算術捷徑目次

算術捷徑

~~第一章　記數法~~

書寫之法之確立

~~1. 數字的來歷~~　人類最初大概是靠十個手指來幫助計算．至今我們還是屈指一五一十地數着．不過最早的數碼是什麼却無從推定．古人用來表示數碼的東西，也許是十個手指，也許是一堆石子，也許是一捆小棒，也許是一根棒上的許多刻痕．不過 |、||、|||、|||| 等等的記號一定很早就用來表數的，而且直到現在，這些記號依舊在計算上利用着．例如用 |、||、|||、||||、||||| 來表 1、2、3、4、5 等就是．

最早的書寫數碼，據說是巴比倫的數碼，那是一種楔形的符號．直立的楔形"∨"表"一"，橫臥的楔形"<"表"十"，橫直並用的楔形"∨<"表"百"．其他種種數目，是由這三個數碼爲種種不同的結合而組成的．

埃及人用象形的符號來表數，就是用動物或物件的種種形式的圖像來表種種所要表出的數目．例如"一"是用一根直立的小棒"|"來表；"十"是用馬蹄形的符號"Ω"來表；"百"是用一種曲線形"ℯ"來表；"百萬"是用一人伸手作驚詫狀的圖形來表；其餘還有種種．用這等記號並列連寫，作適當的組合而相加，便可以表出種種其他的數來．

希臘人用他們拼字的字母來作數碼，並且也像巴比倫人那樣把這些數碼組合起來，造成其他各種數碼. 羅馬人也用字母來做數碼，而且這些數碼至今還沿用着，像 I、II、III、IIII (IV)、V、X、L(50)、C(100)、D(500)、M(1000)等等.

古代的人，沒有能早早就使用“零”或“無”的數碼的，所以都覺得麻煩和困難.

現在一般文明民族間所通行的數字，是起源於印度的. 阿拉伯人從印度人那裏學得了這一套數字；後來他們在八世紀時征服了歐洲的西班牙，就把這套數字傳到歐洲. 因此，這套數字現在通稱爲阿拉伯數字.

數字 1 只是一個簡單的記號 |. 數字 2 是由聯結兩根橫劃如“Z”而成. 數字 3 是由聯結三根橫劃如“ヨ”而成. 至於 4、5、6、7、9 等數字，却是紀元前不多世紀時北印度人所用語言中各個相當數名的第一字母；8 大概也是，但不能確定. 阿拉伯人用符號“O”來表“無”. 印度人言“無”說“sifra”，因此西洋人現在還喚“零”的符號爲“Cipher”.

~~2. 我國的數字~~ 我國現在通行的數字，大概可分三種如下：

第一種小寫數字： 一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、廿、、百、千、万等，普通書寫時用之.

第二種大寫數字： 壹、貳、叁、肆、伍、陸、柒、捌、玖、拾、念、、佰、仟、萬等. 這些字大多由假借而來；因爲它們筆劃較繁，不易

塗改，所以公牘帳據上都用它.

第三種數碼：〡、〢、〣、〤、〥、〦、〧、〨、〩、〸、〹、〺、彐、丿等.這些是簡筆字，商業上及一時暫記都用它.

我國古史上說，隸首作算數.隸首是黃帝的臣下，可見黃帝時已行計算，數字也從那時候起就創造了.

講到數碼，就聯想到古時的籌算.籌算用籌記數，其式有縱橫兩種：

縱式如　𝍠、𝍡、𝍢、𝍣、𝍤、𝍥、𝍦、𝍧、𝍨 等；

橫式如　𝍩、𝍪、𝍫、𝍬、𝍭、𝍮、𝍯、𝍰、𝍱 等.

縱式用作單、百、萬、百萬等位，橫式用作十、千、十萬、千萬等位.例如六千七百零八記作𝍮𝍦　𝍧；七千六百八十二，記作𝍯𝍥𝍰𝍡就是.後世的數碼，形體大部與此相似，自然是從此脫化出來的.據說：〡、〢、〣、〤、〥、〦、〧、〨、〩這九個數碼，是創始於湖州地方的，所以大家叫它做湖州記法；大概是湖州地方的人首先變化籌算的記數法而創造出來的.這其間有大可注意的一點，便是籌算法和湖州法中，都還沒有表"零"的符號.

相傳隸首創三數十等之法.十等是億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載.三數是上、中、下三種進法：下數十進，如億爲十萬，兆爲十億；中數萬進，如億爲萬萬，兆爲萬億；上數自乘而進，如億爲萬萬，兆爲億億.現在通用的，以採用中數爲最多.

3. 現在通用的數字　各種數字，用起來最簡明最便利的，要推阿拉伯數字.所以現在差不多全世界的文明各國都採用

它．在我國，現在也已到處通用了．

阿拉伯數字最方便的地方，就是只消用九個基數的符號：1、2、3、4、5、6、7、8、9，再加上一個0，一共只有十個符號，便不論十、百、千、萬、億、兆等等，什麼數都可以記出來了．

阿拉伯數字的記數，其定位法是自右而左，最右的一位是個位；每向左進一位便大十倍，順次是十、百、千、萬等等；記起來非常便利，看起來也非常便利．又爲易於看清位數起見，常從個位起，每前進三位加上一個撇號“，”，例如 1,000，34,400，5,602,000 等等．

我國向來用慣隸首的中數記法，是萬進的，就是以四位作一段落的，所以上面所說阿拉伯數字記法以三位爲一段落的情形，與我國人習慣上不相融合．因此從我國人看來，每隔三位加一“，”號的記法往往反覺不便，不過看得多了，用得慣了，便也不以爲異了． end

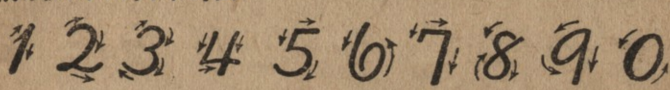
小於1的數，用十進記法的，叫小數記法．小數記法在個位的後面加一小數點“·”，小數點後依次爲分、厘、毫、絲、忽、微等位，都是十進的．如二分五厘四毫寫作0.254.

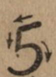
4. 極大數與極小數的記法 極大的數，像1,000,000,000那樣，在1之後帶着9個0，常常寫成10^9．這10字右上角的小9字表明在1後所帶0的個數．同樣，2,500,000是$2\frac{1}{2}$的百萬，或是$2.5\times1,000,000$，可以寫成2.5×10^6；又3897000000可以寫成3.897×10^{10}；其餘照此類推．

用小數來記的極小數，像 .0000007 那樣，有時可以寫成 $.0_67$. 這 0 之右下角的小 6 字表明小數點與第一個有效數字間所有 0 的個數. 這個又常常記爲 $.7\times10^{-6}$ 或 7×10^{-7}. 同樣，.0000000425 可以記爲 $.0_8425$ 或 $.425\times10^{-8}$，也可以記做 4.25×10^{-9}；.00726 可以記成 7.26×10^{-3}；其餘照此類推.

這種在 10 的右上角記一或正或負的小數字，用來寫出極大數或極小數的方法，是利用那10的乘冪的記法. 那個右上角的小數字是叫做10的指數. 這種記法，在科學上的計算中非常有用.

5. 數字寫法的注意點　寫起阿拉伯數字來，其筆順可照下列箭頭所示的次序寫去：



5 字也有照  的次序一筆連寫的. 不照這樣的筆順寫，便算錯誤的.

要希望數值計算的正確，便須把數字寫得清楚. 筆劃牽連不分的字體，過分細長不顯明的字體，別人固然看不分明，就是自己也易發生錯誤. 像 7 與 9，2 與 Z 等最宜注意. 7 字的折角寫圓了，便易誤爲 9 字；2 字的筆姿寫方了，便易誤爲 Z 字.

行加減乘除的運算時，文字的配列要適合規則；寫橫式不好上下歪斜，寫豎式不好左右交錯. 尤其在行加減乘的運算時，同位的數字須留心排列得上下成一直線.

每三位分一段落的“,”號，須與小數點“.”寫得十分分明.

“,”號須寫在數字之間的下方,並且必須拖出尾巴;小數點卻要寫在數字與數字之間的中下部位,不好過於落低,更不好拖出尾巴.如

$$123{,}456.789$$

的式樣,才算合式.

6. **文字代數** 在說明原理及公式的時候,用文字代數,有非常便利之處.譬如買每斤四十元的豬肉四斤,其總價可由重量乘單價而求得為(40元×4=)160元. 一般的說來,可用下式表示:

$$\text{總價}=\text{單價}\times\text{重量}.$$

若以 c 代總價,p 代單價, w 代重量,則該式變為

$$c=p\times w.$$

如果以 A 代矩形的面積,L 代其長,W 代其闊,則因

$$\text{面積}=\text{長}\times\text{闊},$$

而可有

$$A=L\times W.$$

又如以 N 代一數,n 代另一數,以 Q 代後一數除前一數的商,則有

$$Q=\frac{N}{n}=N\div n;$$

又任意二數的和等於第三數,可寫為

$$a+b=c;$$

其餘照此類推.

文字代數的方法,原是代數學中的基本方法,不過為便利起見,算術中正也不妨相機採用. 對於科學及工程的原理與計算,更是時時脫不了這種方法,所以在學算術時也該留意到這方法.

習題一

1．用阿拉伯數字記出下列各數．

四萬六千萬(我國人口)

一千零零二萬三千四百十九方公里(我國土地)

四百四十九萬四千二百九十(民國三十七年初上海人口)

二千零零九萬一千零四十七又五分

八毫

2．用我國數碼記下列各數：

967，　231，　504，　2028．

3．用4、5、9、8、7、1六個數字記出最大與最小的六位數；又記出四位整數兩位小數的最大數及最小數．

4．用10的正或負冪來記下列各數：

十億，　四百兆，

300,200,000,000，　3.002，　0.000000002．

5．說明下列二式的意義：

甲．　$a=c$，　$b=c$，　則　$a=b$．

乙，華氏寒暑表度數爲F，攝氏寒暑表度數爲C，則

$$F=C\times\frac{9}{5}+32,\qquad C=(F-32)\times\frac{5}{9}.$$

6．寫出下列各式來：

甲．a與b的差乘以c．

乙．a加b，除以c，從d中減去，再乘以e．

第二章 運算符號

1 運算符號的來歷 算學上有了各種符號.才覺得非常便利,而且才易於進步.不過在上古之世,人們都不懂得運用各種符號.我國古時,對於各種運算,多用詞語敍述,不知道用符號來代表,所以很覺累贅而不顯明,譬如"雞翁每增四,雞母每減七,雞雛每益三,"(見張邱建算經);又如"以差實減弦實,半其餘,以差爲從法,開方除之,復得勾矣;加差於勾卽股."其語都隱晦難明,遠不如現代算學書上利用符號來開立算式的明白易曉.在西洋,古時也是用詞語來敍述算法的;有時把幾個數並寫在一起,便表明是這幾數相加.

據西洋人的傳說,好像是在1489年時,有一個叫維特曼的,在德國印行一部關於算術的書,首先應用"+"號和"−"號;他用這兩個符號來表示"超過"和"不足"的意思.不過不久之後,這兩個符號便被採用爲"加"和"減"的運算符號了."×"號是在1631年時由英國的維廉屋脫萊特用來表示"乘"的意義.阿拉伯人早就以分數的形式來表"除".到1669年,有一個叫臘恩的在一本題名爲代數的書中,用"÷"號來表"除";橫線上的點表被除數或分子,橫線下的點表除數或分母.英國的洛勃脫萊考特在1557年時首先引用等號"=".這些符號,現在是應用到算學的各部門,而且通行於各處了.

我國現代的算學,差不多全盤西化了,所以西洋的各種運算

符號也全部採用了.

2. **加、減、乘、除號**　算術中最有用的運算符號是加號"＋"、減號"－"、乘號"×"和除號"÷". 茲分述其意義和作用如下:

加號"＋"　將此號記在任意二數之間,便是表示要求該二數的和. 例如 $4+3$ 便是表示 4 與 3 相加,而求其和,應讀爲"4 加 3". 帶分數是整數與分數相併的數,整數與分數之間省去加號,例如 $5\frac{3}{4}$,其實便是 $5+\frac{3}{4}$,這一點須加注意.

減號"－"　將此號記在任意二數之間,便是表示要求該二數的差. 記在符號之前的是被減數,記在符號之後的是減數. 例如 $8-3$,便是自 8 減 3 的意思.

乘號"×"　將此號記在任意二數之間,便是表示要求該二數的積.有時也用點"·"來表乘.例如$2\times3\times4$,也可寫作$2\cdot3\cdot4$. 在用"·"號表乘時,其號應寫在二數間剛剛自上至下的半腰部位上,并且該二數應寫得略開,以免與小數點相混.

除號"÷"　將此號記在任意二數之間,便是表示要求該二數的商. 記在該符號前的是被除數,記在該符號後的是除數. 例如 $27\div3$,便是 27 以 3 去除的意思.

3. **分數線**　分數的記法是在橫線之上記分子,橫線之下記分母. 這分數中的橫線也表示除的意思,分子是被除數,分母是除數.所以像 $\frac{12}{4}$,是四分之十二,也就是 $12\div4$,其結果是 3,所以 $\frac{5\times4}{2\times2}$ 就是 $\frac{20}{4}$,就是 5; 詳細說來,便是5×4的積用 2×2 的

積來除.

