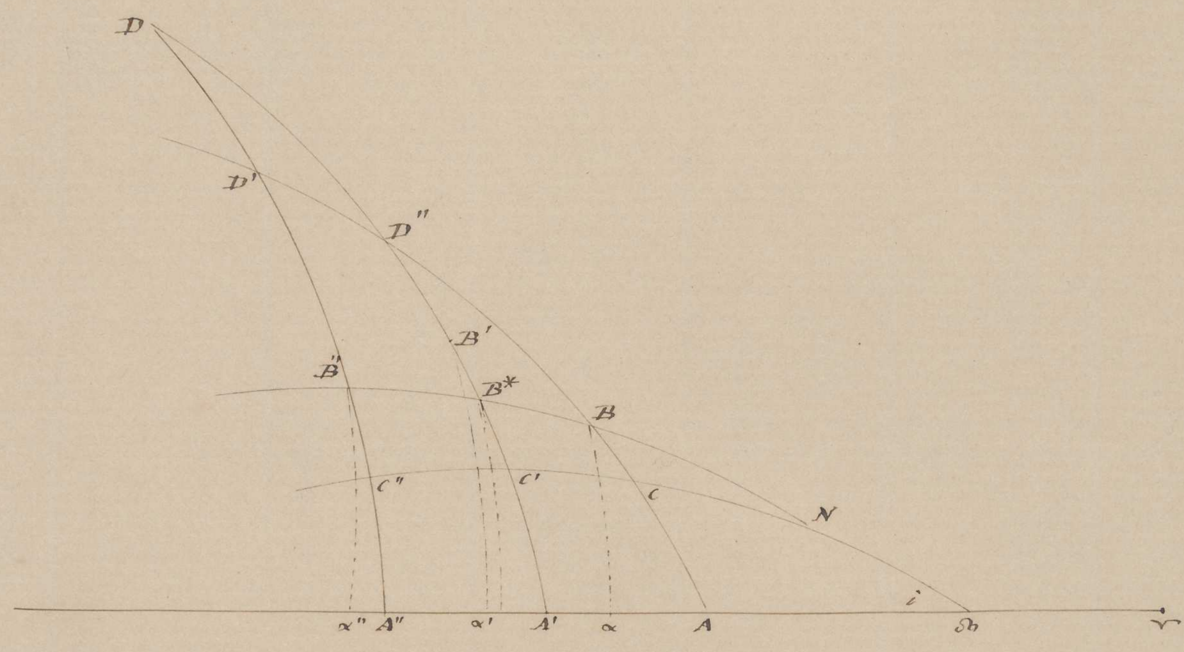
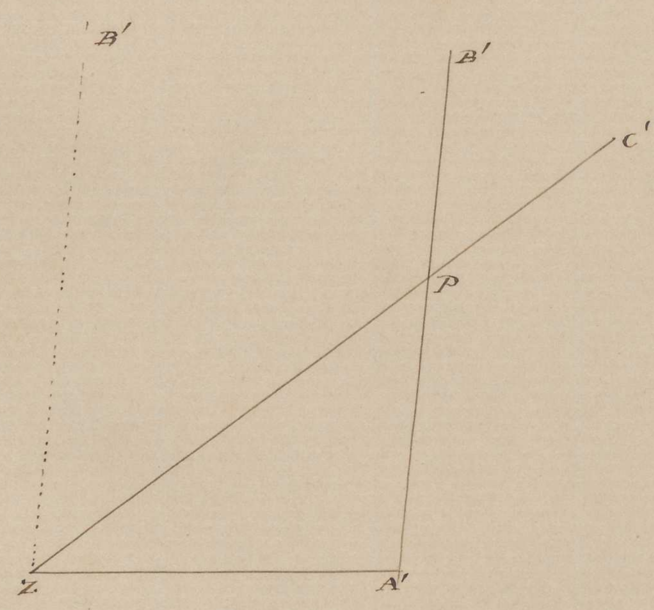
Orbits: Gauss

Fk 166.3

Loopbanen


D
D'
D''
B'
B''
B*
B
C''
C'
C
N
i
α''
A''
α'
A'
α
A
☊
♈


B'
B'
C'
P
Z
A'

De bepaling van de loopbaan eener planeet uit drie waarnemingen naar Gauss.

Geometrische aanwijzing van den weg door Gauss ingeslagen

Laat A, A', A'' de drie heliocentrische plaatsen der aarde voorstellen en B, B', B'' de drie, daarbij behoorende geocentrische plaatsen der planeet. Men verbeelde zich de vlakke gaande door de zon en de punten A en B, namelijk de gelijktijdige plaatsen van aarde en planeet. Die vlakke teekent zich aan den hemel als een groote cirkel AB, die de zon tot middelpunt heeft. In die vlakke ligt de lijn, van de zon naar de planeet getrokken en daarom moet de heliocentrische plaats der planeet in den boog AB gelegen zijn. De twee overige heliocentrische plaatsen der planeet, C', C'' liggen even zoo in de bogen A'B' en A''B''. De punten C, C' en C'' liggen met de zon in dezelfde platte vlakke en alzoo in een grooten cirkel aan den hemel, die de vlakke der loopbaan vertegenwoordigt. Laat C''C'CN een gedeelte van dien grooten cirkel zijn. Indien de ligging der punten C, C', C'' uit die der punten A, A', A'', B, B', B'' is afgeleid, zoo is ook het eerste gedeelte van het vraagstuk opgelost.

