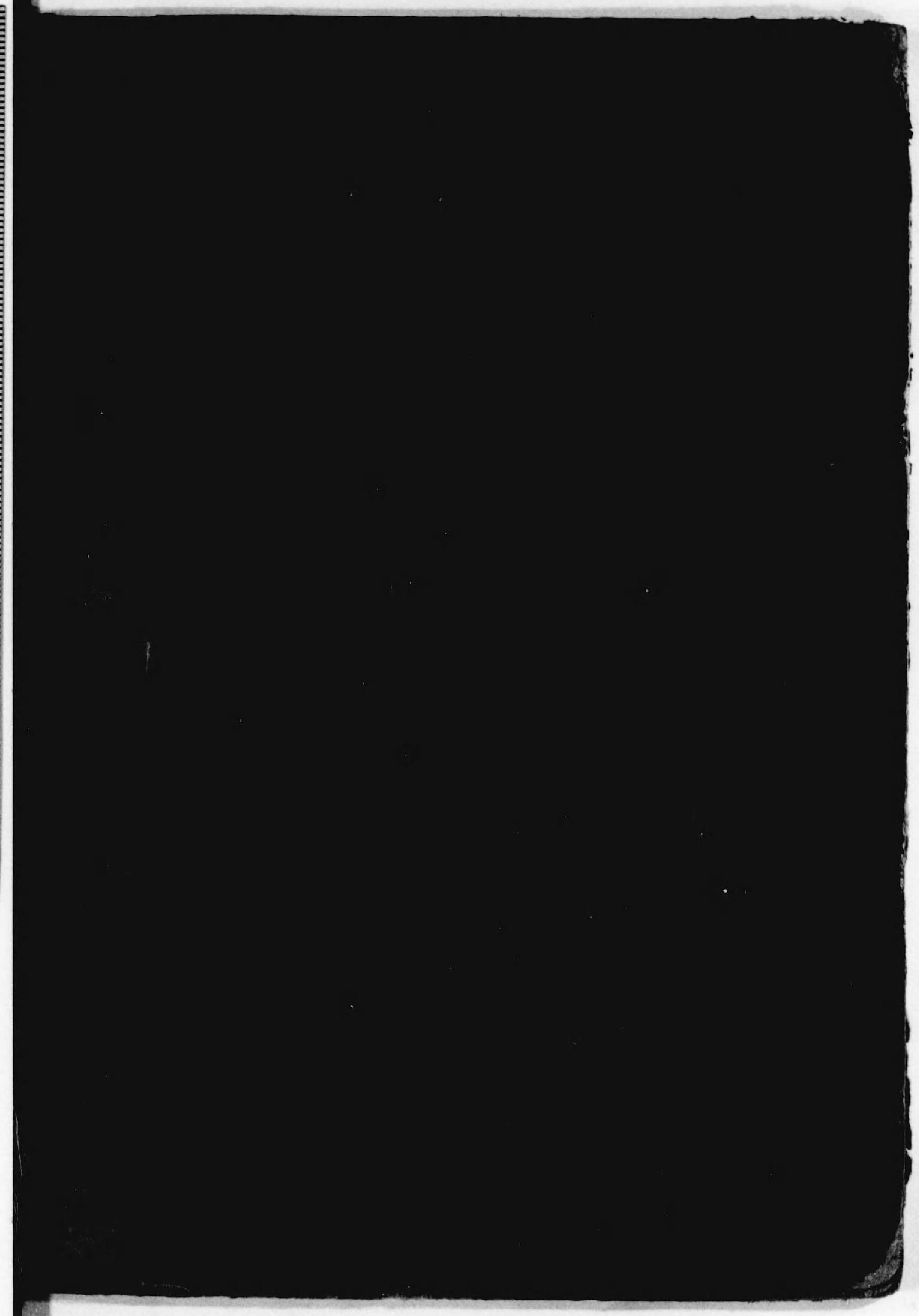
始



早稻田高等工學校編

高等數學

早稻田大學出版部刊

目　次

目　　次

以　　上

第壹章

緒　論

本書ヲ學ブ者ハ先ヅ本章ニ記載ノ數學公式及ビ定理ニツキ一通リ習得シ置クヲ要スル。

代數學

1.1 符號ノ法則

$$\left.\begin{aligned} +(+a)&=+a \\ +(-a)&=-a \\ -(+a)&=-a \\ -(-a)&=+a \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} (+a)(+b)&=+ab \\ (+a)(-b)&=-ab \\ (-a)(+b)&=-ab \\ (-a)(-b)&=+ab \end{aligned}\right\}$$

1.2 恒等式

[1] $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

[2] $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

[3] $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

[4] $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$,　($n$＝正整數)

[5] $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-b^{n-1})$,　($n$＝偶數)

[6] $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$,　($n$＝奇數)

[7] $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

[8] $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$

[9] $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

[10] $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

[11] $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

[12] $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

[13] $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

[14] $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$

[15] $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$

[16] $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

[17] $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

1.3 分數

[1] **分數ノ四則**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\div c}{b\div d}=\frac{ad}{bc}$$

[2] $a<b$ ナラバ $\quad \dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}$, (但シ $x>0$)

[3] $a>b$ ナラバ $\quad \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+x}{b+x}$, (但シ $x>0$)

1.4 羃ノ意義及ビ指數法則

[1] $a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a$, ($n$ 度), ($n=$正整數)

[2] $n=\dfrac{p}{q}$, (p, $q=$正整數) ナルトキハ

$$a^n=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p$$

[3] $n=-m$ ナルトキハ ($m=$正整數)

$$a^n=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

[4] $n=0$ ニシテ $a\neq0$ ナルトキハ

$$a^n=a^0=1$$

[5] $$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad a^m\div a^n=a^{m-n}$$

[6] $$(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}$$

[7] $$(ab)^n=a^n\times b^n$$

[8] $$a^0=1,\quad a^1=a,\quad a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

$$a^{-1}=\frac{1}{a},\qquad a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

[9] $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

1.5 一次方程式

$ax+b=0$ 於テ $a\neq0$ ナラバ方程式ハ唯一ノ根 $\left(x=\dfrac{-b}{a}\right)$ ヲ有スル。

1.6 二次方程式

[1] **二次方程式ノ根** $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ $a\neq0$ ナラバ，此ノ方程式ノ根ハ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

若シ $b=2b'$ ナラバ

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

[2] **判別式** b^2-4ac ヲ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ判別式ト稱スル。

{1} $b^2-4ac>0$ ナラバ二根ハ實數デ不等

{2} $b^2-4ac=0$ ナラバ二根ハ實數デ相等シイ。卽チ等根ヲ有スル。

{3} $b^2-4ac>0$ ナラバ二根ハ虚數デアル。

[3] **根ト係數トノ關係** α,β ヲ上ノ二次方程式ノ二根トスレバ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

1.7 特殊ナル高次方程式

[1]　$x^3-1=0$ ハ因數分解ヲ行ヘバ　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

トナルカラ，　$x=1$,　$x=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$　ナル三根ヲ有スル。

通例，　$\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega_1$,　$\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega_2$　ヲ以テ示ス。

故ニ　$\omega_1^3=\omega_2^3=1$,　$\omega_1^2=\omega_2$,　$\omega_2^2=\omega_1$　デアル。

從ツテ　$\omega_1=\omega$　トスレバ　$\omega_2=\omega^2$　トナル。

以上ノ三根ハ 1 ノ立方根デアル。

[2]　$$1+\omega_1+\omega_2=1+\omega+\omega^2=0$$

1.8 聯立方程式

[1] 二元ノ場合

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{aligned} \qquad 解 \begin{cases} x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

[2] 三元ノ場合

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{aligned}\right\}$$

$$解 \begin{cases} x=-\dfrac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{D} \\ y=-\dfrac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{D} \\ z=-\dfrac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{D} \\ D=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) \end{cases}$$

1.9 聯立二次方程式

簡單ニ解キ得ル場合ノ數例ヲ示セバ次ノ如クデアル。

[1]　$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \end{cases}$$

[1] ノ上式ヨリ y ヲ出シ，之ヲ其ノ下式ニ代入シテ，x ノ二次方程式ヲ得，1.6 [1] ニ依ツテ x ヲ求メレバ，上式ニヨリ y モ求メラレル。

[2]　$$\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+c=0 \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+c'=0 \end{cases}$$

[2] ノ兩式ノ間ニ c, c' ヲ消去シテ，x, y ニ關スル二次ノ同次方程式ヲ得，$x:y$ ヲ求メ，之ヲ何レカノ式ニ代入シテ一未知數ヲ求メ，更ニ比ヨリ他ノ未知數ヲ求メテ x ト y ヲ得ル。

[3]　$$\begin{cases} ax^2+by^2+2gx+c=0 \\ a'x^2+b'y^2+2g'x+c'=0 \end{cases}$$

兩式ノ間ニ y^2 ノ項ヲ消去シ，x ノ二次方程式ヲ得，之ヲ解イテ x ヲ求メレバ，後ハ容易ニ y ガ求メラレル。

[4]　$$\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+2gx=0 \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0 \end{cases}$$

兩式ノ間ニ x ノ項ヲ消去シテ $x:y$ ヲ求メレバ，後ハ容易ニ解決ガツク。

[5]　$$\begin{cases} ax^2+2hxy+2gx+c=0 \\ a'x^2+2h'xy+2g'x+c'=0 \end{cases}$$

兩式ノ間ニ xy ノ項ヲ消去スレバ容易ニ解決ガツク。

[6]　$$\begin{cases} 2hxy+2gx+2fy+c=0 \\ 2h'xy+2g'x+2f'y+c'=0 \end{cases}$$

兩式ノ間ニ xy ノ項ヲ消去スレバ，[1] ノ場合ニ歸スル。

1.10 不等式

[1]　a, b ガ二個ノ實數ナルトキ　$a-b>0$　ナレバ，a ハ b ヨリ大ナリト云ヒ，$a-b<0$ ナレバ，a ハ b ヨリ小ナリト云フ。

[2] $a>b,\ b>c$ ナルトキハ $a>c$

[3] $a>b$ ナルトキハ $a+x>b+x,\quad a-x>b-x$

[4] $c>0$ ニシテ $a>b$ ナルトキハ $ac>bc,\quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

[5] $a>b$ ナラバ $-a<-b$

[6] $a_1>b_1,\ a_2>b_2,\ a_3>b_3,\ \cdots\cdots$ ナラバ

$$a_1+a_2+a_3\cdots\cdots>b_1+b_2+b_3\cdots\cdots$$

[7] $a_1,\ a_2,\ b_3,\ \cdots\cdots\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots$ ガ正數デアッテ $a_1>b_1,\ a_2>b_2,\ a_3>b_3\cdots\cdots$ ナラバ $a_1a_2a_3\cdots\cdots>b_1b_2b_3\cdots\cdots$

[8] $a>b$ ナラバ $a^m>b^m,\ a^{-m}<b^{-m}$, (但シ $m=$正數)

[9] $a, b, c, \cdots\cdots$ ガ n 個ノ正數ナルトキハ

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}\geqq\sqrt[n]{abcd\cdots\cdots}$$

[10] n 個ノ正數ノ和ガ一定ナルトキハ，其ノ積ガ最大ナル値ヲ取ルノハ，是等 n 個ノ數ガ悉ク相等シイトキデアリ，又 n 個ノ正數ノ積ガ一定ナルトキハ，其ノ和ガ最小ニナルノハ，是等 n 個ノ數ガ悉ク相等シイトキデアル。

1. 11 比及ビ比例

[1] $a:b=c:d$ ナラバ $ad=bc$

[2] $ad=bc$ ナラバ

$$\{1\}\quad \begin{cases} a:b=c:d, & b:a=d:c \\ a:c=b:d, & c:a=d:b \end{cases}$$

$$\{2\}\quad \begin{cases} a\pm c:b\pm d=a:b=c:d \\ a+c:a-c=b+d:b-d \\ a+b:a-b=c+d:c-d \\ a\pm b:a=c\pm d:c \\ a\pm b:b=c\pm d:d \end{cases}$$

$$\{3\}\quad \begin{cases} ma:mb=nc:nd \\ \frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{n}:\frac{d}{n} \\ ma:nb=mc:nd \\ \frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{c}{m}:\frac{d}{n} \end{cases}$$

[3] $a:b=c:d$ 及ビ $p:q=r:s$ ナラバ $ap:bq=cr:ds$

[4] $a:b=c:d$ ナラバ $a^2:b^2=c^2:d^2$

一般ニ $a^n:b^n=c^n:d^n$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$$

[5] $a:b=b:c=c:d$ ナラバ

$$b=\pm\sqrt{ac},\quad b=\sqrt[3]{a^2d},\quad c=\sqrt[3]{ad^2}$$

[6] $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=k$ ナラバ

$$k=\frac{pa_1+qa_2+ra_3+\cdots\cdots}{pb_1+qb_2+rb_3+\cdots\cdots}\qquad k=\left\{\frac{pa_1^n+qa_2^n+ra_3^n+\cdots\cdots}{pb_1^n+qb_2^n+rb_3^n+\cdots\cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

[7] $\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots$ ノ分母ガ悉ク正數ナルトキハ

$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots}$ ハ $\frac{a_1}{b^1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\cdots\cdots\cdots$ ノ最小ナルモノヨリ大ニシテ，最大ナルモノヨリ小デアル。

1. 12 等差級數

[1] 等差級數ハ次ノ如クデアル。

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\cdots\cdots a+(n-1)d$$

通例 $a=$初項，$d=$公差，$l=$第 n 項(末項)，$S=n$ 項ノ和，ヲ以テ表ス。

[2] $$l=a+(n-1)d$$

[3] $$S=\frac{n}{2}(a+l)$$

[4] $$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

[5] a, b ノ等差中項$=\dfrac{a+b}{2}$

[6] $$a=l-(n-1)d$$

1.13 等比級數

[1] 等比級數ハ次ノ如クデアル。

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots\cdots\ ar^{n-1}$$

通例 a=初項, r=公比, l=第n項(末項), S=n項ノ和, ヲ以テ表ス。

[2] $$l=ar^{n-1}$$

[3] $$S=\frac{a-ar^n}{1-r}$$

[4] $$S=\frac{a-rl}{1-r}$$

[5] $|r|<1$ ニシテ, n ガ無限大ナルトキハ

$$S=\frac{a}{1-r}$$

[6] a, b ノ等比中項$=\pm\sqrt{ab}$

1.14 調和級數

[1] a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ $a-b:b-c=a:c$ デアツテ $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ トナルカラ, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ハ等差級數ヲナス。

[2] a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ

$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

デアツテ, 之ヲ a, c ノ調和中項ト云フ。

1.15 對 數

[1] $\log_a y=x$ ハ $a^x=y$ ナル x, y ノ關係ヲ表ス。

[2] $$\log_a a=1$$

[3] $$\log_a 1=0$$

[4] $$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$$

[5] $$\log_a\frac{y}{x}=\log_a y-\log_a x$$

[6] $$\log_a x^n=n\log_a x$$

[7] $$\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x$$

[8] $$\log_c b\log_b a=\log_c a,\quad \log_b a\times\log_a b=1$$

[9] 10ヲ底數トスル對數ヲ常用對數ト云ヒ, e ヲ底數トスル對數ヲ自然對數ト云フ。

[10] $$\log_{10} x=M\times\log_e x$$

但シ $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$ (無限級數)

$$M=\frac{1}{\log_e 10}=0.43429\ \cdots\cdots$$

[11] **餘對數**

$$\mathrm{Colog}_a x=\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x$$

幾 何 學

1.16 平面幾何學ニ關スル計算公式

[1] **三角形** 面積$=\frac{1}{2}bh$, (b=底, h=高)

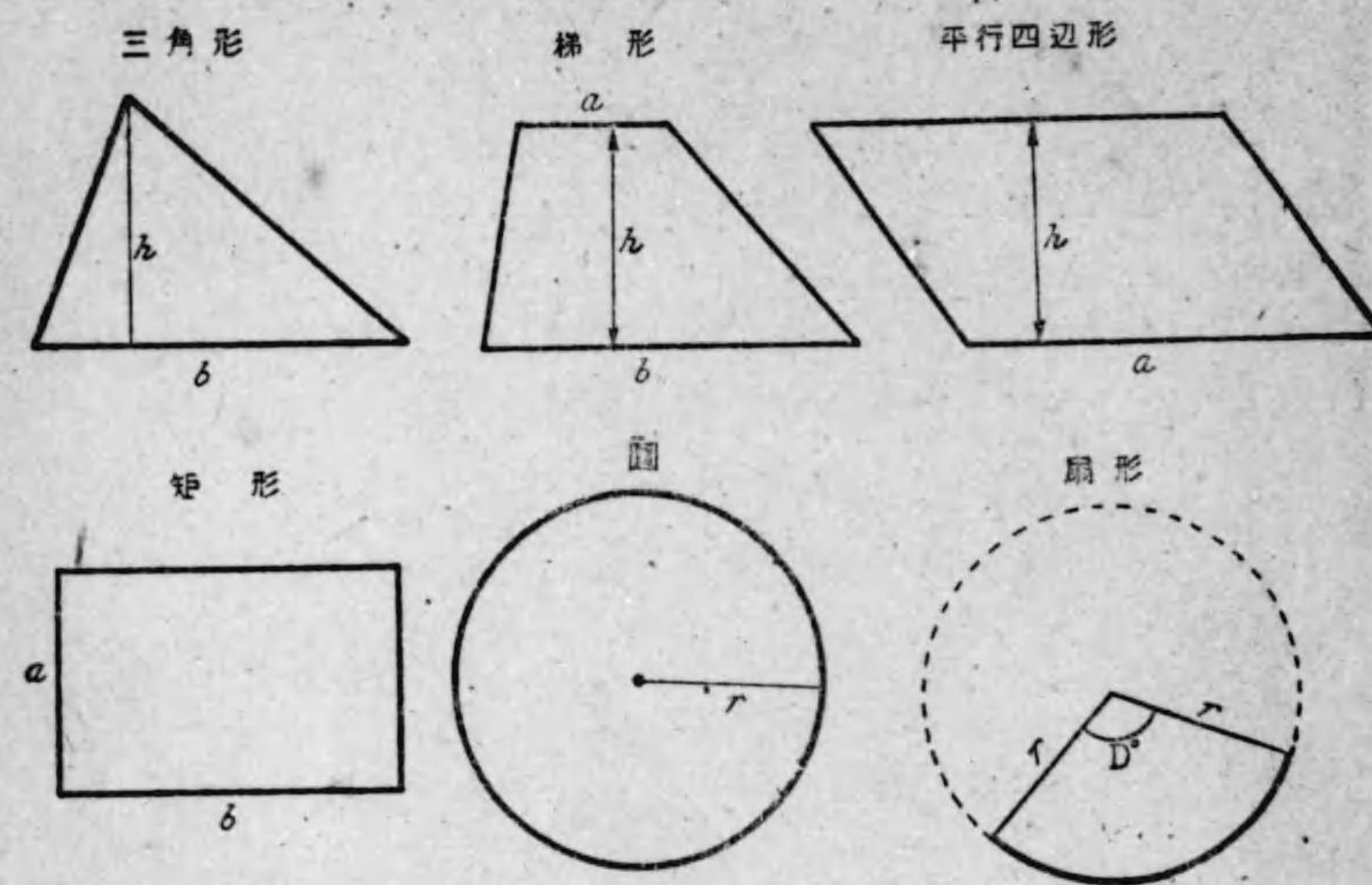
[2] **矩 形** 面積$=ab$, (a=縱邊, b=橫邊)

[3] **梯 形** 面積$=\frac{h}{2}(a+b)$, (a, b=平行二邊, h=高)

[4] **平行四邊形** 面積$=ah$, (a=底, h=高)

[5] **圓** 圓周$=2\pi r$, (r=半徑), 面積$=\pi r^2$

[6]　**扇形**　　面積$=\dfrac{D}{2\times180}\pi r^2$,（$D$=中心角ノ度數）



1.17　立體幾何學ニ關スル計算公式

底面積$=G$, 截口面積$=Q$, 高$=h$, 底圓半徑$=r$, 球半徑$=R$,
邊$=a, b, c$, 側高$=s$

[1]　**直六面體**　表面積$=2(ab+bc+ca)$, 體積$=abc$

[2]　**柱　　體**　體積$=Gh$

[3]　**錐　　體**　體積$=\dfrac{1}{3}Gh$

[4]　**直圓柱**　側面積$=2\pi rh$, 表面積$=2\pi r(r+h)$, 體積$=\pi r^2h$

[5]　**圓　　筒**　體積$=(r^2-r_1^2)\pi h$,（r_1=內半徑）

[6]　**直圓錐**　側面積$=\pi rs$, 表面積$=\pi r(r+s)$, 側高$=\sqrt{r^2+h^2}$,
體積$=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$

[7]　**角錐臺**　體積$=\dfrac{h}{3}(G+\sqrt{GG_1}+G_1)$,（$G_1$=上底ノ面積）

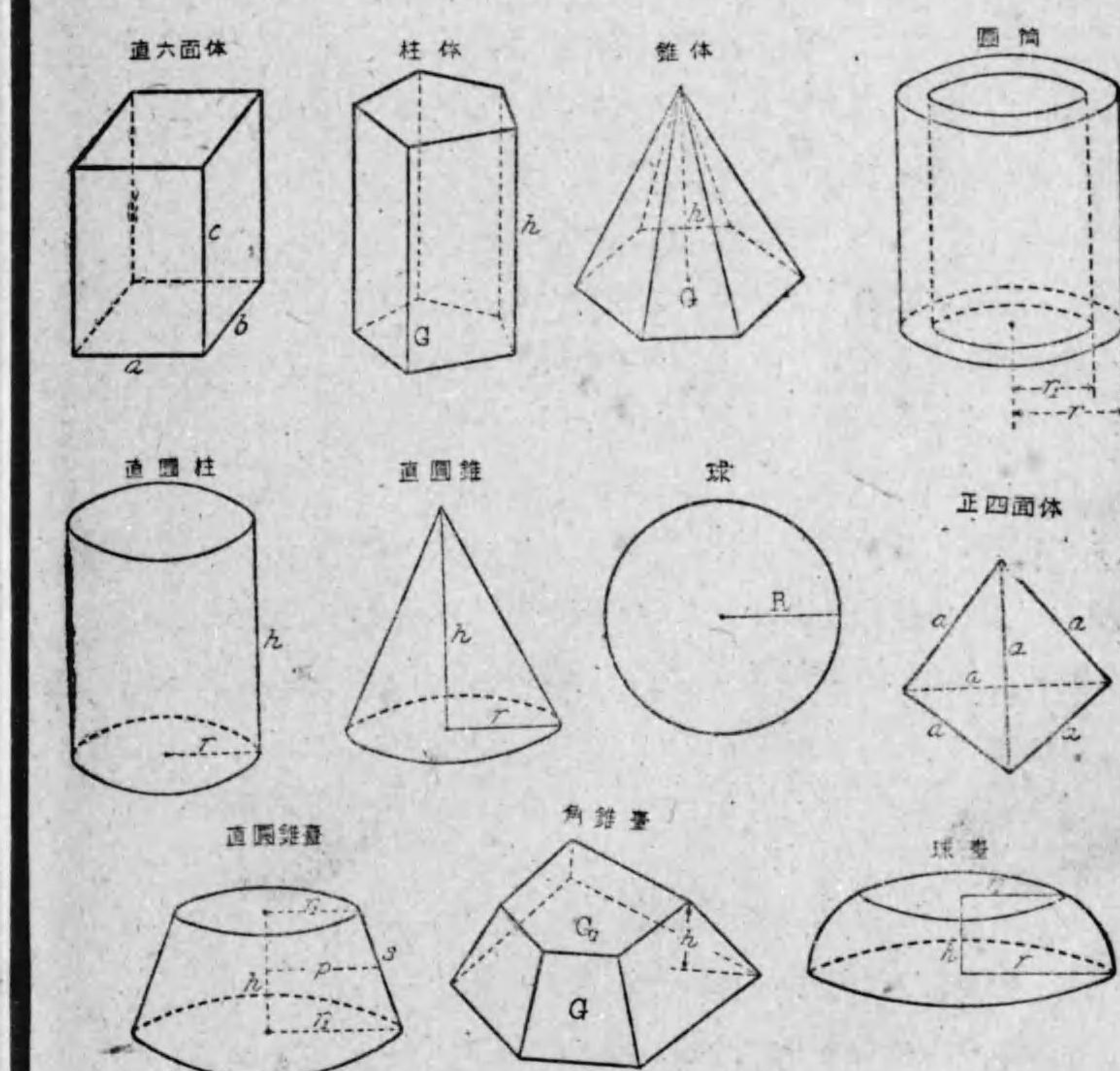
[8]　**直圓錐臺**　側面積$=(r+r_1)\pi s=2\pi ph$,（p=側高ノ中點ヨリ是ニ

直交シテ軸ニ至ル長サ）
體積$=\dfrac{\pi h}{3}(r^2+rr_1+r_1^2)$,（$r$, r_1=兩底圓ノ半徑）

[9]　**球**　　表面積$=4\pi R^2$, 體積$=\dfrac{4\pi R^3}{3}$

[10]　**球　臺**　側面積$=2\pi Rh$
體積$=\dfrac{\pi h}{6}(3r^2+3r_1^2+h^2)$,（$r, r_1$=兩底ノ半徑）

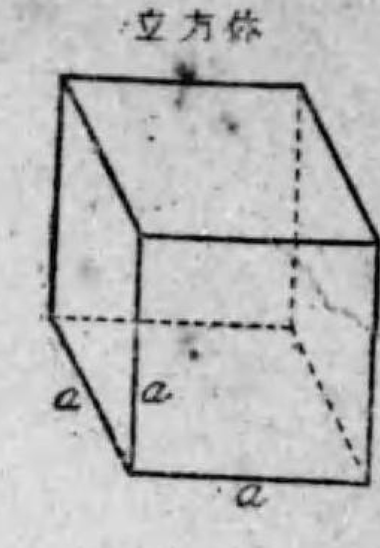
[11]　**正四面體**　表面積$=\sqrt{3}\,a^3$, 體積$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$,
外接球ノ半徑$=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$, 內接球ノ半徑$=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$



[12] **立方體** 表面積$=6a^2$, 體積$=a^3$,

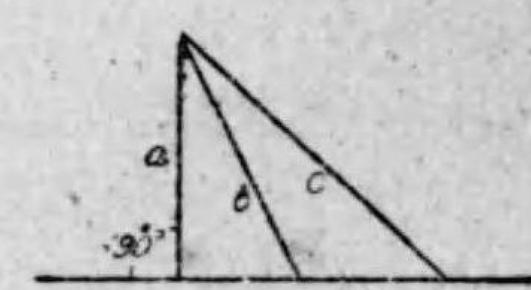
外接球ノ半徑$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

內接球ノ半徑$=\frac{a}{2}$



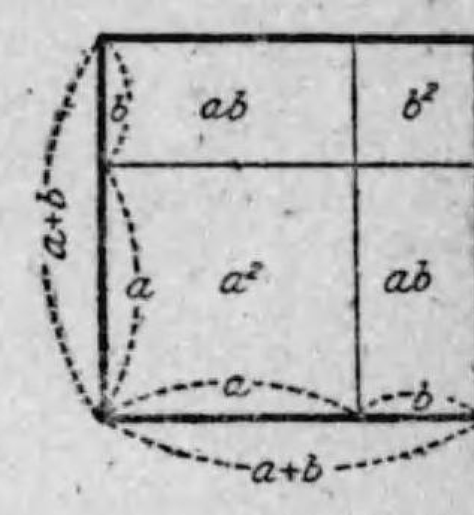
1.17 直線ニ關スル基本定理 (平面幾何學)

[1] 直線外ノ一點ヨリ是ニ引ケル直線ノ內,垂線ハ最モ短ク,垂線ト大ナル角ヲナスモノハ是ト小ナル角ヲナスモノヨリ大デアル。



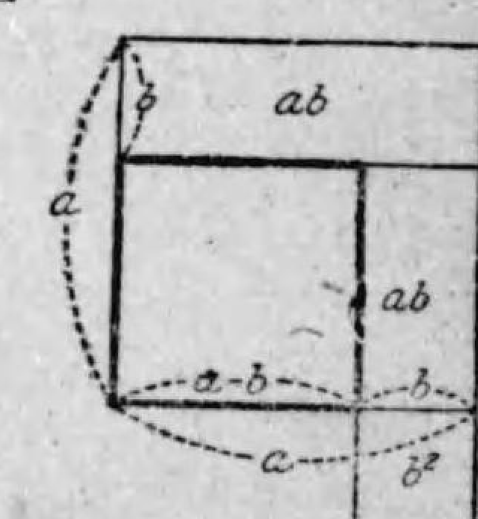
例ヘバ圖ニ於テ $a<b<c$

[2] 二ツノ直線ノ和ノ上ノ正方形ハ各直線上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルコト二ツノ直線ノ包ム矩形ノ二倍デアル。



例ヘバ圖ニ於テ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

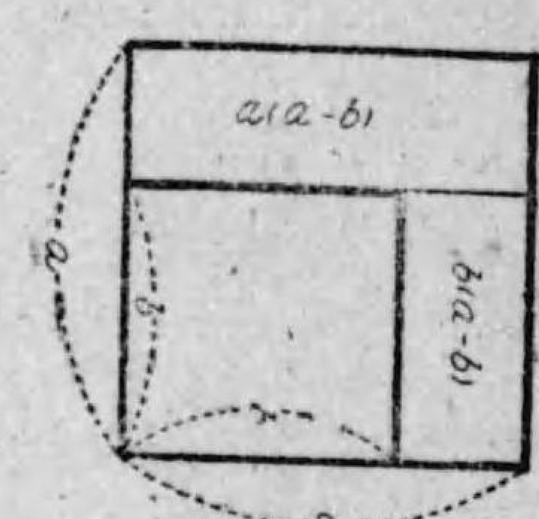
[3] 二ツノ直線ノ差ノ上ノ正方形ハ各直線上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコト二ツノ直線ノ包ム矩形ノ二倍デアル。



例ヘバ圖ニ於テ

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

[4] 二ツノ直線ノ上ノ正方形ノ差ハ其ノ直線ノ和ト差トノ包ム矩形ニ等シイ。



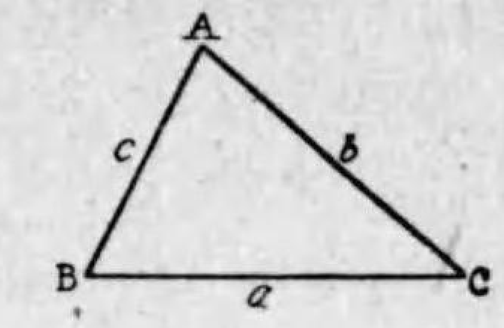
例ヘバ圖ニ於テ

$$a^2-b^2=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=(a-b)(a+b)$$

1.18 三角形ニ關スル基本定理

[1] 三角形ノ二邊ガ不等ナルトキハ,大ナル邊ニ對スル角ガ他ノ小ナル邊ニ對スル角ヨリ

大デアル。此ノ逆モ亦眞デアル。

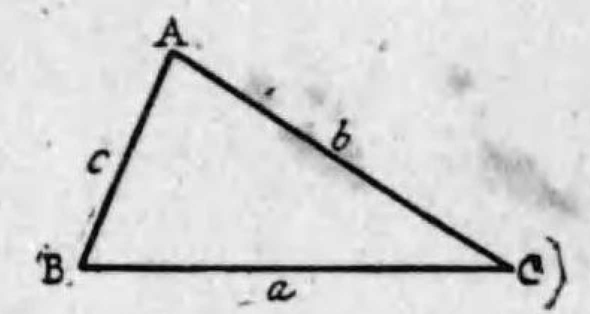


例ヘバ圖ニ於テ $b>c$

ナラバ $\angle B>\angle C$

デアル。

[2] 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大デアリ,二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小デアル。

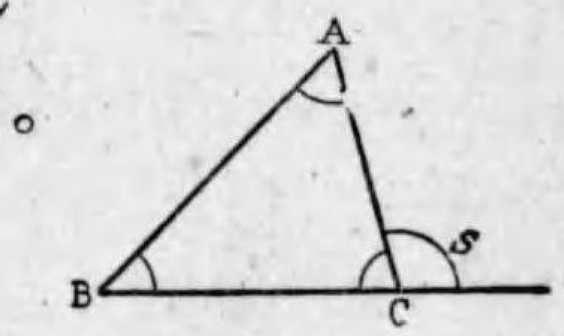


例ヘバ圖ニ於テ $a+b>c$

デアツテ $a-b<c$

デアル。

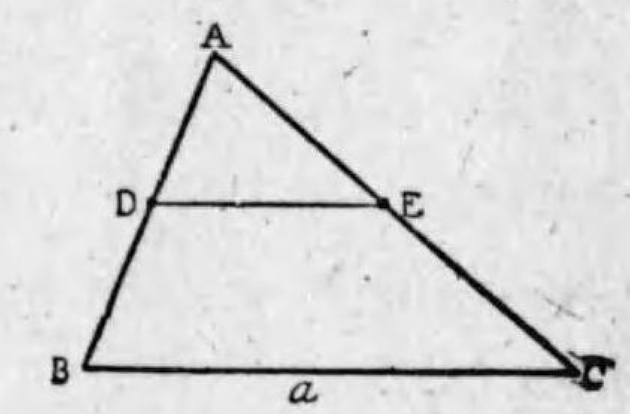
[3] 三角形ノ外角ハ其ノ內對角ノ和ニ等シイ。從ツテ三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シイ。



例ヘバ圖ニ於テ $\angle S=\angle A+\angle B$

從ツテ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

[4] 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ,第三邊ニ平行デ,且其ノ半分ニ等シイ。

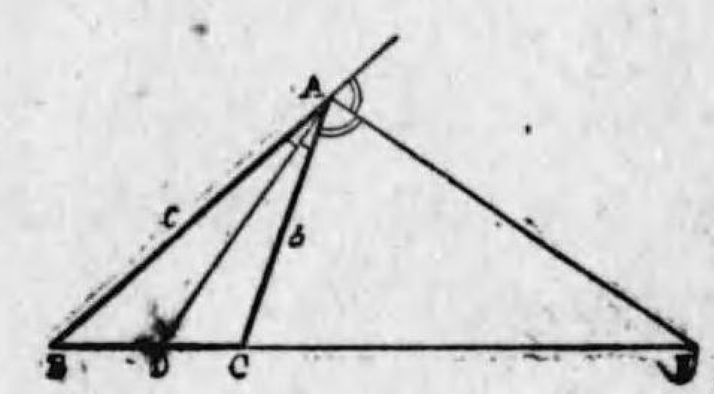


例ヘバ圖ニ於テ

$DE=\frac{a}{2}$ デ $DE /\!/ BC$

デアル。

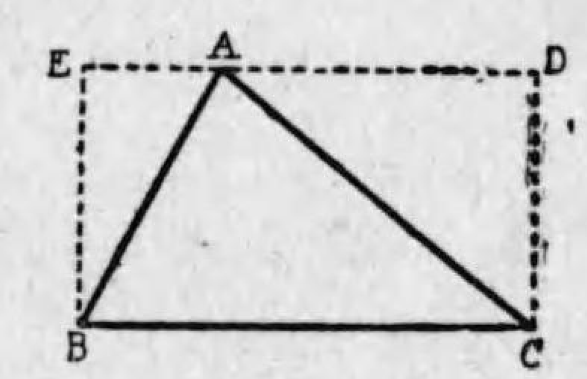
[5] 三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ底ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分シ,頂角ノ外角ノ二等分線ハ底ヲ同ジ比ニ外分スル。



例ヘバ圖ニ於テ $BD:DC=c:b$ デ

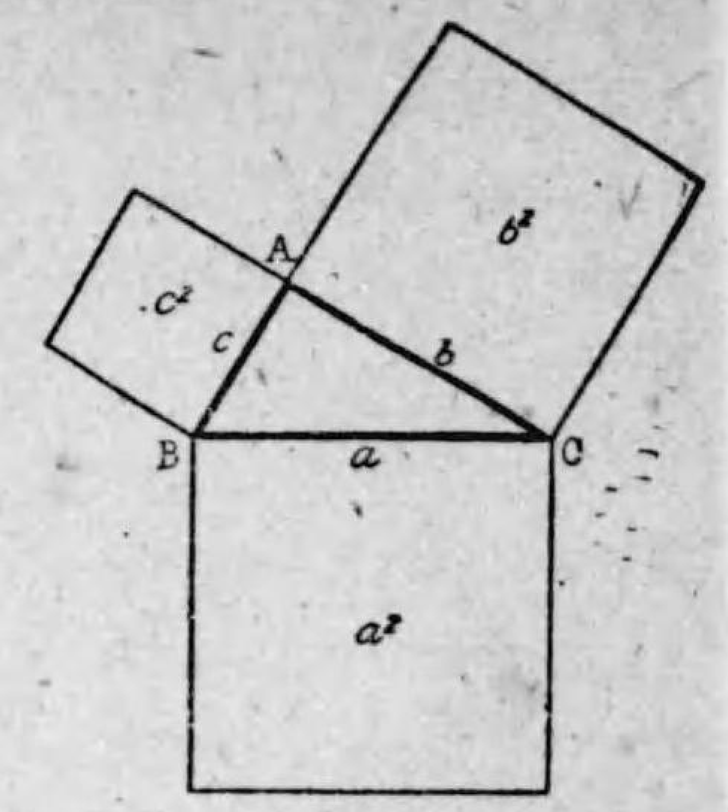
$BE:EC=c:b$ デアル。

[6] 三角形ハ是ト等底及ビ等高ノ矩形ノ半分デアル。



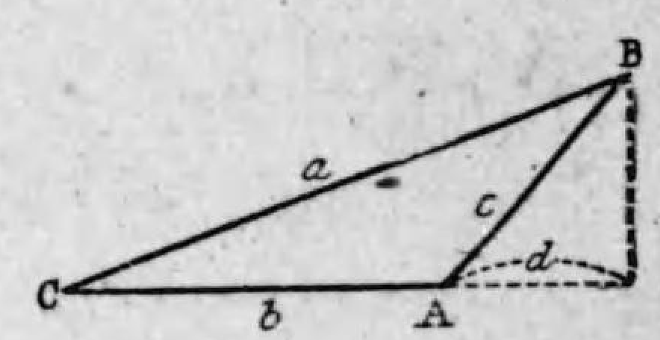
例ヘバ圖ニ於テ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square BCDE$.

［7］ 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ，他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。（有名ナルぴたごらすノ定理デアル。）



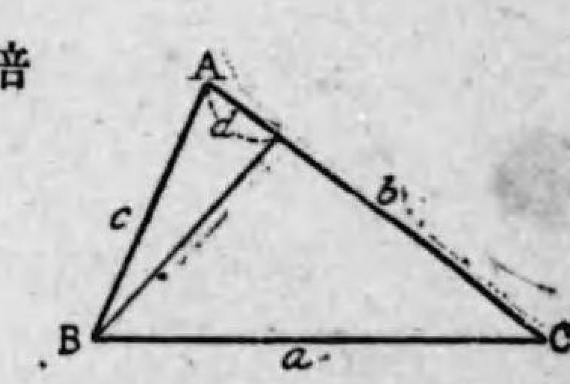
例ヘバ圖ニ於テ　$a^2=b^2+c^2$ デアル。

［8］ 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ，他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルコト，一ツノ邊ト其ノ邊ノ上ニ他ノ邊ノ投ズル正射影トノ包ム矩形ノ二倍デアル。



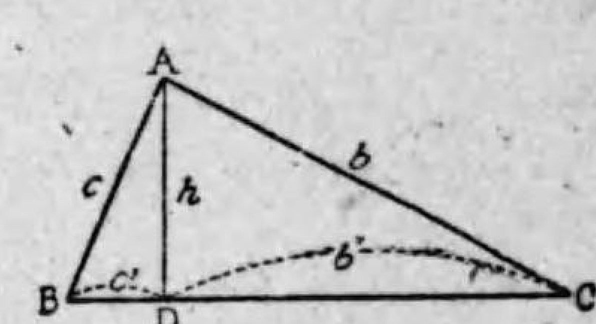
例ヘバ圖ニ於テ　$a^2=b^2+c^2+2bd$ デアル。

［9］ 鋭角三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコト，一ツノ邊ト其ノ邊ノ上ニ他ノ邊ノ投ズル正射影トノ包ム矩形ノ二倍デアル。



例ヘバ圖ニ於テ　$a^2=b^2+c^2-2bd$ デアル。

［10］ 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ引ケル垂線ハ三角形ヲ原形ニ相似ナル，從ツテ互ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツ。而シテ垂線ハ斜邊ノ二ツノ分ノ比例中項デアル。



例ヘバ圖ニ於テ

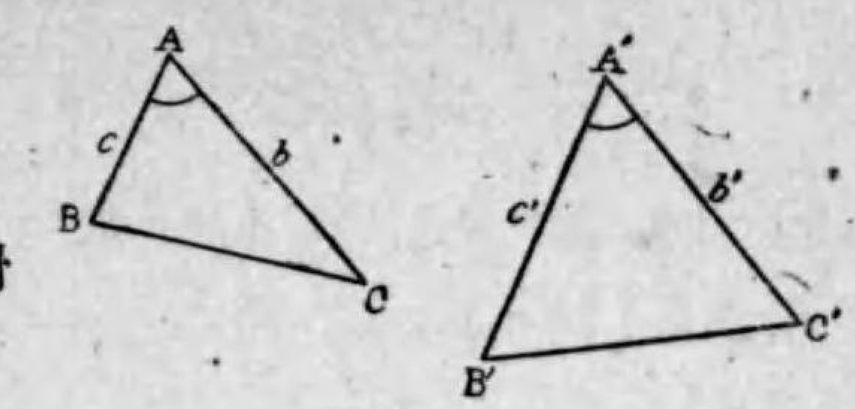
$$\triangle ABC \backsim \triangle DAC \backsim \triangle DBA$$

デアッテ　$h^2=b'c'$

［11］ 一角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ比ハ，其ノ角ヲ夾ム二ツノ邊ノ相乘比ニ等シイ。

例ヘバ圖ニ於テ　$\angle A=\angle A'$　ナラバ

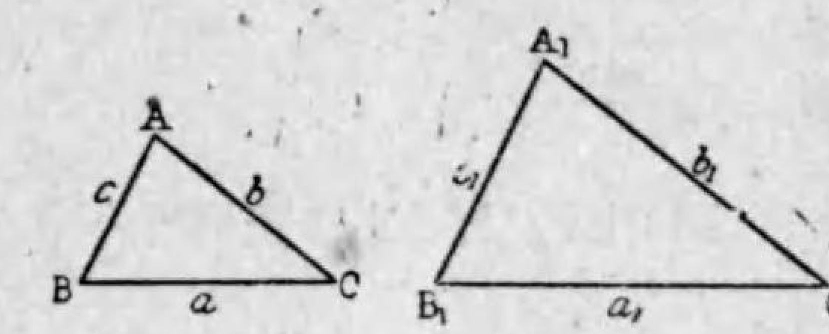
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{bc}{b'c'}$$



［12］ 相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。

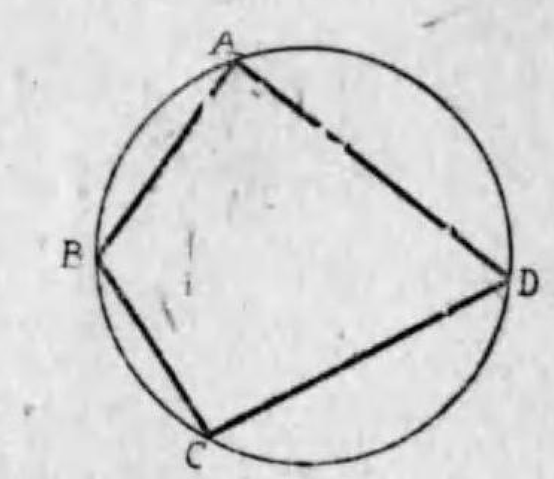
例ヘバ圖ニ於テ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=\frac{c^2}{c_1^2}$$



1.19　四邊形ト多角形ニ關スル基本定理

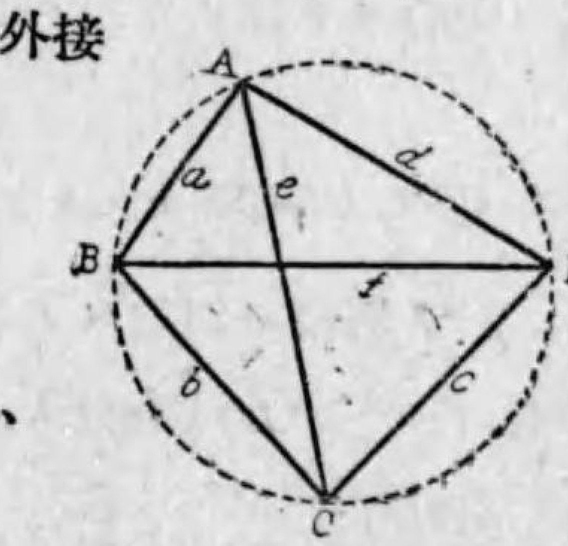
［1］ 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。又四邊形ノ對角ガ互ニ補角ナレバ是ニ外接スル圓ヲ描クコトガ出來ル。



例ヘバ圖ニ於テ　$\angle A+\angle C=180°$,

$\angle B+\angle D=180°$

［2］ 四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ガ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シケレバ，四邊形ニ外接スル圓ヲ描クコトガ出來ル。

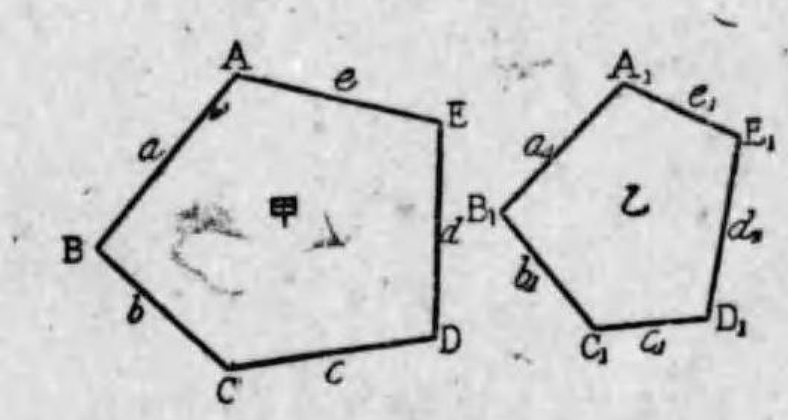


例ヘバ圖ニ於テ　$ef=ac+bd$

ナレバ A, B, C, D ヲ通ル圓ガ描ケル。

［3］ 邊數 n ナル多角形ノ内角ノ總和ハ $(n-2)\times 180°$ デアル。

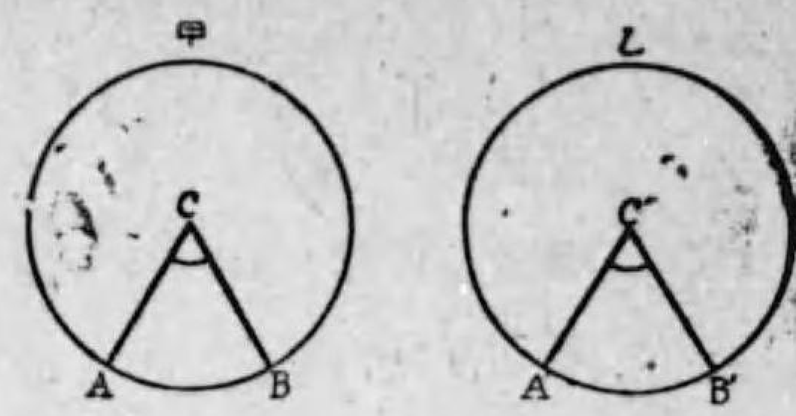
［4］ 相似多角形ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。



例ヘバ，甲，乙兩圖ガ相似形ナラバ

$$\frac{甲}{乙}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=\cdots\cdots=\frac{e^2}{e_1^2}$$

1. 20　圓ニ關スル基本定理



［1］　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ，相等シイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シイ。

