CIBP
R 5610/5
CIBP. n° 99/5

R 5610/5
Ep 0175

ŒUVRES
DE
BLAISE PASCAL.

Cujus gloriæ neque profuit quisquam laudando, nec vituperando quisquam nocuit.

TIT. LIV.

TOME CINQUIEME.

A LA HAYE,
CHEZ DETUNE, LIBRAIRE.

M. DCC. LXXIX.

B.M.U.
CLERMONT-FD

TABLE
DES MATIERES
CONTENUES DANS LE TOME CINQUIEME.

OUVRAGES de Mathématiques de Paſcal.
Traité du Triangle Arithmétique, page 1
Divers uſages du Triangle Arithmétique, 19
Uſage du Triangle arithmétique pour les Ordres numériques, 20
Uſage du Triangle arithmétique pour les Combinaiſons, 23
Uſage du Triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en pluſieurs parties, 32
Uſage du Triangle arithmétique pour trouver les puiſſances des Binomes & Apotomes, 54
Traité des Ordres numériques, 59
De numericis Ordinibus Tractatus, 67
De numericorum Ordinum Compoſitione, Problema primum, 68
De numericorum Ordinum Reſolutione, Problema II, 70
De numericorum Ordinum Reſolutione, Problema III, 73

De numericorum Ordinum Summâ, Problema IV, 74
De numericorum continuorum Productis, seu de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium, 76
Producta continuorum resolvere, seu Resolutio numerorum qui ex numeris progressione naturali procedentibus producuntur, 81
Numericarum potestatum generalis Resolutio, 84
Combinationes, 90
Potestatum numericarum Summa, 112
De Numeris multiplicibus ex solâ characterum numericorum additione agnoscendis, 123

Problemata de Cycloide proposita mense Junii 1658, 135
De eodem argumento Additamentum, 139
Réflexions sur les conditions des Prix attachés à la solution des Problêmes concernant la Cycloïde, 142
Annotata in quasdam solutiones Problematum de Cycloide, 156
Histoire de la Roulette, appellée autrement Trochoïde, ou Cycloïde, où l'on rapporte par quels

quels dégrés on eſt arrivé à la connoiſſance de cette ligne, 163

Hiſtoria Trochoidis, ſive Cycloidis, gallicè, *la Roulette,* in quâ narratur quibus gradibus ad intimam illius lineæ naturam cognoſcendam perventum ſit, 178

Récit de l'examen & du jugement des Écrits envoyés pour les Prix propoſés publiquement ſur le ſujet de la Roulette, où l'on voit que ces Prix n'ont point été gagnés, parce que perſonne n'a donné la véritable ſolution des Problêmes, 193

Suite de l'Hiſtoire de la Roulette, où l'on voit le procédé d'une perſonne qui avoit voulu s'attribuer l'invention des Problêmes propoſés ſur ce ſujet, 200

Hiſtoriæ Trochoidis ſive Cycloidis Continuatio, in quâ videre eſt cujuſdam viri machinamenta qui ſe Autorem Problematum ſuper hac re propoſitorum erat profeſſus, 214

Diverſes inventions de A. Dettonville en Géométrie.

Lettre de M. de Carcavi à M. Dettonville, 226

Lettre de M. Dettonville à M. de Carcavi, 229

Méthode générale pour les centres de gravité de toutes ſortes de lignes, de ſurfaces & de ſolides, 241

La

La même méthode générale pour les centres de gravité, énoncée autrement, 250
Traité des Trilignes rectangles, & de leurs onglets, 276
Rapports entre les ordonnées à l'axe & les ordonnées à la base d'un triligne rectangle quelconque, 279
Rapports entre les sinus sur la base d'un triligne quelconque, & les portions de sa ligne courbe comprises entre le sommet & les ordonnées à l'axe, 286
Méthode générale pour trouver la dimension & les centres de gravité d'un triligne quelconque & de ses doubles onglets, par la seule connoissance des ordonnées à l'axe ou à la base, 297
Méthode pour trouver la dimension & le centre de gravité de la surface courbe des doubles onglets, par la seule connoissance des sinus sur l'axe, 308
Propriétés des sommes simples, triangulaires & pyramidales, 317
Traité des sinus du quart de cercle, 331
Traité des arcs de cercle, 346
Petit Traité des solides circulaires, 374
Traité général de la Roulette, ou Problêmes touchant la Roulette, proposés publiquement & résolus par A. Dettonville, 385

Résolution

Réſolution des Problêmes touchant la dimenſion & le centre de gravité du triligne & de ſes demi-ſolides, 386

Réſolution des derniers Problêmes touchant la dimenſion & le centre de gravité des ſurfaces des demi-ſolides de la Roulette, 395

Dimenſion des lignes courbes de toutes les Roulettes.

Lettre de M. Dettonville à M. Huguens de Zulichem, 402

Dimenſion des lignes courbes de toutes les Roulettes, 403

De l'Eſcalier, des Triangles cylindriques, & de la ſpirale autour d'un cône.

Lettre de M. Dettonville à M. de Sluze, Chanoine de la Cathédrale de Liege, 414

Pour la dimenſion & le centre de gravité de l'Eſcalier, 416

Pour la dimenſion & le centre de gravité des triangles cylindriques, 419

Dimenſion d'un ſolide formé par le moyen d'une ſpirale autour d'un cône, 422

Égalité des lignes ſpirale & parabolique.

Lettre de M. Dettonville à M. A. D. D. S., 426

Propriétés du cercle, 429

Propriétés de la ſpirale, 432

Propriétés de la parabole, 435

Pour

Pour inſcrire une figure en la parabole, 437
Pour circonſcrire une figure à la parabole, 438
Pour inſcrire une figure en la ſpirale, ibid.
Pour circonſcrire une figure à la ſpirale, 439
Rapports entre la parabole & la ſpirale, qui ont la condition ſuppoſée pour être dites correſpondantes, 441
Lettre de M. Huguens de Zulichem à M. Dettonville, 453
Lettre de M. Sluze à M. Paſcal, 456
Lettre de M. Sluze à M. Paſcal, 458
Lettre de M. Leibnitz à M. Périer, 459

Fin de la Table du Tome cinquieme.

OUVRAGES

OUVRAGES DE MATHÉMATIQUE DE PASCAL.

TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

DÉFINITIONS.

J'APPELLE *Triangle Arithmétique*, une figure dont la construction est telle.

Je mene d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires, l'une à l'autre, GV, $G\zeta$, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales & continues à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, &c.; & ces nombres sont *les exposants* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la premiere divi-

sion qui sont dans chacune des deux lignes, par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base*.

Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est *la base*.

Et joignant ainsi tous les points de division qui ont un même exposant, j'en forme autant *de triangles & de bases*.

Je mene par chacun des points de division, des lignes paralleles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits quarrés, que j'appelle *cellules*.

Et les cellules qui sont entre deux paralleles qui vont de gauche à droite, s'appellent *cellules d'un même rang parallele*, comme les cellules G, σ, π, &c., ou φ, $\downarrow$, θ, &c.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire*, comme les cellules G, φ, A, D, &c., & celles-ci, σ, $\downarrow$, B, &c.

Et celles qu'une même base traverse diagonalement, sont dites *cellules d'une même base*, comme celles qui suivent, D, B, θ, λ, & celles-ci, A, $\downarrow$, π.

Les cellules d'une même base également distantes de ses extrémités, sont dites *réciproques*, comme celles-ci, E, R & B, θ; parce que l'exposant du rang parallele de l'une est le même que l'exposant

sant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroît en cet exemple, où *E* est dans le second rang perpendiculaire, & dans le quatrieme parallele; & sa réciproque *R* est dans le second rang parallele, & dans le quatrieme perpendiculaire réciproquement. Et il est bien facile de démontrer que celles qui ont leurs exposants réciproquement pareils, sont dans une même base, & également distantes de ses extrémités.

Il est aussi bien facile de démontrer que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, joint à l'exposant de son rang parallele, surpasse de l'unité l'exposant de sa base. Par exemple, la cellule *F* est dans le troisieme rang perpendiculaire, & dans le quatrieme parallele, & dans la sixieme base, & les deux exposants des rangs $3 + 4$ surpassent de l'unité l'exposant de la base 6; ce qui vient de ce que les deux côtés du Triangle sont divisés en un pareil nombre de parties; mais cela est plutôt compris que démontré.

Cette remarque est de même nature, que chaque base contient une cellule plus que la précédente, & chacune autant que son exposant d'unités; ainsi la seconde $\varphi\ \sigma$ a deux cellules, la troisieme $A \downarrow \pi$ en a trois, &c.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouvent par cette méthode.

Le nombre de la premiere cellule qui est à l'an-

gle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres sont forcés, & pour cette raison il s'appelle *le générateur* du triangle; & chacun des autres est spécifié par cette seule regle:

Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précede dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précede dans son rang parallele. Ainsi la cellule *F*, c'est-à-dire, le nombre de la cellule *F*, égale la cellule *C*, plus la cellule *E*; & ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs conséquences. En voici les principales, où je considere les triangles, dont le générateur est l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

CONSÉQUENCE PREMIERE.

En tout Triangle Arithmétique, toutes les cellules du premier rang parallele & du premier rang perpendiculaire sont pareilles à la génératrice.

Car par la construction du Triangle, chaque cellule est égale à celle qui la précede dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la précede dans son rang parallele; or les cellules du premier rang parallele n'ont aucunes cellules qui les précedent dans leurs rangs perpendiculaires, ni celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs paralleles; donc elles sont toutes égales entre elles, & partant au premier nombre générateur.

Ainsi

Ainſi φ égale $G +$ zéro, c'eſt-à-dire, φ égale G.
Ainſi A égale $\varphi +$ zéro, c'eſt-à-dire, φ.
Ainſi σ égale $G +$ zéro, & π égale $\sigma +$ zéro.
Et ainſi des autres.

CONSÉQUENCE II.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule eſt égale à la ſomme de toutes celles du rang parallele précédent, compriſes depuis ſon rang perpendiculaire juſqu'au premier inclusivement.

Soit une cellule quelconque ω : je dis qu'elle eſt égale à $R + \theta + \downarrow + \varphi$, qui ſont celles du rang parallele ſupérieur depuis le rang perpendiculaire de ω juſqu'au premier rang perpendiculaire.

Cela eſt évident par la ſeule interprétation des cellules, par celles d'où elles ſont formées.
Car ω égale $R + C$.

$\theta + B$

$\downarrow + A$

— Car A & φ ſont φ égaux entre eux par la précédente.

Donc ω égale $R + \theta + \downarrow + \varphi$.

CONSÉQUENCE III.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule égale la ſomme de toutes celles du rang perpendiculaire précédent, compriſes depuis ſon rang parallele juſqu'au premier incluſivement.

Soit une cellule quelconque *C*: je dis qu'elle eſt égale à $B + \psi + \sigma$, qui ſont celles du rang perpendiculaire précédent, depuis le rang parallele de la cellule *C* juſqu'au premier rang parallele.

Cela paroît de même par la ſeule interprétation des cellules.

Car *C* égale $B + \theta$.

$\psi + \pi$

— Car π égale σ par la

σ premiere.

Donc *C* égale $B + \psi + \sigma$.

CONSÉQUENCE IV.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule diminuée de l'unité, eſt égale à la ſomme de toutes celles qui ſont compriſes entre ſon rang parallele & ſon rang perpendiculaire excluſivement.

Soit une cellule quelconque ξ: je dis que $\xi - G$ égale $R + \theta + \psi + \phi + \lambda + \pi + \sigma + G$, qui ſont tous les nombres compris entre le rang $\xi \omega CBA$ & le rang $\xi S \mu$ excluſivement.

Cela paroît de même par l'interprétation.

Car

Car ξ égale $\lambda + R + \omega$.

$\pi + \theta + C$

$\sigma + \downarrow + B$

$G + \varphi + A$

G

Donc ξ égale $\lambda + R + \pi + \theta + \sigma + \downarrow + G + \varphi + G$.

AVERTISSEMENT.

J'ai dit dans l'énonciation, *chaque cellule diminuée de l'unité*, parce que l'unité est le générateur; mais si c'étoit un autre nombre, il faudroit dire, *chaque cellule diminuée du nombre générateur.*

CONSÉQUENCE V.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule est égale à sa réciproque.

Car dans la seconde base $\varphi\sigma$, il est évident que les deux cellules réciproques φ, σ sont égales entre elles & à *G*.

Dans la troisieme *A*, $\downarrow$, π, il est visible de même que les réciproques π, *A* sont égales entre elles & à *G*.

Dans la quatrieme, il est visible que les extrêmes *D*, λ sont encore égales entre elles & à *G*.

Et celles d'entre-deux, *B*, θ, sont visiblement égales, puisque *B* égale $A + \downarrow$, & θ égale $\downarrow + \pi$;

or $\pi + \downarrow$ sont égales à $A + \downarrow$ par ce qui est montré; donc, &c.

Ainsi l'on montrera dans toutes les autres bases que les réciproques sont égales, parce que les extrêmes sont toujours pareilles à G, & que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la base précédente qui sont réciproques entre elles.

CONSÉQUENCE VI.

En tout Triangle Arithmétique, un rang parallele & un perpendiculaire qui ont un même exposant, sont composés de cellules toutes pareilles les unes aux autres.

Car ils sont composés de cellules réciproques.

Ainsi le second rang perpendiculaire $\sigma \downarrow BEMQ$ est entiérement pareil au second rang parallele $\sigma \downarrow \theta RSN$.

CONSÉQUENCE VII.

En tout Triangle Arithmétique, la somme des cellules de chaque base est double de celles de la base précédente.

Soit une base quelconque $DB\theta\lambda$: je dis que la somme de ses cellules est double de la somme des cellules de la précédente $A \downarrow \pi$.

Car les extrêmes . . . $\underline{D,}$ $\underline{\lambda,}$

égalent les extrêmes . . . $A,$ $\pi,$

&

& chacune des autres . . . B, θ,

en égalent deux de

l'autre baſe . . . . $\overline{A+\downarrow}$, $\overline{\downarrow+\pi}$.

Donc $D+\lambda+B+\theta$ égalent $2A+2\downarrow+2\pi$.

La même choſe ſe démontre de même de toutes les autres.

CONSÉQUENCE VIII.

En tout Triangle Arithmétique, la ſomme des cellules de chaque baſe eſt un nombre de la progreſſion double, qui commence par l'unité, dont l'expoſant eſt le même que celui de la baſe.

Car la premiere baſe eſt l'unité.

La ſeconde eſt double de la premiere, donc elle eſt 2.

La troiſieme eſt double de la ſeconde, donc elle eſt 4. Et ainſi à l'infini.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur n'étoit pas l'unité, mais un autre nombre, comme 3, la même choſe ſeroit vraie; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progreſſion double à commencer par l'unité, ſavoir, 1, 2, 4, 8, 16, &c., mais ceux d'une autre progreſſion double à commencer par le générateur 3, ſavoir, 3, 6, 12, 24, 48, &c.

CONSÉQUENCE IX.

En tout Triangle Arithmétique, chaque baſe diminuée

nuée de l'unité est égale à la somme de toutes les précédentes.

Car c'est une propriété de la progression double.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur étoit autre que l'unité, il faudroit dire, *chaque base diminuée du générateur.*

CONSÉQUENCE X.

En tout Triangle Arithmétique, la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de sa base, à commencer par une extrémité, est égale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant, hormis une.

Soit prise la somme de tant de cellules qu'on voudra de la base $D\lambda$, par exemple, les trois premieres, $D+B+\theta$: je dis qu'elle est égale à la somme des trois premieres de la base précédente $A+\downarrow+\pi$, plus aux deux premieres de la même base $A+\downarrow$.

Car	$D.$	$B.$	$\theta.$
égale	$A.$	$A+\downarrow.$	$\downarrow+\pi.$

Donc $D+B+\theta$ égale $2A+2\downarrow+\pi$.

DÉFINITION.

J'appelle *cellules de la dividente*, celles que la ligne qui divise l'angle droit par la moitié, traverse diagonalement comme les cellules $G, \downarrow, C, \rho$, &c.

CONSÉQUENCE

CONSÉQUENCE XI.

Chaque cellule de la dividente eſt double de celle qui la précede dans ſon rang parallele ou perpendiculaire.

Soit une cellule de la dividente *C:* je dis qu'elle eſt double de θ, & auſſi de *B*.

Car *C* égale $\theta + B$, & θ égale *B*, par la cinquieme conſéquence.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces conſéquences ſont ſur le ſujet des égalités qui ſe rencontrent dans le Triangle Arithmétique. On va en voir maintenant les proportions, dont la propoſition ſuivante eſt le fondement.

CONSÉQUENCE XII.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même baſe, la ſupérieure eſt à l'inférieure, comme la multitude des cellules depuis la ſupérieure juſqu'au haut de la baſe, à la multitude de celles depuis l'inférieure juſqu'en bas incluſivement.

Soient deux cellules contiguës quelconques d'une même baſe, *E*, *C:* je dis que

E eſt à *C* comme 2 à 3

inférieure,	ſupérieure,	parce qu'il y a deux cellules depuis *E* juſqu'en bas, ſavoir, *E*, *H*,	parce qu'il y a trois cellules depuis *C* juſqu'en haut, ſavoir, *C*, *R*, μ.

Quoique cette propoſition ait une infinité de cas, j'en

j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux Lemmes.

Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le deuxieme, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier Lemme; donc par le second elle est dans la troisieme base, donc dans la quatrieme, & à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second Lemme en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrieme $D\lambda$, c'est-à-dire, si D est à B comme 1 à 3; & B à θ comme 2 à 2; & θ à λ comme 3 à 1, &c. Je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, $H\mu$, & que, par exemple, E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothese.
Donc $\overline{D+B}$ est à B comme $\overline{1+3}$ à 3.
$\overline{E}$ à B comme $\overline{4}$ à 3.
De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothese.
Donc $\overline{B+\theta}$ à B, comme $\overline{2+2}$ à 2.
$\overline{C}$ à B comme $\overline{4}$ à 2.
Mais B à E comme 3 à 4, comme il

est

est montré. Donc par la proportion troublée, *C* est à *E* comme 3 à 2.

Ce qu'il falloit démontrer.

On le montrera de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proportion se trouve dans la base précédente, & que chaque cellule est égale à sa précédente, plus à sa supérieure, ce qui est vrai par-tout.

CONSÉQUENCE XIII.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang perpendiculaire, l'inférieure est à la supérieure, comme l'exposant de la base de cette supérieure à l'exposant de son rang parallele.

Soient deux cellules quelconques dans un même rang perpendiculaire, *F*, *C*: je dis que

F est à *C* comme 5 à 3

l'inférieure,	la supérieure,	exposant de la base de *C*,	exposant du rang parallele de *C*.

Car *E* est à *C* comme 2 à 3.

Donc $\frac{E+C}{F}$ est à *C* comme $\frac{2+3}{5}$ à 3.

CONSÉQUENCE XIV.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang parallele, la plus grande est à sa précédente, comme l'exposant de la

la baſe de cette précédente à l'expoſant de ſon rang perpendiculaire.

Soient deux cellules dans un même rang parallele *F*, *E*: je dis que

F eſt à *E* comme 5 à 2

la plus grande,	précédente,	expoſant de la baſe de *E*,	expoſant du rang perpendiculaire de *E*.

Car *E* eſt à *C* comme 2 à 3.

Donc $\frac{E+C}{F}$ eſt à *E* comme $\frac{2+3}{}$ à 2.

F eſt à *E* comme 5 à 2.

CONSÉQUENCE XV.

En tout Triangle Arithmétique, la ſomme des cellules d'un quelconque rang parallele eſt à la derniere de ce rang, comme l'expoſant du triangle eſt à l'expoſant du rang.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrieme $GD\lambda$: je dis que quelque rang qu'on y prenne, comme le ſecond parallele, la ſomme de ſes cellules, ſavoir, $\varphi+\downarrow+\theta$, eſt à θ comme 4 à 2. Car $\varphi+\downarrow+\theta$ égale *C*, & *C* eſt à θ comme 4 à 2, par la treizieme conſéquence.

CONSÉQUENCE XVI.

En tout Triangle Arithmétique, un quelconque rang parallele eſt au rang inférieur, comme l'expoſant du rang inférieur à la multitude de ſes cellules.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le cinquieme,

cinquieme, μGH : je dis que quelque rang qu'on y prenne, par exemple, le troiſieme, la ſomme de ſes cellules eſt à la ſomme de celles du quatrieme, c'eſt-à-dire, $A+B+C$ eſt à $D+E$, comme 4 expoſant du rang quatrieme, à 2, qui eſt l'expoſant de la multitude de ſes cellules, car il en contient 2.

Car $A+B+C$ égale F, & $D+E$ égale M. Or F eſt à M comme 4 à 2, par la douzieme conſéquence.

AVERTISSEMENT.

On pourroit l'énoncer auſſi de cette ſorte : *chaque rang parallele eſt au rang inférieur, comme l'expoſant du rang inférieur à l'expoſant du triangle, moins l'expoſant du rang ſupérieur.* Car l'expoſant d'un triangle moins l'expoſant d'un de ſes rangs, eſt toujours égal à la multitude des cellules du rang inférieur.

CONSÉQUENCE XVII.

En tout Triangle Arithmétique, quelque cellule que ce ſoit jointe à toutes celles de ſon rang perpendiculaire, eſt à la même cellule jointe à toutes celles de ſon rang parallele, comme les multitudes des cellules priſes dans chaque rang.

Soit une cellule quelconque B : je dis que $B+\downarrow+\sigma$ eſt à $B+A$, comme 3 à 2.

Je dis 3, parce qu'il y a trois cellules ajoutées dans l'antécédent; & 2, parce qu'il y en a deux dans le conſéquent.

Car

Car $B + \downarrow + \sigma$ égale C, par la troisieme conséquence ; & $B + A$ égale E, par la seconde conséquence.

Or C est à E comme 3 à 2, par la douzieme conséquence.

CONSÉQUENCE XVIII.

En tout Triangle Arithmétique, deux rangs paralleles également distants des extrémités, sont entre eux comme la multitude de leurs cellules.

Soit un triangle quelconque $GV\zeta$, & deux de ses rangs également distants des extrémités, comme le sixieme $P + Q$, & le second $\varphi + \downarrow + \theta + R + S + N$: je dis que la somme des cellules de l'un est à la somme des cellules de l'autre, comme la multitude des cellules de l'un est à la multitude des cellules de l'autre.

Car par la sixieme conséquence, le second rang parallele $\varphi \downarrow \theta RSN$ est le même que le second rang perpendiculaire $\sigma \downarrow BEMQ$, duquel nous venons de démontrer cette proportion.

AVERTISSEMENT.

On peut l'énoncer ainsi : *En tout Triangle Arithmétique, deux rangs paralleles, dont les exposants joints ensemble excedent de l'unité l'exposant du Triangle, sont entre eux comme leurs exposants réciproquement.* Car ce n'est qu'une même chose que ce qui vient d'être énoncé.

CONSÉQUENCE

CONSÉQUENCE DERNIERE.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans la dividente, l'inférieure eſt à la ſupérieure priſe quatre fois, comme l'expoſant de la baſe de cette ſupérieure, à un nombre plus grand de l'unité.

Soient deux cellules de la dividente ρ, *C*: je dis que ρ eſt à 4 *C* comme 5, expoſant de la baſe de *C*, eſt à 6.

Car ρ eſt double de ω, & *C* de θ; donc 4 θ égalent 2 *C*.

Donc 4 θ ſont à *C* comme 2 à 1.

Or ρ eſt à 4 *C* comme ω à 4 θ, ou en raiſon compoſée de . . . . . ω à *C* + *C* à 4 θ

par les conſéquences précédentes, 5 à 3. 1 à 2

ou 3 à 6.

5 à 6.

Donc ρ eſt à 4 *C* comme 5 à 6. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

On peut tirer de-là beaucoup d'autres proportions que je ſupprime, parce que chacun peut facilement les conclure, & que ceux qui voudront s'y attacher, en trouveront peut-être de plus belles que celles que je pourrois donner. Je finis donc par le Problême ſuivant, qui fait l'accompliſſement de ce Traité.

PROBLÊME.

Étant donnés les exposants des rangs perpendiculaire & parallele d'une cellule, trouver le nombre de la cellule, sans se servir du Triangle Arithmétique?

Soit, par exemple, proposé de trouver le nombre de la cellule ξ du cinquieme rang perpendiculaire, & du troisieme rang parallele.

Ayant pris tous les nombres qui précedent l'exposant du perpendiculaire 5, savoir, 1, 2, 3, 4; soient pris autant de nombres naturels, à commencer par l'exposant du parallele 3, savoir, 3, 4, 5, 6.

Soient multipliés les premiers l'un par l'autre, & soit le produit 24. Soient multipliés les autres l'un par l'autre, & soit le produit 360, qui divisé par l'autre produit 24, donne pour quotient 15: ce quotient est le nombre cherché.

Car ξ est à la premiere de sa base V, en raison composée de toutes les raisons des cellules d'entre-deux, c'est-à-dire, ξ est à V, en raison composée

de . . . . . $\frac{\xi \text{ à } P}{3 \text{ à } 4} + \frac{P \text{ à } K}{4 \text{ à } 3} + \frac{K \text{ à } Q}{5 \text{ à } 2} + \frac{Q \text{ à } V}{6 \text{ à } 1}$

ou par la 12 conséq.

Donc ξ est à V comme 3 en 4 en 5 en 6, à 4 en 3 en 2 en 1.

Mais V est l'unité; donc ξ est le quotient de la division du produit de 3 en 4 en 5 en 6, par le produit de 4 en 3 en 2 en 1.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur n'étoit pas l'unité, il eût fallu multiplier le quotient par le générateur.

DIVERS USAGES
DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

Dont le générateur eſt l'unité.

APRÈS avoir donné les proportions qui ſe rencontrent entre les cellules & les rangs des Triangles Arithmétiques, je paſſe à divers uſages de ceux dont le générateur eſt l'unité; c'eſt ce qu'on verra dans les Traités ſuivants. Mais j'en laiſſe bien plus que je n'en donne; c'eſt une choſe étrange combien il eſt fertile en propriétés! Chacun peut s'y exercer; j'avertis ſeulement ici, que dans toute la ſuite, je n'entends parler que des Triangles Arithmétiques, dont le générateur eſt l'unité.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES.

ON a considéré dans l'Arithmétique les nombres des différentes progressions; on a aussi considéré ceux des différentes puissances & des différents dégrés; mais on n'a pas, ce me semble, assez examiné ceux dont je parle, quoiqu'ils soient d'un très-grand usage: & même ils n'ont pas de nom; ainsi j'ai été obligé de leur en donner: & parce que ceux de *progression*, de *dégré* & de *puissance* sont déja employés, je me sers de celui d'*ordres*.

J'appelle donc *Nombres du premier ordre*, les simples unités,

1, 1, 1, 1, 1, &c.

J'appelle *Nombres du second ordre*, les naturels qui se forment par l'addition des unités,

1, 2, 3, 4, 5, &c.

J'appelle *Nombres du troisieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des naturels, qu'on appelle *triangulaires*,

1, 3, 6, 10, &c.

C'est-à-dire, que le second des triangulaires, savoir, 3, égale la somme des deux premiers naturels, qui sont 1, 2; ainsi le troisieme triangulaire

laire 6 égale la somme des trois premiers naturels, 1, 2, 3, &c.

J'appelle *Nombres du quatrieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle *pyramidaux*,

1, 4, 10, 20, &c.

J'appelle *Nombres du cinquieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des précédents, auxquels on n'a pas donné de nom exprès, & qu'on pourroit appeller *triangulo-triangulaires :*

1, 5, 15, 35, &c.

J'appelle *Nombres du sixieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des précédents :

1, 6, 21, 56, 126, 252, &c.

Et ainsi à l'infini, 1, 7, 28, 84, &c.

1, 8, 36, 120, &c.

Or si on fait une table de tous les ordres des nombres, où l'on marque à côté les exposants des ordres, & au-dessus les racines, en cette sorte :

Racines.

		1	2	3	4	5	&c.
Unités	Ordre 1	1	1	1	1	1	&c.
Naturels	Ordre 2	1	2	3	4	5	&c.
Triangul.	Ordre 3	1	3	6	10	15	&c.
Pyramid.	Ordre 4	1	4	10	20	35	&c.

On trouvera cette Table pareille au Triangle Arithmétique ; & le premier ordre des nombres

bres sera le même que le premier rang parallele du Triangle; le second ordre des nombres sera le même que le second rang parallele : & ainsi à l'infini.

Car dans le Triangle Arithmétique le premier rang est tout d'unités, & le premier ordre des nombres est de même tout d'unités.

Ainsi dans le Triangle Arithmétique, chaque cellule, comme la cellule F, égale $C+B+A$, c'est-à-dire, qu'elle égale sa supérieure, plus toutes celles qui précedent cette supérieure dans son rang parallele, comme il a été prouvé dans la deuxieme conséquence du Traité de ce Triangle : & la même chose se trouve dans chacun des ordres des nombres; car, par exemple, le troisieme des pyramidaux 10 égale les trois premiers des triangulaires $1+3+6$, puisqu'il est formé par leur addition.

D'où il se voit manifestement, que les rangs paralleles du triangle ne sont autre chose que les ordres des nombres, & que les exposants des rangs paralleles sont les mêmes que les exposants des ordres, & que les exposants des rangs perpendiculaires sont les mêmes que les racines : & ainsi le nombre, par exemple, 21, qui dans le Triangle Arithmétique se trouve dans le troisieme rang parallele, & dans le sixieme rang perpendiculaire, étant considéré entre les ordres numériques, il sera du troisieme ordre, & le sixieme de son ordre, ou de la sixieme racine.

Ce

Ce qui fait connoître que tout ce qui a été dit des rangs & des cellules du Triangle Arithmétique, convient exactement aux ordres des nombres, & que les mêmes égalités & les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns, se trouveront aussi aux autres; il ne faudra seulement que changer les énonciations, en substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques, comme ceux de *racine* & d'*ordre*, à ceux qui convenoient au Triangle Arithmétique, comme de *rang parallele* & *perpendiculaire*. J'en donnerai un petit Traité à part, où quelques exemples qui y sont rapportés, feront aisément appercevoir tous les autres.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE *POUR LES COMBINAISONS.*

LE mot de *combinaison* a été pris en plusieurs sens différents; de sorte que pour ôter l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends.

Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manieres d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes celles qui sont présentées, s'appellent ici les *différentes combinaisons*.

Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, *A*, *B*, *C*, *D*, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques; toutes les manieres d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent *combinaisons*.

Ainsi on trouvera par expérience, qu'il y a six manieres différentes d'en choisir deux dans quatre; car on peut prendre *A* & *B*, ou *A* & *C*, ou *A* & *D*, ou *B* & *C*, ou *B* & *D*, ou *C* & *D*.

Je ne compte pas *A* & *A* pour une des manieres d'en prendre deux; car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une répétée.

Ainsi je ne compte pas *A* & *B*, & puis *B* & *A* pour deux manieres différentes; car on ne prend en l'une & en l'autre maniere que les deux mêmes choses, mais d'un ordre différent seulement, & je ne prends point garde à l'ordre; de sorte que je pouvois m'expliquer en un mot à ceux qui ont accoutumé de considérer les combinaisons, en disant simplement que je parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre.

On trouvera de même par expérience, qu'il y a quatre manieres de prendre trois choses dans quatre; car on peut prendre *ABC*, ou *ABD*, ou *ACD*, ou *BCD*.

Enfin on trouvera qu'on ne peut en prendre quatre dans quatre qu'en une maniere, savoir, *ABCD*.

Je

Je parlerai donc en ces termes :

1 dans 4 ſe combine 4 fois.
2 dans 4 ſe combine 6 fois.
3 dans 4 ſe combine 4 fois.
4 dans 4 ſe combine 1 fois.

Ou ainſi :

La multitude des combinaiſons de 1 dans 4 eſt 4.
La multitude des combinaiſons de 2 dans 4 eſt 6.
La multitude des combinaiſons de 3 dans 4 eſt 4.
La multitude des combinaiſons de 4 dans 4 eſt 1.

Mais la ſomme de toutes les combinaiſons, en général, qu'on peut faire dans 4, eſt 15, parce que la multitude des combinaiſons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, & de 4 dans 4 étant jointes enſemble, font 15.

Enſuite de cette explication, je donnerai ces conſéquences en forme de Lemmes.

LEMME PREMIER.

Un nombre ne ſe combine point dans un plus petit, par exemple, 4 ne ſe combine point dans 2.

LEMME II.

1 dans 1 ſe combine 1 fois.
2 dans 2 ſe combine 1 fois.
3 dans 3 ſe combine 1 fois.

Et généralement un nombre quelconque ſe combine une fois ſeulement dans ſon égal.

LEMME

LEMME III.

1 dans 1 se combine 1 fois.
1 dans 2 se combine 2 fois.
1 dans 3 se combine 3 fois.

Et généralement l'unité se combine dans quelque nombre que ce soit autant de fois qu'il contient d'unités.

LEMME IV.

S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le second plus grand de l'unité, le troisieme tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, le quatrieme plus grand de l'unité que le troisieme: la multitude des combinaisons du premier dans le troisieme, jointe à la multitude des combinaisons du second dans le troisieme, égale la multitude des combinaisons du second dans le quatrieme.

Soient quatre nombres tels que j'ai dit:
Le premier tel qu'on voudra, par exemple, 1.
Le second plus grand de l'unité, savoir, 2.
Le troisieme tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, par exemple, 3.
Le quatrieme plus grand de l'unité, savoir, 4.

Je dis que la multitude des combinaisons de 1 dans 3, plus la multitude des combinaisons de 2 dans 3, égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Soient

Soient trois lettres quelconques, *B, C, D.*

Soient les mêmes trois lettres, & une de plus, *A, B, C, D.*

Prenons, suivant la proposition, toutes les combinaisons d'une lettre dans les trois, *B, C, D;* il y en aura trois, savoir, *B, C, D.*

Prenons dans les mêmes trois lettres toutes les combinaisons de deux, il y en aura trois, savoir, *BC, BD, CD.*

Prenons enfin dans les quatre lettres *A, B, C, D* toutes les combinaisons de deux, il y en aura six, savoir, *AB, AC, AD, BC, BD, CD.*

Il faut démontrer que la multitude des combinaisons de 1 dans 3 & celles de 2 dans 3, égalent celles de 2 dans 4.

Cela est aisé; car les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 1 dans 3, & par celles de 2 dans 3.

Pour le faire voir, il faut remarquer qu'entre les combinaisons de 2 dans 4, savoir, *AB, AC, AD, BC, BD, CD,* il y en a où la lettre *A* est employée, & d'autres où elle ne l'est pas.

Celles où elle n'est pas employée sont, *BC, BD, CD,* qui par conséquent sont formées de deux de ces trois lettres, *B, C, D;* donc ce sont des combinaisons de 2 dans ces trois, *B, C, D.* Donc les combinaisons de 2 dans ces trois lettres, *B, C, D,* font portion des combinaisons de 2 dans ces quatre lettres,

lettres, A, B, C, D, puisqu'elles forment celles où A n'est pas employée.

Maintenant si des combinaisons de 2 dans 4 où A est employé, savoir, AB, AC, AD, on ôte l'A, il restera une lettre seulement de ces trois, B, C, D, savoir, B, C, D, qui sont précisément les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D. Donc si aux combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D, on ajoute à chacune la lettre A, & qu'ainsi on ait AB, AC, AD, on formera les combinaisons de 2 dans 4, où A est employé; donc les combinaisons de 1 dans 3 font portion des combinaisons de 2 dans 4.

D'où il se voit que les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 2 dans 3, & de 1 dans 3; & partant que la multitude des combinaisons de 2 dans 4 égale celle de 2 dans 3, & de 1 dans 3.

On montrera la même chose de tous les autres exemples, comme :

La multitude des combinaisons de 29 dans 40, & la multitude des combinaisons de 30 dans 40, égalent la multitude des combinaisons de 30 dans 41. Ainsi la multitude des combinaisons de 15 dans 55, & la multitude des combinaisons de 16 dans 55, égalent la multitude des combinaisons de 16 dans 56. Et ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION PREMIERE.

En tout Triangle Arithmétique, la ſomme des cellules d'un rang parallele quelconque égale la multitude des combinaiſons de l'expoſant du rang dans l'expoſant du Triangle.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrieme $GD\lambda$: je dis que la ſomme des cellules d'un rang parallele quelconque, par exemple, du ſecond, $\varphi + \downarrow + \theta$, égale la ſomme des combinaiſons de ce nombre 2, qui eſt l'expoſant de ce ſecond rang, dans ce nombre 4, qui eſt l'expoſant de ce triangle.

Ainſi la ſomme des cellules du cinquieme rang du huitieme triangle égale la ſomme des combinaiſons de 5 dans 8, &c.

La démonſtration en ſera courte, quoiqu'il y ait une infinité de cas, par le moyen de ces deux Lemmes.

Le premier, qui eſt évident de lui-même, que dans le premier triangle cette égalité ſe trouve, puiſque la ſomme des cellules de ſon unique rang, ſavoir *G*, ou l'unité, égale la ſomme des combinaiſons de 1, expoſant du rang, dans 1, expoſant du Triangle.

Le deuxieme, que s'il ſe trouve un Triangle Arithmétique dans lequel cette proportion ſe rencontre, c'eſt-à-dire, dans lequel quelque rang que l'on prenne, il arrive que la ſomme des cellules ſoit égale à la multitude des combinaiſons de l'expoſant

posant du rang dans l'exposant du Triangle : je dis que le Triangle suivant aura la même propriété.

D'où il s'ensuit que tous les Triangles Arithmétiques ont cette égalité ; car elle se trouve dans le premier Triangle par le premier Lemme, & même elle est encore évidente dans le second ; donc par le second Lemme, le suivant l'aura de même, & partant le suivant encore ; & ainsi à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second Lemme.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le troisieme, dans lequel on suppose que cette égalité se trouve, c'est-à-dire, que la somme des cellules du premier rang $G+\sigma+\pi$ égale la multitude des combinaisons de 1 dans 3 ; & que la somme des cellules du deuxieme rang $\varphi+\downarrow$ égale les combinaisons de 2 dans 3 ; & que la somme des cellules du troisieme rang A égale les combinaisons de 3 dans 3 : je dis que le quatrieme Triangle aura la même égalité, & que, par exemple, la somme des cellules du second rang $\varphi+\downarrow+\theta$ égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Car $\varphi+\downarrow+\theta$ égale $\varphi+\downarrow$ + θ / + $G+\sigma+\pi$

Par l'hypothese : ou la multitude des combinaisons de 2 dans 3. + ou la multitude des combinaisons de 1 dans 3.

Par le quatrieme Lemme : Ou la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

On

On le montrera de même de tous les autres. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

Le nombre de quelque cellule que ce soit, égale la multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallele, dans un nombre moindre de l'unité que l'exposant de sa base.

Soit une cellule quelconque, *F*, dans le quatrieme rang parallele & dans la sixieme base : je dis qu'elle égale la multitude des combinaisons de 3 dans 5, moindres de l'unité que 4 & 6 : car elle égale les cellules $A+B+C$. Donc par la précédente, &c.

PROBLÊME I. PROPOSITION III.

Étant proposés deux nombres, trouver combien de fois l'un se combine dans l'autre, par le Triangle Arithmétique?

Soient les nombres proposés 4, 6, il faut trouver combien 4 se combine dans 6.

PREMIER MOYEN.

Soit prise la somme des cellules du quatrieme rang du sixieme triangle : elle satisfera à la question.

SECOND MOYEN.

Soit prise la cinquieme cellule de la septieme base, parce

parce que ces nombres 5, 7 excedent de l'unité les donnés 4, 6 : ſon nombre eſt celui qu'on demande.

CONCLUSION.

Par le rapport qu'il y a des cellules & des rangs du Triangle Arithmétique aux combinaiſons, il eſt aiſé de voir que tout ce qui a été prouvé des uns convient aux autres ſuivant leur maniere ; c'eſt ce que je montrerai en peu de diſcours dans un petit Traité que j'ai fait des Combinaiſons.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

Pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en pluſieurs parties.

POUR entendre les regles des partis, la premiere choſe qu'il faut conſidérer, eſt que l'argent que les Joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propriété ; mais ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le haſard peut leur en donner, ſuivant les conditions dont ils ſont convenus d'abord.

Mais comme c'eſt une loi volontaire, ils peuvent la rompre de gré à gré, & ainſi en quelque terme

terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter, & au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, & rentrer chacun en la propriété de quelque chose; & en ce cas, le réglement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avoient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entiérement égal de prendre ce qu'on lui assigne, ou de continuer l'aventure du jeu: & cette juste distribution s'appelle *le parti.*

Le premier principe qui fait connoître de quelle sorte on doit faire les partis, est celui-ci.

Si un des Joueurs se trouve en telle condition, que, quoi qu'il arrive, une certaine somme doit lui appartenir en cas de perte & de gain, sans que le hasard puisse la lui ôter; il ne doit en faire aucun parti, mais la prendre entiere comme assurée, parce que le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti.

Le second est celui-ci. Si deux Joueurs se trouvent en telle condition, que si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, & s'il perd, elle appartiendra à l'autre; si le jeu est de pur hasard, & qu'il y ait autant de hasards pour l'un que pour l'autre, & par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, & prendre ce qui leur appar-

tient légitimement, le parti eſt qu'ils ſéparent la ſomme qui eſt au haſard par la moitié, & que chacun prenne la ſienne.

COROLLAIRE PREMIER.

Si deux Joueurs jouent à un jeu de pur haſard, à condition que ſi le premier gagne, il lui reviendra une certaine ſomme, & s'il perd, il lui en reviendra une moindre; s'ils veulent ſe ſéparer ſans jouer, & prendre chacun ce qui leur appartient : le parti eſt, que le premier prenne ce qui lui revient en cas de perte, & de plus la moitié de l'excès, dont ce qui lui reviendroit en cas de gain, ſurpaſſe ce qui lui revient en cas de perte.

Par exemple, ſi deux Joueurs jouent à condition que ſi le premier gagne, il emportera 8 piſtoles, & s'il perd, il en emportera 2 : je dis que le parti eſt qu'il prenne ces 2, plus la moitié de l'excès de 8 ſur 2, c'eſt-à-dire, plus 3, car 8 ſurpaſſe 2 de 6, dont la moitié eſt 3.

Car par l'hypotheſe, s'il gagne, il emporte 8, c'eſt-à-dire, $6+2$, & s'il perd, il emporte 2; donc ces 2 lui appartiennent en cas de perte & de gain : & par conſéquent par le premier principe, il ne doit en faire aucun parti, mais les prendre entieres. Mais pour les 6 autres, elles dépendent du haſard; de ſorte que s'il lui eſt favorable, il les gagnera, ſinon elles reviendront à l'autre, & par l'hypotheſe,

l'hypotheſe, il n'y a pas plus de raiſon qu'elles reviennent à l'un qu'à l'autre : donc le parti eſt qu'ils les ſéparent par la moitié, & que chacun prenne la ſienne, qui eſt ce que j'avois propoſé.

Donc pour dire la même choſe en d'autres termes, il lui appartient le cas de la perte, plus la moitié de la différence des cas de perte & de gain.

Et partant ſi en cas de perte, il lui appartient A, & en cas de gain $A+B$, le parti eſt qu'il prenne $A+\frac{1}{2}B$.

COROLLAIRE II.

Si deux Joueurs ſont en la même condition que nous venons de dire : je dis que le parti peut ſe faire de cette façon, qui revient au même, que l'on aſſemble les deux ſommes de gain & de perte, & que le premier prenne la moitié de cette ſomme ; c'eſt-à-dire, qu'on joigne 2 *avec* 8, *& ce ſera* 10, *dont la moitié* 5 *appartiendra au premier.*

Car la moitié de la ſomme de deux nombres eſt toujours la même que la moindre plus la moitié de leur différence. Et cela ſe démontre ainſi.

Soit A ce qui revient en cas de perte, & $A+B$ ce qui revient en cas de gain : je dis que le parti ſe fait en aſſemblant ces deux nombres, qui font $A+A+B$, & en donnant la moitié au premier, qui eſt $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$. Car cette ſomme égale $A+\frac{1}{2}B$, qui a été prouvée faire le parti juſte.

Ces fondements étant posés, nous passerons aisément à déterminer le parti entre deux Joueurs qui jouent en tant de parties qu'on voudra en quelque état qu'ils se trouvent, c'est-à-dire, quel parti il faut faire quand ils jouent en deux parties, & que le premier en a une à point, ou qu'ils jouent en trois, & que le premier en a une à point, ou quand il en a deux à point, ou quand il en a deux à une. Et généralement en quelque nombre de parties qu'ils jouent, & en quelque gain de parties qu'ils soient, & l'un, & l'autre.

Sur quoi la premiere chose qu'il faut remarquer, est que deux Joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point, sont en même condition que deux autres qui jouent en trois parties, dont le premier en a deux, & l'autre une: car il y a cela de commun, que pour achever, il ne manque qu'une partie au premier, & deux à l'autre, & c'est en cela que consiste la différence des avantages, & qui doit régler les partis; de sorte qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre des parties qui restent à gagner à l'un & à l'autre, & non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque, comme nous avons déja dit, deux Joueurs se trouvent en même état, quand jouant en deux parties, l'un en a une à point, que deux qui jouant en douze parties, l'un en a onze à dix.

Il

Il faut donc proposer la question en cette sorte.

Étant proposés deux Joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, faire le parti?

J'en donnerai ici la méthode, que je poursuivrai seulement en deux ou trois exemples, qui seront si aisés à continuer, qu'il ne sera pas nécessaire d'en donner davantage.

Pour faire la chose générale sans rien omettre, je la prendrai par le premier exemple, qu'il est peut-être mal à propos de toucher, parce qu'il est trop clair; je le fais pourtant pour commencer par le commencement : c'est celui-ci.

PREMIER CAS.

Si à un des Joueurs il ne manque aucune partie, & à l'autre quelques-unes, la somme entiere appartient au premier; car il l'a gagnée, puisqu'il ne lui manque aucune des parties dans lesquelles il devoit la gagner.

SECOND CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre une, le parti est qu'ils séparent l'argent par la moitié, & que chacun prenne la sienne : cela est évident par le second principe. Il en est de même s'il manque deux parties à l'un, & deux à l'autre; & de même quelque nombre de parties qui manque à l'un, s'il en manque autant à l'autre.

TROISIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre deux, voici l'art de trouver le parti.

Considérons ce qui appartiendroit au premier Joueur (à qui il ne manque qu'une partie) en cas de gain de la partie qu'ils vont jouer, & puis ce qui lui appartiendroit en cas de perte.

Il est visible que si celui à qui il ne manque qu'une partie, gagne cette partie qui va se jouer, il ne lui en manquera plus; donc tout lui appartiendra par le premier cas. Mais, au contraire, si celui à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui en manquera plus qu'une; donc ils seront en telle condition, qu'il en manquera une à l'un, & une à l'autre. Donc ils doivent partager l'argent par la moitié, par le deuxieme cas.

Donc si le premier gagne cette partie qui va se jouer, il lui appartient tout, & s'il la perd, il lui appartient la moitié; donc en cas qu'ils veuillent se séparer sans jouer cette partie, il lui appartient $\frac{3}{4}$ par le second Corollaire.

Et si on veut proposer un exemple de la somme qu'ils jouent, la chose sera bien plus claire.

Posons que ce soit 8 pistoles; donc le premier en cas de gain, doit avoir le tout, qui est 8 pistoles, & en cas de perte, il doit avoir la moitié, qui est 4; donc il lui appartient en cas de parti

la

la moitié de 8 + 4, c'eſt-à-dire, 6 piſtoles de 8; car 8 + 4 font 12, dont la moitié eſt 6.

QUATRIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre trois, le parti ſe trouvera de même, en examinant ce qui appartient au premier en cas de gain & de perte.

Si le premier gagne, il aura toutes ſes parties, & partant tout l'argent, qui eſt, par exemple, 8.

Si le premier perd, il ne faudra plus que deux parties à l'autre à qui il en falloit trois. Donc ils ſeront en tel état, qu'il faudra une partie au premier, & deux à l'autre; & partant par le cas précédent, il appartiendra 6 piſtoles au premier.

Donc en cas de gain, il lui en faut 8, & en cas de perte 6; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de ces deux ſommes, ſavoir, 7; car 6 + 8 font 14, dont la moitié eſt 7.

CINQUIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre quatre, la choſe eſt de même.

Le premier en cas de gain, gagne tout, qui eſt, par exemple, 8; & en cas de perte, il manque une partie au premier, & trois à l'autre; donc il lui appartient 7 piſtoles de 8; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de 8, plus la moitié de 7, c'eſt-à-dire, $7\frac{1}{2}$.

SIXIEME CAS.

Ainſi, s'il manque une partie à l'un, & cinq à l'autre; & à l'infini.

SEPTIEME CAS.

De même s'il manque deux parties au premier, & trois à l'autre; car il faut toujours examiner les cas de gain & de perte.

Si le premier gagne, il lui manquera une partie, & à l'autre trois; donc par le quatrieme cas il lui appartient 7 de 8.

Si le premier perd, il lui manquera deux parties, & à l'autre deux; donc par le deuxieme cas il appartient à chacun la moitié, qui eſt 4; donc en cas de gain, le premier en aura 7, & en cas de perte, il en aura 4; donc en cas de parti, il aura la moitié de ces deux enſemble, ſavoir, $5\frac{1}{2}$.

Par cette méthode on fera les partis ſur toutes ſortes de conditions, en prenant toujours ce qui appartient en cas de gain & ce qui appartient en cas de perte, & aſſignant pour le cas de parti la moitié de ces deux ſommes.

Voilà une des manieres de faire les partis.

Il y en a deux autres, l'une par le Triangle Arithmétique, & l'autre par les Combinaiſons.

Méthode

Méthode pour faire les partis entre deux Joueurs qui jouent en plusieurs parties, par le moyen du Triangle Arithmétique.

Avant que de donner cette méthode, il faut faire ce Lemme.

LEMME.

Si deux Joueurs jouent à un jeu de pur hasard, à condition que si le premier gagne, il lui appartiendra une portion quelconque sur la somme qu'ils jouent, exprimée par une fraction, & que s'il perd, il lui appartiendra une moindre portion sur la même somme, exprimée par une autre fraction : s'ils veulent se séparer sans jouer, la condition du parti se trouvera en cette sorte. Soient réduites les deux fractions à même dénomination, si elles n'y sont pas ; soit prise une fraction dont le numérateur soit la somme des deux numérateurs, & le dénominateur double des précédents : cette fraction exprime la portion qui appartient au premier sur la somme qui est au jeu.

Par exemple, qu'en cas de gain, il appartienne les $\frac{3}{5}$ de la somme qui est au jeu, & qu'en cas de perte, il lui en appartienne $\frac{1}{5}$: je dis que ce qui lui appartient en cas de parti, se trouvera en prenant la somme des numérateurs, qui est 4, & le double du dénominateur, qui est 10, dont on fait la fraction $\frac{4}{10}$.

Car

Car par ce qui a été démontré au deuxieme Corollaire, il falloit assembler les cas de gain & de perte, & en prendre la moitié; or la somme des deux fractions $\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ est $\frac{4}{7}$, qui se fait par l'addition des numérateurs, & sa moitié se trouve en doublant le dénominateur, & ainsi l'on a $\frac{4}{10}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Or ces regles sont générales & sans exception, quoi qui revienne en cas de perte ou de gain; car si, par exemple, en cas de gain, il appartient $\frac{1}{2}$, & en cas de perte, rien, en réduisant les deux fractions à même dénominateur, on aura $\frac{1}{2}$ pour le cas de gain, & $\frac{0}{2}$ pour le cas de perte; donc en cas de parti, il faut cette fraction $\frac{1}{4}$, dont le numérateur égale la somme des autres, & le dénominateur est double du précédent.

Ainsi si en cas de gain, il appartient tout, & en cas de perte $\frac{1}{3}$, en réduisant les fractions à même dénomination, on aura $\frac{3}{3}$ pour le cas de gain, & $\frac{1}{3}$ pour celui de la perte; donc en cas de parti, il appartient $\frac{4}{6}$.

Ainsi si en cas de gain, il appartient tout, & en cas de perte rien, le parti sera visiblement $\frac{1}{2}$; car le cas de gain est $\frac{1}{1}$, & le cas de perte $\frac{0}{1}$; donc le parti est $\frac{1}{2}$.

Et ainsi de tous les cas possibles.

PROBLÊME

PROBLÊME I. PROPOSITION I.

Étant proposés deux Joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle Arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer) eu égard aux parties qui manquent à chacun?

Soit prise dans le Triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble : ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la premiere, qu'il manque de parties au premier Joueur; & qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules, qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres : ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des Joueurs réciproquement : de sorte que si la somme qu'ils jouent est égale à la somme des nombres de toutes les cellules de la base, il en appartiendra à chacun ce qui est contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre; & s'ils jouent une autre somme, il leur en appartiendra à proportion.

Par exemple, qu'il y ait deux Joueurs, au premier desquels il manque deux parties, & à l'autre quatre : il faut trouver le parti.

Soient ajoutés ces deux nombres 2 & 4, & soit leur somme 6; soit prise la sixieme base du Triangle

Arithmétique

Arithmétique $P\,\delta$, dans laquelle il y a par conſéquent ſix cellules $P, M, F, \omega, S, \delta$. Soient priſes autant de cellules à commencer par la premiere P, qu'il manque de parties au premier Joueur, c'eſt-à-dire, les deux premieres P, M; donc il en reſte autant que de parties à l'autre, c'eſt-à-dire, quatre, F, ω, S, δ : je dis que l'avantage du premier eſt à l'avantage du ſecond, comme $F+\omega+S+\delta$ à $P+M$, c'eſt-à-dire, que ſi la ſomme qui ſe joue eſt égale à $P+M+F+\omega+S+\delta$, il en appartient à celui à qui il manque deux parties la ſomme des quatre cellules $\delta+S+\omega+F$; & à celui à qui il manque quatre parties, la ſomme des deux cellules $P+M$: & s'ils jouent une autre ſomme, il leur en appartient à proportion.

Et pour le dire généralement, quelque ſomme qu'ils jouent, il en appartient au premier une portion exprimée par cette fraction . . . . . $\frac{F+\omega+S+\delta}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ dont le numérateur eſt la ſomme des quatre cellules de l'autre, & le dénominateur la ſomme de toutes les cellules; & à l'autre une portion exprimée par cette fraction, $\frac{P+M}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ dont le numérateur eſt la ſomme des deux cellules de l'autre, & le dénominateur la même ſomme de toutes les cellules.

Et

Et s'il manque une partie à l'un, & cinq à l'autre, il appartient au premier la somme des cinq premieres cellules $P+M+F+\omega+S$, & à l'autre la somme de la cellule δ.

Et s'il manque six parties à l'un, & deux à l'autre, le parti s'en trouvera dans la huitieme base, dans laquelle les six premieres cellules contiennent ce qui appartient à celui à qui il manque deux parties, & les deux autres ce qui appartient à celui à qui il en manque six. Et ainsi à l'infini.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux Lemmes.

Le premier, que la seconde base contient les partis des Joueurs, auxquels il manque deux parties en tout. Le deuxieme, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire, qu'elle contiendra aussi les partis des Joueurs, auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.

D'où je conclus en un mot que toutes les bases du Triangle Arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier Lemme; donc par le second Lemme, la troisieme l'a aussi, & par conséquent la quatrieme; & ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer.

Il faut donc seulement démontrer ces 2 Lemmes.

Le

Le premier est évident de lui-même; car s'il manque une partie à l'un & une à l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme φ à σ, c'est-à-dire, comme 1 à 1, & qu'il appartient à chacun cette fraction, $\frac{\sigma}{\varphi+\sigma}$ qui est $\frac{1}{2}$.

Le deuxieme se démontrera de cette sorte.

Si une base quelconque comme la quatrieme $D\lambda$ contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties, c'est-à-dire, que s'il manque une partie au premier, & trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, soit celle qui est exprimée par cette fraction . . . $\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$ qui a pour dénominateur la somme des cellules de cette base, & pour numérateur ses trois premieres; & que s'il manque deux parties à l'un, & deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier soit $\frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$; & que s'il manque trois parties au premier, & une à l'autre, la fraction du premier soit $\frac{D}{D+B+\theta+\lambda}$, &c.

Je dis que la cinquieme base contient aussi les partis de ceux auxquels il manque cinq parties; & que s'il manque, par exemple, deux parties au premier,

mier, & trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, est exprimée par cette fraction, $\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$.

Car pour savoir ce qui appartient à deux Joueurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui appartiendroit au premier en cas de gain, & celle qui lui appartiendroit en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles n'y sont pas, & en former une fraction, dont le numérateur soit la somme des deux autres, & le dénominateur double de l'autre, par le Lemme précédent.

Examinons donc les fractions qui appartiendroient à notre premier Joueur en cas de gain & de perte.

Si le premier à qui il manque deux parties gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une partie, & à l'autre toujours trois; donc il leur manque quatre parties en tout; donc, par l'hypothese, leur parti se trouve en la base quatrieme, & il appartiendra au premier cette fraction . . . $\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$.

Si au contraire le premier perd, il lui manquera toujours deux parties, & deux seulement à l'autre; donc par l'hypothese la fraction du premier

sera

sera $\frac{D+B}{D+B+\vartheta+\lambda}$. Donc en cas de parti il appartiendra au premier cette fraction . . . $\frac{D+B+\vartheta+D+B;}{2D+2B+2\vartheta+2\lambda;}$ c'est-à-dire, $\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu.}$

Ce qu'il falloit démontrer.

Ainsi cela se démontre en toutes les autres bases sans aucune différence, parce que le fondement de cette preuve est qu'une base est toujours double de sa précédente par la septieme conséquence, & que, par la dixieme conséquence, tant de cellules qu'on voudra d'une même base sont égales à autant de la base précédente (qui est toujours le dénominateur de la fraction en cas de gain) plus encore aux mêmes cellules, excepté une (qui est le numérateur de la fraction en cas de perte); ce qui étant vrai généralement par-tout, la démonstration sera toujours sans obstacle & universelle.

PROBLÊME II. PROPOSITION II.

Étant proposés deux Joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties proposé, trouver dans le Triangle Arithmétique la valeur de la derniere partie sur l'argent du perdant?

Par exemple, que deux Joueurs jouent chacun 3 pistoles en quatre parties: on demande la valeur de la derniere partie sur les 3 pistoles du perdant.

Soit

Soit prise la fraction qui a l'unité pour numérateur, & pour dénominateur la somme des cellules de la base quatrieme, puisqu'on joue en quatre parties : je dis que cette fraction est la valeur de la derniere partie sur la mise du perdant.

Car si deux Joueurs jouant en quatre parties, l'un en a trois à point, & qu'ainsi il en manque une au premier, & quatre à l'autre, il a été démontré que ce qui appartient au premier pour le gain qu'il a fait de ses trois premieres parties, est exprimé par cette fraction, $\frac{H+E+C+R}{H+E+C+R+\mu}$, qui a pour dénominateur la somme des cellules de la cinquieme base, & pour numérateur ses quatre premieres cellules ; donc il ne reste sur la somme totale des deux mises que cette fraction. . . $\frac{\mu}{H+E+C+R+\mu}$, laquelle seroit acquise à celui qui a déja les trois premieres parties en cas qu'il gagnât la derniere ; donc la valeur de cette derniere sur la somme des deux mises est . . . .

$\frac{\mu}{H+E+C+R+\mu}$ c'est-à-dire, l'unité.

$H+E+C+R+\mu$, c'est-à-dire, $2D+2B+2\theta+2\lambda$.

Or puisque la somme totale des mises est $2D+2B+2\theta+2\lambda$, la somme de chaque mise est $D+B+\theta+\lambda$; donc la valeur de la derniere

partie sur la seule mise du perdant est cette frac-

tion, $\frac{1}{D+B+\theta+\lambda}$ double de la précédente,

& laquelle a pour numérateur l'unité, & pour dénominateur la somme des cellules de la quatrieme base. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME III. PROPOSITION III.

Étant proposés deux Joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties donné, trouver dans le Triangle Arithmétique la valeur de la premiere partie sur la mise du perdant?

Par exemple, que deux Joueurs jouent chacun 3 pistoles en quatre parties, on demande la valeur de la premiere sur la mise du perdant.

Soit ajouté au nombre 4 le nombre 3, moindre de l'unité, & soit la somme 7; soit prise la fraction qui ait pour dénominateur toutes les cellules de la septieme base, & pour numérateur la cellule de cette base qui se rencontre dans la dividente, sa-

voir, cette fraction, $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$

je dis qu'elle satisfait au problême.

Car si deux Joueurs jouant en quatre parties, le premier en a une à point, il en restera trois à gagner au premier, & quatre à l'autre; donc il

appartient

appartient au premier sur la somme des deux mises cette fraction, $\frac{V+Q+K+\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$ qui a pour dénominateur toutes les cellules de la septieme base, & pour numérateur ses quatre premieres cellules.

Donc il lui appartient $V+Q+K+\rho$ sur la somme totale des deux mises, exprimée par $V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta$; mais cette derniere somme étant l'assemblage des deux mises, il en avoit mis au jeu la moitié, savoir, $V+Q+K+\frac{1}{2}\rho$ (car $V+Q+K$ sont égaux à $\zeta+N+\xi$).

Donc il a $\frac{1}{2}\rho$, c'est-à-dire, ω, plus qu'il n'avoit en entrant au jeu; donc il a gagné sur la somme totale des deux mises une portion exprimée par cette fraction, $\frac{\omega}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$; donc il a gagné sur la mise du perdant une portion qui sera double de celle-là, savoir, celle qui est exprimée par cette fraction, $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$.

Donc le gain de la premiere partie lui a acquis cette fraction; donc sa valeur est telle.

COROLLAIRE.

Donc la valeur de la premiere partie de deux sur la mise du perdant, est exprimée par cette fraction, $\frac{1}{2}$.

Car en prenant cette valeur suivant la regle qui vient d'en être donnée, il faut prendre la fraction qui a pour dénominateur les cellules de la troisieme base (parce que le nombre des parties en quoi on joue est 2, & le nombre moindre de l'unité est 1, qui avec 2 fait 3) & pour numérateur la cellule de cette base qui est dans la dividente; donc on aura cette fraction, $\frac{\downarrow}{A+\downarrow+\pi}$.

Or le nombre de la cellule $\downarrow$ est 2, & les nombres des cellules $A+\downarrow+\pi$, sont, $1+2+1$.

Donc on a cette fraction, $\frac{2}{1+2+1}$ c'est-à-dire, $\frac{2}{4}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}$.

Donc le gain de la premiere partie lui a acquis cette fraction; donc sa valeur est telle. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME IV. PROPOSITION IV.

Étant proposés deux Joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties donné, trouver par le Triangle Arithmétique la valeur de la seconde partie sur la mise du perdant?

Soit le nombre donné des parties dans lesquelles on joue, 4; il faut trouver la valeur de la deuxieme partie sur la mise du perdant.

Soit

Soit prise la valeur de la premiere partie par le Problême précédent : je dis qu'elle est la valeur de la seconde.

Car deux Joueurs jouant en quatre parties, si l'un en a deux à point, la fraction qui lui appartient est celle-ci, $\frac{P+M+F+\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ qui a pour dénominateur la somme des cellules de la sixieme base, & pour numérateur la somme des quatre premieres ; mais il en avoit mis au jeu cette fraction, $\frac{P+M+F}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, savoir, la moitié du tout. Donc il lui reste de gain cette fraction, $\frac{\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, qui est la même chose que celle-ci . . . . . $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$; donc il a gagné sur la moitié de la somme entiere, c'est-à-dire, sur la mise du perdant, cette fraction . . . . . $\frac{2\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$, double de la précédente.

Donc le gain des deux premieres parties lui a acquis cette fraction sur l'argent du perdant, qui

est le double de ce que la premiere partie lui avoit acquis par la précédente; donc la seconde partie lui en a autant acquis que la premiere.

CONCLUSION.

On peut aisément conclure, par le rapport qu'il y a du Triangle Arithmétique aux partis qui doivent se faire entre deux Joueurs, que les proportions des cellules qui ont été données dans le Traité du Triangle, ont des conséquences qui s'étendent à la valeur des partis, qui sont bien aisées à tirer, & dont j'ai fait un petit discours en traitant des partis, qui donne l'intelligence & le moyen de les étendre plus avant.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

Pour trouver les puissances des Binomes & Apotomes.

S'IL est proposé de trouver la puissance quelconque, comme le quatrieme dégré d'un binome, dont le premier nombre soit *A*, l'autre l'unité, c'est-à-dire, qu'il faille trouver le quarré-quarré de $A+1$; il faut prendre dans le Triangle Arithmétique la base cinquieme, savoir, celle dont l'exposant

posant 5 est plus grand de l'unité que 4, exposant de l'ordre proposé : les cellules de cette cinquieme base sont, 1, 4, 6, 4, 1, dont il faut prendre le premier nombre 1 pour coéfficient de A au dégré proposé, c'est-à-dire, de A^4; ensuite il faut prendre le second nombre de la base, qui est 4, pour coéfficient de A au dégré prochainement inférieur, c'est-à-dire, de A^3, & prendre le nombre suivant de la base, savoir, 6, pour coéfficient de A au dégré inférieur, savoir, A^2, & le nombre suivant de la base, savoir, 4, pour coéfficient de A au dégré inférieur, savoir, A racine, & prendre le dernier nombre de la base 1 pour nombre absolu : & ainsi on aura $1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$, qui sera la puissance quarré-quarrée du binome $A+1$. De sorte que si A (qui représente tout nombre) est l'unité, & qu'ainsi le binome $A+1$ soit le binaire, cette puissance $1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$ sera maintenant $1.1^4+4.1^3+6.1^2+4.1+1$. C'est-à-dire, une fois le quarré-quarré de l'unité A, c'est-à-dire, ... 1
Quatre fois le cube de 1, c'est-à-dire, . . 4
Six fois le quarré de 1, c'est-à-dire, . . . 6
Quatre fois l'unité, c'est-à-dire, ... 4
Plus l'unité, ... 1
qui ajoutés font 16

Et en effet le quarré-quarré de 2 est 16.

Si A est un autre nombre, comme 4, & partant

que le binome $A+1$ soit 5, alors son quarré-quarré sera toujours suivant cette méthode, $1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$, qui signifie maintenant $1.4^4+4.4^3+6.4^2+4.4+1$.

C'est-à-dire, une fois le quarré-quarré de 4, savoir 256
Quatre fois le cube de 4, savoir. . . . 256
Six fois le quarré de 4 96
Quatre fois la racine 4 16
Plus l'unité 1
dont la somme 625

fait le quarré-quarré de 5 : & en effet le quarré-quarré de 5 est 625. Et ainsi des autres exemples.

Si on veut trouver le même dégré du binome $A+2$, il faut prendre de même $1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$, & ensuite écrire ces quatre nombres 2, 4, 8, 16, qui sont les quatre premiers dégrés de 2, sous les nombres 4, 6, 4, 1, c'est-à-dire, sous chacun des nombres de la base, en laissant le premier : en cette sorte . . . . .

$$1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$$
$$2\quad 4\quad 8\quad 16$$

& multiplier les nombres qui se répondent l'un par l'autre. . . . . .

$$1A^4+4A^3+6A^2+4A^1+1$$
$$2\quad 4\quad 8\quad 16$$

en cette sorte. . . . . .

$$1A^4+8A^3+24A^2+32A^1+16$$

Et

Et ainſi on aura le quarré-quarré du binome $A+2$; de ſorte que ſi A eſt l'unité, ce quarré-quarré ſera tel.

Une fois le quarré-quarré de l'unité A . . 1
Huit fois le cube de l'unité 8
Vingt-quatre fois le quarré de 1 24
Trente-deux fois 1 32
Plus le quarré-quarré de 2 16
dont la ſomme 81
ſera le quarré-quarré de 3 : & en effet 81 eſt le quarré-quarré de 3.

Et ſi A eſt 2, alors $A+2$ ſera 4, & ſon quarré-quarré ſera

Une fois le quarré-quarré de A ou de 2, ſavoir 16
8. 2^3 64
24. 2^2 96
32. 2 64
Plus le quarré-quarré de 2 16
dont la ſomme 256
ſera le quarré-quarré de 4.

De la même maniere on trouvera le quarré-quarré de $A+3$, en mettant de la même ſorte

$$A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$$

& au-deſſous les nombres 3 9 27 81

qui ſont les quatre premiers dégrés de 3; & multipliant les nombres correſpondants, on trouvera que le quarré-quarré de $A+3$ eſt . . . . .

$$1A^4 + 12A^3 + 54A^2 + 108A + 81.$$

Et ainſi à l'infini.

Si

Si au lieu du quarré-quarré on veut le quarré cube, ou le cinquieme dégré, il faut prendre la base sixieme, & en user comme j'ai dit de la cinquieme; & ainsi de tous les autres dégrés.

On trouvera de même les puissances des Apotomes $A-1$, $A-2$, &c. La méthode en est toute semblable, & ne differe qu'aux signes; car les signes de $+$ & de $-$ se suivent toujours alternativement, & le signe de $+$ est toujours le premier.

Ainsi le quarré-quarré de $A-1$ se trouvera de cette sorte. Le quarré-quarré de $A+1$ est par la regle précédente $1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$. Donc en changeant les signes comme j'ai dit, on aura $1A^4-4A^3+6A^2-4A+1$.

Ainsi le cube de $A-2$ se trouvera de même. Car le cube de $A+2$ par la regle précédente est

$$A^3+6A^2+12A+8.$$

Donc le cube de $A-2$ se trouvera en changeant les signes, $A^3-6A^2+12A-8$.

Et ainsi à l'infini.

Je ne donne point la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déja traité, comme Hérigogne (1), outre que la chose est évidente d'elle-même.

(1) Hérigogne, Mathématicien du siecle passé, publia, pour la premiere fois, en 1635, un Cours de Mathématiques, latin & françois, en 5 volumes *in*-8°.; & pour la seconde fois, en 1644, le même Ouvrage en 7 volumes.

TRAITÉ

TRAITÉ DES ORDRES *NUMÉRIQUES.*

JE préſuppoſe qu'on a vu le Traité du Triangle Arithmétique, & ſon uſage pour les Ordres numériques; autrement j'y renvoie ceux qui veulent voir ce diſcours, qui en eſt proprement une ſuite. J'y ai donné la définition des ordres numériques, & je ne la répéterai pas. J'y ai montré auſſi que le Triangle Arithmétique n'eſt autre choſe que la table des ordres numériques; enſuite de quoi il eſt évident que toutes les propriétés qui ont été données dans le Triangle Arithmétique entre les cellules ou entre les rangs, conviennent aux ordres numériques: de ſorte que ſi peu qu'on ait l'art d'appliquer les propriétés des uns aux autres, il n'y a point de propoſition dans le Traité du Triangle qui n'ait ſes conſéquences touchant les divers ordres: & cela eſt tout enſemble, & ſi facile, & ſi abon-

J'ai ſous la main la ſeconde édition. Dans le Traité d'Algebre (Chap. V, pag. 31) l'Auteur détermine immédiatement par le calcul, ou par des multiplications effectives, le quarré, le cube, &c., d'un binome tel que $a+b$ ou $a-b$. On voit ici que Paſcal trouve, au moyen de ſon Triangle Arithmétique, les coëfficients des différents termes d'un binome élevé à une puiſſance quelconque entiere & poſitive.

dant,

dant, que je ſuis fort éloigné de vouloir tout donner expreſſément; j'aimerois mieux laiſſer tout à faire, puiſque la choſe eſt ſi aiſée; mais pour me tenir entre ces deux extrémités, j'en donnerai ſeulement quelques exemples, qui ouvriront le moyen de trouver tous les autres.

Par exemple : de ce qui a été dit dans une des conſéquences du Traité du Triangle, que *chaque cellule égale celle qui la précede dans ſon rang parallele, plus celle qui la précede dans ſon rang perpendiculaire*, j'en forme cette propoſition touchant les Ordres numériques.

PROPOSITION PREMIERE.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, égale celui qui le précede dans ſon ordre, plus ſon corradical de l'ordre précédent : & par conſéquent, le quatrieme, par exemple, des pyramidaux égale le troiſieme pyramidal, plus le quatrieme triangulo-triangulaire : ainſi le cinquieme triangulo-triangulaire égale le quatrieme triangulo-triangulaire, plus le cinquieme pyramidal, &c.

Autre exemple : de ce qui a été montré dans le Triangle, que *chaque cellule, comme* F, *égale* E + B + ↓ + σ, *c'eſt-à-dire, celle qui la précede dans ſon rang parallele, plus toutes celles qui précedent cette précédente dans ſon rang perpendiculaire*, je forme cette propoſition.

PROPOSITION

PROPOSITION II.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, égale tous ceux tant de ſon ordre que de tous les précédents, dont la racine eſt moindre de l'unité que la ſienne; & partant le quatrieme des pyramidaux, par exemple, égale le troiſieme des pyramidaux, plus le troiſieme des triangulaires, plus le troiſieme des naturels, plus le troiſieme des unités, c'eſt-à-dire, l'unité.

D'où on peut maintenant tirer d'autres conſéquences, comme celle-ci, que je donne pour ouvrir le chemin à d'autres pareilles.

PROPOSITION III.

Chaque nombre, de quelque cellule que ce ſoit, eſt compoſé d'autant de nombres qu'il y a d'ordres depuis le ſien juſqu'au premier inclufivement, chacun deſquels nombres eſt de chacun de ces ordres: ainſi un triangulo-triangulaire eſt compoſé d'un autre triangulo-triangulaire, d'un pyramidal, d'un triangulaire, d'un naturel & de l'unité.

Et ſi on veut en faire un problême, il pourra s'énoncer ainſi.

PROPOSITION IV. PROBLÊME.

Étant donné un nombre d'un ordre quelconque, trouver un nombre dans chacun des ordres depuis le premier

premier jusqu'au sien inclusivement, dont la somme égale le nombre donné.

La solution en est facile : il faut prendre dans tous ces ordres les nombres dont la racine est moindre de l'unité que celle du nombre donné.

Autre exemple : de ce que *les cellules correspondantes sont égales entre elles*, il se conclut :

PROPOSITION V.

Que deux nombres de différents ordres sont égaux entre eux, si la racine de l'un est le même nombre que l'exposant de l'ordre de l'autre : & partant le troisieme pyramidal est égal au quatrieme triangulaire : le cinquieme du huitieme ordre est le même que le huitieme du cinquieme ordre, &c.

On n'auroit jamais achevé : par exemple,

PROPOSITION VI.

Tous les quatriemes nombres de tous les ordres sont les mêmes que tous les nombres du quatrieme ordre, &c.

Parce que *les rangs paralleles & perpendiculaires qui ont un même exposant, sont composés de cellules toutes pareilles.* Par cette méthode, on trouvera un rapport admirable en tout le reste, comme celui-ci :

PROPOSITION VII.

Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est au prochainement

prochainement plus grand dans le même ordre, comme la racine du moindre est à cette même racine jointe à l'exposant de l'ordre, moins l'unité.

Ce qui s'ensuit de la quatorzieme conséquence du Triangle, où il est montré que *chaque cellule est à celle qui la précede dans son rang parallele, comme l'exposant de la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire.* Et afin de ne rien cacher de la maniere dont se tirent ces correspondances, j'en montrerai le rapport à découvert : il est un peu plus difficile ici que tantôt, parce qu'on ne voit point de rapport de la base des triangles avec les ordres des nombres ; mais voici le moyen de le trouver. Au lieu de *l'exposant de la base* dont j'ai parlé dans cette quatorzieme conséquence, il faut substituer *l'exposant du rang parallele, plus l'exposant du rang perpendiculaire moins l'unité :* ce qui produit le même nombre, & avec cet avantage, qu'on connoît le rapport qu'il y a de ces exposants avec les ordres numériques : car on fait qu'en ce nouveau langage, il faut dire, *l'exposant de l'ordre, plus la racine, moins l'unité.* Je dis tout ceci, afin de faire toucher la méthode pour faire & pour faciliter ces réductions. Ainsi on trouvera que

PROPOSITION VIII.

Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est à son corradical

corradical de l'ordre ſuivant, comme l'expoſant de l'ordre du moindre eſt à ce même expoſant joint à leur racine commune moins l'unité.

C'eſt la treizieme conſéquence du Triangle: ainſi on trouvera encore que

PROPOSITION IX.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, eſt à celui de l'ordre précédent, dont la racine eſt plus grande de l'unité que la ſienne, comme la racine du premier à l'expoſant de l'ordre du ſecond.