Om de ligging der punten C, C', C'' te bepalen trekke men de bogen Bα, B'α', B''α'' loodregt op de Ecliptica Eε. Die bogen zijn de geocentrische breedten der planeet en de bogen Aα, A'α', A''α'' zijn de verschillen tusschen de geometrische Lengten der planeet en de heliocentrische Lengten der aarde. Men berekene de hypothenusen AB, A'B', A''B'' en de hoeken BAα, B'A'α' en B''A''α''

Worden de bogen AB, A'B', A''B'' verlengd tot dat zij elkander in de punten D, D' en D'' ontmoeten, zoo ontstaan de driehoeken AD''A', A'DA'' en AD'A'', waarin de bases en de aangrenzende hoeken bekend zijn, en waaruit zich de hoeken D, D', D'' en de twee andere zijden laten berekenen.

Trekt men eenen boog van een grooten cirkel door de punten B en B'', zoo ontstaan daardoor de driehoeken BD'B'', BD''B* en B*DB''. In den driehoek BD'B'' kent men reeds de zijden $B'D'$, $B''D''$ en den hoek D'. Men kan daardoor de zijde $B''B$ en de aangrenzende hoeken berekenen. Omtrent de twee andere driehoeken laat zich die berekening echter niet volbrengen, omdat men wel de ligging kent van het punt B' dat boven of onder den boog BB'' gelegen zal zijn, maar niet die van het punt B^*. Men moet alzoo den boog $B'B^*$ bepalen, hetgeen niet moeijelijk is. In den driehoek $B^*D'B''$ kent men de zijden $B''D'$ en de aangrenzende hoeken. Daaruit kan men de zijde $D'B^*$ berekenen, vervolgens B^*A' uit $D'A'$ en eindelijk met behulp van $B'A'$ het verschil B^*B'. Omtrent de ligging van de punten C, C', C'' kan men echter niets beslissen voor dat de boog $B'C'$ bepaald is. De bepaling van dien boog is de groote moeijelijkheid van het vraagstuk. Gauss heeft, met een groot talent, voor de bepaling van dien boog eene vergelijking gegeven die op de bekende wetten der beweging rust en alleenlijk op eene indirecte wijze kan worden opgelost.

Is eenmaal de boog $B'C'$ bepaald dan volgt daaruit van zelf de boog $C'D''$ en kan men den hoek C' berekenen. Daaruit berekent men de zijden CD' en $C''D''$ met de hoeken die zij met den boog $C''C'C$ maken en hieruit volgt de ligging der drie punten C, C', C'' met wier bepaling het eerste gedeelte van het vraagstuk is opgelost.

Ook de hoek C' moet, uit de wetten van beweging, in vereeniging met $B'C'$ worden afgeleid.

Kan men de ligging der punten C, C', C'', naar aanleiding van de figuren, alleenlijk door de sphærische driehoeksmeting bepalen, dan zoude men de loopbaan eener planeet ook zonder eenige kennis van de wetten van beweging uit drie geometrische plaatsen kunnen afleiden. De boog $B'C'$ en de hoek C' zijn de eenige grootheden die door de wetten van beweging bepaald moeten worden. Al het overige wordt door de sphærische driehoeksmeting bepaald.

De grootheden bij Hansen voorkomende hebben, naar de nevensgaande figuur, de volgende geometrische beteekenis:

Bladz. 84 $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ zijn $\Upsilon\alpha\ \ \Upsilon\alpha'\ \ \Upsilon\alpha''$
$\beta\ \beta'\ \beta''$ $B\alpha\ \ B'\alpha'\ \ B''\alpha''$
$l\ l'\ l''$ $\Upsilon\alpha\ \ \Upsilon A'\ \ \Upsilon A''$

Bladz. 87 $m'' = BB'$ bl. 88 $m = B'B''$ bl. 91 $m' = BB''$

Bladz 87 $C = 180° - BB'\alpha'$ $C'' = 180 - B''B'\alpha$

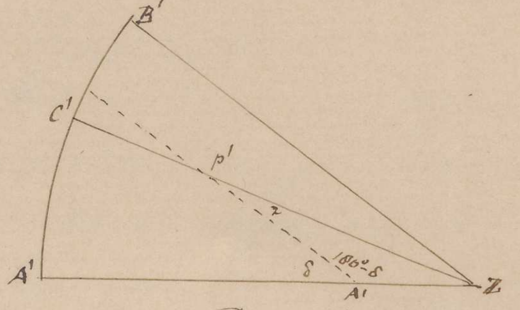
Bladz 89 $\theta = \Upsilon\Omega$ $i = C\Omega A$.

Bladz 91 $M\ M'\ M''$ zijn $BA\ \ BA'\ \ BA''$

$D =$ hoek $B''BA$ $D = B''BA$ $D'' = B''BA''$

NB. D, heeft hier eene andere beteekenis dan op bladz. 113.

