Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 54

Übungsaufgaben

Aufgabe 54.1.*

Es sei M eine spaltenstochastische Matrix. Zeige, dass das Bild eines jeden Verteilungsvektors wieder ein Verteilungsvektor ist.

Aufgabe 54.2. Diskutiere in der Situation von Beispiel 54.2 die Spezialfälle

(1) $p_1 = 1$ und $p_2 = 1$,
(2) $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$,
(3) $p_1 = 0$ und $p_2 = 1$,
(4) $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$,
(5) $p_1 = p_2$,
(6) $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 54.3.*

Finde einen Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 - p_1 & 1 - p_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$0 \leq p_1, p_2 \leq 1$$

zum Eigenwert $p_1 - p_2$. Handelt es sich um eine Eigenverteilung?

Aufgabe 54.4.*

Wir betrachten die spaltenstochastische Matrix

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 1 - r \\ 1 - p & q & 0 \\ 0 & 1 - q & r \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq p, q, r \leq 1$.

(1) Berechne die Eigenwerte der Matrix.
(2) Berechne eine Eigenverteilung.

Aufgabe 54.5.*

Wir betrachten eine stochastische Matrix, bei der jede Spalte gleich $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ ist. Bestimme die Eigenverteilung und eine Basis des Kerns zu dieser Matrix.

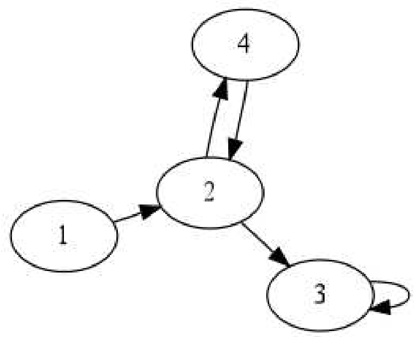
Aufgabe 54.6. Man interpretiere eine Permutationsmatrix als eine stochastische Matrix. Was sind die Eigenverteilungen?

Aufgabe 54.7. Was bedeutet es für eine spaltenstochastische Matrix, dass in einer Zeile alle Einträge positiv sind, und was bedeutet es, dass in einer Spalte alle Einträge positiv sind?

Aufgabe 54.8. Zeige, dass die Menge der spaltenstochastischen Matrizen in der Sphäre zum Radius 1 bezüglich der Spaltensummennorm enthalten ist. Gilt hierbei Gleichheit?

Aufgabe 54.9. Man mache sich klar, dass die Konzepte Relation auf einer Menge M (im Sinne von Definition 45.1, wobei die beiden beteiligten Mengen gleich sein mögen) und gerichteter Graph (im Sinne eines Pfeildiagrammes, wobei es von einem Punkt zu einem weiteren Punkt maximal einen Pfeil geben darf) mathematisch äquivalent sind.

Aufgabe 54.10.*



Erstelle die Adjazenzmatrix zum gerichteten Graphen rechts.

Aufgabe 54.11. Welche Besonderheiten zeichnet eine Adjazenzmatrix zu einer Äquivalenzrelation aus?

Aufgabe 54.12. Drücke für die Gruppe C der Fußball-Europameisterschaft 2016 die Gewinnstruktur als eine Relation, durch ein Pfeildiagramm (einen gerichteten Graphen) und durch eine Adjazenzmatrix aus.

Aufgabe 54.13. Erstelle für die Gruppe C der Fußball-Europameisterschaft 2016 die stochastische Matrix, die sich aus der erweiterten Adjazenzmatrix zur Gewinnstruktur ergibt, bei der in der Diagonalen überall Einsen (Selbstsieg) stehen (damit keine Nullspalte auftritt). Wie lautet die zugehörige Eigenverteilung?

Aufgabe 54.14. In einer Fußballgruppe mit n Mannschaften (beispielsweise einer EM-Gruppe oder einer Bundesligahinrunde) spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft, bei einem Sieg gibt es 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage keinen Punkt. Die Ergebnisse werden in einer $n \times n$-Matrix derart verbucht, dass der Eintrag an der Stelle (M, N) angibt, wie viele Punkte die Mannschaft M im Spiel gegen N erzielt hat (an der Stelle (M, M) steht 0). Welcher Vektor kommt heraus, wenn man diese Matrix auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ anwendet? Erstelle diese Matrix für die Gruppe C der Fußball-Europameisterschaft 2016.

