

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 40

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 40.1. Oma Müller und Opa Müller haben heute Geburtstag. Sie wird 69 Jahre alt und er wird 73 Jahre alt. Wie alt waren sie, als man beide Altersangaben zwar mit natürlichen, aber nicht mit positiven natürlichen Zahlen ausdrücken konnte.

Übungsaufgaben

AUFGABE 40.2. Familie A und B notieren ihre Einnahmen und Ausgaben pro Monat in der Form $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, wobei der erste Eintrag für die Einnahmen und der zweite Eintrag für die Ausgaben steht. Familie A notiert für die erste Jahreshälfte die Paare

$(2500, 2800)$, $(3500, 3200)$, $(3300, 2900)$, $(2800, 2800)$, $(2400, 4200)$, $(4000, 2700)$.

Familie B notiert für die erste Jahreshälfte die Paare

$(3300, 3600)$, $(3900, 3800)$, $(4300, 4300)$, $(4000, 3800)$, $(3900, 4100)$, $(4000, 3700)$.

- (1) Notiere für jede Familie und jeden Monat den Gewinn bzw. das Defizit in Paarschreibweise mit Hilfe der Standardrepräsentanten.
- (2) Berechne für jede Familie die Gesamteinnahmen und die Gesamtausgaben im angegebenen Zeitraum.
- (3) Bestimme auf zwei verschiedene Arten für jede Familie den Gesamtgewinn bzw. das Gesamtdefizit (Standardrepräsentant).
- (4) Vergleiche für jeden Monat den Haushalt der beiden Familien mit Hilfe der Festlegung aus Lemma 40.4.

AUFGABE 40.3. Ihre Fußballmannschaft hat das vorletzte Spiel mit $5 : 1$ und das letzte Spiel mit $10 : 5$ gewonnen. Welchen Sieg finden Sie überzeugender?

AUFGABE 40.4. Es seien $(M, *)$ und (N, \circ) Mengen mit Verknüpfungen und es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine mit den Verknüpfungen verträgliche surjektive Abbildung, es gelte also

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y).$$

Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn $*$ kommutativ ist, so ist auch \circ kommutativ.
- (2) Wenn $*$ assoziativ ist, so ist auch \circ assoziativ.
- (3) Wenn M ein neutrales Element besitzt, so besitzt auch N ein neutrales Element.

AUFGABE 40.5.*

Zeige, dass man durch die Festlegung

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) \mathbb{Z} eine Verknüpfung erhält, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 0)]$ als neutrales Element besitzt.

AUFGABE 40.6.*

Zeige, dass man durch die Festlegung

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$a + d \geq b + c,$$

auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) \mathbb{Z} eine totale Ordnung erhält.

AUFGABE 40.7. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto [(n, 0)],$$

injektiv ist und dass sie mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich ist.

AUFGABE 40.8.*

Zeige, dass die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 40.9. Zeige, dass bei der auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegten Äquivalenzrelation jedes Paar (x, y) einen Vertreter (x', y') besitzt, bei dem x' und y' teilerfremd sind.

AUFGABE 40.10. Zeige, dass man durch die Festlegung

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) \mathbb{Q} eine wohldefinierte Verknüpfung erhält, die kommutativ und assoziativ ist und die $[(1, 1)]$ als neutrales Element besitzt. Zeige ferner, dass bei $a > 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(b, a)]$ und bei $a < 0$ die Klassen $[(a, b)]$ und $[(-b, -a)]$ invers zueinander sind.

AUFGABE 40.11. Zeige, dass im Äquivalenzklassenmodell für \mathbb{Q} die Addition die Beziehung

$$[(a, d)] + [(c, d)] = [(a + c, d)]$$

erfüllt.

AUFGABE 40.12. Es sei $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ mit der durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegten Äquivalenzrelation versehen. Zeige, dass es zu

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$$

eine Zahl $d \in \mathbb{N}_+$ und ganze Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n mit

$$(a_1, b_1) \sim (c_1, d), (a_2, b_2) \sim (c_2, d), \dots, (a_n, b_n) \sim (c_n, d)$$

gibt.

