TAMPEREEN YLIOPISTO

Informaatiotieteiden yksikkö

Differenssiyhtälöt

Pentti Haukkanen

Sisältö

Luku 1

Differenssilaskentaa

1.1 Lineaarisista operaattoreista

Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}$. Merkitään $\mathcal{F}_S = \{f \mid f : S \to \mathbb{R} \text{ on funktio}\}$. Silloin $\mathcal{F}_S$ muodostaa funktioiden yhteenlaskun ja skalaarillakertomisen suhteen ($\mathbb{R}$-kertoimisen) vektoriavaruuden, kun

$$\begin{aligned}
&f + g : S \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\
&af : S \to \mathbb{R}, (af)(x) = a(f(x)).
\end{aligned}$$

Funktioiden $f, g \in \mathcal{F}_S$ (tavallinen) kertolasku on

$$fg : S \to \mathbb{R}, (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Joukko $\mathcal{F}_S$ muodostaa funktioiden yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen renkaan.

Määritelmä 1.1.1. Kuvausta $A : \mathcal{F}_S \to \mathcal{F}_S$ sanotaan *lineaariseksi operaattoriksi*, jos
1) $A(f+g) = A(f) + A(g)$ aina, kun $f, g \in \mathcal{F}_S$,
2) $A(af) = a\,A(f)$ aina, kun $a \in \mathbb{R}$ ja $f \in \mathcal{F}_S$.

Huomautus 1.1.1. Kuvaus $A : \mathcal{F}_S \to \mathcal{F}_S$ on lineaarinen operaattori, jos ja vain jos

$$A(af + bg) = a\,A(f) + b\,A(g)$$

aina, kun $a, b \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \mathcal{F}_S$.

Huomautus 1.1.2. $A(f) \in \mathcal{F}_S$ eli $A(f)$ on funktio $S \to \mathbb{R}$. Usein merkitään lyhyesti $A(f) = Af$ ja $[A(f)](x) = Af(x)$ etenkin, kun A on lineaarinen operaattori.

Määritelmä 1.1.2. Merkitään symbolilla $\mathcal{L}_S$ kaikkien lineaaristen operaattoreiden $\mathcal{F}_S \to \mathcal{F}_S$ joukkoa. Määritellään lineaaristen operaattoreiden A ja

B yhteen- ja kertolasku sekä skalaarilla kertominen kaavoilla

$$\begin{aligned}(A+B)f &= Af+Bf,\\ (AB)f &= A(Bf)\overset{\text{merk}}{=}ABf\\ (aA)f &= a(Af)\overset{\text{merk}}{=}aAf.\end{aligned}$$

(Siis kertolasku tarkoittaa tässä funktioiden yhdistämistä.) Määritellään lineaariset operaattorit O ja I kaavoilla

$$\begin{aligned}&Of \text{ on nollafunktio} \quad \forall f \in \mathcal{F}_S,\\ &If = f \quad \forall f \in \mathcal{F}_S.\end{aligned}$$

Lause 1.1.1. *Joukko $\mathcal{L}_S$ muodostaa vektoriavaruuden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Silloin O on vektoriavaruuden $\mathcal{L}_S$ nollavektori (ts. $A+O=O+A=A\ \forall A\in\mathcal{L}_S$).*

Lause 1.1.2. *Joukko $\mathcal{L}_S$ muodostaa (ei-kommutatiivisen) renkaan yhteen- ja kertolaskun suhteen. Silloin O ja I ovat renkaan $\mathcal{L}_S$ nolla- ja ykkösalkiot (ts. $A+O=O+A=A$ ja $AI=IA=A\ \forall A\in\mathcal{L}_S$).*

Huomautus 1.1.3. Renkaassa määritellään potenssi kaavoilla

$$\begin{aligned}A^0 &= I,\\ A^n &= AA^{n-1},\end{aligned}$$

missä $n\in\mathbb{Z}^+$. Jos A ja B kommutoivat (ts. jos $AB=BA$), niin voidaan todistaa, että

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k},$$

missä $n\in\mathbb{Z}_0^+$.

Huomautus 1.1.4. Lineaarisen operaattorin käsite on mahdollista määritellä myös yleisemmässä struktuurissa kuin vektoriavaruudessa $\mathcal{F}_S$.

1.2 Differenssi

Olkoon $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kiinteä, olkoon S ($\subseteq\mathbb{R}$) sellainen joukko, että jos $x\in S$, niin $x+h\in S$, ja olkoon $f:S\to\mathbb{R}$ funktio.

Määritelmä 1.2.1. Funktion f ensimmäinen *differenssi* (askelpituudella h) $\triangle f$ on sellainen funktio, että

$$\triangle f(x)=f(x+h)-f(x),$$

kun $x\in S$.

Esimerkki 1.2.1.

a) $\triangle x = h,$

b) $\triangle a^x = a^x(a^h - 1), \quad a \in \mathbb{R},$

c) $\triangle a = 0, \quad a \in \mathbb{R},$

d) $\triangle x^2 = 2hx + h^2.$

Huomautus 1.2.1. Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, niin

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\triangle f(x)}{h}.$$

Määritelmä 1.2.2. *Siirto* E määritellään kaavalla

$$Ef(x) = f(x+h).$$

Lause 1.2.1. *Differenssi* $\triangle$ *ja siirto* E *ovat lineaarisia operaattoreita.*

Todistus. Todistetaan, että $\triangle$ on lineaarinen operaattori. Todistetaan ensin, että se on additiivinen. Differenssin määritelmän mukaan

$$\triangle(f+g)(x) = (f+g)(x+h) - (f+g)(x),$$

kun $x \in S$. Näin ollen funktoiden summan määritelmän perusteella

$$\triangle(f+g)(x) = \big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big).$$

Tavallisella reaalialgebralla saadaan

$$\triangle(f+g)(x) = \big(f(x+h) - f(x)\big) + \big(g(x+h) - g(x)\big).$$

Uudelleen differenssin ja funktoiden summan määritelmien nojalla

$$\triangle(f+g)(x) = \triangle f(x) + \triangle g(x) = (\triangle f + \triangle g)(x).$$

Täten

$$\triangle(f+g) = \triangle f + \triangle g$$

eli $\triangle$ on additiivinen.

Todistetaan sitten, että $\triangle$ on homogeeninen (luennot/harj). Koska $\triangle$ on additiivinen ja homogeeninen, se on lineaarinen.

Siirron E lineaarisuus todistetaan samalla tavalla (luennot/harj). $\square$

Määritelmä 1.2.3. Funktion f n*. differenssi* on $\triangle^n f$ ja n*. siirto* on $E^n f$ $(n \geq 0)$.

Esimerkki 1.2.2. Selvästi $\triangle^2 x^2 = 2h^2$, $\triangle^3 x^2 = 0$.

Huomautus 1.2.2. Selvästi $\triangle = E - I$. Jos $n \in \mathbb{Z}_0^+$, niin

$$E^n f(x) = f(x + nh)$$

.

Lause 1.2.2. *Oletetaan, että $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Silloin*

a) $\quad \triangle^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k,$

b) $\quad E^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k.$

Lause 1.2.3. *Oletetaan, että $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Silloin*

a) $\quad \triangle(uv) = u(\triangle v) + (\triangle u)(Ev),$

b) $\quad \triangle \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{vEv},\ v(x) \neq 0\ \forall x \in S,$

c) $\quad E^n(uv) = (E^n u)(E^n v),$

d) $\quad E^n \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{E^n u}{E^n v},\ v(x) \neq 0\ \forall x \in S.$

Todistus. Todistetaan kaava a). Olkoon $x \in S$. Silloin funktoiden summan ja tulon määritelmien perusteella

$$\Big(u(\triangle v) + (\triangle u)(Ev)\Big)(x) = u(x)(\triangle v)(x) + (\triangle u)(x)(Ev)(x).$$

Nyt differenssin $\triangle$ ja siirron E määritelmien nojalla

$$\Big(u(\triangle v) + (\triangle u)(Ev)\Big)(x) = u(x)\Big(v(x+h) - v(x)\Big) + \Big(u(x+h) - u(x)\Big)v(x+h).$$

Soveltamalla tavallista reaalialgebraa saadaan

$$\Big(u(\triangle v) + (\triangle u)(Ev)\Big)(x) = (uv)(x+h) - (uv)(x),$$

joten differenssin $\triangle$ määritelmän mukaan

$$\Big(u(\triangle v) + (\triangle u)(Ev)\Big)(x) = \triangle(uv)(x).$$

Täten kaava a) on todistettu.

Muut kaavat todistetaan samalla tavalla (luennot/harj).

□

Huomautus 1.2.3. Operaattori $\triangle$ on itse asiassa *eteenpäinen* differenssioperaattori. *Taaksepäinen* differenssi ∇ määritellään kaavalla

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h).$$

1.3 Kertomafunktio ja -polynomi

Määritelmä 1.3.1. Olkoon n ei-negatiivinen kokonaisluku. *Kertomafunktio* $x^{(n)}$ [lue: x kertomaan n tai x n:nteen kertomaan] määritellään kaavalla

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1, \\ x^{(n)} &= x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.3.1. Olkoon $h = 2$. Silloin

$$\begin{aligned} 3^{(0)} &= 1, & 3^{(1)} &= 3, & 3^{(2)} &= 3, & 3^{(3)} &= -3, \ldots \\ 4^{(0)} &= 1, & 4^{(1)} &= 4, & 4^{(2)} &= 8, & 4^{(3)} &= 4^{(4)} = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Huomautus 1.3.1. Jos $h = 1$ ja $n \in \mathbb{Z}^+$, niin $n^{(n)} = n!$.

Lause 1.3.1. *Oletetaan, että k, $n \in \mathbb{Z}^+$. Silloin*

$$\triangle^k x^{(n)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-(k-1))h^k x^{(n-k)}, & \text{kun } k \leq n, \\ 0, & \text{kun } k > n. \end{cases}$$

Siis erikoisesti

$$\triangle x^{(n)} = nhx^{(n-1)}.$$

Todistus. Todistetaan kaava $\triangle x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$. Differenssin määritelmän perusteella

$$\triangle x^{(n)} = (x+h)^{(n)} - x^{(n)}.$$

Näin ollen kertoman määritelmän nojalla

$$\triangle x^{(n)} = (x+h)x(x-h)\cdots(x-(n-2)h) - x(x-h)\cdots(x-(n-2)h)(x-(n-1)h),$$

joten reaalialgebralla saadaan

$$\triangle x^{(n)} = x(x-h)\cdots(x-(n-2)h)\overbrace{\Big[(x+h)-(x-(n-1)h)\Big]}^{=nh}.$$

Siis kertoman määritelmän mukaan kaava $\triangle x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$ pitää paikkansa. Yleisempi kaava voidaan todistaa induktiolla luvun k suhteen. □

Huomautus 1.3.2. Lause 1.3.1 pitää paikkansa myös, kun muuttujan x paikalla on $x + a$.

Määritelmä 1.3.2. Olkoot $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ja olkoon $a_n \neq 0$. Silloin funktiota

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \cdots + a_n x^{(n)}$$

sanotaan n. asteen *kertomapolynomiksi.* (”Tavallista” polynomia kutsutaan tässä *potenssipolynomiksi.*)

Lause 1.3.2. *Jokainen n. asteen kertomapolynomi voidaan esittää n. asteen potenssipolynomina ja päinvastoin.*

Todistus. 1) Jokainen n. asteen kertomapolynomi voidaan esittää n. asteen potenssipolynomina, sillä $x^{(n)}$ on muotoa

$$x^{(n)} = x(x-h)\cdots(x-(n-1)h) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x.$$

2) Todistetaan, että jokainen potenssipolynomi voidaan esittää kertomapolynomina. Riittää, kun etsimme sellaiset luvut $a_0, a_1, \ldots, a_n$, että

$$(*) \quad x^n = a_0 + a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \cdots + a_n x^{(n)} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

eli

$$x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-h) + \cdots + a_n x(x-h)\ldots(x-(n-1)h).$$

Selvästi on oltava $a_0 = 0$, $a_n = 1$. Siis

$$\begin{aligned} x^n &= a_1 x + a_2 x(x-h) + \ldots \\ &\quad + a_{n-1}x(x-h)\cdots(x-(n-2)h) \\ &\quad + x(x-h)\cdots(x-(n-1)h). \end{aligned}$$

Sijoitetaan vuorotellen $x = h$, $x = 2h$, $\ldots$, $x = (n-1)h$. Saadaan $n-1$ yhtälöä

$$\begin{aligned} x &= h\colon \quad h^n = a_1 h \\ x &= 2h\colon \quad (2h)^n = a_1 2h + a_2 2h^2 \\ &\cdots \\ x &= (n-1)h\colon \quad ((n-1)h)^n = a_1(n-1)h + a_2(n-1)(n-2)h^2 + \cdots \\ &\qquad\qquad (n-1)!h^{n-1}. \end{aligned}$$

Tästä yhtälöryhmästä saadaan tuntemattomille kertoimille $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ yksikäsitteinen ratkaisu, sillä kerroinmatriisin determinantti on $h \cdot 2h^2 \cdots (n-1)!h^{(n-1)} \neq 0$.

Näin saadaan sellaiset luvut $a_0, a_1, \ldots, a_n$, että $(*)$ on voimassa aina, kun $x = h$, $x = 2h$, $\ldots$, $x = (n-1)h$. Lisäksi $x = 0$ toteuttaa yhtälön $(*)$, sillä $a_0 = 0$.

Yhtälön $(*)$ puolten erotus

$$x^n - a_0 - a_1 x^{(1)} - a_2 x^{(2)} - \cdots - a_n x^{(n)}$$

on $(n-1)$. asteen polynomi ($a_n = 1$), jolla on n nollakohtaa

$$0, h, 2h, \ldots, (n-1)h.$$

Siis se on identtisesti nolla eli yhtälö $(*)$ toteutuu aina, kun $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Esimerkki 1.3.2. Kertomapolynomi $x^{(3)}$ saadaan potenssipolynomina suoraan kertomalla, tarkemmin sanoen

$$x^{(3)} = x(x-h)(x-2h) = x^3 - 3hx^2 + 2h^2 x.$$

Esimerkki 1.3.3. Esitetään x^3 kertomapolynomina. Pitää siis löytää sellaiset kertoimet a_0, a_1, a_2, a_3, että

$$\begin{aligned} x^3 &= a_0 + a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + a_3 x^{(3)} \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x(x-h) + a_3 x(x-h)(x-2h). \end{aligned}$$

Selvästi $a_0 = 0$ ja $a_3 = 1$. Entä a_1 ja a_2?