例ヘバ甲，乙兩圓ガ等圓デ　$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$

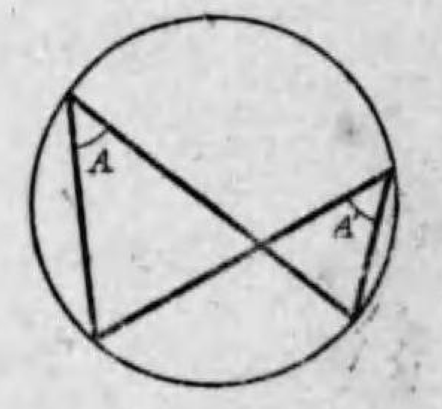
ナラバ　　$\angle C=\angle C'$

デアル。

［2］　同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ中心角ノ半分ニ等シイ。

例ヘバ圖ニ於テ

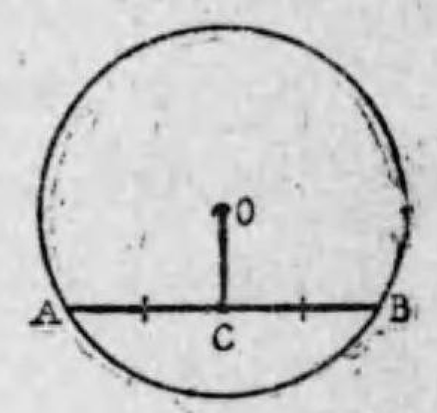
$$\angle B=\frac{\angle A}{2}$$



［3］　同ジ圓又ハ等圓ニ於テ，相等シイ弧ニ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。

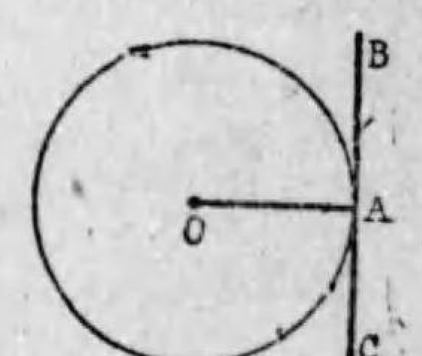
例ヘバ圖ニ於テ　　$\angle A=\angle A'$

デアル。



［4］　中心ヨリ弦ノ中點ニ引ケル直線ハ是ニ垂直デアル。

例ヘバ圖ニ於テ AC=BC ナラバ OC⊥AB デアル。



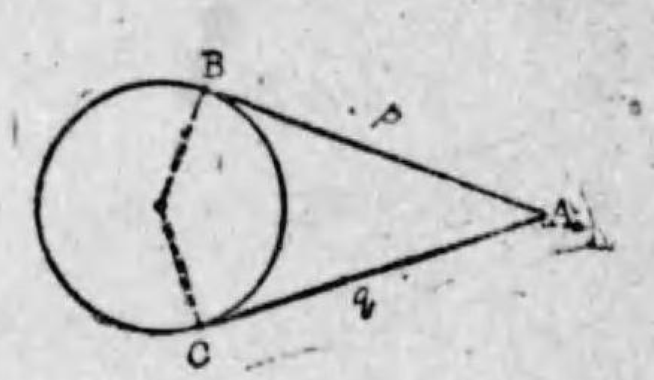
［5］　圓ノ切線ハ切點ヘノ半徑ニ垂直デアル。

例ヘバ圖ニ於テ　BC⊥OA　デアル。

［6］　圓外ノ一點ヨリ是ニ引ケル二ツノ切線ノ長サハ相等シイ。

例ヘバ圖ニ於テ

$$p=q$$



［7］　切線ト切點ヨリ引ケル弦トノナス

角ハ各隣リノ弓形ニ於ケル角ニ等シイ。

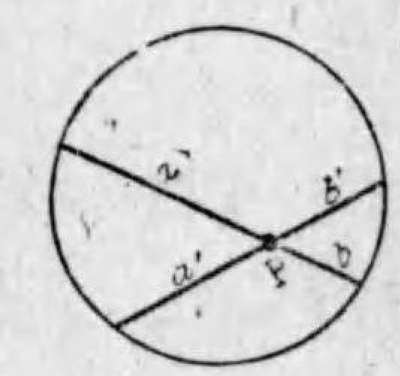
例ヘバ圖ニ於テ

$$\angle A=\angle A'$$

［8］　圓內ノ與ヘラレタル一點ヲ通ル弦ノ分ノ包ム矩形ハ，何レノ弦ニテモ相等シイ。

例ヘバ圖ニ於テ

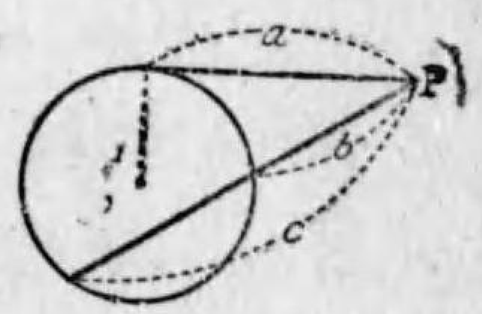
$$ab=a'b'$$



［9］　圓外ノ一點ヨリ圓ヘノ割線及ビ切線ヲ引クトキ割線ノ分ノ包ム矩形ハ切線上ノ正方形ニ等シイ。

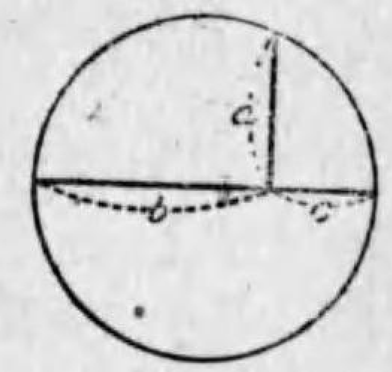
例ヘバ圖ニ於テ

$$bc=a^2$$



［10］　圓周上ノ一點ヨリ直徑ヘ引ケル垂線ガ其ノ直徑ヲ分ツ二ツノ分ノ包ム矩形ハ垂線ノ上ノ正方形ニ等シイ。

例ヘバ圖ニ於テ　　$bc=a^2$



三　角　法

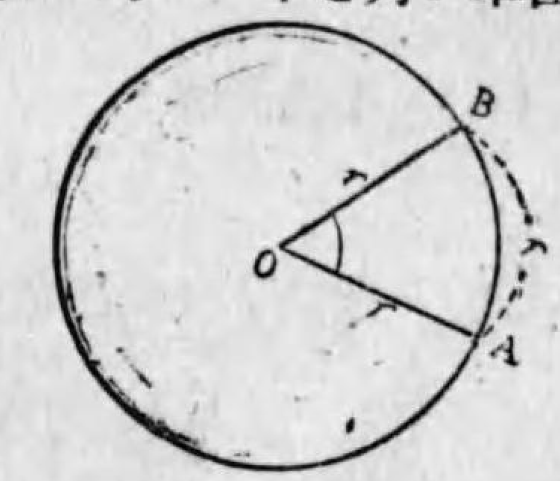
1. 21　六十分法及ビ弧度法

［1］　**六十分法**　1直角＝90度，1度＝60分，1分＝60秒

［2］　**記　　法**　12度 34分 56秒ヲ表スニ 12° 34′ 56″ ナル記號ヲ以テスル。

［3］　**弧度法**　圓ノ半徑ノ長サニ等シイ弧ニ對スル中心角ヲ單位トシテ角ヲ測ル方法デアル。

此ノ角ヲ 1 弧度又ハ 1「ラヂアン」ト云フ。



［4］　1「ラヂアン」$=\dfrac{360°}{2\pi}=57°\,17'\,44.''8$

[5] 一角ノ弧度ヲ θ, 六十分法ニヨリ測定セル値ヲ d° トスレバ

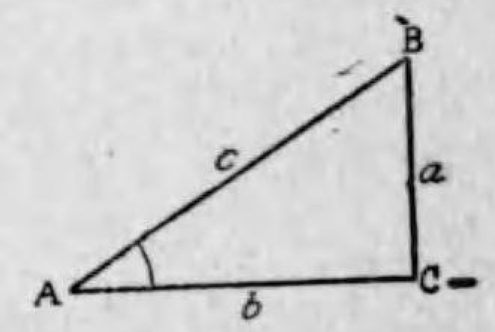
$$\theta=\frac{\pi}{180}d, \qquad d=\frac{180}{\pi}\theta$$

故ニ例ヘバ $\frac{\pi}{6}=30^\circ$, $\frac{\pi}{2}=90^\circ$, $\pi=180^\circ$ デアル。

但シ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, π ハ「ラヂアン」ヲ單位ニシタノデアル。

1.22 三角法ニ關スル基本公式

[1] 銳角ノ三角函數



直角三角形ノ斜邊ヲ c トシ, 他ノ二邊ヲ a, b トシ, 此ノ二邊ニ對スル角ヲ夫々 A, B トスレバ, 銳角ノ三角函數ハ次ノ如クデアル。

$$\begin{cases}\sin A=\frac{a}{c}=\cos B\\ \cos A=\frac{b}{c}=\sin B\\ \tan A=\frac{a}{b}=\cot B\end{cases} \qquad \begin{cases}\cot A=\frac{b}{a}=\tan B\\ \sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B\\ \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B\end{cases}$$

[2] 同一角ノ三角函數ノ間ノ關係

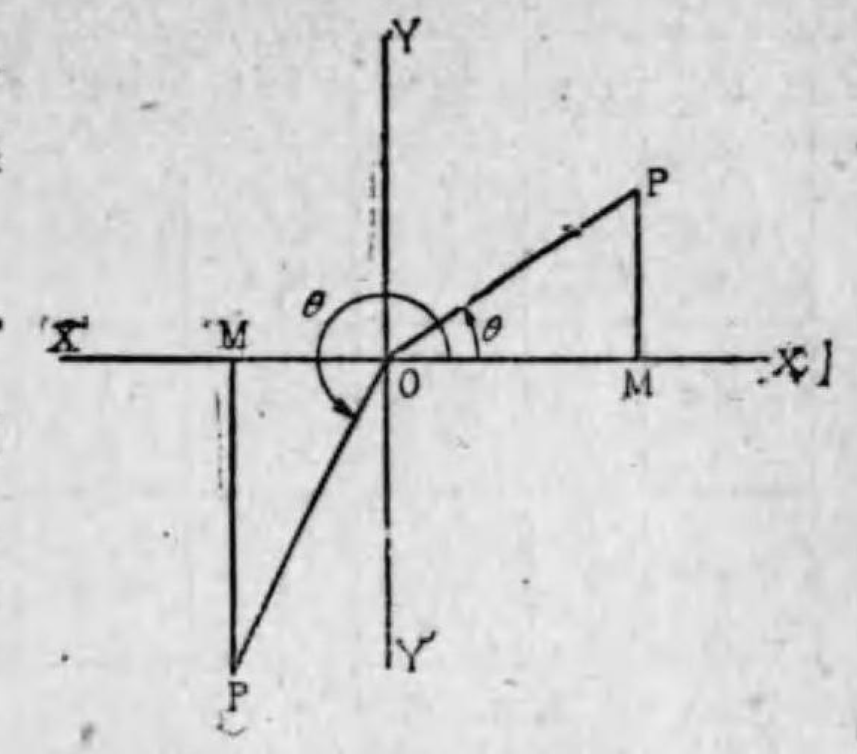
{1} 逆數關係 $\begin{cases}\sin A \operatorname{cosec} A=1\\ \cos A\sec A=1\\ \tan A\cot A=1\end{cases}$

{2} 相除關係 $\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\end{cases}$

{3} 平方關係 $\begin{cases}\sin^2 A+\cos^2 A=1\\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A\end{cases}$

[3] 一般角ノ三角函數

二ツノ直交スル直線ヲ XOX′, YOY′ トシ, OX, OY 上叉ハ是ニ平行



ニ引イタ直線ノ長サヲ正トシ, OX′, OY′ 上叉ハ是ニ平行ニ引イタ直線ノ長サヲ負トスル。

今二直線ヲ含ム平面上ノ一點 P ヨリ OX ニ垂線 PM ヲ引キ, 直角三角形 OPM ヲ得, 角 POX$=\theta$ トスレバ一般角ノ三角函數ハ次ノ如クデアル。

$$\begin{cases}\sin\theta=\frac{MP}{OP}\\ \cos\theta=\frac{OM}{OP}\\ \tan\theta=\frac{MP}{OM}\end{cases} \qquad \begin{cases}\cot\theta=\frac{OM}{MP}\\ \sec\theta=\frac{OP}{OM}\\ \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP}\end{cases}$$

上式中 OP ハ常ニ正, OM, MP ハ上ノ規約ノ正負ニ從フモノトスル。

[4] 一般角ノ三角函數相互ノ關係

此ノ場合ニモ勿論 [2] ノ {1}, {2}, {3} ナル關係ハ成立スル。

[5] 各象限ニ於ケル三角函數の符號

象限	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

[6] 特別角ノ三角函數ノ値

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

[7] 餘角又ハ補角ノ三角函數

$$\begin{cases}\sin(90°-A)=\cos A\\ \cos(90°-A)=\sin A\\ \tan(90°-A)=\cot A\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(180°-A)=\sin A\\ \cos(180°-A)=-\cos A\\ \tan(180°-A)=-\tan A\end{cases}$$

[8] 負角ノ三角函數

$$\begin{cases}\sin(-A)=-\sin A\\ \cos(-A)=\cos A\\ \tan(-A)=-\tan A\end{cases}$$

[9] 二角ノ差ガ 90° 又ハ 180° ナル角ノ三角函數ノ關係

$$\{1\}\ \begin{cases}\sin(90°+A)=\cos A\\ \cos(90°+A)=-\sin A\\ \tan(90°+A)=-\cot A\end{cases}\qquad \{2\}\ \begin{cases}\sin(A-90°)=-\cos A\\ \cos(A-90°)=\sin A\\ \tan(A-90°)=-\cot A\end{cases}$$

$$\{3\}\ \begin{cases}\sin(180°+A)=-\sin A\\ \cos(180°+A)=-\cos A\\ \tan(180°+A)=\tan A\end{cases}\qquad \{4\}\ \begin{cases}\sin(A-180°)=-\sin A\\ \cos(A-180°)=-\cos A\\ \tan(A-180°)=\tan A\end{cases}$$

[10] 二角ノ和及ビ差ノ三角函數

$$\{1\}\ \begin{cases}\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{cases}$$

$$\{2\}\ \begin{cases}\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\[2ex] \tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\end{cases}$$

[11] 三角函數ノ和及ビ積ノ關係

$$\{1\}\ \begin{cases}\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}\\[1ex] \sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}\\[1ex] \cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}\\[1ex] \cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}\end{cases}$$

$$\{2\}\ \begin{cases}\sin A\cos B=\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}\\[1ex] \cos A\sin B=\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}\\[1ex] \sin A\sin B=\dfrac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}\\[1ex] \cos A\cos B=\dfrac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}\end{cases}$$

[12] 倍角ノ三角函數

$$\{1\}\ \begin{cases}\sin 2A=2\sin A\cos A\\ \sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A\end{cases}$$

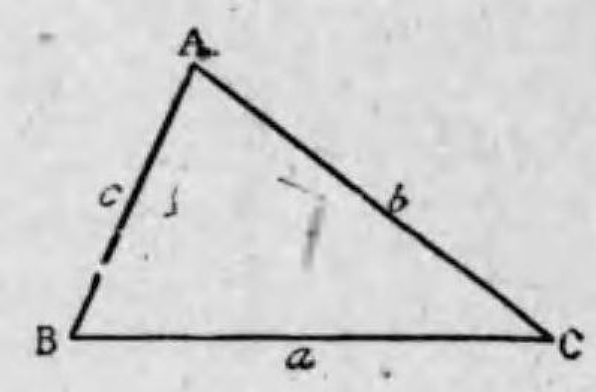
$$\{2\}\ \begin{cases}\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A\\ \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A\end{cases}$$

$$\{3\}\ \begin{cases}\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\\[2ex] \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\,\mathrm{tsn}^2 A}\end{cases}$$

[13] 半角ノ三角函數

$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} \\ \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}} \\ \tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} \end{cases}$$

1.23 三角形ノ性質



$a+b+c=2p$, $r=$內切圓ノ半徑

$R=$外接圓ノ半徑, $S=$三角形ノ面積

[1] **正弦法則**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

[2] **第一餘弦式**

$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{cases}$$

[3] **第二餘弦式**

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

[4]
$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}, \qquad \dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}, \\ \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} \end{cases}$$

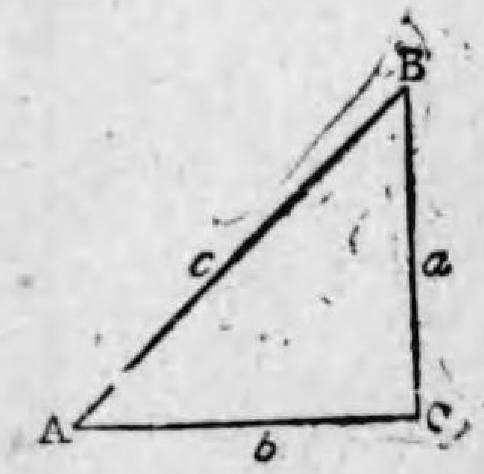
[5]
$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}} \\ \tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \end{cases}$$

[6]
$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

[7]
$$\begin{cases} S=\dfrac{ab\sin C}{2}=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} \\ S=2R^2\sin A\sin B\sin C \\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ S=rp=\dfrac{abc}{4R} \end{cases}$$

1.24 直角三角形ノ解法

$C=90°$, 三邊 a, b, c, 二角 A, B



[1] A, c ヲ知ツテ B, a 及ビ b ヲ求メル。

$\{B=90°-A,\quad a=c\sin A,\quad b=c\cos A\}$

[2] A, a ヲ知ツテ B, c 及ビ b ヲ求メル。

$\{B=90°-A,\quad c=a\operatorname{cosec} A,\quad b=a\cot A\}$

[3] A, b ヲ知ツテ B, b 及ビ a ヲ求メル。

$\{B=90°-A,\quad c=b\sec A,\quad a=b\tan A\}$

[4] c, a ヲ知ツテ A, B 及ビ b ヲ求メル。

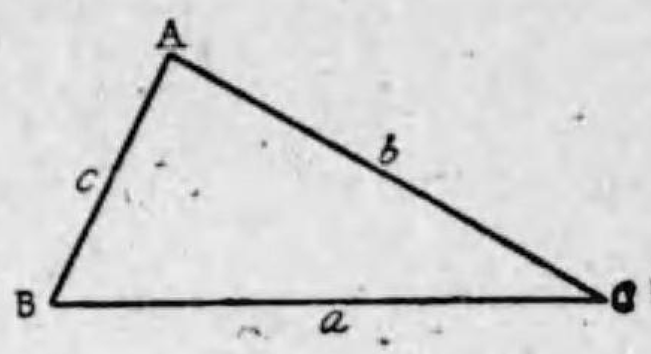
$\left\{\sin A=\cos B=\dfrac{a}{c},\quad b=\sqrt{(c-a)(c+a)}\right\}$

[5] a, b ヲ知ツテ A, B 及ビ b ヲ求メル。

$\left\{\tan A=\dfrac{a}{b},\quad \cot B=\dfrac{a}{b},\quad c=a\operatorname{cosec} A=\sqrt{a^2+b^2}\right\}$

1.25 一般三角形ノ解法

[1] A, B 及ビ c ヲ知ツテ a, b 及ビ C ヲ求メル。



$$
\begin{cases}
C=180^\circ-(A+B)\\
a+b=c\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=S\\
a-b=c\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=D\\
a=\dfrac{S+D}{2},\quad b=\dfrac{S-D}{2}
\end{cases}
$$

[2] a, b 及ビ C ヲ知ツテ A, B 及ビ c ヲ求メル。

$$
\begin{cases}
\dfrac{A+B}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}\\
\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\tan\dfrac{A+B}{2}\\
A=\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}\\
B=\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{A-B}{2}\\
c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{b\sin C}{\sin B}
\end{cases}
$$

[3] a, b 及ビ A ヲ知ツテ B, C 及ビ c ヲ求メル。

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}.$$

コレヨリ B ノ二値 B_1, B_2 ヲ得ル。但シ $B_1<90^\circ<B_2$

$$
\begin{cases}
C_1=B_2-A\\
c_1=\dfrac{a\sin C_1}{\sin A}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
C_2=B_1-A\\
c_2=\dfrac{a\sin C_2}{\sin A}
\end{cases}
$$

若シ $\sin B$ ガ 1 ヨリ大トナラバ, 玆ニ解ハナイ。c_2 ガ負トナラバ, 第二ノ解ハ不合理トナル。

[4] 三邊 a, b 及ビ c ヲ知ツテ A, B 及ビ C ヲ求メル。

$$
\begin{cases}
r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(b-c)}{p}}\\
\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a},\quad \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{p-b},\quad \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{p-c}
\end{cases}
$$

1.26 逆三角函數

[1] $\sin x=a$ ニ適スル x ヲ

$$x=\sin^{-1}a$$

ニテ表ス。 $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ ナル制限ノ下ニ於テ此ノ式ヲ滿足スル x ガ $\sin^{-1}a$ ノ主値デアル。

[2] $\cos^{-1}a$ ノ主値ハ $0\leqq x\leqq\pi$ ナル制限ノ下ニ於テ $\cos x=a$ ヲ滿足スル x ノ値デアル。

[3] $\tan^{-1}a$ ノ主値ハ $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ ナル制限ノ下ニ於テ $\tan x=a$ ヲ滿足スル x ノ値デアル。

[4] $\sin(\sin^{-1}a)=a,\quad \cos(\cos^{-1}a)=a,\quad \tan(\tan^{-1}a)=a$

[5] $\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}a$

$\cos^{-1}a=2n\pi\pm\cos^{-1}a,\quad \tan^{-1}a=n\pi+\tan^{-1}a$

(但シ右邊ノ逆三角函數ハ主値ヲ表スモノトスル。)

[6] $\sin^{-1}a+\cos^{-1}a=\dfrac{\pi}{2},\quad \tan^{-1}a+\cot^{-1}a=\dfrac{\pi}{2}$

[7] $\sin^{-1}a=\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}=\tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}},\quad (0\leqq a\leqq 1)$

[8] $\cos^{-1}a=\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

[9] $\tan^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cot^{-1}\dfrac{1}{a}$

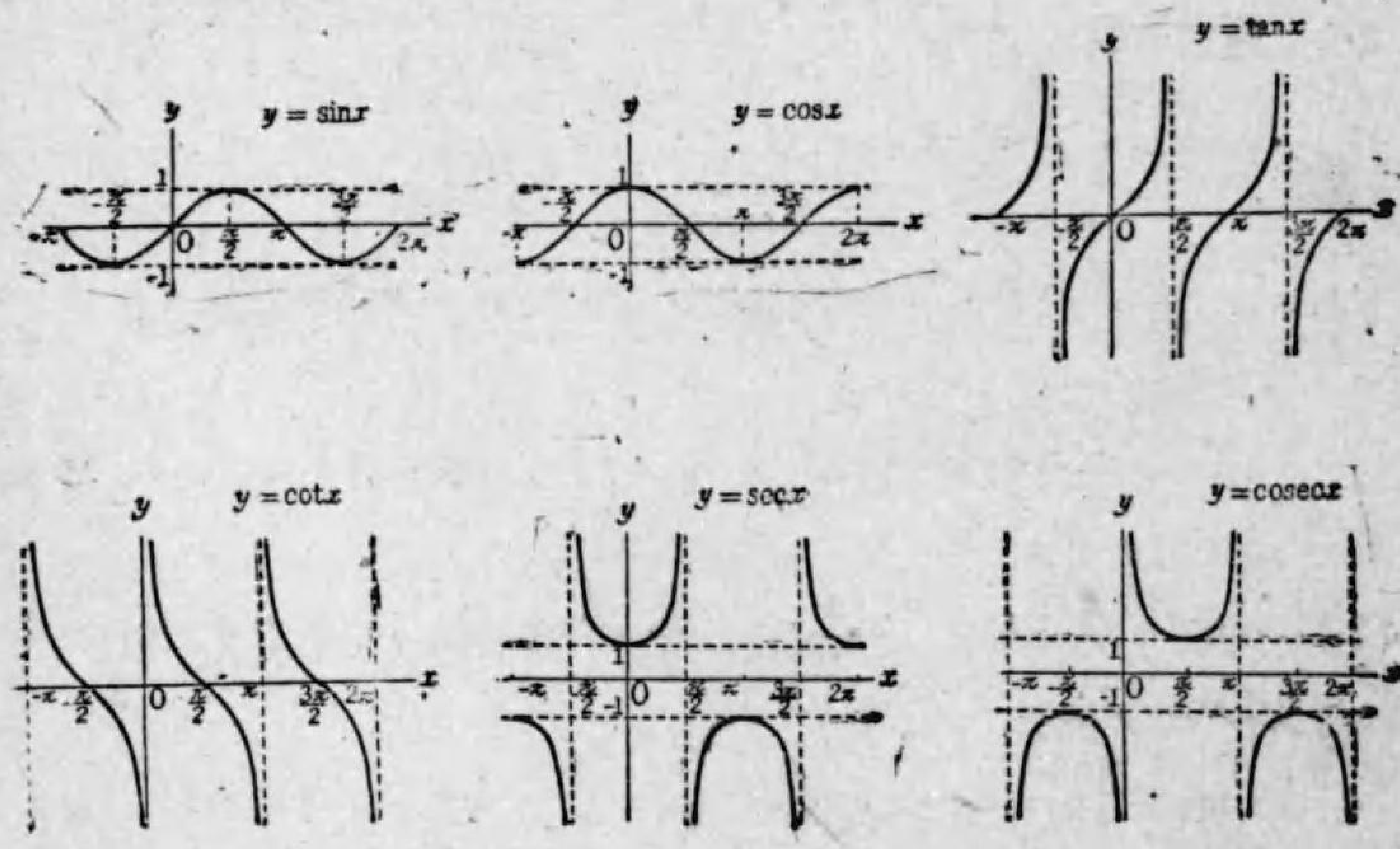
$$\tan^{-1}a=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}$$

[10] $$\sin^{-1}a+\sin^{-1}b=\sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})$$

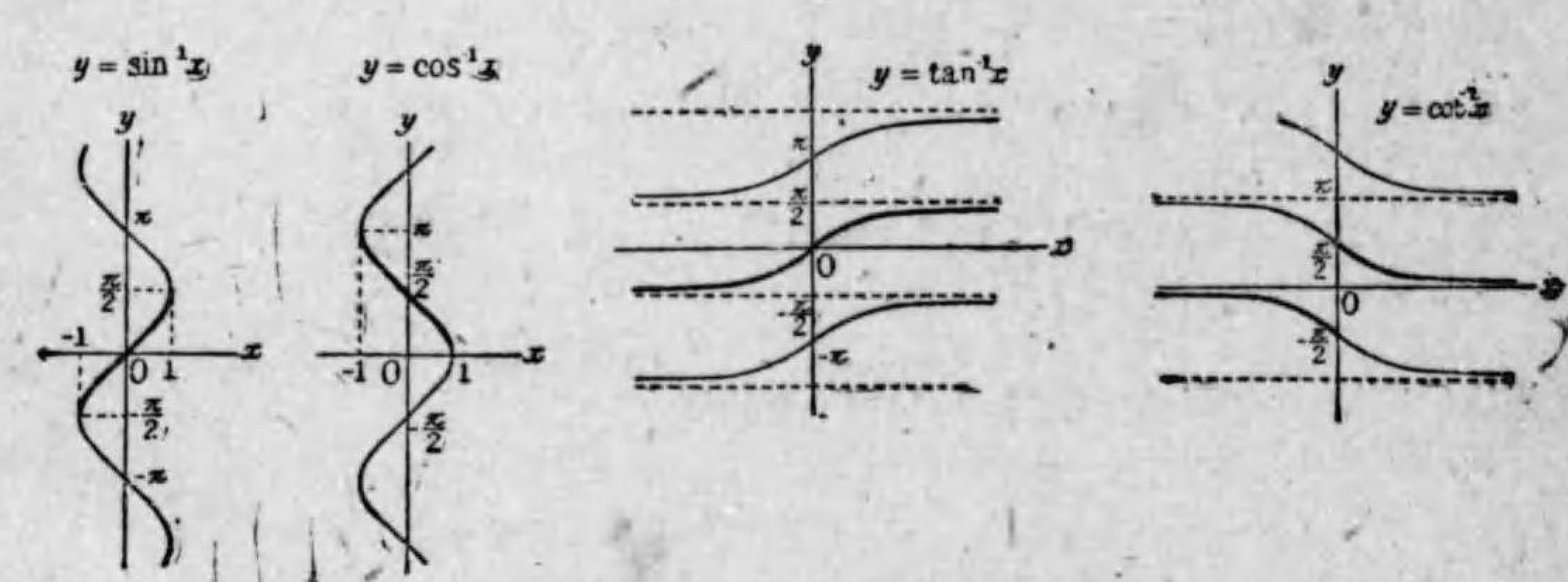
$$-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}a+\cos^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}$$

1.27 三角函數及ビ逆三角函數ノぐらふ

[1] 三角函數ノぐらふ



[2] 逆三角函數ノぐらふ



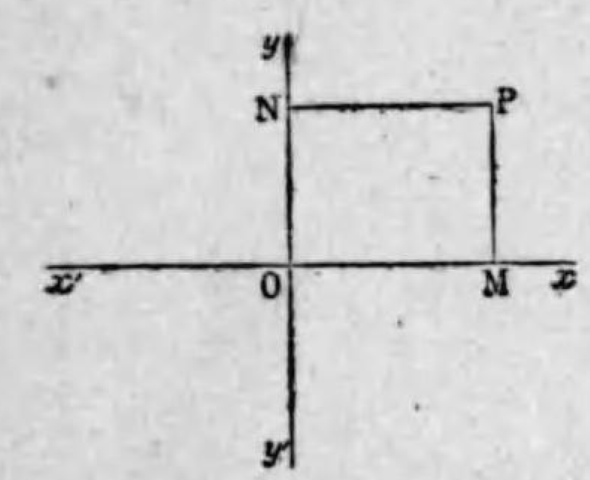
第二章

點

2.1 座標

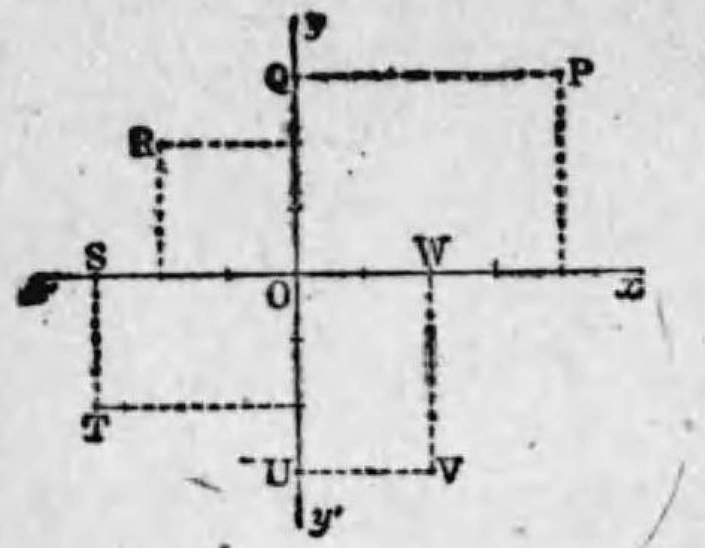
地球上ノ地點ヲ定メルノニ，緯度及ビ經度ヲ用ヒテ居ルト同樣ニ平面上或ハ空間內ニ在ル點ノ位置ヲ定メルノニ，解析幾何學ニ於テハ座標ト稱スルモノヲ使用スル。通常使用セラレル座標ニ**直角座標** (Rectangular coordinates), **斜角座標** (Oblique coordinates), 及ビ**極座標** (Polar coordinates) ト云フノガアル。玆ニハ主トシテ直角座標ニ就テ述ベル。

平面上ノ任意ノ點ノ位置ヲ定メルタメニ，此ノ平面上ニ於テ直交スル二直線 xx', yy' ヲ定メ其ノ交點ヲ O トスル。



定直線 xx' ヲ**橫軸** (Transverse axis) 又ハ x 軸 (x-axis) ト云ヒ，定直線 yy' ヲ**縱軸** (Vertical axis) 又ハ y 軸 (y-axis) ト云フ。

交點 O ヲ座標ノ**原點** (Origin) ト云ヒ，x 軸, y 軸ヲ總稱シテ**座標軸**ト云フ。P カラ x 軸及ビ y 軸ニ垂線ヲ引イテ其ノ足ヲ M, N トスルトキ，P 點ガ定マレバ M,N ハ定マリ又 M,N ノ位置ガ判レバ M,N カラ夫々 x 軸, y 軸ニ立テタ二ツノ垂線ノ交點トシテ P 點ハ唯一ツ定マル。之ヲ用ヒテ P 點ノ位置ヲ表スニ OM, ON ノ長サヲ以テスル。OM ヲ P 點ノ**橫座標**又ハ**橫線** (Abscissa) ト云ヒ，通常 x デ表ス。又 ON ヲ P 點ノ**縱座標**又ハ**縱線** (Ordinate) ト云ヒ，通常 y デ表ス。橫線 x ハ M ガ O ノ右ニアルトキハ正，左ニアルトキハ負トシ，縱線 y ハ N ガ O ノ上ニアルトキハ正，下ニアルトキハ負ト規約スル。$x=a$, $y=b$ ナル點 P ヲ單ニ P(a, b) ナル記號デ表シ，之ヲ P 點ノ**直角座標**ト云フ。



例ヘバ P(4, 3) Q(0, 3)

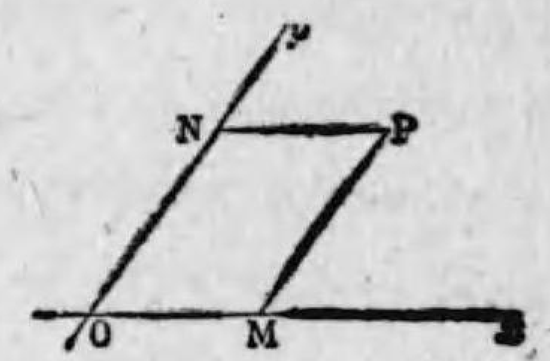
R(−2, 2) S(−3, 0)

T(−3, −2) U(0, −3)

V(2, −3) W(2, 0)

デ原點 O ノ座標ハ (0, 0) デアル。

若シ角 $\angle xOy$ ガ直角デナイトキハ P ノ位置ヲ表スノニ, P ヨリ Ox, Oy ニ平行線ヲ引イテ其ノ交點ヲ M, N トスルト, $OM=x$, $ON=y$ 即チ (x, y) デ P 點ノ位置ヲ表シ, 之ヲ P 點ノ斜角座標ト云フ。今後ハ多ク直角座標ヲ用ヒルカラ單ニ座標トアレバ直角座標ヲ表スモノトスル。



問　　題

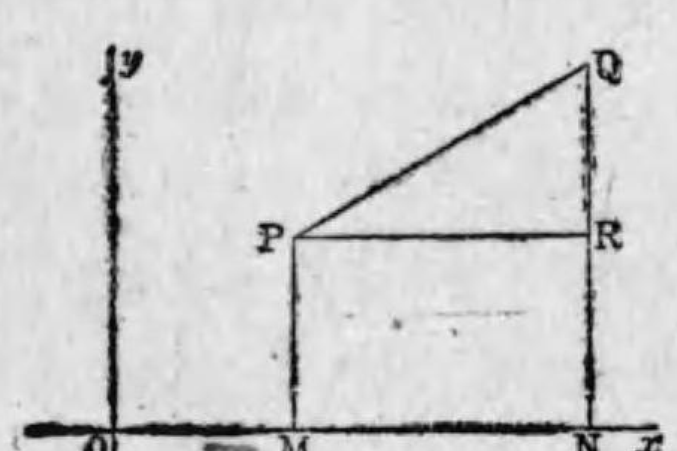
1. 次ノ諸點ヲ圖示セヨ。

P(4, −3), Q(−2, 5), R(0, 5), S(−2, −3), T(−2, 0)

2.2 二點間ノ距離

二定點 P.Q ノ座標 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ知ツテ其ノ距離ヲ求メルコトヲ次ニ記述スル。

P, Q カラ x 軸ニ垂線 PM, QN ヲ引キ, 又 P カラ x 軸ニ平行線ヲ引イテ直線 NQ ト交ツタ點ヲ R トスレバ



$$PQ^2=PR^2+RQ^2$$
$$=MN^2+RQ^2$$
$$=(ON-OM)^2+(NQ-NR)^2$$
$$\therefore\ PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad \cdots(1)$$

PQ ノ絶對値ヲトレバ

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

原點ト $P(x_1, y_1)$ トノ距離ハ

$$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

例 二定點 P(8, 12), Q(2, 4) ノ距離ヲ求メヨ。

$$PQ=\sqrt{(8-2)^2+(12-4)^2}=10$$

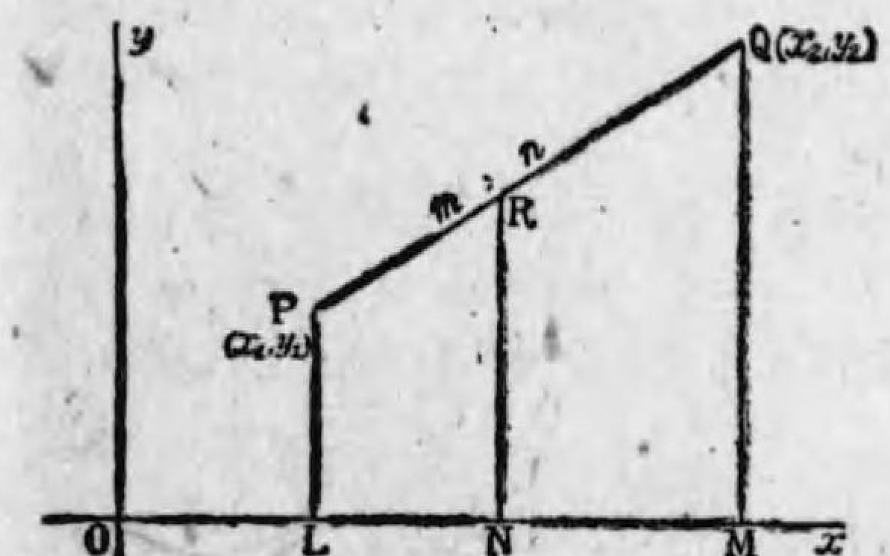
問　　題

2. 次ノ二點間ノ距離ヲ求メヨ。

(a) P(9, 2), Q(−2, −3)　(b) P(−1, −3), Q(3, 7)

3. 三點 A(0, 0), B(2, 3), C(1, 5) カラ等距離ニアル點 P ノ座標ヲ求メヨ。

2.3 分點ノ座標



二定點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トシ, 線分 PQ ヲ定比 $m:n$ ニ内分スル點 R ノ座標 (x, y) ヲ次ニ求メル。

P, Q, R 點カラ x 軸ニ垂線ヲ引キ, x 軸トノ交點ヲ L, M, N トスレバ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{LN}{NM}$$

然ルニ $\dfrac{PR}{RQ}=\dfrac{m}{n}$,　故ニ $\dfrac{LN}{NM}=\dfrac{m}{n}$

或ハ $\dfrac{ON-OL}{OM-ON}=\dfrac{m}{n}$,　故ニ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\dfrac{m}{n}$

コレカラ x ヲ求メルト

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

同様ニ

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n} \qquad \cdots(2)$$

R ガ PQ ノ中點ナルトキハ $m=n$ トナルカラ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_2+x_1}{2} \\ y&=\frac{y_2+y_1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(3)$$

例 二點 P(1, 2), Q(3, 5) ヲ結ンダ線分ヲ, PR : RQ=3 : 4 ニ內分スル點 R ノ座標ヲ求メヨ。

$$x=\frac{3\times3+4\times1}{3+4}=\frac{13}{7} \qquad y=\frac{3\times5+4\times2}{3+4}=\frac{23}{7}$$

答 $\left(\frac{13}{7}, \frac{23}{7}\right)$

*註 線分 PQ ヲ $m : n$ ニ外分スル點 $R(x, y)$ モ內分ノ場合ト同樣ニシテ求メラレ, 其ノ結果ハ

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \qquad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$$

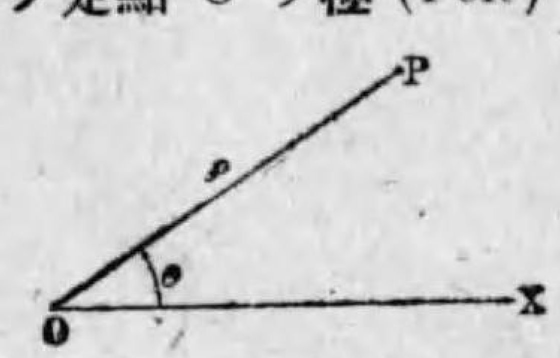
問 題

4. 二點 P(3, 3), Q(5, 8) ヲ連結シタ直線ノ三等分點ノ中 P 點ニ近イ方ノ點ノ座標ヲ求メヨ。

5. 三點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ヲ頂點トスル三角形ノ重心ノ座標ヲ求メヨ。

2.4 極座標

平面上ニ一點 O ヲ定メ, 定點 O ヲ通ツテ半直線 OX ヲ定メル。コノ定點 O ヲ**極** (Pole) ト云ヒ, コノ半直線 OX ヲ**原線** (Initial line) ト云フ。



コノ平面上ノ任意ノ點 P ノ位置ハ線分 OP ノ長サト, ∠XOP デ決定サレル。OP ヲ P 點ノ**動徑** (Radius vector) ト云ヒ, ∠XOP ヲ P 點ノ**偏角** (Argument) 又ハ**變角** (Variable angle)

ト云フ。動徑ト偏角ヲ合セテ P 點ノ**極座標** (Polar coordinates) ト云ヒ, P 點ノ動徑ヲ ρ, 偏角ヲ θ トスレバ P 點ノ位置ヲ表スノニ $P(\rho, \theta)$ ト書ク。偏角 θ ハ原線カラ時計ノ針ノ廻轉ト反對ノ方向ニ測ツタ角ヲ正ノ角トシ, 同方向ニ測ツタ角ヲ負ノ角ト規約スル。次ニ動徑ノ符號ハ偏角 θ ガ與ヘラレタトキ θ ヲ區劃スル動徑ヲ正トシ其ノ延長ヲ負ト規約スル。從ツテ點 P ガ與ヘラレタトキ θ ノ値ニ依ツテ動徑ノ符號ハ定マルモノデ, 其ノ座標ノ表シ方ハ無數ニアル。

例 次ノ諸點ヲ圖示セヨ。

$$P(2, 30^\circ), \quad Q\left(5, \frac{\pi}{4}\right), \quad R\left(3, -\frac{\pi}{3}\right), \quad S\left(-3, \frac{\pi}{6}\right)$$

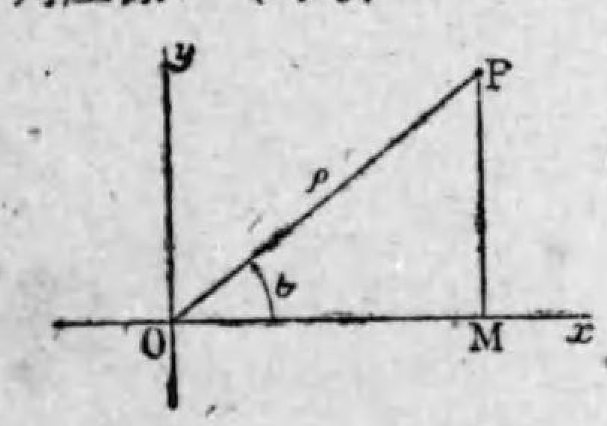
問 題

6. 次ノ諸點ヲ圖示セヨ。

(a) $(3, -45^\circ)$, (b) $\left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$, (c) $\left(-5, -\frac{2\pi}{3}\right)$

2.5 直角座標ト極座標トノ關係

極 O ヲ原點トシ, 原線ヲ x 軸トシタトキ P 點ノ極座標ヲ (ρ, θ), 直角座標ヲ (x, y) トスレバ圖カラ直チニ次ノ關係式ガ得ラレル。



$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho^2&=x^2+y^2 \\ \tan\theta&=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(5)$$

例 1. $P(3, 90^\circ)$, $Q\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$, $R\left(-5, -\frac{\pi}{4}\right)$ ヲ直角座標デ表セ。

P 點ノ直角座標ヲ求メルト $x=3\cos 90^\circ=0$, $y=3\sin 90^\circ=3$

故ニ P(0, 3), 同樣ニシテ $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $R\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

例 2, 點 $(1, \sqrt{3})$ ヲ極座標デ表セ。但シ $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ トスル。

$$\rho^2=1+3=4 \qquad \therefore \ \rho=2$$

所要ノ點ハ第一象限ニアッテ, $\tan\theta=\sqrt{3}$ デアルカラ

$$\theta=\frac{\pi}{3} \qquad 故ニ \ \left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$$

問　題

7. 次ノ諸點ヲ直角座標デ表セ。

$P(5, 60°)$, $Q\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$, $R\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$

8. 次ノ諸點ヲ極座標デ表セ。但シ $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ トスル。

$P(-1, 1)$, $Q(2, -2\sqrt{3})$, $R(-\sqrt{3}, -1)$

9. 直角座標デ表サレタ次ノ方程式ヲ極座標デ表サレタ方程式ニ直セ。

(*a*) $x^2-y^2=2ay$ (*b*) $x^2+y^2=a^2$

第三章

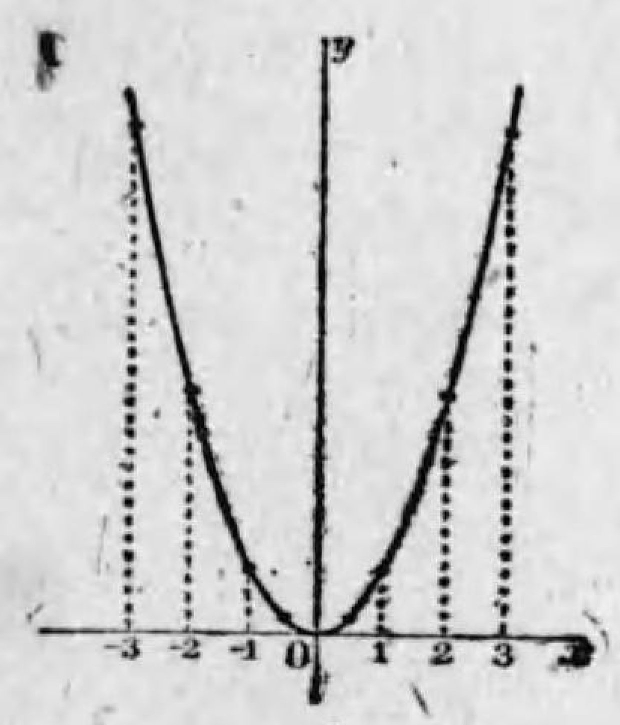
方程式ノ軌跡

3.1 方程式ノ軌跡

x ト y ニ關スル方程式ニ於テ x ハ横座標, y ハ縱座標ヲ表スモノトスル。或曲線上ノ總テノ點ノ座標 (x, y) ガ此ノ方程式ヲ滿足シ, 又逆ニ此ノ方程式ニ適スル (x, y) ノ値ニ依ツテ表サレタ點ガ總テ其ノ曲線上ニ在ルトキ其ノ曲線ヲ此ノ**方程式ノ軌跡** (Locus) ト云ヒ, 此ノ方程式ヲ其ノ**曲線ノ方程式**ト云フ。

例 1, $y=x^2$ ノ軌跡ヲ畫ケ。

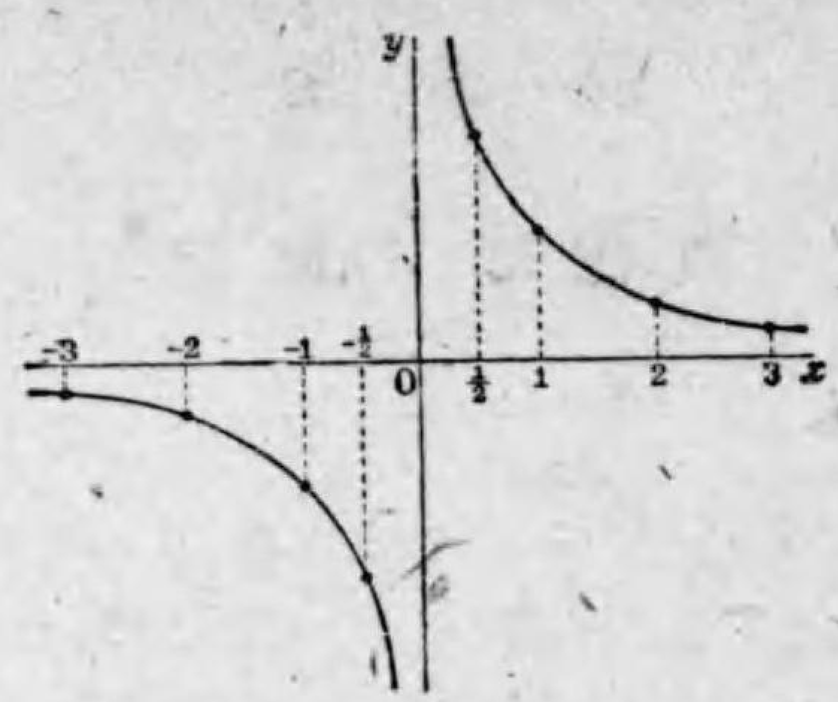
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9



x ヲ連續的ニ變化サセルト, y モ連續的ニ變化シテ連續スル曲線ヲ形成スル。

例 2, $xy=1$ ノ軌跡ヲ畫ケ。

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



問　題

1. 方眼紙ヲ用ヒテ次ノ方程式ノ軌跡ヲ畫ケ。

(*a*) $y=x^3$　(*b*) $x^2+y^2=9$　*(*c*) $y=x^2-3x$　(*d*) $y=10^x$

*(*e*) $y=\log_{10}x$　(*f*) $y^2=x^3$　(*g*) $xy-x-y=0$

2. $y^2=8x$ ノ軌跡ハ點 (2, 3) ヲ通過スルカ。

3. $y^2-4x=9$ ノ軌跡上縦座標ガ -5 デアル點ヲ求メヨ。

***4.** $x^2+y^2=25$ ノ軌跡上ニ於テ $x=4$ ナル如キ點ノ座標ヲ求メヨ。

5. 次ノ方程式中原點ヲ通ルモノヲ選ベ。

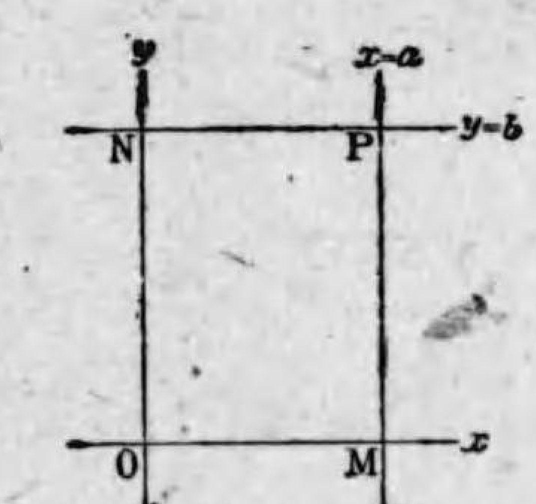
(*a*) $2x=3y$　(*b*) $2x-3y+1=0$　(*c*) $y^2=x(5-x)$

***6.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ノ軌跡ト y 軸トノ交點ノ座標ヲ求メヨ。

第四章

直　線

4.1　軸ニ平行ナル直線ノ方程式



x 軸上ニ OM$=a$ ナル様ニ M 點ヲトリ, M 點カラ y 軸ニ平行ナル直線 MP ヲ引ケバ, 其ノ直線上ノ任意ノ點ノ横座標 x ハ a ニ等シイカラ

$$x=a \qquad \cdots(1)$$

而シテ MP 以外ノ點ノ座標ハ此ノ式ヲ滿足シナイ故公式 (1) ハ PM ノ方程式デアル。

同様ニ ON$=b$ トスレバ PN ノ方程式ハ

$$y=b \qquad \cdots(2)$$

デアル。

系　y 軸ノ方程式ハ　$x=0$

x 軸ノ方程式ハ　$y=0$

デアル。

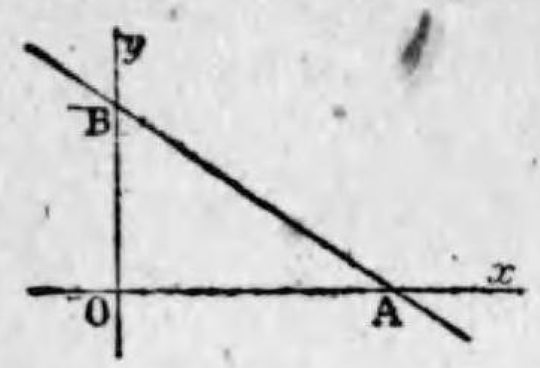
問　題

1. 次ノ方程式ハ如何ナル直線ヲ表スカ。

(*a*)* $x-3=0$　(*b*) $y+2=$

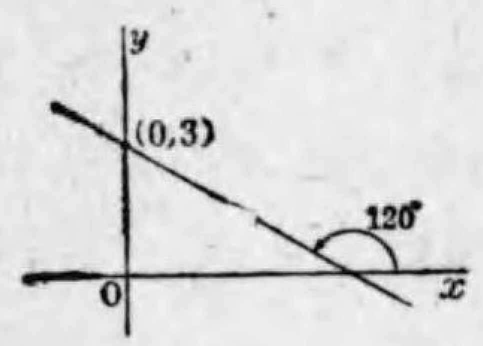
4.2　直線ノ角係數及び截片

直線 AB ガ x 軸, y 軸ト交ル點ヲ夫々 A, B トスルトキ, OA ヲ x 軸



上ニ於ケル**截片** (Intercept), OB ヲ y 軸上ニ於ケル截片ト云フ。直線 AB ノ x 軸ノ上部ガ x 軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキ α ノ正切ヲ直線 AB ノ**角係數** (Angular coefficient) 又ハ**勾配** (Slope) ト云ヒ，通常 m デ表ス。

