物理量的所謂拉普拉斯誘導係數 (Laplacesche Ableitung) 和它的二次時間微分商所成的微分方程式。至於拉普拉斯誘導係數 (通常用 Δ 記號代表的⁽¹⁾) 是空間二次徧微的和 (與所用坐標無關); 所以

$$(47) \quad \Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} .$$

假使我們研究一特別的物理量 S , 那裏它的拉普拉斯誘導係數和它依時間的二次微商成比例,就是

$$(48) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \kappa \Delta S .$$

由理論物理學中所知道的,⁽²⁾ 這微分方程式可以代表 S 的波動傳佈,波速是

$$(49) \quad u = \sqrt{\kappa} .$$

(1) 普通也有用 $\nabla^2 S$ 記號代替 Δ 者。

(2) 例如參看著者“Einführung in die theoretische Physik”, 第三,四版 (de Gruyter, Berlin, 1923-24), 第一卷, §43.

再從 (48) 式可以曉得,當一點受波動的牽擾後,自身就變成一發生小波的中心,這些小波用同一速度 u 前進,並且在均勻媒質中還成球面的。

至於振相,不管是平面波或球面波,都只依時間而變,由 (16) 式有下列簡單的關係:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi\nu,$$

所以在純粹正弦式的振動時, S 等於振幅乘振相角的正弦,再則正弦經二度的微分,仍是正弦,不過符號變換一下,所以

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 (\sin \varphi)}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 A \sin \varphi = -4\pi^2 \nu^2 S.$$

根據這關係和 (49) 式,所以 (48) 式應用在正弦式波動,又可寫作

$$(50) \quad \Delta S + \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2} S = 0.$$

現在是雪里汀格爾巧妙的思想,欲尋求力學的推廣,像由斐馬原則變為海互史原則(就是從幾何的光學變為物理的波動光學)一樣,實際上這改進是由前章所說物質波折散等現象所引起,這變更最簡單的形式,是關於單質點的運動,因為依得布洛利波長和動量(20式)間的關係,

$$(51) \quad \frac{v^2}{u^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2}.$$

另一方面動能 $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$ 等於全能力 (Gesamtenergie E) 和勢能 (V) 的差, 所以根據 (51) 式, (50) 式又可寫成:

$$(52) \quad \Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0.$$

這微分方程式, 就是雪里汀格爾力學的基礎。

從微分方程式理論, 我們早已知道一微分方程式只能在參變數 (Parameter) 是一定數值時, 纔能有完全單值 (Eindeutige), 有限, 和連續的解, 這些使這可能性實現的特殊數值, 叫做微分方程式的特性值 (Eigenwert), 而那些和它們相應的解, 是特性函數 (Eigenfunktion). 在雪里汀格爾方程式中, 全能力 E 是一個常參變數, 至於勢能則自然依坐標而變, 所以雪里汀格爾方程式的特性值, 在任何特殊情形, 總代表一定具體的能力數值. 因此能力定量的物理問題, 一變而為純粹的數學問題, 就是在各重要例子都已解決的微分方程式特性值問題。

這數學的特性值問題, (略去次要者) 可以用下列兩個簡單的例來大約說明一下, 並且作為以後

研究的應用,我們先試看一函數:

$$(53) \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

並求出它的初次二次依 x 的微分;可以用 y' 和 y'' 代表.於是

$$y' = -x y,$$

兩微分一次 $y'' = -y - x y'$,

或根據上式 $y'' = y(-1 + x^2)$.

我們現在研究微分方程式:

$$(54) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (a - x^2) y = 0,$$

可見這方程式有 (53) 式的解時,參變數 a 必須有數值 1. 所以這裏 1 就是微分方程式的特性值.

假使我們使

$$(55) \quad y = 2 x e^{-\frac{x^2}{2}},$$

必定又有另外一個特性值,因為

$$y' = 2 e^{-\frac{x^2}{2}} + 2 x e^{-\frac{x^2}{2}} (-x^2) = 2 e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2),$$

由此再微分一次

$$y'' = 2 e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) (-x) + 2 e^{-\frac{x^2}{2}} (-2x);$$

所以依方程式 (55)

$$y'' = y(-3 + x^2),$$

因此 $a=3$ 是代表微分方程式 (54) 有和 (55) 式解相應的特性值。

以後的解,這裏爲簡單計不一一寫出,讀者自己可以很容易的把他們算出,它的一班形式是

$$y = H e^{-\frac{x^2}{2}},$$

那裏 H 當特性值是 1 和 3 時,等於 1 和 2 x ,再下去則有下列的數值:

$$H = 4x^2 - 2 \quad \text{當 } a=5;$$

$$H = 8x^3 - 12x \quad \text{當 } a=7;$$

$$H = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad \text{當 } a=9 \quad \text{等等}$$

這裏的五個 H 值是所謂黑麻脫多項式 (Hermitesche Polynomen) 的最前五項;至於那多項式是可以用很簡單的公式表示的,⁽¹⁾ $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和黑麻脫多項式的乘積,

(1) 和 $a=2n+1$ 相應的黑麻脫多項式有下列形式:

$$H = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} - \dots$$

這級數一直到最初有一因子等於零的一項爲止。

就代表特性數等於奇數時 (54) 式的解,至於微分方程式 (54) 除 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 乘黑麻脫多項式外並無其它解的繁複證明,必須參看比較完備的數學著作。⁽¹⁾

現在我們可以再研究所謂球函數 (Kugelfunktion), 用來作另外的一個例子。假使我們把拉普拉斯的誘導係數, 從直角坐標變為空間極坐標, 就可以把這函數的方程式引出。在極坐標, 我們知道有一離一定點的距離 (r) 和兩個同地球上地理經度及地理緯度補角相應的兩角度。假使 r 是常數並且等於 1 時, 這改變引到一式, 可用 Δ^* 記號代表。⁽²⁾

這球函數的微分方程式, 於是

$$(56) \quad \Delta^* \psi - a \psi = 0,$$

並且依球函數的理論,⁽³⁾ (這裏不能講到) 只有當 n 是整數

$$(57) \quad a = n(n+1)$$

(1) 參看 (例如) B. R. Courant 和 D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, 卷一, Berlin (Springer) 1924, 251 頁。

(2) 假使 φ 和地理緯度 ϑ 和極距離 (Polabstand) 相當, 則

$$\Delta^* \psi = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

(3) 參看 Courant-Hilbert, 卷一, 264-422 頁。

能滿足時,上面的微分方程式纔有不等零,並且在全球面上是連續的解。(第一微商也是如此)所以整數

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 等等,

是微分方程式 (56) 的特性值。

第七 章

特性值力學舉例

Beispiele zur Eigenwertmechanik.

雪里汀格爾的方法,既經把定量問題變成特性值的問題,現在可以先把它應用到振動子(Oszillator)的簡單例子上去。我們知道振動子是繞着一固定點振動的質點,像電子等。至於只在一直線上振動的,是稱爲線性(Linear)振動子;而純粹是正弦式的則稱爲和諧(Harmonische)振動子,1900年起,量子論就研究這種線性和諧振動子;理論物理學在二十五年間幾乎全浸沈於蒲朗克所得的結果,就是說這種振動子的能力必定是振數和作用量子乘積的整數倍,但雪里汀格爾理論所得的結果和卻有這點不同。

假使把振動子的固定點選作爲坐標的原點,而它上面振動的直線選爲 x -軸,自然可得下列的關

係：——

$$x = A \sin (2 \pi \nu t),$$

這裏 A 是代表振幅，因為速度是距離 x 的時間微商，所以

$$v = A \cdot 2 \pi \nu \cos (2 \pi \nu t).$$

動能等於質量和速度平方的乘積，因此

$$L = 2 A^2 \pi^2 \nu^2 m \cos^2 (2 \pi \nu t),$$

質點經過固定點時，勢能完全消滅，這最大可能的動能，就代表全能力；因此在上式中使餘弦等於一，就得到能力 E 。因為正弦和餘弦平方的和等於一，所以將上式中的正弦代以餘弦，就得到勢能 V 的公式，所以（用倒數上去的第三式）

$$V = 2 \pi^2 \nu^2 m x^2.$$

在所研究的線性和諧振動的特例，雪里汀格爾 微分方程式（這裏拉普拉斯誘導係數 ΔS 變為 S 依 x 的二次微商）有下列的形式：——

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - 2 \pi^2 \nu^2 m x^2) S = 0.$$

我們現在用下列的簡寫：——

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E = \alpha$$

和

$$\frac{4\pi^2mv}{h} = \beta.$$

更用下列的定義引入新變數 ξ ：——

$$\xi = x \sqrt{\beta}.$$

於是

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2},$$

和

$$x^2 = \frac{\xi^2}{\beta}.$$

我們用 β 除這微分方程式，可得公式：——

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2 \right) S = 0.$$

這方程式的特性值，依前章所說，是 n 等於整數時，由下列關係決定：——

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2n + 1.$$

從這方程式和 α β 簡寫的定義，得到

$$(58) \quad E = (2n + 1) \frac{h\nu}{2}.$$

所以在雪里汀格爾力學中，線性和諧振動子的能力，等於半能力元的奇數倍，就是

$$\frac{h\nu}{2}, \frac{3h\nu}{2}, \frac{5h\nu}{2} \text{ 等等.}$$

這結果和舊量子論所得全能力元整數倍（就是等於 $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu,$ 等）的結果不同，從雪里汀格爾的理論，可知振動子可有的最低能力並不等於零，和舊說相反，理論物理學以為固體的熱量是由於原子依固定地位的振動而起，所以振動子的能力，就是表明它的熱，在雪里汀格爾以前物理學者，像奈恩斯脫等已創立所謂零點能力假說，來說明許多舊量子論和在極低溫度時所見實際現象的不符合處，那假說是講在絕對零點，振動子也有能力 $\frac{h\nu}{2}$ （雖然依舊說是等於零），以前這假定似乎很牽強，但現在可見從雪里汀格爾力學根基，已成為自然的結果了。

除振動子外，轉動子可用作雪里汀格爾力學的第二例，轉動子 (Rotator) 是指一質點用等距離繞著一固定中心運動，在舊力學中也已經完全處理過，假使運動只限於一平面上，則為一圓，我們稱它為定軸轉動子；若是運動並無這種限制，則在一球面上，我們稱它為自由軸轉動子，這樣一種轉動子，是以下所要研究的。

假使那固定距離等於單位長，我們可以用前章中的 Δ^* 記號代替雪里汀格爾誘導係數；假使 r 是

那固定距離,則因拉普拉斯誘導係數的分子中含有坐標微分的平方,所以應用 r^2 除之.於是可用 $\frac{\Delta^* S}{r^2}$ 代 ΔS ,在轉動子,動能和勢能都是常數.假使用 L 代表動能,雪里汀格爾 方程式 (用 r^2 乘後) 可寫作:——

$$(59) \quad \Delta^* S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} r^2 L S = 0.$$

由前章所述球函數.微分方程式 (56式) 的理論,只 n 在下式等於整數.

$$(60) \quad \frac{8\pi^2 m r^2 L}{h^2} = n(n+1)$$

方程式 (59) 纔有一個解.在這方程式中,我們可以引用角動量 (U),它的定義是質量,速度以及球半徑的乘積;就是

$$U = m v r,$$

在另一方面,因為動能等於 $\frac{1}{2} m v^2$, 所以

$$m r^2 L = \frac{1}{2} U^2,$$

於是依 (60) 式:——

$$\frac{4\pi^2 U^2}{h^2} = n(n+1),$$

或

$$(61) \quad U = \frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{n(n+1)}$$

由此可見在轉動子，雪里汀格爾理論的結果，也和舊量子論不盡相同。在舊說角動量等於 $\frac{nh}{2\pi}$ ，所以 $\frac{2\pi U}{\hbar}$ 等於 0, 1, 2, 3, 4, 等等，但在雪里汀格爾理論（在一班言），這並非整數，而是：——

0; 1.4142; 2.4495; 3.4641; 4.4721 等等。

在轉動子，雪里汀格爾理論，也給我以比舊說更和實驗相合的結果。（像所謂帶景“Bandenspektren”的解釋）在這裏的差異點，仍是半量子數的引用。⁽¹⁾ 勢能是常數，所以由以前引出的公式，兩任意能力值的差等於：——

$$E_1 - E_2 = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m r^2} [n_1(n_1+1) - n_2(n_2+1)].$$

但在另一方面，有恆等式：——

$$n(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

(1) 實際上，這在帶景理論中久已應用，不過缺少滿意的理論根據而已。

所以

$$E_1 - E_2 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right].$$

很可注意的，是特性值力學應用到氫原子的結果，氫原子是由一質子和一繞行電子所組成，所以勢能是：——

$$V = -\frac{e^2}{r},$$

那裏 e 是電元量子， r 是質子和電子間的距離，所以在氫原子，雪里汀格爾 微分方程式是：——

$$(62) \quad \Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) S = 0.$$

這方程式的特性值計算很繁複，可以參看雪里汀格爾自己的引算法。⁽¹⁾ 雪里汀格爾所求得的結果是：一在正數一方面，所有的數，都是這微分方程式的特性值；但在負數，則祇有一定的具體數值，所以能力可以有任意的正數值；但只有下列的負數值：——

$$(63) \quad E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2},$$

那裏 n 是整數。

(1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 1926, 361 頁.

由 (63) 式所定的氫原子特性值,和 1913 年波耳所引出的完全相同;並且從這公式,可見它是反比於主要量子數 (n) 的平方,在另一方面,由應用得布洛利物質波假定於閉軌週期運動的數值, (像已經在前面講過的) 也和波耳數值相等,和能力是負的電子運動相反的,是無定量法則的正能力運動,這結果和舊量子也相合,那裏對於橢圓軌道 (特殊的是圓軌道),已經有定量的法則,但對一電子先從外面行近電子,然後漸漸離遠⁽¹⁾ 的雙曲線軌道,則並無任何量子論限制。

雪里汀格爾微分方程式的簡單形式 (52 式),對於電子受較弱外界影響 (像外界電力場等) 所擾的運動,也有一重要的應用,從微分方程式的理論,知道特性量 (就是特性值,和相應解的特性函數)

(1) 和每核距離相應總有一使電子成拋物線軌道的臨界速度,凡小於這速度時,必是一橢圓運動,而大於這速度時,必是一雙曲線運動,像在天體力學 (Himmelsmechanik) 所知的法則一樣,那裏彗星是行雙曲線軌道的,至於電子的臨界速度,也像在彗星一樣,由質量和勢能商二倍的平方根而定

(就是 $\sqrt{\frac{2 \times \text{勢能}}{\text{質量}}}$)。

當微分方程式中引進一小變動項時，所生的差別極小，因為它們是有連續性的，這事實使我們可以從原方程式的特性量，計算加入變動項後所生的變更。假使 α_k 是未擾動方程式的特性值，則 α_k 和已變方程式特性值的差 α_k 可以決定。

若使現在微分方程式有幾個主變數（像雪里汀格爾微分方程“除去特殊情形”就是一個例），於是一單個特性值，普通總和幾個解式特性函數相應。假使這數是 s ，則稱為 s -重特性值，或則可以說 s 個特性值相合。現在這裏有一個很重要的數學結果，就是相合的特性值，在變動時，它的差 α_k 並不相同，因為這些數依特性函數更變，而這些特性函數，是各自不同的，所以一多重的特性值，經一次的變動，就變成一羣在原特性值鄰近的不同特性值，這就是所謂析離（Aufgespalten），它可以是全部（分為 s 分向）或一部的。

由這原則的精確發展和應用到在電力場中的電子運動，雪里汀格爾得到一個和1916年厄泊斯坦（Epstein）所創相同的公式，這公式和實驗結果相合，描寫能力值的分解和電場中的景線；那就是所謂斯

塔克應效 (Stark-Effekt), 下式是在電力場中能力變遷的公式

$$(64) \quad \Delta E = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h^2 F}{me} n (k_2 - k_1),$$

這裏 F 是場強度, n 是主量子數, k_1 和 k_2 是兩另外的正量子數, 可正可負, 也可等於零, 但他們的和至少比主量子數小一。

一直到現在所講的問題, 都是在單電子問題, 在多於一的質點運動, 就是所謂多電子問題, 雪里汀格爾 方程式有很普遍的形式, 假使 Δ_1 代表第一質點的坐標二次微商和, 而 m_1 是它的質量等等, 雪里汀格爾 方程式 [係下章 (看 120 式) 要討論的], 是:—

$$(65) \quad \frac{1}{m_1} \Delta_1 S + \frac{1}{m_2} \Delta_2 S + \dots + \frac{8\pi h}{h^2} (E - V) S = 0.$$

但須要注意的, 這方程式在普通的意義, 不過表示實際的波動方程式, 它所表示的, 是一在所謂 $3n$ 度形象空間中的波, n 是所有質點的數目, 而那裏的坐標, 由它的含義, 必須用所研究質點質量的平方根乘之。⁽¹⁾ 雪里汀格爾 自己以為場量 (S) 是代表平均電荷

(1) 由長度乘質量平方根所引起的坐標複雜點, 在所有質點都有相等質量時, 可以免去。

密度的;並且這週期的平均電荷密度變動,就是舊理論意義中的光。⁽¹⁾

(1) 由雪里汀格爾場量的統計解釋;參看十一章。

第 八 章

哈生保的量子力學

Die Quantenmechanik von Heisenberg.

依據得布洛利思想所創立的雪里汀格爾理論，並非在原子力學新奠定中唯一的探求，在雪氏數月之前，有哈生保所創立的量子力學；不過後來雪里汀格爾已證明這力學和他自己較遲所創的理論，有極密切的關係；很可注意的是哈生保創立他理論的目標，和得布洛利與雪里汀格爾所取的完全不同，在布雪兩氏是欲用舊物理學的方法，解釋原子現象，並且要想溝通『定量的』原子力學與力學間的深峽；但是哈生保的意見，同這完全相反，他以爲除非棄掉舊的思想，決不能真實了解原子法則，他的意思以爲凡不能直接觀察現象的研究，是無意義而且不可靠的，所以在原子論對這種數量，必須完全去除。

不像舊量子論的根據於不可賅核的電子軌道假設，哈生保創立一新的量子力學，由那裏可以得到可觀察之原子物理量間的關係，他在這些數量中只選用原子特有景線的振數和強度，以及（和景析無關）在電子撞擊實驗中可定的原子能力階，在這新量子力學中，哈生保所取的步驟，是先從這些景線數量創立可以代替電子坐標與速度的計算量，然後儘量使和舊力學中已證明的思想相合，以求它們相互間的關係，因此得到定量法則；——這可以比舊的理論更和實驗相合，並且比舊說也有比較廣大的應用區域。

哈生保所用以實行這種計劃的方法，是根據十九世紀初富利埃 (Fourier) 所創的定理，富利埃尋得任何週期變動量，總可以用純粹正絃式振動的重疊 (Superposition) 來代表，像方程式一樣，可以照下式寫作：——

$$(66) \quad q_n = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \epsilon_n),$$

這裏 A 代表振幅， ϵ 是振相常數（不過可注意的是振數 ν_n ，全是所究數量依之而變的基本振數的整數倍，至於 A_n 的數值，也可由所究數量和時間的關係計

算。)⁽¹⁾ 因此所研究的週期變動量,是等於偏析振動

$$q_1, q_2, q_3 \dots$$

的和。

爲以下研究的便利起見,所以用指數函數 (Exponentialfunktionen) 代替三角函數來表示振動,因此我們應用得莫扶爾 (de Moivre) 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

這裏 i 是虛單位 ($\sqrt{-1}$)。用這公式,我們可以把任意一個含有虛指數的指數函數分成一實部和一虛部 (因子 i 可除去)。這方程一方面可使等於實部,一方面可使等於虛部。應用這個到在理論光學中常用的方式,我們可以把每振動表示於下列形式:—

$$(67) \quad S = A e^{i(2\pi\nu t + \varepsilon)}.$$

假使我們只看虛數部,於是有

$$S = A \sin(2\pi\nu t + \varepsilon),$$

我們又見(67)式微分的結果是:—

(1) 假使 $\varphi(x)$ 是週期函數,我們可以使

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \sin(nx) + \frac{1}{2}b_0 + \sum_n b_n \cos(nx),$$

由計算可以得到

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx.$$

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi i \nu A e^{i(2\pi\nu t + \varepsilon)},$$

假使也只取虛部，則更直接可從前式得到，就是：—

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t + \varepsilon).$$

由莫扶爾方式的應用，我們得到振動量和它時間微商的簡單關係：—

$$(68) \quad \frac{dS}{dt} = 2\pi i \nu S.$$

最後我們可以用簡寫

$$(69) \quad A e^{i\varepsilon} = a,$$

因為現在已引用複振幅(a)，所以振相常數已變為無用，於是方程式(67)可寫作：—

$$S = a e^{2\pi i \nu t}.$$

振動強度等於實振幅的平方，就是

$$A^2 = |a|^2 = a a^*,$$

這像通常一樣 a^* 是 a 的交錯量⁽¹⁾(Konjugierte Größe)，在我們這裏(依69式)

(1) $x-iy$ 量是交錯於 $x+iy$ 的。這兩量的絕對度相等，就等於它們的平方根 $\sqrt{x^2+y^2}$ 。

$$a^* = A e^{-i\varepsilon}$$

現在哈生保可喜的思想,是用一系偏析振動來代表一電子的週期變動坐標,那些振動的振數等於每景線的振數,(依前面的假設,這是由電子改變坐標而發生)因為景線的振動,和兩原子狀態間的變換相應,於是屬於一電子的偏析振動,自然組成一兩重的系統,所以(和富利埃級數不同)可以用一所謂正方表列(Quadratisches Schema)代表如下:(那裏記數是從和基本狀態相應的零算起)

$$\begin{array}{cccc}
 q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \cdots \\
 q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \cdots \\
 q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \cdots \\
 q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \cdots \\
 \dots & & &
 \end{array}
 \tag{70}$$

這裏假使為便利計,不將指標寫在橫線下面而寫在括弧中,於是有

$$q(n, m) = a(n, m) e^{2\pi i \nu(n, m)t}$$

$a(n, m)$ 仍表示複振幅,它的大小,可用來量第 n 和第 m 階間變化的或是率(Wahrscheinlichkeit). 於是這數量的平方,可以測定這種變化所生景線的強度.