AUFGABE 40.13. Zeige, dass man durch die Festlegung $[(a, b)] \geq [(c, d)]$, falls $ad \geq bc$, auf (dem Äquivalenzklassenmodell von) \mathbb{Q} eine wohldefinierte totale Ordnung erhält.

AUFGABE 40.14. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, n \longmapsto [(n, 1)],$$

injektiv und mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich ist.

AUFGABE 40.15. Es sei M eine Menge mit einer kommutativen, assoziativen Verknüpfung $*$ und einem neutralen Element e . Ferner gelte die Kürzungsregel, dass aus $a * c = b * c$ stets $a = b$ folgt.

- (1) Zeige, dass auf $M \times M$ durch die Festlegung $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a * d = b * c$ gilt, eine Äquivalenzrelation definiert wird.
- (2) Zeige, dass man auf der Quotientenmenge $M \times M / \sim$ eine Gruppenstruktur definieren kann, die die Verknüpfung auf M fortsetzt.

AUFGABE 40.16. Wir betrachten auf $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegte Relation. Zeige, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, deren Äquivalenzklassen die „diskreten Geraden“ durch den Nullpunkt ohne den Nullpunkt sind.

AUFGABE 40.17. Wir betrachten auf \mathbb{Z}^2 die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc,$$

festgelegte Relation. Zeige, dass dies keine Äquivalenzrelation ist

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 40.18. (2 Punkte)

Zeige, dass die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a + d = b + c$ ist, festgelegt ist, durch die Sprünge $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

AUFGABE 40.19. (8 (2+2+2+2) Punkte)

Es sei \sim die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a + d = b + c$ ist, festgelegt ist, und es sei $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ die zugehörige Quotientenmenge, also das Äquivalenzklassenmodell von \mathbb{Z} . Es sei $G = \mathbb{N} \uplus \mathbb{N}_-$ das (in der 18. Vorlesung eingeführte) „direkte Modell“ für die ganzen Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

die durch

$$\varphi(n) = \begin{cases} (n, 0), & \text{falls } n \text{ nichtnegativ ist,} \\ (0, m), & \text{falls } n = -m \text{ negativ ist,} \end{cases}$$

definiert ist, und die zusammengesetzte Abbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}.$$

- (1) Zeige, dass $p \circ \varphi$ eine bijektive Abbildung ist.
- (2) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Addition verträglich ist.
- (3) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Multiplikation verträglich ist.
- (4) Zeige, dass $p \circ \varphi$ mit der Ordnung verträglich ist.

AUFGABE 40.20. (3 Punkte)

Es sei $(M, *, e)$ eine endliche Menge mit einer kommutativen, assoziativen Verknüpfung mit einem neutralen Element e . Ferner gelte in M die „Kürzungsregel“: Aus $z * x = z * y$ folgt $x = y$. Zeige, dass M eine Gruppe ist.

AUFGABE 40.21. (1 Punkt)

Zeige, dass im Äquivalenzklassenmodell für \mathbb{Q} die Ordnung die Beziehung

$$[(a, d)] \geq [(c, d)]$$

genau dann, wenn

$$a \geq c,$$

erfüllt.

AUFGABE 40.22. (3 (1+1+1) Punkte)

Die Fußballspiele zwischen dem TSV Wildberg und VfB Effringen endeten in den letzten Jahren wie folgt:

7 : 2, 3 : 0, 0 : 0, 9 : 6, 8 : 0, 2 : 1, 4 : 2, 3 : 0, 5 : 5, 6 : 3, 3 : 1, 1 : 1, 7 : 0,
2 : 0, 6 : 4, 6 : 2, 3 : 4, 3 : 2.

- (1) Erstelle die Äquivalenzklassen (auf der Menge der angegebenen Ergebnisse) gemäß der Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die durch $a : b \sim c : d$, falls $a + d = b + c$, definiert ist.
- (2) Erstelle die Äquivalenzklassen gemäß derjenigen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ durch $a : b \sim c : d$, falls $ad = bc$, definiert ist und für die $\{n : 0 \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $\{0 : 0\}$ eigene Äquivalenzklassen sind.
- (3) Erstelle die Äquivalenzklassen gemäß derjenigen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ durch $a : b \sim c : d$, falls $ad = bc$, definiert ist und für die die anderen Elemente nur zu sich selbst äquivalent sind.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7