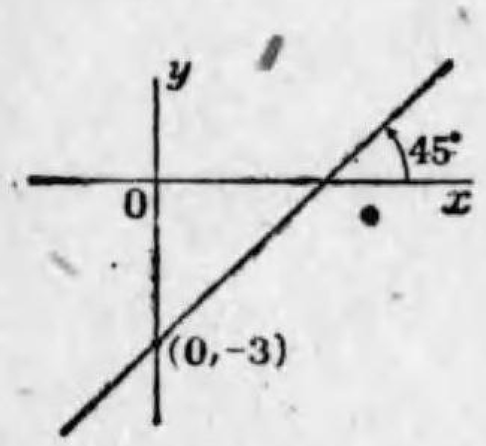
即チ　$m=\tan\alpha,\qquad (0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ)$



例 1, 圖ニ於テ直線ノ角係數ト y 軸上ノ截片ヲ求メヨ。

$$角係數\ m=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$$

y 軸上ノ截片ハ 3 デアル。

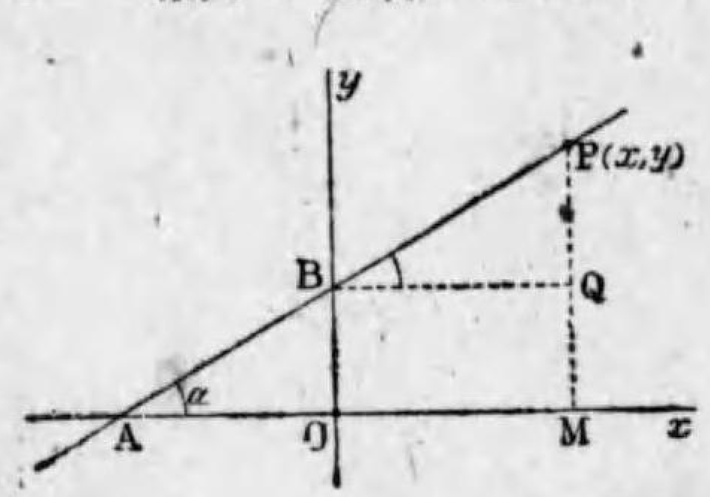


例 2, 圖ニ於テ直線ノ角係數ト y 軸ノ截片ヲ求メヨ。

$$角係數\ m=\tan 45^\circ=1$$

y 軸上ノ截片ハ -3 デアル。

4.3 一般ナル直線ノ方程式



角係數 m, y 軸上ノ截片 b ナル直線 AB 上ニ任意ノ點 (x, y) ヲトレバ左圖ニ於テ

$$MP=MQ+QP$$

$$\therefore\quad y=b+x\tan\alpha$$

或ハ
$$y=mx+b \qquad \cdots(3)$$

AB 上ノ點ハ皆此ノ方程式ヲ滿足シ，AB 以外ノ點ノ座標ハ滿足シナイカラ，公式 (3) ハ AB ノ方程式デアル。

原點ヲ通リ角係數 m ナル直線ノ方程式ハ

$$y=mx \qquad \cdots(4)$$

例 1, x 軸ト 60° ノ角ヲナシ且 $(0, 5)$ ナル點ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

$$m=\tan 60^\circ=\sqrt{3},\qquad b=5\qquad \therefore\ \sqrt{3}x-y+5=0$$

例 2, 角係數 $-\frac{1}{3}$, y 軸上ノ截片ガ -2 ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

$$y=-\frac{1}{3}x-2\qquad 或ハ\qquad x+3y+6=0$$

問　　題

2. 點 $(0, 5)$ ヲ通リ，x 軸ト 135° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ。
3. x 軸ト 150° ノ角ヲナシ，y 軸上ノ截片ガ 5 デアル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

4.4 定點 $P(x_1, y_1)$ ヲ通リ，角係數ガ m ナル直線ノ方程式

求メル直線ノ y 軸上ノ截片ヲ b トスレバ此ノ直線ノ方程式ハ

$$y=mx+b \qquad (1)$$

トナリ，P ハ此ノ直線上ニアルカラ　$y_1=mx_1+b$

或ハ
$$b=y_1-mx_1 \qquad (2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots(5)$$

例 點 $(2, 3)$ ヲ通リ，x 軸ト 60° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ。

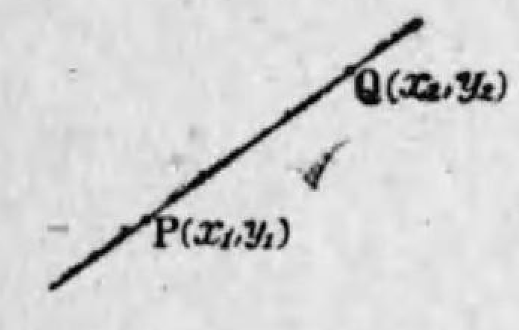
$$m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}\qquad \therefore\ y-3=\sqrt{3}(x-2)$$

或ハ
$$\sqrt{3}x-y+3-2\sqrt{3}=0$$

問　　題

4. 點 $(3, -5)$ ヲ通リ，x 軸ト 135° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ。

4.5 二定點 $P(x_1, y_1)$ 及ビ $Q(x_2, y_2)$ ヲ通ル直線ノ方程式



所要ノ直線ノ角係數ヲ m トスレバ PQ ノ方程式ハ前節カラ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (1)$$

此ノ直線ハ又 Q (x_2, y_2) ヲ通ルカラ

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1) \quad 或ハ \quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \cdots(6)$$

或ハ次ノ如ク二ツノ形ニ變形スルコトガ出來ル。

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x-x_2}{y-y_2}$$

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0$$

例　P(3, −2), Q(−6, 3) ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

$$y+2=\frac{3+2}{-6-3}(x-3) \quad 或ハ \quad 5x+9y+3=0$$

問　　題

5. (2, −3), (3, 2) ナル二點ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

6. (−1, 3), (7, 8), (2, −5) ナル三點ハ一直線上ニアルカ。

4.6　兩軸上ノ截片ガ與ヘラレタ直線ノ方程式

x 軸上ニ於ケル截片ヲ a, y 軸上ニ於ケル截片ヲ b トスレバ此ノ直線ハ $(a, 0)$, $(0, b)$ ナル二點ヲ通ルカラ前節公式 (6) ニヨリ方程式ハ

$$y=-\frac{b}{a}(x-a) \quad 或ハ \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \cdots(7)$$

問　　題

7. x 軸及ビ y 軸上ノ截片ガ夫々 3 及ビ −6 ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

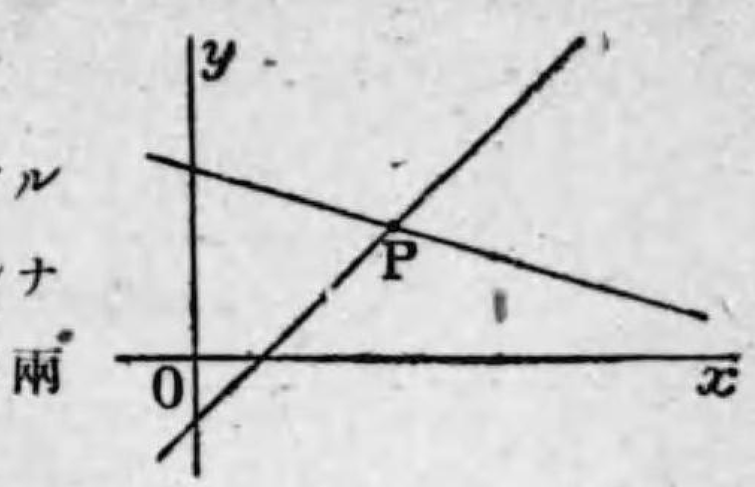
8. 直線 $5x+7y-12=0$ ノ兩軸上ニ於ケル截片ヲ求メヨ。

4.7　二直線ノ交點ノ座標

與ヘラレタ二直線ノ方程式ヲ

$$Ax+By+C=0$$

$$A'x+B'y+C'=0$$



トスレバ交點ハ此ノ二直線ニ共通デアルカラ，其ノ座標ハ此ノ兩方程式ヲ滿足シナケレバナラヌ。從ツテ交點ノ座標ハ此ノ兩式ヲ聯立方程式トシテ解ケバ得ラレル。

例　二直線 $x+2y+6=0$, $2x+y=0$ ノ交點ヲ求メヨ。

此ノ聯立方程式ヲ解クト $x=2, y=-4$ トナル。

故ニ交點ノ座標ハ (2, −4) デアル。

問　　題

9. 二直線 $4x+3y-11=0$, $3x+4y-12=0$ ノ交點ヲ求メヨ。

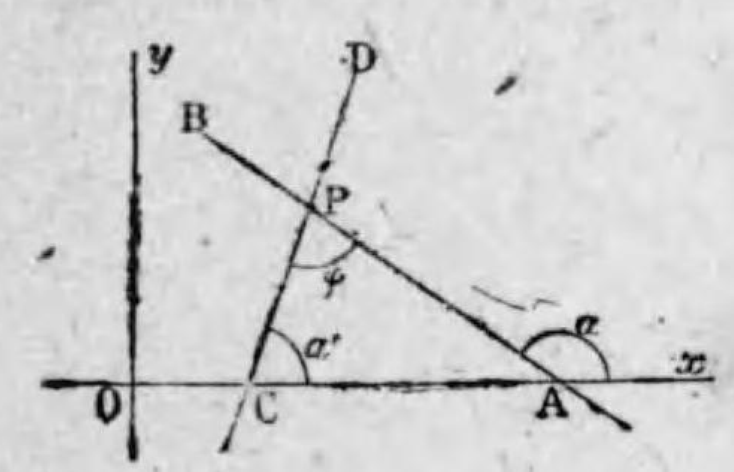
10. 點 (x_1, y_1) ヲ通リ，二直線 $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$ ノ交點ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

4.8　二直線ノ交角

點 P ニ於テ交ル二直線 AB, CD ノ方程式ヲ夫々

$$y=mx+b$$

$$y=m'x+b'$$



トシ，是等ノ直線ガ x 軸トナス角ヲ α, α' トスレバ $m=\tan\alpha$, $m'=\tan\alpha$

次ニ P 點ニ於ケル交角ヲ φ トスレバ

$$\varphi=\alpha-\alpha'$$

又ハ

$$\varphi=180^\circ-(\alpha-\alpha')$$

$\therefore$

$$\tan\varphi=\pm\frac{m-m'}{1+mm'} \qquad \cdots(8)$$

系 1.　二直線ガ平行ナルトキハ $m=m'$ デアル。

系 2.　二直線ガ互ニ垂直ナルトキハ $mm'=-1$ デアル。

例　二直線 $x-2y+2=0,\ x+3y+15=0$ ノ交角ヲ求メヨ。

交角ヲ φ トスレバ

$$\tan\varphi=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=1\qquad\therefore\quad\varphi=45^\circ$$

問　　題

11.　二直線 $x-3y+1=0,\ x+2y+1=0$ ノ交角ヲ求メヨ。

12.　二直線 $x-y+2=0,\ (2-\sqrt{3})x-y+1=0$ ノ交角ヲ求メヨ。

13.　二直線 $3x+2y-5=0,\ x+4y+7=0$ ノ交角ヲ求メヨ。

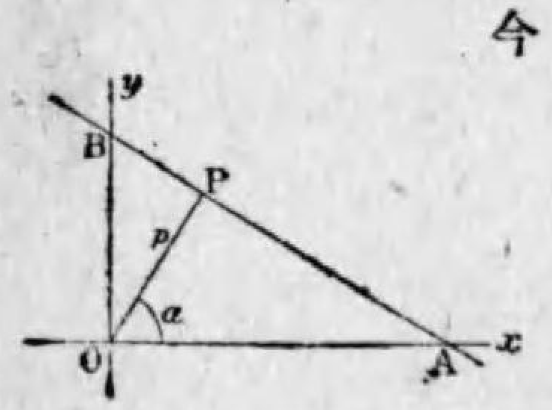
14.　$4x-7y+5=0,\ 7x+4y=25$ ナル二直線ハ直交スルコトヲ證明セヨ。

***15.**　$(2,\ -3)$ ナル點ヲ通リ $2x+3y=5$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

***16.**　三角形ノ三垂線ハ一點ニ出合フコトヲ證明セヨ。

4.9　原點カラ直線ヘ引イタ垂線ノ長サ p ト，其垂線ガ x 軸トナス角 α トガ與ヘラレタ直線ノ方程式

直線ヲ AB トシ，コレト x 軸，y 軸トノ交點ヲ夫々 A, B トスル。原點 O カラ AB ヘ引イタ垂線ノ足ヲ P トス。



今　$OP=p\quad \angle xOP=\alpha$　トシ

$OA=a,\ OB=b$ トスレバ AB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

コノ兩邊ニ p ヲ乘ズルト

$$x\frac{p}{a}+y\frac{p}{b}=p$$

或ハ
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\qquad\cdots(9)$$

此ノ公式 (9) ヲ**ヘつせノ標準形** (Hesse's normal form) ト云フ。

玆ニ p ハ常ニ正デアルトシ，α ハ垂線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角デ

アツテ 0° カラ 360° マデノ値ヲトルモノトスル。

例　原點カラ直線ヘ引イタ垂線ノ長サガ 7 デ，此ノ垂線ガ x 軸ト 60° ノ角ヲナストキ其ノ直線ノ方程式ヲ求メヨ。

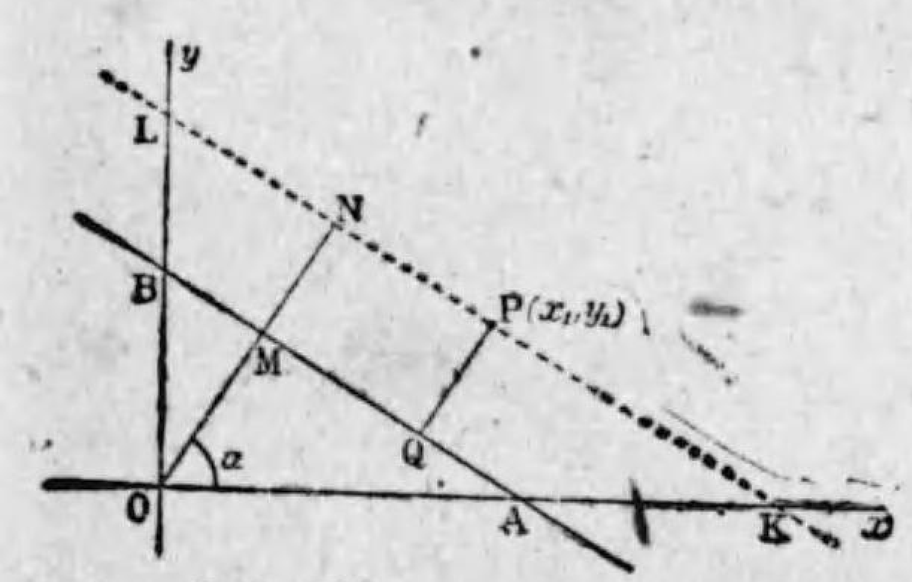
$$x\cos 60^\circ+y\sin 60^\circ=7\qquad 或ハ\qquad x+\sqrt{3}y=14$$

問　　題

17.　原點カラ直線ヘ引イタ垂線ノ長サガ 5 デアツテ此ノ垂線ガ x 軸トナス角ガ 150° ナルトキ其ノ直線ノ方程式ヲ求メヨ。

***18.**　直線 $x\cos 60^\circ+y\sin 60^\circ=p$ ガ $(2,\ \sqrt{3})$ ナル點ヲ通ルト云フ。原點カラ此ノ直線ヲ引イタ垂線ノ長サヲ求メヨ。

4.10　定點カラ定直線ニ引イタ垂線ノ長サ



定點ヲ $P(x_1,\ y_1)$ トシ，定直線 AB ノ方程式ヲ

$$ax+by+c=0\qquad(1)$$

トスル。定點 P ヲ通リ定直線 AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ Q トシ，原點 O カラ ~~AB 及ビ~~ P ヲ通リ AB ニ平行ナル直線 KL ニ垂線ヲ引キ交點ヲ夫々 M, N トスル。

今　$OM=p,\quad ON=q,\quad \angle xON=\alpha$　トスレバ

KL ノ方程式ハ　$x\cos\alpha+y\sin\alpha=q$

然ルニ直線 KL ハ P ヲ通ルカラ　$q=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha$

$$\therefore\qquad PQ=q-p=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p\qquad(2)$$

依テ定點 $P(x_1,\ y_1)$ カラ，定直線

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0\qquad(3)$$

ニ引イタ垂線ノ長サハ (3) ノ左邊ノ x ノ代リニ x_1，y ノ代リニ y_1 ヲ代入スレバ得ラレル。卽チ　$|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|$

然ルニ $ax+by+c=0$ 及ビ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ハ共ニ AB ノ方程式デアルカラ同一デアツテ係數ハ比例シナケレバナラヌカラ

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{-p}=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\quad p=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}>0$$

依テ PQ ノ長サハ

$$x_1\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+y_1\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ノ絕對値ヲトレバ良イ。卽チ

$$\mathbf{PQ}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots(10)$$

例 點 (3, 2) カラ直線 $2x+y-4=0$ ニ引イタ垂線ノ長サ p ヲ求メヨ。

$$p=\frac{|2\times3+2-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

問　題

19. 原點カラ直線 $x+\sqrt{3}\,y+20=0$ ニ引イタ垂線ノ長サヲ求メヨ。

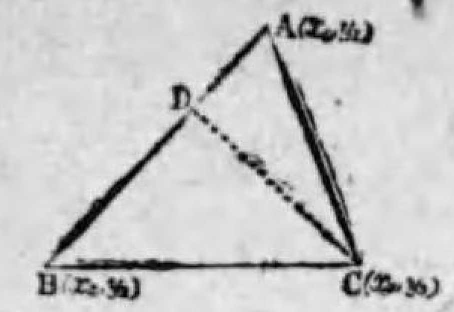
20. (6, −1) カラ $3x-y+15=0$ ニ引イタ垂線ノ長サヲ求メヨ。

*21. A(5, −2) カラ B(3, 2), C(−5, 6) ヲ結ンダ直線ニ引イタ垂線ノ長サヲ求メヨ。

4.11 三角形ノ面積

三點 A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ次ニ求メル。

直線 AB ノ方程式ハ



$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

或ハ

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0$$

頂點 C カラ AB ニ引イタ垂線ノ長サハ

$$\mathrm{CD}=\frac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}$$

又 $$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

故ニ三角形 ABC ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CD}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{S=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|} \qquad \cdots(11)$$

例 A(1, 1), B(5, 2), C(3, 7) ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

$$S=\frac{1}{2}|1\times(2-7)+5\times(7-1)+3\times(1-2)|=11$$

問　題

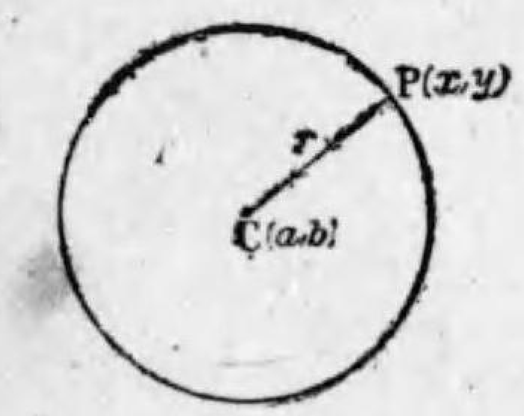
22. A(−2, 5), B(2, −3), C(5, 6) ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

*23. A(3, 2), B(−5, 3), C(−1, −6), D(2, −1) ヲ頂點トスル四邊形 ABCD ノ面積ヲ求メヨ。

第五章

圓

5.1 中心ノ座標ト半徑トガ與ヘラレタ圓ノ方程式



與ヘラレタ圓ノ中心ヲ $C(a,b)$, 半徑ヲ r トシ, 圓周上ノ任意ノ點ヲ $P(x,y)$ トスレバ第二章ノ公式 (1) カラ

$$CP^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

或ハ $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots(1)$$

圓周上ノ各點ハ皆コレヲ滿足シ其以外ノ點ハコレヲ滿足セヌカラ之ガ圓ノ方程式デアル。

P ガ圓內ニアレバ $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$

P ガ圓外ニアレバ $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$

特ニ原點ガ中心ナラバ $x^2+y^2=r^2$ $\cdots(2)$

例 1. 點 $(2,-3)$ ヲ中心トシ, 半徑ガ 8 ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

$$(x-2)^2+(y+3)^2=8^2$$
$$x^2+y^2-4x+6y-51=0$$

例 2. x 軸上正ノ方向ニ中心ヲ有シ原點ヲ通ル半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \quad 或ハ \quad x^2+y^2=2rx$$

問題

1. 點 $(-6,-7)$ ヲ中心トシ, 半徑 5 ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

2. 原點ヲ通リ, y 軸上正ノ方向ニ中心ヲ有シ, 半徑ガ r ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

*3. 點 $(5,7)$ ハ圓 $x^2+y^2-2x+6y=15$ ノ外ニアルカ, 內ニアルカ。

5.2 圓ノ方程式

圓ノ方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ヲ展開スルト

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \qquad (1)$$

此ノ方程式ト x, y ニ關スル一般ナル二次方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0 \qquad (2)$$

トヲ較ベルト (2) ガ圓ヲ表スタメニハ $A=B$, $H=0$ ナルコト, 卽チ x^2 ノ係數ト y^2 ノ係數トガ相等シク, xy 項ヲ含マヌコトガ必要デアル。

而シテ逆ニ $A=B$, $H=0$ ナラバ圓ヲ表ス。卽チ

此ノ場合 (2) ハ次ノ如ク表スコトガ出來ル

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (3)$$

コレヲ標準形ニ直スト

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

トナルカラ, 中心ノ座標ハ $(-g,-f)$, 半徑ハ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ トナル。

例 $x^2+y^2-6x-4y-23=0$ ノ中心ノ座標及ビ半徑ヲ求メヨ。

$$(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=9+4+23$$

或ハ $$(x-3)^2+(y-2)^2=36$$

故ニ中心ノ座標ハ $(3,2)$, 半徑ハ 6 デアル。

問題

4. 次ノ圓ノ中心及ビ半徑ヲ求メヨ。

(a) $x^2+y^2-4x+12y+15=0$, (b) $2x^2+2y^2+8x-12y+9=0$

*5. 三點 $(0,4)$, $(3,0)$, $(2,1)$ ヲ通ル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

5.3 直線ト圓トノ交點

圓及ビ直線ノ方程式ヲ夫々

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$
$$y=mx+b \qquad (2)$$

トスレバ其ノ交點ノ座標ハ兩方程式ヲ滿足シナケレバナラヌ。

故ニ (1), (2) ノ聯立方程式ヲ解ケバ其ノ交點ノ座標ガ得ラレル。(2) ヲ (1) ニ代入スルト

$$(1+m^2)x^2+2mbx+b^2-r^2=0$$

$$\therefore \qquad x=\frac{-mb\pm\sqrt{(1+m^2)r^2-b^2}}{1+m^2} \qquad (3)$$

同樣ニ
$$y=\frac{b\pm m\sqrt{(1+m^2)r^2-b^2}}{1+m^2}$$

ガ求メラレル。

而シテ若シ $(1+m^2)r^2-b^2>0$ ナラバ (1) ト (2) ハ**二點デ相交リ**,

$(1+m^2)r^2-b^2=0$ ナラバ (1) ト (2) ハ**相切シ**,

$(1+m^2)r^2-b^2<0$ ナラバ (1) ト (2) ハ**交ラヌ**。

例　$x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ト直線 $y=x$ トノ交點ヲ求メヨ。

第一ノ方程式ニ y ヲ x ト置ケバ

$$2x^2-10x+12=0$$

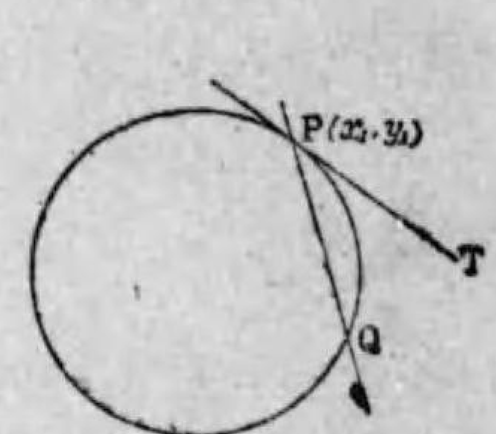
コレヲ解クト $y=2$ 或ハ 3。故ニ交點ハ (2, 2), (3, 3) デアル。

問　題

6. 圓 $x^2+y^2-2x-6y-7=0$, ト直線 $x+y-1=0$ トノ交點ヲ求メヨ。

7. 圓 $x^2+y^2-6x+2y-15=0$, ト直線 $2x-y+10=0$ トハ相交ルカ。

5.4　圓周上ノ定點ニ於ケル切線ノ方程式



圓ノ方程式ヲ　$x^2+y^2=r^2$　　(1)

トシ, 定點ヲ $P(x_1, y_1)$ トスル。

P 點ニ於ケル切線ヲ求メルタメニ圓周上ニ第二ノ點 $Q(x_2, y_2)$ ヲトレバ弦 PQ ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad (2)$$

然ルニ P, Q ハ共ニ圓周上ニアル故

$$x_1^2+y_1^2=r^2 \qquad (3)$$
$$x_2^2+y_2^2=r^2 \qquad (4)$$

(3), (4) 式カラ

$$y_2^2-y_1^2=-(x_2^2-x_1^2) \quad 或ハ \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1} \qquad (5)$$

(5) ヲ (2) ニ代入スルト PQ ノ方程式ハ

$$y-y_1=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1) \qquad (6)$$

トナル。今點 Q ヲ限リナク P ニ接近サセルト弦 PQ ハ限リナク P ニ於ケル切線 PT ニ近ヅク。故ニ $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ トスレバ切線 PT ノ方程式ガ得ラレル。卽チ

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1) \quad 或ハ \quad x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2 \qquad (7)$$

(7) ニ (3) ノ關係ヲ代入スルト

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad \cdots(4)$$

コレハ所要ノ切線ノ方程式デアル

問　題

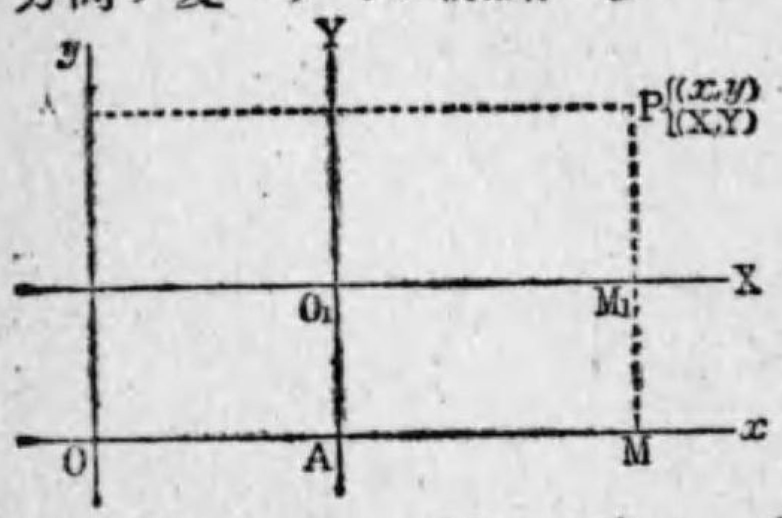
8. 圓 $x^2+y^2=25$ ニ於テ $x=3$ ナル二點ヲ求メ, 其ノ各點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

第 六 章

座 標 ノ 變 換

6.1 軸ノ方向ヲ變ヘナイデ原點ヲ移スコト

點ノ座標及ビ曲線ノ方程式ハ座標軸ガ定マツテ後ニ決定サレルモノデ, 其ノ軸ノ取リ方ニヨツテ圖形ノ性質ヲ研究スルノニ都合ノヨイコトガアル。ソノ爲ニ適當ニ軸ヲ變換スル。第一ニ最モ簡單ナル變換ハ軸ノ方向ヲ變ヘナイデ原點ヲ移スコトデアル。



今 Ox, Oy ヲ舊座標軸トシ, 新原點 O_1 ノ舊軸ニ對スル座標ヲ, $(a,\ b)$ トスル。O_1 ヨリ Ox, Oy ニ平行ニ夫々 OX, OY ヲ引キ, コレヲ新座標軸トスル。

一點 P ノ舊座標ヲ $(x,\ y)$, 新座標ヲ $(X\ \ Y)$ トスレバ圖カラ直チニ次ノ關係式ガ得ラレル。

$$\left.\begin{array}{l} x=X+a \\ y=Y+b \end{array}\right\} \qquad \cdots(1)$$

從ツテ $x,\ y$ ヲ含ム或曲線ノ方程式ガアルトキ之ニ此ノ公式 (1) ヲ代入スレバ $X,\ Y$ ヲ含ム方程式ガ得ラレル。此ノ方程式ハ新座標軸ニ關シテ同一ノ曲線ノ方程式デアル。若シコノ新方程式ニ於テ舊座標ト混雜スル恐レガナケレバ $X\ Y$, ヲ再ビ $x,\ y$ ニ書換ヘルコトガアル。

例 兩軸ノ方向ヲ變ヘナイデ原點ヲ $(-2,\ -3)$ ニ移スト

$$x^2+y^2+4x+6y-12=0$$

ナル方程式ハ如何ナル形ニ變ルカ。

$$x=X-2,\quad y=Y-3$$

ナル關係ヲ代入スルト次ノ如クナル

$$X^2+Y^2=5^2$$

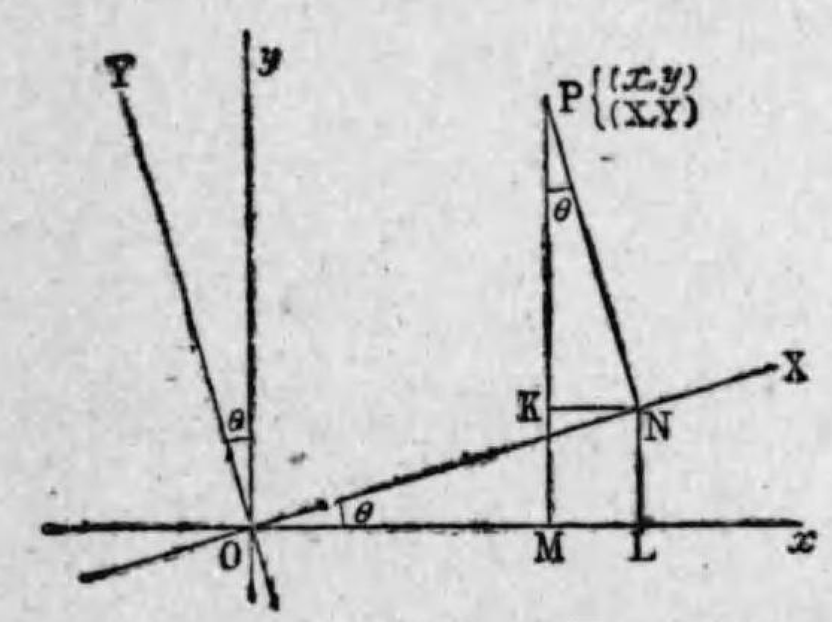
問 題

1. 軸ノ方向ヲ變ヘナイデ原點ヲ(3,2)ニ移スト次ノ曲線ノ方程式ハドウ變ルカ。

$$x^2+y^2-6x-4y=12$$

*2. $3x^2+4xy+y^2-5x-6y-3=0$ ヲ變ヘテ一次ノ項ヲ消失サセルニハ原點ヲ何處ニ移シタラヨイカ。

6.2 原點ヲ移サナイデ軸ヲ廻轉スルコト



Ox, Oy ヲ舊軸, OX, OY ヲ新軸トシ, 舊座標ヲ $(x,\ y)$, 新座標ヲ $(X,\ Y)$ トスル。

$\angle xOX=\theta$ トスレバ圖カラ

$$x=OM=OL-ML=OL-KN$$
$$=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$
$$y=MP=MK+KP=LN+KP=X\sin\theta+Y\cos\theta,$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta \end{array}\right\} \qquad \cdots(2)$$

例 兩軸ヲ 45° 廻轉スルト $x^2-y^2=2$ ハドウ變ルカ。

$$x=X\cos 45^\circ-Y\sin 45^\circ=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

$$y=X\sin 45^\circ+Y\cos 45^\circ=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

コレヲ原式ニ代入スルト $\dfrac{(X-Y)^2}{2}-\dfrac{(X+Y)^2}{2}=2$

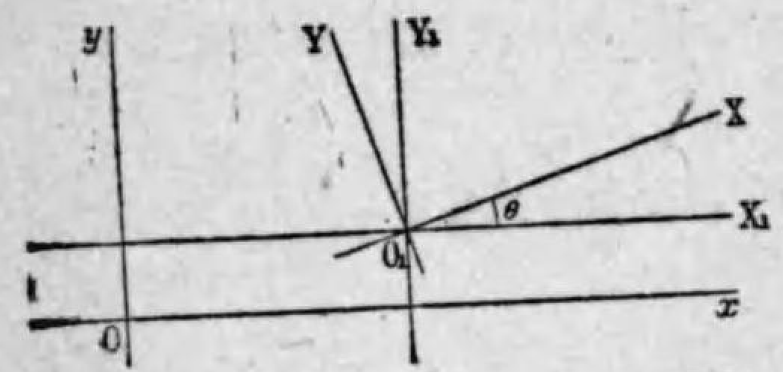
或ハ $XY+1=0$

問　　題

3. 軸ヲ $-45°$ 廻轉スルト $x+y=2$ ハドウ變ルカ。

*4. 軸ヲ $30°$ 廻轉スルト $\sqrt{3}xy-y^2=12$ ハドウ變ルカ。

6.3 原點ヲ移シテ軸ヲ廻轉スルコト



軸ノ方向ヲ變ヘナイデ原點ヲ $O_1(a, b)$ ニ移シ，然ル後兩軸ヲ θ ダケ廻轉シタトキ，舊軸ニ關スル座標ヲ (X, Y) トスレバ前二節カラ直チニ

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta + a \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta + b \end{aligned}\right\} \quad \cdots(3)$$

ナル關係ガ得ラレル。

問　　題

5. $5x^2+2xy+5y^2-6x+18y+9=0$ ハ原點ヲ $(1, -2)$ ニ移シ，軸ヲ $45°$ 廻轉シタラドウ變ルカ。

第　七　章

楕　　圓

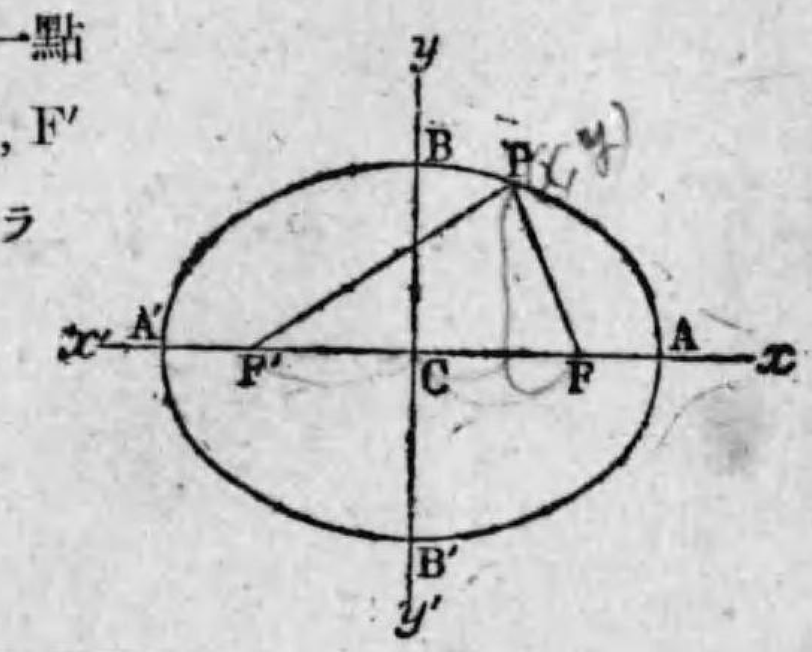
7.1 楕圓ノ定義及ビ畫法

二定點カラノ距離ノ和ガ一定デアル點ノ軌跡ヲ**楕圓** (Ellipse) ト云ヒ，此ノ二定點ヲ**焦點** (Focus)，焦點ヲ結ビツケタル直線ヲ楕圓ノ軸 (Axis) ト云フ。

紙面上ニ楕圓ヲ畫クニハ一定ノ和ヲ $2a$，二定點 F, F′ ノ距離(焦點間ノ距離) ヲ $2c$ トシ，F 及ビ F′ ニ「びん」ヲ立テ $2(a+c)$ ナル長サノ絲ヲ輪ニ作ツテ「びん」ニ掛ケ，鉛筆ノ端ニテ絲ヲ張リ乍ラ絲ニ沿フテ鉛筆ヲ動カセバヨイ。サウスルト其ノ端 P ハ定義ニヨリ F, F′ ヲ焦點トスル楕圓ヲ畫クコトニナル。

7.2 楕圓ノ方程式

楕圓ノ二焦點ヲ F, F′ トシ，$FF'=2c$，一定ノ長サヲ $2a$ トスル楕圓ノ方程式ヲ求メンニ F, F′ ヲ結ブ直線ヲ x 軸ニ，線分 FF′ ノ垂直二等分線ヲ y 軸ニトリ，條件ニ適スル一點 P ノ座標ヲ (x, y) トスレバ焦點 F, F′ ノ座標ハ $(c, 0)$, $(-c, 0)$ トナルカラ



$$FP=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$F'P=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

然ルニ　　$FP+F'P=2a$

故ニ所要ノ軌跡ノ方程式ハ

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

左邊ノ第一項ヲ右邊ニ移項シテ兩邊ヲ平方スレバ

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

之ヲ整頓スルト $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\dfrac{c}{a}x$

更ニ之ヲ平方スレバ

$$(x-c)^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

卽チ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

然ルニ假定ニヨリ $a>c$ デアルカラ, $a^2-c^2=b^2$ トスレバ楕圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots(1)$$

ナル形ニ書クコトガ出來ル。

此ノ方程式ヨリ楕圓ヲ畫クトキハ圖ノ如キ x, y 兩軸ニ關シテ對稱ナル曲線ガ得ラレル。コノ式ニテ $y=0$ トスレバ $x=\pm a$ トナルカラ楕圓ハ二點 A $(a, 0)$, A′ $(-a, 0)$ ヲ通ル。此ノ線分 AA′ $(=2a)$ ヲ楕圓ノ**長軸** (Major axis) ト云ヒ, A, A′ ヲ**頂點** (Vertex) ト云フ。又 $x=0$ トスレバ $y=\pm b$ トナルカラ二點 B $(0, b)$, B′ $(0, -b)$ モ通ル。 此ノ線分 BB′ ヲ楕圓ノ**短軸** (Minor axis) ト云ヒ, 其ノ長サハ $2b$ トナル。

FF′ ノ中點卽チ x, y 兩軸ノ交點 C ヲ楕圓ノ**中心** (Centre) ト云ヒ, C 點ハ此ノ點ヲ通ル弦ノ常ニ中點トナルモノデアル。

今 CF : CA ヲ e ニテ表スト

$$e=\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1 \qquad \cdots(2)$$

トナルガ, 此ノ e ヲ楕圓ノ**離心率** (Eccentricity) ト云ヒ, e ガ零ニ近ヅケバ圓ニ近ヅキ, 1 ニ近ヅケバ扁平トナル。 $c=ae$ ナルコトヨリ焦點ノ座標ハ $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$ ニテモ表サレル。

普通ハ $a>b$ ナルモノトシテ焦點ガ x 軸上ニアル場合ヲ論ズルモノナルガ, 若シ $a<b$ ナルトキハ焦點ハ y 軸上ニアリ, 離心率ハ $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ トナル。

例 1. 楕圓 $25x^2+169y^2=4225$ ナルトキ其ノ長軸, 短軸ノ長サ及ビ離心率ヲ求メヨ。

原式ヲ變形スレバ

$$\frac{x^2}{\frac{4225}{25}}+\frac{y^2}{\frac{4225}{169}}=1$$

或ハ $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$

依ッテ $a=13$, $b=5$ トナリ, 長軸ハ 26, 短軸ハ 10

又 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{169-25}}{13}=\dfrac{\sqrt{144}}{13}=\dfrac{12}{13}$

例 2. 長軸ノ長サガ 12 デ, ソノ焦點ガ $(4, 0)$, $(-4, 0)$ トナル楕圓ノ方程式ヲ求メヨ。

$$a=6, \quad ae=4$$

ヨリ $b^2=a^2-a^2e^2=6^2-4^2=20$

故ニ求メル式ハ $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$

トナル。

問　題

1. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ナル楕圓ノ長軸, 短軸ノ長サ及ビ焦點間ノ距離ヲ求メヨ。
2. 楕圓 $9x^2+16y^2=225$ ノ離心率ヲ求メヨ。
3. 長軸ガ 12, 焦點ノ座標ガ $(3, 0)$ デアル楕圓ノ方程式ヲ求メヨ。
4. 楕圓ノ焦點ヲ F, 短軸ノ兩端ヲ B, B′ トスルトキ FB ノ長サヲ求メヨ。

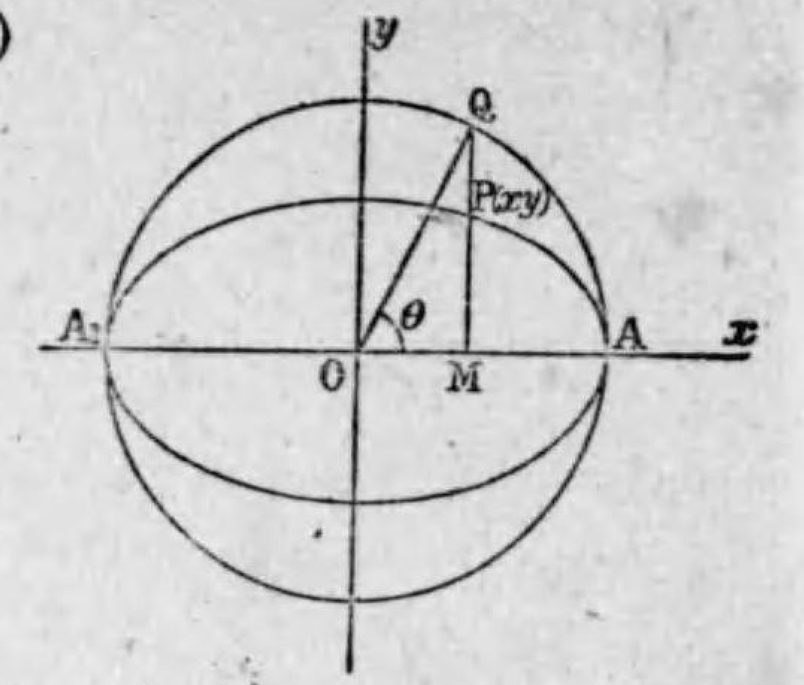
7.3 補助圓

楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y_2}{b^2}=1$ ニ於テ長軸 $2a$ ヲ直徑トスル圓ヲソノ楕圓ノ**補助圓** (Auxiliary Circle) ト云フ。楕圓上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ, P ヨリ x 軸

ニ垂線 PM ヲ下シ, MP ノ延長ガ補助圓ト交ル點ヲ Q トスル。

今 P, Q ノ座標ヲ夫々 $(x_1, y_1), (x_1, y_2)$ トシ, 中心ヲ O, $\angle QOx=\theta$ トスレバ

$$x_1=OM=OQ\cos\theta=a\cos\theta$$



此ノ値ヲ $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ ニ代入スレバ

$$\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

依ツテ　$y_1^2=b^2(1-\cos^2\theta)=b^2\sin^2\theta$

故ニ　$y_1=\pm b\sin\theta$　　$\therefore$　$P[a\cos\theta,\ b\sin\theta]$

從ツテ楕圓ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{a\cos\theta}\\ \boldsymbol{y}&=\boldsymbol{b\sin\theta}\end{aligned}\right\}\qquad\cdots(3)$$

ヲ以テ表スコトヲ得ルモノデアツテ之ヲ媒介變數ニヨル楕圓ノ方程式ト云フ。

上述ノ θ ヲ楕圓上ノ點 P ノ**離心角** (Eccentric angle) ト云フ。

又 $y_2=MQ=a\sin\theta$　トナルコトヨリ　$y_2:y_1=a:b$

之ヨリ兩軸ノ長サ $2a$, $2b$ ナル楕圓ヲ畫クニハ, 直交二直線ヲ作リ其ノ交點 O ヲ中心トシ, 長軸ノ長サノ半分 a ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, 此ノ圓周上ノ任意ノ一點 Q ヨリ x 軸ニ垂線 QM ヲ引キ, QM 上ニ $MP:MQ=b:a$ ナル如キ點 P ヲトレバ, Q 點ガ圓周上ヲ移動スルニ從ツテ P 點ハ此ノ條件ヲ滿足スル楕圓ヲ畫クコトニナル。

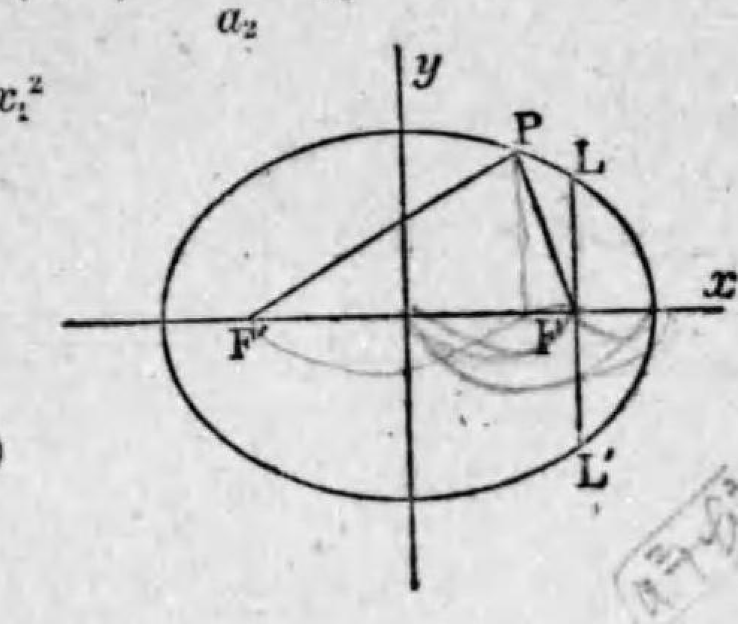
7.4　楕圓上ノ一點カラ焦點ニ至ル距離及ビ通徑

楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ任意ノ點 P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ

$$PF^2=(ae-x_1)^2+y_1^2$$
$$=a^2e^2-2aex_1+x_1^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2$$

即チ　$PF^2=a^2-b^2-2aex_1+b^2+\dfrac{a^2-b^2}{a_2}x_1^2$

$$=a^2-2aex_1+e^2x_1^2$$
$$=(a-ex_1)^2$$



然ルニ　$e<1$, $x_1\leqq a$ ヨリ $ex_1<a$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\boldsymbol{PF=a-ex_1}\\ \text{同様ニ}\quad &\boldsymbol{PF'=a+ex_1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(4)$$

特ニ $x_1=ae$ ナルトキハ

$$PF=a-ae^2=\frac{a^2-a^2e^2}{a}=\frac{a^2-(a^2-b^2)}{a}=\frac{b^2}{a}$$

トナルガ, 之ハ FP ガ x 軸ニ垂直トナル場合デアル。焦點 F ヲ通リ長軸ニ垂直ナル弦ヲ LL′ トスレバ其ノ長サハ $\dfrac{2b^2}{a}$ トナル。

此ノ LL′ ヲ楕圓ノ**通徑** (Latus rectum) ト云フ。F′ ニ就テ考ヘルモ同樣デアル。

例　楕圓ノ短軸ハ其ノ長軸ト通徑トノ比例中項トナルコトヲ證明セヨ。

楕圓ノ方程式　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

ニ於テ　通徑ノ長サ$=\dfrac{2b^2}{a}$

デアル。然ルニ　$2a\times\dfrac{2b^2}{a}=4b^2=(2b)^2$

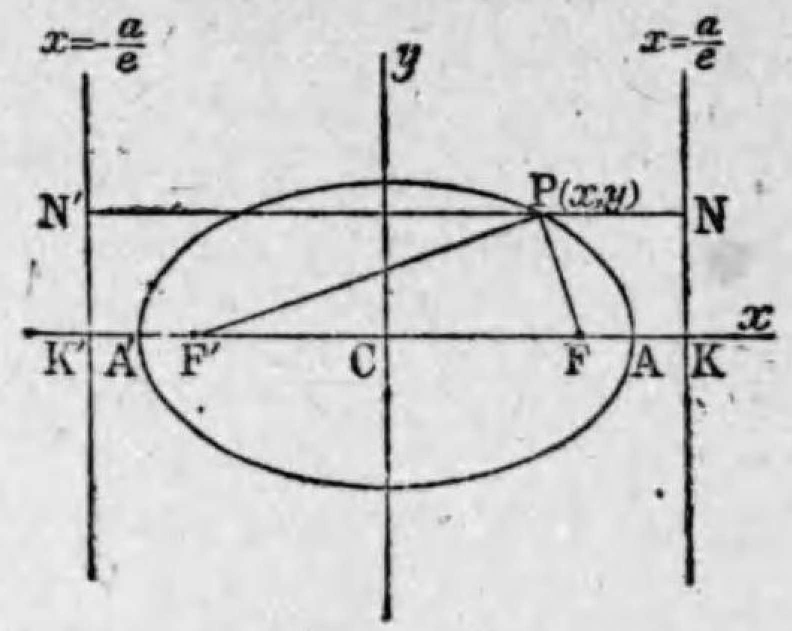
依ツテ $2b$ ハ $2a$ ト $\dfrac{2b^2}{a}$ トノ比例中項トナル。

問　　題

5. 楕圓 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ト直線 $x=2$ ノ交點ヲ P トスルトキ PF, PF′ ノ長サヲ求メヨ。

6. 楕圓 $9x^2+16y^2=144$ ノ通徑ノ長サヲ求メヨ。

7.5 準 線



方程式 $\quad x=\pm\dfrac{a}{e}\quad$ …(5)

ニテ表サレタ二直線ヲ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ準線 (Directrix) ト云フ。

$e<1$ ナルコトヨリ, $\dfrac{a}{e}>a$ トナル。

故ニ準線ハ楕圓ノ外部ニアツテ y 軸ニ平行ナル二直線トナル。

今楕圓上ノ一點 P (x_1, y_1) カラ此ノ準線ニ垂線 PN, PN′ ヲ引ケバ

$$\mathrm{PN}=\frac{a}{e}-x_1=\frac{a-ex_1}{e},\ 然ルニ\ \mathrm{PF}=a-ex_1$$

$$\therefore \qquad \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PN}}=e \quad 同様ニ \quad \frac{\mathrm{PF'}}{\mathrm{PN'}}=e \qquad \cdots(6)$$

