復興初級中學教科書

代ㄉㄞˋ 數ㄕㄨˋ

上　冊

虞明禮編著
段育華校訂

商務印書館發行

復興初級中學教科書

代ㄉㄞˋ數ㄕㄨˋ

上冊

虞明禮編著
段育華校訂

商務印書館發行

本書於二十六年七月經
國民政府教育部審定
頒到中字第二十二號執照

(上等報紙本)

中華民國二十六年七月審定本第一版
中華民國三十六年四月審定本第一八七版
(67328A)

初級中學用

復興教科書 代數 二冊

上冊 定價國幣柒角貳分

印刷地點外另加運費

編著者 虞明禮
校訂者 段育華
主編者 王雲五
發行人 朱經農
上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館
各地

編輯大意

1. 本書依照教育部最近頒布修正課程標準編輯，分上下兩册，上册供初中第二學年，下册供第三學年之用。

2. 本書編制除注意邏輯次序外，兼顧學習心理，藉以提高學習興趣，增進教學效能。

3. 本書教材排列，務使各類方程式解法儘先提出，蓋以解方程式，及解應用問題，最易引人入勝故也。

4. 本書以計算爲中心。基本觀念，務求澈底明瞭，教材不取複雜繁重。其偏重理解及形式訓練之教材，一律從略。

5. 本書敍述任何算法與原理，必先提出問題，吸引學生注意，樹立學習目標，啓其向前探討之志趣，然後逐步解析歸納，加以論證。

6. 本書於說理處，力求透澈，以培養學生良好之心理習慣與態度。

7. 本書所授教材，以解方程式爲主體；但初中代數又爲高中代數之基礎，不宜囿於求解方程式，故本書於代數式之各種運算，亦復加意訓練。

8. 初學代數者，往往對於某種算法，略知其意而未能澈底了解，演算時依樣葫蘆，每至錯誤疊出，編者根據教學經驗，在本書前半部內，常將普通之誤解隨時提出，使學者尋求有無錯誤，以期糾正似是而非之思想，而立正確之觀念。

9. 本書習題爲重要教材之一部，務宜逐題演算，以期純熟而收實效。

10. 本書編著時，得良師段撫羣先生多方指示，益友胡春池先生詳爲正誤，使本書能免大謬，編者曷勝感激。尙望海內專家，進而教之，俾此書更臻完善，則尤幸甚。

目　　次

上　册

第一章　代數的目的　簡易應用問題…………1

§ 1.　代數的需要……………………1

§ 2.　代數的目的……………………1

§ 3.　文字符號的使用……………………2

習題一……………………5

§ 4.　關於代數式的幾個重要名詞……………………6

習題二……………………8

§ 5.　運算的公律……………………9

§ 6.　幾個重要的算法……………………10

習題三……………………12

§ 7.　關於方程式的幾個重要名詞……………………14

§ 8.　等量公理……………………15

§ 9.　等量公理的應用……………………16

習題四……………………17

§ 10.　移項……………………18

§ 11. 解方程式的通則 ……19

習題五……20

§ 12. 代數式的創立 ……21

習題六……22

§ 13. 解應用問題的通則 ……23

§ 14. 年齡問題 ……24

習題七……25

§ 15. 鷄犬問題 ……26

習題八……27

§ 16. 分桃問題 ……27

§ 17. 時鐘問題 ……28

習題九……29

§ 18. 工程問題 ……29

§ 19. 數字問題 ……30

習題十……30

§ 20. 其他問題 ……31

習題十一……32

第二章 正負數 …… 33

I 正負數的性質及其基本演算……33

§ 21. 負數的需要 ……33

§ 22. 負數的意義 ……………………………………34
習題十二……………………………………36
§ 23. 負數正數絕對值 ……………………………………37
習題十三……………………………………38
§ 24. 正負數的運算 ……………………………………38
§ 25. 正負數的加法 ……………………………………40
習題十四……………………………………42
§ 26. 正負數的減法 ……………………………………43
習題十五……………………………………44
習題十六……………………………………44
§ 27. 去括號 ……………………………………45
習題十七……………………………………46
§ 28. 正負數的乘法 ……………………………………47
習題十八……………………………………50
§ 29. 正負數的除法 ……………………………………52
習題十九……………………………………52
II 負數在解方程式上的應用……………………………………53
§ 30. 利用負數有時可減省移項手續 ……………………………………53
§ 31. 利用負數有時方程式才能有根 ……………………………………54
習題二十……………………………………55

第三章　整式四則之一　加減法 ……………… 56
§ 32.　引論 ……………………………………………………56
§ 33.　關於整式的幾個重要名詞 ……………………………58
習題二十一……………………………………………………59
§ 34.　整式的整理 ………………………………………………60
§ 35.　整式的加法 ………………………………………………61
習題二十二……………………………………………………64
§ 36.　整式的減法 ………………………………………………65
習題二十三……………………………………………………66
習題二十四……………………………………………………68
第四章　聯立一次方程式 …………………………… 68
§ 37.　引論 ……………………………………………………68
§ 38.　聯立方程式及其求解的通則 ……………………………69
§ 39.　加減消去法 ………………………………………………70
習題二十五……………………………………………………72
§ 40.　代入消去法 ………………………………………………73
習題二十六……………………………………………………75
§ 41.　比較消去法 ………………………………………………75
習題二十七……………………………………………………76
習題二十八……………………………………………………76

§ 42.　二元應用問題的解法 ……………………………………77
習題二十九 ……………………………………………………78
§ 43.　三元聯立方程式 ………………………………………80
習題三十 ………………………………………………………86
§ 44.　三元應用問題的解法 ……………………………………87
習題三十一 ……………………………………………………88
§ 45.　四元聯立方程式 ………………………………………89
習題三十二 ……………………………………………………91
第五章　圖解 ……………………………………………………92
§ 46.　幾個簡單的例 …………………………………………92
§ 47.　座標制 …………………………………………………95
習題三十三 ……………………………………………………97
§ 48.　兩元一次方程式的圖線 ………………………………98
習題三十四 ……………………………………………………99
§ 49.　用圖線解聯立一次方程式 ……………………………100
習題三十五 ……………………………………………………102
第六章　整式四則之二　乘除法 ………………………………103
I　整式的乘法 …………………………………………………103
§ 50.　單項式乘單項式 ………………………………………103
習題三十六 ……………………………………………………105

§ 51. 單項式乘多項式……106

習題三十七……106

§ 52. 多項式乘多項式……107

習題三十八……108

II 整式的除法……110

§ 53. 單項式除單項式……110

習題三十九……111

§ 54. 以單項式除多項式……111

習題四十……112

§ 55. 多項式除多項式……113

習題四十一……117

習題四十二……119

習題四十三……120

第七章 公式的應用……121

§ 56. 引論……121

§ 57. 二數和的平方……121

習題四十四……122

§ 58. 二數差的平方……123

習題四十五……123

§ 59. 二數和差的積……124

習題四十六 …… 124

§ 60.　二數和的立方 …… 125

習題四十七 …… 126

§ 61.　二數差的立方 …… 126

習題四十八 …… 127

§ 62.　可化爲立方之和的 …… 127

習題四十九 …… 128

§ 63.　可化爲立方之差的 …… 129

習題五十 …… 130

§ 64.　三數和的平方 …… 130

習題五十一 …… 131

§ 65.　怎樣求 $(ax+b)(cx+d)$ …… 131

習題五十二 …… 132

§ 66.　怎樣求 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ …… 133

習題五十三 …… 134

§ 67.　被除式是 x^2-y^2 的 …… 134

§ 68.　被除式是 x^3+y^3 的 …… 134

§ 69.　被除式是 x^3-y^3 的 …… 135

習題五十四 …… 135

習題五十五 …… 136

第八章 因子分解法

乘法公式的逆轉應用 ………………… 137

§ 70. 引論 …… 137

§ 71. 式內各項有相同單因子的 …… 140

習題五十六 …… 140

§ 72. 式內諸項可分為幾組，而各組有相同因子的 …… 141

習題五十七 …… 142

§ 73. 兩個平方差的二項式 …… 143

習題五十八 …… 144

§ 74. 完全平方的三項式 …… 144

習題五十九 …… 145

§ 75. 立方和或差的二項式 …… 146

習題六十 …… 147

§ 76. 完全立方的四項式 …… 148

習題六十一 …… 149

§ 77. 用配方法分解因子 …… 150

習題六十二 …… 151

§ 78. 三項式 x^2+px+q …… 152

習題六十三 …… 154

§ 79. 三項式 ax^2+bx+c …… 154

習題六十四 …… 156
習題六十五 …… 157
習題六十六 …… 158
習題六十七 …… 160
習題六十八 …… 160
§ 80. 因子分解的通則 …… 161
習題六十九 …… 162
第九章　二次方程式　因子分解應用之一 163
I　二次方程基本解法 …… 163
§ 81. 引論 …… 163
§ 82. 用因子分解法解二次方程式 …… 164
習題七十 …… 167
§ 83. 用配方法解二次方程式 …… 167
習題七十一 …… 170
§ 84. 用公式解二次方程式 …… 170
習題七十二 …… 173
§ 85. 三種解法的比較 …… 173
習題七十三 …… 173
§ 86. 應用問題 …… 174
習題七十四 …… 175

§ 87. 簡易高次方程式……177
習題七十五……179
II 聯立二次方程式……180
§ 88. 聯立二次方程式的需要……180
§ 89. 兩個方程式中的一個是一次的……181
習題七十六……183
§ 90. 兩個方程式俱為二次的……183
習題七十七……189
習題七十八……193
習題七十九……194
第十章 分式四則 因子分解應用之二……195
§ 91. 引論……195
§ 92. 怎樣求 H. C. F.?……197
習題八十……202
§ 93. 怎樣求 L. C. M.?……203
習題八十一……206
§ 94. 分式符號的變化……207
習題八十二……208
§ 95. 分數變化的原理……208
§ 96. 約分……209

習題八十三 ……………………………… 210
§ 97.　通分 ……………………………… 211
習題八十四 ……………………………… 213
§ 98.　分式加減法 ……………………………… 214
習題八十五 ……………………………… 216
§ 99.　加減演算中分母應力求其簡 ……………………………… 218
習題八十六 ……………………………… 220
§100.　分式乘法 ……………………………… 220
習題八十七 ……………………………… 221
§101.　分式除法 ……………………………… 222
習題八十八 ……………………………… 223
§102.　疊分式的化簡 ……………………………… 224
習題八十九 ……………………………… 225
習題九十 ……………………………… 226

復興初級中學教科書

代　數

上　册

第一章　代數的目的　簡易應用問題

§ 1. **代數的需要**　爲什麼要學代數?請看下列三個問題:

[問題一]　兄弟二人七年後共有 69 歲。當兄年爲弟年 2 倍時,兄的年齡恰好和弟的現年相同。問兄弟今年各有幾歲?

[問題二]　某數的平方等於牠的 11 倍與 5670 的和。求這數。

[問題三]　$\sqrt[100]{100}=?$

上面三題中,第一題雖然能用算術方法來求解,但是着手很難,至於二,三兩題,在算術,更沒有求解的可能。所以算術解法有時而窮。這是算術的缺點,救濟這種缺點,那就需要代數。

§ 2. **代數的目的**　代數是適應上述需要而生的。牠的目的就在繼續算術,對於算術上所不易解決或不能解決的問題,作

進一步的研求。方法簡而效力大（例如上舉三例，在算術不易着手，在代數則毫無困難）。學者稍學代數後，自會領略此中妙趣；現在不必多談。

§ 3. 文字符號的使用 代數何以會比算術來得簡單而有用？其要點就在應用活的文字符號（例如，$a,b,c,\cdots\cdots x,y,z$）來表數，不像算術上囿於十個死的數字（1,2,3,……9,0）。應用文字來表數，其妙用無窮，難以盡述；約舉其要，蓋有兩點：

I. 使算式簡明 ［例一］某人每小時行 5 里，2 小時行幾里？3,4,5,6,……小時各行幾里？在算術，如要表明此人所行的里數，須用下面許多式子：

2 小時內所行的里數$=2\times5$

3 小時內所行的里數$=3\times5$

4 小時內所行的里數$=4\times5$

5 小時內所行的里數$=5\times5$

……………………………………

這些式子中，每一式只有一用，就是只能表明"某一特殊時數內所行的里數"，而不能表明"任何時數內所行的里數"。要想表出這一層，必須利用語言寫成下式：

任何時數內所行的里數 $=5\times$ 所行的時數，

但在代數，用 d 代表任何時數內所行的里數，t 代表所行的時

數，前面的式子就可用符號改寫成：

$$d = 5t,$$

[$5t$ 就是 $5\times t$ 的省寫。參看下面的註。]

這個式子，不比前面諸式來得簡單而明瞭嗎？

再進一層說。假如每小時不是行 5 里，那麼，在算術，要想表明任何時數內所行的里數，必須用語言表成下式：

任何時數內所行的里數＝每時所行里數×所行時數。

在代數，用 s 表每時所行里數，上式就可用符號改寫成：

$$d = st,$$

[st 就是 $s\times t$ 的省寫。]

這個式子，不是比較簡明嗎？

[註]　在代數，凡數字與文字相乘，或文字與文字相乘，或一數與括號內的數相乘，其乘號恆略而不寫。例如，2 與 x 的積恆寫爲 $2x$；a 與 y 的積恆寫爲 ay；m 與 $(x+y)$ 的積恆寫爲 $m(x+y)$，反之，$2x$ 就是 2 與 x 的積。

[例二]　在算術，由加法得下列諸式：

$$1+2=2+1 \qquad (A)$$

$$3+4=4+3 \qquad (B)$$

$$5+6=6+5 \qquad (C)$$

$$\frac{8}{7}+1=1+\frac{8}{7} \qquad (D)$$

這些式子中，每一式只有一用，例如（A）式只能表示"從 1 加 2 等於從 2 加 1"，不能表示"從 3 加 4 等於從 4 加 3"。其他（B），（C），（D）……諸式都是如此。要想把（A），（B），（C），（D），……諸式總括在一個式子內，必須用語言表成下式：

任何甲數＋任何乙數＝任何乙數＋任何甲數。

但在代數，用 a,b 表任意兩數，則上式就可改寫成：

$$a+b=b+a。$$

這個式子，比之前面的式子不是更加簡明嗎？

II. 使解法便捷　［例一］　有甲乙丙三數，甲數是乙數的 2 倍，乙數是丙數的 3 倍。甲丙兩數的差是 75。求甲，乙，丙三數各是多少？

［解法］　設丙數是 x，那麼乙數是 $3x$，甲數是 $6x$，根據題意，得下面的關係：

$$6x-x=75$$

就是　$$5x=75$$

$\therefore$　$$x=15$$

$\therefore$　丙數$=15$，　乙數$=3\times15=45$，

甲數$=6\times15=90$。

［例二］　解 § 1 中之問題二。

［解法］　設所求的數是 x，由題意立得下式：

$$x^2=11x+5670$$

由此立刻求得(怎樣求法?以後再講。)答數是 81。你看,用文字表數的效力如此!

習　題　一

1. 在算術基本運算中有下列幾條公律:

(I)　甲數+乙數=乙數+甲數　加法交換律

(II)　甲數+乙數+丙數=(甲數+乙數)+丙數
=(甲數+丙數)+乙數
=(乙數+丙數)+甲數
加法結合律

(III)　甲數×乙數=乙數×甲數　乘法交換律

(IV)　甲數×乙數×丙數=(甲數×乙數)×丙數
=(甲數×丙數)×乙數
=(乙數×丙數)×甲數
乘法結合律

(V)　(甲數±乙數)×丙數
=甲數×丙數±乙數×丙數
乘法分配律

今在代數,用 a,b,c 表甲,乙,丙三數,上面五條各可改寫成怎樣的式子?

[註: (V)中"±"號表示"+"或"−"。]

2. 用 a,b,c,d 表甲,乙,丙,丁四數,下列諸條各可改寫成怎樣的式子?

(I)　$\frac{\text{甲數}}{\text{丁數}}+\frac{\text{乙數}}{\text{丁數}}-\frac{\text{丙數}}{\text{丁數}}=\frac{\text{甲數}+\text{乙數}-\text{丙數}}{\text{丁數}}$。

(II)　$\frac{\text{甲數}}{\text{乙數}}\times\frac{\text{丙數}}{\text{丁數}}=\frac{\text{甲數}\times\text{丙數}}{\text{乙數}\times\text{丁數}}$。

(III)　$\dfrac{\text{甲數}}{\text{乙數}}\div\dfrac{\text{丙數}}{\text{丁數}}=\dfrac{\text{甲數}\times\text{丁數}}{\text{乙數}\times\text{丙數}}$。

3. 設 P 表本金，r 表利率，t 表期數，A 表本利和，則下列兩式各可改寫成怎樣的式子？

(I)　本利和＝本金×(1＋ 利率×期數)。

(II)　本利和＝本金×(1＋ 利率)$^{\text{期數}}$。

4. 設 C 表攝氏度數，F 表華氏度數，則下列兩條各可改寫成怎樣的公式？

(I)　(華氏度數 $-32°$)$\times\dfrac{5}{9}$＝攝氏度數。

(II)　攝氏度數$\times\dfrac{9}{5}+32°$＝華氏度數。

5. 設 C 表圓周的長，r 表半徑的長，A 表圓的面積，則下列公式各可寫成如何之形式？

(I)　圓周的長 ＝$2\pi\times$ 半徑的長。

(II)　圓的面積 ＝ $\pi\times$ 半徑長度^2。

(III)　圓的面積 ＝ $\frac{1}{2}\times$ 圓周的長×半徑的長。

6. 利用文字把下列諸式總括成一個式子：

(a)　$(8+7)(8-7)=8^2-7^2$。

(b)　$(15+6)(15-6)=15^2-6^2$。

(c)　$(20+13)(20-13)=20^2-13^2$。

(d)　$(35+18)(35-18)=35^2-18^2$。

(e)　$(100+51)(100-51)=100^2-51^2$。

....

§ 4. 關於代數式的幾個重要名詞　為以下說明便利計，急須解釋下列幾個名詞。

(1)　代數式(式)　把幾個數及文字聯以加，減，乘，除等

運算符號，就得一個代數式，簡稱做式。例如，$9+2-5x$ 是一式，$a+b-c$ 也是一式，xy 也是一式，$a\div b\times c$ 也是一式，$abcdef$ 也是一式。

(2)　代數式的值　在一個代數式中，把其中所含文字各以確定的數代入計算，所得結果就叫做這式的值。例如，設 $a=3$，$b=4, c=5, d=6$，則 $ab+c-d$ 的值是 $3\times4+5-6=11$。又如設 $a=5, b=10, x=15, y=8$，則 $ax+by-bx$ 的值是 $5\times15+10\times8-10\times15=5$。

(3)　項　一式若含有加減符號，那麼凡被加減號所隔開的，前後兩數(或式)各叫做一項。例如，在 $a+b-c\times d\div e$ 中，a 是一項；b 是一項；$c\times d\div e$ 也是一項。又如在 $6x-7y+8$ 中，$6x$ 是一項；$7y$ 是一項；8 又是一項。

(4)　係數，因數　幾個數（或文字）相乘而得一項，這幾個數各叫做該項的因數。例如，在 $3x$ 中，3 是 $3x$ 的因數；x 也是 $3x$ 的因數，又如，在 $5xy$ 中，5 是 $5xy$ 的因數；$x, y, 5x$, $5y$ 也都是 $5xy$ 的因數。

一項中以某因數爲主，其他諸因數的積叫做該因數的係數。例如，在 $5y$ 中，5 是 y 的係數。在 ax 中，a 是 x 的係數。在 $6xy$ 中，$6x$ 是 y 的係數；$6y$ 也是 x 的係數；6 是 xy 的係數。

關於係數的規定，學者應注意下列兩個慣例：

(I) 凡係數是 1 的，該係數恆省而不寫例如，$1x$ 應寫為 x；$1xy$ 應寫為 xy。反之，x 就是 $1x$。

(II) 凡數字係數恆置於文字之前 例如，$2x$ 不應寫為 $x2$；$3y$ 不應寫為 $y3$；$8xy$ 不應寫為 $x8y$，或 $xy8$。

(5) 同類項 兩項中，至多只有係數不同的，叫做同類項。例如，$8x$ 與 $17x$ 是同類項；$3x$ 與 $2x$ 是同類項；$5x$ 與 $6x$ 也是同類項。至於 $2x$ 與 $3y$ 則非同類項；$2x$ 與 $3x^2$ 也非同類項。

習 題 二

設 $x=1$，$y=5$，$z=6$，$a=3$，$b=4$，$c=2$。求下列各式的值：

1. $10ax+by-cz$。
2. $13ax+5by+cz$。
3. $ax(by-cz)$。
4. $ax(by+cz)$。
5. $\frac{5}{3}(x+y+z)+\frac{5}{3}(a+b+c)$。

設 $x=0$，$y=\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{3}$，$a=1$，$b=2$，$c=3$。求下列各式的值：

6. $3x+4y-6z$。
7. $ax+by+cz$。
8. $ax(by+cz)+by(cz+ax)+cz(ax+by)$。
9. $ax\div(by+cz)+by\div(ax+cz)+cz\div(ax+by)$。

指出下列諸式各有幾項：

10. $1+2\times3-4\times5\div6\times7\div xyz$。

11. $3a+b-c+d-2e$。

12. $a\div b\times c+a\div b\div c\div d\div e-bcdefg$

13. $a\div b\times c\div d\times e\div f\times g\div h$。

14. $a\div b+c\div d+e\div f-g\div h$。

15. $9x+8yz-132xz+454yz$。

下列各式中指出那幾項是同類：

16. $3x+5y+7z-x-2y-5z$。

17. $ax+by+cz+dx-ey+fz$。

18. $ax+by+cz$。

§ 5. **運算的公律**　問題："有甲，乙，丙三工人，每日工資，甲比乙多 3 角；丙等於乙的 3 倍，今甲工作 5 日，乙工作 8 日，丙工作 14 日。三人共得 12 元 5 角，問各人每日得工資幾角？"

［解法］　設乙每日得 x 角，則 8 日得 $8x$ 角；

甲每日得 $x+3$ 角，5 日得 $5(x+3)$ 角；

丙每日得 $3x$ 角，14 日得 $14\times3x$ 角。

於是由題意，立得下面的關係：

$$8x+5(x+3)+14\times3x=125 \tag{A}$$

如能由此求出 x 的值，便易得各人每日的工資。

但是欲求 x，先要計算下列三式：

(一)　$14\times3x=?$

（二）　$5(x+3)=?$

（三）　$8x+5(x+3)+14\times3x=?$

怎樣計算上述三式？須用下列五條公律：

（1）　$a+b=b+a$　　加法交換律。

（2）　$a+b+c=(a+b)+c=(a+c)+b$

$=(b+c)+a$　　加法結合律。

（3）　$ab=ba$　　乘法交換律。

（4）　$abc=(ab)c=(ac)b=(bc)a$　　乘法結合律。

（5）　$(a+b-c)d=ad+bd-cd$　　乘法分配律。

這五條公律的意義，我們在算術上已經知道了（參看習題一第1題）。在代數上，數的範圍雖然比算術廣得多，這五條公律仍能完全適用，牠們是一切運算的基本，我們要隨時留意。下節所述就是這些公律在代數上最簡單的應用。

§6.　幾個重要的算法　根據前節五條公律，乃得下面幾種重要的算法。（這些算法，不久便有大用。學者務須熟練，切勿因其淺易而忽略之。）

第一　簡單加減法　例如求 $9x+5x-3x=?$

由前節（5），立得下面的公式：

$$ad+bd-cd=(a+b-c)d。$$

這就是同類項 ad, bd, cd 加減的規則。用語言來說，就是"幾

個同類項相加減，可把公共文字的係數依其原附的加減號加減之，而以這所得結果作爲該公共文字的係數"。據此，便得

$$9x+5x-8x=(9+5-8)x=6x。$$

[註]　不用前節(5)，也可從另一方面，直接求得同類項加減的方法。因爲，$9x$ 就是 9 乘 x，也就是 9 個 x 的和；同樣，$5x$ 就是 5 個 x 的和；$8x$ 也就是 8 個 x 的和。所以

$$\begin{aligned}9x+5x-8x&=9\text{ 個 }x\text{ 的和 }+5\text{ 個 }x\text{ 的和 }-8\text{ 個 }x\text{ 的和}\\&=(9+5-8)\text{個 }x\text{ 的和}\\&=(9+5-8)x=6x\end{aligned}$$

推之，
$$\begin{aligned}ad+bd-cd&=a\text{ 個 }d\text{ 的和 }+b\text{ 個 }d\text{ 的和 }-c\text{ 個 }d\text{ 的和}\\&=(a+b-c)\text{個 }d\text{ 的和}\\&=(a+b-c)d\end{aligned}$$

第二　簡單乘法　[例一]　求 $15m\times 6=?$

由前節(4)，　$abc=(ab)c=(ac)b$。

用語言來說，就是"以任何數 c 乘 ab，等於以 c 乘 b 的係數 a，而以這所得結果 ac 作爲 b 的係數。"據此，便得

$$15m\times 6=(15\times 6)m=90m。$$

[例二]　求 $15(6m+7n-9)=?$

依前節(5)：　$(a+b-c)d=ad+bd-cd$，立得此類乘法的規則。用語言來說，就是"以一數乘幾項的和或差，等於以該數分別乘這幾項，把所得各積依這幾項原附的加減號加減之。"據此，立得

$$15(6m+7n-9)=15\times 6m+15\times 7n-15\times 9$$
$$=90m+105n-135。$$

第三　簡單除法　［例］　求 $90m\div 15=?$ 除法是乘法的還原。在乘法既有 $(ab)c=(ac)b$，在除法應得

$$acb\div a=cb=(ac\div a)b$$

即

$$my\div n=(m\div n)y。$$

用語言來說，就是"以 n 除 my，等於以 n 除 y 的係數 m，而以所得的商 $(m\div n)$ 作爲 y 的係數。"據此，

$$90m\div 15=(90\div 15)m=6m。$$

習　題　三

1. $x+x=2x$ 對不對？ $3x+2x=5+2x$。對不對？

   $3x+x=3\times 2x=6x$ 對不對？

   $3x+2x=(3+2)(x+x)=5\times 2x=10x$。對不對？

   $x-x=0$　對不對？　$5x-2x=5-2=3$。對不對？

   $18x-14x-4x=18x-10x=8x$ 對不對？

2. $8x+7x=?$
3. $8x+10x=?$
4. $x+x=?$
5. $3x+x=?$
6. $x+2x+3x=?$
7. $3x+2x+8x=?$
8. $18x+31x+132x=?$
9. $1111x+2222x=?$
10. $8x-7x=?$
11. $3x-x=?$
12. $4x-x=?$
13. $251x-x=?$
14. $251x-152x=?$
15. $3x-2x-x=?$

16. $10x-3x-x=?$　　17. $10x-5x-4x=?$

18. $10x-2x+x=?$　　19. $10x-(2x+x)=?$

20. $458x+354x-x=?$　　21. $458x-x+345x=?$

22. 3 個人 ＋ 5 個狗＝8 個人呢？8 個狗呢？8 個人狗呢？8 個狗人呢？

23. $3+5=3\times5$ 呢？ 5×3 呢？

24. $x+y=xy$ 呢？ yx 呢？

25. $2x+5y=8x$ 呢？ $8y$ 呢？ $8xy$ 呢？ $8yx$ 呢？ $8x+y$ 呢？ $8y+x$ 呢？
$8x+8y$ 呢？ $8(x+y)$呢？ $3x+5y$ 呢？ $5y+3x$ 呢？

26. $x+y+2x+3y=3x+4y$，對不對？何故？

27. $3x+2x+y=?$　　28. $5x+8y+x=?$

29. $8y+7x+9y=?$　　30. $4x+5y+6x+7y=?$

31. $8x+30+x=?$　　32. $x+2+3x+5=?$

33. $3+2x=5x$。對不對？何故？

34. $4\times5x=20\times4x=80x$，對不對？何故？
$3\times2x=6\times3x=18x$，對不對？何故？

35. $5(x+6)=5x$，對不對？ $5(x+6)=30$，對不對？
$3(4+x)=12+3x=15x$，對不對？何故？

36. $6\times5x=?$　　37. $8\times7x=?$

38. $9m\times5=?$　　39. $8\times7m\times6=?$

40. $5\times6\times7a=?$　　41. $3\times30b\times5=?$

42. $x+2\times3x=?$　　43. $a+7a\times3=?$

44. $8a-3\times2a=?$　　45. $8a+6a\times5=?$

46. $7\times8a-5\times6a=?$　　47. $2\times3a+4\times5a=?$

48. $2\times a+3\times4a+6a=?$　　49. $7(3x+5)=?$

50. $5(x+5)=?$　　51. $6(x-5)=?$

52. $8(x-y)=?$　　53. $9(x+y-5)=?$

54. $8(x+5-y)=?$　　55. $9(a-b-c)=?$

56. $2(x+3)+3x=?$　　57. $3(x-2)+6=?$

58. $2(x+3)+3(x+2)=?$　　59. $5(x+8)+5(x-4)=?$

60. $15(x+1)+15(x-1)=?$　　61. $9(x+y)+8(x-y)+y=?$

62. $8x+5(x+3)+14\times 3x=?$　　63. $35x\div 7=?$

64. $105x\div 3\div 2=?$　　65. $2x\div\frac{2}{3}=?$

66. $\frac{5}{6}x\div\frac{5}{6}=?$

§ 7. 關於方程式的幾個重要名詞 爲以下幾節說明便利計，又須解釋下列幾個名詞。

(1) 已知數，未知數(元) 凡數已知其值或已指定其值的叫做已知數；未知其值的叫做未知數。例如，在 $3y$ 中 3 是已知數；y 是未知數。又如在 §5(A)式中，x 是未知數；8，5，3，14，125 等都是已知數。我們常用英文字母順序前面的 a，b，c，……等表已知數；後面的 x，y，z 等表未知數。

未知數又叫做元。

(2) 等式 A，B 兩式（或數）的值若相等，便可用等號"="聯結 A，B 而得 $A=B$，這"$A=B$"叫做等式。A 與 B 各叫做等式的一邊。例如 $2+3\times4=14$，$x+2x=3x$，$3x+5x=1$ 等等都是等式。

(3) 恆等式，方程式 等式分兩類：其一，所含未知數可

任表何值，這類等式叫做恆等式。其二，所含未知數只能表適當的值而不能任表何值，這類等式叫做方程式。例如，在 $x+2x=3x$ 中，x 可表任何值，故等式 $x+2x=3x$ 是恆等式。至於 $3x+5x=16$ 中；x 只能爲 2 而不能任爲他數，故等式 $3x+5x=16$ 是方程式。

(4)　方程式的根　方程式中未知數所表的值叫做方程式的根。例如，在 $3x+5x=16$ 中，x 所表的值是 2（以 2 代入該方程式中的 x，得 $3\times2+5\times2=16$，左右相等）。這 2 就是該方程式的根。

(5)　解方程式　由方程求根，這手續叫做解方程式。

§ 8.　等量公理　應用 § 6 的算法，把 § 5 方程式(A)左邊化簡，則得方程式

$$55x+15=125 \qquad \text{(B)}$$

要解這方程式(B)，須用下列四條公理：

(I)　等數加等數，其和仍相等；

(II)　等數減等數，其差仍相等；

(III)　等數乘等數，其積仍相等；

(IV)　等數除等數，其商仍相等（除數或除式不得爲零）。

這四條顯而易見的道理叫做等量公理。等量公理用文字來表示，其形如下：

(I)　若 $a=b$，則 $a+c=b+c$;

(II)　若 $a=b$，則 $a-c=b-c$;

(III)　若 $a=b$，則 $ac=bc$;

(IV)　若 $a=b$，則 $a\div c=b\div c\,(c\neq 0)$。

［註］ $\neq$讀做不等於。

§ 9.　**等量公理的應用**　應用等量公理就能解簡易方程式。舉例如下：

［例一］　解　　$x-5=11$

［解法］　因　　$x-5=11$

依前節(I)得　　$x-5+5=11+5$

$\therefore$　　$x=16$

［例二］　解　　$x+5=11$

［解法］　因　　$x+5=11$

依前節(II)得　　$x+5-5=11-5$

$\therefore$　　$x=6$

［例三］　解　　$\frac{4}{3}x=64$

［解法］　因　　$\frac{4}{3}x=64$

依前節(III)　得　　$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}x=64\times\frac{3}{4}$

$\therefore \quad x=48$

［例四］解 $5x=35$

［解法］因 $5x=35$

依前節(IV)得 $5x\div5=35\div5$

$\therefore \quad x=7$

［例五］解 §7 方程式(B)

［解法］因 $55x+15=125$

所以 $55x+15-15=125-15$ (何故?)

即 $55x=110$ (何故?)

$\therefore \quad x=2$ (何故?)

［例六］解 $55x+15=125+35x$

［解法］因 $55x+15=125+35x$

所以 $55x+15-35x=125+35x-35x$ (何故?)

即 $20x+15=125$

於是 $20x+15-15=125-15$ (何故?)

即 $20x=110$

$\therefore \quad x=\frac{110}{20}=5\frac{1}{2}$ (何故?)

習　題　四

用等量公理解下列各方程式:

1. $x+5=21$　　2. $x-5=21$

3. $x+a=3a$　　4. $x+b=5b$

5. $x+c=d$　　6. $3x=6$

7. $3x=8$　　8. $3x=333$

9. $7x=21a$　　10. $7ax=14a$

11. $\frac{5}{3}x=35$　　12. $\frac{7}{8}x=49$

13. $x+5=3x$　　14. $3x+8=98$

15. $x+5=3x-5$　　16. $7x+8=8x+7$

17. $3x-15=2x+5$　　18. $12x-8=x+3$

19. $128x+$[illegible]$=8x+243$　　20. $96x-79=69x+56$

21. $x+\frac{x}{2}=15$　　22. $x+\frac{x}{3}=12$

23. $\frac{x}{2}+2=\frac{x}{3}+3$　　24. $\frac{x}{4}+4=\frac{x}{5}+5$

§ 10. **移項**　應用等量公理,便得移項的方法,述之如下:

設有等式 $$M+N=P, \tag{1}$$

兩邊各減以 N 得 $$M=P-N。 \tag{1'}$$

又設有等式 $$M-N=P, \tag{2}$$

兩邊各加以 N 得 $$M=P+N。 \tag{2'}$$

由(1)與(1'),可見等式

左邊的 $+N$ 可移到右邊成 $-N$;

由(2)與(2'),可見等式

左邊的 $-N$ 可移到右邊成 $+N$;

由(1′)到(1)，可見等式

右邊的$-N$可移到左邊成$+N$;

由(2′)到(2)，可見等式

右邊的$+N$可移到左邊成$-N$。

總之，在等式中，任何一項，可從等式的一邊移到他邊，只要變換該項原附的加減符號就是了。這叫做移項。應用移項原理，就會把解方程式的手續變簡，舉例於下：

[例一]　解 §9 例六。

[解法]　因　$55x+15=125+35x$

移項，得　$55x-35x=125-15$

即　$20x=110$

∴　$x=\dfrac{110}{20}=5\dfrac{1}{2}$

[例二]　解　$24x+9-4x=68-27x-12$

[解法]　移項，得

$$24x-4x+27x=68-12-9$$

即　$47x=47$

故　$x=1$

§ **11.**　**解方程式的通則**　由前數節，已把解方程式的手續說得很為明瞭。今再總述其步驟如下：

I. 先用移項手續，把含未知數的各項移到方程式的一邊，不含未知數的各項移到另一邊。

II. 化簡各邊，便成 $ax=b$(或 $b=ax$)。

III. 兩邊各除以 a，得 $x=b\div a=?$

IV. 欲知第三步所得的結果是否正確，應把這結果代入原方程式，驗明兩邊的值是否相等。

[註] 某項的次數，是該項所含文字因數的總個數，如 xy 是二次項，$6abx$ 是三次項，x^2y 或 xy^2 也是三次項。4 不含文字因數，是零次項。

有時次數特就某文字計算，如 x^2y，就 x 說，是 x 的二次項；就 y 說，是 y 的一次項。

式的次數是式中最高次項的次數，如 $6x-7y+8$ 是一次式，x^2-6x+8 是二次式

本章所論的方程式僅有一元，牠的最高次數是一次，所以叫做一元一次方程式。

習 題 五

用簡便手續解下列各方程式：

1. 習題四第1題到第5題。
2. 習題四第13題到第24題。
3. $3(x+5)+5(x+3)=70$。
4. $3(x+5)+50=5(x+3)+40$。
5. $2(x+2)+3(x+3)+4(x+4)=5(x+5)+8(x-1)$。
6. $4(x+3)+5(x+4)=6(x+5)+8(x+7)-122$。
7. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{5}+5$。

8. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{5}+2x-9$。

§ 12. **代數式的創立**　由 §3(II)[例一],[例二] 及 §5,可見欲解應用問題,必先由題意立出方程式。怎樣創立方程式?應先創立方程式各邊的代數式。

怎樣創立代數式?本無一定方法。最要的一點就是"在普遍情形下不易直接推理時,應先假設數字的特例,考察其間各數的關係,得出這特例中立式的方法;然後再推到通例。"舉例如下:

[例一]　父年 25 歲,子年 5 歲。x 年後二人共計幾歲?用代數式來表示。

[解法]　先看下列諸特例:

一年後父(25+1)歲,子(5+1)歲,

共計$(\overline{25+1}+\overline{5+1})$歲。

二年後父(25+2)歲,子(5+2)歲,

共計$(\overline{25+2}+\overline{5+2})$歲。

三年後父(25+3)歲,子(5+3)歲,

共計$(\overline{25+3}+\overline{5+3})$歲。

推之,x 年後父$(25+x)$歲,子$(5+x)$歲,

共計$(\overline{25+x}+\overline{5+x})$歲。

[例二]　有二位數,個位數字是 x,兩位數字的和是 15。

這二位數是多少？用代數式來表示。

［解法］　假如個位數字是 2，十位數字是 9，這二位數就是 $10\times9+2=90+2=92$。假如個位數字是 m，十位數字是 n，那麼這二位數就是 $10n+m$。［注意，不是 nm。］

現在個位數字是 x，十位數字是 $15-x$，所以這二位數是 $10(15-x)+x$。

［例三］　雞犬共有 49 隻，雞有 x 隻。問犬有幾隻？雞足犬足各有幾隻？用代數式來表示。

［解法］　雞犬共有 49 隻。假如雞有 1 隻，則犬有 $(49-1)$ 隻；雞有 2 隻，則犬有 $(49-2)$ 隻。現在雞有 x 隻，那麼犬有 $(49-x)$ 隻。

一雞有 2×1 足；兩雞有 2×2 足；三雞有 2×3 足；故 x 雞有 $2x$ 足。

一犬有 4×1 足；兩犬有 4×2 足；三犬有 4×3 足；故 $(49-x)$ 犬有 $4(49-x)$ 足。

習　題　六

把下列諸題應有的答案各用代數式來表示：

1. (a) x 比 y 大，大多少？

   (b) x 比 y 小，小多少？

   (c) x 的 m 倍比 y 大，大多少？

(d) x 的 m 倍比 y 小,小多少?

(e) x 的 m 倍比 y 的 n 倍大,大多少?

(f) x 的 m 倍比 y 的 n 倍小,小多少?

2. 相鄰五個整數內最大的是 x, 其他四數是多少?

3. 相鄰五個偶數內最小的是 x, 其他四數是多少?