因爲變化在雙方向的或是率必相等,所以 $a(n, m)$ 等於 $a(m, n)$, 所以這和兩相反方向相應的複振幅, 可以看作兩交錯量, 就是

$$a(m, n) = a^*(n, m)$$

我們若使再假定

$$(72) \quad q(m, n) = q^*(n, m)$$

由 (71) 式可見

$$(73) \quad v(m, n) = -v(n, m)$$

並且在特殊情形時

$$(74) \quad v(n, n) = 0$$

現在我們假定電子坐標和表列 (70) 相應, 所以電子速度 (\dot{q}) 的分向, 也可組成一相似的表列, 那裏每項等於第一表列相應項的時間微商, 可以寫爲:—

$$(75) \quad \dot{q}(n, m) = 2\pi i v(n, m) q(n, m).$$

把這速度表列的項, 再依時間微分, 我們得到電子加速度 (\ddot{q}) 分向的表列; 所以有下列的關係:—

$$(76) \quad \ddot{q}(n, m) = -4\pi^2 v^2(n, m) q(n, m).$$

從 (75) 式, 我們可以得到一個在特殊情形下的重要結論, 就是一表列中

$$(77) \quad q(n, m) = 0, \quad \text{當 } m \neq n.$$

因此表列的各項,除對角線上的各項外,統等於零,所以表列有下列簡單方式:

$$\begin{array}{ccc} D_{00} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{22} \text{ 等等.} \end{array}$$

假使我們構造這對角表列(Diagonalen Schema)的時間微分商,就很容易的可以看出這新表列的各項,完全等於零,因為照(75)式,它們的形式是

$$2\pi i v(n, m) D(n, m).$$

在 n 又等於 m 的各項,因為 D 是一個對角表列,所以必定等於零,但是 n 等於 m 的各項,又因為依(74)式 $v(m, m)$ 等於零的緣故,也必等於零。

一直到現所研究的,是想用一振數表列,作為運算工具,實際上,我們在時間微分的例子,已經可以知道了,同樣我們可以將一個表列 q'' 定為兩表列 q 和 q' 的和或差,就是

$$(78) \quad q''(n, m) = q(n, m) \pm q'(n, m)$$

比較困難的,當然是乘法的定義了,哈生保用下列關係:—

$$(79) \quad q''(n, m) = \sum_k q(n, k) q'(k, m);$$

作為兩表列 q 和 q' 乘積的定義,這就是說先將第一表列第 n 橫列的第一項和第二表列的第 m 直行的第一項相乘,第一表列第 n 列的第二項和第二表列第 m 行的第二項相乘等等;然後把這些乘積完全加起來.根據這定義,可見乘法則是不可交換的 (Nicht kommutativ). 既然先用第二表列乘第一表列,和先用第一表列乘第二表列,所得的結果不同,這可以說是 q 和 q' 的乘差,用記號 $q'q - qq'$ 代表.⁽¹⁾

哈生保現在建立他的量子力學於一假定上,就

(1) 為簡單起見,我們假使有一只含兩行列的表列,然後用另外一個相似的表列乘之,於是可立它們的乘積如下:—

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}.$$

假使用 c 代乘積 ab , d 代表 ba , 從乘法規則 (79 式), 我們可以得到

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22},$$

而

$$d_{11} = a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12}$$

$$d_{12} = a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12}.$$

若使乘積差為 f , 則

$$f_{11} = c_{11} - d_{11} = a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}$$

$$f_{12} = c_{12} - d_{12} = a_{12}(b_{22} - b_{11}) + b_{12}(a_{11} - a_{22}) \text{ 等等.}$$

是說電子的動量分向和它們的坐標連合而成的乘差,在對角線各項是等於一個簡單因子乘作用量子;至於其餘的各項則都等於零.假使 p 代表動量分向,並引用下列的簡寫:——

$$(80) \quad p q - q p = D,$$

於是

$$(81) \quad D(n, m) = \begin{cases} z \hbar & \text{當 } m = n \\ 0 & \text{當 } m \neq n, \end{cases}$$

那裏 z 就是方纔所說的因子,至哈生保選用動量與空間坐標的乘積,也有他相當的理由,因為從舊量子論,物理學家已經知道,這乘積和 \hbar 有同樣的物理度.⁽¹⁾

因為要使以後的結論和事實相符,(81)式中的因子 z 必須是 $1/(2\pi i)$. 假使我們用 ε 記號表示一單位對角表列,就是:——

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(1) 動量的度是克厘米²秒⁻¹,所以動量和坐標乘積的度,是克厘米²秒⁻¹,或厄秒.

於是所謂哈生保的交換法則,有下列形式:—

$$(82) \quad p q - q p = \frac{h}{2\pi i} \epsilon.$$

這方程式告訴我們通常視動量和坐標相乘是可交換的而引起的差誤,有 10^{-27} 絕對量度.在宇宙力學(Makromechanik),這差誤自然可以略去,但在原子力學卻不然,那裏(82)式右邊(略去 $i\epsilon$ 因子),和動量與氫原子在正常狀態半徑的乘積相等.

假使 q 是代表普通的加代德坐標(Cartesische Koordinate),於是它附屬的動量等於質量(用 μ 表示⁽¹⁾)和速度的乘積.所以我們對動量可以組成一個振數表列,那裏的各項等於(75)式的速度表列項,再用質量相乘.交換法則於是有下列的形式:—

$$(83) \quad [\dot{q} q - q \dot{q}]_{n m} = \frac{h}{2\pi i \mu} \epsilon_{n m}.$$

現在依(75)式:

$$[\dot{q} q]_{n m} = 2\pi i \sum_k \{v(n, k) q(n, k) q(k, m)\},$$

反轉來

$$[q \dot{q}]_{n m} = 2\pi i \sum_k \{q(n, k) v(k, m) q(k, m)\},$$

(1) 這裏故意不用通常的記號 m ,以免和指標數相混.

因此

$$(84) \quad [\dot{q}q - q\dot{q}]_{n,m} = 2\pi i \sum_k \{ [v(n,k) - v(k,m)] q(n,k) q(k,m) \}$$

依交換法則,當 $m=n$ 時,

$$(85) \quad \sum_k \{ [v(n,k) - v(k,n)] q(n,k) q(k,n) \} = -\frac{\hbar}{4\pi^2\mu}$$

現在我們又要把這關係應用到和諧線性振動子,我們用從一靜止點的距離作為唯一的坐標,由以前的研究, (第七章) 知道在古典力學 (我們應當儘量的依據它) 中,振動子的運動公式,有下列的形式:—

$$(86) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 4\pi^2 v_0^2 q = 0,$$

假使 v_0 是表示振動子的振數, (這裏因為要分別,振動子放射線的振數和振動子的特性振數,所以採用指標 0) 在量子力學中用像 (76) 式的振數表列代替坐標或加速度,我們可得到

$$-4\pi^2 v^2(n,m) q(n,m) + 4\pi^2 v_0^2 q(n,m) = 0,$$

由此

$$(87) \quad v(n,m) = \pm v_0.$$

在從一定指標 n 和變指標 m 所成的振數值

$v(n, m)$, 只有兩相鄰數不等於零, 就是

$$m = \begin{cases} n-1 \\ n+1 \end{cases}$$

同樣在使 m 是常數, 而 n 變動所成的振數值 $v(n, m)$, 也只有 $n = (m-1)$ 或 $(m+1)$ 時不等於零。

假使在線性和諧運動子的特例, 對速度或動量組成一相應的振數表列, 祇有在下所舉的各項纔不等於零: 第一列的第二項; 第二列第一第三項; 第三列第二第四項等等, 至於直行, 也有同樣的規則, 若用星形 (*) 代表不等於零的項, 於是對速度或和它成比例的動量成一表列, 那裏和主對角線相鄰, 並且平行的兩斜列, 都有星的記號, 就是

$$\begin{array}{cccccc} 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \end{array}$$

等等。

現在回到 (85) 式, 我們看見在那式的總和中, 祇有 k 等於 n' 和 n'' [代表 $(n-1)$ 與 $(n+1)$] 的兩項不等

於零;再依 (73) 式, $v(n, k)$ 等於 $v(k, n)$ 不過符號相反而已, 所以它們的數值依 (87) 式是等於 v_0 . 最後我們要記著的是假使指標 n' 是代表比和 n 相應的能力狀態較高的狀態, 則在變化時, 必定吸收放射線, 因此振數應算作負; 但假使是比和 n'' 相應的狀態有較小能力, 則在變化時, 必定是放射線, 而振數應算為正, 所以 (85) 式的左面有下面的形式:—

$$-2 v_0 [q(n, n') q(n', n) - q(n, n'') q(n'', n)].$$

所以由交換規則, 可引到下列的關係:—

$$q(n, n') q(n', n) = q(n, n'') q(n'', n) + \frac{h}{8 \pi^2 \mu v_0}.$$

因為計數是從指標 0 起, 所以必須假定負指標的各項等於零. 假使我們簡寫

$$(88) \quad \frac{h}{8 \pi^2 \mu v_0} = Q,$$

於是得到下列的關係:—

$$q(0, 1) q(1, 0) = Q$$

$$q(1, 2) q(2, 1) = q(0, 1) q(1, 0) + Q = 2Q$$

$$q(2, 3) q(3, 2) = q(1, 2) q(2, 1) + Q = 3Q \text{ 等等;}$$

所以在一般講,

$$(89) \quad q(n-1, n) q(n, n-1) = n Q.$$

這方程式既然是交換法則的特殊形式，我們現在依哈生保可以用來計算振動子的能力值。由以前的研究（第七章），已經知道線性振動子的勢能是：——

$$V = 2 \pi^2 v_0^2 \mu q^2,$$

（這裏用 μ, v_0, q 代以前的 m, v, x ）。這裏再加動能，（質量和速度平方乘積的一半）我們就得下列全能力的公式：——

$$E = 2 \pi^2 v_0^2 \mu q^2 + \frac{\mu}{2} \dot{q}^2.$$

在量子力學依 (79) 式坐標的平方是

$$[q^2]_{n, m} = \sum_k q(n, k) q(k, m).$$

這裏速度的平方也可同樣改造一下，根據 (75) 式：——

$$[\dot{q}^2]_{n, m} = -4 \pi^2 \sum_k \{v(n, k) v(k, m) q(n, k) q(k, m)\}.$$

於是對能力也有一個表列；我們得到的是：——

$$(90) \quad E(n, m) = 2 \pi^2 \mu \sum_k \{[v_0^2 - v(n, k)v(k, m)] q(n, k) q(k, m)\}.$$

在這方程式中先假定 m 不等於 n ，照以前講過的，知道總和中除掉 n, k, m 或 m, k, n 是三連續數外，其餘的各項都等於零。在這時 $v(n, k)$ 和 $v(k, m)$ 不但數

值相等,就是符號也同,所以(90)式方括弧中的數量等於零,因此

$$(91) \quad E(n, m) = 0 \quad \text{當 } m \neq n.$$

這能力和一振動表列相應,照從前(77式後的結論)所說,這是一個時間的常數,換句話說,就是表示能力不變法則。

在另一方面,假使 m 等於 n ,則在(90)式的總和中,只有 k 等於 n' 或 n'' 的各項不等於零.在兩項中的每個都是

$$v(n, k) v(k, n) = (+v_0)(-v_0).$$

於是得到

$$E(n, n) = 4\pi^2 \mu v_0^2 [q(n, n') q(n', n) + q(n, n'') q(n'', n)].$$

根據表示交換法則的(89)式,我們可以寫作

$$E(n, n) = 4\pi^2 \mu v_0^2 [(n+1)Q + nQ].$$

在這裏使 n 等於零,我們可以得到能力的最低值(E_0);從(88)式有

$$E_0 = \frac{h v_0}{2}.$$

至於較高的能力值,照前式是

$$(92) \quad E_n = \frac{2n+1}{2} h v_0.$$

所以能力是半能力元的奇數倍,並且永不等於零。這哈生保的量子力學(和舊量子論不同)的結果,與雪里汀格爾理論完全相符。根據(87)式,可以引出一重要的結論,就是一振動子的量子跳躍(Quantensprünge),只能在兩相鄰的兩狀;並且最後從(92)式,又可以看見在這種變化,波耳的振數條件(就是說,這種跳躍所放射的或吸收的光量子,等於單位作用量子除跳躍時引起的能力變動)也能滿足。

第 九 章

方陣力學

Die Matrizenmechanik.

在哈生保創立了他的新學說後,不久就有菠綸 (Born)和約但 (Jordan)發明了一種適當的數學工具來實現哈生保的計劃,就是所謂方陣算法(Matrizenrechnung);那是數學中在十九世紀已經充分發展的一科,不過始終沒有引起一般物理學家的注意罷了。至於方陣 (Matrix) 一名詞的意義,就是一正方形的表列,它的每項都用兩指標來規定。⁽¹⁾在那裏的加法和不可交換的乘法等規律,都和哈生保不用方陣算法得到的一樣。本章的目的是用方陣力學,對能力不變法則和波耳振數條件是哈生保交換法必然結果一事,

(1)假使方程的項由交換它的兩個指標就變成它的交錯量,則這方陣叫做一個黑麻脫的。

加以普遍的證明。

在作這個引證之先，我們必須從一點純粹的數學定律出發，由此纔可以和前章所研究的連合。我們現在用粗體字代表方陣，先算兩方陣 A 和 D 的乘差。那裏 D 是一個對角方陣 (Diagonalmatrix) 根據 (79) 式，我們得到

$$[\mathbf{D A}]_{n m} = \sum_k D(n, k) A(k, m).$$

由對角方陣的定義，在這總和中祇有 $n=k$ 的一個乘積不等於零，所以

$$[\mathbf{D A}]_{n m} = D(n, n) A(n, m).$$

在另一方面

$$[\mathbf{A D}]_{n m} = \sum_k A(n, k) D(k, m).$$

在這總和中也祇有 k 等於 m 的一個乘積不等於零，因此

$$[\mathbf{A D}]_{n m} = A(n, m) D(m, m).$$

所以對於乘差，我們有下列的關係：——

$$(93) \quad [\mathbf{D A} - \mathbf{A D}]_{n m} = A(n, m) [D(n, n) - D(m, m)].$$

從這方程式，我們立即可以看出在對角線各項都相等的特殊情形，乘差等於零，所以乘法也變為可交換

的了,⁽¹⁾ 就是

$$(94) \quad \mathbf{D}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{D} = 0,$$

[假使 \mathbf{D} 是一對角方陣並且 $D(n, n) = D(m, m)$].

這定律當然也很容易的反過來說,當一方陣 \mathbf{B} 和一任意方陣 \mathbf{A} 的相乘是可交換的,則 \mathbf{B} 必定是一個各項相等的對角方陣;於是乘差的 $n - m$ 一項是

$$\sum_k \{B(n, k) A(k, m) - A(n, k) B(k, m)\}.$$

假使像我們已經所假定的, \mathbf{A} 是一個任意方陣,這總和祇有在下面兩條件之下,纔能等於零,就是第一要當 n 不等於 m 時 $B(n, m)$ 等於零,第二要 $B(n, n)$ 等於 $B(m, m)$.

假使我有一個由下列方程式規定單位方陣 (Einheitsmatrix) ε ,

$$(95) \quad \varepsilon(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{當 } m = n \\ 0 & \text{當 } m \neq n, \end{cases}$$

依 (94) 式我們知道它和一個任意方陣的相乘,必定是可交換的;所以有下列的關係

(1) 因 (93) 式,可見任意兩對角方陣的乘法是可交換的,因為假使 \mathbf{A} 和 \mathbf{D} 都是對角方陣,在 (93) 式的右面當 n 不等於 m 時, $A(n, m)$ 一項要等於零,但當 n 等於 m 時則括弧中的數值又等於零。

$$(96) \quad \varepsilon \mathbf{A} = \mathbf{A} \varepsilon,$$

一個用 A^{-1} 記號代表的方陣,假使有下面的關係:—

$$(97) \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \varepsilon,$$

我們可以看作方陣 A 的倒方陣,由這定義,可知單位方陣是和自己相倒的 (Reziprok), 因為由方陣乘法的規律

$$[\varepsilon \varepsilon]_{n, m} = \sum_k \varepsilon(n, k) \varepsilon(k, m)$$

這裏當 k 不等於 n 時, $\varepsilon(n, k)$ 等於零,同樣當 m 不等於 k 時, $\varepsilon(k, m)$ 也等於零,因此我們得到

$$[\varepsilon \varepsilon]_{n, m} = \begin{cases} 1 & \text{當 } m = n \\ 0 & \text{當 } m \neq n. \end{cases}$$

於是,由 (95) 式

$$\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$$

或由 (97) 式

$$(98) \quad \varepsilon^{-1} = \varepsilon$$

所以現在用一方陣相除時,可以看作和它倒方陣的相乘,因此我們對一方陣函

$$y = f(x)$$

依一主變方陣 (Argumentmatrix) 的微商,有下列的定義,

$$(99) \quad \frac{d y}{d x} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a},$$

這裏 a 是一純粹數和單位方陣相乘而成的方陣,就是

$$a = \alpha \varepsilon,$$

於是依 (98) 式,

$$(100) \quad \frac{d y}{d x} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \{ [f(x + \alpha \varepsilon) - f(x)] \varepsilon \}.$$

在 x 等於 y 的特殊情形,用方陣相乘法則,我們得到:—

$$\begin{aligned} \left[\frac{d x}{d x} \right]_{n m} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \sum_l \{ [x(n, l) + \alpha \varepsilon(n, l) - x(n, l)] \varepsilon(l, m) \} \\ &= \sum_l \varepsilon(n, l) \varepsilon(l, m) = [\varepsilon \varepsilon]_{n m}. \end{aligned}$$

所以

$$(101) \quad \frac{d x}{d x} = \varepsilon.$$

現在假使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是以 x 為主變方陣的兩個任意函數,把它們相乘再把這乘積 $f g$ 依 x 微分,由 (99) 式得到

$$\frac{d(fg)}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [f(x+a)g(x+a) - f(x)g(x)],$$

或則我們將方括弧中加上 $f(x+a)g(x)$ 然後再減去，於是

$$\begin{aligned} \frac{d(fg)}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \{ & f(x+a)g(x+a) - f(x+a)g(x) \\ & + f(x+a)g(x) - f(x)g(x) \}, \end{aligned}$$

所以由 (99) 式，得

$$(102) \quad \frac{d(fg)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g.$$

我們假使特別的使

$$f(x) = g(x) = x,$$

於是依 (102) 和 (101) 式，得

$$(103) \quad \frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

我們現在再研究乘差等於方陣 $k\varepsilon$ 的兩主變方陣 p 和 q 的方陣函數 W ，那裏

$$(104) \quad pq - qp = k\varepsilon.$$

我們可以很容易的指出下面的兩個方程式也能滿足：——

$$(105) \quad \begin{cases} W_q - W_q = k \frac{\partial W}{\partial p} \\ W_p - W_q = k \frac{\partial W}{\partial q} \end{cases}$$

這可用下面的證明法：先假定(105)式兩式對兩任意函數 g 和 f 是正確的，先使 $W=f$ ，然後 $W=g$ ，我們立即可見對 $W=f+g$ 也必能適合。更進一步，我們可以證明(105)式對 $W=fg$ 也是不錯的，爲要表明這事起先可利用下面的恆等式：——

$$fgq - qfg = f(gq - qg) + (fq - qf)g.$$

(就是先將 $f q g$ 加後來又把它減去)。因爲我們已假定(105)式對 f 和 g 正確，所以第一括弧中的東西等於 $k \frac{\partial g}{\partial p}$ ，第二括弧中的等於 $k \frac{\partial f}{\partial p}$ ，於是

$$fgq - qfg = k \left(f \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} g \right);$$

或依(102)式，

$$(fg)q - q(fg) = k \frac{\partial (fg)}{\partial p}.$$

同樣自然

$$p(fg) - (fg)p = k \frac{\partial (fg)}{\partial q}.$$

所以假使(105)式對兩任意函數 f 和 g 能適合, 則對函數 $f+g$ 和 fg 也能適合, 因此只要(105)式對 f 和 g 能適合, 則對任意函數也能適合, 因任何函數總可由 f 和 g 的反復相加相乘得到, 現在好了, (105)式對 $W=p$ 和 $W=q$ 總是正確的, 所以對 p 和 q 的任意完全函數(Ganze Funktion)都能適合, 這樣我們的定律已經證明了。

經過這樣普遍的數學研究, 我們又要回到物理學上來, 使 q 代表坐標方陣 (Koordinatenmatrix), p 代表相應的動量方陣 (Impulsmatrix), 先從舊力學中的運動方程式出發, 爲便利起見, 把它們寫作所謂標準式 (Kanonische Form)。那裏能力是坐標和動量的函數, 就是所謂黑密爾登函數 (Hamiltonsche Funktion) $H(q, p)$ 。這黑密爾登函數也可組成一方陣, 並且可把它寫成運動的標準方程式, 再因爲要轉到方陣力學的緣故, 把 H, q 和 p 都用粗體字來表示, 所以:—

$$(106) \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

那裏代表能力的黑密爾登函數 H , 因爲是 q 和

p 的函數,因此必定滿足 (105) 式,假使依哈生保交換法則使常數 k 等於 $h/2\pi i$, 我們得到下列兩種關係:—

$$(107) \quad \begin{cases} \mathbf{H}q - q\mathbf{H} = \frac{h}{2\pi i} \dot{q} \\ p\mathbf{H} - \mathbf{H}p = -\frac{h}{2\pi i} \dot{p}; \end{cases}$$

在以後的研究,我只限於這兩方程式的第一式。

這方程式我們很容易使它和景線項 (Spektral-terme) 發生關係,它們的差,是代表所研究電子發生的景線振數,這裏我們用各項組成一對角方陣:—

$$\begin{matrix} T_{00} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} \end{matrix}$$

等等;依景線項的定義,⁽¹⁾得

$$(108) \quad T(n, n) - T(m, m) = \nu(n, m)$$

現在用坐標方陣乘這項一對角一方陣,我們得

(1) 由自原子景線振數的二重系統,可以引到項值(Termwerten)的單重系統的知識,實在比原子的量子論來得早;並且是力茲 (Ritz)(1903) 在波耳振數條件未提出之前所發生的。力茲更能夠和以前勒德堡的主張相連合,但是所謂勒德堡-力茲項原則,始終和量子論並不發生甚麼關係。

到 [依 (93) 式]:—

$$[\mathbf{T} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{T}]_{n m} = q(n, m) [T(n, n) - T(m, m)]$$

或由 (108) 式

$$[\mathbf{T} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{T}]_{n m} = q(n, m) v(n, m).$$

根據 (75) 式, 可得下面的關係:—

$$(109) \quad \mathbf{T} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{T} = \frac{1}{2\pi i} \dot{q},$$

再和 (107) 式比較, 得到

$$\mathbf{H} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{H} = \hbar (\mathbf{T} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{T}),$$

或

$$(110) \quad (\mathbf{H} - \hbar \mathbf{T}) \mathbf{q} - \mathbf{q} (\mathbf{H} - \hbar \mathbf{T}) = 0.$$

依前面 (94) 式結論中所說, 這就表示 $(\mathbf{H} - \hbar \mathbf{T})$ 是一等項對角方陣. \mathbf{T} 自身既是一對角方陣, 可見能力方陣也必是一對角方陣, 並且它的各項和 $\hbar \mathbf{T}$ 只能有一常數的差別, 所以一方面

$$(111) \quad H(n, m) = 0 \quad \text{當 } n \neq m,$$

另一方面

$$(112) \quad H(n, n) - H(m, m) = \hbar [T(n, n) - T(m, m)].$$

由 H 是一對角方陣的事實, 於是 [依 (77) 式結論中所說的]

$$(113) \quad \dot{H} = 0$$

在這方陣方程式中，我們可以得到能力不滅的原則。再者由(112)和(108)式，我們可以得到下列的關係：—

$$(114) \quad H(n, n) - H(m, m) = h \nu(n, m).$$

這方程式就是波耳振數條件的另一形式；它對一原子的狀態變化看成是屬於量子的，那裏的振數，則由能力和單位用量子的商來決定。所以在量子力學，能力不變和振數條件，實際都是哈生保交換規則的必然結果。

在波耳原來的學說中，作用量子被用作兩種不同的形式，一種是光學常數，一種是力學常數。第一任務表現於波耳的振數條件，第二種則在於波耳的定量規則，那就是使 2π 乘角動量等於單位用量子的整數倍。至於同一數量，何以能有兩種完全不同的任務，（簡單可說波動的和動力學的）在波耳學說完全不能了解。布洛利學說認波動的任務是基本的，而動力學的是從那裏可以引出的必然結果。至於量子力學卻立起了它反面的可能性，就是以動力學的應用是基本的，而認作用量子的波動和景線應用，可以由那裏引出。

第 十 章

哈生保量子力學和雪里汀格爾 理論的關係

Der Zusammenhang zwischen der Heisenbergschen
Quantenmechanik und der Theorie von
Schrödinger.