I tapa: Sijoitetaan

$$\begin{aligned} x &= h: \quad h^3 = a_1 h \\ x &= 2h: \quad (2h)^3 = a_1 2h + a_2 2h \cdot h. \end{aligned}$$

Siis $a_1 = h^2$ ja $a_2 = 3h$, joten

$$x^3 = h^2 x^{(1)} + 3h x^{(2)} + x^{(3)}.$$

II tapa: Kirjoitetaan tavoiteltu kertomapolynomi potenssipolynomina ja asetetaan kertoimet yhtäsuuriksi, ts.

$$\begin{aligned} x^3 &= a_1 x + a_2 x^2 - a_2 h + x^3 - 3hx^2 + 2h^2 x \\ &= (a_1 - a_2 h + 2h^2)x + (a_2 - 3h)x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 h + 2h^2 &= 0, \\ a_2 - 3h &= 0 \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} a_1 &= h^2, \\ a_2 &= 3h. \end{aligned}$$

Lause 1.3.3. *Olkoon $Q(x)$ n. asteen potenssipolynomi. Silloin*

$$Q(x) = Q(0) + \frac{\triangle Q(0)}{h} x^{(1)} + \frac{\triangle^2 Q(0)}{2! h^2} x^{(2)} + \cdots + \frac{\triangle^n Q(0)}{n! h^n} x^{(n)}. \tag{1.1}$$

Todistus. Kirjoitetaan

$$Q(x) = a_0 + a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)}.$$

Kun differoidaan tämä puolittain k kertaa, saadaan

$$\triangle^k Q(x) = k! h^k a_k + \text{termejä joissa tekijänä } x.$$

Asetetaan $x = 0$. Silloin saadaan

$$a_k = \frac{\triangle^k Q(0)}{k! h^k}.$$

Täten (1.1) on voimassa. □

Huomautus 1.3.3. Asetetaan $h = 1$ ja $x = n \in \mathbb{Z}_0^+$. Silloin

$$Q(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k Q(0).$$

Lauseen 1.2.2 perusteella saadaan käänteinen kaava

$$\triangle^n Q(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} Q(k).$$

Esimerkki 1.3.4. Esitetään vielä esimerkin 1.3.3 kahden tavan lisäksi kolmas tapa potenssipolynomin muuttamiseksi kertomapolynomiksi. Laskemalla differenssit saadaan

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x^3 \\
\triangle Q(x) &= 3hx^2 + 3h^2x + h^3 \\
\triangle^2 Q(x) &= 6h^2x + 6h^3 \\
\triangle^3 Q(x) &= 6h^3.
\end{aligned}$$

Siis lauseen 1.3.3 perusteella

$$x^3 = h^2x^{(1)} + 3hx^{(2)} + x^{(3)}.$$

Määritelmä 1.3.3. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Silloin

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+nh)^{(n)}}.$$

Lause 1.3.4. *Kun $n \in \mathbb{Z}^+$, niin*

$$\triangle x^{(-n)} = -nhx^{(-n-1)}.$$

Todistus. Sovelletaan määritelmää 1.3.3 ja lausetta 1.2.3b), jossa nyt $u(x) = 1$ ja $v(x) = (x+nh)^{(n)}$. Sen jälkeen käytetään huomautusta 1.3.2. Yksityiskohdat (luennot/harj). □

Huomautus 1.3.4. Kertomafunktio $x^{(n)}$ on itse asiassa *laskeva* kertoma. *Nouseva* kertomafunktio $x^{[n]}$ määritellään kaavalla

$$\begin{aligned}
x^{[0]} &= 1, \\
x^{[n]} &= x(x+h)(x+2h)\cdots(x+(n-1)h), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

1.4 Antidifferenssi

Määritelmä 1.4.1. Olkoon $f \in \mathcal{F}_S$. Funktio $F \in \mathcal{F}_S$ on funktion f *antidifferenssi*, jos f on funktion F differenssi eli

$$\triangle F = f.$$

Silloin merkitään

$$F = \triangle^{-1} f.$$

Lause 1.4.1. *Funktion F differenssi on nollafunktio eli $\triangle F \equiv 0$ silloin ja vain silloin, kun F on h-jaksollinen funktio (ts. $\forall x \in S : F(x+h) = F(x)$).*

Todistus. Todistetaan lause ekvivalenssiketjulla

$$\triangle F \equiv 0 \iff \triangle F(x) = 0 \ \ \forall x \in S \iff F(x+h) - F(x) = 0 \ \ \forall x \in S$$

$$\iff F(x+h) = F(x) \ \ \forall x \in S \iff F \ \text{ on } h\text{-jaksollinen funktio.}$$

□

Lause 1.4.2. *Olkoon $\triangle F = f$. Silloin G on funktion f antidifferenssi, jos ja vain jos $G = F + C$, missä C on h-jaksollinen funktio.*

Todistus. Luennot/harj □

Lause 1.4.3. *Antidifferenssi toteuttaa ominaisuudet*

a) $\triangle^{-1}(f+g) = \triangle^{-1}f + \triangle^{-1}g$,

b) $\triangle^{-1}(Cf) = C\triangle^{-1}f$, *missä C on h-jaksollinen funktio,*

c) $\triangle^{-1}(u\triangle v) = uv - \triangle^{-1}[(Ev)(\triangle u)]$,

d) $\triangle^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)h} + C(x)$, *missä C on h-jaksollinen funktio ja $n \neq -1$.*

Todistus. Nämä antidifferenssikaavat seuraavat suoraan vastaavista differenssikaavoista. □

Esimerkki 1.4.1. a) Kun potenssipolynomi antidifferoidaan, muutetaan se ensin kertomapolynomiksi, joka on helpompi antidifferoida. Lasketaan $\triangle^{-1}x^3$. Muutetaan x^3 ensin kertomapolynomiksi ja sovelletaan sen jälkeen edellistä lausetta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\triangle^{-1}x^3 &= \triangle^{-1}(x^{(3)} + 3hx^{(2)} + h^2x^{(1)}) \\ &= \frac{x^{(4)}}{4h} + x^{(3)} + \frac{h}{2}x^{(2)} + C.\end{aligned}$$

b) Lasketaan $\triangle^{-1}a^x$. Kun $a \neq 1$,

$$\begin{aligned}\triangle a^x &= a^x(a^h - 1) \\ \triangle^{-1}\triangle a^x &= \triangle^{-1}a^x(a^h - 1) \\ a^x + C' &= (a^h - 1)\triangle^{-1}a^x \\ \triangle^{-1}a^x &= (a^h - 1)^{-1}a^x + C.\end{aligned}$$

Erityisesti

$$\triangle^{-1}2^x = (2^h - 1)^{-1}2^x + C.$$

Lisäksi

$$\triangle^{-1}1 = \frac{x}{h} + C.$$

Olkoon $h = 1$. Silloin

$$\triangle^{-1}2^x = 2^x + C$$

ja

$$\triangle^{-1}1 = x + C.$$

c) Lasketaan $\triangle^{-1}x2^x$ osittaisantidifferenssikaavalla, kun $h = 1$. Valitaan $u(x) = x$ ja $\triangle v(x) = 2^x$. Silloin $\triangle u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ ja $Ev(x) = 2^{x+1}$. Näin ollen

$$\triangle^{-1}x2^x = x2^x - \triangle^{-1}2^{x+1}1 = x2^x - 2\triangle^{-1}2^x = x2^x - 2^{x+1} + C = 2^x(x-2) + C.$$

Vastauksen voi tarkistaa differoimalla funktion $2^x(x-2)$.

1.5 Summa

Funktion antidifferenssi on integraalifunktion diskreetti vastine. Vastaavasti summa on tietyssä mielessä määrätyn integraalin vastine.

Lause 1.5.1. *Olkoon* $\triangle F = f$ *ja* $n \in \mathbb{Z}_0^+$. *Silloin*

$$\sum_{k=0}^{n} f(a+kh) = F(a+(n+1)h) - F(a).$$

Todistus. Oletuksen mukaan

$$\begin{aligned}
f(a) &= \triangle F(a) = F(a+h) - F(a) \\
f(a+h) &= \triangle F(a+h) = F(a+2h) - F(a+h) \\
f(a+2h) &= \triangle F(a+2h) = F(a+3h) - F(a+2h) \\
&\vdots \\
f(a+nh) &= \triangle F(a+nh) = F(a+(n+1)h) - F(a+nh).
\end{aligned}$$

Kun lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} f(a+kh) = F(a+(n+1)h) - F(a).$$

□

Seuraus 1.5.1. *Olkoon* $0 \le a \le b$. *Silloin*

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = F(b+1) - F(a) = \Big/_{a}^{b+1} F(k),$$

missä $\triangle F = f$, *ts.*

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \Big/_{a}^{b+1} \triangle^{-1} f(k).$$

Todistus. Asetetaan edelliseen lauseeseen $h = 1$ ja merkitään $b = a + n$. $\square$

Seuraus 1.5.1 on kätevä tapa laskea joitakin summia.

Esimerkki 1.5.1. Seurauksen 1.5.1 mukaan

$$\sum_{k=1}^{n} k = \int_{1}^{n+1} \triangle^{-1} k.$$

Antidifferoimalla saadaan

$$\triangle^{-1} k = \triangle^{-1} k^{(1)} = \frac{1}{2} k^{(2)},$$

koska $h = 1$. Siis

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n+1)^{(2)} - \frac{1}{2}1^{(2)} = \frac{1}{2}(n+1)n - \frac{1}{2}1(1-1) = \frac{1}{2}(n+1)n.$$

Huomautus 1.5.1. Jos $h = 1$, niin

$$\triangle^{-1} f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) + C.$$

Siis jos antidifferenssi tunnetaan, saadaan summa, ja kääntäen summa antaa antidifferenssin.

Esimerkki 1.5.2. Kun $h = 1$,

$$\triangle^{-1} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n.$$

Kyseessä ovat ns. harmoniset luvut.

Luku 2

Differenssiyhtälöistä

2.1 Differenssiyhtälön määritelmä

Määritelmä 2.1.1. n. kertaluvun differenssiyhtälö on muotoa

$$F(x, y, \triangle y, \ldots, \triangle^n y) = 0, \tag{2.1}$$

missä x on muuttuja ja y sen tuntematon funktio.

Esittämällä differenssit siirto-operaattorin avulla saadaan (2.1) muotoon

$$G(x, y, Ey, \ldots, E^n y) = 0$$

eli

$$G(x, y(x), y(x+h), \ldots, y(x+nh)) = 0.$$

Usein määrittelyjoukko on ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}_0^+$, jolloin merkitään $x = k$. Lisäksi usein $h = 1$. Tällöin kirjoitetaan $y(k) = y_k$ ja siis

$$G(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n}) = 0. \tag{2.2}$$

Jatkossa differenssiyhtälö on aina muotoa (2.2).

Differenssiyhtälön ratkaisut ovat (reaali)lukujonoja $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ eli $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$. Lukujonon käsite on identtinen funktion $\mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R}$ käsitteen kanssa. Lukujonot $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ ja $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ ovat samat, jos ja vain jos $y_k = z_k$ aina, kun $k = 0, 1, \ldots$

Esimerkiksi jono $(1, 1, 1, \ldots)$ vastaa funktiota $y(k) = y_k = 1$, kun $k = 0, 1, 2, \ldots$ Jono $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ vastaa funktiota $y(k) = y_k = 1$, kun k on parillinen (ja ≥ 0), ja $y(k) = y_k = 0$, kun k on pariton (ja ≥ 1). Siis $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ jne. Vastaavasti esimerkiksi funktiota $y(k) = 2^k$ vastaa jono $(1, 2, 2^2, \ldots, 2^k, \ldots)$.

Esimerkki 2.1.1. Esitettävä differenssiyhtälö

$$\triangle^3 y + \triangle^2 y + \triangle y + y = x$$

muodossa (2.2). Selvästi

$$\begin{aligned}\triangle^3 y+\triangle^2 y+\triangle y+y &= (E-I)^3y+(E-I)^2y+(E-I)y+y\\ &= (E^3-3E^2+3E-I)y+(E^2-2E+I)y+(E-I)y+y\\ &= E^3y-2E^2y+2Ey.\end{aligned}$$

Siis

$$E^3y-2E^2y+2Ey=x$$

eli

$$y(x+3h)-2y(x+2h)+2y(x+h)=x.$$

Koska $x\in\mathbb{Z}_0^+$ (jolloin merkitään $x=k$) ja $h=1$, niin

$$y(k+3)-2y(k+2)+2y(k+1)=k.$$

Lisäksi merkitään $y(k)=y_k$. Siis

$$y_{k+3}-2y_{k+2}+2y_{k+1}=k.$$

Huomautus 2.1.1. Kun määrittelyjoukko on $\mathbb{Z}_0^+$ ja $h=1$, niin h-jaksollinen funktio on vakiofunktio.

2.2 Yleinen lineaarinen differenssiyhtälö

Määritelmä 2.2.1. *Lineaarinen n.* kertaluvun differenssiyhtälö on muotoa

$$y_{k+n}+a_k^{(1)}y_{k+n-1}+\cdots+a_k^{(n)}y_k=b_k, \tag{2.3}$$

missä k $(\in\mathbb{Z}_0^+)$ on muuttuja ja y sen tuntematon funktio (eli tässä tapauksessa tuntematon jono). Yhtälön (2.3) sanotaan olevan *aito*, jos $a_k^{(n)}\neq 0$ aina, kun $k\in\mathbb{Z}_0^+$.

Huomautus 2.2.1. Tässä monisteessa differenssiyhtälöt ovat aitoja (ellei toisin mainita).

Huomautus 2.2.2. Merkinnässä $a_k^{(n)}$ kirjain n tarkoittaa yläindeksiä, ei kertomaa. Asiayhteydestä selviää, kumpaa tarkoitetaan.

