[illegible]

十二位[illegible]

[illegible]求[illegible]何

[illegible]

[illegible]

) [illegible]一人 18日作完[illegible]

日[illegible]成

) x^2+4x+3 (5) $x^2-8x+15$

) $x^2-13x+36$ (6) [illegible]

) x^2+x-6 (8) $x^2-3x-10$

) [illegible] (9) [illegible]

) $2x^2+7x+3$ (5) [illegible]

) $3x^2-8x+4$ [illegible] x^2-7x+[illegible]

) $2x^2-7x+6$ (7) $6x^2+x-1$

) $4x^2-11x-3$ (9) [illegible]

例　　言

是書以說理簡明使學者易於領會爲宗旨於普通代數之理法搜採靡遺務期詳畧得中俾適合於陸軍預備學校教科之用

我國迻譯之書以查理斯密溫特渥斯之小代數查理氏霍爾氏乃托氏之大代數爲最美善是編之料即以該書爲主而以代數教科書普通代數講義助之

理解太少則領會極難問題太多則厭倦易起故書於理解稍詳於問題稍畧但所採之題目務期簇生新以引起學者演算之興味

代數之運用莫妙於公式亦莫重於公式故本書尾將緊要之綱領及公式列爲一表以便學者熟讀免遺忘

本書中之列式與名詞符號等俱取海內通行者之

案陸軍預備學校定章自一元二次方程起首教一百四十課本書之編輯即以是爲標準

目錄

第一編

一元二次方程式

第二編

一元多次方程式

第三編

二次聯立方程式

第四編

二元一次不定方式

第五編

指數之理論

第六編

根數

第七編

比，比例，變數，

第八編

等差，等比 調和級數

第九編

級數之和

第十編

排列及組合

第十一編

二項式定理

第十二編

指數定理　對數　對數級數

附　錄

第一編

一元二次方程式

1. 二次方程定義　式中所含之未知數量其最高方乘爲二次者謂之二次方程式

如 $x^2=4, 3x^2+4x=7, ax^2+bx+c=0$ 各爲二次方程式

二次方程式分兩種一曰純二次一曰雜二次

2. 純二次方程式　方程式內祗有未知數量之二次者爲純二次方程式如 $3x^2-7=20$ 是也

凡純二次方程式則依一次方程之解法皆可化爲 $x^2=a$ 之式其 a 之數或爲整數或爲分數或爲整方或爲不整方均可

原方程式既化爲 $x^2=a$ 之式若開其兩端之方則得 $x=\pm\sqrt{a}$

蓋因 $+\sqrt{a}$ 與 $-\sqrt{a}$ 之方俱等于 a 故純二次方程式之 x 有二同數代入原式皆能充之故純二次方程皆有二根其數同號異也試舉其例以明之如次

〔例 1.〕 解 $5x^2-48=2x^2$

$$5x^2-48=2x^2$$

$$5x^2-2x^2=48$$

$$3x^2=48$$

$$x^2=16$$

$$\therefore\quad x=\pm 4$$

〔例 2.〕 解 $3x^2+15=0$

$$x^2=-5$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{-5}$$

3. 雜二次方程式 方程式內兼有未知數量之一次與二次者爲雜二次方程式如 $2x^2-3x=12$ 是也

凡雜二次方程式皆可依前解方程式之法化爲 $a^2x^2\pm 2abx=c$ 之式此即二次方程之公方程方程式既化爲 $a^2x^2\pm 2abx=c$ 之式若令其左邊爲整方即可開方而得其根矣惟二項式之方原等于首項之方加或減首末相乘之二倍又加末項之方如 $(ax\pm b)^2=a^2x^2\pm 2abx+b^2$ 是也故若以方程之左邊 $a^2x^2\pm 2abx$ 爲整方之前二項則 $2abx$ 必爲首末相乘之二倍矣但已知

根式之首項為 ax 則末項必為 $2ax$ 除 $2abx$ 之商即 b 因此欲令左邊為整方則必加 b 之方又因方程式不可失其相等故必加于兩邊如次

〔例 1〕 解　$16x^2+5x-3=7x^2-x+45$、

移項　$16x^2-7x^2+5x+x=45+3$

加同類項　$9x^2+6x=48$

成整方　$9x^2+6x+1=48+1$

開平方　$3x+1=\pm 7$

即　$3x=-1\pm 7$

$=6$ 或 -8

$\therefore\ x=2$ 或 $-2\frac{2}{3}$

〔例 2.〕 解　$3x^2=10x-3$

$3x^2=10x-3$

移項　$3x^2-10x=-3$

以 3 除之　$x^2-\frac{10}{3}=-1$

成整方　$x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}-1=\frac{16}{9}$

開平方　$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{4}{3}$

$\therefore\ x=\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}=3$ 或 $\frac{1}{3}$

習　　題 I.

解以下各方程式

1. $x^2-3=46$

2. $2(x^2-1)-3(x^2+1)+14=0$

3. $\dfrac{x^2-5}{3}+\dfrac{2x^2+1}{6}=\dfrac{1}{2}$

4. $x^2-12x+6=\dfrac{1}{4}$

5. $3x^2-4x=7$

6. $2x^2-27x=14$

7. $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{21}=0$

8. $5x(x-3)-2(x^2-6)=(x+3)(x+4)$

9. $(x-2)(x-4)-2(x-1)(x-3)=0$

10. $\dfrac{2}{5}(3x^2-x-5)-\dfrac{1}{3}(x^2-1)=2(x-2)^2$

4. 元字方程式 方程式內未知數量之係數均係文字者謂之元字方程式其解法如次

〔例 1.〕 解 $ax^2+bx=c$ 以 $4a$ 乘全式並兩邊各加 b 之方則 $4a^2x^2+4abx+b^2=4ac+b^2$

開平方 $2ax+b=\pm\sqrt{4ac+b^2}$

即 $2ax=-b\pm\sqrt{4ac+b^2}$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a}$$

〔例 2.〕 解 $adx-acx^2=bcx-bd$ 變各項之符號並移 bcx 于左邊則 $acx^2+bcx-adx=bd$

變左邊爲二項式 $acx^2+(bc-ad)x=bd$

以 $4ac$ 乘之 $4a^2c^2x^2+4ac(bc-ad)x=4abcd$

成整方 $4a^2c^2x^2+4ac(bc-ad)x+(bc-ad)^2$

$$=b^2c^2+2abcd+a^2d^2$$

開平方 $2acx+(bc-ad)=\pm(bc+ad)$

即 $2acx=-(bc-ad)\pm(bc+ad)$

$=2ad$ 或 $-2bc$

$\therefore\quad x=\dfrac{d}{c}$ 或 $-\dfrac{b}{a}$

〔例 3.〕 解 $px^2-px+qx^2+qx=\dfrac{pq}{p+q}$

變左邊爲二項式 $(p+2)x^2-(p-q)x=\dfrac{pq}{p+q}$

以 x^2 之係數之 4 倍乘之 $4(p+q)^2x^2-4(p^2-q^2)x=4pq$

成整方 $4(p+q)^2x^2-4(p^2-q^2)x+(p-q)^2=p+2pq+q^2$

開平方 $2(p+q)x-(p-q)=\pm(p+q)$

即 $2(p+q)x=(p-q)\pm(p+q)=2p$, 或 $-2q$

$\therefore\quad x=\dfrac{p}{p+q}$ 或 $-\dfrac{q}{p+q}$

注意 方程式之左邊無論有干項須先變爲二項式其其一項含有 x^2 他一項含有 x 求之

題　習 II.

解以下各方程式

1. $x^2=4ax+7a^2$

2. $x^2=\frac{7m^2}{4}-3mx$

3. $x^2-\frac{5nx}{2}-\frac{3n^2}{2}=0$

4. $cx=ax^2+bx^2-\frac{ac}{a+b}$

5. $(a^2+1)x=ax^2+a$

6. $\frac{x^2+2ab(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=2x$

7. $\frac{a}{3}+\frac{5x}{4}-\frac{x^2}{3a}=0$

8. $mx^2-1=\frac{x(m^3-n^2)}{mn}$

9. $\frac{(a-1)^2x^2+2(3a-1)x}{4a-1}=1$

10. $abx^2+\frac{b^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{3a^2x}{c}$

11. $a^2-(b-a)c=ax-bx+cx$

12. $\frac{x+3b}{8a^2-12ab}-\frac{3b}{9b^2-4a^2}-\frac{a+3b}{(2a+3b)(x-3b)}=0$

5. 公式用法 一切習題亦可用解得之公式以代演算即以特別方程式之數代其文字也

如方程式 $x^2+px+q=0$ 則以 p 與 q 代任意之數

依前法解之得 $4x^2+4px+p^2=p^2-4q$

$$2x+p=\pm\sqrt{p^2-4q}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

故欲求 $ax^2+bx+c=0$ 之二根如次

以 a 除全式則 $x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

用上之公式以 $\frac{b}{a}$ 代 p 並以 $\frac{c}{a}$ 代 q 即得

由是 $ax^2+bx+c=0$ 之二根為

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

6. 因數之應用 任何方程式其各項可悉移於一邊令其他一邊為零

依求因數法則知可解任何次方程式之習題即將左邊之式分為因數並令此等因數各等於零而所得之値即為所求之根如次

〔例 1.〕 解 $x^2+7x-60=0$

求因數 $x^2+7x-60=(x+12)(x-5)$

因方程式 $x^2+7x-60=0$

可書為 $(x+12)(x-5)=0$

由是　$(x+12)=0$ 並 $(x-5)=0$

∴　$x=-12$ 並 $x=5$

〔例 2.〕　解 $x^2+7x=0$

求因數　$x(x+7)=0$

由是　$x=0$　並 $x+7=0$

∴　$x=0$　並 $x=-7$

〔例 3.〕　解 $2x^3-x^2-6x=0$

求因數　$x(2x^2-x-6)=0$

由是　$x=0$　並 $2x^2-x-6=0$

以前法可解方程式 $2x^2-x-6=0$ 之根爲 2 並 $-\frac{3}{2}$

∴　$x=0,\ 2,\ -\frac{3}{2}$

〔例 4.〕　解 $x^3+x^2-4x-4=0$

求因數　$x^2(x+1)-4(x+1)=0$

即　$(x^2-4)(x+1)=0$

由上式可得 $x=-1,\ 2,\ -2.$

〔例 5.〕　解 $x^3-2x^2-11x+12=0$

以 $(x-1)$ 除 $x^3-2x^2-11x+12=x^2-x-12$

方程式 $x^3-2x^2-11x+12=0$

可書爲 $(x-1)(x^2-x-12)=0$.

由上式可得 $x=1,-3,4$

習 題 III.

解以下各方程式

1. $(x+1)(x-2)(x^2+x-2)=0$

2. $(x^2+3x+2)(x^2-x-12)=0$

3. $2x^3+4x^2-70x=0$

4. $x(x+1)(x+2)=(a+2)(a+1)a$

5. $x^3-x^2-x+1=0$

6. $8x^3+1=0$

7. $8x^3-1=0$

8. $x(x-a)(x^2-b^2)=0$

7. 已知根求方程式 如任r與r'爲方程內x之二根

則 $$x-r=0 \text{ 並 } x-r'=0$$

$$\therefore \quad (x-r)(x-r')=0$$

由上式論之r與r'爲方程式之根因此x可書爲r或r'則$x-r$, $x-r'$各等于0故而因數相乘可成一元二次方程式

又如任$r, r,' r''$爲x之根

則 $(x-r)(x-r')(x-r'')=0$

上式依乘法理可得一元三次方程式

由是可知三次方程式必含三根故任意方程式之根數等於未知量之次數

如任 r 與 r' 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之根

可書方程式爲 $(x-r)(x-r')=0$ 或 $x^2-(r+r')x+rr'=0$

兩根之和 $=-p$

兩根之積 $=q$

依此理如先知任意之二根則原方程式可求得之如次

〔例 1.〕 若方程式之二根爲 -1 與 $\frac{1}{2}$ 4

則方程式爲 $(x+1)(x-\frac{1}{4})=0$

或 $x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}=0$

以 4 乘之 $4x^2+3x-1=0$

〔例 2.〕 如方程式之根爲 0, 1, 5

則方程式爲 $(x-0)(x-1)(x-5)=0$

即 $x(x-1)(x-5)=0$

或 $x^3-6x^2+5x=0$

習 題 IV.

求作下記各根之方程式

1. $2,\ 1,$ 2. $7,\ 2,$

3. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ 4. $\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}$

5. $-5,\ -\frac{1}{2}$ 6. $-\frac{7}{9},\ \frac{9}{7}$

7. $0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -1$ 8. $a-2b,\ 3a+2b$

8. 等根無理根及虛根

二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之根為

$$r=-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

$$r'=-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

若 $p^2-4q=0$ 則二根俱為 $-\frac{p}{2}$ 故互相等

若 p^2-4q 非零則知二根不等

由是 $x^2+px+q=0$ 之二根互相等其關係在 $p^2-4q=0$

方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根若 p^2-4q 非完全平方則為無理數

若 p^2-4q 為負則 $\sqrt{p^2-4q}$ 為虛數因雙次方根無法能成負數者

由是 p^2-4q 爲負則 $x^2+px+q=0$ 之兩根爲虛數

又二次式之二根中若其一根爲虛數則二根俱爲虛數

用觀察法可証方程式之根數如次

〔例 1.〕 $x^2-5x+6=0$

此方程式內 p 爲 -5,q 爲 6

$\therefore\quad \sqrt{p^2-4q}=\sqrt{25-24}=1$

∴ 其兩根均爲實數並爲正號

〔例 2.〕 $x^2+3x+1=0$

此方程式內 p 爲 3,q 爲 4

$\therefore\quad \sqrt{p^2-4q}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

∴ 其兩根均爲無理數

〔例 3.〕 $x^2+3x+4=0$

此方程式內 p' 爲 3 q 爲 4

$\therefore\quad \sqrt{p^2-4q}=\sqrt{9-16}=\sqrt{-7}$

∴ 其兩根均爲虛數

習 題 Y.

求證以下方程式各根之數如何

1. $x^2-7x+12=0$

2. $x^2-7x-30=0$

3. $x^2+4x-5=0$

4. $5x^2+8=0$

5. $x^2+4x+1=0$

6. $x^2-2x+9=0$

7. $3x^2-4x-4=0$

8. $x^2+4x+4=0$

9. 增根及欠根　方程式之兩邊爲整式各以含未知量之任意整式乘之必生增根

如方程式 $x^2=9$ 其合理之數爲 $x=3$, 或 -3

若此方程方之兩邊各以 $x-2$ 乘之則得新方程式如次

則　　$x^2(x-2)=9(x-2)$

則此新方程式於合理之數 $x=3$, 或 -3 之外別增一合理之數 $x=2$

方程式之兩邊以含未知量之任意因數除之其所生之方程式恒缺原方程式所應有之根宜用爲除數之式等于零求之

10. 不整方程式　方程式之分母含有未知

數者謂之不整方程式

凡解不整方程式須以其分數之分母乘之化爲同值之整方程式但其乘法必須撿查(撿查其根合理否)因方程式之兩邊以含未知數量之式乘之按前節之理必生增根也

如 $a=b$ 之方程式以 p 乘之則 $pa=pb$ 卽 $p(a-b)=0$ p 爲乘式之未知數故 $p=0$, $a-b=0$ 而生 $p=0$ 之增根也

或謂不整方程式以其分母之最低公倍數乘之則不生增根但如下之第二例雖乘以分母之最低公倍數仍生增根

〔例 1.〕　解　$\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$

以分母之 L. C. M. $(x-5)(x-3)$ 乘其兩邊則得

$$3(x-3)+2x(x-5)=5(x-5)(x-3)$$

故　$3x^2-33x+84=0$

卽　$x^2-11x+28=0$

$\therefore$　$x=4$ 或 $x=7$

以此兩値代入原方程撿查之知兩根皆合

〔例 2.〕　解　$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$

以分母之 L. C. M. x^2-1 乘之則得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+x+1=0$$

即　$$x^2-3x+2x^2-2+x+1=0$$

即　$$3x^2-2x-1=0$$

$$\therefore\quad (3x+1)(x-1)=0$$

由是　$x=-\frac{1}{3}$ 及 $x=1$

將兩值代入原方程檢查之知 1 非原方程之根而爲乘式 $x^2-1=0$ 之根

由是不整方程式化爲整方程式之後其不合理之根宜省去今以別法証之如下

別法　$x=1$ 爲不合理之根今先設法令其結果不得有此根則在于不必遷去其分母

從　$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$ 變爲

$$\frac{x^2-3x+(x+1)}{x^2-1}+2=0$$

即　$$\frac{(x-1)^2}{x^2-1}+2=0$$

即　$$\frac{x-1}{x+1}+2=0$$

$$\therefore\quad x-1+2(x+1)=0\qquad\therefore\quad x=-\frac{1}{3}$$

〔例 3.〕　解　$\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$

此例亦不必運去其分母可從兩邊之各項各減去1

則 $$\frac{x}{x-2}-1+\frac{x-9}{x-7}-1=\frac{x+1}{x-1}-1+\frac{x-8}{x-6}-1$$

則 $$\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{x-7}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-6}$$

則 $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6}$$

則 $$\frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)}$$

由是 $$(x-2)(x-7)=(x-1)(x-6)$$

$$x^2-9x+14=x^2-7x+6$$

$\therefore$ $$x=4$$

〔例4.〕 解 $$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3$$

兩邊各減去3則得

$$\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0$$

$$\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}+\frac{x}{x+c}=0$$

$\therefore$ $x=0$ ... ... (1)

或 $$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0$$

以分母之 L. C. M. 乘之則得

$$(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a)(x+b)=0$$

即 $$3x^2+2x(a+b+c)+bc+ca+ab=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{3}\left\{(a+b+c)\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right\}\ \ldots(2)$$

由是原方程之根爲(1)及(2)

習 題 VI.

1. $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

2. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{13}{6}$

3. $\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{10}{x+10}=\dfrac{2}{3x-3}$

4. $\dfrac{5x}{x-3}-\dfrac{6}{x+2}+\dfrac{19}{3-x}=0$

5. $\dfrac{1}{x^2-3x}+\dfrac{1}{x^2+4x}=\dfrac{9}{2x^2}$

6. $\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{3}{2-x}=1+\dfrac{1}{3x+6}$

7. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}$

8. $\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x-6}{x-4}=\dfrac{x+4}{x+2}+\dfrac{x-5}{x-3}$

9. $\dfrac{x+a}{a+x}+\dfrac{x+b}{b-x}+\dfrac{x+c}{c-x}=3$

10. $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}$

11. $\dfrac{a+b}{x+b}+\dfrac{a+c}{x+c}=\dfrac{2(a+b+c)}{x+b+c}$

12. $\dfrac{a+c}{x+2b}+\dfrac{b+c}{x+2a}=\dfrac{a+b+2c}{x+a+b}$

13. $\dfrac{(x+a)(x+b)}{x+a+b}=\dfrac{(x+c)(x+d)}{x+c+d}$

14. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}$.

11. 無理方程式 方程式內含有未知量之平方根或他之方根者謂之無理方程式

其解法則移其無理項于等號之一邊然後將方程式之兩邊自乘之若仍含有無理項則依此法幾次求之至變爲有理項而後止如次

〔例 1.〕 解方程式 $\sqrt{x^2-9}+x=9$

移項 $\sqrt{x^2-9}=9-x$

兩邊各自乘 $x^2-9=(9-x)^2$

則 $18x=90$

$\therefore\quad x=5$

〔例 2.〕 解方程式 $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$

兩邊各自乘 $2x+8+4(x+5)-4\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}=4$

即 $6x+24-4\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}=0$

$\therefore \qquad 3x+12=2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}$

兩邊各自乘則　$9x^2+72x+144=4(2x+8)(x+5)$

即　$x^2-16=0$

$\therefore \qquad x^2=16$

由是　$x=4$ 或 -4

注意　以4代入原方程式之 x 則

$\sqrt{16}-2\sqrt{9}=2$ 則 $4-6=2$ 自不合理

又以 -4 代 x 則 $\sqrt{0}-2\sqrt{1}=2$ 亦不合理

x 之兩根之數值俱與方程式不合其原因有二一因代數量皆有正負兩平方根而 $\sqrt{2x+8}$ 與 $\sqrt{x-5}$ 今皆設爲正一根號不能指其僅爲正式僅爲負故所求方程式之根號正負難定

能解此理則知 $x=4$ 實合於所求方程式

因　$\pm\sqrt{16}-2(\pm\sqrt{9})=2$

卽　$\pm4-(\pm6)=2$

故當解方程式時其中之根號或用正或用負各當分別

〔例3.〕　解　$\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}+\sqrt{7x+1}=0$

移項　$\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=-\sqrt{7x+1}$

兩邊各自乘則　$2x+7+2\sqrt{2x+7}\sqrt{3x-18}$

$+3x-28=7x+1$

移項且以 2 除之則　$\sqrt{2x+7}\sqrt{3x-18}=x+6$

兩邊各自乘則　$(2x+7)(3x-18)=(x+6)^2$

則　　$5x^2-27x-162=0$

$\therefore\quad x=9$ 或 $x=-\dfrac{18}{5}$

附論兩邊之平方　有理方程式之兩邊各自乘則生增根

例如有理方程式 $A=B$ 兩邊各方之則得 $A^2=B^2$ 卽 $A^2-B^2=0$ 卽 $(A+B)(A-B)=0$　$\therefore$　$A=B,\ A=-B$ 此 $A=-B$ 爲增根

由是方程式之兩邊各自乘不能與原方程式等値然在無理方程式獨能與原方程式等値而不生增根

例如 $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 兩邊各方之則得 $A=B$ 即 $A-B=0$ 則 $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=0$　$\therefore$　$\sqrt{A}=\sqrt{B},\ \sqrt{A}=-\sqrt{B}$

但　$\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 原含有 $\pm\sqrt{A}=\pm\sqrt{B}$ 之意義故有 $\sqrt{A}=\sqrt{B},\ -\sqrt{A}=-\sqrt{B},\ \sqrt{A}=-\sqrt{B},\ -\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 之四根而此四根兩兩相等故實得 $\sqrt{A}=\sqrt{B},\ \sqrt{A}=-\sqrt{B}$ 之二根故無理方程式兩邊平方之仍與原方程式等値

習題 VII.

解以下各方程式

1. $\sqrt{x-3}=3$

2. $\sqrt{5(x+7)}=4\sqrt{3x-2}$

3. $\sqrt{x+5}=2\sqrt{3x+4}$

4. $\sqrt{x+2}=x$

5. $x+\sqrt{x+1}=5$

6. $x-5+2\sqrt{x-5}=0$

7. $2x-5\sqrt{x}=3$

8. $7x=\sqrt{2x-11}+33$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{5x+1}=2$

10. $\sqrt{2x+11}-\sqrt{2x-5}=2$

11. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$

12. $\sqrt{6x+1}+\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{7x+6}$

13. $\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=2$

14. $\sqrt{6x+\dfrac{3}{2}}=\sqrt{x+4}+\dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$

15. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b+2x}$

12. **雜例** 更解數要例以爲本章之結局

(1) 解方程式之最大數或最小數如次

任　$1+x-x^2=m$

則　$x^2-x=1-m$

並　$4x^2-(\quad)+1=5-4m$

卽　$2x-1=\pm\sqrt{5-4m}$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5-4m}$$

因 $(5-4m)$ 不能爲負號卽 m 之値不能大于 $\frac{5}{4}$ 點 x 之數必爲 $\frac{1}{2}$ 故 $\frac{5}{4}$ 爲方程式之最大數

任　$x^2+3x+4=m$

則　$x^2+3x=m-4$

並　$4x^2+(\quad)+9=4m-7$

卽　$2x+3=\pm\sqrt{4m-7}$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4m-7}$$

因 $(4m-7)$ 不能爲負號卽 m 之數不能小于 $\frac{7}{4}$ 點 x 之數必爲 $-\frac{3}{2}$ 故 $\frac{7}{4}$ 爲方程式之最小數

(2) 解方程式之根與其係數之關係

設 a,b 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之根

則　$x^2+px+q=(x-a)(x-b)$

則　　$x^2+px+q=x^2-(d+b)x+db$

即　　$d+b=-p,\ db=q$

$\therefore$ 二根之和 $=-p$ 二根之積 $=q$

(3) 求方程式 $x^2+5x-7=0$ 之根之平方爲根之方程式如何

設 d,b 爲方程式之根則 d^2,b^2 爲所求方程式之根爲

$$(x-d^2)(x-b^2)=0$$

即　　$x^2-(d^2+b^2)x+d^2b^2=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

故求　d^2+b^2 與 d^2b^2 可也

依前欵　$d+b=-5$

又　　$db=-7$

由是　$d^2+b^2=(d+b)^2-2db=(-5)^2-2(-7)$

$$=25+14=39$$

又　　$d^2b^2=49$

代入(1)式則　$x^2-39x+49=0$

(4) 設 mn 爲方程式 $ax+bx+c=0$ 之根求作以 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{n}{m}$ 爲根之方程式

方程式爲 $\left(x-\frac{m}{n}\right)\left(x-\frac{n}{m}\right)=0$

即 $$x^2-\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x+1=0$$

而 $$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)=\frac{m^2+n^2}{nm}$$

因 $$m+n=-\frac{b}{a},\ mn=\frac{c}{a}$$

$\therefore$ $$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=\frac{b^2}{a^2}-2\times\frac{c}{a}$$

由是 $$\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2}{ac}-2$$

方程式爲 $x^2-\left(\frac{b^2}{ac}-2\right)x+1=0$

以 ac 乘之則 $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

習　　題 VIII.