Ce n'eſt que la même choſe que la douzieme conſéquence du Triangle Arithmétique. J'en laiſſe beaucoup d'autres, chacune deſquelles, auſſi-bien que de celles que je viens de donner, peut encore être augmentée de beaucoup par de différentes énonciations: car au lieu d'exprimer ces proportions comme j'ai fait, en diſant qu'*un nombre eſt à un autre comme un troiſieme à un quatrieme*, ne peut-on pas dire que *le rectangle des extrêmes eſt égal à celui des moyens?* & ainſi multiplier les propoſitions, & non ſans utilité; car étant regardées d'un autre côté, elles donnent d'autres ouvertures. Par exemple, ſi on veut tourner autrement cette derniere propoſition, on peut l'énoncer ainſi:

PROPOSITION X.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, étant multiplié

tiplié par la racine précédente, égale l'exposant de son ordre, multiplié par le nombre de l'ordre suivant procédant de cette racine.

Et parce que, quand quatre nombres sont proportionnels, le rectangle des extrêmes ou des moyens étant divisé par un des deux autres, donne pour quotient le dernier, on peut dire aussi :

PROPOSITION XI.

Un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente, & divisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suivant qui procede de cette racine.

Les manieres de tourner une même chose sont infinies : en voici un illustre exemple, & bien glorieux pour moi. Cette même proposition que je viens de rouler en plusieurs sortes, est tombée dans la pensée de notre célebre Conseiller de Toulouse M. de Fermat ; &, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumiere, ni moi à lui, il écrivoit dans sa Province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos Lettres écrites & reçues en même-temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru en cette occasion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une maniere tout-à-fait étrange, avec un homme si grand & si admirable, & qui dans toutes les recherches de la plus sublime Géométrie, est dans le plus haut dé-

gré d'excellence, comme ses Ouvrages, que nos longues prieres ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt voir à tous les Géometres de l'Europe, qui les attendent! La maniere dont il a pris cette même proposition est telle.

En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque étant mené dans le prochainement plus grand, produit le double de son triangle.

Le même nombre étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.

Le même nombre mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulo-triangulaire; & ainsi à l'infini, par une méthode générale & uniforme.

Voilà comment on peut varier les énonciations. Ce que je montre en cette proposition s'entendant de toutes les autres, je ne m'arrêterai plus à cette maniere accommodante de traiter les choses, laissant à chacun d'exercer son génie en ces recherches, où doit consister toute l'étude des Géometres : car si on ne sait pas tourner les propositions à tous sens, & qu'on ne se serve que du premier biais qu'on a envisagé, on n'ira jamais bien loin : ce sont ces diverses routes qui ouvrent les conséquences nouvelles, & qui, par des énonciations assorties au sujet, lient des propositions qui sembloient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles étoient con-

çues

çues d'abord. Je continuerai donc ce ſujet en la maniere dont on a accoutumé de traiter la Géométrie, & ce que j'en dirai ſera comme un nouveau Traité des Ordres numériques; & même je le donnerai en latin, parce qu'il ſe rencontre que je l'ai écrit ainſi en l'inventant.

DE NUMERICIS ORDINIBUS *TRACTATUS.*

TRianguli Arithmetici tractatum, ipſiuſque circa numericos ordines uſum, ſupponit tractatus iſte, ut & plerique è ſequentibus: huc ergo mittitur lector horum cupidus; ibi noſcet quid ſint ordines numerici, nempe, unitates, numeri naturales, trianguli, pyramides, triangulo-trianguli, &c. Quæ cùm perlegerit, facilè hæc aſſequetur.

Hîc propriè oſtenditur connexio inter numerum cujuſvis ordinis cum ſuâ radice & exponente ſui ordinis, quæ talis eſt, ut ex his tribus, datis duobus quibuſlibet, tertius inveniatur. Verbi gratiâ, datâ radice & exponente ordinis, numerus ipſe datur; ſic dato numero & ſui ordinis exponente, radix elicitur; nec non ex dato numero & radice, exponens ordinis invenitur: hæc conſtituunt tria priora problemata, quartum de ſummâ ordinum agit.

DE NUMERICORUM ORDINUM *COMPOSITIONE:*

PROBLEMA PRIMUM.

Datis numeri cujuslibet radice & exponente ordinis, componere numerum?

PRODUCTUS numerorum qui præcedunt radicem, dividat productum totidem numerorum quorum primus sit exponens ordinis: quotiens erit quæsitus numerus.

Propositum sit invenire numerum ordinis, verbi gratiâ, tertii, radicis verò quintæ.

Productus numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt radicem 5, nempe 24, dividat productum totidem numerorum continuorum 3, 4, 5, 6, quorum primus sit exponens ordinis 3, nempe 360: quotiens 15, est numerus quæsitus.

Nec difficilis demonstratio: eâdem enim prorsus constructione, inventa est, ad finem Tractatûs Trianguli Arithmetici, cellula quintæ seriei perpendicularis, tertiæ verò seriei parallelæ; cujus cellulæ numerus, idem est ac numerus quintus ordinis tertii, qui quæritur.

Potest autem & sic resolvi idem problema.

Productus numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, dividat productum totidem numerorum

rum continuorum quorum primus sit radix: quotiens est quæsitus.

Sic in proposito exemplo, productus numerorum 1, 2, qui præcedunt exponentem ordinis 3, nempe 2, dividat productum totidem numerorum 5, 6, quorum primus sit radix 5, nempe 30: quotiens 15, est numerus quæsitus.

Nec differt hæc constructio à præcedente, nisi in hoc solo, quod in alterâ idem fit de radice, quod fit in alterâ de exponente ordinis: perinde ac si idem esset invenire, quintum numerum ordinis tertii, ac tertium numerum ordinis quinti; quod quidem verum esse jam ostendimus.

Hinc autem obiter colligere possumus arcanum numericum; cùm enim ambo illi quotientes 15, sint iidem, constat, divisores esse inter se ut dividendos. Animadvertemus itaque:

Si sint duo quilibet numeri, productus omnium numerorum primum ex ambobus propositis præcedentium, est ad productum totidem numerorum quorum primus est secundus ex his ambobus, ut productus ex omnibus qui præcedunt secundum ex illis ambobus, ad productum totidem numerorum continuorum quorum primus est primus ex iis ambobus propositis.

Hæc qui prosequeretur & demonstraret, novi fortassis tractatûs materiam reperiret: nunc autem quia extra rem nostram sunt, sic pergimus.

DE NUMERICORUM ORDINUM *RESOLUTIONE:*

PROBLEMA II.

Dato numero, ac exponente ſui ordinis, invenire radicem?

POTEST autem & ſic enuntiari.

Dato quolibet numero, invenire radicem maximi numeri ordinis numerici cujuſlibet propoſiti, qui in dato numero contineatur?

Sit datus numerus quilibet, verbi gratiâ, 58, ordo verò numericus quicunque propoſitus, verbi gratiâ, *ſextus*. Oportet igitur invenire radicem *ſexti* ordinis numeri 58.

Exhibeatur ex unâ parte exponens ordinis . . . 6	& continuò	Exponatur ex alterâ parte numerus datus . . . 58
Multiplicetur ipſe 6, per numerum 7, proximè majorem; fitque productus . . 42	& continuò	Multiplicetur ipſe numerus per 2, ſitque productus, ... 116
Multiplicetur iſte productus per proximè ſequentem	& continuò	Multiplicetur ipſe productus per proximè ſequentem multiplicatorem

multiplicatorem 8,
sitque productus,
. 336

Multiplicetur iste productus per proximè sequentem multiplicatorem 9, sitque productus,
. . . . 3024

& continuò

multiplicatorem 3,
sitque productus,
. 348

Multiplicetur iste productus per proximè sequentem multiplicatorem 4, sitque productus,
. . . . 1392

Et sic in infinitum, donec ultimus productus exponentis 6, nempe 3024, major evadat quàm ultimus productus numeri dati nempe 1392; & tunc absoluta est operatio: ultimus enim multiplicator dati numeri, nempe 4, est radix quæ quærebatur.

Igitur dico numerum sexti ordinis cujus radix est 4, nempe 56, maximum esse ejus ordinis qui in numero dato contineatur, seu dico numerum sexti ordinis cujus radix est 4, nempe 56, non esse majorem dato numero 58; numerum verò ejusdem ordinis proximè majorem seu cujus radix est 5, nempe 126, esse majorem numero dato 58.

Etenim productus ille ultimus numeri dati, nempe 1392, factus est ex numero dato 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe 24; productus verò præcedens hunc ultimum, nempe 348, factus est ex numero dato 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, nempe 6.

Ergo productus numerorum 6, 7, 8, non est major producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per 58. Productus verò numerorum 6, 7, 8, 9, est major producto numerorum 1, 2, 3, 4, multiplicato per 58, *ex constructione.*

Jam numerus ordinis *sexti* cujus radix est 4, nempe 56, multiplicatus per numeros 1, 2, 3, æquatur producto numerorum 6, 7, 8, ex demonstratis in Tractatu de Ordinibus numericis.

Sed productus numerorum 6, 7, 8, non est major *ex ostensis*, producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per datum 58; igitur productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per 56, non est major quàm idem productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per datum 58. Igitur 56 non est major quàm 58.

Jam sit 126, numerus ordinis *sexti* cujus radix est 5. Igitur ipse 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, æquatur producto numerorum 6, 7, 8, 9, ex Tractatu de Ordinibus numericis. Sed productus ille numerorum 6, 7, 8, 9, est major quàm numerus datus 58 multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, *ex ostensis.* Igitur, numerus 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, est major quàm numerus datus 58 multiplicatus per eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4. Igitur numerus 126 est major quàm numerus datus 58.

Ergo

Ergo numerus 56 *sexti* ordinis cujus radix est 4, non est major quàm numerus datus; numerus verò 126, ejusdem ordinis cujus radix 5 est proximè major, major est quàm datus numerus.

Ergo ipse numerus 56, maximus est ejus ordinis qui in dato contineatur, & ejus radix 4 inventa est. Q. E. F. E. D.

DE NUMERICORUM ORDINUM *RESOLUTIONE:*

PROBLEMA III.

Dato quolibet numero, & ejus radice, invenire ordinis exponentem?

NON differt hoc problema à præcedente; radix enim, & exponens ordinis, reciproce convertuntur, ita ut dato numero, verbi gratiâ, 58, & ejus radice 4, reperietur exponens sui ordinis 6, eâdem methodo, ac si dato numero ipso 58, & exponente ordinis 4, radix 6, esset invenienda: *quartus* enim numerus *sexti* ordinis idem est ac *sextus quarti*, ut jam demonstratum est.

DE NUMERICORUM ORDINUM SUMMÂ:

PROBLEMA IV.

Propositi cujuslibet ordinis numerici, tot quot imperabitur, priorum numerorum summam invenire?

PROPOSITUM sit invenire summam *quinque*, verbi gratiâ, priorum numerorum ordinis, verbi gratiâ, *sexti.*

Inveniatur ex præcedente numerus *quintus* (quia *quinque* priorum numerorum summa requiritur) ordinis *septimi*, nempe ejus qui propositum *sextum* proximè sequitur: ipse satisfaciet problemati.

Numericorum enim ordinum generatio talis est, ut numerus cujusvis ordinis, æquetur summæ eorum omnium ordinis præcedentis quorum radices non sunt suâ majores; ita ut quintus septimi ordinis, æquetur, ex naturâ & generatione ordinum, quinque prioribus numeris sexti ordinis, quod difficultate caret.

CONCLUSIO.

METHODUS quâ ordinum resolutionem expedio est generalissima: verùm ipsam diù quæsivi; quæ primò sese obtulit ea est.

Si dati numeri quærebatur radix tertii ordinis, ita procedebam. *Sumatur duplum numeri propositi, istius*

istius dupli radix quadrata inveniatur: hæc quæsita est, aut saltem ea quæ unitate minor erit.

Si dati numeri quæritur radix quarti ordinis, *multiplicetur numerus datus per 6, nempe per productum numerorum 1, 2, 3; producti inveniatur radix cubica, ipsa, aut ea quæ unitate minor est, satisfaciet.*

Si dati numeri quæritur radix quinti ordinis, *multiplicetur datus numerus per 24, nempe per productum numerorum 1, 2, 3, 4, productique inveniatur radix quarti gradûs: ipsa unitate minuta, satisfaciet problemati.*

Et ita reliquorum ordinum radices quærebam, constructione non generali, sed cuique propriâ ordini; nec tamen ideo mihi omninò displicebat: illa enim quâ resolvuntur potestates non generalior est, aliter enim extrahitur radix quadrata, aliter cubica, &c., quamvis ab eodem principio viæ illæ differentes procedant. Ut ergo nondum generalis potestatum resolutio data erat, sic & vix generalem ordinum resolutionem assequi sperabam: conatus tamen expectationem superantes eam quam tradidi præbuerunt generalissimam, & quidem amicis meis, universalium solutionum amatoribus doctissimis, gratissimam; à quibus excitatus & generalem potestatum purarum resolutionem tentare, ad instar generalis ordinum resolutionis, obtemperans quæsivi, & satis feliciter mihi contigit reperisse, ut infrà videbitur.

DE

DE NUMERORUM CONTINUORUM PRODUCTIS,

Seu de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium.

Numeri qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum à nemine, quod sciam, examinati sunt. Ideo nomen eis impono nempe, *producti continuorum.*

Sunt autem qui ex duorum multiplicatione formantur, ut iste 20 qui ex 4 in 5 oritur, & possent dici *secundæ speciei.*

Sunt qui ex trium multiplicatione formantur, ut iste 120 qui ex 4 in 5 in 6 oritur & dici possent *tertiæ speciei.*

Sic *quartæ speciei* dici possent qui ex quatuor numerorum continuorum multiplicatione formantur, & sic in infinitum: ita ut, ex multitudine *multiplicatorum*, species nominationem exponentis sortiretur; & sic nullus esset productus primæ speciei, nullus est enim productus ex uno tantùm numero.

Primum hujus tractatuli theorema, illud est quòd obiter in præcedente tractatu annotavimus, quod quærendo, reliqua invenimus, imò & generalem

potestatum

potestatum resolutionem; adeò strictâ connexione sibi mutuo cohærent veritates!

PROPOSITIO PRIMA.

Si sint duo numeri quilibet, productus omnium numerorum primum præcedentium, est ad productum totidem numerorum continuorum à secundo incipientium: ut productus omnium numerorum secundum præcedentium, ad productum totidem numerorum continuorum à primo incipientium.

Sint duo numeri quilibet 5, 8: dico productum numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt 5, nempe 24, esse ad productum totidem continuorum numerorum 8, 9, 10, 11, nempe 7920: ut productum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, qui præcedunt 8, nempe 5640, ad productum totidem continuorum numerorum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, nempe 1663200.

Etenim productus numerorum 5, 6, 7, ductus in productum istorum 1, 2, 3, 4, efficit productum horum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; & idem productus numerorum 5, 6, 7, ductus in productum numerorum 8, 9, 10, 11, efficit productum horum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; ergo, ut productus numerorum 1, 2, 3, 4, ad productum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: ita productus numerorum 8, 9, 10, 11, ad productum numerorum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Q. E. D.

PROPOSITIO

Propositio II.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis, est multiplex producti à totidem numeris continuis quorum primus est unitas; & quotiens est numerus figuratus.

Sit productus quilibet, à tribus, verbi gratiâ, numeris continuis 5, 6, 7, nempe 210, & productus totidem numerorum ab unitate incipientium 1, 2, 3, nempe 6 : dico ipsum 210 esse multiplicem ipsius 6, & quotientem esse numerum figuratum.

Etenim ipse 6, ductus in quintum numerum ordinis quarti, nempe 35, æquatur ipsi producto ex 5, 6, 7, ex demonstratis in Tractatu de Ordinibus numericis.

Propositio III.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex numeri cujusdam figurati, nempe ejus cujus radix est minimus ex his numeris, exponens verò ordinis est unitate major quàm multitudo horum numerorum.

Hoc patet ex præcedente. Et unica utrique convenit demonstratio.

Monitum.

Ambo divisores in his duabus propositionibus ostensi, tales sunt, ut alter alterius sit quotiens.

Ita

Ita ut quilibet productus à quotlibet numeris continuis, divisus per productum totidem numerorum ab unitate incipientium, ut secunda propositio docet fieri posse, quotiens sit numerus figuratus in tertiâ propositione enuntiatus.

PROPOSITIO IV.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus, est multiplex producti à quotlibet numeris continuis etiam ab unitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Sint quotlibet numeri continui ab unitate 1, 2, 3, 4, 5, quorum productus 120, quotlibet autem ex ipsis ab unitate incipientes 1, 2, 3, quorum productus 6: dico 120 esse multiplicem 6.

Etenim productus numerorum 1, 2, 3, 4, 5, fit ex producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per productum numerorum 4, 5.

PROPOSITIO V.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex producti à quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Etenim productus continuorum quorumlibet est multiplex totidem continuorum ab unitate incipientium *ex secundâ*; sed *ex quartâ* productus continuorum ab unitate est multiplex producti continuorum ab unitate quorum multitudo minor est. Ergo, &c.

PROPOSITIO

Propositio VI.

Productus quotlibet continuorum, est ad productum totidem proximè majorum, ut minimus multiplicatorum ad maximum.

Sint quotlibet numeri 4, 5, 6, 7, quorum productus 840; & totidem proximè majores 5, 6, 7, 8, quorum productus 1680: dico 840 esse ad 1680, ut 4 ad 8.

Etenim productus numerorum 4, 5, 6, 7, est factus ex producto continuorum 5, 6, 7, multiplicato per 4; productus verò continuorum 5, 6, 7, 8, factus est ex eodem producto continuorum 5, 6, 7, multiplicato per 8. Ergo, &c.

Propositio VII.

Minimus productus continuorum cujuslibet speciei, ille est cujus multiplicatores ab unitate incipiunt.

Verbi gratiâ, minimus productus ex quatuor continuis factus, ille est qui producitur ex quatuor his continuis 1, 2, 3, 4, qui quidem multiplicatores 1, 2, 3, 4, ab unitate incipiunt. Hoc ex se & ex præcedentibus patet.

PRODUCTA CONTINUORUM RESOLVERE,

Seu Resolutio numerorum qui ex numeris progressione naturali procedentibus producuntur.

PROBLEMA.

Dato quocunque numero, invenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur?

Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab unitate continuorum.

DATUS sit numerus, verbi gratiâ, 4335, oporteatque reperire, verbi gratiâ, *quatuor* numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus sit maximus qui in dato 4335 contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione *quatuor* numerorum continuorum:

Sumantur ab unitate tot numeri continui quot sunt numeri inveniendi, nempe *quatuor* in hoc exemplo, 1, 2, 3, 4, quorum per productum 24, dividatur numerus datus; sitque quotiens 180. Ipsius quotientis inveniatur radix ordinis numerici non quidem *quarti*, sed sequentis, nempe *quinti*, sitque

ea 6; ipse 6 est primus numerus, secundus 7, tertius 8, quartus 9.

Dico itaque productum *quatuor* numerorum 6, 7, 8, 9, esse maximum numerum qui in dato contineatur, id est: dico productum *quatuor* numerorum 6, 7, 8, 9, nempe 3024, non esse majorem quàm numerum datum 4335; productum verò *quatuor* proximè majorum numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040, esse majorem numero dato 4335.

Etenim ex demonstratis in Tractatu de Ordinibus numericis, constat productum numerorum 1, 2, 3, 4, seu 24, ductum in numerum quinti ordinis cujus radix est 6, nempe 126, efficere numerum æqualem producto numerorum 6, 7, 8, 9, nempe 3024; similiter, & eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe 24, ductum in numerum ejusdem ordinis quinti cujus radix est 7, efficere numerum æqualem producto numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040.

Jam verò numerus quinti ordinis cujus radix est 6, nempe 126, cùm sit maximus ejus ordinis qui in 180 contineatur, ex constructione patet ipsum 126 non esse majorem quàm 180, numerum verò quinti ordinis cujus radix est 7, nempe 210, esse majorem quàm ipsum 180.

Cùm verò numerus 4335 divisus per 24, dederit 180, quotientem patet 180 ductum in 24, seu 4320, non esse majorem quàm 4335, sed aut

æqualem

æqualem esse, aut differre numero minore quàm 24.

Itaque cùm sit 210 major quàm 180 ex constructione, patet 210 in 24, seu 5040, majorem esse quàm 180 in 24 seu 4320, & excessum esse ad minimum 24; numerus verò datus 4335, aut non excedit ipsum 4320, aut excedit numero minore quàm 24. Ergo numerus 5040, major est quàm datus 4335; id est productus numerorum 7, 8, 9, 10, major est dato numero.

Jam numerus 126, non est major quàm 180, ex constructione. Igitur 126 in 24, non est major quàm 180 in 24; sed 180 in 24, non est major dato numero ex ostensis. Ergo 126 in 24, seu productus numerorum 6, 7, 8, 9, non est major numero dato; productus autem numerorum 7, 8, 9, 10, ipso major est. Ergo, &c. Q. E. F. E. D.

Sic ergo exprimi potest & enuntiatio, & generalis constructio.

Invenire tot quot imperabitur numeros progressione naturali continuos, ex quorum multiplicatione ortus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur?

Dividatur numerus datus, per productum totidem numerorum ab unitate serie naturali procedentium quot sunt numeri inveniendi; inventoque quotiente, assumatur ipsius radix ordinis numerici cujus exponens est unitate major quàm multitudo

numerorum inveniendorum: ipsa radix est primus numerus, reliqui per incrementum unitatis in promptu habentur.

MONITUM.

Hæc omnia ex naturâ rei demonstrari poterant, absque Trianguli Arithmetici aut ordinum numericorum auxilio; non tamen fugienda illa connexio mihi visa est, præsertim cùm ea sit quæ lumen primum dedit. Et quod amplius est, alia demonstratio laboriosior esset, & prolixior.

NUMERICARUM POTESTATUM *GENERALIS RESOLUTIO.*

GENERALEM numericarum potestatum resolutionem inquirenti, hæc mihi venit in mentem observatio: nihil aliud esse quærere *radicem, verbi gratiâ, quadratam dati numeri*, quàm quærere *duos numeros æquales quorum productus æquetur numero dato.* Sic & quærere *radicem cubicam* nihil aliud esse quàm quærere *tres numeros æquales quorum productus sit datus*, & sic de cæteris.

Itaque potestatis cujuslibet resolutio, est indagatio totidem numerorum æqualium, quot exponens potestatis continet unitates, quorum productus æquetur dato numero; potestates enim ipsæ nihil aliud sunt quàm æqualium numerorum producti.

Sicut

Sicut enim in præcedenti tractatu, egimus de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum naturali progressione procedentium, sic & in hoc de potestatibus tractatu, agitur de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum æqualium.

Visum est itaque quàm proximos esse ambos hos tractatus, & nihil esse vicinius, producto ex æqualibus, quàm productum ex continuis solius unitatis incremento differentibus.

Quapropter potestatum resolutionem generalem, seu *productorum ex æqualibus* resolutionem, non mediocriter provectam esse censui, cùm eam *productorum ex continuis* generalis resolutio præcesserit.

Dato enim numero, cujus radix cujusvis gradûs quæritur, verbi gratiâ, *quarti*, quæruntur *quatuor* numeri æquales quorum productus æquetur dato; si ergo inveniantur ex præcedente tractatu, *quatuor* continui quorum productus æquetur dato, quis non videt, inventam èsse radicem quæsitam, cùm ea sit unus ex his *quatuor* continuis? minimus enim ex his *quatuor*, *quater* sumptus & toties multiplicatus manifestè minor est producto continuorum; maximus verò ex his *quatuor*, *quater* sumptus ac toties multiplicatus, manifestè major est producto continuorum; radix ergo quæsita unus ex illis est.

Verùm latet adhuc ipsa in multitudine; reliquum

est igitur ut eligatur, & discernatur quis ex continuis satisfaciat quæstioni.

Huic perquisitioni nondum forte satis incubui, crudam tamen meditationem proferam, aliàs, si digna videatur, diligentiùs elaborandam.

POSTULATUM.

Hoc autem prænotum esse postulo; quæ sit radix *quadrata* numeri 2, nempe 1; *etenim* 1 *est radix maximi quadrati in* 2 *contenti.* Sic & quæ sit radix *cubica* numeri 6, *scilicet qui ex multiplicatione trium numerorum* 1, 2, 3, *oritur*, nempe 1. Sic & quæ sit radix *quarti* gradûs numeri 24, *scilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum* 1, 2, 3, 4, *oritur*, nempe 2, & sic de cæteris gradibus. In unoquoque enim peto nosci radicem, istius gradûs, numeri qui producitur ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab unitate quot exponens gradûs propositi continet unitates. Sic ergo in investigatione radicis, verbi gratiâ, *decimi* gradûs, postulo notam esse radicem istius *decimi* gradûs, numeri 3628800, qui producitur ex multiplicatione *decem* priorum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nempe 5. Et hoc uno verbo dici potest. In unoquoque gradu, postulo notam esse radicem istius gradûs minimi producti totidem continuorum quot exponens gradûs continet unitates; minimus enim productus continuorum quotlibet, ille est cujus multiplicatores ab unitate sumunt exordium.

Nec

Nec sanè molesta hæc petitio est; in unoquoque enim gradu *unius* tantùm numeri radicem suppono, in vulgari autem methodo, multò graviùs in unoquoque gradu, *novem* priorum characterum, potestates exiguntur.

Notum sit ergo:

Producti numerorum 1, 2, nempe 2 rad. quadr. esse 1
Producti numeror. 1, 2, 3, nempe 6 rad. cub. esse 1
Producti num. 1, 2, 3, 4, nempe 24 rad. 4 grad. esse 2
Prod. num. 1, 2, 3, 4, 5, nempe 120 rad. 5 grad. esse 2
Pr. num. 1, 2, 3, 4, 5, 6, nempe 720 rad. 6 grad. esse 2
Pr. n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, nem. 5040 rad. 7 grad. esse 3
&c.

PROBLEMA.

Dato quolibet numero, invenire radicem propositæ potestatis maximæ quæ in dato contineatur?

Sit datus numerus, verbi gratiâ, 4335, & invenienda sit radix gradûs, verbi gratiâ, *quarti* maximi numeri *quarti* gradûs seu *quadrato-quadrati* qui in dato numero contineatur.

Inveniantur, ex præcedente tractatu, *quatuor* numeri continui (quia *quartus* gradus proponitur) quorum productus sit maximus ejus speciei qui in 4335 contineatur, sintque ipsi 6, 7, 8, 9.

Radix quæsita est unus ex his numeris. Ut verò discernatur, sic procedendum est.

Sumatur ex postulato radix *quarti* gradûs numeri qui producitur ex multiplicatione *quatuor* priorum

numerorum 1, 2, 3, 4, nempe radix *quadrato-quadrata* numeri 24 quæ est 2; ipse 2 cum minimo continuorum inventorum 6 unitate minuto nempe 5 efficiet 7.

Hic 7 est minimus qui radix quæsita esse possit, omnes enim inferiores sunt necessariò minores radice quæsitâ.

Jam triangulus *numeri* 4, qui exponens est propositi gradûs *quarti*, nempe 10, dividatur per ipsum exponentem 4, sitque quotiens 2 (*superfluum divisionis non curo*): ipse quotiens 2, cum minimo continuorum 6 junctus, efficit 8.

Ipse 8 est maximus qui radix esse possit, omnes enim superiores sunt necessariò majores radice quæsitâ.

Denique constituantur *in quarto* gradu ipsi extremi numeri 7, 8, nempe 2401, 4096, necnon & omnes qui inter ipsos interjecti sunt, *quod ad generalem methodum dictum sit, hîc enim nulli inter 7 & 8 interjacent, sed in remotissimis potestatibus quidam, quamvis perpauci, contingent.*

Harum potestatum, illa quæ æqualis erit dato numero, *si ita eveniat*, aut saltem quæ proximè minor erit dato numero, nempe 4096, satisfaciet problemati. Radix enim 8 unde orta est, ea est quæ quæritur.

Sic ergo institui potest & enuntiatio & generalis constructio.

Invenire

Invenire numerum qui in gradu propoſito conſtitutus maximus ſit ejus gradûs qui in dato numero contineatur?

Inveniantur *ex tractatu præcedenti* tot numeri continui, quot ſunt unitates in exponente gradûs propoſiti, quorum productus ſit maximus ejus ſpeciei qui in dato numero contineatur. Et aſſumpto producto totidem continuorum ab unitate, inveniatur ejus radix gradûs propoſiti; *ex poſtulato* ipſa radix jungatur cum minimo continuorum inventorum unitate minuto: *hic erit minimus extremus.*

Jam triangulus exponentis ordinis per ipſum exponentem diviſus quemlibet præbeat quotientem, qui cum minimo continuorum inventorum jungatur: *hic erit maximus extremus.*

Ambo hi extremi ac numeri inter eos interpoſiti in gradu propoſito conſtituantur.

Harum poteſtatum, ea quæ dato numero erit aut æqualis aut proximè minor ſatisfacit problemati; radix enim unde orta eſt, radix quæſita eſt.

Horum demonſtrationem, paratam quidem, ſed prolixam etſi facilem, ac magis tædioſam quàm utilem ſupprimimus, ad illa, quæ plus afferunt fructûs quàm laboris, vergentes.

COMBINATIONES.

COMBINATIONES.

DEFINITIONES.

COMBINATIONIS nomen diversè à diversis usurpatur; dicam itaque quo sensu intelligam.

Si exponatur multitudo quævis rerum quarumlibet, ex quibus liceat aliquam multitudinem assumere, verbi gratiâ, si ex *quatuor* rebus per litteras *A, B, C, D,* expressis, liceat *duas* quasvis ad libitum assumere: singuli modi quibus possunt eligi *duæ* differentes ex his *quatuor* oblatis, vocantur hîc *combinationes.*

Experimento igitur patebit, *duas* posse assumi, inter *quatuor, sex* modis; potest enim assumi *A* & *B,* vel *A* & *C,* vel *A* & *D,* vel *B* & *C,* vel *B* & *D,* vel *C* & *D.*

Non constituo *A* & *A,* inter modos eligendi duas, non enim essent differentes; nec constituo *A* & *B,* & deinde *B* & *A,* tanquam differentes modos, ordine enim solummodò differunt, *ad ordinem autem non attendo:* ita ut uno verbo dixisse poteram, combinationes hîc considerari quæ nec mutato ordine procedunt.

Similiter experimento patebit, *tria* inter *quatuor, quatuor* modis assumi posse, nempe *ABC, ABD, ACD, BCD.*

Sic

Sic & *quatuor* in *quatuor*, *unico* modo assumi posse, nempe *ABCD*.

His igitur verbis utar:

1 in 4 combinatur 4 modis seu combinationibus.
2 in 4 combinatur 6 modis seu combinationibus.
3 in 4 combinatur 4 modis seu combinationibus.
4 in 4 combinatur 1 modo seu combinatione.

Summa autem omnium combinationum quæ fieri possunt in 4 est 15; summa enim combinationum 1 in 4, & 2 in 4, & 3 in 4, & 4 in 4, est 15.

LEMMA PRIMUM.

Numerus quilibet non combinatur in minore.

Verbi gratiâ, 4 non combinatur in 2.

LEMMA II.

1 *in* 1 *combinatur* 1 *combinatione.*
2 *in* 2 *combinatur* 1 *combinatione.*
3 *in* 3 *combinatur* 1 *combinatione.*

Et sic generaliter omnis numerus semel tantùm in æquali combinatur.

LEMMA III.

1 *in* 1 *combinatur* 1 *combinatione.*
1 *in* 2 *combinatur* 2 *combinationibus.*
1 *in* 3 *combinatur* 3 *combinationibus.*

Et generaliter unitas in quovis numero toties combinatur quoties ipse continet unitatem.

LEMMA

LEMMA IV.

Si sint quatuor numeri, primus ad libitum, secundus unitate major quàm primus, tertius ad libitum modò non sit minor secundo, quartus unitate major quàm tertius; multitudo combinationum primi in tertio, plus multitudine combinationum secundi in tertio, æquatur multitudini combinationum secundi in quarto.

Sint quatuor numeri ut dictum est:

Primus ad libitum, verbi gratiâ . . . . . 1.
Secundus unitate major nempe . . . . 2.
Tertius ad libitum modò non sit minor quàm secundus, verbi gratiâ . . . . . 3.
Quartus unitate major quàm tertius nempe 4.

Dico multitudinem combinationum 1 in 3, plus multitudine combinationum 2 in 3, æquari multitudini combinationum 2 in 4. *Quod ut paradigmate fiat evidentius:*

Assumantur *tres* characteres, nempe *B, C, D,* jam verò assumantur iidem *tres* characteres & *unus* præterea, *A, B, C, D;* deinde assumantur combinationes *unius* litteræ in *tribus, B, C, D,* nempe *B, C, D;* assumantur quoque omnes combinationes *duarum* litterarum in *tribus B, C, D,* nempe *BC, BD, CD;* denique assumantur omnes combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D,* nempe *AB, AC, AD, BC, BD, CD.*

Dico

Dico itaque, tot esse combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D*, quot sunt *duarum* in *tribus B, C, D*, & insuper quot *unius* in *tribus B, C, D*.

Hoc manifestum est ex generatione combinationum; combinationes enim *duarum* in *quatuor* formantur, partim ex combinationibus *duarum* in *tribus*, partim ex combinationibus *unius* in *tribus*; quod ita evidens fiet.

Ex combinationibus *duarum* in *quatuor*, nempe *AB, AC, AD, BC, BD, CD*, quædam sunt in quibus ipsa littera *A* usurpatur, ut istæ *AB, AC, AD*; quædam quæ ipsâ *A* carent ut istæ *BC, BD, CD*.

Porro, combinationes illæ *BC, BD, CD, duarum* in *quatuor A, B, C, D*, quæ ipso *A* carent, constant ex residuis *tribus B, C, D*; sunt ergo combinationes *duarum* in *tribus B, C, D*; igitur combinationes *duarum* in *tribus B, C, D*, sunt quoque combinationes *duarum* in *quatuor A, B, C, D*, nempe illæ quæ carent ipso *A*.

Illæ verò combinationes *AB, AC, AD, duarum* in *quatuor A, B, C, D*, in quibus *A* usurpatur, si ipso *A* spolientur, relinquent residuas litteras *B, C, D*, quæ sunt ex *tribus* litteris *B, C, D*, suntque combinationes *unius* litteræ in *tribus B, C, D*; igitur combinationes *unius* litteræ in *tribus B, C, D*, nempe *B, C, D*, ascito *A*, efficiunt *AB, AC, AD*,

quæ

quæ constituunt combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D,* in quibus *A* usurpatur.

Igitur combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D,* formantur partim ex combinationibus *unius* in *tribus B, C, D,* partim ex combinationibus *duarum* in *tribus B, C, D;* quare multitudo primarum æquatur multitudini reliquarum. Q. E. D.

Eodem prorsus modo in reliquis ostendetur exemplis; verbi gratiâ:

Tot esse combinationes numeri . . . 29 in 40.
quot sunt combinationes numeri . . . 29 in 39.
& insuper quot sunt combin. numeri 28 in 39.

Quatuor enim numeri 28, 29, 39, 40, conditionem requisitam habent.

Sic tot sunt combinationes numeri . . 16 in 56.
quot sunt combinationes numeri . . . 16 in 55.
ac insuper quot sunt combin. numeri 15 in 55.
&c.

LEMMA V.

In omni Triangulo Arithmetico summa cellularum seriei cujuslibet, æquatur multitudini combinationum exponentis seriei, in exponente trianguli.

Sit triangulus quilibet, verbi gratiâ, *quartus* $GD\lambda$: dico summam cellularum seriei cujusvis, verbi gratiâ, *secundæ* $\varphi + \downarrow + \theta$, æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis secundæ seriei*, in numero 4, *exponente quarti trianguli.*

Sic

Sic dico ſummam cellularum ſeriei, verbi gratiâ, *quintæ* trianguli, verbi gratiâ, *octavi*, æquari multitudini combinationum numeri 5 in numero 8, &c.

Quamvis infiniti ſint hujus propoſitionis caſus, ſunt enim infiniti trianguli, breviter tamen demonſtrabo, poſitis duobus aſſumptis.

Primo, quod ex ſe patet, *in primo triangulo eam proportionem contingere:* ſumma enim cellularum unicæ ſuæ ſeriei, nempe numerus primæ cellulæ *G*, id eſt unitas, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli; hi enim exponentes ſunt unitates; unitas verò in unitate unico modo *ex Lemmate 2 hujus* combinatur.

Secundo, *ſi ea proportio in aliquo triangulo contingat; id eſt ſi ſumma cellularum uniuſcujuſcunque ſeriei trianguli cujuſdam, æquetur multitudini combinationum exponentis ſeriei in exponente trianguli: dico & eandem proportionem in triangulo proximè ſequenti contingere.*

His aſſumptis, facilè oſtendetur in ſingulis triangulis eam proportionem contingere; contingit enim in primo, *ex primo aſſumpto;* immò & manifeſta quoque ipſa eſt in ſecundo triangulo; ergo *ex ſecundo aſſumpto* & in ſequenti triangulo contingit, quare & in ſequenti & in infinitum.

Totum ergo negotium in ſecundi aſſumpti demonſtratione conſiſtit, quod ita expedietur.

Sit triangulus quilibet, verbi gratiâ, *tertius* in quo

quo ſupponitur hæc proportio, id eſt, ſummam cellularum ſeriei *primæ* $G+\sigma+\pi$ æquari multitudini combinationum numeri 1, *exponentis ſeriei*, in numero 3, *exponente trianguli*; ſummam verò cellularum *ſecundæ ſeriei* $\varphi+\downarrow$ æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſeriei*, in numero 3, *exponente trianguli*; ſummam verò cellularum *tertiæ ſeriei*, nempe cellulam A, æquari combinationibus numeri 3, *exponentis ſeriei*, in 3 *exponente trianguli*: dico & eandem proportionem contingere & in ſequenti triangulo *quarto*, id eſt, ſummam cellularum, verbi gratiâ, *ſecundæ ſeriei* $\varphi+\downarrow+\theta$, æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſeriei*, in numero 4, *exponente trianguli*.

Etenim $\varphi+\downarrow$ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 3 *ex hypotheſi*; cellula verò θ æquatur, *ex generatione trianguli arithmetici*, cellulis $G+\sigma+\pi$; hæ verò cellulæ æquantur *ex hypotheſi* multitudini combinationum numeri 1 in 3. Ergo cellulæ $\varphi+\downarrow+\theta$ æquantur multitudini combinationum numeri 2 in 3, plus multitudine combinationum numeri 1 in 3; hæ autem multitudines æquantur, *ex quarto Lemmate hujus*, multitudini combinationum numeri 2 in 4. Ergo ſumma cellularum $\varphi+\downarrow+\theta$ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 4. Q. E. D.

Idem

Idem LEMMA V problematicè enuntiatum.

Datis duobus numeris inæqualibus, invenire in triangulo arithmetico *quot modis minor in majore combinetur?*

Propositi sint duo numeri, verbi gratiâ, 4 & 6, oportet reperire in triangulo arithmetico quot modis 4 combinetur in 6.

PRIMA METHODUS.

Summa cellularum *quartæ* seriei *sexti* trianguli, satisfacit, *ex præcedente, nempe cellulæ* D+E+F.

Hoc est numeri 1+4+10, seu 15: ergo 4 in 6 combinatur 15 modis.

SECUNDA METHODUS.

Cellula *quinta*, basis *septimæ* K, satisfacit; *illi numeri* 5, 7, *sunt proximè majores his* 4, 6.

Etenim illa cellula, nempe *K*, seu 15, æquatur summæ cellularum *quartæ* seriei *sexti* trianguli *D+E+F*, ex generatione.

MONITUM.

In basi *septimâ* sunt septem cellulæ, nempe *V*, *Q*, *K*, ρ, ξ, *N*, ζ, ex quibus *quinta* assumenda est; potest autem ipsa duplici modo assumi, sunt enim duæ basis extremitates *V*, ζ: si ergo ab extremo *V* inchoaveris, erit *V* prima, *Q* secunda, *K* tertia, ρ quarta, ξ quinta quæsita. Si verò à ζ in-

cipias, erit ζ prima, *N* secunda, ξ tertia, ρ quarta, *K* quinta quæsita: sunt igitur duæ quæ possunt dici, *quintæ*; sed quoniam ipsæ sunt æquè ab extremis remotæ, ideòque reciprocæ, sunt ipsæ eædem; quare indifferenter assumi alterutra potest, & ab alterutrâ basis extremitate inchoari.

MONITUM.

Jam satis patet, quàm bene conveniant combinationes & triangulus arithmeticus, & ideò, proportiones inter series, aut inter cellulas trianguli observatas, ad combinationum rationes protendi, ut in sequentibus videre est.

PROPOSITIO PRIMA.

Duo quilibet numeri, æquè combinantur in eo quod amborum aggregatum est.

Sint duo numeri quilibet 2, 4, quorum aggregatum 6: dico numerum 2 toties combinari in 6, quoties ipse 4 in eodem 6 combinatur, *nempe singulos, modis* 15.

Hoc nihil aliud est quàm consectatio 4 trianguli arithmetici, & potest hoc uno verbo demonstrari; *cellulæ enim reciprocæ sunt eædem.* Si verò ampliori demonstratione egere videatur, hæc satisfaciet.

Multitudo combinationum numeri 2 in 6 æquatur *ex* 5 *Lemmate*, seriei *secundæ* trianguli *sexti*, nempe

nempe cellulis $\varphi + \downarrow + \theta + R + S$, seu cellulæ ξ; sic multitudo quoque combinationum numeri 4 in 6 æquatur, *ex eodem*, seriei *quartæ* trianguli *sexti*, nempe cellulis $D + E + F$, seu cellulæ K; ipsa verò K, est reciproca ipsius ξ, ideòque ipsi æqualis; quare & multitudo combinationum numeri 2 in 6, æquatur multitudini combinationum numeri 4 in 6. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Ergo omnis numerus toties combinatur in proximè majori, quot sunt unitates in ipso majori.

Verbi gratiâ, numerus 6 in 7 combinatur *septies*, & 4 in 5 *quinquies*, &c. Ambo enim numeri 1, 6, æquè combinantur in aggregato eorum 7, *ex propositione hac* 1; sed 1 in 7 combinatur septies, *ex Lemmate* 3. Igitur 6 in 7 combinatur quoque septies.

PROPOSITIO II.

Si duo numeri combinentur in numero quod amborum aggregatum est unitate minuto; multitudines combinationum erunt inter se, ut ipsi numeri reciprocè.

Hoc nihil aliud est quàm consectatio 17 trianguli arithmetici.

Sint duo quilibet numeri 3, 5, quorum summa 8, unitate minuta, est 7: dico multitudinem combinationum numeri 3 in 7, esse ad multitudinem combinationum numeri 5 in 7, ut 5 ad 3.

B.M.U. CLERMONT-Fd

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 7, æquatur, *ex* 5 *Lemmate*, *tertiæ* seriei *septimi* trianguli arithmetici, nempe $A+B+C+\omega+\xi$, seu 35. Multitudo autem combinationum numeri 5 in 7, æquatur, *ex eodem*, *quintæ* seriei ejusdem *septimi* trianguli, nempe $H+M+K$, seu 21; in triangulo autem *septimo*, series *quinta* & *tertia* sunt inter se ut 3 ad 5, *ex consectatione* 17 *trianguli arithmetici*, aggregatum enim exponentium serierum 5, 3, nempe 8, æquatur exponenti trianguli 7 unitate aucto.

PROPOSITIO III.

Si numerus combinetur, primò in numero qui sui duplus *est, deinde in ipsomet numero* duplo *unitate minuto, prima combinationum multitudo, secundæ dupla erit.*

Hoc nihil aliud est quàm consectatio 10 trianguli arithmetici.

Sit numerus quilibet 3, cujus duplus 6, qui unitate minutus, est 5 : dico multitudinem combinationum numeri 3 in 6, duplam esse multitudinis combinationum numeri 3 in 5.

Possem uno verbo dicere *omnis enim cellula dividentis dupla est præcedentis corradicalis* : sic autem demonstro.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, *ex* 5 *Lemmate*, cellulæ 4 basis 7, nempe ρ, seu

seu 20; quæ quidem ρ, medium basis occupat locum, *quod indè procedit quòd* 3 *sit dimidium* 6, *undè fit ut* 4 *proximè major quàm* 3, *medium occupet locum in numero* 7 *proximè majori quàm* 6. Igitur ipsa cellula *quarta* ρ est in dividente; quare dupla est cellulæ *F*, seu ω, *ex* 10 *consectatione trianguli arithmetici*, quæ quidem ω est quoque *quartæ* cellula basis *sextæ*; ideòque *ex Lemmate* 5, ipsa ω seu *F*, æquatur multitudini combinationum numeri 3 in 5; ergo multitudo combinationum 3 in 6 dupla est multitudinis combinationum 3 in 5. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

Si sint duo numeri proximi, & alius quilibet in utroque combinetur, multitudo combinationum quæ fiunt in majore, erit ad alteram multitudinem, ut major numerus, ad ipsummet majorem dempto eo qui combinatus est.

Sint duo numeri unitate differentes 5, 6; & alius quilibet 2 combinetur in 5, & deinde in 6: dico multitudinem combinationum ipsius 2 in 6, esse ad multitudinem combinationum ipsius 2 in 5, ut 6 ad 6 — 2.

Hoc ex 13 consectatione trianguli arithmetici est manifestum & sic ostendetur.

Multitudo enim combinationum ipsius 2 in 6, æquatur summæ cellularum seriei 2 trianguli 6,

nempe $\varphi + \downarrow + \theta + R + S$, *ex Lemmate* 5, hoc est cellulæ ξ, seu 15. Sed, *ex eodem*, multitudo combinationum ejusdem 2 in 5, æquatur summæ cellularum seriei 2 trianguli 5, nempe $\varphi + \downarrow + \theta + R$, seu cellulæ ω, seu 10; est autem cellula ξ ad ω ut 6 ad 4, hoc est ut 6 ad $6 - 2$, ex 13 confectatione trianguli arithmetici.

PROPOSITIO V.

Si duo numeri proximi, in alio quolibet combinentur, erit multitudo combinationum minoris, ad alteram, ut major numerus combinatus, ad numerum in quo ambo combinati sunt dempto minore numero combinato.

Sint duo quilibet numeri proximi 3, 4, & alius quilibet 6: dico multitudinem combinationum *minoris* 3 in 6, esse ad multitudinem combinationum *majoris* 4 in 6, ut 4 ad $6 - 3$.

Hæc cum 11 confectatione trianguli arithmetici convenit & sic ostendetur.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, *ex Lemmate* 5, summæ cellularum seriei 3 trianguli 6, nempe $A + B + C + \omega$, seu cellulæ ρ, seu 20. Multitudo verò combinationum numeri 4 in 6, æquatur, *ex eodem*, summæ cellularum seriei 4 trianguli 6, nempe $D + E + F$, seu cellulæ K, seu 15; est autem ρ ad K ut 4 ad 3, seu ut 4 ad $6 - 3$, ex confectatione 11 trianguli arithmetici.

PROPOSITIO

PROPOSITIO VI.

Si sint duo numeri quilibet quorum minor in majore combinetur, sint autem & alii duo his proximè majores quorum minor in majore quoque combinetur: erunt multitudines combinationum inter se, ut hi ambo ultimi numeri.

Sint duo quilibet numeri 2, 4, alii verò his proximè majores 3, 5 : dico multitudinem combinationum numeri 2 in 4, esse ad multitudinem combinationum numeri 3 in 5, ut 3 ad 5.

Consectatio 12 trianguli arithmetici hanc continet & sic demonstratur.

Multitudo enim combinationum ipsius 2 in 4, æquatur, *ex Lemmate* 5, summæ cellularum seriei 2 trianguli 4, nempe $\varphi + \downarrow + \vartheta$, seu cellulæ C, seu 6. Multitudo verò combinationum numeri 3 in 5, æquatur, *ex eodem*, summæ cellularum seriei 3 trianguli 5, nempe $A + B + C$, seu cellulæ F, seu 10; est autem C ad F, ut 3 ad 5, ex 12 consectatione trianguli arithmetici.

LEMMA VI.

Summa omnium cellularum basis trianguli cujuslibet arithmetici unitate minuta, æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero qui proximè minor est quàm exponens basis.

Sit triangulus quilibet arithmeticus, verbi gratiâ,

quintus $GH\mu$: dico ſummam cellularum ſuæ baſis $H+E+C+R+\mu$, minus unitate, *ſeu minus unâ ex extremis* H *vel* μ, æquari ſummæ omnium combinationum quæ fieri poſſunt in numero 4 qui proximè minor eſt quàm exponens baſis 5. Id eſt: dico ſummam cellularum $R+C+E+H$ (*ſupprimo enim extremam* μ) id eſt $4+6+4+1$, ſeu 15, æquari multitudini combinationum numeri 1 in 4, nempe 4; plus multitudine combinationum numeri 2 in 4, nempe 6; plus multitudine combinationum numeri 3 in 4, nempe 4; plus multitudine combinationum numeri 4 in 4, nempe 1. *Quæ quidem ſunt omnes combinationes quæ fieri poſſunt in* 4; *ſuperiores enim numeri* 5, 6, 7, *&c. non combinantur in numero* 4: *major enim numerus in minore non combinatur.*

Multitudo enim combinationum numeri 1 in 4, æquatur, *ex* 5 *Lemmate*, cellulæ 2 baſis 5, nempe *R*, ſeu 4. Multitudo verò combinationum numeri 2 in 4, æquatur cellulæ 3 baſis 5, nempe *C*, ſeu 6. Multitudo quoque combinationum numeri 3 in 4, æquatur cellulæ 4 baſis 5, nempe *E*, ſeu 4. Multitudo denique combinationum numeri 4 in 4, æquatur cellulæ 5 baſis 5, nempe *H*, ſeu 1. Igitur ſumma cellularum baſis *quintæ* demptâ extremâ ſeu unitate, æquatur ſummæ omnium combinationum quæ poſſunt fieri in 4.

PROPOSITIO

PROPOSITIO VII.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet, unitate aucta, est numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, quippe ille cujus exponens est numerus proximè major quàm datus.

Sit numerus quilibet, verbi gratiâ, 4: dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctam, nempe 16, esse numerum *quintum* (nempe proximè majorem quàm *quartum*) progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium.

Hoc nihil aliud est quàm 7 consectatio trianguli arithmetici, & sic uno verbo demonstrari posset, *omnis enim basis est numerus progressionis duplæ:* sic tamen demonstro.

Summa enim combinationum omnium quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, *ex Lemmate 6*, summæ cellularum basis *quintæ;* ipsa verò basis est *quintus* numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, ex 7 consectatione trianguli arithmetici.

PROPOSITIO VIII.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet unitate aucta, dupla est summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero proximè minore unitate aucta.

Hoc convenit cum 6 consectatione trianguli arithmetici,

metici, nempe *omnis basis dupla est præcedentis:* sic autem ostendemus.

Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate auctam, nempe 32, esse duplam summæ combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctæ, nempe 16.

Summa enim combinationum quæ fieri possunt in 5, unitate aucta, æquatur, *ex præcedente, sexto* numero progressionis duplæ. Summa verò combinationum quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, *ex eâdem, quinto* numero progressionis duplæ. *Sextus* autem numerus progressionis duplæ, duplus est proximè præcedentis, nempe *quinti.*

PROPOSITIO IX.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in quovis numero unitate minuta, dupla est summæ combinationum quæ fieri possunt in numero proximè minori.

Hæc cum præcedente omnino convenit.

Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate minutam, nempe 30, esse duplam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15.

Etenim *ex præcedente* summa combinationum quæ fiunt in 5, unitate aucta, dupla est summæ combinationum

binationum quæ fiunt in 4, unitate auctæ: si ergo ex *minori* summâ auferatur unitas, & ex *duplâ summâ* auferantur duæ unitates, reliquum summæ *duplæ*, nempe *summa combinationum quæ fiunt in 5 unitate minuta*, remanebit *dupla* residui alterius summæ, nempe *summæ combinationum quæ fiunt in 4.*

PROPOSITIO X.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in quolibet numero, minuta ipsomet numero, æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in singulis numeris proposito minoribus.

Hæc cum 8 consectatione trianguli arithmetici concurrit quæ sic habet, *basis quælibet unitate minuta, æquatur summæ omnium præcedentium.* Sic autem ostendo.

Sit numerus quilibet 5: dico summam omnium combinationum quæ possunt fieri in 5, nempe 31 ipso 5 minutam, nempe 26, æquari summæ omnium combinationum quæ possunt fieri in 4, nempe 15; plus summâ omnium quæ possunt fieri in 3, nempe 7; plus summâ omnium quæ possunt fieri in 2, nempe 3; plus eâ quæ potest fieri in 1, nempe 1, quarum aggregatus est 26.

Etenim proprium numerorum hujus progressionis duplæ illud est, ut quilibet ex ipsis, verbi gratiâ, sextus 32, exponente suo minutus, nempe 6, id est 26, æquetur summæ inferiorum numerorum

hujus

hujus progressionis, nempe 16+8+4+2+1 unitate minutorum, nempe 15+7+3+1+0, nempe 26. Unde facilis est demonstratio hujus propositionis.

PROBLEMA PRIMUM.

Dato quovis numero, invenire summam omnium combinationum quæ in ipso fieri possunt. Absque triangulo arithmetico.

Numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium cujus exponens proximè major est quàm numerus datus, satisfaciet problemati, modò unitate minuatur.

Sit numerus datus, verbi gratiâ, 5, quæritur summa omnium combinationum quæ in 5 fieri possunt.

Numerus *sextus* progressionis duplæ quæ ab unitate incipit, nempe 32, unitate minutus, nempe 31 satisfacit, *ex Lemmate* 6; ergo possunt fieri 31 combinationes in numero 5.

PROBLEMA II.

Datis duobus numeris inæqualibus, invenire quot modis minor in majore combinetur. Absque triangulo arithmetico.

Hoc est propriè ultimum problema Tractatûs Trianguli Arithmetici, quod sic resolvo.

Productus numerorum qui præcedunt differentiam

tiam datorum unitate auctam, dividat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit minor datorum unitate auctus : quotiens est quæsitus.

Sint dati numeri 2, 6 : oportet invenire quot modis 2 combinetur in 6.

Assumatur eorum differentia 4 quæ unitate aucta est 5. Jam assumantur omnes numeri qui præcedunt ipsum 5, nempe 1, 2, 3, 4, quorum productus sit 24. Assumantur totidem numeri continui quorum primus sit 3, *nempe proximè major quàm* 2 *qui minor est ex ambobus datis*, nempe 3, 4, 5, 6, quorum productus 360, dividatur per præcedentem productum 24 : quotiens 15 est numerus quæsitus. *Ita ut numerus* 2 *combinetur in* 6, *modis* 15 *differentibus.*

Nec difficilis demonstratio. Si enim quæratur in triangulo arithmetico quot modis 2 combinetur in 6, assumenda est cellula 3 basis 7, *ex Lemmate* 5, nempe cellula $\frac{5}{4}$, & ipsius numerus exponet multitudinem combinationum numeri 2 in 6. Ut autem inveniatur numerus cellulæ $\frac{5}{4}$ cujus radix est 5, & exponens seriei 3, oportet, *ex problemate trianguli arithmetici, ut productus numerorum qui præcedunt* 5, *dividat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit* 3, *& quotiens erit numerus cellulæ* $\frac{5}{4}$; sed idem divisor ac idem dividendus in constructione hujus propositus est, quare

&

& eundem quotientem sortita est divisio; ergo in hac constructione repertus est numerus cellulæ $\frac{6}{2}$, quare & exponens multitudinis combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. F. E. D.

MONITUM.

Hoc problemate tractatum hunc absolvere constitueram, non tamen omninò sine molestiâ, cùm multa alia parata habeam; sed ubi tanta ubertas, vi moderanda est fames: his ergo pauca hæc subjiciam.

Eruditissimus ac mihi charissimus, D. D. de Ganieres, circa combinationes, assiduo ac perutili labore, more suo, incumbens, ac indigens facili constructione ad inveniendum quoties numerus datus in alio dato combinetur, hanc ipse sibi praxim instituit.

Datis numeris, verbi gratiâ, 2, 6, invenire quot modis 2 combinetur in 6.

Assumatur, *inquit*, progressio *duorum* terminorum *quia minor numerus est* 2, inchoando à majore 6, ac retrogrediendo, seu detrahendo unitatem ex unoquoque termino, hoc modo 6, 5; deinde assumatur altera progressio inchoando ab ipso minore 2 ac similiter retrogrediendo hoc modo 2, 1. Multiplicentur invicem numeri primæ progressionis 6, 5, sitque productus 30. Multiplicentur & numeri secundæ progressionis 2, 1, sitque productus

tus 2. Dividatur major productus per minorem: quotiens est quæsitus.

Excellentem hanc solutionem ipse mihi ostendit, ac etiam demonstrandam proposuit; ipsam ego sanè miratus sum, sed difficultate territus vix opus suscepi, & ipsi authori relinquendum existimavi; attamen trianguli arithmetici auxilio, sic proclivis facta est via.

In 5 Lemmate hujus, ostendi numerum cellulæ ξ, exponere multitudinem combinationum numeri 2 in 6; quare ipsius reciproca cellula *K* eundem numerum continebit. *Verùm cellula ipsa* K *est quotiens divisionis in quâ productus numerorum* 1, 2, *qui præcedunt* 3 *radicem cellulæ* K, *dividit productum totidem numerorum continuorum quorum primus est* 5 *exponens seriei cellulæ* K, *nempe numerorum* 5, 6. Sed ille divisor ac dividendus sunt iidem ac illi qui in constructione *amici* sunt propositi; igitur eundem quotientem sortitur divisio, quare ipse exponit multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. D.

Hac demonstratione assecutâ, jam reliqua quæ invitus supprimebam libenter omitto, adeò dulce est amicorum memorari.

POTESTATUM

POTESTATUM NUMERICARUM SUMMA.

MONITUM.

DATIS, ab unitate, quotcunque numeris continuis, verbi gratiâ, 1, 2, 3, 4, invenire summam quadratorum eorum, nempe 1 + 4 + 9 + 16, id est 30, tradiderunt veteres; imò etiam & summam cuborum eorundem; ad reliquas verò potestates non protraxerunt suas methodos, his solummodò gradibus proprias. Hîc autem exhibetur, non solùm summa quadratorum, & cuborum, sed & quadrato-quadratorum, & reliquarum in infinitum potestatum. Et non solùm à radicibus ab unitate continuis, sed à quolibet numero initium sumentibus, verbi gratiâ, numerorum 8, 9, 10, &c. Et non solùm numerorum qui progressione naturali procedunt, sed & eorum omnium qui progressione, verbi gratiâ, cujus differentia est 2, aut 3, aut 4, aut alius quilibet numerus, formantur, ut istorum 1, 3, 5, 7, &c. vel horum 2, 4, 6, 8, qui per incrementum binarii augentur, aut horum 1, 4, 7, &c. qui per incrementum ternarii, & sic de cæteris; sed, *& quod amplius est*, à quolibet numero exordium sumat illa progressio, *sive* incipiat

piat ab unitate, ut isti 1, 4, 7, 10, 13, &c. qui sunt ejus progressionis quæ per incrementum ternarii procedit, & ab unitate sumit exordium; *sivè* ab aliquo hujus progressionis numero incipiat ut isti 7, 10, 13, 16, 19; *sive quod ultimum est*, à numero qui non sit ejus progressionis, ut isti 5, 8, 11, 14, quorum progressio per ternarii differentiam procedit, & à numero 5, *ipsi progressioni extraneo*, exordium sumit. Et *quod sanè feliciter inventum est*, tam multos differentes casus, *unica ac generalissima* resolvit *methodus*; adeò *simplex*, ut absque litterarum auxilio, quibus difficiliores egent enuntiationes, paucis lineis contineatur: ut ad finem problematis sequentis patebit.

DEFINITIO.

Si binomium, cujus alterum nomen sit *A*, alterum verò numerus quilibet ut 3, nempe $A+3$, ad quamlibet constituatur potestatem ut ad quartum gradum, cujus hæc sit expositio . . . . .

$A^4+12.A^3+54.A^2+108.A+81$:

Ipsi numeri 12, 54, 108, per quos ipse *A* multiplicatur in singulis gradibus, quique partim ex numeris figuratis, partim ex numero 3, qui binomii est secundum nomen, formantur, vocabuntur *coefficientes* ipsius *A*.

Erit ergo *in hoc exemplo* 12 *coefficiens* A cubi, & 54 *coefficiens* A quadrati, & 108 *coefficiens* A *radicis*.

Numerus verò 81 *numerus absolutus* dicetur.

LEMMA.

Sit radix quælibet 14; altera verò sit binomium $14+3$ cujus primum nomen sit 14, alterum verò alius quilibet numerus 3, ita ut harum radicum 14, & $14+3$, differentia sit 3. Constituantur ipsæ in quolibet gradu ut in quarto: ergo quartus gradus radicis 14 est 14^4; quartus verò gradus binomii $14+3$ est . . . . . .

$$14^4+12.14^3+54.14^2+108.14+81.$$

Cujus quidem binomii primum nomen 14, *eosdem coefficientes sortitur in singulis gradibus, quos* A *sortitus est in similibus gradibus in expositione ejusdem gradûs binomii* $A+3$, *quod rationi consentaneum est;* harum verò potestatum, nempe hujus 14^4 & hujus $14^4+12.14^3+54.14^2+108.14+81$, differentia est $12.14^3+54.14^2+108.14+81$: quæ quidem constat primò, ex radice 14 constitutâ in singulis gradibus proposito gradui *quarto* inferioribus, nempe in *tertio*, in *secundo* & in *primo*, & in unoquoque multiplicatâ per *coefficientes* quos *A* sortitur in similibus gradibus, in expositione ejusdem gradûs binomii $A+3$; deinde ex ipso numero 3, *qui est differentia radicum*, constituto in proposito *quarto* gradu, *numerus enim absolutus* 81 *est quartus gradus radicis* 3. Hinc igitur elicietur *Canon iste:*

Duarum

Duarum similium potestatum differentia, æquatur, differentiæ radicum constitutæ in eodem gradu in quo sunt potestates propositæ; plus minori radice constitutâ in singulis gradibus proposito gradui inferioribus ac in unoquoque multiplicatâ per coefficientes quos A *sortiretur in similibus gradibus, si binomium cujus primum nomen esset* A, *alterum verò esset differentia radicum, constitueretur in eâdem potestate propositâ.*

Sic ergo differentia inter 14^4 & 11^4, erit ... $12.11^3+54.11^2+108.11+81$.

Differentia enim radicum est 3. Et sic de cæteris.

Ad summam potestatum cujuslibet progressionis inveniendam unica ac generalis methodus.

Datis quotcunque numeris, in qualibet progressione, à quovis numero inchoante, invenire quarumvis potestatum eorum summam?

Quilibet numerus 5, sit initium progressionis quæ per incrementum cujusvis numeri, verbi gratiâ, *ternarii* procedat, & in eâ progressione dati sint quotlibet numeri, verbi gratiâ, isti 5, 8, 11, 14, qui omnes in quâcunque potestate constituantur ut in tertio gradu seu cubo. Oportet invenire summam horum cuborum, nempe $5^3+8^3+11^3+14^3$.

Cubi illi sunt $125+512+1331+2744$, quo-

rum ſumma eſt 4712 quæ quæritur & ſic invenitur.

Exponatur binomium $A+3$ cujus primum nomen ſit A, alterum verò ſit numerus 3 qui eſt differentia progreſſionis.

Conſtituatur binomium hoc $A+3$ in gradu *quarto* qui proximè ſuperior eſt propoſitō *tertio*, ſitque hæc ejus expoſitio . . . . . .

$$A^4+12.A^3+54.A^2+108.A+81.$$

Jam aſſumatur numerus 17 qui in progreſſione propoſitâ proximè ſequitur ultimum progreſſionis terminum datum 14. Et conſtituto ipſo 17 in eodem gradu *quarto*, nempe 83521, auferantur ab eo, hæc:

Primò, ſumma numerorum propoſitorum $5+8+11+14$, nempe 38 multiplicata per numerum 108, qui eſt coefficiens ipſius A radicis.

Secundò, ſumma quadratorum eorundem numerorum 5, 8, 11, 14, multiplicata per numerum 54, qui eſt coefficiens A quadrati.

Et ſic deinceps procedendum eſſet ſi ſupereſſent gradus alii inferiores ipſi gradui tertio qui propoſitus eſt.

Deinde *auferatur* primus terminus *propoſitus* 5 *in* quarto *gradu conſtitutus*.

Denique *auferatur* numerus 3 qui eſt differentia progreſſionis *in eodem gradu* quarto *conſtitutus*, *ac* toties *ſumptus*, quot *ſunt numeri propoſiti*, *nempe* quater *in hoc exemplo*.

Reſiduum erit multiplex ſummæ quæſitæ, eamque

que *toties* continebit, *quoties* numerus 12 qui est coefficiens ipsius *A* cubi, seu *A* in gradu *tertio* proposito, continet unitatem.

Si ergo ad *praxim* methodus reducatur, numerus 17 constituendus est in 4 gradu, nempe 83521, & ab eo hæc auferenda sunt:

Primò, summa numerorum propositorum $5+8+11+14$, nempe 38, multiplicata per 108, unde oritur productus 4104.

Deinde summa quadratorum numerorum propositorum, id est, $5^2+8^2+11^2+14^2$, nempe $25+64+121+196$, quorum summa est 406, quæ multiplicata per 54 efficit 21924.

Deinceps auferendus est numerus 5 in *quarto* gradu, nempe 625.

Denique auferendus est numerus 3 in *quarto* gradu, nempe 81, *quater* sumptus, nempe 324. Numeri ergo auferendi, illi sunt 4104, 21924, 625, 324; quorum summa est 26977, quæ ablata à numero 83521, supereſt 56544.

Hoc ergo *residuum* continebit summam quæsitam, nempe 4712, multiplicatam per 12; & profectò 4712 per 12 multiplicata efficit 56544.

Paradigma facilè est construere; hoc autem sic demonstrabitur.

Etenim numerus 17 in 4 gradu constitutus qui quidem sic exprimitur 17^4 æquatur $17^4-14^4.+14^4-11^4.+11^4-8^4.+8^4-5^4+5^4.$

Solus enim 17^4 signum affirmationis solum sortitur, reliqui autem affirmantur ac negantur.

Sed differentia radicum 17, 14, est 3, eademque est differentia radicum 14, 11, eademque radicum 11, 8, ac etiam radicum 8, 5. Igitur ex præmisso Lemmate:

$17^4 - 14^4$ æquatur $12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$.
Sic $14^4 - 11^4$ æquatur $12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81$.
Sic $11^4 - 8^4$ æquatur $12.8^3 + 54.8^2 + 108.8 + 81$.
Sic $8^4 - 5^4$ æquatur $12.5^3 + 54.5^2 + 108.5 + 81$.

Non interpretor 5^4.

Igitur 17^4 æquatur his omnibus:

$12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$
$+ 12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81$
$+ 12.8^3 + 54.8^2 + 108.8 + 81$
$+ 12.5^3 + 54.5^2 + 108.5 + 81$
$+ 5^4$.

Hoc est *mutato ordine*, 17^4 æquatur his

$5 + 8 + 11 + 14$ multiplicatis per 108;
$+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$ multiplicatis per 54;
$+ 5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12;
$+ 81 + 81 + 81 + 81$;
$+ 5^4$.

Ablatis undique his

$5 + 8 + 11 + 14$ multiplicatis per 108;
$+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$ multiplicatis per 54;
$+ 81 + 81 + 81 + 81$;
$+ 5^4$;

Remanet

Remanet 17^4 minus his, nempe . . . .
$-5 \quad -8 \quad -11 \quad -14$ multiplicatis per 108;
$-5^2 \quad -8^2 \quad -11^2 \quad -14^2$ multiplicatis per 54;
$-81 \quad -81 \quad -81 \quad -81$;
-5^4;
æqualis $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12.
Q. E. D.

Sic ergo potest institui enuntiatio & generalis constructio.

SUMMA POTESTATUM.

Datis quotcunque numeris, in quâlibet progressione, à quovis numero initium sumente, invenire summam quarumvis potestatum eorum?

Exponatur binomium, cujus primum nomen sit *A*, alterum verò sit numerus qui differentia progressionis est, & constituatur hoc binomium in *gradu qui proximè superior* est gradui proposito, & in expositione potestatis ejus notentur *coefficientes* quos *A* sortitur in singulis gradibus.

Constituatur & in eodem *gradu superiori numerus qui* in eâdem progressione propositâ *proximè sequitur ultimum* progressionis terminum propositum. Et ab eo *auferantur* hæc:

Primò, primus terminus *progressionis datus, seu minimus numerus datorum in eodem* superiori gradu *constitutus.*

Secundò, *numerus qui* differentia est progressionis

in eodem superiori gradu *constitutus*, *ac* toties *sumptus* quot *sunt termini dati.*

Tertiò, *auferantur* singuli numeri *dati*, *in* singulis gradibus *proposito gradui* inferioribus *constituti*, *ac in unoquoque gradu multiplicati per* jam notatos coefficientes *quos* A *sortitur in iisdem gradibus in expositione hujus* superioris *gradûs binomii primò assumpti.*

Reliquum *est multiplex summæ quæsitæ*, *eamque* toties *continet* quoties coefficiens *quem* A *in gradu* proposito *sortitur continet unitatem.*

MONITUM.

Praxes jam particulares sibi quisque pro genio suppeditabit : verbi gratiâ, si quæris summam quotlibet numerorum progressionis naturalis à quolibet inchoantis, hic, ex methodo generali, elicietur *Canon :*

In progressione naturali à quovis numero inchoante, differentia inter quadratum minimi termini & quadratum numeri qui proximè major est ultimo termino, minuta numero qui exponit multitudinem, dupla est aggregati ex omnibus.

Sint quotlibet numeri naturali progressione continui, quorum primus sit ad libitum, verbi gratiâ, *quatuor* isti 5, 6, 7, 8 : dico $9^2 - 5^2 - 4$ æquari duplo $5+6+7+8$.

Similes canones & reliquarum potestatum summis

mis inveniendis & reliquis progressionibus facilè aptabuntur, quos quisque sibi comparet.

CONCLUSIO.

Quantùm hæc notitia ad spatiorum curvilineorum dimensiones conferat, satis norunt qui in Indivisibilium doctrinâ tantisper versati sunt. Omnes enim omnium generum Parabolæ illicò quadrantur, & alia innumera facillimè mensurantur.

Si ergo illa, quæ hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi possunt institui canones.

Canones ad naturalem progressionem quæ ab unitate sumit exordium.

Summa linearum est ad quadratum maximæ, ut . . . . . 1 ad 2.

Summa quadratorum est ad cubum maximæ, ut . . . . . 1 ad 3.

Summa cuborum est ad 4 gradum maximæ, ut . . . . . 1 ad 4.

Canon generalis ad progressionem naturalem quæ ab unitate sumit exordium.

Summa omnium in quolibet gradu, est ad maximam in proximè superiori gradu, ut unitas, ad exponentem superioris gradûs.

Non de reliquis differam, quia hîc locus non est: hæc

hæc obiter notavi, reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, *in continuâ quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineæ superficiebus, superficies solidis, nihil adjiciunt: seu *ut numericis, in numerico tractatu, verbis utar*, radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, &c. nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Hæc, quæ Indivisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, ut nunquam satis mirata connexio, quâ ea etiam quæ remotissima videntur, in unum addicat unitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuæ dimensionem*, cum *numericarum potestatum summâ*, conjunctam contemplari licet.

DE NUMERIS *MULTIPLICIBUS*

Ex solâ characterum numericorum additione agnoscendis.

Monitum.

Nihil tritius est apud Arithmeticos, quàm numeros numeri 9 multiplices, constare characteribus, quorum aggregatum est quoque ipsius 9 multiplex. Si enim ipsius, verbi gratiâ, dupli 18, characteres numericos 1 + 8, jungas, aggregatum erit 9. Ita ut ex solâ additione characterum numericorum numeri cujuslibet, liceat agnoscere, utrùm sit ipsius 9 multiplex : verbi gratiâ, si numeri 1719 characteres numericos jungas 1 + 7 + 1 + 9, aggregatum 18 est ipsius 9 multiplex; undè certò colligitur, & ipsum 1719 ejusdem 9 esse multiplicem. Vulgata sanè illa observatio est; verùm ejus demonstratio à nemine quod sciam data est, nec ipsa notio ulteriùs provecta. In hoc autem Tractatulo non solùm istius, sed & variarum aliarum observationum generalissimam demonstrationem dedi, ac methodum universalem agnoscendi ex solâ additione characterum numericorum propositi cujusvis

cujusvis numeri, utrùm ille sit alterius propositi numeri multiplex; & non solùm in progressione denariâ, quâ numeratio nostra procedit (denaria enim ex instituto hominum, non ex necessitate naturæ ut vulgus arbitratur, & sanè satis ineptè, posita est); sed in quâcunque progressione instituatur numeratio, non fallet hîc tradita methodus, ut in paucis mox videbitur paginis.

Propositio unica.

Agnoscere ex solâ additione characterum dati cujuslibet numeri, an ipse sit alterius dati numeri multiplex?

Ut hæc solutio fiat generalis, litteris utemur vice numerorum. Sit ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram *A*; dividendus autem, numerus expressus per litteras *TVNM*, quarum ultima *M* exprimit numerum quemlibet in unitatum columnâ collocatum; *N* verò, numerum quemlibet in denariorum columnâ; *V* numerum quemlibet in columnâ centenariorum; *T* autem numerum quemlibet in columnâ millenariorum, & sic deinceps in infinitum: ita ut, si litteras in numeros convertere velis, assumere possis loco ipsius *M* quemlibet ex novem primis characteribus, verbi gratiâ, 4, loco *N* quemlibet numerum, ut 3, loco *V* quemlibet numerum, ut 5; & loco *T*, quemlibet numerum, ut 6; & collocando singulos illos characteres numericos in propriâ

propriâ columnâ, prout collocatæ sunt litteræ quæ illos exprimunt, proveniet hic numerus 6534, divisor autem *A* erit numerus quilibet, ut 7. Missis autem peculiaribus his exemplis generali istâ enunciatione omnia amplectimur.

Dato quocumque dividendo *TVNM*, & quocumque divisore *A*, agnoscere ex solâ additione characterum numericorum *TVNM*, utrùm ipse numerus *TVNM* exactè dividatur per ipsum numerum *A*?

Ponantur seorsim numeri serie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, & cæteri à dextrâ ad sinistram sic . . . . . .

&c. 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

&c. *K IHGFEDCB* 1.

Jam ipsi primo numero 1, subscribatur unitas.

Ex ipsâ unitate *decies* sumptâ, seu ex 10 auferatur *A* quoties fieri poterit, & superstt *B* qui sub 2 subscribatur.

Ex *B decies* sumpto seu ex 10 *B*, auferatur *A* quoties poterit, & superstt *C* qui ipsi 3 subscribatur.

Ex 10 *C*, auferatur *A* quoties poterit, & superstt *D* qui ipsi 4 subscribatur.

Ex 10 *D*, auferatur *A*, &c. in continuum.

Nunc sumatur ultimus character dividendi *M*, qui quidem & primus est à dextrâ ad sinistram, scribaturque seorsim semel; *primo enim numero* 1, *subjacet unitas.*

M
N in *B*
V in *C*
T in *D*

Jam

Jam ſumatur ſecundus character N, & toties repetatur quot ſunt unitates in B, *qui ſecundo numero ſubjacet*, hoc eſt multiplicetur N per B, & ſub M ponatur productus.

Jam ſumatur tertius character V, & toties repetatur quot ſunt unitates in C, *ſub tertio numero ſubjecto*, ſeu multiplicetur V per C, & productus ſub primis ponatur.

Sic denique multiplicetur quartus T per D, & ſub aliis ſcribatur. Et ſic in infinitum.

Dico prout ſumma horum numerorum $M+N$ in $B+V$ in $C+T$ in D, eſt ipſius A multiplex aut non, & quoque ipſum numerum $TVNM$ eſſe ejuſdem multiplicem, vel non.

Etenim ſi propoſitus dividendus *unicum* haberet characterem M, ſanè prout ipſe eſſet multiplex ipſius A, numerus quoque M eſſet ejuſdem A multiplex, cùm ſit ipſe numerus totus.

Si verò conſtet *duobus* characteribus NM: dico quoque, prout $M+N$ in B, eſt multiplex A, & ipſum numerum NM ejuſdem multiplicem eſſe.

Etenim character N in columnâ denarii, æquatur $10\,N$.

Verùm ex conſtructione, eſt . . . . 10——B multiplex A.
Quare ducendo 10——B in N eſt $10\,N$——B in N multiplex A.
Si ergo contingit & eſſe . . . $M+B$ in N multiplicem A,
Ergo ambo ultimi multiplices juncti $10\,N+M$ erunt mult. A.
Id eſt N in columnâ denarii & M in columnâ unitatis, ſeu numerus . . . NM eſt multiplex A.
Q. E. D.