雪里汀格爾在哈生保量子力學完成後數月，創立了他的特性值力學，我們自然可以問兩者間究竟有無相連的關係。這關係在實際上確已被雪里汀格爾自己⁽¹⁾發見了，他並且證明他的理論雖和哈生保—波綸的量子力學立腳點完全不同，但在數學上是

(1) E. Schrödinger, "Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen," Ann. d. Phys. (4) 79, 1926, 734 頁。

完全相等的，至於它們相等的精確證明，因為太複雜並且需要很多的數學知識，所以本書在以下幾頁，祇能把證明中的重要思想說一下。

為此目的，我們先從數學運算子 (Operator) 的概念出發，由符號的立腳點，一函數 y 依變數 x 的微分，可當作 y 和運算子 $\frac{d}{dx}$ 的乘積；⁽¹⁾ 同樣 y 依 x 的次階偏微分商，可看作 y 和運算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的乘積。我們更可以看 x 自身也是一個運算子，表示和 x 的相乘；這樣我們可以可說是運算子 1，它作用於任何函數都仍得原函數，至兩運算子的乘積也可以看作一運算子，它的結果和兩運算子相繼的應用同，所以第二階微商可以看作第一階的平方，而運算子乘積 $\frac{d}{dx} x$ 是 x 和一函數乘積的依 x 微分，等等。

由以上的根據，可知兩運算子的乘積是當然不可交換的；因此又可以立起運算子的交換關係，我們利用的是以下的恆等式：

$$\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y + x \frac{\partial y}{\partial x}.$$

(1) 在向量分析 (Vektoranalysis) 中，有著名的所謂黑密爾登運算子 ∇ ，那運算子可看作具有 $\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{\partial}{\partial y}$ $\frac{\partial}{\partial z}$ 三分向，並且可以和向量一樣的用來計算法。

假使我們在這式裏把函數略去，只看運算子，於是可以立起下面的運算子式：——

$$(115) \quad \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} = 1;$$

這就是說假使我們依 x 微分一任意函和 x 的乘積，然後由那裏減去 x 乘那函數依 x 的微分，結果我們又得到那原函數。

方程式(115)自然可用一任意常數乘它，⁽¹⁾假使我們選用常數 $\frac{h}{2\pi i}$ ，並且使 x 是代表和 x 相乘的運算子，在現在特別的使 x 爲 q ，（和坐標 q 相乘的運算子）於是我們得到交換關係，如下面的形式：——

$$(116) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} q - q \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{h}{2\pi i} 1.$$

將這關係和哈生保的交換法則〔(82)式〕比較一下，可見假使坐標方陣用運算子 q （意爲用 q 相乘）代替，則動量方陣也必定等於

$$(117) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}.$$

(1) 因爲假使 a 是一常數， $\frac{d(ax)}{dx} = a \frac{dx}{dx}$.

這可注意的結果，是波綸和維納爾(Wiener)⁽¹⁾最初得到的，由此可見從舊力學中維繫坐標 q 和動量 p 的基本方程式，能够把力學推廣，那裏只要用運算子 q 代 q ，以及用(117)式中的運算子代 p 好了。我們爲便利計，選取能力方程式做這種方程式；先研究一單物質點，並且用 q_x, q_y, q_z 代表它的三個空間坐標，因爲 p_x 等於 $m \dot{q}_x$ 等等，所以動能是：——

$$L = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

再用 V 代表依坐標而變的勢能， E 代表全能力，於是我們可以把能力方程式寫作下面的形式：——

$$(118) \quad \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V - E = 0.$$

現在若是把這式的左邊看作一運算子，依(117)式，我們可以把(118)式括弧中的值寫作：——

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial q_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_z^2}\right) = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta,$$

那裏 Δ 是拉普拉斯運算子 [參看(47)式]。假使 S 是一坐標的任意函數，於是我們得到：——

(1) M. Born 和 N. Wiener, Zeitschr. f. Phys. 36, 1926, 174 頁.

$$(119) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta + V - E \right\} S = 0,$$

或

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - V) S = 0.$$

這就是雪里汀格爾學說中的基本方程式, [(52)式] 所以這基本方程式是應用哈生保交換法則於運算子所得舊力學的推廣。

假使我們研究的不是一孤獨的質點, 卻是一系的質點, 用 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 代表第 n 質點的動量分向, 於是(118)式有下列的形式:—

$$\sum_n \frac{1}{2m_n} (p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2) + V - E = 0,$$

這裏 V 代表這系內的勢能, E 代表這系的全能力, (119)式可以寫作:—

$$(120) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2} \sum_n \frac{1}{m_n} \Delta_n + V - E \right\} S = 0.$$

由此我們得到推廣的雪里汀格爾微分方程式 [參看(65)式]:—

$$\sum_n \frac{1}{m_n} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_n^2} \right) + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) S = 0.$$

從雪里汀格爾在一特殊問題所引出的解,在實際上可以算出這相應量子力學問題的方陣元 (Matrizelemente). 我們用照大小度排列的 A_0, A_1, A_2, A_3 等等代表雪里汀格爾問題中的各特性解,並用 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 等等代表它們的相應解,或者就是它們的特性函數,由此可以創立一個有下式數值的兩重系統:——

$$(121) \quad a(n, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) q \varphi_m^*(q) dq$$

以及另一有下式的兩重系統:——

$$(122) \quad b(n, m) = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) \frac{\partial \varphi_m^*(q)}{\partial q} dq.$$

(這裏 φ^* 代表 φ 的交錯虛量) 像雪里汀格爾和厄克脫 (Eckart)⁽¹⁾ 已經證明的, (複雜的證明在這裏只

(1) G. Eckart, Phys. Rev. 28, 1926, 711 頁.

好略去) 方程式(121)和(122)在實際上是代表量子力學問題的解,那裏

$$(123) \quad q(n, m) = a(n, m) e^{2\pi i v(n, m)t}$$

並且

$$(124) \quad p(n, m) = b(n, m) e^{2\pi i v(n, m)t}$$

所以原子力學的問題,在一班言,可以用雪里汀格爾的特性值方法解決,並且比直接的方陣論解法要簡單.再者根據(121)和(122)兩式的變換,也可以得到方陣力學問題的解;這在 $a(n, m)$ 量,也可引得決定景線強度的變化或是率.

方陣力學理論,除與雪里汀格爾特性值理論有上列關係外,和1925年狄拉克 (Dirac)⁽¹⁾ 所創 q -數力學 (q -Zahlen-Mechanik) (第三原子力學) 也有共同點.那力學假定量子力學中的數量,可用一種『超複』(Überkomplex) 數代表.狄拉克稱之為 q -數.它們和通常數 (狄拉克稱爲 C 數) 的分別,就在乘法的不可交換性.在狄拉克學說,不但用 q -數來代表坐標和動量,並且又可以代表坐標與動量的能力函數以及時

(1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London, (A) 109, 1926,

間。⁽¹⁾ 應用狄拉克學說到原子物理學特殊問題所得結果,和雪里汀格爾與哈生保所得的相合。

(1) 在狄拉克學說中,時間和空間坐標具有同樣性質,所以都用 q -數來代表這變換到相對論要比方陣學爲易,因爲在方陣力學空間坐標是一方陣,但時間則是一普通的數。

第 十 一 章

原子物理學的因果和統計觀念

Die Kausale und die Statistische

Auffassung der Atomphysik.

雪里汀格爾和哈生保—波綸—約但學說在數學上的相等性，（雖然它們的目的是背道而馳的）使我們發生一個很重要問題，就是說兩者中，每一者的中心思想，怎樣可用另一者的立足點來解釋。雪里汀格爾學說的中心是波動概念，量子力學的中心是微點（Korpuskel）概念。我們可以問雪里汀格爾眼光對於電子的意見如何？而哈生保對物質波的意見又怎樣？

第一問題布洛利自己已經作了一個答覆，就是物質點不過波中的最大能力密度點。雪里汀格爾依這思想再進到線性振動體的特例；假使 ψ_n ($n=0, 1,$

2, …) 是波動力學基本方程式在這時的解, 於是雪里汀格爾研究各 n 值在某一定大數值附近的一羣特性函數, (就是特性振動) 振數以此只限於一狹小區域, 雪里汀格爾⁽¹⁾ 能算出由於這狹小區域內 (用圖代表) 特性振動的重疊, 可以得到一比較高和狹的『峯 (Buckel),』這峯可以前後移動和一振動體一樣, 他還能指出在某種情勢之下, 這種『能力乘 (Energiepaket)』能夠結聚適當的長久, 就是說能夠密聚於一小的 (雖繼續的進展) 空間區域, 在相當時間內能力乘上可見 (在一班言, 並不停止) 的分解, 不致超出於可注意的程度。⁽²⁾

(1) E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro zur Makromechanik, Naturwiss. 14, 1926, 664 頁. (也見於 “Abhandlungen zur Wellenmechanik”)

(2) 若 w_0 是波乘的原闊度, 而 m 是它的質量, 在沒有外力作用的運動, 厄倫弗斯脫 (Ehrenfest) 算出 (Zeitschr. f. Phys. 45, 1927, 455 頁) 闊度, 在時間 t 有下列形式:

$$w^2 = w_0^2 + \frac{h^2}{\pi^2 m^2 w_0^2} t^2.$$

使其闊度增加一倍所需的時間, 在質量是一克, 原闊度是 10^{-3} 厘米的例中, 大約是 10^{-13} 年, 但在一質子的質量, 和 10^{-8} 厘米的原闊度, 則其相應的時間是 10^{-13} 秒。

和雪里汀格爾解釋反向的物質波的量子力學解釋,是最初由波綸⁽¹⁾完成的。雪里汀格爾學說完全建設在因果關係思想上,那裏一方面假定波動場的狀態,在任何時候總可以真確的描寫,在另一方面,又假定任何時的場狀態,總可由較早已知的狀態引算出來,再者雪里汀格爾的基本微分方程式,是舊因果力學中特具的一種形式,起始很費解,如何這樣一個假定因果關係,連續性以及空時表現 (Raumzeitliche Darstellung) 的方程式,應用到完全不連續及不能照普通這樣用時空描寫的量子力學,居然 (依雪里汀格爾和哈生保學說數學上的相等) 能夠得到正確的結果。

這種顯明矛盾事實的解釋,是波綸所創立的,他把依微分方程式在形象空間 (Konfigurationsraum) 中傳佈的波狀雪里汀格爾場量,當作有統計學意義的或是率解釋,這種解釋,由光量子假說和光的舊波動論間的關係,可以得到,在這學說中,振幅的平方代表一定點的光強度,但從光量子的立腳,這只能說是一

(1) M. Born, Zeitschr. f. Phys. 37, 1926, 863 頁; 38, 1926, 803

光量子投到那點的或是率，⁽¹⁾這樣的一個解釋，調和了單個量子運動方向不能預定的思想，和干涉，折散等光學實際現象中所假定的絕對規律性。

光量子和電子⁽²⁾的相似性，在雪里汀格爾的波可以看出，在具 n 質點的形象空間，一共是有 $3n$ 度。（例如在兩質點的共有六度）這系統的任何狀態 (Konfiguration)，總可用一『構成點 (Bildpunkt)』在那時的位置代表，所以照波綸的眼光，在隨便什麼時候，我們不能說以後這一點要到什麼地方，或則它在形象空間的運動是在那一個方向，依波綸的意思，量子力學所能告訴我們的，只有向某定方向的或是率，但這或是率可看作一連續變動和規定的數量，因此能夠適合一像雪里汀格爾那樣的⁽³⁾舊微分方程式。

(1) 這個假定使光量子能力互相損滅的不可解假設，不必再存在，因為它能夠告訴我們一點與光源太近時在某種情形之下，光量子投射到的或是率，可以小至使那點仍舊黑暗。

(2) 這種相似處，在 G. Beck, *Zeitschr. f. Phys.* 43, 1927, 658 頁，更可得清晰的了解。

(3) 在第七章已講過雪里汀格爾自己曾從事於追求他微分方程式中的場量和電荷密度的關係。

哈生保 ⁽¹⁾ 曾指出原子物理學中因果觀念的根本困難，並且告訴我們，假使用一單個測量來把一個理想那樣精密的坐標決定，並且使和一理想那樣精密的相應動量的決定相連，就是在理想實驗中也是不可能的；因此任何原子數量的測定，必定有一點不確實性存在。

譬如我們懸想在一原子內轉動的電子，用一個測量總可決定它的位置和動量；（或是它的速度）那裏我們自然必須顯微鏡以及用光照射等助力，纔能決定它的位置，並且根據所謂多普拉應效 (Doppler-Effekt)（就是照射光從動的電子上反射時發生波長的變動）來決定它的速度，但是在這觀察中，必定發生昆普登應效 (Compton-Effekt)，那就是說當一光量子和一電子撞擊時，後者的速度必定發生變動。

所以現在一方面照射光的波長愈短，電子位置的測定愈見精確（如此我們可以應用 γ 線，它的波長比波耳學說中正常氫原子的半徑要小 5 倍到 50

(1) W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Zeitschr. f. Phys. 43, 1927, 172 頁.

倍⁽¹⁾),但在另一方面波長超短,昆普登應效越大,所以觀察時和觀察後的動量變化也越大,因此用多普拉應效來精確的決定速度,我們必須擇極長的光波,使昆普登應效變為極小;但假使光波一長,照上面所說,電子位置的精密測定,又屬不可能了,所以要得位置測定的精確;必須犧牲動量測定的精確;反轉來假使要得動量測定的精確,又必犧牲位置測定的精確。依哈生保的意見,交換法則〔(82)式〕必定是這不定關係的確實表示,那裏就一班言,在最大可能精確例中,坐標和動量測定中和測定相連的不準確率的乘積,是由作用量子決定,並且大小度也是相等的。

現在依舊意義的原子形式的精確描寫,既不可能,於是物理學中的因果法則自然失其意義,因為那原則說,由現在的真實知識,可以精密的計算將來,但從上面知道,現在的真實已經不能得到,所以這方法當然是沒有意義的了,因此量子力學的理論,以為在物理的單個變化,必須否認因果性,而承認每種單獨變化是屬於統計學或是性的。

(1)最硬 γ 線的波長是在 5 和 100 X -單位之間,而正常氫原子的半徑大約是 500 X -單位; X -單位是 10^{-10} 釐。

第 十 二 章

波利原則

Das Paulische Prinzip.

在哈生保學說創立的一年以前,波利所得關於原素週期系統的知識,和量子力學的結果有密切的關係,各種科學的進步,都是由性質的 (Qualitativ) 描寫進到數量 (Quantitativ), 數學的知識,原素問題,就是這樣的一個好例子,在原素問題,這事實的可能性,一方面是由於電子的發見,因此化學原素性質的不同,一變而為物質原點組織的不同;在另一方面,是由於 1913 年摩茲力 (Moseley) 對原素自然級數的發現,在那自然系中,每原素都有一個原子號, (是一定數譬如氫的號數是 1, 氦是 2, 鐵是 26, 金是 79, 鈾是 92), 並且等於中和原子內核週圍的電子數。

從原子號數發見之後，原素化學週期的精密表示也變為可能。至於原素系統中七個週期的分別，已遠在 1870，⁽¹⁾ 不過直等到摩茲力發現之後，纔能正確的決定週期的長短，譬如依次排來是（除去末了未完的一個週期⁽²⁾）2, 8, 8, 18, 18, 32 等等。近代原素學說的根本問題是求這種數的量子解釋。在物理學中最有興趣的是這些數都是一完全平方數的兩倍。⁽³⁾ 對這問題解決上最重要的一個進展，是 1924 年波利所發見，那裏和原子狀態的四重定量原則（*Vierfachen Quantelung*）有密切的關係。

1913 年波耳把量子數概念引到原子論後，紹麥斐爾德和威爾遜（*W. Wilson*）在 1915 年同時發見，不在等速圓運動特例的限制之下，有應用第二量子數的必要。在兩量子數中的一個，（普通稱為副量子數“*Nebenquantenzahl*”用 l 代表），在紹麥斐爾德的理論

(1) 原素的週期系，是羅塔邁爾（*Lothar Meyer*）和門德雷業夫（*Mendelejeff*）兩人同時發見的。

(2) 第七週期終於第六原素鈾；所有的週期開頭總是一個鹼金屬（除第一週從氫開始）而終於一個不活能的氣體。

(3) $2=2\cdot 1^2$; $8=2\cdot 2^2$; $18=2\cdot 3^2$; $32=2\cdot 4^2$.

中,是用來規定電子週期環繞運動的角動量。紹麥斐爾德所用(普通稱爲主量子數“Hauptquantenzahl”在單電子運動的特例中是決定的一個,那裏反比於主量子平方的能力,從原子力學(在此不能詳細的講)知道 l 可以是 0 到 $(n-1)$ 間所有的整數,

$$(125) \quad l=0, 1, 2, \dots (n-1).$$

1925 年 烏蘭倍克 (Uhlenbeck) 和 高特斯密脫 (Goudsmit)⁽¹⁾ 在最新的量子論中創立了一個出乎意料的美滿假說,因此以前許多很難了解的景線現象,都可以很簡單的把它們解釋,他們假定電子具有自轉 (Eigenrotation) 或『旋動 (Spin)』, (英文中常用的名詞) 因之發生小磁體,那裏爲要分別兩相反可能轉動方向,所以用一個半量子數來規定電子的旋動,因爲這兩量子數的代數差應當等於一。⁽²⁾

在一磁場中,一個已成小磁體的電子必居於和場向相同或相反的位置,再者像 朗台 (Landé) 早已知

(1) G. E. Uhlenbeck 和 S. Goudsmit, Naturwiss. 13, 1925, 953 頁; Nature 117, 1926, 234 頁.

(2) 參看 W. Heisenberg 和 P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 37,

道在一磁場中表示繞行電子角動量的向量,必定有這樣一個方向,使在磁場方向那向量的分向是定量的,這用 $m(l)$ 代表的相應量子數,可以是 $-l$ 到 $+l$ 間的任何整數,所以總共有 $(2l+1)$ 個不同的數值,因此在磁場中的每個電子,總有四個附屬的量子數:一主量子數 (n), 副量子數 (l), 規定依場向繞行電子的動量分向方向的量子數 $m(l)$, 和最後表示電子旋動向, (依上面所說,只能是 $+\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$) 的量子數 $m(r)$

現在波利基本原則就是說一原子中永不能有兩個四量子數盡同的電子,波利叫那些 n 和 l 相同的電子爲相等電子 (Äquivalent Elektronen), 前說 $m(l)$ 在相等電子可以有 $(2l+1)$ 個不同數值,而每個 $m(l)$ 值,又能有兩個不同的 $m(r)$ 值 (就是 $+\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$) .

依波利原則,對一定主量子數 l ,祇能有 $4l+2$ 個相等電子,以下給我們最大的數目:—

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \quad \text{在 } l=0 \\ 6 \quad \text{在 } l=1 \\ 10 \quad \text{在 } l=2 \\ 14 \quad \text{在 } l=3 \\ 18 \quad \text{在 } l=4 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

爲說明波利原則起見,我們懸想在原子中的游行電子可以分爲用一定主量子數 (I, II, III, IV 等等) 代表的羣;每羣再分爲用副量子表示的次羣 (Untergruppen). 那裏我們可用羅馬字寫主量子數,而用指標代副量子數,所以依(125)式有下列可能的次羣:

$I_0; II_0, II_1; III_0, III_1, III_2; IV_0, IV_1, IV_2, IV_3; V_0$ 等等.

例如我們使 III_0 記號代表一三階量子 (Drei-quantige) 羣,但是那裏並不合所有三個可能的次羣 ($l=0, l=1, l=2$), 不過有其中的第一第二兩者而已,所以假使 X 代表任意主量子數,我們可以有下列的佔住數 (Besetzungszahl):—

$$(127) \quad \begin{cases} X_0 = 2 \\ X_{01} = 8 \\ X_{012} = 18 \\ X_{0123} = 32 \end{cases}$$

等等,這種數目不是別的,恰好是代表各週期長短的數目.

在實際上,對各週期末了的不活潑氣體, (它們的原子號是 2, 10, 18, 36, 54, 和 86) 可以有下列的

表:⁽¹⁾——

$$(128) \left\{ \begin{array}{l} \text{氦(Helium)} \quad = I_0 \\ \text{氖(Neon)} \quad = I_0 + II_{01} \\ \text{氬(Argon)} \quad = I_0 + II_{01} + III_{01} \\ \text{氪(Krypton)} \quad = I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{01} \\ \text{氙(Xenon)} \quad = I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{012} + V_{01} \\ \text{氡(Emanation)} = I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{0123} \\ \quad \quad \quad + V_{012} + VI_{01}. \end{array} \right.$$

依(127)式,我們用數值代右面的記號,於是得到:——

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2 & = 2 \\ 2+8 & = 10 \\ 2+8+8 & = 18 \\ 2+8+18+8 & = 36 \\ 2+8+18+18+8 & = 54 \\ 2+8+18+32+18+8 & = 86 \end{array} \right.$$

(1) 從這表可以看見原素週期系統的創立,是表示內電子羣的滿足與否,三階量子羣直到第四週期纔完備,四階量子羣至第五第六週期纔完了,至於五階量子羣則在第六週期尙進行未完。

代表週期系統組織的表(128),在1924年已由斯吞納(Stoner)⁽¹⁾根據波耳較早的思想⁽²⁾得到,但那週期系統深固的『算術』基礎,是由波利原則所發見。⁽³⁾

(1) E. C. Stoner, Phil. Mag. 48, 1924, 719 頁.

(2) N. Bohr, Zeitschr. f. Phys. 9, 1922, 1 頁.

(3) 波利原則使我們從已知原子的電子羣,可以引出所研究原質在景譜中的基本項;反轉來,依波利原則實際發生的基本項,可以指出所研究原子電子羣的終結與否.

第十三章

部斯的量子統計學

Die Bosesche Quantenstatistik.