分數中的橫線也表比的意思,分子是比的前項,分母是比的後項.所以 $\frac{12}{4}$ 就是 12:4,其值都是 3.

4. 等號 等號是兩條等長的短橫線並寫,如"=",表示相等的意思. 記在等號前面或左邊的一組數或一組算式,一定產生記在等號後面或右邊的那個數或結果. 例如

$12+4=16,\ 12-4=8,\ 12\times4=48,\ 12\div4=3.$

有人用天平的橫桿來比喻等號. 天平一邊的重量一定與另一邊的砝碼等重,橫桿才能平衡;等號一邊的數量一定和另一邊相等,等號才能成立. 這比喻確是十分恰當.

天平一邊的砝碼不與另一邊的重物等重,橫桿便要傾斜;這好比等號兩邊的數量有了多少,等號便不能成立. 等號不能成立時,這兩邊的數量不等. 不等的意思用"≠"的符號來表示,這叫做不等號. 例如

$12+4\neq17,\ 12-4\neq7,\ 12\times4\neq47,\ 12\div3\neq5.$

5. 括號 最簡的括號如"( )". 括號內的一組數或算式應認為是一個單一的數來運算. 例如 $3\times(4+2)$ 應該認做是 3×6, 因為括號內的 $4+2$ 是等於 6. 同樣,

$$8-(3+2)=8-5=3;$$

$$7+(4\times8)=7+32=39;\ \frac{(5\times4)}{(2\times2)}=\frac{20}{4}=5;$$

其餘照此類推.

有時要用幾重的括號，那麼括號的形式便須有種種的不同，以便辨別．通用的括號有下列四種形式：

1. ( )，叫做括弧；　2. 〔 〕，叫做括弓；

3. { }，叫做括帶；　4. ——，記在式上，叫做括線．

上列四種括號，應用時先後配置的次序應如 $\{[(\overline{\quad})]\}$．茲舉一例如下：

$$
\begin{aligned}
&8-\{7-[6-(5-\overline{4-3})-2]-1\}\\
&\quad=8-\{7-[6-(5-1)-2]-1\}\\
&\quad=8-\{7-[6-4-2]-1\}\\
&\quad=8-\{7-0-1\}\\
&\quad=8-6\\
&\quad=2.
\end{aligned}
$$

6. **各種符號組合的關係**　在各種運算符號聯合組成算式的時候，如果並無括號，那麼必須先算乘、除，後算加、減．所以在含有種種符號的算式：

$$42-6\div3+4\times2-18$$

之中，先從 × 號與 ÷ 號之處算出 $4\times2=8$ 和 $6\div3=2$，便得下式：

$$42-2+8-18.$$

該式指明從 42 中減去 2，再加上 8，然後減去 18，得最後結果為 30．同樣，　$5+2\times3-15\div5+4=5+6-3+4=12$，

其中 2×3 和 $15\div5$ 的兩個結果，須在行加減運算之先求出來．

如果用了括號，那麼必須先算括號之內的算式，然後再與括

號外的數或算式合併計算；括號內有各種符號的，也須先乘除而後加減．括號有幾重的，便須順次一重重的自內算到外面來．

現在舉一例以明之如下：

$$
\begin{aligned}
&35\times\{[(100-\overline{64-48}\times5)-88\div8]\div3+2\}\\
&\quad=35\times\{[(100-16\times5)-88\div8]\div3+2\}\\
&\quad=35\times\{[(100-80)-11]\div3+2\}\\
&\quad=35\times\{[20-11]\div3+2\}\\
&\quad=35\times\{9\div3+2\}\\
&\quad=35\times\{3+2\}\\
&\quad=35\times5\\
&\quad=175.
\end{aligned}
$$

7. 算式的寫法 聯合數字及各種運算符號，依據了各數間運算的關係，自左向右，順次寫出，表示計算的次序，這便成爲算式．算式的右邊接寫等號；等號之右，接寫前面算式計算的結果．如果前面的算式須分次逐步計算的，那就該逐步用等號連貫接寫下去，到得出最後結果爲止．

算式自左向右，列成橫行，中間的數字及各種符號，大小要寫得勻稱，排列要配得整齊，切不好參差錯雜．因爲參差錯雜，則非但不美觀，幷且容易發生錯誤．有的算式連貫而下，佔的地位很長，一行寫不下，或許竟要佔幾行的，那麼在折回頭另換一行時，最好是湊到在等號之處；而且這折回頭另換一行的等號，最好上下行排列整齊，以增美觀．學者可參閱 §5 與 §6 中的例

以爲模仿.

算草都用直寫,最要注意數字的排列整齊,詳見第一章第5節,此地不再多說了.

習題二

1. 用 7346, 859, 18775, 6497 四數寫成連加的橫式及直寫的算草. 注意排列整齊.

2. 計算 $(21-18\div3)\times7-5\times\{3+2\times(7-5)\}$.

3. 計算 $1+2\times\{2+3\times[3+4\times(4+5\times\overline{6+7}\times8+9)]\}$.

4. $\{6130-[(\overline{19-4}\times13+4)+634]\times2\}\div47=?$

第三章 數的性質

1. 個數與序數 表物量的多少，可以一個、兩個地數的，叫做個數，也簡稱爲數. 例如布長三尺的3，學生五人的5，都是個數. 若說二年級、五四紀念的2及5、4，是表示事物和時間的次序的，叫序數. 一個序數，不論是多少，總只是代表一件事物，不像個數多少便代表多少件事物，這是序數與個數的最大不同點. 算術上所計算的數，大多是個數.

2. 名數與不名數 附有單位名稱的數，就是指明某一單位的數，叫做名數，例如12石、120元、370人都是.

不附有單位名稱的數，就是不指明任何單位的數，叫做不名數，例如3、5是不名數，3鷄5犬便是名數了.

講到名數，與單位大有關係. 有些名數，其所含單位不止一種，例如1丈2尺，3元5角，6時45分等，這叫做複名數. 單位可以任意分割的，可以成爲複名數；有些單位，如人1名、牛1頭、書1本等，都是不可任意分割，一分割就不成其爲完好的物件了，那便不可成爲複名數.

3. 奇數與偶數 一切不能給2整除的數，叫奇數. 例如1、3、5、11、19、27等都是. 凡奇數的末位數字必爲1、3、5、7、9.

一切能給2整除的數，叫偶數. 例如2、4、6、10、14、28等都是. 凡偶數的末位數字一定是2、4、6、8或0.

4. 素數與複數 除本身與1以外，沒有其他整數可以整除

它的數，叫做素數．例如 7，以 7 與 1 固然可以除盡它，但其他整數，便沒有一個能整除它，所以是素數．此外如 1、2、3、5、11、13、17、19、……等等都是．

除本身與 1 以外，還有其他整數能整除它的數．叫做複數，例如 6，以 6 與 1 固然可以除盡它，此外還有 2 及 3 也可以除盡它，所以是複數．此外如 4、8、9、10、12、14、15、16、18、……等等都是．

偶數除 2 外，都是複數．（何故？）

奇數不一定是素數，也有是複數的．例如 9、15 等是奇數，但 $9\div3=3$，$15\div5=3$，所以都不是素數而是複數．

5. 約數、公約數、最大公約數　一數而能整除另一數的時候，該數叫做另一數的約數．例如 2 能整除 8，所以 2 是 8 的約數；又 4 也能整除 8，所以 4 也是 8 的約數．一數的約數可以有好多個．

一數若能整除多個數的時候，該數叫做此多個數的公約數．例如 3 能整除 9、12、15，所以 3 是 9、12、15 的公約數．又如 2、4、8 都可以整除 16、24、32，所以 2、4、8 三數都是 16、24、32 的公約數．從此可見多個數的公約數不限定只有一個，有同時有好多個的．

多個數的諸公約數中，最大的一個叫做最大公約數．例如上文所說 16、24、32 所有的三個公約數 2、4、8 中，以 8 為最大，所以 8 便是 16、24、32 的最大公約數．又如 9、12、15，其公約數

只有一個 3，所以 3 也便是 9、12、15 的最大公約數．多個數的最大公約數只有一個．

6. 倍數、公倍數、最小公倍數　一數若能給另一數整除的時候，該數叫做另一數的倍數．例如 8 能給 2 整除，所以 8 是 2 的倍數；又 8 也能給 4 整除，所以 8 也是 4 的倍數．一數可以是好多個數的倍數．

一數若能給多個數整除的時候，該數叫做此多個數的公倍數．例如 18 能給 3、6 與 9 整除，所以 18 是 3、6、9 的公倍數．但 36、54、72、……等等之數，都可以給 3、6、9 三數所整除，所以 36、54、72、……等等無窮個數，都是 3、6、9 的公倍數．可見多個數的公倍數可以有無窮個．

多個數的諸公倍數中，最小的一個叫做最小公倍數．例如上文所說 3、6、9 的公倍數 18、36、54、72、……等等中，以 18 爲最小，所以 18 便是 3、6、9 三數的最小公倍數．多個數的最小公倍數只有一個．

7. 整數與分數　表某單位之完全倍數而沒有奇零的數，叫做**整數**．例如 1、3、10、37 等．

將某種單位任意等分爲許多部分，而取其一部或幾部，表這種不完全之單位的數叫**分數**．例如將 1 單位分爲 7 等分，取其一部是七分之一，取其三部是七分之三．以阿拉伯數字記它，則七分之一爲 $\frac{1}{7}$，七分之三爲 $\frac{3}{7}$；其中橫線上面的 1 或 3 叫**分子**，橫線下面的 7 叫**分母**．

8 小數與循環小數　以 10 或 10 的乘冪爲分母的分數，而以便利方法來記出的數，叫做**小數**．所謂便利方法，便是利用小數點"·"來指示位次，使分數可如整數同樣記法．例如

$$\frac{1}{10}=0.1,\qquad \frac{19}{100}=0.19,$$

$$\frac{7}{10}=0.7,\qquad \frac{316}{1000}=0.316,$$

最前一位的 0 表整數位，小數點"·"分割整數與奇零數的界限，小數點後之數順次每位十進，與整數記法一樣．(第一章第 5 節)

整數而帶有小數的叫**帶小數**．例如 36.196 便是．

有一種小數，小數點後的數字依同數字同順序循環連續的，叫做**循環小數**，如 0.111……，0.0101……，0.2857142857142857 14……，等是．

循環小數中順次循環複出的部分叫做**循環節**，普通都在循環節的首一字和末一字上加"·"號來記明，如上文所說的循環小數應記爲　$0.\dot{1}$，$0.\dot{0}\dot{1}$，$0.\dot{2}8571\dot{4}$ 等．

循環小數其實便是以 9 或各位數字都爲 9 之數作分母的分數，例如

$$\frac{1}{9}=0.111\cdots\cdots=0.\dot{1},$$

$$\frac{5}{9}=0.555\cdots\cdots=0.\dot{5},$$

$$\frac{1}{99}=0.0101\cdots\cdots=0.\dot{0}\dot{1},$$

$$\frac{17}{99}=0.1717\cdots\cdots=0.\dot{1}\dot{7}.$$

9. 正數與負數 從較小的數中減去較大的數，則得**負數**. 負數之前附一"－"號以表明之. 例如

$$3-5=-2;\quad 37-99=-62.$$

有了負數，減法中便不必要加被減數比減數大的限制了，算法便格外普遍了. 負數便是根據這個意義而制定的.

如果不是負數，對負數而說，便叫做**正數**. 正數之前附一"＋"號以表明之，例如

$$5-3=+2;\quad 99-37=+62.$$

但正數之前的"＋"號總是省去不寫的.

正數都大於零；負數都小於零；正負數的分界點便是零.

10. 有理數與無理數 行開方計算時，有許多數不能算出確數，如 $\sqrt{2}=0.4142\cdots\cdots$，$\sqrt[3]{4}=1.5874\cdots\cdots$，
都無法用一正確的數來表示，所以叫做**無理數**.

對無理數而說，其能用正確的數目來表示的數，叫做**有理數**. 例如 $1, 25, -3, \frac{1}{2}, -3.125, \sqrt{9}$ 等都是.

11. 實數與虛數 負數開平方，結果便得**虛數**. 例如 $\sqrt{-4}$，$\sqrt{-9}$ 等都是虛數.

對虛數而說，虛數以外的各種數叫做**實數**.

注意 負數、無理數、虛數，在代數學中有詳盡的研究，學者可進習之.

12. 補數與過數 兩個數對於其二數本身之和互為**補數**. 例如 3 與 6 對 9 互為補數；6 與 4 對 10 互為補數；78 與 22 對

100 互爲補數.

對於 9,對於 10,對於 100 的補數,學者可自行列表算出,而且熟記在心,那麼到計算時可以得到種種便利.

一數對於另一數所超過的數叫過數. 例如 102 對 100 的過數爲 2, 5008 對 5000 的過數爲 8.

熟記過數,在計算上也有許多便利之處.

13. 各種因數檢察法　(ㄅ) 2 的因數檢察法: 偶數一定含 2 的因數.