Si

Si numerus dividendus constet *tribus* characteribus *VNM*: dico quoque ipsum esse aut non esse multiplicem *A*, prout $M+N$ in $B+V$ in C, erit ipsius *A* multiplex, vel non.

Etenim character *V*, in columnâ centenarii, æquatur 100 *V*.

At ex constructione est . . . . . 10——*B*, multiplex *A*.
Quare multiplicando 10——*B* per 10 . . . 100——10 *B*, mult. *A*.
Et ducendo ipsos in *V* . . . 100 *V*——10 *B* in *V*, mult. *A*.
Sed est etiam ex constructione . . . . 10 *B*——*C*, mult. *A*.
Quare ducendo in *V* . . . 10 *B* in *V*——*C* in *V*, mult. *A*.
Sed ex ostensis . . . . . 100 *V*——10 *B* in *V*, mult. *A*.
Ergo juncti duo ultimi . . . . 100 *V*——*C* in *V*, mult. *A*.
Jam verò ostendemus ut in secundo casu 10 *N*——*B* in *N*, mult. *A*.
Ergo juncti duo ultimi, 100 *V*+10 *N*——*C* in *V*——*B* in *N*, mult. *A*.
Ergo si contingat hos numeros *C* in *V*+*B* in *N*+*M*, esse mult. *A*.
ambo ultimi juncti, nempe 100 *V*+10 *N*+*M*, est mult. *A*.

Seu *V*, in columnâ centenarii, *N* denarii & *M* unitatis, hoc est numerus *VNM*, est multiplex *A*. Q. E. D.

Non secus demonstrabitur de numeris ex *pluribus* characteribus compositis. Quare prout, &c. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus.

Quæro, qui sint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis 1, 2, 3, 4, 5, &c. subscribo 1 sub 1 . . . . . .

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
6 2 3 1 5 4 6 2 3 1

Ex unitate decies sumptâ, seu ex 10 aufero 7 quoties potest, supereſt 3 quem pono sub 2.

Ex 3 decies sumpto, seu ex 30 aufero 7 quoties potest, supereſt 2 quem pono sub 3.

Ex

Ex 20 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 6 & pono ſub 4.
Ex 60 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 4 & pono ſub 5.
Ex 40 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 5 & pono ſub 6.
Ex 50 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 1 & pono ſub 7.
Ex 10 aufero 7 quoties poteſt, & redit 3 & pono ſub 8.
Ex 30 aufero 7 quoties poteſt, & redit 2 & pono ſub 9.

Et ſic redit ſeries numerorum 1, 3, 2, 6, 4, 5, in infinitum.

Jam proponatur numerus quilibet 287542178, de quo quæritur utrùm exactè dividatur per 7; hoc ſic agnoſcetur.

Sumatur *ſemel* ejus character qui primus eſt à dextrâ ad ſiniſtram, nempe 8, *primo enim numero ſeriei continuæ ſubjacet unitas*, quare ponatur ille 8, primus character *ſemel* . . . . . 8.

Secundus, qui eſt 7, *ter* ſumatur, ſeu per 3 multiplicetur, *ſecundo enim numero ſeriei ſubjacet* 3, ſitque productus . . . . . 21.

Tertius *bis* ſumatur, *ſubjacet enim* 2 *ipſi* 3, quare tertius character qui eſt 1, per 2 multiplicatus ſit . . . . . 2.

Quartus eâdem ratione per 6 multiplicatus 12.
Quintus per 4 multiplicatus . . . . . 16.
Sextus per 5 multiplicatus . . . . . 25.
Septimus *ſemel*, *ſeptimo enim ſubjacet* 1, 7.
Octavus ter ſumptus . . . . . 24.
Nonus bis ſumptus . . . . . 4.

Et ſic deinceps ſi ſupereſſent. Jungantur hi numeri . . . . . 119.

Si

Si ipse aggregatus 119 est multiplex ipsius 7, numerus quoque propositus 287542178, ejusdem 7 multiplex erit.

Potest autem dignosci eâdem methodo, utrùm ipse 119, sit multiplex 7, scilicet sumendo semel

primum characterem 9
secundum characterem ter 3
& præcedentem bis 2

14

Si enim summa 14 est multiplex 7, erit & 119 ejusdem multiplex.

Sed & si curiositate potiùs quàm necessitate moti, velimus agnoscere utrùm 14 sit multiplex 7, sumatur character ultimus semel 4
& præcedens ter 3

7

Si summa est multiplex ipsius 7, erit & 14 multiplex 7, quare & 14, & 119, & 287542178.

Vis agnoscere quinam numeri dividantur per 6? Scriptis, ut sæpiùs dictum est, numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, &c., & 1 sub 1 posito . . .

&c. 4 3 2 1
&c. 4 4 4 1

Ex 10 aufer 6, reliquum 4 sub 2 ponito.
Ex 40 aufer 6, reliquum 4 sub 3 ponito.
Ex 40 aufer 6, reliquum 4 sub 4 ponito.

Et sic semper redibit 4, quod agnoscí potuit ubi semel rediit.

Ergo, si proponatur numerus quilibet, de quo quærebatur utrùm sit dividendus per 6, nempe 248742? sume ultimam ejus figuram semel . . 2
præcedentem quater 16
præcedentem quater, &c. 28
& uno verbo, primam semel, reliquarum verò 32
summam quater 16
8
102.

Si summa 102 dividatur per 6, dividetur & ipse numerus propositus 248742 per eumdem 6.

Vis agnoscere utrùm numerus dividatur per 3? Scriptis ut priùs numeris naturalibus, & 1 sub 1 posito . . . . . .

5 4 3 2 1
1 1 1 1 1

Ex 10 aufer 3 quoties potest, reliquum 1 sub 2 ponito. Ex 10 aufer 3 quantùm potest, reliquum 1 sub 3 ponito, & sic in infinitum.

Ergo si proponatur numerus quilibet 2451, ut scias utrùm dividatur per 3,
sume semel ultimam figuram 1
præcedentem semel 5
& semel singulas 4
2
12

Si

Si ſumma dividatur per 3, dividetur & numerus propoſitus per 3.

Vis agnoſcere utrùm numerus dividatur per 9? Scriptis numeris 1, 2, 3, &c., & 1 ſub 1 poſito. Ex 10 aufer 9, & quoniam ſupereſt 1, patet *unitatem* contingere ſingulis numeris. Ergo, ſi numeri propoſiti ſinguli characteres ſimul ſumpti dividantur per 9, dividetur & ipſe.

Vis agnoſcere utrùm numerus dividatur per 4? Scriptis numeris naturalibus, ut mos eſt, & poſito 1 ſub 1 . . . . . .

4 3 2 1
0 0 2 1

Ex 10 aufer 4 quantùm poteſt, reliquum 2 pone ſub 2. Ex 20 aufer 4 quantùm poteſt, reliquum 0 pone ſub 3. Ex 00 aufer 4, ſupereſt ſemper 0.
Quare ſi proponatur numerus dividendus 2486, pono ultimum characterem ſemel 6
præcedentem bis, *ſubjacet enim* 2 *ſub* 2 . . 16

22

Præcedens per 0 multiplicatus facit zero & ſic de reliquis; quare ad ipſos non attendito; & ſi ſumma priorum, nempe 22, per 4 dividatur, dividetur & ipſe, ſecùs autem, non.

Sic numeri quorum ultimus character ſemel, præcedens bis, præcedens quater, (*reliquis neglectis*,

zero enim sortiuntur) simul juncti numerum efficiunt multiplicem 8, sunt ipsi & ejusdem 8 multiplices, secùs autem, non.

In exemplum autem dabimus & illud.

Agnoscere qui numeri dividantur per 16? Scriptis, ut dictum est, numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., & 1 sub 1 posito . . . . .

7 6 5 4 3 2 1
0 0 0 8 4 10 1

Ex 10 aufer 16 quantùm potest, supereſt ipse 10. *Ex minore enim numero major numerus subtrahi non potest; quare ipsemet numerus* 10 *ponatur sub* 2.

Ex ipso 10 decies sumpto, ut mos est, seu ex 100, aufero 16 quantùm potest; supereſt 4 quem pono sub 3.

Ex 40 aufero 16 quantùm potest, reliquum 8 pono sub 4.

Ex 80 aufero 16 quantùm potest, supereſt 0.

Ideò omnis numerus cujus ultimus character semel sumptus, penultimus decies, præcedens quater, & præcedens octies, efficiunt numerum multiplicem 16, erit & ipse ipsius 16 multiplex.

Sic reperies omnes numeros, quorum penultimus character decies, reliqui autem omnes, scilicet ultimus, ante penultimus, præante penultimus, & reliqui semel sumpti, efficiunt numerum divisibilem per 45, vel 18, vel 15, vel 30, vel

90,

90, & uno verbo omnes divisores numeri 90, duobus constantes characteribus, dividi quoque & ipsos per hos divisores.

Non difficilis indè ad alia progressus; sed intentatam huc usque materiam aperuisse, & satis obscuram lucidissimâ demonstratione illustravisse, sufficit. Ars etenim illa, quâ ex additione characterum numeri, noscitur per quos sit divisibilis, ex imâ numerorum naturâ, & ex eorum denariâ progressione vim suam sortitur: si enim aliâ progressione procederent, verbi gratiâ, duodenariâ (quod sanè gratum foret) & sic ultra primas novem figuras, aliæ duæ institutæ essent, quarum altera denarium, altera undenarium exhiberet; tunc non ampliùs contingeret, numeros quorum omnes characteres simul sumpti efficiunt numerum multiplicem 9, esse & ipsos ejusdem 9 multiplices.

Sed methodus nostra, necnon & demonstratio, & huic progressioni, & omnibus possibilibus convenit.

Si enim in hac duodenariâ progressione, proponitur agnoscere an numerus dividatur per 9.

Instituemus, ut antea, numeros naturali serie continuos 1, 2, 3, 4, 5, &c., & 1 sub 1 posito

4 3 2 1
0 0 3 1

Ex unitate jam duodecies sumptâ seu ex 10,

(qui jam potest *duodecim*, non autem *decem*) auferendo 9 quantùm potest, supereſt 3, quem pono ſub 2.

Ex 30 (qui jam potest *triginta ſex*, ſcilicet *ter duodecim*) aufer 9 quantùm potest, & ſupereſt nihil, continetur enim 9 quater exactè in *triginta ſex*; pono igitur 0 ſub 3.

Et ideò, zero ſub reliquis characteribus continget.

Undè colligo, omnes numeros, quorum ultimus character ſemel ſumptus, penultimus verò ter (*de cæteris non curo quales ſint, zero enim ſortiuntur*) efficiunt numerum diviſibilem per 9, dividi quoque per 9, in duodenariâ progreſſione.

Sic in hac progreſſione duodenariâ omnes numeri quorum ſinguli characteres ſimul ſumpti efficiunt numerum diviſibilem per 11, ſunt & diviſibiles per eumdem.

In noſtrâ verò progreſſione denariâ, contingit omnes numeros diviſibiles per 11, ita ſe habere, ut ultimus ſemel ſumptus, penultimus decies, præcedens ſemel, præcedens decies, præcedens ſemel, præcedens decies, & ſic in infinitum, conflare numerum multiplicem 11.

Hæc & alia facili ſtudio, ex iſtâ methodo quiſque colliget; tetigimus quidem quoniam intentata placent, relinquimus verò ne nimia perſcrutatio tædium pariat.

PROBLEMATA

PROBLEMATA DE CYCLOIDE,

Propoſita menſe Junii 1658.

CUM ab aliquot menſibus, quædam circa Cycloidem (1), ejuſque centra gravitatis, meditaremur, in propoſitiones ſatis arduas ac difficiles, ut nobis viſum eſt, incidimus, quarum ſolutionem à præſtantiſſimis toto orbe Geometris ſupplices poſtulamus, propoſito ipſis præmio, non mercedis gratiâ (quod abſit!) ſed in obſequii noſtri, aut potiùs meriti eorum qui hæc invenerint, publicum argumentum.

Quæ verò proponimus ſunt ejus modi. Dato puncto quolibet *Z* (*Fig.* 1.) in quacunque Cycloide *ABCD*, ex quo ducta ſit *ZY* baſi *AD* parallela quæ axem *CF* ſecet in puncto *Y*; quæruntur: Fig. 1.

Dimenſio ſpatii *CZY*, ejuſdemque centrum gravitatis; ſolida genita ex circumvolutione dicti ſpatii *CZY*, tam circa *ZY* quàm circa *CY*; & horum ſolidorum centra gravitatis.

Quòd ſi eadem ſolida, plano per axem ducto ſecentur, & ſic fiant utrinque duo ſolida, duo ſci-

(1) Cycloidis definitio ad finem hujus ſcripti habetur.

licet ex solido circa basim ZY, & duo ex solido circa axem CY genito, cujusque horum solidorum quærimus etiam centra gravitatis.

Quia verò quæsitorum demonstratio forsan adeò prolixa evadet, ut vix intra præstitutum tempus exequi satis commodè possit, genio & otio doctissimorum Geometrarum consulentes, ab his tantùm postulamus, ut demonstrent, vel more antiquorum, vel certè per doctrinam Indivisibilium (hanc enim demonstandi viam amplectimur) omnia quæ quæsita sunt, data esse: ita ut facilè ex demonstratis, quælibet puncta quæsita ex datis in hypothesibus, possint inveniri.

Et ut apertiùs mentem meam explicem, nec subsit aliquid ambiguum, exemplo rem illustro. Pro-
Fig. 2. ponatur, verbi gratiâ, parabola ABC (*Fig.* 2.) cujus axis AB, basis AC, tangens BD, parallela axi CD. Inveniendum sit centrum gravitatis trilinei DCB. Satis factum esse problemati censerem, si demonstretur, datum esse centrum gravitatis parabolæ ABC, nec non & centrum gravitatis rectanguli $CDBA$, & proportionem hujus rectanguli cum parabolâ CBA, ideòque datum esse centrum gravitatis quæsitum trilinei CDB. Nam etsi præcisè punctum in quo reperitur centrum gravitatis non exhibeatur, demonstratum tamen est datum esse, cùm ea ex quibus invenitur data sint; resque eò deducta erit ut nihil aliud supersit præter calculum,

calculum, in quo nec vis ingenii nec peritia artificis requiruntur : ideòque non is à nobis calculus exigitur, cur enim in iis immoraremur ? Sed tantummodò petimus demonstrari res quæ proponuntur datas esse.

Verùm doctissimi Geometræ prorsus necessarium judicabunt, & ab his postulamus, duarum propositionum, vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum.

Primus casus est cùm punctum *Z* constituitur in *A*.

Secundus, cùm idem punctum *Z* datur in *B*, in quo transit parallela *GB* ducta à puncto *G* centro circuli genitoris Cycloidis.

Quòd si aliquis error calculi in his duobus casibus subrepserit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipsi peteremus facilè promerebuntur.

Quisquis superiùs proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658, solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Apollo.

Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hispanicorum quos ipsi Hispani *doblones*, & Galli *pistoles* vocant; vel certè, si mavult, ipsos duplos aureos.

Secundus verò viginti ejusmodi duplos aureos. Si unus tantùm solverit, sexaginta solus habebit.

Et quia seriò rem agimus, dictos sexaginta duplos aureos Illustrissimo Domino de Carcavi, Regio

gio Consiliario Parisiis commoranti, apud Celsissimum Dominum Ducem de Liancourt deponi curavimus, qui eos exsolvet statim ac demonstrationes quæ ad ipsum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipso ad id deputatis, judicabuntur. Et cùm Illustrissimum Consiliarium, jam à multis annis virum probum, & Matheseos amantissimum agnoverimus, audacter pollicemur rem sincerè & absque fallaciâ exequendam.

Quòd si his circiter tribus elapsis mensibus nullus inveniatur qui quæsita nostra solverit, non denegabimus quæ ipsi invenimus, nec aliis invidebimus undè majora jam inventis nanciscantur, & ex quibus forsan apud posteros gratiam inibimus.

Hoc unum restat ut lineæ Cycloidis descriptionem exhibeamus, à quâ brevitatis causâ abstinendum arbitrabamur, cùm hæc linea jam pridem Galileo, Toricellio, & aliis innotuerit; sed quia eorum Libri omnibus non sunt obnoxii, ideò hanc ex Toricellio damus.

DESCRIPTIO CYCLOIDIS.

Concipiatur super manente rectâ lineâ DA, circulus DL, contingens rectam DA, in puncto D, noteturque punctum D, tanquam fixum in peripheriâ circuli DL: tùm intelligatur super manente rectâ DA converti circulum DL motu circulari simul & progressivo versus partes A, ita ut

subindè

subindè aliquo sui puncto rectam lineam *DA* semper contingat, quousque fixum punctum *D* iterùm ad contactum revertatur, putâ in *A*. Certum est quòd punctum *D* fixum in peripheriâ circuli rotantis *DL*, aliquam lineam describet, surgentem primò à subjectâ lineâ *DA*, deindè culminantem versus *C*, postremò pronam descendentemque versus punctum *A*: & talis linea vocata est Cyclois (1).

DE EODEM ARGUMENTO *ADDITAMENTUM.*

CUM circà ea quæ de Cycloide proposuimus, duo orta esse dubia, nobis Illustrissimus DD. de Carcavi significaverit, his statim occurrendum duximus, & ita occurrimus.

Prius indè oritur, quòd in proponendis nostris de Cycloide problematis hâc voce usi fuerimus, *in quacunque Cycloide*: cùm tamen unius tantùm speciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verùm

(1) Dans l'Exemplaire qui appartient à la Bibliotheque du Roi, on trouve, à la fin de ce Programme, les mots suivants écrits de la main de Pascal : *Centrum curvæ* AZC *distat à basi duabus tertiis partibus axis, & distat ab axe, rectâ æquali uni tertiæ parti axis, plus differentiâ inter basim & axem.*

nihil

nihil aliud intelleximus præter solam illam simplicem, naturalem ac primariam Cycloidem cujus ex Toricellio descriptionem dedimus; cùm enim quæ de illâ resolvuntur facile sit, ad omnes alias species protrahere, qui nostra problemata de hâc solâ solverit, nobis omninò satisfecerit.

Posterius in eo consistit, quòd à nobis non sit præcisè positum an supponamus datam esse rationem basis Cycloidis *AD* (*Fig.* 1.) cum suâ altitudine, seu cum diametro circuli genitoris *FC*; Fig. 1. sed ipsam datam esse rationem pro concesso usurpandum arbitrabamur, & ut omninò æquum est, datam esse supponimus.

Nihil ergò jam supereſt obscuritatis. Unum tamen restare videtur, ut doctissimos Geometras ad propositiones nostras commodiùs & libentiùs investigandas invitemus; scilicet ea omnia removere quæ à perspicacitate ingenii, quam solam magni facimus, & explorare ac coronare instituimus, sunt aliena, qualia sunt tàm calculus integer multorum casuum quem postulabamus, quàm absoluta solutionum conscriptio; cùm ea non à viribus ingenii, sed ab aliis circumstantiis pendeant. Hoc itaque tantummodò jam instituimus, ut sola problematum difficultas remaneat superanda. Nempè:

Qui publico instrumento, intra præstitutum tempus, Illustrissimo Domino de Carcavi significaverit eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes

se

se habere; & aut ipsammet demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit : aut si cartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casûs quem mox designabimus calculum dederit, seque paratum esse professus fuerit omnia omninò demonstrare ad ipsius D. de Carcavi nutum, hunc nobis satisfeciisse declaramus; & consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo, præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. de Carcavi virisque ad id secum adhibitis, cùm ipsi visum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur, salvo semper erroris calculo.

Casus autem, cujus solius sufficiet calculus, ille est. Si Semicyclois ACF circa basim AF convertatur, & solidum indè genitum secetur plano per ipsam AF (quæ jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem, solidum dividet in duo semisolida paria : alterutrius horum semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

RÉFLEXIONS

RÉFLEXIONS

Sur les conditions des Prix attachés à la ſolution des Problêmes concernant la Cycloïde.

LE premier Octobre étant arrivé, auquel expiroit le temps deſtiné pour recevoir les ſolutions de ceux qui prétendroient aux Prix des Problêmes de la Roulette, appellée en latin *Cyclois*, ou *Trochois*, nous en ouvririons dès à préſent l'examen, ſi l'abſence de M. de Carcavi, qui a eu la bonté d'envoyer nos Écrits & d'en recevoir les réponſes, ne nous obligeoit à retarder juſques à ſon retour, qui doit être dans peu de temps. Mais nous avons jugé à propos de répondre cependant à deux ſortes de perſonnes, qui s'efforcent de traverſer cet examen par des interprétations ridicules qu'ils font de mes paroles, qu'ils tournent entiérement contre leur ſens naturel & contre celui que j'ai eu: eſſayant, par ces chicaneries, de fruſtrer ceux qui auroient envoyé les véritables ſolutions, des Prix qu'ils auroient mérités.

Les premiers ſont des gens qui écrivant de pays fort éloignés, mandent, par leurs Lettres du mois d'Août, qu'ayant reçu les Écrits que nous leur

leur envoyames au mois de Juin, ils vont travailler à cette recherche ; mais que pour ouvrir l'examen à Paris, on doit attendre non-seulement le premier Octobre 1658, mais encore trois ou quatre mois après, & même huit, ou peut-être un an : n'étant pas impossible, disent-ils, que leurs Lettres, quoiqu'écrites avant le premier Octobre, soient très-long-temps en chemin, soit par les incommodités de la saison, soit par celles de la guerre, soit enfin par les tempêtes de mer qui peuvent arrêter, ou même faire périr les vaisseaux qui les portent, auquel cas ils seroient recevables d'envoyer de secondes Lettres, pourvu qu'ils eussent de bonnes attestations de leurs Officiers publics, qu'elles fussent conformes aux premieres, écrites avant le premier Octobre.

Certainement si mon intention avoit été telle, & si les paroles de mon Écrit le marquoient, je serois bien suspect d'avoir proposé une chimere, en proposant les Prix, puisque j'aurois pu ne jamais les donner ; & que quiconque se fût présenté au premier Octobre avec ses solutions, j'aurois toujours pu le remettre, dans l'attente de quelque vaisseau, qui, ayant eu le vent favorable en portant mes Écrits, pouvoit l'avoir contraire, ou même être péri, en rapportant les réponses. Et même ceux qui auroient gagné les Prix en se trouvant les premiers entre ceux dont on auroit reçu

les

les ſolutions au premier Octobre, ne ſeroient jamais en aſſurance d'en pouvoir jouir, puiſqu'ils pourroient toujours leur être conteſtés par d'autres ſolutions qui pourroient arriver tous les jours, premieres en date, & qui les excluroient ſur la foi des ſignatures des Bourgmeſtres & Officiers de quelque Ville à peine connue, du fond de la Moſcovie, de la Tartarie, de la Cochinchine ou du Japon. D'ailleurs on auroit eu trop de tromperies à craindre ſur cet article ; & il n'y eût eu aucune ſûreté à produire ſes réſolutions à l'examen, puiſque des plagiaires auroient pu les déguiſer & les dater d'auparavant, en les faiſant ainſi venir de quelque Iſle bien éloignée.

J'ai voulu agir avec bien plus de clarté, de ſûreté & de promptitude ; & c'eſt pourquoi j'ai établi un jour & un lieu fixe : le lieu eſt Paris ; le jour eſt le premier Octobre, auquel le temps étant expiré, l'ouverture de l'examen des ſolutions reçues juſqu'alors, doit commencer ſans attendre davantage, & le Prix accordé au premier qui ſe trouvera alors en date, ſans qu'il puiſſe être troublé en ſa poſſeſſion par ceux qui viendront après, leſquels ſeroient toujours, ou ſuſpects, ou au moins trop tard arrivés, & ne ſont plus recevables pour le Prix.

Je ſais bien qu'en cela il y a quelque avantage pour les François, & ſur-tout pour ceux de Paris ; mais

mais en faisant faveur aux uns, je n'ai pas fait d'injustice aux autres. Je laisse à tous ceux qui viendront, l'honneur de leur invention; je ne dispose pas de la gloire; le mérite la donne; je n'y touche pas: je ne regle autre chose que la dispensation des Prix, lesquels venant de ma pure libéralité, j'ai pu disposer des conditions avec une entiere liberté. Or je les ai établies de cette sorte; personne n'a sujet de s'en plaindre; je ne devois rien aux Allemands, ni aux Moscovites; je pouvois ne les avoir offerts qu'aux seuls François; je puis en proposer d'autres pour les seuls Flamands, ou pour qui je voudrois. J'y ai néanmoins agi le plus également que j'ai pu; & si les conditions sont plus favorables aux François qu'aux autres, ce n'a été que pour éviter de plus grandes difficultés, & des injustices toutes évidentes comme celle que je viens de représenter. Et ainsi ayant été nécessaire pour les éviter, de déterminer un temps & un lieu, j'ai cru que trois mois & demi suffisoient, & que Paris étoit le lieu le plus propre pour avoir réponse de toutes parts. C'est pourquoi en faisant mes Écrits au mois de Juin, j'ai donné jusqu'au premier Octobre, *intra primam diem Octobris*; & j'ai déclaré que si dans ce temps, d'environ trois mois & demi, il ne se trouvoit personne qui eût résolu mes questions, je les résoudrois alors moi-même, sans attendre davantage : *quod si his circiter tribus elapsis*

menſibus, nullus inveniatur qui quæſita noſtra ſolverit, non denegabimus quæ ipſi invenimus. Par où il eſt ſi viſible que je ne voulois laiſſer paſſer que le temps de ces trois mois pour attendre les ſolutions, qu'il eſt ridicule de m'imputer cet autre ſens, qui, comme j'ai dit, eût rendu les promeſſes des Prix vaines & chimériques : & mon ſecond Écrit le marque encore trop clairement; car voici les regles que j'y ai établies : que ceux-là ſeuls ſeront admis, qui dans le temps preſcrit auront fait ſignifier à M. de Carcavi, par un acte public, qu'ils ont les ſolutions, en lui en envoyant, ou une démonſtration abrégée, ou au moins le calcul d'un certain cas par où il parût qu'ils ont tout réſolu. *Qui publico inſtrumento intra præſtitutum tempus Illuſtriſſimo Domino de Carcavi ſignificaverit ſe eorum quæ quæſita ſunt ſolutionem penes ſe habere, & aut demonſtrationem quantumvis compendioſam ad ipſum miſerit : aut ... ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem casûs quem mox deſignabimus calculum dederit, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus.*

Voilà mes termes, qui aſſurément ne ſouffrent aucune équivoque, & par leſquels j'ai établi les conditions les plus équitables que j'ai pu imaginer : car ayant établi qu'on prendroit date du jour qu'on auroit ſignifié & délivré à M. de Carcavi même, la démonſtration ou le calcul propoſé, j'ai retranché toutes les diſputes ſur la primauté, qui

ſeroient

seroient nées, si on avoit pris date du jour de l'envoi; ce qui les auroit fait demeurer indécises durant plusieurs mois ou plusieurs années, comme il a été déja dit. En exigeant qu'on fît cette signification par un acte public, j'ai arrêté de même les soupçons & les disputes qui auroient pu naître entre les prétendants, sur des Écrits de mains privées: chacun ayant intérêt d'être non-seulement premier, mais encore seul; & ayant sujet de demander des preuves plus authentiques que des Écrits de mains privées, pour croire qu'il en est venu d'autres dans le temps, soit devant, soit après soi. Aussi M. de Carcavi, ni moi, ne voulant pas qu'on nous en crût sur notre parole, nous avons averti de prendre des actes publics. Et enfin en me contentant, ou d'une démonstration abrégée, ou au moins du calcul d'un seul cas pour donner date, en attendant qu'on envoyât la démonstration entiere avec plus de loisir, j'ai soulagé les Géometres autant qu'il étoit possible de le faire, puisqu'on ne pouvoit pas moins leur demander, & que néanmoins ce que j'ai demandé est à peu près suffisant: ce calcul étant si difficile & dépendant tellement du fond de la question, qu'on peut juger que qui l'aura trouvé a tout résolu en soi-même, & ne manque plus que de loisir pour l'écrire & l'achever. En quoi je crois avoir gardé un assez juste tempérament; car, d'une part, il n'étoit

pas juſte d'exiger une démonſtration entiere & écrite au long, & de faire dépendre la primauté du loiſir qu'il faut pour cela; & de l'autre côté, il eût été bien plus injuſte de ne pas exiger des preuves certaines qui marquaſſent qu'on a réſolu les queſtions, & d'accorder le premier rang à ceux qui n'auroient donné aucune marque de les avoir réſolues: de ſorte que j'ai ſatisfait à tout, en demandant le véritable calcul de ce cas.

Et c'eſt pourquoi je ne puis aſſez admirer la vaine imagination de quelques autres, qui ont cru qu'il leur ſuffiroit d'envoyer un calcul faux & fabriqué au haſard, pour prendre date du jour qu'ils l'auroient donné, ſans avoir produit d'autre marque qui faſſe connoître qu'ils ont réſolu les problêmes: ce qui eſt une imagination ſi ridicule, que j'ai honte de m'amuſer à la réfuter. Cependant, encore qu'ils ſachent fort bien que leur calcul eſt faux (car cela eſt viſible à l'œil même); qu'ils l'aient mandé eux-mêmes par leurs Lettres, & qu'ils n'en aient envoyé aucun autre, ils ne laiſſent pas, par la plus plaiſante imagination du monde, de ſe croire en état d'être mis en ordre depuis le jour qu'ils ont produit ce faux calcul: prétendant que ce que j'ai dit en d'autres occaſions, toutes différentes, du peu d'égard qu'on doit avoir aux erreurs de calcul (ſavoir quand la démonſtration entiere & géométrique eſt envoyée en même-temps; car alors la

choſe

chose est sans doute) doit aussi avoir lieu lorsqu'on n'envoie autre chose qu'un faux calcul, en laquelle occasion je n'ai jamais dit un seul mot de pardonner ces erreurs. En effet il faudroit avoir perdu le sens pour le dire; car il n'est pas difficile d'entendre quelle différence il y a entre deux personnes qui veulent montrer qu'ils ont résolu une question, dont l'une apporte, pour preuve de son discours, une démonstration parfaite & géométrique sans aucun défaut, à quoi il ajoute encore quelques calculs, tandis que l'autre ne produit autre chose qu'un seul calcul sans aucune sorte de preuve. Qui ne voit la différence qui se trouve entre les conditions de ces deux hommes, en ce qui regarde les erreurs de calcul? Il est toujours juste de pardonner ces erreurs à celui qui donne en même-temps les démonstrations entieres & parfaites, qui rendent le calcul superflu, qui enseignent l'art de le bien faire, qui apprennent à en reconnoître & corriger les défauts, & qui enfin toutes seules convainquent invinciblement qu'on a résolu les questions; mais la condition de l'autre est toute différente, puisque n'ayant donné pour toute marque de ses solutions qu'un seul calcul pour laisser à juger, selon qu'il sera vrai ou faux, qu'il a résolu les questions ou non, s'il se trouve faux en toutes ses parties, que restera-t-il par où on puisse connoître qu'il a trouvé la vérité? Y a-t-il rien de

si foible, que de vouloir qu'on lui pardonne toutes les erreurs qui s'y trouveront, & qu'encore qu'il soit faux en tout, & qu'il ne contienne rien de vrai, au lieu d'en conclure que l'Auteur n'a pas trouvé la vérité, on en conclue au contraire qu'il possédoit la vérité depuis le jour qu'il a produit la fausseté ? C'est assurément ce qu'on ne peut non plus conclure d'un faux calcul, que d'une fausse démonstration ; car ce que les paralogismes sont en démonstration, les erreurs de calcul le sont quand le calcul est seul : il n'y a que deux manieres de montrer qu'on a résolu des questions ; savoir, de donner, ou la solution sans paralogisme, ou le calcul sans erreur ; & c'est aussi une de ces deux choses que j'ai exigées, pour pouvoir prendre date. Mais n'est-ce pas une plaisante prétention, de vouloir passer pour avoir découvert la vérité, par cette seule raison qu'on a produit une fausseté, & de se faire préférer aux autres qui auroient produit les véritables calculs, parce qu'on auroit donné une fausseté avant eux, & que la regle que j'aurois établie pour reconnoître qui seroit le premier qui auroit résolu les questions, fût de voir qui seroit le premier qui eût fabriqué une fausseté ? Si cela étoit ainsi, il eût été bien facile à toutes sortes de personnes d'en fabriquer au hasard & à sa fantaisie, & en les envoyant à M. de Carcavi, prendre date dès-lors ; en quoi sans courir aucun risque, puisqu'ils

pouvoient

pouvoient se rétracter à leur volonté, ils se fussent acquis cet avantage, que s'ils avoient pu ensuite découvrir la vérité & même après le temps expiré, ou bien avoir quelques lumieres des solutions déja données quand on les examineroit, ils auroient été assurés d'être les premiers en date, en vertu de la fausseté qu'ils auroient les premiers produite : & de cette maniere il seroit arrivé que l'honneur de la premiere invention, qui est la principale chose qu'on considere en ces matieres, n'auroit pas dépendu de la premiere production de la vérité, mais de la premiere production qu'on auroit faite à sa fantaisie d'une fausseté ; ce qui est la chose du monde la plus extravagante.

Je serois bien fâché qu'on me crût capable d'avoir donné pour loi une condition si injuste & si impertinente. Mais elle est aussi éloignée de mon sens que de mes paroles. Quand j'ai dit qu'il suffiroit, pour passer pour premier, d'envoyer une démonstration abrégée, ou au moins le calcul d'un seul cas, je n'ai pas dit une seule parole de pardonner les erreurs de calcul, comme mes paroles, que j'ai déja rapportées, le témoignent : *aut saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem calculum unius casûs miserit.* Et c'est être ridicule de rapporter à ce lieu, où je n'en parle en aucune sorte, ce que je dis sur un autre sujet, savoir quand le reste des démonstrations & les solutions entieres

sont à loisir apportées à l'examen, auquel cas si les Juges les trouvent toutes véritables & géométriques, on y pardonnera sans doute les erreurs de calcul (quoique ce soit toujours une grace) : *si solutio exhibita Domino de Carcavi virisque secum ad hoc adhibitis geometrica ac vera judicetur, salvo semper errore calculi:* lesquelles, comme j'ai déja dit, il est toujours aussi juste de pardonner en n'agissant pas à la rigueur, quand la démonstration est présente, qu'il est hors de raison d'y penser quand on ne produit qu'un seul calcul, faux en toutes ses parties.

Il n'est donc que trop visible que ceux qui ont produit ces calculs faux, ne l'ont fait que pour gagner par-là le temps de chercher à loisir ce qu'ils n'avoient pas encore trouvé, & ce qu'ils veulent être réputés avoir trouvé depuis le jour qu'ils avoient envoyé leur fausseté, s'ils peuvent y arriver ensuite par quelque voie, en quelque temps que ce soit. Mais c'est en vain qu'ils ont tenté cette finesse ; car la regle est écrite : il falloit envoyer le calcul dans le temps, s'ils l'eussent eu ; & un calcul faux, en toutes ses parties, n'est en aucune sorte un calcul ; & ainsi quand ils l'auroient envoyé, même signé par un Notaire, ce ne seroit que des erreurs signées par Notaire, & ils seront réputés comme n'ayant rien envoyé.

Leurs calculs sont donc justement réputés nuls, puisqu'il

puiſqu'il n'y avoit que deux meſures à déſigner, & qu'ils les ont données toutes deux fauſſes, & chacune d'environ de la moitié. Cependant quelques-uns de ceux-là qui déclarent franchement qu'ils ſavent bien qu'elles ſont fauſſes, mais en ne laiſſant pas de prétendre d'en avoir acquis leur rang, diſent auſſi qu'ils en ont maintenant un autre calcul qu'ils aſſurent être le véritable, mais ils ne l'envoient pas; ce qui ne fait que trop paroître leur fineſſe : car s'ils l'avoient en effet, que ne l'envoyoient-ils en même-temps ? vu même qu'il ne falloit pas quatre lignes pour l'écrire, & qu'au lieu de cela, ils emploient des pages entieres à dire qu'ils l'enverront ſi on le leur demande; mais ce n'étoit pas cela qu'il falloit faire, il falloit l'envoyer s'ils l'avoient : la regle n'étant pas de le promettre dans le temps, mais de l'envoyer réellement. C'eſt cela qui fait foi; mais pour les ſimples promeſſes qu'ils font, on n'eſt pas plus obligé de les croire, qu'en ce qu'ils promettent avec une pareille certitude dans les mêmes Lettres, qu'ils enverront auſſi dans peu de temps la Quadrature du cercle, & même en deux manieres différentes : de toutes leſquelles choſes il ſera cependant fort permis de douter, juſqu'à ce qu'il en paroiſſe d'autres preuves que des paroles. Et ainſi puiſqu'ils ont laiſſé paſſer le temps ſans envoyer, ni le vrai calcul demandé, ni aucune ſolution, ni aucune autre choſe, & qu'ils nous ont

ainſi

ainſi laiſſés entiérement dans le doute, s'ils ont en effet réſolu nos queſtions, ou en quel temps ils les ont réſolues, leurs faux calculs ne nous en donnant aucune marque, nous leur déclarons ſans les nommer, ni les marquer en aucune maniere, qu'ils ne ſont plus recevables quant aux Prix; que le temps en eſt paſſé à leur égard; que nous allons examiner les calculs & les ſolutions des autres qui ont été reçues dans le temps; & que pour eux qui ne peuvent plus prétendre, ni aux Prix, ni à l'honneur de la premiere invention, il leur reſte au moins celui de corriger leurs erreurs après l'avertiſſement qu'on leur en donne; ce qui leur ſera d'autant plus facile, que le véritable calcul commence maintenant d'être divulgué. Car comme je m'étois engagé par mon premier Écrit, de le publier auſſi-tôt que le temps ſeroit expiré, j'ai commencé à le faire dans le commencement d'Octobre; & parce que je ne ſais pas encore ſi entre tous ceux qui ont déja envoyé les leurs à M. de Carcavi, il y en a qui l'aient rencontré, & que s'il s'en trouve, il eſt juſte que je le laiſſe publier ſous leur nom, je n'ai pas encore voulu l'imprimer ſous le mien; mais parce qu'il n'eſt pas juſte auſſi que d'autres s'en attribuent déſormais l'invention, le temps où je me ſuis obligé de le laiſſer chercher étant fini, je l'ai donné écrit à la main à pluſieurs perſonnes dignes de foi, & entr'autres

à M. de Carcavi, à M. de Roberval, Professeur Royal des Mathématiques, à M. Gallois, Notaire Royal à Paris, & à plusieurs personnes de France & d'ailleurs, très-considérables par leurs qualités & par leur science, afin que, comme j'ai déja dit, si ceux dont on a reçu les solutions, l'ont trouvé, je leur en quitte la gloire, sinon, qu'on sache qui en est le premier inventeur.

Voilà ce que nous avions à dire généralement pour tous ceux dont les calculs & les solutions qu'on a reçues dans le temps, se trouveront évidemment fausses dans l'examen, & pour tous ceux qui prétendroient qu'on devroit désormais en recevoir de nouvelles.

Ce 7 Octobre 1658.

J'espere donner dans peu de jours la maniere dont on est venu à la connoissance de cette ligne, & qui est le premier qui en a examiné la nature; c'est ce que j'appellerai l'*Histoire de la Roulette.*

ANNOTATA

ANNOTATA

In quasdam solutiones Problematum de Cycloide.

ELAPSO tempore Præmiis comparandis destinato, & ad Kalendas Octobris terminato, verum calculum casûs à me propositi hucusquè latentem novissimè evulgare cœpi, ut si in examinandis solutionibus quæ à diversis Geometris intra præstitutum tempus missæ sunt, quædam reperiatur quæ eòdem inciderit, ejus Author Præmio & gloriâ inventionis potiatur: sin verò, ego meo nomine publici tunc juris faciam illum quem interim manuscriptum ad plurimos jam undequaquè misi; & inter cæteros ad Illustrissimum D. de Carcavi, ad clarissimum ac insignissimum Geometram D. de Roberval, Regium Mathematicorum Professorem, ad integerrimum Virum D. Gallois, Notarium Regium, ac ad diversos alios tum dignitate, tum scientiâ præcellentissimos viros, qui rogati sunt diem quo eum receperunt annotare & subsignare.

Deindè solutiones apud D. de Carcavi missas ab eo tempore quo Lutetiam deseruit, examinare aggressus sum (quæ enim ante abscessum suum receperat

ceperat in arculis clausas reliquit, nec ante suum reditum poterunt perpendi). Ab eâ ergo, ex iis quas apud eum reperi, incipere visum est, quæ gravissima est, quippè quæ absque ullâ demonstratione in solo calculo consistit casûs quem designaveram; quem quidem calculum postulaveram, ut ex eo, prout verus aut falsus esset, dignosci possit, an ejus Author absolvisset nec-ne, quæ se absolvisse profiteretur problemata. Sic enim locutus eram: *Qui quæstiones resolverit, significabit intra præstitutum tempus D. de Carcavi, & quidem instrumento publico, se solutiones habere.* Et quia simplex illa assertio omni probatione destituta, vana prorsus fuisset & jus nullum Authori suo dedisset cur aliis præferretur, subjunxi: *Et ad confirmandam suæ assertionis veritatem, aut demonstrationem compendiosam miserit, aut saltem calculum istius casûs* ex cujus nempè veritate, de veritate assertionis judicaretur.

Hic igitur Author calculum suum hujus casûs misit in indicium veritatis à se repertæ. At verò calculus iste suus nimiùm falsus est, & nihil prorsùs veri continet. Duas enim solùm mensuras profert, & ambas falsas, &, ut dictum est, nimiùm falsas: ita ut calculus ille quem Author *ad confirmandam suæ assertionis veritatem* juxta præscriptam legem misit, nihil aliud confirmet, nisi ipsum vanè asseruisse se demonstrationem penes se habere. Falsus enim calculus, in indicium solutionis adductus,

ductus, falsitatem potiùs quàm veritatem solutionis indicat. Adeòque miror hunc Authorem, ea quæ de calculi erroribus condonandis in aliâ omninò occasione diximus, ad istam trahere voluisse: non intelligens quanta sit differentia inter eum qui asserens se cujusvis quæstionis solutionem habere, nullam demonstrationem affert, sed solummodò calculum, ex quo solo suadere nititur se verè rem absolvisse; & eum qui totius quæstionis solutionem omni ex parte geometricè demonstratam profert, & simul cum hac solidâ demonstratione, etiam superaddit calculum. Magnum sanè est inter utrumque discrimen, quantùm ad errores calculi attinet. Qui enim solutionem geometricè demonstratam exhibet, nullum de suâ solutione dubium relinquit, eique æquum est semper condonare errores calculi qui præsenti demonstrationis luce evanescunt & corriguntur.

Alter verò qui nihil aliud quàm calculum sine ullâ demonstratione porrigit, si erroneus sit, & nullam veram mensuram habeat, quid ei superetit undè patefaciat se rem resolvisse? An sola falsitas, repertæ veritatis indicium est? Ut ergo ex demonstratione falsâ non ostenderetur detectam esse veritatem, sic & nec ex falso calculo ostenditur. Quod enim paralogismus est in demonstratione, hoc error calculi est in calculo solo, & demonstratione destituto; nec aliter quis judicare

potest

potest se quæstionem resolvisse, nisi aut demonstrationem paralogismis purgatam, aut saltem calculum erroris expertem proferendo.

Et ideò cùm apud me statuissem experiri ac certò dignoscere quis futurus esset primus, qui quæstiones nostras absolveret, hæc indicia flagitavi, ut intra præstitutum tempus, aut demonstratio ipsa, quantumvis compendiosa, aut saltem calculus illius quem designaveram casûs, prodiret: quibus verbis quis aliud intelliget quàm verum calculum; non autem falsum? falsus enim calculus non est calculus. Et quid stultius fuisset, quàm ex calculo falso, & nihil veri habente, concludere Authorem suum veram possidere demonstrationem, ipsique primas dare, & jus concedere ut omnibus aliis posthabitis, prior habeatur solutionis inventor? Non planè ea mihi intentio fuit; & si ita esset, liberum cuilibet fuisset statim atque scripta nostra vulgata sunt, calculum fictitium quantumvis erroneum ad libitum componere, & ex eo tamen ordinem sibi ascribere, ac nullum damnum metuendo, indè securitatem adipisci, ut si quâ deindè viâ problemata etiam ultimo loco solvissem, ad prima tamen Præmia veniret, quia falsum calculum primus protulisset. Et ita foret, ut primæ inventionis honor, qui his in rebus præcipus est, non à primâ veritatis detectione, sed à primâ falsitate pro arbitratu fabricatâ, penderet. Absit ut tam iniquam

&

& ineptam conditionem pro lege dederim! Hoc certè longè abeſt ſicut à menſe meâ, ſic & à verbis meis, quæ ita ſe habent.

Qui publico inſtrumento, intra præſtitutum tempus Illuſtriſſimo D. de Carcavi ſignificaverit, ſe eorum quæ quæſita ſunt demonſtrationem penes ſe habere; & aut ipſammet demonſtrationem ad ipſum miſerit: aut ſaltem, ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem casûs quem mox deſignabimus calculum dederit (Ibi nulla prorſus facta eſt ut nec fieri potuit, de condonandis erroribus mentio) *ſeque paratum eſſe profeſſus fuerit omnia omninò demonſtrare ad ipſius D. de Carcavi nutum, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus; & conſentimus primum qui hæc fecerit primo, ſecundum ſecundo Præmio donandum.* Hæc ergo prima eſt conditio, ut aut ipſa abbreviata ſolutio mittatur, aut ſaltem calculus, nullâ de condonandis erroribus factâ mentione. Quia vero hic calculus etiam verus non omninò ſufficiebat ad Præmia obtinenda, hanc ſecundam conditionem ut æquum erat ſubjunxi: *ſi ſua ſolutio ab ipſo D. de Carcavi viriſque ad id ſecum adhibitis, cùm ipſi viſum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur, ſalvo ſemper errore calculi.* Ibi ſanè, ubi de examinandis demonſtrationibus agitur, jure condonantur errores calculi; cùm enim adeſt demonſtratio, ita eos negligere ſemper juſtum eſt, ac ridiculum foret cùm calculus ſolus exhibitur, qui ſi

nihil

nihil veri habeat calculus non est, ut jam satis diximus.

Talis est autem calculus Authoris illius de quo hîc agitur, nec quicquam veri continet; ipsiusque falsitatem Author ipsemet agnovit, illumque posterioribus litteris revocavit, nec ullum alium misit, & sic reverà nihil misisse censendus est. Se tamen alium calculum penes se habere scribit, quem verum esse asserit; cujus novæ assertionis cùm nullum hucusque indicium protulerit, sed mera tantùm verba, non plus in hâc re fidei meretur quàm cùm in eisdem epistolis, pari fiduciâ promittit se brevi missurum quadraturam circuli & hyperboles duabus diversis methodis expeditam; de quibus omnibus periti quique interim non temerè dubitabunt. Si enim calculum quæsitum reverà haberet, cur non intra tempus constitutum misisset non video: hoc enim promptius fuisset quàm fusis quibus utitur verbis polliceri. Calculum autem verum promittendo, & non mittendo, spatium quærendi sibi præparare videtur, & si fortè etiam extra tempus reperiat, aut aliquo modo illius quem jam ad multos misimus notitiam habere possit, illum ipse sibi fortassis, & quasi à se jamdiù repertum, & intra debitum tempus ascribat. Melius tamen de ipso sentimus, hæc enim frustra & inaniter tentaret. Oportebat quippe si habuisset, intra tempus destinatum misisse, scripta namque lex instat,

qui intra præstitutum tempus publico instrumento calculum saltem miserit. Ille autem nihil ex iis implevit; non enim instrumentum publicum, sed privatas cartulas adduxit, quas sanè reliqui Authores qui publicas, ut postulatum est, attulerunt, respuent, sive posteriores sint ut ei præponantur, sive priores fuerint ut soli & sine socio habeantur; quibus cùm ego debitor sim, resistere non possem, non enim privatis scripturis fides adhibetur, nec ut ipsi verbis meis credant, auderem aut vellem petere; & ideò publicum instrumentum flagitaveram fide ex se ipso dignum. Author autem ille nec tale instrumentum validum attulit, sed & nec verum calculum dedit, solam verò falsitatem, & sic cùm nobis omninò dubium reliquerit an quæstiones resolverit, aut à quo tempore resolverit, quidquid de hâc quæstione scripsit tanquam aut inane aut falsum, & quasi non fuisset, habendum est; & cùm jam elapsum sit tempus, ipse Author jure ab istâ Palæstrâ, quantùm ad Præmia attinet, exclusus est.

Ipse verò cùm jam ad primæ inventionis honorem, divulgato à nobis vero calculo, pervenire non possit, suos saltem errores corrigendi gloriam monitus conetur adipisci.

Datum 9 Octobris 1658.

HISTOIRE

HISTOIRE DE LA ROULETTE,

APPELLÉE AUTREMENT

TROCHOÏDE OU CYCLOÏDE:

Où l'on rapporte par quels dégrés on eſt arrivé à la connoiſſance de cette ligne.

LA Roulette eſt une ligne ſi commune, qu'après la droite & la circulaire, il n'y en a point de ſi fréquente; & elle ſe décrit ſi ſouvent aux yeux de tout le monde, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été conſidérée par les anciens, dans leſquels on n'en trouve rien : car ce n'eſt autre choſe que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de ſon mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, juſqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : ſuppoſant que la roue ſoit un cercle parfait, le clou un point dans ſa circonférence, & la terre parfaitement plane.

Le feu P. Merſenne, Minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en conſidérant le roulement des roues; ce fut pourquoi il l'appella *la Roulette*. Il voulut enſuite en reconnoître

la nature & les propriétés ; mais il ne put y pénétrer.

Il avoit un talent tout particulier pour former de belles queſtions ; en quoi il n'avoit peut-être pas de ſemblable : mais encore qu'il n'eût pas un pareil bonheur à les réſoudre, & que ce ſoit proprement en ceci que conſiſte tout l'honneur, il eſt vrai néanmoins qu'on lui a obligation, & qu'il a donné l'occaſion de pluſieurs belles découvertes, qui peut-être n'auroient jamais été faites, s'il n'y eût excité les Savants.

Il propoſa donc la recherche de la nature de cette ligne, à tous ceux de l'Europe qu'il en crut capables, & entre autres à Galilée ; mais aucun ne put y réuſſir, & tous en déſeſpérerent.

Pluſieurs années ſe paſſerent de cette ſorte juſques en 1634, que le Pere voyant réſoudre à M. de Roberval, Profeſſeur Royal de Mathématiques, pluſieurs grands problêmes, il eſpéra de tirer de lui la ſolution de la Roulette.

En effet M. de Roberval y réuſſit ; il démontra que l'eſpace de la Roulette eſt triple de la roue qui la forme. Ce fut alors qu'il commença de l'appeller par ce nom tiré du grec, *Trochoides*, correſpondant au mot françois, *Roulette*. Il dit au Pere que ſa queſtion étoit réſolue, & lui déclara même cette raiſon triple, en exigeant néanmoins qu'il la tiendroit ſecrete durant un an, pendant lequel il propoſeroit de nouveau cette queſtion à tous les Géometres.

Le

Le Pere, ravi de ce succès, leur écrivit à tous, & les pressa d'y repenser, en leur ajoutant que M. de Roberval l'avoit résolue, sans leur dire comment.

L'année & plus étant passée, sans qu'aucun en eût trouvé la solution, le Pere leur écrivit pour la troisieme fois, & leur déclara alors la raison de la Roulette à la roue, comme 3 à 1. En 1635, sur ce nouveau secours, il s'en trouva deux qui en donnerent la démonstration : on reçut leurs solutions presque en même-temps ; l'une de M. de Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes, & toutes deux différentes l'une de l'autre, & encore de celle de M. de Roberval : de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes, il n'est pas difficile de reconnoître quelle est celle de l'Auteur ; car il est vrai qu'elle a un caractere particulier, & qu'elle est prise par une voie si belle & si simple, qu'on connoît bien que c'est la naturelle. Et c'est en effet par cette voie qu'il est arrivé à des dimensions bien plus difficiles sur ce sujet, à quoi les autres méthodes n'ont pu servir.

Ainsi la chose devint publique, & il n'y eut personne en France, de ceux qui se plaisent à la Géométrie, qui ne sût que M. de Roberval étoit l'Auteur de cette solution, à laquelle il en ajouta en ce même temps deux autres : l'une fut la di-

menſion du ſolide à l'entour de la baſe, l'autre, l'invention des touchantes de cette ligne, par une méthode qu'il trouva alors, & qu'il divulgua incontinent, laquelle eſt ſi générale, qu'elle s'étend aux touchantes de toutes les courbes : elle conſiſte en la compoſition des mouvements.

En 1638, feu M. de Beaugrand ayant ramaſſé les ſolutions du plan de la Roulette, dont il y avoit pluſieurs copies, avec une excellente méthode, *de maximis & minimis*, de M. de Fermat, il envoya l'une & l'autre à Galilée, ſans en nommer les Auteurs : il eſt vrai qu'il ne dit pas préciſément que cela fût de lui ; mais il écrivit de ſorte qu'en n'y prenant pas garde de près, il ſembloit que ce n'étoit que par modeſtie qu'il n'y avoit pas mis ſon nom ; & pour déguiſer un peu les choſes, il changea les premiers noms de *Roulette* & *Trochoïde*, en celui de *Cycloïde*.

Galilée mourut bientôt après, & M. de Beaugrand auſſi. Toricelli ſuccéda à Galilée, & tous ſes papiers lui étant venus entre les mains, il y trouva entre autres ces ſolutions de la Roulette ſous le nom de *Cycloïde*, écrites de la main de M. de Beaugrand, qui paroiſſoit en être l'Auteur, lequel étant mort, il crut qu'il y avoit aſſez de temps paſſé pour faire que la mémoire en fût perdue, & ainſi il penſa à en profiter.

Il fit donc imprimer ſon Livre en 1644, dans lequel

lequel il attribue à Galilée ce qui eſt dû au P. Merſenne, d'avoir formé la queſtion de la Roulette; & à ſoi-même ce qui eſt dû à M. de Roberval, d'en avoir le premier donné la réſolution: en quoi il fut non-ſeulement inexcuſable, mais encore malheureux; car ce fut un ſujet de rire en France, de voir que Toricelli s'attribuoit en 1644, une invention qui étoit publiquement & ſans conteſtation reconnue depuis huit ans pour être de M. de Roberval, & dont il y avoit, outre une infinité de témoins vivants, des témoignages imprimés, & entre autres un Écrit de M. Deſargues, imprimé à Paris au mois d'Août 1640, avec Privilege, où il eſt dit, & que la Roulette eſt de M. de Roberval, & que la Méthode *de maximis & minimis* eſt de M. de Fermat.

M. de Roberval s'en plaignit donc à Toricelli, par une Lettre qu'il lui en écrivit la même année; & le P. Merſenne en même-temps, mais encore plus ſévérement: il lui donna tant de preuves, & imprimées, & de toutes ſortes, qu'il l'obligea d'y donner les mains, & de céder cette invention à M. de Roberval, comme il fit par ſes Lettres que l'on garde, écrites de ſa main, du même temps.

Cependant comme ſon Livre eſt public, & que ſon déſaveu ne l'eſt pas, M. de Roberval ayant ſi peu de ſoin de ſe faire paroître, qu'il n'en a jamais rien fait imprimer; beaucoup de monde y a

été surpris, & je l'avois été moi-même; ce qui a été cause que par mes premiers Écrits, je parle de cette ligne comme étant de Toricelli, & c'est pourquoi je me suis senti obligé de rendre par celui-ci à M. de Roberval, ce qui lui appartient véritablement.

Toricelli ayant reçu cette petite disgrace, & ne pouvant plus passer auprès de ceux qui savoient la vérité, pour Auteur de la dimension de l'espace de la Roulette, ni même de celle du solide autour de la base, M. de Roberval la lui ayant déja envoyée, il essaya de résoudre celui à l'entour de l'axe. Mais ce fut là qu'il trouva bien de la difficulté; car c'est un problême d'une haute, longue & pénible recherche. Ne pouvant donc y réussir, il en envoya une solution assez approchante, au lieu de la véritable, & manda que ce solide étoit à son cylindre comme 11 à 18: ne pensant pas qu'on pût le convaincre. Mais il ne fut pas plus heureux en cette rencontre qu'en l'autre; car M. de Roberval, qui en avoit la véritable & géométrique dimension, lui manda non-seulement son erreur, mais encore la vérité. Toricelli mourut peu de temps après.

M. de Roberval ne s'arrêta pas à la seule dimension de la premiere & simple Roulette & de ses solides; mais il étendit ses découvertes à toutes sortes de Roulettes, *alongées* ou *accourcies*, pour

toutes

toutes lesquelles ses méthodes sont générales, & donnent, avec une même facilité, les touchantes, la dimension des plans & de leurs parties, leurs centres de gravité, & les solides, tant autour de la base, qu'autour de l'axe. Car encore qu'il ne l'ait donné au long que des Roulettes entieres, sa méthode s'étend sans rien y changer, & avec autant de facilité aux parties, & ce seroit chicaner que de lui en disputer la premiere résolution.

La connoissance de la Roulette ayant été portée jusques-là par M. de Roberval, la chose étoit demeurée en cet état depuis quatorze ans; lorsqu'une occasion imprévue m'ayant fait penser à la Géométrie que j'avois quittée il y avoit long-temps, je me formai des méthodes pour la dimension & les centres de gravité des solides, des surfaces planes & courbes, & des lignes courbes, auxquelles il me sembla que peu de choses pourroient échapper: & pour en faire l'essai sur un sujet des plus difficiles, je me proposai ce qui restoit à connoître de la nature de cette ligne; savoir, les centres de gravité de ses solides, & des solides de ses parties; la dimension & les centres de gravité des surfaces de tous ces solides; la dimension & les centres de gravité de la ligne courbe même de la Roulette & de ses parties.

Je commençai par les centres de gravité des solides & des demi-solides, que je trouvai par ma méthode,

méthode, & qui me parurent si difficiles par toute autre voie, que, pour savoir s'ils l'étoient en effet autant que je me l'étois imaginé, je me résolus d'en proposer la recherche à tous les Géometres, & même avec des Prix. Ce fut alors que je fis mes Écrits latins, lesquels ont été envoyés partout : & pendant qu'on cherchoit ces problêmes, touchant les solides, j'ai résolu tous les autres, comme on verra à la fin de ce discours, quand j'aurai parlé des réponses qu'on a reçues des Géometres sur le sujet de mes Écrits.

Elles sont de deux sortes. Les uns prétendent d'avoir résolu les problêmes proposés, & ainsi avoir droit aux Prix; & les Écrits de ceux-là seront vus dans l'examen régulier qui doit s'en faire. Les autres n'ont point voulu prétendre à ces solutions, & se sont contentés de donner leurs premieres pensées sur cette ligne.

J'ai trouvé de belles choses dans leurs Lettres, & des manieres fort subtiles de mesurer le plan de la Roulette, & entre autres dans celles de M. Sluze, Chanoine de la Cathédrale de Liege; de M. Richi, Romain; de M. Huguens, Hollandois, qui a le premier produit que la portion de la Roulette, retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du côté du sommet, est égal à un espace rectiligne donné : & j'ai trouvé la même chose dans une Lettre de M. Wren,

M. Wren, Anglois, écrite presque en même-temps.

On a vu aussi la dimension de la Roulette & de ses parties, & de leurs solides à l'entour de la base seulement, du R. P. Lallouere, Jésuite de Toulouse. Comme il l'envoya toute imprimée, j'y fis plus de réflexion; & je fus surpris de voir que tous les problêmes qu'il y résout, n'étant autre chose que les premiers de ceux que M. de Roberval avoit résolus depuis si long-temps, il les donnoit néanmoins sous son nom, sans dire un seul mot de l'Auteur. Car encore que sa méthode soit différente, on sait assez combien c'est une chose aisée, non-seulement de déguiser des propositions déja trouvées, mais encore de les résoudre d'une maniere nouvelle, par la connoissance qu'on a déja eue une fois de la premiere solution.

Je priai donc instamment M. de Carcavi, non-seulement de faire avertir le Révérend Pere que tout cela étoit de M. de Roberval, ou au moins manifestement enfermé dans ses moyens, mais encore de lui découvrir la voie par laquelle il y est arrivé (car on ne doit pas craindre de s'ouvrir entre les personnes d'honneur). Je lui fis donc mander que cette voie de la premiere découverte étoit la quadrature que l'Auteur avoit trouvée depuis long-temps, d'une figure qui se décrit d'un trait de compas sur la surface d'un cylindre droit, laquelle surface étant étendue en plan, forme la moi-

tié

tié d'une ligne, qu'il a appellée *la compagne de la Roulette*, dont les ordonnées à l'axe sont égales aux ordonnées de la Roulette, diminuées de celles de la roue. En quoi je crus faire un plaisir particulier au Révérend Pere, parce que dans ses Lettres que nous avons, il parle de la quadrature de cette figure, qu'il appelle *Cycloï-cylindrique*, comme d'une chose très-éloignée de sa connoissance, & qu'il eût fort desiré connoître. M. de Carcavi n'ayant pas eu assez de loisir, a fait mander tout cela & fort au long, par un de ses amis, au Révérend Pere, qui a fait réponse.

Mais entre tous les Écrits qu'on a reçus de cette sorte, il n'y a rien de plus beau que ce qui a été envoyé par M. Wren. Car outre la belle maniere qu'il donne de mesurer le plan de la Roulette, il a donné la comparaison de la ligne courbe même & de ses parties, avec la ligne droite : sa proposition est, que la ligne de la Roulette est quadruple de son axe, dont il a envoyé l'énonciation sans démonstration. Et comme il est le premier qui l'a produite, c'est sans doute à lui que l'honneur de la premiere invention en appartient.

Je ne croirai pas pourtant lui rien ôter, pour dire, ce qui est aussi véritable, que quelques Géometres de France, auxquels cette énonciation a été communiquée, en ont trouvé la démonstration sur le champ, & entre autres M. de Fermat. Et je dirai

rai de plus que M. de Roberval a témoigné que cette connoissance ne lui étoit pas nouvelle : car aussi-tôt qu'on lui en parla, il en donna la démonstration entiere, avec une très-belle méthode pour la dimension de toutes les courbes, laquelle il n'avoit point encore voulu publier : espérant d'en tirer quelques connoissances encore plus considérables, comme en effet c'étoit par-là qu'il avoit comparé depuis long-temps les lignes spirales aux paraboliques ; on en voit quelque chose dans les Œuvres du R. P. Mersenne.

Cette méthode est encore tirée de la composition des mouvements, de même que celle des touchantes : car comme la direction du mouvement composé donne la touchante, ainsi sa vîtesse donne la longueur de la courbe, dont voici la premiere publication.

Voilà ce que j'ai trouvé de plus remarquable dans les Écrits de ceux qui ne prétendent point aux Prix. Quant aux autres, je n'en parlerai qu'après l'examen qui devoit s'en ouvrir le premier Octobre, mais que nous sommes obligés de remettre au retour de M. de Carcavi, qu'on attend de jour en jour.

C'est alors qu'on jugera de ceux qui auront satisfait aux quatre conditions portées par mes Écrits, publiés au mois de Juin ; savoir :

1°. Que la solution ait été reçue & signifiée chez M.

M. de Carcavi dans le premier Octobre, qui est le temps prescrit : *Qui intra præstitutum tempus Illustrissimo D. de Carcavi significaverit, &c.*

2°. Qu'elle soit accompagnée d'un acte public, *instrumento publico*, pour ôter tout soupçon.

3°. Qu'elle contienne, ou une démonstration abrégée, ou au moins le calcul d'un cas que je demande pour reconnoître, par la qualité de ce calcul, si celui qui l'envoie avoit en effet dès-lors la résolution nette & parfaite des problêmes : *aut saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem casûs quem mox designabimus calculum dederit ;* ce qui paroîtroit être vrai ou faux, selon que le calcul seroit vrai ou faux.

4°. Que l'on enverroit ensuite & à loisir l'entiere démonstration de tous les autres cas proposés, *omnia omninò demonstrare ;* & qu'elle soit jugée vraie & géométrique en toutes ses parties, par ceux que M. de Carcavi voudra nommer. Et j'ai même pardonné les erreurs de calcul qui se trouveront dans ces dernieres & entieres démonstrations de tous les cas généralement : parce que quand les démonstrations sont présentes, les calculs ne sont jamais nécessaires, & les erreurs y sont toujours pardonnables.

S'il s'en trouve qui soient dans ces conditions, le premier aura le premier Prix, & le second, le second : s'il n'y en a qu'un, il les aura tous deux.

Mais

Mais ceux qui ne les auront pas toutes accomplies, seront exclus des Prix, quoiqu'ils ne le soient pas de l'honneur, qui leur appartiendra toujours par le mérite des Écrits qu'ils pourront produire. Car je n'ai pas mis des conditions à la dispensation de l'honneur, dont je ne dispose pas, mais seulement à celle des Prix dont j'ai pu disposer à mon gré.

Que s'il ne se trouve personne dans l'examen qui ait résolu les problêmes, je les donnerai alors moi-même, comme je me suis obligé par mes Écrits de le faire, quand le temps seroit expiré; c'est-à-dire, au premier Octobre. Et j'ai en effet déja commencé à divulguer mon calcul, que j'ai donné écrit à la main à plusieurs personnes dignes de foi, & entre autres, à M. de Carcavi, à M. de Roberval, à M. Galois, Notaire Royal à Paris, & à plusieurs autres personnes de France, & d'ailleurs très-considérables par leur qualité & par leur science, qui ont marqué le jour qu'ils l'ont reçu. J'ai cru à propos d'en user ainsi, & de ne pas le faire encore imprimer, afin que si dans l'examen il s'en trouve qui l'aient déja rencontré, je publie qu'ils l'ont résolu avant que j'eusse divulgué ma solution; sinon je donnerai publiquement ce que personne n'aura trouvé, & j'y ajouterai encore les problêmes suivants, qui restent sur la nature de la Roulette, dont quelques-uns ne me semblent pas moins difficiles.

1°. Le

1°. Le point *Z*, étant donné où l'on voudra, dans la Roulette simple, trouver non-seulement la dimension de la ligne courbe *Z A*, compriſe entre le point *Z* & le ſommet (ce que M. Wren a réſolu), mais encore le centre de gravité de cette portion de la ligne courbe.

2°. Trouver la dimenſion de la ſurface décrite par cette portion de la ligne courbe, tournée, tant autour de la baſe (ce qui eſt facile), qu'autour de l'axe, d'un tour entier, ou d'un demi, ou d'un quart, ou de telle partie de tour qu'on voudra.

3°. Trouver le centre de gravité de cette ſurface, ou demi-ſurface, ou quart de ſurface, &c.; ce qui eſt le plus difficile & proprement le ſeul que je propoſe.

Dans tous leſquels problêmes je ſuppoſe la quadrature du cercle, où il eſt néceſſaire de la ſuppoſer.

Voilà ce qui reſtoit à découvrir ſur la nature de cette ligne, & dont je tiendrai la ſolution ſecrete juſqu'au dernier Décembre de cette année 1658, afin que ſi quelqu'un en trouve la ſolution dans ce temps, il ait l'honneur de l'invention. Mais ce temps expiré, ſi perſonne ne la donne, je la donnerai alors; & même la dimenſion générale des lignes courbes de toutes les Cycloïdes alongées ou accourcies; leſquelles ne ſont pas égales à des lignes droites, mais à des ellipſes.

C'eſt

C'eſt là que j'ai fini de conſidérer la nature de cette ligne. Et pour reprendre, en peu de mots, toute cette Hiſtoire, il paroît :

Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais ſans en pénétrer les propriétés, a été le P. Merſenne.

Que le premier qui en a connu la nature, trouvé les touchantes, meſuré les plans & les ſolides, & donné le centre de gravité du plan & de ſes parties, a été M. de Roberval.

Que le premier qui en a meſuré la ligne courbe, a été M. Wren.

Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des ſolides & demi-ſolides de la ligne & de ſes parties, tant autour de la baſe, qu'autour de l'axe; le centre de gravité des ſurfaces, demi-ſurfaces, quart de ſurfaces, &c. décrites par la ligne & par ſes parties, tournées autour de la baſe & autour de l'axe; & la dimenſion de toutes les lignes courbes des Roulettes alongées ou accourcies.

Ce 10 Octobre 1658.

HISTORIA TROCHOIDIS, *SIVE CYCLOIDIS,* GALLICÈ, *LA ROULETTE:*

In quâ narratur quibus gradibus ad intimam illius lineæ naturam cognoscendam perventum sit.

INTER infinitas linearum curvarum species, si unam circularem excipias, nulla est quæ nobis frequentiùs occurrat quàm Trochoides (gallicè *la Roulette*): ut mirum sit quòd illa priscorum seculorum Geometras latuerit, apud quos de tali lineâ nihil prorsùs reperiri certum est.

Describitur à clavo rotæ in sublimi delato, dum rota ipsa, motu rotis peculiari, secundùm orbitam suam rectâ fertur simul & circumvolvitur, initio motûs sumpto, dum clavus orbitam tangit, usque dum absolutâ unâ conversione, clavus idem iterùm eandem tangat orbitam. Supponimus autem hîc ad Geometriæ speculationem, rotam esse perfectè circularem; clavum, punctum in circumferentiâ illius assumptum; iter rotæ, perfectè planum; orbitam denique perfectè rectam, quam circumferentia rotæ continuò tangat; ambabus, orbitâ inquam

inquam & circumferentiâ, in uno eodemque plano inter movendum ubique existentibus.

Hanc lineam primus omnium advertit Mersennus, ex Minimorum Ordine, circa annum 1615, dum rotarum motus attentiùs consideraret; atque indè rotulæ ei nomen indidit; post ille naturam ejus & proprietates inspicere voluit, sed irrito conatu.

Erat huic viro ad excogitandas arduas ejusmodi quæstiones singulare quoddam acumen, & quo omnes in eo genere facilè superaret: quanquam autem in iisdem dissolvendis, quæ præcipua hujusce negotii laus est, non eâdem felicitate utebatur. Tamen hoc nomine de litteris optimè meritus est, quòd permultis iisque pulcherrimis inventis occasionem præbuerit, dum ad eorum inquisitionem eruditos de illis neque cogitantes excitaret.

Ergo naturam Trochoidis omnibus quos huic operi credidit pares, indagandam proposuit, in primisque Galileo: at nemini res ex sententiâ cessit, omnesque de nodi illius dissolutione desperarunt.

Sic viginti proximè abierunt anni ad usque 1634, quo Mersennus, quùm multas ac præclaras propositiones à Robervallio, Regio Matheseos Professore, solvi quotidiè videret, ab eodem suæ quoque Trochoidis solutionem speravit.

Nec verò eum sua spes frustrata est. Felici enim inquisitionis suæ successu usus Robervallius, Tro-

choidis ſpatium, ſpatii rotæ à quâ deſcribitur, triplum eſſe demonſtravit: ac tùm primùm huic figuræ *Trochoidis* nomen è græco deductum impoſuit, quod gallico *la Roulette*, aptiſſimè reſpondet. Mox ille Merſenno ſolutum à ſe problema, ac triplam illam rationem oſtendit, acceptâ ab eo fide, id per totum adhuc annum iri compreſſum, dum eandem rursùs quæſtionem omnibus Geometris proponeret.

Lætus hoc eventu Merſennus mittit rursùs ad omnes Geometras: rogat ut de integro in eam inquiſitionem incumbant; addit etiam ſolutum à Robervallio problema: ſed de modo nihil adhuc indicat.

Anno & ampliùs elapſo, cùm nullus propoſitæ quæſtioni ſatisfaceret, tertiùm ad Geometras ſcribit Merſennus, ac tunc anno, ſcilicet 1635, rationem Trochoidis ad rotam ut 3 ad 1 eſſe patefecit.

Hoc novo adjuti ſubſidio, problematis demonſtrationem invenerunt duo, inventamque eodem fermè tempore ad Merſennum tranſmiſerunt, alteram Fermatius, Supremæ Toloſanæ Curiæ Senator, alteram Carteſius nunc vitâ functus; utramque, & alteram ab alterâ, & à Robervallii demonſtratione diverſam: ita tamen ut qui eas omnes videat, illicò illius demonſtrationem internoſcat qui primus problema diſſolvit. Ea enim ſingulari quodam caractere inſignitur; ac tam pulchrâ & ſimplici viâ ad veritatem ducit, ut hanc unam naturalem ac rectam

eſſe

esse facilè scias. Et certè eâdem illâ viâ Robervallius ad operiosiores multò circa idem argumentum dimensiones pervenit, ad quas per alias methodos nemo forsan perveniat.

Ita res brevi percrebuit, neminique in totâ Galliâ Geometriæ studiosiori ignotum fuit demonstrationem Trochoidis acceptam Robervallio referendam. Huic autem ille duas sub idem fermè tempus adjunxit; una est solidorum circa basim ejus mensio: altera tangentium inventio, cujus ipse methodum & invenit & statim evulgavit, tam generalem illam ac latè patentem, ut ad omnium curvarum tangentes pertineat. Motuum compositione methodus illa innititur.

Anno autem 1638, Il. de Beaugrand cùm illas de plano Trochoidis demonstrationes collegisset, quarum ad ipsum multa exemplaria pervenerant, itemque egregiam methodum Fermatii *de maximis & minimis*: utrumque ad Galileum misit, tacitis Authorum nominibus. Ac sibi quidem illa nominatim non adscripsit: iis tamen usus est verbis, ut minùs attentè legentibus, quominùs se istorum profiteretur Authorem, solâ demùm impeditus modestiâ videretur. Itaque ad rem paululùm interpolandam, mutatis nominibus, Trochoidem in *Cycloidem* commutavit.

Non multò post Galileus, & ipse de Beaugrand vitâ cesserunt. Successit Galileo Toricellius, nac-

tusque est inter illius manuscripta, quæ omnia ad ipsum delata erant, ista de Trochoide sub Cycloidis nomine problemata ipsius de Beaugrand manu sic exarata quasi eorum Author esset. Cognitâ ergo illius morte Toricellius, abolitam jam temporis spatio rei memoriam ratus, ea omnia securè jam ad se transferri posse arbitratus est.

Itaque anno 1644 Librum edidit, in quo excitatam de Trochoide quæstionem Galileo tribuit, quæ Mersenno debebatur: sibi primam ejus dissolutionem arrogat, quam Robervallii esse certum erat: in quo sanè, ut candoris aliquid Toricellio defuit, sic & aliquid felicitatis. Neque enim sine quorumdam risu exceptus est in Galliâ, qui anno 1644 hoc sibi asciviſſet inventum, cujus parens in vivis constanter jam per octo annos Robervallius agnoscebatur, qui quod suum erat non modò compluribus testibus adhuc viventibus posset revincere, sed etiam excusis typo testimoniis, in quibus est quoddam scriptum G. Desargues anno 1640, Augusti mense, Parisiis editum: in quo nominatim habetur Trochoidis problemata Robervallii esse; methodum *de maximis & minimis*, Fermatii.

Ergo hanc injuriam cum ipso Toricellio litteris expostulavit Robervallius; ac severiùs etiam Mersennus, qui tot ipsum argumentis omnigenisque testimoniis, etiam excusis, coarguit, ut veris victus Toricellius, hoc invento cedere, illudque ad

Robervallium

Robervallium transcribere coactus sit : quod litteris propriâ manu scriptis præstitit, quæ etiamnum asservantur.

Verùm quia passim in manibus est Toricellii Liber, contrà ejus, ut ita loquar, recantatio paucis innotuit; Robervallio tam parùm de famâ suâ extendendâ sollicito, ut nihil de eâ recantatione emiserit in vulgus : multi inde in errorem, & ipsemet etiam inductus sum. Hinc factum est ut in prioribus scriptis ita sim de Trochoide locutus, quasi eam princeps Toricellius invenerit. Quo errore cognito, faciendum duxi, ut quod jure Robervallio debetur, hoc ipsi scripto restituerem.

Usus hoc infortunio Toricellius, cùm jam nec dimensionem spatii Cycloidis, nec solidi circa basim primus invenisse existimari posset ab iis quibus perspecta rei veritas esset, solidi circa axem Cycloidis, mensionem aggressus est. Ibi verò non mediocrem difficultatem offendit : est enim illud altissimæ cujusdam & operosissimæ inquisitionis problema; in quo cùm veram assequi non posset, veræ proximam solutionem misit; ac solidum illud ad suum cylindrum esse dixit, sicut 11 ad 18, ratus errorem illum à nemine refelli posse. Verùm nihilo fuit hoc etiam in loco felicior; nam Robervallius qui veram ac Geometricam dimensionem invenerat, non modò suum illi errorem, sed etiam veram problematis resolutionem indicavit.