4. 兄弟三人依次是 15 歲, 10 歲, 5 歲。x 年前三人各是幾歲? 共計幾歲? x 年後怎樣?

5. 雞犬共 100 隻,雞有 x 隻。問雞足犬足共有幾隻?

6. 伍元法幣與拾元法幣共值 100 元。伍元法幣有 x 張,拾元法幣有幾張?

7. 兒童分桃,每人 5 枚,餘桃 3 枚。設人數是 x, 問共有桃幾枚? 設桃數是 x, 問共有人幾名?

8. 同一時間內分針走 x 分,時針走幾分?時針走 x 分,分針走幾分?

9. 有二位數,其兩位數字的和是 9, 十位數字是 x, 這數是多少? 個位數字是 x, 這數又是多少?

10. 甲有國幣 500 元。每日收入 x 元,用去 y 元。問十日後尚有幾元? m 日後如何?

11. 甲有國幣 500 元,乙有國幣 400 元。甲給乙 x 元,二人各有幾元? 乙受甲 x 元後又還甲 y 元,二人各有幾元?

12. 每時行 5 里,幾時能行 x 里? x 時能行幾里?

13. 船在靜水中每時能行 40 里。今在水流速度每時 5 里的河水中,上下各行 m 里。問需時多少?

§ 13. 解應用問題的通則　明白了怎樣解方程式,怎樣創立代數式,便不難解決簡易應用問題。茲總述其步驟如下:

I. 細審題意,選擇適當的未知數而以 x (或 y) 代表之。

II. 謹依題意，把已知數與未知數間的關係列成一個方程式。

III. 解這方程式以求未知數的值。

IV. 欲知所得結果是否正確，應把這結果代入原題驗其是否適合。(所立方程式假如有錯誤，那麼求得的結果雖合方程式，卻可不合原題。)

以上所述，乃代數上求解應用問題的通則；以下數節再把常見的應用問題分類述其解法，並與算術解法一一加以比較。

[註] 有許多應用問題，用算術難解或不能解，而用代數則易解或可解。例如 §44，§45，§86 諸節的例題就是如此。

§ 14. 年齡問題 [例一] 長兄 25 歲，小弟 5 歲，問幾年後兄年是弟年的 3 倍？

算術解法 無論何時，在年齡上兄比弟大 $25-5=20$ 歲。直到兄年是弟年 3 倍時，兄比弟仍大 20 歲，就是說兄弟歲數的差是 20。但因兄年是弟年的 3 倍，兄弟歲數的差又是這時（若干年後）弟年的 2 倍。然則這時弟年的 2 倍就是 20。所以這時弟年是 $20\div2=10$ 歲。弟現年 5 歲，弟年 10 歲時距今當為 $10-5=5$ 年。列成一個簡式當如下形：

$$(25-5)\div(3-1)-5=20\div2-5=5。$$

代數解法 設 $x=$ 所求的年數。則在 x 年後，兄年是 x

$+25$ 歲,弟年是 $x+5$ 歲。依題意,

得方程式　$x+25=3(x+5)$

就是　$x+25=3x+15$

移項得　$25-15=3x-x$

就是　$10=2x$

故　$5=x$

[例二]　現在父年是子年的 5 倍。10 年後,父年是子年的 3 倍。求父子現在的歲數。

代數解法　設 $x=$ 子現在的歲數,則

$5x=$ 父現在的歲數,

$x+10=$ 子 10 年後的歲數,

$5x+10=$ 父 10 年後的歲數。

由題意得　$5x+10=3(x+10)$。

解之,得　$x=10$ 子現在的歲數,

而　$5x=5\times10=50$ 父現在的歲數。

算術解法　學者自己去解。

習　題　七

(用算術,代數兩種解法)

1. 兄年 20 歲,弟年 4 歲。問幾年後兄年是弟年的 3 倍?
2. 兄年 20 歲,弟年 4 歲。問幾年前兄年是弟年的 9 倍?

3. 今年父年是子年的5倍，8年後則爲子年的3倍。求父年現在幾歲？

4. 距今三年前兄年是弟年的5倍，距今三年後兄年是弟年的3倍。求兄弟現年各幾歲？

5. 父子歲數的和是35，20年後父年是子年的2倍。求父年現在幾歲？

6. 母親比兒子大20歲，母親比父親小2歲，父年3倍與子年5倍的和是130歲。問子年幾歲？

§ 15. **雞犬問題** 雞犬共有49個頭，106隻足。問雞犬各有幾隻？

算術解法 假定把題中所有的犬完全換做雞，則應有足 $49\times2=98$ 隻，比題中所說足數少 $106-98=8$ 隻。每把一犬換做一雞，其足數減少 $4-2=2$ 隻。今共少8足，故知所換犬數是 $8\div2=4$。這就是所求的犬數。列成一式，其形如下：

$(106-49\times2)\div(4-2)=8\div2=4$ 犬的頭數，

$49-4=45$ 雞的頭數。

代數解法1 設犬有 x 隻，則雞有 $49-x$ 隻，於是犬的足數 $=4x$，雞的足數 $=2(49-x)$。

由是得方程式 $4x+2(49-x)=106$。

就是 $4x+98-2x=106$。

解之，得 $x=4$ 犬有4隻，

而 $49-x=45$ 雞有45隻。

代數解法2 設雞有 x 隻，則犬有 $49-x$ 隻，

依題意,得　$2x+4(49-x)=106$

就是　$2x+196-4x=106$

移項得　$196-106=4x-2x$

就是　$90=2x$

所以　$45=x$, 雞有 45 隻,

而　$49-45=4$, 犬有 4 隻。

習　題　八

(用算術,代數二種解法)

1. 雞犬共有 72 隻足, 20 個頭。問雞犬各有幾隻?

2. 一元法幣與五元法幣共有 9 張,合計值 29 元。求五元法幣的張數。

3. 綢每尺值價 8 角, 緞每尺值價 1 元 2 角, 某人以 42 元買綢緞共 4 丈。問綢緞各買幾尺?

4. 雞犬共有 21 隻,雞的足數是犬的足數的 $\frac{1}{5}$。問雞犬各有幾隻?

5. 雞的頭數是犬的頭數的 3 倍,其足數的和是 70。求犬的隻數?

6. 測驗時每做對一題得 5 分,做錯一題扣 2 分。某生共做 50 題, 除扣淨得 75 分。問該生做對幾題?

7. 100 個和尚吃 100 個饅頭,大和尚每人吃 3 枚, 小和尚每 3 人吃 1 枚。問大和尚幾人?小和尚幾人?

§ 16.　分桃問題　分桃與兒童,每人 4 個,餘桃 2 枚;每人 6 個,則缺桃 12 枚。求桃數與人數。

算術解法　學者自己去解。

代數解法　設 $x=$ 人數, 則 $4x+2=$ 桃的總數, $6x-12$

也是桃的總數，故得方程式

$$4x+2=6x-12$$

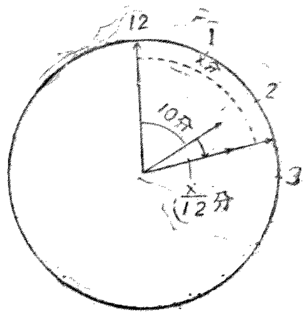
解之，得　　　　$7=x$，人數爲 7，

$$4\times7+2=30，\text{桃數爲 } 30。$$

§ 17.　**時鐘問題**　時鐘上，二點與三點之間，**時針分針何時相重?**

算術解法　學者自己去解。

代數解法　時針速度爲分針速度的$\frac{1}{12}$。今設分針自二點至兩針相重時所行的分數是 x，則時針所行的分數是$\frac{x}{12}$。又在二點時時針在分針前 10 分，故得方程式



$$x=\frac{x}{12}+10$$

兩邊以 12 乘之，得

$$12x=x+120$$

解之，得　　$x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$分

卽兩針相重在 2 點 $10\frac{10}{11}$ 分。

習　題　九

1. 分桃與兒童，每人 5 枚，餘桃 5 枚；每人 6 枚，缺桃 1 枚。求桃數。

2. 分桃與兒童，每人 4 枚，餘桃 18 枚；每人 6 枚，餘桃 2 枚。求桃數。

3. 學生支配寢室。每間 9 人，則有 2 間須各住 10 人；若每間 10 人，則有 2 間只須各住 5 人。問人數若干？

4. 五點與六點之間，時鐘的兩針（時針，分針）何時相重？何時成一直線？

5. 10 點與 11 點之間，時鐘的兩針何時成一直角？

6. 4 點與 5 點之間，時鐘的兩針何時成一直角？（有兩解）

§ 18. 工程問題　工程一件，甲一人做，10 日可成；乙一人做，12 日可成。今甲乙合做 3 日後，再由乙一人繼續做完，問乙尚須幾日？

算術解法　學者自己去解。

代數解法　設 x 爲所求的日數。則因乙每日做此事的 $\frac{1}{12}$，故 x 日內能做此事的 $\frac{1}{12}x$。乃由題意得方程式：

$$\frac{1}{12}x+3\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)=1$$

就是　$$\frac{1}{12}x+\frac{11}{20}=1$$

兩邊以 60 乘之，得　$$5x+33=60$$

解之，得 $x=27\div5=5\frac{2}{5}$，乙做完此事尚須 $5\frac{2}{5}$ 日。

§ 19. **數字問題** 有二位數，其數字的和是 9。交換兩位數字，所成的新數比原數小 27。求原數。

算術解法 學者自己去解。

代數解法 設 $x=$ 十位數字，則

$9-x=$ 個位數字

$10x+(9-x)=$ 原數

$10(9-x)+x=$ 交換數字後所成的新數。

於是得方程式

$$10(9-x)+x=10x+(9-x)-27$$

解之，得 $6=x$，十位數字是 6，

而 $9-x=3$，個位數字是 3。

∴ 原數是 $10\times 6+3=63$。

習 題 十

1. 某事，甲獨做 5 日可成，乙獨做 7 日可成，丙獨做 9 日可成。問三人合做幾日可成？

2. 某事，甲獨做 5 日可成，乙獨做 7 日可成，丙獨做 9 日可成。今甲乙二人合做 2 日後，再由乙丙合做，問尚須幾日可成？

3. 某池有三管，單開 A 管注水，5 時可滿；單開 B 管注水，7 時可滿；單開 C 管放水，9 時而竭。今三管齊開，欲將這空池注滿，問須幾時？

4. 甲乙二人同繞跑道而跑，甲跑一圈需時 12 秒；乙跑一圈需時 15 秒；設二人同時由同地起跑，問 (a) 同向而進，幾時相遇？ (b) 異向而進，幾時相遇？

5. 有二位數。其數字的和 15。交換兩位數字成一新數，這新數比原數大 27。求原數。

6. 有二位數，其數字的和是 14。交換兩位數字成一新數，這新數比原數的 5 倍少 200。求原數。

7. 有二位數，其十位數字比個位數字少 3。若把原數加 2，則其和等於十位數字的 12 倍。求這二位數。

§ 20. **其他問題**　例一：東倉有米 450 石；西倉有米 200 石。東倉每日取出 20 石；西倉每日搬入 30 石。問幾日後西倉的米等於東倉的米的 2 倍？

代數解法　設 $x=$ 所求的日數，則在 x 日後東倉存米 $(450-20x)$ 石，西倉存米 $(200+30x)$ 石，由是得方程式

$$200+30x=2(450-20x)$$

解之，得　$x=10$，所求的日數。

算術解法　學者自己去解。

例二：　把 $.\dot{3}\dot{7}$ 化成分數。

代數解法　因 $.\dot{3}\dot{7}=.37+.00\dot{3}\dot{7}$

$$=.37+\frac{1}{100}\times.\dot{3}\dot{7}。$$

所以，若設 $x=$ 所求的分數，則得方程式：

$$x=.37+\frac{1}{100}x$$

移項，得
$$x-\frac{1}{100}x=.37$$

即 $$\frac{99}{100}x=.37$$

兩邊各以$\frac{100}{99}$乘之，得 $$x=.37\times\frac{100}{99}=\frac{37}{99}$$

這就是所求的分數。

算術解法 學者試自己去解。

習 題 十 一

1. 甲有國幣 100 元，乙有國幣 50 元。甲每日支出 3 元，乙每日收入五元。問幾日後甲比乙多有 18 元？幾日後甲所有的是乙所有的$\frac{17}{15}$？

2. 東倉有米 960 石；西倉有米 600 石。每日從東倉取出 30 石，從西倉取出 40 石。問幾日後東倉存米等於西倉存米的 5 倍？

3. 甲乙共分法幣 900 元。甲所得的 6 倍比乙所得的 5 倍少 100 元。求各人所得的元數。

4. 甲乙二人所有元數相等。若乙給甲 80 元，則甲所有元數的 3 倍等於乙所有元數的 11 倍。問甲原有幾元？

5. 甲乙二人共有國幣 100 元。若乙給甲以甲所有的元數，則甲所有元數的 3 倍等於乙所有元數的 7 倍。問甲乙各有幾元？

6. 甲乙兩地相距 130 里，A 從甲地到乙地，每時行 8 里；B 從乙地到甲地，每時行 6 里。若二人同時起行，問相遇於何處？

7. 從甲地往乙地，步行需九時可到，車行需 6 時可到。某人步行若干距離後，再改車行，先後共經七時而到。求步行所行的路程。

8. 大戰之後，某軍死傷$\frac{1}{6}$，逃亡 4000 人。增兵 3000，再戰又損失$\frac{1}{4}$。總計尚餘 13000 人。問該軍在大戰前原有幾人？

9. 船在靜水,每時行5里,今在水流速度每時2里的河中,上下一次共需20時。求河長及上行所需的時數。

10. 有兵一隊,備80日的糧食。經20日後增兵 2000 人,於是所有的糧食,僅能再支持10日。求原有兵數。

11. 以酒12斗與水18斗混合成薄酒;又以酒9斗與水3斗混合成濃酒。現在要把薄酒濃酒混合,使所含的酒與水各是14斗。問薄酒當用幾斗?

12. 某人用國幣 604 元,買馬2匹和牛5匹。馬比牛每匹貴8元。問牛每匹値價幾元?

13. 工人作工一日得工資8角,曠工一日罰去4角,今在30日內除罰淨得18元。問共作工幾日?

14. 大小兩數的差是20,和是22,求這二數。

15. 大數比小數多5,牠們的和是 255,求這二數。

16. 相鄰三整數的和是33,求各數。

17. 相鄰五奇數的和是55,求各數。

18. 某數的3倍與其5倍的和是56,求該數。

19. 某數的3倍比該數與5的和大15,求該數。

20. 大數是小數的5倍,大數與5的和比小數與 100 的和少15,求大小二數。

第二章　正負數

I.　正負數的性質及其基本運算

§ 21.　負數的需要　為什麼需要負數?

請看下例:

［例］　求解　　　　$x+4=3$

移項，得　　　　　$x=3-4=?$

這個減法問題，在我們不懂負數時，便不能進行。對於原方程式因此便無法求解。

上例只從解方程式方面，知道負數的需要。在日常生活方面，負數的用處也實在不小。

（參看習題十二。）

§ 22.　負數的意義

$$\begin{array}{ll} 2-1=1, & 1-2=? \\ 3-1=2, & 1-3=? \\ 4-1=3, & 1-4=? \\ 5-1=4, & 1-5=? \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

在算術上，對於左列諸問題，各有確定答案，對於右面這些問題，就因被減數太小，說牠不能相減，沒有答案。但若仔細考究，右面諸問，被減數雖則都嫌太小，有所短少；然而所少幾何，不是也有大小的分別嗎？所以在代數上，乃就這所少的量加以推求。於是因

1−2 所少爲 1，就說 1−2 得"負 1"以"−1"記之。

1−3 所少爲 2，就說 1−3 得"負 2"以"−2"記之。

1－4 所少爲 3，就說 1－4 得"負 3"以"－3"記之。

1－5 所少爲 4，就說 1－5 得"負 4"以"－4"記之。

………………………………………………………………………………

所以凡說"負幾"就是"不足幾"，"少幾，"或"欠幾"的意思。在算術，減法運算有時而窮；在代數，因爲增加了負數，於是任何的減法，就沒有不可運算的例外了。

明白了負數的意義，再看負數的尋常事例：

(a) 趙君以 2000 元的資本買物若干，其後全部賣出，得國幣 2350 元。於是趙君獲利

$$2350\text{ 元}-2000\text{ 元}=350\text{ 元。}$$

錢君以 2000 元的資本買物若干。後全部賣出，得國幣 1500 元。錢君實在虧本

$$2000\text{ 元}-1500\text{ 元}=500\text{ 元。}$$

但在代數上，我們可以說錢君虧本 500 元；也可以說錢君獲利

$$1500\text{ 元}-2000\text{ 元}=-500\text{ 元，}$$

只要注意所獲的利是"負"的就是了。說錢君獲利－500 元，就是說他非特不曾獲利，並且折本 500 元。

(b) 李生開學時由家帶來 60 元。入校後應繳學費 20 元，膳費 30 元，宿費 5 元，其他運動，圖書，醫藥等費共 8 元。問該生尙餘若干元？實在該生之款，不特一無所餘，而且短少 3 元。但在

代數上，又可說該生尙餘 -3 元。

(c)　某日室內溫度在正午時爲華氏 $70°$，午後二時上昇 $5°$，午後四時下降 $8°$。問此時室內溫度比正午時升高幾度？這時溫度比正午時實在下降 $3°$ 但在代數上，也可說上昇 $-3°$。

(d)　李四自某鎭向東行 10 里，復向西行 15 里，問李四究在何處？李四距該鎭 5 里，並在該鎭之西。但在代數上，也可說李四在該鎭之東 -5 里。

習 題 十 二

1.　$5-6=-1$　　$5-7=?$　　$5-8=?$　　$5-9=?$

$1-10=?$　　$1-11=?$　　$1-12=?$　　$1-13=?$

$2-100=?$　　$2-101=?$　　$2-103=?$　　$2-104=?$

2.　$0-1=-1$,　　$0-2=-2$,　　$0-3=?$　　$0-4=?$

$0-10=?$　　$0-20=?$　　$0-30=?$　　$0-100=?$

3.　$100-90=?$　　$100-95=?$　　$100-100=?$　　$100-105=?$

$100-110=?$　　$100-115=?$　　$100-120=?$　　$100-125=?$

4.　某甲收入 50 元，支出 40 元。某甲有幾元？若收入 50 元，支出 60 元，某甲有若干元？

5.　某甲行路，前進 8 里，後退 5 里，結果前進幾里？若前進 8 里，後退 11里，結果前進幾里？

6.　溫度上昇 $10°C$，下降 $5°C$，結果上昇幾度？若上昇 $5°C$，下降 $10°C$，結果上昇幾度？

7.　某人經商第一月獲利 100 元，第二月折本 120 元。問兩月合計，

獲利若干元?損失若干元?

8. 某人經商第一月獲利 100 元，第二月折本 50 元。兩月合計，獲利若干元?損失若干元?

9. 某校本學期添收新生 100 名，舊生退學的 10 名，休學的 20 名，畢業的 55 名，問本學期減少若干人?增加若干人?

10. 測驗時做對 1 題得 5 分，做錯 1 題扣 1 分。某生做對 1 題，做錯 8 題。該生實得幾分?

§ 23. **負數正數絕對值**　如前所述，自 2 減 6，結果欠 4，在代數，於 4 之前冠以"－"號，以示欠少的意思。這"－4"叫做"負 4。"推之，凡數之前冠以"－"號的都叫做負數，其"－"叫做負號。

對於負數而言，尋常的數［例如 $6-2=4$ 的 4］叫做正數。正數之前冠以"＋"號，這"＋"叫做正號。"正"與"負"對待而言；倘使沒有負數，那麼對於尋常的數，就不必加上什麼"正"的名號了。

略去數前的"＋"，"－"符號，專指所餘的數字而言，這數字叫做該數的絕對值。例如 -3 的絕對值是 3，$+3$ 的絕對值也是 3。$+x$ 與 $-x$，牠們的絕對值同是 x。

［註 1］　除零外，凡數非負即正。負數之前既必冠以"－"號，那麼沒有"＋""－"符號的數就是專指正數。

［註 2］　由前所述，可見"＋，－"兩記號各有兩種意義：其一表"加減"；其二表"正負"。表加減時叫做運算符號；表正負時叫做性質符號。

在某一算式內，這"$+$，$-$"記號究竟是運算符號還是性質符號？自然能從上下文識別之。

習 題 十 三

1. 某人沿直線 AB 進行，行至與 O 點相距 20 尺的地方，問此人究在何處？若把向右的方向當做正，那麼，假如說"此人距 O 點 -20 尺"，此人的位置是否確定？

2. 攝氏寒暑表的冰點是 0°C。冰點以上的度數是正的，那麼 -10°C 在冰點下，抑在冰點上？與冰點相距幾度？

3. 假若在今日以前的時間，用正數表示。那麼在今日以後的時間，應如何表示？$+3$ 年與 -8 年各表何時？

4. 解釋下列各條的實際意義：

(a) 某人經商，第一年獲利 -200 元，第二年損失 -400 元。

(b) 某人體重，本月減輕 -2 磅，前月加重 -2 磅。

(c) 某人算學成績，本月進步 -15 分，上月退步 -20 分。

5. 討論正負數的大小。 (a) $+5$ 比 $+4$ 那個大？絕對值那個大？然則，在任何正數中，絕對值愈大的，牠的價值是否愈大？

(b) -1 比 -2 那個大？絕對值那個大？然則，在負數中，絕對值愈大的，牠的價值愈大，抑愈小？

(c) 0 比任何正數那個大？0 比任何負數那個大？

(d) 負數$<0<$正數，對否？正數$>$負數<0，對否？負數$<$正數>0，對否？正數$<$負數<0，對否？

[注意] $>$，開口一邊向左，讀做大於；$<$，開口一邊向右，讀做小於。

§ 24. 正負數的運算　§ 5 所講的運算公律適合於正數

的運算,也同樣適用於負數與正數間或負數與負數間的運算。請看下列事例:

(a)　趙君原負債 50 元,後收入 100 元,趙君所有的是

$$(-50)\text{元}+(+100)\text{元}=(+50)\text{元。}$$

假使趙君先收入 100 元,後負債 50 元,那麼趙君所有的是

$$(+100)\text{元}+(-50)\text{元}=(+50\ \text{元})$$

所以趙君收入和負債的先後,對於趙君的資產總額是沒有關係的,這證明加法交換律適合於負數與正數間的運算。

(b)　趙君原欠錢君 50 元,又續借 30 元,趙君所有的是

$$(-50)\text{元}+(-30)\text{元}=(-80)\text{元。}$$

假使趙君原欠錢君 30 元,又續借 50 元,那麼趙君所有的是

$$(-30)\text{元}+(-50)\text{元}=(-80)\text{元。}$$

所以趙君向錢君多借少借的先後,結果對於趙君的資產總額沒有關係。這證明加法交換律也適用於負數與負數間的運算。

(c)　某君從半山每小時下行 3 里,先行了 2 小時,休息後又行 3 小時。那麼他共行了 5 小時,下行 15 里,就上山的成績來說,是行了(−15)里。這可用下式表明:

$$(2\text{小時}+3\text{小時})(-3)\text{里}=(5\text{小時})-3)\text{里}=-(15)\text{里。}$$

但也可以說:他先於 2 小時內下行 6 里,休息後又於 3 小時內下行 9 里,共下行了 15 里,就上山的成績講,行了(−15)里,

用式表之,就是

$$(2\text{小時})(-3)\text{里}+(3\text{小時})(-3)\text{里}=(-6)\text{里}+(-9\text{里})$$
$$=(-15)\text{里}。$$

這又是乘法分配律適合於負數與正數間的運算的證明了。

其餘如加法結合律,乘法交換律和乘法結合律的適合於一切正負數的運算,當然也可以證明的。以下所講正負數的四則運算,都以運算公律為根據。

§ 25. **正負數的加法** 本問題可分三類如下:

(a) 正數+正數 例如,

$$(+2)+(+3)=+(2+3)=+5。$$

$$(+3)+(+4)=+(3+4)=+7。$$

普遍言之, $(+a)+(+b)=+(a+b)$。

(b) 負數+負數 例如,

$$(-2)+(-3)=-(2+3)=-5。$$

$$(-3)+(-4)=-(3+4)=-7。$$

普遍言之, $(-a)+(-b)=-(a+b)$。

由(a),(b)兩類看來,可見同號兩數相加時,就是把牠們的絕對值相加,而於其和冠以兩數原有的符號。此理甚明,例不多舉。

(c) 正數+負數(或負數+正數) 異號兩數相加時,就是把牠們的絕對值相減,而於其差冠以絕對值較大之數的符號。

例如，

1.　$5+(-3)=+(5-3)=+2$。

絕對值較大之數的符號是正，差前冠以正號。

2.　$(-5)+(+3)=-(5-3)=-2$，

絕對值較大之數的符號是負，差前冠以負號。其理由可從多方面來解釋：

[第一]　據本節(a)，得　$+5=(+2)+(+3)$，故

1.　$+5+(-3)=(+2)+(+3)+(-3)=(+2)+0$
$$=+2=+(5-3)。$$

又據本節(b)，得　$-5=(-2)+(-3)$，故

2.　$(-5)+(+3)=(-2)+(-3)+(+3)=(-2)+0$
$$=(-2)=-(5-3)。$$

[第二]　據 §22，$(-3)=1-4$，故

1.　$5+(-3)=5+1-4=6-4=2=+(5-3)$。

又據 §22，$(-5)=1-6$，故

2.　$(-5)+3=1-6+3=4-6=-2=-(5-3)$。

[第三]　1.　某甲經商，第一日賺 5 元，第二日折本 3 元。二日合計，共賺$(5-3)$元。但第二日折本 3 元，也可當作賺(-3)元，故二日合計，所賺元數又可以$(+5)$元$+(-3)$元來表示。所以有

$$(+5)+(-3)=(5-3)=+(5-3)。$$

2. 第一日折本5元，第二日賺3元，則二日合計，折本元數爲 $2=(5-3)$，卽賺利元數爲 $-(5-3)$；又二日合計，賺利元數又可寫成 $(-5)+(+3)$。所以有

$$(-5)+(+3)=-(5-3)。$$

以上三種解釋，不但適用於上述二例；推至任何其他數例，無往不眞。所以總而言之，異號兩數相加，應如下式：

當 $a>b$ 時，$(+a)+(-b)=+(a-b)$。

當 $b>a$ 時，$(+a)+(-b)=-(b-a)$。

［註］ 代數和　爲與算術和（就是絕對值的和）加以區別起見，凡依上述正負數加法加得的結果，特地給他一個新的名稱叫做代數和，例如 $+5$ 與 -3 的代數和就是 $(+5)+(-3)=2$。

習 題 十 四

求下列各代數和：

1. $(-5)+8=?$
2. $5+(-8)=?$
3. $(-5)+(-8)=?$
4. $(-1)+100=?$
5. $1+(-100)=?$
6. $(-1)+(-100)=?$
7. $(-0)+100=?$
8. $+0+(-100)=?$
9. $(-0)+(-100)=?$
10. $(-2)+(-3)+(-4)=?$
11. $(-2)+(-3)+4=?$
12. $2+(-3)+(-4)=?$
13. $(-2)+3+(-4)=?$
14. $(-2)+3+4=?$
15. $2+(-3)+4=?$
16. $(-5x)+8x=?$

17. $5x+(-8x)=?$　　18. $(-5x)+(-8x)=?$

19. $(-2x)+(-3x)+(-4x)=?$　　20. $(-2x)+(-3x)+4x=?$

21. $2x+(-3x)+(-4x)=?$　　22. $(-2x)+100x=?$

23. $(-x)+100x=?$　　24. $(-x)+(-100x)=?$

§ 26. **正負數的減法**　本問題可分爲兩類如下:

(a)　任何數－正數。先看下例:

1. $2-(+5)=2+(-5)+(+5)-(+5)=2+(-5)$。

2. $(-2)-(+5)=(-2)+(-5)+(+5)-(+5)$

$$=(-2)+(-5)。$$

由上二例看來，可見從任何數減去正數，就是把減數改變符號以與被減數相加。其理由更可普遍地證明如下:

$$x-(+a)=x+(-a)+(+a)-(+a)=x+(-a)$$

(b)　任何數－負數。先看下例:

1. $2-(-5)=2+(+5)+(-5)-(-5)=2+(+5)$

2. $(-2)-(-5)=(-2)+(+5)+(-5)-(-5)$

$$=(-2)+(+5)。$$

由上二例看來，可見從任何數減去負數，也就是把減數改變符號以與被減數相加。其理由也可普遍地證明如下:

$$x-(-a)=x+(+a)+(-a)-(-a)=x+(+a)$$

綜合(a)，(b)二類，乃得 $x-(\pm a)=x+(\mp a)$。換句話說:要把兩數相減，就是把減數的符號改變以與被減數相加。

習題十五

1. 某甲有現款 x 元，債務 y 元，其實際所有的財產是不是 x 元$+(-y)$元？倘此人償清債務後，其所餘財產是不是 x 元 $-y$ 元？這樣看來，$x-y=x+(-y)$，對不對？

2. 某甲有現款 x 元 $+y$ 元，債務 y 元，則其實有財產是不是 x 元 $+y$ 元 $+(-y)$元(即 x 元)？倘若債權人忽將債權放棄，則某甲實有財產，是不是 x 元 $-(-y)$元？又此時某甲實有財產，是否就是他所有的現款 x 元 $+y$ 元？這樣看來，$x-(-y)=x+y$ 對不對？

3. $2-8=?$

4. $(-2)-8=?$

5. $2-(-8)=?$

6. $(-2)-(-8)=?$

7. $2x-8x=?$

8. $(-2x)-8x=?$

9. $2x-(-8x)=?$

10. $(-2x)-(-8x)=?$

11. $2-(-3)-4=?$

12. $(-2)-3-(-4)=?$

13. $2x-3x-(-4x)=?$

14. $x-2x-3x=?$

習題十六

把下列各題中諸式相加：

1. $2x+3y$，　$-3x+y$，　$4x-8y$。

【解法】

$$\begin{array}{r} 2x+3y \\ -3x+\ \ y \\ 4x-8y \\ \hline 3x-4y \end{array}$$

【註】 $2x+(-3x)+4x=[2+(-3)+4]x=3x$

$3y+y+(-8y)=[3+1+(-8)]y=-4y$。

2.　$3x+8y$,　　$-2x+7y$,　　$6x-9y$。

3.　$x+y+z$,　　$3x-2y+4z$。

4.　$3x-6y-8z$,　　$-7x-2y-3z$。

5.　$x+y+z$,　　$3x+4y-8z$,　　$-8x-7y+9z$。

下列各題內，試自前式減去後式：

6.　$x+2y$,　　$-100x+99y$。

7.　$-x-2y$,　　$x+2y$。

8.　$-x+2y$,　　$x-2y$。

9.　$-8x+9y$,　　$-8x+9y$。

10.　$8x+9y-5z$,　　$-8x+9y-5z$。

11.　$x+2y-3z$,　　$4x+5y+6z$。

§ 27.　去括號　本問題可分兩類如次：

(*a*)　括號之前有正號的。　此時，欲去括號，直接撤去括號就是了。括號內各項的符號一律不變。例如，

$$+(A+B)=A+B。\tag{1}$$

$$+(A-B)=A-B。\tag{2}$$

此理甚明，無庸贅述。

(*b*)　括號之前有負號的。　此時，撤去括號後括號內所有各項的符號都應改變，原爲正號的變成負號；原爲負號的變成正號。其理由如下；

I.　$$-3-4=-3+(-4)=-(3+4)$$

$$-5-8=-5+(-8)=-(5+8)$$

推之，$$-A-B=-A+(-B)=-(A+B)$$

$\therefore$ $$\underline{-(A+B)=-A-B}。\tag{3}$$

II. $$-(3-4)=-[3+(-4)]$$
$$=-3-(-4)=-3+4$$
$$-(3-8)=-[3+(-8)]$$
$$=-3-(-8)=-3+8$$

推之，$$-(A-B)=-[A+(-B)]$$
$$=-A-(-B)=-A+B$$

$\therefore$ $$\underline{-(A-B)=-A+B}。\tag{4}$$

［注意1］ 將上列 (1)，(2)，(3)，(4) 諸式自右向左看，便得插入括號的規則：把若干項置入括號內，括號之前如有正號，該置諸項符號不變；括號之前如有負號，該置諸項符號全變。

例如，　　$3+2-5=3+(2-5)$，

$3+2-5=3-(-2+5)$。

［注意2］ 由 §5 (5)及本節，可得下列二式：

1. $+m(x+y-z)=mx+my-mz$。

2. $-m(x+y-z)=-(mx+my-mz)$
$=-mx-my+mz$。

習 題 十 七

撤去下列各式中的括號：

1. $3x-(y-3)$。　　2. $3x+(y-3)$。

3. $3x-(y+3)$。　　4. $3x+(y+3)$。

5.　$-[x+(y-z)-d]$。　　6.　$-[x-(y-z)+d]$。

7.　$3(x+y-z)$。　　8.　$4(x-y-z)$。

9.　$5(x+3)+6y$。　　10.　$5(x-3)-6y$。

化簡下式：

11.　$5(x-3)-6(x+8)$。

[解法]　原式 $=5x-15-6x-48=(5x-6x)-(15+48)=-x-63$。

12.　$5(x-3)-6(x-8)+x-3$。

13.　$9(x-y)+8(x-3)-x$。

14.　$-5(x-3)+6(8-x)+9$。

15.　$-3(x-1)+4(x-2)-5(x-3)$。

在下列四題內，把含 a,y 的各項置入冠有負號的括號內；含 x,z 的各項置入冠有正號的括號內：

16.　$a-2x+3y-4z$。　　17.　$a-[2x-(2y-4z)]$。

18.　$a-[(2x-3y)+4z]$。　　19.　$a-[2x-(3y+8z)]$。

20.　設 $x=m+y$，則 $-(x-y)=-(m+y-y)=-m=-m-y+y$

$$=-(m+y)+y=-x+y。$$

又設 $y=m+x$，則　$-(x-y)=-(x-m-x)=+m$

$$=+m+x-x=+y-x。$$

這不是去冠有負號的括弧規則的又一證明嗎？試仿此意說明 $-(5-8)$ 何以等於 $-5+8$，及 $-(7-3)$ 何以等於 $-7+3$。

§ 28.　**正負數的乘法**　本問題可分三類如下：

(I)　正數×正數　$(+a)(+b)=+ab$。　例如 $(+2)(+3)=+6$。此理甚明，無須贅述。

(II)　正數×負數（或負數×正數）　例如 $(+a)(-b)=?$ 欲答這個問題，先看特例：

1. $2(-3)=2$ 個(-3)的和$=(-3)+(-3)=-6$

$=-(2\times3)$。

2. $3(-5)=3$ 個(-5)的和

$=(-5)+(-5)+(-5)$

$=-15=-(3\times5)$。

3. $2(-b)=2$ 個$(-b)$的和$=(-b)+(-b)$

$=-2b=-(2\times b)$。

4. $3(-b)=3$ 個$(-b)$的和

$=(-b)+(-b)+(-b)$

$=-3b=-(3\times b)$。

推之,在普遍情形下,應有

$a(-b)=a$ 個$(-b)$的和

$=(-b)+(-b)+(-b)+\cdots\cdots+$到 a 個

$=-ab=-(a\times b)$。

$\therefore$ $(+a)(-b)=-(a\times b)$。

用語言來說:"異號兩數相乘時,就是把兩數的絕對值相乘,而於其積之前冠以"$-$"號。"

例如,某人經商,每月獲利 -50 元。三月合計,獲利應爲 $3(-50$ 元$)$;其實此人每月折本 50 元,三月共折本 150 元,也就是獲利 -150 元。然則,$3(-50)$與 -150 同爲此人所賺的元

數，不是相等嗎？

所以　$$3(-50)=-150=-(3\times50)。$$

又如大戰時某軍每日後退 30 里，7 日合計，該軍後退 7×30 里。用負數說，該軍前進 $-(7\times30$ 里$)$。又每日後退 30 里，也就是前進 -30 里，7 日合計，該軍前進 $7(-30$ 里$)$。然則，$7(-30)$ 與 $-(7\times30)$ 同為該軍後退的里數，不應相等嗎？

所以　$$7(-30)=-(7\times30)。$$

以上兩例，都是 $(+a)(-b)=-(a\times b)$ 的例證。其他例證甚多，學者試各舉數條。

(III)　負數×負數　例如 $(-a)(-b)=?$

欲答這個問題，先看特例：

1.　$(-2)(-3)=-2(-3)=-(-6)=6$。

(參看 §27 及 §27 注意 2 第 2 式)。

2.　$(-2)(-b)=-2(-b)=-(-2b)=2b$。

3.　$(-3)(-b)=-3(-b)=-(-3b)=3b$。

推之，在普遍情形下，應有

$$(-a)(-b)=-a(-b)=-(-ab)=ab。$$

$$\therefore\quad (-a)(-b)=ab。$$

用語言來說：“兩負數相乘時，就是把兩數的絕對值相乘，而於其積之前冠以正號”。

例如，某人經商，每年獲利 -500 元，三年之後已無資本，則三年之前對現在說是(-3)年，當時原有的資本爲$(-3)(-500)$；其實此人每年折本 500 元，三年共折本 1500 元，此時資本已折盡，所以三年之前原有的資本就是 1500 元。然則$(-3)(-500)$與 1500 同爲此人三年前原有的資本，不是相等嗎？

所以 $$(-3)(-500)=1500。$$

又如，大戰時某軍每日後退 30 里，7 日共退 210 里而至甲地，也就是某軍於 7 日前在甲地前方 210 里；每日向甲地後退 30 里，就是前進 -30 里，七日之前對現在說也就是 -7 日，那麼，七日之前某軍是在甲地的前方$(-7)(-30)$里。然則 210 與$(-7)(-30)$同爲該軍於七日前在甲地前方的里數，不是相等嗎？

所以 $$(-7)(-30)=210。$$

以上兩例都是$(-a)(-b)=ab$ 的例證，其他例證甚多，學者試各舉數條。

習題十八

1. 由(I)，(III)已知$(+a)(+b)=+ab$，

$$(-a)(-b)=+ab,$$

則（甲） 同號兩數相乘，積是正的，還是負的呢？

（乙） $(+a)(+b)=(-a)(-b)$，對不對？

（丙） $(-a)(-b)(-c)(-d)=abcd$，對否？

(丁)　$(-a)(-b)(-c)(-d)(-e)(-f)=abcdef$，對不對?

2. 由(II)知$(+a)(-b)=-ab$,

由(III)知$(-a)(-b)=ab$,

然則(甲)　$(-1)(-1)(-1)=?$

$(-a)(-b)(-c)=abc$，對不對?

(乙)　$(-1)(-1)(-1)(-1)=?$

$(-a)(-b)(-c)(-d)=abcd$，然否?

(丙)　$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)=?$

$(-a)(-b)(-c)(-d)(-e)=abcde$，然否?

(丁)　異號兩數相乘，積是負的，還是正的呢?

