

**Teilchen in Fallen:
Auf dem Weg zum
Quantencomputer?**

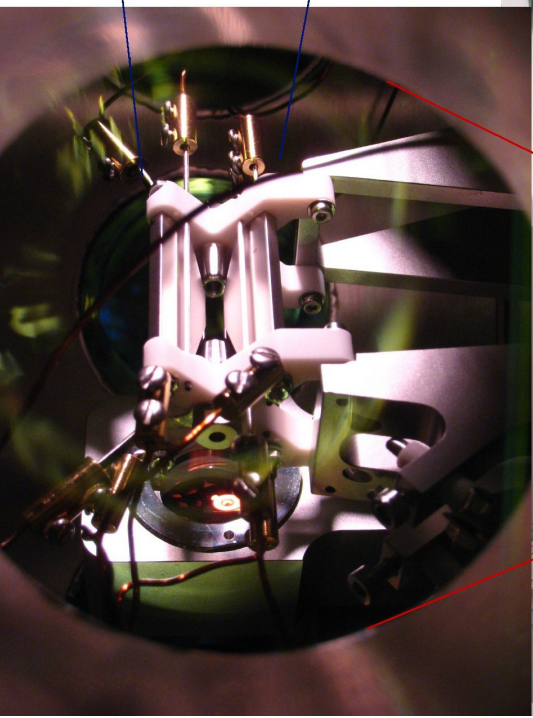
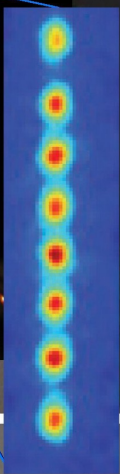
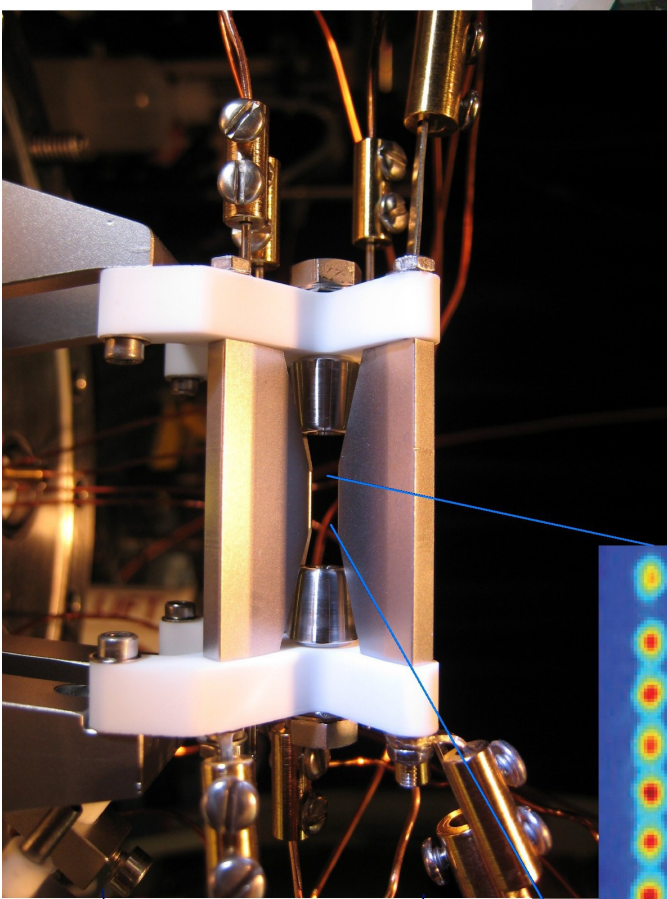
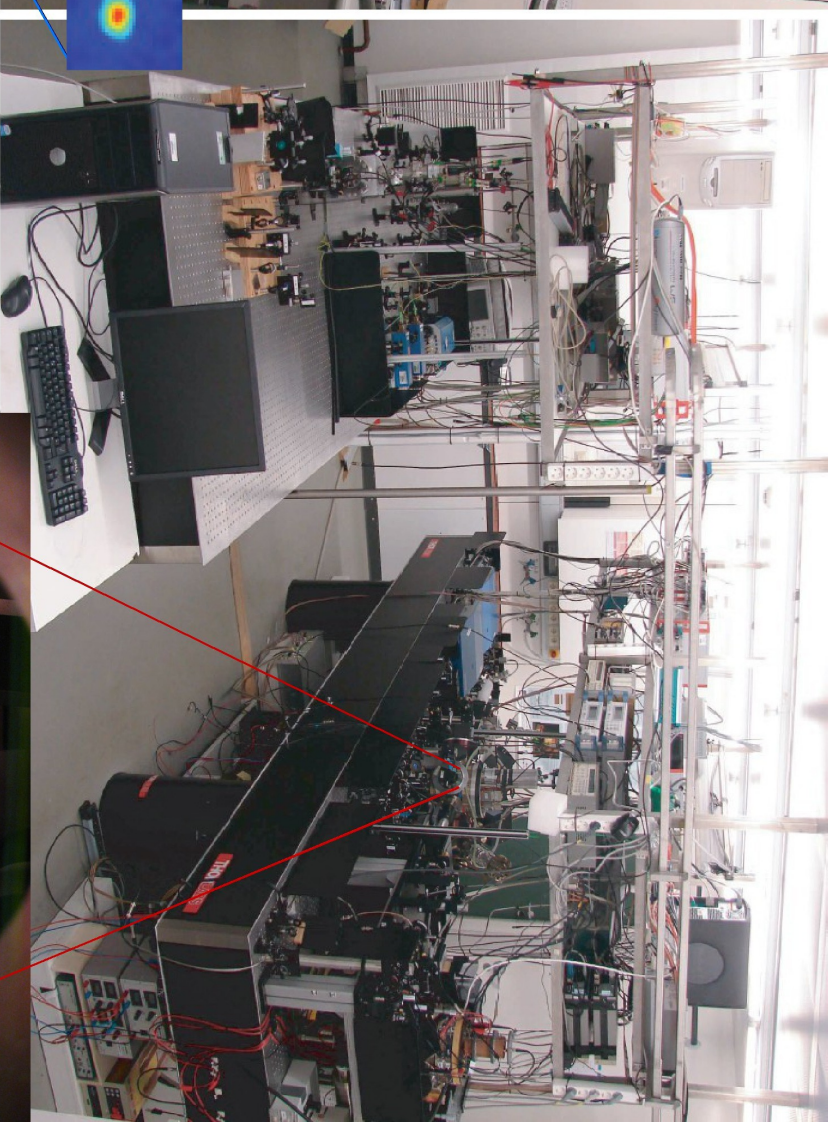
Dies stellt eine zusammenfassende Einführung in die Themenschwerpunkte *Ionenfalle* und *Quantencomputer* dar.^{*} Sollte etwas unklar oder zu oberflächlich sein, dienen die Literaturhinweise zur weiterführenden Information. Ich hoffe, dass keine inhaltlichen, sprachlichen oder formalen Fehler enthalten sind. Dennoch bitte ich darum, Verbesserungsvorschläge oder andere Anfragen an meine Mailadresse *falke.marco@gmail.com* zu schicken.



Diese Datei von Marco Falke steht unter einer Creative Commons Namensnennung-Nicht-kommerziell 3.0 Unported Lizenz.**

* Die Arbeit entstand im Rahmen meiner Facharbeit und erhielt die Bestnote.

** <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>



Collage: Labor → Vakuumkammer → Paulfalle → gekühlter Ionenkristall (ca. 50 μm)

Was ist ein Quantencomputer?

