始

微分積分學

中卷

東京帝國大學名譽教授
理學博士
坂井英太郎著

共立出版株式會社

目　次

第 6 章　偏微分法

第 7 章　陰伏函數，微分變數ノ變更

微分積分學

第6章　偏微分法

28.　二ツ以上ノ獨立變數ヲ有スル函數

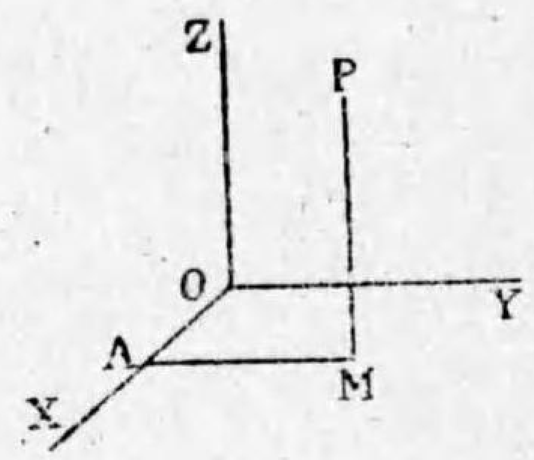
二ツノ變數ノ各一對ノ値ニ對應シテ他ノ變數ノ有限確定値ガ恒ニ存在スルトキハ後者ハ前者ノ**函數**ナリトイフ，例ヘバ二ツノ變數 x 及ビ y ノ任意ノ一對ノ値ニ對應シテ $x+y$ ノ値ハ恒ニ定マルガ故ニ $x+y$ ハ x 及ビ y ノ函數ナリ，又 $x^2+y^2\leqq 1$ ヲ滿足スル x 及ビ y ノ各一對ノ値ニ對應シテ $\sqrt{1-x^2-y^2}$ ノ値ハ恒ニ定マルガ故ニ $\sqrt{1-x^2-y^2}$ ハ $x^2+y^2\leqq 1$ ナル範圍ニ於ケル x 及ビ y ノ函數ナリ

一般ニ二ツノ變數 x 及ビ y ノ函數ヲ表ハスニ $f(x, y)$, $\phi(x, y)$ 等ノ記號ヲ用ヒ，變數 z ガ二ツノ變數 x 及ビ y ノ函數ナルコトヲ $z=f(x, y)$, $z=\phi(x, y)$ 等ト記ス，上ノ例ニ於テ $f(x, y)=x+y$, $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ニシテ之ヲ z ト置クトキハ $z=x+y$ 及ビ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ナリ

獨立變數 x, y ノ一對ノ値ニ對應シテ函數 z ノ値ガ唯一ツナルコトアリ，二ツ以上ナルコトアリ，以下單ニ $z=f(x, y)$ 等ト稱スルハ其ノ一價函數ナル場合ヲ指スモノトス.

變數 x, y ノ特別ナル値，例ヘバ $x=a$, $y=b$ ニ對スル $f(x, y)$ ノ値ヲ $f(a, b)$ ニテ表ハス，例ヘバ $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ニ於テハ $f(0, 0)=1$ ナリ.

函數 $z=f(x, y)$ ノ値ノ變動ヲ研究スルガ爲メ＝圖ヲ用ヒテ之ヲ表ハス＝當リ最モ簡單ナルハ一點 O ヲ原點トシテ O ＝於テ互＝直交スル三ツノ直線 OX, OY, OZ ヲ座標軸トシ, OX ノ上＝ x ＝等シク OA ヲ取リ, A ＝於テ OY ＝平行＝ y ＝等シク AM ヲ引キ, M ヨリ xy 面＝垂直＝ z ＝等シク MP ヲ引クトキハ x, y ノ値＝ヨリテ P 點ノ位置定マル, 從テ x, y ＝順次 (x_1, y_1), (x_2, y_2), ……, (x_n, y_n) ノ値ヲ與フレバ之＝對應シテ z_1, z_2, ……, z_n ノ値ヲ得ベク, 從テ方程式 $z=f(x, y)$ ハ空間＝於ケル點ノ群ヲ表ハスベシ.



函數 $f(x, y)$ ノ中＝テ最モ簡單ナルハ $f(x, y)$ ガ x, y ＝關シテ一次ノ有理整函數 $ax+by+c$ ナルトキ＝シテ此ノ場合＝ハ

$$z=ax+by+c$$

ハ一ツノ平面ヲ表ハシ, 又 $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ナルトキハ

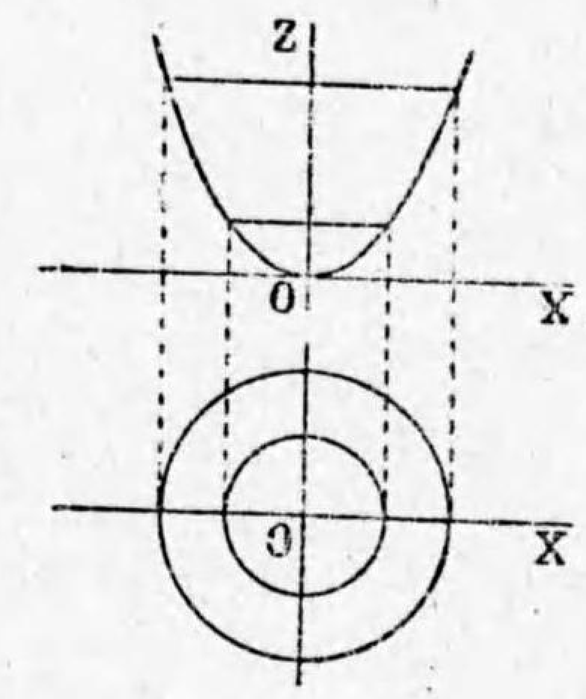
$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

ハ球面 $x^2+y^2+z^2=1$ ノ xy 面ノ上方＝アル部分ヲ表ハス.

尙 $f(x, y)$ ハ x, y ＝關シテ有理函數ナルコトアリ, 無理函數ナルコトアリ, 又超越函數ナルコトアリ, 何レノ場合＝於テモ x, y ガ連續變數ナルトキハ一般＝ $z=f(x, y)$ ハ一ツノ曲面ヲ表ハス. 此等＝於テ平面 $z=c$ ト曲面 $z=f(x, y)$ トノ交線ノ xy 面上＝於ケル正射影ヲ吟味スルコト＝ヨリテ曲面ノ形狀從テ函數ノ性質ヲ知リ得ルコト少カラズ.

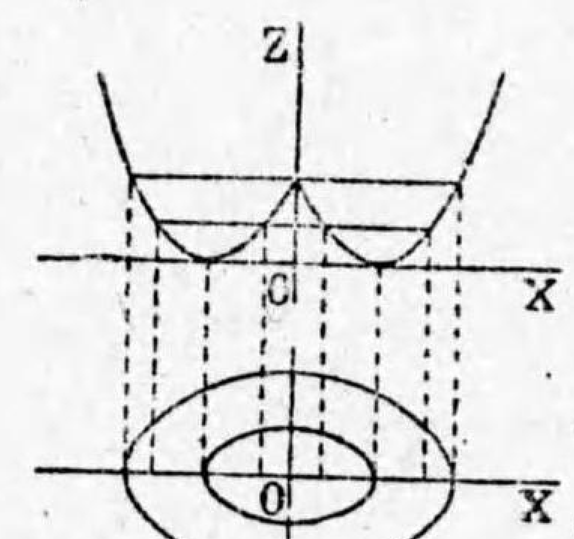
例 1. $f(x, y)=x^2+y^2$

$z=x^2+y^2$ ＝於テ $c>0$ トシテ $z=c$ ト置クトキハ $x^2+y^2=c$ ヲ得, 依テ此ノ曲面ト平面 $z=c$ トノ交線ノ xy 面上＝於ケル正射影ハ同心圓＝シテ, $x=0$, $y=0$ ナルトキハ $c=0$, 又 $z=x^2+y^2$ ＝於テ $y=0$ ト置クトキハ $z=x^2$ ヲ得, 依テ xz 面上＝於ケル正射影ハ z 軸ヲ軸トセル拋物線ナリ, 故＝ $z=f(x, y)$ ハ z 軸ヲ軸トシテ拋物線 $z=x^2$ ヲ回轉セシメテ生ズル拋物面ナリ.



例 2. $f(x, y)=\left(\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}-1\right)^2$

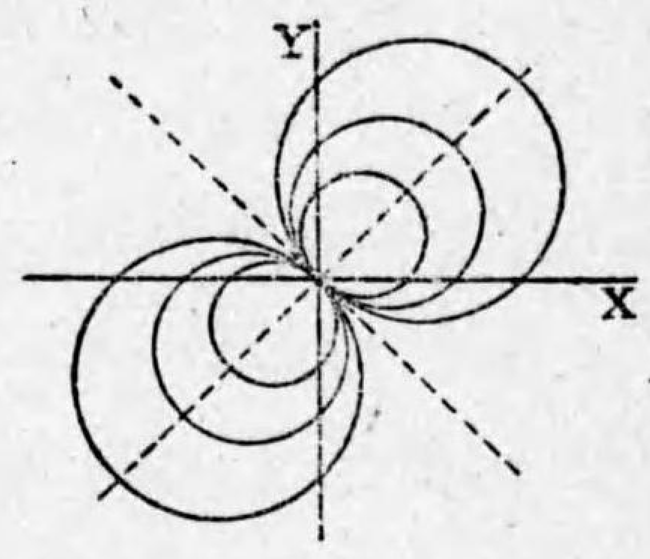
$z=\left(\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}-1\right)^2$ ＝於テ $c>0$ トシテ $z=c$ ト置クトキハ $\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}=1\pm\sqrt{c}$ ヲ得, 依テ此ノ曲面ト平面 $z=c$ トノ交線ノ xy 面上＝於ケル正射影ハ $c=0$ ナルトキハ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $c=1$ ナルトキハ $x=0$, $y=0$, 及ビ $\dfrac{x^2}{(2a)^2}+\dfrac{y^2}{(2b)^2}=1$ ＝シテ $0<c<1$ ナルトキハ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ内側及ビ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ト $\dfrac{x^2}{(2a)^2}+\dfrac{y^2}{(2b)^2}=1$ トノ間＝アル二ツノ楕圓, 又 $c>1$ ナルトキハ $\dfrac{x^2}{(2a)^2}+\dfrac{y^2}{(2b)^2}=1$ ノ外側＝アル楕圓ナリ.



例 3. $f(x,\ y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

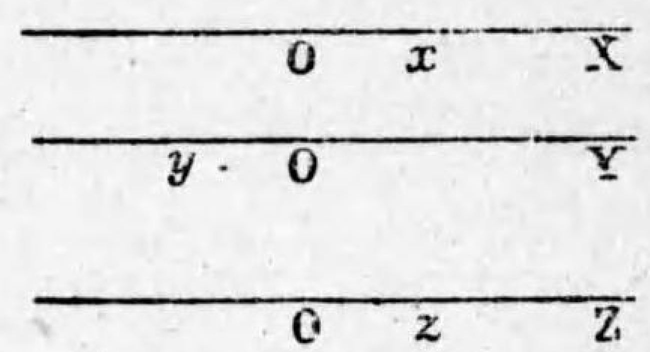
$z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ ニ於テ $z=c$ ト置クトキハ $x^2+y^2=c(x+y)$ 即チ

$$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2$$

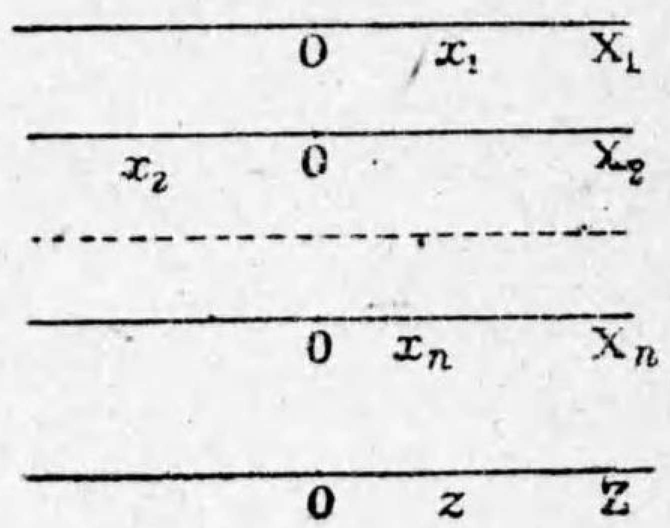


ヲ得．$x+y>0$ ナルトキハ $z>0$ 又 $x+y<0$ ナルトキハ $z<0$．$x=0,\ y=0$ ナルトキハ z ノ値ハ不定ナリ，依テ $x=0,\ y=0$ ナルトキ $z=0$ トスレバ $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ ノ表ハス曲面ハ原點ヲ頂點トシ xy 面ノ兩側ニアル圓錐面ナリ．

注意 $z=f(x,\ y)$ ノ値ノ變動ヲ研究スルガ爲メニ三ツノ平行線 OX, OY, OZ ヲ取リ OX, OY ノ上ニ夫々 $x,\ y$ ノ値ヲ置キ，之ニ對應スル z ノ値ヲ OZ ノ上ニ取ルトキハ $z=f(x,\ y)$ ノ値ハ一直線上ニアル點ノ列ヲ以テ之ヲ表ハスコトヲ得．



尚一般ニ變數 z ガ變數 $x_1,\ x_2,\ \dots\dots,\ x_n$ ノ函數ナルトキ，直線 $OX_1,\ OX_2,\ \dots\dots,\ OX_n$ ノ上ニ夫々 $x_1,\ x_2,\ \dots\dots,\ x_n$ ノ値ヲ置キ，之ニ對應スル z ノ値ヲ直線 OZ ノ上ニ取ルトキハ z ノ値ハ一直線上ニアル點ノ列ヲ以テ之ヲ表ハスコトヲ得．



29. 極限及ビ連續

變數 x 及ビ y ガ夫々有限値 a 及ビ b ニ益近ヅクニ從ヒ，函數 $z=f(x,\ y)$ ノ値ハ他ノ有限値 A ニ益近ヅキ，正數 δ ヲ適當ニ取ルコトニヨリテ，$0<|x-a|<\delta,\ 0<|y-b|<\delta$ ナル $x,\ y$ ノ總テノ値ニ對シテ $|z-A|$ ヲシテ任意ニ取リタル如何ニ小ナル正數 ε ヨリモ小ナラシメ得ル場合ニハ x 及ビ y ガ夫々 a 及ビ b ニ收斂スルトキ z ハ A ニ收斂ス，或ハ簡單ニ $x\to a,\ y\to b$ ナルトキ z ノ**極限値**ハ A ナリトイヒ，之ヲ表ハスコト次ノ如シ．

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} z=\mathrm{A}$$

函數 $z=f(x,\ y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ナルトキ有限確定値ヲ有シ且

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} z=f(a,\ b)$$

ナルトキ $z=f(x,\ y)$ ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ**連續**ナリトイフ．

$z=f(x,\ y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ連續ナルトキ，$x=a+h,\ y=b+k$ ト置クトキハ

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)$$

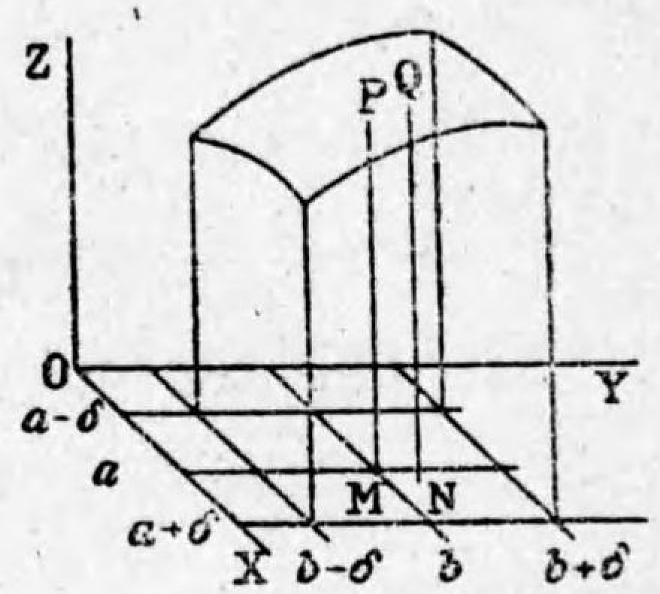
從テ $f(x,\ y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ連續ナルトキハ $h,\ k$ ヲ十分小ナラシムレバ任意ノ小ナル正數 ε ニ對シテ

$$|f(a+h,\ y+k)-f(a,\ b)|<\varepsilon$$

ナラシムルコトヲ得．

xy 面上ニ於ケル點 $M(a, b)$ ヲ中心トシテ一邊ノ長サガ 2δ ナル正方形ヲ畫キ，其ノ内ニ任意ノ點 $N(x, y)$ ヲ取リ，xy 面ニ垂直ニ

$$MP=f(a, b),\quad NQ=f(x, y)$$



ト取ルトキ，$x=a,\ y=b$ ニ於テ函數ガ連續ナラバ δ ヲ十分小ナラシムルコトニヨリテ MP ト NQ トノ差ヲシテ任意ノ長サ ε ヨリモ小ナラシムルコトヲ得，即チ M ヨリ如何ナル方向ニ N ヲ取ルモ MN ガ十分小ナルトキハ N ニ對應スル曲面上ノ點 Q ハ M ニ對應スル點 P ニ何程ニテモ近キ位置ニアリ．

一定ノ區域内ニ於ケル x, y ノ總テノ値ニ對シテ $f(x, y)$ ガ連續ナルトキハ $f(x, y)$ ハ此ノ區域ニ於テ連續ナリトイフ．

又 $f(x, y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=f(a, b)$$

ナル條件ヲ滿足セザルトキハ $f(x, y)$ ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ不連續ナリトイフ．

注意 1. $f(x, y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ連續ナルトキハ $|h|<\delta$, $|k|<\delta$ ナル h, k ノ總テノ値ニ對シテ

$$|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|<\varepsilon \qquad (1)$$

從テ

$$|f(a+h,\ b)-f(a,\ b)|<\varepsilon \qquad (2)$$

$$|f(a,\ b+k)-f(a,\ b)|<\varepsilon \qquad (3)$$

(2)ハ即チ $f(x, b)$ ガ x ニ關シテ連續ナル條件ニシテ (3) ハ $f(a, y)$ ガ y ニ關シテ連續ナル條件ナリ，故ニ $f(x, y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ連續ナラバ單ニ x ノミニ關シテモ連續，又 y ノミニ關シテモ連續ナリ，然レドモ (2) 及ビ (3) ヨリ (1) ヲ誘出スルコトヲ得ズ，即チ $f(x, y)$ ガ x ノミニ關シテ連續ニシテ且 y ノミニ關シテ連續ナリトモ必ズシモ x 及ビ y ニ關シテ連續ナラズ，之ハ曲面 $z=f(x, y)$ 上ノ一點ニ於テ曲面ガ總テノ方向ニ連續ナラバ，x 軸ノ方向ニモ，又 y 軸ノ方向ニモ連續ナレドモ，x 軸ノ方向ニ連續ニシテ且 y 軸ノ方向ニ連續ナルモ他ノ方向ニハ必ズシモ連續ナラザルコトヨリ明ナリ．

注意 2. $x=a,\ y=b$ ニ於テ二重極限ノ存在スルトキ即チ

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=A$$

ナルトキハ何レノ方向ヨリ點 (a, b) ニ近ヅクモ $f(x, y)$ ハ限リナク A ニ近ヅクベキヲ以テ $x=a$ ナルトキ $y=b$ ナル連續函數 $y=\phi(x)$ ヲ取リ之ヲ上式ニ代入スレバ

$$\lim_{x\to a} f\{x,\ \phi(x)\}=A$$

ヲ得ザルベカラズ，從テ異リタル ϕ ニ對シテ異リタル極限値ヲ得ルトキハ二重極限ノ存在セザルコト明ナリ

注意 3. 上ニ擧ゲタル二重極限ハ $\lim\limits_{x\to a}\{\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\}$ 又ハ $\lim\limits_{y\to b}\{\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\}$ ト混同スベカラズ，尚又後者ハ一般ニ相等シカラズ，例ヘバ

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=1,\qquad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=-1$$

例 1. $f(x, y)=x^2+y^2$

x, y ノ任意ノ値ヲ夫々 a, b トスルトキハ

$$|f(a+h, h+k)-f(a, b)|=|(a+h)^2+(b+k)^2-a^2-b^2|$$
$$\leqq|(a+h)^2-a^2|+|(b+k)^2-b^2|$$

ε ヲ如何ニ小ナル正數トスルモ

$$|h|<\sqrt{a^2+\frac{\varepsilon}{2}}-|a|, \qquad |k|<\sqrt{b^2+\frac{\varepsilon}{2}}-|b|$$

ト取ルトキハ

$$(|a|+|h|)^2-a^2<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (|b|+|k|)^2-b^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

從テ $\qquad |(a+h)^2-a^2|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |(b+k)^2-b^2|<\frac{\varepsilon}{2}$

依テ $\qquad |f(a+h, b+k)-f(a, b)|<\varepsilon$

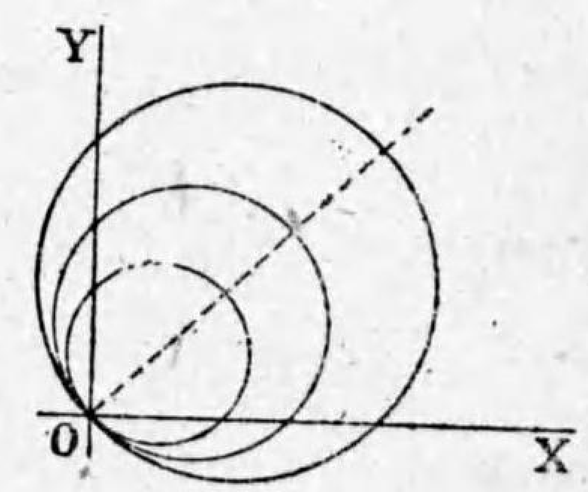
故ニ x^2+y^2 ハ x, y ノ總テノ値ニ對シテ連續ナリ.

例 2. $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

$x^2+y^2=c_1(x+y)$ ト置ケバ $f(x, y)=c_1$

$x^2+y^2=c_2(x+y)$ ト置ケバ $f(x, y)=c_2$

....



故ニ此等ノ圓ニ沿ウテ $x=0, \ y=0$ ニ近ヅクトキハ $f(x, y)$ ノ極限値ハ $c_1, c_2, \ldots\ldots$ ナリ.

故ニ $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}$ ニ於テ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x, y)$ ハ一定ノ極限値ヲ有セズ, 依テ $f(x, y)$ ハ $x=0, y=0$ ニ於テ連續ニアラズ.

30. 偏微分係數, 偏導來函數

函數 $z=f(x, y)$ ニ於テ y ニ一定ノ値 b ヲ與フレバ z ハ x ノミノ函數トナル, 此ノ場合ニ $f(x, b)$ ガ $x=a$ ニ於テ微分可能ナルトキ即チ

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h, b)-f(a, b)}{h}, \qquad \lim_{h\to-0}\frac{f(a+h, b)-f(a, b)}{h}$$

ガ相等シキ有限確定ナル値ヲ有スルトキ

$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(a+h, b)-f(a, b)}{h}$$

ヲ $x=a, y=b$ ニ於ケル $f(x, y)$ ノ x ニ關スル**偏微分係數**トイヒ

同様ニ

$$\lim_{k\to\pm0}\frac{f(a, b+k)-f(a, b)}{k}$$

ヲ $x=a, y=b$ ニ於ケル $f(x, y)$ ノ y ニ關スル**偏微分係數**トイフ.

$z=f(x, y)$ ノ偏微分係數ガ一定ノ區域ニ於ケル x, y ノ各一對ノ値ニ對シテ存在スル場合ニハ其ノ値ハ x, y ノ函數ナリ, 依テ

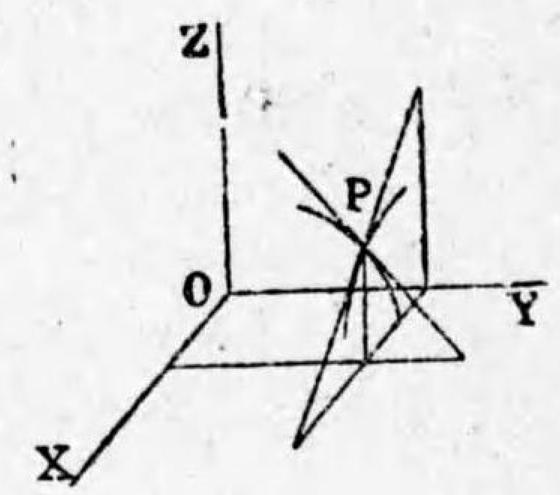
$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}=f_x(x, y)=z_x$$

ヲ $z=f(x, y)$ ノ x ニ關スル**偏導來函數**トイヒ,

$$\lim_{k\to\pm0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}=f_y(x, y)=z_y$$

ヲ $z=f(x, y)$ ノ y ニ關スル**偏導來函數**トイフ

xy 面上ノ一點 (a, b) ニ對應スル曲面 $z=f(x, y)$ 上ノ點ヲ P トスルトキハ $f_x(a, b)$ ハ P ヲ通過シテ xz 面ニ平行ナル平面ガ曲面ト交ハリテ作ル曲線ノ P ニ於ケル切線ガ xy 面トナス角ノ正切ヲ表ハシ, $f_y(a, b)$ ハ yz 面ニ平行ナル平面ガ作ル曲線ノ P ニ於ケル切線ガ xy 面トナス角ノ正切ヲ表ハス



偏導來函數ニ關シテハ次ノ如ク第2章第9節ニ於ケルト同樣ナル定理成立ス.

I. $u=f(x, y)$, $v=\phi(x, y)$ ガ同一ノ區域ニ於テ夫々偏導來函數ヲ有スルトキハ

a) $z=f(x, y)+\phi(x, y)$

$$z_x=f_x(x, y)+\phi_x(x, y),\quad z_y=f_y(x, y)+\phi_y(x, y)$$

b) $z=f(x, y)\phi(x, y)$

$$z_x=f_x(x, y)\phi(x, y)+f(x, y)\phi_x(x, y),$$

$$z_y=f_y(x, y)\phi(x, y)+f(x, y)\phi_y(x, y)$$

c) $z=\dfrac{f(x, y)}{\phi(x, y)}$

$$z_x=\frac{f_x(x, y)}{\phi(x, y)}-\frac{\phi_x(x, y)}{\{\phi(x, y)\}^2}f(x, y),$$

$$z_y=\frac{f_y(x, y)}{\phi(x, y)}-\frac{\phi_y(x, y)}{\{\phi(x, y)\}^2}f(x, y)$$

II. $z=f(u)$ ハ一定ノ域ニ於テ導來函數 $f'(u)$ ヲ有シ, $u=\phi(x, y)$ ハ對應スル域ニ於テ偏導來函數 $\phi_x(x, y)$, $\phi_y(x, y)$ ヲ有スルトキハ

$$z_x=f'(u)\phi_x(x, y),\qquad z_y=f'(u)\phi_y(x, y)$$

例 1. $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$z=\sqrt{u}$, $u=x^2+y^2$ ト置クトキハ

$$z_x=z'_u u_x,\qquad z_y=z'_u u_y$$

$$z'_u=\frac{1}{2\sqrt{u}},\qquad u_x=2x,\qquad u_y=2y$$

依テ x 及ビ y ハ同時ニ 0 ナラズトシテ

$$f_x(x, y)=\frac{x}{\sqrt{u}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x, y)=\frac{y}{\sqrt{u}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$x=0$, $y=0$ ナルトキハ上ノ式ハ何レモ不定ナリ, 此ノ場合ニハ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=1$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=-1$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{k^2}-0}{k}=1$$

$$\lim_{k\to -0}\frac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim_{k\to -0}\frac{\sqrt{k^2}-0}{k}=-1$$

故ニ $x=0$, $y=0$ ニ於テハ x ニ關スル及ビ y ニ關スル右方偏微分係數並ニ左方偏微分係數ハ何レモ存在スレドモ $f_x(0, 0)$ 及ビ $f_y(0, 0)$ ハ存在セズ.

例 2. $f(x, y)=\sqrt[3]{x+y}$

$$f_x(x, y)=\frac{1}{3(x+y)^{\frac{2}{3}}},\qquad f_y(x, y)=\frac{1}{3(x+y)^{\frac{2}{3}}}$$

$x=0$, $y=0$ ナルトキハ

$$\lim_{h\to\pm 0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\infty$$

$$\lim_{k\to\pm 0}\frac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim_{k\to\pm 0}\frac{\sqrt[3]{k}-0}{k}=\infty$$

注意 1. $f(x, y)$ 及ビ其ノ偏導來函數 $f_x(x, y)$ 及ビ $f_y(x, y)$ ガ何レモ一定ノ區域ニ於ケル x, y ノ總テノ値ニ關シテ有限確定値ヲ有ストスレバ第9節ニヨリ $f(x, y)$ ハ x ニ關シテ連續ニシテ又 y ニ關シテ連續ナリ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=f(x+h, y+k)-f(x, y+k)$$
$$+f(x, y+k)-f(x, y)$$

平均値ノ定理ニヨリ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y+k)=f_x(x+\theta_1 h, y+k)h$$
$$f(x, y+k)-f(x, y)=f_y(x, y+\theta_2 k)k$$
$$0<\theta_1<1, \qquad 0<\theta_2<1$$

之ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=f_x(x+\theta_1 h, y+k)h$$
$$+f_y(x, y+\theta_2 k)k$$

然ルニ假定ニヨリ M ヲ一定ノ正値トシテ

$$|f_x(x+\theta_1 h, y+k)|<\mathrm{M}, \quad |f_y(x, y+\theta_2 k)|<\mathrm{M}$$

ナルヲ以テ

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y)|<\mathrm{M}\{|h|+|k|\}$$

即チ

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(x+h, y+k)=f(x, y)$$

故ニ $f(x, y)$ ハ連續ナリ, 然レドモ此ノ逆ハ眞ナラズ, 即チ前例ニ於テ見ル如ク $f(x, y)$ ハ連續ナルモ其ノ偏導來函數ハ必ズシモ有限確定ニアラズ.

注意 2. $f_x(x, y)$ 及ビ $f_y(x, y)$ ガ連續ナリトスレバ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)$$
$$=f_x(x+\theta_1 h, y+k)h+f_y(x, y+\theta_2 k)k, \quad 0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1$$
$$=\{f_x(x, y)+\rho\}h+\{f_y(x, y)+\sigma\}k$$

此ニ ρ 及ビ σ ハ h, k ト共ニ 0 ニ收斂スルモノトス.

h, k ガ無限小トナリタルトキ

$$dz=z_x h+z_y k$$

ト置クトキハ, $f(x, y)=x$ トスレバ $z_x=1, \quad z_y=0$

從テ
$$dx=h$$

同樣ニ $f(x, y)=y$ トスレバ

$$dy=k$$

故ニ
$$dz=z_x dx+z_y dy$$

更ニ $z_x dx=d_x z, \quad z_y dy=d_y z$ ト置クトキハ

$$dz=d_x z+d_y z, \qquad z_x=\frac{d_x z}{dx}, \qquad z_y=\frac{d_y z}{dy}$$

dz ヲ z ノ**全微分**トイヒ, 之ニ對シテ $d_x z$ ヲ z ノ x ニ關スル**偏微分**トイヒ, $d_y z$ ヲ z ノ y ニ關スル**偏微分**トイフ.

又 $\dfrac{d_x z}{dx}$ 及ビ $\dfrac{d_y z}{dy}$ ハ夫々 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及ビ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ト書クヲ普通トス, 即チ

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$$

ニシテ z_x 即チ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ハ $dz=z_x dx+z_y dy$ ニ於テ dx ノ係數ニシテ, z_y 即チ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ハ dy ノ係數ナリ.

31. 逐次偏導來函數

函數 $z=f(x, y)$ ガ偏導來函數ヲ有スルトキハ

$$f_x(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}=\frac{\partial z}{\partial x}=z_x$$

$$f_y(x, y)=\lim_{k\to\pm0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}=\frac{\partial z}{\partial y}=z_y$$

z_x ヲ z ノ x ニ關スル**第一次偏導來函數**トイヒ, z_y ヲ z ノ y ニ關スル**第一次偏導來函數**トイフ.

$f_x(x, y)$ ガ更ニ偏導來函數ヲ有スルトキハ

$$f_{xx}(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\frac{f_x(x+h, y)-f_x(x, y)}{h}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}$$

$$f_{xy}(x, y)=\lim_{k\to\pm0}\frac{f_x(x, y+k)-f_x(x, y)}{k}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}$$

z_{xx} ヲ z ノ x ニ關スル**第二次偏導來函數**トイヒ, z_{xy} ヲ z ノ x 及ビ y ニ關スル**第二次偏導來函數**トイフ.

同樣ニ $f_y(x, y)$ ヨリ

$$f_{yx}(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\frac{f_y(x+h, y)-f_y(x, y)}{h}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}$$

$$f_{yy}(x, y)=\lim_{k\to\pm0}\frac{f_y(x, y+k)-f_y(x, y)}{k}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}$$

ヲ得, f_{yx} ハ z ノ y 及ビ x ニ關スル**第二次偏導來函數**ニシテ z_{yy} ハ z ノ y ニ關スル**第二次偏導來函數**ナリ.

第三次以上ノ偏導來函數ニ就テモ同樣ナリ, 例ヘバ

$$f_{xyx}(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\frac{f_{xy}(x+h, y)-f_{xy}(x, y)}{h}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=z_{xyx}$$

此等ヲ總稱シテ z ノ**逐次偏導來函數**トイフ.

次ニ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ト $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ トノ關係ヲ考フルニ

$$f_x(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}$$

$$f_{xy}(x, y)=\lim_{k\to\pm0}\left\{\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h, y+k)-f(x, y+k)}{h}-\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}\right\}\frac{1}{k}$$

又

$$f_y(x, y)=\lim_{k\to\pm0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}$$

$$f_{yx}(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\left\{\lim_{k\to\pm0}\frac{f(x+h, y+k)-f(x+h, y)}{k}-\lim_{k\to\pm0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}\right\}\frac{1}{h}$$

依テ

$$F(h, k)=\frac{f(x+h, y+k)-f(x, y+k)-f(x+h, y)+f(x, y)}{hk}$$

ト置クトキハ

$$f_{xy}(x, y)=\lim_{k\to\pm0}\{\lim_{h\to\pm0}F(h, k)\}$$

$$f_{yx}(x, y)=\lim_{h\to\pm0}\{\lim_{k\to\pm0}F(h, k)\}$$

即チ $f_{xy}(x, y)$ ト $f_{yx}(x, y)$ トハ同一ノ函數ニ於テ極限ノ順序ヲ變換シタルモノナルガ故ニ第 29 節ニ示セルガ如ク一般ニ其ノ値ハ相等シカラズ.

今 $f_{xy}(x, y)$ 及ビ $f_{yx}(x, y)$ ハ一定ノ區域ニ於テ連續ナリトスレバ $f_x(x, y)$ 及ビ $f_y(x, y)$ モ亦連續ナリ.

$$V=f(x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)-f(x,\ y+k)+f(x,\ y)$$

$$\phi(x)=f(x,\ y+k)-f(x,\ y)$$

ト置クトキハ

$$V=\phi(x+h)-\phi(x)$$

平均値ノ定理ニヨリ

$$V=\phi'(x+\theta_1 h)h, \qquad 0<\theta_1<1$$

卽チ

$$V=\{f_x(x+\theta_1 h,\ y+k)-f_x(x+\theta_1 h,\ y)\}h, \qquad 0<\theta_1<1$$

又平均値ノ定理ニヨリ

$$f_x(x+\theta_1 h,\ y+k)-f_x(x+\theta_1 h,\ y)=f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k)k$$

$$0<\theta_2<1$$

故ニ $\quad V=f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k)hk, \qquad 0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1$

又 $\quad V=f(x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)-f(x,\ y+k)+f(x,\ y)$

$$\psi(y)=f(x+h,\ y)-f(x,\ y)$$

ト置クトキハ

$$V=\psi(y+k)-\psi(y)$$

$$=\psi'(y+\theta_3 k)k, \qquad 0<\theta_3<1$$

卽チ

$$V=\{f_y(x+h,\ y+\theta_3 k)-f_y(x,\ y+\theta_3 k)\}k$$

$$=f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k)hk, \qquad 0<\theta_3<1, \quad 0<\theta_4<1$$

故ニ

$$f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k)=f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k)$$

$$0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1, \quad 0<\theta_3<1, \quad 0<\theta_4<1$$

然ルニ $f_{xy}(x,\ y)$ 及ビ $f_{yx}(x,\ y)$ ハ連續ナルガ故ニ

$$\lim_{\substack{h\to\pm0\\k\to\pm0}} f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k)=f_{xy}(x,\ y)$$

$$\lim_{\substack{h\to\pm0\\k\to\pm0}} f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k)=f_{yx}(x,\ y)$$

故ニ $\qquad f_{xy}(x,\ y)=f_{yx}(x,\ y)$

例 1. $f(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2$

$$f_x(x,\ y)=2ax+2by, \qquad f_{xx}(x,\ y)=2a, \qquad f_{xy}(x,\ y)=2b$$

$$f_y(x,\ y)=2bx+2cy, \qquad f_{yy}(x,\ y)=2c, \qquad f_{yx}(x,\ y)=2b$$

例 2. $f(x,\ y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad x\gtreqless 0, \quad y\gtreqless 0$

$$f_x(x,\ y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\left\{\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

$$=y\left\{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

$$f_{xx}(x,y)=y\left\{\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{16x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}\right\}$$

$$=y\left\{\frac{12xy^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{16x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}\right\}=-4xy^3\frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$f(x,\ y)=-yx\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ ナルヲ以テ上ニ得タル $f_x(x,y)$ 及ビ $f_{xx}(x,\ y)$ ヨリ直チニ下ノ式ヲ得.

$$f_y(x,\ y)=-x\left\{\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}+\frac{4y^2x^2}{(y^2+x^2)^2}\right\}=x\left\{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

$$f_{yy}(x,\ y)=4yx^3\frac{y^2-3x^2}{(y^2+x^2)^3}=-4x^3y\frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_x(x,\ y)=y\left\{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}\quad \text{ヨリ}$$

$$f_{xy}(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$+y\left\{-\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^2}-\frac{16x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}\right\}$$

故ニ

$$f_{xy}(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

同様ニ $f_y(x,\ y)=-x\left\{\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}+\frac{4y^2x^2}{(y^2+x^2)^2}\right\}$ ヨリ直チニ次ノ式ヲ得

$$f_{yx}(x,\ y)=-\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\left\{1+\frac{8y^2x^2}{(y^2+x^2)^2}\right\}$$
$$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

故ニ $\qquad f_{xy}(x,\ y)=f_{yx}(x,\ y)$

注意 $f(x,\ y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ハ $x=0,\ y=0$ ナルトキ不定ナリ，然ルニ $x\gtrless0,\ y\gtrless0$ ナルトキハ $f(x,\ y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ ト定ムレバ

$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h}=0,\qquad \lim_{k\to\pm0}\frac{f(0,\ k)-f(0,\ 0)}{k}=0$$

故ニ $\qquad f_x(0,\ 0)=0,\qquad f_y(0,\ 0)=0$

又
$$\lim_{k\to\pm0}\frac{f_x(0,\ k)-f_x(0,\ 0)}{k}=\lim_{k\to\pm0}\frac{-k}{k}=-1$$
$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f_y(h,\ 0)-f_y(0,\ 0)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\frac{h}{h}=1$$

故ニ $\qquad f_{xy}(0,\ 0)=-1,\qquad f_{yx}(0,\ 0)=1$

32. 函數ノ函數ノ偏導來函數

函數 $u=f(x,\ y)$, $v=\phi(x,\ y)$ ハ同一ノ區域ニ於テ x 及ビ y ニ關スル偏導來函數ヲ有シ，函數 $z=\mathrm{F}(u,\ v)$ ハ之ニ對應スル區域ニ於テ u 及ビ v ニ關スル連續ナル偏導來函數ヲ有スト假定シ，y ガ一定ニシテ x ガ $x+\Delta x$ ニ變ズルトキ u 及ビ v ハ夫々 $u+\Delta_x u$ 及ビ $v+\Delta_x v$ ニ變ジ，從テ z ハ $z+\Delta_x z$ ニ變ズトスレバ

$$\Delta_x z=\mathrm{F}(u+\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)-\mathrm{F}(u,\ v)$$
$$\Delta_x u=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)$$
$$\Delta_x v=\phi(x+\Delta x,\ y)-\phi(x,\ y)$$

然ルニ

$$\Delta_x z=\mathrm{F}(u+\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)-\mathrm{F}(u,\ v+\Delta_x v)+\mathrm{F}(u,\ v+\Delta_x v)-\mathrm{F}(u,\ v)$$
$$=\mathrm{F}_u(u+\theta_1\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)\Delta_x u+\mathrm{F}_v(u,\ v+\theta_2\Delta_x v)\Delta_x v$$

即チ

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\mathrm{F}_u(u+\theta_1\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\mathrm{F}_v(u,\ v+\theta_2\Delta_x v)\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$
$$0<\theta_1<1,\qquad 0<\theta_2<1.$$

$\Delta x\to0$ ナル極限ニ於テ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{F}_u(u,\ v)\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{F}_v(u,\ v)\frac{\partial v}{\partial x}$$

或ハ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

同様ニ x ガ一定シテ y ガ變ズトスレバ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ハ何レモ z ト同様 u, v ノ函數ナルヲ以テ之ヲ微分シテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

依テ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$ トシテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

同様ニ x ト y トヲ交換シテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

又
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

故ニ
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

此ノ特別ナル場合トシテ

$$z=\mathrm{F}(u,\ v),\qquad u=f(x),\qquad v=\phi(x)$$

トスレバ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{d^2 v}{dx^2}$$

更ニ
$$z=\mathrm{F}(x,\ v),\qquad v=\phi(x)$$

トスレバ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{d^2 v}{dx^2}$$

又
$$z=\mathrm{F}(u),\qquad u=f(x,\ y)$$

トスレバ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

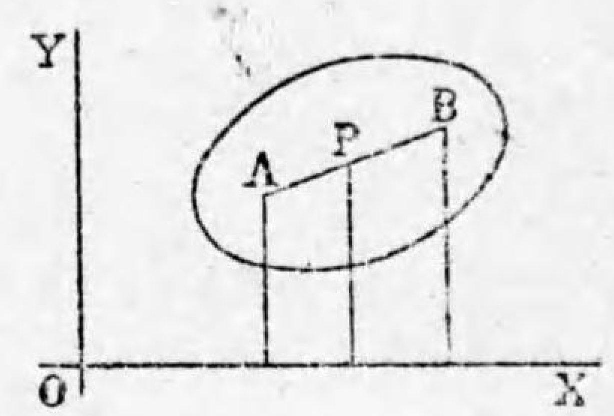
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d^2 z}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{dz}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{d^2 z}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dz}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d^2 z}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{dz}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

例 1. テーロル定理ノ擴張

函數 $f(x, y)$ 及ビ其ノ逐次偏導來函數ガ一定ノ區域ニ於テ連續ナルトキ，其ノ區域ニ於テ點 $A(a, b)$ 及ビ $B(a+h, b+k)$ ヲ取リ，線分 AB 上ノ一點ヲ $P(x, y)$ トスレバ



$$x=a+uh,\quad y=b+uk,\quad 0\leqq u\leqq 1$$

$$f(x, y)=f(a+uh, b+uk)$$

依テ $\qquad F(u)=f(x, y),\qquad x=a+uh,\quad y=b+uk$

$$F'(u)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k$$

$$F''(u)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$

....

故ニ之ヲ次ノ如ク書クコトヲ得

$$F'(u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f,\quad F''(u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f,\quad \ldots\ldots$$

$$F^{(n)}(u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f$$

第 3 章第 14 節テーロルノ定理ニヨリ

$$F(u)=F(0)+\frac{F'(0)}{1}u+\frac{F''(0)}{\underline{|2}}u^2+\cdots\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{\underline{|n-1}}u^{n-1}+\frac{F^{(n)}(\theta u)}{\underline{|n}}u^n$$

從テ

$$F(1)=F(0)+\frac{F'(0)}{1}+\frac{F''(0)}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{\underline{|n-1}}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{\underline{|n}},\quad 0<\theta<1$$

$$F(1)=f(a+h, b+k),\qquad F(0)=f(a, b)$$

$$F'(0)=\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)f(a, b)$$

$$F''(0)=\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)^2 f(a, b)$$

....

$$F^{(n-1)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)^{n-1} f(a, b)$$

$$F^{(n)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k)$$

故ニ

$$f(a+h, b+k)=f(a, b)+\frac{1}{1}\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)f(a, b)$$

$$+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)^2 f(a, b)+\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)^{n-1} f(a, b)$$

$$+\frac{1}{\underline{|n}}\left(\frac{\partial}{\partial a}h+\frac{\partial}{\partial b}k\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k),\quad 0<\theta<1$$

之ヲ二ツノ獨立變數ヲ有スル函數ニ關シテテーロル定理ノ擴張トス．

例 2. 同次函數ノ性質

函數 $f(x, y)$ ニ於テ t ヲ x 及ビ y ニ關シテ獨立ナル變數トシテ $f(tx, ty)=t^m f(x, y)$ ナル關係成立スルトキハ $f(x, y)$ ヲ m 次ノ**同次函數**トイフ．

例ヘバ $ax^2+2bxy+cy^2$ ニ於テ x ノ代リニ tx，又 y ノ代リニ ty ト置クトキハ

$$a(tx)^2+2b(tx)(ty)+c(ty)^2=t^2(ax^2+2bxy+cy^2)$$

ヲ得，故ニ $ax^2+2bxy+cy^2$ ハ二次ノ同次函數ナリ

(1) $f(tx, ty)=t^m f(x, y)$ ニ於テ $tx=u$, $ty=v$ ト置クトキハ

$$f(u, v)=t^m f(x, y)$$

之ヲ t ニ關シテ微分スルトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=mt^{m-1}f(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=x, \quad \frac{\partial v}{\partial t}=y$$

依テ
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=mt^{m-1}f(x, y)$$

$t=1$ ト置ケバ $u=x$, $v=y$ トナリ

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=mf$$

(2) $f(u, v)=t^m f(x, y)$, $u=tx$, $v=ty$

之ヲ x ニ關シテ微分スルトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=t^m\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=t$$

依テ
$$\frac{\partial f}{\partial u}=t^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x}$$

同様ニ
$$\frac{\partial f}{\partial v}=t^{m-1}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=f_2(x, y)$ ト置クトキハ

$$f_1(u, v)=t^{m-1}f_1(x, y), \quad f_2(u, v)=t^{m-1}f_2(x, y)$$

之ハ f_1 及ビ f_2 ガ $m-1$ 次ノ同次函數ナルコトヲ示ス.