例:　$58=29\times2$, $206=103\times2$.

(ㄆ) 3 的因數檢察法: 各位數字之和能給 3 整除的數,含 3 的因數.

例: 有數 2841, 因 $2+8+4+1=15$, $15\div3=5$,

所以　$2841=947\times3$.

(ㄇ) 4 的因數檢察法:

甲、數的末二位數字都是 0 的,該數含 4 的因數.

例:　$3500=35\times100=35\times25\times4$.

乙、數的末二位數是 4 的倍數的,該數含 4 的因數.

例:　$4716=4700+16=47\times25\times4+4\times4$

$=(47\times25+4)\times4$.

(ㄈ) 5 的因數檢察法: 末一位數字是 0 或 5 的數,一定含 5 的因數.

例:　$370=37\times10=37\times2\times5$;

$$795=790+5=79\times2\times5+5=(79\times2+1)\times5.$$

（ㄎ）9的因數檢察法：各位數字之和能給9整除的數，含9的因數.

例：　有數7839，因 $7+8+3+9=27$，$27\div9=3$，

所以　　　$7839=871\times9$.

（ㄉ）11的因數檢察法：一數的奇位數字之和，與偶位數之和的差，如果是0或是11的倍數的，該數含11的因數.

例：　在4532中，$(4+3)-(5+2)=7-7=0$，

所以　　　$4532=412\times11$.

在71918中，$(7+9+8)-(1+1)=24-2=22=2\times11$，

所以　　　$71918=6538\times11$

（ㄊ）25的因數檢察法：末二位數字都是0或是25的倍數（25、50、75）的數，一定含25的因數.

例：

$$6900=69\times100=69\times4\times25;$$

$$7325\doteq7300+25=73\times4\times25+25$$
$$=(73\times4+1)\times25;$$

$$8450=8400+50=84\times4\times25+2\times25$$
$$=(84\times4+2)\times25;$$

$$6775=6700+75=67\times4\times25+3\times25$$
$$=(67\times4+3)\times25.$$

（ㄋ）用倒除法檢察因數：用倒除法檢察因數，學者如能細心研究，不難觸類旁通，推出檢察一切因數的方法．此處舉出檢

察 7 及 13 的兩例，以見一斑.

甲、7 的因數檢察法：

方法　a.

```
 1 0 9 0 | 6 ……割去末位 6
       1 2 | ………減去 6 的 2 倍
 ─────────
 1 0 7 | 8 ………割去末位 8
     1 6 | …………減去 8 的 2 倍
 ─────────
       9 | 1 …………割去末位 1
       2 | ……………減去 1 的 2 倍
 ─────────
       7 ……………最後餘 7，知全數含 7 的因數.
```

$\therefore\quad 10906 = 1558 \times 7.$

b.

```
 1 0 8 | 5 ………割去末位 5
     1 0 | …………減去 5 的 2 倍
 ─────────
       9 | 8 …………割去末位 8
     1 6 | ……………反減 8 的 2 倍
 ─────────
       7 ……………最後餘 7，知全數含 7 的因數.
```

$\therefore\quad 1085 = 155 \times 7.$

c.

```
 9 4 7 | 1 ………割去末位 1
         2 | ………減去 1 的 2 倍
 ─────────
 9 4 | 5 …………割去末位 5
 1 0 | ……………減去 5 的 2 倍
 ─────────
   8 | 4 ……………割去末位 4
   8 | ………………減去 4 的 2 倍
 ─────────
   0 ………………最後爲 0，知全數含 7 的因數.
```

$\therefore\quad 9471 = 1353 \times 7.$

理由　逐次計算中，割去末位，減去末位的 2 倍，其實就是在第一次減 21 倍，第二次是 210 倍，第三次是 2100 倍．這樣繼續下去，所割減去的顯然都是 7 的倍數．所以最後餘數是 7 或

是 0 時，全數也應是 7 的倍數。卽全數應含 7 的因數。

乙、13 的因數檢察法：

方法 a.

5 9	8	……割去末位 8
3 2		………加上 8 的 4 倍
9	1	………割去末位 1
4		…………加上 1 的 4 倍
1 3		…………最後之和爲1300，是13的倍數，知全數含 13 的因數。

$\therefore\ 598=46\times 13$

b.

2 8 4	7	……割去末位 7
2 8		………加上 7 的 4 倍
3 1	2	………割去末位 2
8		…………加上 2 的 4 倍
3 9		…………最後之和爲3900，是13的倍數，知全數含 13 的因數。

$\therefore\ 2847=219\times 13.$

理由 逐次計算中，割去末位，加上末位的 4 倍，其實就是在第一次加 39 倍，第二次 390 倍，第三次加 3900 倍。這樣繼續下去，所割加上去的顯然都是13的倍數。所以最後之和是13的倍數時，全數也應是 13 的倍數。卽全數應含 13 的因數。

注意 7 以上的因數，都可以用末位割減或割加的方法來檢察。其配合湊成倍數的方法，稍加深思，便可明瞭，茲不多述。

習 題 三

1. 指明下列語句中的數，孰爲個數，孰爲序數.

   a. 茲定於九月九日開十週紀念會.

   b. 行三鞠躬禮：一鞠躬，二鞠躬，三鞠躬.

c. 三馬路三號有三位姓王的先生.

2. 指明下列各語中的數,孰為名數,孰為不名數.

a. 朝三暮四　　d. 一生二,二生三,三生萬物.

b. 童子六七人　　e. 養兵千日,用在一朝.

c. 白髮三千丈　　f. 明月三五夜.

3. 寫出 100 以內的素數.

4. 有一條路,用 3 尺桿、5 尺桿、7 尺桿量,都恰恰量盡,問此路最短有幾尺?

5. 有四邊形地一方,各邊的長為 90 尺、150 尺、210 尺、330 尺,如在周圍種樹,樹間等距離,且四角必種一棵,則至少要種幾棵?

6. 辨明以下各數的種類:

$4.3\dot{6}0\dot{2}$,　$\sqrt[3]{295}$,　32,　-2004,

$\frac{69}{127}$,　$-\sqrt{-21}$,　$\sqrt{8}$,　$\sqrt{-16}$,

7. 填出下面的補數表:

對於100的補數	本數	補數	本	補	本	補	本	補	本	補	本	補	本	補	本	補	本	補	本	補
	1	99	11		21		31		41		51		61		71		81		91	
	2		12		22		32		42		52		62		72		82		92	
	3		13		23		33		43		53		63		73		83		93	
	4		14		24		34		44		54		64		74		84		94	
	5		15		25		35		45		55		65		75		85		95	
	6		16		26		36		46		56		66		76		86		96	
	7		17		27		37		47		57		67		77		87		97	
	8		18		28		38		48		58		68		78		88		98	
	9		19		29		39		49		59		69		79		89		99	
	10		20		30		40		50		60		70		80		90		100	

	對於10的補數									對於9的補數								
本數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
補數																		

8. 檢察下列各數,各有什麼因數:

364,　6375,　5940,　231132,　155600,　1115.

*3723,　*8541.　(有*號的用倒除法檢察)

第四章 加的捷法

1. 加的通式——加法表 兩數相加的公式如：

被加數＋加數＝和.

算草直寫為便.

例: 5120＋3849＋876＋4617＝14462

解

```
  5120
  3849
   876
  4617
 ─────
    22…………個位數字和
   14 …………十位數字和
  23……………百位數字和
 12 ……………千位數字和
 ─────
 14462
```

簡式

```
   5120
   3849
    876
+) 4617
 ──────
  14462
```

兩基數相加，可以編成像下面的表，記熟了很是便利：

								5,5								
						4,4	4,5	4,6	5,6	6,6						
				3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	4,7	5,7	6,7	7,7				
		2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,8	4,8	5,8	6,8	7,8	8,8		
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,9	3,9	4,9	5,9	6,9	7,9	8,9	9,9
二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八

2. 加的別法——不用算草 如能把上面的加法表記得很熟，那麼便可以不用算草，全憑心算求出和來。 茲舉例說明於下：

例: 45328＋99873＋67298＝212499.

計算手續如下:

先逐一心算個位數字：　　8，11，19；　把9寫在"="號後個位上.

次逐一心算十位數字：　1，3，10，19；　把9寫在十位上.

（個位數上併成的10加入計算）

次又逐一心算百位數字：1，4，12，14；　把4寫在百位上.

（十位數上併成的10加入計算）

次又逐一心算千位數字：1，6，15，22：　把2寫在千位上.

（百位數上併成的10加入計算）

次又逐一心算萬位數字：2，6，15，21；　把1寫在萬位上.

（千位數上併成的20加入計算）　　　又把2寫在十萬位上，

手續完成，得和為212499.

注意　此處所寫各次手續，實在只要心中計算，不必寫在簿上；所以簿上只見"45328+99873+67298=212499."的一個算式，別無其他算草，自覺較為簡捷.

3. 聚十相加　許多數相加，就各位數字來看，有可以聚成10的，可先提出來併成10或10的倍數（如20，30等）.

例：7923+3648+2490+6192=20253.

$$\begin{array}{r} 7\,9\,2\,3 \\ 3\,6\,4\,8 \\ 2\,4\,9\,0 \\ 6\,1\,9\,2 \\ \hline 2\,0\,2\,5\,3 \end{array}$$

說明　個位上，先併8與2成10，再將其餘的3寫下.

十位上，先併2，9，9成20，再將個位進上的1與其餘的4相加成5，寫下.

百位上，先併9與1及6與4各成10，再將十位進上的2寫下.

千位上，先併7與3成10，再將其餘的2與6合百位進上的2亦併成10，得20．本位寫0，將2進入萬位而寫下.

手續完成，得和為20253.

4. 分段相加 相加之數很多的時候，可以將此許多數分爲適當的幾段，分段求得其和；再將各段的和總加起來．

例： $15926+32876+1257+318+97582+9254+156255=313468$.

15926	
32876	
1257	……………50059
318	
97582	……………97900
9254	
156255	……………165509
313468	313468

說明 相加之數共有七個，把它分爲三段，第一段三數相加得和 50059，第二段二數相加得和 97900，第三段二數相加得和 165509；再將此三段之和總加起來，得總和 313468.

5. 利用補數相加 許多數相加，如果其中有互爲補數的數，可先行併合相加，則較便捷．

例：
$$\begin{aligned}125+65+78+92+875+22+30&=(125+875)+(78+22)+(65+30)+92\\&=1000+100+100-5+100-8\\&=1300-5-8=1287.\end{aligned}$$

6. 利用完成數相加 許多數相加，如果其中有與 10 之乘冪或 10 之乘冪的倍數相近的數時，可卽用此 10 之乘冪或 10 之乘冪的倍數加入而訂正其結果．

例 1. $6475+993=6475+1000-7=7475-7=7468.$

例 2.
$$\begin{aligned}796+3022&=(800-4)+(3000+22)\\&=800+3000-4+22=3800+22-4\\&=3818.\end{aligned}$$

7. 許多同數相加 許多相同之數相加，便可用乘法計算，不必再行加法．

例 1. $13+13+13+13+13+13=13\times6=78.$

例 2.　$7+8+7+54+54+7+30+54+8=7\times3+8\times2+54\times3+30$

$=21+16+162+30$

$=37+192$ ［分段加］

$=37+200-8=237-8$

$=229.$

8. 許多相近數相加　許多個相近之數相加，可取其中一個適當的數作基本，用相近數的個數來乘它，再訂正其結果.

例 1.　$14+13+14+16+14=14\times5-1+2=70+2-1=71.$

例 2.　$49+51+52+47+49+49+52=50\times7-1+1+2-3-1-1+2$

$=350+1+2+2-1-3-1-1$

$=350+5-6=355-6$

$=349.$

9. 等差各數相加　等差各數相加，可調整其次序，利用等差級數求和的公式來計算其結果.

$$\text{等差級數之和}=\frac{\text{項數(首項}+\text{末項)}}{2}.$$

例 1.　$8+3+6+7+9+5+1+4+2=1+2+3+4+5+6+7+8+9,$

這許多數成等差級數，其首項$=1$，末項$=9$，項數$=9$，

所以　$\text{其和}=\frac{9(1+9)}{2}=45.$

例 2.　$2+17+8+11+5+14=2+5+8+11+14+17,$

這一組數也成等差級數，首項$=2$，末項$=17$，項數$=6$.

所以　$\text{和}=\frac{6(2+17)}{2}=57.$

10. 等比各數相加　等比各數相加，可調整其次序，利用等比級數求和的公式，來計算其結果.

$$\text{等比級數之和}=\frac{\text{末項}\times\text{公比}-\text{首項}}{\text{公比}-1}$$

例 $3+27+9+243+729+81=3+9+27+81+243+729$,

這組數成等比級數，首項=3，末項=729，公比=3.

所以 $$和=\frac{729\times3-3}{3-1}=\frac{2184}{2}=1092.$$

習題四

用捷法計算下列各題:

1. $66+49+83+32+100$.
2. $3+9+8+9+9+8+9$.
3. $29+85+71+367+15+133$.
4. $89992+57634+498$.
5. $7458+5434+9742+8252+1126$.
6. $7012+59994$.
7. $123+121+124+125+119+121$.
8. $739+7867+2431+243$.
9. $21+23+22+20+24$.
10. $2+10+14+4+8+6$.