最近物理學特有的微點和波動間（也就是物質和光間）的溝通，已成為統計物理學中最重要問題。在從前這兩者是劃分成很清楚的兩科，一個祇限於物質，一個祇限於光。（廣義的）到十九世紀的中葉，物質點的統計物理學，在所謂物體運動論，已發展到很完備的形式。至於光波範圍內統計處理的可能性，是根據於兩件事實：一方面是特性振動的概念，⁽¹⁾一方面是能量元 ($h\nu$) 和光量子的假定。等到現在物理學家發見光量子也像物質點一樣具有動量，於是漸想把第一類問題中的方法和結果，應用到第二類來；至於反面的可能性，由物質波的假說也告成立。

(1) 參看第三章累力—錢恩原則上的研究。

第一可注意的研究,就是用氣體論的方法來解決輻射理論,那裏的基本問題,是在一空殼(Hohlraum)內電磁波能力的景線分配,如何依溫度而變,1900年蒲朗克根據作用量子假定,創立了他著名的輻射定理,於是這問題纔得到它的解答,至於蒲氏輻射定理的引算,現在可以懸想充滿空殼的輻射,是一光量子氣體,因此分佈於每單體上的動量,有和物質氣體中相似的定律;不過在物質氣體,動量是分子質量與分子速度的乘積,而在空殼中的輻射,卻是光速除振數後和作用量子的乘積.

在景分析中,單位體積上所受的能力等於

$$(129) \quad \eta = \int u_{\nu} d\nu,$$

蒲朗克對依振數和溫度而變的『輻射比密 (Spezi-fische Strahlungsdicht),』引得下列的數值:—

$$(130) \quad u_{\nu} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1}.$$

這裏 c 是光速, T 是絕對溫度, k 是博爾赤曼 (Bol-zmann) 常數 (和 $\frac{3}{2}T$ 相乘等於單原子分子平均動

能⁽¹⁾ u_ν 再用 $\frac{c}{4}$ 乘, 就是溫度 T 時在 ν 到 $\nu+d\nu$ 景線區間的黑體放射比量 (Spezifische Emissionsvermögen⁽²⁾).

(1) 博爾赤曼 常數 k 是代表熵 (Entropy) S 和統計或是率 W^* 自然對數間的普遍比例因子, 就是

$$S = k \ln W^*.$$

博爾赤曼 常數的數值是 1.372×10^{-16} 厄/度.

(2) 一黑體的放射量, 我們知道是在單位時間內每面積單位上所射出的能力. 這放射量是景線分析的, 所以等於 $\int K_\nu d\nu$, 因此用 $\frac{c}{4}$ 乘 (130) 式, 我們得到

$$K_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{h\nu}{e^{kT}} - 1}.$$

假使放射量的引用不在一振數區間 (ν 到 $\nu+d\nu$) 而在一波長區間 (λ 到 $\lambda+d\lambda$), 於是根據 $c=\lambda\nu$ 的關係, 上面著名的 蒲朗克 公式, 變成

$$K_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{c\lambda}{e^{k\lambda T}} - 1}.$$

當 λT 小時, 由此我們可以得到在紫外線或極低溫度纔能適合的 維恩 (Wien) 定律:—

$$K_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} e^{-\frac{c\lambda}{k\lambda T}}.$$

假使 λT 很大時, 那就給我在紅外線或高溫纔適合的 累力 放射定律:—

$$K_\lambda = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}.$$

這兩式只能用於一限制區域內的 維恩 和 累力 爵士定律, 在 蒲朗克 的普遍定律未成立之前, 已經發見.

在另一方面,氣體運動論的研究,都根據在一定狀態分佈的統計或是率概念,這或是率的意義,是一定狀態分佈中能實現狀態的數目,我們現在研究一總共有 N 單體的系統,並且把在可能狀態的單體(先用任意的限制)排成一列,假使 N_1 是在第一狀態的單體數, N_2 是在第二狀態的數目,就一般言, N_i 是在第 i 狀態的數目,所以

$$(131) \quad \sum N_i = N.$$

於是假使在不同狀態的兩個單體次序交換,我們得到一新的組織;但在兩同狀態的單體交換時,並沒有新系統可得,例如我們把三單體 (a, b, c) 分別為兩狀態,因對狀態分配

$$N_1 = 2, \quad N_2 = 1$$

可以有三種系統,像下面的表:

第一狀態	第二狀態
ab	c
ac	b
bc	a

同樣自然對狀態分配 $N_1 = 1, N_2 = 2$ 也有三系統;但對狀態分配 $N_1 = 3, N_2 = 0$ 和 $N_1 = 0, N_2 = 3$, 則祇能有一個

系統。

統計或是率（必定是一正整數）常由 N 單體的可能排列 (Permutation) 數而定，但是含同狀態中兩單體互換而生的排列，則已略去。我們知道 $N!$ [讀作 N 級乘 (Fakultät)] 是 N 單體可能排列的總數，那裏 $N!$ 表示 $[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (N-1) \cdot N]$ 的連乘積。在第一狀態，各單體互相交換的可能排列數是 $N_1!$ ，在第二狀態是 $N_2!$ 等等。因此我們用 $N_1!$ 除 $N!$ ，就得到在一定狀態分配的統計或是率，因為在一次羣中各單體互相交換所生的排列，照上面所說，只算一單個系統（並非 $N_1!$ 系統）。同理，我們應當用 $N_2!$ 等相除，所以統計或是率 W^* 是

$$(132) \quad W^* = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \cdots N_i! \cdots}$$

1924 年印度物理學家 部斯 (Bose)⁽¹⁾ 指出根據光量子氣體思想，在實際上可以把 蒲朗克 的公式算出，不過那裏第一要想像一單位體積⁽²⁾ 中量子氣的動

(1) S. N. Bose, Zeitschr. f. Phys. 26, 1924, 178 頁和 27, 1925, 384 頁。

(2) 因為在空殼內單位體積的能力就是等於那裏的能力密度。

量空間是由 h^3 大小的間格所組成，⁽¹⁾ 第二要用和舊說不同的統計或是率定義。

舊統計學和部斯統計學的不同，可以由前面研究過的例來說明，那就是在兩狀態的三單體。在舊統計學我們知道在這例有四個不同的狀態分配，每個當然有它不同的『權衡 (Gewicht)』，當有 m 可能系統數時 ($W^* = m$)，我們稱作 m 次權 (m -fachem Gewicht)。所以對言研究的例中，四個不同狀態分配是：——

$$\left\{ \begin{array}{lll} N_1=3 & N_2=0 & \text{一次權} \\ N_1=2 & N_2=1 & \text{三次權} \\ N_1=1 & N_2=2 & \text{三次權} \\ N_1=0 & N_2=3 & \text{一次權} \end{array} \right.$$

部斯的統計學卻和舊思想不同，各狀態分配都祇有一次權。他以爲在狀態上所有單體的分配有同樣的機會，正和舊統計學中各單個系統（例如， $a b; c$ 或 $a c; b$ 或 $b c; a$ ）有相等的或是率一樣。所以在部斯統計學，我們不用在狀態界上單體的分配，而用在不同佔住可能性 (Besetzungsmöglichkeit) 中的狀態界或間格的分配做出發點。假使有 N 單體分配於 Z 狀態，這

(1) 參看第三章末所講的。

分配依舊統計學是由表示那狀態單體的 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_i, \dots$ 等 Z 個數目規定,但在部斯統計學,這分配是由 $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_i, \dots$ 等 $(N+1)$ 個數規定,至於那裏 Z_0, Z_1, \dots 等是表示有 0 個單體, 1 個單體等等的狀態或間格; 因此

$$(133) \quad \sum_j Z_j = Z.$$

所以和舊說不同,部斯統計學中的或是率是:—

$$(134) \quad W = \frac{Z!}{Z_0! Z_1! \dots Z_j! \dots}.$$

我們譬如看先前研究過的例子,那裏 $N=3, Z=2$, 依(132)式假使第一狀態有一個單體,第二狀態有兩個,舊的或是率是 (和權一樣):—

$$W^* = \frac{3!}{2! 1!} = 3.$$

但依(134)式,部斯的或是率是:—

$$W = \frac{2!}{1! 1!} = 2,$$

因為那裏沒有佔住數等於 0 的間格,等於 1 的有一個,等於 2 的有一個,等於 3 的也沒有。

方程式(132)和(134)以及方程式(131)和(133)間

所有的相等形式,使舊統計學中的結果可以變到部斯統計學中去,只要將在舊說中表明在第 i 狀態的一單體的數量,用在部斯統計學中有 i 單體的間格替代,舊動熱學中的基本問題,現在可以像下面這樣說法:⁽¹⁾——在溫度 T 時,有能量 E 分配於 N 單體, ε_i 就是一在指標 i 狀態中單體所有的能力,所以在統計平衡狀態,必定有下面的關係:——

$$(135) \quad \frac{E}{N} = \frac{\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}$$

因為要把這公式應用到光量子氣體的問題,所以我們自己先限於研究振數在 ν 和 $\nu + d\nu$ 間的量子,依前面所說, ε_i 是一有 i 個振數 ν 光量子的間格的能力,所以

$$(136) \quad \varepsilon_i = i h \nu.$$

於是

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \sum_{n=0}^{n=Z} e^{-\frac{n h \nu}{kT}}.$$

(1) 例如參看著者的 “Einführung in die theoretische Physik” (第三,四版 Berlin-Leipzig 1933, 24) 卷本, §132, 方程式 16 和 §142, 方程式 2.

依已知無限幾何總和公式 ($|y| < 1$):

$$1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1-y}.$$

這級數是很收斂的 (Konvergiert), 所以總和上限 Z , 可以換作無限大, 於是

$$(137) \quad \Sigma e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

依溫度偏微分這方程式, 再把兩邊都用 kT 相乘, 我們得到,

$$(138) \quad \Sigma \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} = \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^2}.$$

現在我們用(138)式除(137)式, 於是左邊依(135)式是代表一單獨間格的能力平均值, 可用 $\bar{\epsilon}$ 表示, 於是

$$(139) \quad \bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

另一方面, 我們全部光量子氣體 (包有全體振數的光量子) 依下列動量關係:—

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

所組成動量空間。這動量空間中和振數 ν 和 $\nu + d\nu$ 相應的間格，必在一球殼上，那裏兩個半徑是

$$r_1 = \frac{h}{c} \nu, \quad r_2 = \frac{h}{c} (\nu + d\nu).$$

這球殼的體積是

$$4\pi r_1^2 (r_2 - r_1) \quad \text{或} \quad 4\pi \frac{h^3}{c^3} \nu^2 d\nu.$$

依我們的假定動量空間間格的大小是 h^3 ，因此在這球殼內的間格數是 $Z d\nu$ ，那裏

$$(140) \quad Z = \frac{4\pi \nu^2}{c^3}.$$

在另一方面假使光量子 [因為光波的縱性 (Transversalität)] 分別為兩互相垂直的極化 (Polarization) 狀態，必定可有

$$(141) \quad 2Z\bar{\epsilon} = u_\nu,$$

所以實際給我們蒲朗克的公式 (方程式 130)。我們又可以證明依力累—錢恩原則 (參看第三章)，也可以得到蒲朗克公式，那裏只要使每特性振動的能力是能力元 ($h\nu$) 的整數倍；⁽¹⁾ 假使這正整數是 n ，於

(1) 例如參看著者 1921 年在 “Einführung in die theoretische Physik” 第一版中的引證法 (第一版的 §106, 方程式 6, 第三, 四版 §139, 方程式 6)。

是在部斯統計學,可用有 n 光量子的動量空間的間格,代替 n 階量子特性運動。

從布洛利物質波的理論,愛因斯坦⁽¹⁾要想創立一新氣體論,這理論的公式,是從部斯統計學得來,像以前氣體論從舊統計學而來一樣,這愛因斯坦氣體論和舊的主要不同點,可以說是將舊公式中的 $e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$ 用複雜的,

$$(142) \quad \frac{1}{B e^{\frac{\epsilon}{kT} - 1}}$$

代替,那裏 B 是溫度的一個函數,

根據這公式所生的差異,一般的說,並沒有多麼重要,祇有在極低溫度時,它纔顯出它的意義,因為那時就是理想氣體,也有非舊說所可解釋的類變現象,但是現在愛因斯坦的氣體論,因意大利物理學家勿米 (Fermi) 最近根據波利原則所創的新氣體論,又退到次位了。

(1) A. Einstein, Sitz.-Ber. der Berlin. Akad. 1924, 261 頁;

1925, 3, 18 頁.

第十四章

勿米統計學

Die Fermische Statistik.

波利原則能告訴我們在各不同電子羣的最大佔住數;物質波的假設,對閉器中氣體,必定能引到變移能的定量結論;最後部斯統計學把間格的佔住數問題列在前面;這些事實使我們覺得波利原則也可用於氣體的統計理論,這思想的實現,是由於1926年勿米的氣體變態⁽¹⁾理論,那裏所根據的一個假定,是在一氣體中至多祇有一個分子能有預先已定的量子數.

我們現在暫且不管分子內部的運動,祇限於單原子的分子,並且可以假定它們完全在基本狀態,⁽²⁾

(1) E. Fermi, Zeitschr. f. Phys. 36, 1926, 902 頁.

(2) 那裏我們必須假定,基本狀態不能起磁性分解.

於是知道（像第三章的研究）每分子總有三個和它三自由度（Freiheitsgrade）相應的量子數（ n_1, n_2, n_3 ）而分子的能力可以使它等於

$$(143) \quad \varepsilon_n = h \nu (n_1 + n_2 + n_3) = n h \nu,$$

那裏 ν 是基本振數。現在我們有一個問題，就是在單分子中，究竟有多少系統可以實具能力值 $n h \nu$ 。這系統數（叫它 s ）常等於下列未定方程式：——

$$n_1 + n_2 + n_3 = n$$

當 n_1, n_2, n_3 是正整數時，所有的解數，為決定解的數目，我們須記得若 n_1 和 n_2 是任意選擇時， n_3 必屬固定。那裏 n_2 可以是零，但永不能等於負數，所以當 $n_1 = 0$ 時， n_2 有 $(n+1)$ 的可能值， $n_1 = 1$ 時，只有 n 可能值，在 $n_1 = (n-1)$ 時有兩可能值（ $n_2 = 1$ 和 $n_2 = 0$ ），至於 $n_1 = n$ 則祇有一可能值（ $n_2 = 0$ ）。所以

$$s = (n+1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1,$$

或則，因為 1 到 x 間全部整數的和是 $\frac{x(x+1)}{2}$ ，所以

$$(144) \quad s = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

依勿米假定，在一氣體中至多祇能有

1 個能力是 0 的分子，

3 個能力是 $h\nu$ 的分子

6 個能力是 $2h\nu$ 的分子

10 個能力是 $3h\nu$ 的分子

15 個能力是 $4h\nu$ 的分子,

等等,例如在只有 40 個分子的氣體,它的能力決不低於

$$10 + 3 \times 1 + 6 \times 2 + 10 \times 3 + 15 \times 4 + 5 \times 5$$

$$1.0 + 3.1 + 6.2 + 10.3 + 15.4 + 5.5,$$

或則說 130 個能力元 ($h\nu$), 應用波利原則到統計力學,可以引到在絕對零度時也有少許能力的結論,這種分子間的能力分配,必定是一種球面排列,像原子中游行電子的殼狀結構相似。⁽¹⁾

一個已定的狀態分配,又可用代表能力是 $ih\nu$ 的分子數 N_i 來描寫,不過和舊說不同的,是在勿米理論中 N_i 有下列的限制:——

$$(145) \quad N_i \leq Q_i,$$

那裏 Q_i 是下式的一種簡寫

$$(146) \quad \frac{(i+1)(i+2)}{2} = Q_i.$$

(1) 電子羣的完滿佔住數 2, 8, 18, 32 等,和勿米統計學中的 1, 3, 6, 10, 15, 等數相應。

假使在氣體中有 N_i 個具量子數 i 的分子, (所以能力是 $i h \nu$), 因為這種分子的最大可能數是 Q_i , 所以我們研究總量子數是 i 的分子時, 統計或是率是:⁽¹⁾ —

$$\left(\frac{Q_i}{N_i} \right).$$

所以總分配的或是率 W_F , 依勿米的意思, 是

$$(147) \quad W_F = \left(\frac{Q_0}{N_0} \right) \left(\frac{Q_1}{N_1} \right) \left(\frac{Q_2}{N_2} \right) \cdots \left(\frac{Q_i}{N_i} \right) \cdots = \prod \left(\frac{Q_i}{N_i} \right).$$

根據這公式, 同舊統計學, 或部斯統計學中相似的計算方法可以引出, 這樣引算的結果極其複雜, 不過在弱類變和強類變的兩個極端例中的公式, 則很簡單, 依舊理論, 一理想氣體的狀態方程式是:—

$$(148) \quad p = N k T,$$

那裏 p 是壓力, N 是單位體積中的分子數, 勿米理論對弱類變極限例子的狀態方程式有下列的形式:—

$$(149) \quad p = N k T \left[1 + \frac{1}{16} \frac{h^3 N}{(\pi m k T)^3} \right],$$

(1) 平常知道的:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}.$$

那裏 m 是分子的質量，依這方程式，壓力比舊說中的來得大，⁽¹⁾ 在絕對溫度 5, 和 10 氣壓的氦氣，這差異有 15%。

在大類變的極端例子，勿米理論引到下面的狀態方程式：——

$$(150) \quad p = \frac{1}{20} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2 N^{\frac{5}{3}}}{m} + \frac{2^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}} m N^{\frac{1}{3}} k^2 T^2 + \dots,$$

由這公式，可見雖 $T=0$ 時，那氣體也有一定的壓力，所以除零點能力外，尚有零點壓力 (Nullpunktsdruck)。還有可注意的，就是 勿米 對大類變的比熱 (Spezifische

(1) 勿米氣體論和舊說以及愛因斯坦的差別，可以這樣說法，在愛因斯坦理論中用〔參看(142)式〕：——

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot B e^{kT-1}$$

代替了舊說中的

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

另一方面在勿米理論，卻用下面的數量：——

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot A e^{\frac{kT}{-1}}$$

B 是溫度的函數， A 則像哈脫勒爾 (Heitler) 和波利指出的是

$$\ln A = -\frac{\mu}{kT}$$

那裏 μ 代表在季布茲 (Gibbs) 記號中電子單位質量的熱力學勢。

Wärme) (定容積的) 公式, 有下列的形式:—

$$(151) \quad c_v = \frac{2^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} \frac{m k^2 T}{h^2 N^{\frac{2}{3}}} + \dots$$

所以比熱在絕對零點是等於零, 不過在大額變時, 則和絕對溫度成比例。(1)

1927年紹麥斐爾德在金屬電子論中, 發見勿米統計學的一個很重要的應用。金屬具有自由電子, 是電和熱傳的原因的假定, (像氣體中也有這樣一個假說) 根據量子力學, 實在是一個不可解的困難。依舊說, 在溫度 T , 每自由電子的動能, 和單原子分子一樣是 $\frac{3}{2} k T$ 。所以依舊統計學, 自由電子對金屬比熱必引入一可注意的附加數量, 和經驗矛盾。

紹麥斐爾德 (2) 告訴我們, 假使應用勿米統計學到自由電子時, 這困難立即消除, 因為電子的質量大

(1) 勿米氣體論, 也能給我們在氣體的絕對鎊的斯騰-忒特羅得 (Stern-Tetrode) 數值; 就是,

$$S = N k \left[\frac{3}{2} \ln T - \ln N + \ln \frac{(2 \pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{h^3} \right]$$

那裏 e 是自然對數底。

(2) A. Sommerfeld, Zur Elektronentheorie der Metalle, Naturwiss 15, 1927, 825 頁; Zeitschr. f. Phys. 47, 1928, 1 頁。

約小於最輕的原子 1800 倍，所以根據勿米理論，它在室溫度時，必定在完全衰變狀態，實際上在弱變態的例，依(149)式在同溫度和同質點數時，那對電子氣的修正項，比氦氣的大十萬倍，但在強類變，則依(151)比熱和質量成比例；因為電子的極小質量，所以和金屬自身比熱比較時，電子的比熱可略去。

紹麥斐爾德告訴我們應用勿米統計學到電子氣體，立即可以引到維特曼—佛朗次 (Wiedemann-Franz) 定律，照那定律，金屬的熱傳導性和電傳導性，總比例於絕對零度，這定律中的比例因子，依本來的電子論是 3，依以後的統計學是 2，但在勿米統計學，則是 $\frac{1}{3} \pi^2$ (大約 3.3)，這三數以最後者和經驗最相符合，紹麥斐爾德把勿米統計學很滿意的應用到接觸勢 (Kontaktpotentiale)，像湯姆生—泊底厄應效 (Thomson-Peltier-Effekt)⁽¹⁾ 等，他告訴我們，由勿米統計學可以得到這些現象的大小度以及和溫度的關係等的正

(1) 泊底厄應效是說，在一兩不同金屬接合的圈中，有電流通過時，在一銲點溫度提高，另一銲接點則溫度降低，威廉湯姆生 (William Thomson) 又告訴我們，在同一金屬做成的圈路內，一電流通過不同溫度的兩點，也發生這種熱應效。

確數值。這新理論最大的勝利，是在廢掉舊說中自由電子和原子剩餘部 (Atomreste) 互相作用的假說。

第十五章

光波和物質波對於原子的影響

Die Einwirkung von Licht- und Materiewellen
auf Atome.

波動力學創立後最重要的應用,是原子和光波間交互作用的問題,爲處理上的較利起見,我們用雪里汀格爾的推廣形式,那裏場量也依時間而變,這方程式(在此暫不證明⁽¹⁾)有下列的形式:——

$$(152) \quad \Delta S - \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V S = 0.$$

這形式的雪里汀格爾波動力學公式,現在可以應用到分散(Dispersion)問題。⁽²⁾

(1) 證明可以參看第十八章.

(2) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. (4) 81, 1926, 139 頁和 Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig (Barth) 1927.

假使一原子放在均勻並且同時 (Synchron) 振動的交流電場 (Elektrische Wechselfeld) —— 這種場可以看作一線性極化的單色光波 (Eine linear polarisierte, monochromatische Lichtwelle) —— 於是未受交流場擾亂以前的原子勢能 V_0 , 現在必增加 $-V^*$ 項, 有下面的形式: ——

$$V^* = -F \cos(2\pi\nu t) \sum e_i z_i$$

那裏 F 是電場強度, ν 是光波的振數, e_i 和 z_i 是原子的電荷和 z -坐標, 現在假使光波的振動平面被選作 x - y -平面; $\sum e_i z_i$ 就是未擾動原子的力矩 (Moment). 分散理論所根據的方程式, 於是有下列的形式: ——

(153)

$$\Delta S - \frac{8\pi^2 m}{h^2} [V_0 - F \cos(2\pi\nu t) \sum e_i z_i] S - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

在 $F=0$ 時, 方程式變成未擾動原子的方程式, 那裏特性值 (因此能力階) 和特性函數, 都是已經知道的. 因此物理的分散問題一變而為數學的計算工作了, 就是像在 $F=0$ 的特殊例中一樣, 求它們的特性值和特性函數. 至於這種純粹的數學問題, 這裏不再論及.

雪里汀格爾 又做了一個向別方面推廣的假定,

就是說場量的平方(或則精確一點說,複數量 S 和它交錯複數量 S^* 的乘積)不是別的,不過是代表電荷的密度.(參看第十一章)由此可見電荷密度,是由特性函數決定,並且很容易可以算出電的終結附加力矩(Zusatzmoment);在這種振動,由所投射的原光波,於是引起次輻射(Sekundärstrahlung),這次初兩輻射的互相干涉,使傳播速度變更,並且可以變到這樣一種程度,(也依振數而變)使我們知道的分散現象發生.