Bladz. 97



Uit deze figuur volgt dat:
$z = B'C'$
$\delta = A'B'$

Bladz. 105. σ is B^*C'. Dit blijkt niet onmiddellijk uit de figuur of de notatie, maar uit de formulen, in vergelijking van die van Gauss.

Bladz. 110 $2f' = CC''$ p. 111 $2f'' = CC'$ $2f = C'C''$

Bladz 112 $\lambda = B'A'A''$

De overige hulpgrootheden bij Hansen als:

Bladz. 86 k, A, B, C: bladz. 113 D,
" 105 S, σ, Ω, w,
" 109 E, E'', W, W'', w, w'',
" 113 $\Lambda, \Lambda''\ \lambda, \lambda''$,
" 115 U, U'', L, L'',

hebben meerendeels eene niet zeer zamengestelde geometrische beteekenis, maar die uit de beschouwingen van Hansen niet kan worden afgeleid en voor wier bepaling men den weg moet volgen, door Gauss ingeslagen. Men moet echter de geometrische beteekenis van sommige dier grootheden kennen, om de verhandeling van Hansen te kunnen verstaan.

Methode van Gauss voor de bepaling van elliptische loopbanen.

Onderlinge vergelijking der verhandelingen van Hansen en Encke.

Hansen begint, even als Encke, met het bewijs van de bekende eigenschappen der driehoeken (Bladz 84 (2) Encke bladz. 320) en gaat dan onmiddellijk over tot het betoog der grondformule voor ϱ' (Bladz. 86 (4)) die alleenlijk op de eigenschap rust, dat de loopbaan in eene platte vlakte ligt die door de zon gaat, maar waarbij de verhouding tusschen de driehoeken als bekend wordt aangenomen. Die formule komt bij Encke eerst voor aan het hoofd van bladz. 326. Het wezen van die grondformule wordt door Hansen veel naauwkeuriger beschouwd en ontwikkeld dan door Encke. Hansen wijdt aan die beschouwing bladz. 86 tot 94. Hij toont aan waarom die grondformule ongeschikt is voor het gebruik en leidt uit haar zelve af, dat eene eerste benadering eene kennis van de verhouding der driehoeken tot op grootheden der derde orde vordert.

Encke gaat, na de formulen (2) van Hansen bewezen te hebben, onmiddellijk over tot het betoog der formule, die het verband tusschen deze parameter en de driehoeken uitdrukt en die in dien vorm bij Hansen in het geheel niet voorkomt, maar alleen in de wijziging, die Gauss haar heeft gegeven (Hansen bladz. 111 in Q en bladz. 122 form. $p =$ enz.) Encke geeft hier tevens een paar formulen, noodig voor de berekening der elementen, die bij Hansen eerst op het laatste einde van zijne verhandeling voorkomen en die hier ook nog niet noodig zijn. Encke gaat onmiddellijk over tot de bepaling van de verhouding tusschen de driehoeken uit de radii vectores en toont door de formule voor den parameter aan, dat die op de kennis eener grootheid der derde orde rust. Hansen geeft de bepaling van de verhouding tusschen de driehoeken op bladz 94 – 96 en komt bladz. 96 tot dezelfde uitkomsten als Encke op bladz. 324.

Encke geeft bladz. 325–6 het betoog der grondformule

(Hansen bladz. 86 (4)) en toont verder uit haar zelve aan, dat zij het in acht nemen van grootheden der derde orde vordert. Hij brengt die formule wel onder eene eenvoudigere gedaante, maar treedt omtrent haar in geene beschouwingen.

Encke (bladz. 332 boven) en Hansen (bladz. 98 (6)) wijzigen de grondformule naar de bepaalde verhouding tusschen de driehoeken. Encke toont echter niet, zoo als Hansen, opzettelijk aan, dat de formule, door de eliminatie der driehoeken, de geschiktheid verkrijgt voor het gebruik, die zij oorspronkelijk niet had.

Hansen (blad 100) en Encke (bladz. 330) geven het betoog der grootheden P en Q van Gauss. Hansen doet duidelijker dan Encke zien waarom Gauss die grootheden heeft ingevoerd. Hansen doet dit <u>na</u>, Encke <u>vóór</u> het betoog der gewijzigde grondformule. Hansen geeft echter de grootheid Q niet in den vorm waarin zij door Gauss is gebragt. Hij neemt dien vorm voor Q (bladz. 111) eenvoudiglijk aan, waar hij dien behoeft, maar dien vorm vordert een afzonderlijk bewijs, dat door Hansen niet wordt gegeven.

Hansen (bladz. 105) en Encke (bladz. 332) herleiden de gewijzigde grondformule tot de bekende vierdemagts vergelijking van Gauss. Die vergelijking wordt door Encke veel naauwkeuriger beschouwd dan door Hansen. Encke doet zien dat de gewijzigde grondformule onmiddellijk leidt tot eene onvolledige vergelijking der achtste magt. Uit den vorm dier vergelijking leidt hij belangrijke gevolgtrekkingen omtrent hare wortels af. Encke handelt (bladz. 335–8) opzettelijk over het geval, waarin de vergelijking twee uitkomsten voor de loopbaan geeft.