Määritelmä 2.2.2. Lineaarinen n. kertaluvun differenssiyhtälö on *homogeeninen*, jos $b_k\equiv 0$ ts. jos differenssiyhtälö on muotoa

$$y_{k+n}+a_k^{(1)}y_{k+n-1}+\cdots+a_k^{(n)}y_k=0, \tag{2.4}$$

missä k $(\in\mathbb{Z}_0^+)$.

Esimerkki 2.2.1. Yhtälö

$$y_{k+3}+ky_{k+2}+y_{k+1}+(k+5)y_k=k,$$

on kolmannen kertaluvun aito epähomogeeninen lineaarinen differenssiyhtälö. Yhtälö

$$y_{k+3}+y_{k+1}+ky_k=0,$$

on kolmannen kertaluvun epäaito homogeeninen lineaarinen differenssiyhtälö.

2.3 Ratkaisun yksikäsitteisyys

Lause 2.3.1. *Differenssiyhtälöllä (2.3) on täsmälleen yksi* alkuehdot

$$y_0 = \alpha_0, y_1 = \alpha_1, \dots, y_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

toteuttava ratkaisu.

Todistus. Kun $k = 0$ kaavassa (2.3), saadaan

$$y_n = -a_0^{(1)}\alpha_{n-1} - \cdots - a_0^{(n)}\alpha_0 + b_0.$$

Jatkamalla induktiivisesti saadaan kaikki funktion y arvot yksikäsitteisesti. □

Esimerkki 2.3.1. Differenssiyhtälöllä

$$y_{k+2} - y_{k+1} - y_k = 0, y_0 = 0, y_1 = 3,$$

täsmälleen yksi ratkaisu $(0, 3, 3, 6, 9, 15, \dots)$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k, y_0 = 0, y_1 = 3.$$

Jono siis alkaa luvuilla 0 ja 3; seuraavat ovat edellisten kahden summia. Siis kolmas termi on $0 + 3 = 3$, neljäs on $3 + 3 = 6$, viides on $3 + 6 = 9$ jne.

Esimerkki 2.3.2. Differenssiyhtälöllä

$$y_{k+1} = 3y_k, y_0 = 2,$$

täsmälleen yksi ratkaisu, jonka tarkka lauseke on helppo päätellä sijoittamalla muuttujan k arvot $0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{array}{rrcl} & y_0 & = & 2 = 3^0 \cdot 2 \\ k = 0: & y_1 & = & 3y_0 = 3^1 \cdot 2 \\ k = 1: & y_2 & = & 3y_1 = 3^2 \cdot 2 \\ k = 2: & y_3 & = & 3y_2 = 3^3 \cdot 2 \\ & & \dots & \end{array}$$

Tästä saadaan induktiolla ratkaisu

$$y_k = 3^k \cdot 2.$$

2.4 Funktioiden lineaarinen riippumattomuus

Funktioiden lineaarinen riippumattomuus on erikoistapaus yleisen vektoriavaruuden lineaarisesta riippumattomuudesta.

Määritelmä 2.4.1. Funktiot (eli jonot) $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(n)}$ ovat *lineaarisesti riippumattomia*, jos

$$C_1 u_k^{(1)} + C_2 u_k^{(2)} + \dots + C_n u_k^{(n)} \equiv 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0.$$

Muussa tapauksessa funktiot ovat *lineaarisesti riippuvia*.

Esimerkki 2.4.1. Todistetaan, että funktiot k, k^2 ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$. Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi:

$$C_1 k + C_2 k^2 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Valitsemalla muuttujan k arvoiksi 1 ja 2 ($\in \mathbb{Z}_0^+$) saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1^2 &= 0 \\ C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 2^2 &= 0, \end{aligned}$$

jonka ratkaisu on $C_1 = C_2 = 0$. Täten funktiot k, k^2 ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$. Huomaa, että edellä muuttujan k arvot pitää valita määrittelyjoukosta $\mathbb{Z}_0^+$. Siis määrittelyjoukolla saattaa olla vaikutusta lineaariseen riippumattomuuteen.

Esimerkki 2.4.2. Funktiot $k, 2k$ ovat lineaarisesti riippuvia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$, sillä niiden lineaarikombinaatio saadaan nollaksi vaikka ainakin toinen kertoimista poikkeaa nollasta. Esimerkiksi

$$(-2) \cdot k + 1 \cdot 2k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Määritelmä 2.4.2. Funktioiden $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(n)}$ *Casoratin matriisi* on

$$C(k) = \begin{pmatrix} u_k^{(1)} & u_k^{(2)} & \cdots & u_k^{(n)} \\ u_{k+1}^{(1)} & u_{k+1}^{(2)} & \cdots & u_{k+1}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{k+n-1}^{(1)} & u_{k+n-1}^{(2)} & \cdots & u_{k+n-1}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Funktioiden $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(n)}$ *Casoratin determinantti* on

$$D(k) = \det C(k).$$

Huomautus 2.4.1. Jos funktiot eivät ole asiayhteydestä selvät, tulee ilmoittaa, minkä funktioiden Casoratin matriisista ja determinantista on kyse.

Esimerkki 2.4.3. Funktioiden $1, 3^k$ Casoratin determinantti on

$$D(k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3^k \\ 1 & 3^{k+1} \end{pmatrix} = 2 \cdot 3^k.$$

Lause 2.4.1. *Olkoot* $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(n)}$ *differenssiyhtälön (2.4) ratkaisuja. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

a) *Funktiot* $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(n)}$ *ovat lineaarisesti riippuvia.*

b) $\exists k \in \mathbb{Z}_0^+ : D(k) = 0.$

c) $\forall k \in \mathbb{Z}_0^+ : D(k) = 0.$

Todistus. Todistetaan, että a $\Rightarrow$ c $\Rightarrow$ b $\Rightarrow$ a.

a $\Rightarrow$ c: Oletetaan, että funktiot $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippuvia. Silloin on olemassa sellaiset vakiot $C_1, C_2, \ldots, C_n$, että niistä ainakin yksi on nollasta poikkeava ja että

$$\begin{aligned}
C_1 u_k^{(1)} + C_2 u_k^{(2)} + \cdots + C_n u_k^{(n)} &= 0 \\
C_1 u_{k+1}^{(1)} + C_2 u_{k+1}^{(2)} + \cdots + C_n u_{k+1}^{(n)} &= 0 \\
&\cdots \\
C_1 u_{k+n-1}^{(1)} + C_2 u_{k+n-1}^{(2)} + \cdots + C_n u_{k+n-1}^{(n)} &= 0,
\end{aligned}$$

kun $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Yhtälöryhmän kerroinmatriisi on $C(k)$. Koska tällä yhtälöryhmällä on epätriviaali ratkaisu $C_1, C_2, \ldots, C_n$, niin kerroinmatriisin determinantti $D(k) = 0$, kun $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

c $\Rightarrow$ b: Triviaali.

b $\Rightarrow$ a: Oletetaan, että on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_0^+$, että $D(k_0) = 0$. Todistetaan, että funktiot $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippuvia.

Oletuksen perusteella lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned}
C_1 u_{k_0}^{(1)} + C_2 u_{k_0}^{(2)} + \cdots + C_n u_{k_0}^{(n)} &= 0 \\
C_1 u_{k_0+1}^{(1)} + C_2 u_{k_0+1}^{(2)} + \cdots + C_n u_{k_0+1}^{(n)} &= 0 \\
&\cdots \\
C_1 u_{k_0+n-1}^{(1)} + C_2 u_{k_0+n-1}^{(2)} + \cdots + C_n u_{k_0+n-1}^{(n)} &= 0
\end{aligned}$$

on epätriviaali ratkaisu $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Merkitään

$$u_k = C_1 u_k^{(1)} + C_2 u_k^{(2)} + \cdots + C_n u_k^{(n)},$$

kun $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Sijoittamalla on helppo todeta, että u_k toteuttaa differenssiyhtälön (2.4). Lisäksi

$$u_{k_0} = u_{k_0+1} = \cdots = u_{k_0+n-1} = 0.$$

Täten lauseen 2.3.1 todistuksen periaatteella voidaan todeta, että $u_k \equiv 0$, joten on olemassa sellaiset vakiot $C_1, C_2, \ldots, C_n$, että niistä ainakin yksi on nollasta poikkeava ja että

$$C_1 u_k^{(1)} + C_2 u_k^{(2)} + \cdots + C_n u_k^{(n)} \equiv 0.$$

Siis funktiot $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippuvia. $\square$

Seuraus 2.4.1. *Olkoot $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(n)}$ differenssiyhtälön (2.4) ratkaisuja. Silloin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä.*

a) *Funktiot $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.*

b) $\forall k \in \mathbb{Z}_0^+ : D(k) \neq 0.$

c) $\exists k \in \mathbb{Z}_0^+ : D(k) \neq 0.$

Esimerkki 2.4.4. Funktiot $1, 3^k$ ovat erään (siv.) toisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön ratkaisuja. Niiden Casoratin determinantti $D(k) = 2 \cdot 3^k$ on aina nollasta poikkeava, joten edellisen seurauksen perusteella funktiot $1, 3^k$ ovat lineaarisesti riippumattomia. (Riittäisi todeta, että $D(k)$ olisi nollasta poikkeava ainakin yhdellä muuttujan k arvolla.)

2.5 Ratkaisun lineaarialgebrallinen rakenne

Lause 2.5.1. *Lineaarisen n. kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön (2.4) yleinen ratkaisu on*

$$y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \dots + C_n\phi_k^{(n)}, \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

missä $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}, \dots, \phi_k^{(n)}$ ovat differenssiyhtälön (2.4) n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. (Kyseessä on ns. kantaesitys.)

Todistus. Tarkastellaan vektoriavaruutta $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+} = \{f \mid f : \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R} \text{ on funktio}\}$. Olkoon

$$L : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+} \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}, Ly_k = y_{k+n} + a_k^{(1)} y_{k+n-1} + \dots + a_k^{(n)} y_k.$$

Silloin L on lineaarikuvaus (harj.). Siis sen ydin $\ker L$ on vektoriavaruus (tarkemmin sanoen vektoriavaruuden $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}$ aliavaruus.)

Ytimen määritelmän mukaan $\ker L$ kostuu jonoista (y_k), jotka toteuttavat yhtälön

$$Ly_k = 0$$

eli lineaarisen n. kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön (2.4). Siis ratkaisujoukko koostuu vektoriavaruudesta $\ker L$, joka on yhtälön (2.4) ns. *ratkaisuavaruus*.

Lauseen 2.3.1 perusteella arvot $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ määräävät jonon (y_k) täysin yhdessä yhtälön (2.4) kanssa. Siis yhtälön (2.4) ratkaisujen ja joukon $\mathbb{R}^n$ välillä on bijektio. Voidaan todeta, että euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ ja yhtälön (2.4) ratkaisuavaruus ovat isomorfiset. Näin ollen niillä on sama dimensio, joten ratkaisuavaruuden dimensio on n. Siis ratkaisuavaruudella on n vektorin kanta

$$\{\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}, \dots, \phi_k^{(n)}\}.$$

Näin lause 2.5.1 on todistettu. $\square$

Huomautus 2.5.1. Lineaarisen n. kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön (2.4) ratkaisujoukko muodostaa vektoriavaruuden, ns. ratkaisuavaruuden. Kyseessä on lineaarikuvauksen L ydin. Se on vektoriavaruuden $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}$ aliavaruus, ja sen dimensio on sama kuin differenssiyhtälön kertaluku eli n. Kanta määrää vektoriavaruuden täysin, joten ratkaisu saadaan, kun löydetään ratkaisuavaruuden kanta $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}, \ldots, \phi_k^{(n)}$. Useat ratkaisumenetelmät tuottavatkin nimenomaan tämän kannan.

Lause 2.5.2. *Lineaarisen n. kertaluvun differenssiyhtälön (2.3) yleinen ratkaisu on*

$$y_k = \theta_k + \psi_k, \tag{2.6}$$

missä θ_k on vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$\theta_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)}$$

ja ψ_k on koko yhtälön jokin yksittäisratkaisu.

Todistus. 1) Lauseen 2.3.1 perusteella ψ_k on olemassa, ja lauseen 2.5.1 perusteella θ_k on olemassa.

2) Sijoittamalla nähdään, että $\theta_k + \psi_k$ toteuttaa differenssiyhtälön (2.3). (Totea!)

3) Todistetaan, että jokainen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa $\theta_k+\psi_k$ eli muodossa $C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)} + \psi_k$. Olkoon y_k differenssiyhtälön (2.3) jokin ratkaisu. Silloin sijoittamalla nähdään (totea!), että $y_k - \psi_k$ toteuttaa homogeenisen yhtälön (2.4), joten se on muotoa

$$y_k - \psi_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)}.$$

eli

$$y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)} + \psi_k.$$

Siis jokainen ratkaisu on muotoa (2.6). □

Huomautus 2.5.2. Täydellisen lineaarisen n. kertaluvun differenssiyhtälön (2.3) ratkaisujoukko on algebran kielellä sanottuna sivuluokka $\psi_k + \ker L$, ks. lause 2.5.2. Kun vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisuavaruus on löydetty, mmenetelmät keskittyvät koko yhtälön yksittäisratkaisun ψ_k etsimiseen.

2.6 Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differenssiyhtälö

Yhtälö on muotoa

$$y_{k+1} + a_k y_k = b_k.$$

Ratkaisumenetelmä I

Vaihe 1. Etsitään homogeenisen yhtälön

$$y_{k+1} + a_k y_k = 0$$

yleinen ratkaisu $\theta_k = C\phi_k^{(1)}$. (Lause 2.5.1.) Merkitään lyhyesti $\theta_k = C\phi_k$.

