

## Grundkurs Mathematik II

### Vorlesung 55

#### Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

Zum Abschluss dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit Wahrscheinlichkeitstheorie, und zwar mit diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie. Mit diskret ist gemeint, dass die möglichen Werte eines „Experimentes“ in einer endlichen Menge liegen und Wahrscheinlichkeiten prinzipiell durch ein „gewichtetes Zählen“ erhalten werden können. Insofern geht es um elementare Kombinatorik, aber doch unter neuen Gesichtspunkten und mit neuen Sprechweisen. Wenn man eine Münze wirft, so kann Kopf oder Zahl fallen, und es gibt keinen Grund, warum das eine häufiger als das andere eintreten sollte. Bei einem einzelnen Wurf kann natürlich nur ein Ereignis eintreten. Wenn man den Münzwurf oft wiederholt, so kann man im Allgemeinen beobachten, dass die Anzahl der Kopfwürfe in der Nähe der Anzahl der Zahlwürfe liegt. Aber schon die Präzisierung dieser Aussage ist nicht unmittelbar klar. Wenn man beispielsweise 100-mal wirft, und es tritt 47-mal Kopf ein, was heißt das? Die Abweichung von Kopfwürfen zu Zahlwürfen ist immerhin

$$53 - 47 = 6,$$

also jedenfalls größer als bei einem Wurf. Ein sinnvolles Vergleichsmaß ist

$$\frac{47}{100},$$

also der Quotient aus der Anzahl der Kopfwürfe und der Gesamtzahl der Durchführungen (Würfe). Dieser Quotient heißt *relative Häufigkeit* und ist relativ nah an  $\frac{1}{2}$ . Es ist eine Erfahrungstatsache, dass diese relative Häufigkeit bei wachsender Durchführungsanzahl gegen  $\frac{1}{2}$  „strebt“. Diese Aussage ist aber vage und keine Konvergenzaussage. Dennoch ist diese Vorstellung die Motivation für die folgende Begriffsbildung, mit der man wiederum das Verhalten bei oft durchgeführten Experimenten erklären und quantitativ erfassen kann.

DEFINITION 55.1. Zu einer endlichen Menge  $M$  nennt man eine Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto f(x),$$

mit

$$\sum_{x \in M} f(x) = 1$$

eine (diskrete) *Wahrscheinlichkeitsdichte* auf  $M$ .

Diese Benennung verwendet man eigentlich nur, wenn man eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation beabsichtigt. Statt diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte sagt man auch *Zähldichte*. Unter  $M$  sollte man sich die möglichen Ausgänge eines Experimentes vorstellen, wobei  $f(x)$  die Wahrscheinlichkeit angibt, dass bei dem Experiment der Ausgang gleich  $x$  ist. Das Ereignis  $x$  tritt also mit Wahrscheinlichkeit  $f(x)$  ein.

DEFINITION 55.2. Auf einer endlichen Menge  $M$  sei eine diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte  $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$  gegeben. Dann nennt man jede Teilmenge  $E \subseteq M$  ein *Ereignis* und man nennt

$$\mu_f(E) := \sum_{x \in E} f(x)$$

die *Wahrscheinlichkeit* von  $E$ .

Ein Element  $x \in M$  nennt man auch ein *Elementarereignis*.

DEFINITION 55.3. Eine endliche Menge  $M$  zusammen mit einer fixierten diskreten Wahrscheinlichkeitsdichte  $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und mit der Potenzmenge aller Ereignisse nennt man einen *endlichen Wahrscheinlichkeitsraum*.

DEFINITION 55.4. Auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(M, f)$  heißt die Abbildung

$$\mu_f: \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, E \longmapsto \mu_f(E) = \sum_{x \in E} f(x),$$

ein .

BEISPIEL 55.5. Wir betrachten die Menge  $M = \{a, b, c, d\}$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(a) = \frac{1}{12}, f(b) = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}, f(c) = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, f(d) = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}.$$

Es gibt 16 Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{b, c\}$  ist beispielsweise

$$\mu_f(\{b, c\}) = f(b) + f(c) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12},$$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{a, b, d\}$  ist

$$\mu_f(\{a, b, d\}) = f(a) + f(b) + f(d) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{6}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Eine leere Menge kann kein Wahrscheinlichkeitsraum sein, bei einer einelementigen Menge muss der einzige Punkt die Wahrscheinlichkeit 1 besitzen. Bei einer zweielementigen Menge spricht man von einer Bernoulli-Verteilung.

DEFINITION 55.6. Sei  $p \in [0, 1]$ . Die endliche Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_p$  auf  $M = \{0, 1\}$  mit

$$f_p(1) = p$$

und

$$f_p(0) = 1 - p$$

heißt *Bernoulli-Verteilung*.

