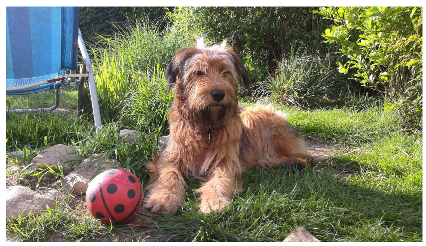
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 44



Auch mit dem Ball spielt sie gern.

Bilinearformen

Reelle Skalarprodukte sind positiv definite symmetrische Bilinearformen. In dieser Vorlesung besprechen wir Bilinearformen allgemein. Neben Skalarprodukten sind die Minkowski-Formen, mit denen man die spezielle Relativitätstheorie beschreiben kann, und die Hesse-Formen wichtig, die in der höherdimensionalen Analysis betrachtet werden, um Extrema von Funktionen in mehreren Variablen zu bestimmen, siehe die folgenden Vorlesungen.

Definition 44.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K,\, (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle ,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\, w \longmapsto \langle v,w \rangle ,$$

und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle v,w \rangle ,$$

K-linear sind.

Bilinear bedeutet einfach multilinear in zwei Komponenten, diese Eigenschaft haben wir schon im Zusammenhang mit Determinanten kennengelernt. Ein extremes Beispiel ist die *Nullform*, die jedem Paar den Nullwert zuordnet. Es ist einfach, eine Vielzahl von Bilinearformen auf dem K^n anzugeben.

Beispiel 44.2. Sei $V = K^n$ und seien $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i, j \leq n$ fixiert. Dann ist die Zuordnung

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform. Bei

$$a_{ij} = 0$$

für alle i, j ist dies die Nullform; bei

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

liegt das Standardskalarprodukt vor (wobei der Ausdruck für jeden Körper einen Sinn ergibt, aber die Eigenschaft, positiv definit zu sein, gegenstandslos ist). Bei $n = 4$ und

$$\Psi(x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

spricht man von einer *Minkowski-Form*. Bei $n = 2$ und

$$\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

handelt es sich um die Determinante im zweidimensionalen Fall.

Die Gramsche Matrix

Definition 44.3. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis.

In Beispiel 44.2 bildet $(a_{ij})_{ij}$ die Gramsche Matrix bezüglich der Standardbasis des K^n. Wenn die Gramsche Matrix zu einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben ist, so kann man daraus $\langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i c_j \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \langle v_i, w_j \rangle \right) \end{aligned}$$

$$= \quad (b_1, \ldots, b_n) G \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Man erhält also den Wert der Bilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des zweiten Vektors anwendet und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und etwas ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle \, = \, v^{\text{tr}} G w.$$

Lemma 44.4. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelte die Beziehungen*

$$w_j \, = \, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H \, = \, A^{tr} G A.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ir} v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{ks} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{ir} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} (G \circ A)_{is} \\ &= \left(A^{\text{tr}} \circ (G \circ A) \right)_{rs}. \end{aligned}$$

$\square$

Symmetrische Bilinearformen

Definition 44.5. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle \, = \, \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Definition 44.6. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

Definition 44.7. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Eine Basis v_i, $i \in I$, von V heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

für alle

$$i \neq j$$

ist.

Für eine symmetrische Bilinearform ist es durchaus möglich, dass, anders als bei Skalarprodukten, ein von 0 verschiedener Vektor zu sich selbst orthogonal ist. Es kann auch, im ausgearteten Fall, von 0 verschiedene Vektoren geben, die orthogonal zu allen Vektoren sind. Wie im Fall eines Skalarproduktes gibt es Orthogonalbasen.

Satz 44.8. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann besitzt V eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Siehe Aufgabe 44.9. □

Definitheit von Bilinearformen

Wir möchten die symmetrischen Bilinearformen über den reellen Zahlen klassifizieren.[1] Dabei spielen die Skalarprodukte als Extremfall eine Schlüsselrolle.

Definition 44.9. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Diese Bilinearform heißt

(1) *positiv definit*, wenn $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.