故ニ m 次ノ同次函數 $f(x, y)$ ヲ x 又ハ y ニ關シテ一回微分シタルモノハ $m-1$ 次ノ同次函數ナリ, 從テ x, y, 又ハ雙方ニ關シテ k 回微分スレバ $m-k$ 次ノ同次函數ヲ得ベシ.

33. 二ツノ獨立變數ヲ有スル函數ノ極大極小

函數 $f(x, y)$ ガ一定ノ區域ニ於テ連續ナルトキ, 其ノ區域ニ於ケル x, y ノ一對ノ値ヲ a, b, 又適當ニ定メタル正數ヲ δ トシ, $0<\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ ナル h, k ノ總テノ値ニ對シテ $f(a+h, b+k)<f(a, b)$ ナルトキハ $f(x, y)$ ハ $x=a$, $y=b$ ニ於テ**極大**ナリトイヒ, 之ニ反シテ $f(a+h, b+k)>f(a, b)$ ナルトキハ $f(x, y)$ ハ $x=a$, $y=b$ ニ於テ**極小**ナリトイフ.

$f(x, y)$ ガ $x=a$, $y=b$ ニ於テ極大ナルトキハ $f(a, b)$ ハ $f(x, b)$ ノ極大値ナラザルベカラズ, 從テ導來函數ガ存在スル場合ニ於テハ第3章第17節ニヨリ $\frac{d}{dx}f(x, b)$ ハ $x=a$ ニ於テ 0 ニ等シカラザルベカラズ, 即チ $x=a$, $y=b$ ニ於テ $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, 同様ニ $x=a$, $y=b$ ニ於テ $\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$f(a, b)$ ガ $f(x, y)$ ノ極小値ナルトキニ於テモ之ト同様ナリ

故ニ $f(x, y)$ ノ極大極小ヲ索ムルニ當リ, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及ビ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ガ存在スル場合ニハ先ヅ $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ト置キテ此ノ聯立方程式ノ根ヲ索メ, 之ヲ x_0, y_0 トシ

$$f(x_0+h, y_0+k)<f(x_0, y_0)$$

ナルトキハ $f(x_0, y_0)$ ハ $f(x, y)$ ノ極大値ニシテ

$$f(x_0+h, y_0+k)>f(x_0, y_0)$$

ナルトキハ $f(x_0, y_0)$ ハ $f(x, y)$ ノ極小値ナリ.

若シ h, k ノ値＝ヨリテ

$$f(x_0+h,\ y_0+k)>,\ =,\ \text{又ハ}\ <f(x_0,\ y_0)$$

ナルトキハ $f(x_0, y_0)$ ハ $f(x, y)$ ノ極大値＝モ極小値＝モアラズ.

更＝ $f(x, y)$ 及ビ其ノ逐次偏導來函數ハ連續ナリトシ, $x=x_0$, $y=y_0$ ＝於テ $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ＝シテ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ガ何レモ 0 ＝等シカラザル場合＝於テ第 32 節テーロル定理ノ擴張＝ヨリ

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=\frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}h+\frac{\partial}{\partial y_0}k\right)^2 f(x_0,\ y_0)+\mathrm{R}$$

此＝

$$\mathrm{R}=\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}h+\frac{\partial}{\partial y_0}k\right)^3 f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

ヲ得, 此ノ式＝於テ h, k ヲ無限小トシテ $\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}h^3$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\partial y_0}h^2k$ ハ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}h^2$ ヨリモ高位, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_0\partial y_0^2}hk^2$ ハ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}hk$ ヨリモ高位, 又 $\frac{\partial^3 f}{\partial y_0^3}k^3$ ハ $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}k^2$ ヨリモ高位ナルガ故＝ $f(x_0+h,\ h+k)-f(x_0,\ y_0)$ ノ符號ハ $\left(\frac{\partial}{\partial x_0}h+\frac{\partial}{\partial y_0}k\right)^2 f(x_0,\ y_0)$ ノ符號＝ヨリテ定マル, 從テ

$$d^2 f_{x_0,y_0}=\left(\frac{\partial}{\partial x_0}h+\frac{\partial}{\partial y_0}k\right)^2 f(x_0,\ y_0)$$

ト置クトキハ $0<\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ ナル h, k ノ總テノ値＝對シテ $d^2 f_{x_0,y_0}$ ガ正ナルカ又ハ負ナルカ＝從テ $f(x_0, y_0)$ ハ $f(x, y)$ ノ極小値又ハ極大値＝シテ, h, k ノ値＝ヨリテ $d^2 f_{x_0,y_0}$ ガ或ハ正トナリ, 或ハ負トナルトキハ $f(x_0, y_0)$ ハ $f(x, y)$ ノ極大値＝モ極小値＝モアラズ.

次＝ $h=\frac{\delta}{\mathrm{D}}\xi$, $k=\frac{\delta}{\mathrm{D}}\eta$ ト置クトキハ $0<\sqrt{\xi^2+\eta^2}<\mathrm{D}$ ＝シテ

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\delta^2}d^2 f_{x_0,y_0}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\xi^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\xi\eta+\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\eta^2$$

D ハ何程＝テモ大ナラシメ得ベキヲ以テ $d^2 f_{x_0,y_0}$ ガ正又ハ負ナル＝從テ

$$\mathrm{V}_{x_0,y_0}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\xi^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\xi\eta+\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\eta^2$$

ハ $0<\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ ナル ξ, η ノ總テノ値＝對シテ恒＝正又ハ負ナリ.

更＝ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=\mathrm{A}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\eta=\mathrm{P}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\eta^2=\mathrm{Q}$

ト置クトキハ

$$\mathrm{V}_{x_0,y_0}=\mathrm{A}\xi^2+2\mathrm{P}\xi+\mathrm{Q}$$

然ル＝ $\eta=0$ ナルトキハ $\mathrm{V}_{x_0,y_0}=\mathrm{A}\xi^3$ トナル, 故＝ V_{x_0,y_0} ガ恒＝正又ハ負ナルガ爲メ＝ハ A ガ正又ハ負ナルコトヲ要ス.

從テ $\mathrm{AV}_{x_0,y_0}=(\mathrm{A}\xi+\mathrm{P})^2+(\mathrm{AQ}-\mathrm{P}^2)>0$

$\mathrm{A}\xi+\mathrm{P}=0$ ナルトキハ $\mathrm{AV}_{x_0,y_0}=\mathrm{AQ}-\mathrm{P}^2$ トナル, 故＝ $\mathrm{AV}_{x_0,y_0}>0$ ナルガ爲メ＝ハ $\mathrm{AQ}-\mathrm{P}^2>0$ ナルコトヲ要ス.

又 $\mathrm{AQ}-\mathrm{P}^2>0$ ナルトキハ $\mathrm{AV}_{x_0,y_0}>0$ ＝シテ從テ V_{x_0,y_0} ハ A ト同一ノ符號ヲ有スルコト明ナリ

故＝ $f(x_0, y_0)$ ハ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2>0$ ＝シテ且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}<0$ ナルトキハ $f(x, y)$ ノ極大値, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2>0$ ＝シテ且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}>0$ ナルトキハ $f(x, y)$ ノ極小値ナリ.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2<0$ ナルトキハ $f(x_0, y_0)$ ハ $f(x, y)$ ノ極大値＝モ極小値＝モアラズ.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2=0$ ナルトキハ,

$$\mathrm{A}\mathrm{V}_{x_0,y_0}=(\mathrm{A}\xi+\mathrm{P})^2$$

故ニ $\mathrm{A}\xi+\mathrm{P}\gtrless 0$ ナルトキハ V_{x_0,y_0} ハ A ト同一ノ符號ヲ有スレドモ, $\mathrm{A}\xi+\mathrm{P}=0$ ナルトキハ不定ナリ, 從テ此ノ場合ニハ別ニ研究ヲ要ス.

注意 上ノ證明ニ於テ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2}$ ハ何レモ $x=x_0,\ y=y_0$ ニ於テ 0 ニ等シカラズト假定セリ, 從テ若シ少クトモ何レカ一ツガ 0 ニ等シキトキハ更ニ之ヲ研究シタル後ニアラザレバ上ノ結果ヲ應用スルコトヲ得ズ, 例ヘバ

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}=0$ ナルトキハ

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}h^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}k^2\right)+\mathrm{R}$$

從テ上ニ示セルガ如ク $f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)$ ノ符號ハ $d^2 f_{x_0,y_0}$ 即チ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}h^2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}k^2$ ニヨリテ定マル, 故ニ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ ガ何レモ正ナルトキハ極小, 負ナルトキハ極大ナリ.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=0$ ナルトキハ h ヲ第一位ノ無限小, k ヲ第二位ノ無限小トスレバ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}hk$ ハ第三位, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}k^2$ ハ第四位, 又 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}h^3$ ハ第三位ナルヲ以テ $d^2 f_{x_0,y_0}$ ノ符號ノミニヨリテ $f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)$ ノ符號ヲ定ムルコトヲ得ズ.

例 1. $f(x,\ y)=x^2+y^2+2axy+x^4, \qquad a>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+ay+2x^3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2(y+ax)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(1+6x^2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2a$$

從テ
$$\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2=4\{1+6x^2-a^2\}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ト置クトキハ

$$x+ay+2x^3=0 \qquad y+ax=0$$

從テ $\quad x=0,\ \ y=0$ 及ビ $x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}},\ \ y=\mp a\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}$

1) $x=0,\ \ y=0$

$$\Delta=4(1-a^2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$$

$0<a<1$ ナルトキハ $\Delta>0$ ニシテ $f(0,\ 0)=0$ ハ $f(x,\ y)$ ノ極小値ナリ, $a>1$ ナルトキハ $\Delta<0$ ニシテ $f(0,\ 0)=0$ ハ $f(x,\ y)$ ノ極大値ニモ極小値ニモアラズ, 又 $a=1$ ナルトキハ $\Delta=0$ ニシテ, h 及ビ k ガ同時ニ 0 ナラザルトキハ

$$f(h,\ k)=(h+k)^2+h^4>0, \qquad f(0,\ 0)=0$$

故ニ $f(0,\ 0)=0$ ハ $f(x,\ y)$ ノ極小値ナリ.

2) $x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}, \quad y=\mp a\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}$

$0<a<1$ ナルトキハ $x,\ y$ ノ實値存在セズ, $a>1$ ナルトキハ $\Delta>0$ ニシテ $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}},\ \mp a\sqrt{\dfrac{a^2-1}{2}}\right)=-\dfrac{(a^2-1)^2}{4}$ ハ $f(x,\ y)$ ノ極小値, 又 $a=1$ ナルトキハ $x=0,\ y=0$ ニシテ (1) ノ場合トナル.

例 2. $f(x,\ y)=y^2-3x^2y+2x^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x(3y-4x^2),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-3x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6(y-4x^2),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6x$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$ ト置クトキハ

$$x(3y-4x^2)=0,\qquad 2y-3x^2=0$$

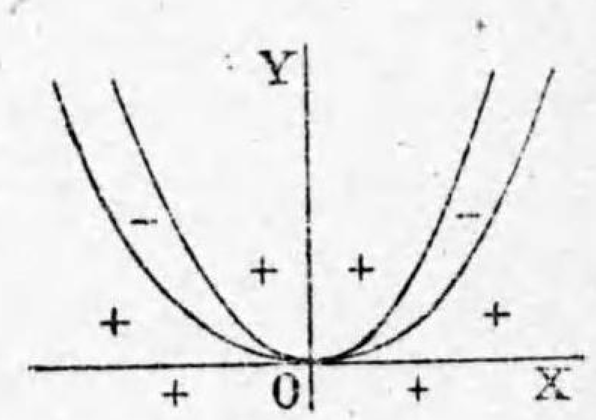
依テ $\qquad x=0,\qquad y=0$

$$f(0,\ 0)=0$$

$$f(h,\ k)=k^2-3h^2k+2h^4=(k-h^2)(k-2h^2)$$

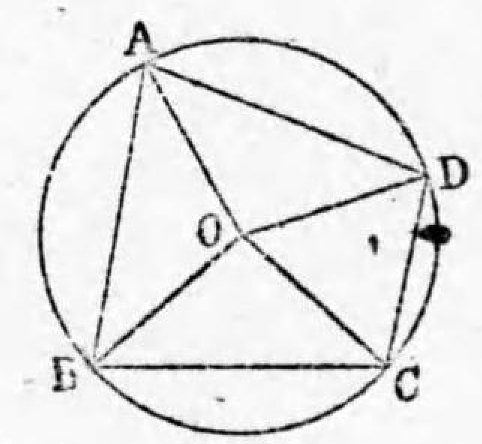
h ヲ第一位ノ無限小, k ヲ第二位ノ無限小トシテ $f(h,\ k)$ ハ $k=h^2$ 及ビ $k=2h^2$ ナルトキハ 0, $k>2h^2$ ナルトキ及ビ $k<h^2$ ナルトキハ正, $h^2<k<2h^2$ ナルトキハ負ナリ, 即チ $f(h,\ k)-f(0,\ 0)$ ハ一定ノ符號ヲ有セズ, 故ニ $f(0,\ 0)$ ハ $f(x,\ y)$ ノ極大値ニモ極小値ニモアラズ.

圖ニヨリテ説明スレバ曲面 $z=y^2-3x^2y+2x^4$ ハ平面 $z=0$ ト二ツノ抛物線 $y=x^2$, $y=2x^2$ ニ於テ交ハリ, $y=x^2$ ノ外部及ビ $y=2x^2$ ノ內部ニ於テハ $z>0$, 即チ曲面ハ xy 面ノ上方ニアリ, 又 $y=x^2$ ト $y=2x^2$ トノ間ニ於テハ下方ニアリ, 之ニヨリテ點 $(0,\ 0)$ ニ於テハ $z=0$ ナレドモ其ノ周圍ノ點ニ對應スル z ノ値ハ或ハ正トナリ, 或ハ負トナリ, 或ハ 0 トナルヲ以テ $z=0$ ハ極大極小ニアラザルコト明ナリ.



例 3. 定圓ニ內接シ且一ツノ定角ヲ有スル四邊形中ニテ面積ノ極大ナルモノヲ索メヨ.

定圓ノ中心ヲ O, 其ノ半徑ヲ a, 內接四邊形 ABCD ノ面積ヲ S, 定角 BAD ヲ α トシ, $\angle$COD, $\angle$BOC, $\angle$AOB, $\angle$DOA ヲ夫々 $\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4$ ト置クトキハ



$$S=\frac{a^2}{2}(\sin\phi_1+\sin\phi_2+\sin\phi_3+\sin\phi_4)$$

$$\phi_1+\phi_2=2\alpha,\qquad \phi_3+\phi_4=2\pi-2\alpha$$

依テ

$$S=a^2\sin\alpha\{\cos(\phi_1-\alpha)-\cos(\phi_3+\alpha)\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_1}=-a^2\sin\alpha\sin(\phi_1-\alpha),\qquad \frac{\partial S}{\partial \phi_3}=a^2\sin\alpha\sin(\phi_3+\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \phi_1^2}=-a^2\sin\alpha\cos(\phi_1-\alpha),\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_3^2}=a^2\sin\alpha\cos(\phi_3+\alpha),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \phi_1\partial \phi_3}=0$$

$\frac{\partial S}{\partial \phi_1}=0,\ \frac{\partial S}{\partial \phi_3}=0$ ト置クトキハ

$$\sin(\phi_1-\alpha)=0,\qquad \sin(\phi_3+\alpha)=0$$

依テ $\qquad \phi_1=\alpha,\qquad \phi_3=\pi-\alpha$

從テ $\qquad \phi_2=\alpha,\qquad \phi_4=\pi-\alpha$

此ノ場合ニ於テハ

$$\angle ADC=\frac{\pi}{2}=\angle ABC,\qquad AB=AD,\qquad CB=CD$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \phi_1^2}<0,\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_3^2}<0,\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_1\partial \phi_3}=0$$

故ニ本節注意ニヨリ S ハ極大ナリ.

34. 三ツ以上ノ獨立變數ヲ有スル函數

變數 u ガ三ツ以上ノ獨立變數 $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n$ ノ函數ナルトキ，即チ $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ ナルトキ，二ツノ獨立變數ヲ有スル函數ニ就テ論ジタル所ヲ擴張スルコトヲ得.

x_1 ガ a_1 ニ，x_2 ガ a_2 ニ，……，x_n ガ a_n ニ收斂スルトキ u ガ有限確定値 $f(a_1,\ a_2\ \ldots\ldots,\ a_n)$ ニ收斂スルトキハ u ハ $x=a_1,\ x=a_2,\ \ldots\ldots,\ x_n=a_n$ ニ於テ連續ナリトイフ.

$u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ ニ於テ x_r ノミヲ變數トシテ其他ノ x ヲ不易ト考ヘタルトキノ u ノ第一次導來函數ヲ u ノ x_r ニ關スル第一次偏導來函數トイヒ，之ヲ $u_{x_r},\ \dfrac{\partial u}{\partial x_r}$ 等ニテ表ハス，第二次偏導來函數ニ就テ $u_{x_rx_s},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_r\partial x_s}$ 等ノ記號ヲ用ユルコト等總テ獨立變數二個ノミノトキト異ナルコトナシ

$u=f(z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,\ z_n)$ ニシテ $z_r=\phi_r(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_m),\ r=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$ ナルトキ x_r ノミニ關シテ微分シテ

$$\frac{\partial u}{\partial x_r}=\frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_r}+\frac{\partial u}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_r}+\cdots\cdots+\frac{\partial u}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial x_r}$$

ヲ得，其ノ他高次ノ場合ニ就テモ同様ナリ.

テーロルノ定理ノ擴張ニ關シテモ第 32 節ニ於ケルト同様ニ

$$\begin{aligned}f(a_1+h_1,\ a_2+h_2,\ \ldots\ldots,\ a_n+h_n)&=f(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n)\\&+\left(h_1\frac{\partial}{\partial a_1}+h_2\frac{\partial}{\partial a_2}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial a_n}\right)f(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{1}{\lfloor n-1}\left(h_1\frac{\partial}{\partial a_1}+h_2\frac{\partial}{\partial a_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial a_n}\right)^{n-1}f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)+R_n\end{aligned}$$

此ニ

$$R_n=\left(h_1\frac{\partial}{\partial a_1}+h_2\frac{\partial}{\partial a_2}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial a_n}\right)^n f(a_1+\theta_1h_1,\ a_2+\theta_2h_2,\ \ldots\ldots,\ a_n+\theta_nh_n),\quad 0<\theta<1$$

ヲ得.

又第 33 節ト同様ニ絶對値ガ十分小ナル變數 $h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots,\ h_n$ ノ總テノ値ニ對シテ

$$f(a_1+h_1,\ a_2+h_2,\ \ldots\ldots,\ a_n+h_n)<f(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n)$$

ナルトキハ $f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ ハ $x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ \ldots\ldots,\ x_n=a_n$ ニ於テ極大ナリトイヒ

$$f(a_1+h_1,\ a_2+h_2,\ \ldots\ldots,\ a_n+h_n)>f(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n)$$

ナルトキハ極小ナリトイフ

$f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ ノ極大極小ヲ求ムルニハ必要ナル逐次偏導來函數ハ連續ナリトシ，聯立方程式 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0,\ \ldots\ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}=0$ ヲ解キテ $x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ \ldots\ldots,\ x_n=a_n$ ヲ得，之ヲ代入シテ

$$f(a_1+h_1,\ a_2+h_2,\ \ldots\ldots,\ a_n+h_n)-f(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n)$$

ガ恒ニ負ナルトキハ極大，正ナルトキハ極小，又 $h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots,\ h_n$ ノ値ニヨリテ或ハ正トナリ或ハ負トナルトキハ極大ニモ極小ニモアラズ.

問　　題

1. 次ノ曲面ト xy 面ニ平行ナル平面トノ交線ノ xy 面ニ於ケル正射影ノ圖ヲ畫ケ.

1) $z=\log\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$,　　2) $z=\tan(xy)$

2. $y=mx$ ト置クコトニヨリテ

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

ハ存在セザルコトヲ證明シ, 且 $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ ハ如何ナル曲面ヲ表ハスカヲ研究セヨ.

3. 次ノ函數ハ x, y ノ總テノ値ニ對シテ連續ナルコトヲ證明セヨ.

1) $\sqrt{x^2+y^2}$,　　2) $\sin(x+y)$

4. 次ノ函數ノ第一次及ビ第二次偏導來函數ヲ求メヨ.

1) $x^m y^n$,　　2) $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

3) $e^{ax}\sin by$　　4) $\tan^{-1}\frac{y}{x}$

5. $z=f(ax^2+2xy+cy^2)$ ナルトキハ a, b, c ノ値ニ關セズ恒ニ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ ナルコトヲ證明セヨ.

6. $z=f(y+ax)+\phi(y-ax)$ ナルトキハ f 及ビ ϕ ノ如何ニ關セズ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ナルコトヲ證明セヨ.

7. $z=(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$ ハ $x=0, y=0$ ニ於テ極大ナルコトヲ證明セヨ.

8. 次ノ函數ノ極大極小ヲ定メヨ.

1) $ax^2+2bxy+cy^2$,　　2) $x^2y(1-x-y)$

3) $y^2-2x^2y+x^4+x^5$,　　4) $x^4+y^4-x^2-y^2+xy$

9. $f(x, y, z)$ ガ m 次ノ同次函數ナルトキ, 卽チ t ヲ x, y, z ニ關シテ無關係ナル變數, 又 m ヲ常數トシテ

$$f(tx, ty, tz)=t^m f(x, y, z)$$

ナル性質ヲ有スル函數ナルトキ下ノ式ヲ證明セヨ.

1) $xf_x+yf_y+zf_z=mf$

2) $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+z^2f_{zz}+2xyf_{xy}+2yzf_{yz}+2zxf_{zx}=m(m-1)f$

10. $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ナルトキ $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ ナルコトヲ示セ.

11. $u=\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ナルトキ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ ナルコトヲ示セ.

12. 三角形ノ二邊ヲ x, y 又三邊ノ和ヲ $2k$ トスレバ其ノ面積 $\sqrt{k(k-x)(k-y)(x+y-k)}$ ハ三邊ガ相等シキトキ極大ナルコトヲ證明セヨ.

13. 直六面體ノ二稜ヲ x, y 又其ノ體積ヲ k トスレバ其ノ全表面積 $xy+k\frac{x+y}{xy}$ ハ三稜ガ相等シキトキ極小ナルコトヲ證明セヨ.

14. 三點 A(0, 0), B(b, 0), C(0, c) ヨリ其ノ平面上ニアル一點 P(x, y) ニ至ル距離ノ和

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-b)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$

ガ極小ナルトキ, P ハ AB, AC ヲ弦トシテ圓周角ガ 120° ニ等シキ二ツノ圓ノ弧ノ交點ナルコトヲ證明セヨ.

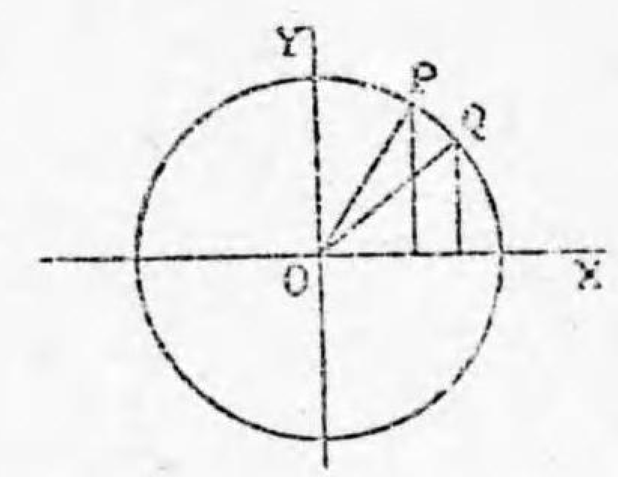
15. 三定點 A, B, C ト同一平面上ニアル一點ヲ P トシ, $\overline{AP}^2$, $\overline{BP}^2$, $\overline{CP}^3$ ノ和ガ極小ナルトキ, P ハ三角形 ABC ノ重心ナルコトヲ證明セヨ.

第 7 章 陰伏函數, 微分變數ノ變更

35. 陰伏函數ノ微分係數

平面上ニ於ケル一點ノ座標 (x, y) ガ方程式 $x^2+y^2=a^2$ ヲ滿足スルトキハ其ノ點ハ a ヲ半徑トスル圓ノ上ニアリテ, x 及ビ y ノ何レカ一方ノ値ガ定マレバ他ノ一方ノ値ハ此ノ方程式ニヨリテ定マル.

今此ノ曲線上ノ二點ヲ P(x, y), Q($x+h$, $y+k$) トスレバ



$$x^2+y^2=a^2,\ (x+h)^2+(y+k)^2=a^2$$

從テ $(x+h)^2+(y+k)^2-x^2-y^2=0$

即チ $k(2y+k)=-h(2x+h)$

$$\frac{k}{h}=-\frac{2x+h}{2y+k}$$

點 Q ガ點 P ニ限リナク近ヅク極限ニ於テハ $h\to0$, $k\to0$, 即チ y ハ x ノ連續函數ニシテ

$$\lim_{h\to0}\frac{k}{h}=-\frac{x}{y}$$

即チ
$$y'=-\frac{x}{y}$$

故ニ y ガ 0 ナラザルトキ即チ x 軸ノ上ニアル點ヲ除ケバ y' ハ恒ニ有限確定ナリ.

同様ニ x ト y トヲ交換シテ考フレバ

$$x'=-\frac{y}{x}$$

故ニ x ガ 0 ナラザルトキハ x' ハ有限確定ナリ.

依テ $f(x,y)=x^2+y^2-a^2$ ト置ケバ $f(x,y), f_x(x,y)=2x, f_y(x,y)=2y$ ハ何レモ連續函數ニシテ，又上ニ示セルガ如ク $x^2+y^2-a^2=0$ ヲ滿足スル函數 y ハ x ニ關シテ連續ニシテ，$f_y(x,y)\gtrless 0$ ナル點ニ於テ y' ハ恒ニ存在ス，一般ニ方程式 $f(x,y)=0$ ニテ定マル陰伏函數ニ關シテ次ノ定理アリ

x, y ヲ獨立變數トスル函數 $f(x,y)$ 及ビ其ノ偏導來函數 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ ガ一定ノ區域ニ於テ連續ナルトキ，其ノ區域ニ於ケル x, y ノ一對ノ値 x_0, y_0 ニ對シテ $f(x,y)=0$ ニシテ且 $f_y(x,y)\gtrless 0$ ナル場合ニハ方程式 $f(x,y)=0$ ヲ滿足シ且 $x=x_0$ ナルトキ $y=y_0$ ナル一ツノ函數 $y=\phi(x)$ ハ必ズ存在シ，連續ニシテ且微分可能ナリ

以下陰伏函數ニ關スル此ノ重要ナル定理ノ要點ヲ順次論述スルニ當リ，先ヅ x, y ヲ上記ノ區域ニ於ケル値トスルトキハ

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\{f(x,y)-f(x_0,y)\}+\{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\}$$

$$=f_x\{x_0+\theta_1(x-x_0),y\}(x-x_0)+f_y\{x_0,y_0+\theta_2(y-y_0)\}(y-y_0)$$

$$0<\theta_1<1,\qquad 0<\theta_2<1$$

然ルニ $f(x_0,y_0)=0$ ナルガ故ニ上ノ式ハ次ノ如ク書クコトヲ得

$$f(x,y)=A(x,y)(x-x_0)+B(x,y)(y-y_0)$$

$f_x(x,y), f_y(x,y)$ ハ何レモ連續ニシテ且 $f_y(x_0,y_0)\gtrless 0$，從テ x_0, y_0 ノ近傍ニ於テハ $|f_y(x,y)|>0$ ナルガ故ニ正數 δ ヲ適當ニ取ルコトニヨリテ

$$|x-x_0|<\delta,\qquad |y-y_0|<\delta$$

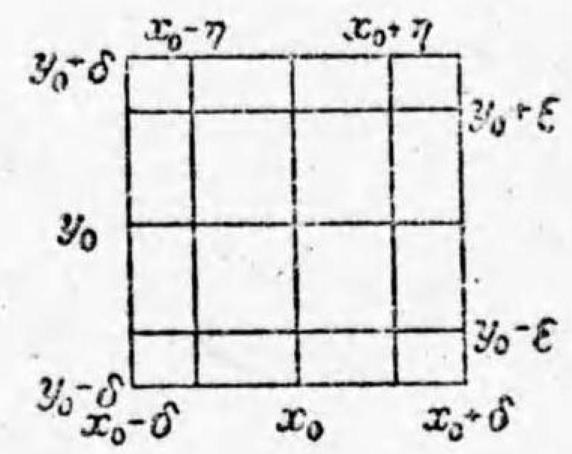
ヲ滿足スル x, y ノ値ニ對シテ $|A(x,y)|$, $|B(x,y)|$ ハ有限ニシテ然カモ $|B(x,y)|>0$ ナリト考フルコトヲ得.

故ニ P, Q ヲ一定ノ正數トシテ

$$|B(x,y)|>P,\qquad |A(x,y)|<Q$$

次ニ正數 ε ヲ取リ $0<\varepsilon<\delta$ トシテ $y=y_0+\varepsilon$ ト置クトキハ

$$|B(x,y)(y-y_0)|>P\varepsilon$$



更ニ他ノ正數 η ヲ取リ，二ツノ不等式

$$0<\eta<\delta,\quad 0<\eta<\frac{P}{Q}\varepsilon$$

ヲ滿足セシメ且 $|x-x_0|<\eta$ ト取レバ

$$|A(x,y)(x-x_0)|<Q\eta$$

然ルニ假定ニヨリテ $Q\eta<P\varepsilon$ ナルガ故ニ

$$|A(x,y)(x-x_0)|<|B(x,y)(y-y_0)|$$

之ハ $f(x,y)$ ノ符號ガ $B(x,y)(y-y_0)$ ニヨリテ定マルコトヲ示ス.

又 $f_y(x,y)\gtrless 0$ ナルガ故ニ $B(x,y)$ ハ恒ニ一定ノ符號ヲ有ス，依テ

$$B(x,y_0+\varepsilon)(\varepsilon),\qquad B(x,y_0-\varepsilon)(-\varepsilon)$$

從テ　　$f(x,y_0+\varepsilon),\qquad f(x,y_0-\varepsilon)$

ハ互ニ反對ノ符號ヲ有スベシ.

卽チ x ノ一ツノ値ニ對シテ $y_0+\varepsilon$ ト $y_0-\varepsilon$ トノ間ニ於テ $f(x,y)$ ヲ 0 ニ等シカラシムベキ y ノ値ハ少クモ一ツ存在ス，然カモ $f_y(x,y)\gtrless 0$ ナルガ故ニ此ノ値ハ唯一ツナルコト明ナリ.

同樣ニシテ順次ニ $f(x,y)=0$ ヲ滿足スル x, y ノ値 (x_1,y_1), (x_2,y_2), ……, (x_n,y_n), …… ヲ得，之ヲ $y=\phi(x)$ ニテ表ハストキハ $y=\phi(x)$ ハ x_0 ニ於テ連續ニシテ從テ又 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$ ニ於テ連續ナリ.

次ニ x, y 及ビ $x+\Delta x, y+\Delta y$ ガ $f(x, y)=0$ ヲ滿足ストスレバ

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=0$$

卽チ　$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)+f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=0$

從テ　$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y=0$$

故ニ　$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{f_y(x, y+\theta_2\Delta y)}$$

y ハ連續ナルガ故ニ $\Delta x\to 0$ ナルトキ $\Delta y\to 0$ ニシテ, $f_x(x, y)$ 及ビ $f_y(x, y)$ モ亦連續ナルガ故ニ $f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)$ 及ビ $f_y(x, y+\theta_2\Delta y)$ ハ極限ニ於テ夫々 $f_x(x, y)$ 及ビ $f_y(x, y)$ トナル.

依テ　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\gtrless 0$ ナルガ故ニ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ必ズ存在シ且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ハ連續ナルガ故ニ $\dfrac{dy}{dx}$ モ亦連續函數ナリ.

此ノ方法ニヨリ $f(x, y)=0$ ヨリ直接ニ x, y ニテ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ヲ表ハスコトヲ得.

尙　ト全ク同樣ニ $f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)$ ガ連續ニシテ $f_x(x, y)\gtrless 0$ ナルトキハ $f(x, y)=0$ ヲ滿足シ且 $y=y_0$ ナルトキ $x=a$　ル値ヲ有スル連續函數 $x=\psi(y)$ ハ存在シ

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$$

ナルコトヲ證明スルヲ得.

同樣ニ x, y, z ヲ獨立變數トスル函數 $f(x, y, z)$ 及ビ其ノ偏導來函數 f_x, f_y, f_z ガ何レモ連續ニシテ $f(x_0, y_0, z_0)=0$, $f_z(x_0, y_0, z_0)\gtrless 0$ ナ　場合ニハ方程式 $f(x, y, z)=0$ ヲ滿足シ且 $x=x_0, y=y_0$ ナルトキ $z=z_0$ ナル連續函數 $z=\phi(x, y)$ ノ存在スルコトヲ證スルヲ得.

此ノ場合ニ x, y, z 及ビ $x+\Delta x, y, z+\Delta_x z$ ガ $f(x, y, z)=0$ ヲ滿足ストスレバ

$$f(x+\Delta x, y, z+\Delta_x z)-f(x, y, z)=0$$

卽チ　$$f(x+\Delta x, y, z+\Delta_x z)-f(x, y, z+\Delta_x z)$$
$$+f(x, y, z+\Delta_x z)-f(x, y, z)=0$$

從テ　$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y, z+\Delta_x z)\Delta x+f_z(x, y, z+\theta_2\Delta_x z)\Delta_x z=0$$

故ニ　$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

同樣ニ　$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

故ニ　$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

一般ニ $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, z)=0$ ニ於テ $f_z(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, z)\gtrless 0$ ナルトキ次ノ式ヲ得.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}=0$$

卽チ　$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}},\quad i=1, 2, \ldots\ldots, n$$

例 1. $ax^2+2bxy+cy^2=1.$

$f(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2-1$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=2ax+2by,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2bx+2cy$$

故ニ

$$ax+by+(bx+cy)\frac{dy}{dx}=0$$

依テ $bx+cy\gtrless 0$ トシテ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by}{bx+cy}$$

更ニ之ヲ x ニ關シテ微分スルトキハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a+b\dfrac{dy}{dx}}{bx+cy}+\frac{ax+by}{(bx+cy)^2}\left(b+c\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=-\frac{1}{(bx+cy)^2}\left\{\left(a+b\frac{dy}{dx}\right)(bx+cy)-(ax+by)\left(b+c\frac{dy}{dx}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{(bx+cy)^2}\left\{\left(a-b\frac{ax+by}{bx+cy}\right)(bx+cy)-(ax+by)\left(b-c\frac{ax+by}{bx+cy}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{(bx+cy)^3}\{(ac-b^2)(bx+cy)y+(ac-b^2)(ax+by)x\}$$

$$=-\frac{ac-b^2}{(bx+cy)^3}(ax^2+2bxy+cy^2)$$

故ニ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^2-ac}{(bx+cy)^3},\qquad bx+cy\gtrless 0$$

注意 此ノ種ノ問題ハ次ノ如クスルモ同一ノ結果ニ到着ス.

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

之ヲ又微分スルトキハ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx}+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

即チ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

依テ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

此ニ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(ax+by),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2(bx+cy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2a,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2b,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2c$$

例 2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

x 及ビ y ヲ獨立變數トシテ微分スルトキハ

$$\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

故ニ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{c^2x^2}{a^4z^2}\right),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{c^2y^2}{b^4z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$$

36. 聯立方程式ニヨリテ定マル陰伏函數

x, y, z ヲ獨立變數トスル函數 $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ 及ビ其ノ偏導來函數 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, \dfrac{\partial f_2}{\partial z}$ ガ何レモ連續ナルトキ x, y, z ノ一組ノ値 x_0, y_0, z_0 ニ對シテ $f_1=0$, $f_2=0$ ニシテ $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}-\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\gtrless 0$ ナリト假定ス.

最後ノ條件ヨリ少クモ $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}, \dfrac{\partial f_1}{\partial z}$ ノ何レカ一ツハ 0 ニ等シカラズト考フルコトヲ得, 依テ $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\gtrless 0$ トスレバ第35節ニヨリ $f_1(x, y, z)=0$ ヨリ $x=x_0$, $y=y_0$ ナルトキ $z=z_0$ ナル連續函數 $z=\phi(x, y)$ ヲ得.

次ニ
$$f_2(x, y, z)=f_2(x, y, \phi)=\psi(x, y)$$
ト置クトキハ
$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

又 $f_1(x, y, z)=0$ ヨリ
$$0=\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

此ノ二式ヨリ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ消去シテ
$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}-\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial f_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}\gtrless 0$$

依テ $\psi(x, y)=0$ ヨリ連續函數 $y=\phi_1(x)$ ヲ得, 從テ $z=\phi(x, y)$ ヨリ連續函數 $z=\phi_2(x)$ ヲ得.

故ニ此ノ場合ニハ $f_1(x, y, z)=0, f_2(x, y, z)=0$ ヲ滿足シ且 $x=x_0$ ナルトキ $y=y_0$, $z=z_0$ ナル連續函數 $y=\phi_1(x)$, $z=\phi_2(x)$ ハ存在ス.

$f_1(x, y, z)=0, f_2(x, y, z)=0$ ヲ x ニ關シテ微分スルトキハ
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

依テ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}, \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{X}}$$

此ニ
$$\mathrm{X}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\end{vmatrix}, \quad \mathrm{Y}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\end{vmatrix}, \quad \mathrm{Z}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

前同樣ニシテ x, y, u, v ヲ獨立變數トスル二ツノ函數 $f_1(x, y, u, v)$, $f_2(x, y, u, v)$ 及ビ其ノ第一次偏導來函數ガ何レモ連續ニシテ $x=x_0$, $y=y_0$, $u=u_0$, $v=v_0$ ナルトキ $f_1(x, y, u, v)=0$, $f_2(x, y, u, v)=0$ ニシテ且 $\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial f_2}{\partial v}-\dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial f_2}{\partial u}\gtrless 0$ ナル場合ニハ $f_1=0, f_2=0$ ヲ滿足シ且 $x=x_0$, $y=y_0$ ナルトキ $u=u_0$, $v=v_0$ ナル連續函數 $u=\phi_1(x, y)$, $v=\phi_2(x, y)$ ノ存在スルコトヲ證スルヲ得.

尚 $f_1(x, y, u, v)=0, f_2(x, y, u, v)=0$ ヨリ
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

之ニヨリテ $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得.

例 1. $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad lx+my+nz=p$

x ヲ獨立變數トシテ微分スレバ

$$x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0,\qquad l+m\frac{dy}{dx}+n\frac{dz}{dx}=0$$

依テ此ノ二式ヨリ次ノ値ヲ得.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{lz-nx}{ny-mz},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{mx-ly}{ny-mz}$$

$$ny-mz\gtrless 0$$

例 2. $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$

$x,\ y$ ヲ獨立變數トシテ微分スレバ

$$1=\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x},\qquad 0=\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$0=\frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x},\qquad 1=\frac{\partial r}{\partial y}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

之ヨリ次ノ値ヲ得.

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$$

又 $r,\ \theta$ ヲ獨立變數トシテ微分スレバ

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$$

注意 上ノ式ヨリ次ノ如ク重要ナル結果ヲ得.

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial x},\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}=r^2\frac{\partial\theta}{\partial x},\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r^2\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

此ニ $\dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial y}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta},\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta}$ ニ於テハ獨立變數ハ $r,\ \theta$ ニシテ, $\dfrac{\partial r}{\partial x},\ \dfrac{\partial r}{\partial y},$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial x},\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}$ ニ於テハ $x,\ y$ トス.

37. 陰伏函數ノ極大極小

I. $f(x,\ y)=0$

$x,\ y$ ヲ獨立變數トスル函數 $f(x,\ y)$ 及ビ其ノ偏導來函數ハ何レモ連續ニシテ, $f(x,\ y)=0$ ニヨリ定メラレタル函數 $y=\phi(x)$ ガ存在スルモノトシ, 第 35 節ニヨリ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \tag{1}$$

$y=\phi(x)$ ガ極大又ハ極小ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}=0$, 從テ (1) ニヨリテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

故ニ $f(x,y)=0$ ヨリ y ノ極大極小ヲ索ムルニハ聯立方程式 $f(x,y)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ ノ根ヲ索メ之ヲ $x_0,\ y_0$ トシ, 此ノ値ヲ先ヅ $\dfrac{dy}{dx}$ ニ代入シテ 0 ニ等シキコトヲ確メ, 次ニ (1) ヲ微分シテ得タル

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{2}$$

ニ代入シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right)_{x_0,\,y_0}$$

ガ負ナレバ $y=y_0$ ハ $x=x_0$ ニ於テ極大, 又正ナレバ極小ナリ

尙 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ 0 ニ等シキ場合ニハ更ニ (2) ヲ微分シテ高次ノ微分係數ヲ索メ極大極小ヲ決定スベキモノトス.

注意 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}\gtrless 0$ ナルモ (1) ハ成立ス.

II. $f(x, y, z)=0$

x, y, z ヲ獨立變數トスル函數 $f(x, y, z)$ 及ビ其ノ偏導來函數ガ何レモ連續ニシテ, $f(x, y, z)=0$ ニヨリテ定メラレタル函數 $z=\phi(x, y)$ ガ存在スルモノトシテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$z=\phi(x, y)$ ガ極大又ハ極小ナルトキハ $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$, 從テ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

故ニ $f(x, y, z)=0$ ヨリ z ノ極大極小ヲ索ムルニハ聯立方程式 $f(x, y, z)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ノ根ヲ索メ之ヲ x_0, y_0, z_0 トシ, 此ノ値ヲ先ヅ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ニ代入シテ 0 ニ等シキコトヲ確メ, 然ル後 $\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ ヲ索メ, $x=x_0, y=y_0$ ナルトキ $\Delta>0$ ニシテ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$ ナルトキハ $z=z_0$ ハ z ノ極大ニシテ, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$ ナルトキハ極小ナリ

III. $f_1(x, y, z)=0, f_2(x, y, z)=0$

x, y, z ヲ獨立變數トスル函數 $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ 及ビ其ノ偏導來函數ガ何レモ連續ニシテ $f_1(x, y, z)=0$, $f_2(x, y, z)=0$ ニヨリテ定メラレタル函數 $y=\phi_1(x)$, $z=\phi_2(x)$ ガ存在スルモノトシテ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

依テ $$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$y=\phi_1(x)$ ガ極大又ハ極小ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=0$, 故ニ $f_1(x, y, z)=0$, $f_2(x, y, z)=0$ ヨリ y ノ極大極小ヲ索ムルニハ聯立方程式 $f_1(x, y, z)=0$, $f_2(x, y, z)=0$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z}=0$ ノ根ヲ索メテ之ヲ x_0, y_0, z_0 トシ, 此ノ値ヲ $\frac{dy}{dx}$ ニ代入シテ 0 ニ等シキコトヲ確メタル後 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ヲ索メ, $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ ナルトキハ $y=y_0$ ハ $x=x_0$ ニ於テ極大ニシテ, $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ ナルトキハ極小ナリ.

n 個ノ變數ノ間ニ m 個ノ方程式ガ成立スル場合ニモ同樣トス.

例 1. $x^2+xy+y^2=1$

第 35 節例 1 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6}{(x+2y)^3}$$

依テ $x^2+xy+y^2=1$, $2x+y=0$ ヨリ次ノ値ヲ得.

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

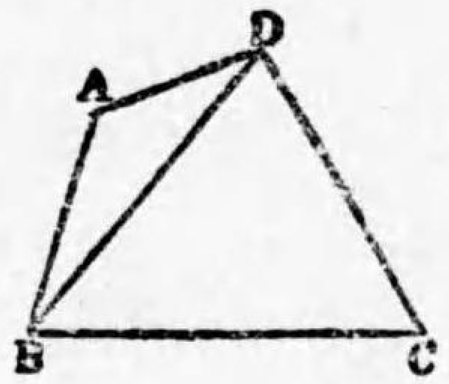
從テ $$x+2y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\mp\frac{4}{\sqrt{3}}=\mp\sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{6}{3\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

故ニ $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ハ y ノ極大値ニシテ, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ハ y ノ極小値ナリ.

例 2. 一定ノ四邊ヲ有スル四邊形中ニテ面積ノ極大ナルモノヲ求メヨ.

四邊形 ABCD ノ四邊 AB, BC, CD, DA ヲ夫々 a, b, c, d トシ, $\angle BAD=\theta$, $\angle BCD=\phi$, 面積ヲ A トスルトキハ



$$A=\frac{1}{2}(ad\sin\theta+bc\sin\phi)$$

$$a^2+d^2-2ad\cos\theta=b^2+c^2-2bc\cos\phi$$

依テ θ ヲ獨立變數トスレバ

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}\left(ad\cos\theta+bc\cos\phi\frac{d\phi}{d\theta}\right),\quad ad\sin\theta=bc\sin\phi\frac{d\phi}{d\theta}$$

故ニ

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}ad\left(\cos\theta+\frac{\cos\phi\sin\theta}{\sin\phi}\right)=\frac{ad}{2}\,\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}$$

$\frac{dA}{d\theta}=0$ ヨリ次ノ値ヲ得.

$$\theta+\phi=\pi$$

$$\frac{d^2A}{d\theta^2}=\frac{ad}{2}\left\{\frac{\cos(\theta+\phi)}{\sin\phi}\left(1+\frac{d\phi}{d\theta}\right)-\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin^2\phi}\cos\phi\frac{d\phi}{d\theta}\right\}$$

$$=\frac{ad}{2}\left\{\frac{\cos(\theta+\phi)}{\sin\phi}-\frac{ad}{bc}\,\frac{\sin^2\theta}{\sin^3\phi}\right\}$$

$\theta+\phi=\pi$ ト置ケバ

$$\frac{d^2A}{d\theta^2}=-\frac{ad(ad+bc)}{2bc\sin\phi}<0$$

故ニ一定ノ四邊ヲ有スル四邊形中ニテ對角ノ和ガ二直角ニ等シキモノ即チ各頂點ガ一ツノ圓ノ上ニアルモノガ面積極大ナリ.

38. 一ツノ獨立變數ヲ有スル函數ニ於ケル變數ノ變更

函數ノ研究ニ當リ屢其ノ變數ノ變更ヲ必要トスルコトアリ, 然ルニ變數ヲ變更スルトキハ其ノ逐次導來函數モ亦之ニ從テ變ズ, 依テ以下所要ノ函數ハ何レモ連續ニシテ微分可能ナリト假定シ, 最初ニ最モ簡單ナル場合トシテ一ツノ獨立變數ヲ有スル函數 $y=f(x)$ ニ於ケル變數ノ變更ニ就テ研究セントス.