第五章 減的捷法

1. 減的通式 兩數相減的公式如:

被減數－減數＝差

算草直寫爲便。

例: 3056－1829＝1227

```
  3056
－)1829
  1227
```

說明 個位上: 16－9＝7,(向前位借1)

十位上: 4－2＝2,

百位上: 10－8＝2,(向前位借1)

千位上: 2－1＝1,

2. 利用完成數相減 減數與10之乘冪或10之乘冪的倍數相近時,或與被減數有對應部份相近時,可即取此10之乘冪或10之乘冪的倍數,或提出此對應部份,行減算,而後訂正其結果。

例 1. 48534－29998＝48534－30000＋2＝18534＋2＝18536

例 2. 58273－50276＝58273－50273－3＝ 8000－3＝7997.

3. 還原法 根據減加互爲還原算法的理,在行減算時,可以查看要加一個什麼數到減數裏即成被減數;這查出所要加入的數便是所求的差。

例 1.

```
 24
－9
 15
```

說明 個位上: 9＋5＝14,(加法訣:九、五,十四)進位1.

十位上: (1)＋1＝ 2,(一、一,二)

差: 15.

例 2.

```
  384
－186
  198
```

說明 個位上: 6＋8＝14,(加法訣:八、六,十四)進位1.

十位上:(8＋1)＋9＝18,(九、九、十八),進位1.

百位上:(1＋1)＋1＝ 3,(二、一、三).

差: 198.

注　本法叫做"以加代減法",也叫做"奧地利減法".

4. 提出零數法　如果被減數與99、999、9999、……等數相近時,可從被減數中提出零數,將被減數化爲 99、999、9999、……等數行減算,而後訂正其結果.

例 1.　$3000-1509=1491$

$$\begin{array}{r} 3000=2999+1 \\ -1509 \\ \hline 1490+1=1491 \end{array}$$

例 2.　$10002-3687=6315$

$$\begin{array}{r} 10002=9999+3 \\ -3687 \\ \hline 6312+3=6315 \end{array}$$

例 3.　$110000-47325=62675$

$$\begin{array}{r} 110000=99999+10001 \\ -47325 \\ \hline 52674+10001=62675 \end{array}$$

注意　被減數各位上都是9,那末行減算時決沒有借位的麻煩了.本法的便捷之處就在這一點.

5. 變減作加法　減去一數,可以改成加上該數的補數,而減去該數與補數合成的完成數(比原減數多一位的10之乘冪或10之乘冪的倍數.)

例 1.　$732-468=732-(1000-532)=732+532-1000=1264-1000$
$=264$

簡式

$$\begin{array}{r} 732 \\ +)\ \bar{1}532 \\ \hline 264 \end{array}$$

說明　(一) 468 對 1000 的補數爲 532.

(二) $\bar{1}532$ 即 $-1000+532$ 的簡寫.

(三) 百位上加得結果,進位的 1 恰與前一位的 1 對消.

例 2. $123456-78987=44469.$

78987 對於 100000 的補數爲 21013,

$$\begin{array}{r} 123456 \\ +)\ \overline{1}21013 \\ \hline 44469 \end{array}$$

注意 在普通心理中,加法常覺比減法爲便.

6. 連減變加法 從一數中連減許多數,可以把要減去的數一併加起來,再從被減數中減去所加得的和.

例: $5555-856-234-410=5555-(856+234+410)=5555-1500$
$=4055.$

習題五

用捷法計算下列各題:

1. $68352-60356$.
2. $2356-1998$.
3. $40152-9978$.
4. $10000-396$.
5. $700000-3475$.
6. $11111-1-11-111-1111$.
7. $97827-2901-1404-3687$.

用奧地利減法計算下列各題;

8. $1012-456$.
9. $6024961-3145078$.
10. 用變減作加法計算 $1785-1286$ 及 $301574-85792$.

第六章 加減合演的捷法

1. 同數對消法 同數加減,可直接將此加減的二個數對消,不必計算.

例 1. $125-72+72=125$.

例 2. $367-46+211+46-367=211$.

2. 前推後移法 有許多數合演加減計算時,可斟酌情形,將各數推前移後,以取計算上的便捷,不必拘拘於原來的次序.

例 1. $68+19-50+26-18-5=[68-(50+18)]+[26+19-5]$
$=0+40=40$.

例 2. $856+71-256-94+29=(856-256)+(71+29)-94$
$=600+100-94=600+100-100+6=606$.

注意 例 2 中連用各種捷法.

3. 同位同數對消法 許多數合演加減計算時,可將這許多數上下對齊位數列成草式,每數前面標明加減,查看同位上各數,有加減相異而數碼相同的,可以一一對消,然後計算.同位上各數中幾個數碼相併,與各減數中幾個數碼相併是同數的,也可相消.

例: $7438+2153-4778-1897=$

$$\begin{array}{r} +7438 \\ +2153 \\ -4778 \\ -1897 \\ \hline 2916 \end{array}$$

說明 個位上: 第一數加 8 與第三數減 8 對消, +3 減去 7,借位,差 6,寫下.

十位上: 經個位減算時借去1,併入第三數的 −7 內得 −8,與上 +3, +5 之和 8 對消. 第四數減去 9,借位,差 1.

百位上: 經十位減算時借去 1,與第二數的 1 對消. 其餘 +4 減去 7 及 8,借前位 20,差 9,寫下.

千位上: 經百位減算時借去 2, 與三、四減數合成 7,與第一數加 7 對消.餘第二數加 2,寫下.

差: 2916.

4. 利用正負數相消法　許多數合演加減計算時，可將許多數上下對齊位數列成直式，順次就各位數字分別認其加減數爲正負數而混合計算之.

例：3682−576+4623+1384−2537−309+1534−858=6943

$$
\begin{array}{r}
3682\\
-\ 576\\
+4623\\
+1384\\
-2537\\
-\ 309\\
+1534\\
-\ 858\\
\hline
6943
\end{array}
$$

說明　就各位數字，看加數爲正數，減數爲負數.

個位上：2−6+3+4−7−9+4−8=−17，由左邊十位數借2（即20）以減之，餘3，此3，即所求結果的個位數字.

十位上：8−(借出之 2−7+2+8−3+3−5=4，此4即結果的十位數字.

百位上：6−5+6+3−5−3+5−8=−1，由左邊千位數借1（即10）以減之，餘9．此9，即結果的百位數字.

千位上：3−（借去的）1+4+1−2+1=6，即所求結果的千位數字.

結果：6943.

5. 利用補數換加法　許多數加減合演時，利用第五章§5所述以補數換減作加的方法，可將加減合演的計算一律換作加算來做.

例 1．457234−160806−6328=290100.

160806對於1000000的補數爲839194，

6328對於10000的補數爲3672，

所以

$$
\begin{array}{rr}
 & 457234\\
 & \bar{1}839194\\
+) & \bar{1}3672\\
\hline
 & 290100
\end{array}
$$

例 2．56782+4753+68947−34756−23751=71975

34756 對於 100000 的補數爲 65244,

23751 對於 100000 的補數爲 76249,

所以

$$\begin{array}{rr} & 56782 \\ & 4753 \\ & 68947 \\ & \bar{1}65244 \\ +) & \bar{1}76249 \\ \hline & 71975 \end{array}$$

習題六

用捷法求下列各式的結果:

1. 321－64＋819－321＋64.
2. 64＋28－60＋36－13－27.
3. 52－23＋38－20－15＋8.

用同位同數對消法求下列各題:

4. 287－406－594＋1713－999.
5. 8148＋6259－7873－2396.

用正負數相消法計算下列二題:

6. 8752－5736－2942＋6348－4543.
7. 2951＋8579－7521－813－4529.

用補數換加法計算下列各題:

8. 37029－346－8972－10936.
9. 3874－1094－936＋6072＋2567.
10. 13649＋20816－7965－8492－4037.

第七章　乘的捷法

1. 乘的通式——乘法表　兩數相乘的公式爲:

$$被乘數\times乘數=積.$$

算草以直寫爲便.

乘法其實便是同數相加的捷法,例如

$$4137+4137+4137+4137+4137=4137\times5.$$

此題照乘法的計算,普通應如下式.

例 1.　$4137\times5=20685$

$$\begin{array}{rr}
 & 4137 \\
\times) & 5 \\
\hline
 & 35 \\
 & 15 \\
 & 5 \\
+) & 20 \\
\hline
 & 20685
\end{array}$$

例 2.　$4137\times745=3082065$

$$\begin{array}{rl}
4137 & \\
745 & \\
\hline
20685 & \cdots\cdots\cdots 4137\times5 \\
16548 & \cdots\cdots\cdots 4137\times4 \\
28959 & \cdots\cdots\cdots 4137\times7 \\
\hline
3082065 &
\end{array}$$

兩基數相乘,可以編成如下的表,記熟了,計算起來很是便利.

乘 被 積	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
一	1									
二	2	4								
三	3	6	9							
四	4	8	12	16						
五	5	10	15	20	25					
六	6	12	18	24	30	36				
七	7	14	21	28	35	42	49			
八	8	16	24	32	40	48	56	64		
九	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
十	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2. 乘數被乘數調換法 兩數相乘時，可以將有效數字個數較少的一個數調為乘數，則計算較便.

例： 30600×465＝14229000.

$$\begin{array}{r} 465 \\ 30600 \\ \hline 279000 \\ 13950 \\ \hline 14229000 \end{array}$$

3. 乘數爲 10 之冪或 10 之冪的倍數的乘法 乘數是 10 之乘冪時，只須看乘數是 10 的幾次乘冪，便在被乘數後面加上幾個 0 就得了.乘數是 10 之乘冪的倍數時，只須先看乘數是 10 之乘冪的幾倍，便先以幾乘被乘數；再看乘數是 10 的幾次乘冪的倍數，然後在乘得的積後面加上幾個 0 就得了.

例 1.　$365\times1000=365000$.

例 2.　$365\times3000=1095000$.

$$\begin{array}{r}365\\ 3000\\ \hline 1095000\end{array}$$

4. 乘數近於10之乘冪或10之冪的倍數的乘法（利用完成數相乘）　如果乘數與10的乘冪或10之乘冪的倍數相近時，可以先將此10的乘冪或10之乘冪的倍數去乘被乘數，然後訂正其結果。

例 1.　$48672\times4998=48672\times(5000-2)=48672\times5000-48672\times2$
$=243360000-97344=243262656$.

例 2.　$854\times1008=854\times(1000+8)=854\times1000+854\times8$
$=854000+6832=860832$.

5. 乘數爲5、25、125、625、……等數的乘法　因爲$5=10\div2$，所以乘數爲5時，可以先用10乘，再用2除；同理，因爲$25=100\div4$，所以乘數爲25時，可以先用100乘，再用4除；因爲$125=1000\div8$，所以乘數爲125時，可以先用1000乘，再用8除；因爲$625=10000\div16$，所以乘數爲625時，可以先用10000乘，再用16除；其餘照此類推.

例 1.　$724\times5=724\times10\div2=7240\div2=3620$.

例 2.　$724\times25=724\times100\div4=72400\div4=18100$.

例 3.　$724\times125=724\times1000\div8=724000\div8=90500$.

解 4.　$724\times625=724\times10000\div16=7240000\div4\div4=452500$

註　例4中以16除，可變爲連以4除兩次，說明見下章.

6. 乘數爲75、175、275、375、……等數的乘法　因爲75

$=300\div4$，所以乘數爲75時，可以先用300乘，再用4除；因爲$175=700\div4$，所以乘數爲175時，可以先用700乘，再用4除；因爲$275=1100\div4$，所以乘數爲275時，可以先用1100乘，再用4除；因爲$375=3000\div8$，所以乘數爲375時，可以先用3000乘，再用8除；其餘照此類推。

例 1. $724\times75=724\times300\div4=217200\div4=54300$.

例 2. $724\times175=724\times700\div4=506800\div4=126700$.

例 3. $724\times275=724\times1100\div4=796400\div4=199100$.

例 4. $724\times375=724\times3000\div8=2172000\div8=271500$.

7. 利用因數分解的乘法 如果乘數是複數，可將它分解爲多個單位因數，逐次行單位乘法而求其最後的結果。

例 1. $986\times75=986\times3\times5\times5=2958\times5\times5=14790\times5=73950$.

例 2. $672\times24=672\times3\times8=2016\times8=16128$

或 $=672\times4\times6=2688\times6=16128$.