Hansen geeft (bladz. 106–8) eenige beschouwingen over de vierdemagts vergelijking, van een geheel anderen aard dan die van Encke. Hansen leidt uit het wezen dier vergelijking af, onder welke omstandigheden zij de loopbaan met eene meerdere of mindere juistheid doet bepalen.

Hansen (bladz. 108–110) en Encke (bladz. 339–341 gaan, na het betoog der vierdemagts vergelijking, over tot het verbeteren van de verhouding tusschen de driehoeken, of van de grootheden P en Q naar eene eerste benaderde kennis van de loopbaan.

Hansen en Encke maken beide eene onderscheiding tusschen de grootheden, die van alle hypothesen omtrent P en Q onafhankelijk zijn en de overige. De juiste berekening der grootheid Q vordert de bepaling van het verschil tusschen de excentrische anomaliën, dat men buitendien voor de bepaling der elementen kennen moet en waarover door Hansen en Encke later wordt gehandeld. Voor het oogenblik moeten, om tot de verbetering van P en Q te kunnen overgaan, uit de opgeloste vierdemagts vergelijking, ρ, ρ″, r en r″ worden afgeleid. Voor r en r″ geven Hansen en Encke dezelfde formulen, die bij Hansen eerst later (pag. 119) volgen. De formulen voor ρ en ρ″ zijn door Hansen (bladz. 112–114) onder eene eenvoudiger gedaante dan die van Gauss en Encke gebragt.

Encke geeft (bladz. 342), na het bepalen der grootheden ρ, ρ″, r, r″, onmiddellijk de formulen voor de berekening van de helling der loopbaan en de lengte van den knoop. Hansen geeft die formulen eerst later (blad 131) daar zij bij eene eerste benadering niet noodig zijn. Zij kunnen echter als een toets der reeds volbragte berekeningen worden aangewend.

Hansen geeft bladz. 112–114 de vroeger vermelde vereenvoudiging van formulen, die bij Encke niet voorkomt en daarna (bladz. 114–118) eene zamenstelling van alle formulen, die bij alle benaderingen dezelfde blijven en die men alzoo onmiddellijk berekenen kan. Daaraan verbindt hij de oplossing der vierdemagts vergelijking naar de eerste hypothese en pag. 118–119 volgen de formulen voor de berekening der afstanden bij de drie waarnemingen, naar de oplossing der vierdemagts vergelijking onder de eerste hypothese, waarbij $P = \frac{\theta}{\theta''}$ en $Q = \theta\theta''$.

Na deze voorbereidingen gaan Hansen (bladz. 121) en Encke (bladz. 343) over tot de berekening van de verhoudingen tusschen tot de elliptische sectoren en de daarbij behoorende driehoeken. Die verhoudingen komen voor in de verbeterde waarden van P en Q en zij vorderen de kennis van het verschil tusschen de excentrische anomaliën, die men toch aan de berekening der elementen kennen moet. De bepaling van dat verschil is de groote moeijelijkheid. Encke geeft de oplossing van Gauss, met eene door hem aanbevolene belangrijke wijziging en Hansen geeft eene hem eigene hoogstmerkwaardige oplossing van het vraagstuk. Encke treedt in eenige be spiegelingen omtrent de grootte der verbetering. Dit onderzoek strekt zich bij Hansen uit van pag. 121 tot pag. 129, bij Encke van pag. 345 tot pag. 353.

Nu moeten nog de Elementen bepaald worden, uit de oplossing der verbeterde vierdemagtsvergelijking en de daaruit afgeleide waarden van r, r", u en u". Encke had de formulen die ~~in~~ de ligging der loopbaan bepalen reeds vroeger (bladz. 342) gegeven. De overige geeft hij hier. Hansen en Encke hebben voor de bepaling van a e π en M verschillende formulen aan Gauss ontleend. Hansen neemt die formulen zonder eenig bewijs eenvoudiglijk van Gauss over. Hansen geeft bladz. 131–132 ten slotte hem eigene formulen voor de bepaling van i en Ω.

Encke toont pag. 355 aan, door de formulen, dat de verhouding tusschen de driehoeken, bij de bepaling van eene elliptische loopbaan, bij de eerste hypothese veel naauwkeuriger dan bij eene parabolische moet worden aangenomen.

Encke handelt nog bladz. 356–361 over de herleiding der waarnemingen naar Gauss, welk onderwerp door Hansen geheel en al met stilzwijgen wordt voorbij gegaan.