I. $y=f(x)$ ニ於テ $x=\phi(t)$ ト置クトキハ

$$y=f\{\phi(t)\}$$

即チ y ハ結局 t ノ函數トナル, 依テ t ヲ新ナル獨立變數トシテ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... ヲ t, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... ニテ表ハス順序ヲ示サントス.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt},\qquad \frac{dx}{dt}=\phi'(t)$$

故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\phi'(t)}\,\frac{dy}{dt}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ上ノ式ニ於テ y ノ代リニ $\frac{dy}{dx}$ 即チ $\frac{1}{\phi'(t)}\frac{dy}{dt}$ ト置キタルモノニ等シ, 即チ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\phi'(t)}\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\phi'(t)}\,\frac{dy}{dt}\right\}$$

$$=\frac{1}{\phi'(t)}\left[\frac{1}{\phi'(t)}\,\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^2}\,\frac{dy}{dt}\right]$$

故ニ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\{\phi'(t)\}^2}\,\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}\,\frac{dy}{dt}$$

$\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ... ニ就テモ同様ナリ.

倚 $x=\phi(t)$, $y=f(x)$ ヨリ $y=f\{\phi(t)\}$ 即チ $y=\mathrm{F}(t)$ ヲ得.

故ニ $x=\phi(t)$, $y=\mathrm{F}(t)$ ナルトキ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... ヲ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... ニテ表ハスコトヲ得, 即チ

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}$$

$\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ... ニ就テモ同様ナリ.

例 1. $x=e^t$ ト置キテ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ ニ於ケル獨立變數ヲ x ヨリ t ニ變更セヨ.

$x=e^t$ ナルトキハ $\frac{dx}{dt}=e^t=x$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dt}\right)=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$$

故ニ $^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ ニ代入シテ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

注意 A 及ビ B ヲ任意ノ常數トシテ $y=\mathrm{A}\sin t+\mathrm{B}\cos t$ ト置クトキハ $\frac{d^2y}{dt^2}=-\mathrm{A}\sin t-\mathrm{B}\cos t$ ヲ得, 依テ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

然ルニ上ノ證明ニヨリ $x=e^t$ 即チ $t=\log x$ ト置クトキハ $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$ ヨリ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ ヲ得, 故ニ

$$y=\mathrm{A}\sin(\log x)+\mathrm{B}\cos(\log x)$$

ハ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ ヲ滿足スルコト明ナリ.

例 2. $x=\phi(t)$, $y=\mathrm{F}(t)$ ナルトキ次ノ式ヲ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ ニテ表ハセ.

$$\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

$x=\phi(t)$, $y=\mathrm{F}(t)$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}$$

從テ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

故ニ

$$\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left\{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}$$

例 3.　$x^3+y^3=3xy$ ニ於テ　$y=xt$ ト置キテ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ヲ t ニテ表ハスコトニヨリ $\dfrac{dy}{dx}=0$ ヲ滿足スル x 及ビ y ノ値ヲ索メヨ

$x^3+y^3=3xy$ ニ於テ　$y=xt$ ト置クトキハ

$$x^3+x^3t^3=3x^2t$$

從テ
$$x=\frac{3t}{1+t^3},\qquad y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$\frac{dx}{dt}=3\left\{\frac{1}{1+t^3}-\frac{3t^3}{(1+t^3)^2}\right\}=\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=3\left\{\frac{2t}{1+t^3}-\frac{3t^4}{(1+t^3)^2}\right\}=\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

故ニ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

$t(2-t^3)=0$ ヨリ次ノ値ヲ得.

$$t=0,\qquad t=\sqrt[3]{2}$$

此等ノ値ニ對シテ　$1-2t^3\gtrless 0$

$x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$ ニ於テ

i)　$t=0$　トスレバ　$x=0$, $y=0$

ii)　$t=\sqrt[3]{2}$　トスレバ　$x=\sqrt[3]{2}$, $y=\sqrt[3]{4}$

故ニ此等二對ノ値ハ $\dfrac{dy}{dx}=0$ ヲ滿足スル x 及ビ y ノ値ナリ.

II.　$y=f(x)$ ニ於テ $x=\phi(u,v)$, $y=\mathrm{F}(u,v)$ ト置クトキハ

$$\mathrm{F}(u,v)=f\{\phi(u,v)\}$$

$$v=\psi(u)$$

依テ u ヲ新ナル獨立變數トシテ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, ... ヲ u, v, $\dfrac{dv}{du}$, $\dfrac{d^2v}{du^2}$, ... ニテ表ハスコトヲ得, 卽チ

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du}$$

$$\frac{dx}{du}=\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{dv}{du},\qquad \frac{dy}{du}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\frac{dv}{du}$$

故ニ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}}=\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\dfrac{dx}{du}}\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}\frac{d}{du}\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}$$

故ニ
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mathrm{U}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)-\mathrm{V}\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)}{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}\right)^3}$$

此ニ
$$\mathrm{U}=\frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial u\partial v}\frac{dv}{du}+\frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}$$

$$\mathrm{V}=\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}\frac{dv}{du}+\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}$$

$\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$, ... ニ就テモ同様ナリ.

幾何學ノ語ヲ用ヒテ說明スレバ x, y ヲ或ル座標系ニ於ケル一點ノ座標トシ, u, v ヲ他ノ座標系ニ於ケル同一ノ點ノ座標トスルトキハ

$$x=\phi(u, v), \qquad y=\mathrm{F}(u, v)$$

ハ點ノ座標變更ノ關係ヲ決定ス, 例ヘバ直角座標ノ原點ヲ極座標ノ極トシ, x 軸ノ正ノ部分ヲ極座標ノ原線ト一致セシムルトキハ

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

ハ直角座標 (x, y) ト極座標 (r, θ) トノ關係ヲ示ス, 從テ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 (x, y) ニ於ケル $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$ ノ値ハ $r, \theta, \frac{dr}{d\theta}, \frac{d^2r}{d\theta^2}, \ldots\ldots$ ニテ表ハスコトヲ得.

又 x, y ヲ一ツノ座標系ニ於ケル一點ノ座標トシ, u, v ヲ同一ノ座標系ニ於ケル他ノ點ノ座標トスルトキハ

$$x=\phi(u, v), \qquad y=\mathrm{F}(u, v)$$

ハ點ノ位置變更ノ關係ヲ決定ス, 依テ例ヘバ直交軸ノ場合ニ於テ $\frac{dy}{dx}$ ハ點 (x, y) ニ於ケル切線ノ方向, 又 $\frac{dv}{du}$ ハ點 (u, v) ニ於ケル切線ノ方向ヲ決定シ, $\frac{dy}{dx}$ ハ u, v, 及ビ $\frac{dv}{du}$ ニヨリテ定マルガ故ニ $u, v, \frac{dv}{du}$ ガ相等シキ値ヲ有スル點ニ對スル $\frac{dy}{dx}$ ハ相等シ, 即チ點 (u, v) ニ於テ相切スル二ツノ曲線ハ對應スル點 (x, y) ニ於テモ亦相切スルモノトス.

例 1. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ト置キテ獨立變數ヲ x ヨリ θ ニ變更スルコトニヨリ次ノ式ヲ $r, \theta, \frac{dr}{d\theta}, \frac{d^2r}{d\theta^2}$ ニテ表ハセ.

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ ト置クトキハ

$$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta+\frac{dr}{d\theta}\cos\theta. \qquad \frac{d^2x}{d\theta^2}=-r\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta+\frac{dr}{d\theta}\sin\theta, \qquad \frac{d^2y}{d\theta^2}=-r\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta+\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta$$

從テ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r\cos\theta+\frac{dr}{d\theta}\sin\theta}{-r\sin\theta+\frac{dr}{d\theta}\cos\theta}.$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{\left(-r\sin\theta+\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\theta^2}\frac{dx}{d\theta}-\frac{dy}{d\theta}\frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(-r\sin\theta+\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right)^3}$$

故ニ

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

例 2. $x=a_1u+b_1v+c_1,\quad y=a_2u+b_2v+c_2$ ト置キテ獨立變數ヲ x ヨリ u ニ變更スルトキハ $y=f(x)$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナル點ニ對應シテ $a_2u+b_2v+c_2=f(a_1u+b_1v+c_1)$ ニ於テ $\dfrac{d^2v}{du^2}=0$ ナル點ガ存在スルコトヲ示セ

$x=a_1u+b_1v+c_1,\quad y=a_2u+b_2v+c_2$ ト置クトキハ

$$\frac{dx}{du}=a_1+b_1\frac{dv}{du},\qquad \frac{d^2x}{du^2}=b_1\frac{d^2v}{du^2}$$

$$\frac{dy}{du}=a_2+b_2\frac{dv}{du},\qquad \frac{d^2y}{du^2}=b_2\frac{d^2v}{du^2}$$

從テ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}}=\frac{a_2+b_2\dfrac{dv}{du}}{a_1+b_1\dfrac{dv}{du}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{du^2}\dfrac{dx}{du}-\dfrac{dy}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}}{\left(\dfrac{dx}{du}\right)^3}$$

$$=\frac{b_2\dfrac{d^2v}{du^2}\left(a_1+b_1\dfrac{dv}{du}\right)-\left(a_2+b_2\dfrac{dv}{du}\right)b_1\dfrac{d^2v}{du^2}}{\left(a_1+b_1\dfrac{dv}{du}\right)^3}$$

$$=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)\dfrac{d^2v}{du^2}}{\left(a_1+b_1\dfrac{dv}{du}\right)^3}$$

故ニ $a_1b_2-a_2b_1\gtrless0$ トシテ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナルトキ $\dfrac{d^2v}{du^2}=0$ ナリ

39. 多クノ獨立變數ヲ有スル函數ニ於ケル變數ノ變更

1. $z=f(x,\ y)$ ニ於テ $x=\phi(u,\ v),\ y=\mathrm{F}(u,\ v)$ ト置クトキハ

$$z=f\{\phi(u,\ v),\ \ \mathrm{F}(u,\ v)\}$$

$$z=\psi(u,\ v)$$

依テ $u,\ v$ ヲ新ナル獨立變數トシテ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ …… ヲ $u,\ v,\ \dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2},$ …… ニテ表ハスコトヲ得.

卽チ
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

故ニ
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{V}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{V}}$$

此ニ
$$\mathrm{U}_1=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \mathrm{U}_2=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\mathrm{V}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$$

此ノ三式ニ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ノ値ヲ代入シテ, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ $u,\ v,$ $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ ニテ表ハスコトヲ得.

尙高次ノ偏導來函數ニ就テモ同様ナリ.

例 1. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ト置キテ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ニ於ケル獨立變數ヲ x, y ヨリ r, θ ニ變更セヨ.

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ ナルヲ以テ

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

故ニ
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$

$$=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}\right)$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)$$

即チ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}$$
$$+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

上ノ式ニ於テ θ ノ代リニ $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}$$
$$-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

故ニ
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

例 2. $u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y$ ト置キテ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ニ於ケル獨立變數ヲ x, y ヨリ u, v ニ變更シ, α, β ヲ適當ニ取ルコトニヨリテ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ ヲ得ルコトヲ示セ.

$z=f(x, y),\quad u=x+\alpha y,\quad v=x+\beta y$ ナルヲ以テ

$$x=\frac{\alpha v-\beta u}{\alpha-\beta},\qquad y=\frac{u-v}{\alpha-\beta}$$

故ニ
$$z=F(u, v),\quad u=x+\alpha y,\quad v=x+\beta y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

故ニ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ニ代入シテ次ノ式ヲ得.

$$(1-\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2(1-\alpha\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(1-\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

$\alpha=1,\quad \beta=-1$ ト取ルトキハ

$$1-\alpha^2=0,\qquad 1-\alpha\beta=2,\qquad 1-\beta^2=0$$

依テ
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

注意 F_1, F_2 ヲ任意ノ函數記號トシテ $z=F_1(u)+F_2(v)$ ヨリ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

ヲ得, 故ニ $z=F_1(x+y)+F_2(x-y)$ ハ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ滿足スルコト明ナリ.

II. $z=f(x,\ y)$ ニ於テ $x=\phi_1(u,\ v,\ w)$, $y=\phi_2(u,\ v,\ w)$, $z=\phi_3(u,\ v,\ w)$ ト置クトキハ

$$\phi_3(u,\ v,\ w)=f\{\phi_1(u,\ v,\ w),\ \phi_2(u,\ v,\ w)\}$$

$$w=\psi(u,\ v)$$

依テ $u,\ v$ ヲ新ナル獨立變數トシテ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \cdots\cdots$ ヲ $u,\ v,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial u},\ \dfrac{\partial w}{\partial v},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ ニテ表ハスコトヲ得, 即チ

$z=f(x,\ y)$, $x=\phi_1(u,\ v,\ w)$, $y=\phi_2(u,\ v,\ w)$ ヨリ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial\phi_1}{\partial u}+\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial\phi_1}{\partial v}+\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial\phi_2}{\partial u}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial\phi_2}{\partial v}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

又 $z=\phi_3(u,\ v,\ w)$ ヨリ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial\phi_3}{\partial u}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial\phi_3}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

故ニ

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}+\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\phi_3}{\partial u}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v}+\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial v}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\phi_3}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

此ノ二式ヲ解キテ $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ $u,\ v,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial u},\ \dfrac{\partial w}{\partial v}$ ニテ表ハスコトヲ得, 更ニ高次ノ偏導來函數ニ就テモ同樣ナリ.

例. $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ ト置キテ獨立變數ヲ $x,\ y$ ヨリ $\theta,\ \phi$ ニ變更スルコトニヨリ $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ ヲ $r,\ \theta,\ \phi,\ \dfrac{\partial r}{\partial\theta},\ \dfrac{\partial r}{\partial\phi}$ ニテ表ハセ.

$z=f(x,\ y)$, $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$ ヨリ

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta\cos\phi+r\cos\theta\cos\phi\right)$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta\sin\phi+r\cos\theta\sin\phi\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\phi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\sin\theta\cos\phi-r\sin\theta\sin\phi\right)$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\sin\theta\sin\phi+r\sin\theta\cos\phi\right)$$

又 $z=r\cos\theta$ ヨリ

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial r}{\partial\theta}\cos\theta-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial\phi}=\frac{\partial r}{\partial\phi}\cos\theta$$

故ニ

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta\cos\phi+r\cos\theta\cos\phi\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta\sin\phi+r\cos\theta\sin\phi\right)$$
$$=\frac{\partial r}{\partial\theta}\cos\theta-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\sin\theta\cos\phi-r\sin\theta\sin\phi\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\sin\theta\sin\phi+r\sin\theta\cos\phi\right)$$
$$=\frac{\partial r}{\partial\phi}\cos\theta$$

依テ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{X}},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{X}}$

然ルニ
$$\mathrm{X}=\frac{\partial r}{\partial\theta}r\sin^2\theta+r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\mathrm{U}=\frac{\partial r}{\partial\theta}r\sin\theta\cos\theta\cos\phi-\frac{\partial r}{\partial\phi}r\sin\phi-r^2\sin^2\theta\cos\phi$$

$$\mathrm{V}=\frac{\partial r}{\partial\theta}r\sin\theta\cos\theta\sin\phi+\frac{\partial r}{\partial\phi}r\cos\phi-r^2\sin^2\theta\sin\phi$$

依テ
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\cos\phi-\frac{\partial r}{\partial\phi}\sin\phi-r\sin^2\theta\cos\phi}{\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin^2\theta+r\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\sin\phi+\frac{\partial r}{\partial\phi}\cos\phi-r\sin^2\theta\sin\phi}{\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin^2\theta+r\sin\theta\cos\theta}$$

從テ
$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2+r^2\sin^2\theta}{\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin^2\theta+r\sin\theta\cos\theta\right)^2}$$

故ニ
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2+r^2\sin^2\theta}}{\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin^2\theta+r\sin\theta\cos\theta}$$

問　　題

1. $x^3+y^3=3xy$ ナルトキ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2xy}{(x-y^2)^3}$$
ナルコトヲ示セ.

2. $y=\phi(x)$ ニシテ, $\phi'(x)\gtrless 0$ ナルトキ y ヲ獨立變數トシテ
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\phi'(x)},\qquad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\phi''(x)}{\{\phi'(x)\}^3}$$
ナルコトヲ證明セヨ

3. $z=f(x,\ y)$ ニシテ $f_x(x,\ y)\gtrless 0$ ナルトキ $y,\ z$ ヲ獨立變數トシテ
$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3}$$
ナルコトヲ證明セヨ

4. $x^3+y^3=3xy$ ナルトキ x^2+y^2 ハ $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}$ ニ於テ極大, $x=0,\ y=0$ ニ於テ極小ナルコトヲ證明セヨ.

5. 一定ノ體積ヲ有スル直圓錐ノ高サヲ h, 其ノ底ノ半徑ヲ r トスレバ全表面積ハ $\frac{h}{r}=2\sqrt{2}$ ナルトキ極小ナルコトヲ證明セヨ.

6. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ニ於テ $y=xt$ ト置キテ x 及ビ y ヲ t ニテ表ハスコトニヨリテ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-3t^2}{t(t^2-3)}$$

ナルコトヲ示セ

7. $x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$ ナルトキ

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=\frac{(a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi)^3}{a^2b^2}$$

ナルコトヲ示セ

8. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ ニ於テ $u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y$ ト置キテ獨立變數ヲ x, y ヨリ u, v ニ變更シ, α, β ヲ適當ニ取ルコトニヨリテ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0$ ヲ得ルコトヲ示セ

9. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ トシテ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ニ於ケル獨立變數ヲ x, y ヨリ r, θ ニ變更セヨ

10. $u=\sqrt{(x+a)^2+y^2},\ v=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ トシテ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ ニ於ケル獨立變數ヲ x, y ヨリ u, v ニ變更シ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{u^2+v^2-4a^2}{uv}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

ヲ得ルコトヲ示セ

第 8 章　平面曲線ニ於ケル應用

40. 切線及ビ法線

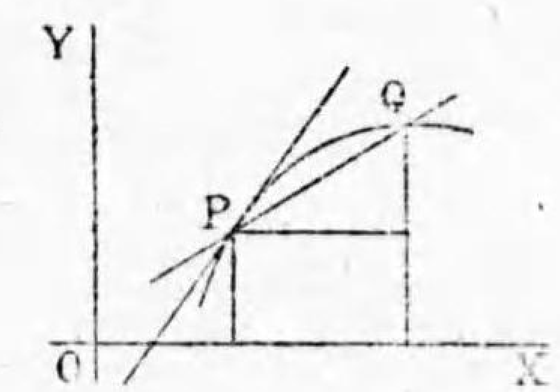
方程式 $y=f(x)$ ヲ滿足スル x 及ビ y ノ値ヲ座標トスル點ハ x ノ値ノ變動スルニ從テ平面曲線ヲ畫ク 此ノ場合ニ $y=f(x)$ ヲ此ノ曲線ノ方程式トイフ.

平面曲線ハ又 $F(x, y)=0$, 或ハ $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$ ニテ之ヲ表ハスコトヲ得.

以下平面曲線ニ關スル研究ニ於テ必要ナル函數及ビ其ノ導來函數ハ何レモ一價連續トシテ之ヲ論ズルコトトス

先ヅ曲線 $y=f(x)$ 上ノ二點 $P(x, y),\ Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ヲ

$$AX+BY+C=0$$



トスレバ

$$Ax+By+C=0$$

$$A(x+\Delta x)+B(y+\Delta y)+C=0$$

上ノ三式ヨリ A, B, C ヲ消去スレバ次ノ式ヲ得

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ \Delta x & \Delta y & 0 \end{vmatrix}=0$$

即チ　　$\Delta x(Y-y)=\Delta y(X-x)$

Δx ガ 0 ニ收斂スルトキハ Δy モ亦 0 ニ收斂シ，極限ニ於テ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \qquad (1)$$

ヲ得；之ヲ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル切線ノ方程式トス.

曲線ノ方程式ガ $F(x, y)=0$ ナルトキハ第 35 節ニヨリ

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ次ノ式ヲ得.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0 \qquad (2)$$

又 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ナルトキハ第 38 節ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ

$$\phi'(t)(Y-y)=\psi'(t)(X-x) \qquad (3)$$

曲線上ノ一點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ヲ其ノ點ニ於ケル**法線**トイフ，曲線ノ方程式ガ $y=f(x)$, $F(x, y)=0$, 又ハ $x=\phi(t), y=\psi(t)$ ナルニ從テ $P(x, y)$ ニ於ケル法線ノ方程式次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}&(Y-y)f'(x)+X-x=0\\&\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}\\&\psi'(t)(Y-y)+\phi'(t)(X-x)=0\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

尙點 P ニ於ケル切線及ビ法線ノ其ノ點ト x 軸トノ間ニアル部分ヲ夫々**切線ノ長サ**及ビ**法線ノ長サ**トイフ.

例 1. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

$F(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(ax+hy+g), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2(hx+by+f)$$

故ニ曲線 $F(x, y)=0$ 上ノ點 P ニ於ケル切線ノ方程式次ノ如シ.

$$(ax+hy+g)(X-x)+(hx+by+f)(Y-y)=0$$

卽チ

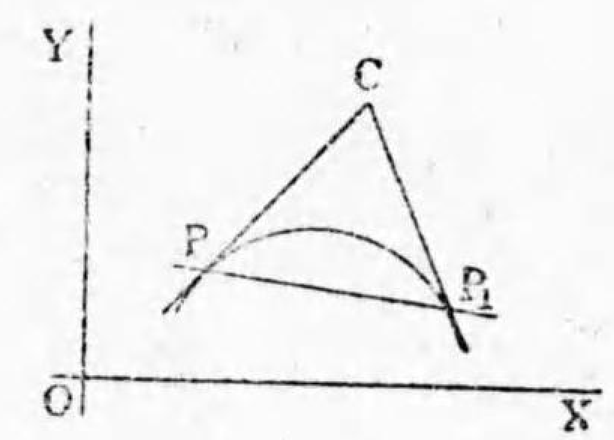
$$\begin{aligned}&(ax+hy+g)X+(hx+by+f)Y\\&\quad=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c-(gx+fy+c)\end{aligned}$$

依テ求ムル方程式ハ次ノ形ヲ取ル

$$(ax+hy+g)X+(hx+by+f)Y+gx+fy+c=0$$

此ノ直線ガ一ツノ定點 $C(x_0, y_0)$ ヲ通過ストスレバ

$$\begin{aligned}&(ax+hy+g)x_0+(hx+by+f)y_0\\&\quad+gx+fy+c=0\end{aligned}$$



$C(x_0, y_0)$ ヲ通過スル切線ノ切點ハ此ノ方程式ノ表ハス直線上ニアルコト明ナルガ故ニ $F(x, y)=0$ ト此直線トノ交點ハ卽チ $C(x_0, y_0)$ ヲ通過スル切線ノ切點ヲ決定ス，然ルニ二ツノ方程式ノ一ツハ二次式ニシテ一ツハ一次式ナルヲ以テ之ヨリ定マル x, y ノ値ハ二對共ニ實數ナルカ又ハ共ニ虛數ナリ

故ニ $C(x_0, y)$ ノ位置ニヨリ C ヨリ曲線 $F(x, y)=0$ ニ二ツノ切線ヲ引キ得ル場合ト一ツノ切線ヲモ引キ得ザル場合アリトス

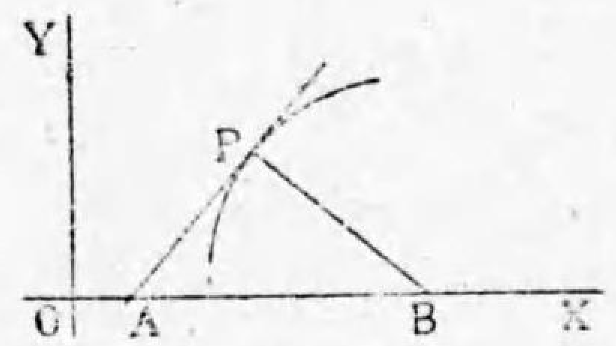
之ト同様ニシテ定點ヨリ一ツノ代數曲線ニ引キ得ル切線ノ數ヲ定ムルコトヲ得.

例 2. $x=a(u-\sin u),\quad y=a(1-\cos u)$

$$\frac{dx}{du}=a(1-\cos u),\qquad \frac{dy}{du}=a\sin u,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin u}{1-\cos u}$$

故ニ此ノ曲線上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ (3) ニヨリ

$$(Y-y)\sin\frac{u}{2}=(X-x)\cos\frac{u}{2}\qquad \text{(a)}$$



又法線ノ方程式ハ (4) ニヨリ

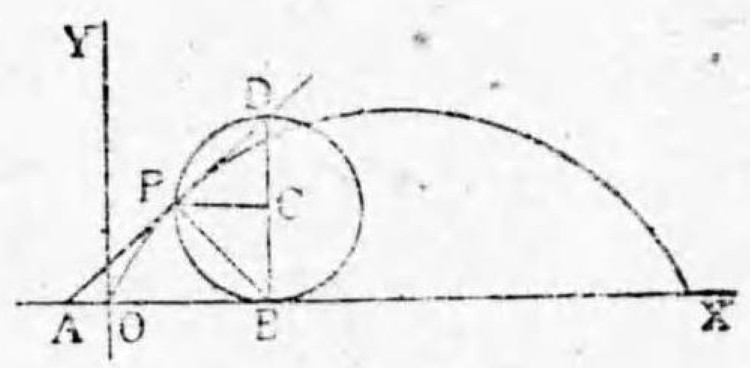
$$(Y-y)\cos\frac{u}{2}=-(X-x)\sin\frac{u}{2}\quad \text{(b)}$$

(a) ヨリ切線ノ長サ PA, 又 (b) ヨリ法線ノ長サ PB ヲ得, 卽チ

$$PA=\sqrt{y^2+y^2\tan^2\frac{u}{2}}=y\sec\frac{u}{2}=2a\sin\frac{u}{2}\tan\frac{u}{2}$$

$$PB=\sqrt{y^2+y^2\cot^2\frac{u}{2}}=y\,\mathrm{cosec}\frac{u}{2}=2a\sin\frac{u}{2}$$

注意 半徑ガ a ナル圓ガ定直線ニ沿ウテ轉ズルトキ, 此ノ直線ヲ x 軸トシ, 定圓ノ最初ニ切スル點 O ヲ原點トシ, 任意ノ位置ニ於ケル圓ノ中心ヲ C, 又 O ニ對應スル圓上ノ點ヲ $P(x, y)$ トシ, 直徑 BCD ヲ引キテ $\angle PCB=u$ トスレバ



$$x=a(u-\sin u),\qquad y=a(1-\cos u),\qquad \frac{dy}{dx}=\cot\frac{u}{2}$$

從テ $\angle PDB=\angle PBA=\frac{u}{2}$ ニシテ PA ハ P ニ於ケル切線ノ方向又 PB ハ法線ノ方向ナリ; 從テ上ニ得タルガ如ク

$$PB=2a\sin\frac{u}{2},\qquad PA=PB\tan\frac{u}{2}=2a\sin\frac{u}{2}\tan\frac{u}{2}$$

例 3. 垂足曲線

定曲線ノ切線ニ對シテ定點ヨリ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ其ノ點ニ關スル其ノ曲線ノ**垂足曲線**トイフ

曲線 $F(x, y)=0$ 上ノ一點 (x, y) ニ於ケル切線ハ

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

ニシテ原點ヨリ之ニ下セル垂線ハ

$$X\frac{\partial F}{\partial y}-Y\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

依テ此ノ二式ト $F(x, y)=0$ トヨリ x, y ヲ消去スルトキハ原點ニ關スル曲線 $F(x, y)=0$ ノ垂足曲線ノ方程式ヲ得

特ニ曲線ノ方程式ヲ $\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m=1$ トスレバ

$$\frac{X}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}+\frac{Y}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}=1,\qquad \frac{aX}{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}}=\frac{bY}{\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}}$$

依テ

$$\frac{X^2}{\frac{X}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}}=\frac{Y^2}{\frac{Y}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}}=\frac{X^2+Y^2}{\frac{X}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}+\frac{Y}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}}=\frac{X^2+Y^2}{1}$$

從テ

$$(X^2+Y^2)^{\frac{m}{m-1}}=\frac{(aX)^{\frac{m}{m-1}}}{\left(\frac{x}{a}\right)^m}=\frac{(bY)^{\frac{m}{m-1}}}{\left(\frac{y}{b}\right)^m}=\frac{(aX)^{\frac{m}{m-1}}+(bY)^{\frac{m}{m-1}}}{1}$$

故ニ

$$(X^2+Y^2)^{\frac{m}{m-1}}=(aX)^{\frac{m}{m-1}}+(bY)^{\frac{m}{m-1}}$$

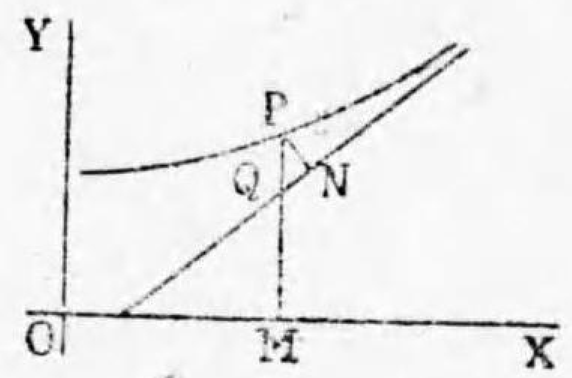
$m=2$ トスレバ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\qquad (X^2+Y^2)^2=(aX)^2+(bY)^2$$

41. 漸近線

一ツノ曲線ノ一枝ガ無限ニ延長スル場合ニハ第1章第3節ニ於テ學ゲタルガ如ク，此ノ枝上ノ一點ヨリ一ツノ定直線ニ至ル距離ガ其ノ點ノ位置原點ヲ距ルニ從テ益減少シ，結局無限大ノ距離ニ於テ 0 ニ收斂スルコトアリ，此ノ直線ヲ其ノ曲線ノ**漸近線**トス．

先ヅ曲線 $y=f(x)$ ニ於テ y 軸ニ平行ナラザル漸近線存在スト假定シテ，其ノ方程式ヲ



爲　　$\mathrm{Y}=\alpha\mathrm{X}+\beta$

トシ，曲線上ノ一點 $\mathrm{P}(x, y)$ ヨリ下セル垂線 PN ノ長サヲ p, P ヨリ x 軸ニ至ル垂線 PM ト直線トノ交點ヲ Q, $\mathrm{PQ}=\delta$ トスレバ

$$\mathrm{PQ}=y-\mathrm{Y}=\delta, \qquad \delta=y-\alpha x-\beta$$

又
$$p=\frac{y-\alpha x-\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

假定ニヨリ α ハ有限ニシテ $\lim\limits_{x\to\infty} p=0$

故ニ
$$\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x-\beta)=0$$

從テ
$$y=\alpha x+\beta+\delta, \qquad \lim_{x\to\infty}\delta=0$$

依テ
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\alpha+\frac{\beta+\delta}{x}\right)=\alpha$$

即チ
$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

此ノ如クシテ得タル α ノ値ヲ代入シテ

$$\beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-\alpha x\}$$

漸近線ガ y 軸ニ平行ナル場合ニハ x ト y トヲ交換シテ考フベシ，或ハ $\lim\limits_{x\to a} y=\infty$ ナルトキハ $x=a$ ハ漸近線ナリ．

注意　$\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y'}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{dy}{dx}$

$$\beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{y}{x}-\alpha}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

故ニ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{dy}{dx}$ 及ビ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)$ ガ有限確定ナル場合ニハ漸近線ハ切線

$$\mathrm{Y}=\mathrm{X}\frac{dy}{dx}+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

ニ於テ切點 (x, y) ガ無限大ニアル極限ト考フルコトヲ得，然レドモ一般ニ漸近線ハ必ズシモ無限大ニ於ケル切線ニアラズ，例ヘバ $y=\dfrac{\sin x}{x}$ ニ於テハ

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0, \qquad \beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)=0$$

故ニ $y=0$ ハ此ノ曲線ノ漸近線ナリ，然ルニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)=\text{不定}$$

故ニ $y=0$ ハ切點ガ無限大ニアル切線ト考フルコトヲ得ズ．

例 1. $(x-1)y^2=x^2(x+1)$

$y=\pm x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ ニ於テ y 軸ニ平行ナラザル漸近線アリト假定シ, 其ノ方程式ヲ $Y=\alpha X+\beta$ トスレバ

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\pm\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\pm1$$

$$\beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)=\pm\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)$$

$$=\pm\lim_{x\to\infty}x\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right\}$$

$$=\pm\lim_{x\to\infty}x\left\{\left(1+\frac{1}{x}+\cdots\cdots\right)-1\right\}=\pm1$$

故ニ漸近線ノ方程式ハ次ノ如シ.

$$Y=X+1,\qquad Y=-X-1$$

又 $x=1$ ナルトキ $y=\infty$ ナルヲ以テ他ニ尚一ツノ漸近線アリ.

$$X=1$$

注意 漸近線ヲ求ムルニハ此ノ場合次ノ如クスルモ差支ナシ.

$$(x-1)y^2=(x^2-1)(x+1)+(x+1)$$

即チ
$$(x-1)\{y^2-(x+1)^2\}=x+1$$

從テ
$$y-(x+1)=\frac{x+1}{(x-1)(y+x+1)}$$

$$y+x+1=\frac{x+1}{(x-1)(y-x-1)}$$

$$x-1=\frac{x+1}{y^2-(x+1)^2}$$

上ノ三式ヨリ曲線ハ無限大ニ於テ直線 $y-x-1=0$, $y+x+1=0$, $x=1$ ニ限リナク近ヅクコト明ナリ, 故ニ此ノ三直線ハ漸近線ナリ.

例 2. $(x^2-1)y^2+2x^2y+x^2-1=0$

此ノ方程式ヲ y ニ關シテ解クトキハ

$$y=\frac{-x^2\pm\sqrt{2x^2-1}}{x^2-1}=\left(-1\pm\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}$$

$$=\left(-1\pm\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots\cdots\right)$$

依テ x ガ十分大ナルトキ曲線ハ次ノ方程式ノ表ハス曲線ト大略同一ノ形ヲ取ルト考フルコトヲ得.

$$y=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{x}$$

故ニ $y=-1$ ハ漸近線ニシテ, x ガ限リナク大ナルトキ曲線ハ兩側ヨリ直線ニ接近ス.

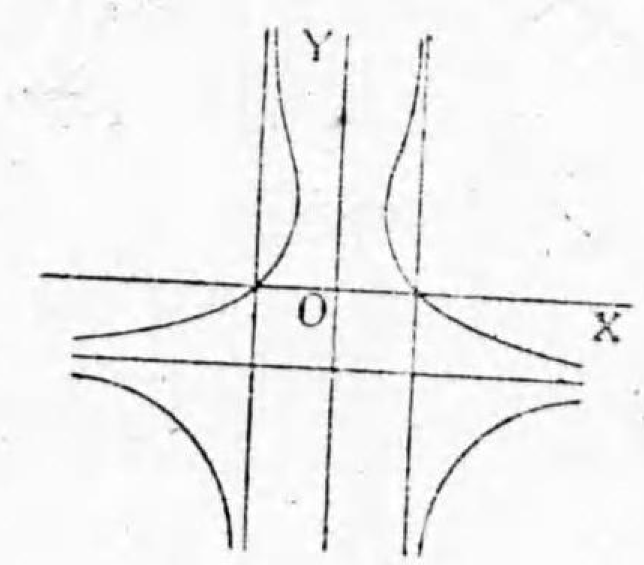
次ニ
$$x^2(y+1)^2=y^2+1$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y}=\pm\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-1}$$

$$=\pm\left(1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2y^2}+\cdots\cdots\right)$$

依テ y ガ十分大ナルトキハ

$$x=\pm\left(1-\frac{1}{y}\right)$$



故ニ $x=\pm1$ ハ漸近線ニシテ, $y>0$ ニ於テハ曲線ハ $x=1$ ノ左方及ビ $x=-1$ ノ右方ニアリ, $y<0$ ニ於テハ $x=1$ ノ右方及ビ $x=-1$ ノ左方ニアリ.

例 3. $(y^2-b^2)y=(x^2-a^2)x,\quad a>b>0$

此ノ方程式ヲ變ジテ次ノ形トナシ

$$\frac{y^3}{x^3}-1+\frac{1}{x^2}\left(a^2-b^2\frac{y}{x}\right)=0$$

$\frac{y}{x}=u$ ト置クトキハ

$$u^3-1+\frac{1}{x^2}(a^2-b^2u)=0$$

$x\to\infty$ ナル極限ニ於テ $u^3-1=0$, 從テ

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$$

次ニ $\frac{y}{x}=1+\frac{\beta}{x}$ ト置キ, β ハ常數又ハ x ノ函數ニシテ $\lim_{x\to\infty}\frac{\beta}{x}=0$ ト假定スレバ

$$\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^3-1+\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}\left(1+\frac{\beta}{x}\right)=0$$

即チ

$$3\frac{\beta}{x}+3\frac{\beta^2}{x^2}+\frac{\beta^3}{x^3}+\frac{a^2-b^2}{x^2}-\frac{b^2\beta}{x^3}=0$$

x ガ十分大ナルトキハ

$$3\beta+3\frac{\beta^2}{x}+\frac{a^2-b^2}{x}=0$$

$x\to\infty$ ナル極限ニ於テ

$$\beta=0$$

故ニ $y=x$ ハ漸近線ナリ.

尚又 x ガ十分大ナルトキ, 上ノ式ヨリ

$$3\beta^2+3\beta x+a^2-b^2=0$$

$$\beta=\frac{x}{2}\left\{-1\pm\sqrt{1-\frac{4(a^2-b^2)}{3x^2}}\right\}=\frac{x}{2}\left\{-1\pm\left(1-\frac{2}{3}\frac{a^2-b^2}{x^2}-\cdots\right)\right\}$$

β ハ極限ニ於テ0トナルベキモノナルヲ以テ前ノ式ニ於テ正ノ符號ヲ取ルコトトスレバ

$$\beta=-\frac{a^2-b^2}{3x}$$

之ヲ $\frac{y}{x}=1+\frac{\beta}{x}$ ニ代入シテ次ノ式ヲ得.

$$y=x-\frac{a^2-b^2}{3x}$$

元ノ曲線ハ無限大ニ於テ此ノ方程式ノ表ハス曲線ト同一ノ形ヲ取ルト考ヘ得ベキヲ以テ, $x>0$ ナルトキハ曲線ハ漸近線ノ下方ニ在リ. 又 $x<0$ ナルトキハ其ノ上方ニ在リ.

注意. 漸近線ヲ求ムルニハ此ノ場合ニモ次ノ如クスルヲ簡便トス.

$$(y-x)(y^2+yx+x^2)=b^2y-a^2x$$

依テ

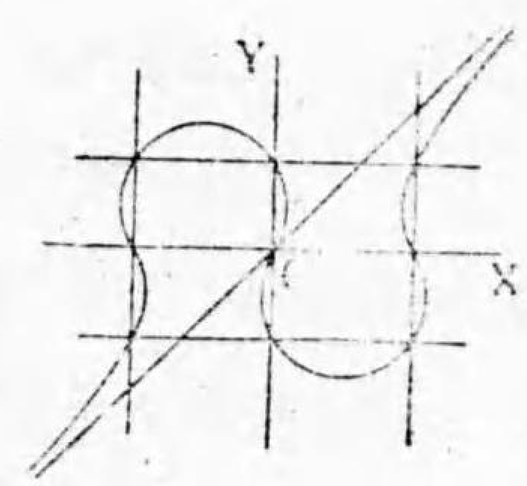
$$y-x=\left[\frac{b^2y-a^2x}{y^2+yx+x^2}\right]_{y=x}=\frac{b^2-a^2}{3x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{b^2-a^2}{3x}=0$$

故ニ x ガ十分大ナルトキハ

$$y=x+\frac{b^2-a^2}{3x}$$

ニシテ $y=x$ ハ漸近線ナリ.

尚此ノ曲線ハ六個ノ直線 $x=0$, $x=a$, $x=-a$, $y=0$, $y=b$, $y=-b$ ノ交點ヲ通過シ且 $(x^2-a^2)x$ ト $(y^2-b^2)y$ トガ同符號ヲ有スル部分ニ於テ存在ス.

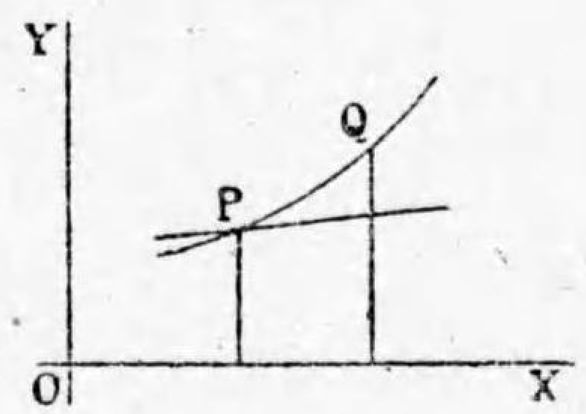


42. 曲線ト切線トノ關係ノ位置，彎曲點

曲線 $y=f(x)$ 上ノ二點ヲ $P(x_0, y_0)$，$Q(x_0+h, y)$ トシ，$f(x_0+h)$ ガテーロルノ定理ニヨリ展開シ得ト假定スレバ

$$y=y_0+hf'(x_0)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x_0+\theta h)$$

$$0<\theta<1$$



又 P ヲ通過スル直線ヲ

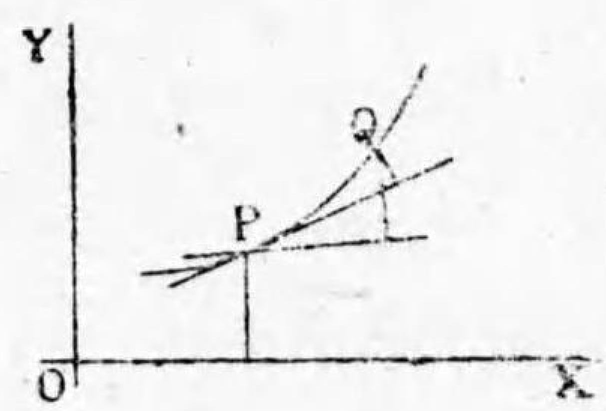
$$Y=y_0+k(X-x_0)$$

トシ，$y-Y=\delta$ ト置クトキハ

$$\delta=h\{f'(x_0)-k\}+\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta h)$$

$f'(x_0)\gtrless k$ ナルトキハ h ヲ第一位ノ無限小トシテ，δ ハ第一位ノ無限小ニシテ h ト共ニ其ノ符號ヲ變ズ，故ニ曲線ハ P ノ左右何レカ一方ニ於テ直線ノ上ニアレバ他ノ一方ニ於テハ其ノ下ニアリ，即チ曲線ト直線トハ相交ハル．

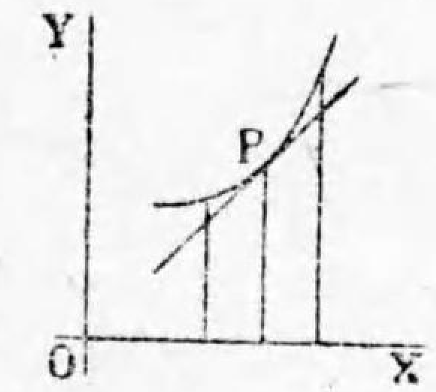
$f'(x_0)=k$ ニシテ $f''(x_0)\gtrless 0$ ナルトキハ δ ハ第二位ノ無限小トナリ，h ガ符號ヲ變ズルモ其ノ符號ヲ變ゼズ，故ニ曲線ハ P ノ左右兩方ニ於テ直線ノ上ニアルカ又ハ兩方共ニ其ノ下ニアリ．

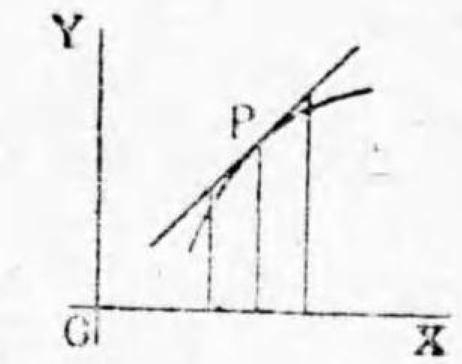


此ノ場合ニハ直線ハ即チ切線ニシテ，P ニ於テ曲線ト交ハル直線ニ Q ヨリ下セル垂線ノ長サハ第一位ノ無限小ナレドモ切線ニ下セルモノハ第二位ノ無限小ナリ．

$f'(x_0)=k$ ニシテ $f''(x_0)>0$ ナラバ $P(x_0, y_0)$ ノ近傍ニ於テ $\delta>0$，又 $f''(x_0)<0$ ナラバ $\delta<0$

最初ノ場合ニハ曲線ハ P ニ於テ上ノ方ニ凹ナリトイヒ，後ノ場合ニハ上ノ方ニ凸ナリトイフ．

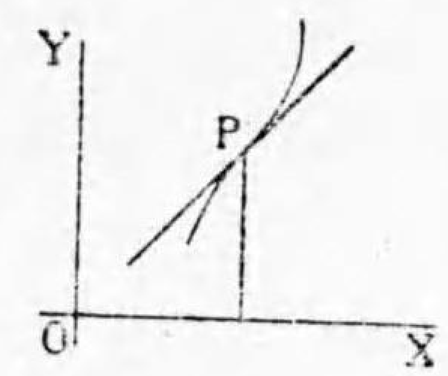


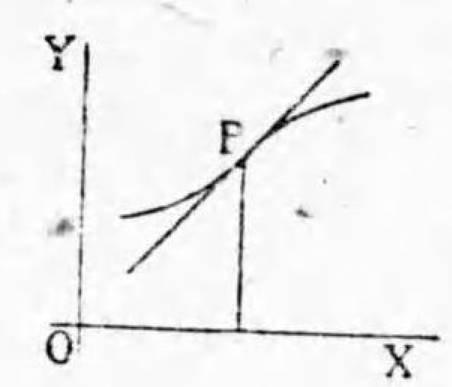


$f'(x_0)=k$，$f''(x_0)=0$ ニシテ $f'''(x_0)\gtrless 0$ ナルトキハ

$$\delta=\frac{h^3}{\underline{|3}}f'''(x_0+\theta h), \qquad 0<\theta<1$$

δ ハ第三位ノ無限小ニシテ h ト共ニ其ノ符號ヲ變ズ，故ニ曲線ハ P ノ一方ニ於テ凹ナラバ他ノ一方ニ於テハ凸トナル．此ノ如ク曲線ガ凹凸ノ方向ヲ變ズル點ヲ彎曲點トイフ，彎曲點ニ於テ $f'(x)$ ノ値ハ $f'''(x)<0$ 又ハ $f'''(x)>0$ ナルニ從ヒ極大又ハ極小ナリ．





一般ニ $f'(x)=k$，$f''(x_0)=0$，……，$f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\gtrless 0$ ナルトキハ

$$\delta=\frac{h^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(x_0+\theta h), \qquad 0<\theta<1$$

δ ハ第 n 位ノ無限小トナリ，n ガ偶數ニシテ $f^{(n)}(x_0)>0$ ナラバ曲線ハ上ノ方ニ凹，$f^{(n)}(x)<0$ ナラバ上ノ方ニ凸，又 n ガ奇數ナラバ (x_0, y_0) ハ彎曲點ナリ．

例 1. $(1+x^2)y=1-x$

$$y=\frac{1-x}{1+x^2},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}-\frac{2x(1-x)}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x-2}{(1+x^2)^2}-\frac{4x(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}=\frac{2(x-1)(1+x^2)-4x(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$=-\frac{2(x+1)\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}}{(1+x^2)^3}$$

故ニ $x=-1,\ x=2-\sqrt{3},\ x=2+\sqrt{3}$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

$x<-1$ ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$, 從テ曲線ハ上方ニ凹

$-1<x<2-\sqrt{3}$ ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$, 從テ曲線ハ上方ニ凸

$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$, 從テ曲線ハ上方ニ凹

$2+\sqrt{3}<x$ ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ 從テ曲線ハ上方ニ凸

依テ

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=1 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=2-\sqrt{3} \\ y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}\qquad \begin{cases} x_3=2+\sqrt{3} \\ y_3=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

ハ何レモ彎曲點ナリ

例 2. $y=\sin x$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x,\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x$$

n ヲ任意ノ整數トシテ $x=n\pi$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0,\ \dfrac{d^3y}{dx^3}\gtrless 0$

故ニ $x=n\pi,\ y=0$ ハ何レモ彎曲點ナリ.