此ノ性質ヨリ楕圓ヲ次ノ如ク定義スルコトガ出來ル。卽チ

一定點ト一定直線ニ至ル距離ノ比ガ一定値 e (但シ $e<1$) ナル如キ點ノ軌跡ヲ楕圓ト云フ。

例 楕圓 $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$ ノ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{64-28}}{8}=\frac{\sqrt{36}}{8}=\frac{3}{4} \quad ヨリ \quad \frac{a}{e}=\frac{4\times 8}{3}$$

依ツテ求メル方程式ハ $\qquad x=\pm\dfrac{32}{3}$

トナル。

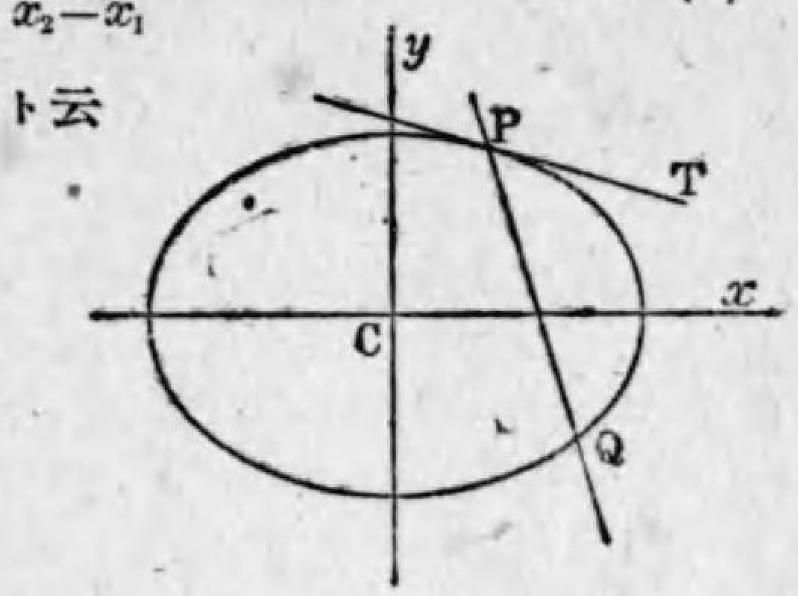
問 題

7. 楕圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ノ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

7.6 楕圓上ノ一點ニ於ケル切線ノ方程式

楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ二點ヲ P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) トスレバ

直線 PQ ノ方程式ハ $\quad \dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (1)$



然ルニ P, Q ガ共ニ楕圓上ニアルト云フコトカラ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) ヲ邊々相減ジ, 移項スレバ

$$\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=-\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2} \quad 從ッテ \quad \frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{b^2}=-\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b_2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}$$

コレハ割線 PQ ノ方程式デアル, 今點 Q ヲ曲線ニ沿フテ限リナク點 P ニ近ヅケレバ割線 PQ ハ極限ニ於テ切線 PT トナル。

故ニ此ノ最後ノ式ニ於テ $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ トスレバ P 點ニ於ケル切線ノ方程式 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ ガ求メラレルカラ, 之ヲ整頓シ, $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ ノ關係ヲ代入スレバ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad \cdots(7)$$

之ガ通常用ヒラレル楕圓上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式デアル。

例 楕圓 $x^2+4y^2=16$ 上ノ點 (4, 0) ニ於テ切スル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

公式ニ於テ $x_1=4$, $y_1=0$ トセル場合ナルヲ以テ

$$4x=16 \quad 卽チ \quad x=4$$

問　　題

8. 楕圓 $3x^2+4y^2=12$ 上ノ一點 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

7.7 楕圓上ノ一點ニ於ケル法線ノ方程式

楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點 P (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ハ $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ デアルカラ，此ノ切點 P ヲ通リ，此ノ切線ニ垂直ナル直線 PN ノ方程式ハ次ノ如クニシテ求メラレル。

先ヅ求メル式ハ $P(x_1, y_1)$ ヲ通ルコトヨリ

$$y-y_1=m(x-x_1) \tag{1}$$

トスルコトヲ得ルガ，切線ノ方程式カラ

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1} \tag{2}$$

然ルニ (1) ト (2) ガ直交スルコトヨリ

$$m\times\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)=-1 \qquad 或ハ \qquad m=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$$

依ツテ求メル式ハ

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

或ハ

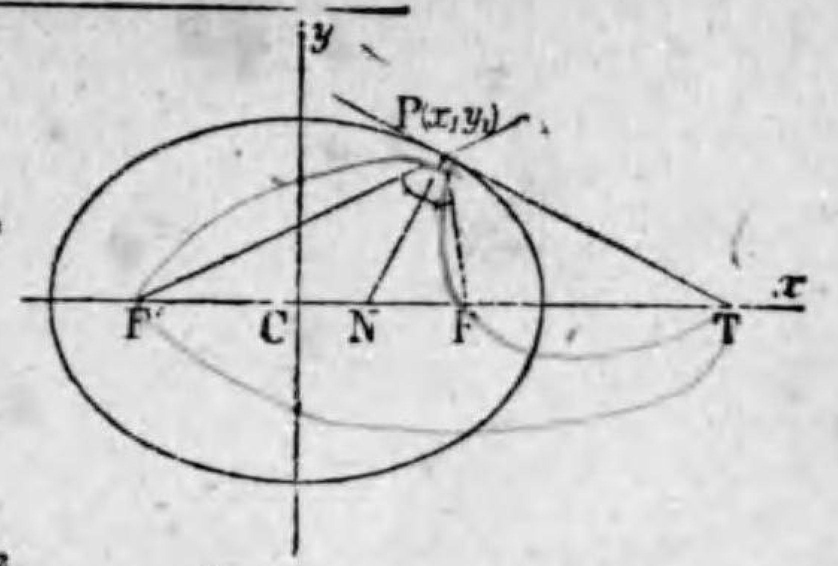
$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2 \qquad \cdots(8)$$

此ノ式ガ楕圓上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル法線ノ方程式デアル。

7.8 焦點ト切線及ビ法線トノ關係

楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ノ切線 PT ノ方程式

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$



ニ於テ $y=0$ トスレバ $x=\frac{a^2}{x_1}$

故ニ切線 PT ガ軸ト交ル點ヲ T トシ，楕圓ノ中心ヲ C トスレバ

$$CT=\frac{a^2}{x_1}$$

$$\therefore \quad FT=CT-CF=\frac{a^2}{x_1}-ae=\frac{a}{x_1}(a-ex_1)$$

然ルニ

$$FP=a-ex_1$$

$$\therefore \quad FT=\frac{a}{x_1}FP \quad 同様ニ \quad F'T=\frac{a}{x_1}F'P$$

依ツテ

$$\frac{FT}{F'T}=\frac{FP}{F'P}$$

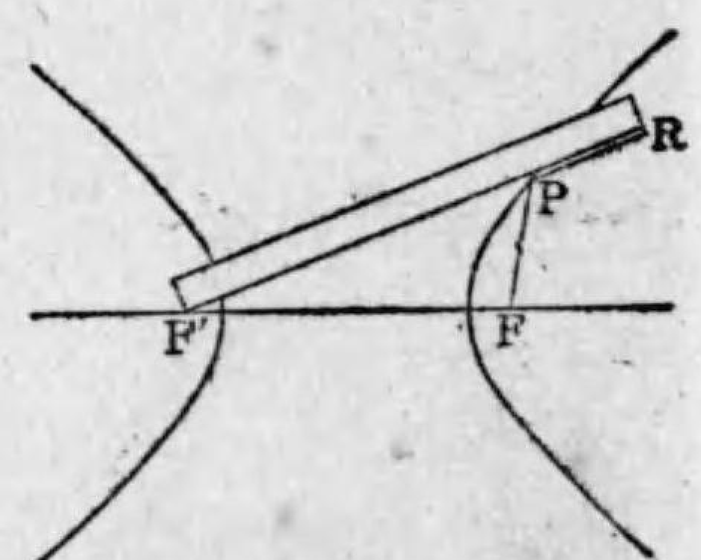
此ノ關係ハ切線 PT ガ角 FPF′ ノ外角ヲ二等分スルコトヲ示スモノデアツテ，從ツテ點 P ヲ通リ切線 PT ニ垂直ナル直線即チ法線 PN ハ角 FPF′ ヲ二等分スルコトニナリ，之カラ次ノ結果ガ得ラレル。

楕圓上ノ一點ニ於ケル法線及ビ切線ハ，夫々其ノ點ヲ焦點ニ結ビ付ケタル二直線ノナス角及ビ其ノ外角ヲ二等分スル。

第八章

双曲線

8.1 双曲線ノ定義及ビ畫法



二定點カラノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ双曲線 (Hyperbola) ト云ヒ，此ノ二定點ヲ焦點 (Focus)，焦點ヲ結ビ付ケタル直線ヲ双曲線ノ軸ト云フ。

紙面上ニ双曲線ヲ描クニハ任意ノ長サノ定規 F'R ヲトリ，其ノ一端ヲ定點ノ一ツ F' ニ置キ，且 F' ノ周リニ回轉シ得ラレル如ク裝置シ，此ノ定規ノ長サヨリ一定ノ長サ $2a$ ダケ短イ絲ヲ取リ，其ノ一端ヲ定規ノ端 R ニ，他ノ端ヲ定點ノ一ツ F ニ結ビ，鉛筆ノ端 P ニテ絲ヲ F'R ニ對シ張リナガラ定規ヲ回轉セシメレバヨイ。サウスレバ P 點ノ描ク所ノ曲線ガ F, F' ヲ焦點トスル双曲線ノ一部トナリ，定規ト絲ノ位置ヲ交換スルト他ノ部分ガ得ラレル。

8.2 双曲線ノ方程式

双曲線ノ二焦點ヲ F, F' トシ，$FF'=2c$，一定ノ長サヲ $2a$ トスル双曲線ノ方程式ヲ求メンニ，F, F' ヲ結ブ直線ヲ x 軸ニ，線分 FF' ノ垂直二等分線ヲ y 軸ニ取リ，條件ニ適スル一點 P ノ座標ヲ (x, y) トスレバ，焦點 F, F' ノ座標ハ $(c, 0)$, $(-c, 0)$ トナルカラ

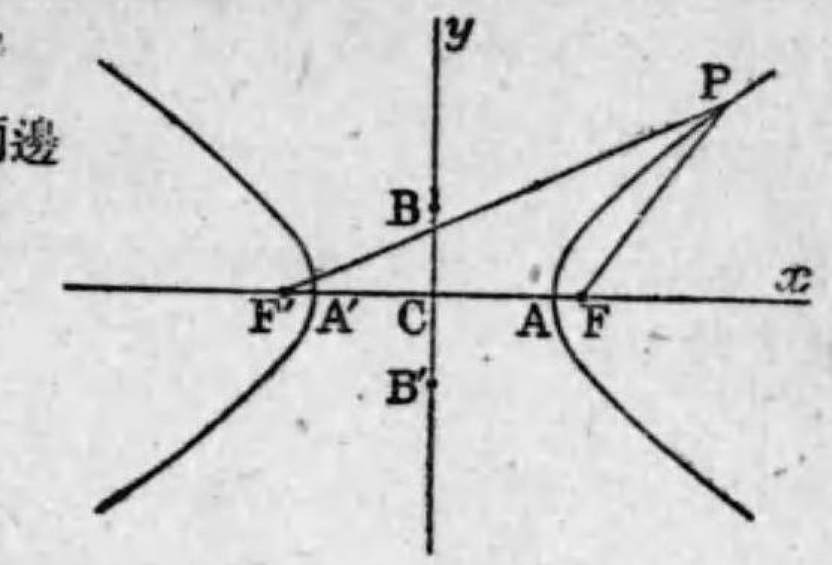
$$FP=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad FP'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

然ルニ

$$FP \sim FP'=2a$$

故ニ所要ノ軌跡ノ方程式ハ

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$



左邊ノ第二項ヲ右邊ニ移項シテ兩邊ヲ平方スレバ

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$$

之ヲ整頓スルト

$$-\left(\frac{c}{a}x+a\right)=\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

更ニ兩邊ヲ平方スレバ

$$\frac{c^2}{a^2}x+2cx+a^2=(x+c)^2+y^2$$

即チ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

然ルニ假定ニヨリ　$a<c$　デアルカラ　$c^2-a^2=b^2$　トスレバ双曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots(1)$$

ナル形ニ書クコトガ出來ル。

此ノ方程式ヨリ双曲線ヲ畫クトキハ圖ノ如キ x, y 兩軸ニ關シテ對稱ナル圖形ガ得ラレ，此ノ式ニ於テ $y=0$ トスレバ $x=\pm a$ トナルカラ，双曲線ハ二點 A $(a, 0)$, A' $(-a, 0)$ ヲ通ル。此ノ線分 AA' $(=2a)$ ヲ双曲線ノ**主軸**又ハ**截軸** (Transverse axis) ト云ヒ，A, A' ヲ双曲線ノ**頂點**ト云フ。FF' ノ**中點** C ヲ双曲線ノ**中心**ト云ヒ，又 y 軸上 C 點ヨリ $\pm b$ ナル距離ニアル二點ヲ B, B' トスルトキ，此ノ線分 BB' $(=2b)$ ヲ双曲線ノ**副軸**又ハ**共軛軸** (Conjugate axis) ト云フ。

楕圓ノトキノ如ク CF:CA ヲ e デ表シ，之ヲ双曲線ノ**離心率**ト云ヒ，其ノ値ハ 1 ヨリ大デアル。

即チ

$$e=\frac{CF}{CA}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1 \qquad \cdots(2)$$

又 $c=ae$ トナルコトヨリ，双曲線ノ焦點ノ座標ハ $(ae, 0), (-ae, 0)$ デ表サレル。

例 双曲線 $x^2-20y^2=12$ ノ焦點ノ座標及ビ離心率ヲ求メヨ。

原式ヲ變形スレバ

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{\frac{3}{5}}=1$$

コレヨリ $$a^2=12,\quad b^2=\frac{3}{5}$$

∴ $$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{12+\frac{3}{5}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{63}{60}}=\sqrt{\frac{21}{20}}$$

又 $$ae=\sqrt{12}\sqrt{\frac{21}{20}}=\sqrt{\frac{12\times 21}{20}}=\sqrt{\frac{63}{5}}=3\sqrt{\frac{7}{5}}$$

依ッテ焦點ハ $$\left(3\sqrt{\frac{7}{5}},\ 0\right),\ \left(-3\sqrt{\frac{7}{5}},\ 0\right)$$

トナル。

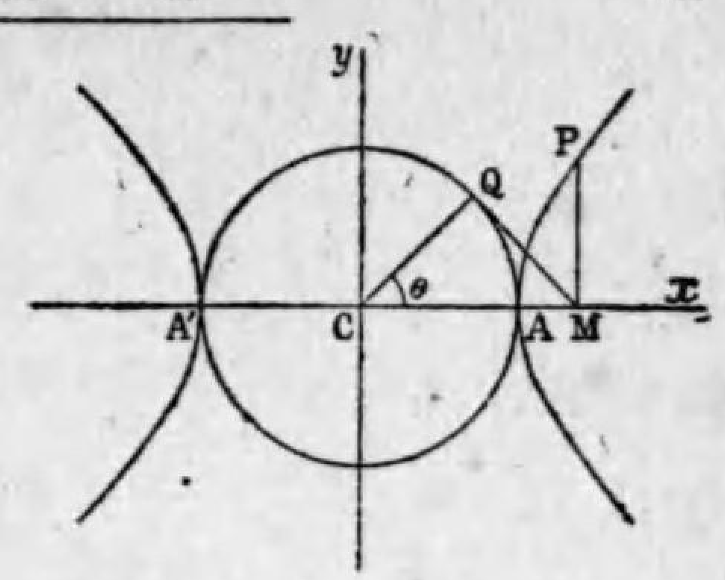
問題

1. 主軸 12，共軛軸 8 ナル双曲線ノ方程式ヲ求メヨ。
2. 双曲線 $16x^2-9y^2=144$ ノ焦點間ノ距離及ビ離心率ヲ求メヨ。
3. $e=2,\ a=1$ ナル双曲線ノ方程式ヲ作レ。

8.3 離心角

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ主軸 AA′ ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ，此ノ双曲線上ノ一點 P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ下シ，M ヨリ前ノ圓ニ切線 MQ ヲ引キ，其ノ切點 Q ト中心 C トヲ結ブトキ生ズル角 MCQ ヲ双曲線上ノ點 P ノ離心角ト云フ。

今 P 點ノ座標ヲ (x_1, y_1)，此ノ離心角ヲ θ トスレバ，



$$CQ=CA=a$$

∴ $x_1=CM=CQ\sec\theta=a\sec\theta$

此ノ値ヲ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ代入スレバ

$$\frac{a^2\sec^2\theta}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

依ッテ $y_1^2=b^2(\sec^2\theta-1)=b^2\tan^2\theta$ ∴ $y_1=\pm b\tan\theta$

從ッテ双曲線ノ方程式ハ $$\left.\begin{aligned}x&=a\sec\theta\\ y&=b\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad\cdots(3)$$

ヲ以テ表シ得ルモノデアッテ，之ヲ**媒介變數ニヨル双曲線ノ方程式**ト云フ。

問題

*4. 双曲線上ノ一點 P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ下シ，双曲線ノ中心 C ヲ中心トシ半徑 CM ナル圓ト双曲線ノ頂點 A ニ於ケル切線トノ交點ヲ D トスレバ，角 DCM ハ P 點ノ離心角トナルコトヲ證明セヨ。

8.4 双曲線上ノ一點カラ焦點ニ至ル距離及ビ通徑

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ任意ノ一點ヲ $P(x_1, y_1)$ トスレバ焦點 F ハ $(ae, 0)$ デアルカラ $a^2e^2=a^2+b^2,\ y_1^2=\frac{b^2}{a^2}x_1^2-b^2$ トナリ，

$$PF^2=(x_1-ae)^2+y_1^2=x_1^2-2aex_1+a^2e^2+y_1^2$$

∴ $$PF^2=x_1^2-2aex_1+a^2+b^2+\frac{b^2}{a^2}x_1^2-b^2=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x_1^2-2aex_1+a_2$$

$$=e^2x_1^2-2aex_1+a^2=(ex_1-a)^2$$

然ルニ $e>1\quad x_1\geqq a$ ヨリ $ex_1>a$

∴ $$\mathbf{PF=ex_1-a}\quad 同様ニ\quad \mathbf{PF'=ex_1+a}\qquad\cdots(4)$$

特ニ $x=ae$ ナルトキハ

$$PF = ae^2 - a = \frac{a^2e^2 - a^2}{a} = \frac{(a^2+b^2)-a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

トナルガ, 之ハ FP ガ x 軸ニ垂直トナル場合デ之ヨリ焦點 F ヲ通リ x 軸ニ垂直ナル弦 LL′ ノ長サハ $\dfrac{2b^2}{a}$ トナル。此ノ LL′ ヲ楕圓ノトキノ如ク通徑ト云フ。F′ ニツイテ考ヘルモ同樣デアル。

例 双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ ノ通徑ノ長サヲ求メヨ。

原式ニ於テ　　$a=2,\ b=\sqrt{2}$

∴　　通徑ノ長サ $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2\times 2}{2} = 2$

問　題

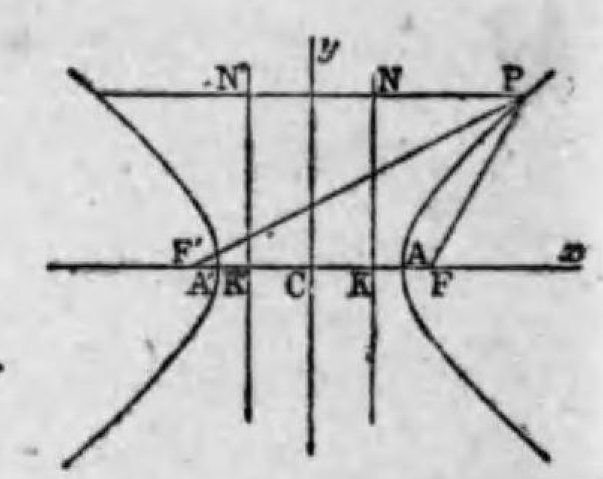
5. 双曲線 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ 上ノ點 $\left(5, \dfrac{16}{3}\right)$ ト焦點トノ距離及ビ通徑ノ長サヲ求メヨ。

8.5 準 線

方程式 $x = \pm\dfrac{a}{e}$ ニテ表サレタ二直線ヲ楕圓ノトキノ如ク, 双曲線ノ準線ト云フ。双曲線ニ於テハ $e>1$ デアルカラ $\dfrac{a}{e}<a$ トナル。故ニ準線ハ頂點 A, A′ ノ間ニアツテ y 軸ニ平行ナル二直線トナル。

今双曲線上ノ一點 P (x, y) カラ此ノ準線ニ垂線 PN, PN′ ヲ引ケバ

$$PN = x_1 - \frac{a}{e} = \frac{ex_1 - a}{e},\quad 然ルニ\quad ex_1 - a = PF$$



$$\left.\begin{aligned} ∴\quad & \frac{PF}{PN} = e \\ 同樣ニ\quad & \frac{PF'}{PN'} = e \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(5)$$

此ノ性質カラ双曲線ヲ次ノ如ク定義スルコトヲ得ル。卽チ

一定點ト一定直線ニ至ル距離ノ比ガ一定値 e (但シ $e>1$) ナル如キ點ノ軌跡ヲ双曲線ト云フ。

例 双曲線 $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ ノ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

原式ニ於テ　　$a=12,\ b=5$

∴　　$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{144+25}}{12} = \dfrac{13}{12}$

依ツテ　　$\dfrac{a}{e} = \dfrac{12\times 12}{13} = \dfrac{144}{13}$

故ニ求メル準線ノ方程式ハ　　$x = \pm\dfrac{144}{13}$

トナル。

問　題

6. 双曲線 $9x^2 - 16y^2 = 144$ ノ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

8.6 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ノ上ノ一點 P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トスレバ, P 點ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ハ, 楕圓ノ場合ト同樣ノ方法ニヨツテ得ラレ, 唯楕圓ノ場合ノ b^2 ガ $-b^2$ トナルノミデアツテ其ノ形ハ夫々

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \qquad \cdots(6)$$

及ビ

$$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2 \qquad \cdots(7)$$

トナル。

例 双曲線 $x^2 - 27y^2 = 9$ 上ノ點 $(6, 1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

原式ヲ變形スレバ　　$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\frac{9}{27}} = 1$

依ツテ公式　　$\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

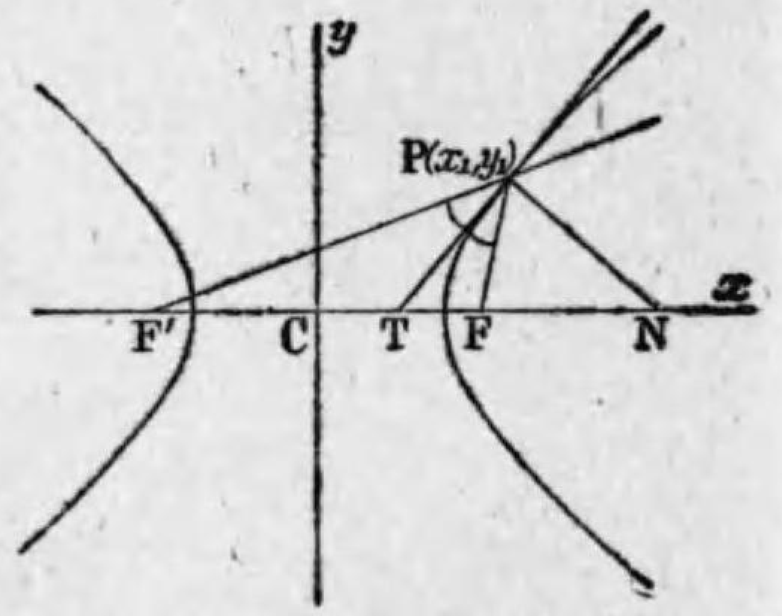
ヨリ　　$\dfrac{6x}{9} - \dfrac{y}{\frac{9}{27}} = 1$

即チ $$2x-9y=3$$
ガ求メル切線ノ式トナル。

問題

7. 双曲線 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 上ノ $y=3$ ナル點ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ。

8.7 焦點ト切線及ビ法線トノ關係



楕圓ノ場合ト同樣ノ方法ニヨリ，**双曲線上ノ一點ニ於ケル切線及ビ法線ハ夫々其ノ點ヲ焦點ニ結ビ付ケタル二直線ノナス角及ビ其ノ外角ヲ二等分スル**ト云フ關係ガ證明サレ，唯楕圓ニ於テハ切線，双曲線ニ於テハ法線ガ其ノ外角ヲ二等分スルコトニナル。

8.8 漸近線

双曲線ノ方程式 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ヲ變形スレバ， $$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

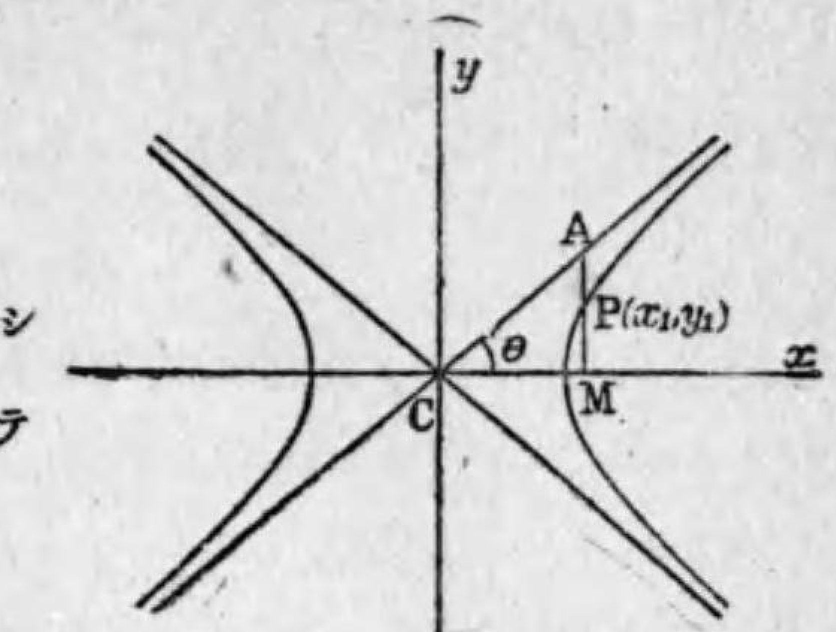
トナルガ，之ト直線 $$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (2)$$

トヲ比較スルト，双曲線 (1) ノ縱座標ノ絕對値ガ直線 (2) ノ縱座標ノ絕對値ヨリモ小ナルコトガ判リ，又 x ノ絕對値ヲ增大ナルニ從ッテ其ノ差ハ如何程ニテモ小サクナリ，言ヒ換ヘレバ原點ヲ遠ザカルニ從ッテ其ノ差ハ如何程ニテモ小トナルコトガ判ル。

斯クノ如キ性質ヲ有スル直線 (2) ヲ，双曲線 (1) ノ**漸近線** (Asymptotes) ト云フ。此ノ漸近線ハ原點ヲ通ル二直線トナリ，且 x, y 兩軸ニ對稱トナル。之ハ又

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad \cdots(8)$$

ト書クコトモ出來ル。



此ノ漸近線ノ式ハ双曲線ノ式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ右邊ノ 1 ヲ零トシタルモノデ，又其ノナス角ヲ 2θ ニテ表スナラバ

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

トナル。

問題

8. 双曲線 $x^2-3y^2=3$ ノ漸近線ノ方程式及ビ其ノ漸近線ノナス角ヲ求メヨ。

8.9 共軛双曲線

双曲線ノ方程式 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ニ於テ，左邊ノ二項ヲ交換シテ作ッタ方程式

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad 或ハ \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (2)$$

デ表サレタ曲線ヲ双曲線 (1) ノ**共軛双曲線** (Conjugate hyperbola) ト云フ。此ノ曲線ニ於テハ x 軸ガ副軸トナリ，y 軸ガ主軸トナル。

逆ニ (1) ハ (2) ノ共軛双曲線トナルモノデ，一般ニ (1) ト (2) トハ互ニ共軛デアルト云フ。

互ニ共軛ナル双曲線ハ共通ノ漸近線ヲ有スルモノデアル。

即チ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

ノ漸近線ハ何レモ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

トナル。

8.10　等邊双曲線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ $a=b$ ナルトキハ

$$x^2-y^2=a^2$$

ノ形トナルガ，此ノ方程式ニヨツテ表サレタ曲線ヲ**等邊双曲線** (Equilateral hyperbola)，又ハ**直角双曲線** (Rectangular hyperbola) ト云フ。

直角双曲線ノ漸近線ハ $x^2-y^2=0$ 卽チ $y=\pm x$ トナルカラ，此ノ二ツノ漸近線ノ間ノ角ハ直角トナル。コレガ直角双曲線ノ名ノアル所以デアル。又此ノ双曲線ノ共軛双曲線ハ原双曲線ト同ジ形デアツテ，唯其ノ位置ヲ異ニスルノミデアル。

問　　題

9.　等邊双曲線 $x^2-y^2=a^2$ ノ離心率，及ビ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

8.11　漸近線ヲ座標軸トスル双曲線ノ方程式

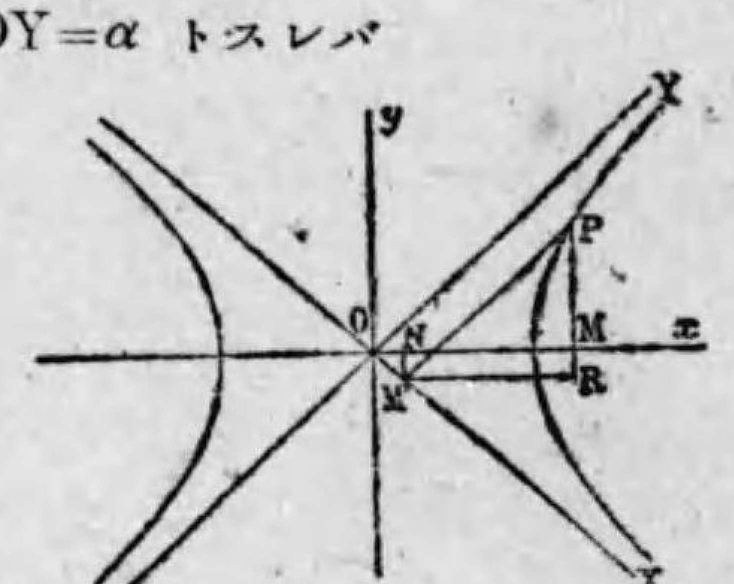
双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ方程式ヲ漸近線 XX′, YY′ ヲ兩軸トスルモノニ改變シテ見ヨウ。

今双曲線上ノ一點 P ノ舊新座標ヲ夫々 (x, y), (X, Y) 卽チ

$\mathrm{OM}=x$, $\mathrm{MP}=y$　及ビ　$\mathrm{OM'}=X$, $\mathrm{M'P}=Y$ トスル。

次ニ M′ ヲ通リ x 軸ニ平行ニ引イタ直線ト PM ノ交點ヲ R トシ，又 M′ ヨリ x 軸ヘ下シタ垂線ノ足ヲ N, $\angle x\mathrm{OY}=\alpha$ トスレバ

$$\begin{aligned}
x&=\mathrm{OM}=\mathrm{ON}+\mathrm{M'R}\\
&=\mathrm{OM'}\cos\alpha+\mathrm{PM'}\cos\alpha\\
&=(X+Y)\cos\alpha\\
y&=\mathrm{MP}=\mathrm{RP}-\mathrm{M'N}\\
&=\mathrm{M'P}\sin\alpha-\mathrm{OM'}\sin\alpha\\
&=(Y-X)\sin\alpha
\end{aligned}$$



然ルニ　$\tan\alpha=\frac{b}{a}$

デアルカラ　$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,　$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

從ツテ　$x=\frac{a(X+Y)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,　$y=\frac{b(Y-X)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

之ヲ原式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ代入スレバ

$$\frac{(X+Y)^2}{a^2+b^2}-\frac{(Y-X)^2}{a^2+b^2}=1$$

之ヲ簡單ニスルト

$$XY=\frac{a^2+b^2}{4} \tag{9}$$

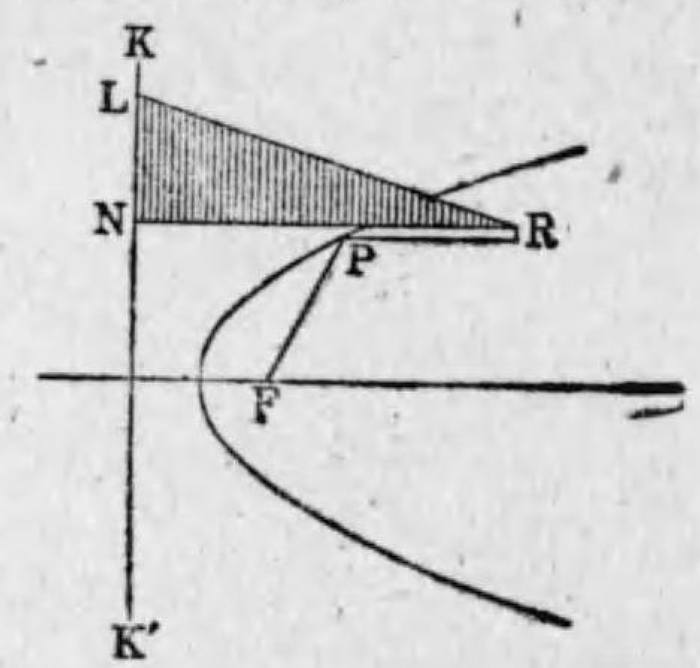
之ガ漸近線ヲ兩軸トスル双曲線ノ方程式デアル。

第　九　章

抛　　物　　線

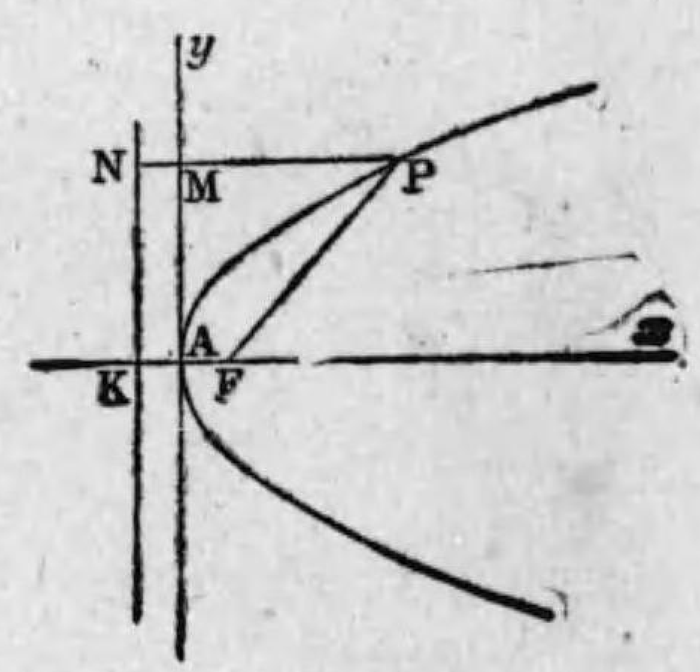
9.1　抛物線ノ定義及ビ畫法

定點ト定直線トニ至ル距離ガ相等シイ點ノ軌跡ヲ抛物線 (Parabola) ト云ヒ，定點 F ヲ焦點，定直線ヲ準線ト云フ。



紙面上ニ抛物線ヲ畫クニハ定直線 KK′ ニ三角定規 RNL ヲ圖ノ如ク切觸サセ，定規ノ一邊 NR ニ等シイ長サノ絲ノ一端ヲ此ノ定規ノ端 R ニ，他端ヲ定點 F ニ結ビ付ケ，鉛筆ノ先端 P ヲ此ノ定規ノ一邊 NR ニ對シ張リナガラ定規ヲ KK′ ニ沿フテ滑ラセレバヨイ。サウスレバ P 點ガ畫ク所ノ曲線ガ F ヲ焦點，KK′ ヲ準線トスル抛物線トナル。

9.2　抛物線ノ方程式



焦點ヲ F，準線ヲ KN トシ．F ヨリ KN ニ垂線 FK ヲ引キ FK ノ中點ヲ A トスル。

直線 AF ヲ x 軸ニ，A ヲ通リ AF ニ垂直ナル直線ヲ y 軸ニトリ，曲線上ノ任意ノ點 P ヲ (x, y) トシ

且 $AF=AK=d$ トスレバ F 點ハ $(d, 0)$ トナルカラ

$$PF^2=(x-d)^2+y^2$$

又 P 點ヨリ準線 KN ヘノ垂線ノ足ヲ N トスレバ

$$NP=NM+MP=d+x$$

然ルニ定義ニヨリ $PF^2=NP^2$ デアルカラ

$$(x-d)^2+y^2=(d+x)^2$$

$$x^2-2dx+d^2+y^2=d^2+2dx+x^2$$

$$\therefore \quad y^2=4dx \qquad \cdots(1)$$

之ガ所要ノ抛物線ノ方程式デアル。

此ノ方程式ヨリ抛物線ヲ畫クトキハ圖ノ如キ x 軸ニ關シテ對稱ナル圖形ガ得ラレ，此ノ式ニ於テ $y=0$ トスレバ $x=0$ トナリ，抛物線ハ原點 A ヲ通ル。此ノ點 A ヲ抛物線ノ頂點ト云ヒ，又 $d>0$ トセルカラ $x \geqq 0$ トナリ，從ツテ此ノ曲線ハ y 軸ノ右側ニノミ存在スル。此ノ場合直線 AF (卽チ x 軸) ヲ**抛物線ノ軸**ト云フ。

準線ノ方程式ハ圖形上ヨリ $x=-d$ トナルコトヲ知ル。

例 1.　抛物線 $y^2=12x$ ノ焦點ノ座標及ビ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

$y^2=12x$ ヲ $y^2=4dx$ ニ比較シテ $d=3$

故ニ　焦點ノ座標ハ $(3, 0)$ デアツテ準線ノ式ハ　$x=-3$

例 2.　抛物線 $x^2=10y$ ノ焦點ノ座標及ビ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

$x^2=10y$ ヨリ $x^2=4\times\frac{5}{2}y$

故ニ　焦點ノ座標ハ $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ デアツテ準線ノ式ハ $y=-\frac{5}{2}$

問　　題

1.　次ノ抛物線ノ略圖ヲ畫キ，其ノ焦點ノ座標及ビ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

(a)　$y^2=8x$　　(b)　$y^2=-8x$　　(c)　$x^2=8y$　　(d)　$x^2=-8y$

9.3　抛物線上ノ一點カラ焦點ニ至ル距離及ビ通徑

拋物線 $y^2=4dx$ 上ノ一點ヲ P (x_1, y_1) トスレバ，焦點 F ハ $(d, 0)$ デアルカラ

$$\mathrm{PF}^2=(x_1-d)^2+y_1^2=x_1^2-2dx_1+d^2+y_1^2$$
$$=x_1^2-2dx_1+d^2+4dx_1=d^2+2dx_1+x_1^2=(d+x_1)^2$$

$$\therefore \qquad \mathbf{PF}=d+x_1 \qquad \cdots(2)$$

焦點 F ヲ通リ軸ニ垂直ナル弦 LL′ ヲ拋物線ノ**通徑**ト云ヒ，此ノ場合 $x_1=d$ ナルコトカラ　$\mathrm{FL}=\mathrm{FL}'=2d$

從ツテ　$\mathbf{LL'}=4d$　トナル

例 拋物線 $y^2=4x$ ノ通徑ノ長サ及ビ其ノ線上ノ一點 (1, 2) ヨリ焦點ニ至ル距離ヲ求メヨ。

$y^2=4x$ ヨリ $d=1$

故ニ　通徑ノ長サ$=4d=4$

トナリ，又公式 (2) ヨリ點 (1, 2) カラ焦點マデノ距離ハ $1+1=2$ トナル。

問　　題

2. 拋物線 $y^2=12x$ ノ通徑ノ長サ及ビ點 P(12, 12) ヨリ焦點マデノ距離ヲ求メヨ。

9.4 拋物線上ノ一點ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式

拋物線 $y^2=4dx$ 上ノ二點ヲ $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ トスレバ

直線 PQ ノ方程式ハ　$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

然ルニ P, Q ハ拋物線上ノ點ナルヲ以テ

$$y_1^2=4dx_1$$
$$y_2^2=4dx_2$$

從ツテ　$y_2^2-y_1^2=4dx_2-4dx_1$　即チ　$(y_2-y_1)(y_2+y_1)=4d(x_2-x_1)$

之ト (1) トヨリ　$(y-y_1)(y_2+y_1)=4d(x-x_1)$

依ツテ Q ヲ曲線ニ沿ウテ P ニ限リナク近ヅケレバ直線 PQ ハ極限

ニ於テ P 點ニテ曲線ニ切スルコトトナルカラ，此ノ式ニテ $y_2=y_1$ トスレバ

$$2y_1(y-y_1)=4d(x-x_1)$$
$$y_1y=2dx-2dx_1+y_1^2=2dx-2dx_1+4dx_1$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{y_1y=2d(x+x_1)} \qquad \cdots(4)$$

之ガ拋物線上ノ一點 P (x_1, y_1) ニ於テ切スル直線ノ方程式デアル。又 P 點ニ於ケル法線ノ式ハ P 點ニ於ケル切線ニ垂直デアルカラ

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2d}(x-x_1)$$

即チ　$$\boldsymbol{y_1(x-x_1)+2d(y-y_1)=0} \qquad \cdots(5)$$

ニテ表サレル。

例 拋物線 $y^2=32x$ 上ノ一點 (2, 8) ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ。

公式 $y_1y=2d(x+x_1)$ ト比較シテ　$x_1=2$,　$y_1=8$,　$d=8$

依ツテ　$8y=16(x+2)$　即チ　$y=2x+4$

ガ切線ノ方程式トナリ

又公式　$y_1(x-x_1)+2d(y-y_1)=0$

ヨリ　$8(x-2)+16(y-8)=0$　即チ　$x+2y-18=0$

ガ法線ノ方程式トナル。

問　　題

3. 直線 $y=3x$ ト拋物線 $y^2=12x$ トノ交點ニ於ケル此ノ拋物線ノ切線ノ方程式ヲ求メヨ。

9.5 一般二次曲線ノ分類

一般ナル二元二次方程式ハ常ニ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ形デ表サレ，之ヲ大別スレバ

[1] **上ノ式ノ左邊ガ二ツノ一次式ニ分解サレルトキハ二直線,**

[2] **$a=b$ ニシテ $h=0$ ナルトキハ圓,**

[3] **$h^2-ab<0$ ナルトキハ楕圓,**

[4] **$h^2-ab=0$ ナルトキハ拋物線,**

[5] **$h^2-ab>0$ ナルトキハ双曲線**

ヲ夫々表スコトニナル。

二次方程式ニヨツテ表サレル楕圓, 拋物線, 双曲線等ヲ總稱シテ**二次曲線** (Curve of the second degree) ト云ヒ, 又是等ノ曲線ハ圓錐ヲ平面ニテ截ツタトキ生ズル曲線デアルコトカラ, **圓錐曲線** (Conic section) トモ言ハレテ居ル。

問 題

5. $y=ax^2+bx+c$ ナル方程式ハ拋物線ヲ表スコトヲ證明セヨ。

6. 次ノ方程式ハ楕圓, 双曲線, 拋物線ノ何レヲ表スカ。

(a) $3x^2+2xy+5y^2+3x+4y=0$

(b) $x^2-2xy+y^2-6x-6y+9=0$

(c) $y^2-2xy-x^2+2=0$

(d) $y^2=(e^2-1)x^2-2ae^2x+e^2a^2$

第 十 章

函 數

10.1 常數及ビ變數

微分學ニ於テ單ニ數ト云フノハ, 總テ實數ヲ意味スルモノデアル。之ヲ常數ト變數トニ區別スル。

一ツノ問題ノ研究中ニ於テ, 常ニ一定ノ數ヲ代表スル數字又ハ文字ヲ**常數** (Constant) ト云ヒ, 之ニ反シテ種々ノ數ヲ代表スル文字ヲ**變數** (Variable) ト云フ。

例ヘバ方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ニ於ケル文字 a, b 及ビ數字 1 ハ何レモ, 一定ノ數ヲ代表スルモノデアルカラ, 常數デアツテ, x 及ビ y ハ何レモ, 變化スル數ヲ代表スルモノデアルカラ變數デアル。

微分學ニテハ常數ヲ表スタメニ a, b, c…… 等ヲ用ヒ, 又變數ヲ表ス爲ニ x, y, z, u, v, w……等ノ文字ヲ用ヒル。

10.2 函 數

今方程式 $y=3x+2$ ニ於テ, x ニ例ヘバ 1, 2, 3, 4……ナル値ヲ順次ニ與ヘルナラバ, 之ニ對應シテ y ハ夫々 5, 8, 11, 14……ナル値ヲトル。

斯クノ如ク x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ガ之ニ對應シテ確定スルトキハ, y ハ x ノ**函數** (Function) デアルト云フ。

此ノ場合 x ヲ**自變數**又ハ**獨立變數**, y ヲ**從屬變數**ト云フコトモアル。從屬變數ハ其ノ自變數ノ函數デアル。

y ガ x ノ函數デアルコトヲ表スニ通常次ノ如キ記號ヲ以テスル。

$$y=f(x),\quad y=\mathrm{F}(x),\quad y=\varphi(x)$$

又 $x=a$ ナルトキノ函數ノ値ヲ記號

$$f(a),\quad \mathrm{F}(a),\quad \varphi(a)$$

等デ表ス。

例ヘバ　$f(x)=2x^2-3x+4$

ナラバ

$$f(0)=4$$

$$f(1)=2-3+4=3$$

$$f(2)=2\times2^2-3\times2+4=6$$

$$f(-3)=2\times(-3)^2-3(-3)+4=31$$

$$f(a)=2a^2-3a+4$$

問　題

1. 球ノ體積 y ト其ノ半徑 x トノ函數的關係ヲ方程式ニテ表セ。
2. $f(x)=x^3-7x^2-5x+11$ ナルトキ $f(0), f(1), f(-2), f(-3)$ ノ値ヲ求メヨ。
3. $f(x)=3x^2-4x+5$ ナラバ $f(x+a)=f(x)+2(3x-2)a+3a^2$ ナルコトヲ證セヨ。

10. 3　逆　函　數

y ガ x ノ函數デアルトキハ一般ニ x ハ又 y ノ函數デアル。

例ヘバ　$y=x^2$

ニ於テ，コレヲ x ニツイテ解ケバ

$$x=\pm\sqrt{y}$$

トナリ，x ハ y ノ函數トナル。カヤウナ函數 x^2 ト $\pm\sqrt{y}$ トハ互ニ逆ナル函數ト云ヒ，一ツヲ他ノ**逆函數** (Inverse function) ト云フ。但シ函數的關係ヲ考ヘル場合ニハ異ナツタ自變數ヲ用ヒル必要ガナイカラ，之ヲ同一ノ自變數ノ函數ニ直シテ x^2 ト $\pm\sqrt{x}$ トハ互ニ他ノ逆函數デ

アルト云フ。

例 1.　$y=ax+b$ ノ逆函數ヲ求メヨ。

コレヲ x ニツイテ解ケバ

$$x=\frac{y-b}{a}$$

依ツテ　$ax+b$ ト $\dfrac{x-b}{a}$ トハ互ニ他ノ逆函數デアル。

例 2.　$y=\sin x$ ノ逆函數ヲ求メヨ。

$y=\sin x$ ナルトキハ $x=\sin^{-1}y$ デアルカラ $\sin x$ ト $\sin^{-1}x$ トハ互ニ他ノ逆函數デアル。

問　題

次ノ函數ノ逆函數ヲ求メヨ。

4. $y=\dfrac{ax-b}{cx-d}$　　5. $y=\sqrt{4x^2-7}$

*6. $y=\tan x$　　*7. $y=a^x,\ a>0$

10. 4　單値函數及ビ多値函數

y ガ x ノ函數ナルトキ，x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ガ唯一ツ定マルトキハ y ハ x ノ**單値函數** (One valued function) デアルト云ヒ，之ニ反シテ x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ガ一ツヨリ多ク定マルトキハ y ハ x ノ**多値函數** (Many valued function) デアルト云フ。

例ヘバ，

$$y=9x+2\qquad y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$y=\tan x\qquad y=\log x$$

等ニ於ケル y ハ何レモ x ノ單値函數デアツテ

$$y^2=ax\quad 即チ\quad y=\pm\sqrt{ax}$$

ノ如キハ x ノ多値函數 (特ニ此場合ハ**二値函數**トモ云フ) デアル。又 $y=\sin^{-1}x$ ノ如キハ無限多値函數デアル。

然シ多値函數ハ一般ニ之ヲ幾ツカノ單値函數ニ分ツコトガ出來ルモノデアル。例ヘバ上ニ述ベタル二値函數ハ之ヲ

$$y=\sqrt{ax}, \qquad y=-\sqrt{ax}$$

ナル二ツノ單値函數ニ分ツコトガ出來ル。又無限多値函數 $y=\sin^{-1}x$ ノ如キモ主値卽チ $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ ナル制限ヲ附スルト單値函數トナル。故ニ以下多値函數ノ場合ハ幾ツカノ單値函數ニ分ケテ考ヘルコトトシ，單ニ函數ト云フトキハ單値函數ヲ表スモノトスル。

10.5 陽函數及ビ陰函數

y ガ x ノ函數デアルトキ，x ト y トノ關係ハ必ズシモ數學的等式デ表シ得ルモノトハ限ラヌガ，以下論ズル所ノモノハ函數的關係ガ數學的等式デ表サレルモノノミニ限ルモノトスル。

サテ函數ヲ其ノ形式上ヨリ分類スル場合ガアル。

例ヘバ

$$y=3x^2+6x+5, \qquad y=2\sin x$$

$$y=\log(ax^2+bx+c), \qquad y=(3x+2)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

等ノ如ク y ハ等式ノ左邊ニ，x ハ右邊ニノミ存在スル如キ場合ニ y ハ x ノ**陽函數** (Explicit function) デアルト云ヒ，記號

$$y=f(x)$$

デ一般ニ表示スル。又

$$ax+by+c=0, \qquad x^2+y^2-a^2=0$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0, \qquad 3x^2y+xy^2+6=0$$

等ノ如ク x 及ビ y ガ方程式ノ左邊ニ混在スル場合ニハ y ハ x ノ**陰函數** (Implicit function) デアルト云ヒ，記號

$$f(x, y)=0$$

デ一般ニ表示スル。

問 題

次ノ各題ニ於テ y ヲ x ノ陽函數トシテ表セ。

8. $2y-10x+15=0$ **9.** $7x+3xy-y-8=0$

***10.** $(a-b)xy-cy=2$ ***11.** $\cos^{-1}\frac{y}{x}-a=0$

10.6 函數ノ分類

函數ヲ數學的ニ大別シテ**代數函數** (Algebraic function) ト**超越函數** (Transcendental function) ノ二ツトスル。