3.　$3\times(-2)=?$　$(-3)\times(-2)=?$　$(-3)\times2=?$

4.　$(-3)\times(-2)\times(-5)=?$　$(-5)\times(-2)\times(-1)\times(-3)=?$

5.　設 $a=1$，$b=-2$，$c=-3$，問 $a+b+c=?$　$a+2b+3c=?$

$3a\times2b\times c=?$　$abc=?$　$2abc=?$　$6abc=?$

6.　$2(-32x)=?$　$3(-8x)=?$　$4(-3xyz)=?$

7.　$2x(-3y)=?$　$3x(-2y)(+3z)=?$

$(-3x)(-2y)(-3z)=?$

8.　$2x(-3y)+(-2x)(-3y)+(-5x)(-6y)+(-7x)(+8y)=?$

9.　$2(-3x)+(-4)(-5x)-(-2)(-7x)=?$

$(-2x)(-3x)(-4x)=?$

10.　(a)　$(x-y)(x-y)=(y-x)(y-x)$，對不對?

(b)　$(x-y)(x-y)(x-y)=(y-x)(y-x)(y-x)$，對不對?

(c)　$(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$

$=(y-x)(y-x)(y-x)(y-x)$，對不對?

(d)　$(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$

$=(y-x)(y-x)(y-x)(y-x)(y-x)$，對不對?

§ 29. **正負數的除法** 除法爲乘法的還原，所以除法的問題可由乘法結果推得其解答如次：

$$\because\begin{cases}(+a)(+b)=+ab\\(+a)(-b)=-ab\\(-a)(-b)=+ab\\(-a)(+b)=-ab\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}+a=\dfrac{+ab}{+b} & (1)\\[2mm]+a=\dfrac{-ab}{-b} & (2)\\[2mm]-a=\dfrac{+ab}{-b} & (3)\\[2mm]-a=\dfrac{-ab}{+b} & (4)\end{cases}$$

由上列四式觀之，乃得除法的規則如下：

［第一］ 商的符號 同號兩數相除，其商爲正；異號兩數相除，其商爲負。

［第二］ 商的絕對值 就是以除數絕對值除被除數絕對值所得之商。

例
$$8\div(-2)=-4 \qquad 3\div(-2)=-\frac{3}{2}$$
$$(-8)\div2=-4 \qquad (-3)\div2=-\frac{3}{2}$$
$$(-8)\div(-2)=4 \qquad (-3)\div(-2)=\frac{3}{2}$$

習 題 十 九

1. $(-2)\div(-1)=?$ $(-2)\div1=?$ $(-2)\div2=?$ $(-2)\div(-2)=?$
2. $(-3)\div(-6)=?$ $3\div(-6)=?$ $(-3)\div6=?$ $3\div6=?$

3. $36\div(-2)\div(-3)\div(-2)=?$　$36\div(-2)\div(-3)\div2=?$

$(-36)\div(-4)\div(-9)=?$

4. $(-7)(-8)\div2\div(-4)=?$　$(-7)(-8)\div(-2)\div(-7)=?$

$(-2)(-3)(-5)\div(-6)\div(-5)=?$

5. $(-6x)\div3=?$　$(-6x)\div(-3)=?$　$6x\div(-3)=?$

$(-3)(-8x)\div(-6x)=?$

6. $(-3)(+8x)\div(-6x)=?$　$(-3)(-8x)\div6x=?$

$3(-8x)\div(-6x)=?$　$(-3)(+8x)\div6x=?$

II. 負數在解方程式上的應用

§ 30. **利用負數有時可減省移項手續**　求解方程式依第一章所述方法，非先行移項，無法可得其解；但此種移項手續，在能利用負時，就非常簡便。請看下例：

例一　求解　$2x-4x=2-8$

［解法］　依正負數減法化簡兩邊，得

$$-2x=-6$$

兩邊各以 -2 除之，得　$x=-6\div(-2)=3$。

例二　某數 2 倍與 50 的和比這數 5 倍多 26，求這數。

［解法］　設某數為 x，那麼某數 2 倍與 50 的和是 $2x+50$，某數 5 倍是 $5x$。由題意得方程式

$$2x+50-5x=26$$

移項，得　$2x-5x=26-50$

兩邊各自化簡，得　$-3x=-24$

兩邊各除以 -3，得　　　$x=8$

故此數爲 8。

[註]　本題應用負數，只須把 50 移至右邊；否則非把含 x 的各項全部都移到右邊，並把 26 移到左邊不可。

利用負數以解方程式，恆可把含 x 的各項一律移到左邊，不含 x 的各項一律移到右邊。這是習慣上通用的形式。在不含特殊作用時，學者應該遵循這個慣例。

§ 31.　利用負數有時方程式才能有根　前於 § 21 曾略爲提及，茲補足之。

例一　求解　　　$x+4=3$。

[解法]　移項，得　　　$x=3-4=-1$。

例二　大小二數的和是 2。大數 3 倍與小數 2 倍的和是 11，求大小二數。

[解法]　設 $x=$ 大數，那麼 $2-x=$ 小數。由題意得方程式

$$3x+2(2-x)=11$$

即
$$3x+4-2x=11$$

移項，得
$$3x-2x=11-4$$

$$\therefore\quad x=7,$$

而
$$2-x=2-7=-5。$$

$$\therefore\begin{cases}\text{大數是}\quad 7;\\ \text{小數是}\quad -5。\end{cases}$$

在應用問題中，解方程式所得負根，有時合理，有時不合理；例如求資產而得負根，可以作負債解釋，是合理的，求人數而得負根，是不合理的。故解應用題而得負根，須與實在情形相符，方纔適用。

習　題　二　十

用最簡的手續解下列各方程式：

1. $3(x+2)+8=7(x-2)+16$。
2. $x+2x-8x=7(x+5)-83$。
3. $5(x+5)=7(x+2)+1$。
4. $2x+5x=9(x+6)-64$。
5. $5(x+5)=6(x+4)$。
6. $9x-6+3(x+7)=2(x-1)+8x$。
7. $10+(x-3)-2(x-1)=x+8$。
8. $3x-2(6x-3)=4(x+3)-3(x+1)$。
9. $4(x-1)-(4x-1)=5(2-x)-10-x$。
10. $6(7x-2)-3(x+5)=3(4x+1)$。

以下各式應用問題如得負根，應解釋牠是否合理：

11. 大小兩數的和是 20，其差是 40。求這兩數。
12. 某數的 3 倍比牠的 5 倍大 94。求這數。
13. 攝氏 3 度的溫度相當於華氏幾度？
14. 攝氏度數何時與華氏度數相同？
15. 某數的$\frac{1}{2}$與 10 之和等於牠的$\frac{1}{3}$與 5 之和。求這數。
16. 父年 35 歲，子年 10 歲。問幾年後父年是子的 6 倍？

17. 父親比兒子大 25 歲，30 年後父親的年紀是兒子的 2 倍。問現在父子各幾歲？

18. 甲有存款 500 元，乙有存款 100 元。每月甲比乙多賺 2 元。4 月後甲所有的元數是乙的元數的 4 倍。問甲，乙每月各賺幾元？

19. 甲的財產比乙的財產少 200 元。甲每月收入 50 元；乙每月收入 20 元。三個月後，甲的財產是乙的 3 倍。問甲乙二人原來各有幾元？

20. 大人每人得蘋果 8 枚，小孩每人得蘋果 5 枚。現共有 26 人，蘋果 118 枚。問大人小孩各幾人？

第三章 整式四則之一 加減法

§ 32. **引論** 由前所述，已見依代數方法，引用文字代替未知數，以解應用問題，比之僅用算術的解法，手續簡而效力大。凡算術四則中認爲極難的問題，一經利用代數方程式，便可立得其解。代數的效用不是已經很大了嗎？但是代數的奧妙，猶不止於此。試看下列諸題：

［問題一］ 會員若干人共出費用 36 元。倘若會員多添 3 人，則每人可少出 2 元。問會員原有若干人？

［問題二］ 兩數的積是 27，其各自平方的和是 90。求這兩數。

［問題三］ $4+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=?$

$$1+2+3+4+5+6+7+\cdots\cdots+1000=?$$

能以最簡的方法求得其值嗎?

[問題四]　求 2^{100} 的前三位數字;

求 $\sqrt[100]{2}$ 的值至小數第二位。

[問題五]　$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=?$

$$\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+5x+6}=?$$

[問題六]　$123456789^2-123456788^2=?$　能用簡法求得其值嗎?

上列諸問,都是代數上的普通問題,應用前面所述的方法能解此類問題之一否?可見代數的奧妙正多,以前兩章只不過略發其凡而已。

"登高自卑,行遠自邇。" 欲解上述諸問題,亦須自整式四則起。

整式四則,就是整式的加減乘除。這些算法,乃是代數學中一切算法的基本;好比算術中整數四則是算術上一切算法的本原一樣。學者於此,不可不充分演習,以期熟練。熟練這些基本算法,固非已盡學習代數的能事;但是,假如連這些基本算法都不能應用自如,那麼後來處處困難,眞是墮入苦海了!學者可不愼

之於始嗎?

§ 33. 關於整式的幾個重要名詞 為便於說明起見,先述下列幾個名詞:

(1) 整式, 分式 一式往往含有一個文字或幾個文字,如其分子含有某文字而分母不含該文字,這式就叫做該文字的整式。非整式的叫做分式。

例如: $3x+5y$, $\frac{2}{3}x+\frac{7}{5}y$ 都是 x 的整式,也都是 y 的整式。

$3x^2+5x$, 是 x 的整式, $\frac{7}{8}y^2+\frac{2}{3}y+3$ 是 y 的整式。

$\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{x^2}$ 都是 x 的分式而非整式。

$\frac{x}{y}$ 與 $\frac{x+y}{y^2}$ 都是 x 的整式;但就 y 言,則都是 y 的分式。

(2) 單項式, 多項式 只有一項的整式叫做單項式,非單項式的整式叫做多項式。多項式中,依其含有二項,三項,四項,……等等,分別叫做二項式,三項式,四項式,……等等。

例如: $a+b$ 是二項式, $a+b-c$ 是三項式, $a+b-c+d$ 是四項式, $mxy+nabc$ 是二項式, $a\times b\div c\times d\div e$ 是單項式。二項式,三項式,四項式等等統叫做多項式。

(3) 指數,底,冪　例如 $8=2\times2\times2$; $16=2\times2\times2\times2$; $32=2\times2\times2\times2\times2$, 這些等式中,右邊須寫許多個相同因子連乘,算學家嫌其不便,乃別創簡寫的方法來表示。於是把上列各式寫爲

$$8=2\times2\times2=2^3;$$

$$16=2\times2\times2\times2=2^4;$$

$$32=2\times2\times2\times2\times2=2^5。$$

這 2 的右角上所寫的 3,4,5, 等字都叫做 2 的指數, 8,16. 32,等,依次叫做 2 的三次冪,四次冪,五次冪,等。2 叫做底。

在通例, $a^n=a\times a\times a\times a\times\cdots\cdots\times$ 到 n 個。

這 a^n 的 n 叫做指數, a 叫做底, a^n 叫做 a 的 n 次冪。

習題二十一

1. 設 $x=2$; 則 $5x=$? $x^5=$? 然則 $5x=x^5$ 嗎? $5x$ 的 5 叫做何數? x^5 的 5 叫做何數?

2. 指數與係數有何區別? 指數與底有何區別? 指數與冪有何區別? 底與冪有何區別?

3. 設 $x=2$, 則 $2x=$? $x^2=$? 然則, 當 x 爲 2 時, $2x$ 與 x^2 的值是否相等? 但當 x 任爲何數時, $2x$ 與 x^2 的值是否常能相等?

4. 代數式與方程式有何區別? $3x+8y-7z$ 是不是方程式? $3x+8y=7z$ 是不是方程式? $3x+8y-7z=0$ 是不是方程式? $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 是代數式,抑是方程式?

5. $1\times2+3\div4-5$ 是幾項式? $a\times b\times c\times d\div e\div f\div g$ 是幾項式? x^2+5x+6 是幾項式? $x^2y^2z^2+1$ 是幾項式? $\dfrac{1}{x+y}$是幾項式?

6. 整式與分式有何區別?分式中有所謂二項式或三項式否?

7. $\dfrac{7}{3}$是整式抑是分式? $\dfrac{7}{8}x$ 是不是 x 的整式? $\dfrac{7}{8x}$是不是 x 的整式? $\dfrac{1}{x+y}$ 是不是 x 的整式? 是不是 y 的整式? $\dfrac{x^2}{x^3+y^3}$是 x 的整式,抑是 y 的整式? $\dfrac{3xy^2}{7z}$是何者的整式? 何者的分式? $\sqrt{x}+5y$ 是何者的整式? 何者的分式? $\dfrac{4}{5}m\div n$ 是不是 m 的整式? 是不是 n 的整式?

8. $(-1)^2(-1)^8(-1)^4=?$ $\qquad (-2)^2(-1)^3(-1)^5=?$

$(-1)^{2n}(-1)^{2n+1}=?$ $\qquad (-1)^{2n+1}(-1)^{2n+1}=?$

$[(-1)^3]^3=?$ $\qquad [(-1)^3(-1)]^5=?$

§ 24. **整式的整理** 問題中所設的整式其形狀往往亂雜無章,在進行加減乘除等算法以前,務須把所設整式加以整理。整理的手續如下:

(A) 整理數字因數 移各個數字因數於本項之首而求其積,以爲本項文字因數的係數。

例 $\qquad 2a^2b^25cd=2\times5a^2b^2cd=10a^2b^2cd$。

(B) 整理文字因數 依字母的次序,順列各文字因數於數字因數之後,且用指數把同因子記爲簡式。

例 $\qquad 10a^2b^2a=10a^2ab^2=10a^3b^2$,

$\qquad 3dacbx=3abcdx$。

(*C*)　合併同類諸項　求同類項各係數的和置於公共文字之前，作爲該文字的係數。

例
$$10a^2b+\frac{2}{3}a^2b-\frac{1}{2}a^2b=\left(10+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)a^2b$$
$$=10\frac{1}{6}a^2b。$$

(*D*)　順列同文字的各項　就是把同文字的最高次項列爲首項，餘各依次降低，這是依降羃排列。或者把最低次項列爲首項。餘各依次昇高，這是依昇羃排列。(在降羃排列，如遇缺項，可以較低次項列入該缺項的地位；如有零次項，以零次項爲末項。在昇羃排列，如有缺項，當然把較高次項來代替；如有零次項，則以該零次項爲首項。)

例　$$bx+c+ax^2+x^3=x^3+ax^2+bx+c。$$

(依 x 的降羃排列)

或　$$bx+c+ax^2+x^3=c+bx+ax^2+x^3。$$

(依 x 的昇羃排列)

§ 35.　整式的加法

(*A*)　單項式相加　幾個單項式相加，就是用"＋"號聯結這些單項式而整理其結果。

例一　求 $3a$, $2d$, $3c$, $4b$ 的和。

[解]　$3a+2d+3c+4b=3a+4b+3c+2d$。

例二 求 $5x$, $6x$, x, $2x$, $-3x$ 的和。

[解] $$5x+6x+x+2x+(-3x)$$
$$=[5+6+1+2+(-3)]x=11x。$$

例三 求 $5xy$, $6xy$, $-3xy$, $4y^2$, xy, $-8y^2$ 的和。

[解] $$5xy+6xy+(-3xy)+4y^2+xy+(-8y^2)$$
$$=5xy+6xy+(-3xy)+xy+4y^2+(-8y^2)$$
$$=[5+6+(-3)+1]xy+[4+(-8)]y^2$$
$$=9xy-4y^2。$$

(*B*) 單項式與多項式相加 也就是用“+”號連結要加的各式，而整理其結果。

例 求 $3x^2+6$, $-2x^2+3$, $9x^2$, -5 的和。

[解] $$3x^2+6+(-2x^2+3)+9x^2+(-5)$$
$$=3x^2+6+(-2x^2)+3+9x^2+(-5)$$
$$=3x^2+(-2x^2)+9x^2+6+3+(-5)$$
$$=10x^2+4。$$

(*C*) 多項式與多項式相加 幾個多項式相加，也就是用“+”號連結諸式而整理其結果。

例 求 $3x^2+6$, $-2x^2+3$, $9x-4$, $3x^3+6x-8$ 的和。

[解] $$3x^2+6+(-2x^2+3)+(9x-4)+(3x^3+6x-8)$$
$$=3x^2+6+(-2x^2)+3+9x-4+3x^3+6x-8$$

$$=3x^3+(3x^2-2x^2)+(9x+6x)+(6+3-4-8)$$

$$=3x^3+x^2+15x-3。$$

但爲計算便利起見，常把欲加諸式，依某文字的昇羃或降羃排列之，且令同類諸項集於同行之內，而整理其結果。

例一　求 $3x^2+6$，$-2x^2+3$，$9x-4$，$3x^3+6x-8$ 的和。

[解]

$$\begin{array}{rrrr}
 & 3x^2 & & +6 \\
 & -2x^2 & & +3 \\
 & & 9x & -4 \\
3x^3 & & +6x & -8 \\
\hline
3x^3 & +\ x^2 & +\ 15x & -3
\end{array}$$

例二　求 $6x^2+9+8x^3$，x^3+1，$9+x^2+3x+x^4$ 的和。

[解]　題中第一，第三兩式，指數大小的次序不整齊，故先加以整理。於是，得

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 8x^3 & +6x^2 & & +\ 9 \\
 & x^3 & & & +\ 1 \\
x^4 & & +\ x^2 & +3x & +\ 9 \\
\hline
x^4 & +9x^3 & +7x^2 & +3x & +19
\end{array}$$

【註】 設 $x=10$，則
$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 8x^3 & +6x^2 & & +\ 9 & =\ 8609 \\
 & x^3 & & & +\ 1 & =\ 1001 \\
x^4 & & +\ x^2 & +3x & +\ 9 & =10139 \\
\hline
x^4 & +9x^3 & +7x^2 & +3x & +19 & =19749
\end{array}$$

習題二十二

1. $x^2+x^3=x^5$ 對不對？ $2^2+2^3=2^5$ 對不對？ $3^2+3^2=3^4$ 對不對？ 然則 $x^m+x^n=x^{m+n}$ 對不對？

2. $2+2=2^1+2^1=2^{1+1}=2^2$，然則 $x+x=x^2$ 嗎？ 試設 $x=1,3,4,5,$ 等值來驗算。然則 $x+x=x^2$ 對不對？ 總是不對嗎？ 何時對？

3. $3x+4x^2=7x^3$ 對不對？ $3x+4y=7xy$ 對不對？ 試設 $x=2,y=3$ 來驗算。

4. $3x$ 與 $4x^2$ 是不是同類項？ $3x$ 與 $4y$ 是不是同類項？ 不同類項能不能相加？ 然則 $3x+4x^2$ 應該等於 $7x^3$ 嗎？ $3x+4y$ 應該等於 $7xy$ 嗎？ $3x+4x^2$ 能相加成一項嗎？ $3x+4y$ 能相加成一項嗎？

〔註〕 以上四題所討論的可概括述之如下：

$$ax^m+by^m \neq (a+b)x^my^m,$$

$$ax^m+bx^n \neq (a+b)x^{m+n}。$$

這是至淺至顯的道理，但是也是初學者最易發生的錯誤。讀本書者都能避免這種錯誤吧？千萬留心！

5. 整理下列諸式；

(a) $5a^2a3b6$。 (b) $8x^27y^29$。 (c) $3x^29x5y^28y$。

(d) $x+2x^5+5x^3$。 (e) $\frac{1}{2}x+x+2x$。 (f) $3x^2y+5x^2y-2x^2y$。

6. 求 $3x+5x^2+6$， $7x^2+5+x$， $7+2x+x^3$ 的和。

7. 求 $9x^3+8x^2+7x-6$， $5x-8x^2-9x^4+6x^3$， x^6-1 的和。

8. 求下列各組代數式的代數和：

(a) $3x+2y-z$， $x-2y+3z$， $-8x-8y+z$，

(b) $a+b-c$， $a-b+c$， $-a+b+c$。

(c) $3ab+4bc+5ca$， $-ab+ac$， $-7ba+9ca-6bc$。

(d) x^5+6x^2+x， $-x^4-5x^3+x^2$， x^4+2x^2+8。

(e)　$x^4+x^2y^2-5y^4$,　$x^4-x^2y^2+8y^4$　$-x^4-9x^2y^2+8y^4$。

(f)　$7x^3-8x^2y+y^3$,　$8x^3-7xy^2+y^3$,　$-x^3+8xy^2-7y^3$。

9. 求 $abCc2+2cba2$, $3ab2+6a2c$, $7ab-9ac4$ 的和。

10. 設 $x=a+b+c$, $y=2a+3b-c$, $z=-3-4b$。問 $x+y+z=$? $x+y+2z=$?

§ 36. **整式的減法**　前在 §26 內，曾經說過"兩數相減，就是把減數的符號改變以與被減數相加。"這個道理在減數是單項式或多項式，仍是同樣眞確的。玆舉例以示實際的做法：

例一　從 $3x^3+2x^2+5x-7$ 減去 $9x^2-3x+6$。

[解法]　本題有兩種算式如下：

算式一

$$\begin{array}{r} 3x^3+2x^2+5x-\ 7 \\ -9x^2+3x-\ 6 \\ \hline 3x^3-7x^2+8x-13 \end{array}$$

算式二

$$\begin{aligned} & 3x^3+2x^2+5x-7-(9x^2-3x+6) \\ =& 3x^3+2x^2+5x-7+(-9x^2+3x-6) \\ =& 3x^3+2x^2-9x^2+5x+3x-7-6 \\ =& 3x^3-7x^2+8x-13 \end{aligned}$$

例二　從 $3x^3+2x^2+5x-7$ 減去 $9x^2-3x+6$, $8x^3-3x-5$, $2x^2+5x-6$, $5x^4-8x+6$ 的和。

[解法]　本題有兩種算法如下：

第一法：　將所有各減式一一變其各項原有的符號，以與被

減式相加。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 3x^3 & +2x^2 & +5x & -7 \\
 & & -9x^2 & +3x & -6 \\
 & -8x^3 & & +3x & +5 \\
 & & -2x^2 & -5x & +6 \\
-5x^4 & & & +8x & -6 \\
\hline
-5x^4 & -5x^3 & -9x^2 & +14x & -8
\end{array}
$$

第二法： 先將諸減式相加，再從被減式減去加得的結果。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 9x^2 & -3x & +6 \\
 & 8x^3 & & -3x & -5 \\
 & & 2x^2 & +5x & -6 \\
5x^4 & & & -8x & +6 \\
\hline
5x^4 & +8x^3 & +11x^2 & -9x & +1
\end{array}
$$

次變各項之號而與被減式相加，

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 3x^3 & +2x^2 & +5x & -7 \\
-5x^4 & -8x^3 & -11x^2 & +9x & -1 \\
\hline
-5x^4 & -5x^3 & -9x^2 & +14x & -8
\end{array}
$$

習題二十三

在下列各組代數式中，從前式減去後式：

1. $2x^3+3x^2-5x+6$，　　x^3-x^2+x-8。

2. $x+x^3+6x^2-5$，　　$9x-x^4+5-8x^2$。

3. $x+2y+3z$，　　$7x-8y-6z$。

4. $x^2y+9xy^2+8x^2z-6xz^2$，　　$9x^2y-xy^2+8xz^2-6x^2z$。

5. $x^2y+yz^2+xy^2+xz^2+y^2z+x^2z$，

$x^2y+2xy^2+3xz^2+4x^2z+yz^2+y^2z$。

6. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$，

$x^2+2y^2+3z^2+4xy+5yz+6zx$。

7. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，　　$-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$。

8. $x^3+y^3+z^3-3xyz$，　　$x^2+y^2+z^2-3xy$。

9. $x^3+y^3+z^3-3xyz$，　　$x^2y+y^2z+z^2x$。

10. $5x^5+2x^3+x$，　　$4x^4+2x^2+10$。

11. x^5+3x^2-8x，　　$7x^4-10x^3-8+x+5x^2$。

12. 從 $2x^3-5x^2+6x-7$ 減去何式，其相減所得之差是 $8x^4+6x^2-9x+1$？

13. 從何式減去 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，其差是 $2a^3+2b^3$？

14. 從 $3ab+2a^2b^2+abc$ 減去 $5ab-3abc+5a^2b^2$，$abc+a^2b^2$ 的和。

15. 自 $3ab+2a^2b^2+abc$，$-3a^2b^2+2abc+6ab$ 的和減去 $9a^3+6abc+2$，$3bc+2ab-6a^2b^2$，$8ab-6a^2b^2+9abc$ 的和。

16. 設 $x=a^2+3ab+b^2$，$y=a^3+b^3$，$z=2a^2+3ab+b^2-a^3$，則 $x+y-z=$？ $x-y+z=$？ $-x-y+z=$？

把下列各式去括號而化簡之：

17. $(a+b-c)-(a-b+c)-(a-b-c)$。

18. $2a-b-[4c-(b-2c)]$。

19. $7x-\{5y-[3z+x-(y-z)]+y\}$。

20. $3x-[-2y-(2y-3x)-z]-[x-(y-2z)+x]$。

習題二十四

解下列各方程式:

1. $2x-[(x-3)+5]=3x-6$。
2. $2x-3-[3-(x-6)]=8$。
3. $7x-\{5x-[3+x-(4x-5)]+6\}=0$。
4. $\frac{1}{3}\{[\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})]-\frac{1}{2}\}=10$。
5. $3x-[-2x-(2x-3)-3]=x-[(2+x)-6]$。
6. $x^2+5x+6=2x^2+6x+5-x(x+1)$。
7. $3x+2y-8-(y+9)-(x-3+y)=0$。
8. $3x(2x-3)-2x(3x-2)=8$。

第四章 聯立一次方程式

§ 37. 引論 前在第一章內,對於應用問題只用一個文字以代未知數,利用一個方程式以求其解。其法雖簡,而爲用不廣。因爲應用問題之中,往往含有兩個或多個未知數。這類問題,大都可用兩個(或多個)文字以代未知數,列出兩個(或多個)方程式以求其解答。有時甚至非如此解法不可。本章各節,學者試與第一章比較讀之。

[問題] 有大小二數,大數 3 倍與小數 5 倍的和是 230,大數 5 倍與小數 3 倍的和是 250。試求此二數。

[解法]　設大數是 x，小數是 y。則由題意可得兩方程式：

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \\ 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

由此二式倘能求出 x,y 所代的值，那麼這個問題便完全解決了。但是怎樣可求 x,y 所代的值，是不能不有通法。以下數節，詳論此事。

§ 38.　**聯立方程式及其求解的通則**　就前節所立兩個方程式看，若與(1)中 x 以 0,5,10,15,……等值，則得 y 之對應值 46,43,40,37,……等，任以 0,46;5,43;10,40;15,37;……等數代入(1)的 x,y，方程式的兩邊無不相等，然而以之代入(2)式，兩邊就不盡相等。同樣，若與(2)中 x 以 50,47,44,41,……等值，則得 y 之對應值 0,5,10,15,……等，任以 50,0;47,5;44,10;41,15;……等數代入(2)的 x,y，方程式的兩邊無不相等；然而以之代入(1)式，兩邊便不盡相等。惟以 35 代 x,25 代 y,(1)式的兩邊相等，(2)式的兩邊也能相等。此 $x=35$，$y=25$ 一組值叫做該兩方程式(1)，(2)的根。普遍言之，在含 x,y 的兩個方程式中，若以 m,n 二數代替 x,y，兩個方程式均能適合，這 m,n 就叫做該二方程式的公共根。這兩方程式叫做聯立方程式。因其含有兩個未知數，並且都是一次的，故又叫做二元聯立一次方程式。

二元聯立方程式所以不似一元方程式易於求解的緣故，就在每個方程式各有兩個未知數 x, y，不知其一，自然難知其他，故若利用適當手續，消去一個未知數，那麼另一未知數所代的值，自然可依第一章的方法去求解。消去的方法，最通用的有以下三種。

§ 39. **加減消去法**　例一　試解聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \\ 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

[解法]　$3\times(1)$得　$9x+15y=690$　　$(1')$

$5\times(2)$得　$25x+15y=1250$　　$(2')$

$(2')-(1')$得　$16x=560$

故　$x=560\div16=35$

以 x 的值代入(1)式，得

$$3\times35+5y=230$$

故　$y=125\div5=25$

[驗算]　把 $x=35$, $y=25$，代入(1)，(2)兩式，則

$$105+125=230$$

$$230=230$$

$$175+75=250$$

$$250=250。$$

例二　試解 $\begin{cases} 30x+19y=79 & (1) \\ -12x+25y=1 & (2) \end{cases}$

[解法]　因 $30=2\times3\times5$，$12=2\times3\times2$，牠們的最小公倍是 $6\times5\times2$，故以 2 乘(1)式兩邊，以 5 乘(2)式兩邊，乃得

$$\begin{cases} 60x+38y=158 & (1') \\ -60x+125y=5 & (2') \end{cases}$$

(1')+(2')得　$38y+125y=158+5$

即　$163y=163$

故　$y=1$

以 y 的值代入(1)，得

$30x+19\times1=79$

故　$x=2$。　$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

[驗算]　把 $x=2$，$y=1$，代入(1)，(2)兩式，則

$$60+19=79$$

$$79=79$$

$$-24+25=1$$

$$1=1$$

由上兩例看來，可見用加減消去法以解二元聯立方程式，其步驟如下：

1. 以適當的數 m 乘(1)式的兩邊得(1')，又以適當的數

n 乘(2)式的兩邊得(2')，使這兩式(1'),(2')中 x 的係數的絕對值相同。〔此時 x 的係數，最好爲(1),(2)兩式中 x 的係數的最小公倍。〕

2. 絕對值相同的係數，如其符號不同，就把兩式相加以消 x；如其符號相同，就把兩式相減以消 x。

3. 解上所得方程式，得 y 值。

4. 以所得 y 值代入(1)或(2)，求得 x 值。

5. 以求得的 x，y 值，代入原設兩個方程式，驗其是否都能相合。

〔註1〕 上述四條，是先消 x 再求 y。倘使先消 y 再求 x，也是可以的，只要把上述四條中所有 x,y 換爲 y,x 就是了。

〔註2〕 解聯立方程式所得 x,y 的值，欲知有無錯誤，須把這所得的數值代入原設兩個方程式，以驗是否都合。不可僅僅代入一個方程式，因爲，解法手續雖有錯誤，所得的值往往仍能適合一個方程式。但若同時代入另一方程式，牠的錯誤就立刻發見了(參看 §38)。

用任何方法解任何聯立方程式，欲驗解得的值有無錯誤，均須代入原設各個方程式驗其是否都能適合，不獨在加減消去法如此，亦不僅在二元聯立方程式如此。初學代數的人，往往對此點不很注意，以致弄出大錯。我們務宜留心。

習題二十五

試解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3y=9 \\ 5x+3y=21 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+4y=19 \\ 4x+3y=23 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 17x+6y=29 \\ 23x-9y=5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 45x+y=91 \\ x+45y=47 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 97y-72x=122 \\ 37y+48x=123 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{5}{6} \\ 8x+9y=17 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 2(x+3)+(y+5)=17 \\ 3(x-1)+4(y+2)=19 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y=2x+1 \\ x=2y-17 \end{cases}$　　10. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{x-y}{2}=2 \\ .3x-.4y=.5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 30x+7y=370 \\ 45x-23y=220 \end{cases}$　　12. $\begin{cases} 13x+48y=87 \\ 11x-32y=1 \end{cases}$

§ 40.　代入消去法　[例]　求解聯立方程式:

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \\ 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

[解法]　由(2)式得　　$3y=250-5x$

即　$$y=\frac{250-5x}{3} \qquad (1')$$

以(1′)式中 y 值代入(1),得

$$3x+\frac{5(250-5x)}{3}=230$$

兩邊各乘以 3, 得

$$9x+1250-25x=690$$

解之,得　　$35=x$

以 x 的值代入(1′),得

$$y=\frac{250-5\times35}{3}=25$$

[驗算]　把 $x=35, y=25$, 代入(1),(2)兩式,則

$$105+125=230$$

$$230=230$$

$$175+\ 75=250$$

$$250=250。$$

由上例看來,可見用代入消去法以解二元聯立方程式,其步驟如下:

1. 由(1)[或(2)]求出 $x=(?)y+(?)$ 這是(1′)式。
2. 以(1′)中的 x 值代入(2),[或(1)]消去 x 求出 $y=?$
3. 以 y 的值代入(1′),求得 x 的值。
4. 以所得 x, y 的值代入原設兩個方程式,驗其是否都能適合。

[注意]　本解法的程序中,第二步應特別注意。凡由(1)式求得 $x=(?)y+(?)$ 務須代入(2)式以消 x。[若由(2)式求得 $x=(?)y+(?)$,則應代入(1)式以消 x。] 若仍代入(1)式,就會得 $0=0$, 而 x, y 同時消去,不能求 x, 也不能求 y 了。舉例如下:

[例]　　求解 $\begin{cases}2x+\ y=3 & (1)\\ 4x+3y=6 & (2)\end{cases}$

誤解　由(1)得　　$y=3-2x$

代入(1),則得　$2x+8-2x=8$

移項,得　$0=0$

x,y 同時消去,不能求出牠們的數值了。

習題二十六

用代入消去法以解習題二十五的各題。

§ 41. 比較消去法　[例]　試解聯立方程式:

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \\ 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

[解法]　由(1)得　$y=(230-3x)\div5$　$(1')$

由(2)得　$y=(250-5x)\div3$　$(2')$

比較(1′),(2′)得

$$(230-3x)\div5=(250-5x)\div3$$

兩邊各乘以 15, 得

$$3(230-3x)=5(250-5x)$$

解之,得　$x=560\div16=35$

以 x 的值代入(1′)得

$$y=(230-3\times35)\div5=25。$$

[驗算]　把 $x=35,y=25$, 代入(1),(2)兩式,則

$$105+125=230$$

$$230=230$$

$$175+75=250$$

$$250=250。$$

由上例看來，可見用比較消去法以解二元聯立方程式，其步驟如下：

1. 先由(1)，(2)兩式各求出 $x=(?)y+(?)$ [或 $y=(?)x+(?)$]。

2. 比較所得結果，寫成方程式$(?)y+(?)=(?)y+(?)$，即是消去 x 而求 y [或得$(?)x+(?)=(?)x+(?)$，就是消 y 以求 x]。

3. 以 y 的值代入第一步所得 $x=(?)y+(?)$ 二式之一，就得 x 值。

4. 以所得 x,y 的值代入原設兩個方程式，驗其是否都能適合。

習 題 二 十 七

試用比較消去法解習題二十五的各題。

習 題 二 十 八

試用最簡便的消去一個未知數的方法解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases}2(2x+3y)=3(2x-3y)+13\\4x-3y=4(6y-2x)-15\end{cases}$ 2. $\begin{cases}7(x-y)=x+5\\2(x+2y)=5(3y-x)+3\end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{2x}{5}+\frac{3y}{2}=2\frac{7}{10} \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x-3y=1 \\ \frac{3x}{4}+y=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{2}=3\frac{1}{2} \\ \frac{12x-8y}{13}=4 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} y+5=\frac{x+6}{2} \\ x=\frac{y+11}{2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=3y+1 \\ 7x+8y=2x-y+44 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+\frac{x-2y}{2}=6 \\ \frac{x}{4}+\frac{x+y}{9}=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x+11y=74 \\ 13x+22y=139 \end{cases}$　　10. $\begin{cases} 13x+\frac{12-y}{11}=131 \\ 9y+121=13x \end{cases}$

§ 42. **二元應用問題的解法**　求解兩元聯立方程的應用問題,重要的步驟如下:

1. 細審題意,選擇未知數,以 x,y 代之。

2. 謹依題意,把已知數與未知數間的關係,列成兩個相異方程式。

3. 選用加減,代入,比較諸法之一(通常取其最便利的)解上面所得二元聯立方程式。

4. 將所得 x,y 的值,代入原題,驗其是否相合(不可代入所列方程式)。

[例]　分桃與兒童,每人 4 個,餘桃 2 枚;每人 6 個,缺桃 12 枚。求桃數與人數。

[解法] 設桃數為 x，人數為 y。依題意得下列兩個方程式：

$$\begin{cases} x=4y+2 & (1) \\ x=6y-12 & (2) \end{cases}$$

解此聯立方程式，宜用比較消去法。因為，由(1)，(2)兩式，直接可得

$$4y+2=6y-12$$

解之，得 $y=7$
代入(1)求得 $x=30$
即 $\begin{cases} 人數是\ 7, \\ 桃數是\ 30。\end{cases}$

[驗算] 7 人分桃 30 枚，每人 4 枚，分去 28 枚，餘 2 枚。每人 6 枚，需桃 42 枚，缺桃 12 枚。

[注意] 由前 § 38 觀之，可見含有兩個文字 (x, y) 的一個方程式，其 x, y 可得種種不同的數值。故欲確定 x, y 究為何值，非另有他一方程式與之聯立不可。故用兩個未知數以解應用問題時，必須求得兩個方程式。但是，假如由下列二方程式

$$\begin{cases} x+2y=6 & (1) \\ 2x=12-4y & (2) \end{cases}$$

以求 x, y，那麼 x, y 的值仍不能確定。因為由(2)式可得(1)式，由(1)式也可得(2)式。(1)，(2)二式外形雖異，其實一樣。故用兩個文字以解應用問題時，所立兩個方程式，必須確為相異方程式。初學代數的人，往往不注意這一點，以致許多可解的問題，沒有方法去求解。我們須當留心。

習題二十九

用二元聯立方程式解下列各題：

1. 習題七　(4),(5),(6)。

2. 習題八　(1),(3),(5)。

3. 習題九　(2),(3)。

4. 習題十　(6),(7)。

5. 習題十一(5),(11),(14),(15)。

6. 有眞分數，若把分母加 1，則其值是 $\frac{1}{3}$；若把分子加 1，則其值是

求這分數。

7. 有眞分數，以其分子分母的和除分母分子的差，所得的商是 $\frac{4}{13}$。若分母加 1，則分數的值是 $\frac{1}{2}$。求這分數。

8. 甲乙二人共有存款 1200 元。甲把自已的錢用去 $\frac{1}{2}$，乙把自已的錢用去 $\frac{3}{4}$，於是二人所餘的元數相等。問甲乙原來各有幾元?

9. 有甲乙二整數，他們的和是 45。以乙數除甲數，商數是 5，餘數是 3。求甲乙二數。

10. 某人以國幣 2500 元買牛 10 匹和馬 20 匹。出賣時，牛每頭獲利 20 元，馬獲利 $\frac{1}{10}$，牛馬共賣 2860 元。問牛馬買價每頭各幾元?

11. 有三位數。其百位數字等於個位數字與十位數字的和。若把十位數字與百位數字交換，則所成新數比原數小 270。又百位數字與個位數字的和等於十位數字的 2 倍。求原數。

12. 快車長 178 市尺，慢車長 150 市尺，二車並行於平行軌道。若同向而行，自相遇至相離，需時 2 分 44 秒；若異向而行，自相遇至相離，需時 4 秒。問這二車每秒各行幾市尺?

13. 甲乙兩地相距 95 里，A自甲到乙，B自乙到甲，若A先出發 2 小時，則B行 3 小時而遇A；若B先 3 小時出發，則A行 48 分鐘而遇B。求A、B各人速度。

14. 有雞犬不知其數。 但知雞頭比犬頭多 3 個；雞足比犬足少 8 隻。問雞犬各若干?