1. $x^2+px+q=0$ 之根爲 m, n. 則以 $m+\frac{1}{n}$, $n+\frac{1}{m}$ 爲根之方程式必爲 $qx^2+p(1+q)x+(1+q)^2=0$ 求證

2, $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 m, n. 則方程式 $(2b^2-ac)x^2+3abcx+a^2=0$ 之根爲 $\frac{1}{m-2n}$, $\frac{1}{n+2m}$. 求證

第二編

一元多次程式

13. 高次方程式　高于二次之方程式其普通之解法非學者所能驟及然有若干方程雖屬多次仍可依解二次之例解之者凡此等方程俱可化爲 $(x^n)^2+ax^n=b$ 之式其 x 之數或爲單項或爲數項相併最要者卽 x 之此指數必倍于彼指數也今舉其要例如次

〔例 1.〕　解　$x^4-13x^2=-36$

此方程式所含未知量之相异乘方其一種爲他一種之平方故可依前編之法解之

$$x^4-13x^2=-36$$

卽　$$(x^2)^2-13x^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}$$

$$=\frac{25}{4}$$

由是　$$x^2-\frac{13}{2}=\pm\frac{5}{2}$$

$$\therefore\quad x^2=9\text{ 或 }4$$

由是得　$$x=\pm\sqrt{9}\text{ 或 }\pm\sqrt{4}$$

$\therefore\quad x=\pm 3$ 或 ± 2

〔例 2.〕 解 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=9$

此方程式其含未知量祇有兩項其一項爲他一項之平方

設 $x^2+x=a$ 化方程式爲

$$a^2+4a=12$$

即 $a^2+4a+4=12+4$

$$=16$$

$$a+2=\pm 4$$

$\therefore\quad a=2,$ 或 -6

但 $a=x^2+x$

則 $x^2+x=2$

由是 $x=-2$ 或 $1.$

又 $x^2+x=-6$

由是 $x=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-23}}{2}$

〔例 3.〕 解 $\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{37}{6}$

此方程式含 x 之二項其一項爲他一項之反數

設 $y=\dfrac{x^2}{x+2}$ 則 $\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{1}{y}$

故 $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{37}{6}$

以 $6y$ 乘之 $6y^2-37y+6=0$

即 $(6y-1)(y-6)=0$

由是 $y=\dfrac{1}{6}$ 或 $y=6$

即 $\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{1}{6}$ 或 $\dfrac{x^2}{x+2}=6$

由(1)式得 $6x^2-x-2=0$ $\therefore$ $x=\dfrac{2}{3}$，或 $-\dfrac{1}{2}$

由(2)式得 $x^2-6x-12=0$ $\therefore$ $x=3\pm\sqrt{21}$

〔例 4.〕 $4x^2-6x+3\sqrt{2x^2-3x+7}=30$

此方程式根號內 x^2 與 x 之係數比等於根號外 x^2 與 x 之係數比

設 $\sqrt{2x^2-3x+7}=y$ 如是 $2x^2-3x+7=y^2$

而 $4x^2-6x=2y^2-14$

由是據所設之方程式得 $2y^2-14+3y=30$，即 $2y^2+3y-44=0$，

即 $(y-4)(2y+11)=0$ 由是 $y=4$，或 $-\dfrac{11}{2}$

$\therefore$ $y^2=16$，或 $\dfrac{121}{4}$

但 $y^2=2x^2-3x+7$

(1) $2x^2-3x+7=16$ 即 $2x^2-3x-9=0$

即 $(2x+3)(x-3)=0$ $\therefore$ $x=3$，$-\dfrac{3}{2}$

(2) $2x^2-3x+7=\dfrac{121}{4}$ 即 $2x^2-3x-\dfrac{93}{4}=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{3}{4}\pm\dfrac{\sqrt{195}}{4}$

〔例 5.〕 解 $x^3+4x^2+2x-4=0$

此方程式 x 之指數旣爲奇數則以 x 乘之得

$$x^4+4x^3+2x^2-4x=0$$

化爲 $x^4+4x^3+4x^2-2x^2-4x=0$

即 $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)=0$

設 $x^2+2x=y$

由是得 $y^2-2y=0$

即 $y^2-2y+1=1$

$y-1=\pm1$

$y=1\pm1$

$y=2$ 或 0

代入前式則

(1) $x^2+2x=2$

$x^2+2x+1=3$

$\therefore\quad x=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\quad x=-(1-\sqrt{3})$ 或 $-(1+\sqrt{3})$

(2) $x^2+2x=0$

$$x^2+2x+1=1$$

$$x+1=\pm 1$$

$$\therefore \quad x=-1\pm 1$$

$$x=0$$

$$x=-2$$

〔例 6.〕 解 $25x^4-6+\frac{1}{4x^4}=\frac{5}{4}$

此方程式之左邊其首末二項各爲整方最宜求一中項令左邊之式爲整方

中項必爲首末二項方根之二倍

則 $5x^2\times\frac{1}{2x^2}\times 2=5$

由是觀之於二邊之式各加1則左邊之式即爲整方矣如次

$$25x^4-5+\frac{1}{4x^4}=\frac{9}{4}$$

開平方 $5x^2-\frac{1}{2x^2}=\pm\frac{3}{2}$

去分數 $10x^4-1=\pm 3x^2$

移項 $10x^4\pm 3x^2=1$

以10乘全式並化爲整方

$$100x^4\pm 30x^2+\frac{9}{4}=10+\frac{9}{4}=\frac{49}{4}$$

開平方 $10x^2 \pm \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}$

由是 $10x^2 = \pm \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$ 或 -5

$x^2 = \frac{1}{5}$ 或 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ 或 $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$

又 $10x^2 = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} = 5$ 或 -2

$x^2 = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{5}$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ 或 $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{5}}$

14. 反商方程式 首末等距之項其係數兩兩相同者謂之反商方程式其例如下

(1) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

(2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + cx + a = 0$

(3) $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$

〔例 1.〕 解 (1) 式

$a(x^3+1) + bx(x+1) = 0$

即 $(x+1)\{a(x^2 - x + 1) + bx\} = 0$

$\therefore\quad x+1=0$ 或 $a(x^2-x+1)+bx=0$

$\therefore\quad x=-1$ 或 $\dfrac{a-b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{(a-b)^2-4a^2}}{2a}$

〔例 2.〕 解 (2) 式

以 x^2 除而括之則得

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

令 $\quad y=x+\dfrac{1}{x}$ 則 $y^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$\therefore\quad a(y^2-2)+by+c=0$

由是可得 y 之兩根今設之為 α,β

則 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\alpha$ 及 $x+\dfrac{1}{x}=\beta$

由此兩方程式可得 x 之四根

〔例 3.〕 解(3)式

$$a(x^5-1)+bx(x^3-1)+cx^2(x-1)=0$$

即 $\quad (x-1)\{a(x^4+x^3+x^2+x+1)+bx(x^2+x+1)$

$$+cx^2\}=0$$

$\therefore\quad x=1$ 或 $ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x$

$$+a=0$$

第二之方程式為四次之反商方程式故與例2同法

15. 二項方程式 其普通之形爲 $x^n \pm k=0$

〔例 1.〕 解 $x^3-1=0$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$\therefore$ $x-1=0$ 或 $x^2+x+1=0$

$\therefore$ $x=1$ 或 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$

（注意） 由是 $x^3=1$ 有三根即 1 之立方根爲 1, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ 及 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$

〔例 2.〕 解 $x^4-1=0$

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})=0$$

故 1 之四方根爲 1, -1, $\sqrt{-1}$ 及 $-\sqrt{-1}$

〔例 3.〕 解 $x^5-1=0$

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$\therefore$ $x=1$ 或 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 即反商方程式

由前款法得

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

即 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$\therefore$ $$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

由是　$x^2-x\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$$=\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$

$$\therefore\quad x-\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{(-10\mp2\sqrt{5})}}{4}$$

由是 1 之五方根爲

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\pm\frac{\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$

〔例 4.〕 解　$x^4+1=0$

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+x\sqrt{2})$$

$$(x^2+1-x\sqrt{2})=0$$

由是　$x^2+1+x\sqrt{2}=0\quad\therefore\quad x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}$

或　$x^2+1-x\sqrt{2}=0\quad\therefore\quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}$

故所求之根爲 $\pm\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$ 即 $\frac{\pm1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

16. 雜例　含有 x 之有理整式若以任意之特別數值 a 代 x 其式爲零則 $x-a$ 爲其式之因數証式如下

如 x^3-7x+6 以 2 代 x 而其式爲零故依上之定理

$x-2$ 爲其一因數而由除法得

$$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$$

又 x^3-4x^2+2x+1 設 $x=1$ 則其式爲零故 $x-1$ 爲其一因數而除法得

$$x^3-4x^2+2x+1=(x-1)(x^2-3x-1)$$

依上所述之定理已知方程式之一根則能令其方程式爲低次式

〔例 1.〕 有方程式 $x^3-7x+6=0$ 已知其一根爲 2 求其他根 x^3-7x+6, 設 $x=2$ 而其式爲零故 $x-2$ 爲其一因數

而由除法知 $x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$

由是 $(x-2)(x^2+2x-3)=0$

故其他根可由 $x^2+2x-3=0$

即 $(x+3)(x-1)=0$ 求得

故三次方程式 $x^3-7x+6=0$ 其三根爲 $2, -3, 1$ 而 $-3, 1$ 即所求之他根

〔例 2.〕 $x^4-25x^2+30x-9$ 與 $x^4-8x^3+19x^2-14x+3$ 俱爲零問 x 之值若何

此兩式若 x 爲相同之數(即 $x=a$) 而其式俱爲零

則 $x-a$ 爲此兩式之公因數

而任意二式之公因數可用求 H. C. F. 之常法求得在本例其 H. C. F. 如次

$$x^2-5x+3$$

而 x^2-5x+3 爲此二式之因數由是惟由 x^2-5x+3 所求得 x 之數能使兩式俱爲零其他決不能使兩式俱爲零故所求之數即

x^2-5x+3 之根

其根數如次

$$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

習　題 IX.

求以下各方程式之根

1. $x^6+7x^3=8$

2. $37x^2-9=4x^4$

3. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$

4. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$

5. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$

6. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$

7. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=12$

8. $2x^2-4x-\sqrt{(x^2-2x-3)}=9$

9. $2(2x-3)(x-4)-\sqrt{(2x^2-11x+15)}=60$

10. $x^3-8x^2+19x-12=0$

11. $25x^2+6+\frac{4}{9x^2}=\frac{955}{9}$

12. $x^3-3x^2-7x+21=0$ (設 $x+3$) 求其他根

13. $2x^3-5x^2+5x-2=0$

14. $9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$

15. $x^5+1=0$

16. $x^{[illegible]}-1=0$

17. $(x+a)^4+(x+b)^4=17(a-b)^4$

18. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}$

17. 問題 本節所舉之問題俱爲一元二次方程式之問題即已知量與未知量之關係在代數上宜用二次方程式顯之者

解問題時已知量與未知量之代數的關係不合乎問題之本意者往往有之

抑考其理則方程式之根數苟合於此方程式則無

論爲正爲負爲整數爲分數皆無差謬然在問題中其數各有制限要非演式步算時所能顯明如求人數之問題此數自不得不爲整數然在方程式中要不能顯其制限也

由是解問題時須依以下之次序

1. 將已知量與未知量之關係用代數記號顯之立爲方程式

2. 解所立之方程式而求其未知量之數值

3. 撿其所得之數取其合于命題之本意者去其不合于命題之本意者

今舉二次方程式諸問題之例如次

〔例 1.〕 今有相較爲 1 之二數各方之和爲 481 求二數各幾何

任　$x=$一數

並　$x+1=$又一數

則　$x^2+(x+1)^2=481$

$x^2+x^2+2x+1=481$

$2x^2+2x+1=481$

$x^2+x=240$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=240+\frac{1}{4}=\frac{961}{4}$$

開平方 $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{31}{2}$

∴ $x=-16$ 或 15

由是可得所求之二數爲 15 或 16

〔例 2〕 有二位之數其數等於兩數字之積之二倍而單位之數字較其十位之數字多 3 求此數如何

設 $x=$ 十位之數字

則 $x+3=$ 單位之數字

方程式爲 $10x+x+3=2x(x+3)$

$$2x^2-5x=3$$

則 $(x-3)(2x+1)=0$

∴ $x=3$ 或 $x=-\frac{1}{2}$

然數字必爲正整數故數字爲 3 與 6 所求之數爲 36

〔例 3〕 一人有洋元若干枚其元數之平方較其元數之 30 倍多 1000 求原有若干元

設 $x=$ 原有之元數

則　$x^2=30x+1000$

方程式　$x^2-30x-1000=0$

$(x-50)(x+20)=0$

由是　$x=50$ 或 $x=-20$

負數爲負債之意故二數值均爲合理由是某人所有爲 50 元或負債 20 元

〔例 4〕 某數與其平方根之和爲 42 求某數

任　$x=$ 某數

則　$x+\sqrt{x}=42$

即　$\sqrt{x}=42-x$

乘方　$x=1764-84x+x^2$

移項　$x^2-85x+1764=0$

此根爲 36 與 49

〔例 5.〕 有父子二人其年數之和爲 100 而其年數之積之十分之一較父之年多 180 問父子之年各幾何

任　$x=$ 父之年數

則　$100-x=$ 其子之年數

方程式　$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180$

即 $$x^2-90x+1800=0$$

$$\therefore\quad x=60 \text{ 或 } x=30$$

其第二之數雖爲正整數然不合理何則以子年較父多故也

由是父爲 60 歲子爲 40 歲

問　題

1. 有相較爲 1 之二數而其二數之積之三倍與其二數之和之四倍相減爲 8 求二數各幾何

2 有人以十六仙(cents)買梨若干若每梨之價低落 $\frac{1}{3}$ 仙則梨數可多買 4 個求原買之梨數

3. 某數及反數之和與某數及反數之差其積爲 $3\frac{3}{4}$ 求某數該幾何

4. 某人買卵以12仙所買之卵數等于買卵27個之仙數求 12 仙所買之卵數 18

$\frac{168.75}{x}\times 12-168.75=x$ 一商人買布若干匹費洋 168.75 元該商又將所買之布賣于他人每匹賣價 12 元則得賺利之元數等于每匹之買價求每匹之原價若干 11.25 或 180

6. 有一方形若一邊加 6 寸其他一邊加 4 寸則其面積爲原面積之二倍求每邊各幾何 12

7. 設有三直綫其中之二綫各爲第三綫之 $\frac{4}{7}$ 其三綫各方之和等于 1 方碼求每綫長幾英寸

8. 有一圓形若將半徑增一寸則面積爲原面積之二倍求圓之半徑若干

9. 有 20 寸長之直綫分爲二段則整綫與一段所成之長方形等于他一段之正方形求所分之二段各若干寸　$20x=(20-x)^2$

10. 有工一段甲乙合作須 20 點鐘而成若令各人獨作甲比乙快 9 點鐘求每人獨作各須若干時

11. 有鉄棍重爲 36 磅若將該棍伸長一尺則每尺之重比原有每尺之重少 $\frac{1}{2}$ 磅求原棍長并每尺之重各幾何　$\frac{36}{x}-\frac{36}{x+1}=\frac{1}{2}$　∴ $x=8$

12. 分 35 爲二分則二分互除所成之二分數之和爲 $2\frac{1}{12}$ 求二分各幾何　$\frac{35-x}{x}+\frac{x}{35-x}=2\frac{1}{12}$ 8 20, 15

13. 有兩位之數其單位之數字爲十位之數字之方若以 ~~45~~ 54 加于該數則兩位之數字適相反求某數　39

14. 有馬一匹賣 144 元賺利爲百分馬之買價求馬之買價若干　$144-x=\frac{x}{100}\times x\%$　$x=$ 80

15. 設有長方体不計其大小只知体厚爲寬之

$\frac{2}{3}$ 長為寬厚之和又其体積所合立方碼之數與每邊長之碼數相加應為面積之 $\frac{5}{3}$ 求体之大小該幾何 9, 6, 15

16. 12 個銅釘之價之分數比洋 12 分所買銅釘個數之二倍多 2 求 1.08 元該買多少釘 $\frac{108}{x}\times 12=\frac{12x}{108}\times 2+2$ 72

17. 有二分數其和為 $\frac{5}{6}$ 其差與其積等求二分數各幾何 $\frac{5}{6}-2x=\frac{5}{6}x-x^2$ $x=\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$

18. 有砂糖甲乙兩種其每 14 斤之價甲種比乙種貴 2 角 1 分而以洋 2.4 元所買得各種之斤之數甲種比乙種少 8 斤問各種 14 斤之價幾何 $\frac{240}{x}-\frac{240}{x+21}=\frac{8}{14}$ 84, 105

19. 有甲乙兩府相距 25 里今有二人同時由此相向而行其一人每行一里較他一人快 18 分而二人行後經 5 點鐘始相會問每點鐘之遠度各幾何 18 3里 $1\frac{1}{2}$里

20. 以兵一聯隊作為矩形之陣其長為寬之二倍若由此兵數中減去 206 名則能作為厚三列之中空方陣且其外面一列之兵數與原矩形陣之長之兵數等求一聯隊之兵數幾何 $2x^2-206=(2x)^2-(2x-6)^2$ 578人

21. 有矩形及正方形其面積相等且正方形之一邊較矩形之長邊短 6 寸若矩形之寬增 1 寸長減 2

寸則與原面積相等求矩形之長寬各幾何 18, 8,

22. 矩形之一對角綫與長邊和爲寬邊之 5. 倍而長較寬長 35 尺求矩形之面積幾何 1500

23. 依次兩數之立方其差爲 919 求各數幾何 17 18

24. 某音樂會設尋常位與特別位兩種其所賣之票各得洋 60 元而特別票之價較尋常票之價貴 1 角 5 分尋常票之額較特別票之額多 360 張求所賣之票數共若干 $\frac{60}{y}-\frac{60}{y+360}=.15$ $y=240$ 特

25. 一車輪週爲 $16\frac{1}{2}$ 英尺若每轉之時與比原定之速度慢 1 秒則每點鐘少行 $1\frac{7}{8}$ 英里求原定之速度每點該若干英里 $\frac{16\frac{1}{2}}{x-9900}-\frac{16\frac{1}{2}}{x}=\frac{1}{60\times60}$

1哩=5280呎

$1\frac{7}{8}$哩

26. 有兵卒若干人可排列爲方陣若外部每邊人數增 16 人則僅有四重而空其內部問兵卒人數 $(x+16)^2-(x+8)^2=x^2$ 576人

27. 設有兵士一營成營縱隊時其前面一列之人數比側面少 3 人成營橫隊時前面增 63 人側面只有 6 人問兵數若干 $x(x+3)=6(x+63)$ 504人

28. 西軍支隊以掩護之任務作防禦東軍支隊以脅威之任務作攻擊兩支隊相距 28 里東軍行 4 里

之後得緊急情報必須較原定時刻早至半點鐘方能達本來之任務于是按此計畫必須較原速度多增 4 里方可問原定之時刻若干

x……原定時刻

$\frac{88}{x}$……原定速度

$\frac{44}{\frac{88}{x}}$……四里時間

$x - \frac{44}{\frac{88}{x}} - \frac{24}{\frac{88}{x}+4} = \frac{1}{2}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$4x^2 - [illegible] = 0$

$(2x - [illegible])([illegible] + 7) = 0$

答 [illegible] 時

第 三 編

聯立二次方程式

18. 聯立二元二次方程式 方程式含二未知量且任何項中其指數之至大者爲2則爲二元二次方程式

如 $x^2+y^2=13$ 又 $x+xy+y=11$ 是也

解聯立二元二次方程式大抵必解一四次方程蓋消其一元之時恒得一四次方程故也

如上式第二方程 $y=\dfrac{11-x}{x+1}$

代入第一方程則 $x^4+2x^3-11x^2-48x=-108$

此方程按以上諸法則不能解然雖如此亦有聯立多次方程可令其歸于二次而以前法解之者凡此等方程大抵歸于以下之解法

19. 解法之第一類 即兩方程式一爲一次式其他歸爲二次式解此類方程宜先由一式內求得一未知量之同數代于他式內後依常法解之如次

〔例 1.〕 解 $3x^2-2xy=5$ ……………… (1)

$x-y=2$ ……………… (2)

由(2)式移項　$y=x-2$

以 y 之值代入(1)式則得

$$3x^2-2x(x-2)=5$$

由上式解之得　$x=1$ 或 -5

$$y=-1 \text{ 或 } -7$$

〔例 2.〕 解 $x+y=40$ … … … … … … (1)

$xy=300$ … … … … … … (2)

方(1)式　$x^2+2xy+y^2=1600$ … … … … (3)

以4乘(2)式　$4xy=1200$ … … … … … … (4)

由(3)減(4)　$x^2-2xy+y^2=400$

開平方　$x-y=\pm 20$ … … … … … (5)

(1)加(5)　$2x=60$ 或 20

$\therefore$ $x=30$ 或 10

由(1)減(5)　$2y=20$ 或 60

$\therefore$ $y=10$ 或 30

〔例 3.〕 解 $x-y=4$ … … … … … … (1)

$x^2+y^2=40$ … … … … … … (2)

方(1)式　$x^2-2xy+y^2=16$ … … … … (3)

由(3)減(2)　$-2xy=-24$ … … … … … (4)

由(2)減(4)　$x^2+2xy+y^2=64$

開平方　$x+y=\pm 8$ ……………… (5)

(1)加減(5)　$x=6$ 或 -2

$y=2$ 或 -6

〔例 4.〕解　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{20}$ ……………… (1)

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{41}{400}$ ……………… (2)

方(1)式　$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{81}{400}$ ……………… (3)

(3)減(2)式　$\frac{2}{xy}=\frac{40}{400}$ ……………… (4)

(2)減(4)式　$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{400}$

開平方　$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\pm\frac{1}{20}$ ……………… (5)

(1)與(5)相加減　$x=4$ 或 5

$y=5$ 或 4

〔例 5.〕解　$x^3+y^3=91$ ……………… (1)

$x+y=7$ ……………… (2)

以(2)除(1)　$x^2-xy+y^2=13$ ……………… (3)

方(2)式　$x^2+2xy+y^2=49$ ……………… (4)

由(4)減(3)　$3xy=36$

以 -3 除之 $-xy=-12$ ... ... (5)

(3)加(5) $x^2-2xy+y=1$

開平方 $x-y=\pm 1$... ... ... (6)

(2)加減(6) $x=4$ 或 3

$y=3$ 或 4

習　題　X.

解以下各方程式

1. $\left.\begin{aligned} x-y&=10 \\ x^2+y^2&=178 \end{aligned}\right\}$
2. $\left.\begin{aligned} x-y&=19 \\ xy&=66 \end{aligned}\right\}$
3. $\left.\begin{aligned} x+y&=13 \\ xy&=36 \end{aligned}\right\}$
4. $\left.\begin{aligned} x+y&=12 \\ x^2+y^2&=104 \end{aligned}\right\}$
5. $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=5 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}&=13 \end{aligned}\right\}$
6. $\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=341 \\ x+y&=11 \end{aligned}\right\}$
7. $\left.\begin{aligned} x-3y&=1 \\ xy+y^2&=5 \end{aligned}\right\}$
8. $\left.\begin{aligned} x^2-2xy-y^2&=1 \\ x+y&=2 \end{aligned}\right\}$

20. 解法之第二類 即兩方程式皆爲二次式此等方程宜設一輔元解之令輔元與此未知量相乘等于彼未知量如次

〔例〕 解 $2y^2-4xy+3x^2=17$ ... ... (1)

$$y^2-x^2=16 \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

任　$y=ax$, 以 ax 代 y 于兩式如次

由(1)式　　$2a^2x^2-4x^2a+3x^2=17$

$\therefore$　　$x^2=\dfrac{17}{2a^2-4a+3}$

由(2)式　　$a^2x^2-x^2=16$

$\therefore$　　$x^2=\dfrac{16}{a^2-1}$

由是則　　$\dfrac{17}{2a^2-4a+3}=\dfrac{16}{a^2-1}$

即　　$32a^2-64a+48=17a^2-17$

即　　$15a^2-64a=-65$

$\therefore$　　$a=\dfrac{5}{3}$ 或 $\dfrac{13}{5}$

以 a 之值代入 $x=\dfrac{16}{a^2-1}$

即　　$x^2=9$ 或 $\dfrac{25}{9}$

$\therefore$　　$x=\pm 3$ 或 $\pm\dfrac{5}{3}$

並　　$y=ax=\pm 5$ 或 $\pm\dfrac{13}{3}$

習　題　XI.

解以下各方程式

1. $\left.\begin{aligned}&x^2+xy+2y^2=74\\&2x^2+2xy+y^2=73\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned}&x^2+xy+4y^2=6\\&3x^2+8y^2=14\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned}&x^2-xy+y^2=21\\&y^2-2xy=-15\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned}&x^2-4y^2-9=0\\&xy+2y^2-3=0\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned}&x^2-xy-35=0\\&xy+y^2-18=0\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned}&x^2+xy+2y^2=44\\&2x^2-xy+y^2=16\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned}&x^2-xy+y^2=7\\&3x^2+13xy+8y^2=162\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned}&2x^2+3xy+y^2=70\\&6x^2+xy-y^2=50\end{aligned}\right\}$

21. 解法之第三類 即兩方程式內所含之未知量彼此相稱此等方程須設兩輔元解之或以其和與較代而算之如次

〔例 1.〕 解 $x^3+y^3=18xy$ ……………… (1)

$x+y=12$ ………………… (2)

設 $(a+b)=x$, 並 $(a-b)=y$ 代入 (1) 及 (2)

由(1)式 $(a+b)^3+(a-b)^3=18(a+b)(a-b)$

則 $a^3+3ab^2=9(a^2-b^2)$ ……………… (3)

由(2)式 $(a+b)+(a-b)=12$

則 $2a=12$

$\therefore \quad a=6$

以 a 之值代入 (3) 式則

$216+18b^2=9(36-b^2)$

由是 $b^2=4$

$\therefore \quad b=\pm 2$

$\therefore \quad x=a+b=6\pm 2=8$, 或 4

並 $y=a-b=6\mp 2=4$ 或 8

〔例 2.〕 解 $x+y=8$ ………………… (1)

$x^4+y^4=706$ ………………… (2)

設 $a+b=x$ 並 $a-b=y$ 代入 (1) 及 (2) 式

由(1)式 $(a+b)+(a-b)=8$

$\therefore \quad a=4$

由(2)式 $a^4+6a^2b^2+b^4=353$ ... ... (3)

以 a 之值代入 (3) 式則

$$256+96b^2+b^4=353$$

則 $b^4+96b^2=97$ ... ... (4)

由是得 $b=\pm 1$ 或 $\pm\sqrt{-97}$

取 b 之有理之數則 $x=5$ 或 3

$y=3$ 或 5

習　題 XII.