Toricellius non multò post fato concessit. At Robervallius solâ simplicis Trochoidis ejusque solidorum dimensione non contentus, omnes omninò Trochoides, sive protractas, sive contractas, inquisitione complexus est, easque excogitavit methodos, quæ ad omnem Trochoidis speciem pertinerent; eâdemque facilitate tangentes darent; plana, & planarum partes dimetirentur; centra gravitatis planorum; ac postremò solida circa basim & circa axem, patefacerent. Quamvis enim integras tantùm Trochoides dimensus sit, tamen ad Trochoidum partes nihil mutata ejus methodus non minùs expeditè adhiberi potest; ut qui illud Robervallio inventum abjudicet, meritò cavillator habendus sit.

Nec verò ea omnia apud se celavit Robervallius, sed scriptis mandata publicè, privatimque, atque etiam in celebri selectorum virorum Matheseos peritissimorum cœtu, per complures dies legit & cupientibus describenda permisit.

Eò perductâ Robervallii industriâ Trochoidis cognitione, ibi per 14 annos substiterat; cùm me ad abdicata pridem Geometriæ studia repetenda improvisa occasio compulit. Tùm verò eas mihi paravi methodos ad dimensionem, & centra gravitatis solidorum, planarum & curvarum superficierum, curvarum item linearum, ut illas vix quicquam effugere posse videretur: atque adeò ut id materiâ vel difficillimâ periclitarer, ad ea quæ de

Trochoide

Trochoide veſtiganda ſupererant aggreſſus ſum; nempè centra gravitatis ſolidorum Trochoidis & ſolidorum ex ejus partibus exurgentium; dimenſionem, & centra gravitatis ſuperficierum omnium iſtorum ſolidorum; ac poſtremò dimenſionem, & centra gravitatis ipſiuſmet lineæ curvæ Cycloidis ejuſque partium.

Ac primùm centra gravitatis ſolidorum & ſemiſolidorum indagavi, & ope meæ methodi aſſecutus ſum; quod mihi ſic arduum eſt viſum quaſvis alias inſiſtentibus vias, ut periculum facturus, an ita res eſſet quemadmodùm mihi perſuaſeram, hanc omnibus Geometris, etiam conſtituto Præmio, inquiſitionem proponere decreverim. Tunc ſcilicet latina illa ſcripta quaquaversùm miſſa vulgavi; ac dum illa de ſolidis problemata inveſtigantur, reliqua ego omnia diſſolvi, quemadmodùm ſub hujus ſcriptionis finem exponam, ubi de Geometrarum reſponſis priùs dixero.

Illa verò reſponſa duplicis ſunt generis, quippe diverſi ſunt ſcribentium genii. Quidam ſoluta à ſe problemata, atque ita jus ſibi in Præmium eſſe contendunt: horum ſcripta legitimo examine propediem excutientur. Alii ad problematum quidem ſolutionem non aſpirant, ſed ſuas tantùm in Cycloidem commentationes exponunt.

Horum in litteris multa præclara, & eximiæ dimetiendi Cycloidis plani rationes habentur, imprimiſque

misque in Epistolis Sluzii, Leodiensis Ecclesiæ Canonici; Richii, Romani; Hugenii, Batavi, qui primus omnium detexit eam plani Trochoidis portionem trilineam, quæ his tribus lineis comprehenditur, scilicet quartâ parte axis ad verticem terminatâ, rectâ ad axem ab initio illius quartæ partis perpendiculariter ordinatâ usque ad Trochoidem, & portione curvæ Trochoidis inter duas prædictas rectas terminatâ, spatio rectilineo dato æqualem esse, atque adeò illi æquale quadratum absolutè exhiberi: quod idem in Epistolâ Wren, Angli, eodem ferè tempore scriptâ reperi.

Cycloidis etiam, ejusque partium, itemque solidorum circa basim tantùm dimensionem accepimus ab Alloüero, è Societate Jesu Tolosano; quam, quia ille typis editam misit, attentiùs inspiciens, non sine admiratione cognovi cuncta illa quæ ibi habentur problemata, etsi non alia sint quàm quæ jampridem à Robervallio soluta sunt, tamen ab illo nullâ prorsùs Robervallii factâ mentione, quasi à se primùm soluta, proferri. Quanquam enim diversam secutus est methodum, neminem tamen fugit quàm promptum ac proclive sit jam inventas propositiones novâ specie habitûque producere; tùm ex cognitâ illarum solutione, novas solvendi vias comminisci.

Egi igitur sedulò cum Carcavio, tum ut Alloüerum moneret, quod pro suo venditabat, Robervallii

vallii esse, vel nullo negotio ex ejus inventis elici; tum etiam ut viam ipsi explanaret quâ eò Robervallius pervenerat; nam hæc inter honestos viros citra periculum communicantur. Me igitur annitente scriptum est ad Allouerum, illam quæ Robervallium eò perduxerat methodum, cujusdam figuræ quadraturâ niti, ab eodem pridem inventâ, quam figuram delineat circini ductus in recti cylindri superficie, quæ superficies in planum porrecta, mediam cujusdam lineæ efficit partem, quam Robervallius Trochoidis sociam sive gemellam dixit; ex quâ quæ ad axem rectæ ad angulos rectos ducuntur, æquales sunt ductis ex Trochoide, demptis illis quæ ex Rotâ ducuntur. In hoc verò non mediocrem me ab Allouero gratiam iniisse credidi; quandoquidem ipse in suis litteris quæ adhuc habentur, de istius figuræ quam Cycloi-cylindricam appellat, quadraturâ ita loquitur, quasi quæ à suâ notitiâ longè absit & quam nosse vehementer expetat.

Hæc pro Carcavio, cui tam multa scribere non vacabat, quidam ipsius amicus ad Allouerum scripsit, cui vicissim rescripsit Allouerus.

Sed inter missa à Geometris scripta, nullum ipsius Wren scripto præstantius. Nam præter egregiam dimetiendi Cycloidis plani rationem, etiam curvæ & ejus partium cum rectâ comparationem aggressus est. Propositio ejus est, Trochoidem ad

suum

ſuum axem eſſe quadruplam; hujus ille enuntiationem ſine demonſtratione miſit; & quia primus protulit, inventoris laudem promeritus eſt.

Nihil tamen de illius honore detractum iri puto, ſi quod veriſſimum eſt dixero, quoſdam è Galliâ Geometras ad quos illa enuntiatio perlata eſt, & in iis Fermatium, ejus, non difficulter demonſtrationem inveniſſe. Dicam inſuper Robervallium nihil ſibi novum afferri planè oſtendiſſe; ſtatim ac enim de eâ propoſitione audiit, integram ejus demonſtrationem continuò ſubjecit, cum pulcherrimâ methodo ad omnium linearum curvarum dimenſionem: quam methodum ipſe dum alia indè graviora conſectaria ſperat eruere, diù occultam habuerat. Et certè eâdem ille methodo uſus erat ad comparandas ſpirales lineas cum parabolicis, quâ de re in operibus Merſenni nonnulla reperias.

Hæc methodus compoſitione item motuum innititur, ut & illa tangentium. Nam ſicuti motûs compoſiti directio tangentem dat, ſic ejus celeritas curvæ longitudinem efficit, quod ſanè nunc primùm reſeratur.

Hæc ſunt quæ in eorum qui Præmium non reſpiciunt ſcriptis animadverſione digniſſima reperi; de cæteris, peractâ demùm diſcuſſione, dicemus; quam quidem primâ Octobris die aperiri conſtitutum erat, ſed ad reditum uſque Carcavii, qui jamjam affuturus nuntiatur, rejicere neceſſe fuit.

Tùm

Tùm verò judicabitur an aliqui quatuor illis legibus satisfecerint, quas nos editis mense Junio scriptis promulgavimus.

I. Ut solutio Carcavio denuntiata & apud eundem rescripta sit intra præstitutum tempus, nimirùm primum Octobris diem; *qui intra* (hæc nostra verba) *præstitutum tempus D. de Carcavi significaverit.*

II. Ut illa denuntiatio instrumento publico fiat, ad tollendam fraudis suspicionem.

III. Ut demonstratio compendiaria, vel saltem certi cujusdam casûs calculus offeratur, ex quo intelligi possit an qui eum mittit jam tùm veram problematis solutionem tenere credendus sit: *Aut certè ad confirmandam assertionis veritatem casûs quem mox designabimus calculum miserit.* At missō calculo solo, tunc de vero aut falso omninò statuendum veniet, prout calculus verus vel falsus judicatus fuerit.

IV. Ut deindè per otium, omnium propositorum casuum demonstratio mittatur, eaque vera & omnibus partibus Geometrica ab iis judicetur, quos Carcavius arbitros asciverit. Si quis tamen error calculi in integras illas omnium casuum demonstrationes irrepserit, eum putavimus condonandum: quia calculi necessitas cessat, ubi adest demonstratio, adeòque tunc semper ignoscendus est error in calculo interveniens.

Si duo his conditionibus satisfecerint, primus

sic

sic primum Præmium, secundus secundum accipiet; si unus modò, solus utrumque obtinebit. At qui vel uni illarum legum defuerit, excidet ille quidem Præmio, non item honore, quem pro scriptorum quæ ille publicare poterit pretio, meritum consequetur; non enim ullas dispensando honori leges apposui, qui prorsùs mei juris non erat; sed tantùm Præmiis, quorum mihi plena & soluta potestas fuit.

Quòd si, re legitimè discussâ, nullus problemata dissolvisse reperiatur, tunc meas ipse solutiones proferam, uti me in scriptis meis, postquam præstituta ad id prima Octobris dies advenisset, facturum esse pollicitus sum. Itaque calculum meum jam evulgare cœpi, multisque illum fide dignissimis personis tradidi manuscriptum: & inter alios Carcavio, Robervallio, D. Galois, Regio Tabellioni Parisiis degenti, ac compluribus aliis Galliæ viris dignitate & eruditione præstantibus, qui diem accepti à me calculi diligenter annotarunt.

Hunc verò propterea statim edendum non censui, ut si qui in ipsâ discussione eum inveniisse reperti sint, id ab ipsis ante vulgatam solutionem meam factum prædicem: sin minùs, à nemine inventa publicabo.

Quin etiam, quò tota Trochoidis natura pernoscatur, sequentia adjungam problemata, quorum nonnulla mihi videntur non minùs ad solvendum difficilia,

difficilia, quàm quæ huc usque proposita sunt.

I. Puncto *Z* dato quocumque in Trochoide simplici, invenire centrum gravitatis curvæ *Z A* inter assignatum punctum *Z* & verticem *A* interceptæ.

II. Invenire dimensionem superficiei curvæ ab eâdem curvâ *Z A*, descriptæ, dum ipsa *Z A* circumvolvitur, vel circa basim, qui casus facilis est, vel circa axem: & sive conversio proponatur integra, sive dimidiata, vel ejus quæcumque pars.

III. Omnium prædictarum superficierum à curvâ *Z A* descriptarum, tam partium, quàm integrarum, centra gravitatis assignare.

Et hoc quidem tertium omnium inventu difficillimum mihi extitit. Esto ergo idem solum ac unicum præ cæteris ad discutiendum propositum.

In omnibus autem illis problematibus supponitur circuli quadratura, ubicumque supponenda fuit.

Hæc sunt quæ de naturâ Trochoidis retegendâ restabant, quorum solutionem ad ultimum usque Decembris diem hujus anni 1658 comprimemus: ut si quis ea intra id tempus invenerit, inventionis gloriâ potiatur. At hoc elapso, si nemo attulerit, ipsimet afferemus: atque ipsam etiam generalem dimensionem omnium linearum curvarum cujusvis Trochoidis vel protractæ vel contractæ, quæ non rectis lineis, sed ellipsibus æquales ostendentur.

Hîc nostræ in hujus lineæ naturâ rimandâ per-

vestigationis

vestigationis limes fuit; quare ut totam hanc narrationem in summam contraham:

Primus Mersennus, hanc lineam in naturâ rerum advertit, nec tamen ejus naturam pervidere valuit.

Primus Robervallius, & naturam retexit, & tangentes assignavit, ac plana & solida dimensus est; & centra gravitatis, tum plani, tum plani partium, invenit.

Primus Wren, lineam curvam dimensus est.

Ego denique primus, solidorum, ac semisolidorum Trochoidis & ejus partium, tum circa basim, tum circa axem, centra gravitatis inveni. Primus, ipsiusmet lineæ centrum gravitatis. Primus, dimensionem superficierum curvarum prædicta solida, semisolida, eorumque partes comprehendentium. Primus, centra gravitatis talium superficierum integrarum & diminutarum. Ac primus, dimensionem omnium linearum curvarum cujusvis Trochoidis, tam protractæ, quàm contractæ.

10 *Octobris* 1658.

RÉCIT

RÉCIT

De l'examen & du jugement des Écrits envoyés pour les Prix proposés publiquement sur le sujet de la Roulette, où l'on voit que ces Prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la véritable solution des Problêmes.

L'Absence de M. de Carcavi ayant retardé l'examen des Écrits qu'il a reçus sur les problêmes proposés touchant la Roulette; aussi-tôt qu'il fut de retour, il assembla, le 24 Novembre, des personnes très-savantes en Géométrie, lesquelles il pria de vouloir examiner ces Écrits : & leur dit qu'encore qu'on lui en eût envoyé plusieurs, il y en avoit peu néanmoins à examiner, parce que la plupart avoient été retirés par les Auteurs qui avoient prié qu'on ne les soumît pas à l'examen, & qu'ainsi il ne lui en restoit que de deux personnes, qu'il ne voulut point nommer. Que l'un de ces Écrits consistoit en un simple calcul d'un cas proposé, lequel lui fut envoyé signé par l'Auteur (1) en date du 15 Septembre 1658, & porté chez

(1) Le P. Lallouere, Jésuite. Voyez le Discours imprimé à la tête du premier Volume de cette Collection.

lui, le 23, par une personne qui demanda qu'on marquât sur le paquet le jour de la réception, en disant qu'il étoit question d'un Prix; ce qui fut fait. Mais qu'il reçut incontinent après des Lettres du même Auteur du 21 Septembre, par lesquelles il mandoit que son calcul étoit faux: en quoi il persista par d'autres des mois de Septembre, d'Octobre & de Novembre, sans néanmoins envoyer d'autres calculs, mais déclarant aussi qu'il ne prétendoit point aux Prix destinés à ceux qui auroient résolu les problêmes dans le temps déterminé. De toutes lesquelles choses M. de Carcavi conclut qu'encore que cet Auteur ne lui eût pas mandé qu'on ne soumît point son calcul à l'examen; il jugeoit néanmoins que cela n'étoit pas nécessaire, un Auteur étant le meilleur juge des défauts de son propre Ouvrage: de sorte qu'on ne fut pas obligé d'y apporter beaucoup d'attention; & même on vit d'abord qu'il en falloit peu pour en juger, parce que les mesures qui y sont données, sont différentes des véritables, chacune presque de la moitié; & que dans un solide aigu par une extrémité, & qui va toujours en s'élargissant vers l'autre, il assigne le centre de gravité vers l'extrémité aiguë, ce qui est visiblement contre la vérité. On jugea aussi que ce calcul ayant été envoyé seul, pour faire juger selon qu'il seroit vrai ou faux, que l'Auteur avoit ou n'avoit pas les méthodes

thodes pour la réſolution des problêmes, au temps qu'il l'avoit envoyé; les erreurs qui s'y trouvoient, lui donnoient l'excluſion, & ne devoient pas être miſes au rang de ces autres ſimples erreurs de calcul, que l'Anonyme avoit bien voulu excuſer à ceux qui enverroient en même-temps les démonſtrations ou les méthodes entieres & véritables, auxquelles ſi les calculs ne ſe trouvoient pas conformes, il paroîtroit aſſez que ces erreurs ne ſeroient que de calcul & non pas de méthode; ſur quoi l'Anonyme avoit dit, *ſalvo ſemper errore calculi* : au lieu que quand le calcul eſt ſeul, on ne ſauroit juger ſi l'erreur qui s'y trouve, eſt de méthode ou de calcul, dont auſſi l'Anonyme n'a dit en aucune maniere, *ſalvo errore calculi*; & qu'il y a apparence que c'eſt une erreur de méthode, lorſqu'ayant reconnu que le calcul eſt faux, on n'en envoie enſuite aucun autre. Mais on jugea en même-temps qu'il falloit laiſſer à l'Auteur de ce calcul l'avantage d'avoir reconnu le premier ſa faute, puiſqu'il l'avoit en effet écrit incontinent après l'avoir envoyé.

M. de Carcavi dit enſuite qu'il ne reſtoit donc à examiner que l'Écrit d'un autre Auteur (1), daté du 19 Août, ſtyle ancien, & ſigné par un Notaire le même jour, où l'Auteur prétend donner une mé-

(1) Wallis. Voyez le Diſcours déja cité.

thode entiere pour la réfolution de tous les problêmes, avec les ſolutions & démonſtrations, en cinquante-quatre articles. Que le paquet en fut délivré à Paris au commencement de Septembre, & qu'il avoit reçu depuis trois autres Lettres du même Auteur; l'une du 3 Septembre, par laquelle il corrige quelques erreurs qu'il avoit remarquées dans ſon Écrit, & il ajoute même qu'*il n'eſt pas encore pleinement aſſuré du reſte, ne l'ayant pas, juſques à ce temps-là, aſſez exactement examiné*; l'autre du 16 Septembre, par laquelle il ne fait qu'avertir de l'envoi des premieres; & la derniere du 30 Septembre, où il dit en général, & ſans rien marquer en particulier, qu'outre les corrections qu'il a envoyées, il peut y en avoir d'autres à faire: par où il ſemble être en défiance de ſes ſolutions; & ce qui le marque encore davantage, eſt qu'il demande, par la même Lettre, *ſi on ne ſe contenteroit pas d'une ſolution approchante de la véritable*. Or il n'y a gueres d'apparence qu'une perſonne qui croiroit avoir donné les ſolutions exactes & géométriques, demandât ſi on ne ſe contenteroit pas des approchantes; mais néanmoins comme il ne révoque pas les ſiennes en propres termes, quoiqu'il y ait eu beaucoup de temps pour le faire, s'il l'eût voulu, on jugea qu'on ne pouvoit pas ſur cela refuſer d'examiner des Écrits envoyés avec acte public, & qui n'avoient pas été expreſſément

expreſſément révoqués : vu même qu'il dit par une de ſes Lettres, que *les défauts qui pouvoient être dans ſes ſolutions, & qu'il appelle des erreurs de calcul, n'empêchoient pas, ſelon ſon avis, que la difficulté des problêmes ne fût ſuffiſamment ſurmontée.*

On s'y appliqua donc, & on jugea que, ni dans ſon premier Écrit, ni dans ſes corrections, il n'avoit trouvé, ni la véritable dimenſion des ſolides autour de l'axe, ni le centre de gravité de la demi-Roulette, ni de ſes parties (ce qui avoit été réſolu depuis long-temps par M. de Roberval), ni aucun des centres de gravité des ſolides, ni de leurs parties, tant autour de la baſe qu'autour de l'axe, qui étoient proprement les ſeuls problêmes propoſés par l'Anonyme avec la condition des Prix, comme n'ayant encore été réſolus par perſonne; & l'on trouva qu'outre les erreurs qu'il avoit corrigées par ſa Lettre, il en avoit laiſſé d'autres, & qu'il y en avoit de nouvelles dans ſa correction même, leſquelles ſe rencontrent dans preſque tous les articles, depuis le trente juſqu'au dernier.

On jugea auſſi que ces erreurs n'étoient point de calcul, mais de méthode, & proprement des paralogiſmes : parce que les calculs qu'il y donne, ſont très-conformes à ſes méthodes, mais que ces méthodes mêmes ſont fauſſes. Et on remarqua qu'une de ſes erreurs les plus conſidérables, conſiſte en ce

qu'il raisonne de certaines surfaces indéfinies en nombre, & qui ne sont pas également distantes entre elles, de même que si elles l'étoient; ce qui fait qu'ayant à mesurer la somme de ces surfaces, ou la somme des forces de leurs poids (à quoi se réduit toute la difficulté & tout le secret), il n'en trouve que de fausses mesures, ses méthodes n'allant point aux véritables.

C'est ce qui le mene à comparer, comme nombre à nombre, des quantités qui sont entre elles, comme des arcs de cercle au diametre, ou comme leurs puissances; & c'est ainsi que voulant donner la raison du solide de la Roulette à l'entour de l'axe à la sphere de sa roue (ou de son cercle générateur), après l'avoir donné, comme 23 à 2 dans son premier Ecrit, il la donne, comme 37 à 4 dans sa correction, par un calcul très-conforme à ses méthodes; au lieu que la véritable raison, que M. de Roberval a donnée de ce même solide à son cylindre de même hauteur & de même base, est *comme les trois quarts du quarré de la demi-base de la Roulette, moins le tiers du quarré du diametre de la Roue, au quarré de cette demi-base.*

Il n'est pas moins éloigné du véritable centre de gravité des solides à l'entour de la base, & encore plus de ceux à l'entour de l'axe, à cause d'un nouveau paralogisme qu'il y ajoute, en prenant mal les centres de gravité de certains solides élevés perpendiculairement

diculairement sur des trapèzes, dont il se sert presque par-tout, & coupés par des plans qui passent par l'axe. Et on jugea que les erreurs de ces Écrits donnoient encore sans difficulté l'exclusion.

Le jugement de ces Écrits ayant été ainsi arrêté, il fut conclu que puisqu'on n'avoit reçu aucune véritable solution des problêmes que l'Anonyme avoit proposés, dans le temps qu'il avoit prescrit; il ne devoit à personne les Prix qu'il s'étoit obligé de donner à ceux dont on auroit reçu les solutions dans ce temps; & qu'ainsi il étoit juste que M. de Carcavi lui remît les Prix qu'il avoit mis en dépôt entre ses mains, puisqu'ils n'avoient été gagnés par personne; ce qui a été exécuté.

Paris, le 25 Novembre 1658.

SUITE DE L'HISTOIRE DE LA ROULETTE:

Où l'on voit le procédé d'une perſonne (1) *qui avoit voulu s'attribuer l'invention des Problêmes propoſés ſur ce ſujet.*

LEs matieres de Géométrie ſont ſi ſérieuſes d'elles-mêmes, qu'il eſt avantageux qu'il s'offre quelque occaſion pour les rendre un peu divertiſſantes. L'Hiſtoire de la Roulette avoit beſoin de quelque choſe de pareil, & fût devenue languiſſante, ſi on n'y eût vu autre choſe, ſinon que j'avois propoſé des problêmes avec des Prix, que perſonne ne les avoit gagnés, & que j'en euſſe enſuite donné moi-même les ſolutions, ſans aucun incident qui égayât ce récit, comme eſt celui que l'on va voir dans ce diſcours.

Une perſonne, que je ne nomme point, ayant appris qu'entre les problêmes que M. de Roberval avoit réſolus autrefois, la dimenſion du ſolide de la Roulette à l'entour de l'axe, étoit ſans comparaiſon le plus difficile; il fit deſſein, après avoir reçu l'énonciation de ce problême & les moyens

(1) Le P. Lallouere.

par

par lesquels M. de Roberval y étoit arrivé, de se faire passer pour y être aussi venu de lui-même, & par ses méthodes particulieres : espérant que cette estime lui seroit assez glorieuse, quoique ce ne fût que vingt-deux ans après. Mais la maniere dont il s'y prit, détruisit sa prétention, & fit voir trop clairement qu'il n'avoit point de part de lui-même à cette invention. Car l'énonciation qu'il envoya, & qu'il vouloit faire passer pour sienne, étoit accompagnée de celle de M. de Roberval, dont elle ne différoit que de termes : comme qui diroit, *le rectangle de la base & de la hauteur*, au lieu de dire, *le double de l'espace du triangle*. Et il reconnoissoit dans la même Lettre, qu'une autre énonciation qu'il avoit donnée auparavant, étoit fausse; mais qu'il s'assuroit que cette derniere étoit véritable, par cette raison qu'elle étoit conforme à celle de M. de Roberval.

Ce discours fit juger le contraire de ce qu'il vouloit : puisque, s'il eût eu en main des méthodes & des démonstrations géométriques de la vérité, ce n'eût pas été par cette conformité qu'il se fût assuré de sa solution, mais qu'il en eût jugé plutôt, & de celle de M. de Roberval même, par ses propres preuves. On connut donc qu'il n'avoit, en cela, de lumiere qu'empruntée; & ainsi on s'étonna de la priere qu'il faisoit en même-temps, qu'on s'assurât & qu'on crût sur sa parole qu'il étoit arrivé

rivé à cette connoiſſance, de ſoi-même, & par la ſeule balance d'Archimede. A quoi on répondit que ſon énonciation étoit véritable & très-conforme à celle de M. de Roberval; mais qu'il étoit bon qu'il envoyât ſes méthodes pour voir ſi elles étoient différentes.

Il ne ſatisfit point ſur cette demande, mais continua à prier qu'on s'aſſurât ſur ſa parole, qu'il avoit trouvé ce problême par la balance d'Archimede, ſans mander en aucune ſorte ſes moyens. Ce qui ne fit que trop connoître ſon deſſein, & on le lui témoigna aſſez clairement par pluſieurs Lettres: mais il y demeura ſi ferme, que, quand il vit l'*Hiſtoire de la Roulette* imprimée, ſans qu'il y fût en parallele avec M. de Roberval, il ſe plaignit hautement de moi, comme ſi je lui euſſe fait une extrême injuſtice.

Sa plainte me ſurprit, & je lui fis mander que, bien loin d'avoir été injuſte en cela, j'aurois cru l'être extrêmement d'ôter à M. de Roberval l'honneur d'avoir ſeul réſolu ce problême : n'ayant aucune marque que perſonne y eût réuſſi. Que je n'avois point d'intérêt en cette affaire; mais que je devois y agir équitablement, & donner à tous ceux qui avoient produit leurs inventions ſur ce ſujet, ce qui leur étoit dû. Que s'il avoit montré qu'il fût en effet arrivé à cette connoiſſance ſans ſecours, je l'aurois témoigné avec joie : mais que n'ayant

n'ayant rien fait d'approchant, & n'y ayant perſonne qui ne pût, auſſi-bien que lui, donner une énonciation déguiſée, & ſe vanter de l'avoir trouvée ſoi-même par la balance d'Archimede, j'aurois failli de donner à M. de Roberval un compagnon dans ſes inventions.

Ces raiſons ne le ſatisfirent point : il perſiſta à écrire qu'on ne lui rendoit pas juſtice ; de ſorte qu'on fut obligé de lui mander plus ſévérement les ſentiments qu'on en avoit. On lui fit donc entendre que dès qu'on a vu une invention publiée, on ne peut perſuader les autres qu'on l'auroit trouvée ſans ce ſecours, ni s'en aſſurer ſoi-même, parce que cette connoiſſance change les lumieres & la diſpoſition de l'eſprit, qui ne ſont plus les mêmes qu'auparavant ; & quand on auroit pris de nouvelles voies, ce n'en ſeroit pas une marque, parce qu'on ſait qu'il eſt auſſi facile de réduire à d'autres méthodes ce qui a été une fois découvert, qu'il eſt difficile de le découvrir la premiere fois. Qu'ainſi tout l'honneur conſiſte en la premiere production ; que toutes les autres ſont ſuſpectes ; & que c'eſt pour éviter ce ſoupçon, que les perſonnes qui prennent les choſes comme il faut, ſuppriment leurs propres inventions, quand ils ſont avertis qu'un autre les avoit auparavant produites, quelques preuves qu'il y ait qu'ils n'en avoient point eu de connoiſſance : aimant bien mieux ſe priver de ce petit

avantage,

avantage, que de s'expoſer à un reproche ſi fâcheux, parce qu'ils ſavent qu'il n'y a point aſſurément de deshonneur à n'avoir point réſolu un problême ; qu'il y a peu de gloire à y réuſſir ; & qu'il y a beaucoup de honte à s'attribuer des inventions étrangeres.

La moindre de ces raiſons & de toutes les autres qu'on lui écrivit, eût été capable, ce me ſemble, de faire renoncer à tous les problêmes de la Géométrie, ceux qui ſont au-deſſus de ces matieres : mais pour lui il n'en rabattit rien de ſa prétention, & il perſiſte encore maintenant. Voilà quel a été ſon procédé ſur les problêmes de M. de Roberval, où j'admirai à quoi cette fantaiſie de l'honneur des Sciences porte ceux qui veulent en avoir, & qui n'ont pas de quoi en acquérir d'eux-mêmes.

Mais il n'en demeura pas là ; & pendant qu'on l'exhortoit à quitter cette entrepriſe, il s'engagea à une autre, qui fut de ſe vanter d'avoir réſolu tous les problêmes que j'avois propoſés publiquement : en quoi il ſe trouva dans un étrange embarras, & bien plus grand qu'auparavant ; car, dans ſa premiere prétention, il avoit en main les énonciations de M. de Roberval, & pouvoit ainſi en produire de ſemblables & véritables, en aſſurant qu'il y étoit arrivé par des moyens qu'il vouloit tenir ſecrets : au lieu que dans ſa ſeconde prétention, il ne pouvoit au plus avoir que l'énonciation d'un

d'un seul cas, que j'ai communiquée à quelques personnes, & qui n'est peut-être pas venue jusques à lui : de sorte qu'étant dans l'impuissance entiere de produire toutes les énonciations dont il se vantoit, ne pouvant y arriver, ni par sa propre invention, ni par communication, il se mit dans la nécessité de succomber à tous les défis qu'on lui a faits d'en faire paroître aucune, & par ce moyen en état de nous donner tout le divertissement qu'on peut tirer de ceux qui s'engagent en de pareilles entreprises, comme cela est arrivé en cette sorte.

Ce fut dans le mois de Septembre qu'il commença à écrire qu'il avoit résolu tous ces problêmes : on me le fit savoir, & je fus surpris de sa petite ambition ; car je connoissois sa force & la difficulté de mes problêmes, & je jugeois assez, par tout ce qu'il avoit produit jusqu'ici, qu'il n'étoit pas capable d'y arriver. Je m'assurai donc, ou qu'il s'étoit trompé lui-même, & qu'en ce cas il falloit le traiter avec toute la civilité possible, s'il le reconnoissoit de bonne foi, ou qu'il vouloit nous tromper, & attendre que j'eusse publié mes problêmes pour se les attribuer ensuite, & qu'alors il falloit en tirer le plaisir de le convaincre, qui étoit en mon pouvoir, puisque la publication de mes problêmes dépendoit de moi. Je témoignai donc mon soupçon, & je priai qu'on observât ses démarches. La premiere qu'il fit, fut d'envoyer,

avant

avant que le terme des Prix fût expiré, un calcul d'un cas proposé, si étrangement faux en toutes ses mesures, que lui-même le révoqua par le premier Courier d'après : mais bien loin de le faire avec modestie, il y agit avec la fierté du monde la plus plaisante & la moins fine; car il manda qu'à la vérité son calcul étoit faux, mais qu'il en avoit un autre bien véritable, & même de tous les cas généralement, avec toutes les démonstrations écrites au long en l'état qu'il vouloit les faire paroître, & toutes prêtes à donner à l'Imprimeur; mais que néanmoins il ne vouloit pas les produire avant que j'eusse imprimé les miennes, comme je devois le faire en ce temps-là, qui étoit le commencement d'Octobre.

Je l'entendis assez, & il ne fut pas difficile à tout le monde de voir que c'étoit justement ce que j'avois prédit. On résolut donc de le pousser à l'extrémité; & pour montrer parfaitement qu'il ne pouvoit rien donner qu'après moi, je promis publiquement dans l'Histoire de la Roulette, de différer de trois mois, savoir, jusqu'au premier Janvier, la publication de mes problêmes; au lieu qu'il s'étoit attendu que je les donnerois au premier Octobre, comme je l'eusse fait en effet sans cela.

Cette remise, qui lui eût été si favorable, s'il eût eu véritablement ses solutions, trahit son mystere, & lui devint insupportable, parce qu'il ne

les

les avoit pas, & qu'il voyoit bien qu'on alloit juger de lui par l'usage qu'il feroit de ce délai. Cela le mit donc en colere ; & il fut si naïf dans sa mauvaise humeur, qu'il le témoigna franchement par ses Lettres, où il mandoit que c'étoit une chose étrange, que je vouluſſe ainsi sans raison, différer de trois mois entiers la publication de mes solutions. A quoi on lui répondit, qu'il avoit le plus grand tort du monde de s'en plaindre ; que rien ne lui étoit plus avantageux ; qu'il devoit bien en profiter, & s'assurer par-là l'honneur de la premiere production, pendant que je m'étois lié les mains moi-même, & que si son Ouvrage étoit prêt, il pouvoit le faire paroître deux ou trois mois avant aucun autre. Qu'ainsi étant le premier de loin, il n'y auroit que lui dont il fût certain qu'il ne tînt ses inventions de personne : & enfin on lui dit alors, en sa faveur, tout ce qu'on avoit dit contre lui en l'autre occasion.

Ces raisons étoient les meilleures du monde : mais il en avoit une invincible, qui le forçoit à ne point y consentir, & à mander encore qu'il étoit résolu de ne rien produire qu'après moi. Cette réponse fut reçue de la maniere qu'on peut penser, & on délibéra là-dessus de ne plus le flatter : de sorte qu'on lui écrivit nettement, que son procédé n'étoit pas soutenable ; qu'on lui donnoit avis de la défiance où l'on étoit de lui ; qu'après avoir donné

né un faux calcul, il étoit engagé d'honneur de se hâter de donner le véritable, s'il l'avoit; mais que de demeurer si long-temps sans le faire, après tant de défis, & de ne point vouloir en produire avant que d'avoir vu les solutions d'un autre, c'étoit montrer aux moins clair-voyants qu'il n'en avoit point; & qu'ainsi on lui déclaroit pour la derniere fois, qu'il devoit envoyer avant le premier Janvier, ou ses méthodes, ou ses calculs : & s'il ne vouloit pas les donner à découvert, qu'au moins il les donnât en chiffre; que cet expédient ne pouvoit être refusé, sous quelque prétexte que ce fût; que c'étoit la maniere la plus sûre & la plus ordinaire dont on se servît en ces rencontres, pour s'assurer l'honneur d'une invention, sans que personne pût en profiter; que s'il acceptoit cette condition, il n'avoit qu'à envoyer son chiffre à un de ses amis dans le mois de Décembre; que le mien étoit déja fait, & qu'on les produiroit ensemble; qu'ensuite son explication & la mienne paroîtroient aussi ensemble; & que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit contenir la vérité, seroit reconnu pour avoir résolu les problêmes de lui-même & sans secours; mais que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit faux, seroit exclus de l'honneur de l'invention, sans pouvoir ensuite y prétendre, après avoir vu les solutions de l'autre à découvert.

Voilà

Voilà l'expédient déciſif qu'on lui propoſa; & on lui ajouta, le plus ſévérement que la civilité peut le permettre, que s'il le refuſoit, il paroîtroit à toute la terre qu'il n'avoit point ces ſolutions; qu'autrement il ne céderoit pas à un autre l'avantage de la premiere invention; & que ſi enſuite de ce refus, & après que j'aurois produit les miennes, il entreprenoit d'en produire auſſi, il ne paſſeroit que pour les avoir priſes de moi, & acquerroit toute la méchante opinion que méritoit un procédé de cette nature. On attendit la réponſe à tout cela, comme devant ſervir de derniere preuve de l'eſprit avec lequel il agiſſoit; & on la reçut peu de temps après, qui portoit ce que j'avois tant prédit, qu'il ne vouloit donner, ni diſcours, ni chiffre, ni autre choſe, ni accepter aucune condition; qu'il vouloit voir mes inventions publiées & à découvert, avant que de rien produire; qu'il ne me diſputoit, ni les Prix, ni l'honneur de la premiere invention; qu'il ne prétendoit autre choſe, ſinon de voir mes problêmes, & en publier enſuite de ſemblables; que c'étoit ſa derniere réſolution, & qu'il ne vouloit plus parler ſur ce ſujet.

Cette réponſe, la plus claire du monde, fit voir ſon impuiſſance auſſi parfaitement qu'il étoit poſſible, à moins que de la confeſſer en propres termes, ce qu'il ne falloit pas eſpérer de lui. Et ainſi on jugea que ce refus abſolu de donner, ni diſ-

cours, ni chiffre, le convainquoit pleinement; & qu'il me ſeroit inutile de remettre encore à un nouveau terme, la publication de mes problêmes, puiſqu'ayant déclaré qu'il ne produiroit rien qu'après moi, ſes remiſes ſuivroient toujours les miennes, & que la choſe iroit à l'infini. Je crus donc qu'il ne falloit point différer après le terme du premier Janvier, & qu'alors je devois, à ma premiere commodité, terminer cette affaire, qui a aſſez duré, & donner à tant de perſonnes ſavantes qui ſe ſont plues à ces queſtions, la ſatisfaction qu'ils attendent. Mais il me ſembla qu'il étoit bon de faire voir ce récit par avance, afin qu'après que j'aurois donné mes ſolutions, s'il arrivoit qu'il fût ſi mal conſeillé que de les déguiſer, tout le monde connût la vérité. C'eſt la ſeule choſe que j'ai voulu faire par ce diſcours, & non pas décrier ſa perſonne : car je voudrois le ſervir, & je reſpecte ſa qualité de tout mon cœur. Auſſi j'ai caché ſon nom; mais s'il le découvre après cela lui-même, pour s'attribuer ces inventions, il ne devra ſe prendre qu'à lui de la mauvaiſe eſtime qu'il s'attirera. Car il doit bien s'aſſurer que ſes artifices ſeront parfaitement connus & relevés.

Et qu'il n'eſpere pas s'en ſauver, par l'atteſtation d'un ami, qu'il pourroit mendier, qui certifieroit avoir vu ſon Livre en manuſcrit avant le premier Janvier : ce n'eſt pas ainſi qu'on agit en

ces

ces matieres, où la seule publication fait foi. S'il n'étoit question que d'un simple calcul de trois lignes, dont on eût donné les copies à plusieurs personnes, qui se trouvassent toutes conformes, ce seroit quelque chose. Mais quand il s'agit d'un Livre entier, & de cent propositions de Géométrie avec leurs calculs, où il n'y a rien de si facile que de mettre un nombre ou un caractere pour un autre : c'est une plaisante chose de prétendre que ce seroit assez de produire le certificat d'un ami, qui attesteroit d'avoir vu ce manuscrit un tel jour ; & principalement, si on avoit de quoi montrer que cet ami ne l'auroit, ni lu, ni examiné en donnant ce certificat. Il n'y a personne qui dût prétendre que son autorité pût arrêter ainsi tous les doutes : on ne croit en Géométrie que les choses évidentes. Je lui ai donné six ou sept mois pour en produire : il ne l'a point fait ; & il lui a été aussi impossible de le faire, qu'il seroit aisé de déguiser les vraies solutions quand elles seront une fois publiées.

Mais on ne doit pas être surpris de son procédé en cette rencontre, ni de ce qu'il avoit entrepris sur les problêmes de M. de Roberval : car il agit de même en toutes occasions. Et il y a plusieurs années qu'il se vante, & qu'il répete souvent qu'il a trouvé la Quadrature du cercle, & qu'il la donnera à son premier loisir, résolue en deux manieres différentes, & aussi celle de l'hyperbole : d'où l'on peut juger s'il

y a sujet de croire sur sa parole, qu'il ait les choses dont il se vante.

Paris, ce 12 Décembre 1658.

Paris, le 20 Janvier 1659.

DEPUIS que cette piece a été faite, j'ai publié mon Traité de la Roulette; & le premier jour de Janvier j'en envoyai le commencement à cette même personne dont j'ai parlé dans cet Écrit, afin qu'il y vît le calcul du cas que j'avois proposé, & où il s'étoit trompé: sur quoi il n'a pas manqué de dire que c'étoit justement ainsi qu'il avoit réformé le sien; & il s'est hasardé de plus de faire davantage, & d'envoyer les calculs de quelques autres cas dans une feuille imprimée du 9 Janvier, où il assure qu'elle est toute conforme au manuscrit qu'il en avoit donné depuis long-temps à des gens de croyance, pour servir de preuve qu'il avoit tout trouvé sans moi. Mais outre que quand ses calculs seroient justes, cela lui seroit maintenant inutile, après la lumiere que ce que je lui ai envoyé a pu lui donner: il se trouve de plus que ceux de ses calculs que je viens d'examiner en les recevant, sont tellement faux, que cela est visible à l'œil; & entre autres, le centre de gravité du solide autour de l'axe, qu'il place tout contre le quart de l'axe. Il ne donne pas moins mal à propos la distance

entre

entre l'axe & le centre de gravité du demi-ſolide de la partie ſupérieure de la Roulette autour de l'axe. De ſorte que cette piece qu'il dit être ſi conforme à ſon manuſcrit, & laquelle il vient de produire pour ſoutenir ſa prétention, eſt ce qui lui ferme abſolument la bouche, & qui montre le mieux le beſoin qu'il avoit de voir mes ſolutions & mes méthodes, que je lui ai toutes envoyées maintenant, ſur leſquelles il lui ſera auſſi facile de corriger encore ſes nouvelles fautes après l'avis que je lui en donne, & de trouver les véritables calculs, qu'il lui ſeroit inutile de ſe les attribuer déſormais.

HISTORIÆ TROCHOIDIS
SIVE CYCLOIDIS CONTINUATIO:

In quâ videre est cujusdam viri machinamenta qui se Autorem Problematum super hac re propositorum erat professus.

TANTUM in rebus geometricis severitatis inest, ut peropportunum sit aliquid intervenire, quo possit earum asperitas aliquantulùm mitigari. Nescio quid hujusmodi Trochoidis Historia desiderabat, quæ sensim elanguisset, si nihil aliud lectores ex eâ didicissent, nisi quædam à me problemata ad explicandum proposita, certaque explicaturis Præmia constituta: quæ cùm nemo esset adeptus, tandem eorum solutionem à meipso proditam. Hac narratione quid tristius, si nullus eam jocularis eventus hilarasset? Percommodè igitur accidit is quem hîc expositurî sumus.

Audierat quidam, cujus nomen à me tacebitur, omnium quæ olim Robervallio dissoluta erant problematum longè illud difficillimum esse, quo solidum circa Trochoidis axem dimensus est. Ergo cùm & hujus problematis solutionem, & vias quibus ad eam pervenerat Robervallius accepisset, sibi quoque

quoque solutionis istius gloriam asserere meditatus est, quasi suâ ipsius industriâ repertæ: magnum aliquid ratus si ad hanc laudem ante annos viginti duos ab altero præceptam socius accederet. Sed consilium suum ipse pervertit, tam rudibus artificiis rem aggressus, ut omnibus palam foret, nullam hujus inventionis partem ipsi deberi. Quam enim protulit enuntiationem, quamque adoptabat in suam, Robervallianæ simul conjunctam emisit à quâ solis duntaxat vocibus distinguebatur, ut si dixeris, rectangulum ex basi & altitudine, pro eo quod est, duplicatum trianguli spatium. In hac porrò Epistolâ fatebatur se falsam quidem enuntiationem ante id temporis evulgasse, de hujus autem posterioris veritate confidere se, quia Robervallianæ congruebat.

Hæc in hominum mentes planè contrariam de illo opinionem injicere. Nam si certæ quædam methodi, ac Geometricæ demonstrationes ipsi fuissent in manibus, an ille de solutione suâ ex hac tantùm similitudine certior factus foret? ac non potiùs de solutione tum suâ, tum etiam Robervallii ex propriis rationibus judicaret? Patuit ergo virum alieno lumine usum, non suo: nec satis justè visus est postulare, ut ipsi demùm affirmanti crederemus suâ se operâ uniusque Archimedis bilancis auxilio ad eam cognitionem esse perductum. Undè & responsum est de prolatæ ab ipso enuntiationis veritate,

deque illius cum Robervallianâ congruentiâ dubitare quidem neminem, non alienum tamen fore, si suas quoque methodos proferret quò facilius cerneretur, an propriæ ipsi ac peculiares essent.

Nil ille ad ista postulata reponere, de methodis suis nullam mentionem facere, nec minùs tamen enixè instare, ut ipsum solâ Archimedis bilance usum omnes sibi persuaderent. Quorsùm hæc tenderent satis superque innotuit, nec id obscurè ipsi Litteris significatum. Haud tamen segniùs perrexit quò occœperat, atque etiam ubi Historiam Trochoidis typis evulgatam inspexit, seque illic Robervallio æquiparatum minimè reperit, gravem sibi factam injuriam apertè conquestus est.

Ego verò hujus expostulationis novitate perculsus, homini scribendum curavi, me quidem non modò iniquum in eo nullo modo fuisse, sed contra potiùs summæ iniquitatis reum futurum, si solutionis istius gloriam, quam præter Robervallium nemo meritus videretur, cum alio quovis communicassem. Rem sanè totam meâ nihil interesse, mihi tamen æquo cum omnibus jure agendum, & unumquemque pro suarum inventionum merito ornandum fuisse. Ad hanc cognitionem si suâ se operâ perveniisse demonstrasset, id me prompto animo prædicaturum. Sed cùm ab eo nil quidquam simile esset effectum, ac cuivis enuntiationem ementiri, eamque solâ Archimedis bilance inventam jactare

tare promptum esset, non potuisse me sine summâ injuriâ ullum Robervallio comitem adjungere.

Hæc animum ejus non satis placaverunt, nec etiam tùm destitit acriter postulare jus suum; ita ut paulò severiùs admonendus fuerit officii sui. Denuntiatum est igitur eam esse inventionis semel evulgatæ conditionem, ut illam se nemo proprio acumine comprehensurum fuisse fidem vel sibi vel aliis facere possit. Hac quippe cognitione menti novum lumen novasque cogitationes inseri; nequicquam autem peculiares quasdam vias ostentari, cùm liqueat tam facilè problemata jam resoluta novis rationibus explicari quàm ægrè primùm solvi & expediri : adeòque totam primis solutionibus gloriam deberi; suspicione cæteras non carere, quam ut amoliantur honesti homines, qui res istas ut par est æstimant, sua statim inventa spontè premunt, si fortè ab altero jam prolata rescierint, quibuslibet argumentis constet hæc ipsis penitùs ignota fuisse. Multò enim malunt istius gloriæ jacturam facere, quàm in tam molestæ opinionis periculum venire. Norunt scilicet in problemate non solvendo nullum dedecus, leniſſimum in solvendo honorem, in alienis verò fœtibus sibi arrogandis graviſſimum esse flagitium.

Quemvis alium paulò ingenio erectiorem, & geometricis rebus aliquantò superiorem, vel una ex istis cæterisque quæ ipsi allatæ sunt rationibus

ab

ab omnibus hujusmodi problematis alienasset. At ille de suâ spe nihil remisit, cui etiamnum inhæret pertinacissimè. En quâ ille ratione super illis solutionibus Robervallianis se gesserit: ubi mihi demirari subiit, quò vana illa laudis ex scientiâ petitæ cupiditas impelleret jejunos animos, gloriæ avidos, sed minores!

Utinam verò hîc stetisset! At longè ultra provectus est. Quippe dum illum ab hoc consilio deterrent omnes, aliud & id longè operiosius aggressus est. Palam siquidem prædicavit quæcunque proposueram problemata dissolvisse se: quod quidem ipsum in incredibiles quasdam multòque prioribus difficiliores conjecit angustias; siquidem antea enunciationes Robervallianæ in promptu erant, nec arduum erat similes aliquas easque veras emittere, ac certis & arcanis comprehensas methodis jactitare; nunc verò nihil prorsùs, præter unius duntaxat capitis enunciationem, penes illum poterat esse, quæ paucis insuper à me credita ad ipsum fortè non pervenit. Cùm ergo hinc quascunque enunciationes & pollicitus præstare minimè posset, nec eas suâ vel alienâ ope comparare, illinc sæpius compelleretur ab omnibus, ut vel unam saltem ex iis ostenderet, fieri aliter non potuit, quin nobis identidem provocantibus turpiter deesset, ac multum de se risum excitaret, ut solent qui majora viribus temerè audent. Hoc quâ ratione contigerit jam exponam.

Mense

Menſe Septembri occœperat ſcribere omnia hæc ſe problemata diſſolviſſe. Res ad me ſtatim delata eſt: nec mediocriter animum percuſſit minuta hominis ambitio. Noveram enim vires ipſius, & problematum meorum difficultatem: & ex cæteris quæ ad hunc diem ille protulerat, ſatis ipſum huic oneri imparem eſſe conjiciebam. Ratus ſum igitur illum aut decipi atque adeò ſi ſuum ſpontè fateretur errorem, ſummâ cum humanitate tractandum: aut id agere ut nos deciperet, ac problematum meorum evulgationem manere, ut ea deinceps ſibi arrogaret, ipſumque animi causâ reum fraudis iſtius eſſe peragendum; quod quidem mihi pronum erat ac proclive penes quem totum hujus evulgationis ſtabat arbitrium. Itaque nonnullis ſuſpiciones meas palam teſtatus, curavi ut omnes motus ejus inceſſuſque ſervarentur.

Ac primùm nondum exactâ Præmiorum die venit ab eo cujuſdam propoſitionis calculus tot & tantis undequaquè confertus erroribus, ut ab ipſo per proximum ſtatim curſorem fuerit abdicandus, non eâ ſanè quâ debuerat moderatione, ſed quâ poterat lepidiſſimâ pinguiſſimâque ferociâ. Fatebatur enim priorem quidem calculum falſum eſſe, ſibi verò tum alterum omni ex parte verum, univerſaſque ſimul propoſitiones complexum, tum demonſtrationes omnes ſerie deſcriptas, & ad edendum paratas eſſe in manibus, quas tamen in publicum

blicum exire non esset passurus, nisi meis antea vulgatis, quod per illud temporis, ineunte scilicet Octobre, præstiturum me professus eram.

Quid hæc sibi vellent satis intellexi, nec cuiquam ampliùs dubitatum est quin ipsissimum illud esset quod futurum esse denuntiaram. Placuit igitur ad extremas hunc angustias deducere. Et quò manifestiùs liqueret nihil ipsum nisi me præeunte promere posse, tres in menses ad Kalendas nempè Januarias vulgationem problematum meorum in Historiâ Trochoidis rejeci, eas alioquin Kalendis Octobris, quod & ipse sibi pollicebatur, daturus in lucem.

Hac quidem prolatione nihil ipsi fuerat commodius, si modò solutiones istæ præsto fuissent. Illæ verò procul aberant, ideòque & hanc velut infensam & mysteriorum suorum enunciatricem tulit ægerrimè. Noverat enim ita de se sententiam laturos omnes, ut hac morâ uteretur. Illud, inquam, homini stomachum fecit, quem ille tam candidè ac non dissimulanter aperuit, ut scribere non veritus sit, novum planè sibi videri me meorum problematum editionem tres totos in menses sine causâ distulisse. Responsum est summâ illum injuriâ mihi succensere; nil ipsi commodius & opportunius; quin potiùs occasionem oblatam arriperet ac primæ inventionis honorem sibi assereret, dum ego quasi constrictis mihimet manibus otiosus sederem;

posse

posse illum si modò quod antea prædicaverat in promptu esset opus suum, illud geminis vel etiam tribus ante alterum quemlibet mensibus producere, atque ita unum fore, quem constaret inventa sua à nemine mutuatum; denique quæcunque alio loco ad ipsum deterrendum dicta erant, nunc ad ipsum excitandum stimulandumque repetita sunt.

His rationibus nihil validius quicquam. Nihilominus homini conscio infirmitatis suæ altera quædam suberat ineluctabilis quâ ad dissentiendum cogebatur. Iterùm ergo rescripsit fixum esse sibi nihil omninò nisi post editas propositiones meas edere. Hæc responsio sic accepta est ut dignum erat: visum est nullâ circuitione jam utendum.

Planè ergo & apertè significatum est ejus rationem iniquissimam esse, nec commodas de ipso suspiciones omnium animis insedisse; missum ante fallacem ab illo calculum, veri, si modò ipsi præstò esset, mittendi necessitatem afferre, siquidem honori suo consultum vellet; at rem semper in diem trahere, & tam multis compellationibus exstimulatum silere; denique nullas mittere solutiones nisi alienis priùs inspectis, id verò vel tardioribus ingeniis fidem facere nullas reverâ solutiones ipsi suppetere. Postremò itaque denuntiatum est, ut intra finem vertentis anni vel methodos suas, vel calculos mitteret, si non expressis verbis conceptos, saltem aliquibus notis involutos; nullum jam tergiversandi

giversandi locum relictum esse; eam enim demùm & securissimam & frequentissimam esse viam, quâ quis sibi posset alicujus inventionis gloriam vindicare, nec aliis rapiendam exponere. Quæ si conditiones ipsi arriderent, reliquum esse, ut alicui suorum mense Decembris notas suas mitteret; meas dudùm paratas; utrasque simul productum iri, ut cujus notæ expositæ veritati congruere deprehenderentur, hic genuinus istorum problematum interpres haberetur: contra cujus expositæ notæ errore censerentur implicitæ, is inventionis palmâ excideret, nec ad eam alienis deinceps solutionibus cognitis aspirare posset.

His conditionibus nihil æquius præciisiusque visum, quas si refugeret ille sedulò commonitus est, & severitate quantam humanitatis leges ferre poterant maximâ, certo istud indicio futurum omnibus eas illum solutiones nunquam habuisse, nunquam alioquin primæ inventionis laudem cuiquam concessurum fuisse. Quòd si repudiatis quæ ipsi oblatæ fuerant conditionibus, meisque exinde solutionibus vulgatis, aliquas etiam vulgandi consilium resumeret, manifestum apud omnes plagiarium habitum iri, debitamque his factis opinionem sibi accersiturum. Suspensis omnium animis expectabatur ejus responsio, tanquam ultimum ingenii ejus specimen datura. Nec multo post tempore advenit illa quidem auguriorum meorum

confirmatrix

confirmatrix certissima. Enim verò rescribebat ille, nequicquam à se vel scripta vel notas vel aliud quidpiam exigi; conditiones nullas se recipere; nec quidlibet editurum, priusquam mea inventa edita inspexisset : de Præmiis laudibusve nihil mecum certare : id unum sibi esse in animo, ut problemata mea videret, nonnullaque similia promeret : fixum illud sibi ac immotum; nec quidquam amplius de his omnibus auditurum libenter.

Plana hæc erant & aperta, nec quidlibet efflagitari potuit, quo plenius convinceretur, nisi reum se ingenuè confiteretur, quod ab ipso sperari non poterat. Hac igitur omnium conditionum declinatione satis superque convictus judicatus est : ego verò nequicquam meorum problematum editionem prorogaturus, quandoquidem ille nullos nisi me præeunte gressus facturum se professus, me quoque cunctante cunctaturus foret, ac res sic in immensum processura. Ratus sum itaque rem ultra præstitutum Kalendarum Januarii tempus protrahendam non esse, sed ubi quid primùm otii nactus essem, totum id post tantas prolationes absolvendum, ac sic votis tot eruditorum hominum quibus hæ quæstiones non injucundæ fuerunt faciendum satis.

Interim haud abs re visum est mihi, ut hæc narratio velut præcurreret, si fortè solutiones meas ille in se transferre moliretur, omnium oculis exposi-

situra

situra veritatem. Id unum hoc scripto perfectum volui, non autem virum ullatenùs infamatum, quem equidem omnibus officiis lubentissimè colerem, cujus & dignitati honorem habeo quamplurimum. Ideòque nomini ejus peperci; quod ille si modò hæc inventa sibi arrogando revelaverit, sibi tribuat quicquid dedecoris indè contraxerit. Nec dubitet ille futurum ut ejus artes omnium oculis subjiciantur.

Neque verò effugium sibi speret emendicato alicujus amici chirographo, testificantis forsan visum sibi ante Kalendas Januarii librum ejus manu exaratum. Haud ita omninò ista tractantur: sola editio fidem facit. Non negaverim quin si de calculo quodam tribus versibus comprehenso disceptaretur, plura ac inter se congruentia ejus exemplaria multis ante tradita, nonnihil fidei factura essent. At cùm de integro volumine, de centum Geometriæ propositionibus earumque calculis agitur, ubi nihil æquè facile est ac numeros pro numeris, notas pro notis substituere, ludicrum sanè ac lepidum amici afferre chirographum, asserentis hunc librum hac vel istâ die sibi inspectum, præsertim si ostendi posset ab ipso nec lectum illum nec excussum. Nemo sibi tantùm jure tribuerit, ut ad dubitationes omnes tollendas sola sua autoritas sufficiat. In Geometricis sola demùm manifesta creduntur. Sex septemve menses concessi ut

sua

ſua ederet, nihil edidit. Atque hoc ipſi non minùs arduum fuit quàm pronum eſſet veras ſolutiones jam prolatas interpolare.

Sed hæc cave ne nova illi ac inuſitata exiſtimes, nec quos etiam in Robervalliana problemata fecit incurſus. Ita enim ubique homo eſt : adeò ut jam plures annos ambitiosè effutiat Quadraturam circuli à ſe inventam, eamque ubi tempus tulerit à ſe proditum iri, ſimul cum hyperboles Quadraturâ : i nunc, & homini, quantum de ſe prædicat, credulus largito.

DIVERSES INVENTIONS DE A. DETTONVILLE (1), EN GÉOMÉTRIE.

LETTRE DE M. DE CARCAVI A M. DETTONVILLE.

MONSIEUR,

PERSONNE n'ayant donné les ſolutions des Problêmes que vous avez propoſés depuis ſi long-temps, vous ne pouvez plus refuſer de paroître pour les donner vous-même, comme la promeſſe que vous en avez faite vous y engage. Je ſais que ce vous ſera de la peine d'écrire tant de ſolutions & de méthodes; mais auſſi c'eſt toute celle que vous y aurez : car pour l'impreſſion je ne ſonge pas à vous la propoſer, j'ai des perſonnes qui en auront ſoin. Et il s'offre encore un ſoulagement à votre travail, en ce qu'il ne ſera pas néceſſaire de vous étendre ſur les Problêmes

(1) C'eſt le nom ſous lequel Paſcal ſe cacha, comme il a été dit dans l'Hiſtoire de ſa vie.

que

que vous avez proposés comme faciles, tels que sont *le centre de gravité de la ligne courbe* de la Roulette & de ses parties, & *la dimension des surfaces* des solides ; de sorte que vous n'aurez presque qu'à donner ceux que vous avez proposés comme difficiles, c'est-à-dire, *le centre de gravité des solides, & des demi-solides* de la Roulette & de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe, auxquels vous aviez attaché les Prix dans votre premier Écrit ; & *le centre de gravité des surfaces de ces solides & demi-solides*, desquels vous avez dit, en les proposant dans l'Histoire de la Roulette, *que c'étoient ceux que vous estimiez difficiles, & proprement les seuls que vous proposiez.*

Ce sont donc aussi proprement les seuls que nous vous prions de donner, & dont nous avons considéré le succès avec attention. Car comme ils paroissent si difficiles par la seule énonciation, & que vous qui les connoissiez à fonds, vous m'aviez dit plusieurs fois que vous en jugiez la difficulté si grande, je crus qu'elle étoit extrême ; & quand je les eus un peu considérés en effet, il me sembla, selon le peu de lumiere que j'en ai, que le moins qu'on pouvoit en dire, étoit qu'il n'avoit rien été résolu de plus caché dans toute la Géométrie, soit par les anciens, soit par les modernes ; & je ne fus pas seul dans ce sentiment.

Ainsi lorsque le terme du premier Octobre fut arrivé, nous fumes bien aises de voir que vous le prolongeates jusqu'au premier Janvier ; parce que nous espérames de mieux reconnoître, par un plus long espace de temps, si le jugement que nous en faisions étoit véritable ; & le succès confirme bien notre pensée. Car une attente de sept ou huit mois sans solution, en est une marque considérable, en un temps où se trouvent d'aussi grands Géometres, & en plus grand nombre à la fois qu'on n'en ait jamais vu, & où l'on a résolu les

Problêmes les plus difficiles. Car encore que pour la grandeur du génie aucun des anciens n'ait peut-être surpassé Archimede ; il est certain néanmoins que pour la difficulté des Problêmes, ceux d'aujourd'hui surpassent de beaucoup les siens, comme il se voit par la comparaison des figures toutes uniformes qu'il a considérées, à celles que l'on considere maintenant, & sur-tout à la Roulette & à ses solides, à l'escalier, aux Triangles cylindriques, & aux autres surfaces & solides dont vous avez découvert les propriétés.

Il n'y a donc jamais eu de temps si propre que celui-ci, à éprouver la difficulté des propositions de Géométrie. Or nous n'avons vu la solution d'aucune de celles que vous avez proposées comme difficiles. On a bien envoyé celle des Problêmes que vous aviez déclaré être plus faciles; savoir, *le centre de gravité de la ligne courbe & la dimension des surfaces des solides*, laquelle M. Wren nous envoya dans ses Lettres du 12 Octobre; & M. de Fermat aussi dans les siennes, où il donne une méthode fort belle & générale pour la dimension des surfaces rondes ; mais pour ces *centres de gravité des solides & demi-solides & de leurs surfaces*, nous n'en avons point vu de résolution.

Je dirai à tout autre qu'à vous, Monsieur, ce que cela a fait juger de la difficulté de vos Problêmes, & de ce qu'il falloit être pour les résoudre ; & je ne vous parlerai ici que du desir que nous en avons, & de la nécessité où nous sommes d'avoir recours à vous pour des choses que nous ne pouvons avoir que de vous. N'espérez donc pas fuir nos importunités. Je suis résolu de ne jamais cesser de vous en faire, non plus que de rechercher les occasions de vous témoigner combien je suis, &c.

De Paris, ce 10 Décembre 1658.

LETTRE

LETTRE
DE M. DETTONVILLE
A M. DE CARCAVI,
Ci-devant Conseiller du Roi en son Grand-Conseil.

MONSIEUR,

PUISQUE je suis enfin obligé de donner moi-même la résolution des Problêmes que j'avois proposés, & que la promesse que j'en ai faite m'engage nécessairement à paroître, je veux, en découvrant mon nom, faire connoître en même-temps à tout le monde combien celui qui le porte a de respect & d'estime pour votre personne, & de reconnoissance pour toute la peine que vous avez voulu prendre en cette occasion. Je souhaiterois qu'elle pût être, en quelque façon, récompensée par ce discours que je vous donne, où vous verrez non-seulement la résolution de ces Problêmes, mais encore les méthodes dont je me suis servi, & la maniere par où j'y suis arrivé. C'est ce que vous m'avez témoigné souhaiter principalement, & sur quoi je vous ai souvent oui plaindre de ce que les Anciens n'en ont pas usé de même : ne nous ayant

laiſſé que leurs ſeules ſolutions ſans nous inſtruire des voies par leſquelles ils y étoient arrivés, comme s'ils nous euſſent envié cette connoiſſance.

Je ne me contenterai donc pas de vous donner les calculs ; deſquels voici celui du cas que j'avois propoſé : *le centre de gravité du demi-ſolide de la demi-Roulette, tournée à l'entour de la baſe, eſt diſtant de la baſe d'une droite qui eſt au diametre du cercle générateur, comme ſept fois le diametre à ſix fois la circonférence, & eſt diſtant de l'axe d'une droite égale au quart de la circonférence du cercle générateur, moins ſeize quinziemes parties de la diſtance qui eſt entre le centre du cercle générateur, & le centre de gravité de ſon demi-cercle.* Mais je vous découvrirai de plus ma méthode générale pour les centres de gravité, qui vous plaira d'autant plus, qu'elle eſt plus univerſelle : car elle ſert également à trouver les centres de gravité des plans, des ſolides, des ſurfaces courbes & des lignes courbes. J'ai beſoin, pour vous l'expliquer, de cette définition.

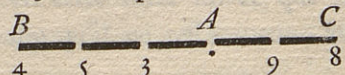
S'il y a tant de quantités qu'on voudra $A, B, C, D,$ leſquelles on prenne en cette ſorte : premiérement, la ſomme de toutes A, B, C, D ; puis la ſomme des mêmes, excepté la premiere, ſavoir, B, C, D ; puis la ſomme des mêmes, excepté les deux premieres, ſavoir, C, D ; & ainſi toujours, comme on les voit ici marquées :

J'appelle

J'appelle la somme de ces quantités, prises de cette sorte, *la somme triangulaire de ces mêmes quantités, à commencer par* A; car on pourroit prendre la somme de ces mêmes quantités, à commencer par *D*, & qui ne seroit pas la même.

A B C D
B C D
C D
D

Cela posé, je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette connoissance. J'ai considéré une balance *B, A, C*, suspendue au point *A*, & . . .



ses bras de telle longueur qu'on voudra *A B, A C*, divisés en parties égales de part & d'autre, avec des poids pendus à chaque point de division; savoir, au bras *A B*, les poids 3, 5, 4, & au bras *A C* les poids 9, 8; & supposant la balance être en équilibre en cet état, j'ai tâché de comprendre quel rapport il y avoit entre les poids d'un bras & ceux de l'autre, pour faire cet équilibre: car il est visible que ce n'est pas que la somme des uns soit égale à celle des autres; mais voici le rapport nécessaire pour cet effet.

Pour faire que les poids d'un bras soient en équilibre avec ceux de l'autre, *il faut que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres*, à commencer toujours du côté du point *A*. Et la démonstration en sera facile par

le moyen de ce petit Lemme, dont vous verrez un assez grand usage dans la suite.

Si les quatre quantités A, B, C, D, sont prises en cette sorte : la premiere une fois, la seconde deux fois, la troisieme trois fois, &c.; je dis que la somme de ces quantités prises de cette sorte, est égale à leur somme triangulaire, en commençant du côté A.

D	C	B	A
4	3	2	1

A	B	C	D
	B	C	D
		C	D
			D

Car en prenant leur somme triangulaire, on ne fait autre chose que les combiner en telle sorte, qu'on prenne A une fois, B deux fois, C trois fois, &c.

Venons maintenant à ce que je propose de la balance. On sait assez en Géométrie, que les forces des poids sont en raison composée des poids & des bras, & qu'ainsi le poids 4 en la troisieme distance, a une force triple; que le poids 5 en la seconde distance, a une force double, &c. Donc la force des poids des bras doit se considérer en prenant celui qui est à la premiere distance une fois, celui qui est à la seconde deux fois, &c. Ainsi pour faire qu'ils soient en équilibre de part & d'autre, il faut que la somme des poids d'un bras étant pris de cette sorte : savoir, le premier

une

une fois, le ſecond deux fois, &c., ſoit égale à la ſomme des poids de l'autre pris de la même ſorte; c'eſt-à-dire (par le Lemme précédent), que la ſomme triangulaire des uns ſoit égale à la ſomme triangulaire des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

Vous voyez, Monſieur, que je ſuis entré dans le ſtyle géométrique; & pour le continuer, je ne vous parlerai plus que par Propoſitions, Corollaires, Avertiſſements, &c. Permettez-moi donc de m'expliquer en cette ſorte ſur ce que je viens de vous dire, afin qu'il ne reſte aucune ambiguité.

AVERTISSEMENT.

J'entends toujours que les deux extrémités de la balance paſſent pour des points de diviſion; & ainſi quand je dis que des poids ſoient pendus à tous les points de diviſion, j'entends qu'il y en ait auſſi aux deux extrémités de la balance.

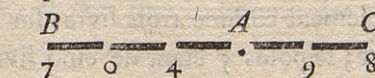
J'entends auſſi que le bras AB puiſſe être égal ou inégal à l'autre bras AC, & que chacune des parties égales du bras AB ſoit égale à chacune des parties égales du bras AC, & que les parties d'un bras ne different au plus des parties de l'autre bras que par leur multitude. Or de cette égalité de chacune des parties, il s'enſuit que le poids 3 étant pris, par exemple, de trois livres, & peſant ſimplement comme trois livres ſur la premiere diſtance; le poids 5 étant de cinq livres ſur

la

la seconde distance, aura la force de dix livres, c'est-à-dire, double de celle qu'il auroit sur la premiere distance; & le poids 4 sur la troisieme distance, aura la force de douze livres, c'est-à-dire, triple de celle qu'il auroit sur la premiere distance. De même sur l'autre bras le poids 9 sur la premiere distance, aura simplement la force de neuf livres, & le poids 8 la force de seize livres; & ainsi à l'infini, les poids seront multipliés autant de fois qu'il y aura de parties égales dans leurs bras, à compter du centre de gravité commun *A*, auquel la balance est suspendue.

Il faut aussi remarquer que cette propriété de la balance que j'ai donnée, savoir, l'égalité des sommes triangulaires des poids de chaque bras est générale, encore qu'il y ait des points de division sans poids, au lieu desquels en mettant un zéro, il ne laissera pas d'être employé en prenant les sommes triangulaires, comme on voit en cet exemple:

Soit une balance *B A C* suspendue au point *A*, & divisée en parties égales, comme il a été dit; & soit sur la premiere distance du bras *A C* le poids 9, & sur la seconde le poids 8: & sur la premiere distance du bras *A B*, le poids 4; sur la seconde distance, nul poids ou zéro; sur la troisieme le poids 7:



Je

Je dis que ſi la ſomme triangulaire des poids 4, 0, 7, eſt égale à la ſomme triangulaire des poids 9, 8 (à commencer toujours du côté *A*), la balance ſera en équilibre ſur le centre *A*.

La démonſtration en eſt la même que la précédente.

7 0 4	9 8
7 0	8
7	
25	25

De cette propriété je démontre les trois propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit C A B *une balance diviſée en tant de parties égales qu'on voudra aux points* C, D, A, E, F, B, *auxquelles ſoient pendus les poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7;

B	F	E	A	D	C
7	0	4	5	9	8

de tous leſquels enſemble le centre de gravité commun ſoit au point A (*l'un de ces points*) : *Je dis que la ſomme triangulaire de tous ces poids, à commencer du côté qu'on voudra, par exemple, du côté* C; *c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7, *eſt égale à la ſimple ſomme de ces poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7, (*c'eſt-à-dire, à la ſomme de ces poids pris chacune une fois*) *multipliée autant de fois qu'il y a de points dans le bras* CA,

CA, (*puisqu'on a commencé par le côté* C), *c'est-à-dire, trois fois en cette figure* . . . . . .

7	0	4	5	9	8		7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9			7	0	4	5	9	8
7	0	4	5				7	0	4	5	9	8
7	0	4										
7	0											
7												
				99						99		

Car la somme triangulaire des poids 4, 0, 7, pendus au bras *AB*, (qui est distinguée du reste par une barre dans la premiere partie de la figure) est égale à la petite somme triangulaire des poids 9, 8, pendus à l'autre bras *AC*, (qui est aussi distinguée du reste dans l'autre partie de la figure). Et les restes sont les mêmes de part & d'autre.

AVERTISSEMENT.

Je sais bien que cette maniere de démontrer n'est pas commune; mais comme elle est courte, nette & suffisante à ceux qui ont l'art de la démonstration, je la préfere à d'autres plus longues que j'ai en main.

PROPOSITION II.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la simple somme des poids, multipliée autant de fois qu'il y a de points en toute la balance, est à la somme

somme triangulaire de tous les poids, à commencer par le côté qu'on voudra, par exemple, par le côté C, *comme le nombre des points qui sont dans la balance entiere, au nombre des points qui sont dans le bras par où on a commencé à compter; c'est-à-dire, en cet exemple, dans le bras* CA . . . . .

7	0	4	5	9	8	7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9		7	0	4	5	9	8
7	0	4	5			7	0	4	5	9	8
7	0	4				7	0	4	5	9	8
7	0					7	0	4	5	9	8
7						7	0	4	5	9	8
		99						198			

Je dis que la somme triangulaire 99 *est à la somme,* 198, *des poids multipliée par leur multitude, comme la multitude des points du bras* CA, *savoir,* 3, *à la multitude de tous les points, savoir,* 6.

Car dans la Figure la somme triangulaire de tous les poids est égale, par la précédente, à la simple somme des poids multipliée par la multitude des points qui sont dans le bras *AC*, & qui sont ici au-dessus de la barre. Or la somme des poids multipliée par cette multitude des points du bras *AC*, est visiblement à la même somme des poids multipliée par la multitude des points de la balance entiere, comme une de ces multitudes est à l'autre.

PROPOSITION

PROPOSITION III.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſomme triangulaire des poids, à commencer par un des côtés, comme par le côté C, *eſt à la ſomme triangulaire des mêmes poids, à commencer par l'autre côté* B, *comme le nombre des points qui ſont dans le bras* AC, *par où l'on a commencé la premiere fois, au nombre des points qui ſont dans le bras* BA, *par où l'on a commencé la ſeconde fois . .*

7	0	4	5	9	8		7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9				0	4	5	9	8
7	0	4	5						4	5	9	8
7	0	4								5	9	8
7	0										9	8
7												8
				99						132		

Je dis que la ſomme triangulaire 99, *en commençant par* 8, *eſt à l'autre ſomme triangulaire* 132, *en commençant par* 7, *comme la multitude des points du bras* 8, *ſavoir*, 3, *à la multitude des points de l'autre bras* 7, *ſavoir*, 4.

Car chacune de ces ſommes triangulaires eſt, par la précédente, à la ſimple ſomme de tous les poids multipliés par leur multitude, comme la multitude des points de chaque bras, à la multitude de tous les points de la balance entiere. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

Comme toutes les choſes que je viens de démontrer ſur le ſujet des poids d'une balance, doivent s'appliquer à toutes ſortes de grandeurs, c'eſt-à-dire, aux lignes courbes, aux ſurfaces planes & courbes, & aux ſolides, il me ſemble à propos, pour faciliter cette application, de donner quelques exemples de la maniere dont on doit prendre les ſommes triangulaires dans ces grandeurs.

Soit donc (*Fig.* 3.) une ligne courbe quelconque *CB* diviſée comme on voudra en parties égales ou inégales aux points *I*, *G*, *F*: pour prendre la ſomme triangulaire des portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB*, à commencer du côté de *C*, il faudra prendre la toute *CFB*, plus la portion *IFB*, plus la portion *GFB*, plus la portion *FB*. Fig. 3.

Car par la définition, la ſomme triangulaire de toutes les portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB* ſe trouve en les prenant en cette ſorte: premiérement, toutes enſemble, & enſuite toutes enſemble excepté la premiere, & puis toutes enſemble excepté les deux premieres, &c., en cette ſorte . . . . . .

CI + *IG* + *GF* + *FB* ou la ligne *CFB*.
Plus . . *IG* + *GF* + *FB* ou la ligne *IFB*.
Plus . . . . *GF* + *FB* ou la ligne *GFB*.
Plus . . . . . *FB* ou la ligne *FB*.

Pareillement la ſomme triangulaire de ces mêmes

mes portions BF, FG, GI, IC, à commencer par B, se trouvera en prenant la ligne entiere BIC, plus la portion FIC, plus la portion GIC, plus la portion IC; ce qui paroît de même en cette sorte:

$BF+FG+GI+IC$ ou la ligne BIC.
Plus . . $FG+GI+IC$ ou la ligne FIC.
Plus . . . . $GI+IC$ ou la ligne GIC.
Plus . . . . . IC ou la ligne IC.

De la même sorte, si le triligne CAB est divisé en tant de parties qu'on voudra, par les droites IK, GH, FE, la somme triangulaire de ses portions $CIKA$, $IGHK$, $GFEH$, FBE, à commencer du côté de CA, se trouvera en prenant le triligne CBA, plus le triligne IBK, plus le triligne GBH, plus le triligne FBE.

Ce qui paroît par la somme de ces portions prises en la maniere accoutumée, comme on voit ici:

$CIKA+IGHK+GFEH+FBE$ ou le triligne BCA.
Plus . . $IGHK+GFEH+FBE$ ou l'espace IBK.
Plus . . . . . $GFEH+FBE$ ou l'espace GBH.
Plus . . . . . FBE ou l'espace FBE.

On prendra de même sorte la somme triangulaire des portions des surfaces courbes & celle des solides, sans qu'il soit besoin d'en donner davantage d'exemples.

MÉTHODE générale pour les centres de gravité de toutes sortes de lignes, de surfaces & de solides.

ETANT proposée une ligne courbe, ou un plan, ou une surface courbe, ou un solide, en trouver le centre de gravité?

Soit entendue une multitude indéfinie de plans paralleles entre eux & également distants (c'est-à-dire, que la distance du premier au second soit égale à la distance du second au troisieme, & à celle du troisieme au quatrieme, &c.) : lesquels plans coupent toute la grandeur proposée en une multitude indéfinie de parties compriſes chacune entre deux quelconques de ces plans voisins.

Maintenant si de tous ces plans on en considere principalement trois, savoir, les deux extrêmes, qui comprennent la grandeur proposée, & celui qui passe par le centre de gravité de la grandeur proposée, & qu'on entende qu'une droite quelconque menée perpendiculairement d'un des plans extrêmes à l'autre, rencontre le plan du centre de gravité, lequel la divise en deux portions : cette droite entiere qui mesure la distance d'entre les plans extrêmes, sera appellée *la balance de la grandeur proposée*, & ses deux portions qui mesurent

la distance entre le centre de gravité de la grandeur proposée & les plans extrêmes, s'appelleront *les bras de la balance :* & la raison d'un de ces bras à l'autre se trouvera en cette sorte :

Je dis qu'un des bras est à l'autre (c'est-à-dire, que la distance entre le centre de gravité de la figure & l'un des plans extrêmes, est à la distance entre le même centre de gravité & l'autre plan extrême), comme la somme triangulaire de toutes les portions de la figure, à commencer par le premier plan extrême, à la somme triangulaire de ces mêmes portions, à commencer par l'autre plan extrême.

