Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 23

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 23.1. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.2.*

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 23.3. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt.[1]

Aufgabe 23.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

[1]Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

Aufgabe 23.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Spur (M) im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 23.6. Bestimme das charakteristische Polynom zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Welche Bedeutungen haben die Koeffizienten dieses Polynoms?

Aufgabe 23.7. Bestimme das charakteristische Polynom zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} .$$

Welche Bedeutungen haben die Koeffizienten dieses Polynoms?

Aufgabe 23.8. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{X^2-4X+7}{X-1} & \frac{6X-5}{X^2-5} \\ \frac{4X^2+3X-2}{6X^2-3X} & \frac{X^2+8X+9}{X^2-3X+5} \end{pmatrix}$$

über dem Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{Q}(X)$.

Aufgabe 23.9. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.10.*

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.11.*

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, v \longmapsto Mv.$$

Aufgabe 23.12.*

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Aufgabe 23.13. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})\,.$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 23.14.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme das charakteristische Polynom von M.
(2) Bestimme eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von M und klammere den entsprechenden Linearfaktor aus.
(3) Begründe, dass das charakteristische Polynom von M zumindest zwei reellen Nullstellen hat.

Aufgabe 23.15.*

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 2X^2 - 2\,.$$

Zeige, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{(1+\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert λ ist.

Aufgabe 23.16. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_M = (X-\lambda_1)^{\mu_1} \cdot (X-\lambda_2)^{\mu_2} \cdots (X-\lambda_k)^{\mu_k}.$$

Zeige, dass

$$\operatorname{Spur}(M) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i$$

ist.

Aufgabe 23.17. Es sei K der Körper mit zwei Elementen und betrachte darüber die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_M nicht das Nullpolynom ist, dass aber

$$\chi_M(\lambda) = 0$$

für alle $\lambda \in K$ ist.

Aufgabe 23.18. Zeige, dass eine quadratische Matrix und ihre transponierte Matrix das gleiche charakteristische Polynom besitzen.

Aufgabe 23.19.*

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Zu zwei quadratischen $n \times n$-Matrizen M, N gilt für die charakteristischen Polynome die Beziehung

$$\chi_{M \circ N} = \chi_M \chi_N .$$

Nach Definition ist nämlich

$$\chi_{M \circ N} = \det (XE_n - M \circ N) = \det (XE_n - M) \det (XE_n - N) = \chi_M \cdot \chi_N,$$

wobei die mittlere Gleichung auf dem Determinantenmultiplikationssatz beruht“.

Aufgabe 23.20.*

Es sei M eine $n \times n$-Matrix, mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0.$$

Bestimme das charakteristische Polynom der mit $s \in K$ gestreckten Matrix sM.

Aufgabe 23.21. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 23.22. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei eine $n \times n$-Matrix M über K gegeben. Zeige, dass das charakteristische Polynom $\chi_M \in K[X]$ mit dem charakteristischen Polynom zu M übereinstimmt, wenn man die Matrix über L auffasst.

Aufgabe 23.23.*

Zeige, dass das charakteristische Polynom zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V wohldefiniert ist, also unabhängig von der gewählten Basis.

Aufgabe 23.24. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die lineare Abbildung φ ist ein Isomorphismus.

(2) 0 ist kein Eigenwert von φ.
(3) Der konstante Term des charakteristischen Polynoms χ_φ ist $\neq 0$.

Aufgabe 23.25.*
Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $a \in K$ ein Eigenwert zu φ. Zeige, dass a auch ein Eigenwert der dualen Abbildung

$$\varphi^*\colon V^* \longrightarrow V^*$$

ist.

Aufgabe 23.26.*
Wir betrachten die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Sei

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erstelle eine Beziehung zwischen den Folgen x_n und y_n und Rekursionsformeln für diese Folgen.

c) Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren zu M.

Aufgabe 23.27.*
Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Das charakteristische Polynom χ_φ zerfalle in verschiedene Linearfaktoren. Zeige, dass φ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 23.28. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
(2) V ist φ-invariant.
(3) Eigenräume sind φ-invariant.
(4) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
(5) Sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

Aufgabe 23.29. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 23.30. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Unterraum von V. Zeige, dass zu einem Polynom $P \in K[X]$ der Raum U ebenfalls $P(\varphi)$-invariant ist.

Aufgabe 23.31. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

φ-invariant für jedes i sind.

Aufgabe 23.32.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 23.33.*

Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Sei $k \leq n$. Zeige, dass es genau dann einen invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich der die beschreibende Matrix von φ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kk+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1k+1} & \ldots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

besitzt.

Aufgabe 23.34.*

Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Sei $k \leq n$. Zeige, dass es genau dann eine direkte Summenzerlegung $V = U \oplus W$ in invariante Untervektorräume $U, W \subseteq V$ der Dimension k bzw. $n-k$ gibt, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich der die beschreibende Matrix von φ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1k+1} & \ldots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

besitzt.

Aufgabe 23.35. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass

$$R(U) = \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \,|\, U \text{ ist ein } \varphi - \text{invarianter Untervektorraum}\}$$

mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.36. (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23.37. (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.38. (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 23.39. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23.40. (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

ist.

Aufgabe 23.41. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.