解以下各方程式

1. $\left.\begin{array}{l}4xy=96-x^2y^2\\ x+y=6\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=18-x-y\\ xy=6\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}2(x^2+y^2)=5xy\\ 4(x-y)=xy\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}4(x+y)=3xy\\ x+y+x^2+y^2=26\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l}4x^2+xy+4y^2=58\\ 5x^2+5y^2=65\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{array}\right\}$

22. 雜例 以下所舉諸例乃各就其方程式示以相當之解法

〔例 1.〕 解 $x^2+2xy+y^2+2x=120-2y$ ... ... (1)

$xy-y^2=8$ ... ... (2)

由(1)化爲 $(x+y)^2+2(x+y)=120$

設 $x+y=a$ 則 $a=10$ 或 -12

則 $x+y=10$ 或 -12

又將此方程式與第二方程式相較依第一類解之卽得

$x=6$, 或 9 又 $x=-9-\sqrt{5}$, 或 $-9+\sqrt{5}$

$y=4$, 或 1 又 $y=-3+\sqrt{5}$, 或 $-3-\sqrt{5}$

〔例 2.〕 解 $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{4x}{y}=\dfrac{85}{9}$ ... ... (1)

$x-y=2$ ... ... (2)

設以 $a=\dfrac{x}{y}$ 代入(1)式則

$$a^2+4a=\frac{85}{9}$$

由是得 $a=\dfrac{5}{3}$ 或 $-\dfrac{17}{3}$

即 $$\frac{x}{y}=\frac{5}{3} \text{ 或 } -\frac{17}{3}$$

以此方程式與第二方程式相較而解之則得

$$x=5 \text{ 或 } \frac{17}{10}$$

$$y=3 \text{ 或 } \frac{-3}{10}$$

〔例 3.〕 解 $x^2+y^2=74 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$

$2xy=70 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$

由加法得 $(x+y)^2=144$

即 $(x+y)^2-(12)^2=0$

$\therefore$ $(x+y-12)(x+y+12)=0$

由是 $x+y=12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$

$x+y=-12 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$

又依所設之方程式由減法得

又 $x^2-2xy+y^2=4$

即 $(x-y)^2-2^2=0$

$\therefore$ $(x-y-2)(x-y+2)=0$

由是 $x-y=2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$

又 $x-y=-2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$

由(3)與(5)得 $x=7,\ y=5$

由(3)與(6)得 $x=5,\quad y=7$

由(4)與(5)得 $x=-5,\ y=-7$

由(4)與(6)得 $x=-7,\ y=-5$

〔例 4.〕 解 $x^2-xy+y^2=61$ ... ... (1)

$x^4+x^2y^2+y^4=1281$ ... ... (2)

以(1)之兩邊除(2)之相當兩邊則

$x^2+xy+y^2=21$ ... ... (3)

由(3)減(1)式 $2xy=-40$

即 $xy=-20$ ... ... (4)

由(1)減(4)式 $x^2-2xy+y^2=81$

開平方 $x-y=\pm9$ ... ... (5)

以(3)加(4)式 $x^2+2xy+y^2=1$

開平方 $x+y=\pm1$ ... ... (6)

由(5)與(6)相較而解之得

$x=\pm5$ 又 $=\pm4$

$y=\mp4$ 又 $=\mp5$

〔例 5.〕 解 $x^2-2xy=3y$ ... ... (1)

$2x^2-9y^2=9y$ ... ... (2)

以 3 乘(1)式 $3x^2-6xy=9y$ ... ... (3)

由是 $2x^2-9y^2=3x-6xy$

$\therefore$ $x^2-6xy+9y^2=0$

即 $(x-3y)^2=0$

$\therefore$ $x=3y$

以此代入(2)式則得 $2(3y)^2-9y^2=9y$

即 $9y^2-9y=0$

$\therefore$ $y(y-1)=0$

由是 $y=0$ 又 $y=1$

若 $y=0$ 則 $x=3y=0$

若 $y=1$ 則 $x=3y=3$

故 $x=0,\quad y=0$

或 $x=3,\quad y=1$

〔例 6.〕 解 $x-y=2$ … … … … … … (1)

$x^5-y^5=242$ … … … … … (2)

設 $x=z+1$ 則 $y=z-1$

由是 $x^5-y^5=(z+1)^5-(z-1)^5$

$=z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1-(z^5-5z^4+10z^3$

$-10z^2+5z-1)=10z^4+20z^2+2$

由是 $10z^4+20z^2+2=242$

則　$z^4+2z^2=24$

$(z^2-4)(z^2+6)=0$

由是　$z=\pm 2$ 或 $z=\pm\sqrt{-6}$

若　$z=\pm 2$ 則 $x=3$ 或 -1

而　$y=1$ 或 -3

若　$z=\pm\sqrt{-6}$, 則 $x=1\pm\sqrt{-6}$,

$y=-1\pm\sqrt{-6}$

23. $m\ n$ 之諸規式　多次方程式之聯立者恒取 m, n 爲輔元而解之故今將其各次之規式開列於次以便於用

設　$x+y=m$ ……………… (1)

又　$xy=n$ ……………… (2)

方其(1)式　$x^2+2xy+y^2=m^2$

倍其(2)式　$2xy\quad=2n$

相減　$x^2+y^2=m^2-2n$ ………… (甲)

(1)與(甲)相乘　$x^3+x^2y+xy^2+y^3=m^3-2mn$

(1)與(2)相乘　$xy(x+y)=mn$

相減　$x^3+y^3=m^3-3mn$ ………… (乙)

方(甲)式　$x^4+2x^2y^2+y^4=m^4-4m^2n+4n^2$

方(2)式而倍之 $\qquad 2x^2y^2=2n^2$

相減 $\qquad x^4+y^4=m^4-4m^2n+2n^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad$ (丙)

(甲)乘(乙) $\qquad x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5=m^5-5m^3n+6mn^2$

方(2)乘(1) $\qquad x^2y^2(x+y)=mn^2$

相減 $\qquad x^5+y^5=m^5-5m^3n+5mn^2 \quad \cdots\cdots \quad$ (丁)

試舉一例以明規式之用

解 $\qquad x+y=9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$

$\qquad x^4+y^4=2417 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$

按第一方程 $m=9$ 則 $m^2=81$

$\therefore \qquad m^4=6561$

如是依丙規式其第二方程即化爲

$$6561-324n+2n^2=2417$$

即 $\qquad n^2-162n=-2072$

解之 $\qquad n=148$ 或 14

則 $\qquad xy=148$ 或 14

以 $xy=14$ 與(1)式相較而解之得

$$x=7 \text{ 或 } x=2,\ y=2 \text{ 或 } y=7,$$

24. 二元以上聯立二次方程式之解法

此等方程大都不易解釋且其解法亦無一定之規則

玆特舉其特別之例如次

〔例 1.〕 解
$$\begin{cases}(x+y)(x+z)=a^2 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)\\ (y+z)(y+x)=b^2 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)\\ (z+x)(z+y)=c^2 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)\end{cases}$$

(2)式及(3)式之積以(1)式除之則得

$$(y+z)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}\quad\therefore\quad y+z=\pm\frac{bc}{a}$$

同法得 $z+x=\pm\frac{ca}{b},\ x+y=\pm\frac{ab}{c}$

由是 $(y+z)+(z+x)-(x+y)=\pm\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right)$

即 $z=\pm\frac{b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}{2abc}$

同法 $x=\pm\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}$ 及 $y=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2abc}$

〔例 2.〕 解
$$\begin{cases}x(y+z)=a & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)\\ y(x+z)=b & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)\\ z(x+y)=c & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)\end{cases}$$

從 (1), (2)兩式之和減去(3)式則得

$$2xy=a+b-c$$

同法 $2yz=b+c-a$

及 $2zx=c+a-b$

$$\therefore\quad \frac{(2xy)(2zx)}{2yz}=\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a}$$

即　$$x=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}$$

同法　$$y=\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}}$$

及　$$z=\pm\sqrt{\frac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}$$

〔例 3.〕 解 $$\begin{cases} x^2+2yz=a & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y^2+2zx=a & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ z^2+2xy=b & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

此三方程式相加開平方則得

$$x+y+z=\pm\sqrt{(2a+b)}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(4)$$

從(1)式減(2)式則$(x-y)(x+y-2z)=0$

$$\therefore\quad x-y=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5)$$

或　$$x-y-2z=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6)$$

(I)　從(5)式 $x=y$　$\therefore$　從(4)式 $2x+z=\pm\sqrt{(2a+b)}$

又從(2)式減去(3)式則 $y^2+2zx-z-2xy=a-b$

$\therefore$　從(5)式 $x^2-2zx+z^2=b-a$　$\therefore$　$x-z=\pm\sqrt{(b-a)}$

由是　$$x=y=\frac{1}{3}(\pm\sqrt{2a+b}\mp\sqrt{b-a})$$

$$z=-\frac{1}{3}(\pm\sqrt{2a+b}\pm2\sqrt{b-a})$$

(II) 從(6)式 $x+y=2z$

$\therefore$ 從(4)式 $z=\pm\frac{1}{3}\sqrt{2a+b}$

及 $x+y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2a+b}$

又從(2)式 $y^2+x(x+y)=a$

由此可得 $x-y=\pm\sqrt{\frac{a-b}{3}}$

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{\frac{a-b}{3}}\pm\frac{1}{3}\sqrt{2a+b}$

及 $y=\mp\sqrt{\frac{a-b}{3}}\pm\frac{1}{3}\sqrt{2a+b}$

〔例 4.〕 解 $b^2z+c^2y=c^2x+a^2z=a^2y+b^2x=xyz$

$$a^2(b^2z+c^2y)+b^2(c^2x+a^2z)-c^2(a^2y+b^2x)$$
$$=(a^2+b^2-c^2)xyz$$

即 $2a^2b^2z=(a^2+b^2-c^2)xyz$

$\therefore$ $z=0$ 或 $xy=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2-c^2}$

同法 $x=0$ 或 $yz=\frac{2b^2c^2}{b^2+c^2-a^2}$

$y=0$ 或 $xz=\frac{2c^2a^2}{c^2+a^2-b^2}$

由是可倣例 2 求之

〔例 5.〕 解 $x^2-yz=a,\ y^2-zx=b,\ z^2-xy=c$

$$(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)=a^2-bc$$

即 $$x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$$

同法 $$\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ca}=\frac{z}{c^2-ab}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(a^2-bc)^2}=\frac{yz}{(b^2-ca)(c^2-ab)}$$

$$=\frac{x^2-yz}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}$$

即 $$\frac{x^2}{(a^2-bc)^2}=\frac{a}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2-bc}{\pm\sqrt{(a^3+b^3+c^3-3abc)}}$$

〔例 6.〕 解 $$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & (1) \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & (2) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & (3) \end{cases}$$

由視察可知 $x=a,\ y=b,\ z=c$

又從(1)式得 $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \quad \cdots \quad \cdots \qquad (4)$

及從(3)式得 $\dfrac{1}{a}(x-a)+\dfrac{1}{b}(y-b)+\dfrac{1}{c}(z-c)=0$

即 $$bc(x-a)+ca(y-b)+ab(z-c)=0 \quad \cdots \qquad (5)$$

由(4)(5)兩式用十文字之法則得

$$\frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=k$$

$$\therefore \quad k^2=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2(ax+by+cz)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$$

$\therefore$ 從(2)式 $k^2=\dfrac{-2(ax+by+cz-a^2-b^2-c^2)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}\ldots(6)$

又 $\quad k=\dfrac{a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$

$$=\frac{ax+by+cz-a^2-b^2-c^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

以(7)式除(6)式則

$$k=\frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}$$

$$=\frac{2(b-c)(c-a)a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$$

由此可得 x, y, z 之值

〔例 7.〕 解 $\begin{cases} x+y+z=6 & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1) \\ yz+zx+xy=11 & \ldots \ldots \ldots \ldots (2) \\ xyz=6 & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3) \end{cases}$

設λ爲未知數含 $x.\ y.\ z.$ 三根之三次方程式則

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$$

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$

從上之三方程式則此三次方程式爲

$\therefore$ $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$

$\therefore$ λ 之三根爲 1. 2. 3.

故 $x=1,\quad y=2,\quad z=3$

或 $x=1,\quad y=3,\quad z=2$

或 $x=2,\quad y=3,\quad z=1$

或 $x=2,\quad y=1,\quad z=3$

或 $x=3,\quad y=2,\quad z=1$

或 $x=3,\quad y=1,\quad z=2$

〔例8.〕 解 $\begin{cases} x^2(y-z)=a^2(b-c) & \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ y^2(z-x)=b^2(c-a) & \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ z^2(x-y)=c^2(a-b) & \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3) \end{cases}$

由加法得

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

即 $(y-z)(z-x)(x-y)=(b-c)(c-a)(a-b)$

又由乘法得

$$x^2y^2z^2(y-z)(z-x)(x-y)=a^2b^2c^2(b-c)(c-a)(a-b)$$

即 $x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$

$$\therefore \quad xyz=\pm abc \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

又從(1)(2)兩式得

$$a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=x^2y(y-z)+y^2x(z-x)$$

$$=xyz(y-x)$$

$$=\pm abc(y-x)$$

則 $bx(bc-ab\pm ca)=ay(ca-ab\pm bc)$

由是 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ 或 $\frac{x(bc-ab-ca)}{a}=\frac{y(ca-ab-bc)}{b}$

同法 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

或 $\frac{x(bc-ca-ab)}{a}=\frac{y(ca-ab-bc)}{b}=\frac{z(ab-bc-ca)}{c}$

(I) $xyz=abc$ 及 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

則 $\frac{x}{a}=\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}}=\sqrt[3]{1}$

$\therefore \quad x=a,\ a\omega,\ a\omega^2,\ y=b,\ b\omega,\ b\omega^2,$

$z=c,\ c\omega,\ c\omega^2,$ (ω, ω^2 代 1 之立方根之虛數)

(II) $xyz=-abc$ 及 $\frac{x(bc-ca-ab)}{a}=\frac{y(ca-ab-bc)}{b}$

$$=\frac{z(ab-bc-ca)}{c}$$

$\therefore \quad \frac{x(bc-ca-ab)}{a}$

$$=\sqrt[3]{\frac{xyz(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)}{abc}}$$

$$=-\sqrt[3]{\{(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)\}}$$

由此可得 x, y, z 之同數

習　題　XIII.

1. $\left.\begin{aligned} x(x+y+z)&=a^2\\ y(x+y+z)&=b^2\\ z(x+y+z)&=c^2\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} x^2+2yz&=12\\ y^2+2zx&=12\\ z^2+2xy&=12\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} &\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}\\ &=\frac{x+y}{c}=2xyz\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} (y+z)(x+y+z)&=a\\ (z+x)(x+y+z)&=b\\ (x+y)(x+y+z)&=c\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} yz&=a(y+z)+\alpha\\ zx&=a(z+x)+\beta\\ xy&=a(x+y)+\gamma\end{aligned}\right\}$

6. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x^2+y+z=14 \\ xyz=6 \end{array}\right\}$$

7. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x^3+y^3+z^3=495 \\ xyz=105 \end{array}\right\}$$

8. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-c)z=0 \end{array}\right\}$$

9. $$\left.\begin{array}{l} (x+y)(x+z)=ax \\ (y+z)(y+x)=by \\ (z+x)(z+y)=cz \end{array}\right\}$$

總　習　題

解以下各方程式

1. $x-y=7$
   $x^2+yx+y^2=13$

2. $xy-12=0$
   $x-2y=5$

3. $2x-5y=9$
   $x^2-xy+y^2=7$

4. $5x-7y=0$
   $5x^2-\dfrac{13xy}{4}=4-7y^2$

5. $x^2+4xy=3$

6. $x^2+3xy+y^2=1$

$4xy+y^2=2\frac{1}{4}$　　$3x^2+xy+3y^2=13$

7. $x+y=a$　　8. $x^2+9xy=340$

$4xy-a^2=-4b^2$　　$7xy-y^2=171$

9. $3xy+2x+y=485$　　10. $x^3+y^3=2728$

$3x-2y=0$　　$x^2-xy+y^2=124$

11. $x^2-y^2=0$　　12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$

$3x^2-4xy+5y^2=9$　　$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{17}{12}$

13. $x+y=4$　　14. $x^2-xy=a^2+b^2$

$x^4+y^4=82$　　$xy-y^2=2ab$

15. $xy=0$　　16. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{89}{40}$

$x^2+y^2=16$　　$6x=20y+9$

問　　題

1. 設有長方形若由長寬各加1則其面積為48又長寬各減1則其面積為24求長寬各幾何

2. 有兩位之數其兩數字平方之和為25其積為12求某數

3. 設有二數其和其積並其平方之差均等求兩數各幾何

4. 有大小二數其二數之差爲大數之 $\frac{3}{8}$ 並其兩數平方之和爲 356 求二數各若干

5. 設有兩分數其一分數之分子分母各比他一分數之分子分母大 1 則兩分數之和爲 $1\frac{5}{12}$ 若其兩分子適相反則兩分數之和爲 $1\frac{1}{2}$ 求二分數各幾何

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

6. 一人登山間遊其升路每點之速度在後半途比在前半途慢行 $\frac{1}{2}$ 英里至山頂時共行 $5\frac{1}{2}$ 點鐘其降路每點之速度比在升路之前半途時快行 1 英里由山頂至平地共行 $3\frac{3}{4}$ 點鐘求山高及升降之速度各若何 $\frac{\frac{a}{2}}{x}+\frac{\frac{a}{2}}{x-\frac{1}{2}}=5\frac{1}{2}$ $\frac{a}{x+1}=3\frac{3}{4}$ $x=3$ $a=15$

7. 設有兩位數字之二數其兩數之數字適相反但兩數之和爲二數字之差之 $\frac{55}{18}$ 並兩數平方之差爲 3960 求二數各幾何

8. 設一直三角形其弦爲 20 其面積爲 96 求各邊長幾何 $x^2+y^2=20^2$ $xy=2\times96$ $x=16$ $y=12$

9. 設二人由一長方田之一角處繞田邊相向而行至距對角之 13 碼處恰相遇其田之面積爲 4840 方碼並其一人之速度爲他人之速度之 $\frac{5}{6}$ 求田之

長寬各幾何

10. 有二輪車其前輪之速度于行1英里之久(1英里=5280英尺)比後輪多轉132次若前輪後輪之圓週各增2英尺則行1英里之久前輪比後輪多轉88次求每輪之週各若干英尺 前輪5 後10

11. 一矩形田其面積爲87120方尺週圍爲1188尺求各邊之長幾何

12. 某鉄路有兩列車同時由A, B, 兩地開行一由A至B一由B至A而AB相距100英里此兩車在開行後1點15分相遇且一車比他車快1點20分到求兩列車之速度各幾何 30 50

(10) $\frac{5280}{x}-\frac{5280}{y}=132$

$\frac{5280}{x+2}-\frac{5280}{y+2}=60$

(12) $(x+y)\frac{5}{4}=100$

$\frac{100}{x}-\frac{100}{y}=\frac{4}{3}$

第四編

二元一次不定方程式

25. 二元一次方程式 二未知量之一次方程式其未知量之數常無一定可得無限之答數然以任意之數爲一未知量之制限則他未知量之數可依此求之但其數俱以正整數爲限

如 $x+y=3$ 其 x, y 之數有種種不一若俱以正整數爲限則祇有 $x=2, y=1$ 或 $x=1, y=2$ 或 $x=0$ $y=3$ 或 $x=3, y=0$ 四種

26. 不定方程之解法 凡含 x y 兩個未知量之一次方程式皆可依次例求其正整之數

〔例 1.〕 解 $3x+4y=22$ 之正整數

移項 $\qquad 3x=22-4y$

$$x=7-y+\frac{1-y}{3}$$

任 $\qquad \frac{1-y}{3}=m$

則 $\qquad 1-y=3m$

$\therefore \qquad y=1-3m$

以 y 之數代入原式則

$$x=6+4m$$

由方程 $y=1-3m$ 可知 m 能限爲 0 或爲任意之負數但不能爲正數

由方程 $x=6+4m$ 可知 m 能限爲 0 但不能爲大 1 之負數

$\therefore$ m 可爲 0 或爲 -1

則 $x=6,\ y=1$ 或 $x=2,\ y=4$

〔例 2.〕 解 $5x-14y=11$ 之正整數

移項 $$5x=11+14y$$

$$\therefore \quad x=2+2y+\frac{1+4y}{5}$$

任 $$\frac{1+4y}{5}=m$$

則 $$1+4y=5m$$

$$\therefore \quad y=\frac{5m-1}{4}=m+\frac{m-1}{4}$$

設 $$\frac{m-1}{4}=n$$

$$\therefore \quad m=4n+1$$

設 $n=0$ 則 $m=1$

$n=1$ 則 $m=5$

$n=2$ 則 $m=9$

由是 $y=\dfrac{5m-1}{4}=1$ 或 6 或 11

並 $x=2+2y+\dfrac{1+4y}{5}=5$ 或 19 或 33

〔例 3.〕 方程式 $4y=29-7x$ 可化爲

$$4y=29-8x+x$$

$$\therefore \quad y=7-2x+\frac{1+x}{4}$$

由 $\dfrac{1+x}{4}$ 之分數式可解得相當之數

〔例 4.〕 方程式 $5x=18+13y$ 可化爲

$$x=3+2y+\frac{3(1+y)}{5}$$

由 $\dfrac{1+y}{5}$ 之分數式可解得相當之數

〔例 5.〕 設有某數以 14 除餘 1 以 5 除餘 3 求某數之最小限 　任 n 爲所求之數

則 $\dfrac{n-1}{14}=x$ 並 $\dfrac{n-3}{5}=y$

故 $n=14x+1$ 並 $n=5y+3$

即 $14x+1=5y+3$

$$5y=14x-2$$

$$5y=15x-2-x$$

$$y=3x-\frac{2+x}{5}$$

任 $\dfrac{2+x}{5}=m$

∴ $x=5m-2$

$y=\dfrac{1}{5}(14x-2)$

∴ $y=14m-6$

設 $m=1$ 則 $x=3$ $y=8$

∴ $z=14x+1=5y+3=43$

〔例 6.〕 解 $5x+6y=30$ 此式 x 之數爲 y 之若干倍且各爲正

任 $x=my$

則 $(5m+6)y=30$

∴ $y=\dfrac{30}{5m+6}$ 並 $x=\dfrac{30m}{5m+6}$

若 $m=2$, 則 $x=3\dfrac{3}{4}$, $y=1\dfrac{7}{8}$

若 $m=3$, 則 $x=4\dfrac{2}{7}$, $y=1\dfrac{3}{7}$

〔例 7.〕 解 $14x+22y=71$ 之數爲正整數

$$x=5-y+\frac{1-8y}{14}$$

若以 7 乘 $\dfrac{1-8y}{14}$ 則化爲 $-4y+\dfrac{1}{2}$

由此式觀之則無整數可解

在 $ax \pm by = c$ 之式內若設 d 爲 a 與 b 之公因數但與 c 不爲公因者其方程式可書爲

$$mdx \pm ndy = c$$

或爲
$$mx \pm ny = \frac{c}{d}$$

如是可知方程式之數決無整數

習　題　XIV.

求以下各方程式之正整數之答解

1. $2x + 11y = 49$　　2. $7x + 3y = 40$

3. $5x + 7y = 53$　　4. $x + 10y = 29$

5. $3x + 8y = 61$　　6. $8x + 5y = 97$

7. $16x + 7y = 110$　　8. $7x + 10y = 206$

求以下各方程式之最小正整數之答解

9. $12x - 7y = 1$　　10. $5x - 17y = 23$

11. $23y - 13x = 3$　　12. $23x - 9y = 929$

13. $23x - 33y = 43$　　14. $555x - 22y = 73$

問　題

1. 設以分母爲12與分母爲18之兩分數之和爲 $\frac{25}{36}$ 求有若干分數能符此數

2. 設有某數以 3 除餘 2 以 5 除餘 3 求某數之最小限

3. 問二位之數爲其二數字之積之倍數其數有幾種

4. 一人有洋元若干在 50 與 60 之間此人每次以 3 數之則餘 2 每次以 5 數之則餘 4 求此人原有多少元

5. 一人買猪鵝野雞共 40 頭其每猪之價爲 5 元每鵝 1 元每野雞 25 仙共值 40 元求三種各有若干頭

6. 有一數爲 7 之最小倍數並以 2, 3, 4, 5, 6, 除之各餘 1 求某數

7. 解 $18x-5y=70$ 之正數值並 y 爲 x 之倍數

8. 解 $8x+12y=23$ 之正數值並兩值之和爲整數

9. 分 70 爲三分以 6. 8. 7. 依次除之其商數各爲整數並三商之和爲 10 求各分須幾何

10. 設有三位之數其十位之數字爲 4 若百位之數字與單位之數字適相反則所成之數必多 792 求某數

第五編

指數之理論

24. 總論 指數之恒為正整數者已述於前若永據此定義則指數之為分數或負數如 $a^{\frac{3}{2}}$ 或 a^{-2} 者遂不合理

然擴張 a^n 之意義則 n 宜包含分數及負數在內

設有 a^n 命 n 為分數或負數則先據原有之法則

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

而從此法則即可定 a^n 為分數或負數之意義示之如次

如問 $a^{\frac{1}{2}}$ 合于指數之法則其意義若何

今 $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$

故 $a^{\frac{1}{2}}$ 為其平方為 a 之量則 $a^{\frac{1}{2}}$ 之意義恒為 $\sqrt{a}$

又問 a^{-1} 合于指數法則其意義如何

今 $a^3\times a^{-1}=a^{3-1}=a^2$

故 $a^{-1}=a^2\div a^3=\frac{1}{a}$

即 a^{-1} 之意義為 $\frac{1}{a}$

28. 分指數之第一例 n 爲任意之正整數問 $n^{\frac{1}{n}}$ 之意義若何

由指數法則 $a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}$............至 n 因數

$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}$......................至 n 項

$=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$

由是 $a^{\frac{1}{n}}$ 爲其 n 方乘爲 a 之量

故 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

29. 分指數之第二例 m 及 n 爲任意之正整數問 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義若何

依指數法則

$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}a\times{}^{\frac{m}{n}}\times$..............至 n 因數

$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+}$......................至 n 項

$=a^{\frac{mn}{n}}=a^m$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 爲 a^m 之 n 方根

則 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

又 $a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times$........至 m 因數

$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+}$......................至 m 項

$=a^{\frac{m}{n}}$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 可視爲 $a^{\frac{1}{n}}$ 之 m 方乘依前款

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

故 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$

注意 精言之則某量之 n 方根若非算術上之方根則不能言 $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ 如 $\sqrt[2]{a^4}$ 有二値爲 $\pm a^2$ 而 $(\sqrt[2]{a})^4$ 祇有一値爲 $+a^2$ 是也

30. 零指數 問 a^0 之意義若何

由指數法則 $a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$

$$\therefore \quad a^0=a^m\div a^m=1$$

故 a 之値不拘如何 a^0 恆等于 1

31. 負指數 m 爲任意之正整數問 a^{-m} 之意義若何

由指數法則 $a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0$

而由前款 $a^0=1$

$$\therefore \quad a^m\times a^{-m}=1$$

故 $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ 及 $a^m=\dfrac{1}{a^{-m}}$

由是變任意指數之符號則可由分數之分子變爲分母或由分母變爲分子

如　$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，$\frac{a}{b}=ab^{-1}=\frac{1}{a^{-1}b}$

及　$\frac{a^3b^3}{x^3y}=a^3b^3x^{-3}y^{-1}=\frac{1}{a^{-3}b^{-3}x^3y}$

32. 雜例　以上諸節因指數之本則 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 恆能合理故 n 設以任意之正負數時 a 恆應有一定義據此所得之意義故不論 m 及 n 之數如何恆能證明

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

及　$$(ab)^m=a^mb^m$$

由是指數爲分數或爲負數者可與爲正整數者同法求之

如　$$\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2=a^{\frac{2}{3}\times2}b^{\frac{1}{2}\times2}=a^{\frac{4}{3}}b$$

$$a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$$

$$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\div a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^0=1$$

$$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^6=a^{-\frac{2}{3}\times6}=a^{-4}=\frac{1}{a^4}$$

$$\sqrt[3]{a^3b^{-3}c^4}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^{-3}}\sqrt[3]{c^4}$$

$$=a^{\frac{3}{3}}b^{-\frac{3}{3}}c^{\frac{4}{3}}$$

$$=ab^{-1}c^{\frac{4}{3}}$$

習題 XV.