AVERTISSEMENT.

Afin qu'il ne reste ici aucune ambiguité, je m'expliquerai plus au long.

Soit donc proposée, premiérement, une ligne courbe CB (*Fig.* 3.) laquelle soit coupée en un nombre indéfini de parties aux points C, I, G, F, B, par une multitude indéfinie de plans paralleles & également distants, ou, si l'on veut, par une multitude indéfinie de droites paralleles & également distantes CA, IK, GH, FE, BO (car les droites suffisent ici, & les plans n'ont été mis dans l'énonciation générale, que parce que les droites ne suffiroient pas en tous les cas). Soit maintenant menée AB où l'on voudra perpendiculaire à toutes les paralleles, laquelle coupe les extrêmes aux points B, A,

Fig. 3.

B, A, & celle qui passe par le centre de gravité de la ligne proposée, au point *T :* cette droite *B A* sera appellée *la balance,* & les portions *T A, T B* seront appellées *les bras de la balance.*

Je dis que le bras *T B* sera au bras *T A,* comme la somme triangulaire des portions de la ligne, savoir, des portions *B F, F G, G I, I C,* à commencer du côté de *B,* à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de *A.*

Soit maintenant la grandeur proposée un plan, comme le triligne *C B A,* coupé par les mêmes paralleles *C A, I K, G H, F E, B O,* & que la même perpendiculaire *B A* le coupe comme il a été dit, & rencontre celle qui passe par le centre de gravité du plan proposé *C B A* au point *T :* je dis que le bras *T B* sera au bras *T A,* comme la somme triangulaire des portions du triligne, *B F E, E F G H, G I K H, C I K A,* à commencer du côté de *B O,* à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de *A C.*

Soit maintenant la grandeur proposée une surface courbe *C Y Z B F C,* coupée par les mêmes plans paralleles *A C Y, K I M, H G N, E F Z, O B X,* qui coupent la surface donnée & y produisent, par leurs communes sections, les lignes *C Y, I M, G N, F Z,* &c.; & que la balance *B A* mesure toujours la distance entre les plans extrêmes, & coupe celui qui passe par le centre de gra-

vité de cette surface courbe au point *T* : je dis que le bras *TB* sera au bras *TA*, comme la somme triangulaire des portions de la surface, savoir, *ZFB*, *FZNG*, *NGIM*, *MICY*, à commencer du côté de *B*, c'est-à-dire, la somme des surfaces *BCY*, *ZFCY*, *NGCY*, *MICY*, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de *AC*, c'est-à-dire, des surfaces *CYB*, *IMB*, *GNB*, *FZB*.

Enfin si la grandeur proposée est un solide *YCFBAC*, coupé par les mêmes plans paralleles, & que la balance *BA* mesure de même la distance entre les plans extrêmes, & coupe celui qui passe par le centre de gravité du solide au point *T* : le bras *TB* sera toujours au bras *TA*, comme la somme triangulaire des portions du solide, à commencer par *B*, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer par *C*.

DÉMONSTRATION DE CETTE MÉTHODE.

La démonstration en est facile, puisque ce n'est que la même chose que ce que j'ai donné de la balance.

Car soit considérée la droite *BA* comme une balance divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points *A*, *K*, *H*, *E*, *B*, auxquels pendent pour poids les portions de la grandeur proposée, & à l'un desquels se rencontre le point *T*, qui

qui sera le centre de gravité de la balance, comme cela est visible par la doctrine des Indivisibles, laquelle ne peut être rejettée par ceux qui prétendent avoir rang entre les Géometres.

Donc, par la troisieme proposition de la balance, la somme triangulaire des poids (ou des portions de la figure) à commencer du côté *B*, est à la somme triangulaire des mêmes poids, à commencer du côté *AC*, comme le nombre des points (ou des parties) du bras *BT*, au nombre des points (ou des parties) du bras *AT*, c'est-à-dire, comme *BT* à *TA*. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Je sais bien que ces portions de la grandeur proposée ne pendent pas précisément aux points de division de la balance *BA*; mais je n'ai pas laissé de le dire, parce que c'est la même chose. Car en divisant chacune de ces parties égales de la balance *BA* par la moitié, ces nouvelles divisions donneront une nouvelle balance qui ne différera de la premiere que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée (puisque la multitude des parties est indéfinie), & le centre de gravité de la balance se trouvera encore à une de ces nouvelles divisions, ou n'en sera éloigné que d'une distance moindre qu'aucune donnée, ce qui ne changera point les raisons: & les portions de la grandeur proposée

pendront préciſément aux points de ces nouvelles diviſions, en conſidérant au lieu des portions de la grandeur propoſée, qui ſeront peut-être irrégulieres, les portions régulieres qu'on leur ſubſtitue en Géométrie, & qui ne changent point les raiſons; c'eſt-à-dire, en ſubſtituant aux portions de la ligne courbe leurs cordes, aux portions du triligne les rectangles compris de chaque ordonnée & d'une des petites portions égales de l'axe; & de même aux ſolides : ce qui ne change rien, puiſque la ſomme des portions ſubſtituées ne differe de la ſomme des véritables, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Donc on conclura néceſſairement dans cette nouvelle balance la proportion dont il s'agit, & par conſéquent elle ſe conclura auſſi dans l'autre.

J'ai voulu faire cet avertiſſement, pour montrer que tout ce qui eſt démontré par les véritables regles des Indiviſibles, ſe démontrera auſſi à la rigueur & à la maniere des Anciens; & qu'ainſi l'une de ces méthodes ne differe de l'autre qu'en la maniere de parler : ce qui ne peut bleſſer les perſonnes raiſonnables, quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par-là. Et c'eſt pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la ſuite d'uſer de ce langage des Indiviſibles, *la ſomme des lignes*, ou *la ſomme des plans*; & ainſi quand je conſidérerai, par exemple (*Fig.* 4.), le diametre d'un demi-cercle

Fig. 4.

demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées $Z M$, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, *la somme des ordonnées*, qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des Indivisibles, & qui s'imaginent que c'est pécher contre la Géométrie, que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par-là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diametre, dont la somme est certainement un plan, qui ne differe de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Ce n'est pas que ces mêmes lignes $Z M$ ne puissent être multipliées par d'autres portions égales d'une autre ligne quelconque qui soit, par exemple, double de ce diametre, comme en la *Figure* 5; & alors la somme de ces lignes $Z M$ formera un espace double du demi-cercle, savoir, une demi-ellipse: & ainsi la somme des mêmes lignes $Z M$ formera un espace qui sera plus ou moins grand, selon la grandeur de la ligne droite, par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées, c'est-à-dire, selon la distance qu'elles garderont entre elles. De sorte que quand on parle de *la somme* Fig. 5.

d'une multitude indéfinie de lignes, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales & indéfinies de laquelle elles soient multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées) il faut sousentendre que c'est celle des divisions de laquelle elles sont nées, comme en l'exemple de la *Fig.* 4, où les ordonnées *ZM* du demi-cercle étant nées des divisions égales du diametre, lorsqu'on dit simplement *la somme des lignes ZM*, sans exprimer quelle est la droite par les portions de laquelle on veut les multiplier, on doit entendre que c'est le diametre même, parce que c'est le naturel : & si on vouloit les multiplier par les portions d'une autre ligne, il faudroit alors l'exprimer.

Il faut entendre la même chose quand toutes les lignes seroient courbes, tant celles dont on considere la somme, que celle par les portions de laquelle on les multiplie : ou quand les unes sont droites & les autres courbes, comme, par exemple, en la *Fig.* 4, si l'on dit simplement ainsi, *la somme de tous les arcs CM*, compris entre le point *C* & chacune des ordonnées, on doit entendre la somme des rectangles compris de chacun de ces arcs *CM* étendus en ligne droite, & de chacune des petites portions égales du diametre *ZZ*, *ZZ*, *&c.*

Fig. 6. Ainsi en la *Fig.* 6, où l'arc de 90 dégrés *BC* est

est divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où sont menés les sinus droits DE, si on dit simplement ainsi, *la somme des sinus* DE, on entendra par-là la somme des rectangles compris de chaque sinus DE & de chacun des petits arcs égaux DD considérés comme étendus en ligne droite; parce que ces sinus sont nés des divisions égales de l'arc: & si on vouloit les multiplier par les portions égales d'une autre ligne, il faudroit l'exprimer, & dire, *la somme des sinus multipliés par les portions égales d'une telle ligne.*

Il faut entendre la même chose de la somme des quarrés de ces lignes & de leurs cubes, &c. Ainsi si on dit dans la même *Fig. 6*, *la somme des quarrés des sinus* DE, il faut entendre la somme des solides faits du quarré de chaque sinus multiplié par l'un des petits arcs égaux DD: & si dans la *Fig.* 4 on dit, *la somme des quarrés des arcs* CM, il faut entendre la somme des solides faits du quarré de chaque arc CM (étendu en ligne droite) multiplié par chacune des petites portions égales ZZ; & ainsi en toutes sortes d'exemples.

En voilà certainement plus qu'il n'étoit nécessaire pour faire entendre que le sens de ces sortes d'expressions, *la somme des lignes*, *la somme des plans*, *&c.*, n'a rien que de très-conforme à la pure Géométrie.

La

La même Méthode générale pour les centres de gravité, énoncée autrement.

UNE grandeur quelconque étant proposée, comme il a été dit, & le même ordre de plans qui la coupent : je dis que la somme de toutes les portions de cette grandeur, comprises entre un des plans extrêmes & un chacun de tous les plans, est à la grandeur entiere prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par sa balance, comme le bras sur l'autre plan extrême, c'est-à-dire, comme la distance entre son centre de gravité & cet autre plan extrême, est à la balance entiere.

Autrement encore :

Je dis que la somme de toutes les portions de la grandeur, comprises entre un des plans extrêmes & un chacun de tous les plans, est égale à la grandeur entiere multipliée par son bras sur l'autre plan extrême.

Soit proposée, par exemple, la ligne *CFB* (*Figure* 3.) : je dis que la somme des portions *CFB*, *IFB*, *GFB*, *FB*, est égale à la ligne entiere *CFB* multipliée par le bras *TA*.

Fig. 3.

Car la somme de ces lignes n'est autre chose que la somme triangulaire des portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB*, à commencer par *C* : donc la droite *BA* est une balance divisée en un nombre indéfini de parties

parties égales aux points *E, H, &c.*, auxquels points de division (comme il a déja été dit) pendent pour poids les petites portions *CI, IG, GF, FB,* & à l'un desquels points de division se rencontre le centre de gravité *T*. Donc, par la seconde proposition de la balance, la somme triangulaire de ces portions à commencer par *C*, c'est-à-dire, la simple somme des portions *CFB, IFB, GFB, FB,* est égale à la simple somme des petites portions *CI, IG, GF, FB,* c'est-à-dire, la ligne *CFB*, prise autant de fois qu'il y a de points (ou de parties) dans le bras *TA*, c'est-à-dire, multipliée par le bras *TA*. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera de même, si la grandeur proposée est le triligne *ABC*, que la somme des espaces *BCA, EFCA, HGCA, KICA,* est égale à l'espace *BCA*, multiplié par le bras *TB*. Et de même pour les solides, &c.

AVERTISSEMENT.

Quand j'ai parlé de la somme des lignes *CFB, IFB, GFB, FB,* on n'a dû entendre autre chose sinon la somme des rectangles compris de chacune de ces lignes, & de chacune des petites portions égales *BE, EH, &c.*, (c'est-à-dire, avec chacune des distances égales d'entre les plans voisins); & qu'ainsi cette multitude indéfinie de petits rectangles de même hauteur forment un plan. C'est ce

que

que j'ai déja assez dit dans les avertissements précédents.

De même, quand j'ai parlé de la somme des espaces *BCA, EFCA, HGCA, KICA,* on a dû entendre que chacun de ces espaces fût multiplié par chacune de ces petites distances égales d'entre les plans voisins *BE, EH, &c.*, & formassent ainsi une multitude indéfinie de petits solides prismatiques, tous de même hauteur, la somme desquels formera un solide, qui est celui que l'on considere quand on a parlé de la somme de ces plans.

On doit entendre la même chose par la somme des solides; car il faut entendre de même qu'ils soient tous multipliés par ces mêmes portions égales; ou au moins (si l'on ne veut pas admettre une quatrieme dimension) qu'on prenne autant de lignes droites qui soient entre elles en même raison que ces solides, lesquelles étant multipliées chacune par chacune de ces parties égales *BE, EH, &c.*, elles formeront un plan qui servira de même à trouver la raison cherchée. Ce qu'il ne sera plus nécessaire de redire.

COROLLAIRE PREMIER.

De cette méthode s'ensuit ce Corollaire : *Si la grandeur est donnée & la somme de toutes ses portions compriſes entre un des plans extrêmes, & chacun*

cun des autres plans, & que la balance soit aussi donnée : je dis que les deux bras seront aussi donnés.

Soit proposée, par exemple (*Fig.* 7.) la ligne courbe de la demi-Roulette AYC, laquelle soit supposée être donnée de grandeur, & qu'on sache qu'elle est double de l'axe CF qui soit aussi donné. Soit aussi supposé qu'ayant mené les ordonnées ZY, coupants l'axe en Z, en un nombre indéfini de parties égales, & la Roulette aux points Y, la somme de toutes les portions CY de la courbe soit aussi donnée : je dis que la distance entre le centre de gravité de cette courbe AYC, & la droite AF sera donnée. Fig. 7.

Car la somme de toutes les courbes CY est donnée par l'hypothese ; & on sait en effet d'ailleurs que cette somme est double de la somme des droites CM, menées de C aux points où les ordonnées coupent la circonférence, ou de la somme des droites ZO, (qui soient les ordonnées de la parabole COG, dont CF soit l'axe, & dont le côté droit soit égal à la même CF; car alors chaque CM quarré, ou FC en CZ, c'est-à-dire, le rectangle FCZ, sera égal à ZO quarré) : & ainsi la somme des lignes courbes CY est double de l'espace de la parabole CFG, lequel étant les deux tiers de CF quarré, la somme des courbes CY sera égale aux quatre tiers du quarré de CF.

Mais, par la précédente, la même somme est égale

le au rectangle compris de la courbe CA (ou de deux fois la droite CF), & du bras de la courbe sur AF. Donc quatre tiers du quarré de CF, sont égaux à deux fois CF, multipliée par le bras cherché sur AF; donc ce bras est donné, & égal aux deux tiers de CF, puisque les deux tiers de CF, multipliés par deux fois CF, sont égaux à quatre tiers du quarré de CF.

COROLLAIRE II.

La converse de ce Corollaire sera aussi véritable, savoir : *Si une grandeur est donnée & les bras de la balance aussi : la somme de ses portions comprises entre un des plans extrêmes, & chacun des autres, sera donnée.*

Fig. 8. Soit donné, par exemple (*Fig.* 8.) l'arc de cercle de quatre-vingt-dix dégrés BMC, duquel je suppose que le centre de gravité étant Y, son bras YX soit aussi donné : je dis que la somme des arcs BM, compris entre le point B & chacune des ordonnées menées des divisions égales & indéfinies du rayon BA, est aussi donnée.

Car la somme de ces arcs sera égale au rectangle, compris de l'arc entier BC & de YX, lequel rectangle étant égal, comme on le connoît d'ailleurs, au quarré du rayon AB; il s'ensuit aussi que la somme des arcs BM, est égale au même quarré du rayon AB.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

J'ai voulu donner ces exemples de l'usage de cette méthode, tant pour connoître les bras de la balance par la connoissance de la somme de ces portions, que pour connoître la somme de ces portions par la connoissance des bras. J'en donnerois bien ici d'autres exemples plus considérables; mais on les verra dans la suite, & je ne veux donner ici que les propositions qui servent comme de Lemmes au reste du discours.

DÉFINITION.

S'il y a tant de quantités qu'on voudra A, B, C, lesquelles on prenne en cette sorte : premiérement, la somme triangulaire de toutes, savoir, ABC, BC, C; ensuite la somme triangulaire de toutes, excepté la premiere, savoir, BC, C; puis la somme triangulaire de toutes, excepté les deux premieres, savoir, C, &c. :

J'appelle la somme de ces quantités prises de cette sorte, *la somme pyramidale* de ces mêmes quantités.

En voici la figure, où l'on voit que *la somme pyramidale n'est autre chose que la somme des sommes triangulaires* qui sont ici séparées par des barres.

$$\begin{array}{rrr} A & B & C \\ & B & C \\ & & C \\ \hline & B & C \\ & & C \\ \hline & & C \\ \hline 1 & 3 & 6 \end{array}$$

Or

Or il eſt à remarquer que la nature de cette ſorte de combinaiſon eſt telle, que ſi on prend deux fois cette même ſomme pyramidale, comme on voit ici, & qu'on en ôte la premiere ſomme triangulaire qui eſt ſéparée du reſte par une double barre, il arrivera dans ce reſte que la premiere quantité *A* s'y trouvera une fois; la ſeconde *B*, quatre fois; la troiſieme *C*, neuf fois; & ainſi toujours ſelon la ſuite des nombres quarrés.

A	*B*	*C*
	B	*C*
		C
	B	*C*
		C
		C
A	*B*	*C*
	B	*C*
		C
	B	*C*
		C
		C
1	4	9

Et cela eſt aiſé à démontrer par la nature des combinaiſons qui forment ces ſommes triangulaires & pyramidales, qui eſt telle :

Dans les ſommes triangulaires, la premiere grandeur ſe prend une fois, la ſeconde deux fois, la troiſieme trois fois, &c., ſelon l'ordre des nombres naturels. Et dans les ſommes pyramidales la premiere grandeur ſe prend une fois, la ſeconde trois fois, la troiſieme ſix fois, &c., ſelon l'ordre des nombres triangulaires. Or tout nombre triangulaire, pris deux fois & diminué de ſon expoſant, eſt le même que le quarré de ſon expoſant; comme,

comme, par exemple, le troiſieme nombre triangulaire 6 étant doublé, eſt 12, qui diminué de l'expoſant 3, il reſte 9, qui eſt le quarré de 3.

Cela eſt aiſé par Maurolic (1); & de-là paroît la vérité de ma propoſition.

D'où il s'enſuit que s'il y a tant de quantités qu'on voudra *A*, *B*, *C*, dont la premiere ſoit multipliée par le quarré de 1, la ſeconde par le quarré de 2, la troiſieme par le quarré de 3, &c.: leur ſomme priſe de cette ſorte, ſera égale à deux fois leur ſomme pyramidale, moins leur ſomme triangulaire.

AVERTISSEMENT.

On verra dans la ſuite l'uſage de cette propriété, dans l'application qui s'en fera aux lignes droites ou courbes; & pour faciliter l'intelligence de cette application, j'en donnerai ici quelques exemples.

Soit donc dans la troiſieme Figure, par exem- Fig. 3.

(1) Maurolic, Abbé de Meſſine, fleuriſſoit vers le milieu du ſeizieme ſiecle. C'étoit un Géometre profond pour ſon temps. Nous avons de lui divers Traités, concernant la Sphere, le Comput Eccléſiaſtique, les inſtruments d'Aſtronomie, l'Arithmétique, la Perſpective, la Muſique, &c. Dans ſon Traité d'Arithmétique, il démontre pluſieurs propriétés de différentes ſuites de nombres, comme la ſuite des nombres ſimples, la ſuite des nombres quarrés, la ſuite des nombres triangulaires, &c. C'eſt à cet Ouvrage que Paſcal fait ici alluſion.

ple, l'axe *BA* du triligne *BAC*, divisé en un nombre indéfini de parties égales, aux points *K*, *H*, *E*, d'où soient menées les ordonnées : on est assez averti par les choses précédentes, que la simple somme de ces ordonnées est égale à l'espace du triligne.

Je dis maintenant que la somme triangulaire de ces ordonnées *IK*, *GH*, *FE*, &c., à commencer du côté de la base *CA*, est la même chose que la somme des rectangles compris de chaque ordonnée, & de sa distance de la base ; c'est-à-dire, la somme des rectangles *IK* en *KA*, *GH* en *HA*, *FE* en *EA*.

Ce qui est bien aisé à démontrer en cette sorte. Puisque les distances *AK*, *KH*, *HE*, sont égales, & qu'ainsi en prenant *AK* pour 1, *AH* sera 2, *AE*, 3, &c. : il s'ensuit que la somme des rectangles *IK* en *KA*, *GH* en *HA*, *FE* en *EA*, &c., n'est autre chose que *IK* multiplié par 1, *GH* par 2, *FE* par 3, &c. ; ce qui n'est que la même chose que la somme triangulaire de ces droites *IK*, *GH*, *FE*, comme je l'ai montré dans le commencement.

Je dis de même que deux fois la somme pyramidale de ces mêmes ordonnées, à commencer du côté de la base *CA*, est égale à la somme des solides faits de ces mêmes ordonnées multipliées chacune par le quarré de sa distance de la base ;

base ; c'est-à-dire, IK en KA quarré + GH en HA quarré, &c.

Car ces quarrés étant 1, 4, 9, &c., il s'ensuit que la somme des ordonnées multipliées chacune par chacun de ces quarrés, est la même chose que leur somme pyramidale prise deux fois, moins leur somme triangulaire prise une fois. Or cette somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales, puisqu'il y a une dimension de moins, & que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini ; ce qui ne change point l'égalité.

Car il faut remarquer que comme la simple somme de ces lignes fait un plan, ainsi leur somme triangulaire fait un solide, qui est composé d'autant de plans qu'il y a de divisions dans l'axe ; lesquels plans sont formés chacun par les simples sommes particulieres des ordonnées, dont la somme totale fait la somme triangulaire. En effet la somme triangulaire de ces ordonnées se prend ainsi : premiérement, en les prenant toutes ensemble CA, IK, GH, FE, ce qui fait un plan égal au triligne : ensuite en les prenant toutes, excepté la premiere, c'est-à-dire, IK, GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au triligne BIK : & ensuite GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au tri-

ligne *BGH*, &c. De sorte qu'il y a autant de plans que de divisions, chacun desquels plans étant multiplié par les petites portions de l'axe, forment autant de petits solides prismatiques d'égale hauteur, tous lesquels ensemble font un solide, comme je l'ai dit ailleurs.

De la même sorte, la somme pyramidale des mêmes ordonnées fait un plan-plan, composé d'autant de solides qu'il y a de portions dans l'axe, lesquels solides sont formés chacun par les sommes triangulaires particulieres, dont la somme totale fait la somme pyramidale. Car leur somme pyramidale se prend ainsi : premiérement, en prenant la somme triangulaire de toutes, qui fait un solide, comme nous venons de dire ; & ensuite la somme triangulaire de toutes, excepté la premiere, qui fait un autre solide, &c. Et ainsi autant qu'il y aura de divisions, il y aura aussi de solides, lesquels étant multipliés chacun par une des petites divisions de l'axe, formeront autant de petits plan-plans de même hauteur, qui tous ensemble font le plan-plan dont il s'agit.

Et l'on ne doit pas être blessé de cette quatrieme dimension, puisque, comme je l'ai dit ailleurs, en prenant des plans au lieu des solides, ou même de simples droites, qui soient entre elles comme les sommes triangulaires particulieres, qui font toutes ensemble la somme pyramidale : la somme

me de ces droites fera un plan qui tiendra lieu de ce plan-plan.

Il faut entendre la même chose des lignes courbes *BF*, *BFG*, *BFI*, *BFC*, & de leurs sommes triangulaires & pyramidales. Car tout cela est général pour toutes sortes de grandeurs, chacune selon sa nature.

Je viens maintenant aux problêmes proposés publiquement touchant la Roulette, desquels voici ceux que je proposai dans le premier Écrit au mois de Juin. Étant donnée (*Fig.* 7.) une portion quelconque *CZY*, de la demi-Roulette, retranchée par une quelconque ordonnée à l'axe; trouver: Fig. 7.

1°. La dimension & le centre de gravité de l'espace *CZY*.

2°. La dimension & le centre de gravité de son demi-solide autour de la base *ZY*, c'est-à-dire, du solide, fait par le triligne *CZY*, tourné autour de la base *ZY* d'un demi-tour seulement.

3°. La dimension & le centre de gravité de son demi-solide autour de l'axe *CZ*.

Et ceux que je proposai au commencement d'Octobre dans l'Histoire de la Roulette, sont ceux-ci:

1°. Trouver le centre de gravité de la ligne courbe *CY*.

2°. Trouver la dimension & le centre de gravité de la surface de son demi-solide autour de la base.

3°. Trouver la dimenſion & le centre de gravité de la ſurface de ſon demi-ſolide autour de l'axe.

Pour réſoudre ces problêmes, la premiere choſe que je fais, eſt de ſubſtituer à ces demi-ſolides, des onglets qui y ont un grand rapport, & dont voici la définition.

DÉFINITION.

Fig. 12. Soit un triligne rectangle ABC, (*Fig.* 12.) compoſé de deux droites AB, AC, dont celle qu'on voudra comme AB, ſera l'axe, & l'autre la baſe, faiſant angle droit, & de la courbe quelconque BC. Soient diviſées en un nombre indéfini de parties égales, tant AB aux points D, que AC aux points E, & encore la courbe même BC aux points L; & que chacune des parties de AB, ſoit égale à chacune des parties de AC, & encore à chacune des parties de la courbe BC (Car il ne faut pas craindre l'incommenſurabilité, puiſqu'en ôtant d'une de deux grandeurs incommenſurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commenſurables). Soient maintenant des points D, menées des perpendiculaires à l'axe juſqu'à la courbe, elles s'appelleront *les ordonnées à l'axe.* Soient menées des points E, des perpendiculaires à la baſe juſqu'à la courbe, elles s'appelleront *les ordonnées à la baſe.* Soient encore menées des point L, des perpendiculaires à la baſe, elles s'appelleront

pelleront *les sinus sur la base*. Soient enfin menées des mêmes points *L*, des perpendiculaires à l'axe, elles s'appelleront *les sinus sur l'axe*.

AVERTISSEMENT.

On suppose toujours ici que le triligne est une figure plane, & que la courbe est de telle sorte, que tant les sinus, que les ordonnées ne la rencontrent qu'en un point. Et les portions de l'axe de la base & de la courbe, sont toutes égales, tant entre elles, que les unes aux autres.

Il faut aussi remarquer que les sinus different des ordonnées, en ce que les sinus naissent des divisions égales de la courbe, & les ordonnées des divisions égales de l'axe ou de la base.

Soient maintenant entendues des perpendiculaires, élevées sur le plan de tous les points du triligne, qui forment un solide prismatique infini, qui aura le triligne pour base, lequel soit coupé par un plan incliné passant par l'axe, ou par la base du triligne : la portion de ce solide, retranchée par le plan, s'appellera *onglet*.

Que si l'on fait au-dessous du triligne ce que je viens de figurer au-dessus ; c'est-à-dire, que les perpendiculaires de tous les points du triligne soient prolongées de l'autre part, & coupées par un autre plan également incliné de l'autre part, il se formera au-dessous du plan du triligne un autre on-

glet, égal & semblable à celui du dessus : & tous deux ensemble s'appelleront *le double onglet.*

Or il est visible que tant l'onglet que le double onglet, sera compris de trois plans & d'une portion de la surface *cylindracée*, laquelle portion s'appellera *la surface courbe de l'onglet* ou du *double onglet.*

Et l'onglet ou le double onglet, qui seront retranchés par des plans inclinés, passant par la base du triligne, s'appelleront *l'onglet*, ou *le double onglet de la base.*

Et l'onglet ou le double onglet, qui seront retranchés par des plans passant par l'axe, s'appelleront *l'onglet*, ou *le double onglet de l'axe.*

J'avertis que je suppose toujours ici que le plan qui retranche les onglets est incliné à celui du triligne de 45 dégrés.

Je donnerai maintenant ici les rapports qu'il y a entre le double onglet de l'axe, par exemple, & le demi-solide du triligne tourné à l'entour de l'axe.

Je dis donc, premiérement, que le double onglet est au demi-solide, comme le rayon au quart de la circonférence.

Fig. 10. Car soit entendu (*Fig.* 10.) le triligne *CFA*, tourné à l'entour de l'axe *CF*; & que le solide qui en sera formé, soit coupé par un plan passant par l'axe *CF*, perpendiculaire au plan du triligne qui coupe

coupe le solide en deux demi-solides égaux, dont je considérerai celui qui est du côté du triligne. Maintenant soit divisé l'axe en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZY. Soit aussi (*Fig.* 11.) un demi-cercle quelconque RYS, & le rayon ZY, perpendiculaire au diametre RS. Soit aussi la touchante menée du point Y, dans laquelle soient prises YM, YN, égales chacune au rayon. Donc chacune des droites ZM, ZN, fera avec YZ un angle de 45 dégrés (qui est l'angle d'inclinaison des plans qui engendrent le double onglet sur le plan du triligne) & l'angle entier MZN sera droit. Fig. 11.

Maintenant (*Fig.* 10.) soient entendus des plans élevés sur chacune des ordonnées ZY, perpendiculairement au plan du triligne, qui coupent, tant le double onglet, que le demi-solide. Il est visible que la figure entiere $MYNZRS$, représentera la section que chacun de ces plans perpendiculaires passant par les ordonnées ZY, formeront, tant dans le double onglet, que dans le demi-solide autour de l'axe; c'est-à-dire, que les sections que chacun de ces plans formera dans le double onglet, seront des triangles rectangles & isosceles, dont les angles droits seront aux points Z (& qui seront semblables au triangle rectangle MZN), & la base de chacun de ces triangles sera double de chaque ordonnée ZY, de même que MN est double de

ZY.

ZY. Et le contenu de chaque triangle sera égal au quarré de son ordonnée; c'est-à-dire, de l'ordonnée sur laquelle il est formé, de même que le triangle *MZN* est égal au quarré de *ZY*.

Il est aussi visible que les sections que ces mêmes plans formeront dans le demi-solide, seront des demi-cercles, qui auront pour rayons les mêmes ordonnées *ZY*, & qui seront semblables au demi-cercle *RYS*; & lesquels auront par-tout aux triangles du double onglet, chacun au sien, la même raison que le demi-cercle *RYS* au triangle *MZN*.

D'où il paroît que les sections formées par les plans sur les droites *ZY*, étant toutes semblables, tant entre elles, qu'à la figure *MNZRS*; il arrivera que tous les triangles ensemble, formés dans le double onglet, seront à tous les demi-cercles ensemble formés dans le demi-solide, comme le triangle *MZN*, au demi-cercle *RYS*, ou comme le rayon, au quart de la circonférence; & qu'ainsi le double onglet sera au demi-solide, en la même raison du rayon au quart de la circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis, 2°. *que les centres de gravité, tant du double onglet (lequel soit au point* H*), que du demi-solide (lequel soit au point* V*) seront sur le plan du triligne.*

Cela

Cela eſt viſible, puiſque le plan du triligne ſépare en deux parties égales & toutes pareilles, tant le double onglet, que le demi-ſolide.

Je dis, 3°. que ces deux centres de gravité du double onglet & du demi-ſolide, & même celui du ſolide entier à l'entour de l'axe, ſont tous également diſtants de la baſe.

Car tous les triangles qui forment l'onglet, ſont entre eux en même raiſon que les demi-cercles qui forment le demi-ſolide; & partant en conſidérant *CF*, comme une balance, à laquelle ſoient pendus les triangles de l'onglet, ſes deux bras ſeront en même raiſon, que les deux bras de la même balance, en conſidérant qu'au lieu des triangles de l'onglet, on y pende les demi-cercles du demi-ſolide, ou même les cercles entiers qui formeroient le ſolide entier à l'entour de l'axe; & par conſéquent les centres de gravité du ſolide entier, & du demi-ſolide, & du double onglet, ſont tous également diſtants de la baſe *AF*.

Je dis, 4°. que le bras HT *(ou la diſtance entre le centre de gravité du double onglet & l'axe* CF*) eſt au bras* VT *(ou à la diſtance entre le centre de gravité du demi-ſolide & le même axe* CF*), comme le quart de la circonférence d'un cercle à ſon rayon.*

Car

Car en entendant, comme tantôt, des plans élevés perpendiculairement sur chaque ordonnée, ils formeront des sections dans l'onglet & dans le demi-solide, semblables au triangle *MZN*, & au demi-cercle *RYS*; & il arrivera que le centre de gravité de chaque triangle du double onglet, divisera toujours l'ordonnée en même raison; savoir, aux deux tiers depuis *Z*: & qu'aussi le centre de gravité de chaque demi-cercle divisera toujours l'ordonnée en même raison; savoir, en la raison de *ZP* à *ZY* (*Fig.* 11.), où le point *P* est le centre de gravité du demi-cercle *RYS*. Donc puisque toutes les ordonnées *ZY* sont divisées aux deux tiers, par les centres de gravité des triangles qui sont les portions du double onglet, de même que *ZY* est divisée aux deux tiers au point *O*; & que les mêmes ordonnées *ZY* sont aussi toutes divisées par les centres de gravité des demi-cercles, qui sont les portions du demi-solide, en même raison que *ZY* est divisée au point *P*: il s'ensuit que le bras de chaque triangle est au bras de chaque demi-cercle, toujours en la même raison que *OZ*, qui est le bras du triangle *MZN* sur *RS*, à *PZ*, qui est aussi le bras du demi-cercle *RYS*, à l'égard de *RS*. Et par conséquent le bras *HT* de tous les triangles ensemble, c'est-à-dire, du double onglet, est au bras *VT* de tous les demi-cercles ensemble, c'est-à-dire, du demi-solide, en

la

la même raiſon que OZ à ZP; laquelle on ſait être la même que le quart de la circonférence au rayon.

Je dis, 5°. que la ſurface courbe du double onglet eſt à la ſurface du demi-ſolide, comme le rayon au quart de la demi-circonférence.

Car, ſoit maintenant la courbe AYC, diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points Y; d'où ſoient menées les perpendiculaires ou ſinus YZ; & ſoient entendus de même des plans élevés perpendiculairement au triligne, paſſant par chacun des ſinus ZY, leſquels plans coupent, tant la ſurface courbe du double onglet, que celle du demi-ſolide. Il eſt viſible que les ſections que ces plans formeront dans la ſurface courbe du double onglet, ſeront des lignes droites, doubles des ſinus ZY, comme MN eſt double de YZ; & que les ſections que ces mêmes plans formeront dans la ſurface du demi-ſolide, ſeront des demi-circonférences, leſquelles ſeront par-tout aux droites formées dans la ſurface du double onglet, chacune à la ſienne, comme la demi-circonférence RYS, à la droite MN: & par conſéquent que toutes les droites enſemble de la ſurface courbe du double onglet, ſeront à toutes les demi-circonférences enſemble, en la même raiſon que la droite MN, à la demi-circonférence RYS, ou comme le

rayon

rayon au quart de la circonférence ; mais la somme de toutes les droites de la surface de l'onglet (c'est-à-dire, la somme des rectangles compris de chacune de ces droites, & des portions égales de la courbe *AYC*, des divisions de laquelle elles sont menées) compose la surface même ; & la somme de ces demi-circonférences de la surface du demi-solide, composent cette surface même, comme d'autres l'ont démontré, & entre autres le P. Tacquet (1).

Donc la surface courbe du double onglet est à la surface du demi-solide, comme le rayon au quart de la circonférence.

Je dis, 6°. que le centre de gravité de la surface courbe du double onglet, & le centre de gravité de la surface du demi-solide, & même celui de la surface du solide entier autour de l'axe, sont tous sur le plan du triligne, & tous également distants de la base AF.

Ce qui se démontrera de même qu'on a vu pour les centres de gravité de leurs solides.

Je dis, 7°. que le point H *étant maintenant le centre de gravité de la surface courbe du double onglet,*

(1) Pascal a ici en vue le Traité du P. Tacquet, *de Annullaribus & Cylindricis.*

&

& le point V *étant le centre de gravité de la surface du demi-solide : le bras* HT *sera au bras* VT, *comme le quart de la circonférence au rayon.*

Car en prenant (*Fig.* 11.) le point *I*, qui soit le centre de gravité de la demi-circonférence, on démontrera de même (*Fig.* 10.) que les sinus *YZ* seront tous divisés par les centres de gravité de chaque demi-circonférence, en même raison que *ZY* de la *Fig.* 11 l'est au point *I*. Et il est visible que dans la *Fig.* 10 les points *Y* sont les centres de gravité de chacune des droites du double onglet, & qu'ainsi les sinus *YZ* seront leurs bras. Donc les bras des droites du double onglet sont aux bras des demi-circonférences du demi-solide, chacune à la sienne, toujours en la même raison de *YZ* à *ZI* (*Fig.* 11.) Donc le bras de toutes les droites ensemble (ou de la surface courbe du double onglet) sera au bras de toutes les demi-circonférences ensemble (ou de la surface du demi-solide), en la même raison que *YZ* à *ZI*, laquelle on sait d'ailleurs être la même, que du quart de la circonférence au rayon.

AVERTISSEMENT.

Puisque celle qu'on veut des deux droites d'un triligne est prise pour l'axe & l'autre pour la base, tout ce qui a été dit de l'onglet de l'axe à l'égard du solide autour de l'axe, sera de même véritable

de

de l'onglet de la base à l'égard du solide à l'entour de la base, & se démontrera de même, puisqu'il ne faudra qu'appeller *axe* la droite qui étoit appellée *base*, & appeller *base* celle qui étoit appellée *axe*.

Voilà les rapports qui sont entre les demi-solides & les onglets. Par où il paroît que si on connoît la dimension & les centres de gravité des onglets & de leurs surfaces courbes, on connoîtra la même chose dans les demi-solides, par la comparaison du rayon au quart de la circonférence, dont on suppose ici que la raison est donnée.

Ainsi pour résoudre tous les problêmes proposés, il suffira de trouver ces trois choses : 1°. la dimension & le centre de gravité d'une portion quelconque de la Roulette CZY (*Fig.* 7.) : 2°. le centre de gravité de sa ligne courbe CY : 3°. la dimension & le centre de gravité des doubles onglets, tant de la base que de l'axe, & la dimension & le centre de gravité de leurs surfaces courbes. Ce sont donc là les problêmes que vous verrez ici.

Or pour arriver à ces connoissances sur le sujet des portions de la Roulette en particulier, je donnerai des propositions universelles pour connoître toutes ces choses en toutes sortes de trilignes généralement.

C'est, Monsieur, ce que j'ai cru devoir vous dire

dire avant que d'entrer en matiere, & que j'aurois pu peut-être mettre en moins de place, si j'y avois travaillé davantage; mais j'ai eu une raison particuliere de démêler de petites difficultés qui embarrassent ceux qui n'entendent pas la science des Indivisibles: auxquels ayant voulu proportionner ce discours, j'ai mis dans les Avertissements ce qui pouvoit leur être nécessaire, mais en articles détachés, afin de ne point ennuyer les autres qui n'auront qu'à les passer sans les lire. Je n'ai donc plus qu'à vous prier d'excuser les défauts que vous verrez ici, ce que j'espere de votre bonté, & de la connoissance que vous avez du peu de loisir que j'ai de m'appliquer à ces sortes d'études; ce qui fait que je vous envoie ce Discours à mesure que je l'écris: de sorte qu'il pourra bien m'arriver de répéter plus d'une fois les mêmes choses, & peut-être que je l'ai déja fait, ne me souvenant pas assez de ce que j'ai une fois envoyé.

Il me reste encore à vous dire que dans la suite de ce discours, je me servirai souvent de cette expression: *une multitude indéfinie*, ou *un nombre indéfini* de grandeurs ou de parties, &c., par où je n'entends autre chose, sinon une multitude ou un nombre plus grand qu'aucun nombre donné.

Je vous avertirai encore que j'use indifféremment de ces deux termes, *donné* ou *connu*, pour signifier une même chose: ce n'est pas que je ne

ſache qu'il y a de la différence, en ce que, ſelon Euclide & les Anciens, une grandeur eſt *donnée*, quand on peut y en donner une égale, & qu'ainſi l'eſpace du cercle eſt donné, quand ſon rayon eſt donné; au lieu qu'on ne peut pas dire abſolument qu'il ſoit *connu*, parce que le mot de *connu* enferme quelque autre choſe. Mais dans ce diſcours j'appelle *un eſpace donné* ou *connu*, celui qui a une raiſon donnée à un quarré connu; & de même j'appelle *un ſolide donné* ou *connu*, celui qui a une raiſon donnée à un parallélépipede connu : & j'appelle *raiſon donnée* ou *connue*, la raiſon de nombre connu à nombre connu, ou de droite connue à droite connue, ou de la circonférence d'un cercle à une portion connue de ſon diametre, & je n'en reçois aucune autre pour *donnée* ou *connue*.

Il m'arrivera ſouvent de marquer un même point par pluſieurs lettres, comme, par exemple (*Fig.* 31.) où le diametre *FM* étant diviſé en un nombre indéfini de parties égales aux points *O*, d'où ſont menées toutes les ordonnées, entre leſquelles je conſidere particuliérement celle qui part d'un point donné *P* : je marque de la lettre *A* tous les points où les ordonnées coupent la demi-circonférence; & je marque encore de la lettre *R* les points où les ordonnées *OA* qui ſont entre *P* & *M*, coupent la circonférence; & je marque de la lettre *I* les points où les ordonnées *OA* qui ſont entre *P* & *F*, coupent

pent la circonférence : & ainſi quand je dis les ordonnées OA, je les comprends toutes généralement ; quand je dis les ordonnées OR, je n'entends que celles qui ſont entre P & M; & de même quand je dis OC, j'entends celles qui ſont entre G & P, parce que le point C eſt marqué particuliérement pour celles-là, comme on le voit dans la Figure.

Je crois auſſi avoir oublié de vous dire, en définiſſant les trilignes rectangles, qu'encore que la ligne BC, qui joint les extrémités des deux droites perpendiculaires AB, AC (& qui eſt comme l'hypothénuſe du triligne) ne ſoit pas une ligne courbe, mais une ligne droite, ou ligne mixte, ce ſeroit toujours un triligne rectiligne ou mixtiligne : pourvu que cette condition s'y rencontre, que les ordonnées, tant à l'axe qu'à la baſe, ne coupent jamais l'hypothénuſe du triligne en deux points. Ainſi un triangle rectangle ſera un triligne rectiligne ; & ainſi (*Fig.* 13 & 14.) le triangle $BACFB$ eſt un triligne, dont les deux droites ſont BA, AC, & l'hypothénuſe eſt la courbe BFC (*Fig.* 13.), ou la ligne mixte BFC (*Fig.* 14.) compoſée de la courbe CF & de la droite FB parallele à la baſe AC : toutes leſquelles ſortes de trilignes ſont conſidérées ici généralement, le Diſcours devant s'entendre de tous ſans exception.

TRAITÉ
DES TRILIGNES RECTANGLES, *ET DE LEURS ONGLETS.*

LEMME GÉNÉRAL.

Fig. 11. SOIT *un triligne rectangle quelconque* (Fig. 11.) *tel qu'il a été défini dans la Lettre précédente* ABC, *dont les ordonnées à l'axe soient* DF, *& les ordonnées à la base soient* EG, *coupant la courbe en* G; *d'où soient remenées des perpendiculaires* GR *à l'axe, prolongées indéfiniment, & lesquelles j'appelle* les contre-ordonnées : *soient aussi prolongées indéfiniment les ordonnées à l'axe. Et soit sur l'axe* AB, *& de l'autre côté du triligne, une figure quelconque* BKOA, *dans le même plan, comprise entre les paralleles extrêmes* CA, BK, (*cette figure s'appellera l'*adjointe *du triligne*). *Que cette figure adjointe soit coupée par les ordonnées* FD, *aux points* O, *& par les contre-ordonnées* GR, *aux points* I. *Je dis que la somme des rectangles* FD *en* DO, *compris de chaque ordonnée du triligne & de chaque ordonnée de la figure adjointe, est égale à la somme des espaces* ARI, *qui sont les portions de l'adjointe, comprises depuis chacune des contre-ordonnées,*

ordonnées, jusqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de A.

Car soit entendu le triligne *BAC* être multiplié par la figure *BAOK*, & former par ce moyen un certain solide : c'est-à-dire, soient de tous les points du triligne *ABC*, élevées des perpendiculaires au plan, qui forment un solide prismatique infini, ayant le triligne *ABC* pour base. Soit aussi entendue la figure *BAOK*, tournant sur l'axe *BA*, relevée perpendiculairement au plan du triligne *ABC*; & soit enfin entendue la base *AC* s'élever toujours parallélement à soi-même, le point *A* parcourant toujours le bord de la figure relevée *AOIKB*, jusqu'à ce qu'elle retombe au point *B*: la portion du solide prismatique infini, retranchée par la surface décrite par la ligne *CA* dans son mouvement, sera le solide que l'on considere ici, laquelle sera comprise de quatre surfaces, entre lesquelles le triligne tiendra lieu de base.

Soient maintenant entendus deux ordres de plans perpendiculaires à celui du triligne, les uns passant par les ordonnées *DF* à l'axe (lesquels coupant le solide, donneront pour sections les rectangles *FD* en *DO*, compris de chaque ordonnée *DF*, & de chaque ordonnée *DO* de la figure adjointe): & les autres plans passant par les ordonnées *GE*, lesquels seront paralleles à l'adjointe *BAOK*, relevée comme il a été dit, & coupant le même so-

lide, formeront pour sections des figures égales & toutes semblables aux portions *RIA*, compriſes depuis chaque contre-ordonnée *RI*, juſqu'à l'extrémité de la figure du côté de *A* (ce qui paroît par les paralléliſmes, tant de chacun de ces plans avec l'adjointe relevée, que de la ligne *AC* avec ſoi-même dans tout ſon mouvement). Or il eſt viſible que les ſommes des ſections, faites par chacun de ces ordres de plans, ſont égales chacune au ſolide, & par conſéquent entre elles (puiſque les portions indéfinies *AE*, *EE*, &c. de la baſe, ſont égales, tant entre elles, qu'aux portions égales & indéfinies *AD*, *DD*, &c. de l'axe); c'eſt-à-dire, que la ſomme de tous les rectangles *FD* en *DO*, eſt égale à la ſomme de toutes les portions *RIA*; ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Fig. 15. *Soit* ABK (Fig. 15.) *un triangle rectangle & iſoſcele, dont* B *ſoit l'angle droit; ſoit auſſi* AIK *une parabole dont* A *ſoit le ſommet,* AB *la touchante au ſommet, &* AB *ou* BK *le côté droit; & ſoit une droite quelconque* RIV, *parallele à* BK, *coupant* AB *en* R, *la parabole en* I, *& la droite* AK *en* V.

Je dis, 1°. *que le triangle iſoſcele* ARV *eſt égal à la moitié de* AR *quarré.* Cela eſt viſible.

Je dis, 2°. *que le triligne parabolique* ARI, *multiplié par* AB, *eſt égal au tiers de* AR *cube.*

Car

Car le triligne *ARI*, par la nature de la parabole, est le tiers du rectangle *AR* en *RI*. Donc en multipliant le tout par *AB*, le triligne *ARI* multiplié par *AB*, sera le tiers du solide de *AR* en *RI* en *AB*; c'est-à-dire, de *AR* cube, puisque *RI* en *AB*, est égal à *AR* quarré.

Je dis, 3°. *que si* AIK *est une parabole cubique* (*c'est-à-dire, que les cubes des ordonnées soient entre eux comme les portions de l'axe, ou, ce qui est la même chose, que* AB *quarré en* RI, *soit toujours égal à* AR *cube*) : *le triligne* ARI, *multiplié par* AB *quarré, sera égal au quart de* AR *quarré-quarré.*

Car, par la nature de cette parabole, le triligne *ARI* est le quart du rectangle *AR* en *RI*; donc en multipliant le tout par *AB* quarré, on démontrera le reste comme en l'article précédent.

Et de même pour les autres paraboles quarré-quarrées, quarré-cubiques, &c.

RAPPORTS entre les ordonnées à l'axe & les ordonnées à la base d'un triligne rectangle quelconque.

PROPOSITION PREMIERE.

LA somme des ordonnées à la base est la même que la somme des ordonnées à l'axe.

Car l'une & l'autre est égale à l'espace du triligne.

PROPOSITION II.

La somme des quarrés des ordonnées à la base est double des rectangles compris de chaque ordonnée à l'axe, & de sa distance de la base; c'est-à-dire, Fig. 13. (Fig. 13.) *que la somme de tous les* EG *quarré est double de la somme de tous les rectangles* FD *en* DA.

Car si le triligne ABC a pour adjointe un triangle rectangle & isoscele ABK, dont les côtés AB, BK soient égaux entre eux, & la base AK une ligne droite qui soit coupée par les ordonnées FD, aux points O, & par les contre-ordonnées GR, aux points I; il arrivera, comme il a été démontré, que la somme de tous les rectangles FD en DO, ou FD en DA (puisque par-tout DO sera égale à DA), sera égale à la somme de tous les triangles ARI; c'est-à-dire, par le Lemme précédent, à la moitié de la somme de tous les AR quarré, ou de tous les EG quarré.

COROLLAIRE.

Donc la somme des quarrés des ordonnées à la base est double de la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.

Car la somme des rectangles FD en DA, est la même chose que la somme triangulaire des ordonnées FD, à commencer du côté de A, comme il a été démontré dans la Lettre à M. de Carcavi.

PROPOSITION

PROPOSITION III.

La somme des cubes des ordonnées à la base est triple des solides, compris de chaque ordonnée à l'axe, & du quarré de sa distance de la base : la somme de tous les EG *cube est triple de la somme de tous les* FD en DA *quarré.*

Car si la figure adjointe *ABK* est composée des deux droites perpendiculaires *AB*, *BK*, & de la parabole *AOK*, telle qu'elle a été supposée dans le Lemme précédent ; il arrivera toujours, par le Lemme général, que la somme des rectangles *FD* en *DO*, sera égale à la somme des portions *ARI* qui seront ici des trilignes paraboliques. Donc en multipliant le tout par *BA*, la somme des solides *FD* en *DO* en *AB*, ou *FD* en *DA* quarré, sera égale à la somme des trilignes *ARI*, multipliés par *AB* ; c'est-à-dire, par le Lemme précédent, au tiers de la somme des *AR* cube, ou des *EG* cube.

COROLLAIRE.

Donc la somme des cubes des ordonnées à la base est égale à six fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.

Car la somme des *EG* cube est triple de la somme des *FD* en *DA* quarré ; & la somme des *FD* en *DA* quarré est double de la somme pyramidale des ordonnées *FD*, à commencer du côté de

de *A*, comme il a été démontré dans la même Lettre.

PROPOSITION IV.

On démontrera de même que la somme des quarré-quarrés des ordonnées à la base, est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le cube de sa distance de la base; & ainsi toujours.

AVERTISSEMENT.

Puisque celle qu'on veut des deux droites d'un triligne est prise pour l'axe & l'autre pour la base, tout ce qui a été dit des ordonnées à la base, à l'égard des ordonnées à l'axe, pourra se dire de même des ordonnées à l'axe, à l'égard des ordonnées à la base.

PROPOSITION V.

La somme des solides compris du quarré de chaque ordonnée à la base, & de sa distance de l'axe, est égale à la somme des solides, compris du quarré de chaque ordonnée à l'axe & de sa distance de la base: je dis que la somme des solides de tous les EG *quarré en* EA, *est égale à la somme des solides de tous les* DF *quarré en* DA.

Ou ce qui est la même chose:

La somme triangulaire des quarrés des ordonnées à la base, est égale à la somme triangulaire des quarrés des ordonnées à l'axe, en commençant toujours

jours du côté du centre du triligne; c'eſt-à-dire, du point où l'axe & la baſe ſe coupent: je dis que la ſomme triangulaire de tous les EG *quarré, eſt égale à la ſomme triangulaire de tous les* DF *quarré, en commençant toujours du côté de* A.

Car ſi on entend que le double onglet de la baſe ſoit formé ſur le triligne *CAB*, dont le centre de gravité ſoit au point *Y*, d'où ſoient menées les perpendiculaires *YX*, *YZ*, qui ſeront les bras ſur l'axe & ſur la baſe, & qu'on entende que ce double onglet ſoit coupé par des plans perpendiculaires au triligne, paſſant par les ordonnées *EG*; il eſt viſible que les ſections que ces plans donneront dans le double onglet, ſeront des triangles rectangles & iſoſceles, égaux chacun au quarré de ſon ordonnée *EG*; comme on l'a vu dans la Lettre (*Fig.* 10 & 11.) où il a été montré que le triangle rectangle & iſoſcele *MZN*, qui repréſente les triangles de ces ſections, eſt égal au quarré de *ZY*, qui repréſente les ordonnées.

Maintenant ſoit entendu le même double onglet, coupé par un autre ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, & paſſant par les ordonnées *DF*, leſquels donneront pour ſections dans le double onglet, des rectangles qui auront la baſe chacun égale à ſon ordonnée *DF*, & la hauteur égale à deux fois *AD*: tous leſquels rectangles ſeront coupés en deux également par les ordonnées

ordonnées DF; & partant les centres de gravité de ces rectangles seront aux points Q, où chaque ordonnée est coupée par la moitié, & les droites QD seront leurs bras sur BA; c'est-à-dire, la distance entre leur centre de gravité & BA.

Or il est visible que la somme de ces rectangles compose le solide du double onglet, & que la somme des triangles, formés par l'autre ordre de plans EG, compose aussi le même solide du double onglet; & qu'ainsi la somme des uns n'est que la même chose que la somme des autres; & que chacune des deux n'est que la même chose que le solide du double onglet: d'où il paroît qu'aussi la somme triangulaire des portions du solide, comprises entre tous les plans voisins du premier ordre EG, est la même chose que la somme triangulaire des triangles formés par les plans EG; & que ce n'est encore que la même chose que la somme triangulaire des portions des rectangles formés par les plans FD, comprises toujours entre tous les mêmes plans voisins du premier ordre EG.

Mais, par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, comprises entre les plans EG, est égale à chaque rectangle multiplié par son bras QD sur l'axe AB; donc la somme de ces rectangles multipliés chacun par QD, est égale à la somme triangulaire des triangles formés par les

les plans EG (à commencer toujours du côté de AB).

Mais chacun de ces triangles, formés par les plans EG, eſt égal à chaque EG quarré; & chacun des rectangles formés par les plans FD, eſt égal à deux fois chaque AD en DF; donc la ſomme triangulaire de tous les EG quarré, eſt égale à la ſimple ſomme de deux fois tous les AD en DF multipliés par DQ; c'eſt-à-dire, à la ſimple ſomme de tous les AD en DF quarré; (ou ce qui n'eſt que la même choſe, puiſque le premier AD eſt 1, le ſecond AD, 2, &c.), à la ſomme triangulaire de tous les DF quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

On a été aſſez averti dans la Lettre, que la quatrieme dimenſion n'eſt point contre la pure Géométrie; puiſqu'en ſubſtituant, tant aux EG quarré, qu'aux rectangles AD en DF, des droites qui ſoient entre elles en même raiſon que ces quarrés & ces rectangles, on démontrera la même choſe par la même maniere, ſans aucun changement & ſans quatrieme dimenſion.

RAPPORTS entre les sinus sur la base d'un triligne quelconque, & les portions de sa ligne courbe compriſes entre le ſommet & les ordonnées à l'axe.

DÉFINITION.

ON appelle ici *arcs* non-ſeulement les portions des circonférences de cercle, mais encore les portions de toutes ſortes de lignes courbes.

HYPOTHESE GÉNÉRALE.

Soit un triligne rectangle quelconque BAH Fig. 16. (*Fig.* 16.), & ſoit le même triligne BAP, renverſé de l'autre part de l'axe BA, & qu'ainſi les deux baſes égales HA, AP, ne faſſent qu'une même ligne droite; ſoit diviſé, tant l'axe, que la courbe BP, en un nombre indéfini de parties toutes égales entre elles; c'eſt-à-dire, que les parties de l'axe BD, DD, &c. ſoient égales, tant entre elles, qu'aux parties égales de la courbe BI, II, &c. Soient menées les ordonnées DO à l'axe, & les ſinus IL ſur la baſe.

Les rapports qui ſe trouvent entre la ſomme des ſinus IL, & la ſomme des arcs ou des portions BO de la courbe (compriſes entre le point B & chacune des ordonnées à l'axe) ſeront les ſuivants.

PROPOSITION

PROPOSITION VI.

La somme des arcs de la courbe, compris entre le sommet & chaque ordonnée à l'axe, est égale à la somme des sinus sur la base; c'est-à-dire, que la somme de tous les arcs BO, *est égale à la somme des sinus* IL.

PROPOSITION VII.

La somme des quarrés de ces mêmes arcs BO, *est égale à deux fois la somme triangulaire des mêmes sinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION VIII.

La somme des cubes de ces mêmes arcs BO, *est égale à six fois la somme pyramidale des mêmes sinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION IX.

La somme triangulaire des mêmes arcs BO, *à commencer par* A, *est égale à la moitié de la somme des quarrés des mêmes sinus* IL.

PROPOSITION X.

La somme pyramidale des mêmes arcs BO, *à commencer par* A, *est égale à la sixieme partie des cubes des mêmes sinus* IL.

PROPOSITION XI.

La somme triangulaire des quarrés des mêmes arcs BO,

BO, *à commencer par* A, *eſt égale à la ſomme triangulaire des quarrés des mêmes ſinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION XII.

Je dis maintenant qu'en menant les ſinus ſur l'axe, ſavoir, les perpendiculaires IR; *la ſomme des rectangles compris de chacun des mêmes arcs & de l'ordonnée qui le termine, ſavoir, la ſomme de tous les rectangles* BO *en* OD, *eſt égale à la ſomme des portions du triligne, compriſes entre chaque ſinus ſur l'axe & la baſe, ſavoir, à la ſomme de toutes les portions* IRAP.

PROPOSITION XIII.

La ſomme des quarrés de chaque arc, multiplié par ſon ordonnée, c'eſt-à-dire, de tous les BO *quarré en* OD, *eſt double de la ſomme triangulaire de ces mêmes portions* IRAP *du triligne, entre la baſe & chaque ſinus ſur l'axe, à commencer du côté de* B.

PROPOSITION XIV.

La ſomme triangulaire des rectangles de chaque ordonnée avec ſon arc, c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire de tous les BO *en* OD, *à commencer par* A, *ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme de tous les ſolides* AD *en* DO *en* OB, *compris de chaque arc, de ſon ordonnée, & de la diſtance entre l'ordonnée*

l'ordonnée & la base, est égale à la somme de ces portions IRAP *du triligne, multipliées chacune par son bras sur la base* AP, *c'est-à-dire, par la perpendiculaire, menée sur* AP *du centre de gravité de chaque portion* IRAP.

PROPOSITION XV.

La somme des arcs multipliés chacun par le quarré de son ordonnée, c'est-à-dire, de tous les BO *en* OD *quarré, est double de la somme de ces portions* IRAP *du triligne, multipliées chacune par son bras sur l'axe* AB, *c'est-à-dire, par la perpendiculaire sur* AB, *menée du centre de gravité de chaque portion* IRAP.

PRÉPARATION A LA DÉMONSTRATION (F. 16.) Fig. 16.

Soit prise dans la droite *AH* prolongée, la portion *AC* égale à la ligne courbe *BIP* ou *BOH*: & ayant divisé *AC* en autant de parties égales qu'il y en a dans la courbe *BIP*, aux points *E*, & qu'ainsi chacune des portions *AE*, *EE*, &c. soit égale à chacun des arcs *BI*, *II*, &c.; soient des points *E*, menées des perpendiculaires *EG*, qui rencontrent les sinus *IR* sur l'axe, prolongés s'il le faut, aux points *G*; de sorte que chacune des droites *EG*, soit égale à chacun des sinus *IL* sur la base, & que par tous les points *B*, *G*, *G*, *C*, soit entendue passer une ligne courbe, dont les droites

EG seront les ordonnées à la base, & les droites *GR* en seront les contre-ordonnées : la nature de cette ligne sera telle, que quelque point qu'on y prenne *G*, d'où on mene les droites *GE*, *GRI*, paralleles à l'axe & à la base, il arrivera toujours que la portion *AE*, ou la droite *RG*, sera égale à l'arc *BI*, & la portion restante *EC*, à l'arc restant *IP* : & par ce moyen les ordonnées *DO* à l'axe étant prolongées, & la coupant en *F*, chacune des droites *DF* sera égale à chacun des arcs *BO*, compris entre l'ordonnée même *DF* & le sommet.

Cela posé, la démonstration des propositions 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, qui viennent d'être énoncées, sera facile.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI.

Je dis que la somme de tous les arcs *BO* est égale à la somme des sinus *IL*.

Car tous les arcs *BO* sont les mêmes que toutes les ordonnées *DF* à l'axe, dont la somme est égale à celle des ordonnées *EG*, par la premiere proposition, c'est-à-dire, à la somme des sinus *IL*.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VII.

Je dis que la somme des arcs *BO* quarré est double de la somme triangulaire des sinus *IL*, à commencer par *A*, ou que la somme des *DF* quarré

quarré est double de la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer par A : ce qui est démontré par le Corollaire de la seconde proposition.

Démonstration de la Proposition VIII.

Je dis que la somme des arcs BO cube est égale à six fois la somme pyramidale des mêmes sinus IL, à commencer par A, ou que la somme de tous les DF cube est égale à six fois la somme pyramidale de toutes les EG, à commencer par A: ce qui a été démontré par la troisieme.

Démonstration de la Proposition IX.

Je dis que la somme triangulaire des arcs BO, à commencer par A, est égale à la moitié de la somme des quarrés des sinus IL, ou que la somme triangulaire des ordonnées DF, à commencer par A, est égale à la moitié de la somme des quarrés des ordonnées EG: ce qui est démontré par le même Corollaire de la seconde.

Démonstration de la Proposition X.

Je dis que la somme pyramidale des arcs BO, à commencer par A, est égale à la sixieme partie de la somme des cubes des sinus IL, ou que la somme pyramidale des ordonnées DF, à commencer par A, est égale à la sixieme partie de la somme des cubes des ordonnées EG: ce qui a été démontré par le Corollaire de la troisieme.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XI.

Je dis que la somme triangulaire des arcs *BO* quarré, est égale à la somme triangulaire des sinus *IL* quarré, à commencer toujours par *A*, ou que la somme triangulaire des ordonnées *DF* quarré est égale à la somme triangulaire des ordonnées *EG* quarré, à commencer toujours par *A*: ce qui a été démontré par la cinquieme.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XII.

Je dis que la somme des rectangles *BO* en *OD*, ou *FD* en *DO*, est égale à la somme des portions *IRAP*.

C'est la même chose que ce qui a été démontré dans le Lemme général. Car en considérant le triligne *BAP* comme étant la figure adjointe du triligne *BAC*, il s'ensuit, par ce qui a été démontré dans ce Lemme, que la somme des rectangles *FD* en *DO* (compris de chaque ordonnée *DF* du triligne *BAC*, & de chaque ordonnée *DO* du triligne *BAP*), est égale à la somme des portions *ARIP* de la figure adjointe, comprises entre chaque contre-ordonnée *RI* & la droite *AP*, & que les unes & les autres composent un même solide.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XIII.

Je dis que la somme de tous les *BO* quarré

en

en OD, ou FD quarré en DO, eſt double de la ſomme triangulaire des mêmes portions $ARIP$, à commencer du côté de B : ou que cette ſomme triangulaire des portions $ARIP$ eſt égale à la ſomme des ſolides QD en FD en DO (qui ſont la moitié des FD quarré en DO, chaque FD étant diviſée par la moitié en Q).

Car ſoit entendue la figure adjointe BAP relevée perpendiculairement au plan du triligne BAC, & former le ſolide dont il a été parlé dans le Lemme général, qui ſoit coupé par deux ordres de plans perpendiculaires au triligne, les uns paſſant par les droites EG & les autres par les droites DF; les uns donnant pour ſections des figures pareilles aux eſpaces $ARIP$, & les autres donnant pour ſections les rectangles FD en DO, comme cela a été dit dans le Lemme général : & ainſi ce ſolide ſera compoſé de la ſomme des eſpaces $ARIP$, & le même ſolide eſt auſſi compoſé de la ſomme des rectangles FD en DO : d'où il s'enſuit que la ſomme des portions $ARIP$, élevées perpendiculairement au plan ABC ſur les droites EG; & la ſomme des rectangles FDO, élevés auſſi perpendiculairement au même plan ABC, ne ſont qu'une même choſe, tant entre elles, qu'avec le ſolide : & par conſéquent que la ſomme triangulaire des portions du ſolide, compriſes entre tous les plans EG, à commencer du

côté de AB, est la même chose que la somme triangulaire des espaces $ARIP$; & que c'est aussi la même chose que la somme triangulaire des portions de chaque rectangle FD en DO, compriſes entre tous les mêmes plans EG.

Mais, par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, compriſes entre les plans EG, à commencer du côté de AB, est égale à chaque rectangle multiplié par son bras QD sur AB; donc aussi la somme des rectangles FDO, multipliés chacun par son bras QD, est égale à la somme triangulaire des portions $ARIP$, à commencer par B. Ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XIV.

Je dis que la somme triangulaire de tous les BO en OD, ou FD en DO, à commencer par A, est égale à la somme de ces espaces $IRAP$, multipliés chacun par son bras sur la base AP.

Car en relevant le triligne adjoint BAP, qui formera le solide coupé par les deux ordres de plans, comme en l'article précédent, desquels les uns forment pour sections les espaces pareils à $ARIP$, & les autres les rectangles FD en DO, la somme de chacun, c'est-à-dire, tant des espaces $ARIP$, que des rectangles FD en DO, ne sont qu'une même chose que le solide. D'où il est évi-

dent

dent que la somme triangulaire des portions du solide, compriſes entre tous les plans *FD*, eſt la même choſe que la ſomme triangulaire de tous les rectangles *FD* en *DO*; & que c'eſt auſſi la même choſe que la ſomme triangulaire des portions des eſpaces *ARIP*, compriſes entre tous les mêmes plans *FD*.

Mais la ſomme triangulaire de chaque eſpace *ARIP*, compris entre les plans *FD*, à commencer du côté de *AP*, eſt égale (par la méthode générale des centres de gravité) à chaque eſpace *ARIP*, multiplié par ſon bras ſur *AP*: donc auſſi la ſomme de ces eſpaces *ARIP*, multipliés chacun par ſon bras ſur *AP*, eſt égale à la ſomme triangulaire des rectangles *FDO*, à commencer par *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XV.

Je dis que la ſomme de tous les *DO* quarré en *OB*, ou de tous les *FD* en *DO* quarré, eſt double de la ſomme des portions *ARIP*, multipliées chacune par ſon bras ſur l'axe *BA*; ou que la ſomme des ſolides *FD* en *DO* en *DS*, qui eſt la moitié des *FD* en *DO* quarré (chaque *DO* étant diviſé par la moitié en *S*) eſt égale à la ſomme des eſpaces *ARIP*, multipliés chacun par ſon bras ſur l'axe *AB*.

Car ſoit relevé de même le triligne adjoint

BAP, qui formera un solide coupé par les deux ordres de plans sur *EG* & *DF*, qui donnent pour sections dans le solide, les rectangles *FDO* & les espaces *ARIP*, qui sont tels que la somme des rectangles *FDO* & la somme des espaces *ARIP*, ne sont qu'une même chose, tant entre elles, qu'avec le solide.

Soit maintenant entendu un troisieme ordre de plans, paralleles à celui du triligne & élevés au-dessus du plan du triligne, & tous en distances égales l'un de l'autre; en sorte qu'ils divisent la droite *AP* (relevée perpendiculairement au plan du triligne) en un nombre indéfini de parties égales: & qu'ainsi ils coupent le solide en un nombre indéfini de parties, comprises chacune entre deux quelconques plans voisins.

Donc puisque ces trois choses ne sont qu'une même; savoir, la somme des rectangles *FDO*, relevés sur les droites *FD*, la somme des espaces *ARIP*, relevés sur les droites *EG*, & le solide: il s'ensuit que la somme triangulaire de toutes les portions des espaces *ARIP*, comprises entre tous les plans voisins de ce troisieme ordre, est la même que la somme triangulaire de toutes les portions des rectangles *FD* en *DO*, comprises entre les mêmes plans voisins de ce même troisieme ordre, à commencer toujours du côté d'en-bas, c'est-à-dire, du côté du triligne *ABC*, qui sert de base au solide.

Mais

Mais la somme triangulaire des portions de chaque espace *ARIP*, comprises entre les plans voisins du troisieme ordre, est égale à chaque espace *ARIP*, multiplié par son bras sur l'axe *AB* : & de même la somme triangulaire des portions de chaque rectangle *FDO*, comprises entre les mêmes plans du troisieme ordre, est égale à chaque rectangle *FDO*, multiplié par son bras sur l'axe, ou à chaque rectangle *FDO*, multiplié par *SD* (car *SD* est le bras sur l'axe), c'est-à-dire, à chaque solide *FD* en *DO* en *DS*.

Donc la somme de tous les *FD* en *DO* en *DS*, est égale à la somme des espaces *ARIP*, multipliés chacun par son bras sur l'axe *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

MÉTHODE générale pour trouver la dimension & les centres de gravité d'un triligne quelconque & de ses doubles onglets, par la seule connoissance des ordonnées à l'axe ou à la base.

POUR trouver la dimension, tant du triligne, que de ses doubles onglets, & leurs centres de gravité; c'est-à-dire, la distance entre leurs centres de gravité & la base du triligne, & la distance entre leurs mêmes centres de gravité & l'axe du triligne,

ou,

ou, ce qui est la même chose, leurs bras sur la base & sur l'axe : je me suis servi d'une méthode qui réduit tous ces problêmes à la connoissance des seules ordonnées ; c'est-à-dire, à la connoissance de leurs sommes simples, triangulaires & pyramidales ou de leurs puissances, comme on va le voir ici.

Je dis donc que si on connoît dans un triligne toutes les choses suivantes :

1°. *La somme des ordonnées à l'axe.*

2°. *La somme des quarrés de ces ordonnées.*

3°. *La somme des cubes de ces ordonnées.*

4°. *La somme triangulaire de ces ordonnées.*

5°. *La somme triangulaire des quarrés de ces ordonnées.*

6°. *La somme pyramidale de ces ordonnées.*

On connoîtra aussi la dimension & les centres de gravité, tant du triligne, que de ses doubles onglets ; c'est-à-dire, qu'on connoîtra aussi les choses suivantes :

1°. *La dimension de l'espace du triligne.*

2°. *Le bras du triligne sur l'axe.*

3°. *Le bras du triligne sur la base.*

4°. *La dimension du double onglet de la base.*

5°. *Le bras de cet onglet sur la base.*

6°. *Le bras de cet onglet sur l'axe.*

7°. *La dimension du double onglet de l'axe.*

8°. *Le bras de cet onglet sur la base.*

9°. *Le bras de cet onglet sur l'axe.*

Car,

Car, pour le premier point, la somme des ordonnées étant connue, l'espace du triligne sera aussi connu, puisqu'il lui est égal.

Pour le deuxieme : soit le triligne BAC (*Fig.* 13.) dont AB soit l'axe & AC la base ; DF les ordonnées à l'axe, dont on connoisse la simple somme, la somme des quarrés & les autres choses qui ont été supposées : soient EG, les ordonnées à la base, & soit Y le centre de gravité du triligne ; & soient les deux bras YD, YE, sur l'axe & sur la base : je dis que le bras YD sur l'axe sera connu. Fig. 13.

Car puisque la somme des DF quarré est connue par l'hypothese, la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer par A, le sera aussi (puisqu'elle en est la moitié, par le Corollaire de la seconde proposition). Et par conséquent le bras YD sera aussi connu, puisqu'il a été montré par la Lettre, que cette somme triangulaire des ordonnées EG, laquelle est connue, est égale au solide fait du triligne ABC, multiplié par son bras YD sur AB, lequel solide sera par conséquent connu : mais l'espace du triligne ABC est connu par le premier article. Donc aussi YD sera connu.

Pour le troisieme ; savoir, que le bras YE du triligne sur la base sera connu : cela est visible, puisque la somme triangulaire des ordonnées FD qui

(qui est connue par l'hypothese) est égale au solide fait du triligne, multiplié par son bras *YE*, lequel solide sera par conséquent connu; mais l'espace du triligne est connu, par le premier article. Donc aussi le bras *YE* sera connu.

Pour le quatrieme : je dis que le contenu du double onglet de la base sera connu.

Car le contenu de ce double onglet est composé de deux fois la somme des rectangles *FD* en *DA*, ou de tous les *EG* quarré, comme cela a été assez montré dans la cinquième proposition, où l'on a fait voir que si on entend que le double onglet soit coupé par un ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, passant par les ordonnées *FD*, & s'étendant infiniment de part & d'autre : leurs sections dans le double onglet seront des rectangles, dont chacun sera double de chaque rectangle *AD* en *DF* : & qu'en coupant ce même double onglet par un autre ordre de plans perpendiculaires, passant par toutes les droites *EG*, leurs sections dans le double onglet seront des triangles rectangles, dont chacun sera égal au quarré de chaque ordonnée *EG*.

Donc si la somme des *EG* quarré est connue, le contenu du double onglet le sera aussi. Or la somme, tant de ces quarrés *EG*, que de deux fois la somme de ces rectangles *FD* en *DA* est connue,

nue, puiſque (par le Corollaire de la ſeconde) c'eſt la même choſe que deux fois la ſomme triangulaire des ordonnées DF, à commencer par A (qui eſt donnée par l'hypotheſe).

D'où il s'enſuit que le contenu du double onglet eſt auſſi connu.

Pour le cinquieme : ſoit maintenant Y, le centre de gravité du double onglet de la baſe : je dis que ſon bras YE ſur la baſe ſera connu ; & que le double onglet multiplié par le bras YE, eſt égal à quatre fois la ſomme pyramidale des ordonnées DF, à commencer par A, ou, ce qui eſt la même choſe, comme on l'a vu dans la Lettre, à deux fois la ſomme de tous les AD quarré en DF; ce qui ſe démontrera ainſi.

La ſomme de tous les AD quarré en DF, eſt la même choſe que la ſomme de tous les rectangles AD en DF, multipliés chacun par ſon côté AD; c'eſt-à-dire (puiſque le premier AD eſt 1, le ſecond, 2, &c.), la ſomme triangulaire de tous les AD en DF, à commencer par A. Donc auſſi le double de la ſomme des AD quarré en DF, ſera la même choſe que la ſomme triangulaire de deux fois tous les AD en DF, c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des rectangles ou ſections formées dans le double onglet, par les plans perpendiculaires paſſant par DF; mais la ſomme triangulaire

gulaire de ces sections du double onglet, à commencer du côté de AC est égale (par la méthode générale des centres de gravité) au double onglet multiplié par son bras YE sur AC; donc aussi le double de la somme des AD quarré en DF, est égal au double onglet multiplié par YE. Mais deux fois la somme des AD quarré en DF, ou quatre fois la somme pyramidale des ordonnées DF, est connue par l'hypothese.

Donc ce produit du double onglet, multiplié par YE est aussi connu; mais on connoît le contenu du double onglet: donc on connoîtra aussi le bras YE.

Pour le sixieme: je dis que le bras YD, sur l'axe, sera aussi connu; & que le double onglet, multiplié par le bras YD, est égal à la somme triangulaire des EG quarré, à commencer par A, ou, ce qui est la même chose, à la somme triangulaire des FD quarré, à commencer toujours par A: ce qui sera montré ainsi.

Si on entend que le double onglet soit coupé par des plans perpendiculaires à celui du triligne, passant par les ordonnées EG, ils y formeront pour sections des triangles rectangles & isosceles, égaux chacun à EG quarré, comme il a été dit. Or par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire de ces sections ou des quarrés EG,

à commencer par A, est égale au double onglet multiplié par son bras YD: mais la somme triangulaire des EG quarré est connue, puisque la somme triangulaire des DF quarré est connue par l'hypothese : donc le produit du double onglet, multiplié par YD, est connu : mais le contenu du double onglet est connu ; donc YD est connu.

Pour le septieme : je dis que le contenu du double onglet de l'axe sera connu.

Car, puisque la somme des DF quarré est connue par l'hypothese, le double onglet de l'axe l'est aussi, puisqu'il en est composé.

Pour le huitieme & neuvieme : soit maintenant Y le centre de gravité du double onglet de l'axe : je dis que ses deux bras YE, YD sur la base & sur l'axe seront connus.

Car, puisque tous les AE quarré en EG, sont connus, étant égaux par la troisieme au tiers de tous les DF cube, dont la somme est connue par l'hypothese ; on en conclura que le bras YD sera connu : & de même, puisque la somme triangulaire des DF quarré est connue par l'hypothese, on en conclura que le bras YE sera aussi connu, de la même sorte qu'on l'a conclu des deux bras du double onglet de la base dans les articles 5 & 6, par le moyen des données semblables à l'égard de ce double onglet de la base.