例 3. $xy^2=1-x$

第 35 節例 1 注意ニヨリ $f(x,y)=0$ ナルトキ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

故ニ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2=0$ 及ビ $f(x,y)=0$ ヨリ得タル x,y ノ値ニ對シテ $\dfrac{\partial f}{\partial y}\gtrless 0$ ニシテ且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ此ノ點ニ於テ符號ヲ變ズルトキハ x,y ハ卽チ彎曲點ノ座標ナリ.

$f(x,y)=xy^2-(1-x)$ トスレバ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2+1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$$

從テ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

$$=-8xy^2(y^2+1)+2x(y^2+1)^2=-2x(y^2+1)(3y^2-1)$$

依テ

$$x(y^2+1)(3y^2-1)=0,\qquad xy^2=1-x$$

ヨリ次ノ値ヲ得.

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad x=\frac{3}{4}$$

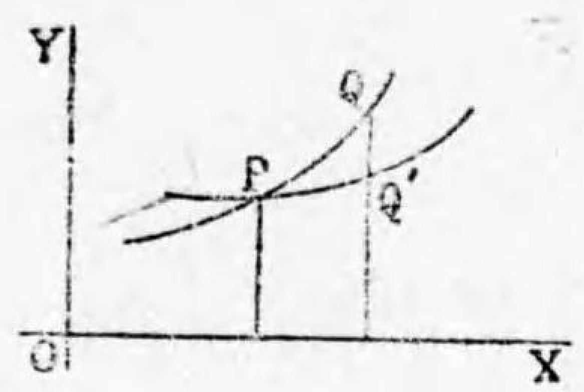
此等ノ値ニ對シテ $\dfrac{\partial f}{\partial y}\gtrless 0$ ニシテ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ此ノ點ニ於テ符號ヲ變ズ,

故ニ $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ハ何レモ彎曲點ナリ.

43. 二ツノ曲線ノ關係ノ位置，切觸曲線

二ツノ曲線 $y=f(x)$, $Y=\phi(X)$ ノ共通ナル點ヲ $P(x_0, y_0)$ トシ，$y=f(x)$ 上ニ一點 $Q(x_0+h, y)$，又 $Y=\phi(X)$ 上ニ一點 $Q'(x_0+h, Y)$ ヲ取リ，$\delta=y-Y$ ト置クトキハ

$$\delta=f(x_0+h)-\phi(x_0+h)$$



$f(x_0+h)$ 及ビ $\phi(x_0+h)$ ガ何レモテーロルノ定理ニヨリテ展開シ得ト假定スレバ

$$\delta=\frac{h}{1}\{f'(x_0)-\phi'(x_0)\}+\frac{h^2}{\lfloor 2}\{f''(x_0+\theta_1 h)-\phi''(x_0+\theta_1' h)\}$$

$$0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_1'<1$$

$f'(x)\gtrless\phi'(x)$ ナルトキハ h ヲ第一位ノ無限小トシテ δ ハ第一位ノ無限小ニシテ h ト共ニ其ノ符號ヲ變ズ，故ニ二ツノ曲線ハ $P(x_0, y_0)$ ニ於テ相交ハル．

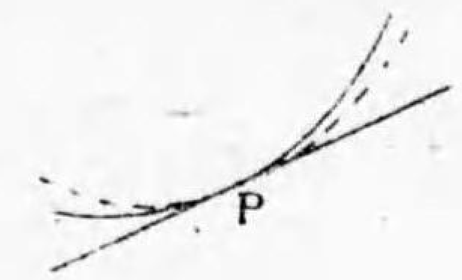
$f'(x)=\phi'(x)$, $f''(x_0)\gtrless\phi''(x_0)$ ナルトキハ δ ハ第二位ノ無限小ニシテ h ノ符號ガ變ズルトキ其ノ符號變セズ，此ノ場合ニハ二ツノ曲線ハ P ニ於テ共通ナル切線ヲ有シ且此ノ點ノ兩側ニ於テ切線ニ關シテ全ク同樣ナル位置ニアリ．

$f'(x_0)=\phi'(x_0)$, $f''(x_0)=\phi''(x_0)$, $f'''(x_0)\gtrless\phi'''(x_0)$ ナルトキハ

$$\delta=\frac{h^3}{\lfloor 3}\{f'''(x_0+\theta_2 h)-\phi'''(x_0+\theta_2' h)\}$$

$$0<\theta_2<1, \quad 0<\theta_2'<1$$

此ノ場合ニハ δ ハ第三位ノ無限小ニシテ h ガ其ノ符號ヲ變ズルトキ其ノ符號ヲ變ズ，從テ二ツノ曲線ハ P ニ於テ共通ナル切線ヲ有シ且凸凹ニ關シテ同一ニシテ且 P ノ兩側ニ於テ切線ニ對シテ反對ナル位置ニアリ，故ニ相切スルト同時ニ相交ハル．



一般ニ $f(x_0)=\phi(x_0)$, $f'(x_0)=\phi'(x_0)$, ……, $f^{(n)}(x_0)=\phi^{(n)}(x_0)$ ニシテ $f^{(n+1)}(x_0)\gtrless\phi^{(n+1)}(x_0)$ ナルトキハ

$$\delta=\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\{f^{(n+1)}(x_0+\theta_n h)-\phi^{(n+1)}(x_0+\theta_n' h)\}$$

$$0<\theta_n<1, \quad 0<\theta_n'<1$$

此ノ場合ニハ δ ハ第 $n+1$ 位ノ無限小ニシテ，n ガ偶數ナルトキハ δ ハ h ト共ニ其ノ符號ヲ變ジ，n ガ奇數ナルトキハ h ガ其ノ符號ヲ變ズルモ符號ヲ變セズ．

δ ガ第 $n+1$ 位ノ無限小ナルトキ二ツノ曲線ハ**第 n 位ノ切觸**ヲナストイフ．

此ノ定義ニヨレバ單ニ共通ナル切線ヲ有スル場合ニハ二ツノ曲線ハ第一位ノ切觸ヲナスコトトナル

曲線 $Y=\phi(X, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n+1})$ ガ點 (x_0, y_0) ニ於テ一定ノ曲線 $y=f(x)$ ト第 n 位ノ切觸ヲナストキ，即チ

$$f(x_0)=\phi(x_0),\ f'(x_0)=\phi'(x_0),\ \ldots\ldots,\ f^{(n)}(x_0)=\phi^{(n)}(x_0)$$

ナル $n+1$ 個ノ條件ヲ滿足スル如ク $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n+1}$ ガ定マルトキ最初ノ曲線ハ後ノ曲線ノ**切觸曲線**ナリトイフ

例 1. 切觸直線

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於ケル切觸直線ノ方程式ヲ

$$Y=aX+b$$

トスレバ

$$\frac{dY}{dX}=a$$

然ルニ $$X=x,\quad Y=y,\quad \frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}$$

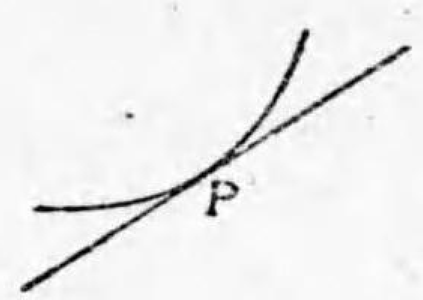
故ニ $$a=\frac{dy}{dx},\qquad b=y-x\frac{dy}{dx}$$

依テ此ノ値ヲ代入シテ求ムル切觸曲線ノ方程式次ノ如シ.

$$Y=\frac{dy}{dx}X+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

即チ $$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

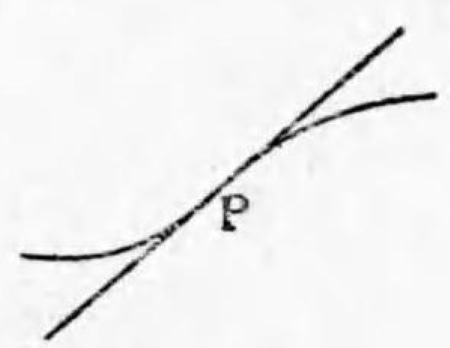
ニシテ P ニ於ケル切線ナリ.



尙直線ノ方程式ヨリ $\frac{d^2Y}{dX^2}=0$ ヲ得.

故ニ P ニ於テ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ナルトキハ

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$



依テ上ノ直線ハ彎曲點ニ於テハ第二位ノ切觸ヲナスコトヲ得.

同様ニシテ P ニ於テ $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ ナルトキハ直線ハ此ノ點ニ於テ $y=f(x)$ ト第三位ノ切觸ヲナスコトヲ得, 更ニ高位ノ切觸ニ就テモ亦同ジ.

例 2. 切觸圓

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於ケル切觸圓ノ方程式ヲ

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=r^2$$

トスレバ

$$X-\alpha+(Y-\beta)\frac{dY}{dX}=0,\qquad 1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+(Y-\beta)\frac{d^2Y}{dX^2}=0$$

然ルニ $$X=x,\quad Y=y,\quad \frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

依テ此ノ値ヲ上ノ式ニ代入シテ求ムル切觸圓ノ方程式次ノ如シ.

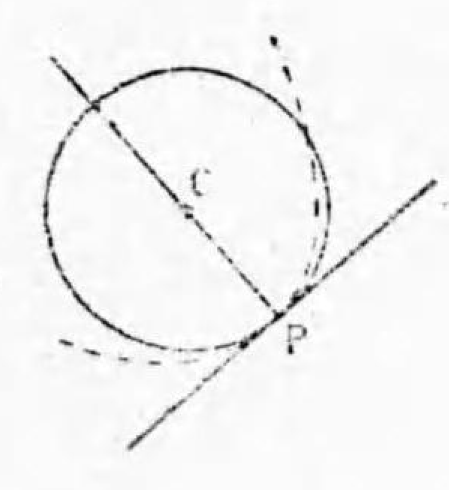
$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=r^2$$

此ニ $$\beta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},\qquad \alpha=x-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}$$

$$r^2=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ ナルガ故ニ $P(x, y)$ ニ於テ曲線 $y=f(x)$ ハ切觸圓 $(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=r^2$ ト凸凹ノ方向ヲ同クシ且

$$\beta-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(\alpha-x)$$



ナルガ故ニ圓ノ中心 $C(\alpha, \beta)$ ハ P ニ於ケル法線ノ上ニアリ.

尙又 $1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+(Y-\beta)\frac{d^2Y}{dX^2}=0$ ヨリ

$$3\frac{dY}{dX}\frac{d^2Y}{dX^2}+(Y-\beta)\frac{d^3Y}{dX^3}=0$$

此ノ二式ヨリ $Y-\beta$ ヲ消去シテ

$$3\frac{dY}{dX}\left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^2=\frac{d^3Y}{dX^3}\left\{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right\}$$

ヲ得，依テ切觸圓ガ $P(x,y)$ ニ於テ $y=f(x)$ ト第三位ノ切觸ヲナス場合ニハ

$$X=x,\quad Y=y,\quad \frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3Y}{dX^3}=\frac{d^3y}{dx^3}$$

ナルガ故ニ P ニ於テ次ノ式成立ス．

$$3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{d^3y}{dx^3}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

特ニ曲線 $y=ax^2+2bx+c$ ニ於テハ

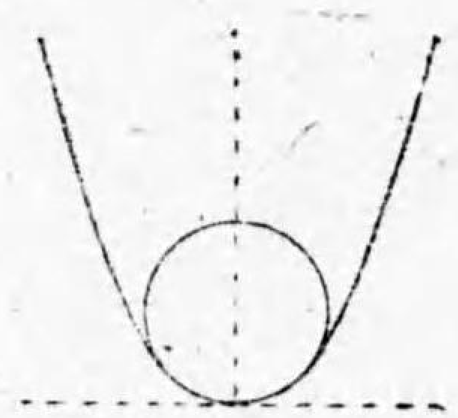
$$\frac{dy}{dx}=2ax+2b,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2a,\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=0$$

依テ $\frac{dy}{dx}=0$ 即チ $x=-\frac{b}{a}$ ナルトキハ

$$3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{d^3y}{dx^3}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

トナル，然ルニ

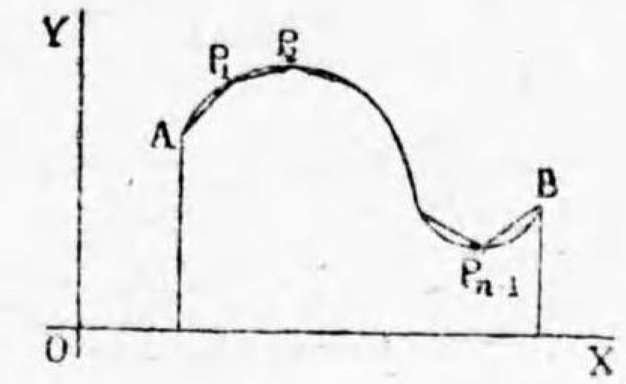
$$y=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)$$



ナルヲ以テ頂點 $\left(-\frac{b}{a},\ c-\frac{b^2}{a}\right)$ ニ於テ切觸圓ハ曲線ト第三位ノ切觸ヲナス，

44. 平面曲線ノ長サ

曲線 $y=f(x)$ 上ニ於ケル二點 $A(a,\ y_0)$, $B(b,\ y_n)$ ノ間ニ順次ニ $n-1$ 個ノ點 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, ……, $P_{n-1}(x_{n-1},\ y_{n-1})$ ヲ取リ，線分 AP_1, P_1P_2, ……, $P_{n-1}B$ ヲ作ルトキハ



$$\overline{P_{i-1}P_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$$

此ニ $i=1,2,\ldots\ldots,n$, $x_0=a$ $x_n=b$

$f'(x)$ ヲ連續トシテ平均値ノ定理ニヨリ

$$y_i-y_{i-1}=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\quad x_{i-1}<\xi_i<x_i$$

依テ

$$\overline{P_{i-1}P_i}=\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}\,(x_i-x_{i-1})$$

然ルニ

$$\left|\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}-\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}\right|=\left|\frac{\{f'(\xi_i)\}^2-\{f'(x_{i-1})\}^2}{\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}+\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}}\right|$$

$$=\left|f'(\xi_i)-f'(x_{i-1})\right|\left|\frac{f'(\xi_i)+f'(x_{i-1})}{\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}+\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}}\right|$$

$f'(x)$ ハ連續ナルガ故ニ如何ニ小ナル正數 ε ヲ取ルモ x_i-x_{i-1} ヲ十分小ナラシムルコトニヨリ

$$|f'(\xi_i)-f'(x_{i-1})|<\varepsilon$$

又

$$\left|\frac{f'(\xi_i)+f'(x_{i-1})}{\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}+\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}}\right|<1$$

故ニ　$$\left|\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}-\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}\right|<\varepsilon$$

從テ　　$\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}=\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}+\varepsilon_i,\qquad |\varepsilon_i|<\varepsilon$

故ニ

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_{i-1})\}^2}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x_i-x_{i-1})$$

$|\varepsilon_i|$ ノ中ニテ最大ナルモノヲ δ トスレバ

$$\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|(x_i-x_{i-1})<\delta(b-a)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x_i-x_{i-1})=0$$

依テ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i}$ ヲ s ニテ表ハストキハ

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

s ハ連續函數ノ積分ナルヲ以テ有限確定ナル値ヲ有ス，之ヲ曲線 $y=f(x)$ ノ弧 AB ノ**長サ**トス.

尙 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ニシテ $\phi'(t)$ 及ビ $\psi'(t)$ ガ連續ナルトキハ

$$\frac{dx}{dt}=\phi'(t),\qquad \frac{dy}{dt}=\psi'(t)$$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\frac{\{\psi'(t)\}^2}{\{\phi'(t)\}^2}}\phi'(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ ナルトキハ

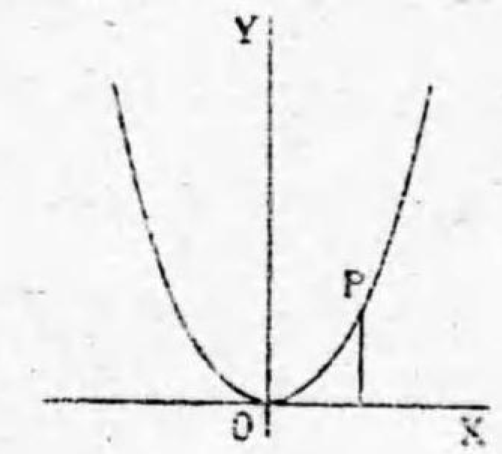
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

故ニ

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}dt$$

例 1.　曲線 $y=x^2$ ノ原點ヨリ點 P(1, 1) ニ至ル長サ

$$\frac{dy}{dx}=2x$$



$$s=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx$$

$2x=z$ ト置クトキハ, $dx=\dfrac{1}{2}dz$

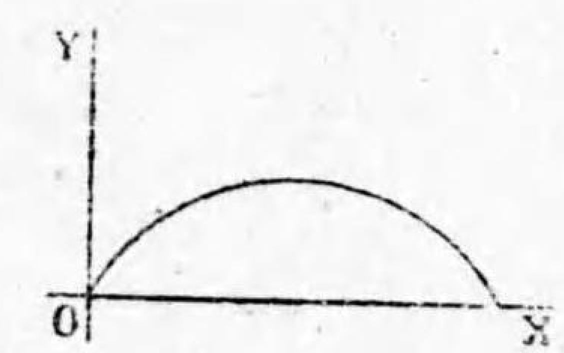
$$s=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+z^2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2}+\frac{1}{2}\log(z+\sqrt{1+z^2})\right]_0^2=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$$

例 2.　曲線 $x=a(u-\sin u)$, $y=a(1-\cos u)$ ノ $u=0$ ヨリ $u=2\pi$ ニ至ル長サ

$$\frac{dx}{du}=a(1-\cos u),\quad \frac{dy}{du}=a\sin u$$

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}du$$



$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos u)^2+\sin^2 u}\,du$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos u}\,du$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sin v\,dv=4a\Big[-\cos v\Big]_0^{\pi}=8a$$

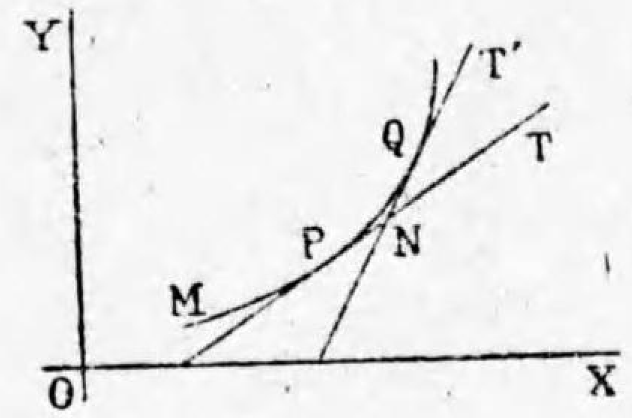
例 3.　圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ全周

$x=a\cos\phi$, $y=a\sin\phi$ ト置クトキハ $\dfrac{dx}{d\phi}=-a\sin\phi$, $\dfrac{dy}{d\phi}=a\cos\phi$

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}d\phi=\int_0^{2\pi}a\,d\phi=2\pi a$$

45. 曲率, 縮閉線

曲線 $y=f(x)$ 上ノ定點 M ヨリ點 $P(x, y)$ ニ至ル長サヲ s トシ, P ニ於ケル切線ガ x 軸ノ正方向トナス角ヲ τ トスレバ s 及ビ τ ノ値ハ何レモ P ノ位置ニヨリテ變ズ, 即チ x ノ函數ナリ



弧 PQ ノ長サヲ Δs トシ, P 及ビ Q ニ於ケル切線ノナス角 TNT' ヲ $\Delta\tau$ トスレバ $\dfrac{\Delta\tau}{\Delta s}$ ハ P ヨリ Q ニ至ル間ニ於ケル曲線ノ曲リ方ノ大小ヲ示ス, 依テ

$$k=\lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds}$$

ヲ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル**曲率**トイフ

然ルニ
$$\tan\tau=\frac{dy}{dx},\qquad \sec^2\tau\frac{d\tau}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

故ニ
$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$$

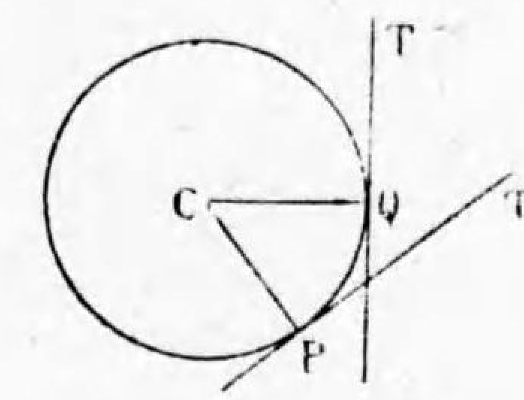
又前節ニヨリ
$$s=\int_a^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

ナルヲ以テ
$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

故ニ
$$k=\frac{\dfrac{d\tau}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於テ之ト相等シキ曲率ヲ有スル圓ノ半徑ヲ ρ トスレバ

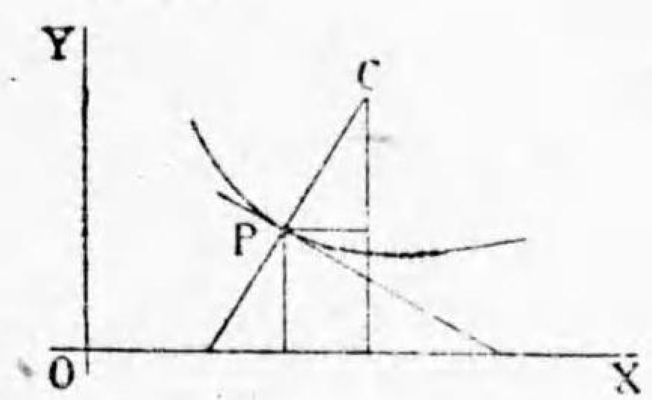
$$\frac{1}{\rho}=\lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds}$$



故ニ
$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

ρ ハ $P(x, y)$ ニ於テ曲線 $y=f(x)$ ト相等シキ曲率ヲ有スル圓ノ半徑ナリ, 之ヲ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル**曲率半徑**トイフ

又曲線上ノ點 $P(x, y)$ ニ於テ法線ヲ引キ, 其ノ上ニ P ヨリ曲線ノ凹ナル方ニ曲率半徑ニ等シク線分 PC ヲ取ルトキ C ヲ**曲率中心**トイヒ, 曲率中心ノ軌跡ヲ**縮閉線**トイフ.



P ニ於ケル曲率中心ヲ $C(x_0, y_0)$ トシ, CP ガ x 軸ノ正方向トナス角ヲ ν トスレバ

$$x_0-x=\rho\cos\nu,\qquad y_0-y=\rho\sin\nu$$

$$\tan\nu=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}},\qquad \sin\nu=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}},\qquad \cos\nu=-\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$$

故ニ
$$x_0=x-\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx},\qquad y_0=y+\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

此ノ二式ト $y=f(x)$ トヨリ x, y ヲ消去シテ縮閉線ノ方程式ヲ得

曲線ノ方程式ガ $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ナルトキハ第 38 節ニヨリ

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_0&=x-\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}\frac{dy}{dt}\\ y_0&=y+\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}\frac{dx}{dt}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) ヨリ次ノ式ヲ得

$$(x_0-x)\frac{dx}{dt}+(y_0-y)\frac{dy}{dt}=0 \qquad (3)$$

$$(x_0-x)\frac{d^2x}{dt^2}+(y_0-y)\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (4)$$

(3) ヲ t ニ關シテ微分シテ

$$\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt}$$

$$+(x_0-x)\frac{d^2x}{dt^2}+(y_0-y)\frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad (5)$$

(4) 及ビ (5) ヨリ

$$\frac{dx_0}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{dy_0}{dt}\frac{dy}{dt}=0 \qquad (6)$$

即チ
$$\frac{dy_0}{dx_0}\frac{dy}{dx}=-1$$

故ニ曲線 $y=f(x)$ ノ法線ハ其ノ縮閉線ノ切線ナリ

又
$$x_0-x=\rho\cos\nu,\qquad y_0-y=\rho\sin\nu$$

ヲ t ニ關シテ微分スルトキハ

$$\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\cos\nu-\rho\sin\nu\frac{d\nu}{dt}$$

$$\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\sin\nu+\rho\cos\nu\frac{d\nu}{dt}$$

然ルニ (6) ニヨリ

$$\frac{dx_0}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{dy_0}{dt}\frac{dy}{dt}=0$$

依テ

$$\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(\rho\frac{d\nu}{dt}\right)^2$$

$(dx)^2+(dy)^2=(ds)^2$, $(dx_0)^2+(dy_0)^2=(ds_0)^2$ ト置クトキハ

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(\rho\frac{d\nu}{dt}\right)^2$$

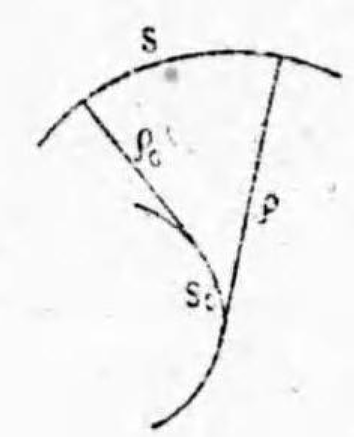
然ルニ曲率ノ定義ニヨリ

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2=\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2$$

故ニ
$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

s_0 ハ ρ ト共ニ増加スルトスレバ

$$\frac{ds_0}{dt}=\frac{d\rho}{dt}$$



依テ
$$s_0=\rho+c$$

$s_0=0$ ナルトキ $\rho=\rho_0$ トスレバ

$$s_0=\rho-\rho_0$$

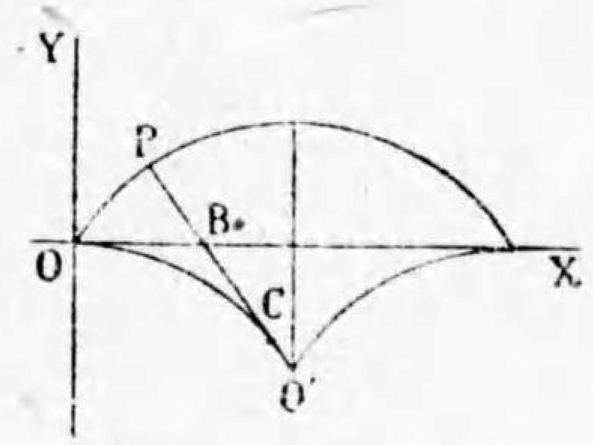
故ニ ρ 及ビ ρ_0 ヲ知リテ s_0 ヲ求ムルコトヲ得.

例 1. $x=a(u-\sin u),\ y=a(1-\cos u)$

$$\frac{dx}{du}=a(1-\cos u),\quad \frac{dy}{du}=a\sin u,\quad \frac{d^2x}{du^2}=a\sin u,\quad \frac{d^2y}{du^2}=a\cos u$$

$$\rho=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du}-\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}}=a\frac{\{(1-\cos u)^2+\sin^2 u\}^{\frac{3}{2}}}{\cos u(1-\cos u)-\sin^2 u}$$

故ニ $\rho=4a\sin\frac{u}{2}$



第 40 節例 2 ニヨリ PB ハ法線ノ方向ニシテ

$$\mathrm{PB}=2a\sin\frac{u}{2}$$

依テ曲率ノ中心ヲ $C(x_0,\ y_0)$ トスレバ C ハ PB ノ延長線上ニアリテ, PB=BC

$$x_0=x-\frac{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}{\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du}-\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}}\frac{dy}{du}=a(u-\sin u)+2a\sin u$$

$$y_0=y+\frac{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}{\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du}-\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}}\frac{dx}{du}=a(1-\cos u)-2a(1-\cos u)$$

故ニ
$$x_0-\pi a=a\{(u-\pi)-\sin(u-\pi)\}$$
$$y_0+2a=a\{1-\cos(u-\pi)\}$$

依テ $u-\pi=v,\quad x_0-\pi a=\xi,\quad y_0+2a=\eta$

ト置クトキハ
$$\xi=a(v-\sin v),\qquad \eta=a(1-\cos v)$$

故ニ縮閉線ハ元ノ曲線ト同一ニシテ唯其ノ位置ヲ異ニセルノミナリ

又 $\rho=4a\sin\frac{u}{2}$ ハ $u=0$ ナルトキ 0 ニシテ, $u=\pi$ ナルトキ $4a$, 從テ $\widehat{\mathrm{OO'}}=4a$, 然ルニ元ノ曲線ノ長サハ此ノ二倍ナルベキヲ以テ $8a$ ニ等シ, 卽チ第 44 節ニ於テ直接積分ニヨリテ得タル結果ト一致ス

例 2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a>b$

$x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$ ト置クトキハ

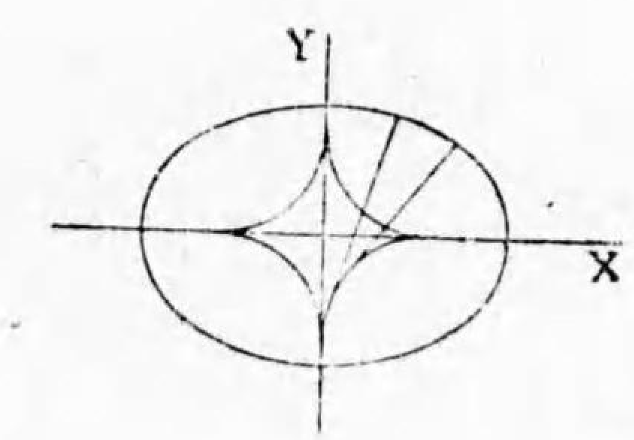
$$\frac{dx}{d\phi}=-a\sin\phi,\quad \frac{dy}{d\phi}=b\cos\phi,\quad \frac{d^2x}{d\phi^2}=-a\cos\phi,\quad \frac{d^2y}{d\phi^2}=-b\sin\phi$$

故ニ

$$\rho=\frac{(a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi)^{\frac{3}{2}}}{ab},\quad x_0=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\phi,\quad y_0=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\phi$$

$\frac{a^2-b^2}{a}=a_0,\ \frac{a^2-b^2}{b}=b_0$ ト置クトキハ縮閉線ノ方程式次ノ如シ

$$\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y_0}{b_0}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$



此ニ $a_0=a-\frac{b^2}{a}$ ハ恒ニ a ヨリモ小ニシテ, $b_0=\frac{a^2}{b}-b$ ハ $a<\sqrt{2}b$ 又ハ $a>\sqrt{2}b$ ナルニ從テ b ヨリモ小又ハ大ナリ.

ρ ハ $\phi=0$ ナルトキ $\frac{b^2}{a}$ ニシテ $\phi=\frac{\pi}{2}$ ナルトキ $\frac{a^2}{b}$ ナリ, 故ニ縮閉線ノ全長ハ $4\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)$ 卽チ $4\frac{a^3-b^3}{ab}$ ニ等シ.

46. 包絡線

$f(x, y, \alpha)$ =於テ f ハ一定ノ函數記號，又 α ハ x 及ビ y =無關係ナル變數ナルトキ，$f(x, y, \alpha)=0$ ノ表ハス直線又ハ曲線ノ位置，大サ等ハ α ノ値=ヨリテ變ズ，即チ此ノ方程式ハ直線ノ群又ハ曲線ノ群ヲ表ハス.

$f(x, y, \alpha)=0$ =屬スル直線群又ハ曲線群中ノ一部又ハ全部=切スル一定ノ直線又ハ曲線ガ存在スルトキ之ヲ此ノ直線群又ハ曲線群ノ**包絡線**トイフ.

今 $f(x, y, \alpha)=0$ ノ包絡線ガ存在スルモノト假定シ　其ノ切點ヲ $P(x, y)$ トスレバ x, y ノ値ハ α =ヨリテ定マルガ故=

$$x=\phi(\alpha), \quad y=\psi(\alpha)$$

此= ϕ 及ビ ψ ハ未定ノ函數記號トス

$f(x, y, \alpha)=0$ 上ノ一點 P =於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=0$$

又包絡線上ノ一點 P =於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{dy}{d\alpha}(X-x)=\frac{dx}{d\alpha}(Y-y)$$

然ル= $f(x, y, \alpha)=0$ ト其ノ包絡線トハ P =於テ共通切線ヲ有スルヲ以テ

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{dy}{d\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{-\dfrac{dx}{d\alpha}}$$

即チ
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}=0 \qquad (1)$$

P =於テハ $f(x, y, \alpha)=0$, $x=\phi(\alpha)$, $y=\psi(\alpha)$ ナルガ故= f ハ α ノ函數ナリト考フレバ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$$

共通點 P =於テハ二ツノ方程式 $f(x, y, \alpha)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ ガ成立スルガ故=此ノ二式ヨリ

$$x=\phi_1(\alpha), \qquad y=\psi_1(\alpha)$$

ヲ得，此= ϕ_1, ψ_1 ハ一定ノ函數記號=シテ，之=ヨリ最初=未定トシタル ϕ 及ビ ψ ハ定マル.

依テ $f(x, y, \alpha)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}=0$, 或ハ $f(x, y, \alpha)=0$, $x=\phi_1(\alpha)$, $y=\psi_1(\alpha)$ ヨリ α ヲ消去シテ $F(x, y)=0$ ヲ得.

上ノ如クシテ得タルモノガ果シテ $f(x, y, \alpha)=0$ ノ包絡線ヲ表ハスヤ否ヲ確メンガ爲メ=雙方=共通ナル點=於ケル切線ヲ考フル= $f(x, y, \alpha)=0$ 上ノ一點 (x, y) =於ケル切線ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (3)$$

=ヨリテ定マル.

又 $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ ハ x, y, α ノ函數ナルヲ以テ $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ ヨリ α ハ x 及ビ y ノ函數トシテ $\alpha=f_1(x, y)$ ト置クコトヲ得.

依テ $f(x,\ y,\ \alpha)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=0$, 即チ $f(x,\ y,\ \alpha)=0,\ \alpha=f_1(x,\ y)$ 上ノ一點 $(x,\ y)$ ニ於ケル切線ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (4)$$

ニヨリテ定マル.

然ルニ $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=0$ ナルガ故ニ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 及ビ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ガ同時ニ 0 ニ等シカラザル場合ニハ (3) 及ビ (4) ヨリ得タル $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ハ全ク相一致ス.

之ニヨリテ $f(x,\ y,\ \alpha)=0$ 上ノ總テノ點ニ於テ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ガ成立セザルトキ即チ恆ニ唯一ツノ切線ガ存在スルトキ

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$$

ハ $f(x,\ y,\ \alpha)=0$ ノ包絡線ナルコト明ナリ

注意 1. 曲線 $f(x,\ y,\ \alpha)=0,\ f(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha)=0$ ガ相交ハルトキ其ノ交點ニ於テハ

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0$$

$$f(x,\ y,\ \alpha)+\Delta\alpha f_\alpha(x,\ y,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)=0, \quad 0<\theta<1$$

即チ　$f(x,\ y,\ \alpha)=0,\quad f_\alpha(x,\ y,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)=0$

依テ極限ニ於テ

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$$

故ニ包絡線ハ同一ノ群ニ屬スル隣接曲線ノ交點ノ軌跡ト考フルコトヲ得.

注意 2. 曲線 $x=f(t),\ y=\phi(t)$ 上ノ一點 $(x,\ y)$ ニ於ケル法線ノ方程式ヲ

$$(\mathrm{X}-x)\frac{dx}{dt}+(\mathrm{Y}-y)\frac{dy}{dt}=0 \qquad (1)$$

即チ　$\mathrm{F}(\mathrm{X},\ \mathrm{Y};\ t)=0$

トシ，此ノ直線ノ包絡線ヲ求ムルガ爲メニ t ニ關シテ微分スレバ

$$(\mathrm{X}-x)\frac{d^2x}{dt^2}+(\mathrm{Y}-y)\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$(\mathrm{X}-x)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}\frac{dy}{dt}$$

$$(\mathrm{Y}-y)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}\frac{dx}{dt}$$

從テ

$$\mathrm{X}=x+\frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}{\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}}\frac{dy}{dt}$$

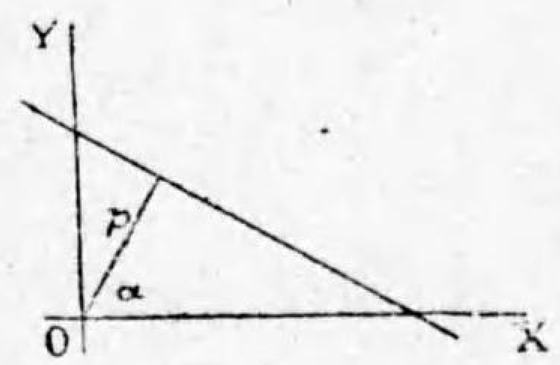
$$\mathrm{Y}=y-\frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}{\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}}\frac{dx}{dt}$$

此ノ二式及ビ $x=f(t),\ y=\phi(t)$ ヨリ $x,\ y,\ t$ ヲ消去シテ包絡線ノ方程式ヲ得ベシ，然ルニ前節ト比較スルトキハ得タルモノハ原曲線ノ縮閉線ノ方程式ナリ.

縮閉線ヲ求ムルニハ此ノ方法ヲ執ルヲ以テ一般ニ簡便トス，尙曲線ノ方程式ガ $y=f(x)$ ナルトキモ亦同樣ナリ.

例 1. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=f(\alpha)$

此ノ方程式ハ原點ヨリ一ツノ直線ニ下セル垂線ガ x 軸ノ正方向トナス角ヲ α トスレバ垂線ノ長サ p ハ α ノ函數ナルコトヲ示ス.



α ニ關シテ此ノ式ヲ微分スレバ

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)$$

卽チ
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=f(\alpha) \qquad (1)$$
$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha) \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha \\ y&=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) ハ (1) ノ包絡線ヲ表ハシ，之ヨリ

$$\frac{dx}{d\alpha}=-\{f(\alpha)+f''(\alpha)\}\sin\alpha,\quad \frac{dy}{d\alpha}=\{f(\alpha)+f''(\alpha)\}\cos\alpha$$

依テ (3) ノ曲率半徑ヲ ρ トスレバ

$$\rho=\frac{ds}{d\alpha}=|f(\alpha)+f''(\alpha)|,\quad \frac{dy}{dx}=-\cot\alpha$$

(1) ハ (3) ノ切線ニシテ (2) ハ之ガ法線ナリ

次ニ α ニ關シテ (2) ヲ微分スレバ

$$-x\cos\alpha-y\sin\alpha=f''(\alpha) \qquad (4)$$

(2) 及ビ (4) ヨリ (2) ノ包絡線

$$\left.\begin{aligned} x&=-\{f'(\alpha)\sin\alpha+f''(\alpha)\cos\alpha\} \\ y&=\ \ f'(\alpha)\cos\alpha-f''(\alpha)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ヲ得.

(5) ハ (3) ノ法線ノ包絡線卽チ (3) ノ縮閉線ニシテ 之ヨリ

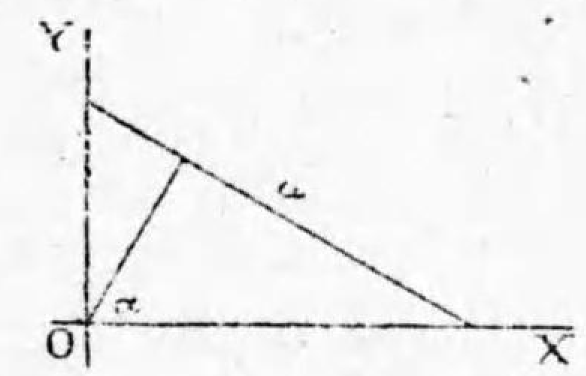
$$\frac{dx}{d\alpha}=-\{f'(\alpha)+f'''(\alpha)\}\cos\alpha,\quad \frac{dy}{d\alpha}=-\{f'(\alpha)+f'''(\alpha)\}\sin\alpha$$

依テ (5) ノ曲率半徑ヲ ρ_1 トスレバ

$$\rho_1=|f'(\alpha)+f'''(\alpha)|$$

此ノ問題ノ特別ナル場合トシテ $f(\alpha)=a\sin\alpha\cos\alpha$, 卽チ兩座標軸ノ上ニ兩端ヲ有シ 長サガ a ナル線分ノ包絡線ヲ索ムルニ

$$f(\alpha)=a\sin\alpha\cos\alpha$$
$$f'(\alpha)=a(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$f''(\alpha)=-4a\sin\alpha\cos\alpha$$
$$f'''(\alpha)=-4a(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$



依テ (3) ニヨリ

$$x=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha=a\sin^3\alpha$$
$$y=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha=a\cos^3\alpha$$

故ニ包絡線ノ方程式ハ

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \qquad (3)_1$$

ニシテ，其ノ曲率半徑ハ

$$\rho=|f(\alpha)+f''(\alpha)|=\frac{3a}{2}\sin 2\alpha$$

又 (5) ヨリ

$$x=-\{f'(\alpha)\sin\alpha+f''(\alpha)\cos\alpha\}=a(3\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^3\alpha)$$
$$y=\ \ f'(\alpha)\cos\alpha-f''(\alpha)\sin\alpha=a(3\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos^3\alpha)$$

卽チ
$$x=a(\sin\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha)$$
$$y=a(\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha)$$

$$x+y=a(\cos\alpha+\sin\alpha)(1+\sin 2\alpha)=a(\cos\alpha+\sin\alpha)^3$$

$$y-x=a(\cos\alpha-\sin\alpha)(1-\sin 2\alpha)=a(\cos\alpha-\sin\alpha)^3$$

從テ

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}=2a\sin^3\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),\quad \frac{y-x}{\sqrt{2}}=2a\cos^3\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

故ニ $(3)_1$ ノ縮閉線ノ方程式次ノ如シ.

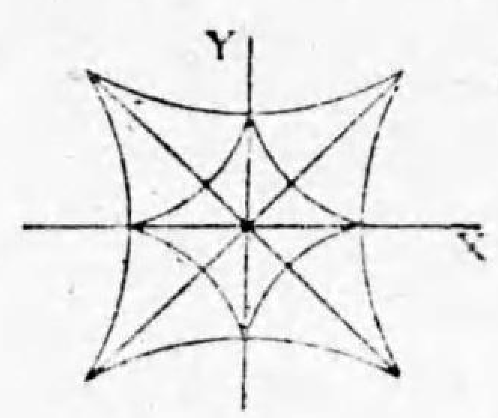
$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(y-x)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}} \qquad (5)_1$$

$(5)_1$ ニ於テ $\frac{x+y}{\sqrt{2}}=\xi,\ \frac{y-x}{\sqrt{2}}=\eta$, ト置クトキハ

$$\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}} \qquad (5)_2$$

$$\rho_1=|f'(\alpha)+f'''(\alpha)|=3a\cos 2\alpha$$

$(3)_1$ 及ビ $(5)_1$ ノ表ハス曲線ハ何レモ兩軸ニ關シテ對稱ニシテ四點 $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,a)$, $(0,-a)$ ヲ通過ス, 又 $(3)_1$ ニ於テ a ノ代リニ $2a$ ト置キ座標軸ヲ 45° 回轉スレバ $(5)_1$ ヲ得ベシ, 依テ同一ノ座標軸ヲ用ヒテ二ツノ曲線ヲ畫ケバ右ノ如シ.



$\rho=\frac{3}{2}a\sin 2\alpha$ ニ於テ $\alpha=0$ ナルトキハ $\rho=0$, 又 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ナルトキハ $\rho=\frac{3}{2}a$.

依テ縮閉線 $(5)_1$ ノ全周ヲ s_1 トスレバ $s_1=8\frac{3}{2}a=12a$

包絡線 $(3)_1$ ノ全周ハ此ノ式ニ於テ a ノ代リニ $\frac{a}{2}$ ト置キタルモノニ等シ, 故ニ其ノ全周ヲ s トスレバ

$$s=6a$$

例 2. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\ a=\phi_1(\alpha),\ b=\phi_2(\alpha),\ r=\phi_3(\alpha)$

此ノ方程式ハ圓ノ中心 (a,b) ガ一定ノ曲線 $a=\phi_1(\alpha)$, $b=\phi_2(\alpha)$ ノ上ニ在リテ, 其ノ半徑ハ α ノ函數ナルコトヲ示ス.

α ニ關シテ之ヲ微分スレバ

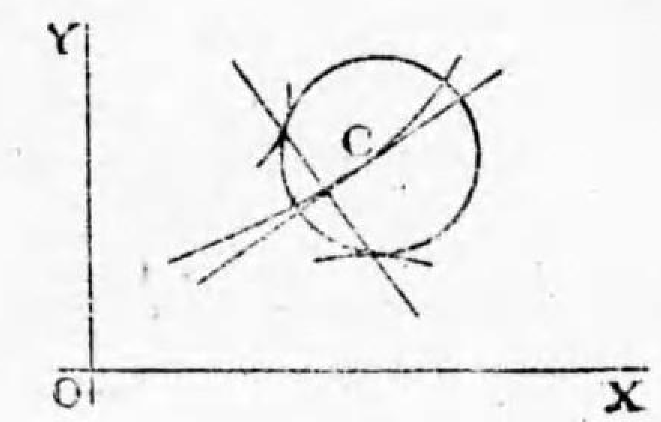
$$(x-a)\frac{da}{d\alpha}+(y-b)\frac{db}{d\alpha}+r\frac{dr}{d\alpha}=0 \qquad (1)$$

元ノ圓ノ方程式ト (1) トニヨリテ包絡線ノ方程式定マル, 然ルニ (1) ハ直線ヲ表ハシ, 中心曲線 $a=\phi_1(\alpha)$, $b=\phi_2(\alpha)$ ノ $\mathrm{C}(a,b)$ ニ於ケル切線

$$(y-b)\frac{da}{d\alpha}=(x-a)\frac{db}{d\alpha} \qquad (2)$$

ニ垂直ニシテ且中心ヨリノ距離

$$p=\frac{r\frac{dr}{d\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{da}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{db}{d\alpha}\right)^2}}=r\frac{dr}{ds}$$



ニアリ, 故ニ包絡線ハ圓ト直線 (1) トノ交點ヲ通過シ圓ニ切スルコト明ナリ.

