Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 29

Übungsaufgaben

Aufgabe 29.1. Inwiefern kann man in der algebraischen Geometrie durch 0 teilen?

Aufgabe 29.2. Es sei

$$U = D_+(X_0) \cup D_+(X_1) \subseteq \mathbb{P}^n_K .$$

Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = K .$$

Aufgabe 29.3. Zeige, dass die Projektion weg von einem Punkt

$$\mathbb{P}^n_K \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_K$$

auf den affinen Stücken $D_+(X_i)$ eine Projektion

$$D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^n_K \cong \mathbb{A}^{n-1}_K \times \mathbb{A}^1_K \longrightarrow D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^{n-1}_K$$

ist. Zeige, dass somit ein Geradenbündel über dem $\mathbb{P}^{n-1}_K$ vorliegt.

Aufgabe 29.4. Zeige, dass das durch die Projektion weg von einem Punkt

$$\mathbb{P}^n_K \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_K$$

gegebene Geradenbündel bei $n \geq 2$ nicht trivial ist.

Aufgabe 29.5. Es sei

$$\pi \colon \mathbb{P}^n_K \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_K$$

die Projektion weg von einem Punkt und sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$. Zeige, dass

$$s_a \colon \mathbb{P}^{n-1}_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i,\, x_1, \ldots, x_n \right)$$

ein Schnitt zu π ist.

Aufgabe 29.6.*

Bestimme zu einem Punkt $(a, b) \in \mathbb{P}^1$ die Gleichung für die Urbildgerade zur Projektion weg von einem Punkt

$$\mathbb{P}^2_K \setminus \{(1, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\, (x, y, z) \longmapsto (y, z).$$

Aufgabe 29.7. Zeige, dass die Einschränkung der Projektion weg von einem Punkt

$$\mathbb{P}^2_K \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

auf eine jede Gerade $G \subset \mathbb{P}^2_K$, die nicht durch P geht, einen Isomorphismus induziert.

Aufgabe 29.8.*

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei

$$C = V_+\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) \subset \mathbb{P}^2_K$$

und sei

$$\varphi\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch die Projektion weg vom Punkt

$$\mathbb{P}^2_K \setminus \{(1,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\ (x,y,z) \longmapsto (y,z)$$

definierte Morphismus. Bestimme das Urbild des Punktes $(3,5) \in \mathbb{P}^1_K$.

Der Beweis der folgenden Aussage erfordert das Konzept der Separabilität für Polynome und den Charakterisierungssatz für separable Polynome.

Aufgabe 29.9.*

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad d und sei

$$\varphi\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch eine Projektion weg von einem Punkt $P \notin C$ definierte Morphismus. Zeige, dass bis auf endlich viele Ausnahmen die Faser zu jedem Punkt $t \in \mathbb{P}^1_K$ aus genau d Punkten besteht.

Aufgabe 29.10.*

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $C = V\left(YZ^{p-1} + X^p\right) \subset \mathbb{P}^2_K$. Zeige, dass der durch die Projektion weg vom Punkt $(1,0,0)$ definierte Morphismus

$$\varphi\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

bijektiv ist.

Aufgabe 29.11. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom. Interpretiere F als Morphismus

$$F\colon \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K.$$

Was ist $F(\infty)$?

Aufgabe 29.12. Es sei $F = G/H$ eine rationale Funktion über dem Körper K. Interpretiere F als Morphismus

$$F\colon \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K.$$

Aufgabe 29.13. Es sei K ein Körper und sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve. Es sei $P \in C$ ein Punkt der Kurve und sei

$$\varphi\colon C \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch die Projektion weg vom Punkt definierte Morphismus. Bei dieser Abbildung wird also ein Punkt $Q \in C$, $Q \neq P$, auf die durch Q und P gegebene *Sekante* abgebildet.

(1) Sei $K = \mathbb{C}$ und sei Q_n eine Folge auf C, die in der komplexen Topologie gegen P konvergiert. Konvergiert $\varphi(Q_n)$?
(2) Besitzt $\varphi(Q_n)$ einen Häufungspunkt?
(3) Sei P ein glatter Punkt. Zeige, dass es eine Fortsetzung des Morphismus auf ganz C gibt.

Aufgabe 29.14. Diskutiere die Situation aus Aufgabe 29.13 für das Achsenkreuz

$$V_+(YZ) \subset \mathbb{P}^2$$

und den Kreuzungspunkt $(1, 0, 0)$.