COROLLAIRES.

COROLLAIRES.

1. *L'espace du triligne est égal à la somme des ordonnées à la base, ou à la somme des ordonnées à l'axe.*

2. *Le triligne multiplié par son bras sur l'axe, est égal à la somme triangulaire des ordonnées à la base, en commençant par l'axe; ou à la moitié de la somme des quarrés des ordonnées à l'axe.*

Cela est démontré dans le second article.

3. *Le triligne multiplié par son bras sur la base, est égal à la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; ou à la moitié des quarrés des ordonnées à la base.*

C'est la même chose que le précédent.

4. *Le double onglet de la base est égal à la somme des quarrés des ordonnées à la base; ou au double de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par sa distance de la base; ou à deux fois la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.*

Cela est montré dans le quatrieme article.

5. *Le double onglet de la base, multiplié par son bras sur la base, est égal à deux fois la somme des ordonnées*

ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le quarré de sa distance de la base; ou à quatre fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; ou au double de la somme triangulaire des rectangles compris de chaque ordonnée & de sa distance de l'axe, à commencer du côté de la base; ou aux deux tiers des cubes des ordonnées à la base.

Cela s'ensuit du cinquieme article.

6. Le double onglet de la base, multiplié par son bras sur l'axe, est égal à la somme triangulaire des quarrés des ordonnées à la base, à commencer du côté de l'axe; ou à la somme triangulaire des quarrés des ordonnées à l'axe, à commencer du côté de la base; ou à la simple somme des quarrés des ordonnées à la base, multipliés chacun par sa distance de l'axe; ou à la simple somme des quarrés des ordonnées à l'axe, multipliés chacun par sa distance de la base.

Cela s'ensuit du sixieme article.

Il faut entendre la même chose du double onglet de l'axe, sans autre différence que de mettre *axe* au lieu de *base*, & *base* au lieu d'*axe*.

On peut tirer de-là plusieurs autres Corollaires, comme, par exemple, les converses des choses démontrées dans tous ces articles; savoir, que si on connoît la dimension & le centre de gravité,

tant du triligne que de ses onglets : on connoîtra aussi, 1°. la somme des ordonnées à l'axe; 2°. la somme des quarrés de ces ordonnées; 3°. la somme des cubes de ces ordonnées; 4°. la somme triangulaire de ces ordonnées; 5°. la somme triangulaire des quarrés des ordonnées; 6°. la somme pyramidale des ordonnées. Et on connoîtra la même chose à l'égard des ordonnées à la base.

On peut encore en tirer d'autres conséquences, mais un peu plus recherchées, & entre autres celle-ci, qui peut être d'un grand usage.

CONSÉQUENCE.

Si un triligne est tourné, premiérement, sur la base, & ensuite sur l'axe, & qu'il forme ainsi deux solides, l'un autour de la base & l'autre autour de l'axe : je dis que la distance entre l'axe & le centre de gravité du solide autour de la base est à la distance entre la base & le centre de gravité du solide autour de l'axe, comme le bras du triligne sur l'axe au bras du triligne sur la base.

D'où il paroît que si on connoît le centre de gravité du triligne & d'un de ses solides, celui de l'autre sera aussi connu.

Fig. 13. Soit un triligne rectangle BAC (*Fig.* 13.) dont le centre de gravité soit Y, & les bras sur l'axe & sur la base soient YX, YZ; soit aussi M le centre de gravité du solide autour de l'axe, & soit N le

centre

centre de gravité du solide autour de la base : je dis que AM est à AN, comme AX à AZ, ou comme YZ à YX : & qu'ainsi si AX, AZ & AN sont connus, AM le sera aussi.

Car en coupant le solide sur l'axe par des plans perpendiculaires passant par les ordonnées DF, ils donneront pour sections des cercles, dont les ordonnées DF seront les rayons ; & en coupant ensuite le solide autour de la base par des plans perpendiculaires passant par les ordonnées EG, qui donneront aussi pour sections des cercles, dont les ordonnées EG seront les rayons, il arrivera que la somme triangulaire des cercles DF, à commencer par A, sera égale au solide autour de l'axe, multiplié par son bras AM (par la méthode générale des centres de gravité) ; & par la même méthode, la somme triangulaire des cercles EG, à commencer par A, sera aussi égale au solide autour de la base, multiplié par son bras AN : mais la somme triangulaire des cercles DF est égale à la somme triangulaire des cercles EG, à commencer toujours par A, puisque les sommes triangulaires de leurs quarrés sont égales entre elles : donc le solide autour de l'axe, multiplié par son bras AM, est égal au solide autour de la base, multiplié par son bras AN ; donc AM est à AN, comme le solide autour de la base au solide autour de l'axe, c'est-à-dire, comme le bras YZ au bras YX.

Car on sait assez que le solide autour de la base est au solide autour de l'axe, comme le bras YX du triligne sur l'axe au bras YZ du triligne sur la base; ce qui est encore une conséquence qui se tire des propositions précédentes, & qui se démontrera ainsi.

Le solide autour de la base est au solide autour de l'axe, comme la somme des cercles EG à la somme des cercles DF; ou comme la somme des EG quarré à la somme des DF quarré, c'est-à-dire (par le Corollaire de la deuxieme), comme la somme triangulaire des ordonnées DF à la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer toujours par A, c'est-à-dire (par la méthode générale des centres de gravité), comme le triligne multiplié par son bras AX ou YZ, au triligne multiplié par son bras AZ ou YX, c'est-à-dire, comme YZ à YX. Ce qu'il falloit démontrer.

MÉTHODE pour trouver la dimension & le centre de gravité de la surface courbe des doubles onglets, par la seule connoissance des sinus sur l'axe.

SI on connoît dans un triligne :

1°. *La grandeur de sa ligne courbe.*

2°. *La somme des sinus sur l'axe.*

3°. *La*

3°. *La somme des quarrés de ces sinus sur l'axe.*

4°. *La somme des rectangles de ces mêmes sinus sur l'axe multipliés chacun par leur distance de la base : je dis qu'on connoîtra aussi la dimension de la surface courbe du double onglet de l'axe & le centre de gravité de cette surface courbe, c'est-à-dire, le bras de cette surface sur la base, & le bras de cette même surface sur l'axe.*

Car (*Fig.* 10.) si la courbe *A Y C* est divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points *Y*, d'où soient menés les sinus sur l'axe, & que, comme il a été dit vers la fin de la Lettre, des plans soient entendus élevés perpendiculairement au plan du triligne, passant par chacun des sinus *Y Z* : les sections qu'ils donneront dans la surface du double onglet seront des droites perpendiculaires au plan du triligne, qui seront doubles chacune de chaque sinus *Y Z*, comme il a été montré dans la Lettre. Fig. 10.

Or il est visible que la somme de ces perpendiculaires formées dans cette double surface, composent la surface courbe, étant perpendiculaires à la courbe *A Y C*. Donc si on connoît la somme de ces perpendiculaires, c'est-à-dire, le double de la somme des sinus *Z Y*, & qu'on connoisse aussi la grandeur de la ligne courbe, on connoîtra aussi la surface courbe. Ce qu'il falloit premiérement démontrer.

Je dis maintenant que *si on connoît la somme*

des rectangles FZ *en* ZY, *compris de chaque sinus & de sa distance de la base, on connoîtra aussi le bras* TF *ou* HK, *le point* H *étant pris pour le centre de gravité de la surface courbe du double onglet : & que la somme des sinus* ZY *étant multipliée par le bras* TF, *est égale à la somme de tous les rectangles* YZ *en* ZF.

Car il est visible que le même bras *TF*, qui mesure la distance d'entre le centre de gravité *H* de la surface courbe du double onglet, & la base *FA*, mesurera aussi la distance qui est entre le centre de gravité commun de tous les sinus *ZY*, placés comme ils se trouvent, & la même base *AF* : d'autant que chaque sinus *ZY* est éloigné de la base *AF* de la même distance que chacune des perpendiculaires au plan du triligne, passant par les points *Y*, & que chaque sinus est à chaque perpendiculaire toujours en même raison, savoir, comme 1 à 2.

Or il sera montré incontinent que la somme des rectangles *ZY* en *ZF*, compris de chaque *YZ* & de sa distance du point *F*, est égale à la somme des mêmes *YZ*, multipliée par la distance d'entre la base & le centre de gravité commun de toutes les *ZY* placées comme elles se trouvent ; mais la somme des rectangles *YZ* en *ZF* est donnée par l'hypothese. Donc la somme des sinus, multipliée par la distance entre leur centre de gravité commun & la base, sera aussi donnée ; mais la somme

des

des ſinus eſt auſſi donnée par l'hypotheſe. Donc la diſtance entre leur centre de gravité commun & la baſe ſera auſſi donnée : & par conſéquent auſſi la diſtance entre la baſe & le centre de gravité de la ſurface courbe du double onglet, puiſqu'elle eſt la même.

Maintenant on démontrera le Lemme qui a été ſuppoſé, en cette ſorte :

Soit (*Fig. 9.*) *FC* une balance horizontale diviſée comme on voudra en parties égales ou inégales, aux points *Z*, où pendent pour poids des droites perpendiculaires *ZY* de telle longueur qu'on voudra. Soit enfin le centre de gravité commun de toutes au point *T*, auquel la balance ſoit ſuſpendue en équilibre : je dis que la ſomme des rectangles *YZ* en *ZF*, compris de chaque perpendiculaire *YZ* & de ſa diſtance de l'extrémité de la balance *F*, eſt égale à la ſomme des rectangles, compris du bras *TF* & de chacune des perpendiculaires *ZY*. Fig. 9.

Car en prenant la droite *X* ſi petite que le rectangle compris de cette droite *X* & de la plus grande des droites *ZY*, ſoit moindre qu'aucun eſpace donné, & diviſant cette droite *X* en parties égales qui ſoient en plus grand nombre que la multitude des droites *ZY*; il eſt viſible que la ſomme des rectangles, compris de chaque *ZY* & de chacune des petites portions de *X*, ſera moindre

qu'aucun espace donné, puisque par la construction, le rectangle compris de la plus grande des ZY & de l'entiere X, est moindre qu'aucun espace donné.

Maintenant soit divisée la balance entiere FC en parties égales, chacune à chacune des petites parties de X: donc les points Z se rencontreront aux points de ces divisions, ou la différence n'altérera point l'égalité qui est proposée, puisque la somme de toutes les ZY, multipliées chacune par une de ces petites parties de la balance, sera moindre qu'aucun espace donné. Et par conséquent FC sera une balance divisée en parties égales, & aux points de division pendent des poids; savoir, aux uns les perpendiculaires ZY, & aux autres pendent pour poids des zéro: & le centre de gravité commun de tous ces poids est au point T. Donc, par ce qui a été démontré dans la Lettre, la somme de tous les poids multipliés par le bras FT (c'est-à-dire, la somme des rectangles, compris des FT & de chacune des ZY), est égale à la somme triangulaire de tous les poids, à commencer par F. Or en prenant cette somme triangulaire, il est visible qu'on prendra la premiere ZY ou VY autant de fois qu'il y a de parties dans la distance FV, & qu'on prendra de même la seconde ZY ou HY autant de fois qu'il y a de parties dans la distance FH, & ainsi toujours. Donc la somme

triangulaire

triangulaire de ces poids, à commencer par *F*, n'eſt autre choſe que la ſomme des produits des poids, multipliés chacun par ſon propre bras ſur *FY*, c'eſt-à-dire, la ſomme des rectangles *FZ* en *ZY*, qui ſeront partant égaux à la ſomme des rectangles, compris de chaque *ZY* & du bras commun *TF*.

AVERTISSEMENT.

De-là paroît la démonſtration de cette méthode aſſez connue, que *la ſomme des poids, multipliée par le bras commun de tous enſemble, eſt égale à la ſomme des produits de chaque poids, multiplié par ſon propre bras, à l'égard d'un même axe de balancement.*

Je ne m'arrête pas à l'expliquer davantage, parce que je ne m'en ſers point : ce n'eſt pas que je n'euſſe pû démontrer par cette méthode les propoſitions V, XIII, XIV, XV. Mais ma méthode m'ayant ſuffi par-tout, j'ai mieux aimé ne point en employer d'autre.

Je dis maintenant que *ſi on connoît* (Fig. 10.) *la ſomme des quarrés* ZY, *on connoîtra auſſi le bras* HT *ou* KF, *c'eſt-à-dire, la diſtance entre l'axe* CF *& le centre de gravité* H *de la ſurface courbe du double onglet : & que la ſomme des ſinus* ZY *étant multipliée par le bras* KF, *ſera égale à la ſomme des quarrés des mêmes ſinus* ZY. Fig. 10.

Car

Car en menant de tous les points Y les perpendiculaires YQ sur la base AF, & en les prolongeant de l'autre côté de la base jusqu'en B, en sorte que chaque QB soit égale à chaque ZY: il est visible que le même bras HT ou KF, qui mesure la distance d'entre l'axe & le centre de gravité H de la surface courbe du double onglet, mesurera aussi la distance qui est entre le même axe CF & le centre de gravité de toutes les perpendiculaires QB, placées comme elles se trouvent, par la même raison qu'en l'article précédent : savoir, que chaque QB est toujours en même distance de l'axe CF, que la perpendiculaire correspondante élevée dans la surface courbe sur le point Y, & qu'elles sont toujours en même raison entre elles.

Or, par le Lemme précédent, le centre de gravité commun des perpendiculaires QB, placées comme elles sont, est distant de l'axe CF de telle sorte, que la somme des rectangles QB en QF, compris de chaque QB & de sa distance du point F, est égale à la somme des mêmes QB, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun & l'axe. Mais la somme de ces rectangles QB en QF, ou des ZY quarré, ou des QB quarré (chaque QB étant faite égale à chaque ZY) est connue par l'hypothese. Donc on connoîtra aussi la somme des droites QB, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun & l'axe. Mais

la

la somme des QB ou des ZY est aussi connue par l'hypothese. Donc on connoîtra aussi la distance d'entre l'axe & le centre de gravité commun des droites QB, placées comme elles sont, c'est-à-dire, la distance d'entre l'axe & le centre de gravité de la surface courbe du double onglet.

AVERTISSEMENT.

Il faut entendre la même chose du double onglet de la base, & cela se démontrera de même, en mettant simplement *base* au lieu d'*axe*, & *axe* au lieu de *base*; c'est-à-dire, que si on connoît la somme des sinus sur la base & la somme de leurs quarrés, & la somme des rectangles compris de chaque sinus & de sa distance de l'axe, on connoîtra aussi la dimension & le centre de gravité de la surface courbe du double onglet de la base.

Or il est visible que les sinus sur la base ne sont autre chose que les distances entre la même base & les sinus sur l'axe, & que les sinus sur l'axe ne sont aussi autre chose que les distances d'entre l'axe & les sinus sur la base.

Donc si on connoît :

1°. La somme des sinus sur l'axe.

2°. La somme des quarrés de ces sinus.

3°. La somme des distances entre ces sinus & la base.

4°. La somme des quarrés de ces distances.

5°. La

5°. La somme des rectangles compris de chaque sinus sur l'axe & de sa distance de la base.

Et qu'on connoisse outre cela la grandeur de la ligne courbe :

On connoîtra aussi la dimension & le centre de gravité, tant de la surface courbe du double onglet de l'axe que de la surface courbe du double onglet de la base.

Et on connoîtra aussi le centre de gravité de la ligne courbe.

Car la ligne courbe multipliée par son bras sur la base, c'est-à-dire, par la distance entre son centre de gravité & la base, est égale à la somme des sinus sur la base : ce qui est visible par ces deux propositions qui sont démontrées dans les choses précédentes ; l'une, que la somme des sinus sur la base est égale à la somme triangulaire des portions de la ligne courbe, comprises entre le sommet & chacune des ordonnées à l'axe, à commencer par la base ; l'autre, que cette somme triangulaire est égale à la ligne courbe entiere multipliée par son bras sur la base.

Et la même chose sera véritable à l'égard de l'axe, en prenant l'*axe* pour *base* & la *base* pour *axe*.

PROPRIÉTÉS

PROPRIÉTÉS
DES SOMMES SIMPLES,
TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES.

AVERTISSEMENT.

ON suppose ici que ces trois Lemmes soient connus :

I. Si une droite quelconque AF est divisée comme on voudra au point H : $\underline{A\ H}\ \underline{F}$
je dis que AF quarré est égal à deux fois le rectangle FA en AH, moins AH quarré, plus HF quarré.

II. Je dis aussi que AF cube est égal à AH cube, plus HF cube, plus $3\ AH$ quarré en HF, plus $3\ HF$ quarré en HA.

III. Je dis que $3\ AF$ en HA quarré, plus $3\ AF$ en HF quarré, moins AF cube, moins $2\ FH$ cube, sont égaux à $2\ AH$ cube.

PREMIERE PROPRIÉTÉ.

Soit une multitude indéfinie de grandeurs telles qu'on voudra A, B, C, D, *desquelles on connoisse la somme simple, la somme triangulaire & la somme pyramidale, à commencer par* A : *je dis qu'on connoîtra aussi leur somme triangulaire & pyramidale, à commencer par* D.

Car

Fig. 17. Car soit prise (*Fig.* 17.) la ligne droite AF de telle grandeur qu'on voudra, laquelle soit divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points H, & que de tous les points de division on éleve des perpendiculaires HD, qui soient entre elles comme les grandeurs proposées, c'est-à-dire, que la premiere HD (qui est la plus proche du point A) soit à la seconde HD, comme A est à B, &c.

Maintenant puisqu'on connoît tant la droite AF, par la construction, que la somme des droites HD, par l'hypothese, on connoîtra la somme de tous les rectangles compris de AF & de chacune des HD; mais la somme des rectangles AH en HD est donnée, puisque la premiere AH étant 1, la seconde AH, 2, &c., la somme des rectangles AH en HD n'est autre chose que la somme triangulaire de toutes les HD, à commencer par A, laquelle est donnée par l'hypothese. Donc la somme des rectangles restant FH en HD sera donnée, c'est-à-dire, la somme triangulaire des HD, à commencer par F, & par conséquent aussi la somme triangulaire des grandeurs proposées A, B, C, D, à commencer par D.

De même puisque AF quarré est donné, & aussi la somme de tous les HD, il s'ensuit que la somme de tous les AF quarré en HD est donnée; c'est-à-dire, la somme des solides compris de chaque HD & de AF quarré. Mais, par les Lemmes supposés dans l'avertissement, AF quarré est égal

à

à deux fois FA en AH, moins AH quarré, plus HF quarré ; & cela eſt toujours vrai, quelque point que l'on conſidere d'entre les points H : donc tous les DH en AF quarré ſont égaux à deux fois tous les DH en HA en AF, moins tous les DH en HA quarré, plus tous les DH en HF quarré : mais tous les HD en AH en AF ſont donnés (puiſque AF eſt donnée, & auſſi tous les AH en HD, comme on vient de voir), & tous les DH en AH quarré ſont auſſi donnés, puiſque c'eſt la même choſe que la ſomme pyramidale des HD, à commencer par A, laquelle eſt donnée par l'hypotheſe. Donc auſſi tous les reſtants, ſavoir, tous les DH en HF quarré, ſeront par conſéquent donnés, c'eſt-à-dire, la ſomme pyramidale des HD, à commencer par F; & partant auſſi la ſomme pyramidale des grandeurs propoſées, à commencer par la derniere D. Ce qu'il falloit démontrer.

II Propriété.

Les mêmes choſes étant poſées : ſi on ajoute à chacune des grandeurs propoſées A, B, C, D, *une même grandeur commune* E, *laquelle ſoit auſſi connue; en ſorte que chacune des grandeurs* A, B, C, D, *avec l'ajoutée* E, *ne ſoit plus conſidérée que comme une même : & qu'ainſi il y ait maintenant autant de grandeurs nouvelles qu'auparavant ; ſavoir,* A *plus* E, B *plus* E, C *plus* E, D *plus* E, *&c.* :

je

je dis que la ſomme triangulaire & la ſomme pyramidale de ces grandeurs ainſi augmentées, ſera auſſi connue, de quelque côté que l'on commence.

Car en prenant la figure *AHFD* comme auparavant, & prolongeant chacune des perpendiculaires *DH* juſques en *O*, en ſorte que l'ajoutée commune *HO* ſoit à chacune des *HD*, comme la grandeur ajoutée *E*, eſt à chacune des autres *A*, *B*, *C*, *D*: il eſt viſible que puiſque *HO* eſt donnée, & auſſi la ſomme de toutes les *AH* (car elles ſont égales à la moitié de *AF* quarré), la ſomme des rectangles *AH* en *HO* ſera donnée; mais la ſomme des rectangles *AH* en *HD* eſt auſſi donnée; donc la ſomme des rectangles *AH* en *DO* eſt auſſi donnée, c'eſt-à-dire, la ſomme de tous les rectangles *RO* en *OD*, c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des *OD*; & partant auſſi la ſomme triangulaire des grandeurs augmentées *A* plus *E*, *B* plus *E*, *C* plus *E*, *D* plus *E*. Ce qu'il falloit premiérement démontrer.

On montrera de même que la ſomme pyramidale des *OD* eſt donnée; ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des *RO* quarré en *OD*: car la ſomme des *RO* quarré eſt donnée; ſavoir, le tiers de *RS* cube ou *AF* cube; mais *HO* eſt donnée; donc tous les *RO* quarré en *OH* ſont donnés; mais tous les *RO* quarré, ou *AH* quarré en *HD* ſont auſſi donnés, comme il a été dit;

donc

donc tous les *RO* quarré en *OD* sont donnés; donc, &c.

III Propriété.

Les mêmes choses étant posées : si les grandeurs proposées A, B, C, D *sont des lignes droites ou courbes, desquelles les sommes simples, triangulaires & pyramidales soient données comme il a déja été supposé, & outre cela la somme simple de leurs quarrés, la somme triangulaire de leurs quarrés & la somme simple de leurs cubes : je dis que la ligne commune* E *leur étant ajoutée, comme il a été supposé, & qu'ainsi chacune d'elles avec leur ajoutée ne soit plus considérée que comme une seule ligne, la somme des quarrés de ces lignes augmentées sera donnée, & aussi la somme triangulaire de leurs quarrés & la simple somme de leurs cubes.*

Car soit comme auparavant les perpendiculaires *HD* égalées aux lignes proposées *A, B, C, D*, chacune à la sienne, & la droite *HO* à la ligne ajoutée *E* : donc, par l'hypothese, la simple somme des *HD* sera donnée, & la somme de leurs quarrés, & la somme de leurs cubes, & aussi la somme triangulaire des droites *HD*, ou la somme des *AH* en *HD*, & la somme triangulaire de leurs quarrés, ou la somme des *AH* en *HD* quarré, & la somme pyramidale des *HD* ou des *AH* quarré en *HD*.

Il faut maintenant démontrer que la somme des

OD quarré eſt donnée, & auſſi la ſomme des *OD* cube, & enfin la ſomme triangulaire des *OD* quarré, ou la ſomme des *RO* en *OD* quarré. Ce qui ſera aiſé en cette ſorte.

Chaque *OD* quarré étant égal à deux fois *OH* en *HD*, plus *OH* quarré, plus *HD* quarré, il s'enſuit que la ſomme des *OD* quarré ſera donnée, ſi la ſomme des *OH* en *HD* deux fois eſt donnée, & la ſomme des *OH* quarré, & la ſomme des *HD* quarré. Or puiſque *OH* eſt donné, & auſſi la ſomme des *HD*, la ſomme des rectangles *OH* en *HD* eſt donnée; & partant auſſi deux fois la ſomme de ces mêmes rectangles *OH* en *HD*; mais la ſomme des *OH* quarré eſt donnée, & auſſi la ſomme des *HD* quarré, par l'hypotheſe. Donc la ſomme des *OD* quarré eſt donnée. Ce qui eſt le premier article.

Maintenant chaque *OD* cube étant égal à trois fois *OH* quarré en *HD*, plus trois fois *OH* en *HD* quarré, plus *OH* cube, plus *HD* cube, il s'enſuit que la ſomme des *OD* cube ſera donnée, ſi trois fois la ſomme des *OH* quarré en *HD* eſt donnée, plus trois fois la ſomme des *HO* en *HD* quarré, plus la ſomme des *HO* cube, plus la ſomme des *HD* cube. Or puiſque *HO* quarré eſt donné, & auſſi la ſomme des *HD*, la ſomme des *HO* quarré en *HD* ſera auſſi donnée; & partant auſſi le triple de cette ſomme. De même puiſque *HO* eſt donné, & auſſi la ſomme des *HD* quarré, la ſomme des

OH

OH en *HD* quarré ſera auſſi donnée, & partant auſſi le triple de cette ſomme. Mais tous les *OH* cube ſont encore donnés, & tous les *HD* cube ſont auſſi donnés par l'hypotheſe. Donc la ſomme des *OD* cube ſera donnée. Ce qui eſt le ſecond article.

Enfin pour montrer que la ſomme des *RO* en *OD* quarré eſt donnée, il faut montrer que la ſomme des *RO* en *OH* quarré eſt donnée, plus la ſomme des *RO* en *HD* quarré, plus le double de la ſomme des *RO* en *OH* en *HD*. Or la ſomme des *RO* ou *AH* en *HD* quarré eſt donnée par l'hypotheſe: & puiſque *HO* quarré eſt donné, & auſſi la ſomme de tous les *RO*, il s'enſuit que la ſomme de tous les *RO* en *OH* quarré eſt donnée: & de même puiſque *HO* eſt donné, & auſſi tous les *AH* en *HD* par l'hypotheſe, tous les *AH* en *HD* en *HO* le ſeront auſſi, ou tous les *RO* en *OH* en *HD*; & partant auſſi le double de cette ſomme. Donc tous les *RO* en *OD* quarré ſont auſſi donnés. Ce qui eſt le dernier article.

IV PROPRIÉTÉ.

Les mêmes choſes étant poſées: ſi on applique à chacune des lignes propoſées une ligne quelconque, comme DN, *qui ſera appellée ſa* coéfficiente, *& que chaque coéfficiente* DN *ait telle raiſon qu'on voudra avec ſa ligne* DH; *ſoit que ces raiſons ſoient par-*

tout les mêmes, ou qu'elles soient différentes, & qu'on connoisse la simple somme des coéfficientes DN, *& la simple somme de leurs quarrés, & la somme triangulaire des droites* DN, *ou, ce qui est la même chose, la somme des* RO *en* DN:

Je dis, 1°. *que si la somme des* HD *en* DN *est donnée, c'est-à-dire, la somme des rectangles compris de chaque ligne & de sa coéfficiente; aussi la somme des* OD *en* DN *sera donnée, c'est-à-dire, la somme des rectangles compris de chaque augmentée & de sa coéfficiente.*

Car tous les *OD* en *DN* sont égaux à tous les *HD* en *DN* (qui sont donnés par l'hypothese) plus tous les *OH* en *DN*, qui sont donnés, puisque *OH* est donné, & aussi la somme des *DN* par l'hypothese.

Je dis, 2°. *que si la somme des* HD *en* DN *quarré est donnée, la somme des* OD *en* DN *quarré sera aussi donnée.*

Car la somme des *OH* en *DN* quarré est aussi donnée, puisque *OH* est donné, & aussi la somme des *DN* quarré, par l'hypothese.

Je dis, 3°. *que si la somme des* HD *quarré en* DN *est donnée, & aussi la somme des* HD *en* DN, *la somme des* OD *quarré en* DN *sera aussi donnée.*

Car la somme des *HD* quarré en *DN* est donnée par l'hypothese, & la somme des *HO* quarré en *DN* est aussi donnée (puisque *HO* quarré est

est donné, & aussi la somme des DN), & la somme des OH en HD en DN est aussi donnée, puisque OH est donné, & aussi la somme des HD en DN par l'hypothese ; & partant aussi le double de cette somme.

Je dis, 4°. *que si la somme triangulaire des rectangles* HD *en* DN *est donnée, ou, ce qui est la même chose, si la somme des* AH *en* HD *en* DN *est donnée, ou des* RO *en* HD *en* DN, *la somme triangulaire des* OD *en* DN *sera aussi donnée ; ou, ce qui est la même chose, la somme des* RO *en* OD *en* DN.

Car la somme des RO en OH en DN est aussi donnée, puisque OH est donné, & aussi la somme des RO en DN par l'hypothese.

Avertissement.

Si au lieu d'ajouter la grandeur commune E, ou HO à chacune des grandeurs proposées HD, comme on a fait ici, pour en former les toutes OD, on ôte, au contraire, de chacune des grandeurs HD la grandeur commune HI, on conclura des restes DI, tout ce qui a été conclu des entieres OD. Et si on prend, au contraire, une grandeur quelconque HG, de laquelle on ôte chacune des grandeurs proposées HD, on conclura encore des restes GD les mêmes choses : & de même si on prend AX (égale à la plus grande des gran-

deurs proposées) pour la grandeur commune, de laquelle on ôte chacune des autres HD, on conclura toujours la même chose des restes DX. Car il n'y a de différence en tous ces cas, que dans les signes de *plus* & de *moins*; & la démonstration en sera semblable & n'aura nulle difficulté, principalement après les Lemmes marqués dans l'Avertissement devant la premiere de ces Propriétés.

D'où il paroît que s'il y a une ligne quelconque droite ou courbe, donnée de grandeur RS, coupée comme on voudra aux points T, en parties égales ou inégales, & qu'elle soit prolongée du côté de S jusqu'en P, & du côté de R jusqu'en Q, & que les lignes ajoutées SP, QR soient données de grandeur : si on connoît toutes ces choses, savoir, la somme de leurs quarrés, la somme de leurs cubes, la somme triangulaire des mêmes lignes TP, la somme pyramidale des mêmes lignes, & la somme triangulaire de leurs quarrés, à commencer toujours du côté de R : il arrivera aussi que les mêmes choses seront données à l'égard des lignes TQ, c'est-à-dire, la somme des lignes TQ, la somme de leurs quarrés, la somme de leurs cubes, la somme triangulaire des mêmes lignes TQ, leur somme pyramidale, & la somme triangulaire de leurs quarrés, à commencer maintenant du côté de S.

Car en prenant les droites HD de la grandeur des droites PT; c'est-à-dire, que la premiere PT

ou PR, ſoit égale à la premiere HD, c'eſt-à-dire, à la plus proche du point A, & que la ſeconde PT ſoit égale à la ſeconde HD, &c., & prenant HG égale à PQ: il eſt viſible que (puiſque toutes les ſommes ſuppoſées ſont données à l'égard des droites TP, à commencer par la grande RP) les mêmes ſommes ſeront données dans les droites HD qui leur ſont égales, à commencer du côté de la grande HD, ou du côté du point A; & par conſéquent les mêmes ſommes ſeront données à l'égard des mêmes HD, à commencer du côté de F (par la premiere de ces propriétés): & partant les mêmes ſommes ſeront données à l'égard des reſtes GD, à commencer du côté E; c'eſt-à-dire, que les mêmes choſes ſeront données à l'égard des droites TQ, à commencer du côté de S; puiſque chaque TQ eſt égal à chaque DG, des choſes égales étant ôtées de choſes égales.

Il faut entendre la même choſe dans les portions des figures planes, comme on va voir dans cet exemple.

Soit une figure plane quelconque (*Fig.* 18.) $LZZV$ donnée de grandeur, & diviſée comme on voudra par les droites YZ, & qu'on y ajoute d'une part la figure MLZ, & de l'autre la figure KVZ, qui ſoient auſſi toutes deux données de grandeur: je dis que ſi on connoît la ſomme des Fig. 18.

espaces MYZ, & aussi leur somme triangulaire, à commencer du côté de VZ; on connoîtra aussi la somme des espaces KYZ, & leur somme triangulaire.

Et on le montrera de la même sorte, en prenant de même les droites HD qui représentent les espaces MYZ; c'est-à-dire, que la premiere HD représente le plus grand MYZ ou MVK, & la seconde, le second, &c.: & que la droite HG représente l'espace entier MVZ; c'est-à-dire, que ces droites soient entre elles en même raison que ces espaces.

De toutes les propriétés qui sont ici données, se tirent plusieurs conséquences, & entre autres celles-ci.

Que s'il y a un triligne quelconque $FDXA$ (*Fig.* 17.) dont on connoisse l'espace, le solide autour de l'axe FA, & le centre de gravité de ce demi-solide, lequel centre de gravité soit Y: je dis que quelque droite qu'on prenne dans le même plan, parallele à FA, & qui ne coupe point le triligne, comme RS, laquelle soit éloignée de FA d'une distance donnée; & qu'on entende que le plan tout entier soit tourné autour de cette droite RS: on connoîtra aussi le solide formé par le triligne dans ce mouvement; & aussi le solide formé dans le même mouvement par le triligne $FDXX$

Fig. 17.

(qui

(qui est le reste du rectangle circonscrit $FAXX$) & aussi les centres de gravité de ces solides & de leurs demi-solides.

Cela se conclut des propriétés précédentes; car on a ici les grandeurs HD, desquelles on connoît la somme simple & la somme de leurs quarrés (puisque l'espace $AFDX$ & son solide autour de AF sont donnés); donc en leur ajoutant, pour grandeur commune, la distance HO (qui est aussi donnée par l'hypothese), il s'ensuit de ce qui a été montré dans ces propriétés, que la somme des OD quarré sera donnée; & partant aussi le solide formé par la figure entiere $SFDXAR$, tournée autour de RS, sera donné. Mais le cylindre formé par le rectangle $SFAR$ sera aussi donné; donc le solide annulaire restant, formé par le triligne $FDXA$ autour de RS, sera aussi donné.

On montrera de même que le solide annulaire formé par le triligne $FDXX$, sera aussi donné, puisque le cylindre de $SXXR$ est donné.

Et pour leur centre de gravité, cela se montrera ainsi.

Puisque le centre de gravité du demi-solide, formé par le triligne FXA autour de FA, est donné, ou (ce qui est la même chose, en supposant la quadrature du cercle) le centre de gravité du double onglet de l'axe; il s'ensuit que la somme des HD cube est donnée, & aussi la somme triangulaire

gulaire des HD quarré; donc puiſque la grandeur commune HO eſt auſſi donnée, la ſomme des OD cube ſera auſſi donnée, & auſſi la ſomme triangulaire des OD quarré; donc le centre de gravité du demi-ſolide de la figure entiere $SFDXAR$, tournant autour de SR d'un demi-tour, ſera auſſi donné. Mais le centre de gravité du demi-cylindre de $SFAR$ eſt auſſi donné (en ſuppoſant toujours la quadrature du cercle quand il le faut); donc le centre de gravité du demi-ſolide annulaire reſtant, formé par le triligne FXA autour de la même SR, ſera auſſi donné; la raiſon du cylindre au ſolide annulaire étant donnée.

On le montrera de même du ſolide annulaire $FDXX$. Et on montrera auſſi la même choſe en faiſant tourner tout le plan autour de XX ou de BE, &c.

TRAITÉ DES SINUS
DU QUART DE CERCLE.

LEMME (*Fig.* 29). Fig. 29.

SOIT ABC *un quart de cercle, dont le rayon* AB *ſoit conſidéré comme axe, & le rayon perpendiculaire* AC *comme baſe; ſoit* D *un point quelconque dans l'arc, duquel ſoit mené le ſinus* DI *ſur le rayon* AC; *& la touchante* DE, *dans laquelle ſoient pris les points* E *où l'on voudra, d'où ſoient menées les perpendiculaires* ER *ſur le rayon* AC: *je dis que le rectangle compris du ſinus* DI *& de la touchante* EE, *eſt égal au rectangle compris de la portion de la baſe (enfermée entre les paralleles) & du rayon* AB.

Car le rayon *AD* eſt au ſinus *DI*, comme *EE* à *RR* ou à *EK*: ce qui paroît clairement à cauſe des triangles rectangles & ſemblables *DIA*, *EKE*, l'angle *EEK* ou *EDI* étant égal à l'angle *DAI*.

PROPOSITION PREMIERE.

La ſomme des ſinus d'un arc quelconque du quart de cercle, eſt égale à la portion de la baſe, compriſe entre les ſinus extrêmes, multipliée par le rayon.

PROPOSITION

PROPOSITION II.

La somme des quarrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle, qui seroient compriſes entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

PROPOSITION III.

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des quarrés des mêmes ordonnées, compriſes entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

PROPOSITION IV.

La somme des quarré-quarrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées, compriſes entre les sinus extrêmes, multipliées par le même rayon.

Et ainsi à l'infini.

Fig. 34. *PRÉPARATION A LA DÉMONSTRATION* (F. 34).

Soit un arc quelconque BP, diviſé en un nombre indéfini de parties aux points D, d'où soient menés les sinus PO, DI, &c. : soit priſe dans l'autre quart de cercle la droite AQ, égale à AO (qui meſure la diſtance entre les sinus extrêmes de l'arc $BAPO$) : soit AQ, diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points H, d'où soient menées les ordonnées HL.

DÉMONSTRATION

Démonstration de la Proposition I.

Je dis que la somme des sinus DI (multipliés chacun par un des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB.

Car en menant de tous les points D les touchantes DE, dont chacune coupe sa voisine aux points E, & remenant les perpendiculaires ER; il est visible que chaque sinus DI multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le rayon AB. Donc tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble, faits de toutes les portions RR avec le rayon AB; c'est-à-dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, & que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus DI, multipliés chacun par une des touchantes EE, est égale à la somme des distances RR ou à AO, multipliée par AB: mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD. Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux, est égale à la distance AO multipliée par le rayon.

Avertissement.

Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble

ble RR, ſont égales à AO, & de même que chaque touchante EE eſt égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être ſurpris, puiſqu'on ſait aſſez qu'encore que cette égalité ne ſoit pas véritable quand la multitude des ſinus eſt finie; néanmoins l'égalité eſt véritable quand la multitude eſt indéfinie, parce qu'alors la ſomme de toutes les touchantes, égales entre elles EE, ne differe de l'arc entier BP, ou de la ſomme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée : non plus que la ſomme des RR de l'entiere AO.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.

Je dis que la ſomme des DI quarré (multipliés chacun par un des petits arcs égaux DD) eſt égale à la ſomme des HL ou à l'eſpace $BHQL$ multiplié par le rayon AB.

Car, en prolongeant, tant les ſinus DI, que les ordonnées HL de l'autre côté de la baſe, juſques à la circonférence de l'autre part de la baſe qui les coupe aux points G & N; il eſt viſible que chaque DI ſera égal à chaque IG, & HN à HL.

Maintenant pour montrer ce qui eſt propoſé, que tous les DI quarré en DD, ſont égaux à tous les HL en AB: il ſuffit de montrer que la ſomme de tous les HL en AB, ou tous les HN

en

en AB, ou l'espace QNN multiplié par AB, est égal à tous les GI en ID en EE, ou à tous les GI en RR en AB (puisque ID en EE est égal à chaque RR en AB). Donc en ôtant la grandeur commune AB, il faudra montrer que l'espace $AQNN$ est égale à la somme des rectangles GI en RR : ce qui est visible, puisque la somme des rectangles compris de chaque GI & de chaque RR, ne differe que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée de l'espace $AOGN$, qui est égal à l'espace $AQNN$, puisque la droite AQ est prise égale à la droite AO. Ce qu'il falloit démontrer.

Démonstration de la Proposition III.

Je dis que la somme des DI cube est égale à la somme des HL quarré, multipliée par le rayon AB.

Car soit décrite la ligne $CGNNM$ de telle nature, que quelque perpendiculaire qu'on mene à la base, comme DIG ou LHN, il arrive toujours que chaque DI quarré soit égal à IG en AB, & la démonstration sera pareille à la précédente, en cette sorte.

Il est proposé de montrer que la somme des HL quarré en AB, ou des HN en AB quarré, ou de l'espace $AQNN$, multiplié par AB quarré, est égal à la somme des DI cube, multipliés par chaque

chaque arc DD, ou à la somme des DI quarré en DI en EE, ou des GI en AB en RR en AB, ou des AB quarré en GI en RR : donc en ôtant de part & d'autre le multiplicateur commun AB quarré, il faudra montrer que l'espace $AQNN$ est égal à la somme des rectangles GI en RR ; ce qui est visible par la même raison qu'en la précédente.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.

Je dis que la somme des DI quarré-quarré est égale à la somme des HL cube, multipliés par AB.

Car en décrivant une figure $CGNM$, dont la nature soit telle que quelque perpendiculaire qu'on y mene, comme DIG, il arrive toujours que DI cube soit égal à IG en AB quarré ; la démonstration sera semblable à la précédente, parce que cette figure sera toujours coupée en deux portions égales & semblables par l'axe ABN, de même que le demi-cercle CBM. Et ainsi à l'infini.

COROLLAIRE.

De la premiere proposition, il s'ensuit que la somme des sinus verses d'un arc est égale à l'excès dont l'arc surpasse la distance d'entre les sinus extrêmes, multiplié par le rayon.

Fig. 19. Je dis (*Fig.* 19.) que la somme des sinus verses DX est égale à l'excès, dont l'arc BP surpasse la droite AO, multiplié par AB.

Car

Car les sinus verses ne sont autre chose que l'excès, dont le rayon surpasse les sinus droits : donc la somme des sinus verses DX est la même chose que le rayon AB, pris autant de fois, c'est-à-dire, multiplié par tous les petits arcs égaux DD, c'est-à-dire, multiplié par l'axe entier BP, moins la somme des sinus droits DI, ou le rectangle BA en AO. Et par conséquent la somme des sinus verses DX est égale au rectangle compris du rayon AB, & de la différence entre l'arc BP & la droite AO.

PROPOSITION V.

Le centre de gravité de tous les sinus d'un arc quelconque, placés comme ils se trouvent, est dans celui qui divise en deux également la distance d'entre les extrêmes.

Soit (*Fig.* 19.) un arc quelconque BP, & soit AO la distance entre les sinus extrêmes, coupée en deux également en Y : je dis que le point Y sera le centre de gravité de tous les sinus DI de l'arc BP. Fig. 19.

Car si on entend que AO soit divisée en un nombre indéfini de parties égales, d'où soient menées des ordonnées, & que l'on considere chaque somme des sinus qui se trouve entre deux quelconques des ordonnées voisines ; il est visible que toutes ces petites sommes particulieres de sinus feront tou-

tes égales entre elles, puisque les distances d'entre les ordonnées voisines sont prises toutes égales entre elles, & que chaque somme de sinus est égale au rectangle fait de chacune de ces distances égales, multipliée par le rayon. Donc la droite *AO* est divisée en un nombre indéfini de parties égales, & ces parties égales entre elles sont toutes chargées de poids égaux entre eux (qui sont les petites sommes de ces sinus, compris entre les ordonnées voisines).

Donc le centre de gravité de tous ces poids, c'est-à-dire, de tous les sinus placés comme ils sont, se trouvera au point du milieu *Y*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

La somme des rectangles, compris de chaque sinus sur la base & de la distance de l'axe, ou du sinus sur l'axe, est égale à la moitié du quarré de la distance d'entre les sinus extrêmes sur la base, multiplié par le rayon, lorsque l'arc est terminé au sommet.

Soit l'arc *BP*, terminé au sommet *B*, & soient *DS* les sinus sur l'axe : je dis que la somme des rectangles *DI* en *IA*, ou *DI* en *DS*, est égale à la moitié du quarré de *AO* multiplié par *AB*.

Car il a été démontré à la fin du Traité des Trilignes, que la somme des rectangles *AI* en *ID*,

ID, est égale à la somme des sinus *ID* multipliée par *AY* (qui est la distance entre le dernier *AB* & leur centre de gravité commun *Y*); mais la somme des sinus est égale à *AB* en *AO*: donc la somme des rectangles *AI* en *ID*, est égale à *AB* en *AO* en *AY*, c'est-à-dire, à la moitié du quarré de *AO*, multiplié par *AB*.

PROPOSITION VII.

La somme triangulaire des sinus sur la base d'un arc quelconque, terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes, est égale à la somme des sinus du même arc sur l'axe, multipliée par le rayon, ou, ce qui est la même chose, à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le quarré du rayon.

Je dis que la somme triangulaire des sinus DI, *à commencer du côté de* DO, *est égale à la somme des sinus* DS, *multipliée par le rayon, ou à* BV (*qui est la différence entre* BA *&* DO) *multipliée par* BA *quarré, ce qui n'est visiblement que la même chose, puisque la somme des sinus* DS *est égale au rectangle* VB *en* BA, *par la premiere de ce Traité.*

Car la somme triangulaire des sinus *DI*, à commencer par *DO*, n'est autre chose, par la définition, que la simple somme de tous les *DI* compris entre les extrêmes *BA*, *DO*: plus la somme de tous les *DI*, excepté le premier *DO*,

c'est-à-dire, compris entre le second QT & AB, & ainsi de suite : mais la somme des sinus compris entre DO & BA, est égale à OA ou PV en AB; & la somme des sinus compris entre DT & AB, est de même égale au rectangle TA ou QS en AB, & ainsi toujours. Donc la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus PV, QS, DS, &c., multipliée par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

La somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque, terminé au sommet, à commencer par le moindre, est égale à la somme des sinus verses du même arc multipliée par le quarré du rayon, ou, ce qui est la même chose, à l'excès, dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multiplié par le cube du rayon.

Je dis que la somme pyramidale des sinus DI, *à commencer par* DO, *est égale à la somme des sinus verses* DX, *multipliée par* BA *quarré, ou, ce qui est la même chose, par le Corollaire, à l'arc* BP, *moins la droite* AO, *en* AB *cube.*

Car cette somme pyramidale n'est autre chose que la somme triangulaire des sinus DI compris entre PO & AB, plus la somme triangulaire de tous les sinus compris entre DT & AB, & ainsi de suite : mais la premiere de ces sommes

triangulaires

triangulaires est égale par la précédente, à *BV* ou *PX* en *AB* quarré; & la seconde de ces sommes triangulaires est égale, par la même raison, à *BZ* ou *QX* en *AB* quarré. Donc toutes les sommes triangulaires ensemble, c'est-à-dire, la somme pyramidale des sinus *DI*, à commencer par *DO*, est égale à la somme des sinus verses *DX* multipliée par *BA* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

La somme des espaces, compris entre l'axe & chacun des sinus d'un arc, terminé au sommet, est égale, étant prise quatre fois, au quarré de l'arc; plus, le quarré de la distance entre les sinus extrêmes, multiplié chacun par le rayon.

Je dis que la somme des espaces DIAB, *prise quatre fois, est égale au quarré de l'arc* BP, *multiplié par* AB; *plus le quarré de la droite* AO, *multiplié aussi par* AB.

Car ces espaces *DIAB* ne sont autre chose que les secteurs *ADB*, plus les triangles rectangles *AID*. Or chaque secteur *ADB* est égal à la moitié du rectangle, compris de l'arc *BD* & du rayon: donc le secteur pris deux fois, est égal au rectangle compris de l'arc & du rayon: & partant tous les secteurs ensemble pris deux fois, sont égaux à tous les arcs *BD*, multipliés par *AB*, ou à la moitié du quarré de l'arc entier *BP*,

multiplié par AB (puisque tous les arcs ensemble BD sont égaux à la moitié du quarré de l'arc entier BP, parce qu'il est divisé en parties égales). Donc la somme des secteurs, prise quatre fois, est égale au quarré de l'arc BP, multiplié par le rayon. Et chaque triangle rectangle AID est la moitié du rectangle de AI en ID; & partant tous les triangles ensemble AID, pris deux fois, sont égaux à tous les rectangles AI en ID, c'est-à-dire, par la cinquieme, à la moitié du quarré AO en AB: donc quatre fois la somme des triangles AID est égale au quarré AO, multiplié par AB. Donc quatre fois la somme des espaces $DIAB$ est égale au quarré de l'arc BP; plus, au quarré de AO, multiplié chacun par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

La somme triangulaire des mêmes espaces, prise quatre fois, à commencer par le moindre sinus, est égale au tiers du cube de l'arc; plus, la moitié du solide, compris de l'arc & du quarré du rayon, moins la moitié du solide, compris du moindre sinus, & de la distance d'entre les extrêmes & du rayon; le tout multiplié par le rayon.

Je dis que la somme triangulaire des espaces DIAB, *à commencer par* DO, *prise quatre fois, est égale au tiers du cube de l'arc* BP, *multiplié par*

par AB; *plus, la moitié de l'arc* BP, *multiplié par* AB *cube, moins la moitié du rectangle* AO *en* OD, *multiplié par* AB *quarré.*

Car la somme triangulaire de ces espaces, à commencer par *DO*, se forme en prenant, premiérement, la somme simple de tous ces espaces, dont le quadruple est égal, par la précédente, au quarré de l'arc *BP*, multiplié par *AB*, plus *AO* quarré multiplié aussi par *AB*; & en prenant ensuite la somme de tous les espaces, excepté le premier *BPOA*, savoir, la somme de tous les espaces *BQTA*, *BDIA*, &c., dont le quadruple est égal, par la précédente, à l'arc *BQ* quarré, multiplié par *AB*, plus *TA* quarré multiplié par *AB*; & ainsi toujours. Donc quatre fois cette somme triangulaire des espaces *BDIA*, est égale à la somme de tous les arcs *BD* quarré multipliés par *AB*, c'est-à-dire, au tiers du cube de l'arc entier *BP*, multiplié par *AB*, plus la somme de tous les *IA* quarré, ou de tous les *DS* quarré (qui sont les sinus sur l'axe) multipliés par *AB*. Mais la somme des sinus *DS* quarré est égale à l'espace *BPV*, multiplié par *AB* (par la seconde de ces propositions) : & en prenant *AB* pour commune hauteur, la somme des *DS* ou *IA* quarré multipliés par *AB*, sera égale à l'espace *BPV* multiplié par *AB* quarré.

Donc la somme triangulaire de tous les espaces

DIAB est égale au tiers du cube de l'arc *BP*, multiplié par *AB*; plus à l'espace *BPV*, multiplié par *AB* quarré; mais l'espace *BPV* est égal au secteur *BPA*, moins le triangle *AVP*, c'est-à-dire, à la moitié du rectangle compris de l'arc *BP* & du rayon *BA*, moins la moitié du rectangle de *AO* en *OP*. Donc cette somme triangulaire est égale au tiers du cube de l'arc *BP*, multiplié par *AB*, plus la moitié de l'arc multiplié par *AB* cube, moins la moitié de *AO* en *OD*, multiplié par *AB* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

La somme triangulaire des quarrés des sinus d'un arc quelconque, terminé au sommet, à commencer par le moindre sinus, est égale, étant prise quatre fois, au quarré de l'arc, plus au quarré de la distance entre les sinus extrêmes, multipliés chacun par le quarré du rayon.

Je dis que la somme triangulaire des DI *quarré, prise quatre fois, à commencer par* DO, *est égale au quarré de l'arc* BP, *plus au quarré de la droite* AO, *multipliés chacun par* AB *quarré.*

Car cette somme triangulaire des *DI* quarré se trouve, en prenant premiérement la simple somme de tous les *DI* quarré, qui est égale, par la seconde, à l'espace *BDOA* multiplié par *AB*,

&

& en prenant ensuite la somme des mêmes quarrés, excepté le premier DO, savoir, QT quarré, DI quarré, &c., qui sont égaux, par la même seconde, à l'espace $QTAB$, multiplié par AB, & ainsi toujours. Donc la somme triangulaire de tous les DI quarré est égale à la somme des espaces $DIAB$, multipliée par AB: donc aussi leurs quadruples seront égaux; mais la somme de ces espaces, prise quatre fois, est égale au quarré de l'arc BP, plus au quarré AO, multipliés par AB: & en multipliant encore le tout par AB, la somme des espaces $DIAB$, prise quatre fois, & multipliée par AB, sera égale au quarré de l'arc BP, plus au quarré AO, multipliés par AB quarré. Donc aussi la somme triangulaire des DI quarré sera égale au même arc BP quarré, plus au même AO quarré, multipliés de même par AB quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

TRAITÉ DES ARCS DE CERCLE.

DÉFINITION.

J'APPELLE *triligne circulaire* toutes les portions d'un quart de cercle, retranchées par une ordonnée quelconque au rayon.

Fig. 20. Soit (*Fig.* 20.) un quart de cercle *A B C*, dont *A* soit le centre, *A B* un des rayons, qui sera appellé l'*axe*; *A C* l'autre rayon perpendiculaire au premier, qui sera appellé *la base*; & le point *B* sera le sommet, *Z M* une ordonnée quelconque à l'axe. L'espace *Z M B* sera appellé *un triligne circulaire*: sur quoi il faut remarquer que le quart de cercle entier est aussi lui-même un triligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

On suppose dans tout ce discours, que la raison de la circonférence au diametre est connue, & que quelque point qu'on donne dans le rayon *B A*, comme *S*, d'où on mene l'ordonnée *S R*, coupant l'arc en *R*, l'arc *B R* retranché par l'ordonnée (& qui s'appelle l'*arc de l'ordonnée*) est aussi donné: & de même que quelque point qui soit donné dans l'arc

l'arc, comme *R*, d'où on mene *RS* perpendiculaire à *BA*, les droites *RS*, *SB* ſont auſſi données.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit (Fig. 17.) BSR *un triligne circulaire quelconque donné, dont l'axe* BS *étant diviſé en un nombre indéfini de parties égales en* Z, *les ordonnées* ZM *coupent l'arc en* M : *je dis que toutes ces choſes ſeront auſſi données ; ſavoir,* 1°. *la ſomme de tous les arcs* BM ; 2°. *la ſomme des quarrés de ces arcs ;* 3°. *la ſomme des cubes de ces arcs ;* 4°. *la ſomme triangulaire de ces arcs ;* 5°. *la ſomme triangulaire des quarrés de ces arcs ;* 6°. *la ſomme pyramidale de ces arcs.* Fig. 17.

Car en menant les ſinus ſur la baſe de ce même arc, ou de l'arc pareil *BP*, pris de l'autre part (pour rendre la figure moins confuſe), leſquels ſinus coupent l'arc en *D*, la baſe *SP* du triligne en *T*, & le rayon *AC* en *I* : il a été démontré dans le Traité des Trilignes, que la connoiſſance de toutes les ſommes cherchées dans les arcs *BM*, dépend de la connoiſſance des mêmes ſommes dans les ſinus *DT*, & on en a donné toutes les raiſons ; en ſorte que la connoiſſance des uns enferme auſſi celle des autres. Donc il ſuffira de montrer que toutes ces ſommes ſont données dans les ſinus *DT* pour montrer qu'elles le ſont auſſi dans les arcs *BM*.

Mais

Mais toutes ces sommes seront connues dans les sinus DT, si elles le sont dans les sinus entiers DI, parce que la droite TI ou SA, qui est donnée, comme on l'a vu dans l'Avertissement, est une grandeur commune, qui est retranchée de toutes les autres DI: & partant, par le Traité des sommes simples triangulaires, &c., ces sommes seront données dans les restes DT, si elles le sont dans les entieres DI.

Or toutes ces sommes sont données dans les droites DI, comme il s'ensuit facilement des propositions 1, 2, 3, 7, 8, 11, du Traité des Sinus du quart de cercle.

Car, 1°. la somme des droites DI est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale au rectangle compris du rayon donné AB, & de la droite donnée AO ou SP.

2°. La somme des quarrés DI est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à l'espace donné $BPOA$ multiplié par le rayon donné AB.

3°. La somme des DI cubes est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à la somme des quarrés des ordonnées au rayon AC, comprises entre les sinus extrêmes BA, PO, multipliés par AB. Or AB est connu, & aussi la somme des quarrés de ces ordonnées, puisque l'espace $BPOA$ est ici donné, & que son solide autour de AO l'est aussi, par Archimede.

4°. La

4°. La somme triangulaire de ces ordonnées *DI* est aussi donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à la différence d'entre les sinus extrêmes *BA*, *TO*, c'est-à-dire, à *BS* qui est donnée, multipliée par le quarré du rayon.

5°. La somme pyramidale des mêmes sinus *DI* est aussi donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à l'excès dont l'arc donné *BP* surpasse la droite donnée *AO* ou *SP*, multiplié par le cube du rayon.

6°. Enfin la somme triangulaire des *DI* quarré est donnée, puisqu'il est démontré qu'étant prise quatre fois, elle est égale au quarré de l'arc donné *BP*, plus au quarré de la droite donnée *AO* ou *PS*, multipliés chacun par le quarré du rayon.

PROPOSITION II.

Soit maintenant dans le diamètre du demi-cercle (Fig. 21.) A B C F, *la portion* B H *donnée plus grande que le rayon* B A, *laquelle étant divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points* Z, *soient menées les ordonnées* Z D : *je dis que les mêmes sommes que dans la précédente, seront données dans les arcs* B D ; *c'est-à-dire, la somme simple des arcs ; celle de leurs quarrés & celle de leurs cubes ; la somme triangulaire des arcs ; la somme triangulaire de leurs quarrés ; & la somme pyramidale des arcs.* Fig. 21.

Car en achevant de diviser la portion restante

HF aux points *Z*, en parties égales aux parties de la portion *HB*, & menant les ordonnées *ZS*; il s'ensuit, par la précédente, que toutes ces sommes sont données, tant dans les arcs *FN*, compris entre les points *F* & *C*, que dans les arcs *FS*, compris entre les points *F* & *K* (puisque *FHK* est un triligne circulaire, & que le quart de cercle *FAC* en est un autre, desquels le point *F* est le sommet). Donc aussi les mêmes sommes seront données dans les arcs *FM*, puisque si de tous les arcs *FN* on ôte les arcs *FS*, il restera les arcs *FM*. Donc l'arc *CK* sera une ligne donnée, divisée comme on voudra en un nombre indéfini de parties aux points *D*, ou *M*, ou *S* (car toutes ces lettres ne marquent qu'un même point), à laquelle sont ajoutées de part & d'autre des portions données *KF*, *CB*; & il arrive que toutes les sommes proposées sont données dans les lignes *FM*: donc elles le seront aussi dans les arcs *BM* (par ce qui est démontré à la fin des propriétés des sommes simples triangulaires, &c.) Mais les mêmes sommes sont données, par la précédente, dans les arcs *BO* du quart de cercle *BCA*: donc, en ajoutant les deux ensemble, les mêmes sommes seront données dans tous les arcs *BD*, puisque la somme des arcs *BD* n'est autre chose que la somme des arcs *BO*, plus la somme des arcs *BM*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

De ces propositions, il paroît que si la portion quelconque AH donnée est divisée en un nombre indéfini de parties égales en Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, on connoîtra la somme des arcs FN, & leurs sommes triangulaires, & leurs sommes pyramidales, &c.

LEMME.

Soit une figure plane quelconque (Figure 28.) ACQT, *dont le centre de gravité soit* Y : *soit divisée cette figure en tant de parties qu'on voudra, & telles qu'on voudra, comme en deux parties* AQT, AQC, *desquelles les centres de gravité soient* R, V, *d'où soient menées les perpendiculaires* VS, RK *sur une droite quelconque* AC (*laquelle* AC *ne coupe pas la figure proposée* ACQT : *mais, ou qu'elle la borne, ou qu'elle en soit entiérement dehors*) ; *& soit sur la même* AC, *menée la perpendiculaire* YO *du centre de gravité de la figure entiere* ACQ : *je dis que le solide fait de la figure entiere* ACQT, *multipliée par son bras* YO, *est égale à tous les solides ensemble faits des parties, multipliées chacune par son bras particulier, c'est-à-dire, au solide de la figure* TAQT, *multipliée par son bras* RK, *plus au solide de la figure* QAC, *multipliée par son bras* VS. Fig. 28.

Car

Car si on entend une multitude indéfinie de droites paralleles à AC, & toutes éloignées chacune de sa voisine d'une même distance moindre qu'aucune donnée, & qui coupent ainsi toute la figure, comme il a été supposé dans la méthode des centres de gravité : il est visible, par cette méthode, que la somme triangulaire des portions de cette figure entiere $ACQT$, compriſes entre les paralleles voisines, est égale à la figure multipliée par son bras YO; & que de même la somme triangulaire des portions de la petite figure TAQ, compriſes entre les mêmes paralleles, est égale à cette figure TAQ, multipliée par son bras RK; & enfin que la somme triangulaire des portions de l'autre petite figure AQC, compriſes entre les mêmes paralleles, est égale à cette même portion AQC, multipliée par son bras VS. Mais les portions de la figure entiere $ACQT$, compriſes entre les mêmes paralleles, ne sont autre chose que les portions de sa partie ATQ; plus les portions de sa partie AQC, compriſes entre les mêmes paralleles : & de même la somme triangulaire des portions de la figure entiere, n'est autre chose que la somme triangulaire des portions de la partie AQT; plus la somme triangulaire des portions de l'autre figure AQC. Donc aussi la figure entiere $ACQT$, multipliée par son bras YO, est égale à la partie AQT, multipliée par son bras RK;

RK, plus à la partie AQC multipliée par son bras VS.

COROLLAIRE.

De-là il s'ensuit que la figure entiere $ATQC$ multipliée par son bras YO, plus la même figure entiere, moins sa premiere portion AQT, savoir, la portion AQC, multipliée par son bras VS, est égale à la premiere partie AQT multipliée par son bras RK, plus à la seconde portion de la figure AQC, multipliée par deux fois son bras VS. Ce qui paroît par l'égalité démontrée dans le Lemme, puisqu'on ne fait qu'y ajouter de part & d'autre, le solide de la partie AQC, multipliée par son bras VS.

Et si la figure étoit divisée en trois parties, comme le secteur AQC (*Fig.* 27.), lequel est divisé en trois parties, qui sont les secteurs QAS, SAR, RAC: on montrera de même que la figure entiere QAC, multipliée par son bras sur AC, plus la figure entiere, moins sa premiere portion QAS, c'est-à-dire, la figure restante SAC, multipliée par son propre bras sur la même AC, plus la figure entiere QAC, diminuée de ses deux premieres portions QAS, SAR, c'est-à-dire, la portion restante RAC multipliée aussi par son propre bras sur la même AC, sont égales à la premiere portion QAS multipliée par son propre bras sur AC, plus la seconde portion SAR multipliée Fig. 27.

par deux fois son bras sur *AC*, plus la troisieme portion *RAC* multipliée par trois fois son bras sur *AC*.

Et ainsi à l'infini en quelque nombre de portions que la figure soit divisée.

LEMME III.

Fig. 32. *Soit* (Fig. 32.) *un secteur quelconque, qui ne soit pas plus grand qu'un quart de cercle,* DAC *divisé en un nombre indéfini de petits secteurs égaux* QAS, SAR, RAC, *desquels les centres de gravité soient* P, T, N, *& les bras sur* AC *soient* PO, TO, NO: *je dis que tous les points* P, T, N, *sont dans un arc de cercle concentrique à l'arc* QDC, *& que les petits arcs* NN *sont tous égaux entre eux, comme les petits arcs* DD *sont aussi égaux entre eux; & que chacun des petits arcs* NN *est à chacun des arcs* DD, *comme le rayon* FA *de l'arc* PTN, *au rayon* DA *de l'arc* QDC; *& que le rayon* FA *est les deux tiers du rayon* DA.

Cela est visible de soi-même, puisque ces secteurs étant en nombre indéfini, ils doivent être considérés comme des triangles isosceles, desquels le centre de gravité est aux deux tiers de la droite qui divise l'angle par la moitié.

COROLLAIRE.

De-là il paroît que les bras *NO* des secteurs *DAD*,

DAD, ſont les ſinus de l'arc *FNI*, dont le rayon eſt les deux tiers du rayon *AD*.

PROPOSITION III.

Soit (Fig. 32.) *un quart de cercle donné* ABC, *dans l'arc duquel ſoit donné le point* Q, *tel qu'on voudra, & ayant diviſé l'arc* QC *en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où ſoient menés les rayons* AD: *je dis que la ſomme des ſecteurs* ADC *eſt donnée, & égale au quart du quarré de l'arc* QC *multiplié par le rayon* AB. Fig. 32.

Car chaque ſecteur *ADC* eſt égal à la moitié de l'arc *DC* multiplié par le rayon *AB*. Or puiſque l'arc *QC* eſt diviſé en parties égales, la ſomme de tous les arcs *DC* ſera égale à la moitié du quarré de l'arc entier *QC*; & partant la moitié de la ſomme des mêmes arcs *DC* ſera égale au quart du quarré de l'arc *QC*: & en multipliant le tout par *AB*, la moitié de tous les arcs *DC* multipliés par *AB*, c'eſt-à-dire, la ſomme des ſecteurs *ADC* ſera égale au quart du quarré de l'arc *QC* multiplié par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Les mêmes choſes étant poſées: je dis que la ſomme triangulaire des mêmes ſecteurs ADC, *à commencer du côté de* QA, *eſt donnée, & égale à la douzieme partie du cube de l'arc* QC, *multiplié par le rayon.*

Car la somme triangulaire des secteurs *ADC*, à commencer du côté de *AQ*, n'est autre chose que la simple somme de tous les secteurs *ADC*, prise une fois, c'est-à-dire, par la précédente, le quart de *QC* quarré en *AB*, plus la simple somme des mêmes secteurs *ADC*, excepté le premier *QAS*, c'est-à-dire, la somme des secteurs *SAC*, *RAC*, &c. qui sont égaux, par la précédente, au quart de *SC* quarré en *AB*, & ainsi des autres. D'où il paroît que la somme triangulaire des secteurs *ADC* est égale au quart des quarrés de tous les arcs *DC*. Mais la somme des quarrés de tous les arcs *DC* est égale au tiers du cube de l'arc entier *QC*; donc la somme triangulaire des secteurs *ADC* est égale à la douzieme partie du cube de l'arc entier *QC*, multiplié par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

Fig. 32. *Soit* (Fig. 32.) *le point* Q, *donné où l'on voudra dans l'arc* BC *du quart de cercle donné* BAC; *& soit l'arc* QC, *divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où soient menés les rayons* DA: *je dis que la somme des solides, compris de chaque secteur* ADC *& de son propre bras sur* AC, *est connue & égale au tiers de l'arc* DC, *moins le tiers de la droite* CK (*en menant le sinus* QK) *multiplié par* AB *cube.*

Car

Car pour connoître la somme de ces solides, il suffira de connoître la somme de ces autres solides qui leur sont égaux, par le second Lemme; savoir, le petit secteur QAS multiplié par son propre bras PO, plus l'autre petit secteur SAR multiplié par deux fois son propre bras TO, plus le petit secteur RAC multiplié par trois fois son propre bras NO, & ainsi toujours; c'est-à-dire, le petit secteur QAS, ou le rectangle compris du rayon AB, & de la moitié du petit arc QS ou DD, multiplié par PO pris une fois, plus par TO pris deux fois, plus par l'autre NO pris trois fois, & ainsi toujours; c'est-à-dire, la somme triangulaire des bras NO, à commencer par PO, multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD, & le tout multiplié par AB.

Or le rayon AB est connu : donc si on connoît encore la somme triangulaire des bras NO (multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD), on connoîtra la somme de tous les solides proposés.

Mais, par le Lemme précédent, tous ces bras NO sont les sinus de l'arc FPI, desquels la somme triangulaire est connue par le Traité des Sinus, & égale au solide compris de AF quarré, & de la différence dont l'arc FNI surpasse la droite GI (lorsque les sinus NO sont multipliés par les petits arcs NN). Et partant cette somme triangu-

laire des sinus *NO* sera à la somme triangulaire des mêmes sinus *NO* multipliés par les petits arcs *D D*, en raison donnée; savoir, comme *AF* quarré à *AQ* ou *AB* quarré (parce que la somme triangulaire de ces sinus multipliés par ces petits arcs, est un solide duquel les arcs donnent deux dimensions). Donc cette somme triangulaire des sinus *NO* multipliés par les arcs *DD*, est égale à l'arc *FNI*, moins la droite *IG*, multiplié par *AB* quarré, ou aux deux tiers de l'arc *QC*, moins les deux tiers de la droite *CK*, multipliés par *AB* quarré. Et par conséquent la somme triangulaire des mêmes sinus *NO* multipliés par la moitié des petits arcs *DD*, est égale à un tiers de l'arc *QC*, moins un tiers de la droite *CK*, multiplié par *AB* quarré. Et en multipliant le tout par *AB*, le tiers de l'arc *QC*, moins le tiers de la droite *CK*, multipliés par *AB* cube, sera égal à la somme triangulaire des mêmes sinus *NO* multipliés par la moitié des petits arcs *DD*, & le tout multiplié par *AB*; ce qui est démontré être égal aux solides proposés à connoître.

PROPOSITION VI.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides, compris de chaque secteur ADC *& de son bras sur* AB, *est donnée, & égale au tiers de la droite* CK *multipliée par* AB *cube.*

Car

Car en menant les bras NT sur AB, qui seront aussi des sinus, on démontrera de même que la somme des solides proposés est égale à la somme triangulaire des bras ou sinus NT, à commencer par PT, multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD, & le tout multiplié par AB.

Et d'autant que la somme triangulaire des sinus NT (multipliés chacun par les petits arcs NN) est égale, par le Traité des Sinus, à la droite IG multipliée par AF quarré : on conclura, comme en la précédente, que la somme triangulaire des mêmes sinus NT multipliés par la moitié des petits arcs DD, & le tout multiplié par AB, est égale au tiers de la droite CK multipliée par AB cube.

PROPOSITION VII.

Soit donné (Fig. 27.) *le même quart de cercle* ABC, *& un point* Q *dans son arc, d'où soient menés les sinus* DX *& les rayons* DA : *je dis que la somme des triangles* AXD *est donnée, & égale au quart du quarré de la droite* AZ, *qui mesure la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.* Fig. 27.

Car tous ces triangles AXD sont la moitié des rectangles AX en XD, la somme desquels est démontrée, dans le Traité des Sinus, être égale à la moitié du quarré de la droite AZ multipliée par AB. Donc, &c.

PROPOSITION VIII.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſomme triangulaire des mêmes triangles AXD, *à commencer du côté de* QX, *eſt donnée & égale à la huitieme partie de l'arc* QC, *multipliée par* AB *cube, moins la huitieme partie du rectangle compris du dernier ſinus* QZ *& de* ZA (*qui eſt ſa diſtance du point* A) *multipliée par* AB *quarré.*

Car la ſomme triangulaire des triangles *AXD*, à commencer du côté de *ZQ*, n'eſt autre choſe que la ſimple ſomme de tous, c'eſt-à-dire, par la précédente, un quart de *AZ* quarré multiplié par *AB*, plus la ſomme des mêmes triangles *AXD*, excepté le premier *AZQ*, qui ſera égal, par la précédente, au quart de *AV* quarré, multiplié par *AB*; & ainſi toujours. De ſorte que la ſomme triangulaire de ces triangles eſt égale au quart de la ſomme des quarrés *AX* multipliés par *AB*, ou au quart des quarrés *DI* multipliés par *AB*, ou au quart de l'eſpace *QKC* multiplié par *AB* quarré (car la ſomme des quarrés des ſinus *DI* eſt égale à l'eſpace *QKC* multiplié par *AB*, par le Traité des Sinus); c'eſt-à-dire, au quart du ſecteur *AQC* multiplié par *AB* quarré, moins le quart du triangle *AKQ* multiplié par *AB* quarré. Ce qui eſt la même choſe qu'un huitieme de l'arc *QC*, multiplié par *AB* cube,

cube, moins un huitieme du rectangle QZ en ZA, multiplié par AB quarré.

PROPOSITION IX.

Soit un quart de cercle (Fig. 27.) *donné, dans l'arc duquel soit donné le point quelconque* Q, *& l'arc* QC *étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où soient menés les sinus* DX *& les rayons* DA : *je dis que la somme des solides, compris de chaque triangle* AXD *& de son bras sur* AC, *est donnée & égale au tiers de la portion* AZ *en* AB *cube, moins le tiers de la somme des quarrés des ordonnées à la portion* AZ (*qui sont donnés, puisque l'espace* AZQC, *& son solide autour de* AZ *sont donnés par Archimede*) *multipliés par* AB. Fig. 27.

Car le bras de chacun de ces triangles sur AC, est les deux tiers de chaque AX; donc la somme des solides proposés n'est autre chose que la somme des triangles AXD multipliés chacun par les deux tiers de son côté AX. Or chaque triangle rectangle AXD multiplié par les deux tiers de son côté AX, est égal au tiers de AX quarré en XD, c'est-à-dire (chaque AX quarré étant AD quarré, moins DX quarré), au tiers de chaque AD quarré en DX, moins le tiers de chaque DX cube. Donc tous les triangles ensemble AXD multipliés chacun par les deux tiers de AX, sont

égaux

égaux au tiers de tous les *DX* multipliés par *AD* ou *AB* quarré, moins le tiers de la somme de tous les *DX* cubes, c'est-à-dire (puisque tous les *DX* sont égaux à *AZ* en *AB*, & que tous les *DX* cubes sont égaux aux quarrés des ordonnées à la portion *AZ*, multipliés par *AB*), au tiers de la portion *AZ* en *AB* cube, moins le tiers de la somme des quarrés des ordonnées à la portion *AZ*, multipliés par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides, compris de chacun des triangles AXD, *multiplié par son bras sur* AB, *est donnée, & égale à un sixieme de* CK (*qui est la différence entre les sinus extrêmes*), *multipliée par* AB *cube, moins un sixieme de la somme des quarrés des ordonnées à la portion* CK (*laquelle est donnée, puisque l'espace* QKC *& son solide sont donnés par Archimede*) *multipliée par* AB *quarré.*

Car chacun de ces triangles est la moitié du rectangle *AX* en *XD*, & le bras de chacun sur *AB* est le tiers de *XD*. Donc la somme de ces triangles multipliés par ces bras, est la moitié des rectangles *AX* en *XD*, multipliée par un tiers de *XD*; c'est-à-dire, un sixieme des solides *AX* en *XD* quarré, ou (puisque chaque *XD* quarré est

est égal à AD quarré, moins AX quarré) un sixieme des solides de AX en AD quarré, moins un sixieme des AX cubes, ou un sixieme des solides des DI en AD quarré, moins un sixieme des DI cubes; c'est-à-dire (puisque la somme des DI est égale à CK en AB, & que la somme des DI cubes est égale à la somme des quarrés des ordonnées à la portion CK, multipliées par AB) un sixieme de la portion CK en AB cube, moins un sixieme de la somme des quarrés des ordonnées à la portion CK, multipliée par AB quarré.

Corollaire premier.

Si le point donné Q est au point B, c'est-à-dire, si on considere tout le quart de cercle entier, au lieu de n'en considérer que la portion $AZQC$: on y conclura les mêmes choses qu'on a faites jusqu'ici, puisque ce n'est qu'un cas de la proposition générale, & que même ce cas est toujours le plus facile.

Il faudra entendre la même chose dans les propositions suivantes.

Corollaire II.

De toutes ces propositions, il s'ensuit que s'il y a un quart de cercle donné (*Fig.* 27.) ABC, dans l'arc duquel soit donné le point Q, & que l'arc Fig. 27.

l'arc QC étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux en D, on en mene les sinus DX & les rayons DA. Il arrivera :

1°. Que la somme des espaces $AXDC$ sera donnée, puisque chacun de ces espaces est composé du secteur AQC & du triangle AXD, & que la somme de ces parties est donnée ; c'est-à-dire, tant la somme des secteurs AQC, que celle des triangles AXD, est donnée par les précédentes.

2°. Que la somme triangulaire des mêmes espaces $AXDC$ est donnée. Car elle est égale aux sommes triangulaires de leurs parties qui sont données par les précédentes.

3°. Que la somme de ces espaces $AXDC$, multipliés chacun par son bras sur AC, est donnée : car la somme de leurs parties (savoir de ses secteurs & de ses triangles), multipliées chacune par leurs bras sur AC, est donnée par les propositions précédentes. Et il a été montré, par les Lemmes précédents, que la figure entiere, multipliée par son bras sur AC, est égale à ses parties multipliées chacune par leurs bras sur la même AC.

4°. Que la somme des mêmes espaces $AXDC$, multipliés chacun par son bras sur AB, est donnée : car elle est égale à la somme de leurs parties multipliées par leurs bras sur la même AB, qui est donnée par les propositions précédentes.

PROPOSITION

PROPOSITION XI.

Soit (Fig. 30.) *un quart de cercle donné* MTG, *dans le rayon duquel soit donné le point quelconque* P, *d'où soit menée l'ordonnée* PV, *& la portion* PM *divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points* O, *d'où soient menées les ordonnées* OR : *je dis que la somme des rectangles compris de chaque ordonnée* OR *& de son arc* RM (*compris entre l'ordonnée & le sommet* M), *est donnée.* Fig. 30.

Car en prenant dans un autre quart de cercle pareil *ABC* (*Fig.* 31.) le point correspondant *Z*, & menant le sinus *QZ*, & divisant l'arc entier *BQC* aux points *D*, en un nombre indéfini d'arcs égaux, tant entre eux, qu'aux portions égales *OO* de la droite *MP*, d'où soient menés les sinus *DX*: il a été démontré dans le Traité des Trilignes, Proposition XII, que la somme des rectangles, compris de chaque *OR* & de l'arc *RM*, est égale à la somme des espaces *QZLN* (compris entre le sinus *QZ* & chacun des autres sinus *DN* ou *LN*, qui sont entre les points *Q*, *B*). Fig. 31.