假使受光波干涉的原子是在第 k 狀態,依雪里汀格爾理論,終結電力矩有下列形式:—

$$(154) \quad M = a_{kk} + 2F \cos(2\pi\nu t) \sum_n \frac{(E_n - E_k) a_{kn} b_{kn}}{(E_n - E_k)^2 - h^2 \nu^2}$$

那裏 a_{kk} (測留在第 k 狀態的或是率)代表依時間而變的量,使在分散時,祇有(154)右邊的第二項; a_{kn} 和 b_{kn} 兩量的數學意義,現在暫且不講,不過大約總是規定從第 k 狀態到第 n 狀態的自然變化或是率.

從(154)式很易看見所謂舊分散論的不能成立,那裏光的分散看作由電子的振動數或繞行數所測定.由(154)式知道,在一般言,次輻射並不依這舊的振數,卻依所究原子的景線振數而定;並且自然依全部

量子論中可能的振數而變，(除掉介乎實際可能振數中間的數值)此外最重要的是拉騰堡(Ladenburg)⁽¹⁾在1921年所得的結果，他又證明分散公式中的分子(Zähler)依變動的或是率而變。拉騰堡所研究的祇限於分散公式中 $n > k$ 的各項，那是和原子的光量子吸收相應。起先克拉沒爾斯(Kramers)⁽²⁾也引用所謂負項，就是在和放射變化相應的 $n < k$ 項。克拉沒爾斯因此得到完全的分散公式，至於它的精確證明，則由量子力學和波動力學引出。

從分散公式，克拉沒爾斯和哈生保⁽³⁾又歸納到一結論，就是次幅項以及光，可以從連合振數

$$v \pm v(n, k)$$

中的一個得到⁽⁴⁾，假使 $v(n, k)$ 是景線特有振數的一項。在實際上這樣一個例子，已由1928年印度物理學者拉曼(Raman)所發明的重要應效顯明出來，那就是

(1) R. Ladenburg, Zeitschr. f. Phys., 4, 1921, 451 頁.

(2) H. A. Kramers, Nature 113, 1924, 673 頁.

(3) H. A. Kramers 和 W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys., 31, 1925, 681 頁.

(4) 在克拉沒爾斯和哈生保之前斯麥克爾(A. Smekal)在 Naturwiss 11, 1923, 873 頁把這可能性證明。

所謂拉曼應效,拉曼⁽¹⁾用石英水銀燈(Quarzquecksilber-lamp)的原光,通過各種不同的液體,他發見在播散輻射景中,有比原光波長或大或小的清晰景線,他此外又決定這裏的振數差,和原振數無關,並且在炔基(Benzol)振數差中的一個,和炔基分子已知的一條紅外線特性振數相同。⁽²⁾

假使原光的振數和景線的振數相等時,根據分散公式,可知共振現象(Resonanz), (在一般言)是意料中的必然結果,至於共振能力, (根據公式)並不是無限的,在(154)式所示,不過是近似式,在完全共振時,引算中所作省略(Vernachlässigungen)不能再事略去,那裏又可證明由原子電的附加力矩,又可以算出原子所生電磁波場的功(Arbeit),這功等於力矩,場強度,和兩向量所含角餘弦的乘積,至於它的意義並非別的,不過是一原子從光場中所吸收的能而已。

(1) C. V. Raman und H. P. Krishnan, Nature 121, 1928, 501 頁; Indian Journal of Physics 2, 1928, 1 和 399 頁。

(2) 關於拉曼景析術的進展,可參看倫敦法拉第學會(Faraday-Society) 1929 年九月中日記中的討論(Transaction, Vol. 25).

雪里汀格爾的分散理論(像文忒失爾“Wentzel”⁽¹⁾和倍克“Beck”⁽²⁾所發見的)對光電應效也有一種應用。這推廣的可能性,是由於以前已講過的事實,(第七章)就是說一原子的特性值,(在一般言)構成兩種不同的系統一種不連續的,(間離的)和一種連續的,前者和原子中週期的電子運動相應,後者和電子脫離原子時的非週期運動相應。在氫原子,這間離特性數系,是代表負能力和橢圓軌道,而連續系則代表正能力和雙曲線軌道(Hyperbelbahnen),所以假使雪里汀格爾分散方程式,在特殊情形(在原光有適當大振數)時,產生一在連續系特性值,則這方程式是描寫一電子的離散。(也是一光電應效)像理論引算所得,知道有一球形物質波,由所研究原子向四面散佈,這在波綸統計學的解釋,可看作光電子放射在各方向的或是率。

這計算(在此不能詳說)立即引出(像文脫失爾和倍克所示)愛因斯坦早已得到的關係,那就是說光

(1) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. 40, 1926. 574頁; 41, 1927, 828頁.

(2) G. Beck, Zeitschr. f. Phys. 41, 1927, 443頁.

電子的動能，等於 $h\nu$ 與一個原子間離能力值的和，由計算和實驗，更告訴我們電子放射，在電的光向量 (Lichtvektor) 方向，必有一極大值，至於在和電場向量或 θ 角的方向，強度是比例於 $\cos^2\theta$ 。

再者光應效的分佈 (Ausbeute des Photo-Effekt) (就是單位時間內所放出的量子數) 也可根據 雪里汀格爾 分散理論算出；因此在一定原振數光的吸收系數 (Absorption Koeffizient) 同時也可以決定，由計算告訴我們，放射和吸收除依振數與化學原子號數變動外，更依放射光電子的電子次羣的副量子數⁽¹⁾ 而變，因為繁複的緣故，只有在原子中射出電子和其他電子間交換作用可以略去的特殊例子，(所以只有在所謂氫類似性⁽²⁾ “Wasserstoffähnlichkeit” 的特例) 光電應效計算纔能引出。這特殊情形，最先在近核電子⁽³⁾ 證實，所以這理論的實驗考察，在一切觀察之前，已經用 變琴線 研究過，光電應效在波動力學理論中的許多結論，都和實驗結果有極好的符合。

(1) 參看第十二章。

(2) 氫原子只含有一單電子。

(3) 這是一級量子的所謂 K -電子，和二級量子的 L -電子。

和光應效有密切關係的是1925年奧席(Auger)⁽¹⁾所發見可注意的事實,他知道假使原子周圍受鑷琴線作用時,則同時也可以放射兩個電子,理論上講來,這現象可以看作三個繼續的變化,第一是(普通光應效)由原鑷琴線光量子所引起的內部電子的射出,這電子譬如說可以屬於最內電子羣,就是一階量子的所謂 K -羣,因為這電子離去所生的空隙,必有原子中高級量子的電子落到這較低的層內,(依波利原則)因此而放出的能力 E' ,可以用在造成表示螢光—鑷琴線 (Fluoreszenz-Röntgenlinie) 放射的次光量子 $h\nu'$, 或則用來放出另外一個連合力 (Bindungsenergie) 小於 E' 的電子,這電子離開原子而成一次光電子,那裏它速度平方和半質量的乘積,是等於 E' 和連合力的差。

文忒失爾⁽²⁾和富司(Fues)⁽³⁾已從波動力學的立足點研究奧席應效 (Auger Effekt), 他們大致告訴我們,從一失去內部電子的原子,有一球形物質波向外散佈。

(1) P. Auger, Journ. de Phys, 6, 1925, 25 頁; 6, 1926, 183 頁.

(2) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. 43, 1927, 524 頁.

(3) E. Fues, Zeitschr. f. Phys. 43, 1927, 726 頁.

這在波綸的意義是代表“奧席電子 (Auger-Electrons)’ 放射的或是率,在另一方面,有由能力 E' 變到一光量子的或是率,可以和上面那樣可算的或是率⁽¹⁾相比較,這種理論所證到在有輻射或無輻射的量子跳躍中或是率關係,和奧席實驗中關於吸收變琴線螢光放射的關係間,有很美滿的符合。

此外由波動力學,又發現分散和昆普登應效 (Compton-Effekt 1923年發明)間的關係,這應效我們知道是指下列的事實:假使單色變琴線被固體散射時,散射景中在原線之旁,另有變移線 (Verschobene Linie) 可見,它們的波長增大了:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

那裏 φ 是散射角 λ_0 是一普遍常數等於

$$0.0243\text{\AA} (= 2.43 \times 10^{-10}\text{cm}).$$

和這波長相應的振數用 h 相乘,可得電子的特性能力 (mc^2).⁽²⁾ 實驗告訴我們,在任何光量子散射的例子,總有一個所謂推拒電子 (Rückstoßelektron),離開那散

(1) 這或是率大致由雪里汀格爾場量的平方而定。

(2) 波長的變更和原波長無關。

射原子,至於離開的速度是這樣,卻好使能力不減和動量不減定律能夠滿足。(自然;光量子的能力等於 $h\nu$,動量等於 $\frac{h\nu}{c}$.)昆普登⁽¹⁾和代皮⁽²⁾根據光量子假說,首先將昆普登應效中波長變動正確的引出,並且用各種不同假定,算出強度和散射角的關係,起先狄拉克⁽³⁾從新量子力學的立腳點研究昆普登應效,以後哥東(Gordon)⁽⁴⁾又依雪里汀格爾的方法處理,這兩研究者在這自由電子受電磁干涉問題中,都得到比以前更和實驗相符的強度角分配關係,文武失爾⁽⁵⁾以為在散射變化中,散射電子不能看作自由的而應看作屬於附屬於原子的,文武失爾以為昆普登應效發生的散射變化是這樣的,就是當原子吸收一光量子 $h\nu$ 後,於是引起一個振數較小光量子 $h\nu'$ 的重新射出,由這樣兩個相繼的變化,把一個電子升到較高的

(1) A. H. Compton, Phys. Rev. 21, 1923, 483 頁.

(2) P. Debye, Phys. Zeitschr. 24, 1923, 161 頁.

(3) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) 111, 1926, 405 頁.

(4) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys 40, 1926, 117 頁.

(5) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. 43, 1927 I 和 779 頁.

層內。現在假使這是屬於連續特性值系統的話，這電子就像被推拒一樣的離開那原子。這種 ν' 值(都小於原振數)的全部，給我們一個不連續的所謂“不黏合 (Inkohärent) 散射”景，並且使 文忒失爾 可以根據 雪里汀格爾 分散理論指出：假使一光量子對散射電子的作用，受原子核吸引力變動時，必定有一清晰的分散強度極大值。這強度最大值就代表可見變移線，它們的波長差和以前理論以及實驗相符。文忒失爾 更引出以下和實驗很相符的事實，那就是散射的強度分配，依原子號數而變的已移和未移線⁽¹⁾ 強度間關係，以及很普遍的散射原子特性和強度間關係。

雪里汀格爾 理論最後又可以處理物質點的撞擊，這種變化大致可看作物質波對於原子的作用。在從前(第一章)已講過的佛朗克和赫芝所發見電子擊撞，通過物質(氣體或金屬箔)時，電子和 α 點所起分散，以及最後在樂琴管中陰極線的變為樂琴線，都屬於這種變化。

(1) 精確一點可說是全變移線和未變移線間的強度關係。

至於電子的撞擊問題,已由波綸⁽¹⁾把它解決了;那裏他研究一個系統,那系統可以看作由所研究原子的 N 電子和撞擊電子第 $(N+1)$ 質點所組成,那裏 N 電子系的特性函數和特性值,假設是已規定的,這樣的數學問題,可以歸於邊界條件 (Randbedingung), $(N+1)$ 質點所構成微分方程式的特性函數,在無限時, (依撞擊電子的坐標言) 是像在平面物質波一樣,但依 N 電子的坐標言,則像在一閉合系統,波綸使勢能等於未擾動原子能力與相互作用能力的和,那裏第二數量和第一數量相較是極小,所以這問題可以用普通擾動方法處理。

波綸這樣得到的解,可以描寫撞擊電子的彈性反射, (那裏動能不變) 也可以描寫非彈性的反射,那裏撞擊原子受着等於 h 乘擾動原子特性振數的能力消失,而同時這原子就有所講到的特性景線振數放射,波綸的解,又可指出原子中的電子經撞擊後可以升到連續特性值系中的一個能力階,那就是所謂由電子撞擊所引起的電離 (Ionisation)。最後波綸的理論,更可以計算彈性撞擊和非彈性撞擊的數量分

(1) M. Born, Zeitschr. f. Phys. 37, 1926, 863 頁和 38, 1926, 803 頁.

配.文忒失爾⁽¹⁾和哥東⁽²⁾已經從波動力學的立足點研究電子與 α -線被物質散射後的方向分佈.波動力學已經確切的給我們和所謂刺得福得分佈同樣的結果.(那是刺得福得由舊法早已做出的結果)

(1) G. Wentzel, Physik. Zeitschr. 29, 1928, 321 頁.

(2) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. 48, 1928, 180 頁.

第十六章

量子力學中的共振

Die Quantenmechanische Resonanz.

波動力學把所有物質點都歸之於波動方式,因此可以想像在原子物理學中的結果,他可同樣的處理,那裏普遍的振動論,對於連合振動的相互關係,是久已引出的,假使兩同振數的振動互相連合,(例如所謂感應擺“Sympathischen Pendel”現象)當振動不和諧時,我們知道可以有兩不同的振動,一種比單振動高,一種卻比較低一點,從波動力學的立腳點,在所有變化都是這種現象,在同樣構造的兩物質點⁽¹⁾也是如此,它們中間有相互作用力.

(1) 同質是和(例如參看16式)同振數值相應.

特別有意義的結論，是哈脫勒爾和朗敦(London)⁽¹⁾在化學化合問題所引出的量子力學振動原則，化學原子價 (Valenz) 的量子理論，是用兩中和氫原子間的交互作用的研究做出發點，假定我們用指標 a 和 b 代表兩原子核，而指標 1 和 2 表示電子，於是(依哈脫勒爾和朗敦)可以從雪里汀格爾基本方程式立起這兩氫原子問題的波動公式：——

$$(155) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_2^2} \\ + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left\{ E - e^2 \left[\frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{a2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}} \right] \right\} S = 0. \end{array} \right.$$

哈脫勒爾和朗敦根據這方程式⁽²⁾算出中和氫原子兩基本狀態的相互作用能力，這是由近似法(Approximation)得到；那裏他們從在基本狀態氫原子的已知特性值出發，並大致當作擾動問題(Störungsproblem)處理，由計算告訴我們，在所研究的共振振動，對交互作用有兩個不同的解，這是一個很可異的結果，因為

(1) W. Heitler 和 F. London, Zeitschr. f. Phys. 44, 1927, 455 頁.

(2) 應當注意勢能在相吸時是負，在相拒時是正。

兩個中和氫原子竟可以用兩種完全不同的方式交互作用。

第一解(可以簡稱為 α -解)是代表原子中一個電子屬於另一原子的或是率,至於另外一解(可以簡稱為 β -解⁽¹⁾)則沒有這樣有限的或是率,第一解給我們的交互作用能力,在中等距離時是負,(所以是吸引)當增加距離時這能力漸漸減小;但在極小距離時,則反變為相拒,至於 β -解所給我們的交互作用能力,總是正數值,那就是代表純粹的相拒,所以兩原子進至極近時,必定引起彈性反射。

依哈脫勒特和朗敦的意思, α -解可看作所謂同性極的連合(Homöopolaren Bindungen)解釋,從原子的電子論奠定之後,於是假定所有化學變化都由於電力作用⁽²⁾,因此一個分子可以看作相反電荷的離子(Ion)所構成,那裏原子因為失去固有電子或獲得外

(1) 根據數學(這裏不能論到), α -解是稱為對稱的,而 β -解是非對稱的,因為和第二種解相應的是這種電子坐標函數,那裏兩電子(並非核!)交換時,符號也隨之變更,但在第一種,則交換時並沒有這樣的符號變更。

(2) 這假定由柏稷利烏(Berzelius)於1812年早已創立,到1916年又經柯塞爾(Kossel)從電子論的立腳點把它修改了一下。

加電子而失去中和性，於是就成爲離子。至於這種一正離子和一負離子間的“異性(Heteropolar)”連合之外，還有中和原子間的所謂同性極連合，所以實際上多數原質的分子，都是雙原子的。

從舊量子論的立腳，兩中和原子間交互作用的問題是不肯定的；因爲那裏中間吸拒力只能根據庫隆 (Coulomb) 定律解釋，所以就是在氫原子的特例，假使兩原子的相就是兩核間連接線和從核引到繞行電子的半徑所成的角沒有知道，這交互作用的計算也是不可能的，由波動力學那裏使電子軌道等於一連續體，就是所謂雪里汀格爾電荷雲“Ladungswolk”), 這困難卻因同時引到的全部可能相 (Phase) 而消失，所以波動力學可以引出交互作用能力和核距離的關係。

交互作用能力有最小值的距離，可以看作正常氫分子的核距離，而這最小能力值可以看作氫分子的析離能力 (Dissoziationsenergie)，普通我們用相等的電勢 (“Spannung” 和電荷相乘，就等於那能力) 來代表哈脫勒爾和朗敦根據他們的初階近似計算，得到使交互作用能力有最小值的距離，必定是 (依波耳理

論) 正常氫原子軌道半徑的 $1\frac{1}{2}$ 倍, 那是 0.532 \AA (或 5.32×10^{-9} 厘米). 蘇齊拉 (Sugiura)⁽¹⁾ 把 哈脫勒爾-朗敦 計算的近似法再做一次, 得到核距離是 0.80 \AA , 和析離勢壓是 3.2 弗. (Volt) 王君 (S. C. Wang)⁽²⁾ 計算這兩數是 0.74 \AA 和 3.8 弗. 至於實際上所得到的數值是 0.75 \AA 和 4.4 弗. 因為氫分子的波動力學計算只能用最近似的方法, 所以這樣的理論與實驗間的符合度, 已可認為極美滿的了.

對於兩中和氫原子間交互作用, 現在有兩個不同的解, 其中一個是表示同性極連合, 至於兩在基本狀態中和氫原子, (像 哈脫勒爾 和 朗敦 所算得的) 只有 β -解, 那是代表永久相拒的, 依 波利 原則另外的一個是不久許的, 這就是說在基本狀態, 氫的同性極連合是不能發生的.⁽³⁾

但依 朗敦⁽⁴⁾ 所知道的氫和氫間同性極連合的

(1) Y. Sugiura, Zeitschr. f. Phys. 45, 1927, 484 頁.

(2) S. C. Wang, Phys. Rev. 31, 1928, 579 頁.

(3) 只有在擾動的氫原子 (當然不在基本狀態) 這種連合纔屬可能.

(4) F. London, Zeitschr. f. Phys. 46, 1928, 455 頁以及 50, 1928, 24 頁.

可能性，卻是普遍存在的。波利原則本來也可以這樣說法：在一原子中能有兩個也只能有兩個同樣繞動的電子，(它們的主副量子數以至軌道平面的位置都相等⁽¹⁾)所以一原子的繞行系統，在一方面有成對的相等電子，在另一方面(在有種情形之下)又有所謂失去伴侶的不成對電子。現在依朗敦我們可以把同性極連合看作兩相等電子的偶合(Paarung)，那兩電子則為屬於兩不同原子的無偶電子。

因此一原子的化學原子價，是由無偶電子的數目決定，在另一方面，原子的(或正確一點說它繞行系統的)終結旋動的量子數，等於無偶電子數的一半，(因為對每單個電子的旋動，有量子數 $\pm\frac{1}{2}$)但是終結旋動的量子數，是 $\frac{r}{2}$ ，所以從原子理論知道原子景線項的系統是 $(r+1)$ ；這就是說在單無偶電子有雙線項(Dublett-Terme)，在兩無偶電子有三線項(Triplett-Terme)，在三時則為四線項(Quartett-Terme)等等。所以由朗敦理論引到一個結論說，原子價等於線系統項

(1) 依第十二章的說法， n ， l 和 $m(l)$ 都是相等。像十二章所用相等電子(n 和 l 相等)的概念，雖然 n 和 l 相等，但 $m(l)$ 很可以不同。

數減一。

現在可以明白無偶電子的數目，在偶原子號數必定仍是偶數，而在奇原子號數也必定是奇數，所以在週期表中，偶數直行的原素必定有偶原子價，其餘的原質卻有奇原子價，這和經驗是相合的。

在以前波利原則結論中所說，(第十二章)知道在一階量子電子羣，至多只能有兩個電子，在二階量子羣至多只能有八個，三階量子羣至多只能有十八個，這數的一半是不同繞轉運動的可能數，在一般言，可能繞動數在 n 階量子羣是 n^2 (在一階量子是1，在二階量子是在4，三階量子是9)，從原子構造論可知在基本狀態時，各原子的所謂外層電子羣可以有一個到八個的電子，原素表中第二週期的最外層是二階量子，在第三週期是三階量子，等等，從第三週期以上，全部外層電子可以是非偶合的，(只有不活潑氣體是例外)但在第二週期(銦到氦)則不同，那裏依前面講過的，在最外層電子，只有四個互相不同的繞行可能性，並且在外層電子中，只能有一個是無偶的，在六個外層電子中，只能有二個是無偶的。

朗敦理論(和實驗相符)引到一個結論說：一屬

於第七直行的造鹽原素 (Halogen), 可以是一價, 三價, 五價以至七價, 只有最低的原素氟 (Flour), 依朗敦理論只有一價那是一個例外, 實際上另外的原子價也沒有發見過, 同樣依朗敦理論, 第六直行中的原質可以是二價, 四價和六價, 不過氧只有二價, 是個例外, 這也和經驗相合。(1)

在分子連合時, 原子的原子價可以全部或一部的滿足, 這樣的分子 (可以看作一個系統) 自然還有無偶的電子, 這時這種未滿足的分子可以當作根 (Radikal). 有時一電子本和另一原子中一相等電子偶合, 當再受一原子價的作用 (Valenzbetätigung) 時, 又可以分離出來, 我們一直到現在還沒有引進已偶合電子和第三電子的結合, 不過朗敦 (2) 已經把兩原子交互作用的研究, 推廣到三原子和一原子和一分子交互作用的問題.

哈生保 (3) 認鐵磁性 (Ferromagnetismus) 也是一種量

(1) 可注意的是第五直行的原素, 除三價五價外, 尚有一價, 但是依朗敦法則只有四線和六線項, 此外並無二線項.

(2) F. London, Sommerfeld-Festschrift, Leipzig (Hirzel 1928), 105 頁.

(3) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 49, 1928, 619 頁.

子力學共振現象。最後倍克⁽¹⁾又指出對核構造,也有像原子構造和分子連合等相似的量子力學現象。阿斯吞(Aston)所定的同性體(Isotop),根據定律(那是物理學家⁽²⁾早已依據的,現在又重復引起他們的注意)組成一簡單系統,這法則(幫助了解原子核的構造)依倍克的意見,其中一部分可以用波利原則和電子旋動解釋。

(1) G. Beck, Zeitschr. f. Phys. 47, 1923, 407 頁, 和 50, 1928, 458 頁.

(2) 參看哈爾根斯(W. D. Harkins), Zeitschr. f. Phys. 50, 1928, 97 頁.

第十七章

變氫的發見

Die Entdeckung des Parawasserstoffs.