注意 例1. 亦可用$986\times300\div4$的方法來計算；例2含有兩種算法；可見算法要能活用，並不呆定只有一種方法。

8. 乘數中各位數字有自成倍數者的乘法 乘數中各位數字有自成倍數者，可以利用倍數之理，用捷法計算，玆舉例說明如下。

例 1. $5432\times287=1558984$.

```
       5432
   ×)   287
   ─────────
      38024 ………… 5432×7
    152096 ………… 38024×4=5432×28
   ─────────
    1558984
```

說明 28是7的4倍，所以可以利用第一次計算5432×7所得的38024，用

4 來乘，即得 5432×28 的結果．這樣可以省去一次乘算．

例 2.　$61574\times28735=1769328890$．

$$
\begin{array}{rl}
61574 & \\
\times)\ \underline{28735} & \\
431018 & \cdots\cdots\cdots 61574\times7 \\
2155090 & \cdots\cdots 431018\times5=61574\times35 \\
\underline{1724072} & \cdots\cdots\cdots 431018\times4=61574\times28 \\
1769328890 &
\end{array}
$$

說明　因 28 是 7 的 4 倍，35 是 7 的 5 倍，所以可以如此取巧，省兩次乘算．

9. 利用因數變形的乘法　有時爲使乘算便利起見，可以選取一個適當的數，去乘兩個相乘數中之一數，同時去除其中之另一數．

例 1.　$845\times14=(845\div5)\times(14\times5)=169\times70=11830$

例 2.　$725\times144=(725\times4)\times(144\div4)=2900\times36$

$=(30-1)\times100\times36=(30\times36-36)\times100$

$=(1080-36)\times100=1044\times100=104400$．

注意　例 2 中運用種種捷法，最要留心．

10. 諸數連乘適當結合法　許多數連乘時，可將其中各因數作適當的結合，分別湊成其積爲 10 之乘冪或 10 之乘冪的倍數，然後再把這許多積與其餘各數相乘．

例 1.　$25\times63\times6\times4\times5=63\times(25\times4)\times(6\times5)$

$=63\times100\times30=189000$．

例 2.　$8\times6\times125\times2\times9\times5=(8\times125)\times(2\times5)\times(6\times9)$

$=1000\times10\times54=540000$．

例 3.　$56\times125\times25\times16=(7\times8)\times125\times25\times(4\times4)$

$=7\times(8\times125)\times(25\times4)\times4$

$=7\times1000\times100\times4=7\times4\times1000\times100$

$=2800000$．

注意　例3中先將原式中各相乘數分解因數後，再照上述的方法計算．

11. 乘數首位是1的捷法　乘數首位是1時，可先將被乘數寫下，後附與乘數首位後所有整數位數相符的0；然後再按照普通手續計算其餘各位數字的乘積．

例1.　546×17=9282.

$$
\begin{array}{r}
546 \\
17 \\
\hline
5460 \\
3822 \\
\hline
9282
\end{array}
$$

例2.　923×123=113529

$$
\begin{array}{r}
923 \\
123 \\
\hline
92300 \\
2769 \\
1846 \\
\hline
113529
\end{array}
$$

12. 以11乘的捷法　以11乘任何數時，可直接將被乘數的個位數寫作積的個位數，個位與十位數之和寫作積的十位數，十位數與百位數之和寫作積的百位數，百位數與千位數之和寫作積的千位數，……如此逐位寫下，到最後則以乘數的最高位數寫作積的最高位數．

例　3567×11=39237.

說明　積的個位：寫被乘數的個位數7；

積的十位：被乘數的個位數與十位數之和爲13，寫下3，進1；

積的百位：被乘數的十位數與百位數之和爲11，加下位進上1，成12，寫下2，進1；

積的千位：被乘數的百位數與千位數之和爲 8，加下位進上 1，成 9，寫下．

積的萬位：被乘數的最高位數字爲 3，卽寫下爲積的最高位數字．

積：　39237．

13. 有分數的乘法　乘數中如果有分數，可化爲以分子乘以分母除的方法來計算．

例 1．　$36\times\frac{2}{3}=36\times2\div3=36\div3\times2=12\times2=24.$

例 2．　$628\times2\frac{1}{2}=628\times\frac{5}{2}=628\times\frac{10}{4}=6280\div4=1570.$

注意　例 1 中先以 2 乘後以 3 除調成先以 3 除後以 2 乘，是使被乘數略小，計算較便．

14. 乘數爲 $33\frac{1}{3}$、$87\frac{1}{2}$、……等數的乘法　因爲 $33\frac{1}{3}=\frac{100}{3}$，所以乘數爲 $33\frac{1}{3}$ 時，可以 100 乘，再以 3 除．又因爲 $87\frac{1}{2}=100-12\frac{1}{2}=100-\frac{25}{2}=100-\frac{100}{8}$，所以乘數爲 $87\frac{1}{2}$ 時，可以改用 $\left(100-\frac{100}{8}\right)$ 來乘．如此計算較爲便捷．

例 1．　$726\times33\frac{1}{3}=726\times\frac{100}{3}=726\times100\div3=24200.$

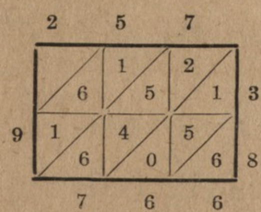
例 2．　$736\times87\frac{1}{2}=736\times\left(100-\frac{100}{8}\right)=736\times100-736\times\frac{100}{8}$

$=73600-9200=64400.$

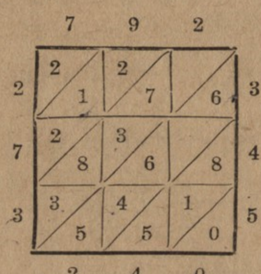
15. 鋪地錦法　橫邊格數照被乘數位數，縱邊格數照乘數位數，畫成方格．橫邊頂上寫被乘數，右面縱邊右旁寫乘數，都是每一位數佔一格．再畫上同一方向的對角線．把兩相乘數的各位數字交錯相乘，乘積寫在兩數字行列交錯的格內；十位數字寫在對

角線之上，個位數字寫在對角線之下．照各對角線的方向加起各數字，即得乘積．

例 1. $257\times38=9766.$



例 2. $792\times345=273240.$



註 本法為我國古代的筆算乘法，雖不見得比普通乘法來得簡捷，但為比較研究及引起興趣起見，也敍錄在此．

16. 利用二數平方差的乘法 如果被乘數與乘數可以化成$(a+b)(a-b)$的形式的，那麼可以根據$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$的理由，就從a^2-b^2求出乘積來．

例 1. $63\times57=(60+3)(60-3)=60^2-3^2=3600-9=3591.$

例 2. $92\times108=(100-8)\times(100+8)=100^2-8^2=10000-64$
$=9936.$

習題七

用捷法計算下列各題:

1. 5070000×813.
2. 37×23456.
3. 489×1000.
4. 5700×80000.
5. 500×298.
6. 486×25.
7. 137×5.
8. 753×125.
9. 159×75.
10. 1234×175.
11. $216\times33\frac{1}{3}$.
12. $192\times16\frac{2}{3}$,
13. 85×35.
14. 85×55.
15. 386×59998.
16. 998×79。
17. 4567×1003.
18. 10003×9997.
19. $56\times25\times5\times4\times2$.
20. $125\times96\times25\times2\times16$.
21. 8723×11.
22. 725×147.
23. 31254×32816.
24. 76×516.
25. 72×68.
26. 58×42.
27. 7383×15.
28. 123×321.

用鋪地錦法計算下題:

29. 6972×854.
30. 567^2.

第八章　除的捷法

1. 除的通式　兩數相除的公式爲:

$$被除數 \div 除數 = 商.$$

算草以直寫爲便.

如果遇到除不盡的除法,那便成爲

$$被除數 \div 除數 = 整數商 + \frac{餘數}{除數}$$

例 1.　$1562 \div 11 = 142$

$$\begin{array}{r|l} & 142 \\ \hline 11) & 1562 \\ & 11 \\ \hline & 46 \\ & 44 \\ \hline & 22 \\ & 22 \\ \hline\hline \end{array}$$

例 2.　$87342 \div 412 = 211\frac{410}{412}$

$$\begin{array}{r|l} & 211 \\ \hline 412) & 87342 \\ & 824 \\ \hline & 494 \\ & 412 \\ \hline & 822 \\ & 412 \\ \hline & 410 \end{array}$$

2. 意大利除法　在除的運算步驟中,每次的商與除數乘得之積並不記下,用心算把它和被除數相減後,祇將其剩餘之數記下.這種除法,叫做意大利除法.

例 1　$7684 \div 34 = 226.$

$$\begin{array}{r|l} & 226 \\ \hline 34) & 7684 \\ \hline & 88 \\ \hline & 204 \\ \hline & 0 \end{array}$$

說明　第一次除：商2,與被除數之積爲68,從76減68,餘8,將8記下,移下下位8,成88.

第二次除：商2,與被除數之積爲68,從88減68,餘20,記下20,移下下位4,成204.

第三次除：商6,與被除數之積爲204,從被除數減去,恰盡.

例 2.　$112458 \div 263 = 427\frac{157}{263}$.

$$\begin{array}{r|l} & 427 \\ \hline 263) & 112458 \\ \hline & 725 \\ \hline & 1998 \\ \hline & 157 \end{array}$$

3. 除數爲10之冪或10之冪的倍數的除法　照10的冪數把被除數的小數點移前相當位數,便得商數.

例 1.　$98200000 \div 10^4 = 9820$.

例 2.　$7530000 \div 3000 = (753 \div 3) \times 10^4 \div 10^3 = 2510$.

4. 利用因數分解的除法　除數可以分解因數,就將除數分解爲幾個因數,然後分步來除.

例 1.　$4290 \div 165 = 4290 \div (3 \times 5 \times 11) = 4290 \div 3 \div 5 \div 11$
$= 1430 \div 5 \div 11 = 286 \div 11 = 26$.

例 2.　$92610000 \div 315000 = 92610 \div 315 = 92610 \div (9 \times 7 \times 5)$
$= 92610 \div 9 \div 7 \div 5 = 10290 \div 7 \div 5$
$= 1470 \div 5 = 294$.

例 3.　$547167 \div 3360 = 162$……餘2847.

$3360 = 10 \times 6 \times 7 \times 8$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 5\ 4\ 7\ 1\ 6\ 7 \\ \hline 6 & 5\ 4\ 7\ 1\ 6 \cdots\cdots \text{餘}7 \\ \hline 7 & 9\ 1\ 1\ 9 \cdots\cdots 2 \\ \hline 8 & 1\ 3\ 0\ 2 \cdots\cdots 5 \\ \hline & 1\ 6\ 2 \cdots\cdots 6 \end{array}$$

餘數 $= 6 \times 7 \times 6 \times 10 + 5 \times 6 \times 10 + 2 \times 10 + 7$
$= 2520 + 300 + 20 + 7$
$= 2847$

例 4.　319858÷800＝399…………餘 658

$$\begin{array}{r|l} 100 & 319858 \\ \hline 8 & 3198\cdots\cdots58 \\ \hline & 399\cdots\cdots\ 6 \end{array}$$

簡式　$$\begin{array}{r|l} 8'00 & 3198'58 \\ \hline & 399 \\ \hline & \text{餘}\cdots\cdots658 \end{array}$$

餘數＝6×100＋58＝658.

5. 利用除數變形的除法　(一)除數是 10 之冪的因數，那麼可以用與此除數配成 10 之冪的那個因數來乘，而以這 10 之冪來除.

例 1.　865÷5＝865÷(10÷2)＝865×2÷10＝1730÷10＝173.

例 2.　3675÷25＝3675÷(100÷4)＝3675×4÷100
＝14700÷100＝147.

例 3.　5875÷125＝5875÷(1000÷8)＝5875×8÷1000
＝47000÷1000＝47.

例 4.　92550÷75＝92550÷(100÷4×3)＝92550×4÷3÷100
＝370200÷3÷100＝123400÷100＝1234.

(二)有時爲便利起見，可把被除數化做適當的幾個數之和或差來計算.

例 1.　50983÷17＝(51000－17)÷17＝51000÷17－17÷17
＝3000－1＝2999.

例 2.　462277÷23＝(460000＋2300－23)÷23
＝460000÷23＋2300÷23－23÷23
＝20000＋100－1＝20099.

6. 除數與被除數同時變形的除法　(一)有時除數與被除數用同一之數來乘，計算起來可以較便.

例 1.　1575÷225＝(1575×4)÷(225×4)＝6300÷900＝7.

例 2.　872946÷412＝2118.80097.

```
4 | 412    872946
103 ) 218236.5 ( 2118.80097
      122
       193
        906
         825
          1000
            730
              9
```

7. 含有分數的除法　除數與被除數中含有分數的，可用適當的數同乘除數與被除數，化分數爲整數，然後計算．

例 1.　$12240 \div 113\frac{1}{3} = 108.$

```
13 1/3 ) 12240
     3          3
  340 ) 36720 ( 108
         2720
            0
```

8. 連除的捷法　(一)多個除數連除一個被除數時，有時可以把除數的全部或一部組合成適當的乘積而後行除算，較爲便利．

例 1.　$3600 \div 4 \div 5 \div 6 = 3600 \div (4 \times 5 \times 6) = 3600 \div 120 = 30.$

例 2.　$72144 \div 2 \div 4 \div 3 \div 9 = 72144 \div (2 \times 4 \times 9) \div 3$

$= 72144 \div 72 \div 3 = 1002 \div 3 = 334$

(二)多個數連除一個被除數時，有時可以先將原有之除數分解因數；再交換其次序而組成適當的乘積，然後行除算．

例 1.　$545400 \div 225 \div 24 = 545400 \div 25 \div 9 \div 4 \div 6$

$= 545400 \div (25 \times 4) \div (9 \times 6)$

$= 545400 \div 100 \div 54 = 101.$

例 2.　$1250625\div75\div15=1250625\div25\div3\div3\div5=1250625\div125\div9$

$$=10005\div9=1111\frac{6}{9}=1111\frac{2}{3}.$$

9. 乘除合算的捷法　(一)一數被同一之數乘而再除，可即將此除數與乘數對消.