§ 43. **三元聯立方程式** 如前 § 37 所述，解決應用問題，有時需用三個文字 x, y, z 以代未知數，立出三個不同方程式以求其根。茲舉例於下：

［問題］ 甲，乙，丙三數的和是 60。甲數一倍，乙數 2 倍與丙數 3 倍三者的和是 140。甲數 3 倍，乙數 2 倍與丙數 5 倍三者的和是 220。求甲，乙，丙三數。

［解法］ 設 $x=$甲數，$y=$乙數，$z=$丙數，由題意可得三個不同方程式：

$$\begin{cases} x+y+z=60 & (1) \\ x+2y+3z=140 & (2) \\ 3x+2y+5z=220 & (3) \end{cases}$$

由此求 x, y, z 的值，其法如下：

I. 由(1)，(2)消去 x，得(4)。

自(2)減(1)得 $$y+2z=80 \qquad (4)$$

II. 由(2)，(3)消去 x，得(5)。

以 3 乘(2)得 $$3x+6y+9z=420 \qquad (2')$$

自(2′)減(3)得 $$4y+4z=200$$

即 $$y+z=50 \qquad (5)$$

III.　由(4),(5)消去 y 求 z。

(4)−(5)得　$z=30$

代入(5)得　$y=50-30=20$

IV.　以 y, z 的值代入(1)求 x。

以 $y=20$, $z=30$ 代入(1),得

$$x+20+30=60$$

$$\therefore \quad x=10$$

故甲數爲 10, 乙數爲 20, 丙數爲 30。

[驗算]　把 $x=10$, $y=20$, $z=30$ 代入(1),(2),(3)式,則

$$10+20+30=60$$
$$60=60$$
$$10+40+90=140$$
$$140=140$$
$$30+40+150=220$$
$$220=220。$$

由此可見,求解三元聯立方程式,其通法如下

第一步　在所給三個方程(1),(2),(3)中,就兩個方程式如(1),(2)兩式消去 x,得出一個含有 y,z 的方程式(4)。

第二步　再就(1),(3)[或(2),(3)]兩式消去 x [不能消去 y 或 z] 又得一個含有 y, z 的方程式(5)。

第三步　(4),(5)二式聯立，求 y, z 的值［依二元聯立方程式的解法］。

第四步　以所得 y, z 的值代入(1),(2),(3)中任何一式以求 x。

第五步　以所得 x, y, z 的值代入原設三個方程式。驗其是否都能適合。

［注意1］　在第一步內，無論先消去那個文字 (x, y, z) 都是可以的，只要手續簡便就是了。(參看例三)

［注意2］　在第二步內，所消去的文字須與第一步中所消去的相同，否則一，二兩步中所得兩個方程式(4),(5)仍含三個文字，不能求得其值了。

［注意3］　倘遇任何一式［如(2)］只含兩個文字(例如 x, z)時，那麼最好從其他兩式(1),(3)消去第三文字(y),以得(4)式。於是，由(2),(4)兩式便可求得 x, z 的值。

［例一］　求解
$$\begin{cases} 3x+2y+4z=9 & (1)\\ 5x+3y+5z=13 & (2)\\ 7x+7y+3z=17 & (3)\end{cases}$$

［解法］　依通法分爲五步如下：

I.　先由(1),(2)消去 y，得(4)。

$$\begin{array}{lr} 3\times(1)\text{得} & 9x+6y+12z=27 \\ 2\times(2)\text{得} & 10x+6y+10z=26 \\ \hline \text{相減得} & -x\qquad+2z=1 \quad (4) \end{array}$$

II.　次由(1),(3)消去 y，得(5)。

$$7\times(1)\text{得}\qquad 21x+14y+28z=63$$

$$2\times(3)\text{得}\qquad 14x+14y+6z=34$$

$$\text{相減得}\qquad 7x\qquad +22z=29 \tag{5}$$

III. 再由(4),(5)消去 x 以求 z, 並代入(4)以求 x。

$$7\times(4)+(5),\text{得}\qquad 36z=36$$

$$\therefore\qquad z=1$$

$$\text{代入(4)得}\qquad -x+2=1$$

$$\therefore\qquad x=1$$

IV. 以 x, z 的值代入(1)求 y。

以 $x=1$, $z=1$, 代入(1)式得

$$3+2y+4=9$$

$$\therefore\qquad y=1$$

$$\text{故}\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$$

V. 以 $x=1, y=1, z=1$ 代入(1),(2),(3)式,驗其是否都能適合。

$$3+2+4=9$$

$$9=9$$

$$5+3+5=13$$

$$13=13$$

$$7+7+3=17$$

$$17=17。$$

［例二］ 求解$\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ 2x+z=7 & (2) \\ x+3y+4z=13 & (3) \end{cases}$

［解法］ 本題(1),(2)兩式,各含兩個文字，故不必仿通法求解,只要依照注意 3 進行就好了。

I. 由(2),(3)消去 z，得(4)。

$4\times(2)$得　　$8x+4z=28$　　(2′)

$(2')-(3)$得　　$7x-3y=15$　　(4)

II. 次由(4),(1)消去 y 以求 x，並代入(1)以求 y。

$3\times(1)+(4)$得　　$10x=30$

$\therefore$　　$x=3$

以 $x=3$ 代入(1),得　　$3+y=5$

$\therefore$　　$y=2$

III. 以 x,y 的值代入(2)求 z。

以 $x=3$ 代入(2),得　$2\times3+z=7$

$\therefore$　　$z=1$

故$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

IV. 以 $x=3$, $y=2$, $z=1$ 代入(1),(2),(3)式，驗其是否都能適合。

$3+2=5$

$$5=5$$

$$6+1=7$$

$$7=7$$

$$3+6+4=13$$

$$13=13。$$

[例三]　求解 $\begin{cases} x+2y+3z=6 & (1) \\ 3x+2y+2z=7 & (2) \\ 4x+2y+\ \ z=7 & (3) \end{cases}$

[解法]　(2)−(1)得　$2x-z=1$　(4)

(2)−(3)得　$-x+z=0$　(5)

(4)+(5)得　$x=1$

以 x 的值代入(4),得　$2-z=1$

$\therefore$　$z=1$

以 x, z 的值代入(1),得　$1+2y+3=6$

$\therefore$　$y=1$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

[驗算]　以 $x=1, y=1, z=1$, 代入(1),(2),(3)式,

$$1+2+3=6$$

$$6=6$$

$$3+2+2=7$$

$$7=7$$

$$4+2+1=7$$

$$7=7。$$

〔註〕 本節解法若不利用頁數,就不能消去 y 以求 x,z；勢必先消 x 或 z。其手續比上面解法要繁得多了。這又是頁數對於解方程式具有特效的一例。

習 題 三 十

試解下列各方程式：

1. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x+3y+4z=19 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ x+z=12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y+4z=34 \\ 5x+6y+7z=70 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 5x+6z=17 \\ x+y+2z=6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-\text{[illegible]}y-\text{[illegible]}z=\text{[illegible]} \\ x+y+z=3 \\ 2x+3y-4z=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x-y=15 \\ 5y-z=21 \\ 5z+x=16 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 8x+9y-10z=11 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{2z}{3}=\dfrac{1}{3} \\ x+y=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x+7y-8z=20 \\ 4x+3y-2z=21 \\ 5x-4y+3z=14 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+3y+4z=1 \\ 5x+3y+2z=1 \\ 3x-3y-7z=-7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x+3y-7z=-1 \\ 5x-3y+6z=-8 \\ -5x+5y-\text{[illegible]}z=3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x+5y+\ z=16 \\ 7x+3y+\ z=16 \\ 9x-7y+\ z=-2 \end{cases}$　　12. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=1 \\ \frac{x}{2}+y-z=0 \\ \frac{x}{2}+y+\frac{z}{2}=6 \end{cases}$

§ 44. 三元應用問題的解法　求解這類問題時，其手續仍與解二元應用問題相類似。茲述其步驟如下：

1. 細審題意，選擇三個未知數，以 x、y、z 代之。

2. 謹依題意，把已知數與未知數間的關係，列出三個相異方程式。（怎樣是相異方程式參看 § 42 的注意）

3. 用前節方法解這聯立三個方程式以求 x，y，z 的值。

4. 把所得的值，代入原題，驗其是否適合（不可代入所列方程式）。

［例］　有甲，乙，丙三人。一年後三人歲數的和是 48。五年後乙，丙歲數的和等於甲的歲數的 3 倍。若今年甲，丙歲數的和是乙的 2 倍，試求甲，乙，丙今年各幾歲。

［解法］　設 $x=$ 甲今年的歲數

$y=$ 乙今年的歲數

$z=$ 丙今年的歲數

依題意，應得下列三個相異方程式：

$$\begin{cases} x+1+y+1+z+1=48 & (1) \\ y+5+z+5=3(x+5) & (2) \\ x+z=2y & (3) \end{cases}$$

解上聯立方程式，得 $x=10, y=15, z=20$。

所以今年甲 10 歲，乙 15 歲，丙 20 歲。

習題三十一

1. 有甲，乙，丙三數，甲乙二數的和是 76，乙丙二數的和是 54，甲丙二數的和是 68。求甲，乙，丙三數。

2. 甲，乙，丙三數的總和是 58。以甲乙的和除這總和，其商是 2。以乙丙的和除這總和，得商 1 而餘 14。求這三數。

3. 有甲，乙，丙三人。甲乙合做一事須 2 日可成；甲丙合做，則須 3 日；乙丙合做，則須 4 日。問各人獨作，各須幾日可成？若三人合做，又須幾日可成？

4. 有三位數，其各位數字的和是 6。倒轉三位數字的次序所得新數比原數大 198。而百位數字與個位數字的和是十位數字的 2 倍。求原數。

5. 甲，乙，丙三人共有存款 900 元。甲比乙所多的元數等於乙比丙所多的元數。而甲的元數等於乙丙元數的和。求甲，乙，丙各有若干元。

6. 甲，乙，丙三人共有國幣 300 元。甲給乙及丙以該二人原有的元數，乙亦給甲及丙以該二人現有的元數。丙又給甲及乙以該二人現有的元數。於是三人所有之元數相等。問甲，乙，丙原來各有幾元？

7. 有一元，五元，十元法幣三種，共 16 張。其總價值是 126 元。若把一元法幣的張數與十元法幣的張數對調，則其總價是 45 元。求各種法幣的張數。

8. 有甲，乙，丙三數，甲乙的和是 25，乙丙的和是 35，甲丙的和 30。求這三數。

9. 某水手順流下行在 2 小時內可由 A 到 B。返時逆流而上，須 6 小時始到。若水流速度爲零，則由 A 到 C 往返一次共需 8 小時。已知 $AC=AB+10$

里。問A，B相距幾里？水流速度每時幾里？這水手在靜水中每時能划幾里？

§ 45. **四元聯立方程式**　問題中有時含有四個未知數，必須列出四個方程式，方能求得其解。其步驟大致與三元聯立方程式應用問題的解法相同，茲舉二例以明其要。

[例一]　甲，乙，丙，丁四數的和是 10。甲丁的和等於乙丙的和。甲數一倍，乙數二倍，丙數三倍與丁數四倍，四者的和是 30。甲數三倍與乙數的和比丙數大 2。求各數。

[解法]　設甲數是 x，乙數是 y，丙數是 z，丁數是 w。依題意得下面四元聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y+z+w=10 & (1) \\ x+2y+3z+4w=30 & (2) \\ 3x+y-z=2 & (3) \\ x-y-z+w=0 & (4) \end{cases}$$

I.　自(1)，(4)消去 w：

(1)－(4)得　$2y+2z=10$　(5)

II.　自(1)，(2)消去 w：

$4\times$(1)－(2)得　$3x+2y+z=10$　(6)

III.　自(3)，(6)消去 x：

(3)－(6)得　$-y-2z=-8$　(7)

IV.　自(5)，(7)消去 z：

(5)+(7)得 $y= \quad 2$ (8)

V. 以 y 值代入(5)求 z:

$$2\times2+2z=10 \qquad z= \quad 3 \qquad (9)$$

VI. 以 y, z 的值代入(3)求 x:

以(8),(9)二式代入(3),求得 $x= \quad 1$ (10)

VII. 以 x, y, z 的值代入(1)求 w:

以(8),(9),(10)三式代入(1),求得 $w= \quad 4$。

[例二] 有甲,乙,丙,丁四數。甲,乙,丙三數的和是 60,甲,乙,丁三數的和是 70,乙,丙,丁三數的和是 90,甲,丙,丁三數的和是 80,求這四數。

[解法] 設 $x=$甲數,$y=$乙數,$z=$丙數,$w=$丁數,依題意得

$$\begin{cases} x+y+z=60 & (1)\\ x+y+w=70 & (2)\\ y+z+w=90 & (3)\\ x+z+w=80 & (4)\end{cases}$$

欲由上列四個方程式求出 x, y, z, w 的值,不必如例一的解法;可用較簡的手續求之如下:

(1)+(2)+(3)+(4)得

$$3x+3y+3z+3w=300$$

就是，
$$x+y+z+w=100 \qquad (5)$$

(5)－(1)得　　$w=40$。　丁數。

(5)－(2)得　　$z=30$。　丙數。

(5)－(3)得　　$x=10$。　甲數。

(5)－(4)得　　$y=20$。　乙數。

習題三十二

解四元聯立方程式：

1. $\begin{cases} x+y+z+w=4 \\ x+y+z \qquad =3 \\ \quad y+z+w=3 \\ x+y \quad +w=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z \qquad =14 \\ \quad 2y+3z+4w=29 \\ x+2y \quad +4w=21 \\ x \quad +3z+4w=26 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+z+w=20 \\ x+y \qquad = 6 \\ \quad y+z \quad =10 \\ x \quad +z \quad = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y+z \qquad =20 \\ 2x+y-z \qquad =10 \\ x+y \qquad =30 \\ \qquad z+w \quad =70 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+3z+w=18 \\ x+\ y+z \qquad =6 \\ x-\ y-z+w \ =0 \\ x+\ y-z-w \ =-4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y+z+w \quad =26 \\ x+2y+3z+4w =70 \\ x+3y+4z+2w =67 \\ x-y-2z-w \quad =-23 \end{cases}$

7. 分 50 為四部。使第一，第三，第四，三部的和等於第二部的四倍；第一，第二，第三，三部的和等於第四部的 $\frac{3}{2}$；而第一，第二，兩部的和等於第四部。求這四部各是多少。

8. 有甲,乙,丙,丁四種酒。甲種價每斤1角,乙種價每斤2角,丙種價每斤3角,丁種價每斤4角。現在要把四種酒混合,使成每斤3角的酒10斤。但知乙,丙兩種所用的斤數,等於甲,丁兩種所用的斤數,甲,丙,丁三種所用的斤數等於乙種所用斤數的4倍。求各種所用的斤數。

第五章 圖解

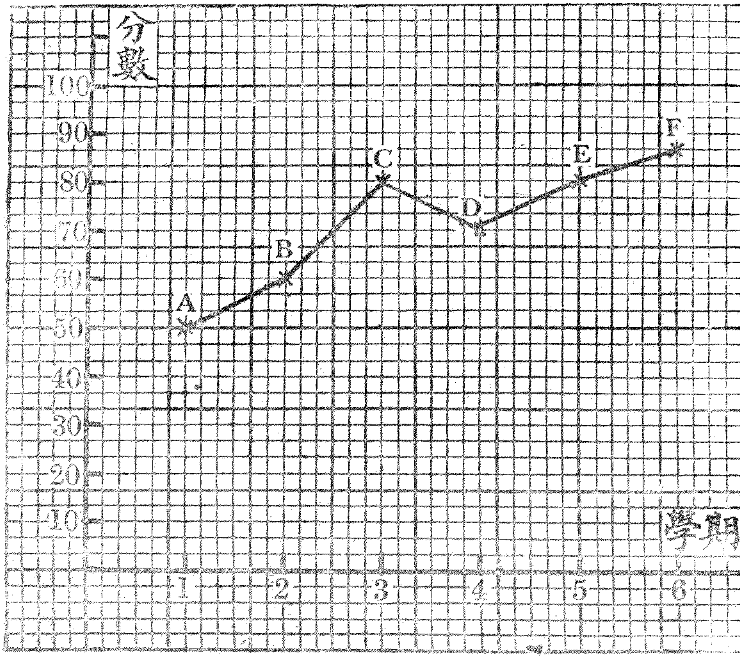
§ 46. 幾個簡單的例 欲明圖解的意義,先自下列諸例看起:

[例一] 某生在校三年,各學期成績如下表,試以圖表示升降的情狀。

學期	1	2	3	4	5	6
成績	50	60	80	70	80	86.6

[解法] 在方格紙上取縱橫兩相交直線,以橫線表示學期的次第,以縱線表示成績的分數,在橫線上取每6格代表一學期,在縱線上取每3格代表十分。乃由橫線上1處,向上數50分得 A 點,作記號"×"表之;又由橫線上2處,向上數60分得 B 點,作記號"×"表之;同樣得 C, D, E, F 諸點。最後以直線依次聯結其兩點得下圖:

[註] 由圖觀察,該生歷年成績的升降情形,可以一目了然;不像原來數表,必須經仔細觀察,方能得其意義。圖解的功用,就這一點,已可得其梗概了。



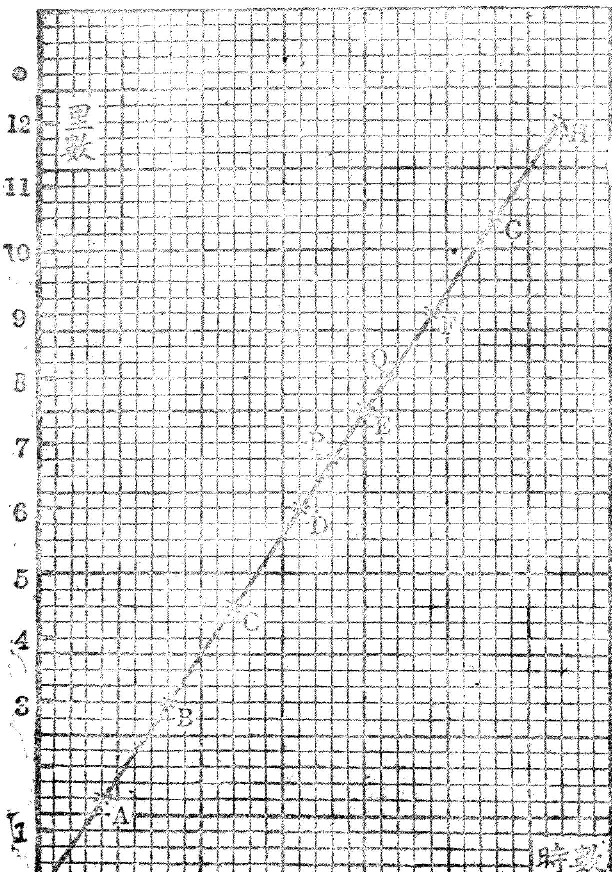
［例二］　某人緩步慢行，每小時行 $1\frac{1}{2}$ 里，共行 8 小時而止，試作圖以明所行距離與所經時間的關係。

［解法］　先將所行里數與所經時數，作一相應數值表。

所經時數	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
所行里數	0,	$1\frac{1}{2}$,	3,	$4\frac{1}{2}$,	6,	$7\frac{1}{2}$,	9,	$10\frac{1}{2}$,	12.

次取縱橫兩相交直線，在橫線取 4 格表 1 小時，在縱線上取 4 格表 1 里。於是由橫線 1 時處向上數 $1\frac{1}{2}$ 里得 A 點；再由橫

線上 2 時處向上數 3 里得 B 點;同樣,得 C, D, E, F, G, H 諸點。過各點聯一直線如下圖,這就是所求的時間距離相互變化的關係。



［註］本例與前例有一重要不同之點。在前例 $A,B,C,D,E,\cdots\cdots$ 諸點，各爲孤立之點。過 $A,B;B,C;C,D,\cdots\cdots$ 諸點所以聯成直線者，不過爲求觀察的便利；直線 $AB,BC,\cdots\cdots$ 上其他諸點，本沒有什麼重要的意義。至於本例中，則 $A,B,C,D,\cdots\cdots$ 諸點不是孤立的。因爲所行里數和所經時數，都是連續變遷的數。非必從 0 時一跳而至 1 時，從 1 時一跳而至 2 時；在 0 時與 1 時，1 時與 2 時之間，更有無數個刹那。在這無數個刹那中，此人所行距離各有確定的里數。由這無數個時數，里數的對應值，也得無數個點。這無數個點都在直線 $AB,BC,\cdots\cdots$ 之中。今在作圖手續中，所以只取整時數 0，1，2，……等等者，不過爲便利而已。

學者再拿上圖來看，不但 A 表中已載的事實，可以由圖一目了然，卽表中未載的事實，也可由圖去推知，例如，欲知 $4\frac{1}{2}$ 小時共行幾里，可由橫線上 $4\frac{1}{2}$ 處，向上數到圖中 P 點，約得 6.75 里，就是所求的里數。欲知幾時內可行 8 里，可由縱線上 8 處向右數到圖中 Q 點，約得 $5\frac{3}{8}$ 小時，這就是所求的時數。同樣，可解其他類似問題。圖解的功用，不是很大嗎？

［例三］　在方程式 $y=2x+5$ 中，x，y 俱爲可變的數，試作圖以明變遷的情狀。

［註］本題性質與上例（例二）性質略有不同。在上例，時數，里數俱爲正量。本題的 x,y 則皆可正，可負。怎樣作圖？其法不難。但爲便於說明計，應先述座標制。

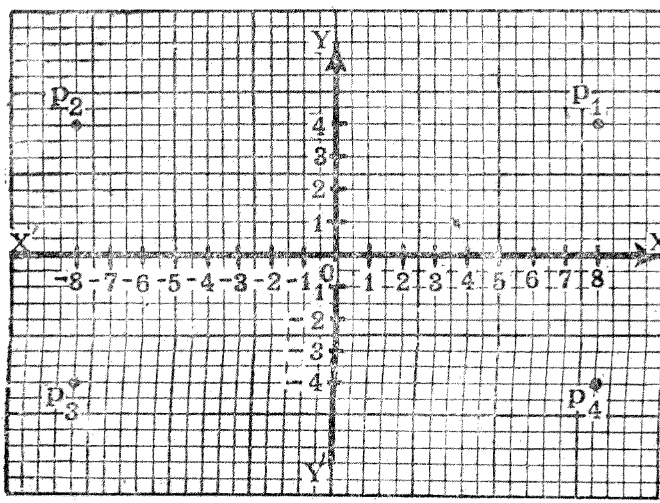
§ 47.　座標制　座標之用，在於決定點的位置。其規則如下：

1.　如下圖，在平面上取縱橫兩相交直線 XX'，YY' 命其

交點爲 0。這 0 點叫做原點，縱線 YY' 叫做縱軸或 y 軸；橫線 XX' 叫做橫軸或 x 軸。

2. 由是平面上任何一點，可定兩個數量。其一是該點與 x 軸的距離，叫做該點的縱標；其二是該點與 y 軸的距離，叫做該點的橫標。縱標，橫標統稱座標。

3. 又因兩點的位置雖不同，但與兩軸的距離猶可相同（例如下圖中的 P_1, P_2），這樣不免混淆。故又設法爲之區別：點在 y 軸的右方，牠的橫標是正值；點在 y 軸的左方，牠的橫標是負值。點在 x 軸的上方，牠的縱標是正值；點在 x 軸的下方，牠的縱標是負值。



例如，上圖 P_1 的座標是(8,4)；P_2 的座標是(−8,4)；P_3 的座標是(−8，−4)；P_4 的座標是(8，−4)。反之，座標(8，−4)的一點是 P_4 而非 P_3，P_2 或 P_1。

[註]（1） 舉一點座標時，依習慣，須把座標置於括號之內，並把橫標寫於縱標之前，如上例。

（2） $X'OX$，$Y'OY$ 相交，分平面爲四部。其在 OX,OY 之間的，叫做第一象限；在 OY,OX' 之間的叫做第二象限；在 OX',OY' 之間的叫做第三象限；最後一部叫做第四象限。

各象限中座標的符號如何？學者自已去決定。

習題三十三

1. 某校五年來學生人數如下表：

學　　期	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
人　　數	65	54	180	165	255	245	330	305	362	355

試作圖以明其增減的情狀。

2. 某病人某日體溫脈搏的記錄如下表：

時　間	上午 2	4	6	8	10	12	下午 2	4	6	8	10	12
體　溫	39	40	39.5	38	38.6	38	38	38.2	38.5	38.5	39.5	40
脈　搏	90	92	90	89	86	80	81	84	86	89	91	93

試作圖以明其變化的情狀。

3. 試定各象限內坐標的符號。

4. 試在平面上定出下列各點：

(a) (3,4)。 (b) (−3,−5)。

(c) (4,3)。 (d) (−5,−3)。

(e) (5,−3)。 (f) (−5,3)。

(g) (0,−10)。 (h) (10,0)。

(i) $(0,\sqrt{2})$。 (j) $(-\sqrt{3},0)$。

(k) $(m,0)$。 (l) (0,0)。

§ 48. 兩元一次方程式的圖線 既明座標制的涵義，乃可討論 § 46 例三的作圖法。

由原方程式 $y=2x+5$，若與 x 以種種適當的值，可得 y 的對應值如下表：

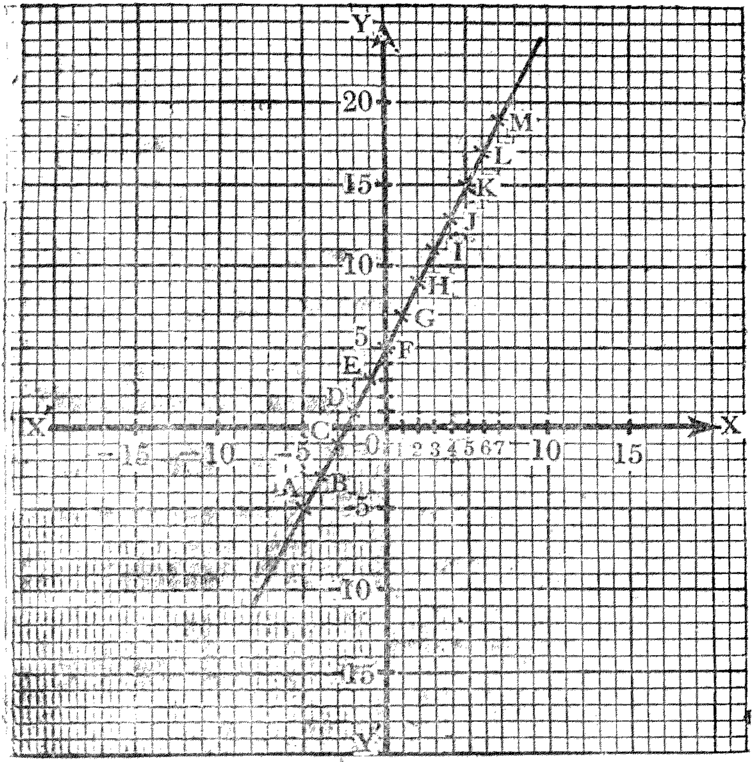
設 $x=$	−5,	−4,	−3,	−2,	−1,	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,……
則 $y=$	−5,	−3,	−1,	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,……

乃以 x 的各值爲橫標，y 的對應值爲縱標，定出 $A, B, C,$ ………M 諸點。最後過此諸點，聯成一條平滑的線，其形狀爲一直線，這就是方程式 $y=2x+5$ 的圖線。

在 § 46 例二中，所行里數 (y) 與所經時數(x)的關係亦爲一次方程式 $y=\frac{3}{2}x$。這兩方程式的圖線皆是無限長的直線，這是學者已經知道的。其實不但如此，任何兩元一次方程式，如 $Ax+By+C=0$，牠的圖線總是直線。這條定理的證明，屬於解析幾何的範圍，在此不能詳述，但有應加注意的：

（1） 兩元一次方程式的圖線既然總是直線，則欲決定該圖線，只須決定其中兩點聯以直線就行了。不必照上面的方法，求出許多點，徒增無謂的麻煩。

（2） 在這圖線上的各點，其座標都合原設方程式；反之，不在這線上的各點，其座標決不適合原設方程式。



習題三十四

作下列各二元一次方程式的圖線：

1. $3x+2y=5$。　　2. $3x-2y=5$。

3. $-x+3y=10$。　　4. $x-3y=-10$。

5. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=10$。　　6. $3x-2y=\frac{19}{6}$。

7. $3x+4y=0$。 8. $8x-7y=0$。

9. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=5$。 10. $\frac{x+3}{2}+\frac{y-2}{3}=6$。

11. $4x+0\cdot y=8$。 12. $0\cdot x+5y=10$。

13. $4x+8=0$。 14. $5y+10=0$。

15. $6x=0$。 16. $-7y=0$。

§ 49. 用圖線解聯立一次方程式 兩元聯立一次方程式，都可用圖解法去求根。手續甚簡，舉例如下：

[例一] 用圖解法解$\begin{cases} x+2y=7 & (1) \\ 3x-5y=-1 & (2) \end{cases}$

[解法] 由(1)，(2)依次得 x, y 的對應數值表如下：

(1')

$x=$	-3	7
$y=$	5	0

(2')

$x=$	-2	8
$y=$	-1	5

以(1')表中對應值為座標，定 A, B 兩點，由此畫得直線(1)。再以(2')表中對應值為座標，定 C, D 兩點，由此畫得直線(2)。

直線(1)，(2)的交點是 P，牠的座標(3, 2)就是原來聯立方程式中 x, y 的值，也就是所求的根。[因為 P 點既在直線(1)上，所以合方程式(1)；又在直線(2)上，所以也合方程式(2)。]

把 P 的座標(3.2)代入(1)，(2)兩式，則

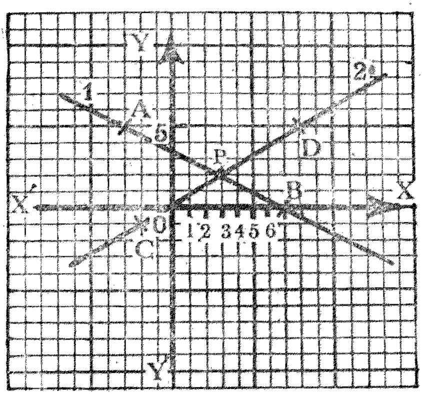
$$3+4=7$$

$$7=7$$

$$9-10=-1$$

$$-1=-1$$

兩式都能適合，故並無錯誤。



［例二］　用圖解法解$\begin{cases} x+5y=7 & (1) \\ 3x-2y=4 & (2) \end{cases}$

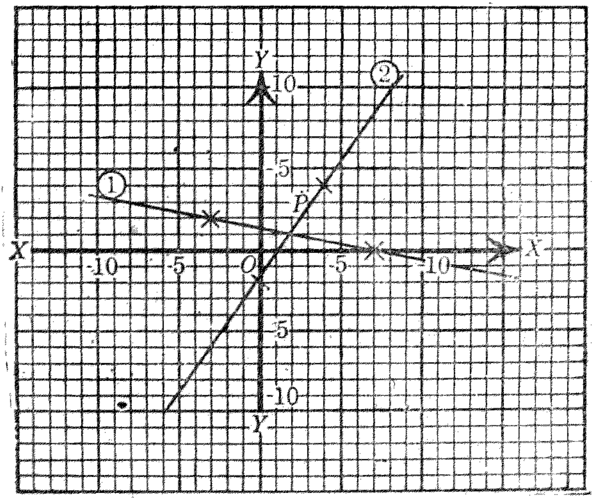
［解法］　作(1)式的圖線得直線(1)，又作(2)式的圖線得直線(2)。這兩直線的交點是 P，牠的座標是(2, 1)。

故所求的根是$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

把 P 的座標(2, 1)代入(1)，(2)兩式，則

$$2+5=7$$

$$7=7$$



$$6-2=4$$

$$4=4$$

兩式都能適合，故並無錯誤。

習 題 三 十 五

1.　用圖解法解下列各聯立方程式：

(a) $\begin{cases}3x+2y=5\\8x-7y=1\end{cases}$　　　(b) $\begin{cases}3x+2y=25\\x-3y=-10\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2\\3x-2y=0\end{cases}$　　　(d) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=0\\5x-4y=31\end{cases}$

2.　試用圖解法解下列各聯立方程式：

(a) $\begin{cases}3x-4y=1\\6x+1=8y+3\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x+y=8\\7x-5y=5x-7y+16\end{cases}$

(c) $\begin{cases}x+2y=5\\3x-1=14-6y\end{cases}$　　(d) $\begin{cases}3x-2y=0\\6x+5m=4y+5m\end{cases}$

3. 用代數解法解上題(題二)各聯立方程式。這結果怎樣解釋?

4. 解下列各聯立方程式(用圖解法):

(a) $\begin{cases}x+2y=5\\3x-2y=-1\\8x+8y=24\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x+2y=5\\3x-2y=-1\\8x+8y=25\end{cases}$

第六章　整式四則之二　乘除法

I. 整式的乘法

§ 50. 單項式乘單項式　以單項式乘單項式,例如 $-2y^2(-5y^3)=$?在此有兩個問題:第一,積的係數是什麼?第二,積的文字及其指數各是什麼?現在分別來討論。

[第一]　積的係數　先看上舉的特例:

$$-2y^2(-5y^3)=?$$

因　$$-2y^2=-2\times y^2,\ -5y^3=-5\times y^3。$$

故　$$(-2y^2)(-5y^3)=(-2\times y^2)(-5\times y^3)$$
$$=(-2)\times y^2\times(-5)\times y^3。$$

這最後一式,係由四數相乘。依乘法交換律

$$(-2)\times y^2\times(-5)\times y^3$$

可改寫爲$(-2)\times(-5)\times y^2\times y^3$

$$\therefore\qquad (-2y^2)(-5y^3)=(-2)(-5)\times y^2\times y^3$$

$$=10\times y^2\times y^3。$$

同樣在通例 $ay^2\times by^3=a\times y^2\times b\times y^3=ab\times y^2\times y^3$，就是說"兩個單項式相乘，牠的積的係數，等於乘式被乘式二者係數的積"。

［第二］ 積的文字及其指數　先看特例，$y^2\times y^3=?$

因 $$y^2=y\times y,\ y^3=y\times y\times y。$$

$$\therefore\qquad y^2\times y^3=y\times y\times y\times y\times y=y^5。$$

同樣在通例 $y^m\times y^n=y\times y\times y\times\cdots\cdots\times$ 到 m 個

$$\times y\times y\times y\times\cdots\cdots\times \text{到 } n \text{ 個}$$

$$=y\times y\times y\times\cdots\cdots\times \text{到}(m+n)\text{個}$$

$$=y^{m+n}。$$

就是說"同文字相乘，其積的文字，就是那相乘的文字，其積的指數，等於乘式，被乘式二者指數的和"。

［注意］ 當不同文字相乘時，只能用乘號聯結要乘的二式，然後加以整理。千萬不能把牠們的指數相加。例如，

$$m\times n=mn\neq m^2 \text{ 或 } n^2 \text{ 或 } m^2n^2$$

$$m^2\times n^3=m^2n^3\neq m^5 \text{ 或 } n^5 \text{ 或 } m^5n^5$$

$$6m^2\cdot 7n^3\cdot 2m=12m^3\cdot 7n^3=84m^3n^3\neq 84m^5 \text{ 或 } 84n^3 \text{ 或 } 84m^6n^6。$$

綜上［第一］,［第二］兩條，乃得單項式相乘的普遍法則。

學者用自己語言把牠總述出來。

[例一]　$(-2y^2)(-5y^3)$

$$=(-2)(-5)y^2y^3=10y^5$$

[例二]　$(-3a)(-4b)(+5c)$

$$=(-3)(-4)\times5(a\times b\times c)$$

$$=60abc。$$

[例三]　求 $-2a^2b$，$-ab^2$，$4ac$，$8abc$ 的積。

[解]　$-2a^2b(-ab^2)4ac\times8abc$

$$=(-2)(-1)\times4\times8\times a^2b\times ab^2\times ac\times abc$$

$$=64a^{2+1+1+1}b^{1+2+1}c^{1+1}$$

$$=64a^5b^4c^2。$$

習題三十六

求下列各組代數式的積：

1. $x, 2x^2, 3x^3, 4x^4$。
2. $-x, -2x^2, -3x^3, -4x^4, -5x^5$。
3. $x^2y, -xy^2, -6x^2y^2, -8xyz, 3x^2z^3$。
4. $8a, -8b, -2c$。
5. $(-2a)^2, -3b^2, (-5c)^2$。
6. $(-a)^2, (-2a^2)^2, (-ab)^4$。
7. axy, bxz, cyz。
8. $-axyz, -bxyz, -cxyz$。

9. $\frac{1}{2}x^2yz, -\frac{3}{4}xyz^2, -\frac{5}{6}xy^2z,$

10. $\frac{3}{5}xyz, \frac{2}{3}abc, -\frac{5}{7}mnp$。

§ **51.** **單項式乘多項式**　在算術，依乘法分配律，$3(4+5-2)=3\times4+3\times5-3\times2$。在代數，依乘法分配律，亦有 $a(b+c-d)=ab+ac-ad$。這在前面已經講過了。故以單項式乘多項式，就是以這單項式分乘這多項式中的各項，而求這各部份積的代數和。

[例一]　$a(b+c-d+e-f)=ab+ac-ad+ae-af$。

[例二]　求 $3ab$ 與 $2a^2-2ab+2b^2-2ac+3bc+c^2$ 的積。

[解法]　$3ab(2a^2-2ab+2b^2-2ac+3bc+c^2)$

$$=3ab\times2a^2+3ab(-2ab)+3ab\times2b^2$$

$$+3ab(-2ac)+3ab\times3bc+3ab\times c^2$$

$$=6a^3b-6a^2b^2+6ab^3-6a^2bc+9ab^2c+3abc^2。$$

習 題 三 十 七

求下列各組代數式的積：

1. $x-7, x$。
2. $x-8y, -9y$。
3. $2x-3y, 6y$。
4. $x+8y, -9x$。
5. $x^2-xy, 3xy$。
6. $x^2-8xy^2, -3xy$。
7. $x^2+xy+y^2, -4xy$。
8. $x^3+3x^2y+3xy^2-y^3, -2yz$。
9. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, -ab$。
10. $x^{12}-x^3y^2-x^2y^3, -2x^3y^2$。

11. $3x^3-2x^2y^2+8xy^3,\ -3xy$。

12. $-2x^3+3xy^2+5y^3,\ -3xy^2$。

13. $x^3+x^2y+y^2,\ -5yz$。

14. $-x^2+2xy-y^2,\ -abyz$。

§ 52. **多項式乘多項式**　欲求$(a+b+c)(x+y)=?$ 先把$(x+y)$當做一數，以 m 代之，則$(a+b+c)m=am+bm+cm$，再以$(x+y)$代 m，則得 $(a+b+c)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)=ax+ay+bx+by+cx+cy$。

故以多項式乘多項式，就是以乘式的各項一一乘被乘式的各項，而求這各部份積的代數和。

［例一］

$$\begin{aligned}&(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x+y)\\&=x(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\\&\qquad+y(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\\&=x^4+\underline{3x^3y}+\underline{3x^2y^2}+\underline{xy^3}+\underline{x^3y}+\underline{3x^2y^2}+\underline{3xy^3}+y^4\\&=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\end{aligned}$$

但在這樣算法內，得了各部份積以後，欲由這各部份積中歸併同類各項，往往容易看錯。所以不如下法爲佳。

I.　將乘式被乘式，同依某文字的昇冪（或降冪）排列，并將乘式置於被乘式的下面。

II.　以乘式的各項遍乘被乘式的各項，并令所得部份積中同類各項排在同一直行之下。（如此便容易合併同類項。）

III. 依整式加減法，合併同類項。

取上例一演之：

$$\begin{array}{r} x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \qquad\qquad \\ x+y \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \\ \hline x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3 \qquad\qquad \\ x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4 \\ \hline x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \end{array}$$