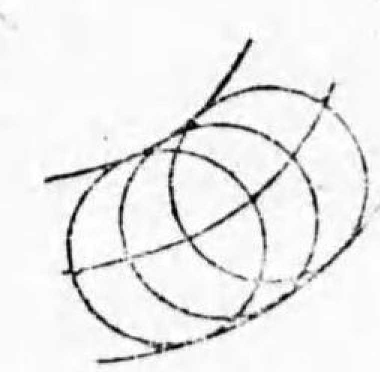
此ノ特別ナル場合トシテ

1) $r=c$, 卽チ半徑ガ一定トスレバ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,\qquad (x-a)\frac{da}{d\alpha}+(y-b)\frac{db}{d\alpha}=0$$

$$p=0$$

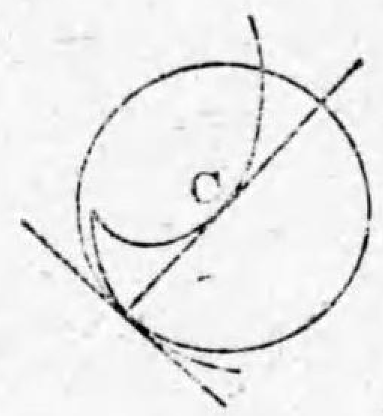
故ニ (1) ハ圓ノ中心ヲ通過ス, 從テ包絡線ハ中心曲線ニ平行ナル二ツノ曲線ヨリ成ル.



2) $r=s$, 即チ半徑ガ定點ヨリ中心 C ニ至ル中心曲線ノ弧ノ長サニ等シトスレバ $\dfrac{dr}{ds}=1$ ニシテ

$$p=r$$

故ニ (1) ハ (2) ト圓トノ交點ニ於テ (2) ニ垂直ナリ, 從テ包絡線ハ此ノ點ニ於テ圓ニ切シ, (1) ハ雙方ヘノ共通切線ナリ, 依テ包絡線ノ法線ハ恒ニ中心曲線ノ切線ニシテ, 中心曲線ハ包絡線ノ縮閉線ニ相當ス



* 一般ニ甲ノ曲線ガ乙ノ曲線ノ縮閉線ナルトキハ乙ノ曲線ヲ甲ノ曲線ノ伸開線トイフ, 上ノ場合ニ就テ言ヘバ包絡線ハ中心曲線ノ伸開線ナリ.

3) $a^2+r^2=c^2$, $b=k$, 即チ a^2+r^2 及ビ b ガ一定トスレバ

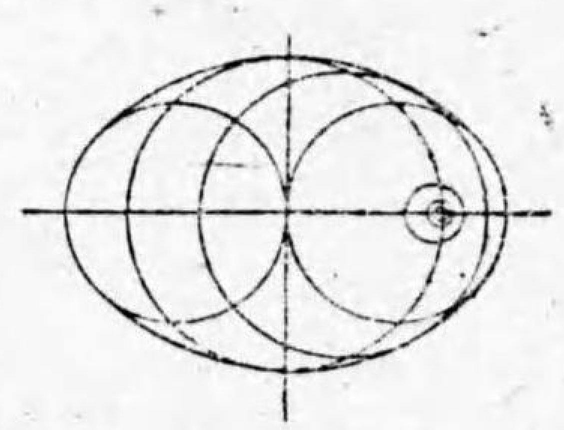
$$(x-a)^2+(y-k)^2=c^2-a^2 \qquad \text{(a)}$$

a ニ關シテ微分スレバ

$$x=2a \qquad \text{(b)}$$

(a) 及ビ (b) ヨリ

$$(y-k)^2=c^2-2a^2 \qquad \text{(c)}$$



(b) 及ビ (c) ヨリ包絡線ノ方程式

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2}\,c)^2}+\frac{(y-k)^2}{c^2}=1$$

ヲ得, $c\leqq\sqrt{2}a$ ナルトキハ (c) ハ成立セズ, 故ニ此ノ橢圓ハ $a\leqq\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ ニ對應スル圓群ノ包絡線ナリ.

47. 重複點

曲線 $f(x,\,y)=0$ 上ノ一點 $(x_0,\,y_0)$ ニ於テ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 及ビ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ガ同時ニ 0 ニ等シカラザルトキハ此ノ點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)=0$$

ニシテ, 此ニ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ ハ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ニ於テ x ノ代リニ x_0, 又 y ノ代リニ y_0 ト置キタルモノトス.

點 $(x_0,\,y_0)$ ニ於テ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ナルトキ $f(x,\,y)$ ガテーロル定理ニヨリテ展開シ得ト假定スレバ

$$\begin{aligned}f(x,\,y)=\frac{1}{|\underline{2}}&\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0(x-x_0)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0(x-x_0)(y-y_0)\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0(y-y_0)^2\right\}+\frac{1}{|\underline{3}}\left\{\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0(x-x_0)^3\right.\\&+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0(x-x_0)^2(y-y_0)+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0(x-x_0)(y-y_0)^2\\&\left.+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0(y-y_0)^3\right\}+\cdots\cdots=0\end{aligned}$$

此ニ $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$ ガ同時ニ 0 ニ等シカラザルトキ, 直線 $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ ヲ引ケバ曲線トノ交點ニ於テ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\underline{2}}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0\lambda+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\lambda^2\right\}(x-x_0)^2\\&+\frac{1}{|\underline{3}}\left\{\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0\lambda+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0\lambda^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\lambda^3\right\}(x-x_0)^3\\&+\cdots\cdots=0\end{aligned}$$

依テ $x=x_0$ ハ此ノ式ノ二重根トナル.

此ノ場合ニ點 (x_0, y_0) ヲ**二重點**トイヒ，

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0\lambda+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\lambda^2=0$$

ヨリ λ ノ値ヲ定ムルトキハ次ノ式ヲ得.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0(x-x_0)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0(x-x_0)(y-y_0)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0(y-y_0)^2=0$$

之ヲ二重點 (x_0, y_0) ニ於ケル**切線**トイフ.

尚此ノ場合ニ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0^2-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$ ガ正ナルトキハ二ツノ相異ナル切線ハ實在シ，0 ナルトキハ二ツノ切線ハ一致シ，負ナルトキハ切線ハ實在セズ.

次ニ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=0$ ニシテ $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0$ ガ同時ニ 0 ニ等シカラザルトキハ點 (x_0, y_0) ヲ**三重點**トイヒ，前同様

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0\lambda+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0\lambda^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\lambda^3=0$$

ヨリ直線 $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ ニ於ケル λ ヲ定ムルトキハ

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0(x-x_0)^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0(x-x_0)^2(y-y_0)$$
$$+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0(x-x_0)(y-y_0)^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)(y-y_0)^3=0$$

ヲ得，之ヲ三重點 (x_0, y_0) ニ於ケル**切線**トイフ.

一般ニ $f(x_0, y_0)=0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=0$, ……, $\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-2}\partial y}\right)_0=0$, ……, $\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial y^{p-1}}\right)_0=0$ ニシテ且 $\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}\right)_0$, ……, $\left(\frac{\partial^p f}{\partial y^p}\right)_0$ ガ同時ニ 0 ニ等シカラザルトキハ點 (x_0, y_0) ヲ p 次ノ**重複點**トイヒ，

$$\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right)_0(x-x_0)^p+p\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}\right)_0(x-x_0)^{p-1}(y-y_0)$$
$$+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial^p f}{\partial y^p}\right)_0(y-y_0)^p=0$$

ヲ此ノ重複點ニ於ケル**切線**トイフ

曲線 $f(x, y)=0$ ノ重複點ヲ索ムルニハ $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ト置キ，得タル x_0, y_0 ガ $f(x, y)=0$ ヲ滿足シ且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, ヲ同時ニ滿足セザルトキハ點 (x_0, y_0) ハ二重點ナリ，

同様ニ $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ヨリ得タル x_0, y_0 ガ $f(x, y)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ ヲ滿足シ且 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0$ ヲ同時ニ滿足セザルトキハ點 (x_0, y_0) ハ三重點ナリ.

四重點，五重點ニ**就**テモ**同様**トス.

例 1. $y^2=x(x-a)^2$

$f(x,\ y)=y^2-x(x-a)^2$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-(x-a)^2-2x(x-a)=-(x-a)(3x-a),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2(3x-2a),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$ ヨリ

$$(x-a)(3x-a)=0,\qquad y=0$$

1) $x=a,\quad y=0$

$$f(a,\ 0)=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

故ニ點 $(a,\ 0)$ ハ二重點ニシテ

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4a$$

$a>0$ ナルトキハ二ツノ相異ナル切線存在シ，$a=0$ ナルトキハ二ツノ切線ハ一致シ，$a<0$ ナルトキハ切線存在セズ.

2) $x=\frac{a}{3},\quad y=0$

此ノ値ガ $f(x,\ y)=0$ ヲ滿足スルハ $a=0$ ナルトキノミニシテ，$a=0$ ナルトキハ第一ノ場合ニ歸ス.

尙曲線 $y^2=x(x-a)^2$ ヲ考フルニ此ノ曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱ニシテ，$x=0$ 及ビ $x=a$ ナルトキ $y=0$.

$x>0$ ナルトキハ曲線ハ恒ニ存在シ，$x<0$ ナルトキハ $x=a$ $(a<0)$ ナル點ノ外ニハ存在セズ.

依テ $y=\sqrt{x}\,(x-a)$ ト置ケバ

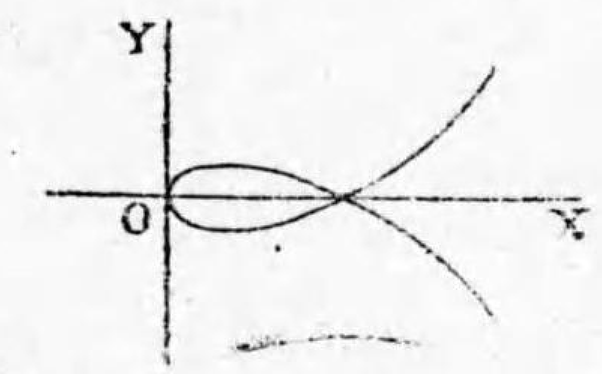
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3x+a}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

$a>0$ トシテ $x=0$ ナルトキ $y=0$，$0<x<a$ ナルトキ $y<0$，$x>a$ ナルトキ $y>0$

$x=0$ ニ於テ $y'=\infty$，$0<x<\frac{a}{3}$ ナルトキ $y'<0$ 即チ y ハ減少函數ニシテ，$x>\frac{a}{3}$ ナルトキ $y'>0$ 即チ y ハ增加函數ナリ.

$x=\frac{a}{3}$ ナルトキ $y'=0,\quad y''>0$

故ニ y ハ $x=\frac{a}{3}$ ニ於テ極小ナリ.



$x=a$ ニ於テ $y'=\sqrt{a}$

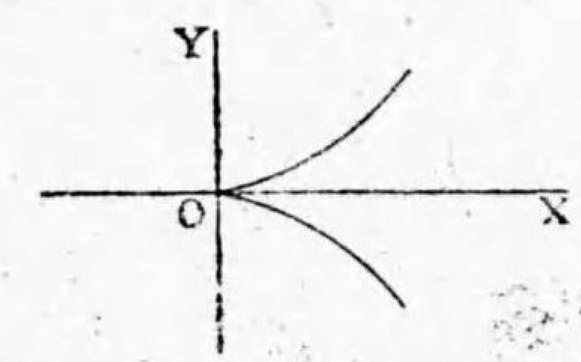
同樣ニ $y=-\sqrt{x}\,(x-a)$ トスレバ

$x=a$ ニ於テ $y'=-\sqrt{a}$

點 $(a,\ 0)$ ヲ**結節點**トイフ.

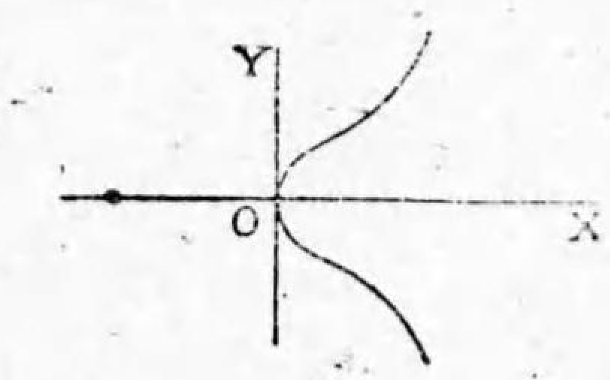
$a=0$ ナルトキハ $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ y''=\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$

$x=0$ ニ於テ $y'=0$，$x>0$ ナルトキハ y ハ增加函數ニシテ $x=0$ ニ於テ二ツノ切線ハ相一致ス.



點 $(0,\ 0)$ ヲ**尖點**(第一種)トイフ.

$a<0$ ナルトキハ $x=0$ ニ於テ $y'=\infty$，$x>0$ ナルトキハ $y'>0$ 即チ y ハ增加函數ニシテ，$x=-\frac{a}{3}$ ナルトキ $y''=0$ 即チ $\left(-\frac{a}{3},\ 0\right)$ ハ彎曲點ナリ.



點 $(a,\ 0)$ ヲ**孤立點**トイフ.

例 2. $(y-x^2)^2=x^5$

$f(x,\ y)=(y-x^2)^2-x^5$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-4x(y-x^2)-5x^4,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2(y-x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4y+12x^2-20x^3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$ ヨリ $x=0,\ y=0$ ヲ得.

$$f(0,\ 0)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

故ニ點 $(0,\ 0)$ ハ二重點ニシテ

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

尚 $y=x^2(1\pm\sqrt{x})$ ト書クトキハ $x>0$ ナルトキノミ曲線ハ存在シ, 一ツノ枝ハ $y=x^2$ ノ上方ニ他ノ一ツハ其ノ下方ニアリ.

$$y'=x\left(2\pm\frac{5}{2}\sqrt{x}\right),\quad y''=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}$$

$x=0$ ナルトキ $y=0,\ y'=0,\ y''=2$

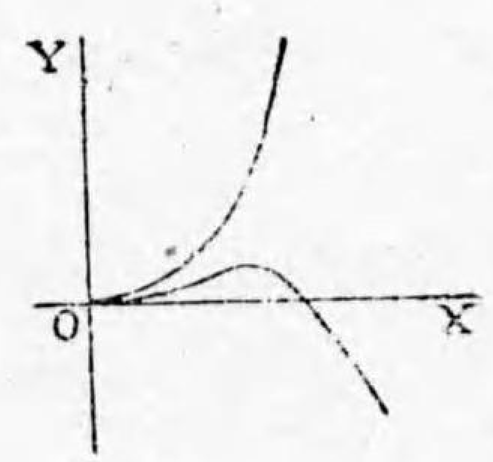
正號ヲ取レバ y ハ恒ニ増加函數ナリ.

負號ヲ取レバ $x=1$ ナルトキ $y=0$

$x=\frac{16}{25}$ ナルトキ $y'=0$

$x=\frac{64}{225}$ ナルトキ $y''=0$

$x>1$ ナルトキハ恒ニ減少函數ナリ,



點 $(0,\ 0)$ ヲ第二種ノ尖點トイフ.

注意 曲線群 $f(x,\ y,\ \alpha)=0$ ガ重複點ヲ有スル場合ニハ其ノ點ニ於テ $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$, 依テ此ノ二式ヨリ $x,\ y$ ヲ α ニテ表ハセバ

$$x=\phi(\alpha),\quad y=\psi(\alpha)$$

故ニ曲線上ノ此ノ點ニ於テハ

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0,\quad x=\phi(\alpha),\quad y=\psi(\alpha)$$

從テ
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$$

然ルニ $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$ ナルヲ以テ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$

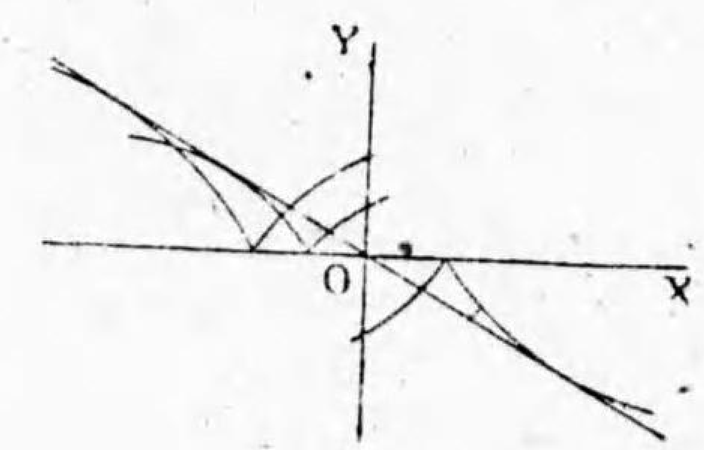
依テ $f(x,\ y,\ \alpha)=0,\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ ヨリ α ヲ消去シテ重複點ノ軌跡ヲ得.

故ニ前節ヲ參照スレバ曲線群 $f(x,\ y,\ \alpha)=0$ ガ重複點ヲ有セザル場合ニハ $f(x,\ y,\ \alpha)=0,\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ ハ其ノ包絡線ヲ表ハシ, 重複點ヲ有スル場合ニハ重複點ノ軌跡又ハ包絡線ヲ表ハスベク, 或ハ重複點ノ軌跡ニシテ且包絡線トナルコトモアルベシ, 例ヘバ

$$f(x,\ y,\ \alpha)=y^3-\alpha(x+\alpha)^2,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=-(x+\alpha)(x+3\alpha)$$

$f(x,\ y,\ \alpha)=0,\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ ヨリ

$$y=0,\quad y=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}x$$



ヲ得, $y=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}x$ ハ曲線群ノ包絡線ニシテ $x=-3\alpha,\ y=\sqrt[3]{4}\alpha$ ニ於テ相切ス.

$y=0$ ハ尖點ノ軌跡ニシテ包絡線ニアラズ.

48. 定點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形

曲線上ノ一點ヲ原點トスル其ノ曲線ノ方程式ヲ $f(x, y)=0$,

$$f(x, y)=a_1x+b_1y+a_2x^2+b_2xy+c_2y^2$$
$$+a_3x^3+b_3x^2y+c_3xy^2+d_3y^3+\cdots\cdots$$

トシ, 直線 $y=\lambda x$ ヲ引ケバ其ノ交點ハ次ノ式ニヨリテ定マル.

$$(a_1+b_1\lambda)x+(a_2+b_2\lambda+c_2\lambda^2)x^2$$
$$+(a_3+b_3\lambda+c_3\lambda^2+d_3\lambda^3)x^3+\cdots\cdots=0$$

或ハ　$\phi_1(\lambda)x+\phi_2(\lambda)x^2+\phi_3(\lambda)x^3+\phi_4(\lambda)x^4+\cdots\cdots=0$

I. a_1 及ビ b_1 ノ中少クモ一ツハ 0 ニ等シカラズトス.

$b_1\gtrless0$ トシテ $\phi_1(\lambda)=0$ ヨリ $\lambda=\lambda_1$ ヲ得, $y=\lambda_1x$ ハ此ノ點ニ於ケル切線ナリ.

次ニ ε ヲ無限小トシテ $\lambda=\lambda_1+\varepsilon$ ト置ケバ

$$\phi_1(\lambda_1+\varepsilon)+\phi_2(\lambda_1+\varepsilon)x+\phi_3(\lambda_1+\varepsilon)x^2+\phi_4(\lambda_1+\varepsilon)x^3+\cdots\cdots=0$$

卽チ

$$\varepsilon b_1+\phi_2(\lambda_1)x+\varepsilon\phi_2'(\lambda_1)x+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_2''(\lambda_1)x+\phi_3(\lambda_1)x^2+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x^2$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_3''(\lambda_1)x^2+\frac{\varepsilon^3}{6}\phi_3'''(\lambda_1)x^2+\phi_4(\lambda_1)x^3+\cdots\cdots=0$$

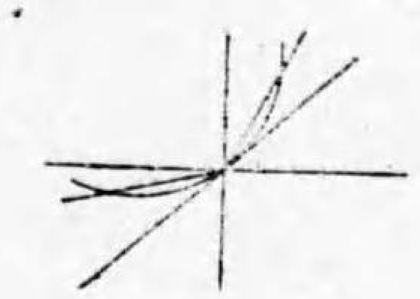
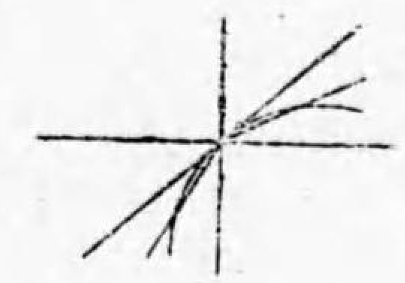
1) $\phi_2(x_1)\gtrless0$

此ノ場合ニハ ε 及ビ x ヲ第一位ノ無限小トシ, 高位ナル項ヲ省略シテ次ノ式ヲ得.

$$\varepsilon b_1+\phi_2(\lambda_1)x=0$$

卽チ　$\varepsilon=k_1x,\qquad k_1=-\dfrac{\phi_2(\lambda_1)}{b_1}$

$k_1>0$ ナルトキハ ε ト x トハ同符號ニシテ, $k_1<0$ ナルトキハ異符號ナリ, 依テ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形次ノ如シ.

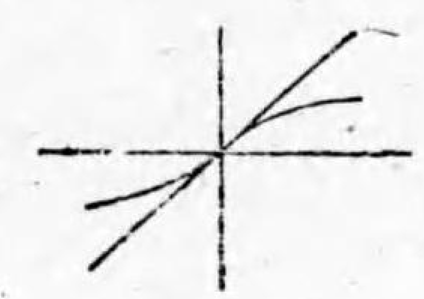
$k_1>0$　　　　$k_1<0$

2) $\phi_2(\lambda_1)=0\quad\phi_3(\lambda_1)\gtrless0$

此ノ場合ニハ x ヲ第一位, ε ヲ第二位トシ, 高位ナル項ヲ省略シテ次ノ式ヲ得.

$$\varepsilon b_1+\phi_3(\lambda_1)x^2=0$$

卽チ　$\varepsilon=k_2x^2,\qquad k_2=-\dfrac{\phi_3(\lambda_1)}{b_1}$

$k_2>0$　　　　$k_2<0$

$\phi_3(\lambda_1)=0$, $\phi_4(\lambda_1)=0$ 等ノ場合ニ於テモ同樣ナリ.

尙 $b_1=0$ ナルトキハ最初ヨリ x ト y トヲ交換シテ考フベシ.

II. $a_1=0,\quad b_1=0$

$$\phi_2(\lambda_1)+\phi_3(\lambda_1)x+\phi_4(\lambda_1)x^2+\phi_5(\lambda_1)x^3+\cdots\cdots=0$$

1) $\phi_2(\lambda_1)=0$ ガ二ツノ相異ナル實根ヲ有スルトキ, 其一ツヲ λ_1 トシ, $\lambda=\lambda_1+\varepsilon$ ト置クトキハ

$$\phi_2(\lambda_1+\varepsilon)+\phi_3(\lambda_1+\varepsilon)x+\phi_4(\lambda_1+\varepsilon)x^2+\phi_5(\lambda_1+\varepsilon)x^3+\cdots\cdots=0$$

即チ

$$\varepsilon\phi_2'(\lambda_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_2''(\lambda_1)+\phi_3(\lambda_1)x+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_3''(\lambda_1)x+\frac{\varepsilon^3}{6}\phi_3'''(\lambda_1)x+\phi_4(\lambda_1)x^2+\cdots\cdots=0$$

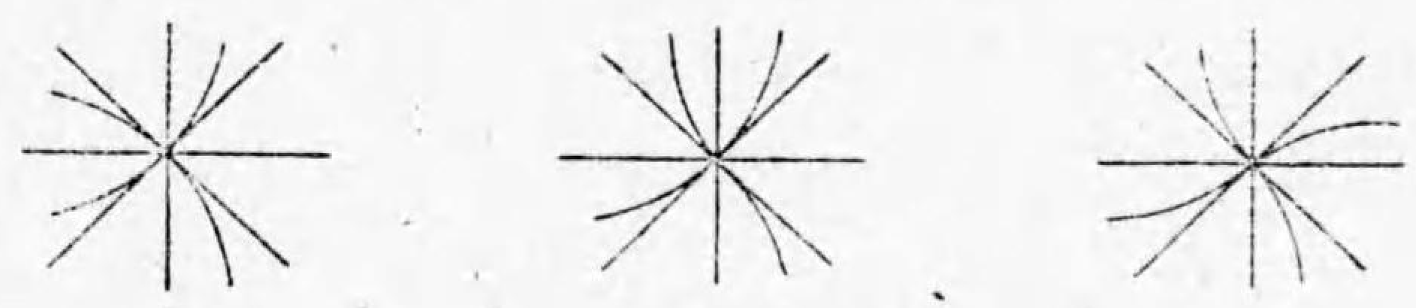
a) $\phi_2(\lambda_1)\gtrless 0$

$$\varepsilon\phi_2'(\lambda_1)+\phi_3(\lambda_1)x=0$$

b) $\phi_3(\lambda_1)=0,\quad \phi_4(\lambda_1)\gtrless 0$

$$\varepsilon\phi_2'(\lambda_1)+\phi_4(\lambda_1)x^2=0$$

他ノ一根ニ就テモ同様ナリ，依テ次ノ如キ圖形ヲ得.



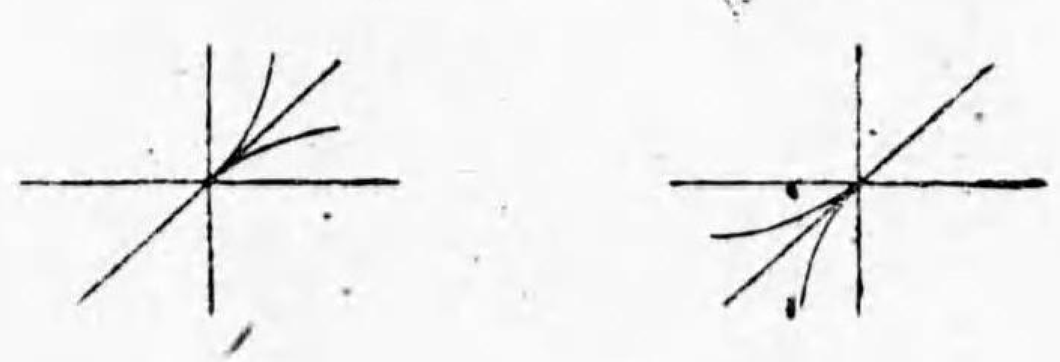
2) $\phi_2(\lambda_1)=0$ ガ二ツノ等根ヲ有スルトキ，之ヲ λ_1 トシ $\lambda=\lambda_1+\varepsilon$ ト置キ前同様ニシテ

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_2''(\lambda_1)+\phi_3(\lambda_1)x+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_3''(\lambda_1)x$$
$$+\frac{\varepsilon^3}{6}\phi_3'''(\lambda_1)x+\phi_4(\lambda_1)x^2+\cdots\cdots=0$$

a) $\phi_3(\lambda_1)\gtrless 0$

此ノ場合ニハ ε ヲ第一位，x ヲ第二位トシ，高位ナル項ヲ省略シテ

$$\varepsilon^2\phi_2''(\lambda_1)+2\phi_3(\lambda_1)x=0$$



b) $\phi_3(\lambda_1)=0,\quad \phi_3'(\lambda_1)\gtrless 0,\quad \phi_4(\lambda_1)\gtrless 0$

此ノ場合ニハ ε 及ビ x ヲ第一位トシ，高位ナル項ヲ省略シテ

$$\varepsilon^2\phi_2''(\lambda_1)+2\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x+2\phi_4(\lambda_1)x^2=0$$

即チ

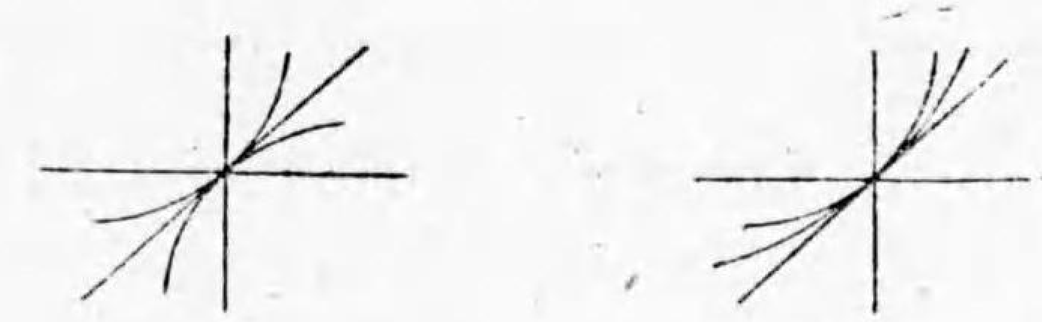
$$\varepsilon^2c_2+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x+\phi_4(\lambda_1)x^2=0$$

故ニ

$$\varepsilon=\frac{-\phi_3'(\lambda_1)\pm\sqrt{\{\phi_3'(\lambda_1)\}^2-4c_2\phi_4(\lambda_1)}}{2c_2}x$$

從テ次ノ如ク三ツノ區別ヲナスヲ要ス

α) $\{\phi_3'(\lambda_1)\}^2>4c_2\phi_4(\lambda_1)$



β) $\{\phi_3'(\lambda_1)\}^2<4c_2\phi_4(\lambda_1)$

γ) $\{\phi_3'(\lambda_1)\}^2=4c_2\phi_4(\lambda_1)$

ε ノ二ツノ値ハ一致シテ $\varepsilon=-\frac{\phi_3'(\lambda_1)}{2c_2}x$ トナル，依テ明確ナル區別ヲナサンガ爲メニ更ニ第三位ノ項ヲ併セ取ルコトトスルトキハ

$$\varepsilon^2c_2+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x+\phi_4(\lambda_1)x^2$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_3''(\lambda_1)x+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x^2+\phi_5(\lambda_1)x^3=0$$

即チ $$c_2\left\{\varepsilon+\frac{\phi_3'(\lambda_1)}{2c_2}x\right\}^2+\delta x=0$$

此ニ $$\delta=\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_3''(\lambda_1)+\varepsilon\phi_4'(\lambda_1)x+\phi_5(\lambda_1)x^2$$

δ ニ於テ ε ノ代リニ $-\frac{\phi_3(\lambda_1)}{2c_2}x$ ト置クトキハ

$$\delta=\left[\frac{\{\phi_3(\lambda_1)\}^2}{8c_2^2}\phi_3''(\lambda_1)-\frac{\phi_3'(\lambda_1)}{2c_2}\phi_4'(\lambda_1)+\phi_5(\lambda_1)\right]x^2$$

故ニ $$\varepsilon=-\frac{\phi_3(\lambda_1)}{2c_2}x\pm\sqrt{kx^3}.$$

此ノ右側ノ符號ハ最初ノ項ニヨリテ定マリ，$-\frac{\phi_3(\lambda_1)}{2c_2}>0$ 又ハ <0 ナルニ從テ ε ト x トハ同符號又ハ異符號ニシテ，$k>0$ 又ハ $k<0$ ナルニ從テ $x>0$ 又ハ $x<0$ ナルコトヲ要ス，依テ

c) $\phi_3(\lambda_1)=0,\quad \phi_3'(\lambda_1)=0,\quad \phi_4(\lambda_1)\gtrless 0$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_2''(\lambda_1)+\phi_4(\lambda_1)x^2=0$$

$$\varepsilon=\pm\sqrt{-2\frac{\phi_4(\lambda_1)}{\phi_2''(\lambda_1)}}\,x$$

d) $\phi_3(\lambda_1)=0,\quad \phi_3'(\lambda_1)\gtrless 0,\quad \phi_4(\lambda_1)=0,\quad \phi_5(\lambda_1)\gtrless 0$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_2''(\lambda_1)+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x+\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_3''(\lambda_1)x+\varepsilon\phi_4'(\lambda_1)x^2+\phi_5(\lambda_1)x^3=0$$

先ヅ ε ト x トヲ何レモ第一位ノ無限小ト考フレバ他ノ項ハ之ヲ省略シ得ベシ，依テ

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_2''(\lambda_1)+\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x=0$$

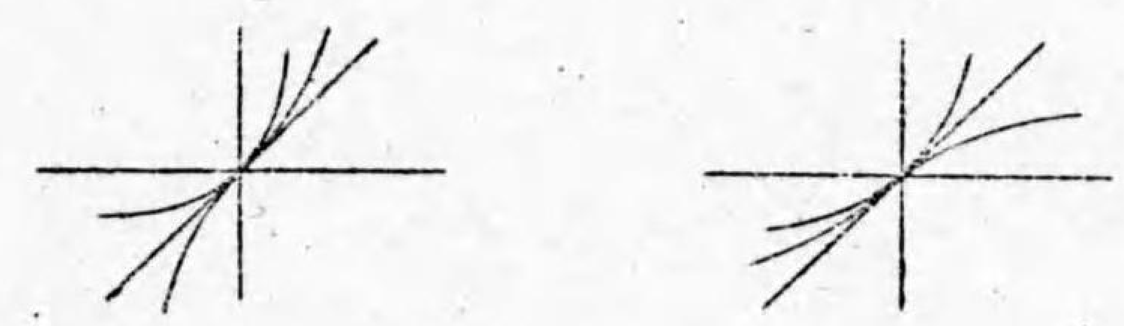
即チ $$\varepsilon=-\frac{2\phi_3'(\lambda_1)}{\phi_2''(\lambda_1)}x$$

又 x ヲ第一位，ε ヲ第二位ト考フレバ

$$\varepsilon\phi_3'(\lambda_1)x+\phi_5(\lambda_1)x^3=0$$

即チ $$\varepsilon=-\frac{\phi_5(\lambda_1)}{\phi_3'(\lambda_1)}x^2$$

定點ニ於テ此ノ二ツガ共ニ成立シ得ルヲ以テ次ノ如キ圖形ヲ得．



同樣ニシテ x ノ高冪ノ係數ガ 0 ニ等シキ場合ヲ研究スルコトニヨリ種々ノ複雜シタル圖形ヲ明ニスルコトヲ得ベシ，此等ニ關シテハ特殊ナル問題ニ就キ直接上記ノ方法ヲ試ムルヲ以テ捷徑トス．

尙次ノ例ニ於テハ定點ヲ座標ノ原點ニ移シタルモノトシテ共ノ點ニ於ケル曲線ノ形ヲ索ムルモノトス．

例 1. $y^4-xy^3+x^3-2x^2y=0$

$x^3-2x^2y=0$, 即チ $y=\frac{x}{2}$ 及ビ $x=0$ ハ原點ニ於ケル切線ナリ

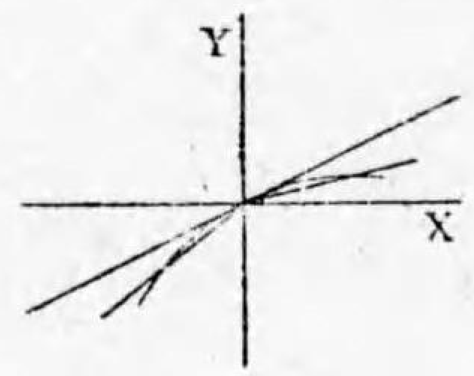
$y=\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x$ ト置クトキハ

$$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^4x^4-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^3x^4+x^3-2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x^3=0$$

即チ $$\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^4-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^3\right\}x=2\varepsilon$$

x 及ビ ε ヲ第一位ノ無限小トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ

$$\varepsilon=-\frac{x}{32}$$



依テ本節 I. 1 ニヨリ右ノ圖形ヲ得

又 $y=\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)x$ ニ ε ノ値ヲ代入シテ

$$y=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{32}$$

故ニ原點ニ於テ曲線ノ一枝ハ此ノ拋物線ト同一ノ形ヲナス.

次ニ $x=\varepsilon y$ ト置クトキハ

$$y^4-\varepsilon y^4+\varepsilon^3y^3-2\varepsilon^2y^3=0$$

即チ $$y-\varepsilon y+\varepsilon^3-2\varepsilon^2=0$$

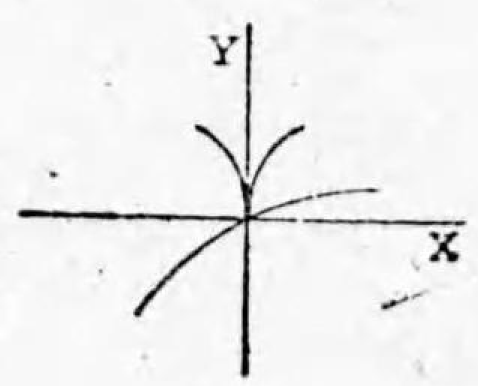
y 及ビ ε^2 ヲ同位トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ

$$y\doteq2\varepsilon^2$$

依テ本節 II. 2. a ニヨリ右ノ圖形ヲ得.

又 $x=\varepsilon y$, $y=2\varepsilon^2$ ヨリ ε ヲ消去シテ

$$y^3=2x^2$$



以上ノ結果ニヨリ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形大略右ノ如シ.

例 2. $x(x-y)^2\{(x+y)^2+4y\}=4y(2y-3x)$

$4y(2y-3x)=0$, 即チ $y=\frac{3}{2}x$, $y=0$ ハ原點ニ於ケル切線ナリ.

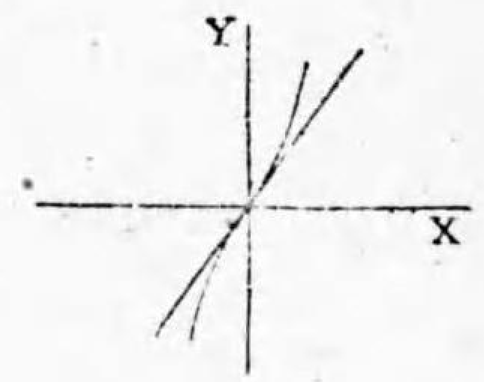
$y=\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)x$ ト置クトキハ

$$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2\left\{\left(\frac{5}{2}+\varepsilon\right)^2x^2+2(3+2\varepsilon)x\right\}x^3=4(3+2\varepsilon)\varepsilon x^2$$

即チ $$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2\left\{\left(\frac{5}{2}+\varepsilon\right)^2x+2(3+2\varepsilon)\right\}x^2=4(3+2\varepsilon)\varepsilon$$

x^2 及ビ ε ヲ同位トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ

$$\varepsilon=\frac{x^2}{8}$$



依テ本節 I. 2 ニヨリ右ノ圖形ヲ得.

又 $y=\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)x$, $\varepsilon=\frac{x^2}{8}$ ヨリ ε ヲ消去シテ

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{x^3}{8}$$

次ニ $y=\varepsilon x$ ト置クトキハ

$$(1-\varepsilon)^2\{(1+\varepsilon)^2x+4\varepsilon\}x^4=4\varepsilon(2\varepsilon-3)x^2$$

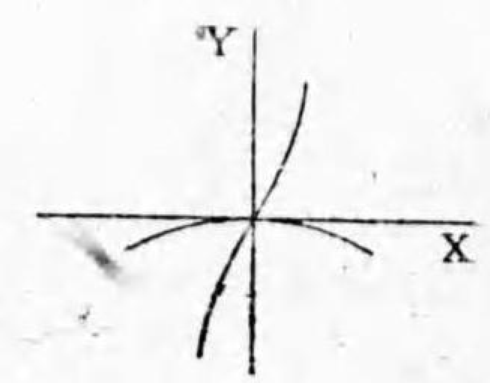
即チ $$(1-\varepsilon)^2\{(1+\varepsilon)^2x+4\varepsilon\}x^2=4\varepsilon(2\varepsilon-3)$$

x^3 及ビ ε ヲ同位トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ

$$\varepsilon=-\frac{x^3}{12}$$

又 $y=\varepsilon x$, $\varepsilon=-\frac{x^3}{12}$ ヨリ ε ヲ消去シテ

$$y=-\frac{x^4}{12}$$



以上ノ結果ニヨリ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形大略右ノ如シ.

例 3. $y^4(y-1)=x(x^2-y)^2$

$xy^2=0$, 即チ $x=0$, $y^2=0$ ハ原點ニ於ケル切線ナリ.

$x=\varepsilon y$ ト置クトキハ

$$y^4(y-1)=\varepsilon y^3(\varepsilon^2 y-1)^2$$

即チ

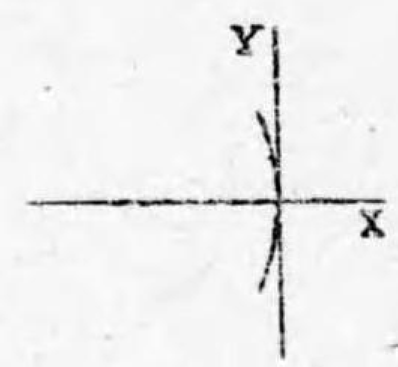
$$y(y-1)=\varepsilon(\varepsilon^2 y-1)^2$$

y 及ビ ε ヲ同位ノ無限小トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ

$$y=-\varepsilon$$

又 $x=\varepsilon y$, $y=-\varepsilon$ ヨリ ε ヲ消去シテ

$$x=-y^2$$



依テ原點ニ於テ曲線ノ一枝ハ拋物線ト同形ヲナス.

次ニ $y=\varepsilon x$ ト置クトキハ

$$\varepsilon^4 x^4(\varepsilon x-1)=x^3(x-\varepsilon)^2$$

即チ

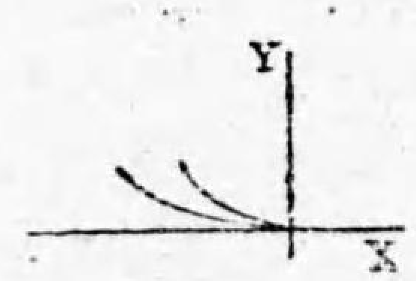
$$\varepsilon^4 x(\varepsilon x-1)=(x-\varepsilon)^2$$

x 及ビ ε ヲ同位ノ無限小トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ $(x-\varepsilon)^2=0$, 依テ更ニ之ヨリ高位ナル項ヲ取レバ

$$(x-\varepsilon)^2+\varepsilon^4 x=0$$

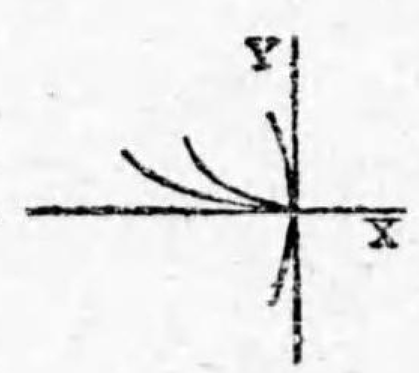
此ノ最後ノ項ニ於テ $x=\varepsilon$ ト置ケバ

$$x=(1\pm\varepsilon\sqrt{-\varepsilon})\varepsilon$$



ε ハ負ナルコトヲ要シ, 又 $\pm$ ノ何レヲ取ルモ右邊ノ符號ハ初項 ε ニヨリテ定マル.

依テ右ノ圖形ヲ得.



以上ノ結果ニヨリ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形大略右ノ如シ.

49. 曲線ノ追跡

曲線上ノ點ノ座標間ニ成立スル方程式ヲ知リテ其ノ曲線ヲ畫クコトヲ**曲線ノ追跡**トイフ.

前數節ニ於テ示シタルガ如ク曲線ニ關シテ微分積分學ヲ應用スルトキハ極メテ正確ニシテ且興味アル結果ヲ得ルノミナラズ, 一面ニハ微分積分學ノ眞髓ヲ把握スルニ最必要ナルヲ以テ本節ニ於テハ曲線ノ追跡ニ關シテ注意スベキ要項ヲ舉ゲ且一二ノ例ヲ示スベシ.

I. 方程式ヲ追跡ニ便利ナル形ニ變化ス.

II. 座標軸, 原點, 又ハ他ノ定直線, 定點等ニ關シテ對稱ノ有無ヲ吟味ス.

III. 曲線ト座標軸又ハ他ノ特別ナル直線又ハ曲線トノ交點ヲ索ム.

IV. 曲線ノ存在スル區域ヲ定ム.

V. $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ヲ索メ且其ノ正負ヲ吟味ス.

$\dfrac{dy}{dx}>0$ ナルトキハ y ハ x ト共ニ增大シ, $\dfrac{dy}{dx}<0$ ナルトキハ y ハ x ノ增大スルニ從テ減少ス

$\dfrac{dy}{dx}=0$ ナルトキハ y ハ一般ニ極大又ハ極小ナリ.

VI. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ノ値ヲ索メ且其ノ正負ヲ吟味ス.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ ナルトキハ曲線ハ上ノ方ニ凹ニシテ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ ナルトキハ上ノ方ニ凸ナリ.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナルトキハ一般ニ彎曲點存在ス.

VII. 漸近線ヲ索メ且之ニ對應スル曲線ノ枝トノ關係ヲ定ム

VIII. 重複點ヲ索メ且其ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形ヲ定ム

IX. 曲率半徑ヲ索ム.

X. x 又ハ y ニ順次種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル y 又ハ x ノ値ヲ索メ，曲線上ノ點ヲ定ム.

注意 曲線ノ追跡ニ於テハ成ルベク上記最初ノ四項ニヨリテ大體ノ形ヲ定ムベシ，殊ニ最重要ナルハ I 及ビ IV ニシテ曲線ノ方程式ヲ種々變形セシムルコトニヨリ曲線ノ存在スル區域ヲ巧ニ制限スルコトヲ得バ之ニテ大勢已ニ決シタリトイフベク，然ル後 V 以下ニ移リテ微細ナル點ニ就キ研究スベシ但シ X ニヨリ曲線上ノ若干ノ特殊ナル點ノ座標ヲ索ムルコトハ大體ノ形ヲ決定スルニ當リ有力ナルコトアリ，場合ニヨリテハ先ヅ之ヲ試ムルヲ可トス.