Ein Quantencomputer ist ein System, das Quantenphänomene ausnutzt, um spezielle Probleme effektiver als ein klassischer Rechner zu lösen. Auch seine kleinste Einheit, nicht das Bit, sondern das Qubit wird sich gegenüber dem klassischen Bit als überlegen herausstellen.

Die Anfänge legte Wolfgang Paul in den fünfziger Jahren, als es ihm gelang Quanten (genauer: Ionen) in einer Ionenfalle zu speichern.

Neben der Ionenfalle gibt es weitere zukunftsweisende Kandidaten für einen Quantencomputer, jedoch gilt sie als das zur Zeit fortschrittlichste Projekt, weshalb auch der Fokus in dieser Facharbeit auf der Ionenfalle liegt.

Wenn das Mooresche Gesetz* seine Gültigkeit bewahren sollte, befinden wir uns zwangsläufig nach circa 25 Jahren im Atomgrößen-Bereich. (vgl. Abb. 1)

Wird das Mooresche Gesetz seine Gültigkeit bewahren, indem ein funktionierender Quantencomputer auf den Markt kommt?

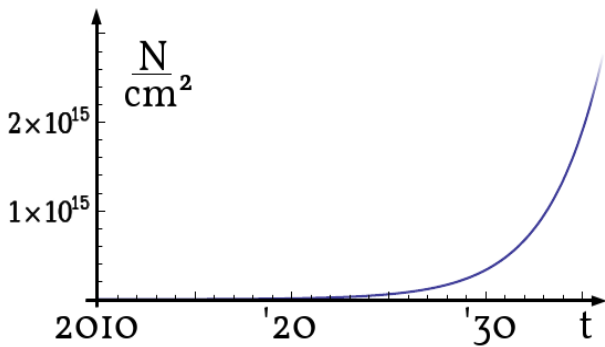
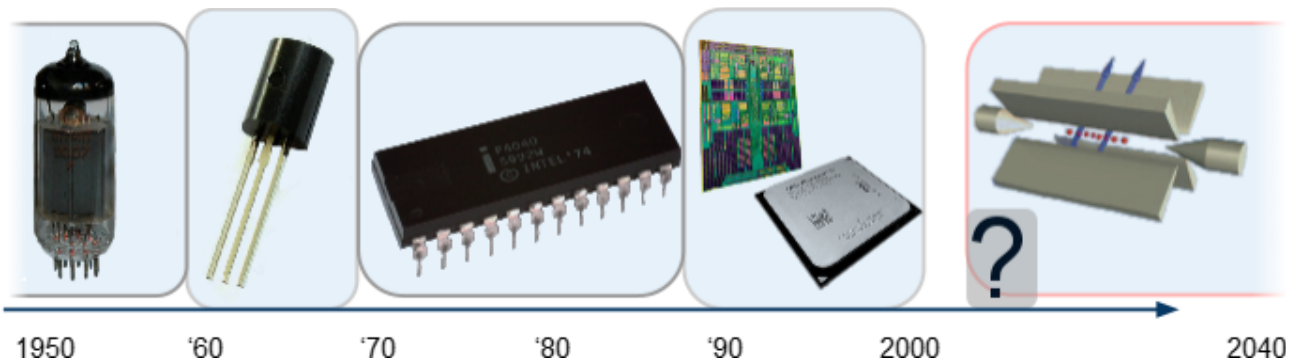


Abbildung 1: Die Integrationsdichte in den nächsten Jahrzehnten. Im Jahr 2035 wären $0,2/\text{\AA}^2$ erreicht.

Abbildung 2: Mooresches Gesetz symbolisch: Die Vorläufer von Transistoren waren Elektronenröhren. Danach geht die Entwicklung über die Mikrocontroller zu den heute handelsüblichen Prozessoren weiter.



* Das Mooresche Gesetz besagt, dass sich die Integrationsdichte (Anzahl an Transistoren pro Flächeneinheit) spätestens nach 2 Jahren verdoppelt hat

Inhaltsverzeichnis

Teilchen in Fallen: Auf dem Weg zum Quantencomputer?	1
Was ist ein Quantencomputer?	6
1 Physikalische Grundlagen von Ionenfallen	8
1.1 Der Aufbau und die Ionenbewegung am Beispiel der Paul- und der Penning-Falle	9
1.2 Anwendungsgebiete des Lasers	13
1.2.1 Photoionisation	14
1.2.2 Laserkühlung	14
1.2.3 Präparation und Detektion eines Qubits mit Hilfe von Lasern	17
2 Theoretische Hintergründe beim Quantencomputer	18
2.1 Das Qubit – Superposition und Verschränkung	18
2.2 Quantengatter	19
2.2.1 C-Not-Gatter am Beispiel der Ionenfalle	20
2.3 Quantenalgorithmen – Suchalgorithmus, Faktorisierung und Fehlerkorrektur	20
3 Aktuelle Forschungsergebnisse und Aussichten	22
Literaturverzeichnis	25
Abbildungsverzeichnis	27

1 Physikalische Grundlagen von Ionenfallen

Das Ziel einer Ionenfalle ist es, Ionen zu Forschungszwecken stark abgekühlt und abgeschirmt an einem festen Ort zu halten. Ionen sind geladene Teilchen und erfahren deshalb im elektrischem Feld eine Kraft. Die Idee, vier elektrisch positive Ladungen in Tetraederform zu bringen und ein Ion im Zentrum dessen einzufangen, stellt sich als utopisch heraus. (vgl. Abb. 1)

S. Earnshaw bewies, dass es keinen Stabilitätspunkt in einem elektrischem Feld gibt, an dem nicht eine Ladung sitzt. Es gibt allerdings Terrassenpunkte, an denen ein labiles Gleichgewicht vorliegt, folglich aber keine rückwirkende Kraft auch bei einer noch so minimalen Auslenkung wirkt.

Da diese Einschränkung nur für statische Felder gilt, kann man mit Kombination des statischen Feldes und eines oszillierenden elektrischen Feldes (Paul-Falle) oder eines

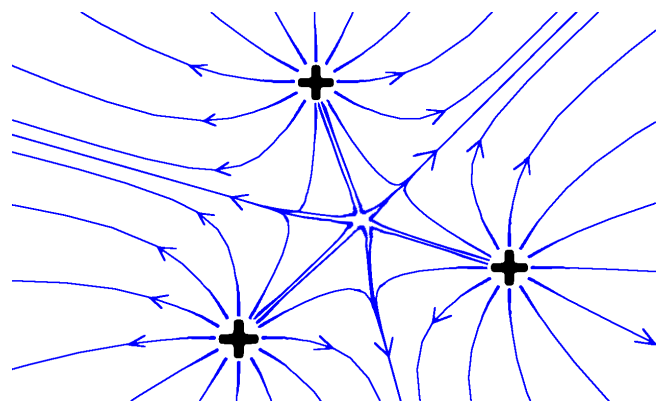


Abbildung 1.1: Die positiven Teilchen folgen den Feldlinien nach "außen". Der Beobachter sitzt auf der vierten Ladung des Tetraeders. Das Ion kann zudem nach unten ausweichen.

statischen magnetischen Feldes (Penning-Falle) eine Ionenfalle erstellen.