Vaihe 2. Etsitään varsinaisen yhtälön jokin yksityisratkaisu ψ_k

a) vakion varioinnilla muodossa $C_k\phi_k$,

b) yritefunktion avulla, kun a_k on vakio ja

$$\begin{array}{lcl} b_k & = & P(k), \quad \text{polynomi} \\ b_k & = & P(k)\alpha^k, \quad \alpha \text{ vakio} \\ b_k & = & P(k)\alpha^k \sin\beta k, \quad \beta \text{ vakio} \\ b_k & = & P(k)\alpha^k \cos\beta k, \\ b_k & \text{on} & \text{edellisten summa.} \end{array}$$

Vaihe 3. Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_k = C\phi_k + \psi_k.$$

(Lause 2.5.2.)

Huomautus 2.6.1. Käytetään lineaarialgebran terminologiaa. Lauseen 2.5.1 perusteella homogeenisen yhtälön ratkaisun kantaesitys on

$$y_k = C\phi_k \ (= \theta_k),$$

missä ϕ_k homogeenisen yhtälön nollafunktiosta poikkeava ratkaisu. Homogeenisen yhtälön ratkaisuavaruus on lineaarikuvauksen

$$L : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+} \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}, Ly_k = y_{k+1} + a_k y_k$$

ydin, joka on

$$\ker L = \{C\phi_k |\, C \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{\phi_k\}.$$

Ytimen (eli ratkaisuavaruuden) kanta on $\{\phi_k\}$ ja ytimen dimensio on 1. Koko yhtälön ratkaisujoukko on lauseen 2.5.2 perusteella

$$\psi_k + \ker L = \psi_k + \{C\phi_k |\, C \in \mathbb{R}\}.$$

Ratkaisumenetelmä II

Yhtälö kerrotaan puolittain sopivalla tekijällä, jotta vasemmalle puolelle saadaan differenssi, ja sen jälkeen yhtälö antidifferoidaan puolittain. Tällainen sopiva tekijä on $(a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1}$, joka on olemassa, koska differenssiyhtälön oletetaan olevan aito. Silloin saadaan

$$\begin{aligned}
&y_{k+1} - a_k y_k = b_k \qquad | \cdot (a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1} \\
&(a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1} y_{k+1} - (a_0 a_1 \cdots a_{k-1})^{-1} y_k = (a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1} b_k \\
&\triangle[(a_0 a_1 \cdots a_{k-1})^{-1} y_k] = (a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1} b_k \\
&(a_0 a_1 \cdots a_{k-1})^{-1} y_k = \triangle^{-1}(a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1} b_k + C \\
&y_k = a_0 a_1 \cdots a_{k-1}[\triangle^{-1}(a_0 a_1 \cdots a_k)^{-1} b_k + C].
\end{aligned}$$

Huomautus 2.6.2. Menetelmässä II ja vakion varioinnissa päädytään samaan antidifferointiin. Antidifferenssi voidaan tarvittaessa määrittää summana, ks. huomautus 1.5.1.

Esimerkki 2.6.1. Ratkaistaan

$$y_{k+1} - (k+1) y_k = (k+1)!.$$

<u>Menetelmä I:</u>

1. Homogeeniyhtälön

$$y_{k+1} - (k+1) y_k = 0$$

eli

$$y_{k+1} = (k+1) y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

yleinen ratkaisu on

$$\begin{array}{lrcl}
k=0 & y_1 & = & y_0 = C \\
k=1 & y_2 & = & 2y_1 = 2y_0 = 2C \\
k=2 & y_3 & = & 3y_2 = 3 \cdot 2C \\
k=3 & y_4 & = & 4y_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2C \\
 & & \vdots & \\
 & y_k & = & k!C = Ck!.
\end{array}$$

(Näin ollen $\{k!\}$ on homogeenisen yhtälön ratkaisuavaruuden kanta. Ratkaisuavaruuden dimensio on siten 1.)

2. Etsitään yksityisratkaisu vakion varioinnilla. Merkitään $y_k = k! C_k$. Silloin

$$\begin{aligned}
y_{k+1} - (k+1) y_k &= (k+1)! C_{k+1} - (k+1) k! C_k = (k+1)!(C_{k+1} - C_k) \\
&= (k+1)! \triangle C_k,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
(k+1)! \triangle C_k &= (k+1)! \\
\triangle C_k &= 1 \\
C_k = \triangle^{-1} 1 &= k(+C') = k
\end{aligned}$$

3. Yleinen ratkaisu on

$$y_k = k!C + k!k = k!(C+k), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Siis $\psi_k = k!k$, $\phi_k = k!$ ja $\theta_k = C(k!)$.)

<u>Menetelmä II:</u>

Saadaan

$$\begin{aligned}
y_{k+1} - (k+1)y_k &= (k+1)! \quad | \cdot \frac{1}{(k+1)!} \\
\frac{y_{k+1}}{(k+1)!} - \frac{y_k}{k!} &= 1 \\
\triangle\left(\frac{y_k}{k!}\right) &= 1 \\
\frac{y_k}{k!} &= \triangle^{-1}1 + C = k + C \\
y_k &= k!(k+C).
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.6.2. Ratkaistaan

$$y_{k+1} - 2y_k = k+1.$$

<u>Menetelmä I:</u>

1. Ratkaistaan ensin homogeeniyhtälö

$$y_{k+1} - 2y_k = 0.$$

Asettamalla muuttujan k arvoiksi $0, 1, 2, \ldots$ saadaan

$$\begin{aligned}
k = 0: \; y_1 &= 2y_0 \\
k = 1: \; y_2 &= 2y_1 = 2^2 \cdot y_0 \\
k = 2: \; y_3 &= 3y_2 = 2^3 \cdot y_0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Alkuarvolle y_0 ei ole ehtoa; se voidaan valita vapaasti. Merkitään $y_0 = C$. Tästä saadaan induktiolla homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu

$$y_k = 2^k C.$$

(Näin ollen $\{2^k\}$ on homogeenisen yhtälön ratkaisuavaruuden kanta. Ratkaisuavaruuden dimensio on siten 1.)

2. Koska $b_k = k+1$ on polynomi, sopiva yritefunktio on polynomi, joka usein on samaa astetta kuin b_k. Etsitään koko yhtälön yksityisratkaisu yritefunktion $y_k = Ak + B$ avulla. Siis sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
A(k+1) + B - 2(Ak+B) &= k+1 \\
-Ak + A - B &= k+1 \\
-A &= 1, \quad A - B = 1 \\
A &= -1, \quad B = -2,
\end{aligned}$$

joten yksityisratkaisu on

$$y_k = -k - 2.$$

(Huomaa, että yritteessä kertoimet A ja B ovat vakioita.)

3. Yleinen ratkaisu on

$$y_k = 2^k C - k - 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Siis $\psi_k = -k - 2$, $\phi_k = 2^k$ ja $\theta_k = C\,2^k$.)

<u>Menetelmä II:</u>

Saadaan

$$\begin{aligned}
y_{k+1} - 2y_k &= k + 1 \quad | \cdot 2^{-(k+1)} \\
2^{-(k+1)} y_{k+1} - 2^{-k} y_k &= (k+1)2^{-(k+1)} \\
\triangle(2^{-k} y_k) &= (k+1)2^{-(k+1)} \\
2^{-k} y_k &= \triangle^{-1}(k+1)2^{-(k+1)} + C \\
y_k &= -k - 2 + 2^k C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{(ositt.antidiff.)}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.6.3. Ratkaistaan

$$y_{k+1} - 2y_k = 2^k.$$

<u>Menetelmä I:</u>

1. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu

$$y_k = 2^k C.$$

2. Yksityisratkaisu yritefunktion avulla. Koska $b_k = 2^k$ on eksponenttifunktio, sopiva yrite on polynomi kertaa 2^k. Yritefunktio $y_k = A2^k$ ei käy, koska se on homogeeniyhtälön ratkaisu. Yritteestä $y_k = (Ak + B)2^k$ valitaan mukaan vain $y_k = Ak2^k$. Siis sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
A(k+1)2^{k+1} - 2Ak2^k &= 2^k \\
2A(k+1)2^k - 2Ak2^k &= 2^k \\
2A2^k &= 2^k \\
A &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(Huomaa, että yritteessä kertoimet ovat vakioita.)

3. Yleinen ratkaisu

$$y_k = 2^k C + \frac{1}{2} k 2^k = 2^k\left(\frac{1}{2}k + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Siis $\psi_k = \frac{1}{2}k2^k = 2^{k-1}$, $\phi_k = 2^k$ ja $\theta_k = C\,2^k$.)

Menetelmä II:

Saadaan

$$\begin{aligned}
y_{k+1} - 2y_k &= 2^k \quad | \cdot 2^{-(k+1)} \\
2^{-(k+1)}y_{k+1} - 2^{-k}y_k &= \frac{1}{2} \\
\triangle\left(2^{-k}y_k\right) &= \frac{1}{2} \\
2^{-k}y_k &= \triangle^{-1}\frac{1}{2} + C \\
y_k &= 2^k(\frac{1}{2}k + C).
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.6.4.

$$y_{k+1} - y_k + ky_{k+1}y_k = 0, \quad y_0 = 2.$$

Osoitetaan, että $y_k \neq 0$, kun $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}_0^+$, että $y_{k_0} = 0$. Silloin

$$y_{k_0} - y_{k_0-1} + (k_0 - 1)y_{k_0}y_{k_0-1} = 0 \quad \text{eli} \quad y_{k_0-1} = 0.$$

Tällä tavalla päättelemme, että $y_k = 0$ aina, kun $k \leq k_0$. Siis erikoisesti $y_0 = 0$, joka on ristiriidassa olettamuksen $y_0 = 2$ kanssa. Siis vastaoletus väärin ja näin ollen $y_k \neq 0$, kun $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Jaetaan nyt yhtälö puolittain tulolla $y_{k+1}y_k$, jolloin saadaan

$$\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_{k+1}} + k = 0.$$

Merkitään

$$z_k = \frac{1}{y_k}.$$

Silloin

$$z_{k+1} - z_k = k.$$

Ratkaistaan tämä yhtälö menetelmä I.

1. Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$z_k = C.$$

2. Etsitään yksityisratkaisua yritteellä $z_k = Ak(+B) = Ak$. Silloin

$$A(k+1) - Ak = k \quad \text{eli} \quad A = k,$$

mikä on mahdotonta, koska A on vakio. Uusi yrite on $z_k = Ak^2 + Bk$. Silloin

$$\begin{aligned} A(k+1)^2 + B(k+1) - Ak^2 - Bk &= k \\ 2Ak + A + B &= k \\ A = \frac{1}{2}, \quad B &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Huomaa, että yritteessä kertoimet ovat vakioita.)

3. Yleinen ratkaisu on

$$z_k = C + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k = \frac{2C + k^2 - k}{2}.$$

Siis

$$y_k = \frac{2}{2C + k^2 - k}.$$

Koska $y_0 = 2$, niin $C = \frac{1}{2}$. Siis

$$y_k = \frac{2}{k^2 - k + 1}.$$

Huomautus 2.6.3. Tarkastellaan yhtälöä $y_{k+1} = ay_k + b$. Se on tyyppiä $y_{k+1} + a_k y_k = b_k$, joten siihen voidaan soveltaa menetelmiä I ja II. Se voidaan ratkaista helposti myös suoraan seuraavalla tavalla, ns. *iteroinnilla* (menetelmä III). Saadaan

$k = 0$: $\quad y_1 = ay_0 + b = aC + b$

$k = 1$: $\quad y_2 = ay_1 + b = a(aC + b) + b = a^2C + ab + b$

$k = 2$: $\quad y_3 = ay_2 + b = a(a^2C + ab + b) + b = a^3C + a^2b + ab + b.$

$$\vdots$$

$$y_k = a^kC + a^{k-1}b + a^{k-2}b + \ldots + ab + b$$

$$= a^kC + \begin{cases} \frac{b}{1-a}, & \text{kun } a \neq 1, \\ bk, & \text{kun } a = 1. \end{cases}$$

Esimerkki 2.6.5. Ratkaistaan yhtälö

$$y_{k+1} = 2y_k + 1$$

vastaavasti. Saadaan

$k = 0$: $\quad y_1 = 2y_0 + 1 = 2C + 1$

$k = 1$: $\quad y_2 = 2y_1 + 1 = 2(2C + 1) + 1 = 2^2C + 2 + 1$

$k = 2$: $$y_3 = 2y_2 + 1 = 2(2^2C + 2 + 1) + 1 = 2^3C + 2^2 + 2 + 1$$

$$\vdots$$

$$y_k = 2^kC + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^kC + \tfrac{1-2^k}{1-2}$$

$$= 2^kC - (1 - 2^k) = (C + 1)2^k - 1 = C'2^k - 1.$$

2.7 Toisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen vakiokertoiminen differenssiyhtälö

Yhtälö on muotoa

$$y_{k+2} + py_{k+1} + qy_k = 0.$$

Ratkaisumenetelmä

Vaihe 1. Muodostetaan karakteristinen yhtälö

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Vaihe 2. Etsitään juuret $r = r_1, r_2$.

Vaihe 3. Ratkaisu on

a)

$$y_k = C_1(r_1)^k + C_2(r_2)^k, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kun $r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$,

b)

$$y_k = C_1r^k + C_2kr^k, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kun $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$,

c)

$$y_k = C_1R^k \sin(k\varphi) + C_2R^k \cos(k\varphi), \quad C_2, C_2 \in \mathbb{R},$$

kun $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; tässä R on kompleksiluvun $\alpha + i\beta$ pituus, ts.

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

ja φ on kompleksiluvun $\alpha + i\beta$ argumentti eli vektorin (α, β) ja x-akselin välinen kulma.

Huomautus 2.7.1. Käytetään lineaarialgebran terminologiaa. Lauseen 2.5.1 perusteella yhtälön ratkaisun kantaesitys on

$$y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

missä $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}$ ovat kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Yhtälön ratkaisuavaruus on lineaarikuvauksen

$$L : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+} \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}, Ly_k = y_{k+2} + py_{k+1} + qy_k,$$

ydin, joka on

$$\mathrm{ker}L = \{C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} | \, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}\}.$$

Ytimen (eli ratkaisuavaruuden) kanta on $\{\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}\}$ ja ytimen dimensio on 2. Kohdassa a kanta on $\{(r_1)^k, (r_2)^k\}$, kohdassa b kanta on $\{r^k, kr^k\}$ ja kohdassa c kanta on $\{R^k \sin k\varphi, R^k \cos k\varphi\}$.