LEMMA 55.7. *Es sei  $(M, \mu)$  ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist  $\mu(\emptyset) = 0$  und  $\mu(M) = 1$ .*
- (2) *Für Teilmengen  $F \subseteq E$  ist  $\mu(F) \leq \mu(E)$ .*
- (3) *Für (paarweise) disjunkte Ereignisse  $E_i, i \in I$ , ist*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

- (4) *Für das komplementäre Ereignis  $M \setminus E$  zu einem Ereignis  $E$  gilt*

$$\mu(M \setminus E) = 1 - \mu(E).$$

- (5) *Für zwei Ereignisse  $E$  und  $F$  ist*

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F).$$

*Beweis.* Es sei  $f$  die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte.

- (1) Die leere Summe ist gleich 0, die zweite Eigenschaft gehört zur Definition einer endlichen Wahrscheinlichkeitsdichte.
- (2) Ist klar, da die Werte der Dichte nichtnegativ sind.
- (3) Es ist

$$\mu\left(\bigsqcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{x \in \bigsqcup_{i \in I} E_i} f(x) = \sum_{i \in I} \left( \sum_{x \in E_i} f(x) \right) = \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

- (4) Folgt aus (3).
- (5) Folgt aus (3), da man  $E \cup F$  disjunkt in die drei Mengen  $E \cap (M \setminus F)$ ,  $F \cap (M \setminus E)$  und  $E \cap F$  zerlegen kann und somit

$$\begin{aligned} \mu(E \cup F) &= \mu(E \cap (M \setminus F)) + \mu(F \cap (M \setminus E)) + \mu(E \cap F) \\ &= \mu(E) - \mu(E \cap F) + \mu(F) - \mu(E \cap F) + \mu(E \cap F) \\ &= \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F) \end{aligned}$$

ist.

□

Die Eigenschaft (2) heißt die *Monotonie* und die Eigenschaft (3) heißt die *Additivität* eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

BEMERKUNG 55.8. Auf einer endlichen Menge sind eine Wahrscheinlichkeitsdichte und ein Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalente mathematische Objekte. Die Dichte definiert für jedes Ereignis

$$E \subseteq M$$

das Maß

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

und umgekehrt ist durch das Maß über

$$f(x) = \mu(\{x\})$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte festgelegt.

### Laplace-Räume

DEFINITION 55.9. Es sei  $M$  eine endliche Menge. Dann nennt man die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die jedem Element  $x \in M$  den konstanten Wert  $\frac{1}{\#(M)}$  zuweist, die *Laplace-Dichte* auf  $M$ . Die Menge  $M$  versehen mit dieser Dichte heißt *Laplace-Raum*.

Bei einem Laplace-Raum sind alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, das auch *Laplace-Maß* genannt wird, ist besonders einfach, es ist

$$\mu(E) = \frac{\#(E)}{\#(M)},$$

d.h., es wird einfach der relative Anteil von  $E$  an  $M$  gemessen. Insofern wird hier das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten auf das Zählen von Teilmengen zurückgeführt. Bei Formulierungen wie „man wählt zufällig ein Element“ aus einer endlichen Menge  $M$  setzt man  $M$  als Laplace-Raum an.

BEISPIEL 55.10. Der Laplace-Raum zum einfachen Münzwurf besteht aus zwei Elementen, Kopf und Zahl, also

$$M = \{K, Z\},$$

und die Laplace-Dichte ist konstant gleich  $\frac{1}{2}$ , also

$$f(K) = f(Z) = \frac{1}{2}.$$

Beide Elementarereignisse sind also gleichwahrscheinlich mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ . Es gibt nur vier Ereignisse, nämlich  $\emptyset$ ,  $\{K\}$ ,  $\{Z\}$  und die Gesamtmenge  $\{K, Z\}$ , die leere Menge hat Wahrscheinlichkeit 0, die Gesamtmenge hat Wahrscheinlichkeit 1.

Ein Münzwurf ist zugleich eine Bernoulli-Verteilung und ein Laplace-Experiment.

BEISPIEL 55.11. Der Laplace-Raum zu einem einfachen Würfelwurf mit einem fairen Würfel besteht aus sechs Elementen, die den Seiten des Würfels entsprechen, und werden üblicherweise mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 durchnummeriert, es ist also

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Laplace-Dichte ist konstant gleich  $\frac{1}{6}$ , also

$$f(i) = \frac{1}{6}$$

für alle  $i$ . Die Elementarereignisse sind also gleichwahrscheinlich mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$ . Es gibt

$$2^6 = 64,$$

also 64 Ereignisse. Beispielsweise sind

$$\emptyset, \{2\}, \{6\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{x \in M \mid x \text{ ist gerade}\}, \{x \in M \mid x \geq 5\}$$

Ereignisse. Ihre Wahrscheinlichkeiten sind einfach zu berechnen, beispielsweise ist

$$\mu(\{2, 5\}) = \frac{\#\{2, 5\}}{\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

BEISPIEL 55.12. In Beispiel 13.9 haben wir die Anzahl der Möglichkeiten berechnet, 6 Kugeln aus 49 Kugeln zu ziehen, und zwar gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

Teilmengen. Diese haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, somit liegt ein Laplace-Raum vor, wobei die einzelnen Elementarereignisse, also eine bestimmte Ziehung, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{13983816}$$

besitzen.