大凡一種新物理學的價值和圓滿,最穩當的試驗是看實驗物理學家能否從那裏引出新的發見,波動力學在 1927 年戴維孫和革墨爾(前面已講過)證明根據理論應有的物質波干涉和折散,那已是一個大的成功,到了 1929 年波動力學又引出一個非常有意義的實驗發見,那就是歐根(Eucken),彭霍弗爾(Bonhoeffer)以及他們共同功作者所得變氫(Parawasserstoff)的發見,這發見構成了兩相等原子連合的分子的理論。

代表這種分子最簡單的形式,是一個繞着垂直兩原子核連結線的軸向轉動的啞鈴(Hantel),對於這

樣一種模型,可以應用從前轉動子的雪里汀格爾微分方程式(“59”式用“65”式中的推廣,並且注意兩質量的相等)從精確的計算(這裏不能講到)引到一個結果(由“59”式的研究)就是兩相同原子組成的轉動子的特性函數,有下列簡單的形式:——

$$(156) \quad \psi_n = \sin(n\varphi),$$

那裏 φ 是旋轉角, n 是一個整的旋轉量子數;在另一方面,由微分方程式特性值而定的能力值是:——

$$(157) \quad \varepsilon_n = n(n+1) \frac{h^2}{8\pi^2 J}$$

(參看以前的“60”式)那裏 J 是分子的慣性矩(Trägheitsmoment),最後由數學的研究又告訴我們由量子數 n 規定的特性值全完和 $(2n+1)$ 特性函數相應,所以在第 n 能力階有 $(2n+1)$ 個特性值相等,並且這第 n 能力階有一個“統計學的權衡函數(Statistische Gewichtsfunktion)”,

$$(158) \quad g = 2n + 1.$$

那是很明白的,當“啞鈴”旋轉 180° 時,變數 φ 也變 π , 這就是表示和啞鈴相當的兩個原子核互相掉了一個位置,但是現在旋轉量子的是偶數或奇數,卻有

很大的分別,在第一情形,當 φ 轉 3π 時, ψ 是完全不變的.但在第二情形, ψ 的量雖然不變,但符則相反.所以在第一情形,兩原子核坐標的更換並不引起特性函數符號的變更,但在第二情形則引起這樣的更換.因此前者稱謂對稱的,後者稱為非對稱的.全部能力階於是分成兩系,一系和對稱特性函數相應,另外一個則和非對稱特性函數相應.

依量子力學,兩任意狀態間的變化或是率,在一般都依兩狀態的特性函數而變.推廣(121)式對於兩質點系統中的連合或是率,有下列的公式:

$$(159) \quad a(n, m) = \iint \psi_n \psi_m(q_1 + q_2) dq_1 dq_2.$$

指標 n 和 m 是代表兩不同狀態, q_1 和 q_2 是兩質點的坐標,至於那裏的疊積分是施於全部可能坐標數值上的.(關於“195”式的正確導算法這裏自然不能寫出)

現在很容易可以指出一對稱和一非對稱狀態間合的變移或是率,必定等於零.因為這變移或是率的數值,對把指標 1 給任意一原子核是沒有關係的,所以交換兩核時 $a(n, m)$ 的值並不變更;但是假使 n 和

m 兩數,一個是偶一個是奇,(就是兩特性函數一個是對稱的,一個是非對稱的)當掉換時,積分前面的符號必定改變,於是 $a(n, m)$ 的符號也必定改變,一數量當交換符號而仍相等者,只有是零,所以 $a(n, m)$ 必定等於零;就是說對兩相等原子組成的一個分子,可以有兩種不同的狀態,有兩種可能的變態(Modifikation),至於它們中間的變移,依量子力學是不許可的,一變態是用偶旋轉量子數規定,一種則用非偶數規定,依量子力學理論,一個屬於一變態的分子,永不能變為另外的一個變態中的分子。

和對稱特性函數(就是和偶旋轉量子數)相應的狀態,稱為變-變態(Para-Modifikation),和非對稱特性函數(就是屬於奇量子數)相應的狀態,則叫做正-變態(Ortho-Modifikation),在新量子力學沒有創立以前,由景析術的觀察,已經把中和(含兩電子)的氦原分為兩種變態,而給它們兩個名詞:——一種是變氦(Parahelium)一種是正氦(Orthohelium),以後由新量力學對這種氦原子的兩電子問題的處理,得到一個結論說:電子屬於變氦的特性函數是對稱的,而電子屬於正

氦的特性函數，則爲非對稱的⁽¹⁾從氦景的分析，又指出正氦是代表三線項，而變氦則代表單線項。以前(十六章)我們已經講過，假使兩電子是兩同向的磁體，則得三線項，至於單線項則適相反。因此正變態的電磁體位置是同向平行的，至於變-變態則必定是非平行的，因爲正項(Orthoterme)有和單純變項(Paraterme)不同的三重性(Triplizität)，所以正狀態有比變狀態大三倍的統計權衡，因此有一大三倍的出現數。

原素分子的兩核問題，在許多地方和兩電子問題相似。假使核有自轉或旋動，於是依哈生保⁽²⁾和洪德⁽³⁾(Hund)的量子力學研究，可知在分子的帶景(Bandenspektrum)中，必定有正項和變項。在沒有核旋動時，自然在帶景也必定沒有第二種的線。(由振數決定的公式可以看出)假使核的旋動的確存在，並且所有

(1) 在這研究中，先不假定電子的施轉。於是依波利原則，可知特性函數依兩電完全同樣而變的狀態，(就是特性函數，在電子是對稱的狀態)是不禁止的。因此這波利原則，祇許正狀態的存在，而對變狀態是不允許的。等到把旋動加上，於是變狀態纔允許它可以存在。

(2) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 38, 1923, 411 頁和 41, 1927, 239 頁。

(3) F. Hund, Zeitschr. f. Phys. 42, 1927, 93 頁。

的景線也都有,則(像哈生保所指示的)可以希望有交替 (Alternierende) 強度的存在,那裏變狀態和正狀態的多少是不等的。

在實際上第二種線以及帶景中的交換強度,都早已觀察得到;和理論的預期相應,對氮氧帶景中第二種線出現,用氫帶景中的交換強度已經證實。假定質子像電子一樣也有旋動,我們可以懸想四質子和兩電子所組成的氮核中,六小磁體所有的磁力矩,交互消滅。對氧核(也許由四氮核所組成)也可同樣的假定,至於對和質子相等的氫核,則反較困難。

在所有原素分子中,祇有氫分子的核,是由單個質子構成而作複雜組合的,根據氮原子同樣的理論,可以知道(由正確計算可以指示)在正氫的分子核磁 (Kernmagnet),是同向平行的,而在變氫則位置是非平行的,並且那裏氫的正分子 (Orthomolekeln) 有比變分子 (Paramolekeln) 大三倍的統計權衡。(參看表 I)

變態	特性函數	旋轉量子數	質子位置	統計權衡
變氫	對稱的	偶	非平行	一
正氫	非對稱的	奇	平行	三

表 I 變氫和正氫性質的比較

兩種不同氫變態的同時存在，並不單是在氫的分子景線關係可以表明；戴尼孫(Dennison)⁽¹⁾又知道可以用來解釋氫比熱的溫度變遷(Temperaturverlauf) 舊量子論已經把大略正確的變遷算出，但對於更精細的詳細情形，卻沒有；我們到這裏纔有兩種不同氫的結果的完全解釋。氫分子的能力可以使它等於兩部分的和，一種是分子變移運動的，另外一種是分子轉動的，以下所研究的第二部能力，是由(157)決定。依量子論，它的平均值是由以前的(135)式算出，假使在那裏我們再引用(在舊計學中是無用的)統計權衡函數，在(135)式，可見分子和分母的總和，都是一個指數函數($e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$)；這指數式和質點的數目成比例，它們的能力有已分定的數值。假使在所研究的能力階中，有 g 個相等的能力值，則一質點屬於那能力級的“先驗或是率(A-priori-Wahrscheinlichkeit)”比在一簡單能力階的大 g 倍。所以在(135)式再引進因子 g 時，我們得到下列的平均值關係：——

(1) P. M. Dennison, Proc. Roy. Soc. London (A) 113, 1927,

$$(160) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\sum g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{T/k}}}{\sum g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}$$

我們用縮寫,使

$$(161) \quad \frac{1}{kT} = x,$$

並且

$$(162) \quad \sum g_i e^{-x \varepsilon_i} = Q.$$

Q 是代表所謂 蒲朗克 態狀和 (Zustandssumme), 因此

$$(163) \quad \frac{dQ}{dx} = -\sum g_i \varepsilon_i e^{-x \varepsilon_i},$$

並且依 (160) 式

$$(164) \quad \bar{\varepsilon} = -\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} = -\frac{d(\ln Q)}{dx}$$

因為知道一 莫爾 (Mol) 或一克分子 (Grammolekel) 的質量對一單分子質量之比, 等於普通氣體常數 (R) 和 博爾赤曼 常數 (k) 的比, 所以我求得一 莫爾 所有的旋轉熱, 可以叫它 C ,

$$(165) \quad C = \frac{R}{k} \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT}.$$

但是現在依 (161) 式

$$(166) \quad dT = -kT^2 dx,$$

於是

$$(167) \quad C = -\frac{R}{k^2 T^2} \frac{d\varepsilon}{dx},$$

或則依 (164) 式

$$(168) \quad \frac{C}{R} = x^2 \frac{d^2(\ln Q)}{dx^2}.$$

對旋轉分子的特例,我們可用下面的簡寫法:—

$$(169) \quad \frac{h^2}{8\pi^2 J} x = \sigma.$$

假使 ε 是旋轉能力,於是依 (157) 式

$$(170) \quad \varepsilon_n = n(n+1) \frac{\sigma}{x}.$$

再連合 (158) 式

$$(171) \quad Q = \sum (2n+1) e^{-n(n+1)\sigma}.$$

那裏 n , 在變氫祇能是偶數, ($n=0, 2, 4$, 等等) 在正氫則只能是奇數, ($n=1, 3, 5$, 等等) 所以兩變態有不同的 Q 數值, 並且依 (168) 式, 比熱的數值也自不同, 譬如

$$(172) \quad Q(\text{變}) = 1 + 5e^{-6\sigma} + 9e^{-20\sigma} + \dots,$$

而⁽¹⁾

(1) 利用恒等式

$$n(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

於是 (172) 和 (173) 式又可以寫作歐根所用的另外一種形式。

$$(173) \quad Q(\text{正}) = 3e^{-2\sigma} + 7e^{-12\sigma} + 11e^{-30\sigma} + \dots$$

這兩比熱的不同,自然祇有在適當低溫度時,纔能發現.在一般言,由量子論所得到的差異,可以從舊的理論中引出,在圖 4 中可以看見 u. a. 兩曲線,它們是代表 100% 和 0% 的;一條是代表純粹變氫的溫度變遷,一條是表示純粹正氫的溫度變遷.在這兩例中的溫度變遷,都是由 (168) 再連合 (172) 和 (173) 式所算出;至對於分子的慣性矩,則應常用帶景分析中所引出的數值 4.67×10^{-41} 克² [依 荷利(Hori)⁽¹⁾]. 在圖中指出兩曲線,當溫度增加時,移近舊熱力學的極限值 R [1.98 卡(Cal)⁽²⁾], 但當冷卻時,正氫的旋轉熱漸減,而變氫的旋轉熱則漸加大,在冰點以下 100° 左右有超過舊值一半的絕大數值.

在圖 4 中除了純粹變氫的曲線外,尚有許多不同量混合氫的曲線.根據戴尼孫公式有:—

$$(174) \quad C = \gamma C(\text{正}) + (1 - \gamma) C(\text{變}),$$

(1) T. Hori, Zeitschr. f. Phys. 44, 1927, 834 頁.

(2) 依舊熱力學漢爾比熱(Spezifische Molwärme)等於 $\frac{5R}{2}$ 那裏 $\frac{3R}{2}$ 等於變移態.

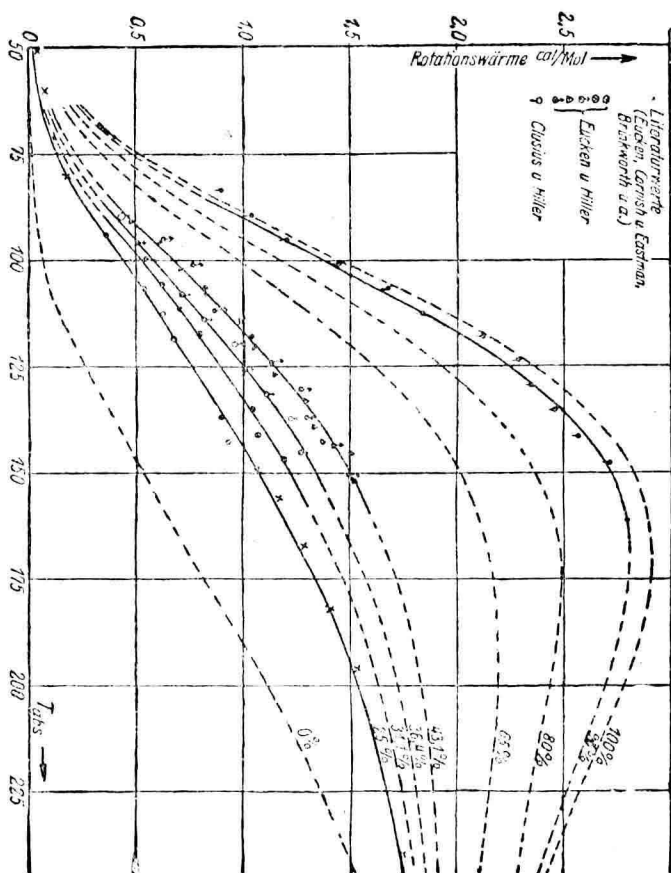


圖 4

歐根所得在各不同變氮濃度氮旋轉熱的溫度變更(錄自
Zeitschrift für Physikalische Chemie, Abt. B, 4, 1929, 154 頁;
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.)

那裏 γ 是變氫的混合份量，特別重要的，自然是 $\gamma = \frac{1}{4}$ ($\gamma = 25\%$) 的那條曲線，因為這時兩者的混合比，卻和變氫和正氫兩者統計權衡的關係相應。由圖 4 的指示以及戴尼孫首創的證明，可知這曲線和以前知道旋轉熱的實驗數值（在圖 4 中用 \times 記號標出）符合得異常之好。

那是很明白的，祇有在高溫度時，25% 的變氫纔能代表一平衡關係。在很低溫度時， σ 極大，所以 $Q(\text{正})$ 近於一，而 $Q(\text{變})$ 近於零，因此在很低溫度時，平衡是接近純粹變氫方面的，就是說冷卻是代表平衡關係向變氫方面的推移。

依前面講過的，有一定旋轉量子數的分子數目，是比例於下面的式子：——

$$\alpha g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}},$$

那裏 α 在變態是等於一，在正態是等於 3。在一定溫度兩變態的平衡比例，依 (162) 式有下列的關係：——

$$(175) \quad \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{Q(\text{變})}{3Q(\text{正})}.$$

歐根用這公式計算在一定溫度平衡濃度的數

值,成下面的表II:—

溫 度 (絕 對)	含 量 的 百 分 數	
	變 氫	正 氫
21.2	99.7	0.3
28.3	67.8	2.2
42.5	85.8	14.2
60.0	65.2	34.8
85.0	48.0	52.0
170.0	25.3	74.7

表 II 在各溫度兩氫變態的平衡密度(歐根)

所以假使在低溫度時作比熱的測量,給我們和25%變氫相應的數值,則可以斷定在測量時,雖不是在平衡狀態,然而也沒有向其它靜止狀態的重大傾移,在實際上大致可說兩變態間的交互變換是不允許的,這限止是精確的;因為依量子力學,在有旋動作用時,這變換限界稍有一點通融,因為對稱特性函數和非對稱特性函數起了一點差異,所以正狀態和變狀態間的變換或是率,不等於零而等於一很小的數值.這在兩電子問題和兩核問題是一樣的.實際上這從變狀態到正狀態的變換也可看出來,黎曼⁽¹⁾ (Ly-

(1) Th. Lyman, Nature 1922, 278 頁.

man)在氫景中的發見,已證明這內部連合所生線的存在.

假使氫分子從正狀態移到變狀態是普遍可能的,則在低溫度經過適當的時間,總可以希望變氫的達到正常的百分之二十五分,並且這樣的到達必定可以由比熱的變更看出.歐根和海勒爾(Hiller)⁽¹⁾能夠對氫將上面所說理論現象,在實際上加以證明,那裏用高壓(100—200氣壓)和液態空氣的溫度,(大約70°—80°絕對溫度)經過一星期的時間就得到了.應用高壓是使平衡的達到加快,否則恐怕就是經過一年,也沒有多大的推進,在一定時間內所量的溫度變遷,(像圖4中可以看見的)和計算所得各種超過正常含量的變濃度(Parakonzentration 31.1; 36.4; 43.1%),極相符合.

我們已經知道平衡的達到因壓力的增加而加快,彭霍弗爾和哈忒克(Harteck)⁽²⁾發見用木炭做接觸

(1) A. Eucken 和 K. Hiller, Zeitschr. f. Physik.Chem. (B) 3, 1929, 142 頁.

(2) K. F. Bonhoeffer 和 P. Harteck, Zeitschr. f. Physik. Chem. (B) 3, 1929, 113 頁.

媒 (Katalysator) 時,立即就可以達到,彭霍弗爾和哈忒克在液態氫的溫度(210°絕對溫度)時,用木炭吸收氫,然後再蒸發之.這樣經過五分鐘,就得到88%的變氫,十分鐘98.3%,十五分鐘99.3%,二十分鐘99.7%,同理論計算的平衡比例相等.(參看表II)兩小時後再量的結果,仍是99.7%.這證明它已達平衡狀態了.

對變氫分量的決定,彭霍弗爾和哈忒克並不量比熱的自身,而量同比熱成比例的熱傳導率 (Wärmeleitfähigkeit),當然也就是量在一金屬線的電阻力 (Widerstand),依一個著明的方法⁽¹⁾將一在內張有導線的器皿保留在常溫度,溫度由是電熱線的阻力測定,而熱傳導率則由溫度和經過線上的電能力算出.於是當阻力變更時,立即可以知道變氫濃度的變更.

等到純粹(實際可以這樣說)的變氫已經發見.它的性質可以很親切的研究.由彭霍弗爾和哈忒克以及克羅細斯(Clusius)和海勒爾⁽²⁾的測量,可知變氫

(1) 這方法是雪拉爾馬赫爾 (A. Schleiermacher) 的, Wied. Ann. Phys. 34, 1883, 623 頁.

(2) K. Clusius 和 K. Hiller, Zeitschr. f. Physik. Chem. (B) 3, 1929, 158 頁.

的蒸氣壓(Dampfdruck)比普通氫的來得高⁽¹⁾因此融點(Schmelzpunkt)也減低。克羅細斯和海勒爾又能夠對 80° 到 161° 絕對溫度間純粹變氫轉動熱的溫度變遷(參看圖4),作數量的測定,他們又找到(依舊量子論所說的一樣)在 115° 絕對溫度時,舊的數值1.98卡($=R$)的上升,以及此後它的下降;在溫度 161° 時,由實驗所得的轉動熱數值,是2.79卡,和理論完全相合,由化學和電化學以及液體固體融解熱和比熱等立足點,不能發見變氫和正氫的分別;但是變氫的放射景,不過通常氫分子景線的一部。(自然和偶旋轉量子數相應)

在另一方面,由理論告訴我們,正氫是沒有單獨存在的可能性,並且也不能有一次約略的達到,因為從理論可以知道沒有一個平衡狀態,那裏正氫的量可以高於75%的。

這變分子和正分子的同存在性,自然不限於氫一種;所有兩原子原素(那裏有兩個同質量子核,並且兩核合成一終結的旋動)都有的,實際上氮(Stick-

(1) 在絕對溫度 20° 時,變氫的蒸氣壓力是 737mm, 而正氫是 760mm, 而在正氫是 751mm.(最計算的)

stoff) 氟氯 (Chlor) 和 碘 (Jod) 的兩變態的存在,可由景線分析證實。⁽¹⁾ 混合比例由帶景強度的測定,可知在氟是 3:1 (和氫一樣),在氯是 2:1 ⁽²⁾ 在碘(常有一特別大的磁的核矩“Magnetische Kernmoment”)大約是 1:1. 氫在一切原質中佔據一個特殊地位,它有特別小的分子慣性矩;因此祇有在氫,正常平衡的推移,對許多單個小絕對度可以證實,並且也祇有氫可以在氣體狀態舉行這種觀察。

假使一原素分子的原子核沒有自轉,根據前面講過的,在分子景帶中必定沒有第二種線存在,這現象的完備,必假定兩核的完全平等性.由氧的空氣吸收帶中所發見細微變化,於是 1929 年 喬克 (Giauque) 和 強斯登 (Johnston) ⁽³⁾ 可以指出下面的結論說:——氧的核(像普通所信)不都是同樣構造的,仔細的分析氧帶景,可以知道在 10,000 氧分子中,必定有八個是通常質量 16 和質量 18 兩質原子的連合,此外大約還有

(1) R. W. Wood 和 F. W. Loomis, Phys. Rev. 31, 1928, 705 頁

(2) F. Hund, Zeitschr. f. Phys. 42, 1927 93 頁, R. de L. Kronig, Naturwiss. 16, 1928, 335 頁.

(3) F. W. Giauque und H. L. Johnston, Nature 123, 1929, 123 頁; Journ. Amer. Chem. Soc. 51, 1929, 1436 頁.

一個質量16和質量17原子的連合。這種少有的分子，實際上和波動力學中偶數與奇數旋轉面的結論相合。

同樣克恩 (King) 和 皮爾格 (Birge)⁽¹⁾ 確定了普通質量12的碳原子，以及質量13的原子所組成碳分子的存在，因此這景線分析發明以前不曉得而且很少的（質量17和18），氮同性體，以及很少的（質量13）碳同性體，不過是量子力學的必然結果。

(1) R. T. Birge, Nature 124, 1929, 13 頁.

(2) A. S. King, 和 R. T. Birge Nature 124, 1929, 127 頁.

第十八章

放射性的波動力學理論

Die wellenmechanische Theorie der
Radioaktivität.