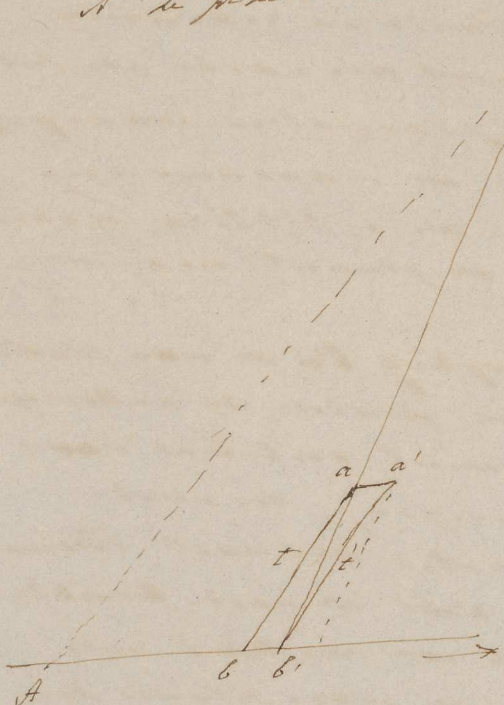
Hansen past zijne formulen toe op de bepaling der loopbaan van Euterpe, uit waarnemingen van 12 Nov., 2 Dec. 22 Dec. 1853 en Encke past zijne formule toe op de bepaling der loopbaan van Hebe uit waarnemingen van den 5, 10 en 16 July 1847.

Hansen geeft bladz. 139, in Zusatz waarin hij de oude methode van Gauss, ontwikkeld, in het 20 ste deel ~~van~~ der Mon. Corr., bij diens nieuwe methode vergelijkt en aantoont dat de hoofdformule van de oude methode niet dan eene uitbreiding is van het theorema van Lambert, volgens hetwelk men uit de kromte van den schijnbaren weg eener planeet of komeet kan afleiden of zij al of niet digter dan de aarde bij de zon is geplaatst.

Encke geeft een Zusatz bladz. 377, waarin hij aantoont dat men bij eene eerste benadering van P en Q naauwkeuriger waarden dan $\frac{\theta}{\theta''}$ en $\theta\theta''$ kan aannemen.

Aberratie van planeten naar Gauss Theoria motus pag. 71 e 135

Zij T de tijd waarop het licht van de planeet uitgaat
P de plaats die de planeet op dat oogenblik inneemt
t de tijd waarop dat licht het objectief der kijkers bereikt
t' " " " " " oculair " "
a en b, a' en b' de plaatsen van objectief en oculair voor de tijden t en t'
A de plaats der aarde of van den kijker op den tijd T



Het licht op den tijd T van P uitgegaan bereikt het objectief op den tijd t in a en komt van de rigting Pa. Terwijl ~~het licht~~ de kijker zich voortbeweegt, kan het licht niet langs ... loopen dat ... rigting ... die is (ab) eene andere rigting verkrijgt dan die van waar het licht komt. Die rigting wordt hierdoor bepaald dat het licht door het oculair moet gaan als het den kijker heeft doorloopen. Na den tijd waarin het licht den kijker heeft doorloopen is het oculair in b naar b' overgegaan en de rigting van ab wordt hierdoor bepaald dat de verhouding tusschen ab' en bb' ~~[illegible]~~ de verhouding is tusschen de snelheid van het licht en die der aarde. Terwijl de planeet op den tijd T geplaatst is in P, wordt zij op den tijd t gezien in de rigting ab.

Het verschil tusschen de tijden t en t' is zoo klein dat het verwaarloosd mag worden. Dus is b' ook de plaats der aarde op den tijd t, d.i. op den tijd waarop zij het licht der planeet ontvangt. Is A de plaats der aarde op den tijd T, d.i. op den tijd dat het licht der planeet dat op den tijd t wordt waargenomen van haar uitging dan is de verhouding tusschen Pb' en Ab' dezelfde als die tusschen de snelheden van het licht en van de aarde. Alleen heeft dan $Pb' : Ab' = ab' : bb'$ en daarom is AP evenwijdig aan ab of $a'b'$.

De schijnbare plaats der planeet op den tijd t is dus gelijk aan hare ware plaats op den tijd T.

Het verschil tusschen de tijden t en T wordt bepaald door den afstand der planeet tot de aarde. De eenvoudigste wijze om de aberratie eener planeet in rekening te brengen als men hare ware plaats uit de waarnemingen wil afleiden bestaat dus daarin dat men ~~[illegible]~~ den tijd waarop men de schijnbare plaats heeft bepaald met $t-T$ vermindert. De waarneming geeft dan onmiddellijk de ware plaats voor den tijd T.

Moet men de ware plaats der planeet voor den tijd t kennen, zoo behoeft men, behalve de kennis van haren afstand, nog die van hare schijnbare beweging. Telt men bij de waargenomene plaats de schijnbare ~~eigene~~ beweging der planeet in den tijd $t-T$ op, zoo heeft men de ware plaats der planeet op den tijd t.