Weiterhin werden **fünf Grundvoraussetzungen** [1, S. 2] (nach DiVincenzo) an einen Quantencomputer und damit auch an die Ionenfallen als Kandidat für einen solchen gestellt:

Wichtig ist eine klare Definition von Qubits* mit nur unwahrscheinlichen undefinierten Zuständen. (Hervorragend wären Systeme mit zwei sehr wahrscheinlichen Zuständen.) Zusätzlich muss für eine zuverlässige Zustandspräparation gesorgt werden. Die Dekohärenz ist zu minimieren und folglich darf auch die Dekohärenzzeit nicht kürzer sein, als die benötigte Zeit für eine Operation. Sicherzustellen ist auch die Realisierung jeder beliebigen Quantenrechnung durch quantenlogische Gatter. Letztendlich benötigt man effiziente Auslesemechanismen, um wiederholtes Rechnen derselben Operation zu unterdrücken.

*Quantenbit, Einheit zur Speicherung einer Information mit Hilfe von Quantenzuständen

Später fügte DiVincenzo zwei Bedingungen hinzu, um die Übertragung von Quanteninformation zu ermöglichen, was essentiell für einen komplexeren Quantencomputer ist.

Lasergekühlte Ionen eignen sich hervorragend für die Implementierung eines einfachen Quantencomputers, da sich zwei langlebige interne Zustände leicht mit einem Laser

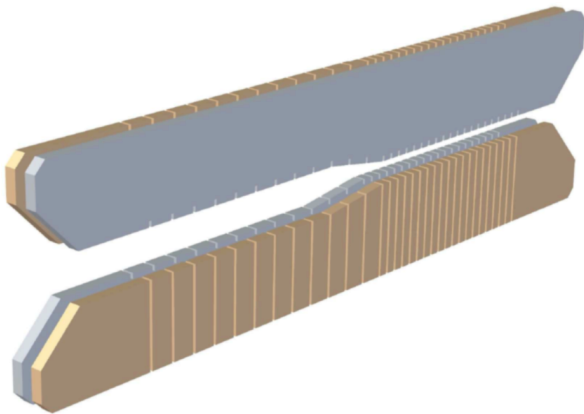


Abbildung 1.2: Die Mikrobauweise und kontrollierte Potentiale erlauben den Ionentransport innerhalb einer segmentierten Paul-Falle.

präparieren lassen und somit ein klar definiertes Qubit darstellen. Dekohärenz wird durch Hochvakuum vermindert und einfache Algorithmen wurden bereits experimentell durchgeführt. An der Skalierbarkeit einer Ionenfalle stößt man jedoch an Grenzen, da sich ab einer Anzahl von 10 Ionen die Adressierung und Kühlung der Ionen immer schwieriger gestaltet.

Die Lösung dafür ist eine segmentierte Mikrofalle, die in mehrere kleine Fallen unterteilt ist und sogar einen Ionentransport ermöglicht, da ihre einzeln ansprechbaren Elektroden nur ca. 100 μm breit sind. [23, S. 72]

1.1 Der Aufbau einer Falle und die Ionenbewegung am Beispiel der Paul- und der Penning-Falle

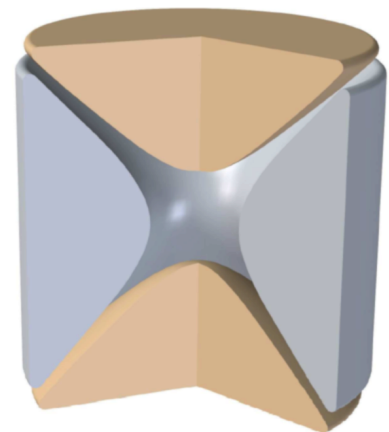


Abbildung 1.3: Durch die hyperbolisch geformten Elektroden wird eine ideales Potential erzeugt. Der blaue Ring wird durch die orangefarbenen Endkappen eingeschlossen.

Die Ursprünge der linearen Paul-Falle (und auch segmentierten Falle) liegen in der traditionellen Paul-Falle. Bestehend aus den Endkappen und der Ringelektrode, zwischen denen eine HF-Spannung anliegt, wirkt abwechselnd eine fokussierende Kraft

entweder innerhalb der Ebene der Ringelektrode oder auf der Achse zwischen den Endkappen.

Das Ion wird somit in die Nähe des Zentrums gebunden. Die geschlossene Bauweise verhindert

jedoch weitgehend die Interaktion und bei mehreren Ionen bilden sich die Aufenthaltsorte zufällig auf einer „Wolke“ ab.

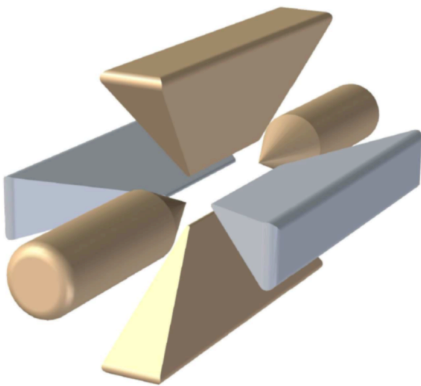


Abbildung 1.4: Ein Aufbau mit Endkappen und nur an der blauen Elektrode liegt HF an.

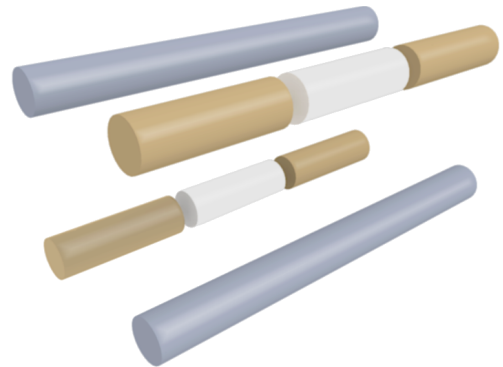


Abbildung 1.5: Verzicht auf die Endkappen, da die beiden weißen Segmente geerdet sind.

Oft wird auf die hyperbolische Form und auch auf die Endkappen verzichtet wodurch ein erleichtertes Eingreifen auf die linear angeordneten Ionen in der Paul-Falle möglich ist. [2 S. 20 b.]

Die formelmäßige Herleitung des elektrischen Potentials zum Einschluss des Ions beginnt mit dem Ansatz: [vgl. 1, S. 6]

$$F_{el}(x) \sim -x \quad (1)$$

Die elektrische Kraft hängt von der Ladung des Ions ab und soll mit größerem Abstand der Auslenkung auch stärker entgegenwirken. Bereits jetzt lässt sich eine harmonische Schwingung erkennen, da die rücktreibende Kraft linear zum Abstand zunimmt.

Durch Integration der Kraft in alle Raumrichtungen und durch Teilen des Ergebnisses durch die Ladung q erhält man das Potential:

$$\varphi(x,y,z) \sim ax^2+by^2+cz^2 \quad (2)$$

Zur Verallgemeinerung wurden verschiedene Koeffizienten gewählt. Die Funktion ist harmonisch, also wird auch die Anwendung des Laplace Operators auf die Funktion null ergeben (Ein elektrische Potential im ladungsfreien Raum erfüllt die Laplace-Gleichung):

$$\Delta\varphi = 0 \quad (3)$$

$$\Delta(ax^2+by^2+cz^2) = 0$$

$$2(a+b+c) = 0 \quad [5]$$

$$a+b+c = 0 \quad (4)$$

Aus der Radialsymmetrie der Paul-Falle folgt $a=b$:

$$c = -2a \quad (5)$$

Einsetzen von (5) in (2) ergibt:

$$\varphi(x,y,z) = a(x^2+y^2-2z^2) \quad (6)$$

Nach Vereinfachung mit dem Satz des Pythagoras ($r^2 = x^2 + y^2$) lautet die endgültige Formel zur Beschreibung des Potentials

$$\varphi(r,z) = a(r^2-2z^2) \quad (7)$$

Simple herleiten lassen sich daraus die Äquipotentiallinien für beispielsweise $\varphi(r,z) = 0$; Im dreidimensionalen Raum bildet sich ein Äquipotential-Doppelkegel mit unendlicher Ausdehnung, wenn $r = \sqrt{2} z$;

Folglich sind die Ionen bei angelegter Gleichspannung in der Falle nicht stabil gespeichert. (vgl. Abb. 1.1) Erreicht werden kann eine stabile Speicherung, wie erwähnt, durch Anlegen einer Wechselspannung.