例　　$372\div47\times47=372.$

(二)多個數相乘除時，可採取適宜的次序先行調正，然後再算.

例 1.　$125\times25\times23\times4\times8=(125\times8)\times(25\times4)\times23$

$$=1000\times100\times23=2300000.$$

例 2.　$45\times12\div5\div18\times6=(45\div5)\times(12\times6\div18)$

$$=9\times4=36.$$

(三)多個數相乘除，可以把所有的乘數用乘號組合在一起，又把所有的除數也用乘號組合在一起，就這一乘一除的兩個組合中揀出相同的因數先行約去，然後計算.

例 1.　$4\times99\div22\times101\div303=(4\times99\times101)\div(22\times303)$

$$=(4\times9\times\cancel{11}\times\cancel{101})\div(2\times3\times\cancel{11}\times\cancel{101})$$

$$=(4\times9)\div(2\times3)=36\div6=6.$$

也可以就這一乘一除的兩個組合中分別對照約去因數，再行計算.

例 2.　$4\times99\div22\times101\div303=(\overset{2}{\cancel{4}}\times\overset{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{99}}\times\cancel{101})\div(\overset{\cancel{11}}{\cancel{22}}\times\overset{\cancel{101}}{\cancel{303}})$

$$=2\times3=6$$

(四)求許多數各用同一之數乘或除的和或差，可先求這許多數的和或差後，再用所要乘或除的那個數去乘或除.

例 1. $49\times24-18\times24+7\times24=(49-18+7)\times24=38\times24=912.$

2. $840\div24+696\div24-408\div24=(840+696-408)\div24$

$=1128\div24=47.$

10. 求許多相近數的平均數法 許多數的前幾位都相同，只有末尾的一二位不同，那末求其平均數時，只須求此不同之一二位的平均數，附添到那相同的前幾位數之後作爲末尾數，便得要求的平均數。

例 1.

```
 7 1 3 7
 7 1 3 2
 7 1 3 3
 7 1 3 5
 7 1 3 2
 7 1 3 5
---------
 6 | 2 4
-------
       4
```

只求各數末位的平均數。
所求的平均數爲 7134。

例 2.

```
 9 5 7 6
 9 5 6 5
 9 5 4 3
 9 5 6 5
 9 5 6 7
---------
 5|3 1 6
---------
   6 3.2
```

只求各數末二位的平均數。
所求的平均數爲 9563.2

習題八

用捷法求下列各題的結果：

1. $763000\div100.$
2. $3600000\div10000.$
3. $5\times10^{12}\div10^{7}.$
4. $19200\div4800.$
5. $5000\div25.$
6. $17472\div224.$
7. $44100\div315.$
8. $789235\div450.$
9. $1357904\div729.$
10. $2275\div6\frac{1}{4}.$
11. $3250\div16\frac{2}{3}.$
12. $944653\div47.$

用意大利除法求下列各題的結果、

13. $793825 \div 139$.

14. $1039527 \div 306$.

15. $3194586 \div 420$.

16. $6783755 \div 1892$.

用捷法求下列各題的結果:

17. $5520 \div 3 \div 4 \div 5$.

18. $81000 \div 25 \div 9 \div 4$.

19. $81000 \div 8 \div 27 \div 125$.

20. $345400 \div 225 \div 24$.

21. $52 \times 6 \times 125 \div 13 \div 25$.

22. $66 \times 91 \div 14 \times 72 \div 143 \times 31 \div 93$.

23. $11 \times 34 \times 32 \times 75 \div 6 \div 22 \div 17 \div 25$.

24. $35 \times 102 - 35 \times 79 + 35 \times 15 + 35 \times 24$.

25. $46 \times 52 + 200 \times 52 - 52 - 73 \times 52$.

26. $4794 \div 47 + 705 \div 47 - 2021 \div 47 - 611 \div 47$.

27. $75 \times 42 \div 35 \times 59 \times 4 \div 59$.

28. 求下列諸數的平均數:

4261, 4262, 4259, 4260, 4264, 4263, 4258.

第九章　省略算法

1 近似值　凡近於眞值的數値，叫做該眞值的近似值．譬如 1.4141 便是$\sqrt{2}$的近似值，3.1416 便是圓周率的近似值．又如 35.796 或 35.797 都是 35.79645 的近似值．其中 35.796 是把原數的小數第四位及其以後的小數棄去而得的，這叫做**捨棄法**；35.797 是把割去的 45 收作 1，加入未割去的小數末位 6 裏而得的，這叫做**收入法**．

2 近似値的用處　近似値的用處很大，我們實際上所用的數値，大半是近似値．一切名數的計算，在理論上可以求到絕對正確的答數，可是如果答數太長，或竟是無限小數，實際上便不需用；或因器械的限制，度量不出那麼精微的數量，那就要用到近似値了．

譬如每元可買豬肉三斤半，那麼每斤値1元÷3.5＝0.285714元．這是絕對正確的答數，可是實際上我們所用的最低貨幣單位只是"分"，所以最小祇要求到釐便行．所以每斤肉價只要說是 0.285 元或 0.286 元就行了．

又如量兩點的距離，第一次量得421.5尺，自以爲很準確了，可是如果再去量一下，就說不定會多上一分半分或少上一分半分．這是受到量尺的限制，是無可奈何的，所以也只好採用近似値了．　這種近似値，大概總是把歷次量得的數値平均起來而求得的．

3. 誤差與四捨五入法 近似值與眞值的差數，叫做**誤差**．譬如35.796與35.797對於35.79645的誤差便是0.00045與0.00055．既是近似值，那自然愈近眞值愈好；這就是說它與眞值的誤差愈小愈好；所以誤差應該有一個限度．這個限度叫做**誤差的限度**．照前面所說捨棄與收入兩法所得的近似值，其誤差總比所得數末位上的1小．所以這兩法中誤差的界限，便是末位上的1．比如上例，誤差的界限便是0.001．

這種誤差的界限還嫌太大；並且究竟用捨棄法或收入法，取捨之間，也很費躊躇．普通所用的方法，叫做**四捨五入法**．就是截去之數的第一位數字如果是4或比4小的數(如1、2、3、4)，便捨去不取；如果是5或比5大的數(如5、6、7、8、9)，便收作1，加在沒有截去的末一位數字中．這樣，取捨之間既有了一定的辦法，並且不論其捨棄或收入，其誤差決不會超過所得數末位上的$\frac{1}{2}$．這就是說：誤差的界限縮小到祇及上述兩法所得近似值的一半．譬如就27.6847一數而論，取兩位小數是27.68，因爲割去部份的第一位數是4，便徑行捨棄了；其誤差的界限是0.005．又如19.579取二位小數是19.58，因爲割去部份的第一位數是9，所以便收作1而加入留取之數的末一位中；其誤差的界限也是0.005．所以普通取近似值時，多用這種四捨五入法．

4. 絕對誤差與相關誤差 上面所說的誤差，叫做**絕對誤差**．絕對誤差對於眞值的比率，叫做**相關誤差**．它們的關係爲

相關誤差＝絕對誤差÷眞值

從這個關係，可知相關誤差愈小，其近似值也愈近眞值．所以要知道一數的準確度，除了絕對誤差之外，最要緊的是要知道其相關誤差．

5. 有效數字　一數的準確度，既是祇要看它相關誤差的大小，可見取近似值時，所割去的部份不一定是小數，而只是與眞值之比爲很小的數．譬如取 103746 與 0.0103746 二數的近似值 103700 與 0.01037 時，其割去之數雖然相差千萬倍，一個是整數 46，一個是小數 0.0000046，可是它們的相關誤差，卻同是 $\frac{46}{103746}$．在這裏，103700 和 0.01037 都是割取了四位有效數字．普通講九基數對於 0 稱爲有效數字，然而此處卻是除了一數首尾兩頭的 0 外，夾在數中的 0 也作爲有效數字．在實際的問題中，取一數的近似值時，既要它的相關誤差小，又要它能切合實用，普通多割取三位到五位的有效數字．如前例，如果割取三位有效數字，便得 104000 與 0.0104 的兩個近似值．

6. 省略算　拿許多很長的小數來加、減、乘、除，所得的結果一定也很長．可是實際上名數的計算，很少要算到小數三位以下的．這很長的原數，雖說是絕對的準確，卻沒有什麼用，所以祇要取它的近似值便夠了．這樣，如果計算時仍用它的全部數值，那就有一部份心力時間都是枉費的，所以便用得到**省略算法**了．如果用各數的近似值來計算，那末結果的末一位數不能不大有出入，所以省略算應另有一種特定的法則．

7. 省略加法　許多位數很小的數相加，先照比所需要的小

數位數多二位——截取下來，捨棄其餘各位小數；然後再按常法求和，而把結果的末二位數字用四捨五入法併入前位，便得這許多數之和的近似值．如果加數在十個以上，可再多截取一位，然後照上法計算．

例 1. 求 3.214956+1.9574632+12.0821507+0.73489+5.367428 的和到小數第三位．

(普通加法)

3.214	956
1.957	4632
12.082	1507
0.734	89
5.367	428
23.356	8879

(近似值相加)

3.215
1.957
12.082
0.735
5.367
23.356

(省略加法)

3.214	95
1.957	46
12.082	15
0.734	89
5.367	42
23.356	87

答數是 23.357.

注意 從上例，可見三法中以省略加法最簡便而又準確．

例 2. 求 $0.\dot{3}1\dot{5}+0.278\dot{0}\dot{3}+0.4\dot{6}\dot{7}+1.06\dot{4}1\dot{2}+0.\dot{8}$ 的和到小數七位．

(1)

	0.3153153	1
	0.2780380	3
	0.4676767	6
	1.0641264	1
+)	0.8888888	8
	3.0140453	9

(2)

0.3153153	15
0.2780380	38
0.4676767	67
1.0641264	12
0.8888888	88
3.0140454	20

注意 照(1)的演算，因五數相加，其最大進位數可以為 4，4 與所得小數第八位上之數 9 相併為 13，可以影響到前面的第七位．所以應照 (2) 的算法，各數再多取一位．

8. 省略減法 兩個位數很長的小數相減，先照比所需要的小數位數多一位——截取下來，捨棄其餘各位小數；然後照常法

求差，而把得數的末一位數用四捨五入法，併入前位，便得這二數之差的近似值.

例 1. 求 125.096437－89.149625 到小數第三位

（普通減法）

125.096	437
89.149	625
35.946	812

（省略減法）

125.096	4
89.149	6
38.946	8

答數是 38.947.

例 2. 求 $1.6\dot{7}\dot{3}-0.2587396$ 到小數第三位.

	1.673	7373
－)	0.258	7396
	1.414	9977

又法

1.673	7
0.258	7
1.415	0

答數是 1.415.

注意 又法直接得 1.415，而第一法中答數小數第四位四捨五入後亦得 1.415，故兩法實殊途同歸.

9. 省略乘法 小數相乘時，定積的小數點位置之法，在省略算中不能應用，因爲省略算乘法中，所得積的小數位是不完全的，所以省略算乘法的定小數位應另定方法.

用一數去乘他數，再用這同一數去除所得的積，結果仍得未乘前的原數，所以 $81.09\times57.23=(81.09\times57.23)\times10\div10$

$$=(81.09\times10)\times(57.23\div10)$$

或 $=(81.09\div10)\times(57.23\times10)$

又因用 10 或 10 的冪去乘或除，祇要把這數的小數點移右或移左，所以上式又可寫做 $81.09\times57.23=810.9\times5.723$

$$=8.109\times572.3.$$

又二數相乘，如果其中有一個數是整數祇有一位的，那就容易看出積的整數有幾位，不必管其小數位．譬如 497.56318×6，一望而知其積的整數位數是四位（因 $400\times6=2400$）．又如 39.5047×2.63，一望而知其整數是三位（因 $39\times2.6=101.4$）．

有了上面的幾個理由，就可以得省略算乘法的步驟如下：

（一）兩個小數位較多的小數相乘，可取有效數字較少的個數作乘數；把二數的小數點依相反方向，同樣移過若干位，使乘數的整數部份祇有一位．

（二）寫下被乘數，截取其比所需要的小數位多一位的小數．把乘數各位數字的次序依次顛倒了寫在被乘數下面，使其末一位對準已經截取好位數的被乘數之末一位．

（三）用乘數的各位數，依次從上面相當位起，與被乘數逐位相乘；並將它與相當位右一位的乘積，用四捨五入法併入前位．各部份積的末位數，都須與乘數的個位數同列在一行．

（四）照省略加法將各部份積相加，便得所求積的近似值．

例 1．求 437.21 與 0.24910756 的乘積到小數第三位．

取 437.21 爲乘數，則得

$$0.24910756\times437.21=24.910756\times4.3721.$$

（普通乘法）

2 4.9 1 0 7 5 6	
4.3 7 2 1	
2	4 9 1 0 7 5 6
4 9	8 2 1 5 1 2
1 7 4 3	7 5 2 9 2
7 4 7 3	2 2 6 8
9 9 6 4 3	0 2 4
1 0 8.9 1 2	3 1 6 3 0 7 6

（乘數位次倒轉乘）

2 4.9 1 0 7 5 6	
1 2 7 3 4	
9 9 6 4 3	0 2 4
7 4 7 3	2 2 6 8
1 7 4 3	7 5 2 9 2
4 9	8 2 1 5 1 2
2	4 9 1 0 7 5 6
1 0 8.9 1 2	3 1 6 3 0 7 6

（省略乘法）

24910	756	……截取的小數位數，比所要的多一位
1273	4	……把乘數的數字依次倒轉來寫
99.643	0	……249107×4+2（因 5×4=20，進 2）
7473	2	……24910×3+2（因 7×3=21，進 2）
1743	7	……2491×7+0（因 0×7=0，沒有進）
49	8	……249×2+0（因 1×2=2，沒有進）
2	5	……24×1+1（因 9×1=9，進 1）
108.912	2	

答數是 108.912.