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \tag{1}$$

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{mx^3+nx^2+px+q} \tag{2}$$

$$y=\sqrt{x^2+ax+b} \tag{3}$$

等ノ如ク y ガ x ノ代數式デ表サレタトキ之ヲ代數函數ナリト云ヒ，更ニ之ヲ區分シテ (1) ノ如キヲ有理整函數，(2) ノ如キヲ有理分數ト云ヒ (1), (2) ヲ合セテ**有理函數**ト云フ。之ニ對應シテ (3) ノ如ク根號ヲ有スルモノヲ**無理函數**ト云フ。

函數全體カラ代數函數ヲ取除イタ殘リノ全部ヲ超越函數ト云フ。卽チ代數函數以外ニ次ノ如キ種々ノ函數ガアル。

指數函數 (Exponential function) $y=a^x$

對數函數 (Logarithmic function) $y=\log x$

三角函數 (Trigonometrical function) $y=\sin x, \cdots\cdots$

逆三角函數 (Inverse trigonometrical function) $y=\sin^{-1}x, \cdots\cdots$

其他ノ函數

今之ヲ表示スレバ次ノ如クニナル。

- 函數
  - 代數函數
    - 有理函數
      - 有理整函數
      - 有理分數
    - 無理函數
  - 超越函數
    - 指數函數
    - 對數函數
    - 三角函數
    - 逆三角函數
    - 其ノ他ノ函數

10.7 函數ノ幾何學的表示

今 x ノ函數

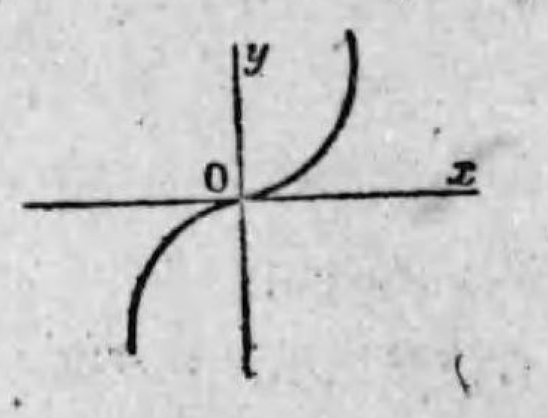
$$y=f(x) \tag{1}$$

ヲ考察スル。茲ニ y ハ x ノ單位連續函數デアルトスル。

x ニ順次ニ $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ ナル n 個ノ値ヲ與ヘルト，之ニ對應シテ y ハ $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n$ ナル値ヲトル。今此ノ x 及ビ y ノ對應スル値ヲ二ツヅノ組合セタルモノ，即チ

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \cdots\cdots (x_n, y_n) \tag{2}$$

ヲ點ノ座標ト考ヘルナラバ，平面上ニ n 個ノ點ヲ決定スルコトニナル。從ツテコノ n ヲ無限ニ多クトルナラバ (2) ハ又無限ニ多クノ點ノ集合トナツテ一般ニ平面上ニ連續セル曲線ヲ決定スルモノデアラウ。コノ曲線ガ所謂 (1) ノ軌跡デアツテ函數ヲ幾何學的ニ表示スルモノデアル。



例 $y=x^3$ ガ表ス曲線ヲ畫ケ。

x 及ビ y ノ對應値ヲ表示スレバ次ノ如クニナル。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27

故ニ平面上ニ $(-3, -27), (-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 8), (3, 27)\cdots\cdots$ナル數個ノ點ヲ決定スル。依ツテ之ヲ滑カニ連結スレバ前頁ノ圖ニ示スヤウナ曲線ガ得ラレル。

問 題

次ノ各函數ガ表ス曲線ヲ畫ケ。

12. $y=4x^2$ **13.** $y=\dfrac{1}{x}$ ***14.** $y=x^2-4$ ***15.** $y=\sin x$

10.8 二項定理

n ヲ正ノ整數トスルトキ

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

ヲ $n!$ 又ハ $\underline{n|}$ ナル記號ニテ表シ，之ヲ n ノ階乘 (Factorial n) ト讀ム。

例ヘバ $3!=3\cdot2\cdot1=6$

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

從ツテ $n!(n+1)=(n+1)!$

又 n 及ビ r ヲ正ノ整數トスレバ次ノ關係ガ成立スル。

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{(r+1)!}a^{n-r-1}b^{r+1}+\cdots\cdots+b^n \tag{1}$$

之ヲ**二項定理** (Binomial theorem) 其ノ左邊ヲ**展開式** (Expansion) ト云ヒ，Newton, 我國ニテハ關氏ノ發明デアル。

此ノ展開式ノ項ノ數ハ $n+1$ デ，初項ヨリ第 $r+1$ 番目ノ項即チ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r\,!}a^{n-r}b^r$$

ヲ其ノ展開式ノ**一般項** (General term) ト云フ。

今此ノ定理ヲ證明スルタメニ (1) ノ兩邊ニ $(a+b)$ ヲ乘ジ，其ノ積ニ於テ同類項ヲ集メレバ次ノヤウニナル。

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^nb+\left\{n+\frac{n(n-1)}{2\,!}\right\}a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\left\{\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{(r+1)\,!}\right\}a^{n-r}b^{r+1}+\cdots\cdots+b^{n+1}$$

然ルニ　$n+\dfrac{n(n-1)}{2\,!}=\dfrac{(n+1)n}{2\,!}$

…………………………

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{(r+1)\,!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r+1)\,!}\{(r+1)+(n-r)\}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r+1)\,!}$$

デアルカラ上式ハ

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^nb+\frac{(n+1)n}{2\,!}a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r+1)\,!}a^{n-r}b^{r+1}+\cdots\cdots+b^{n+1}$$

トナル。

故ニ此ノ定理ガ n ノ或ル値ニ付テ成立スルナラバ，之ヨリ 1 ダケ大ナル値ニ於テモ亦成立スベキデアル。然ルニ $n=1$ ナルトキ此ノ定理ノ眞ナルコトハ明カデアルカラ $n=2$ ニ於テモ成立スル。以下同樣ニシテ n ガ如何ナル正ノ整數デモ此ノ定理ハ恒ニ成立スル。

例　$(a+b)^6$ ヲ展開セヨ。

(1) 式ニ於テ $n=6$ トスレバ

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^4b^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3b^3$$

$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^2b^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ab^5+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}b^6$$

$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

問　　題

16. 次ノ各式ノ展開式ヲ求ム。

(*a*)　$(a+b)^2$　　(*b*)　$(a-b)^5$　　(*c*)　$(x+5)^3$

10.9　$(1+x)^n$ ノ展開式 (n ハ正又ハ負ノ有理數)

第 10.8 節ノ (1) 式ニ於テ $a=1$, $b=x$ トオクトキ若シ n ガ分數又ハ負數ナレバ x ノ絶對値ガ 1 ヨリ小ナル場合ハ

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2\,!}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)+\cdots(n-r+1)}{r\,!}x^r+\cdots\cdots \qquad \cdots(2)$$

ナル無限級數ニ展開サレルコトガ證明サレル。

從ツテ x ヲ $-x$ トスレバ

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2\,!}x^2+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r\,!}x^r+\cdots\cdots \qquad \cdots(3)$$

トナル。

例 1.　$(1-x)^{-3}$ ヲ展開セヨ。

$$(1-x)^{-3}=1-(-3)x+\frac{(-3)(-4)}{2\,!}x^2-\frac{(-3)(-4)(-5)}{3\,!}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$$

例 2.　$\sqrt[3]{0.999}$ ヲ小數第五位マデ求メヨ。

$$\sqrt[4]{0.999}=(1-0.001)^{\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{4}(0.001)+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}(0.001)^2+\cdots\cdots$$
$$=1-0.00025-0.000\,000\,09375+\cdots\cdots$$
$$=0.99975$$

問　　題

17. 次ノ各式ヲ第四項マデ展開セヨ。

(a) $(1-x)^{-2}$　(b) $\sqrt{1+x}$　*(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}$　*(d) $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$

18. 次ノ數ヲ小數第四位マデ求メ以下四捨五入セヨ。

(a) $\sqrt{0.99}$　(b) 0.99^4　(c) $\sqrt{1.05}$　(d) $\dfrac{1}{1.01^2}$

第十一章

極限値

11.1　變數及ビ函數ノ極限値

[1]　變數ノ極限値　變數 x ガ一定數 a ニ限リナク接近スルコトヲ $x\to a$ ナル記號デ表シ，x ハ a ニ**收斂スル** (Converge) ト云ヒ，定數 a ヲ變數 x ノ**極限値** (Limiting value) ト云フ。

[2]　函數ノ極限値　a 及ビ b ガ二ツノ定數デ，$x\to a$ ナルトキ $f(x)\to b$ ナラバ $f(x)$ ノ極限値ハ b デアルト云ヒ

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

ナル記號デ表ス。

此ノコトハ $f(a)=b$ トハ全然其ノ意味ヲ異ニスルモノデ，極限値ト云フハ唯夫レニ向ツテ進ム所ノ目標デ如何程デモコレニ接近シ得ルモノナレドモ，終局ニ於テ遂ニ夫レハ到達スルヤ否ヤハ別問題デアル。

例 1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ ヲ證明セヨ。

$|x|<1$ ナルトキハ $x^2<|x|$ デアルカラ，$|x|$ ヲ充分小サクスレバ x^2 ヲシテ如何程デモ小ナラシメルコトガ出來ル。故ニ $x\to 0$ ナルトキ $x^2\to 0$ トナル。即チ

$$\lim_{x\to 0} x^2=0$$

例 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{2-x}=4$ ヲ證明セヨ。

變數 x ハ 2 ニ等シカラズシテ，2 ニ限リナク接近スルカラ $2-x$ ハ零デハナイ。依ツテ兩邊ヲ $2-x$ デ約シテカラ，其ノ極限値ヲトレバヨイ。即チ

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2-x}=\lim_{x\to 2}(2+x)=4$$

11.2　無限大及ビ無限小

[1] 變數 x ガ如何程大ナル正ノ數ヲモ越エテ限リナク增大スルコトヲ

$$x\to+\infty$$

ナル記號デ表シ, x ハ**正ノ無限大** (Positive infinity) ニナルト云フ。

[2] 變數 x ガ負數デ其ノ絕對値ガ, 無限大トナルトキ之ヲ

$$x\to-\infty$$

ナル記號デ表シ, x ハ**負ノ無限大** (Negative infinity) ニナルト云フ。

[3] 變數 x ノ極限値ガ零ナルトキハ, 其ノ變數ハ**無限小** (Infinitesimal) ニナルト云ヒ, 記號 $x\to0$ デ表ス。

[4] 變數 x ガ極限値 a ニ接近スルニ二通リノ方法ガアル。

{1} a ヨリ小ナル値ヲ經テ增加シツツ a ニ接近スル場合ハ記號

$$x\to a-0$$

{2} a ヨリ大ナル値ヲ經テ減小シツツ a ニ接近スル場合ニハ記號

$$x\to a+0$$

デ表示スル。

x ガ極限値 a ニ接近スル方法ノ如何ニヨツテ其ノ函數ノ極限値ガ異ナル場合ガ往々アル。カクノ如キ場合ハ接近スル方法ヲ判然ト記號ヲ以テ表シ, 之ヲ區別スル必要ガアル。

例ヘバ

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

然シナガラ, 此ノ兩極限値ガ等シイ場合ハ, +0 或ハ −0 ナル記號ヲ省略スルコトガアル。本書ニ於テモ特ニ必要ガナケレバ之ヲ省略スルコトニスル。

*11.3 極限値ニ關スル定理

今 y 及ビ z ヲ夫々 x ノ函數トシ, $x\to a$ ナルトキノ極限値ヲ夫々 b 及ビ c デアルト假定スル。卽チ極限ノ記號デ表スナラバ

$$\lim_{x\to a} y=b,\qquad \lim_{x\to a} z=c$$

定理 I. 函數ノ代數的和ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ代數的和ニ等シイ。

卽チ $\displaystyle \lim_{x\to a}(y+z)=\lim_{x\to a}y+\lim_{x\to a}z$

證明 $(y+z)-(b+c)=(y-b)+(z-c)$

然ルニ $x\to a$ ナルトキ $y-b\to0,\ z-c\to0$ ナルガ故ニ

$$(y+z)-(b+c)\to0$$

$\therefore\quad \displaystyle \lim_{x\to a}(y+z)=b+c=\lim_{x\to a}y+\lim_{x\to a}z$

定理 II. 函數ノ積ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ積ニ等シイ。

卽チ $\displaystyle \lim_{x\to a}yz=[\lim_{x\to a}y]\cdot[\lim_{x\to a}z]$

證明 $yz-bc=(y-b)(z-c)+c(y-b)+b(z-c)$

然ルニ $x\to a$ ナルトキ $y-b\to0,\ z-c\to0$

依ツテ $yz-bc\to0$

$\therefore\quad \displaystyle \lim_{x\to a}yz=bc=[\lim_{x\to a}y][\lim_{x\to a}z]$

定理 III. 函數ノ商ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ商ニ等シイ。

卽チ $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{y}{z}=\frac{\lim\limits_{x\to a}y}{\lim\limits_{x\to a}z}$ 但シ $\displaystyle \lim_{x\to a}z\neq0$

證明 $\displaystyle \frac{y}{z}-\frac{b}{c}=\frac{cy-bz}{cz}=\frac{c(y-b)-b(z-c)}{c(z-c)+c^2}$

然ルニ $x\to a$ ナルトキ $c(y-b)-b(z-c)\to0$ $\quad\therefore\ \dfrac{y}{z}-\dfrac{b}{c}\to0$

$\therefore\quad \displaystyle \lim\frac{y}{z}=\frac{b}{c}=\frac{\lim\limits_{x\to a}y}{\lim\limits_{x\to a}z}$

以上ノ三ツノ定理ヲ如何ニ用フベキカニツキ次ニ數例ヲ示サウ。

例 1. $\displaystyle \lim_{x\to2}(x^3-2x^2+3x)=\lim_{x\to2}x^3-\lim_{x\to2}2x^2+\lim_{x\to2}3x$

$$\lim_{x\to 2}(x^3-2x^2+3x)=2^3-2\times 2^2+3\times 2$$
$$=6$$

例 2. $$\lim_{x\to 1}(5x-2)(7x+3)=\lim_{x\to 1}(5x-2)\lim_{x\to 1}(7x+3)$$
$$=3\times 10=30$$

例 3. $$\lim_{x\to 3}\frac{5+3x}{4+2x}=\frac{\lim_{x\to 3}(5+3x)}{\lim_{x\to 3}(4+2x)}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

問　題

次ノ各題ニ於テ其ノ極限値ヲ求メヨ。

1. $\lim_{x\to 3}(2x^2-3x+7)$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$
3. $\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x+1}$
4. $\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x}{x-2}$

*5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x}$

*6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$

*次ノ各題ニ於テ其ノ極限値ヲ求メヨ。

7. $\lim_{x\to 1}(x^3-7x^2+8x-2)$
8. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$
9. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+5x+4}{x^3}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{a-\sqrt{a^2-x^2}}$
11. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+9}{2x^2-7x+4}$
12. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{a+x}-\sqrt{x})$

11.4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ノ證明

茲ニ x ハ弧度法ニテ測ツタ角トスル。

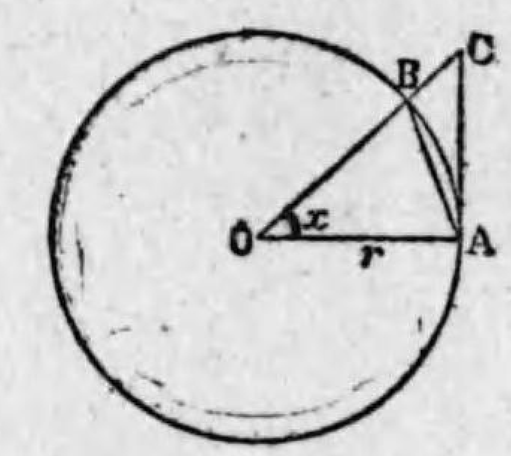
證明 今中心 O, 半徑 r ナル圓周上ノ任意ニ點 A, B ヲトリ，之ヲ中心 O ニ結ビ ∠AOB ヲ鋭角トシ, A ニ於ケル圓ノ切線ガ OB ノ延長線ニ交ル點ヲ C トスレバ三ツノ圖形ノ面積ニ於テ明カニ次ノ不等式ガ成立スル。卽チ

$$\triangle AOB<\text{扇形 }AOB<\triangle AOC$$

然ルニ　$\triangle AOB=\frac{1}{2}r^2\sin x$, 扇形 $AOB=\frac{1}{2}r^2x$, $\triangle AOC=\frac{1}{2}r^2\tan x$

依ツテ　$$\frac{1}{2}r^2\sin x<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r^2\tan x$$

$\frac{1}{2}r^2$ デ約セバ　$$\sin x<x<\tan x$$



∴　$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

從ツテ　$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

然ルニ　$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

∴　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

又 $x<0$ ナル場合ニハ $x=-z$ トオケバ $z>0$ トナルカラ

$$\frac{\sin(-z)}{-z}=\frac{\sin z}{z}$$

∴　$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

例 1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}a\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)=a\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a$$

例 2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to 0}a\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{1}{\cos ax}=a$$

問　題

次ノ各題ニ於テ其ノ極限値ヲ求メヨ。

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$
14. $\lim_{x\to 0}ax\operatorname{cosec}bx$
15. $\lim_{m\to\infty}m\sin\frac{\pi}{m}$

*16. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

*17. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\tan x}{x}$

*18. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{ax}$

11.5 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ ノ證明

此ノ極限値ハ極メテ重要ナルモノデアル。今 x ガ正ノ整數ナル場合ヲ證明シヨウ。二項定理ヲ用ヒテ展開スレバ次ノヤウニナル。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1+x\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x(x-1)}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}\left(\frac{1}{x}\right)^r+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{x}\right)^x$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{x}\right)+\cdots\cdots$$

茲ニ於テ　$x\to\pm\infty$　トスレバ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots$$
$$<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{r-1}}+\cdots\cdots\right)$$

此ノ右邊ノ括弧内ハ初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ ナル無限等比級數デ其ノ極限値ハ 2 デアルカラ，此ノ左邊ハ 3 ヨリ小デアツテ 2 ヨリモ大デアル。即チ

$$2<\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<3$$

從ツテ此ノ極限値ハ 2 ト 3 トノ間ニアル有限ナル數デアルコトガ分ル。此ノ極限値ヲ通常 e ナル文字デ表ス。即チ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

而シテ e ノ値ハ此ノ級數ノ各項ヲ順次計算スレバ其ノ近似値ガ得ラレル。

$$e=2.718281828\cdots\cdots$$

此ノ結果ハ x ガ整數ナラザル正數又ハ負數ニツイテモ眞實デアル。茲ニハ其ノ證明ハ略スルコトトスル。

次ニ表ヲ掲ゲテ x ノ絕對値ガ增加スルニ從ヒ此ノ極限値ガ一定値 e ニ限リナク接近スルコトヲ示サウ。

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2	2.2500
10	2.5937
100	2.7048
1000	2.7169
2000	2.7176

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
-2	4.0000
-10	2.8680
-100	2.7320
-1000	2.7195
-2000	2.7189

コノ e ヲ底トスル對數 $\log_e x$ ヲ自然對數ト云ヒ，數學ノ理論的方面ノ研究ニ用ヒラレルモノデアル。高等數學ニ於テ單ニ $\log x$ トアルハコノ e ヲ略シタ自然對數ノコトデアル。

問　　題

次ノ等式ヲ證明セヨ。

19. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　　**20.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{nx}=e^n$　6/1

***21.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^x=e^m$　　***22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{m}{x}\right)^x=e^{-m}$

第十二章

微係數

12.1 函數ノ連續

［1］ 今 x ノ函數ヲ考ヘ之ヲ $f(x)$ トスル。此ノ函數ガ $x\to a\pm 0$ ノトキノ極限値ト函數値 $f(a)$ トガ全然等シイトキ，卽チ

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=f(a)$$

ナルトキハ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ**連續** (Continuous) デアルト云フ。

［2］ 若シ此ノ等式ガ成立セザルトキハ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ**不連續** (Discontinuous) デアルト云フ。

勿論 $x\to a+0$, $x\to a-0$ ニ於テ其ノ極限値ヲ異ニスル場合ハ $x=a$ ニ於テ不連續デアル。

［3］ $f(x)$ ガ $x=a$, $x=b$ ノ間ノ各點ニ於テ連續條件ヲ滿足スルトキハ函數 $f(x)$ ハ區間 (a, b) ニ於テ連續デアルト云フ。

例 1. $f(x)=2x^2+1$ ハ $x=1$ ニ於テ連續デアル。

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x)=3 \quad 又 \quad f(1)=3$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=1$ ニ於テ連續デアル。

例 2. $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$ ハ $x=3$ ニ於テ不連續デアル。

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3}=+\infty \qquad \lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=-\infty$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=3$ ニ於テ不連續デアル。

一般ニ x ノ有理整函數ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續デ，x ノ有理分數ハ分母ヲ零ナラシメル x ノ値ヲ除キ，其ノ他ノ x ノ總テノ値ニ對シテ連續デアル。例ヘバ

$$y=3x^3+5x^2+6x+7$$

ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續デ

$$y=\frac{x-3}{(x-5)(x-6)}$$

ハ 5 及ビ 6 ヲ除ク他ノ總テノ x ノ値ニ對シテ連續デアル。

以下本書ニ於テ單ニ函數ト云ヘバ單値連續函數デアルトスル。

12.2 微係數

今 x ノ函數 $f(x)$ ガ或ル區間ニ於テ單値連續函數デアルト假定シ

$$y=f(x) \tag{1}$$

トスル。自變數 x ノ微小ナル變化ヲ Δx トシ，之ニ對應スル函數 y ノ變化ヲ Δy デ表スコトトスル。今 x ニ Δx ナル變化ヲ與ヘルナラバ (1) ハ次ノ如クナル。

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

此ノ兩邊ノ $\Delta x\to\pm 0$ ナルトキノ極限ヲトレバ

$$\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

若シ此ノ極限値ガ有限確定値ヲ有スルナラバ，之ヲ x ニ關スル y ノ**微係數** (Differential coefficient) ト云フ。微係數ハ又一般ニ x ノ函數デアルカラ，コレヲ y ノ**導函數** (Derived function) トモ云フ。微係數ヲ表ス記號トシテ通常

$$y',\quad f'(x),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx},\quad \ldots\ldots$$

等ヲ用ヒル。

例 1. $y=x^3$ ノ微係數ヲ求メヨ。

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3$$

$$=3x^2\Delta x+3x\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta x}^3$$

從ツテ
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^3+3x\cdot\Delta x+\overline{\Delta x}^2$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}(3x^2+3x\Delta x+\overline{\Delta x}^2)$$

$$=3x^2$$

$$\therefore \quad y'=3x^2$$

例 2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ノ微係數ヲ求メヨ。

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{(x+\Delta x)^2}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-2x\Delta x-\overline{\Delta x}^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}=\frac{-2}{x^3}$$

$$\therefore \quad f'(x)=-\frac{2}{x^3}$$

一般＝微係數ヲ求メルコトヲ其ノ函數ヲ**微分スル** (Differentiate) ト云ヒ，微係數ヲ求メル計算法ヲ**微分法** (Differentiation) ト云フ。

問 題

1. 函數 $y=\dfrac{1}{x}$ ハ $x=0$ ＝於テ連續デアルカ。

次ノ函數ノ微係數ヲ求メヨ。

2. $y=x^2$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x+a}$

4. $f(x)=2x$

*5. $f(x)=ax^3+bx$

第十三章

微 分 法

與ヘラレタ函數ノ微係數ヲ求メル＝前章＝於テナシタヤウ＝一々極限値ヲ求メルコトハ甚ダ複雜デ且手數ヲ要スルカラ，此ノ演算ヲ簡單ナラシメルタメ＝本章デハ基本トナルベキ函數ノ微係數ヲ求メル方法ヲ研究スルコトトスル。

13. 1 常數ノ微係數

$$y=c$$

茲＝ c ハ常數トスル。

$$y+\Delta y=c$$

$$\therefore \quad \Delta y=c-c=0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \qquad \therefore \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=0$$

即チ常數ノ微係數ハ零デアル。

13. 2 $y=x^m$ ノ微係數 (但シ m ハ正ノ整數)

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^m$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^m-x^m$$

$$=\left(x^m+mx^{m-1}\Delta x+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}\overline{\Delta x}^2+\cdots\cdots+\overline{\Delta x}^m\right)-x^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}\Delta x+\cdots\cdots+\overline{\Delta x}^{m-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=mx^{m-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}}$$

即チ x^m ヲ微分スルニハ冪指數ヲ係數トシ，冪指數ヨリ 1 ヲ減ジタモノヲ指數トスレバヨイ。

例 $y=x$ ナラバ $y'=1$

$y=x^2$ ナラバ $y'=2x$

$y=x^{10}$ ナラバ $y'=10x^9$

問　題

次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

1. x^5　　**2.** x^{15}　　**3.** x^{23}　　***4.** x^{68}

13. 3 $y=cu$ ノ微係數

玆ニ u ハ x ノ函數デ，c ハ常數トスル。Δx ニ對應スル u 及ビ y ノ變化ヲ夫々 Δu, Δy トスレバ

$$y+\Delta y=c(u+\Delta u)$$

$$\Delta y=c\Delta u$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx}=c\frac{du}{dx}}$$

即チ常數ト函數トノ積ノ微係數ハ函數ノ微係數ニ常數ヲ乘ジタモノニ等シイ。

例 $y=5x^3$ ナラバ $y'=5(3x^2)=15x^2$.

$y=ax^4$ ナラバ $y'=a(4x^3)=4ax^3$

問　題

次ノ各函數ヲ微分セヨ。

5. $3x^6$　　**6.** $(a+4)x^9$　　**7.** mx^{10}　　***8.** $(a^2+ab+b^2)x^{18}$

13. 4 函數ノ和ノ微係數

今 x ノ函數ヲ u 及ビ v トシ，ソノ和ヲ y トスレバ

$$\boldsymbol{y=u+v}$$

Δx ニ對應スル u, v, y ノ變化ヲ夫々 $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ トスレバ

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$$

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}}$$

即チ函數ノ和ノ微係數ハ各函數ノ微係數ノ和ニ等シイ。同樣ニ函數ノ差ノ微係數ハ各函數ノ微係數ノ差ニ等シイ。

例 $y=ax^3+bx^2+cx+d$

ナラバ $y'=3ax^2+2bx+c$

問　題

次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

9. $x^5+4x^3-5x^2$　　**10.** $6x^3-5x+7$

11. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^7}{2}$　　*12. $-7x^3+4x^7-x^8$

*13. $(a+b)x^4+(a-b)x$　　*14. $3x^8-5x^6+7x^4$

13.5 函數ノ積ノ微係數

今 u 及ビ v ヲ x ノ函數トシ，ソノ積ヲ y デ表セバ

$$y=uv$$

從ツテ

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$$
$$=uv+\Delta u\cdot v+u\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$
$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

∴

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

∴

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$$

即チ積ノ微係數ハ各因數ニ他ノ微係數ヲ乘ジタルモノノ和ニ等シイ。

例 1.　$y=x^3\cdot x^6$　ナラバ

$$y'=3x^2\cdot x^6+x^3\cdot 6x^5=9x^8$$

例 2.　$y=5x^2(x^3+a^2)$　ナラバ

$$y'=5\cdot 2x(x^3+a^2)+5x^2\cdot 3x^2=5x(5x^3+2a^2)$$

例 3.　$y=u\cdot v\cdot w$　ナラバ（但シ u, v, w ハ何レモ x ノ函數トスル。）

$$y=(uv)w$$
$$y'=(uv)w'+w(uv)'$$
$$=uvw'+w(uv'+u'v)$$
$$=uvw'+uv'w+u'vw$$

問　　題

次ノ各函數ヲ微分セヨ。

15. $x^5(x+3)$　　16. $(x^2-3)(x^3+2)$

17. $(2x^4+3x)(x^2-7)$　　*18. $4x^3(ax-b)$

*19. $x(x-1)(x-2)$　　*20. $x^2(x+4)(x^2-1)$

13.6 函數ノ商ノ微係數

u, v ヲ x ノ函數トシ，ソノ商ヲ y デ表セバ

$$y=\frac{u}{v}$$

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

從ツテ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

∴

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

即チ商ノ微係數ハ分子ノ微係數ニ分母ヲ掛ケタ式ヨリ，分子ニ分母ノ微係數ヲ掛ケタ式ヲ引キ，ソノ結果ヲ分母ノ二乘デ割ツタルモノニ等シイ。

特ニ分子ガ常數ナラバ分子ノ微係數ハ零トナルカラ，此ノ場合ニハ微係數ノ形式ハ次ノ如クニナル。

即チ　$y=\dfrac{c}{v}$　ナルトキハ　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{cv'}{v^2}$

例 1.　$y=\dfrac{x+a}{x+b}$　ノ微係數ヲ求メヨ。

$$y'=\frac{1\cdot(x+b)-(x+a)\cdot 1}{(x+b)^2}=\frac{b-a}{(x+b)^2}$$

例 2.　$y=\dfrac{4}{x^2+5}$　ノ微係數ヲ求メヨ。

$$y'=-\frac{4(2x)}{(x^2+5)^2}=-\frac{8x}{(x^2+5)^2}$$

問　題

次ノ各函數ヨリ微係數ヲ求メヨ。

21. $\dfrac{x-2}{2x+3}$　　22. $\dfrac{b}{x^2+a^2}$

*23. $\dfrac{x}{2x^2+1}$　　*24. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x+2)}$

13.7 函數ノ函數ノ微係數

y ヲ u ノ函數, u ヲ x ノ函數トスレバ, y モ亦 x ノ函數ト考ヘラレル。即チ y ハ x ノ函數 u ノ函數デアル。之ヲ略シテ y ハ x ノ函數ノ函數デアルト云フ。

今一般ニ　$y=\varphi(u)$,　$u=f(x)$　トスル。

サウスルト

$$y+\Delta y=\varphi(u+\Delta u),\quad u+\Delta u=f(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u),\quad \Delta u=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

即チ y ガ u ノ函數デ, u ガ x ノ函數デアルトキ, y ノ x ニ關スル微係數ハ y ノ u ニ關スル微係數ニ, u ノ x ニ對スル微係數ヲ乘ジタルモノニ等シイ。

例 1. $y=(2x^2+3)^5$ ノ微係數ヲ求メヨ。

$$2x^2+3=u$$

トオケバ

$y=u^5$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4\cdot 4x=20xu^4=20x(2x^2+3)^4$$

例 2. $x^2+y^2-a^2=0$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

玆ニ y^2 ハ x ノ函數ナル y ノ函數デアルカラ, y^2 ハ x ノ函數ノ函數デアル。故ニ y^2 ヲ x ニツイテ微分スレバ

$$2y\frac{dy}{dx}$$

トナル。依ツテ與ヘラレタ式ノ各邊ヲ x ニツキテ微分シ

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

問　題

次ノ各函數ノ微分ヲ求メヨ。

25. $(x^3-x^2+x+1)^3$　　26. $(ax^2-bx+c)^5$

27. $(x+a)^4+(x-b)^5$　　*28. $(x^2-2x+3)^4$

*29. $(2x+3)^2(3x-4)^3$　　*30. $\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

次ノ各函數ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

31. $y^2=ax$　　32. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

33. $x^3+y^3-3xy=0$　　*34. $y^2=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

13.8 $y=x^n$ ノ微係數 （玆ニ n ハ正又ハ負ノ有理數トスル。）

n ガ正ノ整數ノ場合ハ既ニ求メタノデアルガ, 其ノ他ノ場合モ全ク同一ノ形式デ求メラレル。

［1］ n ガ正ノ分數 $\dfrac{p}{q}$ ナル場合。但シ p, q ハ何レモ正ノ整數トスル。

此ノ場合ニハ　　$y=x^n=x^{\frac{p}{q}}$

デアルカラ, 兩邊ヲ q 乘シテ

$$y^q=x^p$$

コノ兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$qy^{q-1}y'=px^{p-1}$$

$$\therefore\quad y'=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

$$=\frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}}{(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\therefore\quad y'=nx^{n-1}$$

[2] n ガ負ノ整數又ハ分數ナル場合。

$n=-m$ トオク。但シ m ハ正數トスル。

$$y=x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$$

$$y'=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}$$

$$\therefore\quad y'=nx^{n-1}$$

例 1. $y=x^{\frac{1}{2}}$ 　ナラバ　 $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$y=x^{\frac{5}{3}}$ 　ナラバ　 $y'=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 　ナラバ　 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

例 2. $y=x\sqrt{f(x)}$ ノ微係數ヲ求メヨ。

$f(x)=u$ トオケバ $y=\sqrt{u}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}f'(x)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

此ノ結果ハ微係數ヲ求メル問題ニ屢々起ル計算デアルカラ記憶シテオク必要ガアル。

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}\quad ナラバ\quad y'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

問　　題

次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

35. $x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{3}{4}}$ 　　36. $\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+1$

*37. $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ 　　*38. $x\sqrt{x-1}$

次ノ各函數ヲ微係數ヲ求メヨ。

39. $\sqrt{x^2+a^2}$ 　　40. $\sqrt{(x-a)(b-x)}$

*41. $\sqrt{2a+x^2}+\sqrt{2a-x^2}$ 　　*42. $\frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$

13.8 對數函數ノ微係數

$$y=\log x$$

$$y+\Delta y=\log(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\log(x+\Delta x)-\log x$$

$$=\log\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

今 $\frac{x}{\Delta x}=z$ トオケバ $\Delta x\to 0$ ノトキ $z\to\infty$ トナル。

然ルニ $\lim\limits_{\frac{x}{\Delta x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$

デアルカラ 　 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\log e$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

注意　自然對數ト常用對數トノ關係ヲ考ヘルト

$$y=\log_e x \quad トスレバ \quad e^y=x$$

コノ兩邊ノ常用對數ヲトレバ

$$y\log_{10}e=\log_{10}x$$

$$\log_e x\cdot\log_{10}e=\log_{10}x$$

然ルニ　$$\log_{10}e=0.43429=\frac{1}{2.3026}$$

故ニ　**常用對數＝自然對數×0.43429**

自然對數＝常用對數×2.3026

此ノ關係式ヲ用ヒテ一方ヨリ他方ニ換算スルコトガ出來ル。吾々ノ使用シテヰル對數表ハ自然對數ヲ求メ，ソレニ 0.43429 ヲ乘ジ計算シテ得タモノデアル。

例　$y=\log f(x)$ ノ微係數ヲ求メヨ。

$$f(x)=u \quad トオケバ \quad y=\log u$$

∴　$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

從ツテ　$y=\log(2x-3)$　ナラバ　$y'=\dfrac{2}{2x-3}$

$y=\log(2x^2+b)$　ナラバ　$y'=\dfrac{2ax}{ax^2+b}$

$y=\log(ax+b)(cx+d)$　ナラバ　$y'=\dfrac{a}{ax+b}+\dfrac{c}{cx+d}=\dfrac{2acx+ad+bc}{(ax+b)(cx+d)}$

問　題

次ノ各函數ヲ微分セヨ。

43.　$\log(2x+3)^2$　　**44.**　$\log(x^2+1)(3x-4)$

45.　$\log(3x^2+a^2)$　　**46.**　$\log(x+1)(x+2)(x+3)$

*次ノ各函數ヲ微分セヨ。

47.　$\log(x+\sqrt{x^2-1})$　　**48.**　$\log\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

49.　$3\log(ax^2+bx+c)$　　**50.**　$\log(2x^2+3x+8)$

13.9　對數ニヨル微分法

函數ノ複雜ナル積又ハ商ノ微係數ヲ求メルニハ，ソノ對數ヲ取ツテ後微分スルノガ便利デアル。

例　$y=\dfrac{(2x+1)(3x+2)}{x-3}$　ヲ微分セヨ。

兩邊ノ對數ヲトレバ

$$\log y=\log(2x+1)+\log(3x+2)-\log(x-3)$$

此ノ兩邊微分スルト

$$\frac{d(\log y)}{dx}=\frac{d(\log y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x+2}-\frac{1}{x-3}$$

∴　$$y'=y\left\{\frac{6x^2-36x-23}{(2x+1)(3x+2)(x-3)}\right\}$$

$$=\frac{(2x+1)(3x+2)}{x-3}\left\{\frac{6x^2-36x-23}{(2x+1)(3x+2)(x-3)}\right\}$$

從ツテ　$$y'=\frac{6x^2-36x-23}{(x-3)^2}$$

問　題

次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

51.　$(1-x)^3(1+2x^2)$　　**52.**　$x(a+3x)^2(a+2x)^3$

***53.**　$x^2\sqrt{1+2x}(1-x^2)$　　***54.**　$(x^2+2)(x^3+1)^3$

13.10　指數函數ノ微係數

[1] $y=a^x \quad (a>1)$

兩邊ノ對數ヲトリ，微分スレバ

$$\log y = x\log a$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \log a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = a^x \log a$$

[2] $y=e^x$ ノ微係數ハ $y'=e^x$ デアル。

例 $y=e^{f(x)}$ ヲ微分セヨ。

$f(x)=u$ トオケバ $y=e^u$

y ハ x ノ函數ノ函數デアルカラ

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)\,e^{f(x)}$$

故ニ

$y=e^{ax+b}$ ナラバ $y'=ae^{ax+b}$

$y=10^{x^2-x}$ ナラバ $y'=(2x-1)10^{x^2-x}\log 10$

問 題

次ノ各函數ヲ微分セヨ。

55. e^{-ax}　　56. e^x+e^{-x}

57. $\log(e^x-e^{-x})$　　58. e^{3x^2+x}

*59. $a^{\frac{1}{x}}$　　*60. $a^{\sqrt{1+x^2}}$

13.11 三角函數ノ微係數

[1] $y=\sin x$ ノ微係數

$$y=\sin x$$

$$y+\Delta y = \sin(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$$

然ルニ $\displaystyle \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

即チ $\sin x$ ノ微係數ハ $\cos x$ デアル。

[2] $y=\cos x$ ノ微係數

$$y=\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

トシ，兩邊ヲ微分スレバ y ハ x ノ函數ノ函數デアルカラ

$$y' = (-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

即チ $\cos x$ ノ微係數ハ $-\sin x$ デアル。

[3] $y=\tan x$ ノ微係數

$$y=\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

即チ $\tan x$ ノ微係數ハ $\sec^2 x$ デアル。

[4] $y=\cot x$ ノ微係數

$$y=\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$y' = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

即チ $\cot x$ ノ微係數ハ $-\operatorname{cosec}^2 x$ デアル。

[5] $y=\sec x$ ノ微係數

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$$

[6] $y=\operatorname{cosec} x$ ノ微係數

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

即チ $\operatorname{cosec} x$ ノ微係數ハ $-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$ デアル。

以上ノ六ツハ所謂三角函數ノ微係數デ，ヨク用ヒラレルモノデアルカラ充分此ノ結果ヲ記憶シテオカネバナラヌ。次ニ之ヲ表トシテ掲ゲテオク。

三角函數	微係數
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

例 1. $y = a\sin x - b\cos x + c\tan x$ ヲ微分セヨ。

$$y' = a\cos x + b\sin x + c\sec^2 x$$

例 2. $\sin(x^2 - x + 1)$ ヲ微分セヨ。

$$y = \sin(x^2 - x + 1), \quad x^2 - x + 1 = u$$

トオケバ

$$y = \sin u$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot (2x-1) = (2x-1)\cos(x^2 - x + 1)$$

例 3. $y = \sin^n x$ ヲ微分セヨ。

$\sin x = u$ トオケバ $y = u^n$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1}\cos x = n\sin^{n-1} x \cos x$$

問 題

次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

61. $\sin(ax^2)$
62. $\tan(ax^2 + bx + c)$
63. $\cos^2 \frac{x}{m}$
*64. $x - \sin mx$
65. $\tan x - x$
*66. $\log \tan x$

*次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

67. $\cos(1 - x^2)$
68. $x\sin x + \cos x$
69. $\tan^2 \frac{x}{m}$
70. $x^3 \cos x$
71. $\log \sin x$
72. $\tan \frac{1}{\sqrt{x}}$

13.12 逆三角函數ノ微係數

逆三角函數ハ三角函數ノ逆函數デ次ノ六ツデアル。

$$\sin^{-1} x, \quad \cos^{-1} x, \quad \tan^{-1} x, \quad \cot^{-1} x, \quad \sec^{-1} x, \quad \operatorname{cosec}^{-1} x.$$

是等ハ何レモ無限多値函數デアルカラ，單値函數トシテ取扱フタメニ y ニ制限ヲ與ヘ，ソノ主値ノミヲトルモノトスル。

[1] $y=\sin^{-1} x$ ノ微係數 $\left(但シ \ -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$$y=\sin^{-1}x \quad ナラバ \quad x=\sin y$$

コノ兩邊ヲ微分スレバ $\qquad 1=\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

卽チ $\sin^{-1}x$ ノ微係數ハ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ デアル。

[2] **$y=\cos^{-1}x$ ノ微係數** (但シ $0\leqq y\leqq\pi$)

$$y=\cos^{-1}x \quad ナラバ \quad x=\cos y$$

コノ兩邊ヲ微分スレバ $\qquad 1=-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

卽チ $\cos^{-1}x$ ノ微係數ハ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ デアル。

[3] **$y=\tan^{-1}x$ ノ微係數** $\left(但シ \ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y=\tan^{-1}x \quad ナラバ \quad x=\tan y$$

コノ兩邊ヲ微分スレバ $\qquad 1=\sec^2 y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

卽チ $\tan^{-1}x$ ノ微係數ハ $\dfrac{1}{1+x^2}$ デアル。

[4] **$y=\cot^{-1}x$ ノ微係數** (但シ $0<y<\pi$)

$$y=\cot^{-1}x \quad ナラバ \quad x=\cot y$$

$$1=\operatorname{cosec}^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$

卽チ $\cot^{-1}x$ ノ微係數ハ $-\dfrac{1}{1+x^2}$ デアル。

[5] **$y=\sec^{-1}x$ ノ微係數** (但シ $0<y<\pi$)

$$y=\sec^{-1}x \quad ナラバ \quad x=\sec y$$

$$1=\sec y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\cdot\tan y}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

依ッテ主値ニ於テハ

$$\frac{dy}{dx}=\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right|$$

卽チ $\sec^{-1}x$ ノ微係數ハ $\left|\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right|$ デアル。

[6] **$y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ ノ微係數** $\left(但シ \ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y=\operatorname{cosec}^{-1}x \quad ナラバ \quad x=\operatorname{cosec} y$$

$$1=-\operatorname{cosec} y\cdot\cot y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\operatorname{cosec} y\cdot\cot y}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

依ッテ主値ニ於テハ

$$\frac{dy}{dx}=-\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right|$$

卽チ $\operatorname{cosec}^{-1}x$ ノ微係數ハ $-\left|\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right|$ デアル。

以上ノ逆三角函數ノ微係數ヲ次ニ表示スル。此ノ中 $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ノ微係數ハ特ニ必要デアル。

逆三角函數	微 係 數
$\sin^{-1}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1}x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1}x$	$\left\lvert\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right\rvert$
$\mathrm{cosec}^{-1}x$	$-\left\lvert\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right\rvert$

例 1. $y=\sin^{-1}(ax^2)$ ヲ微分セヨ。

$ax^2=u$ トオケバ $y=\sin^{-1}u$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot 2ax=\frac{2ax}{\sqrt{1-a^2x^4}}$$

例 2. $y=\tan^{-1}(ax+b)$ ヲ微分セヨ。

$ax+b=u$ トオケバ $y=\tan^{-1}u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\cdot a=\frac{a}{1+(ax+b)^2}$$

問 題

次ノ各函數ヲ微分セヨ。

75. $\sin^{-1}mx$ **74.** $\tan^{-1}\dfrac{x}{m}$

75. $a\sin^{-1}x-b\cos^{-1}x$ ***76.** $\cos^{-1}\sqrt{x}$

*次ノ各函數ヲ微分セヨ。

77. $\cot^{-1}\sqrt{x}$ **78.** $x^2\tan^{-1}x$

79. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ **80.** $\tan^{-1}(5x)$

13.13 高次微係數

$y=f(x)$ ノ微係數ヲ $f'(x)$ トスレバ, コノ $f'(x)$ ハ又一般ニ x ノ函數デアル。依ツテ $f'(x)$ ヲ更ニ x ニツイテ微分シタモノヲ

$$f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}\quad \text{又ハ}\quad y''$$

等デ表シ, 更ニコレヲ x ニツイテ微分シタモノヲ

$$f'''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3}\quad \text{又ハ}\quad y'''$$

等デ表シ, 以下順次コノ方法ヲ用ヒテ n 回微分シタモノヲ

$$f^{(n)}(x),\quad \frac{d^ny}{dx^n}\quad \text{又ハ}\quad y^{(n)}$$

等デ表ス。此ノ

$f'(x)$ ヲ**第一次微係數** (1st differential coefficient)

$f''(x)$ ヲ**第二次微係數** (2nd differential coefficient)

....