解以下各式以分指數顯之

1. $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $(\sqrt{x})^5$, $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[7]{a^6}$, $(\sqrt[3]{a})^7$,

$\sqrt[6]{a^3b^2}$

2. $\sqrt[3]{xy^2z^3}$, $\sqrt[5]{x^3y^2z^4}$, $\sqrt[7]{a^5b^6c^7}$, $\sqrt[5]{a^2bc^2x^4}$

解以下各式以根號顯之

3. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$, $4x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}$, $3x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{2}{3}}$,

解以下各式以正指數顯之

4. a^{-2}, $3x^{-1}y^{-3}$, $6x^{-3}y$, x^4y^{-5}, $\dfrac{2a^{-1}x}{3^{-1}b^2y^{-3}}$

求以下各式爲整式

5. $\dfrac{3xy}{z^2}$, $\dfrac{z}{x^5y^4}$, $\dfrac{a}{bc}$, $\dfrac{c^2}{a^3b^{-2}}$, $\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}$

化以下各式爲簡式

6. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{1}{4}}\times b^{\frac{1}{6}}$, $c^{\frac{2}{3}}\times c^{\frac{1}{12}}$, $d^{\frac{3}{5}}\times d^{\frac{1}{15}}$

7. $m^{\frac{1}{2}}\times m^{-\frac{1}{6}}$, $n^{\frac{3}{4}}\times n^{-\frac{1}{12}}$, $a^0\times a^{\frac{1}{2}}$, $a^0\times a^{-\frac{1}{3}}$

8. $a^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{a}$, $c^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt{c}$, $y^{\frac{1}{4}}\times\sqrt[4]{y}$, $x^{\frac{5}{8}}\times\sqrt{x^{-1}}$

9. $ab^{\frac{1}{2}}c\times a^{-\frac{1}{2}}bc^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}d$

10. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{6}}\times x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{5}{8}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{1}{8}}y^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}$

11. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{cx}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{y}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

12. $a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{3}}$, $c^{\frac{5}{8}} \div c^{\frac{1}{2}}$, $n^{\frac{9}{2}} \div n^{\frac{3}{4}}$, $a^{\frac{5}{6}} \div \sqrt[3]{a^2}$

13. $(a^6)^{\frac{1}{2}} \div (a^6)^{\frac{1}{3}}$, $(c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$, $(m^{-\frac{1}{2}})^{4}$, $(n^{\frac{1}{3}})^{-3}$

14. $(4a^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$, $(27b^{-3})^{-\frac{2}{3}}$, $(64c^{16})^{-\frac{5}{6}}$, $(32c^{-10})^{\frac{2}{5}}$

33. 多項式之應用 以下各例雖適用前述之原理然指數之加減等實可用心算求之

〔例 1.〕 以 $y^{\frac{1}{4}}-1$ 乘 $y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}+1$

$$
\begin{array}{l}
y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}+1 \\
y^{\frac{1}{4}}-1 \\
\hline
y+y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}} \\
\quad -y^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}-1 \\
\hline
y \qquad\qquad\qquad -1
\end{array}
$$

〔例 2.〕 以 $x^{\frac{1}{3}}-3$ 除 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^{\frac{1}{3}}+4 \\
\hline
x^{\frac{1}{3}}-3 & x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-12 \\
 & x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}} \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^{\frac{1}{3}}-12 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

$$\underline{4x^{\frac{1}{3}}-12}$$

〔例 3.〕 求 $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$ 之平方根

$$x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$$

$$(x^{\frac{5}{6}})^2=\underline{x^{\frac{5}{3}}}$$

$$(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2=\underline{x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}-4x}$$

$$(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2=x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$$

習　題　XVI.

求以下各題中兩式之積

1. $x^{2p}+x^py^p+y^{2p}$, $x^{2p}-x^py^p+y^{2p}$
2. $x^{mn-n}-y^n$, x^n+y^{mn-n}
3. $8a^{\frac{3}{7}}+4a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{7}}+5a^{\frac{1}{7}}b^{\frac{2}{7}}+9b^{\frac{3}{7}}$, $2a^{\frac{1}{7}}-b^{\frac{1}{7}}$
4. $1+ab^{-1}+a^2b^{-2}$, $1-ab^{-1}+a^2b^{-2}$

將以下各題用後式除前式

5. $x^{4n}-y^{4n}$, x^n-y^n
6. $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$
7. $x+y$, $x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{3}{5}}+y^{\frac{4}{5}}$
8. $x^2y^{-2}+2+x^{-2}y^2$, $xy^{-1}+x^{-1}y$

求次之各式之平方

9.　$4ab^{-1}$, $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ $a+a^{-1}$, $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

若　$a=4$, $b=2$, $c=1$ 求次之各式之值

10.　$a^{\frac{1}{2}}b$, $5ab^{-1}$, $2(ab)^{\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{2}{3}}$, $12a^{-2}b^{-3}$

求以下各式之平方根

11.　$9x^{-4}-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^{2}$

12.　$x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$

求以下立方根

13.　$8x^{3}+12x^{2}-30x-35+45x^{-1}+27x^{-2}-27x^{-3}$

將以下各式求簡之

14.　$\{(x^{5ab})^{3}\times(x^{5b})^{-2}\}^{\frac{1}{3a-2}}$

15.　$(x^{15a}\times x^{-12})^{\frac{1}{5a-2}}$

16.　$3(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}})^{2}-4(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})+(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}})^{2}$

解以下各方程式

17.　$x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0$

18.　$x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}=4$

19.　$4x^{\frac{1}{5}}-3x^{-\frac{1}{5}}=4$

第六編

根數

34. 根數定義 凡帶根號之數爲根數又名根式如 $\sqrt{a}$ 或 $\sqrt[3]{a-b}$ 皆爲根數也

根號之指數名之爲根指數如 $\sqrt{a}$ 爲二次根數 $\sqrt[3]{a}$ 爲三次根數是也

根號前之數爲根數之係數如 $2a\sqrt{x}$ 其 $2a$ 爲 $\sqrt{x}$ 之係數但其全式謂之雜根數

凡根數之外無係數者謂之完全根數如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{a}$ 是也

同根號之根數謂之同次根數如 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 稱爲二次根數又 $\sqrt[3]{x}$ 與 $\sqrt[3]{y}$ 稱爲三次根數

化二根數爲同次之無理因數謂之相似之根數如 $3\sqrt{a}$ 與 $5\sqrt{a}$ 爲相似之根數

準指數之理開單式之方即以其根次除元字之指數如 a^4 之方根爲 a^2 是也若除不盡即可號之如 a^3 之方根可書爲 $a^{\frac{3}{2}}$

35. 根式化盡 將根號內之數劈爲因數令其一適爲根次整方之極大者而開其方其他仍留于根號之下如次

〔例 1.〕 $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

〔例 2.〕 $\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{27\times4}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{4}=3\sqrt[3]{4}$

〔例 3.〕 $\sqrt[5]{7x^2y^7}=\sqrt[5]{7x^2y^2\times y^5}=\sqrt[5]{y^5}\times\sqrt[5]{7x^2y^2}$

$$=y\sqrt[5]{7x^2y^2}$$

〔例 4.〕 $\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{(3^3\times5)}+\sqrt[3]{(2^3\times5)}$

$$=3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$$

〔例 5.〕 $\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}=a\sqrt{a}+b\sqrt{a}=(a+b)\sqrt{a}$ 反言之 $5\sqrt{2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{50}$

及 $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

習　題 XVI.

試將以下各式化盡

1. $\sqrt{x^2y^4z}$, $\sqrt[3]{54a^4x^2y^3}$, $\sqrt{24}$

2. $\sqrt[3]{100a}$, $\sqrt[3]{160x^4y^7}$, $\sqrt[3]{108m^9n^{10}}$

3. $\sqrt[3]{a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3}$, $\sqrt{50a^2-100ab+50b^2}$

化以下各式爲全根數

4. $3\sqrt{5},\ 3\sqrt{21},\ 5\sqrt{52},\ a^2b\sqrt{bc}$

5. $3y^2\sqrt[4]{x^3y},\ 2x\sqrt[5]{ay},\ 3c^2\sqrt[3]{abc},\ 5abc\sqrt{abc^{-1}}$

將以下各式求簡

6. $2\sqrt[4]{80a^5b^2c^5},\ 7\sqrt{896},\ 5\sqrt{726}$

7. $5\sqrt{208}-3\sqrt{325},\ 3\sqrt[3]{72}-2\sqrt[3]{243}$

8. 求證 $\sqrt{20},\ \sqrt{45}$ 爲相似之根數

9. 求證 $\sqrt[3]{a^3b^2},\ \sqrt[3]{8b^5}$ 爲相似之根數

36. 分數根式化盡 如根數爲分數須以合宜之數乘其母子令分母爲整方復按前節化其分子既化之後則所得之根數必爲整數其例如次

〔例 1.〕
$$\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{7}{4\times3}}=\sqrt{\frac{7\times3}{4\times9}}=\sqrt{21\times\frac{1}{36}}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{21}$$

〔例 2.〕
$$\sqrt[4]{\frac{5a}{2b^3c^2}}=\sqrt[4]{\frac{40abc^2}{16b^4c^4}}=\frac{1}{2bc}\sqrt[4]{40abc^2}$$

〔例 3.〕
$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$
$$\frac{2\sqrt{5}+5+2+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{1}{4}(7+2\sqrt{5})$$

習　題 XVII.

將以下各分數根式求簡

1. $\sqrt{3\frac{1}{8}}$, $\frac{3}{5}\sqrt{90\frac{5}{8}}$, $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$, $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b}{2a^3}}$, $\sqrt{\frac{3a^2x}{4cy^2}}$

3. $\sqrt{8\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{1\frac{4}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{5}}$

4. $a\sqrt{\frac{b}{a}}+ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$, $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

5. $\frac{a^3b^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^5}{a^5b^5}}$, $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

37. 根式化同次　任意之根數可化爲同次根數凡數有分指數者即將分指數化爲同母按分子方其數按分母書其根次如帶根號之數則先求兩根次之小公倍爲新根次後以各原根次除新根次按得數方其數其例如下

〔例 1.〕 化$(ab)^{\frac{1}{2}}$, $(a^2b)^{\frac{1}{3}}$爲同次根數

$$(ab)^{\frac{1}{2}}=ab^{\frac{3}{6}}=(a^3b^3)^{\frac{1}{6}}$$

$$(a^2b)^{\frac{1}{3}}=(a^2b)^{\frac{2}{6}}=(a^4b^2)^{\frac{1}{6}}$$

〔例 2.〕 化$\sqrt[4]{x^3y^2}$, $\sqrt[3]{a^2b}$爲同次根數

$$\sqrt[4]{x^3y^2}=\sqrt[12]{x^9y^6}$$

$$\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[12]{a^8b^4}$$

習　題 XVIII.

將以下各式求化爲同次根數

1. $a^{\frac{1}{2}}, a^2, a^{\frac{2}{3}}$

2. $(3a^2x)^{\frac{1}{3}}, (2ax^2)^{\frac{1}{4}}, (5a^3x^5)^{\frac{1}{6}}$

3. $(a-b)^{\frac{1}{2}}, (a+b)^{\frac{2}{3}}$

4. $a^2, \sqrt{5x}, \sqrt[3]{2ax}, \sqrt[4]{4a^2x}$

5. $\sqrt{x-y}, \sqrt[3]{x+y}, \sqrt[6]{x^2-y^2}$

6. $\sqrt{ax}, \sqrt[n]{xy}, \sqrt[n]{cx}$

38. 根式之比較 同次之諸數可化爲完全數而較其大小如次

〔例 1.〕 求較 $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ 與 $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ 之大小

$$\frac{2}{3}\sqrt{7}=\sqrt{\frac{28}{9}},\quad \frac{3}{5}\sqrt{10}=\sqrt{\frac{18}{5}}$$

$$\sqrt{\frac{28}{9}}=\sqrt{\frac{140}{45}},\quad \sqrt{\frac{18}{5}}=\sqrt{\frac{162}{45}}$$

由是可知 $\sqrt{\frac{162}{45}}$ 比 $\sqrt{\frac{140}{45}}$ 大

即 $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ 比 $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ 大

習　題　XIX.

將以下各式求較其大小

1. $3\sqrt{7},\ 2\sqrt{15}$

2. $2\sqrt[3]{3},\ 3\sqrt{2},\ \frac{5}{2}\sqrt[4]{4}$

3. $4\sqrt[3]{4},\ 3\sqrt[3]{5},\ 5\sqrt[3]{3},$

4. $\sqrt{\frac{3}{5}},\ \sqrt[3]{\frac{14}{15}}$

5. $3\sqrt{19},\ 5\sqrt[3]{2},\ 3\sqrt[3]{3}$

39. 根式之加減法　如諸根數相似則可以相似者爲準則加其係數爲總係數如不相似即先化爲相似者而後加或減之如不能化爲相似祇可書其相加或減之意而已如次

〔例 1.〕　求加 $\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{147}$ 爲簡式

$$\sqrt{27}=(3^3)^{\frac{1}{2}}=3\times 3^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48}=(2^4\times 3)^{\frac{1}{2}}=2^2\times 3^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{147}=(7^2\times 3)^{\frac{1}{2}}=7\times 3^{\frac{1}{2}}=7\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{147}=(3+4+7)\sqrt{3}=14\sqrt{3}$$

〔例 2.〕　求減 $2\sqrt[3]{320}-3\sqrt[3]{40}$ 爲簡式

$$2\sqrt[3]{320}=2(2^6\times 5)^{\frac{1}{3}}=2\times 2^2\times 5^{\frac{1}{3}}=8\sqrt[3]{5}$$

$$3\sqrt[3]{40}=3(2^3\times 5)^{\frac{1}{3}}=3\times 2\times 5^{\frac{1}{3}}=6\sqrt[3]{5}$$

$$\therefore\quad 2\sqrt[3]{320}-3\sqrt[3]{40}=8\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$$

習 題 XX.

將以下各式求簡

1. $\sqrt{27}+2\sqrt{48}+3\sqrt{108}$, $3\sqrt{1000}+4\sqrt{50}+12\sqrt{288}$

2. $12\sqrt{72}-3\sqrt{128}$, $7\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{1029}$

3. $\sqrt{\dfrac{a^4c}{b^3}}-\sqrt{\dfrac{a^3c^3}{bd^2}}+\sqrt{\dfrac{a^2d^2c}{bm^2}}$, $3\sqrt{\dfrac{2}{5}}+2\sqrt{\dfrac{1}{10}}-4\sqrt{\dfrac{1}{40}}$

4. $\sqrt{4a^3b}+\sqrt{25ab^3}-(a-5b)\sqrt{ab}$

5. $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt{1372}$

40. 根式之乘除法 依以下公式可直記同次兩根數之積或商

〔例 1.〕 $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

〔例 2.〕 $\sqrt[n]{x}\div\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

如根數不同次則先化爲同次者後將係數相乘或除爲新係數根號下之數相乘或除爲新根數末將所

得者化盡其例如次

〔例 1.〕 以 $2\sqrt{5}$ 乘 $5\sqrt{7}$

$$2\sqrt{5}\times 5\sqrt{7}=10\sqrt{35}$$

〔例 2.〕 以 $\sqrt[3]{4a}$ 乘 $\sqrt{6x}$

$$\sqrt[3]{4a}=(4a)^{\frac{1}{3}}=(4a)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(4a)^2}=\sqrt[6]{16a^2}$$

$$\sqrt{6x}=(6x)^{\frac{1}{2}}=(6x)^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{(6x)^3}=\sqrt[6]{216x^3}$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{4a}\times\sqrt{6x}=\sqrt[6]{16a^2}\times\sqrt[6]{216x^3}$$

$$=\sqrt[6]{16a^2\times 216x^3}$$

$$=\sqrt[6]{2^4a^2\times 2^3\times 3^3x^3}$$

$$=\sqrt[6]{2^6\times 2\times 3^3x^3a^2}$$

$$=2\sqrt[6]{54a^2x^3}$$

〔例 3.〕 以 $a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{4}}+2$ 乘 $a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}$

$$\begin{array}{l}
a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}\\
a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{4}}+2\\
\hline
a^{\frac{5}{4}}+2a-a^{\frac{3}{4}}\\
\quad -3a-6a^{\frac{3}{4}}+3a^{\frac{1}{2}}\\
\qquad\qquad +2a^{\frac{3}{4}}+4a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}\\
\hline
a^{\frac{5}{4}}-a-5a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}
\end{array}$$

〔例 4.〕 $9\sqrt{5}$ 用 $3\sqrt{7}$ 除之

$$9\sqrt{5}\div3\sqrt{7}=3\sqrt{\frac{5}{7}}=3\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{3}{7}\sqrt{35}$$

〔例 5.〕 $\sqrt[3]{3a}$ 用 $\sqrt{6b}$ 除之

$$\sqrt[3]{3a}=(3a)^{\frac{1}{3}}=(3a)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(3a)^2}=\sqrt[6]{9a^2}$$

$$\sqrt{6b}=(6b)^{\frac{1}{2}}=(6b)^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{(6b)^3}=\sqrt[6]{216b^3}$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{3a}\div\sqrt{6b}=\sqrt[6]{9a^2}\div\sqrt[6]{216b^3}=\sqrt[6]{\frac{9a^2}{216b^3}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{a^2}{24b^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{2^3\times3b^3}}=\sqrt[6]{\frac{2^3\times3^5a^2b^3}{2^6\times3^6b^6}}$$

$$=\frac{1}{6b}\sqrt[6]{1944a^2b^3}$$

〔例 6.〕 $a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}$ 用 $a^{\frac{1}{3}}-1$ 除之

$$\begin{array}{r|l} & a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}} \\ \hline a^{\frac{1}{3}}-1 & a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}} \\ & a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{1}{2}} \\ \hline & \quad -a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}} \\ & \quad -a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}} \\ \hline \end{array}$$

習　題 XXI.

將以下各式求簡

1. $2\sqrt{ax}\times\sqrt[3]{3a^2b}\times\sqrt{2bx}$

2.　$3(4ab^2)^{\frac{1}{3}} \div (2a^3b)^{\frac{1}{2}},\ (2a^3b^2)^{\frac{1}{4}} \times (a^5b^3)^{\frac{1}{3}} \div (a^3b^5)^{\frac{1}{2}}$

3.　$(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20}) \times 3\sqrt{2}$

4.　$\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^7} \times \sqrt{\left(\frac{25}{64}\right)^6}$

5.　$c\sqrt{a}-d\sqrt{b}$ 乘 $c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$

6.　$a^{\frac{1}{2}}+1$ 乘 $a^{\frac{7}{2}}-a^3+a^{\frac{5}{2}}-a^2+a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}-1$

7.　$a^{\frac{1}{6}}+4b^{\frac{1}{6}}$ 除 $a^{\frac{1}{2}}+64b^{\frac{1}{2}}$

8.　$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ 除 $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$

41.　根式之方　凡某數有分指數即以所欲方之次乘其指數若帶根號之數則按欲方之次數將根號下之數方之然有係數者須依方次各自方之末將所得者化盡如次

〔例〕　求 $\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}$ 之三次方

$$\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times(2^{\frac{1}{6}})^3=\frac{1}{8}\times 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

習　　題　XXII.

求以下諸式之各方

1.　$(2\sqrt[6]{3a^4b})^3$,　$(3\sqrt[6]{3})^2$

2.　$\left(\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$,　$(\sqrt{27})^{\frac{1}{2}}$

3. $(\sqrt[3]{81})^{\frac{1}{4}}$, $(\sqrt[4]{512})^{\frac{1}{3}}$ $(\sqrt[3]{256})^{\frac{1}{4}}$

4. $(\frac{2}{3}a^{\frac{1}{3}})^4$, $(\frac{1}{6}\sqrt{6})^3$, $\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\}^6$

42. 根式開方 依前節理已知 $a^{\frac{1}{n}}$ 之 m 次方等于 $a^{\frac{m}{n}}$ 但開方與乘方適相反故 $a^{\frac{m}{n}}$ 之 m 次根即必等于 $a^{\frac{1}{n}}$ 由是可知凡數有分指數者即以所欲開之根次除其指數如帶根號者即按欲開之根次開號下數之方其不能開者即以欲開之根次乘原根次有係數者須依根次各自開方其不絕者則還於根號之下其例如次

〔例〕 求 $\sqrt[3]{81}$ 之平方根

其方根 $=(81^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{6}}=(3^4)^{\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{2}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}$

習 題 XXIII.

求以下各式之方根

1. $\sqrt[2]{9(3)^{\frac{1}{3}}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}\sqrt{2}}$, $\sqrt{(10)^3}$

2. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}a^4}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{\frac{2}{3}}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}a^6}$

3. $\sqrt[3]{\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}}$, $\sqrt[2]{3\sqrt[3]{5}}$, $\sqrt[4]{\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}$

4. 求 $\sqrt[2]{a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4}$ 之二次方根

5. $\sqrt[6]{\frac{25a^2}{64b^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^{17}b^3c^5}{x^8y^5}}$

43. 幻數 凡偶次根之負數爲幻數其根無法可開如 $-a^2$ 是也蓋以正 a 方之得 $+a^2$ 以負 a 方之亦得 $+a^2$ 更無數可方之得 $-a^2$ 故謂之幻數

此等幻數于代數中亦常見之且爲要式故須立法以用之如次

$$\sqrt{-x^2}=\sqrt{x^2\times(-1)}=x\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a\times(-1)}=a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

如　$\sqrt{-1}$ 式自乘可化爲 -1

所以　$(\sqrt{-1})^2=-1$

$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\times\sqrt{-1}=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2\times(\sqrt{-1})^2=(-1)(-1)=1$$

其餘仿此

由上式可得 $\sqrt{-1}$ 之自乘之各方如 $+\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$.

幻數相乘莫若先劈其幻因後按法乘其係數惟幻因須特立相乘之法如次

〔例 1.〕 以 $\sqrt{-a}$ 乘 $\sqrt{-b}$

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\sqrt{-1}$$

$$=\sqrt{ab}\,(\sqrt{-1})^2=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$$

〔例 2.〕 以 $1+\sqrt{-4}$ 乘 $1-\sqrt{-4}$

$$1+\sqrt{-4}=1+2\sqrt{-1}$$

$$1-\sqrt{-4}=1-2\sqrt{-1}$$

$$\therefore\quad(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1})=1-4(-1)=5$$

除法與乘法相反故亦可依此例求之如次

〔例 3.〕 以 $\sqrt{-b}$ 除 $\sqrt{-ab}$

$$\sqrt{-ab}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-b}=b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$\therefore\quad\frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-b}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}=\sqrt{a}$$

習 題 XXIV.

求以下各式之積

1. $4+\sqrt{-3}$ 乘 $4-\sqrt{-3}$, $\sqrt{3}-2\sqrt{-2}$ 乘 $\sqrt{3}+2\sqrt{-2}$

2. $\sqrt{54}$ 乘 $\sqrt{-2}$, $a\sqrt{-b}$ 乘 $x\sqrt{-y}$

3. $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$ 乘 $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$, $a\sqrt{-a^2b^4}$ 乘

$\sqrt{-a^4b^5}$

4. $\sqrt{-10}$ 乘 $\sqrt{-2}$, $2\sqrt{3}-6\sqrt{-5}$ 乘 $4\sqrt{3}-\sqrt{-5}$

求以下各式之商

5. $y\sqrt{-1}$ 除 $x\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$ 除 1, $a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$ 除 a

6. $\sqrt{-3}$ 除 $\sqrt{-12}$, $\sqrt{-5}$ 除 $\sqrt{15}$, $\sqrt{-20}$ 除 $\sqrt{-5}$

44. 定理 凡兩個二次根數之和或差不能成爲有理或單次根數

若 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 能等于有理數 c 則爲方程式

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=c$$

作兩邊之方 $a\pm2\sqrt{ab}+b=c^2$

即 $\pm2\sqrt{ab}=c^2-a-b$

上式之右邊旣爲有理數其左邊亦應爲有理數但 $\sqrt{ab}$ 非爲有理數故 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 不能爲有理數同理可證 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 亦不能爲單項根數

又凡一個二次根數不能等于一有理數與一根數之和

若 $\sqrt{a}=c+\sqrt{b}$ 作兩邊之方則

$$a=c^2+2c\sqrt{b}+b$$

移項 $2c\sqrt{b}=a-b-c^2$

如是一根數等于一有理數于理不合

若 $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ 則 a 必等于 x, b 必等于 y

用移項法變爲 $\sqrt{b}-\sqrt{y}=x-a$ 若 b 與 y 不等其兩根數之差應爲有理數但于理不合

$\therefore \quad b=y \quad a=x$

又凡兩個二次根數之積或商必爲一個二次根數如次

$$\sqrt{ab}\times\sqrt{abc}=ab\sqrt{c}$$

$$\sqrt{abc}\div\sqrt{ab}=\sqrt{c}$$

45. 二項根式之平方根 二項式由有理數與二次根數而成則其平方根可依次之演算求之

〔例1.〕 求 $a+\sqrt{b}$ 之平方根

任 $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

方其兩邊則 $a+\sqrt{b}=x+2\sqrt{xy}+y$

即 $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x+y=a$, 及 $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$

由上之二方程式可求得 x 及 y 之值

此法亦可用觀察法變爲稍簡之形如次

$$a-\sqrt{b}=x-2\sqrt{xy}+y$$

開平方則　$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

$\therefore\quad(\sqrt{a+\sqrt{b}})(\sqrt{a-\sqrt{b}})=(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})\quad\therefore\quad x-y=\sqrt{a^2-b}$

已知　$x+y=a$

由是用加或減法可得 x 及 y 之值

〔例 2.〕 求 $7+4\sqrt{3}$ 之平方根

任　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

今　$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

依乘法理則　$x-y=\sqrt{49-48}$

$\therefore\quad x-y=1$

但　$x+y=7$

$\therefore\quad x=4,\ y=3$

$\therefore\quad\sqrt{x}+\sqrt{y}=2+\sqrt{3}$

$\therefore\quad\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

習　題　XXV.