Menetelmän todistus. Riittää todistaa, että funktiot $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}$ ovat ratkaisuja ja että ne ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistetaan kohta a. Kohdan b todistus olkoon harjoitustehtävä, kun taas kohdan c todistus sivuutetaan.

a) Todistetaan ensin, että $y_k = (r_1)^k$ on ratkaisu. Suoraan sijoittamalla saadaan

$$y_{k+2} + py_{k+1} + qy_k = (r_1)^{k+2} + p(r_1)^{k+1} + q(r_1)^k = (r_1)^k\Big((r_1)^2 + p(r_1) + q\Big).$$

Koska r_1 on karakteristisen yhtälön juuri,

$$(r_1)^2 + p(r_1) + q = 0,$$

joten

$$y_{k+2} + py_{k+1} + qy_k = (r_1)^k \overbrace{\Big((r_1)^2 + p(r_1) + q\Big)}^{=0} = 0.$$

Täten $y_k = (r_1)^k$ on ratkaisu. Vastaavasti, $y_k = (r_2)^k$ on ratkaisu.

Todistetaan sitten, että $(r_1)^k, (r_2)^k$ ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$. Olkoon

$$C_1(r_1)^k + C_2(r_2)^k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Asetetaan muuttujalle k arvot 1 ja 2 ($\in \mathbb{Z}_0^+$), jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 &= 0 \\ C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Kerroinmatriisin determinantti on $r_2 - r_1 \neq 0$. Näin ollen yhtälöryhmän ratkaisu on $C_1 = C_2 = 0$. Täten funktiot $(r_1)^k, (r_2)^k$ ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$. (Tämä voitaisiin todistaa myös Casoratin determinantilla ja seurauksella 2.4.1.) Kohta a on siis todistettu.

Esimerkki 2.7.1. Ratkaistaan

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_k = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - 2r + 2 = 0,$$

jonka juuret ovat

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Nyt

$$\alpha = \beta = 1, R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Täten ratkaisu on

$$y_k = \left(\sqrt{2}\right)^k \left(C_1 \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right).$$

Ratkaisuavaruuden kanta on

$$\{\left(\sqrt{2}\right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right), \left(\sqrt{2}\right)^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\}.$$

Esimerkki 2.7.2. Ratkaistaan

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

jonka juuret ovat

$$r = 2 \quad \vee \quad r = 1.$$

Täten ratkaisu on

$$y_k = C_1 2^k + C_2.$$

Ratkaisuavaruuden kanta on $\{2^k, 1\}$.

Esimerkki 2.7.3. Ratkaistaan

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

jonka juuri on

$$r = 2 \quad \text{(2-kertainen juuri)}.$$

Täten ratkaisu on

$$y_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k.$$

Ratkaisuavaruuden kanta on $\{2^k, k2^k\}$.

Esimerkki 2.7.4. [Fibonaccin luvut] *Fibonaccin luvut* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään kaavalla

$$\begin{cases} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ F_0 = 0, \;\; F_1 = 1. \end{cases}$$

Karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Sen juuret ovat

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Yleinen ratkaisu on

$$F_k = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Alkuehtojen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ nojalla

$$\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{array}$$

Ratkaisemalla tämä lineaarinen yhtälöryhmä saadaan

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Siis

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Huomaa, että luvut $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ovat kokonaislukuja.

2.8 Yleinen toisen kertaluvun lineaarinen differenssiyhtälö

Yhtälö on muotoa

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = b_k.$$

Ratkaisumenetelmä

Vaihe 1. Etsitään homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$y_k = C_1 \phi_k^{(1)} + C_2 \phi_k^{(2)}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

missä $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}$ ovat kaksi homogeenisen yhtälön lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. (Lause 2.5.1.) Ratkaisuavaruus on $\ker L$.

Vaihe 2. Etsitään varsinaisen yhtälön jokin yksityisratkaisu ψ_k.

a) Vakioiden varioinnilla muodossa

$$\psi_k = A_k \phi_k^{(1)} + B_k \phi_k^{(2)},$$

missä

$$\begin{aligned} A_k &= -\triangle^{-1} \tfrac{\phi_{k+1}^{(2)} b_k}{D(k+1)}, \\ B_k &= \triangle^{-1} \tfrac{\phi_{k+1}^{(1)} b_k}{D(k+1)}. \end{aligned}$$

Tässä D on funktioiden $\phi^{(1)}$ ja $\phi^{(2)}$ Casoratin determinantti.

b) Yritefunktion avulla, kun $b_k = \cdots$ (vrt. 2.6).

Vaihe 3. Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1 \phi_k^{(1)} + C_2 \phi_k^{(2)} + \psi_k.$$

(Lause 2.5.2.) Ratkaisujoukko on $\psi_k + \ker L$.

Huomautus 2.8.1. Tällä kurssilla yleensä p_k ja q_k ovat vakioita, jolloin kohdassa 1 voidaan käyttää karakteristisen yhtälön menetelmää.

Esimerkki 2.8.1. Ratkaistaan yhtälö

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 1.$$

1. Ratkaistaan vastaava homogeeninen yhtälö

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

jonka ratkaisu on $r = 1, r = 2$. Siis homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1 1^k + C_2 2^k = C_1 + C_2 2^k.$$

Ratkaisuavaruuden kanta on siis $\{1, 2^k\}$.

2. Koko yhtälön yksityisratkaisu etsitään yriteefunktion avulla. Koska $b_k = 1$ on polynomi, sopiva yrite on polynomi. Yritefunktio $y_k = A$ ei käy, koska se on homogeeniyhtälön ratkaisu. Uudesta yritteestä $y_k = Ak + B$ valitaan mukaan vain $y_k = Ak$. Silloin sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} A(k+2) - 3A(k+1) + 2Ak &= 1 \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Yksityisratkaisu on siis $y_k = -k$.

(Huomaa, että yritteessä kertoimet ovat vakioita.)

3. Yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1 + C_2 2^k - k.$$

Esimerkki 2.8.2. Ratkaistaan yhtälö

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 3^k.$$

1. Ratkaistaan vastaava homogeeninen yhtälö

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

jonka ratkaisu on $r = 2, r = 3$. Siis homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1 2^k + C_2 3^k.$$

2. Koko yhtälön yksityisratkaisu etsitään yritefunktion avulla. Yritefunktio $y_k = A3^k$ ei käy, koska se on homogeeniyhtälön ratkaisu. Yritteestä $y_k = (Ak + B)3^k$ valitaan mukaan vain $y_k = Ak3^k$. Silloin sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} A(k+2)3^{k+2} - 5A(k+1)3^{k+1} + 6Ak3^k &= 3^k \\ 9A(k+2)3^k - 15A(k+1)3^k + 6Ak3^k &= 3^k \\ 3A3^k &= 3^k \\ A &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(Huomaa, että yritteessä kertoimet ovat vakioita.)

3. Yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1 2^k + C_2 3^k + \frac{1}{3}k3^k = C_1 2^k + C_2 3^k + k3^{k-1}.$$

Esimerkki 2.8.3. Lasketaan edellisen esimerkin kohta 2 vakioiden varioinnilla. Asetetaan

$$y_k = A_k \phi_k^{(1)} + B_k \phi_k^{(2)},$$

missä

$$\begin{aligned} A_k &= -\triangle^{-1} \frac{\phi_{k+1}^{(2)} b_k}{D(k+1)}, \\ B_k &= \triangle^{-1} \frac{\phi_{k+1}^{(1)} b_k}{D(k+1)}. \end{aligned}$$

Tässä $\phi_k^{(1)} = 2^k, \phi_k^{(2)} = 3^k, b_k = 3^k$. Silloin

$$D(k+1)[= D(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})(k+1)] = \begin{vmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2^{k+2} & 3^{k+2} \end{vmatrix} = 2^{k+1}3^{k+1}.$$

Edelleen

$$\begin{aligned} A_k &= -\triangle^{-1}\frac{3^{k+1}3^k}{2^{k+1}3^{k+1}} = -\triangle^{-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= -\frac{1}{2}\triangle^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\frac{3}{2}-1}(+C') = -\left(\frac{3}{2}\right)^k \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} B_k &= \triangle^{-1}\frac{2^{k+1}3^k}{2^{k+1}3^{k+1}} = \triangle^{-1}\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}k(+C') = \frac{1}{3}k. \end{aligned}$$

3. Yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y_k &= C_1 2^k + C_2 3^k - \left(\frac{3}{2}\right)^k 2^k + \frac{1}{3}k3^k \\ &= C_1 2^k + C_2 3^k - 3^k + \frac{1}{3}k3^k \\ &= C_1 2^k + (C_2 - 1)3^k + k3^{k-1} \\ &= C_1 2^k + C_3 3^k + k3^{k-1}. \end{aligned}$$

2.9 Kertaluvun n lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen differenssiyhtälö

Yhtälö on muotoa

$$y_{k+n} + p_1 y_{k+n-1} + \cdots + p_{n-1}y_{k+1} + p_n y_k = 0. \tag{2.7}$$

Ratkaisumenetelmä

Vaihe 1. Muodostetaan karakteristinen yhtälö

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1}r + p_n = 0$$

Vaihe 2. Etsitään juuret ja niiden kertaluvut. (Jos $\alpha + i\beta$ on m-kertainen juuri, niin $\alpha - i\beta$ on myös m-kertainen juuri.)

Vaihe 3. Ratkaisu on

$$y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)}, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

missä funktiot $\phi_k^{(1)}, \ldots, \phi_k^{(n)}$ ovat muotoa

$$r^k, kr^k, \ldots, k^{m-1}r^k,$$

kun $r \in \mathbb{R}$ ja juuri on m-kertainen, ja muotoa

$$\begin{gathered} R^k \sin(k\varphi), kR^k \sin(k\varphi), \ldots, k^{m-1}R^k \sin(k\varphi) \\ R^k \cos(k\varphi), kR^k \cos(k\varphi), \ldots, k^{m-1}R^k \cos(k\varphi), \end{gathered}$$

missä $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ on kompleksiluvun r pituus ja φ sen argumentti, kun $r = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ja juuri on $(m + m)$-kertainen.

Menetelmän todistus. Riittää todistaa, että kyseiset funktiot ovat ratkaisuja ja että ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Luennot/harj.

Esimerkki 2.9.1. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$y_{k+3} - y_{k+2} - 8y_{k+1} + 12y_k = 0.$$

Karakteristinen yhtälö on

$$r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$$

eli

$$(r-2)^2(r+3) = 0,$$

josta saadaan kaksinkertainen juuri $r = 2$ ja yksinkertainen juuri $r = -3$. Täten ratkaisuavaruuden kanta on 2^k, $k2^k$, $(-3)^k$. Ratkaisu on siis

$$y_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k + C_3(-3)^k.$$

Esimerkki 2.9.2. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$y_{k+3} + y_{k+2} + y_{k+1} + y_k = 0.$$

Karakteristinen yhtälö ja sen juuret ovat

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \quad \iff \quad r = 1 \quad \vee \quad r = \pm i,$$

josta saadaan

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ R = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Ratkaisu on

$$y_k = C_1(-1)^k + C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + C_3 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Huomautus 2.9.1. Differenssiyhtälö (2.7) voidaan palauttaa 1. kertaluvun matriisidifferenssiyhtälöksi. Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1 \end{pmatrix}, \quad Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+n-2} \\ y_{k+n-1} \end{pmatrix}.$$

Silloin differenssiyhtälö (2.7) on matriisien avulla lausuttuna

$$Y_{k+1} = AY_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+,$$

jonka ratkaisu on

$$Y_k = A^k Y_0, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Jos Y_0 on matriisin A ominaisvektori ja λ vastaava ominaisarvo, niin

$$Y_k = A^{k-1}AY_0 = A^{k-1}\lambda Y_0 = A^{k-2}\lambda AY_0 = A^{k-2}\lambda^2 Y_0 = \cdots = \lambda^k Y_0.$$

Esimerkki 2.9.3. Esimerkin 2.9.3 differenssiyhtälön

$$y_{k+3} - y_{k+2} - 8y_{k+1} + 12y_k = 0$$

matriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Sen karakteristinen yhtälö on $r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$ ja ominaisarvot ovat 2 ja -3.

2.10 Yleinen kertaluvun n lineaarinen differenssiyhtälö

Yhtälö on muotoa (2.3). Sitä käsiteltiin jo luvuissa 2.2 ja 2.5. Kirjoitetaan vielä ratkaisumenetelmä vaiheittain.

Vaihe 1. Etsitään homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)},$$

missä funktiot $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}, \ldots, \phi_k^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Vaihe 2. Etsitään varsinaisen yhtälön jokin yksityisratkaisu ψ_k

a) vakioiden varioinnilla

b) määräämättömien kertoimien menetelmällä.

Vaihe 3. Yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + \cdots + C_n\phi_k^{(n)} + \psi_k.$$

Huomautus 2.10.1. Tällä kurssilla kertoimet $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}$ ovat vakioita, jolloin kohdassa 1 voidaan käyttää karakteristisen yhtälön menetelmää.

Esimerkki 2.10.1. Ratkaistaan

$$y_{k+3} + y_{k+2} + y_{k+1} + y_k = 1.$$

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_k = C_1(-1)^k + C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + C_3 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Etsitään yksityisratkaisu yritefunktion $y_k = A$ avulla. Silloin sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} &A + A + A + A = 1, \\ &A = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ratkaisu on

$$y_k = C_1(-1)^k + C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + C_3 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

2.11 Generoiva funktio

Määritelmä 2.11.1. Lukujonon $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ eli $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ *generoiva funktio* (lyhyesti gf) on lukujonon esitysmuoto

$$G(y_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k,$$

missä symbolin s potenssi ilmoittaa kertoimensa paikan lukujonossa. Tarkemmin sanoen, potenssin s^k kerroin on jonon $(k+1)$. jäsen.

Huomautus 2.11.1. Symboli s ei saa lukuarvoja, vaan $G(y_k)(s)$ on ns. *muodollinen potenssisarja*, joka on algebrallisesti tehokas tapa käsitellä lukujonoja. Generoivaa funktiota voitaisiin käsitellä analyyttisestikin, mutta niin ei tehdä tällä kurssilla.