$f^{(n)}(x)$ ヲ**第 n 次微係數** (nth differential coefficient)

トイフ。コノ第二次以上ノ微係數ヲ總稱シテ**高次微係數** (**Differential** coefficient of higher order) トイフ。

例 1. $y=x^n$ ノ第 m 次微係數ヲ求メヨ。

$$y=x^n$$
$$y'=nx^{n-1}$$
$$y''=n(n-1)x^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(m)}=n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)x^{n-m}$$

モシ n ガ正ノ整數ナラバ $n=m$ トオクコトニヨリ

$$y^{(n)}=n!\ x^{n-n}=n!$$

從ツテ

$$y^{(n+1)}=0$$

例 2. $y=\log x$ ノ第 n 次微係數ヲ求メヨ。

$$y=\log x$$

$$y'=\frac{1}{x}$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}$$

$$y'''=\frac{(-1)^2 2\,!}{x^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)\,!}{x^n}$$

例 3. $y=\sin x$ ノ第 n 次微係數ヲ求メヨ。

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

例 4. $y=a^x$ ノ第 n 次微係數ヲ求メヨ。

$$y'=a^x\log a$$

$$y''=a^x(\log a)^2$$

$$y'''=a^x(\log a)^3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=a^x(\log a)^n$$

若シ $a=e$ トスレバ

$$y=e^x,\qquad y^{(n)}=e^x$$

問 題

次ノ各函數ノ第二次微係數ヲ求メヨ。

81. $\dfrac{x-3}{x+3}$　　82. $\sqrt{1+x^2}$

*83. $\sin^{-1}x$　　*84. $\sec x$

次ノ各函數ノ第三次微係數ヲ求メヨ。

85. $\log(x+a)^2$　　86. $\dfrac{1}{a+x}$

次ノ各函數ヲ n 回微分セヨ。

87. $\log\sqrt{x+2}$　　88. e^{ax}

89. $y^2=2x$ ヨリ y'' ヲ求メヨ。又 $y=2$ ナルトキノ y'' ノ値ヲ求メヨ。

90. $y=A\cos x+B\sin x$ ナルトキ $y''+y=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

13.14 微係數ノ幾何學的意義

x ノ函數 y ヲ考へ，之ヲ

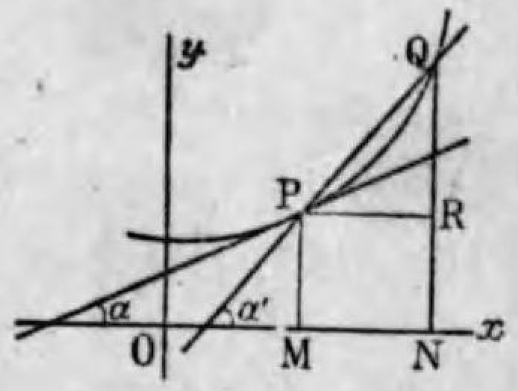
$$y=f(x) \tag{1}$$

ト置クトキハ微係數ノ定義ニヨッテ

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

今コノ式ノ幾何學的意義ヲ檢ベテ見ヨウ。

(1) ガ x ノ單值連續函數デアルト假定スルト，函數 $f(x)$ ハ平面上ニ一ツノ連續セル曲線ヲ表ス。此ノ曲線上ニ任意ノ接近シタ二點 $P(x, y)$, $Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ヲトッテ，圖ニ示スヤウニ作圖スルト



$$\Delta x=MN=PR,\quad \Delta y=RQ$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{RQ}{PR}=\tan\alpha'$$

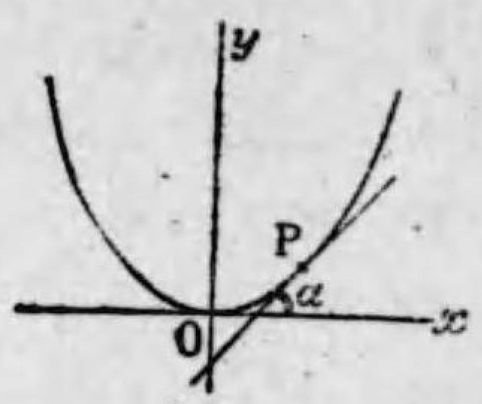
玆ニ α' ハ割線 PQ ガ x ノ正ノ方向トナス角~~ノ正切~~ヲ表スモノトスル。

又 P 點ニ於ケル切線ガ x ノ正ノ方向トナス角ヲ α トスルト

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm0}\tan\alpha'=\tan\alpha$$

即チ曲線上ノ一點ニ於ケル微係數ノ値ハ，其ノ點ニ於ケル曲線ノ切線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ヲ表ス。言ヒ換ヘレバ切線ノ角係數(傾斜率)ヲ表ス。

玆ニ注意スベキコトハ，此ノ微係數ハ曲線上ノ點ノ位置ニヨツテ其ノ値ヲ異ニスルコトデアル。



例 $y=x^2$ ナル曲線上ノ一點 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ニ於ケル切線ハ x 軸ト何度ノ角ヲナスカ。

$$f(x)=x^2, \quad f'(x)=2x, \quad \therefore \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

依ツテ　$\tan\alpha=1 \quad \therefore \quad \alpha=45^\circ$

故ニ P 點ニ於ケル切線ハ x 軸ト 45° ノ角ヲナス。

注意 上ノ例ニ於テ，一點 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ト云フ代リニ $x=\frac{1}{2}$ ナル點ト云フコトガアル。之ハ $x=\frac{1}{2}$ ノ値ヲ $y=x^2$ ニ代入シテ得タ y ノ値 $\frac{1}{4}$ トヲ組合セテ得タ座標 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ナル點ト云ヘベキヲ略シテ云ツテ居ルノデアル。

問　題

91. $y=\frac{1}{3}x^3$ ガ表ス曲線上ノ $x=1$ ナル點ニ於ケル微係數ノ値ヲ求メヨ。

92. $y=x^2+\frac{1}{2}x+2$ 上ノ一點 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ニ於ケル切線ノ傾斜率ヲ求メヨ。

93. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ ガ表ス曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ハ x 軸ニ平行デアルト云フ。P 點ノ座標如何。

13.15 微 分

前節ニ述ベタヤウニ $y=f(x)$ ニ於テ第一次微係數ハ

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

デアツタ。依ツテ極限ヲトラヌ前，卽チ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ト $f'(x)$ トノ間ニハ少シ違ヒガアル。故ニ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon \tag{2}$$

ト置クコトガ出來ル。玆ニ ε ハ $\Delta x\to0$ ナルトキ $\varepsilon\to0$ トナルベキモノデアル。

今コノ分母ヲ拂ヘバ

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x \tag{3}$$

此ノ (3) デ Δx ヲ無限小ト考ヘルト，右邊ノ $\varepsilon\Delta x$ ハ一般ニ $f'(x)\Delta x$ ニ比較シテ遙ニ微小デアルカラ，之ヲ省略スルト右邊ハ單ニ $f'(x)\Delta x$ トナリ Δy トハ等シクナイ。依ツテ之ヲ Δy ト區別スルタメニ dy ナル記號デ表セバ

$$dy=f'(x)\Delta x \tag{4}$$

此ノ式ハ恒等式デアルカラ，特ニ $y=x$ トオケバ $f'(x)=1$ デアルカラ

$$dx=\Delta x$$

トナル。依ツテ (4) ニ之ヲ代入スレバ

$$\boldsymbol{dy=f'(x)dx} \tag{5}$$

ナル關係式ガ得ラレル。此ノ dx 及ビ dy ヲ夫々 x 及ビ y ノ微分 (Differential) ト云フ。

(5) ニ於テ $f'(x)$ ハ自變數 x ノ微分 dx ノ係數トナツテキル。此ノ意味カラ $f'(x)$ ノコトヲ微分係數，或ハ略シテ微係數ト云フノデアル。

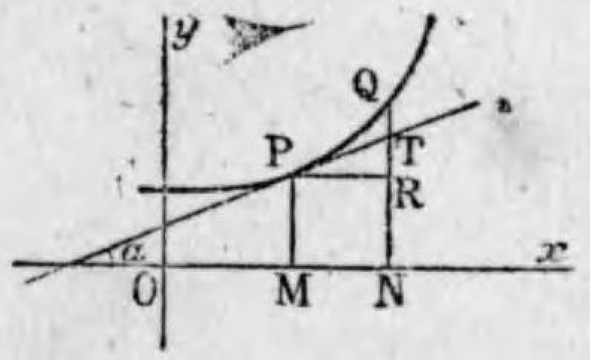
次ニ dx 及ビ dy ノ幾何學的意義ヲ見ルタメニ $y=f(x)$ ガ表ス曲線上ノ二點 $P(x, y)$, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲトリ，圖ノヤウニ作圖シテ，P ニ於ケル切線ガ NQ ト交ル點ヲ T トシ，x 軸トナス角ヲ α トスレバ

$$dx=\Delta x=MN=PR$$

$$\Delta y=RQ$$

$$dy=f'(x)dx=dx\tan\alpha$$

$$=PR\times\frac{RT}{PR}=RT$$



$$\therefore \quad \Delta y-dy=TQ$$

卽チ dy ハ RT ヲ表シ，Δy ト dy トノ差 TQ ハ dx ガ小ナレバ小ナル程愈々小トナルモノデアル。

13.16 補正ノ計算

或ル函數ノ數値ヲ計算スルニ當リ自變數ノ値ニ小ナル變動ヲ生ジタ場合其ノ函數ノ値ノ變動ヲ大體知ル必要ガアルトキ，又ハ種々ノ實驗測定等ニ於テ，其ノ測定ニ誤差ガアル場合，如何ナル**補正** (Correction) ヲ行フベキカニツイテ夫等ノ問題ヲ研究スルニ屢々微分ヲ用フルコトガアル。之ヲ**補正ノ計算**トイフ。

例 1. $y=\frac{1}{x^4}$ ニ於テ x ガ 2.000 ヨリ 2.001 ニ變化スルトキ函數 y ノ變動ヲ求メヨ。

與ヘラレタ函數ヲ微分スレバ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^5} \qquad \therefore \quad dy=-\frac{4}{x^5}dx$$

此ノ關係式ニ於テ　$x=2.000$　$dx=0{,}001$

トオケバ　$dy=-0{,}000125$

例 2. 底面ノ半徑 20 cm, 高サ 50 cm ノ直圓柱ガアル。半徑ニ 0.1 cm ノ變動ガアルトキ，體積ニ何程ノ變動ヲ生ズルカ。

直圓柱ノ高サヲ h, 半徑ヲ r, 體積ヲ V トオケバ

$$V=\pi r^2h$$

此ノ問題デハ高サガ不變デ半徑ガ變動スル場合デアルカラ，體積ハ半徑ノ函數デアル。ソレ故 V ヲ r ニツキテ微分セレバ

$$\frac{dV}{dr}=2\pi rh$$

$$\therefore \qquad dV=2\pi rh\cdot dr$$

此ノ式ニ於テ　$h=50$,　$r=20$,　$\pi=3{,}1416$　トオケバ

$$dV=628{,}32$$

故ニ體積ニハ約 628 立方糎ノ變動ガアル。

問　　題

94. $y=4x^2+3$ ニ於テ $x=2.000$ ヨリ 2.001 ニ變動スルトキ y ノ變化如何。

95. 頂角 30°, コレヲ夾ム二邊ガ夫々 6 m ナル二等邊三角形ガアル。二邊ガ夫夫 6.02 m トナラバ其ノ面積ノ近似値如何。

96. 半徑 5 cm, 高サ 10 cm ノ直圓柱ヲ作ル目的デ過不足ノナイ鐵ヲ鎔シテ，型ニ入レタトキ，半徑ガ $\frac{1}{20}$ cm ダケ大ニ過ギタモノトスレバ高サハ何糎ニナルカ。

97. C ヲ直角トスル直角三角形 ABC ニ於テ直角ノ一邊 b ガ不變デ，角 V ガ小ナル角 dA ダケ増加スルトキノ直角ノ他ノ邊 a ノ増加ハ大略 $\frac{c^2}{b}dA$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

第十四章

不定積分及ビ定積分

14.1 不定積分

$$\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x)=f(x)$$

ナラバ F(x) ヲ $f(x)$ ノ**積分** (Integral) ト云フ。

例ヘバ $\frac{d}{dx}x^2=2x$ デアルカラ，x^2 ハ $2x$ ノ積分デアル。而シテ常數ノ微係數ハ 0 デアルカラ，C ヲ任意ノ常數トスルトキ $\frac{d}{dx}(x^2+C)=2x$，故ニ x^2+C モ亦 $2x$ ノ積分デアル。

一般ニ $f(x)$ ノ一ツノ積分ガ F(x) ナラバ，F(x)$+C$ モ亦 $f(x)$ ノ積分デアル。斯様ニ積分ニハ**任意ノ常數** C (コレヲ**積分常數**ト云フ) ガ伴フ故，後ニ説明スル定積分ニ對シテ**不定積分** (Indefinite integral) トモ云フ。

$f(x)$ ノ積分ヲ表スニハ記號

$$\int f(x)dx$$

ヲ用ヒル。換言スレバ $\int f(x)dx$ ハ「**微分スレバ $f(x)$ トナルヤウナ函數**」ヲ表ス記號デアル。

例ヘバ

$$\int 2x\,dx=x^2+C$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C$$

積分常數 C ハ毎回附ケルニ定マツタモノデアルカラ，**以下書クコトヲ省略スル**。但シ實際問題ヲ解ク場合ニハ C ハ必要ナモノデ，與ヘラレタ

條件ニ依ツテ定メラレルモノデアル。

$f(x)$ ヲ知ツテ $\int f(x)\,dx$ ヲ求メルコトヲ $f(x)$ ヲ**積分スル**ト云フ。從ツテ積分法ト微分法トハ互ニ逆ノ算法デアル。

次ニ積分法ノ基本公式ヲ列記スル。コレ等ハ右邊ヲ微分スルコトニ依ツテ其ノ成立ヲ證明スルコトガ出來ヨウ。何レモ重要ナモノデアルカラ良ク記憶シテ應用ニ努メナケレバナラナイ。

以下公式中ノ a ハ 0 ナラザル常數トスル。

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(n\neq-1) \tag{1}$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\log|x| \qquad \int\frac{1}{x\pm a}dx=\log|x\pm a| \tag{2}$$

$$\int\frac{u'}{u}dx=\log|u| \tag{3}$$

$$\int e^x\,dx=e^x \qquad \int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax} \tag{4}$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x \qquad \int\sin ax=-\frac{1}{a}\cos ax \tag{5}$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x \qquad \int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax \tag{6}$$

$$\int\sec^2 x\,dx=\tan x \qquad \int\sec^2 ax\,dx=\frac{1}{a}\tan ax \tag{7}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x \qquad \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}\quad(a>0) \tag{8}$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x \qquad \int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{9}$$

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \tag{10}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| \tag{11}$$

$$\int a f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx \tag{12}$$

$$\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx \tag{13}$$

例 1.　$\int 4x^3dx=x^4$

例 2.　$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=2x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}$

例 3.　$\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}=-\frac{1}{2x^2}$

例 4.　$\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+\log|x|$

(以下 $\log|x|$ ハ略シテ $\log x$ ト書ク)

例 5.　$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}$

例 6.　$\int\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\log(x^2-1)$

例 7.　切線ノ角係數ガ常ニ橫座標ノ 4 倍デアルヤウナ曲線ノ中 (1, 5) ナル點ヲ通ル曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

題意ニヨリ　$\frac{dy}{dx}=4x$

故ニ積分スレバ　$y=\int 4xdx+C=2x^2+C$

而シテコレハ (1, 5) ヲ通ルカラ

$5=2+C \quad \therefore \quad C=3$

故ニ求メル方程式ハ　$y=2x^2+3$

問　　題

次ノ函數ヲ積分セヨ。〔1—20〕

1. x^5　　**2.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

3. $\frac{2}{3x}$　　**4.** $\frac{4}{x-2}$

5. $\sin 2x$　　**6.** $\cos 3x$

7. $\frac{1}{x^2+9}$　　**8.** $\frac{1}{4x^2+1}$

9. $\frac{1}{x^2-16}$　　**10.** $\frac{1}{4x^2+1}$

11. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$　　**12.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}$

13. $\tan x$　　**14.** $\frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{x^2}$

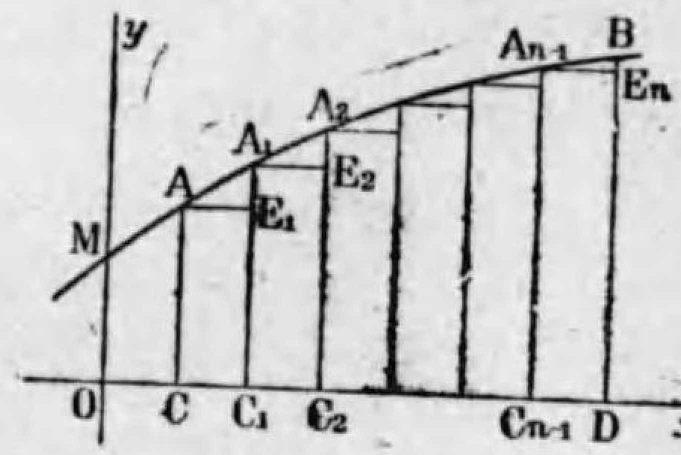
15. 切線ノ角係數ガ常ニ $2x+1$ ナルヤウナ曲線ノ中 (1, 3) ヲ通ル曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

14.2　定積分

$f(x)$ ヲ區間 $a\leqq x\leqq b$ ニ於テ單値連續デ正ノ値ノミヲ取ル增加函數トシ，曲線 $y=f(x)$, x 軸，直線 $x=a$ 及ビ直線 $x=b$ ノ圍ム面積ヲ A トスル。

イマ　$\frac{b-a}{n}=h$ ト置キ

$$S=f(a)h+f(a+h)h+f(a+2h)h+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)h$$
$$=\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)\}h$$



ナル和ヲ作レバ，コレハ圖ニ於テ

$OC=a,\ OD=b,$

$CC_1=C_1C_2=\cdots\cdots=C_{n-1}D=h$

トスルトキ矩形 AC_1, A_1C_2, A_2C_3, ……, $A_{n-1}D$ 等ノ和ニ等シイ。而シテコノ和 S ハ曲線ガ右上リデアルカラ A ヨリハ小デアルガ n ヲ大キクスレバスル程 A ニ幾ラデモ近ヅイテ行ク。

卽チ　$\lim_{n\to\infty} S=A$

或ハ　$\lim_{h\to 0}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)\}h=A$

曲線ガ右下リデアツテモ同樣デアル。マタ曲線ガ x 軸ヲ截ル場合ニハ x 軸ノ上方ニアル部分ノ面積ヲ (+), x 軸ノ下方ニアル部分ノ面積ヲ (−)トシ代數和トシテノ面積 A ヲ考ヘレバ同樣デアル。サテ此ノ面積 A ニ等シイ S ノ極限値ヲ，a ト b トノ間ニトツタ函數 $f(x)$ ノ**定積分** (Definite integral) ト云ヒ

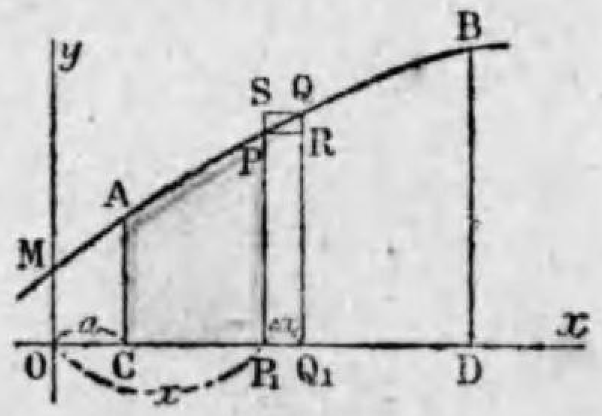
$$\int_a^b f(x)dx$$

デ表シ, a ヲソノ**下限** (Lower limit), b ヲソノ**上限** (Upper limit) ト云フ。

以上ハ $a<b$ トシテノ話デアルガ, $a>b$ ナル場合ニハ $h<0$ ト考ヘテ $\int_a^b f(x)dx$ ハ $-A$ ヲ表スモノトスル。

14.3 定積分ト不定積分トノ關係

他ノ場合モ同様デアルカラ, 圖ノ様ナ曲線ニ就イテ説明スル。



今曲線 $y=f(x)$ 上ニ一點 $P(x, y)$ ヲトリ, ソノ縦線ヲ PP_1 トスレバ, 面積 ACP_1P ハ x ノ函數デアル。

依ツテソレヲ $\varphi(x)$ デ表スコトニスル。

次ニ曲線上ニ他ノ一點 $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲトリ, Q ノ縦線ヲ QQ_1 トスレバ面積 ACQ_1Q ハ $\varphi(x+\Delta x)$ デ表サレ

$$\begin{aligned}\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)&=\text{面積 } PP_1Q_1Q\\&=\text{矩形 } PP_1Q_1R+\text{面積 } PRQ\\&=f(x)\,\Delta x+\theta\,\Delta x\,\Delta y\quad[0<\theta<1]\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=f(x)+\theta\,\Delta y$$

$\Delta x\to0$ ナラシメレバ $\Delta y\to0$ トナルカラ

$$\varphi'(x)=f(x)$$

故ニ $f(x)$ ノ積分ノ一ツヲ $F(x)$ トスレバ

$$\varphi(x)=F(x)+C$$

而シテ $\varphi(a)=0$ デアルカラ $C=-F(a)$ デナケレバナラナイ

$$\therefore\qquad \varphi(x)=F(x)-F(a)$$

面積 ACDB 即チ $\int_a^b f(x)\,dx$ ハ $\varphi(b)$ デアルカラ

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$F(b)-F(a)$ ヲ $[F(x)]_a^b$ マタハ $\left[\int f(x)dx\right]_a^b$ ト書クコトニスレバ

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b$$

或ハ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

即チ定積分ノ値ヲ計算スルニハ, 先ヅ不定積分ヲ求メ, 次ニソノ式中ノ x ニ上限ノ値ヲ代入シタモノカラ, 下限ノ値ヲ代入シタモノヲ減ズレバヨイ。

例 1. $\int_a^b x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$

例 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$

例 3. $\int_3^6\frac{dx}{x}=[\log x]_3^6=\log 6-\log 3=\log 2$

例 4. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=[\sin^{-1}x]_0^1=\sin^{-1}1-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}$

例 5. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=[\log(x+\sqrt{1+x^2})]_0^2=\log(2+\sqrt{5})-\log 1=\log(2+\sqrt{5})$

例 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2x+\cos^2x)dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

例 7. $\int_0^\infty\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^\infty=\frac{1}{a}(\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0)=\frac{\pi}{2a}$

例 8. $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx=[e^x]_{-\infty}^0=e^0-e^{-\infty}=1$

問　題

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

16. $\int_2^4\frac{2}{x^3}dx$　　**17.** $\int_0^1\frac{dx}{9+7x}$

18. $\int_0^a\frac{dx}{a^2+x^2}$　　**19.** $\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

20. $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　**21** $\int_0^4 e^{3x}\,dx$

22. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$　　23. $\int_0^{\infty}e^{-mx}\,dx,\ (m>0)$

14.4 置換積分法

$x=\varphi(t)$ ナルトキ $\int f(x)\,dx$ ヲ t ニ關シテ微分シテミレバ

$$\frac{d}{dt}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\int f(x)dx\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}=f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)$$

$$\therefore\quad \int f(x)\,dx=\int f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt$$

此ノ公式ハ $x=\varphi(t)$ ナラバ $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ デアルカラ，コレカラ $dx=\varphi'(t)\,dt$ トシテ代入シタト考ヘテ良イ。

例 1. $\int(a+bx)^5\,dx$ ヲ求メヨ。

$a+bx=t$ ト置ケバ $b\frac{dx}{dt}=1,\ dx=\frac{1}{b}dt$

$$\therefore\quad \int(a+bx)^5\,dx=\int t^5\cdot\frac{1}{b}dt=\frac{t^6}{6b}=\frac{1}{6b}(a+bx)^6$$

例 2. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ ヲ求メヨ。

$x^2-a^2=t$ トオケバ $2x\,dx=dt,\ xdx=\frac{1}{2}dt$

$$\therefore\quad \int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}$$

例 3. $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ヲ求メヨ。

$1+x^2=t$ トオケバ $2x\,dx=dt,\ x\,dx=\frac{1}{2}dt$

$$\therefore\quad \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}=\sqrt{1+x^2}$$

例 4. $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ ヲ求メヨ。

$\sqrt{x-1}=t$ トオケバ $dx=2t\cdot dt$

$$\therefore\quad \int\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=2\int\frac{t^2+1}{t}t\,dt=2\int(t^2+1)dt=2\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)=\frac{2t}{3}(t^2+3)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x-1}\,(x+2)$$

例 5. $\int\sin^2x\cos x\,dx$ ヲ求メヨ。

$t=\sin x$ ト置ケバ $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$$\therefore\quad \int\sin^2x\cos x\,dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}=\frac{\sin^3x}{3}$$

例 6. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ヲ求メヨ。

$x=a\sin\theta$ トオケバ $dx=a\cos\theta\cdot d\theta$

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos\theta\cdot a\cos\theta\cdot d\theta=a^2\int\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)=\frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

定積分ニ於テ積分變數ノ置換ヲ行フ場合ニハ，次ノ例ノ様ニ其ノ限界モ亦變更シナケレバナラナイ。

例 7. $\int_2^3\frac{x}{1+x^2}dx$ ヲ求メヨ。

$1+x^2=t$ トオケバ $2x\,dx=dt,\ x\,dx=\frac{1}{2}dt$

又 $x=2$ ナルトキハ $t=5$, $x=3$ ナルトキハ $t=10$

$$\therefore\quad \int_2^3\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_5^{10}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}[\log t]_5^{10}=\frac{1}{2}(\log10-\log5)=\frac{1}{2}\log2$$

例 8. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ヲ求メヨ。

前例 6 ノ如ク $x=a\cos\theta$ ト置ケバ $x=0$ ノトキ $\theta=0$ デ，$x=a$ ノトキ $\theta=\frac{\pi}{2}$ デアルカラ

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

問　　題

次ノ函數ヲ置換積分法ニヨツテ積分セヨ。

24. $(3-4x)^{20}$　　25. $x(1+x^2)^4$

26. $\sqrt[3]{3x-2}$　　27. $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$

28. $\cos(ax+b)$　　**29.** $\dfrac{2}{(x-1)^2+9}$

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

30. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$.　　**31.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

32. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ ナルコトヲ證セヨ。

14.5 部分積分法

$$\frac{d}{dx}f(x)\varphi(x)=f(x)\,\varphi'(x)+f'(x)\,\varphi(x)$$

兩邊ヲ積分スレバ

$$f(x)\,\varphi(x)=\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx+\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\therefore\qquad \int \boldsymbol{f(x)\,\varphi'(x)\,dx=f(x)\,\varphi(x)-\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx} \qquad (1)$$

$\varphi'(x)=1$ デアルトキハ $\varphi(x)=x$ トナルカラ

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx=xf(x)-\int xf'(x)\,dx} \qquad (2)$$

コノ (1) 或ハ (2) ハ左邊ノ積分ヨリモ右邊ノ積分ガ簡單トナル場合ニ用フベキ公式デ，實際ニハヨク應用セラレル重要ナモノデアル。コノ公式ニ依ル方法ヲ**部分積分法** (Integration by parts) ト云フ。

(1) ヲ簡單ナ記號デ表ハセバ

$$\int \boldsymbol{uv'dx=uv-\int u'v\,dx}$$

例 1. $\int x\log x\,dx$ ヲ求メヨ。

$u=\log x,\quad u'=\dfrac{1}{x},\quad v'=x,\quad v=\dfrac{x^2}{2}$ ト考ヘレバ

$$\int x\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}$$

例 2. $\int \log x\,dx$ ヲ求メヨ。

コレハ $\varphi'(x)=1$ ナル場合デアル。

$$\therefore\qquad \int \log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\log x-x$$

例 3. $\int \sin^{-1}x\,dx$ ヲ求メヨ。

$$\int \sin^{-1}x\,dx=x\sin^{-1}x-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$$

例 4. $\int x^2e^x\,dx$ ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx&=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx\\&=x^2e^x-\left\{2xe^x-\int 2e^x\,dx\right\}\\&=x^2e^x-2xe^x+2e^x\\&=e^x(x^2-2x+2)\end{aligned}$$

定積分ノ場合ニハ，公式ハ次ノ様ニナル。

$$\int_a^b \boldsymbol{uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\,dx}$$

例 5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

問　題

次ノ函數ヲ積分セヨ。

33. $\tan^{-1}x$　　**34.** $x\sin x$

35. $x\tan^{-1}x$　　**36.** $e^{3x}\cos x$

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

37. $\displaystyle\int_1^4 x^2\log x\,dx$　　**38.** $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

14.6 部分分數分解ニ依ル積分法

例 1. $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-6}dx$ ヲ求メヨ。

$\dfrac{x+8}{x^2+x-6}=\dfrac{x+8}{(x-2)(x+3)}$，コレヲ $\dfrac{A}{x-2}$，$\dfrac{B}{x+3}$ ナル二ツノ分數ノ和ニ直スコトヲ考ヘテミヨウ。

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}$$

故ニ $A+B=1,\ 3A-2B=8$ ナラバヨイ。コレカラ $A=2,\ B=-1$ ガ出テ來ル。

$$\therefore\qquad \frac{x+8}{x^2+x-6}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}$$

$$\therefore \qquad \int\frac{x+8}{x^2+x-6}dx=2\log(x-2)-\log(x+3)$$

例 2. $\int\frac{x^3+x-2}{x(x+1)}dx$ ヲ求メヨ。

分母ノ次數ノ方ガ低イ様ナ場合ニハ帶分數ニ直シテカラ分解ヲ試ミルガヨイ。

例ヘバ
$$\frac{x^3+x-2}{x(x+1)}=\frac{x^2(x+1)-x(x+1)+2x-2}{x(x+1)}$$
$$=x-1+\frac{2x-2}{x(x+1)}$$
$$=x-1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

此ノ A, B ハ
$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}=\frac{2x-2}{x(x+1)}$$
ヨリ $A=-2,\ B=4$ ト出ル。

$$\therefore \qquad \frac{x^3+x-2}{x(x+1)}=x-1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x+1}$$

$$\therefore \qquad \int\frac{x^3+x-2}{x(x+1)}dx=\frac{x^2}{2}-x-2\log x+4\log(x+1)$$

例 3. $\int\frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx$ ヲ求メヨ。

分母ガ或因數(此ノ場合ハ $x-1$)ノ乗羃ヲ有スル場合ニハ次ノ様ニスル。

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+3}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$$

{コレハ $\frac{x^2+2}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$ ト置イテ A, B, C ヲ定メテモ同ジデアル。}

$$\therefore \qquad \int\frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx=\log(x-1)-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}$$

例 4. $\int\frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)}dx$ ヲ求メヨ。

分母ガ二次ノ因數ヲ有スル場合ニハ、次ノ様ニ置ク。

$$\frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$右邊=\frac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\therefore \qquad A+B=0,\quad B+C=1,\quad A+C=-3$$

コレヨリ
$$A=-2,\quad B=2,\quad C=-1$$

$$\therefore \qquad \int\frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)}dx=\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx$$
$$=-2\log(x+1)+\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=-2\log(x+1)+\log(x^2+1)-\tan^{-1}x$$

問　　題

次ノ諸函數ヲ積分セヨ。

39. $\frac{x}{x^2-5x+6}\left(=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\ ト置ケ\right)$

40. $\frac{x^2}{x^2+7x+12}\left(=1+\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}\ ト置ケ\right)$

41. $\frac{2x+5}{x^2+4x+4}\left(=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}\ ト置ケ\right)$

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

42. $\int_2^3\frac{1}{x(x^2+1)}dx$　　43. $\int_3^5\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$

14.7　三角函數ノ積分

例 1. $\int\sin 3x\cos 2x\,dx$ ヲ求メヨ。

公式 $\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\{\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\}$ ニヨル。

$$\int\sin 3x\cos 2x\,dx=\int\frac{1}{2}\{\sin 5x+\sin x\}dx$$
$$=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x$$
$$=-\frac{1}{10}\{\cos 5x+5\cos x\}$$

例 2. $\int\sin^2 x\,dx$ ヲ求メヨ。

公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ ニヨル。

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$$

例 3. $\int\cos^3 x\,dx$ ヲ求メヨ。

$$\int\cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int(1-u^2)du\quad [但シ\ u=\sin x]$$
$$=u-\frac{u^3}{3}$$

$\therefore \qquad \int \cos^3 x\,dx = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3}$

例 4. $\int \cos^4 x\,dx$ ヲ求メヨ。

$$\cos^4 x = \left\{\frac{1+\cos 2x}{2}\right\}^2$$
$$= \frac{1}{4}\{1+2\cos 2x+\cos^2 2x\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right\}$$

$\therefore \qquad \int \cos^4 x\,dx = \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{3}{2}x+\sin 2x+\dfrac{1}{8}\sin 4x\right\}$

例 5. $\int \tan^2 x\,dx$ ヲ求メヨ。

$u=\tan x$ ト置ケバ $\dfrac{du}{dx}=\sec^2 x = 1+u^2$

$\therefore \qquad \int \tan^2 x\,dx = \int \dfrac{u^2\,du}{1+u^2}$
$$= \int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du$$
$$= u-\tan^{-1}u$$
$$= \tan x - x$$

又ハ $\qquad \int \tan^2 x\,dx = \int(\sec^2 x - 1)dx$
$$= \tan x - x$$

問　　題

次ノ函數ヲ積分セヨ。

44. $\sin 3x\cos 4x$　　**45.** $\sin 3x\sin x$

46. $\sin^5 x$　　**47.** $\sin x\cos^2 x$

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

48. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\cos 2x\,dx$　　**49.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,d\theta$

欠

欠

問　題

3. 次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ。

(*a*) $x^2+6x+10$　　(*b*) $3+2x-4x^2$

(*c*) $x-x^3$

4. 次ノ函數ノ極値ニ對スル x ヲ求メヨ。

(*a*) $2x^3-x^2-4x+5$　　(*b*) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$

(*c*) $\dfrac{x^2-4x+9}{x^2+4x+9}$

5. 一定ノ面積ヲ有スル矩形ノ内ニテ周圍ノ最小ナルモノヲ決定セヨ。

6. 一定ノ長サノ角梁ノ強度ハ厚サノ平方ト幅トニ比例スルト云フ。直徑 d 糎ノ圓柱ヨリ切取リ得ベキ最強角梁ノ幅ヲ求メヨ。

7. 一邊ノ長サ 1 米ノ正方形ノぼーる紙ガアル。其ノ四隅ヨリ正方形ヲ切取リ，之ヲ折曲ゲテ箱ニ作ルモノトシテ箱ノ體積ヲ最大ニスルタメニ切取ルベキ正方形ノ邊ノ長サヲ求メヨ。

8. 金屬板ニテ一定容積ノ圓筒形ノ蓋ノ無イ水槽ヲ作リ，其ノ表面積ヲ最小ニスルニハ高サ H ト底ノ直徑 D ヲ如何ナル關係ニシタラヨイカ。

第十六章

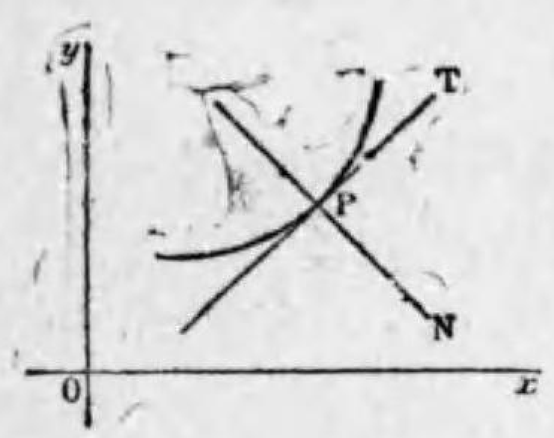
平面曲線ヘノ應用

16.1 切線及ビ法線ノ方程式

點 $P(x_1, y_1)$ ヲ通リ角係數 m ナル直線ノ方程式ハ，解析幾何學ニ於テ既ニ學ンダヤウニ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

デアリ，切線ノ角係數ハ第十三章ニ於テ述ベタヤウニ，切點ニ於ケル微係數デアル。



故ニ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1) \qquad \cdots(1)$$

デアル。

切點 P ニ於テ切線 PT ト直交スル直線 PN 卽チ P 點ニ於ケル法線ノ方程式ハ，角係數 m ナル直線ト直交スル直線ノ角係數ハ $-\dfrac{1}{m}$ デアルカラ

$$y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1) \qquad \cdots(2)$$

例 1. 曲線 $y=x^3$ 上ノ $x=1$ ナル點ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ。

$y'=3x^2$ デアルカラ，$x=1$ ニ於ケル切線ノ角係數ハ 3 デアル。故ニ求メル切線ノ方程式ハ

$$y-1=3(x-1)$$

卽チ

$$y=3x-2$$

デアル。又法線ノ方程式ハ

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$$

卽チ

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

デアル。

例 2. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ。

與ヘラレタ方程式ヲ x ニツイテ微分スレバ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0, \qquad \therefore\ y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

依ツテ P 點ニ於ケル切線ノ角係數ハ $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ デアル。從ツテ切線ノ方程式ハ

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

コレヲ整頓スレバ，

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

デアルカラ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

又法線ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

コレヲ整頓スレバ

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$$

問　　題

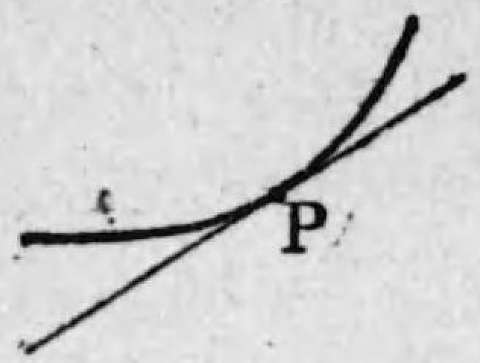
1. 曲線 $y=2x^2+3x+4$ 上ノ點 (1, 9) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

2. 拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ。

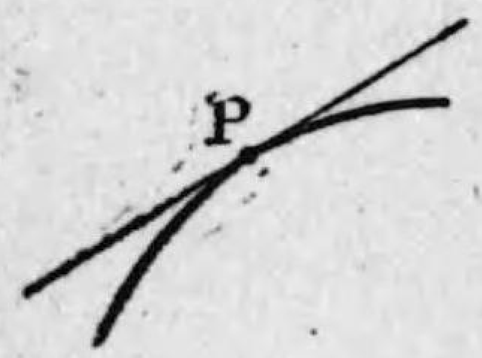
3. 二ツノ圓 $x^2+y^2-4x=1$, $x^2+y^2-2y=9$ ノ交點ニ於テ各圓ニ引イタ切線ノ交角ハ 45° ナルコトヲ證明セヨ。

4.　曲線 $y(1+x^2)=x$ ノ原點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

16. 2　曲線ノ凹凸及ビ反曲點

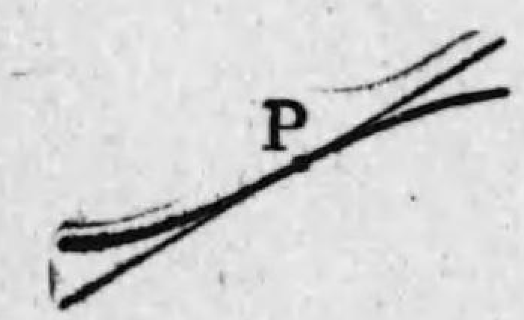


曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 P ノ近傍ニ於テ，曲線ガ P 點ニ於ケル切線ノ上方ニアルトキ，曲線ハ P 點ニ於テ**上方ニ凹** (Concave upwards), 或ハ下方ニ凸 (Convex downwards) デアルト云ハレル。



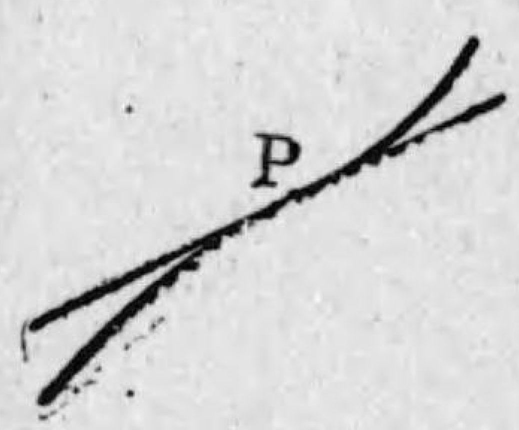
之ニ反シテ P 點ノ近傍ニ於テ，曲線ガ切線ノ下方ニアルトキハ，曲線ハ P 點ニ於テ**上方ニ凸** (Convex upwards), 或ハ下方ニ凹 (Concave downwards) デアルト云ハレル。

又左圖ノ如ク，曲線ノ凹凸狀態ガ P 點ヲ境トシテ異ツテキルナラバ，點 P ヲ**反曲點**又ハ**變曲點** (Point of inflection) ト云フ。



曲線ガ P 點ニ於テ上方ニ凹ナルトキハ，P 點ノ附近ニ於テ切線ノ角係數 $f'(x)$ ハ x ノ値ト共ニ增大スルカラ $f''(x)>0$ デアル。

同樣ニ上方ニ凸ナルトキハ $f''(x)<0$ デアル。



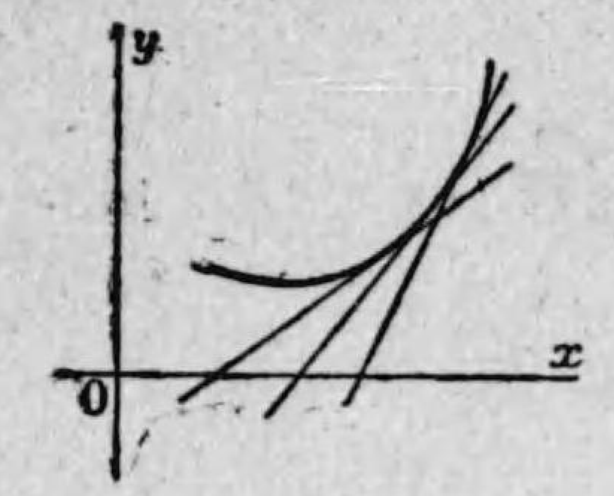
故ニ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 P ニ於ケル凹凸狀態ヲ判定スルニハ，P ニ於ケル $f''(x)$ ノ符號ヲ調ベテ

$f''(x)>0$　ナラバ　上方ニ凹

$f''(x)<0$　ナレバ　上方ニ凸

トスレバヨイ。

以下單ニ凹（若シクハ凸）トアレバ，「上方ニ」ガ略サレテキルモノトスル。



次ニ反曲點ニ於テハ角係數 $f'(x)$ ハ，ソノ點ヲ境トシテ增大ヨリ減少ニ，又ハ減少ヨリ增大ニ變化スルカラ，$f'(x)$ ハ反曲點ニ於テ極大又ハ極小トナル。從ツテ反曲點ニ於テハ $f''(x)=0$ デアル。

故ニ**反曲點ヲ求メルニハ $f''(x)=0$ ナル方程式ヲ解キ，ソノ根ノ中 $f'''(x)\neq 0$ ヲ滿足スルモノヲ取レバヨイ。**

若シ $f'''(x)=0$ ナラバ更ニ吟味ヲ要スル。

例 1.　曲線 $y=x^3-3x^2-9x+9$ ノ極大點，極小點，反曲點及ビ凹凸ノ限界ヲ求メヨ。

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+9$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$

$$f''(x)=6x-6=6(x-1),$$

$f'(-1)=0$,　$f''(-1)<0$　ナル故　$(-1,\ 14)$　ハ極大點，

$f'(3)=0$,　$f''(3)>0$　ナル故　$(3,\ -18)$　ハ極小點，

$f''(1)=0$,　$f'''(1)\neq 0$　ナル故　$(1,\ -2)$　ハ反曲點，

$x>1$　ナラバ　$f''(x)>0$　デ曲線ハ凹，

$x<1$　ナラバ　$f''(x)<0$　デ曲線ハ凸。

例 2.　曲線　$y=3x^4-4x^3+1$ ノ略圖ヲ畫ケ。

$$y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$$y''=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$y'''=72x-24=72\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

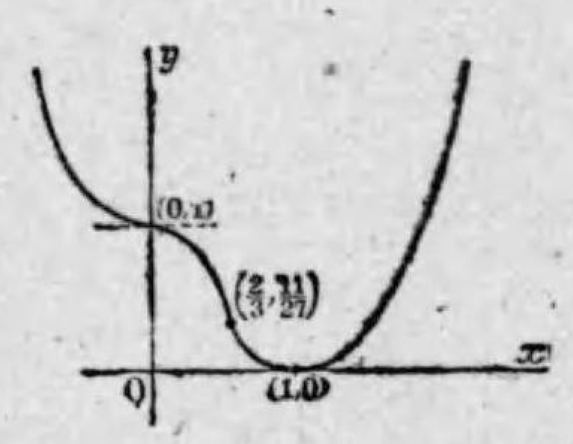
故ニ曲線ノ上リ，下リハ

x	……	0	……	1	……
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	1	↘	0	↗

又曲線ノ凹凸ハ

x	……	0	……	$\frac{2}{3}$	……
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹

故ニ次ノ圖ヲ得ル。



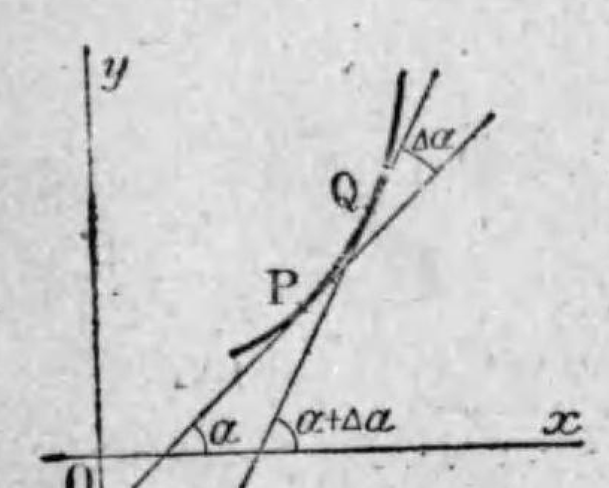
問　題

次ノ曲線ノ凹凸ノ限界及ビ反曲點ヲ求メ，然ル後ニソノ略圖ヲ畫ケ。

5. $y=x^3$　　　**6.** $y=x^3-6x^2+8$

7. $y=\sin x$

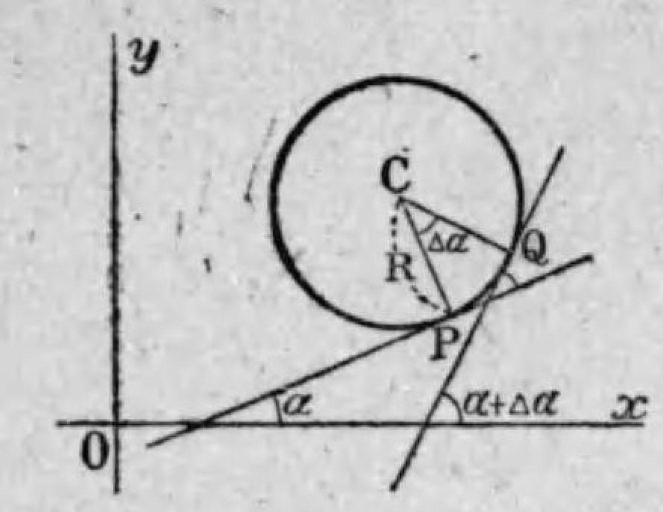
16.3 曲率



曲線上ノ接近シタ二點 P, Q ニ於ケル切線ノナス角 $\Delta\alpha$ ト弧ノ長サ $\widehat{PQ}=\Delta s$ トノ比 $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ ノ絕對値ヲ弧 PQ ノ**平均曲率** (Average curvature) ト云ヒ，

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

ヲ P 點ニ於ケル**曲率** (Curvature) ト云フ。



コレニ依ッテ曲線ノ曲リ方ノ程度ヲ測ルノデアル。

例　半徑 R ナル圓ノ曲率ヲ求メヨ。

$$\Delta s=\widehat{PQ}=R\cdot\Delta\alpha$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R}$$

卽チ圓ノ曲率ハ半徑ノ逆數ニ等シク到ル處同一デアル。

サテ $\tan\alpha=y'$, $\alpha=\tan^{-1}y'$ デアルカラ $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{y''}{1+y'^2}$

又弧 PQ ガ微小ナラバ $\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ト考ヘテヨイカラ

$$\frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2}$$

從ッテ曲率ハ次ノヤウニナル。

$$\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\left|\frac{\dfrac{d\alpha}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}\right|=\left|\frac{y''}{\{1+y'^2\}^{\frac{3}{2}}}\right|$$

今此ノ曲率ノ逆數ヲ R トシ，卽チ

$$R=\left|\frac{\{1+y'^2\}^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$$

トシテ，中心ヲ P 點ニ於ケル法線上曲線ノ凹側ニ持ッ半徑 R ノ圓ヲ考ヘレバ，此ノ圓ハ P 點ニ於テ曲線ト同一ノ切線，等シイ曲率ヲ持チ，凹凸狀態ヲ同ジクシテヰル。

故ニ曲線ノ微小弧ハ此ノ圓ノ微小弧ト殆ド一致シテヰルモノト考ヘテ差支ヘナイ。

此ノ圓ヲ**曲率圓** (Circle of curvature) 又ハ**切觸圓** (Osculating circle), 其ノ中心ヲ**曲率中心** (Center of curvature), 其ノ半徑 R ヲ**曲率半徑** (Radius of curvature) ト云フ。

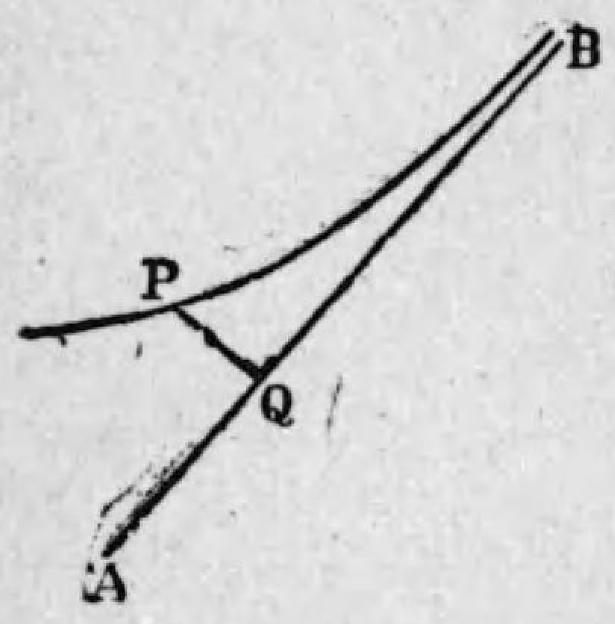
問　　題

次ノ諸曲線ノ夫々附記シテアル點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ。

8. $xy=12$, $(3,\ 4)$　　　**9.** $y=\frac{1}{3}x^3$, $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$

10. $y=2x+4x^2+6x^3$, $(0,\ 0)$

16.4　漸近線



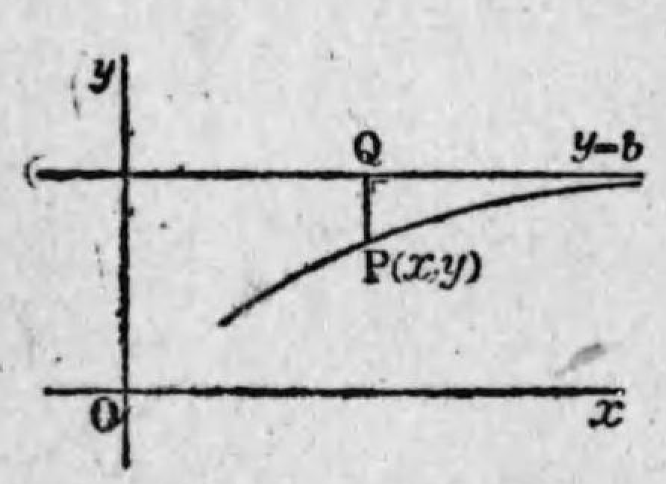
曲線　　$f(x,\ y)=0$　　(1)

ノ一部ガ無限ニ延長シテヰルトキ，ソノ一部ヲ**無限枝** (Infinite branch) ト云フ。無限枝上ノ一點 P カラ定直線 AB ニ下シタ垂線 PQ ノ長サガ，P ガ無限遠ニ進ムニ從ツテ限リナク減少スルトキ，卽チ

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{PQ}=0 \quad 又ハ \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{PQ}=0 \qquad (2)$$

トナルトキ直線 AB ヲ曲線 (1) ノ**漸近線** (Asymptote) ト云フ。$\lim\limits_{y\to\infty} \mathrm{PQ}=0$ 又ハ $\lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{PQ}=0$ トナルトキモ同様デアル。

[1]　座標軸ニ平行ナル漸近線

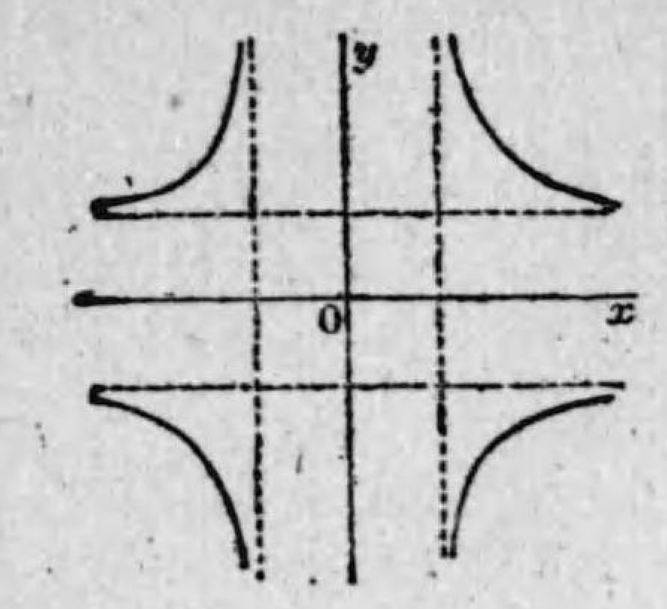


$x\to\infty$ 又ハ $x\to-\infty$ ナルトキ $y\to b$ トナレバ $y=b$ ハ漸近線デアル。

同様ニ $y\to\infty$ マタハ $y\to-\infty$ トナルトキ $x\to a$ トナレバ $x=a$ ハ漸近線デアル。

例 1. $x^2y^2-a^2(x^2+y^2)=0$,　$(a\neq0)$ ノ座標軸ニ平行ナル漸近線ヲ求メヨ。

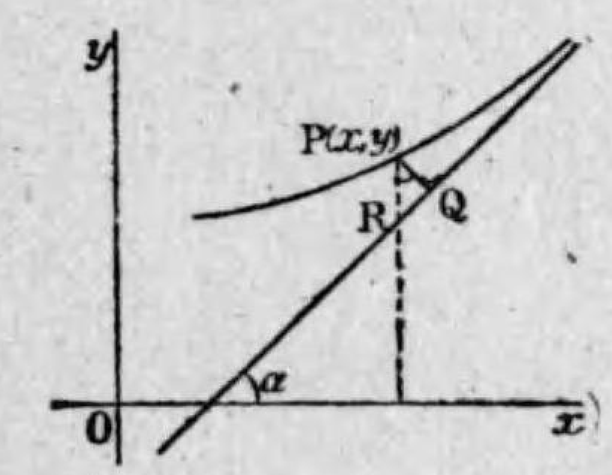
$$y^2=\frac{a^2}{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$$



デアルカラ，$x\to\pm\infty$ ノトキ $y\to\pm a$，故ニ $y=a$ 及ビ $y=-a$ ハ漸近線デアル。

同様ニシテ $x=a$ 及ビ $x=-a$ モ漸近線デアル。

[2]　座標軸ニ平行デナイ漸近線



$$y=f(x) \qquad (1)$$

ノ $x\to\infty$ トナルトキノ漸近線ヲ

$$y=mx+b \qquad (2)$$

トスレバ

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{PR}=\lim_{x\to\infty} \mathrm{PQ}\cdot\sec\alpha=0$$