求以下各式之平方根

1. $144+6\sqrt{5}$

2. $94-42\sqrt{5}$

3. $13-2\sqrt{30}$

4. $11-6\sqrt{2}$

5. $38-12\sqrt{10}$

6. $103-12\sqrt{11}$

7. $57-12\sqrt{15}$

8. $3\frac{1}{2}-\sqrt{10}$

9. $87-12\sqrt{42}$

10. $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}$

二項根式之平方根亦有用視察法求之者先將所求之式書成 $a+2\sqrt{b}$ 形次求某二數之和爲 a 並其積爲 b 如次

〔例1.〕 以視察法求 $18+2\sqrt{77}$ 之平方根

由此式觀之可知相加爲 18 相乘爲 77 之二數即 11 與 7

今 $$18+2\sqrt{77}=11+7+2\sqrt{11\times7}$$
$$=(\sqrt{11}+\sqrt{7})^2$$

即 $\sqrt{11}+\sqrt{7}=18+2\sqrt{77}$ 之平方根

〔例 2.〕 以視察法求 $75-12\sqrt{21}$ 之平方根

$$75-12\sqrt{21}=75-2\sqrt{36\times21}$$

$$=75-2\sqrt{756}$$

相加爲 75 相乘爲 756 之二數則 63 與 12

今 $$75+2\sqrt{756}=63+12-2\sqrt{63\times12}$$

$$=(\sqrt{63}-\sqrt{12})^2$$

則 $\sqrt{63}-\sqrt{12}=75-12\sqrt{21}$ 之平方根

或 $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}=75-12\sqrt{21}$ 之平方根

46. 根式方程式 根式方程之解法已詳于二次方程式內但次之數例比前稍難故特舉之

〔例 1.〕 解 $5x-7x^2-8\sqrt{7x^2-5x+1}=8$

變全式之符號並加 $+1$ 于兩邊則

$$7x^2-5x+1+8\sqrt{7x^2-5x+1}=-7$$

以 $\sqrt{7x^2-5x+1}$ 爲所含之未知量

成整方則 $(7x^2-5x+1)+8\sqrt{7x^2-5x+1}+16=9$

開平方 $(7x^2-5x+1)^{\frac{1}{2}}+4=\pm3$

則 $(7x^2-5x-1)^{\frac{1}{2}}=-1$ 或 -7

方其兩邊 $7x^2-5x+1=1$ 或 49

移項 $7x^2-5x=0$ 或 48

由 $7x^2-5x=0$ 可得 $x=0$ 或 $\frac{5}{7}$

由 $7x^2-5x=48$ 可得 $x=3$ 或 $-2\frac{2}{7}$

〔例 2.〕 解 $x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$

先變 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

加 2 于 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$式內則

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$\therefore$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$

以 4 乘全式並成整方

$$4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(\quad)+1=9$$

開平方 $2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=\pm3$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2 \text{ 或 } -4$$

$$x+\frac{1}{x}=1 \text{ 或 } -2$$

以 x 乘之 $x^2-x=-1$ 並 $x^2+2x=-1$

$\therefore$ $4x^2-(\quad)+1=-3$ 並 $x^2+2x+1=0$

開平方 $2x-1=\pm\sqrt{-3}$, 並 $x+1=0$

$\therefore \quad x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$ 並 $x=-1$

〔例 3.〕 解 $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$

若將 x 作為 x^{-1} 其方程式則為

$$x^{-5}+2x^{-4}-3x^{-3}-3x^{-2}+2x^{-1}+1=0$$

若再以 x^5 乘之則 $1+2x-3x^2-3x^3+2x^4+x^5=0$ 仍與原式相等

其方程式可得為 $(x^5+1)+2x(x^3+1)-3x^2(x+1)=0$

以 $(x+1)$ 除之得 $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

或 $\quad (x^4+1)+x(x^2+1)=4x^2$

以 $2x^2$ 加于 (x^4+1) 式內則為 $(x^4+2x^2+1)=(x^2+1)^2$

今 $\quad (x^2+1)^2+x(x^2+1)=6x^2$

以 4 乘並成整方 $4(x^2+1)^2+(\quad)+x^2=25x^2$

開平方 $\quad 2(x^2+1)+x=\pm 5x$

由是 $\quad 2x^2+2=4x$ 或 $-6x$

變簡式 $\quad x^2-2x=-1$, 或 $x^2+3x=-1$

即 $\quad x=1$ 並 1, 即 $x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$

由 $\quad x+1$ 之因數可解得 $x=-1$

所以其 x 之值為 $-1, 1, 1, \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})$,

$\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})$

習 題 XXVII.

解以下各方程方

1. $x^2-3x-6\sqrt{x^2-3x-3}+2=0$

2. $(2x^2-3x)^2-2(2x^2-3x)=15$

3. $x^2+\sqrt{x^2-7}=19$

4. $\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-5}=4$

5. $2x^2-2\sqrt{2x^2-5x}=5(x+3)$

6. $x+2-4x\sqrt{x+2}=12x^2$

7. $\sqrt{9x^2+21x+1}-\sqrt{9x^2+6x+1}=3x$

8. $x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}+4x^{-\frac{2}{3}}=-x^{\frac{7}{4}}$

9. $\left.\begin{aligned}(2x+3y)^2-2(2x+3y)=8\\ x^2-y^2=21\end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned}x+y+\sqrt{x+y}=a\\ x-y+\sqrt{x-y}=b\end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned}x^4-x^2y^2+y^4=13\\ x^2-xy+y^2=3\end{aligned}\right\}$

12. $\left.\begin{aligned}x^2+xy+y^2=a^2\\ x+\sqrt{xy}+y=b\end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l}(x-y)^2-3(x-y)=10 \\ x^2y^2-3xy=54\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}-\sqrt{y}=x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}) \\ (x+y)^2=2(x-y)^2\end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{3x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{x+y}{3x}\right)^{\frac{1}{2}}=2 \\ xy-(x+y)=54\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l}x+y+\sqrt{yx}=28 \\ x^2+y^2+xy=336\end{array}\right\}$

第七編

比，比例 變數法

49. 比之定義 一數量含有他數量之若干倍其關係謂之比

異種之名數不能相比如尺與兩時與錢其大小不能比較是也

欲顯 a 與 b 之比則以 $a:b$ 記之而 a 稱爲比之第一項 b 稱爲比之第二項

有時比之第一項及第二項稱爲前率及後率或前項及後項

比之第一項大於第二項則其比大于一第一項小于第二項則其比小于一第一項等于第二項則其比等于一

有時大于一之比稱爲伸比小于一之比稱爲縮比等于一之比稱爲等比

48. 比之值及性質 量之大小恒用數顯故求此量與他量之比則以他量之數除此量之數即得

如 $a:b$ 等於 $\frac{a}{b}$

故比可用分數顯之

比之各項以相同之數乘或除之其值不變

如 $2:3$, $6:9$, 及 $2m:3m$ 皆互相等

凡兩比相異必通爲公分母然後能比其大小

如 $4:5$, $7:9$, $11:15$ 各等於 $36:45$, $35:45$, $33:45$

由是 $4:5$, $7:9$, $11:15$ 其比之大遞降

加相同之數於比之兩項其數恒變

如 $4:5$ 之各項加 $1, 10, 100$ 則得

$5:6$, $14:15$, $104:105$

此等新比與所設之比各互相異何則因

$$\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5},\quad \frac{5}{6}=1-\frac{1}{6},\quad \frac{14}{15}=1-\frac{1}{15},\quad \frac{104}{105}=1-\frac{1}{105}$$

故加相同之數於比之兩項其所加之數愈大則所得之新比愈近於一

49. 定理 任意之比其各項均加相同之正數則其數較近於一

如加 x 於 $a:b$ 之各項則得 $a+x:b+x$

今 $\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$ 及 $\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}$

因分子各相同而 $\frac{a-b}{a+x}$ 之分母較大故 $\frac{a-b}{a+x}$ 之絕對值恒較 $\frac{a-b}{b}$ 之絕對值小所以 $\frac{a+x}{b+x}$ 與 1 之差恒較 $\frac{a}{b}$ 與 1 之差小則與 1 較近

又 a 大於 b 則 $\frac{a}{b}$，$\frac{a+x}{b+x}$ 俱大於 1 而 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 近於 1 故 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 小

由是大於一之比之兩項各加相同之數則其數減小

若 a 小於 b 則 $\frac{a}{b}$，$\frac{a+x}{b+x}$ 俱小于 1 然 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 近於 1 故 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 大

由是小於一之比之兩項各加相同之數則其數增大

又若 x 甚大則分數 $\frac{a-b}{b+x}$ 甚小故 $\frac{a+x}{b+x}$ 與 1 之差為 $\frac{a-b}{b+x}$

若 x 變至極大則其數可變至極小即 x 極大則 $\frac{a+x}{b+x}$ 之極限數為 1

50. 複比 有諸比其諸前項之積與諸後項之積之比謂諸比之複比

如 $ac:bd$ 為 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比

又 $a^2:b^2$ 謂之 $a:b$ 之平方比

$a^3:b^3$ 謂之 $a:b$ 之立方比

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 謂之 $a:b$ 之平方根比

習　題 XXVII.

1. 將 $5:6$, $7:8$, $41:48$, $31:36$ 諸比依大之遞降列之

2. $3+x:4+x$ 等於 $5:6$ 求 x 之值

3. 問 $3:4$ 之兩項各加何數其比始等於 $25:32$

4. 有二數其比為 $5:6$ 其和為 121 問二數各幾何

5. 設 $\dfrac{4x+5y}{3x-y}=2$ 求 x 與 y 之比

6. 設 $4x^2+y^2=4xy$ 求 $x:y$

7. 某比之兩項各加 2 則 $2:3$ 其兩項各減 1 則為 $1:2$ 問某比若何

8. 書 $2:3$, 及 $15:16$ 之複比又書 $2x:3y$ 之平方比

9. 設 $x+1:x+4$ 為 $3:5$ 之平方比求 x

10. 有二人其年歲之比為 $3:4$ 而在三十年前其比為 $1:3$ 問此二人現在之年歲幾何

11. 比之一項各減他一項之反數則其兩餘數之比與原比等求証之

12. 若 a 及 x 爲正且 $a>x$ 則 $a^2-x^2:a^2+x^2$ 較 $a-x:a+x$ 大求証之

51. 比例之定義 有四量其第一與第二之比等於第三與第四之比名爲比例量

如 $a:b=c:d$ 則 a, b, c, d 爲比例量

比例量之記法爲 $a:b::c:d$ 宜讀爲 a 比 b 若 c 比 d

成比例之四量中其第一及第四謂之外項第二及第三謂之內項

52. 比例之定理 四量 a, b, c, d 成比例則由定義 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩邊各以 bd 乘之則 $ad=bc$

即兩外項之積等于兩內項之積

依此理反推之若 $ad=bc$ 則 $a\ b\ c\ d$ 爲比例量

若 $ad=bc$ 則 $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

則 $a:b=c:d$

故 $a:b=c:d$ 則 $ad=bc$

反言之 $ad=bc$ 則 $a:b=c:d$

53. 推論 若 $ad=bc$ 則得以下各比例式

(1) 若 $a:b::c:d$

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

即 $$1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$$

或 $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$\therefore\ b:a::d:c$

(2) 若 $a:b::c:d$

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

即 $$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

或 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+b}{d}$$

$\therefore\ a+b:b::c+d:d$

(3) 若 $a:b::c:d$

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

即 $$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

或 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$\therefore\ a-b:b::c-d:d$

(4) 由 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

及 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

兩式相除得

$$a+b:a-b::c+d:c-d$$

(5) 若 $a:b::c:d$

則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

以 $\frac{b}{c}$ 乘之得

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$$

即 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\therefore$ $a:c::b:d$

(6) 由 $a:c::b:d$ 可得次之比例

$$a+c:c::b+d:d$$

$$a-c:c::b-d:d$$

$$a+c:a-c::b+d:b-d$$

54. 連比例 有諸量其第一與第二之比等於第二與第三之比又等於第三與第四之比以次如是則此諸量謂之連比例之量

如　$a:b=b:c=c:d$ 等等

則　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

則　a, b, c, d 成連比例

如　$a:b=b:c$ 則 b 謂之 a 與 c 之比例中項 c 謂之 a 與 b 之比例末項

55. 連比例之性質　如 a, b, c 爲連比例則

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\therefore \quad b^2=ac \quad 即 \quad b=\sqrt{ac}$$

即有所設之二量其比例中項恆等於其積之平方根

又　$$\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b}$$

即　$$a^2:b^2=a:c$$

即三量成連比例則第一與第三之比等於第一與第二之平方比

若　a, b, c, d 爲連比例則

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

如是　$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$$

即　$$\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$$

$\therefore \quad a:d=a^3:b^3$

即四量成連比例則第一與第四之比等於第一與第二之立比方

56. 雜例 次之各例爲比例中最要之諸

(1) 若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{g}{h}$

設 $\dfrac{a}{b}=r,\ \dfrac{c}{d}=r,\ \dfrac{e}{f}=r,\ \dfrac{g}{h}=r$

$\therefore \quad a=br,\ c=dr\ \ e=fr,\ g=hr$

$\therefore \quad a+c+e+g=(b+d+f+h)r$

$\therefore \quad \dfrac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=r=\dfrac{a}{b}$

$\therefore \quad a+c+e+g:b+d+f+h::a:b$

即諸等比之前項之和與其後項之和之比等於任一比之前項與其後項之比

(2) 若 $a:b::c:d$

$e:f::g:h$

$k:l::m:n$

求証 $aek:bfl::cgm:dhn$

今 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d},\ \dfrac{e}{f}=\dfrac{g}{h},\ \dfrac{k}{l}=\dfrac{m}{n}$

由上之三方程式則得

$$\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\times\frac{k}{l}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h}\times\frac{m}{n}$$

則　$$\frac{aek}{bfl}=\frac{cgm}{dhn}$$

∴　$aek:bfl::cgm:dhn$

(3)　若　$a:b::c:d$

令　$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

將上式之兩邊乘至 n 次方

則　$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$$

∴　$a^n:b^n::c^n:d^n$

又上式之兩邊開至 n 次方根

則　$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$$

∴　$a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}::c^{\frac{1}{n}}:d^{\frac{1}{n}}$

即比例之諸項含有同次方或同次方根者仍爲比例式

(4)　任兩量各加相同之倍數其兩量之比仍與原有之兩量之比同

因　$$\frac{a}{b}=\frac{\left(1\pm\frac{m}{n}\right)a}{\left(1\pm\frac{m}{n}\right)b}$$

則 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\pm\dfrac{m}{n}a}{b\pm\dfrac{m}{n}b}$

∴ $a:b::a\pm\dfrac{m}{n}a=b\pm\dfrac{m}{n}b$

(5) 若 $a:b::c:d$

則 $a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd$ 求證之

設 $\dfrac{a}{b}=x,\ \dfrac{c}{d}=x$

由是 $a=bx,\ c=dx$

∴ $\dfrac{a^2+ab}{c^2+cd}=\dfrac{b^2x^2+b^2x}{d^2x^2+d^2x}=\dfrac{b^2(x^2+x)}{d^2(x^2+x)}=\dfrac{b^2}{d^2}$

又 $\dfrac{b^2-2ab}{d^2-2cd}=\dfrac{b^2-2b^2x}{d^2-2d^2x}=\dfrac{b^2(1-2x)}{d^2(1-2x)}=\dfrac{b^2}{d^2}$

由是 $\dfrac{a^2+ab}{c^2+cd}=\dfrac{b^2-2ab}{c^2-2cd}$

則 $a^2+ab:c^2+cd::b^2-2ab:d^2-2cd$

(6) 若 $a:b=c:d$

則 $a^2+ab:b^2-ab::c^2+cd:d^2-cd$

若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

由 53 欵第四例理則

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

並　$$\frac{a}{-b}=\frac{c}{-d}$$

∴　$$\frac{a}{-b}\times\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{-d}\times\frac{c+d}{c-d}$$

即　$$\frac{a^2+ab}{b^2-ab}=\frac{c^2+cd}{d^2-cd}$$

或　$$a^2+ab:b^2-ab::c^2+cd:d^2-cd$$

(7) 在 $a:b::c:d$ 內 a 爲最大之項求証 $a+d$ 必大 $b+c$

因　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 並 $a>c$

則　$$b>d$$

又　$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 並 $b>d$

則　$$a-b>c-d$$

兩邊各加 $b+d$

∴　$$a+d>b+c$$

(8) 應用比例可証次之方程式

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}=\frac{x^2-x+2}{x^2+x-2}$$

則　$$\frac{x^2+(x+1)}{x^2-(x+1)}=\frac{x^2+(2-x)}{x^2-(2-x)}$$

由53款第四例理則

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2}{2-x}$$

以 a^2 除之 $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2-x}$

$\therefore \quad x=\dfrac{1}{2}$

習　題 XXVII.

若 $a:b::c:d$ 求証以下各式

1. $ma:nb::mc:nd$

2. $3a+b:b::3c+d:d$

3. $a+2b:b::c+2d:d$

4. $a^3:b^3::c^3:d^3$

5. $2a+3b:3a-4b::2c+3d:3c-4d$

6. $ma^2+nc^2:mb^2+nd^2::a^2:b^2$

若 $a:b::b:c$ 求証次之各式

7. $a+b:b+c::a:b$

8. $a^2+ab:b^2+bc::a:c$

9. $a:c::(a+b)^2:(b+c)^2$

10. 在 $a:b::b:c$ 內 a 爲最大之項求証 $a+c>2b$

11. 若 $\dfrac{x-y}{l}=\dfrac{y-z}{m}=\dfrac{z-x}{n}$ 求証 $l+m+n=0$

12. 若 $a:b=c:d=e:f$ 求証

$a^3+a^2c+ace:b^3+{}^2bd+bdf::ace+ac^2+c^3:bdf+bd^2+d^3$

13.　若　$a:b=c:d$ 求証 $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}$ $=ab:cd$

14.　若　$a+b-c:c+d+a=a-c:2d$ 求証 $b:a-c$ $=a+c-d:2d$

15.　若　$x-z:y-z::x^2:y^2$ 求證 $x+z:y+z=x^2$ $+2xy:y^2+2xy$

16.　求　$x+5:2x-3::5x+1:3x-3$ 之 x 之值

17.　求　$\sqrt{x}+\sqrt{b}:\sqrt{x}-\sqrt{b}::a:b$ 之 x 之值

18.　求　$x:27::y:9$ 並 $x:27::2:x-y$ 之 x,y 之數

19.　A B 二人各帶資本若干出外爲商後 A 得賺利 200 元 B 賠 50 元其 A 現有之本 : B 現有之本 $::2:\frac{1}{2}$ 但若 A 賺 100 元 B 賠 85 元其二人之本爲 $15:3\frac{1}{4}$ 求各原有本若干元

20.　設甲乙兩脚踏車作 1760 碼之賽跑兩車之速度爲 5:4 乙車先甲車半分鐘而出走但甲車跑勝 176 碼求二車之速度各若干

設 1760=1

$\frac{1}{x}=(1-\frac{1}{10})\times\frac{4x}{5}-\frac{1}{2}$

57. 變數　如賣某物品每斤價若干則其價與重量之關係必重量爲二倍其價亦爲二倍重量爲半

分其價亦爲半分逐次如此其任意兩價之比必恒等於相當兩重量之比

二量有此關係則二量中之一量謂之因他一量變

有二量其一量之任意兩數値之比等于他一量之相當數値之比則謂之第一量因他一量變

如設一量中所度得之兩數爲a_1, a_2之比他量中所度得相當之兩數爲b_1, b_2之比則

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\text{ 從而 }\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

由是二量之相當數恒爲常比

58. 記號 (因變)一語可用記號$\propto$代之

如 $a\propto b$ 宜讀爲 a 因 b 變

若 $a\propto b$ 則 $a:b$ 爲常數而此常數之比爲 m

則 $\frac{a}{b}=m \quad \therefore \quad a=mb$

欲求常數 m 則於任何例知 a 與 b 相當之一對數可也

如 $a\propto b$ 若知 $b=2$ 時，$a=10$ 則

$a=md$ 則 $10=m\times 2 \quad \therefore \quad m=5$

由是 $a=5b$

95. 反變數 有二量其一量從他一量之反數

而變則謂之第一量因第二量反變

如 $a\propto\frac{1}{b}$ 即 $a=m\frac{1}{b}$ 即 $ab=m$ 則 a 因 b 反變

一量從他二量之積而變則謂之第一量因後二量合變

如 $a\propto bc$ 即 $a=mbc$ 則 a 爲與 bc 合變

有第一量與第二量及第三量之反數之積之比若其比爲常數則爲第一量因第二量正變因第三量反變

如 $a:b\times\frac{1}{c}$ 爲常數即 $a=m\frac{b}{c}$ 但 m 爲常數如是則 a 因 b 正變因 c 反變

依上所示之定義變數法雖有種種不同而其常數 m 苟知其任意之一對數值恒能決定

如 a 因 b 正變因 c 反變則設 b 爲 2, c 爲 9, a 爲 6 其式如次

$$a=m\frac{b}{c} \quad \therefore \quad 6=m\frac{2}{9}$$

由是 $$m=27, \quad \therefore \quad a=27\frac{b}{c}$$

60. 定理 如 a 惟與 b 及 c 有關係若 c 爲常數則 a 因 b 變又 b 爲常數則 a 因 c 變若 b 與 c 俱爲變數則 a 因 bc 變

設 $a, b, c,\ \ a', b', c,\ \ a'', b', c'$ 爲相當之三種數值

然 c 在第一種與第二種相同故

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (1)$$

又 b 在第二種與第三種相同故

$$\frac{a'}{a''} = \frac{c}{c'} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (2)$$

由是從(1)式與(2)式

$$\frac{a}{a'} \times \frac{a'}{a''} = \frac{bc}{b'c'}$$

即 $$\frac{a}{a''} = \frac{bc}{b'c'}$$

此即證明本定理之式

今舉其命題之例如次

如買牛肉一方若其重量 W 爲常數則牛肉之價 c 因每斤之價 P 變若每斤之價 P 爲常數則牛肉之價 c 因重量 W 變由是依上之定理若重量 W 與每斤之價 P 俱爲變數則牛肉之價 c 因重量 W 與每斤之價 P 之積變

即若 W 爲常數則 $c \propto P$

而 P 爲常數則 $c \propto W$

若 P 與 W 俱爲變數則 $c \propto PW$

又有三角形若其高 H 爲常數則其面積 A 因其

底 B 變若其底 B 爲常數則其面積 A 因其高 H 變由是其底 B 與其高 H 俱爲變數則其面積 A 因其底 B 與高 H 之積變

即 H 爲常數則 $A \propto B$

　B 爲常數則 $A \propto H$

而 B 與 H 俱爲變數則 $A \propto BH$

若 $A \propto B$ 又 $A \propto C$ 則 $B \propto C$

因 $A \propto B$ 故 $A \propto mB$ 但 m 爲常數

而 $A \propto C$ 故 $A \propto nC$ 但 n 爲常數

由是 $B=\frac{n}{m}C$ 但 $\frac{n}{m}$ 爲常數故 $B \propto C$

若 $C \propto WP$ 則 $W \propto \frac{C}{P}$

因 $C \propto WP$ 故 $C=mWP$ 但 m 爲常數

由 $W=\frac{1}{m}\times\frac{C}{P}$ 但 $\frac{1}{m}$ 爲常數故 $W \propto \frac{C}{P}$

若氣休之壓力恒與密度及絕對溫度各變而密度爲 1 溫度爲 300 則壓力爲 15 今密度爲 3 溫度爲 320 問其壓力幾何

$$P \propto TD$$

故　　$P=mTD$ 但 m 爲常數

$$\therefore \quad 15=m300\times 1$$

$$\therefore \quad m=\frac{1}{20}$$

$$\therefore \quad P=\frac{1}{20}TD$$

由是 $D=3,\ T=320$

則 $P=\frac{1}{20}\times 320\times 3=48$

習 題 XXIII.

1. A 因 B 變而 B=3 則 A=5 今 B=5 問 A 爲幾何

2. W 因 P 反變而 P=15 則 W=4 今 P=12 問 W 爲幾何

3. 若 $x\propto y$ 又 $y\propto z$ 則 $xz\propto y^2$ 求證

4. 若 $x\propto\frac{1}{y}$, $y\propto\frac{1}{z}$ 則 $x\propto z$ 求證

5. A 與 BC 合變而 B=2, C=6, 則 A=4 今 B=2, C=9 問 A 爲幾何

6. A 因 B 正變因 C 反變而 B=3, C=4 則 A=2 若 A=6, C=3 求 B 之數值

7. 圓之面積因其半徑之平方變而半徑 10 尺其面積爲 314.159 方尺然則半徑爲 12 尺之圓之面積該幾何

8. 球之体積因其半徑立方變而球之半徑 1 尺則其体積爲 4.188 立方尺問球之半徑 3 尺其体積幾何

9. 墜体由靜止墜落因墜落之時間變而在二秒末之速度爲 64 尺問在 5 秒末之速度幾何

10. 氣体之体積因絕對溫度正變因壓力反變而壓力爲 15 溫度爲 280 則体積爲 1 立方尺問壓力爲 20 溫度爲 300 則其体積幾何

11. a^2-b^2 因 c^2 變而 $a=5$, $b=3$, 則 $c=2$ 然則 a, b, c, 間之方程式如何又求證 b 爲 $a-2c$ 與 $a+2c$ 之比例中項

12. 直圓錐之体積與其高及底半徑之平方合變而高 7 尺底之半徑 3 尺則体積 66 立方尺問高 9 尺底半徑 14 尺其体積幾何

第八編

等差 等比 調和級數

61. **級數** 有若干之數依其大小之次序列之其前項與後項恒準一定之法則此諸數謂之級數

例如 1, 2, 3, 4,.........爲各項依次多 1 所成之級數

又 3, 6, 12, 24.........爲各項依次二倍所成之級數

其他如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,.........或 $1+a$, $2+3a$, $3+5a$, $4+7a$ 等皆有一定之規則故皆爲級數

等差級數

62. **定義** 級數中之任一項與其前項之差恒相等者謂之等差級數

例如 $b-a=c-b=d-c$.........則 a, b, c, d.........爲等差級數

(略記爲 AP)

A.P 各項之差謂之公差次所示者爲等差級數

1, 3, 5, 7,.........................

3, -1, -5, -9,..............

a, $a+2b$, $a+4b$..............

此第一列之公差爲 2 第二列之公差爲 -4 第三列之公差爲 $2b$

63. 等差之項 設等差級數之初項爲 a 公差爲 d 則由定義得

第二項爲 $a+d$

第三項爲 $a+2d$

第四項爲 $a+3d$

逐次如此 d 之係數恆比其項數少 1

由是第 n 項爲 $a+(n-1)d$

故知 A, P 之初項與公差則能求其任意之項

例如 A, P 之初項爲 5 公差爲 3 則第九項爲 $5+(9-1)3=29$

第二十七項爲 $5+(27-1)3=83$

64. 級數之決定 知 A, P 任意之二項則其級數即能決定

例如第 m 項爲 α 第 n 項爲 β 則設 a 爲初項 d 爲公差故

$$a+(m-1)d=\alpha,\quad a+(n-1)d=\beta$$

於此兩方程式 a 及 b 之值可以 α 及 β 表之

例如A,P之第7項爲15第21項爲22求其第10項

a 爲初項 d 爲公差則

$$a+6d=15 \qquad a+20d=22$$

由此求得 $a=12 \qquad d=\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad 第10項=12+9\times\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$$

65. 等差中項 三數量爲等差級數則其中數謂爲他兩數之等差中項

如 $a, b, c,$ 爲A,P則依定義

$$b-a=c-b \quad \therefore \quad b=\frac{1}{2}(a+c)$$

故兩數間之等差中項等於兩數和之半

66. 等差諸中項 諸數量爲A,P則其中間之諸數量謂爲兩外項之等差諸中項

凡已知兩數量之間可插入若干之等差中項

例如 a 及 b 爲已知兩數量今欲插入 n 項則共得 $n+2$ 項之等差級數 a 爲其初項 b 爲其末項

由是設 d 爲公差則

$$b=a+(n+2-1)d \quad \therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}$$

故所求之等差中項爲

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\ \cdots\cdots\cdots a+n\frac{b-a}{n+1}$$

即
$$\frac{na+b}{n+1},\ \frac{(n-1)a+2b}{n+1},\ \cdots\cdots\cdots\frac{a+nb}{n+1}$$

例如 6 及 18 之間插入等差 5 中項則

$$18=6+(5+2-1)d \quad \therefore \quad d=2$$

故諸中項爲 8, 10, 12, 14, 16

67. 等差總和　求等差級數諸項之和也

a 爲初項 d 爲公差 n 爲項數而第 n 項爲 l 則

$$l=a+(n-1)d \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

又　　S 爲總和則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots\cdots+(l-d)+l$$

更以此和數從末項逆記之則

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a$$

故　　$2S=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots\cdots$至 n 項

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}(a+l) \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

從(1)式　$\therefore \quad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \quad \cdots\cdots \quad (3)$

從(1) (2) (3)之三公式則於 a, d, n, l, S 五量中任知其三量即可得其餘二量

〔例 1.〕求級數 $5+8+11+\cdots\cdots\cdots$ 至 20 項之和

$a=5,\quad d=3,\quad n=20$

$\therefore\qquad S=\frac{20}{2}\{10+19\times3\}=670$

〔例 2.〕 由 1 起連續各奇數之和為項數之平方求証

奇數之級數為 $1+3+5+7+\cdots\cdots$

$a=1$ $d=2$ 其 n 項之和為 $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$$=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}$$

$$=\frac{n}{2}\times2n=n^2$$

〔例 3.〕 有等差級數 20 項之和為 410 而初項為 30 問公差幾何

$S=410,\quad a=30,\quad n=20$

代入　$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ 則

$410=\frac{20}{2}\{60+19d\}$

$\therefore\qquad d=-1$

〔例 4.〕 級數 $24+21+18$ 之和為 105 問項數幾何

以　$a=24$　$d=-3$　$S=105$ 代入(3)式則

$$105=\frac{n}{2}\{48+(n-1)(-3)\}$$

$$\therefore\qquad 210=n\{48-3n+3\}$$

$$\therefore\qquad n^2-17n+70=0$$

由是 $n=7$ 或 10 n 之兩值皆合

習 題 XXIX.