波動力學應效,不但對原子的行星系統變化,就是對原子核的內部變化也很有意義,我們已經知道放射崩壞中 α -點的得布洛利波長,大約和原子核大小度相同,(根據許多實驗,它的大小度是 10^{-13} 到 10^{-12} 厘米)因為 α -點的質量是 6.6×10^{-24} 克,而速度是光速的 5%,所以它的物質波長,大約是 6×10^{-13} 厘米。

1928 年革尼(Gurney)和康同(Condon)⁽¹⁾以及伽慕(Gamow)⁽²⁾同時在波動力學的根據上創立了放射性

(1) R. W. Gurney 和 E. U. Condon, Phys. Rev. 33, 1929, 127 頁。

(2) G. Gamow, Zeitschr. f. Phys. 51, 1928, 204 頁; 52, 1928, 496 頁; 及參看 M. V. Laue, Zeitschr. f. Phys. 52, 1928, 726 頁。

的理論。那理論大致連合一個已知的古典力學定律，就是說：——在力場中運動的物質點，當進到

$$(176) \quad E - V < 0$$

的境帶，必定永遠的停留在那帶裏。 E 是物質點的常能力， V 是勢能。因為在那帶中動能是負，所以速度是虛數。

只有在 $V < E$ 的境界裏，質點纔能運動。假使那裏有兩個或多個 $V < E$ 的區域，交互被 ($V > E$ 的) 所謂壁壘 (Wälle) 者間隔，於是用同一能力，可以有許多不同的運動；但這種運動只限於一單個區域內，因為壁壘阻止了它們的變移。

假使我們懸想核的周圍是由高勢壁壘圍繞，以致核內的物質不能逸出到原子的行星系統，這樣以上的結果，就可以在原子核理論中引證出來。在 α -線經過原子散射的觀察，很清晰的可以知道直到 10^{-12} 厘米的距離，庫隆 定律必定尚是真確的；就是說到了那距離，勢依照 庫隆 定律是等於核電荷與距離的商，並且是正號；因在一般言，拒力和正勢相應，而吸力和負勢相應，代表勢為距離函數的曲線，於是可見是雙曲

線形,由距離的增加而愈峻直。

這力場必定在一定臨界距離而起反逆,例如質點在這臨界是相拒,但再稍進必變為相吸,否則 α -點決不能留在核內,所以在這臨界距離以內,勢必定由正值變為負值,勢曲線 (Potentialkurve) 在那裏突然的折下,圖 5 是革尼和康同求得的核電荷 82 的勢曲線,⁽¹⁾那裏橫坐標的單位是 10^{-12} 厘米,縱坐標的單位是

10^{-5} 厄,為比較便利起見,所畫有和鐳 C', 鐳 A 以及鈾所射出 α -點能力相應的橫線,鐳 C' 是代表最短壽命原素的絕端(半量時 "Halbwertszeit"

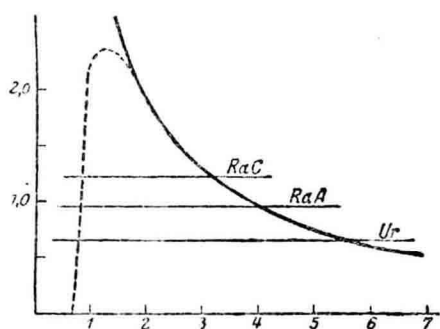


圖 5

原子的勢曲線(革尼和康同)

只有 10^{-8} 秒), 鈾則代表最長壽命原素的那一端,(它的半量時有 5×10^9 年) 至於鐳 A 卻居兩者之間,半量時是 3.05 分,從圖 5 可以看出所講原子的壁壘是照比例而定高的。

(1) 這核電荷是由鐳 A 擊去一 α -點而生。

革尼和康同以及伽慕融會波動力學的結果,把原子核的壁壘型模(Wallmodell)應用到放射性的理論上去,這可能性是由於在波動力學看古典力學禁止區域的定理,不過和光波直線傳佈律在波動光學中地位一樣,那光線直進定律,當然也可用波動論處理,但和純粹幾何直線總有點差別,同樣從波動力學的立腳點,這禁止區帶也有通過的可能性;波動力學對這和舊力學的差異,給它一個一定的或是率。

那是很明白的,假使或是率很小時,可以解釋放射性的崩壞現象,並且確可以把它引算出來,假使核半徑的大小度是 10^{-12} 厘米,並且一 α 點在核內的繞轉速度是 10^9 厘米/秒,於是振數是 10^{21} ,就是說在一秒中一質點有這許多次達到壁壘上去,譬如鍍在 7×10^{10} 原子中,每秒鐘有一個原子崩壞,所以假使能夠看出一 α 點,在這樣多的次數和勢壘相遇時,有 10^{-32} 次可以通過,則波動力學的解釋是不錯的。

這或是率自然是極小的,現在我們譬如有三個不同的國家,各發行一種彩票(Lotterie),每種的票數是這樣多法,使全世界人民都能買一張,現在使每人把三種各買一張,要一人同時能得三主獎的或是率,

自然小得可驚,但是和上面所說 α -點在撞擊時能通過障壘的機會相較,則尚大幾千倍.這或是率雖小得不可思議,但仍給我們一個用放射現象常數表明的確切數量法則.

由波動力學的計算(在此不能詳細講到)告訴我們,這穿過核壁壘的或是率,等於一因數(有單位大小度)乘指數式 e^{γ} . 那裏

$$(177) \quad \gamma = -\frac{4\pi}{h} \int \sqrt{2m(V-E)} dx,$$

並且積分是施於障壘闊度上的.它再用 α -質點的繞轉數(大約 10^{21})相乘,就得到(在大小度言)放射崩壞常數(λ).由各種不同方法都得到同樣最後結果.

$$(178) \quad \lambda = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2E}{m}} e^{-\frac{4\pi}{h} \int \sqrt{2m(V-E)} dx},$$

那裏 a 代表圍繞壁壘區域半徑大小度的長.我們知道半量時 (T), 是崩壞常數大小度的倒數;它們的關係是:—

$$(179) \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

在圖 6 (革尼和康同做出的) 我們有鐳 C' , 鐳 A 鈾的曲線,那裏的直坐標代表下式:—

$$(180) \quad \gamma = \frac{4\pi}{h} \sim 2\pi m(V-E),$$

橫坐標代表距離,並且我們選用 10^{-12} 裡做橫坐標的單位, 10^{13} 裡⁻¹ 做直坐標的單位,所以在圖 6 中每小方格的是代表純粹數字 10.

以前積分式中的 γ ,現在不過是圖 6 中曲線所包的面積,譬如這面積是一,二,三或再多的小方格時,崩壞常數就有 e^{-10} , e^{-20} , e^{-30} 等的差別,因為崩壞常數由指數式而變,所以就可以解釋為什麼放射原素半量時的大小度,可以是百萬分之一秒以幾千兆年那

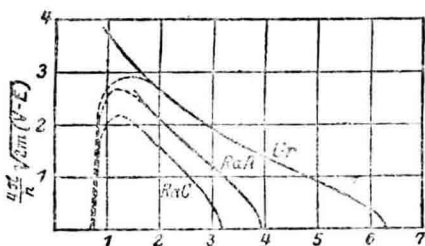


圖 6

樣大的變遷法,而射出 α 點的開始速度,卻是大致相同的,例如鐳 C' 的崩壞常數是鈾的 10^{25} 倍,但它的開始速度不過比鈾大 40% 而已.

在圖 6,可以看得出當勢曲線未知部份繼續時,代表 γ 的面積也祇有很小的變動,假使要近似的求

出這面積，以及 λ 的大小，我們祇要應用和庫隆定律相應的一部曲線的知識。革尼和康同在實際上是這樣做法，所得最短最長壽命原素的半量時，和實驗所得結果的大小度相同。伽慕也有相似的算法。⁽¹⁾

由(178)式可以知道能力，或放射 α -點的初速度愈大，崩壞常數也愈大。這關係實際上是久已知道的經驗關係。蓋革 (Geiger) 和那塔爾 (Nuttall) 也久已知道在變列 (Umwandlungsreihe) [鈾—釷 (Thorium) 和錒 (Actinium) 一列]，崩壞常數是開始速度(或則稱 β 射程 „Reichweite”)對數的線性函數，那裏有下列的關係：—

$$(181) \quad \log \lambda = A + B \log v,$$

那裏 B 是一普遍常數， A 則在三變列中的每一列中各有一定的數值。其實這關係更精密的形式，可以從(178)得到。

反轉來說，自然也可以從蓋革-那塔爾關係下一結論說：—在同一變列，所有原子勢曲線大約相等

(1) 計算崩壞常數較精密的方法，是由於失克爾 (Th. Sexl), Zeitschr. f. Phys. 56, 1929, 63 頁 72 [依勞良 (Laue) 所創立的實驗] 以及波綸 (M. Born), Zeitschr. f. Phys. 58, 1929, 303 頁 (用狄拉克相似的方法)。

的路線,實際上像圖 5 所表示的,在一列內崩壞常數,只因能力而變。

革尼和康同以及伽慕研究,是代表有系統的原子核理論的開端,現在量子論應用在原子的行星系統,已和實際有出乎意料的符合,在那裏幾乎已沒有不可解的困難存在,波動力學對於放射性現象界所得的結果,已使我們覺得對在可見期間內,量子論也可這樣的成立於原子核物理界的希望,並不錯誤。

第十九章

波動力學基本方程式的相對論推廣

Die relativistische Verallgemeinerung
der wellenmechanischen Grundgleichung.

一直到現在的研究,我們祇用不和相對力學相應的雪里汀格爾方程式做波動力學的根據.假使要把波動力學的基本方程式變到相對論的形式,我們必須從質量變動定理出發.我們使 m 爲電子的靜質量⁽¹⁾更用以前已用的簡寫式

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \beta,$$

則依速度而變的質量等於 βm , 並且動量的空間分向是:——

(1) 這裏所用的關係,和第四章所用的不同.

$$(182) \quad p_1 = \beta m v_x, \quad p_2 = \beta m v_y, \quad p_3 = \beta m v_z,$$

在相對論中，我們知道除掉三個空間坐標外，還有第四個和虛單位與光速相乘的時間坐標 (ict)。因為速度分向等於坐標的時間微商，所以我們有一個等於 ic 的第四速度分向，因此給我們一個第四動量分向；假使我們叫它 $i p_0$ ，則

$$(183) \quad p_0 = \beta c m.$$

從 (182) 和 (183) 式，我們有

$$(184) \quad -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -\beta^2 m^2 (c^2 - v^2),$$

但是

$$\beta^2 (c^2 - v^2) = \beta^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2,$$

所以

$$(185) \quad -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2 = 0.$$

在前章 (第十章) 已經指出動量分向可以當作運算子，並且可以當作和 $\frac{h}{2\pi i}$ 相乘的依空間坐標偏微商。從相對論的立腳點， $i p_0$ 可以當作依 (ict) 的偏微分商解釋。推廣以前的 (117) 式，我們得到

$$(186) \quad \begin{cases} p_0 = -\frac{h}{2\pi ic} \frac{\partial}{\partial t} \\ p_1 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \quad \text{等等};$$

因此

$$(187) \quad -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$$

假使我們把(185)式當作運算子關係,並且把它應用到用 ψ 代表的雪里汀格爾場量上,⁽¹⁾我們就得到以下相對論的波動公式⁽²⁾:—

$$(188) \quad \Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0.$$

在電磁場的例子,依能力定律(這裏不能論及)運算子 p_0 可以由下面的運算子決定:—

$$P_0 = p_0 + \frac{e}{c} A_0,$$

那裏 A_0 是外力場對電子所引起的靜電勢,把它應用到場向量時,有

$$(190) \quad P_0 \psi = -\frac{\hbar}{2\pi i c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \psi.$$

(1) 在前章是用 S 代表的,那裏這種小希臘字母是用振相常數等; ψ 記號比較普通一些。

(2) 方程式(188)普通也寫作

$$\square \psi - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0,$$

那裏相對論中常用的運算符號是:—

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

同樣運算子 p_1, p_2, p_3 , 也可以使有下面的意義:—

$$(191) \quad P_1 = p_1 + \frac{e}{c} A_1 = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_1$$

等等,那裏 A_1, A_2, A_3 是舊電學中所知道向量勢 (Vektorpotential) 的分向,由靜電和向量勢,可以引出電場和磁場的強度 (外力場) 分向如下:—

$$(192) \quad \begin{cases} E_x = -\frac{\partial A_0}{\partial x}, & E_y = -\frac{\partial A_0}{\partial y}, & E_z = -\frac{\partial A_0}{\partial z} \\ H_x = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, & H_y = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \\ & H_z = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}. \end{cases}$$

波動力學基本方程式,在電磁場例中的推廣,像雪里汀格爾⁽¹⁾哥東以及其他研究者同時發現的,有下列形式:—

$$(193) \quad [-P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m^2 c^2] \psi = 0$$

那裏運算子都有上面所說的意義。

(1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 81, 1926, 109 頁 (又見於 Abhandlungen zur Wellenmechanik).

第二十章

狄拉克的電子論

Die Diracsche Theorie des Elektrons.

由光波和物質波間的相似性,使我們可以意料得到雪里汀格爾和哥東的方程式(那裏運算子是平方的)必定根據於一個運算子是初次的原方程式;因為描寫波形傳佈的次階微分方程式,也可以引到一初級的微分方程式,譬如像著名的麥克斯威爾電磁場方程式。⁽¹⁾在實際上狄拉克⁽²⁾在1928年已經得到一個正確描寫電子在電磁場情形的初階微分方程式,把它和相對論的假定相連,可得到一個更普遍的形

(1) 參看哥斯 (E. Guth) 在 Wiener Akad. d. Wiss., mathemat. Klasse 1928, 87 和 303 頁提出的。

2 P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) 117, 1928, 610 頁, 和 118 1928, 351 頁。

式使雪里汀格爾方程式不過是可以從那裏引出的
一個特殊的近似例子;並且以前孤獨的電子旋動現
象假定,現在也可以從那裏引出。

狄拉克得到一個新的方程式,那裏他選用下面
的線性運算子,

$$(194) \quad f \equiv -i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc,$$

那裏 P_4 , 就是以前的 iP_0 , 現在假定這運算子和一第
二者的乘積, (右邊小寫記號消去) 就是雪里汀格爾
—哥東方程式的運算子, 所以

$$(195) \quad \begin{aligned} & [-i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc] \\ & [i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc] \\ & = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + m^2 c^2, \end{aligned}$$

並且用這樣的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 數值, 原方程式變成:—

$$(196) \quad f\psi \equiv [-i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc]\psi = 0.$$

現在(195)式引出下列的關係式,

$$(197) \quad \gamma_\mu^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu \quad (\mu \neq \nu),$$

μ 和 ν 是 1, 2, 3, 4, 四個指數中任意兩數, 通常的數, 當
然不能滿足這部分的不可交換法則, 除非只有它們
是方陣, 狄拉克在實際上已發見(197)式, 是由下面四
行四列所成的四個方陣

$$(198) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\ \gamma_3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$

連絡而成。

根據方陣乘法規則，我們很容易看出(198)式的數值是滿足(197)式的。⁽¹⁾那裏總共有64個方陣分向，可用 $\gamma_{\mu}^{\nu\sigma}$ 記號代表。那三個指數每個都能是1, 2, 3, 或4，指數 ν 是分辨橫列的， σ 是分別直行的，所以例如 γ_2^{14} 等於-1。

現在假使 γ 是四行列的方陣，所以 ψ 也不是一單純的數量。因此狄拉克知道不祇有一個波動函數，卻有四波動函數 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ 。那裏 ψ 和 γ 的乘，可用下式來規定：——

(1) 可注意的是不但(198)式的四方陣 γ_{μ} ，有(197)式相連的關係，所以有下列形式

$$\gamma^{\mu} = A^{-1} \gamma_{\mu} A$$

的方陣，都是如此。那裏 A 是一任意的四度方陣，而 A^{-1} 則是它的倒方陣。

$$(199) \quad \gamma_{\mu} \psi_{\nu} = \sum_{\sigma} \gamma_{\mu}^{\nu \sigma} \psi_{\sigma}.$$

譬如：

$$\gamma_2 \psi_3 = \gamma_2^{31} \psi_1 + \gamma_2^{32} \psi_2 + \gamma_2^{33} \psi_3 + \gamma_2^{34} \psi_4$$

或則依(198)式,第二方陣第三橫列的四項中祇有第二項,不等於零而等於1,所以

$$\gamma_2 \psi_3 = \psi_2.$$

假使我們把(198)式中的 γ 值代到(196)式,利用(199)式的乘法規則使 P_4 等於 iP_0 ,並且最後因為 γ 不含運算子 P ,所以它們的次度可以去掉,於是狄拉克得到下面同時成立的四程式系統:⁽¹⁾——

$$(200) \quad \begin{cases} (P_0 + mc)\psi_1 + (P_1 - iP_2)\psi_4 + P_3\psi_3 = 0 \\ (P_0 + mc)\psi_2 + (P_1 + iP_2)\psi_3 - P_3\psi_4 = 0 \\ (P_0 - mc)\psi_3 + (P_1 - iP_2)\psi_2 + P_3\psi_1 = 0 \\ (P_0 - mc)\psi_4 + (P_1 + iP_2)\psi_1 - P_3\psi_2 = 0 \end{cases}$$

我們先可以看出這四方程式系在它的初階近似,就可以引出雪里汀格爾的分散方程式,譬如假定 ψ_1 與 ψ_2 和 ψ_3 與 ψ_4 相較可以略去,並且磁場的影響和相對論的質量變更性,都可以省去,我們在那裏把 ψ_1

(1) 參看 C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. London (A), 118,

1928, 654 頁;在那裏是方程式(2,2),

和 ψ_2 略去,於是第三式等於

$$(201) \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + \left(\frac{e}{c} A_0 - mc \right) \psi_3 = 0.$$

由四方程式系的第四式,可以知道 ψ_4 當然也有(201)式的關係,並且此外由四方程式系,又可以引出 ψ_1 和 ψ_2 也有這樣的關係.應用(201),可以有:—

$$(202) \quad P_0 \psi_1 = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \psi_1 = mc \psi_1,$$

因此

$$(203) \quad (P_0 + mc) \psi_1 = 2mc \psi_1,$$

同樣對 ψ_2 也是這樣.

由四方程式系的第一,第二,兩方程式,我們於是
有(略去向量勢):

$$(204) \quad \begin{cases} \psi_1 = -\frac{\hbar}{4\pi i mc} \left[\frac{\partial \psi_4}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right] \\ \psi_2 = -\frac{\hbar}{4\pi i mc} \left[\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right]. \end{cases}$$

把這代到那系統中的第三式,於是我們由簡易的計算得到:—

$$(205) \quad \Delta \psi_3 + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (-mc^2 + eA_0) \psi_3 - \frac{4\pi i m}{\hbar} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = 0.$$

這方程式在實際上和雪里汀格爾的推廣方程式相

等,不過應用相對論時,對勢力尚須加固有能(mc^2)一項,由此可見雪里汀格爾的基本方程式,不過狄拉克方程式的第一近似而已,它對於 ψ_3 以及 ψ_4 ,也能滿足的。

至於第二階近似時,我們必須顧到磁場的影響。達爾文(Darwin)⁽¹⁾用下列的方法引出⁽²⁾:我們把四方程方程系的第一式用運算子 $(-P_3)$ 乘,第二式用運算子 $(-P_1+iP_2)$ 乘,最後第三式用運算子 $(mc+P_0)$ 乘,把它們加起來,於是得到下面的方程式:—

$$(206) \quad \left\{ \begin{aligned} & [-P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m^2c^2]\psi_3 \\ & + \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi} (H_1\psi_4 - iH_2\psi_4 + H_3\psi_3) \\ & + \frac{c}{e} \frac{\hbar}{2\pi} (iE_1\psi_2 - iE_2\psi_2 + E_3\psi_1) = 0 \end{aligned} \right.$$

對其它的 ψ -函數,也有相似的方程式。

(1) 看以前指出的著作。

(2) 當然因視運算子乘法為可交換的所生之差誤,不可以省去,例如 P_0P_1 不等於 P_1P_0 ;所以

$$P_0P_1 - P_1P_0 = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi i} E_3$$

同樣

$$P_1P_2 - P_2P_1 = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi i} H_3$$

等等。

從這方程式的研究,使我們知道在電磁場中電子的狄拉克理論,可以引出雪里汀格爾—哥東方程式(193)(自然有附加項);並且不用精確的計算,已可以看出電子在電磁場中(和以前已講過烏蘭倍克和高特斯密脫的假設相應.)也成爲小的磁石,所以電子旋動,是狄拉克理論的必然結果,並且我們可以注意到,在狄拉克理論[參看(206)式,]有一個虛電力矩⁽¹⁾.但對於這非實力矩的解釋,現在還沒有.

最後狄拉克理論尚有一重大的結論,就是說從他那裏,達爾文⁽²⁾和哥東⁽³⁾能夠引出一個公式,那公式是1916年紹麥斐爾德用另外方法引出以解釋氫景微細結構(Feinstruktur)的,根據烏蘭倍克—高特斯密脫假定⁽⁴⁾,紹麥斐爾德微細結構公式,不過一個初階的近似而已.

最後我們可以指出狄拉克方程式,(和雪里汀格爾方程式相反)只能應用到物質點像電子質子等,而不能用於連合的質點,像 α -點等,在那裏並無絡結旋動.

(1) 這力矩的大小,和磁力矩同;兩者都等於 $eh/(4\pi mc)$.

(2) 看以前指出的文章.

(3) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys., 48, 1928, 11 頁.

(4) 參看第十二章.

第二十一章

量子力學與自然哲學

Quantenmechanik und Naturphilosophie.

波動力學和量子力學在物理學界所引起的革命，遲早總要對全自然哲學引起一深入的影響。這種新物理學說開了對自然哲學基本概念加以重要更改的可能性，尤其是對於物質，因果律，自然律等思想。

在十九世紀的末葉，由近代的實驗物理學已經證實了上古自然哲學家所創物質可分為不連續質點的臆說。但物理學最近的發展，對這種質點的個性，已加以重要的限止。現在對微質已不能定一位置，或一清晰的界限。每質點必定影響它質點，反轉來說，（像見於勿米統計學中）它自己的自由，也被其餘所干涉。

物質和光（廣義的）間的不同，在最初原子物理學發展中，已覺漸減。物質最重要的特性，是不連續和

有動量,但現在在光中也已找出,反轉來說光的波動性質,在物質中也已尋到,微點和波動等概念,在今日物理學中,已不復成爲根本不同的兩類,它們不過是普遍的,整個的自然現象中,兩相輔的形式而已。⁽¹⁾

在宇宙物理學中很明顯的因果定律,最近的物理學已用原子變化的不定性來代表;它只假定統計量(物理學中屬於單體基本變化的)的未定性,這樣一個概念,自然對物理法則也開一新眼界。⁽²⁾能引起自然哲學中心興趣的一個問題,是問究竟在自然界中,除純粹統計知識外,有無它種規則,因爲現在統計學已普及於物理學以至其它科學,像政治經濟等。

我們一看理論物理學的歷史,可以知道物理的進步是主要點,是從純粹人的立足點,漸謀解放,依這樣講起來,布洛利,雪里汀格爾,哈生保,和狄拉克等功作告成的時期,可以看作把一切已有謬見澄清的一個時期。

(1) 參看 N. Bohr, Naturwiss. 16, 1928, 245 頁;以及 Nature 121, 1928, 580 頁.

(2) 一方面參看 P. Jordan, Kausalität und Statistik in der modern Physik, Naturwiss. 15, 1927, 205 頁(又 Nature 119, 1927, 566 頁), 另一方面參看 M. Planck, Das Weltbild der neuen Physik, Leipzig (Barth) 1929.

附 錄

I. 各章內容撮要

第一章,略講力學的和物理的思路的差別,像相對力學思想,光量子假定,原子的能力階,以及波耳定量法等,波耳理論中須待解決的困難,是在原子運動中應用的古典力學原則和特殊軌道的規定間的矛盾,以及如何力學的變化,須取決於基本光學常數 h .