ナル故

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-mx-b\}=0 \qquad (3)$$

或ハ

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right\}=0$$

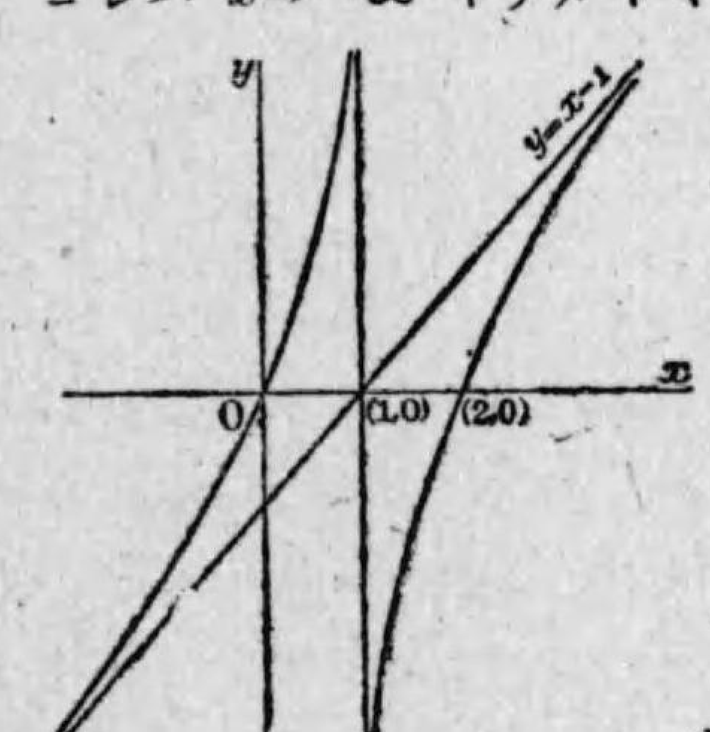
$$\therefore \qquad \boldsymbol{m}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad 或ハ \quad \boldsymbol{m}=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} \qquad (4)$$

又截片 b ハ (4) ニヨツテ定メラレタ m ヲ使ツテ (3) カラ

$$\boldsymbol{b}=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-mx\} \quad 或ハ \quad \boldsymbol{b}=\lim_{x\to\infty}(y-mx) \qquad (5)$$

(1) ガ漸近線ヲ持テバ，ソレハ (4) ト (5) カラ求メラレル。

コレハ $x\to-\infty$ トナルトキニ就イテモ同様デアル。



例 2. $y=\dfrac{x(x-2)}{x-1}$ ノ漸近線ヲ求メヨ。

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x-1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{x(x-2)}{x-1}-x\right\}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x-1}=-1$$

故ニ $y=x-1$ ガ座標軸ニ平行デナイ漸近線デアル。

又 $\lim\limits_{x\to1} y=\pm\infty$ デアルカラ $x=1$ ガ y 軸ニ平行ナル漸近線デアル。

16. 5 代數曲線ノ漸近線

$f(x, y)$ ヲ x 及ビ y ニ關スル多項式トスル。サテ曲線

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

ト直線

$$y=mx+b \tag{2}$$

トノ交點ノ x 座標ハ

$$f(x, mx+b)=0 \tag{3}$$

ヲ解ケバ得ルコトガ出來ル。

若シモ (2) ガ (1) ノ切線ナラバ (3) ハ等根ヲ持ツ筈デアル。然ルニ漸近線ハ無限遠ニ於ケル切線ト考ヘルコトガ出來ルカラ, (2) ガ (1) ノ漸近線ナラバ (3) ハ無限大ノ根ヲ二ツ持タナケレバナラナイ。

サテ (3) ヲ x ノ降冪ノ順ニ整頓シタモノヲ

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-1}x+A_n=0$$

トシ, コノ式ニ於テ $x=\dfrac{1}{z}$ ト置イテ分母ヲ拂ヘバ

$$A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots\cdots+A_{n-1}z^{n-1}+A_nz^n=0 \tag{4}$$

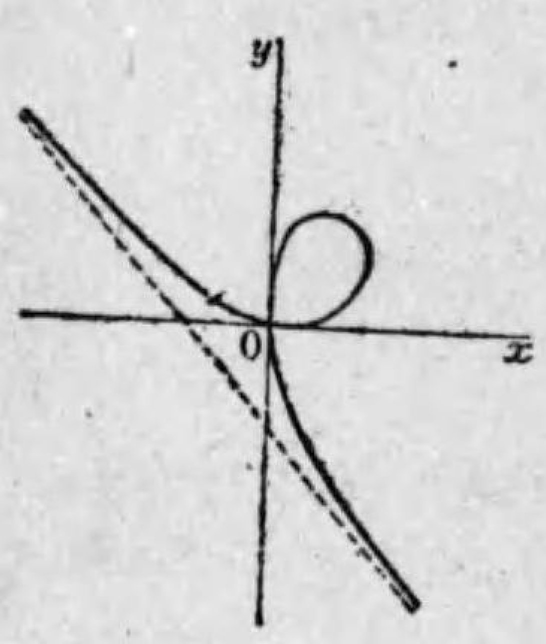
ヲ得ル。コヽニ $A_0, A_1, A_2,\cdots\cdots$ 等ハ m ト b トノ函數デアル。

而シテ $x\to\pm\infty$ ハ $z\to 0$ ヲ意味スルカラ, (3) ガ無限大ノ根ヲ二ツ持ツコトハ, (4) ガ 0 ナル根ヲ二ツ持ツコトニ當ル。

故ニ (2) ガ (1) ノ漸近線ナラバ

$$A_0=0 \tag{5}$$

$$A_1=0 \tag{6}$$



從ツテ (5) ト (6) カラ m ト b トヲ決定シテ, y 軸ニ平行デナイ漸近線ヲ求メルコトガ出來ル。

例 3. $x^3+y^3-3axy=0$ ノ漸近線ヲ求メヨ。$(a>0)$。

$y=mx+b$ ヲ與ヘラレタ式ニ代入スレバ

$$x^3+(mx+b)^3-3ax(mx+b)=0$$

$$(1+m^3)x^3+3m(bm-a)x^2+\cdots\cdots=0$$

故ニ $A_0=1+m^3=0$, $A_1=3m(bm-a)=0$ カラ $m=-1$, $b=-a$ ガ得ラレル。

從ツテ漸近線ハ $x+y+a=0$ デアル。

問 題

次ノ諸曲線ノ漸近線ヲ求メヨ。

11. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　**12.** $xy-x=2$

13. $x^2y=4a^2(2a-y)$　　**14.** $y^2(a-x)=x^3$

15. $y^3=6x^2+x^3$

16. 6 曲線ノ追跡

曲線ノ方程式ガ與ヘラレタトキ, 其ノ曲線ヲ圖示スルコトヲ**曲線ノ追跡** (Curve tracing) ト云フ。

曲線ヲ追跡ショウトスル場合ニハ, 次ノ諸點ニ就イテ調ベルノガ普通デアル。

[1] **存在區域**　例ヘバ x ノ値ニ關係ナク常ニ y ガ正ナラバ曲線ハ x 軸ノ上方ニ在ル。マタ x ガ負ノ値ヲ取リ得ヌナラバ y 軸ノ左側ニハ曲線ガナイ。斯様ニ曲線ノ存在區域ヲ定メテ, 調ベル範圍ヲ狹クスルノガ便利デアル。

[2] **座標軸トノ交點**　$x=0$ トオケバ y 軸トノ交點ガ求マリ, $y=0$ トオケバ x 軸トノ交點ガ求マル。

[3] **對稱ノ有無**　曲線ノ方程式ニ於テ, x ノ代リニ $-x$ ト置イテモ不變ナルトキハ曲線ハ y 軸ニ關シテ對稱デアッテ, y ノ代リニ $-y$ ト置イテモ不變ナルトキハ x 軸ニ關シテ對稱デアル。

[4] **上リ, 下リ**

$y'>0$ ナルトキハ曲線ハ右上リデアリ,

$y'<0$ ナルトキハ曲線ハ右下リデアル。

[5]　凹凸

$y''>0$　ナルトキハ曲線ハ凹デアリ,

$y''<0$　ナルトキハ曲線ハ凸デアル。

[6]　極大點, 極小點, 反曲點

[7]　漸近線

上ニ示シタノハ一般的要目デアツテ, 特殊ノ問題ニツイテハ適宜調査ヲ省略シタリ, マタハ上記以外ノ事ヲ調ベタリスルコトモアル。

例　$(x-1)^2y=x$　ナル曲線ヲ追跡セヨ。

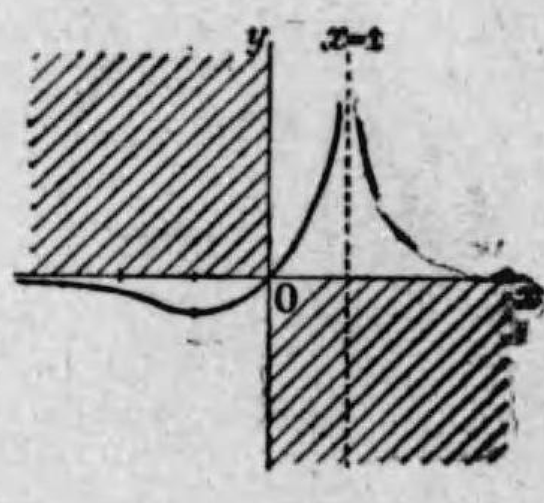
與ヘラレタ式ヲ見ルト, x ト y トハ同符號デナケレバナラヌコトガ解ル。即チ曲線ハ第二象限ト第四象限トニハ存在シ得ナイ。

又座標軸トノ交點ハ原點ダケデアル。

次ニ上リ, 下リヲ調ベヨウ。

$$y=\frac{x}{(x-1)^2},\qquad y'=-\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

x	……	-1	……	1	……
y'	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$
y	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$	↘



又 $y''=\dfrac{2(x+2)}{(x-1)^4}$ デアルカラ, $x>-2$ ニテ凹, $x<-2$ ニテ凸, 從ツテ $x=-2$ ハ反曲點デアル。

ナホ $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$ デアルカラ; 二直線 $x=1$, $y=0$ ハ何レモ漸近線デアル。

問　　題

次ノ諸曲線ヲ追跡セヨ。

16.　$y=x^3-1$　　　**17.**　$y^3=x^3-3x^2+2$

18.　$y^2=\dfrac{x^3}{a-x}$,　$(a>0)$　　　**19.**　$y^2=\dfrac{4-x}{x}$

第十七章

函　數　ノ　展　開

17.1　ろーるノ定理

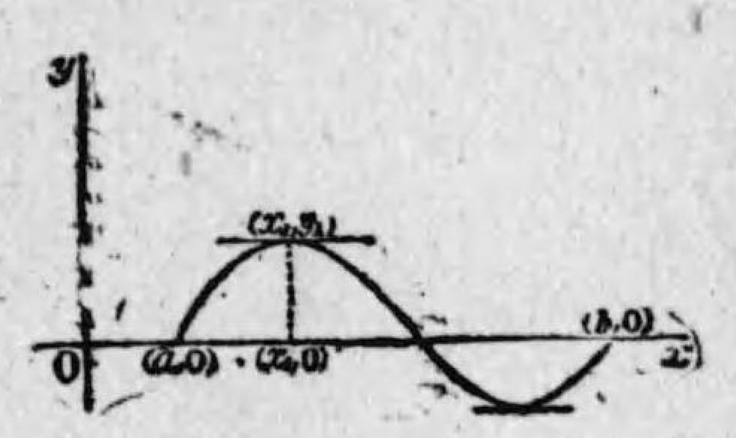
$f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ區間 $a\leqq x\leqq b$ ニ於テ單値連續デ

$$f(a)=0,\quad f(b)=0$$

ナラバ, $f'(x)=0$ ノ根ガ, 少クトモ一ツ a ト b トノ中間ニ存在スル。

此ノ定理ヲ**ろーるノ定理** (Rolle's theorem) ト云フ。

證明　x ノ値ガ a カラ b マデ連續的ニ變ルトキ, $f(x)$ ノ値ガ 0 ニ始ツテ 0 ニ終ルノデアルカラ, $f(x)$ ハ恒ニ 0 デアルカ, サモナケレバ何回カノ增減ヲ經ル譯デアル。



故ニ $f'(x)$ ハ恒ニ 0 デアルカ, サモナケレバ正トモナリ, 又負トモナル。然ルニ $f'(x)$ ハ連續デアルカラ, 正負ノ境ニ於テハ 0 トナラナケレバナラヌ。從ツテ $f'(x)=0$ ノ根ガ少クトモ一ツ a ト b トノ中間ニ存在スル。

此ノ定理ノ結論ヲ簡單ニ次ノ如ク書ク。

$$f'(x_1)=0,\quad a<x_1<b$$

17.2　平均値ノ定理

$f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ區間 $a\leqq x\leqq b$ ニ於テ單値連續ナラバ

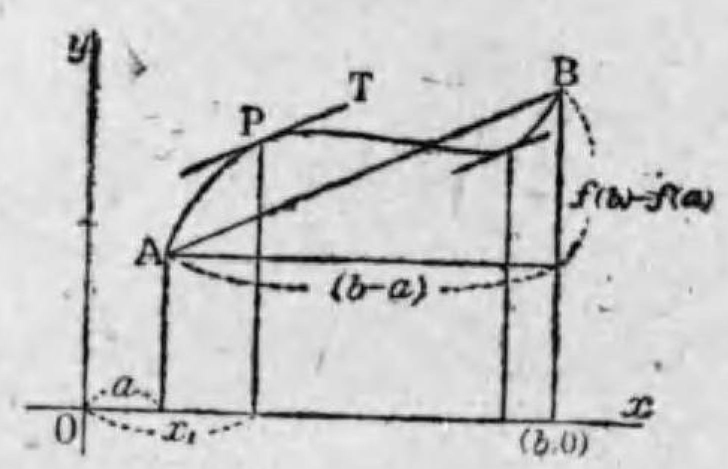
$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1),\quad a<x_1<b$$

ヲ滿足サセル x_1 ノ値ガ少クトモ一ツハ存在スル。

之ヲ**平均値ノ定理** (Theorem of the mean value) ト云フ。

證明
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k \qquad (1)$$
ト置ケバ
$$f(b)-f(a)-k(b-a)=0 \qquad (2)$$
(2) ノ左邊ノ a ヲ x ニ代ヘテ作ツタ函數
$$F(x)=f(b)-f(x)-k(b-x)$$
ヲ考ヘレバ

ロールの定理の仮設
$$\left.\begin{aligned}F(a)&=f(b)-f(a)-k(b-a)=0 \qquad [(2)\ ニ依ル]\\ F(b)&=f(b)-f(b)-k(b-b)=0\end{aligned}\right.$$
$$F'(x)=-f'(x)+k$$
玆ニ於テ $F(x)$ ニろーるノ定理ヲ適用スレバ
$$F'(x_1)=-f'(x_1)+k=0, \quad a<x_1<b$$
卽チ
$$k=f'(x_1), \quad a<x_1<b \qquad (3)$$
ヲ成立サセル x_1 ノ値ガ少クトモ一ツ存在スルコトヽナル。然ルニ (1) ヲ見レバ
$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
デアルカラ，之ヲ (3) ニ代入シテ變形シテ見レバ
$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1),$$
$$a<x_1<b \qquad (4)$$



ヲ成立サセル x_1 ノ値ガ少クトモ一ツ存在スルコトガ判ル。

此ノ定理ヲ上圖ニ就イテ考ヘテ見レバ，$f(x)$ ト $f'(x)$ トガ連續ナラバ，弧 AB 上ニ弦 AB ニ平行ナル切線ヲ持ツ點 P ガ必ズ存在スル，ト云フコトデアル。

偖 $b=a+h$, $x_1=a+\theta h$, $0<\theta<1$ ト置ケバ (4) ハ
$$\boldsymbol{f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h), \quad 0<\theta<1} \qquad (5)$$
ト書クコトガ出來ル。

17. 3　平均値ノ擴張定理

平均値ノ定理ヲ擴張スレバ
$$\boldsymbol{f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h), \quad 0<\theta<1} \qquad (6)$$
ナルコト及ビ一般ニ
$$\boldsymbol{f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots\cdots}$$
$$\boldsymbol{\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1} \qquad (7)$$
ナルコトヲ證明スルコトガ出來ル。之ヲ**平均値ノ擴張定理** (Expanded theorem of the mean value) ト云フ。

17. 4　函數ノ近似値

前節ノ (6) ニ依レバ
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h), \quad 0<\theta<1$$
デアルカラ，h ガ小ナラバ
$$\boldsymbol{f(a+h)\doteqdot f(a)+hf'(a)}$$
トシテ良イ。

又若シ是ニテ精密度ガ不充分ナラバ
$$\boldsymbol{f(a+h)\doteqdot f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)}$$
トシテ計算スルガ良イ。

例 1. $\sin 31°$ ノ近似値ヲ求メヨ。

$f(x)=\sin x$ トスレバ $f'(x)=\cos x$ デアルカラ
$$f(a+h)\doteqdot f(a)+hf'(a)$$
ハ
$$\sin(a+h)\doteqdot \sin a+h\cos a$$
トナル。

故ニ
$$\sin 31°=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\doteqdot \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}$$

即チ
$$\sin 31^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3.14159}{180} \times \frac{1.73205}{2} = 0.51511$$

但シ實際ノ値ハ 0.51504 デアル。

例 2. $\log_{10}1003$ ヲ小數第 5 位マデ求メヨ。(但シ $\log_{10} e = 0.43429$)

$f(x) = \log x$ トスレバ $f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

デアルカラ
$$\log(a+h) \doteqdot \log a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{a^2}$$

此ノ兩邊ニ $\log_{10}e$ ヲ乘ズレバ
$$\log_{10}(a+h) \doteqdot \log_{10}a + \frac{h \log_{10}e}{a} - \frac{h^2 \log_{10}e}{2a^2}$$

從ツテ
$$\log_{10}1003 = \log_{10}1000 + \frac{3 \times 0.43429}{1000} - \frac{3^2 \times 0.43429}{2 \times 1000^2} \cdots\cdots$$
$$= 3 + 0.001302 - 0.000002 + \cdots\cdots$$

デアル。故ニ小數第 5 位マデ採ツテ
$$\log_{10}1003 = 3.00130$$

問　題

1. $(a+h)^4 \doteqdot a^4 + 4ha^3$ ヲ用ヒテ 4.003^4 ノ近似値ヲ求メヨ。
2. $\log 100 = 4.60517$ ヲ知ツテ $\log 101$ ノ近似値ヲ求メヨ。
3. $\cos 30^\circ 20'$ ノ近似値ヲ求メヨ。
4. $\log_{10}1005$ ノ近似値ヲ求メヨ。(但シ $\log_{10}e = 0.43429$)

17.5 てーらーノ定理及ビまくろーりんノ定理

平均値ノ擴張定理ニ於テ $a+h=x$ ト置ケバ
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta\overline{x-a}), \quad 0<\theta<1$$

ヲ得ル。

此ノ右邊ノ末項ガ $n \to \infty$ ナラシメタトキ 0 ニ收斂スルナラバ, 右邊ヲ無限羃級數 (Infinite power series) ニシテ

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots\cdots \quad (1)$$

トナシ得ルコトヲ證明スルコトガ出來ル。此の (1) ヲ**てーらーノ定理** (Taylor's theorem) ト云フ。

てーらーノ定理ニ於テ特ニ $a=0$ ト置ケバ
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots\cdots \quad (2)$$

ヲ得ル。此ノ (2) ガ**まくろーりんノ定理** (Maclaurin's theorem) デアル。

$f(x)$ ガ x ノ羃級數ニ展開シ得ルモノトスレバまくろーりんノ定理ハ次ノ如クシテモ求メルコトガ出來ル。今
$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \cdots\cdots \quad (3)$$

ト置ケバ
$$f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \cdots\cdots \quad (4)$$
$$f''(x) = 1\cdot 2A_2 + 2\cdot 3A_3x + 3\cdot 4A_4x^2 + \cdots\cdots \quad (5)$$
$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3A_3 + 2\cdot 3\cdot 4A_4x + \cdots\cdots \quad (6)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以上ノ各式ニ於テ夫々 $x=0$ ト置ケバ

(3) ヨリ　$A_0 = f(0)$

(4) ヨリ　$A_1 = f'(0)$

(5) ヨリ　$A_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

(6) ヨリ　$A_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\therefore \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$$

$f(x)$ ヲ無限羃級數ニテ表スコトヲ $f(x)$ ヲ**展開スル**ト云フ。

例 1. e^x ヲ展開セヨ。

$f(x)=e^x$ トスレバ

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots\cdots=e^x$$

∴
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots\cdots=1$$

故ニ
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

例 2. $\sin x$ 及ビ $\cos x$ ヲ展開セヨ。

$f(x)=\sin x$ トスレバ

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x,\quad \cdots\cdots$$

從ッテ
$$f(0)=f''(0)=f^{(4)}(0)=\cdots\cdots=0$$
$$f'(0)=f^{(5)}(0)=f^{(9)}(0)=\cdots\cdots=1$$
$$f'''(0)=f^{(7)}(0)=f^{(11)}(0)=\cdots\cdots=-1$$

故ニ
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

同様ニシテ
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

例 3. $\sin 5^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

$$\sin 5^\circ=\sin\frac{5\pi}{180}=\frac{5\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$=0.087266-0.000111+\cdots\cdots$$
$$=0.087155\quad(\text{實際ノ値}=0.087156)$$

問　　題

5. a^x ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ。

6. $\sin^2 x$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ。

*7. $\cos 5^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

*8. $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\cdots\cdots$ ナルコトヲ示セ。

17.6 $(1+x)^n$ ノ展開

$f(x)=(1+x)^n$ トスレバ

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1},\quad f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$$
$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

∴
$$f(0)=1,\quad f'(0)=n,\quad f''(0)=n(n-1)$$
$$f'''(0)=n(n-1)(n-2),\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

從ッテ
$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots \qquad (1)$$

是ハ 10.8 ノ二項定理ノ擴張デ，此ノ場合ノ n ハ正ノ整數ニハ限ラレテヰナイ。(1) ノ右邊ノ級數ハ**二項級數** (Binomial series) ト呼バレルモノデアル。

偖，玆ニ注意ヲ要スルノハまくろーりんノ展開ナルモノハ或條件ノ下ニ可能デアルコトデアル。然シ此ノ或條件ノ吟味ハ非常ニ繁雜デアルカラ，此所ニハ吟味ノ結論ダケヲ述ベルコトニスル。

e^x, $\sin x$, $\cos x$ 等ノ展開ハ無條件ニ可能デアルガ，$(1+x)^n$ ノ展開ハ $|x|<1$ ナルトキニ可能デアル。

例 1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ヲ第四項マデ x ノ冪級數ニ展開セヨ。

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot2}(-x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}(-x)^3+\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots\cdots$$

例 2. $\sqrt[3]{976}$ ヲ小數第五位マデ計算セヨ。

$$(1000-24)^{\frac{1}{3}}=10\left(1-\frac{24}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=10\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{1000}-\frac{1}{9}\left(\frac{24}{1000}\right)^2-\cdots\cdots\right\}$$
$$=10(1-0.008-0.000064-\cdots\cdots)$$
$$=9.91936\quad[\text{實際ノ値}=9.91935]$$

問　　題

次ノ近似値ヲ求メヨ。

9. $\sqrt[3]{384}$　　**10.** $\dfrac{357}{0.99952}$

11. $\sqrt[3]{1024}$　　**12.** $\sqrt{2}=\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{50}{49}}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{630^3}}$

17.7　log (1+x) ノ展開

$f(x)=\log(1+x)$ トスレバ

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}(x)=\frac{4!}{(1+x)^5},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore$
$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1,\quad f'''(0)=2!$$
$$f^{(4)}(0)=-3!,\ f^{(5)}(0)=4!,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

(但シ　$-1<x\leqq 1$)

例 1. $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ。($|x|<1$)

(1) ニ於テ x ノ代リニ $-x$ ト置ケバ

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots \tag{2}$$

(1) カラ (2) ヲ引ケバ

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots\right) \tag{3}$$

(3) ニ於テ $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{n+1}{n}$ ト置ケバ $x=\dfrac{1}{2n+1}$ トナリ，次ノ式ヲ得ル。

$$\log\frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\cdots\right\} \tag{4}$$

例 2. $\log_{10}2$, $\log_{10}3$ ヲ計算セヨ。($\log_{10}e=0.4342945$)

(4) カラ

$$\log(n+1)=\log n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$n=1$ トシテ第七項マデ採ッテ計算スレバ

$$\log 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^3}+\frac{1}{5\times 3^5}+\cdots\cdots+\frac{1}{13\times 3^{13}}+\cdots\cdots\right\}$$
$$=0.6931472$$

$n=2$ トシテ第五項マデ採ッテ計算スレバ

$$\log 3=\log 2+2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}+\frac{1}{7\times 5^7}+\frac{1}{9\times 5^9}+\cdots\cdots\right\}$$
$$=1.0986123$$

$\therefore$
$$\log_{10}2=\log_{10}e\times\log 2=0.3010300$$
$$\log_{10}3=\log_{10}e\times\log 3=0.4771213$$

17.8　特別ナル展開ノ例

$\sin^{-1}x$ ヲ冪級數ニ展開出來ルモノトシテ

$$\sin^{-1}x=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

ト置キ，此ノ兩邊ヲ微分スレバ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+5A_5x^4+\cdots\cdots\cdots \tag{2}$$

此ノ左邊ハ二項定理ニ依ッテ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\cdots\cdots \tag{3}$$

(1) ニ於テ $x=0$ ト置ケバ　$A_0=0$

(2) ト (3) ノ等冪項ノ係數ヲ比較スレバ

$$A_2=A_4=A_6=\cdots\cdots=0$$

$$A_1=1,\quad A_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\quad A_5=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore$
$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots \tag{4}$$

例 (4) 式ヲ用ヒテ π ヲ計算セヨ。

$x=\dfrac{1}{2}$ ト置ケバ

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\times 2^5}+\cdots\cdots\cdots$$

第五項マデヲ採ツテ計算スレバ

$$\pi = 3.14159$$

問題

14. $\tan^{-1}x$ ヲ第三項マデ展開セヨ。

15. $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$ ヲ用ヒテ π ノ近似値ヲ計算セヨ。

第十八章

不定形

18.1 不定形

x ノ函數 $F(x)$ ガ $x=a$ ナルトキニ

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\times\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad 1^\infty$$

ノ如キ形ヲ取ルコトガアル。此ノ場合 $F(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ**不定形** (Indeterminate form) デアルト云フ。

例ヘバ $\frac{\sin x}{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ $\frac{0}{0}$ ナル不定形トナリ，$\frac{x^2-4}{x-2}$ ハ $x=2$ ニ於テ $\frac{0}{0}$ ナル不定形トナル。

又 $x^{\frac{1}{1-x}}$ ハ $x=1$ ニ於テ 1^∞ ナル不定形トナル。

本章ノ各節ニ於テ $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ ナル極限値ヲ求メルコトニ就イテ論述スル。

18.2 $\frac{0}{0}$ ナル不定形

$f(x)$, $\varphi(x)$ 及ビ其ノ微係數 $f'(x)$, $\varphi'(x)$ ガ總テ連續デ $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 及ビ $\lim\limits_{x\to a} \varphi'(x)$ ガ同時ニ 0 デナケレバ $f(a)=\varphi(a)=0$ ナルトキ，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

證明

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a)+hf'(a+\theta h)}{\varphi(a)+h\varphi'(a+\theta_1 h)},\quad \left\{\begin{matrix}0<\theta<1\\0<\theta_1<1\end{matrix}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta_1 h)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

若シ $f(a)=f'(a)=0$, $\varphi(a)=\varphi'(a)=0$ デ $\lim\limits_{x\to a} f''(x)$ 及ビ $\lim\limits_{x\to a}\varphi''(x)$ ガ同時ニ 0 デナケレバ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

以下同樣ニスレバ良イノデアル。

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

例 2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}=na^{n-1}$$

例 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

問 題

次ノ極限値ヲ求メヨ。(1—4)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ 　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ 　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

18. 3 $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形

二ツノ函數 $f(x)$, $\varphi(x)$ ガ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ ナルトキモ前節ト同樣ニ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

證明

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{\dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2\cdot\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \qquad (1)$$

從ツテ

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1 \qquad (2)$$

デアルカラ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

例 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1}=0$$

例 2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to a}\frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{e^x}{e^x-e^a}}=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^x}{e^x(x-a)+e^x}=\frac{e^a}{e^a}=1$$

問 題

次ノ値ヲ求メヨ。(5—8)

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$ 　　6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\log x}$

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log(x-a)}{\cot(x-a)}$ 　　8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{3x^2+5x}$, $(a>1)$

18. 4 其ノ他ノ不定形

[1] **0×∞ ナル形ノ場合** $f(a)=0$, $\varphi(a)=\infty$ ナルトキハ $\lim f(x)\cdot\varphi(x)$ ヲ $\dfrac{0}{0}$ 又ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル形ニ變ヘル。即チ次ノ如クスレバ良イ。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} \quad 又ハ \quad \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

［2］ **∞−∞ ナル形ノ場合**　$f(a)=\infty,\ \varphi(a)=\infty$ ナルトキハ

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\,\varphi(x)}}$$

ノ如ク變形スレバ $\dfrac{0}{0}$ ノ形トナル。

［3］ **$0^0, 1^\infty, \infty^0$ ナル形ノ場合**　是等ノ場合モ亦 $\dfrac{0}{0}$ 或ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ニ誘導シテ其ノ値ヲ求メルモノデ，何レモ例ニ依ッテ示スコトヽスル。

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\log x$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to 0}\sin x\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x\cot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=0$$

例 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$ ヲ求メヨ。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x-\dfrac{\pi}{2}}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+x\cos x}{-\sin x}=-1$$

例 3. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$ ヲ求メヨ。

$$y=x^{\frac{1}{1-x}}\quad \text{ト置ケバ}\quad \log y=\frac{\log x}{1-x}$$

從ッテ
$$\lim_{x\to 1}\log y=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{-1}=-1$$

∴
$$\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}e^{\log y}=e^{-1}$$

即チ
$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

例 4. $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^{x-a}$ ヲ求メヨ。

$$y=(x-a)^{x-a}\quad \text{ト置ケバ}\quad \log y=(x-a)\log(x-a)$$

從ッテ
$$\lim_{x\to a}\log y=\lim_{x\to a}(x-a)\log(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{\log(x-a)}{\dfrac{1}{x-a}}$$

$$\lim_{x\to a}\log y=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{x-a}}{-\dfrac{1}{(x-a)^2}}=\lim_{x\to a}-(x-a)=0$$

∴
$$\lim(x-a)^{x-a}=e^0=1$$

問　　題

次ノ極限値ヲ求メヨ。(9—12)

9. $\lim\limits_{x\to 0}x\log\sin x$　　**10.** $\lim\limits_{x\to 0}x^x$

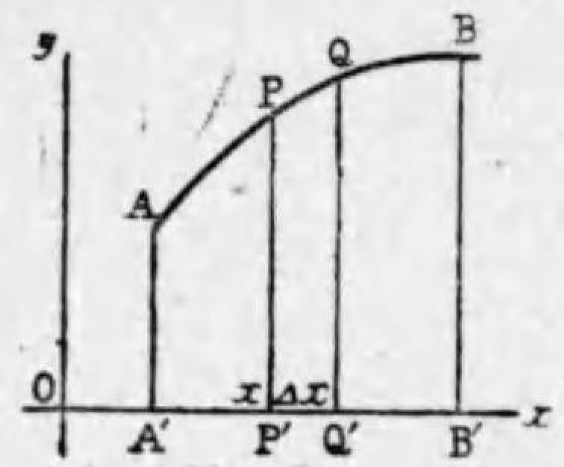
11. $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}$　　**12.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

第十九章

積分ノ幾何學ヘノ應用

19.1 平面圖形ノ面積

[1] 曲線 AB ト y 軸ニ平行ナル二直線 AA′, BB′ 及ビ x 軸ノ間ニ生ズル面積 S ヲ求メヨウ。



曲線 AB ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ, $OA'=a$, $OB'=b$ ナル區間ニテ單値連續* ナルモノトスル。

今曲線上ニ $P(x, y)$, x 軸上ニ $P'(x, 0)$ ヲトレバ, 面積 A′APP′ ハ x ニテ定マル。コレヲ $S(x)$ ニテ示セバ

$$S(a)=0,\ S(b)=S$$

$$\therefore\quad S=\int_a^b dS(x)$$

トナル。但シ a, b ハ不定積分 $\int dS(x)=S(x)$ ノ x ニ代入スルモノトスル。

今曲線上 P ノ近クニ $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲトレバ

$$\Delta S(x)=\Delta S(x+\Delta x)-\Delta S(x)$$

$$\fallingdotseq y\Delta x$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=y$$

$$\therefore\quad dS(x)=y\,dx$$

$$\therefore\quad S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)dx \qquad \cdots(1)$$

* 以下函數ハ一般ニ單値連續ナルモノトスル。

同様ニ曲線 $x=\varphi(y)$ ト x 軸ニ平行ナル二直線 $y=c$, $y=d$ 及ビ y 軸ノ間ノ面積ハ次ノ式デ與ヘラレル。

$$S=\int_c^d x\,dy \qquad \cdots(2)$$

例 1. 直線 $y=2x$ ト $x=5$, $x=9$ 及ビ x 軸ノ間ノ面積ヲ求メヨ。

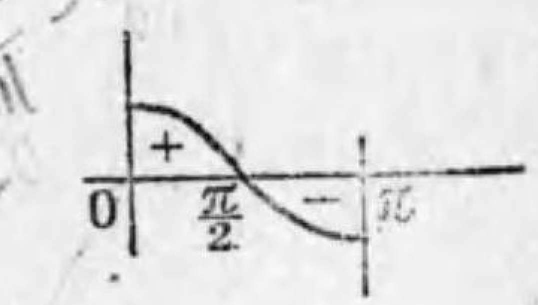
$$S=\int_5^9 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_5^9=56$$

例 2. $y=x^2$ ナル曲線ト $x=2$, $x=5$ 及ビ x 軸ノ間ノ面積ヲ求メヨ。

$$S=\int_2^5 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5=\frac{117}{3}=39$$

注意 面積 $S=\int f(x)dx$ 又ハ $S=\int\varphi(y)dy$ ヲ求メル場合ニ函數 $f(x)$, $\varphi(y)$ ガ其ノ區間ニ於テ正負ノ符號ヲ變ヘルヤウナトキハ大イニ注意セネバナラヌ。

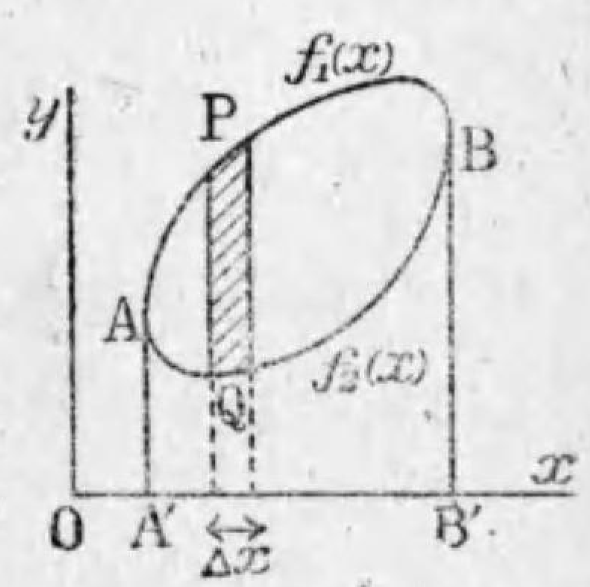
例ヘバ上ノ方法デ $y=\cos x$ ト $x=0$ カラ $x=\pi$ 迄ノ面積ヲ求メヨウトスレバ



$$S=\int_0^\pi \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^\pi=0$$

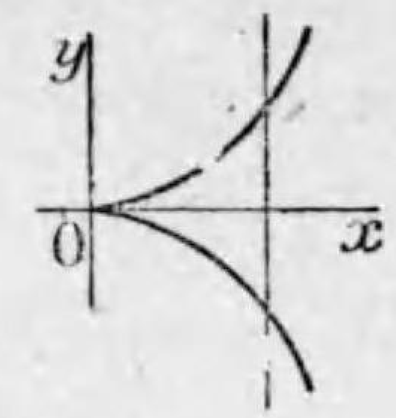
トナルガ, 斯樣ノ時ニハ限界ヲ, 函數 $f(x)$ ガ符號ヲ同ジウスル部分ニ分ケテ $\left(x=0 \text{ カラ } \frac{\pi}{2} \text{ 迄ト}, \frac{\pi}{2} \text{ カラ } \pi \text{ 迄}\right)$ 別々ニ計算スル必要ガアル。

[2] 方程式 $y=f(x)$ ガ右圖ニ示スヤウナ閉曲線 APBQ ヲ表ス場合ニ, 其ノ包圍スル面積ヲ求メルニハ, y 軸ニ平行ナル二ツノ切線 AA′$(x=a)$ ト BB′$(x=b)$ トデ之ヲ挿ミ, $y=f_1(x)$ ヲ上部ノ曲線 APB ノ方程式, $y=f_2(x)$ ヲ下部ノ曲線 AQB ノ方程式トスレバ閉曲線ノ面積 S ハ次ノ式ニテ表スコトガ出來ル。



$$S=\int_a^b\{f_1(x)-f_2(x)\}dx \qquad \cdots(3)$$

例 $y^2=x^3$ ト $x=4$ トノ間ニアル面積ヲ求メヨ。



$$y=\pm x^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad S=\int_0^4\left\{x^{\frac{3}{2}}-\left(-x^{\frac{3}{2}}\right)\right\}dx$$

$$=2\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{128}{5}$$

*[3]　モシ曲線ノ方程式ガ**媒介變數式** (Parametric form)

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t)$$

ノ形デ與ヘラレタトキ其ノ面積ハ

$$S=\int_a^b y\,dx$$

$$\boldsymbol{S=\int_{a'}^{b'}\varphi(t)\cdot f'(t)dt} \qquad \cdots(4)$$

デ求メラレル。

但シ a', b' ハ $x=a$, $x=b$ ニ相當スル t ノ値デアル。

問　　題

1. $y=2x$, $y=0$, $x=2$ ノ間ノ面積ヲ求メヨ。

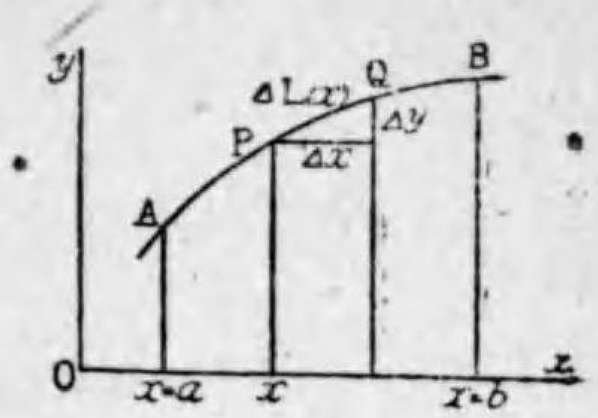
2. $y=\sin x$ ニ於テ x ガ 0 カラ π 迄變化スルトキ之ト x 軸トノ間ノ面積ヲ求メヨ。

3. 曲線 $y=x^3$ ト $y=a$, $x=0$ ノ間ノ面積ヲ求メヨ。

19.2　曲線ノ長サ

[1]　曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $A(a, f(a))$ カラ, 點 $B(b, f(b))$ 迄ノ曲線ノ長サ L ヲ求メヨウ。

曲線上ニ $P(x, y)$ ヲトリ曲線 AP ノ長サヲ考ヘルニ P ノ位置デ定マリ, P ハ x ノ大キサニテ定マルニヨリ, 弧 AP ノ長サハ x ノ函數 $L(x)$ デアッテ, $L(a)=0$, $L(b)=L$ トナル。



$$\therefore \qquad L=\int_a^b dL(x)$$

デアル。但シ上限, 下限ハ不定積分ノ x ニ對スルモノトスル。

今曲線上點 $P(x, y)$ ノ近クニ $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲトリ, 微小弧 PQ ノ長サヲ $\Delta L(x)$ トスレバ

$$\Delta L(x)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \qquad (1)$$

從ッテ

$$\frac{\Delta L(x)}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\varepsilon$$

玆ニ ε ハ $\Delta x\to 0$ ナル極限ニテ, 何程デモ 0 ニ近付クモノトナル。

故ニ

$$\frac{dL(x)}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\therefore && \boldsymbol{L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx} \\ &\text{又ハ} && \boldsymbol{L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(5)$$

例　圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ周ノ長サヲ求メヨ。

便宜上圓周 L ヲ四等分シ, 第一象限ニ於ケル弧ノ長サヲ求メ, 之ヲ四倍スルコトニスル。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\therefore \qquad L=4\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=4r\left[\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^r=2\pi r$$

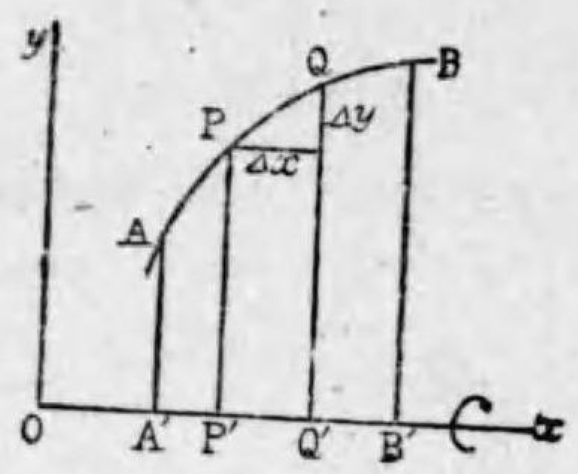
問　　題

4. 曲線 $y^2=x^3$ ニ於テ $x=0$ カラ $x=5$ 迄ノ間ノ弧ノ長サヲ求メヨ。

5. 懸垂線 (Catenary) $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ ヲ $(0,\ a)$ カラ $(x,\ y)$ 迄測ツタ弧ノ長サヲ求メヨ。

6. 星芒形 (Asteroid) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ長サヲ求メヨ。

19.3 回轉體ノ表面積



平面曲線 AB ヲ x 軸ノ周リニ回轉シテ得ル曲面ヲ**回轉曲面** (Surface of revolution) ト云ヒ，曲線上ノ二點 A, B 間ニ相當スル曲面積 A ヲ求メヨウ。

AB ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ A, B ヲ夫々 $(a,\ f(a)),\ (b,\ f(b))$ トスル。y 軸ニ平行線ヲ引イテ曲線ト交ラシメ，$P(x,\ y),\ Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ トショウ。

曲線 PQ ガ回轉シテ出來タ面ハ Δx ヲ十分小ニスルト截頭圓錐ノ側面ト考ヘラレルカラ，ソノ面積ヲ ΔA トスレバ

$$\Delta A \fallingdotseq 2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

或ハ

$$\frac{\Delta A}{\Delta x}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\varepsilon$$

$\Delta x\to 0$ ナル極限デハ $\varepsilon\to 0$ デアルカラ

$$\frac{dA}{dx}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

從ツテ

$$\left.\begin{aligned} A&=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ \text{又ハ}\quad A&=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

例 1. 高サ h, 半徑 r ナル直圓錐ノ側面積ヲ求メヨ。

原點ヲ通ル直線ノ方程式ヲ $y=\frac{r}{h}x$ トシ，之ヲ x 軸ノ周リニ回轉シテ圓錐體ヲ作ルモノト考ヘルト

$$A=2\pi\int_0^h\frac{r}{h}x\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$$

例 2. 半徑 r ナル球ノ表面積ヲ求メヨ。

$x^2+y^2=r^2$ ナル圓ヲ x 軸ノ周リニ回轉シテ球面ヲ生ズルモノトスレバ

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\qquad A=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=4\pi r^2$$

問　題

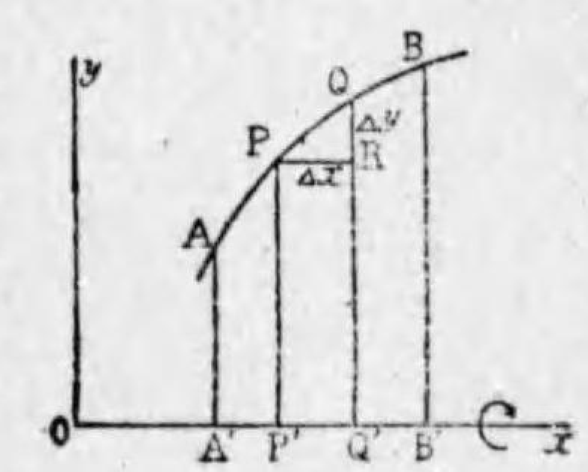
7. $y^2=4x$ ナル抛物線ヲ x 軸ノ周リニ回轉スルトキニ出來ル曲面ノ $x=0$ カラ $x=3$ 迄ノ表面積ヲ求メヨ。

***8.** $x^2+(y-a)^2=r^2$ $(a>r)$ ガ x 軸ノ周リニ回轉シタトキニ生ズル曲面ノ表面積ヲ求メヨ。

***9.** 星芒形 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ガ x 軸ノ周リニ回轉シテ生ズル曲面ノ表面積ヲ求メヨ。

19.4 回轉體ノ體積

平面曲線 $y=f(x)$ 及ビ y 軸ニ平行ナル二ツノ直線 $AA'(x=a)$, $BB'(x=b)$ ニヨツテ圍マレタ部分 AB ガ，x 軸ヲ軸トシテ回轉シテ生ジタ立體ヲ**回轉體** (Solid of revolution) ト云フ。今コノ體積 V ヲ求メヨウ。



圖ハ前節ノモノヲ採用スル。倚 $PR\perp QQ'$ トスルト矩形 PP′Q′R ガ x 軸ノ周リニ回轉スレバ直圓壔ヲ作リ，其ノ體積ハ $\pi y^2\cdot\Delta x$ デ，曲線 PQ ガ回轉シテ作ル體積 ΔV ト殆ド相等シイ。

故ニ　　$\Delta V\fallingdotseq\pi y^2\cdot\Delta x$

或ハ　　$\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=\pi y^2+\varepsilon$

$\Delta x\to 0$ ナル極限デハ $\varepsilon\to 0$ トナルカラ上式ハ

$$\frac{dV}{dx}=\pi y^2$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} V&=\pi\int_a^b y^2\,dx \\ \text{又ハ} \qquad V&=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(7)$$

同様ニ曲線ガ y 軸ノ周リニ回轉シテ出來ル回轉體ノ體積ヲ V トシ，限界ヲ $y=c,\ y=d$ トスレバ

$$V=\pi\int_c^d x^2\,dy \qquad \cdots(8)$$

デ與ヘラレル。

例　直線 $y=\frac{r}{h}x$, $x=h$ 及ビ x 軸デ圍マレタ三角形ガ x 軸ノ周リニ回轉シテ直圓錐ヲ生ズルモノト考ヘ，其ノ體積 V ヲ求メヨ。

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{\pi}{3}r^2h$$

問　題

10.　拋物線 $y^2=4ax$ ガ軸ノ周リニ回轉スルトキ $x=0,\ x=a$ ノ間ニアル部分ノ體積ヲ求メヨ。

11.　半徑 a ナル球ノ體積ヲ求メヨ。

12　有限直線 $y=x\tan\alpha\,(x=0$ ヨリ $x=h$ 迄) ガ x 軸ノ周リニ回轉シテ得ル圓錐體ノ體積ヲ求メヨ。

13.　曲線 $y^2(x-4a)=ax(x-3a)$ ヲ x 軸ノ周リニ回轉シテ生ジタ立體ニ於テ $x=0$ カラ $x=3a$ 迄ノ間ニアル體積ヲ求メヨ。

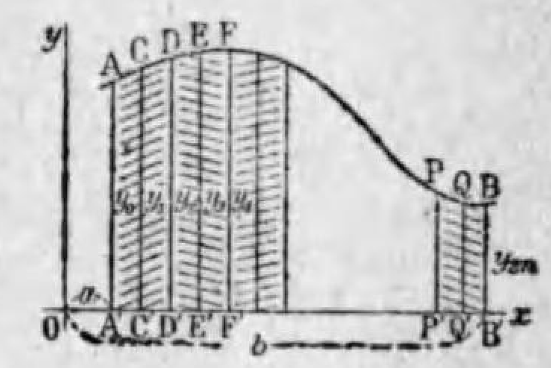
*19.5　しんぷそんノ法則

實際ノ場合ニハ，積分ヲ求メルコトノ非常ニ困難ナコトモアリ，或ハ函數 $f(x)$ ガ完全ニハ求メラレズシテ，$x=x_1,\ x_2,\ x_3\cdots\cdots x_n$ ニ於ケル函數 $f(x)$ ノ値ガ與ヘラレタトキニ，ソノ積分ヲ求メルヤウナ場合モ多イモノデアル。

今ヨリ夫等ノ場合ニ於ケル積分ノ近似値ノ求メ方ニ就テ述ベルコトニスル。

$x=a$ カラ b マデノ間ヲ $2n$ 箇ニ等分シ，ソノ一區間ヲ h トシ，ソノ兩端及ビ各分點ニ於ケル縱線 AA′, CC′, DD′……BB′ ノ値ヲ夫々 $y_0,\ y_1,\ y_2\cdots\cdots y_{2n}$ トスル。

圖ニ於テ AA′D′D ノ面積ヲ求メルタメニ A′D′ ノ中點 C′ ヲ原點トシ，CC′ ヲ y 軸，C′x ヲ x 軸トスレバ



$$\text{面積 AA′D′D}=\int_{-h}^{h}y\,dx$$

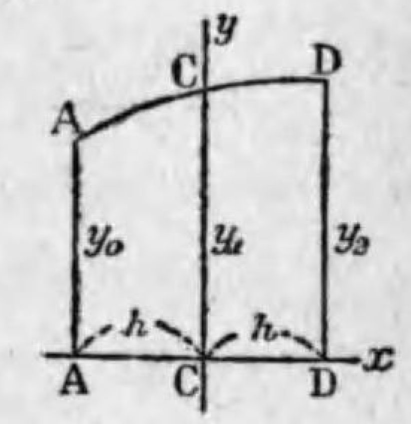
デアル。

曲線 ACD ガ拋物線ノ一部ト見做サレル場合ニハ

$$y=px^2+qx+r$$

ト置ケルカラ

$$\begin{aligned}\text{面積 AA′D′D}&=\int_{-h}^{h}(px^2+qx+r)dx\\&=\left[\frac{px^3}{3}+\frac{qx^2}{2}+rx\right]_{-h}^{h}\\&=\frac{h}{3}(2ph^2+6r)\end{aligned}$$



然ルニ

$$\begin{aligned}y_0&=ph^2-qh+r\\y_1&=r\\y_2&=ph^2+qh+r\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad y_0+4y_1+y_2=2ph^2+6r$$

$$\therefore \qquad \text{面積 AA′D′D}=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

同様ニシテ DEF,……PQB ガ他ノ拋物線ノ一部ト見做シ得ル場合ニハ

$$\text{面積 DD'F'F}=\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

....

$$\therefore\qquad \text{面積 PP'B'B}=\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

是等ヲ加ヘレバ全面積ノ近似値 S ハ次ノヤウニナル。

$$S=\frac{h}{3}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots\cdots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})]$$

$$\text{故ニ}\qquad \boldsymbol{S=\frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{2n-1})}$$
$$\boldsymbol{+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{2n-2})]}\quad \cdots\textbf{(9)}$$

コノ結果ヲ**しんぷそん** (Simpson) ノ法則ト稱ヘル。

例 1. (1, 2), (1.5, 2.4), (2, 2.7), (2.5, 2.8), (3, 3), (3.5, 2.6), 及ビ (4, 2.1) ヲ通ル曲線ト軸及ビ $x=1$ ト $x=4$ トノ間ニアル面積ヲ求メヨ。