1. A, P, 之第10項爲 6 第 6 項爲10求其初項

2. A, P, 之第20項爲25第12項爲15求其公差

3. A, P, 之第 7 項爲 5 第 5 項爲 7 求第12項

4. 問 A,P, $16a-8b$, $15a-7b$, $14a-6b$, 之第幾項爲 $8a$

5. 求於50與80之間插入 8 個等差中項

6. $a, b, c, d,$ 爲 A, P, 求證 $a+d=b+c$

7. A, P, 之第二項與第20項之和爲 2 又第 9 項與第15項之和爲 8 問第 6 項與第 7 項之和幾何

8. A, P, 之各項以相同之數加之其各加仍爲 A, P, 求證

9. A, P, 之各項以相同之數乘之其各積仍爲 A, P, 求證

10. 於 5 與 50 間插入等差中項 29 個試求其和

11. A P 前 10 項之和爲 100 其第 6 項爲 11 問

初項幾何

12. A P 之項數爲 $2n+1$ 則其奇數項之和與偶數項之和之比爲 $n+1:n$ 求證

13. 分 80 爲四部分但其四部爲 A, P 而第一與第四之積須等於第二與第三之積之三分之二

14. 有四數爲 A, P, 其平方之和爲 120 而第一與第四之積較第二與第三之積少 8 問此四數幾何

15. 有三數爲 A, P, 其和爲 9 其平方之和爲 35 問三數

16. 今有一數三位適爲 A, P, 之升級數若將此數以三位之和之除之則得 26 若加 198 則三位倒置而爲降級數問此數爲何

17. A 自某處起身第一日走一里第二日走二里於是日增一里五日之後有 B 自原處起身追之每日走十二里問二人何日走至一處

18. a, b, c, 爲 A, P, 則 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 亦爲 A, P, 求證

注意 問題中暗函 A, P, 之三端而不明言者則不能遽借公式求之須設二未知元其設法有二若爲奇

項則設 x 爲中項 y 爲公差得三項級數 $x-y,\ x,\ x+y,$ 若爲偶項則設 $x-y,\ x+y$ 爲中二項 $2y$ 爲公差得四項級數爲 $x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y$ 餘類推

等比級數

68. 定義 級數中之任一項與其前項之比恒相同者謂之等比級數

例如 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\ldots\ldots$ 則 $a, b, c, d, \ldots\ldots$ 爲等比級數(畧記爲 G, P,)

G, P 各項與前項之比謂之公比次所示者爲等比級數

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad 27, \ldots\ldots$$

$$4,\quad -2,\quad 1,\quad -\frac{1}{2} \ldots\ldots$$

$$a^1\quad a^3\quad a^5\quad a^7 \ldots\ldots$$

此第一列之公比爲 3 第二列公比爲 $-\frac{1}{2}$ 第三列之公比爲 a^2

69. 等比之項 設 G, P, 之初項爲 a 公比爲 r 則

第二項爲 ar

第三項爲 ar^2

第四項爲 ar^3

逐次如此 r 之指數恒較其項數少 1

由是第 n 項爲 ar^{n-1}

故知 GP 之初項及公比則能求其任意之項

例如初項爲 2 公比爲 3 則 G, P, 之第 6 項爲 2×3^5 及第 20 項爲 2×3^{19}

70. 級數之決定 知 G, P, 任意之二項則其級數即可決定

例如第 m 項爲 α 第 n 項爲 β 則設 a 爲初項 r 爲公比則得

$$ar^{m-1}=\alpha \qquad ar^{n-1}=\beta$$

從此兩方程式 $r^{m-n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

$$\therefore \qquad r=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\alpha^{\frac{1}{m-n}}\beta^{\frac{1}{n-m}}$$

又 $$a=\frac{\alpha}{r^{m-1}}=\alpha r^{1-m}$$

$$\therefore \qquad a=\alpha^{\frac{1-n}{m-n}}\beta^{\frac{1-m}{n-m}}$$

〔例〕 G, P, 之第 3 項爲 18 第 5 項爲 $40\frac{1}{2}$ 試求其初項

$$ar^2=18 \quad ar^4=40\frac{1}{2} \quad \therefore \quad r^2=\frac{9}{4}$$

由是 $$a=\frac{18}{r^2}=18\times\frac{4}{9}=8$$

71. 等比中項 三數量爲 G, P, 則其中數謂爲他兩數之等比中項

$a, b, c,$ 爲 G, P, 則由定義得

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

由是 $$b^2=ac \quad \therefore \quad b=\pm\sqrt{ac}$$

則任意二量之等比中項等于其積之平方根

72. 等比諸中項 若干數量爲 G, P, 則其中間之諸數謂爲兩外項之等比之諸中項

凡已知兩數量之間可插入若干之等比中項

如 a 及 b 爲已知二數量於其間插入 n 項之等比中項則 b 爲 G, P, 之第 $n+2$ 項故

$$ar^{n+2-1}=b. \quad \therefore \quad r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

所求諸中項爲

$$ar,\ ar^2,\ ar^3,\dots\dots\dots\dots ar^n$$

即 $$a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}},\dots\dots\dots\dots a\sqrt[n+1]{\frac{b^n}{a^n}}$$

即 $$a^{\frac{n}{n+1}}b^{\frac{1}{n+1}},\ a^{\frac{n-1}{n+1}}b^{\frac{2}{n+1}},\dots\dots\dots\dots a^{\frac{1}{n+1}}b^{\frac{n}{n+1}}$$

例如求 3 及 96 之間之等比四中項則項數爲 $4+2=6$ 公比爲 r 則得 $96=3r^5$ $\therefore$ $r=\sqrt[5]{32}=2$

故所求之四中項爲 6, 12, 24, 48

73. 等比總和 求等比諸項之和也

a 爲初項 r 爲公比 n 爲項數而第 n 項爲 l 則

$$l=ar^{n-1}$$

又　S 爲總和則

$$S=a+ar+ar^2+\dots\dots\dots ar^{n-1}$$

以 r 乘之則

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\dots\dots\dots ar^n$$

相減得 $S-rS=a-ar^n$ $\therefore$ $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

〔例〕 求級數 3, 6, 12,………至 10 項之和

$a=3,\ \ r=2,\ \ n=10$ 則由前公式得

$$S=\frac{3(1-2^{10})}{1-2}=3(2^{10}-1)=3069$$

74. 無窮級數 由前章之公式 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r}$

若 r 爲常分數則不論正或負在 n 增大時則 r^n 必從而減小故 n 之值增至無窮大 r^n 即可減至無限小而爲 0 即 $\dfrac{a\times 0}{1-r}=0$ 故無窮項之總和以 $\dfrac{a}{1-r}$ 爲

極限

極限云者級數之項無窮多其總和必不能大於 $\frac{a}{1-r}$ 也

故 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之級數若 $r<1$ 則無窮項 $=\frac{a}{1-r}$

〔例 1.〕 求 $9-6+4\cdots\cdots\cdots$ 無窮項之和

$$a=9\quad r=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{27}{5}$$

〔例 2.〕 求 $\cdot 23\dot{4}$ 之數值

$$\cdot 23\dot{4}=\cdot 23444\cdots\cdots\cdots=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\cdots\cdots\cdots\text{至窮項}=\frac{\frac{4}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{10}{9}\times\frac{4}{10^3}=\frac{4}{900}$$

由是 $\cdot 23\dot{4}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{900}=\frac{211}{900}$

〔例 3.〕 G, P, 之第二項爲 -8 而至無窮項之和爲 18 求此級數

設初項爲 a 公比爲 r 則第二項爲 ar 而至無窮項之和爲 $\frac{a}{1-r}$

由是得 $ar=-8$

及 $\frac{a}{1-r}=18$

由除法 $r(1-r)=\frac{-8}{18}$

$\therefore \quad r^2-r=\frac{4}{9}$

$\therefore \quad r=-\frac{1}{3}$ 或 $r=\frac{4}{3}$

若 $r=-\frac{1}{3}$ 則 $a=\frac{-8}{r}=24$

故此級數爲 $24, -8, \frac{8}{3}$……………

$r=\frac{4}{3}$ 之數值不合理故省去

習　題　XXX.

1. 求 a^2, ab, b^2…………之第六項

2. G. P. 之第三項爲 1 第六項爲 $-\frac{1}{3}$ 問第十項幾何

3. 於 1 與 -8 間插入兩個等比中項又於 12, 與 $\frac{3}{4}$ 間插入三個等比中項

4. G. P. 之第三項與第四項之和爲 40 而第六項

與第七項之和爲 2560 問初項幾何

6. 某 G, P. 之前十項之和等於前五項之和之 33 倍求其公比

7. G, P, 之第六項爲第三項之 8 倍而與第二項之和爲 24 求此級數

8. 若 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$ 則 $a, b, c,$ 爲 G, P,

9. 三數爲 G, P, 其和爲 14 而其平方之和爲 84 問四數爲何

10. 四數爲 G, P, 其和爲 15 而其平方之和爲 85 問四數爲何

11. G, P, 之第一第二第三三項之和與第三第四第五三項之和之比爲 1:4 而第五項爲 8 問此級數如何

12. 將 210 分爲三項令第三項較首項多 90 且爲 G, P, 問各項若干

13. 四數爲 G, P, 第一項與第三項相加得 148 第二項與第四項相加得 888 問四數爲何

14. 四數爲 G, P, 第二項比第四項少 24 外項之和比中項之和若 7:3 問此四數爲何

15. 有二數相較爲 48 若令此二數爲三項 A, B,

之外項叉命爲三項 G, P, 之外項則 G, P, 之中項比 A, P, 之中項少 18 問二數爲何

16. 今有三項 G, P, 其和爲 13 其外項之和乘中項爲 30 問各項幾何

17. 有酒瓶能容酒十盞飲酒者每自瓶中倒一盞酒即向瓶中灌一盞水如此倒灌五次而瓶滿如故問瓶中餘酒幾何

18. 有六項 G, P, 其和爲 189 其第二項與第五項之和爲 54 問各項幾何

注意 問題中暗函 G, P 之三端而不明言者不能運用公式須設未知元若項數爲奇則設 xy 爲中項 $\frac{y}{x}$ 爲公比得三項級數爲 x, xy, y^2 或 $x, \sqrt{xy}, y$ 若項數爲偶則設 x 與 y 爲中二項 $\frac{y}{x}$ 爲公比得四項級數 $\frac{x^2}{y}, x, y, \frac{y^2}{x}$ 餘類推

調和級數

75. 定義 級數中任意連續三項之差之比等於第一與第三之比謂之調和級數

例如 $a-b:b-c=a:c$

$b-c:c-d=b:d$

則 $a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots$ 爲調和級數(畧記爲 H, P,)

76. 調和反商 $a, b, c,$ 爲調和級數則

$$a-b : b-c = a : c$$

由是 $c(a-b)=a(b-c)$

即 $ca-bc=ab-ac$

兩邊以 abc 除之則

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$$

而 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c},$ 原爲等差級數

故成調和級數諸數量之反商恒爲等差級數

由是調和級數諸量之關係可由等差級數推得

77. 調和中項 三數量成 H, P, 則其中央之量謂爲他二量之調和中項

若 $a, b, c,$ 爲調和級數則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c},$ 爲等差級數

由是 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \quad \therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c}$

即任意二量之調中項爲其和除其積之二倍

78. 三種級數之中項 設 A,G,H, 爲 a 及 b 兩數量之等差.等比.調和之中項則

$$A=\frac{1}{2}(a+b);\ G=\sqrt{ab},\ H,=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\therefore \quad A\cdot H=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

故任意二量之等比中項又爲二量之等差中項與調和中項之等比中項

79. 調和諸中項 凡任意兩項之間可插入 n 個調和中項設 $a, b,$ 爲任兩項

先於 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 之間求插入 n 個等差中項則依 66 款得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),\ \frac{1}{a}+\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\cdots\text{而}$$

由此諸中項求其反商即爲所求之調和中項如下

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a},\ \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{(n+1)ab}{b+na}$$

注意 求調和級數若干項之和無一定之公式

80. 三種級數之關係

$a, b, c,$ 爲 A, P, 則 $a-b:b-c=a:a$

$a, b, c,$ 爲 G, P, 則 $a-b:b-c=a:b$

$a, b, c,$ 爲 H, P, 則 $a-b:b-c=a:c$

第一與第三由 A, P, 及 G, P, 之定義即可証明而第二由乘法即可証明

〔例 1.〕 H,P, 之第二項爲 2 第四爲 6 求其級數

以其反商按 A, P, 求之

設 a 爲初項 d 爲公差則

$$a+d=\frac{1}{2}\quad a+3d=\frac{1}{6}$$

故 $a=\frac{2}{3}$ 及 $d=-\frac{1}{6}$

因得等差級數如次

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

故調和級數如次

$$\frac{3}{2},\ 2,\ 3,\ 6,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

〔例 2.〕 設 $a, b, c,$ 爲 G,P, 求証 $a+b, 2b, b+c,$ 爲 H,P,

若 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{2b}$

則 $b(b+c)+b(a+b)=(a+b)(b+c)$

即 $b^2+bc+ab+b^2=ab+b^2+ac+bc$

$\therefore\quad b^2=ac$

$a+b, 2b, b+c,$ 爲 H, P, 而 $b^2=ac$ 故 $a, b, c,$ 爲 G, P,

習 題 XXXI.

1. 求於 1 與 7 之間挿入五個調和中項

2. 今有二數之差爲 8 其 H, P, 之中項爲 $1\frac{4}{5}$ 問

二數各幾何

3. 今有二數此數四倍於彼數其A, P, 之中項與H, P, 之中項相較等于 $1\frac{4}{9}$ 問此二數爲何

4. 二量之等差中項比等比中項大13又其等中項比調和中項大 12 求二量爲何

5. 今有三項 H, P, 其大者等於餘二者之積若各項加 1 則大者爲餘二者之和求三數爲何

6. 二量之等差中項比調和中項大 1 求二量

7. $a, b, c,$ 爲調和級數則 $\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c}$ 亦爲 H, P, 試證之

8. $a, b, c, d,$ 爲 H, P, 求證 $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$

9. $a, b, c,$ 爲 H, P, 則 $\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$

10. $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ 爲 H, P, 則 $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$

第九編
級數之和

81. 級數　上編所舉三種級數之外更有他種緊要之級數于此編特洋述之

82. 記法　以u_n表級數之第n項以S_n表n項和而以S_∞表斂級數無窮項之和(斂級數云者其級數無窮項之和切近某數而爲有限者也)

83. 公項之差　級數之和要不能以同一之法則求得之然大都可將其公項即第n項u_n分其項爲二式之差其一式含有n一式含有$n-1$如是依同法分其各項而求級數之和

例如級數爲$\dfrac{a}{x(x+a)}+\dfrac{a}{(x+a)(x+2a)}$

$$+\frac{a}{(x+2a)(x+3a)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此級數之第n項$u_n=\dfrac{a}{(x+\overline{n-1}\cdot a)(x+na)}$

$$=\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}$$

依同法分其各項爲二式之差則此級數爲

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)+\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}\right)+\left(\frac{1}{x+2a}\right.$$

$$-\frac{1}{x+3a}\Big)+\cdots\cdots+\Big\{\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}\Big\}$$

由是得 $Sn=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+na}=\frac{na}{x(x+na)}$

習　題　XXXII.

1.　求　$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots\cdots n$ 項之和

2.　求　$\frac{1}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\frac{7}{3^2\cdot4^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$至無窮項之和 $\left[u_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$

3.　求　$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}$ n

項之和 $\left[2u_n=\frac{1}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}\right]$

4.　求　$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots\cdots\cdots$至限項之和

$$\left[u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

5.　求　$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 之和

6.　求　$\frac{2}{1\cdot3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3\cdot5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5\cdot7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots\cdots\cdots$至無限項之和

84. 問題 求次之級數 n 項之和

$$\{a(a+b)\ldots(a+\overline{r-1}\cdot b)\}+\{(a+b)(a+2b)\ldots(a+rb)\}+\ldots$$
$$+\{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)\}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

此級數之規率(1)各項有 r 個因子(2)任何項之諸因子爲等差級數(3)連續諸項之第一因子其次序與第一項之連續因子相同而爲等差級數

欲求此級數之和先將原級數各項最後因子之次附加一因子而成一規率相同之新級數以 V_n 表此新級數之第 n 項

即 $$V_n=\{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-1}\cdot b)\}$$

而 $$V_n-V_{n-1}=\{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a+\overline{n+r-1}\cdot b)\}-\{(a+\overline{n-2}\cdot b)(a+\overline{n-1}\cdot b)\ldots$$
$$(a+\overline{n+r-2}\cdot b)\}=\{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots\ldots\ldots$$
$$(a+\overline{n+r-2}\cdot b)\}\{(a+\overline{n+r-1}\cdot b)-(a+\overline{n-2}\cdot b)\}$$
$$=(r+1)b\{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots\ldots$$
$$(a+\overline{n+r-2}\cdot b)\}$$

惟因原級數第 n 項

$$u_n=(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)$$

故 $$V_n-V_{n-1}=(r+1)b\times u_n$$

同法 $V_{n-1}-V_{n-2}=(r+1)b\times u_{n-1}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$V_2-V_1=(r+1)b\times u_2$

$V_1-V_0=(r+1)b\times u_1$

但 $V_0=\{(a-b)a(a+b)\dots(a+\overline{r-1}\cdot b)\}$

依加法得 $V_n-V_0=(r+1)bS_n$

$\therefore\ S_n=\dfrac{V_n-V_0}{(r+1)b}$

習 題 XXXIII.

1. 求 $1,2,3,+2\cdot3\cdot4+\dots\dots+n(n+1)(n+2)$之和
2. 求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots\dots+n(n+1)$ 之和
3. 求 $3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+7\cdot9\cdot11+\dots\dots n$ 項之和
4. 求 $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\dots\dots n$ 項之和
5. 求 $2\cdot3\cdot1+3\cdot4\cdot4+4\cdot5\cdot7+\dots\dots+(n+1)(n+2)(3n-2)$ n 項之和

85. 問題 有級數其公項如次求其級數之和

$$\frac{1}{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)\dots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}$$

此級數各項即前章所述級數各項之反商欲求其級數之和先去其分母之第一因子而得新級數其公項爲

$$V_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\ldots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}$$

而$$V_n-V_{n-1}=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)\ldots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}$$

$$-\frac{1}{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-3}\cdot b)}$$

$$=\frac{1}{(a+\overline{n-1}\cdot b)\ldots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}\{(a+\overline{n-1}b)$$

$$-(a+\overline{n+r-2}\cdot b)\}$$

$$\therefore\quad V_n-V_{n-1}=-(r-1)b\times u_n$$

同法 $$V_{n-1}-V_{n-2}=-(r-1)b\times u_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_2-V_1=-(r-1)b\times u_2$$

$$V_1-V_0=-(r-1)b\times u_1$$

但 $$V_0=\frac{1}{a(a+b)\ldots(a+\overline{r-2}\cdot b)}$$

由加法得

$$V_n-V_0=-(r-1)b\{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n\}$$

$$=-(r-1)bS_n$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{V_0-V_n}{(r-1)b}$$

習 題 XXXIV.

1. 求 $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 之和

2. 求 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

之和

3. 求 $\frac{1}{3\cdot7\cdot11}+\frac{1}{7\cdot11\cdot15}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$

之和

4. 求 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots\cdots$求其 n 項之和

5. 求 $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ 之和

86. 問題　求自然數 r 方乘之和

凡 1.2.3.4………連續之整數謂之自然數

〔例 1.〕 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$ 之和

$$u_n=n^2=n(n+1)-n \text{ 由 84 欵}$$

$$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

〔例 2.〕 求 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3$ 之和

$$u_n=n^3=n(n+1)(n+2)-3n^2-2n$$

$$=n(n+1)(n+2)-3n(n+1)+n \text{ 由 84 欵}$$

$$S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-3\times\frac{1}{3}n(n+1)$$

$$(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)$$

$$-4(n+2)+2\}$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

惟 $1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

故 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3=(1+2+\cdots\cdots+n)^2$

即自然數立方之和等於自然數之和之平方

〔別法〕此題亦可用次法求之

由恒同式得

$$4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2$$

$$4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4\cdot2^3=(2\cdot3)^2-(1\cdot2)^2$$

$$4\cdot1^3=(1\cdot2)^2-(0\cdot1)^2$$

由加法得 $4S_n=n^2(n+1)^2$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

〔例 3.〕求 $1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots\cdots+n^r$ 之和

求 r 之特別值之和可如前法求之

如 $1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots\cdots+n^4$ 之和變其第 n 項爲 $n^4=n(n+1)(n+2)(n+3)-6n(n+1)(n+2)+7n(n+1)-n$ 可

依此變其各項然後求其和

87. 積彈 以彈丸疊成錐體其底面之形式分三種(1)等邊三角形(2)正方形(3)長方形

〔第一〕底面爲等邊三角形者其底面以上之各層爲由底面每邊遞次減1,所成之諸三角形至其最上一層祇有一個而其底面彈丸之數爲

$$u_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots\dots\dots + 1$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

由是 $$S_n = \frac{1}{2}1(1+1) + \frac{1}{2}2(2+1) + \frac{1}{2}3(3+1) + \dots$$
$$\dots\dots + \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}\{1\cdot2 + 2\cdot3 + \dots\dots\dots + n(n+1)\}$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

〔第二〕底面爲正方形者其底面以上之各層爲由底面每邊遞次減1所成之正方形故

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

〔第三〕底面爲長方形者其長邊之彈數有n個

短邊之彈數有m個其底面以上之各層為由底面之各邊遞次減一所成之長方形至第一層其短邊祇有一個其長邊有$n-(m-1)$個即$(n-m+1)$個

故
$$S_n=(n-m+1)1+(n-m+2)2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(n-2)(m-2)+(n-1)(m-1)+nm$$
$$=(\overline{n-m}+1)1+(\overline{n-m}+2)2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(\overline{n-m}+m-1)(m-1)+(\overline{n-m}+m)m$$
$$=(n-m)\{1+2+\ldots+(m-1)+m\}+1^2+2^2$$
$$+\ldots+m^2=\frac{1}{2}(n-m)m(m+1)+\frac{1}{6}m(m+1)$$
$$(2m+1)=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1)$$

習 題 XXXV

1. 積彈丸為三角形垛共有八層而底面之一邊為12其總數若干

2. 有積彈其底為正方形每邊彈丸之數為25共計十層問總數若干

3. 底面之兩邊為20及25以彈丸積成12層之長方形垛求其總數如何

88. 逐差法 將任何級數 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$

取其連續各二項之差而得新級數$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots\dots+(a_n-a_{n-1})$爲第一差級數又將第一差級數取其連續各二項之差而得新級數爲第二差級數以下類推

例如級數 2,7,15,26,40,...之第一差級數爲 5,8,11,14,...第二差級數爲 3, 3, 3,...

89. 逐次推差 未知規率之級數可先逐次推求其差級數乃以後之差級數之規率逐次導入於前之差級數而得其規率如是至終可決定原級數之規率

〔例 1.〕 求 $1+6+23+58+117+206+\dots$之第 n 項

第一差級數爲 $5+17+35+59+89+\dots\dots\dots\dots$

第二差級數爲 $12+18+24+30+\dots\dots\dots\dots$

第三差級數爲 $6+6+6+6+\dots\dots\dots\dots$

乃知第二差級數爲等差級數其第 n 項爲 $12+(n-1)6$ 即 $6(n+1)$

今以 V_n 表第一差級數之第 n 項而得

$$V_n-V_{n-1}=6n$$

$$V_{n-1}-V_{n-2}=6(n-1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V_2-V_1=6\cdot 2$$

及 $$V_1=6\cdot 1-1$$

由加法得 $V_n=6(1+2+3+\ldots+n)-1=3n(n+1)-1$

又以 u_n 表原級數之第 n 項而得

$$u_n-u_{n-1}=V_{n-1}=3(n-1)n-1$$

$$u_{n-1}-u_{n-2}=3(n-2)(n-1)-1$$

....

$$u_2-u_1=3\cdot 1\cdot 2-1$$

及 $$u_1=1$$

由加法得

$$u_n=3\{(n-1)n+(n-2)(n-1)+\ldots\ldots+1\cdot 2\}$$
$$-n+2=(n-1)n(n+1)-n+2$$

〔例 2.〕 求 $6+9+14+23+40+\ldots\ldots\ldots$ 之第 n 項

第一差級數為 $3+5+9+17+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

第二差級數為 $2+4+8+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

由是知第二差級數為等比級數其第 $(n-1)$ 項為 2^{n-1} 今以 V_n 表第一差級數之第 n 項而得

$$V_n-V_{n-1}=2^{n-1}$$

$$V_{n-1}-V_{n-2}=2^{n-2}$$

....

$$V_2-V_1=2^1$$

及 $$V_1=3$$

由加法得

$$V_n=(2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^{n-1})+3$$
$$=2^n+1$$

由是可求得原級數之公項 u_n 如次

$$u_n-u_{n-1}=2^{n-1}+1$$
$$u_{n-1}-u_{n-3}=2^{n-2}+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_2-u_1=2^1+1$$

但 $$u_1=6$$

由加法得

$$u_u=(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots+2)+n+5$$
$$=2^n+n+3$$

既知原級數之公項為 2^n+n+3 則此級數 n 項之和可如次求得 $(2+2^2+\ldots\ldots+2^n)+\{n+(n-1)+\ldots\ldots\ldots$

$$+1\}+3n=2^{n+1}-2+\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$

注意 依前兩例得求級數規率之法則如次

先將原級數逐次推求其差級數至求得之差級數

爲等差或等比級數乃以次之差級數導入前之差級數以求其第 n 項如是可求得原級數之第 n 項

習　題 XXXVI.