Aufgabe 29.15. Es sei $F = G/H$ eine rationale Funktion über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (oder den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) mit dem zugehörigen Morphismus

$$F\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}.$$

Zeige, dass

$$F(\infty) = c \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$$

genau dann gilt, wenn die Folge

$$\frac{G(n)}{H(n)}$$

für $n \to \infty$ gegen c konvergiert (was für $c = \infty$ sinnvoll zu interpretieren ist).

Aufgabe 29.16.*

Sei K ein Körper. Betrachte die affine ebene Kurve

$$C = V\left(Y - X^3 + X + 2\right).$$

Definiere einen Isomorphismus zwischen C und der affinen Geraden $\mathbb{A}^1_K$. Lässt sich ein solcher Isomorphismus zu einem Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^1_K$ und dem projektiven Abschluss $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2_K$ fortsetzen?

Aufgabe 29.17. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $C = V_+\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) \subset \mathbb{P}^2_K$. Finde eine projektive Parametrisierung von C.

Aufgabe 29.18.*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G, H \in K[X]$ Polynome in einer Variablen vom Grad $d > e \geq 0$ ohne gemeinsame Nullstelle. Zeige, dass die in Bmerkung 29.9 beschriebene projektive Parametrisierung des Graphen der rationalen Funktion G/H, also

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K,\ (x,y) \longmapsto \left(\hat{H}(x,y)xy^{d-e-1},\ \hat{G}(x,y),\ \hat{H}(x,y)y^{d-e} \right),$$

in der Tat die in Satz 29.8 gegebene Gleichung $\hat{H}(X,Z)YZ^{d-e-1} - \hat{G}(X,Z) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 29.19. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G, H \in K[X]$ Polynome in einer Variablen vom Grad $d \leq e$ ohne gemeinsame Nullstelle. Zeige, dass die in Bmerkung 29.9 beschriebene projektive Parametrisierung des Graphen der rationalen Funktion G/H, also

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K,\ (x,y) \longmapsto \left(\hat{H}(x,y)x,\ \hat{G}(x,y)y^{e-d+1},\ \hat{H}(x,y)y \right),$$

in der Tat die in Satz 29.8 gegebene Gleichung $\hat{H}(X,Z)Y - \hat{G}(X,Z)Z^{e-d+1} = 0$ erfüllt.

Aufgabe 29.20. Betrachte die durch die homogene Gleichung

$$ZX^2 = Y^3$$

gegebene projektive Kurve $C \subset \mathbb{P}^2_K$ über einem Körper K der Charakteristik 0.

a) Bestimme die singulären Punkte der Kurve.

b) Zeige, dass durch die Zuordnung

$$\varphi : (S,T) \longmapsto \left(T^3,\ ST^2,\ S^3\right) = (X,Y,Z)$$

eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

gegeben ist.

c) Zeige, dass die Bildpunkte von φ auf der Kurve C liegen.

d) Welche Punkte in $\mathbb{P}^1$ entsprechen den singulären Punkten der Kurve C.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.21. (3 Punkte)

Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass die Projektion des $\mathbb{P}^n_K$ auf $\mathbb{P}^{n-1}_K$ mit Zentrum P durch die Matrix gegeben ist, also durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29.22. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Kurve vom Grad $d \geq 2$. Zeige, dass es einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$ derart gibt, dass jede Faser aus maximal $d-1$ Punkten besteht.

Aufgabe 29.23. (5 Punkte)

Es sei $C = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subset \mathbb{P}^2_K$ die *Fermat-Kubik* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 3$. Beschreibe explizit einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$, bei dem über jedem Punkt maximal zwei Punkte liegen.

Aufgabe 29.24. (4 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ der komplex-projektive Abschluss des Einheitskreises. Bestimme eine explizite bijektive Parametrisierung $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to C$.

Aufgabe 29.25. (6 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Quadrik (also eine Kurve vom Grad zwei) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Zeige, dass es eine Isomorphie der Kurve mit der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ gibt.

Aufgabe 29.26. (5 Punkte)

Man gebe für die projektive Lemniskate von Bernoulli

$$V_+\left(\left(X^2+Y^2\right)^2 - Z^2X^2 + Z^2Y^2\right) \subset \mathbb{P}^2_K$$

einen surjektiven Morphismus auf eine projektive Quadrik an. Wie viele Punkte der Lemniskate werden dabei auf einen Punkt der Quadrik abgebildet?