［例二］ 求 x^3-3+2x^2， $-4x^3+2x+1$ 的積。

$$\begin{array}{r} x^3+2x^2 \qquad -3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ -4x^3 \qquad\qquad +2x+1 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline -4x^6-8x^5 \qquad\quad +12x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ 2x^4+\;4x^3 \qquad\quad -6x \qquad\quad \\ x^3+2x^2 \qquad\quad -3 \\ \hline -4x^6-8x^5+2x^4+17x^3+2x^2-6x-3 \end{array}$$

［注意一］ 乘式，被乘式務須同依某文字的昇冪（或同依降冪）排列，否則次序凌亂，乘算手續就不易進行了。學者試把上例，依題中原有次序去演算，察其繁簡如何。

［注意二］ 學者試把上例寫成右形 $\begin{array}{r} x^3+2x^2-3 \\ \underline{-4x^3+2x+1} \end{array}$ 而乘之，察其有何不便。然則，被乘式中倘有缺項（就是該項的係數爲零），應該怎樣處理？

習 題 三 十 八

試求下列各組代數式的積：

1. $x+5$， $x-6$。

2. $x+5,\qquad x-6,\qquad x+7$。

3. $x+5,\qquad x-6,\qquad x-5,\qquad x+6$。

4. $x^2+5x+6,\qquad x^2-5x-6$。

5. $x^2-4x+4,\qquad x^2+4x+4$。

6. $x^2-4xy+4y^2,\qquad x^2+4xy+4y^2$。

7. $x^2+x^4-x+6,\qquad 2x+x^2-2$。

8. $x^2y^2+x^4-xy^3+6y^4,\qquad 3xy+x^2-2y^2$。

9. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz,\qquad x+y+z$。

[解法]　依 x 的降冪排列乘式，被乘式：

$$
\begin{array}{llllll}
x^2-xy-xz+y^2-yz+z^2 \\
x+y+z \\
\hline
x^3-x^2y-x^2z+xy^2-xyz+xz^2 \\
\quad x^2y & -xy^2-xyz & +y^3 & -y^2z+yz^2 \\
\qquad x^2z & -xyz-xz^2 & +y^2z & -yz^2+z^3 \\
\hline
x^3 & -3xyz & +y^3 & +z^3
\end{array}
$$

10. $x^2+y^2+2xy+2xz+z^2,\qquad x-y+z$。

11. $a^2+4b^2+9c^2-2ab-3ac-6bc,\qquad a+2b+3c$。

12. $(x+3y+5)(x-2-6)=?$

13. $(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x-y)=?$

14. $(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)=?$

求出下列各式的結果並熟記之：

15. $(x+y)^2=?$　　16. $(x-y)^2=?$

17. $(x+y)^3=?$　　18. $(x-y)^3=?$

19. $(x+y)(x-y)=?$　　20. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=?$

21. $(x-y)(x^2+xy+y^2)=?$　　22. $(x+y+z)^2=?$

[注意]　上面幾題(15—22)的結果，在代數上應用極廣，學者務宜熟記。

能熟記的人，此後應用自如，到處有左右逢源之樂；不能熟記的，必至時感困難，叫苦不已。他日成績的高下，在此已種下因子了。

II. 整式的除法

§ 53. **單項式除單項式** 除法爲乘法的還原運算。單項式相除的問題，可由單項式相乘的方法求解決。

[例一] 在乘法既有 $3y(-2y^2)=-6y^3$，故

在除法應得，$$(-6y^3)\div 3y=-2y^2。$$

[例二] 在乘法，$ax^my^p\cdot bx^ny^q=abx^{m+n}y^{p+q}$；故

在除法應得，$$\frac{abx^{m+n}y^{p+q}}{ax^my^p}=bx^ny^q。$$

由上兩例看來，可得以單項式除單項式的方法如下：

[第一] 商的係數 以除式係數除被除式係數，其結果就是商的係數。

[第二] 商的文字及其指數 假使除式和被除式文字相同，其商的文字就是相除的文字，其商的指數等於自被除式中各文字指數減去除式中各該文字的指數。假使除式和被除式文字不同，其商只能寫成分數式，除式做分母，被除式做分子，而不能相除，指數也不能相減。

[例三] $-4x^2yz^3\div 6xyz^2=-\frac{2}{3}xz$。

[例四] $6x^2\div 3y=2x^2\div y\neq 2x$ 或 $2y$ 或 $2\cdot\frac{x}{y}$。

［例五］ $y^3 \div y^3 = 1$，$3x^2 \div x^2 = 3$，$6x^3 \div (-2x^3) = -3$。對不對？

習題三十九

在下列各組代數式中，試以右式除左式：

1. $-21x^3, -7x^2$。　　2. $21x^3, -7x^2$。
3. $-21x^3, 7x^2$。　　4. $13xyz, 26xyz$。
5. $-13x^2y^2z^2, 26xyz$。　　6. $6x^my^n, 3xy$。
7. $-51a^3b^4c^5, -17ab$。　　8. $-abcd, abcd$。

求下列各式的結果：

9. $8a^2b^2 \div (-4ab) \times 2ab = ?$
10. $8a^2b^2 \div \{(-4ab) \times 2ab\} = ?$
11. $16a^4b^5c^6 \div \{-3a^5b^7c^8 \div (-3a^4b^6c^5)\} = ?$
12. $-8a^5b^4c^3 \div (-4a^3b^2c^2) \div (-2abc) = ?$
13. $2x^3 \div (-2y^3) = ?$

§ 54. 以單項式除多項式　以單項式除多項式，怎樣除法？仍可由單項式乘多項式的方法去推求。

因在乘法，$A(B+C+D) = AB+AC+AD$。

故在除法，應得 $(AB+AC+AD) \div A = B+C+D$

$$= \frac{AB}{A} + \frac{AC}{A} + \frac{AD}{A}。$$

用語言來說，就是"以單項式除多項式，等於以這單項式遍除這多項式中的各項，而求這各部分商的代數和。

[例一]　$(12x^4+8x^3+2x^2)\div 2x$

$=12x^4\div 2x+8x^3\div 2x+2x^2\div 2x$

$=6x^3+4x^2+x$。

[例二]　$(5a^2b^3c^4-10a^3b^4c^5-15a^4b^5c^6)\div 5abc$

$=ab^2c^3-2a^2b^3c^4-3a^3b^4c^5$。

習　題　四　十

1.　$36x^4\div(9x^3+12x^2+4x)=4x+3x^2+9x^3$。對不對?何故?

[注意]　初學代數的人,常有與此類似的錯誤。讀本書者務宜留心。

2.　$(9x^3+12x^2+4x)\div 36x^4=$?　能不能得簡商?

演下列各除法:

3.　$(x^2+xy)\div x$。

4.　$(2a^3-8a^2)\div(-2a^2)$。

5.　$(34x^3-51x^2)\div 17x$。

6.　$(-3a-6ac)\div(-3a)$。

7.　$(-x^2y-x^2y^2-x^3y^3)\div(-xy)$。

8.　$(a^3b^2-a^2b^5-a^4b^2)\div(-a^2b)$。

9.　$(3ax^4-39bx^3-63x^2)\div 3x$。

10.　$(a^3-a^2b+3a^4b^2)\div(-a^2)$。

下列各組代數式中,試以右式除左式:

11.　$a^2+ab+ac-ad,a$。

12.　$a^2b-ab+a^2b^2,-ab$。

13.　$6l^2m^2n^2-9l^2mn-3lmn^2+9lm^2n,-3lmn$。

14.　$-x^6-72x^5+4x^4-36x^4+24x^3,-4x^3$。

15.　$am+bm+cm,m$。

16. $am^2+bm+cm, m$。

17. $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y), x+y$。

18. $a(x+y)^3+b(x+y)^2-c(x+y), x+y$。

§ 55. 多項式除多項式　這是除法中比較最繁的問題。怎樣除法？容細論之。

[例一]　試以 $x+y$ 除 $ax+ay+bx+by+cx+cy$。

[解法]　把被除式改寫為 $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$，則據前節習題 17，可得

$$\frac{ax+ay+bx+by+cx+cy}{x+y}$$

$$=\frac{a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)}{x+y}$$

$$=\frac{a(x+y)}{x+y}+\frac{b(x+y)}{x+y}+\frac{c(x+y)}{x+y}$$

$$=a+b+c$$

但是，怎樣就能把被除式變為適當的形式，使除算易於進行？其手續往往繁而且難，不盡像本例的簡易。所以這種除法，不能適用於一切問題，並非通法。欲求通法，請看下例：

[例一]　試以 x^2+2x-3 除 $2x^4+3x^3-5x^2+9x-9$

[解法]

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-x+3 \\
x^2+2x-3 & 2x^4+3x^3-5x^2+9x-9 \\
 & \underline{2x^4+4x^3-6x^2} \\
 & \quad -x^3+x^2+9x-9 \\
 & \quad \underline{-x^3-2x^2+3x} \\
 & \qquad\quad 3x^2+6x-9 \\
 & \qquad\quad \underline{3x^2+6x-9} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

[說明]　把除式被除式，各依 x 的降冪排列於同一橫行內，並在除式被除式之間作一豎線以區隔之。又在被除式之上作一橫線（橫線之上預備寫商數）。

(1)　以除式第一項 x^2，除被除式第一項 $2x^4$，得 $2x^2$。這就是商的第一項。

乃自被除式中減去除式 x^2+2x-3 的 $2x^2$ 倍。得第一餘式 $-x^2+x^2+9x-9$。

(2)　再以除式第一項 x^2，除餘式 $-x^3+x^2+9x-9$ 的第一項 $-x^3$，得 $-x$。這就是商的第二項。

乃自第一餘式 $-x^3+x^2+9x-9$ 中減去 x^2+2x-3 的 $-x$ 倍。得第二餘式 $3x^2+6x-9$。

(3)再以除式第一項 x^2 除第二餘式 $3x^2+6x-9$ 的第一項，得 $+3$。這就是商的第三項。

乃自第三餘式 $3x^2+6x-9$ 中，減去除式 x^2+2x-3 的 $+3$ 倍。得餘數 0。

由是得所求的商爲 $2x^2-x+3$。

[例二]　試以 $xy+x^2+y^2$ 除 $x^2y^2+x^4+y^4$。

[解法]　先把除式，被除式，同依 x 的昇冪排列，再行除算。

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2-xy+x^2 \\
\hline
y^2+xy+x^2 & y^4 \qquad +x^2y^2 \qquad +x^4 \\
 & \underline{y^4+xy^3+x^2y^2} \\
 & \quad -xy^3 \qquad\qquad +x^4 \\
 & \quad \underline{-xy^3-x^2y^2-x^3y} \\
 & \qquad\qquad x^2y^2+x^3y+x^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2y^2+x^3y+x^4} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

[例三]　試以 $1+x$ 除 x^2+1-2x

[解法]　(1)先把除式，被除式，同依 x 的降冪排列，再行除算。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-3 \\
\hline
x+1 & x^2-2x+1 \\
 & \underline{x^2+\ x} \\
 & \quad -3x+1 \\
 & \quad \underline{-3x-3} \\
 & \qquad\quad +4
\end{array}
$$

(2)先把除式，被除式，同依 x 的昇冪排列，再行除算。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-3x+4x^2 \\
\hline
1+x & 1-2x+\ x^2 \\
 & \underline{1+\ x} \\
 & \quad -3x+\ x^2 \\
 & \quad \underline{-3x-3x^2} \\
 & \qquad\quad 4x^2 \\
 & \qquad\quad \underline{4x^2+4x^3} \\
 & \qquad\qquad -4x^3
\end{array}
$$

[說明] 這兩種方法所得的結果，形式各異，但是都對的。牠們的不同在於答數的表示方法。

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}=x-3+\frac{4}{x+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\text{法}$$

$$\frac{1-2x+x^2}{1+x}=1-3x+4x^2-\frac{4x^3}{1+x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\text{法}$$

(1)法的優點，在我們演至餘式第一項的指數，低於除式第一項的指數時，就可以不必再除下去，所以商的項數有限，簡而不繁。

(2)法恰巧相反，餘式的指數愈除愈大，商的項數可以隨意增加，沒有自然的限制。

由上面諸例看來，可見多項式相除的方法可總括之如下：

第一步 把除式被除式同依某文字的升羃或降羃排列起來(被除式中遇有缺項時，並須留出相當空位)。

第二步 以除式中第一項，除被除式中第一項，得商的第一項。

第三步 以商的第一項遍乘除式的各項，並將所得的積自被除式中減去之。

第四步 把第三步所得餘式，當做新被除式，再照第二步，第三步繼續進行，直到餘式爲零而止（但若除式不能除盡被除式時，則除式，被除式都應同依某文字的降羃排列。除算的手續，

應演至“除式第一項某文字的指數，低於除式第一項某文字的指數”爲止)。

習題四十一

演下列各除法：

1. $(x^2+15x+56)\div(x+7)$。

2. $(x^2-15x+56)\div(x-7)$。

3. $(x^2-15x+56)\div(7-x)$。

4. $(x^2+15x+56)\div(7+x)$。

5. $(6x^2-7xy-3y^2)\div(2x-3y)$。

6. $(4a^2+23a+15)\div(4a+3)$。

7. $(x^4+x^2+1)\div(x^2+x+1)$。

8. $(x^4+x^2+1)\div(x^2-x+1)$。

9. $(x^4-3x^3+x^2+x+2)\div(x-2)$。

10. $(3x^4+x^3+x^2+x-2)\div(3x-2)$。

11. $(x^3+y^3)\div(x+y)=?$

$$(x^3+y^3)\div(x+y)=x^3\div x+y^3\div y$$

$$=x^2+y^2\text{。}$$ 對不對？何故？

12. $(x^3+y^3)\div(x+y)=?$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+xy+y^2 \\ \hline
x+y & x^3 \qquad\qquad\quad +y^3 \\
 & x^3+x^2y \\ \hline
 & \quad x^2y \qquad\quad +y^3 \\
 & \quad x^2y+xy^2 \\ \hline
 & \qquad\quad xy^2+y^3 \\
 & \qquad\quad xy^2+y^3 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

對不對？何故？

[注意]　上列兩種錯誤，也是初學代數的人常有的錯誤。學者於此務宜留心。

下列各題中試以右式除左式：

13.　$x^4+y^4+x^2y^2$,　　　　x^2-xy+y^2。

14.　x^4-y^4,　　　　$x-y$。

15.　x^4-y^4,　　　　$x+y$。

16.　x^5+y^5,　　　　$x+y$。

17.　x^5-y^5,　　　　$x-y$。

18.　x^3+y^3,　　　　$x+y$。

19.　x^3-y^3,　　　　$x-y$。

20.　$12x^3-x^5+32x^4+30x^2-3x^3$,　$3x^2+5+2x$。

21.　$(x^3-y^3)\div(x+y)=?$

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-xy+y^2 \\
\cline{2-2}
x+y & x^3 \qquad\qquad -y^3 \\
 & \underline{x^3+x^2y \qquad\qquad} \\
 & -x^2y \qquad -y^3 \\
 & \underline{-x^2y-xy^2 \qquad} \\
 & xy^2-y^3 \\
 & \underline{xy^2+y^3} \\
 & -2y^3
\end{array}
$$

故以 $x+y$ 除 x^3-y^3，得商 x^2-xy+y^2，餘 $-2y^3$。

$\therefore$　$(x^3-y^3)\div(x+y)=x^2-xy+y^2+(-2y^3)\div(x+y)$。

22.　$(x^4+y^4)\div(x+y)=?$

23.　$(x^4+y^4)\div(x-y)=?$

24.　試以 $x+2y-z$ 除 $x^2+4xy-4xz+4y^2-8yz+3z^2$。

［解法］

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2y-3z \\
\cline{2-2}
x+2y-z & x^2+4xy-4xz+4y^2-8yz+3z^2 \\
 & \underline{x^2+2xy-xz\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad 2xy-3xz+4y^2-8yz+3z^2 \\
 & \qquad \underline{2xy\qquad\quad +4y^2-2yz\qquad} \\
 & \qquad\qquad -3xz\qquad -6yz+3z^2 \\
 & \qquad\qquad \underline{-3xz\qquad -6yz+3z^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

25. $(2x^2-3y^2+xy-xz-4yz-z^2)\div(2x+3y+z)=?$

26. $(x^2+2xy+y^2-z^2)\div(x+y-z)$。

27. $(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$。

28. $(x^3+8y^3+z^3-6xyz)\div(x+2y+z)$。

習題四十二（四則雜題）

化簡以下各式：

1. $(x^4-y^4)\div(x+y)\div(x-y)$。

2. $(x^4-y^4)\div[(x^2+y^2)(x+y)]$。

3. $[(x^5-y^5)\div(x-y)](x+y)$。

4. $(x^4-13x^2+36)\div(x-2)\div(x-3)\div(x+2)\div(x+3)$。

5. $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)$。

6. $[(x-2)(x+2)][(x-3)(x+3)]$。

7. $(3a-2b)(9a^2+4b^2)(81a^4+16b^4)(3a+2b)$。

8. $(16x^4+36x^2y^2-81y^4)\div(4x^2-6xy+9y^2)$

 $+(16x^4+36x^2y^2+81y^4)\div(4x^2+6xy+9y^2)$。

9. $6m^2+13mn+6n^2$

 $-(4m^2-9n^2)(9m^2-4n^2)\div(6m^2-13mn+6n^2)$。

10. $a-2[a-3(a+b)(a-b)-4\{a-(a+b)(a-b)-(a-b)\}]$。

習題四十三

解下列各方程式:

1. $(x+1)(x+3)=(x+5)(x-6)$。

2. $(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+6x-6)$。

3. $(x+4)(x-5)=x^2-8$。

4. $(x^3-8)\div(x-2)=(x+3)(x-3)$。

5. $(27x^3+8)\div(3x+2)=(x^3-27)\div(x-3)+8x^2$。

6. $$\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}+\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2+10 \\[2ex] \dfrac{x^2-y^2}{x-y}+\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2+11 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x^2+4}+\dfrac{y^2+2y+1}{y+1}=x(x+1) \\[2ex] \dfrac{x^4-16}{x^2-4}+\dfrac{y^2-2y+1}{y-1}=x(x-1) \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+8-6xy}{x+y+2}=x^2+y^2-xy+8 \\[2ex] 3x+2y+8=0 \end{cases}$$

9. 兩個連續奇數中,大數的平方比這兩數的積大 38。求這兩數。

10. 三個連續奇數的積比其中第二數的立方少 76。求這三數。

11. 有長方形,若把長增五尺,闊減五尺,其面積不變。若把長增二尺,闊減三尺,其面積也不變。求這長方形的面積。

12. 兒童分桃。平均分派,每人得桃若干枚。若有一人肯全部犧牲,則每人可多得一枚;若有三人要各得雙份,則每人必須少得 2 枚。求桃數及人數。

第七章　公式的應用

§ **56**. **引論**　前章所述的乘除法都是通法，對於任何乘除問題均能適用。但是有時卻不是最簡的方法。因爲有些乘除問題，常可依據公式，一望而得其結果；不必再用前章的方法實行演算。這些公式，就是前章習題三十八 15—22 諸題所得的等式。因其爲用極廣，故再分節述其用法於下。

§ 57. **二數和的平方**　由實行乘算，得公式：

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

自此以後，欲求二數和的平方，便可由這公式直接記出其結果，不必仍如前章方法，實施許多不必要的乘算手續了。

［例一］　$(3a+2b)^2=?$

［解法］　$(3a+2b)^2=9a^2+12ab+4b^2$。

［說明］　以$(3a+2b)^2$ 與公式的左邊比較，可見 $3a$ 就是公式中的 x，$2b$ 就是公式中的 y。故欲求 $(3a+2b)^2$ 的結果，即以 $3a$ 代入公式中的 x，$2b$ 代入公式中的 y。於是得$(3a+2b)^2=(3a)^2+2(3a)(2b)+(2b)^2=9a^2+12ab+4b^2$。

［例二］　$(9x+5m)^2=(9x)^2+2\cdot9x\cdot5m+(5m)^2$

$$=81x^2+90mx+25m^2。$$

[例三]　$\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{xy}{12}+\dfrac{y^2}{4}$，對不對？何故？

[注意]　上面的錯誤,理由原甚淺顯。但在初學者,偶不當心,往往有此錯誤。讀本書者,千萬留意。

[例四]　$(a+b)^2=a^2+b^2$。對不對？何故？

[注意]　這種錯誤,理由也很淺顯。然而初學者往往不能免此。且其錯誤的形式,也不止一種。例如：

(1)　明知$(a+b)^2\neq a^2+b^2$,有時偏要說 $\sqrt{x^2+y}=x+\sqrt{y}$。譬如求83的平方根，把83開平方如左式 $\begin{array}{r|l}83 & 9\\ 81 & \\ \hline 2 & \end{array}$ 如此本無錯誤。但是半數以上的同學,更將洋洋得意地說$\sqrt{83}=9+\sqrt{2}$，於是便成大錯了。

(2)　明知$(a+b)^2\neq a^2+b^2$，但有時仍要說$(m^2+n^2)^2=m^4+n^4$。

(3)　明知$(a+b)^2\neq a^2+b^2$，但有時仍要說 $x^2+y^2=(x+y)^2$。

類此之例很多,不勝枚舉。讀本書者,務各當心。

習題四十四

依本節公式直接寫出下列各式的結果：

1.　$(3x+4y)^2$　　　2.　$(3xy+6z)^2$

3.　$\left(\dfrac{x}{3}+y\right)^2$　　　4.　$\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)^2$

5.　$\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}\right)^2$　　　6.　$\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{yz}{4}\right)^2$

7.　$\left(m^2n^2+\dfrac{p^3q^3}{2}\right)^2$　　　8.　$\left(2a^2b-\dfrac{cd^2}{6}\right)^2$

9.　$\left(\dfrac{ab}{8}-\dfrac{cd}{9}\right)^2$　　　10.　$(25x^2+5y^2)^2$

11. $(9x^2+25y^2)^2$　　12. $(4m^3n^3+x^2y)^2$

13. $[(x+y)+z]^2=(x+y)^2+2z(x+y)+z^2=?$

14. $(a+2b+3c)^2=?$

§ 58. 二數差的平方　由實行乘算得公式

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

這公式和前節公式大部相同，所不同的，只有第二項的符號，學者必須注意。

依此公式，便可不用乘法，直接寫出二數差的平方＝?試看下例：

[例一]　$(3a-4b)^2=(3a)^2-2(3a)(4b)+(4b)^2$

$$=9a^2-24ab+16b^2。$$

[例二]　$\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{4}\right)^2=\left(\frac{2x}{3}\right)^2-2\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{3y}{4}\right)+\left(\frac{3y}{4}\right)^2$

$$=\frac{4x^2}{9}-xy+\frac{9y^2}{16}。$$

習題四十五

依公式直接求出下列各式的結果：

1. $(3x-4y)^2$　　2. $(3xy-6z)^2$

3. $\left(\frac{x}{3}-y\right)^2$　　4. $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^2$

5. $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}\right)^2$　　6. $\left(\frac{x}{3}-\frac{yz}{4}\right)^2$

7. $\left(m^2n^2-\frac{p^3q^3}{2}\right)^2$　　8. $\left(2a^2b-\frac{cd^2}{6}\right)^2$

9. $\left(\frac{ab}{8}-\frac{cd}{9}\right)^2$ 10. $(x+y-z)^2$

11. $(x-y+z)^2$ 12. $(x-y-z)^2$

13. $(x-y)^2=x^2-y^2$，對不對？何故？

14. $(x-y)^2=x^2+y^2$，對不對？何故？

15. $(x-y)^4=x^4-y^4$，對不對？何故？

16. $(x^2-2xy+y^2)^2=[(x^2+y^2)-2xy]^2$

$$=(x^2+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2=?$$

17. $(x-y)^4=?$ 18. $(x+y)^4=?$

§ 59. 二數和差的積 由實行乘算，得公式

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

依此公式，欲以二數之和乘該二數之差，便可直接立得其積，不待實行乘算了。試看下例：

[例一] $(5a+6b)(5a-6b)=(5a)^2-(6b)^2=25a^2-36b^2$。

[例二] $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$。

[例三] $(3x+4y)(4x-3y)=12x^2-12y^2$。對不對？何故？

[例四] $(x+y)^2(x-y)^2=?$

[解法] $(x+y)^2(x-y)^2=[(x+y)(x-y)]^2$

$$=(x^2-y^2)^2$$

$$=x^4-2x^2y^2+y^4$$。

習 題 四 十 六

依公式，直接求出下列各式的結果(不能應用公式的，用普通乘法)：

1. $(3x+5y)(3x-5y)$　　2. $(7x-8y)(7x+8y)$

3. $(9-x^2)(9+x^2)$　　4. $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)\left(\frac{3x}{2}-\frac{2y}{3}\right)$

5. $(7x+8y)(8x-7y)$　　6. $(5a+6b)(6a-5b)$

7. $\left(\frac{3}{2}mn-\frac{2}{3}pq\right)\left(\frac{3mn}{2}+\frac{2pq}{3}\right)$

8. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$　　9. $(3x+3y)(4x-4y)$

10. $(x-y)\ (x^2+y^2)\ (x+y)=?$

[解法]　$(x-y)(x^2+y^2)(x+y)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

$$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=x^4-y^4$$

11. $102\times 98=?$

[解法]　$102\times 98=(100+2)(100-2)=10000-4=9996$

12. $(x-y)(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)=?$

13. $\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{4x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)=?$

14. $104\times 96=?$　　15. $1013\times 987=?$

16. $(3m+4n)^2(3m-4n)^2=?$

17. $(2x+y)^2(2x-y)^2(4x^2+y^2)^2=?$

§ 60. 二數和的立方　由實行乘算得公式:

$$\underline{(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$$

在此公式中,等號右邊的形式,好像沒有左邊那樣容易記,但是,假若能注意下列二點,便也不難記憶了。

(1)　各項的係數,自第一項起依次是 1,3,3,1。

(2)　x 的指數,自第一項起依次是 3,2,1,y 的指數,自第二項起,依次是 1,2,3。

公式的左右兩邊，既能認清記熟，再看其用法如下：

[例一]　$(2m+3n)^3$

$$=(2m)^3+3(2m)^2(3n)+3(2m)(3n)^2+(3n)^3$$

$$=8m^3+36m^2n+54mn^2+27n^3。$$

[例二]　$\left(\frac{x}{2}+y\right)^3=\left(\frac{x}{2}\right)^3+3\left(\frac{x}{2}\right)^2y+3\left(\frac{x}{2}\right)y^2+y^3$

$$=\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2y}{4}+\frac{3xy^2}{2}+y^3。$$

習題四十七

依公式直接求出下列各式的結果：

1. $(2p+3q)^3$　　2. $(3p+2q)^3$
3. $(10x+y)^3$　　4. $(10y+x)^3$
5. $(10x^2y+1)^3$　　6. $(x^2y+10)^3$
7. $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right)^3$　　8. $\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\right)^3$
9. $\left(\frac{x^2}{10}+\frac{y^3}{3}\right)^3$　　10. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^3}{10}\right)^3$

§ 61.　**二數差的立方**　由實行乘算得公式：

$$\underline{(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$$

這公式與前節公式大都相同；所不同的，只有符號一點。學者須把牠辨別清楚。

[例一]　$(x^2-5y^3)^3$

$$=(x^2)^3-3(x^2)^2(5y^3)+3x^2(5y^3)^2-(5y^3)^3$$

$$=x^6-15x^4y^3+75x^2y^6-125y^9。$$

[例二]　$(a+b)^3(a-b)^3=(a^2-b^2)^3$

$$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6。$$

習題四十八

依公式求下列各式的結果:

1. $(3m-n)^3$　　2. $(4m^2-3n^2)^3$

3. $(5p-6q)^3$　　4. $(6p-5q)^3$

5. $\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{3}\right)^3$　　6. $\left(\frac{m}{3}-\frac{n}{2}\right)^3$

7. $(2x-y)^3(2x+y)^3$　　8. $(10x^2y^2-3)^3$

9. $(x-y)^3=?$　$(y-x)^3=?$

然則 $(x-y)^3$ 與 $(y-x)^3$ 有何關係? 等不等? 何故?

10. $(x-y)^2=?$　$(y-x)^2=?$

然則 $(x-y)^2$ 與 $(y-x)^2$ 等不等? 何故?

§62.　可化爲立方之和的　由實行乘算得公式:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$$

在這公式中,等號右邊的形式容易記清。左邊則應注意第二括弧內各項文字指數及其符號。至於第一括號內,形式甚簡,不難一見不忘。

學者認清記熟上式之後,再看牠的用法:

[例一]　$(3a+2p)(9a^2-6ap+4p^2)=?$

[解法] 因 $9a^2-6ap+4p^2$ 可化為 $(3a)^2-(3a)(2p)+(2p)^2$,故 $(3a+2p)(9a^2-6ap+4p^2)$ 可化為 $(3a+2p)[(3a)^2-(3a)(2p)+(2p)^2]$。拿牠和公式左邊比較,則 $3a$ 就是公式中的 x, $2p$ 就是公式中的 y。故所求的積就是在公式右邊把 x 換成 $3a$, y 換成 $2p$ 所得的結果。以簡明的算式表之如下:

$$\begin{aligned}&(3a+2p)(9a^2-6ap+4p^2)\\&=(3a+2p)[(3a)^2-(3a)(2p)+(2p)^2]\\&=(3a)^3+(2p)^3=27a^3+8p^3。\end{aligned}$$

[例二] $(5a+4m)(25a^2-20am+16m^2)=?$

[解法] $(5a+4m)(25a^2-20am+16m^2)$

$$\begin{aligned}&=(5a+4m)[(5a)^2-(5a)(4m))+(4m)^2]\\&=(5a)^3+(4m)^3=125a^3+64m^3。\end{aligned}$$

習題四十九

依公式直接求出下列各題的結果:

1. $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$
2. $(m^2+n^2)(m^4-m^2n^2+n^4)$
3. $(3p+4q)(9p^2-12pq+16q^2)$
4. $\left(\frac{p^2}{4}+s\right)\left(\frac{p^4}{16}-\frac{p^2s}{4}+s^2\right)$
5. $\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{3}\right)\left(\frac{m^2}{4}-\frac{mn}{6}+\frac{n^2}{9}\right)$

6. $(4a+2b)(4a^2-2ab+b^2)$

7. 下列諸等式中，那個對，那個不對？

(a) $(x+y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3$

(b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3$

(c) $(x+y)(x^2-xy-y^2)=x^3+y^3$

8. 求 $(3m^2+2n^2)(9m^4+6m^2n^2+4n^4)=?$ 能用公式嗎？何故？怎樣才能應用公式？

9. 求 $(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)=?$

[解法] 原式 $=(2x+3y)(\overline{4x^2-6xy+9y^2}+12xy)$

$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)+12xy(2x+3y)$$

$$=8x^3+27y^3+24x^2y+36xy^2。$$

10. 仿上題解法求題 8 的結果。

11. 求 $(5x^2+4y)(25x^4-10x^2y+16y^2)$。

§ 63. 可化為立方之差的

由乘法得公式：

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$

學者注意本節公式與前節公式何處相同，何處不同。把這兩公式區別清楚，勿使混淆，應用時就可免於錯誤了。

[例一] $(3c-d)(9c^2+3cd+d^2)$

$$=(3c-d)[(3c)^2+(3c)d+d^2]$$

$$=(3c)^3-d^3=27c^3-d^3。$$

[例二] $\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{2}+y^2\right)=\frac{x^3}{8}-y^3。$

習題五十

依公式直接求出下列各式的結果：

1. $(9x^2+3xy+y^2)(3x-y)$。

2. $(x^2+3xy+9y^2)(x-3y)$。

3. $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)$。

4. $(4m^2n-5pq^2)(16m^4n^2+20pq^2m^2n+25p^2q^4)$。

5. $(7a-8b)(49a^2+56ab+64b^2)$。

6. $(5s-6t)(25s^2+30st+36t^2)$。

7. $(a-b)[(a-1)^2+(a-1)(b-1)+(b-1)^2]$。

8. $(c-d)[(c-2)^2+(c-2)(d-2)+(d-2)^2]$。

9. $(m+n)(m^2+mn+n^2)=m^3+n^3$。對不對？何故？

10. $(3a-4b)(9a^2+24ab+16b^2)=?$ 能不能直接用公式？如其不能，應如何變化才可用簡法來得他的積（參看前節習題 9 的解法）？

§ 64. 三數和的平方

由乘法得公式：

$$\underline{(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}$$

用此公式，就可把三數和的平方，直接寫出來，不必實行乘算了。

［例一］ $(a+2b+c)^2$

$$=a^2+(2b)^2+c^2+2a(2b)+2(2b)c+2ac$$

$$=a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ac。$$

［例二］ $(m-n-2p)^2=\{m+(-n)+(-2p)\}^2$

$$=m^2+(-n)^2+(-2p)^2+2m(-n)+2m$$

$$(-2p)+2(-n)(-2p)$$

$$=m^2+n^2+4p^2-2mn+4np-4mp。$$

[例三] $\left(x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)^2=\left\{x+\frac{y}{2}+\left(-\frac{z}{2}\right)\right\}^2$

$$=x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(-\frac{z}{2}\right)^2+2x\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$+2\left(\frac{y}{2}\right)\left(-\frac{z}{2}\right)+2x\left(-\frac{z}{2}\right)$$

$$=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}+xy-\frac{yz}{2}-xz。$$

習題五十一

依公式直接求出下列各式的結果：

1.　$(2x+y+3z)^2$　　2.　$(x+2y+3z)^2$

3.　$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^2$　　4.　$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}+z^2\right)^2$

5.　$(m-n-p)^2$　　6.　$(-m+n+p)^2$

7.　$(a+3b-5c)^2$　　8.　$(a-3b-5c)^2$

§ 65.　怎樣求$(ax+b)(cx+d)$。　由乘法得公式：

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$$

在此公式中，等號右邊的首末兩項，通常不致弄錯，所宜注意的，就是當中一項 x 的係數。學者認清記熟之後，再看下例：

[例一]　$(x+5)(x-4)$

$$=x^2+(5-4)x+5(-4)$$

$$=x^2+x-20。$$

[例二]　$(x-5)(x+4)$

$$=x^2+[(-5)+4]x+(-5)4$$

$$=x^2-x-20。$$

[例三]　$(3y+2)(4y-5)$

$$=12y^2+(8-15)y+2(-5)$$

$$=12y^2-7y-10。$$

[例四]　$(3y-2)(4y-5)$

$$=12y^2+(-8-15)y+(-2)(-5)$$

$$=12y^2-23y+10。$$

習題五十二

依公式直接求出下列各式的結果：

1. $(x+5)(x+6)$
2. $(x-5)(x-6)$
3. $(x+5)(x-6)$
4. $(x-5)(x+6)$
5. $(x+9)(x+10)$
6. $(x-9)(x-10)$
7. $(x+10)(x-9)$
8. $(x+9)(x-10)$
9. $(2x+5)(x+6)$
10. $(2x-5)(x-6)$
11. $(2x+5)(x-6)$
12. $(2x-5)(x+6)$
13. $(2x-5)(8x-7)$
14. $(2x-5)(8x+7)$
15. $(2x+5)(8x-7)$
16. $(2x+5)(8x+7)$

17. $(2x+3)(3x+2)$　　18. $(2x+3)(3x-2)$

19. $(2x-3)(3x+2)$　　20. $(2x-3)(3x-2)$

21. $(-x+5)(-2x-8)$　　22. $(-x+5)(-2x+8)$

23. $(-3x+8)(-5x-9)$　　24. $(-3x-8)(-5x+9)$

25. $(9x+8y)(8x-9y)$　　26. $(9x-8y)(8x-9y)$

27. $(9x-8y)(8x+9y)$

28. $(3x+5y)(4x+3y)(3x-5y)(4x-3y)$

$=[(3x+5y)(3x-5y)][(4x+3y)(4x-3y)]$

$=(9x^2-25y^2)(16x^2-9y^2)=144x^4-481x^2y^2+225y^4$

29. $(m+3n)(3m-4n)(m-3n)(3m+4n)$

30. $(4x-3y)(5x+2y)(4x+3y)(5x-2y)$

§ 66. 怎樣求 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ 由乘法可得公式：

$$\underline{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4}$$

用此公式，也可省許多乘算手續。

[例一]　$(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)=?$

[解法]　$(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$

$=[x^2+x(3y)+(3y)^2][x^2-x(3y)+(3y)^2]$

$=x^4+x^2(3y)^2+(3y)^4=x^4+9x^2y^2+81y^4$。

[例二]　$(x^2-4xy+16y^2)(x^2+4xy+16y^2)$

$=x^4+16x^2y^2+256y^4$。

習題五十三

用公式直接求出下列各式的結果：

1. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
2. $(4c^2-2cd+d^2)(4c^2+2cd+d^2)$
3. $(9a^2-6ab+4b^2)(9a^2+6ab+4b^2)$
4. $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
5. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)$
6. $\left(25x^2-xy+\frac{y^2}{25}\right)\left(25x^2+xy+\frac{y^2}{25}\right)$

§ 67. 被除式是 x^2-y^2 的 在乘法旣有 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，故在除法，便有

$$(x^2-y^2)\div(x+y)=x-y$$

$$(x^2-y^2)\div(x-y)=x+y$$

[例一] $(16m^2n^2-49p^6q^4)\div(4mn+7p^3q^2)=4mn-7p^3q^2$。

[例二] $\left(25x^2-\frac{1}{4}y^2\right)\div\left(5x-\frac{1}{2}y\right)=5x+\frac{1}{2}y$。

§ 68. 被除式是 x^3+y^3 的 在乘法旣有 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$，故在除法應有

$$(x^3+y^3)\div(x+y)=x^2-xy+y^2$$

$$(x^3+y^3)\div(x^2-xy+y^2)=x+y$$

[例一] $(8x^3+27m^3)\div(2x+3m)=4x^2-6mx+9m^2$。

[例二] $(8x^3+27m^3)\div(4x^2-6mx+9m^2)=2x+3m$。

§ 69. **被除式是 x^3-y^3 的** 在乘法既有 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$，故在除法應有

$$(x^3-y^3)\div(x-y)=x^2+xy+y^2$$

$$(x^3-y^3)\div(x^2+xy+y^2)=x-y$$

[例一] $(8x^3-125)\div(2x-5)=4x^2+10x+25$。

[例二] $(27x^6-64y^3)\div(9x^4+12x^2y+16y^2)=3x^2-4y$。

習題五十四

1. 下列各除法中，那幾個能除盡？

(a) $(x^2+y^2)\div(x+y)$　　(b) $(x^2+y^2)\div(x-y)$

(c) $(x^4+y^4)\div(x+y)$　　(d) $(x^4+y^4)\div(x-y)$

(e) $(x^3+y^3)\div(x-y)$　　(f) $(x^3-y^3)\div(x+y)$

*2. 下列各等式，那個對，那個不對？

(a) $(x^2+y^2)\div(x+y)=x+y$

(b) $(x^2+y^2)\div(x-y)=x-y$

(c) $(x^4+y^4)\div(x+y)=x^3+y^3$

(d) $(x^4+y^4)\div(x-y)=x^3-y^3$

(e) $(x^2-y^2)\div(x-y)=x-y$

(f) $(x^4-y^4)\div(x-y)=x^3-y^3$

(g) $(x^3+y^3)\div(x+y)=x^2+y^2$

(h) $(x^3-y^3)\div(x-y)=x^2-y^2$

(i) $(x^3-y^3)\div(x+y)=x^2-xy+y^2$

(j) $(x^3+y^3)\div(x-y)=x^2+xy+y^2$

[注意]　上列種種，理由雖簡，但初學代數的人往往弄錯。讀本書者千萬留心。

3.　$(x^3 \pm 8y^3) \div (x \pm 2y) = ?$

4.　$(x^4 - y^4) \div (x^2 \pm y^2) = ?$

5.　$(x^6 \pm y^6) \div (x^2 \pm y^2) = ?$

6.　$(81x^2 - 49y^2) \div (9x \pm 7y) = ?$

7.　$(x^9 \pm y^9) \div (x^3 \pm y^3) = ?$

8.　$(125x^6 - 64y^3) \div (4y - 5x^2) = ?$

9.　$(48x^8 - 27y^4) \div (12x^4 - 9y^2) = ?$

10.　$(x^4 - y^4) \div (x \pm y) = ?$

習題五十五（雜題）

依公式直接求出下列各題的結果：

1.　$(a-b+c)(a+b-c)$

2.　$(2a-3b-3c)(2a+3b-3c)$

3.　$(ax^2+bx-c)(ax^2-bx+c)$

4.　$(2x+y-z)(2x-y+z)$

5.　$(2x+y-z)(3x+y-z)$

6.　$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-\frac{c}{3}\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)$