Gauss heeft bij de bepaling van de loopbaan eener planeet nog eene derde handelwijze ingevoerd om de aberratie in rekening te brengen. Maar die handelwijze behoeft bij den afstand der planeet tot de aarde niet te kennen en alzoo ook niet aanvankelijk de aberratie te verwaarloozen. Om die handelwijze te verstaan herinnere men zich dat de loopbaan berekend wordt uit de ware plaatsen die de planeet op drie tijdstippen in de ecliptica van het zonnestelsel inneemt, dat die plaatsen worden afgeleid uit de rigtingen waarin de planeet zich op drie tijdstippen uit drie verschillende aardpunten vertoonde en dat het onderscheid in welke die aardpunten zijn indien voor die waarneming heeft. Zoo wordt de parallaxis in rekening gebragt door niet het middelpunt der aarde als het aardpunt te beschouwen waaruit de planeet is waargenomen maar de plaats zelve waar de waarneming is volbragt of uit het punt van de ecliptica, waarin zij getroffen wordt door de lijn van de planeet naar de plaats der waarneming getrokken.

Het blijkt uit de figuur dat de rigting $b'a$ de ware plaats der planeet op den tijd t zoude voorstellen indien bij onbewegelijke aarde. $b'a$ is de schijnbare plaats der planeet verbeterd voor de aberratie die alleen volgt uit de beweging der aarde vaste ster d.i. verbeterd voor de aberratie der vaste sterren. De planeet was niet meer in T toen hare licht de aarde bereikte. De rigting aP of $b'P$ is noch hare ware plaats voor den tijd T nich voor den tijd t. De rigting aP of $b'P$ is de ware plaats der planeet op den tijd T gezien uit het aardpunt dat de aarde op den tijd t innam. De tijd t is dadelijk bekend en men kan de plaats der aarde voor dien tijd berekenen. Verbetert men de waargenomen plaats der planeet voor de aberratie der vaste sterren zoo heeft men hare ware plaats voor den nog onbekenden tijd T maar gezien uit het aardpunt dat de aarde op den bekenden tijd t innam. Hieruit wordt de ware plaats in de ecliptica bepaald die de planeet op den onbekenden tijd T innam, maar daardoor wordt ook de afstand der planeet bekend en laat zich de tijd T berekenen. Eerst bij de verdere berekening van de loopbaan moet men de tijdstippen kennen waarop de planeet de punten in de ecliptica innam die men door berekening voor aanvankelijk onbekende tijdstippen heeft verkregen. Die tijdstippen worden niet gebruikt vóór dat men de afstanden zoude naauwkeurig genoeg kent om ze door berekening te kunnen bepalen.

De handelwijze van Gauss biedt het groote voordeel aan dat men bij haar gebruik de aberratie niet aanvankelijk behoeft te verwaarloozen om naderhand de berekening te vernieuwen als onder hare verwaarloozing eene mindere juiste kennis van de loopbaan verkregen was.

Bedekking van

$T =$ $h =$ $d =$ $h + d =$ $D =$

$l.A =$
$l.Sin(h+d) =$
$l.a =$

$u = a =$
$p =$
$p - u =$

$l.A =$
$l.Cos(h+d) =$
$l.b =$
$l.\lambda =$
$l.u' =$

$b =$
$u' =$
$p' =$
$p' - u' =$

$l.B =$
$l.Cos\,D =$
$l.c =$
$l.b =$
$l.Sin\,D =$
$l.b\,Sin\,D =$

$c =$
$b\,Sin\,D =$
$v =$
$q =$
$q - v =$

$l.a =$
$l.\lambda =$
$l.Sin\,D =$
$l.v' =$

$v' =$
$q' =$
$q' - v' =$

$\varphi_{,} =$
$L_{,} =$
Corr. =
$L_{,} =$

$c =$
$Q =$
$Q + c =$

$l.tang\,\varphi_{,} =$
$l.t(Q+c) =$
$l.Cos\,\varphi_{,} =$
$l.tg(L - L_{,}) =$
$L - L_{,} =$
$L_{,} =$
$L =$

$l.tang\,\varphi_{,} =$
$l.Sin(L - L_{,}) =$
$l.Cot\,\varphi' =$
$l.Cot\,\varphi' =$
$\varphi' =$

$l(p - u =$
$l(q - v) =$
$l.tang\,M =$
$l.Sin\,M =$
$l.m =$
$l.\frac{m}{k} =$
$l.S(M-N) =$
$l.Cos\,\psi =$

$M =$
$M - N =$
$\psi =$

$l.(p' - u') =$
$l.(q' - v') =$
$l.tang\,N =$
$l.Sin\,N =$
$l\,n =$
$l\frac{m}{n} =$
$l.Cos(M-N) =$
$l\frac{m}{n}Cos(M-N) =$

$N =$
$\frac{m}{n}Cos(M-N) =$

$l.\frac{k}{n} =$
$l.Sin\,\psi =$
$l.\frac{k}{n}Sin\,\psi =$

$\frac{k}{n}Sin\,\psi =$

$\psi =$
$N - 90^\circ =$
Ing / Uitg. } $Q =$

$t =$ – –
$t' =$ – –
} = { = { Ingang / Uitgang

Ingang $= T + t =$
Uitgang $= T + t' =$
} M. t. te Berlijn = } M. t. te

Bedekking van

$T =$ $h =$ $d =$ $h + d =$ $D =$

$l.A =$
$l.\sin(h+d) =$
$l.a =$

$u = a =$
$p =$
$p - u =$

$l.A =$
$l.\cos(h+d) =$
$l.b =$
$l.\lambda =$
$l.u' =$

$b =$
$u' =$
$p' =$
$p' - u' =$

$l.B =$
$l.\cos D =$
$l.c =$
$l.b =$
$l.\sin D =$
$l.b \sin D =$

$c =$
$b \sin D =$
$v =$
$q =$
$q - v =$

$l.a =$
$l.\lambda =$
$l.\sin D =$
$l.v' =$

$v' =$
$q' =$
$q' - v' =$

$l(p-u) =$
$l(q-v) =$
$l.\tan M =$
$l.\sin M =$
$l.m =$
$l.\frac{m}{k} =$
$l.S(M-N) =$
$l.\cos\psi =$