Huomautus 2.11.2. Jos potenssin s^k kerroin on 0, jätetään termi $0s^k$ yleensä muodollisesta potenssisarjasta pois (elleivät kaikki kertoimet ole nollia). Samoin usein kirjoitetaan lyhyesti $1s^k = s^k$ ja $(-1)s^k = -s^k$.

Esimerkki 2.11.1. Jonon $(1, 2, -1, 0, 0, \ldots)$ generoiva funktio on

$$1 + 2s - s^2.$$

Generoivaa funktiota

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k$$

vastaava jono on $(1, 1, 1, \ldots)$.

Huomautus 2.11.3. Generoivien funktioden yhtäsuuruus saadaan jonojen yhtäsuuruudesta seuraavasti:

$$G(y_k)(s) = G(z_k)(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0^+ : y_k = z_k.$$

Määritelmä 2.11.2. Generoivien funktioiden ja siten myös lukujonojen *yhteenlasku, skalaarilla kertominen ja (Cauchyn) kertolasku* määritellään kaavoilla

$$G(y_k)(s) + G(z_k)(s) = G(y_k + z_k)(s), \tag{2.8}$$

$$aG(y_k)(s) = G(ay_k)(s), \tag{2.9}$$

$$G(y_k)(s)G(z_k)(s) = G\left(\sum_{i=0}^{k} y_i z_{k-i}\right)(s). \tag{2.10}$$

Esimerkki 2.11.2. Selvästi

$$\begin{aligned}
&(1 + 2s - s^2) + (1 + s) = 2 + 3s - s^2, \\
&3(1 + s + s^2 + \cdots) = 3 + 3s + 3s^2 + \cdots, \\
&(1 + s)(1 + s) = 1 + 2s + s^2.
\end{aligned}$$

Merkitään notaatiolla $\mathbb{R}[[s]]$ kaikkien (reaalikertoimisten) generoivien funktioiden (tai lukujonojen) joukkoa.

Lause 2.11.1. *Joukko* $\mathbb{R}[[s]]$ *muodostaa vektoriavaruuden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Nollavektori on generoiva funktio* 0*, jota vastaa siis jono* $(0, 0, 0, \ldots)$*.*

Lause 2.11.2. *Joukko* $\mathbb{R}[[s]]$ *muodostaa kommutatiivisen renkaan yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen. Ykkösalkio on generoiva funktio* 1*, jota vastaa jono* $(1, 0, 0, \ldots)$*.*

Lause 2.11.3. *Generoiva funktio* $G(y_k)(s)$ *on kääntyvä, jos ja vain jos* $y_0 \neq 0$*.*

Merkitään kääntyvän generoivan funktion $G(y_k)(s)$ käänteisfunktiota notaatioilla

$$G(y_k)(s)^{-1}, \quad \frac{1}{G(y_k)(s)}.$$

Esimerkki 2.11.3. Olkoon

$$y_k = a^k, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Sen generoiva funktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$G(y_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k s^k = \frac{1}{1 - as} \quad (\sim (1, a, a^2, a^3, \ldots)).$$

Jonot $(1, a, a^2, a^3, \ldots)$ ja $(1, -a, 0, 0, \ldots)$ ovat siis toistensa käänteisjonoja.

Esimerkki 2.11.4. Lasketaan Fibonaccin lukujonon generoiva funktio. (Fibonaccin luvut on määritelty esimerkissä 2.7.4.) Generoivan funktion määritelmän mukaan

$$G(F_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k s^k = F_0 + F_1 s + \sum_{k=2}^{\infty} F_k s^k.$$

Fibonaccin lukujen määritelmää käyttämällä saadaan

$$G(F_k)(s) = s + \sum_{k=2}^{\infty}(F_{k-1} + F_{k-2})s^k = s + s\sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}s^{k-1} + s^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}s^{k-2}.$$

Muuttamalla summausindeksointeja saadaan

$$G(F_k)(s) = s + s\sum_{k=1}^{\infty} F_k s^k + s^2 \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} F_k s^k}^{=G(F_k)(s)}.$$

Koska $F_0 = 0$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} F_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} F_k s^k = G(F_k)(s)$. Näin ollen

$$G(F_k)(s) = s + sG(F_k)(s) + s^2 G(F_k)(s),$$

josta saadaan ratkaisu

$$G(F_k)(s) = \frac{s}{1 - s - s^2}.$$

Fibonaccin lukujono ei ole kääntyvä, koska $F_0 = 0$. Sen sijaan lukujono $(F_{k+1})_{k=0}^{\infty}$ on kääntyvä. Koska

$$G(F_{k+1})(s) = \frac{1}{1 - s - s^2}$$

(harj.),

$$\frac{1}{G(F_{k+1})(s)} = 1 - s - s^2.$$

Näin ollen lukujonon $(F_{k+1})_{k=0}^{\infty}$ käänteisjono on $(1, -1, -1, 0, 0, \ldots)$, joka saadaan generoivan funktion $1 - s - s^2$ kertoimista.

Esimerkki 2.11.5. Ratkaise differenssiyhtälö

$$y_k + 3y_{k-1} - 2y_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2),\ y_0 = 2,\ y_1 = 3,$$

generoivalla funktiolla. Etsitään jonon (y_k) generoiva funktio:

$$\begin{aligned}
G(y_k)(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k = y_0 + y_1 s + \sum_{k=2}^{\infty} y_k s^k \\
&= 2 + 3s + \sum_{k=2}^{\infty} (3y_{k-1} - 2y_{k-2}) s^k \\
&= 2 + 3s + 3s \sum_{k=2}^{\infty} y_{k-1} s^{k-1} - 2s^2 \sum_{k=2}^{\infty} y_{k-2} s^{k-2} \\
&= 2 + 3s + 3s \sum_{k=1}^{\infty} y_k s^k - 2s^2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k \\
&= 2 + 3s + 3s[G(y_k)(s) - 2] - 2s^2 G(y_k)(s) \\
&= 2 - 3s + 3sG(y_k)(s) - 2s^2 G(y_k)(s).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$G(y_k)(s)(1 - 3s + 2s^2) = 2 - 3s,$$

joten

$$G(y_k)(s) = \frac{2 - 3s}{1 - 3s + 2s^2} = \frac{2 - 3s}{(1 - s)(1 - 2s)} = \cdots = \frac{1}{1 - s} + \frac{1}{1 - 2s}.$$

Täten

$$G(y_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2^k) s^k.$$

Näin ollen

$$y_k = 1 + 2^k.$$

2.12 Laplace-muunnos

Määritellään

$$y(x) = y_k, \quad k \leq x < k + 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Silloin esimerkiksi yhtälö

$$y_{k+2} + p y_{k+1} + q y_k = 0$$

voidaan esittää muodossa

$$y(x + 2) + p y(x + 1) + q y(x) = 0.$$

Nyt voidaan ottaa puolittain Laplace-muunnokset.

2.13 Esimerkkejä sovelluksista

Tässä pykälässä vain saatujen yhtälöiden ratkaiseminen kuuluu koealueeseen. Yhtälöiden käytännöllistä taustaa ei tarvitse osata.

2.13.1 Kombinatorisia esimerkkejä

Esimerkki 2.13.1. Olkoon a_k sellaisten k bitin jonojen lkm, joissa ei ole kahta peräkkäistä nollaa. Silloin $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Olkoon $k \geq 2$. Silloin bittijonot voidaan jakaa 2 erilliseen joukkoon: bittijonot, jotka päättyvät ykköseen (a_{k-1} kpl), ja bittijonot, jotka päättyvät nollaan (a_{k-2} kpl). Siis

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

Esimerkki 2.13.2. Olkoon a_k sellaisten k bitin jonojen lkm, joissa on 2 peräkkäistä nollaa. Silloin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Olkoon $k \geq 2$. Bittijonot voidaan jakaa 3 erilliseen joukkoon. Ykköseen päättyviä bittijonoja on a_{k-1} kpl. Tarkastellaan bittijonoja, jotka päättyvät nollaan. Jos toiseksi viimeinen bitti on ykkönen, niin oikeanmuotoisia bittijonoja saadaan a_{k-2} kpl. Jos taas toiseksi viimeinen bitti on nolla, niin oikeanmuotoisia bittijonoja on 2^{k-2} kpl. Siis

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 2^{k-2}, \quad k \geq 2, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 0.$$

Esimerkki 2.13.3. Olkoon a_k sellaisten k bitin jonojen lkm, joissa ei ole kolmea peräkkäistä nollaa. Silloin

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} \quad k \geq 3, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4.$$

(Totea!)

2.13.2 Korkolaskentaa

Esimerkki 2.13.4. Asiakas tallettaa pankkiin A euroa $r \cdot 100$ prosentin vuotuisella korolla. (Asiakas ei ota rahaa tililtä pois, ei korkoa eikä pääomaa.) Olkoon S_k tilin saldo k vuoden kuluttua. Silloin

$$S_{k+1} = S_k + rS_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad S_0 = A,$$

josta saadaan

$$S_k = (1 + r)^k A.$$

(Totea!)

Esimerkki 2.13.5. Asiakas tallettaa tililleen vuosittain vakiomäärän B euroa. Ensimmäinen talletus tehdään 1 vuoden kuluttua, ennen ensimmäistä talletusta tili on tyhjä. Olkoon S_k tilin saldo k vuoden kuluttua. Silloin

$$S_{k+1} = S_k + rS_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad S_0 = 0,$$

josta saadaan

$$S_k = \frac{(1 + r)^k - 1}{r} B.$$

(Totea!)

Esimerkki 2.13.6. Asiakas ottaa A euron lainan, jonka vuotuinen korko on $r \cdot 100$ prosenttia. Asiakas maksaa vuosittain korkoa ja lyhennystä yhteensä vakiomäärän B euroa. Ensimmäinen B euron maksu on vuoden kuluttua. Olkoon velan määrä k vuoden kuluttua S_k. Silloin

$$S_{k+1} = S_k + rS_k - B, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad S_0 = A,$$

josta saadaan

$$S_k = (1+r)^k A - \frac{(1+r)^k - 1}{r} B.$$

(Totea!) Huomaa esimerkin 2.13.6 yhteys esimerkkeihin 2.13.4 ja 2.13.5. Mikä tulee maksun B olla, kun lainan maksuaika on n vuotta ?

2.13.3 Sekalaisia esimerkkejä

Esimerkki 2.13.7 (The gambler's ruin)**.** Pelin jokaisessa vaiheessa pelaaja joko voittaa tai häviää yhden dollarin. Olkoon voiton todennäköisyys p ja häviön $1 - p$ ($\stackrel{\text{merk.}}{=} q$). Oletetaan, että pelaaja lopettaa, kun hän menettää kaikki rahansa tai saavuttaa N dollaria. Pelaajalla oletetaan olevan pelin alussa k dollaria ($0 \le k \le N$).

Merkitään symbolilla $P(k)$ todennäköisyyttä, että pelaaja tulee lopettamaan pelin häviämällä kaikki rahansa ($k = 0, 1, 2, \dots, N$). Siis erityisesti $P(0) = 1$ ja $P(N) = 0$.

Kun $k = 1, 2, \dots, N-1$, niin lopettaminen häviämällä kaikki rahansa voi tapahtua kahdella toisensa poissulkevalla tavalla:

a) Seuraavassa vaiheessa pelaaja voittaa dollarin, mutta menettää lopulta kaikki rahansa.

b) Seuraavassa vaiheessa pelaaja häviää dollarin ja menettää lopulta kaikki rahansa.

Tapauksen 1 todennäköisyys on $= pP(k+1)$, ja tapauksen 2 todennäköisyys on $= qP(k-1)$. Näin saadaan differenssiyhtälö
(2.11)
$$P(k) = pP(k+1) + qP(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad P(0) = 1, P(N) = 0.$$

Voidaan laskea, että

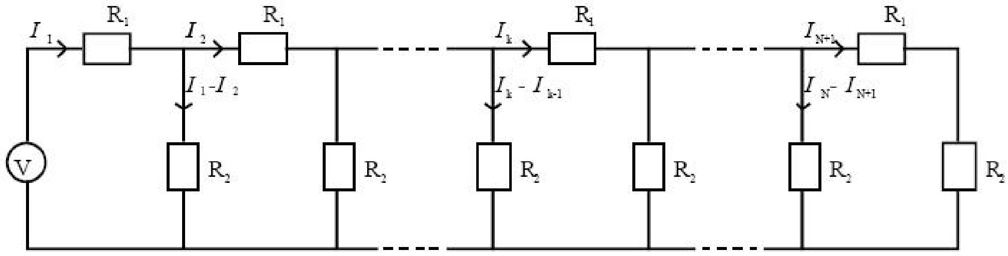
$$P(k) = \frac{r^k - r^N}{1 - r^N}, \quad \text{missä } r = q/p, \tag{2.12}$$

kun $p \neq q$, ja että

$$P(k) = \frac{N-k}{N}, \tag{2.13}$$

kun $p = q = 0.5$. Huomaa, että esimerkiksi jos $N = 40$, niin $P(20) = 0.832$, kun $p = 0.48$, ja $P(20) = 0.5$, kun $p = 0.5$.

Esimerkki 2.13.8. Tarkastellaan oheista virtapiiriä.



Kirchoffin lain mukaan kussakin "luupissa"jännitteiden summa on $= 0$. Siis 1. luupissa

$$I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_2 - V = 0. \tag{2.14}$$

Yleisesti, k. luupissa

$$I_kR_1 + (I_k - I_{k+1})R_2 - (I_{k-1} - I_k)R_2 = 0. \tag{2.15}$$

Lopuksi, $(N + 1)$. luupissa

$$I_{N+1}R_1 - (I_N - I_{N+1})R_2 = 0. \tag{2.16}$$

Yhtälö (2.15) voidaan kirjoittaa

$$I_{k+1} - \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) I_k + I_{k-1} = 0. \tag{2.17}$$

Mitkä ovat yhtälön (2.17) karakteristisen yhtälön juuret?