Die angelegte Wechselspannung muss eine stabile Bewegung hervorrufen, d.h. Es darf die Amplitude der Bewegung nicht wachsen.

Die Schwingung in radialer Ebene kann als Superposition aus der sog. Säkularbewegung und der Mikrobewegung aufgefasst werden. *Die langsame Säkularbewegung wird durch ein Säkularpotential verursacht. Dieses Pseudopotential entsteht durch zeitliche Mittelung der inhomogenen Fallkraft.* [6, S. 24]

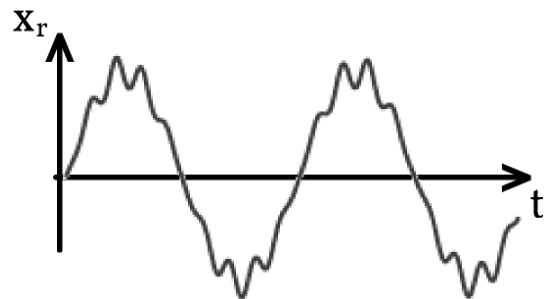


Abbildung 1.6: Verdeutlichung $\omega_{\text{säk}} \ll \omega$

Die Mikrobewegung zeigt einen Phasensprung um π und besitzt die Frequenz der angelegten Wechselspannung.

Die axiale Schwingung der linearen Paul-Falle, verursacht durch die Gleichspannung an den äußeren Segmenten wird durch

$$\omega_z = \sqrt{k \frac{qU_z}{m}} \quad (I)$$

beschrieben. k ist ein Geometriefaktor und bestimmbar durch numerische Simulationen. [1, S.

10]

Befinden sich mehrere Ionen in einer linearen Paul-Falle, wirkt die Coulombabstoßung zwischen ihnen und es bildet sich eine im axialen Mittelpunkt der Falle zentrierte Kette. Hierbei gilt: Zwar wächst die Länge der Kette mit der Anzahl der Ionen, jedoch verringert sich auch der Abstand der Ionen untereinander vom Äußerem der Kette zum Inneren.

Ferner eröffnet sich ein breites Feld an möglichen Schwingungsmodi mit zunehmender Ionenanzahl sowohl für axiale Schwingungen als auch für radiale. [1, S. 11-12]

Ionen Anzahl	Schwingungsmodi					
	axial			radial		
1						
2						
3						

Abbildung 1.7: Zu erkennen sind die Phasenverschiebungen (gleichphasig oder gegenphasig) und die Amplitude der Schwingung für bis zu drei linear angeordnete Ionen.

Neben der eben besprochenen Paul-Falle gibt es auch noch die **Penning-Falle**, welche das statische elektrische Feld mit einem statischem magnetischem Feld ergänzt. Der Aufbau erinnert an die traditionelle Paul-Falle, jedoch liegt keine Wechselspannung an und eine Spule erzeugt ein Magnetfeld in axialer Richtung (entlang der Endkappen). Das Magnetfeld zwingt das Ion bei Auslenkung auf Kreisbahnen und stabilisiert das Ion somit auf Bewegungen innerhalb der Kreiselektroden-Ebene. Die Stabilisierung entlang der Achse erfolgt durch das elektrische Feld.

Durch Überlagerung von Magnetfeld und elektrischem Feld [...] wird die Ionenbahn [jedoch] komplizierter: Sie kann zerlegt werden in die Zyklotronbewegung (Kreis um die axiale Richtung) [und] in eine Bewegung, bei welcher der Mittelpunkt des Kreises Oszillationen in axialer Richtung

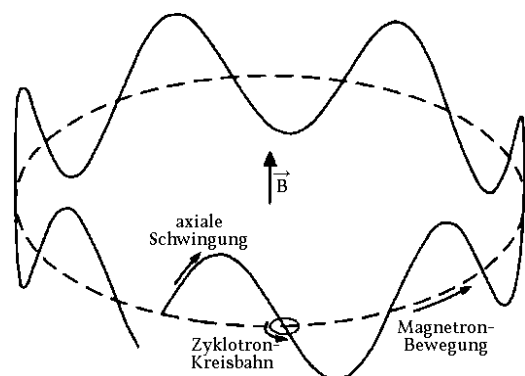


Abbildung 1.8: Die drei Bewegungen schematisch: Auf dem Kreis der Magnetron-Bewegung (ω_M) führt das Ion eine axiale Schwingung (ω_z) und eine Zyklotron-Kreisbahn (ω_C) aus.

ausführt und dabei [auch] eine langsame Drift auf einer Kreisbahn in der Ring-Ebene ausführt (Magnetron-Bewegung). [übernommen aus 3, S.56]

Die axiale Schwingung ist vergleichbar mit der der Paul-Falle, wobei k wieder von Geometriefaktoren, also dem Aufbau der Falle abhängt.

$$\omega_z = \sqrt{k \frac{qU_z}{m}} \quad (1)$$

Die Zyklotronfrequenz in der Penning-Falle ist, verglichen mit der normalen Zyklotronfrequenz (Gl. 4), aufgrund des elektrischen Feldes ein wenig kleiner. Herleiten lässt sich die normale Zyklotronfrequenz aus der Gleichsetzung von Lorentzkraft und Zentripetalkraft:

$$F_L = F_Z \quad (2)$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

$$\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (4)$$

Die Magnetrondrift resultiert aus den $\vec{E} \times \vec{B}$ Feldern und dessen Frequenz ω_M ist kleiner als die Zyklotronfrequenz. [11, S.22]

Die Aufheizung durch oszillierende Felder wird unterdrückt, da nur statische Felder zur Anwendung kommen. Zudem kann die Dekohärenz im Vergleich zur Paul-Falle verringert werden, indem der Abstand zu den Oberflächen vergrößert wird und damit die Wechselwirkung mit störenden Oberflächenpotentialen verkleinert wird. Trotz dieser Vorteile ist die Penning-Falle nicht so konsequent vertreten, wie die Paul-Falle, da viele Experimente eine möglichst geringe Bewegung der Ionen voraussetzen. (Die Magnetron-Bewegung kann nicht direkt gekühlt werden.) [4]

1.2 Anwendungsgebiete des Lasers

Um die Funktion einer Falle als Quantenrechner sicherzustellen, benötigt man noch weitere Ansätze, als nur das theoretische Einsperren der Ionen durch elektrische und magnetische

Felder. Dazu gehört die Ionisation der Atome, Laserkühlung, Detektion der Ionen und Manipulation des Quantenzustandes.

1.2.1 Photoionisation

Photoionisation bezeichnet die Ablösung von Elektronen aus Atomen. Vordergründig geschieht dies beim Photoeffekt, bei dem kurzwellige Strahlung mit $\lambda < 200$ nm und einer Energie von über 6,19 eV ($E_{\text{ph}} = \hbar\omega_0 = hf = hc/\lambda$) vom Elektron vollständig absorbiert wird.