Or la somme de ces espaces est donnée; car si de la somme des espaces *AXDC* (compris entre *AC* & le point *B*), qui est donnée par les propositions précédentes, on ôte la somme des espaces *AXSC* (compris entre *AC* & *ZQ*) qui est aussi

donnée

donnée par les Corollaires précédents : les portions restantes *ANLC* seront aussi données ; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), la somme des portions *ZNLQ*, plus la portion *AZQC* prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par l'arc *BLQ* : mais cette portion *AZQC* multipliée par l'arc *BQ*, est donnée, puisque, tant la portion, que l'arc sont donnés. Donc la somme des portions *ZNLQ* sera donnée ; & partant aussi la somme des rectangles compris de chaque *OR*, & de l'arc *RM*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides, compris de chaque OR *& du quarré de l'arc* RM, *est donnée.*

Car en reprenant la même Figure, il a été démontré dans le Traité des Trilignes, Proposition XIII, que la somme de ces solides est double de la somme triangulaire des portions *ZNLQ*, à commencer par *B*.

Il suffira donc de montrer que cette somme triangulaire est donnée, & on le montrera en cette sorte.

Si de la somme triangulaire de toutes les portions *AXDC*, qui est donnée par les Corollaires précédents, on ôte la somme triangulaire de toutes les portions *AXSC*, qui est aussi donnée par les mêmes

mêmes propoſitions, la ſomme triangulaire reſtante des portions *ANLC* ſera donnée (c'eſt-à-dire, en prenant les parties au lieu du total) la ſomme triangulaire des portions *ZNLQ*, plus la portion *AZQC*, priſe autant de fois, ou multipliée par la moitié du quarré de l'arc *BQ* (car la ſomme triangulaire d'un nombre indéfini de points eſt égale à la moitié du quarré de leur ſomme ſimple); mais la portion *AZQC* eſt donnée, & auſſi la moitié du quarré de l'arc *BQ*. Donc la ſomme triangulaire des *ZNLQ* l'eſt auſſi. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſommes des quarrés des ordonnées RO, *multipliés chacun par l'arc* RM, *eſt donnée.*

Car, par la Propoſition XV des trilignes, la ſomme de ces ſolides eſt double de la ſomme des ſolides, compris de chaque eſpace *ZNLQ*, multiplié par ſon bras ſur *AB*. Donc il ſuffira de connoître la ſomme de ces derniers ſolides. Ce qui ſe fera en cette ſorte.

Si de la ſomme des ſolides, compris de chaque eſpace *AXDC* & de ſon bras ſur *AB*, qui eſt donnée par le Corollaire précédent, on ôte la ſomme des ſolides, compris de chaque eſpace *AXSC* & de ſon bras ſur *AB*, on aura la ſomme des

ſolides,

solides, compris de chacun des espaces restants *ANLC* & de son bras sur *AB*; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), qu'on connoîtra la somme des solides, compris de chaque espace *ZNLQ* & de son bras sur *AB*, plus l'espace *AZQC* pris autant de fois, ou multiplié par l'arc *BQ*, & le tout multiplié par le bras de cet espace *AZQC* sur *AB*; car il a été démontré, dans les Lemmes de ce Traité, que l'espace entier quelconque *ANLC*, multiplié par son bras sur *AB*, est égal à la portion *AZQC*, multipliée par son bras sur *AB*, plus à la portion restante *ZNLQ* multipliée toujours par son bras sur la même *AB*.

Or on connoît l'espace *AZQC*, multiplié par *BQ*, & le tout multiplié par son bras sur *AB*, puisqu'on connoît l'arc *BQ*, l'espace *AZQC* & son bras sur *AB*. Donc on connoît la somme restante des espaces *ZNLQ* multipliés chacun par son bras sur *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des rectangles, compris de chaque ordonnée OR *& de son arc* RM, *est donnée, ou, ce qui est la même chose, la somme des* PO *en* OR *en* RM.

Car cette somme est égale, par la Proposition XIV

XIV des trilignes, à la somme des solides, compris de chaque espace $ZNLQ$ & de son bras sur ZQ. Donc il suffira de connoître cette derniere somme, ou même il suffira de connoître la somme des solides, compris de chacun des mêmes espaces $ZNLQ$ & de son bras sur AC; puisque chaque bras sur ZQ differe du bras sur AC d'une droite égale à ZA, & que la somme des espaces $ZNLQ$, multipliés chacun par ZA, est donnée (ZA étant donnée, & aussi la somme des espaces $ZNLQ$). Or on connoîtra cette somme des espaces $ZNLQ$, multipliés chacun par son bras sur AC, en cette sorte:

Si de la somme des espaces $AXDC$, multipliés chacun par son bras sur AC, qui est donnée par le Corollaire précédent, on ôte la somme des espaces $AXSC$, multipliés chacun par leurs bras sur AC, qui est aussi donnée par le même Corollaire, la somme restante des espaces $ALNC$, multipliés par leurs bras sur AC, sera connue; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), la somme des portions $ZNLQ$, multipliées chacune par son bras sur AC, plus $AZQC$ pris autant de fois (ou multiplié par l'arc BQ), & le tout multiplié par le bras de l'espace $AZQC$ sur AC. Or on connoît ce dernier produit de l'espace $AZQC$, multiplié de cette sorte (puisqu'on connoît l'espace $AZQC$, & son bras sur AC, & l'arc QB).

Donc on connoît la somme des espaces *ZNLQ*, multipliés chacun par son bras sur *AC*. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

Fig. 30. *Soit donné un demi-cercle* MTF (Fig. 30.) *dont* G *soit le centre, & dont le diametre* MF *soit divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points* O, *d'où soient menées les ordonnées* OA; *& soit donnée une ordonnée quelconque* PV, *menée du point donné* P *dans le demi-diametre* GM : *je dis que la somme des rectangles compris de toutes les ordonnées* OI (*qui sont entre l'ordonnée* PV *& le point* F, *qui est l'extrémité de l'autre demi-diametre* GF) *& de l'arc* IF (*entre chaque ordonnée & le point* F) *est donnée.*

Car si on ôte la somme des rectangles *OR* en *RM* (compris de toutes les ordonnées, depuis *PV*, jusqu'à *M*, & de leurs arcs), qui est donnée par la précédente, de la somme des rectangles *OS* en *SM* (compris des ordonnées, depuis le rayon *GT*, jusqu'à *M*, & de leurs arcs), qui est aussi donnée par la même précédente : les rectangles restants *OC* en *CM*, compris des ordonnées *OC* entre *GT* & *PV*, & de leurs arcs, seront connus.

Donc par les propriétés des sommes simples triangulaires, &c., en considérant l'arc *TV* comme une ligne donnée, divisée en un nombre indéfini de

telles

telles parties qu'on voudra, aux points C, à laquelle sont ajoutées de part & d'autre les lignes données VRM, TBF, & en prenant les droites CO pour *coëfficientes :* il s'ensuit que puisque la somme des rectangles OC en CM est donnée, aussi la somme des rectangles OC en CF (compris de chaque CO & de l'arc CBF) sera donnée.

Mais la somme des rectangles OD en DF (compris des ordonnées entre GT & F, & de leurs arcs DF) est donnée, par la précédente. Donc la somme, tant des rectangles OC en CF, que des rectangles OD en DF, est donnée, c'est-à-dire, la somme des rectangles OI en IF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des mêmes rectangles OI *en* IF (*compris des ordonnées qui sont entre* P & F, *& de leurs arcs jusques à* F) *est donnée; & aussi la simple somme des* OI *quarré en* IF; *& la simple somme des* OI *en* IF *quarré.*

Car on montrera de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des rectangles OS en SM est donnée (compris des ordonnées qui sont entre GT & M, & de leurs arcs jusqu'à M); & aussi la simple somme de tous les OS quarré en SM; & celle de tous les OS en SM quarré.

Et on démontrera aussi de même que la somme triangulaire des OR en RM est donnée (compris des ordonnées qui sont entre PV & M, & de leurs arcs); & aussi la simple somme des OR quarré en RM; & aussi celle des OR en RM quarré.

D'où on conclura de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des OC en CM (compris des ordonnées qui sont entre G & P, & de leurs arcs jusqu'à M) est donnée; & aussi la simple somme des OC quarré en CM; & aussi celle des OC en CM quarré.

Et de-là on conclura par la propriété des sommes simples triangulaires, &c., que puisqu'on connoît la somme des ordonnées OC, qui sont les coéfficientes, & aussi leurs sommes triangulaires, & aussi la simple somme de leurs quarrés (car l'espace $GTVP$ est connu, & partant la somme des ordonnées OC; & le centre de gravité de cet espace $GTVP$ est aussi connu, & partant la somme triangulaire des OC, ou la somme des rectangles GO en OC; & aussi le solide de l'espace $GTVP$ tourné autour de GP, & partant la somme des quarrés OC): il s'ensuit qu'on connoîtra aussi la somme triangulaire des OC en CF, compris des mêmes OC & de leurs arcs jusqu'à F; & aussi la simple somme des OC quarré en CF; & aussi celle des OC en CF quarré. Mais on connoît, par la précédente,

précédente, la somme triangulaire des OD en DF, compris des ordonnées qui sont entre G & F, & de leurs arcs jusqu'à F, & aussi la simple somme des OD quarré en DF, & celle des OD en DF quarré.

Donc en ajoutant les deux ensemble, on aura la somme triangulaire des OI en IF, compris des ordonnées entre P & F, & de leurs arcs jusqu'à F; & aussi la simple somme des OI quarré en IF, & celle des OI en IF quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

PETIT TRAITÉ
DES SOLIDES CIRCULAIRES.

I. SOIT donné le point V, où l'on voudra (*Fig.* 30.) dans la demi-circonférence donnée MTF; soit le rayon GT perpendiculaire au diametre MF, & soit menée VP parallele à GT, & ayant diviſé le diametre entier FM en un nombre indéfini de parties égales aux points O, d'où ſoient menées les ordonnées OA:

Fig. 30.

J'ai ſuppoſé dans tout le diſcours précédent, comme je ſuppoſe encore ici, qu'on ſache que l'eſpace $GTVP$ eſt donné, & auſſi ſon centre de gravité; parce qu'en menant le rayon GV, le triangle GPV eſt donné, & ſon centre de gravité; & auſſi le ſecteur GTV, & ſon centre de gravité, comme cela peut être démontré ſi facilement, & comme cela l'a été par pluſieurs perſonnes, & entre autres par Guldin: en ſuppoſant toujours la quadrature du cercle quand il le faut.

J'ai ſuppoſé de même que l'eſpace VPM & l'eſpace $VTFP$ ſont donnés, & auſſi leurs centres de gravité: ce qui n'eſt que la même choſe.

J'ai ſuppoſé encore que les ſolides de ces eſpaces tournés autour du diametre MF, ſont encore

core donnés; ce qui a été démontré par Archimede.

De toutes lesquelles choses j'ai pris pour supposé qu'on sût que la somme des ordonnées OC entre G & P est donnée, & que la somme de leurs quarrés le sera aussi; & de même la somme triangulaire de ces mêmes droites OC, ou la somme des espaces $VCOP$, ce qui n'est que la même chose (comme on l'a assez vu dans la Lettre à M. de Carcavi); parce que la somme des droites OC, n'est autre chose que l'espace $GTVP$, & que la somme triangulaire des OC est égale à cet espace multiplié par son bras sur GT; & que le solide de la figure $GTVP$ autour de GP étant donné, la somme des cercles dont OC sont les rayons, est donnée; & partant aussi la somme des quarrés OC.

Il faut entendre la même chose des ordonnées OR, qui sont entre P & M, & des ordonnées OI qui sont entre P & F.

II. Je dis maintenant que le centre de gravité du solide de l'espace VMP, tourné autour de MP, est donné.

Car, en prolongeant les ordonnées RO jusqu'en Z, en sorte que toutes les OZ soient entre elles comme les quarrés OR, l'espace MZP sera une portion de parabole, & son centre de gravité Y

ſera donné par Archimede : d'où menant YB perpendiculaire à PM, le point B ſera viſiblement le centre de gravité du ſolide MVP autour de MP; puiſque MP étant une balance, aux points O de laquelle pendent pour poids les perpendiculaires OZ, qu'étant en équilibre au point B, elle ſera en équilibre au même point B, ſi on entend qu'au lieu des perpendiculaires OZ, on y pende pour poids les cercles qui leur ſont proportionnels & qui compoſent ce ſolide, & dont les OR ſont les rayons. Et elle ſera encore en équilibre au même point B, ſi on y pend pour poids les OR quarré.

D'où il paroît que la ſomme triangulaire des OR quarré eſt auſſi donnée, puiſqu'elle eſt égale, par la méthode générale des centres de gravité, à la ſomme des OR quarrés, multipliés par leurs bras BP.

Il faut entendre la même choſe, par la même raiſon, des ſolides des eſpaces $PVTG$ & PVF, & de la ſomme triangulaire des quarrés de leurs ordonnées.

III. Je dis auſſi que le ſolide de l'eſpace MVP, tourné autour de PV, ſera donné, & auſſi ſon centre de gravité.

Car en diviſant PV en un nombre indéfini de parties égales en L, d'où l'on mene les perpendi-

culaires

culaires *KLH*: il eſt viſible, par ce qui vient d'être dit, que la ſomme des *HK* eſt donnée, & leur ſomme triangulaire, & la ſomme de leurs quarrés, & la ſomme triangulaire de leurs quarrés. Et partant en ôtant de toutes la grandeur commune *HL*, la ſomme des quarrés des reſtantes *LK* ſera donnée, & la ſomme triangulaire de ces quarrés; & partant le ſolide de *PVM* autour de *PV*, ſera donné, & auſſi ſon centre de gravité; puiſque ſon bras ſur *PM* multipliant la ſomme des quarrés *LK*, le produit en eſt égal à la ſomme triangulaire des quarrés *LK*. Il faut toujours entendre la même choſe des eſpaces *VTGP* & *VFP*.

IV. Je dis de même que la ſomme des *OR* quarré-quarré eſt donnée.

Car en menant la même parabole *MZZ*, dont le côté droit ſoit le rayon *GM*, & qu'ainſi chaque *RO* quarré ſoit égal à chaque *OZ* en *GM*; & partant auſſi chaque *RO* quarré-quarré, à chaque *OZ* quarré en *GM* quarré: il eſt viſible que puiſque, tant le plan *MZP*, que ſon centre de gravité ſont donnés, le ſolide de *MZP* autour de *MP* ſera auſſi donné; & partant auſſi la ſomme des quarrés *OZ*; mais *GM* quarré eſt auſſi donné; donc la ſomme de *OZ* quarré en *GM* quarré ſera donnée, & par conſéquent la ſomme des *OR* quarré-quarré qui lui eſt égale.

V. Je

V. Je dis enfin que la somme des RO cube sera donnée; ou, ce qui est la même chose, que le centre de gravité du demi-solide de l'espace MVP, autour de MP, sera donné.

Car si le centre de gravité du demi-solide du secteur MVG, tourné autour de MG, est donné, celui du demi-solide de MVP sera aussi donné; puisqu'on sait que le solide du demi-cône du triangle GVP, tournant autour de GP, est donné, & qu'on connoît la raison de ce cône au solide de MVP. Or le centre de gravité du demi-solide du secteur MVG autour de MG, sera connu, si on connoît le centre de gravité de la surface sphérique de ce demi-solide, décrite par l'arc MV, tournant d'un demi-tour autour de MG. Car de même que Guldin & d'autres, ont démontré que si du centre de gravité de l'arc MV, on mene une droite au centre G, les deux tiers de cette droite depuis G, donneront le centre de gravité du secteur MVG, parce qu'il est composé d'une multitude indéfinie d'arcs semblables à l'arc MV, qui sont entre eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, &c.; ainsi, & sans aucune différence, on démontrera que si du centre de gravité de la surface décrite par l'arc MV, on mene une droite au centre G, les trois quarts de cette droite depuis G, donneront le centre de gravité du solide décrit par le secteur MVG, dans le même mouvement;

parce

parce que ce solide est composé d'un nombre indéfini de portions de surfaces sphériques, semblables à celle qui est décrite par l'arc MV, qui sont entre elles comme les quarrés des nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Or le centre de gravité de la surface de ce demi-solide sera connu (par la fin du Traité des Trilignes), si en divisant l'arc en un nombre indéfini d'arcs égaux, d'où on mene les sinus sur MP, il arrive qu'on puisse connoître la somme de ces sinus, & la somme de leurs quarrés, & la somme des rectangles compris de chaque sinus & de sa distance de VP.

Et toutes ces choses sont connues; car, par le Traité des Sinus, l'arc TV étant donné, la somme de ces sinus est donnée; & aussi la somme des quarrés de ces sinus; & la somme des rectangles compris de ces sinus, & de leurs distances de TG. Mais la somme des sinus de l'arc entier TM est donnée; & la somme des quarrés de ces sinus; & la somme des rectangles compris de chaque sinus & de sa distance de TG. Donc, en ôtant les uns des autres, la somme des sinus de l'arc VM sera donnée; & la somme des quarrés de ces sinus; & la somme des rectangles compris de ces sinus, & de leurs distances de TG; & partant aussi la somme des rectangles compris des mêmes sinus & de leurs distances de VP, puisqu'ils ne different pas de la somme

me des autres rectangles, compris des mêmes sinus & de leurs distances de la droite TG; laquelle somme est donnée, puisque PG est donnée, & aussi la somme des sinus de l'arc VM.

Donc le centre de gravité de cette demi-surface sera donné; & partant celui du demi-solide du secteur MVG; & aussi celui du demi-solide MVP; & partant aussi la somme des OR cube.

Et, par la même raison, la somme des cubes des ordonnées du quart de cercle GTM & GTF, sera donnée; & partant aussi la somme des cubes des ordonnées de l'espace $GTVP$, puisque ces ordonnées ne sont que les restes de celles du quart de cercle, quand on en a ôté celles des espaces PVM; & de même les cubes des ordonnées de l'espace PVF sont donnés, puisque ce n'est qu'y ajouter le quart de cercle.

VI. On démontrera de même que la somme des LK cube est donnée, puisque la somme des HK cube est donnée par l'article précédent, & que la droite HL est une grandeur commune, & ôtée de toutes les HK.

VII. Il s'ensuit aussi de toutes ces choses, que tant dans l'espace $TVPG$, que dans le quart de cercle entier, la somme des GO cube en OC est donnée, puisqu'en divisant (*Fig.* 33.) tout le

Fig. 33.

rayon

rayon GT, en un nombre indéfini de parties égales aux points H & Q, & menant les perpendiculaires HL jusqu'à PV, & QQ jusqu'à l'arc; & considérant $TVPG$ comme un triligne mixte dont TG & GP sont les droites, & TVP la ligne mixte, composée de l'arc TV, & de la droite VP: la somme de tous les GO cube en OC, prise quatre fois, est égale à la somme des quarré-quarrés des droites HL & QQ. Or la somme des HL quarré-quarré est donnée, puisque, tant HL ou GP, que PV sont données; & la somme des QQ quarré-quarré est donnée, par ce qui a été dit ici article IV.

Il faut entendre la même chose de tous les GO cube en OS, c'est-à-dire, dans tout le quart de cercle GTM.

VIII. Il paroît aussi par tout ce qui a été dit, que la somme des GO quarré en OS est donnée, puisqu'étant prise trois fois, elle est égale, par le Traité des Trilignes, à la somme des cubes des droites HK, QQ, qui est donnée par le cinquieme article. Et de même la somme des GO quarré en OC sera donnée, puisqu'étant prise trois fois, elle est égale à la somme des cubes des droites HL, QQ, qui est donnée, puisque la somme des QQ cube est donnée par le cinquieme article, & que la somme des HL cube est donnée, HL ou PG & PV étant données.

IX. Il

IX. Il paroît auſſi par-là que la ſomme pyramidale des *OC* eſt donnée, ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme triangulaire des eſpaces *VCOP*, comme on verra dans l'avertiſſement ſuivant, puiſque le double en eſt donné, ſavoir, *GO* quarré en *OC*. Il faut dire le même de la ſomme pyramidale des *OS*, ou de la ſomme triangulaire des eſpaces *MOS*, & de même pour la ſomme pyramidale
Fig. 30. des *OD* (*Fig.* 30.). Et partant (par la fin du Traité des ſommes ſimples, triangulaires, &c.), la ſomme pyramidale, tant des droites *OR* entre *P* & *M*, que des droites *OI* entre *P* & *F*, ſera donnée, puiſque les eſpaces *MVP*, *TFG*, ſont donnés; & qu'ainſi la ſomme triangulaire des eſpaces *FCO* ſera donnée. Mais la ſomme triangulaire des eſpaces *FDO* eſt auſſi donnée (puiſque ce n'eſt que la ſomme pyramidale des droites *OD*). Donc, en ajoutant les deux enſemble, la ſomme triangulaire des eſpaces *FIO* ſera donnée, c'eſt-à-dire, la ſomme pyramidale des droites *OI*. On le démontrera de même de celle des droites *OR*.

AVERTISSEMENT.

On a dit en un mot que la ſomme pyramidale des droites *OC*, eſt la même choſe que la ſomme triangulaire des eſpaces *VCOP*: & on a dit auſſi dans le commencement, que la ſomme triangulaire des mêmes *OC* eſt la même choſe que la ſimple

ſomme

somme des espaces *VCOP*; parce que l'un & l'autre est visible, & assez expliqué par la Lettre à M. de Carcavi.

Car la somme triangulaire des *OC*, à commencer par *G*, n'est autre chose que la simple somme de ces lignes, c'est-à-dire, l'espace *GTVP*, plus la simple somme de ces mêmes lignes, excepté la premiere *GT*, c'est-à-dire, l'espace *YCVP*; & ainsi toujours. De sorte que la somme triangulaire entiere est proprement la somme de tous les espaces *VCOP*.

Et de même la somme pyramidale des mêmes *CO*, n'est autre chose que la somme des sommes triangulaires des mêmes lignes; c'est-à-dire, premiérement, la somme triangulaire de toutes les lignes *CO*, laquelle, par ce qui vient d'être dit, est la même chose que la simple somme de tous les espaces *VCOP*: secondement, la somme triangulaire de toutes les lignes *OC*, excepté la premiere *TG*, laquelle n'est autre chose que la somme de tous les espaces *VCOP*, excepté le premier *VTGP*: troisiémement, la somme triangulaire des mêmes droites *OC*, excepté les deux premieres *TG*, *YC*, ce qui est encore la même chose que la somme des espaces *VCOP*, excepté les deux premiers *VTGP*, *VCYP*; & ainsi toujours. Or cette maniere de prendre les espaces *VCOP*, en les prenant premiérement tous; & ensuite tous,

excepté

excepté le premier; & puis tous, excepté les deux premiers, &c.: c'eſt ce qu'on appelle en prendre la ſomme triangulaire; & ainſi la ſomme pyramidale des *OC* n'eſt autre choſe que la ſomme triangulaire des eſpaces *VCOP*.

Et de même la ſomme triangulaire des eſpaces *MRO* eſt la même choſe que la ſomme pyramidale des droites *RO*, & la ſomme triangulaire des eſpaces *FIO* eſt la même choſe que la ſomme pyramidale des droites *IO*.

Toutes ces choſes viennent de ce que les droites *OI* ſont des ordonnées, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont également diſtantes, & partent des diviſions égales & indéfinies du diametre; ce qui fait que la ſimple ſomme des ordonnées eſt la même choſe que l'eſpace compris entre les extrêmes. Mais cela ne ſeroit pas véritable des ſinus, parce que les diſtances d'entre les voiſins ne ſont pas égales entre elles, & qu'ainſi la ſimple ſomme des ſinus n'eſt pas égale à l'eſpace compris entre les extrêmes; à quoi il ne faut pas ſe méprendre.

TRAITÉ

TRAITÉ GÉNÉRAL *DE LA ROULETTE:*

Ou Problêmes touchant la Roulette, proposés publiquement & résolus par A. DETTONVILLE.

AVERTISSEMENT.

ON suppose ici qu'on sache la définition de la Roulette, & qu'on soit averti des Écrits qui ont été envoyés sur ce sujet à tous les Géometres pour leur proposer les problêmes suivants.

PROBLÊMES proposés au mois de Juin 1658.

Étant donnée (Fig. 22.) *une portion quelconque de la Roulette* COS, *retranchée par une ordonnée quelconque* OS *à l'axe* CO: *trouver la dimension & le centre de gravité, tant du triligne* COS, *que de ses demi-solides formés par ce triligne, tourné premiérement autour de sa base* OS, *& ensuite autour de son axe* CO, *d'un demi-tour seulement: en supposant qu'on connoisse la raison de la base de la Roulette* AF *à son axe* FC, *c'est-à-dire, de la circonférence au diametre?* Fig. 22.

PROBLÊMES proposés au mois d'Octobre 1658.

Trouver la dimension & le centre de gravité des surfaces de ces deux demi-solides?

RÉSOLUTION des Problêmes touchant la dimension & le centre de gravité du triligne & de ses demi-solides.

IL a été démontré à la fin de la Lettre à M. de Carcavi, que pour résoudre tous ces problêmes, il suffit de connoître la dimension & le centre de gravité, tant du triligne *COS*, que de ses deux doubles onglets, sur l'axe & sur la base. Et il a été démontré dans le Traité des Trilignes, que pour connoître la dimension, & le centre de gravité de ce triligne & de ses doubles onglets, il suffit de connoître ces six choses; savoir, en divisant l'axe *CO* en un nombre indéfini de parties égales en *Z*, d'où soient menées les ordonnées *ZY*:

1. *La somme des ordonnées* ZY.
2. *La somme de leurs quarrés.*
3. *La somme de leurs cubes.*
4. *La somme triangulaire des mêmes lignes* ZY.
5. *La somme triangulaire de leurs quarrés.*
6. *La somme pyramidale des mêmes lignes* ZY.

Or pour connoître toutes ces sommes, je me

sers

sers d'une seule propriété de la Roulette, qui réduit la Roulette à son seul cercle générateur : la voici.

Chaque ordonnée à l'axe de la demi-Roulette est égale à l'ordonnée du demi-cercle générateur, plus à l'arc du même cercle, compris entre l'ordonnée & le sommet.

Soit C R F *le demi-cercle générateur de la demi-Roulette* C Y A F, *& que les ordonnées à la demi-Roulette* Z Y, *coupent la demi-circonférence en* M : *je dis que chaque ordonnée* Z Y *est égale à l'ordonnée* Z M, *plus à l'arc* M C.

Cette propriété est trop facile, pour s'arrêter à la démontrer. Or il paroît par-là qu'on trouve la Roulette entiere dans son seul cercle générateur ; puisqu'en considérant toujours chaque arc *C M* & son ordonnée *M Z*, comme une seule ligne mixte *Z M C*, on trouvera toutes les ordonnées *Z Y* de la demi-Roulette dans toutes les lignes mixtes *Z M C*.

Donc tous les problêmes proposés touchant la Roulette, qui viennent d'être réduits à la connoissance des six sommes des ordonnées à l'axe, se réduiront maintenant à la connoissance des six mêmes sommes des lignes mixtes *Z M C* : & ainsi tous ces problêmes de la Roulette se réduiront aux problêmes suivants, où l'on ne parlera point de Roulette, & où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle.

Fig. 23. *Étant donnés* (Fig. 23.) *un demi-cercle* CRF, *& la portion quelconque* CO *de ſon diametre, laquelle ſoit diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points* Z, *d'où ſoient menées les ordonnées* ZM, *chacune deſquelles, avec ſon arc* MC, *ſoit conſidérée comme une ſeule & même ligne mixte* ZMC : *trouver :*

1. *La ſomme des lignes mixtes* ZMC.

2. *La ſomme des quarrés de ces lignes mixtes* ZMC.

3. *La ſomme des cubes de ces lignes mixtes* ZMC.

4. *La ſomme triangulaire des lignes mixtes* ZMC.

5. *La ſomme triangulaire des quarrés de ces mêmes lignes* ZMC.

6. *La ſomme pyramidale des lignes mixtes* ZMC.

Or tous ces problêmes vont être facilement réſolus par le moyen des Traités précédents, en cette ſorte.

1. *Pour connoître la ſomme des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties; ſavoir, la ſomme des ordonnées *ZM*, plus la ſomme des arcs *CM*. Or la ſomme des ordonnées eſt connue, puiſque l'eſpace *COR* eſt connu : & la ſomme des arcs *CM* eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle. Donc la ſomme des lignes mixtes *ZMC* eſt donnée.

2. *Pour*

2. *Pour connoître la ſomme des quarrés des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties; ſavoir, la ſomme des quarrés *ZM* (qui eſt donnée, puiſque l'eſpace *CRO* eſt donné; & auſſi ſon ſolide autour de *CO*, par Archimede): plus la ſomme des quarrés des arcs *CM* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle): plus deux fois la ſomme des rectangles *CM* en *MZ*, compris de chaque arc & de ſon ordonnée (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc puiſque toutes les parties ſont données, le tout ſera donné; c'eſt-à-dire, la ſomme des quarrés des lignes mixtes *ZMC*.

3. *Pour connoître la ſomme des cubes des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties; ſavoir, la ſomme des *ZM* cubes, (qui eſt donnée par le Traité des Solides circulaires): plus la ſomme des *CM* cube (qui eſt donnée par le Traité des Arcs): plus trois fois la ſomme des *ZM* quarré en *MC* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs): plus trois fois la ſomme des *ZM* en *MC* quarré (qui eſt donnée par le même Traité des Arcs). Donc les parties étant données, le tout eſt donné.

4. *Pour connoître la somme triangulaire des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme triangulaire des parties; savoir, la somme triangulaire des *ZM* (qui est donnée par le Traité des Solides circulaires): plus la somme triangulaire des arcs *CM* (qui est donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc les parties étant données, &c.

5. *Pour connoître la somme triangulaire des quarrés des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme triangulaire des parties; savoir, la somme triangulaire des *ZM* quarré (qui est donnée par le Traité des Solides circulaires): plus la somme triangulaire des *CM* quarré (qui est donnée par le Traité des Arcs de cercle): plus deux fois la somme triangulaire des rectangles *ZM* en *MC* (qui est donnée par le Traité des Arcs, &c.). Donc, &c.

6. *Pour connoître la somme pyramidale des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme pyramidale des parties; savoir, la somme pyramidale des ordonnées *ZM* (qui est donnée par le Traité des Solides circulaires): plus la somme pyramidale des arcs *CM* (qui est donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc, &c.

Et par conſéquent on connoît toutes les choſes propoſées à trouver par les premiers problêmes, touchant la dimenſion & le centre de gravité de la demi-Roulette & de ſes portions, & de leurs demi-ſolides.

Je viens maintenant aux derniers, pour leſquels j'ai beſoin de ces deux Lemmes.

LEMME PREMIER.

Soit CDF *un demi-cercle* (Fig. 26.) *dont* FC *ſoit le diametre : ſoit* FCEZ *un autre demi-cercle, dont* CF *prolongée & doublée ſoit le diametre : je dis que quelque droite qu'on mene du point* F, *comme* FDN, *coupant les deux circonférences en* D, N, *d'où on mene la droite* DC *au point* C, *& les droites* NK, NM, *perpendiculaires, l'une à* FC, *l'autre au rayon* FE, *qui eſt perpendiculaire à* CZ : *il arrivera toujours que* NM *ſera égale à* FK; ce qui eſt viſible : *& que* NK *ſera égale à* CD; ce qui ſe voit par la ſimilitude des triangles rectangles *FKN*, *FDC*, ayant les côtés *FC*, *FN* égaux entre eux. Fig. 26.

Je dis enfin que l'arc CN *ſera égal à l'arc* CD. Car ces arcs ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon des rayons *FC*, *GC* (*G* étant le centre du demi-cercle *CDF*), & de la raiſon des angles *NFC*, *DGC*. Or un de ces angles eſt double de l'autre, & réciproquement un des rayons

est double de l'autre ; & ainsi la raison composée de ces deux raisons, dont l'une est double & l'autre sous-double, est la raison d'égalité.

LEMME II.

Fig. 25. *Soit* CDF *un demi-cercle* (Fig. 25.) *dont* FC *soit le diametre : soit* FCEZ *un autre demi-cercle, dont* CF *prolongée & doublée, soit le diametre : soit* CHK *une parabole dont* CF *soit l'axe,* C *le sommet, & dont le côté droit soit égal à* CF *& partant à la base* FK : *soit donnée une portion quelconque* CO *du diametre, & soit* OR *perpendiculaire au diametre. Soient accommodées à l'arc* CR *un nombre indéfini de droites* CD, *dont la premiere soit* 1, *la seconde* 2, *& ainsi toujours selon l'ordre des nombres naturels, toutes terminées au point* C, *& coupant la circonférence aux points* D, *d'où soient menées les droites* DG *perpendiculaires à* CF, *coupant la parabole en* H : *soient aussi menées les droites* DF, *du point* F *par tous les points* D, *coupant l'arc* CE *en* N, *d'où soient menées* NMV, *paralleles à* CF, *recoupant en* V *la circonférence, & en* M *le rayon* FE *perpendiculaire à* FC :

Je dis que toutes les droites FM *seront égales à toutes les droites* CD, *chacune à la sienne ; & qu'ainsi la plus grande* FM *sera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points* M. Cela est visible par le Lemme précédent.

Je

Je dis de même que toutes les MN *ou* MV, *seront égales à toutes les* FD, *chacune à la sienne.* Ce qui est aussi visible par le Lemme précédent.

Je dis de même que les droites FL *seront égales aux droites* CD, *chacune à la sienne ; & qu'ainsi la plus grande* FL *sera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points* L.

Car par la nature du cercle chaque *CD* quarré est égal à chaque rectangle *FC* en *CG*, c'est-à-dire, par la nature de la parabole à chaque *GH* quarré ; & partant chaque *CD* est égal à chaque *GH* ou à chaque *FL*.

Je dis aussi que tous les rectangles compris de CF *& de chaque* GD, *sont égaux à tous les rectangles* FM *en* MV, *chacun au sien.*

Car *FC* en *GD* est égal à *CD* en *DF*, c'est-à-dire, par ce qui vient d'être démontré, à *FM* en *MV*.

AVERTISSEMENT.

Je suppose qu'on sache que les mêmes choses étant posées que dans le Lemme précédent, si le cercle *CDF* est le générateur de la demi-Roulette *CBAF*, & qu'on prolonge les droites *DG* jusqu'à ce qu'elles coupent la Roulette au point *B* : il arrivera que toutes les portions *BB* de la courbe seront égales entre elles ; parce que chaque portion

tion de la courbe *CB* ſera double de chaque droite *CD*.

C'eſt cette propriété dont j'ai dit dans l'Hiſtoire de la Roulette, que M. Wren l'a produite le premier : je ne m'arrête pas à la démontrer ici, parce que pluſieurs perſonnes l'ont déja fait; car depuis M. Wren, M. de Roberval en a produit une démonſtration & M. de Fermat enſuite, & depuis encore M. Auzoult : & j'ai moi-même démontré la même choſe dans un Traité à part (1), où j'ai fait voir que cette propriété dépend immédiatement de celle-ci ; ſavoir, que ſi la demi-circonférence d'un cercle eſt diviſée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & que de l'extrémité du diametre on mene des droites à chaque point de diviſion, la ſomme de ces droites ſera égale au quarré du diametre.

Et cette propoſition n'eſt encore que la même choſe que celle-ci : la ſomme des ſinus d'un quart de cercle, eſt égale au quarré du rayon (ce qui eſt démontré dans le Traité des Sinus, propoſition I) de ſorte que ces trois propoſitions ne ſont preſque qu'une même choſe.

---

(1) Nous n'avons pas ce Traité ; heureuſement il peut être ſuppléé par celui des Sinus du quart de Cercle.

RÉSOLUTION des derniers Problêmes touchant la dimenſion & le centre de gravité des ſurfaces des demi-ſolides de la Roulette.

IL a été démontré à la fin de la Lettre à M. de Carcavi, que, pour réſoudre ces problêmes, il ſuffit de connoître la dimenſion & le centre de gravité des ſurfaces courbes, des deux doubles onglets de l'axe & de la baſe. Et il a été démontré dans le Traité des Trilignes, que pour connoître ces choſes, il ſuffit de connoître les cinq ſuivantes; ſavoir, en diviſant (*Fig.* 24.) la ligne courbe *CS* de la portion donnée de la demi-Roulette, en un nombre indéfini de parties égales aux points *B*, d'où ſoient menés les ſinus ſur l'axe *BG*: Fig. 24.

1. *La ſomme des ſinus* BG.
2. *La ſomme des diſtances* GF.
3. *La ſomme des* GF *quarré.*
4. *La ſomme des rectangles* BG *en* GF.
5. *La ſomme des* BG *quarré.*

Or pour connoître toutes ces ſommes, je me ſers de deux propriétés de la Roulette. L'une eſt celle, dont j'ai parlé, qui réduit la Roulette au cercle; ſavoir, que chaque *BG* (coupant le cercle générateur en *D*) eſt égale à la ligne mixte *CDG*, en

en considérant la droite *GD* & l'arc *DC*, comme une seule ligne mixte *GDC*. L'autre, qu'en menant les droites *CD*, chaque portion de la Roulette *CB* sera égale à deux fois la droite *CD*.

D'où il paroît que puisque la premiere portion *CB* de la Roulette est 1, que la seconde *CB* est 2, & ainsi toujours selon l'ordre des nombres naturels : il arrivera aussi que la premiere *CD* sera 1, la seconde *CD*, 2 ; & ainsi toujours selon la même suite des nombres naturels.

Donc tous les Problêmes des surfaces des demi-solides de la Roulette qui viennent d'être réduits à la connoissance des droites *BG* & *GF*, se réduiront aux problêmes suivants, où l'on ne parlera plus de Roulette, & où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle.

Fig. 24. *Étant donné* (Fig. 24.) *un demi-cercle* CDF *& la portion quelconque* CO *de son demi-diametre, & l'ordonnée* OR ; *& un nombre indéfini de droites* CD, *dont la premiere soit* 1, *la seconde* 2, *&c. selon l'ordre des nombres naturels, étant accommodées à l'arc* CR, *& toutes terminées au point* C, *& coupant l'arc aux points* D, *d'où soient menées* DG *perpendiculaires à l'axe ; chacune desquelles* DG *avec son arc* DC *soit considérée comme une seule & même ligne mixte : il faut trouver :*

1. *La somme des droites* FG.

2. *La*

2. *La ſomme des* FG *quarré.*

3. *La ſomme des lignes mixtes* GDC.

4. *La ſomme des quarrés de ces lignes mixtes* GDC.

5. *La ſomme des rectangles compris de chaque ligne mixte* GDC *&* FG.

Or tous ces Problêmes vont être réſolus en reprenant toute la conſtruction du ſecond Lemme, en cette ſorte.

1. *Pour connoître la ſomme des lignes* FG.

Il ſuffit de connoître la ſomme des lignes *LH* qui leur ſont égales : or la ſomme des droites *LH* eſt connue, puiſque l'entiere *FL* étant diviſée en un nombre indéfini de parties égales, la ſomme des *HL* eſt la même choſe que l'eſpace parabolique *FCHL*, compris entre *FC* & la derniere *HL*, lequel eſpace eſt connu par Archimede.

2. *Pour connoître la ſomme des* FG *quarré.*

Il ſuffit de connoître la ſomme des *LH* quarré, laquelle eſt connue, puiſqu'on connoît par Archimede, tant l'eſpace *FCHL*, que ſon centre de gravité, & partant ſon ſolide autour de *FL*; ce qui donne la ſomme des quarrés *LH*, & par conſéquent des quarrés *FG*.

3. *Pour*

3. *Pour connoître la somme des lignes mixtes* GDC.

Il faut en connoître les parties, savoir, la somme des droites *GD* & la somme des arcs *DC*.

Or la somme des droites *DG* sera connue, si en les multipliant chacune par la droite connue *FC*, on peut connoître la somme des rectangles *FC* en *DG*, ou la somme des rectangles *CD* en *DF*, ou la somme des rectangles *FM* en *MV*. Mais puisque l'entiere *FM* est divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points *M*, d'où sont menées les ordonnées *MV*: il est évident que la somme des rectangles *FM* en *MV* est donnée par le Traité des Solides circulaires; & par conséquent aussi la somme des rectangles *FC* en *DG*, & partant aussi la somme des *DG*.

Et quant à la somme des arcs *DC*, elle est la même que la somme des arcs *CN*. Car puisque *FM* est divisée en un nombre indéfini de parties égales, d'où sont menées les ordonnées *MN*, il s'ensuit, par le Traité des Arcs, que la somme des arcs *EN* est donnée; & partant aussi la somme des arcs *CN*, qui sont les restes du quart de 90 dégrés. Et par conséquent aussi la somme des arcs *CD* qui leur sont égaux.

4. *Pour connoître la somme des quarrés des lignes mixtes* GDC.

Il faut connoître la somme de leurs parties, savoir,

savoir, la somme des GD quarré, plus la somme des arcs DC quarré, plus deux fois la somme des rectangles GD en DC, compris de chaque GD & de son arc DC.

Or la somme des GD quarré est connue, puisqu'elle est égale à la somme des rectangles FGC, ou à la somme des LH en HI, lesquels sont donnés, puisque leur somme doublée est égale à la somme des entieres LI quarré, qui est donnée, moins la somme des LH quarré, qui est aussi donnée, comme il a été dit, moins encore la somme des HI quarré, qui est aussi donnée, puisque ce sont les restes de l'entiere LI, qui est donnée, par les propriétés des sommes simples, sommes triangulaires, &c.

Et quant à la somme des arcs CD quarré, ou des arcs CN quarré, elle est visiblement donnée, par le Traité des Sommes simples, &c., puisque ce sont les arcs restants du quart de cercle, & que la somme des quarrés de leurs compléments EN est donnée par le Traité des Arcs.

Enfin la somme des rectangles de chaque GD & de son arc DC sera connue, si en multipliant le tout par la droite connue CF, il arrive qu'on connoisse la somme des CF en GD en l'arc DC, ou des FM en MN en l'arc NC.

Or la somme de ces derniers est connue, puisque (chaque arc NC étant égal à CE moins EN)

cette

cette somme des FM en MN en NC n'est autre chose que la somme des FM en MN multipliée par l'arc EC (qui est donnée, puisqu'on connoît, tant l'arc EC, que la somme des FM en MN), moins la somme des FM en MN en NE, ou la somme triangulaire des rectangles MN en NE, qui est aussi donnée par le Traité des Arcs de cercle.

4. *Pour connoître la somme des rectangles compris de chaque ligne mixte* CDG *&* GF.

Il faut connoître la somme de leurs parties, savoir, la somme des rectangles FG en GD, plus la somme des rectangles FG en arc DC.

Or on connoîtra la somme des FG en GD, si on connoît la somme des CG en GD (puisque ce sont les restes de la somme des CF en GD qui est connue, puisqu'on connoît, tant la droite CF, que la somme des droites DG); & l'on connoîtra la somme des CG en GD, si en les multipliant par le quarré connu de CF, on peut connoître la somme des CF quarré en CG en GD, ou des CF en CG en CF en GD, ou des droites CD quarré en CD en DF, ou des droites CD cube en DF, ou des FM cube en MV, laquelle est connue par le Traité des Solides circulaires.

Et quant à la somme des rectangles FG en arc DC, on démontrera de même qu'elle est connue, si on peut connoître la somme des GC en arc CD;

CD; & on connoîtra la somme des GC en arc CD, si en multipliant le tout par la droite connue CF, on peut connoître la somme des CF en CG en arc DC, ou la somme des droites CD quarré en arc CD, ou la somme des FM quarré en arc NC, c'est-à-dire (puisque la premiere FM est 1, la seconde, 2, & ainsi toujours) la somme pyramidale des arcs CN; laquelle somme pyramidale des arcs CN est donnée, par le Traité des Sommes simples, triangulaires, &c., puisque la somme pyramidale des arcs restants EN est donnée par le Traité des Arcs de cercle.

Donc on connoît toutes les choses cherchées touchant la dimension & le centre de gravité, des surfaces des demi-solides de la demi-Roulette & de ses portions. Mais la dimension & le centre de gravité des demi-solides sont déja donnés; & par conséquent tous les Problêmes touchant la Roulette sont entiérement résolus.

Il sera sur cela facile à tout le monde de trouver les calculs de tous les cas, par le moyen de ces méthodes.

DIMENSION
DES LIGNES COURBES
DE TOUTES LES ROULETTES.

LETTRE
DE M. DETTONVILLE
A M. HUGUENS DE ZULICHEM.

MONSIEUR,

COMME j'ai su que M. de Carcavi devoit vous envoyer mes solutions des Problêmes que j'avois proposés touchant la Roulette, je l'ai prié d'y joindre la dimension des courbes de toutes sortes de Roulettes, que je lui ai donnée pour vous l'adresser, parce qu'il m'a dit que vous avez témoigné d'avoir quelque envie de la voir. Je voudrois, Monsieur, que ce pût vous être une marque de l'estime que j'ai toujours faite de votre mérite. Je croyois qu'on ne pouvoit rien y ajouter : mais vous l'avez encore augmentée par cette horloge incomparable, & par ces merveilleuses dimensions des surfaces courbes des Conoïdes que vous venez de

produire, & qui ſont un ſujet d'admiration à tous nos Géometres. Pour moi je vous avoue que j'en ai été ravi, par la part toute particuliere que je prends à ce qui peut agrandir votre réputation, & par la paſſion avec laquelle je ſuis, &c.

DIMENSION

Des lignes courbes de toutes les Roulettes.

JE n'ai qu'une ſeule méthode pour la dimenſion des lignes de toutes ſortes de Roulettes, en ſorte que, ſoit qu'elles ſoient ſimples, alongées ou accourcies, ma conſtruction eſt toujours pareille, en cette maniere :

Soit (*Fig.* 43.) une Roulette de quelque eſpece que ce ſoit, dont *AF* ſoit la baſe ; *FC* l'axe ; & *CMF* la circonférence du cercle générateur, laquelle ait telle raiſon qu'on voudra à la baſe *FA* : & ayant diviſé cette circonférence en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points *M*, je mene de tous les points de diviſion des droites *MB* paralleles à la baſe, qui coupent la courbe de la Roulette, chacune en un point *B* ; & je joins tous les points voiſins *BB*. Fig. 43.

Je ſuppoſe que les diviſions de la circonférence ſoient en ſi grand nombre que la ſomme de ces droites *BB* (leſquelles ſont les ſous-tendantes de la

Roulette) ne different de la courbe de la Roulette, que d'une ligne moindre qu'aucune donnée.

J'ai auſſi beſoin qu'on ſache (& je le démontrerai en peu de mots) que ſi on fait : comme la circonférence du cercle générateur, à la baſe de la Roulette, ainſi le rayon *FG*, à la portion *GH* de l'axe priſe depuis le centre ; & que de l'extrémité *H* de cette portion on mene toutes les droites *HM:* il arrivera que toutes ces droites ſeront entre elles comme les ſous-tendantes *BB* de la Roulette, & qu'elles les repréſentent ; & c'eſt pourquoi je les appelle les *repréſentantes.*

Cela ſera viſible, ſi on entend que le cercle générateur ſoit placé à tous les points *B*, lequel coupe chaque parallele *BM*, voiſine au point *O*, en ſorte qu'on n'en conſidere que les arcs *BO*, leſquels ſeront égaux, tant entre eux, qu'aux arcs *MM*, & les portions *BO* des paralleles ſeront égales entre elles. Et ainſi chaque arc *BO* ſera à la portion *OB* de la parallele, comme la circonférence *FMC* à la baſe *AF*, ou comme *GM* à *GH.* Et il arrivera ainſi que chacun des petits triangles *BOB* ſera ſemblable à chacun des triangles *MGH :* chacun des angles *HGM* étant égal à chacun des angles *BOB* ou *BMC*, faits de chaque parallele & de la circonférence. Et partant chaque *BB* ſera à chaque arc *BO*, comme chaque *HM* à *MG.* Et toutes les *BB* enſemble, c'eſt-à-dire, la courbe,

be, ſera à tous les arcs égaux enſemble OB ou MM, c'eſt-à-dire, à la circonférence CMF, comme la ſomme des HM, à la ſomme des GM, ou au rayon multiplié par la circonférence CMF. Donc en multipliant les deux premiers termes par le rayon, la courbe multipliée par le rayon, eſt à la circonférence CMF multipliée par le rayon, comme la ſomme des repréſentantes HM, au rayon multiplié par la circonférence CMF; mais les deux conſéquents ſont égaux : donc la courbe multipliée par le rayon eſt égale à la ſomme des repréſentantes HM (multipliées chacune par les petits arcs MM) ; mais le rayon eſt donné : donc ſi la ſomme des HM eſt donnée, la courbe le ſera auſſi.

Donc toute la difficulté de la dimenſion des Roulettes eſt réduite à ce problême.

La circonférence d'un cercle donné, étant diviſée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & ayant mené des droites d'un point quelconque donné dans le plan du cercle à tous les points de diviſion; trouver la ſomme de ces droites?

Ce problême eſt aiſé à réſoudre, quand le point donné eſt dans la circonférence (comme il arrive quand la Roulette eſt ſimple ; c'eſt-à-dire, quand la baſe AF eſt égale à la circonférence CMF) ; car alors la ſomme de ces droites eſt égale au quarré du diametre, parce que c'eſt la même choſe

que la somme des sinus droits du quart d'un autre cercle, dont le rayon sera double.

Et si on résout ce problème quand le point donné est au-dehors, il sera résolu en même-temps quand le point est au-dedans.

Car s'il y a deux cercles concentriques, dont les circonférences soient divisées chacune en un nombre indéfini d'arcs égaux, la somme des droites menées d'un point quelconque de la grande circonférence à tous les points de division de la petite, sera la même que la somme des droites menées d'un point quelconque, pris dans la petite circonférence, à tous les points de division de la grande; & chacune des droites d'une multitude sera égale à chacune des droites de l'autre multitude, parce qu'elles sont les bases de triangles égaux & semblables. Et ainsi la somme des unes sera égale à la somme des autres, pourvu qu'elles soient multipliées par les mêmes arcs. Mais si on entend qu'elles soient multipliées chacune par les arcs auxquels elles se terminent, alors la somme de celles qui sont menées aux divisions de la grande circonférence, sera à la somme des autres, comme la grande circonférence est à l'autre, ou comme le grand rayon au petit. Et ainsi si la somme des unes est donnée, la somme des autres le sera aussi, les deux cercles étant donnés. Or j'ai ce Théorême général.

La circonférence d'un cercle donné étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & un point quelconque étant pris où l'on voudra, soit en la circonférence, soit dedans, soit dehors, soit sur le plan, soit hors du plan, d'où soient menées des droites à tous les points de division : je dis que la somme de ces droites sera égale à la surface d'un cylindre oblique donné.

Et je le démontre en cette sorte dans le cas où le point est pris hors du cercle, qui est le seul dont j'ai besoin ici, & duquel s'ensuivent tous les autres.

LEMME.

Soit le cercle donné A L B (Fig. 44.) *dont la circonférence soit divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux en* L; *soit le point* H *hors du plan, & élevé perpendiculairement sur un des points* A, *c'est-à-dire, que la droite* AH *soit perpendiculaire au plan du cercle; & soient menées toutes les* HL : *je dis que la somme des droites* HL *multipliées chacune par chaque petit arc* LL, *est égale au quart de la surface du cylindre oblique, qui aura pour base le cercle* AMC, *dont le rayon sera* AB, *& pour axe la droite* HB, *menée à l'autre extrémité du diametre* AB. Fig. 44.

Car soient les côtés du cylindre oblique *MN*, qui coupent la base supérieure en *N*; & soient *MO* les touchantes de la base inférieure, sur les-

quelles soient menées les perpendiculaires *NO*. Il est visible que le quart de la surface oblique *IVTC* est composée des parallélogrammes compris des arcs *MM* & des côtés *MN*, ou des rectangles compris des mêmes arcs *MM* & des perpendiculaires *NO*: mais les arcs *MM* sont égaux, tant entre eux, qu'aux arcs *LL*. Donc si la somme des perpendiculaires *NO* est égale à la somme des droites *HL*, ce qui est proposé sera évident.

Or chaque *NO* est égal à chaque *HL*, comme il est visible par l'égalité & la similitude des triangles *HBL*, *NMO*.

Car l'axe *HB* est égal & parallele au côté *NM*, & les droites *BL*, *MO* sont paralleles, étant perpendiculaires l'une à *MB*, l'autre à *AL*, qui sont paralleles à cause de l'égalité des angles *CBM*, *BAL*.

PROPOSITION.

Fig. 45. *Soit maintenant* (Fig. 45.) *le point* H, *donné dans le plan du cercle* ALB *& hors le cercle, & soient menées les* HL *aux points* L *des divisions égales: je dis que leur somme est égale à la surface d'un cylindre oblique.*

Car menons le cercle dont *BH* est le diametre, & prenons *AV* en sorte que *BV* quarré soit égal à *BA* quarré, plus deux fois le rectangle *BAH*; & menons le cercle dont *BV* soit le diametre, & où il arrivera aussi que quelque droite qu'on

qu'on mene du point *B*, comme *BLIZ*, le quarré de *BI* ſera égal à *BL* quarré, plus deux fois le rectangle *BLZ*.

Soit auſſi élevée *VO* perpendiculaire au plan du cercle, & ſoit priſe *BO* égale à *BH*, & ſoient menées toutes les droites *OI* (aux points où les droites *BL* coupent la circonférence *CIV*) : je dis que chaque droite *OI* eſt égale à chaque droite *HL*.

Car *HB* quarré eſt égal à *HL* quarré, plus *LB* quarré, plus deux fois le rectangle *HLY* (en prolongeant *HL* juſqu'au cercle *BZH*), ou à *HL* quarré, plus *LB* quarré, plus deux fois le rectangle *BLZ*, ou à *HL* quarré, plus *BI* quarré : mais auſſi *OB* quarré (qui eſt le même que *HB* quarré) eſt égal à *OI* quarré, plus *BI* quarré. Donc *OI* quarré, plus *IB* quarré, eſt égal à *HL* quarré, plus *IB* quarré : donc auſſi *OI* quarré eſt égal à *HL* quarré ; & partant *OI* à *HL*.

Donc la ſomme des *OI* eſt la même que la ſomme des *HL*, ſi on les multiplie chacune par les mêmes petits arcs ; mais la ſomme des *OI* (multipliées par les petits arcs *II*, leſquels ſont égaux entre eux, puiſque les arcs *LL* le ſont par l'hypotheſe) eſt égale au quart de la ſurface d'un cylindre oblique, par le Lemme, puiſque *VO* eſt perpendiculaire au plan du cercle *BIV*.

Donc la ſomme des *HL* multipliées par les mêmes arcs *II*, eſt égale au quart de la même ſurface

face. Donc la somme des HL multipliées par les petits arcs LL, est aussi égale à une surface d'un cylindre oblique proportionnée à l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose, si le point donné X est pris hors du plan, & élevé perpendiculairement sur le point H.

Car en prenant dans la perpendiculaire VO le point K, en sorte que KO quarré, plus deux fois le rectangle KOV, soit égal à HX quarré : il est visible que toutes les XL seront égales à toutes les KI, chacune à la sienne, puisque chaque XL quarré, ou XH quarré, plus HL quarré, sera égal à chaque KI quarré, ou OI quarré (qui est égal à HL quarré), plus KO quarré, plus deux fois KOV, qui sont pris égaux à XH quarré.

Donc la somme des XL est égale à la somme des KI, laquelle est égale à la surface d'un cylindre oblique par le même Lemme.

CONCLUSION.

De toutes lesquelles choses il s'ensuit que la somme (*Fig.* 43.) des représentantes HM, étant égale à la surface d'un cylindre oblique, elle sera par conséquent égale au rectangle qui a pour hauteur l'axe du cylindre oblique, & pour base la courbe de l'ellipse, engendrée dans la surface du cylindre oblique par le plan perpendiculaire à l'axe. Or la même

Fig. 43.

même ſomme des repréſentantes eſt déja montrée égale à la courbe de la Roulette multipliée par le rayon de ſon cercle générateur. Donc la courbe de la Roulette multipliée par le rayon, eſt égale à la courbe d'une ellipſe multipliée par l'axe d'un cylindre oblique donné. Donc comme l'axe du cylindre donné, eſt au rayon donné, ainſi la courbe de la Roulette eſt à la courbe d'une ellipſe. Ce qu'il falloit démontrer.

En ſuivant cette méthode, on trouvera le calcul des deux axes de l'ellipſe, dont la courbe ſe compare à celle d'une Roulette donnée. Le voici tel que je le fis envoyer à beaucoup de perſonnes au commencement de Septembre 1658, en Angleterre, à Liege & ailleurs, & entre autres à M. de Roberval, à M. de Sluze, & quelque temps après à M. de Fermat.

Soit fait: comme la circonférence du cercle générateur, à cette même circonférence plus la baſe de la Roulette, ainſi le diametre du cercle à une autre droite; cette droite ſoit le grand demi-axe d'une ellipſe. Soit fait: comme la circonférence plus la baſe, à la différence entre la circonférence & la baſe, ainſi le grand demi-axe, à l'autre demi-axe. La moitié de la courbe de l'ellipſe, qui aura ces deux demi-axes, ſera égale à la courbe de la Roulette entiere, & les parties aux parties.

On

On conclura aussi de tout ce qui a été démontré, que deux Roulettes, l'une alongée, l'autre accourcie, ont leurs lignes courbes égales entre elles, s'il arrive de part & d'autre que la base de l'une soit égale à la circonférence du cercle générateur de l'autre.

Il me seroit aisé de réduire cette méthode à la maniere des Anciens, & de donner une démonstration pareille à celle que j'ai faite de l'égalité des lignes spirale & parabolique. Mais parce que cela seroit un peu plus long & inutile, je la laisse, quoique je l'aie toute prête; je me contente d'en avoir donné cet exemple de la spirale & de la parabole.

On voit aussi, par toutes ces choses, que plus la base de la Roulette approche d'être égale à la circonférence du cercle générateur, plus le petit axe de l'ellipse qui lui est égale, devient petit à l'égard du grand axe : & que quand la base est égale à la circonférence, c'est-à-dire, quand la Roulette est simple, le petit axe de l'ellipse est entiérement anéanti; & qu'alors la ligne courbe de l'ellipse, laquelle est toute applatie, est la même chose qu'une ligne droite, savoir, son grand axe : & delà vient qu'en ce cas la courbe de la Roulette est aussi égale à une ligne droite. Ce fut pour cela que je fis mander à ceux à qui j'envoyai ce calcul, que les courbes des Roulettes étoient toujours, par leur nature, égales à des ellipses; & que cette admirable

égalité

égalité de la courbe de la Roulette ſimple à une droite que M. Wren a trouvée, n'étoit, pour ainſi dire, qu'une égalité par accident, qui vient de ce qu'en ce cas l'ellipſe ſe trouve réduite à une droite. A quoi M. de Sluze ajouta cette belle remarque dans ſa réponſe du mois de Septembre dernier, qu'on devoit encore admirer ſur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une courbe, qu'après qu'on a déja ſuppoſé l'égalité d'une droite à une courbe. Et qu'ainſi dans la Roulette ſimple, où l'on ſuppoſe que la baſe eſt égale à la circonférence du générateur, il arrive que la courbe de la Roulette eſt égale à une droite.

DE L'ESCALIER,
DES TRIANGLES CYLINDRIQUES,
ET DE LA SPIRALE AUTOUR D'UN CÔNE.

LETTRE
DE M. DETTONVILLE
A M. DE SLUZE,

Chanoine de la Cathédrale de Liege.

MONSIEUR,

JE n'ai pas voulu qu'on vous envoyât mes Problêmes de la Roulette, sans que vous en reçussiez en même-temps d'autres que je vous ai promis depuis un si long temps, touchant la dimension & le centre de gravité de l'*Escalier* & des *Triangles cylindriques*. J'y ai joint aussi la résolution que j'ai faite d'un problême, où il s'agit de la dimension d'un solide formé par une spirale autour d'un cône. C'est une solution que j'aime, parce que j'y suis arrivé par le moyen de vos lignes en *perle*, & que tout ce qui vous regarde m'est cher. Cela me

la

la rend plus considérable que sa difficulté, laquelle je ne puis désavouer, puisqu'elle avoit paru si grande à M. de Roberval : car il dit qu'il avoit résolu ce problême depuis long-temps; mais qu'il n'a jamais rien voulu en communiquer à qui que ce soit, voulant le réserver pour s'en servir en cas de nécessité, de même qu'il en tient encore secrets d'autres fort beaux pour le même dessein. Sur quoi je suis obligé de reconnoître la sincérité de sa maniere d'agir en ces rencontres : car aussitôt qu'il sut que je l'avois résolu, il déclara qu'il n'y prétendoit plus, & qu'il n'en feroit jamais rien paroître; par cette raison que n'en ayant jamais produit la solution, il devoit la quitter à celui qui l'avoit produite le premier. Je voudrois bien que tout le monde en usât de cette sorte, & qu'on ne vît point entre les Géometres cette humeur toute contraire de vouloir s'attribuer ce que d'autres ont déja produit, & qu'on ne trouve qu'après eux. Pour vous, Monsieur, vous en êtes bien éloigné, puisque vous ne voulez pas même avoir l'honneur de vos propres inventions : car je crois que pour faire savoir que vous avez trouvé, par exemple, cette parabole, qui est le lieu qui donne les dimensions des surfaces des solides de la Roulette autour de la base, il faudroit que ce fût moi qui le disse, aussi-bien que les merveilles de votre nouvelle Analyse, & tant d'autres choses que vous m'avez fait l'hon-

neur de me communiquer avec cette bonté que vous avez pour moi, qui m'engage d'être toute ma vie, &c.

POUR LA DIMENSION
Et le centre de gravité de l'Escalier.

DÉFINITION.

Fig. 27 & 46. SOIT (*Fig.* 27 & 46.) l'arc de cercle quelconque *CQ* divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points *D*, d'où soient menés les rayons *DA*; & soit entendu le premier secteur *ASC*, élevé au-dessus du plan du secteur entier *AQC*, & parallélement à ce même plan; en sorte que chaque point du secteur *ASC* élevé réponde perpendiculairement au même secteur *ASC* dans le plan du cercle; c'est-à-dire, que le point *A* élevé soit dans la perpendiculaire au plan du cercle, mené du centre *A*; & de même le point *C* au-dessus du point *C*, &c. Et soit la distance d'entre le plan du cercle & le secteur *ASC* élevé, égale à un des petits arcs *DD*.

Soit le second secteur *ARC* élevé de même parallélement au plan de la base, & distant de ce même plan de deux petits arcs *DD*. Et soit le troisieme secteur élevé de même de la distance de trois petits arcs. Et ainsi toujours.

Le

Le solide, composé de ces secteurs, s'appellera *escalier:* & le rayon AQ s'appellera le *commencement* ou le *premier dégré;* & AC sera le dernier dégré de l'escalier; & le secteur AQC en sera la base.

PROPOSITION PREMIERE.

Trouver la dimension d'un escalier donné, en supposant toujours la quadrature du cercle quand il le faut.

L'escalier est égal au quart du quarré de l'arc de sa base multiplié par le rayon.

Cela est visible, & démontré dans le Traité des Arcs, Proposition III.

PROPOSITION II.

Trouver le centre de gravité d'un escalier donné.

Le centre de gravité de l'escalier est élevé au-dessus de la base du tiers de l'arc de la base.

Cela est visible de soi-même, & s'ensuit aussi du Traité des Arcs, Proposition IV.

Et si de ce centre de gravité on abaisse une perpendiculaire sur la base, le point où elle tombera sera donné, puisque les distances, tant de la droite AB, que de la droite AC (*Fig.* 27 ou 32.) sont données par les Propositions V & VI des Arcs. Fig. 27 ou 32.

Car la distance de la droite AC multipliant l'escalier, est égale à la somme des solides compris

de chaque secteur ADC, & de son bras sur AC; laquelle somme est donnée par la Proposition V des Arcs.

Et sa distance de la droite AB multipliant de même l'escalier, est égale à la somme des solides compris de chaque secteur ADC & de son propre bras sur AB; laquelle somme est donnée par la Proposition VI.

Le calcul en est trop facile à faire, puisqu'on connoît l'escalier & les sommes de ces solides, par les Propositions V & VI. Et si on cherche, selon cette méthode, le centre de gravité de l'escalier, qui a pour base le quart de cercle, on trouvera qu'il est élevé au-dessus du plan de la base de la douzieme partie de la circonférence : & que le point où tombe cette perpendiculaire sur la base, est distant du premier dégré AB, d'une droite qui est au rayon, comme quatre fois le quarré du rayon, à trois fois le quarré de l'arc de 90 dégrés : & distant du dernier dégré AC, d'une droite qui est à sa distance de AB, comme l'arc de 90 moins le rayon, est au rayon.

POUR LA DIMENSION

Et le centre de gravité des Triangles cylindriques.

DÉFINITION.

SI trois points quelconques sont pris comme on voudra sur la surface d'un cylindre droit, & qu'on les joigne par des lignes planes (lesquelles seront nécessairement, ou des droites, ou des arcs de cercle, ou des portions d'ellipse) : la portion de la surface cylindrique comprise de ces trois lignes, s'appellera *Triangle cylindrique.*

Et si de deux points pris dans la circonférence de la base inférieure d'un cylindre droit, on mene les côtés du cylindre jusqu'à la base supérieure : la portion de la surface cylindrique, comprise entre ces deux côtés & les arcs des deux bases, s'appellera *Rectangle cylindrique.*

AVERTISSEMENT.

Je ne m'arrête pas à démontrer qu'en supposant la quadrature du cercle, on connoît le centre de gravité, & la dimension d'un rectangle cylindrique donné.

Et je ne m'arrête pas aussi à démontrer qu'on aura la dimension & le centre de gravité d'un triangle cylindrique quelconque, si on connoît la dimen-

sion & le centre de gravité d'une sorte de triangle cylindrique, que j'appelle de la premiere espece;
Fig. 3. savoir, de ceux qui, comme ZFB (*Fig.* 3.), sont composés de l'arc BF de la base, d'un côté FZ du cylindre, mené d'une des extrémités F de l'arc BF, & d'une portion d'ellipse ZB, engendrée dans la surface cylindrique par le plan ZBA, passant par le rayon BA, mené de l'autre extrémité B de l'arc BF.

Car si on veut s'y appliquer, on verra incontinent qu'un triangle cylindrique quelconque, se divisera toujours en plusieurs petits triangles qui seront, ou la somme, ou la différence des triangles cylindriques de cette espece, ou de rectangles cylindriques: de la même sorte qu'un triangle rectiligne quelconque se divisera toujours en plusieurs petits triangles, lesquels seront les sommes ou les différences de triangles rectangles donnés; & qu'ainsi en connoissant la dimension & le centre de gravité des seuls triangles rectangles, on connoîtroit aussi la dimension & le centre de gravité de toutes sortes de triangles rectilignes donnés.

Ainsi on connoîtra la dimension & le centre de gravité de toutes sortes de triangles cylindriques, si on connoît ces choses, tant dans les rectangles cylindriques (où elles sont connues d'elles-mêmes, comme il est déja dit), que dans les triangles cylindriques de la premiere espece, dans lesquels

quels on va le réſoudre dans la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION.

Étant donné un triangle cylindrique Z F B *de la premiere eſpece ; en trouver la dimenſion & le centre de gravité?*

Cette propoſition eſt déja réſolue dans le Traité des Solides circulaires. Car ce triangle cylindrique n'eſt autre choſe que la ſurface courbe de l'onglet du triligne circulaire *BFE*. Or dans ce Traité on a donné la dimenſion & le centre de gravité de la ſurface de ſon double onglet. Et il eſt viſible que le centre de gravité de la ſurface d'un des onglets, eſt dans la perpendiculaire au plan du triligne, menée du centre de gravité de la ſurface du double onglet : de ſorte qu'il ne reſte qu'à trouver la longueur de cette perpendiculaire ; laquelle eſt aiſée, puiſque la ſurface de l'onglet multipliée par cette perpendiculaire, eſt égale à la moitié de la ſomme des quarrés des ſinus de l'arc *FB* (quand le plan qui retranche l'onglet eſt incliné de 45 dégrés : & quand on l'a dans cette inclinaiſon, on l'a auſſi dans toutes les autres, puiſqu'elle eſt toujours en même raiſon à la hauteur *ZF*). Or la moitié de la ſomme des quarrés de ces ſinus eſt connue, & égale (par le Traité des Sinus, Propoſition II) à la moitié de l'eſpace *BFE*, multiplié par le rayon *BA*.

On suppose ici que dans la *Figure 3*, *ABC* est un quart de cercle, dont *A* est le centre; & que la surface *BFCYZB* est une portion de la surface du cylindre droit, retranchée par le plan *YZBA*, passant par le rayon *BA*, & formant dans la surface cylindrique la portion d'ellipse *BZY*.

DIMENSION

D'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône.

SOIT un cercle donné *ABCD*, dont *A* soit le centre, & *AB* un demi-diametre; soit *BG* perpendiculaire au plan du cercle de quelque grandeur que ce soit, par exemple, égale à *AB*, & soit entendu, en un même temps, la ligne *AB*, se tourner uniformément à l'entour du centre *A*, & la ligne *BG*, se porter en même-temps & par un mouvement uniforme le long du demi-diametre *BA*; & soit encore entendu en même-temps le point *B* monter uniformément vers *G*: en sorte qu'en un même temps le point *B* arrive à l'extrémité de la ligne *BG*, la ligne *BG* au centre *A*, & le demi-diametre *AB* au point *B* d'où il étoit parti.

Par ces mouvements, la ligne *BG* décrira une spirale *BIHA* dans le plan du cercle; & le point *B*, en montant, décrira une espece de spirale en l'air,

l'air, ou autour d'un cône BFE, qui se terminera au point E, d'où la perpendiculaire AE est égale à BG.

On demande la proportion de la sphere, dont le cercle donné est un grand cercle, avec le solide spiral décrit par ces mouvements, & terminé par quatre surfaces; savoir, la spirale BHA décrite dans le plan du cercle, la portion de surface conique bornée par la droite BE & par l'espece de spirale BFE, le triangle rectiligne BAE, & la surface cylindracée décrite par BG portée autour de la spirale BHA.

SOLUTION.

Soit coupée BA en un nombre indéfini de parties égales aux points O; & soit le point T celui du milieu, d'où soit mené le demi-cercle TH, qui, comme il est aisé de l'entendre, coupera le diametre prolongé en H au même point où arrive la spirale.

Soit sur ce demi-cercle élevée la surface cylindrique $TPFH$, qui coupe les surfaces qui bornent le solide, & y donnent pour communes sections $TPFH$, qui sera composée de quatre lignes; savoir, la ligne TP, qui se trouvera dans le plan BAE, la ligne FH dans la surface cylindracée égale à TP, le demi-cercle PF dans la surface supérieure, & le demi-cercle de la base TH égal au précédent PF, comme tout cela est évident; &

ainsi la figure *TPFH* sera un rectangle cylindrique.

Soit maintenant d'un des points *O* mené l'arc *OI* à l'entour du centre *A*, qui coupe la spirale en *I*, & soit élevé de même le rectangle cylindrique *OYSI*: je dis, & cela sera incontinent démontré, que ce rectangle cylindrique *OYSI* sera au premier *PTHF*, comme *BO* quarré en *OA*, à *BT* quarré en *TA*.

Ce qui étant toujours véritable en quelque lieu que soit le point *O*: il s'ensuit que tous les rectangles cylindriques ensemble, c'est-à-dire, le solide proposé, sera à celui du milieu *PTHF* pris autant de fois, c'est-à-dire, au demi-cylindre qui a le cercle donné pour base, & pour hauteur *TP*, qui est la moitié du demi-diametre, comme tous les *BO* quarré en *OA* ensemble, à *BT* quarré en *TA*, ou à *BT* cube pris autant de fois, c'est-à-dire, comme la perle du troisieme ordre au rectangle de l'axe & de l'ordonnée du milieu: laquelle raison M. de Sluze a donnée, non-seulement dans la perle du troisieme ordre, mais encore dans celle de tous les ordres, où cette raison est toujours comme nombre donné à nombre donné.

Donc le solide proposé est au demi-cylindre du cercle donné & de la hauteur *TP*, en raison donnée; donc il est aussi en raison donnée au cylindre entier de même base & de la hauteur quadruple, savoir, du diametre entier *BD*, & par conséquent

à

à la sphere, qui est les deux tiers du cylindre. Ce qu'il falloit démontrer.

Or que le rectangle cylindrique *YOIS* soit au rectangle cylindrique *PTHF*, comme *BO* quarré en *OA*, à *BT* quarré en *TA*: cela se prouve ainsi.

Je dis, premiérement, que l'arc *OI* est à l'arc *TH*, comme le rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*; car les arcs *OI*, *TH* sont en raison composée des demi-diametres *AO*, *AT*, & des angles, ou des arcs *BC*, *BCD*, qui sont, par la nature de la spirale, comme *CI* ou *BO*, à *DH* ou *BT*; donc ces arcs sont en raison composée de *BO* à *BT* & de *OA* à *TA*, c'est-à-dire, comme le rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*.

Venons maintenant aux rectangles cylindriques *YOIS*, *PTHF*: il est visible qu'ils sont en raison composée des hauteurs & des bases, c'est-à-dire, en raison composée de *OY* à *TP*, ou *BO* à *BT*, & de l'arc *OI* à l'arc *TH*, c'est-à-dire, comme on l'a vu, du rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*: mais la raison composée de *BO* à *BT*, & du rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*, est la même que la raison de *BO* quarré en *OA* à *BT* quarré en *TA*. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Les solides des autres spirales des ordres supérieurs, se trouveront de même par le moyen des lignes en perle des ordres supérieurs.

ÉGALITÉ

ÉGALITÉ DES LIGNES SPIRALE ET PARABOLIQUE.

LETTRE DE M. DETTONVILLE *A M. A. D. D. S.*

MONSIEUR,

J'AI reçu la Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, avec le petit Traité de Géométrie qu'il vous a plu m'envoyer; & je prends pour un effet de votre civilité l'ordre que vous me donnez de l'examiner; car vous pouviez le faire facilement vous-même, puisque ce qui est une étude pour les autres, n'est qu'un divertissement pour vous. Mais puisque vous voulez en savoir mon sentiment, je vous dirai, Monsieur, que l'Auteur y touche une difficulté où beaucoup d'autres ont heurté : & c'est une chose étrange de voir qu'en une matiere de Géométrie il se rencontre tant de contestations. Il y a environ quinze ans que M. Hobbes crut que la ligne courbe d'une parabole donnée étoit égale

à une ligne droite donnée. M. de Roberval enſuite dit qu'elle étoit égale à la ligne courbe d'une ſpirale donnée; mais ſans en donner de démonſtration autrement que par les mouvements, dont on voit quelque choſe dans le Livre des Hydrauliques du R. P. Merſenne : & comme cette maniere de démontrer n'eſt pas abſolument convaincante, d'autres Géometres crurent qu'il s'étoit trompé, & publierent que cette ligne parabolique étoit égale à la demi-circonférence d'un cercle donné: le Livre que vous m'envoyez maintenant, ſoutient de nouveau la même choſe. Cette diverſité d'avis m'ayant étonné, je voulus reconnoître lequel étoit le véritable; car quelque nombre de Géometres qu'il y eût contre M. de Roberval, je n'en conclus rien contre lui : & au contraire ſi on jugeoit de la Géométrie par ces ſortes de conjectures, la connoiſſance que j'ai de lui m'auroit fait pencher de ſon côté, le voyant perſiſter dans ſon ſentiment; mais comme ce n'eſt pas par-là qu'on doit en juger, je réſolus d'examiner moi-même ſi la ligne à laquelle on peut comparer la ligne parabolique donnée, eſt une ligne droite ou une ſpirale, ou une circonférence de cercle : c'eſt ce que je voulus chercher, comme ſi perſonne n'y avoit penſé : & ſans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indiviſibles, mais en ſuivant celles des Anciens, afin que la choſe pût

être

être désormais ferme & sans dispute. Je l'ai donc fait, & j'ai trouvé que M. de Roberval avoit eu raison, & que la ligne parabolique & la spirale sont égales l'une à l'autre : c'est ce que vous verrez. La démonstration est entiere & exactement accomplie, & pourra vous plaire d'autant plus qu'elle est la seule de cette espece : aucune autre n'ayant encore paru, à la maniere des Anciens, de la comparaison de deux lignes de différente nature. Ainsi je puis dire, avec certitude, que la ligne parabolique est égale à la spirale, & je m'assure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions. Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, & que ce vous soit au moins une marque du desir que j'ai de vous satisfaire & de vous témoigner que je suis de tout mon cœur, &c.