$M =$
$M - N =$
$\psi =$

$\psi =$
$N - 90^\circ =$
Ing. / Uitg. $Q =$

$l.(p' - u') =$
$l.(q' - v') =$
$l.\tan N =$
$l.\sin N =$
$l.n =$
$l\frac{m}{n} =$
$l.\cos(M-N) =$
$l\frac{m}{n}\cos(M-N) =$

$N =$
$\frac{m}{n}\cos(M-N) =$

$l.\frac{k}{n} =$
$l.\sin\psi =$
$l.\frac{k}{n}\sin\psi =$

$\frac{k}{n}\sin\psi =$

$\varphi_{,} =$ $L_{,} =$ $c =$
Corr. $=$ $Q =$
$L_{,} =$ $Q + c =$

$l.\tan\varphi_{,} =$
$l.t(Q+c) =$
$l\cos\varphi_{,} =$
$l.tg(L - L_{,}) =$
$L - L_{,} =$
$L_{,} =$
$L =$

$l.\tan\varphi_{,} =$
$l.\sin(L - L_{,}) =$
$-l\cot\varphi' =$
$l\cot\varphi' =$
$\varphi' =$

$t = \;-\;-$
$t' = \;-\;-$ $\Big\} = \Big\{$ $= \Big\{$ Ingang / Uitgang

Ingang $= T + t =$
Uitgang $= T + t' =$ $\Big\}$ M. t. te Berlijn $=$ $\Big\}$ M. t. te

Formulen van Bessel voor de berekening van Sterrebedekkingen.

$a = A \sin (h + d)$
$b = A \cos (h + d)$
$c = B \cos D$

voor Leiden is $\log A = 9.7887$ $\log B = 9{,}8956$ $d = -8^\circ 54'$

h en D worden in het Astr. Jaarb. gevonden. D is de declinatie der Ster.

$u = a$ $u' = b\lambda$ $v = c - b \sin D$ $v' = a\lambda \sin D$

$\log \lambda$ is altijd gelijk aan $9{,}4192$

$$\tan M = \frac{p-u}{q-v} \qquad \tan N = \frac{p'-u'}{q'-v'}$$

$$m = \frac{p-u}{\sin M} \qquad n = \frac{p'-u'}{\sin N}$$

$m \sin M = p - u$
$m \cos M = q - v$
$n \sin N = p' - u'$
$n \cos N = q' - v'$
$\underline{n}$ en $\underline{m}$ altijd positief

p, q, p' en q' worden in het Astr. Jaarb. gevonden

$$\cos \psi = \frac{m}{k} \sin(M - N) \qquad \log k = 9{,}4354 \quad (\psi \text{ altijd} < 180^\circ)$$

$$t = -\frac{m}{n} \cos(M-N) \mp \frac{k}{n} \sin \psi$$

$T + t$ is de tijd van het verschijnsel in uren en decimalen van uren uitgedrukt in Berlijnsche tijd. Die tijd moet met $35',6$ verminderd worden om Leidsche tijd te krijgen. Het bovenste teeken geeft den tijd van den ingang, het onderste dien van den uitgang.

$$Q = N - 90^\circ \pm \psi$$

Q is de standhoek van het punt van den Maansrand waar het verschijnsel plaats heeft. Het bovenste teeken voor den ingang het onderste voor den uitgang.

$0^u{,}1 = 6'$	$0^u{,}01 = 0',6$	$0^u.001 = 0',06$
$0,2 = 12$	$0,02 = 1,2$	$0.002 = 0,12$
$0,3 = 18$	$0,03 = 1,8$	$0.003 = 0,18$
$0,4 = 24$	$0,04 = 2,4$	$0.004 = 0,24$
$0,5 = 30$	$0,05 = 3,0$	$0.005 = 0,30$
$0,6 = 36$	$0,06 = 3,6$	$0.006 = 0,36$
$0,7 = 42$	$0,07 = 4,2$	$0.007 = 0,42$
$0,8 = 48$	$0,08 = 4,8$	$0.008 = 0,48$
$0,9 = 54$	$0,09 = 5,4$	$0.009 = 0,54$

Formulen van Hansen voor de berekening van de Selenographische Lengte en Breedte van het punt waar de uitgang plaats zal hebben

---

De constante getallen van Hansen worden genoemd

φ_1 , L_1 en c

L_1 is gegeven voor den tijd in het Jahrb. door Tietjen, deze vermindert in één jaar 33'. Dus moet aan L_1 eene verbetering worden toegebragt $= -33' \times t$ voor de uitgang