Größenordnungsmäßig entspricht das der Ionisationsenergie* eines Ca-Atoms (6,11 eV). [7, Ph 137] Alternativ kann das Elektron auch nur einen Teil der Energie des Photons aufnehmen. Die Restenergie bleibt beim Photon und man nennt diesen Effekt Comptoneffekt. Beobachtbar ist dieser Effekt ab einer Energie $E_{\text{ph}} = 50$ keV [7, Ph 145]

1.2.2 Laserkühlung

Im Potential der Paul-Falle können Ionen mit Temperaturen von bis zu 10000 K gespeichert werden. Eine Kühlung durch Puffergas ermöglicht Temperaturen unter 1000 K. Das reicht aber bei weitem noch nicht zur Beobachtung von Quantenphänomenen aus, weshalb die **Dopplerkühlung** [8, S. 53-54] zum Einsatz kommt.

Die Ionen können dabei sehr schnell und sogar in Bereiche von μK gekühlt werden. Hintergrund ist, dass Ionen Photonen bestimmter Wellenlängen absorbieren und ein Elektron in einen angeregten Zustand bringen, welcher unter Emission eines Photons gleicher Energie rückgängig gemacht wird. Dies geschieht in eine zufällige Richtung, weshalb im Mittel kein Impuls bei der Emission auf das Ion übertragen wird.

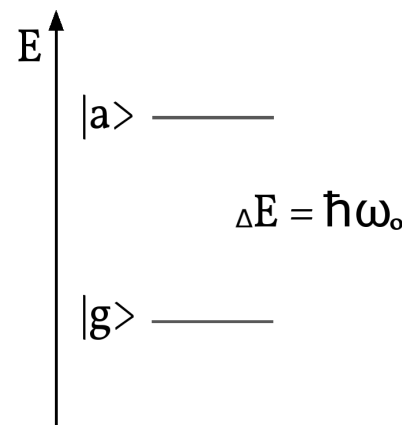


Abbildung 1.9: Das 2-Niveau-System der Energiezustände aus Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|a\rangle$. Die Resonanzfrequenz zwischen diesen beiden Zuständen ist ω_0 .

*Energie, die benötigt wird, um das Elektron in das sog. Kontinuum zu befördern/abzulösen.

Kühlung wird aber erst erreicht, wenn die Frequenz des Lasers rotverschoben bzw. kleiner ist als die Resonanzfrequenz des Übergangs ($\omega_L < \omega_0$) und das Ion sich auf das Photon zubewegt: Durch den Dopplereffekt wird die Frequenz (und Energie) des Photons größer und die Energie des Photons reicht wieder aus, um das Elektron anzuregen. Die fehlende Energie stammt so aus der Bewegung des Ions. Abschätzen kann man die pro Prozess abgegebene Energie durch folgende Gleichungen.

$$\Delta E = E_L + E_{kin\ Verlust} \quad (1)$$

$$E_{kin\ Verlust} = (\omega_0 - \omega_L)\hbar = \Delta\omega \hbar \quad (2)$$

Weiterhin muss die Laserfrequenz erhöht und an ω_0 angepasst werden, da der Dopplereffekt geschwindigkeitsabhängig ist: Bei Geschwindigkeiten gegen null, geht auch die abgegebene kinetische Energie und $\Delta\omega$ gegen null.

$$\omega_L = \omega_0 - \Delta\omega \quad (3)$$

Durch Positionierung von je zwei gegenläufigen Lasern in allen drei Raumrichtungen erreicht man eine vollständige Kühlung. Allerdings wurde angenommen, dass nur im Mittel kein Impuls bei der Emission auf das Ion übertragen wird. Die einzelnen Impulsübertragungen spontaner Emissionen sind nicht kühlbar und es stellt sich eine Dopplertemperatur ein.

Seitenbandkühlen ^[9, S. 111-112]

Dieses Verfahren setzt voraus, dass die Ionen in einem Potential gefangen sind und nur diskrete Schwingungszustände besetzen können. Zudem müssen sie bereits dopplergekühlt sein. Dabei können die Ionen bis in den Grundzustand der Bewegung gekühlt werden.

Die Schwingungszustände veranlassen die Ionen dazu nicht nur ω_0 - sondern auch ω' -Photonen absorbieren zu können.

$$\omega' = \omega_0 \pm n \omega_{OSZ} \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

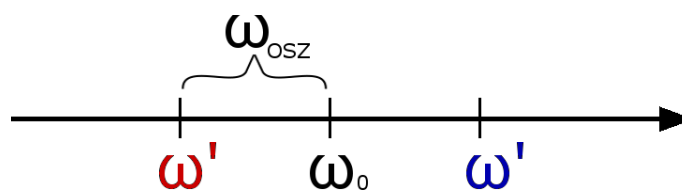


Abbildung 1.10: Rotes und blaues Seitenband für $n=\pm 1$ (schematisch)

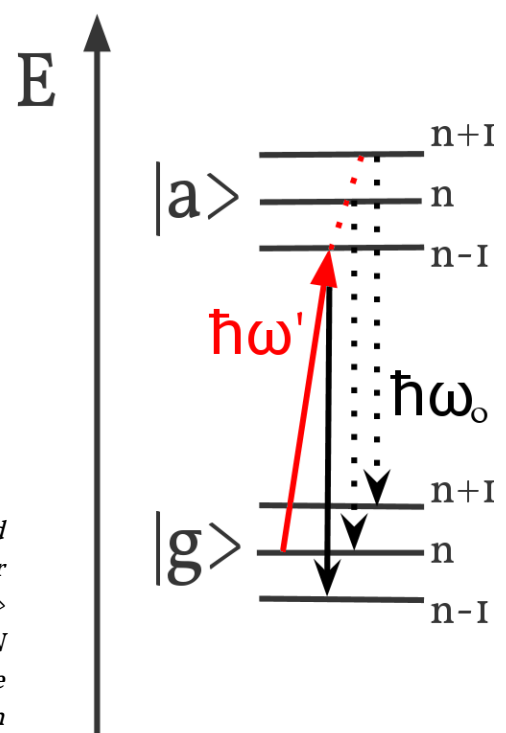
Ziel ist es die Schwingungen des Ions zu kühlen:

Nach Anregung des Grundzustandes $|g\rangle$ in irgendeinen der angeregten erfolgt bevorzugt eine Photonenemission mit der Energie $\hbar\omega_0$ (vgl. Gleichung 4 unten) wodurch sich letztendlich der Schwingungszustand ändern kann. Durch Erfüllen der Bedingungen

- möglichst harmonischer Oszillator (ω_{OSZ} periodisch)
- Bereich der Teilchenbewegung kleiner als die Wellenlänge des Kühllasers
- Die Breite, bedingt durch die Energieunschärfe der Schwingungszustände ist kleiner als ihr Energie-Abstand zueinander

kann man den Übergang im roten Seitenband mit hoher Wahrscheinlichkeit erzielen:

So führen Gleichung (1) und (2) zu einer statistisch kleinen Aufheizung, aber überwiegend ist der Kühlübergang (3).



Der Grundzustand und angeregte Zustand mit drei exemplarischen Energieniveaus der Seitenbänder. Hier repräsentieren $|g\rangle$ und $|a\rangle$ die elektrischen inneren Zustände und $n \in \mathbb{N}$ einem der äußeren Schwingungszustände bedingt durch die harmonische Oszillation des elektrischen Feldes.