De Paris, ce 10 *Décembre* 1658.

PROPRIÉTÉS DU CERCLE.

I.

SI la touchante EV (Figure 35.) *eſt perpendiculaire au rayon* AE, *& que l'arc* EB *étant pris moindre qu'un quart de cercle, on incline* BV, *faiſant avec la touchante l'angle* BVE *aigu : je dis que toute la portion* BV *ſera hors du cercle.* Fig. 35.

Car en menant la touchante *BZ*, elle fera angle obtus avec *EZ* (puiſque l'arc *BE* eſt moindre qu'un quart de cercle). Donc l'angle *BZE* ſera plus grand que l'angle *BVE* : donc le point *Z* eſt entre les points *E*, *V* : donc l'angle *ABV* eſt obtus ; donc la portion *BV* ſera hors du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

II.

Si d'une extrémité du diametre (Fig. 36.) *eſt menée la touchante* SN, *& de l'autre extrémité* G *la droite* GN, *qui la coupe en* N, *& le cercle en* X : *je dis que la droite* SN *eſt plus grande que l'arc* SX. Fig. 36.

Car en menant la touchante *XR*, les deux touchantes *XR*, *RS* ſeront égales, tant entre elles, qu'à *RN* (à cauſe que l'angle *SXN* eſt droit) : donc *SN* eſt égale à *SR*, plus *RX*, qui ſont enſemble

semble plus grandes que l'arc *SX*. Ce qu'il falloit démontrer.

III.

Fig. 37. *Si la touchante* SL (Fig. 37.) *étant perpendiculaire au diametre* SG, *eſt égale à l'arc* SX, *moindre qu'un quart de cercle : je dis qu'en menant les droites* SX, XL, *les trois angles du triangle* XSL *ſont aigus.*

Car en menant la droite *GXN*, l'angle *XSL* l'eſt viſiblement, puiſqu'il eſt égal à l'angle *G*; l'angle *SXL* l'eſt auſſi, puiſqu'il diviſe l'angle droit *SXN*, par la précédente; & l'angle *SLX* l'eſt, à plus forte raiſon, le côté *SL* qui eſt égal à l'arc *SX*, étant plus grand que la droite *SX*. Ce qu'il falloit démontrer.

IV.

Fig. 38. *Si la touchante* S8 (Fig. 38.) *étant priſe plus grande que le diametre* SG, *auquel elle eſt perpendiculaire, l'on mene au centre la droite* 8T, *coupant le cercle au point* Y : *je dis que quelque point qu'on prenne dans l'arc* SX, *comme* X, *dont on mene* SX *coupant* T8 *en* Q, *la portion* 8Q *eſt plus grande que l'arc* SX.

Car en menant 8*Z* parallele à *ST*, les triangles rectangles *Z*8*S*, *NGS* ſeront ſemblables (à cauſe de l'égalité des angles *G* & 8*SZ*); donc les côtés ſeront proportionnels : mais *GS* eſt poſée moindre

dre que $S8$; donc SN eſt auſſi moindre que $Z8$: mais $Z8$ eſt moindre que $8Q$ (puiſque ST eſt moindre que TQ, le point Q étant hors du cercle); donc SN eſt moindre que $8Q$: mais l'arc SX eſt moindre que SN (par ce qui a été démontré); donc à plus forte raiſon l'arc SX eſt moindre que $8Q$. Ce qu'il falloit démontrer.

V.

Si l'arc de cercle EB (Fig. 39.) *moindre qu'un quart de cercle, eſt égal à la touchante* EV, *perpendiculaire au rayon* AE: *je dis que l'angle* EAV *ſera plus grand que la moitié de l'angle* EAB. Fig. 39.

Car ſoit menée la droite AZ, qui coupe l'angle EAB en deux parties égales, & la touchante EV au point Z: il eſt viſible que la portion EZ eſt moindre que la corde EB (puiſque l'angle EZB eſt obtus, l'arc étant moindre qu'un quart de cercle); mais la corde EB eſt moindre que l'arc EB, & partant moindre que EV: donc à plus forte raiſon EZ eſt moindre que EV: donc l'angle EAZ eſt moindre que l'angle EAV. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPRIÉTÉS

PROPRIÉTÉS DE LA SPIRALE.

Fig. 40. SI le rayon AB (*Fig.* 40.) qui est le commencement de la spirale de la premiere révolution $BCDXA$, est divisé en tant de portions égales qu'on voudra aux points $A, Y, 4, 3, B$: & les arcs menés de ces points autour du centre commun A, coupant la spirale aux points C, D, X, &c.:

Je suppose qu'on sache toutes les propriétés suivantes :

1°. Que l'arc quelconque $3C$ est à l'arc $4D$, comme le rectangle 83 in $3A$ au rectangle $B4$ in $4A$.

2°. Que les rayons $AB, AE, A8$, &c. font tous les angles égaux entre eux, & divisent les arcs en tant de portions égales entre elles que le rayon AB : & qu'ainsi telle partie que la premiere portion $B3$, est du rayon, telle partie l'arc BE l'est de sa circonférence, & l'arc CF ou $3C$ de la sienne : & telle partie est encore l'angle BAE de quatre angles droits.

3°. Que le rayon entier BA est à une portion quelconque $A3$, comme la circonférence entiere BEB, à l'arc $E8B$, qui contient autant de portions égales du cercle, que $A3$ contient de portions égales du rayon, ou comme telle autre circonférence qu'on voudra $3C3$, à l'arc correspondant $CF3$.

4°. Que

4°. Que tous les arcs BE, $3C$, $4S$, compris entre deux rayons prochains AB, AE, qui comprennent un des arcs égaux, ſont tous en proportion arithmétique : & que le moindre de ces arcs $Y9$, qui part du point Y le plus proche du centre, eſt égal à la différence dont chacun des autres differe de ſon voiſin : & qu'ainſi ſi le premier eſt 2, le ſecond eſt 4, le troiſieme eſt 6 : & ainſi toujours en ſuivant les nombres pairs.

5°. Que ce moindre arc $Y9$, pris autant de fois que l'arc BE eſt dans ſa circonférence, eſt égal au plus grand arc BE.

6°. Que ce moindre arc $Y9$ eſt égal au dernier arc extérieur de la ſpirale XY.

7°. Que l'angle aigu que fait la touchante à un point quelconque de la ſpirale C avec ſon rayon AC, ſe trouvera en faiſant un triangle rectangle, dont la baſe ſoit ce rayon AC, & la hauteur ſoit égale à l'arc extérieur $CF3$. Car alors l'angle de la touchante avec ſon rayon ſera égal à l'angle que l'hypothénuſe d'un tel triangle rectangle fait avec ſa baſe.

Conſéquences.

8°. Que la touchante de la ſpirale au point A eſt la même que le rayon AB, & que les touchantes aux autres points ſont toujours avec les rayons menés de ces points des angles d'autant plus grands que le point d'attouchement eſt plus

proche de B, parce que la raison du rayon à l'arc extérieur en est d'autant moindre : y ayant moindre raison de AC à l'arc $CF3$, que de AD à l'arc $DH4$, puisqu'en changeant & en renversant, il y a plus grande raison de l'arc $CF3$ à l'arc $DH4$, que de CA à AD ou AS, c'est-à-dire, que du même arc $CF3$ à $SD4$.

9°. Qu'ainsi si on mene des touchantes de tous les points où la spirale est coupée par les rayons qui divisent la circonférence en arcs égaux, le plus grand angle que ces touchantes fassent avec les rayons, est celui de la touchante menée du point B, où le premier rayon coupe la spirale, lequel est égal à celui d'une hypothénuse avec sa base, la base étant à la hauteur, comme le rayon à la circonférence. Et le moindre de ces anglès est celui de la touchante menée du point X, où le dernier rayon coupe la spirale.

10°. Que le moindre des angles des touchantes avec leurs rayons, est plus grand que la moitié de l'angle compris par deux rayons prochains qui enferment l'un des arcs égaux ; savoir, la moitié de l'angle BAE.

Car l'angle de la touchante au point X est celui de l'hypothénuse d'un triangle avec sa base (la base étant à la hauteur, comme AX, à l'arc extérieur XY, ou comme AY, à l'arc $Y9$) ; donc en faisant la perpendiculaire YG égale à l'arc $Y9$, l'angle

GAY

GAY sera celui de la touchante au point *X* avec son rayon. Or cet angle *GAY* est plus grand que la moitié de l'angle *YA*9 ou *BAE* (par la derniere propriété du cercle); & menant la touchante *EV* égale à l'arc *EB*, & menant aussi l'hypothénuse *AV*, l'angle *EAV* sera égal à cet angle, qui est le moindre de tous, de la derniere touchante au point *X* avec son rayon : mais l'angle *EAV* est plus grand que la moitié de l'angle *BAE*, par ce qui a été démontré; donc l'angle de la touchante au point *X* est aussi toujours plus grand que la moitié de l'angle *BAE*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE.

SOIT AB (Fig. 42.) *la touchante au sommet d'une parabole, divisée en tant de parties égales qu'on voudra aux points* 3, 4, Y, *d'où soient menés les diametres ou les paralleles à l'axe, coupant la parabole en* Q, 7, L. *Et de ces points soient menées les touchantes jusqu'aux diametres prochains* QK, 75, LT, &c. : *je dis que toutes les portions des diametres* PK, Q5, 7T, LY, &c. *comprises entre les touchantes & la parabole, sont égales entre elles.* Fig. 42.

Car chacune, comme *PK*, par exemple, sera montrée égale à la premiere *YL*, en cette sorte.

Soit prolongée *KQ* (puisque *PK* est prise en

exemple) jusques à l'axe au point S, & menée l'ordonnée QM.

Donc, par la nature de la parabole, puisque les deux diametres SA, KP, sont coupés par la touchante SK, il arrivera que

SA est à PK comme QS quarré à QK quarré,
ou comme $3A$ quarré à $3B$ quarré,
ou comme $3A$ quarré à AY quarré,
ou comme $3Q$
ou MA à LY

Mais, à cause de la touchante, SA est égale à MA; donc PK est égale à LY. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose qu'on sache cette autre propriété de la parabole:

Que si on mene les ordonnées, par tous ces mêmes points, PR, QM, $7G$, LH; toutes les portions de l'axe compriſes entre ces ordonnées, savoir RM, MG, GH, HA, seront en proportion arithmétique: & que leur différence sera double de la premiere HA (il faut dire le même des droites qui leur sont égales PZ, $Q2$, $7O$, LY). De sorte que si la derniere LY est 1, la seconde est 3, la troisieme 5, &c.; ainsi toujours par les nombres impairs.

AVERTISSEMENT.

Je démontre l'égalité de la ligne spirale avec la parabolique

parabolique en inscrivant & circonscrivant, tant à la spirale, qu'à la parabole, des figures desquelles je considere seulement le tour, ou la somme des côtés.

La maniere dont je me sers pour inscrire & circonscrire ces figures est telle.

Pour inscrire une figure en la parabole.

Soit (Fig. 40.) *une parabole dont* A R *soit l'axe,* R P *la base,* A B *la touchante au sommet, divisée en tant de parties égales qu'on voudra, aux points* 3, 4, *&c. d'où soient menées les paralleles à l'axe, qui coupent la parabole aux points* 7, Q, P, *&c. Les accommodées* P Q, Q 7, *&c. font une figure inscrite en la parabole, & c'est celle de laquelle je me sers, dont le tour est visiblement moindre que celui de la parabole, puisque, par la nature de la ligne droite, chaque accommodée est moindre que la portion de la parabole qu'elle sous-tend.* Fig. 40.

Avertissement.

Je suppose le principe d'Archimede : *que si deux lignes sur le même plan ont les extrémités communes, & sont courbes vers la même part, celle qui est contenue sera moindre que celle qui la contient.*

Pour circonscrire une figure à la parabole.

Fig. 40. *SOIENT dans la même* (Fig. 40.) *des points* Q, 7, *&c. menées des touchantes* QK, 75, &c. *qui coupent les diametres prochains en* K, 5, &c. *la figure* PKQ57, *&c. composée des touchantes* KQ, 57, *&c. & des portions extérieures des diametres* PK, Q5, *&c. forme une figure circonscrite à la parabole, qui est celle dont je me sers, & dont le tour est visiblement plus grand que celui de la parabole, puisque les deux quelconques côtés liés* KK, *plus* PQ (*dont l'un est la touchante, & l'autre la portion extérieure du diametre*) *sont plus grands que la portion de la parabole qu'ils enferment, puisqu'ils ont les extrémités* P, Q *communes, & que la parabole est courbe vers la même part.*

CONSÉQUENCE.

De cette description & de la propriété que nous avons démontrée de la parabole, il s'ensuit, qu'en toute figure circonscrite à la parabole en la maniere qui est ici marquée, les portions des paralleles à l'axe *PK*, *Q5*, *LY*, sont toutes égales entre elles.

Pour inscrire une figure en la spirale.

SOIT le rayon AB *le commencement d'une spirale de la premiere révolution, divisé en parties égales*

les aux points 3, 4, *&c., d'où soient menés les cercles* 3C, 4DC, *&c. concentriques au grand, qui coupent la spirale en* C, D, *&c. Les accommodées* BC, CD, *&c. formeront une figure inscrite en la spirale, qui est celle dont je me sers, & dont le tour est visiblement moindre que celui de la spirale, puisque par la nature de la ligne droite, chaque accommodée est moindre que la portion de la spirale qu'elle sous-tend.*

Pour circonscrire une figure à la spirale.

SOIENT des points C, D, *&c. menées les touchantes de la spirale, jusques aux cercles prochains qu'elles coupent en* M, N, *&c. la figure* 8MCND, *composée des portions extérieures des arcs* BM, CN, *&c. & des touchantes* MC, ND, *&c., qui sera circonscrite à la spirale, est celle dont je me sers, & dont le tour est visiblement plus grand que celui de la spirale, puisque deux quelconques côtés liés* BM, *plus* MC (*dont l'un est un arc de cercle extérieur, & l'autre la touchante de la spirale*) *sont plus grands que la portion de la spirale qu'ils enferment, ces figures étant par-tout courbes vers la même part, & ayant les extrémités* B, C *communes.*

DÉFINITIONS.

Soit dans la même (*Fig.* 40.) la droite *AB* le commencement d'une spirale de la premiere révo- Fig. 40.

lution ; & soit la même droite AB la touchante au sommet d'une parabole, dont l'axe AR soit égal à la moitié de la circonférence du grand cercle BEB, & la base RP, égale au rayon AB. Cette parabole & cette spirale ayant cette condition, seront dites *correspondantes*.

Soit maintenant divisée AB en tant de portions égales qu'on voudra aux points 3, 4, Y, &c. d'où soient menés autant de cercles ayant le centre commun en A, qui coupent la spirale en C, D, &c. que de lignes droites paralleles à l'axe, qui coupent la parabole Q, 7, &c. (Donc chaque point du rayon, comme 3, donnera un point dans la parabole par la parallele à l'axe 3 Q, & un point dans la spirale par l'arc de cercle 3 C). Ces points sont dits *correspondants* ; & la portion de la parabole entre Q & P *correspond* à la portion de la spirale entre B & C ; & les inscrites CB, PQ, sont *correspondantes* : & par la même raison les inscrites DC, $Q7$.

Et si de ces points Q, 7, &c. sont menées les ordonnées QZ, 72, &c. la portion QZ *correspond* à la portion CE, & 72 à DF, &c. Et la premiere portion PZ (égale à la premiere portion de l'axe, comprise entre les deux premieres ordonnées) *correspond* à l'arc BE du premier cercle, compris entre les deux premiers rayons : & la seconde portion $Q2$, comprise entre la seconde & la troisie-

me,

me, *correſpond* à l'arc du ſecond cercle *CF* compris entre le ſecond & le troiſieme rayon ; & ainſi des autres. Et le triangle rectangle *PQZ correſpond* au triligne *BEC*, fait de l'arc *BE* & des droites *BCCE* : & de même le triangle Q72 *correſpond* au triligne *CFDC* ; & les touchantes de la parabole & de la ſpirale *QK*, *CM* ſont *correſpondantes*, étant menées des points correſpondants *Q*, *C* ; & la portion *PK* à l'arc *BM*, &c.

RAPPORTS entre la parabole & la ſpirale, qui ont la condition ſuppoſée pour être dites correſpondantes.

I.

SI une parabole & une ſpirale ſont en la condition ſuppoſée : je dis que quelque point qu'on prenne dans la touchante AB, *comme* 3, *la portion du diametre extérieur, ou bien* 3Q, *compriſe entre le point* 3 *& la parabole, eſt égale à la moitié de l'arc* 3FC, *paſſant par le même point* 3, *& extérieur à la ſpirale.*

Car, par la nature de la ſpirale, la circonférence entiere *BEB* eſt à l'arc extérieur *CF*3, comme *BA* quarré à *A*3 quarré (puiſque l'entiere *BEB* eſt à l'arc *CF*3, en raiſon compoſée de l'entiere *BEB* à l'entiere 3*C*3, ou de *BST* à *A*3, & de l'entiere

l'entiere $3C3$ à l'arc $CF3$, qui est encore comme BA à $A3$). Donc leurs moitiés sont aussi en même raison; & partant BP, qui est la moitié de la circonférence BEB, est à la moitié de l'arc $CF3$, comme BA quarré à $A3$ quarré, ou, par la nature de la parabole, comme la même BP à $3Q$. Donc $3Q$ est égale à la moitié de l'arc $CF3$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit que le moindre des arcs $Y9$, compris entre deux rayons prochains, est double du dernier diametre extérieur YL.

Car ce moindre arc $Y9$ est égal au dernier extérieur YX, lequel est double de sa portion YL par cette proposition.

II.

Les mêmes choses étant posées : je dis que les angles que les touchantes de la spirale font avec leurs rayons, sont égaux aux angles que les touchantes de la parabole font avec leurs ordonnées aux points correspondants : ou, ce qui est le même, que quelque point qu'on prenne dans la spirale, comme C, *son correspondant* Q *dans la parabole, l'angle* ECM *du rayon avec la touchante, sera égal à l'angle* ZQK *de l'ordonnée* ZQ *avec la touchante* QK.

Car la portion de la touchante, compriſe entre le point Q & l'axe, est l'hypothénuse d'un triangle

gle rectangle, dont la base est l'ordonnée $Q\,6$ (égale à $A\,3$ ou AC), & la hauteur est double de $A\,6$ ou de $Q\,3$, & partant égale à l'arc extérieur $CF\,3$ (qui est double de la même $Q\,3$) : mais par la Propriété VII de la spirale, l'angle ECM de la touchante au point C avec son rayon, est aussi égal à l'angle de l'hypothénuse avec la base qui soit à la hauteur, comme le même rayon AC au même arc extérieur $CF\,3$. Donc l'angle ECM est égal à l'angle ZQK. Ce qu'il falloit démontrer.

III.

Les mêmes choses étant posées : je dis que chacun des arcs BE, CF, *&c. (qui sont les mêmes que les arcs* BE, 3 C, 45, *&c. compris entre les deux rayons prochains) diminué de la moitié du dernier* Y 9, *est égal à chacune des portions de l'axe qui lui correspond*, PZ, Q 2, *&c.* (*& qui sont les mêmes que les portions de l'axe entre les ordonnées*).

Car toutes ces portions sont entre elles comme les nombres impairs; & tous les arcs BE, CF ou $3\,C$, sont entre eux comme les nombres pairs : mais le plus petit des arcs $Y\,9$ est double de la premiere portion YL, par le Corollaire du rapport premier; donc si YL est 1, l'arc sera 2 : & partant toutes les portions $P\,2$, $Q\,2$, &c. étant 1, 3, 5, 7, 9, &c., & les arcs BE, $3\,C$, &c. étant 2, 4, 6, 8, &c. : il s'ensuit que chacun differe

fere de ſon correſpondant de l'unité, c'eſt-à-dire; de la moitié de *Y* 9. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Si une grandeur A *eſt moindre que quatre autres enſemble* B, C, D, E : *je dis que la différence entre la premiere* A *& deux quelconques des autres, comme* B, *plus* C, *ſera moindre que les quatre enſemble* B, C, D, E.

Cela eſt manifeſte.

PROBLÊME.

ÉTANT donnée une parabole & une ſpirale en la condition ſuppoſée : inſcrire & circonſcrire en l'une & en l'autre des Figures, en ſorte que le tour de l'inſcrite en la parabole ne differe du tour de l'inſcrite en la ſpirale, que d'une ligne moindre qu'une quelconque donnée Z; *& de même pour les circonſcrites.*

Fig. 41. Soit pris dans une figure ſéparée (*Fig.* 41.) le rayon *t s*, plus grand que le rayon *A B*; & ayant élevé *s* 8 perpendiculairement égale à la circonférence, dont *t s* eſt le rayon, ſoit menée 8 *t*, coupant ſon cercle en *y* : ſoit maintenant de 8 *Y* retranchée 8 *a* de telle grandeur qu'on voudra, pourvu qu'elle ſoit moindre qu'un tiers de *Z*; & ayant mené *a s* coupant l'arc en *d*, ſoit diviſée la circonférence en tant d'arcs

d'arcs égaux qu'on voudra, pourvu que chacun, comme sx, ſoit moindre que l'arc sd.

Je dis qu'en diviſant le cercle BEB en autant d'arcs égaux, & le rayon AB de même en autant de portions égales aux points 3, 4, &c., d'où ſoient menés à l'ordinaire des cercles & des paralleles à l'axe, qui coupant la ſpirale & la parabole, y donneront les points pour inſcrire & circonſcrire des figures en la maniere qui a été marquée : ces figures ſatisferont au Problême.

I PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

Que la différence entre les deux inſcrites eſt moindre que Z.

POUR prouver que la ſomme des côtés de l'inſcrite en la parabole differe des côtés de l'inſcrite en la ſpirale d'une ligne moindre que Z, on fera voir que chaque côté de l'une ne differe de ſon correſpondant que d'une ligne, qui, priſe autant de fois qu'il y a de côtés, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence, eſt moindre que Z. D'où il s'enſuit néceſſairement que toutes ces différences enſemble, priſes chacune une fois, ſont moindres que Z.

Je dis donc que la différence entre BC, par exemple, & ſon correſpondant PQ, priſe autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, eſt moindre que Z.

Car

Car en menant du point E (puiſque BC eſt priſe en exemple) la perpendiculaire EV égale à l'arc EB, & retranchant EO égale à ZP, (& qu'ainſi l'excès VO ſoit égal au demi-arc $Y9$): il eſt manifeſte que CO ſera égale à PQ, CE étant égale à QZ; donc il ſuffira de montrer que la différence entre CO & CB, priſe autant de fois qu'il y a d'arcs, eſt moindre que Z. Mais cette différence entre BC & CO eſt moindre que la ſomme des deux droites BV, VO (car la différence des côtés BC, CO eſt moindre que la baſe BO, laquelle BO eſt moindre que les côtés enſemble BV, VO). Donc il ſuffira *à fortiori* de montrer que les deux côtés enſemble BV, VO, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, ſont moindres que Z: & cela eſt aiſé, puiſque chacun, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, eſt moindre qu'un demi & même qu'un tiers de Z.

Car cela eſt viſible de VO, puiſqu'étant égale à un demi-$Y9$, il eſt clair qu'étant priſe autant de fois qu'il y a d'arcs, elle ne ſera égale qu'au demi-arc BE, & partant bien moindre qu'un demi-Z, l'arc BE étant moindre qu'un demi-Z, puiſqu'il eſt moindre que l'arc sx de la figure ſéparée (le rayon AB étant moindre que ts), lequel arc sx eſt moindre que 8 Q par le Lemme IV des ſpirales, & *à fortiori*, que 8 A, qui a été pris moindre qu'un tiers de Z.

Il

Il ne reſte donc qu'à démontrer la même choſe de BV, & cela ſera aiſé en cette ſorte :

Soit priſe dans la figure ſéparée la portion sl égale à l'arc sx, & ſoit menée le parallele à $t8$, & $t\chi$ parallele à lx. Donc puiſque l'angle lxs eſt aigu par la troiſieme propriété du cercle, l'angle $t\chi s$ ſera obtus, & partant $t\chi$ ſera moindre que ts ou ty, & *à fortiori* que tq : donc auſſi, à cauſe des paralleles, lx ſera moindre que le : mais le eſt à $8q$, comme ls à $s8$: donc lx a moindre raiſon à $8q$, que ls à $s8$, ou que l'arc lx à ſa circonférence : donc lx priſe autant de fois que l'arc sx eſt en ſa circonférence, ou l'arc BE dans la ſienne, eſt moindre que $8q$, & *à fortiori* qu'un tiers de Z.

Donc BV *à fortiori* priſe autant de fois, ſera moindre qu'un tiers de Z, puiſqu'elle eſt moindre que lx, le rayon AB étant moindre que le rayon ts, & toutes choſes proportionnelles. Ce qu'il falloit démontrer.

II PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

Que la différence entre les deux circonſcrites eſt moindre que Z.

POUR prouver que la ſomme des côtés de la circonſcrite à la ſpirale, ne differe de celle des côtés de la circonſcrite à la parabole, que d'une ligne

ligne moindre que Z : on montrera que deux quelconques côtés liés, circonscrits à la spirale, comme l'arc BM, plus la touchante MC, ne different des deux côtés correspondants en la parabole PK, plus KQ, que d'une ligne, qui, prise autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, est moindre que Z. D'où il s'ensuit nécessairement que toutes les différences prises chacune une fois seront moindres que Z.

Je dis donc que la différence entre deux quelconques côtés liés BM, plus MC, & les correspondants PK, plus KQ, prise autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindte que Z.

Car puisque CE est égal à QZ, que les angles Z & CEV sont droits, & que les angles ECI du rayon avec la touchante de la spirale, & ZQK de l'ordonnée avec la touchante de la parabole, sont égaux : il s'ensuit que EI est égal à ZK, & CI à QK, & OI à KP ou à YL ou au demi-arc $Y9$.

Maintenant puisque EV touche le cercle BE en E, la portion IV est toute hors le cercle ; & puisque BVY est inclinée en angle aigu, & aussi CI (l'angle au point E étant droit) : il s'ensuit par la premiere propriété du cercle, que les droites BV, MI sont toutes hors le cercle ; donc les trois droites BV, VI, IM, étant toutes hors le cercle, l'arc BM, par le principe d'Archimede, sera moindre

dre que les trois droites, ou que ces quatre droites BV, VO, OI, IM; donc, par le Lemme précédent, la différence entre l'arc BM & les deux quelconques OI, plus IM, sera moindre que les quatre BV, VO, OI, IM, ou que les trois BV, VI, IM. Donc la différence, qui est toute la même, entre l'arc BM, plus MC, & les deux OI, plus IMC, ou les deux PK, plus KQ, est moindre que BV, plus VI, plus IM.

Donc pour montrer que la différence entre BM, plus MC, & PK, plus KQ, prise autant qu'il y a d'arcs, est moindre que Z, il suffira *à fortiori*, de montrer que ces trois ensemble BV, plus VI, plus IM, prises autant de fois, sont moindres que Z. Et cela est aisé, puisque chacune d'elles, prise autant de fois, est moindre qu'un tiers de Z.

Car cela est déja montré de BV.

Cela est aussi aisé de VI, puisqu'elle est égale à l'arc $Y9$ (chacune des deux VO, OI étant montrée égale à un demi-$Y9$), & qu'ainsi VI étant prise autant de fois qu'il y a d'arcs, ne sera qu'égale à l'arc BE, & partant moindre qu'un tiers de Z.

Il ne reste donc qu'à le montrer de IM, en cette sorte.

Soit prise dans la figure séparée, sh égale à EI; & soient menées $ho2$, parallele à $c8$, & hcf perpendiculaire à scq. Soit maintenant menée hrp, faisant l'angle hps égal à l'angle ICE de la *Fig.* 40:

donc elle tombera entre *hf* & *h*2, puiſque l'angle *hps* ou *ECI*, du rayon avec la touchante de la ſpirale, eſt moindre que l'angle *s*2*h* ou *st*8 (à cauſe qu'au triangle rectangle *st*8, la baſe eſt à la hauteur comme le rayon à la circonférence) & plus grand que la moitié de l'angle *BAE*, ou que l'angle *IEB*, ou *hsx*, ou *hfs* : mais l'angle *C* eſt droit; donc l'angle *hro* eſt obtus : & partant *hr* eſt moindre que *ho* : mais *ho* eſt à 8*q* comme *hs* à *s*8. Donc il y a moindre raiſon de *hr* à 8*q*, que de *hs* à *s*8 : donc *à fortiori* il y a moindre raiſon de *hr* à un tiers de *Z*, que de *hs* ou *EI*, à la circonférence *BEB*, moindre que *s*8, & *à fortiori*, que de *EV* ou l'arc *BE* à la circonférence. Donc *hr*, priſe autant de fois que l'arc *BE* eſt en ſa circonférence, eſt moindre qu'un tiers de *Z*.

Et partant *IT* (qui eſt égal à *hs*, toutes choſes étant pareilles), & *à fortiori IM*, pris autant qu'il y a d'arcs, ſera moindre qu'un tiers de *Z*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cette même conſtruction que la figure inſcrite en la parabole, ne differe de la circonſcrite à la même parabole, que d'une ligne moindre que *Z*.

Car en tout triangle rectangle ou amblygone, l'excès dont les deux moindres côtés enſemble ſurpaſſent

passent le plus grand, est toujours moindre que chacun des côtés. D'où il s'ensuit que deux côtés liés quelconques de la figure circonscrite, comme PK, plus KQ, surpassent l'inscrite PQ d'une ligne moindre que le côté PK (puisque l'angle de la touchante avec la parallele à l'axe, est toujours obtus, si ce n'est au sommet où il est droit); donc tous les excès ensemble, dont les côtés liés de la circonscrite, surpassent les côtés liés de l'inscrite, sont moindres que tous les côtés PK ensemble, c'est-à-dire, moindres que YL pris autant de fois qu'il y a d'inscrites, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence; or YL ou la moitié de $Y9$ prise autant de fois, est moindre que Z; donc tous les excès ensemble dont les côtés circonscrits surpassent les inscrites, sont moindres que Z.

THÉORÊME.

Si une parabole & une spirale sont en la condition supposée : je dis que la ligne parabolique est égale à la ligne spirale.

Car si elles ne sont pas égales, soit X la différence; & soit Z le tiers de X; & soient inscrites & circonscrites à la parabole & à la spirale des figures comme en la précédente, en sorte que la différence entre les inscrites soit moindre que Z, & que la différence entre les circonscrites soit aussi moindre que Z.

Maintenant puisque la ligne spirale est moindre que le tour de la figure qui lui est circonscrite, & plus grande que le tour de l'inscrite : il s'ensuit que la différence entre la ligne spirale & le tour de la figure qui lui est inscrite, est moindre que *Z* ; & de même pour la parabole (puisque la différence entre l'inscrite & la circonscrite, est moindre que *Z*, par la construction) ; mais la différence entre l'inscrite en la spirale & l'inscrite en la parabole, est aussi moindre que *Z*, par le Corollaire de la précédente. Donc la différence entre la ligne spirale & le tour de l'inscrite en la parabole, est nécessairement moindre que deux *Z*. Mais la différence entre l'inscrite en la parabole & la ligne même de la parabole, est moindre que *Z*. Donc la différence entre la ligne de la spirale & la ligne de la parabole est nécessairement moindre que trois *Z*, c'est-à-dire, que *X*, contre la supposition.

On montrera toujours la même absurdité, quelque différence qu'on suppose entre les lignes spirale & parabolique. Donc il n'y en a aucune : donc elles sont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

LETTRE

LETTRE
DE M. HUGUENS DE ZULICHEM
A M. DETTONVILLE.

MONSIEUR,

LE Gentilhomme inconnu ne peut vous avoir fait entendre que la moindre partie de l'eſtime que j'ai pour vous; & ſi vous n'en croyez beaucoup davantage, vous ne ſavez non plus combien j'ai eu de joie en recevant celle que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire : ne pouvant l'exprimer dignement, je vous dirai ſeulement que je me crois bien plus heureux qu'auparavant, après avoir reçu les offres de votre amitié, & que je répute cette acquiſition pour la plus inſigne que j'aie à faire jamais. Je ſuis ſi loin de croire de l'avoir méritée par l'accueil que j'ai fait à cet excellent homme, qu'au contraire je ſais bien qu'il faut que j'en demande pardon, ne l'ayant pas traité, ni ſelon ſa condition, ni même ſelon que méritoient celles de ſes qualités qu'il n'a pu me celer. Je le prierai de ne point s'en ſouvenir, & vous, Monſieur, de croire qu'à l'avenir je tâcherai de m'acquitter mieux envers ceux qui m'apporteront de vos nouvelles. J'ai été bien aiſe de voir que mon invention des Horloges eſt dans votre approbation, quoique les éloges qu'il vous a plu lui donner, ſont beaucoup au-deſſus de ce qu'elle mérite. Il y a beaucoup de haſard à rencontrer des choſes ſemblables, & fort peu de ſcience ou de ſubtilité. Auſſi ne ſont-elles propres qu'à acquérir du crédit aux Ma-

thématiques parmi le commun des hommes ; au lieu que des Lettres (1) comme vous allez nous en produire, seront suivies, avec raison, de l'admiration & de l'étonnement des plus savants. Je ne suis pas de ce nombre ; mais j'ai un desir incroyable de voir la suite de cette merveilleuse Lettre (2) dont vous m'avez fait la faveur de m'envoyer le commencement, & d'autant plus, que cet échantillon me fait espérer que nous y trouverons les choses les plus sublimes traitées avec toute la clarté & évidence possible. Vous ne devez donc pas craindre de grossir vos paquets de ces feuilles si précieuses ; mais croire au contraire que vous m'obligerez infiniment de le faire le plutôt que vous pourrez. J'ai essayé quelques-uns de vos problêmes, mais sans prétendre aux Prix ; & je me crois heureux de n'avoir pas entrepris la solution des plus difficiles, parce que tant de personnes plus intelligentes que moi n'en ayant pu venir à bout, cela me fait conclure que ma peine, aussi-bien que la leur, auroit été perdue : même dans ce que je crois avoir trouvé, j'ai commis une erreur assez lourde, de laquelle je ne me suis apperçu que depuis avoir vu que mon calcul ne répondoit pas au vôtre. Je parle de la proportion que vous avez trouvée de sept fois le diametre à six fois la circonférence, qui est vraie, & non pas la mienne, que je crois que vous avez vue dans la Lettre que j'ai envoyée il y a quelque temps à M. de Carcavi. Vous jugerez bien pourtant que je ne me suis abusé qu'au calcul, & non pas à la méthode, laquelle je connois assurément être sans faute,

(1) Huguens fait allusion aux différentes pieces composées par Pascal à l'occasion de ses Problêmes sur la Cycloïde, & imprimées dans ce Volume.

(2) Lettre à M. de Carcavi par A. Dettonville, ci-dessus page 229.

puisqu'elle

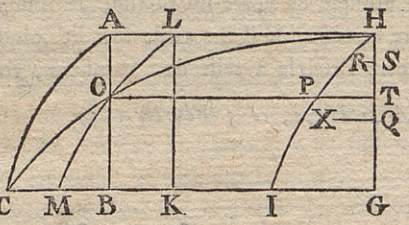
puisqu'elle confirme votre proposition susdite : & je pourrois par-là même trouver encore le centre de gravité de la moitié du solide que fait le double espace *B C G* dans votre Figure à l'entour de sa base, mais non pas aux autres cas, faute de savoir le centre de gravité de certaines portions du cylindre. J'ai prié M. de Carcavi de vous communiquer aussi ce que j'avois ajouté dans ladite Lettre touchant les superficies des Conoïdes & Sphéroïdes, & de la longueur de la ligne parabolique. Et peu de jours après avoir envoyé cette Lettre, je trouvai le centre de gravité de la ligne cycloïde & de ses parties coupées par une parallele à la base, qui ont cette propriété étrange, que leur centre de gravité divise leur axe toujours en la raison de 1 à 2, comme vous savez, Monsieur ; mais vous saurez aussi que je ne vous parle de ces choses que pour vous faire voir l'inclination que je garde toujours pour la science dans laquelle vous excellez si fort, afin que vous m'en estimiez d'autant plus digne de profiter de votre instruction. Je souhaite que ce puisse être bientôt, & il me tarde fort de joindre la qualité de votre Disciple à celle de, Monsieur, votre, &c.

A la Haye, ce 5 Février 1659.

LETTRE DE M. SLUZE
A M. PASCAL.

MONSIEUR,

BIEN que je devrois passer pour importun, je ne saurois m'abstenir de vous témoigner par la présente le contentement que j'ai reçu d'apprendre de vos Traités que le peu que j'avois démontré touchant les Cycloïdes considérées universellement, a tant de rapport avec vos principes. Il me souvient de vous avoir envoyé un Lemme, l'automne passé, sur lequel est fondé tout ce que j'avois trouvé. En voici un exemple. Soit un triligne composé de l'angle droit



ABC & de la courbe *CA*: & par le mouvement de la figure *ABC* sur *AB* prolongée, & un autre mouvement égal du point *C* sur la courbe *AC*, soit décrite la cycloïde *COH*. Soit aussi le point *X* le centre de gravité de la courbe *IPH* égale à *CA*, duquel soit menée à *HG*, la perpendiculaire *XQ*: je dis que le triligne mixtiligne *CHA* au triligne mixtiligne *CHI*, aura toujours la même raison que *HQ* à *QG*. De même en prenant quelque point en la

la cycloïde, comme O, par lequel passe le triligne générateur $MOLK$, & menant OPT parallele à CG, si R est centre de la courbe PH, duquel on applique RS, le triligne LOH au triligne HOP sera toujours en même raison de HS à ST. D'où s'ensuit (supposant le triangle générateur connu), que quand nous avons le centre de pesanteur de la ligne courbe du triligne & des parties d'icelle, nous avons aussi la quadrature de la Cycloïde; & qu'ayant d'ailleurs la quadrature de la Cycloïde, nous avons le centre de la courbe qui l'engendre, & d'où aussi l'on peut tirer quantité d'autres conséquences que vous avez déja tirées, ou que vous tirerez sans difficulté. Mes principes sont quasi les mêmes que ceux dont vous vous êtes servi; je le vois par les regles de la Statique & par les nombres (comme vous avez pu remarquer dans le Lemme que je vous ai envoyé); mais votre application est plus belle & plus universelle. Pardonnez à mon incivilité, si j'interromps vos occupations plus sérieuses, quoique ce soit une faute dans laquelle je suis en hasard de retomber encore ci-après; car si je puis rencontrer un jour le loisir que je n'ai pu avoir jusqu'à présent, d'étudier parfaitement vos principes, je prendrai la hardiesse de vous écrire, s'il y a en quoi j'aie eu le bonheur de rencontrer quelque chose qui ait du rapport avec iceux; & j'espere que vous aurez la bonté de le souffrir de celui qui est absolument, Monsieur, votre, &c.

A Liege, ce 29 Avril 1659.

LETTRE

LETTRE DE M. SLUZE
A M. PASCAL.

MONSIEUR,

AYANT rencontré avant-hier l'occasion d'un ami qui s'en alloit à Sédan, je l'ai chargé de quelques copies du Livre dont je vous avois écrit il y a quinze jours, & j'espere qu'elles arriveront à Paris en même-temps que la présente, ou au moins avec les Coches de Sédan. Le paquet porte l'inscription de votre nom; mais en cas que l'on tardât à vous le porter, vous m'obligerez fort de le faire prendre au logis où les Coches arrivent, & me donner votre sentiment sur le contenu du Livre, pendant que je demeure inviolablement, Monsieur, votre, &c.

A Liege, le 19 Juillet 1659.

LETTRE
DE M. LEIBNITZ
A M. PÉRIER,

Conseiller à la Cour des Aides de Clermont-Ferrand, Neveu de M. Pascal.

MONSIEUR,

VOUS m'avez obligé sensiblement, en me communiquant les manuscrits (1) qui restent de feu M. Pascal, touchant les Coniques. Car, outre les marques de votre bienveillance, que j'estime beaucoup, vous me donnez moyen de profiter par la lecture des méditations d'un des meilleurs esprits du siecle : je souhaiterois pourtant d'avoir pu les lire avec un peu plus d'application ; mais le grand nombre de distractions qui ne me laissent pas disposer entiérement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néanmoins je crois les avoir lues assez pour pouvoir satisfaire à votre demande, & pour vous dire que je les tiens assez entieres & finies, pour paroître à la vue du public ; & afin que vous puissiez juger si je parle avec fondement, je veux vous faire un récit des pieces dont elles sont composées, & de la maniere que je crois qu'on peut les ranger.

I. Il faut commencer par la piece dont l'inscription est :

(1) J'ai écrit, & fait écrire de tous côtés, pour me procurer ces Ouvrages de Pascal, dont parle Leibnitz ; mais jusqu'à présent mes recherches à ce sujet ont été presque inutiles.

Generatio

Generatio coni sectionum tangentium & secantium, seu projectio peripheriæ, tangentium, & secantium circuli, in quibuscunque oculi, plani ac tabellæ positionibus. Car c'est le fondement de tout le reste.

II. Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétés remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle, *Hexagramme mystique.* J'ai mis au-devant ces mots, *de hexagrammo mystico & conico :* une partie de cette piece se trouve répétée & insérée mot à mot dans une autre, savoir, les définitions (avec leurs corollaires); & les propositions (mais sans les démonstrations) qui se trouvent répétées dans le Traité *de loco solido*, suppléeront au défaut de quelques-unes qui manquent dans celui-ci *de hexagrammo.*

Le IIIe Traité doit être, à mon avis, celui qui porte cette inscription : *De quatuor tangentibus, & rectis puncta tactuum jungentibus, undè rectarum harmonicè sectarum & diametrorum proprietates oriuntur.* Car c'est là-dedans que l'usage de l'hexagramme paroît, & que les propriétés des centres & des diametres des sections coniques sont expliquées. Je crois qu'il n'y manque rien.

Le IV Traité est : *de proportionibus segmentorum secantium & tangentium.* Car les propriétés fondamentales des sections coniques, qui dépendent de la connoissance du centre & des diametres, étant expliquées dans le Traité précédent, il falloit donner quelques belles propriétés universellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la section conique; & c'est de-là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées. Les figures y sont aussi, & je ne vois rien qui manque. J'ai mis après ce Traité

une

une feuille, qui porte pour titre ces mots : *De correspondentibus diametrorum*, dont la troisieme page traite *de summâ & differentiâ laterum seu de focis.*

Le Ve Traité est : *de tactionibus conicis*, c'est-à-dire (afin que le titre ne trompe pas), *de punctis & rectis quas sectio conica attingit ;* mais je n'en trouve pas toutes les figures.

Le VIe Traité sera, *de loco solido :* j'y ai mis ce titre, parce qu'il n'y en a point : c'est pour ce sujet que Messieurs Descartes & Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus leur en ayant donné l'occasion. Or je crois que M. Pascal a voulu donner ce Traité à part, ou le communiquer au moins à ses amis ; parce qu'il y répete beaucoup de choses du deuxieme Traité, mot à mot & assez au long ; c'est pourquoi il commence par ceci : *Definitiones excerptæ ex conicis ;* savoir, du deuxieme Traité susdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, *hexagrammum mysticum, conicum*, &c. On peut juger par-là que le premier, le second, le troisieme & peut-être le cinquieme Traité, doivent faire proprement les coniques ; & ce mot se trouve aussi au dos du premier Traité. Les grandes figures appartiennent à ce sixieme Traité.

J'ai mis ensemble quelques fragments. Il y a un papier imprimé (1) dont le titre est : *Essai des coniques ;* & comme il s'y trouve deux fois tout de même, j'espere que vous permettrez, Monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment, *de restitutione coni ;* savoir, les diametres & parametres étant donnés, retrouver les sections coniques. Ce

(1) Cet Écrit, le seul de tous ceux dont parle Leibnitz, que j'aie pu me procurer, est imprimé à la tête du quatrieme Volume de cette édition.

discours

discours paroît entier & a ses figures. Il y a un autre fragment où se trouvent ces mots au commencement, *magnum problema;* & je crois que c'est celui-ci qui y est compris: *Dato puncto in sublimi, & solido conico ex eo descripto, solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datæ similem:* mais cela n'est pas mis au net.

Il y a quelques problêmes sur une autre feuille, qui sont cotés; mais il en manque le premier; on en dira ce qu'on pourra en forme d'Appendice; mais le corps de l'Ouvrage, composé des six premiers Traités, me paroît assez net & achevé.

Je conclus que cet Ouvrage est en état d'être imprimé; & il ne faut pas demander s'il le mérite; je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paroître des Traités qui ont quelque rapport à ce qui est dans une partie de celui-ci: c'est pourquoi je crois qu'il est bon de le donner au plutôt, avant qu'il perde la grace de la nouveauté. J'en ai parlé plus amplement à MM. vos freres, dont je vous dois la connoissance, & que j'ai priés de me conserver l'honneur de votre bienveillance. J'avois espéré de vous revoir un jour ici; mais je vois que vos affaires ne l'ont pas encore permis, & j'ai peu d'espérance de passer par Clermont. Je souhaiterois de pouvoir vous donner des marques plus convaincantes de l'estime que j'ai pour vous, & de la passion que j'ai pour tout ce qui regarde feu M. Pascal; mais je vous supplie de vous contenter cependant de celle-ci. Je suis, Monsieur, votre très-humble & très-obéissant serviteur, LEIBNITZ.

A Paris, le 30 *Août* 1676.

FIN DU CINQUIEME ET DERNIER TOME.

AVIS AUX RELIEURS.

LEs Figures relatives aux Œuvres de Pascal, sont au nombre de 15, sans compter le feuillet d'impression, qui fait la fin du Tome II.

On les placera dans l'ordre qui suit :

Le Portrait au premier Volume, regardant le Frontispice.

A la fin du Tome II, mettre le feuillet d'impression marqué 549, qu'il faudra remployer comme une Carte, qui termine ce Volume.

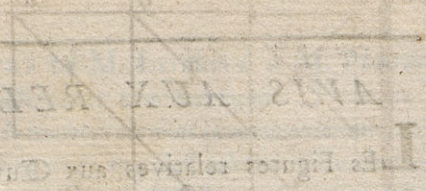
Tome IV, on mettra de suite les Figures à la fin du Volume, dans cet ordre :

Planche 1. Sections Coniques.
2. Machine Arithmétique.
3. Suite de la Machine Arithmétique.
4. Equilibre des Liqueurs.
5. Suite de l'Equilibre des Liqueurs.
6. Pesanteur de l'Air.
7. Suite de la pesanteur de l'Air.
8. Problême de Géostatique.
9. Problêmes de Fermat.

A la fin du Tome V, aussi de suite :

Planche 1. Triangle Arithmétique.
2. Inventions géométriques.
3. Suite des Inventions géométriques.
4. Suite des Inventions géométriques.
5. Suite des Inventions géométriques.

B.M.U. CLERMONT-FD



AVIS AUX RELIEURS.

Les figures relatives aux Œuvres de Pascal, pour au nombre de 11, sont comprises la totalité d'impression, qui fait la fin du Tome II.

On les placera dans l'ordre qui suit :

Le Portrait au premier Volume, regardant la Préface.

A la fin du Tome II, mettre la Feuille d'Impression marquée ***, qu'il faudra remplacer contre une autre, qui termine ce Volume.

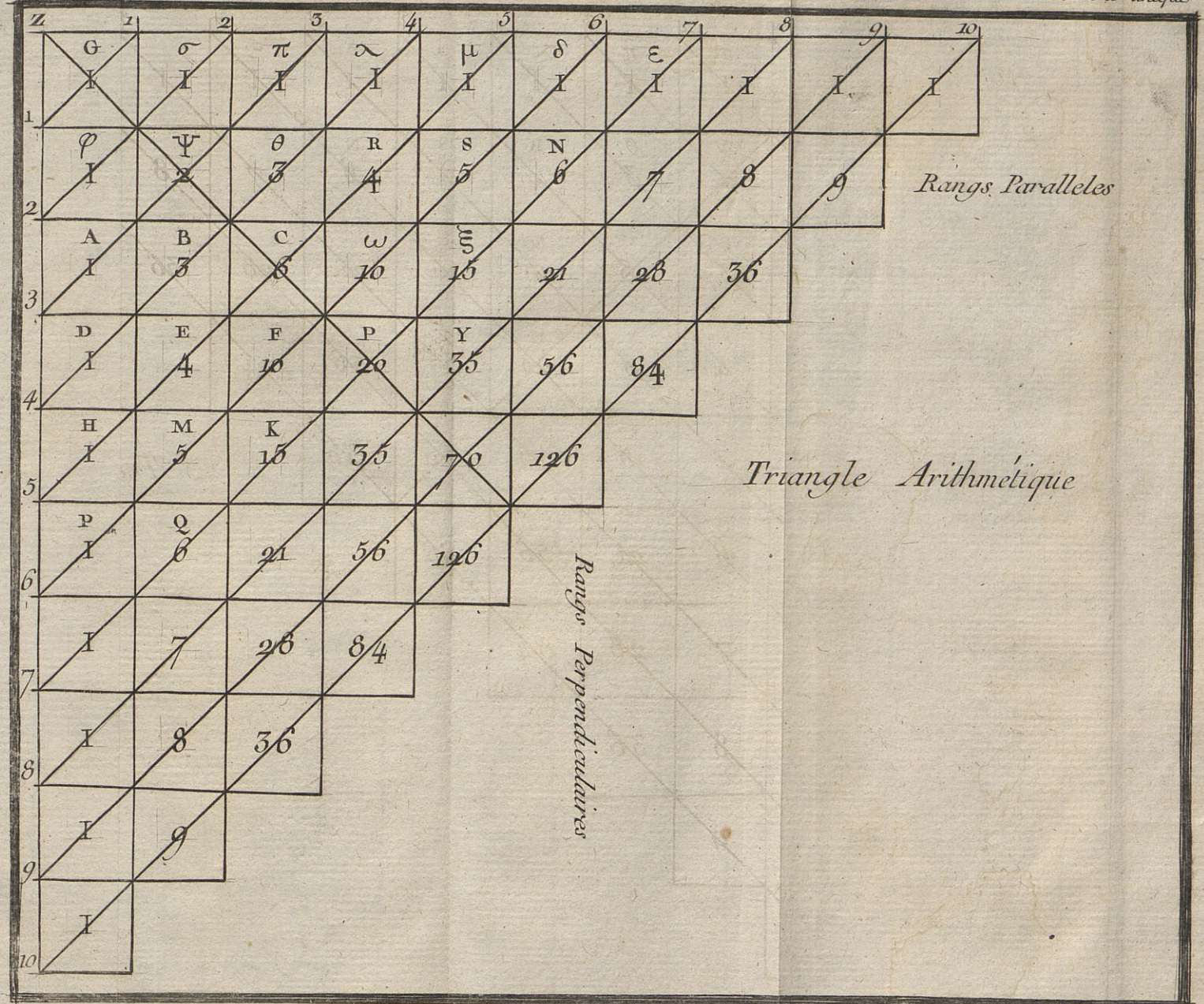
Tome IV, on mettra de suite les Figures à la fin du Volume, dans cet ordre :

Planche 1. Sections Coniques.
2. Machine Arithmétique.
3. Suite de la Machine Arithmétique.
4. Equilibre des Liqueurs.
5. Suite de l'Equilibre des Liqueurs.
6. Pesanteur de l'Air.
7. Suite de la pesanteur de l'Air.
8. Problème de Cycloïdique.
9. Problèmes de Fermat.

A la fin du Tome V, aussi de suite :

Planche 1. Triangle Arithmétique.
2. Inventions géométriques.
3. Suite des Inventions géométriques.
4. Suite des Inventions géométriques.
5. Suite des Inventions géométriques.

B.U.M.
CLERMONT-FD



Triangle Arithmétique

BIBLIOTHEQUE NATIONALE

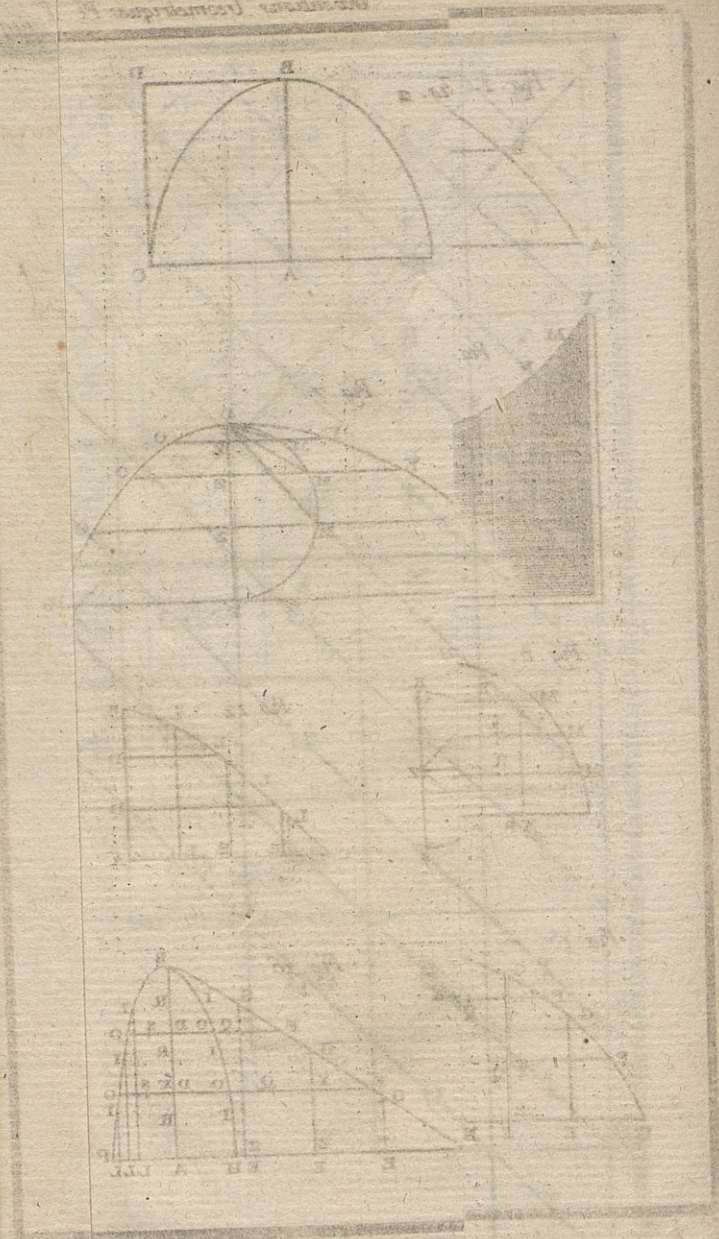


Fig. 1.

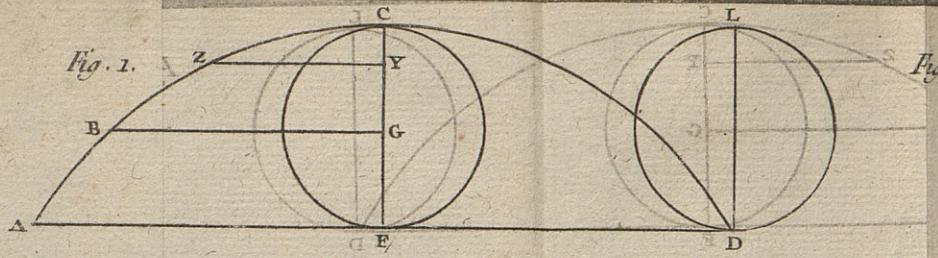


Fig. 2

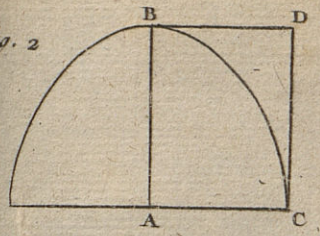


Fig. 3.

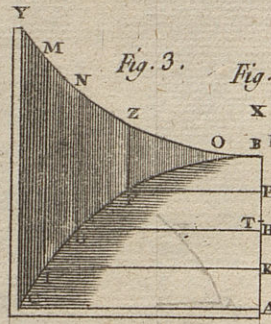


Fig. 4.

Fig. 5

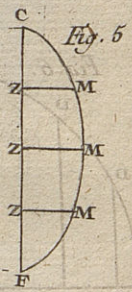


Fig. 6.

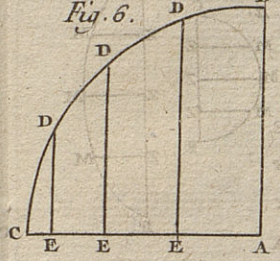


Fig. 7.

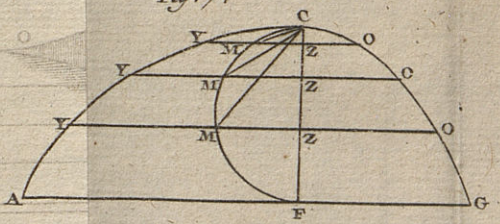


Fig. 8.

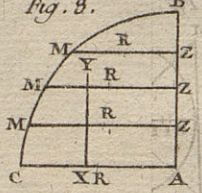


Fig. 9.

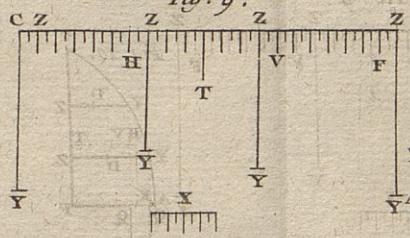


Fig. 10.

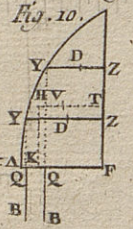


Fig. 11.

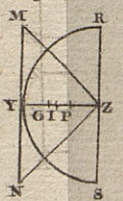


Fig. 12.

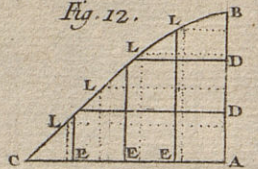


Fig. 13.

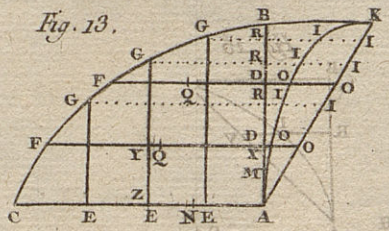


Fig. 14.

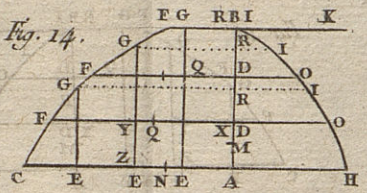


Fig. 15.

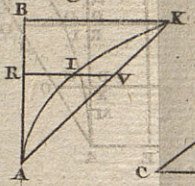
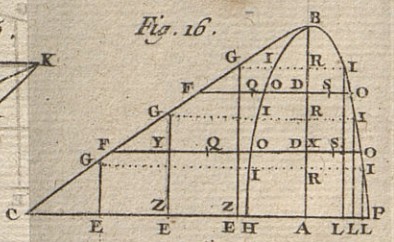


Fig. 16.



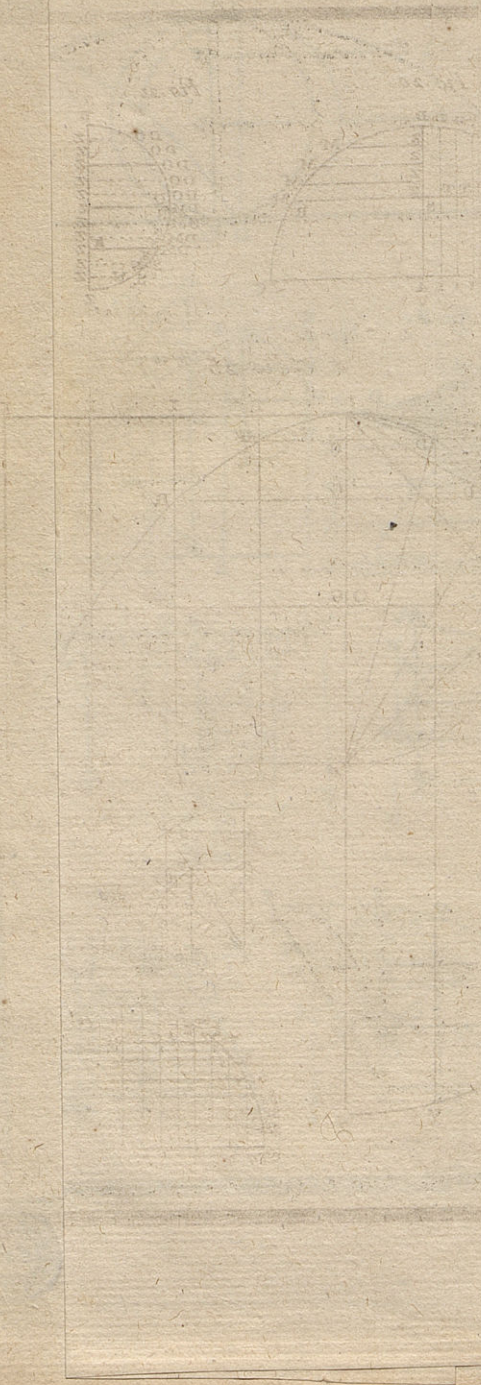


Fig. 17.

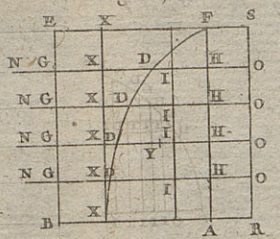


Fig. 18.

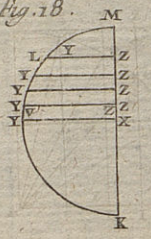
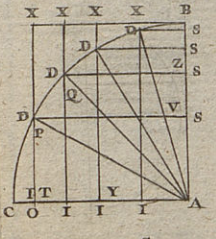


Fig. 19.



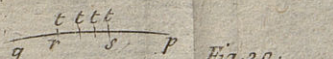


Fig. 20.

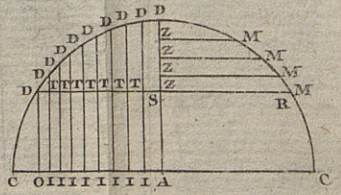


Fig. 21.

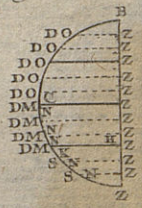


Fig. 24.

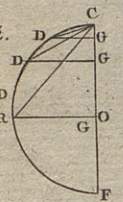


Fig. 25.

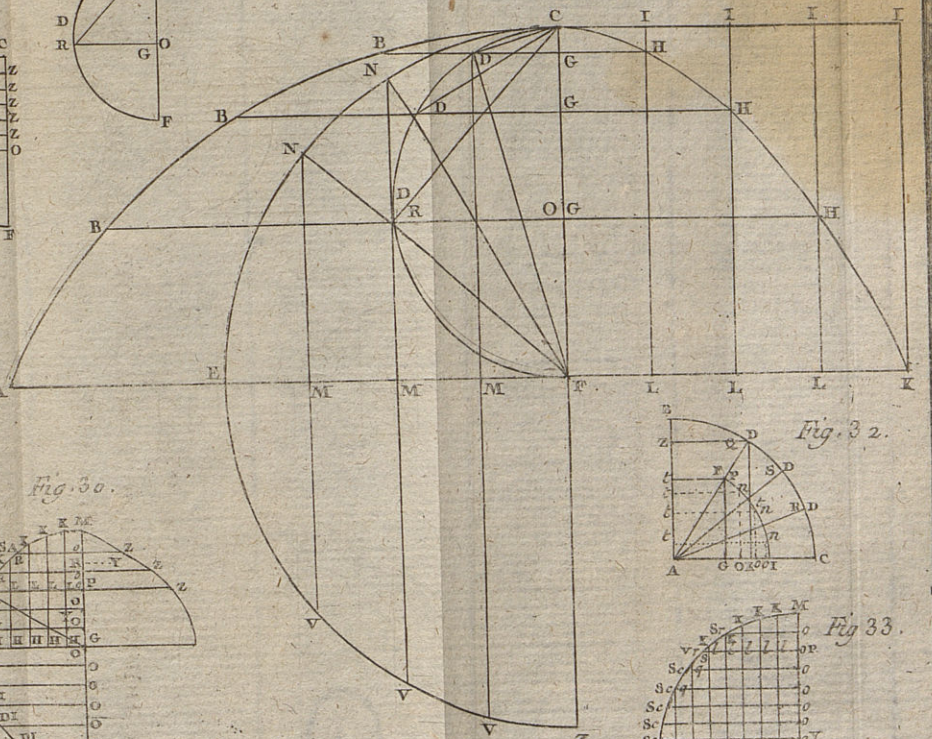


Fig. 22.

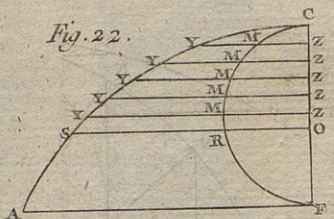


Fig. 23.

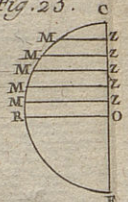


Fig. 26.

Fig. 27.

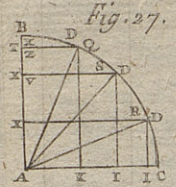


Fig. 28.

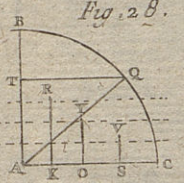


Fig. 32.

Fig. 29.

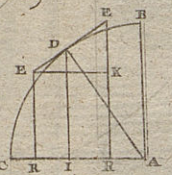


Fig. 31.

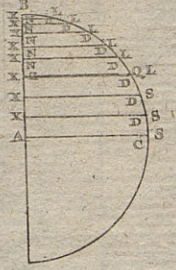


Fig. 30.

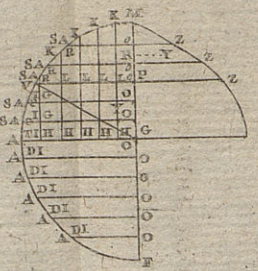
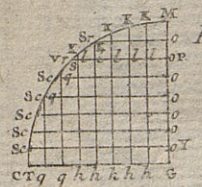


Fig. 33.



MONTPELLIER BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE

Fig. 34.

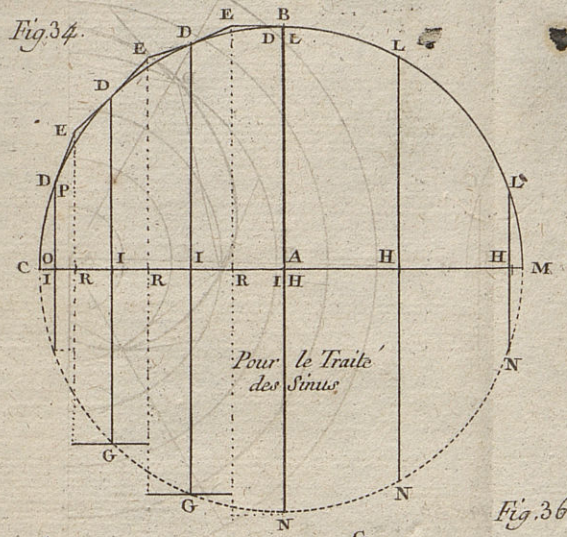


Fig. 35.

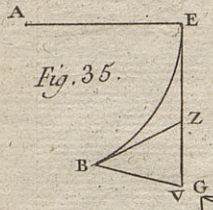


Fig. 36.

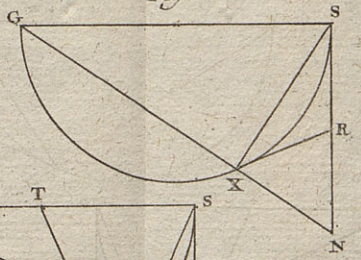


Fig. 37.

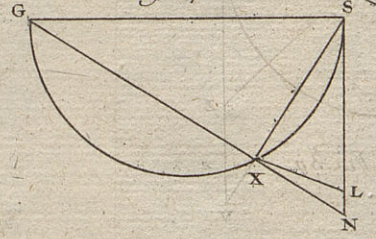


Fig. 38.

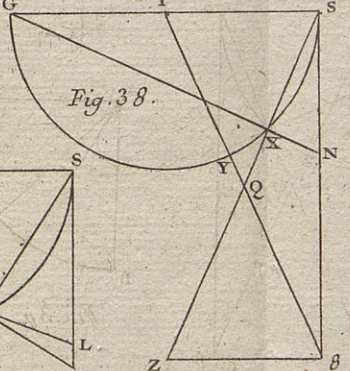
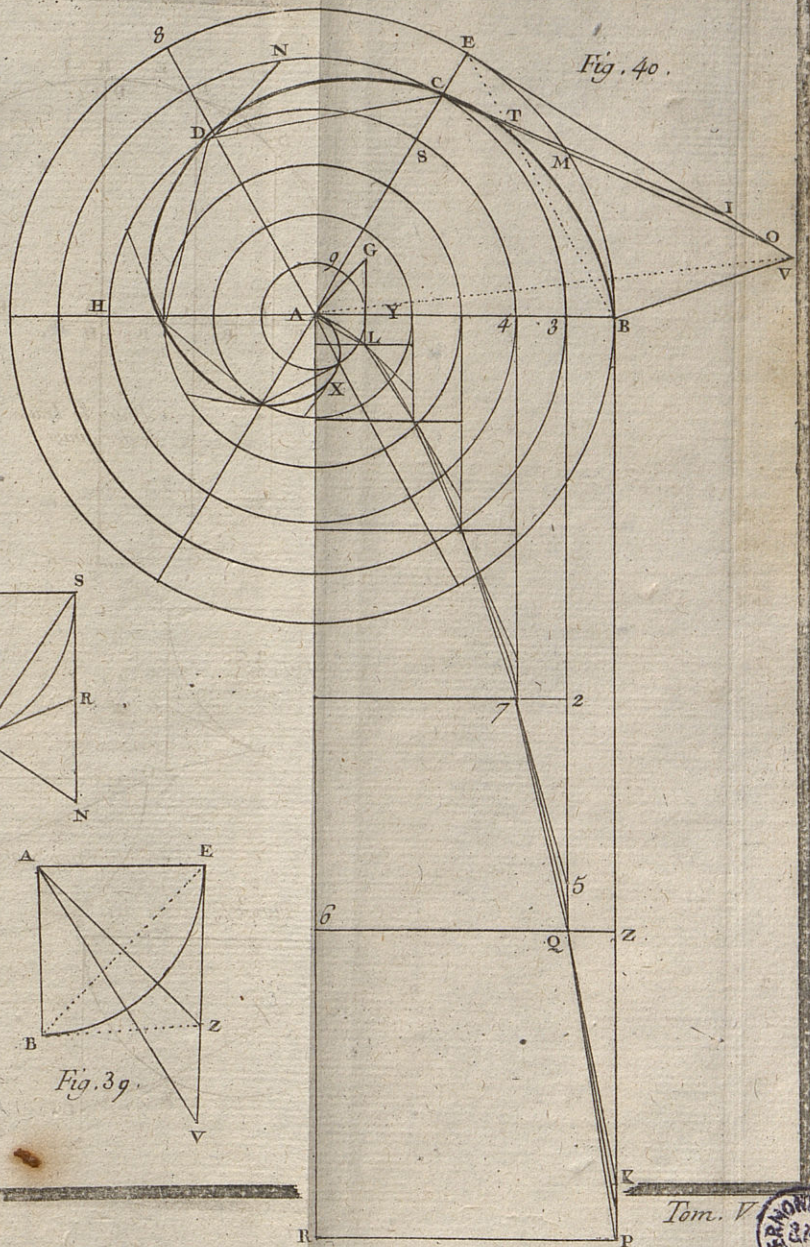


Fig. 39.

Fig. 40.



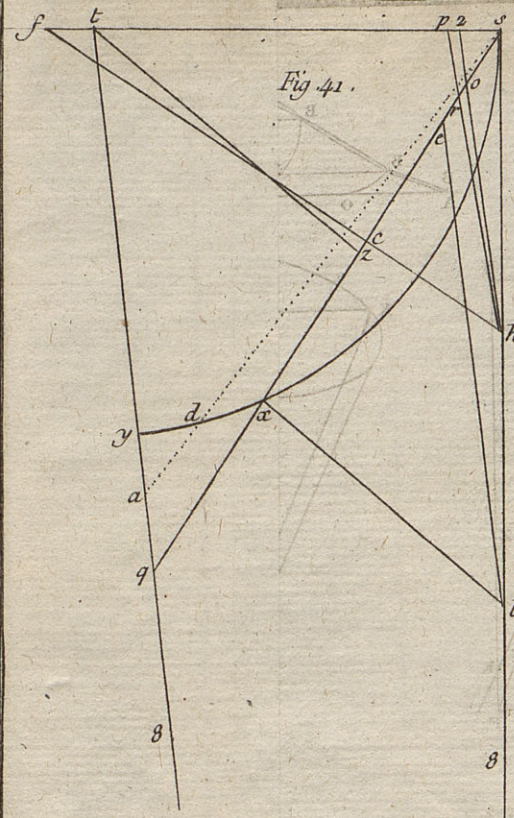


Fig. 41.

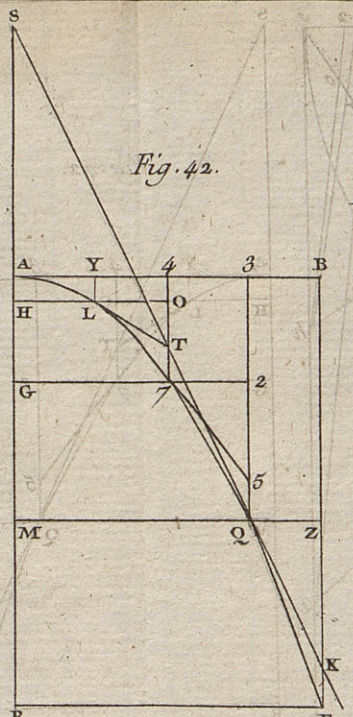


Fig. 42.

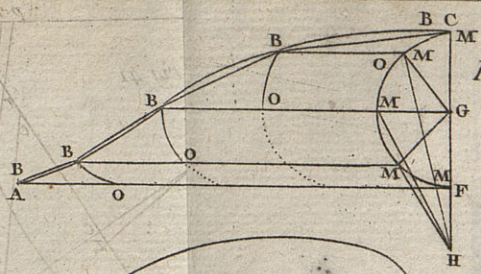


Fig. 43.

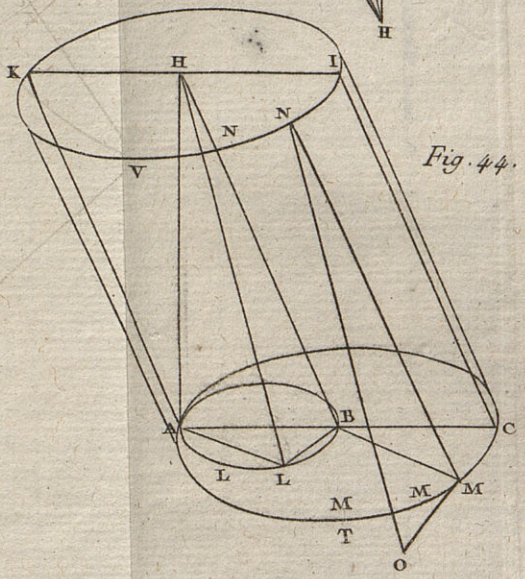


Fig. 44.

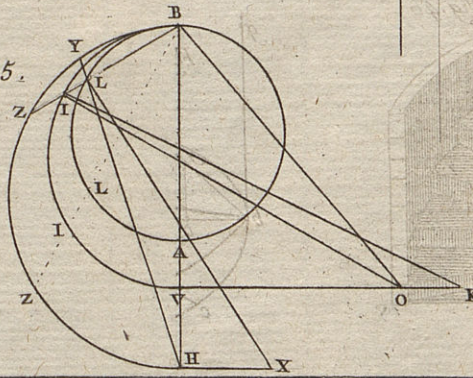


Fig. 45.

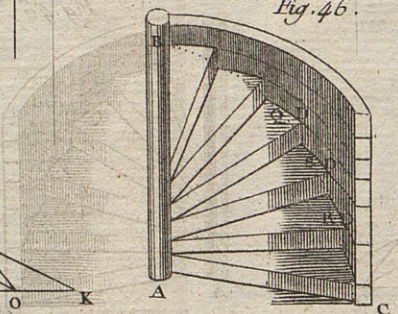


Fig. 46.

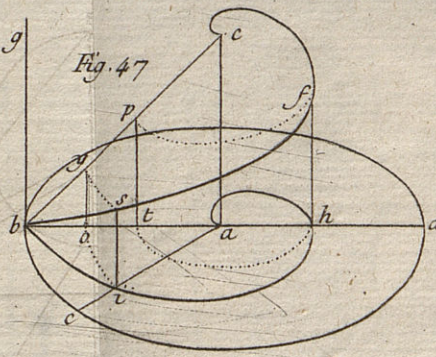


Fig. 47.

R56 LO 5

ŒUVRES DE PASCAL

5