例 2. 求 67.540349×0.0043275641 的積到小數第五位.

$$67.540349\times0.0043275641=0.067540349\times4.3275641.$$

$$<0.07\times5=0.35.$$

0.06754	0349	
×) 146572	34	
27016	14	……675403×4+2（4×4 的進位數）
2026	21	……67540 ×3+1（3×3 的進位數）
135	08	……6754 ×2
47	28	……675 ×7+3（4×7 的進位數）
3	38	……67 ×5+3（5×5 的進位數）
	40	……6 ×6+4（7×6 的進位數）
	2	……0 ×4+2（6×4 的進位數）
0.29228	51	

答數是 0.29229.

10. 省略除法 普通的除法，如果除數是純整數時，那麼祇要看被除數用到那一位，便知道商的位置．譬如 39.5268÷4，因爲 39÷4=9 餘 3，所以商 9 應記在被除數的個位上面．同樣，帶小數的除法，祇要除數的整數部份是一位的，也可以利用這點，去定商的位置．譬如若有 35.194÷2.734，因 3÷2=1 餘 1，所以商 1 應記在被除數的十位上面．其餘各位的商照此類推．

又如果商祇要求到某位爲止，那麼被除數也祇要截取到某位爲止．卽如上面所舉的 39.5268÷4，如果祇要求到第二位小數，那麼除數也祇要截取到第二位小數，就是 39.52÷4，結果與原式一樣是 9.88．如果是 395.268÷40，要求到小數第二位．那麼把被除數截取二位小數，得 395.26÷40，結果也是 9.88．不過被除數所被截取的位數卻比前一種除法多．從此可見把除數化成整數部份祇有一位的時候，被除數被截取的位數少，而結果卻是和除數的整數部份不是一位時同．所以，在省略除法中，把除數化成祇有一位整數的帶小數來計算，最爲便利．

把除數化成祇有一位整數的帶小數，可把被除數與除數的小數點依相同方向同樣移動過若干位便得．例如

$47.35 \div 29.1 = 4.735 \div 2.91$； $7.62 \div 0.81 = 76.2 \div 8.1$

根據了以上所述的理由，得省略除法的步驟如下：

(一)兩個小數位較多的小數相除，可先將此二數的小數點依同方向移左或移右若干位，使除數的整數部份只有一位．

(二)從被除數裏截取比所求商的小數位多一位的小數位；

同時也截取除數中的小數位，以足夠初步施除爲度，然後相除.

(三)每除得一位商數，便把那次除數的末位截去，做下次的除數；這樣，各次減數的末位，便都在一直線上；不過每次截去的與商的乘積，如果有進位數時，仍須加到那次的除數與商的乘積中去，拿來做減數.

(四)照這樣逐次除下，直到所要的各位都求出爲止，便得所求商的近似值.

例 1. 求 4398.5217÷951.8742 的商到小數第二位.

$$4398.5217\div951.8742=43.98521\div9.518742.$$

(普通除法)

	4. 6	
9.518742)	43.985	217
	38 074	968
	5 910	2490
	5 711	2452
	199	00380
	190	37484
	8	62896

(省略除法)

	4.62	
9.518 | 742)	43.985	217
9518×4+3=	38 075	
(因 7×4=28，所以進 3)	5 910	
951×6+5=	5 711	
(因 8×6=48，所以進 5)	199	
95×2+0=	190	
(因 1×2=2，所以沒有進)	9	

答數都是 4.62.

例 2. 求 57.8564327÷8.345 的商到小數第五位.

（省略除法）

```
                  6.93306  |
8.3|4|5 ) 57.85643  | 27
          50 070    |
          --------------
           7 7864   |
           7 5105   |
          --------------
             27593  |
             25035  |
          --------------
              2558  | 2
              2503  | 5
          --------------
                54  | 7
                50  | 0
          --------------
                 4  | 7
```

（意大利法省略算除法）

```
                6.93306  |
8.345 ) 57.85643  | 27
        ----------------
         7 7864   |
        ----------------
           27593  |
        ----------------
            2558  | 2
        ----------------
              54  | 7
        ----------------
               4  | 7
```

答數是 6.93306.

習　題　九

求下列各題的和到小數第三位：

1. $42.138569+7.74321+18.914357+123.495$.
2. $3.\dot{4}7\dot{5}+19.32486+7.2\dot{6}+0.9415273$.
3. $2.7453274+1.267531+9.\dot{3}\dot{7}+17.5428$.
4. $0.\dot{8}\dot{6}+0.9\dot{2}+0.\dot{5}+0.\dot{3}40\dot{7}+0.8\dot{9}\dot{3}+0.64\dot{2}\dot{5}+0.\dot{3}96\dot{6}$

求下列各題的差到小數第三位：

5. $5.2194187-4.8573659$.

6. $13.964872-7.\dot{2}\dot{3}$.

7. $19.0\dot{8}\dot{5}-12.\dot{9}4\dot{7}$.

8. $96.13795208-21.\dot{6}5\dot{9}-8.7\dot{2}\dot{5}-39.\dot{3}\dot{1}-18.\dot{6}$

求下列各題的積到小數第三位:

9. 8.29743×5.4716.

10. 17.8293×84.5728.

11. 148.356×0.9346.

12. $31.\dot{2}5\dot{7}\times20.9514$.

求下列各題的商到小數第三位:

13. $39.5140623\div5.8917$.

14. $9159.071\div205.\dot{6}\dot{1}$.

15. $6.1745092\div0.97\dot{2}\dot{1}$.

16. $4.\dot{7}20\dot{3}\div0.0\dot{5}\dot{7}$.

17. 二省略數 2.8014263 及 0.127684 的積與商各可算到小數幾位,而使結果的末位準確?

18. 地 74.258 方值 1693.456 元,問每方值多少?算到分爲止.

19. 布每尺價 0.372 元,問 5.67 尺布值幾元幾角?

20. 水銀的比重爲13.6, 問 21.45 立方公分水銀重多少? 計算結果,使末位準確.

第十章 驗算法

1. **重算法** 依照初步計算的方法重做一次，看與第一次所做出的是否相同.如果不同,便有錯誤,應再精密計算.

我國的珠算,都是用重算法來查究有無錯誤的.

2. **還原法** 用還原法反求計算時的原數，來查究計算有無錯誤的方法,叫做還原法. 加法和減法互爲還原,乘法和除法也互爲還原,所以加法可以用減法還原驗算,減法可以用加法還原驗算,乘法可以用除法還原驗算,除法可以用乘法還原驗算.

例 1. $498+239=737$

(驗算) $737-239=498$，$737-498=239$，所以結果正確.

例 2. $498-239=259$.

(驗算) $259+239=498$，所以結果正確.

例 3. $1234\times321=396114$.

(驗算) $396114\div321=1234$，$396114\div1234=321$，所以結果正確.

例 4. $5975\div25=239$.

(驗算) $239\times25=5975$，所以結果正確.

3. **換序法** 行加法的時候,通常總是自上向下加的,驗算時便可以從下向上加去.看結果是否與初次所加的結果相同.如果兩次的結果相同,就可以證明計算正確.

例

$$\begin{array}{r} 5263 \\ 4058 \\ 3970 \\ 8991 \\ \hline 22282 \end{array}$$

（驗算）

$$\begin{array}{r} 8991 \\ 3970 \\ 4058 \\ 5263 \\ \hline 22282 \end{array}$$

驗算時倒轉各數次序相加，其結果與所算的結果相同，所以知道所求得的和是不錯的.

4. 9餘驗算法 用9去除一數，得商而餘下的數叫9餘數. 又將該數的各位數字相加；得出和後，再將其和的各數字相加；這樣逐步加去，到最後的和是一個一位數了，這最後的和也叫9餘數. 一個數用這兩種方法所得出的9餘數是一樣的.

這兩種結果所以會相同，是有道理的. 因為

9去除10、100、1000……………等所餘的是1；

9去除20、200、2000……………等所餘的是2；

9去除30、300、3000……………等所餘的是3；

照此類推，9去除無論幾十幾百幾千……等所餘的數就

根據了這個理由，我們要求一個數的9餘數，就不必去除，祇要把該數的各位數字加起來便行. 例如124吧，因為124＝100＋20＋4，照上面所說的理由，可知

100的9餘數是1

20的9餘數是2

+) 4的9餘數是4

所以124的9餘數是7

如果實行用9來除，那末 9|124

13…………餘7

所得9餘數不是也是7嗎?

假使這些各部份的9餘數加起來還是比9大，那末還須繼續照上法計算.直到加出來的9餘數比9小時,才是原數的9餘數.即以297465一數為例,因$2+9+7+4+6+5=33, 3+3=6$,所以它的9餘數是6.

其實,我們不必這樣麻煩.如果在第一次加的時候，把滿9的數即行棄去不管，不是一樣的嗎?即如297465中的9與$2+7=9$，即行棄去,不就得6了嗎?這就是該數的9餘數了.——

例: 求43576的9餘數.

$$\because\begin{cases}43576=40000+3000+500+70+6\\ 40000=4(9999+1)=4\times 9999+4\\ 3000=3(999+1)=3\times 999+3\\ 500=5(99+1)=5\times 99+5\\ 70=7(9+1)=7\times 9+7\\ 6=6\end{cases}$$

$$43576=9\text{的倍數}+(4+3+5+7+6)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 43576\text{的9餘數}&=(4+3+5+7+6)\text{的9餘數}\\ &=25\text{的9餘數}\\ &=(2+5)\text{的9餘數}\\ &=7.\end{aligned}$$

根據上述的理由,可得關於9餘數的定理如:

許多個數之和的9餘數,等於各該數9餘數之和的9餘數.許多個數之積的9餘數,等於各該數9餘數之積的9餘數.

利用這條9餘數的定理,可以驗算加、減、乘、除四種算法的正誤.其法如下:

(一)先求出各數的9餘數.

(二)把這些9餘數照原定的關係行加、減、乘或除的計算，而分別求得其和、差、積或商.

(三)再求所得之和、差、積或商的9餘數.

(四)把這樣所得的9餘數，與用普通方法所得之和、差、積或商的9餘數相比較.如果是相同的，便是結果正確；如果不同，便是有誤.

例 1.　加法:　　驗 $3436+5714=9150$.

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}
3436\cdots\cdots\cdots\cdots 7\\
+\\
5714\cdots\cdots\cdots\cdots 8
\end{array}\right\} 7+8=15\cdots\cdots\cdots 6\\
\hline
9150\cdots\cdots\cdots\cdots 15\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{因 } 3+4+3+6=16,1+6=7\\
\text{因 } 5+7+1+4=17,1+7=8\\
\text{因 } 9+1+5+0=15,1+5=6
\end{array}
$$

驗算不錯.

例 2.　減法:　　驗 $4456-1262=3194$.

被減數的9餘數，若是不夠減去減數的9餘數時，可在被減數的9餘數上加9再減.

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}
4456\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\\
-\\
-)\ 1262\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2
\end{array}\right\} (1+9)-2=8\\
\hline
3194\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 17\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8
\end{array}
$$

驗算不錯.

例 3.　乘法:　　驗 $346\times275\times1024=97433600$.

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}
346\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\\
\times\\
275\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\\
\times\\
1024\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7
\end{array}\right\} 4\times5\times7=140\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\\
\hline
97433600\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 32\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5
\end{array}
$$

驗算不錯.

例 4. 除法: 驗 $864\div21=41$ 餘 3.

除法是乘法的還原,所以核算除法時,應還原而成為乘法後再驗算. 所以本題驗算應如下:

$$864=41\times21+3.$$

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}41\cdots\cdots\cdots 5\\ \qquad\qquad\ \times\\ 21\cdots\cdots\cdots 3\end{array}\right\}5\times3=15\cdots\cdots\cdots 6\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\\ 3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\end{array}\right\}6+3=9\cdots\cdots 0\\
\hline
864\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 18\cdots\cdots 9\cdots\cdots 0
\end{array}$$

驗算不錯.