Abbildung 1.11

$$|g, n\rangle + \hbar\omega' \rightarrow |a, n\rangle \quad (1)$$

$$|g, n\rangle + \hbar\omega' \rightarrow |a, n+1\rangle \quad (2)$$

$$|g, n\rangle + \hbar\omega' \rightarrow |a, n-1\rangle \quad (3)$$

Der Übergang zurück findet meist unter Emission immer gleichgroßer Energie statt:

$$|a, n+x\rangle \rightarrow |g, n+x\rangle + \hbar\omega_0; \quad x \in \{-1, 0, 1\} \quad (4)$$

Auch hier kann man die verlorene bzw. emittierte Energie eines erfolgreichen Kühlprozesses wie folgt angeben.

$$E_{\text{verloren}} = E_{\text{ges Emission}} - E_{\text{Laser}} \quad (5)$$

$$E_{\text{verloren}} = \hbar\omega_0 - \hbar\omega' = \hbar \Delta\omega \quad (6)$$

Angewendet werden kann die Laserkühlung aber nur in "primitiven" 2-Niveau Atomsystemen. Andere Atome oder sogar Moleküle mit ihren zusätzlichen Freiheitsgraden in der Schwingung können nicht direkt lasergekühlt werden. In der sog. **sympathetischen Kühlung** kann ein schlecht laserkühlbares System über Wechselwirkungen (z.B. Coulomb) mit einem lasergekühltem System indirekt gekühlt werden. [6, S. 31]

1.2.3 Präparation und Detektion eines Qubits mit Hilfe von Lasern

Es bilden die Zustände $|g\rangle$ und $|m\rangle$ ein Qubit ab. (vgl. Abb. 12) Die Präparation des metastabilen angeregten Zustandes erfolgt durch Photonenabsorption ($E_{\text{ph}} = \hbar\omega_m$) aus dem Grundzustand. Um den Wert des Qubits herauszufinden, führt man einen Hilfszustand $|h\rangle$ ein: Eine häufig wiederholte Anregung von $|g\rangle$ mit ω_h lässt das Elektron kurzzeitig in den Zustand $|h\rangle$ springen und anschließend immer wieder unter Emission zurückfallen. Die Detektion der sog. Fluoreszenz lässt auf den Grundzustand des Ions schließen. Die Energie $\hbar\omega_h$ wird von einem Ion im Zustand $|m\rangle$ nicht angenommen und folglich findet dann auch keine Fluoreszenz statt. [10, S.26]

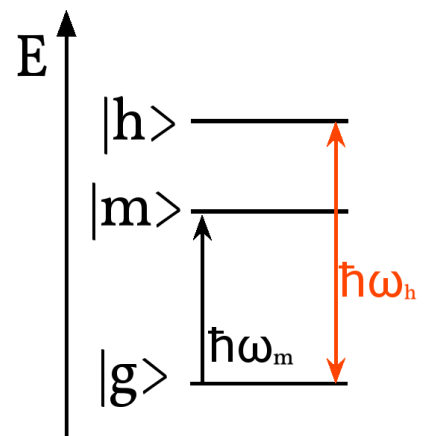


Abbildung 1.12: Grundzustand, langlebiger metastabiler Zustand und der zur Detektion benötigte Hilfszustand.

2 Theoretische Hintergründe beim Quantencomputer

2.1 Das Qubit – Superposition und Verschränkung

Manipulation und Messung in einem Zweizustandssystem wurde bereits in Kapitel 1.2.3 behandelt: Das Qubit wird definiert durch den Grundzustand $|g\rangle$ als $|0\rangle$ und den angeregten Zustand $|a\rangle$ als $|1\rangle$. Nach einer Messung erhält man den Wert eines Zustandes („0“ oder „1“) mit folgender Wahrscheinlichkeit.

$$P(\text{Wert}=0) + P(\text{Wert}=1) = 1 \quad (1)$$

Somit eignet sich ein Quantencomputer auch als perfekter Zufallsgenerator, da bei einer Messung immer zufällig und mit jeweiliger Wahrscheinlichkeit einer der beiden Werte ermittelt wird.

Man kann zwar nur ein klassisches Bit in einem Qubit speichern, wie z.B. $P(\text{Wert}=0) = 1$, dennoch kann beim Qubit auch eine Überlagerung von binären Werten vorliegen:

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \quad (2)$$

Hierbei gilt für die Wahrscheinlichkeiten: (vgl. Gleichung 1)

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \quad c_n \in \mathbb{C} \quad (3)$$

Durch Messung allerdings geht diese Überlagerung oder auch Superposition verloren und man erhält z.B. mit der Wahrscheinlichkeit $|c_0|^2$ den Wert Null.

So ist mit einer Superposition von Zuständen eine Speicherung von allen ganzen Zahlen zwischen Null und Sieben in nur drei Qubits möglich. Zum Vergleich: Bei klassischen Bits bräuchte man drei Bit pro Zahl, also insgesamt $3 \cdot 8 = 24$.

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle|0\rangle|0\rangle + c_1|0\rangle|0\rangle|1\rangle + c_2|0\rangle|1\rangle|0\rangle + c_3|0\rangle|1\rangle|1\rangle + c_4|1\rangle|0\rangle|0\rangle + c_5|1\rangle|0\rangle|1\rangle + c_6|1\rangle|1\rangle|0\rangle + c_7|1\rangle|1\rangle|1\rangle \quad (4)$$

Die in Gleichung 4 beschriebene Superposition ermöglicht die **Quantenparallelrechnung**, denn die Rechnung wird mit allen Zuständen in nur einer Operation durchgeführt. [8, S. 8-10]

Die Messung des Ergebnisses liefert aber nur einen Wert und zerstört die anderen. Ausweichen kann man dem, indem man Messungen definiert, die Aufschluss über die Eigenschaften bzw. Ergebnisse der Funktion geben. Eine Messung lässt dann z.B. auf die Periodizität^[8, S. 10] oder Konstanz^[12, S. 5] einer Funktion schließen.

Die Superposition kann nur aufrecht erhalten werden, wenn der Zustand kohärent ist. Aus Wechselwirkungen mit der Umgebung folgen **Dekohärenzeffekte**, welche die Superposition zerstören. Die Wechselwirkungen sind vergleichbar mit einer Messung. [13, S. 442]

Die **Verschränkung** ist eine Konsequenz des Superpositionsprinzips. Sie kann bei zwei oder mehr separaten Quantensystemen auftreten. Dabei kann nur noch der Zustand des Gesamtsystems betrachtet werden und nicht mehr die Kombination der Zustände der einzelnen Systeme. Durch die Verschränkung wird die Möglichkeit der Quantenkommunikation freigeschaltet, was z.B. beim Ausführen von Zwei-Qubit-Gattern wichtig wird. [13, S.442-443]

2.2 Quantengatter

Gatter bezeichnen im Allgemeinen logische Schaltungen. Quantenlogische Gatter führen reversible Operationen an Qubits aus. Um jede beliebige Quantenrechnung zu realisieren reichen das NOT-Gatter und das Controlled-NOT-Gatter aus: [8, S. 11-12]

Eingabe-Qubit	Ausgabe-Qubit
0	1
1	0

Abbildung 2.1: Das NOT-Gatter oder Pauli-X-Gatter bewirkt eine sog. π -Rotation des Wertes. In der Wahrheitstabelle bedeutet 1 und 0 jeweils „wahr“ und „falsch“.

Eingabe-Qubit	Kontroll-Qubit	Ausgabe-Qubit
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Abbildung 2.2: Die zwei im C-Not-Gatter benötigten Qubits. Das zweite Qubit (Kontroll-Qubit) wird gebraucht, um die Reversibilität zu wahren. Steht das Kontroll-Qubit auf „wahr“, wird der Wert des Ausgabe-Qubits geändert.