Esimerkki 2.13.9. Tarkastellaan sukupuolisidonnaisia piirteitä, joissa naisilla on kaksi vastingeeniä ja miehillä on yksi vastingeeni (eli alleeli). Naisilla piirre on vallitseva, jos ainakin toinen vastingeeneistä on vallitseva. Miehet perivät vastingeeninsä äidiltä, kun taas naiset perivät toisen vastingeeninsä äidiltä ja toisen isältä.

Vallitsevaa vastingeeniä merkitään kirjaimella A ja peittyvää vastingeeniä merkitään kirjaimella a. Merkitään A-vastingeenin osuutta k. sukupolven naisilla symbolilla $p(k)$. Voidaan todistaa (sivuutetaan), että

$$p(k + 2) = \frac{1}{2}p(k + 1) + \frac{1}{2}p(k).$$

Näin ollen

$$p(k) = C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

missä C_1 ja C_2 riippuvat alkuehdoista (Harj.). Voidaan karkeasti olettaa, että nykyään A-vastingeenin osuus naisilla on C_1 ($\overset{merk.}{=} p$). Myös miehillä A-vastingeenin osuus on noin p. Merkitään a-vastingeenin osuutta kirjaimella

q. (Siis $q = 1-p$.) Naisilla yhdistelmien $\{A, A\}$, $\{A, a\}$ ja $\{a, a\}$ osuudet ovat siis p^2, $2pq$ ja q^2.

Monissa sairauksissa a-vastingeeni aiheuttaa ongelmia. Siis jos miehillä tälläinen sairaus on esimerkiksi joka sadannella, niin naisilla tämä sairaus ilmenee yhdellä kymmenestä tuhannesta.

Esimerkki 2.13.10. Tarkastellaan determinanttia

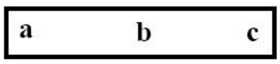
$$\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}.$$

Olkoon A_k kertaluvun k determinantin arvo. Silloin

$$A_k = bA_{k-1} - a^2 A_{k-2}, \quad k \geq 3.$$

Lisäksi $A_1 = b, \ A_2 = b^2 - a^2$.

Esimerkki 2.13.11 (Newton's law of cooling)**.** Tarkastellaan allaolevaa tankoa.



Olkoot $a(k)$, $b(k)$ ja $c(k)$ lämpötilat pisteissä a, b ja c ajanhetkellä k. Oletetaan, että kunkin pisteen lämpötilaan vaikuttaa vain viereisten pisteiden lämpötilat, ts. b vaikuttaa a:han, a ja c vaikuttavat b:hen ja b vaikuttaa c:hen. Pisteen b vaikutus pisteeseen a on muotoa

$$a(k+1) - a(k) = p(b(k) - a(k)), \tag{2.18}$$

missä p on vakio. Yhtälö (2.18) on ns. "Newton's law of cooling". Edelleen

$$c(k+1) - c(k) = p(b(k) - c(k)), \tag{2.19}$$
$$b(k+1) - b(k) = p(a(k) - b(k)) + p(c(k) - b(k)). \tag{2.20}$$

Yhtälöt (2.18), (2.19) ja (2.20) voidaan kirjoittaa ryhmänä

$$\begin{cases} a(k+1) = (1-p)a(k) + pb(k), \\ b(k+1) = pa(k) + (1-2p)b(k) + pc(k), \\ c(k+1) = pb(k) + (1-p)c(k). \end{cases} \tag{2.21}$$

Yhtälö (2.21) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa, jolloin matriisin ominaisarvot ovat $1, \ 1-p$ ja $1-3p$. (Harj.) Kun p on "pieni", voidaan tarkastella tangon pisteiden lämpötilojen käyttäytymistä, kun $k \to \infty$. (Harj.)

Esimerkki 2.13.12. A ja B pelaavat peliä, jonka jokaisessa vaiheessa A voittaa B:ltä markan todennäköisyydellä p ja B A:lta todennäköisyydellä $1 - p$ $(= q)$. Tasapeliä ei voi sattua. Pelin alussa pelaajalla A on a euroa ja pelaajalla B on b euroa (merk. $a + b = N$). Peli loppuu, kun jommalla kummalla pelaajista on M euroa $(M \leq N)$.

Olkoon peli tilanteessa, jossa A:lla on k euroa. Olkoon u_k todennäköisyys, että A tulee voittamaan pelin. Tässä tilanteessa A:n voitto voi tapahtua kahdella toisensa poissulkevalla tavalla:

1) Seuraavassa vaiheessa A voittaa markan (ja siis voittaa vielä koko pelin).

2) Seuraavassa vaiheessa A häviää markan (ja voittaa vielä koko pelin).

Tapauksen 1 todennäköisyys on $= pu_{k+1}$, ja tapauksessa 2 todennäköisyys on $= qu_{k-1}$. Siis

$$u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Alkuehtoina ovat

$$u_M = 1, \quad u_{N-M} = 0.$$

Todennäköisyys, että A voittaa pelin, on u_a. Voidaan laskea, että

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{(q/p)^a - (q/p)^{N-M}}{(q/p)^M - (q/p)^{N-M}}, \quad p \neq q \\ u_a &= \frac{M - N + a}{2M - N}, \quad p = q = 1/2. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.13.13. Digitaalisessa signaalinkäsittelyssä differenssiyhtälö

$$y_{k+n} + a^{(n-1)} y_{k+n-1} + \cdots + a^{(0)} y_k = z_k$$

mallintaa lineaarista suodinta. Tällöin (y_k) on input-signaali ja (z_k) on output-signaali.

Luku 3

Asymptoottista analyysia

3.1 Funktioiden kasvu

3.1.1 Iso–O -merkintä

Määritelmä 3.1.1. Olkoot $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ funktioita. Merkitään $f(n) = O(g(n))$, jos

$$\exists C, N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n > N : |f(n)| \leq C|g(n)|.$$

Lue "f on iso-O-g", "g on f:n iso-O -estimaatti"tai "f on (korkeintaan) kertaluokkaa g".

Huomautus 3.1.1. Yhtäsuuruusmerkillä = ei ole merkinnän $f(n) = O(g(n))$ yhteydessä kaikkia sen tavanomaisia ominaisuuksia. Joskus käytetäänkin merkintöjä

$$f(n) \in O(g(n)), \quad f(n) \ll g(n).$$

Merkintä $f(n) \gg\ll g(n)$ tarkoittaa, että $f(n) = O(g(n))$ ja $g(n) = O(f(n))$.

Esimerkki 3.1.1. Todistetaan määritelmään 3.1.1 perustuen, että

$$8n^2 + 3n + 1 = O(n^2).$$

Ratkaisu. Määritelmän 3.1.1 perusteella väite on

$$\exists C, N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n > N : 8n^2 + 3n + 1 \leq Cn^2.$$

(Funktioiden arvot ovat positiivisia, joten itseisarvoja ei tarvita.)

Todistus. Valitaan $C = 12$ ja $N = 1$. (Riittää löytää kummallekin yksi arvo, koska väitteenä on, että on olemassa C ja N. Nämä arvot keksii arvioimalla lauseketta $8n^2 + 3n + 1$ ylöspäin niin, että se jää $\leq Cn^2$, kun $n > N$.)
Valitaan n ($> N = 1$) mielivaltaisesti (nimenomaan mielivaltaisesti, koska pitää olla voimassa kaikilla luvun n ($> N = 1$) arvoilla).

Silloin

$$8n^2 + 3n + 1 \leq 8n^2 + 3n^2 + n^2 = 12n^2 = Cn^2,$$

joten

$$8n^2 + 3n + 1 \leq Cn^2.$$

Näin ollen väitös on oikein.

Esimerkki 3.1.2. Todistetaan määritelmään 3.1.1 perustuen, että

$$n^3 \neq O(n^2).$$

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: $n^3 = O(n^2)$. Silloin määritelmän 3.1.1 perusteella

$$\exists C, N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n > N : n^3 \leq Cn^2.$$

Jakamalla viimeisin epäyhtälö puolittain luvulla n^2 (> 0) saadaan

$$\exists C, N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n > N : n \leq C.$$

Saadaan ristiriita (esim. kun $n = C + N$, niin $n > N$ mutta $n \not\leq C$). Siis vastaoletus on väärin ja näin ollen väitös on oikein.

3.1.2 Raja-arvo ja O-symboli

Lause 3.1.1.

a) Jos $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ *on äärellisenä olemassa, niin* $f(n) = O(g(n))$.

b) Jos $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \pm\infty$, *niin* $f(n) \neq O(g(n))$.

Todistus. a) Merkitään $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = A$. Siis

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(n)/g(n) - A| < \varepsilon,$$

joten

$$\forall n \geq n_1 : |f(n)/g(n) - A| < 1.$$

Näin ollen

$$\forall n \geq n_1 : |f(n)/g(n)| < |A| + 1,$$

joten

$$\forall n \geq n_1 : |f(n)| < (|A| + 1)|g(n)|.$$

Täten

$$f(n) = O(g(n)).$$

b) Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 3.1.3. Lauseen 3.1.1a perusteella $10^6 = O(1)$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^6}{1} = 10^6 \quad \text{(äärellinen)}.$$

Esimerkki 3.1.4. Lauseen 3.1.1a perusteella $2n^2 + n = O(n^2)$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (2 + (1/n)) = 2 \quad \text{(äärellinen)}.$$

Esimerkki 3.1.5. Lauseen 3.1.1b perusteella $n^3 \neq O(n^2)$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Esimerkki 3.1.6. Vastaavasti kuin edellä, lauseen 3.1.1 perusteella on helppo nähdä, että

a) $x^k = O(x^n)$, kun $k \leq n \in \mathbb{Z}^+$,

b) $x^k \neq O(x^n)$, kun $k > n \in \mathbb{Z}^+$.

3.1.3 L'Hospitalin ∞/∞-sääntö

Lause 3.1.2. *Oletetaan, että funktiot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia jollakin välillä (a, ∞) ja että $f(x), g(x) \to \pm\infty$, kun $x \to \infty$. Jos $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ on olemassa, niin*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Huomautus 3.1.2. Jos $\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(x)}{g(x)}$ on olemassa, niin

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{Z}^+}} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Esimerkki 3.1.7. L'Hospitalin ∞/∞-säännön perusteella

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

joten lauseen 3.1.1a perusteella

$$\log n = O(n).$$

Esimerkki 3.1.8. L'Hospitalin ∞/∞-säännön perusteella

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log(x)} = \lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

joten lauseen 3.1.1b perusteella

$$n \neq O(\log n).$$

3.1.4 Funktioiden summan ja tulon O-estimaateista

Lause 3.1.3. *Olkoon* $f_1(n) = O(g_1(n))$ *ja* $f_2(n) = O(g_2(n))$*. Silloin*

$$f_1(n) + f_2(n) = O(\max(|g_1(n)|, |g_2(n)|)), \tag{3.1}$$

$$f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n)). \tag{3.2}$$

Todistus. Kaavan (3.1) todistus: luennot/harj.

Todistetaan kaava (3.2). Oletuksen mukaan

$$\exists C_1, N_1 : \forall n > N_1 : |f_1(n)| \le C_1|g_1(n)|,$$
$$\exists C_2, N_2 : \forall n > N_2 : |f_2(n)| \le C_2|g_2(n)|.$$

Siis, kun $n > N_1, n > N_2$,

$$\begin{aligned} |f_1(n)f_2(n)| &= |f_1(n)||f_2(n)| \\ &\le C_1|g_1(n)|C_2|g_2(n)| \\ &\le C_1C_2|g_1(n)g_2(n)|. \end{aligned}$$

Merkitään $C = C_1C_2$ ja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Silloin

$$\forall n > N : |f_1(n)f_2(n)| \le C|g_1(n)g_2(n)|.$$

□

Lause 3.1.4. *a) Jos* $f(n) = O(g(n))$ *ja* $g(n) = O(h(n))$*, niin* $f(n) = O(h(n))$*.*

b) Jos $f(n) = O(g(n))$ *ja* $a \in \mathbb{R}$*, niin* $af(n) = O(g(n))$*.*

Todistus. luennot/harj □

Esimerkki 3.1.9. Koska $\log(n^2) = 2\log(n)$, niin edellisen lauseen perusteella

$$\log(n^2) = O(\log(n)).$$

3.1.5 Pieni–o -merkintä

Määritelmä 3.1.2. Olkoot $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ funktioita. Merkitään $f(n) = o(g(n))$, jos

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+ : \forall n > n_\varepsilon : |f(n)| < \varepsilon|g(n)|.$$

Lue f on "pieni-o-g"tai "$f(n)$ on paljon pienempi kuin $g(n)$, kun $n \to \infty$".

Huomautus 3.1.3. Yhtäsuuruusmerkillä "=" ei ole merkinnän $f(n) = o(g(n))$ yhteydessä kaikkia sen tavanomaisia ominaisuuksia. Joskus käytetäänkin merkintää $f(n) \in o(g(n))$.

Huomautus 3.1.4. Lukujonon raja-arvon määritelmästä seuraa välittömästi, että $f(n) = o(g(n))$ silloin ja vain silloin, kun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

edellyttäen, että $g(n) \neq 0$ jostakin luvun n arvosta lähtien.