初學者ハ當面ノ問題ヲ深ク考察セズ，先ヅ微分係數ヲ索メントスル傾向アリ，此ノ如キハ徒勞ニ屬スルコト多キノミナラズ，些少ナル誤算ニ拘泥シテ大局ヲ逸シ混亂ニ陷ルコト少カラズ，如何ナル場合ニモ微分法ヲ成ルベク少ク且有効ニ使用スルコトニ注意スベク，又上ニ列擧シタル各項ニ渉リ且此ノ順序ニ從テ必ズシモ一々調査スルコトヲ要セズ，臨機應變本來ノ目的ヲ達スルヲ以テ主トスベキコト勿論ナリ.

上ノ方法ニヨリテ曲線ノ形ヲ定メ難キ場合ニハ結局獨立變數ニ順次連續的ニ變化スル無數ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル函數ノ値ヲ一々算出シテ曲線上ノ點ヲ決定スルノ外ニ策ナシ，是レ本書ニ於テ論ズベキ範圍ニアラズ.

例 1. $x^2y+y=x$

I. x ノ代リニ $-x$, 又 y ノ代リニ $-y$ ト置クモ方程式變ゼザルガ故ニ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ.

II. $x=0$ ナルトキ $y=0$, 故ニ曲線ハ原點ヲ通過ス.

III. 方程式 $x^2y+y=x$ ヲ變形シテ

(1) $(1+x^2)y=x$ ト書クトキハ x ト y トハ必ズ同一ノ符號ヲ有セザルベカラズ，即チ $x>0$ ナラバ $y>0$, 又 $x<0$ ナラバ $y<0$, 故ニ第二象限及ビ第四象限ニハ曲線存在セズ.

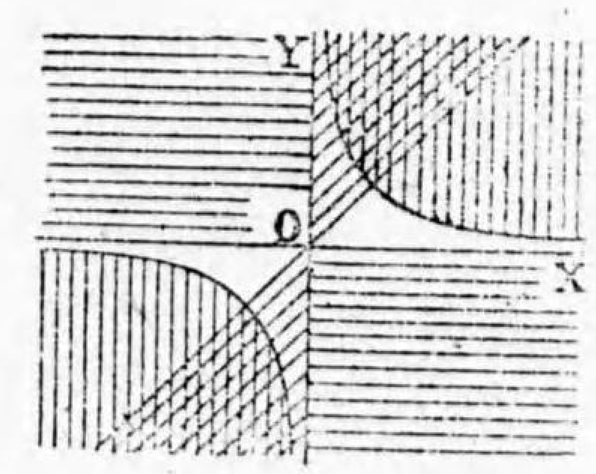
(2) $x(xy-1)+y=0$ ト書クトキハ $x>0$, $y>0$ ニ於テ $xy-1>0$ ニテハ方程式成立セズ，故ニ第一象限ニ於テハ雙曲線 $xy-1=0$ ノ上方ニハ曲線存在セズ.

同樣ニ $x<0$, $y<0$ ニ於テ $xy-1<0$ ニテハ方程式成立セズ，故ニ第三象限ニ於テハ $xy-1=0$ ノ下方ニハ曲線存在セズ

(3) $x^2y+(y-x)=0$ ト書クトキハ $y>0$, $y-x>0$ ニテハ方程式成立セズ，故ニ第一象限ニ於テハ直線 $y=x$ ノ上方ニハ曲線存在セズ.

同樣ニ $y<0$, $y-x<0$ ニテハ方程式成立セズ，故ニ第三象限ニ於テハ $y=x$ ノ下方ニハ曲線存在セズ.

以上ノ證明ニヨリ右圖ニ於テ影ヲ附シタル部分ニハ曲線存在セズ，其他ノ部分ニ於テ原點ヲ通過シテ對稱形ヲナシテ存在スベシ.



IV. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$x<0$ ナルトキハ $y<0$, 又 $x>0$ ナルトキハ $y>0$

$x=\pm1$ ナルトキハ $y'=0$

$|x|<1$ ナルトキハ $y'>0$, 又 $|x|>1$ ナルトキハ $y'<0$

故ニ $x<-1$ ナルトキハ y ハ負ニシテ x ノ增大スルニ從テ益減少シ, $x=-1$ ニ於テ極小ニシテ其ノ値ハ $-\dfrac{1}{2}$

$-1<x<1$ ナルトキハ y ハ x ト共ニ增大シ, $x>0$ ナルトキ y ハ正トナリ, $x=1$ ニ於テ極大ニシテ其ノ値ハ $\dfrac{1}{2}$

$x>1$ ナルトキハ y ハ x ノ增大スルニ從テ益減少ス.

V $y''=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}-\dfrac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$x=0$ 及ビ $x=\pm\sqrt{3}$ ナルトキ $y''=0$

x ト x^2-3 トガ同符號ナルトキハ $y''>0$ ニシテ, 異符號ナルトキハ $y''<0$, 依テ

$x<-\sqrt{3}$ ナルトキハ曲線ハ上ノ方ニ凸

$-\sqrt{3}<x<0$ ナルトキハ曲線ハ上ノ方ニ凹

$0<x<\sqrt{3}$ ナルトキハ曲線ハ上ノ方ニ凸

$x>\sqrt{3}$ ナルトキハ曲線ハ上ノ方ニ凹

從テ次ノ三點ハ何レモ彎曲點ナリ.

$$\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

VI $y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+x}$

x ノ絕對値ガ增大スルニ從テ y ノ絕對値ハ減少シ, 終ニ 0 ニ收斂ス. 故ニ $y=0$ ハ漸近線ニシテ, $x>0$ ニ於テ曲線ハ其ノ上方ニ在リ, $x<0$ ニ於テハ下方ニ在リ

VII. $f(x,\ y)=x^2y+y-x$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-1,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+1$$

$2xy-1=0$, $x^2+1=0$ ヨリ x 及ビ y ノ實値ヲ得ルコトナシ, 故ニ此ノ曲線ハ重複點ヲ有セズ.

VIII. ρ ヲ曲率半徑トスルトキハ

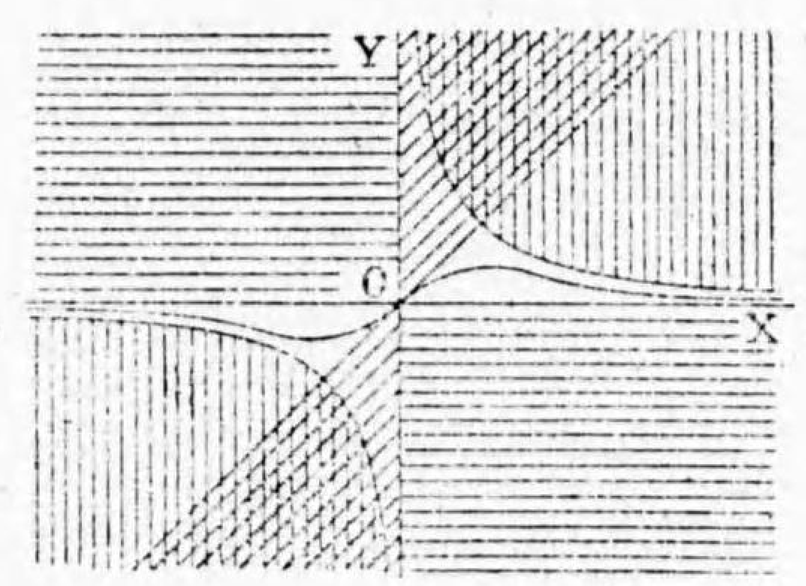
$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

故ニ

$$\rho=\frac{\{(1+x^2)^4+(1-x^2)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2x(x^2-3)(1+x^2)^3}$$

從テ $x=\pm1$ ナルトキハ $\rho=2$

以上ノ結果ニヨリ曲線ノ形ヲ得ルコト次ノ如シ.



例 2. $x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$

I. 此ノ方程式ハ x ノ偶數羃ノミヲ含ムヲ以テ曲線ハ y 軸ニ關シテ對稱ナリ.

II. $x=0$ ナルトキ $y=0$, 故ニ曲線ハ原點ヲ通過ス.

III. 方程式ヲ變形シテ

(1) $x^4+x^2y^2+y^2=6x^2y$ ト書クトキハ左側ハ正又ハ 0, 從テ $y\geqq 0$ ナルコトヲ要ス, 故ニ曲線ハ x 軸ノ上方ニノミ存在ス.

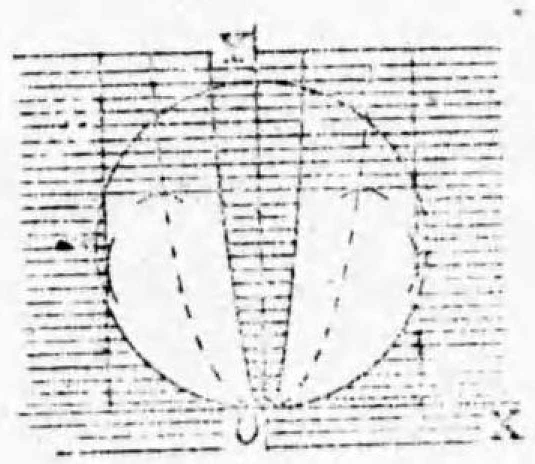
(2) $(x^2-y)^2=x^2y(4-y)$ ト書クトキハ $y(4-y)\geqq 0$ ナルコトヲ要ス, 然ルニ (1) ニヨリ $y\geqq 0$ ナルヲ以テ $y\leqq 4$ ナルコトヲ要ス, 故ニ曲線ハ直線 $y=4$ ノ下方ニ在リ.

(3) $(x^2-3y)^2=y^2(8-x^2)$ ト書クトキハ $8-x^2\geqq 0$ ナルコトヲ要ス, 從テ $x^2\leqq 8$, 故ニ曲線ハ直線 $x=2\sqrt{2}$ ノ左側及ビ直線 $x=-2\sqrt{2}$ ノ右側ニノミ存在ス.

(4) $x^2(x^2+y^2)=y(6x^2-y)$ ト書クトキハ $y(6x^2-y)\geqq 0$ ナルコトヲ要ス, 然ルニ $y\geqq 0$ ナルヲ以テ $y\leqq 6x^2$ ナルコトヲ要ス, 故ニ曲線ハ拋物線 $y=6x^2$ ノ下方ニ在リ.

(5) $x^2\{x^2+(y-3)^2-9\}+y^2=0$ ト書クトキハ $x^2+(y-3)^2-9\leqq 0$ ナルコトヲ要ス, 故ニ曲線ハ圓 $x^2+(y-3)^2=9$ ノ內部ニ在リ.

以上ノ研究ニヨリ曲線ハ直線 $y=0$, $y=4$, $x=\pm 2\sqrt{2}$, 拋物線 $y=6x^2$, 圓 $x^2+y^2=6y$ ノ間ニ在リ, $y=x^2$ トノ交點ニ於テ $y=4$ ニ切シ, $3y=x^2$ トノ交點ニ於テ $x=\pm 2\sqrt{2}$ ニ切ス.



IV. $f(x, y)=x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2$ ト置クトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x(2x^2+y^2-6y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2(x^2y-3x^2+y)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ヨリ

(1) $x=0$, $\quad x^2y-3x^2+y=0$

(2) $2x^2+y^2-6y=0$, $\quad x^2y-3x^2+y=0$

此ノ二組ノ方程式ヲ解キテ得ル實根ハ $x=0$, $y=0$ ノミナリ.

$x=0$, $y=0$ ナルトキハ $f(x, y)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(x^2+1)>0$,

故ニ (0, 0) ハ二重點ニシテ $y^2=0$ ハ其ノ切線ナリ.

$y=\varepsilon x$ ト置キ, x 及ビ ε ヲ同位トシテ高位ノ項ヲ省略スレバ

$$x^2-6\varepsilon x+\varepsilon^2=0$$

依テ $\qquad \varepsilon=(3\pm 2\sqrt{2})x$

故ニ原點ニ於ケル曲線ノ形右ノ如シ.

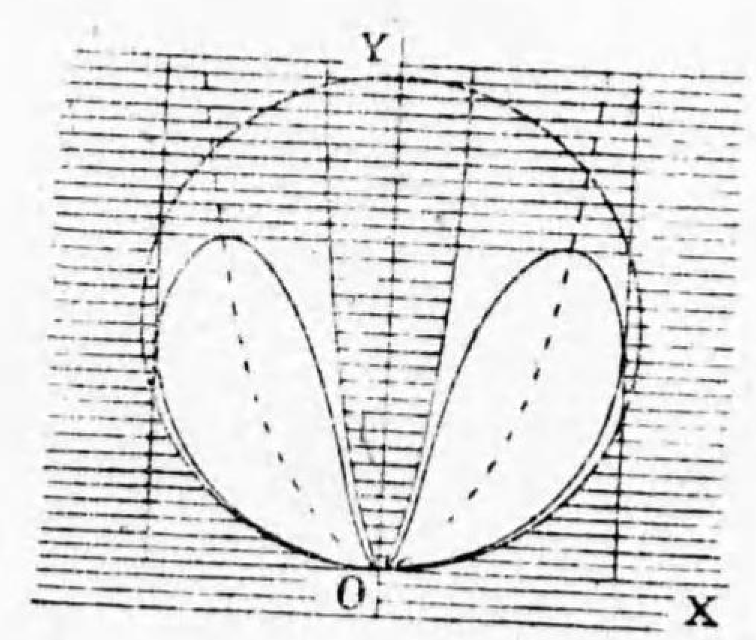
V. $y=0$ ト 4 トノ間ニ在ル値, 例ヘバ 2 ヲ與フルトキハ

$$x^4-8x^2+4=0$$

依テ $\qquad x=\pm\sqrt{4\pm 2\sqrt{2}}$

x ニハ四ツノ實値アリ

以上ノ結果ニヨリ曲線ノ形ヲ得ルコト右ノ如シ



III. 彎曲點

曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $(x,\ y)$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ 0 ニ等シク且此ノ點ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ符號ヲ變ズルトキハ第 42 節ニヨリ此ノ點ハ曲線 $y=f(x)$ 上ノ彎曲點ナリ，然ルニ第 38 節 II，例 1 ニヨリ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ ト置クトキハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(-r\sin\theta+\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta\right)^3}$$

故ニ $r=f(\theta)$，$r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=0$ ヨリ得タル $r,\ \theta$ ノ値ニ對シテ $-r\sin\theta+\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta\gtreqless 0$ ニシテ且上ノ式ガ此ノ點ニ於テ符號ヲ變ズルトキハ此ノ點ハ曲線 $r=f(\theta)$ ノ彎曲點ナリ.

IV. 曲率半徑

曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $(x,\ y)$ ニ於ケル曲率半徑ヲ ρ トスレバ第 45 節ニヨリ

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

依テ前同樣 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ ト置ケバ第 38 節 II，例 1 ニヨリ曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ點 $(r,\ \theta)$ ニ於ケル曲率半徑次ノ如シ.

$$\rho=\frac{\left\{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}$$

V. **曲線ノ追跡**

極座標ニ於ケル曲線ノ追跡ニ關シテ注意スベキ要點ハ直角座標ニ於ケル場合ト略同樣ナリ，即チ

1. 方程式ヲ追跡ニ便利ナル形ニ變化ス.
2. 原線，極，又ハ其他ノ定直線，定點等ニ關シテ對稱ノ有無ヲ吟味ス.
3. 曲線ノ存在スル區域ヲ定ム.
4. $\dfrac{dr}{d\theta}$ ノ値ヲ求メ且其ノ正負ヲ吟味ス.
5. 彎曲點ヲ求ム.
6. 動徑ト切線トノナス角ヲ求ム.
7. 漸近線ヲ求メ且之ニ對應スル曲線ノ枝トノ關係ヲ定ム.
8. 曲率半徑ヲ求ム.
9. r 又ハ θ ニ順次種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル θ 又ハ r ノ値ヲ求メ，曲線上ノ點ヲ定ム.

尙曲線ノ方程式ニシテ極座標ニテ與ヘラルル場合ノミナラズ，直角座標ニテ與ヘラルルトキニモ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ ト置キ方程式ヲ極座標ニ變ジテ曲線ノ存在スル區域ヲ定メ，或ハ θ ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル r ノ値ヲ計算スルコトニヨリテ容易ニ曲線上ノ點ヲ定メ得ルコトアリ，原點ガ曲線上ニアルトキハ計算特ニ簡單ナリ.

50. 極座標ニテ表ハシタル曲線

I. 切線及ビ法線

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 (x, y) ニ於ケル切線ノ方程式ハ第 40 節ニヨリ

$$\mathrm{Y}-y=\frac{dy}{dx}(\mathrm{X}-x)$$

此ノ式ニ於テ

$$\mathrm{X}=\mathrm{R}\cos\omega,\quad \mathrm{Y}=\mathrm{R}\sin\omega,\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

從テ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta},\qquad r'=\frac{dr}{d\theta}$$

ト置クトキハ

$$\frac{\mathrm{R}\sin\omega-r\sin\theta}{r'\sin\theta+r\cos\theta}=\frac{\mathrm{R}\cos\omega-r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}$$

即チ
$$\mathrm{R}r'\sin(\omega-\theta)-\mathrm{R}r\cos(\omega-\theta)+r^2=0$$

故ニ曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ一點 (r, θ) ニ於ケル切線ノ方程式次ノ如シ

$$\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{1}{r}\cos(\omega-\theta)+\left(\frac{1}{r}\right)'\sin(\omega-\theta)\tag{1}$$

同樣ニシテ曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 (x, y) ニ於ケル法線ノ方程式

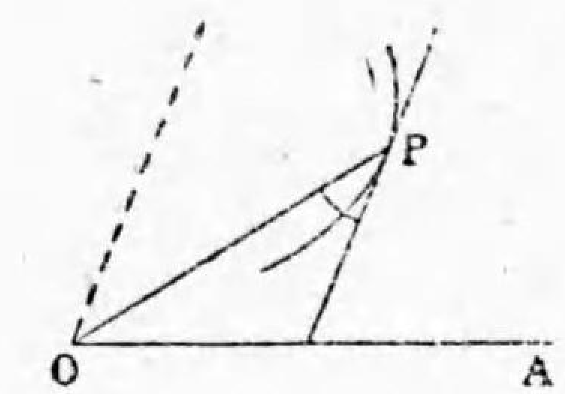
$$(\mathrm{Y}-y)\frac{dy}{dx}+\mathrm{X}-x=0$$

ヨリ次ノ式ヲ得

$$\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{1}{r}\cos(\omega-\theta)+\frac{1}{r'}\sin(\omega-\theta)\tag{2}$$

之ヲ曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ一點 (r, θ) ニ於ケル法線ノ方程式トス。

O ヲ極座標ノ極, OA ヲ原線トシ, 曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ一點 $\mathrm{P}(r, \theta)$ ニ於ケル切線ト動徑トノ間ノ角ヲ ϕ トスルトキハ



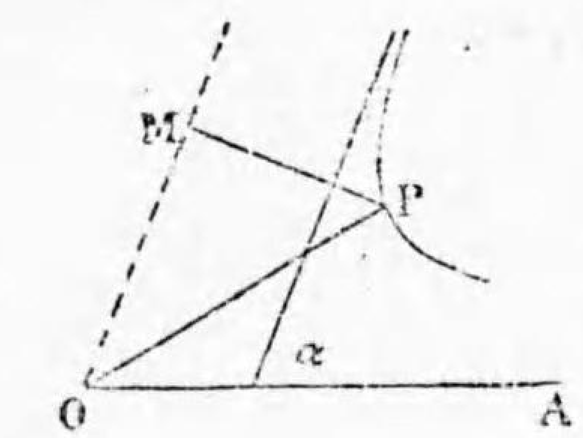
$$\phi=\lim_{\mathrm{R}\to\infty}(\omega-\theta)$$

故ニ (1) ヨリ

$$\tan\phi=\frac{r}{r'}=r\frac{d\theta}{dr}$$

II. 漸近線

曲線 $r=f(\theta)$ ノ漸近線ガ存在スルトキ, 其ノ原線トナス角ヲ α トシ, 之ニ對應スル曲線ノ枝上ノ一點 $\mathrm{P}(r, \theta)$ ヨリ O ヲ通過シテ漸近線ニ平行ナル直線ニ下ス垂線ヲ PM トスレバ



$$\mathrm{PM}=r\sin(\alpha-\theta)$$

$\theta\to\alpha$ ナル極限ニ於テ $r\sin(\alpha-\theta)$ ハ一定ノ値ヲ取ル

依テ
$$c=\lim_{r\to\infty}r\sin(\alpha-\theta)$$

トスレバ漸近線ハ原線 OA ト α ナル角ヲナシ且極 O ヨリ一定ノ距離ニアリ

故ニ漸近線ノ方程式次ノ如シ

$$\mathrm{R}\sin(\alpha-\omega)=c$$

此ニ
$$c=\lim_{\theta\to\alpha}f(\theta)\sin(\alpha-\theta)$$

III. 彎曲點

曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 (x, y) ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ 0 ニ等シク且此ノ點ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ符號ヲ變ズルトキハ第 42 節ニヨリ此ノ點ハ曲線 $y=f(x)$ 上ノ彎曲點ナリ，然ルニ第38節 II, 例 1 ニヨリ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ト置クトキハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(-r\sin\theta+\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta\right)^3}$$

故ニ $r=f(\theta)$, $r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=0$ ヨリ得タル r, θ ノ値ニ對シテ $-r\sin\theta+\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta\gtrless 0$ ニシテ且上ノ式ガ此ノ點ニ於テ符號ヲ變ズルトキハ此ノ點ハ曲線 $r=f(\theta)$ ノ彎曲點ナリ.

IV. 曲率半徑

曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 (x, y) ニ於ケル曲率半徑ヲ ρ トスレバ第 45 節ニヨリ

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

依テ前同様 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ト置ケバ第38節 II, 例 1 ニヨリ曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ點 (r, θ) ニ於ケル曲率半徑次ノ如シ.

$$\rho=\frac{\left\{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}$$

V. 曲線ノ追跡

極座標ニ於ケル曲線ノ追跡ニ關シテ注意スベキ要點ハ直角座標ニ於ケル場合ト略同様ナリ，即チ

1. 方程式ヲ追跡ニ便利ナル形ニ變化ス
2. 原線，極，又ハ其他ノ定直線，定點等ニ關シテ對稱ノ有無ヲ吟味ス.
3. 曲線ノ存在スル區域ヲ定ム
4. $\dfrac{dr}{d\theta}$ ノ値ヲ索メ且其ノ正負ヲ吟味ス
5. 彎曲點ヲ索ム.
6. 動徑ト切線トノナス角ヲ索ム
7. 漸近線ヲ索メ且之ニ對應スル曲線ノ枝トノ關係ヲ定ム
8. 曲率半徑ヲ索ム.
9. r 又ハ θ ニ順次種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル θ 又ハ r ノ値ヲ索メ，曲線上ノ點ヲ定ム.

尙曲線ノ方程式ニシテ極座標ニテ與ヘラルル場合ノミナラズ，直角座標ニテ與ヘラルルトキニモ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. ト置キ方程式ヲ極座標ニ變ジテ曲線ノ存在スル區域ヲ定メ，或ハ θ ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル r ノ値ヲ計算スルコトニヨリテ容易ニ曲線上ノ點ヲ定メ得ルコトアリ，原點ガ曲線上ニアルトキハ計算特ニ簡單ナリ.

例. $(r-1)\theta^2=r$

1. 此ノ方程式ハ θ ノ偶數羃ノミヲ含ムヲ以テ曲線ハ原線ニ關シテ對稱ナリ.

2. $r=\dfrac{\theta^2}{\theta^2-1}=1+\dfrac{1}{\theta^2-1}$

$|\theta|>1$ ナルトキハ $r>1$, $|\theta|<1$ ナルトキハ $r<1$, $|\theta|=1$ ナルトキハ $r=\infty$

$\theta=0$ ナルトキ $r=0$ ニシテ, θ ノ増大スルニ從テ r ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ増大シ, $\theta=1$ ニ於テ無限大トナル. $\theta>1$ ナルトキハ θ ノ増大スルニ從テ r ハ減少シ, θ ガ無限大ナルトキ $r=1$ ニ收斂ス.

3. $r=\dfrac{\theta^2}{\theta^2-1}$, $\dfrac{dr}{d\theta}=-\dfrac{2\theta}{(\theta^2-1)^2}$

$\theta>0$ ナルトキハ $\dfrac{dr}{d\theta}$ ハ恒ニ負ナリ, 故ニ r ニ極大極小ナシ, $\theta<0$ ナルトキモ亦同様ナリ.

4 $r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=\dfrac{\theta^2(\theta^2+2)(\theta^2-3)}{(\theta^2-1)^3}$

$\theta=\pm\sqrt{3}$ ナルトキ $r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=0$ ニシテ $-r\sin\theta+\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta\gtreqless 0$,

故ニ $\left(\dfrac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -\sqrt{3}\right)$ ハ彎曲點ナリ.

5. $\tan\phi=\dfrac{r}{r'}=-\dfrac{\theta(\theta^2-1)}{2}$

$\theta=0$ ナルトキ $\phi=0$, 即チ曲線ハ極ニ於テ原線ニ切ス, 從テ曲線ハ極ニ於テ尖點ヲ有ス.

6. $\theta\to\pm1$ ナルトキ $r\to\infty$, 依テ $\theta=1+\delta$ ト置クトキ,

$$f(\theta)\sin(1-\theta)=\frac{\theta^2}{\theta^2-1}\sin(1-\theta)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\delta+\cdots\right)\frac{\sin\delta}{\delta}$$

$$\lim_{\theta\to1}f(\theta)\sin(1-\theta)=-\frac{1}{2}$$

故ニ一ツノ漸近線ハ

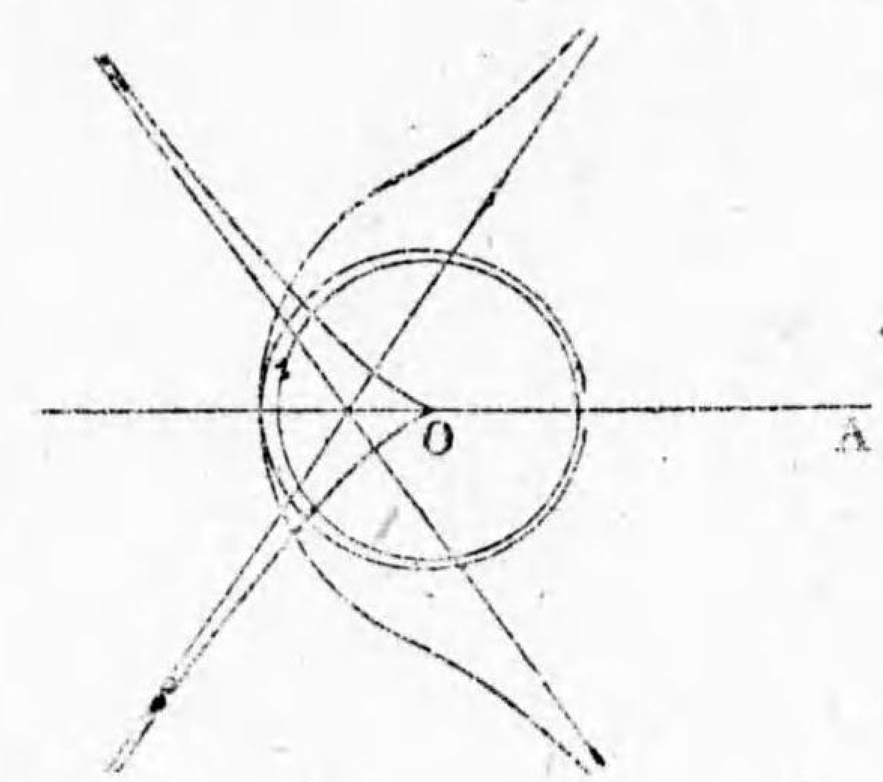
$$\mathrm{R}\sin(1-\omega)=-\frac{1}{2}$$

ニシテ曲線ハ $\theta<1$ ナルトキ漸近線ニ對シ極ト同側ニアリ, $\theta>1$ ナルトキハ之ニ反ス.

同様ニ他ノ漸近線 $\mathrm{R}\sin(1+\omega)=\dfrac{1}{2}$ ヲ得.

又 $\theta\to\infty$ ナルトキ曲線ハ $r=a$ ニ收斂ス. 之ヲ漸近圓トイフ.

以上ノ結果ニヨリ曲線ノ形ヲ得ルコト次ノ如シ.



問　題

1. u_r ヲ x 及ビ y ＝關スル r 次ノ同次函數トシテ，代數曲線 $u_n+u_{n-1}+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots+u_1+u_0=0$ ＝對シテ一ツノ定點ヨリ引キ得ル切線ノ數ハ一般＝ $n(n-1)$ ナルコトヲ證明セヨ

2. 曲線 $x=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ 上ノ一點＝於ケル切線ノ長サハ點ノ位置如何＝係ハラズ恒＝一定ナルコトヲ證明セヨ.

3. 曲線 $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 上ノ一點＝於ケル法線ノ長サハ其ノ點ヨリ曲率中心＝至ル距離＝等シキコトヲ證明セヨ.

4. 二次曲線 $y^2=2ax+bx^2$ 上ノ一點＝於ケル曲率半徑ハ其ノ點＝於ケル法線ノ長サノ三乘＝比例スルコトヲ證明セヨ.

5. 楕圓ノ二ツノ焦點ヨリ此ノ曲線上ノ一點＝至ル距離ヲ r_1 及ビ r_2 トスルトキハ此ノ點＝於ケル曲率半徑ハ $\dfrac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$ ナルコトヲ證明セヨ，此＝ a, b ハ夫々楕圓ノ半長軸及ビ半短軸ノ長サヲ表ハスモノトス.

6. 曲線 $f(x, y)=0$ 上ノ一點＝於ケル曲率半徑ヲ ρ トスレバ

$$\rho=\frac{\left\{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

7. 曲線 $x^2-y^2=a^2$ ノ切線＝對シテ原點ヨリ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ノ方程式ハ $(X^2+Y^2)^2=a^2(X^2-Y^2)$ ナルコトヲ證明シ且此ノ曲線ノ圖ヲ畫ケ.

8. 曲線 $y^2=2ax$ ノ縮閉線ノ方程式ハ $27a^2Y^2=8(X-a)^3$ ナルコトヲ證明シ且此ノ曲線ノ圖ヲ畫ケ.

9. 座標軸＝平行ナル軸ヲ有シ且點 $(1, 2)$ ＝於テ圓 $x^2+y^2=5$ ト第二次ノ切觸ヲナス拋物線ノ方程式ハ

$$\left(X-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{16}{5}\left(Y-\frac{11}{5}\right)=0$$

$$\left(Y-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\left(X-\frac{7}{5}\right)=0$$

ナルコトヲ證明シ且同一ノ座標軸ヲ用ヒテ此ノ曲線ノ圖ヲ畫ケ

10. 曲線 $(x-a)y^2=x^2(x-b)$ ハ三ツノ漸近線 $y=x+\dfrac{a-b}{2}$, $y=-x-\dfrac{a-b}{2}$, $x=a$ ヲ有スルコトヲ證明シ且此ノ圖ヲ畫ケ.

11. 曲線 $y^2=2ax$ 上ノ一點ヲ中心トシ，頂點ヲ通過スル圓群ノ包絡線ハ $X^2+Y^2(X+a)=0$ ナルコトヲ證明シ且此ノ曲線ノ圖ヲ畫ケ

12. 曲線群 $(y^2-a^2)(y-b)^2+y^2(x-\alpha)=0$ ノ包絡線ノ方程式ヲ索メテ，$y=a$, $y=-a$ ハ包絡線＝シテ $y=b$ ハ重複點ノ軌跡ナルコトヲ示セ.

13. 曲線群 $f(r, \theta, \alpha)=0$, $f_\alpha(r, \theta, \alpha)=0$ ヨリ α ヲ消去スルトキハ一般＝此ノ曲線群ノ包絡線ノ方程式ヲ得ルコトヲ證明セヨ.

14. 次ノ曲線ノ重複點ヲ素メ且其ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形ヲ定メヨ.

1) $x^3+y^3=3axy$　　2) $x^4-2xy^2+y^3=x^2$

3) $x^4+y^3=3axy^2$　　4) $y^2-ax^2y+x^4=x^5$

15. 次ノ曲線ヲ追跡セヨ.

1) $x^2(x+a)=y^2(y+b)$　　2) $x^4+y^4=2xy^2+3x^2$

3) $(x^2+y^2+ax+by)(bx-ay)+c^2xy=0$

4) $(x^2+y^2-2ax)^2=4(x^2+y^2)y^2$

5) $y^4+axy^2=x^4+bx^3$　　6) $x^5+y^5=5ax^3y$

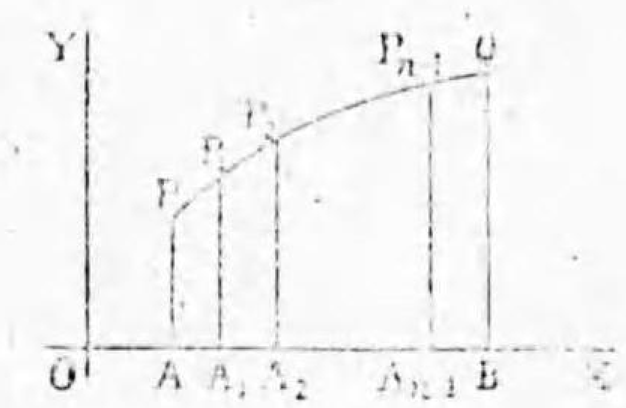
7) $r\theta=a$　　8) $r=a+b\cos\theta$

9) $r\theta=r+\theta$　　10) $r=ae^{\theta}$

第 9 章　重積分, 面積及ビ體積

51. 平面積

函數 $f(x)$ ハ一價連續ナリトシ, 平面曲線 $y=f(x)$ 上ニ於ケル二點 $P(a, y_0)$, $Q(b, y_n)$ ヨリ x 軸ニ垂線 PA, QB ヲ引キ, A, B ノ間ニ順次 $n-1$ 個ノ點 $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{n-1}$ ヲ取リ, x 軸ニ垂直ニ A_1P_1, A_2P_2, ……, $A_{n-1}P_{n-1}$ ヲ引キテ曲線ニ交ハラシメ



$$OA_i=x_i,\quad A_iP_i=y_i,\quad A_i-A_{i-1}=h_i,$$

$$i=1, 2, \ldots\ldots, n,\qquad x_0=a,\quad x_n=b$$

トシ, h_i ノ上ニ於ケル y ノ最大値ト最小値トノ差ヲ δ_i, y ノ任意ノ一ツノ値ヲ η_i, 又 h_i 及ビ η_i ヲ兩邊トスル矩形ノ面積ヲ E_i トスルトキハ

$$(\eta_i+\delta_i)h_i\geqq E_i,\quad (\eta_i-\delta_i)h_i\leqq E_i$$

從テ

$$\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\delta_i)h_i\leqq\sum_{i=1}^{n}E_i\leqq\sum_{i=1}^{n}(\eta_i+\delta_i)h_i$$

即チ

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_ih_i-\sum_{i=1}^{n}\delta_ih_i\leqq\sum_{i=1}^{n}E_i\leqq\sum_{i=1}^{n}\eta_ih_i+\sum_{i=1}^{n}\delta_ih_i$$

$f(x)$ ハ連續ナルガ故ニ第 4 章第 19 節ニヨリ h_i ガ 0 ニ收斂スル極限ニ於テ

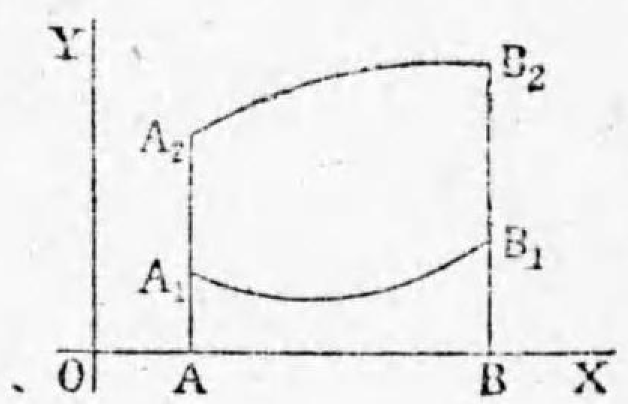
$$\lim\sum_{i=1}^{n}\delta_ih_i=0$$

依テ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} E_i$ ヲ S ＝テ表ハストキハ

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

S ヲ曲線 $y=f(x)$，x 軸，及ビ二ツノ直線 $x=a$，$x=b$ ＝テ包圍スル平面ノ部分ノ面積トス.

$f_1(x)$ 及ビ $f_2(x)$ ガ何レモ一價連續＝シテ $f_1(x)\leqq f_2(x)$ ナルトキ，二ツノ曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及ビ二ツノ直線 $x=a$，$x=b$ ＝テ包圍スル部分ノ面積 S ハ二ツノ部分 ABB_2A_2 及ビ ABB_1A_1 ノ面積ノ差ト考フルコトヲ得，故＝

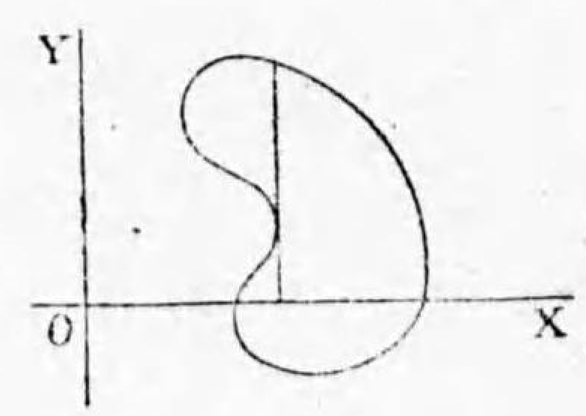


$$S=\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_1(x)\,dx$$

即チ
$$S=\int_a^b \{f_2(x)-f_1(x)\}\,dx$$

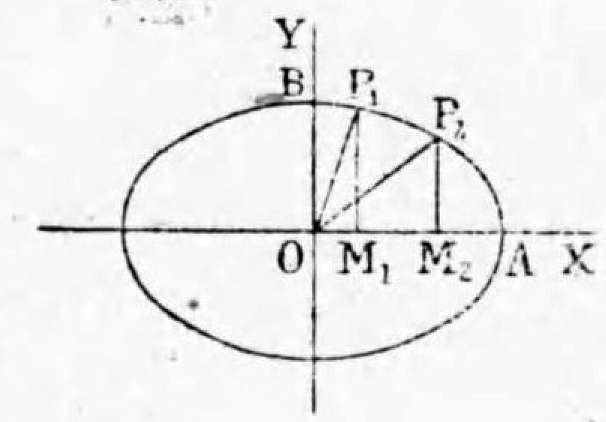
上ノ場合＝於テ A_1 ト A_2，及ビ B_1 ト B_2 ガ一致スルトキハ閉曲線ノ包圍スル面積ヲ得.

尙複雜ナル曲線＝テ包圍スル部分ヲ考フル場合＝ハ直線又ハ曲線ヲ用ヒテ適宜之ヲ分割シ，其ノ各部分＝對シテ上ノ方法ヲ施シテ面積ヲ求メ，其ノ和ヲ作ルベシ，又 y ガ負ナル部分＝於テハ其ノ絕對値ヲ取ルコトトスベシ.



例 1. 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ包圍スル面積

橢圓ハ兩軸＝關シテ對稱ナルガ故＝其ノ包圍スル全面積ヲ S トスルトキハ，之ヲ求ムル＝ハ第一象限＝於ケル面積ヲ求メテ四倍スレバ宜シ，



y ＝關シテ方程式ヲ解ケバ

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

＝シテ，二點 P_1，P_2 ヲ取リ

$$OM_1=x_1,\quad OM_2=x_2,\quad M_1P_1=y_1,\quad M_2P_2=y_2$$

トスレバ

$$\text{面積 } M_1M_2P_2P_1=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{x_1}^{x_2} \qquad (1)$$

M_1 ヲ原點 O ＝，又 M_2 ヲ頂點 A ＝一致セシムルトキハ

$$\text{面積 } OAB=\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a=\frac{b}{a}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}$$

故＝
$$S=\pi ab \qquad (2)$$

又 (1) ヨリ

$$\text{面積 } M_1M_2P_2P_1=\frac{x_2y_2}{2}-\frac{x_1y_1}{2}+\frac{ab}{2}\left\{\sin^{-1}\frac{x_2}{a}-\sin^{-1}\frac{x_1}{a}\right\} \qquad (1)_1$$

然ル＝ $\dfrac{x_1y_1}{2}=$ 面積 OM_1P_1，$\dfrac{x_2y_2}{2}=$ 面積 OM_2P_2 (3)

故＝ $(1)_1$ 及ビ (3) ヨリ

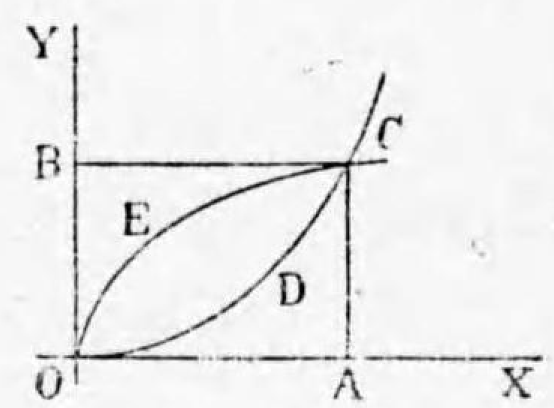
$$\text{面積 } OP_1P_2=\frac{ab}{2}\left\{\sin^{-1}\frac{x_2}{a}-\sin^{-1}\frac{x_1}{a}\right\} \qquad (4)$$

例 2. 拋物線 $x^2=a_1y,\ x^2=a_2y,\ y^2=b_1x,\ y^2=b_2x$ ノ包圍スル面積, 此ニ $0<a_1<a_2,\ 0<b_1<b_2$

先ヅ拋物線 $x^2=ay,\quad y^2=bx$ ノ包圍スル面積ヲ考フルコトトシ, 二ツノ曲線ノ交點 $C(\alpha,\beta)$ ヨリ兩軸ニ垂線 CA, CB ヲ引クトキハ

$$\text{面積 OACD}=\int_0^\alpha \frac{x^2}{a}dx=\frac{\alpha^3}{3a}$$

$$=\frac{1}{3}\alpha\frac{\alpha^2}{a}=\frac{1}{3}\alpha\beta$$



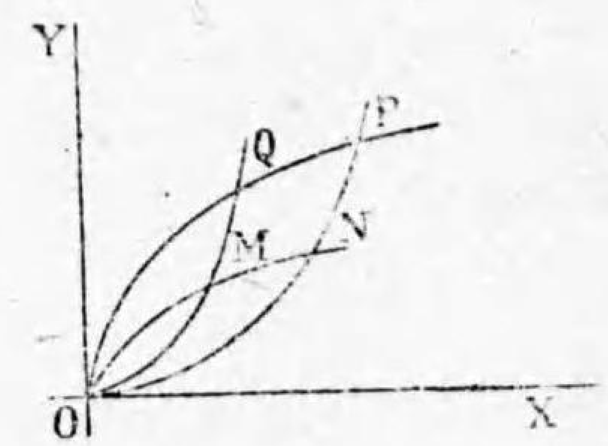
同様ニ $\qquad$ 面積 OBCE$=\dfrac{1}{3}\alpha\beta$

從テ $\qquad$ 面積 ODCE$=\dfrac{1}{3}\alpha\beta$

然ルニ $C(\alpha,\beta)$ ニ於テハ $\alpha^2=a\beta,\ \beta^2=b\alpha$ ナルガ故ニ $\alpha\beta=ab$

故ニ $\qquad$ 面積 OC$=\dfrac{ab}{3}$

次ニ拋物線 $x^2=a_1y,\quad x^2=a_2y,\quad y^2=b_1x,\quad y^2=b_2x$ ノ交點ヲ M, N, P, Q トシ, 面積 MNPQ ヲ S トスルトキハ



$S=$面積 OP$+$面積 OM

$\quad -$面積 ON$-$面積 OQ

然ルニ上ノ證明ニヨリ

$$\text{面積 OP}=\frac{a_2b_2}{3},\qquad \text{面積 OM}=\frac{a_1b_1}{3}$$

$$\text{面積 ON}=\frac{a_2b_1}{3},\qquad \text{面積 OQ}=\frac{a_1b_2}{3}$$

故ニ

$$S=\frac{1}{3}(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

例 3. 曲線 $x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$ ノ包圍スル面積

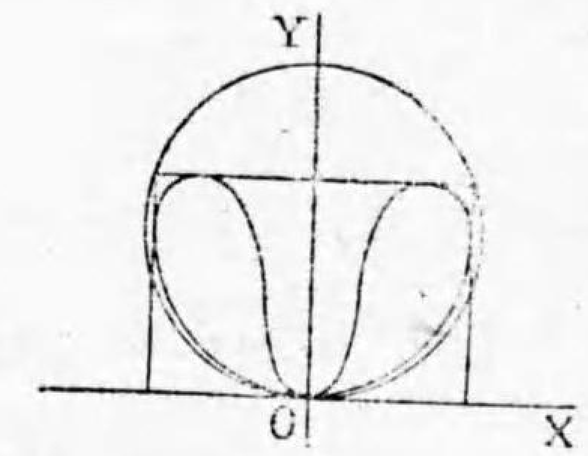
第 49 節例 2 ニヨリ此ノ曲線ノ形ハ次ノ如シ.

y ニ關シテ上ノ方程式卽チ

$$(1+x^2)y^2-6x^2y+x^4=0$$

ヲ解クトキハ

$$y=\frac{3x^2\pm x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}$$



此ノ曲線ハ y 軸ニ關シテ對稱ナルガ故ニ其ノ包圍スル面積ヲ S トスルトキハ

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left\{\frac{3x^2+x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}-\frac{3x^2-x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}\right\}dx$$

$$=4\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{1+x^2}\sqrt{8-x^2}\,dx=4\int_0^{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\sqrt{8-x^2}\,dx$$

$x=\sqrt{8}\sin\theta$ ト置クトキハ, $dx=\sqrt{8}\cos\theta\,d\theta$

$$S=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta-\frac{2\cos^2\theta}{1+8\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\cos 2\theta-\frac{1}{4}\left(\frac{9}{1+8\sin^2\theta}-1\right)\right\}d\theta$$

$$=10\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9\sec^2\theta}{1+9\tan^2\theta}d\theta$$

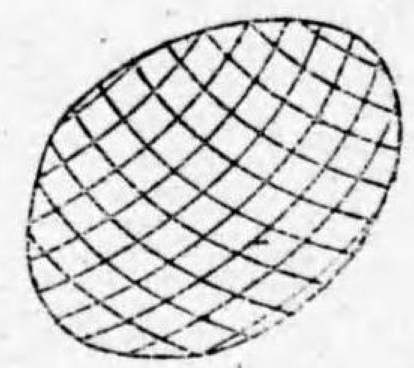
$$=10\pi-12\Big[\tan^{-1}(3\tan\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=10\pi-6\pi$$

