Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 44

Übungsaufgaben

Aufgabe 44.1. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeige

$$\langle 0, v \rangle = 0$$

für alle $v \in V$.

Aufgabe 44.2. Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Bilinearformen sind.

(1)
$$\Psi(v, w) = \| v \| .$$

(2)
$$\Psi(v, w) = \| v - w \| .$$

(3)
$$\Psi(v, w) = \| v \| \cdot \| w \| .$$

(4)
$$\Psi(v, w) = \angle (v, w) .$$

Aufgabe 44.3. Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 44.4.*

Bestimme die Gramsche Matrix zur Determinante auf dem K^2 bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 44.5. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gibt.

Aufgabe 44.6. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass diese Form genau dann symmetrisch ist, wenn die Gramsche Matrix von ihr bezüglich einer Basis symmetrisch ist.

Aufgabe 44.7. Zeige, dass die Determinante in der Dimension zwei, also die Abbildung

$$K^2 \times K^2 \longrightarrow K, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_2 - x_2y_1,$$

keine symmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 44.8.*

Zeige, dass es eine Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf einem Vektorraum V geben kann, die nicht die Nullform ist, für die aber

$$\langle v, v \rangle = 0$$

für alle $v \in V$ ist.

Aufgabe 44.9.*

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass V eine Orthogonalbasis besitzt.

Aufgabe 44.10. Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

(1) $\varphi(x,y) := x_1y_1$.
(2) $\varphi(x,y) := x_1x_2 + y_1y_2$.
(3) $\varphi(x,y) := 2x_1y_2 + 3x_2y_1$.

Aufgabe 44.11. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V vom Typ (p,q). Zeige, dass

$$p + q \leq n$$

ist.

Aufgabe 44.12. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschrän/-kung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 44.13. Auf dem $\mathbb{R}^2$ sei durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 - y_1y_2$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben. Bestimme zu jeder Geraden G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung der Form auf die Gerade positiv definit, negativ definit oder die Nullform ist.

Aufgabe 44.14. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ (p,q) und es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ (p',q'). Zeige $p' \leq p$ und $q' \leq q$.

Aufgabe 44.15.*

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ (p,q) und es sei $U \subseteq V$ ein d-dimensionaler Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ (p',q'). Zeige

$$p' \geq d + p - n.$$

Aufgabe 44.16. Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf V und einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von V derart, dass $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, aber $\langle -,- \rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 44.17. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf V. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $\langle -,- \rangle$ positiv definit ist.

Aufgabe 44.18. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 44.19. Es sei M eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix A derart gibt, dass

$$A^{\text{tr}} M A = D$$

eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 44.20. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Es seien G und H die Gramschen Matrizen zu dieser Form bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Zeige, dass die Determinante von G genau dann positiv (negativ, 0) ist, wenn dies auf die Determinante von H zutrifft.

Aufgabe 44.21. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 44.22. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 44.23.*

Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem zweidimensionalen reellen Vektorraum, die bezüglich einer Basis durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

beschrieben werde. Bestimme den Typ der Form in Abhängigkeit von b, c.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.24. (4 Punkte)

Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

(1) $\varphi(x, y) := x_1 - y_1$.
(2) $\varphi(x, y) := x_1 y_1 - x_2 y_2$.
(3) $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$.

Aufgabe 44.25. (4 Punkte)

Es sei Φ eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeige, dass für Vektoren $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \in V$ und Skalare $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s \in K$ die Gleichheit

$$\Phi(a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r, b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s) = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} a_i b_j \Phi(v_i, w_j)$$

gilt.

Aufgabe 44.26. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 44.27. (2 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Zeige, dass die negierte Form $- \langle -, - \rangle$ den Typ (q, p) besitzt.

Aufgabe 44.28. (2 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Abbildungsverzeichnis