此ノ場合ニハ $h=0.5$ デアルカラ

$$S\fallingdotseq\frac{0.5}{3}[2+2.1+4(2.4+2.8+2.6)+2(2.7+3)]=7.8$$

例 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$ ヲしんぷそんノ法則ニヨツテ求メタモノト，普通ノ方法デ求メタ結果トヲ比較シテ見ヨ。但シ $h=\frac{\pi}{20}$ トスル。

$y_0=\sin 0^\circ=0$	$y_1=\sin 9^\circ=0.1564345$	$y_2=\sin 18^\circ=0.3090170$
$y_{10}=\sin 90^\circ=1$	$y_3=\sin 27^\circ=0.4539905$	$y_4=\sin 36^\circ=0.5877853$
1	$y_5=\sin 45^\circ=0.7071068$	$y_6=\sin 54^\circ=0.8090170$
	$y_7=\sin 63^\circ=0.8910065$	$y_8=\sin 72^\circ=0.9510565$
	$y_9=\sin 81^\circ=0.9876883$	2.6568758
	3.1962266	

故ニ

$$(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_9)+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_8)=19.098658$$

$$\therefore\qquad \text{積分ノ近似値}=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{20}\times 19.098658=1.000003$$

$$\text{然ルニ}\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$$

依ツテしんぷそんノ法則ハ可ナリ精密ナ結果ヲ與ヘルモノデアルコトガ判ル。

問　　題

14. 點 (2.0, 3), (2.2, 3.3), (2.4, 3.7), (2.6, 3.5), (2.8, 3.2), (3.0, 3.1), (3.2, 3 0), (3.4, 2.9), (3.4, 2.9), (3.6, 2.5) ヲ通ル曲線ト x 軸ト $x=2$, $x=3.6$ トノ間ニアル面積ヲ求メヨ。

15. $\int_2^4\frac{1}{x}dx$ ノ近似値ヲ ($h=0.2$ トシテ) しんぷそんノ法則ニヨツテ求メヨ。

16. $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ ノ近似値ヲ求メ，ソレヨリ π ノ値ヲ求メヨ。

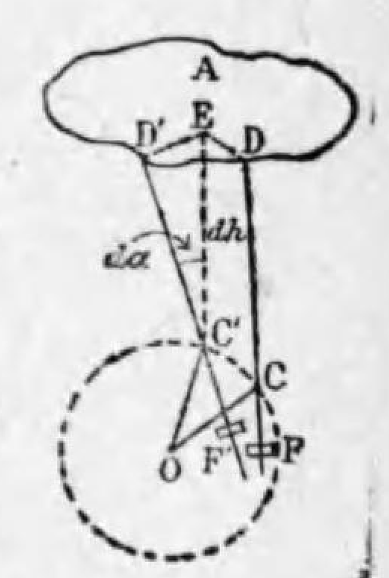
*19.5　面積計

面積計 (Planimeter) ハ平面圖形ノ面積ヲ計算スル器械デ，普通ニ用ヒラレルモノハ，圖ニ示スヤウニ一定長ノ OC ナル腕ト，長サヲ調整シ得ル DC ナル腕トヲ，C ヲ蝶番ニシテ連結シ，且 DC ノ延長上ニ之ヲ軸トシテ直角ニ車輪 F ヲ取付ケタモノデアル。

次ノ圖ノ如ク，O 點ヲ紙上ニ固定シ，FD ノ尖端 D ヲ測ラウトスル面積 A ノ外ニ沿フテ一周サセルト，F ノ回轉數ニヨツテ此ノ面積ヲ求メルコトガ出來ル。

腕 CD ガ C'D' ニ來ル間ニ CDD'C'$=dA'$ ナル面積ヲ畫クモノトスレバ．

$$dA'=\text{平行四邊形 CDEC'}+\text{扇形 C'ED'}$$



今　$L=\text{CD}$, $dh=$平行四邊形ノ高サ, $d\alpha=$扇形ノ角トスレバ

$$dA'=L\cdot dh+\frac{1}{2}L^2\cdot d\alpha\qquad(1)$$

車輪 F ガ CD ニ固定シ，其ノ回轉面ガ CD ニ垂直ナルモノトスルト，F ハ CD ニ垂直ニ動クトキハ回轉スルガ，CD ノ方向ニ變位スルトキニハ，廻ラズニ紙上ヲ

滑ル故，車輪ガ其ノ軸ノ周リニ回轉シテ，F カラ F′ ニ來タトキノ回轉角ヲ $d\theta$ トシ，車輪ノ半徑ヲ r トスレバ回轉シタ弧ノ長サハ $rd\theta$ デアルカラ

$$L'=\mathrm{CF}=\mathrm{C'F'}$$

トスレバ

$$rd\theta=dh-L'\cdot d\alpha \qquad (2)$$

(1) ト (2) カラ

$$dA'=rLd\theta+\left(\frac{L^2}{2}+LL'\right)d\alpha$$

$$\therefore \qquad \int dA'=\int rLd\theta+\int\left(\frac{L^2}{2}+LL'\right)d\alpha \qquad (3)$$

然ルニ $\qquad \int rLd\theta=rL\theta=Lnc$

デアル。但シ c ハ車輪ノ周圍ノ長サデ，n ハ車輪ノ回轉數デアル。

問題ヲ二ツニ分ケテ

［**1**］ CC′ ガ求メル面積 A ノ外ニアル場合。

コノ場合ニハ CD ガ回轉シ，C ガ圓弧上ヲ往復シテ最初ノ位置ニ歸レバ

$$\int d\alpha=0$$

デアツテ $\qquad \int dA'=A$

デアルカラ (3) ヨリ

$$A=Lnc$$

［**2**］ CC′ ガ面積 A ノ内ニアル場合。

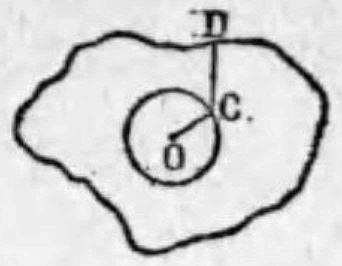
コノ場合ニハ

$$\int d\alpha=2\pi$$

トナルカラ

$$A=\int dA'+\pi R^2$$

但シ $R=\mathrm{OC}$ デアル。



從ツテ (3) カラ

$$A'=Lnc+2\pi\left(\frac{L^2}{2}+LL'\right)$$

$$A=A'+\pi R^2$$

$$=Lnc+\pi(L^2+LL'+R^2)$$

此ノトキニハ A ハ Lnc ニ $\sqrt{L^2+2LL'+R^2}$ ナル一定半徑ヲ有スル圓ノ面積ヲ加ヘタモノニ等シイ。

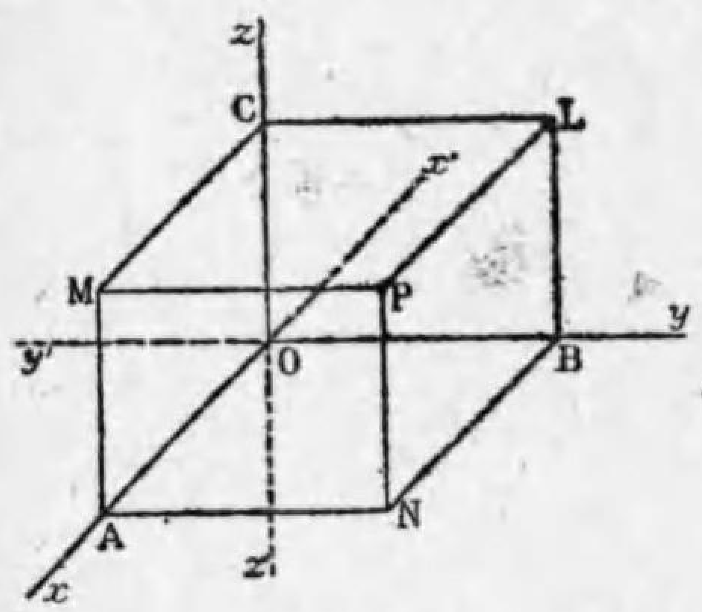
從ツテ [1] ニテモ亦 [2] ノ場合ニシテモ，與ヘラレタ面積 A ハ尖端 D ヲ A ノ周圍ニ沿フテ一周セメシタ場合ノ，車ノ回轉數 n ニヨツテ，求メラレルモノデアル。

第二十章

立體解析幾何學

20.1 空間ニ於ケル點ノ座標

空間ニ於ケル一點ノ位置ヲ定メル方法ハ種々アルガ次ニ記述スル直角座標ガ最モ多ク用ヒラレル。一點 O ニ於テ互ニ直交スル三直線 xx', yy', zz' ヲ定メ，之等ノ直線ヲ夫々 x 軸, y 軸, z 軸ト云ヒ，之ヲ總稱シテ**座標軸** (Coordinate axes) ト云フ。O ヲ座標ノ**原點**, 平面 yOz, zOx, xOy ヲ夫々 **yz 平面, zx 平面, xy 平面** ト云ヒ，之等ヲ總稱シテ **座標平面** (Coordinate planes) ト云フ。



空間ノ一點 P ヲ通ツテ各座標平面ニ平行ナル平面ヲ作リ x 軸ト A, y 軸ト B, z 軸ト C ニ於テ交ルモノトスレバ P ガ定マルニ從ツテ A, B, C ハ定マル。次ニ Ox, Oy, Oz ヲ正ノ向キトシ，Ox', Oy', Oz' ヲ負ノ向キト規約スル。

今 $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ トスルトキ (A ガ Ox' 上ニアレバ x ハ負デアル) x, y, z ガ定マレバ P ハ唯一ツ定マル。此ノ x, y, z ヲ夫々 P 點ノ x 座標, y 座標, z 座標ト云ヒ，之ヲ P 點ノ**直角座標** (Rectangular coodinates) ト云フ。$x=a$, $y=b$, $z=c$ ナル點ヲ (a, b, c) ナル記號デ表ス。

問　　題

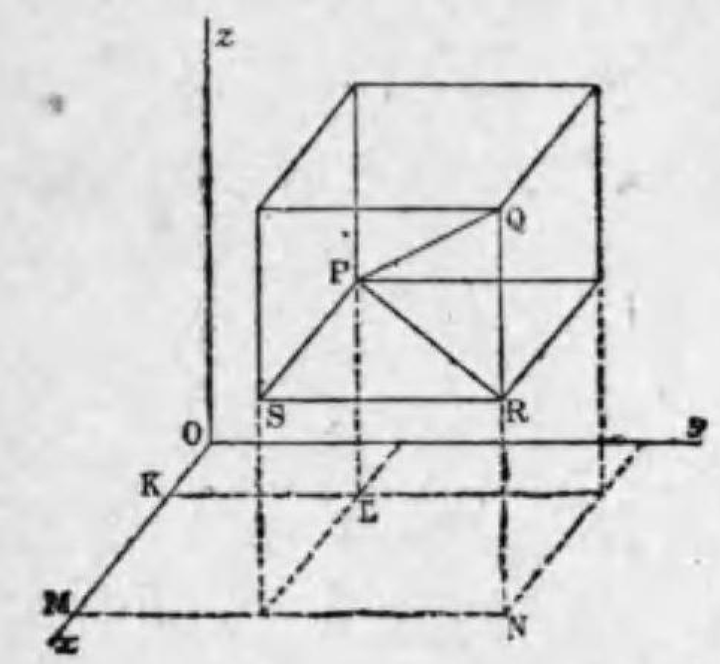
1. 次ノ諸點ヲ圖示セヨ。

P(1, 3, 2),　Q(−1, −2, 3),　R(−2, 3, −1),

S(0, 0, 3),　T(−2, 0, 0)

20.2 空間ニ於ケル二點間ノ距離

空間ニ於ケル二點ヲ $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ トシ，P 及ビ Q ヲ通ツテ各座標平面ニ平行ナル平面ヲ引イテ圖ノ樣ニ直六面體 PQ ヲ作レバ



$$PQ^2=PR^2+RQ^2$$
$$=PS^2+SR^2+RQ^2$$
$$=(OM-OK)^2+(MN-KL)^2+(NQ-LP)^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

$\therefore$　$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad \cdots(1)$$

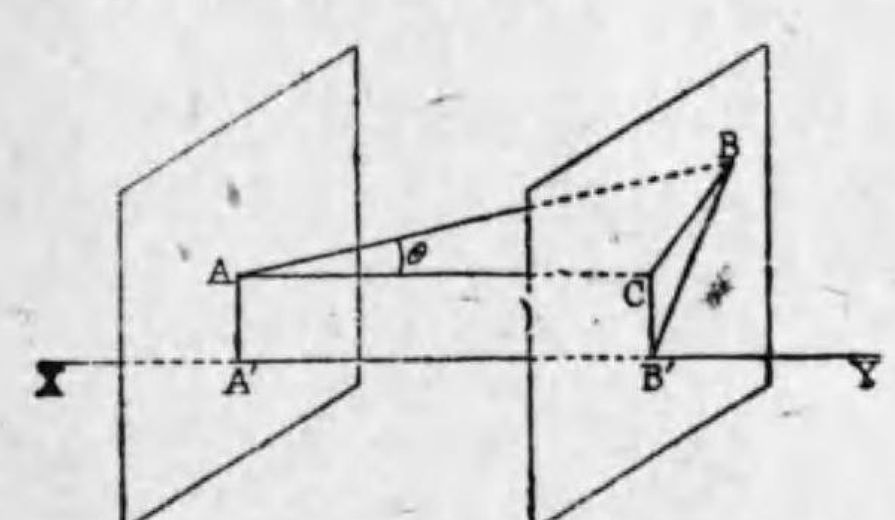
系　$$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

問　　題

2. 二點 P(5, 2, 6), Q(2, −4, 12) ノ距離ヲ求メヨ。

3. 三點 A(3, −2, 1), B(−2, 1, 3), C(1, 3, −2) ヲ頂點トスル三角形ハ正三角形ナルコトヲ證明セヨ。

20.3 直線上ヘノ射影



有向線分 AB ノ兩端 A, B ヲ通リ，直線 XY ト直交スル二ツノ平面ヲ作リ，ソノ交點ヲ A', B' トスレバ有向線分 A'B' ヲ直線 XY ニ投ジタ有向線分 AB ノ**射影** (Projection) ト云フ。

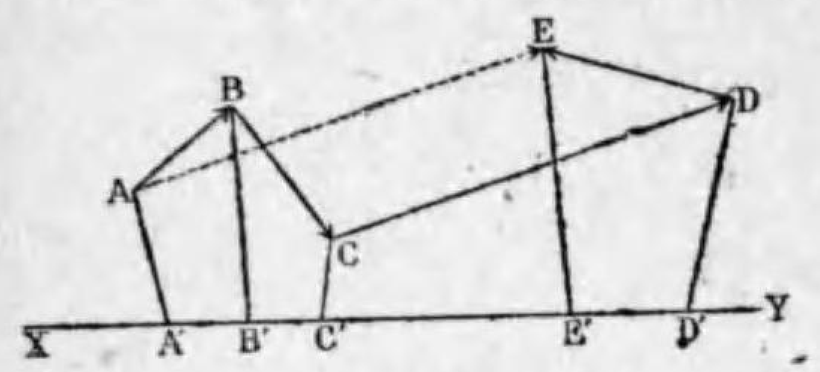
A ヲ通ツテ XY ニ平行ナル直線 AC ヲ引キ，B ヲ通ツテ居ル平面ノ

交點ヲ C トスル。

有向線分 AB ト有向直線 XY, 卽チ AB ト AC ノナス角ヲ θ トスレバ

$$\text{射影}\quad \mathbf{A'B'=AC=AB\cos\theta}$$

XY ニ投ジタ空間ニ於ケル折線 ABCDE ノ射影ノ代數和ハ始點 A ト終點 E ノミニ關係シ, 途中ノ狀態ニハ關係シナイ。而シテソノ結果ハ AE ノ射影ニ等シイ。



何トナレバ

$$\text{折線 ABCDE ノ射影} = A'B'+B'C'+C'D'+D'E'$$
$$= A'E'$$

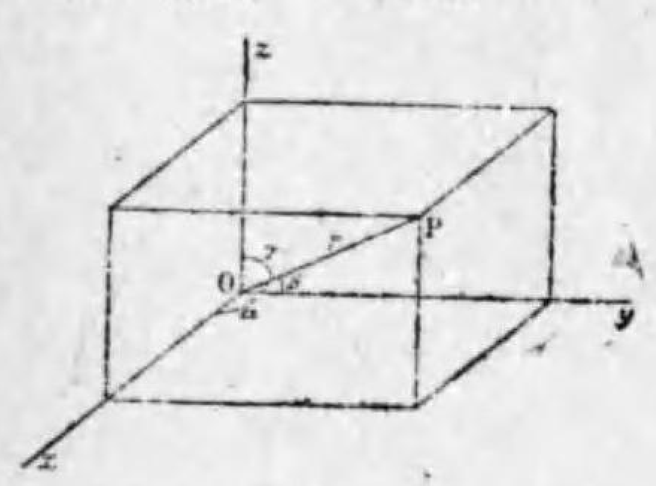
ダカラデアル。

問　題

4. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ ナルトキ線分 AB ノ各座標軸ヘ投ジタ射影ヲ求メヨ。

20. 4 方向餘弦

原點 O ヲ通リ定直線 ST ニ平行ナル直線 OP ヲ引キ, OP ガ座標軸ノ正ノ向キトナス角ヲ夫々 α, β, γ トスルト, OP ノ方向, 從ツテ ST ノ方向ハ定マル。此ノ角ヲ此ノ直線ノ方向角ト云ヒ, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ヲ此ノ直線ノ**方向餘弦** (Direction cosine) ト云フ。方向餘弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ヲ通例 l, m, n デ表ス。



今 P 點ノ座標ヲ (x, y, z), $\mathrm{OP}=r$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\alpha\\ y&=r\cos\beta\\ z&=r\cos\gamma \end{aligned}\right\}$$

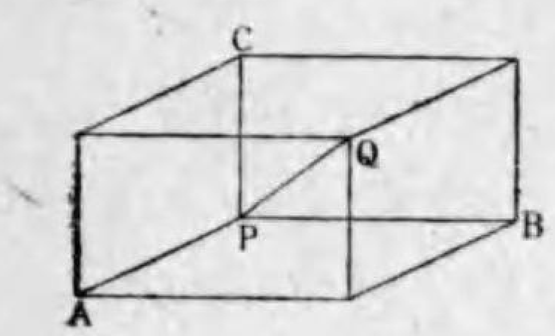
然ルニ $x^2+y^2+z^2=r^2$ デアルカラ

$$r^2\cos^2\alpha+r^2\cos^2\beta+r^2\cos^2\gamma=r^2$$

或ハ
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

∴
$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad \cdots(2)$$

例 1. $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ ナルトキ PQ ノ方向餘弦ヲ求メヨ。



P 及ビ Q ヲ通リ各座標平面ニ平行ナル平面ヲ引イテ直六面體ヲ作リ, PA, PB, PC ハ夫々 x 軸, y 軸, z 軸ニ平行ナル稜デアルトスレバ, PQ ノ方向餘弦ハ $\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PQ}}$, $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PQ}}$, $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PQ}}$ デアルカラ

$$l=\frac{x_2-x_1}{d},\qquad m=\frac{y_2-y_1}{d},\qquad n=\frac{z_2-z_1}{d}$$

但シ
$$d=\mathrm{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 2. x 軸ト 45°, y 軸ト 60° ノ角ヲナス直線ハ z 軸ト如何ナル角ヲナスカ。

$l=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $m=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$ デアルカラ

$$n=\pm\sqrt{1-l^2-m^2}=\pm\frac{1}{2},\qquad \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$$

故ニ $\gamma=60°$ カ $\gamma=120°$ デアル。

問　題

5. 原點ト點 (2, 3, 4) トヲ結ベル直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

6. $P(5, -2, 0)$, $Q(-1, 0, 3)$ ナルトキ PQ ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

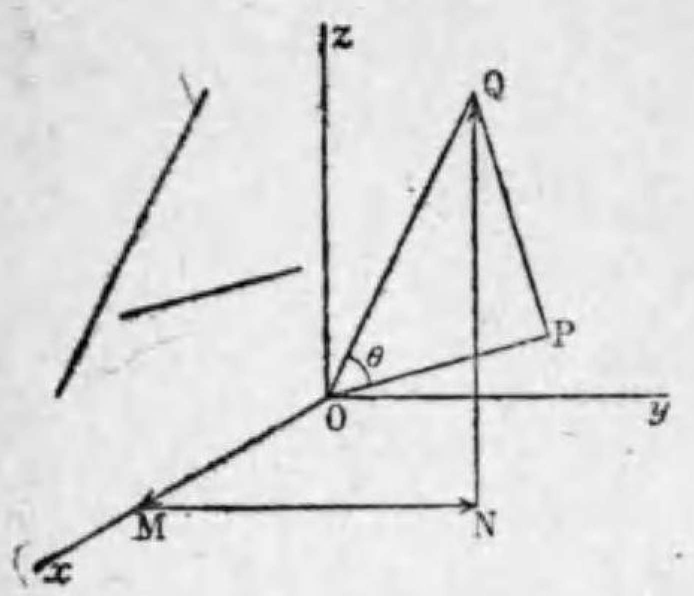
***7.** 一直線ノ方向餘弦ガ L, M, N ニ比例スルトキ此ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

***8.** 三ツノ座標軸ト等角ヲナス直線ノ方向餘弦ヲ求メヨ。

20. 5 二直線ノナス角

二直線ノ方向餘弦ヲ夫々 (l_1, m_1, n_1) 及ビ (l_2, m_2, n_2) トシ, 原點 O カラ此ノ二直線ニ平行ナル直線 OP, OQ ヲ引キ其ノナス角ヲ θ トスル。Q カラ xy 平面ニ垂線ヲ下シ, 其ノ足ヲ N トシ, N カラ x 軸ニ垂線ヲ引キ, 其ノ足ヲ M トスル。

折線 OMNQ ノ OP ニ投ジタ射影ト始點 O ト終點 Q トヲ結ンダ線分 OQ ノ OP ニ投ジタ射影トハ相等シイカラ



$$\overline{\mathrm{OM}}\cdot l_1+\overline{\mathrm{MN}}\cdot m_1+\overline{\mathrm{NQ}}\cdot n_1=\overline{\mathrm{OQ}}\cos\theta$$

或ハ

$$\overline{\mathrm{OQ}}l_2\cdot l_1+\overline{\mathrm{OQ}}m_2\cdot m_1+\overline{\mathrm{OQ}}n_2\cdot n_1=\overline{\mathrm{OQ}}\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\cdots(3)$$

又　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$$=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2$$
$$=(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2$$

故ニ二直線ガ直角ヲナストキハ

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\qquad\cdots(4)$$

而シテ二直線ガ平行ナルトキハ

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\qquad\cdots(5)$$

問　題

9. 二直線ノ方向餘弦ガ夫々 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{15},\ \frac{14}{15},\ \frac{5}{15}\right)$ ナルトキ其ノナス角ヲ求メヨ。

*10. 二直線ノ方向餘弦ノ比ガ夫々 $L_1:M_1:N_1$, 及ビ $L_2:M_2:N_2$ ナルトキ其ノ二直線ノナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。

11. $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ ナルトキ OP ト OQ ノナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。

20.6　二變數ノ函數ノ幾何學的意義

是迄取扱ツタ函數ハ $y=f(x)$ 或ハ $\mathrm{F}(x,\ y)=0$ ノ樣ニ自變數ガ唯一個ノ場合デアツタガ, 二個ノ自變數ヲ含ム函數モ亦屢々遭遇スル所デアル。例ヘバ矩形ノ面積ハ其ノ縱ト横ノ邊ノ長サノ函數デアリ, 又直圓錐

ノ側面積ハ底ノ半徑ト高サトノ函數デアル。

二ツノ變數 x ト y ノ間ニ何等ノ關係モナク互ニ獨立デ, 此等自變數ノ x 及ビ y ノ或値ニ對シ數 z ノ値ガ定マルトキ z ハ x 及ビ y ノ函數デアルト云ヒ, 此ノコトヲ

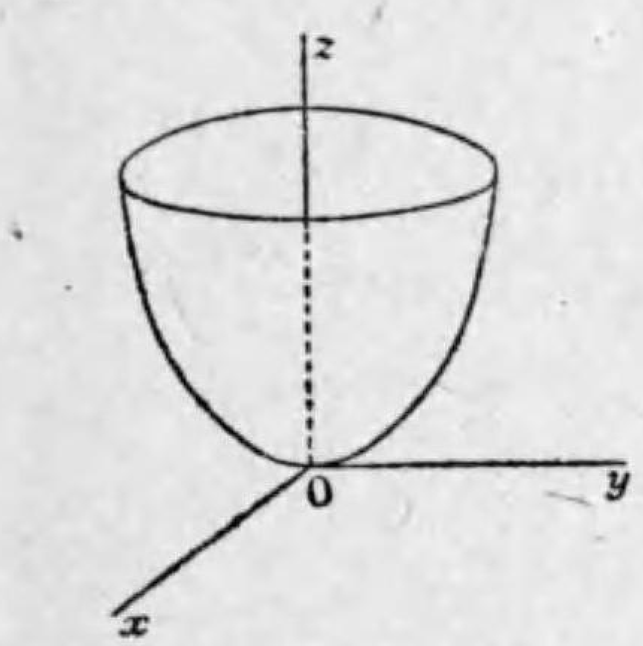
$$z=f(x,\ y),\qquad z=\varphi(x,\ y),\qquad \mathrm{F}(x,\ y,\ z)=0$$

等ノ記號デ表ス。

$x,\ y,\ z$ ニ關スル方程式ハコレヲ滿足スル $(x,$ [illegible] 各組ノ値ヲ直角座標トスル點ノ集リナル曲面(平面ヲ含ム)ヲ表スト[illegible]ヘラレルカラ其ノ曲面ヲ此ノ方程式ノ軌跡ト云ヒ, 此ノ方程式ヲ其ノ曲面ノ方程式ト云フ。

例 1. $z=3$ ノ軌跡如何。

z 軸上ノ $(0,\ 0,\ 3)$ ナル點ヲ通リ xy 平面ニ平行ナル平面デアル。



例 2. $z=x^2+y^2$ ノ軌跡如何。

xy 平面ニ平行ナル平面 $z=c$ ト此ノ軌跡トノ交線ヲ考ヘルト, 交線上ニ於テハ $x^2+y^2=c$ ナル關係ガアルカラ, 總テ xy 平面ニ平行ナル平面デ截レバ其ノ截口ハ圓ニナルコトガ判ル。但シ xy 平面ノ下ニハ曲面ハナイ。

又 $y=0$ トスレバ, zx 平面上ニアルコノ曲面上ノ點ハ $z=x^2$ ナル拋物線ヲ作ルコトヲ知ル。yz 平面ノ截口ハ同樣ニ $z=y^2$ デアル。

問　題

12. $x+y=1$ ノ軌跡如何。

13. $z=y^2$ ノ軌跡如何。

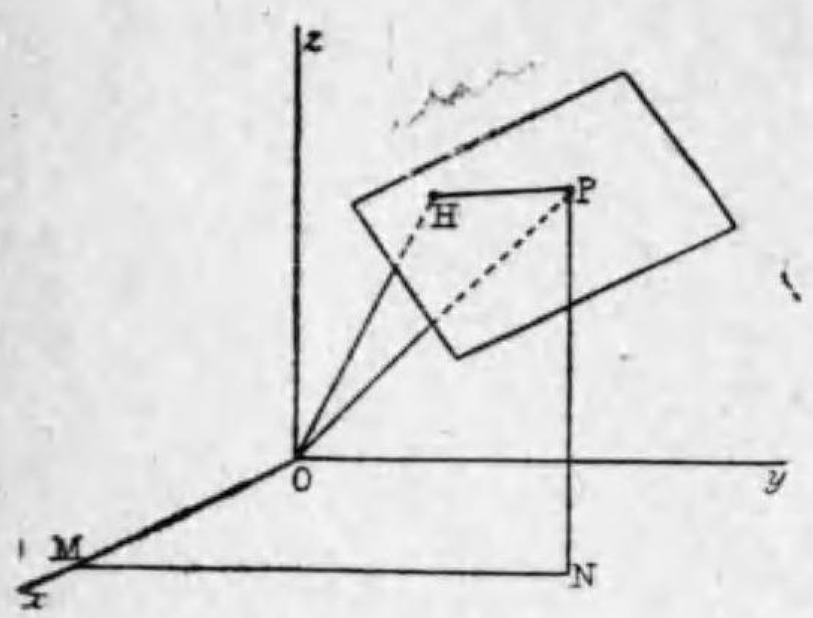
20.7　平面ノ方程式

原點 O カラ平面ニ引イタ垂線 OH ノ長サヲ p, OH ノ方向餘弦ヲ $l,\ m,\ n$ トスル。此ノ平面ノ方程式ヲ次ニ求メル。

今此ノ平面上ニ任意ノ一點 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ ヲ取レバ, 圖ノ折線 OMNP ノ OH ニ投ジタ射影 $lx+my+nz$ ト OP ノ OH ニ投ジタ射影 p トハ等

シイカラ

$$lx+my+nz=p \qquad \cdots(6)$$



コレ所要ノ平面ノ方程式デアッテ此ノ平面上ノ總テノ點ハ公式 (6) ヲ滿足スル。故ニ平面ノ方程式ハ x, y, z ニ關スル一次方程式デアル。

一般ニ x, y, z ニ關スル一次方程式

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

ハ平面ヲ表ス。何トナレバ (1) ハ

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z=\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (2)$$

ナル形ニ書ケル。(2) ノ複符號ハ右邊ガ正ニナルヤウニ取ルモノトスル。サテ x, y, z ノ係數ノ平方ノ和ガ 1 トナルカラ，此ノ係數ヲ方向餘弦トシ原點ヲ通ル直線 OH ヲ引キ，OH ノ長サヲ (2) ノ右邊ニ等シクシ，H ヲ通リ OH ニ垂直ナル平面ヲ作ルト，此ノ平面ノ總ベテノ點ハ (2) ヲ滿足シ，此ノ平面外ノ點ハ (2) ヲ滿足シナイカラ (2) 卽チ (1) ハ平面ヲ表ス。

問　　題

14. 次ノ方程式ハ如何ナル平面ヲ表スカ。

(*a*) $y=2$　(*b*) $z=-3$　(*c*) $x=0$　(*d*) $y+z=1$

***15.** 三軸上ノ截片ガ夫々 a, b, c ナル平面ノ方程式ヲ求メ，然ル後原點カラ此ノ平面ニ引イタ垂線ノ長サヲ求メヨ。

***16.** 定點 (a, b, c) ヲ通リ $Ax+By+Cx+D=0$ ニ平行ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

20.8　直線ノ方程式

一定點 $P(x_1, y_1, z_1)$ ヲ通ッテ方向餘弦ガ l, m, n ナル直線ノ方程式ヲ次ニ求メル。

此ノ直線上ニ任意ノ點 $Q(x, y, z)$ ヲ取レバ

$$x-x_1=PQ\cdot l, \quad y-y_1=PQ\cdot m, \quad z-z_1=PQ\cdot n$$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad \cdots(7)$$

依ッテ所要ノ直線ハ上式ノ如キ聯立方程式デ表サレル。

若シ $L:M:N=l:m:n$ ナラバ公式 (7) ハ次ノヤウニ書イテモヨイ。

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}$$

又公式 (7) ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=pz+h \\ y&=qz+k \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(8)$$

ナル形式デ表シテモヨイ。公式 (8) ハ二ツノ平面 $x=pz+h$ ト $y=qz+k$ トノ交リノ直線ヲ表ス。

問　　題

17. 聯立方程式 $z=2, x=-5$ ハ何ヲ表スカ。

18. 座標軸 Ox ノ方程式ヲ求メヨ。

19. 點 (a, b, c) ヲ通ッテ直線 $\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

***20.** 二定點 $(a, b, c), (a', b', c')$ ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

***21.** 點 (a, b, c) ヲ通リ，平面 $Ax+By+Cz+D=0$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

20.9　球面ノ方程式

球面 (Spherical surface) ノ中心ノ座標ヲ (a, b, c)，半徑ヲ r トスル。

今球面上ニ任意ノ一點 $P(x, y, z)$ ヲ取レバ公式 (1) カラ球面ノ方程式トシテ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \qquad \cdots(9)$$

ガ得ラレル。若シ中心ガ原點ニアレバ

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad \cdots(10)$$

問　　題

22. 球面 $x^2+y^2+z^2-2x+6y-z-2=0$ ノ中心ノ座標及ビ半徑ヲ求メヨ。

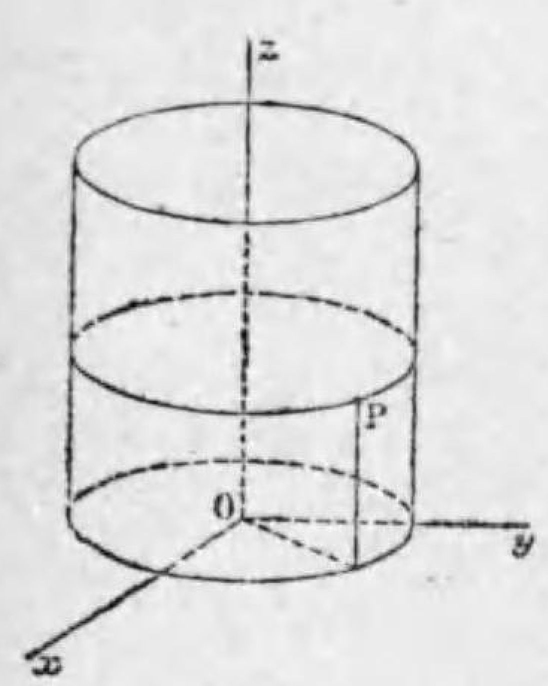
***23.** 球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ ト平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ トガ切スルトキハ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{r^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

20.10 柱面ノ方程式

柱面 (Cylindrical surface) トハ一ツノ直線ガ常ニ定マツタ一ツノ曲線ニ交リツツ平行ニ動イテ出來ル曲面ヲ云ヒ，其ノ直線ヲ**母線** (Generating line), 其ノ曲線ヲ**導線** (Guiding curve) ト云フ。

導線ガ圓ナル柱面ヲ**圓柱面**ト云ヒ，此ノ圓ノ平面ト母線トガ垂直ナルモノヲ**直圓柱面**ト云フ。

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=r^2 \\ z=0 \end{array}\right\}$$



ヲ導線トシ z 軸ニ平行ナル母線ヲ有スル直圓柱面ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad \cdots(11)$$

トナル。何トナレバ此ノ曲面上ニ任意ノ點 (x, y, z) ヲ取レバ z ノ値ニ關係ナク公式 (11) ヲ滿足スルカラデアル。

一般ニ導線ガ $\left.\begin{array}{l} f(x, y)=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$

デアツテ母線ガ z 軸ニ平行デアレバ，其ノ柱面ノ方程式ハ $f(x, y)=0$ トナル。

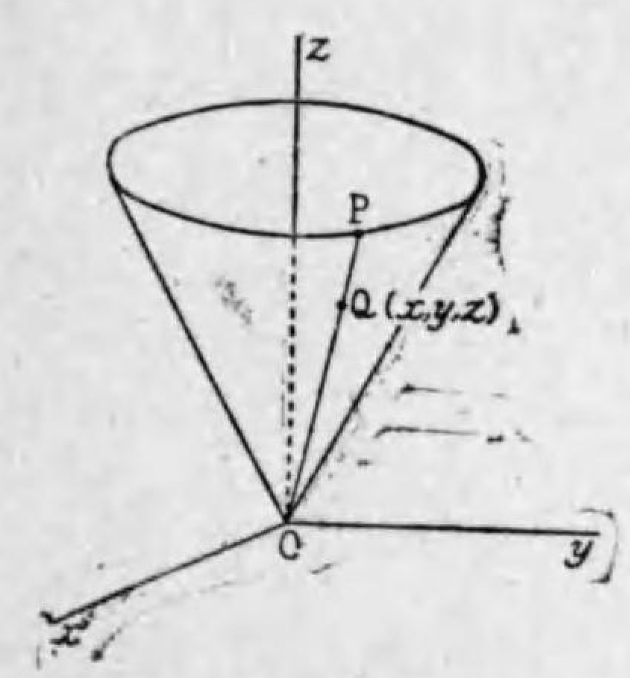
問　　題

24. 導線ガ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ ニシテ母線ガ z 軸ニ平行デアル柱面ノ方程式ヲ求メヨ。コノ柱面ヲ楕圓柱面ト云フ。

***25.** 柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-z)^2}{b^2}=1$, ト三ツノ座標平面トノ交線ハ如何ナル曲線トナルカ。

20.11 錐面ノ方程式

錐面 (Conical surface) トハ一直線ガ常ニ一定點ヲ通リ且一ツノ曲線ニ交リツツ動イテ出來ル曲面デアツテ，其ノ直線ヲ母線，定點ヲ頂點，其ノ曲線ヲ導線ト云フ。



導線ガ圓ナル錐面ヲ**圓錐面**ト云ヒ，此ノ圓ノ中心ト頂點トヲ結ブ直線ガ此ノ圓ノ平面ニ垂直ナルモノヲ**直圓錐面**ト云フ。

導線ガ $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=r^2 \\ z=c \end{array}\right\} \qquad (1)$

デアツテ原點ヲ頂點トスル直圓錐面ノ方程式ヲ次ニ求メル。

任意ノ位置ニ於ケル母線 OP ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n} \qquad (2)$$

トスレバ，導線上ノ P 點ノ座標ハ $\left(\dfrac{l}{n}c,\ \dfrac{m}{n}c,\ c\right)$ トナル。

又 P 點ガ導線ノ上ニアルタメニハ

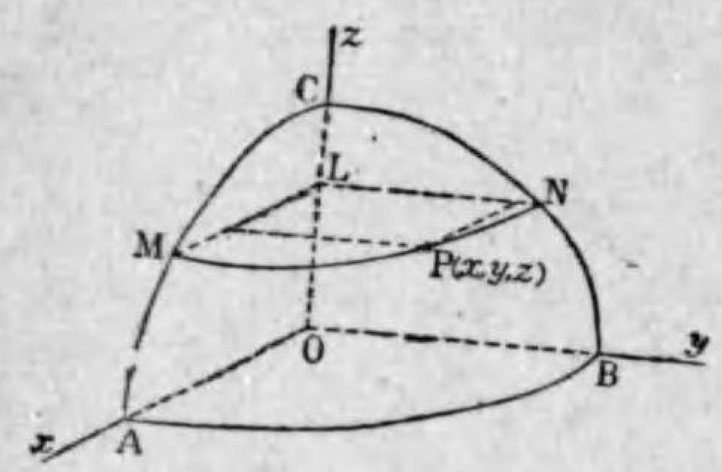
$$\frac{l^2}{n^2}c^2+\frac{m^2}{n^2}c^2=r^2 \qquad (3)$$

(2) ト (3) カラ $l,\ m,\ n$ 消去スレバ

$$x^2+y^2=\frac{r^2}{c^2}z^2 \qquad \cdots(12)$$

ガ求ムル直圓錐面ノ方程式デアル。

20. 12 楕圓面ノ方程式



zx 平面上ニ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

及ビ yz 平面上ニ楕圓

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

ガアル。

今 z 軸上ニ任意ノ點 L ヲ取リ, L カラ x 軸及ビ y 軸ニ平行線ヲ引キ, 楕圓 (1), (2) ト M, N デ交ラセルトキ LM, LN ヲ兩半軸トスル動ク楕圓ニヨツテ作ラレタ曲面ヲ**楕圓面** (Ellipsoid) ト云フ。

楕圓面上ニ任意ノ點 P$(x,\ y,\ z)$ ヲ取リ, P 點ヲ通リ xy 平面ニ平行ナル平面ヲ引キ, コレガ z 軸ト L, (1) ト M, (2) ト N ニ於テ交ツタトスレバ, M 點ハ (1) ノ上ニアルカラ

$$\frac{\mathrm{LM}^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 即チ \quad \mathrm{LM}^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \qquad (3)$$

次ニ N 點ハ (2) ノ上ニアルカラ

$$\frac{\mathrm{LN}^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 即チ \quad \mathrm{LN}^2=b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \qquad (4)$$

又 P 點ハ楕圓 MN 上ニアルカラ

$$\frac{x^2}{\mathrm{LM}^2}+\frac{y^2}{\mathrm{LN}^2}=1 \qquad (5)$$

(3), (4) ヲ (5) ニ代入スルト $\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)}=1$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \cdots(13)$$

コレ求メル楕圓面ノ方程式デアル。

$a=b$ ナルトキハ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \cdots(14)$$

此ノ曲面ハ z 軸ヲ廻轉軸トシテ出來タ曲面デアルカラ之ヲ**轉成面** (Spheroid) ト云フ。

$a>c$ ナルトキ公式 (14) ノ曲面ヲ**扁球** (Oblate spheroid) ト云ヒ,

$a>c$ ナルトキ公式 (14) ノ曲面ヲ**長球** (Prolate spheroid) ト云フ。

$a=b=c$ ナルトキハ球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ トナル。

第二十一章
偏　微　係　數

21. 1　偏微係數

前章迄ニ述ベタ所ハ主トシテ自變數ガ只一ツデ,

$$y=f(x) \quad 或ハ \quad \mathrm{F}(x,\ y)=0$$

ト記サレタ場合ヲ考ヘテ來タガ, 實際ニハ屢々自變數ガ二ツ以上ノコトガアル。例ヘバ直圓壔ノ體積ハ底ノ半徑及ビ高サノ函數デアリ, 又一定量ノ氣體ノ體積ハ其ノ壓力ト溫度トノ函數デアル。

自變數ガ $x,\ y$ ノ二個デ, z ガ夫等ノ函數デアレバ, 第 20.6 節ニ述ベタヤウニ

$$z=f(x,\ y)$$

デ表シ, 且 $\Delta x,\ \Delta y$ 及ビ Δz ニテ夫々 $x,\ y$ 及ビ z ノ變化ヲ表スモノトスル。

函數 $z=f(x,\ y)$ ニ於テ x ト y トハ或變域† (Domain) 內デ互ニ關係ナク變化シ得ルモノデアルガ, 暫ク y ヲ不變ナモノト見做セバ, z ハ x ノミノ函數ト考ヘラレル。斯樣ニ考ヘタトキ x ニ對スル z ノ微係數, 卽チ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} \quad 或ハ \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}$$

ヲ x **ニ對スル** z **ノ偏微係數** (Partial differential coefficient) ト云ヒ, 通常

† z ガ $x,\ y$ ノ函數デアルトキ, $x,\ y$ ノ取リ得ル値ニ制限ノアル場合ト, ナイ場合トガアル。例ヘバ $z=ax+by+c$ ナルトキ $x,\ y$ ノ有限ナ總テノ値ニ對シテ z ノ値ハ必ズ存在スルガ, モシ $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ デアルトキハ $x^2+y^2\geqq 1$ ナル $x,\ y$ ノ値ニ就テノミ z ハ存在スル。カヽルトキハ自變數 $x,\ y$ ノ取リ得ル値ニ制限ノアル場合デ, コノトキ x,y ノ取リ得ル値ノ組ノ全體ヲ x,y ノ變域ト云フ。

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad f_x(x,\ y),\quad f_x$$

等ノ記號デ表サレル。

同樣ニ x ヲ常數ト見做シタトキ y ニ對スル z ノ微係數, 卽チ

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} \quad 或ハ \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}$$

ヲ y **ニ對スル** z **ノ偏微係數**ト云ヒ

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad f_y(x,\ y),\quad f_y$$

等ノ記號ノ一ツデ之ヲ表ス。

例 1. $z=x^3-y^2+a^2$ ナルトキ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y$$

例 2. $z=\cos(3x^2-y)$ ナルトキハ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-6x\sin(3x^2-y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin(3x^2-y)$$

例 3. 高サ h, 半徑 r ナル直圓壔ノ體積ガ V デ表サレル場合ニ, 其ノ高サニノミ少シノ變化ヲ與ヘタトキ體積ノ變化ノ高サノ變化ニ對スル割合ノ極限 $\dfrac{\partial V}{\partial h}$, 及ビ半徑ノミ少シ變化シタトキ體積ノ變化ノ半徑ノ變化ニ對スル割合ノ極限 $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ ヲ求メヨ。

$$V=\pi r^2 h$$

デアルカラ

$$\frac{\partial V}{\partial h}=\pi r^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial r}=2\pi rh$$

問　　題

1. 次ノ函數ニツイテ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ。

(*a*) $z=3x^2+y^3+5$　　(*b*) $z=x^2-2xy+y^2$

(*c*) $z=\dfrac{x}{y}$　　(*d*) $z=\sin(x-3y)$

*(*e*) $z=\tan xy$　　*(*f*) $z=\cos\dfrac{x}{y}$

***2.** $z=(y+ax)^3$ ナルトキ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ナルコトヲ證セ。

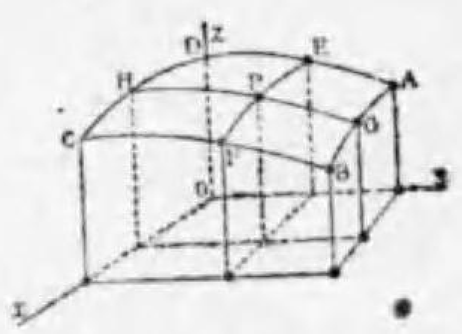
21.2 偏微係數ノ幾何學的意義

立體解析幾何學ニ於テ述ベタト同樣ニ互ニ直交スル三直線 x, y, z ヲ座標軸ニトルトキハ

$$z=f(x, y)$$

ナル方程式ハ一ツノ連續セル曲面ヲ表スモノデアル。

此ノ表面ノ一部ヲ ABCD トシ，之ト xz 平面トノ交リヲ CD, yz 平面トノ交リヲ AD トスル。



次ニ表面上ノ任意ノ點 $P(x, y, z)$ ヲ通リ xz 平面ニ平行ナル平面ニテ其ノ表面ヲ切リ，其ノ交リヲ EPF トシ，P ヲ通ル yz 面ニ平行ナル平面トノ交リヲ GPH トスレバ，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ハ P 點ニ於ケル曲線 EPF ノ傾斜率ヲ與ヘ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ハ曲線 GPH ノ傾斜率デアル。

從ツテ P ニ於テ曲線 EPF, GPH ニ切線ヲ引キ，是等ト xy 面トノナス角ヲ夫々 θ, φ トスルト

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\tan\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\tan\varphi$$

デアル。

21.3 全微分

函數 $z=f(x, y)$ ニ於テ x, y ニ夫々 $\Delta x, \Delta y$ ナル變化ヲ與ヘタトキ，之ニ對應スル z ノ變化ヲ Δz トスレバ

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\\&=\{f(x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)\}\\&\qquad-\{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\}\\&=\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot\Delta x+\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\cdot\Delta y\end{aligned}$$

故ニ $\Delta x, \Delta y$ ガ小ナルトキハ

$$\Delta z \fallingdotseq f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y$$

ニシテ，コノ右邊ヲ z ノ全微分 (Total differential) ト云ヒ，dz ナル記號デ表ス。即チ

$$dz=f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y$$

ニシテ，特ニ z ガ x トナツタ場合ヲ考ヘルト

$$f_x(x, y)=1, \qquad f_y(x, y)=0$$

トナルカラ，上式ハ

$$dz=dx=\Delta x$$

同樣ニ $z=y$ トスレバ

$$dy=\Delta y$$

トナル故，上式ハ次ノヤウニ書クコトガ出來ル。

$$\left.\begin{aligned}&dz=f_x(x, y)dx+f_y(x, y)dy\\ \text{或ハ}\quad &dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\end{aligned}\right\}\quad\cdots(1)$$

即チ z ノ全微分ヲ求メルニハ x, y ノ偏微係數ニ夫々 x, y ノ微分ヲ乘ジタモノノ和ヲ求メレバヨイ。

例 1. $z=xy^2$ ナルトキ dz ヲ求メヨ。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy$$

ナル故

$$dz=y^2dx+2xydy$$

例 2. 直角三角形ノ直角ノ二邊ヲ與ヘテ，斜邊ノ長サヲ算出スル場合ニ，二邊ノ長サハ夫々 10 糎，15 糎ニテ是等ニハ 0.2 糎ノ誤差ガアルモノトシ，其ノタメニ生ズル斜邊ノ誤差ヲ求メヨ。

斜邊ノ長サヲ z，他ノ二邊ヲ x 及ビ y トスレバ

$$z^2=x^2+y^2$$

但シ　　$x=10$ 糎，　$y=15$ 糎.

$$dx=dy=0.2 \text{ 糎}$$

又　　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}$$

$\therefore$
$$dz=\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy$$

故ニ
$$dz=\frac{x+y}{z}dx$$
$$=\frac{10+15}{\sqrt{10^2+15^2}}\times 0.2$$
$$=0.28 \text{ 糎}$$

問　　題

3. 次ノ函數ノ全微分ヲ求メヨ。

(*a*) $z=x^2y$　　(*b*) $z=x^2-y^2$　　*(*c*) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

***4.** 底ノ半徑ガ r, 高サガ h ナル直圓柱ノ體積ヲ V ニテ表ストキ r, h ガ夫々 dr, dh ダケ增加シタタメニ起ル體積ノ變化 dV ヲ求メヨ。

又 $r=10$ 糎, $h=20$ 糎ニシテ $dr=dh=0.1$ 糎ナルトキ dV ヲ算出セヨ。

5. $z=f(x, y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ナラバ
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
ナルコトヲ證セ。

6. $z=f(x, y)$, $y=\varphi(x)$ ナラバ
$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

21.4　陰函數ノ微分

x 及ビ y ノ關係ガ方程式 $f(x, y)=0$ ナル形デ表サレル場合ニ, 之ヲ陽函數ノ形ニ書キ換ヘルコトハ一般ニ困難デアルカラ
$$z=f(x, y)$$
ト考ヘテ z ノ全微分ヲトレバ
$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

然ルニ $z=0$ デアルカラ $dz=0$

$\therefore$
$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad \cdots(2)$$

從ツテ
$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\\ \text{或ハ}\quad \frac{dy}{dx}&=-\frac{f_x}{f_y}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(3)$$

例　$3x-4xy+5y=0$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。
$$\frac{\partial f}{\partial x}=3-4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-4x+5$$
$\therefore$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-4y}{4x-5}$$

問　　題

7. 次ノ函數ニ於テ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

(*a*) $xy-5x-1=0$　　(*b*) $x^2-y^2=35$　　*(*c*) $x^3-3axy+y^3=0$

21.5　高次偏微係數

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 或ハ f_x, f_y 等ガ亦 x, y ノ連續函數デアルトキ, 之ヲ再ビ x 又ハ y ニ就テ偏微係數ヲ求メタモノヲ夫々函數 $f(x, y)$ ノ x 及ビ y 等ニ關スル**第二次偏微係數** (Second partial differential coefficient) ト云ヒ, 次ノ如キ記號ヲ用ヒル。
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y)=f_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x, y)=f_{xy}$$