7.　$\left(x^3+\frac{y}{3}\right)\left(x^3-\frac{y}{3}\right)$

8.　$(2x-3y)(3x-2y)$

9.　$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$

10.　$(x^3+y^3)^2(x^3-y^3)^2$

11. $(x+y+z)(x+y-2z)$

12. $(2a+2b)(a^2-ab+b^2)$

13. $(x^2+y^2)^3(x^2-y^2)^3$

14. $(3x+2y)(9x^2-12xy+5y^2)$

15. $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$

16. $(3a+4b+5c)(3a+6b+5c)$

17. $(3a-4b+5c)(-3a+4b-5c)$

18. $(x-1)(x-5)(x-7)(x-11)$

19. $(x-1)(x-3)(x-6)(x-8)$

20. $\left(x+\frac{y}{2}\right)\left(x-\frac{y}{3}\right)\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)\left(x^2+\frac{y^2}{9}\right)\left(x-\frac{y}{2}\right)\left(x+\frac{y}{3}\right)$

第八章　因子分解法　乘法公式的逆轉應用

§ 70. 引論　(1)何謂因子？何謂分解因子？代數上因子的定義，與算術上因子的定義完全相同。就是"當 $A,B,C,D,\cdots\cdots$ 諸式的積等於某式 M 時，則 $A,B,C,D,\cdots\cdots$ 諸式都叫做 M 的因子"。

例如，$3\times5=15$，故 3 與 5 都是 15 的因子。

$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$，故 $x-y$ 與 $x+y$ 都是 x^2-y^2 的因子。

$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=x^4-y^4$，故 $x-y,x+y$，與 x^2+y^2 都是 x^4-y^4 的因子。

由已知某式 M，求其因子，這手續叫做分解因子。

(2) 因子分解與乘除運算的比較　在乘法，已知兩個因子，欲求其積；在除法，已知積及一因子，欲求他一因子。這兩種運算，都有通法可以適用於任何問題。在因子分解，則僅知其積，欲求其因子。這就沒有定法，可以通用於任何問題。所以分解因子，實較乘法，除法爲難。但是，倘能熟記前章所述的公式，及本章所述的各類因子分解法，勤加揣摩，多事練習，純熟之後，也就沒有什麼難處了。

(3) 因子分解何以比乘除難？　除法是乘法的還原算法，因子分解也是乘法的還原算法。除法有定則，不比乘法難；因子分解何以獨無定則，而比乘除俱難？欲明其故，試看下文：

例如在乘法，$(x+1)(x-4)$

$$=x(x+1)-4(x+1) \tag{a}$$

$$=x^2+x-4x-4 \tag{b}$$

$$=x^2-3x-4。 \tag{c}$$

在除法或因子分解，倘能把上列三步逆其次序，如

$$x^2-3x-4=x^2+x-4x-4 \tag{c}$$

$$=x(x+1)-4(x+1) \tag{b}$$

$$=(x+1)(x-4)。 \tag{a}$$

則無論演算除法或分解因子，二者都無困難。但是，怎樣知道

x^2-3x-4 應改成 $x^2+x-4x-4$ 而不改成 $x^2+2x-5x-4$ 呢？這就是除法與因子分解難易的分野。

(4)　因子分解法在代數上的地位　因子分解既有上述的困難，那麼何必要分解因子呢？這可拿算術來看。在算術，各類算法中，能不用分數嗎？分數的計算能不用公約，公倍嗎？公約，公倍的計算，能不用因子分解嗎？然則因子分解，在算術上不是已佔了重要地位嗎？況在代數，除分數的化簡非利用因子分解不行外，他如求解二次方程式等，亦以因子分解爲重要工具之一。因子分解之在代數，不亦極爲重要嗎？

(5)　因子分解的限制　把一式分成因式，因式又可再分，如此繼續分解，豈非永無止境嗎？例如，利用公式

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)\text{，可得}$$

$$\begin{aligned}x^4-y^4&=(x^2+y^2)(x^2-y^2)\\&=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)\\&=(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})\\&=(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\\&\qquad(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

如此便永無止境。故必加以限制，手續方能確定。這個限制，就是"分成的因子須爲整式；其文字並須不含方根"。至於文字的係

數，則可含方根，可以不含方根；在本書中，除有特別聲明外，所分因子，概以係數不含方根者爲限。

不可再分的因子，叫做質因子。

(6)　因子分解問題，須分類解決　如本節(2)所述，因子分解並無定法可以通用於任何問題，所以，只得分類求解。以下諸節，依次述之。

§ 71.　式內各項有相同單因子的　這類整式的因子，可由乘法分配律逆其次序以求之。因爲依乘法分配律，有公式：

$$A(B+C-D)=AB+AC-AD$$

所以自右而左，當然得因子分解公式：

$$AB+AC-AD=A\ (B+C-D)。$$

［例一］　$ax+ay+az-aw=a(x+y+z-w)$。

［例二］　$3a^3x^3+6x^2-9xy=3x(a^3x^2+2x-3y)$。

［例三］　$\dfrac{3x^2}{5}-\dfrac{7xy}{10}-\dfrac{9x^3}{5}=\dfrac{x}{5}\left(3x-\dfrac{7y}{2}-9x^2\right)$。

習題五十六

試化下列各式爲其質因子的連乘積：

1.　$3a+6b-18c+18$。

2.　$7a^2x^2-14a^2xy-49abxz+56axw$。

3.　$a^2x^3+b^3x^2+c^4x^4+d^5x^5$。

4. $(-7a^2-21ab+7a)-14ax$。

5. $14a^3x^5-22a^2mx^5+30a^4x(y+z)$。

6. $m-my$。

7. $(x+y)(x+z)+(x+y)(x-z)$。

8. $p-pq(x+y)=p(-x-y)q$。　對否？何故？

$p-pq(x+y)=p(1-qx+qy)$。對否？何故？

[注意]　以上兩種錯誤,初學代數者常常有之。讀本書者務各當心。

9. $(m-n)^2+(m-n)^2(x+y)$。

10. $(x+y)^3-8(x+y)^2-(x+y)$。

11. $a^2b^2(x+y)^2-mn(x+y)^3(x-y)-(x+y)^2$。

12. $8y(m+n)-4(m+n)(x-z)$。

§ 72.　式內諸項可分為幾組,而各組有相同因子的。　這類問題的標準形式如下:

$$ax+by+ay+bx$$

這式中所有各項不盡含相同因子,故與前節問題不同。所以要把原式分為適當的兩組,以求其因子:

$$\begin{aligned}ax+by+ay+bx&=(ax+ay)+(by+bx)\\&=a(x+y)+b(y+x)\\&=(x+y)(a+b)。\end{aligned}$$

並且這分組的方法又可如下行之:

$$\begin{aligned}ax+by+ay+bx&=(ax+bx)+(by+ay)\\&=(a+b)x+(a+b)y\end{aligned}$$

$$=(a+b)(x+y)。$$

[例一]　$x^3+x^2+x+1=(x^3+x^2)+(x+1)$

$$=x^2(x+1)+(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2+1)。$$

[例二]　求 $ax+bx+ay+by+az+bz$ 的因子。

[解法]　(1)　$ax+bx+ay+by+az+bz$

$$=(ax+bx)+(ay+by)+(az+bz)$$

$$=(a+b)x+(a+b)y+(a+b)z$$

$$=(a+b)(x+y+z)。$$

(2)　$ax+bx+ay+by+az+bz$

$$=(ax+ay+az)+(bx+by+bz)$$

$$=a(x+y+z)+b(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)(a+b)。$$

[注意]　這種方法的主要關鍵,在於分組是否適當。怎樣才是適當,不外兩個標準:(I)所成各組中,任何一組的諸項,須有相同因子。(II)各該組中相同因子分出以後,各組間的另一因子亦須相同。

習 題 五 十 七

試化下列各式爲其質因子之乘積:

1.　$ab+ac+bx+cx$　　　2.　x^5+x^4+x+1

3.　$x^6+x^4+x^2+1$　　　4.　x^4-2x^3+2x-4

5.　$3x^3+4x^2y+3xy^2+4y^3$　　6.　$ax-bx-b+a$

7.　$5cx-10dx-12d+6c$　　8.　$ak-bk-3a+3b$

9.　$4a^3-3ab-8a^2b+6b^2$　　10.　$8xy-88by-cx+11bc$

11.　$5x^3+10x-5x^2-10$

12.　$-21ay+12cy+4cz-7az$

13.　$x^6+3x^4+3x^2+9$

14.　$x^2+3yz+2ax^2+6ayz$

15.　$2c(r-2s)-5d(2s-r)$

16.　$5(ax-bx)+10(by-ay)$

17.　$2ax+4bx-6cx+ay+2by-3cy$

18.　$-x^2y+3xy-5y+x^2z-3xz+5z$

§ 73.　兩個平方差的二項式　在乘法旣有 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$。故在因子分解有公式:

$$\underline{x^2-y^2=(x-y)(x+y)}$$

[例一]　求 $36a^2-25b^2$ 的因子。

[解法]　$36a^2-25b^2=(6a)^2-(5b)^2$

$$=(6a+5b)(6a-5b)。$$

[例二]　$x^4-16y^4=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$

$$=(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)。$$

[例三]　$\dfrac{x^4}{16}-\dfrac{m^4}{81}=\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{m^2}{9}\right)\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{m^2}{9}\right)$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{m^2}{9}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{m}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{m}{3}\right)。$$

習題五十八

試化下列各式爲其質因子的連乘積:

1. x^2-4y^2
2. $36x^2-49y^2$
3. $361x^4-625y^4$
4. $81x^4-625y^4$
5. $\frac{x^4}{81}-\frac{y^4}{625}$
6. $(m^4-16n^8)^2$
7. $289x^4-169y^4$
8. $169m^2-144n^2$
9. $1024p^2-625q^4$
10. $8x^2-18y^2$
11. $27x^4-75$
12. $32c^4-162d^4$
13. $(x+y)m^2-(x+y)n^2$
14. $ab(x+y)^2-ab(p+q)^2$
15. $mn(x-y)^2-mn(p-q)^2$
16. 下列各等式中,那個對,那個不對?

(a) $x^2-y^2=(x-y)^2$　　(b) $x^2+y^2=(x+y)^2$

(c) $x^4-y^4=(x-y)^4$　　(d) $x^4+y^4=(x+y)^4$

下列各式中,有因子的分解出來:

17. x^6-y^6
18. x^6+y^6
19. $2m^2-\frac{1}{8}$
20. $\frac{m^2}{3}-\frac{3n^2}{4}$

利用因子分解,用最簡的方法求出下列二題的結果:

21. $398^2-395^2=?$
22. $123456789^2-123456788^2=?$

§ 74. 完全平方的三項式　在乘法既有公式:

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$$

故在分解因子，有公式：

$$\underline{x^2+2xy+y^2=(x+y)^2}$$

$$\underline{x^2-2xy+y^2=(x-y)^2}$$

[例一]　$9m^2-30mn+25n^2$

$=(3m)^2-2(3m)(5n)+(5n)^2$

$=(3m-5n^2)$。

[例二]　$72m^2+96mn+32n^2$

$=8(9m^2+12mn+4n^2)$

$=8[(3m)^2+2(3m)(2n)+(2n)^2]$

$=8(3m+2n)^2$。

[例三]　$x^2+a^2-y^2-b^2-2ax+2by$

$=(x^2+a^2-2ax)-(y^2-2by+b^2)$

$=(x-a)^2-(y-b)^2$

$=(x-a+y-b)(x-a-y+b)$。

習題五十九

試化下列各式為其質因子的連乘積：

1. $x^2-4xy+4y^2$
2. $x^2-8x+16$
3. x^2-6x+9
4. $y^2+12y+36$
5. $4x^2+12mx+9m^2$
6. $25y^2-30yz+9z^2$
7. $169m^2-286mn+121n^2$
8. $256p^2-288pqr+81q^2r^2$

9. $\frac{x^2}{4}-xy+y^2$

10. $x^2-\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{16}$

11. $\frac{a^2}{25}+\frac{2ab}{5}+b^2$

12. $\frac{c^2}{4}-\frac{cd}{3}+\frac{d^2}{9}$

13. $9m^2-p^2-4pq-4q^2$

14. $4a^2-b^2+2bc-c^2$

15. $x^2+x+y^2+y+2xy$

16. $9x^2-6xy+y^2-3x+y$

17. 分解 $x^2-a^2-2ay-y^2$ 成質因子的連乘積。

[解法] $x^2-a^2-2ay-y^2=(x^2-a^2)-(2ay+y^2)$

$=(x-a)(x+a)-y(2a+y)$。

[又法] $x^2-a^2-2ay-y^2=x^2-(a^2+2ay+y^2)=x^2-(a+y)^2$。

上列兩種結果,那個對? 那個不對? 何故?

[注意] 上列二種結果,都是要不得的錯誤。前者不合於 §72(注意)所說的兩個標準。後者没有做完(還可以繼續寫一步"$(x+a+y)(x-a-y)$")。但是初學代數的人,往往不能免此。學者試各當心。

18. $x^2-a^2+2ay-y^2$

19. $x^2+a^2-2ay+y^2$。能不能分解爲其質因子的連乘積?

下列各題,有因子的分解出來:

20. $9x^2-6xy+4y^2$

21. $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{12}+\frac{y^2}{9}$

22. $4(a+5)^2-12(a+5)b+9b^2$

23. $27(x+y)^2-48z^4$

24. $x^2+2xy+2ab+y^2-a^2-b^2$

25. $x^2-2xy+y^2-4x+4y+4$

26. $\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$

27. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

§ 75. 立方和或差的二項式 在乘法既有公式:

$$\underset{\sim\sim\sim}{(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)=x^3\pm y^3}$$

故在分解因子有公式：

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

［例一］　$64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3$

$$=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)。$$

［例二］　$2x^6+16y^6=2(x^6+8y^6)$

$$=2(x^2+2y^2)(x^4-2x^2y^2+4y^4).$$

［例三］　$x^6-27y^6-x^4+9y^4$

$$=(x^6-27y^6)-(x^4-9y^4)$$

$$=(x^2-3y^2)(x^4+3x^2y^2+9y^4)$$

$$-(x^2-3y^2)(x^2+3y^2)$$

$$=(x^2-3y^2)(x^4+3x^2y^2+9y^4-x^2-3y^2)。$$

習　題　六　十

試化下列各式爲其質因子的連乘積：

1．$27a^3-b^3$　　　　2．$125a^3+64b^3$

3．$1331m^3-512n^3$　　　　4．$343m^6-125n^6$

5．$\frac{x^3}{8}-\frac{y^3}{27}$　　　　6．$\frac{x^3}{4}+\frac{2y^3}{27}$

7．$mx^9+mp^3y^9$　　　　8．$\frac{x^3}{9}-\frac{y^2}{72}$

9. $8(x-y)^3-z^3$ 10. $8(x-y)^3+27(a+b)^3$

11. $8x^3-125(y-z)^3$ 12. $(1-x)^2-(1-x)^5$

13. $x^3+y^3+6x+6y$ 14. $x^3-y^3-x^2+2xy-y^2$

15. $a^3-a^2-a+b+b^2-b^3$

16. $a^3-a^2-a+b-b^2-b^3+2ab$

17. $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$ $\quad(A)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$ $\quad(B)$

[注意] 在分解因子時,得(A)之後,若不再化爲(B),手續完備了沒有?

18. x^3-y^{12} 19. $2x^6-128$

20. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$=(x^3+8y^3)+(6x^2y+12xy^2)$

$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)+6xy(x+2y)$

$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2+6xy)$

$=(x+2y)(x^2+4xy+4y^2)$

$=(x+2y)^3$

21. 仿上題求下列二式的因子:

(a) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (b) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

§ 76. 完全立方的四項式 在乘法既有公式:

$$(x\pm y)^3=x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$$

故在分解因子有公式:

$$\underline{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3}$$

$$\underline{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3}$$

依上公式,凡可化成二數和(或差)的立方的代數式,均可立得其因子,不必再用前節第20題的麻煩解法了。

[例一]　$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$$=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3=(x+2y)^3。$$

[例二]　$27x^3+27x^2+9x+1$

$$=(3x)^3+3(3x)^2\cdot 1+3(3x)\cdot 1^2+1^3=(3x+1)^3。$$

[例三]　$125y^3-75y^2z+15yz^2-z^3$

$$=(5y)^3-3(5y)^2z+3(5y)z^2-z^3=(5y-z)^3。$$

習題六十一

化下列各式爲其質因子的連乘積：

1. $1-3x+3x^2-x^3$
2. $x^3+9x^2+27x+27$
3. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
4. $27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3$
5. $27x^3-9x^2y+xy^2-\dfrac{y^3}{27}$
6. $x^3-x^2y+\dfrac{xy^2}{3}-\dfrac{y^3}{27}$
7. $250x^3-150x^2+30x-2$
8. $81m^3n^3+162m^2n^2p-108mnp^2+24p^3$
9. $m^6-6m^4n+12m^2n^2-8n^3$
10. $m^3+9m^2n^3+27mn^6+27n^9$
11. $x^{10}y^2-12x^7y^3+48x^4y^4-64xy^5$
12. $x^3-64+48x-12x^2$
13. $(x+y)^3+3(a+b)(x+y)^2+3(a+b)^2(x+y)+(a+b)^3$

14. $(a+b)^3-6mn(a+b)^2+12m^2n^2(a+b)-8m^3n^3$

15. $1-3(x-y)+3(x-y)^2-(x-y)^3$

16. $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+3x^2+3y^2+6xy+3x+3y+1$

17. $64x^3-48x^2y+12xy^2-y^3-48x^2+3y^2$

在下列各式內,各加以適當的數,使成完全立方:

18. $x^3+6x^2+12x+?$

19. $a^3-64b^3+?a^2b+?ab^2$

用最簡的方法求出下列各題的結果:

20. $58^3-3\times58^2\times55+3\times58\times55^2-55^3=?$

[解法] $58^3-3\times58^2\times55+3\times58\times55^2-55^3=(58-55)^3=3^3=27$

21. $102^3-3\times102^2\times98+3\times102\times98^2-98^3=?$

22. $42^3+3\times42^2\times58+3\times42\times58^2+58^3=?$

§ 77. **用配方法分解因子** 在因子分解問題中,往往可於原式內加減同式,使原式化爲(1)兩個平方的差,(2)兩個立方的差,或(3)兩個立方的和, 然後再依 §§ 73, 75 的方法以求其因子。這類分解法統叫做配方分解法。

[例一] $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-4x^2$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)。$$

[例二] $a^4+a^2b^2+b^4$

$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$

$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$$

$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)。$$

[注意]　本例的結果與方法，二者都很重要。這結果可用爲公式，解決許多同類問題，節省冗長的分解手續。這方法適用的範圍更廣。例如在 $a^4+ka^2b^2+b^4$ 中，當 k 爲適宜的數，能使該式有因子時，都可用這個方法以求其因子。學者試拿 $k=-3,k=-7$ 來試驗。

[例三]　x^3+3x^2+3x+2

$$=(x^3+3x^2+3x+1)+1$$

$$=(x+1)^3+1^3$$

$$=(x+1+1)[(x+1)^2-(x+1)+1]$$

$$=(x+2)(x^2+x+1)。$$

習題六十二

試化下列各式爲其質因子的連乘積：

1．$x^3-3x^2y+3xy^2+26y^3$　　2．x^3+3x^2+3x+9

3．x^3+3x^2+3x-7　　4．$a^3-3a^2b-3ab^2-9b^3$

5．$9x^6+54x^4+108x^2+63$　　6．$3x^9-36x^6+152x^3-192$

7．$8x^9+12x^6+5x^3+1$　　8．$7x^3+36x^2+54x+27$

9．$a^3+9a^2b+3ab^2+126b^3$

10．$a^3+b^3+3a^2+3b^2+3a+3b+2$

11．$a^3+9a^2+27a+26$

12．$x^3+y^3+3x^2+6y^2+3x+12y+9$

13．x^4+64　　14．$x^4+\frac{1}{4}$

15．$4m^2x^4+16m^2$　　16．$x^4-23x^2y^2+y^4$

17．$x^4-5x^2y^2+4y^4$　　18．$x^4+3x^2y^2+4y^4$

19. $x^4+\frac{1}{64}$

20. x^4+y^4 有因子否?

21. $x+y^2$。有沒有因子?

22. $x^2-3x-4=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-4$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)$$

$$=(x+1)(x-4)$$

[注意]　本題解法內,所加減的一項與 x 的係數,有何關係?

仿上題求下列各式的因子:

23. x^2-4x-5

24. $x^2-4x-12$

25. $x^2-2x-48$

26. $x^2-35x-36$

27. $x^2+35x-36$

28. $x^2-16x-36$

29. $x^2-9x-36$

30. $x^2+9x-36$

31. $x^2-5x-36$

§ 73.　三項式 x^2+px+q　假定所求的因子是 $x+m$ 及 $x+n$, 就是

$$x^2+px+q=(x+m)(x+n),$$

那麼依乘法, 應得關係式 $\begin{cases} m+n=p & (1) \\ mn=q & (2) \end{cases}$

所以有下面的法則:

先求二數 m,n 使(1),(2)兩式皆能適合,那麼就得 $x^2+px+q=(x+m)(x+n)$。

[注意]　(1)怎樣確定 m,n 的符號? 依下面的標準:

(a)　若 p,q 皆是正號,那麼 m,n 也都是正號。

(b)　若 q 是正號,而 p 是負號,那麼 m,n 都是負號。

(c)　若 q 是負號,那麼無論 p 是正號或負號,m,n 必是一正,一負。

(2)怎樣確定 m,n 的值?最好先把 q 分成各組可能的因子,再看那一組中兩個因子的代數和是 p,那麼該兩因子便是所求的 m 及 n。

[例一]　求 $x^2-5x-24$ 的因子。

[解法]　本題 q 是負數,所以把 -24 分成一正,一負的兩個因子,得 $\pm1,\mp24;\pm2,\mp12;\pm3,\mp8;\pm4,\mp6$,八組。其中 $-8+3=-5$。故知 $m=-8$, $n=3$。

$$\therefore\qquad x^2-5x-24=(x-8)(x+3)。$$

[例二]　求 $x^2-28x+27$ 的因子。

[解法]　本題 p 爲負數,q 爲正數,所以把 27 分爲兩個負因子,得 $-1,-27;-3,-9$ 兩種。其中 $-1,-27$ 的代數和是 -28。故知 $m=-1,n=-27$。

$$\therefore\qquad x^2-28x+27=(x-1)(x-27)。$$

[例三]　求 x^2+4x+6 的因子。

[解法]　本題 p,q 皆爲正數,所以把 6 分成兩個正因子。但 6 的正因子只有 $1,6;2,3$ 兩種。而 $1+6\neq4,2+3\neq4$。故知 x^2+4x+6 沒有因子。

習題六十三

1. 用本節的方法以解前節習題 23－31。

2. 求下列各式的因子：

(a) x^2-6x+5　　　　(b) x^2-4x-5

(c) x^2+4x-5　　　　(d) $x^2-x-132$

(e) $x^2+x-132$　　　　(f) $x^2-23x+132$

(g) $x^2-x-380$　　　　(h) $x^2+x-380$

(i) $x^2-39x+380$　　　　(j) $x^2+x-462$

(k) $x^2-x-462$　　　　(l) $x^2-43x+462$

(m) $x^2-5xy-14y^2$　　　　(n) $x^2+5xy-14y^2$

(o) $2x^2+12x+10$　　　　(p) $3x^3-12x^2-15x$

(q) $x^2-8xy-153y^2$　　　　(r) $2a^3-52a^2+330a$

§ 79. 三項式 ax^2+bx+c　這類問題的解法有四種：第一，配方分解法，第二，乘除首係法，第三，十字相乘法，第四，分裂中項法，現在依次來講：

［第一法］　配方分解法　　這就是 § 77 配方分解法的一個特例。其要點就在所加減的數須為適當的數。怎樣才是適當？細察下例，並參看習題六十二第 22 題。

［例一］　求 $6x^2+13x+6$ 的因子。

［解法］　$6x^2+13x+6=6\left[x^2+\frac{13}{6}x+1\right]$

$$=6\left[x^2+\frac{13}{6}x+\left(\frac{13}{12}\right)^2-\left(\frac{13}{12}\right)^2+1\right]$$

$$=6\left[\left(x+\frac{13}{12}\right)^2-\frac{25}{12^2}\right]$$

$$=6\left(x+\frac{13}{12}+\frac{5}{12}\right)\left(x+\frac{13}{12}-\frac{5}{12}\right)$$

$$=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$=(2x+3)(3x+2)。$$

［例二］　求 ax^2+bx+c 的因子。

［解法］　ax^2+bx+c

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\times\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

［注意］　本例的結果 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$，可用作公式，以解同類的問題。例如欲求 $6x^2+13x+6$ 的因子。把這式和 ax^2+bx+c 來比較，那麼 $a=6, b=13, c=6$。代入上式，得

$$6x^2+13x+6=6\left(x+\frac{13+\sqrt{13^2-4\cdot6\cdot6}}{2\cdot6}\right)\left(x+\frac{13-\sqrt{13^2-4\cdot6\cdot6}}{2\cdot6}\right)$$

$$=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(2x+3)(3x+2)。$$

習題六十四

(I) 用配方法求下列各式的因子：

1. $6x^2-11x+4$
2. $6x^2+5x-4$
3. $6x^2-5x-4$
4. $6x^2-13x+5$
5. $6x^2+7x-5$
6. $6x^2-7x-5$
7. $6x^2-19x+10$
8. $6x^2-11x-10$
9. $6x^2+11x-10$
10. $12x^2-7x-12$
11. $12x^2-25x+12$
12. $12x^2+7x-12$
13. $7x^2-46xy+55y^2$
14. $7x^2+24xy-55y^2$
15. $7x^2-24xy-55y^2$

(II) 利用本節例二求前題各式的因子：

[第二法] 乘除首係法 這個方法就是把原式乘以首項係數，同時也除以首項係數，使原式變成 y^2+my+n 之形，再依 §78 的方法來分解。因為

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}[a\cdot ax^2+a\cdot bx+a\cdot c]$$

$$=\frac{1}{a}[(ax)^2+b(ax)+ac]。$$

把 ax 當作 y，那麼括號內的式子與 $y^2+by+ac$ 同，便可仿用 §78 的方法了。

[例一]　$6x^2-35x-6=\frac{1}{6}[(6x)^2-35(6x)-36]$

$$=\frac{1}{6}(6x-36)(6x+1)$$

$$=(x-6)(6x+1)。$$

[例二]　$16x^2-48x+27=(4x)^2-12(4x)+27$

$$=(4x-3)(4x-9)。$$

習 題 六 十 五

用乘除首係法以求習題六十四中 I (1)－(15)。

[第三法]　分裂中項法　假定所求的因子是 $px+m$ 及 $qx+n$，那麼

$$ax^2+bx+c=(px+m)(qx+n)。$$

依乘法應得關係式：

$$\begin{cases} a=pq \\ b=pn+qm \\ c=mn \end{cases}$$

於是有
$$\begin{cases} b=pn+qm \\ ac=pqmn=pn\cdot qm \end{cases}$$

就是說“ax^2+bx+c 如可分成兩個因子，必可求得二數 pn, qm 使其和是 b，其積是 ac”。所以有下面的法則：

欲分 ax^2+bx+c 成因子，先求二數 D, E，使 $D+E=b$，$DE=ac$。乃變原式成四項 $ax^2+Dx+Ex+c$。再用分組方法來分解。

[例一] 求 $6x^2+13x+6$ 的因子。

[解法] 本題 $ac=6\times6=36, b=13$。故所求二數是 4 與 9。於是得

$$\begin{aligned}6x^2+13x+6&=6x^2+4x+9x+6\\&=2x(3x+2)+3(3x+2)\\&=(2x+3)(3x+2)。\end{aligned}$$

[例二] 求 $6x^2+11xy-7y^2$ 的因子。

[解法] 本題 $ac=-42y^2, b=11y$。故所求二數是 $D=14y$，$E=-3y$。於是得

$$\begin{aligned}6x^2+11xy-7y^2&=6x^2+14xy-3xy-7y^2\\&=2x(3x+7y)-y(3x+7y)\\&=(2x-y)(3x+7y)。\end{aligned}$$

習題六十六

用分裂中項法以解習題六十五的各題。

[第四法]　十字相乘法　仿 [第三法]，假定 Ax^2+Bx+C 有兩個因子：$ax+m$，$bx+n$，那麼 $Ax^2+Bx+C=(ax+m)(bx+n)+abx^2+(an+bm)x+mn$。細察上式，即得下面的法則：

把 A 分成兩個因子 a,b；C 分成兩個因子 m,n。列成下式：

$$\begin{array}{ccc} a & & m \\ & \times & \\ b & & n \\ \hline & an+bm & \end{array}$$

若 an 與 bm 的代數和是 B，那麼 $ax+m$，$bx+n$ 就是原式的因子。否則非其因子。

[例一]　求 $6x^2+17x+5$ 的因子。

[解法]　6 的因子，只有 ±1，±6；±2，±3。5 的因子只是 ±1，±5。故所求因子必不出上述 6 的因子和 5 的因子的配合，現在我們觀察中較可能的幾組，配合如下：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 6 & & 5 \\ \hline & & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & 5 \\ & \times & \\ 6 & & 1 \\ \hline & & 31 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 3 & & 5 \\ \hline & & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & & 5 \\ & \times & \\ 3 & & 1 \\ \hline & & 17 \end{array}$$

其中與 x 的係數相同的乃最後一式，故得

$$6x^2+17x+5=(2x+5)(3x+1)。$$

［例二］ 求 $6x^2+11x-10$ 的因子。

［解法］ 6 的因子，只有 ±1，±6；±2，±3。-10 的因子只有 ±1，∓10；±2，∓5。故所求因子不出上述 6 的因子和 -10 的因子的配合，現在就觀察中較可能的幾組配合如下：

$$\begin{array}{c}1\quad\pm1\\ \times\\ \underline{6\quad\mp10}\\ \mp4\end{array},\quad
\begin{array}{c}1\quad\pm10\\ \times\\ \underline{6\quad\mp1}\\ \pm59\end{array},\quad
\begin{array}{c}1\quad\pm2\\ \times\\ \underline{6\quad\mp5}\\ \pm7\end{array},\quad
\begin{array}{c}1\quad\pm5\\ \times\\ \underline{6\quad\mp2}\\ \pm28\end{array},\quad
\begin{array}{c}3\quad\mp1\\ \times\\ \underline{2\quad\mp10}\\ \mp28\end{array},\quad
\begin{array}{c}3\quad\pm10\\ \times\\ \underline{2\quad\mp1}\\ \pm17\end{array},$$

$$\begin{array}{c}3\quad\pm5\\ \times\\ \underline{2\quad\mp2}\\ \pm4\end{array},\quad
\begin{array}{c}3\quad\pm2\\ \times\\ \underline{2\quad\mp5}\\ \mp11\end{array}。$$

依次試之，知最後一式$\left[\begin{array}{c}3\quad-\quad2\\ \times\\ \underline{2\quad+\quad5}\\ \mathbf{11}\end{array}\right]$中與 x 的係數相同。

故得 $6x^2+11x-10=(3x-2)(2x+5)$。

［注意］ 若最後一式仍不與 x 的係數相符，那麼原式必無因子。

習 題 六 十 七

用十字相乘法解習題六十五中的各題。

習 題 六 十 八

用最便利的方法求下列各式的因子：

1. $12x^2+28x+15$　　2. $15x^2-16x-7$

3. $15x^2-26x+7$　　4. $12x^2-24x-15$

5. $21x^2+58x+21$　　6. $21x^2-40x-21$

7. $15x^2-224x-15$　　8. $132x^2-x-1$

9. $143x^2+146x+35$　　10. $36x^2-49x-72$

11. $143x^2-36x-35$　　12. $36x^2+49x-72$

13. $25x^2+50x+9$　　14. $25x^2+50x-24$

§ 80. **因子分解的通則**　自 § 71 至 § 79,已把因子分解的重要方法,分類講過了。學者對於各類問題,或者不感困難。而於雜題之下,往往茫然不知其屬於何類,當用何種方法。這是對於前述各種方法,未能充分嫻熟,應用自如的緣故。倘能再作一番有系統的複習,確切認識各種公式的眞義,熟習各種公式的用法,自能增進判別應用的能力。今再述因子分解的通則於下:

第一步　先察各項中有沒有公共單項因子。取出最高公共單項因子,同時便得一個多項因子。

第二步　次察這多項因子屬於下列何類,即依該類方法分解之:

(1)　x^2-y^2　　(2)　$x^3\pm y^3$

(3)　$x^2\pm 2xy+y^2$　　(4)　$x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$

(5)　x^2+px+q　　(6)　ax^2+bx+c

(7)　$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

(8)　$x^4+kx^2y^2+y^4$

(9)　能用配方法的。

第三步　如不屬於上列九種之一，試用分組分解法。

第四步　分得的因子假如仍有因子可分，再仿第二步，第三步，繼續分解。直至分得的因子皆爲質因子而止。

習題六十九（雜題）

求下列各式的因子：

1. $32n^3+48n^2-28n^4$

2. $12a-39ay-51ay^2$

3. $a^3+a+b+a^2b$

4. $x^5-\dfrac{a^4x}{16}$

5. $4a^2-a^4+81+10a^2x-36a-25x^2$

6. $12cd^3-6a^3x-a^6+4c^2+9d^6-9x^2$

7. $16x^{16}-1$

8. a^5+a-a^3-1

9. x^4-9x^2-x+3

10. $x^4-7x^2y^2+81y^4$

11. a^4-a^2+a+1

12. $81-18y^2-16x^4-24x^2y^2-8y^4$

13. $4h^5+32h^2k^3$

14. $1-x+x^5-x^7$

15. $x^3-83x^5+289x^7$

16. $5-8x-4x^2$

17. $x^4+\dfrac{y^4}{324}$

18. $a^4-39a^2b^2+225b^4$

19. $192+3c^6$

20. $a^3+a^2+b^3-b^2$

21. $x^3+3x^2y+9xy^2+27y^3$

22. $x^3-6x^2y+12xy^2-7y^3$

23. $4a^4b^6-40a^2b^2c^2+100b^2c^4$

24. $ab^3-a^3b+ac^3-a^3c+bc^3-b^3c$

25. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6xz$

26. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}-\dfrac{xy}{3}-\dfrac{xz}{5}+\dfrac{2yz}{15}$

27. $x^3+y^3+3x^2+12y^2+3x+48y+65$

28. $2x^4y-2xy^4-6x^3y+12x^2y^2-6xy^3$

29. $x^3+x^2+6x^2y+xy+12xy^2-2y^2+8y^3$

30. $165x^4-74x^2y^6-143y^{12}$

31. $x^2+4xy+4y^2+3x+6y-18$

32. $9x^2-6xy+y^2+15x-5y-24$

第九章　二次方程式　因子分解應用之一

I.　二次方程基本解法

§ 81.　**引論**　(1)何謂二次方程式?何謂高次方程式?

在 § 11，我們已經講過，式的次數是式中最高次項的次數;

所以在一個方程式中，諸項的次數最高是幾次，該方程式就叫做幾次方程式，例如，

$$x^2-12x+27=0,\ x^2+5=9,\ x^2+y^2=25-x,$$

皆是二次方程式；

$$x^3+8=0,\ 3x^3-x^2+50=0,\ x^3+x^2y=3+y,$$

皆是三次方程式；

$$x^4+x+5=0,\ x^4-8=0,$$

皆是四次方程式。五次，六次者類推。

三次及三次以上的方程式都叫做高次方程式。

(2) 二次方程式的需要 設有問題："二數之和是 12，其平方的和是 90。求這二數。"

仿前面應用問題解法，令 $x=$ 甲數，則

$12-x=$ 乙數。由題意得方程式

$$x^2+(12-x)^2=90$$

化簡，得 $$x^2-12x+27=0$$

這是二次方程式與以前所述的一次方程式不同。所以要解這類問題，非熟悉二次方程式解法不可。以下諸節，詳論二次方程式的解法。

§ 82. 用因子分解法解二次方程式 這個方法的根據在於下面兩條原理：

(I)　二數的積是零，如 $AB=0$，那麼必有 $A=0$ 或 $B=0$。因爲假如 A，B 皆不爲零，則 A，B 必爲正數或負數；而 A，B 的積非正卽負，不能爲零了。

(II)　逆之，若有 $A=0$ 或 $B=0$，則 $AB=0$ 此理顯然，無待贅述。

依上面兩條原理，可得二次方程的解法如次：

[例一]　解方程式 $x^2-12x+27=0$　(1)

[解法]　先把原式的左邊分解因子，得

$$(x-3)(x-9)=0 \tag{2}$$

再依(1)，得　$x-3=0$，或 $x-9=0$　(3)

用一次方程式解法得　$x=3$，或 $x=9$

[驗算]　用 $x=3$ 代入(1)，得 $3^2-12\times3+27=0$。所以 3 是(1)的根。再用 $x=9$ 代入(1)，得 $9^2-12\times9+27=0$。所以 9 也是(1)的根。

[注意]　由(3)中兩式解得 x 的二値一定都合(1)。因爲這二値各合(3)中兩式之一，故依原理(II)都應合(2)，就是都合(1)式。要是不合，是必計算手續上發生錯誤。

[例二]　解方程式　$6x^2+x-15=0$　(1)

[解法]　變原方程式爲 $(3x+5)(2x-3)=0$

於是得　$3x+5=0$，或 $2x-3=0$

所以　　　　$x=-\frac{5}{3}$, 或 $x=\frac{3}{2}$

[驗算]　以 $x=-\frac{5}{3}$ 代入原式(1),左右兩邊都能適合。再以 $x=\frac{3}{2}$ 代入原式(1),左右兩邊也都能適合。

[例三]　解　$5x^2+x=6(2-x^2)$。

[解法]　　$5x^2+x=12-6x^2$

$$11x^2+x-12=0$$

$$(11x+12)(x-1)=0$$

$\therefore$　　　$x=-\frac{12}{11}$, 或 $x=1$。

由上面三例看來，可見利用因子分解以解二次方程式的手續如下：

第一步　化簡原方程式,使其一邊爲零,他邊成 ax^2+bx+c 之形。

第二步　分解 ax^2+bx+c 成兩個一次因子。

第三步　令這兩個因子各等於零,得兩個一次方程式。

第四步　解這兩個一次方程式，就得原方程式的兩根。

第五步　欲知所得的兩根是否正確，應把這兩根一一代入原方程式的兩邊,驗其是否相合。

習　題　七　十

解下列各方程式(1—5 并須驗算):

1. $x^2-23x+132=0$

2. $x^2-x-132=0$

3. $132x^2-x-1=0$

4. $156x^2+192x=-156-120x$

5. $56x^2-50=15x+6$

6. $2(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)-8$

7. $(3x+1)(5x-2)=(x+2)(x-8)+33$

8. $2x(x+1)=(x-1)(x+3)+(x-3)(3x-1)$

9. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{x}{5}=22$

10. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{7x}{5}=12x-48$

11. $4x^2-32x=-39$

12. $9x^2-15x=14$

13. $250x^2+10x-240=0$

14. $240x^2-10x=65$

15. $x(x+1)(x-1)+6=(x-2)(x+2)(x+3)$

16. $230x^2+229x=0$

17. $x(x-4)(x+4)=x^2(x-3)-5$

18. $(x-4)(x+4)(x^2+25)=x^4$

19. $(x+1)^3=x^3+61$

20. $x^2-(a-b)x=ab$

§ 63. 用配方法解二次方程式　用配方法以解二次方程

式，和用配方法以求二次式的因子，其在配方一步，手續完全相同。學者可比較觀之。

[例一] 解方程式 $x^2-12x+27=0$。

[解法] 移項，得 $x^2-12x=-27$

兩邊各加 36，得 $x^2-12x+36=36-27$

就是 $(x-6)^2=9$

兩邊開平方，得 $x-6=3$，或 -3 [何故有二值?]