1. 求級數 $2+2+8+20+38+\dots$ 之第 n 項

2. 求級數 $7+14+19+22+23+22$ 之第 n 項

3. 求級數 $1+4+11+26+57+120+\dots$ 第 n 項及 n 項之和

4. 求級數 $1+0+1+8+29+80+193+\dots$ 第 n 項及 n 項之和

5. 求級數 $1+5+15+35+70+126+\dots n$ 項之和

第十編
排列及組合

90. 定義 從 n 個相異之物內每次取 r 個依其次序列成種種之式謂之由 n 物取 r 個之排列法

依上之定義每兩列中若非物同而所列之次序亦同者則兩排列相異

例如 $a, b, c, d,$ 四物每次取其一個則其排列有四種即

$$a,\ b,\ c,\ d,$$

若由此四物中每次取其兩個則其排列有十二種即

$$ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bc,\ bd,\ ca,\ cb,\ cd,\ da,\ db,\ dc,$$

由是求每次取三個之排列全數如次

於每次取兩個之排列中取其任意之一排列附以本排列中所無之一文字以次附迄則所生之各排列皆相異何則因所取每次取兩個之排列既各不同而所附之一文字又各相異故也

又每次取兩個之排列既各附以相異之文字則三文字之排列更無遺漏

由是由四物中每次取三個之排列數等於四物中每次取兩個之二倍即 $2\times12=24$

同樣由 n 物中每次取 r 個之排列數亦能求得其排列之數恒以 ${}_nP_r$ 表之

91. 排列之公式 I 由相異之 n 物中每次取 r 個求其排列數(但 n 與 r 俱為正整數而 n 大於 r)

今以 $a, b, c, \ldots\ldots$ 表相異之 n 物則 n 物中每次取一個之排列數為 n 甚易明晰即

$$ {}_nP_1=n $$

又若於由 n 文字每次取 $r-1$ 個之排列中取其任意之排列附以本排列中所無之一文字(即 $n-(r-1)$ 文字中之任一文字)則得由 n 物每次取 r 個之排列法

即 n 物每次取 $r-1$ 物之排列法所得各項若每次取 r 物時其各項皆有 $n-r+1$

由是 $\quad {}_nP_r={}_nP_{r-1}\times(n-r+1)$

上之關係無論 r 之值如何凡為正整數時恒能合理故以次得

$$ {}_nP_{r-1}={}_nP_{r-2}\times(n-r+2) $$

$${}_nP_{r-2}={}_nP_{r-3}\times(n-r+3)$$

....

$${}_nP_3={}_nP_2\times(n-2)$$

$${}_nP_2={}_nP_1\times(n-1)$$

又　$${}_nP_1=n$$

將上式之相當邊連乘而消其公有之因子則得

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

若每次取 n 個則 $r=n$ 故

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)$$

$$=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$$

定義 $n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$ 之積以 $n!$ 或 $\underline{|n}$ 表之讀爲逐乘數 n

例如　$\underline{|4}=4\cdot3\cdot2\cdot1$

又　$n.(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ 之積以 n_r 表之

例如　$n_3=n(n-1)(n-2)$

$$\therefore\ {}_nP_n=\underline{|n},\ {}_nP_r=n_r$$

〔例 1.〕童子六人立爲一列其立法有幾種

所求之數 $={}_6P_6=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

〔例 2.〕數目字 1,2,3,4,5 中任取三字成一數可成

幾種數

所求之數 $={}_3P_5=5\cdot4\cdot3=60$

〔例 3.〕 試証 ${}_{10}P_4={}_7P_7$

$${}_{10}P_4=10\cdot9\cdot8\cdot7=5040$$

$${}_7P_7=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$$

$$\therefore\quad {}_{10}P_4={}_7P_7$$

92. 排列之公式 II. n物中有若干同種類之物求其每次悉取之排列數

設此n文字中a字有p個b字有q個c字有r個…

所求之排列中其任意之一排列皆有p個a字若變此p個a字爲p個相異之文字則此p個相異文字其排列有$\underline{|p}$種

由是設所求之排列數爲P若於其每排列中變其p個a字爲p個相異之字則每排之新排列數當有$\underline{|p}$故排列之全數當變爲$P\times\underline{|p}$

同樣於此等之新排列中其任意之一排列皆有q個b字若變此q個b字爲q個相異文字則此q個相異文字其排列數當$\underline{|q}$種

由是諸新排列中之每排列當各變爲$\underline{|q}$種故排

列之全數當變爲

$$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\text{ 種}$$

逐次變更至無相同之文字則排列之全數當變爲

$$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\ldots\ldots$$

然相異 n 物之排列數爲 $\underline{|n}$

故　$P\times\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}\times\ldots=\underline{|n}$

$$\therefore\quad P=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}\ldots}$$

〔例 1.〕問 $a, a, a, b, b, c,$ 六字其排列法有幾種所求之數 $=\dfrac{\underline{|6}}{\underline{|3}\,\underline{|2}\,\underline{|1}}=60$

〔例 2.〕問以數目字 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 可作之數有幾種　所求之數 $=\dfrac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|2}}$

組合法

93. 定義 由 n 物中每次取其 r 個不拘排列之次序如何單以組合爲主其列法謂之由 n 物中每次取 r 個之組合法

由是每兩組合中非由全然相同之物成者則兩組合相異

如有四物以 $a, b, c, d,$ 表之若由此四物中每次取其一個則其組合有四種即 $a, b, c, d,$ 又若每次取其兩個則其組合有六種即 $ab, ac, ad, bc, bd, cd,$ 若每次悉取則其組合祇有一種即 $abcd,$

由 n 物中每次取 r 之組合數恒以 ${}_nC_r$ 表之

94. 組合之公式 由相異之 n 物每次取其 r 個求其組合數

相異 r 物之各組合中其每次悉取之排列法當各有 $\lfloor r$ 種設組合之數爲 ${}_nC_r$ 則

$${}_nC_r \times \lfloor r = {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots r}$$

〔別証〕

以 $a, b, c, d, \ldots$ 表 n 物則 n 文字中每次取 r 文字爲一組合時試任指定一特別文字其含此特別文字之組合數必等於去此特別文字所餘 $(n-1)$ 文字中每次取 $r-1$ 文字組合法之全數

由是每次取 r 物之組合法其 n 文字中每一文字含於各組合者合計有 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 回故文字之總數爲 ${}_{n-1}C_{r-1} \times n$ 然在 ${}_nC_r$ 之各組合所含文字之數爲 r 故

文字之總數為 ${}_nC_r \times r$

由是　$r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$

上之關係無論 n 及 r 為如何之值恆能合理故

$$(r-1) \times {}_{n-1}C_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}C_{r-2}$$

$$(r-2) \times {}_{n-2}C_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3}C_{r-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2 \times {}_{n-r+2}C_2 = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}C_1$$

$$ {}_{n-r+1}C_1 = n-r+1$$

將上式之相當邊連乘而消去兩邊公有之因子則

$$\underline{|r} \times {}_nC_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

即　$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}$$

以 $\underline{|(n-r)}$ 乘上式右邊之分子及分母則

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,\underline{|n-r}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}$$

〔註〕於上之公式設 $r=n$ 則

$${}_nC_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\;\underline{|n-n}}$$

$$\therefore \frac{1}{\underline{|0}} = 1 \quad 即 \quad \underline{|0} = 1$$

〔例 1.〕 由 15 名中選出三名其方法有幾種

所求之數 $={}_{15}C_3=\dfrac{15.14.13}{1.2.3}=455$

〔例 2.〕 六人中選四人當議員其選法可每次選一人或二人或三人或四人問選法有幾種

每次選四人其法有 ${}_6C_4$ 種

每次選三人其法有 ${}_6C_3$ 種

每次選二人其法有 ${}_6C_2$ 種

每次選一人其法有 ${}_6C_1$ 種

故選法之全數爲

$$\begin{aligned}{}_6C_4+{}_6C_3+{}_6C_2+{}_6C_1&=15+20+15+6\\&=56\end{aligned}$$

95. 推論 由前欵之公式

$${}_nC_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}}$$

$$\therefore\quad {}_nC_{n-r}={}_nC_r$$

故由 n 物中每次取 r 物之組合法其數與由 n 物中每次取 $n-r$ 物之組合數等

96. 定理 證 ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$

於 $n+1$ 物每次取 r 個之組合數內以其含特別之

一物者與不含特別之一物者分爲二部而含特別一物之組數即 ${}_nC_{r-1}$ 又不含特別一物之組數必爲 n 物每次取 r 個之組數即 ${}_nC_r$

$$\therefore \quad {}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$$

〔別証〕 由公式

$$\begin{aligned}{}_nC_r+{}_nC_{r-1}&=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}\\&=\frac{\underline{|n}\,(n-r+1+r)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}\\&=\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n+1-r}}={}_{n+1}C_r\end{aligned}$$

97. ${}_nC_r$ 之最大值 已知 n 之值求 ${}_nC_r$ 之最大值

依 94 欵 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\dfrac{n-r+1}{r}$

由是 $\dfrac{n-r+1}{r}\gtrless 1$ 即 $r\lessgtr\dfrac{1}{2}(n+1)$ 從而 ${}_nC_r\gtrless{}_nC_{r-1}$ 故若 $r<\dfrac{1}{2}(n+1)$ 則 n 物之組數恒從 r 之增加而加大

若 $r=\dfrac{1}{2}(n+1)$ 則 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ 然 n 非奇數則 r 不能等于 $\dfrac{1}{2}(n+1)$

若 $r>\dfrac{1}{2}(n+1)$ 則 n 物之組數恒從 r 之增加而減少

故 n 為偶數則 ${}_nC_r$ 在 $r=\frac{1}{2}n$ 時為最大而 n 為奇數則 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 時 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ 而此兩值俱為最大

例如 $n=10$ 則 $r=5$ 時 ${}_nC_r$ 之值為最大又 $n=11$ 則 $r=5$ 或 6 時 ${}_nC_r$ 之值為最大

98. 定理 x, y 為兩正整數若 $x+y=m$ 則

$${}_mC_n={}_xC_n+{}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1+{}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2+\ldots+{}_xC_1\cdot{}_yC_{n-1}+{}_yC_n$$

設 m 文字為 $a, b, c, \ldots\ldots\ldots p, q, \ldots\ldots$ 分之為 x, y 二群若從 x 群內全取 n 個為 ${}_xC_n$ 又從 x 羣內取 $n-1$ 個為 ${}_xC_{n-1}$ 而各附以從 y 羣取 1 之 ${}_yC_1$ 則得 ${}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1$ 又從 x 羣內取 $n-2$ 個而各附以從 y 取 2 之 ${}_yC_2$ 則得 ${}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2$ 逐次如此至末得 y 羣內取 n 即 ${}_yC_n$

依此所得之全數與從 $x+y$(即 m)取 n 個之 ${}_mC_n$ 相等已極明瞭由是

$${}_{x+y}C_n={}_xC_n+{}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1+{}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2+\ldots\ldots\ldots+{}_yC_n$$

x, 或 y 恒大於 n 若 $r>n$ 則 ${}_nC_r=0$

習　題 XXXVII.

1. 求 ${}_{15}P_5$ 之排列數

2. 試將兒童十人列成一行但其中有特別二人

不許並立問不同之列法有幾種

3. 將相異之物若干個每次悉取其排列數爲720問物若干個

4. ${}_nP_5={}_nP_4+2$ 問 ${}_nP_n$ 幾何

5. ${}_nP_6={}_nP_4+12$ 問 n 之值幾何

6. 求 ${}_{16}C_4$, ${}_{15}C_{12}$ 之組合數

7. ${}_{2n}C_3={}_nC_4\times 24$ 求 n 之值

8. 某街有郵便箱五個問以三封信投之其投法有幾種

9. 試證 ${}_{n+2}C_{r+1}={}_nC_{r+1}+2{}_nC_r+{}_nC_{r-1}$

10. 於 ${}_{3n}C_n$ 內含有特別一物之組數爲其組合全數之三分之一求證

11. 有兵一連兵卒八十名兵官三名欲於其中選出兵卒三名兵官一名其選法有幾種

12. 一平面上有 n 點無三點同在一直線內者今將此諸點各二點聯爲一直線問直線之數又將各直線引長能成三角形若干

第十一編

二項式定理

99. 諸代數式之積 諸代數式連乘之積等于第一式每一項第二式每一項第三式每一項等等所乘得各積之代數和其理由詳於乘法中

今由此方法推究二項式之方乘積如次

100. 二項式之定理 今設因數 $a+b$ 有 n 個則

$$(a+b)(a+b)(a+b)\dots\dots\dots$$

若由此各因數中各取其一文字以此諸文字相乘可得連乘積之一項逐次如此可得連乘積之一切項

今由各因數取 a 其方法祇有一種故 a^n 爲連乘積之一項

又由一因數取 b 由所餘之 $n-1$ 因數取 a 而能取一個 b 之數與由 n 物中取一物之組數等故其方法有 ${}_nC_1$ 種

由是 ${}_nC_1a^{n-1}b$ 爲連乘積之一項

又自二因數取 b 自其餘 $n-2$ 因數取 a 而自二因數中取 b 之次數與由 n 物中取 2 之組數等故其方

法有 ${}_nC_2$ 種

由是 ${}_nC_2a^{n-2}b^2$ 爲連乘積之一項

準同理推之自 r 因數取 b (但 r 爲不大于 n 之正整數)自其餘 $n-r$ 因數取 a 而由 r 因數取 b 之次數與由 n 物中取 r 物之組數等故其方法有 ${}_nC_r$ 種

由是 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 爲連乘積之一項

又自各因數取 b 而其取法祇有一種故 b^n 爲連乘積之一項而此項與在 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 中 $n=r$ 所得之結果同以 ${}_nC_n=1$ 故也

故 $(a+b)(a+b)(a+b)$.........至 n 因數 $=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\ldots\ldots+b^n$

由是 n 爲任意之正整數則 $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\ldots\ldots+b^n$

此公式名爲二項式定理右邊之級數名爲 $(a+b)^n$ 之展開式

若將右邊 ${}_nC_1, {}_nC_2$.........之值代入則得

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}a^{n-r}b^r+\ldots\ldots+b^n$$

此爲二項式定理之通例

101. 二項式定理之公項 欲于 $(a+b)^n$ 之展開式中求其任意之項則於

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r$$

式中設 r 爲適宜之數值可得其任意之項故上式名爲展開公項而此項爲距首項之第 $r+1$ 項

102. 公式用法 於二項式之展開公式設 $n=2$

則 $\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

若設 $\quad n=3$ 則

$$(a+b)^3=a^3+\frac{3}{1}a^2b+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}ab^2+b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

若設 $\quad n=4$ 則

$$(a+b)^4=a^4+\frac{4}{1}a^3b+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^2b^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}ab^3+b^4$$

$$=a^4+4a^3b+6x^2b^2+4ab^3+b^4$$

以 $2x$ 代 a 以 $-3y$ 代 b 且設 $n=5$ 則

$$(2x-3y)^5=(2x)^5+5(2x)^4(-3y)+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}(2x)^3(-3y)^2$$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}(2x)^2(-3y)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(2x)(-3y)^4+(-3y)^5$$

$$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$$

103. 歸納法之證明 二項式之定理亦可用次法證明之

設 n 爲任意之正整數求證

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n$$

則 $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^r$

今假定此式爲合理而以 $(a+b)$ 乘之並歸併其積中含 a 及 b 同方乘之諸項則得

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(1+{}_nC_1)a^nb+({}_nC_1+{}_nC_2)a^{n+1}b+\cdots\cdots$$
$$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n+1-r}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}$$

今 $1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$

$${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}=\frac{(n+1)n}{1\cdot2}={}_{n+1}C_2$$

並 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$

由是 $(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}C_1a^nb+{}_{n+1}C_2a^{n-1}b^2\cdots\cdots$
$$\cdots\cdots+{}_{n+1}C_ra^{n+1-r}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}$$

故若此定理對於 n 之任意值能合理則於 n 多 1 之值亦能合理

如 $n=1$ 此定理合理則 $n=2$ 此定理亦合理既 $n=2$ 合理則 $n=3$ 亦合理餘仿此故 n 爲正整數此定理恆合理

上之證明法代數學中屢用之稱爲歸納法

104. 等係數 依二項式定理展開 $(a+b)^n$ 則距首項第 $r+1$ 與距末項第 $r+1$ 爲

$${}_nC_r a^{n-r}b^r \text{ 及 } {}_nC_{n-r}a^r b^{n-r}$$

然不論 r 之值如何恆能得

$${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

由此可知 $(a+b)^n$ 之展開式自首與末之等距之項係數相等

105. 簡式 於 100 欵之公式設 $a=1, b=x$

則 $$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2\ldots\ldots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^r\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+x^n$$

此乃二項式定理中最通用之式又上之定理能包括一切二項式故宜注意

如欲求 $(a+b)^n$ 則

$$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n$$

$$=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

106. 最大項　依二項式定理展開 $(1+x)^n$ 則其第 $r+1$ 項為以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 乘其第 r 項

今 $\frac{n-r+1}{r}x=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$ 而 $\frac{n+1}{r}$ 從 r 之增加而減少由是若 r 增加從而 $\frac{n-r+1}{r}$ 當減少若無論之值如何其 $\frac{n-r+1}{r}x$ 恆小于一則其第 $r+1$ 項當較第 r 項小故展開式之第 r 項為最大時必

$$\frac{n-r+1}{r}x<1 \quad 及 \quad \frac{n-\overline{r-1}+1}{r-1}x>1$$

由是　$r>\frac{(n+1)x}{x+1}$ 及 $r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1$

若　$r=\frac{(n+1)x}{x+1}$ 則 $\frac{n-r+1}{r}x=1$

而在此例不僅有一最大項其第 r 項與第 $r+1$ 相等俱為最大項

於 $(1+x)^n$ 之展開式其諸項之絕對值不因 x 之符號變更由是 $(1-x)^n$ 之絕對值最大之項亦與 $(1+x)^n$ 最大之項相同

〔例 1.〕 設 $x=\frac{1}{3}$ 試於 $(1+x)^{10}$ 之展式中求其最最大項

$r>\frac{11}{4}$ 及 $r<\frac{11}{4}+1$ 則第 r 項爲最大由是則第三項爲最大

〔例 2.〕 設 $x=\frac{1}{2}$ 試於 $(2+3x)^{12}$ 之展開式中求其最大項

$$(2+3x)^{12}=\{2(1+\frac{3}{2}x)\}^{12}=2^{12}(1+\frac{3}{2}x)^{12}$$

故 $r>\frac{39}{7}$ 及 $r<\frac{39}{7}+1$ 則第 r 項爲最大故最大項爲第六項

最大係數 $(1\pm x)^n$ 之展開式公項係數爲 ${}_nC_r$ 依 97 款之理 n 爲偶數則 $r=\frac{n}{2}$ 時其 ${}_nC_r$ 爲最大即第 $r+1$ 項之係數爲最大

n 爲奇數則 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 及 $\frac{1}{2}(n-1)$ 時其 ${}_nC_r$ 爲最大故兩項係數相等俱爲最大

習 題 XXXVIII.

1. 求 $(x+a)^6$ 及 $(3x-2y)^4$ 之展開式
2. 求 $(a-3b)^{10}$ 之第三項
3. 展開 $(a+\sqrt{b})^8+(a-\sqrt{b})^8$

4. 求 $(2x-3y)^8$ 之中央項

5. 於 $(1+x)^{m+n}$ 之展開式證 x^m 及 x^n 之係數相等

6. 求 $\left(x^2-\frac{a^3}{x}\right)^{2n}$ 展開式中 x^n 之係數

7. 設 $x=\frac{2}{5}$ 求 $(1+3x)^{18}$ 展開式中之最大項

8. 求 $(1+x)^{12}$ 之最大係數之項

9. 用二項式定理求 $(99)^4$ 及 $(51)^4$

10. 求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ 之中央項

11. $(1+x)^n$ 展開式中第五第六及第七項之係數爲等差級數求其 n 之值

12. $(1+x)^n$ 展開式中若奇數項之和爲 a 偶數項之和爲 b 則 $(1-x^2)^n=a^2-b^2$

170. 係數之性質 本欵專考究二項展開式中係數之性質

將二項式定理之簡式依下法記之

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots\ldots+c_rx^r+\ldots\ldots+c_nx^n$$

但 $\quad c_0=c_n=1,\ c_1=c_{n-1}=n,\ c_r=c_{n-r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}$

1. 於上之公式設 $x=1$ 則

$$2^n=c_0+c_1+c_2\ldots\ldots+c_r+\ldots\ldots+c_n$$

故$(1+x)^n$展開式中諸係數之和爲 2^n

II 設 $x=-1$ 則

$$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-c_3+\dots\dots\dots+(-1)^n c_n$$

$$\therefore\quad 0=(c_0+c_2+c_4+\dots\dots)-(c_1+c_3+c_5+\dots\dots)$$

故二項展開式中奇數項諸係數之和等於偶數項諸係數之和

III. 因 $c_r=c_{n-r}$ (104 款) 故二項式定理可記爲次之二式

1. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_rx^r+\dots+c_nx^n$

2. $(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\dots+c_{n-r}x^r+\dots$

$$\dots\dots+c_1x^{n-1}+c_0x^n$$

將上式之相當邊相乘而右邊兩級數之積中其 x^n 之係數爲

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+\dots\dots\dots+c_n^2$$

然 $c_0^2+c_1^2+c_2^2+\dots\dots\dots c_n^2$ 等於$(1+x)^n\times(1+x)^n$中 x^n 之係數

則 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 之係數而此係數爲 $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}$

故 $(1+x)^n$ 展開式中諸係數平方之和等於 $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}$

IV. 如上式$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots\dots\dots+c_nx^n$

而 $$(1-x)^n=c_n-c_{n-1}x+c_{n-2}x^2-\ldots\ldots+(-1)^n c_0 x^n$$

於此右邊兩級數積中 x^n 之係數為

$$(-1)^n\{c_0^2-c_1^2+c_2^2-\ldots\ldots\ldots+(-1)^n c_n^2\}$$

而 $(1+x)^n\times(1-x)^n$ 即 $(1-x^2)^n$ 其 x^n 之係數如 n 係奇數則為 0 如 n 為偶數則為$(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{1}{2}n}\ \underline{|\tfrac{1}{2}n}}$

由是 $c_0^2-c_1^2+c_2^2-\ldots\ldots\ldots+(-1)^n c_n^2$ 因 n 之奇或偶而為 0 或$(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\underline{|n}}{(\underline{|\tfrac{1}{2}n})^2}$

〔例 1.〕 試證 $c_1+2c_2+3c_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+rc_r+\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots+nc_n=n2^{n-1}$

$$c_1+2c_2+3c_3+\ldots\ldots\ldots+rc_r+\ldots\ldots\ldots+nc_n$$

$$=n+2.\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+r\cdot\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}+\ldots\ldots\ldots+n$$

$$=n\Big\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}}+\ldots\ldots+1\Big\}=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}$$

〔例 2.〕 試證 $c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\ldots(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

$$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\frac{1}{4}c_3+\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot n+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)-\frac{(n+1)n}{1\cdot2}\right.$$

$$\left.+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}-\cdots\cdots+(-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\cdot2}-\cdots\cdots+\right.$$

$$\left.(-1)^{n+1}\right\}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

108. 二項因子之積 求 $x+a$, $x+b$, $x+c$, ……n 因子之積

此例以用次之記法爲便

於諸字中每取一個文字其所得之和爲 $a+b+c+$……以 S_1 代之於諸字中每取二字其所得相乘之和爲 $ab+bc+ac+$……以 S_2 記之總之每次取 r 字其所得一切積之和以 S_r 記之

今由 $(x+a)(x+b)(x+c)$……之諸二項因子中各取一字相乘可得連乘積之一項逐次如此可得連乘積之一切項

今由各因子中取 x 其方法祇有一種故 x^n 爲連乘積之一項

又由 $a, b, c,$ ………諸字中任取一字而由所餘 $n-1$ 因子取 x 則得 ax^{n-1} bx^{n-1} cx^{n-1} ………諸項其和為 S_1x^{n-1}

又由 $a, b, c,$ ……諸字中任取二字而由所餘 $n-2$ 因子取 x 則得 abx^{n-2}, acx^{n-2}……諸項其和為 S_2x^{n-2}

總之由 a,b,c……諸字中任取 r 個字由所餘 $n-r$ 因子取 x 則得相乘積之和為 S_rx^{n-r}

由是 $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\ldots\ldots$

$\ldots\ldots+S_rx^{n-r}+\ldots\ldots\ldots+S_n$ 此末項 S_n 即 $a,b,c\ldots\ldots$ 至 n 因子之積也

若 $a, b, c,$ 等之符號變則 S_1, S_3, S_5 ……之符號亦從之而變然 S_2, S_4, S_6 ……之符號仍不變

由是 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots\ldots$

$$=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-\ldots\ldots\ldots+(-1)^rS_rx^{n-r}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^nS_n$$

109. 多項式之定理 多項式 $a+b+c+\ldots\ldots$ 之 n 方乘亦可由二項式之方法求得但 n 為正整數 $(a+b+c+d+\ldots)^n$ 即 $\{a+(b+c+d+\ldots)\}^n$ 其展開式之公項由二項式定理得 $\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{r}\;|\underline{n-r}}a^r(b+c+d+\ldots)^{n-r}$

由同理　$c+d+\ldots)^{n-r}$展開式之公項爲

$$\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\ \lfloor n-r-s}b^s(c+d+\ldots\ldots)^{n-r-s}$$

並 $(c+d+\ldots)^{n-r-s}$ 之公項爲

$$\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\ \lfloor n-r-s-t}c^t(d+\ldots\ldots)^{n-r-s-t}$$ 以下類推

由是$(a+b+c+d+\ldots)^n$ 展開公項爲

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}\times\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\ \lfloor n-r-s}\times\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\ \lfloor n-r-s-t}\times$$

$$\ldots\ldots\ldots a^rb^sc^t\ldots\ldots\ldots\ldots$$

即 $$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor s\ \lfloor t\ldots}a^rb^sc^t\ldots\ldots\ldots$$

但 $r,s,t\ldots$各値爲零或爲正整數而 $r+s+t+\ldots=n$

〔別證〕 以上之結果可依 100 款之方法得之

惟以連乘積$(a+b+c+\ldots)(a+b+c+\ldots)$之任一項等於從諸因子各取其任一項相乘之積故各項不得不爲 $a^rb^sc^t\ldots$之形但 $r,s,t,$ 爲零或正整數且 $r+s+t+\ldots$

欲作 $a^rb^sc^t\ldots$之項先從 n 因子內之 r 因子取 a 其方法之數爲 ${}_nC_r$ 次從其餘 $n-r$ 內之 s 因子取 b 其方法之數爲 ${}_{n-r}C_r$ 又從其餘 $n-r-s$ 因子內之 t 因子取 c 其方法之數爲 ${}_{n-r-s}C_t$ 以下類推由是其方法之

全數為

$${}_nC_r \times {}_{n-r}C_s \times {}_{n-r-s}C_t \times \ldots\ldots\ldots$$

即 $$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} \times \frac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\,\underline{|n-r-s}} \times \frac{\underline{|n-r-s}}{\underline{|t}\,\underline{|n-r-s-t}} \times$$

$$\ldots = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\ldots}$$

由是 $(a+b+c+\ldots)^n$ 展開之公項為 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\ldots} a^r b^s c^t \ldots$

〔例 1.〕 求 $(a+b+c)^3$ 開式中 abc 之係數

今 $\quad n=3 \quad r=s=t=1$

故所求之係數為 $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}} = 6$

〔例 2.〕 求 $(a+b+c)^5$ 展開式中 a^4b, a^3b^2 及 a^2b^2c 之係數

所求之係數為 $\dfrac{\underline{|5}}{\underline{|4}\,\underline{|1}} a^4b$, $\dfrac{\underline{|5}}{\underline{|3}\,\underline{|2}} a^3b^2$, 及

$\dfrac{\underline{|5}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|1}} a^2b^2c$ 之係數即 5, 10, 及 30

習　題　XXXIX.