Durch Anwendung des C-Not-Gatters kann aus einer Superposition ein verschränkter Zustand erzeugt werden. [Details: 6, S. 17]

2.2.1 C-Not-Gatter am Beispiel der Ionenfalle

Dieses Gatter kann zwar mit nur einem Ion durchgeführt werden, dennoch ist es ein 2-Qubit-System, da einerseits der elektronische Zustand und andererseits der Schwingungszustand ein Qubit darstellen: [8, S. 21]

Das C-Not-Gatter in einer Ionenfalle beruht auf den elektronischen Zuständen $|g\rangle$ und $|a\rangle$ und den Schwingungszuständen $|n\rangle$, wobei hier nur $n=0$ und $n=1$ relevant sind.

Das Gatter wird durch einen Laserpuls realisiert, der die elektronischen und Schwingungszustände koppelt und den elektronischen Zustand nur ändert, wenn $n=1$. Es wird nämlich ausgenutzt, dass die Kopplungsstärke (Stärke der Wechselwirkung) zwischen $|n\rangle |g\rangle$ und $|n\rangle |a\rangle$ von n abhängt.

So kann man einen Laserpuls wählen, der die Ionen mit $n=0$ im elektronischen Zustand verweilen lässt bzw. eine $2\text{-}\pi$ -Rotation durchführt. Zugleich ist der Laserpuls so gewählt, dass die Ionen mit $n=1$ eine π -Rotation durchführen und damit ihren elektronischen Zustand ändern. Nur die Zustände $|1\rangle |g,a\rangle$ erfahren eine Zustandsänderung, während $|0\rangle |g,a\rangle$ unverändert bleiben. Der Schwingungszustand $|n\rangle$ entspricht dem Kontroll-Qubit. (vgl. Abb. 2.2)

2.3 Quantenalgorithmen – Suchalgorithmus, Faktorisierung und Fehlerkorrektur

Generell können Quantenalgorithmen auch auf Digitalrechnern ausgeführt werden – und umgekehrt. Das bedeutet, dass Quantenrechnung keine prinzipiell neuen Probleme lösen kann. In beiden Fällen aber ist das abgesehen von Forschungszwecken mit keinem Vorteil verbunden: Rechnet ein Quantencomputer einen klassischen Algorithmus stellt man zwar keinen

Geschwindigkeitsunterschied fest, aber man hat mit den oben genannten Problemen zu kämpfen. Umgekehrt benötigt ein Digitalcomputer bei der Berechnung eines Quantenalgorithmus exponentiell mit der Größe des Problems wachsende Berechnungszeit im Vergleich zu einem Quantencomputer.

Zur Zeit gibt es noch wenige und nur spezielle Quantenalgorithmen, die im Vergleich zu deren klassischem Analogon einen Geschwindigkeitsschub durch Ausnutzung von Quanteneigenschaften erfahren.^[14]

Am Beispiel von zwei Quantenalgorithmen wird gezeigt, dass die Berechnungszeit weniger zunimmt als bei klassischen Algorithmen.

Der Suchalgorithmus von Grover

Klassisch prüft man in einer unsortierten Liste jeden Eintrag und benötigt dazu im Mittel $\frac{N}{2}$ Versuche. Quantenlogisch allerdings reichen \sqrt{N} Schritte aus, um den Eintrag zu finden. Jedoch ist das Ergebnis nie mit hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit richtig.^[14]

Faktorisierungsalgorithmus von Shor

Klassisch versucht man aus großen Zahlen (N) ein Produkt aus Primzahlen kleiner \sqrt{N} zu bilden. Quantenlogisch kann der Prozess bei großem N wieder durch Ausnutzung von Superposition stark beschleunigt werden.^[14]

Aktuelle Probleme bei der Forschung an Algorithmen sind:

Allem voran stellt der Verlust der Superposition durch Messung oder Wechselwirkung ein großes Problem dar, da so die Quantenparallelrechnung unmöglich wird. (vgl. Kap 2.1)

Weiterhin existieren keine Kenntnisse darüber, welche Eigenschaften Aufgaben aufweisen, die mit Quantenalgorithmen schneller gelöst werden können. Dennoch konnten u.a. ein Suchalgorithmus und ein Faktorisierungsalgorithmus gefunden werden.^[15, S. 6]

Außerdem hindert u.a. die bei Qubits sehr komplizierte Fehlerkorrektur die experimentelle Ausführung von rechenintensiven Algorithmen. (vgl. unten)

Auch wenn ein Algorithmus fehlerfrei abläuft, liefern viele nur mit gewisser Wahrscheinlichkeit ein richtiges Ergebnis. Das zwingt zu wiederholten Anwendungen des sog. probabilistischen Algorithmus.

Letztlich wird ein Quantencomputer mit ca. 1000 Qubits angestrebt, was hinsichtlich der Ionenfalle durch eine segmentierte Mikrofalle versucht wird zu lösen. (vgl. Kap 1)

Die wegen hoher Dekohärenzanfälligkeit essentielle **Fehlerkorrektur** an Quanteninformation wurde erst 1995 für möglich erklärt. Das Problem hierbei war, dass bei einer Korrektur zuerst eine Messung durchgeführt werden musste. Klassisch ist dies unbedenklich, bei Quanteninformation verliert diese allerdings ihre Quanteneigenschaften wie Superposition. Peter Shor konnte 1995 erstmals durch Kodierung der Qubits und Ausführung eines stabilisierenden Codes die Fehlerkorrektur theoretisch ermöglichen. [16, S. 8-9]

3 Aktuelle Forschungsergebnisse und Aussichten

Die Forschung am Quantencomputer steckt größtenteils noch in Kinderschuhen: Neben den allgemeinen Problemen im Umgang mit Quanten stellt sich die Skalierbarkeit als großes Hindernis heraus: Vergleichbar mit den „ersten“ klassischen Computern benötigte 1998 auch der **3-Qubit NMR-Quantencomputer** (Nuclear Magnetic Resonance) ein ganzes Labor. Er konnte Eigenschaften über Funktionen mit nur einer Messung (vgl. Kap 2.1) bestimmen. [17]

Bereits 2001 konnte der **7-Qubit NMR-Rechner** von IBM bei Raumtemperatur mit Shors Algorithmus die Zahl 15 in $5 \cdot 3$ faktorisieren. [18]

2005 gelang es in Innsbruck in einer Ionenfalle ein **Qubyte** (8 Qubit) zu verschränken. [19]

Um schon Erfahrungen mit zweistelligen Anzahlen von Qubits zu sammeln, wird seit einigen Jahren in Jülich ein Quantencomputer simuliert. Er ist weltweit unter den größten Superrechnern und konnte mit **42 simulierten Qubits** den Shoralgorithmus für $15707 = 113 \cdot 139$ umsetzen. [20]

Neben der Ionenfalle gibt es auch noch weitere Implementierungen, die als Quantencomputer in Frage kommen:

Wie oben bereits erwähnt steckt in einem **NMR-Quantencomputer**, der auf Kernspinresonanz beruht ein großes Potential: Dabei dienen die verschiedenen Kernspins in einem Molekül als Qubit. Ein Molekül stellt einen Quantencomputer dar. Elektromagnetische Pulse können die Zustände der Spins ändern. Vorteil ist die Abschirmung der Kerne durch die Elektronenhülle, was geringe Dekohärenzeffekte zur Folge hat. [8, S.14]

In Betrachtung gezogen wurden außerdem sog. **Quantenpunkte**: Elektronen werden in Kristallen durch dreidimensionale Potentialwälle gespeichert. Durch diese Einschränkung kann ein Elektron nur noch diskrete Energieniveaus, welche als Qubit dienen, annehmen. Gatter können durch externe elektrische Felder oder Spin-Spin-Wechselwirkungen zwischen Quantenpunkten realisiert werden. [8, S.13]