故 $x=3+6$，或 $-3+6$

∴ $x=9$，或 3。

[例二] 解方程式 $5x^2+x=6(2-x^2)$。

[解法] 變原方程式為

$$5x^2+x=12-6x^2$$

移項，得 $11x^2+x=12$

兩邊各除以 11，得 $x^2+\frac{x}{11}=\frac{12}{11}$

兩邊各加$\left(\frac{1}{22}\right)^2$，得 $x^2+\frac{x}{11}+\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{12}{11}+\left(\frac{1}{22}\right)^2$

就是 $\left(x+\frac{1}{22}\right)^2=\frac{23^2}{22^2}$

，得 $x+\frac{1}{22}=\pm\frac{23}{22}$(何故有二值?)

移項，得
$$x=-\frac{12}{11},\text{或 } 1。$$

[註]　複號"±"就是"+或-"的省寫。例如，"+5 或 -5"省寫成"±5"。"$\frac{23}{22}$或$-\frac{23}{22}$"省寫爲"$\pm\frac{23}{22}$"。

[例三]　解方程式 $x^2+3x+1=0$。

[解法]
$$x^2+3x=-1$$
$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-1$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{4}$$
$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\text{(何故有二值?)}$$
$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore\quad x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\text{或 }\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

由上三例看來，可見用配方法解二次方程式，其步驟如下：

第一步　化簡原方程式，使其一邊不含 x，他邊含 x 的二次項及一次項，並使 x^2 的係數爲 1。就是，變原方程式成 $x^2+px=q$ 之形。

第二步　爲於 $x^2+px=q$ 的兩邊各加$\left(\frac{p}{}\right)$。

[使左邊變成$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$之形。]

第三步 乃把方程式

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

的兩邊各自開平方，得兩個一次方程式：

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

第四步 解這兩個一次方程式，就得所求的兩根。

第五步 欲知所得兩根是否正確，應把這兩根一一代入方程式的兩邊，驗其是否相合。

習 題 七 十 一

用配方法解習題七十的各題。

§ 84. 用公式解二次方程式 任何二次方程式，均可$ax^2+bx+c=0$之形。這是二次方程的標準形式。能解這個式，那麼，凡是二次方程式，都可利用這解得的結果來求根在，先看這標準方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解法：

$$ax^2+bx+c=0$$

兩邊各除以a，得 $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

移項,得
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

兩邊各加$\frac{b^2}{4a^2}$,得
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

就是
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

兩邊各開平方,得
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

移項,得
$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

∴
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(B)}$$

分開來寫,就是
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

再看這公式(B)的用法:　上面解法中,各步算法對於 a, b, c 三數任爲何數,無不可適。故(B)式所表的根,可以用做解二次方程式的公式。就是說"當 a, b, c 任爲何值時,(A)式中 x 的值便可由(B)式直接去求;不必仍依配方手續,把由(A)到(B)中間各步,一一逐層寫出"。

[例一]　解方程式 $x^2-12x+27=0$。

[解法]　拿這方程式和標準方程式(A)來比較,可見 $a=1$, $b=-12$, $c=27$。把這些數代入公式(B),便得

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times1\times27}}{2\times1}$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{144-108}}{2}=\frac{12\pm6}{2}$$

$\therefore$　　　$x_1=9$,　$x_2=3$。

[例二]　解　　$5x^2+x=6(2-x^2)$。

[解法]　　　$5x^2+x=12-6x^2$

$$11x^2+x-12=0$$

本題 $a=11$,　$b=1$,　$c=-12$, 故得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times11\times(-12)}}{2\times11}=\frac{-1\pm23}{22}$$

$\therefore$　　　$x_1=1$,　$x_2=-\frac{12}{11}$。

由上面兩例看來,可見用公式解二次方程式,其步驟如下:

第一步　化簡原方程式,使成 $ax^2+bx+c=0$ 之形。

第二步　把 a,b,c 三數的值代入公式(B),以求 x 的值。

第三步　欲知求得的值是否正確,應把求得的兩值一一代入原方程式的兩邊,驗其是否相合。

習題七十二

利用公式以解習題七十的各題。

§ 85. **三種解法的比較** 如上所述，求解二次方程式共有三法：(A)利用因子分解法；(B)配方法；(C)用公式法。三法之中，各有短長；何者最優，不可一概而論。因爲(1)利用因子分解法，在因子容易分解時，計算手續極簡；但當因子不易分解或不能分解時，則此法無效。(2)配方法適用於任何二次方程式，範圍極廣；但計算手續很繁。(3)用公式法亦能適用於任何二次方程式，牠的計算手續比用配方法較簡；但在因子易求時，代入公式仍不如用分解因子法來得簡捷。即以配方法與用公式法相較，也難判孰優孰劣。公式法計算手續，比之配方法固然較簡，但若無配方法，公式又何自而來？總之，三法之中，沒有什麼優劣；但在解決問題時，各有其宜罷了。

習題七十三

用最簡的方法解下列各題；

1. $x^2-4x-21=0$
2. $x^2-4x-77=0$
3. $x^2-15x-154=0$
4. $34x^2-9x-13=0$
5. $280x^2-x-281=0$
6. $280x^2+x-281=0$
7. $351x^2+x-350=0$
8. $351x^2-x-350=0$

9. $71x^2-80x-62=0$　　10. $97x^2-1084x+187=0$

11. $143x^2+290x+143=0$　　12. $143x^2-48x-143=0$

13. $x^2+4x+2=0$　　14. $x^2+2x-4=0$

15. $100x^2+200x=69$　　16. $3x^2+6x-7=0$

17. $100x^2-400x=-111$　　18. $256x^2=1536x+97$

19. $8x^2+9x=(x+1)(x-6)$　　20. $(3x-1)(x^2-5x-24)=0$

§ 83. **應用問題**　解二次方程式應用問題，仍與以前解一次方程式應用問題步驟相同。所應特別注意的，就是"解得的二根，有時雖皆合所立方程式，而不適合原題。所以解得的二根，必須一一代入原題，驗其是否皆合。"今述其步驟如下：

第一步　選擇題中適宜的數，作爲未知數，用 x 代之。

第二步　依題意，把已知數與未知數間的關係列成方程式。

第三步　解這所立方程式，得二根。

第四步　把所得二根，先代入所立方程式，以驗在解方程式時，有無差誤，然後代入原題，驗其是否相合，不合者棄之。

[例一]　兩個連續正數的積是 132。求這兩數。

[解法]　設一數是 x，那麼他數是 $x+1$。依題意得方程式

$$x(x+1)=132$$

移項，得　$$x^2+x-132=0$$

分解因子，得　$$(x+12)(x-11)=0$$

故　$x=-12$，或 $x=11$。

題設二數俱爲正數，-12 爲負數，不合題意，故不可用。

$\therefore$　$x=11$ 一數，

而　$x+1=12$ 他數。

［例二］　兄弟二人歲數的和是 35，各人歲數平方的和等於兄 5 年後歲數的平方。求各人的歲數。

［解法］　設 $x=$ 兄的歲數，$35-x=$ 弟的歲數。

依題意得　$x^2+(35-x)^2=(x+5)^2$

化簡，得　$x^2-80x+1200=0$

分解因子，得　$(x-20)(x-60)=0$

故　$x=20$，$x=60$

兄弟歲數的和是 35，兄的歲數不能大於 35。故 60 不合題意。

$\therefore$　$x=20$，兄年 20 歲，

而　$35-x=15$，弟年 15 歲。

習 題 七 十 四

解下列各題(棄去不合題意的答數)：

1. 大小兩數的差是 5，其平方的差是 75。求這兩數。

2. 從某數的平方減去該數，得 992。求該數。

3. 從某數平方的 2 倍，加入該數的 5 倍，得 150。求該數。

4. 某數四倍的平方等於該數 30 倍與 4 的和。求該數。

5. 從 10 加某數,又從 12 加該數。假如這兩個和相乘的積,等於該數 60 倍與 15 的和。求該數。

6. 兩個連續數相乘的積,等於其中小數平方的 3 倍。求這兩數。

7. 父子歲數的和是 40。其積是子年平方的 3 倍。問現年各幾歲?

8. 今年,父子歲數的和是 40。5 年前,父子歲數的積是子的歲數的 25 倍。問今年二人各幾歲?

9. 兄弟歲數的和是 70。10 年前二人歲數的積是 10 年後二人歲數的積的$\frac{3}{10}$。問兄弟現年各幾歲?

10. 雞犬共計 7 隻。其足數平方的和是 416。問雞犬各有若干隻?

11. 雞犬共有 24 足。其頭數平方的和是 29。問雞犬各幾頭?

12. 分桃與兒童,每人 6 枚,不足 5 枚。已知桃數是人數的平方。求桃數。

13. 有二位數,其兩位數字的和是 12,十位數字是個位數字的平方。求這二位數。

14. 有二位數,其個位數字是十位數字的平方。交換兩位數字所成新數比原數大 54。求這二位數。

15. 學生支配寢室,每室 11 人恰好住滿;若室數減 1,每間多住 1 人,則所餘人數尚爲原來室數的平方。求人數。

16. 長方形的面積是 150 平方市尺,長比闊多 5 市尺。求長闊各是幾市尺。

17. 正方形的各邊是 20 市尺。另有長方形,其周界和這正方形的周界相等,而其面積是 300 平方市尺。求這長方形闊幾市尺。

18. 直角三角形三邊的尺數爲連續數。求各邊的長。[在直角三角形內,斜邊平方=其他兩邊各自平方的和。]

19. 正方形的面積是 100 平方市尺。若把其一邊減少若干市尺,他邊增加這所減市尺數的 2 倍,而成長方形,則其面積不變。求這長方形的長。

20. 二數的差是 10，積是 75。求這二數。

§ 87. **簡易高次方程式**　高次方程式中，常有能用解二次方程式的方法來解的。這類解法大致不外(1)利用 § 82 所述原理，把原方程式分成兩個二次以下的方程式，(2)重複應用二次方程式的解法。現在，舉例來說明。

[例一]　解方程式$(x-2)(x^2-6)=3x-6$。

[解法]　變原方程式爲

$$(x-2)(x^2-6)=3(x-2)$$

移項，得　$(x-2)(x^2-6)-3(x-2)=0$

分解因子，得　$(x-2)(x^2-6-3)=0$

據 § 82(I)，(II)，得　$x-2=0$，　$x^2-9=0$

故　$x_1=2$，　$x_2=3$，　$x_3=-3$。

[例二]　解方程式$(x^2-5)^2-3(x^2-5)-4=0$。

[解法]　把(x^2-5)當做 y，原方程式變爲　$y^2-3y-4=0$。

解之，得　$y=\ \ 4$，或　$y=-1$

就是　$x^2-5=\ \ 4$，或　$x^2-5=-1$

故　$x=\pm3$，或　$x=\pm2$

[例三]　解　$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)=-8$。

[解法]　$[(x-3)(x-4)][(x-1)(x-6)]=-8$

$$(\underline{x^2-7x}+12)(\underline{x^2-7x}+6)+8=0$$

$$(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+80=0$$

把 x^2-7x 當做一個未知數去求解,得

$$x^2-7x=-10, \text{ 或 } x^2-7x=-8$$

再用二次方程式解法解 $x^2-7x=-10$

得 $x_1=2$, 或 $x_2=5$

同樣,解 $x^2-7x=-8$

得 $x_3=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$, 或 $x_4=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}$

[例四] 解方程式 $x^3=8$

[解法] 化原方程式爲 $x^3-2^3=0$

分解因子,得 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

由此,得 $x-2=0$ (A)及 $x^2+2x+4=0$ (B)

解(A),得 $x=2$

解(B),得 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{-3}}{2}=-1\pm\sqrt{-3}$$

所以原方程式共有三根:

$x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{-3}$, $x_3=-1-\sqrt{-3}$

[註] 由負數開平方所得的數叫做虛數。其性質等到第十三章再講。

習題七十五

解下列各方程式：

1. $x^4-13x^2+36=0$　　2. $x^4-29x^2+100=0$

3. $x^4-10x^2+24=0$　　4. $x^4-4x^2-45=0$

5. 試解 $x^6-1=0$　(求其六根)

[解法]　$(x^3+1)(x^3-1)=0$

$x^3+1=0$，或 $x^3-1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$，或 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

即　$x+1=0, x^2-x+1=0$，或 $x-1=0, x^2+x+1=0$

$\therefore$　$x_1=-1$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$，　$x_3=\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$，

$x_4=1$，　$x_5=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$　$x_6=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$。

6. $x^6-64=0$　(求其六根)

7. $x^6+1=0$　(求其六根)

8. $x^4-81=0$　(求其四根)

9. $x^3-x^2+x-1=0$

10. $x^3+x^2+x+1=0$

11. $(x^2+1)^2-(x^2-2x+1)=0$

12. $x^3+3x^2+3x+28=0$

13. $(x^2-2)(3x-2)=9x^2-4$

14. $x^3+8+x^2-4=0$

15. $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$

16. $(x^2+3)^2-19(x^2+3)+84=0$

17. $(x^2+6x+2)^2+(x^2+6x+2)-6=0$

18. $(x+2)(x+3)(x+7)(x+8)=864$

19. $(x-1)(x+3)(x+8)(x+4)=-84$

20. $7x^4+61x^3-90x^2=0$

II. 聯立二次方程式

§ 88. 聯立二次方程式的需要 求解關於二次方程式的應用問題,有時以引用兩個未知數,設立兩個方程式,聯立求解爲較便。這種情形蓋與聯立一次方程式相類似;所不同的,只不過方程式的次數罷了。

[例一] "二數的和是 12,其平方的和是 90。求這二數。" [見 § 81(2)]

是仿前面聯立一次方程式應用問題解法,設一數是 x,另一數是 y。那麼依題意,應得聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=12 & (1) \\ x^2+y^2=90 & (2) \end{cases}$$

如能由此求出 x, y 的值,就能解決本問題。

[例二] "二數的積是 27,其平方的和是 90。求這二數。"

設 $x=$ 一數, $y=$ 他數。依題意得聯立方程式:

$$\begin{cases} xy=27 & (1) \\ x^2+y^2=90 & (2) \end{cases}$$

如能由此求出 x, y 的值,就能完全解決本問題。但是怎樣求 x, y? 以下諸節,略論其法。

§ 89　**兩個方程式中的一個是一次的**　在聯立二次方程式中，如有一個方程式是一次的，則這聯立方程式，恆可依一定方法去求根。先看下例：

［例一］　解聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=12 & (1) \\ x^2+y^2=90 & (2) \end{cases}$$

［解法］　由(1)，得　$x=12-y$　(1′)

代入(2)，得　$(12-y)^2+y^2=90$

解之，得　$y_1=3,\ y_2=9$

把 y_1 代入(1′)，得　$x_1=12-3=9$

把 y_2 代入(1′)，得　$x_2=12-9=3$

故所求的根有二組：　$\begin{cases} x_1=9 \\ y_1=3 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=9。\end{cases}$

［例二］　解聯立方程式：

$$\begin{cases} x+2y=3 & (1) \\ x^2+xy+y^2+10x-5y=-17 & (2) \end{cases}$$

［解法］　由(1)，得　$x=3-2y$　(1′)

代入(2)，得　$(3-2y)^2+(3-2y)y+y^2+10(3-2y)-5y=-17$

解之，得　$y_1=\dfrac{28}{3},\quad y_2=2$

把這兩值代入(1′),得 $x_1=-\frac{47}{3}$, $x_2=-1$

故所求的根有二組:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{47}{3} \\ y_1=\frac{28}{3} \end{cases} \text{及} \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=2 \end{cases}$$

由上兩例看來,可見聯立二次方程式中,如有一個方程式是一次的,恆可依下列步驟去求解:

第一步。 由一次方程中求出 $x=(?)y+(?)$ [或 $y=(?)x+(?)$]。

第二步。 把第一步的結果代入二次方程式,化簡之後,就得含 y (或 x)的一元二次方程式。

第三步。 由這一元二次方程式求出 y 值(或 x 值)。

第四步。 把所得結果,一一代入第一步所得的方程式,求 x 值(或 y 值)。

第五步。 欲知所得結果是否正確,可把各組 x, y 的值一一代入原來聯立方程式,驗其是否能合該兩方程式。

[注意] 第五步的代入驗算法,只能驗明解得的值是否適合原來方程組。不能驗明所得的值是不是原方程組的全部解答。因爲如有一個方程式是一次的,答數有的有兩組,有的只有一組。要是在有兩組答數的聯立方程式,求得了一組的值而加以驗算,可以適合所解的方程式,但不能由這驗算的過程中推知有沒有其他答數。

習題七十六

解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+xy=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x^2-xy+y^2=x+y-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=3 \\ y^2-x^2=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=\dfrac{13}{6} \\ xy=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 20xy=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 9x^2+36xy+16y^2=9x+8y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2-yx+y^2=2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+y)(x-y)=xy-11 \\ (x+3)(y-4)=xy-20 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y=0 & (1) \\ x^2-x-y=6 & (2) \end{cases}$

11. $\begin{cases} (x+3)(y+3)=20 \\ (x-4)(y+4)=-18 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y^2+xy-x^2=-1 \\ 13x-17y=30 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+xy+x-y=14 \\ x^2+xy-x+y=16 \end{cases}$

14. $\begin{cases} (3x+4y)(4x-3y)=7 \\ (x+3)(y-4)=xy-13 \end{cases}$

［注意］ 第10題的解法：可把（1），（2）兩式相減，再以所得新方程式與（1）或（2）聯立求解。這類方法應用很廣，不僅能解本題而已。

§ 90. 兩個方程式俱為二次的　在聯立方程式中，假如兩個方程式皆是二次的，那麼這類聯立方程式，不盡可解（指僅用

二次方程式解法而言)。假如,有聯立方程式:

$$\begin{cases} x^2+y=3 & (1) \\ x+y^2=5 & (2) \end{cases}$$

由(1)求 $y=3-x^2$, 代入(2),得 $x+(3-x^2)^2=5$,

這是四次方程式,僅用二次方程式解法不能求出牠的根。又若由(2)求得 $x=5-y^2$, 代入(1)式,得 $(5-y^2)^2+y=3$,

也是一個四次方程式,不能適用二次方程式的解法。不但如此,任用其他方法,都不能把這聯立方程式,變爲二次方程式範圍以內的問題。所以在聯立方程式中,假如兩個方程式皆是二次的,那麼僅用二次方程式解法,通常總是不能求解。所可解者,特殊而已。現在分三類述其大要於下:

第一類。 一個方程式成 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 之形者,在 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 內,把 y 當做已知數便可求得

$$x=(?)y \qquad (A)$$

及

$$x'=(?)y \qquad (B)$$

把(A)和他一方程式聯立,
可仿 § 89 求解
把(B)和他一方程式聯立,
也可仿§ 89 求解
} 於是得所求各組根。

[例一] 解聯立方程式:

$$\begin{cases}2x^2-5xy+3y^2=0 & (1)\\ 2x^2-y^2+x-y=15 & (2)\end{cases}$$

[解法]　由(1)，把 y 當做已知數，求得

$$x=y \tag{A}$$

及

$$x=\frac{3}{2}y。 \tag{B}$$

I. 先把(A)與(2)聯立，仿 §89 求解，得二組根：

$$\begin{cases}x_1=\sqrt{15}\\ y_1=\sqrt{15}\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-\sqrt{15}\\ y_2=-\sqrt{15}\end{cases}$$

II. 再把(B)與(2)聯立，仿 §89 求解，又得二組根：

$$\begin{cases}x_3=3\\ y_3=2\end{cases}\qquad \begin{cases}x_4=-\dfrac{45}{14}\\ y_4=-\dfrac{15}{7}\end{cases}$$

故所求的根共有四組如上。

[驗算]　$x_1=\sqrt{15}$，　$y_1=\sqrt{15}$

$$2(\sqrt{15})^2-5(\sqrt{15})(\sqrt{15})+3(\sqrt{15})^2=0$$

$$2(\sqrt{15})^2-(\sqrt{15})^2+\sqrt{15}-\sqrt{15}=15。$$

$x_2=-\sqrt{15}$，　$y_2=-\sqrt{15}$.

$$2(-\sqrt{15})^2-5(-\sqrt{15})(-\sqrt{15})+3(-\sqrt{15})^2=0$$

$$2(-\sqrt{15})^2-(-\sqrt{15})^2+(-\sqrt{15})-(-\sqrt{15})=15。$$

$x_3=3$，　$y_3=2$

$$2(3)^2-5(3)(2)+3(2)^2=0$$

$$2(3)^2-(2)^2+3-2=15。$$

$$x_4=-\frac{45}{14}, \qquad y_4=-\frac{15}{7}$$

$$2\left(-\frac{45}{14}\right)^2-5\left(-\frac{45}{14}\right)\left(-\frac{15}{7}\right)+3\left(-\frac{15}{7}\right)^2=0$$

$$2\left(-\frac{45}{14}\right)^2-\left(-\frac{15}{7}\right)^2+\left(-\frac{45}{14}\right)-\left(-\frac{15}{7}\right)=15。$$

[例二] 解聯立方程式:

$$\begin{cases} x^2+xy=1 & (1) \\ xy+y^2=2 & (2) \end{cases}$$

[解法] 本題內(1),(2)兩個方程式,雖然都不屬於 $ax^2+bxy+cy^2=0$ 之形,但若由(1),(2)兩式消去不含 x, y 的一項,便可化成該形:[這是一種有用的解法,用牠可以解決許多同類問題,學者務宜注意。]

2(1)−(2)得 $$2x^2+xy-y^2=0$$

即 $$(2x-y)(x+y)=0$$

故得 $$2x-y=0 \qquad (A)$$

及 $$x+y=0。 \qquad (B)$$

I. 先把(A)與(1)聯立[或與(2)聯立],仿§89求解,得二組根:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}。 \\ y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}。 \end{cases}$$

II. 再把(B)與(1)聯立，仿 §89 求解，不能求出牠的根。這是因爲原方程式可化爲

$$\begin{cases} x(x+y)=1 \\ y(x+y)=2。 \end{cases}$$

其中 $x+y\neq 0$，而(B)則 $x+y=0$，二者互相矛盾的緣故。故所求的根只有兩組。

〔驗算〕 $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　$y_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=2。$$

$x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=1$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=2。$$

第二類。 兩式相除可得一個一次方程式。本類中任何問題，皆可仿下列兩例去求解。

［例一］ 解聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2+xy=1 & (1) \\ xy+y^2=2 & (2) \end{cases}$$

［解法］ (2)÷(1)得 $\frac{y}{x}=2$，即 $y=2x$ (3)

把(3)與(1)聯立［或與(2)聯立］，仿 § 89 求解，得所求的根是

$$\begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

［驗算］ 與第一類第二例相同。

［例二］ 解 $\begin{cases} x^2-y^2=7 & (1) \\ 2x^2+3xy+y^2=77。 & (2) \end{cases}$

［解法］ 因原方程組可化爲

$$\begin{cases} (x+y)(x-y)=7 \\ (x+y)(2x+y)=77 \end{cases}$$

故以(1)除(2)，得 $$\frac{2x+y}{x-y}=11$$

化簡，得 $$4y=3x \qquad (3)$$

把(3)與(1)［或(2)］聯立，仿 § 89 求解，得所求的根是

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

［驗算］　$x_1 = 4$,　$y_1 = 3$

$$(4)^2 - (3)^2 = 7$$

$$2(4)^2 + 3(4)(3) + (3)^2 = 77$$

$$x_2 = -4, \qquad y_2 = -3$$

$$(-4)^2 - (-3)^2 = 7$$

$$2(-4)^2 + 3(-4)(-3) + (-3)^2 = 77。$$

習題七十七

解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} 6x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 9x^2 - xy + y^2 + x = 33 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 6 \\ 4x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 3y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x-y)(x+y) + x + y = 0 \\ 9x^2 - 8y^2 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x-2y+1)(2x-y-1) = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 + x - y = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ (x-y)(x+3y) = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 27 \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases}2x^2+3xy-2y^2=12\\(x+y)(x+2y)+x+2y=30\end{cases}$

10. $\begin{cases}x^3+y^3=9\\x+y=3\end{cases}$ (用兩式相除法或用代入法)

11. $\begin{cases}x^2-y^2-3x=0 & (1)\\2x^2+2xy-5x=0 & (2)\end{cases}$

[提示] $3\times(2)-5\times(1)$,得 $x^2+6xy+5y^2=0$ (3)

把(3)與(1)[或(2)]聯立,仿第一類的方法去求解。

12. $\begin{cases}x^2-xy-y^2+\dfrac{y}{2}=0\\2x^2-5y^2+y=0\end{cases}$

13. $\begin{cases}x^2-7y^2+3x-3y=0\\xy+x^2-y^2-5x+5y=0\end{cases}$

第三類。 設法求出 $x+y=?$,$x-y=?$ 解聯立方程式,有時可由題中所給的二式,設法求出 $x+y$ 及 $x-y$ 的值。如能做到這一步,那麼由此以求 x, y 的值便無多大問題了。但是怎樣去求 $x+y$ 及 $x-y$ 的值?學者細察下例,自然會明白。

[例一] 求解 $\begin{cases}x^2+y^2=10 & (1)\\xy=3 & (2)\end{cases}$

[解法] 學者注意:我們的目的在於求得 $x+y=?$ 但是要得 $x+y=?$ 只須得 $(x+y)^2=?$ 便可,就是,求得 $x^2+2xy+y^2=?$ 就行了。試拿(1),(2)兩式來看,怎樣可得 $x^2+2xy+y^2=?$ 豈不是把(2)的 2 倍加入(1)式嗎?故用下法求 $x+y$:

(1)+2×(2)得　$x^2+2xy+y^2=16$

故
$$x+y=\pm 4 \tag{3}$$

依同理去求 $x-y$:

(1)−2×(2)　$x^2-2xy+y^2=4$

故
$$x-y=\pm 2 \tag{4}$$

把(3),(4)分别聯立,可得四組聯立方程式如下:

$$\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=4\\x-y=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=-4\\x-y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=-4\\x-y=-2\end{cases}$$

解之,得四組根:

$$\begin{cases}x_1=3\\y_1=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=1\\y_2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=-1\\y_3=-3\end{cases}\qquad\begin{cases}x_4=-3\\y_4=-1\end{cases}$$

[驗算]　$x_1=3,\qquad y_1=1$

$(3)^2+(1)^2=10$

$(3)(1)=3$。

$x_2=1,\qquad y_2=3$

$$(1)^2+(3)^2=10$$

$$(1)(3)=3。$$

$$x_3=-1, \qquad y_3=-3$$

$$(-1)^2+(-3)^2=10$$

$$(-1)(-3)=3。$$

$$x_4=-3, \qquad y_4=-1$$

$$(-3)^2+(-1)^2=10$$

$$(-3)(-1)=3。$$

[例二] 求解 $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$

[解法] 本題中已知 $x+y=5$，例如再能求得 $x-y=?$便不難求出 x,y 的值。今用下法（參看例一）求 $x-y$ 的值。

(1)式兩邊平方，得

$$x^2+2xy+y^2=25 \qquad (1')$$

(1′)－4×(2)，得 $x^2-2xy+y^2=1$

故 $x-y=\pm1 \qquad (3)$

把(3)與(1)聯立，得兩組方程式：

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

解之，得兩組根：

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=2 \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=3 \end{cases}$$

〔驗算〕 $x_1=3$　　$y_1=2$

$$3+2=5$$

$$(3)(2)=6。$$

$x_2=2$,　　$y_2=3$

$$2+3=5$$

$$(2)(3)=6。$$

習題七十八

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=20 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=61 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9x^2+4y^2=52 \\ xy=4 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases}$　　10. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12 \\ x+y=4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2+5xy=15 \\ xy+3x+3y=11 \end{cases}$　　12. $\begin{cases} 4x^2+3xy+y^2=38 \\ x-y=-1 \end{cases}$

習題七十九

1. 兩數的積是 21，其各自平方的和是 58。求這兩數。

2. 把 56 元分與若干人，倘使人數加 4，則每人應少得 7 元。求原有人數。

3. 兩數的積是 40，其各自平方的和比其和大 76。求這兩數。

4. 慢車比快車每小時少行 1 里，二車同行 72 里，慢車比快車多行 1 小時。求慢車每小時行幾里。

5. 把 9 分成兩部，使各部立方的和是 189。求這兩部。

6. 有二數，其和等於其積，而比其平方之和少 4。求這二數。

7. 用 195 元買米若干石。倘若米價每石降低 2 元，就可多買米 2 石。問米價原為若干?

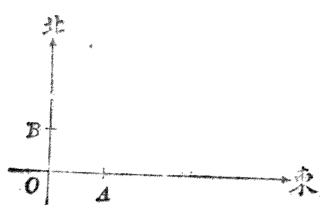
8. 自大小二數的和加上該二數各自平方的和，其結果是 686。自該二數的差加上該數各自平方的差，其結果為 74。求這二數。

9. 大小二數的積比大數的 10 倍多 61，而比小數 10 倍多 91。求這二數。

10. 甲乙二數各有兩位。甲數的個位數字，十位數字依次等於乙數的十位數字，個位數字。甲乙二數各自平方的差是 1980。甲乙二數的和等於兩位數字的差的 55 倍。求這二數。

11. 長方形的兩邊是 8 市尺和 10 市尺。現在要把這形面積放大為原形面積的 2 倍而不變兩邊的比。問新形兩邊各是幾市尺?

12. 如右圖，甲從 A 向東進行，乙從 B 向北進行。3 秒鐘之後，二人相距 $2\sqrt{61}$ 市尺。5 秒鐘之後，二人相距 $2\sqrt{130}$ 市尺。若 OA＝4 市尺，OB＝3 市尺。問二人每秒各行幾市尺?



13. 自二數的積加上該二數的和，其結果是 79。若自該二數的積減去該二數的和，則其結果是 47。求該二數。

14. 有三位數，其個位數字等於其他兩位數字的和。第一，第三兩位數字的積比第二位數字的平方大 5。若於原數加 396，則各位數字的次序倒轉。求原數。

15. 某車於若干時內進行 800 里。倘該車每時多行 5 里，則欲行 800 里可少需 2 時。求該車原有的速度（限用聯立方程式）。

第十章　分式四則　因子分解應用之二

§ 91. 引論　(1)何謂分式？在算術，以 5 除 3 可寫成 $3\div5$ 或 $\frac{3}{5}$。後者與前者其實相同。但爲種種便利起見，有時亦採用後式，並且給他一個新的名稱叫做分數。其中 3 叫做分子，5 叫做分母。

同樣，在代數上，以代數式 B 除 A，原可寫成 $A\div B$；但爲便利計，又常寫成 $\frac{A}{B}$。這 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 叫做分子，B 叫做分母。

例如，　$\frac{y}{x}$，$\frac{3}{x+y}$，$\frac{x+y}{x^2+y^2}$，皆爲分式。其中，y，3，$x+y$ 各爲分子；x，$x+y$，x^2+y^2 各爲分母。

(2) 分式的需要。 分式在代數裏面，除與分數在算術裏

西，有同樣重要外，更有其他妙用。請看下列兩個問題：

[問題一] "兩數的積是 27，其平方的和是 90。求這兩數"。本題若用一個未知數來求解，則應設 x 爲一數，$\frac{27}{x}$ 爲他數，而得方程式

$$x^2+\left(\frac{27}{x}\right)^2=90。$$

[問題二] "有大小兩數。其各自倒數的和是 $\frac{4}{3}$。以其和的立方，除其立方的和得商 $\frac{7}{16}$。求這兩數"。用二元聯立方程式解之如下：

設　　$x=$ 一數，　　$y=$ 他數，

依題意應得聯立方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}\\[2ex]\dfrac{x^3+y^3}{(x+y)^3}=\dfrac{7}{16}\end{cases}$$

怎樣解上列兩題所得方程式，非先熟悉分式的算法不可。

(3) 分式問題的分類。代數上關於分式的基本問題，大部與算術相同。就是約分，通分，加法，減法，乘法，除法，化簡疊分式等。

在算術，欲演約分，通分，四則，等等算法，非先熟悉求 L. C. M. 及 H. C. F. 兩種算法不可。在代數亦然。故先述 H. C. F. 及 L. C. M. 的求法於下。

§ 92. **怎樣求 H. C. F.?**　若甲式是乙式的因子，又是丙式的因子，又是丁式的因子，則甲式叫做乙，丙，丁諸式的公因子。若乙，丙，丁諸式中，公因子不止一個，那麽，其中數字係數最大，文字次數最高的公因子，叫做最高公因子，簡寫爲 H. C. F.

例如在 x^2-2x，x^3-2x^2，x^4-4x^2 三式中，因

$$\begin{cases} x^2-2x=x(x-2); \\ x^3-2x^2=x^2(x-2); \\ x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2)。\end{cases}$$

故 x 是三式的公因子；$x-2$ 也是三式的公因子；$x(x-2)$ 也是三式的公因子。其中以 $x(x-2)$ 的次數爲最高，故 $x(x-2)$ 是三式的 H. C. F.

由是得 H. C. F. 的求法如下：

第一步。　先把所給各式一一分成質因子（務須分成質因子，否則容易錯誤）。

第二步。　察諸質因子中那幾個是各式的公因子。

第三步。　乃把第二步所察知的各式的公因子，一一取出連乘之，就得所給各式的最高公因子。

[例一]　求 $x^3-xy^2+2x^2y-2y^3$，x^4-y^4，$x^3-xy^2+3x^2y-3y^3$ 的 H. C. F.

[解法]

(1) $x^3-xy^2+2x^2y-2y^3=(x+2y)(x+y)(x-y)$;

(2) $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$;

(3) $x^3-xy^2+3x^2y-3y^3=(x+3y)(x+y)(x-y)$。

由(1),(2),(3)三式看來,可見 $x+y$ 是各式的公因子, $x-y$ 也是各式的公因子。此外 $x+2y$, x^2+y^2, $x+3y$ 均非諸式的公因子。故所求的 H. C. F. 是$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$。

[例二] 求 x^2-5x+6, x^2-4, x^3+5x^2-14x 的 H. C. F.

[解法] 1. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

2. $x^2-4=(x-2)(x+2)$

3. $x^3+5x^2-14x=x(x-2)(x+7)$

$\therefore$ H. C. F. $=x-2$。

[例三] 求 x^3+2x^2+2x+1, x^3+2x+3, x^2-2x-3 的 H. C. F.

[解法] 本題中,一,二兩式不易求出因子。所以先把第三式分成因子,再察所得因子中那幾個是其他二式的公因子。如此比較便利。

因 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

乃以 $x+1$ 除第一式,得整商 x^2+x+1; 又以 $x+1$ 除第二式,得整商 x^2-x+3。故知 $x+1$ 爲三式的公因子之一。

又以 $x-3$ 除 x^2+x+1, 不能除盡,故知 $x-3$ 非三式的

公因子。

$\therefore$　　$x+1$ 就是所求的 H. C. F.

上面所講用分解因子法求 H. C. F.，全憑觀察。對於較為簡單的問題，最為便捷。但遇着不易分解因子的代數式，必須用算術中已學過的輾轉相除法來求。

假使有 A，B 兩式，依降羃（或昇羃）排列，B 的次數比 A 的次數小；或雖次數相同，但 B 的最高次項的係數，小於 A 的最高次項係數，則用輾轉相除法，用 B 除 A，得商 Q_1，賸餘 R_1，次以 R_1 除 B，得商 Q_2，賸餘 R_2。復次以 R_2 除 R_1，得商 Q_3，賸餘 R_3。如此法做去，除至 N 次後恰巧除盡無餘，那麼，此時的最後除數 Rn 便是 A，B 兩式的 H. C. F.

$$
\begin{array}{llllll}
 & \quad Q_1 & & & & \\
B & \big|\ A & & & & \\
 & \underline{BQ_1} & \quad Q_2 & & & \\
 & \quad R_1 & \big|\ B & & & \\
 & & \underline{R_1Q_2} & \quad Q_3 & & \\
 & & \quad R_2 & \big|\ R_1 & & \\
 & & & \underline{R_2Q_3} & & \\
 & & & \quad R_3 & & \\
 & & & & & \quad Q_{n+1} \\
 & & & & Rn & \big|\ R_{n-1} \\
 & & & & & \underline{R_nQ_{n+1}} \\
 & & & & & \quad 0
\end{array}
$$

由上式所示，可知 R_n 可除盡 R_{n-1}，可除盡 R_3，可除盡 R_2，所以也可除盡 $R_1(R_1=R_2Q_3+R_3)$，除盡 B，除盡 A。故 R_n 是 A 和 B 的公因子。

何以 R_n 是最高公因子呢？假使有一公因子 X 大於 R_n，那麼，公因子 X 可除盡 A，除盡 B，除盡 $A-BQ_1$ 即 R_1，除盡 $B-R_1Q_2$ 即 R_2，除盡 R_3，除盡 R_n。但照我們的假定，X 比 R_n 大，X 除盡 R_n 是不可能的，所以 R_n 是所求的 H. C. F.

[例一] 求 $4x^3-3x^2-24x-9$ 和 $8x^3-2x^2-53x-39$ 的 H. C. F.

x	$4x^3-3x^2-24x-9$	$8x^3-2x^2-53x-39$	2
	$4x^3-5x^2-21x$	$8x^3-6x^2-48x-18$	
$2x$	$2x^2-3x-9$	$4x^2-5x-21$	2
	$2x^2-6x$	$4x^2-6x-18$	
3	$3x-9$	$x-3$	
	$3x-9$		
	0		

H. C. F. $=x-3$。

[註] 用左式除右式得商 2，並第一餘式 $4x^2-5x-21$。用第一餘式除左式得商 x，並第二餘式 $2x^2-3x-9$。用第二餘式除第一餘式，得商 2，並第三餘式 $x-3$。用第三餘式除第二餘式得商 $2x+3$，無餘。故第三餘式 $x-3$ 爲最後除式，而爲左右二式的 H. C. F.