故ニ

$$S=4\pi$$

52. 二重積分

函數 $f(x, y)$ ガ一定ノ區域 A 及ビ其ノ周ニ於ケル x, y ノ總テノ値ニ對シテ一價連續ナルトキ，此ノ區域ヲ小區域 $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ ニ分割シテ，其ノ一ツナル A_i 内ノ任意ナル一點ノ座標ヲ ξ_i, η_i トシ



$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) A_i$$

ト置キ，A ニ於ケル $f(x, y)$ ノ最大値及ビ最小値ヲ夫々 G 及ビ K トシ，A_i ニ於ケル $f(x, y)$ ノ最大値及ビ最小値ヲ夫々 g_i 及ビ k_i トスルトキハ第 4 章第 19 節ニ於ケルト同樣ニシテ

$$K\sum_{i=1}^{n} A_i \leqq S_1 \leqq S \leqq S_2 \leqq G\sum_{i=1}^{n} A_i$$

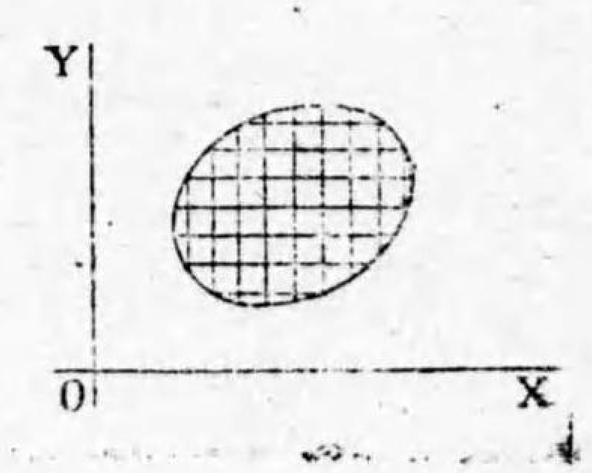
此ニ　　$S_1=\sum_{i=1}^{n} k_i A_i, \qquad S_2=\sum_{i=1}^{n} g_i A_i$

$f(x, y)$ ハ連續ナルヲ以テ

$$\lim_{i\to\infty}(S_2-S_1)=\lim_{i\to\infty}(g_i-k_i)A_i=0$$

區域 A ノ分割ノ方法及ビ A_i ニ於ケル點 (ξ_i, η_i) ノ取リ方如何ニ關セズ $\lim A_i=0$ ナル極限ニ於テ S ハ一定ノ極限値ヲ有ス．

座標軸ニ平行ナル二組ノ直線ノ群ニヨリテ區域 A ヲ分割スル場合ニハ



$$S=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} f(\xi_k, \eta_l)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

此ニ　$x_{k-1}<\xi_k<x_k, \quad y_{l-1}<\eta_l<y_l$

此ノ極限値ヲ區域 A ニ於ケル $f(x, y)$ ノ**二重積分**トイヒ，之ヲ

$$\iint_A f(x, y)dxdy$$

ニテ表ハス，此ノ積分ニ對シテ $\int_a^b f(x)dx$ ヲ**單積分**トイフ

二重積分ニ關シテハ第 4 章第 20 節單積分ニ於ケルト同樣ナル關係成立ス，例ヘバ

I. c ガ常數ナルトキ

$$\iint_A cf(x, y)dxdy=c\iint_A f(x, y)dxdy$$

II. $f(x, y)$ 及ビ $\phi(x, y)$ ガ何レモ連續ナルトキ

$$\iint_A \{f(x, y)+\phi(x, y)\}dxdy=\iint_A f(x, y)dxdy+\iint_A \phi(x, y)dxdy$$

III. $f(x, y)$ 及ビ $\phi(x, y)$ ガ何レモ連續ニシテ $f(x, y)\geqq\phi(x, y)$ ナルトキ

$$\iint_A f(x, y)dxdy>\iint_A \phi(x, y)dxdy$$

IV. $f(x, y)$ 及ビ $\phi(x, y)$ ガ何レモ連續ニシテ且 $\phi(x, y)$ ガ一定ノ符號ヲ有スルトキ

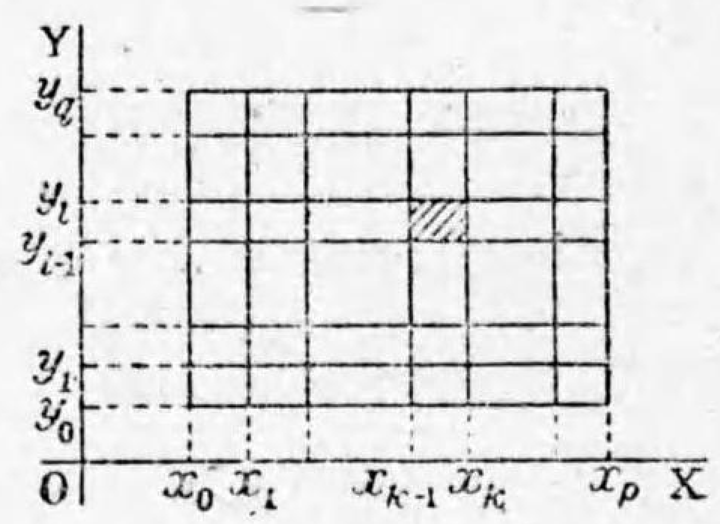
$$\iint_A f(x, y)\phi(x, y)dxdy=f(\xi, \eta)\iint_A \phi(x, y)dxdy$$

此ニ $f(\xi, \eta)$ ハ $f(x, y)$ ノ最大値ト最小値トノ間ニアルモノトス．

從テ　　$\iint_A f(x, y)dxdy=f(\xi, \eta)\iint_A dxdy$

二重積分ノ値ハ二回ノ單積分ヲ行フコトニヨリテ之ヲ求ムルヲ得

先ヅ區域 A ガ四ツノ直線 $x=x_0$, $x=x_p$, $y=y_0$, $y=y_q$ ニテ包圍スル矩形ナルトキ



$$\phi(x)=\int_{y_0}^{y_q} f(x,\ y)dy$$

ト置キ, x ハ y ニ無關係トシテ

$$\phi(\xi_k)=\int_{y_0}^{y_q} f(\xi_k,\ y)dy$$

$$=\int_{y_0}^{y_1} f(\xi_k,\ y)\,dy+\int_{y_1}^{y_2} f(\xi_k,\ y)dy+\cdots\cdots+\int_{y_{q-1}}^{y_q} f(\xi_k,\ y)dy$$

此ニ $$x_{k-1}<\xi_k<x_k$$

第 4 章第 20 節積分ニ於ケル平均値ノ定理ニヨリ

$$\int_{y_r}^{y_s} f(\xi_k,\ y)dy=f(\xi_k,\ \eta_s)(y_s-y_r),\quad y_r<\eta_s<y_s$$

故ニ

$$\phi(\xi_k)=f(\xi_k,\ \eta_1)(y_1-y_0)+f(\xi_k,\ \eta_2)(y_2-y_1)+\cdots\cdots$$

$$+f(\xi_k,\ \eta_q)(y_q-y_{q-1})$$

從テ

$$\sum_{k=1}^{p}\phi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} f(\xi_k,\ \eta_l)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

然ルニ

$$\lim\sum_{k=1}^{p}\phi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\int_{x_0}^{x_p}\phi(x)dx$$

$$\phi(x)=\int_{y_0}^{y_q} f(x,\ y)dy$$

依テ
$$\lim\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} f(\xi_k,\ \eta_l)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

$$=\int_{x_0}^{x_p}\left\{\int_{y_0}^{y_q} f(x,\ y)dy\right\}dx$$

同樣ニ x ト y トノ順序ヲ交換シテ考フレバ

$$\lim\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} f(\xi_k,\ \eta_l)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

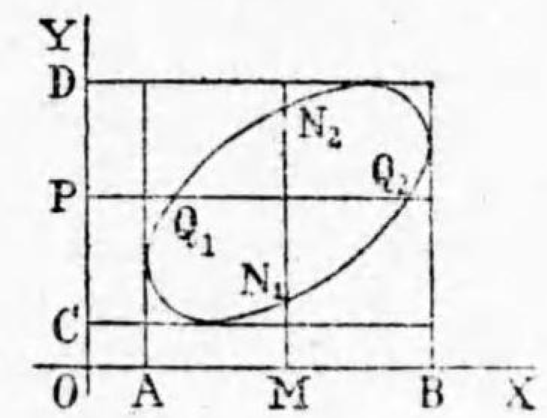
$$=\int_{y_0}^{y_q}\left\{\int_{x_0}^{x_p} f(x,\ y)dx\right\}dy$$

故ニ

$$\mathrm{I}=\iint_{\mathrm{A}} f(x,\ y)dxdy=\int_{x_0}^{x_p}\left\{\int_{y_0}^{y_q} f(x,\ y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{y_0}^{y_q}\left\{\int_{x_0}^{x_p} f(x,\ y)dx\right\}dy$$

區域 A ノ境界ガ圖ノ如ク閉曲線ヨリ成ル場合ニハ座標軸ニ平行ナル切線ヲ引キテ矩形内ニ此ノ區域ヲ容レ, 前同樣ニシテ次ノ式ヲ得



$$\mathrm{I}=\int_a^b\left\{\int_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)dy\right\}dx$$

此ニ $y_1=\mathrm{MN}_1$, $y_2=\mathrm{MN}_2$, $a=\mathrm{OA}$, $b=\mathrm{OB}$

此ノ場合ニ積分ノ順序ヲ變更スレバ

$$\mathrm{I}=\int_\alpha^\beta\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)dx\right\}dy$$

此ニ $x_1=\mathrm{PQ}_1$, $x_2=\mathrm{PQ}_2$, $\alpha=\mathrm{OC}$, $\beta=\mathrm{OD}$.

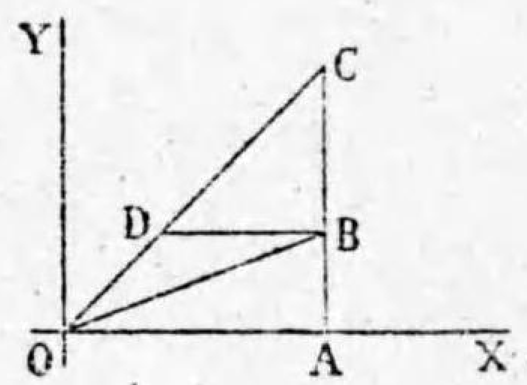
境界ガ複雑ナル場合ニハ適宜之ヲ分割シテ二重積分ノ和トシテ取扱フベシ.

注意 $f(x, y)$ ガ連續ニシテ積分ノ區域ガ矩形ナルトキハ上ニ示セルガ如ク二重積分ノ順序ヲ變更スルモ限界ニハ變化ナシ，其ノ他ノ場合ニハ積分ノ順序ヲ變更スルニ從ヒ一般ニ限界モ亦變更スルコトヲ要ス，尚又 $f(x, y)$ ガ不連續ナルトキハ積分ノ順序ヲ變更スレバ其ノ値必ズシモ相等シカラズ.

例 1. $\mathrm{I}=\int_0^a dx\int_{mx}^{nx} f(x, y)dy$

此ノ積分ハ先ヅ y ニ關シテ $y=mx$ ヨリ $y=nx$ ニ至リ，次ニ x ニ關シテ $x=0$ ヨリ $x=a$ ニ至ル，

依テ積分ノ區域ハ直線 $y=mx$ ノ一部分 OB, 直線 $y=nx$ ノ一部分 OC, 及ビ直線 $x=a$ ノ一部分 BC ニテ包圍スル三角形 OBC ニシテ



$$\mathrm{OA}=a, \qquad \mathrm{AB}=ma, \qquad \mathrm{AC}=na$$

積分ノ順序ヲ變更シテ先ヅ x ニ關シテ積分スルガ爲ニハ，B ヨリ x 軸ニ平行線 BD ヲ引キテ $y=nx$ ニ交ハラシメ，全區域ヲ二分シテ OBD ニ於テハ x ニ關シテ $x=\frac{y}{n}$ ヨリ $x=\frac{y}{m}$ ニ至リ，次ニ y ニ關シテ $y=0$ ヨリ $y=ma$ ニ至ル，又 BCD ニ於テハ x ニ關シテ $x=\frac{y}{n}$ ヨリ $x=a$ ニ至リ，次ニ y ニ關シテ $y=ma$ ヨリ $y=na$ ニ至ル，此等ノ積分ヲ夫々 I_1 及ビ I_2 トスレバ

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{ma} dy\int_{\frac{y}{n}}^{\frac{y}{m}} f(x, y)dx, \qquad \mathrm{I}_2=\int_{ma}^{na} dy\int_{\frac{y}{n}}^{a} f(x, y)dx$$

故ニ $\quad \mathrm{I}=\int_0^{ma} dy\int_{\frac{y}{n}}^{\frac{y}{m}} f(x, y)dx+\int_{ma}^{na} dy\int_{\frac{y}{n}}^{a} f(x, y)dx$

例 2. $\mathrm{I}=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dx$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dx=\int_0^1\left[\frac{x}{y^2+x^2}\right]_0^1 dy=\int_0^1\frac{dy}{y^2+1}=\frac{\pi}{4}$$

積分ノ順序ヲ變更スレバ

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$$=-\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx=-\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi}{4}$$

此ノ場合ニハ積分ノ區域ハ正方形ナレドモ $f(x, y)$ ガ $x=0, y=0$ ニ於テ連續性ヲ失フ，從テ積分ノ順序ヲ變更スレバ其値等シカラズ.

尚一般ニ

$$\int_b^1 dy\int_a^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dx=\int_b^1\left[\frac{x}{y^2+x^2}\right]_a^1 dy, \qquad 0<a<1, \quad 0<b<1$$

$$=\int_b^1\left\{\frac{1}{y^2+1}-\frac{a}{y^2+a^2}\right\}dy=\left[\tan^{-1}y-\tan^{-1}\frac{y}{a}\right]_b^1$$

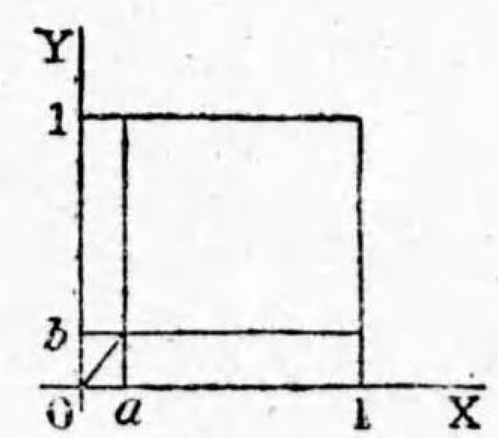
依テ $b=a\tan\theta$ ト置クトキハ

$$\int_b^1 dy\int_a^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{a}-\tan^{-1}(a\tan\theta)+\theta$$

$$=\int_a^1 dx\int_b^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dy$$

故ニ

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}}\int_b^1 dy\int_a^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dx=\theta-\frac{\pi}{4}$$



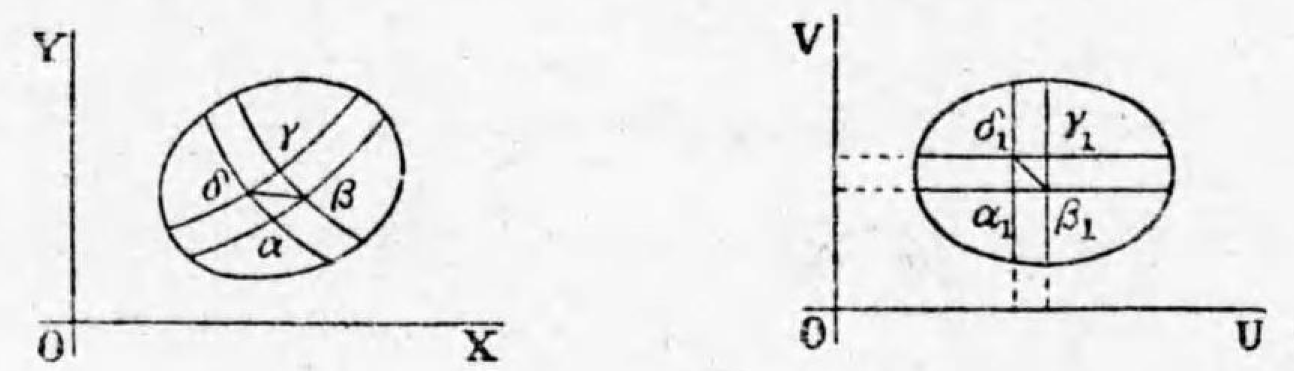
前ノ二ツノ値ハ此ノ式ニ於テ $\theta=0$ 及ビ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ニ相當ス

53. 二重積分ニ於ケル積分變數ノ變更

一定ノ區域 A ニ於テ一價連續ナル函數 $f(x, y)$ ノ二重積分ヲ

$$\mathrm{I}=\iint_{\mathrm{A}} f(x, y)dxdy$$

トシ, $x=\phi(u,v)$, $y=\mathrm{F}(u,v)$ 及ビ其ノ導來函數ハ何レモ連續ニシテ區域 A ニ於ケル一點 (x,y) ニ對應シテ區域 A_1 ニ於ケル一點 (u,v) ガ必ズ存在スルモノトス.



座標軸ニ平行ナル直線ニテ A_1 ヲ分割シテ得タル小區域 $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ ニ對應スル A ニ於ケル小區域ヲ $\alpha\beta\gamma\delta$ トシ, $u_k-u_{k-1}=g$, $v_l-v_{l-1}=h$ トスレバ

α	$x_1=\phi(u, v)$	$y_1=\mathrm{F}(u, v)$
β	$x_2=\phi(u+g, v)$	$y_2=\mathrm{F}(u+g, v)$
γ	$x_3=\phi(u+g, v+h)$	$y_3=\mathrm{F}(u+g, v+h)$
δ	$x_4=\phi(u, v+h)$	$y_4=\mathrm{F}(u, v+h)$

依テ

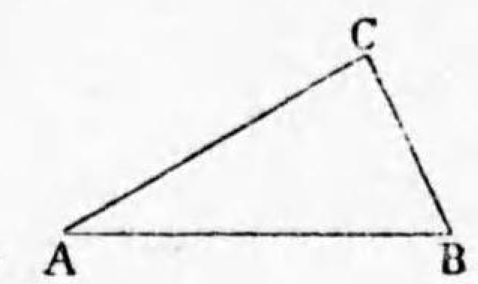
$$x_2=x_1+\frac{\partial\phi}{\partial u}g+\rho \qquad y_2=y_1+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}g+\rho_1$$

$$x_3=x_1+\frac{\partial\phi}{\partial u}g+\frac{\partial\phi}{\partial v}h+\sigma \qquad y_3=y_1+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}g+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}h+\sigma_1$$

$$x_4=x_1+\frac{\partial\phi}{\partial v}h+\tau \qquad y_4=y_1+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}h+\tau_1$$

平面上ノ三點ヲ $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$ トスルトキハ三角形 ABC ノ面積次ノ如シ.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$



依テ 三角形 $\alpha\beta\delta$ ノ面積 $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u}g+\rho & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}g+\rho_1 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial v}h+\sigma & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}h+\sigma_1 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} \end{vmatrix} gh+\mathrm{R}_1$$

同樣ニ 三角形 $\beta\gamma\delta$ ノ面積 $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} \end{vmatrix} gh+\mathrm{R}_2$

依テ 四邊形 $\alpha\beta\gamma\delta$ ノ面積 $=\mathrm{J}(u, v)gh+\mathrm{R}$

此ニ $\quad \mathrm{J}(u, v)=\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}, \qquad \mathrm{R}=\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2$

故ニ四邊形 $\alpha\beta\gamma\delta$ ノ面積ヲ ΔA ト置ケバ

$$\sum f(x, y)\Delta A=\sum\sum f\{\phi(u, v), \mathrm{F}(u, v)\}\mathrm{J}(u, v)gh$$
$$+\sum\sum f\{\phi(u, v), \mathrm{F}(u, v)\}\mathrm{R}$$

極限ニ於テ

$$\mathrm{I}=\iint f\{\phi(u, v), \mathrm{F}(u, v)\}\mathrm{J}(u, v)dudv$$

此ニ $\quad \mathrm{J}(u, v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

例 1. $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\[2ex] -r\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=r$$

依テ

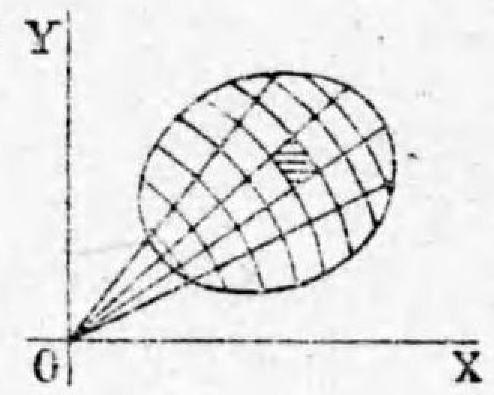
$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{A_1} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

$f(x,y)=1$ トスレバ上ノ式ハ

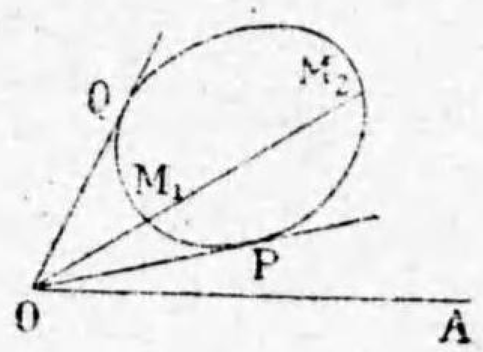
$$\iint\limits_A dxdy=\iint\limits_{A_1} r\,drd\theta$$

トナリ區域 A ニ於ケル面積ヲ表ハス.

此ノ場合ニハ原點ヲ中心トスル圓ノ群及ビ原點ヲ通過スル直線ノ群ヲ用ヒテ區域Aヲ分割シタルモノナリ.



依テ極ヨリ引ケル直線ト閉曲線トノ交點ヲ M_1, M_2, 又切線ノ切點ヲ P, Q トシ, 索ムル面積ヲ S トスレバ



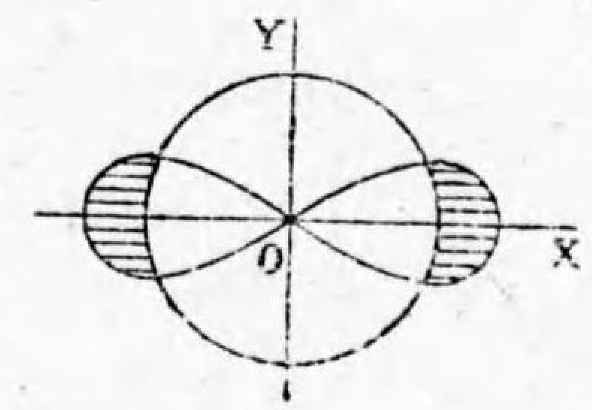
$$S=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1}^{r_2} r\,dr$$
$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2{}^2-r_1{}^2)\,d\theta$$

此ニ $r_1=OM_1$, $r_2=OM_2$, $\alpha=\angle AOP$, $\beta=\angle AOQ$

又原點ガ閉曲線ノ內部ニ在ルトキハ

$$S=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^r r\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta$$

此ノ特別ナル場合トシテ圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ外側ニアリテ此ノ曲線及ビ曲線 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ ニテ包圍スル面積ヲ考フルコトトスレバ, 此ノ二ツノ曲線ハ何レモ x 軸ニ關シテモ y 軸ニ關シテモ對稱ナリ, 依テ索ムル面積ハ第一象限ニ於テ x 軸ト此ノ二ツノ曲線トノ間ニアル面積ヲ索メテ之ヲ四倍スレバ宜シ.



$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ ト置クトキハ二ツノ曲線ノ方程式ハ夫々

$$r=a,\qquad r^2=2a^2\cos 2\theta$$

トナリ, 其ノ交點ニ於テハ $2\cos 2\theta=1$ ナルガ故ニ第一象限ニ於テハ

$$\phi=\frac{\pi}{6}$$

依テ索ムル面積ヲ S トスレバ

$$S=4\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1}^{r_2} r\,dr$$

此ニ $r_1=a,\quad r_2=\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta},\quad \alpha=0,\quad \beta=\frac{\pi}{6}$

故ニ

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta\int_a^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$
$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\theta-1)\,d\theta=2a^2\left[\sin 2\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2$$

例 2.　$x=a_1u+b_1v+c_1,\quad y=a_2u+b_2v+c_2$

$$\mathrm{J}(u,\ v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

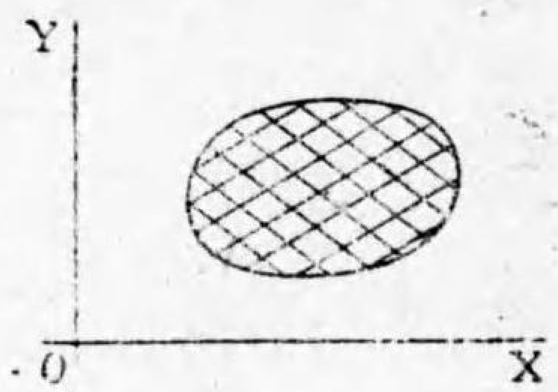
依テ

$$\iint_{\mathrm{A}} f(x,\ y)dxdy=(a_1b_2-a_2b_1)\iint_{\mathrm{A}_1} f(a_1u+b_1v+c_1,$$
$$a_2v+b_2v+c_2)dudv$$

$f(x,\ y)=1$　トスレバ

$$\iint_{\mathrm{A}} dxdy=(a_1b_2-a_2b_1)\iint_{\mathrm{A}_1} dudv$$

此ノ場合＝ハ二組ノ平行線ノ群ヲ用ヒテ區域 A ヲ分割シタルモノナリ.



特＝楕圓 $(\alpha_1x+\beta_1y)^2+(\alpha_2x+\beta_2y)^2=k^2$ ノ全面積ヲ索ムルガ爲メ＝

$$\alpha_1x+\beta_1y=u,\quad \alpha_2x+\beta_2y=v$$

即チ　$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)x=\beta_2u-\beta_1v,\ (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)y=\alpha_1v-\alpha_2u$　ト置クトキハ

$$\mathrm{J}(u,\ v)=\frac{1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}$$

依テ索ムル面積ヲ S トスレバ

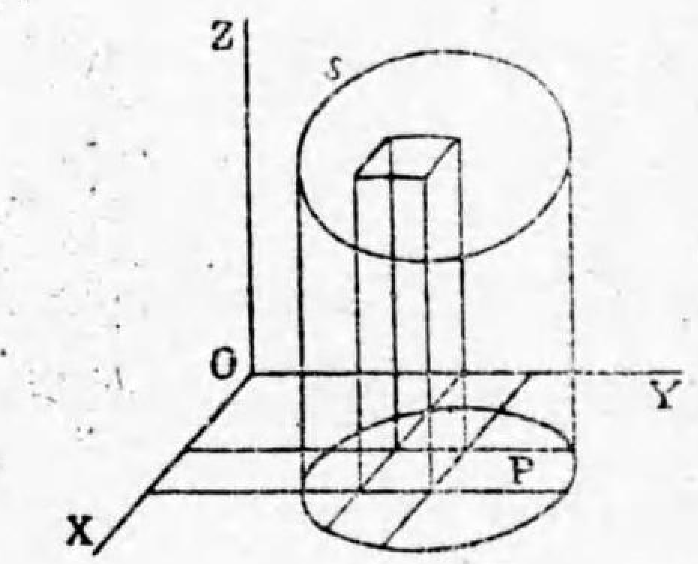
$$S=\frac{1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\iint_{\mathrm{A}_1} dudv$$

此ノ積分ハ圓 $u^2+v^2=k^2$ ノ包圍スル面積ナルガ故＝

$$S=\frac{\pi k^2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}$$

54. 體　積

函數 $f(x,\ y)$ ハ一價連續ナリトシ, 曲面 $z=f(x,\ y)$ ノ上＝於テ一定ノ閉曲線 s ＝テ包圍スル部分ノ xy 面上＝於ケル正射影ヲ P トシ, P ヲ底トシ z 軸＝平行ナル母線ヲ有スル壔面ヲ作リテ, 此＝曲面 $z=f(x,\ y)$, P ヲ底トスル壔面, 及ビ xy 面＝テ包圍スル空間ノ部分ヲ得, yz 面＝平行ナル平面ノ群及ビ zx 面＝平行ナル平面ノ群＝テ之ヲ截ルトキハ xy 面上＝於ケル無數ノ小矩形ヲ底トスル小角壔ヲ得, $x=x_{k-1},\quad x=x_k,\quad y=y_{l-1},\quad y=y_l$ ノ間＝アル P ノ部分ヲ A_i トシ, A_i ノ内＝アル任意ノ一點＝對スル z ノ値ヲ z_i トシ, A_i ヲ底トシ z_i ヲ高サトスル角壔ノ體積ヲ V_i トスルトキハ



$$V_i=z_iA_i$$

從テ

$$\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}z_iA_i$$

依テ　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}V_i$ ヲ V ＝テ表ハストキハ

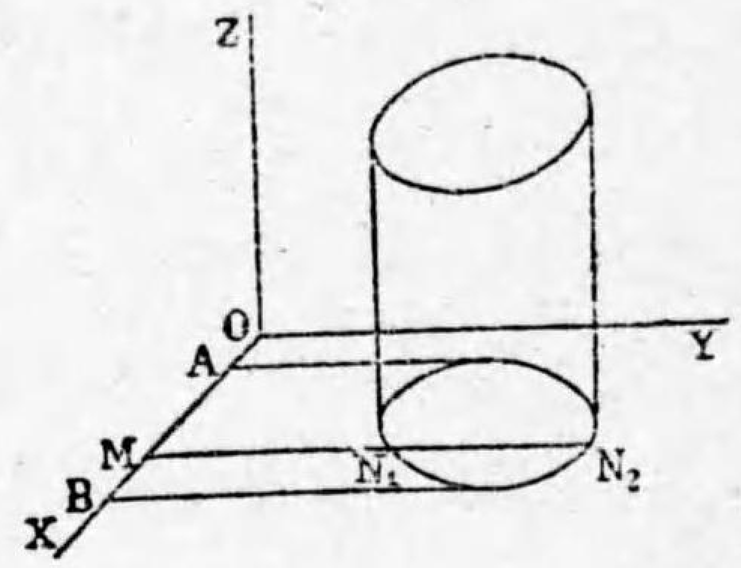
$$V=\iint_{\mathrm{P}} f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

此ノ二重積分ノ限界ハ P ノ全部ヲ含ムガ如ク定ムベキモノトス.

V ヲ曲面 $z=f(x,\ y)$, P ヲ底トスル壔面及ビ xy 面＝テ包圍スル體積トス.

V ノ値ヲ索ムルニハ第 52 節ニヨリ次ノ如クスベシ

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)dy \qquad (2)$$



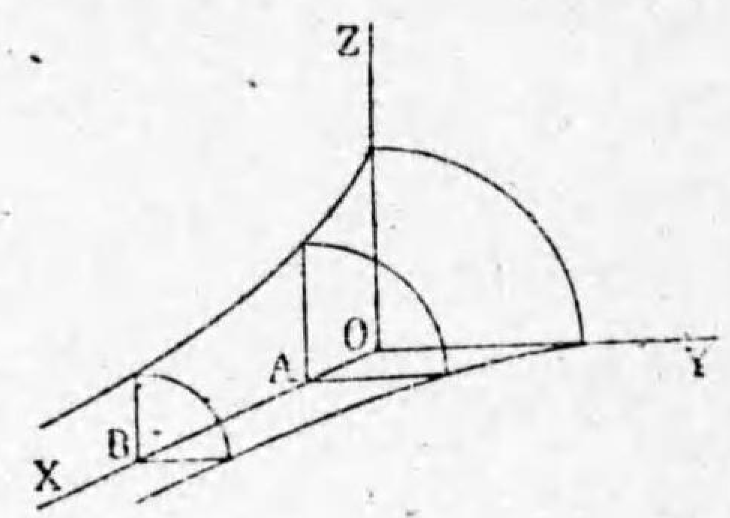
此ニ　$y_1=\mathrm{MN}_1,\quad y_2=\mathrm{MN}_2$

$a=\mathrm{OA},\qquad b=\mathrm{OB}$

N_1, N_2 ハ OY ニ平行ナル直線ト底ノ周トノ交點ニシテ, A, B ハ OY ニ平行ナル切線ト x 軸トノ交點トスル場合ニヨリ x ト y トノ順序ヲ交換スルヲ便トスルコトアリ.

尚曲面ニヨリ二重積分ヲ恒ニ單積分ニ變形シ得ルコトアリ, 例ヘバ曲面ノ方程式ガ

$$y^2+z^2=\{f(x)\}^2$$



ナルトキ, 此ノ曲面ト二ツノ平面 $x=a,\ \ x=b$ トノ間ニアル體積ヲ V トスレバ

$$V=4\int_a^b dx\int_0^{f(x)}\sqrt{\{f(x)\}^2-y^2}\,dy$$

$$=2\int_a^b\left[y\sqrt{\{f(x)\}^2-y^2}+\{f(x)\}^2\sin^{-1}\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)}dx$$

即チ　$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$$

$y=f(x)$ ト置ケバ

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx \qquad (3)$$

(3) ハ平面曲線 $y=f(x)$ ノ弧ガ x 軸ヲ軸トシテ一周スルコトニヨリテ生ズル體積ヲ表ハス.

又 (2) ニ於テ yz 面ニ平行ナル平面ノ作ル截リ口ノ面積ヲ u トスレバ

$$\iint f(x,\ y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} z\,dy=\int_a^b u\,dx$$

即チ　$$V=\int_a^b u\,dx \qquad (4)$$

依テ簡單ニ u ヲ索メ得ル場合ニハ (4) ニヨリテ V ヲ索ムルコトヲ得, (3) ハ截リ口ガ圓ナル特別ナル場合ナリ

(1) ニ於テ

$$x=\phi(u,\ v),\qquad y=\mathrm{F}(u,\ v)$$

ト置キテ積分變數ヲ $x,\ y$ ヨリ $u,\ v$ ニ變更スルトキハ前節ニヨリ

$$V=\iint f\{\phi(u,\ v),\ \mathrm{F}(u,\ v)\}\,\mathrm{J}(u,\ v)du\,dv \qquad (5)$$

此ニ　$$\mathrm{J}(u,\ v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

特ニ　$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$　ナルトキハ

$$\mathrm{J}(r,\ \theta)=r$$

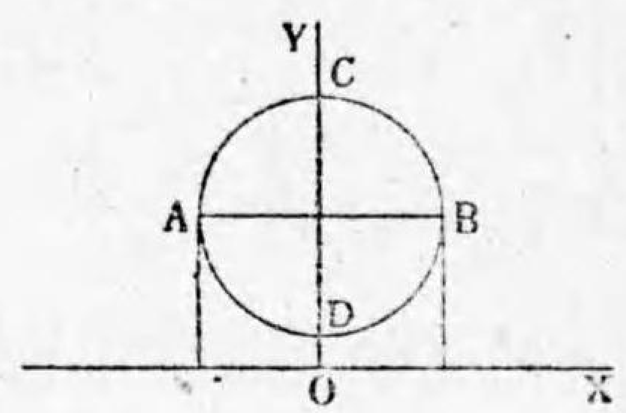
ニシテ

$$V=\iint f\{r\cos\theta,\ r\sin\theta\}\,r\,dr\,d\theta \qquad (6)$$

(6) ハ極座標ニ於ケル體積ヲ表ハス.

例 1. 圓 $(y-c)^2+x^2=a^2$ ガ x 軸ヲ軸トシテ一周スルコトニヨリテ生ズル體積，此ニ $y>0$, $c>a>0$ トス

圓ト y 軸トノ交點ヲ C 及ビ D トスレバ求ムル體積ハ半圓 ACB 及ビ半圓 ADB ガ夫々 x 軸ヲ軸トシテ一周シテ生ズル體積ノ差ニ等シ．



然ルニ　$y=c\pm\sqrt{a^2-x^2}$

依テ (3) ニヨリ

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\{(c+\sqrt{a^2-x^2})^2-(c-\sqrt{a^2-x^2})^2\}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^a 4c\sqrt{a^2-x^2}\,dx=8\pi c\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=8\pi c\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a=8\pi c\frac{\pi a^2}{4}$$

即チ　$V=2\pi c\times\pi a^2$

例 2. 楕圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ノ包圍スル體積

此ノ方程式ヲ變ジテ

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

トスレバ xy 面ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ楕圓ニシテ，其ノ面積ヲ u トスレバ第 51 章例 1 ニヨリ

$$u=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

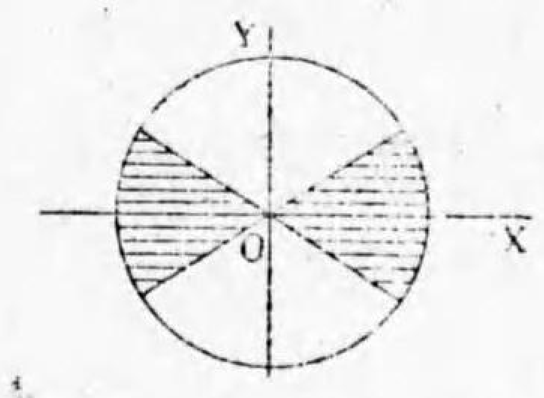
依テ求ムル體積ヲ V トスレバ (4) ニヨリ

$$V=2\int_0^c\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left[z-\frac{z^3}{3c^2}\right]_0^c=\frac{4}{3}\pi abc$$

例 3. 二ツノ曲面 $y^2-m^2x^2=2pz$, $x^2+y^2=a^2$, 及ビ平面 $z=0$ ニテ包圍スル體積，此ニ $p>0$ トス．

$y^2-m^2x^2>0$ ナルトキハ $z>0$

又 $y^2-m^2x^2<0$ ナルトキハ $z<0$



依テ前ノ部分ノ體積ヲ V_1, 後ノ部分ノ體積ヲ V_2 トシ，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $m=\tan\alpha$ ト置ケバ

$$V_1=4\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a zr\,dr,\qquad z=\frac{r^2(\sin^2\theta-m^2\cos^2\theta)}{2p}$$

$$=\frac{2}{p}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-m^2\cos^2\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4p}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\{1-m^2-(1+m^2)\cos 2\theta\}\,d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4p}\left[(1-m^2)\theta-(1+m^2)\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^4}{4p}\left\{(1-m^2)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+m\right\}$$

$$V_2=4\int_0^\alpha d\theta\int_0^a zr\,dr,\qquad z=\frac{r^2(m^2\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{2p}$$

$$=\frac{2}{p}\int_0^\alpha(m^2\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4p}\int_0^\alpha\{-(1-m^2)+(1+m^2)\cos 2\theta\}\,d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4p}\left[-(1-m^2)\theta+(1+m^2)\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\alpha$$

$$=\frac{a^4}{4p}\{m-(1-m^2)\alpha\}$$

故ニ

$$V=V_1+V_2=\frac{a^4}{4p}\left\{2m+(1-m^2)\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right\}$$

55 三重積分

函數 $f(x, y, z)$ ガ一定ノ空間ノ部分 V 及ビ其ノ周圍ニ於ケル x, y, z ノ總テノ値ニ對シテ一價連續ナルトキ, V ヲ小部分 $V_1, V_2, \ldots\ldots V_n$ ニ分割シ, 其一ツナル V_i 內ニ於ケル任意ノ一點ノ座標ヲ ξ_i, η_i, ζ_i トスレバ

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$$

ハ第 52 節ニ於ケルト同樣 $\lim V_i=0$ ナルトキハ恒ニ一定ノ極限値ヲ有ス.

互ニ垂直ナル三ツノ平面ノ群ニヨリテ分割スル場合ニハ

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}\sum_{m=1}^{r} f(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})(z_m-z_{m-1})$$

此ニ $\qquad x_{k-1}<\xi_k<x_k, \quad y_{l-1}\leq\eta_l<y_l, \quad z_{m-1}<\zeta_m<z_m$

然ルニ $\qquad \lim \sum f(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)(z_m-z_{m-1})=\int_{z_1}^{z_2} f(\xi_k, \eta_l, z)dz$

故ニ $\qquad \sum f(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)(z_m-z_{m-1})=\int_{z_1}^{z_2} f(\xi_k, \eta_l, z)dz+\rho$

$$\lim \rho=0$$

$$\sum\sum\sum f(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})(z_m-z_{m-1})$$

$$=\sum\sum\left\{\int_{z_1}^{z_2} f(\xi_k, \eta_l, z)dz+\rho\right\}(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

$$=\sum\sum\left\{\int_{z_1}^{z_2} f(\xi_k, \eta_l, z)dz\right\}(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

$$+\sum\sum \rho(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$$

故ニ極限ニ於テ三重積分

$$I=\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

ヲ得, 此ニ積分ハ V ノ總テノ部分ヲ含ムガ如ク取ルベキモノトス.

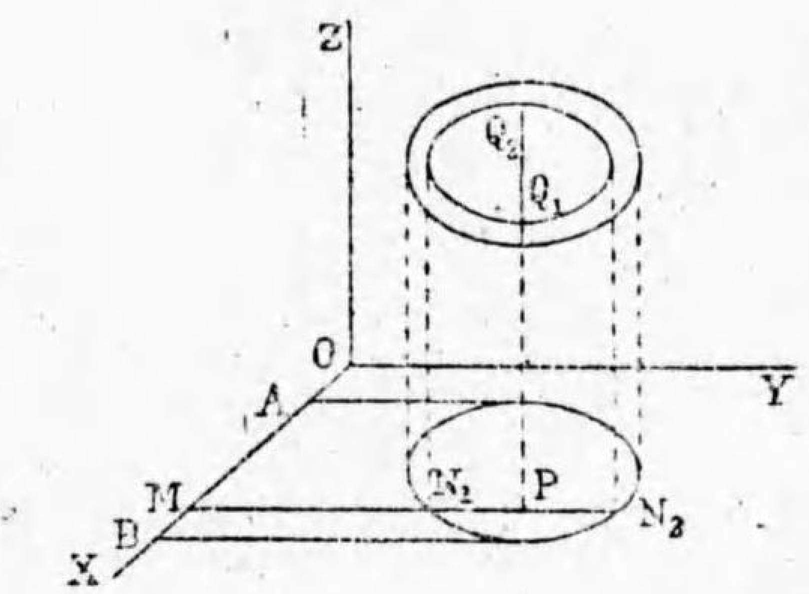
V ノ各面ガ座標面ニ平行ナル直六面體ナルトキハ

$$I=\int_a^b dx\int_c^e dy\int_g^h f(x, y, z)dz$$

此ノ場合ニハ積分ノ順序ヲ變更スルモ其ノ上限及ビ下限ハ之ヲ變更スルヲ要セズ, 一般ニハ

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz$$



此ニ $\qquad a=OA, \qquad b=OB$

$\qquad y_1=MN_1, \quad y_2=MN_2$

$\qquad z_1=PQ_1, \quad z_2=PQ_2$

積分ノ順序ハ問題ノ性質ニヨリ適宜之ヲ變更スルコトヲ得ベク, 其ノ場合ニハ V ヲ包圍スル曲面又ハ平面ノ方程式ニヨリ V ノ全部ヲ含ムガ如ク各上限及ビ下限ヲ定ムベキモノトス.

尙 $x=\phi_1(u, v, w)$, $y=\phi_2(u, v, w)$, $z=\phi_3(u, v, w)$ ニシテ u, v, w ノ一組ノ値ニ對應シテ x, y, z ノ一組ノ値ガ存在スルトキハ第53節ニ於ケルト同樣ニシテ

$$I=\iiint f(x, y, z)dxdydz$$

$$=\iiint f\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} J(u, v, w)dudvdw$$

此＝ $$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

特＝ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ トスレバ

$$I=\iiint f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)r\,drd\theta dz$$

又 $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$ トスレバ

$$J(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

$$I=\iiint f(r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$$

$f(x, y, z)=1$ トスレバ上ノ三式ヨリ

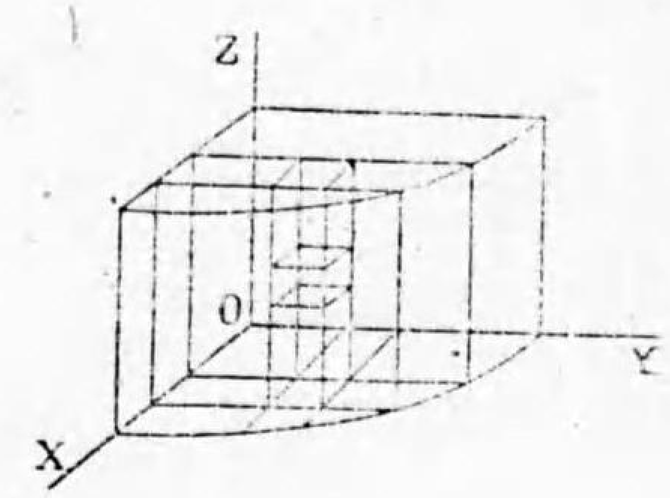
$$I=\iiint dxdydz \qquad (1)$$

$$I=\iiint r\,drd\theta dz \qquad (2)$$

$$I=\iiint r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ハ何レモ體積ヲ表ハスモノトス.

(1) ハ座標面＝平行ナル三ツノ平面ノ群＝ヨリテ全體積ヲ無數ノ小體積＝分割シテ其ノ和ヲ求ムルモノ＝シテ, 例ヘバ先ヅ $x=x_{k-1},\ x=x_k$ 及ビ $y=y_{l-1},\ y=y_l$ ノ間＝直六面體ヲ z 軸＝平行＝集メ, 次＝ $x=x_{k-1},\ x=x_k$ ノ間＝アル此等ノ小角壔ヲ y 軸＝平行＝集メ, 最後＝此等ノ薄キ角壔ヲ z 軸＝平行＝集メテ加フレバ極限＝於テ

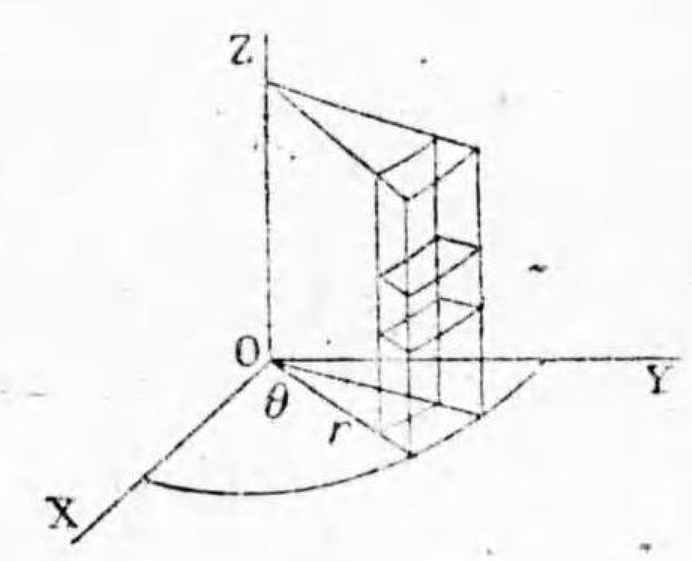


$$I=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_1}^{z_2} dz$$

(2) ハ z 軸ヲ軸トスル直圓壔ノ群, z 軸ヲ含ム平面ノ群, z 軸＝垂直ナル平面ノ群＝テ全體積ヲ分チ,

$$r\,d\theta,\quad dr,\quad dz$$

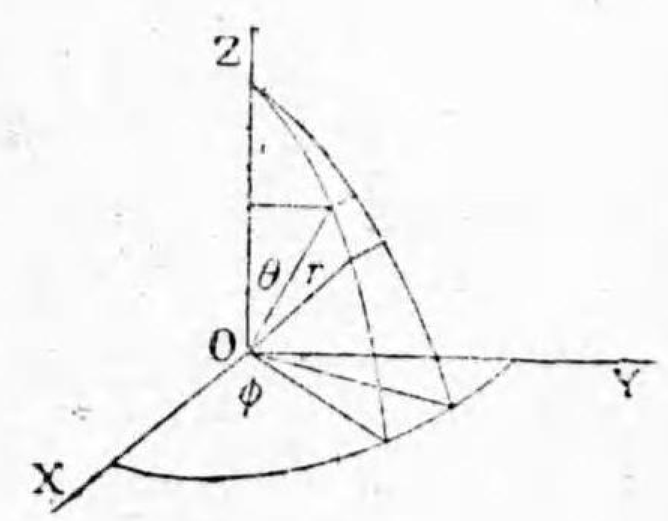
ヲ三稜トスル小角壔ノ和ノ極限トシテ之ヲ得ベシ.