試證明以下各題；$c_0, c_1, c_2 \ldots$ 為在 $(1+x)^n$ 展開式中 $x^0, x^1, x^2 \ldots\ldots$ 之係數

1. $c_0 - 2c_1 + 3c_2 - \ldots\ldots (-1)^n (n+1) c_n = 0$

2. $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + \ldots\ldots + (n-1) c_n = 1 + (n-2) 2^{n-1}$

3. $\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{c^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

4. $c_0^2+2c_1^2+\cdots\cdots+(n+1)c_n^2=\frac{(n+2)\,\underline{|2n-1}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n}}$

5. $c_1^2+2c_2^2+3c_3^2+\cdots\cdots+nc_n^2=\frac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n-1}}$

6. $\frac{1}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}$

$$=\frac{\underline{|n}}{n(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

110. 任意指數之二項式定理 在105款設 n 爲任意之正整數已證得

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots$$

上之結果若 x 小於一則無論 n 之數值如何皆能合理

n 爲正整數時則右邊之級數至第 $n+1$ 項止若 n 非爲正整數時則此級數決無底止何則因 n 非正整數則 $n, n-1, n-2,\cdots\cdots$皆不爲零故也

111. 分指數及負指數 今示分指數及負指數應用之二三例如次

〔例 1.〕　依二項式定理展開 $(1+x)^{-1}$ 公式中之 n 以 -1 代之則得

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{1\cdot2}x^2$$

$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(-1)(-2)(-3)\cdots\cdots(-r)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^rx^r+\cdots\cdots$$

〔例 2.〕　展開 $(1+x)^{-2}$

$$(1+x)^{-2}=1+(-2)x+\frac{(-2)(-3)}{1\cdot2}x^2$$

$$+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(-2)(-3)(-4)\cdots\cdots\overset{(-r-1)}{\cancel{(-4)}}}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots$$

〔例 3.〕　展開 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}$$

$$(-x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{\underline{|r}}$$

$$(-x^r)+\ldots\ldots=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2r}x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

112. 尤拉氏(Eu Ler)之證明 二項式定理更有尤拉氏之證明

因欲使二項式之級數簡單故將$1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2\ldots$級數以$f(n)$表之

由是 $$f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\qquad(1)$$

$$f(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\ldots\quad\ldots\quad\ldots\qquad(2)$$

及 $$f(n+m)=1+(n+m)x+\frac{(n+m)(n+m-1)}{1\cdot2}x^2\ldots(3)$$

將(1)(2)右邊之級數相乘。依x之遞昇方乘列之。無論m及n之值如何。而式中所含之m及n。皆爲同樣之形。今設m及n爲正整數。則知$f(m)$爲$(1+x)^m$。$f(n)$爲$(1+x)^n$。故在此例$f(m)$與$f(n)$之積。爲$(1+x)^{m+n}$。又因$m+n$爲正整數。故$(1+x)^{m+n}$、爲$f(m+n)$。是故m及n爲正整數。則$f(m)\times f(n)$之積爲$f(m+n)$。而積之形無論m及n之值如何恒相同。故m及n。無論爲何種數值。恒得

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{A}$$

倣A式屢求之得

$$f(m)\times f(n)\times f(p)\times\ldots=f(m+n)\times f(p)\times\ldots\ldots\ldots$$
$$=f(m+n+p+\ldots\ldots)$$

令 $m=n=p=\ldots\ldots=\frac{r}{s}$ 但 r 及 s 爲正整數

$$f\left(\frac{r}{s}\right)\times f\left(\frac{r}{s}\right)\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{至 } s \text{ 因數}$$
$$=f\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{s}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{至 } s \text{ 項}\right)$$

$$\therefore\quad\left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s=f(r)$$

然 r 爲正整數故 $f(r)=(1+x)^r$

$$\therefore\quad(1+x)^r=\left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s$$

$$\therefore\quad(1+x)^{\frac{r}{s}}=f\left(\frac{r}{s}\right)$$

是爲正分指數合於二項式定理之證明

今二項式定理對於任意之正指數既合理更進而證明其對於負指數亦合理由A得

$$f(-n)\times f(n)=f(-n+n)=f(0)$$

$f(0)$ 爲 1 理甚明瞭

$$\therefore\quad f(-n)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{(1+x)^n}=(1+x)^{-n}(n\text{ 爲正數})$$

是故$(1+x)^{-n}=f(-n)$

是爲負指數合於二項式定理之證明

〔例 1.〕 n 爲任意之正整數求證 $(1-x)^{-n}$ 及 $(1+x)^{2n-2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數相等

此二項爲

$$\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-n+2)}{\underline{|n-1}}(-x)^{n-1}$$

及 $$\frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n-1}}x^{n-1}$$

而 $$\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-n+2)}{\underline{|n-1}}(-x)^{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{\underline{|n-1}}x^{n-1}$$

$$=\frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|n-1}\quad\underline{|n-1}}x^{n-1}$$

〔例 2.〕 依二項式定理求 $\sqrt{101}$

$$\sqrt{101}=\sqrt{\left\{100\left(1+\frac{1}{100}\right)\right\}}=10\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=10\left\{1+\frac{1}{2}\times.01+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2}\times.0001+\right.$$

$$\left.\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}\times\cdot000001+\ldots\right\}=10\cdot04[illegible]\ldots$$

〔例 3.〕 將$(1-2x+4x^2)^{-2}$之展開式依 x 之[illegible]昇方

乘列之求 x^3 之係數

$$(1-2x+4x^2)^{-2}=\{1-2x(1-2x)\}^{-2}$$

$$=1+(-2)\left\{-2x(1-2x)\right\}+\frac{(-2)(-3)}{1\cdot2}\left\{-2x(1-2x)\right\}^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot2\cdot3}\left\{-2x(1-2x)\right\}^3+\cdots\cdots$$

$$=1+4x(1-2x)+12x^2(1-2x)^2+32x^3(1-2x)^3+\cdots$$

$$=1+4x+4x^2-16x^3+\cdots\cdots$$

〔例 4.〕 展開 $(1+x+x^2+x^3)^{-2}$ 爲 x 遞升方乘之級數則 x^3 及 x^7 之係數爲零試證明之

$$(1+x+x^2+x^3)^{-2}=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^{-2}=\left(1-x\right)^2\left(1-x^4\right)^{-2}$$

$$=(1-2x+x^2)(1+2x^4+3x^8+4x^{12}+\cdots\cdots)$$

習　題　XI.

1. 展開 $(1-[illegible]x)^{-[illegible]}$ 及 $(1-3x)^{\frac{5}{2}}$ 至五項
2. 求 $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ 及 $(1-2x)^{-\frac{5}{2}}$ 展開之公項
3. 依 x 之遞升方乘展開 $\dfrac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ 求 x^n 之係數
4. 求 $(1+3x)^{\frac{7}{2}}$ 之第一負項
5. 依二項式定理求 $\sqrt[3]{130}$ 及 $\sqrt[4]{630}$ 至四位小數
6. 依 x 之遞升方乘展開 $(1+x+x^2)^{-1}$ 試證 [illegible] 之係數爲零

第十二編

指數之定理.對數.對數級數.

113. **指數之定理** $\frac{1}{n}$ 之値小於 1 時則 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ 由二項式定理展開之式爲斂級數

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$+\frac{nx(nx-1)\ldots\ldots(nx-r+1)}{\underline{|r}}\cdot\frac{1}{n^r}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}+\ldots\ldots\ldots$$

令 $x=1$ 則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

但 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$

故 $$\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\right\}^x$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots$$

此式 n 爲任何值皆合理若 n 爲無窮大則 $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$ 必皆爲零故得下式

$$\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|r}}+\cdots\cdots\right)^x=1+x$$

$$+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots$$

其 $1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|r}}+\cdots\cdots\cdots$ 以 e 代之則

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots$$ 是謂之指數之定理或名爲指數級數

〔別證〕 指數之定理亦可用次法証明之

此証明先定指數之定理對於正整指數合理即

$$f(m)=1+m+\frac{m^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{m^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots$$

$$f(n)=1+n+\frac{n^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{n^s}{\underline{|s}}+\cdots\cdots$$

$$f(m+n)=1+(m+n)+\frac{(m+n)^2}{\underline{|2}}+\frac{(m+n)^p}{\underline{|p}}+\cdots\cdots$$

於 $f(m)\times f(n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數爲 $\dfrac{1}{\underline{|r}\,\underline{|s}}$

而於 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數則含於 $\dfrac{(m+n)^{r+s}}{\underline{|r+s}}$ 以內其係數爲 $\dfrac{\underline{|r+s}}{\underline{|r}\,\underline{|s}}\times\dfrac{1}{\underline{|r+s}}$ 即 $\dfrac{1}{\underline{|r}\,\underline{|s}}$

如是於 $f(m)\times f(n)$ 及 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數相同且 $f(m)$, $f(n)$ 及 $f(m+n)$ 其 m 及 n 爲任何值皆爲歛級數故

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\quad(1)$$

今以 x 爲正整數由(1)得

$$f(1)\times f(1)\times f(1)\times\ldots\ldots\text{至 } x \text{ 因數}$$

$$=f(1+1+1+\ldots\ldots\text{至 } x \text{ 項})$$

$$\therefore\quad\{f(1)\}^x=f(x)\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\quad(2)$$

次命 x 爲正分數 $\dfrac{p}{q}$ 但 p 及 q 爲[illegible]由(1)

得 $\left\{f\left(\dfrac{p}{q}\right)\right\}^q=f\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{p}{q}+\dfrac{p}{q}\ldots\ldots\right)$ [illegible]

$=f(p)$

由(2)得 $f(p)=\{f(1)\}^p$

$$\therefore\quad\left\{f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q=\left\{f(1)\right\}^p$$

即 $$f\left(\frac{p}{q}\right)=\left\{f(1)\right\}^{\frac{p}{q}}$$

由是證得$\{f(1)\}^x=f(x)$其x為任何之正值皆合理

再以x為負數設為$-y$但y為正數由(1)得

$$f(-y)\times f(y)=f(-y+y)=f(0)$$

但 $f(0)=1$

由是 $$f(x)=f(-y)=\frac{1}{f(y)}=\frac{1}{\{f(1)\}^y}$$

$$=\{f(1)\}^{-y}=\{f(1)\}^x$$

至是乃證得$\{f(1)\}^x=f(x)$其x之值無論為正數為分數為負數無不合理

但 $$f(1)=1+\frac{1}{\lfloor\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad e^x=f(x)=1+\frac{x}{\lfloor\underline{1}}+\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor\underline{r}}+\cdots$$

習　　題 XLI.

1. n為無窮大則$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$之極限為$e^x$

2. 求證 $e^{-1}=\frac{2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{4}{\lfloor\underline{5}}+\frac{6}{\lfloor\underline{7}}+\cdots\cdots$

3. 求證 $\left(1+\frac{1}{\lfloor\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\right)$

$$\left(1-\frac{1}{\lfloor\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\right)=1$$

4.　求證 $\frac{3}{2}e=1+\frac{1+2}{\underline{|2}}+\frac{1+2+3}{\underline{|3}}+\frac{1+2+3+4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots$

5.　試證明 $\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\right)=1+\left(1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\frac{1}{\underline{|7}}+\cdots\right)$

對　數

114. 定義 作某數之若干乘方使等於他一數則指若干乘方之指數謂之他一數之某底對數

例如 $a^x=y$ 則 x 即爲 y 之 a 底對數以 $x=\log_a y$ 表之

(log 爲 log*arithm* 之省文即對數之意也)

115. 對數之性質 下所示者爲對數之基本性質

I.　無論 a 之數值如何恒得 $a^0=1$ 故 $\log_a 1=0$

II.　若 $\log_a x=\alpha$ 及 $\log_a y=\beta$

則　$x=a^\alpha$ 及 $y=a^\beta$

$\therefore\quad xy=a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta}$

$\therefore\quad \log_a(xy)=\alpha+\beta=\log_a x+\log_a y$

同法可證明 $\log_a(xyz\ldots\ldots)=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\ldots\ldots$

由是積之對數等於其各因子各對數之和

III. 若　$\log_a x=\alpha$ 及 $\log_a y=\beta$

則　$x=a^\alpha$ 及 $y=a^\beta$

$\therefore\quad x\div y=a^\alpha\div a^\beta=a^{\alpha-\beta}$

$\therefore\quad \log_a(x\div y)=\alpha-\beta=\log_a x-\log_a y$

由是商之對數等於被除數與除數兩對數之代數差

IV. 若　$x=a^\alpha$ 則若論 m 之數值如何

$x^m=a^{\alpha m}$

$\therefore\quad \log_a x^m=m\alpha=m\log_a x$

由是某數任意方乘之對數等於其對數與其指數之積

V. 設　$\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$

則　$x=a^\alpha$ 及 $x=b^\beta$

$\therefore\quad a^\alpha=b^\beta$

故　$a=b^{\frac{\beta}{\alpha}}$ 及 $b=a^{\frac{\alpha}{\beta}}$

由是　$\log_b a=\dfrac{\beta}{\alpha}$ 及 $\log_a b=\dfrac{\alpha}{\beta}$

$\therefore\quad \log_b a\times\log_a b=\dfrac{\beta}{\alpha}\times\dfrac{\alpha}{\beta}=1$

又　$\beta=\alpha\log_b a$

$$\therefore \quad \log_b x = \log_a x \log_b a$$

由是任意之 b 底對數等於以常數 $\log_b a$ 乘本數之 a 底對數

VI. 若 $\log_a x = \alpha$ 則 $x = a^{\alpha}$

而 $x^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{\alpha}{n}}$

$$\therefore \quad \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{\alpha}{n} = \frac{\log_a x}{n}$$

由是某數根之對數等於某數之對數以方根除之

〔例 1.〕 求 $\log_2 8$ 及 $\log_8 2$ 之值

因 $8 = 2^3$ 及 $2 = 8^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad \log_2 8 = 3, \quad \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

〔例 2.〕 已知 $\log_{10} 2 = \cdot 301300$ 及 $\log_{10} 3 = \cdot 4771213$ 求 $\log_{10} 40$ 及 $\log_{10} 15$ 之值

$$\log_{10} 40 = \log_{10}(4 \times 10) = \log_{10} 2^2 + \log_{10} 10$$

$$= 2 \times \cdot 3010300 + 1 = 1 \cdot 6020600$$

$$\log_{10} 15 = \log_{10}\left(\frac{3 \times 10}{2}\right) = \log_{10} 10 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

$$= 1 + \cdot 4771213 - \cdot 3010300 = 1 \cdot 1760913$$

習　題　XLII.

1. 設知 $\log_{10} 3 = 4771213$, $\log_{10} 5 = \cdot 6989700$ 求 $\log_{10}$

1.28 及 $\log_{10}\left(\frac{3^3\times 5^8}{2^7}\right)$

2. 設知 $\log_{10}12=1{\cdot}0791812$, $\log_{10}18=1{\cdot}2552725$ 求 $\log_{10}8$, $\log_{10}9$

3. 設知 $\log_{10}25=1{\cdot}3979400$, $\log_{10}1{\cdot}03={\cdot}0128372$ 求 5, 4, $({\cdot}064)^{\frac{1}{100}}$, 之對數

4. 設知 $\log_{10}3={\cdot}4771213$, $\log_{10}7={\cdot}8450980$, $\log_{10}11=1{\cdot}0413927$ 求 7623, $\frac{77}{300}$, $\frac{3}{539}$ 之對數

5. 有式如下求 x 之同數(I), $\left(\frac{1}{{\cdot}4}\right)^x=6{\cdot}25$ (II) $a^{3x}b^{2x}=c$ (III) $a^{3x}b^{4-x}=c^{2x-1}$ (IV) $a^xb^{3x}=c^{1-2x}$

116. 對數級數

$a=e^k$ 則 $k=\log_e a$ 而 $a^x=e^{xk}=e^{x\log_e a}$ 由 113 款得 $a^x=e^{x\log_e a}=1+x\log_e a+\frac{(x\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots+\frac{(x\log_e a)^r}{\lfloor r}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

令 $a=1+y$ 則

$$(1+y)^x=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{\lfloor 2}\{x\log_e(1+y)\}^2+\ldots$$

y 之絕對值小於 1 則 $(1+y)^x$ 可由二項式定理展開得

$$(1+y)^x=1+xy+\frac{x(x-1)}{1{\cdot}2}y^2+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{\lfloor r}y^r+\ldots\ldots$$

$$=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{\lfloor 2}\{x\log_e(1+y)\}^2+\ldots\ldots$$

此相等之兩級數皆為歛級數而於兩邊比較其 x 之係數則得

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\ldots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\ldots\ldots$$

是謂之對數級數

117. 對數之推算法 求任何對數之漸近值可將前之對數級數變為收歛最速之級數然後求其漸近值為最便捷

於對數級數

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots\quad\ldots\quad(1)$$

變 y 之符號則得

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\quad\ldots\quad(2)$$

故

$$\log_e\frac{1+y}{1-y}=\log_e(1+y)-\log_e(1-y)$$

$$=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\ldots\ldots\right)\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(3)$$

令 $\frac{1+y}{1-y}=\frac{m}{n}$ 則 $y=\frac{m-n}{m+n}$ 從(3)式得

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3\right.$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\Bigg\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

用此級數求 e 底之對數甚易

例如 $m=2,\ n=1$ 則由(4)得

$$\log_e 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\cdot693147\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 $m=3,\ n=2$ 由(4)得

$$\log_e 3-\log_e 2=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\right)$$

$$=\cdot405465\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是 $\log_e 3=\cdot693147+\cdot405465=1\cdot09861$

用此方法則任何數之 e 底對數其諸近值皆可求得

118. 納白爾(Napier)氏對數 e 底對數創自蘇格蘭名士納白爾故謂之納白爾對數

此種對數為研究高等算學之用若於實際計算時則用以10為底之對數較便故稱以10為底之對數為常用對數

求 e 底對數之法既述於前若欲求以10為底之對數則以一因子 $\log_{10}e$ 即 $\frac{1}{\log_e 10}$ 乘 e 底對數即得此常

因子名爲對數率其値爲·43429………

習　題　XLIII.

1. 證 $\log(x+n)=\log x+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log\left(1+\frac{1}{x+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{1}{n-1+x}\right)$

2. 證 $\log_e\sqrt{12}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots$ 至無窮

3. 證 $\log_e\sqrt{10}=\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3}+\cdots\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^7}\cdots\cdots\right\}$

4. $\log_e 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots$ 至無窮

5. $3\log_e 2-1=\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{9}{5\cdot6\cdot7}+\cdots\cdots$ 至無窮

常　用　對　數

119. 常用對數 以下所論之對數皆爲常用對數故 10 底可省去不記

若二數之數目字全相同而僅小數點之位置相異時則其一數必等於以 10 之某乘方乘他數故由 115

歟知此二數之對數差恆爲整數

例如　$\log 421{\cdot}5=\log(4{\cdot}215\times 100)$

$=\log 4{\cdot}215+\log 100=\log 4{\cdot}215+2$

又設知　$\log 2=\cdot 301030$

則　$\log\cdot 02=\log(2\div 100)$

$=\log 2-\log 100=\cdot 301030-2$

由上之性質其小數部常爲正數故 $\log\cdot 02$ 爲 $\cdot 301030-2$ 原等於 $-1{\cdot}69897$ 但記此對數時不記爲 $-1{\cdot}69897$ 而記爲 $\bar{2}{\cdot}301030$, 2 字上之負號僅屬於對數之整數部故記於其數目字之上

上法所記之對數其小數部名爲假數整數部名爲指標

120. 指標 任何數之對數其指標可由視得察之

設某數爲大於 1 之數其整數部之位數爲 n 則知此數小於 10^n 而大於 10^{n-1} 而此數之對數必在 n 與 $n-1$ 之間故知其對數爲 $n-1$ 十小數部

故凡大於 1 之數其對數之指標等於其數之整數位少 1

設某數爲小於 1 之數而其首位數字之前有 n 個

0者則知此數大於10^{-n-1}而小於10^{-n}由是記其對數之小數部爲正數時此數之對數爲$-(n+1)+$小數部故其指標爲$-(n+1)$

故凡小於1之數其對數之指標等於其首位以前之0數多1

例如 3571·4之指標爲3而·00035714爲4

反之若已知任何數對數之指標則其數之小數點亦可決定

例如 $\log 1{\cdot}1467={\cdot}0594498$則可知以3·0594498爲對數之數爲1146·7又可知以$\bar{4}{\cdot}0594498$爲對數之數爲·00011467

121. 對數表 自1至99999之各數一一求其對數輯爲一書以便用對數者之檢查謂之對數表尋常所用之對數表則爲六位小數者

對數表祇載假數因其指標可由視察求得故也

對數表之用法有二一爲有眞數求對數一爲有對數求眞數

I. 有眞數求對數

若眞數不多於五位則其對數可從表中檢得之若在五位以上則其對數爲表中所不載於此欲求其對

數可以畧大畧小兩眞數之差與原數及畧小數之差相比若其差爲甚小時則兩數之差殆與對數之差成比例用此原則可求得原數之對數

欲證明此原則可由116欵解得即 $\log_{10}(n+x)-\log_{10}n=\log_{10}\left(1+\frac{x}{n}\right)=\mu\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=\mu\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2}+\ldots\ldots\right)=\mu\frac{x}{n}$ (畧近數)

其 μ 爲對數率代表 $\frac{1}{\log_e 10}$

上之原則稱爲比例差之原則

〔例〕 求 357·247 之對數

檢表得 $\log 357\cdot24=2\cdot5529601$

及 $\log 357\cdot25=2\cdot5529722$

而此兩對數之差爲 ·0000121 又 $(357\cdot247-357\cdot24)$ 與 $(357\cdot25-357\cdot24)$ 之比爲 $\frac{7}{10}$ 由是於 357·24 之對數加以 ·0000121 之 $\frac{7}{10}$ 所得之數即 357·247 之畧近值

由是 357·247 之對數爲 $2\cdot5529601+00000847=2\cdot55296857$

II. 有對數求眞數

〔例〕 求與對數 $\bar{4}\cdot5529625$ 相當之眞數

檢表得 $\log 3{\cdot}5724 = {\cdot}5529601$

及 $\log 3{\cdot}5725 = {\cdot}5529722$

而 $({\cdot}5529625 - {\cdot}5529601)$ 與 $({\cdot}5529722 - {\cdot}5529601)$ 之比爲 $\frac{51}{121}$ 由是從比例差之原則而得與 $5{\cdot}5529625$ 相當之眞數爲

$$3{\cdot}5724 + {\cdot}0001 \times \frac{51}{121} = 3{\cdot}57244$$

即 $${\cdot}5529625 = \log 3{\cdot}57244$$

$$\therefore \quad \bar{4}{\cdot}5529625 = \log {\cdot}000357244$$

複利及年金

122. 複利法 計算長期間之複利。及年金。用對數表。頗爲便捷。

複利者。即利上加利之算法也。其問題不外下記三種。

I. 知本金。與年數。及利率。求本利和。

P 爲本金。n 爲年數。r 爲利率(即每年一圓所得之利息) A 爲所求之本利和。

第一年之末。應得本利和爲 $P+Pr$。即 $P(1+r)$。此 $P(1+r)$ 即爲第二年之本金。而於第二年之末。應得本利和爲 $\{P(1+r)\}(1+r)$。即 $P(1+r)^2$。依同法推之。第 n

年之末應得本利和為 $P(1+r)^n$。

故　$A=P(1+r)^n$

由是 $\log A=\log P+n\log(1+r)$

若半年一加則本利和為 $P(1+r)^{2n}$

〔例〕 本金 350 圓年利 5 分求 25 年間所得本利之和

$$P=350,\ r=\frac{5}{100},\ n=25$$

由是　$\log A=\log 350+25\log\left(1+\frac{5}{100}\right)$

$=\log 350+25(\log 105-\log 100)$

檢表得　$\log 350=2{\cdot}5440680$

$\log 105=2{\cdot}0211893$

故　$\log A=3{\cdot}073805$

又檢表得與對數 3·073805 相當之眞數為 1185·22

故　$A=1185{\cdot}22$ 圓

II. 知滿年限時所應支之金額，求其現價。

A 為 n 年後應支之數，P 為現價，r 為利率，然在第 [illegible] 年末，P 之本利和當等於 A，

[illegible] 得 $P=A(1+r)^{-n}$

[illegible] n 年間每年終可支 A 圓求其現價

r 爲利率則由 II 得

第一年支取之現價爲 $A(1+r)^{-1}$

第二年支取之現價爲 $A(1+r)^{-2}$

....

第 n 年支取之現價爲 $A(1+r)^{-n}$

故所求之現價爲

$$A\left\{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

$$=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

〔例〕 年利 4 分求於 20 年間每年取金 30 圓之現價

$$A=30,\quad n=20,\quad r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

$\therefore$ 所求之現價 $=30\times25\left\{1-\left(\frac{25}{26}\right)^{20}\right\}$

今 $\log\left(\frac{25}{26}\right)^{20}=20(\log 25-\log 26)$

$$=20(1{\cdot}3979400-1{\cdot}4149733)$$

$$=20(-{\cdot}0170333)=-{\cdot}340666$$

$$=\bar{1}{\cdot}659334=\log{\cdot}456389$$

故所求現價 $=30\times25(1-{\cdot}456389)$

$$=407{\cdot}7\ldots\ldots\text{圓}$$

習　　題

1. 年利4分每半年一轉利問500圓於10年間之本利之總數幾何

2. 年利6分每年取500圓至五年而本利俱清問第一年之始存若干圓

3. 每年應支30圓今不支以年利$2\frac{1}{2}$計算之至20年之終一併支取求其全數幾何

4. 年利4分於40年間支取年金100圓之現價如何

5. 借款30000圓年利4分逐年以等金償之至30年償清問此等金若干

6. 有房屋一所每年可得賃金70圓而支出房捐10圓今預定契約於26年以後之14年間此房劃歸他人問此契約之現價如何

同方乘之和或差

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$\frac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots\cdots\cdots\pm a^{n-1}$$

最高通因子最低公倍數之關係

$A=\mathrm{H}\cdot a$, $B=\mathrm{H}\cdot b$, 則 $\mathrm{L}=\mathrm{H}\cdot a\cdot b$, $\mathrm{LH}=\mathrm{AB}$

二次方乘式

二次式 $ax^2+bx+c=0$ 其根爲 $-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$

設二根爲 A, B

則 $A+B=-\frac{b}{a}$, $AB=\frac{c}{a}$

比例

$a:b=c:d$ 則 $ad=bc$ 及

$a:c=b:d$, $b:a=d:c$

$a+b:a-b=c+d:c-d$

3

742134