［注意］ a. 式中遇有單項因子時，須先把牠除去，後再用輾轉相除法求 H. C. F. 假使除去的幾個單項因子中有公因子時，這公因子須乘入用輾轉相除法求得的 H. C. F. 中。

b. 若一式含有某因子，而其他式則否，可先將這某因子消去，無論在計算中的那一步都沒有關係。

c. 爲避免計算中有分數起見，可把一式中所沒有的因子，乘其他一式，或計算中的餘式。

［例二］ 求 $2x^4+x^3-x^2-2x$ 和 $6x^4-4x^3+2x^2-4x$ 的 H. C. F.

［解法］ 先除去前式的單項因子 x，後式的單項因子 $2x$。並將這些單項因子的 H. C. F. x，予以保留。

$$2x^4+x^3-x^2-2x=x(2x^3+x^2-x-2)$$

$$6x^4-4x^3+2x^2-4x=2x(3x^3-2x^2+x-2)$$

次求 $2x^3+x^2-x-2$ 和 $3x^3-2x^2+x-2$ 的 H. C. F. 爲避免計算時有分數起見，將後式乘 2 再用輾轉相除法求他們的 H. C. F.

	$2x^3+x^2-x-2$	$6x^3-4x^2+2x-4$	3
	7	$6x^3+3x^2-3x-6$	
$-2x$	$14x^3+7x^2-7x-14$	$-7x^2+5x+2$	
	$14x^3-10x^2-4x$	17	
$17x$	$17x^2-3x-14$	$-119x^2+85x+34$	-7
	$17x^2-17x$	$-119x^2+21x+98$	
14	$14x-14$	$64)\underline{64x-64}$	
	$14x-14$	$x-1$	
	0		

H. C. F. 是 $x-1$ 乘前所保留的單項因子的 H. C. F. $x=x(x-1)$。

[説明] 左式除右式後，將因子 7 乘左式，這是因爲第一餘式 $-7x^2+5x+2$ 不能整除 $2x^3+x^2-x-2$ 的緣故。第一餘式乘因子 17，也是爲了同樣的理由。最後消去 64，是因爲原與式中沒有這單項因子，消去牠可使計算便利而和所求的 H. C. F. 沒有關係。

求三個不易分解因子的代數式的 H. C. F. 時，先求兩式的 H.C. F.，再用這 H. C. F. 與第三式求。求四式的 H. C. F. 時，更用上述第二次求得的H. C. F. 與第四式求。五式，六式以上，可照此類推。

習 題 八 十

求下列各式的 H. C. F.

1. $15a^2bx^2y^2, -45b^3y^3, -180a^4b^4x^4y^5$。
2. $98a^2b^3c^4, 180a^3b^2c^4, -300a^4b^3c^2$。
3. $3(a+b)^3, 4(a+b)^2, 3(a+b)^2(a-b)$。
4. $3(x+2)(x+1), 12(x+1)(x+3), 6(x+1)^3(x-2)^2$。
5. $x^2+3x+2, x^2+3x+4, x^3+3x^2+3x+1$。
6. $a+b, a^3+b^3, a^4-b^4$。
7. $ax+ay-bx-by, a^4-b^4$。
8. $m^2-n^2, m^2+mn, m^2n+mn^2$。
9. $4x^3+12x^2y+9xy^2, 16xy+24y^2$。
10. $x^2-3x-4, x^2-8x+16, x^3-16x$。
11. $a^2+2a-3, a^2+7a+12, a^4+27a$。
12. $a^2+4ab+3b^2, a^2+2ab-3b^2, a^2+9ab+18b^2$。
13. $x^2-4xy+4y^2, x^3-8y^3, x^4-16y^4$。

14. $x^3-2x^2y-3xy^2+6y^3, 2x^2-5xy+2y^2$。

15. $a-b$ 與 $-a+b$ 有沒有公因子? $a-b$ 是不是這兩式的公因子? $-a+b$ 呢? 然則 $(a-b)(-a+b)$ 是不是這兩式的 H. C. F.? 何故?

16. $2x^4y^2+7x^3y^3-9x^2y^4, 2x^3y^3+11x^2y^4+9xy^5$。

17. $x^3+2x^2-x-2, x^2+x-2, x^2-3x+2$。

18. $8a^3-1, 8a^2+4a+2, 16a^4+4a^2+1$。

19. $a^3-a, a^4-7a^2+6, a^4-3a^3+5a^2+3a-6$。

20. $3a^2+a-2, 4a^3+4a^2-a-1$。

21. $x^3+2x^2-13x+10, x^3+x^2-10x+8$。

22. $24x^4-2x^3-60x^2-32x, 18x^4-6x^3-39x^2-18x$。

23. $1+x+x^3-x^5, 1-x^4-x^6+x^7$。

24. $3x^3-13x^2+23x-21, 6x^3+x^2-44x+21$。

§ 93. **怎樣求 L. C. M.?** (1) 倍式? 若乙式是甲式的因子,則甲式叫做乙式的倍式。例如, $x-y$ 是 x^2-y^2 的因子,故 x^2-y^2 是 $x-y$ 的倍式; 又 $x+y$ 也是 x^2-y^2 的因子,故 x^2-y^2 也是 $x+y$ 的倍式。

(2) 公倍式。 若乙,丙,丁諸式都是甲式的因子, 則甲式叫做乙,丙,丁諸式的公倍式。例如, $x+y$, $x-y$ 皆是 x^2-y^2 的因子,故 x^2-y^2 是 $x-y$, 及 $x+y$ 的公倍式; 又如 $x+y$, $x-y$ 也都是 x^4-y^4 的因子,故 x^4-y^4 也是 $x+y$ 及 $x-y$ 的公倍式。

(3) 最低公倍式。 若乙,丙,丁諸式中,公倍式不止一個。

其中,數字係數最小，文字次數最低的公倍式叫做最低公倍式,簡寫爲 L. C. M.

例如，x^2-y^2, x^4-y^4, x^8-y^8, $3x^2-3y^2$, $(x^2-y^2)(x+y)$,等都是 $x+y$ 與 $x-y$ 的公倍式。其中數字係數最小,文字次數最低的是 x^2-y^2。故 x^2-y^2 是 $x+y$ 與 $x-y$ 的 L. C. M.

(4)　怎樣求最低公倍式?　例如有 A, B, C 三式,可分成因子如下:

$$A=a^2b^3c^4mx,\ B=a^3b^2c^3ny^2,\ C=abc^5pz^3$$

因所求的 L. C. M. 同時須爲 A, B, C 的倍式,故必含有此三式中的相異因子。至於相同因子,則 L. C. M. 必含有各式中同文字所能除盡該文字的最低次數。故所求的最低公倍式是

$$\text{L. C. M.}=a^3b^3c^5mnpxy^2z^3。$$

由是得 L. C. M. 的求法如下:

第一步。　先把所給各式一一分爲質因子(務須分爲質因子)。

第二步。　把各式中所有相異的質因子並二式以上公有的質因子一一連乘,(公因子的指數應取最高的)就得所求的 L. C. M.

[例一]　求 x^2-2x, x^3-2x^2, x^4-4x^2 的 L. C. M.

[解法]　$x^2-2x\ =x(x-2)$

$$x^3-2x^2=x^2(x-2)$$

$$x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2)$$

$\therefore$ 　L. C. M. $=x^2(x-2)(x+2)$。

［例二］ 求 $x^3-xy^2+2x^2y-2y^3$, x^4-y^4,

$x^3-xy^2+3x^2y-3y^3$ 的 L. C. M.

［解法］ $x^3-xy^2+2x^2y-2y^3$

$$=(x+2y)(x+y)(x-y)$$

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

$$x^3-xy^2+3x^2y-3y^3=(x+3y)(x+y)(x-y)$$

$\therefore$ 　L. C. M. $=(x+2y)(x^2+y^2)(x+3y)(x+y)(x-y)$。

單項式的 L. C. M. 固然可以用上述的觀察方法求得。但遇到不能用觀察方法求得 L. C. M. 的代數式，我們不能不用另一種方法。這種方法是利用 L. C. M. 與 H. C. F. 的關係而成立的。

假定 A 與 B 的 H. C. F. 是 F; a 與 b 是 A 與 B 被 F 除後的商; X 是兩式的 L. C. M.,

則 $$A=aF,\qquad B=bF,$$

$$X=abF\text{（參看本節最低公倍式的定義）。}$$

$$AB=aF\cdot bF$$

$$=F\cdot abF$$

$$=FX,$$

或
$$X=\frac{AB}{F}=\frac{A}{F}\times B=\frac{B}{F}\times A。$$

由此可以知道求兩式的 L. C. M. 的通法，祇要將 H. C. F. 除兩式的積；或者拿 H. C. F. 除任何一式，再以其商乘他一式。

[例二] 求 $2x^4+x^3-20x^2-7x+24$ 與 $2x^4+3x^3-13x^2-7x+15$ 的 L. C. M.

兩式的 H. C. F. 是 x^2+2x-3

以此數除兩式，得：

$$2x^4+x^3-20x^2-7x+24=(x^2+2x-3)(2x^2-3x-8)$$

$$2x^4+3x^3-13x^2-7x+15=(x^2+2x-3)(2x^2-x-5)$$

所以 L. C. M. 是 $(x^2+2x-3)(2x^2-3x-8)(2x^2-x-5)$。

求三個代數式的 L. C. M. 時，先求兩式的 L. C. M.，再用這 L. C. M. 與第三式求。求四個代數式的 L. C. M. 時，更用上述第二次求得的 L. C. M. 與第四式求。五式，六式以上，也可照此類推。

習題八十一

1. 求 $x^5+x^4+4x+4, x^3+3x^2+4x+2, x^3+2x^2+2x$ 的 L. C. M.

[解法] $x^5+x^4+4x+4=(x+1)(x^4+4)$

$$x^3+3x^2+4x+2=(x+1)(x^2+2x+2)$$

$$x^3+2x^2+2x=x(x^2+2x+2)$$

$\therefore$　　L. C. M. $=x(x+1)(x^2+2x+2)(x^4+4)$

上面解法有沒有錯誤？何故？

2．求習題八十(1—10)諸題中各式的 L. C. M.

3．求下列各組多項式的 L. C. M.

(a)　x^2-y^2，x^3-y^3。

(b)　x^3+y^3，x^2-xy+y^2，$x+y$。

(c)　$2x-y$，$4x+2y$，$4x^2-y^2$。

(d)　$1-a$，$a-1$，a^2-1，a^4-1，a^8-1。

(e)　$(a-b)(b-c)$，$(b-c)(c-a)$，$(c-a)(b-a)$。

(f)　$(a+b)^2-c^2$，$a^2-(b+c)^2$。

4．求 $4x^3-10x^2+4x+2$，和 $3x^4-2x^3-3x+2$ 的 L. C. M.

§ 94．分式符號的變化

依除法符號定則，可知

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}。$$

所以“在任何分式中，若把分子，分母的符號同時改變，則分式的符號不變；若只變分子，分母二者符號之一，則分式的符號應當改變”。

例如，

(1)　$$\frac{m}{x-y}=\frac{-m}{y-x}=-\frac{m}{y-x}=-\frac{-m}{x-y}。$$

(2)　$$\frac{m}{(x-y)^2}=\frac{-m}{-(y-x)^2}=-\frac{m}{-(y-x)^2}=-\frac{-m}{(y-x)^2}。$$

$$(3)\quad \frac{m}{(x-y)^3}=\frac{-m}{(y-x)^3}=-\frac{m}{(y-x)^3}=-\frac{-m}{(x-y)^3}。$$

$$(4)\quad \frac{m}{(x-y)^4}=\frac{-m}{-(y-x)^4}=-\frac{m}{-(y-x)^4}=-\frac{-m}{(y-x)^4}。$$

學者注意 $x-y$ 與 $y-x$ 符號的關係；$(x-y)^2$ 與 $(y-x)^2$ 符號的關係；$(x-y)^3$ 與 $(y-x)^3$ 符號的關係；$(x-y)^4$ 與 $(y-x)^4$ 符號的關係。

習題八十二

下列各等式中，雙號(±)應該用何號？

1. $\dfrac{p}{(x-y)^3}=\dfrac{\pm p}{(y-x)^3}=\dfrac{\pm p}{-(y-x)^3}=-\dfrac{\pm p}{(y-x)^3}=\dfrac{p}{\pm(y-x)^3}$。

2. $\dfrac{p}{(x-y)^6}=\dfrac{\pm p}{(y-x)^6}=\dfrac{\pm p}{-(y-x)^6}=-\dfrac{\pm p}{(y-x)^6}=\dfrac{p}{\pm(y-x)^6}$。

3. $-\dfrac{a+b}{x-y}=\dfrac{-a\pm b}{x-y}=\dfrac{\pm a\pm b}{y-x}=-\dfrac{-a-b}{\pm x\pm y}$。

4. $-\dfrac{a-b}{x-y}=\dfrac{-a\pm b}{x-y}=\dfrac{\pm a\pm b}{y-x}=-\dfrac{-a+b}{\pm x\pm y}$。

5. $-\dfrac{a-b}{(x-y)^2}=\dfrac{-a\pm b}{(y-x)^2}=\dfrac{\pm a\pm b}{(y-x)^2}=-\dfrac{-a+b}{\pm(y-x)^2}$。

§ 95. **分數變化的原理** 分數的種種變化，都以一條原理做根據，學者於此務須確切認明。這條原理，就是"分數的分子分母，同以不等於 0 的某數乘之（或除之），分數的數值不變。"用算式來表，就是

$$\frac{mA}{mB}=\frac{A}{B},\tag{1}$$

及
$$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}。\tag{2}$$

證之如下：

依 §91(1)，知
$$\frac{A}{B}=A\div B。$$

依算術除法定理"除數，被除數，同時增加若干倍，所得之商不變"。

故得
$$mA\div mB=A\div B。$$

改成分數記法，就得
$$\frac{mA}{mB}=\frac{A}{B}。$$

上面是證明(1)式的。(1)式既能成立，那麼，(2)自無問題。因爲在(1)式中，由右向左看，就是(2)式。

§96. **約分** 依上節(1)式，可見"在任何分式中，若分母，分子有相同因子，可把這相同因子對消，而不變分式的值。"例如，

(1) $\dfrac{16m^2x^2y^3}{8mxy^2z^3}=\dfrac{8mxy^2\times 2mxy}{8mxy^2\times z^3}=\dfrac{2mxy}{z^3}$。

(2) $\dfrac{6x^2-13x+6}{9x^2-4}=\dfrac{(3x-2)(2x-3)}{(3x-2)(3x+2)}=\dfrac{2x-3}{3x+2}$。

從分子，分母中消去相同因子，使分子，分母的次數減低，保

數減小，此手續叫做約分。約分的步驟如下：

第一步。　先求分子，分母的 H. C. F. 把原分式$\frac{A}{B}$寫成

$$\frac{\text{H.C.F.}\times A'}{\text{H.C.F.}\times B'}。$$

第二步。直接由$\frac{\text{H.C.F.}\times A'}{\text{H.C.F.}\times B'}$消去 H. C. F.，得$\frac{A'}{B'}$。這種經過約分後的分式，叫做最簡分式。

習題八十三

1.　約$\frac{x^3-4xy^2+x^2y-4y^3}{2y^2+xy-x^2}$成最簡分式。

［解法］　$\frac{x^3-4xy^2+x^2y-4y^3}{2y^2+xy-x^2}=\frac{(x+y)(x^2-4y^2)}{(y+x)\ (2y-x)}=\frac{x^2-4y^2}{2y-x}$。

這解法有沒有錯誤？何故？

2.　約下列各式成最簡分式：

$$\frac{(x-y)+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)},\quad \frac{a+b}{a^2+b^2},\quad \frac{x+3}{4x^2}。$$

［解法］　(a)$\frac{(x-y)+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{x+y}$；

(b)$\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{1+1}{a+b}=\frac{2}{a+b}$；

(c)$\frac{x+3}{4x^2}=\frac{3}{4x}$。

上面解法對不對？何故？

［注意］　1,2 兩題解法的錯誤，也是初學常有的。致此之由，在於(1)不

知所消的公因子須爲最高，然後分式才是最簡；(2)不知所消去的，須爲分子，分母全式的相同因子，非分子，分母中特殊兩項的相同因子。學者於此，務宜留心。

把下列各分式約成最簡分式：

3. $\dfrac{x^2-y^2}{(y-x)^2}$。　　4. $\dfrac{x-y^2}{y^2-x}$。

5. $\dfrac{x^2-y^2}{y^2-x^2}$。　　6. $\dfrac{y-x}{x^2-y^2}$。

7. $\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$。　　8. $\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$。

9. $\dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$。　　10. $\dfrac{y^2-x^2}{x^5-y^5}$。

11. $\dfrac{x^6-y^6}{y^4-x^4}$。　　12. $\dfrac{x^3+y^3}{x^5+y^5}$。

[註]　第 10，12 兩題中分子分母的 H. C. F. 可仿 § 92 例三求之

13. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^4-29x^2+100}$。　　14. $\dfrac{x^2+5x+6}{(x^2-4)\ (x^2-9)}$。

15. $\dfrac{a^2-9b^2}{12b^2-ab-a^2}$。　　16. $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{8b^2-2ab-a^2}$。

17. $\dfrac{(x-y)^2-z^2}{(y+z)^2-x^2}$。　　18. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}$。

19. $\dfrac{(a-b)^3+(b-a)}{(b-a)^4+(a-b)}$。　　20. $\dfrac{(a-b)^3+(b-a)}{(b-a)^3+(a-b)}$。

§ 97.　**通分**　把 A, B, C 諸分式各用同數乘之，化成新分式 A', B', C'，使(1) $A'=A$, $B'=B$, $C'=C$，並使(2) A', B', C' 諸式的分母皆爲 A, B, C 的三個分母的最低公倍數，這手續叫做通分。

[例一] 把$\frac{a}{b^2}$, $\frac{1}{ab}$, $\frac{1}{a^2}$ 通分。

[解法] 先求 b^2, ab, a^2 的 L. C. M. 卽 a^2b^2，作爲新分式的公分母。

次察，$\frac{a}{b^2}$的分母乘以何數，才得 a^2b^2？不是乘以 a^2 嗎？分母旣乘以 a^2，則分子不是也要乘以 a^2 嗎？故知所求分式之一是

$$\frac{a\times a^2}{b^2\times a^2}=\frac{a^3}{a^2b^2}。$$

同理，其他二分式應是

$$\frac{1\times ab}{ab\times ab}=\frac{ab}{a^2b^2},$$

及

$$\frac{1\times b^2}{a^2\times b^2}=\frac{b^2}{a^2b^2}。$$

[例二] 把$\frac{1}{x+y}$, $\frac{2}{x-y}$, $\frac{3}{x^2-y^2}$通分。

[解法] 倣例一，知所求諸式的分母是 $x+y$, $x-y$, x^2-y^2 的 L. C. M. 卽是 x^2-y^2。故所求分式是

$$\frac{1\times(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x^2-y^2};$$

$$\frac{2(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{2x+2y}{x^2-y^2};$$

$$\frac{3}{x^2-y^2}=\frac{3}{x^2-y^2}。$$

由上面兩例看來，可得通分的步驟如下：

第一步。　先由所給諸式 A, B, C 中，求出諸分母的 L. C. M.

第二步。　次以 A, B, C 諸式的分母，依次除這 L. C. M.，得整商 a, b, c。

第三步。　乃以 a 乘 A 的分子分母；以 b 乘 B 的分子分母；以 c 乘 C 的分子分母，就得所求的分式。

［注意］　第三步所得的分數不可再行約分。

習題八十四

1．把 $\frac{1}{x^2-y^2}$，$\frac{1}{y^2-xy}$，$\frac{1}{x^2+xy}$ 通分

［解法］　因
$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{x^2-y^2}=\frac{1}{(x+y)(x-y)};\\&\frac{1}{y^2-xy}=\frac{1}{y(y-x)};\\&\frac{1}{x^2+xy}=\frac{1}{x(x+y)}。\end{aligned}\right.$$

故諸分母的 L. C. M. 是 $(x+y)(x-y)(y-x)xy$。於是所求的分式是

$$\frac{1}{x^2-y^2}=\frac{(y-x)xy}{(x+y)(x-y)(y-x)xy};$$

$$\frac{1}{y^2-xy}=\frac{(x+y)(x-y)x}{(x+y)(x-y)(y-x)xy};$$

$$\frac{1}{x^2+xy}=\frac{(x-y)(y-x)y}{(x+y)(x-y)(y-x)xy}。$$

這解法對不對？何故？

把下列各題諸分式通分:

2. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, \frac{1}{b^2-a^2}$。

3. $\frac{3cy^3}{5a^3b^3x^2}, \frac{5x^2y^2}{2a^3b^2c^4}, \frac{2a^2b^2c^2}{3abcy^2}$。

4. $\frac{x-y}{x+y}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2+y^2}{x+y}, \frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{x-y}$。

5. $\frac{3}{x^2-ax}, \frac{5}{x^3-a^2x}, \frac{7}{a^3-ax^2}$。

6. $\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}, \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}, \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$。

7. $\frac{x-y}{x^3+y^3}, \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$。

8. $\frac{1}{x^2-y^2}, \frac{1}{x^3-y^3}, \frac{1}{x^4-y^4}$。

9. $\frac{1}{x^2-xy+y^2}, \frac{1}{x^2+xy+y^2}, \frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}$。

10. $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c-b}, \frac{1}{a-c}$。

11. $\frac{m+3n}{m-3n}, \frac{m^2+9n^2}{m^2-9n^2}, \frac{m^3+27n^3}{m^3-27n^3}$。

12. $\frac{1}{(x-y)(y-z)}, \frac{1}{(x-z)(z-y)}, \frac{1}{(z-x)(y-x)}$。

13. $x^2-xy+y^2, \frac{x^3-y^3}{x+y}, x^2+xy+y^2$。

§ 98. **分式加減法** 這問題可分兩類如下:

[第一類] 分母相同的。 在除法有

$$\frac{A+B-C}{D}=\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}$$，故在分式有

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}。$$

所以"同分母諸分式的加減法，就是把諸分子依其原有的符號相加減，以其結果作爲所求分式的分子，而以原有同分母作爲所求分式的分母"。

例如，$\frac{m}{x}+\frac{3m}{x}+\frac{p}{x}-\frac{q}{x}$

$$=\frac{m+3m+p-q}{x}=\frac{4m+p-q}{x}。$$

又如，$\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y。$

又如，$\frac{x^3}{x^2-y^2}-\frac{y^3}{x^2-y^2}=\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}。$$

[第二類]　分母不盡相同的。　當所欲加減諸分式的分母不盡相同時，可用通分法使其分母相同，再仿第一類加減之。

[例一]　$\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=?$

[解法]　$\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{x^2z}{xyz}-\frac{xy^2}{xyz}+\frac{yz^2}{xyz}$

$$=\frac{x^2z-xy^2+yz^2}{xyz}。$$

[例二]　$\frac{x+2y}{x^2-xy}+\frac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2}-\frac{x-3y}{x^2-2xy}=?$

[解法]　$\because\begin{cases}x^2-xy=x(x-y);\\x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y);\\x^2-2xy=x(x-2y)。\end{cases}$

故通分後所得的分母該是 $x(x-y)(x-2y)$。於是

$$\frac{x+2y}{x^2-xy}+\frac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2}-\frac{x-3y}{x^2-2xy}$$

$$=\frac{(x+2y)(x-2y)+x(2x+y)-(x-3y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{x^2-4y^2+2x^2+xy-x^2+4xy-3y^2}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{2x^2+5xy-7y^2}{x(x-y)(x-2y)}=\frac{(2x+7y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{2x+7y}{x(x-2y)}=\frac{2x+7y}{x^2-2xy}。$$

[注意]　由任何演算所得的分式，如其分子，分母有相同因子時，都要約成最簡分式。

習 題 八 十 五

求下列各式的結果：

1. $\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{-3y}{x+y}$。

2. $\dfrac{x^3}{x^2-y^2}-\dfrac{y^3}{x^2-y^2}$。

3. $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$。

4. $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$。

5. $\dfrac{a^2-3b}{a^2+3ab+2b^2}-\dfrac{b^2-3b}{a^2+3ab+2b^2}$。

6. $\dfrac{x-z}{x+y}+\dfrac{z-y}{x+y}-\dfrac{y-z}{x+y}$。

7. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}$。

8. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$。

9. $\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}$。

10. $\dfrac{n}{m^2}+\dfrac{m}{n^2}+\dfrac{1}{mn}$。

11. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$。

12. $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$。

13. $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a^3-b^3}$。

14. $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}+\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$。

15. $\dfrac{x+y}{x^3-y^3}+\dfrac{x-y}{x^3+y^3}$。

16. $\dfrac{a^2+1}{a^2-4}-\dfrac{a^2-1}{a^2+4}$。

17. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x-y}+\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}$。

18. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$。

19. $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$。

20. $\dfrac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}-\dfrac{m^2-mn+n^2}{m^3+n^3}$。

21. $a-1+\dfrac{2}{a+1}$。

22. $a+b-\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{a-b}$。

［注意］ 任何整式，可當做分母是 1 的分式。

23. $\dfrac{1}{x^2-3xy+2y^2}+\dfrac{1}{x^2-4xy+3y^2}+\dfrac{1}{x^2-5xy+6y^2}$。

24. $\dfrac{x^3+x^2y}{x^2y-y^3}-\dfrac{x(x-y)}{xy+x^2}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$。

25. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{8ab^3}{(a^2-b^2)^2}$。

26. $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}$。

27. $\dfrac{x}{y^2-yz}+\dfrac{y}{z^2-xz}+\dfrac{z}{x^2-xy}$。

28. $\dfrac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}+\dfrac{x+b}{x^2-(c+a)x+ac}+\dfrac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}$。

29. $\dfrac{1}{a^2-(b-c)^2}-\dfrac{1}{b^2-(c-a)^2}-\dfrac{1}{c^2-(a-b)^2}$。

30. $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(c+a)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(b+c)}$。

§ 99. **加減演算中分母應力求其簡**　前節所述加減法，乃式中一切加減問題的基本算法，倘能應用純熟，對於任何分式加減問題，自可求得其結果。但在若干加減問題中，苟非用適當的技巧，那就笨拙不堪了。今舉兩例於下：

［例一］ $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y^2-x^2}=?$

［解法］ 因 $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$ 其中 $y-x$ 與第二分式的分母 $x-y$ 只有符號不同，故通分之後所得的分母應爲 $x(y-x)(y+x)$，而不必用 $x(x-y)(y-x)(y+x)$。所以把第二分式分

母的符號變換，得

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y^2-x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y-x}+\frac{1}{(y-x)(y+x)}$$

$$=\frac{(y-x)(y+x)+x(y+x)+x}{x(y-x)(y+x)}$$

$$=\frac{y^2+xy+x}{x(y-x)(y+x)}。$$

[例二]　$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-b)(a-c)}+\frac{1}{(c-a)(b-a)}=?$

[解法]　因 $c-b=-(b-c)$，$a-c=-(c-a)$。$b-a=-(a-b)$，故在第二分式中

$$(c-b)(a-c)=(b-c)(c-a),$$

而在第三分式中

$$(c-a)(b-a)=-(c-a)(a-b)。$$

於是原分式的和可寫成

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{(c-a)+(a-b)-(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{2(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-2}{(a-b)(c-a)}。$$

[注意]　諸分母的 L. C. M. 不是 $(a-b)(b-c)(c-b)(a-c)(c-a)(b-a)$。

習題八十六

求下列各式的結果：

1. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{a^2-b^2}$。

2. $\dfrac{1}{x-4y}+\dfrac{1}{x+4y}-\dfrac{1}{16y^2-x^2}$。

3. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{4-5x+x^2}$。

4. $\dfrac{1}{(a-b)(a+b)}+\dfrac{2}{(b-a)(a+b)}+\dfrac{3}{b^2-a^2}$。

5. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-3)(1-x)}+\dfrac{1}{(3-x)(2-x)}$。

6. $\dfrac{m}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{n}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{l}{(b-a)(a-c)}$。

7. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$。

8. $a^2+a+1+\dfrac{a^2}{1-a}-\dfrac{3}{a-1}-(a-1)$。

§ 100. **分式乘法**　兩分式相乘，就是把兩式的分子相乘，作爲積的分子；兩式的分母相乘，作爲積的分母。用算式來表，就是：

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}。$$

理由何在？證之如下：

〔證〕　設以 x 代 $\dfrac{A}{B}$，以 y 代 $\dfrac{C}{D}$，則依

"商×除式=被除式"之理，應得

$$Bx=A, \tag{1}$$

$$Dy=C。 \tag{2}$$

把(1)，(2)相乘得　$BDxy=AC$

兩邊同除以 BD，得　$xy=\frac{AC}{BD}$

就是　$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}。$$

[例一]　$\frac{2a}{3b}\times\frac{3c^2}{4a^3}\times\frac{5bc}{6abc^2}=?$

[解法]　原式$=\frac{2a\times3c^2\times5bc}{3b\times4a^3\times6abc^2}=\frac{5c}{12a^3b}$。

[例二]　化簡下式：

$$\left(x^2+xy+y^2+\frac{2y^3}{x-y}\right)\left(\frac{-2y^3}{x^3+y^3}+1\right)\times\frac{1}{x-y}。$$

[解法]　原式$=\frac{x^3-y^3+2y^3}{x-y}\cdot\frac{x^3+y^3-2y^3}{x^3+y^3}\cdot\frac{1}{x-y}$

$$=\frac{x^3+y^3}{x-y}\cdot\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^3+y^3}\cdot\frac{1}{x-y}$$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}。$$

習題八十七

求下列各式的結果：

1. $\dfrac{x^2y^2}{x^3z^3}\times\dfrac{yz^3}{xy^2}$。　　　2. $\dfrac{m^p}{n^q}\times\dfrac{n^q}{m^p}$。

3. $\dfrac{ab}{ax}\times\dfrac{xy}{by}$。　　　4. $\dfrac{mnp}{mx}\times\dfrac{yz}{ny}\times\dfrac{x}{pz}$

5. $\dfrac{(2m)^2}{n}\times\dfrac{(3n)^2}{p}\times\dfrac{(4p)^2}{m}$。　　　6. $\dfrac{(-a)^2}{c^3}\times\dfrac{(-b)^2}{a^3}\times\dfrac{(-c)^2}{b^3}$。

7. $\dfrac{(2a)^3}{(4c)^4}\times\dfrac{(3b)^2}{(2a)^2}\times\dfrac{(4c)^3}{(3b)^3}$。　　　8. $\dfrac{a^2m}{b^2p}\times\dfrac{b^2n}{c^2m}\times\dfrac{c^2p}{a^2n}$。

9. $\dfrac{x+y}{x-y}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$。　　　10. $\dfrac{2x^4-32}{3x-6}\times\dfrac{3x+6}{6x^2+24}$。

11. $\dfrac{x-5}{x+3}\times\dfrac{9-x^2}{25-x^2}$。　　　12. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\times\dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$。

13. $\dfrac{2a^2-a-1}{2a^2+5a+2}\times\dfrac{4a^2+a-14}{16a^2-49}$。

14. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}\right)$。

15. $\left(2+\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)\left(\dfrac{xy^2-x^2y}{x^2-y^2}+x-y\right)$。

16. $\left(1+\dfrac{4}{x^4}\right)\times\dfrac{x^4}{x^2-2x+2}$。

17. $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\times\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\times\dfrac{a+b}{a-b}\times\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$。

18. $\dfrac{y^2-y-2}{y^2+8y+15}\times\dfrac{y^2-y-12}{y^2+y-42}\times\dfrac{y^2-y-30}{y^2-7y-8}\times\dfrac{y^2-y-56}{y^2-6y+8}$。

§ 101.　分式除法　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=?$ 這問題可從分式乘法去解決。

因爲在乘法，已知　$\left(\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}\right)\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$，

故在除法，應有

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$$

也就是

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}。$$

所以"兩分式相除，就是把除式（非被除式）的分子，分母上下倒轉，以與被除式相乘"。

［例一］　$\frac{1}{x}\div\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\times\frac{y}{1}=\frac{y}{x}$。

［例二］　$\frac{a+b}{a-b}\div\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

$$=\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}\times\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}=1。$$

［例三］　$\left(1+\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{x^3}{y^3}+1\right)$

$$=\frac{x+y}{x}\div\frac{x^3+y^3}{y^3}=\frac{x+y}{x}\times\frac{y^3}{x^3+y^3}$$

$$=\frac{y^3}{x(x^2-xy+y^2)}=\frac{y^3}{x^3-x^2y+xy^2}。$$

習題八十八

求下列各式的結果：

1. $\dfrac{4x^3y^2}{7ab} \div \dfrac{8x^2y^2}{14a^2b^2}$。　　2. $\dfrac{25a^2b^2}{9mn} \div \dfrac{27mn}{5ab}$。

3. $20x^2 \div \dfrac{x^2}{y^2}$。　　4. $\dfrac{20x^2}{y^2} \div x^2$。

5. $\dfrac{abc}{xy} \div \dfrac{bcd}{yz}$。　　6. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab} \div \dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$。

7. $\dfrac{x^3+y^3}{x-y} \div \dfrac{x+y}{x^3-y^3}$。　　8. $\dfrac{x^3+y^3}{x-y} \div \dfrac{x^3-y^3}{x+y}$。

9. $\dfrac{a^2-14a-15}{a^2+4a-5} \div \dfrac{2a^2-5a-7}{2a^2-11a+14}$。

10. $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} \div \dfrac{a^2-(b-c)^2}{a^2-(b+c)^2}$。

11. $\dfrac{2a^2-5a-12}{3a^2+6a-\text{[illegible]}} \div \dfrac{2a^2-7a-4}{6a^2+5a-4} \div \dfrac{4a^2+4a-3}{6a^2-a-2}$

12. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} \div \dfrac{x^3+x^2y+xy^2}{x-y} \div \dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}$。

13. $\dfrac{x^2+y^2-z^2+2xy}{z^2-x^2-y^2+2xy} \div \dfrac{z+y+x}{z+y-x}$。

14. $\dfrac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{x^3-y^3-3xy(x-y)} \div \dfrac{x(x+2y)+y^2}{x(x-2y)+y^2}$。

15. $\dfrac{a^2-2a+4}{a-5} \times \dfrac{a^2+a-2}{a^2-2a+1} \div \dfrac{a^4+8a}{a^3+4a^2-5a}$。

§ 102. **疊分式的化簡**　在分式$\dfrac{A}{B}$中，如 A, B 二者之一是分式，或都是分式，那麼這分式$\dfrac{A}{B}$就叫做疊分式。化簡疊分式，實際就是演分式除法。所以疊分式的化簡可依下法去做：

［第一法］　先把疊分式的分子，分母，各依分式加減法改成

最簡分式，再依（上節）分式除法去化簡。

例如，$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{xy}}{\frac{y^2+z^2}{yz}}=\frac{x^2+y^2}{xy}\times\frac{yz}{y^2+z^2}=\frac{(x^2+y^2)z}{(y^2+z^2)x}。$$

但是究不如下法爲簡：

［第二法］　先在疊分式的分子分母中，求出所有著分式的最小公分母（即諸分母的 L. C. M.），以這最小公分母遍乘疊分式的分子分母，然後再去化簡。

例如，$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}=\frac{xyz\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}{xyz\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)}=\frac{x^2z+y^2z}{xy^2+xz^2}=\frac{(x^2+y^2)z}{(y^2+z^2)x}。$$

又如，$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}=\frac{xyz\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)}{xyz\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)}=\frac{x^2z+xy^2+yz^2}{x^2z-xy^2+yz^2}。$$

習題八十九

化簡：

1. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}$。　　　　2. $\dfrac{3a-\frac{3x^2}{a}}{1+\frac{2x}{a}}$。

3. $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$。　　4. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}}$。

5. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}$。　　6. $\dfrac{\dfrac{a^2}{y^2}+\dfrac{a}{y}+1}{\dfrac{b^2}{y^2}-\dfrac{b}{y}+1}$。

7. $\dfrac{\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a-4}}{1+\dfrac{1}{a^2-7a+12}}$。　　8. $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}+\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$。

9. $\dfrac{(1+x)\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}\right]}{\dfrac{4}{x}+x}$。　　10. $\dfrac{x+\dfrac{2}{x-3}}{x-\dfrac{2}{x-2}}\times\dfrac{x-2+\dfrac{1}{x}}{x-3+\dfrac{1}{x}}$。

11. $\dfrac{x+\dfrac{xy}{x-y}}{x-\dfrac{xy}{x-y}}$。　　12. $\dfrac{\dfrac{2a-5b}{2a+5b}+\dfrac{2a+5b}{2a-5b}}{\dfrac{2a+5b}{2a-5b}-\dfrac{2a-5b}{2a+5b}}$。

13. $$\frac{a}{1+\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{a}}}=\frac{a}{1+\dfrac{a}{\dfrac{a+1}{a}}}=\frac{a}{1+\dfrac{a^2}{1+a}}=\frac{a}{\dfrac{1+a+a^2}{1+a}}$$。

$$=\frac{a+a^2}{1+a+a^2}$$。

14. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$。　　15. $\dfrac{1}{x^3-\dfrac{x+1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}$。

習　題　九　十

1. 化$\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$成整式與分式的和。

[解法]　$\frac{x^3+y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2+\frac{2y^3}{x-y}$

2．化下列各式成整式，或整式與分式的和：

(a) $\frac{x^4+16}{x+2}$。　(b) $\frac{x^6+y^6}{x^3+y^3}$。　(c) $\frac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$。

(d) $\frac{abcd+c}{abc}$。　(e) $\frac{mn+pq}{mnpq}$。　(f) $\frac{mnpq}{mn+pq}$。

3．化下列各式為分式：

(a) $x^2+xy+y^2+\frac{x^3-y^3}{x-y}$。　(b) $a^2-ab+b^2+\frac{-2b^3}{a+b}$。

化簡下列各式：

4．$\left(y+\frac{xy}{y-x}\right)\left(y-\frac{xy}{x+y}\right)\times\frac{y^2-x^2}{y^2+x}$。

5．$\left(\frac{a}{1+a}+\frac{1-a}{a}\right)\div\left(\frac{a}{1+a}-\frac{1-a}{a}\right)$。

6．$\left(\frac{x}{y}-\frac{s}{t}\right)\left(xt+ys\right)$。

7．$\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{y}{x}-1\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)$。

8．$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2\div\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$。

9．$\left(\frac{x}{5y}+\frac{3y}{2x}\right)^2-\left(\frac{2x}{3y}-\frac{5y}{2x}\right)^2$。

10．$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\div\left(a-\frac{1}{a}\right)$。

11．$\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)\div\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$。

12．$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1\right)$。

13. $\dfrac{1}{y-\dfrac{1}{y}}+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}-\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{y^2}}$。

4. $\dfrac{x-2}{6}-\left[\dfrac{x-4}{9}-\left(\dfrac{2-3x}{4}-\dfrac{2x+1}{12}\right)\right]$。

15. $\dfrac{x+y}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{y+z}{(z-x)(z-y)}+\dfrac{x+z}{(x-y)(x-z)}$。