5. 11 餘數驗算法 任何一個數,用 11 去除後所得的餘數,叫做 11 餘數. 求 11 餘數,也可以像求 9 餘數那樣不用 11 去除原數而另用別法. 其法如下:

從原數奇位數字和減去其偶位數字和, 其差數即為原數的 11 餘數, 如果奇位數字和不夠減去偶位數字和, 可以加上 11 再減.

例: 求 43576 的 11 餘數.

$$\because\left\{\begin{array}{l}
43576=40000+3000+500+70+6\\
40000=4(9999+1)=4\times9999+4=4\times909\times11+4(\text{奇位})\\
3000=3(1001-1)=3\times1001-3=3\times91\times11-3(\text{偶位})\\
500=5(99+1)=5\times99+5=5\times9\times11+5(\text{奇位})\\
70=7(11-1)=7\times11-7=7\times11-7(\text{偶位})\\
6=6=6=6(\text{奇位})
\end{array}\right.$$

$$43576=11\text{ 的倍數 }+(4-3+5-7+6)$$

$\therefore$ 43576 的 11 餘數 $=(4-3+5-7+6)$ 的 11 餘數

$=\{(4+5+6)-(3+7)\}$的 11 餘數

$=5.$

簡記如 $43576\cdots\cdots\cdots\cdots 5$

在與9餘數類似的情形下，可得關於11餘數的定理如下．

許多個數之和的 11 餘數，等於各該數 11 餘數之和的 11 餘數．許多個數之積的 11 餘數，等於各該數 11 餘數之積的 11 餘數．

利用這條 11 餘數的定理，也可以驗算加、減、乘、除四種算法的正誤．其法如下：

（一）先求出各數的 11 餘數．

（二）把這些 11 餘數照原定的關係行加、減、乘或除的計算，而分別得出其和、差、積或商．

（三）再求這些所得之和、差、積或商的 11 餘數．

（四）將這樣所得的 11 餘數，與用普通方法所得之和、差、積或商的 11 餘數相比較．如果是相同的，便知結果正確；如果不同，便有錯誤．

例 1． 加法： 驗 89702＋36971＋29685＋43378＝199736．

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
89702 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8 \\
36971 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
29685 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7 \\
433\ 8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5
\end{array}\right\} 8+0+7+5=20,(0+11)-2=9 \\
\hline
199736 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 9
\end{array}
$$

驗算不錯．

例 2． 減法： 驗 70582－23934＝46928

減法是加法的還原，本題可改爲

$$70582=23934+46928,$$

於是

$$
\begin{array}{l}
70582 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 6 \\
\hline
\left.\begin{array}{r}
23934 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 9 \\
+ \\
46928 \cdots\cdots 13 \cdots\cdots 2
\end{array}\right\} 11 \cdots\cdots 0
\end{array}
$$

雙方的 11 餘數不同，結果是錯了．本題的差應改為 46648．

注意 本題亦可不改為加法而驗算，參考前節例 2．

例 3. 乘法: 驗 $346\times275\times1024=97433600$

$$\left.\begin{array}{l}346\cdots\cdots\cdots 5\\ \qquad\qquad\times\\ 275\cdots\cdots\cdots 0\\ \qquad\qquad\times\\ 1024\cdots\cdots\cdots 1\end{array}\right\}5\times0\times1=0$$

$$97433600\cdots\cdots\cdots\cdots 0$$

驗算不錯．

例 4. 除法: 驗 $1092754\div3617=302$ 餘 420

本題可改為 $1092754=3617\times302+420$

於是

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}3617\cdots\cdots 9\\ \qquad\quad\times\\ 302\cdots\cdots 5\end{array}\right\}9\times5=45\cdots\cdots 1\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\\ 420\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\end{array}\right\}1+2=3$$

$$1092754\cdots\cdots\cdots 14\cdots\cdots\cdots 3$$

驗算不錯．

注意 若加、減、乘或除的結果寫錯，其中有相鄰位次的數字互相顛倒，那麼用 9 餘法不能驗出它的錯誤；其中若有相間位次的數字互相顛倒，用 11 餘法也不能驗出其錯處．所以 9 餘驗算法和 11 餘驗算法，只能看出大概不錯，而不能斷定其為絕對不錯． 不過，反過來說，如果用 9 餘法或 11 餘法驗算結果不合時，那麼可以斷定其結果是絕對錯誤的．

6. 一般驗算法 只行一次計算所求出的答數，往往不免於錯誤．即使在計算熟練的人們，也不能說絕對沒有錯誤．所以驗算是確有必要．驗算與原先所用算法不同而所得的結果無異，方

可靠．又於簡單及輕便的計算，往往為不經心而疏忽錯誤，這是更該注意．

驗算不但要注意計算的有無錯誤，就是計算的順序方法，所用的公式及單位等，也有注意而加以調整的必要，尤其於單位及定位等常易疏忽致誤，頂要注意．

在計算中發現錯誤時，不要把錯的用橡皮擦去，卻該用橫線將錯字劃去，而在其旁寫入正的數字．這樣，既可改正，又可考見先前錯誤的情狀，非常便利，並且又可以查知所以弄錯的原因來．

又某式可以記入種種的值而行計算時，應該就該式分其計算為幾段，將各段的結果分配排列成表格而一一記入，則既省時間，又省手續，更易於計算，並且易於發見錯誤．

例如於 $$x^2+1.37y=2070$$

一式中，就 x 的種種值而求 y 的對應值時，則有

$$y=\frac{2070-x^2}{1.37}$$

因而可以排成下列表格

x	x^2	$2070-x^2$	$\frac{2070-x^2}{1.37}$	y

就 x 採用 1、2、3、……等的值，一一記入 x 下縱行中；計算出對應於 x 之各值的 x^2、$2070-x^2$ 等的各值，一一記入對應於各該

x 值同一橫列的 x^2、$2070-x^2$ 等下之縱行中. 這樣做法,一定可避免不少錯誤.

習 題 十

1. 求下面各數的和,用換序法驗算:

(a)
$$\begin{array}{r} 62102541 \\ 7569195 \\ 7313902 \\ 6059335 \\ +)\ 2280415 \\ \hline \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 1764403 \\ 65341 \\ 94339 \\ 100245 \\ +)\ 14175 \\ \hline \end{array}$$

2. 照下表,二十四年份比二十三年份增減如何? 用還原法驗算:

二十四年份　棉田 34939121 畝,棉產 8197688 擔

二十三年份　棉田 44971264 畝,棉產 1201999 擔

3. 求下列各題的結果,并用換序法驗算:

(a) 768453×6258, (b) 32956×8298, (c) 1234567×12345.

4. 求下列各題的結果,并用還原法驗算:

(a) $64845793\div6254$, (b) $32968756\div87956$, (c) $78946326\div28953$.

5. 求下列各數的 9 餘數及 11 餘數:

(a) 17652, (b) 473856, (c) 7873456, (d) 3048.

6. 計算下列各題,并用 9 餘法驗算:

(a) $1235+897+5124+8376$.

(b) $86732+79546-21693-18878-36465$.

(c) $897\times4502\times1873$.

(d) $654731\div269$.

(e) $1206\times4954\div2647$.

7. 就上題的結果,一一用 11 餘法來驗算.

8. 在 $\dfrac{x^2-2}{x^4-4x^3+1}$ 式中,就 $x=1$, $x=2$, ………$x=10$ 的諸值一一代入計算,排成表式,列出其結果.

第十一章　算術上易犯的錯誤

1. 數與數字混淆的錯誤　一切計算，祇能行之於數，而不可行之於數字．因爲數字是代表數的符號，而並非是數．猶之乎圖中畫一馬，這是代表馬的圖，卻不是馬．我們不能把蹄鐵釘在馬的圖上，這不可以不辨明．

2. 算式的錯誤　$3+4=7+5=12\times2=24$，這種錯誤，常爲初學所犯．犯了這種錯誤，即使其原數正確，也不足以贖其這種錯誤的過失．因爲敍述各步都錯，而答數偶然正確的，是往往而有的．驗算法可以證驗答數的是否錯誤，卻不能證明其計算手續的有無錯誤．這也是很要留心的．上式應改成 $3+4=7$，$7+5=12$，$12\times2=24$．

3. 帶分數加法的錯誤　例如 $4\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{6}{12}+\frac{9}{12}=9\frac{23}{12}=10\frac{11}{12}$，這種錯誤也是初學常犯的．此式當改爲

$$4\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}=4\frac{8}{12}+3\frac{6}{12}+2\frac{9}{12}=$$

$$4\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}=9+\frac{8}{12}+\frac{6}{12}+\frac{9}{12}=$$

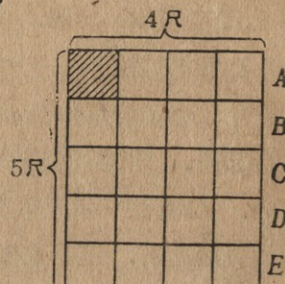
4. 名數的錯誤　如 2×50 元$=100$，$2\times50=100$ 元，100元$\div4=25$，$100\div4=25$元，100元$\div4$元$=25$人等，都是常見的錯誤．

以上諸式，應作 50元$\times2=100$元，$2\times50=100$，100元$\div4=25$ 元，100 元$\div4$ 元$=25$．

5. 求面積的錯誤　長4尺闊5尺的矩形,求其面積,常誤寫爲

4尺×5尺=20方尺.

在此式中,4尺與5尺都非不名數,都不可以做乘數;並且積一定要與被乘數爲同類名數,所以若是20方尺是對的,那麼4尺與5尺都不可以做被乘數.照此說來,本題簡直沒有相當的被乘數,也沒有相當的乘數,這怎麼辦呢?



其實,如右圖,所求面積可先以1尺爲單位,就闊5尺的一面平分爲A、B、C、D、E五長條,再將每一長條以1尺爲單位就長4尺的一面平分爲四小塊.這樣所分得的每一小塊,如圖有斜線的部份剛剛是一方尺.我們計算起來,就可以這一小塊,即一方尺,爲單位,A、B、C、D、E五長條,每條含有四小塊,所以全部矩形所含的小塊數,即方尺數,可以下式表之:

1方尺×4×5=20方尺

這樣立式,才是不背算理而不錯的.

6. 分數敍述的錯誤　例如關於"某數的五分之二是12,求某數"一題,有作爲下之解法的:

$$\frac{5}{5}=\text{某數}:$$

$$\frac{2}{5}=12,$$

$$\frac{1}{5}=12\text{之}\frac{1}{2}=6,$$

$$\therefore\quad \frac{5}{5}=6\times5=30.$$

這樣的解法是錯誤的.為什麼呢?

第一,$\frac{5}{5}$=某數,那麼某數該是1,然而結果所得某數卻是30.

第二,$\frac{2}{5}$=12,那麼$\frac{2}{5}=\frac{60}{5}$了,那有此理!

第三,第一式是以$\frac{5}{5}$爲1的,但末一式卻以$\frac{5}{5}$等於30,怎說得通?

這個錯誤的病根,在於第一、二兩式的敍述不合.這兩式是全部計算中的前提.前提錯了,以後推理步驟雖不錯,結果終不能正確了.

本題正確的解法應該如下:

$$\text{某數的}\frac{5}{5}=\text{某數},$$

$$\text{某數的}\frac{2}{5}=12$$

$$\text{某數的}\frac{1}{5}=12\text{的}\frac{1}{2}=6$$

$$\text{某數的}\frac{5}{5}=6\times5=30,$$

$$\therefore\quad \text{某數}=30.$$

這樣的敍述,也並不是惟一不可改變的.只要詞句簡明,合於論理,合於文法,就都可以,至於詞句的形式,卻不是呆定的.

7. 百分法的錯誤　例如關於"某數的百分之四十是八十,求

某數"一題,如果說

$$\frac{100}{100}=\text{某數},$$

那就犯了與上一節所述同樣的錯誤了.因爲不可以說

$$\frac{100}{100}=\text{某數},$$

而應當說 某數的 $\frac{100}{100}=$ 某數,

8.敍述的錯誤 如果說"49方尺的平方根是7尺",這是錯誤的.我們可以說"5乘5是25",所以可以說"25的平方根是5";但因不能說"7尺乘7尺是49方尺",所以也不能說"49方尺的平方根是7尺".

又如說"27立方尺以9方尺除之,得3尺",也是錯誤的.因爲"3尺乘9方尺得27立方尺"是錯誤的敍述,應該寫作下式:

$$1\text{立方尺}\times3\times3\times3=27\text{立方尺}.$$

9.呼唱的錯誤 譬如對3尺×4而呼唱爲"三尺乘四",對12尺÷3而呼唱爲"十二尺除三",這都是錯誤的.

3尺×4應該呼唱爲"三尺乘以四"或"以四乘三尺";12尺÷3應該呼唱爲"十二尺除以三"或"以三除十二尺".

10.書寫的錯誤 如 $1,2,3\cdots\cdots n$. 及 $1+2+3\cdots\cdots n$. 都是錯誤的.照理應寫作 $1,2,3,\cdots\cdots,n$.

及 $1+2+3+\cdots\cdots+n$.

注意 算術上易犯的錯誤,隨處可見,以上所述的幾項,不過是略舉幾個顯而易見的例來說.學者應該時常細密查檢,嚴加考察,以免錯誤.

(完)

民國三十七年二月發行
民國三十七年二月初版

(一三六九九)