(3) ハ原點ヲ中心トスル球ノ群, 原點ヲ頂點トシ z 軸ヲ軸トスル直圓錐ノ群, z 軸ヲ含ム平面ノ群＝テ全體積ヲ分チ

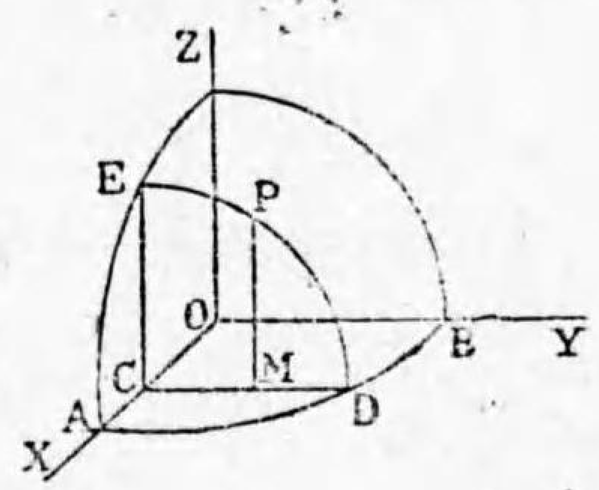
$$r\sin\theta\,d\phi,\ r\,d\theta,\ dr$$

ヲ三稜トスル小角壔ノ和ノ極限トシテ之ヲ得.



例 1.　$x^2+y^2+z^2\leqq 1$ ナル範圍ニ於ケル $\iiint x^2\,dxdydz$

此ノ積分ハ球 $x^2+y^2+z^2=1$ ノ上及ビ内部ニ於ケル總テノ點ヲ含ム，從テ $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ ナル部分ノ積分ノ値ヲ求メ之ヲ 8 倍スレバ宜シ。



依テ先ヅ yz 面ニ平行ナル平面 CDE ニテ之ヲ截リ，此ノ平面内ニテ z ハ M ヨリ P ニ至リ，次ニ y ハ C ヨリ D ニ至リ，x ハ O ヨリ A ニ至ルトスレバ

$$\mathrm{I}=8\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}x^2dz$$

$$=8\int_0^1 x^2dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$$

$$=8\int_0^1 x^2\left[\frac{y\sqrt{1-x^2-y^2}}{2}+\frac{1-x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=8\int_0^1\frac{\pi}{4}x^2(1-x^2)dx=2\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{4\pi}{15}$$

或ハ

$$\iiint x^2\,dxdydz=\iiint y^2\,dxdydz=\iiint z^2\,dxdydz$$

ナルガ故ニ

$$\mathrm{I}=\frac{1}{3}\iiint(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$x=\sin\theta\cos\phi,\ y=\sin\theta\sin\phi,\ z=\cos\theta$ ト置ケバ

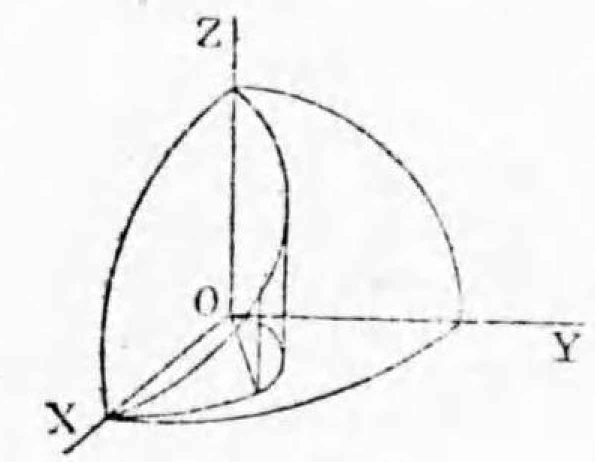
$$\mathrm{I}=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2r^2\sin\theta\,dr$$

$$=\frac{8}{3}\Big[\phi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{4\pi}{15}$$

例 2.　曲面　$x^2+y^2=ax$　ノ内側ニアリテ此ノ曲面，xy 面及ビ曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ ニテ包圍スル部分ニ於ケル $\iiint x\,dxdydz$

$$\mathrm{I}=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}xdz$$

$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$　ト置ケバ



曲面ノ方程式ハ $r=a\cos\theta$ 及ビ $r^2+z^2=a^2$ トナリ，從テ上ノ積分ハ次ノ形ヲ取ル.

$$\mathrm{I}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}r\cos\theta\,r\,dz$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$r=a\cos\phi$ ト置ケバ

$$\mathrm{I}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}a^4\cos^2\phi\sin^2\phi\,d\phi$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\phi}{2}\,d\phi$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\phi-\frac{\sin4\phi}{4}\right]_\theta^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left\{\frac{\pi}{2}-\theta+\frac{\sin4\theta}{4}\right\}d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)d\theta=\left[\sin\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin4\theta\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin5\theta+\sin3\theta}{2}d\theta=\frac{4}{15}$$

故ニ

$$\mathrm{I}=\frac{a^4}{2}\left(1+\frac{1}{15}\right)=\frac{8}{15}a^4$$

問　　題

1. 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ中心ヲ O, 頂點 A ヲ通過スル此ノ曲線上ノ任意ナル一點ヲ $M(x, y)$ トスルトキハ扇形 OAM ノ面積ハ $\frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$ ナルコトヲ示セ.

2. 楕圓 $y^2-2xy+2x^2=a^2$ ノ包圍スル面積ハ πa^2 ナルコトヲ示セ.

3. 拋物線 $y^2=2ax$ ト其ノ縮閉線 $27ay^2=8(x-a)^3$ トニテ包圍スル面積ハ $\frac{88}{15}\sqrt{2}a^2$ ナルコトヲ示セ.

4. 曲線 $y^m=kx^n$ ハ其ノ上ニ於ケル任意ナル一點ヨリ x 軸及ビ y 軸ニ下セル垂線ト兩軸トノ作ル矩形ノ面積ヲ m ト n トノ比ニ分ツコトヲ證明セヨ, 此ニ m 及ビ n ハ正ノ整數トス.

5. 曲線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ト x 軸, 及ビ y 軸ニ平行ナル二ツノ直線トニテ包圍スル面積ヲ S トシ, 之ニ對應スル曲線ノ弧ノ長サヲ s トスルトキハ $S=as$ ナルコトヲ證明セヨ.

6. 曲線 $x^3+y^3=3axy$ ニ於テ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ト置キテ變數ヲ x, y ヨリ r, θ ニ變更シ, 自閉線ノ包圍スル面積ハ $\frac{3a^2}{2}$ ナルコトヲ示セ.

7. 二ツノ曲面 $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ ニテ包圍スル部分ヲ yz 面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ截リ口ハ恒ニ正方形ニシテ一邊ノ長サハ $2\sqrt{a^2-x^2}$ ナルコトヲ證明シ, 從テ其ノ體積ハ $\frac{16}{3}a^3$ ナルコトヲ示セ.

8. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ガ x 軸及ビ y 軸ヲ軸トシテ一周スルコトニヨリテ生ズル體積ハ夫々 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 及ビ $\frac{4}{3}\pi a^2b$ ナルコトヲ示セ.

9. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 及ビ座標面ニテ包圍スル體積ハ $\frac{abc}{6}$ ナルコトヲ示セ, 此ニ $a>0$, $b>0$, $c>0$ トス.

10. 二ツノ曲面 $y^2+z^2=4a(x+a)$ 及ビ $x^2+y^2+z^2=c^2$, $0<a<c$ ニテ包圍スル體積ニシテ前ノ曲面ノ內側ニアル部分ハ $2\pi a\left(c^2-\frac{a^2}{3}\right)$ ナルコトヲ示シ, 且其ノ外側ニアル部分ノ體積ヲ索メヨ.

11. 二ツノ曲面 $x^2+y^2=ax$ 及ビ $x^2+y^2+z^2=a^2$ ニテ包圍スル體積ニシテ前ノ曲面ノ內側ニアル部分ハ $\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}\right)a^3$ ナルコトヲ示シ, 且其ノ外側ニアル部分ノ體積ヲ索メヨ.

12. $f(x, y)$ ガ $a\leqq x\leqq b$, $\alpha\leqq y\leqq\beta$ ニ於テ一價連續ニシテ $f(x, y)=\phi(x)F(y)$ ナルトキ

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dxdy=\left\{\int_a^b\phi(x)\,dx\right\}\left\{\int_\alpha^\beta F(y)\,dy\right\}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

13. 次ノ二重積分ニ於テ積分ノ順序ヲ變更セヨ.

$$\int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x,\ y)dy$$

14. $x=2u+v,\ \ y=u+2v$ ト置キテ積分變數ヲ $x,\ y$ ヨリ $u,\ v$ ニ變更スルコトニヨリテ

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,\ y)dy = 3\int_0^{\frac{1}{3}} dv \int_v^{\frac{1-v}{2}} f(2u+v,\ u+2v)du$$

$$+3\int_{-\frac{1}{3}}^0 dv \int_{-2v}^{\frac{1-v}{2}} f(2u+v,\ u+2v)du$$

ナルコトヲ示セ

15. 次ノ三重積分ノ値ヲ求メヨ.

1) $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_{\alpha x}^{\beta x} z\,dz$

2) $\displaystyle\int_0^{h} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} \frac{c-z}{\{r^2+(c-z)^2\}^{\frac{3}{2}}}\, r\,dr$

第10章　空間曲線及ビ曲面ニ關スル應用

56. 空間曲線ノ長サ

方程式 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ ヲ滿足スル點 $(x,\ y,\ z)$ ハ t ノ變動スルニ從ヒ一ツノ曲線ヲ畫ク, 此ノ場合ニ $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ ヲ此ノ曲線ノ方程式トイフ.

特ニ $x,\ y,\ z$ ガ一定ノ方程式 $Ax+By+Cz+D=0$ ヲ滿足スルトキハ此ノ曲線ヲ**平面曲線**トイヒ, 然ラザルトキハ之ヲ**空間曲線**トイフ.

$x=f_1(t)$ ヨリ $t=\psi(x)$ ヲ得, 之ヲ他ノ二式ニ代入シテ $y=\phi_1(x),\ z=\phi_2(x)$ ヲ得タリトスレバ空間曲線ハ此ノ二ツノ方程式ガ表ハス二ツノ壔面ノ交線ナリト考フルコトヲ得.

更ニ一般ニ $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ ヨリ t ヲ消去シテ $F_1(x,\ y,\ z)=0,\ F_2(x,\ y,\ z)=0$ ヲ得レバ空間曲線ハ此ノ二ツノ方程式ガ表ハス二ツノ曲面ノ交線ナリト考フルコトヲ得.

以下空間曲線ハ

$$x=f_1(t),\qquad y=f_2(t),\qquad z=f_3(t) \tag{1}$$

$$y=\phi_1(x),\qquad z=\phi_2(x) \tag{2}$$

$$F_1(x,\ y,\ z)=0,\qquad F_2(x,\ y,\ z)=0 \tag{3}$$

ノ何レカ一ツニテ表ハスコトトシ, 研究ニ必要ナル函數及ビ其ノ導來函數ハ何レモ一價連續ナリト假定ス.

空間曲線 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ 上ニ於テ $t=a,\ t=b$ ニ對應スル二點 A, B ノ間ニ順次ニ $n-1$ 個ノ點 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ ……, $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ ヲ取リ線分 $AP_1,\ P_1P_2,\ \ldots\ldots\ P_{n-1}B$ ヲ作ルトキハ

$$\overline{P_{i-1}P_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2},\quad i=1, 2, \ldots\ldots, n$$

平均値ノ定理ニヨリ

$$x_i-x_{i-1}=f_1'(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\quad y_i-y_{i-1}=f_2'(\eta_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$z_i-z_{i-1}=f_3'(\zeta_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$t_{i-1}<\xi_i<t_i,\qquad t_{i-1}<\eta_i<t_i,\qquad t_{i-1}<\zeta_i<t_i$$

之ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$\overline{P_{i-1}P_i}=\sqrt{\{f_1'(\xi_i)\}^2+\{f_2'(\eta_i)\}^2+\{f_3'(\zeta_i)\}^2}\,(t_i-t_{i-1})$$

依テ第 44 節ニ於ケルト全ク同様ニシテ次ノ式ヲ得.

$$\sum_{i=1}^{n-1}\overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\{f_1'(t_{i-1})\}^2+\{f_2'(t_{i-1})\}^2+\{f_3'(t_{i-1})\}^2}\,(t_i-t_{i-1})$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(t_i-t_{i-1}),\qquad t_0=a,\ t_n=b$$

t_i-t_{i-1} ガ 0 ニ收斂スル極限ニ於テ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(t_i-t_{i-1})=0$$

故ニ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$ ヲ s ニテ表ハストキハ

$$s=\int_a^b\sqrt{\{f_1'(t)\}^2+\{j_2'(t)\}^2+\{f_3'(t)\}^2}\,dt$$

即チ

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{1}$$

s ヲ空間曲線 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ ノ弧 AB ノ**長サ**トス.

尙 $y=\phi_1(x),\ z=\phi_2(x)$ ガ空間曲線ノ方程式ナルトキハ

$$s=\int_{a_1}^{b_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \tag{2}$$

此ニ $\dfrac{dy}{dx}=\phi_1'(x),\ \dfrac{dz}{dx}=\phi_2'(x)$

(1) ニ於テ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ト置クトキハ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

故ニ

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

或ハ

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \tag{3}$$

更ニ (1) ニ於テ $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$ ト置クトキハ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

故ニ

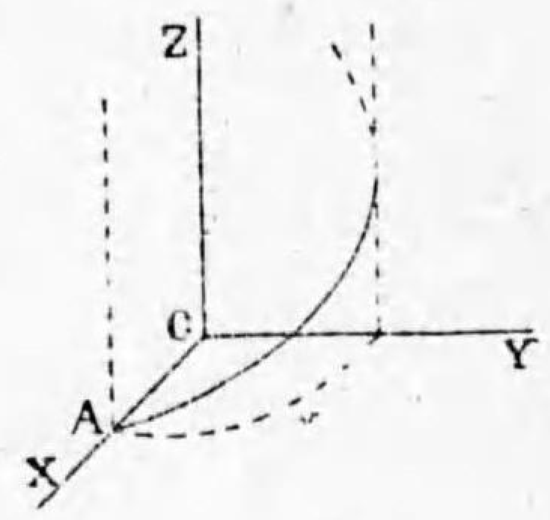
$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\,dt$$

或ハ

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \tag{4}$$

例 1.　空間曲線 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ct$ ニ於テ $t=0$ ヨリ測リタル弧ノ長サ

$x=a\cos t,\ y=a\sin t$ ヨリ $x^2+y^2=a^2$ ヲ得, $t=0$ ナルトキ $z=0$ ニシテ z ノ値ハ t ニ正比例シテ増大ス, 故ニ此ノ曲線ハ圓壔 $x^2+y^2=a^2$ ノ上ニアリテ x 軸ト圓壔トノ交點 A ヨリ發シテ順次上昇スル螺線ナリ.



$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ct$$

依テ
$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=c$$

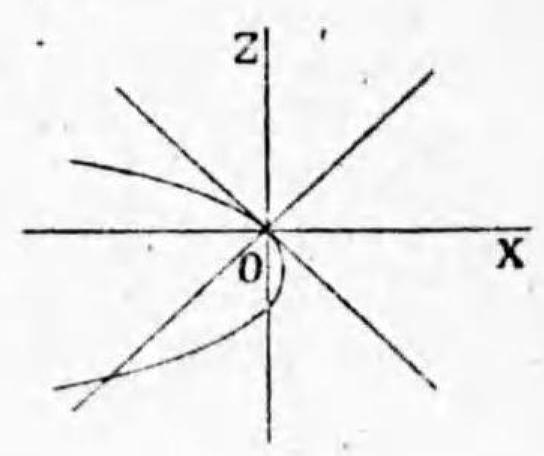
故ニ
$$s=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{a^2+c^2}\,dt=\sqrt{a^2+c^2}\,t$$

例 2.　空間曲線 $a^2(x^2+y^2)=b^2z^2,\ ax=z(b+z)$ ノ全長

$y=0$ ト置クトキハ $ax=\pm bz$.

$ax=z(b+z),\ ax=bz$ ヨリ $z=0$

$ax=z(b+z),\ ax=-bz$ ヨリ $z=-2b$



曲線ノ方程式ニ於テ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ト置クトキハ

$$r=\frac{b^2}{a}(1+\cos\theta),\quad z=-b(1+\cos\theta),\quad \frac{dr}{d\theta}=-\frac{b^2}{a}\sin\theta,\quad \frac{dz}{d\theta}=b\sin\theta$$

$$s=2\int_0^\pi\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=4\frac{b}{a}\int_0^\pi\sqrt{b^2+a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=8b\int_0^1\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+u^2}\,du=4\frac{b}{a}\left\{\sqrt{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a}\log\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$$

57. 空間曲線ノ切線, 法平面, 及ビ切觸平面

空間曲線 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ 上ニ於ケル二點 (x,y,z), $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ ヲ通過スル直線ノ方程式次ノ如シ.

$$\frac{X-x}{(x+\Delta x)-x}=\frac{Y-y}{(y+\Delta y)-y}=\frac{Z-z}{(z+\Delta z)-z}$$

即チ
$$\frac{X-x}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}$$

Δt ガ 0 ニ收斂スル極限ニ於テ

$$\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}\qquad(1)$$

ヲ得, 之ヲ空間曲線 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ 上ノ點 (x,y,z) ニ於ケル**切線**ノ方程式トス.

此ノ切線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ

$$\frac{l}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{m}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{n}{\dfrac{dz}{dt}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}$$

故ニ
$$l=\frac{dx}{ds},\quad m=\frac{dy}{ds},\quad n=\frac{dz}{ds}$$

又 (1) ヨリ

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dx}}\qquad(2)$$

依テ曲線ノ方程式ガ $y=\phi_1(x),\ z=\phi_2(x)$ ナルトキハ

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{\phi_1'(x)}=\frac{Z-z}{\phi_2'(x)}\qquad(2)_1$$

又曲線ノ方程式ガ $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$ ナルトキハ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

此ノ式ト (2) トヨリ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F_1}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(Z-z)=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(Z-z)=0$$

従テ $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$ 上ノ點 (x, y, z) ニ於ケル切線ノ方程式次ノ如シ.

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{vmatrix}}\tag{3}$$

次ニ空間曲線上ノ一點ニ於テ切線ニ垂直ナル平面ヲ其ノ點ニ於ケル**法平面**トイフ, 曲線ノ方程式ガ $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, 又ハ $y=\phi_1(x)$, $z=\phi_2(x)$, 又ハ $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$ ナルニ従テ法平面ノ方程式次ノ如シ.

$$\left.\begin{array}{l}(X-x)f_1'(t)+(Y-y)f_2'(t)+(Z-z)f_3'(t)=0\\[4pt] X-x+(Y-y)\phi_1'(x)+(Z-z)\phi_2'(x)=0\\[4pt] \begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}=0\end{array}\right\}\tag{4}$$

次ニ空間曲線 $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ 上ノ一點 (x, y, z) ヲ通過スル平面

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

ガ其ノ點ニ於ケル切線

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}$$

ヲ含ムトキハ

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0$$

此ノ平面ガ更ニ曲線上ノ他ノ一點 (x_1, y_1, z_1) ヲ含ムトシ

$$x_1=f_1(t+h),\quad y_1=f_2(t+h),\quad z_1=f_3(t+h)$$

トスレバ

$$x_1=f_1(t)+f_1'(t)h+f_1''(t)\frac{h^2}{1\cdot 2}+\sigma_1$$

即チ
$$x_1-x=\frac{dx}{dt}h+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{h^2}{2}+\sigma_1$$

同様ニ
$$y_1-y=\frac{dy}{dt}h+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{h^2}{2}+\sigma_2$$

$$z_1-z=\frac{dz}{dt}h+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{h^2}{2}+\sigma_3$$

此ノ三式ニ夫々 A, B, C ヲ乘ジテ加フレバ

$$\left(A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}\right)h+\left(A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{h^2}{2}+\sigma=0$$

$h\to 0$ ナル極限ニ於テ

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

依テ
$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$
$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0$$
$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

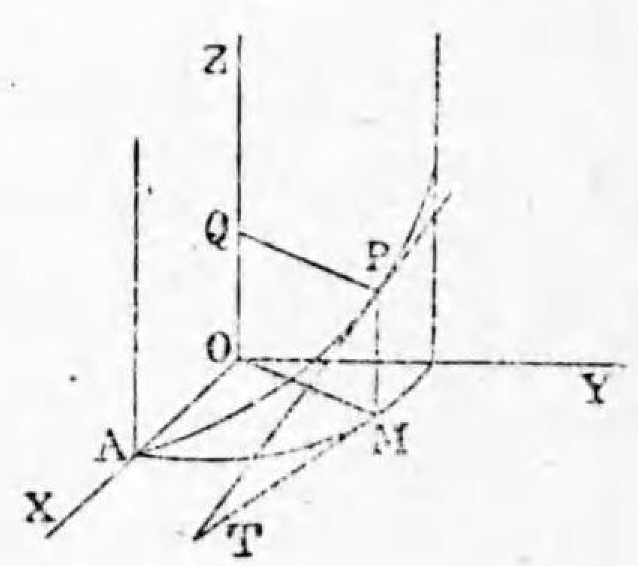
此ノ三式ヨリ A, B, C ヲ消去シテ
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix}=0$$

ヲ得, 之ヲ空間曲線 $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ 上ノ點 (x,y,z) ニ於ケル**切觸平面**トイフ.

例 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ct$ ノ切線, 法平面, 切觸平面
$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=c$$

(1) ニヨリ此ノ曲線上ノ點 P(x, y, z) ニ於ケル切線ノ方程式ハ
$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}$$
即チ
$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z-z}{c} \qquad (a)$$

(a) ニ於テ $Z=0$ ト置ケバ
$$X-x=\frac{yz}{c},\quad Y-y=-\frac{xz}{c}$$
依テ
$$(X-x)^2+(Y-y)^2=\frac{(x^2+y^2)z^2}{c^2}=a^2t^2$$



P ヨリ xy 面ニ至ル垂線ノ足ヲ M トスレバ
$$\overline{TM}=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}=at$$
然ルニ
$$\widehat{AM}=\int_0^t a\,dt=at$$
故ニ
$$\overline{TM}=\widehat{AM}$$

(4) ニヨリ點 P(x, y, z) ニ於ケル法平面ノ方程式ハ
$$(X-x)(-a\sin t)+(Y-y)a\cos t+(Z-z)c=0$$
即チ
$$-y(X-x)+x(Y-y)+c(Z-z)=0$$
或ハ
$$-yX+xY+c(Z-z)=0 \qquad (b)$$

(b) ニ於テ $X=0$, $Y=0$ ト置ケバ $Z=z$ ヲ得.

故ニ P ニ於ケル法平面ガ z 軸ニ交ハル點ヲ Q トスレバ
$$OQ=MP$$

(5) ニヨリ點 P(x, y, z) ニ於ケル切觸平面ノ方程式ハ
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ -a\sin t & a\cos t & c \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=0$$
即チ
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ -y & x & c \\ -x & -y & 0 \end{vmatrix}=0$$
或ハ
$$cyX-cxY+a^2(Z-z)=0 \qquad (c)$$

(c) ニ於テ $Z=0$ ト置ケバ $yX-xY=\frac{a^2}{c}z$ ヲ得.

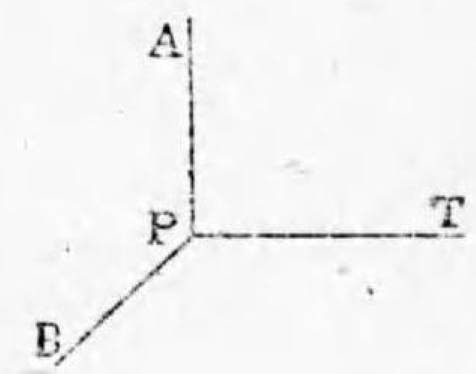
故ニ P ニ於ケル切觸平面ト xy 面トノ交線ハ OM 即チ $yX-xY=0$ ニ平行ナリ.

58. 空間曲線ノ主法線及ビ重法線

空間曲線上ノ一點ヲ通過シ其ノ點ニ於ケル切線ニ垂直ナル直線卽チ法線ノ數ハ無限ニシテ何レモ其ノ點ニ於ケル法平面ノ上ニアリ.

空間曲線上ノ一點ニ於ケル法線中ニテ，其ノ點ニ於ケル切觸平面上ニアルモノヲ主法線トイヒ，切觸平面ニ垂直ナルモノヲ重法線トイフ.

PT, PA, PB ハ互ニ垂直ナル直線ニシテ，PT ヲ P ニ於ケル切線トシ，APT ヲ切觸平面トスレバ APB ハ法平面ニシテ，PA ハ主法線，又 PB ハ重法線ナリ.



切線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トシ，主法線ノ方向餘弦ヲ l_1, m_1, n_1, 又重法線ノ方向餘弦ヲ l_2, m_2, n_2 トスレバ第 56 節ニヨリ切線及ビ法平面ノ方程式夫々次ノ如シ.

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}.$$

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0.$$

此ニ
$$l=\frac{dx}{ds},\quad m=\frac{dy}{ds},\quad n=\frac{dz}{ds}$$

又第 57 節ニヨリ切觸平面ノ方程式ハ次ノ如ク書クコトヲ得.

$$\begin{vmatrix}\dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds}\\ \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\dfrac{dz}{ds} & \dfrac{dx}{ds}\\ \dfrac{d^2z}{ds^2} & \dfrac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix}\dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds}\\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}(Z-z)=0$$

重法線ハ切觸平面ニ垂直ナルガ故ニ

$$\frac{l_2}{\begin{vmatrix}\dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds}\\ \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}}=\frac{m_2}{\begin{vmatrix}\dfrac{dz}{ds} & \dfrac{dx}{ds}\\ \dfrac{d^2z}{ds^2} & \dfrac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix}}=\frac{n_2}{\begin{vmatrix}\dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds}\\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}}.$$

從テ重法線ノ方程式次ノ如シ.

$$\frac{X-x}{\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}-\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}-\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}}$$

主法線ハ切線ニ垂直ニシテ且切觸平面上ニアルガ故ニ

$$l_1\frac{dx}{ds}+m_1\frac{dy}{ds}+n_1\frac{dz}{ds}=0$$

$$l_1\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)+m_1\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)+n_1\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)$$
$$=0$$

依テ

$$\frac{l_1}{\dfrac{dy}{ds}\left(\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}-\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)-\dfrac{dz}{ds}\left(\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)}$$

$$=\frac{m_1}{\dfrac{dz}{ds}\left(\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}-\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)-\dfrac{dx}{ds}\left(\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}-\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)}$$

$$=\frac{n_1}{\dfrac{dx}{ds}\left(\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)-\dfrac{dy}{ds}\left(\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}-\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)}$$

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)-\frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

$$=\frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)-\frac{d^2x}{ds^2}\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}$$

然ルニ

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,\quad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0$$

依テ
$$\frac{l_1}{\dfrac{d^2x}{ds^2}}=\frac{m_1}{\dfrac{d^2y}{ds^2}}=\frac{n_1}{\dfrac{d^2z}{ds^2}}$$

故ニ主法線ノ方程式次ノ如シ

$$\frac{X-x}{\dfrac{d^2x}{ds^2}}=\frac{Y-y}{\dfrac{d^2y}{ds^2}}=\frac{Z-z}{\dfrac{d^2z}{ds^2}}$$

例 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ct$ ノ主法線

$$\frac{dx}{ds}=-a\sin t\frac{dt}{ds},\quad \frac{dy}{ds}=a\cos t\frac{dt}{ds},\quad \frac{dz}{ds}=c\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{a\cos t}{a^2+c^2},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{a\sin t}{a^2+c^2},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0$$

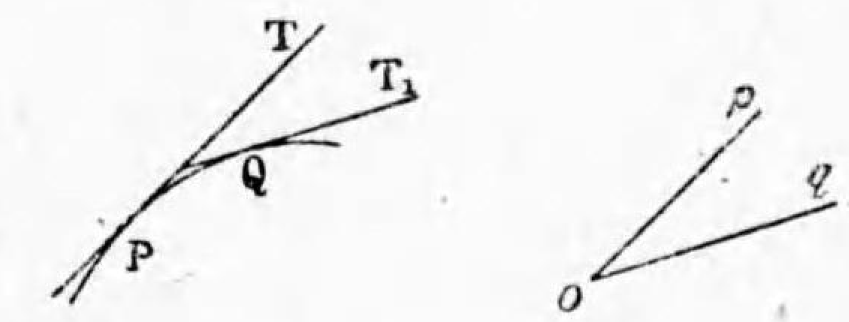
依テ主法線ノ方程式次ノ如シ.

$$\frac{X-x}{x}=\frac{Y-y}{y},\qquad Z-z=0$$

故ニ點 (x, y, z) ニ於テ主法線ハ直線 $yX=xY$ ニ平行ニシテ z 軸ニ垂直ニ交ハル.

59. 空間曲線ノ曲率

空間曲線 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ 上ノ二點 $P(x, y, z)$ 及ビ $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ニ於ケル切線 PT 及ビ QT_1 ニ平行ニ一定ノ點 o ヨリ直線 op, oq ヲ引クトキハ極限ニ於テ平面 poq ハ P ニ於ケル切觸平面ニ平行トナル.



弧 PQ ノ長サヲ Δs トシ, $\angle poq$ ヲ $\Delta\tau$ トスルトキハ

$$\lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds}$$

ヲ空間曲線 $x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$ 上ノ點 $P(x, y, z)$ ニ於ケル**曲率**トイフ, 又 P ニ於ケル曲線ト相等シキ曲率ヲ有スル圓ノ半徑ヲ此ノ點ニ於ケル**曲率半徑**トイヒ, 之ヲ ρ ニテ表ハス

PT 及ビ QT_1 ノ方向餘弦ヲ夫々 l, m, n 及ビ $l+\Delta l, m+\Delta m, n+\Delta n$ トスレバ

$$\cos\Delta\tau=l(l+\Delta l)+m(m+\Delta m)+n(n+\Delta n)$$

$$l^2+m^2+n^2=1,\quad (l+\Delta l)^2+(m+\Delta m)^2+(n+\Delta n)^2=1$$

從テ
$$2l\Delta l+2m\Delta m+2n\Delta n+\overline{\Delta l}^2+\overline{\Delta m}^2+\overline{\Delta n}^2=0$$

依テ
$$2\cos\Delta\tau=2+2(l\Delta l+m\Delta m+n\Delta n)$$
$$=2-(\overline{\Delta l}^2+\overline{\Delta m}^2+\overline{\Delta n}^2)$$

依テ
$$2(1-\cos\Delta\tau)=\overline{\Delta l}^2+\overline{\Delta m}^2+\overline{\Delta n}^2$$

即チ
$$2\sin\frac{\Delta\tau}{2}=\sqrt{\overline{\Delta l}^2+\overline{\Delta m}^2+\overline{\Delta n}^2}$$

$$\frac{d\tau}{ds}=\lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\lim\left\{\frac{\frac{\Delta\tau}{2}}{\sin\frac{\Delta\tau}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\Delta\tau}{2}}{\Delta s}\right\}$$

$$=\lim\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta m}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta n}{\Delta s}\right)^2}$$

故ニ

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{dl}{ds}\right)^2+\left(\frac{dm}{ds}\right)^2+\left(\frac{dn}{ds}\right)^2}$$

即チ

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\qquad\text{(I)}$$

以上得タル曲率ハ空間曲線上ノ點 $P(x, y, z)$ ニ於ケル切線ト其ノ點ヲ通過シ且之ニ隣接セル點ニ於ケル切線トニテ決定スル平面卽チ切觸平面上ニ於ケル曲率ヲ表ハス，然ルニ此ノ平面ハ又順次其ノ方向ヲ變ズルヲ以テ空間曲線ノ曲リ方ヲ考フルニ當リ上記ノ曲率ノ外ニ切觸平面ノ變リ方ヲ研究スル必要アリ.

重法線ハ切觸平面ニ垂直ナルガ故ニ $P(x, y, z)$, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ニ於ケル重法線ニ平行ニ定點 o_1 ヲ通過シテ直線 o_1p_1, o_1q_1 ヲ引キ其ノナス角ヲ $\Delta\sigma$ トスレバ

$$\lim\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\frac{d\sigma}{ds}$$

ヲ $P(x, y, z)$ ニ於ケル**第二曲率**トイヒ，又 P ニ於ケル第二曲率ト相等シキ曲率ヲ有スル圓ノ半徑ヲ R ニテ表ハス.

此ノ第二曲率ニ對シテ前ニ得タル曲率ヲ**第一曲率**トイフ.

重法線ノ方向餘弦ヲ l_2, m_2, n_2 トスレバ前同樣ニシテ

$$\frac{1}{R}=\frac{d\sigma}{ds}=\sqrt{\left(\frac{dl_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{dm_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{dn_2}{ds}\right)^2}$$

然ルニ第58節ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{l_2}{A}=\frac{m_2}{B}=\frac{n_2}{C}\\ &A=\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2},\quad B=\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\\ &C=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$l_2\frac{dx}{ds}+m_2\frac{dy}{ds}+n_2\frac{dz}{ds}=0\qquad(2)$$

$$l_2\frac{d^2x}{ds^2}+m_2\frac{d^2y}{ds^2}+n_2\frac{d^2z}{ds^2}=0\qquad(3)$$

(2) 及ビ (3) ヨリ

$$\frac{dl_2}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{dm_2}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{dn_2}{ds}\frac{dz}{ds}=0\qquad(4)$$

又 $l_2^2+m_2^2+n_2^2=1$ ヨリ

$$\frac{dl_2}{ds}l_2+\frac{dm_2}{ds}m_2+\frac{dn_2}{ds}n_2=0\qquad(5)$$

(4) 及ビ (5) ヨリ

$$\frac{\frac{dl_2}{ds}}{n_2\frac{dy}{ds}-m_2\frac{dz}{ds}}=\frac{\frac{dm_2}{ds}}{l_2\frac{dz}{ds}-n_2\frac{dx}{ds}}=\frac{\frac{dn_2}{ds}}{m_2\frac{dx}{ds}-l_2\frac{dy}{ds}}$$

$$=-\frac{\frac{dl_2}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dm_2}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dn_2}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}}{l_2A+m_2B+n_2C}=\frac{l_2\frac{d^3x}{ds^3}+m_2\frac{d^3y}{ds^3}+n_2\frac{d^3z}{ds^3}}{l_2A+m_2B+n_2C}$$

$$=\frac{A\frac{d^3x}{ds^3}+B\frac{d^3y}{ds^3}+C\frac{d^3z}{ds^3}}{A^2+B^2+C^2}\qquad(6)$$

$$\left(n_2\frac{dy}{ds}-m_2\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(l_2\frac{dz}{ds}-n_2\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(m_2\frac{dx}{ds}-l_2\frac{dy}{ds}\right)^2$$

$$=(l_2^2+m_2^2+n_2^2)\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}-\left(l_2\frac{dx}{ds}+m_2\frac{dy}{ds}+n_2\frac{dz}{ds}\right)^2$$

$$=1 \qquad (7)$$

(6) 及ビ (7) ヨリ

$$\sqrt{\left(\frac{dl_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{dm_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{dn_2}{ds}\right)^2}=\frac{\mathrm{A}\frac{d^3x}{ds^3}+\mathrm{B}\frac{d^3y}{ds^3}+\mathrm{C}\frac{d^3z}{ds^3}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}$$

故ニ
$$\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{A}\frac{d^3x}{ds^3}+\mathrm{B}\frac{d^3y}{ds^3}+\mathrm{C}\frac{d^3z}{ds^3}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2} \qquad (\mathrm{II})$$

此ニ

$$\mathrm{A}=\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}$$

例　$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ct$ ノ曲率半徑

第 58 節例ニヨリ

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{a\cos t}{a^2+c^2},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{a\sin t}{a^2+c^2},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0$$

$$\frac{d^3x}{ds^3}=\frac{a\sin t}{(a^2+c^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d^3y}{ds^3}=-\frac{a\cos t}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d^3z}{ds^3}=0$$

此等ノ値ヲ本節 (I) 及ビ (II) ニ代入シテ

$$\rho=\frac{a^2+c^2}{a},\qquad \mathrm{R}=\frac{a^2+c^2}{c}$$

60. 曲面ノ切平面及ビ法線

曲面 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 上ニアル一ツノ空間曲線ノ方程式ヲ

$$x=f_1(t),\qquad y=f_2(t),\qquad z=f_3(t)$$

トスレバ，此ノ曲線上ノ一點 (x, y, z) ニ於ケル切線ノ方程式ハ第 57 節ニヨリ

$$\frac{\mathrm{X}-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\mathrm{Z}-z}{\frac{dz}{dt}} \qquad (1)$$

ニシテ此ノ曲線ハ $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ ノ上ニアルガ故ニ

$$\mathrm{F}(x, y, z)=0,\quad x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)$$

從テ

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0 \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(\mathrm{X}-x)+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(\mathrm{Y}-y)+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(\mathrm{Z}-z)=0 \qquad (3)$$

故ニ曲面上ニ於ケル一點 (x, y, z) ヲ通過シテ其ノ曲面上ニアル總テノ曲線ノ此ノ點ニ於ケル切線ハ一ツノ平面 (3) ノ上ニアリ，此ノ平面ヲ曲面 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 上ノ點 (x, y, z) ニ於ケル**切平面**トイフ.

點 (x, y, z) ニ於テ切平面 (3) ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$\frac{\mathrm{X}-x}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}=\frac{\mathrm{Z}-z}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}} \qquad (4)$$

ニシテ，之ヲ曲面 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 上ノ點 (x, y, z) ニ於ケル**法線**トイフ.

曲面ノ方程式ガ $z=f(x,\ y)$ ナルトキ，$F(x,\ y,\ z)=f(x,\ y)-z$ ト置ケバ

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1$$

故ニ曲面 $z=f(x,\ y)$ 上ノ點 $(x,\ y,\ z)$ ニ於ケル切平面及ビ法線ノ方程式夫々次ノ如シ．

$$\left.\begin{aligned} Z-z &= \frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) \\ \frac{Z-z}{-1} &= \frac{X-x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

曲面 $z=f(x,\ y)$ 上ノ一點 $P(x,\ y,\ z)$ ヲ通過スル任意ノ平面ヲ

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

トシ，曲面上ニ他ノ一點 $Q(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ヲ取リ，$x_1=x+h,\ y_1=y+k,\ z_1=f(x_1,\ y_1)$ トスレバ

$$\begin{aligned} z_1=f(x_1,\ y_1) &= f(x+h,\ y+k) \\ &= f(x,\ y)+\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)+R \end{aligned}$$

Q ヨリ此ノ平面ニ下セル垂線ノ長サヲ δ トシ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=t$$

ト置ケバ

$$\delta=\frac{Ah+Bk+C\{ph+qk+\frac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)+\sigma\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{(A+Cp)h+(B+Cq)k+\frac{1}{2}C(rh^2+2shk+tk^2)+\sigma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$h,\ k$ ヲ第一位ノ無限小トシテ δ ハ第一位ノ無限小ナリ，然ルニ $A+Cp=0,\ B+Cq=0$ ナルトキハ

$$\frac{A}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{B}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{C}{-1}$$

ニシテ此ノ平面ハ切平面トナル，此ノ場合ニハ δ ハ第二位ノ無限小トナリ

$$\delta=\frac{rh^2+2shk+tk^2}{2\sqrt{1+p^2+q^2}}+\varepsilon=\frac{(rh+sk)^2+(rt-s^2)k^2}{2r\sqrt{1+p^2+q^2}}+\varepsilon$$

依テ $rt-s^2\geqq 0$ ナルトキハ δ ハ $h,\ k$ ノ値如何ニ係ハラズ恒ニ一定ノ符號ヲ有シ，$rt-s^2<0$ ナルトキハ $h,\ k$ ノ値ニヨリ或ハ正トナリ或ハ負トナル．

故ニ $rt-s^2\geqq 0$ ナルトキハ點 $(x,\ y,\ z)$ ノ近傍ニ於テ曲面ハ恒ニ切平面ノ一方ニアリ，$rt-s^2<0$ ナルトキハ其ノ一部分ハ一方ニアリ，他ノ部分ハ他方ニアリ．

例 $2z=\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{b},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{b}$$

故ニ點 $(x,\ y,\ z)$ ニ於ケル切平面ノ方程式ハ本節 (5) ニヨリ

$$\begin{aligned} Z-z &= \frac{x}{a}(X-x)+\frac{y}{b}(Y-y) \\ &= \frac{x}{a}X+\frac{y}{b}Y-\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b} \end{aligned}$$

即チ
$$Z+z=\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}$$

又法線ノ方程式ハ

$$\frac{Z-z}{-1}=\frac{X-x}{\frac{x}{a}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b}}$$

即チ $$a\left(1-\frac{X}{x}\right)=b\left(1-\frac{Y}{y}\right)=Z-z$$

曲面上ノ點 $(x,\ y,\ z)$ ニ於ケル切平面ヲ

$$Z+z=\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}$$

トシ，其ノ近傍ノ一點ヨリ之ニ下セル垂線ノ長サヲ δ トスレバ

$$\delta=\frac{rh^2+2shk+tk^2}{2\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{\frac{h^2}{a}+\frac{k^2}{b}}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$$

$a>0,\ b>0$ ナルトキハ $\delta>0$，又 $a<0,\ b<0$ ナルトキハ $\delta<0$

即チ楕圓拋物面ニ於テハ曲面ハ恒ニ切平面ノ一方ニアリ．

$a>0,\ b<0$ 又ハ $a<0,\ b>0$ ナルトキハ $h,\ k$ ノ値ニヨリ $\delta>0$ 又ハ $\delta<0$，即チ雙曲拋物面ニ於テハ曲面ノ一部分ハ切平面ノ一方ニアリ，他ノ部分ハ他方ニアリ．

尙 $2Z=\frac{X^2}{a}+\frac{Y^2}{b}$，$Z+z=\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}$，$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$ ヨリ

$$\frac{(X-x)^2}{a}+\frac{(Y-y)^2}{b}=0$$

ヲ得，依テ $a>0,\ b<0$ ナルトキハ

$$\left(\frac{X-x}{\sqrt{a}}-\frac{Y-y}{\sqrt{-b}}\right)\left(\frac{X-x}{\sqrt{a}}+\frac{Y-y}{\sqrt{-b}}\right)=0$$

故ニ切平面ハ二ツノ直線ニ於テ曲面ニ交ハル．

$a<0,\ b>0$ ナルトキモ同樣ナリ．

61. 曲面ノ截面ノ曲率

曲面上ノ定點 O ヲ座標ノ原點トシ，O ニ於ケル切平面ヲ xy 面又，法線ヲ z 軸トスレバ曲面ノ方程式ハ次ノ形ヲ取ル．

$$z=z_0+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 y+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 x^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_0 xy+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right\}+R$$

然ルニ $z_0=0,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0=0,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0=0$ ナルヲ以テ

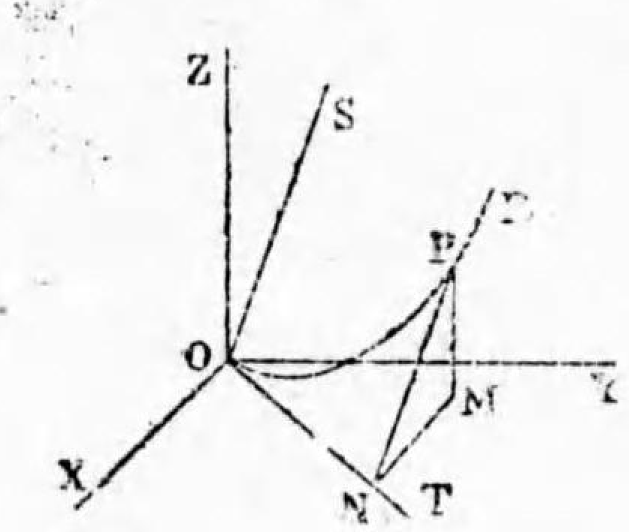
$$2z=rx^2+2sxy+ty^2+R$$

此ニ $r=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0,\ s=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_0,\ t=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0$

z 軸ト θ ナル角ヲナス平面ト曲面，zx 面，及ビ xy 面トノ交線ヲ夫々 OR, OS, OT トシ，OR ノ上ニ一點 P ヲ取リ P ヨリ xy 面ニ至ル垂線ヲ PM，M ヨリ OT ニ至ル垂線ヲ MN トスレバ

$$\overline{ON}^2=\overline{OM}^2-\overline{MN}^2=x^2+y^2-(z\tan\theta)^2$$

$$PN=z\sec\theta$$



依テ O ニ於ケル曲率半徑ヲ ρ トスレバ第 45 節ヨリ

$$\rho=\lim\frac{\overline{ON}^2}{2PN}$$

故ニ $$\rho=\lim\frac{x^2+y^2}{rx^2+2sxy+ty^2}\cos\theta$$

又 OT ヲ含ム法截面即チ OZ, OT ヲ含ム截面ノ曲率半徑ヲ ρ_0 トスレバ

$$\rho_0=\lim\frac{x^2+y^2}{rx^2+2sxy+ty^2}$$

依テ $$\rho=\rho_0\cos\theta$$