Es existieren auch Forschungen, Systeme aus **Supraleitern** als Quantencomputer zu verwenden. [z.B. 21]

Letztlich eignet sich die Polarisierung von **Photonen** auch als Qubit. Photonen bewähren sich aber weniger zur Durchführung von Rechnungen, sondern eher zur Kommunikation und Verschlüsselung. [22]

Bis der Quantencomputer sich in unserem Alltag niederschlägt muss noch einige Forschung betrieben werden. Selbst wenn er sich eines Tages durchsetzt, wird er wahrscheinlich unsere klassischen „Begleiter“ nur ergänzen. Einsatzgebiete wären neben den flatter ablaufenden Quantenalgorithmien auch Quantensimulationen im Bereich der Chemie, sowie neue Verschlüsselungsmethoden. Die an dieser Stelle dem Quantencomputer entgegengebrachte Kritik, er würde die heutige verbreitete (RSA-)Verschlüsselung* knacken, ist unbegründet: Man bräuchte eine dreistellige Anzahl an Qubits, was bisher noch nicht gelang. Also bleibt genug Zeit die Verschlüsselungsmethoden auszubauen.

* Die RSA-Verschlüsselung gilt als sicher, da sie auf dem Produkt zweier Primzahlen beruht: Mit derzeitiger Technik kann aber keine entsprechend lange Zahl (zur Zeit 1024 Bit) zeitnah faktorisiert werden

Selbst wenn der Quantencomputer keine dem klassischen Computer vergleichbare Entwicklung aufzeigen wird, liefert er dennoch nicht nur interessante, sondern auch Kenntnis erweiternde Ergebnisse im Bereich der Grundlagenforschung.

Literaturverzeichnis

- [1] Thomas W. Deuschle, Kalte Ionenkristalle in einer segmentierten Paul-Falle, <http://vts.uni-ulm.de/doc.asp?id=6139> (Abgerufen am 2.8.2010)
- [2] Stephan A. Schulz, Scalable Microchip Ion Traps for Quantum Computation, <http://vts.uni-ulm.de/doc.asp?id=6814> (Abgerufen am 8.8.2010)
- [3] Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper, Springer Berlin Heidelberg New York (3. Auflage)
- [4] http://de.wikipedia.org/wiki/Penning-Falle#Unterschiede_zur_Paul-Falle (Abgerufen am 4.11.2010)
- [5] <http://www.wolframalpha.com/>, Input: $\Delta ax^2+by^2+cz^2$
- [6] Steffen Köhler, Sympathetisches Kühlen als Anwendung für den Ionenfallen-Quantencomputer, http://edoc.ub.uni-muenchen.de/333/1/Koehler_Steffen.pdf (Abgerufen am 7.8.2010)
- [7] Unterrichtsmaterialien der Physikstunden 137 und 145
- [8] Heinrich Baldauf, Aufbau einer linearen Quadrupolfalle zur Beobachtung von Quantenphänomenen gespeicherter Ionen, Herbert Utz Verlag (1998)
- [9] Hanspeter Helm, Kapitel 14 - Seitenbandkühlen, <http://frhewww.physik.uni-freiburg.de/vorlesung/stofflesung/NEW-DISSIPATION.SEITENBAND.pdf> (Abgerufen am 6.11.1010)
- [10] Marek Sasura and Vladimir Buzek, Cold Trapped Ions as Quantum Information Processors, arxiv.org/abs/quant-ph/0112041v1 (Abgerufen am 7.11.2010)
- [11] Vasant Natarajan, Penning Trap Mass Spectroscopy, dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/28017/28596082.pdf?sequence=1 (Abgerufen am 13.11.2010)
- [12] Robert Feldmann, Quantenalgorithmen, <http://www.physik.uni-leipzig.de/~feldmann/Documents/Quantenalgorithmen.pdf> (Abgerufen am 12.12.2010)
- [13] Emanuel Knill, Physics: Quantum Computing (S. 441-443), nature Vol 463
- [14] Matthias Bezold, Quantenalgorithmen, <http://www.mbezold.de/quantencomputer/algorithmen.html> (Abgerufen am 19.12.2010)
- [15] Dr. Gesche Pospiech, Quantencomputer - Was verbirgt sich dahinter?, http://user.uni-frankfurt.de/~pospiech/q_comp.html (Umgewandelt in Pdf am 16.12.2010 mit html-pdf-converter.com)
- [16] Sebastian Smerat, Quantenfehlerkorrektur, <http://iffwww.iff.kfa-juelich.de/~ekoch/QC05/smeratpaper.pdf> (Abgerufen am 19.12.2010)

- [17] Noah Linden et al., An implementation of the Deutsch-Jozsa algorithm on a three-qubit NMR quantum computer, arxiv.org/abs/quant-ph/9808039
- [18] Lieven Vandersypen et al., Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance, arxiv.org/abs/quant-ph/0112176
- [19] R. Blatt et al., Scalable multi-particle entanglement of trapped ions, arxiv.org/abs/quant-ph/0603217
- [20] Jugene simuliert Quantencomputer mit 42 Qbit: <http://www.golem.de/1003/74204.html>
- [21] (DOI: 10.1126/science.1173440): John M. Martinis et al., Emulation of a Quantum Spin with a Superconducting Phase Qudit, sciencemag.org/content/325/5941/722
- [22] <http://de.wikipedia.org/wiki/Qubit#Photonenzust.C3.A4nde> (Abgerufen am 20.12.2010)
- [23] Ferdinand Schmidt-Kaler und Tommaso Calarco, Auf dem Weg zum Quantencomputer (Quanten-Verschränkung mit gefangenen Ionen), THEMENHEFT FORSCHUNG (QUANTENMATERIE), http://www.uni-stuttgart.de/presse/themenheft/05/auf_dem_weg_zum_quantencomputer.pdf (Abgerufen am 19.9.2010)

An dieser Stelle auch herzlichen Dank an Dipl. Phys. Wolfgang Schnitzler vom Institut für Quantenmaterie und die Abteilung für theoretische Physik an der Uni Ulm für die umfassende Kooperation in Form von Gesprächen, Besichtigungen und Bereitstellung von nützlichen Materialien.

Abbildungsverzeichnis

Wenn nicht anders vermerkt, ist die Grafik frei und eigenständig erstellt worden.

Einleitung

- Abb. 1 Graph erstellt mit
[http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot\[3*10^11 E^\(\(ln\[2\]/2\) t\), {t, 0, 30}\]](http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot[3*10^11 E^((ln[2]/2) t), {t, 0, 30}])
(3×10^{11} Transistoren pro cm^2 entsprechen in etwa dem brandneuen Intel Itanium 2 Tukwila)
- Abb. 2 Darstellung erstellt mit *Google Docs*
docs.google.com/document/pub?id=1yVauTsFc26DCA5s_WWHG-zTjW3gmyD_nx3f6mf-2r0k

Kap. 1

- Abb. 1.1
- Abb. 1.2 [2, S. 16]
- Abb. 1.3 [2, S. 16]
- Abb. 1.4 [2, S. 16]
- Abb. 1.5
- Abb. 1.6 [vgl. 1, S. 9]
- Abb. 1.7 [vgl. 1, S. 13]
- Abb. 1.8 [3, S. 57]
- Abb. 1.9
- Abb. 1.10
- Abb. 1.11
- Abb. 1.12

Kap. 2

- Abb. 2.1
- Abb. 2.2 [vgl. 8, S. 11]