第二章,視爲幾何光學最高定理的斐馬原則(波速倒數的線積分等於極小)和視爲力學最高法則的摩拍塔伊原則(機械速度的線積分等於極小)間有一種關係存在,這相似性,使我們覺得運動現象總可以屬之某種波動方式,那裏機械速度和波速倒數間有一普遍的比例常數,從普遍波動公式和相對論的羅倫次轉換間的關係,更覺得這希望的合理,假

使我們懸想有一波動變化與運動物質點相俱。於是根據羅倫次轉換，這振動變化是一個超光速的波，它的羣速度則等於那質點的機械速度。

第三章，得布洛利利用公式。

$$mc^2 = h\nu$$

來表示質點的波動，因此求得力學定律，不過是普遍波動原則的必然結果。於是電子和質子都是所謂物質波的能力中心，那裏的波長則由作用量子 and 動量的商決定。這思想應用於閉合軌道中的等速運動時，引到一個結論說：祇有長度等於波長整數倍（因此角動量等於 $\frac{h}{2\pi i}$ 的整數倍）的軌道，纔屬可能。根據特性振動，把布洛利假定應用到閉器中氣體，可以引出分子變移能力的定量法則，以及動量空間可以分做小的間格；總共有 h^3 除氣體容積的商那許多個。

第四章，由物質點是波動的能力中心，係能力元 $h\nu$ 所構成，和它的羣速度等於機械速度等思想，可以把質量依速度而變，橫質量，和縱質量，以及能力慣力量等相對論的公式引出。

第五章，布洛利理論引出的物質波折散結論，由戴維孫，革墨在電子的結晶上選擇反射研究，以及湯

姆生和羅泊陰極通過金屬箔的實驗,已經證實。

第六章,雪里汀格爾依布洛利的思想完成了力學的推廣,好像以前從斐馬原則變為海互史原則(就是從幾何線的光學,變為物理波的光學)一樣。當應用到單質點時,引出基本微分方程式:—

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0,$$

那裏 S 是所謂場量, E 是全能力, V 是勢能。從這關係,物理的能力定量問題,已一變而為純粹數學上求微分方程式特性值問題。這數學問題是在黑麻脫多項式和球函數等例中研究。

第七章,直線和諧振動子和自由軸轉動子,都可作雪里汀格爾特殊力學的例子。那裏振動子能力,和舊說不同,是等於半能力元的奇數倍,因此可以明瞭零點能力的假說;再轉動子的角動量等於 $\frac{h}{2\pi} \sqrt{n(n+1)}$ 。氫原子的能力階,也可由雪里汀格爾方程式引出。斯塔克應效,依數學理論,可作微分方程式中擾動項所發生多重特性值的分解解釋。對多質點的系統,雪里汀格爾方程式代表形象空間。(它的度數等於質點數的三倍)中的一個波。

第八章, 哈生保所創的量子力學, 和舊說不同, 那裏只用直接可以觀測的數量; 像景線的振數和強度, 以及在電子撞擊可定的原子能力階, 哈生保把舊說中每變動的電子坐標, 用振數等於景線振數, 以及測定景線強度的振幅, 兩者所組成的部分振動表列代表, 對這振動表列, 哈生保加以一定的乘法定義, 在那裏運算是不可交換的, 依哈生保交換原則, 坐標和動量乘積, 由交換而生的差誤, 等於 $\frac{h}{2\pi i}$. 這關係應用到和諧線性振動子, 可以得到一個結論說: 那振動子的能力, 等於半能力元的奇數倍, 並且在所有的量子跳躍, 都適合波耳的振數條件.

第九章, 波綸和約但用方陣力學之助, 已能够使哈生保的綱要真正實現, 在此可見能力不變定律, 和波耳振數條件, 是哈生保交換法則的必然結果.

第十章, 應用數學運算子的概念, 可以證明雪里汀格爾特性值力學和哈生保量子力學的相等性, 哈生保交換法則, 依運算子運算所得, 可知雪里汀格爾微分方程式, 是古典力學的推廣.

第十一章, 依雪里汀格爾物質點是表示能力乘, 而反轉來波綸依量子力學的立足點, 把波狀傳佈的

雪里汀格爾場量,當作一質點投到一定地位的或是率解釋,依量子力學,祇承認有這種統計或是率的因果性,對物理中單獨變化的因果性,則加以否認,這種假定在哈生保的意見也加以贊助,就是說每原子數量的測量,總有多少不精密存在。

第十二章,原子力學和旋動電子假定相連,可以分別四個規定電子狀態的量子數,波利原則(在一原子中不能有兩四個量子都同的電子)告訴我們,在一階,二階,三階,四階等量子的電子羣中,最大佔住數是 2, 8, 18, 32 等等,因此量子力學對原素週期系統已在根本上加以解釋。

第十三章,部斯告訴我們,由光量子氣體的假定,祇要懸想附屬動量空間的量子氣,是由 h^3 大小的間格所組成,並且視舊說中一質點在第 n 狀態的統計數量,爲一在有 n 質點的間格上的數量,我們就可以引出蒲朗克的輻射定律,愛因斯坦根據部斯統計學,創立了一個和舊說不同的氣體論,以解釋在極低溫度的變額現象。

第十四章,勿米把波利原則應用到統計學,他根據在一氣體中已定量子數的分子不能多於一個的

假定，創立了一新氣體論，從勿米統計學，可知零點能力，零點壓力的存在，和在絕對零點時，比熱消失，紹麥斐爾德告訴我們，勿米統計學應用於金屬中自由電子，得到特別圓滿的結果，那裏因為它們的極微質量，所以依勿米理論，在室溫度時是代表一完全類變氣體。因此對舊統計學不能了解的事實，像為什麼自由電子對金屬比熱沒有可見的影響等，皆加以解釋。

第十五章，雪里汀格爾方程式的推廣公式，是處理光波和原子間交互作用問題的適當根據。分散現象，拉曼應效，光電應效，奧席應效，和昆普登應效等，都屬於這種問題。雪里汀格爾方法又可作為物質波對原子干涉的研究。因此電子撞擊和經過物質的電子散射等現象，可用波動力學處理。

第十六章，對在基本狀態，兩中和氫原子的交互作用力，哈忒勒和朗敦在波動力學的根據上，求得兩不同的解，一個是代表同極性相吸，另外一個則表示相拒。第一解所得氫分子核距離，和分離能力等數值，都和實驗相符。對兩在基本狀態的中和氫原子，祇有代表相拒的解纔屬可能，朗敦很普遍的指出同性極連合，根據波利原則是代表兩不同原子中無偶而繞

動相等的電子所組成，在一原子中，無偶電子的數目，決定那原素的化學原子價，因此氧和氮的特殊地位得到解釋。

第十七章，在兩相等原子組成的分子，根據量子力學的研究，可以有兩不同的變態，兩變態間的交互移換，是不允許的；那裏所謂變 - 變態，和對稱的特性函數及偶旋轉量子數相應，所謂正 - 變態，則和非對稱特性函數及奇旋轉量子數相應，在單質子核的氫分子，正狀態有比變狀態大三倍的統計學權衡，因正氫和變氫能力階的不同，引起了比熱的不同，這在氫，因在極低溫度時，分子的慣性矩極小，所以很清晰的表現出來，實驗求出的氫溫度變更，和以 $\frac{3}{4}$ 正氫和 $\frac{1}{4}$ 變氫為混合比例所算出的結果相同，但祇有在高溫度時，這混合比例纔能達於平衡；溫度下降時，總傾向於變氫增加一方面在液態氫的溫度，變氫可到 99.7%，由質子和電子旋動所引起平衡狀態的推移，在平常是很慢的，但加高壓力和應用適當的接觸媒，可以得到非常的加速，彭霍弗爾這樣得到了實際上可算為純粹的變氫。

第十八章，根據原子核被壁壘包圍（那裏的勢

能,大於核中質點的常能力)的假定,可以得到原子核的理論,依波動力,(和古典力學不同)射過這壁壘的或是率雖極小,卻有一定有限的數值.從這根據引出一放射性的理論.實際上革尼和康同以及伽慕確是這樣算出正確放射原素崩壞常數的大小度.

第十九章,雪里汀格爾和哥東由相對論的根據,對無力場及有力場的波動力學方程式加以推廣.

第二十章,狄拉克創立了從波動力學立足點描寫電磁場中一電子關係的一次微分方程式.他能够指示由這適合相對論的方程式,在第一階的近似,可以引出雪里汀格爾的方程式,並且可以得到電子的旋動現象.

第二十一章,最近原子物理學的發展,使物質概念,因果關係,以及自然律等都發生重大的變更.

II. 常用記號表

A 振幅	W 或是率
C 旋轉比熱	a 複振幅
D 對角方陣	b 加速度
E 能力(或電場強度)	c 光速度
F 場強度	e 電元量子(或自然對數之底)
G 動量	g 羣速度或統計的權衡函數
H 黑密爾登函數(或黑麻脫多項式或磁場強度)	h 作用量子
J 分子慣性矩	i 指標或虛單位
L 動能	k 博爾赤曼常數
N 質點數	j, k, l, m, n , 量子數
P 力(在二十章是運算子)	m 質量
Q 狀能和	p 動量分向
R 氣體常數	q 坐標
S 雪里汀格爾場量(或鐳)	t 時間
T 絕對溫度(或景線項)	u 波速(或輻射比密)
U 角動量	v 機械速度
V 勢能(或容積)	w 在第四章是一普遍常

數。	λ 波長或崩壞常數
Δ 拉普拉斯誘導數	μ 質量
β 由方程式決定的簡寫	ν 振數
ϵ 振相常數或單獨能力	φ 振相
η 輻射密度	ψ 場量或特性函數

III. 普遍常數

作用量子 (h)	6.545×10^{-27} 厄,秒
電元量子 (e)	4.774×10^{-10} 靜電單位
光速度 (c)	2.9980×10^{10} 厘/秒
質子質量	1.661×10^{-24} 克
電子質量	9.00×10^{-28} 克
博爾赤曼常數 (k)	1.372×10^{-16} 厄/度

IV. 文 獻

Louis de Broglie, Einführung in die Wellenmechanik (R. Peierls 譯), Leipzig (Akademische Verlagsgesellschaft) 1929.

Erwin Schrödinger, Vier Vorlesungen über Wellenmechanik, Berlin (Springer) 1928.

Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Wellenmechanischer Ergänzungsband, Braunschweig (Vieweg) 1929.

Karl K. Darrow, Elementare Einführung in die Wellenmechanik (Dr. E. Rabinowitsch 譯) Leipzig (Hirzel) 1929.

Eugen Gnth, Entwicklung und Grundlagen der Quantenphysik in Band IV des Handbuches der Physik, Berlin (Springer) 1929.

Alfred Landé, Optik, Mechanik und Wellenmechanik in Band XX des Handbuches der Physik, Berlin (Springer) 1929.

J. Frenkel, Einführung in die Wellenmechanik, Berlin (Springer) 1929.

ger) 1929.

Hermann Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik,
Leipzig (Hirzel) 1928.

Quantentheorie und Chemie (Kossel, Hinshelwood, Dirac,
Fermi Eucken 和 Sidgwick 講述) H. Falkenhagen 編纂,
Leipzig (Hirzel) 1929.

Louis de Broglie, Untersuchungen zur Quantentheorie (W. Becker 譯):
Leipzig (Akademische Verlagsgesellschaft) 1927.

Erwin Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig (Barth)
1927.

Max Born, Probleme der Atomdynamik, Berlin (Springer) 1926.

V. 人名中西對照表

A

Aston 阿斯登

Auger 奧席

B

Beck 倍克

Becker 勃格爾

Berzelius 柏稷利烏

Birge 皮爾格

Bohr 波耳

Bonhoeffer 彭霍弗爾

Boltzmann 博爾赤曼

Born 波綸

Bose 部斯

Brogliè, L. de 布洛利

C

Clusius 克羅細斯

Codd 科特

Cole 柯爾

Compton 昆普登

Condon 康同

Conlomb 庫隆

D

Darwin 達爾文

Davisson 戴維孫

De Brogliè 得布洛利, 見 Brogliè

Debye 代皮

Dennison 戴尼孫

Dirac 狄拉克

Doppler 多普拉

E

Eckart 厄克脫

Ehrenfest 厄綸弗斯脫

Einstein 愛因斯坦

Elsasser 厄沙瑟爾

Esclangon 愛斯克朗根

Epstein 厄泊斯坦

Eucken 歐根

Euler 尤拉

F

Faraday 法拉第

Fermat 斐馬

Fermi 勿米

Fourier 富利埃

Franck 佛朗克

Franz 佛朗克

Fues 富司

G

Galilei 伽利略

Gamow 伽慕

Geiger 蓋革

Germer 革墨爾

Giauque 喬克

Gibbs 季布茲

Gordon 哥東

Gondsmit 高特斯密脫

Günther 根泰爾

Gurney 革尼

Guth 哥斯

H

Haas 哈斯

Hamilton 黑密爾登

Harkins 哈爾根斯

Harteck 哈忒克

Heisenberg 哈生保

Heitler 哈脫勒爾

Hermite 黑麻脫

Heron 希綸

Hertz 赫茲

Hiller 海勒爾

Hori 荷利

Hund 洪德

Huygens 海耳史

J

Jeans 錢恩

Johnston 強斯登

Jordan 約但

K

Kikuchi 菊池

King 克恩

Kossel 柯塞爾

Kramers 克拉沒爾斯

Kunsman 昆斯曼

L

Ladenburg 拉騰堡

Landé 朗台

Laplace 拉普拉斯

Laue 勞哀

London 朗敦

Lorentz 羅倫次

Lyman 黎曼

M

Maupertuis 摩拍屠伊
 Maxwell 麥克斯威爾
 Mendelejeff 門德雷業夫
 Meyer 邁爾
 Moivre 莫扶爾
 Moseley 摩茲力

N

Nernst 奈恩斯忒
 Newton 牛頓
 Nuttall 那塔爾

P

Pauli 波利
 Peltier 泊底厄
 Planck 蒲朗克
 Poute 波脫

R

Raman 拉曼
 Pamsauer 拉姆繞爾
 Rayleigh 累力
 Ritz 力茲
 Röntgen 羅琴
 Rupp 羅泊
 Rutherford 刺得福德

Rydberg 勒德堡

S

Scherrer 希拉爾
 Schrödinger 雪里汀格爾
 Sexl 失克爾
 Smekal 斯麥克爾
 Sommerfeld 紹麥斐爾德

Stark 斯塔克

Stern 斯騰

Stoner 斯吞納

Sugiura 蘇齊拉

T

Tetrode 忒特羅德

Thomson 湯姆生

U

Uhlenbeck 烏蘭倍克

W

Wang 王

Wentzel 文忒失爾

Wiedemann 維特曼

Wien 維恩

Wiener 維納爾

Wilson 威爾遜

VI. 名詞中西對照表

A

Abnormal 非正常
 Absorption 吸收
 Absorption Koeffizient 吸收
 係數
 Actinium 錒
 Amplitude 振幅
 A-priori-Warscheinlichkeit 先
 驗或是率
 Äquivalente Elektron 相等電
 子
 Argumentmatrix 主變方陣
 Arbeit 功
 Atom 原子
 Atomreste 原子剩餘部
 Aufgespalten 析離
 Anger-Effekt 奧席應效
 Auger-Elektron 奧席電子

B

Bandspektrum 帶景
 Benzol 濁燐
 Besetzungszahl 佔住數
 Bengung 折散
 Bewegungsenergie 動能
 Bewegungsgröße (Momentum)
 動量
 Bildpunkt 構成點
 Bindungsenergie 連合力
 Brechnung 屈折
 Buckel 峯

C

Cartesische Koordinaten 代加
 德坐標
 Chemische Bindung 化學連合
 Chlor 氯
 Compton-Effekt 昆普登應效
 Coulombsches Gesetz 庫隆定
 律

- D
- Dampfdruck 蒸氣壓
- Diagonalmatrix 對角方陣
- Differentialgleichungen 微分
方程式
- Dispersion 分散
- Dissoziationsenergie 析離能力
- Drehimpuls 角動量
- Doppler Effekt 多普拉應效
- Doublett-Terme 雙線項
- Dynamik 動力學
- Dyne 達(能力單位)
- E
- Edelgase 不活潑氣體
- Eigenenergie 固有能量
- Eigenfunktion 特性函數
- Eigenschwingungen 特性振動
- Elektrische Entladungswellen
帶電波
- Elektron 電子
- Elektronengas 電子氣
- Elektronenspin 電子旋動
- Elektronenstöße 電子撞擊
- Elektronenstrahlen 電子射線
- Elektrische Weckselfeld 交流
電場
- Elektronenaffinität 電子親和
力
- Elementare Wirkungsquantum
作用量子
- Ellipse 橢圓
- Empfindlichkeit 銳感度
- Energie 能力
- Energiepaket 能力乘
- Energiequantum 能量子
- Entropie 熵
- Emission 放射
- Erg 厄(功單位)
- F
- Fakultät 級乘
- Feinstrukturen 微細結構
- Feldstärke 場量
- Fermatische Prinzip 斐馬原
則
- Ferromagnetismus 鐵磁性
- Fluor 氟
- Fluoreszenz-Röntgenlinie 螢光
變琴線
- Freien Weglänge 自由路徑長度
- Frequenz 振數(每秒)
- G
- Gasentartung 氣體變類

Galvenometer 電表
 Gequantelten 定量
 Gesamtenergie 全能力
 Gewicht 權衡
 Glimmer 雲母石
 Grammolekel 克分子
 Grundstoff 原質
 Grundzustand 基本狀態
 Gruppengeschwindigkeit 羣速度

H

Hantel 啞鈴
 Halbe Quantenzahl 半量子數
 Halbwertszeit 半量時
 Hamiltonsche Funktion 黑密爾登函數
 Harmonische 和諧
 Hauptquantenzahl 主量子數
 Halogen 造鹽原素
 Helium 氦
 Hermitesche Polynome 黑麻脫多項式
 Heteropolare Bindung 異極性連合
 Hohlraum 空殼
 Himmel-Mechanik 天體力學

Homöpolare Bindung 同性極連合
 Huygensche Prinzip 海互史原則

Hyperbel 雙曲線

I

Impuls 動量
 Impulsraum 動量空間
 Impulsmatrix 動量方陣
 Impulspunkt 動量點

Inhomogen 不勻

Inkohärent 不黏合

Intensität 強度

Interferenz 干涉

Ion 離子

Ionisation 電離

Isotope 同性體

J

Jod 碘

K

Kanonische Bewegungsgleichungen 標準運動方程式

Katalysator 接觸媒

Kathodenstrahlen 陰極線

Kausalität 因果性

Kern 核

- Kernmoment** 核力矩
Kernmagnet 核磁
Knotenpunkt 節點
Knotenebene 節面
Kohlenstoff 碳
Konfigurationraum 形象空間
Kontaktpotential 接觸勢
Konjugierte 交錯
Konvergierte 收斂
Kontinueirlich 連續
Koordinaten 坐標
Korpuskel 微點
Kirtische Temperatur 臨界溫度
Kugelfunktion 球函數
L
Ladungsdichte 電荷密度
Ladungswolk 電荷電
Laplacesche Ableitung 拉普拉
 斯誘導係數
Lichtatom 光原子
Lichtelektrischen Effekt 光電
 應效
Lichtquanten 光量子
Lichtquantengas 光量子氣
Lichtzeit 光時
Linear 線性
Linienpektrum 線景
Longitudinale Masse 橫質量
Lorentz-Transformation 羅倫
 次轉換
Lolterie 彩票
M
Makromechanik 宇宙力學
Mass 質量
Materie 物質
Materiewellen 物質波
Matrix 方陣
Matrixmechanik 方陣力學
Matrizenrechnung 方陣算法
Mauptertuisches Prinzip 摩拍
 屠伊原則
Metalle 金屬
Moivre Formel 莫扶爾公式
Moment 力矩
Mol 漠爾
Monochromatische 單色
Multiplikationsdifferenz 乘差
N
Nebenquantenzahl 副量子數
Nicht-kominutativ 不可交換
Nickel-Ein-Kristall 鎳單個結

品

Nullpunktdruck 零點壓力

Nullpunktenergie 零點能力

O

Operator 運算子

Optik 光學

Orthohelium 正氦

Orthoterme 正項

Orthowasserstoff 正氫

Orthonzustand 正狀態

Oszillator 振動子

P

Paarung 偶合

Parameter 參變數

Parawasserstoff 變氫

Parhelium 變氦

Partialschwingung 偏析振動

Panli-Prinzip 波利原則

Peltier-Effekt 珀底厄應效

Periodität 週期性

Permutation 排列

Photoeffekt 光應效

Photon 光子

Phase der Schwingungen 振相

Physikalische Dimension 物

理度

Phaseunterschied 振相差

Polarisation 極化作用

Potential 勢

Proton 質子

Punktgitter 點格子

Q

Quantum 量子

Quantenbedingung 量子條件

Quartett-terme 四線項

Quarzquecksilberlamp 石英水
銀燈q-Zahlen Mechanik q^2 數力學

R

Radikal 根

Radium 鐳

Radioaktivität 放射性

Radiotelephonie 無線電話

Ramsauer-Effekt 拉姆繞爾應
效

Randbedingung 邊界條件

Relativitätstheorie 相對論

Reichwerte 射程

Resonanz 共振

Röntgenstrahlen 變琴線

Rotater 轉動子

Rückstoßelektron 推拒電子

Ruhemass 靜質量

S

Sauerstoff 氧氣

Schema 表列

Schwingungen 振動

Sekundärstrahlung 次輻射

Selektive Elektronendurchlä-
bigkeit 電子選擇通過性

Selektiven Reflektion 選擇反射

Spektrum 景

Spektrenterme 景項

Spannung 電勢

Spezifische Emissionsvermö-
gen 放射比量Spezifische Strahlungsdicht 輻
射比密

Spezifische Wärme 比熱

Spin 旋動

Störungsproblem 擾動問題

Statische Gewicht 統計權衡

Stehende Welle 定波

Stickstoff 氮

Streuung 散射

Strahlung 輻射

Synchron 同時

Symmetrisch 對稱

Sympathische Pendel 感應擺

Superposition 重疊

T

Temperaturverlauf 溫度變遷

Thermodynamik 熱力學

Thomson-Effekt 湯姆生應效

Thosium 鉍

Träge Mass 慣性質量

Trägheitsmoment 慣性矩

Translationsenergie 變移能力

Transversalität 縱性

Triplet-Terme 三線項

Tripizität 三重性

U

Überlichtwellen 超光速波

Ultrarote Wärmestrahlen 紅外
熱線Ultravioletten Strahlen 紫外
線Unpearige Elektronen 無偶電
子

Unterteilungszahl 節分數

Untergrupp 次羣

Uran 鈾

V

Valenz 原子價

- Vektor 向量
 Vektoranalysis 向量分析
 Verschobenlinie 推移線
 Vertauschungsregel 交換法則
 Viskosität 滯度
 W
 Wärmeleitvermögen 熱傳導性
 Wahrscheinlichkeit 或是率
 Wasserstoff 氫
 Wasserstoffähnlichkeit 氫類似
 性
- Wegintegral 線積分
 •Wellenzahl 波數
 Wellenmechanik 波動力學
 Wirkung 作用
 Wiederstand 阻力
 Z
 Zähler 分子
 Zellen 間格
 Zinkoxyd 氧化鋅
 Zusatzmoment 附加力矩
 Zustandssumme 狀態和