[1] Unter einer *Klassifikation* versteht man in der Mathematik, eine Menge an mathematischen Objekten vollständig und übersichtlich zu beschreiben, Kriterien anzugeben, wann zwei Objekte im Wesentlichen gleich (oder äquivalent) sind und die verschiedenen Objekte durch numerische Invariante zu erfassen und für die Objekte möglichst einfache Vertreter anzugeben. Beispielsweise werden endlichdimensionale Vektorräume durch ihre Dimension klassifiziert, gleichdimensionale Vektorräume sind zueinander isomorph. Lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^n$ in sich werden über die jordansche Normalform klassifiziert. Die entscheidende Frage ist hierbei, welche Jordanblöcke mit welcher Länge und zu welchen Eigenwerten wie oft vorkommen? Hier besprechen wir den Typ einer reell-symmetrischen Bilinearform. Andere Klassifikationsresultate in der linearen Algebra beziehen sich auf quadratische Formen und auf endliche Bewegungsgruppen im Raum.

(2) *negativ definit*, wenn $\langle v, v\rangle < 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
(3) *positiv semidefinit*, wenn $\langle v, v\rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ ist.
(4) *negativ semidefinit*, wenn $\langle v, v\rangle \leq 0$ für alle $v \in V$ ist.
(5) *indefinit*, wenn $\langle -, -\rangle$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen sind genau die reellen Skalarprodukte. Eine indefinite Form liegt vor, wenn es Vektoren v und w mit $\langle v, v\rangle > 0$ und $\langle w, w\rangle < 0$ gibt. Die Nullform ist zugleich positiv semidefinit und negativ semidefinit, aber weder positiv definit noch negativ definit (außer auf dem Nullraum).

Eine Bilinearform auf V kann man auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf U ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine beliebige Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 44.10. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, -\rangle$. Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p := \max\left(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V,\ \langle -, -\rangle|_U \text{ positiv definit}\right)$$

und

$$q := \max\left(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V,\ \langle -, -\rangle|_U \text{ negativ definit}\right)$$

ist.

Bei einem Skalarprodukt auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum ist der Typ $(n, 0)$. Nach Aufgabe 44.11 ist stets

$$p + q \leq \dim(V).$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Gramsche Matrix zu einer symmetrischen Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$, sagen wir bezüglich der Standardbasis. Die Einschränkung der Form auf $\mathbb{R}e_1$ ist positiv definit, die Einschränkung auf $\mathbb{R}e_2$ ist negativ definit, die Einschränkung auf $\mathbb{R}e_3$ ist die Nullform. Daher sind $p, q \geq 1$, es ist aber nicht unmittelbar klar, ob es nicht auch zweidimensionale Untervektorräume geben könnte, auf denen die Einschränkung positiv definit ist. Eine Untersuchung „aller" Untervektorräume, wie es die Definition verlangt, scheint aussichtslos.

Es gibt aber mehrere Möglichkeiten, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, ohne alle Untervektorräume von V zu überblicken. Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.

James Joseph Sylvester (1814-1897)

Satz 44.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven und q negativen Einträgen.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Indem man die Orthogonalvektoren umskaliert, kann man erreichen, dass in der Diagonalen nur die Werte $1, -1, 0$ vorkommen. Die auf dem $\mathbb{R}^n$ durch die Diagonalmatrix mit p Einsen, q Minuseinsen und $n - p - q$ Nullen gegebene Form zeigt, dass jeder Typ, der

$$p + q \leq n$$

erfüllt, realisiert werden kann. Man spricht von der *Standardform zum Typ* (p, q) auf dem $\mathbb{R}^n$.

Typkriterien für symmetrische Bilinearformen

Es gibt mehrere Methoden, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, wobei der Sylvestersche Trägheitssatz eine erste Möglichkeit ist, die aber den Nachteil hat, dass man eine Orthogonalbasis bestimmen muss. Wir besprechen das *Minorenkriterium* und das *Eigenwertkriterium*. Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also bei dem folgenden Kriterium genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

Satz 44.12. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis. Die Determinanten D_k der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$$

seien für $k = 1, \ldots, n$ von 0 verschieden. Es sei a die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1 = \det M_1,\ D_2 = \det M_2, \ldots, D_n = \det M_n = \det G\,.$$

Dann ist $\langle -, - \rangle$ vom Typ $(n - a, a)$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 44.13. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis und es seien D_k die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k},\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ positiv definit, wenn alle D_k positiv sind.*
(2) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge $D_0 = 1,\ D_1,\ D_2, \ldots, D_n$ an jeder Stelle wechselt.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Wir erwähnen noch das folgende *Eigenwertkriterium*.

Satz 44.14. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis. Dann besitzt der Typ (p, q) der Form folgende Interpretation: p ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu G zu positiven Eigenwerten und q ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu G zu negativen Eigenwerten.*

Abbildungsverzeichnis