Esimerkki 3.1.10. Huomautuksen 3.1.4 perusteella on helppo nähdä, että

a) $n - 1 \neq o(n)$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} (1 - (1/n)) = 1 \neq 0.$$

b) $n + 10^9 = o(n^2)$, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 10^9}{n^2} = 0.$$

Huomautus 3.1.5. Huomautuksen 3.1.4 ja lauseen 3.1.1 perusteella on helppo nähdä, että jos $f(n) = o(g(n))$, niin $f(n) = O(g(n))$. Toisinpäin tämä ei tietenkään päde. Esimerkiksi

$$\log(n) = o(n), \quad \log(n) = O(n),$$

mutta

$$n + 1 \neq o(n), \quad n + 1 = O(n).$$

3.2 Hajota ja hallitse -yhtälöt

Olkoon probleeman koko n ja probleeman ratkaisemisen "hinta" $f(n)$. Jaetaan probleema a osaprobleemaan. Oletetaan, että osaprobleemien kooksi tulee n/b. Olkoon $g(n)$ hinta, joka syntyy osaprobleemiin jaosta. Silloin

$$f(n) = af(n/b) + g(n), \tag{3.3}$$

jota kutsutaan *hajota ja hallitse -yhtälöksi.* Käytetään siitä myös lyhyttä ilmaisua *hh-yhtälö.*

Esimerkki 3.2.1. Puolitushakualgoritmin kompleksisuus toteuttaa hh-yhtälön $f(n) = f(n/2) + 2, \ f(1) = 2.$

3.2.1 Hh-yhtälön ratkaiseminen

Ratkaistaan (3.3). Oletetaan, että n on muotoa $n = b^k, k \in \mathbb{Z}^+$, ja että $f(1)$ on tunnettu. Silloin (3.3) voidaan ratkaista iteroimalla (menetelmä III) seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
f(b^k) &\overset{(3.3)}{=} af(b^{k-1}) + g(b^k) \\
&\overset{(3.3)}{=} a\Big(af(b^{k-2}) + g(b^{k-1})\Big) + g(b^k) \\
&= a^2 f(b^{k-2}) + ag(b^{k-1}) + g(b^k) \\
&\overset{(3.3)}{=} a^2\Big(af(b^{k-3}) + g(b^{k-2})\Big) + ag(b^{k-1}) + g(b^k) \\
&= a^3 f(b^{k-3}) + a^2 g(b^{k-2}) + ag(b^{k-1}) + g(b^k) \\
&= \cdots \\
&= a^k f(1) + a^{k-1} g(b) + \cdots + ag(b^{k-1}) + g(b^k).
\end{aligned}$$

Yhtälö

$$f(b^k) = af(b^{k-1}) + g(b^k)$$

on 1. kertaluokan lineaarinen differenssiyhtälö, johon voidaan soveltaa myös menetelmiä I ja II.

Vain $f(b^k)$ pystytään laskemaan tarkasti. Funktion arvolle $f(n)$ saadaan kuitenkin arvio, kun $b^k < n < b^{k+1}$.

Esimerkki 3.2.2. Puolitushakualgoritmin kompleksisuus toteuttaa hh-yhtälön

$$f(n) = f(n/2) + 2, \quad f(1) = 2.$$

Laskettava $f(2^k)$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Ratkaisu. Sovelletaan hh-yhtälöä toistuvasti, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
f(2^k) &= f(2^k/2) + 2 = f(2^{k-1}) + 2 \\
&= f(2^{k-2}) + 2 + 2 = f(2^{k-2}) + 2 \cdot 2 \\
&= f(2^{k-3}) + 2 + 2 + 2 = f(2^{k-3}) + 3 \cdot 2 \\
&= \cdots \\
&= f(2^{k-k}) + \overbrace{2 + 2 + \cdots + 2}^{k \text{ kpl}} = f(1) + k \cdot 2 \\
&= 2k + 2.
\end{aligned}$$

(*Tarkistus.*

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(n/2) + 2 \\
f(2^k) &= f(2^k/2) + 2 = f(2^{k-1}) + 2 \\
2k + 2 &= \Big(2(k-1) + 2\Big) + 2 = (2k - 2 + 2) + 2 \\
&= 2k + 2, \quad \text{hh-yhtälö oikein!} \\
f(1) &= f(2^0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2, \quad \text{alkuarvo oikein!}
\end{aligned}$$

Yleensä tarkistus sivuutetaan.)

3.2.2 Funktion $f(n)$ kertaluokka

Lause 3.2.1. *Olkoon f kasvava funktio, joka toteuttaa hh-yhtälön*

$$f(n) = af(n/b) + c,$$

missä $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c > 0$. Silloin

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}), & \text{kun } a > 1, \\ O(\log n), & \text{kun } a = 1. \end{cases}$$

Tapauksessa $a = 1$ ei ole merkitystä, mikä logaritmin $\log n$ kantaluku on, sillä kaikki logaritmit ovat samaa kertaluokkaa.

Todistus. Todistetaan tapaus $a = 1$. (Tapaus $a > 1$, luennot/harj.)
Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$ mielivaltainen. Silloin

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ \colon b^{k-1} \leq n < b^k.$$

Arvioidaan

$$\begin{aligned} f(1) \leq f(n) &\leq f(b^k) = f(b^k/b) + c \\ &= f(b^{k-1}) + c \\ &= f(b^{k-2}) + c + c \\ &= f(b^{k-3}) + c + c + c \\ &= \cdots \\ &= f(b^{k-k}) + kc \\ &\leq f(1) + \Big(\log_b(n) + 1\Big)c \\ &= f(1) + c\log_b(n) + c. \end{aligned}$$

Siis (harj.)

$$f(n) = O(\log n).$$

□

Esimerkki 3.2.3. Puolitushakualgoritmin kompleksisuus toteuttaa hh-yhtälön

$$f(n) = f(n/2) + 2, \quad f(1) = 2, \quad \text{kun } n \text{ on parillinen.}$$

Mikä on funktion $f(n)$ kertaluokka?

Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Silloin

$$\exists k \in \mathbb{Z}_+ \colon 2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

Nyt (koska f on kasvava funktio)

$$f(1) \leq f(n) \leq f(2^k).$$

Aikaisemman esimerkin perusteella

$$f(2^k) = 2k + 2.$$

Koska $2^{k-1} \leq n$, niin $k - 1 \leq \log_2(n)$ eli $k \leq \log_2(n) + 1$. Näin ollen

$$f(1) \leq f(n) \leq f(2^k) = 2k + 2 \leq 2\Big(\log_2(n) + 1\Big) + 2 = 2\log_2(n) + 4.$$

Koska $\log_2 n = \log n / \log 2 = C \log n$, niin

$$f(n) = O(\log n).$$

(Logaritmin kannalla ei ole merkitystä, koska kaikki logaritmit ovat samaa kertaluokkaa.)

Esimerkki 3.2.4. Oletetaan, että algoritmin kompleksisuus toteuttaa hh-yhtälön

$$f(n) = 5f(n/4) + 3, \quad f(1) = 7.$$

a) Laskettava $f(4^k)$, kun $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

b) Arvioitava funktion f kertaluokkaa, kun f on kasvava.

Ratkaisu. a) Hh-yhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}
f(4^k) &= 5f(4^k/2) + 3 = 5f(4^{k-1}) + 3 \\
&= 5\Big(5f(4^{k-2}) + 3\Big) + 3 = 5^2 f(4^{k-2}) + 5 \cdot 3 + 3 \\
&= \cdots \\
&= 5^k f(1) + 5^{k-1} \cdot 3 + 5^{k-2} \cdot 3 + \cdots + 5 \cdot 3 + 3 \\
&= 5^k \cdot 7 + \frac{5^k - 1}{5 - 1} \cdot 3 \\
&= 5^k \cdot 7 + (5^k - 1)\frac{3}{4} = 5^k \cdot 7 + 5^k \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\
&= 5^k \cdot (7 + \frac{3}{4}) - \frac{3}{4} = 5^k \cdot \frac{31}{4} - \frac{3}{4} \\
&= (31 \cdot 5^k - 3)/4.
\end{aligned}$$

b) Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Silloin

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ \colon 4^{k-1} \leq n < 4^k.$$

Funktion f kasvavuuden ja a-kohdan perusteella

$$f(1) \leq f(n) \leq f(4^k) = (31 \cdot 5^k - 3)/4.$$

Arvioidaan oikeanpuolimmaista lauseketta ylöspäin niin, että saadaan yksinkertaisempi lauseke ylärajaksi:

$$f(1) \leq f(n) \leq f(4^k) = (31 \cdot 5^k - 3)/4 \leq 8 \cdot 5^k.$$

Koska $4^{k-1} \le n$, niin $k-1 \le \log_4 n$ eli $k \le 1 + \log_4 n$. Näin ollen

$$f(1) \le f(n) \le f(4^k) \le 8 \cdot 5^k \le 8 \cdot 5^{1+\log_4 n} = 40 \cdot 5^{\log_4 n}.$$

Logaritmien ominaisuuksien perusteella $5^{\log_4 n} = n^{\log_4 5}$ (harj.). Olemme siis todistaneet, että

$$f(1) \le f(n) \le Cn^{\log_4 5},$$

joten

$$f(n) = O(n^{\log_4 5}).$$

Huomaa, että tässä logaritmin kannalla on merkitystä, koska logaritmi on luvun n potenssissa ja potenssi vaikuttaa kertaluokkaan.

3.3 Poincarén lause

Määritelmä 3.3.1. Differenssiyhtälö

$$y_{k+n} + a_k^{(1)} y_{k+n-1} + \cdots + a_k^{(n)} y_k = 0, \tag{3.4}$$

on *Poincarén tyyppiä*, jos

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(j)} = p_j, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n,$$

ts. jos ko. raja-arvo on äärellisenä olemassa aina, kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Yhtälöä

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

sanotaan differenssiyhtälön (3.4) *karakteristiseksi yhtälöksi Poincarén mielessä.*

Lause 3.3.1 (Poincarén lause)**.** *Oletetaan, että differenssiyhtälö (3.4) on Poincarén tyyppiä ja että yhtälön juuret $r_1, r_2, \ldots, r_n$ toteuttavat ehdon $|r_1| > |r_2| > \cdots > |r_n|$. Silloin differenssiyhtälön (3.4) jokainen ratkaisu y_k toteuttaa ehdon*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k} = r_i \tag{3.5}$$

jollakin indeksin $i = 1, 2, \ldots, n$ arvolla.

Todistus. Tarkastellaan tapaus, jossa $n = 2$ ja jossa $a_k^{(1)}$ ja $a_k^{(2)}$ ovat vakioita. Koska juuret r_1, r_2 toteuttavat ehdon $|r_1| > |r_2|$, niin $r_1 \ne r_2$. Näin ollen

$$y_k = C_1 r_1^k + C_2 r_2^k.$$

Olkoon $C_1 \ne 0$. Silloin

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{C_1 r_1^{k+1} + C_2 r_2^{k+1}}{C_1 r_1^k + C_2 r_2^k} = \frac{r_1 + (C_2/C_1) r_1 (r_2/r_1)^{k+1}}{1 + (C_2/C_1)(r_2/r_1)^k} \to r_1, \quad \text{kun} \quad k \to \infty.$$

Olkoon $C_1 = 0$. Silloin

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{C_2 r_2^{k+1}}{C_2 r_2^k} = r_2.$$

Siis kaava (3.5) on voimassa. □

Esimerkki 3.3.1. Tarkastellaan differenssiyhtälöä

$$y_{k+2} - \frac{t+3}{t+2} y_{k+1} + \frac{2}{t+2} y_k = 0. \tag{3.6}$$

Se on Poincarén tyyppiä, sillä

$$\frac{t+3}{t+2} \to 1, \quad \frac{2}{t+2} \to 0, \quad \text{kun} \quad t \to \infty.$$

Differenssiyhtälön (3.6) karakteristinen yhtälö Poincarén mielessä on

$$r^2 - r = 0,$$

jonka juuret ovat $r = 0$, $r = 1$. Näin ollen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k}$$

on 0 tai 1 aina, kun y_k on differenssiyhtälön (3.6) jokin ratkaisu.

Huomautus 3.3.1. Raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k}$$

ei sinänsä kerro koko totuutta funktion y_k asymptoottisesta käyttäytymisestä. Esimerkiksi jos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k} = 1,$$

niin y_k voi olla vaikkapa 1 tai k tai k^2.

Lause 3.3.2. *Oletetaan, että on olemassa sellainen k_0, että $y_k \neq 0$, kun $k > k_0$. Oletetaan, että*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k} = r \neq 0.$$

Silloin $y_k = \pm r^k \exp(z_k)$, missä $z_k = o(k)$, kun $k \to \infty$.

Todistus. Merkitään $v_k = |y_k/r^k|$. Koska $v_k > 0$, kun $k > k_0$, voimme merkitä $z_k = \log(v_k)$, kun $k > k_0$. Tällöin $y_k = \pm r^k \exp(z_k)$. Siis riittää todistaa, että $z_k = o(k)$, kun $k \to \infty$, eli että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{k} = 0.$$

Todistetaan siis, että jokaista lukua $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $m \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\left| \frac{z_k}{k} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{kun} \quad k > m.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Oletuksen nojalla

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \left| \frac{y_{k+1}/r^{k+1}}{y_k/r^k} \right| = r^{-1} \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| \to 1, \quad \text{kun} \quad k \to \infty.$$

Täten
$$z_{k+1} - z_k = \log \frac{v_{k+1}}{v_k} \to 0, \quad \text{kun} \quad k \to \infty.$$
Olkoon $m_1 \in \mathbb{Z}^+$ sellainen, että
$$|z_{k+1} - z_k| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{kun} \quad k > m_1.$$
Silloin kolmioepäyhtälön perusteella
$$|z_k - z_{m_1}| \le \sum_{i=m_1+1}^{k} |z_i - z_{i-1}|, \quad \text{kun} \quad k > m_1.$$
Edellisten kahden yhtälön mukaan
$$|z_k - z_{m_1}| < \frac{1}{2}\varepsilon(k - m_1), \quad \text{kun} \quad k > m_1.$$
Koska $|z_k| - |z_{m_1}| \le |z_k - z_{m_1}|$, niin
$$|z_k| < \frac{1}{2}\varepsilon(k - m_1) + |z_{m_1}|$$
ja edelleen
$$\left|\frac{z_k}{k}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \frac{m_1}{k}\right) + \left|\frac{z_{m_1}}{k}\right|, \quad \text{kun} \quad k > m_1.$$
Selvästi
$$\frac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \frac{m_1}{k}\right) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{kun} \quad k > m_1.$$
Olkoon $m_2 \in \mathbb{Z}^+$ sellainen, että
$$\left|\frac{z_{m_1}}{k}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{kun} \quad k > m_2.$$
Näin ollen
$$\left|\frac{z_k}{k}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{kun} \quad k > \max\{m_1, m_2\}.$$
Siis jokaista lukua $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku m $(= \max\{m_1, m_2\})$, että
$$\left|\frac{z_k}{k} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{kun} \quad k > m.$$
Täten
$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{k} = 0$$
eli $z_k = o(k)$, kun $k \to \infty$. Lause on nyt todistettu. $\square$