Zoo heeft men φ_1 ; L_1 en $Q + c$ (N.B. Q voor de uitgang)

hieruit $L_1 = l_1 - 90^\circ$ zoo men l_1 uit het Berlijn Jaarboek ontleent

$$\tan(L - L_1) = \frac{\tan \varphi_1}{\cos \varphi_1} \cancel{\tan} \cot (Q + c)$$

$$\cot \varphi' = - \frac{\tan \varphi_1}{\sin(L - L_1)}$$

$$\tan(L - L_1) = \sin \varphi_1 \cot (Q + c)$$

$$\cot \varphi' = - \frac{\tan \varphi_1}{\sin(L - L_1)}$$

L en φ' zijn de selenographische Lengte en Breedte van het punt der Maan waar de uitgang zal plaats hebben

φ' moet positief genomen worden als $Q + c$ in het eerste of vierde quadrant valt.

φ' moet negatief genomen worden als $Q + c$ in het tweede of derde quadrant valt.

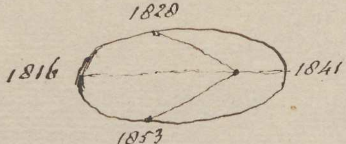
Uitgaande van Bradley
met eigen bew. 1,"203

	Verschil
1755	0,00
1815	− 2,14
1822	− 2,17
1825	− 2,33
1830	− 2,34
1833	− 2,32
1839	− 2,18
1843	− 0,87
1846	+ 0,48
1848	+ 0,54
1849	+ 0,15
1852	0,00

Grootst verschil 2,88
Bij Langier 1,89

Bij Langier tusschen Flamsteed
en Lacaille verschil 3,"64

Naar Peters



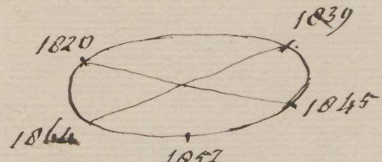
Sirius Langier A.R. 48.209

Uit Bradley 1755 en Langier etc.
1852

97 jaren eigen bew. 1,"203

	Waargen.	Boek	
1815	16,"56		
1822	25,01	24,"98	+ 0,"03
1825	28,78	28,59	+ 0,19
1830	34,80	34,60	+ 0,20
1833	38,39	38,21	+ 0,18
1839	45,47	45,43	+ 0,04
1843	48,97	50,24	− 1,27
1846	51,23	53,85	− 1,62
1848	53,58	56,26	− 2,68
1849	55,17	57,46	− 2,29
1852	58,93	61,27	− 2,34

1815 − 1852 37 jaren 42,"37
1 jaar 1,"145



Bedekking van

$T =$ $h =$ $d =$ $h + d =$ $D =$

$l.A =$
$l.Sin(h+d) =$
$l.a =$

$u = a =$
$p =$
$p - u =$

$l(p-u =$
$l(q-v) =$
$l.tang\,M =$
$l.Sin\,M =$
$l.\,m =$
$l.\frac{m}{k} =$
$l.S(M-N) =$
$l.Cos\,\psi =$

$M =$
$M-N =$
$\psi =$

$\psi =$
$N - 90^o =$
Ing / Uitg. $\}\,Q =$

$l.A =$
$l.Cos(h+d) =$
$l.b =$
$l.\lambda =$
$l.u' =$

$b =$
$u' =$
$p' =$
$p' - u' =$

$l.(p'-u') =$
$l.(q'-v') =$
$l.\,tang\,N =$
$l.Sin\,N =$
$l\,n =$
$l\frac{m}{n} =$
$l.Cos(M-N) =$
$l\frac{m}{n}Cos(M-N) =$

$N =$
$\frac{m}{n}Cos(M-N) =$

$l.\,B =$
$l.\,Cos\,D =$
$l.\,c =$
$l.\,b =$
$l.Sin.D =$
$l.b\,Sin\,D =$

$c =$
$b\,Sin\,D =$
$v =$
$q =$
$q - v =$

$l.\frac{k}{n} =$
$l.\,Sin\,\psi =$
$l.\frac{k}{n}\,Sin\,\psi =$

$\frac{k}{n}\,Sin\,\psi =$

$l.\,a =$
$l.\,\lambda =$
$l.\,Sin\,D =$
$l.\,v' =$

$v' =$
$q' =$
$q' - v' =$

$\varphi, =$ $L, =$ $c =$
Corr. $=$ $Q =$
$L, =$ $Q + c =$

$l.tang\,\varphi, =$
$l.r(Q+c) =$
$l\,Cos\,\varphi, =$
$l.tg(L-L,) =$
$L - L, =$
$L, =$
$L =$

$l.tang\,\varphi, =$
$l.Sin(L-L,) =$
$= -l\,Cot\,\varphi' =$
$l\,Cot\,\varphi' =$
$\varphi' =$

$t =$ – – $\} = \{$ $= \{$ Ingang
$t' =$ – – Uitgang

Ingang $= T + t =$
Uitgang $= T + t' =$ $\}$ M.t. te Berlijn $=$ $\}$ M.t. te