Aufgabe 54.15. Bei Studierenden verschiedender Fächer wurden von einem Semester zum nächsten folgende Wanderungsbewegungen statistisch festgestellt:

a) Wer Mathematik studiert, bleibt zu 60% bei der Mathematik, wechselt zu 10% zur Philosophie, zu 10% zur Physik und nimmt sich zu 20% ein Freisemester.

b) Wer Philosophie studiert, bleibt zu 40% bei der Philosophie, wechselt zu 10% zur Mathematik, zu 20% zur Physik und nimmt sich zu 30% ein Freisemester.

c) Wer Physik studiert, bleibt zu 50% bei der Physik, wechselt zu 30% zur Mathematik und nimmt sich zu 20% ein Freisemester.

d) Wer ein Freisemester eingelegt hat, bleibt zu 40% beim Freisemester und wechselt jeweils zu 20% zur Mathematik, zur Philosophie oder zur Physik.

(1) Erstelle eine stochastische Matrix, die diese Wanderungsbewegungen darstellt.
(2) Durch welche Matrix wird die Wanderungsbewegung vom dritten zum sechsten Semester beschrieben?
(3) Die Erstsemester fangen zu einem Drittel mit den Studienfächern Mathematik, Philosophie oder Physik an. Wie groß ist der Anteil der Studierenden, die in ihrem vierten Semester ein Freisemester einlegen?

Aufgabe 54.16. Berechne die ersten fünf Iterationen zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

zu den Startverteilungen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 54.17. Berechne die ersten vier Iterationen zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

zur Startverteilung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 54.18.*

Es sei ein Kreis mit sechs (äquidistanten) Knoten gegeben, die mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnet seien. Bei einem Bewegungsprozess seien die Wahrscheinlichkeiten, stehen zu bleiben oder zu dem linken oder rechten Nachbarn zu wechseln, konstant gleich $\frac{1}{3}$. Erstelle die zugehörige stochastische Matrix und berechne die Eigenverteilung(en).

Aufgabe 54.19. Es sei M eine spaltenstochastische $n \times n$-Matrix. Zeige direkt, dass 1 ein Eigenwert von M ist.

Aufgabe 54.20. Unter welchen Bedingungen gilt für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Gleichheit

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| ?$$

Aufgabe 54.21. Es sei M eine $n \times n$-spaltenstochastische Matrix und

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Zeige, dass U invariant unter M ist und dass $M|_U$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 54.22.*

Es sei M eine spaltenstochastische Matrix, bei der eine Zeile ausschließlich aus positiven Einträgen bestehe. Zeige, dass die Folge M^n gegen eine Matrix N konvergiert, bei der jede Spalte gleich ist.

Aufgabe 54.23.*

Wir wollen Aussagen über die Determinante einer spaltenstochastischen $d \times d$-Matrix machen.

(1) Zeige, dass für die Determinante einer spaltenstochastischen Matrix M die Beziehung
$$|\det M| \leq 1$$
gilt.

(2) Man gebe ein Beispiel für eine spaltenstochastische Matrix, die nicht die Einheitsmatrix sei, mit
$$\det M = 1$$

(3) Es sei $d \geq 2$ und M besitze zusätzlich die Eigenschaft, dass es eine Zeile mit ausschließlich positiven Einträgen gebe. Zeige
$$|\det M| < 1$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 54.24. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der spaltenstochastischen Matrizen eine abgeschlossene Teilmenge im Matrizenraum $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 54.25. (4 Punkte)

Berechne die ersten vier Iterationen zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}$$

zur Startverteilung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 54.26. (3 Punkte)

Berechne die Eigenverteilung zur spaltenstochastischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{8}{21} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 54.27. (3 Punkte)

Zeige, dass das Produkt von zwei spaltenstochastischen Matrizen wieder spaltenstochastisch ist. Ist die inverse Matrix zu einer invertierbaren spaltenstochastischen Matrix wieder spaltenstochastisch?

Aufgabe 54.28. (8 Punkte)

Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen gerichteten Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Definiere einen Isomorphiebegriff für Spielgruppen und klassifiziere die Spielgruppen entlang geeigneter numerischer Invarianten. Wie viele Spielgruppen gibt es? Aus welchen Isomorphietypen lässt sich die Tabellenordnung ableiten, aus welchen nicht?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Digraph example.svg , Autor = Benutzer MasterMatt auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 2

Quelle = Fussball.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 6