Wenn man sich für die Wahrscheinlichkeit interessiert, dass die 11 gezogen wird, so muss man alle sechselementigen Teilmengen zählen, in denen die 11 vorkommt. Da die 11 festgelegt ist, geht es um die Anzahl der fünfelementigen Teilmengen der Menge  $\{1, 2, \dots, 49\} \setminus \{11\}$ , diese Anzahl ist durch  $\binom{48}{5}$  gegeben. Die Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6}{49},$$

was man sich auch so klar machen kann: Die Wahrscheinlichkeit, dass die zuerst gezogene Zahl eine 11 ist, beträgt  $\frac{1}{49}$ , die Wahrscheinlichkeit, dass die als zweite gezogene Zahl eine 11 ist, beträgt ebenfalls  $\frac{1}{49}$ , u.s.w., und aufsummieren der disjunkten Ereignisse liefert auch  $\frac{6}{49}$ .

Wenn man sich für die Wahrscheinlichkeit interessiert, dass sowohl die 11 als auch die 37 gezogen werden, so muss man alle sechselementigen Teilmengen

zählen, in denen die 11 und die 37 vorkommen. Dies ergibt die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{47}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 5}{49 \cdot 48} = \frac{5}{49 \cdot 8} = \frac{5}{392}.$$

BEMERKUNG 55.13. Die Ziehung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beim Zahlenlotto ist gleichwahrscheinlich wie die Ziehung der Zahlen 3, 11, 19, 28, 33, 45. Dennoch scheint das zweite Ergebnis typischer als das erste zu sein. Das ist aber allein eine psychologisch bedingte Sichtweise. Bei einem zufälligen Experiment erwartet man einen chaotischen Ausgang ohne irgendeine Regelmäßigkeit, man erwartet nicht, im Ergebnis ein Muster zu erkennen. Man muss auch die Formulierung ernst nehmen. Es wird gesagt, dass die Ziehung von 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau so wahrscheinlich ist wie die Ziehung von genau den sechs konkreten Zahlen 3, 11, 19, 28, 33, 45. Es wird nicht gesagt, dass die Ziehung von (etwas wie) 1, 2, 3, 4, 5, 6 gleichwahrscheinlich ist mit der Ziehung „von etwas wie“ 3, 11, 19, 28, 33, 45. Es gibt natürlich nur 44 mögliche Ziehungen (von 1, 2, 3, 4, 5, 6 über 2, 3, 4, 5, 6, 7 bis 44, 45, 46, 47, 48, 49), bei denen sechs hintereinanderliegende Zahlen gezogen werden, dieses Ereignis ist also sehr unwahrscheinlich.

Es ist ziemlich schwer, genau zu charakterisieren, was man unter „etwas wie 3, 11, 19, 28, 33, 45“ verstehen soll, oder was man unter einer typischen „chaotischen musterfreien Ziehung“ betrachtet man 3, 11, 12, 28, 33, 45 ebenfalls als musterfrei, oder hält man das für ein außergewöhnliches Ergebnis, da immerhin zwei aufeinanderfolgende Zahlen gezogen wurden? Es ist jedenfalls erstaunlich, wie oft man im Zufälligen doch noch eine kleine Beobachtung des scheinbar Besonderen machen kann. In 3, 11, 19, 28, 33, 45 ist beispielsweise die Differenz der ersten drei Zahlen konstant gleich 8.

BEISPIEL 55.14. Beim Skat wird mit 32 Karten gespielt, wobei drei Spieler je zehn Karten bekommen und zwei Karten in den „Skat“ gehen. Unter den Karten spielen die vier Buben eine besondere Rolle. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* sämtliche Buben bekommt? Die Anzahl der möglichen „Hände“, die Spieler *A* bekommen kann, beträgt  $\binom{32}{10}$ . Die Anzahl der Hände, die alle vier Buben umfassen, sind  $\binom{28}{6}$ . Daher ist die Wahrscheinlichkeit, alle Buben zu bekommen, gleich

$$\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{\frac{28 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 23}{6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 23}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 31 \cdot 29} = \frac{21}{3596}.$$

Das sind ungefähr 0,58%.

BEISPIEL 55.15. Mit Lemma 55.7 lässt sich häufig die Wahrscheinlichkeit einfacher berechnen, insbesondere die unscheinbare Komplementregel ist hilfreich. Wenn man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit wissen möchte, dass in einer Lottoziehung die gezogenen Zahlen *nicht* alle in einer Reihe liegen, so könnte man ins Grübeln kommen, wie man diese Ereignismenge geschickt abzählt. Dagegen ist das Komplement einfach zu erfassen, davon gibt es

nämlich 44 Stück und die Wahrscheinlichkeit davon ist somit  $\frac{44}{13983816}$ . Die komplementäre Wahrscheinlichkeit ist also

$$1 - \frac{44}{13983816} = \frac{13983816 - 44}{13983816} = \frac{13983772}{13983816}.$$